ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 90 Automatyka z.4 1963

STEFAN PAMPUCH

Katedra Teorii Regulacji

PRZEGLĄD PODSTAWOWYCH POJĘĆ Z TEORII AUTOMATÓW SKOŃCZONYCH

Streszczenie: W pracy podano przegląd podstawowych pojęć z teorii automatów skończonych i teorii sieci logicznych.

1. Wstęp

Rozwój prac teoretycznych związanych z problemem przetwarzania informacji doprowadził do stworzenia ogólnej teorii automatów skończonych, która obejmuje zarówno dziedzinę maszyn cyfrowych, układów logicznych, jak i opis zachowania się sieci neuronów żywego organizmu [3].

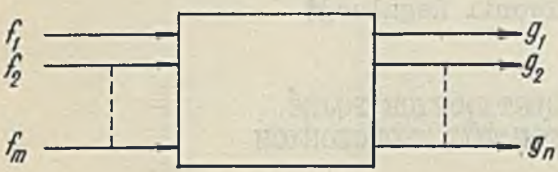
Podstawowe pojęcia tej teorii "automat skończony" obejmuje klasę układów dynamicznych, dla określenie działania których ważne są tylko dyskretne momenty czasu i których liczba stanów wewnętrznych (objętość pamięci wewnętrznej) jest skończona.

W niniejszej notatce chciałbym przedstawić szereg wstępnych pojęć i zagadnień z dziedziny automatów skończonych, które były dyskutowane w Katedrze Teorii Regulacji, w oparciu o literaturę zamieszczoną na końcu notatki.

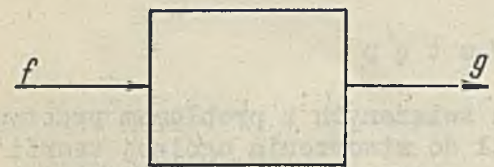
Należy zaznaczyć, że o ile teoria automatów skończonych jako całość jest dziedziną matematyczną, to pewna klasa automatów skończonych, zwanych "sieciami logicznymi" stanowi dziedzinę techniczną. Dlatego też często teorię sieci logicznych traktuje się jako samodzielną dyscyplinę naukową. Podane wstępne pojęcia automatów skończonych zostały w związku z tym oparte o prace [1, 2, 5] traktujące automaty skończone jako sieci logiczne, które stanowią pewien układ matematyczny opisujący w sposób adekwatny organizację i pracę realnego fizycznego urządzenia.

2. Podstawowe pojęcia

W przypadku ogólnym automat skończony można rozpatrywać jako matematyczny model układu przetwarzania dyskretnej informacji o m wejściach i n wyjściach. Praca takiego urządzenia odbywa się w taktach, które mogą być określone z góry, względnie pewnymi oddziaływaniami zewnętrznymi, zmianą stanu wejścia, wyjścia lub też stanu wewnętrznego.



Rys.1



Rys.2

Układ taki spełnia następujące warunki:

1. Z każdym wejściem (i wyjściem) związany jest pewien skończony zbiór symboli (liter) zwany alfabetem, który stanowi zbiór wszystkich możliwych stanów, w jakich dane wejście (wyjście) może się znajdować.

2. Układ może znajdować się tylko w jednym ze skończonej liczby stanów, możliwych dla tego układu. Zbiór stanów (wewnętrznych) urządzenia nosi nazwę alfabetu wewnętrznego.

3. Stan układu jest określony w sposób jednoznaczny stanem układu i stanem wejść w poprzednim momencie czasu.

4. Stan wyjść układu jest jednoznacznie określony stanem wejść układu i stanem układu w danym momencie czasu.

Układ o m wejściach i n wyjściach można sprowadzić do układu o jednym wejściu i jednym wyjściu, gdzie f i g posiadają odpowiednio m i n współrzędnych. Jeśli zatem poszczególne alfabety kanałów wejściowych posiadały, odpowiednio, λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ liter, to alfabet "sprowadzonego" wejścia posiadać $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_m$ liter[x)].

x) W praktyce zachodzi często proces odwrotny - przykład: kodowanie dwójkowe liter alfabetów posiadających liczbę symboli większą od dwóch.

Dlatego też rozpatrywanie automatu skończonego można ograniczyć do układu z jednym wejściem i wyjściem.
Dla celów praktycznych przydatnym może okazać się podejście do automatu skończonego, jako do pojęcia charakteryzującego się dwoma pojęciamia składowymi:

1) schematu,

2) operatora realizowanego przez ten schemat.

Podanie na wejście automatu pewnego nieskończonego ciągu liter $f(1)$, $f(2),\ldots,f(i)\ldots$ powoduje pojawienie się na wyjściu liter $g(1)$, $g(2),\ldots,g(i)\ldots$ Oznaczając $f(t)$ i $g(t)$ (gdzie $t = 1,2,3,\ldots\ i,\ldots$) jako funkcję do naturalnego argumentu, które mogą przyjmować wartości, odpowiednio, z alfabetu wejściowego i alfabetu wyjściowego, pracę automatu skończonego można wyrazić matematycznie (1)

$$g(t) = \theta\left[\, f(t)\,\right] \qquad (1)$$

gdzie θ stanowi operator wyrażający regułę, na podstawie której następuje przekształcenie wejściowego ciągu liter $f(t)$ w wyjściowy ciąg $g(t)$.
Zgodnie z określeniem automatu skończonego operator realizowany przez automat jest zdeterminowanym. Mianowicie dla dowolnego momentu czasu t litera wyjściowa $g(t)$ jest jednoznaczną funkcją od liter $f(t)$, $f(t-1),\ldots,$ $f(1)$. Jednocześnie operator realizowany przez automat skończony jest ograniczonym (posiada skończoną wagę). Wiąże się to ze skończoną ilością stanów, w jakich może się znajdować automat. Pracę skończonego automatu można przedstawić następująco:

Wprowadzenie do urządzenia słowa wejściowego o długości j $f(1)$, $f(2)\ldots f(j+1)$ powoduje zmianę stanu automatu z q_0 na q_γ (gdzie q_γ litery wewnętrznego alfabetu (stanów). Można to interpretować jako przejście ze stanu q_o, gdzie automat realizował operator θ do stanu q_γ, gdzie realizuje cząstkowy operator θ_γ rzędu j-ego[x].
Ze skończonej ilości stanów, w jakich może się znajdować automat, wynika skończona ilość odmiennych cząstkowych ope-

---

[x] Sam operator θ można uważać za początkowy operator rzędu 1.

ratorów. Takie zdeterminowane operatory posiadają skończoną liczbę odmiennych operatorów cząstkowych[x)] nazywa się ograniczonymi, a maksymalną liczbę odmiennych cząstkowych operatorów stanowi wagę operatora. Ponieważ zdeterminowany ograniczony operator jest realizowany przez automat skończony, dlatego też operatory tego typu noszą nazwę automatowych.

Praca automatu skończonego może być opisana układem równań:

$$\begin{aligned} q(t+1) &= \Psi\left[f(t),\ q(t)\right] \\ g(t) &= \Phi\left[f(t),\ q(t)\right] \end{aligned} \qquad (2)$$

Układ równań (2) stanowi kanoniczne równania operatora automatowego. W równaniach tych $g(t)$, $q(t)$, $f(t)$ są odpowiednio, literami przyjmowanymi z alfabetów: wyjściowego, wewnętrznego (stanów) i wejściowego.

Często litery $f(t($, $q(t)$, $g(t)$ interpretowane są jako wektory ze składowymi, np. dla $f(t) - f_1(t), f_2(t),\ldots, f_m(t)$, które mogą mieć w dyskretnych momentach czasu tylko jedno ze skończonej liczby znaczeń z rozmaitych, w przypadku ogólnym, alfabetów. Wówczas zapis równań kanonicznych operatora realizowanego przez skończony automat ma postać (3).

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \Phi_1\left[f_1(t),\ldots, f_m(t), q_1(t),\ldots q_k(t)\right] \\ g_2(t) &= \Phi_2\left[f_1(t),\ldots, f_m(t), q_1(t),\ldots q_k(t)\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n(t) &= \Phi_n\left[f_1(t),\ldots, f_m(t), q_1(t),\ldots q_k(t)\right] \\ q_1(t+1) &= \Psi_1\left[f_1(t),\ldots, f_m(t), q_1(t),\ldots q_k(t)\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_k(t+1) &= \Psi_k\left[f_1(t),\ldots, f_m(t), q_1(t),\ldots, q_k(t)\right] \end{aligned} \qquad (3)$$

[x)] Jeżeli operator θ jest zdeterminowany, to i cząstkowy operator θ_γ jest zdeterminowany

Jeśli w tym zapisie $f_1, \ldots, f_m, q_1, \ldots, q_k, g_1, \ldots, g_n$ są zmiennymi dwójkowymi (a najczęściej taką formę zapisu stosuje się właśnie dla dwójkowego kodowania symboli z innych alfabetów) to zarówno wewnętrzne funkcje przejścia Ψ_i jak i zewnętrzne funkcje przejścia Φ_i stanowią funkcje dwuwartościowej logiki.

Równania kanoniczne (2) operatora, opisujące pracę automatu stanowią określenia rekursyjne. Z tego też względu praca automatu może być określona, przy ustaleniu stanu początkowego $q(1)$. Parze kanonicznych funkcji Φ i Ψ z K-wartościowym alfabetem stanów można przypisać zatem układ $U_{\Phi,\Psi}$, składający się z K zdeterminowanych ograniczonych operatorów, będący ogólnym ograniczonym zdeterminowanym operatorem pary kanonicznych funkcji Φ i Ψ, a liczba K - waga ogólnego operatora automatycznego, w odróżnieniu od szczegółowego operatora i jego wagi, który uzyskuje się przy ustaleniu początkowego stanu[x)].

Zgodnie z określeniem operatora, można jego realizację w automacie skończonym interpretować następująco:

Praca automatu odbywa się w dyskretnych taktach $t=1,2,3,\ldots$, każdemu z których odpowiada w pełni określony stan jego pamięci wewnętrznej[xx)] wyrażony wartościami $q(t)$. Jeśli w danym takcie przy stanie q pojawią się w kanałach wejściowych litery $f_1, \ldots, f_m$ to w tymże takcie w kanałach wyjściowych pojawią się litery $g_i = \Phi_i [f_1, \ldots f_m, q]$ i wytworzy się stan $\Psi [f_1, \ldots, f_m, q]^i$ dla kolejnego następnego taktu.

Drugim pojęciem składowym abstrakcji automat skończony jest jego schemat. Pojęcie to opisuje w jaki sposób dany złożony automat zbudowany jest z niepodlegających dalszemu rozczłonkowaniu, elementarnych automatów, dla opisu których podaje się:

1) układ równań typu (3) określający operator realizowany przez elementarny automat,

2) m wejściowych kanałów z wejściowymi alfabetami

F_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, n wyjściowych kanałów z wyjściowymi alfabetami G_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, komórki z zewnętrznym alfabetem Q[xxx)].

x) Liczba i waga szczegółowych operatorów nie przewyższa wagi ogólnego operatora.

xx) Objętością pamięci wewnętrznej nazywa się $\log_2 K$, gdzie K - stanowi zawartość alfabetu wewnętrznego (stanów).

xxx) Elementarny automat jest zatem skończonym automatem rozpatrywanym jako "czarna skrzynka".

Schemat jest graficznym przedstawieniem złożonego automatu, charakteryzuje sposób połączenia elementarnych automatów, jeden z drugim, a także przepływ informacji w uzyskanym złożonym układzie.

Dla pewnego zbioru elementów $\{R\}$, schematem z elementów tego zbioru nazywamy dowolny zespół elementów z tego zbioru (przy czym w zbiorze mogą występować wielokrotne egzemplarze tego samego elementu), dla których wskazano, jakie ich kanały uważa się za identyczne, przy czym identyfikować można tylko takie kanały, które posiadają ten sam alfabet.

Każdemu schematowi można przypisać układ równań $E(N)$, który określa jego strukturę. Stanowi on układ równań kanonicznych poszczególnych elementów schematu. W zakresie wszystkich schematów wydziela się klasę "prawidłowo zorganizowanych" schematów, których zachowanie się można rozpatrywać jako pracę automatu skończonego. Wówczas dla każdego takiego schematu może być pokazany operator realizowany przez schemat.

Matematycznym postulatem związanym z prawidłowością organizacji schematu jest prawidłowość układu równań $E(N)$. Układ ten jest prawidłowym, jeśli dla dowolnego układu funkcji wejściowych $f_1(t),\ldots, f_m(t)$ istnieje układ, będący jedynym,funkcji wyjściowych $g_1(t),\ldots,g_n(t)$, takich, że funkcje te spełniają $E(N)$. Wówczas operator określony tymi własnościami jest ograniczony i zdeterminowany

Grupa schematów czyniąca zadość powyższym własnościom zwie się "sieciami logicznymi".

Mając pewien zbiór elementów $\{R\}$, siecią logiczną zbudowaną z elementów tego zbioru nazywamy grupę schematów, które można ściśle określić w sposób indukcyjny następująco:

1. Każdy element z danego zbioru elementów tworzy sieć logiczną, zbudowaną z elementów zbioru $\{R\}$,

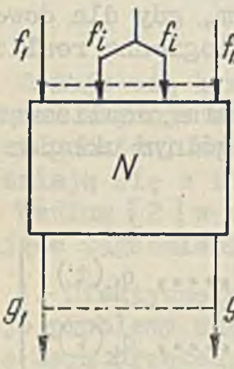
2. Połączenie dwóch sieci logicznych bez wspólnych kanałów jest siecią logiczną,

3. W rezultacie połączenia kilku wejściowych kanałów sieci logicznej otrzymuje się sieć logiczną,

4. Przez połączenie wyjściowego kanału g_i sieci logicznej z takim jej wejściowym kanałem f_j, od którego g_i nie jest uzależniony, uzyskujemy sieć logiczną.

5. Inne sieci logiczne nie istnieją.

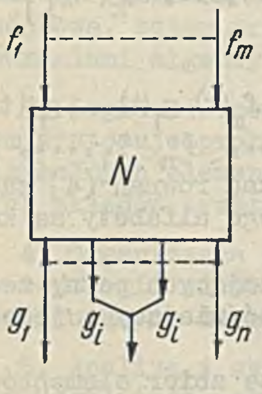
Określenie to wymaga pewnych wyjaśnień. Połączenie dwóch schematów prawidłowo zorganizowanych N_1 i N_2 bez wspólnych kanałów tworzy oczywiście schemat prawidłowo zorganizowany N gdyż układ równań $E(N)$ schematu N jest połączeniem w jeden układ, układów $E(N_1)$ i $E(N_2)$, a zatem prawidłowość układów $E(N_1)$ i $E(N_2)$ warunkuje prawidłowość układu $E(N)$.



Rys.3

Dla zapewnienia prawidłowości organizacji schematu, a zatem i prawidłowego przepływu i przetwarzania informacji w schemacie nie każde połączenie kanałów jest dopuszczalne.

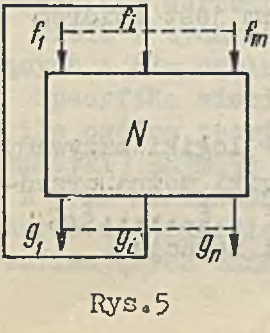
Połączenie kilku kanałów wejściowych prawidłowo zorganizowanego schematu N nie powoduje pojawienia się nieprawidłowości w powstałym przez połączenie schemacie N_1. Można to interpretować jako połączenie kilku kanałów wejściowych do ogólnego źródła informacji. Zastępując w układzie równań $E(N)$ symbole zmiennych przynależnych do połączonych kanałów przez symbol jednej z tych zmiennych uzyskuje się układ $E(N_1)$, schematu N_1. Jeśli $E(N)$ był prawidłowy, to prawidłowy jest także $E(N_1)$.



Rys.4

Natomiast niedopuszczalne jest połączenie kilku kanałów wyjściowych, gdyż pojęcie schematu nie dopuszcza w miejscu połączenia kanałów jakiegokolwiek przetwarzania informacji.

Połączenie kanału wejściowego z wyjściowym powoduje powstanie pętli. Jeśli kanał wyjściowy g_i jest uzależniony od kanału wejściowego f_j, czyli w równaniu kananicznym $g_i = \Phi_i [f_1, \ldots, f_j, \ldots, f_m, q]$ funkcja Φ_i ściśle zależy od zmiennej f_j, to połączenie kanałów g_i i f_j powoduje powstanie błędnego koła w przepływie informacji, a taką nieokreśloność teoria automatów skończonych nie rozpatruje.



Rys.5

Dla sieci logicznej składającej się z elementów, które zawierają odpowiednio alfabety wewnętrzne o ilości liter $k_1, k_2, \ldots, k_s$, alfabet wewnętrzny sieci zawierać będzie $k_1 k_2 \ldots k_s$ liter, a pojemność pamięci wewnętrznej sieci równa jest sumie pojemności poszczególnych elementów.

3. Fizyczna realizowalność automatu skończonego

Ze stwierdzeniem o możliwości zbudowania skończonego automatu z innych skończonych automatów poprzez ich połączenie w sieć, wiąże się problem zbudowania, przy użyciu elementów z pewnego niedużego zbioru $\{R\}$, pewnego zbioru, względnie też wszystkich możliwych automatów skończonych. Taki zbiór elementów $\{R\}$ nazywa się pełnym, gdy dla dowolnego operatora automatowego istnieje sieć logiczna realizująca ten operator.

Dowolny ograniczony zdeterminowany operator realizowany przez automat skończony może być opisany ogólnym układem równań kanonicznych (4)

$$\left.\begin{array}{l} g_1(t) = \Phi_1\left[f_1(t),\ldots, f_m(t), q_1(t),\ldots, q_k(t)\right] \\ g_n(t) = \Phi_n\left[f_1(t),\ldots, f_m(t), q_1(t),\ldots, q_k(t)\right] \\ q_1(t+1) = \Psi_1\left[f_1(t),\ldots, f_m(t), q_1(t),\ldots, q_k(t)\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_k(t+1) = \Psi_k\left[f_1(t),\ldots, f_m(t), q_1(t),\ldots, q_k(t)\right] \end{array}\right| \quad (4)$$

Jeśli w dość ogólnym przypadku $f_1(t),\ldots, f_m(t), g_1(t),\ldots, g_n(t)$, $q_1(t),\ldots, q_n(t)$ są predykatami, to $\Phi_1,\ldots, \Phi_n$ $\Psi_1,\ldots, \Psi_k$ przedstawiają funkcję algebry logiki, układ równań (4) zadaje zaś dowolny operator automatowy, którego alfabety są kodowane dwójkowo.

W związku z tym zbiór elementów realizujących pełny zespół funkcji algebry logiki[x)] i element opóźniający o jeden takt stanowią pełny zbiór.

Tak samo słusznym jest stwierdzenie, że zbiór elementów pozwalających odtworzyć dowolną funkcję l-znacznej logiki ($l > 2$) uzupełniony elementem opóźniającym jest zbiorem pełnym.

---

x) Zespół funkcji ξ_1 $\xi_2,\ldots, \xi_\eta$ algebry logiki nazywamy pełnym, jeśli każdą funkcję algebry logiki można przedstawić w formie superpozycji funkcji $\xi_1, \xi_2,\ldots,\xi_\eta$ (przykład koniunkcja lub alternatywa i negacja).

Ponieważ istnieją fizyczne realizacje elementów realizujących pełny zespół funkcji algebry logiki oraz elementu opóźniającego, to z powyższego wynika twierdzenie, że dowolny automat skończony może być zbudowany w postaci sieci logicznej.

4. Wnioski ogólne

Wydaje się być korzystnym określenie zakresu zagadnień, jakimi zajmuje się teoria sieci logicznych i wykazanie głównych punktów, w których sieci logiczne w sposób zasadniczy wyróżniają się z klasy wszystkich automatów skończonych.

Według [2] w zakres teorii sieci logicznych wchodzą następujące zagadnienia.:

1. Efektywne przetwarzania informacji. Zagadnienie to obejmuje problemy własności przetwarzania informacji, klasyfikację form przetwarzania i charakter przetwarzania informacji w urządzeniach fizykalnych.

2. Kodowanie informacji i podstawy algebry logiki. W zagadnieniu tym rozpatruje się wpływ sposobu kodowania na własności układów fizykalnych przetwarzających informację i ich budowę. Ponieważ bardzo często informacja kodowania bywa dwójkowa, zatem przetwarzanie tych kodów może być opisane równaniami algebry logiki lub też innego rachunku dwójkowego.

3. Logiczne operatory elementów fizykalnych. W zagadnieniu tym występuje problem funkcjonalnych możliwości różnorodnych fizykalnych elementów, wykorzystywanych do budowy rzeczywistych układów przetwarzania dyskretnego informacji.

4. Organizacja sieci logicznej. Mieszczą się tutaj problemy topologii sieci i funkcjonalnej pełności zespołu elementów służących do budowy sieci.

5. Analiza i synteza sieci. Zagadnienia te w pewnym stopniu uogólniają rezultaty poprzednich zagadnień i posiadają największą wartość praktyczną.

Wiele z tych zagadnień jest wspólnych, względnie dopełniających i dla ogólnej teorii automatów skończonych.

Specyfika sieci logicznych sprowadza się do następującego. O ile ogólna teoria automatów skończonych (jako dziedzina matematyki) zajmuję się wyjaśnieniem możliwości automatu i z tymi możliwościami związanej organizacji automatu, to teoria sieci logicznych zajmuje się syntezą sieci logicznych realizujących zadane własności przetwarzania informacji.

W związku z tym z matematycznego punktu widzenia automaty skończone budowane są z pewnych abstrakcyjnych matematycznych elementów (jak np. abstrakcyjne neurony [4, 3]), natomiast zasada budowy sieci logicznych polega na wykorzystywaniu realnych fizykalnych elementów, ze wszystkimi ich ograniczeniami. Jest sprawą oczywistą, że abstrakcyjne matematyczne elementy skończonych automatów charakteryzują się dużo większymi możliwościami aniżeli elementy, z których budowane są sieci logiczne.

LITERATURA

[1] A.W. Burks, J.B.Wrigt.: Theory of logical nets, Proc. IRE 41 No 10 (1953). Tłumaczenie z rosyjskiego "Tieorija logiczeskich sietiej" Kibiernieticzeskij sbornik No 4.

[2] N.E.Kobrinskij, B.A.Trachtenbrot.: O postrojenii obszczej tieorii logiczeskich sietej. Sbornik statiej "Logiczeskije issliedowanija" Izd. A.N.SSSR. (1959).

[3] Awtomaty, sbor. statiej (tłumaczenie z angielskiego), I L Moskwa 1956. (oryginał "Automata Studies" Pronceton New Jersej 1956).

[4] M.A.Ajzerman, L.A.Gusiew, L.J.Rozanoer J.M.Smirnowa, A.A.Tal: Koniecznyje awtomaty. Awtomatika i Tielemiechanika t.XXI Nr 2 i 3 (1960).

[5] N.E. Kobrinskij, B.A. Trachtenbrot: Wiedienie w tieoriju koniecznych awtomatow 1962 .

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Содержание

В статье представлено несколько основных понятий и вопросов применяемых в теории конечных автоматов, рассмотренных на Семинаре на Кафедре Теории Регулирования. Представленные понятия касаются конечных автоматов, подразумеваемых как логические сети, составляющие отображение математического описания как организации так и работы физической системы для циклической переработки дискретной информации.

THE PRINCIPAL IDEAS OF THE AUTOMATA THEORY

Summary

A survey of principal ideas of the automata theory and its applications to the logical networks are given.