

BOGDAN SKALMIERSKI

MOŻLIWOŚCI PRAKTYCZNEGO WYKORZYSTANIA TEORII PRĘTA  
O DWUKIERUNKOWEJ CHARAKTERYSTYCE SPRĘŻYSTEJ

Streszczenie: Zagadnienie prętowe poruszone w niniejszej pracy, mimo prostych środków matematycznych tu zastosowanych, jest dość skomplikowane pod względem ilości elementarnych przekształceń. W teorii pręta - jak autor nazwał - na podłożu ortotropowym występują równania różniczkowe zwyczajne szóstego rzędu.

Całka ogólna tych równań jest kombinacją liniową funkcji hiperbolicznych i harmonicznych. Zagadnienie zostało rozwiązane w przemieszczeniach dla przypadku działania siły skupionej działającej stycznie.

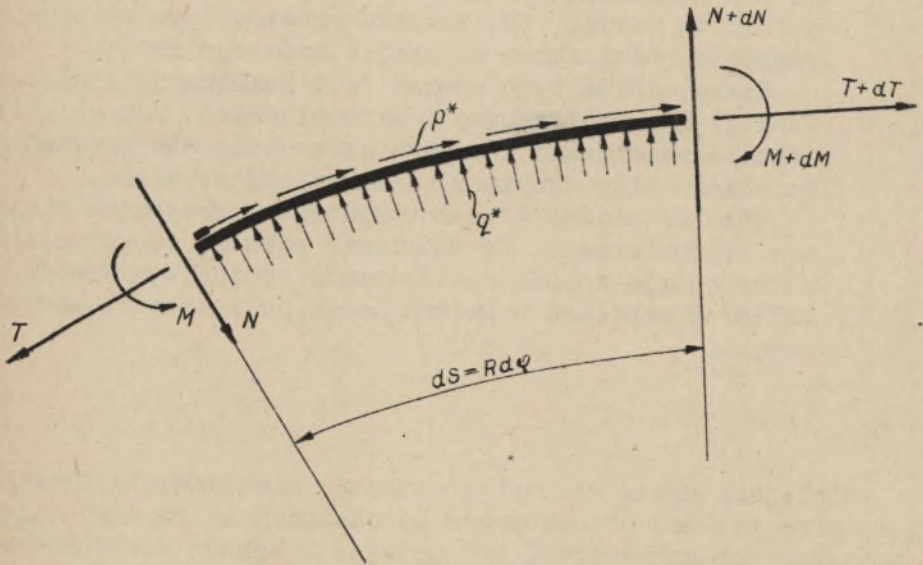
Również osobno został rozpatrzony przypadek obciążenia równomiernego. Po omówieniu podstaw teoretycznych autor podaje sposób zastosowania swoich wyników do obliczeń naprężeń w kołach Koepe'go i bębnach wieloliniowych.

Niniejsza praca stanowi propozycję zastosowania teorii pręta na podłożu ortotropowym do obliczeń wytrzymałościowych nowoczesnych konstrukcji kół pędnych i bębnow wielolinowych maszyn wyciągowych. Spawanie wyparło w nich połączenia nitowe i śrubowe, blacha zastąpiła inne materiały konstrukcyjne a ściany pełne ramiona z walcówki. Obliczenia tu wykonywane będą dotyczyły wpływu obciążeń stycznych na stan odkształceń i naprężeń wspomnianych elementów.

### 1. Pręt kołowy słabo zakrzywiony na podłożu ortotropowym

Ażebym określić stan odkształcenia pręta na podłożu o podatności liniowej w kierunkach promieniowym i obwodowym, należy rozpatrzyć stan równowagi elementu takiego pręta. Stan ten opisują następujące trzy równania:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{dT}{d\varphi} + \frac{N}{R} + p^* &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{dN}{d\varphi} - \frac{T}{R} + q^* &= 0 \\ \frac{1}{R} \frac{dM}{d\varphi} - N &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$



Rys. 1

gdzie:

$R$  - promień krzywizny

$\varphi$  - współrzędna (kąt)

$M, T, N$  - moment gnący, siła osiowa, siła poprzeczna

$p^* q^*$  - obciążenie styczne i normalne elementu pręta

Ażeby układ (1.1) wyrazić w przemieszczeniach należy zastosować prawo Hooke'a

$$T = A E \epsilon \quad (1.2)$$

$$M = E J \kappa$$

gdzie:

$A$  - przekrój poprzeczny pręta

$J$  - moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta

$E$  - moduł sprężystości

$\epsilon$  - wydłużenie jednostkowe osi

$\kappa$  - zmiana krzywizny osi

Wyrażając  $\epsilon$  i  $\kappa$  za pomocą przemieszczeń stycznego  $V$  i promieniowego  $W$  otrzymuje się;

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{AE}{R} \left( \frac{dV}{d\varphi} + W \right) \\ M &= - \frac{EJ}{R^2} \left( \frac{d^2 W}{d\varphi^2} - \frac{dV}{d\varphi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Rugując z układu (1.1) siłę poprzeczną  $N$ , i uwzględniając związki (1.3) otrzymuje się układ:

$$\left. \begin{aligned} D_{11} V + D_{12} W + p^* &= 0 \\ D_{21} V + D_{22} W + q^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

gdzie operatory  $D_{ik}$  oznaczają:

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= \left( \frac{AE}{R^2} + \frac{EJ}{R^4} \right) \frac{d^2}{d\varphi^2} \\ D_{12} &= -D_{21} = \frac{AE}{R^2} \frac{d}{d\varphi} - \frac{EJ}{R^2} \frac{d^3}{d\varphi^3} \\ D_{22} &= -\frac{EJ}{R^4} \frac{d^4}{d\varphi^4} + \frac{AE}{R^4} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Ponieważ pręt spoczywa na podłożu, które reaguje na przemieszczenia styczne  $V$  i normalne  $W$ , a reakcje są liniowymi funkcjami tych przemieszczeń i jest obciążony styczną siłą skupioną  $P$  przeto:

$$\left. \begin{aligned} p^* &= -k_2 V \\ q^* &= -k_1 W \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

gdzie:

$k_1$  i  $k_2$  stałe charakteryzujące rodzaj podłoża.

Traktując operatory jak liczby, co jest dopuszczalne ze względu na to, że współczynniki stojące przy funkcjach są stałe, można napisać:

$$D W = 0 \quad (1.7)$$

gdzie:

$$D = \frac{R^6}{AE^2 J} \begin{vmatrix} D_{11} - k_2 & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} - k_1 \end{vmatrix} = \frac{d^6 W}{d\varphi^6} + a \frac{d^4}{d\varphi^4} + b \frac{d^2}{d\varphi^2} + c$$

A zatem

$$\frac{d^6 W}{d\varphi^6} + a \frac{d^4 W}{d\varphi^4} + b \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + CW = 0 \quad (1.8)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 - \frac{k_2 R^2}{AE} \\ b &= 1 + \frac{k_1 R^2}{E} \left( \frac{R^2}{J} + \frac{1}{A} \right) \\ c &= - \frac{k_2 R^4}{EJ} \left( 1 + \frac{k_1 R^2}{AE} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

## 2. Rozwiązanie ogólne równania (1.8)

Poszukując rozwiązania w formie  $W = e^{\lambda\varphi}$  otrzymuje się równanie charakterystyczne równania (1.8)

$$\lambda^6 + a \lambda^4 + b \lambda^2 + c = 0 \quad (2.1)$$

Wprowadzając nową zmienną

$$x = \lambda^2 + \frac{a}{3} \quad (2.2)$$

dochodzi się do równania

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2.3)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} p &= b - \frac{a^2}{3} \\ q &= \frac{2}{27} a^3 - \frac{ab}{3} + c \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Zajmiemy się występującym w praktyce przypadkiem, gdy równ. (2.3) ma jeden pierwiastek rzeczywisty tj. gdy;

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$$

Na podstawie rozwiązania równania (2.3) otrzymuje się sześć następujących pierwiastków równania (2.1)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= + \sqrt{U_0 + V_0 - \frac{a}{3}} = \pm \lambda_0 \\ \lambda_{3,4,5,6} &= \pm (\alpha \pm i\beta) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ V_0 &= \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{6} (3U_0 + 3V_0 + 2a) + \sqrt{\frac{1}{36} (3U_0 + 3V_0 + 2a)^2 + \frac{3}{4} (U_0 - V_0)^2} \right]}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{6} (3U_0 + 3V_0 + 2a) + \sqrt{\frac{1}{36} (3U_0 + 3V_0 + 2a)^2 + \frac{3}{4} (U_0 - V_0)^2} \right]} \quad (2.7)$$

Całką ogólną równania (1.5) jest

$$W = C_1 \operatorname{sh} \lambda_0 \varphi + C_2 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + C_3 \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + C_4 \operatorname{ch} \lambda_0 \varphi + C_5 \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + C_6 \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi \quad (2.8)$$

Przemieszczenie  $V$  wyznaczyć można z układu (1.4)

$$V = C_0 + \frac{1}{\psi_0} \left\{ \frac{AEJ^2}{R^6} \left( \frac{d^3 W}{d\varphi^3} + \frac{dW}{d\varphi} \right) + \left( \frac{AE}{R^2} + \frac{EJ}{R^4} \right) \left( \frac{AE}{R^2} + k_1 \right) \int W d\varphi \right\} \quad (2.9)$$

gdzie:

$$\psi_0 = - \frac{AE}{R^2} \left( \frac{AE}{R^2} + \frac{EJ}{R^4} \right) + k_2 \frac{EJ}{R^4} \quad (2.10)$$

### 3. Warunki brzegowe

W punkcie przyłożenia siły określonym współrzędną  $\varphi = \pi$  powinny być spełnione następujące warunki:

1. Warunek ciągłości funkcji  $W$

$$(W)_{\varphi=\pi} = (W)_{\varphi=-\pi}$$

2. Warunek regularności  $W$

$$\left( \frac{dW}{d\varphi} \right)_{\varphi=\pi} = \left( \frac{dW}{d\varphi} \right)_{\varphi=-\pi}$$

3. Warunek ciągłości funkcji  $V$

$$(V)_{\varphi=\pi} = (V)_{\varphi=-\pi}$$

4.

$$(T)_{\varphi=\pi} = \frac{P}{2}$$

5.

$$(T)_{\varphi=\pi} = -\frac{P}{2}$$

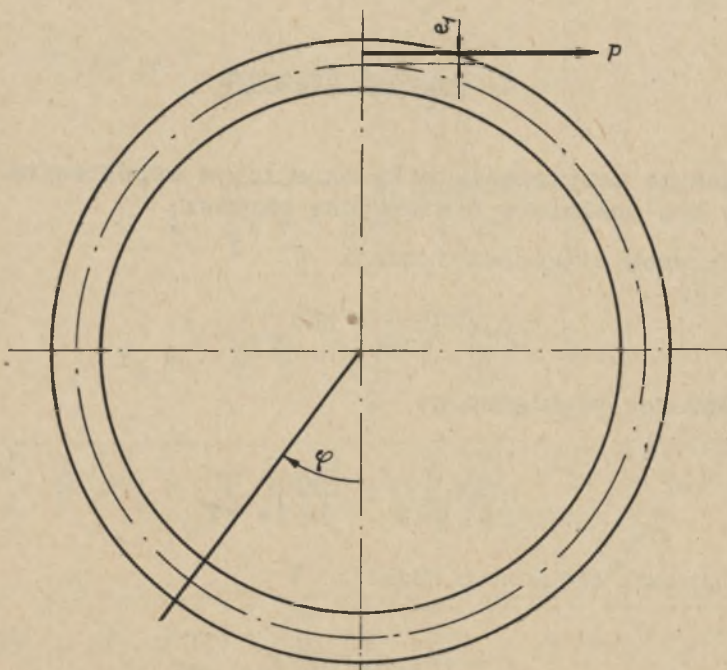
6.

$$\int_{-\pi}^{\pi} k_2 VRd\varphi = P$$

Warunek ten określa, że na całym obwodzie pręt spoczywa jedynie na podłożu sprężystym.

7.

$$M_{\varphi=\pi} = \frac{Pe_1}{2}$$



Rys. 2



gdzie:

$e_1$  - jest przesunięciem siły.

Analiza powyższych warunków doprowadza do wni  
W jest funkcją nieparzystą, zatem  $C_4 = C_5 =$   
Ilość warunków brzegowych redukuje się więc

$$\left. \begin{aligned} (W)_{\varphi=\pi} &= 0 \\ (T)_{\varphi=\pi} &= \frac{P}{2} \\ \int_0^{\pi} k_2 V R d\varphi &= \frac{P}{2} \\ (M)_{\varphi=\pi} &= \frac{P e_1}{2} \end{aligned} \right\}$$

Upraszczają się również wyrażenia na W

$$W = C_1 \operatorname{sh} \lambda_0 \varphi + C_2 \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + C_3 \operatorname{ch}$$

Wstawiając powyższą funkcję do (2.9)

$$V = C_0 - \left[ \mu C_1 \operatorname{ch} \lambda_0 \varphi + (C_2 B + C_3 C) \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \right]$$

gdzie:

$$\mu = -\frac{1}{\psi_0} \left[ \lambda_0 (1 + \lambda_0^2) \frac{A J E^2}{R^6} + \frac{1}{\lambda_0} \right]$$

$$B = -\frac{1}{\psi_0} \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \left( \frac{A E}{R^2} + \frac{E J}{R^4} \right) \left( \frac{A E}{R^2} + k_1 \right) + \frac{A E^2 J}{R^6} (\alpha + \alpha^3 - 3\alpha \beta^2) \right] \quad (3.4)$$

$$C = \frac{1}{\psi_0} \left[ \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left( \frac{A E}{R^2} + \frac{E J}{R^4} \right) \left( \frac{A E}{R^2} + k_1 \right) + \frac{A E^2 J}{R^6} (\beta^3 - 3\alpha^2 \beta - \beta) \right]$$

Wstawiając do (3.1) wartości (3.2) i (3.3) otrzymujemy układ równań:

$$\left. \begin{aligned}
 & C_1 \operatorname{sh} \lambda_0 \pi + C_2 \operatorname{sh} \alpha \pi \cos \beta \pi + C_3 \operatorname{ch} \alpha \pi \sin \beta \pi = 0 \\
 & C_1 \mu_1 \operatorname{sh} \lambda_0 \pi + C_2 (\eta_1 \operatorname{sh} \alpha \pi \cos \beta \pi - \eta_2 \operatorname{ch} \alpha \pi \sin \beta \pi) + \\
 & \quad + C_3 (\eta_1 \operatorname{ch} \alpha \pi \sin \beta \pi + \eta_2 \operatorname{sh} \alpha \pi \cos \beta \pi) = - \frac{PR}{2AE} \\
 & C_1 \lambda_0^2 \operatorname{sh} \lambda_0 \pi + C_2 [(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{sh} \alpha \pi \cos \beta \pi - 2\alpha\beta \operatorname{ch} \alpha \pi \sin \beta \pi] + \\
 & \quad + C_3 [(\alpha^2 - \beta^2) \operatorname{ch} \alpha \pi \sin \beta \pi + 2\alpha\beta \operatorname{sh} \alpha \pi \cos \beta \pi] = \\
 & \quad = \frac{PR}{2E} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{e_1 R}{J} \right) \\
 & \int_0^{\pi} k_2 VR \, d\varphi = \frac{P}{2}
 \end{aligned} \right\} (3.5)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned}
 \mu_1 = - \frac{1}{\psi_0} \left[ \lambda_0^2 (1 + \lambda_0^2) \frac{AJE^2}{R^6} + \left( \frac{AE}{R^2} + \frac{EJ}{R^4} \right) \left( \frac{AE}{R^2} + k_1 \right) \right] \\
 \eta_1 = B\alpha - C\beta \\
 \eta_2 = C\alpha + B\beta
 \end{aligned} \right\} (3.6)$$

#### 4. Stałe całkowania

Podstawą do wyznaczenia stałych całkowania stanowi układ (3.5). Rozwiązywanie tego układu upraszcza się, gdy przyjąć  $\operatorname{ch} \alpha \pi \approx \operatorname{sh} \alpha \pi \approx \frac{1}{2} e^{\alpha \pi}$ , wtedy otrzymamy;

$$\begin{aligned}
 & C_1 e^{(\lambda_0 - \alpha)\pi} + C_2 \cos\beta\pi + C_3 \sin\beta\pi = 0 \\
 & C_1 \mu_1 e^{(\lambda_0 - \alpha)\pi} + C_2 (\eta_1 \cos\beta\pi - \eta_2 \sin\beta\pi) + \\
 & \quad + C_3 (\eta_1 \sin\beta\pi + \eta_2 \cos\beta\pi) = -\frac{PR}{AE} e^{-\alpha\pi} \\
 & C_1 \lambda^2 e^{(\lambda_0 - \alpha)\pi} + C_2 [(\alpha^2 - \beta^2) \cos\beta\pi - 2\alpha\beta \sin\beta\pi] + \\
 & \quad + C_3 [(\alpha^2 - \beta^2) \sin\beta\pi + 2\alpha\beta \cos\beta\pi] = \\
 & \quad = \frac{PR}{E} \left( \frac{1}{A} - \frac{e_1 R}{I} \right) e^{-\alpha\pi} \\
 & \quad \frac{2}{2Rk_2} = \int_0^\pi V d\varphi
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Rozwiązując trzy pierwsze równania układu (4.1) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{PR}{EK_0} e^{-\lambda_0\pi} \cdot K_2 \\
 C_2 &= \frac{PR}{EK_0} e^{-\alpha\pi} (K_1 \sin\beta\pi + K_2 \cos\beta\pi) \\
 C_3 &= \frac{PR}{EK_0} e^{-\alpha\pi} (K_2 \sin\beta\pi - K_1 \cos\beta\pi)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

tutaj:

$$\begin{aligned}
 K_0 &= \eta_0 (\lambda_0^2 - \alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta (\eta_1 - \mu_1) \\
 K_1 &= \left( -\frac{1}{A} + \frac{e_1 R}{J} \right) (\eta_1 - \mu_1) - \frac{1}{A} (\alpha^2 - \beta^2 - \lambda_0^2) \\
 K_2 &= \left( -\frac{1}{A} + \frac{e_1 R}{I} \right) \eta_2 - \frac{2\alpha\beta}{A}
 \end{aligned}$$

Stałą  $C_0$  można wyznaczyć z czwartego równania układu (4.1) Po podstawieniu (3.3) i wprowadzeniu uproszczenia  $\text{sh} \alpha \pi \approx \text{ch} \alpha \pi \approx \frac{1}{2} e^{\alpha \pi}$  otrzymujemy:

$$C_0 = \frac{PR}{2\pi EK_0} \left\{ \frac{EK_0}{k_2 R^2} - K_2 \frac{\mu_1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \right\} \alpha (K_2 B - K_1 C) + \beta (K_1 B + K_2 C) \quad (4.3)$$

Przemieszczenie styczne  $V$  obliczone w punkcie  $\varphi = \pi$  tj. w miejscu przyłożenia siły skupionej wyniesie:

$$(V)_{\varphi=\pi} = \frac{PR}{2\pi EK_0} \left[ \frac{EK_0}{k_2 R^2} + K_2 \frac{\mu_1}{\lambda_0^2} (\lambda_0 \pi - 1) + \left( \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \pi \right) (K_2 B - K_1 C) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (K_1 B + K_2 C) \right] \quad (4.4)$$

Przykład:

Wyznaczyć przemieszczenia styczne  $V$  pręta w punkcie przyłożenia siły stycznej. Pręt ma wymiary:  $\Lambda = 45 \text{ cm}$ ,  $J = 3400 \text{ cm}^4$ ,  $R = 150 \text{ cm}$ .

Stała materiału pierścienia  $E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

$$\nu = 0,28$$

Stała podłoża  $k_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$

$$k_2 = 5,7 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

Podstawiając wartości szczególne podane w przykładzie do wprowadzonych wzorów otrzymuje się:

$$\begin{aligned} a &= -11 \\ b &= 136,4 \\ c &= -5600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 96 \\ q &= -5001,6 \\ U_0 &= 17,1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 V_0 = -1,81 & \lambda_0^2 = 18,95 \\
 \alpha_0 = 2,54 & \beta = 3,23 \\
 \psi = -18,56 \cdot 10^6 \text{ [kG/cm}^2\text{]}^2 & \mu_1 = 29,525 \\
 B_0 = 4,162 & C = -5,311 \\
 \eta_1 = 27,72 & \eta_2 = -0,076 \cdot 10^{-3} \\
 K_0 = -29,5 & K_1 = 1,237 \text{ cm}^{-2} \\
 & K_2 = -0,356 \text{ cm}^{-2}
 \end{array}$$

przy obliczaniu  $K_1$  i  $K_2$  przyjęto  $e_1 = 10$  cm  
 Ostatecznie otrzymuje się:

$$v_{\varphi=\pi} = P \cdot 7,5367 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

Jeżeli teraz np. będzie działała siła  $P = 10$  T, to przemieszczenie punktu zaczepienia siły

$$v = 0,75 \text{ (mm)}$$

5. Przypadek obciążenia równomiernie rozłożonego

Przypadek równomiernie rozłożonych obciążeń stycznych można rozwiązać następująco:  
 Znając funkcję obciążenia  $\bar{p}(\psi)$  oraz funkcję wpływu  $K_V(\varphi, \psi)$  można ustawić formę całkową dla przemieszczeń stycznych

$$v = R \int_0^{2\pi} K_V(\varphi, \psi) \bar{p}(\psi) d\psi \quad (5.1)$$

gdzie:

$$K_V(\varphi, \psi) = \begin{cases} H_0 - H_1 \text{ch } \lambda_0(\pi - \psi + \varphi) - H_2 \text{ch } (\pi - \psi + \varphi) \cos \beta(\pi - \psi + \varphi) + \\ \quad + H_3 \text{sh } \alpha(\pi - \psi + \varphi) \sin \beta(\pi - \psi + \varphi) \text{ dla } \varphi \leq \psi \\ H_0 - H_1 \text{ch } \lambda_0(\pi + \psi - \varphi) - H_2 \text{ch } \alpha(\pi + \psi - \varphi) \cos \beta(\pi + \psi - \varphi) + \\ \quad + H_3 \text{sh } \alpha(\pi + \psi - \varphi) \sin \beta(\pi + \psi - \varphi) \text{ dla } \varphi \geq \psi \end{cases}$$

$$H_0 = \frac{C_0}{P}$$

$$H_1 = \mu \frac{C_1}{P}$$

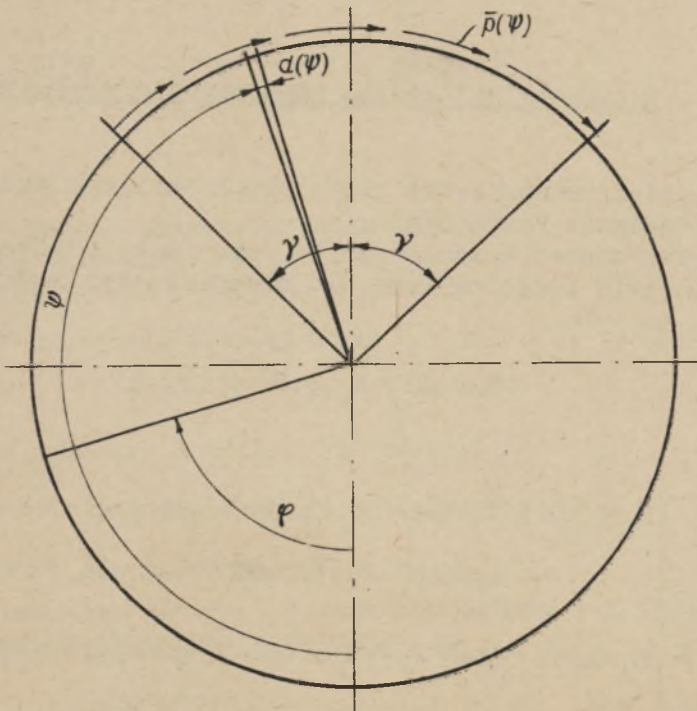
$$H_2 = \frac{1}{P} (C_2^B + C_3^C)$$

$$H_3 = \frac{1}{P} (C_2^C - C_3^B)$$

Przyjmiemy

$$\bar{p}(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < \psi < \pi - \gamma \\ \bar{p} = \text{const.} & \text{dla } \pi - \gamma < \psi < \pi + \gamma \\ 0 & \text{dla } \pi + \gamma < \psi < 2\pi \end{cases}$$

$\gamma$  jest połową kąta określającego łuk obciążony



Rys. 3

a)  $V$  w przedziale  $-(\pi-\gamma) \leq \psi \leq \pi-\gamma$

$$V_1 = R \int_{\pi-\gamma}^{\pi+\gamma} \left[ H_0 - H_1 \operatorname{ch} \lambda_0 (\pi - \psi + \varphi) - H_2 \operatorname{ch} \alpha (\pi - \psi + \varphi) \cos \beta (\pi - \psi + \varphi) + \right. \\ \left. + H_3 \operatorname{sh} \alpha (\pi - \psi + \varphi) \sin \beta (\pi - \psi + \varphi) \right] \operatorname{pd} \psi$$

Po wykonaniu całkowania otrzymuje się:

$$V_1 = R \bar{p} \left[ C_{0v1} + C_{1v1} \operatorname{ch} \lambda_0 \varphi + C_{2v1} \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + C_{3v1} \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \right] \quad (5.2)$$

gdzie:

$$C_{0v1} = 2\gamma H_0$$

$$C_{1v1} = -\frac{2H_1}{\lambda_0} \operatorname{sh} \lambda_0 \gamma$$

$$C_{2v1} = -\frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ (H_2 \alpha + H_3 \beta) \operatorname{sh} \alpha \gamma \cos \beta \gamma + (H_2 \beta - H_3 \alpha) \operatorname{ch} \alpha \gamma \sin \beta \gamma \right]$$

$$C_{3v1} = -\frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ (H_2 \beta - H_3 \alpha) \operatorname{sh} \alpha \gamma \cos \beta \gamma - (H_2 \alpha + H_3 \beta) \operatorname{ch} \alpha \gamma \sin \beta \gamma \right]$$

b) Funkcja  $V$  w przedziale  $\pi-\gamma < \psi < \pi+\gamma$

$$V_2 = R \bar{p} \int_{\pi-\gamma}^{\varphi} \left[ H_0 - H_1 \operatorname{ch} \lambda_0 (\pi + \psi - \varphi) - H_2 \operatorname{ch} \alpha (\pi + \psi - \varphi) \cos \beta (\pi + \psi - \varphi) + \right. \\ \left. + H_3 \operatorname{sh} \alpha (\pi + \psi - \varphi) \sin \beta (\pi + \psi - \varphi) \right] \operatorname{d}\psi + R \bar{p} \int_{\varphi}^{\pi+\gamma} \left[ H_0 - H_1 \operatorname{ch} \lambda_0 (\pi - \psi + \varphi) - \right. \\ \left. - H_2 \operatorname{ch} \alpha (\pi - \psi + \varphi) \cos \beta (\pi - \psi + \varphi) + H_3 \operatorname{sh} \alpha (\pi - \psi + \varphi) \sin \beta (\pi - \psi + \varphi) \right] \operatorname{d}\psi$$

Po scałkowaniu otrzymuje się:

$$V_2 = R \bar{p} \left[ C_{0v2} + C_{1v2} \operatorname{ch} \lambda_0 (\pi - \varphi) + C_{2v2} \operatorname{ch} \alpha (\pi - \varphi) \cos \beta (\pi - \varphi) + \right. \\ \left. + C_{3v2} \operatorname{sh} \alpha (\pi - \varphi) \cos \beta (\pi - \varphi) \right] \quad (5.3)$$

gdzie:

$$C_{0v2} = 2 \left\{ \gamma H_0 - \frac{H_1}{\lambda_0} \operatorname{sh} \lambda_0 \pi - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ (H_2 \alpha + H_3 \beta) \operatorname{sh} \alpha \pi \cos \beta \pi + (H_2 \beta - H_3 \alpha) \operatorname{ch} \alpha \pi \sin \beta \pi \right] \right\}$$

$$C_{1v2} = \frac{2H_1}{\lambda_0} \operatorname{sh} \lambda_0 (\pi - \gamma)$$

$$C_{2v2} = \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ (H_2 \alpha + H_3 \beta) \operatorname{sh} \alpha (\pi - \gamma) \cos \beta (\pi - \gamma) + (H_2 \beta - H_3 \alpha) \operatorname{ch} \alpha (\pi - \gamma) \sin \beta (\pi - \gamma) \right]$$

$$C_{3v2} = \frac{2}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ (H_2 \beta - H_3 \alpha) \operatorname{sh} \alpha (\pi - \gamma) \cos \beta (\pi - \gamma) H_2 \alpha + H_3 \beta \operatorname{ch} \alpha (\pi - \gamma) \sin \beta (\pi - \gamma) \right]$$

Analogicznie można by poszukiwać przemieszczeń promieniowych  $W$  dla przypadku obciążenia ciągłego.

## 6. Koła Koepe obciążone siłami stycznymi

Obciążenie styczne przenosi się na podkoże wieńca koła wtedy gdy:

- a) koło jest odhamowane,
- b) gdy przy włączonych hamulcach uruchomi się napęd silnika.

Gdy obciążenie przenosi się na podkoże, które jak założono, jest ortotropowe, to naprężenie styczne powstałe w miejscu styku wieńca z tarczą można obliczyć następująco:

$$\tau = \frac{V k_2}{g} \quad (6.1)$$



gdzie:

$g$  - łączna grubość tarcz

a) Stała  $k_1$

Stałą  $k_1$ , można wyznaczyć zakładając, że wieniec spoczywa na brzegu jednorodnej tarczy o grubości  $g$ . Ta tarcza stanowi sprężyste podłoże, i obciążając jej brzeg np. ciśnieniem  $\sigma_p$   $\text{kg/cm}^2$  spowodujemy przemieszczenie brzegu:

$$\Delta r = - \frac{\sigma_{DE}}{k_1} \quad (6.2)$$

i wywołamy naprężenie:

$$\left. \begin{array}{l} \text{radialne} \quad \sigma_r = - \sigma_p \\ \text{obwodowe} \quad \sigma_\varphi = - \sigma_p \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

Stan odkształcenia jest kołowo symetryczny zatem:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_r = \frac{dW}{dr} \\ \varepsilon_\varphi = \frac{W}{r} \end{array} \right\}$$

z (6.3) wynika, że  $\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi$

stąd

$$\frac{dW}{W} = \frac{dr}{r} \quad (6.4)$$

Rozwiązując równanie (6.4) i wykorzystując warunek brzegowy otrzymamy:

$$W = \frac{\nu - 1}{E_t} \sigma_{pr} \quad (6.5)$$

Dla brzegu tarczy przemieszczenie wyniesie:

$$(w)_{r=R} = \Delta r = \frac{\nu - 1}{E_t} \sigma_p R \quad (6.6)$$

Tu  $R$  jest promieniem tarczy.

Porównując (6.2) i (6.6) otrzymuje się:

$$k_1 = \frac{E_t g}{(1 - \nu)R} \quad (6.7)$$

b) stała  $k_2$

Stała  $k_2$  wyznaczyć można analogicznie jak stałą  $k_1$ . Jeżeli zatem obciążyć brzeg tarczy ciągłym obciążeniem o wartości stałej na całym obwodzie, to jego przemieszczenia i naprężenia wyniosą:

$$\left. \begin{aligned} (v)_{r=R} &= \frac{\tau_p}{k_2} \\ \sigma_\varphi &= 0 \\ \sigma_r &= 0 \\ \tau_r &= \frac{\tau_p R^2}{gr^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Dalej uwzględniając prawo Hooke'a można napisać:

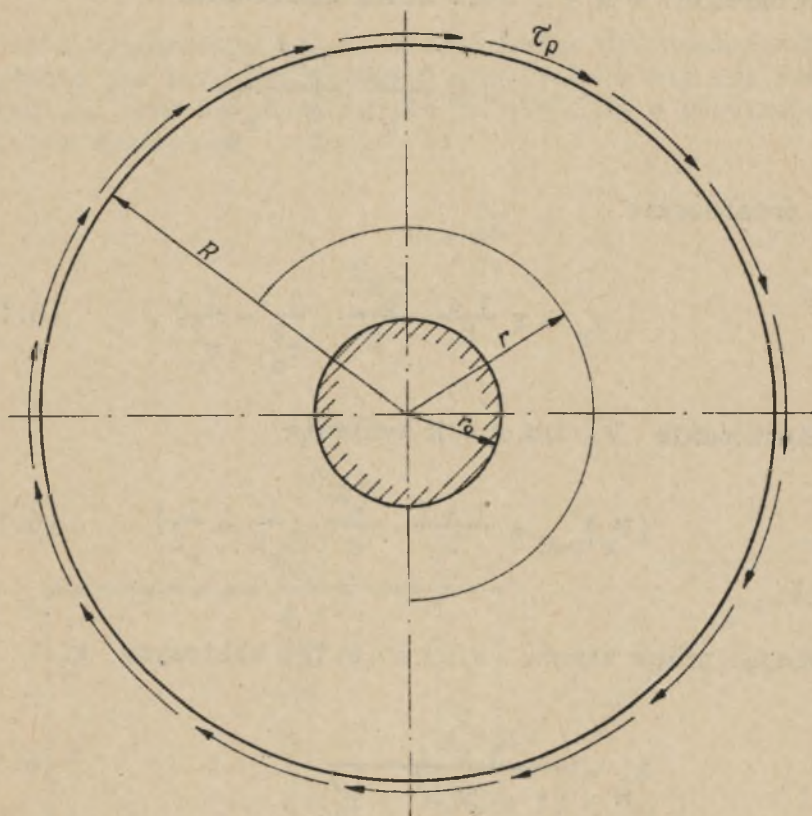
$$G_t \left( \frac{dv_r}{dr} - \frac{v_r}{r} \right) = \frac{\tau_p R^2}{gr^2} \quad (6.9)$$

Dzieląc równanie (6.9) przez  $\frac{E}{2(1 + \nu)}$  otrzymuje się

$$\frac{dv_r}{dr} - \frac{v_r}{r} = \frac{2(1 + \nu)}{E_t} \frac{\tau_p}{g} \left( \frac{R}{r} \right)^2$$

Całką powyższego równania różniczkowego jest:

$$V_r = e^{-F} \left[ C + \frac{2(1+\nu)}{E_t} \frac{\tau_p R^2}{g} \int e^F \frac{dr}{r^2} \right]$$



Rys.4

gdzie:

$$F = - \int \frac{dr}{r} = - \ln r$$

czyli

$$V_r = r^4 \left[ C + \frac{2(1+\nu)}{E_t} \frac{\tau_p R^2}{g} \int \frac{dr}{r^3} \right]$$

a zatem

$$V_r = r \left[ c - \frac{(1+\nu)}{E_t} \frac{\tau_p R^2}{g} \frac{1}{r^2} \right] \quad (6.10)$$

W miejscu utwierdzenia tarczy przemieszczenia  $V = 0$ . Miejsce to określa  $r = r_0$ , stąd stała całkowania

$$c = \frac{1+\nu}{E_t} \frac{\tau_p R^2}{g} \frac{1}{r_0^2}$$

czyli ostatecznie

$$V_r = r \frac{1+\nu}{E_t} \frac{\tau_p R^2}{g} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (6.11)$$

Przemieszczenie  $V_r$  dla  $r = R$  wyniesie

$$(V_r)_{r=R} = \frac{1+\nu}{E_t} \frac{\tau_p R^2}{g} \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R^2} \right) \quad (6.12)$$

Porównując prawe strony (6.8) z (6.12) obliczymy  $k_2$

$$k_2 = \frac{E_t r_0^2 g}{(1+\nu)R(R^2 - r_0^2)} \quad (6.13)$$

### 7. Beben obciążony siłami stycznymi w płaszczyźnie poprzecznej do osi

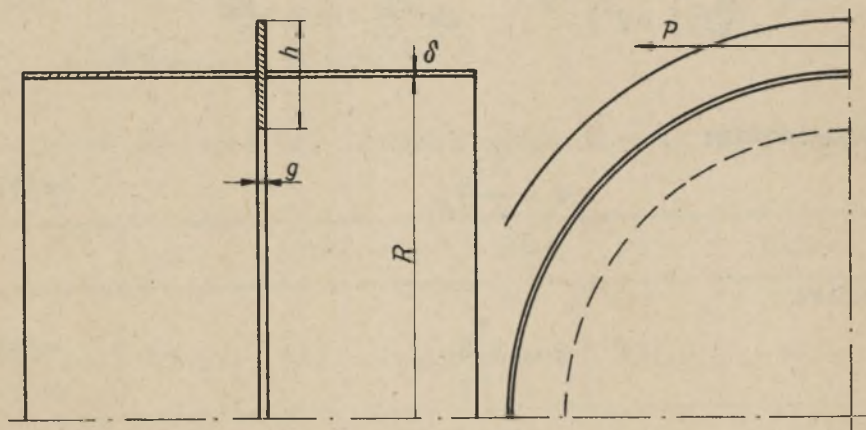
Obciążenie styczne bębnow nabiera zwłaszcza wtedy dużej wagi, gdy hamowanie ruchu odbywa się poprzez pierścien przyspawany w połowie długości bębna ściskany osiowo z dwóch stron. W efekcie pierścien jest narażony na oderwanie się od

powłoki cylindrycznej. Jeżeli przyjąć, że powłoka, na której spoczywa ów pierścień jest dla niego podłożem ortotropowym, to można skorzystać z przytoczonych rozwiązań. Naprężenie styczne na styku pierścienia z powłoką wyniesie

$$\tau = \frac{V k_2}{2\delta} \quad (7.1)$$

W celu wyznaczenia  $k_1$ ,  $k_2$  przeprowadza się analogiczne rozumowanie jak przy wyznaczaniu tych stałych dla kół Koepe. Obciążając powłokę równomiernie na obwodzie w przekroju położonym wywołujemy ugięcie  $W$ ;

$$W = \frac{\sigma_p}{k_1} \quad (7.2)$$



Rys.5.

Z drugiej strony z elementarnego rozwiązania teorii powłok walcowych wiadomo, że:

$$W = \frac{\sigma_p}{4 E J_o m^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{mL}{2} - \sin \frac{mL}{2}}{\operatorname{ch} \frac{mL}{2} + \cos \frac{mL}{2}} \quad (7.3)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} J_o &= \frac{\delta^3}{12(1-\nu^2)} \\ m &= \sqrt[3]{\frac{\delta}{4 J_o R^2}} \end{aligned} \right\}$$

Porównując stronami (7.2) i (7.3) otrzymuje się;

$$k_1 = \frac{E}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{3/2} \frac{\operatorname{ch} \frac{mL}{2} + \cos \frac{mL}{2}}{\operatorname{sh} \frac{mL}{2} - \sin \frac{mL}{2}} \quad (7.4)$$

Analogicznie:

$$V = \frac{L \tau_p}{4 G \delta} \quad (7.5)$$

również

$$V = \frac{\tau_p}{k_2} \quad (7.6)$$

z porównania (7.6) i (7.5) wynika, że:

$$k_2 = \frac{2 E \delta}{(1 + \nu) L} \quad (7.7)$$

gdzie:

L - długość bębna.

Przykład:

Wyznaczmy największe naprężenia styczne na styku powłoki bębna z pierścieniem, gdy siła hamująca  $P = 500 \text{ kg}$

Dane:

$$R = 150 \text{ cm}$$

$$J = \frac{E h^3}{12} = 3400 \text{ cm}^4$$

$$\delta = 1,5 \text{ cm}$$

$$L = 90 \text{ cm}$$

$$E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\nu = 0,28$$

$$A = gh = 45 \text{ cm}^2$$

Obliczenia najlepiej rozpocząć od wyznaczenia stałych  $k_1$  i  $k_2$ . Dla powyższych danych

$$k_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ kg/cm}^2$$

$$k_2 = 5,7 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

Następnie przechodząc kolejno wszystkie współczynniki jak w przykładzie poprzednim otrzymuje się dla  $P = 500 \text{ kg}$

$$v_{\max} = 0,376 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{v_{\max} k_2}{2} = 71,5 \text{ kg/cm}^2$$

Dla różnych wartości sił zestawić można tabelę największych naprężeń  $\tau$ .

P	500	1000	1500	2000	2500	3000
$\tau_{\max}$ kg/cm <sup>2</sup>	71,5	143	214,5	286	357,5	429

## ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НА ПРАКТИКЕ ТЕОРИИ СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ С ДВУХСТОРОННЕЙ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

### Резюме

Вопрос стержня рассмотренный в настоящей работе помимо применённых простых математических приёмов является достаточно сложным из-за большого количества элементарных преобразований. В теории стержня, на ортотроповом основании как его назвал автор, выступают дифференциальные уравнения обыкновенные 6-го порядка. Общий интеграл этих уравнений является линейной комбинацией функции гиперболических и гармонических. Вопрос решён для случая сдвига под влиянием сосредоточенной силы действующей касательно.

Отдельно рассмотрен случай равномерной нагрузки. После рассмотрения теоретических основ автор приводит способ применения своих результатов к расчётам напряжений в колесах Кепе и многоканатных барабанах.

## DIE MÖGLICHKEIT DES PRAKTISCHEN AUSNUTZENS DER THEORIE DES STABES AUF EINER BETTUNG VON ZWEI RICHTUNGEN DER ELASTISCHEN CHARAKTERISTIK

### Zusammenfassung

Das Problem des Stabes, das in diesem Artikel besprochen wurde, ist trotz einfachen hier eingeführten mathematischen Formeln ziemlich kompliziert in Betracht der vielen elementaren Umbildungen. Wie der Verfasser feststellte, treten in der Theorie des Stabes auf orthotropischer Bettung normale Differentialgleichungen sechsten Grades auf. Das allgemeine Integral dieser Gleichungen ist eine lineare Kombination der Hyperbol und Kreis-funktionen. Das Problem wurde für den Fall, dass die Kräfte tangential wirken, gelöst. Ausserdem hat man in dem Artikel den Fall der gleichförmigen Belastung besprochen.

Nach Besprechung der teoretischen Grundlagen gibt der Verfasser Richtlinien für die Einführung seiner Ergebnisse in die Berechnung der Spannungen in Koepe-Treibrscheiben und Mehrseiltrommeln an.