

# Optische Hilfstafeln, Konstanten und Formeln

für den  
Optiker und Augenarzt

von

Sylvanus P. Thompson  
D. Sc.; F. R. S.

---

Autorisierte deutsche Überarbeitung

von

Dr. A. Miethe      und      Ch. Th. Sprague  
H. F. R. Ph. S.                      B. Sc.; Dr. phil.  
Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Berlin.

---

Halle a. S.  
Verlag von Wilhelm Knapp.  
1905.



Optische Anstalt  
**G. Rodenstock-München**

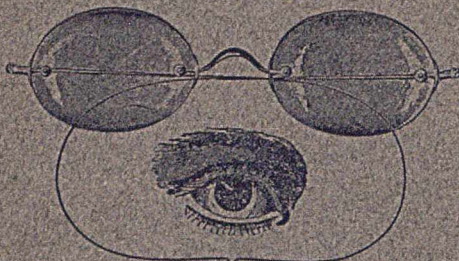
Isartalstraße 41

mit zweitem optischen Werk in Regen i. b. Wald.

Physiologische Abteilung:

**Spezialität:** Rodenstock's reflexfreie Dia-  
phragma-Brillen und Pince-nez  
mit und ohne Randeinfassung.

Rodenstock's Refraktometer  
(Optometer)  
und Probier-Gläserkasten zum  
Prüfen der Augen und  
Bestimmung der Brillengläser.



Refraktions-Augenspiegel,  
Ophthalmoscope, Probier-  
brilleinfassungen und Brillen-  
Annessapparate, Sphärometer,  
Loupen, Leseblätter.

Anfertigung von Brillengläsern in allen Größen u. Schleifarten  
wie sphärisch bi-, periskopisch, cylindrisch, sphärisch-prismatisch, sphäro-  
idisch, torisch etc. sowie nach speziellen Ordinationen und in allen Kombinationen.

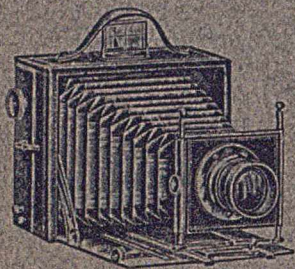
*Neu!* Rodenstock's neue Perpha-Brillengläser *Neu!*  
in allen Größen und Kombinationen.

Photographische Abteilung:

Rodenstock's erstklassige Anastigmat  
und Photographische Kameras.

Lichtstarke Anastigmat:

Heligonal F:5,2 \* Imagonal F:6  
Lumar F:4,5.



Universal-Anastigmatsatz

„Imagonal“ F:6,8

mit 8 verschiedenen Brennweiten.

Tele-Objektive, Aplanate, Bistigmat.  
Porträt- u. Kinematographen-Objektive.  
Projektions-Apparate und Objektive,  
Kondensatoren bis 1 m Linsengröße.

Preislisten gratis und franko.

Bezug durch die photograph. Handlungen  
oder direkt durch

Optische  
Anstalt

**G. Rodenstock-München**

Isartal-  
str. 41.



p. 302

Thompson

**Optische**  
**Hilfstafeln, Konstanten und Formeln**

für den

**Optiker und Augenarzt**

von

**Sylvanus P. Thompson**

D. Sc.; F. R. S.



Autorisierte deutsche Überarbeitung

von

**Dr. A. Miethe**

H. F. R. Ph. S.

Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Berlin.

und

**Ch. Th. Sprague**

B. Sc.; Dr. phil.



**Halle a. S.**

Verlag von Wilhelm Knapp.

1905.





141 140



## Vorwort der Übersetzer.

---

Ein elementares Nachschlagebuch für den Augenarzt und den Fabrikanten und Händler optischer Waren fehlte bisher in Deutschland.

Der Aufforderung, das hier vorliegende Werk von S. P. Thompson ins Deutsche zu übertragen, sind wir daher gern nachgekommen, haben aber die gestellte Aufgabe nicht ganz wörtlich verstehen zu müssen geglaubt, sondern an vielen Stellen Veränderungen und Ergänzungen, z. T. auch Streichungen vorgenommen, wo uns dies für unsere Verhältnisse geboten erschien; dabei haben wir versucht uns tunlichst an das Original in Anordnung und Auswahl des Stoffes zu halten.

Sollten sich spätere Neuauflagen nötig machen, so werden wir das Gebotene noch weiter zu ergänzen und manches nachzutragen haben, was für das deutsche Publikum vielleicht von Wert ist.

Charlottenburg, im Oktober 1904.

**A. Miethe. Ch. Sprague.**



0313/14



# Inhalt.

---

Nr.	Seite
1. Quadrate, Kuben, Wurzeln, Reciproke, Reciproke Quadrate und Logarithmen der Zahlen von 1—200 . . . . .	1
2. Vierstellige Logarithmen von 10—100 . . . . .	6
3. Natürliche Zahlen der Sinus, Cosinus, Tangenten . . . . .	8
4. Tangenten . . . . .	10
5. Sinus versus . . . . .	12
6. Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche, deren Quadrat- und Kubikwurzeln . . . . .	13
7. Vierundsechzigstel-Zolle in Dezimalbrüche des Zolles zu ver- wandeln . . . . .	13
8. Verwandlung englischer Zolle und ihrer Dezimalen in Millimeter	13
9. Verwandlung sechzehntel englischer Zolle in Millimeter . . .	14
10. Verwandlung englischer Fuß und Zoll in Millimeter . . . . .	15
11. Verwandlung von Millimetern in englische Zoll . . . . .	16
12. Verwandlung von Millimetern in englische Zoll . . . . .	17
13. Verwandlung von preußischen (rheinländischen) Zollen in Milli- meter und umgekehrt . . . . .	18
14. Tabelle zur Verwandlung verschiedener Längenmaße in Pariser Linien und in Meter . . . . .	18
15. Lichtgeschwindigkeit . . . . .	19
16. Wellenlänge und Schwingungszahlen des Lichtes . . . . .	21
17. Tabelle der optischen Konstanten der gebräuchlichsten Gläser von Schott & Genossen geordnet nach fallendem $\nu$ . . . . .	24
18. Chemische Zusammensetzung einiger wichtiger Gläser von Schott & Genossen . . . . .	26
19. Gläser von Chance Broth., Birmingham, nach fallendem $\nu$ ge- ordnet . . . . .	27
20. Verschiedene andere Glassorten nach fallendem $\nu$ geordnet nach Baille . . . . .	28
21. Der Einfluß der Temperatur auf den Brechungsindex der Gläser	28



Nr.	Seite
22. Brechungsindices verschiedener anderer einfach brechender Körper . . . . .	29
23. Brechungsindices verschiedener Flüssigkeiten . . . . .	30
24. Brechungsindices einiger wichtiger Kristalle . . . . .	32
25. Brechungsindices der Gase . . . . .	33
26. Brechung und Farbenzerstreuung trockner Luft . . . . .	34
27. Das Sphärometer . . . . .	34
28. Formeln zur Berechnung von Linsen und die Prinzipien, auf welche sie begündet sind . . . . .	38
29. Zusammenhang zwischen Stärke und Brennweite einer Linse .	44
30. Fokallänge und Stärke . . . . .	46
31. Einfluß der Stellung einer Linse auf ihre scheinbare Stärke .	47
32. Aufhebung der Linsenwirkung durch Kombination zweier Linsen . . . . .	49
33. Biegung sphärischer Linsen . . . . .	51
34. Die merkwürdigen Punkte eines Linsensystems . . . . .	54
35. Lage der äquivalenten oder Haupt-Punkte und -Ebenen . .	58
36. Formeln über die Beziehungen zwischen den Hauptpunkten und der Gestalt einer Linse . . . . .	59
37. Kombinationen von Linsen . . . . .	60
38. Hauptpunkte von Linsenkombinationen . . . . .	61
39. Kombination von zwei dicken Linsen . . . . .	68
40. Zylindrische Linsen . . . . .	70
41. Sphärozyklindrische Linsen . . . . .	74
42. Eigenschaften von gekreuzten Zylindern . . . . .	76
43. Ersatz von sphärozyklindrischen Kombinationen . . . . .	79
44. Regeln des Ersatzes . . . . .	81
45. Toroidale Linsen . . . . .	83
46. Schiefwinklig gekreuzte Zylinder . . . . .	84
47. Formeln für Prismen . . . . .	87
48. Prismen für Brillen . . . . .	88
49. Prismatische Wirkung einer exzentrisch gefaßten Linse . .	90
50. Umwandlung von Prismendioptrien in Bogengrade . . . . .	93
51. Dezentrierungs-Äquivalente . . . . .	94
52. Tabelle der Beziehungen zwischen Prismendioptrien und Graden der Ablenkung . . . . .	95
53. Umwandlung von Prismendioptrien im Prismenwinkel . . .	95
54. Schiefwinklig gekreuzte Prismen . . . . .	97
55. Konvergenz des Sehens. Meterwinkel . . . . .	97
56. Tabelle von Meterwinkeln . . . . .	98
57. Tabelle der Aberrationen der Linsen . . . . .	99
58. Notizen über Linsenaberrationen . . . . .	100
59. Achromatische Linsen . . . . .	101



Nr.	Seite
60. Sphärische Aberration . . . . .	106
61. Der optische Invariant . . . . .	109
62. Sphärische Aberration schiefer Strahlenbüschel . . . . .	111
63. Eintritts- und Austrittspupille . . . . .	113
64. Aberration durch die Öffnung bedingt . . . . .	115
65. Lineare Vergrößerung von Linsen verschiedener Brennweiten als Vergrößerungsgläser benutzt, wenn der Abstand des Nahpunktes vom Auge 250 mm beträgt . . . . .	116
65 a. Fall II. Abstand des Nahpunktes vom Auge = 300 mm . . . . .	117
66. Scheinbare Vergrößerung durch ein Vergrößerungsglas . . . . .	118
Fall I. Abstand des Nahpunktes vom Auge (p) 250 mm . . . . .	119
66 a. Fall II. Abstand des Nahpunktes vom Auge = 300 mm . . . . .	119
67. Tabelle der Dicken der zum Schleifen bestimmter Linsen nötigen Glasscheiben . . . . .	120
68. Tabelle der Krümmungsradien der Flächen, welche gegebenen Plankonvexlinsen anzuschleifen sind, um ihnen die Stärke von 1 Dioptrie zu geben . . . . .	122
69. Konstanten und Dimensionen des Auges . . . . .	123
70. Tabelle des Umfanges der Accomodation . . . . .	124
71. Brillen, welche wegen Presbyobie bei verschiedenen Altern nötig sind für Augen, welche in der Jugend normal waren . . . . .	124
72. Brechungsindices der beim Mikroskopieren gebräuchlichen Flüssigkeiten . . . . .	125
73. Tubuslänge von Mikroskopen, Länge in Millimetern, und Teile, welche von verschiedenen Optikern zur Tubuslänge ge- rechnet werden . . . . .	126
74. Vergrößerungskraft von Mikroskopen, mit Tubus von normaler Länge . . . . .	127
75. Numerische Apertur . . . . .	128
76. Tabelle der numerischen Apertur . . . . .	130
77. Tabelle der Tiefe der Bildschärfe oder größter Entfernung zweier Ebenen, welche bei verschiedenen Vergrößerungen zu gleicher Zeit scharf eingestellt sind . . . . .	130
78. Auflösungsvermögen von Mikroskopobjektiven . . . . .	131
79. Penetrationsvermögen und Tiefe der Bildschärfe, d. h. Ab- stand der Grenzebenen voneinander, welche, bei Be- nutzung verschiedener Objektive und eines A-Okulars, zu gleicher Zeit scharf eingestellt sind . . . . .	132
80. Tiefenschärfe . . . . .	132
81. Tabelle der Größe der Diffraktionsscheibe . . . . .	134
82. Entfernung der Projektionslaterne vom Schirm, welche einer bestimmten Bildgröße entspricht . . . . .	134



Nr.		Seite
83.	Reduktionstabelle für Figuren und Köpfe . . . . .	135
84.	Vergrößerungs- und Verkleinerungstabelle . . . . .	136
85.	Tabelle der Bildfeldwinkel für Kameras . . . . .	138
86.	Tabelle der Empfindlichkeit des normalen Auges gegen das Licht von verschiedenen Teilen des Spektrums . . .	139
87.	Relative Empfindungen des Auges für gleiche Energiemengen in verschiedenen Teilen des Spektrums . . . . .	139
88.	Photometrische Einheiten . . . . .	140
89.	Vergleich von photometrischen Normallichtquellen . . . .	141
90.	Diffuse Reflexion . . . . .	141
91.	Reflexionskoeffizienten in Prozenten des auffallenden Lichtes	143
92.	Farbe, spezifisches Gewicht und Härte von Edelsteinen . .	144
93.	Farben der Newtonschen Ringe (Luft) . . . . .	147

---



# Hilfstafeln

## zur Berechnung optischer Ausdrücke.

### 1. Quadrate, Kuben, Wurzeln, Reciproke, Reciproke Quadrate und Logarithmen der Zahlen von 1—200.

Zahl	Quadrat	Kubus	Quadrat- wurzel	Kubik- wurzel	Reci- prokes	Reciproker Quadrat	Logarithmus
$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	$\log n$
0	0	0	0·0000	0·0000	$\infty$	$\infty$	$-\infty$
1	1	1	1·0000	1·0000	1·00000	1·00000	0·0000
2	4	8	1·4142	1·2599	0·50000	0·25000	0·3010
3	9	27	1·7321	1·4422	0·33333	·11111	0·4771
4	16	64	2·0000	1·5874	0·25000	·06250	0·6021
5	25	125	2·2361	1·7100	0·20000	·04000	0·6990
6	36	216	2·4495	1·8171	0·16667	·02778	0·7782
7	49	343	2·6458	1·9129	0·14286	·02048	0·8451
8	64	512	2·8284	2·0000	0·12500	·01562	0·9031
9	81	729	3·0000	2·0801	0·11111	·01234	0·9542
10	100	1000	3·1623	2·1544	0·10000	·01000	1·0000
11	121	1331	3·3166	2·2240	0·09091	0·0082645	1·0414
12	144	1728	3·4641	2·2894	0·08333	69444	1·0792
13	169	2197	3·6056	2·3513	0·07692	59172	1·1139
14	196	2744	3·7417	2·4101	0·07143	51020	1·1461
15	225	3375	3·8730	2·4662	0·06667	44444	1·1761
16	256	4096	4·0000	2·5198	0·06250	39062	1·2041
17	289	4913	4·1231	2·5713	0·05882	34602	1·2304
18	324	5832	4·2426	2·6207	0·05556	30864	1·2553
19	361	6859	4·3589	2·6684	0·05263	27701	1·2788
20	400	8000	4·4721	2·7144	0·05000	25000	1·3010



$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	$\log n$
21	441	9261	4.5826	2.7589	0.04762	0.0022675	1.3222
22	484	10648	4.6904	2.8020	0.04545	20661	1.3424
23	529	12167	4.7958	2.8439	0.04348	18903	1.3617
24	576	13824	4.8990	2.8845	0.04167	17361	1.3802
25	625	15625	5.0000	2.9240	0.04000	16000	1.3979
26	676	17576	5.0990	2.9625	0.03846	14791	1.4150
27	729	19683	5.1962	3.0000	0.03704	13717	1.4314
28	784	21952	5.2915	3.0366	0.03571	12755	1.4472
29	841	24389	5.3852	3.0723	0.03448	11891	1.4624
30	900	27000	5.4772	3.1072	0.03333	11111	1.4771
31	961	29791	5.5678	3.1414	0.03226	0.0010406	1.4914
32	1024	32768	5.6569	3.1748	0.03125	0.00097656	1.5051
33	1089	35937	5.7446	3.2075	0.03030	91827	1.5185
34	1156	39304	5.8310	3.2396	0.02941	86505	1.5315
35	1225	42875	5.9161	3.2711	0.02857	81633	1.5441
36	1296	46656	6.0000	3.3019	0.02778	77160	1.5563
37	1369	50653	6.0828	3.3322	0.02703	73046	1.5682
38	1444	54872	6.1644	3.3620	0.02632	69252	1.5798
39	1521	59319	6.2450	3.3912	0.02564	65746	1.5911
40	1600	64000	6.3246	3.4200	0.02500	62500	1.6021
41	1681	68921	6.4031	3.4482	0.02439	0.00059488	1.6128
42	1764	74088	6.4807	3.4760	0.02381	56689	1.6332
43	1849	79507	6.5574	3.5034	0.02326	54083	1.6335
44	1936	85184	6.6332	3.5303	0.02273	51653	1.6435
45	2025	91125	6.7082	3.5569	0.02222	49383	1.6532
46	2116	97336	6.7823	3.5830	0.02174	47259	1.6628
47	2209	103823	6.8557	3.6088	0.02128	45269	1.6721
48	2304	110592	6.9282	3.6342	0.02083	43403	1.6812
49	2401	117649	7.0000	3.6593	0.02041	41649	1.6902
50	2600	125000	7.0711	3.6840	0.02000	40000	1.6990
51	2601	132651	7.1414	3.7084	0.01961	0.00038447	1.7076
52	2704	140608	7.2111	3.7325	0.01923	36982	1.7160
53	2809	148877	7.2801	3.7563	0.01887	35510	1.7243
54	2916	157464	7.3485	3.7798	0.01852	34293	1.7324
55	3025	166375	7.4162	3.8030	0.01818	33058	1.7404
56	3136	175616	7.4833	3.8259	0.01786	31888	1.7482
57	3249	185193	7.5498	3.8485	0.01754	30779	1.7559
58	3364	195112	7.6158	3.8709	0.01724	29726	1.7634
59	3481	205379	7.6811	3.8930	0.01695	28727	1.7709
60	3600	216000	7.7460	3.9149	0.01667	27778	1.7782
61	3721	226981	7.8102	3.9365	0.01639	0.00026874	1.7853
62	3844	238328	7.8740	3.9579	0.01613	26014	1.7924
63	3969	250047	7.9373	3.9791	0.01587	25195	1.7993
64	4096	262144	8.0000	4.0000	0.01563	24414	1.8062
65	4225	274625	8.0623	4.0207	0.01538	23669	1.8129



$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	$\log n$
66	4356	287496	8.1240	4.0412	0.01515	0.00022957	1.8195
67	4489	300763	8.1854	4.0615	0.01493	22277	1.8261
68	4624	314432	8.2462	4.0817	0.01471	21626	1.8325
69	4761	328509	8.3066	4.1016	0.01449	21004	1.8388
70	4900	343000	8.3666	4.1213	0.01429	20408	1.8451
71	5041	357911	8.4261	4.1408	0.01408	0.00019837	1.8513
72	5184	373248	8.4853	4.1602	0.01389	19290	1.8573
73	5329	389017	8.5440	4.1793	0.01370	18765	1.8633
74	5476	405224	8.6033	4.1983	0.01351	18261	1.8692
75	5625	421875	8.6603	4.2172	0.01333	17778	1.8751
76	5776	438976	8.7178	4.2358	0.01316	17313	1.8808
77	5929	456533	8.7750	4.2543	0.01299	16866	1.8865
78	6084	474552	8.8318	4.2727	0.01282	16436	1.8921
79	6241	493039	8.8882	4.2908	0.01266	16023	1.8976
80	6400	512000	8.9443	4.3089	0.01250	15625	1.9031
81	6561	531441	9.0000	4.3267	0.01235	0.00015242	1.9085
82	6724	551368	9.0554	4.3445	0.01220	14872	1.9138
83	6889	571787	9.1104	4.3621	0.01205	14512	1.9191
84	7056	592704	9.1652	4.3795	0.01190	14172	1.9243
85	7225	614125	9.2195	4.3968	0.01176	13841	1.9294
86	7396	636056	9.2736	4.4140	0.01163	13521	1.9345
87	7569	658503	9.3274	4.4310	0.01149	13212	1.9395
88	7744	681472	9.3808	4.4480	0.01136	12913	1.9445
89	7921	704969	9.4340	4.4647	0.01124	12625	1.9494
90	8100	729000	9.4868	4.4814	0.01111	12346	1.9542
91	8281	753571	9.5394	4.4979	0.01099	0.00012076	1.9590
92	8464	778688	9.5917	4.5144	0.01087	11815	1.9638
93	8649	804357	9.6437	4.5307	0.01075	11562	1.9685
94	8836	830584	9.6954	4.5468	0.01064	11317	1.9771
95	9025	857375	9.7468	4.5629	0.01053	11080	1.9777
96	9216	884736	9.7980	4.5789	0.01042	10851	1.9823
97	9409	912673	9.8489	4.5947	0.01031	10628	1.9868
98	9604	941192	9.8995	4.6104	0.01020	10412	1.9912
99	9801	970299	9.9499	4.6261	0.01010	10203	1.9956
100	10000	1000000	10.0000	4.6416	0.01000	10000	2.0000
101	10201	1030301	10.0499	4.6570	0.00990	0.00009803	2.0043
102	10404	1061208	10.0995	4.6723	0.00980	9612	2.0086
103	10609	1092727	10.1489	4.6875	0.00971	9426	2.0128
104	10816	1124864	10.1980	4.7027	0.00962	9245	2.0170
105	11025	1157625	10.2470	4.7177	0.00952	9070	2.0212
106	11236	1191016	10.2956	4.7326	0.00943	8900	2.0253
107	11449	1225043	10.3441	4.7475	0.00935	8734	2.0294
108	11664	1259712	10.3923	4.7622	0.00926	8573	2.0334
109	11881	1295029	10.4403	4.7769	0.00917	8417	2.0374
110	12100	1331000	10.4881	4.7914	0.00909	8333	2.0414



$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	$\log n$
111	12321	1367631	10·5357	4·8059	0·00901	0·00008116	2·0453
112	12544	1404928	10·5830	4·8203	0·00893	7972	2·0492
113	12769	1442897	10·6301	4·8346	0·00885	7831	2·0531
114	12996	1481544	10·6771	4·8488	0·00877	7696	2·0569
115	13225	1520875	10·7238	4·8629	0·00870	7560	2·0607
116	13456	1560896	10·7703	4·8770	0·00862	7432	2·0645
117	13689	1601613	10·8167	4·8910	0·00855	7305	2·0682
118	13924	1643032	10·8628	4·9049	0·00847	7182	2·0719
119	14161	1685159	10·9087	4·9187	0·00840	7062	2·0755
120	14400	1728000	10·9545	4·9324	0·00833	6944	2·0792
121	14641	1771561	11·0000	4·9461	0·00826	0·00006830	2·0828
122	14884	1815848	11·0454	4·9597	0·00820	6719	2·0864
123	15129	1860867	11·0905	4·9732	0·00813	6610	2·0899
124	15376	1906624	11·1355	4·9866	0·00806	6561	2·0934
125	15625	1953125	11·1803	5·0000	0·00800	6404	2·0969
126	15876	2000376	11·2250	5·0133	0·00794	6299	2·1004
127	16129	2048383	11·2694	5·0265	0·00787	6200	2·1038
128	16384	2097152	11·3137	5·0397	0·00781	6104	2·1072
129	16641	2146689	11·3578	5·0528	0·00775	6009	2·1106
130	16900	2197000	11·4018	5·0658	0·00769	5917	2·1139
131	17161	2248091	11·4455	5·0788	0·00763	0·00005827	2·1173
132	17424	2299968	11·4891	5·0916	0·00758	5739	2·1206
133	17689	2352637	11·5326	5·1045	0·00752	5653	2·1239
134	17956	2406104	11·5758	5·1172	0·00746	5568	2·1271
135	18225	2460375	11·6190	5·1299	0·00741	5487	2·1303
136	18496	2515456	11·6619	5·1426	0·00735	5407	2·1335
137	18769	2571353	11·7047	5·1551	0·00730	5328	3·1367
138	19044	2628072	11·7473	5·1676	0·00725	5251	2·1399
139	19321	2685619	11·7898	5·1801	0·00719	5175	2·1430
140	19600	2744000	11·8322	5·1925	0·00714	5102	2·1461
141	19881	2803221	11·8743	5·2048	0·00709	0·00005030	2·1492
142	20164	2863288	11·9164	5·2171	0·00704	4959	2·1523
143	20449	2924207	11·9583	5·2293	0·00699	4890	2·1553
144	20736	2985984	12·0000	5·2415	0·00694	4822	2·1584
145	21025	3048625	12·0416	5·2536	0·00690	4756	2·1614
146	21316	3112136	12·0830	5·2656	0·00685	4691	2·1644
147	21609	3176523	12·1244	5·2776	0·00680	4628	2·1673
148	21904	3241792	12·1655	5·2896	0·00676	4565	2·1703
149	22201	3307949	12·2066	5·3015	0·00671	4504	2·1732
150	22500	3375000	12·2474	5·3133	0·00667	4444	2·1761
151	22801	3442951	12·2882	5·3251	0·00662	0·00004386	2·1790
152	23104	3511808	12·3288	5·3368	0·00658	4328	2·1818
153	23409	3581577	12·3693	5·3485	0·00654	4272	2·1847
154	23716	3652264	12·4097	5·3601	0·00649	4217	2·1875
155	24025	3723875	12·4499	5·3717	0·00645	4162	2·1903



$n$	$n^2$	$n^3$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	$\log n$
156	24336	3796416	12·4900	5·3832	0·00641	0·00004109	2·1931
157	24649	3869893	12·5300	5·3947	0·00637	4057	2·1959
158	24964	3944312	12·5698	5·4061	0·00633	4006	2·1987
159	25281	4019679	12·6095	5·4175	0·00629	3956	2·2014
160	25600	4096000	12·6491	5·4288	0·00625	3906	2·2041
161	25921	4173281	12·6886	5·4401	0·00621	0·00003858	2·2068
162	26244	4251528	12·7279	5·4514	0·00617	3810	2·2095
163	26569	4330747	12·7671	5·4626	0·00613	3764	2·2122
164	26896	4410944	12·8062	5·4737	0·00610	3718	2·2148
165	27225	4492125	12·8452	5·4848	0·00606	3673	2·2175
166	27556	4574296	12·8841	5·4959	0·00602	3629	2·2201
167	27889	4657463	12·9228	5·5069	0·00599	3586	2·2227
168	28224	4741632	12·9615	5·5178	0·00595	3543	2·2253
169	28561	4826809	13·0000	5·5288	0·00592	3501	2·2279
170	28900	4913000	13·0384	5·5397	0·00588	3460	2·2304
171	29241	5000211	13·0767	5·5505	0·00585	0·00003420	2·2330
172	29584	5088448	13·1149	5·5613	0·00581	3380	2·2355
173	29929	5177717	13·1529	5·5721	0·00578	3341	2·2380
174	30276	5268024	13·1909	5·5828	0·00575	3303	2·2405
175	30625	5359375	13·2288	5·5934	0·00571	3266	2·2430
176	30976	5451776	13·2665	5·6041	0·00568	3228	2·2455
177	31329	5545233	13·3041	5·6147	0·00565	3192	2·2480
178	31684	5639752	13·3417	5·6252	0·00562	3156	2·2504
179	32041	5735339	13·3791	5·6357	0·00559	3121	2·2529
180	32400	5832000	13·4164	5·6462	0·00556	3086	2·2553
181	32761	5929741	13·4536	5·6567	0·00552	0·00003052	2·2577
182	33124	6028568	13·4907	5·6671	0·00549	3019	2·2601
183	33489	6128487	13·5277	5·6774	0·00546	2986	2·2625
184	33856	6229504	13·5647	5·6877	0·00543	2954	2·2648
185	34225	6331625	13·6015	5·6980	0·00541	2922	2·2672
186	34596	6434856	13·6382	5·7083	0·00538	2891	2·2695
187	34969	6539203	13·6748	5·7185	0·00535	2860	2·2718
188	35344	6644672	13·7113	5·7287	0·00532	2829	2·2742
189	35721	6751269	13·7477	5·7388	0·00529	2799	2·2765
190	36100	6859000	13·7840	5·7489	0·00526	2770	2·2788
191	36481	6967871	13·8203	5·7590	0·00524	0·00002741	2·2810
192	36864	7077888	13·8564	5·7690	0·00521	2713	2·2833
193	37249	7189057	13·8924	5·7790	0·00518	2685	2·2856
194	37636	7301384	13·9284	5·7890	0·00515	2657	2·2878
195	38025	7414875	13·9642	5·7989	0·00513	2630	2·2900
196	38416	7529536	14·0000	5·8088	0·00510	2603	2·2923
197	38809	7645373	14·0357	5·8186	0·00508	2577	2·2945
198	39204	7762392	14·0712	5·8285	0·00505	2551	2·2967
199	39601	7880599	14·1067	5·8383	0·00503	2525	2·2989
200	40000	8000000	14·1421	5·8480	0·00500	2500	2·3010



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039	0	1	1	2	2	3	3	3	4



## 3.

## Natürliche Zahlen der Sinus, Cosinus, Tangenten.

## Sinus.

	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	1'	2'	3'	4'	5'	
0°	0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15	89
1	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15	88
2	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15	87
3	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15	86
4	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	15	85
5	0871	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14	84
6	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14	83
7	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14	82
8	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14	81
9	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14	80
10	1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	12	14	79
11	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14	78
12	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2232	3	6	9	11	14	77
13	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14	76
14	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14	75
15	2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14	74
16	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14	73
17	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14	72
18	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14	71
19	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14	70
20	3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14	69
21	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14	68
22	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14	67
23	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14	66
24	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13	65
25	4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13	64
26	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13	63
27	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13	62
28	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13	61
29	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13	60
30	5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13	59
31	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12	58
32	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12	57
33	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12	56
34	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12	55
35	5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12	54
36	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12	53
37	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12	52
38	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11	51
39	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11	50
40	6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11	49
41	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11	48
42	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11	47
43	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11	46

Cosinus.



Sinus.

	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	1'	2'	3'	4'	5'	
44	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10	45
45°	7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10	44
46	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10	43
47	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10	42
48	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10	41
49	7547	7558	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9	40
50	7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9	39
51	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7769	2	4	5	7	9	38
52	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9	37
53	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9	36
54	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8	35
55	8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8	34
56	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8	33
57	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8	32
58	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8	31
59	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7	30
60	8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7	29
61	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7	28
62	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7	27
63	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6	26
64	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6	25
65	9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6	24
66	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6	23
67	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6	22
68	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5	21
69	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5	20
70	9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5	19
71	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5	18
72	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	4	4	17
73	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4	16
74	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4	15
75	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4	14
76	9703	9707	9711	9716	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3	13
77	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3	12
78	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3	11
79	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3	10
80	9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2	9
81	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2	8
82	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2	7
83	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2	6
84	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2	5
85	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1	4
86	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1	3
87	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1	2
88	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0	1
89	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0	0
90	1·000	..	..	..	..	..	..	..	..	..						0

	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	1'	2'	3'	4'	5'
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----	----	----	----	----	----

Cosinus.



	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	1'	2'	3'	4'	5'
0°	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	14
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	·0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	·0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	·0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	·1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	·1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	·1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	·1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	·1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	·1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	·2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	·2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	·2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	·2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	·2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	·3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	·3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	·3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	6	10	13	17
20	·3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	·3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	·4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	·4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	·4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	10	14	18
25	·4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	·4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	·5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	·5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	·5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	·5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	·6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	·6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	·6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	·6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	·7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	·7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	·7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	·7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	10	14	19	24
39	·8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	·8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	·8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	·9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	·9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	·9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29
45°	1·0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30



## Tangenten.

	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	1'	2'	3'	4'	5'
46	1.0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6 12	18	25	31	
47	1.0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6 13	19	25	32	
48	1.1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7 13	20	26	33	
49	1.1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7 14	21	28	34	
50	1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7 14	22	29	36	
51	1.2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8 15	23	30	38	
52	1.2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8 16	23	31	39	
53	1.3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8 16	25	33	41	
54	1.3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9 17	26	34	43	
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9 18	27	36	45	
56	1.4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10 19	29	38	48	
57	1.5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10 20	30	40	50	
58	1.6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11 21	32	43	53	
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11 23	34	45	56	
60	1.7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12 24	36	48	60	
61	1.8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13 26	38	51	64	
62	1.8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14 27	41	55	68	
63	1.9626	9711	9797	9883	9970	0057	0145	0233	0323	0413	15 29	44	58	73	
64	2.0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16 31	47	63	78	
65	2.1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17 34	51	68	85	
66	2.2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18 37	55	74	92	
67	2.3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20 40	60	79	99	
68	2.4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22 43	65	87	108	
69	2.6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24 47	71	95	118	
70	2.7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26 52	78	104	13	
71	2.9042	9208	9375	9544	9714	9887	0061	0237	0415	0595	29 58	87	115	144	
72	3.0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32 64	96	129	161	
73	3.2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36 72	108	144	180	
74	3.4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41 81	122	162	203	
75	3.7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46 93	139	186	232	
76	4.0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972					
77	4.3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646					
78	4.7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	0045	0504	0970					
79	5.1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140					
80	5.6713	7297	7894	8502	9124	9758	0405	1066	1742	2432					
81	6.3138	3859	4596	5350	6122	6912	7920	8548	9395	0264					
82	7.1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	0285					
83	8.1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	0579	2052	3572					
84	9.5144	9.677	9.845	10.02	10.20	10.39	10.58	10.78	10.99	11.20					
85	11.43	11.66	11.91	12.16	12.43	12.71	13.00	13.30	13.62	13.95					
86	14.30	14.67	15.06	15.46	15.89	16.35	16.83	17.34	17.89	18.46					
87	19.08	19.74	20.45	21.20	21.02	22.90	23.86	24.90	26.03	27.27					
88	28.64	30.14	31.82	33.69	35.80	38.19	40.92	44.07	47.74	52.08					
89	57.29	63.66	71.62	81.85	95.49	114.6	143.2	191.0	286.5	573.0					
90	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞					



## 5.

## Sinus versus.

Winkel °.	sin. vers. ø.	Winkel °.	sin. vers. ø.	Winkel °.	sin. vers. ø.	Winkel °.	sin. vers. ø.	Winkel °.	sin. vers. ø.
5°	0·0000	18·5	0·0517	36·5	0·1961	54·5	0·4193	72·5	0·6993
1°	0·0002	19	0·0545	37	0·2014	55	0·4264	73	0·7076
1·5°	0·0003	19·5	0·0574	37·5	0·2066	55·5	0·4336	73·5	0·7160
2°	0·0006	20	0·0603	38	0·2120	56	0·4408	74	0·7244
2·5	0·0010	20·5	0·0633	38·5	0·2174	56·5	0·4481	74·5	0·7328
3	0·0014	21	0·0664	39	0·2229	57	0·4554	75	0·7412
3·5	0·0019	21·5	0·0696	39·5	0·2284	57·5	0·4627	75·5	0·7496
4	0·0024	22	0·0728	40	0·2340	58	0·4701	76	0·7581
4·5	0·0031	22·5	0·0761	40·5	0·2396	58·5	0·4775	76·5	0·7666
5	0·0038	23	0·0795	41	0·2453	59	0·4850	77	0·7750
5·5	0·0046	23·5	0·0829	41·5	0·2510	59·5	0·4925	77·5	0·7836
6	0·0055	24	0·0865	42	0·2569	60	0·5000	78	0·7921
6·5	0·0064	24·5	0·0900	42·5	0·2627	60·5	0·5076	78·5	0·8006
7	0·0075	25	0·0937	43	0·2686	61	0·5152	79	0·8092
7·5	0·0086	25·5	0·0974	43·5	0·2746	61·5	0·5228	79·5	0·8178
8	0·0097	26	0·1012	44	0·2807	62	0·5305	80	0·8264
8·5	0·0110	26·5	0·1051	44·5	0·2867	62·5	0·5383	80·5	0·8350
9	0·0123	27	0·1090	45	0·2929	63	0·5460	81	0·8436
9·5	0·0137	27·5	0·1130	45·5	0·2991	63·5	0·5538	81·5	0·8522
10	0·0152	28	0·1171	46	0·3053	64	0·5616	82	0·8608
10·5	0·0167	28·5	0·1212	46·5	0·3116	64·5	0·5695	82·5	0·8695
11	0·0184	29	0·1254	47	0·3180	65	0·5774	83	0·8781
11·5	0·0201	29·5	0·1296	47·5	0·3244	65·5	0·5853	83·5	0·8868
12	0·0219	30	0·1340	48	0·3309	66	0·5933	84	0·8955
12·5	0·0237	30·5	0·1384	48·5	0·3374	66·5	0·6013	84·5	0·9042
13	0·0256	31	0·1428	49	0·3439	67	0·6093	85	0·9128
13·5	0·0276	31·5	0·1474	49·5	0·3506	67·5	0·6173	85·5	0·9215
14	0·0297	32	0·1520	50	0·3572	68	0·6254	86	0·9302
14·5	0·0319	32·5	0·1566	50·5	0·3639	68·5	0·6335	86·5	0·9390
15	0·0341	33	0·1613	51	0·3707	69	0·6416	87	0·9477
15·5	0·0364	33·5	0·1661	51·5	0·3775	69·5	0·6498	87·5	0·9564
16	0·0387	34	0·1710	52	0·3843	70	0·6580	88	0·9651
16·5	0·0412	34·5	0·1759	52·5	0·3912	70·5	0·6662	88·5	0·9738
17	0·0437	35	0·1808	53	0·3982	71	0·6744	89	0·9825
17·5	0·0463	35·5	0·1859	53·5	0·4052	71·5	0·6827	89·5	0·9913
18	0·0489	36	0·1910	54	0·4122	72	0·6910	90	1·0000



## 6. Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche, deren Quadrat- und Kubikwurzeln.

Bruch	Dezimalbruch	Quadratwurzel	Kubikwurzel	Bruch	Dezimalbruch	Quadratwurzel	Kubikwurzel
$\frac{1}{2}$	0.5000	0.707	0.794	$\frac{3}{8}$	0.3750	0.612	0.721
$\frac{1}{3}$	0.3333	0.577	0.693	$\frac{5}{8}$	0.6250	0.791	0.855
$\frac{2}{3}$	0.6667	0.816	0.874	$\frac{7}{8}$	0.8750	0.935	0.956
$\frac{1}{4}$	0.2500	0.500	0.630	$\frac{1}{9}$	0.1111	0.333	0.481
$\frac{3}{4}$	0.7500	0.866	0.909	$\frac{2}{9}$	0.2222	0.471	0.606
$\frac{1}{6}$	0.1667	0.408	0.550	$\frac{4}{9}$	0.4444	0.667	0.763
$\frac{5}{6}$	0.8333	0.913	0.941	$\frac{5}{9}$	0.5556	0.745	0.822
$\frac{1}{7}$	0.1428	0.378	0.523	$\frac{7}{9}$	0.7778	0.882	0.920
$\frac{2}{7}$	0.2857	0.535	0.659	$\frac{8}{9}$	0.8889	0.943	0.961
$\frac{3}{7}$	0.4286	0.655	0.754	$\frac{1}{12}$	0.0833	0.289	0.437
$\frac{4}{7}$	0.5714	0.756	0.830	$\frac{5}{12}$	0.4167	0.645	0.747
$\frac{5}{7}$	0.7143	0.845	0.894	$\frac{7}{12}$	0.5833	0.764	0.836
$\frac{6}{7}$	0.8571	0.926	0.950	$\frac{11}{12}$	0.9166	0.957	0.971
$\frac{1}{8}$	0.1250	0.354	0.500	$\frac{1}{15}$	0.0667	0.258	0.405

## 7. Vierundsechzigstel Zolle in Dezimalbrüche des Zolles zu verwandeln.

$\frac{1}{64}$	0.015625	$\frac{17}{64}$	0.265625	$\frac{33}{64}$	0.515625	$\frac{49}{64}$	0.765625
$\frac{1}{32}$	0.03125	$\frac{9}{32}$	0.28125	$\frac{17}{32}$	0.53125	$\frac{25}{32}$	0.78125
$\frac{3}{64}$	0.046875	$\frac{19}{64}$	0.296875	$\frac{35}{64}$	0.546875	$\frac{51}{64}$	0.796875
$\frac{1}{16}$	0.0625	$\frac{5}{16}$	0.3125	$\frac{9}{16}$	0.5625	$\frac{13}{16}$	0.8125
$\frac{5}{64}$	0.078125	$\frac{21}{64}$	0.328125	$\frac{37}{64}$	0.578125	$\frac{53}{64}$	0.828125
$\frac{3}{32}$	0.09375	$\frac{11}{32}$	0.34375	$\frac{19}{32}$	0.59375	$\frac{27}{32}$	0.84375
$\frac{7}{64}$	0.109375	$\frac{23}{64}$	0.359375	$\frac{39}{64}$	0.609375	$\frac{55}{64}$	0.859375
$\frac{1}{8}$	0.125	$\frac{3}{8}$	0.375	$\frac{5}{8}$	0.625	$\frac{7}{8}$	0.875
$\frac{9}{64}$	0.140625	$\frac{25}{64}$	0.390625	$\frac{41}{64}$	0.640625	$\frac{57}{64}$	0.890625
$\frac{5}{32}$	0.15625	$\frac{13}{32}$	0.40625	$\frac{21}{32}$	0.65625	$\frac{29}{32}$	0.90625
$\frac{11}{64}$	0.171875	$\frac{27}{64}$	0.421875	$\frac{43}{64}$	0.671875	$\frac{59}{64}$	0.921875
$\frac{3}{16}$	0.1875	$\frac{7}{16}$	0.4375	$\frac{11}{16}$	0.6875	$\frac{15}{16}$	0.9375
$\frac{13}{64}$	0.203125	$\frac{29}{64}$	0.453125	$\frac{45}{64}$	0.703125	$\frac{61}{64}$	0.953125
$\frac{7}{32}$	0.21875	$\frac{15}{32}$	0.46875	$\frac{23}{32}$	0.71875	$\frac{31}{32}$	0.96875
$\frac{15}{64}$	0.234375	$\frac{31}{64}$	0.484375	$\frac{47}{64}$	0.734375	$\frac{63}{64}$	0.984375
$\frac{1}{4}$	0.25	$\frac{1}{2}$	0.5	$\frac{3}{4}$	0.75		

## 8. Verwandlung englischer Zolle und ihre Dezimalen in Millimeter.

Zoll engl.	0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9
0	0.00	2.54	5.08	7.62	10.16	12.70	15.24	17.78	20.32	22.86
1	25.40	27.94	30.48	33.02	35.56	38.10	40.64	43.18	45.72	48.26
2	50.80	53.34	55.88	58.42	60.96	63.50	66.04	68.58	71.12	73.66
3	76.20	78.74	81.28	83.82	86.36	88.90	91.44	93.98	96.52	99.06
4	101.6	104.14	106.68	109.22	111.76	114.30	116.84	119.38	121.92	124.46
5	127.0	129.54	132.08	134.62	137.16	139.70	142.24	144.78	147.32	149.86
6	152.4	154.94	157.48	160.02	162.56	165.10	167.64	170.18	172.72	175.26
7	177.8	180.34	182.88	185.42	187.96	190.50	193.04	195.58	198.12	200.66
8	203.2	205.74	208.28	210.82	213.36	215.90	218.44	220.98	223.52	226.06
9	228.6	231.14	233.68	236.22	238.76	241.30	243.84	246.38	248.92	251.46
10	254.0	256.54	259.08	261.62	264.16	266.70	269.24	271.78	274.32	276.86
11	279.4	281.94	284.48	287.02	289.56	292.10	294.64	297.18	299.72	302.26



## 9.

## Verwandlung sechszehntel englischer Zolle in Millimeter.

Zolle engl.	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$
0	0.0	1.59	3.18	4.76	6.35	7.94	9.53	11.11	12.70	14.29	15.88	17.46	19.05	20.64	22.23	23.81
1	25.4	26.99	28.57	30.16	31.75	33.34	34.92	36.51	38.10	39.69	41.27	42.86	44.45	46.04	47.62	49.21
2	50.8	52.39	53.97	55.56	57.15	58.74	60.32	60.91	63.50	65.09	66.67	68.26	69.85	71.44	73.02	74.61
3	76.2	77.79	79.37	80.96	82.55	84.14	85.72	87.31	88.90	90.49	92.07	93.66	95.25	96.84	98.42	100.0
4	101.6	103.1	104.8	106.4	108.0	109.5	111.1	112.7	114.3	115.9	117.5	119.1	120.7	122.2	123.8	125.4
5	127.0	128.6	130.2	131.8	133.4	134.9	136.5	138.1	139.7	141.3	142.9	144.5	146.1	147.6	149.2	150.8
6	152.4	154.0	155.6	157.2	158.8	160.5	161.9	163.5	165.1	166.7	168.3	169.9	171.5	173.0	174.6	176.2
7	177.8	174.9	181.0	182.6	184.2	185.7	187.3	188.9	190.5	192.1	193.7	195.3	196.9	198.0	200.1	201.6
8	203.2	204.8	206.4	208.0	209.6	211.1	212.7	214.3	215.9	217.5	219.1	220.7	222.3	223.8	225.4	227.0
9	228.6	230.2	231.8	233.4	235.0	236.5	238.1	239.7	241.3	242.9	244.5	246.1	247.7	249.2	250.8	252.4
10	254.0	255.6	257.2	258.8	260.4	261.9	263.5	265.1	266.7	268.3	269.9	271.5	273.1	274.6	276.2	277.8
11	279.4	281.0	282.6	284.2	285.7	287.3	288.9	290.5	292.1	293.7	295.3	296.9	298.6	300.0	301.6	303.1



## 10.

## Verwandlung englischer Fuß und Zoll in Millimeter.

Engl. Fuß	Englische Zoll											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0·00	25·4	50·8	76·2	101·6	127·0	152·4	177·8	203·2	228·6	254·0	279·4
1	304·8	330·2	355·6	381·0	406·4	431·8	457·2	482·6	508·0	533·4	558·8	584·2
2	609·6	635·0	660·4	685·8	711·2	736·6	762·0	787·4	812·8	838·2	863·6	889·0
3	914·4	939·8	965·2	990·6	1016·0	1041·4	1066·8	1092·2	1117·6	1143·0	1168·4	1193·8
4	1219·2	1244·6	1270·0	1295·4	1320·8	1346·2	1371·6	1397·0	1422·4	1447·8	1473·2	1498·6
5	1524·0	1549·4	1574·8	1600·2	1625·6	1651·0	1676·4	1701·8	1727·2	1752·6	1778·0	1803·4
6	1828·8	1854·2	1879·6	1905·0	1930·4	1955·8	1981·2	2006·6	2032·0	2057·4	2082·8	2108·2
7	2133·6	2159·0	2184·4	2209·8	2235·2	2260·6	2286·0	2311·4	2336·8	2362·2	2387·6	2413·0
8	2438·4	2463·8	2489·2	2514·6	2540·0	2565·4	2590·8	2616·2	2641·6	2667·0	2692·4	2717·8
9	2743·2	2768·6	2794·0	2819·4	2844·8	2870·2	2895·6	2921·0	2946·4	2971·8	2997·2	3022·6



# II.

## Verwandlung von Millimeter in englische Zoll.

Milli- meter	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.0000	0.03937	0.07874	0.11811	0.15748	0.19685	0.23622	0.27560	0.31497	0.35434
10	0.3937	0.43307	0.47244	0.51181	0.55118	0.59055	0.62992	0.66930	0.70867	0.74804
20	0.7874	0.82677	0.86614	0.90551	0.94488	0.98425	1.02362	1.06300	1.10237	1.13174
30	1.1811	1.22047	1.25984	1.29921	1.33858	1.37795	1.41732	1.45670	1.49607	1.53544
40	1.5748	1.61417	1.65354	1.69291	1.73228	1.77165	1.81102	1.85040	1.88977	1.92914
50	1.9685	2.00787	2.04724	2.08661	2.12598	2.16535	2.20472	2.24410	2.28347	2.32284
60	2.3622	2.40157	2.44094	2.48031	2.51968	2.55905	2.59842	2.63780	2.67717	2.71654
70	2.7560	2.79537	2.83474	2.87411	2.91348	2.95285	2.99222	3.03160	3.07097	3.11034
80	3.1497	3.18907	3.22844	3.26781	3.30718	3.34655	3.38592	3.42530	3.46467	3.50404
90	3.5434	3.58277	3.62214	3.66151	3.70088	3.74025	3.77962	3.81900	3.85837	3.89774



## 12.

Verwandlung von Millimetern in englische Zoll.

Millimeter	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0.0000	0.3937	0.7874	1.1811	1.5748	1.9685	2.3622	2.7560	3.1497	3.5434
100	3.937	4.331	4.724	5.118	5.512	5.906	6.299	6.693	7.087	7.480
200	7.874	8.268	8.661	9.055	9.449	9.843	10.236	10.630	11.024	11.417
300	11.811	12.205	12.598	12.992	13.386	13.780	14.173	14.567	14.961	15.354
400	15.748	16.142	16.535	16.929	17.323	17.717	18.110	18.504	18.898	19.291
500	19.685	20.079	20.472	20.866	21.260	21.654	22.047	22.441	22.835	23.228
600	23.622	24.016	24.409	24.803	25.197	25.591	25.984	26.378	26.772	27.165
700	27.560	27.954	28.347	28.741	29.135	29.529	29.922	30.316	30.710	31.103
800	31.497	31.891	32.284	32.678	33.072	33.466	33.859	34.253	34.647	35.040
900	35.434	35.828	36.221	36.615	37.009	37.403	37.796	38.190	38.584	38.977





### 13. Verwandlung von preußischen (rheinländischen) Zollen in Millimeter und umgekehrt.

Zoll (rheinländ.)	mm	mm	Zoll (rheinländ.)
1	26·15	1	0·03824
2	52·30	2	0·07648
3	78·45	3	0·11472
4	104·60	4	0·15296
5	130·75	5	0·19120
6	156·90	6	0·22944
7	183·05	7	0·26768
8	209·20	8	0·30592
9	235·35	9	0·34416
10	261·50	10	0·38240
11	287·65		
12	313·90		

### 14. Tabelle zur Verwandlung verschiedener Längenmaße in Pariser Linien und in Meter.

	Länge der nebenbezeichneten Maße		Logarithmen zur Verwandlung der nebenbez. Maße in Meter
	in Pariser Linien	in Meter	
1 Meter . . . . .	443,296	1	0·0000000
1 englischer Fuß . . . . .	135,11541	0,30479727	9·48401107—10
1 Yard = 3 Fuß . . . . .	405,34623	0,91439180	9·96113232—10
1 englische Rute = 5,5 Yards . .	2229,40425	5,02915490	0·70149501
1 österreichischer (Wiener) Fuß .	140,117295	0,31608067	9·49979793—10
1 österreichische Klafter = 6 Fuß	840,703771	1,896484	0·27794918
1 Pariser Fuß . . . . .	144	0,32483938	9·51166868—10
1 Toise = 6 Pariser Fuß . . . . .	864	1,94903631	0·28981993
1 preußischer (rheinländ.) Fuß . .	139,13	0,31385350	9·49672697—10
1 preußische Rute = 12 Fuß . .	1669,56	3,76624197	0·57590822
1 russischer Fuß (= 1 engl. Fuß)	135,11541	0,30479727	9·48401107—10
1 russischer Saschehn (Faden) = 7 Fuß . . . . .	945,80786	2,13358087	0·32910911



Verwandlung metrischer Gewichte in englische Gewichte und umgekehrt.

- 1 kg = 2,2046 engl. Pfd. = 15432,2 Grains,  
 1 g = 15,432 Grains,  
 1 Pfd. engl. = 16 Ounces = 453,6 g,  
 1 Ounce = 4375 Grains = 28,35 g,  
 1 Grain = 0,0648 g.

Verwandlung von Karatgewicht (Diamantgewicht) in Gramm und umgekehrt.

- 1 Karat = 0,2053 g,  
 1 Grain = 0,051325 g,  
 1 g = 4,871 Karat,  
 1 g = 19,483 Grains.

## 15. Lichtgeschwindigkeit.

Die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume beträgt rund 300 000 km pro Sekunde. In durchsichtigen Medien findet eine Verlangsamung statt und zwar für das violette Licht stärker als für das rote. Das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gegen die in der betreffenden Substanz ist gleich deren Brechungsexponent ( $n$ ).

Substanz	Lichtgeschwindigkeit	Verzögerungsverhältnis	Brechungsindex ( $n$ )
Luft . . . . .	299 920	1	1·00
Wasser . . . . .	225 000	0·75	1·3337
Crownglas . . . .	196 000	0·6536	1·53
Flintzglas . . . .	184 050	0·6135	1·63

### Wellenlänge und Schwingungszahl des Lichts.

Das Licht ist eine Wellenbewegung des Äthers; unser Auge unterscheidet außer Hell und Dunkel verschiedene Farben. Der Grund der Verschiedenheit in der Farbe ist eine Verschiedenheit der Wellenlänge. Dem roten Licht entspricht eine verhältnismäßig große, dem gelben, grünen,



blauen und violetten Licht eine absteigend geringere Wellenlänge. Ätherschwingungen von längerer Wellenlänge als ca. 800 Millionstel Millimeter sind nicht mehr sichtbar, aber als Wärmewirkung fühlbar; kürzere Ätherwellen als ca. 400 Millionstel Millimeter sind ebenfalls unsichtbar, rufen aber chemische Wirkungen (Photographie) sowie eigenartige physikalische Erscheinungen hervor (Phosphoreszenz, Fluoreszenz).

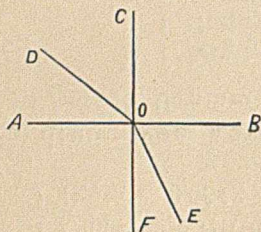
Aus der Wellenlänge des Lichts und aus seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergibt sich ohne weiteres seine Schwingungszahl in der Zeiteinheit (Sekunde).

Zerlegt man weißes Licht mittels eines Prismas in seine farbigen Bestandteile, so zerlegt man dasselbe zugleich in seine Komponenten verschiedener Wellenlänge. Fehlen im zerlegten Licht gewisse Wellenlängen, so ist das Farbenband an diesen Stellen unterbrochen. (Im Sonnenlicht nennt man diese Stellen Fraunhofersche Linien; sie rühren von Absorptionswirkungen glühender Dämpfe bestimmter Substanzen her.)

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Wellenlängen des Lichtes und die Schwingungszahl für eine Reihe Fraunhofersche Linien.

### Brechungsindex.

Wenn das Licht die Grenzfläche zweier durchsichtigen Körper trifft, wird er im allgemeinen aus seiner Richtung



abgelenkt und zwar nach einem ganz bestimmten Gesetz (Brechungsgesetz). Es sei  $AB$  die Trennungsfläche der beiden Medien.  $DOE$  sei ein Lichtstrahl, der bei  $O$  die Trennungsfläche treffe,  $COF$  die in Punkt  $O$  auf der

Trennungsfläche errichtete Senkrechte, es gilt:

$$\frac{\sin COD}{\sin EOF} = \text{const.} = n.$$



# 16. Wellenlänge und Schwingungszahlen des Lichtes.

Region des Spektrums	Name der Fraunhoferschen Linie	Element	Wellenlänge Mikromillimeter	Schwingungszahl in Billionen per Sekundo	
Unsichtbares Spektrum.	Rubens längste Wellen		24000	12·5	
	Infraroter Teil des Spektrums;	Langleys „	15000	20	
		$\psi_2$	—	2700	111
		$\psi_1$	—		
		$\phi_2$	—	1240	242
		$\phi_1$	—	1200	250
		Y	{ —	{ 899·04	{ 333·7
				{ 898·65	{ 334·0
	Wärme-	$X_4$	—	880·61	340·8
	spektrum.	$X_3$	—	866·14	346·2
	$X_2$	—	854·18	351·3	
	$X_1$	—	849·7	353·3	
	Z	—	822·64	364·5	
Sichtbares Spektrum.	Rot . . . . .	{ A	{ O	{ 759·4	{ 395·2
		{ B	{ O	{ 686·74	{ 436·5
	Orange . . .	{ C	{ H	{ 656·30	{ 457·2
		{ $D_1$	{ Na	{ 589·61	{ 508·8
	Gelb . . . . .	{ $D_2$	{ Na	{ 589·02	{ 509·1
		{ $D_3$	{ He	{ 587·60	{ 510·5
		{ $E_1$	{ Fe	{ 527·05	{ 569·2
	Grün . . . . .	{ $E_2$	{ Ca	{ 527·04	{ 569·2
		{ $E_2$	{ Fe	{ 526·97	{ 569·3
		{ $b_1$	{ Mg	{ 518·38	{ 578·9
		{ $b_2$	{ Mg	{ 517·29	{ 580·0
	Blaugrün . .	{ $b_3$	{ Fe	{ 516·92	{ 580·4
		{ $b_3$	{ Fe	{ 516·91	{ 580·4
		{ $b_4$	{ Fe	{ 516·77	{ 580·5
		{ $b_4$	{ Mg	{ 516·75	{ 580·5
		{ F	{ H	{ 486·15	{ 617·1
Blau . . . . .	{ G	{ Fe	{ 430·81	{ 696·3	
	{ G	{ Ca	{ 430·79	{ 696·4	
	{ $h$	{ H	{ 410·18	{ 731·3	
Violett . . .	{ H	{ Ca	{ 396·86	{ 756·0	
	{ K	{ Ca	{ 393·38	{ 762·7	
Unsichtbares (photograph.) Spektrum.		{ L	{ Fe	{ 382·06	{ 785·1
		{ M	{ Fe	{ 372·78	{ 804·6
		{ N	{ Fe	{ 372·71	{ 804·9
		{ O	{ Fe	{ 358·13	{ 837·7
		{ P	{ Fe	{ 344·11	{ 871·8
		{ Q	{ Fe	{ 336·13	{ 892·6
		{ R	{ Fe	{ 328·69	{ 912·6
	Ultraviolettes Spektrum.	{ R	{ Ca	{ 318·14	{ 942·9
		{ R	{ Ca	{ 317·94	{ 943·5
		{ $r$	{ Fe	{ 314·46	{ 954·1
		{ $S_1$	{ Fe	{ 310·08	{ 967·4
		{ $S_1$	{ Fe	{ 310·04	{ 967·6
		{ $S_2$	{ Fe	{ 310·01	{ 967·7
		{ $s$	{ Fe	{ 304·77	{ 984·5
		{ T	{ Fe	{ 302·12	{ 993·0
		{ T	{ Fe	{ 302·07	{ 993·3
	{ $t$	{ Fe	{ 299·45	{ 1002·0	
	{ U	{ Fe	{ 294·80	{ 1017·6	
	Schumanns kürzeste Wellen		100	3000	



Ist das Medium links von  $AB$  der leere Raum (oder Luft, was für viele Zwecke wenig Unterschied macht), so nennen wir  $n$  den Brechungsexponenten der Substanz rechts von  $AB$  und finden denselben stets größer als 1, d. h. das Licht wird beim Übergang vom leeren Raum in eine durchsichtige Substanz stets dem Einfallslotte zu gebrochen. Grenzen zwei durchsichtige Substanzen aneinander, so nennen wir diejenige die optisch dichtere, in welcher das Licht dem Einfallslotte zu gebrochen wird.

Der Brechungsexponent ist eine Funktion der Wellenlänge des Lichtes und nimmt bei den meisten Substanzen mit abnehmender Wellenlänge zu.

Die Kenntnis des Brechungsexponenten verschiedener Substanzen ist für den Optiker u. a. deswegen wichtig, weil von ihm außer von den Radien die Brennweite einer daraus hergestellten Linse (28) in bestimmter Weise abhängt.

Da  $n$  mit der Wellenlänge (Farbe) des Lichtes sich ändert, so muß  $n$  für verschiedene Wellenlängen bekannt sein, wenn die Brennweite der Linsen für verschiedene Farben berechnet werden soll.

In den nachfolgenden Tabellen ist daher  $n$  für folgende Wellenlängen gegeben:

Fraunhofersche Linie	Wellenlänge in Milliontel-mm
A'	767·7
C	656·3
D	589·3
F	486·2
G'	434·1

Unter der Dispersion des Lichtes in einem Medium versteht man den Brechungsindexunterschied für zwei verschiedene Wellenlängen. In der Tabelle ist die Dispersion  $D-A'$ ,  $F-D$ ,  $G'-F$  und  $F-C$  gegeben. Ferner ist eine Zahl  $\nu$  (Zerstreuungsverhältnis) berechnet, welche das Verhältnis des um 1 verminderten Brechungsexponenten zur



mittleren Dispersion  $F-C$  angibt. Diese Zahl ist für den Optiker deswegen wichtig, weil sie die angenäherte Berechnung achromatischer Linsen ermöglicht, d. h. solche Linsenkombinationen, welche für zwei Farben die gleiche Brennweite haben.

Haben wir z. B. eine Sammellinse, deren Fokus  $f$  ist, während das angewandte Material das Zerstreungsverhältnis  $\nu$  hat, so können wir diese Linse achromatisch machen, wenn wir sie mit einer zweiten Linse aus dem Material mit dem Zerstreungsverhältnis  $\nu'$  kombinieren, wobei  $\nu'$  stets kleiner als  $\nu$  sein muß, wenn wir folgende Gleichung erfüllen:

$$f' = -\frac{\nu}{\nu'} f.$$

Beispiel. Eine Sammellinse von 10 cm Fokus aus einem Glase, dessen  $\nu = 60$  ist, soll durch eine Linse aus einem Glase mit  $\nu = 36$  achromatisiert werden, so gilt für deren Brennweite:

$$f' = -\frac{60}{36} 10 \text{ cm} = -\frac{50}{3} \text{ cm} = -16,67 \text{ cm}.$$



17. • Tabelle der optischen Konstanten der gebräuchlichsten Gläser von Schott & Genossen geordnet nach fallendem  $\nu$ .

Lfd. Nr.	Fabrikationsnummer	Benennung	Brechungsindex für $D$	Mittlere Dispersion $C$ bis $F'$	$\nu = \frac{n-1}{\Delta n}$	Partielle Dispersion			Spezifisches Gewicht
						$A'$ bis $D$	$D$ bis $F'$	$F'$ bis $G'$	
1	O.225	Leichtes Phosphat - Crown	1,5159	0,00737	70,0	0,00485 0,658	0,00515 0,698	0,00407 0,552	2,58
2	S.40	Mittleres Phosphat - Crown	1,5590	0,00835	66,9	0,00546 0,654	0,00587 0,702	0,00466 0,557	3,07
3	S.30	Schweres Barium - Phosphat - Crown	1,5760	0,00884	65,2	0,00570 0,644	0,00622 0,703	0,00500 0,565	3,35
4	S.15	Schwerstes Barium - Phosphat - Crown	1,5906	0,00922	64,1	0,00591 0,641	0,00648 0,703	0,00521 0,565	3,66
5	O.144	Borosilikat - Crown . . .	1,5100	0,00797	64,0	0,00519 0,651	0,00559 0,701	0,00446 0,559	2,47
6	O.599	Borosilikat - Crown . . .	1,5069	0,00813	62,3	0,00529 0,651	0,00569 0,701	0,00457 0,562	2,48
7	O.512	Silikat - Crown . . . . .	1,5195	0,00886	58,6	0,00568 0,641	0,00625 0,705	0,00504 0,568	2,64
8	O.57	Leichtes Silikat - Crown . .	1,5086	0,00823	61,8	0,00530 0,643	0,00578 0,702	0,00464 0,564	2,46
9	O.40	Silikat - Crown . . . . .	1,5166	0,00849	60,9	0,00545 0,643	0,00596 0,702	0,00479 0,564	2,49
10	O.60	Kalk - Silikat - Crown . . .	1,5179	0,00860	60,2	0,00553 0,643	0,00605 0,703	0,00487 0,566	2,49
11	O.138	Silikat - Crown mit höherem Brechungsindex	1,5258	0,00872	60,2	0,00560 0,642	0,00614 0,704	0,00494 0,566	2,53
12	S.52	Leichtes Borat - Crown . . .	1,5047	0,00840	60,0	0,00560 0,667	0,00587 0,700	0,00466 0,555	2,24
13	O.20	Silikat - Crown mit niedrigem Brechungsexponenten	1,5019	0,00842	59,6	0,00543 0,645	0,00592 0,703	0,00478 0,567	2,47
14	O.227	Barium - Silikat - Crown . .	1,5399	0,00909	59,4	0,00582 0,640	0,00639 0,703	0,00514 0,566	2,73
15	O.203	Gewöhnl. Silikat - Crown . .	1,5175	0,00877	59,0	0,00563 0,642	0,00616 0,702	0,00499 0,568	2,54
16	O.13	Kali - Silikat - Crown . . . .	1,5228	0,00901	58,0	0,00572 0,635	0,00637 0,707	0,00515 0,572	2,53
17	O.15	Zink - Silikat - Crown . . . .	1,5308	0,00915	58,0	0,00587 0,642	0,00644 0,704	0,00520 0,568	2,74
18	O.211	Schweres Barium - Silikat - Crown	1,5726	0,00995	57,5	0,00630 0,633	0,00702 0,706	0,00568 0,571	3,21
19	O.153	Silikat - Crown glas . . . . .	1,5160	0,00904	57,2	0,00576 0,638	0,00637 0,705	0,00516 0,571	2,53
20	O.114	Weiches Silikat - Crown . . .	1,5151	0,00910	56,6	0,00577 0,634	0,00642 0,705	0,00521 0,572	2,55
21	O.197	Borosilikat - Glas . . . . .	1,5250	0,00929	56,5	0,00599 0,645	0,00654 0,704	0,00531 0,572	2,64
22	O.463	Baryt - Leichtflint . . . . .	1,5646	0,01020	55,4	0,00648 0,633	0,00720 0,706	0,00586 0,575	3,11



Lfd. Nr.	Fabrikationsnummer	Benennung	Brechungsindex für $D$	Mittlere Dispersion $C$ bis $F'$	$\nu = \frac{n-1}{\Delta n}$	Partielle Dispersion			Spezifisches Gewicht
						$A'$ bis $D$	$D$ bis $F'$	$F'$ bis $G'$	
23	0.202	Schwerstes Barium-Silikat-Crown	1,6040	0,01092	55,3	0,00690 0,632	0,00771 0,706	0,00626 0,573	3,58
24	0.608	Crown mit hoher Dispersion	1,5149	0,00943	54,6	0,00595 0,631	0,00666 0,706	0,00543 0,576	2,60
25	0.602	Baryt-Leichtflint . . . .	1,5676	0,01072	53,0	0,00675 0,630	0,00759 0,708	0,00618 0,576	3,12
26	0.381	Crown mit hoher Dispersion	1,5262	0,01026	51,3	0,00644 0,629	0,00727 0,709	0,00596 0,582	2,70
27	0.583	Baryt-Leichtflint . . . .	1,5688	0,01110	51,2	0,00696 0,627	0,00786 0,708	0,00644 0,580	3,16
28	0.152	Silikat-Glas . . . . .	1,5368	0,01049	51,2	0,00659 0,628	0,00743 0,708	0,00610 0,582	2,76
29	0.164	Borosilikat-Flint . . . .	1,5503	0,01114	49,4	0,00710 0,637	0,00786 0,70	0,00644 0,578	2,81
30	0.214	Silikat-Glas . . . . .	1,5366	0,01102	48,7	0,00690 0,626	0,00781 0,709	0,00644 0,584	2,73
31	0.522	Baryt-Leichtflint . . . .	1,5554	0,01153	48,2	0,00718 0,623	0,00819 0,716	0,00677 0,587	3,03
32	0.726	Extra leichtes Flint . . .	1,5398	0,01142	47,4	0,00711	0,00810	0,00669	2,87
33	0.578	Baryt-Leichtflint . . . .	1,5825	0,01255	46,4	0,00777 0,619	0,00891 0,710	0,00739 0,589	3,29
34	0.154	Leichtes Silikat-Flint . .	1,5710	0,01327	43,0	0,00819 0,617	0,00943 0,710	0,00791 0,596	3,16
35	0.230	Silikat-Flint mit relativ hohem Brechungsindex	1,6014	0,01415	42,5	0,00863 0,613	0,01009 0,712	0,00843 0,595	3,40
36	0.184	Leichtes Silikat-Flint . .	1,5900	0,01438	41,1	0,00882 0,613	0,01022 0,712	0,00861 0,597	3,28
37	0.118	Gewöhnliches Silikat-Flint	1,6129	0,01660	36,9	0,01006 0,606	0,01184 0,713	0,01008 0,607	3,58
38	0.167	Gewöhnliches Silikat-Flint	1,6169	0,01691	36,5	0,01026 0,606	0,01206 0,713	0,01029 0,608	3,60
39	0.103	Gewöhnliches Silikat-Flint	1,6202	0,01709	36,2	0,01034 0,605	0,01220 0,714	0,01041 0,609	3,63
40	0.102	Schweres Silikat-Flint . .	1,6489	0,01919	33,8	0,01152 0,600	0,01372 0,714	0,01180 0,615	3,87
41	0.192	Schweres Silikat-Flint . .	1,6734	0,02104	32,0	0,01255 0,597	0,01507 0,717	0,01302 0,619	4,10
42	0.41	Schweres Silikat-Flint . .	1,7174	0,02434	29,5	0,01439 0,591	0,01749 0,718	0,01521 0,625	4,49
43	0.113	Schweres Silikat-Flint . .	1,7371	0,02600	28,4	0,01526 0,587	0,01870 0,719	0,01632 0,627	4,64
44	0.165	Schweres Silikat-Flint . .	1,7541	0,02743	27,5	0,01607 0,585	0,01974 0,720	0,01730 0,630	4,78
45	0.198	Sehr schweres Silikat-Flint	1,7782	0,02941	26,5	0,01719 0,584	0,02120 0,721	0,01868 0,635	4,99
46	S. 57	Schwerstes Silikat-Flint .	1,9626	0,04882	19,7	0,02767 0,567	0,03547 0,726	0,03252 0,666	6,33



## 18.

Chemische Zusammensetzung einiger wichtiger Gläser  
von Schott & Genossen.

Leichtes Phosphat-Crown			Leichtes Baryt-Flint		
O 225 $n_D = 1.5160$ $\nu = 70.3$	$P_2O_5$	70.5	O 527 $n_D = 1.5718$ $\nu = 50.6$	$SiO_2$	51.6
	$K_2O$	12		$PbO$	10.0
	$Al_2O_3$	10		$BaO$	20.0
	$MgO$	} 7.5		$ZnO$	7.0
	$B_2O_3$			$Alkali$	11.4
$As_2O_5$					
Phosphat-Crown			Leichtes Borosilikat-Flint		
S 40 $n_D = 1.5619$ $\nu = 66.5$	$P_2O_5$	59.5	O 658 $n_D = 1.5452$ $\nu = 50.3$	$SiO_2$	32.7
	$BaO$	28.0		$B_2O_3$	31.0
	$B_2O_3$	} 9.5		$PbO$	25.0
	$As_2O_5$			$Alkali$ u. $Al_2O_3$	11.3
Borosilikat-Crown			Leichtes Silikat-Flint		
O 627 $n_D = 1.5128$ $\nu = 63.7$	$SiO_2$	68.24	O 154 $n_D = 1.5710$ $\nu = 43.1$	$SiO_2$	54.22
	$B_2O_3$	10.00		$B_2O_3$	1.50
	$K_2O$	9.50		$PbO$	33.00
	$Na_2O$	10.00		$K_2O$	8.00
	$ZnO$	2.00		$Na_2O$	3.00
	$Mn_2O_3$	0.07		$Mn_2O_3$	0.08
	$As_2O_5$	0.20		$As_2O_5$	0.20
Leichtes Borat-Crown			Schweres Silikat-Flint		
S 205 $n_D = 1.5075$ $\nu = 60.6$	$B_2O_3$	69	O 165 $n_D = 1.7545$ $\nu = 27.6$	$SiO_2$	28.36
	$Al_2O_3$	18		$PbO$	69.0
	$Na_2O$	} 13		$K_2O$	2.50
	$BaO$			$Mn_2O_3$	0.04
	$As_2O_5$	Spuren		$As_2O_5$	0.10
Schweres Barium-Silikat-Crown			Schwerstes Silikat-Flint		
O 211 $n_D = 1.5727$ $\nu = 58$	$SiO_2$	48.7	S 57 $n_D = 1.9625$ $\nu = 19.7$	$SiO_2$	18
	$BaO$	29.0		$PbO$	82
	$ZnO$	10.3			
	$Alkali$ u. $B_2O_3$	12.0			



## 19.

Gläser von Chance-Broth., Birmingham, nach fallendem  $\nu$  geordnet.

Fabrikationsnummer	Bezeichnung des Glases	Spezif. Gewicht	Brechungsindex für $D$	Partielle Dispersionen			Mittlere Dispersion $C$ bis $F$	$\nu = \frac{n_0 - 1}{\Delta n}$
				$C$ bis $D$	$D$ bis $F$	$F$ bis $G_1$		
B 646	Borosilicate Crown . . .	2.45	1.5093	0.00236	0.00552	0.00449	0.00788	64.6
A 605	Hard Crown . . . . .	2.48	1.5175	0.00252	0.00604	0.00484	0.00856	60.5
A 569	Soft . . . . .	2.55	1.5152	0.00264	0.00642	0.00517	0.00906	56.9
B 565	Baryta . . . . .	3.17	1.5660	0.00297	0.00709	0.00576	0.01006	56.3
B 555	Densest baryta Crown . .	3.58	1.6099	0.00321	0.00779	0.00629	0.01100	55.5
B 535	Baryta light Flint . . . .	2.94	1.5452	0.00298	0.00722	0.00582	0.01020	53.5
A 490	Extra light Flint . . . . .	2.78	1.5316	0.00313	0.00772	0.00630	0.01085	49.0
A 485	" " " " " " " " " " " "	2.80	1.5333	0.00322	0.00777	0.00640	0.01099	48.5
B 468	Baryta light Flint . . . . .	3.29	1.5840	0.00362	0.00866	0.00735	0.01248	46.8
A 458	Light Flint . . . . .	2.93	1.5472	0.00348	0.00848	0.00707	0.01196	45.8
A 432	" " " " " " " " " " " "	3.06	1.5610	0.00372	0.00927	0.00770	0.01299	43.2
A 410	" " " " " " " " " " " "	3.22	1.5760	0.00402	0.01002	0.00840	0.01404	41.0
A 370	Dense Flint . . . . .	3.57	1.6124	0.00474	0.01176	0.01030	0.01650	37.0
A 361	" " " " " " " " " " " "	3.64	1.6214	0.00491	0.01231	0.01046	0.01722	36.1
A 360	" " " " " " " " " " " "	3.66	1.6225	0.00493	0.01236	0.01054	0.01729	36.0
A 337	Extra dense Flint . . . . .	3.88	1.6469	0.00541	0.01376	0.01170	0.01917	33.7
A 299	Double extra dense Flint .	4.40	1.7129	0.00670	0.01714	0.01661	0.02384	29.9



## 20.

Verschiedene andere Glassorten nach fallendem  $\nu$  geordnet nach Baile.

Bezeichnung	Temperatur °C.	Spezifisches Gewicht	Brechungs- index für die D-Linie	Partielle Dispersion			Mittlere Dispersion C bis F	$\nu = \frac{n_D - 1}{\Delta n}$
				A bis D	D bis F	F bis G		
Crown glas	17°·8	2·50	1·5280	—	0·0063	0·0054	0·0089	59·3
"	23°·5	2·49	1·5160	—	0·0062	0·0056	0·0088	58·6
"	21°·2	2·80	1·5192	—	0·0064	0·0057	0·0090	57·7
"	18°·4	2·55	1·5265	—	0·0067	0·0060	0·0095	55·4
"	21°·9	3·00	1·5604	—	0·0086	0·0079	0·0122	45·9
"	23°·2	2·98	1·5660	—	0·0088	0·0080	0·0124	45·6
Flintglas	18°·4	3·22	1·5715	—	0·0098	0·0089	0·0138	41·4
"	22°·0	3·24	1·5822	—	0·0102	0·0094	0·0141	41·3
"	19°·5	3·44	1·6027	—	0·0114	0·0105	0·0159	37·9
"	23°·2	3·54	1·6109	—	0·0116	0·0110	0·0163	37·5
"	24°·0	3·68	1·6304	—	0·0125	0·0120	0·0174	36·2
"	13°·7	3·63	1·6198	—	0·0123	0·0114	0·0172	36·0
"	12°·4	4·08	1·6858	—	0·0161	0·0152	0·0224	30·6
"	22°·5	5·00	1·7920	—	0·0229	0·0219	0·0318	24·5

## 21.

Der Einfluß der Temperatur auf den Brechungsindex der Gläser wie überhaupt fester Körper ist recht gering und kann in fast allen praktischen Fällen vollkommen vernachlässigt werden. — So fand Müller für

Crown glas zwischen  $-5^\circ$  und  $+23^\circ$   $n_D = 1.516149 + 0.0000017 t^\circ$ ,  
 Flintglas "  $-3^\circ$  "  $+21^\circ$   $n_D = 1.579856 + 0.00000323 t^\circ$ .

Mit zunehmender Temperatur nimmt die Farbenzerstreuung aller Gläser ebenfalls zu. (Siehe dagegen Anmerkung zu 24.)



## 22. Brechungsindices verschiedener anderer einfach brechender Körper.

Substanz	Brechungsindices für die Spektrallinien								$\nu =$
	A	B	C	D	E	F	G	H	$n_D - 1$ $\Delta n$
Chlorammonium	—	1.6326	1.6366	1.6422	1.6464	1.6533	1.6613	—	38.4
Bernstein . . . .	—	1.5418	1.5296	1.5462	1.5504	1.5543	—	—	22.1
Antimonglas . .	—	—	—	[2.013]	—	—	—	—	—
Arsensäure . . .	—	—	1.748	1.755	—	—	—	—	—
Bariumnitrat . .	—	—	1.5665	1.5716	—	1.5825	—	—	35.7
Bienenwachs . .	[1.542]	—	—	—	—	—	—	—	—
Zinkblende . . .	—	—	[2.34165]	2.3692	—	—	—	—	—
Borax . . . . .	—	—	1.5122	1.5148	—	1.5207	—	—	60.6
Borsäure . . . .	—	—	1.4624	1.4630	—	1.4702	—	—	59.4
Kampfer . . . . .	—	—	—	1.532	—	—	—	—	—
Kautschuk . . . .	[1.524]	—	—	—	—	—	—	—	—
Diamant, farblos	2.4024	2.4603	—	2.4173	[2.428]	2.4354	2.4514	2.5142	—
„ braun	—	[2.4606]	—	2.4699	2.4790	—	—	—	—
Hartgummi . . . .	—	—	—	1.6	—	—	—	—	—
Fuchsin*) . . . .	1.73	1.81	1.99	—	—	—	1.31	1.54	—
Gelatine . . . . .	—	—	—	1.547	—	—	—	—	—
Horn . . . . .	—	—	—	1.565	—	—	—	—	—
Chromsaurer Bleioxyd . . . .	—	—	—	2.5:2.97	—	—	—	—	—
Obsidian . . . . .	—	1.4928	1.4939	1.4964	1.4994	1.5017	—	—	63.6
Pech . . . . .	[1.531]	—	—	—	—	—	—	—	—
Phosphor . . . .	{	—	—	2.093}	2.1583	—	—	—	—
	—	—	—	2.144}	—	—	—	—	—
Quarz, ge- schmolzen . . . .	—	—	—	1.460	—	—	—	—	—
Harze:									
Kopaiwabalsam .	—	—	—	1.549	—	—	—	—	—
Kanadabalsam . .	—	—	1.5124	1.526	—	1.5351	—	—	41.5
Kopal . . . . .	1.528	—	—	—	—	—	—	—	—
Mastix . . . . .	1.535	—	—	—	—	—	—	—	—
Perubalsam . . .	—	1.585	—	1.593	1.613	—	—	—	—
Kolophonium . .	—	—	1.545	1.548	—	—	—	—	—
Schellack . . . .	—	—	—	1.525	—	—	—	—	—
Steinsalz . . . .	1.5366	1.5392	1.5405	1.5442	1.5490	1.5532	1.5613	1.5683	42.8
Selen (glasig) . .	2.653	2.730	2.86	2.98	—	—	—	—	—
Bromsilber . . . .	—	—	—	2.2533	—	—	—	—	—
Chlorsilber . . . .	—	—	—	2.061	—	—	—	—	—
Jodsilber . . . .	—	—	—	2.1816	—	—	—	—	9.6
Wallrat . . . . .	[1.535]	—	—	—	—	—	—	—	—
Talg . . . . .	[1.49]	—	—	—	—	—	—	—	—

\*) Fuchsin gehört mit einigen anderen intensiv gefärbten Körpern zusammen zur Gruppe der anormal zerstreuen Substanzen. Bei ihnen nimmt der Brechungsindex nicht mit abnehmender Wellenlänge dauernd zu.



Name der Flüssigkeit	Brechungsindices für die Spektrallinien:										$n_D - 1$	$n_F - n_C$
	Temp.	A	B	C	D	E	F	G	H	$n_F - n_C$		
Eisessig . . . . .	20°	—	—	1.36985	1.37182	—	1.37648	[1.38017]	—	0.00663	56.1	
Aceton . . . . .	20°	—	—	1.37022	1.37218	—	1.37683	[1.38057]	—	0.00661	56.3	
Alkohol . . . . .	10°	—	—	1.3626	1.3646	—	1.3694	[1.3732]	—	0.0068	53.6	
Alkohol . . . . .	0°	—	—	1.3677	1.3695	—	—	[1.3773]	—	—	—	
Alkohol . . . . .	15°	1.3600	1.3612	1.3621	1.3638	1.3661	1.3683	[1.3720]	1.3751	0.0052	58.6	
Anilin . . . . .	20°	—	—	1.5993	1.5863	—	1.6041	[1.6204]	—	0.0048	122.1	
Anilin . . . . .	10°	—	—	1.4983	1.5029	—	1.5148	[1.5355]	—	0.0165	30.5	
Benzol . . . . .	15°	1.4905	1.4937	1.4955	1.5002	1.5066	1.5124	[1.5234]	1.5329	0.0169	29.6	
Schwefelkohlenstoff	15°	1.6114	1.6177	1.6209	1.6303	1.6434	1.6554	[1.6779]	1.7035	0.0345	18.3	
Chinolin . . . . .	20°	—	—	1.6094	1.6171	—	1.6361	[1.6497]	—	0.0267	23.1	
Chinolin . . . . .	10°	1.4438	1.4457	1.4466	1.4490	1.4526	1.4555	[1.4614]	1.4661	0.0089	50.5	
Chloroform . . . . .	20°	—	—	1.4437	1.4462	1.4525	—	—	—	—	—	
Chloroform . . . . .	30°	—	—	—	1.4397	—	—	—	1.4561	—	—	
Äther . . . . .	15°	1.3529	1.3545	1.3554	1.3566	1.3590	1.3606	[1.3646]	1.3683	0.0042	84.9	
Glycerin . . . . .	20°	—	—	1.4706	—	—	1.4784	[1.4828]	—	0.0078	—	
Kreosot . . . . .	—	—	1.5320	1.5335	1.5383	1.5452	1.5515	[1.5639]	1.5744	0.0180	29.9	
Methylalkohol . . . . .	15°	—	—	1.3308	1.3326	1.3	1.3362	—	1.3421	0.0054	61.6	
Methylenoxid . . . . .	15°	—	—	1.732	1.743	—	1.767	[1.794]	—	0.035	21.2	
Monobromnaphthalin . . . . .	20°	—	—	1.6495	1.6582	—	1.6819	[1.7041]	—	0.0324	20.3	
Naphthylenketon . . . . .	15°	—	—	1.659	1.669	—	1.697	—	—	0.038	17.6	
Naphthylenketonbromid . . . . .	—	—	—	—	1.700	—	—	—	—	—	—	
Phenol (Karbolsäure) . . . . .	10°	—	—	—	1.549	—	—	—	—	—	—	
Phenylsenföl . . . . .	10°	—	—	1.646	1.654	—	1.681	[1.706]	—	0.035	18.7	
Piperin . . . . .	18°	—	—	1.665	1.681	—	1.734	[1.806]	—	0.069	9.87	



Brechungsindices für Spektrallinien:

Name der Flüssigkeit	Brechungsindices für Spektrallinien:											$n_D - 1$	$n_F - n_C$
	Temp.	A	B	C	D	E	F	G	H	$n_F - n_C$			
Phosphori-Methylenjodid 1:1	18°	—	—	1.929	1.944	—	1.984	[2.021]	—	—	0.055	17.2	
Chinin	15°	—	—	1.596	1.602	—	1.621	[1.639]	—	—	0.025	24.1	
Schwefel in Methylenjodid	16°	—	—	—	1.778	—	—	—	—	—	—	—	
Toluol . . . . .	20°	—	—	1.4911	1.4955	—	1.5070	[1.5170]	—	—	0.159	31.2	
Wasser . . . . .	16°	—	—	1.3318	1.3337	—	1.3378	1.3442	—	—	0.060	55.6	
Verschiedene Öle:	18°-75	—	—	1.3317	1.3336	1.3359	1.3378	1.3413	1.3442	—	0.061	54.7	
Mandelöl . . . . .	0°	—	—	1.4755	1.4782	—	1.4847	—	—	—	0.092	52.0	
Anisöl . . . . .	15°-1	—	1.5487	1.5508	1.5573	1.5659	1.5744	1.5912	1.6084	—	0.036	23.6	
Bittermandelöl . . . . .	21°-4	—	—	1.5410	1.5475	—	1.5647	—	—	—	0.037	23.1	
Cassiaöl . . . . .	20°	—	—	1.5391	—	—	1.5623	[1.5775]	—	—	0.032	—	
Rizinusöl . . . . .	10°	—	—	1.6007	1.6104	—	1.6389	—	1.7039	—	0.082	15.9	
Zedernholzöl . . . . .	15°	—	1.5659	1.5690	1.5780	1.5904	1.6029	—	—	—	0.039	17.0	
do. gekocht . . . . .	—	—	—	—	1.490	—	—	—	—	—	—	—	
Zimmtöl . . . . .	23°-5	1.5967	1.6038	1.6077	1.6188	1.6348	1.6508	—	—	—	0.0431	14.3	
Nelkenöl . . . . .	—	—	—	—	1.520	—	—	—	—	—	—	—	
Leinöl . . . . .	—	—	—	—	1.510	—	—	—	—	—	—	—	
Muskatennöl . . . . .	25°	1.4594	1.4655	—	1.485	—	—	—	—	—	—	—	
Olivenöl . . . . .	0°	—	—	1.4738	1.4763	—	1.4825	—	—	—	0.0087	54.7	
Mohnöl . . . . .	0°	—	—	1.4738	1.463	—	—	—	—	—	—	—	
Petroleum . . . . .	0°	—	—	1.4345	1.4573	—	1.4644	—	—	—	0.0299	15.3	
Terpeninöl . . . . .	10°-6	—	1.4705	1.4715	1.4744	1.4784	1.4817	1.4882	1.4939	—	0.102	46.5	



Name des Minerals	Brechungs- index der <i>D</i> -Linie	Partielle Dispersion			Mittlere Dispersion, <i>C</i> bis <i>F</i>	$\frac{n_0-1}{\lambda n}$
		<i>A</i> bis <i>D</i>	<i>D</i> bis <i>F</i>	<i>F</i> bis <i>G</i>		
Fluspat (Mülheims) . . . . .	1.43384	0.00381	0.00312	—	0.00446	97.3
„ (Stefan) . . . . .	1.43390	—	0.00319	0.00273	—	—
Kalkspat, ordentl. Strahl (Mascart) . .	1.65846	0.00833	0.00947	0.00827	0.01347	48.9
„ außerordentl. Strahl (Mascart)	1.48654	0.00369	0.00430	0.00386	0.00610	79.8
Quarz, ordentl. Strahl (Mascart) . . .	1.54423	0.00521	0.00543	0.00463	0.00778	69.95
„ außerordentl. Strahl . . . . .	1.55338	0.00526	0.00559	0.00475	0.00802	69.00
„ linksdrehender, ordentl. Strahl } (Van der Willigen) . . . . .	1.54419	0.00505	0.00547	0.00456	0.00781	69.68
„ außerordentl. Strahl . . . . .	1.55329	0.00523	0.00526	0.00510	0.00770	71.85

Der Brechungsindex von Fluspat, Quarz (Bergkristall) und Steinsalz nimmt mit steigender Temperatur ab; bei allen Flüssigkeiten erniedrigt das Ansteigen der Temperatur die Dispersion.



Name des Gases	Lichtart	Brechungsindex
Wasserstoff . . . . .	D-Linie	1·000139
Wasserdampf . . . . .	„	1·000259
Sauerstoff . . . . .	„	1·000271
Stickstoff . . . . .	„	1·000298
Kohlenoxyd . . . . .	„	1·000335
Ammoniak . . . . .	„	1·000379
Sumpfgas (CH <sub>4</sub> ) . . . . .	„	1·000444
Kohlendioxyd (Kohlensäure) . . . . .	„	1·000454
Quecksilberdampf . . . . .	Rot	1·000556
Aethylen (C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> ) . . . . .	D-Linie	1·000723
Chlor . . . . .	„	1·000773
Cyan . . . . .	„	1·000822
Brom . . . . .	„	1·001132

Man sieht aus dieser Tabelle, daß die Brechungsindices der Gase wenig von 1 verschieden sind; der Lichtstrahl wird daher wenig abgelenkt, wenn er aus dem leeren Raum in ein Gas, noch weniger, wenn er von einem Gase in ein anderes übertritt. Merkbar wird die Ablenkung des Lichtes in der Praxis nur z. B. bei der Strahlenbrechung dicht am Horizont (Abplattung der untergehenden Sonne), sowie gelegentlich bei Luftspiegelungen. Der geringe Brechungsindex der Gase bedingt auch neben der Farblosigkeit der meisten derselben ihre Unsichtbarkeit. So ist z. B. ein Wasserstrahl in Luft sehr wohl, ein Leuchtgasstrahl in Luft kaum sichtbar; wenn sich Gase mischen, entstehen daher auch nur selten sichtbare „Schlieren“, wie sie beim Mischen verschieden stark brechender Flüssigkeiten (z. B. Schwefelkohlenstoff und Benzol, Zuckerlösung und Alkohol) stets bemerkbar werden.



## 26.

## Brechung und Farbenzerstreuung trockner Luft.

	Brechungs- index für D	Partielle Dispersion			Mittlere Dispersion	$\nu$
		A bis D	D bis F	F bis G		
Trockne Luft	1·0002922	0·0000017	0·0000021	0·0000019	0·0000029	100·7

## 27.

## Das Sphärometer.

Da die Brennweite und sonstige wichtige Eigenschaften einer Linse von ihren Krümmungen abhängen, so ist für den Optiker das wichtigste Instrument das Sphärometer, welches die Messung dieser Krümmungen gestattet. Es ist für ihn ebenso wichtig wie die Wage für den Chemiker und muß dem Optiker daher vollständig in seiner Wirkungsweise und seinen Konstruktionsprinzipien bekannt sein.

Die Krümmung einer kugelförmigen Oberfläche — denn nur für solche sind die gewöhnlichen Sphärometer brauchbar — hängt von dem Radius der Kugel ab, von der sie ein Teil ist. Gehen wir vom Kreise aus, so verstehen wir leicht, daß derselbe um so weniger stark gekrümmt ist, je größer sein Radius. Ein Stück — etwa 1 cm lang — eines Kreises von 6 cm Radius ist stärker gekrümmt als ein gleichlanges Stück eines Kreises von 12 cm Radius. In der Tat ist die Krümmung im letzten Fall nur halb so stark und es gilt allgemein der Satz, daß die Krümmung eines Kreisstückes umgekehrt proportional dessen Radius ist.

Um daher die Krümmung einer Kreislinie oder einer Kugelkappe zu bestimmen, ist hinreichend und notwendig die Kenntnis des reziproken Wertes des dazu gehörigen Kreis- oder Kugelradius. Es ist daher wünschenswert, sich über die Einheit, nach welcher dieser Radius zu messen ist, schlüssig zu werden. Durch internationale Vereinbarung ist als Einheit das Meter (1000 mm = 39,37 Zoll engl. =



38,24 Zoll rhld.) angenommen worden und wir bezeichnen eine Krümmung, deren Radius gleich 1 Meter ist, als die Krümmungseinheit, genannt **Dioptrie**; eine Kurve von  $\frac{1}{2}$  m Radius besitzt daher 2 Dioptrien Krümmung, eine solche von 0,1 m Radius 10 Dioptrien usw. Das Sphärometer läßt nun den Radius einer Kugelfläche bestimmen und damit die Dioptriezahl derselben.

Das Prinzip des Instruments beruht daher auf der Möglichkeit der Bestimmung des Radius einer Kugel oder eines Kreises aus der Messung der Krümmung einer Kugelkappe oder eines Kreisabschnittes.

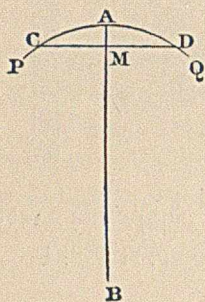


Fig. 1.

Gesetzt wir wollten den Radius des Kreisabschnittes PQ bestimmen, so müssen wir folgendermaßen vorgehen (Fig. 1):

Wir ziehen eine beliebige Sehne CD, teilen sie in M in zwei gleiche Teile und errichten das Lot AMB, dessen Schnitt mit der Kurve in A liege. AMB geht dann bekanntlich durch das Zentrum des Kreises, von dem PQ ein Stück darstellt. Wird B so gelegt, daß es auf der Kreisfläche jenseits des Mittelpunkts liegt, so bildet AB einen

Durchmesser und es gilt:

$$AM \cdot BM = (MD)^2$$

oder  $AM \cdot (AB - AM) = (MD)^2$ .

Nennen wir den Kreisradius R, so ist  $AB = 2R$ ; nennen wir andererseits AM, die sogenannte Pfeilhöhe  $h$  und die halb Sehne MD  $r$ , so erhalten wir

$$h(2R - h) = r^2$$

oder  $R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$ , oder  $\frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2} \dots (1)$

Wenn nun  $h$  im Verhältnis zu R sehr klein ist, d. h. wenn der Kreisabschnitt im Verhältnis zum ganzen Kreis seinerseits sehr klein ist, so können wir setzen:



$$R \neq \frac{r^2}{2h} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

oder auch

$$\frac{1}{R} \neq \frac{2h}{r^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Diese Betrachtungen auf der Ebene können dadurch, daß wir Fig. 1 um AB rotieren lassen, leicht auf die Kugel ausgedehnt werden.

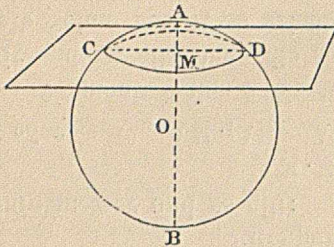


Fig. 2.

MD bildet bei der Rotation (Fig. 2) eine Fläche; D beschreibt einen Kreis, dessen Radius  $r$  ist. Dann ist  $OA = R$ . Messen wir jetzt die Länge CD und ferner die Höhe der Kugelkalotte MA, so können wir ohne weiteres nach Formel (1) den Kugelradius bestimmen.

Diese beiden Messungen werden mit Hilfe des Sphärometers ausgeführt. Diejenige Form des Instruments, welche

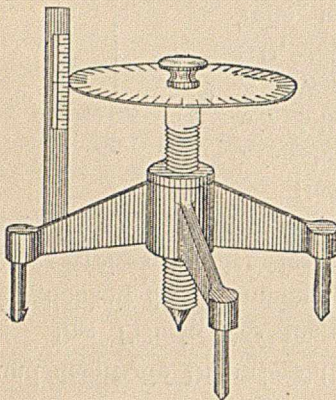


Fig. 3.

in der Brillenfabrication meist angewendet wird, ist in Fig. 8 und 9 (Art. 28) abgebildet; das Instrument ist so eingerichtet, daß man durch bloßes Andrücken des Glases an dasselbe, sofort auf einem Zifferblatt die Dioptrien der Krümmung abliest; das Instrument ist aber nicht gerade sehr genau.

Für etwas genauere Messungen dient das Instrument Fig. 3; an ihm läßt sich auch das Prinzip besser erkennen.

Es besteht aus einem dreibeinigen Körper, dessen drei Füße gehärtete Stahlspitzen tragen, und wird mit diesen



auf die zu messende Fläche aufgesetzt. Die Füße bilden die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, welches dem Kreise CD in Fig. 2 eingeschrieben gedacht werden kann. Ferner ist zwischen diesen drei Füßen ein vierter beweglicher Fuß so angeordnet, daß er, bis in die Ebene der festen Füße hinabgeschraubt, den Mittelpunkt M des Kreises CD bilden würde. Es ist also der Abstand des beweglichen Fußes von jedem der festen Füße gleich  $r$ . Die Bewegung des Mittelfußes in einer auf der durch die festen Füße gegebenen Ebene senkrechten Richtung geschieht durch eine Meßschraube, welche auf das Millimeter zwei Gänge hat und deren ganze Umdrehungen an dem Linearmaßstab hinter Fig. 3 abgelesen werden, während der Knopf der Schraube in 100 ev. 500 Teile geteilt ist; so werden am Instrument direkt die Pfeilhöhen  $h$  bis auf  $1/200$  bzw.  $1/1000$  mm abgelesen.

Da die Abstände  $a$  je zweier fester Füße dieses Instruments  $r\sqrt{3}$  sind, so verwandeln sich unter Annahme der Kenntnis dieser Größe unsere Formeln in:

$$R = \frac{a^2 + 3h^2}{6h} \quad \dots \quad (1a)$$

oder angenähert:  $R = \frac{a^2}{6h} \quad \dots \quad (2a)$

$$\frac{1}{R} = \frac{6h}{a^2} \quad \dots \quad (3a)$$

Sind bei diesem Instrument  $h$ ,  $a$  und  $r$  in Millimetern bekannt, so ist die Krümmung der gemessenen Fläche in Dioptrien:

$$\frac{6000h}{a^2 + 3h^2} \text{ oder genähert (bei ganz flachen Flächen):}$$

$$\frac{6000h}{a^2} \text{ oder } \frac{2000h}{r^2}.$$

Sind  $h$ ,  $a$ ,  $r$  in engl. Zollen gegeben, so gilt angenähert für die Dioptrizahl der Kurve:

$$\frac{80h}{r^2}.$$



Werden die Dioptriezahlen beider Flächen einer Linse auf diese Weise bestimmt und algebraisch addiert, wobei erhabene Flächen das Vorzeichen  $+$ , vertiefte das Vorzeichen  $-$  erhalten und die gefundene Summe mit  $(n-1)$  multipliziert, so erhalten wir die Stärke der Linse in Dioptrien.

## 28. Formeln zur Berechnung von Linsen und die Prinzipien, auf welche sie begründet sind.

Man pflegt heute in der Praxis Linsen gewöhnlich nicht nach ihrer Fokallänge zu bezeichnen, sondern nach ihrer Stärke, d. h. nach dem Maßstab der Konvergenz oder Divergenz, welche sie einem parallelen Lichtbüschel erteilen, das auf sie fällt. Licht besteht bekanntlich aus Wellen, welche in allen gewöhnlichen durchsichtigen Substanzen (isotropen Medien), wie beispielsweise Luft, Wasser oder Glas, sich immer im rechten Winkel zu ihrer eigenen Wellenfront bewegen. Am besten kann man sich einen Begriff von dieser Eigentümlichkeit des Lichtes machen, wenn man das Gleichnis des ins Wasser geworfenen Steines heranzieht. Figur 4 stelle eine Wasserfläche dar, auf welche

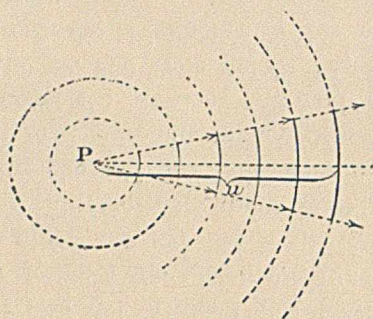


Fig. 4.

im Punkte P ein Stein geworfen ist, so breiten sich bekanntlich von P in der Richtung der Pfeile allmählich sich vergrößernde kreisförmige Wellenzüge aus. Jedes Linien-



element einer solchen Wellenfläche steht senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung, da die Kreisfläche überall senkrecht auf dem Radius steht.

Wenn daher die Wellenflächen geradlinig sind, so folgt daraus, daß die Lichtstrahlen parallel sind, also von einem unendlich weit entfernten Punkte herkommen. Sind dagegen die Wellenoberflächen konvex, wenn man nach dem leuchtenden Punkte hinschaut, so kommen sie von einem in endlicher Entfernung gelegenen leuchtenden Punkte her,

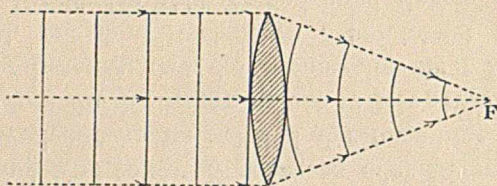


Fig. 5.

und die Strahlen sind divergent (Fig. 5). Wendet das Licht dem Beschauer eine konkave Wellenfläche zu, so sammelt es sich in einem Punkte, den man mit dem Namen eines Brennpunktes bezeichnet.

Der Einfluß, den eine Linse auf einen derartigen Wellenzug hat, besteht immer darin, daß sich die Konvergenz oder die Divergenz der Lichtstrahlen verändert und damit die Krümmung der Wellenfläche ebenfalls ändert.

Eine Linse, deren Mitte dicker als der Rand ist, die man gewöhnlich Konvexlinse nennt, bewirkt, in ein Bündel parallelen Lichts eingeschaltet, daß das Licht zu einem Brennpunkt sich vereinigt, weil sie den Wellenflächen eine konkave Krümmung verleiht. Dies rührt davon her, daß das Licht, wie wir früher gesehen haben, beim Durchsetzen eines dichteren Mediums verzögert wird. Infolgedessen werden diejenigen Wellenzüge, welche die Mitte der Linse dort, wo dieselbe am dicksten ist, durchsetzen, am meisten verzögert. Es entsteht daher an Stelle der geraden



Wellenfläche eine gekrümmte Wellenfläche, und die Strahlen, welche immer senkrecht auf den Wellenflächen stehen, konvergieren zu einem gemeinsamen Punkt, dem Brennpunkt.

Konvexlinsen, welche also eine positive Stärke haben oder „Konvergenzkraft“ besitzen, weil sie die Lichtwellen zu einem positiven oder reellen Fokus vereinigen, nennt man daher positive oder Pluslinsen, während diejenigen Linsen, welche man gewöhnlich Konkavlinsen nennt — und die in der Mitte dünner als am Rande sind —, den Wellenflächen des Lichts eine konvexe Krümmung mitteilen, so daß die Lichtstrahlen selbst nach dem Durchtritt durch die Linse divergieren, so daß es erscheint, als wenn dieselben von einem gedachten — virtuellen — Fokus herkämen. Daher nennt man solche Linsen mit negativer Stärke Negativlinsen oder Minuslinsen.

Zum Zweck, Linsen von bestimmtem Grade der Stärke vorzuschreiben oder zu bezeichnen, hat man durch internationale Vereinigung vom Jahre 1897 eine neue Einheit geschaffen, die Einheit der Stärke der Linse, gemessen an dem Grade der Konvergenz, welche sie einem parallelen Strahlenbüschel gibt, und hat derjenigen Linse die Stärke einer Dioptrie zugemessen, welche einem parallelen Lichtbüschel eine solche Konvergenz oder Divergenz gibt, daß die Wellenfläche im Scheitel der unendlich dünn gedachten Linse die Krümmung einer Dioptrie hat.

Es ist bekannt, daß die Brennweite einer Linse, die gewöhnlich mit dem Buchstaben  $f$  bezeichnet wird, von mehreren Umständen abhängt und zwar einerseits von der brechenden Kraft des angewandten Glases, andererseits von den Außenkrümmungen der Linse. Nehmen wir an, daß beide Flächen der Linse konvex gekrümmt seien, und daß der Radius der einen Fläche  $r_1$ , der andere  $r_2$  sei, dann wird die Krümmung der Oberflächen der Linse dadurch gefunden, daß wir die reziproken Werte der Radien nehmen.

Die Krümmung der ersten Fläche ist daher  $\frac{1}{r_1}$ , die Krümmung



der zweiten Fläche  $\frac{1}{r_2}$ . Die algebraische Summe dieser beiden Krümmungen ist dann die Gesamtkrümmung  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ . Diese Gesamtkrümmung muß multipliziert werden mit der brechenden Kraft des Glases, vermindert um die brechende Kraft der Luft, d. h. um 1. Dieser Ausdruck ist nun umgekehrt proportional  $f$ , und wir können daher die Formel für die Brennweite einer Linse schreiben:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \cdot \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

Ein Beispiel wird das Gesagte näher erläutern. Gesetzt, eine Konvexlinse habe die Krümmungsradien 0,05 und 0,2 m, der mittlere Brechungsindex des Glases, aus welchem sie hergestellt ist, sei 1,52, so finden wir, wenn wir sie in die Formel einsetzen, folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{f} = 0,52 \left( \frac{1}{0,05} + \frac{1}{0,2} \right) = \frac{5 \cdot 0,52}{20} = \frac{26}{2} = 13.$$

Die Linse besitzt daher eine Stärke von 13 Dioptrien, ihre Fokallänge ist  $\frac{1}{13}$  m oder 0,0769 m.

Die obengenannte Formel gilt unter der Voraussetzung, daß alle erhabenen Krümmungen einer Linse positiv und alle hohlen Krümmungen negativ gerechnet werden. Wenn also z. B. eine Linse eine konkave Fläche besitzt, deren Radius  $r$  ist, so ist die Krümmung dieser Fläche mit  $-\frac{1}{r}$  zu bezeichnen.

Weitere Überlegung erfordert die Bewegung der sog. konjugierten Brennpunkte. Nehmen wir wieder an, daß Licht von links nach rechts vom Punkte P ausstrahlt, so sind die Wellenflächen durch die konzentrischen Kreise um P gegeben. Man sieht, daß deren Krümmung von P nach außen gerechnet stetig abnimmt; in der Entfernung  $u$  ist die Krümmung  $\frac{1}{u}$  geworden. Setzen wir  $u = 200$  mm oder 0,2 m, so ist die Krümmung der Wellenfläche



— 5 Dioptrien, in der Entfernung 0,333 m — 3 Dioptrien usf. Das negative Zeichen soll hier andeuten, daß die Krümmung von der Lichtquelle aus betrachtet hohl ist.

Nehmen wir nun an, daß wir eine Positivlinse von + 12 Dioptrien hätten, d. h. eine Linse, welche einem Parallelbündel eine solche Konvergenz erteilt (Fig. 6), daß

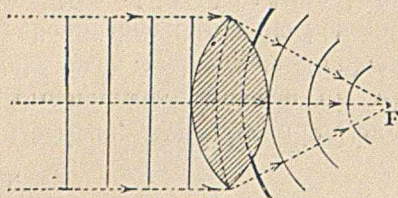


Fig. 6.

die Strahlen in einer Entfernung von 0,083 m ( $\frac{1}{12}$  m) hinter der Linse sich schneiden. Diese Linse wird, wenn sie nicht von einem Parallelbündel sondern von einem Lichtbündel getroffen wird, dessen Wellenflächen bereits gekrümmt sind, dieser Krümmung 12 Dioptrien algebraisch addieren. Betrachten wir z. B. Fig. 7. Die Linse, deren

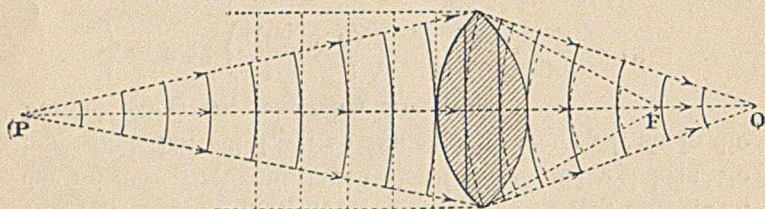


Fig. 7.

Fokus F ist, werde von dem divergenten Bündel, der vom Punkt P herkommt, getroffen, so wird der Schnittpunkt der gebrochenen Strahlen nicht in F sondern z. B. in Q liegen. Wo liegt nun Q? Wenn die Krümmung der Wellenfläche, welche die Linse trifft,  $\frac{1}{u}$  ist, so fügt die Linse vom Fokus  $f$  dazu die Krümmung  $\frac{1}{f}$ , also haben die gebrochenen Lichtstrahlen eine Krümmung ihrer Wellenfläche  $\frac{1}{f} + \frac{1}{u}$ .



Nennen wir die Entfernung des gesuchten Punktes Q von der Linse  $v$ , so ist  $\frac{1}{v}$  die Krümmung der Wellenfläche der Strahlen, welche die Linse verlassen; es gilt daher:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{u} + \frac{1}{f} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

oder in Worten: Die von der Linse erzeugte Krümmung der Wellenfläche ist gleich der algebraischen Summe der Krümmungen der Wellenfläche vor dem Eintritt in die Linse und der Krümmung, welche die Linse der Wellenfläche eines parallelen Büschels geben würde.

Hierbei wird angenommen, daß Distanzen links von der Linse negativ sind, da die Krümmungen der Wellenflächen solcher Strahlen, die von links divergieren, nach links konkav sind (Fig. 7).

Setzen wir  $u$  wie vorhin =  $-0,200$  m und  $f = 0,083$ , so haben wir:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{0,200} + \frac{1}{0,083}$$

oder  $\frac{1}{v} = -5 + 12$  (in Dioptrien)

oder  $\frac{1}{v} = +7$  Dioptrien,

so daß  $v = \frac{1}{7}$  m =  $0,143$  m ist.

Der Brillenfabrikant benutzt zur Bestimmung der Stärke einer Linse ein sehr einfaches Instrument, genannt Linsenmesser, welches in Wirklichkeit nur ein modifiziertes Sphärometer darstellt. Man legt auf dasselbe (Fig. 8 und 9) zunächst die Linse mit der einen Fläche, dann mit der anderen Fläche, wobei das Instrument die Pfeilhöhen beider Kurven algebraisch addiert, und diese Summe auf einem Zifferblatt angibt, welches in Dioptrien geteilt ist. Diese Zahl müßte nach Formel 1 auf S. 41 noch mit  $(n-1)$  — bei dem gewöhnlichen für Brillengläser angewandten Spiegelglas also mit  $0,51$  multipliziert werden. Um aber auch diese einfache Operation zu vermeiden, ist die Skala des



Instrumente schon so eingerichtet, daß diese Multiplikation bereits vorgenommen ist, so daß man direkt abliest:  $(n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$ , d. h. die Dioptrienzahl der Linse oder den reziproken Wert der Brennweite.

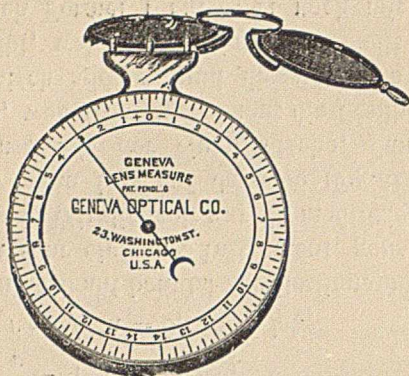


Fig. 8.

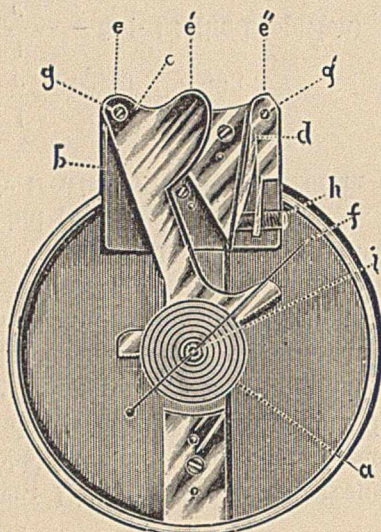


Fig. 9.

Den Zusammenhang zwischen Stärke einer Linse und ihrer Brennweite gibt übersichtlich die folgende Tabelle.



Stärke oder Krümmung	Fokallänge oder Radius der Kurve			
	Dioptrien	Meter	Millimeter	Engl. Zoll
0·25	4·0000	4000·	157·48	152·96
0·5	2·0000	2000·	78·74	76·48
0·75	1·3333	1333·3	52·49	50·99
1·00	1·0000	1000 0	39·37	38·24
1·25	·8000	800·0	31·50	30·59
1·5	·6667	666·7	26·24	25·49
1·75	·5714	571·4	22·50	21·85
2·00	·5000	500·0	19·68	19·11
2·25	·4444	444·4	17·50	16·99
2·5	·4000	400·0	15·75	15·30
2·75	·3636	363·6	14·32	13·91
3·00	·3333	333·3	13·12	12·74
3·5	·2857	285·7	11·25	10·92
4·0	·2500	250·0	9·84	9·56
4·5	·2222	222·2	8·75	8·50
5·0	·2000	200·0	7·87	7·65
5·5	·1818	181·8	7·16	6·95
6·0	·1667	166·7	6·56	6·37
7	·1429	142·9	5·62	5·46
8	·1250	125·0	4·92	4·78
9	·1111	111·1	4·37	4·25
10	·1000	100·0	3·94	3·82
11	·0909	90·9	3·58	3·48
12	·0833	83·3	3·28	3·19
13	·0769	76·9	3·03	2·94
14	·0714	71·4	2·81	2·73
15	·0667	66·7	2·63	2·55
16	·0625	62·5	2·46	2·39
17	·0588	58·8	2·32	2·25
18	·0555	55·5	2·19	2·13
19	·0526	52·6	2·07	2·01
20	·0500	50·0	1·97	1·91
25	·0400	40·0	1·58	1·53
30	·0333	33·3	1·31	1·27
40	·0250	25·0	0·98	0·96
50	·0200	20·0	0·79	0·76
60	·0167	16·7	0·66	0·64
70	·0143	14·3	0·562	0·546
80	·0125	12·5	0·492	0·478
90	·0111	11·1	0·437	0·424
100	·0100	10·0	0·394	0·383
120	·0083	8·3	0·328	0·319
140	·0071	7·1	0·281	0·273
160	·0062	6·2	0·246	0·239
180	·0055	5·5	0·219	0·213
200	·0050	5·0	0·197	0·191
250	·0040	4·0	0·157	0·153
300	·0033	3·3	0·131	0·127
400	·0025	2·5	0·098	0·095
500	·0020	2·0	0·079	0·075
1000	·0010	1·0	0·039	0·038



Fokallänge oder Radius der Krümmung			Stärke oder Krümmung
Engl. Zoll	Millimeter	Meter	Dioptrien
1	25·4	0·0254	39·37
1·25	31·75	0·03175	31·50
1·5	38·10	0·03810	26·25
1·75	44·45	0·04445	22·50
2	50·80	0·05080	19·69
2·25	57·15	0·05715	17·50
2·5	63·50	0·06350	15·75
2·75	69·85	0·06985	14·32
3	76·20	0·07620	13·12
3·25	82·55	0·08255	12·11
3·5	88·90	0·08890	11·25
3·75	95·25	0·09525	10·50
4	101·6	0·10160	9·84
4·5	114·3	0·11430	8·75
5	127·0	0·12700	7·87
5·5	139·7	0·13970	7·16
6	152·4	0·15240	6·56
6·5	165·1	0·16510	6·06
7	177·8	0·17780	5·62
8	203·2	0·20320	4·92
9	228·6	0·22860	4·37
10	254·0	0·25400	3·94
11	279·4	0·27940	3·58
12	304·8	0·30480	3·28
13	330·2	0·33020	3·03
14	355·6	0·35560	2·81
15	381·0	0·38100	2·62
16	406·4	0·40640	2·46
17	431·8	0·43180	2·32
18	457·2	0·45720	2·19
20	508·0	0·50800	1·97
22	558·8	0·55880	1·79
24	609·6	0·60960	1·64
26	660·4	0·66040	1·51
30	762·0	0·76200	1·31
35	889·0	0·88900	1·12
40	1016·0	1·01600	0·984
48	1219·2	1·21920	0·820
60	1524·0	1·52400	0·656
72	1828·8	1·82800	0·547
100	2540·0	2·54000	0·394



## Regeln um Dioptrien in Brennweiten von Metern, Millimetern oder Zollen umzuwandeln.

1. Dioptrien in Meter zu verwandeln:  
Teile 1 durch die Zahl der Dioptrien.
2. Meter in Dioptrien zu verwandeln:  
Teile 1 durch die Zahl der Meter.
3. Dioptrien in Millimeter zu verwandeln:  
Teile 1000 durch die Zahl der Dioptrien.
4. Millimeter in Dioptrien zu verwandeln:  
Teile 1000 durch die Zahl der Millimeter.
5. Dioptrien in rheinländische oder englische Zoll zu verwandeln:  
Teile 38·24 resp. 39·37 durch die Zahl der Dioptrien.
6. Rheinländische resp. englische Zoll in Dioptrien zu verwandeln:  
Teile 38·24 resp. 39·37 durch die Zahl der rheinländischen resp. englischen Zolle.

Anm.: Für gewöhnliche Arbeiten genügt es, 40 englische Zoll und 38 rheinländische (preußische) = 1 m zu setzen.

### 31. Einfluß der Stellung einer Linse auf ihre scheinbare Stärke.

Aus der Betrachtung eines konvergenten oder divergenten Lichtbüschels folgt, daß die Krümmung seiner zugehörigen

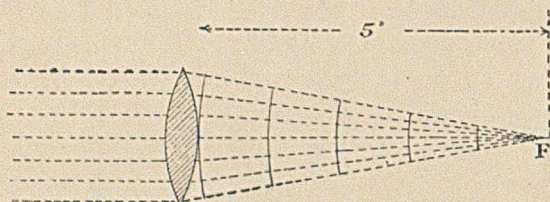


Fig. 10.

Wellenfläche sich von Punkt zu Punkt seiner Achse ändert. Ein von Punkt F (Fig. 10) ausgehendes Strahlenbüschel



besitzt eine um so geringere Wellenflächenkrümmung, je weiter wir uns von dem Punkte selbst entfernen. Andererseits nimmt die Wellenflächenkrümmung eines konvergenten Büschels (Fig. 11) immer mehr zu, je mehr wir uns seinem Fokus nähern.

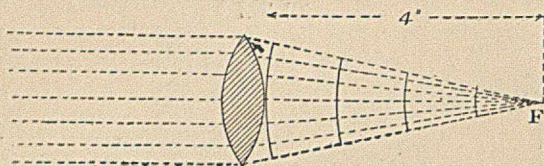


Fig. 11.

Gesetzt das von einer sehr entfernten Lichtquelle stammende Licht hat eine Linse von  $+8$  Dioptrien passiert; die Wellenfläche hat dann nach dem Durchtritt eine Krümmung von  $+8$  Dioptrien und konvergiert nach einem Punkt in  $\frac{1}{8}$  m Distanz. Die Krümmung der Wellenfläche nimmt nun nach diesem Punkt hin dauernd zu. In einem Abstand von  $25$  mm von der Linse ist die Krümmung bereits  $10$  D, also so stark, wie wenn eine Linse von  $+10$  D angewendet wäre.

Nennen wir die wahre Stärke einer Linse in Dioptrien gemessen  $p$ , so ist ihre scheinbare Stärke im Abstand  $d$  von der Linse:

$$p' = p \frac{1}{1 - pd}$$

Ist  $d$  in rheinländischen Zollen gegeben, so lautet die Formel:

$$p' = p \frac{38 \cdot 24}{38 \cdot 24 - pd}$$

oder für  $d$  in Millimeter ausgedrückt:

$$p' = p \frac{1000}{100 - pd}$$

Beispiel: Wie groß ist die scheinbare Stärke einer Linse von  $+6,5$  D in einem Abstand von  $40$  mm?

Es ist danach:

$$p' = 6,5 \frac{1000}{100 - 6,5 \cdot 40} = 6,5 \frac{1000}{1000 - 260} = +8,7 \text{ D.}$$



Als praktische Anwendung dieser Tatsache kann z. B. die angegeben werden, daß eine weitsichtige oder über-sichtige Person, welche + Linsen benutzt, deren Stärke vermehren kann, wenn sie die Brille weit vom Auge weg setzt und auf diese Weise die gleichen Gläser zum Lesen gebrauchen kann, welche für das Fernsehen nahe am Auge dessen Fehler gerade ausgleichen.

## **32.           Aufhebung der Linsenwirkung               durch Kombination zweier Linsen.**

Die Wirkung jeder Linse von nicht zu großer Stärke kann vollkommen dadurch aufgehoben werden, daß man sie mit einer Linse von gleicher aber entgegengesetzter Stärke zusammenlegt. So wird die Sammelwirkung einer Linse von + 4 D vollkommen durch eine mit ihr in Kontakt ge-brachte Linse von - 4 D aufgehoben. Der Grund ist der, daß die Gesamtbrennweite zweier dünnen, bis zur Berührung genäherten Linsen gleich der algebraischen Summe der Brennweiten der Einzellinsen ist.

Daher bietet die Aufhebung der Wirkung einer Linse durch eine andere von entgegengesetzter Krümmung ein treffliches Mittel zur Bestimmung der Brennweite der ersten Linse aus der bekannten Brennweite derjenigen Linse, welche ihre Wirkung genau aufhebt.

Besitzt man also einen „Brillenkasten“, der z. B. alle positiven und negativen Linsen von 0,25 D bis 20 D stufenweise geordnet enthält, so kann man die Stärke jeder beliebigen sphärischen Linse aus diesem Intervall genau bestimmen, indem man die zu untersuchende Linse nach der Reihe mit den bekannten Linsen in Kontakt bringt und damit solange fortfährt, bis eine Kombination ohne Linsenwirkung — vollkommene Aufhebung der Wirkung der einen Linse durch die andere — gefunden ist.

Es ist leicht, diese Tatsache auf folgende Weise fest-zustellen:



Man hält die Linse in ausgestrecktem Arm etwa 30 bis 35 cm vom Auge entfernt so, daß man ein geradliniges Objekt — Fenstersprosse am besten — durch dieselbe hindurch erblickt und bewegt sie dann langsam etwas (15 bis 20 mm) auf- resp. abwärts. Hierbei sieht man das Objekt sich ebenfalls bewegen und zwar gleichgerichtet mit der Linsenbewegung, wenn die Linse konkav — eine Zerstreuungslinse —, entgegengesetzt gerichtet, wenn die Linse konvex — eine Sammellinse — ist. Die Größe der Bewegung des Objektes hängt von der Stärke der Linse ab: starke Linsen geben starke, schwache geringe Bewegungen, ein Planglas läßt das Objekt stillstehen.

Hat man z. B. die Stärke einer Sammellinse zu erproben und findet nach Zusammenlegen mit einer Zerstreuungslinse, daß das anvisierte Objekt sich der Linse entgegenbewegt, so ist die angewandte Zerstreuungslinse noch zu schwach und es muß eine stärkere benutzt werden; bewegt sich dagegen das Objekt, durch die bewegte Linsencombination betrachtet, im Sinne der Linsenbewegung, so war die Zerstreuungslinse bereits zu stark und die Gesamtkombination ist dadurch zerstreud geworden. Wenn beide Linsen gleiche Stärke haben, findet keine Bewegung des anvisierten Objektes statt.

Alles dies gilt aber nur für verhältnismäßig dünne Linsen von nicht zu kurzer Brennweite (für Brillengläser z. B. noch sehr angenähert bis ca. 8 bis 10 D); bei dicken Linsen ist eine gegenseitige Vernichtung der Wirkung der Einzellinsen nur dann möglich, wenn dieselben nahezu plankonvex sind und die Kurven demgemäß ineinander passen.

Kombinieren wir z. B. eine dicke Plankonvexlinse von + 20 D mit einer gleichen plankonkaven Linse von — 20 D so, daß die gewölbten resp. hohlen Seiten einander bis zur Berührung genähert werden, so tritt vollkommene Kompensation ein: das Linsenpaar wirkt wie ein Planglas. Legen wir aber die Linsen mit den Planseiten aufeinander, so daß die eine Außenseite konvex, die andere konkav ist,



so bleibt eine geringe Sammelwirkung zurück. Die Größe dieser Sammelwirkung hängt von der Dicke und dem Brechungsindex des Glases sowie der Radien ab. Setzen wir die Krümmung der ersten Fläche  $+\frac{1}{r_1}$ , die Krümmung der zweiten Fläche gleich  $-\frac{1}{r_1}$ , die Dicke der Linse gleich  $t$ , so ist ihre Stärke  $t - 6r_1^2$  Dioptrien, wobei  $r$  und  $t$  in Metern gegeben sind. Sind diese beiden Größen in Millimetern gegeben, so wird die Stärke:

$$\frac{1}{f} = t - 0,006 r^2.$$

Der Grund dieser Erscheinung ist nach § 31 leicht verständlich. Durchsetzt z. B. das Licht parallel einfallend die Konvexfläche zuerst, so wird die Wellenflächenkrümmung mit der Entfernung von der Linsenfläche zunehmen; die Konkavfläche von gleicher Stärke wie die Konvexfläche ist dann nicht mehr imstande, die Krümmung vollkommen aufzuheben.

### 33. Biegung sphärischer Linsen.

Wie in § 16 ausgeführt, hängt die Stärke einer Linse von dem Brechungsindex des angewandten Glases multipliziert mit der algebraischen Summe ihrer Außenkrümmungen ab; es gilt ja:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

oder

Stärke = Brechbarkeit  $\times$  Summe der Krümmungen.

Die gleiche Summe läßt sich nun aber durch Addition sehr verschiedener Summanden erreichen, so geben z. B.  $3 + 7$ ,  $4 + 6$ ,  $5 + 5$ ,  $2 + 8$  und  $1 + 9$  je 10; auch  $11 - 1$ ,  $12 - 2$ ,  $13 - 3$  usw. ergeben als Summe wiederum 10. Man sieht also, daß unter Auswahl eines jeden beliebigen Krümmungsverhältnisses die gleiche Brennweite erreicht werden kann. Wenn z. B. eine gleichschenklige Bikonvex-



linse die beiden gleichen Krümmungen von je 600 mm hat, so ist ihre Gesamtkrümmung  $\frac{1}{0,6} + \frac{1}{0,6} = \frac{1000}{600} + \frac{1000}{600} = \frac{2000}{600} = + 3,33$  D. Wenn das Glas eine Brechbarkeit von 0,52 hat, so ist also die Stärke dieser Linse  $0,52 \times 3,33 = 1,7$  Dioptrien.

Die ganz gleiche Stärke wird aber auch erreicht, wenn man eine plankonvexe Linse herstellt, vorausgesetzt, daß die Krümmung der Konvexfläche doppelt so stark gewählt wird als vorher angenommen. Es muß also der Radius der gewölbten Fläche zu 300 mm gewählt werden; denn es gilt dann für die Gesamtkrümmung

$$\left(0 + \frac{1}{0,300}\right) = \frac{1000}{300} = 3,33 \text{ D,}$$

genau wie vorhin.

Diese Möglichkeit, die Radien einer Linse beliebig zu wählen, oder vielmehr, genauer gesprochen, über den einen Radius frei verfügen zu können, ist für die gesamte Optik, auch für die Brillentechnik, von besonderer Bedeutung. Man nennt die Operation, welche (natürlich nur im Geiste oder auf dem Papier) mit einer Linse von gegebener Brennweite vorgenommen wird, nur unter Beibehaltung der Brennweite oder Stärke die Radien und damit die Form der Linse zu ändern, das Biegen oder Durchbiegen der Linse. Man macht in der Brillentechnik z. B. von dieser Operation Gebrauch, um an Stelle von Bikonvexlinsen stark meniskenförmig gewölbte Gläser zu verordnen, welche den Augenwimpern mehr Spielraum lassend häufig vorgezogen werden.

Man unterscheidet zwischen konvexen und positiven Menisken, wenn die konvexe oder positive Krümmung stärker ist als die konkave Krümmung, und konkaven oder negativen Menisken, wenn die negative Krümmung stärker ist als die konvexe Krümmung. Beide Arten von Linsen werden unter dem Namen periskopische Linsen zusammen-



gefaßt. Wenn die Krümmungen der beiden Flächen einer periskopischen Linse so gewählt werden, daß ihre algebraische Summe gleich der algebraischen Summe der Krümmungen irgend einer anderen Linse ist, so haben beide — vorausgesetzt, daß sie aus gleichem Glase hergestellt sind — auch dieselbe Brennweite. Wenn beispielsweise eine periskopische Linse mit der positiven Krümmung + 5 Dioptrien und der negativen Krümmung — 1,67 Dioptrien hergestellt wird, so ist die algebraische Summe dieser beiden Krümmungen 3,33 Dioptrien wie bei der vorhin angezogenen Linse.

Wenn man einen Linsenmesser benutzt, so findet man mit seiner Hilfe sehr leicht auch die Regel praktisch bestätigt, daß die Stärke der Linse von der Summe der Krümmungen abhängt, wobei selbstverständlich negative Krümmungen oder konkave Flächen von den positiven Krümmungen oder konvexen Flächen zu subtrahieren sind. Wenn ein Optiker eine Linse liefern soll von — sagen wir — 4 Dioptrien, so kann er entweder eine plankonvexe Linse liefern, wobei sich dann die Krümmung nur auf der einen Seite befindet, oder eine gleichschenklige bikonvexe Linse, bei der beide Seiten die halbe Krümmung aufweisen, oder eine periskopische Linse, bei welcher dann stets die eine Seite eine stärkere Krümmung als 4 Dioptrien hat, die andere Seite eine schwächere; die eine Form läßt sich aus der anderen durch das Durchbiegen herleiten. Es ist nur eine einfache Regel dabei zu bedenken, daß, wenn man die Krümmung der einen Fläche um irgend einen beliebigen Wert erhöht, die Krümmung der anderen Fläche um den gleichen Betrag erniedrigt werden muß. Ein Beispiel wird dies noch näher erläutern. Welchen Radius muß man der vorderen Fläche einer periskopischen Linse geben, deren zweite Fläche einen Radius von 3 cm hat, während die Stärke 5 Dioptrien sein soll, und das Glas einen Brechungsindex von 1,5 besitze? Dann ist die algebraische Summe der Krümmungen  $\frac{5}{0,5} = 10$ . Die Krümmung der zweiten



Fläche in der gleichen Einheit ergibt sich  $= -\frac{0,33}{100} = -33,3$ .

Hieraus folgt  $10 =$  Krümmung der ersten Fläche  $-33,3$ , und daraus folgt als Wert für die erste Krümmung  $+43,3$ .

Der Radius der ersten Fläche muß daher sein  $= \frac{1}{43,3}$  m  
oder  $= \frac{100}{43,3} = 2,3$  cm.

### 34. Die merkwürdigen Punkte eines Linsensystems.

Um bequem mit dicken Linsen und Systemen von Linsen rechnen zu können, eine Operation, welche sonst außerordentlich schwerfällig sein würde, hat Gauß eine

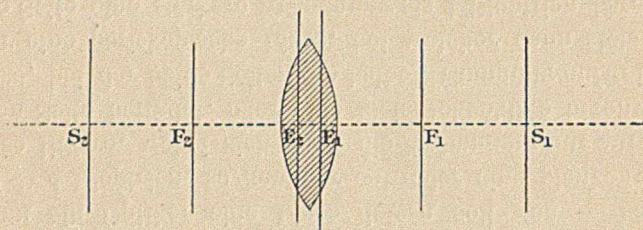


Fig. 12.

Methode angegeben, welche die Linse selbst durch ein System sogenannter merkwürdiger Punkte und merkwürdiger Ebenen ersetzt. Ohne auf die Begründung dieser Theorie hier eingehen zu können, mag dieselbe für unseren Zweck praktisch folgendermaßen vorgetragen werden. Fig. 12 zeigt eine bikonvexe Linse mit ihren merkwürdigen Punkten und Ebenen. Das erste Punktepaar  $E_1 E_2$  nennt man die beiden Hauptpunkte, und wenn man, wie es häufig für dünne Linsen möglich ist, diese beiden Punkte als zusammenfallend betrachtet, auch das optische Zentrum der Linse. Die bemerkenswerte Eigentümlichkeit dieser beiden Punkte wird durch die Fig. 13 klargemacht. Wenn nämlich irgendein Strahl nach dem Punkt  $E_2$  zielt, so tritt er nach



der Brechung aus der Linse so aus, als wenn er sich selbst parallel durch den Punkt  $E_1$  gezogen würde.

Das zweite Punktepaar ist  $F_1F_2$ . Man nennt diese beiden Punkte die Hauptbrennpunkte der Linse und definiert sie dadurch, daß man von ihnen aussagt, daß jeder von einem derselben ausgehende Strahl nach der Brechung durch die Linse ihrer Achse parallel gemacht wird. Die Entfernung von  $F_1$  bis  $E_1$  und von  $F_2$  bis  $E_2$  ist gleich, und man nennt diese Entfernung die Äquivalentbrennweite oder die wahre Brennweite der Linse.

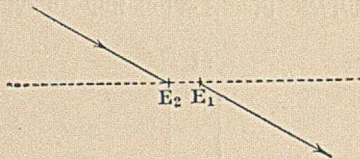


Fig. 13.

3. (Fig. 12.) Als drittes Punktepaar definieren wir die Punkte  $S_1$  und  $S_2$ . Sie werden Symmetriepunkte genannt und sind dadurch ausgezeichnet, daß der eine Punkt das von der Linse entworfene Bild des anderen Punktes ist. Ein Objekt, welches sich in  $S_1$  befindet, wird durch die Linse in  $S_2$  in gleicher Größe abgebildet.

4. Punktepaar. Für den Fall, daß die Linse sich nicht mit ihren beiden Oberflächen in Luft oder im gleichen optischen Medium befindet, sondern daß sich hinter der Linse ein anderes optisches Medium als vor derselben befindet, indem beispielsweise die Linse mit ihrer rechten Fläche in eine Flüssigkeit eingetaucht ist, verschieben sich die Hauptpunkte der Linse und zwar nach der Richtung des dichteren Mediums zu. Sie werden dann Knotenpunkte genannt.

Der eben besprochene Fall tritt beispielsweise beim menschlichen Auge auf. Die Kristalllinse wird von außen durch Luft, von innen durch die die Augenhöhle erfüllende Flüssigkeit begrenzt. Der zweite Knotenpunkt der Kristall-



linse liegt daher gegen den Augenhintergrund hin nach innen verschoben und fällt nicht mit den Hauptpunkten derselben zusammen. Im übrigen vertreten in diesem Fall die Knotenpunkte in ihren Eigenschaften die Hauptpunkte, d. h. insonderheit die Äquivalentbrennweite der Linse rechnet vom Hauptbrennpunkt bis zum hinteren Knotenpunkt und nicht bis zu ihrem Hauptpunkt.

5. Punktepaar sind die von Abbe eingeführten Schnitte der Eintritts- und Austrittspupille mit der optischen Achse des Systems. Sie sind ebenfalls zwei konjugierte Punkte, über deren Wesen in § 63 abgehandelt werden wird.

Die merkwürdigen Ebenen eines Linsensystems, die sämtlich senkrecht auf ihrer Achse stehen, sind die folgenden:

1. Hauptebenen, die beiden Ebenen, welche durch die Hauptpunkte gelegt gedacht werden können. Ihre Eigen-

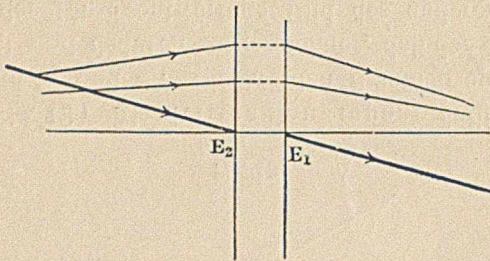


Fig. 14.

schaft besteht darin, daß jeder Strahl, welcher einen Punkt dieser Hauptebenen trifft, so aus der Linse heraustritt, als wenn er den Weg zwischen den beiden Hauptebenen parallel mit der Achse zurückgelegt hätte (Fig. 14).

2. Brennebenen. Die Brennebenen sind senkrechte Ebenen, welche durch die beiden Hauptbrennpunkte gelegt gedacht werden können (Fig. 15). Sie haben die Eigenschaften, daß die von einem auf ihnen gelegenen Punkte  $P$  gezogenen Strahlen als ein paralleles Bündel die Linse verlassen, dessen Achse parallel dem Strahl  $PE_2$  verläuft



und als dessen Hauptstrahl der in der Fig. 15 dick gezeichnete Strahl  $PE_2$  und seine parallele Verschiebung von  $E_1$  ausgezeichnet wird.

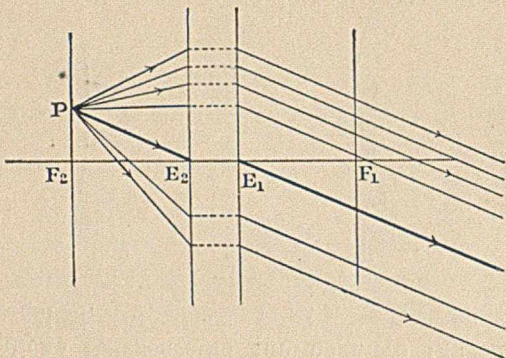


Fig. 15.

3. Die Ebenen gleicher Bildgröße. Es sind dies durch die beiden Symmetriepunkte gelegte Ebenen (Fig. 16). Es sind dies Ebenen, welche folgende Eigenschaften haben.

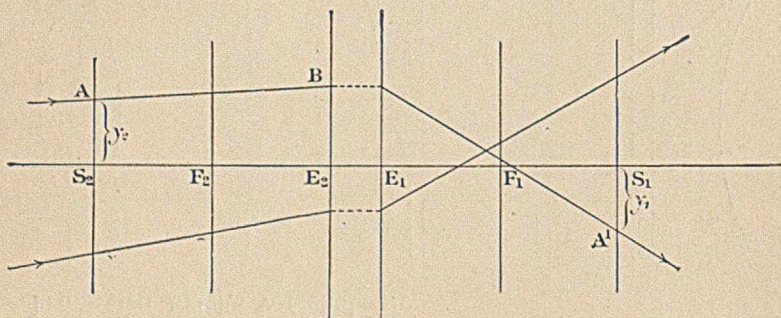


Fig. 16.

Zieht man durch irgendeinen Punkt dieser Ebenen (Fig. 16) A irgendwelchen Strahl, z. B. AB, so wird derselbe beim Durchtritt durch die Linse so gebrochen, daß er die zweite Symmetrieebene bei A' schneidet und zwar so, daß die Distanz  $AS_2 = A_1S_1$  wird oder  $y_1 = y_2$ .



### 35. Lage der äquivalenten oder Haupt-Punkte und -Ebenen.

Bei einfachen symmetrischen Bikonvexlinsen (mit zwei gleichen Krümmungen) stehen die beiden Hauptpunkte und Hauptebenen symmetrisch zum Linsenkörper und ungefähr in einer Entfernung von einem Drittel der Linsendicke. Bei Konvexlinsen aber mit zwei verschiedenen Krümmungen sind die Hauptpunkte nach der stärker gekrümmten Fläche verschoben.

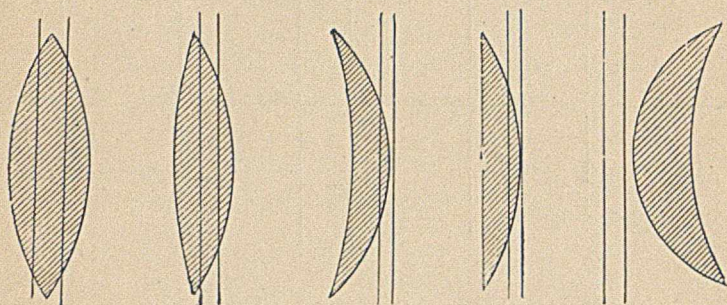


Fig. 17.

Die Hauptpunkte können bei konvexen Meniskuslinsen sich ganz außerhalb der Linse befinden. Siehe Fig. 17. Eine ähnliche Skizzenreihe für negative Linsen wird in Fig. 18 gegeben.

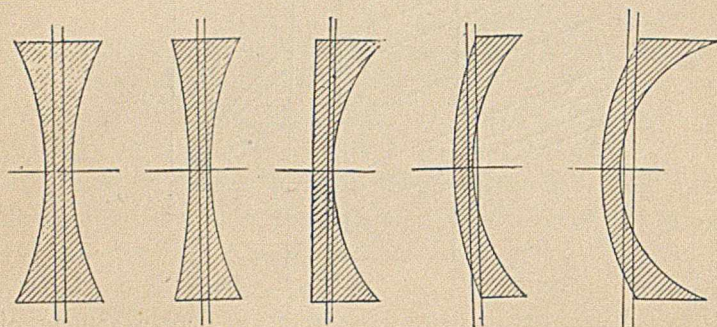


Fig. 18.



Die Formeln zur Berechnung der Lage der beiden Hauptpunkte sind kompliziert; ihre Entfernung voneinander oder die Äquivalentdicke ist jedoch annähernd genau

$$\Delta = t \frac{n-1}{n};$$

wo  $\Delta$  die Entfernung der beiden Hauptpunkte,  $t$  die Dicke der Mitte der Linse und  $n$  der Brechungsindex sind. Für Crown Glas ( $n = 1,5$ ) ist  $\Delta = \frac{1}{3}t$ .

### 36. Formeln über die Beziehungen zwischen den Hauptpunkten und der Gestalt einer Linse.

Die Lagen der Hauptpunkte einer dicken Linse können aus den Krümmungsradien und dem Brechungsindex des Glases ( $n$ ) abgeleitet werden.

Wenn  $r_1$  der Radius der ersten Fläche,  $r_2$  der der zweiten Fläche der Linse ist und  $O_1$  der vordere,  $O_2$  der hintere Scheitelpunkt der Linse und die Dicke von  $O_1$  zu  $O_2$  mit  $t$  bezeichnet wird, so ist die Entfernung von  $E_1$  und  $O_1$  nach innen gemessen

$$\frac{r_1 t}{n(r_1 + r_2 - t) + t};$$

und die Entfernung von  $E_2$  nach  $O_2$  nach innen gemessen

$$\frac{r_2 t}{n(r_1 + r_2 - t) + t}.$$

Die Länge  $E_1 E_2$  oder die Äquivalentdicke

$$\Delta = \frac{t(r_1 + r_2 - t)(n-1)}{n(r_1 + r_2 - t) + t}.$$

Wenn  $t$  klein ist im Vergleich zu  $r_1 + r_2$ , vereinfacht sich diese Formel zu

$$t \frac{(n-1)}{n}$$

wie oben angegeben.



Sind die Linsen aus Kronglas, für welches  $n = 1,5$  ist, so liegen die beiden Hauptpunkte ungefähr ein Drittel der Linsendicke auseinander.

Die wahre Brennweite oder äquivalente Brennweite  $F_1 E_1$  oder  $E_2 F_2$  ergibt die Formel:

$$f = \frac{n}{n-1} \cdot \left( \frac{r_1 r_2}{n(r_1 + r_2 - t) + t} \right).$$

Obige Gleichungen gelten für alle Linsen, für positive, negative, auch Meniskuslinsen unter der Voraussetzung, daß die Krümmungsradien von konvexen Flächen immer als positiv und von konkaven Flächen immer als negativ bezeichnet werden.

## 37. Kombinationen von Linsen.

Benützt man zwei Linsen, welche etwas auseinanderliegen, so ist es bekannt, daß diese Kombination einer einzelnen Linse „äquivalent“ ist, welche in bezug auf Dicke und Stärke von beiden verschieden ist. Mit anderen Worten: es ist möglich eine einzelne Linse herzustellen, welche in bezug auf Brennweite usw. dieselbe Stärke wie die Kombination besitzt. Diese einfache „äquivalente“ Linse aber würde Fehler der sphärischen und chromatischen Aberration aufweisen, deren Vermeidung durch eine Kombination von Linsen gerade bezweckt wird.

Zwei dünne Linsen, die sich berühren. In diesem Falle ist die resultierende Stärke die algebraische Summe der Stärken der einzelnen. Eine Linse von  $+3 D$  mit einer von  $+2,25 D$  kombiniert ist einer Linse von  $5,25 D$  äquivalent. Oder eine Linse von  $+6 D$  kombiniert mit einer von  $-3,5 D$  ergibt eine einfache Linse von  $+2,5 D$ .

Zwei dünne Linsen, die auseinanderliegen. — Die Regel ist folgende: die Stärke der äquivalenten Linse



ist gleich der Stärke der beiden Linsen, die sich berühren, vermindert um das Produkt aus der Stärke der beiden Linsen und ihrer Entfernung in Dezimalen eines Meters ausgedrückt.

In Buchstaben ist die resultierende Stärke  $= P_1 + P_2 - P_1 P_2 w$ ; wo  $P_1, P_2$  die Stärken der beiden Linsen und  $w$  die Entfernung derselben voneinander bedeuten. Z. B.: es haben die Linsen  $+3 D$  und  $+5 D$ , und  $w$   $25 \text{ mm} = 0,025 \text{ m}$ .

Die resultierende Stärke wird dann gleich  $3 + 5 - (15 \times 0,025 = 8 - 0,375 = 7,625$  Dioptrien.

2. Beispiel: Zwei Linsen von  $+12 D$  in einem Abstand von  $20 \text{ mm}$  sind einer Linse äquivalent von  $12 + 12 - (12 \times 12 \times 0,02 = 24 - 2,88 = 21,12$  Dioptrien.

3. Beispiel: Zwei Linsen von  $+12 D$  und  $-8 D$  in einem Abstand von  $6 \text{ mm}$  sind einer Linse äquivalent von  $12 - 8 - (12 \times -8 \times 0,006) = 4 + 0,576$  Dioptrien.

Ein Huyghensches Okular mit Linsen von  $15 D$  resp.  $45 D$  in einem Abstand von  $40 \text{ mm}$  ist  $15 + 45 - (15 \times 45 \times 0,04) = 60 - 27 = 33$  Dioptrien äquivalent.

## 38. Hauptpunkte von Linsenkombinationen.

Bei vielen optischen Instrumenten finden sich zwei oder mehr sphärisch gekrümmte Linsen, welche auf derselben Achse zentriert in einiger Entfernung voneinander stehen. In solchen Fällen entsteht häufig die Frage: welche einfache Linse wäre diesem System äquivalent? Diese äquivalente Linse könnte auch dann nicht immer konstruiert werden, wenn die Aberrationen fortfielen. Sind die Lagen der Hauptpunkte jeder einzelnen Linse und deren Entfernung voneinander bekannt, so ist es leicht, unter Anwendung der Geometrie die Lagen der Hauptpunkte des Systems festzustellen. Wenn man sich auch gewisser Beziehungen zwischen dem Weg des Lichtes durch eine



einfache Linse und den Lagen ihrer Hauptpunkte erinnert, ist die Anwendung auf den Fall irgend einer gegebenen Linsencombination sehr einfach.

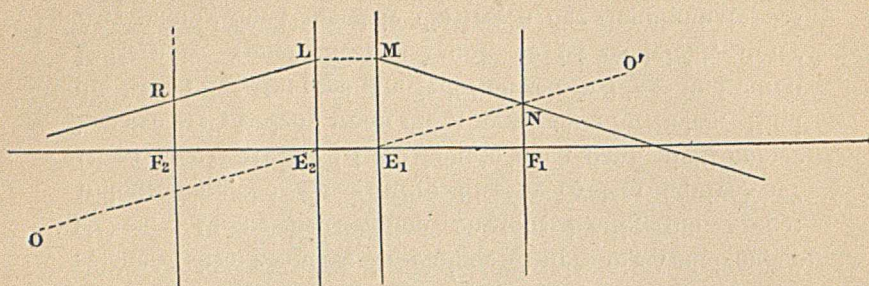


Fig. 19.

Im Falle einer einfachen Linse seien  $F_1, F_2$  die Brennpunkte und  $E_1, E_2$  die Hauptpunkte.  $RL$  sei die Richtung eines bestimmten Strahles, gesucht dessen Richtung nach dem Durchgang durch die Linse. Man ziehe  $OE_2, E_1O'$  parallel zu  $RL$ . Sie schneidet die Brennebene in  $N$ . Aus der Definition der Brennebene folgt, daß ein paralleles Büschel, welches sich  $OE_2$  entlang bewegt seinen Brennpunkt in  $N$  haben muß. Deshalb wird der Teil des Wellenzuges, welcher  $RL$  entlang geht, auch seinen Brenn-

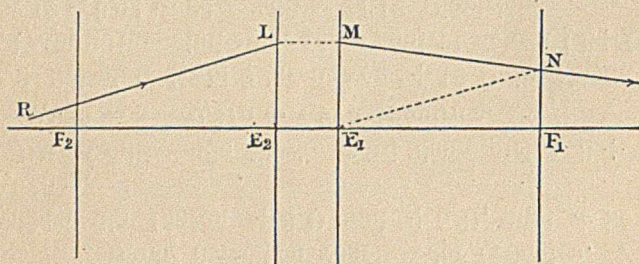


Fig. 20.

punkt in  $N$  haben. Die Konstruktion ist darum folgende: Man verlängere  $RL$  bis es die eine Hauptebene in  $L$  trifft, ziehe  $LM$  parallel zur optischen Achse, bis es die andere



Hauptebene in M schneidet und verbinde M und N. Die Linie MN ist die Richtung des Strahles RL nach dem Durchgang durch die Linse.

Es ist ersichtlich, daß wir den Punkt N finden können ohne den Teil  $OE_2$  zu ziehen, indem man nur die Linie  $E_1O$  parallel zu RL zieht. Es ergibt sich daher folgende allgemeine Konstruktion (Fig. 20). Wenn ein Strahl die erste Hauptebene in L schneidet, zieht man durch den zweiten Hauptpunkt eine Gerade parallel zum Strahl, die die Brennebene in N schneidet.

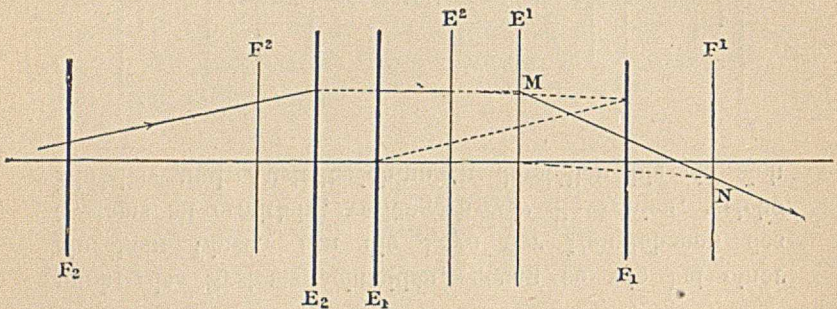


Fig. 21.

Der Strahl RL wird durch die Äquivalendicke von L zu M parallel zur optischen Achse bis zur zweiten Hauptebene weitergezogen, welche er in M trifft. Die Linie MN gibt die Richtung des austretenden Strahles an. Durch wiederholte Anwendung dieser Konstruktion für jede Linse einer Kombination ist es möglich, die Austrittsrichtung irgendeines einfallenden Strahles aus der Kombination zu bestimmen.

Als erstes Beispiel wählen wir den Fall zweier positiven Linsen in einem kleineren Abstand als eine der beiden Fokallängen. Fig. 21 gibt die Konstruktion für die Richtung des austretenden Strahles MN. In dieser Figur bedeuten  $E_2$   $E_1$  die Hauptpunkte der ersten Linsen;  $E^1$   $E^2$



mit den Ziffern am Kopf der Buchstaben diejenigen der zweiten Linse.

Um die Hauptpunkte des Systems, als ein Ganzes betrachtet, zu finden, nehmen wir Strahlen parallel zur optischen Achse, da dieselbe die Achse im Hauptbrenn-

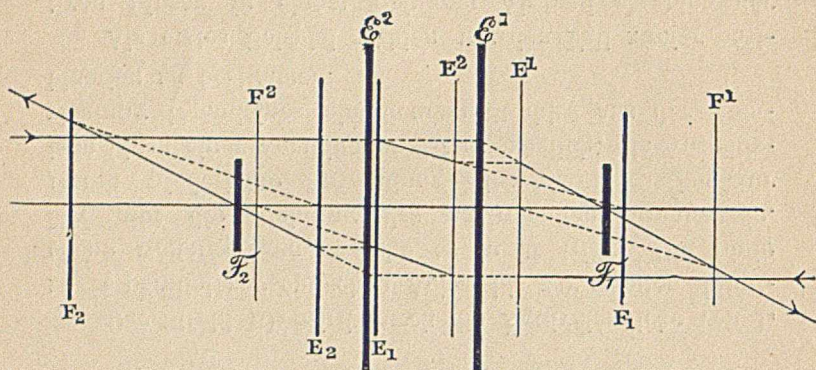


Fig. 22.

punkt des Systems schneiden, genau so wie bei einer einzelnen Linse. Um die Lage der Hauptebenen des Systems zu ermitteln, verlängern wir die Linien, welche Einfall- und Austrittsrichtungen darstellen bis sie sich

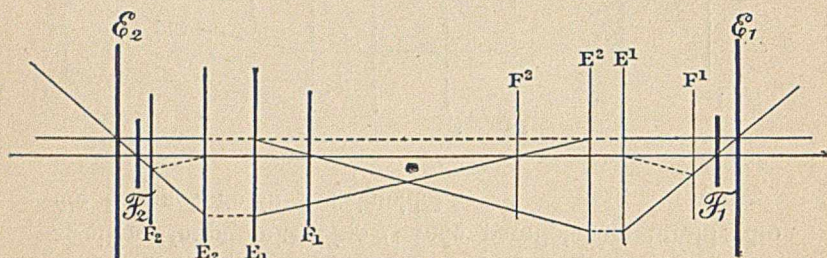


Fig. 23.

schneiden. Die Schnittpunkte geben dann die Hauptebenen  $E^2 E^1$  des Systems an, welche natürlich, wie in Fig. 22, durch Linien senkrecht zur optischen Achse dargestellt werden. Der Grund dafür wird klar, wenn man die Lage



der Hauptebenen einer einfachen Linse in bezug auf die Anfangs- und Endrichtungen eines zur Achse parallelen Strahles betrachtet.

Als weiteren Fall nehmen wir konvergente Linsen in einem größeren Abstand voneinander, als die Summe ihrer Fokallänge. Es seien (Fig. 23)  $f$ ,  $f_1$  die Brennweiten der ersten bzw. zweiten Linse, wo  $f$  größer wie  $f_1$ .

Obwohl  $F_1$   $F_2$  in diesem Falle beide wirkliche Brennpunkte sind, wirkt das System wie eine Zerstreuungslinse; wobei die Strahlen (wenn man nur die Teile derselben außerhalb des Systems betrachtet) scheinbar divergent geworden sind, ohne die Achse gekreuzt zu haben. Man beachte, daß die wahre Brennweite  $F_1 E_1$  des Systems negativ ist, und daß die Hauptebenen außerhalb der Hauptbrennpunkte liegen.

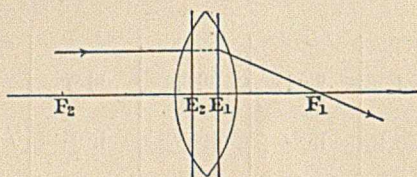


Fig. 24.

Die folgende Tabelle zeigt den Charakter der Äquivalent-Brennpunkte und die Brennweiten in einer Anzahl von Fällen, in denen die Entfernung der Linsen voneinander, d. h. die Entfernung ihrer benachbarten Hauptebenen variiert anfangend mit der Berührung der Linsen.

Da die Brennpunkte bei Zerstreuungslinsen negativ sind, befinden sich dieselben auf den entgegengesetzten Seiten der Linsen wie die entsprechenden Hauptpunkte.

Bei einer Sammellinse ist  $F_1$  auf derselben Seite wie  $E_1$  wie Fig. 24 zeigt. Die wahre Brennweite ist  $E_1 F_1$ . Bei einer Zerstreuungslinse (Fig. 25) liegt  $F_1$  auf der zu  $E_1$  entgegengesetzten Seite; die wahre Brennweite ist ebenfalls gleich  $E_1 F_1$  und, da sie von  $E_1$  rückwärts berechnet wird, negativ.



Fall	Entfernung der Linsen	Parallele Strahlen in der Richtung von Linse 1 nach Linse 2.		Parallele Strahlen in der Richtung von Linse 2 nach Linse 1.		Resultierendes System
		Natur des Brennpunktes	Äquivalent-Brennweite	Natur des Brennpunktes	Äquivalent-Brennweite	
1	$= 0$	reell	$\frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$	reell	$\frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$	konvergent
2	$< f_2 > 0$	reell	positiv	reell	positiv	„
3	$= f_2$	reell	positiv	reell u. auf Zentrum von Nr. 1	$+ f_2$	„
4	$< f_1 > f_2$	reell	positiv		virtuell	positiv
5	$= f_1$	reell u. auf Zentrum von Nr. 2	$+ f_1$	virtuell	positiv	„
6	$< f_1 + f_2 > f_1$		virtuell	positiv	virtuell	positiv
7	$= f_1 + f_2$	kein	$\infty$	kein	$\infty$	afokal
8	$< \infty > f_1 + f_2$	reell	negativ	reell	negativ	divergent
9	$= \infty$	kein	kein	kein	kein	kein

Es gibt einige spezielle Fälle die durch ihre Beziehungen zu optischen Instrumenten von Interesse sind.

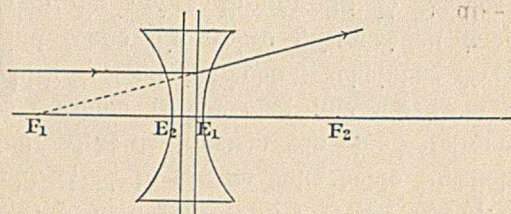


Fig. 25.

Fall I. Zwei +Linsen von gleicher Brennweite, in der Entfernung der doppelten Brennweite. — Diese Kombination ist afokal, das Bild wird durch sie



weder vergrößert noch verkleinert, sondern nur umgekehrt. Eine solche Kombination wird benutzt, um das umgekehrte Bild eines Fernrohrs oder Mikroskops aufzurichten.

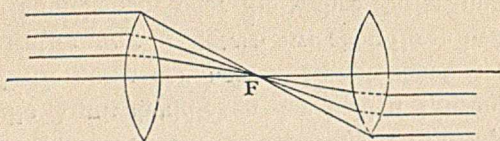


Fig. 26.

Fall II. Zwei + Linsen von verschiedener Brennweite in einer Entfernung gleich der Summe der Brennweiten. — Diese Kombination ist ebenfalls afokal; d. h. auffallendes paralleles Licht tritt parallel aus, und annähernd parallele Strahlen treten annähernd parallel aus. (Fig. 27.) Ein auf entfernte Gegenstände eingestelltes Auge sieht durch diese Kombination entfernte Gegenstände scharf, aber vergrößert, wenn die Linse kürzerer Brennweite dem Auge näher ist, dagegen verkleinert, wenn die Linse längerer Brennweite dem Auge zugekehrt ist. Das Bild ist in beiden Fällen ein umgekehrtes.

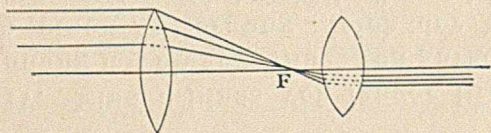


Fig. 27.

Diesen Fall haben wir im astronomischen Fernrohr, welches für normale Augen so benutzt wird, daß das auf das Auge fallende Licht eine dem Nahpunkt des Auges entsprechende Divergenz hat. Letzteres wird erreicht, indem das Okular dem Objektiv etwas näher geschoben wird, dadurch wird die Entfernung zwischen den Linsen etwas kleiner als die Summe ihrer Brennweiten.



Fall III. Zwei +Linsen von verschiedener Brennweite in einer Entfernung gleich der Differenz ihrer Brennweiten. — Diese Kombination stellt das Huygenssche Okular dar.

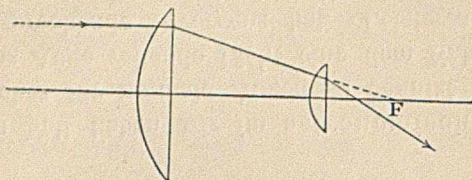


Fig. 28.

Fall IV. Eine +Linse von langer Brennweite in Verbindung mit einer —Linse von kurzer Brennweite in einer Entfernung gleich der Differenz ihrer Brennweiten (d. h. gleich ihrer algebraischen Summe). — Diese Kombination ist afokal und hat ähnliche Eigenschaften wie Nr. II, nur sind die Bilder hier aufrechte. Das Galileische Fernrohr ist ein Beispiel dieses Falles. Das Opernglas, auf die einfachsten Elemente zurückgeführt und für den Fernpunkt eines Auges eingestellt, ist dieselbe Kombination.

### 39. Kombination von zwei dicken Linsen.

In diesem Abschnitt bezeichnen wir durch folgende Symbole:

- $f_1$   $f_2$ , die wahren Brennweiten der beiden Linsen.
- $p_1$   $p_2$ , die Stärken der beiden Linsen in Dioptrien.
- $t_1$   $t_2$ , die Äquivalentdicken der beiden Linsen, d. h. die Entfernung der beiden Hauptebenen jeder Linse.
- $c$ , die Entfernung in Metern zwischen ihren benachbarten Hauptebenen, oder die wahre Entfernung zwischen den Linsen.
- F die resultierende Brennweite der Kombination.



$P$ , die resultierende Stärke, in Dioptrien, der Kombination.  
 $d$ , die resultierende Äquivalentdicke der Kombination,  
 oder die Entfernung der beiden resultierenden  
 Hauptebenen des Systems voneinander.

Es gelten dann folgende Formeln:

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - c} = \frac{1}{P} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

$$P = p_1 + p_2 - p_1 p_2 c = \frac{1}{F} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2)$$

$$d = t_1 + t_2 - \frac{c^2 p_1 p_2}{P} = t_1 + t_2 - \frac{c^2 F}{f_1 f_2} \quad \cdot \quad (3)$$

Die Entfernungen der resultierenden Hauptebenen, nach innen gemessen, von den äußeren Hauptebenen der Linsen  $f_1 f_2$  sind:

$$\frac{F c}{f_2} = \frac{c p_2}{P} \quad \text{resp.} \quad \frac{F c}{f_1} = \frac{c p_1}{P} \quad \cdot$$

Bei Anwendung dieser Formeln, welche für irgendwelche Kombination zweier Linsen gelten, beachte man, daß Zerstreungslinsen negative Brennweiten haben, und daß Entfernungen mit negativem Vorzeichen nach außen zu berechnen sind.

Beispiele. 1. Gesucht die Äquivalentwerte eines Systems von zwei Linsen mit folgenden Werten:  $f_1 = +100$  mm,  $f_2 = +75$  mm;  $t_1 = 4$  mm,  $t_2 = 5$  mm,  $c = 38$  mm. Resultat:  $F = 54,8$  mm;  $d = -1,54$  mm.

2. Gesucht die Äquivalentwerte einer Kombination von zwei Linsen mit den Werten  $p_1 = 20$  D,  $p_2 = 8$  D;  $t_1 = 3$  mm,  $t_2 = 1$  mm;  $c = 20$  mm. Resultat:  $P = 24,4$  D;  $d = 1,38$  mm.

Es geht aus obigen Formeln (1) und (2) hervor, daß wenn beide Linsen positiv sind eine Vergrößerung ihrer Entfernung ( $c$ ) voneinander immer die äquivalente Brennweite vergrößert und die äquivalente Stärke verkleinert. Es folgt aus Formel (2), daß wenn eine der Linsen des Systems negativ ist, und deshalb das Produkt  $-p_1 p_2 c$  positiv wird, eine Vergrößerung von  $c$  die Stärke der Kombination vergrößert und die äquivalente Brennweite



verkürzt. Nach (3) ist es einleuchtend, daß die Äquivalentdicke einer Kombination von zwei positiven Linsen verkleinert wird, indem man dieselben weiter voneinander entfernt, und wenn ( $c$ ) genügend groß gewählt wird ( $d$ ) den Wert 0 annimmt, oder wenn ( $c$ ) noch größer wird ( $d$ ) negativ wird, d. h. die beiden Hauptschnitte des Systems ihre Stellungen vertauschen. Bei manchen Kameralinsen ist die Entfernung der beiden Einzellinsen oft so groß, daß die Äquivalentdicke gleich Null oder sogar negativ wird. Um diejenige Entfernung der Einzellinsen, welche die Äquivalentdicke gleich Null werden läßt, annähernd zu berechnen, dient die Formel:

$$c = \sqrt{(t_1 + t_2) (f_1 + f_2)} - \frac{1}{2} (t_1 + t_2) \quad . \quad (4).$$

Beispiel. Zwei Linsen haben Äquivalentdicken von 6 bzw. 9 mm, und Brennweiten von +200 und +100 mm. Die Entfernung  $c$ , welche die Äquivalentdicke gleich Null macht, ist nach obiger Formel 36,2 mm; die äquivalente Brennweite der Kombination ist dann = +75,8 mm.

## 40. Zylindrische Linsen.

Zylindrische Linsen sind solche, bei denen eine oder beide Flächen Teile eines Zylinders sind.

Fig. 29 zeigt in Perspektive vier zylindrische Linsen, deren Ecken noch nicht weggeschliffen sind, was geschieht, um sie in Fassungen bringen zu können. Die erste, links, ist eine einfache planzylindrische, konvexe oder positive, Linse. Die zweite ist ein plankonkaver oder negativer Zylinder. Die dritte ist ein bikonvexer Zylinder. Die vierte ist ein plankonvexer Zylinder, genau wie die erste, nur um 90° gedreht. Die Linsen Nr. 1, 2 und 3 bezeichnet man als Linsen mit vertikaler Zylinderachse, während Nr. 4 so gedreht ist, daß ihre Achse horizontal liegt. Diese Bezeichnung wird durch Fig. 30 erläutert, aus welcher hervorgeht, daß die Richtung, welche die Achse genannt wird,



parallel ist der Achse des gedachten Zylinders, von welchem die Linse einen Teil bildet. Die optische Wirkung einer zylindrischen Linse hängt nicht nur von

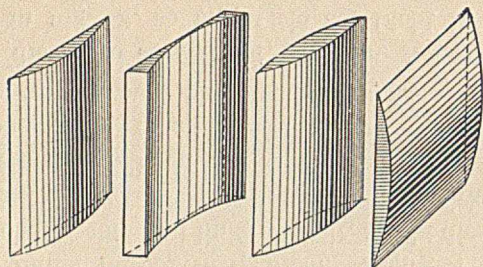


Fig. 29.

ihren Flächenkrümmungen und von dem Brechungsindex des Glases, sondern auch von der Richtung ihrer Achse ab.

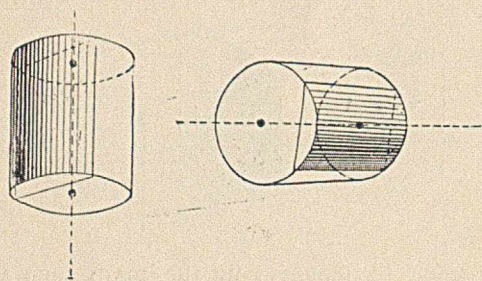


Fig. 30.

Eine Linse, welche auf einer Seite zylindrisch und auf der anderen plan ist, nennt man planzylindrisch. Sind beide Flächen zylindrisch und ihre Achsen gleich gerichtet, so ist die Wirkung nur die einer zylindrischen Linse, und man nennt sie eine einfache zylindrische Linse oder kürzer einen einfachen Zylinder.

Es kommt aber oft vor, daß eine Fläche einer Linse zylindrisch geschliffen wird (positiv oder negativ, d. h. kon-



vex oder konkav), während die andere Fläche sphärisch (erhaben oder hohl) geschliffen wird, wie bei gewöhnlichen Linsen. Diese werden sphärozyklindrische Linsen oder Sphärozyklinder genannt. Zuweilen, aber nicht häufig, werden Linsen an beiden Flächen zylindrisch derartig geschliffen, daß die beiden Krümmungsachsen senkrecht aufeinander stehen. Wenn die eine Achse vertikal ist, so wird die andere horizontal sein. Solche Linsen nennt man gekreuzte Zylinder.

Eine einfache zylindrische Linse hat die Eigenschaft, die Lichtwellen in verschiedenen Meridianen ungleich stark konvergent oder divergent zu machen.

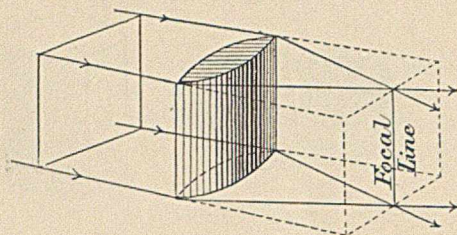


Fig. 31.

Eine zylindrische Linse mit vertikaler Achse, wie in Fig. 31, wird, da sie von oben bis unten von gleicher Dicke ist, in dem vertikalen Meridian keine Sammelwirkung ausüben, mit anderen Worten: sie vereinigt die Lichtwellen, welche oben und unten durchgehen, nicht. Dagegen bricht sie Licht, welches rechts und links auffällt, macht diese Strahlen nach der Mitte der Linse konvergent und bewirkt, daß die Strahlen eines parallelen Büschels sich nicht in einem Punkt, sondern in einer Linie treffen. Kurzum, eine + Zylinderlinse erzeugt eine Brennlinie.

Wird die Linse so gedreht, daß ihre Achse wagerecht liegt, wie in Fig. 32, so bricht sie das Licht in dem horizontalen Meridian nicht, wohl aber in dem senkrechten Meridian, indem sie eine wagerechte Brennlinie erzeugt.



Ein paralleles Lichtbündel wird durch eine einfache Zylinderlinse zu einer Brennlinie in der Hauptbrennweite vereinigt, welche der Achse der Linse parallel liegt.

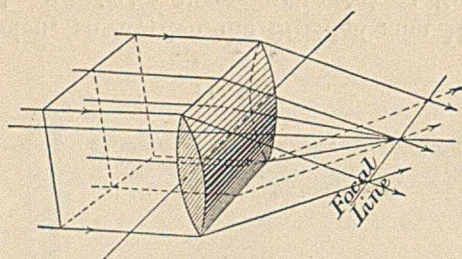


Fig. 32.

Wenn man eine Zylinderlinse mit einem undurchsichtigen Schirm bedeckt, in welchem ein enger Spalt ausgeschnitten ist, und den Schirm so auflegt, daß Spalt und Achse einander parallel sind, so bricht die Linse das Licht gar nicht, sondern verhält sich wie ein flaches Stück Glas.

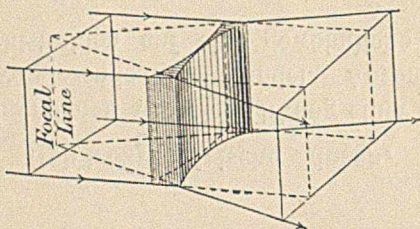


Fig. 33.

Dreht man den Spalt senkrecht zur Achse, so ist die brechende Wirkung am größten. In dazwischen liegenden Stellungen nimmt die scheinbare brechende Wirkung der Linse einen Wert an, der zwischen jenen Grenzwerten liegt. Mit anderen Worten: die brechende Wirkung einer Zylinderlinse ist ein Maximum in einem zur Achse senkrechten Meridian, und Null in dem zur Achse parallelen Meridian, während sie bei anderen Meridianen einen Wert zwischen jenen Grenzwerten annimmt. So hat



z. B. eine  $+6\text{ D}$ -Zylinderlinse eine Stärke von  $+6\text{ D}$  in dem zu ihrer Achse senkrechten Meridian. In dem zur Achse parallelen Meridian hat sie die Stärke  $0$ . In einem  $45^\circ$  zur Achse geneigten Meridian wird sie die Stärke  $+3\text{ D}$  haben.

Ähnliches gilt für negative oder zerstreuende Zylinderlinsen. Mit vertikaler Achse aufgestellt zerstreuen sie das Licht nur in horizontaler Richtung, indem sie im vertikalen Meridian keine brechende Wirkung besitzen. In diesem Fall wird eine virtuelle Brennlinie erzeugt und das Licht divergiert, als ob es von einer Lichtlinie hinter der Linse ausginge (Fig. 33).

## 41. Sphärozyklindrische Linsen.

Zuerst betrachten wir die Wirkung einer Zylinderlinse auf ein konvergierendes Lichtbündel. Angenommen, daß parallele Lichtstrahlen auf eine gewöhnliche Sammellinse

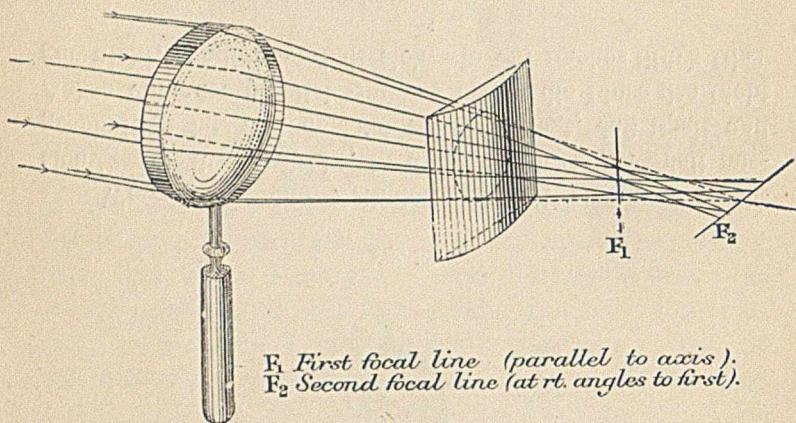


Fig. 34.

(Fig. 34) fielen, so werden die Strahlen zum Hauptbrennpunkt  $F_2$  konvergiert. Wenn nun eine  $+$  Zylinderlinse, deren Achse vertikal steht, irgendwo zwischen der ersten



Linse und  $F_2$  eingeschaltet wird, so wird sie, da ihre brechende Kraft in dem horizontalen Meridian am stärksten ist, das Licht zu einer vertikalen Brennlinie bei einem Punkte  $F_1$  vereinigen, welche der ersten Linse näher wie  $F_2$  liegt. Da aber die Zylinderlinse in dem vertikalen Meridian keine brechende Kraft besitzt, so kann sie nicht verhindern, daß die Sammellinse die oberen und unteren Teile des Strahlenbündels in der mittleren Höhe bei  $F_2$  vereinigt, wo eine horizontale Brennlinie entstehen wird.

Kombination von sphärischen und zylindrischen Linsen. — Die eben erwähnte Wirkung würde noch stattfinden, wenn die sphärische und die zylindrische Linse sich berührten. Sie würde ebenfalls auftreten, wenn eine Linse auf einer Fläche + sphärisch und auf der anderen + zylindrisch geschliffen würde. Eine solche Sphärozyylinderlinse würde parallele Lichtstrahlen zu zwei Brennlinien vereinigen. Die erste Brennlinie würde zur Achse des Zylinders parallel und in einer der Summe der Stärken der beiden Linsen entsprechenden Entfernung sein; die zweite Brennlinie würde zur ersten senkrecht und in einer der Stärke des Zylinders entsprechenden Entfernung von derselben stehen. Wenn beispielsweise eine 4 D sphärische mit einer 4 D zylindrischen Linse mit vertikaler Achse vereinigt würde, so würde die erste (vertikale) Brennlinie in einer Entfernung von  $\frac{1000}{8} = 125$  mm (der Stärke + 8 D entsprechend) liegen, die zweite (horizontale) Brennlinie (der Stärke 4 D entsprechend)  $\frac{1000}{4} = 250$  mm entfernt sein.

Ermittelung der Achse einer Zylinderlinse. — Die einfachste Methode ist die Benutzung des Linsenmessers, welcher auf der zylindrischen Fläche gedreht wird, bis er die Krümmung 0 anzeigt.

Eine andere Methode besteht darin, daß man durch die Linse eine feste Linie oder Marke visiert und die Linse schnell hin und her bewegt wie beim Neutralisieren (Art. 32).



Sei die Zylinderlinse  $+$  oder  $-$ : es erfolgt keine Bewegung des festen Objektes, wenn die Achse der Linse parallel verschoben wird. Bei Sphärozyylinderlinsen neutralisiert man erst die sphärische Krümmung und ermittelt dann die Achse wie oben.

## 42. Eigenschaften von gekreuzten Zylindern.

Bei der Behandlung dieses Themas müssen wir uns die Resultate vergegenwärtigen, welche wir früher bei der Betrachtung einfacher sphärischer Linsen von geringer Stärke erhielten, nämlich daß die kombinierte Stärke von zwei oder mehr Linsen, die sich berühren, auf derselben Achse gleich der algebraischen Summe ihrer einzelnen Stärken ist, und umgekehrt, daß eine gegebene Linse durch zwei oder mehr Linsen, die sich berühren, auf derselben Achse ersetzt werden kann, wenn die Summe deren Stärken gleich der der gegebenen Linse ist.

Ähnliches gilt für einfache Zylinderlinsen, wenn ihre Achsen parallel sind, wie z. B. für zwei Zylinder mit vertikalen Achsen oder zwei Zylinder mit horizontalen Achsen.

So können wir einen  $+ 5 D$ -Zylinder durch die Kombination  $+ 3 D$  und  $+ 2 D$  ersetzen, oder durch  $+ 8 D$  und  $- 3 D$ , oder durch irgend eine Kombination von zwei oder mehr Linsen, bei welcher die Summe der Stärken  $= + 5 D$  ist.

Nehmen wir zwei gekreuzte Zylinder von gleicher Stärke (wie in Fig. 35): sie werden wie eine sphärische Linse wirken; denn der eine sammelt das Licht in einem Meridian, der andere mit gleicher Kraft in dem dazu senkrecht stehenden Meridian. Werden z. B. zwei  $+ 3 D$ -Zylinder genommen und die eine Achse  $15^\circ$  geneigt und die andere Achse damit genau gekreuzt, also unter  $105^\circ$  geneigt, so wird die Kombination wie eine gewöhnliche  $+ 3 D$  sphärische Linse wirken und einen Brennpunkt haben.



Dementsprechend wirken zwei gekreuzte gleiche negative Zylinder wie eine negative sphärische Linse, wie Fig. 36 zeigt. Wenn aber die gekreuzten Zylinder verschiedene

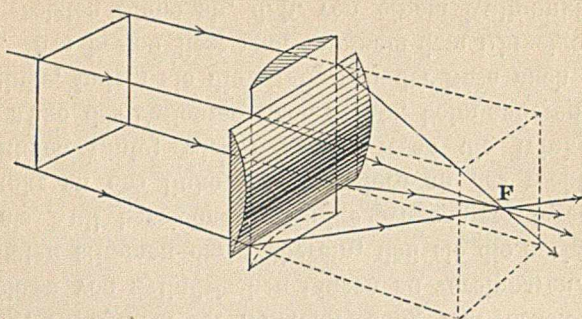


Fig. 35.

Stärken haben, so können wir den ersten durch zwei andere Zylinder ersetzen, von welchen der eine dieselbe Stärke wie der zweite Zylinder, der andere eine Stärke gleich der Stärkendifferenz des ersten und zweiten Zylinders hat. Wir

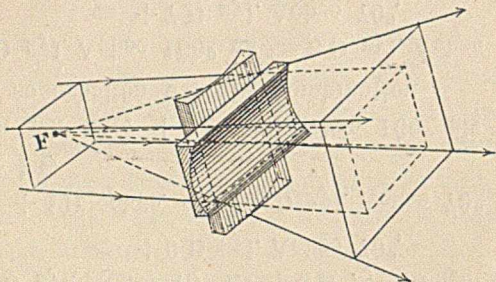


Fig. 36.

haben also jetzt (1) zwei gekreuzte Zylinder, von welchen jeder dieselbe Stärke wie die zweite Linse hat, und (2) einen Zylinder, dessen Stärke gleich der Differenz der beiden ursprünglichen Zylinder ist und dessen Achse die gleiche Richtung hat wie die des ersten; nun ist (1) einer sphärischen Linse äquivalent mit derselben Dioptrienzahl wie der zweite Zylinder. Deshalb gilt folgende Regel:

Zwei gekreuzte Zylinder von ungleicher Stärke können ersetzt werden durch eine sphärische Linse, welche die



Stärke des zweiten hat, kombiniert mit einem Zylinder, dessen Stärke gleich der Stärkendifferenz des ersten und zweiten Zylinders und dessen Achse identisch mit der des ersten ist. Außerdem ist es gleichgültig, welchen von den beiden Zylindern man als den ersten oder zweiten ansieht. Das Symbol  $\ominus$  bedeutet „kombiniert mit“.

Als Beispiel nehmen wir die zwei Zylinder  $+7\text{ D zyl. Achse } 70^\circ \ominus +4\text{ D zyl. Achse } 160^\circ$ . Nun können wir  $+7\text{ D zyl. Achse } 70^\circ$  in der Form  $+4\text{ D zyl. Achse } 70^\circ \ominus +3\text{ D zyl. Achse } 70^\circ$  schreiben; wir haben dann die Kombination

$$+4\text{ D zyl. Achse } 70^\circ \ominus +4\text{ D zyl. Achse } 160^\circ \\ \ominus +3\text{ D zyl. Achse } 70^\circ,$$

welche  $+4\text{ D sphär. } \ominus +3\text{ D zyl. Achse } 70^\circ$  äquivalent ist.

Sehen wir aber  $+4\text{ D zyl. Achse } 160^\circ$  als die erste Linse an, so erhalten wir die Kombination

$$+7\text{ D zyl. Achse } 160^\circ \ominus -3\text{ D zyl. Achse } 160^\circ \\ \ominus +7\text{ D zyl. Achse } 70^\circ,$$

d. h.  $+7\text{ D sphär. } \ominus -3\text{ D zyl. Achse } 160^\circ$ .

Dieselbe Regel gilt für alle zylindrischen Linsen, seien sie positiv oder negativ.

Winkelbezeichnung zylindrischer Linsen. — Es ist nötig, ein System der Winkelablesung und -bezeichnung der Achsen von zylindrischen Linsen zu vereinbaren. Alle Autoritäten stimmen darin überein, daß sie die horizontale Lage als Null bezeichnen. Einige Augenärzte legen den Nullpunkt an das linke Ende, andere an das rechte der horizontalen Linie; wieder andere lesen die Winkel bei einem Auge des Patienten nach rechts, beim anderen Auge nach links, indem sie die Grade von der Nase nach außen zählen. Am besten liest man in einem dem Uhrzeiger entgegengesetzten Sinne ab, d. h. von einem Nullpunkt links vom Beobachter ausgehend liest man nach unten ab.



## 43. Ersatz von sphärozyklindrischen Kombinationen.

Bei der Herstellung von Brillengläsern nach dem Rezept eines Augenarztes, namentlich bei sphärozyklindrischen Linsen, findet der Optiker häufig, daß er dieselben nur mit großer Mühe machen kann, entweder weil die ihm zur Verfügung stehenden Schleifvorrichtungen nicht ausreichen oder weil eine genau nach dem Rezept angefertigte Linse sich schlecht in einen Rahmen einpassen ließe oder aus anderen praktischen Gründen ungeeignet wäre. Es entsteht dann die Frage, ob sich die gleiche optische Wirkung durch andere als die verordneten Krümmungen erzielen läßt.

In sehr vielen Fällen ist solcher Ersatz der Linsen möglich; die ihnen zugrunde liegenden Prinzipien werden wir kurz erläutern.

Dieses Thema haben wir schon, von einem Gesichtspunkte aus, bei der Besprechung gekreuzter Zylinder berührt.

I. Ersatz von einfachen Zylindern. — Es geht aus den Betrachtungen über einfache sphärische Linsen hervor, daß zwei zylindrische Linsen von gleicher, aber entgegengesetzter Stärke, welche auf derselben optischen Achse mit ihren Achsen parallel in Kontakt sind, im ganzen keine Linsenwirkung haben. Nehmen wir an, daß wir vor irgendeinem gegebenen Zylinder ein solches Paar anbrächten, dessen Stärken einzeln der des gegebenen Zylinders numerisch gleich sind und dessen Achsen seiner Achse senkrecht stehen. Die Wirkung der drei Linsen ist dieselbe wie die des gegebenen Zylinders für sich allein, wir können sie aber als zwei gekreuzte Zylinder von gleicher Stärke ansehen in Kombination mit einem dritten Zylinder von gleicher, aber entgegengesetzter Stärke, dessen Achse aber senkrecht zur Achse des gegebenen Zylinders steht. Nun können zwei Zylinder von gleicher Stärke und mit gleichem Vorzeichen durch eine Sphäre derselben Stärke und desselben Vorzeichens ersetzt werden. Wir haben dann eine



Sphäre von der Stärke des gegebenen Zylinders und einen Zylinder von gleicher, aber entgegengesetzter Stärke, dessen Achse senkrecht auf der des gegebenen Zylinders steht. Wir können also folgende Regel aufstellen:

Jeder gegebene Zylinder kann durch eine Sphäre derselben Stärke, kombiniert mit einem Zylinder gleicher, aber entgegengesetzter Stärke, dessen Achse senkrecht zur Achse des ersten Zylinders steht, ersetzt werden.

Was oben von Stärken gesagt wurde, gilt ebenfalls für Krümmungen, denn die Stärke einer brechenden Fläche ist gleich deren Krümmung multipliziert mit der Konstanten  $(n - 1)$ . Die obige Regel kann man deshalb anders formulieren.

Jeden gegebenen Zylinder kann man durch eine Sphäre gleicher numerischer Krümmung in Verbindung mit einem Zylinder gleicher, aber entgegengesetzter Krümmung, dessen Achse um  $90^\circ$  verlegt ist, ersetzen.

Beispiel I. Wie ersetzt man  $+6\text{ D zyl. Achse } 5^\circ$  durch eine Sphäre und einen negativen Zylinder?

$$+6\text{ D zyl. Achse } 5^\circ = +6\text{ D zyl. Achse } 5^\circ \circ +6\text{ D zyl. Achse } 95^\circ \\ \circ -6\text{ D zyl. Achse } 95^\circ = +6\text{ D sphär. } \circ -6\text{ D zyl. Achse } 95^\circ.$$

Beispiel II. Welche sind die sphärischen und zylindrischen Äquivalente von  $-3\text{ D zyl. Achse } 34^\circ$ ?

Antwort:  $-3\text{ D sphär. } +3\text{ D zyl. Achse } 124^\circ$ .

Beispiel III. Gesucht die Krümmungen einer sphärozyklindrischen Linse, welche  $+9\text{ D zyl. Achse } 30^\circ$  ersetzt?  $n = 1,5$ .

Die Krümmung des gegebenen Zylinders ist  $= +\frac{9}{0,5}$   
 $= +18$ . Die Krümmung der sphärischen Fläche muß  
 darum  $+18$  sein und ihr Radius  $\frac{100}{18} = 5\frac{5}{9}$  cm. Der  
 Krümmungsradius der zylindrischen Fläche  $= -5\frac{5}{9}$  cm.

Die obigen Regeln geben uns einen anderen Weg an, um die Äquivalente von gekreuzten Zylindern zu berechnen. Gesucht z. B. die Äquivalente von

$$+9\text{ D zyl. Achse } 7^\circ \circ -4\text{ D zyl. Achse } 97^\circ.$$



Nun ist

+ 9 D zyl. Achse  $7^\circ$  = + 9 D sphär.  $\ominus$  - 9 D zyl. Achse  $97^\circ$ ,  
deshalb sind

$$\begin{aligned} + 9 \text{ D zyl. Achse } 7^\circ \ominus - 4 \text{ D zyl. Achse } 97^\circ &= + 9 \text{ D} \\ \text{sphär. } \ominus - 9 \text{ D zyl. Achse } 97^\circ \ominus - 4 \text{ D zyl. Achse } 97^\circ & \\ &= + 9 \text{ D sphär. } \ominus - 13 \text{ D zyl. Achse } 97^\circ. \end{aligned}$$

Zum Nachschlagen diene folgende Zusammenstellung der Regeln für die Ersetzung von Linsen.

## 44.

### Regeln des Ersatzes.

1. Einfache zylindrische Linsen. — Jeder Zylinder kann durch die Kombination einer Sphäre von derselben Stärke mit einem Zylinder gleicher, aber entgegengesetzter Stärke, dessen Achse um  $90^\circ$  verlegt ist, ersetzt werden; oder: Jeden Zylinder kann man durch einen Sphärozyylinder ersetzen, dessen sphärische Fläche die gleiche Krümmung hat und dessen zylindrische Fläche eine gleiche, aber entgegengesetzte Krümmung um eine um  $90^\circ$  verlegte Achse hat.

2. Gekreuzte Zylinder. — Zwei gleich starke gekreuzte Zylinder können durch eine Sphäre der gleichen numerischen Stärke ersetzt werden, und umgekehrt.

Zwei ungleich starke gekreuzte Zylinder können auf zweierlei Weise durch die Kombination einer Sphäre und eines Zylinders ersetzt werden: 1. durch eine dem zweiten numerisch gleich starke Sphäre in Verbindung mit einem Zylinder, dessen Stärke der algebraischen Differenz der beiden Zylinder gleicht und dessen Achse mit der des ersten übereinstimmt, oder: 2. durch die Kombination einer Sphäre von derselben numerischen Stärke wie der erste Zylinder mit einem Zylinder, dessen Stärke gleich der algebraischen Differenz der Stärken des zweiten und des ersten Zylinders ist und welcher die gleiche Achse wie der zweite Zylinder hat.



3. Sphärozyklindrische Linsen. — Jede gegebene sphärozyklindrische Linse kann durch ein geeignetes Paar von gekreuzten Zylindern oder durch eine andere sphärozyklindrische Linse ersetzt werden. Dieselben Prinzipien wie oben gelten hier für die Biegung — denn jede sphärische Krümmung kann in ein Paar von gleichen gekreuzten Zylindern aufgelöst werden, deren Achsen unter einem beliebigen, für die Berechnung bequemen Winkel stehen.

Nehmen wir z. B. die sphärozyklindrische Linse

$$+ 7,5 \text{ D sphär. } \ominus + 2 \text{ D zyl. vert.}$$

oder was äquivalent ist

$$+ 7,5 \text{ D zyl. vert. } \ominus + 7,5 \text{ D zyl. hor. } \ominus + 2 \text{ D zyl. vert.,}$$

und indem wir die vertikalen Komponenten zusammenfassen, erhalten wir die äquivalente gekreuzt-zylindrische Linse

$$+ 9,5 \text{ D zyl. vert. } \ominus + 7,5 \text{ D zyl. hor.}$$

Diese Kombination kann wiederum, nach den eben besprochenen Regeln, in folgende Form umgewandelt werden

$$+ 9,5 \text{ D sphär. } \ominus - 2 \text{ D zyl. hor.}$$

Eine erwünschte Wirkung kann demnach immer durch drei Kombinationen erzielt werden, und ein Rezept in einer Form kann immer in eine von den beiden anderen Formen gebracht werden.

Diese drei Formen sind:

1. Gekreuzte Zylinder.
2. Sphäre mit + Zylinder (unter irgend einem Winkel).
3. Sphäre mit — Zylinder (senkrecht zu obigem Winkel).

Um von einer der sphärozyklindrischen Formen zur anderen überzugehen, braucht man nur der sphärischen Fläche einen Zuwachs an Stärke zu geben (+ oder — je nach dem Fall), welcher dem Zylinder entspricht, und den Zylinder in einen gleich starken Zylinder von entgegengesetztem Vorzeichen, dessen Achse senkrecht zur Achse des ersten steht, umzuwandeln.



- Beispiel 1.  $+ 6 \text{ D sphär.} \odot + 2 \text{ D zyl. } 5^\circ$  ersetzt man durch  
 $+ 8 \text{ D sphär.} \odot - 2 \text{ D zyl. } 95^\circ$ .
- Beispiel 2.  $- 2,5 \text{ D sphär.} \odot + 4 \text{ D zyl. } 25^\circ$  wird zu  
 $+ 1,5 \text{ D sphär.} \odot - 4 \text{ D zyl. } 115^\circ$ .
- Beispiel 3.  $+ 5 \text{ D sphär.} \odot - 1,5 \text{ D zyl. } 10^\circ$  ersetzt man durch  
 $+ 3,5 \text{ D sphär.} \odot + 1,5 \text{ D zyl. } 100^\circ$ .
- Beispiel 4.  $+ 2,5 \text{ D sphär.} \odot - 7,5 \text{ D zyl. hor.}$  ist gleichwertig mit  
 $- 5 \text{ D sphär.} \odot + 7,5 \text{ D zyl. vert.}$

Da es immer drei mögliche Alternative gibt, so entsteht natürlich die Frage, welche von diesen wählt man am zweckmäßigsten. Die Optiker vermeiden in der Regel gekreuzte Zylinder, da Sphärozyylinder sich billiger schleifen lassen; und von den beiden sphärozyllindrischen Fällen wird die Form vorgezogen, welche die geringsten numerischen Krümmungen nach der Berechnung (so z. B. in Beispiel 4 die erste von beiden) aufweist, da starke Krümmungen immer schwere Linsen bedingen. Häufig wird diejenige Form bevorzugt, welche der periskopischen Form am nächsten kommt, mit  $+$  sphär. nach außen und  $-$  zyl. nach dem Auge.

## 45.

### Toroidale Linsen.

Ein weiterer Weg, um Linsen von verschiedener brechender Kraft in verschiedenen Meridianen herzustellen,

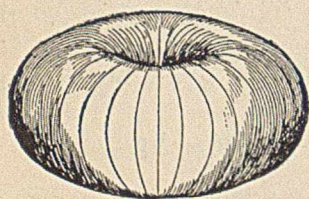


Fig. 37.

ist, daß man weder sphärische noch zylindrische Flächen benutzt, sondern die eine Fläche plan läßt und der anderen eine toroidale Krümmung erteilt. Eine toroidale Fläche (Fig. 37) ist eine Fläche, die in einem Meridian einen Krümmungsradius und in dem darauf senkrechten einen

anderen Krümmungsradius hat. „Toroid“ ist der wissenschaftliche Name für eine Fläche wie ein Zweiradreifen. Denken wir uns einen solchen Reifen von 60 cm Durchmesser und 5 cm Dicke auf eine horizontale Fläche gelegt.



Auf der Außenfläche ist der Krümmungsradius im vertikalen Meridian 2,5 cm, in dem horizontalen Meridian ist der Radius 30 cm. Wenn ein Werkzeug von toroidaler Form benutzt würde, um eine Linsenfläche zu schleifen, so würde es eine konkave Fläche erzeugen, welche Ähnlichkeit mit einem Löffel oder einer Schüsseldecke hätte. Die Stärken von solchen Linsen in den zwei Meridianen größter und kleinster Krümmung ließen sich nach den Formeln

$$D_1 = (n - 1) \frac{1}{r_1} \quad \text{und} \quad D_2 = (n - 1) \frac{1}{r_2}$$

berechnen, wo  $n$  der Brechungsindex des Glases und  $r_1$ ,  $r_2$  die beiden Krümmungsradien sind. Alles, was eine toroidale Linse bewirkt, könnte ebensogut durch Benutzung gekreuzter Zylinder oder durch die äquivalent sphäro-zylindrische Kombination erreicht werden. Die toroide Form hat gar keinen optischen Vorteil, sie hat aber den großen Nachteil, daß besondere kostspielige Werkzeuge für jede einzelne Form von Toroid nötig sind. Die Bezeichnung „torisch“ ist weniger korrekt wie „toroidal“ für Linsen dieser Form.

Fig. 37 stellt ein massives Toroid dar. Es ist mir mitgeteilt worden, daß eine toroidale Krümmung in einem Ausnahmefalle von Vorteil ist. Es ist dieses der Fall, in welchem eine positive periskopische astigmatische Kombination erhalten werden kann, indem die dem Auge zugekehrte Fläche eine konkave sphärische Krümmung erhält, während der äußeren Fläche eine toroidale Krümmung erteilt wird. Diese Konstruktion soll für weitsichtige, mit Astigmatismus behaftete Billardspieler bei schräger Durchsicht vorteilhaft sein.

## 46. Schiefwinklig gekreuzte Zylinder.

Eine weitere zwecklose Linsenform erhält man, indem man den beiden Flächen Zylinder anschleift, deren Achsen schiefwinklig zueinander stehen. Die Formeln für schiefwinklig gekreuzte Zylinder sind etwas kompliziert, es läßt sich aber zeigen, daß solche Linsen in keinem Fall irgend



eine optische Wirkung zustande bringen, welche nicht ebensogut durch eine gewöhnliche sphärozyllindrische Kombination zu erreichen wäre.

Zuweilen aber wird es notwendig, einen Fall von gekreuzten Zylindern in eine sphärozyllindrische Kombination umzurechnen; für solche Fälle dienen die folgenden Formeln.

Es seien A und B die Dioptrienzahlen von den gegebenen schiefwinkligen Zylindern und  $\sigma$  der Winkel, unter welchem sie gekreuzt sind. Gesucht die Stärke X des resultierenden Zylinders,  $\Phi$  der Winkel, welcher seine Achse mit der Achse von A bildet, und Y die Stärke der resultierenden Sphäre. Es gelten dann die Beziehungen

$$\frac{X}{\sin 2\sigma} = \frac{A}{\sin 2(\sigma - \Phi)} = \frac{B}{\sin 2\Phi} \dots (1)$$

$$X^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos 2\sigma \dots (2)$$

$$\sin 2\Phi = \frac{B}{X} \sin 2\sigma \dots (3)$$

$$Y = \frac{A + B - X}{2} \dots (4)$$

Beispiel. Gesucht das sphärozyllindrische Äquivalent der folgenden schiefwinklig gekreuzten Zylinder:

+ 7 D zyl. Achse  $20^\circ$   $\circ$  + 5 D zyl. Achse  $35^\circ$ .

Der Winkel  $\sigma$  zwischen beiden Achsen ist offenbar gleich  $15^\circ$ . Daher sind

$$2\sigma = 30^\circ, \cos 2\sigma = 0,866 \text{ und } \sin 2\sigma = 0,5.$$

Nach Formel (2) ist  $X^2 = 49 + 25 + 70 \times 0,866 = 134,6$ ,

$$X = +11,66 \text{ Dioptr. zylindr.}$$

Um  $\Phi$  nach Formel (3) zu finden, haben wir

$$\sin 2\Phi = \frac{5}{11,6} \times 0,5 = 0,2155$$

und nach der Tabelle der Sinuse, Art. 3 ist

$$2\Phi = 12^\circ 26' \text{ oder } \Phi = 6^\circ 13'$$

und da der erste Zylinder seine Achse bei  $20^\circ$  hat, so muß die Achse des resultierenden Zylinders unter  $26^\circ 13'$  stehen.

Endlich ist nach Formel (3)

$$Y = \frac{+7 + 5 - 11,6}{2} = +0,2 \text{ Dioptr. sphär.}$$

Für die Äquivalent-Linse ist also das Endresultat

$$+0,2 \text{ D sphär. } \circ +11,6 \text{ D Zyl. Achse } 26^\circ 13'.$$



Zur Erleichterung der Umrechnung von Zylinderkombinationen fügen wir folgende Tabelle bei.

$\vartheta$	$\sin 2 \vartheta$	$\cos 2 \vartheta$	$\cot 2 \vartheta$	$\sin^2 \vartheta$	$\cos^2 \vartheta$
0	0.0000	1.0000	$\mp \infty$	0.00000	1.00000
5	0.1736	0.9848	5.6713	0.00757	0.99241
10	0.3420	0.9397	2.7475	0.03014	0.96983
15	0.5000	0.8660	1.7321	0.06698	0.93296
20	0.6428	0.7660	1.1918	0.11696	0.88304
25	0.7660	0.6428	0.8391	0.17859	0.82138
30	0.8660	0.5000	0.5774	0.25000	0.74996
35	0.9397	0.3420	0.3640	0.32902	0.67109
40	0.9848	0.1736	0.1763	0.41319	0.58676
45	1.0000	0.0000	0.0000	0.50000	0.50000
50	0.9848	- 0.1736	- 0.1763	0.58676	0.41319
55	0.9397	- 0.3420	- 0.3640	0.67109	0.32902
60	0.8660	- 0.5000	- 0.5774	0.74996	0.25000
65	0.7660	- 0.6428	- 0.8391	0.82138	0.17859
70	0.6428	- 0.7660	- 1.1918	0.88304	0.11696
75	0.5000	- 0.8660	- 1.7321	0.93296	0.06698
80	0.3420	- 0.9397	- 2.7475	0.96983	0.03104
85	0.1736	- 0.9848	- 5.6713	0.99241	0.00757
90	0.0000	- 1.0000	$\mp \infty$	1.00000	0.00000
95	- 0.1736	- 0.9848	5.6713	0.99241	0.00757
100	- 0.3420	- 0.9397	2.7475	0.96983	0.03104
105	- 0.5000	- 0.8660	1.7321	0.93296	0.06698
110	- 0.6428	- 0.7660	1.1918	0.88304	0.11696
115	- 0.7660	- 0.6428	0.8391	0.82138	0.17859
120	- 0.8660	- 0.5000	0.5774	0.74996	0.25000
125	- 0.9397	- 0.3420	0.3640	0.67109	0.32902
130	- 0.9848	- 0.1736	0.1763	0.58676	0.41319
135	- 1.0000	0.0000	0.0000	0.50000	0.50000
140	- 0.9848	0.1736	- 0.1763	0.41319	0.58676
145	- 0.9397	0.3420	- 0.3640	0.32902	0.67109
150	- 0.8660	0.5000	- 0.5774	0.25000	0.74996
155	- 0.7660	0.6428	- 0.8391	0.17859	0.82138
160	- 0.6428	0.7660	- 1.1918	0.11696	0.88304
165	- 0.5000	0.8660	- 1.7321	0.06698	0.93296
170	- 0.3420	0.9397	- 2.7475	0.03014	0.96983
175	- 0.1736	0.9848	- 5.6713	0.00757	0.99241
180	0.0000	1.0000	$\mp \infty$	0.00000	1.00000



Die Stärke der zylindrischen Wirkung, welche ein Zylinder, dessen Achse in einem gegebenen Meridian liegt, in irgend einem anderen Meridian hervorruft, ist gleich dem Produkt der Stärke des Zylinders mit dem Quadrat des Cosinus des von beiden Richtungen eingeschlossenen Winkels.

Steht die Achse einer + 7 D zyl. Linse unter 35° zum Horizont, so ist die horizontale Komponente ihrer zylindrischen Wirkung

$$+ 7 \times \cos^2 35^\circ = + 7 \times 0,671 = + 4,7 \text{ D zyl. hor.}$$

Dementsprechend ist die vertikale Komponente

$$+ 7 \times \cos^2 55^\circ = + 7 \times 0,329 = + 2,3 \text{ D zyl. vert.}$$

Wenn die Winkel vom Horizont ausgehend berechnet werden, so sind horizontale Komponenten dem  $\cos^2$ , und vertikale Komponenten dem  $\sin^2$  des betreffenden Winkels proportional. Die Summe der vertikalen und horizontalen Komponenten ist immer gleich der Dioptrienzahl des gegebenen Zylinders.

## 47.

### Formeln für Prismen.

Die Beziehungen zwischen dem von den Flächen eines Prismas eingeschlossenen Winkel  $\alpha$ , der Ablenkung  $\delta$ , welche es bewirkt, und dem Brechungsindex  $n$  des Materials sind folgende.

Fall I. Fällt ein Lichtstrahl senkrecht auf eine Fläche eines Prismas ein oder tritt er normal zu einer Fläche heraus, so ist

$$\sin \alpha = \frac{\sin (\alpha + \delta)}{n}$$

oder

$$n = \frac{\sin (\alpha + \delta)}{\sin \alpha}.$$



Fall II. Sind die Winkel, welche der einfallende Strahl mit der Normale zur ersten Fläche und der austretende Strahl mit der Normale zur zweiten Fläche bilden, einander gleich, so gilt die Gleichung:

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \delta)}{\sin \frac{1}{2} \alpha}$$

im letzteren Fall ist die Ablenkung ein Minimum.

Beispiel. Ein Flintglasprisma vom Winkel  $59^{\circ} 56' 22''$  gab als Minimum der Ablenkung für blau-grünes Licht (die Fraunhofersche F-Linie)  $47^{\circ} 35' 59''$ . Nach der letzten Formel ist  $n$  für obige Lichtart = 1,61477.

Bei dünnen Prismen mit kleinen Winkeln kann man Bogen statt Sinuse benutzen, die beiden letzten Formeln vereinfachen sich dann zu

$$n = \frac{\alpha + \delta}{\alpha}.$$

## 48.

### Prismen für Brillen.

Die Prismen welche für den Brillenfabrikanten in Betracht kommen, sind immer dünn, d. h. der Winkel zwischen ihren brechenden Flächen ist klein. Dieser Umstand vereinfacht ihre Berechnung sehr erheblich, indem man die Winkel, statt ihrer Sinuse, beim Rechnen benutzt.

Die eine Formel nimmt dann die Form

$$\delta = (n - 1) \alpha,$$

wo  $\alpha$  der Winkel zwischen den Flächen des Prismas,  $n$  der Brechungsindex des Glases, und  $\delta$  der Winkel der Ablenkung sind.

Da  $n$  für Kronglas etwa 1,5 ist, so ist  $n - 1$  ungefähr 0,5. Daher ist die von einem Prisma hervorgerufene Ablenkung ungefähr die Hälfte des Prismenwinkels. Ein Prisma von  $12^{\circ}$  lenkt z. B. einen Lichtstrahl um etwa  $6^{\circ}$  ab.



Die „Prismendioptrie“. — Die obige einfache Beziehung liegt einer Bezeichnung der Prismen zugrunde, welche dem Dioptriensystem bei Linsen ähnlich ist. Die Einheit der Ablenkung wird in diesem System die „Prismendioptrie“ genannt.

Ein Prisma hat die Stärke einer Prismendioptrie, wenn es einen Lichtstrahl, auf einer Entfernung eines Meters, ein Zentimeter aus seiner ursprünglichen Bahn ablenkt. Eine Prismendioptrie bedeutet also eine Ablenkung von 1 Prozent. Dieses wird klar, wenn man Fig. 38 betrachtet.

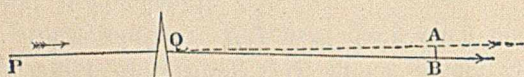


Fig. 38.

PA sei die Bahn eines Lichtstrahles in der Luft. Schaltet man bei Q ein dünnes Prisma ein, so wird dieser Strahl schwach nach der Basis des Prismas abgelenkt werden, etwa in die Richtung Q B. Auf der ursprünglichen Bahn messe man ein Meter ab, hier die Linie Q A. Dann messe man die kurze Entfernung A B, um die Ablenkung in einer Entfernung von einem Meter zu ermitteln. Ist A B ein Zentimeter lang, so hat das Prisma die Stärke von einer Prismendioptrie. Ist A B zwei Zentimeter, so ist die Stärke zwei Prismendioptrien usw.

Es ist klar, daß diese Methode den Winkel der Ablenkung nicht in Bogengraden ausdrückt, sondern als eine Länge auf einer Tangentskala in einer Entfernung von einem Meter mißt. Nun ist die Anzahl von Bogengraden, welche, einer Prismendioptrie entsprechen, offenbar gleich dem Winkel, dessen Tangent ein Prozent oder 0,01 ist, d. h.  $0^{\circ} 34' 22''$ .

Prismen werden bei Brillen angewandt, um die Neigung der Augen, in eine falsche Richtung zu blicken, zu korri-



gieren. In ausgesprochenen Fällen nennt man dieses Schielen oder Strabismus; wo die Neigung aber schwach ist — die Ursache ist eine Schwäche der Seitenmuskeln des Augapfels — wird dieser Fehler als Diplopie (= Doppelsehen) bezeichnet. Um die Neigung eines Auges, schief zu blicken, zu vermindern, kann man ein Prisma von geeignetem Winkel anwenden. Oder man kann statt dessen eine exzentrisch gefaßte Linse benutzen.

## 49. Prismatische Wirkung einer exzentrisch gefaßten Linse.

Wir wollen die Wirkung einer positiven 1-Dioptrie-Linse an der Hand der Abbildung 39 betrachten. Der Hauptbrennpunkt einer  $+1$  D-Linse liegt auf der Achse ein Meter entfernt in B.

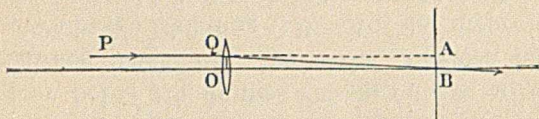


Fig. 39.

Nehmen wir einen Strahl PQ, welcher parallel zur Achse in einer Entfernung QO, gleich einem Zentimeter, von der Achse eintritt. PQ wird dann nach dem Hauptbrennpunkt B abgelenkt.

Denken wir uns bei B eine Ebene senkrecht zur Achse OB, schneidet PQ diese Ebene in A, so ist  $AB = OQ = 1$  cm; mit andern Worten, die durch eine  $+1$  D-Linse bewirkte Ablenkung eines Strahles welcher 1 Zentimeter von der Achse entfernt eintritt, gleicht der durch ein Prisma von einer Prismendioptrie bedingten Ablenkung.

Daraus geht hervor, daß der Winkel eines Prismas von der Stärke einer Prismendioptrie dem Winkel gleich ist, welcher von zwei Tangentialebenen eingeschlossen wird, die die Flächen einer 1-Dioptrie-Linse an zwei Punkten,



welche einen Zentimeter von der Achse entfernt und auf derselben Seite der Achse liegen, berühren.

Fig. 40 erläutert die Beziehungen zwischen Prismen und Linsen gleicher prismatischer Wirkung in bezug auf den in Betracht gezogenen Strahl.

Sehr häufig, sogar in den meisten Fällen, brauchen Patienten nicht nur einfache Prismen, sondern Kombinationen von Prismen und Linsen, weil sie außer an Diplopie an Kurzsichtigkeit, Weitsichtigkeit oder Astigmatismus leiden. Für solche Fälle finden prismatische Linsen, wie sie Figur 41 in übertriebener Weise darstellt, Anwendung.

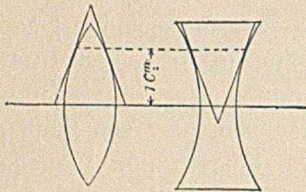


Fig. 40.

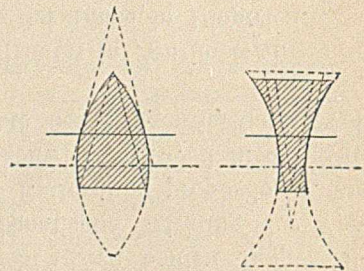


Fig. 41.

Solche prismatische Linsen sind exzentrisch herausgeschnittene Teile sphärischer Linsen. Es ist einleuchtend, daß es viel einfacher ist, sie aus gewöhnlichen Linsen zu schneiden, als erst ein Prisma von richtigem Winkel zu schleifen und an diesem die nötigen Krümmungen anzubringen.

Wir müssen deshalb eine Methode haben, welche uns angibt an welcher Stelle einer sphärischen Linse wir eine prismatische Linse herausschneiden müssen, um die erwünschte prismatische Wirkung zu erzielen.

Betrachten wir eine Brillenlinse von einer Dioptrie wie in Fig. 42, wo  $A O B$  die Achse darstellt, und schneiden wir den durch die punktierten Linien  $p q r s$  begrenzten Teil in der Weise heraus, daß  $A' O' B'$ , die Figurenachse des-



selben, ein Zentimeter von der ursprünglichen Achse entfernt ist. Aus den vorangegangenen Betrachtungen über die Prismendioptrie ist es klar, daß dieser Teil die prismatische Wirkung einer Prismendioptrie haben wird, da das Zentrum des Stückes ein Zentimeter von dem Zentrum der Achse

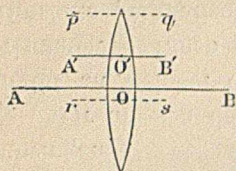


Fig. 42.

liegt. Ebenfalls leuchtet es ein, daß, was auch die Stärke einer Linse sein mag, wenn ihre Figurenachse ein Zentimeter von der optischen Achse verlegt wird, ihre prismatische Stärke in Prismendioptrien ihrer Stärke in gewöhnlichen Dioptrien numerisch gleich sein muß.

Was wird nun die Wirkung sein, wenn das Zentrum des Stückes um einen anderen Betrag von der optischen Achse verlegt wird? Ohne auf geometrische Beweise einzugehen, kann man als erste Annäherung den Satz aufstellen: Der Winkel zwischen den beiden Tangentialebenen, und deshalb die prismatische Wirkung der Verlegung des Zentrums, ist der Entfernung proportional, um welche die Linse seitlich dezentriert wird, d. h. der Entfernung der Berührungspunkte der Tangentialebenen von der Hauptachse proportional.

Es seien  $d$  = die Exzentrizität in Zentimetern.

$D$  = die Stärke der Linse in Dioptrien.

$\Delta$  = die prismatische Wirkung in Prismendioptrien.

Wenn  $d = 1$  cm und  $D = 1$  Dioptrie, ist  $\Delta = 1$  Prismendioptrie, wie wir oben gezeigt haben.

Gleichfalls ist:

Wenn  $d = 1$  cm und  $D = D$  Dioptrien

$\Delta = D$  Prismendioptrien.

Wenn  $d = 2$  cm

$\Delta = 2 D$  Prismendioptrien.

Wenn  $d = d$  cm

$\Delta = d D$  Prismendioptrien.



Oder, wenn wir den nötigen Betrag der Dezentrierung ermitteln wollen, können wir die Formel wie folgt schreiben:

$$d = \frac{\Delta}{D}.$$

Diese Formel ist nur annähernd richtig: sie kann als richtig für alle Linsen unter 12 D angesehen werden.

Ein Beispiel wird den Gebrauch der Formel erläutern:

Die Sehachsen eines Patienten haben eine Divergenz von vier Prismendioptrien während er Linsen von +5 D braucht. Um wie viel müssen seine 5 D-Linsen exzentrisch gefaßt werden, um den Fehler zu korrigieren?

Es ist klar, daß jede Linse um so viel dezentriert werden muß, daß sie wie zwei Prismendioptrien wirkt. Darum ist

$$d = \frac{\Delta}{D} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ cm} = 4 \text{ mm}.$$

Das heißt, die Linsen müssen so geschnitten werden, daß das optische Zentrum 4 mm entfernt ist von dem Zentrum des Umrisses der Linsen.

Dieselben Regeln gelten auch für divergierende Linsen, mit dem Unterschied, daß während eine + Linse eine scheinbare Ablenkung in einem der Dezentrierung entgegengesetzten Sinne bewirkt, eine — Linse eine Ablenkung im Sinne der Dezentrierung hervorruft.

## 50. Umwandlung von Prismendioptrien in Bogengrade.

Es ist wichtig eine Methode zu haben, um Ablenkungen in Bogengraden sofort in Prismendioptrien und umgekehrt zu verwandeln. Im ersten Falle ist der Tangent von

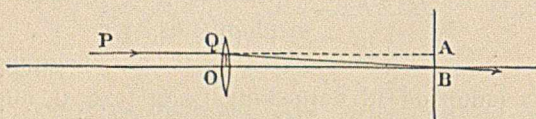


Fig. 43.

$1^\circ = 0,01745$ , welcher bedeutet, daß die Änderung der Richtung um  $1^\circ$  in einer Entfernung von einem Meter eine Ablenkung von 0,01745 m oder 1,745 cm, auf einer zur optischen Achse senkrechten Skala, entspricht, wie Fig. 43 zeigt.



Denn wenn QA 1 Meter, und der Winkel AQB einen Grad darstellen, so ist  $\tan AQB = \tan 1^\circ = \frac{AB}{AQ} = 0,01745$  und darum ist  $AB = 0,01745 \times AQ$  d. h.  $AB = 0,01745 \text{ m} = 1,745 \text{ cm}$ .

Nach der Definition der Prismendioptrie wäre AB ein Zentimeter, wenn AQB eine Prismendioptrie wäre. Da nun kleine Winkel ihren Tangenten proportional sind, gilt das Verhältnis

$$\frac{1 \text{ Prismendioptrie}}{1 \text{ Bogengrad}} = \frac{1}{1,745}$$

$$\text{mendioptrie} = \frac{1}{1,745} \text{ Grad} = 0^\circ 34' 32''.$$

## 51.

### Dezentrierungs-Äquivalente.

(Aus dem „Opticians' Handbook“.)

Linse	Brechender Winkel für Glas mit $n = 1,54$							
	Dioptrien	1°	2°	3°	4°	5°	6°	8°
1	9·4	18·8	28·3	37·7	47·2	56·5	75·8	95·2
2	4·7	9·4	14·1	18·8	23·6	28·2	37·9	47·6
3	3·1	6·3	9·4	12·6	15·7	18·8	25·3	31·7
4	2·3	4·7	7·1	9·4	11·8	14·1	18·9	23·8
5	1·9	3·8	5·7	7·5	9·4	11·3	15·2	19·0
6	1·6	3·1	4·7	6·3	7·9	9·4	12·6	15·9
7	1·3	2·7	4·0	5·4	6·7	8·1	10·8	13·5
8	1·2	2·3	3·5	4·7	5·9	7·1	9·5	11·9
9	1·0	2·1	3·1	4·2	5·2	6·3	8·4	10·5
10	·9	1·9	2·8	3·8	4·7	5·6	7·6	9·5
11	·9	1·7	2·6	3·5	4·3	5·1	6·9	8·7
12	·8	1·6	2·4	3·1	3·9	4·7	6·3	7·9
13	·7	1·4	2·2	2·9	3·6	4·3	5·8	7·2
14	·7	1·3	2·0	2·7	3·4	4·0	5·4	6·8
15	·6	1·3	1·9	2·5	3·1	3·8	5·1	6·3
16	·6	1·2	1·8	2·4	3·0	3·5	4·7	6·0
17	·6	1·1	1·7	2·2	2·8	3·4	4·5	5·6
18	·5	1·0	1·6	2·1	2·6	3·1	4·2	5·3
19	·5	1·0	1·5	2·0	2·5	3·0	4·0	5·0
20	·5	·9	1·4	1·9	2·4	2·8	3·8	4·8



Die Zahlen in dieser Tabelle geben die Anzahl Millimeter an, um welche eine Linse (von gegebener Stärke) dezentriert werden muß, um wie ein Prisma von dem oben angegebenen Winkel zu wirken. Z. B.: Damit eine + 5 D-Linse die Wirkung eines Prismas von 2° erhält, muß sie um 3,8 mm dezentriert werden.

## 52. Tabelle der Beziehungen zwischen Prismendioptrien und Graden der Ablenkung.

Prismendioptrien	Grade der Ablenkung	Prismendioptrien	Grade der Ablenkung
0	0	18	10° 12'
1	0° 34' 22''	19	10° 46'
2	1° 8' 40''	20	11° 20'
3	1° 43'	22	12° 25'
4	2° 17'	24	13° 30'
5	2° 52'	26	14° 35'
6	3° 26'	28	15° 39'
7	4° 0'	30	16° 42'
8	4° 35'	32	17° 45'
9	5° 8' 30''	34	18° 47'
10	5° 43'	36	19° 48'
11	6° 17'	38	20° 48'
12	6° 51'	40	21° 48'
13	7° 24'	42	22° 47'
14	7° 58'	44	23° 45'
15	8° 32'	46	24° 42'
16	9° 5'	48	25° 38'
17	9° 39'	50	26° 34'

## 53. Umwandlung von Prismendioptrien in Prismenwinkel.

Es ist auch wichtig die Beziehung zwischen dem Winkel eines Prismas und seiner Stärke in Prismendioptrien zu kennen.



Wir bezeichnen mit  $A$  die Anzahl von Graden des Winkels zwischen den beiden Flächen eines Primas.

Dann gilt, da wir nur mit Prismen von kleinen Winkeln zu tun haben, die Beziehung

$$\delta = A(n - 1),$$

wo  $\delta$  die Ablenkung in Graden bedeutet.

Wir haben oben gesehen daß

$$\delta = \frac{\Delta}{1,745}.$$

Daher ist

$$A = \frac{\Delta}{1,745(n-1)}.$$

Die Formel für die Dezentrierung erhält jetzt die Gestalt

$$d = \frac{A}{D} \times 1,745 \times (n - 1) = \frac{\delta}{D} \times 1,745 = \frac{\Delta}{D}.$$

Setzen wir  $n = 1,52$ , so wird

$$A^0 = \frac{\Delta}{0,91}.$$

D. h. Ein Prismenwinkel von  $1^\circ$  bewirkt eine Ablenkung von  $0,91$  Prismendioptrien. Um eine Ablenkung von  $1$  Prismendioptrie zu erhalten, muß man ein Prisma mit dem Winkel  $1,1^\circ$  anwenden.

Daher die Regel: — Um Prismendioptrien in Grade des Prismenwinkels umzuwandeln, dividiert man mit  $0,91$  oder multipliziert mit  $1,1$ .

Die drei Einheiten stehen also in folgender Beziehung zueinander:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Prismendioptrie} &= \frac{1 \text{ Grad der Ablenkung}}{1,745} \\ &= \frac{1 \text{ Grad Prismenwinkel}}{0,91}. \end{aligned}$$

Die Formeln für die Dezentrierung lauten dann

$$d = \frac{0,91 A}{D} = \frac{1,745 \delta}{D} = \frac{\Delta}{D}.$$



## 54. Schiefwinklig gekreuzte Prismen.

Wenn zwei (dünne) Prismen unter einem Winkel  $\varnothing$  gekreuzt werden, so wirken sie wie ein Prisma von anderer Stärke unter einem dazwischenliegenden Winkel. Es seien  $A$  und  $B$  die Stärken der beiden Prismen in Prismendioptrien,  $R$  sei die Stärke des resultierenden Prismas in Prismendioptrien, und  $\alpha$  der Winkel unter welchem es gegen das Prisma  $A$  geneigt ist. Die Werte von  $R$  und  $\alpha$  können nach folgenden Formeln berechnet werden:

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \varnothing \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \frac{B}{R} \sin \varnothing \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Beispiel. — Gesucht der Ersatz von den zwei Prismen,  $6 \triangle$  unter  $60^\circ$  und  $4 \triangle$  unter  $95^\circ$ . Da  $A = 6$ ,  $B = 4$ ,  $\varnothing = 35^\circ$ , so ist  $\cos \varnothing = 0,819$  und  $\sin \varnothing = 0,573$ .  $R^2 = 36 + 16 + (2 \times 6 \times 4 \times 0,819) = 91,3$ ; und  $R = 9,5$ . Nun ist  $\sin \alpha = 4 \times 0,573 : 9,5 = 0,24$ ; woraus  $\alpha = 14^\circ$ .

Das resultierende Prisma wird also die Stärke  $9,5 \triangle$  und die Neigung  $14^\circ$  mehr wie das Prisma  $A$ , d. h.  $74^\circ$  haben.

## 55. Konvergenz des Sehens. Meterwinkel.

Neben dem Prismendioptrie-System hat man eine andere Messungsmethode angewandt, welche von dem Begriff der Winkelkonvergenz der beiden Augen ausgeht,

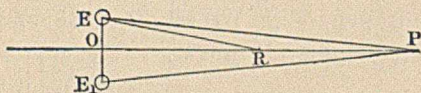


Fig. 44.

deren Einheit als „Meterwinkel“ bezeichnet wird. Bevor wir den Meterwinkel definieren, wollen wir Fig. 44 betrachten. Es seien  $EE_1$  ein Augenpaar und auch ihre Zentren. Man verbinde  $E$  und  $E_1$  und lege durch den



Mittelpunkt O jener Linie, eine Ebene senkrecht zur Linie EE, dann stellt OP die Schnittlinie dieser Ebene mit der Ebene des Papiers dar. Diese Ebene nennt man die Sagittalebene, und EE<sub>1</sub> die Basis, während man die beiden Sehrichtungen der Augen als die Sehnlinien bezeichnet.

Wir können jetzt den Meterwinkel definieren. Er ist der Winkel, unter welchem die Hälfte der Basis erscheint an einem Punkt der Sagittalebene, welche von jedem Auge ein Meter entfernt liegt.

So ist in der Figur, wenn EP einen Meter darstellt, OPE der Meterwinkel. Es ist klar, daß die Länge der Basis bei verschiedenen Patienten variieren wird, und daß daher der absolute Wert des Meterwinkels, für jedes Individuum verschieden sein kann.

## 56.

Tabelle von Meterwinkeln.

Länge der Basis in Millimetern	Sinus des Meterwinkels	Wert in Graden und Minuten.
50	0·025	1° 26'
52	0·026	1° 29'
54	0·027	1° 32'
56	0·028	1° 36'
58	0·029	1° 40'
60	0·030	1° 43'
62	0·031	1° 46'
64	0·032	1° 50'
66	0·033	1° 53'
68	0·034	1° 57'
70	0·035	2° 0'



Tabelle der Aberrationen der Linsen.

57.

	Aberration	Wirkung	Beseitigung
Klasse I.	Bedingt durch das Material.		
A. . . . .	Chromatische Aberration— (a) der Brennebene . . . . . (b) der Vergrößerung . . . . . Sekundäres Spektrum . . . . .	Farbige Ränder des Bildes und des Gesichtsfeldes Schwache Färbung in Bildern von kleinen leuchtenden Gegenständen . . . . .	Durch eine achromatische Linse aus zwei Glassorten. Teilweise durch Abblenden zu heben. Durch Apochromaten, d. h. Linsen aus drei Glassorten; oder durch besondere Achromaten aus Glassorten, welche das sekundäre Spektrum beseitigen. Zu verwerfen. Das Glas ist schlecht.
B. . . . .	Schieflichkeit . . . . .	Schlieren im Glas, Bilder von hellen Punkten verschommen Bilder verdoppelt . . . . .	Zu verwerfen. Ursache: kristallinische Struktur oder mangelhafte Abkühlung.
C. . . . .	Doppelbrechung . . . . .		
D. . . . .	Durch die Form bedingt.		
E. . . . .	Astigmatismus . . . . .	Vertikale und horizontale Linien nicht zu gleicher Zeit scharf eingestellt . . . . .	Zu verwerfen. Die Linse ist astigmatisch weil schlecht geschliffen. Zuweilen durch schiefe Fassung verursacht.
F. . . . .	Sphärische Aberrationen. (a) Central . . . . . (b) Coma . . . . . (c) Radialer Astigmatismus	Bilder von hellen Punkten verschommen auch in der Mitte des Gesichtsfeldes Bilder von Punkten nicht in der Mitte des Feldes hünenförmig verschommen Bilder von Punkten nicht in der Mitte in zwei Brennlinien in verschiedenen Entfernungen von der Linse verzerrt . . . . .	Teilweise durch Abblenden zu heben. Krümmungen schlecht berechnet. Bei Fernrohren nachschleifen, um den durch die sphärischen Flächen bedingten Fehler zu beseitigen. Anderes Hilfsmittel: Benützung von getrennten Linsen, oder Neuberechnung der Krümmungen, so daß die Brechung auf verschiedenen Flächen verteilt wird.
G. . . . .	Chromatische Differenzen durch sphärische Abweichung.	Schwache Farbo des verschommenen Bildes . . . . .	Beseitigung und Korrigierung wie im vorhergehenden.
H. . . . .	Bildfeld-Krümmung . . . . .	Bilder in der Mitte und am Rande sind in verschiedenen Entfernungen scharf	Anderer Linsenkombinationen sind nötig.
I. . . . .	Verzerrung des Bildes in der Bildebene Durch die Öffnung bedingt.	Patronen- oder nadelkissenförmige Verzerrung des Bildes . . . . .	Kombination schlecht entworfen. Man versuche eine Verschiebung der Blende.
Klasse III.	Aberration durch Beugung		
K. . . . .	Durch schlechte Fassung bedingt.	Unechte Scheiben bei Sternbildern, zuweilen schwache Spuren von Ringen um den Stern . . . . .	
L. . . . .	Schiefe Fassung . . . . .	Vertikale und horizontale Linien nicht zu gleicher Zeit scharf . . . . .	Richtig justieren in der Fassung.
M. . . . .	Dezentrierung . . . . .	Bild aus der geraden Richtung abgelenkt . . . . .	Linse schlecht geschnitten oder gefaßt. Der dickste Teil muß in der Mitte sein.
Klasse V.	Durch Spiegelung bedingt.		
N. . . . .	Spiegelreflexe . . . . .	Lichtfleck in der Mitte des Feldes . . . . .	Kombination schlecht montiert. Man hindere die Entfernung zwischen den Linsen.



## 58. Notizen über Linsenaberrationen.

Jede Linse, welche Licht, das von einem Punkte auf einer Seite der Linse ausgeht, genau in einem einzigen Punkte auf der anderen Seite vereinigt kann man als genau stigmatisch bezeichnen. (Stigma bedeutet einen Punkt). Jedes Auftreten eines nicht vollständig scharfen oder eines verzerrten Bildes bezeichnet man als eine Aberration. Siehe Tabelle 57.

Chromatische Aberration. — Jede einzelne Glasorte bricht blaues Licht stärker als rotes Licht. Die Erzeugung von Spektralfarben durch Glasprismen beweist daß die verschieden gefärbten Lichtarten verschieden beeinflußt werden. Daher wird jede aus einer einzigen Glasorte hergestellte Linse verschiedene Stärken für verschiedene Lichtarten aufweisen, und andere Brennpunkte haben für andere Farben. Die Brennweite für blaues Licht ist immer kürzer als die für rotes.

Beispiel der chromatischen Aberration. — Nehmen wir eine Bikonvexlinse aus der zuletzt in Tabelle 18 (Chancesche Gläser) erwähnten Flintglassorte.

Es seien die Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  je 200 mm oder 0,200 m, d. h. die Krümmung jeder Fläche ist gleich 5 Dioptrien. Die gesamte Flächenkrümmung ist 10 Dioptrien. Multiplizieren wir diese Zahl mit dem um 1 verminderten Brechungsindex von einer Lichtart, so erhalten wir die Stärke der Linse für diese Lichtart. Obengenannte Glassorte hat die Brechungsindizes Rot (A) = 1,6965, Gelb (D) 1,7129, Blau (G) 1,7466. Die Linse wird daher folgende Stärken haben: für rotes Licht 6,9 Dioptrien; für gelbes Licht 7,1 Dioptrien; für blaues Licht 7,4 Dioptrien. Ihre Brennweiten werden für Rot 144,9 mm, für Gelb 140,8 mm und für Blau 135,2 mm sein. Der Brennpunkt des blauen Lichtes ist also der Linse um 9,7 mm näher als der des roten Lichtes.



Wenn die Dispersion (d. h. die Differenz der Brechungen der verschiedenen Farben) immer der Brechung proportional wäre, so wäre die Beseitigung der chromatischen Aberration unmöglich. Jede Tabelle der Brechungsindizes zeigt indessen daß dieses niemals der Fall ist. In solchen Tabellen findet man den Brechungsindex für Licht mittlerer Wellenlänge, d. h. gelbes Licht der Natriumlinie D, unter der Rubrik D oder  $n_D$ . Auch wird die mittlere Dispersion angegeben, d. h. die Differenz zwischen  $n_C$ , dem Brechungsindex für rotes Licht der C-Linie, und  $n_F$ , dem Brechungsindex für das blaugrüne Licht der F-Linie des Spektrums. Dieses wird auch  $n_F - n_C$  oder kurz  $\Delta n$  geschrieben, welche die Differenz der beiden  $n$  bedeutet. Wäre diese Dispersion immer der mittleren Brechung  $n_D - 1$  proportional, so würde der Bruch  $\frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$  oder  $\frac{n_D - 1}{\Delta n}$  denselben Wert bei allen Gläsern haben.

Ein Blick auf die letzte Kolonne einer Tabelle der Brechungsindizes zeigt, daß dieses durchaus nicht der Fall ist, indem die Zahlen innerhalb weiter Grenzen schwanken. Dieses Verhältnis ist grundlegend bei der praktischen Berechnung von Linsen; es bedeutet den Betrag der Brechung bei einem gegebenen Dispersionsbetrag, und wird meistens durch das Symbol  $\nu$  bezeichnet. Wir sehen, daß bei der leichtesten Flintglassorte, Tabelle 16,  $\nu$  den Wert 70 hat, und bei der schwersten Flintglasart  $\nu = 19,7$  ist. Die Werte von  $\nu$  bei den Chanceschen Gläsern schwanken zwischen 64,6 und 29,9. Bei einiger Überlegung wird es klar, daß zwei Bedingungen erfüllt werden müssen, wenn wir zwei Linsen kombinieren wollen derart, daß ihre Dispersionen sich gegenseitig neutralisieren: — (a) die Linsen müssen entgegengesetzter Art sein, eine + die andere —; (b) ihre brechenden Stärken müssen so gewählt werden, daß die Linse von größerer brechender



Kraft genau dieselbe Dispersion wie die Linse geringerer brechender Kraft hervorruft. Diese letzte Bedingung ist offenbar gleichbedeutend mit der Anforderung, daß die Stärken der Linsen ihren  $\nu$ -Werten proportional sein müssen.

Wenn man obige Bedingungen berücksichtigt, ist die Konstruktion einer achromatischen Linse eine einfache Sache. Es sind z. B. unter den Chanceschen Gläsern ein hartes Crownglas, deren  $\nu=60,5$  und ein extra schweres Flintglas mit  $\nu=29,9$ . Das Crownglas gibt im Vergleich mit dem Flintglas eine fast genau zweimal so große Brechung bei gleicher Dispersion. Daher werden eine  $+$  Linse aus diesem Crownglas, deren Stärke  $60,5$  proportional ist, und eine  $-$  Linse aus genanntem Flintglas, deren Stärke  $29,9$  proportional ist, gleiche und entgegengesetzte Dispersionen haben. Nehmen wir also eine plankonvexe Crownglaslinse von  $+ 6,05$  D und eine plankonkave Flintglaslinse von  $- 2,99$  D und verkitten sie wie in Fig. 45 so werden sie eine achromatische Linse von der Stärke  $+ 3,04$  D geben. Sollten

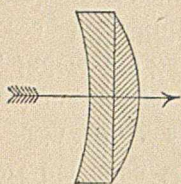


Fig. 45.

wir das Chancesche „schwere Flintglas“ mit  $\nu=36$  an Stelle des „extra schweren Flintglas“ mit obigem Hartcrownglas verwenden, so mußten die brechenden Stärken der beiden Komponenten in dem Verhältnis von Crown  $+ 60,5$  zu Flint  $- 36$  stehen um eine positive achromatische Linse zu liefern. Um eine negative achromatische Linse herzustellen, müßten die Verhältnisse Crown  $- 60,5$  zu Flint  $+ 36$  sein. Die Differenz von  $60,5$  und  $36$  ist  $24,5$ . Angenommen, wir wollten eine positive achromatische Linse der Brennweite  $609,6$  mm oder, mit anderen Worten, von  $1,64$  Dioptrien berechnen. Die Stärke der Crownglaslinse muß sich dann zu  $1,64$  verhalten wie  $+ 60,5:24,5$ ; und die Flintglaslinse muß so beschaffen sein, daß ihre Stärke sich zu  $1,64$  wie  $- 36:24,5$  verhält.



Oder 
$$\text{Crownlinse} = \frac{+ 60,5}{24,5} \times 1,64 = + 4,08 \text{ D}$$

$$\text{Flintlinse} = \frac{- 36}{24,5} \times 1,64 = - 2,44 \text{ D}$$

und die resultierende achromatische Linse = + 1,64 D.

Wenn die Crown- und Flintglaslinsen beide Planflächen haben und diese Flächen wie in Fig. 45 verkittet sind,

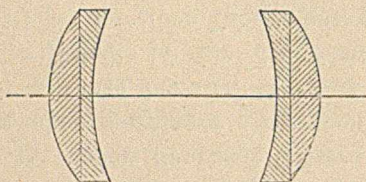


Fig. 46.

sind, so stellt diese Kombination ein wenig gutes Achromat dar, welches mit sphärischer Abweichung und Bildfeldkrümmung behaftet ist. Zwei solche Linsen aber einander in geringer Entfernung entgegengesetzt wie in Fig. 46 geben eine vor-

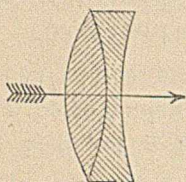


Fig. 47.

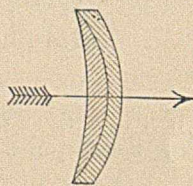


Fig. 48.

zügliche Linse mit sehr wenig Bildfeldkrümmung. Zwei andere Linsenformen, Fig. 47 u. 48, werden im allgemeinen vorgezogen; Fig. 47 für Fernrohrobjective, Fig. 48 für Kameralinsen, da sie weniger sphärische Aberration aufweisen als eine Kombination mit zwei Planflächen. Bei ihnen sind 3 Krümmungsradien zu berechnen. Im Fall der eben berechneten Linse ist es leicht, die Krümmungs-



radien zu berechnen. Im Fall der ebenberechneten Linse ist es leicht die Krümmungsradien zu berechnen. Die Formel für die Stärke einer Linse ist nach Art. 28

$$\text{Stärke} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right).$$

Da nun jede der Linsen eine Planfläche hat, ist eine der beiden Krümmungen = 0, und die Formel wird

$$\text{Stärke} = (n - 1) \frac{1}{r},$$

oder  $r = (n - 1) : \text{Stärke}.$

Hier bedeutet  $n$  natürlich den mittleren Brechungsindex der betreffenden Glasart. Aus der Tabelle 19 der Chanceschen Gläser entnehmen wir

Hard crown  $n_D = 1,5175$

Dense flint  $n_D = 1,6225$

woraus

$r$  für Crownlinse =  $0,5175 : 4,07 = 0,127 \text{ m} = + 127 \text{ mm}$

$r$  für Flintlinse =  $0,6225 : - 2,43 = - 0,256 \text{ m} = - 256 \text{ mm}.$

Neue Achromate. Eine neue achromatische Kombination wurde im Jahre 1892 von P. Rudolph erdnen. Sie besteht darin, daß man für die positive Linse aus Crown-glas eine von den neuen Jenenser Gläsern mit höherem Brechungsindex aber geringerer Dispersion als das Flint-glas der negativen Linse benutzt. So z. B. kann man das Glas „S 30“ der Tabelle 17 für die positive Linse und das Flintglas „O 726“ derselben Tabelle zusammen benutzen.

Diese Neuachromate geben ein flacheres Bildfeld als die alten Achromate.

Korrektion des sekundären Spektrums. In den Berechnungen der achromatischen Linsen haben wir als die Dispersion des Glases die mittlere Dispersion zwischen der roten C-Linie und der blaugrünen F-Linie des Spektrums angenommen. Die kombinierte Linse ist deshalb für diese zwei Farben korrigiert welche genau denselben Brennpunkt



haben. Es ist aber nicht gesagt, daß, weil diese beiden Lichtarten einen Brennpunkt haben, alle anderen Strahlen den gleichen Brennpunkt haben werden. Es gibt gelbe und grüne Strahlen von zwischen C u. F liegenden Wellenlängen; auch gibt es solche von kürzerer Wellenlänge wie die blauen, violetten und ultra-violetten Strahlen. Das Auge ist für die ersteren am empfindlichsten; die photographische Platte für die letzteren. Werden sie alle denselben Brennpunkt haben? Sie haben nicht genau denselben Brennpunkt wie die zwei Strahlen für welche die Linse korrigiert wurde; es gibt einen kleinen Rest der Aberration, das sekundäre Spektrum genannt. Diese ungenügende Korrektur hat ihre Ursache darin, daß bei jeder Glassorte die Dispersion nicht gleichmäßig über alle Teile des Spektrums verteilt ist. Sehen wir die Tabelle 17 der Jenenser Gläser an, so finden wir ein gewöhnliches Silicat-Crown (Fabrik. Nr. O. 203) und darunter ein anderes Silicat-Crown O. 598, welche einander sehr ähnlich sind. Vergleicht man aber ihre partiellen Dispersionen, so ergibt es sich, daß sie die Farben nicht gleichmäßig zerstreuen. Im rotorangem Teil des Spektrums hat die „gewöhnliche“ Sorte eine etwas stärkere Dispersion 0,00563 als die andere 0,00562; während im gelben und grünen Teil das „gewöhnliche“ die kleinere Dispersion 0,00616 statt 0,00619 hat. Die „gewöhnliche“ Sorte erzeugt ein Spektrum, in welchem die D-Linie im gelben relativ weiter vom roten und näher dem blauen Ende des Spektrums liegt. Diese „Irrationalität der Dispersion“ findet sich bei allen zur Verfügung stehenden brechenden Materialien, und macht das Studium der partiellen sowie der Gesamtdispersion notwendig. Mit Hilfe solcher detaillierter Dispensionswerte ist es dann möglich ein Gläserpaar aus einer Liste so zu wählen, daß die Irrationalitäten bei beiden sich möglichst gegenseitig aufheben. Eine solche sorgfältig ausgewählte Kombination wird sehr wenig sekundäre Farbenaberration zeigen. Die beiden Gläser O. 60 und O. 164 von



Tabelle 17 würden in Kombination so gut wie kein sekundäres Spektrum geben.

Ein weiterer wichtiger Gesichtspunkt bei der Wahl von zwei Glassorten ist, daß das Crown Glas eine möglichst starke Brechung im Vergleich zu seiner Dispersion haben soll; und das Flintglas eine möglichst niedrige. Mit anderen Worten, das Crown Glas soll einen möglichst hohen  $\nu$ -Wert haben und das Flintglas ein möglichst kleines  $\nu$ . Bei Beachtung dieser Regel wird nur eine sehr dünne Flinlinse nötig sein um die Dispersion der Crownlinse zu korrigieren und die ganze Kombination wird leichter sowohl wie freier von sekundärem Farbenfehler.

**Apochromatische Linsen.** Eine aus zwei Gläsern achromatische Linse kann nur vollkommene Farbenkorrektion für zwei Teile des Spektrums besitzen. Herschel, Hastings und andere haben den Vorschlag gemacht Linsen aus verschiedenen Materialien zu konstruieren, um eine Korrektion für drei Regionen des Spektrums zu erzielen. Solche, aus drei oder mehr verschiedenen Materialien hergestellt, werden, wenn sie auch für zwei Farben sphärisch korrigiert sind, zur Unterscheidung als Apochromate bezeichnet. In einigen Mikroskopobjektiven von Zeiß ist das dritte Material weißer Flußspat, welcher (siehe Tabelle 24) eine sehr niedrige Dispersion im Vergleich zur Brechung besitzt, so daß sein  $\nu$  den Wert von 97 hat, einen höheren Wert als das leichteste Crown Glas.

## 60. Sphärische Aberration.

Würden wir mit einfarbigem, z. B. Natriumlicht arbeiten, um die chromatische Aberration zu eliminieren, so würden wir noch bei vollkommen sphärisch geschliffenen Linsen finden, daß die keinen scharfen Brennpunkt geben. Die Strahlen vereinigen sich nicht alle in einem Punkt, weil diejenigen, welche durch die Randzonen der Linse gehen,



die Achse in einem Punkte schneiden, welche der Linse näher liegt als der Sammelpunkt der Strahlen, welche durch die mittlere Partie der Linse gehen. In Fig. 49 haben wir eine übertriebene Darstellung des Ganges von parallelem Licht durch eine Plankonvexlinse. Die zentralen Strahlen vereinigen sich in F, die Randstrahlen in J.

Zwischen diesen Punkten gibt es eine Stelle, wo das Strahlenbüschel am schmalsten ist. Hier bilden sie einen kleinen runden Fleck, den „Kreis der kleinsten Zerstreung,“ welcher einem Brennpunkt am nächsten kommt. Durch Abblenden der Randstrahlen könnten wir ein schärferes Bild erhalten; die Zentralstrahlen würden sich dann in F genau vereinigen, aber Lichtverlust tritt dann ein. Wie können wir, ohne irgend einen Teil der Linse abzublenden,

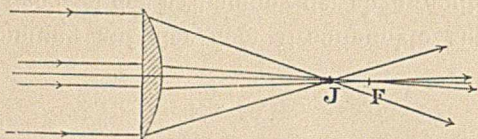


Fig. 49.

alle Strahlen genau nach F konvergieren lassen? Die Randpartien brechen das Licht zu stark. Man könnte die Krümmung der Randpartien durch abschleifen flacher gestalten. Eine Rotationsfläche kann ermittelt werden welche dieser Bedingung genügt, aber sie ist nicht eine Kugel- fläche, sondern kommt einem Ellipsoid oder Hyperboloid näher. Damit wäre eine Methode der Beseitigung der Kugelabweichung gegeben. Große Fernrohr objective werden zuerst sphärisch geschliffen, dann an den Randpartien mit der Hand retouchiert, indem man sie an geeigneten Stellen wegpoliert, bis ihre Sammelwirkung eine möglichst vollkommene ist.

Je stärker ein eintretender Strahl zu einer brechenden Fläche geneigt ist, um so stärker wird er wahrscheinlich mit Kugelabweichung behaftet sein. Strahlen, welche fast



normal durch eine Fläche gehen, werden sehr wenig Kugelabweichung haben. Daher ist es eine Leitregel, daß man die Kugelabweichung soviel wie möglich verringert, indem man die Strahlen nicht wie in Fig. 49 eine starke Brechung an der einen und keine an der anderen Fläche erleiden läßt, sondern dafür sorgt, daß sie an beiden Flächen etwa gleich stark gebrochen werden. Indem man eine Plankonvexlinse so umdreht, daß ihre Planfläche nach dem Brennpunkt gerichtet ist (Fig 50), wird die Aberration wesentlich vermindert, da die Brechung zwischen beiden Flächen geteilt wird. Von allen gleich starken Linsen, welche hergestellt werden können, um paralleles Licht in einem Brennpunkt zu vereinigen, ist diejenige die beste, welche, wenn  $n = 1,5$  bikonvex, aber nicht äquikonvex ist und

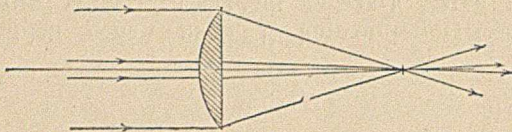


Fig. 50.

deren Krümmung auf der dem Brennpunkte zugekehrten Fläche ein Sechstel der Krümmung der abgewandten Fläche ist. Eine solche Linse nennt man die „Linse der besten Form“. Wenn  $f$  die Fokallänge und  $y$  der Halbmesser einer Linse sind, so ist die Längenabweichung auf der Achse

$$\text{bei der Linse bester Form} = -\frac{15 y^2}{14 f},$$

$$\text{bei einer äquikonvexen Linse} = -\frac{15 y^2}{3 f}$$

Eine Linse, welche für sphärische Aberration für zwei koordinierte Punkte auf der Achse korrigiert ist, wird, wenn alle ihre Zonen gleiche Vergrößerungsstärke haben, als Aplanat bezeichnet.



Nach der obigen Regel ist die Längenabweichung dem Quadrat des Halbmessers der Linsenöffnung proportional; die Seitenabweichung nimmt aber mit der dritten Potenz des Halbmessers zu.

Eine Linse, welche vollkommen aplanatisch für parallele Strahlen in einer Richtung gemacht worden ist, wird sphärische Abweichung zeigen, wenn paralleles Licht sie in umgekehrter Richtung passiert, ebenfalls für Licht, welches nicht von einem zum anderen koordinierten Fokus geht. In dem Falle, in welchem die Linse ein dem Objekt gleich großes Bild geben soll, d. h. wo Bild und Objekt gleich weit von der Linse entfernt sind, gibt eine äquikonvexe Linse die geringste sphärische Aberration.

Obwohl es notwendig ist Fernrohrlinsen und andere Linsen für feine optische Arbeiten sowohl für sphärische wie auch chromatische Aberration zu korrigieren, ist letzteres ungleich viel wichtiger. In einer äquikonvexen Linse aus Crown Glas ist z. B. die Farbenabweichung sechzehnmal so groß wie die Kugelabweichung. Bei einer solchen Linse aus Flintglas ist die chromatische Aberration siebenundzwanzigmal so groß wie die sphärische. Bei einem großen von Fraunhofer geschliffenen Fernrohr-objektiv von 2 m Brennweite und 66 mm Halbmesser war die Längenabweichung infolge der Kugelgestalt 4 mm (es hätte nur 2,2 mm betragen wenn die Krümmungen der Linse der besten Form entsprochen hätten). Das Objektiv war natürlich ein achromatisches Paar aus Crown- und Flintglas. Wäre es nur aus Crown Glas allein, so hätte die Farbenabweichung etwa 60 mm und bei Flintglas allein zirka 100 mm betragen!

## 61. Der optische Invariant.

Jede sphärisch gekrümmte optische Fläche, wie z. B. eine Linsenfläche oder die Kittfläche zwischen zwei Linsen, besitzt eine bestimmte optische Eigenschaft in bezug auf



ihre brechende Wirkung auf einen sie treffenden Lichtstrahl. Man wird den Einwand erheben, daß die brechende Wirkung bei Strahlen welche die Fläche an verschiedenen Punkten oder unter verschiedenen Winkeln treffen, variieren muß. Dieses ist richtig. Es ist jedoch möglich einen Ausdruck zu finden, welcher für jeden beliebigen Strahl, der die Fläche in einem beliebigen Punkt trifft, gilt. Es seien  $n$  der Brechungsindex des ersten Mediums,  $n'$  der des zweiten Mediums,  $r$  der Krümmungsradius der sie trennenden Fläche;  $\alpha$  der Winkel des Einfalls auf diese Fläche, und  $\alpha'$  der Winkel, unter welchem der Strahl sich durch das zweite Medium fortpflanzt, beide Winkel von der Normale zum Einfallspunkt gemessen. Da  $\sin \alpha : \sin \alpha' = n' : n$  haben wir  $n \sin \alpha = n' \sin \alpha'$ . Dieser Ausdruck multipliziert mit  $1 : r$  der Krümmung der Fläche wird von Abbe der Optischen Invariant der Fläche genannt und mit  $Q$  bezeichnet.

$$Q = n \frac{\sin \alpha}{r} = n' \frac{\sin \alpha'}{r}.$$

Wir wollen diese Beziehung auf einen schiefen Strahl anwenden, welcher von einem Punkt auf der Achse zu dem koordinierten Punkt auf der Achse im zweiten Medium geht. Es seien  $u$  bzw.  $u'$  die Entfernungen dieser Punkte von dem Scheitelpunkt der Fläche, und  $p, p'$  ihre Entfernungen von dem Schnittpunkt des Strahls mit der Fläche. Die Beziehung wird dann:

$$Q = n \frac{u - r}{p r} = n' \frac{u' - r}{p' r}.$$

Wenn der Radius am Schnittpunkt des Strahls mit der Fläche nur einen kleinen Winkel mit der Achse bildet, so ist annähernd  $p = u$  und  $p' = u'$ ; so daß wir für achsiale Strahlen schreiben können:

$$Q_0 = n \frac{u - r}{u r} = n' \frac{u' - r}{u' r}$$

woraus

$$\frac{n'}{u'} - \frac{n}{u} = \frac{n' - n}{r}.$$



Wenn das erste Medium Luft ist für welche  $n = 1$  ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{n'}{u'} - \frac{1}{u} = \frac{n' - 1}{r}.$$

Oder man kann die allgemeine Formel schreiben:

$$\Delta \left( \frac{n}{u} \right) = \frac{1}{r} \Delta (n).$$

## 62. Sphärische Aberration schiefer Strahlenbüschel.

In Artikel 60 haben wir die Wirkung der sphärischen Aberration auf Licht, welches in der Richtung der Hauptachse auf eine Linse fällt, geschildert. Lichtbüschel, welche

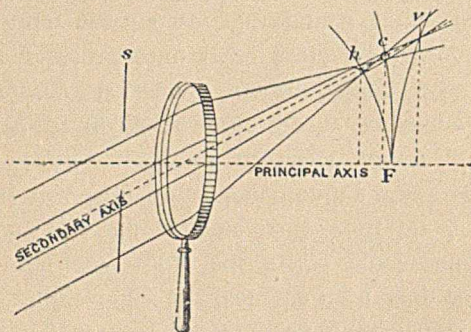


Fig. 51.

schief durch eine Linse gehen, erleiden eine andere Art sphärische Aberration welche bei Kameralinsen viel wichtiger ist.

Wenn ein paralleles Lichtbüschel schief durch eine konvexe Linse geht, so wird es nicht mehr in einem Brennpunkt vereinigt. Die Wirkung, die eine Linse auf schief einfallendes Licht hat, tritt auch dann ein, wenn man, während Licht gerade durch die Linse geht, die Linse neigt. Die allgemeine Wirkung ist dieselbe als ob eine



cylindrische Linse vor die Linse gesetzt worden wäre (man vergl. Fig 34). Es entstehen jetzt zwei Brennlinien statt eines Brennpunktes. Ist die Achse des schiefen Strahles nach oben geneigt wie in Fig. 51, so wird die näher liegende Brennlinie  $h$  horizontal (oder tangential) sein, und die weiter liegende Brennlinie  $v$  vertikal (oder radial). Zwischen beiden wird  $c$  der Kreis der kleinsten Zerstreuung liegen, ein unscharf begrenzter Fokalfleck. Je weniger schief der Strahl ist um so näher zusammen und um so kleiner werden  $v$ ,  $c$ ,  $h$  sein, während bei einem zur Achse parallelen Strahl alle drei zu einem Brennpunkte  $F$  verschmelzen. Diese drei Arten von Brennpunkten  $v$ ,  $c$ ,  $h$  liegen jeder auf einer eigenen gekrümmten Fläche. Eine bei  $F$  aufgestellte Mattscheibe wird kein scharfes Bild eines weit von der Achse entfernten leuchtenden Punktes geben. Wird die Mattscheibe nach vorn bis  $h$  geschoben, so erscheint das Bild eines leuchtenden Punktes als kurze horizontale Linie, während in einer hinter  $F$  liegenden Stellung der Mattscheibe eine kurze vertikale Linie als Bild erscheint.\*) Zwischen diesen beiden Stellungen der Mattscheibe wird es eine Lage kleinster Unschärfe geben, aber alle Bilder werden verschwommen sein. Keine Linse wird für ein weites Gesichtsfeld, wie bei einer Kamera, brauchbar sein, bei der diese Art Aberration nicht korrigiert ist.

Diese Bildfeldkrümmung und der Mangel an Schärfe am Rande des Bildfeldes kann man teilweise beseitigen indem man eine Blende vor der Linse etwa wie bei  $s$ , anbringt. Indem diese Blende der Linse genähert oder entfernt wird, kann man die Lage von  $c$  verändern. Liegt  $s$  weiter weg

---

\*) Einige Autoren bezeichnen diese Wirkung als „Astigmatismus“; zweckmäßiger ist der Ausdruck „radialer Astigmatismus“ da diese Erscheinung von dem Astigmatismus des Auges total verschieden ist. Wäre eine Linse mit Astigmatismus behaftet, so würden über der ganzen Bildfläche horizontale und vertikale Linien niemals gleichzeitig scharf einzustellen sein.



von der Linse, so liegt  $c$  etwas weiter weg auf der anderen Seite. Bringt man die Blende in die beste Lage, so wird das Bildfeld praktisch zu einer Ebene, in welcher der Hauptbrennpunkt  $F$  liegt.

Jetzt macht sich aber eine andere Aberration bemerkbar denn die Bilder auf der Mattscheibe erscheinen am Rande derselben verzerrt. Letzteres hängt auch mit der Lage der Blende zusammen. Eine vor einer Linse angebrachte Blende hat leicht die Wirkung, daß das Bild eines quadratischen Gegenstandes faßförmig erscheint, indem die Ecken nicht genügend vergrößert werden, während eine hinter der Linse angebrachte Blende das Bild leicht „nadelkissenförmig“ macht, da die Ecken zu stark im Verhältnis vergrößert werden.

Man beseitigt diesen Fehler nicht etwa, indem man Blenden an beiden Seiten der Linse anbringt, sondern indem man die Linse aus zwei getrennten Teilen (wovon jeder ein achromatisches Paar darstellt) konstruiert, und die Blende zwischen denselben aufstellt, wie bei allen modernen Weitwinkelkeralinsen.

## 63. Eintritts- und Austrittspupille.

Aus der Figur 52 geht hervor, daß, wenn die Blende symmetrisch zu zwei ähnlichen Linsen (auf derselben Achse) aufgestellt ist, jeder Strahl, welcher durch das Zentrum der Blende geht, die Linsen unter dem gleichen Winkel und an sich entsprechenden Punkten trifft; hieraus folgt, daß die jenseits der Außenflächen der Linsen gelegenen Teile der Strahlenbahn symmetrisch zur Achse gelagert und einander parallel sind. Ist nun jede Linse in bezug auf das Zentrum der Blende sphärisch korrigiert, so wird jeder Punkt des Gegenstandes einen Strahl durch das Zentrum der Blende senden welcher den Hauptstrahl oder Kern des durch die Blende durchgelassenen schiefen



Büschels bildet; die Folge hiervon ist daß Bild und Gegenstand geometrisch ähnlich sein müssen. Ein solcher Strahl ist als  $a b d e$  in Fig. 52 abgebildet. Die Verwendung der Zentralblende hat zu einem neuen von Professor Abbe in Jena formulierten Begriff geführt. Es ist einleuchtend, daß jede Linse ein virtuelles Bild der Blende erzeugen wird, welches beim Hindurchblicken durch jede der beiden Linsen vom

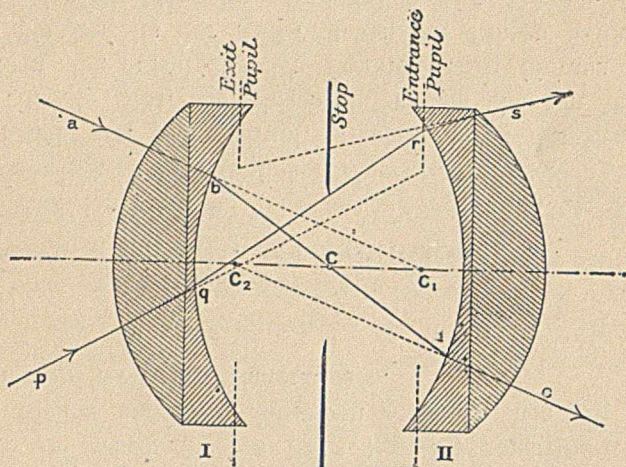


Fig. 52.

Auge gesehen wird. Sind die Lagen und Größen dieser Blendenbilder bekannt, so kann man durch eine einfache geometrische Konstruktion die Lage und Größe des Bildes eines gegebenen Gegenstandes vorausberechnen. Professor Abbe hat diesen Blendenbildern den Namen Eintritts- und Austrittspupille gegeben. In der Abbildung sind sie durch die punktierten Linien und ihre Zentren durch  $C_1$   $C_2$  dargestellt, wobei  $C_1$  das durch Linse I und  $C_2$  das durch Linse II hervorgerufene Bild der Blende  $C$  darstellen.

Ein durch das Zentrum der Blende gehender Strahl ist als  $a b d e$  bezeichnet; die äußeren Teile derselben  $a b$  und  $d e$  sind einander parallel und nach den Zentren  $C_1$  und  $C_2$  der Eintritts- und Austrittspupillen gerichtet. Durch



$p q r s$  wird ein den Rand der Blende streifender Strahl dargestellt; seine äußeren Teile sind nicht parallel jedoch nach sich entsprechenden Punkten an den Rändern der Eintritts- und Austrittspupillen  $C_1$  und  $C_2$  gerichtet. Sind die Einzellinsen I und II einander unähnlich, so werden die Eintritts- und Austrittspupillen weder gleich groß noch gleich entfernt von der wirklichen Blende sein, den Wert dieser Größen kann man aber variieren, indem man die Lage der Blende in bezug auf die Einzellinsen ändert.

## 64. Aberration durch die Öffnung bedingt.

Bei der Konstruktion von Fernrohren muß man einige Beziehungen zwischen Bildschärfe, Öffnung, Wellenlänge des Lichtes und der Figur der Linse berücksichtigen.

Nach Lord Rayleigh hängt die größte zulässige Längenaberration  $x$  mit der Wellenlänge  $\lambda$  und mit dem Winkel der halben Öffnung  $\alpha$  folgendermaßen zusammen:

$$x = \frac{\lambda}{\alpha^2}.$$

Aber für eine einzelne Linse gilt im günstigsten Falle die Beziehung

$$x = f \times \alpha^2$$

deshalb ist

$$\alpha^4 = \frac{\lambda}{f}$$

oder der Winkel der halben Öffnung sollte nicht den Wert

$$\alpha = \left(\frac{\lambda}{f}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

überschreiten.

Beispiel. Gesucht die beste Öffnung für ein Objektiv von 915 mm Brennweite. Nehmen wir die mittlere Wellenlänge des Lichtes als 0,0005 m an, dann erhalten wir mit Hilfe von Logarithmen für  $\alpha$  den Wert von  $0,02719 \times f$ , oder 24,9 mm. Bei größerer Öffnung



und der obigen Brennweite wird die Interferenz der Lichtwellen eine größere Unschärfe verursachen.

Die Ursache dieser Aberration ist die Interferenz der Lichtwellen, welche sich an demselben Teile des Bildes treffen, nachdem sie Bahnen verschiedener Länge durch verschiedene Zonen der Linse, zurückgelegt haben. Es würde hier zu weit führen, wollten wir auf dieses komplizierte Thema eingehen. Die Beugungs- oder Diffraktionserscheinungen, welche beim Mikroskopieren beobachtet werden, sind wesentlich auf die Diffraktion zurückzuführen.

**65. Lineare Vergrößerung von Linsen verschiedener Brennweiten als Vergrößerungsgläser benutzt, wenn der Abstand des Nahpunktes vom Auge 250 mm beträgt.**

Brennweite der Linse in mm	Entfernung der Linse vom Auge in Millimetern						
	12·5	25·0	50·0	75·5	100·0	125·0	150·0
6·25	39	37	33	29	25	21	17
12·5	20	19	17	15	13	11	9
25·0	10·5	10	9	8	7	6	5
50·0	5·75	5·5	5	4·5	4	3·5	3
75·0	4·167	4	3·67	3·33	3·00	2·67	2·33
100·0	3·375	3·25	3·00	2·75	2·5	2·25	2·0
125·0	2·9	2·80	2·60	2·40	2·20	2·00	1·80
150·0	2·58	2·50	2·33	2·167	2·00	1·833	1·67
200·0	2·19	2·125	2·00	1·875	1·75	1·625	1·50
250·0	1·95	1·90	1·80	1·70	1·60	1·50	1·40
300·0	1·79	1·75	1·66	1·583	1·50	1·42	1·33
375·0	1·63	1·6	1·53	1·47	1·40	1·33	1·27
500·0	1·475	1·45	1·40	1·35	1·30	1·25	1·20
600·0	1·396	1·375	1·33	1·29	1·25	1·21	1·17



Lineare Vergrößerung einer als Vergrößerungsglas  
benutzten Linse.

Diese Tabelle ist nach der Formel  $G = 1 + \frac{v}{f}$  berechnet,  
wo  $v$  die Entfernung der Linse vom virtuellen Bild,  $f$   
die Brennweite der Linse, und  $G$  die lineare Vergrößerung,  
d. h. das Verhältnis der wirklichen Größe des Bildes zu der  
des Gegenstandes, bedeutet. Ist  $p$  die Entfernung des  
Nahpunktes des deutlichen Sehens, und  $d$  die Entfernung  
der Linse vom Auge, so ist

$$v = p - d.$$

**65a.** Fall II. Abstand des Nahpunktes vom Auge = 300 mm.

Brennweite der Linse in mm	Entfernung der Linse vom Auge in Millimetern							
	12·5	25·0	50·0	75·0	100·0	125·0	150·0	175·0
6·25	47	45	41	37	33	29	25	21
12·5	24	23	21	19	17	15	13	11
25·0	12·5	12	11	10	9	8	7	6
50·0	6·75	6·5	6	5·5	5	4·50	4·0	3·5
75·0	4·83	4·67	4·33	4·00	3·67	3·33	3	2·67
100·0	3·875	3·75	3·50	3·25	3·00	2·75	2·5	2·25
125·0	3·30	3·20	3·00	2·80	2·60	2·4	2·2	2·00
150·0	2·92	2·83	2·66	2·50	2·33	2·167	2·0	1·83
200·0	2·44	2·375	2·25	2·125	2·00	1·875	1·75	1·625
250·0	2·15	2·10	2·00	1·90	1·80	1·70	1·60	1·50
300·0	1·96	1·917	1·83	1·75	1·67	1·583	1·50	1·42
375·0	1·77	1·73	1·67	1·60	1·53	1·46	1·39	1·32
500·0	1·575	1·55	1·50	1·45	1·40	1·35	1·30	1·25
600·0	1·48	1·46	1·42	1·375	1·33	1·29	1·25	1·21



## 66. Scheinbare Vergrößerung durch ein Vergrößerungsglas.

Durch den Umstand, daß das virtuelle Bild immer weiter vom Auge entfernt liegt (d. h. in der Entfernung des Nahpunktes  $p$  liegt) als der Gegenstand, ist die scheinbare Vergrößerung  $A$  immer kleiner als die lineare Vergrößerung  $G$ . Die vorhergehende Tabelle zeigt, daß  $G$  immer abnimmt, wenn die Entfernung  $d$  der Linse vom Auge zunimmt. Die scheinbare Vergrößerung aber wird (wie die einfachste Beobachtung mit einer Linse zeigt) verstärkt, wenn man die Linse vom Auge weg bewegt. Die größte scheinbare Vergrößerung findet dann statt, wenn  $d$  den Wert von  $\frac{1}{2} p$  hat, und in jener Lage nimmt die scheinbare Vergrößerung ihren Maximalwert von  $A = 1 + \frac{1}{4} \frac{p}{f}$  an. Für alle Entfernungen  $d$ , welcher größer oder kleiner als  $\frac{1}{2} p$  sind, hat die scheinbare Vergrößerung einen kleineren Wert. Die Werte von  $A$  in folgender Tabelle sind nach der Formel

$$A = 1 + \frac{d(p-d)}{fp}$$

berechnet.



**Scheinbare Vergrößerung durch ein Vergrößerungsglas.**  
**Fall I. Abstand des Nahpunktes vom Auge (p) = 250 mm.**

Brennweite in mm	Entfernung der Linse vom Auge in Millimetern						
	12·5	25·0	50·0	75·0	100·0	125·0	150·0
6·25	2·9	4·6	7·4	9·4	10·6	11·0	10·6
12·5	1·95	2·8	4·2	5·2	5·8	6·0	5·8
25·0	1·475	1·9	2·6	3·1	3·4	3·5	3·4
50·0	1·287	1·45	1·8	2·05	2·2	2·25	2·2
75·0	1·158	1·3	1·53	1·7	1·8	1·833	1·8
100·0	1·144	1·225	1·40	1·525	1·6	1·625	1·6
125·0	1·095	1·18	1·32	1·42	1·48	1·500	1·48
150·0	1·079	1·15	1·27	1·35	1·40	1·417	1·40
200·0	1·072	1·112	1·20	1·263	1·30	1·312	1·30
250·0	1·047	1·090	1·16	1·21	1·24	1·25	1·24
300·0	1·040	1·075	1·13	1·175	1·20	1·208	1·20
375·0	1·032	1·060	1·107	1·13	1·16	1·167	1·16
500·0	1·023	1·045	1·08	1·10	1·12	1·125	1·12
600·0	1·020	1·038	1·065	1·087	1·10	1·104	1·10

**66a.** **Scheinbare Vergrößerung durch ein Vergrößerungsglas.**  
**Fall II. Abstand des Nahpunktes vom Auge = 300 mm.**

Brennweite in mm	Entfernung der Linse vom Auge in Millimetern							
	12·5	25·0	50·0	75·0	100·0	125·0	150·0	175·0
6·25	2·883	4·7	7·6	10	11·67	12·7	13·0	12·7
12·5	1·942	2·85	4·33	5·5	6·67	6·85	7·0	6·85
25·0	1·471	1·925	2·67	3·25	3·67	3·925	4·0	3·925
50·0	1·235	1·4625	1·83	2·125	2·33	2·462	2·5	2·462
75·0	1·157	1·308	1·56	1·72	1·89	1·975	2·0	1·975
100·0	1·118	1·231	1·42	1·56	1·67	1·731	1·75	1·731
125·0	1·096	1·183	1·33	1·45	1·53	1·583	1·6	1·583
150·0	1·078	1·154	1·27	1·37	1·44	1·487	1·5	1·487
200·0	1·059	1·115	1·202	1·26	1·33	1·365	1·375	1·365
250·0	1·041	1·092	1·166	1·225	1·27	1·292	1·30	1·292
300·0	1·039	1·077	1·143	1·19	1·22	1·243	1·25	1·243
375·0	1·031	1·062	1·111	1·15	1·178	1·195	1·20	1·195
500·0	1·028	1·046	1·083	1·12	1·133	1·146	1·15	1·146
600·0	1·019	1·038	1·071	1·09	1·111	1·121	1·125	1·121



Tabelle der Dicken der zum Schleifen bestimmter Linsen nötigen Glasscheiben.  
(Dicken in Millimetern angegeben.)

Dioptrien	Radius in Milli- metern	Linsen-Durchmesser in Millimetern														
		10	15	20	25	30	40	50	75	100	125	150	200	300		
1	1000	—	—	—	—	0·113	0·20	0·31	0·70	1·25	1·96	2·92	5·01	11·32		
1·33	750	—	—	—	0·10	0·15	0·27	0·42	0·94	1·77	2·61	3·76	6·70	15·15		
1·5	666·7	—	—	—	0·11	0·17	0·30	0·47	1·06	1·88	2·97	4·23	7·54	16·10		
2	500	—	—	0·100	0·16	0·23	0·40	0·63	1·41	2·51	3·92	5·29	10·10	23·03		
2·5	400	—	—	0·126	0·185	0·28	0·50	0·86	1·76	3·14	4·91	7·09	12·70	29·19		
3	333·3	—	—	0·14	0·23	0·34	0·59	0·935	2·12	3·77	5·91	8·91	15·35	35·66		
4	250	—	0·112	0·20	0·31	0·45	0·80	1·25	2·83	5·05	7·94	11·52	20·87	50·00		
5	200	—	0·14	0·25	0·390	0·56	1·00	1·57	3·55	6·35	10·02	14·60	26·80	—		
6	166·7	—	0·17	0·29	0·47	0·67	1·20	1·88	4·30	7·65	12·16	17·83	33·33	—		
10	100	0·126	0·28	0·50	0·78	1·13	2·02	3·18	7·30	13·40	21·94	33·80	—	—		
20	50	0·251	0·57	1·01	1·59	2·30	4·17	6·70	16·94	—	—	—	—	—		
40	25	0·505	1·31	2·09	3·35	5·00	10·00	25·00	—	—	—	—	—	—		



Tabelle 67 gibt die Dicken an der Achse von Linsen von verschiedenen Durchmessern und Krümmungen an. Sie zeigt wie dick eine Glasscheibe sein muß, damit man aus ihr eine Plankonvexlinse schleifen kann. Ist die Stärke der Linse in Dioptrien angegeben, so muß man sie durch die Zahl  $(n - 1)$ , wo  $n$  der Brechungsindex der betreffenden Glassorte bedeutet, dividieren, um die Krümmung berechnen zu können; kennt man dann die Krümmung und den Durchmesser, so findet man in der Tabelle die Minimaldicke in der Reihe der betr. Krümmung unter dem betr. Durchmesser.

Beispiel I. Eine Plankonvexlinse von 40 mm Durchmesser soll in einen Ring gefaßt werden. Wie dick muß die Scheibe sein, aus welcher die Linse geschliffen werden soll, wenn der Krümmungsradius 100 mm beträgt?

In der Tabelle dem Radius 100 mm gegenüber und unter 40 mm Durchmesser finden wir 2,02 mm als kleinste Dicke angegeben. Da die Linse in einen Ring gefaßt werden soll, ist eine gewisse Dicke des Randes, etwa 1 mm, nötig, um die Linse zu tragen. Letzteres muß den 2,02 mm addiert werden, das Resultat ist dann 3,02 mm.

Beispiel II. Eine Bikonvexlinse soll in einen Ring von 50 mm Durchmesser gefaßt werden und die Krümmungsradien 200 mm bzw. 100 mm besitzen. Welche Dicke muß die zu wählende Scheibe haben?

Gegenüber 200 und unter 50 finden wir 1,57

„ 100 „ „ 50 „ „ 3,18.

Angenommen, eine Randstärke von 1,5 mm genügt, um die Linse fassen zu können, muß die Gesamtdicke derselben nach dem Schleifen  $1,57 + 3,18 + 1,5 = 6,25$  mm sein, und die zu verwendende Scheibe muß mindestens diese Dicke haben.

Wäre in diesem Fall die Dioptrienstärke der Linse angegeben, so müßte man jene Zahl, wie oben ausgeführt wurde, durch  $(n - 1)$  dividieren, um die Gesamtkrümmung der Linse zu berechnen; diese kann dann in die Summe von zwei Krümmungen zerlegt werden, falls eine bikonvexe Linse gewünscht wird, und die den beiden Krümmungen entsprechende Gesamtdicke kann wie oben gefunden werden.



**68.** Tabelle der Krümmungsradien der Flächen, welche gegebenen Plankonvexlinsen anzuschleifen sind, um ihnen die Stärke von 1 Dioptrie zu geben.

Gegeben eine Plankonvexlinse; es soll ihrer Brennweite ein anderer beliebiger Wert erteilt werden, indem man der Planfläche eine andere Krümmung anschleift.

Es sei  $r$  der Krümmungsradius der Konvexfläche, dann ist  $x$  der gesuchte Radius für die andere Fläche nach der Formel

$$x = \frac{r f (n-1)}{r - f(n-1)}$$

zu berechnen, bei welcher  $f$  die gewünschte Brennweite bedeutet.

Wird eine 1-Dioptrielinse verlangt, so ist  $f = 1000$ . Folgende Tabelle ist für drei Glassorten nach obiger Formel berechnet. Alle Werte sind in Millimetern angegeben.

	$n = 1.5$	$n = 1.51$	$n = 1.52$
$r$	$x$	$x$	$x$
$\infty$	500	510	520
2000	666.6	684.5	702.7
1040	963.0	1000.8	1040
1020	980.7	1020	1060.8
1000	1000	1040.8	1083.3
800	1333.3	1406.8	1485
750	1500	1593.7	1695
700	1750	1879	2022
650	2166.6	2368	2600
600	3000	3400	3900
550	5500	7012.5	9533
500	$\infty$	-25500	-13000
450	-4500	-3825	-3342
400	-2000	-1854	-1733
350	-1166.6	-1116	-1071
300	-750	-728.6	-709.1
250	-500	-490.4	-481.5
200	-333.3	-329.0	-325
+150	-214.3	-212.5	-210.8
+100	-125	-124.3	-123.8
-100	+83.3	+83.6	+83.87
-150	+115.33	+115.9	+116.4
-200	+142.85	+143.6	+144.4



		Auge eingestellt für die			
		Ferne		Nähe	
Brechungsindex der Hornhaut	· · · · ·	(1.3507)		(1.3507)	
"  der wässrigen Feuchtigkeit	· · · · ·	1.3365		1.3365	
"  der Glasfeuchtigkeit	· · · · ·	1.3365		1.3365	
"  der Kristalllinse	· · · · ·	1.4371		1.4371	
Krümmungsradius der vorderen Fläche der Hornhaut	· · · · ·	mm	engl. Zoll	mm	engl. Zoll
"  "  hintere	der Kristalllinse	7.8	0.307	7.8	0.307
"  "  hintere	"	10.0	0.394	6.0	0.236
Entfernung der vorderen Linsenfläche vom Scheitel der Hornhaut	· · · · ·	6.0	0.236	5.5	0.217
"  "  hintere	"	3.6	0.142	3.2	0.126
Vordere Brennweite der Hornhaut	· · · · ·	7.2	0.284	7.2	0.284
Hintere	"	23.3	0.917	23.3	0.917
Brennweite der Linse	· · · · ·	31.1	1.224	31.1	1.224
Entfernung des vorderen Hauptpunktes der Linse von ihrer vorderen Fläche	· · · · ·	50.6	1.992	39.1	1.539
"  "  hintere	"	2.1	0.0827	2.0	0.0787
Entfernung des vorderen Hauptpunktes der Linse von dem Scheitel der Hornhaut	· · · · ·	— 1.3	— 0.0512	— 1.8	— 0.0709
"  "  hintere	"	0.2	0.00787	0.2	0.00787
Hinterer Brennweite des Auges	· · · · ·	20.7	0.815	18.7	0.736
Vordere	"	15.5	0.610	14.0	0.551
Entfernung des ersten Hauptpunktes von dem Scheitel der Hornhaut	· · · · ·	1.75	0.0689	1.9	0.0748
"  "  zweiten	"	2.1	0.0827	2.3	0.0905
"  "  ersten Knotenpunktes	"	7.0	0.276	6.6	0.260
"  "  zweiten	"	7.3	0.288	7.0	0.276
"  "  des vorderen Brennpunktes	"	— 13.7	— 0.539	— 12.1	— 0.476
"  "  hinteren	"	22.8	0.898	21.0	0.827
Entfernung des Hauptbrennpunktes eines Auges nach Wegnahme der Linse		Millimeter		engl. Zoll	
		— 63.5		2.500	
		— 73.9*		2.909*	

\*) Gemessen von Dr. Tschering.



70.

Tabelle des Umfanges der Accomodation  
(nach Landolt).

Alter in Jahren	Umfang (Dioptrien)	Entfernung des Nahpunktes	
		Millimeter	engl. Zoll
10	14	70	2 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>
15	12	80	3 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>
20	10	100	4
25	8·5	117	4 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
30	7·0	140	5 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
35	5·5	180	7 <sup>1</sup> / <sub>8</sub>
40	4·5	220	8 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>
45	3·5	285	11 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>
50	2·5	395	15 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>
55	1·75	560	22 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
60	1·0	985	39 <sup>3</sup> / <sub>8</sub>
65	0·75	—	—
70	0·0	—	—

71. Brillen, welche wegen Presbyopie bei verschiedenen Altern  
nötig sind für Augen, welche in der Jugend  
normal waren.

Alter in Jahren	Stärke (Dioptrien)	Brennweite	
		Millimeter	engl. Zoll
45	1	1000	39·37
50	2	500	19·68
55	3	333·3	13·12
60	4	250	9·84
65	4·5	222·2	8·75
70	5·5	181·8	7·16
75	6	166·7	6·56
80	7	142·9	5·62



Substanz	Brechungsindex der D-Linie	Substanz	Brechungsindex der D-Linie
Phosphor . . . . .	1.950	Oliveneil . . . . .	1.470
Schwefel in Schwefelkohlenstoff gelöst . . . . .	1.750	Glycerin 1 TL. + Wasser 1 TL. . . . .	1.397
Kaliumquecksilberjodid . . . . .	1.717	Glycerin 1 TL. + Wasser 1 TL. + Alkohol 1 TL. . . . .	1.394
Monobromnaphthalin . . . . .	1.658	Zuckerlösung 30 % (wässrig) . . . . .	1.376
Tolubalsam . . . . .	1.640	Kaliumacetatlösung (wässer. konz.) . . . . .	1.370
Styrax . . . . .	1.630	Absoluter Alkohol . . . . .	1.367
Zimmtöl . . . . .	1.619	Alkohol 40 % . . . . .	1.356
Kassiaöl . . . . .	1.607	Eiweiß . . . . .	1.350
Anisol . . . . .	1.557	Zuckerlösung 10 % (wässrig) . . . . .	1.347
Kanadabalsam (Mittel) . . . . .	1.535	Kochsalzlösung 8,5 % (wässrig) . . . . .	1.347
Nelkenöl . . . . .	1.533	Meerwasser . . . . .	1.343
Zedernholzöl (gehärtet) . . . . .	1.520	Zuckerlösung 5 % (wässrig) . . . . .	1.341
Zedernholzöl . . . . .	1.510	Destilliertes Wasser . . . . .	1.336
Ricinusöl . . . . .	1.490	Luft . . . . .	1.000
Glycerin (konzentriert) . . . . .	1.473		



**73.** Tubuslänge von Mikroskopen, Länge in Millimetern, und Teile, welche von verschiedenen Optikern zur Tubuslänge gerechnet werden. (Davis).

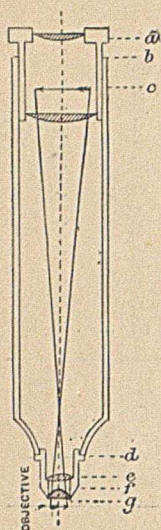


Fig. 53.

Zur Tubuslänge gerechnete Teile. Siehe Figur 53.	Verschiedene Optiker	Tubuslänge in Millimetern
a-d	Grunow, New York . . .	203
	E. Leitz, Wetzlar . . .	170
	Nachet & Fils, Paris . . .	146 oder 200
	Powell & Lealand, London . . .	254
	C. Reichert, Vienna . . .	160—180
	Spencer Lens Co., Buffalo . . .	235 oder 160
	W. Wales, New York . . .	254
b-d	Bausch & Lomb Optical Co., Rochester, N. Y. . . . .	216 oder 160
	Bézu Haïesser & Cie., Paris . . .	220
	Klönne & Müller, Berlin . . .	160—180 oder 254
	W. & H. Siebert, Wetzlar . . .	190
	Swift & Sohn, London . . .	165—228·5
	C. Zeiß, Jena . . . . .	160—250
	a-g	Grundlach Optical Co., Rochester, N. Y. . . . .
R. Winkel, Göttingen . . .		220
Roß & Co., London . . . . .		254
R. & J. Beck, London . . . . .		254
J. Green, Brooklyn, N. Y. . . . .		254
Hartnack, Potsdam . . . . .		160—180
Vérick, Paris . . . . .		160—200
Watson & Sons, London . . . . .	160—250	



(Aus Davis "Practical Microscopy".)

Okulare	Brennweite der Objektive															
	101,6 mm	76,2 mm	50,8 mm	25,4 mm	19,05 mm	12,7 mm	10,16 mm	6,35 mm	5,08 mm	4,23 mm	3,18 mm	2,54 mm	2,12 mm	1,59 mm		
50,8 mm (A) . . .	12	18	25	46	50	92	130	210	275	325	400	550	650	800		
38,1 mm (B) . . .	15	23	30	54	70	110	160	250	325	390	490	650	775	980		
25,4 mm (C) . . .	23	30	45	80	90	165	240	375	485	580	750	970	1160	1500		
19,05 mm (D) . . .	30	45	60	108	140	220	320	500	650	780	980	1300	1550	1960		

### Das Normalschraubengewinde der Royal Microscopical Society.

Vorgeschrieben ist das Whitworthgewinde, dessen Wulst V-förmig ist, wobei die beiden Flächen des Wulstes den Winkel von 55° einschließen, ein Sechstel der Wulsthöhe am oberen Teil des Wulstes und ein Sechstel am unteren Teil abgerundet sind. Die Ganghöhe beträgt 0,706 mm (36 Gänge = 1 engl. Zoll); die Länge des Gewindes am Objektiv 3,2 mm; gewindeloser Teil oberhalb des Gewindes am Objektiv 3,8 mm lang, ungefähr so lang wie der untere Teil des Gewindes; die Länge des Gewindes am unteren Teil des Tubus mindestens 3,2 mm; der Durchmesser am unteren Ende des Gewindes am Objektiv 19,4 mm; der Durchmesser des Gewindes am unteren Teil des Tubus 20,3 mm.

Vgl. auch Trans. Roy. Soc. 1857 S. 39—41; 1859 S. 92—97; 1860 S. 103—104; oder Jour. Roy. Micr. Soc. 1896, August. Letztere Abhandlung enthält eine sehr genaue und vollständige Beschreibung der späteren Schraube, welche mit der Originalschraube fast identisch ist.



## 75.

## Numerische Apertur.

Ein sehr wichtiger Umstand, bei der Leistungsfähigkeit eines Objectives, ist die Lichtmenge, welche es von jedem Punkt des betrachteten Gegenstandes empfängt. Diese Lichtmenge hängt von dem Winkel ab, unter welchem die Apertur von dem gegebenen Punkte aus erscheint; bei Trockenobjectiven ist nur dieser Umstand maßgebend. Seit der Einführung von Öl- und Homogen-Immersionsobjectiven ist es nötig gewesen, auch den Brechungsindex des Mediums zwischen der äußersten Objectivlinse und dem Deckglas zu berücksichtigen, denn von jenem Wert hängt die von einem gegebenen Objective empfangene Lichtmenge ab.

Um Vergleiche zwischen Trocken- und Immersionsobjectiven anstellen zu können, hat Professor Abbe eine neue Messungsmethode angegeben, welche die Lichtempfangsfähigkeit der Objective als „numerische Apertur“ ausdrückt.

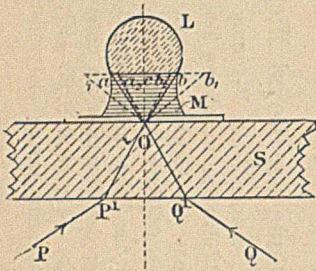


Fig. 54.

Die numerische Apertur eines Objectives kann man als den Sinus des halben Winkels eines ohne Immersion dasselbe

leistenden Objectives ansehen. Oder ist es gleich dem Sinus der halben Winkelöffnung multipliziert mit dem Brechungsindex des angewandten Immersionsmediums? Dieses läßt sich wie folgt beweisen. Siehe Fig. 54. L sei die unterste Linse eines Objectives, S der Objectivträger und Deckglas, M das Immersionsmedium, P P¹ O Q¹ Q ein Strahlenbündel, welcher von dem Kondenser zum beobachteten Punkte O auf der optischen Achse konvergiert und welcher an der unteren Fläche des Objektträgers gebrochen wird wie die Figur zeigt. Wir haben den Brechungsindex des Immersionsmediums und die Konvergenz des Strahlenbündels so gewählt, daß der Bündel nach



der Brechung in M die Öffnung der Linse gerade ausfüllt, Hätte M denselben Brechungsindex wie das Glas, so wären die Strahlen ungebrochen weitergegangen, und der Bündel würde sich über die durch  $a_2 b_2$  dargestellte Fläche ausgebreitet haben, wäre dagegen das Medium durch Luft ersetzt, so würden die Strahlen nach außen gebrochen und über die Fläche  $a_1 b_1$  ausgebreitet sein, im letzteren Falle unter großem Lichtverlust. Damit ein Trockenobjektiv dieselbe Lichtmenge wie in der Figur empfangen könnte, müßte sein Halbmesser  $coa_1$  statt  $coa$  sein.

Nun sind  $ob_1$  und  $oa_1$  parallel zu  $PP^1$  resp.  $QQ^1$  und nach dem Brechungsgesetz ist es klar, daß  $\frac{\sin coa_1}{\sin coa} = n_m$ , dem Brechungsindex des Mediums, oder mit anderen Worten der Sinus des halben Öffnungswinkels des gleichwertigen Trockenobjektivs ist gleich dem Sinus des wirklichen halben Öffnungswinkels multipliziert mit dem Brechungsindex des Immersionsmediums (welcher für Luft 1 beträgt).

Von der numerischen Apertur hängen auch die Auflösungskraft, die Bildtiefe und die Beleuchtungsstärke eines Objektivs ab.

Die Auflösungskraft eines Objektivs ist sein Vermögen, Einzelheiten eines Gegenstandes klar hervortreten zu lassen. Unter gleichen Bedingungen ist sie der numerischen Apertur direkt proportional.

Die Bildtiefe eines Objektivs, d. h. sein Vermögen, mehr wie eine Ebene des Gegenstandes auf einmal scharf abzubilden, ist der numerischen Apertur umgekehrt proportional.

Die Beleuchtungsstärke ist dem Quadrat der numerischen Apertur proportional.



Tabelle der numerischen Apertur.

Objektiv	Öffnungswinkel $2\alpha$	Brechungsindex des Immersion-Mediums $n$	Sinus des halben Öffnungswinkels $\sin \alpha$	Numerische Apertur $n \sin \alpha$
25,4 mm trocken	$20^\circ$	1	0·1736	0·1736
25,4 „ „	$40^\circ$	1	0·3420	0·3420
12,7 „ „	$42^\circ$	1	0·3583	0·3583
38,1 „ „	$100^\circ$	1	0·7660	0·7660
6,4 „ „	$75^\circ$	1	0·6087	0·6087
6,4 „ „	$136^\circ$	1	0·9272	0·9272
3,2 „ „	$115^\circ$	1	0·8434	0·8434
3,2 „ „	$163^\circ$	1	0·9890	0·9890
2,1 „ Wasser- Immersion	$96^\circ 12'$	1·33	0·7443	0·9899
2,1 „ } Homo- } geno	$110^\circ 38'$	1·52	0·8223	1·2500
2,1 „ } Immersion	$134^\circ 10'$	1·52	0·9210	1·4000

77. Tabelle der Tiefe der Bildscharfe oder größter Entfernung zweier Ebenen, welche bei verschiedenen Vergrößerungen zu gleicher Zeit scharf eingestellt sind (Abbe).

Vergrößerung bei numerischer Apertur $= 0,5$	$a$ Durchmesser des Feldes mm	$b$ Akkomoda- tions-Tiefe mm	$c$ Fokal-Tiefe mm	$d$ Tiefe des Gesichts- feldes mm	Verhältnis $a:d$
10	25·0	2·08	0·073	2·153	11·6 zu 1
30	8·3	0·23	0·024	0·254	32·7 „ 1
100	2·5	0·02	0·0073	0·0273	91·6 „ 1
300	0·83	0·0023	0·0024	0·0047	176·6 „ 1
1000	0·25	0·00021	0·00073	0·00094	266 „ 1
3000	0·083	0·00002	0·00024	0·00026	319 „ 1



Numerische Apertur $NA = n \sin \alpha$	Öffnungswinkel ( $2\alpha$ )			Theoretische Grenze des Auflösungsvermögens			
	Trocken $n = 1$	Wasser-Immersion $n = 1,33$	Homogene Immersion $n = 1,52$	bei direkter Beleuchtung		bei schiefer Beleuchtung	
				Entfernung zweier Linien in Mikron	Anzahl der Linien sichtbar in 10 Mikron	Entfernung zweier Linien in Mikron	Anzahl der Linien sichtbar in 10 Mikron
0·15	17°	—	—	1·70	6	—	—
0·20	23°	—	—	1·40	7	—	—
0·25	29°	—	—	1·00	10	—	—
0·30	35°	—	—	0·90	11	—	—
0·35	41°	—	—	0·80	12	—	—
0·40	47°	—	—	0·74	13	0·68	14
0·45	53°	—	—	0·70	14	0·60	16
0·50	60°	—	—	0·65	15	0·55	18
0·55	66°	—	—	0·60	16	0·50	20
0·60	74°	—	—	0·58	17	0·45	22
0·65	82°	—	—	0·55	18	0·42	24
0·70	90°	—	—	0·53	19	0·39	25
0·75	97°	—	—	0·50	20	0·36	28
0·80	106°	—	—	0·48	21	0·34	29
0·85	116°	—	—	0·46	22	0·32	30
0·90	128°	85°	—	0·44	23	0·30	33
0·95	144°	91°	—	0·42	24	0·29	34
1·00	180°	97°	82°	0·41	25	0·27	36
1·05	—	104°	86°	0·39	26	0·26	38
1·10	—	112°	92°	0·38	27	0·25	40
1·15	—	119°	98°	0·36	28	0·24	41
1·20	—	128°	104°	0·35	28	0·23	43
1·25	—	140°	113°	0·34	29	0·22	45
1·30	—	156°	120°	0·335	30	0·21	47
1·35	—	—	128°	0·32	31	0·20	50
1·40	—	—	138°	0·315	31—32	0·195	51
1·45	—	—	145°	0·30	33	0·19	52

Diese Tabelle ist unter der Annahme berechnet, daß die mittlere Wellenlänge weißen Lichtes 550 Mikromillimeter beträgt (siehe Tabelle 16) und der Wert von  $\alpha = n \sin W = 0,342$  ist, wo  $n$  der Brechungsindex und  $W$  die Neigung des eintretenden Lichtes zur optischen Achse bedeutet. Aus der Gleichung  $\alpha = \frac{\lambda}{e} - \alpha$  kann man die kleinste numerische Apertur  $a$  berechnen bei welcher ein System von parallelen Linien in einem gegebenen Abstand voneinander sichtbar wird.

NB. Ein Mikron ist ein Milliontelmillimeter.



**79.** Penetrationsvermögen und Tiefe der Bildschärfe, d. h. Abstand der Grenzebenen voneinander, welche, bei Benutzung verschiedener Objektive und eines A-Okulars, zu gleicher Zeit scharf eingestellt sind.

Objektiv- brennweite in mm	Luftwinkel oder Öffnungs- winkel $2\alpha^\circ$	N. A. Numerische Apertur $= n \sin \alpha$	Pene- trations- vermögen $\frac{1}{\text{N. A.}}$	Tiefe der Bildschärfe in $\mu\mu$	Tiefe der Akkomo- dation in $\mu\mu$	Gesamtiefe der Bildschärfe in $\mu\mu$
101·6	8°	·07	14·30	522	2080	2602
101·6	16°	·14	7·19	262	2080	2342
38·1	16°	·14	7·19	86	230	316
38·1	20°	·17	5·75	69	230	299
38·1	24°	·21	4·81	57	230	287
12·7	40°	·34	2·92	10·6	20	30·6
12·7	70°	·57	1·74	6·3	20	26·3
12·7	110°	·82	1·22	4·4	20	24·4
4·23	74°	·60	1·66	1·99	2·3	4·29
4·23	110°	·76	1·31	1·57	2·3	3·87
4·23	—	1·20	·83	0·99	2·3	3·29
2·12	110°	·83	1·20	0·72	0·58	1·30
2·12	144°	·97	1·02	0·61	0·58	1·19
2·12	—	1·10	·91	0·54	0·58	1·12
1·27	160°	·98	1·02	0·37	0·21	0·58
1·27	—	1·10	·91	0·33	0·21	0·54

**80.** Tiefenschärfe.

Eine Photographie wird im allgemeinen als scharf angesehen, wenn die Bilder der verschiedenen Punkte des Gegenstandes in dem Abstand des deutlichen Sehens, etwa 25 cm vom Auge, unter einem Winkel von höchstens einer Bogenminute erscheinen. Unter diesen Umständen sind die wirklichen Durchmesser der Punktbilder auf der photographischen Platte kleiner wie 0,1 mm. In Fig. 55 sei P O Q ein von einem Punkt ausgehender Strahlenbündel welcher nach dem Durchgang durch eine Linse in O konvergent wird, und seien B C A D die Querschnitte des



Bündels mit einem Durchmesser von 0,1 mm; nach dem bisher Gesagten wird die Platte, welche irgendwo zwischen A und B aufgestellt wird, ein scharfes Bild des Punktes

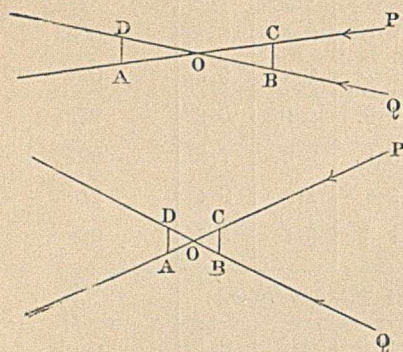


Fig. 55.

erhalten. Die Entfernung A B nennt man die „Tiefenschärfe“. Es ist aus der Figur ersichtlich, daß die Tiefenschärfe um so kleiner ist, je größer die Apertur ist d. h. je größer der von dem Strahlenkegel eingeschlossene Winkel ist.

Folgende Tabellen geben die Entfernungen an, jenseits welcher alle Gegenstände scharf abgebildet werden infolge der Tiefenschärfe, wenn die Linse auf Unendlichkeit eingestellt ist.

**Minimumentfernungen der Kamera, unter welchen bei gegebenen Blendenverhältnissen scharfe Bilder entstehen**  
(nach Mietho).

Blende	Brennweite										
	50 mm	75 mm	100 mm	125 mm	150 mm	175 mm	200 mm	250 mm	300 mm	350 mm	400 mm
f/5	2·5	5·6	10·0	15·5	22·5	30·7	40·0	62·0	90·0	122·0	160·0
f/10	1·3	2·8	5·0	8·0	11·0	15·0	20·0	31·0	45·0	61·0	80·0
f/15	0·8	1·9	3·3	5·1	8·0	10·0	13·0	21·0	30·0	41·0	53·0
f/20	0·7	1·4	2·5	4·0	5·5	7·5	10·0	15·0	22·0	31·0	40·0
f/25	0·5	1·1	2·0	3·0	4·5	6·0	8·0	12·0	18·0	24·0	32·0
f/30	0·4	0·9	1·6	2·5	4·0	5·0	6·5	10·0	15·0	20·0	26·0
f/40	0·3	0·7	1·2	2·0	2·5	3·5	5·0	7·5	11·0	15·5	20·0
f/50	0·2	0·6	1·0	1·5	2·5	3·0	4·0	6·0	9·0	12·0	16·0

Diese Tabelle gibt die Entfernungen in Metern an, bei welchen die Tiefenaberration, bei gegebener Blende, für Linsen verschiedener Brennweite aufgehoben wird. Sie ist unter der Annahme berechnet, daß ein Bild als scharf anzusehen ist, wenn die Abbildung eines Punktes des Gegenstandes nicht mehr wie 0,1 mm Durchmesser hat.



## 81.

Tabelle der Größe der Diffraktions Scheibe  
(nach Miethe).

Lineare Öffnung mm	Diffraktions scheiben- Verhältnis	Lineare Öffnung mm	Diffraktions scheiben- Verhältnis
100	0·0000139	5	0·0002788
50	0·0000280	4	0·0003482
20	0·0000697	3	0·0004645
10	0·0001390	2	0·0006968
8	0·0001742	1	0·0013931
6	0·0002323		

In der ersten Kolonne sind die Werte des Durchmessers der Objektivöffnung angegeben. Die Zahlen in der zweiten Kolonne geben das Verhältnis zwischen Größe der Diffraktions scheibe und Brennweite der Linse an (siehe Tabelle 57, Aberration durch Öffnung bedingt).

## 82. Entfernung der Projektionslaterne vom Schirm, welche einer bestimmten Bildgröße entspricht.

Brennweite der Linse mm	Durchmesser des Schirmes in Metern						
	1·8	2·7	3·6	4·5	6·0	7·2	9·0
	Entfernung von Laterne zum Schirm in Metern						
50	1·2	1·8	2·4	3·0	4·0	4·8	6·0
75	1·8	2·7	3·6	4·5	6·0	7·2	9·0
100	2·4	3·6	4·8	6·0	7·8	9·6	12·0
125	3·0	4·5	6·0	7·5	10·0	12·0	15·0
150	3·6	5·4	7·2	9·0	12·0	14·4	18·0
200	4·8	7·2	9·6	12·0	16·0	19·2	24·0
225	5·4	8·1	10·8	13·5	18·0	22·6	27·0
300	7·2	10·8	14·4	18·0	24·0	28·8	36·0



Verhältnis der Größen von Bild und Gegenstand	Wirkliche Größe des Bildes eines Mannes mm	Wirkliche Größe des Bildes des Kopfes mm	Verhältnis der Größen von Bild und Gegenstand	Wirkliche Größe des Bildes eines Mannes mm	Wirkliche Größe des Bildes des Kopfes mm
$\frac{1}{1}$	1750	210	$\frac{1}{35}$	50	6
$\frac{1}{2}$	875	105	$\frac{1}{40}$	44	5·25
$\frac{1}{3}$	583	70	$\frac{1}{45}$	39	4·75
$\frac{1}{4}$	437	52	$\frac{1}{50}$	35	4·25
$\frac{1}{5}$	350	42	$\frac{1}{60}$	29	3·5
$\frac{1}{6}$	292	35	$\frac{1}{70}$	25	3
$\frac{1}{7}$	250	30	$\frac{1}{80}$	22	2·5
$\frac{1}{8}$	219	26	$\frac{1}{90}$	19	2·33
$\frac{1}{9}$	194	23	$\frac{1}{100}$	18	2·2
$\frac{1}{10}$	175	21	$\frac{1}{120}$	15	1·75
$\frac{1}{15}$	117	14	$\frac{1}{140}$	13	1·5
$\frac{1}{20}$	88	11	$\frac{1}{160}$	11	1·33
$\frac{1}{25}$	70	8	$\frac{1}{180}$	10	1·2
$\frac{1}{30}$	58	7	$\frac{1}{200}$	9	1



### Vergrößerungs- und Verkleinerungstabelle (Fortsetzung).

Brennweite		Größenverhältnis vom Bild zum Objekt																									
		1/4	1/6	1/8	1/4	1/6	1/8	1/6	1/8	1/6	1/8	1/6	1/8	1/6	1/8	1/6	1/8	1/6	1/8	1/6	1/8						
Abstände von Objekt und Bild von der Linse																											
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	128	168	208	248	328	408	488	568	648	728	808	968	1128	1288	1448	1608	
16	12	10·7	10	9·6	9·6	9·3	9·1	9	8·8	8·8	8·5	8·4	8·3	8·3	8·2	8·2	8·1	8·1	8·1	8·1	8·1	8·1	8·1	8·1	8·1	8·0	8·0
18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	144	189	234	279	369	459	549	639	729	819	909	1089	1269	1449	1639	1809		
18	13·5	12	11·2	10·8	10·5	10·3	10·1	9·9	9·9	9·6	9·5	9·5	9·3	9·3	9·2	9·2	9·2	9·1	9·1	9·1	9·1	9·1	9·1	9·1	9·1	9·0	
9	30	40	50	60	70	80	90	100	110	160	210	260	310	410	510	610	710	810	910	1010	1210	1410	1610	1810	2010		
10	20	15	13·3	12·5	12	11·7	11·4	11·3	11	11	10·7	10·5	10·4	10·3	10·3	10·2	10·2	10·1	10·1	10·1	10·1	10·1	10·1	10·1	10·1	10·1	
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	182	192	232	312	372	492	612	732	852	972	1092	1212	1452	1692	1932	2172	2412	
14	24	18	16	15	14·4	14	13·7	13·5	13·3	13·2	12·8	12·6	12·5	12·4	12·3	12·2	12·2	12·2	12·2	12·1	12·1	12·1	12·1	12·1	12·1	12·1	
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	224	294	364	434	574	714	854	994	1134	1274	1414	1694	1974	2254	2534	2812	
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	256	336	416	496	656	816	976	1136	1296	1456	1616	1936	2256	2576	2896	3216	
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	288	378	468	558	738	918	1098	1278	1458	1638	1818	2178	2538	2898	3258	3618	
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	320	420	520	620	820	1020	1220	1420	1620	1820	2020	2420	2820	3220	3620	4020	
40	40	30	26·7	25	24	23·3	22·9	22·5	22·2	22	21·3	21	20·8	20·7	20·5	20·4	20·3	20·3	20·3	20·2	20·2	20·2	20·2	20·1	20·1	20·1	20·1
50	50	37·5	33·3	31·3	30	29·2	28·6	28·1	27·8	27·5	26·7	26·3	26	25·8	25·6	25·4	25·4	25·4	25·3	25·3	25·3	25·3	25·2	25·2	25·1	25·1	25·1
60	60	50	45	43	42	41	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
30	60	46	40	37·5	36	35	34·3	33·8	33·3	33	32	31·5	31·2	31	30·8	30·6	30·6	30·4	30·4	30·4	30·3	30·3	30·3	30·2	30·2	30·2	30·2

Unter dem Größenverhältnis 1/4 und gegenüber der Brennweite 8 cm in der Tabelle finden wir, daß das Objekt 40 cm vor, und das Bild 10 cm hinter der Linse sein müssen. Wenn wir aber mit derselben Linse eine vierfache Vergrößerung erhalten wollen, so müssen wir die beiden Zahlen vertauschen; das Bild wird dann 40 cm hinter, und das Objekt 10 cm vor der Linse sein.



Man dividiere die Länge der Platte durch die Äquivalentbrennweite der Linse.

85.

Tabelle der Bildfeldwinkel für Kameras  
(nach Woodman).

Quotient	Bildfeldwinkel	Quotient	Bildfeldwinkel	Quotient	Bildfeldwinkel
·282	16°	·748	41°	1·3	66°
·3	17°	·768	42°	1·32	67°
·317	18°	·788	43°	1·36	68°
·335	19°	·808	44°	1·375	69°
·353	20°	·828	45°	1·4	70°
·37	21°	·849	46°	1·427	71°
·389	22°	·87	47°	1·45	72°
·407	23°	·89	48°	1·48	73°
·425	24°	·911	49°	1·5	74°
·443	25°	·933	50°	1·53	75°
·462	26°	·954	51°	1·56	76°
·48	27°	·975	52°	1·59	77°
·5	28°	1·0	53°	1·62	78°
·517	29°	1·02	54°	1·649	79°
·536	30°	1·041	55°	1·678	80°
·555	31°	1·063	56°	1·7	81°
·573	32°	1·086	57°	1·739	82°
·592	33°	1·108	58°	1·769	83°
·611	34°	1·132	59°	1·8	84°
·631	35°	1·155	60°	1·833	85°
·65	36°	1·178	61°	1·865	86°
·67	37°	1·2	62°	1·898	87°
·689	38°	1·225	63°	1·931	88°
·708	39°	1·25	64°	1·965	89°
·728	40°	1·274	65°	2·0	90°

Beispiel. Wie groß ist der Bildfeldwinkel einer  $18 \times 24$  cm Platte bei einem Objektiv von 25 cm Brennweite? Der Quotient  $24:25 = 0,96$ , der Winkel liegt also zwischen  $51^\circ$  und  $52^\circ$ .



**86.** Tabelle der Empfindlichkeit des normalen Auges gegen das Licht von verschiedenen Teilen des Spektrums (nach Abney zusammengestellt).

Fraunhofer-Linie und Farbe	$\lambda$ (siehe Tabelle 16)	Außerhalb des gelben Flecks	Am gelben Fleck	An der Fovea Centralis
Rein Rot <i>B</i> . . . . .	68·67	1·5	3	3
Orangerot <i>C</i> . . . . .	65·63	10·5	17·6	20·6
Orange, Mitte . . . . .	62·42	35	65	77
Rein Gelb <i>D</i> . . . . .	58·96	71·0	99	100
Gelb, Mitte . . . . .	58·50	79	100	98
Primelgelb . . . . .	57·20	85	97	90
Grün, Mitte . . . . .	54·81	72·5	75	66
Grün <i>E</i> . . . . .	52·70	52	50	40
Pfaublau . . . . .	50·43	33·5	24	18
Blau <i>F</i> . . . . .	48·61	17·5	6·3	4·7
Tiefblau <i>G</i> . . . . .	43·08	2·0	0·50	0
Violett <i>H</i> . . . . .	41·018	0·5	0·14	0

**87.** Relative Empfindungen des Auges für gleiche Energiemengen in verschiedenen Teilen des Spektrums (nach Palaz).

Farbe	$\lambda$ (siehe Tabelle 16)	Relative Licht-Empfindung
Tiefrot . . . . .	75	1
Rot . . . . .	65	1 200
Orange . . . . .	60	14 000
Gelb . . . . .	58	28 000
Grün . . . . .	53	100 000
Blau . . . . .	47	62 000
Violett . . . . .	40	1 600



## 88.

## Photometrische Einheiten.

Die Dezimalkerze ist  $\frac{1}{20}$  der Violleinheit, oder = 0,925 britische Kerzen oder = 0,945 Hefnereinheit. Die Einheit der Helligkeit einer Fläche ist die durch eine Dezimalkerze in einem Abstand von einem Meter an jener Fläche erzeugte Helligkeit. Britische Ingenieure benutzen häufig als Einheit die Helligkeit einer Kerze in einem Abstand von einem engl. Fuß. Der Genfer Kongreß von 1896 hat aber erstere Einheit nebst folgenden angenommen.

Ausdrückende Größe	Name der entsprechenden Einheit
Absolute Lichtstärke } Absolute Helligkeit } . . . . Kerzenstärke }	Dezimalkerze.
Flächenhelligkeit . . . . .	1 Lux = 1 Dezimalkerze in 1 m Abstand.
Lichtmenge } Gesamtlicht in einem Büschel }	{ 1 Lumen = die von einer Dezimalkerze in einem Zentriwinkel der Größe Einheit ausgestrahlte Lichtmenge. Die gesamte Lichtmenge ist daher = $4\pi$ Lumina. Ein Lumen über einen Quadratmeter verteilt gibt die Helligkeit von 1 Lux.
Leuchtkraft einer Flamme } Spezifische Leuchtkraft } . .	1 Dezimalkerze pro Quadratmeter.
Maß der Beleuchtung . . . . .	1 Lumenstunde.



## 89. Vergleich von photometrischen Normallichtquellen.

	Violle Einheiten.	Carcel-Lampe.	Starkerzen.	Deutsche Kerzen.	Englische Kerzen	Hefnerlampe
Violle Einheit . . . . .	1·000	2·08	16·1	16·4	18·5	18·9
Carcel . . . . .	0·481	1·00	7·75	7·89	8·91	9·08
Starkerze . . . . .	0·062	0·130	1·00	1·02	1·15	1·17
Deutsche Kerze . . . . .	0·061	0·127	0·984	1·00	1·13	1·15
Englische Kerze . . . . .	0·054	0·112	0·870	0·886	1·00	1·02
Hefnerlampe . . . . .	0·053	0·114	0·853	0·869	0·98	1·00

Das elektrische Bogenlicht liefert 110 bis 160 Kerzenstärken pro Quadratmillimeter des Kraters; nach Blondel 158 Dezimalkerzen pro Quadratmillimeter; nach Petavel 147 Dezimalkerzen pro Quadratmillimeter.

Harcourts Pentanlampe, in welcher reines Pentan unter bestimmten Bedingungen verbrannt wird, kommt in verschiedenen Größen von 1 bis 10 engl. Kerzenstärke in den Handel.

Die Hefner-Amylacetatlampe, welche mit einer etwas rötlichen Flamme brennt, ist in Deutschland die Normallampe.

Blondel hat eine weißere Normallampe vorgeschlagen, in welcher eine Mischung von 84 Raumteilen absoluten Alkohols und 16 Teilen reinen kristallisierbaren Benzols verbrannt wird.

Normallammen können wegen Luftfeuchtigkeit bis zu 4% variieren.

## 90. Diffuse Reflexion (Sumpner).

Der Reflexionskoeffizient einer gegebenen Fläche ist das Verhältnis der von ihr reflektierten Lichtmenge zu der auf sie fallenden Lichtmenge. Die Helligkeit einer Licht zerstreuenden Fläche ist ihre Kerzenstärke pro Flächeneinheit in einer zu ihrer Oberfläche normalen Richtung.

Die Illumination einer Fläche ist die Lichtmenge, welche in einer Sekunde auf ihre Flächeneinheit fällt.

Ist  $\eta$  der Reflexionskoeffizient einer Fläche, B ihre Helligkeit, I ihre Illumination, so ist

$$\pi B = \eta I.$$



In einem geschlossenen Raum, welcher Lichtquellen enthält, sei  $I'$  die Durchschnittsillumination der Wände und  $I$  die auf direktes Licht von den Quellen zurückzuführende Illumination, dann ist

$$I' = \frac{1}{1 - \eta} I.$$

**Reflexionskoeffizienten verschiedener Materialien.**

Material	$\eta$ (per cent)	$\frac{1}{1 - \eta}$
Weißes Löschpapier . . . . .	82	5·5
Weißes Papier . . . . .	80	5·0
Paustuch . . . . .	35	1·54
Pauspapier . . . . .	22	1·28
Aktenpapier . . . . .	70	3·33
Zeitungen . . . . .	50—70	2—3·33
Seidenpapier, einfach . . . . .	40	1·66
Seidenpapier, zweifach . . . . .	55	2·22
Gelbe Tapete . . . . .	40	1·66
Blaues Papier . . . . .	25	1·33
Dunkelbraunes Papier . . . . .	13	1·15
Dunkelschokoladefarbenes Papier . . . . .	4	1·03
Glattgehobeltes Tannenholz, sauber . . . . .	40—50	1·66—2
Glattgehobeltes Tannenholz, schmutzig . . . . .	20	1·25
Gelber Karton . . . . .	30	1·43
Pergament, einfach . . . . .	22	1·28
Pergament, zweifach . . . . .	35	1·54
Gelbgestrichene Mauer, sauber . . . . .	40	1·66
Gelbgestrichene Mauer, schmutzig . . . . .	20	2·22
Schwarzes Tuch . . . . .	1·2	1·01
Schwarzer Samt . . . . .	0·4	1·004

In obiger Tabelle ist der Reflexionskoeffizient  $\eta$  in Prozenten des auffallenden Lichtes angegeben; um die Durchschnittsillumination eines Zimmers zu erhalten, muß die durch direktes Licht von den Quellen verursachte Illumination mit  $\frac{1}{1 - \eta}$  multipliziert werden.



# 91. Reflexionskoeffizienten in Prozenten des auffallenden Lichtes (Hagen und Rubens).

	Blau $\lambda=450$	Grün $\lambda=500$	Gelb $\lambda=550$	Orange $\lambda=600$	Rot $\lambda=700$
A. Blanke Metalle.					
Silber . . . . .	90·6	91·8	92·5	93·0	94·6
Platin . . . . .	55·8	58·4	61·1	64·2	70·1
Nickel . . . . .	58·5	60·8	62·6	64·9	69·8
Stahl, gehärtet . . . . .	58·6	59·6	59·4	60·0	60·7
Stahl, ungehärtet . . . . .	56·3	55·2	55·1	56·0	59·3
Gold . . . . .	36·8	47·3	74·7	85·6	92·3
Kupfer . . . . .	48·8	53·3	59·5	83·5	90·7
B. Spiegelmetalle.					
Rossesche Legierung					
68·2% Cu + 31·8% Sn . . .	62·9	63·2	64·0	64·3	67·3
Brashears Legierung					
68·2% Cu + 31·8% Sn . . .	61·9	63·3	64·0	64·4	68·5
Schröders Legierung Nr. 6					
60% Cu + 30% Sn + 10% Ag	61·5	62·5	63·6	65·2	68·6
Ludwig Machsche Legierungen					
Nr. 1 (2 Tle. Al + 1 Tl. Mg) . .	83·4	83·3	82·7	83	83·3
Nr. 7 (1 Tl. Al + 1·5 Tle. Mg) .	83·4	82·5	82·1	83·8	84·4
Nr. 12 (1 Tle. Al + 2·75 Tl. Mg)	83·4	84·5	83·8	84·5	83·8
C. Glasspiegel.					
Rückseite mit Silber belegt . .	82·5	84·1	85·4	85·3	87·1
Rückseite mit Quecksilberamal- gam belegt . . . . .	72·8	70·9	71·2	69·9	72·8

Tafelglas spiegelt von normal auffallendem Licht zirka 8,7% zurück und läßt zirka 91,3% durch. Eine durchsichtige Substanz von dem Brechungsindex  $n$  spiegelt den durch die Formel  $(n - 1)^2 / (n + 1)^2$  ausgedrückten Bruchteil des auffallenden Lichts zurück.



Name und Farbe	Spezif. Gewicht	Härte	Kristall-system	Dichroismus im Dichroskop gesehen
Rubin; rosa bis tiefrot; edelste Nuance taubenblatfarben . . . . .	3.95	8—9	II	Dunklere Farbe mehr purpurrot; hellere Farbe blasser und rötlicher.
Spinell; rosa bis dunkelkarmin . . . . .	3.5	8	I	Beide gleich.
Rubellit (rosa Turmalin); rosa . . . . .	3.15	7—8	III	Rosa oder rot; weiß oder blaßrot.
Rosa Topas; blaßrosa . . . . .	3.5	8	IV	Blaßrosa; gelb.
Roter Diamant; rosa oder rubinrot . . . . .	3.52	10	I	Beide gleich.
Granat (Almandin; „Kap Rubin“); dunkelrot, braunrot oder purpurrot . . . . .	3.6 zu 4.2	7	I	„
Hyazinth, Zirkon; dunkel sherryfarben . . . . .	4.5	7—8	II	Rotbraun; grünlich.
Rosenglanz; blaßrosa . . . . .	2.66	7	III	„
Hyazinth; braunrot oder zimmetfarben . . . . .	4.5	7—8	II	Rotbraun; bräunlich grün.
Granat; braunrot . . . . .	3.6 zu 4.2	7	I	Beide gleich.
Diamant; zimmetfarben oder braun . . . . .	3.52	10	I	„
Turmalin; braun oder tieforange . . . . .	3.15	7—8	III	Braun; strohgelb.
Epidot; dunkelbraun . . . . .	3.3	6—7	V	Dunkelbraun; blaßbraun.
Topaz; sattegelb bis blaßgelb . . . . .	3.5	8	IV	Dunkelgelb; blaßgelb.
Gelber Bergkristall „Cairngorm“ . . . . .	2.66	7	III	„
Gelber Sapphir; hellgelb . . . . .	3.95	9	II	Gelb; grünlich.
Gelber Beryll; zitronengelb . . . . .	2.71	7—8	III	„
Chrysoberyll; zitronengelb . . . . .	3.7	8—9	IV	Strohgelb; grünlichgelb.
Gelber Diamant; kanariengelb . . . . .	3.52	10	I	Beide gleich.
Bernstein; blaßgelb bis orange . . . . .	1.03	Weich	0	„



Farbe, spezifisches Gewicht und Härte von Edelsteinen (Fortsetzung).

Name und Farbe	Spezif. Gewicht	Härte	Kristallsystem	Dichroismus im Dichroskop gesehen
Smaragd; smaragdgrün . . . . .	2.71	8	III	Blaugrün; gelbgrün.
Hiddenit; satter grün wie Smaragd . . . . .	3.15	6 $\frac{1}{2}$ —7	V	Grün; gelbgrün.
Grüner Granat; stachelbeergrün . . . . .	3.5	8	I	Beide gleich.
Grüner Saphir; mattgrün . . . . .	3.95	9	II	Blaugrün; gelblichgrün.
Olivin (Peridot, Chrysolith); salbeigrün . . . . .	3.37	6—7	IV	Erbsengrün; mattgelb.
Turmalin; dunkler grün wie Smaragd . . . . .	3.15	7—8	III	Blaugrün; gelb oder strohgelb.
Moroxit (Apatit); salbeigrün . . . . .	3.26	5	III	
Grüner Diamant; blaß grasgrün . . . . .	3.52	10	I	Beide gleich.
Chrysopras; trübgrün . . . . .	2.66	7	III	
Alexandrit; matt smaragdgrün bei Tage, maulbeerrot bei Kerzenlicht . . . . .	3.7	8—9	IV	Maulbeerrot; mattgrün.
Saphir; blaßblau bis tiefblau . . . . .	4.0	9	II	Dunkl. Blau; helleres u. grünl. Blau.
Blauer Diamant; blaßblau . . . . .	3.52	10	I	Beide gleich.
Blauer Topas; meergrün . . . . .	3.5	8	IV	Blau; blaßgelblichgrün.
Blauer Beryll; grünlichblau . . . . .	2.7	8	III	{ Blau; grün, Blaßblaugrün; blaß gelblichgrün.
Aquamarin; blaß meerblau . . . . .				
Indigolith (Turmalin); indigoblau . . . . .	3.15	7—8	III	
Violetter Saphir (Orientalischer Amethyst); amethystfarben . . . . .	4.0	9	II	Violettblau; etwas matter blau.
Violetter Spinell; violett oder malvenfarbig . . . . .	3.5	8	I	Beide gleich.
Violetter Turmalin; schieferviolett . . . . .	3.15	7—8	III	Violett; graublau.
Amethyst; amethystfarben . . . . .	2.66	7	III	
Iolith (Cordierit) . . . . .	2.63	7—7 $\frac{1}{2}$	IV	Tiefblau; hellgelb.



### Farben, spezifisches Gewicht und Härte von Edelsteinen (Fortsetzung).

Name und Farbe	Spezif. Gewicht	Härte	Kristall-system	Dichroismus im Dichroskop gesehen
Schwarzer Diamant . . . . .	3.52	10	I	Beide gleich.
Turmalin } sehr dunkelbraun oder grün . . . . .	3.15	7—8	III	Verschieden dunkel.
Epidot . . . . .	3.3	6—7	V	" "
Diamant . . . . .	3.52	10	I	Beide gleich.
Weiber Saphir; schwach rosa . . . . .	3.95	9	II	" "
Weiber Topas } schwach bläulich . . . . .	3.5	8	IV	" "
Weiber Beryll . . . . .	2.7	7—8	III	" "
Phenakit . . . . .	2.97	7—8	III	" "
Zirkon (Weiber Hyazinth); oft schmutzigweiß . . . . .	4.5	7—8	II	" "
Andalusit; grauweiß oder rötlich . . . . .	3.15	7 1/2	IV	Gran und weiß.
Quarz (Bergkristall) . . . . .	2.66	7	III	Blutrot; grauweiß.
Heliotrop; dunkelgrün mit roten Flecken.				
Malachit; sattgrün.	2.4	5		
Lapis Lazuli; ultramarin . . . . .				
Türkis; himmelblau . . . . .	2.75	6		

In obiger Tabelle sind die Harten nach der Mohsschen Skala angegeben; 10 = Diamant; 9 = Korund; 8 = Topas; 7 = Quarz; 6 = Feldspat; 5 = Apatit; 4 = Fluspat; 3 = Kalkspat; 2 = Gips; 1 = Talk.

Die Bezeichnung der Kristallsysteme ist folgende: I Reingit; II Tetragonal; III Hexagonal; IV Rhombisch; V Monoklin; VI Triklin. Von diesen sechs Klassen hat I keine optische Achse, II und III haben eine optische Achse während, IV v. n. VI zwei optische Achsen haben. Kristalle von Klasse I sind monoeritisch, alle übrigen sind dichroitisch. Das Dichroskop ist ein äußerst nützliches Hilfsmittel zur Unterscheidung von Edelsteinen. So sind z. B. Granat und Spinel monoeritisch und können sofort von Rubin und Rubellit, welche dichroitisch sind, unterschieden werden. Keine Nachahmungen von Edelsteinen sind dichroitisch.



Ordnung	Dicke der Luftschicht in Milliontelmillimeter	Farbe des reflektierten Lichtes
I.	0	Schwarz.
	89 $\mu\mu$	Grau.
	140	Weißlich.
	203	Strohgelb
	254	Orange.
	267	Ziegelrot.
	279	Tief purpur.
II.	292	Violett.
	330	Blau
	381	Pfaublau.
	457	Gelb.
	495	Orange.
	533	Rot.
III.	559	Violett.
	610	Blau.
	643	Pfaublau.
	686	Grün.
	749	Gelblichgrün.
	787	Rosa.
	826	Karmoisinrot.
IV.	838	Purpur.
	876	Violett.
	914	Pfaublau.
	965	Grün.
	1016	Gelblichgrün.
V.	1118	Rosa.
	1219	Blaßgrün.
	1321	Blaßrosa.
VI.	1397	Rosa.
	1524	Blaß pfaublau.
	1626	Blaßrosa.
VII.	1676	Rosa.
	1803	Blaßgrün.
	1880	Blaßrosa.





Buchdruckerei des Waisenhauses in Halle a. S.



# PETER FUCHS

RANSBACH bei Coblenz

Erste Naxos-Schmirgel-Fabrik Deutschlands

liefert billigst



## Polirrot



echt Kronen-Potée

*Garantiert rein* I<sup>a</sup> *Garantiert rein*

### Naxos-Schmirgel

Rapid-Naxos- =====

===== Schmirgel-Scheiben

### Schmirgel - Feilen

und façon. in allen Profilen.

Bimsstein } in Stücken  
Trippel } und gemahlen.

### Zinnasche.

Proben gern zu Diensten.

## Wiener-Kalk-Brennerei

Fabrik aller Schleif- und Polir-Artikel

Export, Wasser- und Dampfbetrieb

===== Eigenes Anschlussgleis. =====



## Lehrbuch der praktischen Photographie.

Von Dr. Adolf Miethe, ord. Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin. Zweite verbesserte Auflage. Mit 180 Abbildungen. In Ganzleinenband M. 10,—.

---

## Ratgeber für Anfänger im Photographieren

und für Fortgeschrittene. Von Ludwig David, k. u. k. Major der Artillerie. 30. bis 32. verbesserte Auflage. (88. bis 96. Tausend.) Mit 89 Textbildern und 20 Bildertafeln. Taschenformat in biegsamem Umschlag M. 1,50.

---

## Photographisches Praktikum.

Ein Handbuch für Fachmänner und Freunde der Photographie. Von Ludwig David, k. u. k. Major der Artillerie. Mit 6 Tafeln. In Ganzleinenband M. 4,—.

---

## Anleitung zur Photographie.

Herausgegeben von G. Pizzighelli, k. u. k. Oberstleutnant a. D. Zwölfte vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 222 in den Text gedruckten Abbildungen und 24 Tafeln. In Ganzleinenband M. 4,—.

---

## Lehrbuch der Projektion.

Von Dr. R. Neuhaus in Grosslichterfelde bei Berlin. Mit 66 Abbildungen. M. 4,—.

---

## Optik für Photographen.

Unter besonderer Berücksichtigung des photographischen Fachunterrichts. Von Dr. F. Stolze. Mit 107 in den Text gedruckten Abbildungen. M. 4,—.



# Schulze & Bartels, Rathenow

(Deutschland).

Vortheilhafte Bezugsquelle aller optischen Artikel.  
Export nach allen Ländern.

*Specialitäten:*

**Brillen, Pinzenez, Fernrohre,  
Reise- u. Theaterperspective**

Brillengläser nach ärztlicher Vorschrift kommen umgehend zum Versand.

## Objektive, Okulare, Linsen aller Art.

Prismen aus Crown- und Flintglas mit jedem beliebigen Winkel und jeder Konstruktion, achromatisch, sowie drei-, fünf- und siebenfache Prismen für Spektrokope. Flüssigkeitsprismen, Prismen zur Bildumkehrung usw. Plan- und planparallele Gläser u. Spiegel in allen Dicken. Galvanometerspiegel.

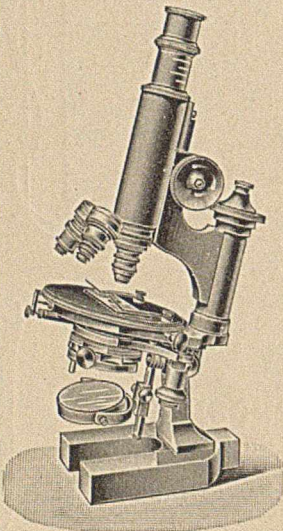
*Spezialität:*

## Sextantspiegel u. Schattengläser.

Optische Erzeugnisse zur Polarisation usw.

**A. JACKENKROLL, BERLIN O.,**  
Rüdersdorferstr. 26.

Optische Präzisions-Werkstätte.



## E. Hartnack Potsdam

Optisch-mechanische Werkstätte  
empfiehlt seine anerkannt vorzüglichen

## Mikroskope

für alle wissenschaftlichen und  
technischen Zwecke, ferner

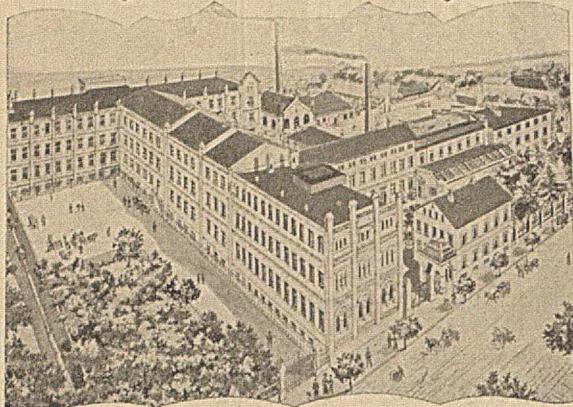
**Nebenapparate für  
Mikroskope,  
Präpariermikroskope,  
Lupen und  
einzelne Objektive.**



Die Altstädtische Optische Industrie-Anstalt

Nitsche & Günther

Rathenow.



Etablissement Rathenow.

Grösste Fabrik der Branche in Deutschland. — Ueber 750 Arbeiter.  
Dampfmaschine 250 HP. — 40 Motore und Dynamomaschinen.

SPECIALITÄT:

Brillen

Brillengläser

Pincenez

Probiergläserkästen

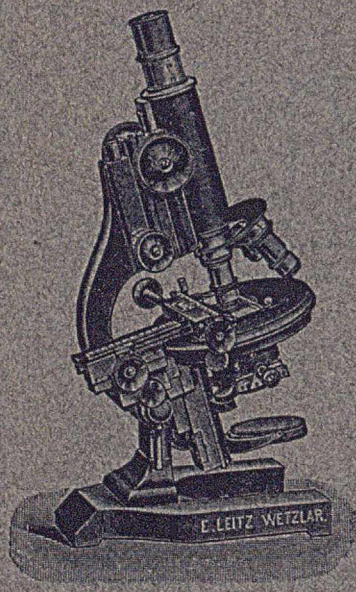
Vortheilhafte Lieferung aller optischen Artikel.

Kataloge etc. frei.



# E. LEITZ, WETZLAR

Optische Werkstätte.



## Mikroskope

### Mikrotome

Mikrophotographische  
und  
Universal-Projections-  
Apparate.



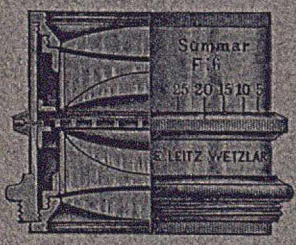
## Objective

für  
Mikrophotographie-  
Projection.

### Symmetrische Anastigmat

für  
alle Zwecke der Photographie.

F: 4,5 — F: 6 — F: 7,5.

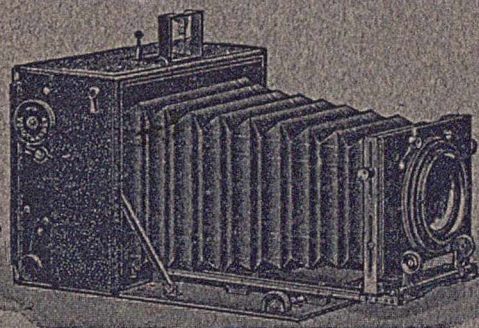


# E. LEITZ, WETZLAR

Optische Werkstätte.



# Voigtländer neue



Tropen-  
sicher!

Keine  
Holzteile!

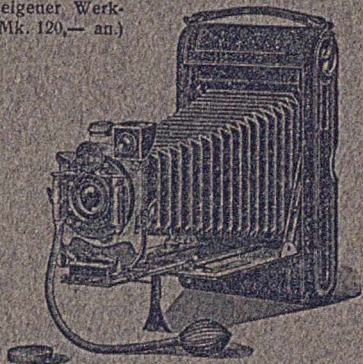
Gewicht 1310 g  
ohne Objektiv,  
Grösse  
16,3×12,8×7,6cm

## Metal-Kameras

feinste Präzisions-Mechanik, in eigener Werk-  
statt hergestellt. — (Preise von Mk. 120,— an)

### Voigtländer Film-Kamera

für Films  $8 \times 10\frac{1}{2}$  und Platten  
 $9 \times 12$  cm mit Voigtländer Collin-  
nar III, 12 cm, 1:6,8 Öffnung.  
Fertig zum Gebrauch Mk. 170,—.



### Voigtländer weltberühmte Objektive

Kollineare 1:5,4, Serie II,  
1:6,8, " III,  
Heliare 1:4,5,  
Dynare 1:6.

#### Neuer Prachtkatalog Nr. 130

120 Seiten stark, reich illustriert, ein Lehrbuch für sich, gegen 25 Pfg. für  
Porto zu beziehen von

**Voigtländer** & Sohn,  
A.-B. Optische  
Anstalt. **Braunschweig.**