Politechnika Śląska Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki



Łukasz Maliński

# IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW BILINIOWYCH MODELI CIĄGÓW CZASOWYCH W PEŁNYM ZAKRESIE ICH STABILNOŚCI

Praca wykonana pod kierunkiem Dr hab. inż. Ewy Bielińskiej, profesor Politechniki Śląskiej

Gliwice 2013

# Spis treści:

Przedmowa			4
1.	1. Cel i tematyka pracy		7
	1.1 Teza pracy		8
	1.2 Metodyka badań		8
	1.3 Przegląd literatury z tematyki pracy		8
	1.4 Potencjalne zastosowania modeli EB		13
2.	2. Podstawy teoretyczne		15
	2.1 Pojęcie modelu ciągu czasowego		16
	2.2 Wybrane modele ciągów czasowych		18
	2.3 Momenty statystyczne procesu losowego		20
	2.4 Elementarny biliniowy model ciągu czasowe	ego	22
	2.4.1 Klasyfikacja modeli EB		23
	2.4.2 Identyfikacja struktury modelu		26
3.	3. Wybrane metody estymacji parametrów mode	lu	27
	3.1 Ważona rozszerzona rekurencyjna metoda n	ajmniejszych kwadratów	28
	3.1.1 Identyfikacja modeli biliniowych u uż	yciem WRRMNK	29
	3.2 Metoda największej wiarygodności		34
	3.3 Metody momentów		36
	3.3.1 Zwykła metoda momentów		36
	3.3.2 Uogólniona metoda momentów		38
4.	4. Źródła trudności w identyfikacji modelu EB		40
	4.1 Wyznaczanie ocen momentów statystycznyc	h	40
	4.2 Odwracalność modelu		44
	4.3 Multimodalność funkcji kosztów		47
	4.4 Potencjalne rozwiązania opisanych probleme	Św	49
5.	5. Rozwiązanie problemu odwracalności modelu		50
	5.1 Funkcja kosztów z nasyceniem (SMSE)		50
	5.1.1 Właściwości statystyczne estymatora	bazującego na funkcji SMSE	55
	5.1.2 Rekurencyjna metoda doboru wartośc	i nasycenia	61
6.	6. Rozwiązanie problemu multimodalności funkc	ji kosztów	68
	6.1 Założenia zadania identyfikacji		69
	6.2 Pojęcia podstawowe		70
	6.3 Ogólny schemat algorytmu		73
	6.3.1 Parametry sterujące wykonywaniem a	lgorytmu	75
	6.3.2 Mechanizmy poszukiwania globalneg	o – eksploracja	77
	6.3.3 Mechanizm poszukiwania lokalnego -	- udoskonalanie	79
	6.3.4 Adaptacja poziomu nasycenia – rewol	ucja	80

7.	7. Przykłady identyfikacji			
	7.1	Sposób prezentacji wyników	81	
	7.2	Identyfikacja modeli odwracalnych	86	
	7.3	Identyfikacja modeli nieodwracalnych	90	
	7.4	Identyfikacja modelu ciągu rzeczywistego	95	
	7.5	Posumowanie	99	
8.	Bad	adania statystyczne		
	8.1	Badania właściwości statystycznych estymatora	100	
	8.2	Porównanie algorytmu memetycznego do RMNK	104	
	8.3	Posumowanie	114	
9.	Prz	ykład zastosowania nieodwracalnych modeli EB do szyfrowania informacji	115	
10	.Pod	sumowanie pracy	121	
Bi	bliog	grafia	125	

# Przedmowa

Motywacja do przeprowadzania badań nad poprawą wydajności identyfikacji biliniowych modeli ciągów czasowych pojawiła się już w trakcie wykonywania mojej pracy magisterskiej. Wtedy zajmowałem się implementacją gotowych algorytmów identyfikacji dla wybranych modeli ciągów czasowych w spójnym środowisku prognostycznym i testowałem ich skuteczność na wybranych ciągach testowych. Wyniki, które wtedy otrzymałem jasno pokazały, że identyfikacja parametrów biliniowych modeli ciągów czasowych jest problemem skomplikowanym i nie do końca rozwiązanym.

Dalsze prace badawcze w czasie studiów doktoranckich pozwoliły mi bliżej przyjrzeć się problemowi i zidentyfikować potencjalne przyczyny zaobserwowanych trudności. Okazało się też, że zagadnienie to samo w sobie jest wystarczająco złożone i ciekawe, że może stanowić materiał na rozprawę doktorską.

W swoich badaniach skupiłem się jedynie na elementarnych biliniowych modelach ciągów czasowych, zwanych modelami EB. Rozprawa została podzielona na 10 rozdziałów, które w skrócie podsumowane są w kolejnych akapitach.

Przytoczone w pierwszym rozdziale prace naukowe pokazują prawie 40 letnią historię badań nad zagadnieniami dotyczącymi modeli biliniowych. Badanie te miały na celu opracowanie (wczesne prace) i usprawnienie (późniejsze prace) algorytmów identyfikacji i poszerzenie wiedzy na temat modeli EB. Sama liczba powstałych opracowań świadczy o niebagatelnej potrzebie rozwiązania problemu, a złożoność aparatu matematycznego, na jaki można w tych pracach napotkać, podkreśla jego niebanalność.

W drugim i trzecim rozdziale przedstawiłem ogólną ideę modelowania ciągów czasowych, omówiłem podstawowe właściwości samego modelu jak i procesów losowych generowanych z wykorzystaniem tego modelu. Ponadto, przytoczyłem najbardziej popularne algorytmy identyfikacji, wraz ze wskazaniem trudności, na jakie napotykamy przy ich stosowaniu. W kolejnym rozdziale omówiłem główne źródła wspomnianych trudności oraz jak rzutują one na efektywność algorytmów identyfikacji modelu EB. Pokazałem źródło problemu występującego w algorytmach wykorzystujących momenty statystyczne oraz przeanalizowałem jaki wpływ ma odwracalność modelu EB na funkcję kosztów metody najmniejszych kwadratów. Ponadto zasygnalizowałem jak poważne wyzwanie może stanowić przeprowadzenie minimalizacji funkcji kosztów dla algorytmów optymalizacji powszechnie stosowanych w identyfikacji (multimodalność funkcji kosztów).

W rozdziale piątym zawarłem analizę problemu odwracalności modelu EB oraz omówiłem jej wpływ na stabilność modelu odwrotnego, czyli na możliwość nieobciążonej estymacji parametrów modelu EB. W rozdziale tym pokazałem jak łatwo można wyeliminować problem odwracalności modelu EB (stosując zmodyfikowaną funkcję kosztów), i że możliwe jest uzyskanie bardzo dokładnych ocen współczynnika modelu nawet wtedy, i szczególnie wtedy, gdy próbujemy zidentyfikować model procesu pochodzącego z nieodwracalnego modelu EB.

Rozdział szósty zawiera opis algorytmu memetycznego, dedykowanego do rozwiązywania problemu optymalizacji (multimodalność funkcji kosztów), na jaki napotyka się w identyfikacji modeli EB, pomimo stosowania zmodyfikowanej funkcji kosztów. Warto zwrócić uwagę, na oryginalny mechanizm adaptacyjny jaki opracowałem na potrzeby parametryzacji funkcji kosztów. W rezultacie kształt funkcji kosztów może wielokrotnie ulegać zmianie w trakcie działania algorytmu.

Skuteczność działania opracowanego algorytmu memetycznego zaprezentowałem w rozdziałach siódmym i ósmym. W rozdziale siódmym skupiłem się na szczegółowej prezentacji przebiegu algorytmu identyfikacji ze zwróceniem uwagi na. historię zmian kluczowych wartości i parametrów. Pokazałem różnice pomiędzy identyfikacją modeli odwracalnych i nieodwracalnych oraz na dobranym kłopotliwym przykładzie identyfikacji pokazałem, że istnieje jeszcze pole do kolejnych badań prowadzących do usprawnienia opracowanego rozwiązania. W rozdziale ósmym zawarłem statystyczną analizę skuteczności algorytmu memetycznego oraz porównałem go z najbliższym ideowo konkurencyjnym algorytmem (RMNK).

W rozdziale dziewiątym, zaproponowałem przykład aplikacji nieodwracalnych modeli EB i opracowanego przeze mnie algorytmu identyfikacji. Bazując na uzyskanych wynikach stwierdziłem, że obciążenie wyników identyfikacji modeli nieodwracalnych jest znacznie mniejsze niż obciążenie wyników identyfikacji modeli odwracalnych, więc możliwe będzie użycie wykorzystanie ich do szyfrowania informacji. W ostatnim, dziesiątym rozdziale zawarłem podsumowanie najważniejszych osiągnięć, przedstawiłem wnioski oraz odniosłem merytoryczną zawartość pracy do jej tezy.

W tym miejscu, chciałbym przede wszystkim złożyć wyrazy wdzięczności Pani dr hab. inż. Ewie Bielińskiej, profesor Politechniki Śląskiej, która jako promotor i opiekun naukowy, sprawowała pieczę nad powstaniem tej pracy. Dziękuję jej za poświęcony czas i za zaangażowanie nie tylko w powstanie tej pracy, ale także w przygotowanie mnie do dalszej pracy naukowej.

Kolejne podziękowania chciałbym skierować do Pana dr hab. inż. Jarosława Figwera, profesora Politechniki Śląskiej, który przez cały czas służył mi pomocą i krytycznymi uwagami. Udostępnił mi także ciekawe i cenne materiały do badań (opisane w rozdziale 7) oraz podsunął pomysły praktycznego wykorzystania otrzymanych wyników.

Dziękuję Panu dr hab. inż. Markowi Pawełczykowi, profesorowi Politechniki Śląskiej, kierownikowi zakładu, w którym odbywałem studia doktoranckie. Bez jego pomocy w finansowaniu badań jak i licznych cennych wskazówek realizacja tej pracy nie byłaby możliwa.

Podziękowania należą się także Panu dr hab. inż. Tomaszowi Trawińskiemu, który wielokrotnie udzielał mi wartościowych uwag i służył pomocą na wielu płaszczyznach pracy naukowej.

Na zakończenie chciałbym podziękować moim kolegom ze studiów doktoranckich: Panu mgr. inż. Piotrowi Krauze i Panu mgr. inż. Krzysztofowi Mazurowi, którzy często podejmowali ze mną dyskusje na temat moich badań i niejednokrotnie ułatwili mi pokonanie różnych problemów oraz wycofanie się z przysłowiowych ślepych uliczek.

Autor

# Rozdział 1 **Cel i tematyka pracy**

Matematyka pozwala na zdefiniowanie nieskończonej liczby modeli, które mogą służyć do wyjaśniania zjawisk fizycznych, biologicznych, chemicznych, ekonomicznych, społecznych itp. Obecnie najszerzej przebadaną rodziną modeli są modele liniowe. Stanowią one jednak niewielki podzbiór w przestrzeni wszystkich możliwych modeli.

Analiza i identyfikacja modeli liniowych jest stosunkowo łatwa a korzystanie z nich jest często wystarczające z punktu widzenia praktyki. Modele liniowe stanowią jednak ograniczone przybliżenie rzeczywistych zjawisk, które w dominującej mierze są nieliniowe. Dlatego naturalną tendencją w naukach poświęconych modelowaniu zjawisk jest tworzenie modeli nieliniowych. Modele takie stanowią znacznie lepsze przybliżenie wielu badanych zjawisk, lecz ich analiza i identyfikacja nie jest zadaniem prostym.

Jednym z wielu możliwych przykładów modeli nieliniowych są biliniowe modele ciągów czasowych, które stanowią niewielki podzbiór wszystkich modeli nieliniowych i jak pokazało wielu badaczy mają zastosowanie w wielu dziedzinach nauki np.: [Sub1], [Moh1], [Mat1], [Mat2], [Hri1], [Bou1], [Bie2], [Bie4], [Bie8], [Sor1].

Modele biliniowe są liniowe względem współczynników, mimo to ich identyfikacja nie zawsze jest zadaniem prostym, szczególnie w przypadku modeli ciągów czasowych. Dostępne obecnie algorytmy, stworzone są głównie na potrzeby identyfikacji liniowych modeli ciągów czasowych. Stosowane do identyfikacji modeli biliniowych często prowadzą do uzyskania obciążanych ocen współczynników. Główne przyczyny takiego stanu rzeczy przedstawiono w kolejnych rozdziałach tej pracy.

Celem autora było opracowanie możliwie uniwersalnej metody identyfikacji biliniowych modeli ciągów czasowych, pozwalającej na uzyskanie nieobciążonych ocen współczynników modelu. Realizacja tego celu wymagała przeanalizowania źródeł problemów występujących w dotychczas stosowanych algorytmach identyfikacji, jak i opracowania propozycji ich rozwiązań.

Zaprojektowany przez autora pracy algorytm stanowi propozycję rozwiązania problemu identyfikacji elementarnych biliniowych modeli ciągów czasowych. Może on być także potraktowany, jako fundament dla prac mających na celu opracowanie algorytmów identy-fikacji modeli biliniowych o bardziej złożonych strukturach.

# 1.1 Teza pracy

Tezą niniejszej pracy jest:

Istnieje możliwość poprawnej identyfikacji wartości współczynnika elementarnego biliniowego modelu ciągu czasowego w całym zakresie jego stabilności.

## Teza pomocnicza:

Stosowanie właściwego ograniczenia na wartości ocen sygnału stymulacji w trakcie identyfikacji nieodwracalnych biliniowych modeli ciągów czasowych ogranicza błędy tych ocen wynikające z braku stabilności modelu odwrotnego. W rezultacie możliwe jest uzyskanie nieobciążonych ocen współczynników oryginalnego modelu badanego procesu losowego.

## 1.2 Metodyka badań

Matematyczna analiza właściwości modeli nieliniowych jest skomplikowana i rzadko prowadzi do przejrzystych wyników, umożliwiających zwięzły i możliwie uniwersalny opis badanego zagadnienia. Z tego powodu, autor pracy zdecydował się na podjęcie prac symulacyjnych i statystyczną analizę uzyskanych wyników, mających na celu wykazanie prawdziwości tezy pracy w sposób doświadczalny.

Większość wyników prezentowanych w tej pracy jest rezultatem licznych prób symulacyjnych przeprowadzonych w środowisku MATLAB. Dla pewnych przedziałów wartości współczynników badanych modeli uzyskiwano nietypowe rozkłady wyników, co uniemożliwiało poprawne wnioskowanie na podstawie testów statystycznych (nawet nieparametrycznych) i zmuszało do ograniczenia wnioskowania do prostych statystyk.

#### **1.3 Przegląd literatury z tematyki pracy**

Podstawy analizy ciągów czasowych i identyfikacji ich modeli można znaleźć w wielu publikacjach. Za jedną z pierwszych w tej tematyce uznaje się pracę autorstwa G. Boxa i G.

Jenkinsa [Box1] z 1976 roku. Inną powszechnie znaną i uznawaną pozycją jest praca autorstwa L. Ljunga [Liu1] z 1987. Pierwsza z wymienionych prac dotyczy głównie modeli ciągów czasowych, ich identyfikacji i prognozowaniu na ich podstawie. Druga natomiast skupia się na ogólnej teorii identyfikacji modeli procesów.

Późniejszą (1988) pracą poszerzającą tematykę nieliniowych i niestacjonarnych modeli ciągów czasowych jest monografia autorstwa M. Priestleya [Pri1]. Z bardziej współczesnych pozycji traktujących o nieliniowych modelach ciągów czasowych można wymienić: monografię autorstwa H. Tonga [Ton1] z 1993 roku, monografię autorstwa M. Small [Sma1] z 2005 roku oraz monografię G. Kirchgässnera i J. Woltersa [Kir1] z 2007 roku. Są to obszerne prace zawierające ugruntowaną wiedzę na temat nieliniowych modeli ciągów czasowych, opisujące ich właściwości i przedstawiające wykorzystywane powszechnie metody identyfikacji.

Tematyka nieliniowych modeli ciągów czasowych jest bardzo obszerna i wydaje się niewyczerpana. Niniejsza praca dotyczy wybranych modeli ciągów czasowych – elementarnych modeli biliniowych. Dalszy przegląd literatury jest, zatem skupiony wokół dostępnych z tej tematyki publikacji.

Jako pionierów prac w tematyce biliniowych modeli ciągów czasowych uznaje się Grangera i Andersena. Jedna z pierwszych publikacji ich autorstwa [Gra1], pochodzi z 1978 roku i opisuje ogólny biliniowy model ciągu czasowego oznaczany, jako BARMA(p,r,k,m)lub BL(p,r,k,m).

Publikacja autorstwa T. Subba Rao, rozwijająca zagadnienia teoretyczne dla biliniowych modeli ciągów czasowych, powstaje 3 lata później. Obejmuje ona zagadnienia takie jak: warunek stacjonarności procesu pochodzącego z symulacji wybranych przykładów modeli biliniowych, ogólne rozważania odnoszące się do odwracalności modelu oraz podstawy teoretyczne identyfikacji modeli biliniowych. Autor wyraźnie zwraca uwagę, że warunkiem koniecznym poprawnej identyfikacji jest odwracalność modelu oraz odpowiedni dobór warunków początkowych.

Kolejne przykłady rozważań teoretycznych, tym razem dla uproszonych struktur biliniowego modelu ciągu czasowego, znaleźć można w publikacji [Qui1] autorstwa B. G. Quinna (1982). Podobnie jak poprzednik, rozważa on stacjonarność i odwracalność, ale tylko dla elementarnego modelu biliniowego, oznaczanego, jako EB(k,l). Kolejne prace autorstwa D. T. Phama [Pha1], [Pha2] traktujące o tematyce biliniowych modeli ciągów czasowych powstają w latach 1985-86. Pierwsza z nich przedstawia reprezentację modelu BARMA(p,r,k,m) za pomocą łańcuchów Markova. W drugiej autor porównuje model biliniowy do liniowego modelu autoregresyjnego z losowo zmiennymi współczynnikami.

W 1986 pojawia się artykuł autorstwa K. Kumara [Kum1] poddający analizie użycie momentów statystycznych trzeciego rzędu do detekcji w ciągu czasowym dynamiki charakterystycznej dla modelu EB. Pokazuje wyraźną zależność pomiędzy strukturą modelu EB a wartościami trzeciego momentu łącznego oraz sugeruje możliwość użycia tej zależności do celów identyfikacji.

Rok później J. G. Gooijer i R. M. J. Heuts [Goo1] wyznaczają analityczne zależności pomiędzy parametrami modelu EB a momentami wyższych rzędów procesów powstałych na skutek symulacji modelu EB. Potwierdzają oni także obserwacje poczynione przez Kumara i wskazują na możliwość odróżnienia struktury diagonalnej modelu EB od pozostałych struktur.

W 1988 roku S. A. O. Sesay and T. Subba Rao [Ses1] proponują równania różnicowe dla modeli biliniowych bazujące na momentach wyższych rzędów, które stanowią odpowiednik równań Yule-Walkera dla modeli liniowych. Podobnie jak poprzednicy podkreślają, że momenty wyższych rzędów pozwalają na wykrycie dynamiki biliniowej.

W tym samym roku R. R. Mohler i Z. Tang rozważają kwestie estymacji współczynników modelu BARMA z użyciem błędu średniokwadratowego, jako funkcji kosztów [Moh1]. Podali też, że modele biliniowe mogą służyć do opisu dynamiki ludzkiego systemu immunologicznego.

Dalsze rozważania na temat użycia Metody Najmniejszych Kwadratów (MNK) do estymacji diagonalnych biliniowych modeli ciągów czasowych można znaleźć w pracy z 1989 roku, autorstwa D. Guegan i D. T. Pham [Gue1]. Skupiają się oni jednak tylko na teoretycznej analizie problemu, nie podając żadnych przykładów praktycznego zastosowania.

W 1991 roku V. J. Mathews i T. K. Moon opisują metodę estymacji współczynników modelu BARMA z wykorzystaniem analitycznych związków pomiędzy parametrami modelu a momentami statystycznymi. Podają także wyniki praktycznego użycia tej metody do identyfikacji modeli odwracalnych, prezentując bardzo obiecujące rezultaty.

Bardzo ciekawa praca autorstwa A. D. Brunera i G. D. Hessa pojawia się w roku 1994 [Bru1]. Autorzy, jako pierwsi przedstawili graficznie kształt funkcji kosztów (metoda największej wiarygodności) dla prostego liniowo-biliniowego modelu ciągu czasowego. Omawiają także właściwości statystyczne stosowanego estymatora.

W tym samym roku E. Bielińska i I. Nabagło proponują odporny, rekurencyjny algorytm MNK dla identyfikacji modeli EB [Bie7]. Wprowadzają w swej pracy pomysł stosowania ograniczenia na wartości błędu predykcji (oceny sygnału stymulacji) w celu stabilizacji algorytmu i zwiększenia precyzji estymacji.

Dwa lata później J. Lee i V.J. Mathews [Lee1] opracowali warunek stabilności (BIBO) dla modelu BARMA. Ich druga praca [Mat2] z tego samego roku zawiera również propozycje algorytmów identyfikacji modelu BARMA. Autorzy zwracają wyraźnie uwagę na problem multimodalności funkcji kosztów w metodzie najmniejszych kwadratów. Nie proponują jednak rozwiązania tego problemu innego niż ręczny dobór warunków początkowych. Poddają także analizie zastosowanie modeli biliniowych do kompresji informacji uznając otrzymane wyniki za zadowalające.

Kolejna warta odnotowania praca autorstwa C. M. Martinsa [Mar1] ukazuje się w 1997 roku. Autor wyznacza w niej analityczne zależności opisujące autokorelacje i wyższe momenty statystyczne dla procesu stochastycznego pochodzącego z modelu EB. Zależności te są o tyle użyteczne, że można na ich podstawie sformułować metody identyfikacji i testować ergodyczność procesu. Dwa lata później w kolejnej swojej pracy [Mar2] Martins skupia uwagę na analizie trzecich momentów statystycznych dla procesu EB poszerzając dostępną w tym temacie wiedzę.

W tym samym okresie (1998) K. Chellapilla i S. S. Rao [Che1] podejmują pierwsze próby zastosowania algorytmów ewolucyjnych do identyfikacji modeli biliniowych. Zaprezentowane wyniki odnoszą się jednak raczej do ewolucyjnego doboru struktury modelu, niż do rozwiązania problemu multimodalności funkcji kosztów.

Po około sześcioletniej przerwie, w 2004 roku, pojawia się praca H. Wang [Wan1], w której autor przestawia ideę identyfikacji separowanej. Rozwiązanie to polega na identyfikacji każdej części modelu subdiagonalnego BARMA (AR, MA, biliniowej) osobno. Podobnie jak poprzednicy zwraca uwagę, że model musi być odwracalny, aby można go było zidentyfikować. W 2005 roku A. Bibi [Bib1] sam i we współpracy z A. J. Oyetem [Bib2] publikuje dwie prace dedykowane modelom biliniowym. Pierwsza z nich traktuje o stabilności modeli BARMA w odniesieniu do ich reprezentacji za pomocą łańcuchów Markova. Druga natomiast opisuje użycie MNK do identyfikacji elementarnych modeli liniowo-biliniowych i EB ze zmiennymi współczynnikami. Wyniki identyfikacji pokazane są na przypadkach modeli odwracalnych.

W tym samym okresie czasu D. Hristova [Hri1] prezentuje pracę, w której przedstawia swoje doświadczenia z użyciem metody największej wiarygodności do identyfikacji modeli EB. Pokazuje także wyniki aplikacji tej metody do modelowania w obrębie zagadnień ekonomicznych. Równocześnie powstają dwie publikacje E. Bielińskiej, w których autorka opisuje właściwości i zastosowania modeli EB [Bie2], oraz opracowuje metodykę postępowania w identyfikacji liniowo-biliniowych modeli ciągów czasowych [Bie5].

W latach 2006 i 2007 grupa badaczy: K. Bouzaachane, M. Harti i Y. Benghabrit przedstawia prace skupiające się na identyfikacji i zastosowaniu modeli EB. Jako algorytm identyfikacji proponują m.in. metodę największej wiarygodności [Bou2]. Niestety poczynione przez nich założenie o rozkładzie normalnym procesu biliniowego ważne jest tylko w stosunkowo ograniczonym zakresie parametrów - stąd też, ich metoda ma również ograniczoną skuteczność. Jako przykład zastosowania modeli EB przedstawili problem niezawodności oprogramowania [Bou1].

W tym samym roku powstaje rozległa monografia [Bie8] autorstwa E. Bielińskiej traktująca o problemie identyfikacji i zastosowaniu modeli EB. Można w niej znaleźć opis właściwości modeli i procesów EB, różne propozycje algorytmów identyfikacji oraz metody predykcji z użyciem tych modeli. Anglojęzyczna publikacja [Bie3] streszczająca najważniejsze fragmenty tej monografii powstała rok później.

Równolegle pojawia się obszerny artykuł [Sor1], opisujący szeroko właściwości statystyczne procesu EB, metody jego identyfikacji oraz właściwości predykcyjne modelu EB. Autorzy wskazują także, że złożoność procesu EB stanowi potencjalną przydatność modelu EB w zastosowaniach finansowych.

W 2008 roku O. Hili prezentuje nowe podejście do identyfikacji modeli BRAMA z wykorzystaniem aparatu matematycznego zwanego "dystansem Hellingera". Rozwiązanie to jednak w dalszym ciągu zakłada odwracalność oryginalnego modelu procesu.

Rok później I. S. Iwueze i O. Johnson [Iwu1] prezentują pracę traktującą o problemie, jaki może nastąpić w skutek pomylenia modelu EB z modelem średniej ruchomej (MA). Jak wiadomo z analizy korelacyjnej diagonalnego procesu EB możliwe jest mylne zaklasyfikowanie go, jako modelu MA (średniej ruchomej). Autorzy zaobserwowali, że zastąpienie modelu EB modelem MA podnosi wariancję błędu predykcji, podczas gdy, w odwrotnym przypadku wariancja ta maleje. Podkreślają jednak, że spadek wartości wariancji błędu predykcji nie koniecznie musi oznaczać lepsze dopasowanie modelu do danych.

Praktyczne przykłady prognozowania rzeczywistych wartości ciągów czasowych z użyciem modeli EB, można naleźć w pracy [Bie6] autorstwa E. Bielińskiej i Ł. Malińskiego z 2009 roku. Zaprezentowany tam system prognostyczny daje możliwość nie tylko identyfikacji modeli EB, ale także oceny przydatności predykcyjnej uzyskanych modeli i porównanie ich z innymi metodami modelowania nieliniowego jak np. sieci neuronowe.

W roku 2010 E. Bielińska przedstawia propozycje [Bie4] użycia współczynników modelu BARMA, jako zbioru cech służących do osobniczego rozpoznawania mówcy podając przykłady praktycznego zastosowania i uzyskane wyniki.

Rok później, pierwsze próby do pokonania multimodalności funkcji kosztów w identyfikacji modeli EB za pomocą algorytmów ewolucyjnych zaprezentowane zostają w pracy [Mal4].

#### 1.4 Potencjalne zastosowania modeli EB

Bardzo istotnym i w pełni uzasadnionym pytaniem, jakie rodzi się przy powstawianiu nowych opracowań naukowych jest pytanie o praktyczne zastosowanie wyników badań. Konieczne, zatem wydaje się podanie potencjalnych aplikacji opracowanych zagadnień.

Liniowe modele ciągów czasowych mają liczne zastosowania zarówno w wielu dziedzinach nauki jak i w wielu branżach przemysłowych. Stosuje się je do prognozowania istotnych, trudnych lub niemożliwych do modelowania w inny sposób, zmiennych procesowych (kursy walut, temperatury powietrza, promieniowanie słoneczne itp.). Innym ważnym, choć często pomijanym zastosowaniem jest klasyfikacja zjawisk. Dobrym tego przykładem, jest problem rozpoznawania osobniczego mówcy, gdzie współczynniki modeli ciągów czasowych stanowią zbiory cech rozróżniających poszczególne osoby. Modele ciągów czasowych mogą być także użyte do kształtowania właściwości statystycznych sygnałów losowych używanych w różnych zaawansowanych matematycznie dziedzinach jak np. kryptografia. Potencjalne zastosowanie modeli biliniowych w identyfikacji osobniczej mówcy [Bie4] stanowi szasnę dla zwiększenia wydajności tego procesu. Obecnie stosowane modele liniowe mają bardzo ograniczony czas ważności, a w przypadku modeli biliniowych użytych do rozwiązania tego problemu przewiduje się wydłużenie tego czasu. W rezultacie może to przyczynić się do zmniejszenia liczby współczynników koniecznych do opisania cech danej osoby.

Pierwsze próby wykonane w trakcie badań pokazują, że możliwe jest wykorzystanie modeli biliniowych do detekcji nieliniowości i anomalii w sygnałach pochodzących z różnych układów sterowania. Możliwe jest także wykorzystanie modeli biliniowych ciągów czasowych modelowania toru zakłócenia w modelach wejściowo-wyjściowych.

Autor proponuje zastosować nieodwracalne modele EB w szyfrowaniu informacji, co jest opisane w rozdziale 9.

Jak historia wielokrotnie pokazała, wiele teorii matematycznych nie powstało w wyniku bezpośredniego zapotrzebowania, a mimo to znalazło swoje zastosowanie nawet, jeśli czekać na to trzeba było setki lat. W tym przypadku, optymizmem napawać może fakt, że potencjalne zastosowania są już widoczne i są w zasięgu naszych możliwości, a rozwijająca się wciąż technika tylko ułatwia ich implementację.

# Rozdział 2 Podstawy teoretyczne

Istnieje niezliczona liczba procesów zarówno sztucznych jak i naturalnych, które nauka próbuje opisać za pomocą różnych modeli matematycznych. Za ich pomocą możliwa jest analiza właściwości zjawisk, weryfikacja poprawności eksperymentów, symulacja procesów jak i predykcja przyszłych wartości zmiennych procesowych. Pozwalają one zatem nie tylko lepiej zrozumieć otaczające nas zjawiska, ale także je kontrolować.

Modele matematyczne procesów mogą służyć zarówno do opisu właściwości statycznych jak i dynamicznych obserwowanych zjawisk. Modele właściwości statycznych pozwalają na oszacowanie wartości zmiennych procesowych poza obszarami dotychczas obserwowanymi za pomocą narzędzi matematycznych, takimi jak interpolacja i ekstrapolacja. Modele dynamiczne służą do określenia właściwości dynamicznych procesów oraz symulacji zmian wartości zmiennych procesowych w czasie. Warto nadmienić, że modele dynamiczne pozwalają często na określenie właściwości statycznych procesu, ale nie odwrotnie. W związku z tym dalsze rozważania poświęcone będą już tylko modelom dynamicznym, które dzielić będziemy na ciągłe i dyskretne w czasie.

Modele ciągłe opisują zjawiska dynamiczne ciągłe w czasie jak na przykład procesy cieplne, mechaniczne, elektryczne itp. Istotne jest, że takie modele są w stanie oszacować wartość zmiennej procesowej jak i jej zmiany w dowolnie, krótkim przedziale czasu. O ile z oczywistych przyczyn modele takie są zazwyczaj najbardziej pożądane, to są one często trudne do zbudowania i parametryzacji (szczególnie w przypadku zjawisk złożonych). Przeważnie tworzone są analitycznie z wykorzystaniem prostszych modeli opisujących znane już zjawiska obserwowane w badanym procesie złożonym. Takie podejście do modelowania nazywać będziemy tworzeniem modeli fenomenologicznych.

Drugim typem modeli dynamicznych są modele dyskretne w czasie. Ich ważność dotyczy tylko ściśle określonych chwil czasu określonych zazwyczaj stałym odstępem, zwanym okresem próbkowania. Modele te mogą służyć zarówno do opisu zjawisk z natury ciągłych

(po przez próbkowanie i identyfikację lub dyskretyzację modelu ciągłego) jak i dyskretnych (tworzony analitycznie lub identyfikowanych). W przypadku modelownia zjawisk ciągłych oczywistym wydaje się fakt, że model dyskretny (nawet, jeśli pozyskany z modelu ciągłego) stanowił będzie tylko pewny przybliżony opis procesu, obwarowany szeregiem dodatkowych założeń, jak na przykład stałość wartości zmiennych procesowych pomiędzy chwilami próbkowania. W przypadku modeli dyskretnych opisujących zjawiska z natury dyskretne (przykładowo procesy ekonomiczne) możliwe jest, aby model dynamiczny dyskretny był modelem dokładnym, fenomenologicznym.

Często jednak analizowane zjawiska są na tyle złożone, że nie sposób jest efektywnie wyznaczyć ich modele fenomenologiczne, dlatego też konieczna jest identyfikacja modeli procesów. Zjawisko takie najogólniej rzecz biorąc polega na zebraniu zmierzonych w czasie wartości zmiennych procesowych zarówno stymulujących proces (wejścia) jak i będących odpowiedzią procesu na stymulacje (wyjścia). Następnie, zebrane dane są przetwarzane w procedurze identyfikacyjnej i uzyskiwany jest wejściowo-wyjściowy model zjawiska. Modele takie zazwyczaj są dyskretne w czasie, choć istnieje możliwość konwersji ich na modele ciągłe godząc się na oczywiste niedokładności.

### 2.1 Pojęcie modelu ciągu czasowego

Istnieje wiele zjawisk fizycznych jak i abstrakcyjnych, które jesteśmy w stanie zaobserwować i zmierzyć w celu podjęcia próby utworzenia modelu. Niestety, są takie przykłady, w których z różnych podwodów nie jesteśmy w stanie określić praw fizykalnych potrzebnych do budowy modelu fenomenologicznego, ani nawet zmierzyć, czy określić czynników stymulujących potrzebnych do budowy modelu wejściowo-wyjściowego (Rys. 2.1). Nie mniej każdy proces dynamiczny zawiera pewne szczątkowe informacje o swojej dynamice zapisane w swoich zmiennych procesowych. Można zatem próbować zbudować model matematyczny opisujący dynamikę badanego procesu, korzystając wyłącznie z relacji pomiędzy kolejnymi w czasie wartościami obserwowanej zmiennej procesowej. Model, zbudowany na bazie takich informacji, nazywać będziemy stochastycznym modelem ciągu czasowego.

Dzisiejsza technika komputerowa i obliczeniowa nie daje możliwości przetwarzania sygnałów ciągłych w czasie. Wymagana jest wstępna konwersja sygnału ciągłego na dyskretny, poprzedzająca zasadniczy etap przetwarzania danych. Jeżeli zatem model procesu powstaje na bazie danych eksperymentalnych to naturalną implikacją będzie budowanie modeli dyskretnych w czasie. Istnieją oczywiście techniki budowy modeli ciągłych w czasie na bazie danych eksperymentalnych, ale nie leżą one w zakresie tematycznym tej pracy.



Rys. 2.1 Koncepcja pozyskiwania ciągu czasowego

Warto w tym miejscu poruszyć jeszcze dwa inne aspekty związane z dyskretnym pozyskiwaniem danych eksperymentalnych:

- Choć istnieją zagadnienia z zakresu cyfrowego przetwarzania sygnałów, w których stałość okresu próbkowania nie jest konieczna [Czy1], budowanie dyskretnych modeli matematycznych procesów wymaga, aby okres próbkowania był stały. Wiąże się to ze sposobem zapisu zmiennej czasowej, jako numeru chwili czasowej a nie zmiennej ciągłej. Jeżeli warunek stałości okresu próbkowania nie byłby spełniony, nie można by uzyskać modelu określającego relacje pomiędzy wartościami zmiennych procesowych w kolejnych chwilach czasu.
- Innym (trudnym do spełnienia) wymaganiem stawianym modelom dyskretnym w czasie jest stałość wartości sygnałów stymulujących pomiędzy chwilami próbkowania. Ze względu na fakt, że modele ciągów czasowych stosujemy w sytuacjach gdzie nie posiadamy żadnej wiedzy na temat sygnałów stymulujących proces, wymaganie to można pominąć. Daje to zatem możliwość przeprowadzania operacji takich jak decymacja.

Podstawową zasadę działania modelu ciągu czasowego można by opisać następująco:

#### Wartość zmiennej procesowej = składowa deterministyczna + składowa losowa

Pod pojęciem **składowej deterministycznej** (ocena wyjścia) rozumieć należy zależność matematyczną, charakterystyczną dla danego modelu, za pomocą której próbujemy wyjaśnić zawarty w danych eksperymentalnych determinizm.

Składowa losowa (składowa stochastyczna, residuum) zawiera w sobie wszystko to, czego składowa deterministyczna wyjaśnić nie może. Zawierać się w tym będą zarówno szumy pomiarowe, błędy estymacji jak i błędy wynikające z niepoprawnej struktury modelu. Z punku widzenia identyfikacji składowa losowa będzie wyrażona przez błąd predykcji jednokrokowej. Podczas symulacji procesu powstającego z modelu ciągu czasowego nazywać ją będziemy sygnałem stymulacji (lub sygnałem innowacji).

Pojęcie **wartości zmiennej procesowej** (wyjście modelu) określa rzeczywistą wartość obserwowanej zmiennej procesowej otrzymaną z danych pomiarowych. Należy zaznaczyć, że wartość rzeczywistą rozumiemy tutaj, jako konkretny pomiar. Jeżeli pomiar ten obarczony jest błędem to błąd ten powinien zostać opisany przez składową losową w modelu.

Na etapie identyfikacji modelu dąży się do tego, aby składowa deterministyczna jak najlepiej odwzorowała ciąg wartość zmiennej procesowej. Residuum (składowa losowa) rozumiane, jako różnica pomiędzy wartością zmiennej procesowej a składową deterministyczną, powinno być ciągiem przypadkowych, nieskorelowanych wartości.

Modle ciągów czasowych stosuje się głównie w dwóch celach:

- Predykcja. Znając bieżące i poprzednie wartości zmiennej procesowej możliwe jest wykorzystanie równania modelu ciągu czasowego do wyznaczania oceny przyszłych wartości zmiennej procesowej z zadanym horyzontem czasowym.
- Klasyfikacja. Zidentyfikowany model opisany jest przez strukturę modelu jak i współczynniki. Istnieją zadania, w których wartości współczynników można wykorzystać, jako cechy pozwalające dokonać klasyfikacji obserwowanego zjawiska lub jego stanu.

# 2.2 Wybrane modele ciągów czasowych

Istnieje wiele typów stochastycznych modeli ciągów czasowych wykorzystywanych w modelowaniu. Ogólnie ujmując, modele te tworzą funkcje matematyczne o różnym stopniu skomplikowania, w których zmienną zależną jest wartość zmiennej procesowej (zwyczajowo zapisywana jako  $y_i$ ) a argumentami są opóźnione w czasie wartości zmiennej procesowej  $y_{i-k}$ , składowej losowej (oznaczane przez  $e_i$ ), współczynniki i dyskretna zmienna czasowa *i*.

Istnieje wiele sposobów klasyfikacji modeli ciągów czasowych. W tej pracy przedstawione będą wybrane modele ciągów czasowych uporządkowane wraz ze wzrostem złożoności ich struktury:

 Model średniej ruchomej (MA). Najprostszy matematycznie model MA (2.1) wyznacza wartość zmiennej procesowej, jako liniową funkcję poprzednich wartości składowej losowej i odpowiadających im stałych współczynników.

$$y_i = \sum_{n=0}^{dC} c_n e_{i-n} , \qquad (2.1)$$

gdzie dC określa rząd modelu.

Uzasadnienie użycia modelu MA można znaleźć w [Pri2]. Jego wersję o skończonej liczbie współczynników stosuje się do zjawisk, dla których analiza danych eksperymentalnych wykazała szybkie zanikanie funkcji autokorelacji. Zjawisko takie można opisać modelem MA o małym rzędzie. Niewątpliwą zaletą tego modelu jest to, że jest on zawsze stabilny. Niestety fakt, że wyjście modelu jest funkcją wyłącznie liniowej kombinacji wartości białego szumu, model ten jest mało przydatny predykcyjnie, gdyż budowa jak i użycie efektywnego predykatora jest trudna. Dodatkowym problemem w zadaniach predykcji jest odwracalność modelu MA, która nie zawsze musi być zachowana.

Model autoregresyjny (AR). Najprostszym i najbardziej intuicyjnym modelem ciągu czasowego jest model AR (2.2). Wyznacza on wartość zmiennej procesowej, jako liniową funkcję poprzednich wartości zmiennej procesowej oraz odpowiadających im stałych współczynników.

$$y_i = \sum_{n=1}^{dA} a_n y_{i-n} + e_i , \qquad (2.2)$$

gdzie dA określa rząd modelu.

Model ten stosuje się, kiedy analiza ciągu danych eksperymentalnych wykazuje silne skorelowanie ze sobą nawet bardzo odległych w czasie wartości (funkcja autokorelacji zanika wolno). W takich przypadkach często można wyjaśnić determinizm modelu modelem AR o niewielkim rzędzie. Zaletą tego modelu jest łatwość konstrukcji predyktora dzięki temu, że bazuje na znanych wartościach zmiennej procesowej, a jego podstawową wadą jest to, że może być niestabilny.

 Model ARMA. O ile model MA jest mało intuicyjny, gdyż jego wyjście jest funkcją sygnału, który teoretycznie jest nieznany, można matematycznie pokazać, że model ten może stanowić ekwiwalent modelu AR z dowolnie dobraną dokładnością. Zasada ta obowiązuje jednak tylko dla odwracalnych modeli MA. Rezultatem połączenia obu modeli jest model ARMA (2.3), który zachowuje dobre własności predykcyjne jednocześnie pozwalając modelować procesy o szybko zanikającej autokorelacji.

$$y_i = \sum_{n=1}^{dA} a_n y_{i-n} + \sum_{m=0}^{dC} c_m e_{i-m} .$$
(2.3)

Model ten w dalszym ciągu wymaga kontroli stabilności, ale jego niewątpliwą zaletą jest oszczędność – można bardzo dobrze odwzorować procesy liniowe przy niewielkiej liczbie współczynników modelu. Istnieją dalsze rozwinięcia modelu ARMA w dziedzinie modeli liniowych jak na przykład model SARIMA, ale leżą one poza zakresem tematycznym pracy.

 Model BARMA. Modyfikacją modelu ARMA pozwalającą na modelowanie także wybranych nieliniowych właściwości procesu jest ogólny model biliniowy BARMA (2.4). Model ten poza częścią liniową posiada także część biliniową odpowiedzialną za modelowanie nieliniowych zależności w danych eksperymentalnych.

$$y_{i} = \sum_{n=1}^{dA} a_{n} y_{i-n} + \sum_{m=0}^{dC} c_{m} e_{i-m} + \sum_{k=1}^{dK} \sum_{l=1}^{dL} \beta_{kl} e_{i-k} y_{i-l} .$$
(2.4)

Model ten jest bardzo rozbudowany i analiza jego właściwości jak i właściwości procesu losowego, który z niego powstaje, jest bardzo trudna, to też wiele prac (m in. [Qui1], [Kum1], [Goo1], [Bru1], [Mar1] [Mar2] i inne) traktuje o analizie i identyfikacji uproszczonych struktur tego modelu. Zdaniem autora pracy, kluczem do zrozumienia i rozwiązania problemu identyfikacji modelu BARMA jest analiza i opracowanie algorytmów identyfikacji dla najprostszego modelu biliniowego zwanego **elementarnym modelem biliniowym ciągu czasowego (modelem EB)**.

#### 2.3 Momenty statystyczne procesu losowego

Dla analizy własności statystycznych procesów losowych zdefiniowano funkcje zwane **momentami statystycznymi** lub **momentami stochastycznymi**. Poniżej przedstawiono cztery podstawowe typy momentów statystycznych dodatkowo oznaczając ich rząd za pomocą litery *r*:

• Momenty zwykłe

$$M_{v}^{(r)} = E\{y_{i}^{r}\}.$$
(2.5)

• Momenty centralne

$$M_{y}^{(r)} = E\{(y_{i} - E\{y_{i}\})^{r}\}.$$
(2.6)

• Momenty zwykłe łączne (dla r = 2 i r = 3)

$$M_{y}^{(2)}(k) = E\{y_{i}y_{i+k}\};$$
  

$$M_{y}^{(3)}(k,l) = E\{y_{i}y_{i+k}y_{i+l}\}.$$
(2.7)

• Momenty centralne łączne (dla r = 2 i r = 3)

$$M_{y}^{(2)}(k) = E\{(y_{i} - E\{y_{i}\})(y_{i+k} - E\{y_{i}\})\};$$
  

$$M_{y}^{(3)}(k,l) = E\{(y_{i} - E\{y_{i}\})(y_{i+k} - E\{y_{i}\})(y_{i+l} - E\{y_{i}\})\}.$$
(2.8)

Ponieważ wyznaczenie wartości momentów stochastycznych wymaga znajomości rozkładu prawdopodobieństwa analizowanej zmiennej losowej, w praktyce stosuje się ich estymatory (z próby):

• Estymator pierwszego momentu zwykłego (średnia z próby):

$$\hat{M}_{y}^{(1)} = \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{i} .$$
(2.9)

• Estymator drugiego momentu centralnego (wariancja z próby):

$$\hat{M}_{y}^{(2)} = S^{2} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (y_{i} - \overline{y})^{2}.$$
(2.10)

• Estymator drugiego momentu centralnego łącznego (autokowariancja):

$$\hat{M}_{y}^{(2)}(k) = \gamma_{k} = \frac{1}{N-k-1} \sum_{i=k+1}^{N} (y_{i} - \overline{y})(y_{i-k} - \overline{y}).$$
(2.11)

• Estymator trzeciego momentu centralnego łącznego:

$$\hat{M}_{y}^{(3)}(k,l) = \frac{1}{N - \max(k,l) - 1} \sum_{i=\max(k,l)+1}^{N} (y_i - \bar{y})(y_{i-k} - \bar{y})(y_{i-l} - \bar{y}).$$
(2.12)

Przedstawione wzory estymatorów celowo podane są w konwencji przesunięcia wstecznego (opóźnienia), aby zachować ich zgodność z przyczynowym zapisem stosowanych modeli ciągów czasowych.

Innym narzędziem analizy dynamiki liniowej w ciągu czasowym jest korelacja cząstkowa:

$$p(k) = a_k^k, \tag{2.13}$$

gdzie:  $a_k^k$  to ostatni element modelu autoregresyjnego (AR) *k*-tego rzędu wyznaczonego na podstawie badanego ciągu danych. Do estymacji współczynników korelacji cząstkowej często wykorzystuje się korelacyjne metody identyfikacji jak metoda Yule-Walkera [Bie1].

# 2.4 Elementarny biliniowy model ciągu czasowego

Najprostszy przedstawiciel rodziny biliniowych modeli ciągów czasowych, elementarny biliniowy model ciągu czasowego EB(k, l) jest zdefiniowany następująco:

$$y_i = e_i + \beta_{kl} e_{i-k} y_{i-l} \,. \tag{2.14}$$

Wyjście modelu (2.14) jest funkcją biliniową jednej opóźnionej wartości zmiennej procesowej  $y_i$ , jednej opóźnionej wartości składowej losowej  $e_i$  oraz pojedynczego współczynnika  $\beta_{kl}$ . Istnieje ponadto konieczność poczynienia założeń odnośnie właściwości statystycznych składnika losowego  $e_i$ . Na potrzeby tej pracy zakłada się, że składowa losowa jest gaussowskim białym szumem o zerowej wartości oczekiwanej i stałej wariancji  $\lambda^2$ . Matematycznie właściwości sygnału  $e_i$  wyrazić można następująco (2.15):

$$E\{e_i\} = 0;$$

$$E\{e_ie_j\} = \begin{cases} \lambda^2 & dla \ i = j; \\ 0 & dla \ i \neq j; \end{cases}$$

$$E\{e_i^3\} = 0.$$

$$(2.15)$$

Współczynnik  $\beta_{kl}$ , wariancję sygnału stymulacji  $\lambda^2$  oraz wartości przesunięć sygnałów k i l będziemy dalej określać parametrami modelu EB.

Proces losowy powstały wskutek symulacji modelu EB(k,l) z sygnałem stymulacji  $e_i$  określonym przez (2.15) nazywać będziemy **elementarnym dyskretnym stochastycznym procesem biliniowym** lub w skrócie (na potrzeby tej pracy), **procesem biliniowym**. Warunek stabilności (2.16) procesu powstałego z modelu EB(k,l) wyrażony jest, jako funkcja współczynnika modelu  $\beta_{kl}$  oraz wariancji sygnału stymulacji  $\lambda^2$ :

$$\beta_{kl}^2 \lambda^2 < 1. \tag{2.16}$$

Spełnienie tego warunku zapewnia ograniczoną wariancję wyjścia procesu  $y_i$  oznaczaną dalej, jako  $M_y^2$  (wartość rzeczywista) i  $S_y^2$  (ocena z próby). Wariancja ta jest kluczowym czynnikiem w drugim ważnym warunku, warunku odwracalności (2.17):

$$\beta_{kl}^2 M'_{\nu}^2 < 1. \tag{2.17}$$

Warunek ten określa czy EB(k,l) jest odwracalny a zatem czy model odwrotny jest stabilny i możliwa jest estymacja sygnału stymulacji  $e_i$  na bazie znanych wartości zmiennej procesowej  $y_i$  i współczynnika  $\beta_{kl}$ . Jak należy się spodziewać, jest to istotną kwestią podczas identyfikacji modelu metodą minimalizacji błędu predykcji.

### 2.4.1 Klasyfikacja modeli EB

Modele EB(k,l) można podzielić ze względu na strukturę określoną przez parametry k i l na trzy podstawowe typy:

- Superdiagonalny dla k < l.
- Diagonalny dla k = l.
- Subdiagonalny dla k > l.

Wymienione typy modeli EB(k,l) różnią się pod względem podstawowych właściwości statystycznych (wartość oczekiwana i wariancja wyjścia) procesów losowych generowanych na ich podstawie. Pewne różnice można także zaobserwować dokonując analizy momentów stochastycznych łącznych jak autokorelacja i trzeci moment centralny łączny. Różnice w wariancjach wyjścia poszczególnych typów modelu wpływają również istotnie na problem odwracalności modelu, gdyż przeliczając wariancję wyjścia modelu  $m_y^2$ , jako funkcję sygnału stymulacji  $\lambda^2$  można uzyskać warunek odwracalności będący funkcją  $\lambda^2$  i  $\beta_{kl}$ . Poniżej przedstawiona jest skrócona analiza statystyczna dla poszczególnych typów modeli:

• Model superdiagonalny

Wartość oczekiwana wyjścia modelu:

$$M_{\nu}^{(1)} = 0. (2.18)$$

Wariancja wyjścia modelu:

$$M'_{y}^{2} = \frac{\lambda^{2}}{1 - \beta_{kl}^{2} \lambda^{2}}.$$
 (2.19)

Warunek odwracalności:

$$\beta_{kl}^2 \lambda^2 < 0.5. \tag{2.20}$$

Jak widać na Rys 2.2, model EB(k,l) o strukturze subdiagonalnej (na przykładzie k = 3i l = 5) posiada ciekawe właściwości statystyczne. Pomimo występowania silnej (nieliniowej) zależność pomiędzy kolejnymi próbkami, zarówno autokorelacja jak i korelacja, cząstkowa, nie posiadają żadnych istotnych współczynników. Zależności czasowe widoczne są dopiero w analizie trzeciego momentu centralnego łącznego. Widoczne na utworzonej powierzchni ekstrema, odpowiadają swoim położeniem strukturze modelu.



Rys. 2.2 Momenty statystyczne procesu superdiagonalnego

• Model diagonalny

Wartość oczekiwana wyjścia modelu:

$$M_{v}^{(1)} = \beta_{kl} \lambda^{2} \,. \tag{2.21}$$

Wariancja wyjścia modelu:

$$M'_{y}^{2} = \beta_{kk}^{2} \frac{3\lambda^{4}}{1 - \beta_{kk}^{2}\lambda^{2}} + \lambda^{2}.$$
(2.22)

Warunek odwracalności:

$$\beta_{kk}^2 \lambda^2 < 0.36$$
. (2.23)

Interesującą własnością, modelu EB(k,l) o strukturze diagonalnej (na przykładzie k = 4i l = 4) jest nie tylko niezerowa wartość oczekiwana wyjścia (2.21), ale także istotne statycznie współczynniki autokorelacji i korelacji cząstkowej (Rys 2.3) dla przesunięcia odpowiadającego strukturze modelu (k = 4 i l = 4). Może to spowodować pomylenie tego procesu z procesem MA lub AR. Widać także wyraźnie węższy zakres odwracalności modelu (2.23) niż w przypadku modelu o strukturze superdiagonalnej (zakładając identyczne własności pobudzenia). Wariancja wyjścia (2.22) także zależy od czwartego momentu rozkładu sygnału pobudzenia, co znacznie utrudnia ogólną analizę własności tego procesu (bez przyjęcia szczegółowych założeń).



Rys. 2.3 Momenty statystyczne procesu diagonalnego

• Model Subdiagonalny

Wartość oczekiwana wyjścia modelu:

$$M_{\nu}^{(1)} = 0. (2.24)$$

Wariancja wyjścia modelu:

$$M'_{y}^{2} = \beta_{kl}^{p} \sigma^{p+2} \frac{3}{1 - \beta_{kl}^{2} \sigma^{2}} + \sum_{i=0}^{r} \beta_{kl}^{2i} \sigma_{kl}^{i+2} .$$
(2.25)

gdzie: r = k - l oraz p = 2(r + l).

Warunek odwracalności:

$$\beta_{kl}^{2}\lambda^{2} < r + \sqrt{\frac{1}{2}} \quad r = \begin{cases} 1; & \beta_{kl}^{2}\lambda^{2} < \sim 0,79; \\ 2; & \beta_{kl}^{2}\lambda^{2} < \sim 0,84; \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$
(2.26)

Model EB(k,l) o strukturze subdiagonalnej wykazuje podobne właściwości jak model o strukturze superdiagonalnej pod kątem analizy korelacyjnej (Rys 2.4). Nie mniej widoczna jest znaczna komplikacja określenia wariancji wyjścia (2.25) procesu otrzymanego z takiego modelu, która zależna jest od konkretnych wartości parametrów struktury (k i l). Skutkiem takiego stanu rzeczy jest zmienny zakres odwracalności modelu (2.26), który zawsze jest szerszy od zakresów dla pozostałych struktur oraz, wraz ze wzrostem różnicy pomiędzy k i l, zaczyna pokrywać się z zakresem stabilności (2.16).



Rys. 2.4 Momenty statystyczne procesu subdiagonalnego

# 2.4.2 Identyfikacja struktury modelu

Podstawowym etapem identyfikacji modelu EB(k,l) jest określenie jego struktury. Analiza statystyczna przedstawiona w poprzednim punkcie pokazuje, że można do tego celu użyć trzeciego momentu centralnego łącznego, którego definicja (2.8) jak i estymator (2.12) podane są w podrozdziale 2.3.

Wizualna analiza płaszczyzny tworzonej przez trzeci moment centralny łączny, wyznaczony dla ciągu czasowego  $y_i$ , pozwala na częściowe określenie struktury modelu. Jeżeli obserwowane jest pojedyncze ekstremum, to należy wybrać model diagonalny o parametrach k i lodpowiadającym jego współrzędnym. Jeżeli obserwujemy dwa ekstrema, możemy wybrać zarówno model superdiagonalny jak i subdiagonalny. Również parametry k i l powinny odpowiadać współrzędnym pików w zależności od wybranej struktury.

# Rozdział 3 Wybrane metody estymacji parametrów modelu

Istnieje wiele różnych metod estymacji współczynników modeli ciągów czasowych. Każda z tych metod wymaga odpowiednio długiej sekwencji danych oraz założenia a'priori struktury modelu. W rzeczywistych aplikacjach nie sposób jest określić właściwą strukturę modelu, gdyż identyfikowany model ciągu czasowego jest zawsze zaledwie przybliżeniem badanego zjawiska. Przyjęta w tej pracy metodyka postępowania zakłada, że struktura modelu jest dokładna i znana przed estymacją. Założenie to jest możliwie, ponieważ autor pracy zdecydował się na testowanie metod estymacji na podstawie ciągów danych wygenerowanych z modeli EB(*k*,*l*) o znanej strukturze (*k*, *l*) i współczynniku  $\beta_{kl}$  oraz spełniających założenia dotyczące sygnału stymulacji (2.15). Tak przyjęte warunki testowania metod pozwalają określić obciążenie ocen wartości współczynników uzyskanych w trakcie estymacji.

W obrębie metod estymacji współczynników modeli ciągów czasowych wyróżnić można dwa fundamentalne sposoby otrzymywania ocen. Pierwszy sposób bazuje na minimalizacji błędu predykcji jednokrokowej. Wśród metod wykorzystujących ten sposób wyróżnia się m. in. metodę największej wiarygodności, oraz jej szczególny przypadek, metodę najmniej-szych kwadratów. Podstawowym problemem, na jaki natrafić można stosując te metody, jest odwracalność modelu, która szerzej omówiona jest w podrozdziale 4.2.

Drugim podejściem do identyfikacji modeli ciągów czasowych są metody bazujące na właściwościach statystycznych modelu. Porównuje się w nich teoretyczne wartości momentów statystycznych wyznaczone analitycznie z ocenami momentów uzyskanymi z próby. Głównym problemem, na jaki natrafia się w tej grupie metod estymacji, jest wiarygodność ocen momentów liczonych na pojedynczych skończonych realizacjach, co dokładniej pokazane jest w podrozdziale 4.1.

W kolejnych podrozdziałach opisane są szczegółowo wybrane przykłady metod estymacji współczynników modeli ciągów czasowych przystosowane do identyfikacji modelu EB(*k*,*l*).

#### 3.1 Ważona rozszerzona rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów

Stochastyczny model ciągu czasowego typu EB(k,l) ma następującą postać:

$$y_i = e_i + \beta_{kl} e_{i-k} y_{i-l} \,. \tag{3.1}$$

Warzona rozszerzona rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów (WRRMNK) [Dai1] sprowadza się do rekurencyjnego wyliczania kolejnych ocen parametrów modelu z wykorzystaniem następującego równania:

$$\hat{\beta}_{kl,i} = \hat{\beta}_{kl,i-1} + k_i \varepsilon_{i|i-1}, \qquad (3.2)$$

gdzie błąd predykcji jednokrokowej wyznacza się na bazie (3.1) w następujący sposób:

$$\varepsilon_{i|i-1} = y_i - \hat{\beta}_{kl,i-1} \varepsilon_{i-k} y_{i-l}.$$
(3.3)

W przypadku modeli nieliniowych błędy predykcji jednokrokowej w początkowej fazie estymacji mogą osiągnąć bardzo duże wartości ze względu na warunki początkowe, w związku z tym zaleca się wprowadzić następujące ograniczenie w celu stabilizacji metody estymacji [Bie7]:

$$\varepsilon *_{i|i-1} = \begin{cases} w & dla \quad \varepsilon_{i|i-1} \ge w; \\ \varepsilon_{i|i-1} & dla \quad -w < \varepsilon_{i|i-1} < w; \\ -w & dla \quad \varepsilon_{i|i-1} \le -w. \end{cases}$$
(3.4)

Poziom nasycenia w szacuje się następująco:

$$w = qS_y, (3.5)$$

gdzie: q jest stałym współczynnikiem (zazwyczaj q = 2) a  $S_y$  jest odchyleniem standardowym z próby liczone na ciągu danych  $y_i$ . Wektor wag  $k_i$  wyznacza się za pomocą (3.6).

$$k_i = P_i \varphi_{i-1}, \tag{3.6}$$

gdzie:

$$P_{i} = \left[ P_{i-1} - \frac{P_{i-1}\varphi_{i-1}\varphi_{i-1}^{T}P_{i-1}}{\alpha + \varphi_{i-1}^{T}P_{i-1}\varphi_{i-1}} \right],$$
(3.7)

oraz:

$$\varphi_{i-1} = \varepsilon *_{i-k} y_{i-l}. \tag{3.8}$$

. . . .

Wartość współczynnika zapominania  $\alpha$  mieści się w przedziale (0,1]. Dla procesów stacjonarnych powinna wynosić ona 1, a dla procesów niestacjonarnych być mniejsza od jedności.

Wartość początkową macierzy  $P(P_0)$  przyjmuje się, jako dużą dodatnią wartość np.: 100 lub 1000 i odpowiada ona za wstępne pobudzenie algorytmu identyfikacji.

#### 3.1.1 Identyfikacja modeli biliniowych z użyciem WRRMNK

Ciężko jest jednoznacznie wskazać wady i zalety zastosowania WRRMNK do identyfikacji modeli biliniowych ciągów czasowych. Nie mniej w celu empirycznego sprawdzenia skuteczności WRMNK w identyfikacji modeli EB(k,l) przeprowadzono szereg eksperymentów symulacyjnych a następnie poddano je statycznej obróbce danych [Mal3].

Pierwszym etapem badań była symulacja testowych ciągów czasowych powstałych na skutek pobudzenia modelu EB(*k*,*l*) białym szumem spełniającym kryteria (2.16). Na potrzeby testów przyjęto, że wariancja sygnału stymulacji będzie równa jedności ( $\lambda^2 = 1$ ), co bazując na (2.16), implikuje zakres stabilności dla współczynnika  $\beta_{kl}$  w granicach (-1,1).

Do testów wybrano struktury: diagonalną (k = l) i superdiagonalną (k < l), dla których zakresy odwracalności, przy powyższym założeniu odnośnie sygnału stymulacji, określone są (w przybliżeniu) odpowiednio  $|\beta_{kl}| < 0.6$  (model diagonalny) i  $|\beta_{kl}| < \sqrt{0.5}$  (model super-diagonalny).

Wartości współczynnika  $\beta_{kl}$  wybrane zostały ze zbioru **S** = {0,1; 0,2; ...; 0,7} i dla każdej wartości z tego zbioru zasymulowano po R = 1000 realizacji ciągu czasowego, każda o długości N = 1000 próbek dla każdej z badanych struktur. Parametry struktury dobierane były losowo dla struktury diagonalnej k = l, gdzie l jest zmienną losowa całkowitą z przedziału [1;5] oraz dla struktury superdiagonalnej dla k będącego zmienną losową całkowitą z przedziału [1,3] i l = k + m gdzie m również jest zmienną losową całkowitą z przedziału [1,3], niezależną od k.

Dla każdego z wygenerowanych ciągów czasowych przeprowadzono identyfikację współczynnika  $\beta_{kl}$  za pomocą WRRMNK z poprawnie dobraną (znaną) strukturą modelu (*k* i *l*). Zadnie identyfikacji przeprowadzono na dwa sposoby:

a) z arbitralnie przyjętymi parametrami algorytmu - taki dobór parametrów uzasadniony jest założeniem o stacjonarności procesu pochodzącego z modelu EB(k,l) ( $\alpha = 1$ ) oraz założeniem o wypukłym kształcie funkcji kosztów pozwalającym na dowolny dobór wartości odpowiedzialnej za wstępne pobudzenie algorytmu ( $P_0 = 100$ ).

b) z doborem wartości parametrów algorytmu – liczne próby identyfikacji modeli EB(k,l)z różnymi wartościami parametrów algorytmu, pozwoliły autorowi na sformułowanie problemu wpływu doboru tych parametrów na skuteczność algorytmu. Dokładniejsze uzasadnienie takiego postępowania widoczne będzie w rozdziale 4. Uzyskane wyniki zebrane zostały w tabelach 3.1 (model diagonalny) i 3.2 (model superdiagonalny) i przedstawione, jako wartości średnie ocen współczynnika  $\beta_{kl}$  i jego wariancje (w nawiasie) oraz wartości średnie ocen parametru  $\lambda^2$  i jego wariacje (w nawiasach). Wytłuszczoną czcionką zaznaczono wyniki uzyskane dla modeli nieodwracalnych lub będących na granicy odwracalności.

W przykładzie identyfikacji z doborem wartości parametrów algorytmu dokonano optymalizacji metodą próbkowania siatką dwuwymiarowej przestrzeni opisanej przez parametry ( $\alpha$  i  $P_0$ ). Wartości współczynnika zapominania  $\alpha$  wybierane były ze zbioru  $\mathbf{A} = \{0,1; 0,2; ...; 1\}$  a początkowe wartości diagonalne macierzy P ze zbioru  $\mathbf{L} = \{1; 2; ...; 10; 20; ...; 100; 200; ...; 1000\}$ . Jako wskaźniki jakości przyjęto wariancję błędu predykcji  $J_w$  (3.9) oraz absolutne obciążenie wartości współczynnika modelu  $J_{AO}$  (3.10).

$$J_{\rm w} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_n - \overline{\varepsilon})^2; \qquad (3.9)$$

$$J_{\rm AO} = |\beta_{kl} - \hat{\beta}_{kl}|.$$
 (3.10)

Uzyskane wyniki identyfikacji (minimalizujące  $J_{AO}$ ) poddane zostały prostej analizie statystycznej i zebrane w tabelach 3.1 i 3.2. Wyraźnie widać, że możliwa jest redukcja obciążenia ocen parametrów modelu EB w zakresie jego odwracalności, jeżeli dobrze dobrane zostaną parametry algorytmu. Wartości średnie parametrów cechują się w tym zakresie nieznacznym obciążeniem i niewielką wariancją (w nawiasach). Wyniki uzyskane dla identyfikacji z arbitralnie dobranymi parametrami nie są jednak zadowalające, co daje podstawy to podważenia założeń, na których parametry były dobierane. Dokładniejsza analiza napotkanego problemu zawarta jest w rozdziale 4 niniejszej pracy.

O ile przedstawione wyniki sugerowałyby rozwiązanie problemu identyfikacji modelu EB(k,l) w zakresie jego odwracalności, należy zaznaczyć, że wyniki te uzyskano dokonując żmudnego poszukiwania najlepszych parametrów algorytmu metodą próbkowania przestrzeni rozwiązań. Rysunki 3.1 do 3.3 zawierają przykładowe przestrzenie rozwiązań dla nakreślonego problemu optymalizacji wartości parametrów algorytmu.

Analizując podobne przestrzenie rozwiązań dla licznych przykładów, nie udało się określić spójnej reguły doboru parametrów algorytmu identyfikacji. Praktycznie, dla każdej badanej realizacji ciągu czasowego uzyskano inny zestaw wartości współczynnika zapominania  $\alpha$  i wartości początkowej  $P_{\theta}$ . Obserwacje te poprzeć mogą także histogramy umieszczone na rysunkach 3.4 i 3.5. Wynika z nich, że istotnie, najczęstszą wartością współczynnika

zapominania jest 1 (jak w rozwiązaniu z arbitralnie dobranymi wartościami parametrów algorytmu), ale w odniesieniu do liczebności całej próby nie jest ona wyraźnie dominująca (ok. 1500 razy na 7000 realizacji). W przypadku doboru wartości  $P_{\theta}$  histogramy wyraźnie przemawiają na korzyść niskich wartości tego parametru. Ponownie nie jest to jednak wartość wyraźnie dominująca.

	WRRMNK (ze stałymi parametrami)		WRRMNK (z doborem parametrów)	
$oldsymbol{eta}_{\scriptscriptstyle kl}$	$\hat{oldsymbol{eta}}_{kl}$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{oldsymbol{eta}}_{\scriptscriptstyle kl}$	$\hat{\lambda}^2$
0.1	0,111 (0,003)	1,003 (0,001)	0,098 (0,000)	0,999 (0,002)
0.2	0,179 (0,003)	1,095 (0,003)	0,197 (0,000)	0,997 (0,002)
0.3	0,288 (0,001)	1,206 (0,005)	0,296 (0,000)	0,998 (0,002)
0.4	0,381 (0,002)	1,421 (0,007)	0,393 (0,001)	1,004 (0,003)
0.5	0,292 (0,002)	1,720 (0,011)	0,457 (0,007)	1,065 (0,027)
0.6	0,120 (0,004)	2,411 (0,230)	0,332 (0,046)	1,631 (0,287)
0.7	0,070 (0,005)	3,547 (0,560)	0,107 (0,017)	3,181 (10,443)

Tabela 3.1 Wyniki identyfikacji WRRMNK dla modeli diagonalnych

Tabela 3.2 Wyniki identyfikacji WRRMNK dla modeli superdiagonalnych

	WRRMNK (ze stałymi parametrami)		WRRMNK (z doborem parametrów)	
$oldsymbol{eta}_{kl}$	$\hat{oldsymbol{eta}}_{\scriptscriptstyle kl}$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{oldsymbol{eta}}_{\scriptscriptstyle kl}$	$\hat{\lambda}^2$
0.1	0,087 (0.024)	0,985 (0,004)	0,098 (0,001)	0,999 (0,002)
0.2	0,182 (0,016)	0,993 (0,006)	0,198 (0,001)	0,997 (0,002)
0.3	0,256 (0,012)	1,016 (0,008)	0,297 (0,001)	0,998 (0,002)
0.4	0,357 (0,013)	1,022 (0,013)	0,396 (0,001)	1,000 (0,002)
0.5	0,440 (0,017)	1,068 (0,026)	0,493 (0,001)	1,002 (0,002)
0.6	0,454 (0,027)	1,170 (0,063)	0,575 (0,004)	1,020 (0,006)
0.7	0,351 (0,045)	1,540 (0,200)	0,558 (0,003)	1,204 (0,102)



Rys. 3.1 Przykładowa przestrzeń rozwiązań dla  $\beta_{kl} = 0,1.$ a) dla  $J_{w}$ , b) dla  $J_{AO}$ .



Rys. 3.2 Przykładowa przestrzeń rozwiązań dla  $\beta_{kl}$  =0,4. a) dla  $J_{w}$ , b) dla  $J_{AO}$ .



Rys. 3.3 Przykładowa przestrzeń dla  $\beta_{kl} = 0,7.$ a) dla  $J_{w}$ , b) dla  $J_{AO}$ .



Rys. 3.4 Histogramy parametrów algorytmu dla modelu diagonalnego.



Dla wskaźnika: absolutne obciążenie współczynnika

Rys. 3.5 Histogramy parametrów algorytmu dla modelu superdiagonalnego.

W rezultacie otrzymane rozwiązanie komplikuje problem poszukiwania 2 parametrów (modelu), sprowadzając go do poszukiwania 4 parametrów (modelu i algorytmu). Wniosek ten implikuje konieczność opracowania lepszego rozwiązania. Otrzymane wyniki zainspirowały jednak autora do przeprowadzenia bardziej szczegółowej analizy problemu pod kątem analizy kształtu funkcji kosztów zadania identyfikacji metodą najmniejszych kwadratów i możliwości jego zmiany.

# 3.2 Metoda największej wiarygodności.

Uogólnieniem metody najmniejszych kwadratów (MNK) jest metoda największej wiarygodności (MNW). W identyfikacji modeli ciągów czasowych sprowadza się ona do opracowania wskaźnika jakości, zbudowanego na bazie założeń odnośnie rozkładów prawdopodobieństwa sygnału stymulacji i sygnału wyjściowego. Kolejnym krokiem jest konstrukcja algorytmu optymalizacji maksymalizującego wartość zaproponowanego wskaźnika. W literaturze napotkać można różne propozycję budowy tego wskaźnika jakości dedykowane do identyfikacji biliniowych modeli ciągów czasowych. Dwie szczególne propozycje (3.11) i (3.12) zostały odpowiednio zaczerpnięte z pozycji literaturowych [Bie8] i [Bou2].

$$\ln(L) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi\lambda^2) - \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i^2}{2\lambda^2}; \qquad (3.11)$$

$$I_{ML} = \frac{N}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\log(\lambda^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\lambda^2}.$$
 (3.12)

Jak można zauważyć, obie propozycje bazują na znajomości wariancji sygnału stymulacji  $\lambda^2$ , która w rzeczywistych eksperymentach nie jest znana. Sprowadza się do konieczności użycia estymatora tego parametru, który jest niczym innym jak wariancją błędu predykcji jednokrokowej, czyli wskaźnikiem jakości dla MNK. Należy się spodziewać zatem, że problemy MNK będą również dotyczyć MNW.

Inną słabością MNW są założenia o rozkładzie prawdopodobieństwa sygnału stymulacji  $e_i$  i sygnału wyjściowego  $y_i$ , na bazie których wyprowadzane są wskaźniki jakości. Wystarczy, aby sygnał stymulacji nie spełniał tych założeń i wskaźnik jakości traci na efektywności lub w ogóle jego użycie może być nieuzasadnione.

Bardzo łatwo też podważyć zasadność budowy wskaźnika na rozkładzie prawdopodobieństwa sygnału wyjściowego w zastosowaniu do modeli biliniowych ciągów czasowych. Przykładowo dla modelu EB(k,l), można pokazać (Rys 3.6), że pobudzenie sygnałem stymulacji  $e_i$  o rozkładzie normalnym nie tylko nie gwarantuje identycznego typu rozkładu na wyjściu  $y_i$ , ale także, powstałe zniekształcenia rozkładu prawdopodobieństwa zależne są od wartości współczynnika modelu  $\beta_{kl}$ .



Rys. 3.6 Porównanie dystrybuanty hipotetycznej (rozkład normalny Gaussa) z empiryczną dla a)  $\beta_{kl} = 0,2 i b$   $\beta_{kl} = 0,8$ .

Wyraźnie widać, że dla wysokich wartości współczynnika modelu  $\beta_{kl}$  dystrybuanta sygnału wyjściowego  $y_i$  jest istotnie różna od dystrybuanty rozkładu normalnego Gaussa. Z tego też powodu wskaźniki jakości powstałe przy założeniu normalności rozkładu sygnału wyjściowego  $y_i$  są skuteczne tylko dla wąskiego zakresu oryginalnych parametrów  $\beta_{kl}$ .

#### 3.3 Metody momentów

Pod nazwą metody momentów kryje się grupa algorytmów identyfikacji modeli ciągów czasowych wykorzystująca statystyczne właściwości identyfikowanego modelu oraz statystyczne właściwości badanego ciągu czasowego. W metodzie momentów wykorzystuje się analityczne zależności (przykłady w [Bie1]) pomiędzy parametrami modelu (współczynniki, parametry struktury, wariancja sygnału stymulacji) a wartościami momentów statystycznych.

W rezultacie możliwe są dwa podejścia. Pierwsze polega na wyznaczeniu wartości różnych momentów z próby (z ciągu czasowego) a następnie rozwiązaniu układu równań nieliniowych opisujących momenty statystyczne na bazie równania modelu w celu wyznaczenia jego parametrów. Podejście to nazywać będziemy zwykłą metodą momentów. Drugie podejście polega na konstrukcji wskaźnika jakości zdefiniowanego, jako różnica pomiędzy teoretycznymi wartościami momentów wyliczonymi dla zadanych wartości parametrów modelu a wartościami empirycznymi z tych momentów wyliczonymi z próby. Wskaźnik ten następnie podlega minimalizacji po parametrach modelu. Podejście takie nosi miano uogólnionej metody momentów. Przykłady algorytmów identyfikacji [Bie8] dla modeli EB(k,l) bazują-cych na wymienionych metodach momentów pokazane są w podrozdziałach 3.3.1 i 3.3.2.

Podstawowym problem, na jaki napotykamy przy wykorzystaniu metody momentów jest założenie, że jesteśmy w stanie otrzymać nieobciążone oceny momentów statystycznych na bazie pojedynczej skończonej realizacji. Bliżej tą kwestie przedstawiono w podrozdziale 4.1. W tym miejscu ograniczymy się do stwierdzenia, że założenie to można uznać za spełnione dla ograniczone zakresu współczynników  $\beta_{kl}$ . W rezultacie metody wykazują skuteczność tylko w ograniczonym zakresie identyfikowalnych modeli.

#### 3.3.1. Zwykła metoda momentów

Podstawy teoretyczne zwyczajnej metody momentów opisane są szczegółowo w [Bie8]. Poniżej zmieszczono tylko sam algorytm identyfikacji modelu EB(*k*,*l*):
- I. Wyznaczenie struktury modelu w oparciu o trzeci moment centralny łączny. Należy wyznaczyć wartości  $l_1$  i  $l_2$ , dla których  $|M_y^{(3)}(l_1, l_2)|$  przyjmuje ekstremum. Jeżeli:
  - $l_1 = l_2$  należy przyjąć model diagonalny dla  $k = l = l_1 = l_2$ .
  - *l*<sub>1</sub> ≠ *l*<sub>2</sub> należy przyjąć model superdiagonalny przypisując wartości *l*<sub>1</sub> i *l*<sub>2</sub> do *k* i *l* tak aby *k* < *l*.
- II. Sprawdzenie identyfikowalności systemowej modelu:
  - Dla modelu subdiagonalnego należy wyznaczyć wartość wskaźnika:

$$W_{3} = \frac{(M_{y}^{(3)}(k,l))^{2}}{(M_{y}^{(2)}(0))^{3}}.$$
(3.13)

Model jest identyfikowalny dla  $W_3 < 0,25$ . W przeciwnym wypadku należy przyjąć model liniowy.

• Dla modelu diagonalnego wyznacza się wartość wskaźnika:

$$W_4 = \frac{M_y^{(3)}(k,k)}{M_y^{(2)}(0)\sqrt{M_y^{(2)}(k)}}.$$
(3.14)

Dla przyjętej dokładności  $\delta$  sprawdza się zależność:

$$W_4 - \frac{3}{\sqrt{2}} < \delta \,. \tag{3.15}$$

Jeżeli zależność (3.15) jest spełniona przyjmuje się pobudzenie o rozkładzie gaussowskim i wyznacza wskaźnik:

$$W_{5} = \frac{M_{y}^{(3)}(k,k)M_{y}^{(2)}(k)}{M_{y}^{(2)}(0)M_{y}^{(3)}(0,0)}.$$
(3.16)

Jeżeli  $W_5 < 0,23$ , to proces jest identyfikowalny. W przeciwnym wypadku należy zastosować model liniowy. Natomiast, jeżeli zależność (3.15) nie jest spełniona należy założyć pobudzenie inne niż gaussowskie.

- III. Identyfikacja wartości  $\beta_{kl}^2$ 
  - Dla modelu subdiagonalnego rozwiązuje się równanie:

$$W_3 = x(1-x). (3.17)$$

Ocenę wariancji sygnału innowacji wyznacza się z zależności:

$$m_e^{(2)} = M_y^{(2)}(0)(1-x).$$
(3.18)

Wyznaczając wartość  $\beta_{kl}^2$  korzysta się z zależności:

$$\beta_{kl}^2 = \frac{x}{m_e^{(2)}}.$$
(3.19)

Należy wybrać rozwiązanie kierując się praktycznymi wskazówkami (np. model o mniejszej wariancji zakłócenia, model odwracalny).

Dla modelu diagonalnego jeżeli  $W_4 \neq \frac{3}{\sqrt{2}}$  to:

$$x = \frac{k_4 - W_4 \sqrt{2}}{W_4 \sqrt{2}(k_4 - 1) - 2k_4},$$
(3.20)

gdzie: k<sub>4</sub> – współczynnik rozkładu spełniający zależności:

$$\frac{\sqrt{2}k_4}{2} < W_4 < \frac{3\sqrt{2}}{2}; k_4 < 3;$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} < W_4 < \frac{\sqrt{2}k_4}{2}; k_4 > 3.$$
(3.21)

Jeżeli  $W_4 \approx \frac{3}{\sqrt{2}}$  to należy rozwiązać równanie:

$$W_5 = \frac{6x(1-x)}{3+2x+22x^2}.$$
(3.22)

Wartość  $\beta_{kl}^2$  wyznacza się z zależności 3.18 i 3.19. Rozwiązanie należy wybrać kierując się przesłankami praktycznymi, takimi jak wariancja zakłócenia, odwracalność itp.

IV. Znak parametru  $\beta_{kl}$  należy przyjąć zgodny ze znakiem ekstremum  $M'^{(3)}_{y}(k,l)$ .

#### 3.3.1. Uogólniona metoda momentów

Uogólniona metoda momentów [Bie8] wyznacza rozwiązanie numerycznie. Ogólny sposób poszukiwania rozwiązania sprowadza się do minimalizacji wskaźnika jakości:

$$I = \sum_{j=1}^{J} f_{j}(y_{i}, \hat{\beta}_{kl}, \hat{\lambda}^{2}), \qquad (3.23)$$

gdzie przykładowe funkcje  $f_j$  zdefiniowane są następująco:

$$f_{1}(y_{i}, \hat{\beta}_{kl}, \hat{\lambda}^{2}) = M_{y}^{(2)}(0) - \hat{M}_{y}^{(2)}(0);$$

$$f_{2}(y_{i}, \hat{\beta}_{kl}, \hat{\lambda}^{2}) = M_{y}^{(3)}(k, l) - \hat{M}_{y}^{(3)}(k, l);$$

$$f_{3}(y_{i}, \hat{\beta}_{kl}, \hat{\lambda}^{2}) = M_{y}^{(4)}(0, 0, 0) - \hat{M}_{y}^{(4)}(0, 0, 0);$$

$$f_{4}(y_{i}, \hat{\beta}_{kl}, \hat{\lambda}^{2}) = \lambda^{2} - \hat{\lambda}^{2}.$$
(3.24)

Generalnie przyjmuje się, że  $E\{f_j\} = 0$  gdy  $\hat{\beta}_{kl} = \beta_{kl}$  i  $\hat{\lambda}^2 = \lambda^2$ . W praktyce, minimalizuje się sumę różnić wartości wybranych momentów statystycznych wyliczonych dla danej pary  $(\hat{\beta}_{kl}, \hat{\lambda}^2)$  z wartościami ich estymatorów z próby wyliczonych na bazie ciągu  $y_i$ . Para  $(\hat{\beta}_{kl}, \hat{\lambda}^2)$ , dla której otrzymuje się minimum wskaźnika jakości *I* stanowi rozwiązanie zdania identyfikacji modelu.

Obie metody momentów wymagają wyznaczenia zależności analitycznych pomiędzy wartościami paramentów modelu a wartościami momentów statystycznych sygnału wejściowego  $y_i$ . W rezultacie dla każdej możliwej struktury modelu wymagane jest wyprowadzenie stosownych wzorów. Wyprowadzenia wzorów dla modeli EB(k,l) znaleźć można m. in. w [Bie8].

## Rozdział 4 Źródła trudności w identyfikacji modelu EB

W literaturze dotyczącej estymacji współczynników modelu EB(*k*,*l*) [Sub1], [Bru1], [Mat2], [Bie8], [Bib2], [Bou2], sygnalizowane są pewne trudności w poprawnym odtworzeniu wartości współczynników a większość prezentowanych wyników, w których dokonano poprawnej identyfikacji modelu (uzyskano nieobciążone oceny) dotyczy wąskiego zakresu oryginalnych wartości współczynników (ok. 40% pełnego zakresu stabilności). Z tego powodu konieczne wydaje się określenie i analiza przyczyn wspomnianych trudności.

Jak zostało to już zasygnalizowane w poprzednich rozdziałach, główne źródła trudności związane są z poprawnością wyznaczania ocen momentów statystycznych dla procesu biliniowego, z odwracalnością modelu oraz z kształtem funkcji kosztów użytej w algorytmie identyfikacji. Kolejne podrozdziały szerzej opisują wymienione zagadnienia.

Ponadto począwszy od tego miejsca pracy przyjmuje się, że typ struktury modelu nie ma znaczenia, ponieważ wszystkie opisywane dalej zagadnienia są prawidłowe dla dowolnej struktury modelu EB(k,l).

### 4.1 Wyznaczanie ocen momentów statystycznych

Poprawność wyznaczania ocen momentów statystycznych ma szczególne znaczenie przy estymacji parametrów modelu z wykorzystaniem metody momentów. W rozdziale 3.3 pokazano, że do wyznaczenia parametrów modelu EB(k,l) potrzeba znajomości wartości wybranych momentów statystycznych do trzeciego rzędu włącznie.

W związku z tym, że momenty statystyczne opisują proces dla nieskocznego zbioru jego realizacji, a w praktyce dysponuje się najczęściej pojedynczym, skończonym zbiorem realizacji badanego procesu, możliwe jest tylko wyznaczenie ocen tych momentów. Ze statystyki wiadomo natomiast, że oceny momentów liczone na skończonej próbie są obarczone pewnym losowym błędem (przy założeniu, że użyty estymator momentu jest nieobciążony). Błąd ten zatem będzie propagować poprzez złożone, nieliniowe wzory metody momentów i wpływać na oceny parametrów zidentyfikowanego modelu.

Badania stacjonarności procesu biliniowego [Mal2] pokazały, że już drugi moment centralny (wariancja), używany m.in. w metodzie momentów wykazuje tendencję do chaotycznego, wybuchowego zachowania w czasie. Ponadto, zauważono, że zachowanie to jest ściśle związane z wartością oryginalnego współczynnika  $\beta_{kl}$  użytą do generowania procesu biliniowego. Obserwacje te stały się podstawą to przeprowadzenia badań dotyczących poprawności wyznaczanych ocen wariancji procesu biliniowego na bazie skończonego zbioru jego realizacji w czasie, w zależności od współczynnika  $\beta_{kl}$ .

Przed przystąpieniem do opisu badań poprawności wyznaczania ocen wariancji dla procesu biliniowego wprowadza się następujące pojęcia:

- *Realizacja* jest to pojedyncza wartość zmiennej losowej generowanej przez dany proces losowy.
- *Trajektoria* jest to zbór *N realizacji* procesu biliniowego zarejestrowany w czasie.
- Wartość momentu liczona względem czasu oznacza ocenę momentu statystycznego wyznaczoną eksperymentalnie dla pojedynczej, niezależnej trajektorii y<sub>r</sub>(i) w czasie dyskretnym i = 1, 2, ..., N. Indeks r = 1, 2, ..., R służy do oznaczenia numeru trajektorii, dla której liczona jest ocena momentu względem czasu, a zależności (4.1) i (4.2) stanowią przykłady tak liczonych ocen:
  - Pierwszy moment (wartość średnia) liczony względem czasu:

$$\hat{M}_{y}^{(1)}(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_{r}(i); \quad r = const.$$
(4.1)

• Drugi moment centralny (wariancja) liczony względem czasu:

$$\hat{M}_{y}^{(2)}(r) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} [y_{r}(i) - \hat{M}_{y}^{(1)}(r)]^{2}; \quad r = const.$$
(4.2)

 Wartość momentu liczona *po trajektoriach* – oznacza ocenę momentu statystycznego wyznaczoną eksperymentalnie dla wybranej, stałej chwili czasowej *i*, na zbiorze *R* niezależnych *trajektorii* procesu *y<sub>r</sub>(i)*. Zależności (4.3) i (4.4) stanowią przykłady ocen momentów statystycznych liczonych *względem trajektorii*: • Pierwszy moment (wartość średnia) liczony względem trajektorii:

$$\hat{M}_{y}^{(1)}(i) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} y_{r}(i); \quad i = const.$$
(4.3)

• Drugi moment centralny (wariancja) liczony względem trajektorii:

$$\hat{M}_{y}^{(2)}(i) = \frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^{R} [y_{r}(i) - \hat{M}_{y}^{(1)}(i)]^{2}; \quad i = const.$$
(4.4)

Korzystając z modelu EB(1,1) o współczynnikach  $\beta_{11}$  i  $\lambda^2 = 1$  wygenerowano R = 5000niezależnych *trajektorii* procesu biliniowego, każda dla innych, losowych warunków początkowych. Każda *trajektoria* (oznaczona przez r = 1, 2, ..., R) zawierała 5500 próbek czasowych, z czego tylko ostanie N = 5000 próbek zostało poddanych dalszej analizie (pierwsze 500 próbek posłużyło do rozładowania warunków początkowych).

Dla każdej *trajektorii r* procesu biliniowego  $y_r(i)$  wyznaczono oceny drugiego momentu centralnego (wariancji) *względem czasu* wedle zależności (4.2). Następnie, dla każdej chwili czasowej *i*, wyznaczono oceny tego momentu *względem trajektorii* wedle zależności (4.4). Uzyskane zbiory ocen wariancji liczonej *względem czasu* uśredniono zgodnie z (4.5) i analogicznie zbiory ocen wariancji liczonej *względem trajektorii* zgodnie z (4.6)

$$V_N = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \hat{M}_y^{(2)}(r);$$
(4.5)

$$V_{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{M}'_{y}^{(2)}(i).$$
(4.6)

Następnie wyznaczono dwa wskaźniki:

 RRC (4.7) stanowi różnicę pomiędzy średnią wariancją liczoną względem trajektorii (V<sub>R</sub>) a średnią wariancją liczoną względem czasu (V<sub>N</sub>).

$$RRC = V_R - V_N. \tag{4.7}$$

Wskaźnik ten jest wskaźnikiem referencyjnym pokazującym, że jeżeli RRC jest bliskie zeru, to uśrednione oceny wariancji *względem czasu* i *względem trajektorii* są zgodne. W takiej sytuacji możliwa jest prawidłowa ocena wariancji liczonej *względem czasu*, jeżeli dysponuje się odpowiednio dużym zbiorem niezależnych *trajektorii* badanego procesu. Zarówno  $V_R$  jaki  $V_N$  są wtedy prawidłowymi ocenami wariancji. • RRP (4.8) stanowi różnicę pomiędzy średnią wariancją liczoną *względem trajektorii* ( $V_R$ ) a wariancją policzoną dla pojedynczej, *trajektorii* procesu biliniowego *względem czasu* ( $\hat{M}_v^{(1)}(r)$ ). Wartość *r* została wybrana przypadkowo.

$$RRP = V_{R} - \hat{M}_{v}^{(2)}(r).$$
(4.8)

Jeżeli RRP jest bliskie zeru, to wnioskuje się, że liczenie wariancji *względem czasu* dla pojedynczej, skończonej *trajektorii* procesu biliniowego daje prawidłowe jej oceny.

Oba powyższe wskaźniki wyznaczono dla wartości współczynnika  $\beta_{11}$  pochodzących ze zbioru  $B = \{0,05; 0,1; ...; 0,95\}$ . Pozwoliło to na analizę poprawności wyznaczania ocen momentów dla procesu biliniowego w funkcji  $\beta_{11}$  przez porównanie wartości RRP i RRC.



Rys. 4.1 Wizualizacja wskaźników RRC i RRP w funkcji β<sub>11</sub>

Widoczne na rysunku 4.1 wartości wskaźników RRP i RRC pozwalają wnioskować, że wyznaczone wartości wariancji procesu biliniowego dla pojedynczej, skończonej *trajektorii*, obarczone mogą być znacznym błędem. Jest to szczególnie widoczne, jeżeli oryginalne  $\beta_{kl}$ , dla którego symulowany był proces biliniowy wykracza poza granicę odwracalności (2.17). W efekcie, metody identyfikacji, których działanie oparte jest na wartościach momentów statystycznych wyznaczanych dla pojedynczej *trajektorii* są skuteczne w estymacji współczynników  $\beta_{kl}$  w ograniczonym zakresie (modele odwracalne).

#### 4.2 Odwracalność modelu

Kolejną kwestią mającą wpływ na skuteczność identyfikacji jest odwracalność modelu. Istnieją stabilne procesy biliniowe, które nie spełniają warunku odwracalności (2.17), czego skutkiem jest brak stabilności ich modeli odwrotnych.

Relację pomiędzy zakresem stabilności a odwracalności na przykładzie modelu superdiagonalnego (relacje 2.16 i 2.20) przedstawiono na rysunku 4.2. Linią niebieską (a) zaznaczono krzywą wyznaczającą zakres odwracalności (wyrażony w wartościach współczynnika modelu  $\beta_{kl}$  na osi poziomej) dla danej wariancji sygnału stymulacji  $\lambda^2$  (na osi pionowej). Znakiem (X) oznaczono przecięcie z linią odpowiadającą jednostkowej wartości wariancji sygnału stymulacji ( $\lambda^2 = 1$ ). Analogicznie linia czerwona (b) reprezentuje krzywą określającą zakres stabilności. Symbolem ( $\Box$ ) oznaczono przecięcie tej krzywej z linią jednostkowej wariancji sygnału stymulacji. Pogrubionymi czarnymi liniami na osi poziomej oznaczono zakresy współczynnika  $\beta_{kl}$ , którego wartości odpowiadają modelom stabilnym, lecz nieodwracalnym.



Rys. 4.2 Relacja pomiędzy zakresem stabilności a zakresem odwracalności

Podstawowym założeniem identyfikacji modeli ciągów czasowych, bazujących na minimalizacji błędu predykcji jednokrokowej jest wyznaczenie ocen sygnału stymulacji, jako błędu predykcji jednokrokowej. Oznacza to, że korzysta się z modelu odwrotnego do modelu identyfikowanego. Jeżeli dla danego procesu losowego (ciągu czasowego) oryginalny model był nieodwracalny, to oceny sygnału stymulacji (w trakcie identyfikacji) nie będą zbieżne do ich oryginalnych wartości. Procesy takie powszechnie uznawane są za nieidentyfikowalne metodami minimalizacji błędu predykcji.

Efekt wpływu nieodwracalności modelu procesu można pokazać analizując przestrzeń rozwiązań zadania identyfikacji MNK, gdzie funkcją kosztów jest błąd średniokwadratowy (ang. Mean Square Error – MSE) zdefiniowany zależnością (4.9).

$$I(\beta_{kl}, y_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2, \qquad (4.9)$$

gdzie:

$$\varepsilon_{i} = y_{i} - \hat{y}_{i} = y_{i} - \hat{\beta}_{kl} \hat{e}_{i-k} y_{i-l}, \qquad (4.10)$$

a ocena sygnału stymulacji  $\hat{e}_i$  wyznaczana jest następująco:

$$\hat{e}_i = \varepsilon_i \,. \tag{4.11}$$

Symulując proces biliniowy o zadanym  $\beta_{kl}$  (wartości *k* i *l* nie mają istotnego wpływu na badane zjawisko, więc je pominięto) a następnie wyliczając wartości MSE dla zbioru testowych wartości  $\beta_{kl}$  zawierających się w zakresie stabilności (próbkowanie), otrzymać można wizualizację przestrzeni rozwiązań (funkcji kosztów) zadania identyfikacji. Na rysunku 4.3 przedstawione są przykładowe przestrzenie rozwiązań (górny wykres) dla modeli nieodwracalnych. **Niebieską linią** pokazano przybliżony (do dokładności próbkowania) kształt funkcji kosztu a **czerwona przerywana linia** wskazuje wartość oryginalną  $\beta_{kl}$ . Na dolnym wykresie widać przebieg oryginalnego sygnału stymulacji  $e_i$  (**linia czerwona**) oraz przebieg jego ocen (**linia niebieska**) wyznaczonych zgodnie z (4.11) dla oryginalnej wartości współczynnika  $\beta_{kl}$ . Intersujące anomalie zostały na wykresach oznaczone **pomarańczową obwiednią** a oceny położenia minimum globalnego (metodą próbkowania funkcji kosztów z zadanym krokiem) zaznaczone są małym **niebieskim kółkiem**. Warto w tym miejscu podkreślić, że niezgodność oceny położenia minimum globalnego z wartością oryginalnego  $\beta_{kl}$  nie jest wynikiem zbyt małej rozdzielczości próbkowania funkcji kosztów.

Jak widać, dla procesów pochodzących z nieodwracalnych modeli EB(k,l), minimum globalne funkcji kosztów (MSE) może nie odpowiadać oryginalnej wartości współczynnika modelu (Rys. 4.3a). Powodem takiego stanu rzeczy jest <u>chwilowa</u> (warto odnotować ten fakt) niestabilność ocen sygnału stymulacji  $e_i$ , widoczna na dolnym wykresie (Rys. 4.3a).

Inny przypadek widać na rysunku 4.3b. Tym razem chwilowa niestabilność ocen  $e_i$  sprawiła, że minimum lokalne w położeniu odpowiadającym oryginalnemu  $\beta_{kl}$  w ogóle nie wystąpiło.

Niezależnie od tego, które z powyższych zjawisk ma miejsce, algorytmy identyfikacji bazujące na MSE, jako funkcji kosztów, nie będą zbieżne do oryginalnej wartości współczynnika  $\beta_{kb}$  znajdując w rezultacie rozwiązanie nieprawidłowe. Warto jednak podkreślić, że opisane powyżej zjawiska, nie muszą wystąpić pomimo nie spełniania warunku

odwracalności modelu. W takim przypadku minimum MSE pojawi się w prawidłowej lokalizacji, choć szansa na to maleje wraz ze wzrostem oryginalnego  $\beta_{kl}$ .



b)

a)

Rys. 4.3 Przykłady przestrzeni rozwiązań dla zadania identyfikacji (funkcja kosztów – MSE) dla: a)  $\beta_{11} = 0.8$ ; b)  $\beta_{11} = 0.6$ .

### 4.3 Multimodalność funkcji kosztów

Okazuje się, że nie tylko położenie minimum globalnego stanowi źródło problemu w identyfikacji modeli EB(k,l) [Mal1]. Często, szczególnie dla procesów biliniowych (o wysokim  $\beta_{kl}$ ), funkcja kosztów zadania identyfikacji posiada wiele minimów lokalnych. W efekcie stanowią one potencjalne (nieprawidłowe) punkty zbieżności dla algorytmu identyfikacji. Zjawisko to zostało zasygnalizowane w [Sub1] i [Mat2], a jako rozwiązanie proponowano manualny dobór warunków początkowych dla estymacji.

Przykład taki można zauważyć w rozdziale 3 przy opisie WRRMNK, gdzie dobór wartości inicjującej identyfikację ( $P_{\theta}$ ) miał wpływ na końcowe rozwiązanie, co najprawdopodobniej było rezultatem zbieżności algorytmu do minimów lokalnych. Odpowiedni dobór wartości inicjującej algorytm mógł spowodować rozpoczęcie poszukiwań rozwiązania we właściwym miejscu, co w rezultacie skutkowało poprawą statystyczną skuteczności identyfikacji. Niestety położenie minimów lokalnych w przestrzeni rozwiązań zadania identyfikacji nie jest deterministyczne, co sprawia że nie sposób wskazać metodę doboru wartości inicjującej  $P_{\theta}$ .





a)  $\beta_{11} = 0,1; b) \beta_{11} = 0,4; c) \beta_{11} = 0,5; d) \beta_{11} = 0,6.$ 

Na rysunkach (4.4a-d) pokazano wybrane przykłady wizualizacji kształtu funkcji kosztów dla zadania identyfikacji modelu EB(k,l). Jak poprzednio, wizualizacje otrzymano drogą symulacji procesu biliniowego dla różnych wartości współczynnika modelu.

Przy symulacjach przyjęto jednostkową wariancję sygnału stymulacji, tak więc zakres stabilności modelu jest następujący:  $\beta_{kl} \in (-1;1)$ . Jak widać na rysunku 4.4a dla niskich wartości współczynnika przykładowy kształt funkcji kosztów (MSE) nie jest skomplikowany i nie stanowi wyzwania dla powszechnie stosowanych algorytmów identyfikacji. Kolejne wykresy (Rys. 4.4b-d) prezentują przykłady bardziej skomplikowanych kształtów funkcji kosztów. Dla przykładu z  $\beta_{kl} = 0,4$  (Rys. 4.4b) można zauważyć występowanie minimum lokalnego, które nie powinno stanowić trudności dla algorytmu startującego z zerowego warunku początkowego, o ile wstępna stymulacja algorytmu nie będzie zbyt intensywna (za duże  $P_{\theta}$ ). Dla przykładu na rysunku 4.4c pojawia się już jednak takie zagrożenie. Zbyt słabe początkowe pobudzenie WRMNK, może skutkować niemożnością wyjścia z szerokiego minimum lokalnego występującego w okolicach zera (typowy warunek początkowy dla  $\beta_{kl}$ ).

Ostatecznie przykład z rysunku 4.4d prezentuje sytuację, gdzie pomiędzy typową zerową wartością początkową oceny  $\beta_{kl}$  a minimum globalnym, zlokalizowanym w  $\beta_{kl} = 0,6$  (prawidłowe rozwiązanie), znajduje się kilka minimów lokalnych mogących spowodować zbieżność algorytmu do nieprawidłowego rozwiązania.

Jednym z możliwych rozwiązań zasygnalizowanego powyżej problemu (proponowanym w [Sub1]) jest rozpoczynanie algorytmu z różnymi początkowymi ocenami  $\beta_{kl}$ . Nie gwarantuje to jednak sukcesu, gdyż przed przeprowadzeniem identyfikacji brak jest informacji pozwalających na oszacowanie położenia takich punktów startowych. Ponadto nie wykluczy to przeniesienia zakresu poszukiwana do innego minimum lokalnego (wpływ doboru  $P_{\theta}$ ).

#### 4.4 Potencjalne rozwiązania opisanych problemów

W poprzednich podrozdziałach omówiono źródła problemów, na jakie napotyka się stosując metody opisane w rozdziale 3.

Oszacowanie poprawności ocen momentów wyznaczonych na podstawie pojedynczej trajektorii o skończonej liczbie realizacji wydaje się problemem nie do rozwiązania, co sprawia, że przynajmniej na razie, trzeba pogodzić się z ograniczeniami metod identyfikacji wykorzystujących momenty statystyczne.

Odwracalność modelu uznawana była dotychczas za czynnik ograniczający zakres modeli identyfikowalnych. Autorowi udało się zauważyć, że istnieje proste rozwiązanie, które pozwala <u>dla modeli EB(k,l)</u> przesunąć granice identyfikowalności poza zakres ich odwracalności. Rozwiązanie zaproponowane w pracy umożliwia identyfikację modelu EB(k,l) w całym zakresie jego stabilności. Rozwiązanie to, poparte szeregiem wyników badań symulacyjnych, opisane zostało w rozdziale 5.

Pokazana w podrozdziale 4.3 multimodalność funkcji kosztów nie wydaje się w dzisiejszych czasach trudnym wyzwaniem, gdyż od wielu lat obserwuje się rozwój narzędzi optymalizacji przeznaczonych dla zadań o skomplikowanych kształtach funkcji kosztów. Propozycja algorytmu rozwiązującego ten problem przedstawiona została w rozdziale 6.

## Rozdział 5 **Rozwiązanie problemu odwracalności modelu**

W podrozdziale 4.2 poruszony został problem odwracalności modelu EB(k,l). Jak pokazano, jeśli badany ciąg pochodzi z biliniowego modelu nieodwracalnego, minimum globalne funkcji kosztów nie musi odpowiadać rzeczywistej (oryginalnej) wartości współczynnika  $\beta_{kl}$ , dla której ciąg ten został zasymulowany. Dotychczas modele nieodwracalne utożsamiane były z modelami nieidentyfikowalnymi [Bie8], [Wan1]. Można jednak pokazać (doświadczalnie), że modele nieodwracalne EB(k,l) są nie tylko identyfikowalne, ale także, że możliwe jest odtworzenie wartości współczynnika  $\beta_{kl}$  z dużo mniejszym obciążeniem niż dla modeli odwracalnych.

Rozwiązanie problemu polega na modyfikacji funkcji kosztów (MSE) przez wprowadzenie do niej nasycenia (ograniczenia) na wartości błędu predykcji jednokrokowej. Oczywiście, ograniczanie wartości błędu predykcji jednokrokowej nie jest nowatorskim pomysłem autora pracy. Zaobserwował on i poddał analizie wpływ tego ograniczenia na kształt funkcji kosztów, czego rezultatem było wyciagnięcie wniosku, że wprowadzenie ograniczenia powoduje, że minimum globalne funkcji kosztów pojawia się dla oryginalnej wartości  $\beta_{kl}$ . Autor zatem przeprowadził analizę właściwości statystycznych tak zmodyfikowanego estymatora dla różnych poziomów nasycenia i ostatecznie opracował rekurencyjną procedurę automatycznego doboru poziomu nasycenia.

### 5.1 Funkcja kosztów z nasyceniem (SMSE)

Typową funkcją kosztów w metodach identyfikacji opartych na minimalizacji błędu predykcji jest błąd średniokwadratowy (4.9-4.11). Aby umożliwić identyfikację nieodwracalnego modelu biliniowego proponuje się zastąpienie (4.11) zależnością (5.1):

$$\hat{e}_{i} = \begin{cases} w & dla & \varepsilon_{i} \ge w; \\ \varepsilon_{i} & dla & -w < \varepsilon_{i} < w; \\ -w & dla & \varepsilon_{i} \le -w, \end{cases}$$
(5.1)

gdzie *w* określać będziemy mianem poziomu nasycenia, lub wymiennie ograniczeniem. Tak zmodyfikowaną funkcję kosztów nazywać będziemy dalej nasyconym błędem średniokwadratowym (Ang. Saturated Mean Square Error – SMSE). Problemem, którego rozwiązanie poddane jest analizie na kolejnych stronach tego rozdziału jest dobór wartości poziomu nasycenia.

Celem wprowadzenia ograniczenia na wartości błędu predykcji jednokrokowej jest przeciwdziałanie potencjalnej niestabilności modelu odwrotnego. Jeżeli model odwrotny jest niestabilny, wartości błędu predykcji  $\varepsilon_i$  nie są zbieżne do oryginalnego sygnału stymulacji  $e_i$ , ponieważ warunki początkowe mogą nie ulec wygaszeniu. W efekcie wartości  $\varepsilon_i$  mogą <u>chwilowo</u> przyjmować bardzo duże wartości, co silnie zwiększa wariancję błędu predykcji (wzrost MSE). Przykłady, zamieszczone na rysunku 5.1, ilustrują próby identyfikacji modelu EB(k,l) bez i z użyciem różnych poziomów nasycenia. Wartość  $\hat{\beta}_{kl} = \beta_{kl}$  oraz parametry struktury modelu nieodwracalnego są zgodne z oryginałem. Górne wykresy wizualizują kształty funkcji kosztów w całym zakresie stabilności modelu, a dolne – przebiegi oryginalnego sygnału stymulacji  $e_i$  (kolorem czerwonym) i jego ocen (kolorem niebieskim).



a)







c)



Rys. 5.1 Przebieg sygnału stymulacji (linia czerwona) i jego oceny (linia niebieska) dla a) MSE i b) SMSE z  $w= 3\lambda c$ ) SMSE z  $w= 2S_y c$ ) SMSE z  $w= 2S_y$  (model odwracalny).

Jak widać (Rys. 5.1a), niestabilność modelu odwrotnego spowodowała "wybuch" ocen sygnału stymulacji  $e_i$  w początkowej fazie estymacji (brak ograniczenia), co wystarczyło do zmiany położenia minimum globalnego funkcji kosztów [Mal5]. Naszym celem zatem będzie tak dobrać poziom nasycenia w, aby ograniczyć wybuchy ocen  $e_i$  do wartości mieszczących się w zakresie zmienności oryginalnego sygnału stymulacji, jednocześnie starając się nie uszkodzić poprawnych ocen (ograniczenie w nie może być zbyt restrykcyjne).

Naturalnym rozwiązaniem tego problemu będzie posłużenie się właściwościami statystycznymi sygnału stymulacji  $e_i$ . Zakładając normalność rozkładu sygnału stymulacji  $e_i$  oraz oznaczając jego stałą wariancję przez  $\lambda^2$  można przyjąć, że efektywny zakres zmienności  $e_i$  to  $\pm 3\lambda$ . Oczywiście rozkład normalny dopuszcza wartości większe, lecz prawdopodobieństwo ich wystąpienia jest nie większe niż 0,3%. Przyjmując zatem poziom nasycenia  $w = 3\lambda$ narażamy się na ryzyko niepożądanego obcięcia nie więcej niż 0,3% ocen sygnału stymulacji.

Wprowadzenie poziomu nasycenia  $w = 3\lambda$  ogranicza nie tylko wartości potencjalnych "wybuchów", ale także często czas ich trwania, co widać na rysunku 5.1b, gdzie widoczne są oceny sygnału stymulacji dla dokładnie tej samej trajektorii procesu biliniowego, co w 5.1a.

O ile przedstawione rozwiązanie wydaje się uzasadnione, nie nadaje się ono wprost do zastosowania w praktyce, gdyż w rzeczywistych eksperymentach identyfikacyjnych sygnał stymulacji *e<sub>i</sub>* jest nieznany. Nie można zatem skorzystać z jego właściwości statystycznych do ustalenia ograniczenia *w*, którego wartość powinna być znana przed estymacją. Pozostaje jedynie posiłkowanie się pewnymi dostępnymi przybliżeniami.

Patrząc na równanie modelu EB(k,l) (2.14) można zauważyć, że zgodnie z powszechnie znanym prawem o sumowaniu się wariancji zmiennych losowych niezależnych [Bro1], wariancja sygnału wyjściowego będzie zawsze większa od wariancji sygnału stymulacji  $(M_y^{(2)} \ge \lambda^2)$ . Prawo to można zastosować, gdyż  $e_i$  jest zawsze niezależne od  $\beta_{kl}e_{i-k}y_{i-l}$  oraz  $e_i$ jest nieskorelowane w czasie. Można, zatem oszacować odchylenie standardowe sygnału stymulacji  $\lambda$  z góry przez wartość  $S_y$  (odchylenie standardowe z próby sygnału  $y_i$ ). Przyjmując więc  $w = 3S_y$ , nie popełnimy większego błędu, polegającego na obcięciu prawidłowych ocen sygnału stymulacji, niż w przypadku  $w = 3\lambda$ . W dalszym ciągu będziemy jednak zapobiegać, choć mniej skutecznie, "wybuchom" ocen sygnału stymulacji.

Rozwiązanie to jednak ma pewną wadę. Można ją dostrzec na przykładzie analizy wzoru (2.19), który łączy wariancję sygnału stymulacji z wariancją wyjścia superdiagonalnego modelu EB(*k*,*l*), z uwzględnieniem współczynnika  $\beta_{kl}$ . Kiedy oryginalne  $\beta_{kl}$  jest małe, wariancja sygnału wyjścia  $y_i$  modelu jest bardzo zbliżona do wariancji sygnału stymulacji  $e_i$ . W rezultacie, proponowane podstawienie zastępcze ( $w = 3S_y$ ) jest bardzo skuteczne. Niestety, wraz ze wzrostem  $\beta_{kl}$ , wariancja wyjścia staje się znacznie większa od wariancji sygnału stymulacji, co powoduje, że poziom nasycenia jest zbyt wysoki i skuteczność ograniczenia wybuchów słabnie. W rezultacie taki sposób doboru ograniczenia traci na skuteczności dla wartości  $\beta_{kl}$  będących blisko granicy stabilności, czyli dla modeli nieodwracalnych.

Pewnym kompromisem zaproponowanym w [Bie7] jest dobranie  $w = 2qS_y$  gdzie q jest dobierane eksperymentalnie (wizualizacja dla q = 1 pokazana jest na rysunku 5.1c). Propozycja ta jednak nie rozwiązuje kompletnie problemu, gdyż w dalszym ciągu  $S_y$  jest zależne od  $\beta_{kl}$  i dobranie na jego bazie poziomu nasycenia, może skutkować niepożądanym obcięciem niektórych ocen sygnału stymulacji  $e_i$  (Rys 5.1d). Warto jednak przebadać statystycznie skuteczność tego rozwiązania w celu sprawdzenia, czy nie jest ono mimo wszystko wystarczające z punktu widzenia praktyki.

### 5.1.1 Właściwości statystyczne estymatora bazującego na funkcji SMSE

W celu sprawdzenia skuteczności omówionych rozwiązań doboru ograniczenia *w* przeprowadzono badania symulacyjne, których wyniki poddano prostej obróbce statystycznej. Na początku, dla każdej wartości  $\beta_{kl}$  należącej do zbioru  $B = \{0,1; 0,2; ...; 0,9\}$ , oraz sygnału stymulacji  $e_i$  o wariancji  $\lambda^2 = 1$  zasymulowano po R = 200 trajektorii superdiagonalnego procesu biliniowego. Każda z trajektorii zawierała N = 500 realizacji. Kolejnym krokiem było przeprowadzenie poszukiwania położenia minimum globalnego funkcji kosztów (dla każdej z trajektorii) metodą próbkowania o bardzo małym kroku ( $\delta = 10^{-4}$  dla całego zakresu stabilności (-1;1)). W otoczeniu znalezionego punktu minimalnego ( $\beta_{opt}\pm10^{-4}$ ) dokonano ponownego poszukiwania lokalnego minimum z rozdzielczością sięgającą  $\delta = 10^{-8}$ . Uzyskany wynik optymalizacji stanowi parę liczb ( $\beta_{kl,r}$ ,  $I_r$ ), stanowiącą współrzędne położenia minimum globalnego na płaszczyźnie dwuwymiarowej dla danej trajektorii *r*.

Pary rozwiązań pogrupowano w zestawy odpowiadające tym samym oryginalnym wartościom współczynnika modelu  $\beta_{kl}$ . Dla każdej pary w obrębie danego zestawu wyznaczono średnie wartości błędów ocen estymowanych parametrów (5.2 i 5.3) oraz ich odchylenia standardowe (5.4 i 5.5):

$$\Delta \overline{\beta} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} (\hat{\beta}_{kl,r} - \beta_{kl,r}); \qquad (5.2)$$

$$\Delta \bar{I} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} (I_r - \lambda^2); \qquad (5.3)$$

$$\Delta S_{\beta} = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^{R} (\hat{\beta}_{kl,r} - \beta_{kl,r})^2 - \frac{R}{R-1} \Delta \overline{\beta}^2}; \qquad (5.4)$$

$$\Delta S_{I} = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^{R} (I_{r} - \bar{I})^{2} - \frac{R}{R-1} \Delta \bar{I}} .$$
(5.5)

Analogicznie, jako alternatywne miary położenia wyznaczono mediany błędów ocen parametrów ( $\beta_{kl}$  i  $\lambda^2$ ) oraz rozstępy międzykwartylowe jako alternatywne miary rozrzutu [Kor1]. Eksperyment taki przeprowadzono pięciokrotnie dla różnych wartości ograniczenia *w*, dobranych następująco:

•  $w = \infty$ . Tak dobrany poziom nasycenia symuluje przypadek użycia zwykłej funkcji MSE (na wykresach oznaczony jako inf).

- w = 3S<sub>y</sub>. Poziom nasycenia dobrany zgodnie z założeniem, że S<sub>y</sub> może zastąpić λ (oznaczony na wykresach jako 3Sy).
- $w = 2S_y$ . Ograniczenie dobrane zgodnie z propozycją w [Bie7] dla q = 1 (oznaczone na wykresach jako **2Sy**).
- $w = S_y$ . Poziom nasycenia wprowadzony jako przykład jeszcze bardziej restrykcyjnego ograniczania wybuchów ocen sygnału stymulacji, przeznaczony głównie dla zakresu modeli nieodwracalnych (na wykresach oznaczony jako **1Sy**). Prawie pewne jest, że spowoduje on obciążenie wyników identyfikacji modeli odwracalnych, jednak doświadczenia autora pokazały, że taki dobór poziomu nasycenia jest czasem korzystny.
- w = 3λ. Ograniczenie zaproponowane jako pierwsze, bazujące na właściwościach statystycznych sygnału stymulacji (oznaczone na wykresach jako 3Se). O ile rozwiązanie takie nie jest możliwe do bezpośredniego wykorzystania w rzeczywistym eksperymencie identyfikacyjnym, to w warunkach symulacyjnych (znane parametry symulacji) jest możliwe do przebadania.

Wyniki zebrano i przedstawiono w formie graficznej na rysunkach 5.2 i 5.3. Każdy zestaw słupków odpowiada innej wartości nasycenia, a każdy słupek w obrębie danego zestawu przedstawia wartość wybranej statystyki dla innej wartości oryginalnego  $\beta_{kl}$ , tak, że pierwszy słupek w zestawie odpowiada  $\beta_{kl} = 0,1$  a ostatni  $\beta_{kl} = 0,9$ .

Badania powtórzono dla wartości współczynnika modelu  $\beta_{kl}$  należącego do zbioru  $B_1 = \{0,91; 0,92; ...; 0,99\}$ , czyli przebadano obszar w pobliżu granicy stabilności modelu. Wyniki zaprezentowano na rysunkach 5.4 i 5.5. Pierwszy słupek w zestawie teraz odpowiada  $\beta_{kl} = 0,91$  a ostatni  $\beta_{kl} = 0,99$ .

Z analizy wykresów (Rys. 5.2-5.5) można wywnioskować, że spośród wszystkich możliwych doborów ograniczenia w najlepszy jest niepodważalnie  $w = 3\lambda$ . Ze względu na to, że jest on niemożliwy do bezpośredniego zastosowania w praktyce, należy wybrać rozwiązanie z pośród ograniczeń bazujących na sygnale wyjściowym. Tu z kolei niepodważalnym liderem jest ograniczenie  $w = 2S_y$  jak zaproponowano w [Bie7]. Mimo, że rozwiązanie to powoduje dodatnie obciążanie ocen  $\beta_{kl}$  i ujemne obciążanie ocen  $\lambda^2$ , w zakresie modeli odwracalnych jest najlepszą z przetestowanych (w tych badaniach) propozycji.





Rys. 5.2 Wyniki badań symulacyjnych wpływu poziomu nasycenia na błędy ocen współczynnika  $\beta_{kl}$ dla zakresu <0,1; 0,9> (zbiór B): a) miary położenia b) miary rozrzutu.





b)

a)

Rys. 5.3 Wyniki badań symulacyjnych wpływu poziomu nasycenia na błędy ocen parametru  $\lambda^2$  dla zakresu <0,1; 0,9> (zbiór B): a) miary położenia b) miary rozrzutu.





Rys. 5.4 Wyniki badań symulacyjnych wpływu poziomu nasycenia na błędy ocen współczynnika  $\beta_{kl}$ dla zakresu <0,91; 0,99> (zbiór  $B_1$ ): a) miary położenia b) miary rozrzutu.





Rys. 5.5 Wyniki badań symulacyjnych wpływu poziomu nasycenia na błędy ocen parametru  $\lambda^2$  dla zakresu <0,91; 0,99> (zbiór  $B_1$ ): a) miary położenia b) miary rozrzutu.

### 5.1.2 Rekurencyjna metoda doboru wartości nasycenia

Jak już zostało wspomniane w poprzednim podrozdziale, rozwiązanie  $w = 2S_y$  nie jest idealnym wyborem, gdyż  $S_y$  jest zależne od wartości  $\beta_{kl}$ . Wiedząc jednak, że w prawidłowo przeprowadzonej procedurze identyfikacyjnej wartość funkcji kosztów stanowi oszacowanie wariancji  $\lambda^2$  sygnału stymulacji  $e_i$ , można wykorzystać ten fakt do doboru poziomu nasycenia według reguły  $w = 3\lambda$ . Obserwację tę potwierdza także rysunek 5.3a, gdzie zaprezentowane są średnie wartości błędu oceny  $\lambda^2$ . Można zatem przeprowadzić wstępną identyfikację stosując oszacowanie poziomu nasycenia  $w = 2S_y$ , a następnie wykorzystać wynik identyfikacji (wartość funkcji kosztów) do oszacowania poziomu nasycenia dla powtórnej procedury identyfikacyjnej [Mal6]. Formalnie można zapisać to następująco:

$$w_1 = 2S_v;$$
 (5.6)

$$\hat{\lambda}_n^2 = \min(SMSE(\hat{\beta}_{kl}, y, w_n)); \qquad (5.7)$$

$$w_{n+1} = 3\sqrt{\hat{\lambda}_n^2} \cong 3\lambda . \tag{5.8}$$

Dla lepszej wizualizacji rozwiązania schemat działania rekurencyjnej procedury oszacowania poziomu nasycenia przedstawiono na rysunku 5.6.



Rys. 5.6 Schemat blokowy rekurencyjnej procedury oszacowania poziomu nasycenia.

Warto podkreślić, że potencjalnie lepsze oszacowanie wartości  $\lambda$  za pomocą  $\sqrt{\hat{\lambda}_{n-1}^2}$  można uzyskać wyznaczając odchylenie standardowe na zbiorze *A* takim, że:

$$A = \{ \hat{e}_i \in \{ \hat{e}_i : |\hat{e}_i| < w_n \} \},$$
(5.9)

czyli licząc je tylko z uwzględnieniem nienasyconych ocen e<sub>i</sub>.

W celu przetestowania efektywności zaproponowanej procedury rekurencyjnego doboru poziomu nasycenia, przeprowadzono badania symulacyjne jak poprzednio. Tym razem, dla każdej trajektorii procesu biliniowego, wyznaczono położenie minimum funkcji kosztów stosując za pierwszym razem regułę  $w = 2S_y$ . Następnie, przeprowadzono siedem kolejnych iteracji rekurencyjnej metody doboru poziomu nasycenia. Wyniki uzyskane dla dwóch wybra-nych trajektorii zaprezentowano na rysunku 5.7.



Rys. 5.7 Wizualizacje efektywności działania procedury rekurencyjnego doboru poziomu nasycenia dla przykładu o oryginalnych wartościach a)  $\beta_{kl} = 0,1; b$ )  $\beta_{kl} = 0,9.$ 

Kolorem **niebieskim** przedstawiono wartości uzyskane z działania algorytmu identyfikacji, podczas gdy kolorem **różowym** wartości pożądane. Na wykresach przedstawionych na rysunku 5.7 widać, że w kolejnych iteracjach, oszacowanie poziomu nasycenia wyraźnie zbliżyło się do wartości pożądanej  $w = 3\lambda$ . Wartość funkcji celu (ocena  $\lambda^2$ ) jest także bliższa wariancji oryginalnego sygnału stymulacji. Obserwowane zmiany ocen  $\beta_{kl}$  nie pozwalają jednak jednoznacznie stwierdzić korzyści płynącej ze stosowania rekurencyjnego doboru poziomu nasycenia. Wynik ten można uzasadnić, faktem, że dla niskich wartości ( $\beta_{kl} = 0,1$ ) w procesie biliniowym dominuje losowość pochodząca z białego szumu ( $e_i$  silnie dominuje nad  $\beta_{kl}e_{i-k}y_{i-l}$ ), Zatem wyniki identyfikacji zawsze obarczone będą pewnym losowym błędem. Nie mniej, widać w tym przypadku pokaźną zmianę wartości współczynnika  $\beta_{kl}$ , co w połączeniu z wiedzą, że ograniczenie jest znacznie lepiej dobrane (mniejsza szansa na obcięcie prawidłowych ocen sygnału stymulacji) pozwala przypuszczać, że wynik jest lepszy (dla tej konkretnej trajektorii).

Dla drugiego przykładu ( $\beta_{kl} = 0,9$ ), wartość współczynnika modelu jest tak wysoka, że tym razem część biliniowa ( $\beta_{kl}e_{i-k}y_{i-l}$ ) silnie dominuje w procesie nad białym szumem ( $e_i$ ), co w rezultacie przekłada się na sporą odporność wyników estymacji na zmiany ograniczenia – minimum globalne nie przesunęło się z prawidłowej pozycji mimo znacznej zmiany ograniczenia.

Aby lepiej zauważyć korzyści płynące z zastosowania tej procedury należy spojrzeć na statystyczną obróbkę wyników zaprezentowaną na rysunkach 5.8-5.14. Tym razem trzy widoczne zestawy słupków odnoszą się odpowiednio do pierwszej, drugiej i ostatniej iteracji algorytmu. Poszczególne słupki w dalszym ciągu reprezentują statystyki (jak w podrozdziale 5.1.1) wyznaczone dla zestawu trajektorii o tych samych wartościach oryginalnych  $\beta_{kl}$  pochodzących ze zbioru *B*. Ponadto wprowadzono miary położenia i rozrzutu (5.10 i 5.11) dla błędu oszacowania poziomu nasycenia  $w_{r,n}$ , przyjmując pożądaną wartość tego parametru jako  $3\lambda$ :

$$\Delta \overline{w} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} (w_{r,n} - 3\lambda); \qquad (5.10)$$

$$S_{w} = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^{R} (w_{r,n} - 3\lambda)^{2} - \frac{R}{R-1} \Delta \overline{w}}, \qquad (5.11)$$

gdzie *n* oznacza iterację algorytmu rekurencyjnego doboru poziomu nasycenia.







Rys. 5.8 Statystyki błędów ocen  $\beta_{kl}$  uzyskane w skutek działania rekurencyjnego doboru poziomu nasycenia: a) miary położenia b) miary rozrzutu.





Rys. 5.9 Statystyki blędów ocen  $\lambda^2$  uzyskane w skutek działania rekurencyjnego doboru poziomu nasycenia: a) miary położenia b) miary rozrzutu.





Rys. 5.10 Statystyki błędów oszacowania ograniczenia uzyskane w skutek działania rekurencyjnego doboru poziomu nasycenia: a) miary położenia b) miary rozrzutu.

Wyniki pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- Wyraźne zmalały wartości średnie i mediany (Rys. 5.10a) błędu oszacowania poziomu nasycenia, jak i zauważyć można (Rys. 5.10b) nieznaczne zmniejszenie jego odchyleń standardowych i rozstępów międykwartylowych. Pozwala to na wyciagnięcie wniosku, że oszacowane ograniczenie zaproponowaną rekurencyjną metodą jest bliższe pożądanemu ( $w = 3\lambda$ ) w całym zakresie stabilności modelu.
- Wykresy zamieszczone na rysunku 5.9a, pozwalają wnioskować, że wykorzystanie rekurencyjnej metody doboru poziomu nasycenia znacząco zmniejszyło wartości średnie i mediany błędu oceny wariancji sygnału stymulacji w zakresie modeli odwracalnych. Daje to podstawy do wnioskowania, że zaproponowane rozwiązanie pozwala zredukować ryzyko obciążenia wyników identyfikacji w zakresie modeli odwracalnych, co było jego bezpośrednim celem.
- Niemniej widoczną poprawę wyników identyfikacji, w skutek zastosowania rekurencyjnej metody doboru poziomu nasycenia, można zaobserwować analizując wykresy z rysunku 5.8a. Widać na nich wyraźne zmniejszenie wartości średnich błędu oceny współczynnika  $\beta_{kl}$  dla modeli odwracalnych. Ponownie pozwala to wnioskować, że zaproponowane rozwiązanie zadziałało zgodnie z oczekiwaniami.

Podsumowując, rekurencyjna procedura doboru poziomu nasycenia pozwala oszacować ograniczenie *w* dla funkcji kosztów (SMSE) tak, że redukcji ulega ryzyko obciążania wyników identyfikacji w zakresie modeli odwracalnych, na skutek niepożądanego obcięcia ocen sygnału stymulacji. Ponadto wartość ograniczania oszacowana tą metodą pozwala zachować pełną skuteczność nasycenia do kontroli stabilności ocen sygnału stymulacji dla modeli nieodwracalnych.

W kolejnym rozdziale przedstawiony jest algorytm memetyczny, którego zadaniem jest rozwiązanie problemu multimodalności funkcji kosztów. W algorytmie tym uwzględniono procedurę doboru ograniczenia dla funkcji SMSE, na podstawie rozwiązań i rozważań przedstawionych w tym rozdziale.

# Rozdział 6 Rozwiązanie problemu multimodalności funkcji kosztów

Multimodalność funkcji kosztów (przedstawiona w rozdziale czwartym), stanowi poważną przeszkodę przy identyfikacji modelu EB(k,l), z zastosowaniem klasycznych algorytmów identyfikacji (optymalizacji). Można się spodziewać, że stochastyczne algorytmy optymalizacji, które zaprojektowane są do rozwiązywania problemów związanych z multimodalną funkcją kosztów, pozwolą rozwiązać problem poprawnej identyfikacji modeli EB(k,l).

Najprostszym i najbardziej intuicyjnym algorytmem optymalizacji stochastycznej jest metoda Monte Carlo. Polega ona na losowym umieszczaniu tzw. *rozwiązań kandydujących* w określonym zakresie przestrzeni rozwiązań zadania optymalizacji, w którym spodziewamy się wystąpienia minimum globalnego. Jako wynik wybieramy to rozwiązanie kandydujące, dla którego wyznaczona wartość funkcji kosztów jest minimalna (lub maksymalna w zadaniach maksymalizacji). Rozwiązanie to, jak należy się spodziewać, nie gwarantuje znalezienia optimum globalnego w przypadku skończonej liczby testowanych rozwiązań. Nie mniej można łatwo zauważyć, że prawdopodobieństwo znalezienia optimum globalnego jest tym większe, im więcej różnych rozwiązań zostanie sprawdzonych.

Wyraźnym udoskonaleniem metody Monte Carlo są tzw. stochastyczne algorytmy optymalizacji wzorowane na zjawiskach naturalnych. W metodach tych wstępnie losowo umieszcza się pewną skończoną liczbę *rozwiązań kandydujących* w przestrzeni rozwiązań, a kolejne generuje się w oparciu o pewną heurystykę. W literaturze [Bro2] można znaleźć wiele przykładów inspiracji zjawiskami naturalnymi w tworzeniu heurystyk dla stochastycznego algorytmu optymalizacji, które stanowią mechanizm poszukiwania globalnego. Niektóre algorytmy naśladują zachowania owadów takich jak mrówki czy pszczoły, inne symulują zjawiska fizyczne, takie jak zachowanie się kropli wody czy przebieg procesu wyżarzania, a jeszcze inne czerpią inspirację z działania ewolucji lub zachowań społecznych.

Jak można przeczytać w [Ner1], każda z proponowanych heurystyk sprawdza się w pewnych rodzajach zagadnień optymalizacji lepiej, a w innych gorzej. Ostatecznie

powstało twierdzenie, że wszystkie stochastyczne algorytmy optymalizacji mają średnio identyczną skuteczność w rozwiązywaniu potencjalnych problemów optymalizacji, do których mogą być zastosowane. Jednym wyjątkiem, który zdaje się łamać tę regułę są algorytmy memetyczne [Ner1], które stanowią hybrydę stochastycznych algorytmów heurystycznych z deterministycznymi algorytmami poszukiwania lokalnego. Łączą one zatem zdolność do *eksploracji* przestrzeni rozwiązań w poszukiwaniu *basenów atrakcji z udoskonalaniem*, będącym operacją odnajdywania minimów lokalnych w otoczeniu bieżących *rozwiązań kandydujących*.

Algorytm memetyczny, jako mechanizm *eksploracji*, wykorzystuje zazwyczaj jedną z heurystyk wymienionych wcześniej, algorytmów optymalizacji stochastycznych. Autor pracy zdecydował się na wykorzystanie w tej roli mechanizmów algorytmu ewolucyjnego [Ara1]. Wybór podyktowany został doświadczeniem autora w tej tematyce. Dalsze podrozdziały opisują szczegółowo projekt algorytmu memetycznego dedykowany do identyfikacji modelu EB(k,l).

#### 6.1 Założenia zadania identyfikacji

Przed przystąpieniem do opisu projektu algorytmu memetycznego konieczne jest zdefiniowanie założeń zadania identyfikacji.

Celem zadania identyfikacji jest estymacja wartości parametrów modelu EB(k,l), przy założeniu, że struktura tego modelu, opisana przez k i l jest znana lub założona z góry przez użytkownika. Pierwszorzędnym parametrem modelu jest współczynnik  $\beta_{kl}$  a drugorzędnym parametrem jest wariancja sygnału stymulacji  $\lambda^2$ .

Estymacja parametrów polega na znalezieniu takiej wartości argumentu  $\beta$  (zwanego dalej argumentem podstawowym funkcji kosztów *I*), dla której funkcja SMSE (zdefiniowana przez 4.8, z pomocą 4.9 i 5.1) osiągnie swoją minimalną wartość. W przyjętej w tej pracy metodyce badań ciągi czasowe poddawane analizie i identyfikacji powstały w wyniku symulacji procesu biliniowego o zadanej strukturze, współczynniku  $\beta_{kl}$  i wariancji sygnału stymulacji  $\lambda^2$ , w związku z tym argument podstawowy  $\beta = \arg(\min(I(\beta)))$  stanowić będzie ocenę współczynnika  $\beta_{kl}$ . Natomiast ocenę parametru drugorzędnego  $\lambda^2$  stanowić będzie wartość minimum funkcji kosztów  $I_m = \min(I(\beta))$ . Analizując 4.8, 4.9 i 5.1 można zauważyć, że funkcja SMSE przyjmuje tak naprawdę pięć argumentów  $I(k,l,y_i,w,\beta)$  a zadanie optymalizacji zdefiniowano jako poszukiwanie argumentu minimalizującego  $I(\beta)$ , Dodatkowo, należy zwrócić uwagę, że:

- parametry k i l, konieczne do wyliczenia błędu predykcji jednokrokowej, zgodnie z założeniem są znane przed identyfikacją i nie zmieniają się w jej trakcie. Można zatem pominąć je w formalnej liście argumentów funkcji kosztów. Na etapie realizacji komputerowej algorytmu są one oczywiście uwzględnione w stosownych funkcjach.
- wartości wyjścia ciągu czasowego y<sub>i</sub>, stanowiące podstawowe źródło informacji o procesie biliniowym można potraktować jako stałe. Możliwe jest to, ze względu na fakt, że identyfikacja modelu EB(k,l) odbywa się w pełni *offline*, i wszystkie wartości y<sub>i</sub> są brane pod uwagę w procedurze identyfikacyjnej jednocześnie. Można zatem pominąć je w formalnej liście argumentów funkcji kosztów.
- poziom nasycenia w potrzebny do stabilizacji modelu odwrotnego powinien być niezmienny w trakcie pojedynczego poszukiwania minimum funkcji kosztów. Z tego powodu można również uznać go za wartość stałą. Ponieważ jednak, zaproponowany dalej algorytm dokonuje zmian tego parametru w pewnych specyficznych iteracjach algorytmu będzie się on pojawiał na formalnej liście argumentów funkcji kosztów (kiedy będzie to konieczne).
- współczynnik β, będący argumentem podstawowym funkcji kosztów jest podmiotem zadania identyfikacji, dlatego też zawsze będzie on występował w formalnej liście argumentów funkcji kosztów.

Przeprowadzona analiza argumentów funkcji kosztów prowadzi do konkluzji, że z punktu widzenia algorytmu optymalizacji, realizującego zadanie identyfikacji przez pojęcie *rozwiązania kandydującego* rozumieć będziemy dowolną wartość argumentu podstawowego funkcji kosztów czyli wartość  $\beta_n$ , (gdzie n = 1, 2, ... stanowić będzie numer tego rozwiązania w *zbiorze dostępnych rozwiązań kandydujących*). Reszta argumentów funkcji kosztów jest traktowana jako wartości stałe.

### 6.2 Pojęcia podstawowe

W podrozdziale 6.1 zdefiniowano opis rozważanego zadania identyfikacji (optymalizacji). Algorytmy optymalizacji stochastycznej często stosują swoją własną reprezentację problemu optymalizacji, z użyciem pojęć zaczerpniętych ze zjawiska, które naśladują i dlatego wymagane jest wprowadzenie tych pojęć przed dalszym opisem działania algorytmu. Pojęcia, za pomocą których opisuje się zdanie optymalizacji w algorytmie memetycznym, zdefiniowane są poniżej:

- Osobnik stanowi reprezentację pojedynczego rozwiązania kandydującego w domenie algorytmu memetycznego. Składa się on z przynajmniej jednej cechy podlegającej usprawnieniu na skutek działania mechanizmów algorytmu (ewolucja, rozwój osobniczy).
- Cechy stanowią składniki osobnika. Cechy można podzielić na dwa zasadnicze typy: Typ pierwszy – cechy główne - stanową reprezentację (zakodowaną lub bezpośrednią) argumentów funkcji kosztów z domeny zadnia identyfikacji. W opisywanym w tej pracy algorytmie memetycznym występuje jedna taka cecha i jest ona bezpośrednią reprezentacją wartości argumentu β. Typ drugim typem są cechy pomocnicze, które stanowią zestaw dodatkowych informacji zakodowanych w osobniku, potrzebnych z punktu widzenia działania algorytmu memetycznego. Warto zaznaczyć, że cechy pomocnicze nie koniecznie muszą podlegać optymalizacji. W opisywanym w tej pracy algorytmie memetycznym pominięto stosowanie cech pomocniczych. W literaturze [Ara1] znaleźć można różne przykłady zastosowania cech pomocniczych.
- Populacja jest dosłownie zbiorem osobników w danym pokoleniu. Populację oznaczać będziemy przez P<sub>j</sub> gdzie j =0,1,2,... jest numerem pokolenia.
- Pokolenie jest określeniem iteracji algorytmu w domenie algorytmów memetycznych.
   Pokolenie zerowe (j = 0) oznacza warunki początkowe algorytmu (losowe) zwane też populacją początkową P<sub>0</sub>. Często ogranicza się maksymalną liczbę pokoleń w celu zapewnienia deterministycznego warunku końca algorytmu.
- *Transkrypcja* polega na przejściu z opisu w domenie algorytmu memetycznego do opisu w domenie zadania identyfikacji (cechy podstawowe zostają zamienione na argumenty funkcji kosztów) i odwrotnie. Stanowi ona operację wstępną do *ewaluacji*.
- Ewaluacja operacja określająca przystosowanie osobnika w domenie algorytmu memetycznego. Polega ona na bezpośrednim lub pośrednim wyznaczeniu wartości funkcji kosztów dla argumentu odczytanego poprzez transkrypcję danego osobnika na rozwiązanie kandydujące.

 Przystosowanie – stanowi wskaźnik jakości osobnika w domenie algorytmu memetycznego. Ze względu na sposoby realizacji różnych operatorów w algorytmach memetycznych najczęściej przeprowadza się maksymalizację przystosowania osobników, a zadanie identyfikacji polega na minimalizacji wartości funkcji kosztów. Implikuje to konieczność transformacji wartości funkcji kosztów na przystosowanie i odwrotnie. W opisywanym algorytmie przystosowanie określane będzie według wzoru:

$$F(\beta_{n,i}) = -I(\beta_{n,i}, w_r) + w_r^2.$$
(6.1)

Jak widać, *przystosowanie F* jest wartością przeciwną do wartości funkcji kosztów powiększoną o kwadrat poziomu nasycenia (z *r*-tej *rewolucji* – patrz niżej), który stanowi maksymalną wartość jaką przyjąć może funkcja kosztów. W ten sposób problem poszukiwania minimum funkcji kosztów zamieniany jest na maksymalizację *przystosowania* z wykluczeniem możliwości pojawienia się wartości ujemnych. Wartość przystosowania stanowi podstawę działania operatora *selekcji*.

- *Eksploracja* mechanizmy optymalizacji globalnej przeznaczone do poszukiwania nowych *basenów atrakcji*. W opisywanym algorytmie w skład mechanizmów eksploracji wchodzą: operator *mutacji* i operator *selekcji*.
- Basen atrakcji przez to pojęcie będziemy rozumieć obszar w przestrzeni przystosowania stanowiący bezpośrednie otoczenie lokalnego maksimum.
- Mutacja jeden z operatorów algorytmu memetycznego (zaczerpnięty z algorytmów ewolucyjnych). Mutacja polega na losowej zmianie cech wybranego osobnika i stanowi podstawową metodę dywersyfikacji populacji.
- Selekcja operator odpowiedzialny za wybór osobników z populacji j-1 do populacji jtej. Heurystyka wyboru osobników w trakcie selekcji bazuje na wartości przystosowania osobników. Generalnie im osobnik ma wyższe przystosowanie, tym większe jest prawdopodobieństwo jego wyboru do kolejnej populacji. W niektórych realizacjach algorytmów memetycznych selekcja też pełni funkcję ograniczającą liczbę osobników w populacji.
- Udoskonalenie polega na maksymalizacji potencjału danego osobnika. W praktyce, stosując algorytmy optymalizacji lokalnej, poszukuje się najbliższego maksimum lokalnego funkcji *przystosowania* w otoczeniu *osobnika*.
*Rewolucja* – jest nowatorskim operatorem zaproponowanym przez autora pracy
i polega na zmianie takich parametrów zadnia optymalizacji, które wpływają na kształt
funkcji przystosowania/funkcji kosztów. Operacja ta jest wykonywana w szczególnych
momentach i w opisywanym algorytmie polega na zmianie oszacowania poziomu
nasycenia w. Jak pokazano w podrozdziale 5.1.2, zmianę poziomu nasycenia powinno
się wykonać po identyfikacji, korzystając z uzyskanej oceny wariancji sygnału stymulacji. W algorytmie memetycznym możliwe jest aby wykonywać tę zmianę w trakcie
jego działania, co zostanie opisane szczegółowo w podrozdziale 6.3.4.

## 6.3 Ogólny schemat algorytmu

Ogólny schemat memetycznego algorytmu identyfikacji dla modelu EB(k,l) zaprezentowany jest na rysunku 6.1. Przedstawia on kolejność wykonywania poszczególnych operacji, które bardziej szczegółowo opisane są w dalszych podrozdziałach.

W ramach operacji wstępnych wykonuje się:

oszacowanie zakresu stabilności Z<sub>s</sub> modelu EB(*k*,*l*), który wstępnie przybliżony zostaje zakresem odwracalności wyznaczonym z (2.17):

$$Z_{\rm S} = \left\langle -\frac{1}{S_y}, \frac{1}{S_y} \right\rangle, \tag{6.2}$$

o szerokości:

$$||Z_{s}|| = \frac{1}{S_{y}} - (-\frac{1}{S_{y}}) = \frac{2}{S_{y}},$$
(6.3)

gdzie: Sy oznacza odchylnie standardowe z próby sygnału wyjściowego y<sub>i</sub>.

- generacja populacji początkowej (zbiór *rozwiązań kandydujących*) przez losowanie z wykorzystaniem rozkładu równomiernego, ograniczonego przez oszacowany zakres stabilności Z<sub>S</sub>.
- wstępne oszacowanie poziomu nasycenia dla funkcji SMSE jako  $w_0 = m_w S_y$ , gdzie  $m_w$  jest parametrem algorytmu.

*Wybór lidera* (najlepszego osobnika z populacji cechującego się najwyższym *przystosowaniem*). Odbywa się on na zasadzie porównania wszystkich osobników z bieżącej *populacji* z obecnym liderem  $\beta_{Lid,j-1}$  (z poprzedniej iteracji).

$$\beta_{Lid,j} = \arg(\max\{F(\beta_{1,j}), F(\beta_{2,j}), ..., F(\beta_{Lp,j}), F(\beta_{Lid,j-1})\})$$
(6.4)

Istnieją ponadto dwa warunki końca:

- jeśli algorytm wykona liczbę iteracji równą L<sub>Pok</sub> jest on bezwzględnie przerywany, a obecny *lider* jest wybierany jako rozwiązanie końcowe (warunek podstawowy).
- jeśli w kolejnych L<sub>S</sub> (limit stagnacji) iteracjach nie znajdzie się lepszego rozwiązania (nie nastąpi zmiana *lidera*), algorytm jest przerywany a obecny *lider* wybierany jest jako rozwiązanie końcowe (warunek alternatywny).



Rys. 6.1 Schemat algorytmu identyfikacji.

Warto napisać tu kilka słów o procesie orzekania o stagnacji. Na początku algorytmu licznik stagnacji jest zerowany ( $l_s = 0$ ). Kiedy w wyniku jednej pełnej iteracji nie znajdzie się lepszego rozwiązania niż bieżący *lider*, licznik ten zostaje zwiększony. Dzieje się tak jednak tylko w przypadku, kiedy położenie nowego *lidera* (argumentu funkcji kosztów) zmieni się w znaczący sposób, czyli będzie większe niż założona dokładność  $\delta_u$  (patrz 6.3.1). W ten sposób przyspiesza się zakończenie algorytmu.

To właśnie licznik stagnacji ( $l_s$ ) jest brany pod uwagę przy alternatywnym warunku końca (jako liczba iteracji bez poprawy) i w określaniu czy nastąpić ma *rewolucja* (patrz 6.3.4). Jest on też zerowany zawsze wtedy, kiedy nastąpi istotna zmiana *lidera*.

#### 6.3.1 Parametry sterujące wykonywaniem algorytmu

Jak większość algorytmów, algorytmy memetyczne mają swoje parametry wpływające na ich działanie. Mają one głównie wpływ na szybkość zbieżności algorytmu i jego obciążenie obliczeniowe. Generalnie, próba przyspieszania zbieżności algorytmu wiąże się z zwiększeniem obciążenia obliczeniowego, i odwrotnie, dążenie do ograniczenia obciążenia obliczeniowego negatywnie wpływa na szybkość jego zbieżności. Sprawia to, że dobór parametrów algorytmu mógłby sam w sobie stanowić problem optymalizacji. Jednakże, w problemie identyfikacji modelu EB(k,l), występuje znacznie zróżnicowanie kształtów funkcji kosztów, oraz operacje wykonywane podczas działania algorytmu obarczone są dużą losowością i dlatego nie wydaje się rozsądnym podejmowanie próby takiej optymalizacji. W rezultacie parametry algorytmu dobiera się zazwyczaj intuicyjnie i poza nielicznymi wyjątkami, ich wartości nie są krytyczne dla powodzenia optymalizacji.

Poniższa lista zawiera parametry algorytmu memetycznego, wraz z krótkimi opisami ich przeznaczenia:

 $L_p$  – liczebność *populacji* – parametr określający liczbę *osobników* przetwarzanych w trakcie działania algorytmu. Im jest większy, tym więcej punktów przestrzeni rozwiązań jest sprawdzane w każdej iteracji (*pokoleniu*) oraz rośnie obciążenie obliczeniowe algorytmu. Intuicyjnym jest fakt, że im więcej punktów sprawdzamy, tym większą szansę mamy na znalezienie właściwego rozwiązania (minimum globalnego). Warto podkreślić jednak, że ponieważ *udoskonalanie* często skupia wiele *osobników* w tym samym minimum lokalnym, zbyt liczna *populacja* może zawierać liczne identyczne lub bardzo bliskie sobie *osobniki*. Oznacza to, że zbyt liczna *populacja* nie koniecznie usprawnia dzianie algorytmu, ale na pewno zwiększa jego obciążenie obliczeniowe.

 $L_{Pok}$  – maksymalna liczba *pokoleń* – odpowiada za twardy warunek końca algorytmu ograniczając liczbę iteracji (*pokoleń*) algorytmu. Parametr jest bardzo istotny, gdyż wymusza zakończenie algorytmu w skończonym czasie. W sytuacji, kiedy uruchamiamy algorytm pojedynczo, w celu uzyskania możliwie najlepszego wyniku, warto ustawić ten parametr na dużą wartość (np.  $L_{Pok}$  = 200), aby nie przerywać identyfikacji zbyt wcześnie. W przypadku, kiedy mamy do wykonania bardzo dużą liczbę niezależnych identyfikacji, warto jest zredukować maksymalną liczbę *pokoleń*, aby skrócić czas wykonania obliczeń. Narażamy się jednak na zwiększone prawdopodobieństwo błędnej identyfikacji.  $L_{\rm S}$  - limit stagnacji – parametr sterujący alternatywnym warunkiem końca algorytmu. Im większy tym więcej iteracji, nieowocujących znalezieniem lepszego rozwiązania, musi zostać wykonanych. Jego niskie wartości przyspieszają zbieżność algorytmu, ale mogą być powodem tzw. *przedwczesnej zbieżności*, która objawia się zakończeniem optymalizacji zanim znalezione zostanie minimum globalne. Jak w przypadku poprzedniego parametru, dobór wartości jest pewnym kompromisem pomiędzy czasem poszukiwania a prawdopodobieństwem sukcesu i powinien być dokonywany w zależności od przeznaczenia wyniku optymalizacji.

 $W_{\rm R}$  – wskaźnik *rewolucji* – określa po ilu iteracjach stagnacji wykona się *rewolucja*. Z oczywistych względów powinna zachodzić zależność  $W_{\rm R} < L_{\rm S}$ , chyba, że nie chcemy aby rewolucja się odbywała. Jeśli chodzi o dolne ograniczenie wartości  $W_{\rm R}$  to należy mieć na uwadze, aby nie wykonywać rewolucji zbyt często. Jeżeli algorytm utknąłby w minimum lokalnym, dla którego wartość funkcji kosztów jest zbyt wysoka, kolejne oszacowania poziomu nasycenia mogą nie być zbieżne do wartości optymalnej  $w = 3\lambda$ . W efekcie może uniemożliwić to pojawienie się minimum globalnego w położeniu odpowiadającemu oryginalnej wartości współczynnika modelu.

 $m_{\rm w}$  – mnożnik poziomu nasycenia – wartość odpowiedzialna za oszacowanie początkowego poziomu nasycenia potrzebnego do wyliczenia funkcji kosztów. Zgodnie z rozumowaniem przedstawionym w poprzednich rozdziałach zaleca się aby  $m_{\rm w}$  = 2. Są jednak przypadki, kiedy inne wartości są nie tylko wskazane ale i krytyczne dla działania algorytmu. Wpływ tego parametru na zbieżność estymacji można zauważyć głównie dla krótkich ciągów czasowych.

 $p_{\rm m}$  – prawdopodobieństwo *mutacji* – określa z jakim prawdopodobieństwem dany osobnik będzie podlegał mutacji. Im  $p_{\rm m}$  większy, tym więcej nowych punków przestrzeni rozwiązań zostanie przeszukanych, lecz zwiększy to także obciążenie obliczeniowe algorytmu. Ze względu na to, że mutacja jest jedyną operacją odpowiedzialną za dywersyfikację populacji i "wyrzucanie" osobników z minimów lokalnych w algorytmie memetycznym, zaleca się aby wartość tego parametru była wysoka (bliższa 1 niż 0).

 $\sigma_{\rm m}$  – odchylenie standardowe *mutacji* – parametr odpowiedzialny za określenie "siły" działania mutacji. W związku z tym, że mutacja odbywa się z użyciem rozkładu normalnego Gaussa konieczne jest wprowadzenie tego parametru. Łatwo jest określić jego wartość. Jeśli parametr ten będzie zbyt mały, mutacja może nie "rozrzucać" wystarczająco

osobników po przestrzeni rozwiązań, aby te pozwalały na odnalezienie nowych minimów lokalnych (populacja utknie w co większych basenach atrakcji). Występowanie nasycenia w funkcji celu ogranicza jej maksymalną wartość (minimalne przystosowanie), co w efekcie sprawia, że kształt funkcji kosztów "wypłaszcza" się kiedy  $|\beta| \rightarrow \infty$  (przypomina niekończący się płaskowyż). Przyjęcie zatem zbyt dużej wartości  $\sigma_m$  nie powinno stanowić zagrożenia dla znalezienia minimum globalnego. Można powiedzieć więcej, że silne zdywersyfikowanie populacji jest korzystne dla poszukiwania minimum globalnego. Autor zaleca, aby  $\sigma_m = Z_s$ . Na początku algorytmu  $Z_s$  odpowiada zakresowi odwracalności, tak więc dla osobnika odpowiadającego zerowej wartości argumentu, ok. 65% nowych osobników pojawi się w zakresie odwracalności a pozostałe ok. 35% eksplorować będzie przestrzeń poza nim. Nie wydaje się koniecznym zmienianie tego parametru w trakcie działania algorytmu (np. podczas *rewolucji*, gdzie można ponownie oszacować zakres stabilności), lecz również nic nie stoi na przeszkodzie, aby to robić. W literaturze [Ara1] można znaleźć przykłady algorytmów ewolucyjnych, gdzie ten parametr nie tylko ulega zmianie, ale podlega też optymalizacji jak cechy podstawowe.

 $m_{\rm D}$  – mnożnik początkowego otoczenia – parametr wykorzystywany podczas optymalizacji lokalnej. Pozwala on na wyliczenie początkowego otoczenia  $D_1$  argumentu, w którym poszukuje się maksimum przystosowania (minimum funkcji celu). Otoczenie  $D_1$  jest wyliczane jako:

$$D_1 = m_{\rm D} * Z_{\rm S} \tag{6.5}$$

i autor proponuje, aby  $m_{\rm D} = 0,1$ ;

 $\delta_u$  - dokładność *udoskonalania* – parametr określa, z jaką precyzją poszukuje się minimum lokalnego w czasie optymalizacji lokalnej. Oczywistością jest, że im wartość  $\delta_u$  jest mniejsza, tym dłużej może trwać poszukiwanie minimum lokalnego przez co rośnie obciążenie obliczeniowe algorytmu. Z drugiej strony, wartość ta ma także wpływ na precyzję algorytmu i może mieć kluczowe znaczenie, kiedy minimum globalne ma kształt "wąskiej szpilki". Dokładność dotyczy argumentu funkcji kosztów a nie jej wartości.

# 6.3.2 Mechanizmy poszukiwania globalnego – eksploracja

Na mechanizmy *eksploracji* składają się dwa operatory ewolucyjne *selekcja* i *mutacja*. W proponowanym algorytmie memetycznym najpierw następuje *selekcja* wybierająca nową *populację*, faworyzując najbardziej obiecujące rozwiązania, a potem *mutacja* dokonująca losowego "rozrzucenia" *osobników* po przestrzeni rozwiązań. Warto dodać w tym miejscu, że ponieważ *mutacja* tworzy nowe *osobniki* na zasadzie "klonuj i zmutuj", czyli dokłada nowe *osobniki* do bieżącej *populacji*, tworząc *populację rozszerzoną* (o zmiennej liczebności  $L_j$ ), *selekcja* wybiera dokładnie  $L_p$  *osobników* z *populacji rozszerzonej*, aby utrzymać liczebność *populacji* w przyjętym ograniczeniu. *Populacja rozszerzona* powstała na skutek *mutacji* nie może przekroczyć  $L_j = 2L_p$ .

Drugą ważną kwestią wartą komentarza w tym miejscu jest rezygnacja z operacji *krzyżowania*, która stanowi podstawę algorytmów ewolucyjnych. W algorytmie memetycznym operacja *udoskonalania* ma tendencję do skupiania populacji w minimach lokalnych. W związku z tym, że operator *krzyżowania* w tym przypadku także pełniłby funkcję skupiania populacji w obrębach basenów atrakcji, używanie go wraz z *udoskonalaniem* jest zbytecznym dublowaniem funkcjonalności. *Udoskonalanie* ponadto jest zdecydowanie efektywniejszą operacją z punktu widzenia działania całego algorytmu i głównym atutem algorytmu memetycznego.

Poniżej, szczegółowo opisano operatory eksploracji:

selekcja – operacja selekcji wykonywana jest podobnie do klasycznego algorytmu "koła fortuny" [Ara1]. W pierwszym etapie następuje przepisanie osobnika będącego bieżącym liderem populacji P<sub>j</sub> do nowej populacji P<sub>j+1</sub> i usunięcie go z populacji P<sub>j</sub> (liczebność populacji ulega zmianie: L<sub>j</sub> = L<sub>j</sub> - 1). W ten sposób zapewniamy zachowanie obecnego najlepszego rozwiązania. W kolejnym kroku następuje przypisanie do każdego osobnika z populacji P<sub>j</sub> wartości prawdopodobieństwa selekcji p<sub>n</sub> (n = 1,2...L<sub>j</sub>) w zależności od odpowiadającej mu wartości przystosowania:

$$p_n = \frac{F(\beta_{n,j})}{\sum_{m=1}^{L_j} F(\beta_{m,j})}$$
(6.6)

Na bazie prawdopodobieństw sekcji  $p_n$  tworzy się dystrybuantę selekcji:

$$d_n = \sum_{d=1}^n p_d \tag{6.7}$$

Po tym etapie losuje się dokładnie  $L_p$  - 1 liczb losowych  $r_m$  ( $m = 1, 2, ..., L_p$ -1) z rozkładu równomiernego o zakresie (0,1]. Następnie każda wartość  $r_m$  jest porównywana z kolejnymi, rosnącymi wartościami dystrybuanty  $d_n$  i do *populacji*  $P_{j+1}$  wybierany jest pierwszy (n-ty) osobnik spełniający zależność  $r_m < d_n$ . W ten sposób powstaje nowa *populacja*  $P_{j+1}$  o dokładnie  $L_p$  *osobnikach* wybranych losowo z faworyzowaniem *osobników* o lepszym *przystosowaniu*.

*mutacja* – operacja *mutacji* wykonywana jest przez dodanie do *cechy* podstawowej wybranego do *mutacji osobnika* liczby losowej z rozkładu normalnego N(β<sub>n,j</sub>, σ<sub>m</sub>). Dla każdego *osobnika* losuje się wartość r<sub>n</sub> (n = 1,2,...L<sub>p</sub>) z rozkładu równo-miernego o zakresie (0,1]. Następnie porównuje się te wartości z prawdopodobieństwem mutacji p<sub>m</sub> i jeżeli dla danego *osobnika* zachodzi relacja r<sub>n</sub> < p<sub>m</sub>, to *osobnik* ten poddawany jest *mutacji* i dodawany do *populacji* P<sub>j+1</sub>.

## 6.3.3 Mechanizm poszukiwania lokalnego – udoskonalanie

Kwintesencją algorytmu memetycznego jest optymalizacja lokalna odbywająca się na wszystkich lub tylko wybranych *osobnikach z populacji* w danej iteracji (*pokolenia*). Rolą *udoskonalania*, jak często nazywa się tą operację w nomenklaturze algorytmów memetycznych, jest eksploatacja lokalnych basenów atrakcji. W ten sposób możliwe jest określenie położenia i wartości optimów lokalnych występujących w przestrzeni rozwiązań. Najlepsze z nich wybierane jest jako optimum globalne i stanowi rozwiązanie zadnia optymalizacji do czasu znalezienia lepszego kandydata.

W rozpatrywanym w niniejszej pracy problemie optymalizacji mamy jeden argument funkcji celu, który podlega optymalizacji, co powoduje że zadanie jest wystarczająco proste obliczeniowo aby można pozwolić sobie na optymalizację lokalną dla każdego *osobnika* w *populacji* i wciąż uzyskiwać rozwiązana w rozsądnym czasie. W bardziej złożonych zagadnieniach, jak chociażby identyfikacja modeli o wielu współczynnikach, zaleca się aby optymalizacja lokalna odbywała się tylko dla wybranych *osobników*, gdyż stanowić wtedy będzie główne źródło obciążenia obliczeniowego.

Sama operacja *udoskonalania* w proponowanym algorytmie przebiega według następującego schematu (w poniższych wzorach *i* określa iterację optymalizacji lokalnej):

1) Wybór osobnika do optymalizacji:

$$\beta_{\text{OL},1} = \beta_{n,j} \,. \tag{6.8}$$

2) Wyznaczenie punktów sąsiedztwa (górnego i dolnego):

$$\beta_{g} = \beta_{OL,i} + D_{i};$$
  

$$\beta_{d} = \beta_{OL,i} - D_{i}.$$
(6.9)

- 3) Wyliczenie wartości przystosowania dla  $\beta_g$  i  $\beta_d$
- 4) Wybór punktu o maksymalnym przystosowaniu:

$$\beta_{\mathrm{OL},i+1} = \arg(\max(F(\beta_{\mathrm{d}}), F(\beta_{\mathrm{OL},i}), F(\beta_{\mathrm{g}}))).$$
(6.10)

5) Jeżeli  $\beta_{OL,i+1} = \beta_{OL,i}$  to zmienia się wartość  $D_i$  wedle wzoru:

$$D_{i+1} = 0,617D_i. (6.11)$$

W innym wypadku przywraca się wartość  $D_i = D_1$  zgodnie z (6.5).

6) Powtarza się punkty 2) do 5) aż:

$$\left|\beta_{\mathrm{OL},i+1} - \beta_{\mathrm{OL},i}\right| < \delta_{\mathrm{u}} \,. \tag{6.12}$$

7) Nowa wartość cechy podstawowej osobnika wynosi:

$$\beta_{n,i} = \arg(F(\beta_{\text{OL},i+1})). \tag{6.13}$$

### 6.3.4 Adaptacja poziomu nasycenia – rewolucja

Po określonej liczbie iteracji ( $W_R$ ), które nie przyniosły lepszego rozwiązania następuje operacja *rewolucji*, podczas której ponownemu oszacowaniu następuje poziom nasycenia. Do oszacowania wartości poziomu nasycenia po *r*-tej *rewolucji*, oznaczonej jako  $w_r$  (r = 1, 2, ...), wykorzystuje się wartość funkcji celu wyznaczoną dla bieżącego *lidera*. Dla podniesienia skuteczności oszacowania wariancji sygnału stymulacji z ciągu ocen  $\hat{e}_i$  usuwa się wartości nasycone zgodnie z 5.9 i wylicza się następnie wartość  $w_r$  wedle zależności:

$$w_r = 3\sqrt{I(\beta_{\text{Lid},j}, w_{r-1})}.$$
 (6.14)

Przykłady praktycznego użycia opisanego algorytmu memetycznego, wyniki badań statystycznych analizujących jego skuteczność oraz porównanie go do innych metod identyfikacji przedstawione są w rozdziale 7 tej pracy. Ponadto zamieszczono tam prosty przykład praktycznego zastosowania identyfikacji modeli nieodwracalnych EB(k,l).

# Rozdział 7 Przykłady identyfikacji

Niniejszy rozdział zawiera przykłady identyfikacji modeli EB(k,l) wraz z wizualizacją działania algorytmu. We wszystkich, poza jednym szczególnym przypadkiem, identyfikacja modelu EB(k,l) odbywała się dla ciągów czasowych będących procesami biliniowymi o zadanych parametrach. Dzięki temu możliwe jest porównanie wyników identyfikacji (ocen parametrów) z rzeczywistymi parametrami modelu, na podstawie, którego powstał dany ciąg czasowy.

# 7.1 Sposób prezentacji wyników

Na potrzeby wizualizacji działania algorytmu identyfikacji przygotowano specjalne wykresy dokumentujące jej przebieg. Pierwszy typ wykresu (Rys. 7.1 i 7.2) zawiera:

- a) Przybliżony kształt funkcji kosztów dla danej iteracji (pokolenia), zaznaczony jest **niebieska linią** ciągłą (bieżący kształt funkcji kosztów) oraz **niebieską linią** przerywaną (kształt funkcji kosztów z przedostatniej rewolucji - na rysunku 7.2). Wizualizacja funkcji kosztów powstała na skutek wyznaczania wartości funkcji kosztów, zmieniając współczynnik  $\beta_{kl}$ , z krokiem  $\Delta\beta_{kl} = 10^{-4}$ , w zakresie wizualizacji, trzykrotnie szerszym od oszacowanego wstępnie zakresu stabilności.
- b) Maksymalną wartość funkcji kosztów, oznaczono cienką poziomą czarną linią u góry wykresu. Wartość ta wynosi w<sup>2</sup>.
- c) Szacowany zakres stabilności, oznaczony jest cienkimi przerywanymi, pionowymi czerwonymi liniami. Zakres ten w pierwszych iteracjach algorytmu przybliżony jest zakresem odwracalności, a po rewolucji, wyliczany jest na podstawie oszacowania wariancji sygnału stymulacji.
- d) Szacowany zakres odwracalności, oznaczony jest cienką, pionową, przerywaną,
   czarną linią. Wyznaczany jest na podstawie wariancji wyjścia procesu.

- e) Prawidłowy zakres stabilności, oznaczony jest ciągłymi, cienkimi czerwonymi liniami. Jest wyznaczony na podstawie oryginalnej wariancji sygnału stymulacji i dostępny jest tylko w ramach badań symulacyjnych, gdzie oryginalne parametry modelu są znane.
- f) Położenie oryginalnego współczynnika modelu, oznaczone jest cienką przerywaną różową linią. Jak poprzednio (pkt. e), informacja ta jest tylko dostępna w badaniach symulacyjnych.
- g) Położenie bieżącego lidera, oznaczone jest czarnym kółkiem.
- h) Ocenę położenia minimum globalnego, oznaczono czerwonym kółkiem. Wyznaczona jest ona jako minimalna wartość ze zbioru próbkowanych wartości funkcji kosztu.



Wstępna wizualizacja funkcji kosztów

Rys. 7.1 Wstępna wizualizacja funkcji kosztów.

Porównując rysunki 7.1 i 7.2 można zauważyć, że po rewolucji:

- Nastąpiła zmiana kształtu funkcji kosztów (a).
- Nastąpiła zmiana maksymalnej wartości funkcji kosztów (b).
- Zmieniła się ocena zakresu stabilności (w tym przykładzie prawie pokryła się ona z prawidłowym zakresem stabilności (c,e)).

 Zmieniło się położenie lidera (w tym przykładzie pokryło się ono z minimum globalnym uzyskanym wskutek próbkowania funkcji kosztów (g, h)).



Rys. 7.2 Wizualizacja funkcji kosztów po rewolucji.

Drugi typ wykresów (Rys.7.3) zawiera:

- a) Oryginalną wartość współczynnika modelu, oznaczoną przerywaną czarną linią.
   Wartość ta jest znana tylko w badaniach symulacyjnych.
- b) Historię zmian oceny współczynnika modelu, oznaczoną ciągłą niebieską linią. Kółka na wykresie oznaczają chwilę wystąpienia rewolucji.
- c) Oryginalną wartość wariancji sygnału stymulacji, oznaczoną przerywaną czerwoną linią (wartość z próby) i przerywaną czarną linią wartość zadaną w generatorze.
- d) Ocenę wariancji sygnału stymulacji, oznaczoną ciągłą niebieską linią. Ocena ta wyrażona jest przez wartość oceny minimum globalnego funkcji kosztów dla bieżącego pokolenia.

- e) Skorygowaną ocenę wariancji sygnału stymulacji, oznaczoną przerywaną niebieską linią. Wartość ta wyznaczona jest jako wariancja ocen sygnału stymulacji (dla obecnego lidera) z pominięciem wartości nasyconych.
- f) Idealną wartość ograniczenia, oznaczoną przerywaną czarną linią. Wartość tę wyznaczono na bazie oryginalnego zakresu zmienności (rozstępu) sygnału stymulacji.
- g) Pożądaną wartość ograniczenia, oznaczoną przerywaną czerwoną linią. Wartość ta wyznaczona została zgodnie z warunkiem  $w = 3\lambda$ .
- h) Bieżącą wartość ograniczenia, oznaczoną ciągłą niebiską linią. Organicznie to wyznaczane jest w trakcie rewolucji.
- i) Przebieg wyjścia ciągu czasowego  $y_i$ , oznaczony zgodnie z legendą na wykresie.
- j) Przebieg wyjścia modelu z identyfikacji, oznaczony zgodnie z legendą na wykresie.
- k) Przebiegi oryginalnego sygnału stymulacji e<sub>i</sub>, oznaczony zgodnie z legendą na wykresie.
- Przebieg ocen sygnału stymulacji dla współczynnika modelu odpowiadającego najlepszemu rozwiązaniu z populacji początkowej, oznaczony zgodnie z legendą na wykresie.
- m) Przebieg ocen sygnału stymulacji dla współczynnika modelu odpowiadającego najlepszemu rozwiązaniu po zakończeniu algorytmu, oznaczony zgodnie z legendą na wykresie.
- n) Wartości ograniczenia dla jego początkowego oszacowania (2*S<sub>y</sub>*), oznaczone zgodnie z legendą na wykresie.
- o) Wartości ograniczenia dla końcowego oszacowania parametrów modelu, oznaczone zgodnie z legendą na wykresie.

Warto podkreślić, że na rysunku 7.3 oryginalna wartość wariancji sygnału stymulacji z próby i zadana jej wartość w generatorze pokrywają się (c). Nie zawsze jednak takie zdarzenie ma miejsce.

W kolejnych podrozdziałach (7.1.1-7.1.3) wyniki identyfikacji i ich analiza przeprowadzone będą na podstawie wykresów podobnych do tych przedstawionych na rysunkach 7.1-7.3. Numeryczne wyniki estymacji podane będą zgodnie z tabelą 7.1.



Rys. 7.3 Wyniki identyfikacji

Tabela7.1 Wyniki identyfikacji (szablon)

Parametr:	$oldsymbol{eta}_{kl}$	$\hat{oldsymbol{eta}}_{\scriptscriptstyle kl}$	$\lambda^2$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{\lambda}_A^2$	W <sub>3</sub>	W <sub>p</sub>	$w_k$
Wartość:								

Oznaczenia przyjęte w tabeli 7.1 mają następujące znaczenie:

- $\beta_{kl}$  rzeczywista wartość współczynnika modelu.
- $\hat{\beta}_{kl}$  ocena współczynnika modelu uzyskana w wyniku estymacji.
- λ<sup>2</sup> rzeczywista wariancja sygnału stymulacji, uzyskana w trakcie symulacji procesu biliniowego.
- $\hat{\lambda}^2$  ocena wariancji sygnału stymulacji wyznaczona jako wartość minimum globalnego funkcji kosztów.
- $\hat{\lambda}_{A}^{2}$  ocena wariancji sygnału stymulacji wyznaczona na zbiorze A (tylko z uwzględnieniem nienasyconych ocen sygnału stymulacji – zgodnie z (5.9)).
- $w_{3\lambda}$  pożądana wartość ograniczenia ( $w = 3\lambda$ ).
- $w_p$  początkowa wartość ograniczenia wyznaczona jako  $w = 2S_y$ .

•  $w_k$  – końcowa wartość ograniczenia wyznaczona w ostatniej rewolucji.

Dla wszystkich analizowanych przykładów użyto tego samego zestawu parametrów algorytmu memetycznego:

- Liczebność populacji  $L_p = 20$ .
- Maksymalna liczba pokoleń  $L_{Pok} = 50$ .
- Limit stagnacji  $L_{\rm S} = 6$ .
- Wskaźnik rewolucji  $W_{\rm R} = 3$ .
- Mnożnik poziomu nasycenia  $m_w = 2$  (wartość ta jednak okazyjnie jest zmieniana).
- Prawdopodobieństwo mutacji  $p_{\rm m} = 0.5$ .
- Odchylenie standardowe mutacji  $\sigma_{\rm m} = 2/S_y$ .
- Mnożnik początkowego otoczenia  $m_D = 0, 1$ .
- Dokładność udoskonalania  $\delta_u = 10^{-6}$ .

## 7.2 Identyfikacja modeli odwracalnych

Prezentację działania algorytmu rozpoczęto od przykładów identyfikacji modeli odwracalnych, które można z powodzeniem identyfikować za pomocą innych metod. Jak zostało to pokazane na odpowiednich wykresach, kształty funkcji kosztów dla modeli odwracalnych są rzadko multimodalne, zatem odnalezienie minimum globalnego nie stanowi w tych przypadkach większego wyzwania. Obserwuje się natomiast, wyraźny rozrzut wyników identyfikacji (wokół wartości oryginalnych) spowodowany znacznym udziałem składowej losowej w procesie biliniowym.

Jako pierwszy przykład, wybrano proces biliniowy powstały na skutek symulacji modelu EB(1,2) o współczynniku  $\beta_{12} = 0,1$  i zadanej wariancji sygnału stymulacji  $\lambda^2 = 1$  (uwaga – wariancja sygnału uzyskanego z generatora może się nieznacznie różnić od tej zadanej w generatorze). Procedurę identyfikacji uruchomiono dla parametrów struktury zgodnych z oryginałem, a rysunek 7.4a przedstawia wizualizację funkcji kosztów na początku i w tra-kcie działania algorytmu.



Analizując wykres na rysunku 7.4a można zauważyć, że kształt funkcji kosztów jest wypukły (za wyjątkiem nieznacznych minimów lokalnych poza zakresem stabilności) oraz zakres stabilności modelu został już na tym etapie prawidłowo oszacowany. Po rewolucji, mającej miejsce po 13 pokoleniu (Rys. 7.4b), zwiększeniu uległy wartości funkcji kosztów w całej jej dziedzinie oraz zawyżeniu uległ szacowany zakres stabilności. Kolejne rewolucje (Rys. 7.4c i d) ponownie przyczyniły się do zwiększenia wartość funkcji kosztów w całej dziedzinie, jednak błąd kolejnych oszacowań zakresu stabilności wyraźnie zmalał.

Powodem zaburzeń w oszacowaniu zakresu stabilności modelu jest fakt, że oszacowanie to jest dokonywane w trakcie rewolucji, kiedy następuje zmiana kształtu funkcji kosztów. W rezultacie, argument funkcji kosztów będący liderem przed rewolucją, nie koniecznie musi nim być po jej przeprowadzeniu i wartość funkcji kosztów, dla tego argumentu po rewolucji, może się znacząco zmienić. A to właśnie ona jest podstawą do szacowania nowego zakresu stabilności.

Na rysunku 7.5 widać prawie zupełny zanik obciążenia oceny wariancji sygnału stymulacji. Ponadto wizualizacja przebiegu sygnału stymulacji i przebiegu jego ocen dla

rozwiązania końcowego nie zawiera istotnych obcięć prawidłowych ocen sygnału stymulacji (za wyjątkiem jednego nieznacznego ok. 20 próbki – powód zaniżenia  $\hat{\lambda}_{A}^{2}$ ). Tak więc, zmiany zaobserwowane na skutek działania kolejnych rewolucji mimo, że wydają się intuicyjnie niepoprawne (wzrost wartości funkcji kosztów), przyniosły w rezultacie poprawę wyników identyfikacji.



Rys. 7.5 Wyniki końcowe identyfikacji modelu odwracalnego o  $\beta_{12} = 0.2$ .

Parametr:	$oldsymbol{eta}_{kl}$	$\hat{oldsymbol{eta}}_{\scriptscriptstyle kl}$	$\lambda^2$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{\lambda}_A^2$	W <sub>3</sub> <sup>λ</sup>	$W_p$	$w_k$
Wartość:	0,2	0,1412	0,9949	0,9923	0,9916	2,9923	2,0114	2,9874

Tabela 7.2 Końcowe wyniki estymacji dla pierwszego przykładu modelu odwracalnego

Widocznemu zmniejszeniu uległo obciążenie oceny współczynnika  $\beta_{kl}$ . Mimo, że końcowa wartość tej oceny w dalszym ciągu znacząco odbiega od oryginalnej wartości  $\beta_{kl}$ , pozostałe wyniki pozwalają wnioskować, że jest ona poprawna dla tej konkretnej trajektorii.

Warto zauważyć, że nowe oszacowanie ograniczenia, uzyskane na skutek kolejnych rewolucji jest tylko nieznacznie zaniżone w stosunku do pożądanego, co nie stanowi w tym przypadku zagrożenia obciążeniem wyników identyfikacji.

Kolejny przykład identyfikacji modelu odwracalnego, przeprowadzono na ciągu pochodzącym z symulacji modelu EB(1,2) o  $\beta_{12} = 0,6$  i zadanej wariancji sygnału stymulacji  $\lambda^2 = 1$ . Wizualizacja funkcji kosztów zaprezentowana jest na rysunku 7.6.



Z analizy wykresów na rysunku 7.6 można wysnuć podobne wnioski jak w poprzednim przykładzie (dla  $\beta_{kl} = 0.2$ ). Tym razem, funkcja kosztów ma bardziej stromy kształt i położenie minimum globalnego wydaje się bardziej wyraźne. Ponadto wstępne oszacowanie zakresu stabilności jest znacząco zaniżone i wraz z kolejnymi rewolucjami zbliża się do prawidłowego zakresu stabilności.

Ponownie, analiza wyników końcowych i historii zmian ocen parametrów (Rys. 7.7) pokazuje, że kolejne rewolucje przyczyniają się do zmniejszenia obciążenia ocen wariancji sygnału stymulacji, a ograniczenie uzyskane w ostatniej rewolucji jest także znacznie bliższe docelowemu.

Jedyne wątpliwości jakie mogą się nasunąć po analizie historii zmian ocen współczynnika  $\beta_{kl}$  dotyczą faktu, że przez kilka iteracji (pokoleń) wartość tego parametru było obarczona mniejszym błędem niż wartość końcowa. Nie należy jednak uznać tego za błąd, gdyż ocena wariancji sygnału stymulacji była w tym samym czasie obarczona błędem znacznie większym. Jako ciekawostkę warto także pokazać, że wynik identyfikacji dla tej samej trajektorii, uzyskany algorytmem RMNK (zmodyfikowanym do minimalizacji funkcji SMSE i ogra-

niczeniu  $w = 3\lambda$ ) wyniósł  $\hat{\beta}_{kl} = 0,5161$ . Zatem błąd estymacji uzyskany algorytmem memetycznym jest znacznie mniejszy niż w przypadku konkurencyjnej metody identyfikacji.



Rys. 7.7 Wyniki końcowe identyfikacji modelu odwracalnego o  $\beta_{12} = 0.6$ .

Tabela 7.3 Końcowe wyniki estymacji dla drugiego przykładu modelu odwracalnego

Parametr:	$oldsymbol{eta}_{kl}$	$\hat{oldsymbol{eta}}_{kl}$	$\lambda^2$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{\lambda}_A^2$	W <sub>3</sub> <sup>λ</sup>	W <sub>p</sub>	w <sub>k</sub>
Wartość:	0,6	0,5964	0,9576	0,9621	0,9305	2,9357	2,3291	2,8939

Podsumowując, zaprezentowane przykłady pokazują poprawność działania algorytmu memetycznego w identyfikacji odwracalnych modeli EB(k,l). Obserwacja ta poddana jednak będzie dokładniejszej weryfikacji w kolejnym, ósmym rozdziale pracy, gdzie podane będą statystyczne wyniki identyfikacji uzyskane z dużej próby symulowanych trajektorii.

# 7.3 Identyfikacja modeli nieodwracalnych

O ile identyfikacja odwracalnych modeli EB(k,l) nie stanowi większego wyzwania i możliwa jest z wykorzystaniem licznych algorytmów, identyfikacja modeli nieodwracalnych nie była zadaniem dotychczas rozwiązanym. Na kolejnych stronach tego podrozdziału, zaprezentowane zostaną przykłady identyfikacji nieodwracalnych modeli EB(k,l), z wykorzystaniem zaproponowanego w rozdziałe 6 algorytmu memetycznego.

Jako pierwszy przykład, pokazano identyfikację dla ciągu czasowego powstałego w skutek symulacji nieodwracalnego modelu EB(1,2). Oryginalny współczynnik  $\beta_{kl} = 0,9$  i zdana wartość wariancji sygnału stymulacji  $\lambda^2 = 1$ . Wizualizacja funkcji kosztów zamieszczona jest na rysunku 7.8.



a)wstępna; b) końcowa, po rewolucji (pokolenie 4).

Tym razem, kształt funkcji kosztów (Rys. 7.8a) jest bardziej skomplikowany niż dla przykładów odwracalnych. Pierwsza rzecz, która zwraca uwagę, to liczba minimów lokalnych w zakresie stabilności modelu. Nie ma wątpliwości, że algorytmy gradientowe mogą być w takiej sytuacji narażone na zbieżność do nieprawidłowych rozwiązań. Ponadto minimum odpowiadające oryginalnej wartości współczynnika ( $\beta_{kl} = 0.9$ ) nie wydaje się być minimum globalnym, choć może to być efekt zbyt małej rozdzielczości próbkowania przy wizualizacji kształtu funkcji kosztów.

Rewolucja, mająca miejsce po 4 pokoleniu (Rys. 7.8b) wyraźnie obniżyła wartości funkcji kosztów w całej jej dziedzinie. Ponadto wyraźnie jest teraz widoczne minimum globalne w położeniu odpowiadającym oryginalnemu  $\beta_{kl}$ . Warto zauważyć też, że szacowany zakres stabilności niemal idealnie pokrył się z prawdziwym zakresem stabilności modelu.

Analiza końcowych wyników identyfikacji oraz historii zmian ocen parametrów modelu (Rys. 7.9), pozwala zauważyć, że prawidłowe rozwiązanie zostało już osiągnięte w pierwszej iteracji algorytmu. Potwierdza to przypuszczenie, że minimum globalne było niewidoczne na wstępnej wizualizacji (Rys. 7.8a) funkcji kosztów ze względu na zbyt małą rozdzielczość próbkowania. Pokazuje to, jak wąskie może być minimum globalne funkcji kosztów, i mimo to, algorytm memetyczny potrafi je odnaleźć już nawet w pierwszej iteracji.

Kolejna obserwacja dotyczy historii zmian ocen parametrów oraz oszacowania ograniczenia. Można zauważyć, że na skutek działania algorytmu uzyskano niemal nieobciążone wartości parametrów, a oszacowanie poziomu nasycenia prawie idealnie pokryło się z pożądanym ( $w = 3\lambda$ ). Warto też zwrócić uwagę na dokładność, z jaką udało się dokonać oceny poszczególnych wartości sygnału stymulacji.



Rys. 7.9 Wyniki końcowe identyfikacji modelu nieodwracalnego o  $\beta_{12} = 0.9$ .

Tabela 7.4	Końcowe w	vniki identv	fikacii dla	przvkładu	modelu	nieodwraca	lnego
		,	,	p			

Parametr:	$oldsymbol{eta}_{kl}$	$\hat{oldsymbol{eta}}_{\scriptscriptstyle kl}$	$\lambda^2$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{\lambda}_A^2$	W <sub>3</sub>	W <sub>p</sub>	$w_k$
Wartość:	0,9	0,8999	1,0133	1,0961	1,0431	3,0199	4,3577	3,0168

Dla porównania, ocena współczynnika  $\beta_{kl}$ , uzyskana algorytmem RMNK, wyniosła  $\hat{\beta}_{kl} = 0,3856$ , co oznacza, że algorytm ten najprawdopodobniej utknął w którymś z licznych minimów lokalnych funkcji kosztów. Wszystkie te obserwacje pozwalają na sformułowanie wniosku, że dla tego przykładu identyfikacji algorytm memetyczny niemal bezbłędnie sprostał wszystkim postawionym mu wymaganiom.

Kolejny przykład pokaże pewne trudności jakie można napotkać przy identyfikacji nieodwracalnych modeli EB(*k*,*l*). Rysunek 7.10 pokazuje historię zmian ocen parametrów uzyskaną w wyniku identyfikacji ciągu czasowego powstałego z modelu EB(1,2) o  $\beta_{12} = 0,9187$  i  $\lambda^2 = 1,1680$ . W tym przykładzie jako początkową wartość ograniczenia przyjęto  $w_p = S_y = 2,3088$ , czyli mniejszą niż zwykle. Można zauważyć, że algorytm ma problem z utrzymaniem prawidłowych ocen parametrów i wydaje się przełączać cyklicznie pomiędzy dwoma rozwiązaniami. Fakt, że końcowe wyniki identyfikacji są poprawne, wynika wyłącznie z przypadku, osiągnięcia limitu pokoleń we właściwym momencie.



Rys. 7.10 Wyniki końcowe identyfikacji dla  $w_p = S_y$ .



Rys. 7.11 Wyniki końcowe identyfikacji dla  $w_p = 2S_{y_1}$ 

Zanim jednak końcowy wniosek zostanie sformułowany, warto zobaczyć, co stanie się, kiedy początkowe ograniczenie dobrane będzie zgodnie z zaleceniami  $w = 2S_y$  czyli  $w_p = 4,6176$ . Wyniki identyfikacji dla takiego ustawienia zaprezentowane są na rysunku 7.11.

Tym razem algorytm bezbłędnie zidentyfikował prawidłową wartość współczynnika  $\beta_{kl}$ i relatywnie szybko zakończył swoje działanie na skutek stagnacji rozwiązania. Powyższy eksperyment, polegający na zmianie doboru początkowego ograniczenia pozwolił na zwrócenie szczególnej uwagi na wpływ tego parametru na działanie algorytmu.

Rysunek 7.12 przedstawia uzyskaną eksperymentalnie wizualizację wpływu mnożnika wstępnego ograniczenia ( $m_w$ ) na wyniki identyfikacji. Na osi poziomej znajduje się wartość  $m_w$ , a osie pionowe zawierają odpowiednio: wartości średnie, mediany i odchylenia standardowe końcowych ocen  $\beta_{kl}$  wyliczone na podstawie 100 niezależnych uruchomień algorytmu identyfikacji. Wyraźnie widać, że dla  $m_w$  mniejszych od 2 algorytm ma znaczne problemy z otrzymaniem nieobciążonej oceny  $\beta_{kl}$ . Szczegółowa analiza problemu przeprowadzona przez autora pozwala wnioskować, że przyczyną takiej sytuacji jest spora czułość algorytmu identyfikacji na pojedyncze wybuchy ocen sygnału stymulacji. Może się zdarzyć, że minimalna zmiana oszacowania poziomu nasycenia stanowi o powodzeniu lub niepowodzeniu identyfikacji. Trzeba jednak podkreślić, że przypadki takie nie są częste i obserwuje się je głównie dla ciągów czasowych o małej liczebności próbek.



Rys. 7.12 Wpływ początkowego ograniczenia na wyniki końcowe identyfikacji.

Przeanalizowany powyżej przykład pokazuje, że dobór początkowego ograniczenia w nie jest sprawą trywialną. Ponadto doświadczenia autora pokazały, że możliwe są przypadki kiedy problemy z identyfikacją pojawiają się dla  $w = 2S_y$ , a dla  $w = S_y$  identyfikacja przebiega bez problemów.

Podsumowując przedstawione przykłady, można zauważyć, że możliwa jest niemal bezbłędna identyfikacja modeli nieodwracalnych choć zdarzają się przypadki osobliwe, w których, pojawiają się pewne trudności. To właśnie analiza tych przypadków jest bardzo istotna w celu dalszej pracy nad udoskonaleniem algorytmu identyfikacji. Sprawdzenie skuteczności zaproponowanego algorytmu memetycznego w identyfikacji modeli nieodwracalnych, przedstawione będzie na bazie obszernych badań statystycznych, w rozdziale 8. Kolejny podrozdział, pokazuje natomiast przykład identyfikacji dla ciągu czasowego niepochodzącego z symulacji modelu EB(k,l).

#### 7.4 Identyfikacja modelu ciągu rzeczywistego

Dotychczas, wszystkie prezentowane wyniki dotyczyły identyfikacji modeli ciągów czasowych uzyskanych w wyniku symulacji modelu EB(k,l). W tym podrozdziale przedstawiony będzie wyjątek od tej reguły - ciąg czasowy pochodzący z rejestracji jednego z sygnałów sterujących w układzie Aktywnej Redukcji Hałasu. Ciąg taki (pochodzący z rzeczywistego procesu) dla uproszczenia nazywać będziemy ciągiem rzeczywistym.

Na wstępie, założono absolutny brak wiedzy o badanym procesie i podjęto próbę identyfikacji modelu EB(k,l). Rysunek 7.14 pokazuje końcowe kształty funkcji celu dla identyfikacji z użyciem różnych struktur modelu EB(k,l), a rysunek 7.15 historię zmian parametrów w trakcie identyfikacji modeli o tych strukturach. W tym eksperymencie limit pokoleń ustawiony był na wartość  $L_{Pok} = 500$ .

Kształty funkcji kosztów dla różnych struktur pokazują, że możliwe jest znalezienie dynamiki charakterystycznej dla modelu EB(k,l) w ciągach danych pochodzących z procesów rzeczywistych (niesymulowanych). Oszacowane zakresy stabilności modelu, uzyskane na bazie wyników identyfikacji oraz położenie minimów globalnych wskazują natomiast, że w tym konkretnym przypadku mamy do czynienia z modelami odwracalnymi. Ponadto struktura modelu ma wyraźny wpływ na kształty funkcji kosztów. Dalsza analiza przeprowadzona jest na bazie rysunków 7.15-7.18, które przedstawiają historię zmian parametrów identyfikowanych modeli oraz wizualizację sygnałów stymulacji i wyjścia. Można zauważyć, że w przypadku identyfikacji modeli dla danego ciągu rzeczywistego potrzeba znacznie więcej iteracji do zakończenia działania algorytmu.



Rys. 7.14 Wizualizacja funkcji kosztów dla ciągu rzeczywistego: a)struktura EB(1,1); b) struktura EB(1,2); c) struktura EB(2,1); d) struktura EB(2,2).

Warto zwrócić uwagę na fakt, że ocena wariancji sygnału stymulacji jest znacznie mniejsza od jedności (jak w badaniach symulacyjnych). Powoduje to, że szacowany zakres stabilności modelu jest znacznie szerszy, niż w innych prezentowanych przykładach. Także, oryginalne  $\beta_{kl}$ , wariancja sygnału stymulacji, wartości sygnału stymulacji, docelowa wartość ograniczenia, są w tych przykładach nieznane i dlatego zostały wyzerowane.

Parametr:	$eta_{_{kl}}$	$\hat{oldsymbol{eta}}_{\scriptscriptstyle kl}$	$\lambda^2$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{\lambda}_A^2$	W <sub>3</sub>	W <sub>p</sub>	w <sub>k</sub>
EB(1,1)	n.z	0,0431	n.z	0,0377	0,0379	n.z	0,3893	0,5838
EB(1,2)		3,0761		0,0327	0,0257			0,4811
EB(2,1)		0,0017		0,0377	0,0378			0,5839
EB(2,2)		2,2349		0,0351	0,0269			0,4922

Tabela 7.5 Wyniki identyfikacji dla ciągu rzeczywistego (symbol "n.z." oznacza wartość nieznaną).



Rys. 7.15 Wyniki końcowe identyfikacji dla struktury EB(1,1).



Rys. 7.16 Wyniki końcowe identyfikacji dla struktury EB(1,2).



Rys. 7.17 Wyniki końcowe identyfikacji dla struktury EB(2,1).



Rys. 7.18 Wyniki końcowe identyfikacji dla struktury EB(2,2).

Oceny wariancji sygnału stymulacji są bardzo zbliżone dla wszystkich wyników identyfikacji, co pozwala wnioskować o poprawności identyfikacji tego parametru. Jedynie oceny liczone na zredukowanym zbiorze  $(\hat{\lambda}_A^2)$  wydają się zaniżone gdzie uzyskano istotne wartości ocen współczynnika  $\beta_{kl}$ . W tych przypadkach uzyskano także niższe oszacowania ograniczenia, które przyczyniły się do nasycenia i zarazem usunięcia większej liczby ocen ze zbioru A, co miało niewątpliwy wpływ na oszacowanie wariancji.

Uzyskane wyniki są obiecujące, gdyż pokazują, że możliwe jest identyfikowanie modeli EB(k,l) dla ciągów czasowych pochodzących z procesów rzeczywistych. Pokazują zatem możliwość praktycznego wykorzystania tych modeli oraz algorytmów identyfikacji dla nich przygotowanych, potwierdzając zarazem zasadność prowadzonych badań.

#### 7.5 Podsumowanie

Przedstawione wybrane przykłady identyfikacji modeli EB(k,l) pokazują szczegółowo jak przebiega procedura identyfikacji algorytmem memetycznym. Widać wyraźnie, że zaproponowany algorytm jest w stanie sprostać trudnościom wymienionym w rozdziale 4 i z powodzeniem identyfikować przytoczone przykłady zarówno modeli odwracalnych jak i nieodwracalnych.

Nie potwierdza to jednak jeszcze jego skuteczności, dlatego konieczne jest przeprowadzenie obszernych badań symulacyjnych i ich statystyczną obróbkę w celu określenia właściwości statystycznych użytego estymatora. Wyniki tych badań przedstawione są w następnym rozdziale i pomimo, że nie stanowią one ścisłego dowodu na skuteczność algorytmu, pozwalają oszacować jego przydatność.

# Rozdział 8 Badania statystyczne

Niniejszy rozdział zawiera wyniki badań nad statystycznymi właściwościami estymatora stosowanego w algorytmie memetycznym oraz porównanie skuteczności działania algorytmu memetycznego z metodą RMNK. Badania przeprowadzono na zasadzie symulacji procesu biliniowego i identyfikacji modelu EB(k,l) w wybranych punktach jego zakresu stabilności. Wyniki nie stanowią ścisłego dowodu na skuteczność proponowanego algorytmu, nie mniej jednak pozwalają oszacować jego przydatność.

## 8.1 Badania właściwości statystycznych estymatora.

Dotychczas prezentowane wyniki identyfikacji dotyczyły pojedynczych, wybranych ciągów czasowych, nie dają one zatem szerszego spojrzenia na skuteczność działania algorytmu. W celu przebadania skuteczności działania algorytmu w szerokiej skali możliwych przypadków, wykonano liczne badania symulacyjne, których wyniki pozwolą określić statystyczne właściwości estymatora stosowanego w algorytmie identyfikacji modeli EB(k,l). Nowym elementem tych badań jest uwzględnienie liczebności zbioru realizacji, co pozwoli określić jak liczba dostępnych informacji (realizacji czasowych) wpływa na wyniki estymacji.

Dla określenia właściwości statystycznych stosowanego estymatora w zakresie stabilności modelu EB(k,l) przy  $\lambda^2 = 1$  przyjęto zbiór  $B_2 = \{0,1; 0,2; ...;0,7; 0,75; ...; 0,9\}$ , zawierający wartości współczynników  $\beta_{kl}$  wykorzystywane w badaniach. Ponadto, dla uwzględnienia liczebności realizacji N składających się na trajektorię, zaproponowano testowe liczebności ciągów czasowych zawarte w zbiorze  $C = \{50,100,250,500,750,1000\}$ .

Dla każdej pary ( $\beta_{12} \in B_2$ ,  $N \in C$ ) zasymulowano R = 50 niezależnych trajektorii procesu losowego pochodzącego z modelu EB(1,2). Dla każdej z tych trajektorii, przeprowadzono M = 50 niezależnych procedur identyfikacji algorytmem memetycznym przy parametrach algorytmu dobranych jak w 7.1. Wynikiem, każdej z  $R \times M = 2500$  procedur identyfikacji, dla pojedynczej pary ( $\beta_{12}$ , N) jest para ocen parametrów ( $\hat{\beta}_{12,r,m}$ ,  $\hat{\lambda}_{r,m}^2$ ) modelu EB(1,2). Indeks r = 1, 2, ..., R, określa numer trajektorii dla danej pary ( $\beta_{12}$ , N), a indeks m = 1, 2, ..., M, określa numer niezależnej procedury identyfikacji na danej trajektorii r.

Właściwości statystyczne estymatora określono na bazie wskaźników (8.1-8.6). Wskaźniki wyznaczono na bazie zestawów wyników uzyskanych dla każdej pary ( $\beta_{12}$ , N) oddzielnie:

• Maksymalny moduł błędu oceny współczynnika  $\beta_{kl}$ :

$$\Delta \beta_{\max} = \max(|\hat{\beta}_{12,r,m} - \beta_{12}|) \tag{8.1}$$

• Średni moduł błędu oceny współczynnika  $\beta_{kl}$ :

$$\Delta \overline{\beta} = \frac{1}{RM} \sum_{r=1}^{R} \sum_{m=1}^{M} |\hat{\beta}_{12,r,m} - \beta_{12}|$$
(8.2)

• Odchylenie standardowe modułu błędu oceny współczynnika  $\beta_{kl}$ :

$$S_{\beta} = \sqrt{\frac{1}{RM - 1} \sum_{r=1}^{R} \sum_{m=1}^{M} |(\hat{\beta}_{12,r,m} - \beta_{12}|)^{2} - \frac{RM}{RM - 1} \Delta \overline{\beta}}$$
(8.3)

• Maksymalny moduł błędu oceny  $\lambda^2$ :

$$\Delta \lambda_{\max}^2 = \max(|\hat{\lambda}_{r,m}^2 - \lambda^2|)$$
(8.4)

• Średni moduł błędu oceny  $\lambda^2$ :

$$\Delta \overline{\lambda}^2 = \frac{1}{RM} \sum_{r=1}^R \sum_{m=1}^M |\hat{\lambda}_{r,m}^2 - \lambda^2|$$
(8.5)

• Odchylenie standardowe modułu błędu oceny  $\lambda^2$ :

$$S_{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{RM - 1} \sum_{r=1}^{R} \sum_{m=1}^{M} |(\hat{\lambda}_{r,m}^{2} - \lambda^{2}|)^{2} - \frac{RM}{RM - 1} \Delta \overline{\lambda}^{2}}$$
(8.6)

Wartości wskaźników (8.1-8.6) przedstawiono na rysunkach 8.1-8.6. Na wykresach liczebność realizacji przypadającej na trajektorię (*N*) opisana jest jako długość sekwencji danych. Wartości statystyk wyrażone są w skali logarytmicznej, a wartości na osi liczbowej odpowiadają wykładnikowi.

Maksymalny moduł będu wsp. Beta (Log<sub>10</sub>)



Rys. 8.1 Maksymalny moduł błędu oceny  $\beta_{kl}$ .



Rys. 8.2 Średni moduł błędu oceny  $\beta_{kl}$ .



Rys. 8.3 Odchylenie standardowe modułu błędu oceny  $\beta_{kl}$ 

Maksymalny moduł błędu war. syg. stym. (Log<sub>10</sub>)



Rys. 8.4 Maksymalny moduł błędu oceny  $\lambda^2$ .



Rys. 8.5 Średni moduł błędu oceny  $\lambda^2$ .



Rys. 8.6 Odchylenie standardowe modułu błędu oceny  $\lambda^2$ .

Analizując wykresy na rysunkach 8.1-8.3 można sformułować następujące wnioski:

- Obserwuje się znaczne maksymalne i średnie wartości błędów oceny  $\beta_{kl}$  dla krótkich zbiorów realizacji przypadających na trajektorię. Oznacza to, że zbyt mała liczba informacji może mieć krytyczny wpływ na poprawność wyniku estymacji.
- Dla trajektorii o dużych liczebnościach realizacji maksymalne wartości błędów ocen β<sub>kl</sub> są ściśle zależne od wartości oryginalnego β<sub>kl</sub>. Błędy maleją wraz ze zbliżaniem się oryginalnych wartości β<sub>kl</sub> do granicy stabilności modelu EB(k,l).
- Podobne wnioski sformułować można analizując odchylenia standardowe błędów ocen β<sub>kl</sub>. Dla długich sekwencji danych, im większe jest oryginalne β<sub>kl</sub>, tym rozrzut błędów ocen β<sub>kl</sub> jest mniejszy. Dla krótkich sekwencji danych, rozrzut błędów ocen β<sub>kl</sub> jest znaczny i niezależny od oryginalnej wartości β<sub>kl</sub>.
- Można także stwierdzić, że identyfikacja modeli odwracalnych jest mniej wrażliwa na liczebność zbioru dostępnych realizacji niż w przypadku modeli nieodwracalnych. Nie mniej przy odpowiednio długich zbiorach danych obciążenie ocen β<sub>kl</sub> uzyskane dla modeli nieodwracalnych jest znacznie mniejsze.

Analizując, z kolei wykresy na rysunkach 8.4-8.6 można wywnioskować, że:

- Duża liczba danych przypadających na trajektorię ma korzystny wpływ na oceny wariancji sygnału stymulacji λ<sup>2</sup> – błędy identyfikacji maleją.
- Dla modeli nieodwracalnych błędy ocen λ<sup>2</sup> rosną. Powodem jest zawyżanie wartości ocen sygnału stymulacji przez niestabilność modelu odwrotnego. Badane wskaźniki nie uwzględniają eliminacji wartości nasyconych jak w (5.9).

Ostatecznie, analiza właściwości statystycznych sprzyja potwierdzeniu tezy pracy, że możliwa jest identyfikacja modelu EB(k,l) w całym zakresie jego stabilności, a obciążenie otrzymanych ocen  $\beta_{kl}$  jest tym mniejsze, im większa liczba realizacji procesu biliniowego jest dostępna oraz im oryginalne  $\beta_{kl}$  jest bliżej granicy stabilności.

## 8.2 Porównanie algorytmu memetycznego do RMNK

W poprzednim podrozdziale omówiono właściwości statystyczne estymatora wykorzystanego w opracowanym algorytmie identyfikacji. Dla dopełnienia tej analizy warto jest pokazać skuteczność proponowanego algorytmu w odniesieniu do innych stosowanych powszechnie metod identyfikacji. W związku z tym, że zwykła metoda momentów jest trudna w automatyzacji (użytkownik musi podejmować pewne decyzje w jej trakcie) a uogólniona metoda momentów wymaga zastosowania zewnętrznego algorytmu optymalizacji, jako metodę referencyjną wybrano algorytm WRRMNK opisany w rozdziale 3 (dla uproszczenia i przejrzystości zapisu w dalszym ciągu tego rozdziału i na rysunkach oznaczony jednak będzie jako RMNK).

W algorytmie tym zastosowano modyfikację proponowaną w [Bie7] polegającą na ograniczaniu wartości błędów predykcji jednokrokowej. Algorytm ten zatem minimalizuje funkcję SMSE opisaną w rozdziale 5, czyli wykorzystuje tę samą funkcję celu, co zaproponowany algorytm memetyczny. Porównaniu podlegać będą więc trzy wyniki identyfikacji:

- Wynik działania RMNK z ograniczeniem w = 2S<sub>y</sub>, który wykorzystuje ograniczenie identyczne jak początkowy poziom nasycenia w algorytmie memetycznym (zgodne z zaleceniem w [Bie7]).
- Wynik dziania RMNK z ograniczeniem  $w = 3S_e$ , który symbolizuje przykład użycia metody RMNK z teoretycznie poprawnie dobranym ograniczeniem.
- Wynik identyfikacji opracowanym algorytmem memetycznym.

Jak poprzednio, przygotowano po R = 200 ciągów czasowych (trajektorii) pochodzących z symulacji modelu EB(k,l) o długości N = 1000 realizacji czasowych dla każdej wartości oryginalnej  $\beta_{kl}$  pochodzącej ze zbioru  $B = \{0,1; 0,2; ...;0,9\}$ . Dla każdego ciągu czasowego dokonano identyfikacji wskazanymi powyżej, trzema metodami przy zagwarantowanej zgodności struktury modelu. Dla uzyskanych ocen parametrów modelu EB(k,l), uzyskanych każdą z metod, wyznaczono wskaźniki (5.2)-(5.5) oraz mediany i rozstępy międzykwartylowe dla błędów tych ocen. Ponadto przeprowadzono wnioskowanie statystyczne za pomocą następujących testów:

- Test Kołmogorowa [Mal8]. Test ten pozwala na sprawdzenie czy rozkład badanej próby istotnie różni się od rozkładu referencyjnego (w tym przypadku rozkładu normalnego). Wykonanie tego testu jest konieczne do określenia czy dalsze wnioskowanie powinno się dobywać użyciem testów parametrycznych, czy nieparametrycznych. Przed jego przeprowadzeniem formułuje się dwie hipotezy:
  - H0 hipoteza zerowa, stwierdzająca, że rozkład badanej próby jest zgodny z rozkładem referencyjnym (normalnym). Jest to hipoteza domyślna i jej utrzy-

manie, w tym przypadku, pozwala na dalsze wnioskowanie z użyciem testów parametrycznych.

- H1 hipoteza alternatywna, stwierdzająca, że rozkład badanej próby istotnie różni się od referencyjnego. Jest to hipoteza, którą przyjmuje się w przypadku wystąpienia wystarczających podstaw (przekroczenie wartości krytycznej statystyki testu) do odrzucenia hipotezy zerowej. Przyjęcie tej hipotezy oznacza, że dalsze wnioskowanie powinno się odbywać za pomocą testów nieparametrycznych.
- Test Wilcoxsona [Mal8] test ten, w ogólnym przypadku pozwala stwierdzić czy dwie badane próby są jednorodne (pochodzą z tej samej populacji). Można zatem wykorzystać go jako alternatywę do testu T (parametrycznego testu dla wartości oczekiwanej), przyjmując jedną z badanych prób jako zbiór jednakowych wartości równych wartości referencyjnej. W teście tym formułuje się dwie hipotezy:
  - H0 hipoteza zerowa, stwierdzająca, że badane próby są jednorodne (pochodzą z tej samej populacji). Przeprowadzane badania statystyczne dotyczą błędów (obciążenia) ocen identyfikowanych parametrów modelu EB(k,l), w związku z czym wartością referencyjną będzie 0. Utrzymanie tej hipotezy oznaczać będzie, że obciążenie ocen danego parametru nie jest statystycznie znamienne.
  - H1 hipoteza alternatywna, przyjmowana w przypadku wstępowania wystarczających podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej (wartość statystyki przekracza wartość krytyczną). Jej przyjęcie oznaczać będzie, że obciążenie oceny danego parametru jest znamienne statystycznie. W przeprowadzanych badaniach testy Wilkoxona wykonane będą dwukrotnie dla każdej badanej próby. Raz z lewostronnym i raz z prawostronnym obszarem krytycznym. Oznaczać to będzie dwa warianty hipotezy alternatywnej: dla ocen istotnie dodatnio obciążonych (test prawostronny) i dla ocen istotnie ujemnie obciążonych (test lewostronny).

Miary położenia wyznaczone dla błędów ocen współczynnika  $\beta_{kl}$  oraz wariancji sygnału stymulacji  $\lambda^2$  zaprezentowane są na rysunkach 8.7 i 8.8. Analogicznie miary rozrzutu dla błędów ocen tych parametrów przestawiono na rysunkach 8.9 i 8.10.

Wyniki testów zgodności z rozkładem normalnym (testy Kołmogorowa), stanowiące wstęp do dalszego wnioskowania statystycznego, przestawione są dla błędów ocen obu parametrów na rysunku 8.11. Wynik oznaczony krótką, grubą kreseczką przy wartości H0 oznacza utrzymanie hipotezy zerowej, podczas gdy pełny słupek sięgający H1, oznacza odrzucenie hipotezy zerowej na korzyść hipotezy alternatywnej.



Rys. 8.7 Miary położenia dla błędów ocen  $\beta_{kl}$ .



Rys. 8.8 Miary położenia dla błędów ocen  $\lambda^2$ .







Rys. 8.10 Miary rozrzutu dla błędów ocen  $\lambda^2$ .
Analiza statystyk na rysunkach 8.7-8.10 pozwala sformułować następujące wnioski:

- Wartości średnie i mediany błędów ocen współczynnika β<sub>kl</sub> (Rys. 8.7), uzyskane algorytmem memetycznym są niemal niezauważalne i maleją wraz ze wzrostem oryginalnego β<sub>kl</sub>. Dokładnie przeciwne wnioski można wyciągać dla błędów tych ocen uzyskanych algorytmem RMNK.
- Wartości średnie i mediany błędów ocen wariancji sygnału stymulacji (Rys. 8.8), rosną wraz ze wzrostem oryginalnego β<sub>kl</sub> dla obu metod identyfikacji lecz, te uzyskane algorytmem memetycznym są w każdej testowanej próbie najmniejsze.
- Miary rozrzutu dla błędów ocen współczynnika β<sub>kl</sub> (Rys.8.9), są najmniejsze dla algorytmu memetycznego niemal w każdym testowanym przypadku. Maleją one wraz ze wzrostem oryginalnego β<sub>kl</sub>. Przeciwny trend obserwujemy dla błędów ocen uzyskanych algorytmem RMNK.
- Miary rozrzutu dla błędów ocen wariancji sygnału stymulacji (Rys.8.10), wrastają wraz ze wzrostem oryginalnego β<sub>kl</sub> dla obu metod identyfikacji. Ponownie jednak te uzyskane dla algorytmu memetycznego są najmniejsze.

Powyższa analiza bez wątpienia pokazuje, że oceny uzyskane algorytmem memetycznym cechują się wyraźnie mniejszym obciążeniem niż uzyskane za pomocą RMNK.



Rys. 8.11 Wyniki testów zgodności Kołmogorowa.

W wyniku przeprowadzenia testu zgodności Kołmogorowa, przy założeniu rozkładu normalnego jako referencyjnego, koniecznym okazało się odrzucenie hipotezy zerowej dla większości badanych prób. Oznacza to, że użycie testu T w dalszym wnioskowaniu byłoby uzasadnione tylko dla mniejszej części prób. Ponadto, aby móc porównywać wszystkie uzyskane wyniki ze sobą, należy posługiwać w każdym przypadku tym samym narzędziem statystycznym. Autor zdecydował się zatem na zupełną rezygnację z testu T i przeprowadzenie dalszego wnioskowania statystycznego wyłącznie za pomocą testu Wilcoxona.

Wyniki uzyskane testem Wilcoxona dla błędów ocen współczynnika  $\beta_{kl}$  zaprezentowane są na rysunku 8.12, a dla błędów ocen wariancji sygnału stymulacji - na rysunku 8.13. Jak poprzednio (testy Kołmogorowa), krótka gruba kreska na poziomie H0 oznacza utrzymanie hipotezy zerowej, a pełny słupek sięgający H1 przyjęcie hipotezy alternatywnej. Górne wykresy zawierają wyniki testów z lewostronnym obszarem krytycznym, zatem odrzucenie hipotezy zerowej pozwala wnioskować o istotnym ujemnym obciążeniu ocen badanego parametru. Wykresy dolne natomiast przestawiają wyniki testów z prawostronnym obszarem krytycznym, zatem na ich postawie można wnioskować o istotności dodatniego obciążania ocen parametrów. Otrzymanie hipotezy zerowej dla obu testów równocześnie oznacza brak istotnego obciążenia ocen, a przyjęcie w obu testach hipotezy alternatywnej jest niemożliwe.



Rys. 8.12 Wyniki testów Wilcoxona dla błędów ocen  $\beta_{kl}$ .



Rys. 8.13 Wyniki testów Wilcoxona dla błędów ocen  $\lambda^2$ .

Uzyskane wyniki (testy Wilcoxona) można podsumować następująco:

- Nieobciążone oceny β<sub>kl</sub> uzyskuje się dla metody RMNK tylko dla ciągów czasowych generowanych z oryginalnym β<sub>kl</sub> ∈<0,1;0,3>. W pozostałych przypadkach uzyskane oceny były istotnie ujemnie obciążone. Zatem, na postawie uzyskanych wyników, można stwierdzić, iż metoda RMNK istotnie zaniża oceny β<sub>kl</sub> dla oryginalnych wartości tego współczynnika większych od 0,3.
- Oceny  $\beta_{kl}$  uzyskane algorytmem memetycznym wykazały istotne dodatnie obciążenie wyłącznie dla oryginalnego  $\beta_{kl} = 0.8$ . Źródło tej anomalii będzie wyjaśnione w dalszej części tego podrozdziału, przy analizie ocen odstających.
- Zdecydowana większość ocen wariancji sygnału stymulacji (λ<sup>2</sup>) uzyskana algorytmem RMNK jest istotnie obciążona.
- Wszystkie oceny wariancji sygnału stymulacji, uzyskane algorytmem memetycznym są istotnie obciążone. Biorąc jednak pod uwagę miary położenia i rozrzutu dla tych ocen (Rys. 8.8 i 8.10), można wnioskować, że taka obserwacja jest wynikiem pojawiania się nielicznych, aczkolwiek wystarczająco istotnych ocen odstających.

Ponownie, uzyskane wyniki pozwalają uznać algorytm memetyczny za znacząco lepszy niż powszechnie stosowany algorytm RMNK.

Ostatnia analiza wyników identyfikacji dotyczy występowania w badanych próbach ocen odstających. W trakcie przeprowadzania wnioskowania statystycznego, w celu poznania właściwości pewnego zjawiska często dokonuje się odrzucenia wartości odstających, gdyż to właśnie one są głównym źródłem obciążenia ocen badanych parametrów. W tej pracy badania dotyczą zjawisk o znanych parametrach, tak więc wyniki identyfikacji (oceny parametrów) pozwalają wnioskować o właściwościach metod identyfikacji. W takim przypadku wartości odstające nie powinny być eliminowane, gdyż stanowią cenne źródło informacji o właściwościach metod jest zatem takie odstające wyniki wskazać i poddać analizie. Ponadto szczegółowa analiza danych, dla których uzyskano oceny odstające może być źródłem wielu istotnych obserwacji dotyczących działania algorytmu identyfikacji i przyczynić się w rezultacie do jego usprawnienia. Wykresy 8.14 i 8.15 przestawiają prostą analizę odstających błędów ocen parametrów modelu EB(k,l).



Rys. 8.14 Analiza odstających błędów ocen  $\beta_{kl}$ .

Jako odstające błędy ocen przyjęto błędy ocen leżące poza zakresem Z (8.8), zgodnie z procedurą opisaną w [Kor1]:

$$Z = \langle Q_1 - 1, 5IQR, Q_3 + 1, 5IQR \rangle,$$
(8.8)

gdzie:  $Q_1$  oznacza pierwszy kwartyl (wartość, dla której dystrybuanta empiryczna z próby przyjmuje wartość 0,25),  $Q_3$  oznacza trzeci kwartyl (wartość, dla której dystrybuanta empiryczna przyjmuje wartość 0,75) oraz *IQR* jest rozstępem międzykwartylowym, czyli  $IQR = Q_3 - Q_1$ .

Na górnych wykresach przedstawiono udział procentowy błędów odstających w całej badanej próbie, a na dolnych moduły najbardziej odstających błędów ocen parametrów.



Rys. 8.15 Analiza odstających błędów ocen  $\lambda^2$ .

Z analizy odstających błędów ocen parametrów modelu EB(k,l) można wywnioskować, że:

- Udział odstających błędów ocen  $\beta_{kl}$  dla algorytmu memetycznego jest znaczący, szczególnie dla modeli nieodwracalnych. Nie mniej, najbardziej odstające wartości tych błędów są zawsze mniejsze niż otrzymane dla metody RMNK. Dla oryginalnego  $\beta_k = 0.8$ , odstające błędy ocen są niemal zerowe, co świadczy, że wyniki identyfikacji w tym przypadku były bardzo powtarzalne.
- Dla oryginalnego β<sub>kl</sub> = 0,8, algorytmem memetycznym uzyskano przynajmniej jedną znacznie odstającą wartość błędów, co przy uwzględnieniu pozostałych statystyk (Rys. 8.7 i 8.9) stanowi wyjaśnienie odrzucenia dla tej próby hipotezy zerowej w teście Wilcoxona.
- Dla metody RMNK wartości odstające zdają się występować rzadziej, lecz są znacznie większe na moduł i to już powyżej oryginalnych  $\beta_{kl} > 0,3$ . Pozwala to stwierdzić, że

w tym zakresie identyfikacja modelu EB(k,l) metodą RMNK jest narażona na bardzo duże obciążenie ocen  $\beta_{kl}$ .

Udział odstających błędów ocen wariancji sygnału stymulacji (λ<sup>2</sup>) jest dla wyników uzyskanych algorytmem memetycznym najmniejszy dla wszystkich badanych przypadków. Także moduły najbardziej odstających błędów ocen są dla algorytmu memetycznego najmniejsze.

Wszystkie analizy statystyczne przeprowadzone w tym podrozdziale pokazały wyraźną przewagę zaproponowanego algorytmu memetycznego nad metodą RMNK. Warto ponadto podkreślić, że ponieważ badany tu wariant RMNK minimalizuje tę samą funkcję kosztów (SMSE), porównanie tych dwóch algorytmów jest metodycznie uzasadnione.

## 8.3 Podsumowanie

Wyniki badań statystycznych opisanych w tym rozdziale przemawiają na korzyść zaproponowanego algorytmu identyfikacji. Istnieją postawy do stwierdzenia, że zaproponowany algorytm stanowi rozwiązanie dla problemów opisanych w rozdziale 4 i umożliwia identyfikację modeli EB(k,l) w pełnym zakresie ich stabilności, co było tezą tej pracy. Należy jednak uczciwie podkreślić, że algorytm ten jest skuteczny dla ciągów czasowych o dużej liczebności próbek i może zawodzić dla krótkich sekwencji danych. Jest to jednak problem występujący także w konkurencyjnych metodach identyfikacji.

W kolejnym rozdziale, pokazany zostanie przykład zastosowania nieodwracalnych modeli EB(k,l), które dzięki opracowanemu przez autora algorytmowi są identyfikowalne.

## Rozdział 9 Przykład zastosowania nieodwracalnych modeli EB do szyfrowania informacji

Jak już wspomniano w podrozdziale 1.4, modele EB można stosować do różnych celów.

Modele EB są najprostszymi modelami biliniowymi i ich poprawna identyfikacja stanowi zdaniem autora klucz do identyfikacji modeli biliniowych o bardziej złożonych strukturach. Te z kolei mogą posłużyć zwiększeniu wydajności algorytmów identyfikacji osobniczej mówcy [Bie4]. W zagadnieniach tych istotna rolę pełnią wartości współczynników identy-fikowanych modeli toteż możliwość poprawnej identyfikacji modelu biliniowego w pełnym zakresie jego stabilności zwiększa zakres możliwych do otrzymania wartości współczy-nników. Nie zagłębiając się w szczegóły, można stwierdzić, że możliwość identyfikacji szerszego zakresu wartości współczynników przyczyni się do poprawy rozróżnialności mówców.

Ponadto modele EB mogą służyć do detekcji nieliniowości w sygnałach losowych jak i modelowania toru zakłócenia w modelach wejściowo-wyjściowych. Przykład takiego zastosowania widoczny był w podrozdziale 7.4, gdzie próbowano identyfikować współczynniki modelu EB dla ciągu czasowego pochodzącego z pewnego rzeczywistego procesu. Fakt znalezienia istotnych wartości współczynników pozwala stwierdzić, że w badanym ciągu danych (sygnale) występują zależności typu biliniowego czyli nieliniowości.

Propozycje innych zastosowań podają np. [Sub1], [Moh1], [Mat1], [Mat2], [Hri1], [Bou1], [Bie2], [Bie4], [Bie8], [Sor1]. W niniejszym rozdziale skupiono się na pokazaniu oryginalnego przykładu zastosowania modelu EB do szyfrowania informacji.

Myślą przewodnią jest szyfrowanie informacji za pomocą sekwencji dyskretnego procesu losowego powstałego wskutek pobudzenia nieodwracalnego modelu EB białym szumem o znanych właściwościach statystycznych (znanym rozkładzie i jego parametrach). W pierwszym etapie należy wybrać strukturę modelu EB określoną parametrami k i l. Zaleca się wybór struktury superdiagonalnej lub subdiagonalnej. Niepożądana osoba próbująca rozpoznać model EB na podstawie szumu, korzystając z trzeciego momentu centralnego łącznego natrafi na dodatkowe utrudnienie w postaci niejednoznaczności struktury modelu.

Kolejnym krokiem jest utworzenie tablicy kodowania informacji. W tym celu należy przypisać każdemu używanemu symbolowi, który może wystąpić w niezakodowanej sekwencji informacji, pewnego zakresu wartości współczynnika  $\beta$  nieodwracalnego, stabilnego modelu EB tak, aby zakres ten znajdował się możliwie blisko granicy stabilności modelu. Taki wybór wynika z największej wydajności algorytmów identyfikacji w obszarze bliskim granicy stabilności, co pokazane było w rozdziale 8. Przykładowo, jeśli chcemy przesłać informacje tekstową możemy przypisać każdej literze alfabetu określony zakres wartości  $\beta$  z przedziału <0,8,0,99>, przy założeniu, że wariancja sygnału pobudzającego jest równa jedności.

Kolejnym krokiem jest kodowanie informacji, polegające na przypisaniu każdemu znakowi wartości  $\beta$ , odpowiadającej środkowi przedziału przypisanego do danego znaku w alfabecie, przy wykorzystaniu tablicy kodowania.

Znak	Zakres β	Znak	Zakres β	Znak	Zakres β	Znak	Zakres β
spacja	0,8000 - 0,8030	F	0,8483 - 0,8513	V	0,8965 - 0,8995	1	0,9448 - 0,9478
0	0,8030 - 0,8060	G	0,8513 - 0,8543	W	0,8995 - 0,9025	m	0,9478 - 0,9508
1	0,8060 - 0,8090	Н	0,8543 - 0,8573	Х	0,9025 - 0,9056	n	0,9508 - 0,9538
2	0,8090 - 0,8121	Ι	0,8573 - 0,8603	Y	0,9056 - 0,9086	0	0,9538 - 0,9568
3	0,8121 - 0,8151	J	0,8603 - 0,8633	Z	0,9086 - 0,9116	р	0,9668 - 0,9598
4	0,8151 - 0,8181	K	0,8633 - 0,8663	а	0,9116 - 0,9146	q	0,9598 - 0,9629
5	0,8181 - 0,8211	L	0,8663 - 0,8694	b	0,9146 - 0,9176	r	0,9629 - 0,9659
6	0,8211-0,8241	М	0,8694 - 0,8724	с	0,9176 - 0,9206	S	0,9659 - 0,9689
7	0,8241 - 0,8271	N	0,8724 - 0,8754	d	0,9206 - 0,9237	t	0,9689 - 0,9719
8	0,8271-0,8302	0	0,8754 - 0,8784	e	0,9237 - 0,9267	u	0,9719 - 0,9749
9	0,8302 - 0,8332	Р	0,8784 - 0,8814	f	0,9267 - 0,9297	v	0,9749 - 0,9779
А	0,8332-0,8362	Q	0,8814 - 0,8844	g	0,9297 - 0,9327	W	0,9779 - 0,9810
В	0,8362 - 0,8392	R	0,8844 - 0,8875	h	0,9327 - 0,9357	х	0,9810 - 0,9840
С	0,8392 - 0,8422	S	0,8875 - 0,8905	i	0,9357 - 0,9387	У	0,9840 - 0,9870
D	0,8422 - 0,8452	Т	0,8805 - 0,8935	j	0,9387 - 0,9417	Z	0,9870 - 0,9900
Е	0,8452 - 0,8483	U	0,8935 - 0,8965	k	0,9417 - 0,9448		

Tabela 9.1 Przykładowa tabela kodowania znaków alfanumerycznych dla zakresu <0.8,0.99>

Następnym krokiem jest szyfrowanie danych. Polega ono na wygenerowaniu dla każdego znaku N próbek dyskretnego procesu losowego pochodzącego z modelu EB. Przykład zaszyfrowania informacji tekstowej "Hi World" zobaczyć można na rysunku 9.1. Każdej literze przypisano N = 500 próbek dyskretnego procesu losowego pochodzącego z symulacji

superdiagonalnego modelu EB(1, 2). Biały szum, wykorzystany jako pobudzenie modelu EB, ma rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariacji. Zaszyfrowana informacja widnieje na górnym wykresie, podczas gdy dolny przestawia autokreację zaszyfrowanego sygnału. Wartości liczbowe na szarym tle odpowiadają wartościom przypisywanym danemu znakowi na etapie kodowania i stanowią one środki przedziałów przypisanych do poszczególnych znaków zgodnie z Tabelą 9.1. Wartości w tabeli 9.1 podane są z ograniczoną dokładnością, to też widoczne w niej niejednoznaczności przypisania granic przedziałów do znaków są wyłącznie pozorne.



Rys. 9.1 Kodowanie i szyfrowanie informacji poprzez symulację modelu EB

Jak widać na rysunku 9.1 zaszyfrowana informacja jest sygnałem losowym, o niejednorodnej wariancji (heterosekadstycznym). Ponadto funkcja autokorelacji ma prawie wszystkie współczynniki poniżej progu istotności. Oznacza to, że najbardziej oczywiste podejście do szukania informacji w szumie nie wykaże nic godnego uwagi. Powodem takiego stanu rzeczy jest zapisanie informacji w sposób nieliniowy.

W celu odzyskania (odszyfrowania) oryginalnej informacji należy zaszyfrowaną sekwencję podzielić na zbiory próbek o długości N (stąd N jest bardzo istotnym parametrem całego procesu szyfrowania) a następnie na każdym zbiorze danych dokonać identyfikacji opisanym w rozdziale 6 algorytmem identyfikacji. W rezultacie, dla przytoczonego przykładu otrzymamy zestaw wartości współczynników  $\beta$  odpowiadających odpowiednim znakom informacji.

Przykład rozszyfrowania informacji pokazano na rysunku 9.2. Czerwone, ciągłe linie odpowiadają wynikowi identyfikacji a czarne przerywane określają zakres wartości  $\beta$  przypisany do oryginalnego znaku, który powinien zostać rozszyfrowany dla tego fragmentu sekwencji (ramki). Jak widać w tym przypadku każdy znak został prawidłowo rozszyfrowany.



Rys 9.2 Rozszyfrowanie informacji poprzez identyfikację modelu EB

Ostatnim krokiem jest dekodowanie informacji, polegające na odczytaniu znaków z tabeli kodowania i sprawdzeniu, w jakich zakresach znalazły się wyniki identyfikacji modeli dla kolejnych ramek.

Oczywistym jest, że zaproponowany algorytm szyfrowania jest banalnie prosty i cała jego oryginalność polega na wykorzystaniu właściwości modelu EB. Wzbogacenie algorytmu o dodatkowe mechanizmy typowe dla szyfrowania informacji może w przyszłości zaowocować powstaniem konkurencyjnego narzędzia bezpieczeństwa. Jako podsumowanie przykładu szyfrowania informacji przytoczono prostą statystyczną analizę skuteczności odszyfrowywania informacji za pomocą proponowanej metody [Mal7]. Eksperyment przeprowadzono dokonując wielokrotnego (R = 100) szyfrowania informacji tekstowej: "The indivertible elementary bilinear time series models for data encryption" o długości n = 75 znaków. Proces kodowania powtórzono dla sześciu różnych długości sekwencji kodujących  $N \in \{50, 100, 250, 500, 750, 1000\}$ .



Wskźniki oceny dla różnych długości sekwencji szyfrujących (N)

Rys 9.3 Wyniki eksperymentu sprawdzającego skuteczność odszyfrowywania danych

Zliczając każdy poprawnie zidentyfikowany znak dla *i*-tej realizacji szyfrowania za pomocą licznika  $s_i$  oraz każdy niepoprawnie zidentyfikowany znak (wynik poza całym używanym zakresem kodowania) w liczniku  $u_i$  określono liczbę poprawnie zidentyfikowanych znaków jak i liczbę błędów grubych. Odnosząc te liczby do liczby wszystkich kodowanych znaków można zdefiniować następujące wskaźniki oceny:

• Skuteczność:

$$ER = \frac{1}{Rn} \sum_{i=1}^{R} s_i \cdot 100\%.$$
(9.1)

Udział znaków nierozpoznanych:

$$UR = \frac{1}{Rn} (Rn - \sum_{i=1}^{R} u_i) \cdot 100\%.$$
(9.2)

Wyniki eksperymentu przedstawia rysunek 9.3. Wyniki przedstawione są w postaci sześciu zestawów słupków. Każdy zestaw odpowiada innej liczbie próbek przypadających na zaszy-

frowany znak (*N*). Ciemne słupki oznaczają uzyskaną *skuteczność*, podczas gdy jasne *udział znaków nierozpoznanych* (wyniki identyfikacji poza zakresem kodowania).

Podsumowując wyniki eksperymentu, można stwierdzić, że dla długich sekwencji szyfrujących (*N*) skuteczność działania algorytmu rozszyfrowywania jest niemal stuprocentowa a udział znaków nierozpoznanych jest bardzo mały. Wprowadzenie mechanizmów kontroli poprawności danych powinno wyeliminować pozostałe sporadyczne błędy. Użycie krótkich sekwencji szyfrujących niestety wykazuje niezadowalającą skuteczność oraz znaczny udział znaków nierozpoznanych. Możliwe, że dalsze usprawnienia w algorytmie identyfikacji pozwolą na poprawienie tej sytuacji.

W zaprezentowanym przykładzie szyfrowania informacji wykorzystano opracowany na potrzeby niniejszej pracy algorytm memetyczny. Jedyną funkcjonalnością tego algorytmu, która została pominięta, to operacja *rewolucji*. Powodem tego pominięcia był fakt, że na etapie szyfrowania informacji użyto sygnału stymulacji o znanej wariancji  $\lambda^2$ . W rezultacie, możliwe stało się wymuszenie w algorytmie ograniczenia  $w = 3\lambda$  i rezygnacja z jego automatycznego doboru. Takie rozwiązanie znacząco przyspiesza i upraszcza proces identyfikacji. Niemniej w innych aplikacjach taki zabieg raczej rzadko będzie możliwy.

Należy zwrócić uwagę, że dla każdego zaszyfrowanego znaku należało uruchomić niezależną procedurę identyfikacji, która już sama w sobie wymaga znaczącej liczby operacji matematycznych do wykonania. Dodatkowo, biorąc pod uwagę liczbę znaków w kodowanej informacji oraz liczbę powtórzeń eksperymentu szyfrowania/rozszyfrowywania, można wyobrazić sobie jak duże obciążenie obliczeniowe stanowiły opisane wyżej badania. Z tego też powodu konieczne było dobranie parametrów algorytmu memetycznego tak aby możliwie ograniczyć liczbę operacji do wykonania i uzyskać wyniki w rozsądnym czasie. Niewykluczone, że jest to jedną z istotnych przyczyn ograniczonej efektywności, widocznej szczególnie przy stosowaniu krótkich sekwencji szyfrujących (małe *N*).

## Rozdział 10 Posumowanie pracy

Niniejszy rozdział poświęcony będzie wskazaniu osiągnięć i korzyści płynących z opracowanych w ramach pracy rozwiązań, zaprezentowaniu najważniejszych wniosków, i ostatecznemu odniesieniu przedstawionej zwartości do tezy niniejszej rozprawy.

W ramach badań przeprowadzonych w celu weryfikacji tezy pracy:

- Zidentyfikowano i opisano istotne przyczyny ograniczonej wydajności najpopularniejszych stosowanych dotychczas algorytmów identyfikacji modeli EB.
- Zauważono, że stosowanie ograniczenia na oceny sygnału innowacji podczas procedury identyfikacyjnej przyczynia się do przemieszczenia globalnego minimum funkcji kosztów MNK do właściwego położenia. Dzięki temu możliwe stało się identyfikowanie nieodwracalnych modeli EB.
- Przeanalizowano statystycznie wpływ doboru ograniczenia na wyniki estymacji i pokazano, że ma on niebagatelny wpływ na wyniki. Zauważono także, że efektywność identyfikacji rośnie (maleje rozrzut ocen) wraz ze zbliżaniem się oryginalnej wartości współczynnika β modelu EB do granicy stabilności modelu.
- Wykazano symulacyjnie, że nieodwracalne modele EB są identyfikowalne, a zatem wykazano także identyfikowalność wszystkich stabilnych modeli EB.
- Opracowano adaptacyjny algorytm, wykorzystujący ocenę wariancji sygnału stymulacji po identyfikacji, do doboru ograniczenia w kolejnych próbach identyfikacji. W rezultacie możliwe stało się dobieranie poziomu nasycenia na bazie założeń o właściwościach statystycznych sygnału stymulacji.
- Opracowano dedykowany algorytm identyfikacji dla modelu EB na bazie algorytmów memetycznych. W algorytmie tym zaimplementowano opracowany adaptacyjny algorytm doboru ograniczenia w zaproponowanej przez autora operacji *rewolucji*.

- Przebadano właściwości statystyczne estymatora opartego na algorytmie memetycznym, oraz dokonano porównania jego efektywności z algorytmem RMNK. Wykazano w ten sposób wysoką efektywność opracowanego rozwiązania i jego wyższość nad konkurencyjnymi algorytmami.
- Poddano szczegółowej analizie wpływ doboru wartości ograniczenia w na przebieg identyfikacji. Analizy dokonano na jednej konkretnej realizacji procesu biliniowego, dla której zaobserwowano trudności, i ciekawe anomalie w trakcie identyfikacji przy użyciu niestandardowego doboru poziomu nasycenia.
- Przeprowadzono badania nad praktycznym zastosowaniem nieodwracalnych modeli EB, które w wyniku prac autora stały się identyfikowalne, do celu szyfrowania informacji i przedstawiono wstępne wyniki analizy wydajności takiej aplikacji.

Zdaniem autora, najważniejszym osiągnięciem przedstawionej pracy jest wykazanie możliwości identyfikacji nieodwracalnych modeli EB, co otwiera nowy obszar badań nad wykorzystaniem tych modeli w praktyce. Subtelnym wkładem autora w rozwój dziedziny algorytmów ewolucyjnych i memetycznych jest wprowadzenie operacji *rewolucji* polegającej na zmianie parametrów zadania optymalizacji (w trakcie działania algorytmu), tak, że zmianie ulega kształt funkcji kosztów. Autor w swoich studiach nad algorytmami ewolucyjnymi i memetycznym nie spotkał się jeszcze z takim rozwiązaniem.

Do słabych stron zaproponowanego algorytmu identyfikacji modeli EB należy niewątpliwie zaliczyć jego znaczną złożoność obliczeniową, co znacznie utrudnia możliwość identyfikacji "on-line". Jednak można mieć nadzieję, że ciągły rozwój równoległych metod przetwarzania informacji i obliczeń, w niedługim czasie może anulować tę wadę. Jest to szczególnie możliwe, gdyż stosowane w proponowanym algorytmie identyfikacji algorytmy memetyczne są z punktu widzenia implementacji komputerowej łatwe do zrównoleglenia.

W podrozdziale 1.4 wskazano kilka potencjalnych zastosowań stabilnych (odwracalnych i nieodwracalnych) modeli EB. Zaproponowana w pracy metodyka identyfikacji modeli EB w całym zakresie stabilności, umożliwia prowadzenie dalszych prac badawczych zmierzających do wykorzystania tych modeli w praktyce. Ponadto, opracowanie skutecznego algorytmu identyfikacji modeli EB pozwala na wykorzystanie zdobytych doświadczeń do opracowania algorytmów identyfikacji bardziej złożonych, wieloparametrowych modeli biliniowych. Wyniki badań prowadzonych w trakcie realizacji pracy pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- Niestabilność odwrotnego modelu EB nie jest kumulatywna (wybuchy kolejnych wartości ciągu czasowego nie sumują się i szybko zanikają), można zatem wyeliminować jej negatywny wpływ na działanie algorytmu identyfikacji poprzez nałożenie ograniczenia na wartości ocen sygnału stymulacji.
- Zastosowanie właściwego ograniczenia na wartości ocen sygnału stymulacji przemieszcza minimum globalne funkcji kosztów do właściwego położenia (modele nieodwracalne).
- Możliwe jest wykorzystanie ocen wariancji sygnału stymulacji do dobrania ograniczenia, w ramach reguł opartych na właściwościach statystycznych sygnału stymulacji.
- Modele nieodwracalne EB są identyfikowalne.
- Modele EB są identyfikowalne w całym zakresie stabilności.
- Rozrzut ocen współczynnika  $\beta$  maleje wraz ze wzrostem jego oryginalnej wartości.
- Liczba dostępnych realizacji procesu biliniowego ma kluczowe znacznie dla efektywności identyfikacji modelu EB.

Tezą niniejszej pracy było stwierdzenie, że *istnieje możliwość poprawnej identyfikacji* wartości parametrów elementarnych biliniowych modeli ciągów czasowych w całym zakresie *ich stabilności*. Na wstępie należy przypomnieć, że zakres stabilności modelu EB dzieli się na dwa istotne obszary: obszar modeli odwracalnych i obszar modeli nieodwracalnych.

Identyfikacja modelu EB w obszarze modeli odwracalnych nie stanowiła jak dotąd większego wyzwania. Jedyną trudnością, na jaką można w tym przypadku natrafić, jest multimodalność funkcji kosztów, która może stanowić wyzwanie dla gradientowych algorytmów optymalizacji powszechnie stosowanych w algorytmach identyfikacji.

Obszar modeli nieodwracalnych był dotychczas uznawany za obszar modeli nieidentyfikowalnych. Powodem takiej konkluzji była niestabilność modelu odwrotnego, z którego korzysta się w wielu algorytmach identyfikacji. W rozdziale piątym tej pracy pokazano, że w przypadku modeli EB problem nieodwracalności modelu można pokonać, uzyskując jednocześnie bardzo dokładne wyniki estymacji. W związku z tym, że złożoność jak i stochastyczność badanego problemu nie pozwalają w łatwy i zwięzły sposób analitycznie wykazać prawdziwości tezy pracy autor zdecydował się na badania symulacyjno-statystyczne. Stwierdzenia podane w dwóch powyższych akapitach jak i dokonana analiza właściwości statystycznych opracowanego estymatora (rozdział 8) w opinii autora zdecydowanie przemawiają na korzyść tezy pracy. Można zatem uznać, że zawartość pracy (wyniki analiz, badania statystyczne opracowane algorytmy) potwierdza tezę pracy, że *istnieje możliwość poprawnej identyfikacji wartości współczynnika elementarnego biliniowego modelu ciągu czasowego w całym zakresie jego stabilności.* 

## **Bibliografia**

- [Ara1] Arabas J. (2004) Wykłady z Algorytmów ewolucyjnych, WNT Warszawa.
- [Bib1] Bibi. A. (2005) A note of the stability and causality of general time-dependent bilinear models. Statistics & Probability Letters 73, 131-138.
- [Bib2] Bibi A. Oyet A. (2005) Estimation of Some Bilinear Time Series Models with Time Varying Coefficients. Stochastic Analysis and Applications 22, 355-376.
- [Bie1] Bielińska E. (2007) Prognozowanie Ciągów czasowych. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- [Bie2] Bielinska E. (2005) Elementary bilinear time series properties and application, Elsevier Science.
- [Bie3] Bielińska E. (2008) Bilinear Time Series in Signal Analysis, in "New Approaches in Automation and Robotics", ISBN 978-3-902613-26-4, Edited by: Harald Aschemann, Publisher: I-Tech Education and Publishing, Vienna, Austria.
- [Bie4] Bielińska E.(2010) Bilinear models for speaker recognition, in book: Advances in System Science, Academic Publishing House EXIT, Warszawa, pp 103-113.
- [Bie5] Bielińska E. (2005) Identification of a mixed linear-bilinear diagonal time series model, Systems Science, Nr 3, Vol.31, pp 21-36.
- [Bie6] Bielińska E., Maliński Ł. (2009) A Computer System for Signals Modelling and Prediction, 14th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje.
- [Bie7] Bielińska E., Nabagło I. (1994) A modification of ELS algorithm for bilinear time-series model identification", Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej: Automatyka, nr. 108.
- [Bie8] Bielińska E. (2007) Biliniowe modele ciągów czasowych w analizie sygnałów. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- [Bou1] Bouzaachane K., Harti M., Benghebrit Y. (2006) First-order superdiagonal bilinear time series for tracking software reliability. http://interstat.statjournals.net/YEAR/2006/articles/0602002.pdf.

<u>http://interstat.statjournais.net/TEAR/2000/atteres/0002002.pdi</u>.

- [Bou2] Bouzaachane K., Harti M., Benghebrit Y. (2007) Parameter estimation for pure diagonal bilinear time series: An algorithm for maximum likelihood procedure. <u>http://interstat.statjournals.net/YEAR/2007/articles/0707005.pdf.</u>
- [Box1] Box G., Jenkins G. (1976) Time Series Analysis: forecasting and control. Holden-day Inc.
- [Bro1] Bronsztejn I, i reszta. (2007) Nowoczesne Kompendium Matematyki. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa.
- [Bro2] Brownlee J. (2011) Clever Algorithms: Nature-Inspired Programming Recipes. Lulu.
- [Bru1] Brunner A. Hess G. (1995) Potential problems in estimating bilinear time-series models. Journal of Economic Dynamics and Control 19, 663-681.

- [Che1] Chellapilla K. Rao S. (1998) Optimisation of bilinear Time Series Models Using Fast Evolutionary Programming. IEEE Signal Processing Letters 5, 39-42.
- [Czy1] Czyż K. (2007) Active Noise Control Systems with Nonuniform Signal Sampling
- [Dai1] Dai H., Sihna N. (1989) Robust recursive least-squares method with modified weights for bilinear system identification. IEE Proceedings, Vol. 136 No. 3
- [Goo1] Gooijger J, Heuts R (1987) Higher order moments of bilinear time series processes with symmetrically distributed errors. Proceedings to Second International Tempere Conference in Statistics, 467-478.
- [Gra1] Granger C. Andersen A. (1978) An introduction to bilinear time series models. Vandenhoeck and Ruprecht.
- [Gue1] Guegan D., Pham, D. T. (1989) A Note on the Estimation of the Parameters of the Diagonal Bilinear Model by Method of Least Squares. Scandinavian Journal of Statistics 16, 129-136.
- [Hil1] Hili O. (2008) Hellinger distance estimation of general bilinear time series models. Statistical Methodology 5, 119-128.
- [Hri1] Hristova D. (2005) Maximum Likelihood Estimation of a Unit Root Bilinear Model with Application to Prices. Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics 9, 56-70.
- [Iwu1] Iwueze S., Ohakwe J (2009) Penalties For Misclassification Of First Order Bilinear And Linear Moving Average Time Series Processes. Interstat Journal Of Statistics.
- [Kir1] Kirchgässner G., Wolters J. (2007) Introduction to Modern Time Series Analysis. Springer Berlin Heidelberg.
- [Kor1] Koronacki J. Milieńczuk J. (2001) Statystyka dla studentów przyrodniczych i technicznych. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [Kum1] Kumar K. (1986) On Identification of some bilinear time series mdoels. Journal of Time Series Analysis 7, 117-121.
- [Lee1] Lee J., Mathews J. (1993) A Stability Condition For Certain Bilinear Systems. Proceedings of IEEE Winter Workshop on Nonlinear DSP, Tempere, Finland,
- [Lju1] Ljung L. (1987) System Identification. Theory for the user, Prentice Hall.
- [Mal1] Maliński Ł., Bielinska E. (2010) Statistical Analysis of Minimum Prediction Error Variance in the Identification of a Simple Bilinear Time-Series Model. Advances in System Science, Academic Publishing House EXIT 183-188.
- [Mal2] Maliński Ł., Figwer J., (2011) On Stationarity of bilinear time-series, The 16th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje.
- [Mal3] Maliński Ł. (2010) An Analysis of Parameters Selection of the Recursive Least Squares Identification Method with Application to a Simple Bilinear Stochastic Model, Advances in System Science, Academic Publishing House EXIT, str. 189-196.
- [Mal4] Maliński Ł. (2011) An Identification Procedure For Elementary Bilinear Time-series Model Based on the Evolutionary Programming, Forum Innowacji Młodych Badaczy (FIMB) – II Ogólnopolskie Seminarium, Łódź.
- [Mal5] Maliński Ł. (2011) On Identification Of Coefficient Of Indivertible Elementary Bilinear Time-Series Models, XIV Sympozjum "Podstawowe Problemy Energoelektroniki, Elektromechaniki i Mechatroniki" (PPEEm), Wisła.
- [Mal6] Maliński Ł. (2012) The Evaluation of Saturation Level for SMSE Cost Function in Identification of Elementary Bilinear Time-Series Model, MMAR Międzyzdroje.
- [Mal7] Maliński Ł (2013) Indivertible Bilinear Time-Series Models For Data Encryption, 18<sup>th</sup> International Conference on System Science, Wroclaw.
- [Mal8] Maliński M. (2004) Weryfikacja hipotez statystycznych wspomagana komputerowo,

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice.

- [Mat1] Mathews J. Moon T. (1991) Parameter Estimation for a Bilinear Time Series Model. International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing 5, 3513-3516.
- [Mat2] Mathews J., Lee J. (1993) Techniques For Bilinear Time Series Analysis. Signals, 27-th Asilomar Conference on Systems and Computers, 1016-1020.
- [Mar1] Martins C. (1997) A Note on the Autocorrelations Related to Bilinear Model With Nonindependent Shocks. Statistics & Probability Letters 36, 245-250.
- [Mar2] Martins C. (1999) A Note on Third-Order Moment Structure of A Bilinear Model With Nonindependent Shocks. Portugaliae Mathematica 56, 115-125.
- [Moh1] Mohler R. Tang Z. (1988) On Bilinear Time-Series Modelling And Estimation. Proceedings of the 27-th Conference on Decision and Control, Austin Texas, 953-954.
- [Ner1] Neri F. Cotta C. Moscato P. Handbook of Memetic Algorithms, Springer 2012.
- [Pha1] Pham T. D. (1986) The Mixing Property of Bilinear and Generalised Random Coefficient Autoregressive Models. Stochastic Processes and Their Applications 23, 291-300.
- [Pha2] Pham T. D. (1985) Bilinear Markovian Representation and Bilinear Models. Stochastic Processes and Their Applications 20, 295-306.
- [Pri1] Priestley M. (1988) Non-linear and Non-stationary Time Series Analysis. Academic Press Ltd.
- [Pri2] Priestley M. (1980) Spectral analysis and time series, Academic Press.
- [Sma1] Small M. (2005) Applied Nonlinear Time Series Analysis. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- [Sor1] Sornette D., Pisarenko V. (2007) Properties of a Simple Bilinear Stochastic Model: Estimation and Predictibility.http:// <u>http://arxiv.org/abs/physics/0703217</u>.
- [Sub1] Subba Rao T. (1981) On the Theory of Bilinear Time Series Models. Journal of the Royal Statistical Society B 44, 244-255.
- [Ses1] Sesay S. A. O., Subba Rao T. (1988) Yule-Walker type difference equation for Higher-Order Moments and Cumulants For Bilinear Time Series Models. Journal of Time Series Analysis 9, 385-401.
- [Ton1] Tong H. (1993) Non-linear time series. Clarendon Press.
- [Qui1] Quinn B. (1982) Stationarity and invertibility of simple bilinear models. Stochastic Processes and Their Applications 12, 225-230.
- [Wan1] Wang H. (2004) Parameter Estimation and Subset Detection For Separable Lower Triangular Bilinear Models. Journal of Time Series Analysis 26, 743-757.
- [Zie1] Zieliński T. (2005) Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: Od teorii do zastosowań, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności Warszawa.