AUTOMATYKA z. 13

RYSZARD GESSING

P.3342/69

STEROWANIE CZASOWO-OPTYMALNE OBIEKTAMI O FUNKCJACH PRZEJŚCIA ZAWIERAJĄCYCH ZERA

25-LECIE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 254 – GLIWICE 1969

SPIS TREŚCI

Str.

Wstęp 3

1. Podstawowe pojęcia i problemy 7

1.1. Równanie obiektu i dopuszczalne sterowanie 7
1.2. Własności rozwiązania równania obiektu 8
1.3. Sformułowanie problemów 12
1.4. Przestrzeń fazowa X 14

2. Rozwiązanie Problemu I 18

2.1. Punkt początkowy trajektorii w przestrzeni X . . . 18
2.2. Sterowanie w (t) dla $t > t_1$ 18
2.3. Zbiór punktów końcowych w przestrzeni X 21
2.4. Sterowanie optymalne w sensie Problemu I 23
2.5. Przykład sterowania optymalnego w sensie Problemu I . 29

3. Rozwiązanie Problemu II 32

3.1. Zbiór punktów początkowych trajektorii w przestrzeni X . 32
3.2. Sterowanie optymalne w sensie Problemu I 34
3.3. Uwagi o sterowaniu optymalnym w sensie Problemu II . 38
3.4. Uwagi o stosowaniu warunków transwersalności . . 39
3.5. Przykład sterowania optymalnego w sensie Problemu II . 40

4. Sterowanie przy ograniczonych współrzędnych 43

4.1. Ograniczenie ciągłych współrzędnych obiektu . . . 44
4.2. Ograniczenie niektórych ciągłych współrzędnych obiektu . 47
4.3. Ograniczenie ciągłych i jednej nieciągłej współrzędnej obiektu 50
4.4. Uwagi o rozwiązaniu Problemów I i II w przypadku ograniczonych współrzędnych obiektu 53
4.5. Przykład sterowania optymalnego przy ograniczonej współrzędnej y 54

5. Inne ograniczenia sygnału sterującego 63

5.1. Ograniczenie k-tej pochodnej sygnału sterującego . . . 63
5.2. Złożone ograniczenia sygnału sterującego 71

6. Synteza optymalnego sterowania 74

6.1. Ograniczenie sygnału sterującego typu (1.4) 74
6.2. Ograniczenie k-tej pochodnej sygnału sterującego . . . 77
6.3. Przygotowanie obiektu do optymalnego sterowania . . 80
6.4. Uwagi ogólne o przygotowaniu obiektu do optymalnego sterowania 85

Wnioski 87

Literatura 91

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 254

RYSZARD GESSING

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA Gliwice

P.3342/69

STEROWANIE CZASOWO-OPTYMALNE OBIEKTAMI O FUNKCJACH PRZEJŚCIA ZAWIERAJĄCYCH ZERA

PRACA HABILITACYJNA Nr 91

GLIWICE 1969

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Fryderyk Staub

REDAKTOR DZIAŁU

Stanisław Malzacher

SEKRETARZ REDAKCJI

Witold Gużkowski

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. M. Strzody 18

PJ 178/69

Nakł. 100+175 Ark. wyd. 4,04 Ark. druk. 5,69 Papier offsetowy kl. III, 70x100, 70 g
Oddano do druku 29. 7. 1969 Podpis. do druku 4. 10. 1969 Druk ukończ. w październ. 1969
Zam. 1021 17. 6. 1969 O-22 Cena zł 5,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

WSTĘP

W literaturze można znaleźć niewiele pozycji dotyczących problemu sterowania czasowo-optymalnego obiektami, których funkcje przejścia posiadają zera, a w tych pozycjach które są wydaje się, że poruszany problem nie został doprowadzony do końca. Ze względu na nieciągłość trajektorii w przestrzeni fazowej Y - w przypadku takich obiektów nie wystarczy zaznaczyć, że zajmujemy się problemem sterowania czasowo-optymalnego, lecz należy problem ten dokładnie sformułować.

W pracy [2] autor w celu określenia powierzchni przełączeń (potrzebnych do syntezy układów czasowo-optymalnych) wprowadza nowe zmienne $\underline{x}$ reprezentujące w pełni stan obiektu. W nowej przestrzeni fazowej X trajektorie są już ciągłe. Autor przyjmuje przy tym bez uzasadnienia, że sterowanie typu "Bang-Bang" jest sterowaniem optymalnym również w przypadku rozpatrywanych obiektów. W pracy [2] rozpatrywany problem nie został bliżej sprecyzowany i jest traktowany raczej wzmiankowo.

Również w pracy [3] nie sprecyzowano bliżej problemu. Jej autor wykorzystując te same zmienne $\underline{x}$ stara się uzasadnić, że sterowanie typu "Bang-Bang" jest dla rozpatrywanego przypadku sterowaniem optymalnym. W pracach [2, 3] punkt początkowy $\underline{x}_0$ trajektorii w przestrzeni X nie został wcale określony, natomiast przyjmuje się, że punkt końcowy $\underline{x}_1 = 0$, co nie jest niczym uzasadnione.

Precyzyjnie natomiast - szczególnie w fazie końcowej sterowania - został sprecyzowany problem w pracy [1]. Zasadnicza różnica w stosunku do prac [2, 3] jest taka, że autorzy pracy [1] stawiają dodatkowe wymagania sygnałowi wyjściowemu y obiektu. Żądają oni mianowicie, aby sygnał y po chwili t_1 - osiągnięcia przez niego pożądanej wartości końcowej $y_1 = 0$ - pozostawał w dalszym ciągu bez zmiany (czyli aby $y = 0$ dla

$t > t_1$). Pokazują oni, że przy takim sformułowaniu problemu punkt końcowy $\underline{x}_1$ trajektorii w przestrzeni X jest punktem należącym do pewnego zbioru G[x]).

Autorzy pracy [1] rozwiązują poprawnie kilka przykładów[xx]), prowadząc rozważania pod kątem syntezy układów. Jednak nie jest poprawne wtórne, ogólne sformułowanie problemu w przestrzeni X (patrz "Remark 7.3" str. 655), które zdaniem autorów ma odpowiadać pierwotnemu sformułowaniu problemu, odnoszącemu się do sygnału y. Punkt b) tego wtórnego sformułowania mówi że: "Dowolny stan początkowy w zbiorze G powinien być (przez poszukiwane sterowanie) utrzymywany w dalszym ciągu w zbiorze G". Ma to być zdaniem autorów równoważne utrzymywaniu syngału y na wartości zero. Łatwo wykazać, że ta równoważność nie zachodzi. Można to zrobić na przykładzie rozpatrywanym w podrozdziale 2.5 niniejszej pracy. W tym przykładzie dla dowolnego stanu początkowego w zbiorze $G = Z_x^+$ można znaleźć nieskończenie wiele różnych sterowań spełniających wymagania punktu b), a tylko jedno z nich jest sterowaniem utrzymującym sygnał y na poziomie zero.

Autorzy pracy [1] zakładają, że punkt początkowy $\underline{x}_0$ jest zupełnie dowolnym punktem przestrzeni X i nie zatrzymują się w swoich rozważaniach nad wyznaczeniem tego punktu.

W przypadku rozważanych obiektów, do pełnego określenia ich stanu w dowolnej chwili czasu potrzebna jest znajomość nie tylko sygnału wyjściowego y i jego (n-1) pochodnych (czyli n-wymiarowego wektora $\underline{y}$), ale również - znajomość sygnału sterującego w i jego (m-1) - pochodnych (czyli m-wymiarowego wektora $\underline{y}$). W rozpatrywanych zagadnieniach stawiane wymagania dotyczą zazwyczaj wektora $\underline{y}$, a nie wektora $\underline{w}$. Na przykład chcemy, aby po chwili t_1 było $\underline{y} = \underline{y}_1 = 0$, przy czym jest nam

---

x) Jeden z Lematów, a mianowicie Lemat 7.3 dotyczący tego zbioru G jest błędny, o czym wspomina się w jednym z odnośników niniejszej pracy.

xx) Przykład 7.9 jest błędny, gdyż korzysta się w nim z błędnego lematu 7.3.

wszystko jedno przy jakim "ustawieniu steru" $\underline{w}$ wektor $\underline{y}$ obiektu osiągnie wartość $\underline{y}_1 = 0$. Ponieważ wektor $\underline{w}$ jest m-wymiarowy więc w wyborze stanu końcowego $\underline{x}_1$ w przestrzeni X mamy m-stopni swobody. Stąd wynika to, że punkt końcowy $\underline{x}_1$ trajektorii w przestrzeni X jest punktem należącym do m-wymiarowego zbioru G.

Jeżeli na początku sterowania wektor $\underline{y}$ obiektu ma przyjmować wartość $\underline{y}_0$, to można rozróżnić tutaj dwa przypadki:
przypadek I - gdy początkowe "ustawienie steru" $\underline{w}_0$ jest zadane;
przypadek II - gdy początkowe "ustawienie steru" $\underline{w}_0$ można sobie wybrać. W związku z tym w niniejszej pracy sformułowano dwa problemy. Problem I odpowiadający przypadkowi I prowadzi do zagadnienia sterowania optymalnego w przestrzeni X z punktu $\underline{x}_0$ (stanu początkowego określonego przez parę $\underline{y}_0$, $\underline{w}_0$) do m-wymiarowego zbioru punktów końcowych. Problem II odpowiadający przypadkowi II - prowadzi do zagadnienia sterowania optymalnego z m-wymiarowego zbioru punktów początkowych do m-wymiarowego zbioru punktów końcowych.

Oba te problemy zostały sformułowane w rozdziale I niniejszej pracy, przy uwzględnieniu własności rozwiązań równania obiektu i związanej z tym nieciągłości trejektorii w przestrzeni Y.

W rozdziałach II i III zostały udowodnione dwa twierdzenia dotyczące odpowiednio sterowania optymalnego w sensie Problemu I (rozdział II) i w sensie Problemu II (rozdział III).

W rozdziale IV rozpatruje się dodatkowo przypadek, gdy ograniczenia są nałożone nie tylko na sygnał sterujący ale również na niektóre współrzędne $y^{(i)}$ obiektu. W rozdziałach I - IV rozpatruje się sterowanie dopuszczalne będące przedziałami ciągłą funkcją czasu i ograniczone od dołu i od góry.

Rozdział V dotyczy innych ograniczeń sygnału sterującego. Rozpatruje się tu przypadek, gdy ograniczona jest k-ta pochodna sygnału sterującego oraz przypadek tzw. złożonych ograniczeń sygnału sterującego. W tym ostatnim przypadku ograniczenia nałożone są zarówno na sam sygnał sterujący, jak i na pochodne tego sygnału.

Problem syntezy optymalnego sterowania jest rozważany w rozdziale VI i to zarówno dla przypadku, gdy ograniczenia dotyczą samego sygnału sterującego, jak i jego pochodnych.

Ściśle związany z postawionym w niniejszej pracy Problemem II jest Problem przygotowania obiektu do optymalnego sterowania, o którym mówi się w podrozdziale 6.3. Jak to się tam podkreśla Problem przygotowania obiektu do optymalnego sterowania dotyczy nie tylko rozpatrywanych obiektów, lecz ma aspekt bardziej ogólny.

Chciałbym w tym miejscu złożyć serdeczne podziękowanie Panu Prof. dr Stefanowi Węgrzynowi, który zachęcił mnie do zajęcia się tymi problemami oraz którego cenne uwagi i wskazówki w znacznej mierze przyczyniły się do uściślenia zamieszczonych tutaj rozważań.

Również tą drogą bardzo serdecznie dziękuję Panu Prof. dr Czesławowi Olechowi za Jego cenne uwagi dotyczące pracy oraz za życzliwość okazaną mi w dyskusjach.

1. PODSTAWOWE POJĘCIA I PROBLEMY

1.1. Równanie obiektu i dopuszczalne sterowanie

Będziemy się zajmować sterowaniem obiektów liniowych o jednym wejściu w (sygnale sterującym - wymuszeniu) i jednym wyjściu y, dających się opisać za pomocą równania różniczkowego o postaci:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_{n-m} w^{(m)} + b_{n-m+1} w^{(m-1)} + \ldots + b_n w^{x)}, \tag{1.1}$$

gdzie

$$m \leqslant n,\ a_i,\ b_j (i = 1,2,\ldots,n, j = n-m, n-m+1, \ldots, n)$$

stałe współczynniki, $b_{n-m} \neq 0$ lub - co jest równoznaczne - za pomocą funkcji przejścia o postaci:

$$K(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{b_{n-m} s^m + b_{n-m+1} s^{m-1} + \ldots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}. \tag{1.2}$$

O sygnale sterującym w(t) zakładamy, że jest funkcją określoną, przedziałami ciągłą mającą w dowolnym, skończonym przedziale czasu co najwyżej skończoną ilość punktów nieciągłości pierwszego rodzaju. Innymi słowy zakładamy, że w punkcie nieciągłości $t = \tau$ istnieją lewo i prawostronne granice:

---

x) $y^{(i)}$ i $w^{(j)}$ - odpowiednio i-ta i j-ta pochodna funkcji $y = y(t)$ i $w = w(t)$ podług czasu t.

$$w(\tau^-) = \lim_{\substack{t \to \tau \\ t < \tau}} w(t) \quad \text{i} \quad w(\tau^+) = \lim_{\substack{t \to \tau \\ t > \tau}} w(t) \qquad (1.3)$$

a całka Riemana $\int_0^t w(\vartheta)d\vartheta$ traktowana jako funkcja zmiennej t jest w punkcie $t = \tau$ ciągła.

Zakładamy również, że pochodne $w^{(j)}(t)$, $j = 1,2,\ldots,m-1$, funkcji $w(t)$ mają w interesującym nas rozdziale czasu skończoną ilość punktów nieciągłości i nieokreśloności, w których posiadają one lewo $w^{(j)}(\tau^-)$ i prawo: $w^{(j)}(\tau^+)$ - stronne granice.

Zakładamy jeszcze, że wartości funkcji $w(t)$ mogą mieścić się w przedziale

$$\alpha \leqslant w(t) \leqslant \beta , \qquad (1.4)$$

gdzie α i β dowolne dane, stałe wartości.
Wartości funkcji $w(t)$ w punktach nieciągłości $t = \tau$ nie mają istotnego znaczenia w dalszych rozważaniach, dla określoności funkcji $w(t)$ przyjmiemy jednak, że wartości $w(\tau)$ są równe lewostronnej granicy, czyli $w(\tau) = w(\tau^-)$, Sygnał $w(t)$ spełniający poczynione założenia będziemy w dalszym ciągu nazywać dopuszczalnym sygnałem sterującym.

1.2. Własności rozwiązania równania obiektu

Przy takim sygnale sterującym $w(t)$ występujące po prawej stronie równania (1.1) kolejne pochodne $w^{(j)}(t)$ funkcji $w(t)$, rozumiane w zwykłym sensie, też są funkcjami, które są przedziałami ciągłe, przy czym w punktach nieciągłości funkcji $w(t)$ pochodne $w^{(j)}(t)$ są nieokreślone. Rozwiązanie równania (1.1) w przedziałach gdzie prawa strona równania (1.1) jest funkcją ciągłą - łatwo jest znaleźć. Dla jednoznacznego określenia rozwiązania $y(t)$ w pewnym dowolnym przedziale czasu:

$$t'_0 < t < t'_1 \qquad (1.5)$$

potrzebna jest znajomość warunków początkowych w punktach należących do każdego z przedziałów ciągłości prawej strony równania (traktowanej jako funkcji czasu t), składających się na przedział (1.5).

W dalszym ciągu występujące w równaniu (1.1) wielkości $w^{(j)}(t)$ i $y^{(i)}(t)$, $j = n-m, \ldots, n$, $i = 1,2, \ldots, n$ będziemy rozumieli jako pochodne funkcji $w(t)$ i $y(t)$ w sensie dystrybucyjnym[x]. Wielkości $w^{(j)}(t)$ i $y^{(i)}(t)$ będą więc właściwie dystrybucjami. Wprowadzimy też następującą definicję rozwiązania równania (1.1):

Rozwiązanie $y(t)$ równania (1.1) jest funkcją dla której dystrybucja otrzymana z wyrażenia stojącego po lewej stronie tego równania jest równa dystrybucji występującej po prawej stronie tego równania.

Pokażemy teraz, że tak zdefiniowane rozwiązanie $y(t)$ równania (1.1) jest jednoznacznie określone przez warunki początkowe podane w dowolnym punkcie t_o ciągłości funkcji wektorowej $\underline{w}(t) = (w(t), w^{(1)}(t), \ldots, w^{(m-1)}(t))$[xx].

Jeżeli oznaczymy przez:

$$\Delta y^{(i)}(\tau) = y^{(i)}(\tau^+) - y^{(i)}(\tau^-)$$
$$\Delta w^{(j)}(\tau) = w^{(j)}(\tau^+) - w^{(j)}(\tau^-) \qquad (1.8)$$

to jak pokazano np. w [4,5] zdefiniowane powyżej rozwiązanie $y(t)$ spełnia następujące zależności:

$$\Delta y^{(i)}(\tau) = \gamma_0 \Delta w^{(i)}(\tau) + \gamma_1 \Delta w^{(i-1)}(\tau) + \ldots + \gamma_i \Delta w(\tau), \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (1.9)$$

---

x) Patrz [6]

xx) Punkt t jest punktem ciągłości funkcji wektorowej $\underline{w}(t)$ jeżeli jest on punktem ciągłości wszystkich pochodnych $w^{(j)}(t)$ $(j=0,1,\ldots, m-1)$ - składowych wektora $\underline{w}(t)$. Funkcję wektorową $\underline{w}(t)$ możemy otrzymać jeżeli znamy funkcję $w(t)$.

gdzie stałe wielkości γ_i określone są wzorem rekurencyjnym:

$$\gamma_i = b_i - a_i \gamma_{i-1} - a_2 \gamma_{i-2} - \dots - a_i \gamma_o, \quad _o, \; i=1,2,\dots,n$$

$$\gamma_o = b_o \tag{1.10}$$

przy czym w równaniu (1.1) współczynniki b_i, $i = 0,1,\dots,$ $n-m-1$, są równe zeru, a więc mamy:

$$b_i = 0 \quad i \quad \gamma_i = 0 \quad \text{dla} \quad i = 0,1,\dots,n-m-1. \tag{1.11}$$

Wzory (1.9) i (1.10) pozwalają nam wyznaczyć warunki początkowe $y^{(i)}(\tau^+)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, w następnym przedziale ciągłości pochodnej $y^{(i)}(t)$, jeżeli jest znana wartość $y^{(i)}(\tau^-)$ (z poprzedniego przedziału ciągłości $y^{(i)}(t)$) i jeżeli znane są wartości $\Delta w^{(j)}(\tau)$, $j = 0,\dots,m-1$, (te ostatnie wartości są znane, jeżeli znana jest funkcja $w(t)$ w przedziale (1.5)). A zatem warunki początkowe $y^{(i)}(t_o)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, podane w punkcie t_o należącym do któregokolwiek przedziału ciągłości funkcji wektorowej $\underline{w}(t)$ w sposób jednoznaczny wyznaczają rozwiązanie $y(t)$ równania (1.1) w całym przedziale (1.5) (jeżeli znany jest przebieg $w(t)$ w (1.5)).

Z wzorów (1.9), (1.10) i (1.11) widać, że w przypadku gdy $m \leqslant n$ to pochodne $y^{(i)}(t)$ dla $i = 0,1,\dots,$ $n-m-1$, są ciągłe[x)], a dopiero pochodne wyższego rzędu ($i = n-m,\dots,n$) mają punkty nieciągłości, w których te pochodne mają wartości nieokreślone.

W n-wymiarowej przestrzeni fazowej Y o współrzędnych y, $y^1,\dots,$ y^{n-1}, punkt odpowiadający rozwiązaniu równania (1.1) (przy danej przedziałami ciągłej funkcji $w(t)$) opisuje trajektorię fazową, która jest linią również przedziałami ciągłą (poprzerywaną). Dla punktów $t = \tau_i$ - nieciągłości funkcji $w(t)$ punkty trajektorii fazowej nie są określone. Trajektorie

---

x) Gdyż $y^{(i)}(\tau^-) = y^{(i)}(\tau^+)$, $i = 0,1,\dots,n-m-1$, a w punkcie τ podobnie jak dla funkcji $w(t)$ możemy przyjąć $y^{(i)}(\tau) = y^{(i)}(\tau^-)$.

fazowe w przestrzeni Y określone są przez zespół wielkości $y(t)$, $y^{(1)}(t),\ldots, y^{(n-1)}(t)$, dlatego też wektor $y(t) = (y(t), y^{(1)}(t),\ldots, y^{(n-1)}(t))$ będziemy tutaj nazywać rozwiązaniem równania (1.1), Rozwiązaniu $\underline{y}(t)$ odpowiada w przestrzeni Y trajektoria fazowa, którą będziemy nazywać trajektorią $\underline{y}(t)$.

Powstaje bardzo istotne pytanie, czy przy rozpatrywanym dopuszczalnym sterowaniu $w(t)$ przebieg sygnału wyjściowego obiektu opisanego równaniem (1.1) jest w praktyce zgodne ze zdefiniowanym powyżej rozwiązaniem $y(t)$ równania (1.1)? Pytanie to dotyczy przede wszystkim punktów τ - w których funkcja wektorowa $\underline{w}(t)$ jest nieciągła. W tych punktach zdefiniowane wyżej rozwiązanie $y(t)$ i jego pochodne $y^{(i)}(t)$ mogą posiadać "skoki" $\Delta y^{(i)}(\tau) \neq 0$, określone wzorami (1.9). Czy takie właśnie "skoki" występują w sygnale wyjściowym obiektu?

Przesłanki teoretyczne pozwalające na postawione pytanie dać odpowiedź twierdzącą są następujące:

Weźmy pod uwagę ciąg funkcji ciągłych $w_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$ (spełniających ograniczenie (1.4) i posiadających ciągłe pochodne do m-tej włącznie) zbieżny w interesującym nas przedziale do sterowania $w(t)$[x]. Oznaczmy przez $y_k(t)$ i $\underline{y}_k(t)$ rozwiązanie równania (1.1) przy sterowaniu $w_k(t)$ (z odpowiednim warunkiem początkowym $\underline{y}_o$). Bez większych trudności można udowodnić, że rozwiązania $\underline{y}_k(t)$ są zbieżne do zdefiniowanego powyżej rozwiązania $\underline{y}(t)$ równania (1.1) przy sterowaniu $w(t)$ (z tym samym warunkiem początkowym $\underline{y}_o$). A zatem "skoki" rozwiązania $\underline{y}(t)$ są granicami przyrostów rozwiązań $\underline{y}_k(t)$ w pewnych dowolnie małych przedziałach zawierających punkty nieciągłości funkcji $\underline{w}(t)$.

Ponieważ w praktycznym obiekcie przy sterowaniu $w_k(t)$ sygnał wyjściowy będzie zgodny z rozwiązaniem $\underline{y}_k(t)$, przy

---

[x] Mówiąc precyzyjniej i stosując terminologię jak w [6 str. 13] zakładamy, że ciągi $w_k^{(i)}(t)$, $i = 0,1,\ldots,m, k = 1,2,\ldots$ są podstawowe. Ciąg $w_k^{(i)}(k)$, $k = 1,2,\ldots$, określa dystrybucję $w^{(i)}(t)$ (i-tą pochodną dystrybucyjną sygnału $w(t)$).

dowolnym k, a ciąg $w_k(t)$ jest zbieżny do $w(t)$, więc przy sterowaniu $w(t)$ sygnał wyjściowy obiektu powinien być zgodny z rozwiązaniem $\underline{y}(t)$. Należy dodać, że zazwyczaj w praktyce nieciągłość, czyli "skok" sygnału $w(t)$ jest realizowany poprzez bardzo szybką, ale ciągłą zmianę wielkości w i jej pochodnych.

1.3. Sformułowanie problemów

Weźmy pod uwagę dwa punkty przestrzeni Y: $\underline{y}_0$ i $\underline{y}_1$. Będziemy mówić, że dopuszczalny sygnał sterujący $w(t)$ sprowadza punkt w przestrzeni fazowej z położenia $\underline{y}_0$ w położenie $\underline{y}_1$ w czasie $T = t_1 - t_0$, jeżeli odpowiadające temu sygnałowi $w(t)$ rozwiązanie $\underline{y}(t)$ równania (1.1) z warunkiem początkowym $\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0$ spełnia również zależność: $\underline{y}(t_1^+) = \underline{y}_1$, przy czym $t_1 \geqslant t_0$ [x].

Z wzorów (1.9) wynika, że w przypadku gdy t_0 jest punktem nieciągłości funkcji wektorowej $\underline{w}(t)$ [xx] to warunki początkowe $\underline{y}(t_0^+)$ w przedziale czasu $t_0 < t < t_1$ (dla rozwiązania $\underline{y}(t)$ dla którego $\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0$) zależą również od wartości $\underline{w}(t_0^-)$, czyli od końcowej granicznej wartości sygnału sterującego z przedziału czasu $t < t_0$, przy działaniu którego to sygnału $\underline{w}(t)$ punkt w przestrzeni Y zdążał do położenia $\underline{y}_0$ ($\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0$). Jeżeli zatem mamy dane: funkcję $w(t)$ dla $t > t_0$ i warunek początkowy $\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0$, a nie znamy wartości $\underline{w}(t_0^-)$ to nie możemy znaleźć rozwiązania $y(t)$ równania (1.1) w przedziale czasu $t > t_0$, spełniającego warunek $\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0$.

---

[x] Warunki $y_0(t_0^-) = \underline{y}_0$ i $\underline{y}(t_1^+) = y_1$ oznaczają, że tuż przed chwilą t_0 rozpoczęcia sterowania - punkt w przestrzeni Y zdąża do położenia $\underline{y}_0$, a bezpośrednio po chwili t_1 punkt przestrzeni Y "osiąga" położenie $\underline{y}_1$.

[xx] Punkt τ jest punktem nieciągłości funkcji wektorowej $\underline{w}(t)$ - (wektora) jeżeli jest on punktem nieciągłości chociażby jednej funkcji $w^{(i)}(t)$, $i = 0,1,\ldots,m-1$, - składowej wektora $\underline{w}(t)$.

Biorąc pod uwagę to co powiedziano powyżej, problemy którymi będziemy się zajmować w niniejszej pracy można sformułować następująco:

Problem I

W przestrzeni fazowej Y dane są dwa punkty: $\underline{y}_0 = (y_0, y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(n-1)})$ i $\underline{y}_1 = (y_1, 0, \ldots, 0)$. Dany jest również wektor $\underline{w}(t_0^-) = \underline{w}_0$. Wśród dopuszczalnych sygnałów sterujących $w(t)$, $t > t_0$ należy znaleźć taki, któryby w minimalnym czasie $T = t_1 - t_0$ sprowadził punkt w przestrzeni Y z położenia $\underline{y}_0$ w położenie $\underline{y}_1$ i to tak aby w przedziale czasu $t > t_1$, punkt pozostał w położeniu $\underline{y}_1$ (czyli aby $\underline{y}(t) = \underline{y}_1$ dla $t > t_1$).

Problem II

Różni się od Problemu I tylko tym, że wektor $\underline{w}(t_0^-)$ nie jest dany, lecz należy go również znaleźć. Sterowanie $w(t)$ powinno być przy tym dopuszczalne dla $t > t_0 - \varepsilon$ (gdzie ε pewna dowolnie mała liczba dodatnia).

Z równania (1.1) wynika, że relacja $\underline{y}(t) = \underline{y}_1$ czyli $y(t) = y_1$ dla $t > t_1$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy prawa strona równania (1.1) jest równa $a_n y_1$ dla $t > t_1$. Jeżeli więc wprowadzimy nowe zmienne $y^* = y - y_1$ i $w^* = w - w_1$, gdzie $w_1 = \frac{a_n}{b_n} y_1$ *) to równanie (1.1) dla nowych zmiennych y^* i w^* pozostanie bez zmiany. W miejsce warunku (1.4) otrzymujemy teraz warunek:

$$\alpha^* = \alpha - w_1 \leqslant w^* \leqslant \beta - w_1 = \beta^*, \qquad (1.12)$$

który jest analogiczny jak (1.4) (z innymi wartościami α i β). Punktowi $\underline{y}_1 = (y_1, 0, \ldots, 0)$ w przestrzeni Y odpowiada w przestrzeni Y^* (o współrzędnych $y^*, y^{*(1)}, \ldots, y^{*(n-1)}$) punkt $\underline{y}_1^* = (0, 0, \ldots, 0)$.

*) Zakładamy przy tym, że $b_n \neq 0$.

A zatem nie ograniczając ogólności rozważań możemy przyjąć, że w postawionych powyżej problemach punkt $\underline{y}_1$ ma współrzędne równe zeru, czyli $\underline{y}_1 = 0$ ($\underline{y}_1$ jest początkiem układu współrzędnych).

Sygnał sterujący $\tilde{w}(t)$, który należy zgodnie z Problemem I (lub Problemem II) znaleźć będziemy nazywać <u>sterowaniem optymalnym</u>, (dodając w razie potrzeby: w sensie Problemu I lub w sensie Problemu II) natomiast trajektorię $\underline{y}(t)$ określoną przez rozwiązanie równania (1.1), w którym $w(t) = \tilde{w}(t)$ taką, że $\underline{y}(t_o^-) = \underline{y}_o$ - nazwiemy <u>trajektorią optymalną w przestrzeni Y</u>.

1.4. <u>Przestrzeń fazowa X</u>

Wprowadzimy obecnie nowe zmienne $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (nowy układ współrzędnych) związane ze zmiennymi $y^{(i)}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, oraz $w^{(j)}$, $j = 0,1,\ldots, m-1$, relacjami [1, 2, 3]:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= y \\
x^2 &= y^{(1)} \\
&\cdots\cdots \\
x^{n-m} &= y^{(n-m-1)} \\
x^{n-m+1} &= y^{(n-m)} - \gamma_{n-m}\, w \\
x^{n-m+2} &= y^{(n-m+1)} - \gamma_{n-m}\, w^{(1)} - \gamma_{n-m+1}\, w \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x^n &= y^{(n-1)} - \gamma_{n-m}\, w^{(m-1)} - \gamma_{n-m+1}\, w^{(m-2)} - \ldots - \gamma_{n-1}\, w .
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

Wykorzystując związki (1.13) można równanie (1.1) w nowym układzie współrzędnych zapisać w postaci następującego układu równań:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}^1 = x^2 \\
&\text{- - - - - -} \\
&\dot{x}^{n-m-1} = x^{n-m} \\
&\dot{x}^{n-m} = x^{n-m+1} + \gamma_{n-m}\, w \\
&\dot{x}^{n-m+1} = x^{n-m+2} + \gamma_{n-m+1}\, w \\
&\text{- - - - - - - - - - - - - - -} \\
&\dot{x}^n = -a_n x^1 - a_{n-1} x^2 - \ldots - a_1 x^n + \gamma_n\, w\,.
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

W otrzymanym układzie równań różniczkowych (1.14) nie występują już pochodne wielkości $w(t)$. Porównując zależności (1.9) i (1.13) można dojść do wniosku, że przy dopuszczalnych sygnałach sterujących $w(t)$ - rozpatrywanym poprzednio rozwiązaniom $y(t)$ równania (1.1) związki (1.13) podporządkowują ciągłe rozwiązania $x^i(t)$, $i = 1,2,\ldots, n$, układu równań (1.14). W dalszym ciągu będziemy więc rozpatrywać ciągłe rozwiązania układu równań (1.14) i będziemy je zapisywali w postaci wektora $\underline{x}(t) = (x^1(t), x^2(t),\ldots, x^n(t))$. A zatem w przestrzeni X o współrzędnych $x^1, x^2,\ldots, x^n$ trajektorie fazowe odpowiadające rozwiązaniom $\underline{x}(t)$ równań (1.14) przy dowolnym dopuszczalnym sterowaniu $w(t)$ - są liniami ciągłymi[x].

W przestrzeni X weźmy teraz pod uwagę dwa punkty $\underline{x}_0$ i $\underline{x}_1$. Dla znalezienia sterowania optymalnego $w(t)$, $t_0 < t < t_1$, pozwalającego w minimalnym czasie $T = t_1 - t_0$ sprowadzić

---

x) Łatwo zauważyć że współrzędne $x^1, x^2,\ldots x^n$ w pełni określają stan obiektu, zatem przestrzeń X jest przestrzenią stanu obiektu. Również dla obiektu opisanego nieliniowym równaniem różniczkowym o postaci

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{m-1} y^{(n-m+1)} + f(y^{(n-m)},\ldots, y) =$$

$$= b_{n-m} w^{(m)} + \ldots + b_{n-1} w^{(1)} + g(w),$$

gdzie f i g dane ciągłe funkcje - wzory (1.13) na współrzędne stanu $\underline{x}$ obiektu pozostają nadal ważne.

punkt w przestrzeni X z położenia $\underline{x}_0$ w położenie $\underline{x}_1$ (w przypadku gdy ruch punktu opisany jest układem równań (1.14)) można jak wiadomo stosować zasadę maksimum Pontriagina [7 str. 133-136]. Z zastosowania tej zasady wynika mianowicie, że optymalne sterowanie ma w tym przypadku postać funkcji przedziałami stałej, która w przedziałach ciągłości przyjmuje na przemian stałe wartości α i β. W interesującym nas odcinku czasu $t_0 < t < t_1$ funkcja $w(t)$ posiada skończoną ilość punktów nieciągłości pierwszego rodzaju (inaczej tzw. punktów przełączeń).

Wprowadzając m-wymiarową przestrzeń W o współrzędnych w, $w^{(1)}, \ldots, w^{(m-1)}$ możemy relacje (1.13) interpretować jako relacje, które przyporządkowują dowolnej parze punktów $\underline{y}$ i $\underline{w}$ wziętych z przestrzeni Y i W - odpowiedni, jedyny punkt $\underline{x}$ przestrzeni X. Będziemy w dalszym ciągu mówić, że punkt $\underline{x}$ odpowiada zgodnie z (1.13) parze punktów $\underline{y}$ i $\underline{w}$. Łatwo można zauważyć, że również parze punktów $\underline{x}$ i $\underline{w}$ wziętych odpowiednio z przestrzeni X i W odpowiada zgodnie z (1.13) jedyny punkt $\underline{y}$ w przestrzeni Y[x)].

Jeżeli w relacjach (1.13) występują określone funkcje czasu - odpowiednio rozwiązanie $\underline{x}(t)$ układu równań (1.14), rozwiązanie $\underline{y}(t)$ równania (1.1) i funkcja wektorowa $\underline{w}(t)$ odpowiadająca sygnałowi sterującemu $w(t)$ oraz jeżeli relacje te są spełnione w pewnym przedziale czasu, wtedy w tym przedziale czasu relacje (1.13) przyporządkowują np. określonemu rozwiązaniu $\underline{y}(t)$ równania (1.1) i określonej funkcji wektorowej $\underline{w}(t)$ - odpowiednie jedyne rozwiązanie układu równań (1.14). W tym przypadku będziemy w dalszym ciągu mówić, że w określonym przedziale czasu rozwiązanie $\underline{x}(t)$ (lub trajektoria $\underline{x}(t)$) odpowiada zgodnie z (1.13) określonemu rozwiązaniu $\underline{y}(t)$ (lub trajektorii $\underline{y}(t)$) i funkcji $\underline{w}(t)$. Na przykład trajektorii

---

x) Również parze punktów $\underline{x}$ i $\underline{y}$ wziętych odpowiednio z przestrzeni X i Y (ale tylko takich punktów, które mają n-m - pierwszych współrzędnych odpowiednio sobie równych) odpowiada zgodnie z (1.13) jedyny punkt przestrzeni W. Wynika to z relacji (1.13) i z udowodnionej w dalszym ciągu relacji (2.6).

optymalnej $\tilde{y}(t)$ w przestrzeni Y i sterowaniu optymalnemu $\tilde{w}(t)$ odpowiada zgodnie z (1.13) w przestrzeni X trajektoria $\tilde{x}(t)$, którą będziemy nazywać trajektorią optymalną w przestrzeni X. Bezpośrednio ze związków (1.13) widać, że przy danym sterowaniu w(t) a więc i $w(t)$ związki (1.13) przyporządkowują w sposób wzajemnie jednoznaczny każdej trajektorii $y(t)$ w przestrzeni Y odpowiednią trajektorię $x(t)$ w przestrzeni X.

2. ROZWIĄZANIE PROBLEMU I

2.1. Punkt początkowy trajektorii w przestrzeni X

Oznaczmy przez $\underline{x}_0$ punkt w przestrzeni X odpowiadający zgodnie z (1.13) danym w Problemie I punktom $\underline{y}_0$ i $\underline{w}_0$. Jeżeli przy dowolnym dopuszczalnym sterowaniu w(t), dla którego $\underline{w}(t_0^-) = \underline{w}_0$, weźmiemy pod uwagę rozwiązanie $\underline{y}(t)$ równania (1.1), dla którego $\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0$, wtedy rozwiązanie $\underline{x}(t)$ odpowiadające zgodnie z (1.13) rozwiązaniu $\underline{y}(t)$ i funkcji $\underline{w}(t)$ spełnia relację $\underline{x}(t_0^-) = \underline{x}_0$. Ze względu na ciągłość rozwiązań $\underline{x}(t)$ (trajektorii $\underline{x}(t)$ w przestrzeni X) mamy: $\underline{x}(t_0^-) = \underline{x}(t_0^+) = \underline{x}(t_0)$, a więc punkt $\underline{x}_0$ jest punktem przez który przechodzi trajektoria $\underline{x}(t)$ w chwili t_0 (czyli $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$).

Udowodniliśmy więc następujący:

Lemat 2.1

Niechaj w(t) będzie dowolnym dopuszczalnym sterowaniem, z zadanym wektorem $\underline{w}(t_0^-) = \underline{w}_0$, a $\underline{x}(t)$ - trajektorią w przestrzeni X, która odpowiada zgodnie z (1.13) rozwiązaniu $\underline{y}(t)$ równania (1.1), dla którego $\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0$ i funkcji $\underline{w}(t)$ określonej przez sterowanie w(t).

Trajektoria $\underline{x}(t)$ przechodzi w chwili t_0 przez punkt $\underline{x}_0 (\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0)$ odpowiadający zgodnie z (1.13) parze punktów $\underline{y}_0$ i $\underline{w}_0$.

Należy podkreślić, że punkt $\underline{x}_0$ jest jednoznacznie określony tylko wtedy gdy dany wektor $\underline{w}(t_0^-) = \underline{w}_0$.

2.2. Sterowanie w(t) dla $t > t_1$

Weźmy teraz pod uwagę te spośród dopuszczalnych sygnałów sterujących w(t), określonych w przedziale czasu $t > t_1$, dla których istnieje rozwiązanie $\underline{y}(t)$ równania (1.1) takie, że

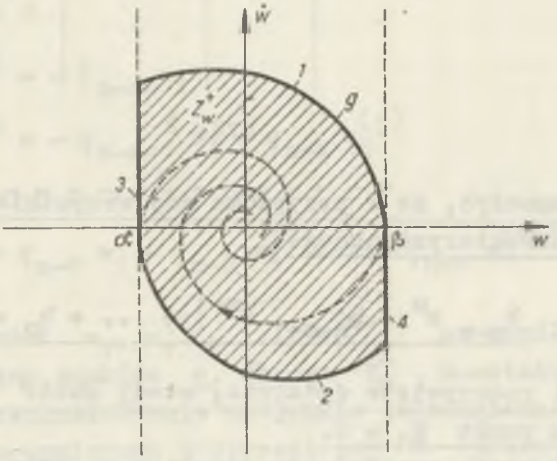
$$\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0 \quad \text{dla} \quad t > t_1 . \tag{2.1}$$

Bezpośrednio z warunku (2.1) i równania (1.1) wynika, że sterowanie $w(t)$ w przedziale czasu $t > t_1$ musi być wybrane wśród dopuszczalnych sterowań spełniających równanie:

$$b_{n-m}\, w^{(m)} + b_{n-m+1}\, w^{(m-1)} + \ldots + b_n\, w = 0 . \tag{2.2}$$

Oznaczmy przez Z_w^+ zbiór takich punktów $\underline{w}_1$ w przestrzeni W, które wzięto jako warunki początkowe rozwiązań $w(t)$ równania (2.2) w chwili t_1 ($\underline{w}(t_1) = \underline{w}(t_1^+) = \underline{w}_1$)[x] gwarantują nam to, że te rozwiązania spełniają dla $t > t_1$ ograniczenia narzucone na sterowanie dopuszczalne.

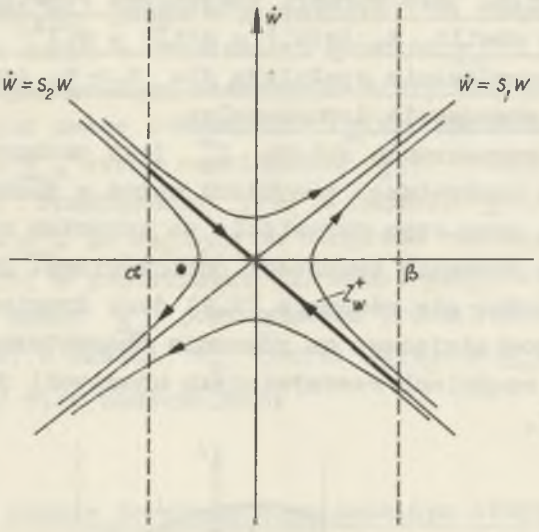
Problem wyznaczania zbioru Z_w^+ jest osobnym zagadnieniem. Dla każdego konkretnego przykładu można w zasadzie wyznaczyć taki zbiór, przy czym oczywiście ze wzrostem rzędu równania (2.2) rosną znacznie trudności obliczeniowe. Przykład zbioru Z_w^+ w przypadku gdy równanie (2.2) jest drugiego rzędu, a pierwiastki odpowiadającego mu równania charakterystycznego są zespolone (o częściach rzeczywistych ujemnych) jest przedstawiony na rys.1.



Rys. 1

[x] Rozwiązania równania (2.2) są ciągłymi funkcjami czasu.

Granica g zbioru Z_w^+ w tym przypadku składa się z odcinków trajektorii fazowych 1 i 2 - stycznych do prostych $w = \alpha$ i $w = \beta$ i odcinków 3 i 4 leżących na tych prostych. Na rysunku 2 pokazano zbiór Z_w^+ dla przypadku gdy równanie (2.2) jest drugiego rzędu, a odpowiadające mu równanie charakterystyczne posiada pierwiastki s_1 i s_2 - rzeczywiste, przy czym $s_1 > 0$, $s_2 < 0$. Zbiór Z_w^+ składa się z punktów tworzących odcinek leżący na prostej $\dot{w} = s_2 w$ i w obszarze $\alpha \leqslant w \leqslant \beta$.



Rys. 2

Łatwo zauważyć, że w przypadku gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego

$$b_{n-m} s^m + b_{n-m+1} s^{m-1} + \ldots + b_n = 0 \qquad (2.3)$$

mają części rzeczywiste dodatnie, wtedy zbiór Z_w^+ zawiera tylko jeden punkt $w_1 = 0$.

Można również zauważyć, że jeżeli wszystkie pierwiastki równania (2.3) są różne od zera i wielkości α i β są tego samego znaku - wtedy zbiór Z_w^+ nie istnieje (jest pusty). W tym przypadku rozpatrywany przez nas problem nie ma rozwiązania,

gdyż wśród stereń dopuszczalnych $w(t)$ nie istnieje takie przy którym $\underline{y}(t) = 0$ dla $t > t_1$.

Należy podkreślić, że zbiór Z_w^+ jest zawsze zbiorem domkniętym (np. na rys. 1a punkty leżące na granicy g zbioru Z_w^+ należą do tego zbioru).

Bezpośrednio z określenia zbioru Z_w^+ wynika, że punkt trajektorii fazowej w przestrzeni Y, przy dopuszczalnym sterowaniu $w(t)$ może pozostawać w przedziale czasu $t > t_1$ w położeniu $\underline{y}_1 = 0$ (tzn. $\underline{y}(t) = 0$ dla $t > t_1$) tylko wtedy, gdy to sterowanie $w(t)$ dla $t > t_1$ jest rozwiązaniem równania (2.2) z warunkami początkowymi $\underline{w}(t_1^+) \in Z_w^+$.

2.3. Zbiór punktów końcowych trajektorii w przestrzeni X

Rozpatrzmy teraz zbiór Z_x^+ takich punktów $\underline{x}_1$ w przestrzeni X, które odpowiadają zgodnie z (1.13) wszystkim parom punktów o postaci $\underline{y}_1 = 0$ i $\underline{w}_1 \in Z_w^+$. A zatem współrzędne punktów $\underline{x}_1$ zbioru Z_x^+ możemy wyznaczyć ze wzorów:

$$
\begin{aligned}
& x_1^1 = 0 \\
& \text{- - - - -} \\
& x_1^{n-m} = 0 \\
& x_1^{n-m+1} = -\gamma_{n-m} w_1 \\
& x_1^{n-m+2} = -\gamma_{n-m+1} w_1 - \gamma_{n-m} w_1^{(1)} \\
& \text{- - - - - - - - - - - - - - - - - -} \\
& x_1^n = -\gamma_{n-1} w_1 - \gamma_{n-2} w_1^{(1)} - \ldots - \gamma_{n-m} w_1^{(m-1)},
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

w których wielkości $w_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(m-1)}$ są współrzędnymi kolejno wszystkich punktów $\underline{w}_1$ zbioru Z_w^+. m-ostatnich wzorów (2.4) określa przekształcenie wzajemnie jednoznaczne przestrzeni W na m-wymiarową podprzestrzeń $\overset{m}{X}$ (przestrzeni X) o współrzędnych $x^{n-m+1}, x^{n-m+2}, \ldots, x^n$.

Przekształcenie to można bowiem zapisać w postaci:

$$\overset{m}{\underline{x}}_1 = -\underline{\Gamma}\,\underline{w}_1 ,$$

gdzie

$$\underline{w}_1 = (w_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(m-1)}) \tag{2.5}$$

$$\overset{m}{\underline{x}}_1 = (x_1^{n-m+2}, x_1^{n-m+2}, \ldots, x_1^{n})$$

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{n-m} , & 0 \ldots, & 0 \\ \gamma_{n-m+1}, \gamma_{n-m}, \ldots, & & 0 \\ - - - - - - - - - - - - & & \\ \gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \ldots, \gamma_{n-m} & & \end{bmatrix} .$$

Przez $\overset{m}{\underline{x}}_1$ oznaczono tu m-wymiarowy wektor, którego składowe są odpowiednio równe m-ostatnim składowym wektora $\underline{x}_1$. Ze związków (2.4) wynika, że jeżeli punkt $\underline{x}_1 \in Z_x^+$ to (n-m) pierwszych składowych wektora $\underline{x}_1$ jest równe zero. A zatem jeżeli $\underline{x}_1 \in Z_x^+$, to te składowe wektora $\underline{x}_1$, które nie wchodzą w zestaw składowych wektora $\overset{m}{\underline{x}}_1$ są równe zero.

Podobnie jak Z_w^+ również zbiór Z_x^+ jest zbiorem domkniętym (porównaj [1] Lemat 7.2). Jeżeli wszystkie pierwiastki równania (2.3) mają części rzeczywiste dodatnie wtedy zbiór Z_x^+ zawiera tylko jeden punkt $\underline{x}_1 = 0$[x)].

Łatwo zauważyć, że:

$$\det \underline{\Gamma} = \gamma_{n-m}^{m} = b_{n-m}^{m} \neq 0 , \tag{2.6}$$

gdyż zgodnie z założeniem $b_{n-m} \neq 0$.

---

x) Lemat 7.3 pracy [1] mówiący że: "jeżeli jeden dowolny pierwiastek jest dodatni lub posiada część rzeczywistą dodatnią, wtedy zbiór Z_x^+ zawiera tylko jeden punkt $\underline{x}_1 = 0$" jest oczywiście nieprawdziwy, a jego dowód jest błędny (patrz przykład z rysunku 2b).

A zatem każdemu punktowi zbioru Z_w^+ odpowiada jedyny punkt zbioru Z_x^+ i na odwrót.

Sformułujemy teraz następujący:

Lemat 2.2

Dla dowolnego, dopuszczalnego sterowania $w(t)$, przy którym istnieje rozwiązanie $y(t)$ równania (1.1), spełniające relację $y(t) = y_1 = 0$, dla $t > t_1$, trajektoria fazowa $x(t)$ w przestrzeni X, odpowiadająca zgodnie z (1.13) temu rozwiązaniu $y(t)$ i funkcji $w(t)$ przechodzi w chwili $t = t_1$ przez jeden z punktów zbioru Z_x^+, czyli $x(t_1) \in Z_x^+$.

Dla udowodnienia Lematu 2.2 przypomnijmy sobie, że jeżeli istnieje rozwiązanie $y(t)$ równania (1.1) takie, że $y(t) = y_1 = 0$ dla $t > t_1$, to sterowanie dopuszczalne $w(t)$, dla $t > t_1$, musi być rozwiązaniem równania (2.2) z warunkami początkowymi $w(t_1^+) = w_1 \in Z_w^+$. Współrzędne punktu trajektorii $x(t)$ (o której mowa w Lemacie 2.2) w "chwili" t_1^+, czyli składowe wektora $x(t_1^+)$ można obliczyć ze wzorów (1.13), z których przy $y(t_1^+) = 0$ i $w(t_1^+) = w_1 \in Z_w^+$ otrzymujemy wzory (2.4). Mamy więc $x(t_1^+) \in Z_x^+$ co wynika z określenia zbioru Z_x^+. Ponieważ trajektorie w przestrzeni X są ciągłe, więc mamy $x(t_1^+) = x(t_1^-) = x(t_1)$ i $x(t_1) \in Z_x^+$.

Z Lematu 2.2 wynika, że dla poszukiwanego przez nas sterowania $w(t)$ punkt końcowy x_1, przez który przechodzi trajektoria fazowa $x(t)$ w przestrzeni X w chwili $t_1 (x(t_1) = x_1)$ jest jednym z punktów zbioru Z_x^+, czyli $x_1 \in Z_x^+$.

2.4. Sterowanie optymalne w sensie Problemu I

Załóżmy teraz, że w chwili t_1 trajektoria w przestrzeni X przechodzi przez punkt $x_1 = (0, \ldots, 0, x_1^{n-m+1}, x_1^{n-m+2}, \ldots, x_1^n)$, przy czym $x_1 \in Z_x^+$. Punktowi $x_1 \in Z_x^+$ odpowiada w zbiorze Z_w^+ jedyny punkt w_1, który możemy wyznaczyć korzystając z wzajemnej jednoznaczności przekształcenia (2.5). Mamy więc

$$w_1 = - \Gamma^{-1} \, {}^m x_1 , \qquad (2.7)$$

gdzie

$$\underline{x}_1^m = (x_1^{n-m+1}, x_1^{n-m+2}, \ldots, x_1^n).$$

Możemy teraz sformułować następujący:

Lemat 2.3

Załóżmy, że trajektoria fazowa $\underline{x}(t)$ w przestrzeni X przechodzi w chwili t_1 przez punkt $\underline{x}_1 \in Z_x^+$ $(\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1)$, a sterowanie $w(t)$ w przedziale czasu $t > t_1$, jest rozwiązaniem równania (2.2) z warunkami początkowymi $\underline{w}(t_1^+) = \underline{w}_1$, wyznaczonymi z realcji (2.7). Wtedy i tylko wtedy trajektoria fazowa $\underline{y}(t)$ w przestrzeni Y, odpowiadająca zgodnie z (1.13) trajektorii $\underline{x}(t)$ i funkcji $\underline{w}(t)$ pokrywa się w przedziale czasu $t > t_1$ z punktem $\underline{y}_1 = 0$ (czyli $\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0$ dla $t > t_1$), a sterowanie $w(t)$, dla $t > t_1$, jest sterowaniem dopuszczalnym.

Dowód Lematu 2.3

Z założenia, że sterowanie $w(t)$, dla $t > t_1$, jest rozwiązaniem równania (2.2) wynika, że w przedziale czasu $t > t_1$ ruch punktu w przestrzeni Y opisany jest za pomocą równania różniczkowego o postaci:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \qquad (2.8)$$

Trajektorie fazowe w przestrzeni Y dla $t > t_1$ są określone przez rozwiązania równania różniczkowego (2.8), a ich przebieg zależy od warunków początkowych $\underline{y}(t_1^+)$. Z założenia mamy również $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1 \in Z_x^+$, a ponieważ trajektorie w przestrzeni X są ciągłe więc $\underline{x}(t_1^+) = \underline{x}(t_1) = \underline{x}_1 = (0, \ldots, 0, x_1^{n-m+1}, x_1^{n-m+2}, \ldots, x_1^n)$. Zgodnie z założeniem jest również $\underline{w}(t_1^+) = \underline{w}_1$, przy czym wielkości $\underline{w}_1$ i $\underline{x}_1^m = (x_1^{n-m+1}, x_1^{n-m+2}, \ldots, x_1^n)$ powiązane są ze sobą relacją (2.7). A zatem składowe wektorów $\underline{x}_1$ i $\underline{w}_1$ powiązane są pomiedzy sobą zależnościami (2.4). Punkt $\underline{y}(t_1^+)$ trajektorii $\underline{y}(t)$, o której mowa w Lemacie 2.3 odpowiada zgodnie z (1.13) parze punktów $\underline{x}(t_1^+) = \underline{x}_1$ i

$\underline{w}(t_1^+) = \underline{w}_1$, uwzględniając więc (2.4) otrzymujemy $\underline{y}(t_1^+) = 0$. Rozwiązanie równania (2.8), w przedziale czasu $t > t_1$, z warunkami początkowymi $\underline{y}(t_1^+) = 0$, ma postać $y(t) = 0$, a więc również $\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0$, dla $t > t_1$. Ponieważ $\underline{x}_1 \in Z_x^+$, a przekształcenie (2.7) jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym punktów zbioru Z_x^+ na punkty zbioru Z_w^+, więc mamy $\underline{w}(t_1^+) = \underline{w}_1 \in Z_w^+$. Zgodnie z określeniem zbioru Z_w^+ rozwiązanie $w(t)$ równania (2.2) (dla $t > t_1$) z warunkami początkowymi $\underline{w}(t_1^+) = \underline{w}_1$ spełnia warunek (1.4), a więc sterowanie $w(t)$, dla $t > t_1$, jest sterowaniem dopuszczalnym.

Odwrotnie jeżeli $\underline{y}(t) = 0$, dla $t > t_1$, a sterowanie $w(t)$ jest dopuszczalne, to łatwo wykazać, że $w(t)$ jest rozwiązaniem równania (2.2) z warunkami początkowymi spełniającymi zależność (2.7), w której $\underline{x}_1$ jest punktem przez który przechodzi trajektoria $\underline{x}(t)$ w chwili t_1.

Bezpośrednio z Lematów 2.1 i 2.3 wynika następujący:

Wniosek I

Załóżmy, że punkt $\underline{x}_o$ odpowiadający zgodnie z (1.13) parze punktów $\underline{y}_o$ i $\underline{w}(t_o^-) = \underline{w}_o$, należy do zbioru Z_x^+ ($\underline{x}_o \in Z_x^+$). Oznaczmy przez $\tilde{w}(t)$ sterowanie, które w przedziale czasu $t > t_o$ jest rozwiązaniem równania (2.2) z warunkami początkowymi $\tilde{\underline{w}}(t_o^+) = \underline{w}_o^+ = -\Gamma^{-1} \overset{m}{\underline{x}}_o$.

Przy sterowaniu $\tilde{w}(t)$ rozwiązanie $\underline{y}(t)$ równania (1.1), dla którego $\underline{y}(t_o^+) = \underline{y}_o$, spełnia relację $\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0$, dla $t > t_o$. Jest więc $t_1 = t_o$ i punkt w przestrzeni Y można za pomocą takiego sterowania $\tilde{w}(t)$ (które jest dopuszczalne dla $t > t_o$) sprowadzić z położenia $\underline{y}_o$ w położenie $\underline{y}_1 = 0$ w czasie $T = t_1 - t_o = 0$.

Zbiór Z_x^+ możemy więc teraz interpretować jako zbiór punktów, w przestrzeni X, które odpowiadają zgodnie z (1.13) wszystkim parom punktów o postaci $\underline{w}(t_o^-) = \underline{w}_o$ i $\underline{y}_o$, przy czym punkt $\underline{y}_o$ jest tutaj dowolnym punktem przestrzeni Y z położenia którego można (za pomocą pewnego dopuszczalnego sterowania $w(t)$, z zadanym wektorem $\underline{w}(t_o^-) = \underline{w}_o$), sprowadzić

punkt w przestrzeni Y w położenie $\underline{y}_1 = 0$, w czasie $T = t_1 - t_0 = 0$ i to tak, że $\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0$ dla $t > t_0$.

A zatem w przypadku gdy $\underline{x}_0 \in Z_x^+$, to sterowanie $\bar{w}(t)$ o którym mowa we Wniosku I jest poszukiwanym w Problemie I sterowaniem optymalnym.

Jeżeli punkt $\underline{x}_0$ nie należy do zbioru Z_x^+ czyli $\underline{x}_0 \notin Z_x^+$ wtedy musi być $t_1 > t_0$. Rzeczywiście rozwiązania $\underline{x}(t)$ układu równań (1.14) są ciągłe i jednoznaczne[x]. Ponieważ $x_0 \notin Z_x^+$, więc $\underline{x}_0 \neq \underline{x}_1$ dla dowolnego $\underline{x}_1 \in Z_x^+$.
Z Lematów 2.1 i 2.2 wynika, że $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ i $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1$, gdzie $\underline{x}_1 \in Z_x^+$, zatem $\underline{x}(t_0) \neq \underline{x}(t_1)$, a więc $t_0 \neq t_1$.
Biorąc pod uwagę założenie $t_1 \geqslant t_0$ otrzymujemy więc $t_1 > t_0$.

Oznaczmy przez $\bar{w}(t)$ sterowanie optymalne, w przedziale czasu $t_0 < t < t_1$, które sprowadza nam punkt w przestrzeni X z położenia początkowego $\underline{x}_0$ do położenia dowolnego punktu $\underline{x}_1 \in Z_x^+$ w minimalnym czasie $T = t_1 - t_0$.

Trajektoria w przestrzeni X przy sterowaniu optymalnym $\bar{w}(t)$, $t_0 < t < t_1$, przechodząca przez punkt $\underline{x}_0$ w chwili t_0, przechodzi również w chwili t_1 przez punkt, który oznaczymy przez $\bar{\underline{x}}_1$ oczywiście $\bar{\underline{x}}_1 \in Z_x^+$. Innymi słowy w przypadku gdy $w(t) = \bar{w}(t)$, $t_0 < t < t_1$, a $\underline{x}(t)$ jest rozwiązaniem układu równań (1.14) z warunkiem początkowym $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$, to $\underline{x}(t_1) = \bar{\underline{x}}_1$. Zatem $\bar{\underline{x}}_1$ jest tym wybranym punktem zbioru Z_x^+, do położenia którego można w najkrótszym czasie sprowadzić punkt w przestrzeni X z położenia $\underline{x}_0$ (za pomocą dopuszczalnego sterowania). Zarówno $\bar{w}(t)$ jak i $\bar{\underline{x}}_1$ można otrzymać z rozwiązania problemu sterowania czasowo-optymalnego w przestrzeni X z zadanego punktu początkowego $\underline{x}_0$ do zbioru Z_x^+ punktów końcowych. Pewną pomoc przy wyborze wśród punktów zbioru Z_x^+ punktu $\bar{\underline{x}}_1$ daje odpowiednie zastosowanie warunków transwer-

---

[x] Ciągłe tzn. $\underline{x}(t^-) = \underline{x}(t^+) = \underline{x}(t)$ dla dowolnej chwili czasu t; jednoznaczne tzn., że $\underline{x}(t)$ określa w przestrzeni X jedyny punkt dla dowolnej chwili czasu t, czyli jeżeli $\underline{x}(t') \neq \underline{x}(t'')$ to $t' \neq t''$.

salności[x]. Jeżeli znamy współrzędne punktu $\underline{\bar{x}}_1 \in Z_x^+$ na przykład $\underline{\bar{x}}_1 = (0, \ldots, 0, \bar{x}_1^{n-m+1}, \bar{x}_1^{n-m+2}, \ldots, \bar{x}_1^n)$, to korzystając z wzajemnej jednoznaczności przekształcenia (2.5) możemy wyznaczyć odpowiadający punktowi $\underline{\bar{x}}_1$ punkt $\underline{w}_1^* \in Z_w^+$. Tak więc mamy:

$$\underline{w}_1^* = -\Gamma^{-1} \underline{\bar{x}}_1^m , \qquad (2.9)$$

gdzie

$$\underline{\bar{x}}_1^m = (\bar{x}_1^{n-m+1}, \bar{x}_1^{n-m+2}, \ldots, \bar{x}_1^n) .$$

Oznaczamy teraz przez $w^*(t)$ sterowanie w przedziale czasu $t > t_1$, będące rozwiązaniem równania różniczkowego (2.2) z warunkami początkowymi $\underline{w}^*(t_1^+) = \underline{w}_1^*$.

W dalszym ciągu udowodnimy następujące:

T w i e r d z e n i e I

Oznaczmy przez $\tilde{w}(t)$, $t > t_o$, sterowanie optymalne w sensie Problemu I, które w minimalnym czasie $T = t_1 - t_o$ sprowadza punkt w przestrzeni Y z położenia $\underline{y}_o$ w położenie $\underline{y}_1 = 0$, przy czym punkt dla $t > t_1$ pozostaje w położeniu $\underline{y}_1$ (tzn. $\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0$ dla $t > t_1$).

Sterowanie $\tilde{w}(t)$, $t > t_o$, jest funkcją która:

1) w przedziale czasu $t_o < t < t_1$ pokrywa się z funkcją $\bar{w}(t)$ przedziałami stałą, wynikającą z rozwiązania zagadnienia sterowania czasowo-optymalnego z zadanego punktu $\underline{x}_o$ do zbioru Z_x^+;

2) w przedziale czasu $t > t_1$ pokrywa się z funkcją $w^*(t)$, będącą rozwiązaniem równania różniczkowego (2.2) z warunkami początkowymi $\underline{w}^*(t_1^+) = \underline{w}_1^* = -\Gamma^{-1} \underline{\bar{x}}_1^m$.

Punkt $\underline{x}_o$ jest wyznaczony przez dane w Problemie I: $\underline{w}_o$ i $\underline{y}_o$. Punkt $\underline{\bar{x}}_1 \in Z_x^+$ i chwila t_1 wynikają również z roz-

[x] Patrz [7] str. 59 i podrozdział 3.3 niniejszej pracy.

wiązania zagadnienia sterowania czasowo-optymalnego z punktu $\underline{x}_0$ do zbioru $Z_x^{+x)}$.

Dowód Twierdzenia I

Z Lematów 2.1 i 2.2 wynika, że jeżeli sterowanie $w(t)$, $t>t_0$, jest dopuszczalne i posiada zadany wektor $\underline{w}(t_0^-)$, przy czym sprowadza punkt w przestrzeni Y z położenia $\underline{y}_0$ w położenie $\underline{y}_1 = 0$ i to tak, że $\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0$ dla $t > t_1$, tc trajektoria $\underline{x}(t)$ w przestrzeni X odpowiadająca zgodnie z (1.13) rozwiązaniu $y(t)$ ($\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0$) i funkcji $\underline{w}(t)$ przechodzi przez punkt $\underline{x}_0$ i $\underline{x}_1 \in Z_x^+$, czyli $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ i $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1 \in Z_x^+$. Zgodnie z określeniem sterowanie $\bar{w}(t)$, $t_0 < t < t_1$, sprowadza punkt w przestrzeni X z położenia $\underline{x}_0$ w położenie $\underline{x}_1 \in Z_x^+$ w minimalnym czasie $T = t_1 - t_0$, a więc przy $w(t) = \bar{w}(t)$, $t_0 < t < t_1$ jest $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$, $\underline{x}(t_1) = \underline{\bar{x}}_1 \in Z_x^+$ i $T = T_{min}$. Jak już wspominaliśmy z zasady maksimum Pontriagina wynika, że sterowanie optymalne $\bar{w}(t)$, $t_0 < t < t_1$ jest funkcją przedziałami stałą, przyjmującą w poszczególnych przedziałach tylko wartości α i β.

Z tego, że $\underline{x}(t_1) = \underline{\bar{x}}_1 \in Z_x^+$ oraz z Lematu 2.3 wynika, że dla sterowania $w^*(t)$, $t > t_1$ (które jest dopuszczalne) punkt w przestrzeni Y pozostaje w położeniu $\underline{y}_1 = 0$, dla $t>t_1$, czyli $\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0$, dla $t>t_1$ (gdzie $\underline{y}(t)$ jest rozwiązaniem, dla którego $\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0$).

Sterowanie $\tilde{w}(t)$ pokrywające się z funkcją $\bar{w}(t)$, dla $t_0<t<t_1$ i z funkcją $w^*(t)$, dla $t>t_1$, jest sterowaniem dopuszczalnym dla $t>t_0$. Rzeczywiście w przedziałach $t_0<t<t_1$ i $t>t_1$ odpowiednie sterowania $\bar{w}(t)$ i $w^*(t)$ są dopuszczalne, a w punkcie t_1, który może być punktem nieciągłości funkcji $\tilde{w}(t)$ istnieją wartości $\tilde{w}(t_1^-) = \bar{w}(t_1^-)$ i $\tilde{w}(t_1^+) = w^*(t_1^+)$. Zatem sterowanie $\tilde{w}(t)$, $t>t_0$ jest sterowaniem dopuszczalnym, które (przy zadanym wektorze $\underline{w}(t_0^-)$) sprowadza punkt w przestrzeni Y z położenia $\underline{y}_0$ w położenie $\underline{y}_1 = 0$, przy czym $\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0$, dla $t > t_1$.

x) Przypominamy, że chwila t_0 jest dana lub można ją sobie przyjąć dowolnie.

Pokażemy teraz, że czas $T = t_1 - t_o = T_{min}$, występujący przy sterowaniu $\tilde{w}(t)$ jest najmniejszy, jaki da się osiągnąć, za pomocą dopuszczalnego sterowania $w(t)$. W tym celu załóżmy, że istnieje różne od $\tilde{w}(t)$ sterowanie dopuszczalne $w'(t)$ dla którego czas $T' = t'_1 - t_o$ jest mniejszy niż T_{min} (T_{min} występuje przy sterowaniu $\tilde{w}(t)$). Z Lematów 2.1 i 2.2 wynika, że dla sterowania $w'(t)$ odpowiednie rozwiązanie $\underline{x}'(t)$ układu równań (1.14) spełnia relacje: $\underline{x}'(t_o) = \underline{x}_o$ i $\underline{x}'(t_1) = \underline{x}_1 \in Z_x^+$. A zatem $w'(t)$, dla $t_o < t < t_1$, jest sterowaniem, które w krótszym czasie $T' = t'_1 - t_o$ niż sterowanie $\tilde{w}(t) = \bar{w}(t)$, dla $t_o < t < t_1$, sprowadza punkt przestrzeni X z położenia $\underline{x}_o$ w położenie $\underline{x}_1 \in Z_x^+$, co jest sprzeczne z określeniem sterowania $\bar{w}(t)$, $t_o < t < t_1$, jako sterowania, które w minimalnym czasie sprowadza punkt przestrzeni X z położenia $\underline{x}_o$ w położenie $\underline{x}_1 \in Z_x^+$. A zatem założenie, że istnieje sterowanie dla którego czas T jest mniejszy od T_{min} (który występuje przy sterowaniu $\tilde{w}(t)$) prowadzi do sprzeczności, co dowodzi, że przy sterowaniu $\tilde{w}(t)$ czas T jest najmniejszy.

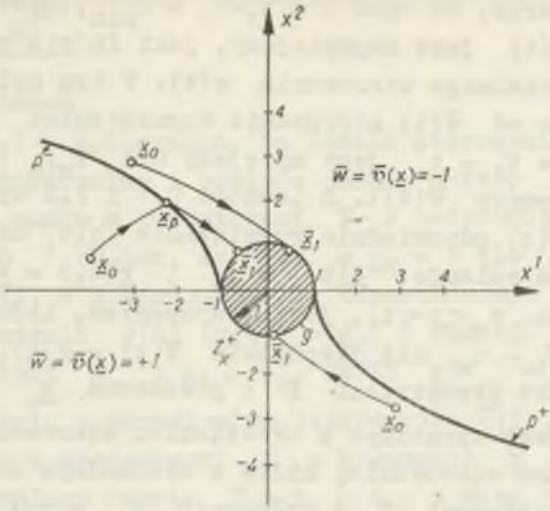
2.5. Przykład sterowania optymalnego w sensie Problemu I

Dla ilustracji przedstawimy wyniki rozwiązania Problemu I dla obiektu opisanego równaniem: $\ddot{y} = \ddot{w} + w$, w którym sterowanie dopuszczalne $w(t)$ jest funkcją przedziałami ciągłą spełniającą ograniczenie: $-1 \leq w(t) \leq 1$.

Wprowadzamy nowe zmienne $x^1 = y - w$ i $x^2 = \dot{y} - \dot{w}$. Na płaszczyźnie X o współrzędnych x^1 i x^2 zbiór Z_x^+ składa się z punktów leżących wewnątrz i na granicy g okręgu o promieniu jeden. Na rys. 3 pokazano niektóre trajektorie optymalne na płaszczyźnie X. Przedstawiono tam również linię przełączeń p^- o równaniu:

$$x^2 = \sqrt{1 - \frac{1}{(1 - \sqrt{2-2x^1})^2}}\ \sqrt{2-2x^1} \quad *) \qquad (2.10)$$

*) Pełne rozważania dotyczące tego przykładu są zamieszczone w [5].



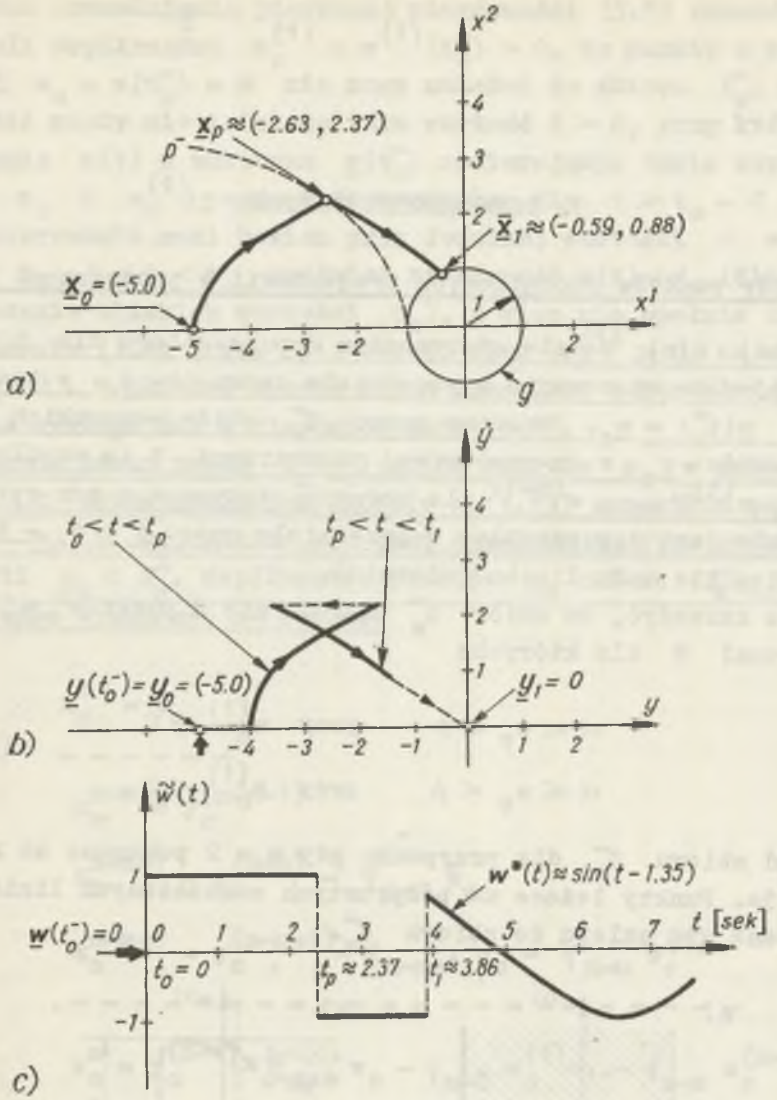
Rys. 3

oraz linię przełączeń p^+, której równanie otrzymujemy z równania (2.10) podstawiając w tym ostatnim w miejsce x^1 i x^2 odpowiednio: $-x^1$ i $-x^2$.

Linie przełączeń p^- i p^+ i okrąg g wyznaczają nam sterowanie optymalne $\bar{w}$ jako funkcję współrzędnych punktów $\underline{x}$ płaszczyzny X, czyli funkcję $\bar{w} = \bar{v}(\underline{x})$. I tak na lewo od linii składającej się z linii p^-, części okręgu g i linii p^+ oraz na linii p^+ jest $\bar{w} = \bar{v}(\underline{x}) = +1$, a na pozostałej części płaszczyzny X, z wyłączeniem zbioru Z_x^+ mamy $\bar{w} = \bar{v}(\underline{x}) = -1$.

Znajomość funkcji $\bar{v}(\underline{x})$ może być pomocna przy budowie układu realizującego sterowanie optymalne w sensie Problemu I.

Na rys. 4 przedstawiono wyniki rozwiązania Problemu I dla danych $y_0 = (-5,0)$, $w_0 = (0,0)$ i $y_1 = (0,0)$. Widać tam kolejno trajektorię optymalną na płaszczyźnie X, na płaszczyźnie Y i sterowanie optymalne $\bar{w}(t)$ w sensie Problemu I (odpowiednio na rys. 4a, b, c).


a)
x^2
$\underline{x}_p \approx (-2.63, 2.37)$
p^-
$\bar{\underline{x}}_1 \approx (-0.59, 0.88)$
$\underline{x}_0 = (-5.0)$
x^1
g
b)
$\dot{y}$
$t_0 < t < t_p$
$t_p < t < t_1$
$\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0 = (-5.0)$
$\underline{y}_1 = 0$
y
c)
$\tilde{w}(t)$
$w^*(t) \approx \sin(t - 1.35)$
$\underline{w}(t_0^-) = 0$
t [sek]
$t_0 = 0$
$t_p \approx 2.37$
$t_1 \approx 3.86$

Rys. 4

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU II

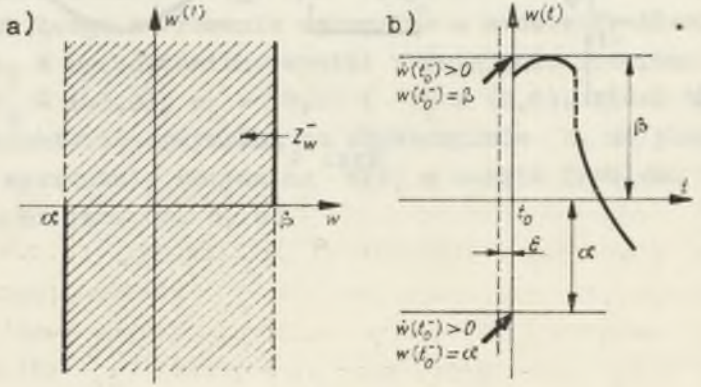
3.1. Zbiór punktów początkowych trajektorii w przestrzeni X

Niechaj $w(t)$ będzie sterowaniem dopuszczalnym dla $t > t_0$. Uzupełnijmy to sterowanie w przedziale czasu $t < t_0$ w ten sposób aby $w(t_0^-) = w_0$. Oznaczmy przez Z_w^- zbiór wszystkich takich punktów w_0 w m-wymiarowej przestrzeni W (o współrzędnych $w, w^{(1)}, \ldots, w^{(m-1)}$) dla których otrzymane w ten sposób sterowanie jest dopuszczalne w przedziale czasu $t > t_0 - \varepsilon$. (ε - dodowlnie mała liczba dodatnia).

Można zauważyć, że zbiór Z_w^- składa się z punktów w_0 przestrzeni W dla których:

$$\begin{aligned} \alpha < w_0 \leq \beta \quad & \text{przy} \quad w_0^{(1)} > 0 \\ \alpha \leq w_0 < \beta \quad & \text{przy} \quad w_0^{(1)} < 0 . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Przykład zbioru Z_w^- dla przypadku gdy m = 2 pokazano na rysunku 5a. Punkty leżące na półprostych zaznaczonych linią przerywaną nie należą do zbioru Z_w^-.



Rys. 5

W celu uzasadnienia pierwszej nierówności (3.1) zauważmy, że jeżeli współrzędna $w_o^{(1)} = w^{(1)}(t_o^-) > 0$, to punkty o współrzędnej $w_o = w(t_o^-) = \alpha$ nie mogą należeć do zbioru Z_w. Rzeczywiście wtedy nie istnieje taka wartość $\varepsilon > 0$, przy której sterowanie $w(t)$ z wektorem $\underline{w}(t_o^-)$ zawierającym takie współrzędne w_o i $w_o^{(1)}$ - jest dopuszczalne dla $t > t_o - \varepsilon$. Takie sterowanie musi bowiem przy dowolnej wartości ε w przedziale $t_o - \varepsilon < t < t_o$ spełniać nierówność $w(t) < \alpha$, (dla t dostatecznie bliskich wartości t_o), a więc nie spełnia ono ograniczenia (1.4) (rys. 5b). Jeżeli więc $w_o^{(1)} > 0$, to musi być $w_o > \alpha$. W podobny sposób można uzasadnić pozostałe ograniczenia występujące w nierównościach (3.1).

Oznaczmy teraz przez $Z_x(\underline{y}_o)$ zbiór punktów $\underline{x}_o$ w przestrzeni X odpowiadających zgodnie z (1.13) wszystkim parom punktów $\underline{y}_o$ i $\underline{w}_o$, gdzie $\underline{w}_o$ jest dowolnym punktem zbioru Z_w, czyli $\underline{w}_o \in Z_w$. Współrzędne punktów $\underline{x}_o$ zbioru $Z_x(\underline{y}_o)$ możemy więc wyznaczyć ze wzorów:

$$
\begin{aligned}
& x_o^1 = y_o \\
& \text{- - - - - -} \\
& x_o^{n-m} = y_o^{(n-m-1)} \\
& x_o^{n-m+1} = y_o^{(n-m)} - \gamma_{n-m} w_o \qquad (3.2) \\
& x_o^{n-m+2} = y_o^{(n-m+1)} - \gamma_{n-m+1} w_o - \gamma_{n-m} w_o^{(1)} \\
& \text{- -} \\
& x_o^n = y_o^{(n-1)} - \gamma_{n-1} w_o - \gamma_{n-2} w_o^{(1)} - \ldots - \gamma_{n-m} w_o^{(m-1)},
\end{aligned}
$$

gdzie $\underline{y}_o = (y_o, y_o^{(1)}, \ldots, y_o^{(m-1)})$, a wielkości $w_o, w_o^{(1)}, \ldots, w_o^{(m-1)}$ są dowolnymi współrzędnymi punktów $\underline{w}_o$ zbioru Z_w. Łatwo zauważyć, że przy danym punkcie $\underline{y}_o$ każdemu punktowi $\underline{w}_o$ zbioru Z_w związku (3.2) przyporządkowują jedyny punkt $\underline{x}_o$ zbioru $Z_x(\underline{y}_o)$ i na odwrót, przy czym punkty $\underline{x}_o$ zbioru

$Z_x^-(y_o)$ mają (n-m) pierwszych współrzędnych równych odpowiednio (n-m) pierwszym współrzędnym danego punktu y_o.

Ze względu na trudności "realizacji praktycznej" wektora $w(t_o^-)$, w przypadku gdy niektóre jego składowe osiągają duże wartości - można również wprowadzić pewne ograniczenia na składowe tego wektora. Zmieniają się wtedy odpowiednio również zbioru Z_w^- oraz $Z_x^-(y_o)$.

Na przykład możemy zażądać aby wszystkie pochodne $w^{(i)}(t_o^-)$, i = 1,2,..., m-1, były równe zeru. Zbiór Z_w^- będzie się wtedy składał z punktów w_o, dla których $\alpha \leq w_o \leq \beta$ oraz $w_o^{(i)} = 0$, i = 1,2,..., m-1.

Możemy teraz sformułować następujący:

Lemat 3.1

Niechaj w(t) będzie dowolnym dopuszczalnym w przedziale czasu $t > t_o - \varepsilon$ sterowaniem, a $x(t)$ - trajektorią w przestrzeni X, która odpowiada zgodnie z (1.13) rozwiązaniu $y(t)$ równania (1.1) (dla którego $y(t_o^-) = y_o$) i funkcji $w(t)$.

Trajektoria $x(t)$ przechodzi w chwili $t = t_o$ przez jeden z punktów zbioru $Z_x^-(y_o)$, czyli $x(t_o) \in Z_x^-(y_o)$.

Dowód lematu 3.1 wynika wprost z określenia zbiorów Z_w^- i $Z_x^-(y_o)$ oraz z ciągłości trajektorii w przestrzeni X.

3.2. Sterowanie optymalne w sensie Problemu II

Załóżmy teraz, że przy pewnym dopuszczalnym sterowaniu w(t), trajektorii $x(t)$, $t > t_o$, w przestrzeni X, wychodzącej w chwili t_o z dowolnego punktu $x_o \in Z_x^-(y_o)$ (czyli $x(t_o) = x_o$) i funkcji $w(t)$ odpowiada zgodnie z (1.13) w przestrzeni Y trajektoria $y(t)$, $t > t_o$. Chcemy wyznaczyć wektor $w(t_o^-)$ dla funkcji w(t), przy którym trajektoria $y(t)$, o której wspomniano wyżej, przechodzi "w chwili t_o^-" przez punkt y_o (a więc $y(t_o^-) = y_o$). Skoro trajektoria $y(t)$ trajektoria $x(t)$ i funkcja $w(t)$ są związane relacjami (1.13), to również wielkości $y(t_o^-) = y_o$, $x(t_o^-) = x(t_o) = x_o$ i $w(t_o^-)$ powinny być

związane tymi relacjami; z m - ostatnich równań (1.13) otrzymujemy więc:

$$\overset{m}{\underline{x}}_0 = \overset{m}{\underline{y}}_0 - \underline{\Gamma}\, \underline{w}(t_0^-), \tag{3.3}$$

gdzie $\overset{m}{\underline{x}}_0$ i $\overset{m}{\underline{y}}_0$ - m wymiarowe wektory o składowych równych m ostatnim składowym odpowiednio wektorów $\underline{x}_0$ i $\underline{y}_0$, na przykład:

$$\overset{m}{\underline{y}}_0 = (y_0^{(n-m)}, y_0^{(n-m+1)}, \ldots, y_0^{(n-1)}) .$$

Biorąc pod uwagę (2.6) możemy z równania (3.3) obliczyć wielkość $\underline{w}(t_0^-)$:

$$\underline{w}(t_0^-) = \underline{\Gamma}^{-1} (\overset{m}{y}_0 - \overset{m}{x}_0) . \tag{3.4}$$

Jeżeli punkt $\underline{x}_0 \in Z_x^-(\underline{y}_0)$, to obliczony z relacji (3.4) punkt $\underline{w}(t_0^-) \in Z_w^-$. Z określenia zbioru Z_w^- i z założenia, że sterowanie $w(t)$ jest dopuszczalne dla $t > t_0$ wynika więc, że to samo sterowanie $w(t)$ uzupełnione w przedziale $t < t_0$ w ten sposób, że zachodzi (3.4) jest sterowaniem dopuszczalnym w przedziale $t > t_0 - \varepsilon$ (punkt t_0 może być punktem nieciągłości funkcji $w(t)$, w którym istnieje lewo i prawostronna granica).

Udowodniliśmy więc następujący:

Lemat 3.2

Niechaj przy pewnym dopuszczalnym sterowaniu $w(t)$, $t > t_0$, trajektorii $\underline{x}(t)$ w przestrzeni X, wychodzącej w chwili t_0 z dowolnego punktu $\underline{x}_0 \in Z_x^-(\underline{y}_0)$, $(\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0)$ i funkcji $\underline{w}(t)$ odpowiada zgodnie z (1.13) trajektoria $\underline{y}(t)$, $t > t_0$, w przestrzeni Y. Uzupełnijmy to sterowanie w przedziale czasu $t < t_0$ w ten sposób że zachodzi $\underline{w}(t_0^-) = \underline{\Gamma}^{-1} (\overset{m}{y}_0 - \overset{m}{x}_0)$.

Otrzymane w ten sposób sterowanie jest sterowaniem dopuszczalnym w przedziale $t > t_0 - \varepsilon$, a trajektoria $\underline{y}(t)$ o któ-

rej mowa powyżej przechodzi "w chwili t_o^-" przez punkt $\underline{y}_o$ (czyli $\underline{y}(t_o^-) = \underline{y}_o$).

Z lematów 3.1, 2.3 i 3.2 wynika następujący:

W n i o s e k II

Załóżmy, że zbiór $Z_x^* = Z_x^-(\underline{y}_o) \cap Z_x^+$ nie jest pusty i niechaj $\underline{x}_o'$ będzie dowolnym punktem zbioru Z_x^*. Oznaczmy przez $\tilde{w}(t)$ sterowanie, które w przedziale czasu $t > t_o$ jest rozwiązaniem równania (2.2) z warunkami początkowymi: $\underline{w}(t_o^+) = -\Gamma^{-1}\,\underline{x}_o'^{m}$ i które spełnia również warunek: $\underline{w}(t_o^-) = \Gamma^{-1}(\underline{y}_o - \underline{x}_o^m)$.

Przy sterowaniu $\tilde{w}(t)$ rozwiązanie $\underline{y}(t)$ równania (1.1) dla którego $\underline{y}(t_o^-) = \underline{y}_o$, spełnia relację $\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0$, dla $t > t_o$. Jest więc $t_1 = t_o$ i punkt przestrzeni Y można za pomocą sterowania $\tilde{w}(t)$ sprowadzić z położenia $\underline{y}_o$ w położenie $\underline{y}_1$, w czasie $T = t_1 - t_o = 0$. Należy dodać, że sterowanie $\tilde{w}(t)$ jest sterowaniem dopuszczalnym dla $t > t_o - \varepsilon$

Łatwo zauważyć, że w przypadku gdy zbiór Z_x^* nie jest pusty, to sterowanie $\tilde{w}(t)$ o którym mowa we Wniosku II jest poszukiwanym w Problemie II sterowaniem optymalnym.

Punkt $\underline{x}_o'$ jest dowolnym punktem zbioru Z_x^*, widać więc, że w przypadku gdy zbiór Z_x^* składa się z większej ilości punktów istnieje również większa ilość sterowań dopuszczalnych $w(t)$, $t > t_o - \varepsilon$, pozwalających sprowadzić punkt w przestrzeni Y, z położenia $\underline{y}_o$ w położenie $\underline{y}_1$, w czasie $T = 0$ (może być nieskończenie wiele takich sterowań).

W przypadku ogólnym o sterowaniu $\tilde{w}(t)$, o którym mowa w Problemie II można sformułować następujące:

Twierdzenie II

Oznaczmy przez $\tilde{w}(t)$, $t > t_o - \varepsilon$, sterowanie optymalne w sensie Problemu II, które w minimalnym czasie $T = t_1 - t_o$ sprowadza punkt w przestrzeni Y z położenia $\underline{y}_o$ w położenie $\underline{y}_1 = 0$, przy czym punkt dla $t > t_1$ pozostaje w położeniu $\underline{y}_1 = 0$ (tzn. $\underline{y}(t) = \underline{y}_1 = 0$, dla $t > t_1$).

Sterowanie $\tilde{w}(t)$, $t>t_0-\varepsilon$, jest funkcją która:

1) spełnia relację $\underline{w}(t_0^-) = \Gamma^{-1}(\underline{y}_0^m - \underline{\bar{x}}_0^m)$;

2) w przedziale czasu $t_0<t<t_1$ pokrywa się z funkcją $\bar{w}(t)$ przedziałami stałą, wynikającą z rozwiązania zagadnienia sterowania czasowo-optymalnego ze zbioru $Z_x^-(y_0)$ do zbioru Z_x^+;

3) w przedziale czasu $t>t_1$ pokrywa się z funkcją $w^*(t)$ będącą rozwiązaniem równania różniczkowego (2.2) z warunkami początkowymi $\underline{w}^*(t_1^+) = \underline{w}_1^* = -\Gamma^{-1}\underline{\bar{x}}_1^m$.

Punkty $\bar{\underline{x}}_0 \in Z_x^-(y_0)$ i $\bar{\underline{x}}_1 \in Z_x^+$ oraz chwila t_1 wynikają również z rozwiązania zagadnienia sterowania czasowo-optymalnego ze zbioru $Z_x^-(y_0)$, do zbioru Z_x^+.

Dowód Twierdzenia II jest analogiczny jak Twierdzenia I, z tym, że w miejscach gdzie w dowodzie Twierdzenia I powołujemy się na Lemat 2.1 - należy w dowodzie Twierdzenia II powoływać się na Lemat 3.1. Oprócz tego w dowodzie należy jeszcze dodatkowo zatroszczyć się o to, aby trajektoria $\tilde{\underline{y}}(t)$, $t>t_0$, która dla $t>t_1$ pokrywa się z punktem $\underline{y}_1 = 0$ przestrzeni Y ($\tilde{\underline{y}}(t) = \underline{y}_1 = 0$, dla $t>t_1$) odpowiadająca zgodnie z (1.13) trajektorii $\tilde{\underline{x}}(t)$, dla której $\tilde{\underline{x}}(t_0) = \bar{\underline{x}}_0$ i $\tilde{\underline{x}}(t_1) = \bar{\underline{x}}_1$ - przechodziła "w chwili t_0^-" przez punkt $\underline{y}_0$ (czyli aby $\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0$). Zgodnie z Lematem 3.2 warunek ten będzie spełniony, o ile sterowanie optymalne będzie posiadało wektor $\tilde{\underline{w}}(t_0^-)$, obliczony z relacji $\tilde{\underline{w}}(t_0^-) = \Gamma^{-1}(\underline{y}_0^m - \underline{\bar{x}}_0^m)$.

Jeżeli $m\geq 2$ to część punktów granicznych zbioru Z_w^- nie należy do tego zbioru, zatem również część punktów granicznych zbioru $Z_x^-(y_0)$ nie należy do tego ostatniego zbioru. W tym przypadku, jeżeli z rozwiązania zagadnienia sterowania czasowo-optymalnego ze zbioru $Z_w^-(y_0)$ do zbioru Z_x^+ wypadnie nam, że punkt początkowy x_0 jest punktem granicznym zbioru $Z_x^-(y_0)$ takim, że $x_0 \notin Z_x^-(y_0)$ - wtedy rozpatrywane zagadnienie nie ma w zasadzie rozwiązania. Otrzymane rozwiązanie wyznacza nam wtedy tylko kres dolny (granicę) czasu sterowania $T = t_1 - t_0$, do którego możemy się dowolnie zbliżyć (wybierając punkt początkowy $x_0' \in Z_x^-(y_0)$ dowolnie bliski otrzymanego punktu $\bar{x}_0$,

ale którego nie możemy za pomocą żadnego dopuszczalnego w przedziale czasu $t > t_o - \varepsilon$ sterowania osiągnięć.

3.3. Uwagi o sterowaniu optymalnym w sensie Problemu II

W przypadku Problemu I na sterowanie $w(t)$ przed chwilą t_o osiągnięcia punktu $\underline{y}_o$ nie mamy żadnego wpływu, czyli musimy się pogodzić z faktem, że współrzędne obiektu zostały doprowadzone do wartości $\underline{y}_o$ przy takim, a nie innym "ustawieniu steru": $\underline{w}(t_o^-)$. Należy przy tym sprowadzić współrzędne obiektu z wartości $\underline{y}_o$ do wartości $\underline{y}_1 = 0$ w minimalnym czasie, przy czym po osiągnięciu wartości $\underline{y}_1$ współrzędne te nie powinny się zmieniać.

W przypadku Problemu II zakładamy, że możemy mieć wpływ na sterowanie $w(t)$ również przed chwilą t_o. Właściwe optymalne sterowanie zaczyna się od chwili t_o, a przed chwilą t_o mamy do czynienia z przygotowaniem obiektu do optymalnego sterowania.

Zatem realizacja sterowania optymalnego w sensie Problemu II będzie się składała z dwóch etapów. Pierwszy etap jest etapem przygotowawczym, przy czym istotna jest tylko końcowa faza tego etapu. W tej fazie współrzędne obiektu powinny osiągnąć wartość początkową $\underline{y}_o$ przy optymalnym "ustawieniu steru" $\underline{w}(t_o^-)$.
Doprowadzenie współrzędnych obiektu do wartości $\underline{y}_o$ w etapie przygotowawczym może się w zasadzie odbywać w sposób dowolny byle by w końcowej fazie tego etapu "ustawienie steru" było zgodne z optymalnym $\underline{w}(t_o^-)$.

W końcowej fazie pierwszego etapu stwarza się najlepsze (przy istniejących ograniczeniach) warunki do optymalnego sterowania we właściwym drugim etapie. W drugim etapie wykorzystując stworzone w pierwszym etapie warunki realizuje się sterowanie optymalne w sensie Problemu I. W związku z tym czas sterowania $T = t_1 - t_o$ jest zazwyczaj mniejszy przy sterowaniu optymalnym w sensie Problemu II, niż przy sterowaniu optymalnym w sensie Problemu I. Innymi słowy przygotowanie

obiektu do optymalnego sterowania powoduje zazwyczaj skrócenie czasu sterowania.

Przygotowanie obiektu do optymalnego sterowania zostanie jeszcze omówione w podrozdziale 6.4 niniejszej pracy.

3.4. Uwagi o stosowaniu warunków transwersalności

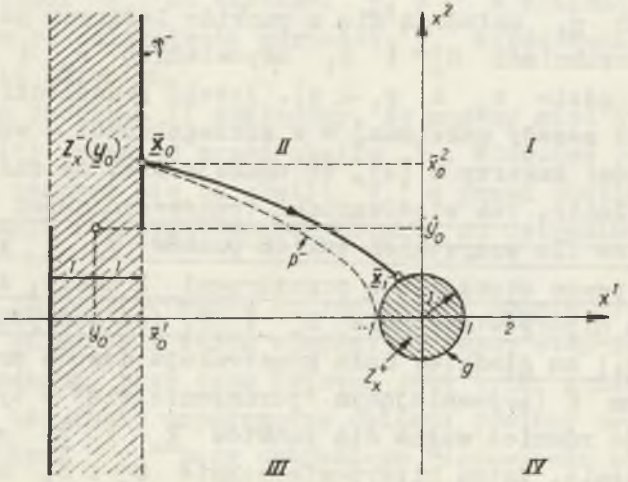
Do znalezienia punktów $\bar{x}_0$ i $\bar{x}_1$ możemy wykorzystać warunki transwersalności. Warunki te zostały udowodnione w pracy [7] przy założeniu, że zbiory punktów początkowych x_0 i końcowych x_1 składają się z punktów leżących na gładkich hiperpowierzchniach S_0 i S_1 odpowiednio r_0 i r_1 wymiarowych (gdzie r_0 i $r_1 < n$). Jeżeli prześledzi się dokładnie dowód zasady maksimum, a w szczególności - warunków transwersalności zawarty w [7], to okazuje się, że założenia te można osłabić. Tak więc warunki transwersalności pozostają również ważne dla wszystkich takich punków $\bar{x}_0$ i $\bar{x}_1$, które posiadają pewne otoczenia w przestrzeni X takie, że w tych otoczeniach hiperpowierzchnie S_0 i S_1 (na których leżą punkty x_0 i x_1) są gładkie. Cała konstrukcja dowodu przy dostatecznie małym ε (zapewniającym "poruszanie się" w tych otoczeniach) pozostaje również ważna dla punktów $\bar{x}_0$ i $\bar{x}_1$ spełniających to założenie. Zatem hiperpowierzchnie S_0 i S_1 nie muszą być gładkie całe, lecz mogą posiadać krawędzie, a zbiory punktów początkowych x_0 i końcowych x_1 mogą posiadać granice składające się z punktów leżących na hiperpowierzchniach S_0 i S_1. Te krawędzie i granice są w ogólnym przypadku również hiperpowierzchniami o wymiarze mniejszym odpowiednio niż r_0 i r_1. Dla punktów $\bar{x}_0$ i $\bar{x}_1$ leżących na tych krawędziach i granicach można również stosować warunki transwersalności uwzględniając odpowiednio mniejszy wymiar tych hiperpowierzchni - krawędzi lub granic (jeżeli te punkty spełniają założenie o którym mowa powyżej).

Powyższe uwagi dotyczą rozważanych w niniejszej pracy problemów, gdyż twory geometryczne odpowiadające zbiorom Z_x^+ i Z_x^- (Y_c) zazwyczaj nie są całe gładkie.

3.5. Przykład sterowania optymalnego w sensie Problemu II

Przedstawimy teraz wyniki rozwiązania Problemu II dla obiektu opisanego równaniem: $\ddot{y} = \bar{w} + w$, przy ograniczeniach $-1 \leq w(t) \leq 1$ (jak w rozdziale 2.5).

Na rysunku 6 przedstawiono zbiory punktów początkowych $Z_x^-(y_0)$ i punktów końcowych Z_x^+ oraz trajektorię optymalną na płaszczyźnie X. Punkty leżące na kreskowanych częściach prostych γ^- i γ^+ nie należą do zbioru $Z_x^-(y_0)$.

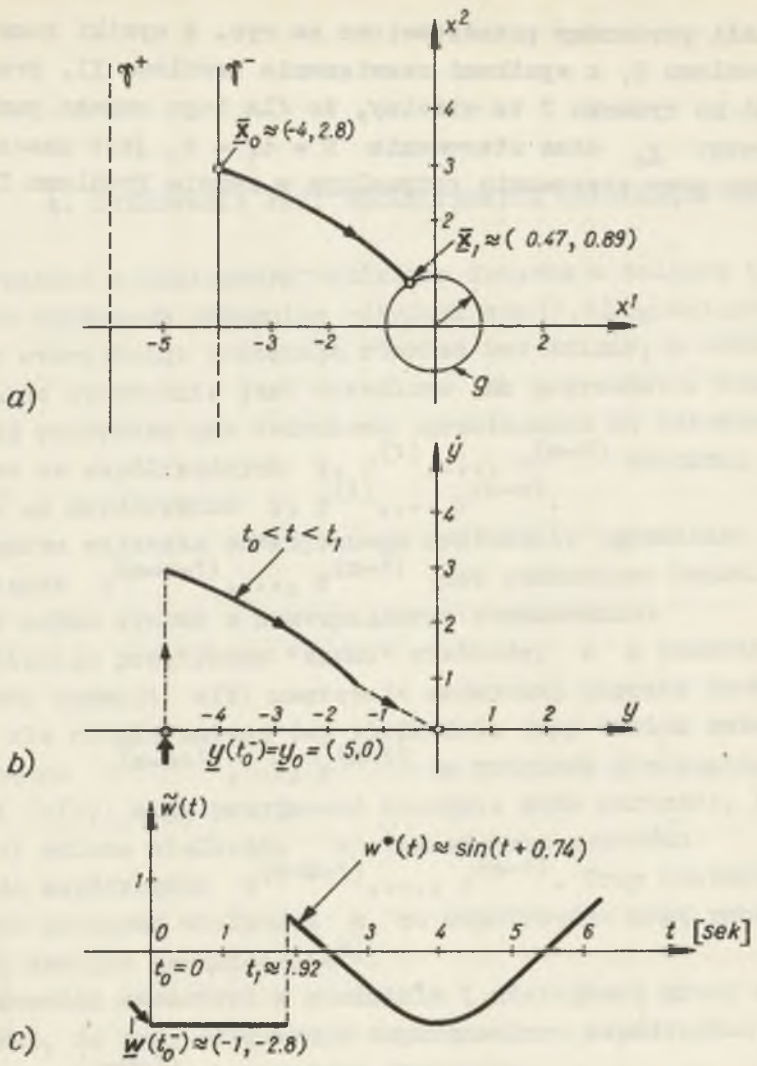


Rys. 6

W rozważanym przypadku sterowanie optymalne w przedziale czasu $t_0 < t < t_1$ jest równe -1 (lub $+1$) i nie posiada przełączeń. Punkt x_0 jest punktem przecięcia się linii przełączeń p^- (lub p^+) z prostą γ^- (lub γ^+).

Dla porównania z zamieszczonymi w rozdziale 2.5 wynikami rozwiązania Problemu I, na rys. 7 przedstawiono wyniki rozwiązania Problemu II dla danych $\underline{y}_0 = (-5,0)$ i $\underline{y}_1 = (0,0)$ (takich samych jak w rozdziale 2.5).

Trajektorię optymalną w przestrzeni X, w przestrzeni Y i sterowanie optymalne w sensie Problemu II, z obliczonym wektorem $\underline{w}_0 \approx (-1, -2.8)$ przedstawiono kolejno na rysunku 7a,b i c.


a)
x^2
Γ^+
Γ^-
$\bar{x}_0 \approx (-4, 2.8)$
$\bar{x}_1 \approx (0.47, 0.89)$
x^1
g
b)
$\dot{y}$
$t_0 < t < t_1$
y
$\underline{y}(t_0^-) = \underline{y}_0 = (5, 0)$
c)
$\tilde{w}(t)$
$w^*(t) \approx \sin(t + 0.74)$
t [sek]
$t_0 = 0$
$t_1 \approx 1.92$
$\underline{w}(t_0^-) \approx (-1, -2.8)$

Rys. 7

Jeżeli porównamy przedstawione na rys. 4 wyniki rozwiązania Problemu I, z wynikami rozwiązania Problemu II, przedstawionymi na rysunku 7 to widzimy, że dla tego samego punktu początkowego $\underline{y}_o$ czas sterowania $T = t_1 - t_o$ jest znacznie mniejszy przy sterowaniu optymalnym w sensie Problemu II.

4. STEROWANIE PRZY OGRANICZONYCH WSPÓŁRZĘDNYCH

Rozważania w niniejszym rozdziale dotyczą w dalszym ciągu obiektów opisanych równaniem różniczkowym (1.1). Ograniczenia sygnału sterującego pozostają również bez zmiany, a zatem dopuszczalne sterowanie jest określone jak poprzednio. Rozpatrzymy tutaj przypadek gdy dodatkowo ograniczenia są nałożone na niektóre ze współrzędnych $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}$ obiektu, a mianowicie na współrzędne $y, y^{(1)}, \ldots y^{(n-m)}$.

Z punktu widzenia praktycznego nakładanie ograniczeń na współrzędne $y^{(n-m+1)}, \ldots, y^{(n-1)}$ jest pozbawione sensu. Taki wniosek można wysnuć z następującego rozumowania:

Realizacja praktyczna "skoku" wielkości w w punkcie nieciągłości funkcji $w(t)$ następuje zazwyczaj poprzez bardzo szybką ale ciągłą zmianę tej wielkości. Przy takich zmianach współrzędne $y^{(n-m+1)}, \ldots, y^{(n-1)}$ (w punktach nieciągłości funkcji $w(t)$) mogą przyjmować dowolnie duże wartości. Im szybsza jest zmiana wielkości w tym większe wartości osiągają współrzędne $y^{(n-m+1)}, \ldots, y^{(n-1)}$. Przy dostatecznie szybkich zmianach wielkości w, te współrzędne mogą zatem przekroczyć dowolne ograniczenie[x].

Z rozważań zawartych w rozdziale I niniejszej pracy wynika natomiast, że przy sterowaniu dopuszczalnym współrzędne $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-m-1)}$ są ciągłymi funkcjami. Współrzędna $y^{(n-m)}$ jest funkcją przedziałami ciągłą na którą można jednak nakładać ograniczenia. Przy realizacji praktycznej

---

[x] Definicja dystrybucji przez ciągi podstawowe [6], o których wspomniano w podrozdziale 1.2 niniejszej pracy sugeruje, że wielkości $y^{(n-m+1)}, \ldots, y^{(n-1)}$ w punktach nieciągłości sterowania w mają "impulsy" o zerowym czasie trwania i o nieskończonej wartości.

"skoku" wielkości w, o której mowa powyżej współrzędna $y^{(n-m)}$ nie posiada bowiem "pików" (w punktach nieciągłości funkcji w(t)), które występują we współrzędnych $y^{(n-m+1)},\ldots, y^{(n-1)}$.

Załóżmy, że w przestrzeni Y dany jest pewien domknięty obszar D poza który trajektorie dopuszczalne nie mogą wychodzić. Punkty $\underline{y}_o$ i $\underline{y}_1 = 0$ oczywiście należą do tego obszaru, a składowa w_o wektora $\underline{w}(t_o^-) = \underline{w}_o^-$ spełnia ograniczenia (1.4). Problemy I i II zmieniają się o tyle, że wśród wszystkich sterowań dopuszczalnych bierzemy pod uwagę tylko takie, którym odpowiadają trajektorie leżące w obszarze D. Innymi słowy obecnie sterowanie optymalne jest sterowaniem dopuszczalnym, któremu odpowiada trajektoria optymalna będąca trajektorią dopuszczalną.

Trajektoria optymalna może częściowo przebiegać wewnątrz obszaru D, a częściowo na jego granicy.

W zależności od tego które współrzędne spośród $y, y^{(1)},\ldots y^{(n-m)}$ podlegają ograniczeniom rozróżnimy w dalszym ciągu trzy przypadki, które zostaną rozpatrzone kolejno w trzech najbliższych podrozdziałach.

4.1. Ograniczenie ciągłych współrzędnych obiektu

Niechaj obszar D w pobliżu granicy będzie określony nierównością:

$$g(y, y^{(1)},\ldots, y^{(n-m-1)}) \leqslant 0. \qquad (4.1)$$

Sama granica obszaru D określona jest równaniem:

$$g(y, y^{(1)},\ldots, y^{(n-m-1)}) = 0. \qquad (4.2)$$

Zakładamy, że granica jest hiperpowierzchnią gładką[x] i wszędzie na granicy mamy

$$\frac{\partial g}{\partial y^{(n-m-1)}} \neq 0. \tag{4.3}$$

W relacjach (4.1) i (4.2) występują tylko ciągłe współrzędne $y^{(i)}$ (niekoniecznie wszystkie), przy czym na pewno występuje w nich współrzędna $y^{(n-m-1)}$.

Biorąc pod uwagę relacje (1.13) dochodzimy do wniosku, że w przestrzeni X obszar B, w którym powinny się mieścić trajektorie dopuszczalne $\underline{x}(t)$ jest taki sam jak obszar D. I tak w pobliżu granicy obszar B jest określony nierównością:

$$g(\underline{x}) = g(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}) \leqslant 0 \tag{4.4}$$

przy czym wszędzie na granicy g określonej równaniem:

$$g(\underline{x}) = g(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}) = 0 \tag{4.5}$$

jest

$$\frac{\partial g}{\partial x^{n-m}} \neq 0.$$

Zajmiemy się teraz odcinkami trajektorii optymalnej leżącymi na granicy g obszaru B. Aby odcinek trajektorii $\underline{x}(t)$ odpowiadający przedziałowi $t' \leqslant t \leqslant t''$, leżał na granicy g obszaru B potrzeba i wystarcza aby $\frac{dg}{dt} = 0$, dla $t' \leqslant t \leqslant t''$ i $g(\underline{x}(t')) = 0$. Pierwszy z tych warunków po uwzględnieniu równań (4.5) i (1.14) daje:

$$\frac{\partial g}{\partial x^1} x^2 + \frac{\partial g}{\partial x^2} x^3 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x^{n-m}} (x^{n-m+1} + \varphi_{n-m} w) = 0.$$

---

[x] Tzn. że pochodne cząstkowe lewej strony równania (4.2) są ciągłe i w żadnym punkcie granicy nie są wszystkie równe zeru. Granica może być także hiperpowierzchnią łamaną, tzn. może się składać z kilku części hiperpowierzchni gładkich.

Stąd otrzymujemy:

$$w = -\frac{1}{\gamma_{n-m}\frac{\partial g}{\partial x^{n-m}}}\left[\frac{\partial g}{\partial x^1}x^2 + \frac{\partial g}{\partial x^2}x^3 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x^{n-m}}x^{n-m+1}\right]. \tag{4.7}$$

Dla każdego punktu $\underline{x}$ leżącego na granicy g wzór (4.7) określa jedną jedyną wartość sterowania w. Zatem przez każdy punkt $\underline{x}$ granicy g może przechodzić tylko jedna trajektoria leżąca na granicy, przy czym sterowanie w w każdym punkcie tej trajektorii jest określone wzorem (4.7).

Równanie takiej trajektorii przechodzącej przez dowolny punkt $\underline{x}$ można znaleźć podstawiając zależność (4.7) do (1.14) i znajdując rozwiązanie otrzymanych w ten sposób równań. Tak więc znajomość tylko jednego punktu trajektorii wystarcza do wyznaczenia całego odcinka trajektorii leżącego na granicy g.

Jeżeli pewien odcinek trajektorii optymalnej leży na granicy g to równanie tego odcinka można wyznaczyć w ww. sposób.

Dla pewnych punktów $\underline{x} \in g$ sterowanie w, wyznaczone w zależności (4.7) może nie być dopuszczalne. Przez takie punkty nie przechodzi żadna trajektoria $\in g$, odpowiadająca dopuszczalnemu sterowaniu.

Takie same wnioski o przebiegu trajektorii optymalnych na granicy g możemy uzyskać stosując Twierdzenie 22 z pracy [7].

Punkty styku

A zatem odcinki trajektorii optymalnej, leżące wewnątrz obszaru B spełniają warunki zwykłej zasady maximum [7] Tw.1. Sterowanie dla tych odcinków jest funkcją przedziałami stałą, przyjmującą na przemian wartości α i β. Odcinki trajektorii optymalnych leżące na granicy g spełniają układ równań (1.14), w którym sterowanie w jest określone zależnością (4.7).

Trajektoria optymalna może się składać z kilku odcinków leżących na przemian wewnątrz i na granicy obszaru B.

Te różnorakie odcinki stykają się ze sobą w punktach styku $\underline{x}_s$ [x)] leżących na granicy g.

Dotatkowe warunki jakie muszą być spełnione w punktach styku podaje Twierdzenie 24 z [7], które w rozpatrywanym przypadku może być stosowane.

4.2. Ograniczenie niektórych ciągłych współrzędnych obiektu

Niechaj obszar D w pobliżu granicy będzie określony nierównością:

$$g(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-m-l-1)}) \leq 0, \qquad (4.8)$$

gdzie $l > 0$. Zakładamy, że lewa strona nierówności (4.8) posiada dowolne ciągłe pochodne cząstkowe do $(l+1)$ rzędu włącznie i że $\dfrac{\partial g}{\partial y^{(n-m-l-1)}} \neq 0$ wszędzie na granicy:

$$g(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-m-l-1)}) = 0.$$

Dla obszaru B w przestrzeni X mamy zatem:

$$g(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m-l}) \leq 0, \qquad (4.9)$$

gdzie $\dfrac{\partial g}{\partial x^{n-m-l}} \neq 0$ na granicy:

$$g(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m-l}) = 0. \qquad (4.10)$$

Wzdłuż trajektorii leżącej na granicy g mamy $\dfrac{dg}{dt} = 0$, $\dfrac{d^2g}{dt} = 0$, itd. Różniczkując l-krotnie wzdłuż trajektorii

---

x) Dla punktów $\underline{x}_s$ stosujemy terminologię jak w [7]. Podobnie jak w [7] rozpatrujemy tutaj trajektorie optymalne w których występuje skończona ilość punktów styku.

(przy uwzględnieniu równań (1.14)) otrzymujemy z warunku $\frac{d^1 g}{dt^1} = 0$ następujące równanie:

$$\bar{g}(x^1,\ldots,x^{n-m}) = h(x^1,\ldots, x^{n-m-1}) + \frac{\partial g}{\partial x^{n-m-1}} x^{n-m} = 0, \tag{4.11}$$

które spełnia dowolna trajektoria leżąca na granicy obszaru B.

Równanie (4.11) zawiera takie same zmienne jak równanie (4.5). W związku z tym w celu wyznaczenia trajektorii leżącej na hiperpowierzchni (4.11) i również na granicy (4.10) możemy w dalszym ciągu stosować metodę omówioną w poprzednim podrozdziale (w tym również Tw. 22 z [7]).

Należy jednak pamiętać, że punkty obszaru B leżące w pobliżu granicy spełniają nierówność (4.9), a funkcja $\bar{g}(x^1,\ldots, x^{n-m})$ może w tych punktach przyjmować zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. W związku z tym założenia Twierdzenia 24 z [7] pomocnego przy wyznaczaniu punktów styku - nie są spełnione.

Ostatnim punktem styku będziemy nazywać taki punkt styku, w którym łączy się odcinek trajektorii optymalnej leżącej na granicy z odcinkiem trajektorii optymalnej leżącym całkowicie wewnątrz obszaru B i prowadzącym do punktu końcowego $\underline{x}_1$. O ostatnim punkcie styku można sformułować pewien prosty lemat. Zanim to zrobimy wprowadzimy jeszcze jeden nowy termin: trajektorie optymalne bez ograniczeń. W ten sposób będziemy nazywać trajektorie optymalne spełniające warunki zwykłej zasady maximum tzn. biegnące w przestrzeni X, w której nie ma ograniczeń. Innymi słowy trajektorie optymalne bez ograniczeń mogą przechodzić przez dowolne punkty przestrzeni X, a ograniczenia narzucone są tylko na sterowanie (jak w poprzednich rozdziałach).

Lemat 4.1

Załóżmy że trajektoria optymalna bez ograniczeń, wychodząca z dowolnego punktu interesującego nas odcinka trajektorii

$\underline{x}(t) \in g$ i prowadząca do punktu końcowego $\underline{x}_1$ (który może być jednym z punktów zbioru Z_x^+) jest jedyną trajektorią spełniającą warunki zasady maximum (wraz z ewentualnymi warunkami transwersalności).

Oznaczmy przez $\underline{x}_s = \underline{x}(t')$ punkt w.w odcinka trajektorii o następujących własnościach:

a) Trajektoria optymalna bez ograniczeń rozpoczynająca się w punkcie $\underline{x}_s$ i prowadząca do punktu końcowego $\underline{x}_1$ jest trajektorią dopuszczalną (nie wychodzi poza obszar B).

b) Wartość t' jest najmniejszą wartością parametru czasu t przy której spełnione są wymagania punktu a).

Punkt $\underline{x}_s$ jest ostatnim punktem styku.

Dowód:

Załóżmy że punktem styku jest $\underline{x}'_s = \underline{x}(t'')$, $t'' < t'$. Z określenia punktu $\underline{x}_s$ wynika że trajektoria optymalna bez ograniczeń, rozpoczynająca się w punkcie $\underline{x}'_s$ wychodzi poza obszar B. Oprócz tego z założenia wynika że ta trajektoria jest jedyną trajektorią spełniającą warunki zasady maximum, a więc nie ma innych trajektorii ekstremalnych[x)] całkowicie leżących w B. Ponieważ w rozpatrywanym przypadku ograniczeń w przestrzeni X trajektoria optymalna nie może wychodzić poza obszar B, więc uwzględniając własności trajektorii optymalnych leżących wewnątrz B dochodzimy do wniosku że trajektoria optymalna (o ile istnieje) musi posiadać jeszcze jeden odcinek $\in g$, któremu odpowiada czas $t > t''$. Zatem punkt $\underline{x}'_s$ nie jest ostatnim punktem styku.

Załóżmy teraz że punktem styku jest $\underline{x}''_s = \underline{x}(t''')$, $t''' > t'$. Wtedy odcinek trajektorii optymalnej prowadzący z punktu $\underline{x}''_s$ do punktu $\underline{x}_1$ leży w obszarze B. Rozpatrzmy dwie trajektorie: jedna trajektoria optymalna bez ograniczeń prowadząca z punktu $\underline{x}_s$ do punktu $\underline{x}_1 \in Z_x^+$; druga - składająca się z od-

x) Trajektorie ekstremalne - wszystkie trajektorie spełniające warunki zasady maximum - wśród nich znajduje się trajektoria optymalna.

cinka trajektorii $\in g$, łączącego punkty $\underline{x}_s$ i $\underline{x}_s''$ oraz z odcinka trajektorii optymalnej, łączącego punkty $\underline{x}_s''$ i $\underline{x}_1$. Z określenia punktu $\underline{x}_s$ wynika, że pierwsza trajektoria leży w obszarze B. Jeżeli zatem druga trajektoria jest optymalna to oznacza że odpowiadający jej czas sterowania jest mniejszy niż czas sterowania odpowiadający trajektorii pierwszej, co jest sprzeczne z określeniem trajektorii optymalnej bez ograniczeń. Udowodniliśmy więc Lemat 4.1.

Lemat 4.1 jest oczywiście również ważny w przypadku rozpatrywanym w podrozdziale 4.1.

4.3. Ograniczenie ciągłych i jednej nieciągłej współrzędnej obiektu

Teraz rozpatrzmy przypadek gdy obszar D w pobliżu granicy jest określony nierównością:

$$c\, y^{(n-m)} + f(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-m-1)}) \leqslant 0 , \qquad (4.12)$$

gdzie c - stała wielkość różna od zera, f - określona funkcja swoich argumentów.

Obszar B - w którym leżą w przestrzeni X trajektorie $\underline{x}(t)$ (przyporządkowane przez związki (1.13) trajektoriom $\underline{y}(t)$ odpowiadającym dowolnemu dopuszczalnemu sterowaniu i leżącym w obszarze D przestrzeni Y) - można wyznaczyć korzystając ze związków (1.13). Dla obszaru B mamy nierówność:

$$c(x^{n-m+1} + \varphi_{n-m} w) + f(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}) \leqslant 0 . \quad (4.13)$$

Występująca w nierówności (4.13) wielkość w może przyjmować co najwyżej wartości dopuszczalne, tzn. zawarte w przedziale (1.4).

W związku z tym rozróżniamy w obszarze B dwie strefy: Strefa B_g - w której mogą leżeć trajektorie $\underline{x}(t)$ odpowiadające zgodnie z (1.13) trajektoriom $\underline{y}(t)$ leżącym na granicy obszaru D;

Strefa B_w - w której leżą trajektorie $\underline{x}(t)$ odpowiadające zgodnie z (1.13) trajektoriom $\underline{y}(t)$ leżącym wewnątrz obszaru D.

Łatwo zauważyć że jeżeli $\gamma_{n-m} > 0$, to strefa B_g określona jest nierównością:

$$-\gamma_{n-m}\beta - \frac{1}{c} f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-m}) \leqslant x^{n-m+1} \leqslant -\gamma_{n-m}\alpha - \frac{1}{c} f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-m}), \tag{4.14}$$

czyli strefa B_g zawarta jest pomiędzy dwoma hiperpowierzchniami przesuniętymi względem siebie wzdłuż osi x^{n-m+1} o odcinek $\gamma_{n-m}(\beta-\alpha)$. Jeżeli $\gamma_{n-m} < 0$, to zwroty znaków nierówności występujących w (4.14) powinny być zmienione na przeciwne.

W przypadku gdy $\gamma_{n-m}\, c > 0$, to dla punktu $\underline{x} \in B_g$ dopuszczalna wartość sterowania jest określona nierównością:

$$\alpha \leqslant w \leqslant -\frac{1}{\gamma_{n-m}} \left[x^{n-m+1} + \frac{1}{c} f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-m})\right]. \tag{4.15}$$

Górne ograniczenie wartości w wynika z nierówności (4.13), a dolne - z nierówności (1.4). Jeżeli w punkcie $\underline{x} \in B_g$ sterowanie w spełnia nierówność (4.15), wtedy parze punktów $\underline{x}$ i $\underline{w}$ (o dowolnych współrzędnych $x^{n-m+2}, \ldots, x^n, w^{(1)},\ldots, w^{(m-1)}$) odpowiada zgodnie z (1.13) punkt $\underline{y} \in D$.

Trajektoria dopuszczalna leżąca w strefie B_g jest trajektorią dla której w każdym jej punkcie sterowanie spełnia nierówność (4.15).

Trajektoriami granicznymi będziemy nazywać trajektorie $\underline{x}(t)$ leżące w strefie B_g, które zostają przyporządkowane przez związki (1.13) trajektoriom $\underline{y}(t)$ leżącym na granicy obszaru D. Dla trajektorii granicznych sterowanie w jest określone zelżnością:

$$w = -\frac{1}{\gamma_{n-m}} \left[x^{n-m+1} + \frac{1}{c} f(x^1,x^2,\ldots,x^{n-m})\right]^{*)}. \tag{4.16}$$

*) Łatwo zauwyżyć że jeżeli $\underline{x} \in B_g$ to wyznaczona przez (4.16) wartość w spełnia ograniczenie (1.4).

Zatem dla każdego punktu $\underline{x} \in B_g$ zależność (4.16) jednoznacznie określa sterowanie dla trajektorii granicznej. Uwzględniając w równaniach (1.14) zależność (4.16) i rozwiązując te równania możemy wyznaczyć przebiegi trajektorii granicznych.

Z (4.16) wynika również że przez każdy punkt $\underline{x} \in B_g$ przechodzi tylko jedna trajektoria graniczna. Odcinek tej trajektorii może być w rozpatrywanym przypadku odcinkiem poszukiwanej trajektorii optymalnej. W każdym punkcie tego odcinka sterowanie w przyjmuje górną wartość nierówności (4.15).

Z nierówności (4.15) widać że w strefie B_g dopuszczalne są również trajektorie dla których $w = \alpha$. Zatem w B_g mogą leżeć również takie odcinki trajektorii optymalnych bez ograniczeń (spełniające warunki zwykłej zasady maximum) dla których $w = \alpha$.

Jeżeli iloczyn $\psi_{n-m}\, c < 0$ to w miejsce nierówności (4.15) dostajemy nierówność:

$$-\frac{1}{\psi_{n-m}}\left[x^{n-m+1} + \frac{1}{c} f(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m})\right] \leq w \leq \beta. \quad (4.17)$$

Nierówność określająca natomiast strefę B_w zależy od znaków wielkości ψ_{n-m} i c. Jeżeli $\psi_{n-m} > 0$ i $c > 0$ to strefa B_w określona jest wynikającą z (4.13) nierównością:

$$x^{n-m+1} \leq -\psi_{n-m}\beta - \frac{1}{c} f(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}) . \quad (4.18)$$

Jeżeli $\psi_{n-m} > 0$ i $c < 0$ to dla B_w mamy:

$$x^{n-m+1} \geq -\psi_{n-m}\alpha - \frac{1}{c} f(x^1, x^2, \ldots, x^{n-m}) . \quad (4.19)$$

Bez trudności można napisać nierówności określające strefę B_w w pozostałych dwóch przypadkach.

Odcinki trajektorii optymalnych leżące w strefie B_w spełniają warunki zwykłej zasady maximum. Trajektorie optymalne w rozpatrywanym przypadku mogą się składać z naprzemian się

przeplatających odcinków trajektorii granicznych i odcinków spełniających warunki zwykłej zasady maximum.

Dla ostatniego punktu styku (trajektorii optymalnej) w którym łączy się odcinek trajektorii granicznej, z odcinkiem trajektorii optymalnej bez ograniczeń - prowadzącym do punktu końcowego $\underline{x}_1$ ważny jest Lemat 4.1. W Lemacie tym należy tylko w miejsce odcinka trajektorii $\underline{x}(t) \in g$ rozpatrywać odcinek trajektorii granicznej, a termin: trajektoria dopuszczalna należy rozumieć w nowym sensie, określonym w niniejszym podrozdziale.

4.4. Uwagi o rozwiązaniu Problemu I i II w przypadku ograniczonych współrzędnych obiektu

We wszystkich przypadkach rozpatrywanych w rozdziale czwartym niniejszej pracy określenie zbiorów Z_x^+ i $Z_x^-(\underline{y}_o)$ pozostaje bez zmiany. Zbiory te spełniają przy tym następujący

Lemat 4.2

Jeżeli punkty $\underline{y}_o$ i $\underline{y}_1 = 0$ leżą w obszarze D, wtedy zbiory Z_x^+ i $Z_x^-(\underline{y}_o)$ są zawarte w zbiorze punktów obszaru B.

W przypadkach rozważanych w podrozdziałach 4.1 i 4.2 dowód lematu wynika natychmiast z relacji (1.13) i z założenia że $\underline{y}_o$ i $\underline{y}_1 = 0$ leżą w D.

W przypadku rozważanym w podrozdziale 4.3 dowód jest też prosty. Dla każdego punktu $\underline{x}_1$ zbioru Z_x^+ można bowiem dobrać taki punkt $\underline{w}_1$ zbioru Z_w^+, że parze punktów $\underline{x}_1$ i $\underline{w}_1$ odpowiada zgodnie z (1.13) punkt $\underline{y} = 0$, który z założenia leży w D. Z określenia obszaru B wynika więc, że każdy punkt zbioru Z_x^+ leży w obszarze B. To że $Z_x^-(\underline{y}_o) \subset B$ wynika również z założenia że $\underline{y}_o \in D$, z relacji (1.13) i z określenia zbioru $Z_x^-(\underline{y}_o)$.

Twierdzenia I i II dotyczące rozwiązania Problemów I i II są również ważne w przypadku gdy ograniczone są współrzędne obiektu. Należy tylko pamiętać o tym że rozwiązanie zagadnienia sterowania optymalnego w przestrzeni X z punktu $\underline{x}_o$ do

zbioru Z_x^+ lub ze zbioru $Z_x^-(y_0)$ do zbioru Z_x^+, powinno uwzględniać istniejące w przestrzeni X ograniczenia. Innymi słowy wynikająca z rozwiązania tego zagadnienia trajektoria optymalna w przestrzeni X powinna być trajektorią dopuszczalną leżącą w obszarze B.

Do rozwiązania zagadnienia sterowania optymalnego w przestrzeni X w rozpatrywanym przypadku mogą być przydatne rozważania zawarte w podrozdziałach 4.1, 4.2 i 4.3 niniejszej pracy.

4.5. Przykład sterowania optymalnego przy ograniczonej współrzędnej $\dot{y}$.

Rozpatrzymy obecnie sterowanie czasowo-optymalne obiektem opisanym równaniem różniczkowym:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} = b_1 w + b_2 w, \qquad a_1 > 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0, \tag{4.20}$$

przy ograniczeniu sterowania w i współrzędnej $\dot{y}$:

$$|w| \leqslant 1, \quad |\dot{y}| \leqslant g, \quad g > 2b_1 . \tag{4.21}$$

Korzystając z wzorów (1.10) obliczamy $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = b_1$, $\gamma_2 = b_2 - a_1 b_1$. Nowe zmienne zgodnie z (1.13):

$$\begin{aligned} x^1 &= y \\ x^2 &= \dot{y} - b_1 w . \end{aligned} \tag{4.21a}$$

Równania różniczkowe dla nowych zmiennych:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 + b_1 w \\ \dot{x}^2 &= -a_1 x^2 + \gamma_2 w . \end{aligned} \tag{4.22}$$

Uwzględniając to że obszar D określony jest przez dwie nierówności, a mianowicie:

$$\dot{y} - g \leqslant 0 \quad \text{i} \quad -\dot{y} - g \leqslant 0 \tag{4.23}$$

oraz to że $n = 2$, $m = 1$ dochodzimy do wniosku że mamy tu do czynienia z przypadkiem rozważanym w podrozdziale 4.3. Zatem obszar B określony jest podwójną nierównością:

$$-b_1 - g \leqslant x^2 \leqslant b_1 + g . \tag{4.24}$$

W obszarze B występują dwie strefy B_g: strefa B_g^+ - odpowiadająca granicy: $\dot{y} - g = 0$ i strefa B_g^- odpowiadająca granicy $-\dot{y} - g = 0$. Strefa B_g^+ jest określona nierównością:

$$-b_1 + g \leqslant x^2 \leqslant b_1 + g \tag{4.25}$$

a strefa B_g^- - nierównością:

$$-b_1 - g \leqslant x^2 \leqslant b_1 - g . \tag{4.26}$$

Strefa B_w określona jest również podwójną nierównością:

$$b_1 - g \leqslant x^2 \leqslant -b_1 + g . \tag{4.26a}$$

Dla trajektorii optymalnych leżących w strefie B_w obowiązuje zwykła zasada maximum. Zatem sterowanie optymalne dla trajektorii leżących w strefie B_w przyjmuje jak wiadomo wartości $+1$ lub -1 i posiada co najwyżej jedno przełączenie.

Przy $w = \text{const}$ równania trajektorii można otrzymać korzystając z układu równań różniczkowych (4.22). Dzieląc te równania stronami dostajemy równanie:

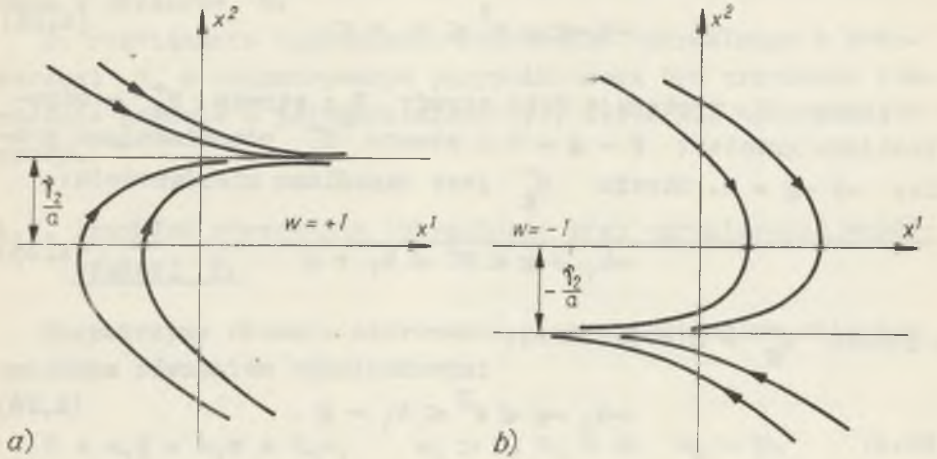
$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{-a_1 x^2 + \gamma_2 w}{x^2 + b_1 w}$$

z którego po scałkowaniu otrzymujemy równanie trajektorii:

$$x^2 + \frac{b_2}{a_1} w \ln \left| \frac{\gamma_2 w}{a_1} - x^2 \right| = -a_1 x^1 + C , \tag{4.27}$$

gdzie C - stała całkowania.

Przebiegi trajektorii opisanych równaniem (4.27) przy sterowaniu w = +1 i w = −1 zostały przedstawione odpowiednio na rysunku 8a i b.



Rys. 8

Trajektorie graniczne w strefie B_g^+

Sterowanie dla tych trajektorii dostajemy uwzględniając w równaniu granicy $\dot{y} - g = 0$ drugą relację (4.21a). Otrzymujemy:

$$w = \frac{g - x^2}{b_1} . \tag{4.28}$$

Podstawiając (4.28) do (4.22) mamy

$$\dot{x}^1 = g$$

$$\dot{x}^2 = -\frac{b_2}{b_1} x^2 + \frac{\gamma_2 g}{b_1} . \tag{4.29}$$

Zatem:

$$x^1(t) = gt + C_1$$

$$x^2(t) = \frac{\gamma_2}{b_2} g + C_2 e^{-\frac{b_2}{b_1} t} , \tag{4.30}$$

gdzie C_1 i C_2 – stałe całkowania.

Równania (4.30) są parametrycznymi równaniami trajektorii granicznych leżących w strefie B_g^+. Uwzględniając (4.30) i (4.28) możemy wyznaczyć sterowanie $w(t)$ odpowiadające rozpatrywanym trajektoriom granicznym. Otrzymujemy mianowicie:

$$w(t) = \frac{a_1 g}{b_2} + \frac{c_2}{b_1} e^{-\frac{b_2}{b_1} t} . \qquad (4.31)$$

Rugując z równań (4.30) czas t otrzymujemy równanie trajektorii granicznych strefy B_g^+:

$$x^2 = \frac{\gamma_2}{b_2} g + K e^{-\frac{b_2}{b_1 g} x^1} , \qquad (4.32)$$

gdzie K - stała zależna od warunków początkowych.

Przy poczynionych założeniach mamy: $b_2/b_1 > 0$ i $a_1 g/b_2 > 0$, zatem określone wzorem (4.31) $w(t) \to \frac{a_1}{b_2} g$ gdy $t \to \infty$.

W związku z tym możemy rozróżnić dwa przypadki:

a) $\frac{a_1}{b_2} g \leqslant 1$; wtedy przy dopuszczalnym sterowaniu punkt w przestrzeni Y może dowolnie długo poruszać się po granicy $\dot{y} - g = 0$. Trajektoria graniczna rozpoczynająca się w strefie B_g^+ w tym przypadku leży cała w tej strefie. Wynika to z równań (4.30) lub z równania (4.32) oraz z tego że w rozważanym przypadku jest $g - b_1 \leqslant \frac{2}{b_2} g < g$, co łatwo wykazać. Zachodzi również $\frac{\gamma_2}{a_1} > \frac{\gamma_2}{b_2} g$.

b) $\frac{a_1}{b_2} g > 1$; wtedy przy dopuszczalnym sterowaniu punkt w przestrzeni Y może tylko przez pewien czas poruszać się po granicy $\dot{y} - g = 0$. Trajektoria graniczna rozpoczynająca się w strefie B_g^+ po pewnym czasie wychodzi z tej strefy. Wynika to stąd że wtedy: $\frac{2}{b_2} g > g - b_1$. Podobne rozważania można przeprowadzić dla strefy B_g^-.

Rozwiązanie Problemu I

Dane są punkty $\underline{y}_o$ i $\underline{y}_1 = 0$ leżące w obszarze D oraz wektor $\underline{w}(t_o^-) = \underline{w}_o$. Zbiór Z_x^+ składa się z punktów dla których

$$x_1^1 = 0, \quad |x_1^2| \leq b_1 . \tag{4.33}$$

Punkt $\underline{x}_o$ odpowiadający zgodnie z (1.13) parze punktów $\underline{y}_o$ i $\underline{w}_o$ leży w obszarze B jeżeli składowa w_o wektora $\underline{w}_o$ spełnia ograniczenie (1.4), co zakładamy.

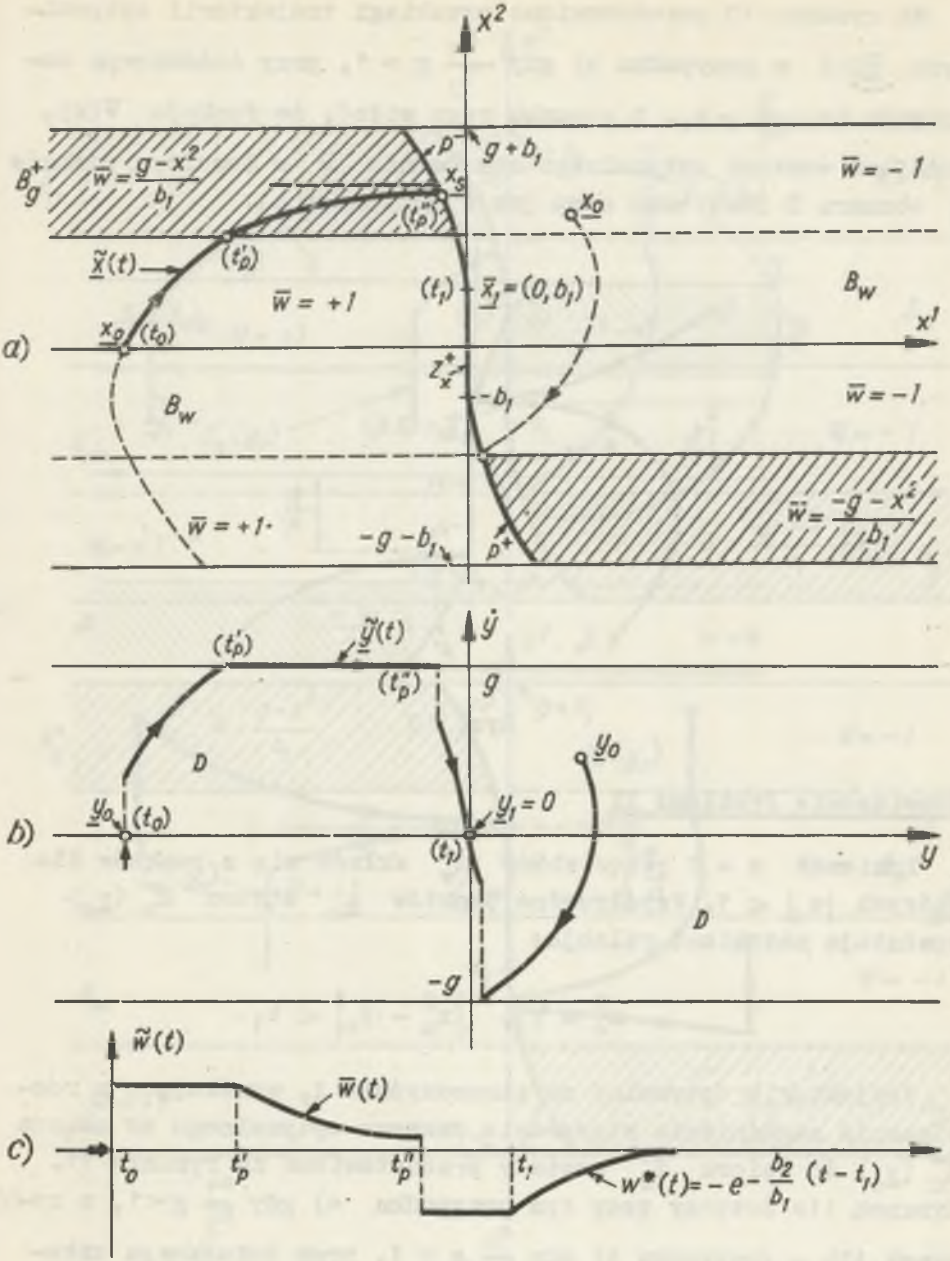
Rozwiązanie zagadnienia sterowania czasowo-optymalnego z punktu $\underline{x}_o$ do zbioru Z_x^+ w przypadku a) gdy $\frac{a_1}{b_2} g < 1$ jest przedstawione na rysunku 9a. Na rysunku tym symbolami p^- i p^+ oznaczono linie przełączeń dla których równania można dostać korzystając z (4.27). I tak równanie linii p^- ma postać:

$$(x^2 - b_1) - \frac{b_2}{a_1} \ln \left| \frac{x^2 + \frac{\dot{x}_2}{a_1}}{b_1 + \frac{\dot{x}_2}{a_1}} \right| = -a_1 x^1 , \tag{4.34}$$

a dla linii p^+ mamy:

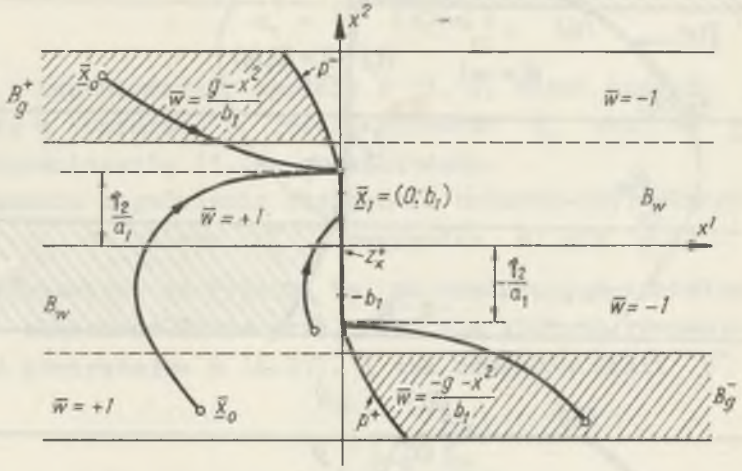
$$(x^2 + b_1) + \frac{b_2}{a_1} \ln \left| \frac{-x^2 + \frac{\dot{x}_2}{a_1}}{b_1 + \frac{\dot{x}_2}{a_1}} \right| = -a_1 x^1 . \tag{4.35}$$

Na rysunku 9a obszar B jest podzielony na pewne części w każdej z których obowiązuje inna relacja dla optymalnego sterowania $\bar{w} = \bar{v}(\underline{x})$. Uwidoczniona jest tam również trajektoria optymalna $\tilde{\underline{x}}(t)$. Na rysunku 9b przedstawiono trajektorię optymalną $\tilde{\underline{y}}(t)$ odpowiadającą trajektorii $\tilde{\underline{x}}(t)$ i sterowaniu optymalnemu $\tilde{w}(t)$, przedstawionemu na rysunku 9c.


a)
b)
c)
x^2
x^1
$g + b_1$
$\bar{w} = -1$
$\bar{w} = \frac{g - x^2}{b_1}$
B_g^+
x_s
(t_p'')
x_0
$\tilde{x}(t)$
(t_p')
$\bar{w} = +1$
(t_1) $\bar{x}_1 = (0, b_1)$
B_w
x_0 (t_0)
z_x^*
$-b_1$
$\bar{w} = -1$
B_w
$\bar{w} = +1$
$-g - b_1$
p^+
$\bar{w} = \frac{-g - x^2}{b_1}$
$\dot{y}$
(t_p')
$\tilde{y}(t)$
(t_p'')
g
D
y_0
y_0 (t_0)
$\bar{y}_1 = 0$
(t_1)
y
D
$-g$
$\tilde{w}(t)$
$\bar{w}(t)$
t_0
t_p'
t_p''
t_1
$w^*(t) = -e - \frac{b_2}{b_1}(t - t_1)$

Rys. 9

Na rysunku 10 przedstawiono przebiegi trajektorii optymalnych $\tilde{\underline{x}}(t)$ w przypadku b) gdy $\frac{a_1}{b_2} g > 1$, przy dodatkowym założeniu że $\frac{2}{a_1} > b_1$. Z rysunku tego widać, że funkcja $\bar{\bar{v}}(x)$, podająca wartość optymalnego sterowania $\bar{\bar{w}}$ w dowolnym punkcie $\underline{x}$ obszaru B jest taka sama jak w przypadku a).



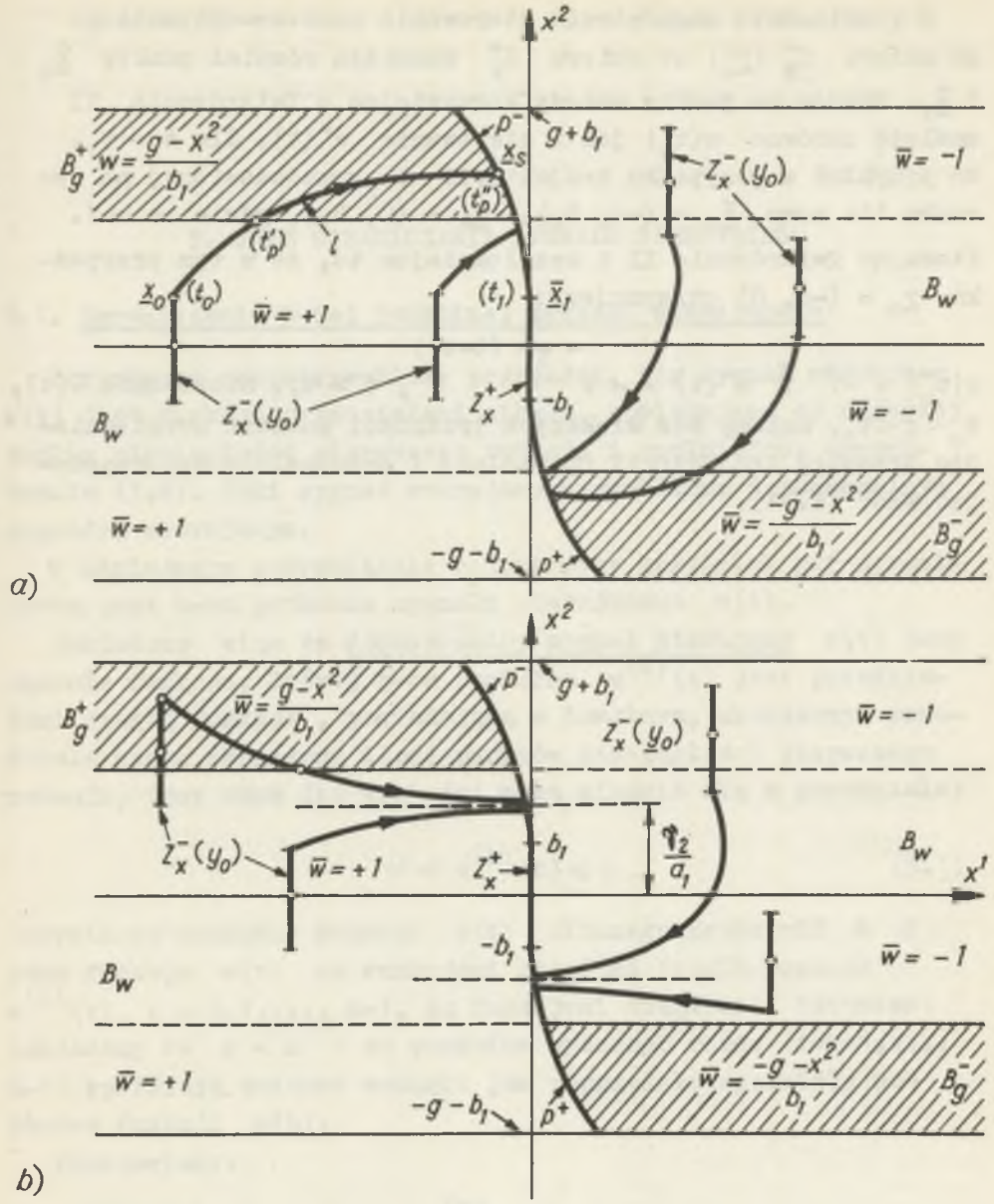
Rys. 10

Rozwiązanie Problemu II

Ponieważ $m = 1$ więc zbiór Z_w^- składa się z punktów dla których $|w_o| \leq 1$. Współrzędne punktów $\underline{x}_o$ zbioru $Z_x^-(\underline{y}_o)$ spełniają natomiast relacje:

$$x_o^1 = y_o, \quad |x_o^2 - \dot{y}_o| \leq b_1 .$$

Trajektorie optymalne na płaszczyźnie X, wynikające z rozwiązania zagadnienia sterowania czasowo-optymalnego ze zbioru $Z_x^-(\underline{y}_o)$ do zbioru Z_x^+ zostały przedstawione na rysunku 11. Rysunek 11a dotyczy przy tym przypadku a) gdy $\frac{a_1}{b_2} g < 1$, a rysunek 11b - przypadku b) gdy $\frac{a_1}{b_2} g > 1$, przy dodatkowym założeniu że $\frac{\dot{x}_2}{a_1} > b_1$.


a)
x^2
B_g^+
$w = \frac{g - x^2}{b_1}$
p^-
$\underline{x}_s$
$g + b_1$
(t_p'')
(t_p')
l
$\underline{x}_0$
(t_0)
$\bar{w} = +1$
(t_1)
$\bar{x}_1$
$\bar{w} = -1$
$Z_x^-(y_0)$
B_w
Z_x^+
$-b_1$
$\bar{w} = +1$
$\bar{w} = \frac{-g - x^2}{b_1}$
B_g^-
$-g - b_1$
p^+
b)
x^2
B_g^+
$\bar{w} = \frac{g - x^2}{b_1}$
p^-
$g + b_1$
$\bar{w} = -1$
$Z_x^-(\underline{y}_0)$
$Z_x^-(y_0)$
$\bar{w} = +1$
Z_x^+
b_1
$\frac{\varphi_2}{a_1}$
B_w
x'
$-b_1$
$\bar{w} = -1$
B_w
$\bar{w} = +1$
$\bar{w} = \frac{-g - x^2}{b_1}$
B_g^-
$-g - b_1$
p^+

Rys. 11

Z rozwiązania zagadnienia sterowania czasowo-optymalnego ze zbioru $Z_{\underline{x}}^{-}(\underline{y}_o)$ do zbioru $Z_{\underline{x}}^{+}$ wynikają również punkty $\bar{\underline{x}}_o$ i $\bar{\underline{x}}_1$. Znając te punkty możemy korzystając z Twierdzenia II znaleźć zarówno $w(t_o^-)$ jak i sterowanie $w^*(t)$, dla $t > t_1$. Na przykład w przypadku trajektorii 1 przedstawionej na rysunku 11a mamy $\bar{\underline{x}}_o = (-c, b_1)$, $\bar{\underline{x}}_1 = (0, b_1)$, gdzie $c > 1$. Stosując Twierdzenie II i uwzględniając to, że w tym przypadku $\underline{y}_o = (-c, 0)$ otrzymujemy:

$w(t_o^-) = -1$ i $w^*(t) = -e^{-\frac{b_2}{b_1}(t-t_1)}$, $t > t_1$. Sterowanie $\bar{w}(t)$, $t_o < t < t_1$, możemy bez większych trudności znaleźć uwzględniając przebieg trajektorii optymalnej i ewentualnie wykorzystując wzór (4.31).

5. INNE OGRANICZENIA SYGNAŁU STERUJĄCEGO

5.1. Ograniczenie k-tej pochodnej sygnału sterującego

Dotychczas rozpatrywaliśmy przypadek, gdy sygnał sterujący $w(t)$ jest funkcją przedziałami ciągłą, posiadającą co najwyżej punkty nieciągłości pierwszego rodzaju i spełniającą ograniczenie (1.4). Taki sygnał sterujący nazywaliśmy dopuszczalnym sygnałem sterującym.

W niniejszym podrozdziale rozpatrzymy przypadek gdy ograniczona jest k-ta pochodna sygnału sterującego $w(t)$.

Zakładamy więc że dopuszczalny sygnał sterujący $w(t)$ jest obecnie funkcją, której k-ta pochodna $w^{(k)}(t)$ jest przedziałami ciągłą funkcją , posiadającą w dowolnym, skończonym przedziale czasu skończoną ilość punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, przy czym jej wartości mogą mieścić się w przedziale:

$$\alpha \leq w^{(k)}(t) \leq \beta . \tag{5.1}$$

Oczywiście pochodne funkcji $w(t)$ niższego rzędu niż k i sama funkcja $w(t)$ są funkcjami ciągłymi (czyli funkcje $w^{(i)}(t)$, $i = 0,1,\ldots, k-1$, są funkcjami ciągłymi). Natomiast zakładamy że $k < m$ i że pochodne wyższego rzędu ($i=k+1,\ldots, m-1$) spełniają podobne warunki jak poprzednio spełniały pochodne funkcji $w(t)$.

Podstawiamy:

$$\begin{aligned} w^{(k)} &= u \\ w^{(k+1)} &= u^{(1)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ w^{(m)} &= u^{(m-k)} \end{aligned} \tag{5.2}$$

i traktujemy wielkość $u(t)$ jako nowy sygnał sterujący. Łatwo zauważyć że ograniczenia odnośnie syngału $u(t)$ pokrywają się z ograniczeniami jakie były czynione w poprzednich rozdziałach dla sygnału $w(t)$.

Wprowadzamy obecnie nowe zmienne:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= y \\
x^2 &= x^{(1)} \\
&\text{- - - - - -} \\
x^{n-m+k} &= y^{(n-m+k-1)} \\
x^{n-m+k+1} &= y^{(n-m+k)} - \gamma_{n-m}\, w^{(k)} \\
x^{n-m+k+2} &= y^{(n-m+k+1)} - \gamma_{n-m}\, w^{(k+1)} - \gamma_{n-m+1}\, w^{(k)} \qquad (5.3) \\
&\text{- -} \\
x^{n} &= y^{(n-1)} - \gamma_{n-m}\, w^{(m-1)} - \gamma_{n-m+1}\, w^{(m-2)} - \ldots - \gamma_{n-k-1}\, w^{(k)} \\
x^{n+1} &= w \\
x^{n+2} &= w^{(1)} \\
&\text{- -} \\
x^{n+k} &= w^{(k-1)} ,
\end{aligned}
$$

gdzie wielkości γ_i podobnie jak poprzednio określone są wzorem rekurencyjnym:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_i = b_i - a_1 \gamma_{i-1} - a_2 \gamma_{i-2} - \ldots - a_{i-n+m} \gamma_{n-m} \\
&\text{dla } i = n-m+1,\ n-m+2,\ \ldots,\ n-k \qquad (5.4) \\
&\gamma_{n-m} = b_{n-m} .
\end{aligned}
$$

Uwzględniając w równaniu (1.1) wzory (5.2) i k ostatnich równań (5.3) otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_{n-m}\, u^{(m-k)} + b_{n-m+1}\, u^{(m-k-1)} + \ldots + \\
&+ b_{n-k} u + (b_{n-k+1} x^{n+k} + b_{n-k+2} x^{n+k-1} + \ldots + b_n x^{n+1}) . \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Wyznaczając z n pierwszych równań (5.3) wielkości $y^{(i)}$, i = 0,1,..., n i podstawiając je do równania (5.5), po przekształceniach, w których uwzględnia się zależności (5.4) otrzymujemy:

$$\dot{x}^n + a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots + a_n x^1 = \gamma_{n-k}\,\gamma + (b_{n-k+1} x^{n+k} + b_{n-k+2} x^{n+k-1} + \ldots + b_n x^{n+1}). \qquad (5.6)$$

Uwzględniając zależności (5.3) i (5.6) otrzymujemy dla (n+k) zmiennych $x^1, x^2, \ldots, x^{n+k}$ następujący układ (n+k) równań różniczkowych, opisujących ruch punktu w (n+k) - wymiarowej przestrzeni X:

$$\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= x^2 \\
\dot{x}^2 &= x^3 \\
&- - - - - \\
\dot{x}^{n-m+k-1} &= x^{n-m+k} \\
\dot{x}^{n-m+k} &= x^{n-m+k+1} + \gamma_{n-m}\,u \\
\dot{x}^{n-m+k+1} &= x^{n-m+k+2} + \gamma_{n-m+1}\,u \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - \\
\dot{x}^{n-1} &= x^n + \gamma_{n-k-1}\,u \\
\dot{x}^n &= -a_n x^1 - a_{n-1} x^2 - \ldots - a_1 x^n + b_n x^{n+1} + b_{n-1} x^{n+2} + \ldots + b_{n-k+1} x^{n+k} + \gamma_{n-k}\,u \\
\dot{x}^{n+1} &= x^{n+2} \\
\dot{x}^{n+2} &= x^{n+3} \\
&- - - - - - \\
\dot{x}^{n+k} &= u
\end{aligned} \qquad (5.7)$$

Podobnie jak poprzednio łatwo wykazać że określonym w rozdziale 1.2 rozwiązaniom $y(t)$ równania (1.1) (przy rozpatrywanych obecnie dopuszczalnych sygnałach sterujących) związki

(5.3) przyporządkowują ciągłe rozwiązania $\underline{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^{n+k}(t))$ układu równań (5.7).

Związki (5.3) można interpretować podobnie jak poprzednio związki (1.13) - jako związki, które przyporządkowują parze punktów $\underline{y}$ i $\underline{w}$, wziętych odpowiednio z przestrzeni Y (n-wymiarowej) i W (m-wymiarowej) - odpowiedni jedyny punkt $\underline{x}$ przestrzeni X ((n+k) - wymiarowej). Można więc mówić, że punkt $\underline{x}$ odpowiada zgodnie z (5.3) parze punktów $\underline{y}$ i $\underline{w}$. Również parze punktów $\underline{x}$ i $\underline{w}$ wziętych z przestrzeni X i W (ale tylko takich punktów, które posiadają k - ostatnich współrzędnych odpowiednio sobie równych) - odpowiada zgodnie z (5.3) jedyny punkt y przestrzeni Y. Podobne uwagi dotyczą przypadku, gdy w relacjach (5.3) występują odpowiednio funkcje: $\underline{x}(t)$, $\underline{y}(t)$ i $\underline{w}(t)$.

Przy pewnych zmianach, które omówimy w dalszym ciągu podane w rozdziałach II i III Lematy, Twierdzenia i ich dowody, zachowują swą ważność również w rozpatrywanym przypadku. A więc we wszystkich przypadkach gdy w Lematach, Twierdzeniach i ich dowodach występują w rozdziałach II i III wzory - należy je zastąpić obecnie aktualnymi, które zresztą są podobne (szczególnie w zapisie macierzowym). Na przykład w przypadku, gdzie w rozdziałach II i III używano sformułowania: "punkt $\underline{x}$ (lub trajektoria $\underline{x}(t)$) odpowiada zgodnie z (1.13) parze punktów $\underline{y}$ i $\underline{w}$ (lub trajektorii $\underline{y}(t)$ i funkcji $\underline{w}(t)$)" należy teraz w miejsce "zgodnie z (1.13)" podstawić: zgodnie z (5.3).

Używane poprzednio sformułowanie "sterowanie dopuszczalne w(t)" - należy teraz rozumieć w nowym, określonym na początku niniejszych rozważań sensie (ograniczenia narzucone są teraz na $w^{(k)}(t)$).

Zbiór Z_w^+ jest obecnie zbiorem punktów $\underline{w}_1$ w m-wymiarowej przestrzeni W, które wzięte jako warunki początkowe rozwiązań w(t) równania (2.2) w chwili t_1 ($\underline{w}(t_1) = \underline{w}(t_1^+) = \underline{w}_1$) gwarantują nam to, że te rozwiązania spełniają, dla $t > t_1$, ograniczenia narzucone na sterowanie dopuszczalne (rozumiane w nowym sensie).

Zbiór Z_x^+ określimy teraz jako zbiór punktów $\underline{x}_1$ w przestrzeni X (n+k) - wymiarowej, odpowiadających zgodnie z (5.3) wszystkim parom punktów $\underline{y}_1 = 0$ i $\underline{w}_1 \in Z_w^+$. A zatem współrzędne x_1^1, x_1^2, ..., x_1^{n+k} punktów $\underline{x}_1$ zbioru Z_x^+ możemy wyznaczyć ze wzorów:

$$
\begin{aligned}
& x_1^1 = 0 \\
& \text{- - - -} \\
& x_y^{n-m+k} = 0 \\
& x_1^{n-m+k+1} = - \vartheta_{n-m}\, w_1^{(k)} \\
& x_1^{n-m+k+2} = - \vartheta_{n-m+1}\, w_1^{(k)} - \vartheta_{n-m}\, w_1^{(k+1)} \\
& \text{- -} \\
& x_1^{n} = - \vartheta_{n-k-1}\, w_1^{(k)} - \vartheta_{n-k-2}\, w_1^{(k+1)} - \ldots - \vartheta_{n-m}\, w_1^{(m-1)} \\
& x_1^{n+1} = w_1 \\
& x_1^{n+2} = w_1^{(1)} \\
& \text{- - - - - -} \\
& x_1^{n+k} = w_1^{(k-1)} ,
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

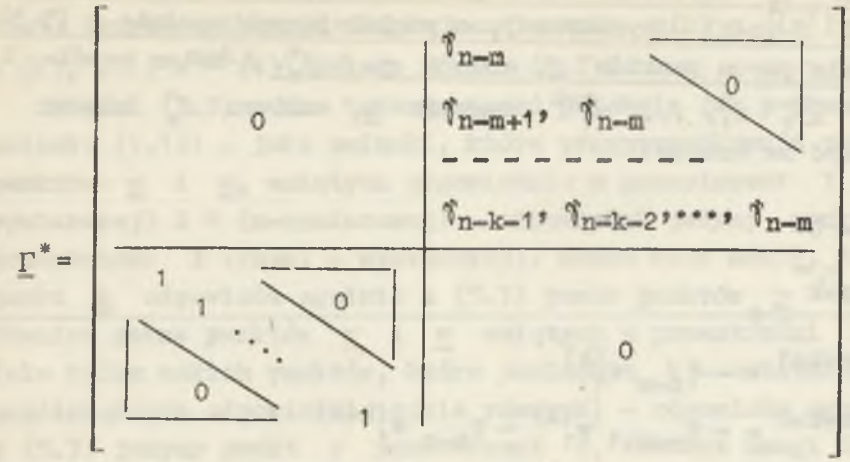
w których wielkości w_1, $w_1^{(1)}$, ..., $w_1^{(m-1)}$, są współrzędnymi dowolnego punktu $\underline{w}_1$ zbioru Z_w^+. m- ostatnich wzorów (5.8) można zapisać w postaci:

$$
\overset{m}{\underline{x}}_1 = - \underline{\Gamma}^* \underline{w}_1 , \tag{5.9}
$$

gdzie

$$
\underline{w}_1 = (w_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(m-1)})
$$

$$
\overset{m}{\underline{x}}_1 = (x_1^{n-m+k+1}, x_1^{n-m+k+2}, \ldots, x_1^{n+k})
$$



Ponieważ dla m-wymiarowej macierzy $\underline{\Gamma}^*$ jest:

$$\det \underline{\Gamma}^* = (-1)^{k(m-k)} \, b_{n-m}^{(m-k)} \neq 0 , \qquad (5.10)$$

gdyż zgodnie z założeniem $b_{n-m} \neq 0$, więc istnieje macierz $\underline{\Gamma}^{*-1}$ i mamy:

$$\underline{w}_1 = - \underline{\Gamma}^{*-1} \, \overset{m}{\underline{x}}_1 .$$

A zatem związek (5.9) lub (5.11) określa przekształcenie wzajemnie jednoznaczne punktów przestrzeni W - na punkty przestrzeni $\overset{m}{X}$.

Z wzorów (5.8) wynika, że punkty zbioru Z_x^+ mają (n-m+k) pierwszych współrzędnych równych zeru, czyli $\underline{x}_1 = (0,0,\ldots, 0, x_1^{n-m+k+1}, x_1^{n-m+k+2},\ldots, x_1^{n+k})$, a zatem m-wymiarowy wektor $\overset{m}{\underline{x}}_1$ zawiera pozostałe współrzędne punktów $\underline{x}_1$, które mogą być różne od zera (podobnie jak poprzednio).

Określenie zbioru Z_w^- pozostaje bez zmiany, z tym że obecnie przez sterowanie dopuszczalne rozumiemy oczywiście sterowanie w(t), dla którego k-ta pochodna, czyli $w^{(k)}(t)$ spełnia przytoczone na początku warunki.

Zbiór Z_w^- składa się obecnie z punktów $\underline{w}_o$ dla których

$$\alpha < w_o^{(k)} \leqslant \beta \quad \text{przy} \quad w_o^{(k+1)} > 0$$
$$\alpha \leqslant w_o^{(k)} < \beta \quad \text{przy} \quad w_o^{(k+1)} < 0. \tag{5.12}$$

Zbiór $Z_x^-(\underline{y}_o)$ jest teraz zbiorem punktów $\underline{x}_o$ w przestrzeni X, odpowiadających zgodnie z (5.3) wszystkim parom punktów $\underline{y}_o$ i $\underline{w}_o$, gdzie $\underline{w}_o$ jest dowolnym punktem zbioru Z_w^-, czyli $\underline{w}_o \in Z_w^-$.

Równaniu (3.3) odpowiada teraz równanie:

$$\overset{m}{\underline{x}}_o = \overset{m}{\underline{y}}_o - \Gamma^* \underline{w}(t_o^-), \tag{5.13}$$

gdzie

$$\overset{m}{\underline{x}}_o = (x_o^{n-m+k+1}, x_o^{n-m+k+2}, \ldots, x_o^{n+k})$$

$$\overset{m}{\underline{y}}_o = (y_o^{(n-m+k)}, y_o^{(n-m+k+1)}, \ldots, y_o^{(n-1)}, 0, \ldots, 0)$$

– odpowiednie m – wymiarowe wektory.

Z równania (5.13) biorąc pod uwagę (5.10) otrzymujemy:

$$\underline{w}(t_o^-) = \Gamma^{*-1} (\overset{m}{\underline{y}}_o - \overset{m}{\underline{x}}_o). \tag{5.14}$$

Bez trudności można również napisać inne, aktualne obecnie wzory odpowiadające wzorom występującym w Lematach, Twierdzeniach i dowodach, zamieszczonych w rozdziałach II i III.

W przypadku gdy $k \geqslant m$ to trajektorie $\underline{y}(t)$ odpowiadające rozwiązaniom równania (1.1) przy dopuszczalnym sterowaniu $w(t)$ – są ciągłe[x]. Wprowadzając nowe zmienne o postaci:

$$x^1 = y, \; x^2 = y^{(1)}, \ldots, x^n = y^{(n-1)}, x^{n+1} = w, x^{n+2} = w^{(1)}, \ldots, x^{n+k} = w^{(k-1)}, \tag{5.15}$$

x) Dla dopuszczalnego sterowania $w(t)$ dodatkowe założenie dotyczące pochodnych $w^{(i)}(t)$ wyższego rzędu niż k są w tym przypadku niepotrzebne.

otrzymujemy dla nich następujący układ równań różniczkowych:

$$\dot{x}^1 = x^2,\ \dot{x}^2 = x^3, \ldots,\ \dot{x}^{n-1} = x^n,$$

$$\dot{x}^n = -a_n x^1 - a_{n-1} x^2 - \ldots - a_1 x^n + b_n x^{n+1} + b_{n+1} x^{n+2} + \ldots + b_{n-m} x^{n+m+1},$$

$$\dot{x}^{n+1} = x^{n+2}, \ldots, \dot{x}^{n+k-1} = x^{n+k},\ \dot{x}^{n+k} = u\,, \qquad (5.16)$$

gdzie $u(t) = w^{(k)}(t)$ jest traktowany jako "nowy sygnał sterujący".

W dalszym ciągu rozważania można prowadzić podobnie jak w przypadku $k < m$. Należy przy tym wprowadzić pewne drobne zmiany, które nie powinny sprawiać trudności. I tak obecnie rozważamy przestrzenie Y, W_k i X odpowiednio n, k i (n+k) wymiarowe.

Określenie zbioru Z_w^+ punktów w_1 w k - wymiarowej przestrzeni W_k jest następujące: jest to zbiór punktów dla których

a) współrzędne $w_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(m-1)}$ wzięte jako warunki początkowe rozwiązań $w(t)$ równania (2.2) w chwili t_1, gwarantują nam to że te rozwiązania $w(t)$ spełniają dla $t > t_1$ ograniczenia nakładane na dopuszczalne sterowanie (zatem $w^{(k)}(t)$ spełnia ograniczenia (5.1));

b) współrzędne $w_1^{(m)}, w_1^{(m+1)}, \ldots, w_1^{(k-1)}$ są związane ze współrzędnymi $w_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(m-1)}$ relacjami:

$$b_{n-m} w^{(m+i)} + b_{n-m+1} w^{(m-1+i)} + \ldots + b_n w^{(i)} = 0 \qquad (5.16a)$$

dla $i = 0, 1, \ldots, k-m$.

Zatem w k - wymiarowej przestrzeni W_k punkty $\underline{w}_1$ zbioru Z_w^+ tworzą m - wymiarową rozmaitość.

Przy określeniu zbioru Z_w^- uzupełnienie sterowania $w(t)$ dla $t < t_o$ dokonujemy w ten sposób aby $\underline{w}(t_o^-) = \underline{w}_o$ i aby $w^{(k)}(t_o^-)$ spełniało ograniczenie (5.1).

W związku z tym do zbioru Z_w^- należą wszystkie punkty przestrzeni W_k.

Zbiory Z_x^+ i $Z_x^-(y_o)$ tworzy się podobnie jak poprzednio ze zbiorów Z_w^+ i Z_w^-.

Po niewielkich zmianach Twierdzenia I i II pozostają ważne również w przypadku $k \geqslant m$.

5.2. Złożone ograniczenia sygnału sterującego

W praktyce często się zdarza że zarówno szybkość steru jak i jego położenia skrajne są ograniczone. W niniejszym podrozdziale rozpatrzymy bardziej złożony przypadek ograniczeń, który będzie również obejmował przypadek ograniczenia $\dot{w}$ i w.

Przez dopuszczalny sygnał sterujący będziemy obecnie rozumieć sygnał $w(t)$:

a) na który nałożone są ograniczenia takie jak na sygnał dopuszczalny w podrozdziale 5.1 - k-ta pochodna $w^{(k)}(t)$ jest więc funkcją przedziałami ciągłą spełniającą nierówność (5.1);

b) dla którego pochodne niższego rzędu niż k są ograniczone w ten sposób, że mogą przyjmować wartości współrzędnych punktów należących do pewnego zadanego zbioru domkniętego U_k (w przestrzeni W_k o współrzędnych $w, w^{(1)},\ldots,w^{(k-1)}$. Granica tego zbioru jest gładką lub łamaną hiperpowierzchnią.

Wprowadzając nowe zmienne $\underline{x}$ tak jak w poprzednim podrozdziale możemy rozpatrywane zagadnienia sprowadzić do jednego z zagadnień, które zostały omówione w rozdziale czwartym. Podobnie jak tam można rozróżnić tu:

Przypadek I, w którym zbiór U_k w pobliżu granicy jest określony nierównością:

$$q(w, w^{(1)}, \ldots, w^{(k-1)}) \leqslant 0, \tag{5.17}$$

gdzie $\frac{\partial q}{\partial w^{k-1}} \neq 0$ na granicy $q(w, w^{(1)},\ldots, w^{(k-1)}) = 0$.

Ten przypadek można sprowadzić do rozważań, które zostały zamieszczone w podrozdziale 4.1, należy tylko uwzględnić nieco inną postać równań różniczkowych dla zmiennych $\underline{x}$.

Przypadek II, w którym ograniczone są pochodne $w^{(i)}$ do $(r-1)$-ej włącznie, gdzie $r < k$, a zbiór U_k w pobliżu granicy jest określony nierównością:

$$q(w, w^{(1)}, \ldots, w^{(r-1)}) \leqslant 0 . \qquad (5.18)$$

W tym przypadku można wykorzystać rozważania, które są zamieszczone w podrozdziale 4.2 (o ile funkcja $q(w, w^{(1)}, \ldots, w^{(r-1)})$ - spełnia poczynione tam założenia).

Po wprowadzeniu zmiennych $\underline{x}$ pochodne $w^{(i)}$, które wchodzą w nierówności (5.17) i (5.18) są równe poprostu zmiennym x^{n+i+1} $i = 0,1,\ldots, k-1$. Znając ograniczenia pochodnych $w^{(i)}$ - możemy bez trudności określić obszar B dopuszczalnych trajektorii w(n+k) - wymiarowej przestrzeni X. Oczywiście w przypadku I ograniczenia w przestrzeni X są nałożone w współrzędne $x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^{n+k}$, a w Przypadku II - na współrzędne $x^{n+1}, \ldots, x^{n+r}$. Nierówności określające zbiór U_k i obszar B są takie same, tylko zamiast pochodnych $w^{(i)}$ występują w nierówności obszaru B współrzędne x^{n+i+1}.

Określenia zbiorów Z_w^+ i Z_w^- pozostają bez zmiany, przy czym należy pamiętać że teraz w określeniach tych termin sterowanie dopuszczalne należy rozumieć w sensie określonym na początku niniejszego podrozdziału. Również zbiory Z_x^+ i $Z_x^-(y_0)$ tworzy się w rozpatrywanym przypadku analogicznie jak poprzednio - ze zbiorów Z_w^+ i Z_w^-.

Łatwo zauważyć, że zbiory Z_x^+ i $Z_x^-(y_0)$ należą do zbioru punktów obszaru B. Wniosek ten można wysnuć biorąc pod uwagę to że $x^{n+i+1} = w^{(i)}$, $i = 0,1,\ldots, k-1$ oraz uwzględniając określenie zbiorów Z_w^+, Z_w^-, Z_x^+, $Z_x^-(y_0)$ i obszaru B.

Można rozpatrzeć również przypadek gdy sterowanie podlega złożonym ograniczeniom, a równocześnie inne ograniczenia nałożone są na niektóre ze współrzędnych $y^{(i)}$ obiektu.

Po wprowadzeniu odpowiednich nowych zmiennych wszystkie ograniczenia (z wyjątkiem ograniczenia pochodnej $w^{(k)}$) należy uwzględnić określając odpowiednio obszar B. Ze względu na komplikację ograniczeń i wzrost o liczbę k ilości równań różniczkowych dla zmiennych $\underline{x}$ - rośnie trudność rozpatrywania takich zagadnień w przypadku ogólnym.

6. SYNTEZA OPTYMALNEGO STEROWANIA

6.1. Ograniczenie sygnału sterującego typu (1.4)

Niechaj $\tilde{w}(t)$ będzie sterowaniem optymalnym w sensie Problemu I, a $\tilde{\underline{y}}(t)$ odpowiadającą temu sterowaniu trajektorią optymalną. Trajektorii $\tilde{\underline{y}}(t)$ i funkcji $\tilde{w}(t)$ związki (1.13) przyporządkowują trajektorię optymalną $\tilde{\underline{x}}(t)$. Każdemu punktowi trajektorii $\tilde{\underline{x}}(t)$ odpowiada określona wartość sterowania optymalnego $\tilde{w}(t)$. Oznaczmy przez $\tilde{v}(\underline{x})$ funkcję która każdemu punktowi trajektorii optymalnej $\tilde{\underline{x}}(t)$ przyporządkowuje optymalną wartość sterowania $\tilde{w}(t)$, czyli $\tilde{w}(t) = \tilde{v}(\tilde{\underline{x}}(t))$, dla $t > t_o$. Funkcja $\tilde{v}(\underline{x})$ może być określona w całej przestrzeni X (jeżeli istnieje trajektoria optymalna przechodząca przez dowolny punkt przestrzeni X, prowadząca do zbioru Z_x^+).

W przypadku gdy sterowanie dopuszczalne jest rozumiane w sensie określonym w podrozdziale 1.1 niniejszej pracy możemy sformułować następujące:

Twierdzenie III

Niechaj $\tilde{v}(\underline{x})$ będzie funkcją podającą wartość optymalnego sterowania w (w sensie Problemu I) dla dowolnego punktu $\underline{x}$ przestrzeni X (lub obszaru B).

Funkcja $\tilde{v}(\underline{x})$

a) w punktach $\underline{x}$ nie należących do zbioru Z_x^+ pokrywa się z funkcją $\bar{v}(\underline{x})$ podającą w punkcie x optymalną wartość sygnału w, przy sterowaniu czasowo-optymalnym z punktu $\underline{x}$ do zbioru Z_x^+;

b) w punktach $\underline{x}$ należących do zbioru Z_x^+ jest określona relacją:

$$w = \tilde{v}(\underline{x}) = -\frac{1}{\tau_{n-m}}\, x^{n-m+1}. \qquad (6.1)$$

Punkt a) Twierdzenia III wynika bezpośrednio z określenia funkcji $\bar{v}(\underline{x})$ i z punktu a) Twierdzenia I. Rozwiązując układ równań (1.14), w którym $w = \bar{v}(\underline{x})$ i uwzględniając odpowiednie warunki początkowe otrzymamy bowiem trajektorię optymalną $\bar{\underline{x}}(t)$ i sterowanie optymalne $\bar{w}(t) = \bar{v}(\bar{\underline{x}}(t))$, dla $t_0 < t < t_1$. Jest przy tym $\bar{\underline{x}}(t_1) = \bar{\underline{x}}_1 \in Z_x^+$, mamy więc $\bar{x}_1^1 = 0$, $\bar{x}_1^2 = 0, \ldots,$ $\bar{x}_1^{n-m} = 0$.

Dla udowodnienia punktu b) weźmy pod uwagę układ równań (1.14) w którym sterowanie w jest określone zgodnie z relacją (6.1). Rozważmy rozwiązanie $\underline{x}(t)$, $t > t_1$, tego układu równań z warunkiem początkowym $\underline{x}(t_1) = \bar{\underline{x}}_1$.
Łatwo zauważyć że dla pierwszych (n-m) - składowych rozwiązania $\underline{x}(t)$ mamy:

$$x^1(t) = 0, \quad x^2(t) = 0, \ldots, x^{n-m}(t) = 0, \text{ dla } t > t_1. \qquad (6.2)$$

Oprócz tego zauważmy że z równania: $x^{n-m+1} = -\gamma_{n-m} w$ po zróżniczkowaniu go i uwzględnieniu (n-m+1)-ego równania różniczkowego (1.14) dostajemy: $x^{n-m+2} = -\gamma_{n-m+1} w - \gamma_{n-m} w^{(1)}$.
Różniczkując z kolei to równanie i uwzględniając (n-m+2)-ie równanie (1.14) mamy: $x^{n-m+3} = -\gamma_{n-m+2} w - \gamma_{n-m+1} w^{(1)} - \gamma_{n-m} w^{(2)}$.
Postępując dalej w ten sposób otrzymujemy relacje:

$$\begin{aligned} x^{n-m+1} &= -\gamma_{n-m} w \\ x^{n-m+2} &= -\gamma_{n-m+1} w - \gamma_{n-m} w^{(1)} \\ &- - - - - - - - - - - - - - - - \\ x^{n} &= -\gamma_{n-1} w - \gamma_{n-2} w^{(1)} - \ldots - \gamma_{n-m} w^{(m-1)}. \end{aligned} \qquad (6.3)$$

A zatem jeżeli jest spełniona relacja (6.1) to rozwiązania x^i, $i = n-m+1, \ldots, n$ układu równań (1.14) są powiązane ze sterowaniem $\underline{w}$ zależnościami (6.3).

Rozwiązaniu $\underline{x}(t)$ i funkcji $\underline{w}(t)$ ze względu na relacje (6.2) i (6.3) odpowiada zgodnie z (1.13) trajektoria $\underline{y}(t) = 0$.

Mamy więc $\underline{y}(t) = 0$, dla $t > t_1$, zatem sterowanie $w(t)$, $t > t_1$, jest rozwiązaniem równania (2.2). Sterowanie to jest dopuszczalne ponieważ $\underline{w}(t_1^+) \in Z_w^+$, co wynika z relacji (6.3) napisanych dla "chwili t_1^+". Z tego że $\underline{w}(t_1^+) \in Z_w^+$ wynika również że $\underline{w}(t) \in Z_w^+$, dla $t > t_1$, zatem z określenia zbioru Z_x^+ i z (6.2) oraz z (6.3) wynika że $\underline{x}(t) \in Z_x^+$, dla $t > t_1$. A zatem jeżeli dla punktów $\underline{x} \in Z_x^+$ sterowanie jest określone relacją (6.1) to $\underline{y}(t) = 0$, dla $t > t_1$.

Odwrotnie jeżeli $\underline{y}(t) = 0$, dla $t > t_1$ i sterowanie jest dopuszczalne to spełnione są relacje (6.2) i (6.3), a więc i (6.1). Ta ostatnia jak łatwo wykazać zachodzi dla punktów $\underline{x} \in Z_x^+$.

Znajomość funkcji $\tilde{v}(\underline{x})$ może być pomocna przy realizacji praktycznego układu realizującego sterowanie optymalne w sensie Problemu I.

Przykład 1

Dla obiektu opisanego równaniem $\ddot{y} = \ddot{w} + w$ rozwiązano Problem I w podrozdziale 2.5. Dla punktów $\underline{x} \notin Z_x^+$ została tam określona funkcja $\bar{v}(\underline{x})$. Stosując do tego przykładu wzór (6.1) otrzymujemy dla punktów $\underline{x} \in Z_x^+$ sterowanie optymalne: $w = -x^1$. Zgodnie z Twierdzeniem III funkcja $\tilde{v}(\underline{x})$ jest określona w następujący sposób:

$$w = \tilde{v}(\underline{x}) = \begin{cases} \bar{v}(\underline{x}) & \text{dla} \quad \underline{x} \notin Z_x^+ \\ -x^1 & \text{dla} \quad \underline{x} \in Z_x^+ \end{cases}.$$

Przykład 2

W podrozdziale 4.5 znaleziono funkcję $\bar{v}(\underline{x})$, dla dowolnego punktu $\underline{x}$ obszaru B, nie należącego do zbioru Z_x^+. Rozpatrzono tam przypadek gdy ograniczona jest również współrzędna $\dot{y}$ obiektu opisanego równaniem $\ddot{y} + a_1\dot{y} = b_1\ddot{w} + b_2 w$.

Dla tego przykładu zgodnie z Twierdzeniem III mamy:

$$\tilde{\bar{v}}(\underline{x}) = \begin{cases} \bar{v}(\underline{x}) & \text{dla } \underline{x} \in B \text{ i } \notin Z_x^+ \\ -\frac{1}{b_1} x^2 & \text{dla } \underline{x} \in Z_x^+ \end{cases} \tag{6.5}$$

6.2. Ograniczenie k-tej pochodnej sygnału sterującego

Rozpatrzmy najpierw

Przypadek I $k < m$

Oznaczmy przez $\bar{v}(\underline{x})$ funkcję podającą optymalną wartość sygnału $u = w^{(k)}$ w punkcie $\underline{x}$ $(n+k)$ - wymiarowej przestrzeni X, przy sterowaniu czasowo optymalnym do zbioru Z_x^+. Twierdzenie III pozostaje również ważne w tym przypadku o ile punkt b) tego Twierdzenia będzie brzmiał:

b) Funkcja $\tilde{\bar{v}}(\underline{x})$ w punktach $\underline{x}$ należących do zbioru Z_x^+ jest określona relacją:

$$u = w^{(k)} = \tilde{\bar{v}}(\underline{x}) = -\frac{1}{\tilde{b}_{n-m}} x^{n-m+k+1} . \tag{6.6}$$

Dla udowodnienia zauważmy że trajektoria optymalna $\bar{\underline{x}}(t)$, $t_o < t < t_1$, którą można wyznaczyć korzystając z układu równań (5.7) i funkcji $\bar{v}(\underline{x})$ - spełnia relację $\bar{\underline{x}}(t_1) = \bar{\underline{x}}_1 \in Z_x^+$. Zatem

$$\bar{x}_1^1 = 0, \ldots, \bar{x}_1^{n-m+k} = 0, \bar{x}_1^{n+1} = w_1, \bar{x}_1^{n+2} = w_1^{(1)}, \ldots, \bar{x}_1^{n+k} = w_1^{(k-1)} . \tag{6.7}$$

Weźmy pod uwagę układ równań (5.7) w którym sterowanie u określane jest relacją (6.6). Rozważmy rozwiązanie $\underline{x}(t)$, $t > t_1$, tego układu z warunkiem początkowym $\underline{x}(t_1) = \bar{\underline{x}}_1$. Jak łatwo zauważyć składowe tego rozwiązania $\underline{x}(t)$ mają postać:

$$x^1(t) = 0, \ldots, x^{n-m+k}(t) = 0, x^{n+1}(t) = w(t), x^{n+2}(t) = w^{(1)}(t), \ldots,$$

$$\ldots, x^{n+k}(t) = w^{(k-1)}(t), \text{ dla } t > t_1 . \tag{6.8}$$

Podobnie jak poprzednio łatwo wykazać że o ile zachodzi (6.6) to rozwiązania x^i, i=n-m+k+1,..., n, układu równań (5.7) są związane ze sterowaniem $\underline{w}$ następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} x^{n-m+k+1} &= -\gamma_{n-m}\, w^{(k)} \\ x^{n-m+k+2} &= -\gamma_{n-m+1}\, w^{(k)} - \gamma_{n-m}\, w^{(k+1)} \\ &- \\ x^{n} &= -\gamma_{n-k-1}\, w^{(k)} - \gamma_{n-k-2}\, w^{(k+1)} - \ldots - \gamma_{n-m}\, w^{(m-1)}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Rozwiązaniu $\underline{x}(t)$ i funkcji $\underline{w}(t)$, $t > t_1$, ze względu na relacje (6.8) i (6.9) odpowiada zgodnie z (5.3) trajektoria $\underline{y}(t) = 0$, $t > t_1$. Zatem sterowanie $w(t)$, $t > t_1$, jest rozwiązaniem równania (2.2), i jak łatwo wykazać jest ono dopuszczalne. Dalszy przebieg dowodu jest identyczny jak poprzednio.

Przypadek II $k \geq m$

Twierdzenie III będzie również ważne w tym przypadku o ile zmienimy w następujący sposób punkt b):

b) Funkcja $\tilde{v}(\underline{x})$ w punktach $\underline{x}$ należących do zbioru Z_x^+ jest określona relacją:

$$u = w^{(k)} = \tilde{v}(\underline{x}) = -\frac{b_{n-m+1}}{b_{n-m}}\, x^{n+k} - \ldots - \frac{b_n}{b_{n-m}}\, x^{n-m+k+1}. \tag{6.10}$$

Dowód tak sformułowanego punktu b) jest podobny jak poprzednio. Trajektoria optymalna $\bar{\underline{x}}(t)$, $t_0 < t < t_1$, osiąga w chwili t_1 punkt $\bar{\underline{x}}_1 \in Z_x^+$, czyli $\bar{\underline{x}}(t_1) = \bar{\underline{x}}_1 \in Z_x^+$, zatem:

$$\bar{x}^1 = 0, \ldots, \bar{x}^n = 0, \bar{x}^{n+1} = w_1, \bar{x}^{n+2} = w_1^{(1)}, \ldots, \bar{x}^{n+k} = w_1^{k-1}. \tag{6.11}$$

Całkując k - ostatnich równań układu (5.16), przy uwzględnieniu warunków początkowych (6.11) i tego że $u = w^{(k)}$ dostajemy:

$$x^{n+1}(t) = w(t),\ x^{n+2}(t) = w^{(1)}(t), \ldots\ x^{n+k}(t) = w^{(k-1)}(t), \text{dla } t > t_1. \tag{6.12}$$

Uwzględniając (6.12) i (6.10) otrzymujemy:

$$b_{n-m}w^{(k)}(t)+b_{n-m+1}w^{(k-1)}(t)+ \ldots + b_n w^{(k-m)}(t)=0, \text{ dla } t > t_1. \tag{6.13}$$

Ze wzorów (6.11) oraz z tego że $\underline{x}_1 \in Z_x^+$, wynika że wielkości $w_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_1^{(k-1)}$ są współrzędnymi punktu $\underline{w}_1$ należącego do zbioru Z_w^+. Całkując (k-m) - krotnie równanie (6.13), uwzględniając warunek początkowy $\underline{w}(t_1) = \underline{w}_1 \in Z_w^+$ oraz biorąc pod uwagę zależności (5.16a) jakie spełniają współrzędne punktu $\underline{w}_1 \in Z_x^+$ otrzymujemy:

$$b_{n-m}w^{(m)}(t)+ b_{n-m+1}\, w^{(m-1)}(t)+ \ldots + b_n w(t) = 0, \text{ dla } t > t_1. \tag{6.14}$$

Uwzględniając warunki początkowe (6.11) oraz zależność (6.14) dostajemy po scałkowaniu n-pierwszych równań układu (5.16):

$$x^1(t)= 0,\ x^2(t) = 0, \ldots,\ x^n(t)= 0, \text{ dla } t > t_1. \tag{6.15}$$

Ciąg dalszy dowodu jest identyczny jak w poprzednich przypadkach.

Przykład

W podrozdziale 5.3[x)] rozpatrzono przypadek sterowania obiektem o równaniu $\ddot{y} = \dot{w} + w$, przy złożonych ograniczeniach sygnału sterującego: $|\dot{w}| \leqslant 1$ i $|w| \leqslant g$. Po wprowadzeniu nowych zmiennych (5.21) określono tam funkcję $\bar{v}(\underline{x})$ podającą optymalną wartość sygnału $\dot{w}$ w punkcie $\underline{x}$, przy sterowaniu czasowo-optymalnym do zbioru Z_x^+.

Korzystając z przystosowanego dla przypadku II: $k \geqslant m$ Twierdzenia III dostajemy dla funkcji $\bar{v}(\underline{x})$:

$$u = \dot{w} = \bar{v}(\underline{x}) = \begin{cases} \bar{v}(\underline{x}) & \text{dla } \underline{x} \in B \text{ i } \notin Z_x^+ \\ -x^3 & \text{dla } \underline{x} \in Z_x^+ \end{cases}$$

x) Podrozdział 5.3 jest umieszczony w oryginale pracy habilitacyjnej, nie jest natomiast - z powodu braku miejsca - umieszczony w niniejszej publikacji.

6.3. Przygotowanie obiektu do optymalnego sterowania

Najbliższe rozważania będą dotyczyły realizacji sterowania optymalnego w sensie Problemu II. Jak już wspominaliśmy realizacja takiego sterowania składa się z dwóch etapów. Zajmiemy się obecnie pierwszym etapem realizacji tego sterowania, a mianowicie - etapem przygotowawczym. W tym etapie współrzędne $\underline{y}$ obiektu powinny osiągnąć zadaną wartość początkową $\underline{y}_o$ przy optymalnym "ustawieniu steru" $\underline{w}(t_o^-) = \underline{w}_o$ (wielkość $\underline{w}_o$ - wynika z rozwiązania Problemu II).

Oznaczmy przez $\underline{y}_{-1}$ i $\underline{w}_{-1}$ - odpowiednio wstępną wartość współrzędnych obiektu i wstępne ustawienie "ustawienie steru". Przez $t_{-1} < t_o$ oznaczmy chwilę rozpoczęcia realizacji sterowania w etapie przygotowawczym. Problem przygotowania obiektu do optymalnego sterowania, którym tutaj się zajmiemy można sformułować następująco:

W przestrzeni Y dane są punkty $\underline{y}_{-1}$ i $\underline{y}_o$. Dane są również wektory $\underline{w}_{-1}$ i $\underline{w}_o$ (ten ostatni wynika z rozwiązania Problemu II). Należy znaleźć dopuszczalne sterowanie $w(t)$, $t_{-1} < t < t_o$, spełniające warunki $\underline{w}(t_{-1}^-) = \underline{w}_{-1}$ i $\underline{w}(t_o^-) = \underline{w}_o$, przy którym rozwiązanie $\underline{y}(t)$ równania (1.1) z warunkiem początkowym $\underline{y}(t_{-1}^-) = \underline{y}_{-1}$ spełnia również relację $\underline{y}(t_o^-) = \underline{y}_o$ [x].

W tak postawionym problemie jedynym wymaganiem stawianym sterowaniu w etapie przygotowawczym $t_{-1} < t < t_o$ jest to aby doprowadziło ono współrzędne obiektu z dowolnej wstępnej wartości $\underline{y}_{-1}$ do określonej wartości $\underline{y}_o$ przy zadanym ustawieniu steru $\underline{w}(t_o^-) = \underline{w}_o$. W przedziale czasu $t_{-1} < t < t_o$ nie stawia się żadnych kryteriów optymalności takiemu sterowaniu. W związku z tym problem ten można w różny sposób rozwiązać, a zatem nie posiada on jednoznacznego rozwiązania. Jeden ze sposobów rozwiązania przedstawiamy poniżej.

---

[x] Może być $\underline{y}_{-1} = \underline{y}_o$, wtedy powyższy problem ma sens gdy $\underline{w}_{-1} \neq \underline{w}_o$. Jedna z chwil t_{-1} lub t_o może być zadana.

Rozważmy sterowanie $\hat{w}(t)$, $t' < t < t_o$, dla którego

$$\hat{\underline{w}}^{(m-1)}(t) = \underline{w}_o^{(m-1)}, \text{ dla } t' < t < t_o$$

$$\hat{\underline{w}}(t_o^-) = \underline{w}_o . \tag{6.16}$$

Dla $t' < t < t_o$ mamy więc:

$$\hat{\underline{w}}^{(m-1)}(t) = \underline{w}_o^{(m-1)}$$

$$\hat{\underline{w}}^{(m-2)}(t) = (t-t_o)\,\underline{w}_o^{(m-1)} + \underline{w}_o^{(m-2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{6.17}$$

$$\hat{\underline{w}}(t) = \frac{(t-t_o)^{m-1}}{(m-1)!}\,\underline{w}_o^{(m-1)} + \frac{(t-t_o)^{m-2}}{(m-2)!}\,\underline{w}_o^{(m-2)} + \ldots + (t-t_o)\underline{w}_o^{(1)} + \underline{w}_o .$$

Chwilę t' taką że w przedziale $t' < t < t_o$ tak określone sterowanie jest dopuszczalne (w przypadku ograniczeń sterowania typu (1.4)) należy określić tak aby: $\alpha \leq \hat{w}(t) \leq \beta$, dla $t' \leq t < t_o$. Jeżeli istnieje rozwiązanie Problemu II, to leżący na granicy zbioru $Z_x^-(\underline{y}_o)$ punkt $\bar{\underline{x}}_o \in Z_x^-(\underline{y}_o)$ i również punkt $\underline{w}_o^2 \in \Gamma^{-1}(\overset{m}{\underline{y}}_o - \overset{m}{\bar{\underline{x}}}_o) \in Z_w^-$.

Biorąc pod uwagę określenie zbioru Z_w^- łatwo zauważyć że istnieje wtedy chwila $t' < t_o$, chociażby bardzo bliska chwili t_o, taka że w przedziale $t' < t < t_o$ sterowanie (6.17) jest dopuszczalne.

Rozważmy teraz trajektorię $\hat{\underline{x}}(t)$ odpowiadającą sterowaniu $\hat{w}(t)$ i przechodzącą w chwili t_o przez punkt $\bar{\underline{x}}_o$ (czyli $\hat{\underline{x}}(t_o) = \bar{\underline{x}}_o$). Jeżeli t przebiega przedział $t' \leq t < t_o$, to punkt $\hat{\underline{x}}(t)$ zakreśla w przestrzeni X pewien wycinek $\hat{S}$ trajektorii $\hat{\underline{x}}(t)$, z końcami $\hat{\underline{x}}(t')$ i $\hat{\underline{x}}(t_o^-) = \bar{\underline{x}}_o$.

Oznaczmy przez $\underline{x}_{-1}$ punkt odpowiadający zgodnie z (1.13) parze punktów $\underline{y}_{-1}$ i $\underline{w}_{-1}$. Punkt $\underline{x}_{-1}$ reprezentuje wstępny stan obiektu, przed rozpoczęciem realizacji sterowania w etapie przygotowawczym.

Oznaczmy przez $\hat{\underline{x}}(t'')$ dowolny punkt wycinka $\S$ trajektorii $\hat{\underline{x}}(t)$, różny od $\hat{\underline{x}}(t_0) = \underline{x}_0$ (zatem $t' \leq t'' < t_0$). Niechaj $\check{w}(t)$, $t_{-1} < t < t''$, będzie sterowaniem dopuszczalnym, dla którego trajektoria $\check{\underline{x}}(t)$, taka że $\check{\underline{x}}(t_{-1}) = \underline{x}_{-1}$, przechodzi również przez punkt $\hat{\underline{x}}(t'')$ wycinka $\S$.

Sterowanie $w(t)$, $t_{-1} < t < t_0$, które w przedziale $t_{-1} < t < t''$ pokrywa się z funkcją $\check{w}(t)$, a w przedziale $t'' < t < t_0$ - z funkcją $\hat{w}(t)$ jest poszukiwanym w w/w problemie sterowaniem w etapie przygotowawczym. Sterowanie to przygotowuje obiekt do następnego etapu w którym realizowane jest sterowanie optymalne w sensie Problemu I.

Ażeby czas etapu przygotowawczego był możliwie krótki należy:

a) na wycinku $\S$ wybrać punkt $\hat{\underline{x}}(t'')$ możliwie blisko położony punktu $\underline{x}_0$ (zatem chwila t'' bliska jest chwili t_0);
b) za sterowanie $\check{w}(t)$, $t_{-1} < t < t''$, przyjąć sterowanie czasowo-optymalne sprowadzające punkt w przestrzeni X z położenia $\underline{x}_{-1}$ w położenie $\hat{\underline{x}}(t'')$.

W ten sposób skraca się odcinek czasu $t'' < t < t_0$, w którym sterowanie $\hat{w}(t)$ nie jest sterowaniem czasowo-optymalnym. Postępując w ten sposób otrzymujemy czas etapu przygotowawczego $t_0 - t_{-1}$ tylko nieco większy od czasu sterowania czasowo-optymalnego z punktu $\underline{x}_{-1}$ do punktu $\underline{x}_0$ (i to dowolnie do niego zbliżony).

W n i o s e k: Nie istnieje sterowanie w etapie przygotowawczym, dla którego czas $t_0 - t_{-1}$ jest minimalny. Jeżeli istnieje sterowanie czasowo-optymalne z punktu $\underline{x}_{-1}$ do wszystkich punktów wycinka $\S$, to istnieje natomiast granica czasu $t_0 - t_{-1}$, do której w wyżej postawionym problemie możemy się dowolnie zbliżyć (wybierając punkt $\hat{\underline{x}}(t'')$ na wycinku $\S$ dowolnie bliski punktu $\underline{x}_0$).

Przykład

W podrozdziale 3.5 rozpatrywaliśmy sterowanie czasowo-optymalne w sensie Problemu II obiektem opisanym równaniem różniczkowym o postaci $\ddot{y} = \ddot{w} + w$, $|w| \leq 1$.

Rozważmy teraz problem przygotowania tego obiektu do sterowania optymalnego. Niechaj będą dane $\underline{y}_{-1}$, $\underline{w}_{-1}$, $\underline{y}_0$ i $\underline{y}_1 = 0$. Z rozwiązania Problemu II dostajemy jeszcze:

$$\underline{w}_0=(w_0, \dot{w}_0) \quad \text{i} \quad \underline{\bar{x}}_0 = (\bar{x}^1_0, \bar{x}^2_0).$$

Zgodnie z wzorami (6.17) określamy sterowanie $\hat{w}(t)$:

$$\hat{w}^{(1)}(t) = \dot{w}_0, \quad \hat{w}(t) = \dot{w}_0(t-t_0) + w_0, \quad \text{dla } t' < t < t_0. \tag{6.18}$$

Odcinek czasu $t_0 - t'$, w którym sterowanie (6.18) jest dopuszczalne wyznaczamy uwzględniając ograniczenie: $|w| \leq 1$.
Mamy więc

$$\text{dla } \dot{w}_0 > 0 \qquad t_0 - t' = \frac{w_0 + 1}{\dot{w}_0}$$

$$\text{dla } \dot{w}_0 < 0 \qquad t_0 - t' = \frac{w_0 - 1}{\dot{w}_0}. \tag{6.19}$$

Podstawiając (6.18) do równań (2.13), rozwiązując te równania i uwzględniając warunki początkowe $\hat{x}^1(t_0) = \bar{x}^1_0$ i $\hat{x}^2(t_0) = \bar{x}^2_0$ otrzymujemy dla trajektorii $\underline{\hat{x}}(t)$ równania:

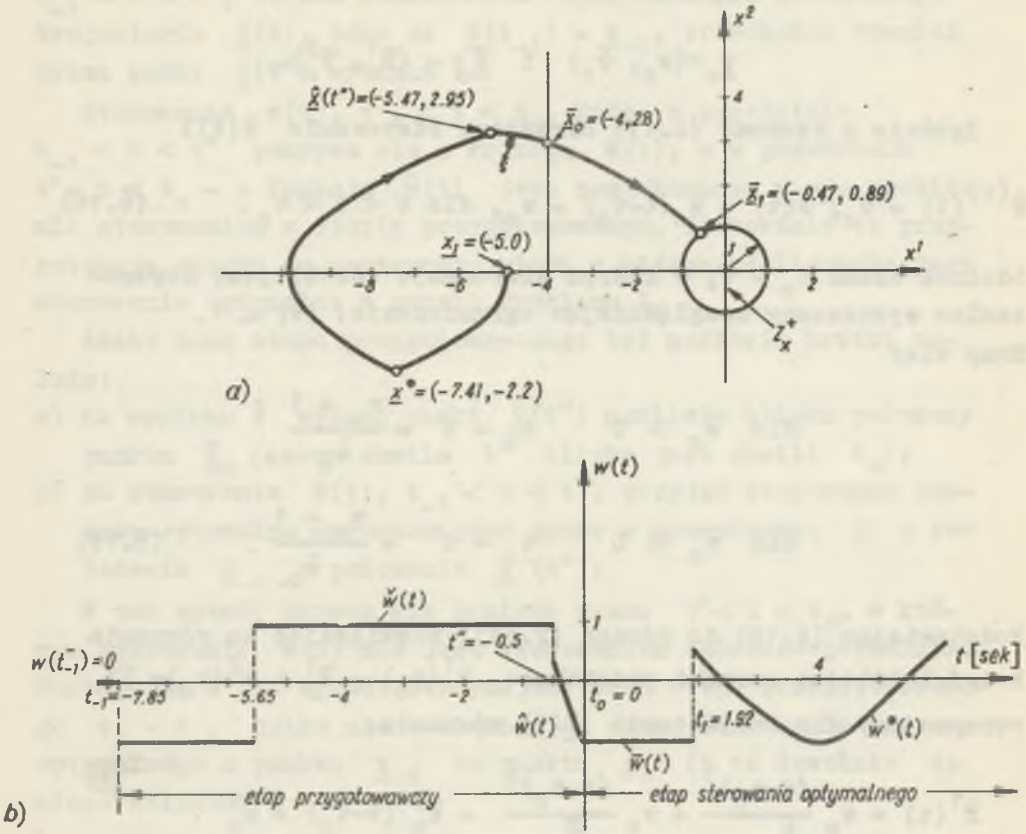
$$\hat{x}^1(t) = \dot{w}_0 \frac{(t-t_0)^3}{6} + w_0 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \bar{x}^2_0 (t-t_0) + \bar{x}^1_0$$

$$\hat{x}^2(t) = \dot{w}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2} + w_0(t-t_0) + \bar{x}^2_0. \tag{6.20}$$

Odcinek $\S$ jest opisany przez równania (6.20) w których parametr $t - t_0$ zmienia się w granicach $t' - t_0 \leq t - t_0 < 0$.

Dla obliczonego w podrozdziale 3.5 przykładu liczbowego o danych $\underline{y}_0 = (-5,0)$, $\underline{y}_1 = 0$ otrzymaliśmy $\underline{w}_0 = (-1,-2,8)$ i $\underline{x}_0 = (-4, 2,8)$.
Mamy więc $w_0 = -1$, $\dot{w}_0 = -2,8$, $\bar{x}^1_0 = -4$, $\bar{x}^2_0 = 2,8$

$$t_0 - t' = 0,714.$$


a)
x^2
$\hat{x}(t^*)=(-5.47, 2.95)$
$\bar{x}_0=(-4, 2.8)$
$\bar{x}_1=(-0.47, 0.89)$
$x_1=(-5.0)$
x^1
$x^*=(-7.41, -2.2)$
b)
$w(t)$
$\check{w}(t)$
$w(t_{-1})=0$
$t^*=-0.5$
t [sek]
$t_{-1}=-7.85$
$t_0=0$
$t_1=1.52$
$\hat{w}(t)$
$\bar{w}(t)$
$w^*(t)$
etap przygotowawczy
etap sterowania optymalnego

Rys. 12

Przyjmując $t_o - t'' = 0,5$ otrzymujemy korzystając z wzorów (6.20) $\hat{x}^1(t'') = -5,47$, $\hat{x}^2(t'') = 2,95$.

Niechaj dodatkowe dane będą: $\underline{x}_{-1} = (-5,0)$, $\underline{w}_{-1} = (0,0)$. Aby rozwiązać problem do końca należy jeszcze znaleźć sterowanie $\check{w}(t)$, $t_{-1} < t < t''$, dla którego odpowiadająca mu trajektoria $\underline{\check{x}}(t)$ spełnia warunki $\underline{\check{x}}(t_{-1}) = \underline{x}_{-1} = (-5,0)$ i $\underline{\check{x}}(t'') = \underline{\hat{x}}(t'') = (-5,47, 2,95)$.

Na rysunku 12a przedstawiono przebiegi trajektorii $\underline{\check{x}}(t)$, $\underline{\hat{x}}(t)$ i $\underline{\tilde{x}}(t)$, a na rysunku 12b - sterowanie w obu etapach: przygotowawczym i sterowania optymalnego dla przyjętych wyżej danych liczbowych.

6.4. Uwagi ogólne o przygotowaniu obiektu do optymalnego sterowania

Rozważmy ogólny przypadek sterowania optymalnego. Dane są równania różniczkowe opisujące zmianę współrzędnych obiektu przy określonym sterowaniu. Dane są również wartości początkowe $\underline{y}_o$ i wartości końcowe $\underline{y}_1$ współrzędnych obiektu. Należy znaleźć dopuszczalne (w określonym sensie) sterowanie sprowadzające współrzędne obiektu z wartości $\underline{y}_o$ do wartości $\underline{y}_1$ i minimalizujące określony funkcjonał.

Biorąc pod uwagę wektor wartości początkowych $\underline{y}_o$ możemy rozróżnić tu dwa przypadki:

I. Współrzędne obiektu, które są zadane w wektorze wartości początkowych $\underline{y}_o$ w pełni określają początkowy stan $\underline{x}_o$ obiektu;

II. Współrzędne obiektu, które są zadane w wektorze wartości początkowych $\underline{y}_o$ nie określają w pełni początkowego stanu $\underline{x}_o$ obiektu.

W przypadku I dla określenia optymalnego sterowania I należy rozwiązać zagadnienie sterowania optymalnego ze stanu początkowego $\underline{x}_o$ do stanu końcowego $\underline{x}_1$ (lub do zbioru stanów końcowych).

W przypadku II dla określenia optymalnego sterowania II należy rozwiązać zagadnienie sterowania optymalnego ze zbioru

stanów początkowych $\underline{x}_0$ do stanu końcowego $\underline{x}_1$ (lub do zbioru stanów końcowych). Z rozwiązania tego zagadnienia uzyskuje się również optymalny stan początkowy $\underline{\bar{x}}_0$ jako jeden z elementów zbioru stanów początkowych.

Interesuje nas obecnie problem realizacji sterowania optymalnego II. Łatwo zauważyć, że realizacja takiego sterowania jest możliwa tylko wtedy, gdy istnieją warunki przygotowania obiektu do tego sterowania. To przygotowanie obiektu będzie polegało na sprowadzeniu współrzędnych obiektu z aktualnego stanu początkowego $\underline{x}_{-1}$, do optymalnego stanu początkowego $\underline{\bar{x}}_0$ [x]. Podczas przygotowania obiektu minimalizacja funkcjonału (dla którego zarezerwujemy określenie funkcjonał główny) może nie obowiązywać, może być natomiast minimalizowany inny funkcjonał. Sterowanie w etapie przygotowawczym może też nie mieć wcale kryteriów optymalności.

Bez przygotowania obiektu do optymalnego sterowania niemożliwa jest w zasadzie realizacja sterowania optymalnego II (z wyjątkiem przypadku wymienionego w odnośniku). Stan obiektu rzeczywistego jest bowiem określony w każdej chwili i rzadko się zdarza aby aktualny stan początkowy $\underline{x}_{-1}$ pokrywał się z optymalnym stanem początkowym $\underline{\bar{x}}_0$.

Główny funkcjonał zaczyna się w zasadzie liczyć od chwili osiągnięcia przez współrzędne obiektu wartości początkowej $\underline{y}_0$. Od tej chwili zaczyna się też etap realizacji sterowania optymalnego II. Etap przygotowawczy bezpośrednio poprzedza etap sterowania optymalnego, w zasadzie nie może być przerwy między tymi dwoma etapami.

Jeżeli w etapie przygotowawczym należy również minimalizować jakiś funkcjonał, to sterowanie optymalne w tym etapie można znaleźć rozwiązując zagadnienie sterowania optymalnego

---

x) Aktualny stan początkowy $\underline{x}_{-1}$ jest stanem obiektu w chwili rozpoczęcia się sterowania w etapie przygotowawczym. Przygotowanie obiektu do optymalnego sterowania nie będzie potrzebne jeżeli aktualny stan początkowy $\underline{x}_{-1}$ pokrywa się z optymalnym stanem początkowym $\underline{\bar{x}}_0$, co jednak jest bardzo mało prawdopodobne.

z aktualnego stanu początkowego $\underline{x}_{-1}$, do optymalnego stanu początkowego $\underline{x}_0$.

Jak widać problem przygotowania obiektu do optymalnego sterowania ma aspekt ogólny. Dla rozważanych w niniejszej pracy obiektów o funkcjach przejścia zawierających zera specyfika tego problemu wynika z nieciągłości trajektorii fazowych w przestrzeni Y.

Przykład

Dla ilustracji rozważmy ruch masy $m = 1$ pod wpływem siły $|f| \leqslant 1$. Równanie ruchu ma postać: $\ddot{y} = f$. Sterowanie optymalne powinno w minimalnym czasie przesunąć masę z położenia początkowego y_0 do położenia końcowego $y_1 > y_0$, przy czym w położeniu końcowym powinno również być $\dot{y}_1 = 0$. Współrzędne: $x^1 = y$ i $x^2 = \dot{y}$ w pełni określają stan obiektu. Ponieważ dla współrzędnej $x_0^2 = \dot{y}_0$ nie ma żadnych ograniczeń, więc zbiór stanów początkowych składa się ze stanów, dla których $x_0^1 = y_0$ jest zadane, a $x_0^2 = \dot{y}_0$ jest dowolne. Mamy tu więc do czynienia z przypadkiem II.

Z rozwiązania zagadnienia sterowania optymalnego ze zbioru do punktu dostajemy że w położeniu y_0 masa powinna mieć określoną, optymalną szybkość $\dot{y}_0$. Siła $f = -1$ będąca sterowaniem optymalnym powinna wyhamować tę szybkość na drodze łączącej położenia y_0 i y_1. Przygotowanie obiektu do optymalnego sterowania będzie polegało na rozpędzeniu masy do optymalnej szybkości $\dot{y}_0$, przy czym tę szybkość powinna mieć masa w położeniu y_0.

WNIOSKI

1) W przypadku rozważanych obiektów, ich stan jest reprezentowany nie tylko przez wektor $\underline{y}$, ale również przez wektor $\underline{w}$. Do pełnego określenia stanu obiektu w dowolnej chwili czasu potrzebna jest mianowicie znajomość pary wektorów $\underline{y}$ i $\underline{w}$. W związku z tym w rozważanych zagadnieniach sterowanie optymalne zależy również od początkowego "ustawienia steru" $\underline{w}_0$. Możemy więc rozróżnić tutaj dwa problemy: I – gdy wielkość $\underline{w}_0$ jest zadana oraz II – gdy możemy sobie wybrać optymalne, początkowe "ustawienie steru" $\underline{w}_0$.

Problem I prowadzi (po wprowadzeniu nowych zmiennych $\underline{x}$) do zagadnienia sterowania czasowo-optymalnego z punktu początkowego $\underline{x}_0$, określonego przez parę $\underline{y}_0$ i $\underline{w}_0$ - do zbioru Z_x^+ punktów końcowych $\underline{x}_1$. W celu rozwiązania Problemu II należy natomiast rozwiązać zagadnienie sterowania czasowo-optymalnego ze zbioru $Z_x^-(\underline{y}_0)$ punktów początkowych $\underline{x}_0$, do zbioru Z_x^+ punktów końcowych $\underline{x}_1$.

2) Zbiory $Z_x^-(\underline{y}_0)$ i Z_x^+ są zbiorami m-wymiarowymi, zatem w przypadku Problemu II w wyborze zarówno punktu początkowego $\underline{x}_0$ jak i punktu końcowego $\underline{x}_1$ mamy m stopni swobody. Wynika to stąd że wymagania "w chwili początkowej t_0^-" i "w chwili końcowej t_1^+" dotyczą tylko wektora $\underline{y}$, a wartość wektora $\underline{w}$ (który łącznie z $\underline{y}$ określa stan obiektu) jest w pewnych granicach dowolna.

Zbiór $Z_x^-(\underline{y}_0)$ zależy od punktu początkowego $\underline{y}_0$, od ograniczeń nałożonych na sterowanie dopuszczalne i od ewentualnych dodatkowych ograniczeń nałożonych na składowe wektora $\underline{w}_0$. Te ostatnie dodatkowe ograniczenia mają na celu ułatwienie realizacji sterowania optymalnego w sensie Problemu II. Zbiór Z_x^+ zależy natomiast tylko od ograniczeń dotyczących sterowania dopuszczalnego.

3) Twory geometryczne odpowiadające zbiorom $Z_x^-(\underline{y}_0)$ i Z_x^+ mogą nie być gładkimi hiperpowierzchniami.
Do rozwiązania zagadnienia sterowania optymalnego z punktu $\underline{x}_0$ do zbioru Z_x^+ lub ze zbioru $Z_x^-(\underline{y}_0)$ do zbioru Z_x^+, można jednak stosować warunki transwersalności. Należy przy tym rozpatrywać z osobna te punkty w/w zbiorów, w których to punktach hiperpowierzchnie odpowiadające tym zbiorom nie są gładkie.

4) W przypadku gdy sygnał sterujący w(t) jest przedziałami ciągłą funkcją, wtedy dodatkowym ograniczeniom mogą podlegać tylko następujące współrzędne obiektu: $y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-m)}$. Pochodne sygnału y wyższego rzędu niż (n-m) w punktach nieciągłości funkcji w(t) posiadają bowiem impulsy o nieskończonej wartości, które przekraczają wszelkie ograniczenia.

5) W przypadku ograniczeń współrzędnych obiektu trajektorie dopuszczalne w przestrzeni X powinny leżeć w pewnym domkniętym obszarze B. Trajektoria optymalna składa się z odcinków leżących na granicy g tego obszaru (z odcinków trajektorii granicznych) i z odcinków leżących wewnątrz tego obszaru. Dla tych ostatnich odcinków obowiązuje zwykła zasada maximum. Natomiast odcinki trajektorii leżące na granicy g można znaleźć wykorzystując fakt, że przez dowolny punkt leżący na granicy g przechodzi tylko jedna trajektoria leżąca na g, przy czym w każdym punkcie tej trajektorii sterowanie jest jednoznacznie określone.

Punkty styku możemy w pewnych przypadkach wyznaczyć korzystając z Twierdzenia 24 pracy [7]. Do wyznaczenia ostatniego punktu styku może być pomocny Lemat 4.1 zamieszczony w niniejszej pracy.

Twierdzenia I i II (dotyczące Problemów I i II) pozostają również ważne w przypadku sterowania przy ograniczonych współrzędnych obiektu[x)]

6) Twierdzenia I i II zachowują swoją ważność również w przypadku gdy ograniczona jest k-ta pochodna sygnału sterującego, jak również przy złożonych ograniczeniach sygnału sterującego[x)] Należy tylko wprowadzić wtedy nieco inne zmienne $\underline{x}$ określające stan obiektu (zgodnie z wzorami (5.3) i (5.15)). Przypadek złożonych ograniczeń sygnału sterującego można sprowadzić do przypadku sterowania za pomocą pewnego nowego sygnału sterującego, przy odpowiednio ograniczonych współrzędnych w przestrzeni X.

7) Do realizacji optymalnego sterowania w sensie Problemu I może być wykorzystana funkcja $\tilde{\underline{v}}(\underline{x})$ i dotyczące tej funkcji Twierdzenie III (w jednym z trzech jego wariantów). Funkcja $\tilde{\underline{v}}(\underline{x})$ podaje wartość optymalnego sterowania $\bar{\underline{w}}$ w dowolnym punkcie przestrzeni X. Sterowanie określone w punkcie a) tego twierdzenia jest sterowaniem optymalnym sprowadzającym współrzędne obiektu z punktu $\underline{y}_0$ do punktu $\underline{y}_1 = 0$, a sterowanie określone w punkcie b) - sterowaniem utrzymującym współrzędne $\underline{y}$ obiektu na poziomie $\underline{y}_1 = 0$.

---

x) Po nieznacznych zmianach.

8) Realizacja sterowania optymalnego w sensie Problemu II jest w zasadzie możliwa tylko wtedy jeżeli możemy mieć wpływ na sterowanie obiektu również przed chwilą t_0 osiągnięcia przez współrzędne $\underline{y}$ wartości $\underline{y}_0$. Ta realizacja składa się z dwóch etapów: pierwszy etap jest etapem przygotowawczym, w którym współrzędne obiektu osiągają wartość $\underline{y}_0$ przy optymalnym ustawieniu steru $\underline{w}_0$ (wyznaczonym z rozwiązania Problemu II). Drugi etap jest etapem realizacji sterowania optymalnego w sensie Problemu I.

9) W związku z realizacją sterowania optymalnego w sensie Problemu II powstaje problem przygotowania obiektu do optymalnego sterowania. Problem ten dotyczy nie tylko rozważanych obiektów, lecz ma charakter bardziej ogólny. Jeżeli stan początkowy $\underline{x}_0$ obiektu jest jednym ze stanów należących do pewnego zbioru[x)], to w wyniku rozwiązania zagadnienia sterowania optymalnego dostajemy pewien optymalny stan początkowy $\underline{x}_0$ należący do tego zbioru. Przygotowanie obiektu do optymalnego sterowania polega na doprowadzeniu stanu obiektu do optymalnego stanu początkowego $\underline{x}_0$. W czasie przygotowania obiektu do optymalnego sterowania może obowiązywać minimalizacja innego funkcjonału.

Bez przygotowania obiektu do optymalnego sterowania niemożliwa jest w zasadzie realizacja sterowania optymalnego w sensie problemu II.

10) I na zakończenie uwaga bardziej subtelnej natury. Przy takim jak w niniejszej pracy przeprowadzeniu rozważań (w których wykorzystuje się pojęcie dystrybucji) z definicji dystrybucji wynika że zdefiniowane rozwiązania $y(t)$ równania różniczkowego obiektu reprezentują zmiany interesującej nas wielkości wyjściowej y rzeczywistego obiektu.

Rozważania takie jak w pracy [1] są nieco sztuczne. Operuje się w nich bliżej nieokreślonymi rozwiązaniami $y(t)$ równania

---

x) Innymi słowy jeżeli stan początkowy $\underline{x}_0$ obiektu możemy wybierać wśród stanów początkowych należących do pewnego zbioru.

różniczkowego obiektu i szuka się takich nowych zmiennych $\underline{x}$ związanych ze zmiennymi $\underline{y}$ i $\underline{w}$ że w równaniach różniczkowych dla zmiennych $\underline{x}$ nie występują pochodne sygnału w. Z rozważań zawartych w [1] wcale nie wynika,że wielkości y odpowiadające ciągłym rozwiązaniom $\underline{x}(t)$ równań różniczkowych dla zmiennych $\underline{x}$ - są zgodne z przebiegami sygnału wyjściowego y rzeczywistego obiektu opisanego równaniem (1.1).

LITERATURA

[1] Athans Michael, Falb. L. Peter - Optimal control, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1966.

[2] Chang S.L. Szeldon - Sintez optimalnych sistem avtomaticzeskogo upravlenia tłum. z angielskiego Izd. Maszinostrojenie, Moskva 1964.

[3] Dmowski R. - Sterowanie optymalne dla obiektów o przepustowości zawierającej zera. Archiwum Automatyki i Telemechaniki tom IX z. 4 1964.

[4] Gessing R. - Sterowanie czasowo-optymalne dla obiektów których funkcje przejścia posiadają zera. Archiwum Automatyki i Telemechaniki (w druku).

[5] Gessing R. - Time-optimal Control of Plants Whose Transfer Fuction Contains Zeros. Zastosowania Matematyki (w druku).

[6] Mikusiński J., Sikorski R. - Elementarna teoria dystrybucji. Wyd. PAN Wrocław-Warszawa-Kraków 1961.

[7] Pontrjagin L.S., Boltjanski W.G., Gamkeridze R.W., Miszczenko E.F. -Matematiczeskaja teoria optimalnych processov. Fiz.-mat-giz Moskva 1961.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
ukazują się w następujących seriach:

A. AUTOMATYKA
B. BUDOWNICTWO
Ch. CHEMIA
E. ELEKTRYKA
En. ENERGETYKA
G. GÓRNICTWO
IS. INŻYNIERIA SANITARNA
MF. MATEMATYKA-FIZYKA
M. MECHANIKA
NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty serii A.:

Automatyka z. 1, 1961 r., s. 200, zł 13,85
Automatyka z. 2, 1962 r., s. 138, zł 10,70
Automatyka z. 3, 1963 r., s. 90, zł 9,—
Automatyka z. 4, 1963 r., s. 108, zł 5,70
Automatyka z. 5, 1964 r., s. 114, zł 6,85
Automatyka z. 6, 1965 r., s. 184, zł 9,40
Automatyka z. 7, 1966 r., s. 224, zł 12,—
Automatyka z. 8, 1967 r., s. 154, zł 9,—
Automatyka z. 9, 1968 r., s. 257, zł 9,—
Automatyka z. 10, 1968 r., s. 92, zł 6,—
Automatyka z. 11, 1969 r., s. 61, zł 4,—
Automatyka z. 12. 1969 r., s. 122, zł 7,—

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
Politechniki Śląskiej
P 3342/69