ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 71 Górnictwo z.5 1962

WALERY SZUŚCIK

OBCIĄŻENIE GRANICZNE PRZY OGÓLNYM NIERÓWNOMIERNYM ZGINANIU I ŚCISKANIU (ROZCIĄGANIU) BELEK

Streszczenie: W artykule oparto się na pracach dotyczących stanu granicznego belek [1], [2] i [3]. Otrzymano wzory na obciążenia graniczne przy ogólnym nierównomiernym zginaniu oraz przy ogólnym nierównomiernym zginaniu i ściskaniu (rozciąganiu), ważne także i dla zginania płaskiego nierównomiernego.

1. WSTĘP

Przy nierównomiernym zginaniu oprócz momentu zginającego M_g występuje także siła poprzeczna T. W belkach, których długość jest większa od pięciu wymiarów poprzecznych, wartość siły poprzecznej T w zasadzie nie przekracza 20% maksymalnej siły tnącej, jaką może przenieść przekrój belki w przypadku jego wyłącznego ścinania.

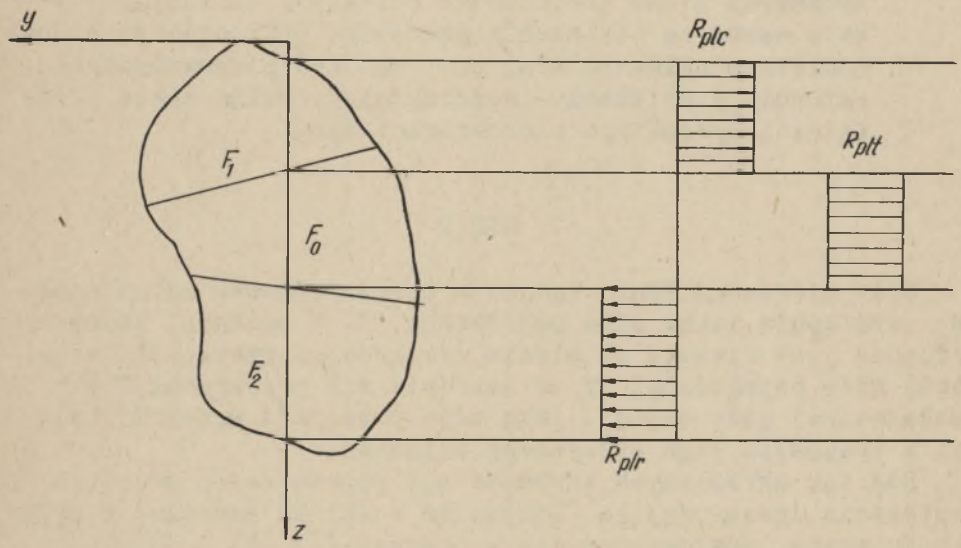
Dla tak określonych wartości sił poprzecznych przyjęto założenia upraszczające, dotyczące rozkładu naprężeń w przekroju pręta, analogiczne jak w pracach [1], [2] i [3].

Dla ułatwienia rozpatrzono kolejno przypadki zginania nierównomiernego z siłą poprzeczną pokrywającą się ze śladem płaszczyzny działania momentu gnącego, z siłą poprzeczną nie pokrywającą się ze śladem płaszczyzny działania momentu gnącego oraz przypadek nierównomiernego zginania i ściskania (rozciągania) belki.

Ze względu na podział na zginanie płaskie i ogólne (wprowadzone i uzasadnione w pracach [1] i [2]) rozpatrywane poniżej przypadki zginania ogólnego ważne są także dla zginania płaskiego.

2. ZGINANIE NIERÓWNOMIERNE W KTÓRYM SIŁA POPRZECZNA POKRYWA SIĘ ZE ŚLADEM PŁASZCZYZNY DZIAŁANIA MOMENTU GNĄCEGO

Przy obciążeniu granicznym spowodowanym ogólnym zginaniem oraz ścinaniem belki, przekrój jej F jest obciążony w części F_1 naprężeniem ściskającym R_{plc}, w części F_2 naprężeniem rozciągającym R_{plr} oraz w części środkowej F_o naprężeniem ścinającym R_{plt}, co pokazano na rysunku 1.



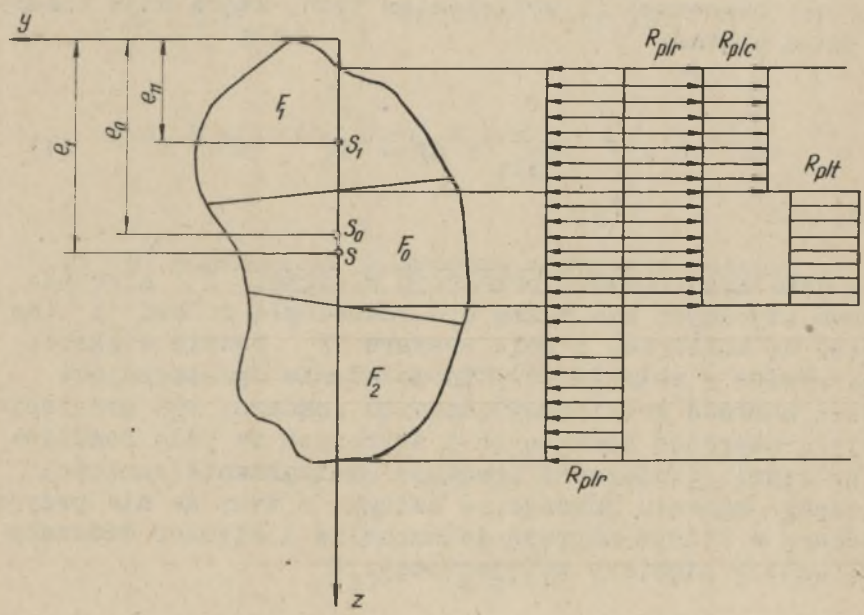
Rys. 1

Na rysunku tym oś centralna z jest zarazem śladem płaszczyzny działania momentu gnącego. Zwrot osi z dobrano w ten sposób, by na jej początku wystąpiła część ściskana przekroju F_1. Oś y jest prostopadła do osi z i styczna do konturu przekroju.

Wykres naprężeń pokazany na rysunku 1 przedstawia naprężenia występujące na osi z.

Wykres naprężeń normalnych pokazanych na rysunku 1 można przekształcić w ten sposób, że w obszarze ścinanym F_o oraz w obszarze ściskanym F_1 dodajemy i odejmujemy naprężenie rozciągające R_{plr}.

Możemy dzięki temu uważać, że cały przekrój jest rozciągany naprężeniem rozciągającym R_{plr} a obszar F_1 prócz tego ściskany naprężeniem $R_{plr} + R_{plc}$ oraz obszar F_o ściskany dodatkowo naprężeniem R_{plr} (rysunek 2).



Rys.2

Wypadkowa naprężeń rozciągających R_{plr} działających na całym przekroju F przechodzi przez środek ciężkości przekroju S, którego odległość od osi y wynosi e_1.

Wypadkowa naprężeń ściskających R_{plr} w obszarze F_o przechodzi przez środek ciężkości tego obszaru S_o, którego odległość od osi y wynosi e_o. Środek ciężkości obszaru S_o, będący punktem, przez który przechodzi wypadkowa naprężeń ścinających R_{plt} musi leżeć na osi z, gdyż z tą osią pokrywa się siła ścinająca przekrój.

Wypadkowa naprężeń ściskających $R_{plr} + R_{plc}$ w obszarze F_1 przechodzi przez środek ciężkości tego obszaru S_1, którego odległość od osi y wynosi e_{11}.

Trzy wyżej wymienione wypadkowe naprężeń normalnych równoważą działający w płaszczyźnie xz moment gnący M_g. Po-

nieważ zgodnie z założeniem środek ciężkości całego przekroju S leży na osi z, środek ciężkości obszaru S_o zgodnie z tytułem rozdziału leży również na osi z, to środek ciężkości obszaru S_1 też musi leżeć na osi z. Wtedy trzy wypadkowe, działając w płaszczyźnie xz, równoważą działający moment gnący M_g. Do powyższego wniosku można dojść również z warunków równowagi momentów względem osi z.

Warunki równowagi (z wyłączeniem tych, które dają tożsamość) mają postać:

$$T - \int_{F_o} R_{plt} \cdot dF = 0 \qquad (1)$$

Dla dowolnego konturu przekroju w części F_o kierunki naprężeń stycznych nie muszą być równoległe do osi z (na przykład na konturze) a pole obszaru F_o będzie większe, niż to wynika z relacji (1). To założenie upraszczające zwiększa wartość granicznego momentu gnącego; zaś przyjęcie rozdziału naprężeń normalnych i stycznych na pola rozdzielone prostymi granicznymi powoduje zmniejszenie wartości granicznego momentu gnącego, w związku z tym, że nie przyjęto obszaru w którym naprężenie normalne i styczne dodawałyby się według hipotezy wytężeniowej.

$$\int_F R_{plr} \cdot dF - \int_{F_1} (R_{plr} + R_{plc}) \cdot dF - \int_{F_o} R_{plr} \cdot dF = 0 \qquad (2)$$

$$\int_F R_{plr} \cdot z \cdot dF - \int_{F_1} (R_{plr} + R_{plc}) \cdot z \cdot dF - \int_{F_o} R_{plr} \cdot z \cdot dF = M_g \qquad (3)$$

Po scałkowaniu i wprowadzeniu wzorów (6),(7),(8), (9) z pracy [2] a także oznaczenia

$$\int_{F_o} z \cdot dF = S_{oy} = F_o \cdot e_o \qquad (4)$$

oraz współczynnika niesymetrii wytrzymałości $m = R_{plc}/R_{plr}$ otrzymamy równania:

$$T - F_o \cdot R_{plt} = 0 \qquad (5)$$

$$F \cdot R_{plr} - F_1 \cdot (m+1) \cdot R_{plr} - F_o \cdot R_{plr} = 0 \qquad (6)$$

$$F \cdot e_1 \cdot R_{plr} - F_1 \cdot (m+1) \cdot e_{11} \cdot R_{plr} + F_o \cdot e_o \cdot R_{plr} - M_g = 0 \qquad (7)$$

Wzór (5) pozwala na obliczenie wielkości obszaru F_o:

$$F_o = \frac{T}{R_{plt}} \qquad (8)$$

Ze wzoru (6) można obliczyć wielkość obszaru F_1:

$$F_1 = \frac{F - F_o}{m + 1} \qquad (9)$$

Obszar F_1 jest ograniczony od dołu prostą o nieznanych na razie współrzędnych położenia: kąta nachylenia prostej i punktu przecięcia się z osią z.
W konkretnym przypadku wyznaczamy je, korzystając z dwu warunków:

a) pole F_1 spełnia warunek (9),
b) jego ośrodek ciężkości leży na osi z.

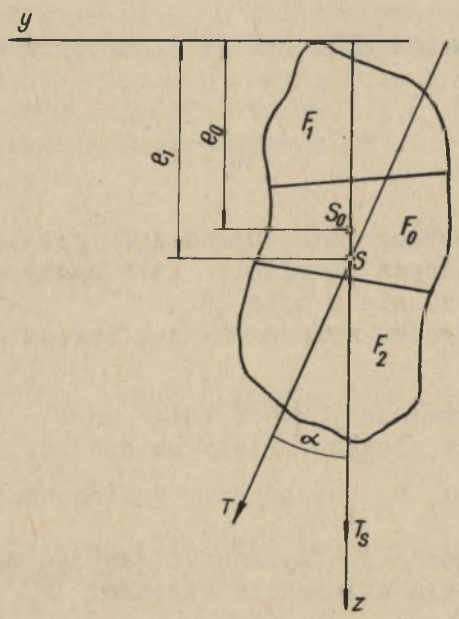
Kształt obszaru F_o wyznaczamy analogicznie jak dla obszaru F_1.
W ten sposób można już wyznaczyć wartość momentu granicznego. Po wstawieniu mianowicie wartości F_1 z równania (9) do (7) otrzymamy:

$$M_g = R_{plr}\left[F \cdot (e_1 - e_{11}) - F_o \cdot (e_o - e_{11})\right] \qquad (10)$$

Wzór (10) jest ważny również w przypadku obciążenia granicznego przy zginaniu płaskim i ścinaniu belek. Rozwiązanie będzie wtedy znacznie prostsze, gdyż korzystając z faktu, że ślad płaszczyzny działania momentu gnącego pokrywa się z osią symetrii przekroju, łatwiej wyznacza się położenie środków ciężkości (odległości e_1, e_{11} i e_0) (ponieważ proste graniczne są prostymi prostopadłymi do osi symetrii.

3. ZGINANIE NIERÓWNOMIERNE PRZY KTÓRYM SIŁA POPRZECZNA NIE POKRYWA SIĘ ZE ŚLADEM PŁASZCZYZNY DZIAŁANIA MOMENTU GNĄCEGO

Rozpatrzymy przypadek obciążenia granicznego spowodowanego ogólnym zginaniem momentem M_g (którego płaszczyzna działania pokrywa się z płaszczyzną xz) oraz siłą poprzeczną T działającą pod kątem α do osi z (rys.3).



Rys.3

Siłę poprzeczną T można rozłożyć na dwie składowe a mianowicie:

a) składową T_s pokrywającą się ze śladem płaszczyzny działania momentu gnącego oraz

b) składową T_n prostopadłą do T_s i mającą wartość

$$T_n = T \cdot \sin\alpha \qquad (11)$$

Jeżeli porównamy ten przypadek z omawianym w poprzednim rozdziale, przy założeniu tej samej wartości siły poprzecznej T a więc tego samego pola F_o, to warunek uzyskania granicznego, to jest maksymalnego momentu gnącego M_g obliczanego według wzoru (10) doprowadza nas do stwierdzenia, że także i kształt pola F_o nie ulega zmianie.

Ze względu na to na rysunku 3 pokazano proste graniczne, rozdzielające pole F na obszary o różnych naprężeniach oraz środek ciężkości obszaru ścinanego S_o identycznie jak dla przypadku gdy siła poprzeczna T pokrywa się ze śladem płaszczyzny działania momentu gnącego M_g.

Jeżeli środek ciężkości obszaru ścinanego S_o pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju S, to zmiana kąta działania α siły poprzecznej T nie wpłynie na wielkość granicznego momentu gnącego.

Jeżeli jednak środek ciężkości obszaru ścinanego S_o nie pokrywał się ze środkiem ciężkości przekroju S, to zredukowanie siły poprzecznej T do środka ciężkości obszaru ścinanego S_o spowoduje powstanie momentu skręcającego M_t, przy czym

$$M_t = T_n \cdot (e_1 - e_o) \qquad (12)$$

gdzie:

$(e_1 - e_o)$ - odległość środka ciężkości przekroju F od środka ciężkości obszaru ścinanego F_o (uzyskane dla przypadku, gdy siła poprzeczna T pokrywa się ze śladem płaszczyzny działania momentu gnącego).

Po podstawieniu do wzoru (12) wzoru (11) otrzymamy wzór na moment skręcający

$$M_t = T.(e_1 - e_o).\ \sin\alpha \qquad (13)$$

Moment M_t powoduje zmniejszenie pozostałych wartości granicznych obciążenia belki.

4. ZGINANIE NIERÓWNOMIERNE I ŚCISKANIE (ROZCIĄGANIE) BELEK

Przy obciążeniu granicznym spowodowanym momentem gnącym M_g, siłą podłużną P oraz siłą poprzeczną T, która pokrywa się z osią z będącą śladem płaszczyzny działania momentu M_g x), otrzymamy wykres naprężeń na osi centralnej z podobny do pokazanego na rysunku 1.

Jeżeli na wykresie tym wydzielimy, w przypadku mimośrodowego ściskania wartość naprężenia ściskającego

$$\sigma_c = \frac{P}{F} \qquad (14)$$

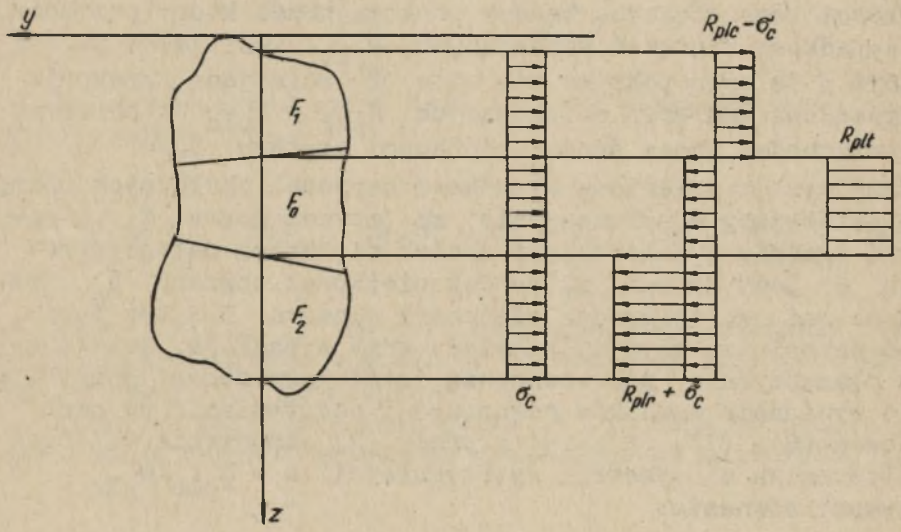
to otrzymamy wykres pokazany na rys.4, na którym cały przekrój jest ściskany naprężeniem σ_c, część przekroju F_1 jest rozciągana naprężeniem $R_{plr} + \sigma_c$, część F_o przekroju jest rozciągana naprężeniem σ_c oraz ścinana naprężeniem R_{plt}, zaś część F_1 jest ściskana naprężeniem $R_{plc} - \sigma_c$.

Wykres naprężeń normalnych pokazany na rys.4 można przekształcić w ten sposób, że w obszarze ścinanym F_o dodajemy i odejmujemy naprężenie R_{plr}, zaś w obszarze ściskanym F_1 dodajemy i odejmujemy naprężenie $R_{plr} + \sigma_c$.

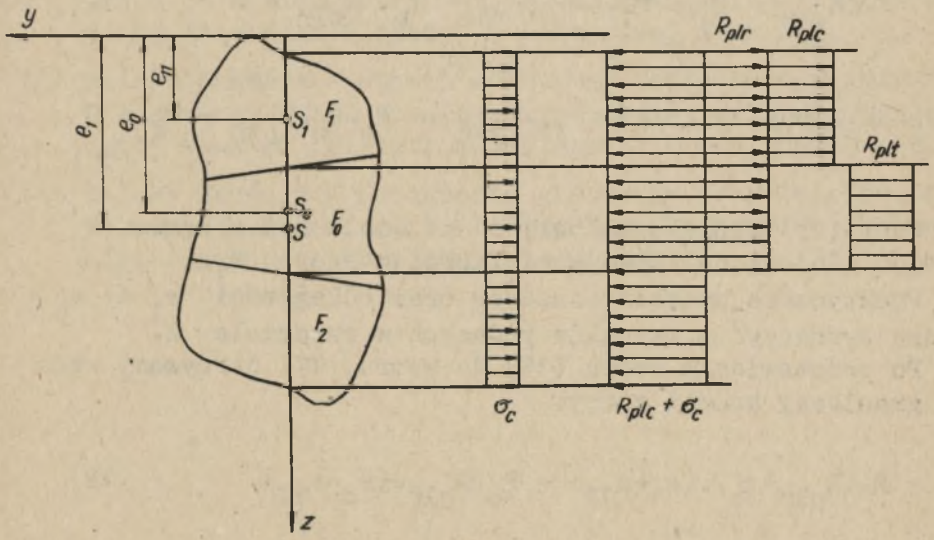
W wyniku tego otrzymamy w całym przekroju naprężenie rozciągające $R_{plr} + \sigma_c$, w obszarze ścinanym F_o naprężenie

x) W rozdziale tym nie wyodrębniono przypadku niepokrywania się siły poprzecznej ze śladem płaszczyzny działania momentu gnącego, ze względu na to, że problem ten został omówiony w rozdziale 3.

ściskające R_{plr}, zaś w przekroju ściskanym F_1 naprężenie ściskające $R_{plr} + R_{plc}$ (rys.5).



Rys.4



Rys.5

Wypadkowa naprężeń rozciągających R_{plr} działających w całym przekroju F przechodzi przez środek ciężkości przekroju S.

Wypadkowa naprężeń ściskających R_{plr} w obszarze F_o przechodzi przez środek ciężkości tego obszaru S_o. Środek ciężkości tego obszaru, będący punktem przez który przechodzi wypadkowa naprężeń ścinających R_{plt}, musi leżeć na osi z, gdyż z tą osią pokrywa się siła T ścinająca przekrój.

Wypadkowa naprężeń ściskających $R_{plr} + R_{plc}$ w obszarze F_1 przechodzi przez środek ciężkości obszaru S_1.

Trzy wyżej wymienione wypadkowe naprężeń podłużnych równoważą działający w płaszczyźnie xz moment gnący M_g a ponieważ zgodnie z założeniami środek ciężkości całego przekroju S leży na osi z, środek ciężkości obszaru S_o też leży na osi z, to środek ciężkości obszaru S_1 też musi leżeć na osi z, gdyż tylko wtedy trzy wypadkowe, działające w płaszczyźnie xz, równoważą działający moment gnący M_g.

Po wypisaniu warunków równowagi i podstawieniu do nich oznaczeń (6), (7), (8), (9) z pracy [2] oznaczenia (4) oraz współczynnika niesymetrii wytrzymałości $m = R_{plc}/R_{plr}$ otrzymamy równania:

$$T = F_o \cdot R_{plt} \tag{15}$$

$$F\cdot(R_{plr} + \sigma_c) - F_1\cdot(m+1)R_{plr} - F_o\cdot R_{plr} = 0 \tag{16}$$

$$F\cdot e_1\cdot(R_{plr}+\sigma_c) - F_1\cdot(m+1)\cdot e_{11}\cdot R_{plr} - F_o\cdot e_o\cdot R_{plr} - M_g = 0 \tag{17}$$

Wzór (15) pozwala na obliczenie wielkości obszaru F_o a wzór (16) na obliczenie wielkości obszaru F_1.

Praktycznie kształt obszarów oraz odległości e_1 i e_o można wyznaczyć z warunków podanych w rozdziale 2.

Po podstawieniu wzoru (16) do wzoru (17) otrzymamy wzór na graniczny moment gnący:

$$M_g = F\cdot(R_{plr}+\sigma_c)\cdot(e_1-e_{11}) - F_o\cdot R_{plr}\cdot(e_o-e_{11}) \tag{18}$$

Z równania (14) i (16) po podstawieniu wartości współczynnika niesymetrii wytrzymałości $m = 1$ otrzymamy wzór na siłę ściskającą:

$$P = R_{plr} \cdot (2 \cdot F_1 + F_o - F) \qquad (19)$$

Po podstawieniu wzoru (19) do (18) otrzymamy wzór na graniczny moment gnący:

$$M_g = R_{plr}\, 2 \cdot F_1 \cdot (e_1 - e_{11}) + F_o \cdot (e_1 - e_o) \qquad (20)$$

Wzory (19) i (20) są parametryczną formą równania funkcji granicznego momentu gnącego od działającej siły podłużnej (przy danej sile poprzecznej).

Wzory te po podzieleniu przez R_{plr} dają po prawej stronie równań funkcje przekroju niezależne od materiału.

LITERATURA

[1] Walery Szuścik - Plastyczne zginanie płaskie belek z materiałów o niesymetrycznej wytrzymałości. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej - Górnictwo, zeszyt 2.

[2] Walery Szuścik - Moment graniczny przy ogólnym zginaniu belek z materiału o niesymetrycznej wytrzymałości. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej - Górnictwo, zeszyt 2.

[3] Walery Szuścik - Obciążenie graniczne przy mimośrodowym rozciąganiu i ściskaniu belek. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej - Górnictwo, zeszyt 4.

ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА ПРИ ОБЩИМ НЕРАВНОМЕРНЫМ ИЗГИБЕ И СЖАТИИ (РАСТЯЖЕНИИ) БАЛОК

Содержание

В статье исходили из работ относящихся к предельному нагружению балок [1], [2], [3].

Получены формулы для расчёта предельной нагрузки при общим неравномерным изгибе, а также при общим совместным неравномерным изгибе и сжатии (растяжении), действительные также и для плоского, неравномерного изгиба.

DIE GRENZBELASTUNG BEI ALLGEMEINEN UNGLEICHMÄßIGEM BIEGEN UND DRÜCKEN ODER ZIEHEN VON STÄBEN

Zusammenfassung

In der Arbeit wird an vorige Veröffentlichungen [1], [2] und [3] über die Grenzbelastung von Stäben verwiesen.

Man hat Formeln für die Grenzbelastung bei allgemeinen ungleichmäßigem Biegen und bei allgemeinen ungleichmäßigem Biegen und Drücken oder Ziehen erhalten, die auch für ungleichmäßige Flachverbiegung giltig sind.