ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 103 Górnictwo z.8 1964

OKTAWIAN POPOWICZ

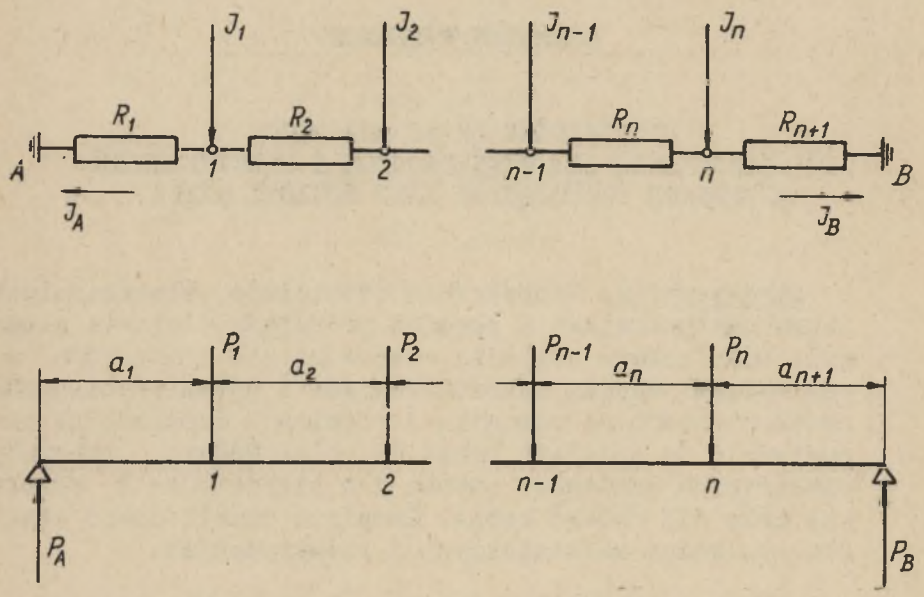
ELEKTRYCZNY UKŁAD ANALOGOWY DO WYZNACZANIA SIŁ WEWNĘTRZNYCH I PRZEMIESZCZEŃ W BĘBNACH PRACUJĄCYCH JAKO POWŁOKI GIĘTE

Streszczenie. Rozpatrzono oddzielnie pierścieniowe żebra usztywniające i płaszcz pracujący w stanie błonowym. Różniczkowe równania równowagi sił i momentów oraz związki między odkształceniami i przemieszczeniami przekształcono na równania o różnicach skończonych odpowiednio do podziału bębna na pola. Podano schematy elektryczne analogowo osobno dla pierścienia i płaszcza oraz dla całego bębna. Omówiono przeliczanie skali dla wielkości mechanicznych i elektrycznych.

Liczbowe wyznaczanie naprężeń w elementach takich jak np. płaszcz koła wielolinowego jest pracochłonne, nawet w razie przyjęcia upraszczających założeń. Jeśli dla znalezienia optimum konstrukcji trzeba przeprowadzić wiele wariantów obliczenia, praca ta przerasta możliwości biura konstrukcyjnego. Podobne, a nawet bardziej skomplikowane zadania mają konstruktorzy kadłubów samolotowych, bardziej zawiłych w kształcie niż płaszcze bębnów wielolinowych. W tej dziedzinie przyjęło się już modelowanie elektryczne, umożliwiające wykonanie takich zadań na urządzeniach analogowych z dokładnością większą nawet niż potrzebuje konstruktor. Na podobnych zasadach można zaprojektować układ analogowy dla użytku konstruktora kół pędnych.

Dwa systemy są homologiczne, jeśli każdemu elementowi jednego, odpowiada jeden element drugiego. Systemy analogiczne są te, które charakteryzują się jednakowymi związkami analitycznymi. Model jest to system, który odznacza się cechami podobieństwa do prototypu. Może on być homologicznym i zarazem analogicznym do prototypu, dając jego odwzorowa-

nie zupełnie wierne, mimo różności zjawisk odbywających się na obu systemach. Przykład takiego podobieństwa podaje rys.1.



Rys.1. Analogia belki zginanej i obwodu elektrycznego

Przewód elektryczny o opornościach R_1, R_2, ... R_n uziemiony na końcach ma dopływy prądu J_1, J_2, ... J_n w punktach 1, 2, ... n. W myśl praw Kirchhoffa i Ohma dla przewodu elektrycznego jest:

$$J_1 + J_2 + \ldots\ldots + J_n = J_A + J_B.$$

$$\frac{J_A}{J_B} = \frac{J_1(R_2+R_3+\ldots+R_{n+1})+J_2(R_3+R_4+\ldots+R_{n+1}) + J_n R_{n+1}}{J_1R_1+J_2(R_1+R_2)+\ldots+J_n(R_1+R_2 + \ldots + R_n)}$$

$$U_A = 0$$

$$U_1 = J_A R_1$$

$$U_k - U_{k-1} = R_k(J_A - J_1 - J_2 - \ldots - J_{k-1})$$

$$U_n = R_{n+1} J_B$$

$$U_B = 0$$

Z równowagi sił momentów dla belki wynika:

$$P_1 + P_2 + \dots P_n = P_A + P_B$$

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{P_1(a_2+a_3+\dots+a_{n+1})+P_2(a_3+a_4+\dots+a_{n+1}) + P_n a_{n+1}}{P_1 a_1+P_2(a_1+a_2)+\dots+P_n(a_1+a_2+\dots+a_n)}$$

$$M_A = 0$$
$$M_1 = a_1 P_A$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$M_k - M_{k-1} = a_k(P_A - P_1 - P_2 - \dots - P_{k-1})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$M_n = a_{n+1} P_B$$
$$M_B = 0$$

Analogia jest zupełna, jeden system jest wiernym odwzorowaniem drugiego, przy czym:

natężeniom prądów	J	odpowiadają siły	P
potencjałom punktów	U	"	momenty M
oporom	R	"	długości a

Jeśliby do przewodu doprowadzić prądy J_1, J_2, ... J_n, to pomiar prądów J_A, J_B da w odpowiedniej skali reakcje podporowe, a pomiar napięć da momenty M_1, M_2, ... M_n.

Drugi przykład analogii między transformatorem i dźwignią przedstawia rys.2.
Dla transformatora stosunek przekładni jest:

$$p = \frac{U_1}{U_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{z_1}{z_2}$$

przy czym:

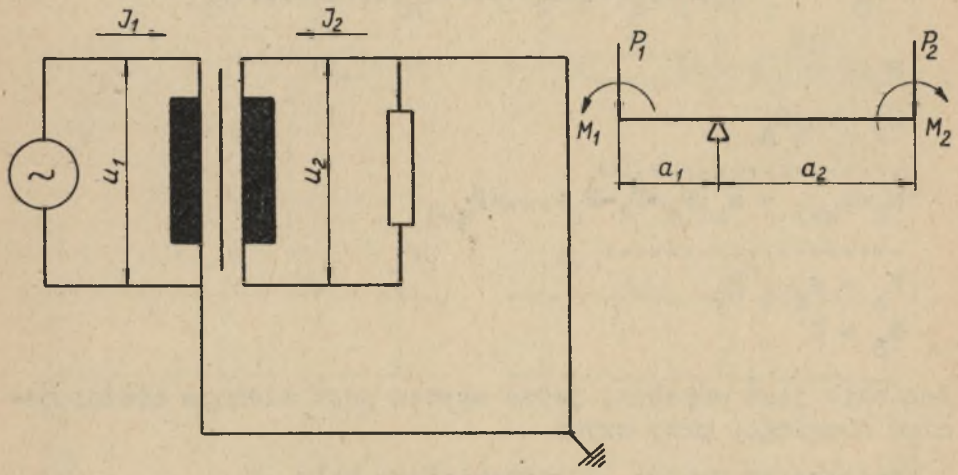
$$J_1 z_1 = - J_2 z_2$$

a dla dźwigni:

$$p = \frac{x_1}{x_2} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

oraz:

$$M_1 = P_1 a_1 = -P_2 a_2 = -M_2$$



Rys. 2. Analogia dźwigni i transformatora

Napięciom transformatora U odpowiadają wychylenia dźwigni x

natężeniom prądów J odpowiadają siły P

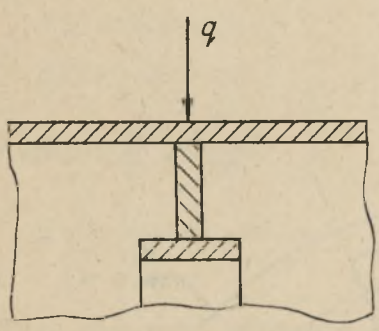
ilościom zwojów z odpowiadają długości ramion a

amperozwojom J·z odpowiadają momenty P.a

Analogia jest zatem zupełna, wielkości mierzone na jednym systemie dają po uwzględnieniu skali wielkości drugiego systemu.

Obliczenia wytrzymałościowe kół pędnych opierają się na równaniach równowagi sił i momentów oraz na prawach sprężystości w granicach ważności prawa Hooke'a. Jako analogie elektryczne posłużą prawa Kirchhoffa oraz prawo Ohma. W tym celu natężenia prądów przedstawią siły uogólnione tj. siły i momenty, a przemieszczenia sprężyste będą przedstawione przez różnicę potencjałów. Punktem wyjścia będą zatem równania różniczkowe, które mogłyby być te same co przyjęte w teo

retycznych obliczeniach opracowanych przez autora [1]. Jednakże korzystnie będzie wprowadzić pewną zmianę w toku postępowania, która zresztą nie zmienia poprzednich założeń. Przyjmie się, że żebra pierścieniowe, rys. 3 przenoszą momenty w płaszczyznach równoleżnikowych, natomiast blacha płaszcza pracuje jako błona, przenosząc tylko siły rozciągające i ścinające, ale nie przenosi momentów, nie mając dostatecznej sztywności w płaszczyznach południków. W następstwie tego dogodnie jest rozpatrzeć osobno pierścienie żeber i osobno blachę płaszcza, a następnie połączyć oba układy, uwzględniając występujące między nimi siły ścinające. Dla przejrzystości i zgodnie z proponowaną budową układów analogowych będzie się operować pełnymi siłami w poszczególnych przekrojach, a nie naprężeniami jak w poprzednio cytowanej pracy.



Rys. 3. Przekrój poprzeczny żebra

Przystępując do rozpatrywania żebra rys. 4 oznacza się siły wewnętrzne i moment:

T - pełna siła ściskająca w poprzecznym przekroju,

Q - pełna siła promieniowa w poprzecznym przekroju,

M - moment zginający.

Siły zewnętrzne:

q - nacisk liny liczony na 1 rad,

t - siła tnąca między żebrem i płaszczem na 1 rad.

Przemieszczenia:

w - ugięcia promieniowe,

v - przemieszczenia w kierunku obwodowym,

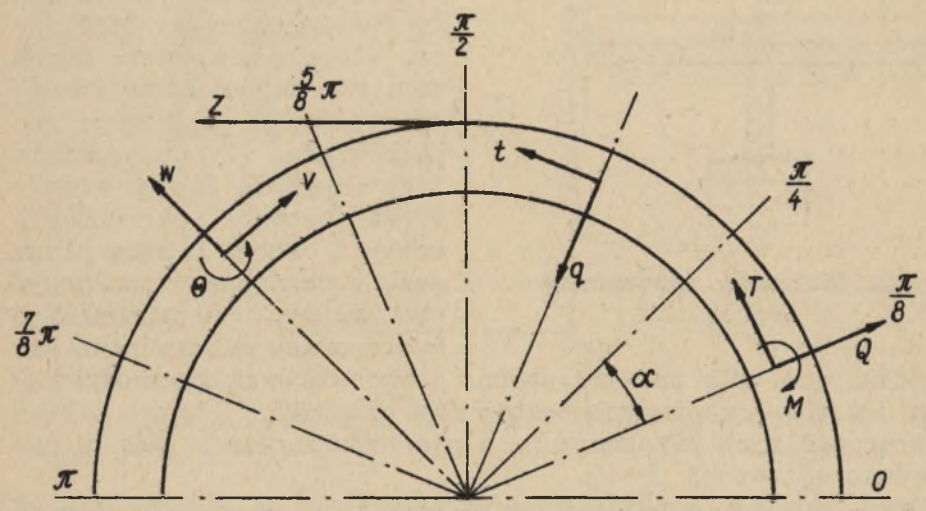
Θ - kąty obrotu przekrojów poprzecznych.

Według tych oznaczeń równania równowagi są:

$$dM = -QRd\varphi$$

$$dQ = (T-q)d\varphi$$

$$dT = (-Q-t)d\varphi$$



Rys.4. Siły i przemieszczenia w przekrojach żebra pierścieniowego

Z praw sprężystości wynika:

$$d\theta = \frac{MR}{EJ} d\varphi$$

$$dw = (v + \theta R)d\varphi$$

$$dv = -wd\varphi$$

Pomija się wyprowadzenie tych związków, które wynika z wymienionej pod [1] teorii powłok.

Budowa urządzenia analogowego musi opierać się na elementach wielkości skończonej. Wobec tego dzieli się cały pier-

ścień żebra na elementy o kątach środkowych α i układ równań różniczkowych zamienia się na równania dla różnic skończonych:

$$\Delta \frac{M}{R} = - Q.\alpha$$

$$\Delta Q = T.\alpha - q.\alpha$$

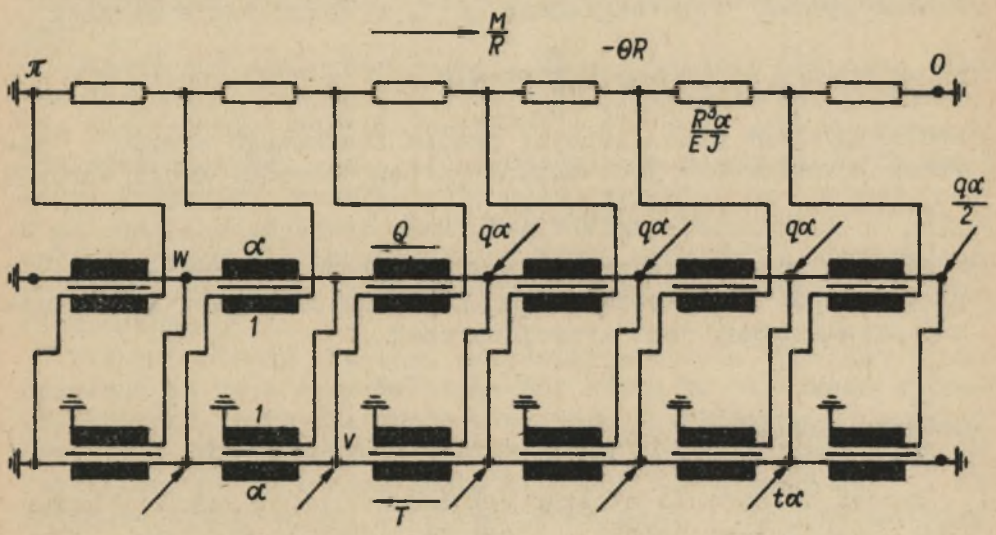
$$\Delta T = -Q.\alpha - t.\alpha$$

$$\Delta \Theta R = \frac{M}{R} \cdot \frac{R^3.\alpha}{EJ}$$

$$\Delta w = (v + \Theta .R).\alpha$$

$$\Delta v = -w\alpha$$

Trzy pierwsze równania mają wymiar kG, trzy następne cm, a ujęte są tak, aby odwzorowanie elektryczne wymagało jak najprostszych elementów, a więc transformatorów napięć o jednakowym, stałym stosunku przekładni, zależnym tylko od dowolnie wybranego kąta α, oraz oporów nastawialnych odpowiednio do parametrów konstrukcyjnych "E", "R", "I".



Rys. 5. Układ analogowy dla żebra

Analogowy układ elektryczny dla pierścienia przedstawia schemat 5. Są w nim trzy obwody, górny dla siły $\frac{M}{R}$, środkowy dla siły Q i dolny dla siły T. Punkty węzłowe górnego obwodu mają potencjały proporcjonalne do θR środkowego do w i dolnego do v. Obciążenie zewnętrzne siłami ześrodkowanymi $q\alpha$ działa w węzłach środkowego obwodu. Przyjmując do rozważań wyodrębniony pierścień żebra obciążony naciskiem liny, trzeba także założyć siły zewnętrzne równoważące ten nacisk, aby pierścień mógł być w równowadze. Są to siły tnące $t\alpha$, ze środkowane w węzłach dolnego obwodu. Gdyby odczepić żebro od płaszcza i reakcję dla nacisku liny przyłożyć jako ześrodkowaną siłę P działającą po przeciwległej do obciążenia stronie żebra, w miejsce prądów $t\alpha$ w dolnym obwodzie należałoby doprowadzić prąd P na lewym końcu środkowego obwodu.

Układ elektryczny wg schematu 5 realizuje wiernie poprzednio podane równania różnicowe, jeśli występujące w nich siły wyrazić prądami, a przemieszczenia potencjałami. Sile 1 kG odpowiada a Amp, a przemieszczeniu 1 cm różnica napięć b Volt, zatem opór $\frac{R^3.\alpha}{EJ}$ winien wynosić $\frac{R^3\alpha}{EJ}\frac{b}{a}\Omega$ gdzie R w cm, J w cm^4, E w $\frac{kG}{cm^2}$. Przekładnia transformatora, jak już wzmiankowano wynosi $1:\alpha$ względnie $\alpha:1$. W takim razie warunek

$$\Delta\frac{M}{R} = -Q.\alpha$$

spełniony jest przez dopływy prądów środkowego obwodu poprzez transformatory do węzłów górnego obwodu. Drugi warunek

$$\Delta Q = T.\alpha - q.\alpha$$

realizuje się w węzłach środkowego obwodu doprowadzeniami prądów $q.\alpha$ i dopływami $T.\alpha$ z obwodu dolnego. Analogicznie zrealizowany jest trzeci warunek

$$\Delta T = -Q.\alpha - t.\alpha$$

Czwarty warunek

$$\Delta\theta R = \frac{M}{R}\frac{R^3\alpha}{EJ}$$

wynika ze spadków napięć prądów $\frac{M}{R}$, płynących w górnym obwodzie przez opory $\frac{R^3\alpha}{EJ}$

Warunek piąty

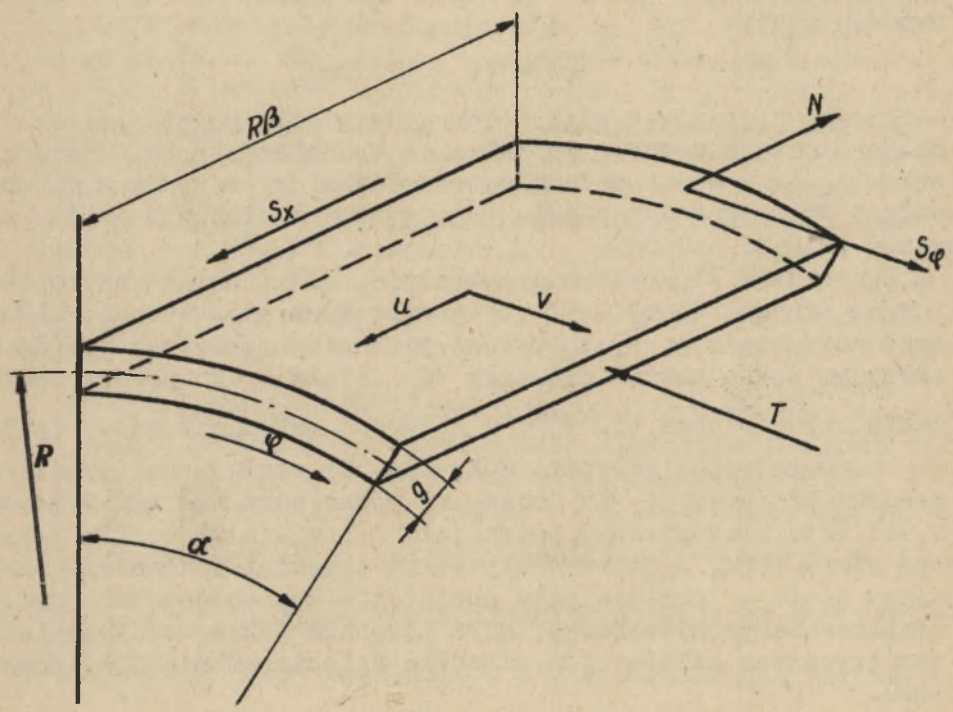
$$\Delta w = (v + \theta R) \cdot \alpha$$

zachowany jest przez algebraiczne dodawanie napięć górnego i dolnego obwodu poprzez przekładnie transformatorów, ostatni warunek $\Delta v = -w\alpha$ spełniają transformatory w środkowym obwodzie przenoszące napięcie jego węzłów w stosunku $\alpha:1$ na węzły dolnego obwodu.

Ponieważ w konkretnym przykładzie, dla którego zaprojektowano schemat na rys. 5, obciążenie jest symetryczne, układ analogowy obejmuje tylko połowę pierścienia. Z tego powodu w skrajnym węźle obwodu dla siły Q działa tylko połowa obciążenia zewnętrznego tj. $\frac{q \cdot \alpha}{2}$, w dalszych natomiast cała siła $q\alpha$ odpowiadająca długości łuku $R\alpha$. Ze względu na symetrię warunki brzegowe są θR oraz v równe zeru dla $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$. W układzie elektrycznym potencjały odpowiednich węzłów muszą być równe zeru, a zatem węzły te są uziemione. Również uziemiony jest przeciwległy obciążeniu koniec obwodu przemieszczenia promieniowego, gdyż podobnie jak w obliczeniach teoretycznych założono tu strzałkę ugięcia promieniową równą zeru.

Urządzenie analogowe pozwala na rozwiązanie zadania dla dowolnego kąta opasania i dowolnego prawa rozkładu obciążeń, bez żadnej komplikacji. Wystarczy w tym celu dobrać odpowiednio wielkie prądy $q\alpha$ i doprowadzić je w odpowiednich węzłach. Parametry konstrukcyjne można zmieniać na oporach obwodu θR i odczytywać wyniki na miliamperomierzach i miliwoltomierzach dla wszystkich węzłów i obwodów, a stąd mnożąc przez współczynnik skali znajdować siły wewnętrzne i przemieszczenia.

Element blachy płaszcza przedstawia rys. 6. Płaszcz podzielono na pola o szerokości $R\beta$, która to szerokość w rachunku różnicowym występuje w miejsce nieskończenie małej wielkości dx. Wyrażenie szerokości w mierze kątowej jest tu użyteczne, podobnie jak w obliczeniach teoretycznych, ze względów wymiarowych. Stosunek przekładni transformatorów jest zależny tylko od wielkości bezwymiarowych α i β, a więc transformatory mogą być o stałej przekładni niezależnie od wielkości konstrukcyjnych.



Rys. 6. Wycinek płaszcza

Układ analogowy dla kilku pól płaszcza przedstawia rys. 7. Podział w osi poziomej odpowiada kątom α, w osi pionowej kątom β. Jako warunki równowagi i sprężystości występują tu związki:

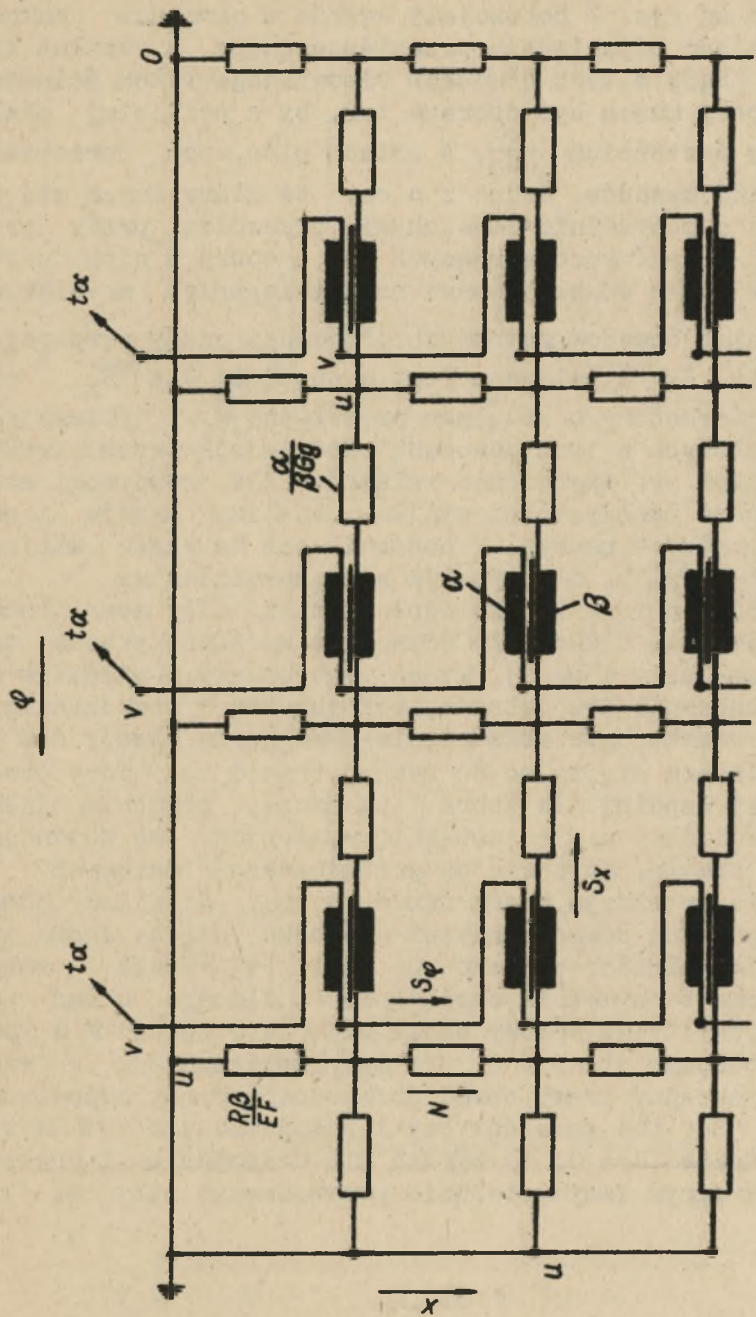
$$\Delta_x N + \Delta_\varphi S_x = 0$$

$$\Delta_x S_\varphi - t\alpha = 0$$

$$\Delta_x u = N \frac{R\beta}{Ef}$$

$$S_x = S_\varphi \frac{\beta}{\alpha}$$

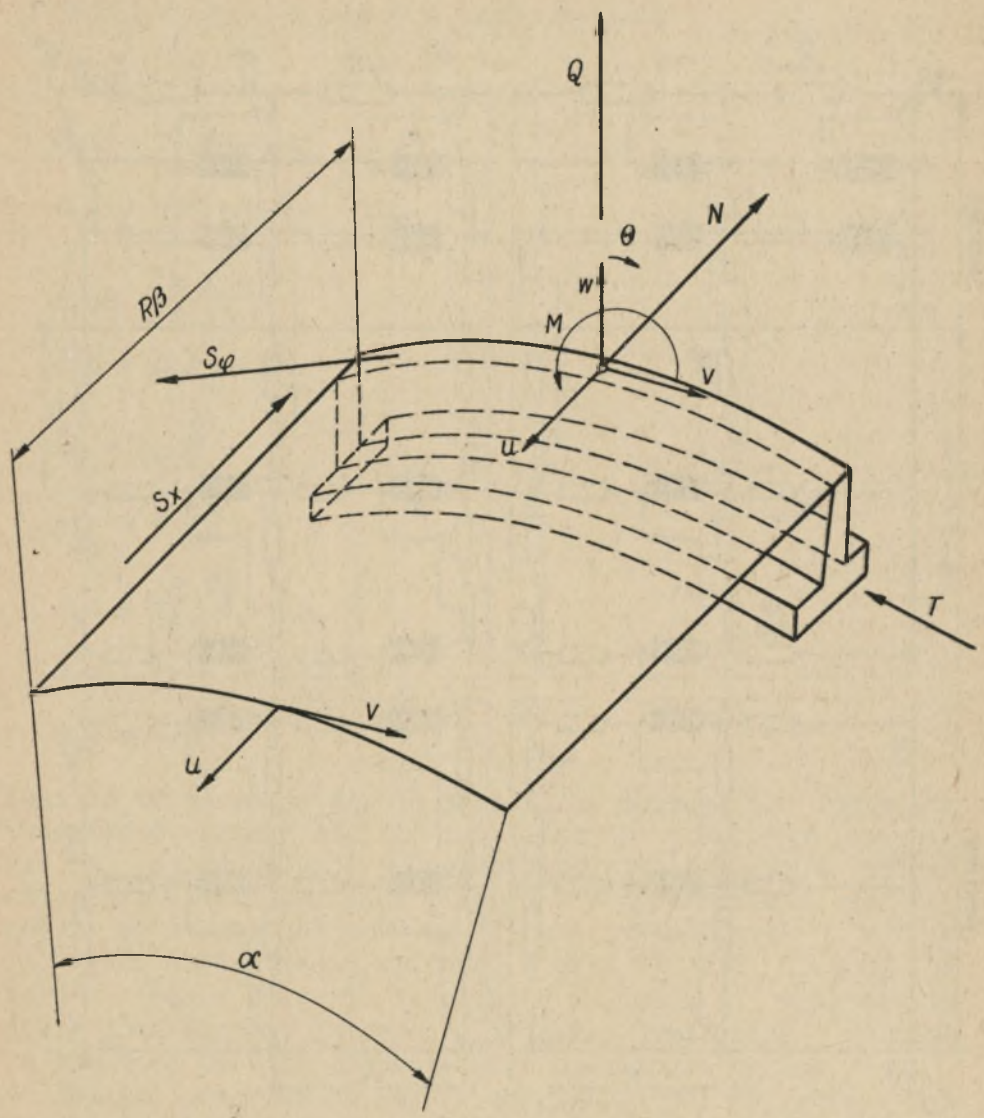
$$\Delta_\varphi u = \frac{\alpha}{\beta G g} S_x - \frac{\alpha}{\beta} \Delta_x v$$



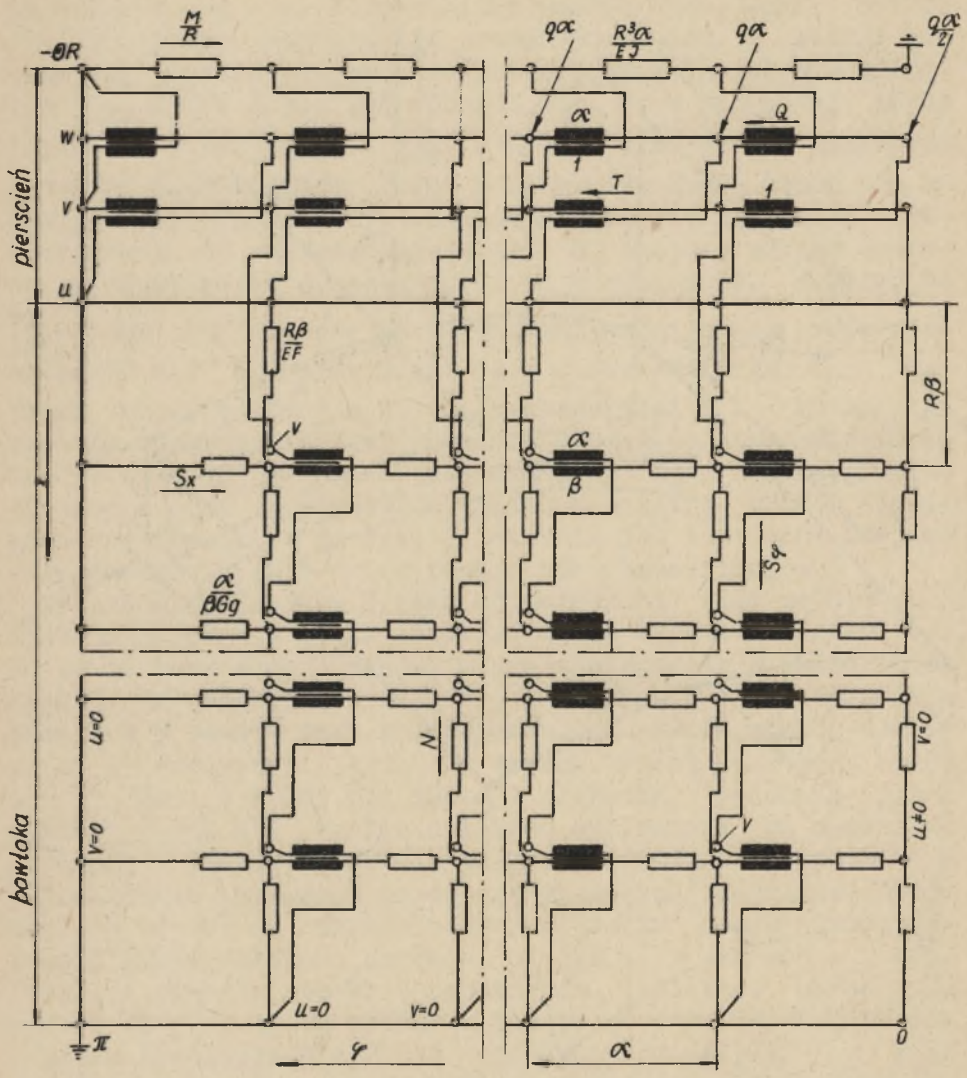
Rys. 7. Układ analogowy dla płaszcza

Na układzie wg rys. 7 potencjały węzłów w obwodach nakreślonych poziomo odpowiadają przemieszczeniom u wzdłuż tworzących, a prądy w tych obwodach odpowiadają siłom ścinającym S_x. Opory muszą być dobrane tak, by w przyjętej skali odpowiadały wartościom $\frac{\alpha}{\beta Gg}$. W osiach pionowych przebiega podwójna sieć obwodów. Jedne z nich, te które łączą się elektrycznie z poprzednio omówionymi, przewodzą prądy proporcjonalne do sił rozciągających N, a opory w nich dobrane są odpowiednio do sztywności na rozciąganie, a więc do $\frac{R\beta}{EF}$. Druga sieć obwodów pionowych przewodzi prądy proporcjonalne do sił S_φ i związana jest z obwodami dla S_x poprzez transformatory o stosunku przekładni $\frac{\beta}{\alpha}$. Potencjały punktów węzłowych w tych obwodach odpowiadają przemieszczeniom obwodowym v. Spełnienie związków dla równowagi statycznej i praw sprężystości wynika z analizy prądów i napięć występujących na rys. 7 podobnie jak to miało miejsce dla schematu rys. 5, więc pomija się uzasadnienie.

W układzie na rys. 7 jako odpowiedniki siły zewnętrznej występują jedynie tylko siły ścinające wyrażone prądami $t\alpha$. Są to te same siły i prądy, które występowały w układzie na rys. 5. Połączenie obu układów, tak jak to przedstawiają rys. 8 i 9 zamyka całe zagadnienie. Dwa górne obwody dla $\frac{M}{R}$ oraz w odnoszą się tylko do żebra, trzeci od góry obwód dla v jest wspólny dla żebra i płaszcza, podobnie jak i czwarty obwód dla u. Ten ostatnio wymieniony ma potencjał zrównany z ziemią, gdyż nie ma przemieszczeń osiowych w płaszczyźnie przekroju przez środek żebra. Najniższy obwód poziomy odpowiada równoleżnikowi w środku między dwoma żebrami, gdzie założono zarówno u jak i v równe zeru. Przyjęto ponadto symetrię obciążenia i dlatego układ na rys. 9 dotyczy tylko połowy bębna od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi$. W południku środkowym dla $\varphi = 0$ nie ma przemieszczeń v więc odpada tam skrajny prawy obwód przewodzący prądy odpowiadające siłom S_φ, toż samo dotyczy i południka dla $\varphi = \pi$. W tym południku także u = 0, co wyraża się uziemieniem i brakiem oporów w skrajnym lewym obwodzie przewodzącym siły N.



Rys. 8. Wycinek płaszcza z żebrem



Rys. 9. Układ analogowy dla bębna

Układ wg rys. 8 czyni zadość warunkom:

$$\Delta_\varphi \frac{M}{R} = -Q \cdot \alpha$$

$$\Delta_\varphi Q = T \cdot \alpha - q \cdot \alpha$$

$$\Delta_\varphi T = -Q\alpha - \Delta_x S_\varphi$$

$$\Delta_\varphi \Theta R = \frac{M}{R} \frac{R^3 \alpha}{EJ}$$

$$\Delta_x N + \Delta_\varphi S_x = 0$$

$$S_x = S_\varphi \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Delta_x u = N \frac{R\beta}{EF}$$

$$\Delta_\varphi u = \frac{\alpha}{\beta Gg} S_x - \Delta_x \frac{\alpha}{\beta} v$$

$$\Delta_\varphi w = \left[v - (-\Theta R)\right] \alpha$$

$$\Delta_\varphi v = -w\alpha$$

Jest to 10 warunków dla 10 zmiennych. Znikają tu przyjęte początkowo warunki dla sił zewnętrznych t, których obecnie nie ma, gdyż zastępuje je wewnętrzna siła ścinająca S_φ na złączeniu blachy płaszcza z żebrem. W porównaniu z podstawowymi warunkami obliczeń wg [1] nie ma tu innych różnic jak tylko wprowadzenie zmiennej Θ oraz dwu sił S_x i S_φ w miejsce jednej siły S. Te różnice wynikają z traktowania żebra jako obręczy zginanej a płaszcza jako błony i podziału płaszcza na pola prostokątne o nierównych bokach.

Podział płaszcza na pola o szerokościach $R\beta$ może być dowolnie wybrany. Można założyć $\frac{\beta}{\alpha} = \alpha$ tj. $\beta = \alpha^2$. Ponieważ α jest ułamkiem właściwym - wybranym również dowolnie - więc tak obrane β nie będzie duże i spełni wymagania pożądanej dokładności. Zyskiem takiego wyboru będzie jednakowa wielkość wszystkich transformatorów potrzebnych dla całego układu. Nastawialne są tylko opory, odpowiednio do promienia, grubości blachy i wymiarów żebra.

Zaletą przedstawionego układu analogowego jest jego wielka prostota. Nie wymaga on żadnych skomplikowanych i trudnych, albo też bardzo precyzyjnych aparatów. Spełnia zadania całkowania równań podstawowych i podania gotowych wyników w najprostszy sposób, polegający na nastawieniu oporników i odczytaniu wskazań milivoltomierzy i amperomierzy oraz pomnożeniu odczytów przez stałe współczynniki. Dla wszystkich wymiarów i obciążeń wystarcza jeden układ, manipulacja zmiany parametrów jest łatwa. Otwartą jest sprawa dokładności odczytów i wyników. Katedra nie rozporządza jeszcze w tej chwili własnymi doświadczeniami. Można wszakże oprzeć się na fragmentarycznie znanych tu pracach Instytutu Kalifornijskiego. Według nich różnice między dokładnym liczeniem polegającym na rozwiązywaniu układów równań różniczkowych, a odczytaniu na urządzeniu analogowym, występują dopiero na trzecim miejscu dziesiętnym. Jest to dokładność większa niż to potrzebne dla przeciętnych prac w zakresie konstrukcji maszyn wyciągowych.

LITERATURA

[1] POPOWICZ Oktawian: Problemy wytrzymałości powłokowej bębnów i kół pędnych. Materiały na konferencję Naukowo-Techniczną 8-10.X.1963 r. Wyd. Politechniki Śląskiej.

[2] Mac NEL: The Equivalent Cirquits of Shells used in Airframe Constructions, Proceedings of the Western computer. Conference, Los-Angelos California Febr. 4-6, 1953

Rękopis złożono w Redakcji we wrześniu 1963 r.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГОВАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРЕННИХ СИЛ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАРАБАНАХ РАБОТАЮЩИХ КАК ГНУТЫЕ ОБОЛОЧКИ

Резюме

Рассмотрены независимо - кольцевые рёбра жёсткости и кожух работающий в плёночном состоянии. Дифференциальное уравнение равновесия сил и моментов и зависимости между деформациями и перемещениями переобразовали в уравнения с конечными разностями соответственно к подразделению барабанов на поля. Приводятся электрические аналоговые схемы отдельно для кольца и кожуха и для всего барабана. Рассмотрен пересчёт шкалы для механических и электрических величин.

ELEKTRISCHE ANALOGIE-EINRICHTUNG ZUR BESTIMMUNG DER INNEREN KRÄFTE UND DURCHBIEGUNGEN DES TROMMELMANTELS DER ALS EINE IM MEMBRANZUSTAND ARBEITENDE SCHALE BETRACHTET WIRD

Zusammenfassung

Zuerst werden getrennt behandelt: die Versteifungsrippe in der Breitenkreisebene, welche auf Biegung beansprucht wird und der Trommelmantel, der die reinen Zug- und Schubkräfte übernimmt. Die Differenzialgleichungen des Gleichgewichtszustandes der Kräfte und Momente, sowie die aus dem Elastizitätsgesetz hergeleiteten Beziehungen werden durch Gleichungen mit endlichen Differenzen ersetzt. Die Mantelfläche wird in Elementarfelder unterteilt. Dem mechanischen Kräfte- und Momentegleichgewichtsgesetz entspricht das Kirchhoffsche Stromverteilungsgesetz, dem Elastizitätsgesetz ent

spricht das Ohmsche Gesetz. Die Grundgleichungen des elektrischen Netzes entsprechen genau den mechanischen Grundgleichungen. Das Umrechnen der mechanischen und elektrischen Grössen wird besprochen. Zum Schluss wird die vereinte Analogie Einrichtung für den Trommelmantel mit der Versteifungsrippe zusammen dargestellt.