

# DIE BAUTECHNIK

19. Jahrgang

BERLIN, 18. Juli 1941

Heft 30/31

Alle Rechte vorbehalten.

## Die Gebäudeschäden des Bukarester Erdbebens vom 10. November 1940.

Von Professor Ingenieur Christea Niculescu, Bukarest.

Der Herd des Erdbebens vom 10. November 1940 lag in der südöstlichen Ecke der rumänischen Karpathen, westlich von Focsani. Es erreichte in Bukarest den Grad 9 der Mercalliteilung und dauerte 42 sek. Ein Erdbeben von solcher Stärke und Dauer ist in Rumänien seit mehr als 100 Jahren nicht mehr beobachtet worden; das letzte von ähnlicher Schwere, bekannt unter dem Namen „das große Erdbeben“, ereignete sich im Jahre 1832. Drei Wochen vor dem letzten Erdbeben, am

Verwerfungsspalten begrenzt und durchquert, die tief in die Erdkruste hineinreichen, deren Mächtigkeit bekanntlich mit 120 km anzunehmen ist. In der Karte der Abb. 1 ist für Bukarest die allgemeine Richtung der Erdstöße angegeben, und ebenso sind die Gegenden hervorgehoben, in denen das Beben am stärksten aufgetreten ist. Es scheint, daß die Gesteinsschollen neben den Schwingungen in der Hauptrichtung auch Schwingungen zweiten Grades ausgeführt haben, die durch die Verwerfungsspalten gegeneinander abgetrennt waren. Dadurch würde auch die ungleichmäßige Verteilung der Gebiete der größten Wirkung erklärt sein.

Die Gebäudeschäden in Bukarest waren derart, daß die Stadt und die Legionärhilfe schleunigst als freiwillige Helfer Gruppen von Ingenieuren und Architekten zusammenstellten, die schnellstens die Häuser besuchen und ihre weitere Wohnbarkeit feststellen sollten. Diesen Gruppen gelang es auch, die Panik der Bewohner einzudämmen. Eigentlich waren die Beschädigungen kleiner, als bei der Stärke und Dauer des Bebens zu erwarten gewesen wäre<sup>2)</sup>. Als schweres Unglück ist der Einsturz des Carlton-

Blockes, eines 47 m hohen Eisenbelongebäudes, zu verzeichnen, der mehr als 130 Menschen das Leben kostete. In den näher zum Herde des Bebens liegenden Gebieten waren die Schäden jedoch viel größer. Als Beispiel zeigen Abb. 2 bis 4 ein zerstörtes Haus in der Nähe von Ploesti.

Im folgenden werde ich die Ergebnisse der Beobachtungen bekanntgeben, die ich selbst an den besuchten Häusern gemacht habe, und dabei

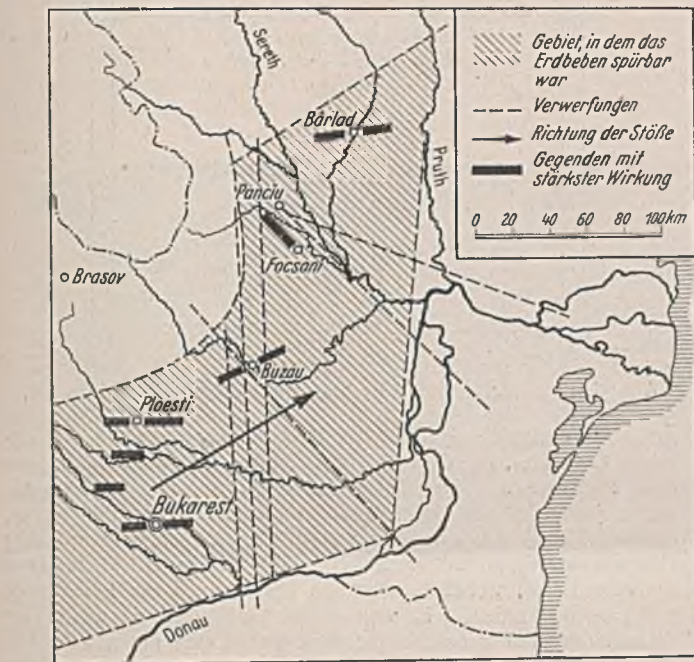


Abb. 1. Das Erdbeben in Rumänien am 10. November 1940, nach Professor Voitestii.

22. Oktober 1940, hatte Bukarest ein Erdbeben 7. Grades und von kürzerer Dauer heimgesucht, während in den Tagen nach dem 10. November noch eine Reihe teils schwächerer, teils stärkerer Beben folgte, die jedoch höchstens den Grad 4 erreichten.

Das Beben wurde in dem in Abb. 1 eingezeichneten Bereiche verspürt. Nach Professor Voitestii<sup>1)</sup> ist das Gebiet von mehreren tiefen

<sup>1)</sup> Voitestii, Geologie und Erdbebenwirkungen im Oktober und November 1940. Cele trei Crisuri, Nov.-Dec. 1940.

<sup>2)</sup> Brennecke-Lohmeyer, Der Grundbau, 4. Aufl., Bd. III, S. 381. Berlin 1934, Wilh. Ernst & Sohn.



Abb. 3. Zerstörtes Haus bei Ploesti.



Abb. 2. Zerstörtes Haus bei Ploesti.



Abb. 4. Zerstörtes Haus bei Ploesti.



auch Mitteilungen von Fachgenossen berücksichtigen, die sich auf ihre eigenen Feststellungen stützen, die hier also höchstens aus zweiter Hand stammen.

Aus der geologischen Beschaffenheit des Untergrundes in Bukarest erklärt sich die sehr verschiedene Wirkung des Erdbebens auf nahe beieinanderliegende Gebäude<sup>3)</sup>. So stürzten beispielsweise bei dem von mir bewohnten Hause alle Schornsteine ein, während sie bei dem gegenüber liegenden Hause trotz ihrer Schlankheit keinerlei Schaden erlitten. Die Walachei ist eine Lößlandschaft. Der LÖß liegt im allgemeinen in etwa 10 m Mächtigkeit über stark wechselnden Ablagerungen von Sanden, Tonen und Geröllen. Bei Bukarest ist die Lößdecke durch den Dambowitafluß und andere Gewässer abgetragen, und auch die darunter liegenden Schichten sind teilweise ausgewaschen worden. Den sehr unregelmäßigen Baugrund im Bereich des Carlton-Blocks zeigt Abb. 5.

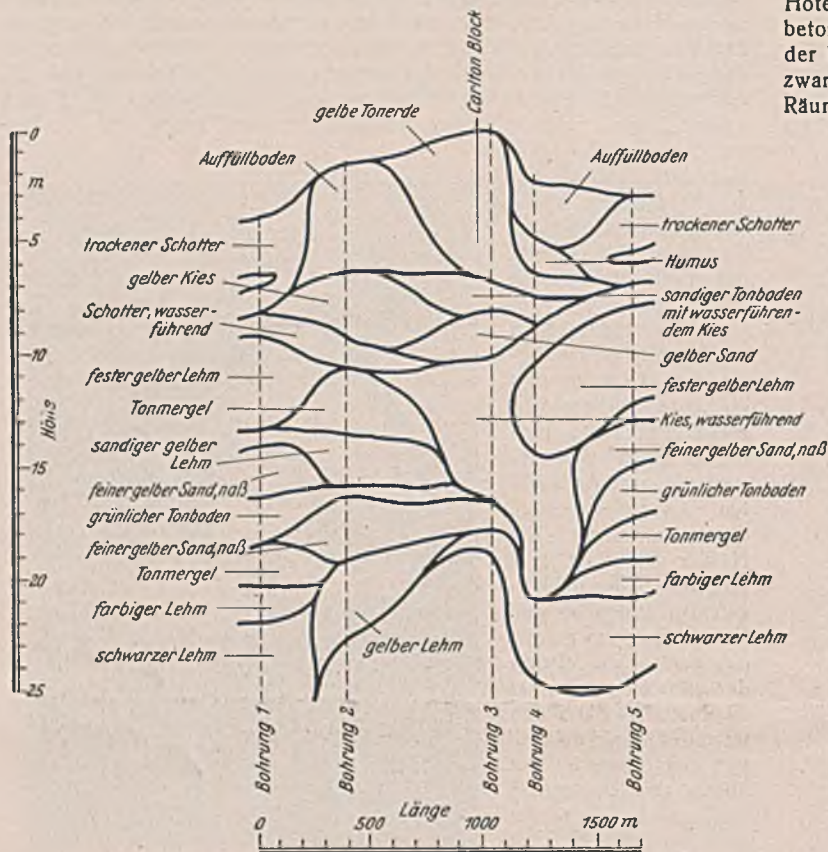


Abb. 5. Baugrund in der Umgebung des Carlton-Gebäudes.

Die Beschädigungen sind zunächst auf die durch die Erdstöße bewirkten waagerechten Verschiebungen von Gebäudeteilen zurückzuführen. Manche Dächer wurden von ihrem Platz verschoben (in einem Falle bis zu 20 cm), schlugen an die Schornsteine an und brachten sie zum Stürzen. Die auf Säulen aufgestellten Giebelwände wurden ebenfalls verschoben, eine davon wurde um 18 cm versetzt. Ebenso waren Schleuderscheinungen zu verzeichnen bei Dächern, die auf Säulen aufgestellt waren. Eins davon wurde heruntergeworfen, die meisten aber verschoben sich nur und zogen dabei das Mauerwerk bis zum Kopf der Säulen mit sich. Ein auf Eisenbetonpfählen aufgestellter Wasserbehälter auf dem Dache eines hohen Gebäudes hat die Pfeiler derartig beschädigt, daß nur ein einziger Unternehmer den Mut hatte, das Abreißen des Behälters zu übernehmen.

Mauern und Schornsteine, die an ihrem oberen Teile nicht irgendwie befestigt waren, wurden vielfach umgeworfen. Mauern, die nicht an den Deckenträgern befestigt waren, verschoben sich um 12 cm, indem sie dabei auch Teile von Querwänden mitzogen. Die Schornsteine, vor allem größere Schornsteine von Zentralheizungen und von Fabriken, wieder Instand zu setzen, war eine sehr schwierige Aufgabe; die meisten mußten ganz abgerissen werden. Soweit sie nicht durch die Bewegung des Daches zerstört waren, waren sie meist durch ihre eigenen Schwingungen beschädigt oder eingestürzt. In der Regel waren sie in großen zusammenhängenden Blöcken eingestürzt und hatten dabei vielfach Dächer und Decken durchschlagen. Bei frei stehenden Schornsteinen habe ich wiederholt festgestellt, daß sie eine Reihe von senkrechten oder nahezu senkrechten Rissen zeigten, und daß darüber eine waagerechte Scherfuge lag, in der sich der obere Teil verschoben hatte. Dabei hatte der ab-

<sup>3)</sup> Dr. Cantuniar, Vortrag im Beton- und Straßenbauinstitut in Bukarest.

gelöste Teil sich häufig gedreht, was wohl auf die Drehbewegungen des Bodens zurückzuführen ist, die während des Erdbebens beobachtet sind. Die Schornsteinschäden sind besonders stark bei den Gebäuden mit spitzen Dächern, die seit der Jahrhundertwende an Stelle der früher üblichen flachen Dächer ausgeführt worden sind, weil der Baustil sich damals grundlegend änderte. Die spitzen Dächer bedingten höhere und damit gegen Erdbeben empfindlichere Schornsteine. Man wird deshalb wohl in Bukarest zu der alten Sitte mit flachen Dächern und möglichst kurzen Schornsteinen zurückkehren müssen. Jedenfalls wird man höhere, frei stehende Schornsteine künftighin nur noch in Eisenbeton ausführen dürfen.

Eine andere Art der Beschädigung entstand durch die waagerechten Stöße der nicht übereinstimmend schwingenden Massen und vor allem durch die Unterschiede in den Gewichten der Gebäudeteile. Bei einem Hotel hatte man über dem Mauerwerk eines Treppenhauses eine Eisenbetondecke ausgeführt. Durch ihre kräftigen Stöße hatte sie die Mauern der Wände im Bereich von zwei Geschossen ernstlich beschädigt, und zwar nicht nur im Treppenhaus, sondern auch in den benachbarten Räumen, so daß es nötig wurde, die Mauern eiligst wiederherzustellen.

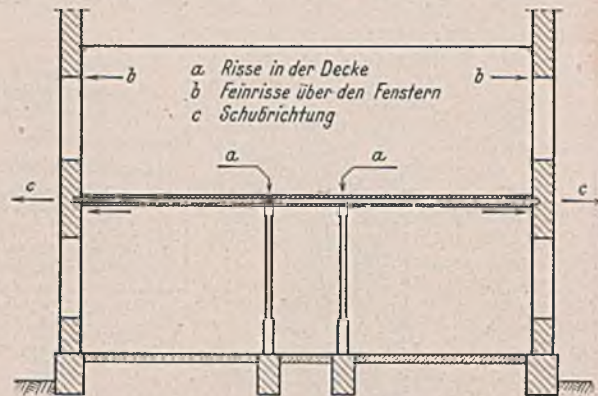


Abb. 6. Durch eine Decke nach außen gedrückte Ziegelmauern.

Ähnliches ereignete sich an dem Beobachtungsturm eines öffentlichen Gebäudes, bei dem über dem Ziegelmauerwerk des Turmes eine Plattform aus Eisenbeton ausgeführt war. Am häufigsten waren jedoch die Schäden, die dadurch entstanden, daß Decken, die aus I-Trägern mit dazwischenliegendem Ziegelmauerwerk oder Gewölbekappen bestanden, gegen die Außenmauern stießen und sie verschoben, wobei in manchen Fällen auch die Innenwände mitgezogen wurden. In einem Gebäude (Abb. 6) wurde die Außenmauer nur zusammengedrückt, wobei sich nur am Oberteil der Fenster schwache Risse zeigten. Man erkannte aber den Rammstoß der Decke als Ursache daran, daß der Mosalkfußboden über dem Anschluß der Deckenträger an die Unterzüge mitten im Zimmer um 8 mm klappte. Hier hatten sich die Träger nach



Abb. 7. Erhebliche Verblegungen des Ziegelmauerwerks ohne allzu große Risse.

beiden Richtungen, nach rechts und nach links, verschoben. Diese Biegeerscheinungen des Ziegelmauerwerks ohne das Auftreten allzu großer Risse konnte ich auch in anderen Fällen feststellen (Abb. 7). Aber die Unterschiede in den Gewichten der Gebäudeteile waren durchaus nicht die alleinige Ursache der nicht übereinstimmenden Schwingungen. Selten haben die Gebäude als Ganzes geschwungen, vielmehr bildeten sich gleichartige Gruppen, die dann für sich schwangen. Vor allem zeigte sich diese Erscheinung bei Treppenhäusern, die sich zwischen zwei verschiedenen Teilen desselben Gebäudes befanden. So fand ich bei einem solchen Hause, daß die waagerechten Verbindungsträger der beiden Ge-



bäudegruppen an den Berührungsstellen mit den senkrechten Pfeilern Risse aufwies, die aber immer nur an einem Ende der Träger, niemals an beiden festzustellen waren. Weitere Beschädigungen des Gebäudes waren nicht zu finden.

In einem Museumsgebäude zeigte die hintere Wand des Treppenhauses, das zwischen einem Hörsaal und einem Museumssaal lag, zwei große, sich kreuzende Risse. Die Wand war 1 Stein (28 cm) dick und hatte eine Tür in der Mitte. Hier war die Ursache, daß zwei getrennte Gebäudegruppen nicht übereinstimmend geschwungen hatten. Bei einem anderen Haus wies eine Innenwand, die auf der einen Seite von einer Außenwand (links in Abb. 8a), auf der anderen von der Wand eines Innenganges begrenzt war und keine Öffnungen hatte, dieselben sich kreuzenden Risse auf und dazu noch einen Riß an der Ecke (Abb. 8b)

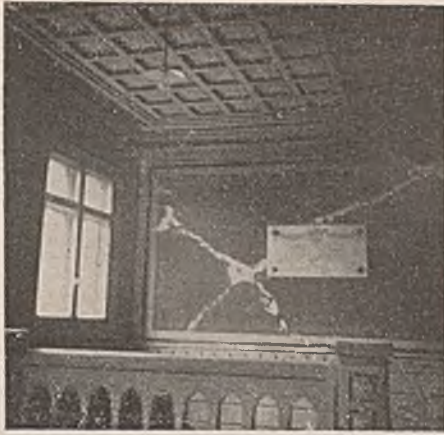


Abb. 8a.

Abb. 8a u. b. Sich kreuzende Risse in einer Innenwand. Der obere Wandteil ist um 4 cm gegen den unteren herausgedrückt.



Abb. 8b.

und einige andere Risse, die im Bilde nicht zu sehen sind. Der Druck zwischen den beiden unabhängig voneinander schwingenden Mauern war so groß, daß der Wandteil über dem schräg nach rechts unten gehenden Riß herausgedrückt wurde, und zwar bis zu 4 cm am Schnittpunkt der Risse (unter der linken Ecke der Gedenktafel im Bilde). Ebenso wies an einem zweigeschossigen Wohnhause eine fensterlose Außenwand einen scharf abgesetzten 16 mm breiten Riß auf, der unter der Decke anfang und bis zum Fußboden ging (Abb. 9), sowie drei weitere feine Risse. Die dazu senkrecht stehende Mauer wurde durch den Schub zusammengedrückt und zeigte ebenfalls die oben besprochenen Biegerscheinungen, die durch einige feine Risse gekennzeichnet waren.

Hier ist hervorzuheben, daß man sich, entgegen der allgemeinen Meinung, bei der Ausstufung von Stahl- oder Eisenbetongerippenbauten nicht auf das Füllmauerwerk der Wände verlassen kann. Aus den angegebenen Be-

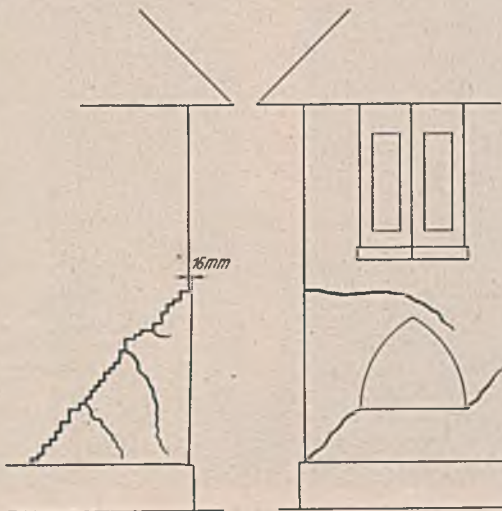


Abb. 9. Beschädigte Ecke in einem Wohnhaus.

spielen ist zu ersehen, daß sogar massive Bauten Risse zeigten oder zertrümmert worden sind. Bei den Eisenbetongebäuden löste sich das Eisenbetongerippe auch da, wo es selbst das Erdbeben gut überstand, fast überall von der Ziegelfüllung. In der Füllung entstanden Risse, ja die Ziegel wurden sogar zerdrückt (besonders in einem Fall, bei dem Hohlziegel verwendet worden waren).

Da der Erdbebenherd in großer Nähe von Bukarest lag, die Stoßrichtung also sehr steil einfiel, verursachten die senkrechten Stöße bedeutenden Schaden. So entstanden in ganz bestimmter Höhe Bruchstellen in den Gebäudemauern und in frei stehenden Mauern (Abb. 10). An Mauerecken (Abb. 11) und an Säulen bildeten sich senkrechte Absplünderungen. An zwei Gebäuden wurden einige Eisenbetonsäulen in senkrechter Richtung aufgespalten. Bei vielen Eisenbetonfachwerkbauten wurden die Köpfe der Stützen beschädigt. Professor Voitești glaubt, daß der Carlton-Block infolge der senkrechten Stöße eingestürzt ist. Diese Annahme ist durch die Feststellung des Sachverständigenausschusses bestätigt worden, nach der der Einsturz im gleichen Augenblick auf der ganzen Fläche und in gleicher Höhe begann, was auf eine gemeinsame Ursache hinweist und nicht auf einzelne Fehler im Bauwerk, die nur an einzelnen Stellen wirksam sein konnten. Ein Augenzeuge, der technische Kenntnisse nicht hatte, hat berichtet, daß das Gebäude vor dem Einsturz „wie ein Faß aufschwoll“, woraus zu entnehmen ist, daß die senkrechten Stöße die Verbindungen der Säulenköpfe mit den darüberliegenden Decken zerstört haben und daß das Gebäude dann im ganzen zusammengebrochen ist.



Abb. 10. Bruchstellen in frei stehenden Pfeilern.

Durch die senkrechten Stöße wurde auch die Scherfestigkeit der Gebäude beansprucht. Bezeichnend dafür ist das Verhalten von zwei Weinschuppen, deren Längsmauern abgeschert wurden. Einer davon (Abb. 12 u. 13) hatte 60 cm dicke Mauern. Das Gebäude lag in Richtung Ost—West, d. h. in der Senkungsrichtung. In der Westhälfte entstand die Abscherung auf der Nordseite in Fensterhöhe auf der Linie des kleinsten Widerstandes (hier kam auch der Rammstoß der anderen Gebäudehälfte dazu), während auf der Südseite die Abscherung in Sockelhöhe festzustellen war. Bei dem anderen Ziegelgebäude, das auch von Osten nach Westen gerichtet war und auf beiden Seiten Öffnungen aufwies, lag der Scherriß in Sockelhöhe und stieg nach den Stirnwänden zu, in die Öffnungen überspringend,



Abb. 11.

Lotrechte Absplünderung der Gebäudeecken.





Abb. 12. Weinschuppen, Nordseite.



Abb. 13. Weinschuppen, Südseite.

an (Abb. 14). Bei beiden Gebäuden blieben die Kellerräume unbeschädigt, wie überhaupt Risse in den Kellern nur festgestellt werden konnten, wenn die Gründung nachgegeben hatte.

Eine besondere Gruppe bilden die Beschädigungen an Kragbauten. Da auskragende Bauteile verhältnismäßig große Formänderungen erfahren und bei ihnen die von den Schwingungen erzeugten dynamischen Kräfte besonders groß sind, erleiden sie und ebenso die Mauern, in denen sie eingespannt sind, sehr viele Beschädigungen. Abb. 15 zeigt die behelfsmäßigen Abstützungen, die an Gebäuden mit Erkerbauten vorgenommen werden mußten. Man sieht, daß an einer Stelle wirksame Stützen nur aufgestellt werden konnten, indem man die ganze Straßenbreite in Anspruch nahm. Auf die Notwendigkeit, daß die Formänderungen verringert werden müssen, wie es z. B. bei Brücken geschieht, wird noch zurückzukommen sein.

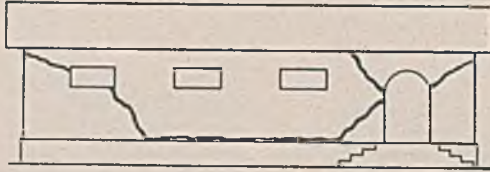


Abb. 14.

Waagerechte Scherisse in einem Ziegelgebäude.

Endlich hatten wir es noch mit Rissen zu tun, die dadurch entstanden sind, daß sich die Gründungen setzten, und zwar nicht nur infolge des Erdbebens vom 10. November, sondern auch infolge der späteren Beben.

Eisenbetongerippebauten sind in Bukarest in letzter Zeit in großer Zahl und auch in ziemlicher Höhe errichtet worden, wie aus Abb. 16 hervorgeht, die eine Gesamtansicht des Boulevard Bratianu zeigt. Das Carlton-

Gebäude ist in Abb. 16 im Vordergrund links dargestellt, man sieht oben das Schild des Kinos „Carlton“. — In Rumänien gibt es noch keine Baupolizei. Jeder hat selbst die Verantwortung für die Standfestigkeit seines Gebäudes und wird lediglich im Falle eines wirklich nachgewiesenen Unfalls oder einer Beschädigung haftbar gemacht. Nur gewisse, von der Gemeinde vorgeschriebene städtebauliche Regeln sind zu beachten. Die Pläne müssen von einem Diplomarchitekten gezeichnet sein. Beim Entwurf der Eisenbetonbauten legt man im allgemeinen die deutschen Vorschriften zugrunde, ändert sie aber mehr oder weniger, um den Wünschen nachzukommen, die die Architekten äußern oder die künftigen Mieter oder der bauausführende Unternehmer selbst, der einen möglichst billigen Bau errichten will.

Eine der völlig frei angewendeten Vorschriften ist die der DIN 1055, Blatt 4, § 2, Ziffer 2, nach der „Bauwerke, die durch genügend steife Wände und Decken hinreichend ausgesteift sind, in der Regel nicht auf Windlast untersucht zu werden brauchen“. Die Bestimmung ist ergänzt durch einen Hinweis auf DIN 1053, § 4, c, wo nähere Angaben über die Art der Aussteifung gemacht sind und empfohlen wird, in Zweifelsfällen das Maß der Aussteifung mit der Aufsichtsbehörde zu vereinbaren. In Bukarest sieht man aber in den meisten Fällen einen Gerippebau aus Eisenbeton als genügend steif an, und zwar auch dann, wenn die aussteifenden Mauern zwischen den Betonsäulen ganz fehlen, und berücksichtigt infolgedessen bei der statischen Berechnung waagerechte Kräfte in keiner Weise. Man wird also feststellen müssen, ob und unter welchen Bedingungen Füllungswände zwischen den Säulen und Balken des Eisenbetongerippes als Aussteifung angesehen werden können. Jedenfalls ist oben dargelegt, welcher geringen Wert die Versteifung durch Ziegelmauerwerk haben kann.

Ebenso wird § 28 der Bestimmungen des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton für Ausführung von Bauwerken aus Eisenbeton dahin gedeutet, daß es nicht notwendig sei, Eisenbetongerippebauten nach den Rahmengesetzen zu untersuchen, auch wenn sieben Obergeschosse oder mehr



Abb. 15. Behelfsmäßige Abstützung von Gebäuden mit Erkerbauten.



Abb. 16. Boulevard Bratianu in Bukarest. Links im Vordergrund das später eingestürzte Carlton-Gebäude.



vorhanden sind. Sehr oft werden nicht einmal die dort gegebenen Formeln für die Biegemomente in den Randsäulen und im Endfeld des Balkens benutzt, wie es beispielsweise beim Carlton-Block der Fall war. Ebenfalls berücksichtigt man nicht, daß übereinanderstehende Säulen hier nicht genau in derselben Achse stehen. Die Säulen werden deshalb — vorausgesetzt, daß ihre Dicke kleiner ist als der 15. Teil ihrer Höhe — auf mittigen Druck berechnet. Es ist allerdings richtig, daß bei Gebäuden mit vielen Stockwerken die senkrechte große Auflast der Säulen in den unteren Stockwerken den Einfluß der Biegemomente um vieles ermäßigt.

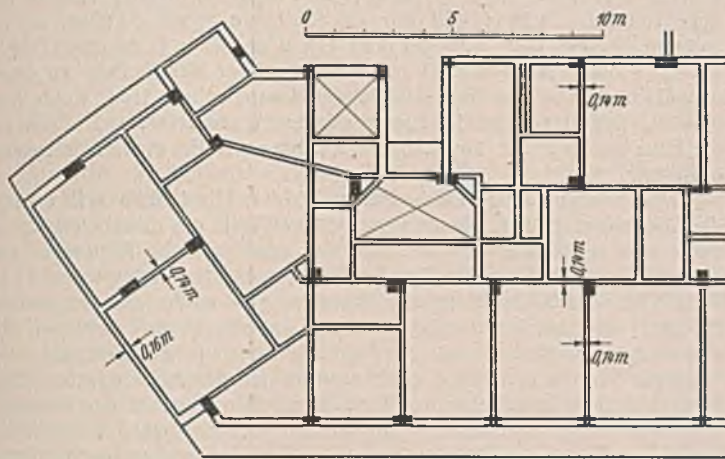


Abb. 17. Verteilung der Säulen und Balken bei einem Bukarester siebenstöckigen Eisenbetonfachwerkgebäude.

Nicht zu verantworten ist aber die wiederholt festgestellte Tatsache, daß man, um die Wohnungen in den verschiedenen Geschossen auf verschiedene Art unterteilen und den Raum möglichst gut ausnutzen zu können, die Säulen so angeordnet hat, daß sie nicht unmittelbar durch Träger verbunden werden konnten. Ja, es gibt sogar Säulen, die durch alle oberen Stockwerke gehen und sich nur auf einen Träger oder sogar einen Kragträger eines unteren Stockwerks oder des Erdgeschosses stützen. Andererseits macht man die Balken nicht dicker als 14 cm, damit sie in den Zimmern nicht zu sehen sind. Man kann sich leicht vorstellen, wie groß die Steifigkeit eines solchen Gebäudes gegenüber waagerechten Kräften sein kann. Ein Bild von diesen Zuständen gibt Abb. 17, die die Verteilung der Säulen und Balken bei einem siebenstöckigen Gebäude darstellt. Bei der Verbreitung dieser Bauweise ist es verwunderlich, daß das Erdbeben nicht viel größere Schäden hervorgerufen hat. Abb. 18 zeigt die Holzunterstützungen, die zur Sicherung eines dieser Gebäude eingebaut werden mußten.

Zweifelloos hat das Erdbeben viele Baufehler zum Vorschein gebracht. So wurde in einem amtlichen Gebäude eine umschnürte Säule, die die



Abb. 18. Sicherung eines beschädigten Eisenbetongebäudes.



Abb. 19. Beschädigung des Eckpfeilers unter dem zehnstöckigen Turm eines Eisenbetongebäudes.



Abb. 20. Einzelheit zu Abb. 18. Die Abstützung ist nicht nach Angabe des Verfassers vorgenommen worden.

Bücherel stützte, in ihrem unteren Teile zertrümmert, wodurch das Fehlen der Umschnürung auf einer Höhe von mindestens 60 cm am Fuße der Säule entdeckt wurde. Abb. 19 zeigt ein Gebäude, über dessen Erdgeschoß ein zehnstöckiger Turm steht und das eine Beschädigung des Eckpfeilers erlitt. Aus der dazugehörigen Abb. 20 ist zu ersehen, daß auf einer Höhe von mindestens 50 cm die Bügel fehlen. Ja, man hatte sogar die Verbindung der lotrechten Eisen durch einfaches Aneinanderlegen der Kopfhaken hergestellt ohne irgendwelche Überdeckung. Hierzu ist festzustellen, daß die Bauzeichnungen sehr oft keinerlei Angaben über die Bügel enthalten, so daß ihr gegenseitiger Abstand in das Belieben der Bauarbeiter gestellt ist.

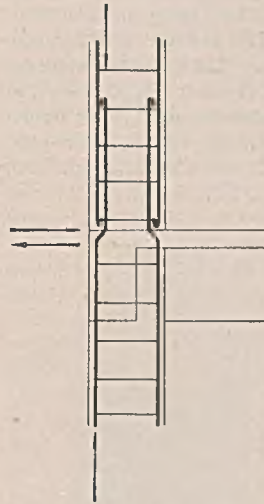


Abb. 21. Unter den lotrechten Stößen des Erdbebens ausgeknickte Säulen.

ich, daß bei der gewählten Anordnung die lotrechten Eisen an den Stoßstellen unter der Überlastung durch die senkrechten Stöße des Erdbebens seitlich ausknicken mußten. Es erhebt sich die Frage, ob selbst bei breiteren Säulen die üblichen Bügel im Bereich der Knickstelle ausreichen oder ob Verstärkungsbügel nötig sind, die man ja leicht in besonders auszubildenden Säulenköpfen und -füßen unterbringen könnte. Ebenfalls wäre die Kraftübertragung von den waagerechten Stahleinlagen der Balken zu der senkrechten Bewehrung der Säulen sorgfältig zu untersuchen und zu sichern. Auch wäre zu prüfen, ob die Bestimmung, nach der in den unteren Geschossen höhere Druckspannungen zulässig sind, in Anbetracht der Tatsache beibehalten werden kann, daß die größten Schäden in den unteren Stockwerken eingetreten sind.

Die Beschädigung des Eckpfeilers des in Abb. 19 dargestellten Gebäudes ist darauf zurückzuführen, daß der Pfeiler sich von der Eisenbetonplatte zwischen dem ersten und zweiten Stockwerk gelöst hat, wodurch eine Verdoppelung seiner Knicklänge entstand. Infolgedessen brachen die Stahleinlagen des Pfeilers heraus und auch die benachbarten Träger rissen, während die Platte nur am Pfeiler abriß, mit den Trägern



aber verbunden blieb. Diese Art der Beschädigung ist dadurch zu erklären, daß die Pfeiler unregelmäßig in derselben Weise verteilt sind wie in dem Gebäude der Abb. 17. Die Platte hat sich vom Eckpfeiler gelöst, offenbar weil sie sich unter dem Einfluß der von den Säulen und Wänden ausgehenden Verschiebungen durchgebogen hat. Für die Zukunft wird also die Festigkeit der Platte zu untersuchen und festzustellen sein, inwieweit sie bei gegebenem Umriß und gegebener Stärke als waagerechte Verbindung zwischen den Säulen und den mehr oder weniger steifen Wänden dienen kann. Ich bin deshalb auf diese Frage eingegangen, weil das genannte Gebäude offenbar ähnlichen Bedingungen unterworfen war wie das Carlton-Gebäude, bei dem die Gründe des Einsturzes nicht mit Sicherheit festgestellt werden konnten. Die beiden Gebäude unterscheiden sich in der Turmhöhe, die bei dem oben behandelten Bau 10 Stockwerke und bei dem Carlton-Gebäude 13 Stockwerke über dem Erdgeschoß beträgt (Abb. 19 u. 22).



Abb. 22.

Das Carlton-Gebäude am Boulevard Bratlanu in Bukarest.

Weiterhin ist noch die Frage der Formänderungen zu behandeln. Bei Brücken werden mit Rücksicht auf ihre dynamischen Beanspruchungen nur bestimmte Formänderungen zugelassen. Auch in hohen Gebäuden können unter der Wirkung der waagerechten Kräfte, und zwar allein schon durch die Windlasten bedeutende Formänderungen vorkommen. Genügt es, bei Gebäuden wirklich nur die Festigkeitsbedingungen festzustellen, ohne dabei die Formänderung zu untersuchen? Wie oben erwähnt, sind in Bukarest häufig Säulen von rechteckigem Querschnitt mit einer möglichst schmalen Seite verwendet worden. Bei Schwingungen können so sehr große Formänderungen entstehen, die zu den entsprechenden Folgen führen. Alle unsere Beobachtungen haben gezeigt, daß das Eisenbetongerippe dort, wo die Tragteile verhältnismäßig große Trägheitsmomente hatten, sich sehr gut verhalten hat und keine Beschädigungen aufzuweisen hatte.

Ebenso scheint es, daß die Schwingungen in manchen Fällen ein Zermahlen des Betons bewirkt haben. Bei einem Pfeiler, dessen Tragkraft darunter gelitten hatte, fand ich, daß der Beton nur die Festigkeit von Kalkmörtel hatte. Da der Rauminhalt des zermürbten Betons kleiner war als der Inhalt einer Betonmischmaschine, da er sich außerdem an einer hoch beanspruchten Stelle befand und da vor allem der zermürbte Beton nur ganz allmählich in den gesunden überging, muß ich

annehmen, daß es sich um eine Zerstörung des Betons handelte, die durch wiederholte wechselnde Beanspruchungen verursacht worden ist. Diese Annahme wird dadurch bestätigt, daß auch einer meiner Fachgenossen bei einigen Bauwerken Beton fand, dessen Druckfestigkeit nicht höher war als  $65 \text{ kg/cm}^2$ . Natürlich muß die Richtigkeit der Annahme unbedingt durch planmäßige Versuche nachgewiesen werden.

Zum Schluß will ich noch die Ergebnisse des Gutachtens des Sachverständigenausschusses mitteilen, der vom Untersuchungsrichter zur Feststellung der Gründe für den Einsturz des Carlton-Gebäudes eingesetzt worden ist. Das Gebäude (Abb. 19 u. 22) befand sich an der Ecke von zwei Straßen und war an der einen Straße  $36,50 \text{ m}$ , an der anderen  $30,00 \text{ m}$  hoch. An der Ecke erhob es sich in Form eines Turmes bis zur größten Höhe von  $47 \text{ m}$ . Nach der Lage der Stellen, an denen man Gebäudeteile und Gegenstände der Hausbewohner fand, wurde festgestellt, daß das Gebäude zuerst allgemein einsackte, sich dann um die Ecke herumdrehte und dann in Richtung der Eckwinkelhalbierenden einstürzte.

Der Ausschuß fand manche Entwurfsfehler. Es fehlten z. B. vielfach die Aussteifungsbalken, die die verschiedenen Teile des Eisenbetongerippes unter sich gegen die Windkräfte in den verschiedenen Richtungen aussteifen hatten. Fast alle Eisenbetonbalken des Gebäudes waren  $14 \text{ cm}$  breit. Bei der Nachprüfung der Berechnungen entdeckte man manche Mängel, die auf der unzureichenden Anwendung der deutschen Bestimmungen beruhten, und zwar in der Art, wie es oben schon besprochen worden ist. Aber der Ausschuß ist der Meinung, daß diese Mängel keinen entscheidenden Einfluß auf den Einsturz des Gebäudes haben konnten, weil manche von ihnen sich oberhalb der Stellen befanden, an denen der Einsturz begann, und andere wieder durch bauliche Maßnahmen unschädlich gemacht waren.

Mängel in der Bauausführung sind nicht gefunden worden. Der Ausschuß stellte fest, daß sich das Gebäude gegenüber den gewöhnlichen Beanspruchungen, für die man es bemessen hatte und denen es während der Dauer von 4 Jahren ausgesetzt war, zufriedenstellend verhalten haben würde. Und aus der Tatsache, daß das Erdbeben 7. Grades vom 22. Oktober 1940 nichts Beunruhigendes für die Bewohner mit sich brachte, kann man den Schluß ziehen, daß das Gebäude sogar den Beanspruchungen dieses Erdbebens gewachsen gewesen ist.

Schließlich erklärte der Untersuchungsausschuß:

Entwurfs- und Ausführungsfehler in der Art, wie sie bei dem Carlton-Gebäude festgestellt sind, trifft man bei den meisten Bukarester Miethäusern, die in derselben Bauweise errichtet sind. Bei manchen Gebäuden sind derartige Fehler von noch größerer Bedeutung, und vor allem fehlen beim größten Teile der Gebäude die Windverbände des Traggerippes gänzlich. Trotzdem sind diese Häuser, auch wenn sie schwere Beschädigungen aufweisen, nicht eingestürzt. Als besondere Gründe, die möglicherweise den Einsturz des Baues verursacht haben, nennt der Ausschuß die folgenden:

1. Der Eckturm hatte eine gegenüber dem sonstigen Gebäude große Höhe und eine für die Stoßrichtung des Erdbebens ungünstige Lage.
2. Die Gründungen lagen sehr nahe am Grundwasserspiegel, wodurch sie durch das Erdbeben stärker beeinflusst wurden. Der Ausschuß erwähnt hierbei den entsprechenden Hinweis in Brennecke-Lohmeyer<sup>4)</sup>.
3. Das Gebäude befand sich mit seinem freien Teile am Ende einer Reihe von Hochhäusern, die es durch die Stoßrichtung des Bebens in eine ungünstige Lage brachten.
4. Am Gebäude war der Zuschauerraum eines Kinos angebaut, dessen Ränge in die Pfeiler des Gebäudes eingespannt waren. Durch die durch das Erdbeben verursachten Schwingungen wurden die inneren Pfeiler des Tragwerks entlastet und dadurch das Kippmoment der die Ränge tragenden Pfeiler nicht unbeträchtlich vergrößert.

Ich selbst glaube, daß man außer diesen von dem Untersuchungsausschuß angeführten Gründen für den Einsturz besonders auch die Möglichkeit in Betracht ziehen muß, daß das Gebäude mit den Bebenwellen in gleicher Schwingzahl mitgeschwungen hat und dann durch die anwachsenden Schwingungsauslässe zerstört worden ist<sup>5)</sup>.

Auf Grund dieser Darlegungen glaube ich behaupten zu können, daß Gebäude mit Eisenbetongerippe, wenn sie nach technischen Regeln unter strenger Beachtung der deutschen Bestimmungen gebaut sind, ohne ernstlichen Schaden einem Erdbeben von der Stärke des Bebens vom 10. November 1940 widerstehen können, es sei denn, daß die oben erwähnte Gefahr des Mitschwingens (der Resonanz) besteht. Sicherlich bleibt eine Reihe von Fragen offen, deren Lösung weitere Sicherheitsmaßnahmen ermöglichen würde.

<sup>4)</sup> Der Grundbau, 4. Aufl., Bd. III, S. 378. Berlin 1934, Wilh. Ernst & Sohn.

<sup>5)</sup> a. a. O., S. 384.



Alle Rechte vorbehalten.

## Gleichzeitige Wirkung der Wanderlast und der Triebbradkraft bei Brückenschwingungen.

Von Ministerialrat Dozent Dr.-Ing. F. Skrobanek, Abteilungspräsident der Deutschen Reichsbahn in Wien.

Zusammenfassung. Nachstehend werden die von der gleichzeitigen Wirkung der Wanderlast und der Triebbradkraft hervorgerufenen Schwingungsvorgänge der Eisenbahnbrücken auf Grund neuer erweiterter Gleichungsansätze rechnerisch in einem Zuge ermittelt und durch zeichnerische Darstellung einiger kennzeichnender Belastungsfälle veranschaulicht. Als praktische Anwendung der Rechnungsergebnisse wird vor allem die Überprüfung der Stoßzahlen ins Auge gefaßt, wobei auch Modellversuche in Erwägung gezogen werden.

### A. Einleitung.

Die dynamischen Beanspruchungen der Eisenbahnbrücken werden bekanntlich der Hauptsache nach hervorgerufen:

1. durch die stoßweise (Achse für Achse) einfahrende Wanderlast, also durch die plötzliche Lastwirkung (oder Achslastwirkung) als solche, und
2. durch die von den nicht völlig ausgeglichenen Triebwerksteilen herrührende Triebkraftwirkung (den „Triebkrafteffekt“).

Diese beiden Hauptwirkungen und andere, bei genauen Untersuchungen keineswegs zu vernachlässigende dynamische Einflüsse, wie die von den Schienenstößen, vom Federspiel der Fahrzeuge usw. herrührenden Wirkungen, haben schon seit langem den Anlaß zu eingehenden Untersuchungen gegeben. Dennoch sind auf dem weiten Gebiete der Brückendynamik noch mancherlei Fragen einer eingehenderen Behandlung und Ergänzung wert. So wird es unter anderem lohnend sein, wenn im nachstehenden ein überschläglicher, nur auf den Kern der Sache gerichteter Vergleich der Last- oder Achslastwirkung mit der Triebbradwirkung angestellt und die gleichzeitige Wirkung beider Kräfte von einem neuen rechnerischen Gesichtspunkt aus behandelt wird. Um hierbei umfangreiche, praktisch kaum verwertbare Formelgebilde zu vermeiden, wie sie sich zuweilen bei allzusehr auf Einzelheiten abgestellten Untersuchungen ergeben haben, soll nur das zur Beantwortung der oben gestellten Frage unbedingt Notwendige getan werden und alles Nebensächliche wegbleiben.

### B. Voraussetzungen und Annahmen.

#### I. Ersatz der Brücke durch eine einfache Schwingvorrichtung.

Im nachstehenden sollen die rechnerischen Entwicklungen nicht etwa an einem mehr oder weniger verwickelten Brückentragwerk selbst vorgenommen werden (das in aller Strenge als mechanisches Getriebe aufgefaßt, eine äußerst verwickelte stoffliche Punktchar darstellen würde), sondern an einem möglichst einfachen Ersatzgebilde, das die hier in Betracht kommenden dynamischen Eigenschaften einer wirklichen Brücke dem Wesen nach richtig wiedergibt. Daß man sich solcher Ersatzgebilde bedienen darf, haben die zahlreichen, in den letzten zehn Jahren von der Deutschen Reichsbahn durchgeführten Brückenmessungen erwiesen, nach denen man zumindest stählerne Brücken — ohne auf ihre baulichen Einzelheiten einzugehen — als Ganzes durch einen einzigen elastischen oder elastisch gelagerten Körper ersetzen darf, aus dessen Schwingungserscheinungen das Kräftefeld des wirklichen Tragwerks rückschließend genügend genau ermittelt oder überprüft werden kann.

In diesem Sinne wollen wir uns eine eingeleisige (stählerne) Eisenbahnbrücke von 60 m Stützweite und rund 300 t Eigengewicht durch die in Abb. 1 (unten) grundsätzlich dargestellte Schwingvorrichtung („Schwingmodell“) ersetzt denken. Aus der Fülle der im Betrieb wirklich auftretenden Belastungsarten greifen wir in dieser vorläufig bloß überschläglichen Untersuchung einen möglichst einfachen Fall heraus, und zwar lassen wir eine der Gattung pr. T 16—94—2—4 entsprechende bloß in ihren Maßen auf runde Zahlen abgeänderte Tenderlokomotive von  $P=100$  t Gesamtgewicht (gleich dem Reibungsgewicht) mit gleichförmiger Geschwindigkeit über die Brücke fahren.

#### II. Wahl des Bezugspunktes für die rechnerische Untersuchung.

Die Berechnung der Schwingungsvorgänge wird im Einklang mit früheren, anderwärts durchgeführten Untersuchungen<sup>1)</sup> zweckmäßigerweise auf die in Brückenmitte auftretende statische und dynamische Durchbiegung bezogen.

#### III. Annahme der Einflußlinien für die einfache harmonische Erregung durch die Wanderlast und die doppelt harmonische Erregung durch die Triebbradkraft.

Um das Kräftefeld der Brücke aus der lotrechten Bewegung (der statischen Durchbiegung oder Schwingung) eines einzigen, in Brückenmitte liegenden Bezugspunktes ermitteln zu können, müßte von einer Einflußlinie ausgegangen werden, die sowohl die statischen wie die

dynamischen Wirkungen einer beliebigen Wanderlast genau wiedergibt und die, streng genommen, auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kraftwirkung vom Lastort zum Bezugspunkt zu berücksichtigen hätte. Derartige, die Lastwirkung erschöpfend beschreibende Einflußlinien<sup>2)</sup> gibt es jedoch bisher weder für Einzellasten noch für Lastgruppen (Summen-einflußlinien). In enger Zusammenarbeit der Forschung mit dem Versuchswesen dürfte es aber möglich sein, solche ausreichend genaue Einflußlinien zumindest für einfachere Tragwerke oder Tragwerkarten zu zeichnen. Solange diese immerhin mühsame Arbeit nicht getan ist, müssen wir uns anderweitig behelfen, um dennoch zu einem grundsätzlich richtigen Bild des statischen und dynamischen Kräftefeldes zu gelangen.

1. Die Wirkung der Wanderlast. Liegt nicht gerade eine durch außergewöhnliche Umstände bedingte Bauweise vor, sondern etwa ein Balkenträger üblicher Bauart, so werden die Ordinaten der hier in Betracht kommenden Einflußlinie (wie immer sie auch scharf berechnet aussehen möge) von dem einen Auflager an bis zu dem Höchstwert in der Trägermitte stetig wachsen und (wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lastwirkung im Tragwerk keine Rolle spielt) gegen das andere Auflager zu symmetrisch abnehmen. Von Feinheiten abgesehen, bringt die Einflußlinie somit ihrem Wesen nach das An- und Abschwellen der Lastwirkung während der Überfahrt zum Ausdruck und kann daher kurz als „Schwelllinie“ bezeichnet werden. Solche (keine Ecken, Splitzen, Rückkehrpunkte usf. aufweisenden) Linien lassen sich, auch wenn ihr

<sup>2)</sup> Vgl. F. Krabbe: Neuere Ergebnisse der Versuchsforschung auf dem Gebiet der Schwingungsmeßtechnik bei Eisenbahnbrücken. Stahlbau 1937, S. 210 bis 215.

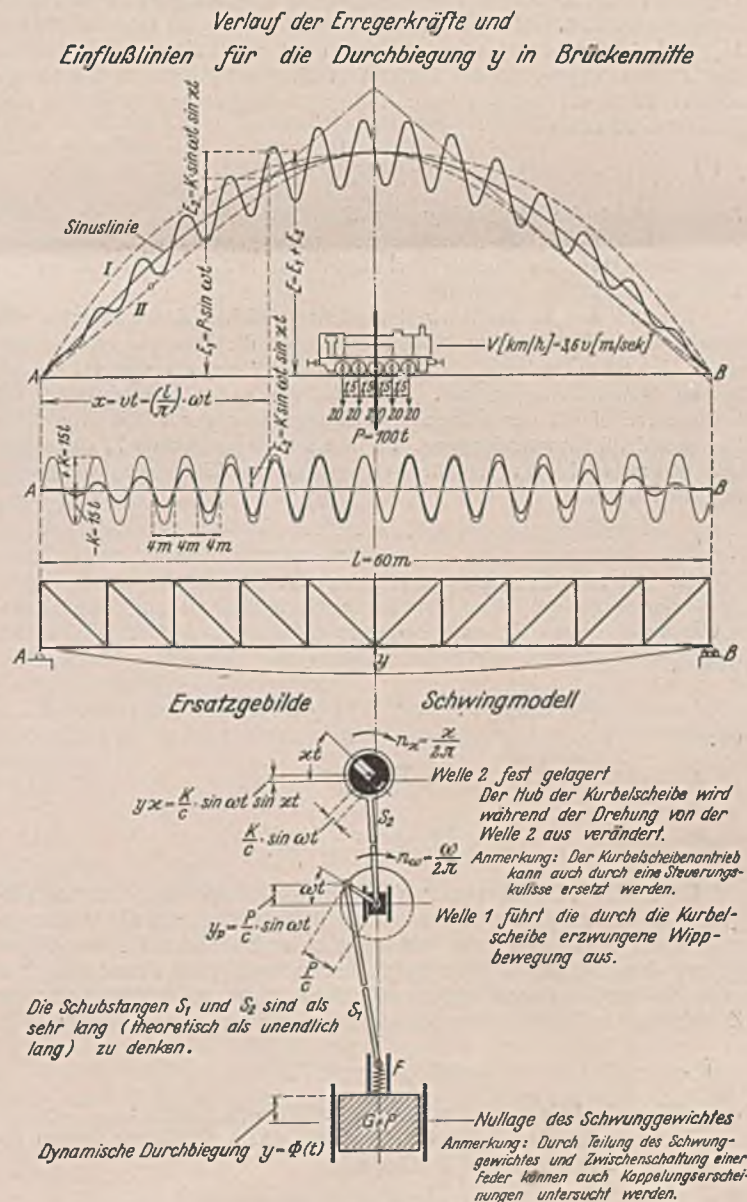


Abb. 1.

<sup>1)</sup> Vgl. Mechanische Schwingungen der Brücken. Verkehrswissenschaftliche Lehrmittelgesellschaft m. b. H. bei der Reichsbahn. Berlin 1933.



innerer Aufbau verwickelterer Art wäre, für praktische Zwecke genügend genau durch sogenannte Potenzparabeln oder durch Sinus-Cosinus-Funktionen darstellen, wobei zumeist eine einzige Parabel 2. oder 3. Ordnung oder eine Sinus- oder Cosinuslinie allein ausreicht.

Da es sich im vorliegenden Falle um Schwingungsvorgänge handelt, wird man aus rechentechnischen Gründen trigonometrische Funktionen wählen, und es genügt hier, ohne der Richtigkeit der rechnerischen Entwicklungen Abbruch zu tun, als Einflußlinie für die im Brückenwerke hervorgerufenen Durchbiegungen  $y$  eine Sinuslinie anzunehmen, die in Abb. 1 nach oben hin über die ganze Stützweite  $A-B$  der Brücke aufgetragen ist. Die Pfeilhöhe dieser Sinuslinie entspricht der Durchbiegung des Tragwerks, wenn die  $P=100$  t wiegende und wegen ihres kurzen Gesamtschwerpunktes ( $1/10$  der Stützweite) als Einzellast gedachte Tenderlokomotive sich in Brückenmitte befindet.

Um die Berechtigung der Sinuslinie als „durchschnittliche Einflußlinie“ zu zeigen, sind in Abb. 1 die beiden Einflußlinien I und II mit gleicher Pfeilhöhe wie die der Sinuslinie eingetragen, und zwar gilt die Linie I für einen gedachten Balkenträger mit unveränderlichem Trägheitsmoment, während der Einflußlinie II die Annahme zugrunde liegt, daß das Gesamtträgheitsmoment von den Auflagern gegen die Mitte hin geradlinig zunimmt.

Zwischen diesen beiden Grenzlösungen (es sind kubische Parabeln, von denen die zweite eine Wendetangente hat) werden die den praktisch ausgeführten Balkenbrücken entsprechenden Einflußlinien (für die Durchbiegung der Tragwerke) liegen, und man kann somit die den Flächenraum zwischen I und II ungefähr halbierende Sinuslinie als „durchschnittliche Einflußlinie“ gelten lassen. Die Sinuslinie kommt dabei näher an die den praktischen Fällen besser entsprechende Linie II heran, hat also großen Wahrscheinlichkeitswert.

Diesen Annahmen entsprechend wird unsere als Einzellast ( $P=100$  t) aufgefaßte Versuchslokomotive beim Durchfahren der Brücke die den Ordinaten der Sinuslinie verhältnismäßigen Durchbiegungen in Trägermitte hervorrufen. Bewegt sich die Lokomotive mit der Geschwindigkeit  $V$  [km/h]  $= 3,6 v$  [m/sek] von links aus über die Brücke, so ist der Zeit  $t$  (vom Augenblick der Einfahrt gezählt) entsprechende Lastort bestimmt durch die auf das linke Auflager bezogene und in Metern ausgedrückte Abszisse

$$(1) \quad x = vt = \frac{V}{3,6} \cdot t.$$

Ihr entspricht die Ordinate  $y$  der Sinuslinie. Sie ist, wie nochmals hervorgehoben sei, die Durchbiegung nicht am Lastort, sondern in Brückenmitte; die sinusförmige Einflußlinie hat hier mit der Biegelinie des Trägers nichts zu tun.

Um mit den in der Schwingungslehre üblichen Bezeichnungen von vornherein in Einklang zu stehen, fassen wir die über die ganze Stützweite  $l=60$  m gelegte sinusförmige Einflußlinie als das Bild einer halben Sinusschwingung auf. Dann ist die ganze Überfahrtszeit der Lokomotive gleich der halben Schwingungsdauer der vollen (von 0 bis  $2\pi$  gezählten) Sinusschwingung. Ist ihre Schwingungsdauer  $T$ , so beträgt die im zugeordneten Einheitskreis gemessene Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz)

$$(2) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Da laut vorstehend Gesagtem für  $x=l$ :

$$(3) \quad t = \frac{l}{v},$$

wird

$$(4) \quad l = v \cdot \frac{T}{2}$$

oder

$$(5) \quad T = \frac{2l}{v},$$

woraus

$$(6) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi v}{l} = \frac{\pi V}{3,6l}.$$

Ist  $c$  der „Federfestwert“ (die Federkonstante) der Brücke (ausgedrückt in t/cm) oder im Schwingmodell (Abb. 1, unten) das Dehnungsmaß der Spiralfeder  $F$ , die die elastischen Eigenschaften der ganzen Brücke darstellt und an der die gesamte schwingende Masse hängt, so wird die größte Durchbiegung in Brückenmitte, die im Maßstab der Zeichnung der Pfeilhöhe der sinusförmigen Einflußlinie entspricht:

$$(7) \quad \max y_P = \frac{P}{c} [\text{cm}],$$

wobei sich die Lokomotive selbst in Brückenmitte befindet.

Der Sinusfunktion folgend beträgt die einem beliebigen Lastort zugeordnete Durchbiegung in Brückenmitte

$$(8) \quad y_P = \frac{P}{c} \cdot \sin \omega t.$$

Die Wanderlast  $P$  wirkt daher — unserer Annahme zufolge — genau so wie eine in der Schwingungslehre zur Erzeugung erzwungener Schwingungen häufig angewendete „harmonische Kraft“, die sich rechnerisch verhältnismäßig leicht behandeln läßt. Der Unterschied gegenüber den gewöhnlich vorkommenden („rasch wechselnden“) harmonischen Kräften ist nur der, daß die Schwingungsdauer  $T_\omega$ , die einer Fahrt der Lokomotive über die Brücke entspricht, verhältnismäßig groß ist, die durch das unveränderliche Lokomotivgewicht  $P$  hervorgerufene („erzwungene“) Schwingung also sehr langsam vor sich geht.

2. Die Triebbradwirkung. Für die Triebbradwirkung, die einen mit höchstens  $\pm 15\%$  zugelassenen Teil des Raddrucks bildet, gilt beim Durchfahren der Brücke unserer Annahme gemäß ebenfalls die sinusförmige Einflußlinie. Dabei ist der vom Kurbelgetriebe herrührende Raddruck (der mit  $K$  bezeichnet sei) selbst seinem Wesen nach eine harmonische Kraft, deren Schwingzahl mit der Drehzahl der Treibräder übereinstimmt. Wird diese Drehzahl (in der Sekunde) mit  $n_K$  bezeichnet, so ist die Kreisfrequenz der harmonischen Triebbradkraft:

$$(9) \quad \omega = 2\pi n_K.$$

Daraus ergibt sich der von der Triebbradwirkung herrührende Beitrag zur statischen Durchbiegung in Brückenmitte:

$$(10) \quad y_K = \frac{K}{c} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \omega t.$$

Durch Multiplikation der Ordinaten  $y_P$  und  $y_K$  mit dem Federfestwert  $c$  ergeben sich die auf die Brücke und auf das Schwinggewicht ( $G+P$ ) wirkenden Erregerkräfte  $E_1 = c y_P$  und  $E_2 = c y_K$ , deren Summe die gesamte Erregerkraft

$$(11) \quad E = E_1 + E_2 = P \cdot \sin \omega t + K \cdot \sin \omega t \cdot \sin \omega t$$

ergibt.

Für die vorliegende Untersuchung ist der Triebbradumfang mit 4 m angenommen, so daß auf die gesamte Brückenlänge  $l=60$  m genau 15 Umdrehungen entfallen. Außerdem soll die Stellung des Lokomotivtriebwerks bei der Einfahrt in die Brücke (daher nach 15 vollen Umdrehungen auch bei der Ausfahrt) dem Wert  $K=0$  entsprechen.

In Abb. 1 (Mitte) wurden zunächst die 15 der Brückenüberfahrt entsprechenden Sinuswellen aufgetragen, deren Einzellängen gleich dem Triebbradumfang von 4 m zu denken ist, während der Schwingungsausschlag dem Höchstwert der Triebbradkraft  $K=0,15P=15$  t entspricht. Die Ordinaten dieser (dünn ausgezogenen) Wellenlinie (von gleichbleibender Schwingweite  $\pm K$ ) wurden mit den den augenblicklichen Lastorten  $x=vt$  entsprechenden Einflußwerten  $\sin \omega t$  multipliziert, wodurch sich die (stärker ausgezogene) Wellenlinie mit veränderlicher Schwingweite  $K \cdot \sin \omega t$  ergab. Dieser Linienzug, der die mit dem Lastort veränderliche Wirkung der Triebbradkraft auf die Durchbiegung in Brückenmitte, das ist die doppelt harmonische Erregerkraft  $E_2 = K \cdot \sin \omega t \cdot \sin \omega t$ , darstellt, wurde nun (im oberen Teile der Abb. 1) von der sinusförmigen Einflußlinie der Lastwirkung  $P$  aus aufgetragen. Die von der so erhaltenen Wellenlinie bis zur Waagerechten  $A-B$  gezählten Ordinaten sind somit das Maß der gesamten augenblicklichen auf die Brücke oder auf die Ersatzschwingmasse wirkenden Erregerkraft  $E = E_1 + E_2$ .

#### IV. Beschreibung der Schwingungsvorgänge im Schwingmodell.

Im Ersatz-Schwinggebilde, von welchem ein Probemodell bereits in einer Wiener staatlichen Versuchsanstalt hergestellt wurde, wird die von der Überfahrt der Last  $P$  erzwungene Bewegung des Schwinggewichts ( $G+P$ ) durch eine halbe mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  vorgenommene Drehung der auf der Welle 1 sitzenden Kurbel hervorgerufen, deren Länge gleich der größten statischen Durchbiegung  $\frac{P}{c}$  in Trägermitte ist.

Diese Bewegung kann jedoch nicht ungehindert zum Ausdruck kommen, weil die Welle 1 in einer lotrechten Gleitbahn gelagert ist und selbst eine zwangsläufige Bewegung ausführen muß, von der auf der oberen, fest gelagerten Welle 2 sitzenden Kurbelscheibe hervorgerufen wird, deren Hub (ähnlich wie bei der bekannten Lentz-Steuerung) von 0 bis zu dem bei der Bauart möglichen Höchstwert beliebig geändert werden kann.

Wird nun das Übersetzungsverhältnis zwischen der Kurbelwelle 1 und der Kurbelscheibenwelle 2 so gewählt, daß die Drehzahl der Kurbelscheibe gleich ist der Anzahl der Triebbradumdrehungen während der Brückenüberfahrt, und wird überdies der Hub der Kurbelscheibe (zwangsläufig von der Welle 2 aus) dem Verlauf der sinusförmigen Einflußlinie folgend verstellt, so führt das Lager der Kurbelwelle 1 eine die Triebbradwirkung genau nachahmende, kurzweilige „Wippbewegung“ aus, die sich mit der von der Kurbel erzeugten (langwelligen) Bewegung überlagert.

In unserem Ersatzgebilde („Schwingmodell“) lassen sich somit die beiden, den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildenden dynamischen Hauptwirkungen (Wanderlast und Triebbradwirkung) in anschaulicher Weise erkennen und auseinanderrufen.



C. Erzwungene Schwingungen mit einfach harmonischer Erregung.  
I. Die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen.

Bei der rechnerischen Behandlung der im Brückentragwerk und im Ersatzgebilde (Schwingmodell) auftretenden Schwingungsvorgänge gehen wir von der den mathematischen Grundstock der klassischen Schwingungslehre bildenden Differentialgleichung 2. Ordnung mit unveränderlichen Belwerten aus, die auch für die vorliegenden überschläglichen Untersuchungen genügt, um ein dem Wesen nach richtiges Bild der Schwingungserscheinungen zu erhalten. Wenn

$$(12) \quad m = \frac{G+P}{g} = \frac{\text{Gewicht der Brücke + Lokomotivgewicht in Tonnen}}{\text{Erdbeschleunigung in cm/sek}^2}$$

$$b \dots \text{ der Dämpfungsbeiwert} = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}} \text{ [m/t}^{-1}\text{]}$$

$$c \dots \text{ der Federfestwert [t/cm]}$$

$$E = P \cdot \sin \omega t + K \cdot \sin \omega t \cdot \sin \alpha t \text{ die gesamte Erregerkraft ist, s. Gl. (11),}$$

und der Einfachheit wegen

$$(13) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = y'' \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = y'$$

gesetzt wird, so lautet die den augenblicklichen dynamischen Gleichgewichtszustand beschreibende Differentialgleichung der durch die Wanderlast  $P$  und die Triebkraft  $K$  hervorgerufenen Bewegung

$$(14) \quad \boxed{m y'' + b y' + c y = P \cdot \sin \omega t + K \cdot \sin \omega t \cdot \sin \alpha t}$$

Der einfacheren Rechnung wegen teilen wir die Gleichung durch  $m$  und setzen:

$$(15) \quad \frac{b}{m} = 2p \quad \text{und} \quad \frac{c}{m} = q.$$

Dann ist:

(16)

$$\boxed{y'' + 2p y' + q y = \frac{P}{m} \cdot \sin \omega t + \frac{K}{m} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \alpha t = F_1(t) + F_2(t) = F(t)}$$

wobei jedes Glied im absoluten Maßsystem eine Beschleunigung (in cm/sek<sup>2</sup>) bedeutet.

Die Summe der drei links vom Gleichheitszeichen stehenden Glieder gleich 0 gesetzt, das ist die Gleichung

$$(17) \quad y'' + 2p y' + q y = 0,$$

stellt die zur vollständigen Gl. (16) gehörige homogene Differentialgleichung dar, die durch das Hinzutreten der rechts vom Gleichheitszeichen stehenden (von den Erregerkräften herrührenden) Störungsglieder  $F_1(t)$  und  $F_2(t)$  zur vollständigen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung oder zur linearen Differentialgleichung „mit Absolutglied“ ergänzt wird, wobei das Absolutglied hier entweder aus einer der beiden Funktionen  $F_1(t)$  oder  $F_2(t)$  oder auch aus ihrer Summe  $F(t)$  gebildet sein kann.

Es bestehen somit neben den bereits angeschriebenen Gl. (16) u. (17) noch die beiden weiteren Formen

$$(18) \quad y'' + 2p y' + q y = \frac{P}{m} \cdot \sin \omega t = F_1(t)$$

$$(19) \quad y'' + 2p y' + q y = \frac{K}{m} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \alpha t = F_2(t).$$

Zur rechnerischen Beurteilung der im Brückentragwerk und im Schwingmodell auftretenden Vorgänge sind nun die allgemeinen Integrale der vorstehenden Differentialgleichungen aufzustellen und die erhaltenen Lösungen an Hand einiger kennzeichnender Belastungsfälle miteinander zu vergleichen.

Zur Integration der Gl. (16) selbst ist zu bemerken, daß die allgemeinen Integrale der homogenen Gl. (17) und der Differentialgleichung (18), die bloß ein einziges, einer einfach harmonischen Kraft entsprechendes „Störungsglied“  $F_1(t)$  enthält, seit langem bekannt sind und — wie bereits eingangs angedeutet — die Grundlage für die rechnerische Behandlung von Schwingungsaufgaben verschiedenster Art bilden. Demgegenüber sind jedoch die Differentialgleichungen (16) und (19), die ein doppelt harmonisches Störungsglied enthalten, nach Wissen des Verfassers zumindest im ingenieurwissenschaftlichen Schrifttum bisher noch nicht behandelt worden.

Die Integrale der Gl. (16) u. (19) müssen daher hier eigens entwickelt werden, wobei wir von den bereits bekannten Integralen der Gl. (17) u. (18) ausgehen wollen.

II. Integration der ein einfach harmonisches Störungsglied enthaltenden Differentialgleichung.

Um die Integration der Differentialgleichung mit doppelt harmonischem Störungsglied verständlich zu machen und den Vergleich der neuen Formeln mit den bereits in Gebrauch stehenden zu ermöglichen,

ist es nötig, die Entwicklung des Integrals der bloß ein einfach harmonisches Störungsglied enthaltenden Differentialgleichung (18) in aller Kürze anzugeben. Hierbei sollen auch einige wichtige Zwischen- und Endergebnisse des allgemeinen Rechnungsganges in einer gegenüber den Gepflogenheiten der klassischen Schwingungslehre noch etwas vereinfachten Form dargestellt werden.

Sind  $y_1$  und  $y_2$  zwei Teilintegrale der homogenen Differentialgleichung (17) und ist

$$(20) \quad D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

die aus ihnen gebildete Determinante, so ergibt sich das Integral der Differentialgleichung (18) nach dem Verfahren der Abwandlung der Unveränderlichen zunächst in der allgemeinen Form:

$$(21) \quad y = C' y_1 + C'' y_2 - y_1 \int \frac{F(t) y_2 dt}{D} + y_2 \int \frac{F(t) y_1 dt}{D}.$$

Werden für  $y_1$  und  $y_2$  die beiden die Differentialgleichung (17) befriedigenden Funktionen

$$(22) \quad y_1 = e^{z_1 t} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{z_2 t}$$

angenommen<sup>3)</sup>, wobei

$$(23) \quad z_1 = -p + \sqrt{p^2 - q} \quad z_2 = -p - \sqrt{p^2 - q}$$

die beiden Lösungen der zur homogenen Differentialgleichung (12) gehörigen kennzeichnenden Gleichung

$$(24) \quad z^2 + 2p z + q = 0$$

sind, so wird mit  $F = F_1(t) = P \cdot \sin \omega t$  und nach Ausrechnung der Determinante der Gl. (20) mit den sich aus Gl. (22) u. (23) ergebenden allgemeinen Werten:

$$(25) \quad y = \frac{C' e^{z_1 t} + C'' e^{z_2 t}}{(y)} - \frac{P}{m(z_2 - z_1)} \left[ \frac{e^{z_1 t} \int e^{-z_1 t} \cdot \sin \omega t dt}{J_1} - e^{z_2 t} \int e^{-z_2 t} \cdot \sin \omega t dt \right] / J_2$$

Ist  $p^2 < q$ , dann erscheinen  $z_1$  und  $z_2$  in komplexer Form, und es lassen sich, wenn

$$(26) \quad \begin{cases} \sqrt{p^2 - q} = i \sqrt{q - p^2} = i \nu & \text{oder} \\ \nu = \sqrt{q - p^2} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \frac{1}{m} \sqrt{m c - \frac{b^2}{4}} \end{cases}$$

gesetzt wird, die beiden ersten Glieder der Gl. (25) mit Hilfe der Beziehungen

$$(27) \quad e^{+i\nu t} = \cos \nu t + i \cdot \sin \nu t \quad e^{-i\nu t} = \cos \nu t - i \cdot \sin \nu t$$

umgestalten in

$$(28) \quad (y) = C' e^{z_1 t} + C'' e^{z_2 t} = e^{-pt} (A_0 \cdot \cos \nu t + B_0 \cdot \sin \nu t),$$

wobei die in Gl. (27) vorkommende imaginäre Einheit, wie ausdrücklich bemerkt sei, eine rein rechnungstechnische Bedeutung hat und keineswegs zu imaginären Ergebnissen führt.

In Gl. (28) ist die durch die Schwingmasse  $m$ , den Federfestwert  $c$  und die Eigenkreisfrequenz  $\nu$  bestimmte, von der harmonischen Erregerkraft oder der Störungsfunktion  $F_1(t) = P \cdot \sin \omega t$  jedoch unabhängige Eigenschwingung als Summe zweier synchronen Einzelschwingungen dargestellt. Hierbei sind die Schwingweiten  $A_0$  und  $B_0$  als Unveränderliche der Integration aus den Anfangsbedingungen der jeweilig vorliegenden Schwingungsaufgabe zu ermitteln.

Werden die beiden durch  $A_0$  und  $B_0$  gekennzeichneten Teilschwingungen in eine einzige Gesamtschwingung zusammengefaßt, so ergibt sich mit

$$(29) \quad W_0 = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} = C_0 \quad \text{und}$$

$$(30) \quad \frac{A_0}{B_0} = \text{tg } \varphi_0$$

der für die praktische Auswertung geeigneter, allgemein übliche Ausdruck:

$$(31) \quad \boxed{(y) = e^{-pt} C_0 \cdot \sin(\nu t + \varphi_0)}$$

in dem an Stelle der beiden Integrationsfestwerte  $A_0$  und  $B_0$  die Gesamtschwingweite  $C_0$  und der Winkel  $\varphi_0$  der Gangverschiebung als rechnerisch gleichwertige Größen getreten sind.

Für den mit  $[y]$  bezeichneten zweiten Teil der Gl. (25) erhält man nach Auswertung der Integrale  $J_1$  und  $J_2$  schließlich die Ordinate der erzwungenen Schwingung

$$(32) \quad [y] = C_1 \cdot \sin(\omega t - \varphi_1),$$

<sup>3)</sup>  $z_1$  und  $z_2$  bedeuten selbstredend nicht die im einschlägigen Schrifttum oftmals mit dem Buchstaben  $Z$  bezeichnete „Verstimmung“.



wobei die Schwingweite  $C_1$  durch

$$(33) \quad C_1 = \frac{P}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{P}{W_1}$$

und der Winkel  $\varphi_1$  der Gangverschiebung durch

$$(34) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b\omega}{c - m\omega^2}$$

bestimmt ist.

Aus der Summe der Gl. (31) u. (32) erhalten wir dann das den rechnerischen Grundstock der sogenannten klassischen Schwingungslehre bildende allgemeine Integral:

$$(35) \quad y = \frac{e^{-\nu t} C_0 \cdot \sin(\nu t + \varphi_0)}{\text{Eigenschwingung } S_0} + \frac{C_1 \cdot \sin(\omega t - \varphi_1)}{\text{Erzwungene Schwingung } S_1}$$

das man bei gedanklicher Zusammenfassung aller Werte ( $y$ ),  $[y]$  und  $y$  durch die Buchstaben  $S_0$ ,  $S_1$  und  $S$  auch sinnbildlich kurz schreiben kann:

$$(36) \quad S = S_0 + S_1.$$

In Gl. (35) sind die beiden Glieder  $S_0$  und  $S_1$  trotz ihres ähnlichen Aussehens rechnerisch voneinander verschieden. Abgesehen von der im ersten Glied vorangestellten  $e$ -Potenz stellen die Größen  $C_0$  und  $\varphi_0$  die beiden notwendigen und hinreichenden, erst aus den jeweiligen Anfangsbedingungen zu ermittelnden (also bis dahin willkürlichen) Unveränderlichen der Integration der gegebenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung dar, während die Größen  $C_1$  und  $\varphi_1$  schon durch die Bestimmungsstücke  $P$ ,  $c$ ,  $m$  und  $b$  der Aufgabe von Haus aus festgelegt, also von den Anfangsbedingungen unabhängig sind.

Da die begriffliche Bedeutung der soeben genannten Unveränderlichen in den weiteren Entwicklungen eine wichtige Rolle spielt, seien die Größen  $C_1$  und  $\varphi_1$  zum Unterschied von den willkürlichen Unveränderlichen  $C_0$  und  $\varphi_0$  hier kurz als „Zwangsfestwerte“ bezeichnet.

Die beiden willkürlichen Unveränderlichen  $C_0$  und  $\varphi_0$  ergeben sich aus der am Beginn der Bewegung vorhandenen Anfangsschwingzahl  $\omega_0$  und der zugehörigen Anfangsgeschwindigkeit  $y_0'$  wie folgt:

$$(37) \quad C_0 = \sqrt{\frac{(y_0 + C_1 \cdot \sin \varphi_1)^2}{A_0^2} + \frac{1}{\nu^2} [y_0' + p(y_0 + C_1 \cdot \sin \varphi_1) - C_1 \omega \cdot \cos \varphi_1]^2}{B_0^2}$$

$$(38) \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\frac{A_0}{(y_0 + C_1 \cdot \sin \varphi_1)}}{\frac{1}{\nu} [y_0' + p(y_0 + C_1 \cdot \sin \varphi_1) - C_1 \omega \cdot \cos \varphi_1]} \cdot \frac{1}{B_0}$$

Durch Gl. (33) bis (36) ist jede von einer einfach harmonischen Erregerkraft hervorgerufene Schwingung einer Einzelmasse  $m$  bei Voraussetzung linearer Dämpfung  $b$  und linearer Rückstellkraft  $c$   $y$  rechnerisch bestimmt. Dabei ergibt sich aus der Erregerschwingung  $E$  an erster Stelle die erzwungene Schwingung  $S_1$ , deren Hauptbestimmungsstücke  $C_1$  und  $\varphi_1$  durch die Gl. (33) u. (34) als eindeutige Abhängige der gegebenen Größen  $P$ ,  $c$ ,  $m$ ,  $b$ ,  $\omega$  allein festgelegt sind, ohne daß die Anfangsbedingungen  $y = y_0$ ,  $y' = y_0'$  in Frage kommen. Diese treten vielmehr erst bei der Berechnung der beiden wirklichen Unveränderlichen der Integration  $C_0$ ,  $\varphi_0$  in den Formelzeichen der Gl. (37) u. (38) auf, durch die die Eigenschwingung  $S_0$  bestimmt ist.

Aus den beiden Teilschwingungen  $S_1$  und  $S_0$  setzt sich dann die Gesamtschwingung  $S$  zusammen. Bei der tatsächlichen Auswertung eines beliebigen Schwingungsvorganges ist demnach — zum Unterschied von der rechnerischen Entwicklung, bei der die Eigenschwingung in Gl. (35) rechts an erster Stelle steht — die Reihenfolge einzuhalten:

Erregerschwingung  $E \rightarrow$  erzwungene Schwingung  $S_1 \rightarrow$  Eigenschwingung  $S_0 \rightarrow$  Gesamtschwingung  $S$ .

Befindet sich die Schwingmasse  $m$  — was häufig der Fall ist — zu Beginn der Wirkung der Erregerkraft in Ruhe, so lauten die Anfangsbedingungen  $y_0 = 0$  und  $y_0' = 0$ , wodurch sich eine wesentliche Vereinfachung und große Übersichtlichkeit der allgemeinen und der zahlenmäßigen Berechnung ergibt.

Während die von den Anfangsbedingungen unabhängigen Ausdrücke für die erzwungene Schwingung  $S_1$  dieselben bleiben wie früher, lassen sich jene für die beiden Hauptfestwerte  $C_0$ ,  $\varphi_0$  der Eigenschwingung  $S_0$  auf höchst einfache Formeln bringen, aus denen die Zusammenhänge zwischen den beiden Teilschwingungen sowie die Entwicklung der Eigenschwingung  $S_0$  und damit auch der Aufbau der Gesamtschwingung  $S$  aus den unmittelbar gegebenen Größen  $P$ ,  $m$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $\omega$  in augenfälliger Weise zu erkennen sind. Denken wir uns die Eigenkreisfrequenz  $\nu$  aus

Gl. (26) und die beiden Zwangsfestwerte  $C_1$ ,  $\varphi_1$  der erzwungenen Schwingung  $S_1$  aus Gl. (33) u. (34) berechnet, so ergeben sich aus Gl. (37) u. (38) für  $y_0 = 0$  und  $y_0' = 0$  zwischen den beiden Hauptfestwerten  $C_1$ ,  $\varphi_1$  der erzwungenen Schwingung  $S_1$  und den beiden die Eigenschwingung  $S_0$  bestimmenden wirklichen Integrationsfestwerten  $C_0$ ,  $\varphi_0$  sowie zwischen  $C_0$ ,  $\varphi_0$  und den gegebenen Größen die sehr leicht zu überblickenden Beziehungen:

$$(39) \quad C_0 = \left(\frac{\omega}{\nu}\right) C_1 = \frac{2m\omega}{\sqrt{4mc - b^2}} \cdot C_1 = \frac{2Pm\omega}{\sqrt{4mc - b^2} \sqrt{(c - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$(40) \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\nu \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{p \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 - \omega} = \frac{2mb\nu}{b^2 - 2m(c - m\omega^2)},$$

die sich im Verlauf der weiteren Untersuchungen als sehr nützlich erweisen werden.

### III. Der Fall des Mitschwingens (Resonanzfall).

Für die Beurteilung der allenfalls zu befürchtenden schädlichen Wirkungen der Schwingungsvorgänge an Maschinen oder Bauwerken ist bekanntlich jene Erregerkreisfrequenz  $\omega_k$  maßgebend, bei der Mitschwingen (Resonanz) eintritt und bei der die Schwingungsausschläge zu ihrem größtmöglichen, baulich allenfalls gefährlichen Wert aufgeschaukelt werden könnten. Wie aus der im Absatz II vorgenommenen Integration der Schwingungs-Differentialgleichung hervorgeht, läßt sich das augenfälligerweise durch Häufung der Erregerantriebe entstehende Aufschaukeln rechnerisch nicht unmittelbar beschreiben, weil die durch den Einheitskreis gegebenen Kreisfunktionen Sinus und Cosinus zahlenmäßig begrenzt sind. Es kann vielmehr nur auf dem Umwege dargestellt werden, daß die beiden (gedachten) Teilschwingungen  $S_1$  und  $S_0$  miteinander ins Spiel treten, als deren Summe (oder Unterschied) die wirkliche Gesamtschwingung  $S$  erscheint. Wird die Schwingmasse  $m$  durch die Erregerkraft aus der Ruhelage herausgehoben, so müssen sich die Schwingungsordinaten (Elongationen) am Beginn der Bewegung (das ist zur Zeit  $t = 0$ ) tilgen, also schon aus rein mechanischen Gründen einander genau negativ gleich sein, wodurch eine Nachprüfung der Rechnung möglich wird.

Da die für das Aufschaukeln maßgebende Schwingweite  $C_1$  eine durch die gegebenen Werte  $P$ ,  $m$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $\omega$  festgelegte Größe ist, muß die erzwungene Schwingung  $S_1$  aus lauter einander völlig gleichenden Sinuswellen bestehen, während die mit der  $e$ -Potenz  $e^{-\nu t}$  verbundene größte Schwingweite  $C_0$  der Eigenschwingung  $S_0$  Sinuswellen mit asymptotisch abnehmender Pfeilhöhe liefert. Das in Wirklichkeit einfach durch rhythmische Häufung der Erregerantriebe entstehende Aufschaukeln kommt somit rechnerisch oder zeichnerisch durch die asymptotische Verringerung der Eigenschwingung  $S_0$  gegenüber der starr bleibenden erzwungenen Schwingung  $S_1$  zustande, also auf mittelbarem Wege, worin eine gewisse begriffliche Schwierigkeit liegt.

Rechnerisch ist der Fall des Mitschwingens (der Resonanzfall) auszugeweiht durch die nachstehenden, für die später anzustellenden Vergleiche wichtigen Beziehungen gekennzeichnet.

Die kritische Erregerkreisfrequenz  $\omega_k$ , bei der der Größtwert der erzwungenen Schwingweite  $C_1$  und damit auch die größtmögliche Aufschaukelung eintritt, ergibt sich aus der Differentiation der Gl. (33) mit

$$(41) \quad \omega_k = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} = \frac{1}{m} \sqrt{mc - \frac{b^2}{2}} = \sqrt{q - 2p^2},$$

während der Größtwert der Schwingweite

$$(42) \quad C_{1k} = \max C_1 = \frac{2mP}{b\sqrt{4mc - b^2}}$$

beträgt und der zugehörige Winkel  $\varphi_{1k}$  der Gangverschiebung (der Phasenwinkel) bestimmt ist durch

$$(43) \quad \operatorname{tg} \varphi_{1k} = \frac{\sqrt{4mc - 2b^2}}{b}.$$

Hierzu ergeben sich aus Gl. (39) u. (40) sowie mit Bezug auf Gl. (26) u. (41) für die Eigenschwingung  $S_0$  die Festwerte:

$$(44) \quad C_{0k} = \left(\frac{\omega_k}{\nu}\right) C_1 = \sqrt{\frac{4mc - 2b^2}{4mc - b^2}} \cdot C_1 = \frac{2mP\sqrt{4mc - 2b^2}}{b(4mc - b^2)}$$

$$(45) \quad \operatorname{tg} \varphi_{0k} = \frac{2mb\nu}{b^2 - 2m(c - m\omega_k^2)} = +\infty \quad \text{und} \quad \varphi_{0k} = \frac{\pi}{2}.$$

Diese, den Fall des Mitschwingens (Resonanzfall) kennzeichnende Hauptbedingung ist der rechnerische Ausdruck für die schon aus rein mechanischen Gründen oder aus der bloßen Anschauung zu gewinnende Erkenntnis, wonach das Aufschaukeln offenbar dann am raschesten zustande kommt, wenn die Erregerantriebe immer gerade in jenem Augenblick mit voller Kraft einsetzen, in dem die Eigenschwingung ihren jeweils größten Ausschlag erreicht hat und die Richtung wechselt. In



der zeichnerischen Darstellung müssen somit, weil der Gangunterschied  $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$  beträgt, die Wellenberge der Erregerlinie genau mit den Wellentälern der Eigenschwingungslinie zusammenfallen und umgekehrt.

Ist die Dämpfung  $b$  sehr klein, was bei vielen praktischen Anwendungen der Schwingungslehre, insbesondere im Brückenbau, zutrifft, so ergeben sich für die rechnerische Beschreibung des Mitschwingens wesentliche Vereinfachungen, die jedoch aus den vorstehenden strengen Ergebnissen entwickelt werden müssen, um nicht etwa durch gewohnheitsmäßigen Gebrauch als allgemeingültig angesehen zu werden.

Zunächst erhält man aus

$$(46) \quad \nu^2 - \omega_k^2 = (\nu + \omega_k)(\nu - \omega_k) = \left(\frac{c}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right) - \left(\frac{c}{m} - \frac{b^2}{2m^2}\right) = \frac{b^2}{4m^2}$$

Weil für kleine Werte von  $b$

$$(47) \quad \nu + \omega_k \approx 2\nu \approx 2\omega_k$$

beschrieben werden kann, also

$$(48) \quad \nu - \omega_k = \frac{b^2}{4m^2(\nu + \omega_k)} = \frac{b^2}{8m^2\nu} \approx \frac{b^2}{8m^2\omega_k}$$

so erhält man zur Berechnung der kritischen Kreisfrequenz  $\omega_k$  aus der Eigenkreisfrequenz die sehr einfache und ausreichend scharfe Näherungsformel

$$(49) \quad \omega_k \approx \nu - \frac{b^2}{8m^2\nu}$$

aus der beispielsweise mit den unseren Untersuchungen zugrunde liegenden besonderen Zahlenwerten  $\nu = 19,178\ 666$ ,  $m = 0,271\ 832$ ,  $b = 0,125\ 183$  sich ergibt:

$$(50) \quad \omega_k = 19,178\ 666 - 0,001\ 382 = 19,177\ 284 \approx \nu$$

Wie die Praxis gezeigt hat, ergibt sich bei Brückenschwingungen stets eine ähnlich gute Übereinstimmung der Werte  $\omega_k$  und  $\nu$ . Überdies dürfen die Dämpfungsglieder erfahrungsgemäß — ohne der erforderlichen Schärfe der Rechnung Abbruch zu tun — überall dort weggelassen werden, wo sie zu anderen bedeutend größeren Werten zugezählt oder von ihnen abgezogen werden, wie dies z. B. unter dem Wurzelzeichen der Fall ist. Es kann daher zumeist einfach

$$(51) \quad \omega_k \approx \nu = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

gesetzt werden, wodurch die vorstehend in aller Strenge entwickelten Formeln in wesentlich vereinfachter Gestalt erscheinen, und zwar wird im Fall des Mitschwingens (Resonanzfall) aus Gl. (42) bis (45):

$$(52) \quad C_{1k} = \max C_1 = \frac{2mP}{b\sqrt{4mc}} = \frac{P}{b\sqrt{\frac{c}{m}}} = \frac{P}{b\nu}$$

$$(53) \quad \operatorname{tg} \varphi_{1k} = \frac{2\sqrt{mc}}{b} \quad (\text{wird sehr groß, daher } \varphi_{1k} \approx \frac{\pi}{2})$$

$$(54) \quad C_{0k} = \left(\frac{\nu}{\nu}\right) C_{1k} = C_{1k} = \frac{P}{b\nu}$$

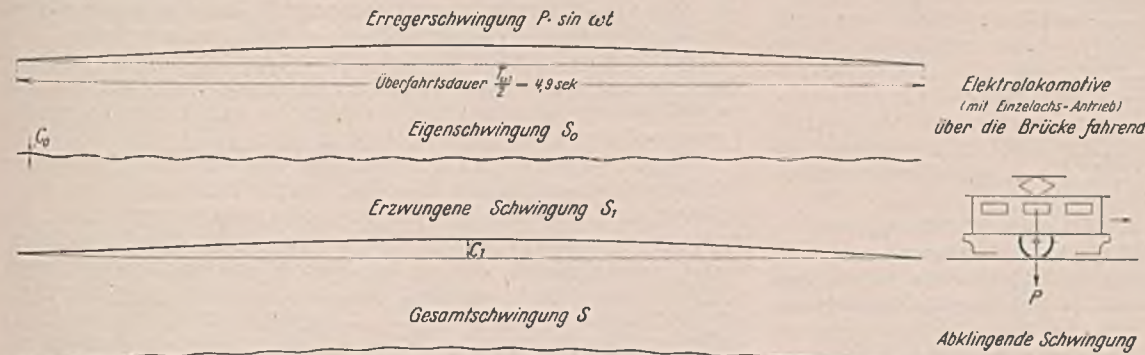


Abb. 2.

Daher muß auch wegen der am Beginn der Bewegung erforderlichen Tilgung der Anfangsordinaten aus rein mechanischen Gründen

$$(55) \quad \operatorname{tg} \varphi_{0k} = \frac{2mb\nu}{b^2 - 2m(c - m\nu^2)} = \frac{2\sqrt{mc}}{b} = \operatorname{tg} \varphi_{1k} \pm \infty$$

sein, d. h. die Hauptbedingung der Gl. (45) für das Mitschwingen ist infolge der Annahme der Gl. (51) rechnerisch nicht genau erfüllt. Diese Unschärfe hat jedoch nichts zu bedeuten, weil ja der Winkel  $\varphi_{0k}$

der Gangverschiebung bei Mitschwingen  $\frac{\pi}{2}$  betragen muß, also gar nicht berechnet zu werden braucht, sondern einfach mit  $\frac{\pi}{2}$  anzunehmen ist,

während  $\varphi_{1k}$  genügend genau aus Gl. (53) folgt und die durch Gl. (54) ausgedrückte, in Wirklichkeit nicht genau bestehende Gleichheit der Schwingweiten  $C_{1k}$  und  $C_{0k}$  zumeist bedeutungslos ist.

Wird  $b = 0$ , so ergibt sich der zwar nur theoretisch denkbare, praktisch jedoch in mehrfacher Hinsicht als Richtlinie nützliche Grenzfall des Mitschwingens, bei dem die beiden Schwingweiten  $C_{1k}$  und  $C_{0k}$  infolge strenger Gültigkeit der Beziehung der Gl. (54) einander genau gleich und, da  $b = 0$ , gleichzeitig unendlich groß werden. Dabei ergeben sich die Gangwinkel aus Gl. (53) u. (55) mit genau  $\frac{\pi}{2}$ , wodurch die mechanische Bedingung, daß sich die Ordinaten für  $t = 0$  tilgen müssen, auch im Grenzfalle trotz der theoretisch unendlich großen Schwingweiten in aller Strenge erfüllt ist.

Mit Hilfe der bisher entwickelten Formeln lassen sich bereits zwei einfache und wichtige Belastungsfälle erledigen, von denen aus dann der verwickeltere Vorgang der gleichzeitigen Wanderlast- und Triebkraftwirkung zu behandeln sein wird.

#### D. Zwei praktische Beispiele.

Als Beispiele für den mittels der Integralgleichung (35) anzustellenden Vergleich der Triebkraftwirkung mit der alleinigen Wirkung der Wanderlast wählen wir zwei vereinfacht gedachte Belastungsfälle, bei denen der Unterschied der beiden dynamischen Last- oder Kraftwirkungen schon der bloßen Anschauung nach besonders deutlich zu erscheinen verspricht.

Die in Wirklichkeit auftretenden dynamischen Beanspruchungen werden dann innerhalb der durch die Rechnung beschriebenen Grenzfälle liegen.

Zu den Belastungsfällen sei noch bemerkt, daß wir uns, wie das schon in Abb. 1 angedeutet ist, auch weiterhin die Achslasten der mit dem kleinstmöglichen Radstande angenommenen Dampf- oder Elektrolokomotive in eine einzige mittlere Achse vereinigt denken, d. h., daß wir die Lokomotiven als einen „Elnachswagen“ von 100 t Achsdruck auffassen.

#### 1. Überfahrt einer Elektrolokomotive mit Einzelachs-antrieb.

Fährt eine Elektrolokomotive, deren Triebwerk keine Fliehkkräfte auf die Schienen überträgt, mit gleichmäßiger Geschwindigkeit  $V$  [km/h] oder  $v$  [m/sek] über die Brücke, so wird bei Annahme geschweißter Schienenstöße und unter Außerachtlassung des Federspiels als Erregerkraftlinie nur die sinusförmige Einflußlinie in Betracht kommen. Die Überfahrt der Lokomotive entspricht dann im Ersatzgebilde (im Schwingmodell) einer gleichförmigen Drehung der auf der Welle 1 sitzenden Kurbel um  $180^\circ$ . Die Winkelgeschwindigkeit dieser verhältnismäßig sehr langsamen Drehung ist nach Gl. (6)  $\omega = \frac{\pi v}{l}$ , wobei die Welle 1 durch Stillhalten der auf der Welle 2 sitzenden Kurbelscheibe als fest gelagert zu denken ist, also keine Wippbewegung ausführt.

Die durch die langsam wirkende Erregerkraft  $P \cdot \sin \omega t$  hervorgerufene Schwingung  $S$  der in Brückenmitte vereinigt gedachten Trägermasse  $m$  ist in Abb. 2 dargestellt, in der, wie in den übrigen Bildern, die den jeweiligen Durchbiegungen (in Trägermitte) entsprechenden Schwingweiten  $y$  und  $C$  in üblicher Weise von einer waagerechten Nulllinie aus als nach oben hin positiv gezählte Ordinaten aufgetragen sind.

Aus der zeichnerischen Darstellung (Abb. 2) und den zugehörigen Werten der Zahlentafel auf S. 339, Spalte I, ist ohne weiteres zu ersehen, daß die für die praktische Beurteilung des Schwingungsvorgangs maßgebende, in Wirklichkeit nach unten hin gerichtete größte Gesamtschwingweite  $\max y_{\text{dyn}}$  von der größten statischen

Durchbiegung  $\max y_{\text{stat}} = \frac{P}{c} = \frac{100\ \text{t}}{100\ \text{t/cm}} = 1\ \text{cm}$  nur ganz unmerklich verschieden, das ist nur um einen praktisch belanglosen Bruchteil größer ist als die statische Durchbiegung.

Die als Kennziffer für die Beurteilung der dynamischen Lastwirkung gebräuchliche Verhältniszahl zwischen der größten dynamischen und der größten statischen Durchbiegung, oder auch kurz die „Vergrößerung“ genannt, die wir hier zum Unterschied von der Fahrgeschwindigkeit  $V$  mit  $(V)$  bezeichnen wollen, ist

$$(56) \quad (V) = \frac{\max y_{\text{dyn}}}{\max y_{\text{stat}}} = \frac{\max y_{\text{dyn}}}{\frac{P}{c}}$$



Sie wird daher für den vorliegenden Belastungsfall nur unmerklich größer als 1 werden, d. h. die bei der Überfahrt der Lokomotive entstehenden Beanspruchungen des Baustoffes sind, praktisch gesprochen, nahezu die gleichen, wie wenn die Lokomotive als ruhende Last in Brückenmitte wirken würde.

Die geringe, hier allerdings aus einem sehr vereinfachten Belastungsfall errechnete dynamische Wirkung der Wanderlast  $P$  ist übrigens schon aus einem bloßen Blick auf die erste Formel der Gl. (33) zu erkennen. Aus dieser Formel ergibt sich nämlich mit den in der vorliegenden Untersuchung angenommenen besonderen Werten  $c$ ,  $m$  und  $b$  (die im weiten Spielraum der möglichen Fälle als Durchschnittszahlen gelten können) für die Schwingweite  $C_1$  der erzwungenen Schwingung  $S_1$  bei kleinen Kreisschwingzahlen  $\omega$  der Erregerkraft  $P \cdot \sin \omega t$  stets ein nur wenig über  $\frac{P}{c}$  liegender Wert, weil die im Nenner (unter der Quadratwurzel) stehenden Glieder  $m\omega^2$  und  $b^2\omega^2$  gegenüber dem Betrag des Federfestwertes  $c$  wenig Einfluß haben.

Da nun die größtmögliche — theoretisch nach unendlich lang andauernder Aufschaukelung entstehende — Schwingweite  $\max y_{\text{dyn}}$  durch den Größtwert von  $C_1$  begrenzt, also im vorliegenden Falle  $\max y_{\text{dyn}} = C_1 = 1,001\ 113$  cm ist, könnte — auch wenn die Aufschaukelung überhaupt zustande käme — durch die Überfahrt der Lokomotive keine praktisch in Betracht kommende, das ist wesentlich über 1 liegende Vergrößerung ( $V$ ) entstehen, weil die aus Gl. (6) zu berechnende Kreisschwingzahl  $\omega$  der Erregerkraft  $P$  für alle praktisch vorkommenden Brückenabmessungen und Fahrgeschwindigkeiten  $V$  stets weit unterhalb der durch die Brückenmasse  $m$  und den Federfestwert  $c$  bestimmten Eigenschwingzahl  $\nu$  liegen muß.

Die Frage, ob durch die Wirkung einer einzelnen während der Überfahrt unveränderlich bleibenden Wanderlast  $P$  Mitschwingen eintreten kann, das ist eine genaue oder zumindest angenäherte Übereinstimmung der Erregerkreisschwingzahl  $\omega$  mit der Eigenkreisschwingzahl  $\nu$ , ist daher von Haus aus zu verneinen, was auch aus den nachstehenden überschläglichen Berechnungen ohne weiteres entnommen werden kann.

Mit den für unsere Brücke geltenden Werten  $l = 60$  m und  $\nu = 19,18$  müßte die Überfahrtgeschwindigkeit

$$(57) \quad v = \frac{\omega l}{\pi} = \frac{\nu l}{\pi} = \frac{19,18 \cdot 60}{3,1416} = 366 \text{ m/sek oder } 1319 \text{ km/h}$$

betragen, um Mitschwingen zu erzeugen, was jedoch in Anbetracht der ungewöhnlich hohen Geschwindigkeit praktisch auch für die Zukunft als ausgeschlossen anzusehen ist.

Man könnte einwenden, daß etwa bei einer sehr kurzen Brücke vielleicht doch Mitschwingen möglich wäre.

Nehmen wir an, daß eine solche Brücke die gewiß nicht zu hoch gegriffene Eigenkreisschwingzahl  $\nu = 30$  habe und von der Einzellast mit einer den „fliegenden Hamburger“ noch etwas übertreffenden Geschwindigkeit  $v = 60$  m/sek = 216 km/h befahren würde, so ergäbe sich die zugehörige Brückenlänge mit

$$(58) \quad l = \frac{\pi v}{\nu} = \frac{3,1416 \cdot 60}{30} = 6,28 \text{ m,}$$

wobei die Überfahrtszeit

$$(59) \quad t = \frac{l}{v} = \frac{6,28}{60} = 0,1 \text{ sek}$$

so kurz wäre, daß auf sie

$$(60) \quad n = \frac{l\nu}{2\pi v} = \frac{6,28 \cdot 30}{2 \cdot 3,1416 \cdot 60} = 0,5$$

Schwingungen, das ist bloß eine halbe Schwingung entfielen, innerhalb welcher ein Aufschaukeln selbstredend nicht eintreten kann.

Durch die zeichnerische Darstellung (Abb. 2) und die zugehörigen Werte der Zahlentafel wird die vorstehende Beschreibung des Schwingungsvorgangs bestätigt.

Wie zu erwarten war, ist die Linie der erzwungenen Schwingung eine der Erregerlinie nahezu gleichende Sinuslinie, die der Erregerlinie um den sehr kleinen Gangwinkel  $\varphi_1 = 0,000\ 802$  oder, im Zeitmaß ausgedrückt, um 0,001 25 Zeitsekunden nacheilt.

Daher werden alle dynamischen Durchbiegungen, also auch ihr durch die Schwingweite  $C_1 = 1,001\ 113$  der erzwungenen Schwingung ausgedrückter Höchstwert gegenüber dem Überfahren der Einzellast  $P$  um 0,001 25 sek verspätet eintreten, das ist, praktisch gesprochen, fast gleichzeitig mit der Lastwirkung.

Daß die Schwingweite  $C_0$  der Eigenschwingung hier sehr klein ausfallen muß, ist schon aus rein mechanischen Gründen, auch ohne Rechnung vorauszusehen. Sie ist nämlich offenbar von der Geschwindigkeit abhängig, mit der die Schwingmasse (oder die Brücke) aus ihrer Ruhelage herausgehoben wird. Geschieht dies sehr langsam, so kann sich die Feder infolge ihrer kurzen Eigenschwingungsdauer nur mit einem sehr geringen Arbeitsvermögen aufladen, weshalb die größte

Ordinate (Schwingweite) der den oben besprochenen Austausch zwischen potentieller und kinetischer Energie darstellenden Auftragung äußerst klein bleiben muß. In der Tat ergibt sich aus Gl. (37) die sehr kleine Eigenschwingweite mit  $C_0 = 0,033\ 370$ , die rechnerisch das beim Einfahren der Lokomotive auftretende und nach beendeter Überfahrt rasch abklingende „Erzittern“ der Brücke zum Ausdruck bringt, worin im vorliegenden Falle der einzige, aber praktisch belanglose Unterschied der dynamischen Beanspruchung gegenüber der rein statischen liegt.

Wenn nun in Wirklichkeit der Eindruck entsteht, als würden bei der Überfahrt einer Elektrolokomotive nicht viel weniger Erschütterungen auftreten als bei einer Dampflokomotive, so hat dies, abgesehen von den zahlreichen hier außer acht gelassenen Nebenwirkungen, vor allem darin seinen Grund, daß das Lokomotivgewicht in beiden Fällen ja nicht als zusammengefaßte Einzellast einfährt, sondern in mehreren Achsen nacheinander, aus deren Zusammenwirken sich im allgemeinen eine größere Gesamtschwingweite ergibt als die hier berechnete.

Ebenso können die aus dem Federspiel der Lokomotive entstehenden Koppelungserscheinungen das Schwingungsbild beeinflussen und den Unterschied zwischen der Wirkung der beiden Lokomotivgattungen stark herabmindern.

## II. Dampflokomotive in Brückenmitte, mit Räderschleifen anfahrend.

Ein gegenüber dem oben erledigten Belastungsfall wesentlich verändertes Bild ergibt sich, wenn eine Dampflokomotive in Brückenmitte anfährt und Räderschleifen eintritt. Um der nun zu behandelnden Aufgabe Wirklichkeitssinn zu geben und mit dem bisherigen Gesamtgewicht  $G + P = 400$  t weiterrechnen zu können, wollen wir uns vorstellen, daß die in Abb. 3 (rechts) skizzierte Lokomotive entweder mittels eines Seiles festgehalten oder durch einige sehr leichte Plattformwagen, die gewissermaßen als verlängerter Zughaken dienen, mit schweren, außerhalb der Brücke stehenden Fahrzeugen gekuppelt sei. Bei der so am Anfahren behinderten Lokomotive kann dann tatsächlich Räderschleifen eintreten, und wir wollen im Zusammenhang mit dem vorangehenden Beispiel annehmen, daß dieses Räderschleifen gerade so lange anhalten soll, als die Überfahrtszeit der Elektrolokomotive bei der dem vorangehenden Belastungsfall zugrunde gelegten Geschwindigkeit  $V = 44$  km/h = 12,21 m/sek betragen hat. Demnach dauert das Räderschleifen 4,9 sek an.

Im Schwingmodell entspricht die Triebbradbewegung der dabei am Ort verbleibenden Lokomotive dem Festhalten der um die Welle 1 drehbaren Kurbel, während die auf die größte Hubhöhe  $\frac{K}{c}$  eingestellte Kurbelscheibe mit einer sekundlichen Drehzahl  $n_k = 3,05$  um die Welle 2 läuft.

Es ist somit die der Überfahrt der Einzellast  $P = 100$  t entsprechende langsame Kurbelbewegung ausgeschaltet, während die die größte Triebbradwirkung darstellende rasche Wippbewegung allein zum Ausdruck kommt. Die Lokomotive wirkt also wie eine in Brückenmitte aufgestellte Schwingmaschine und könnte als solche auch gedacht werden, wenn sie etwa mit Winden vom Geleise abgehoben wäre, wobei sich die Räder mit der dem Fall des Mitschwingens entsprechenden Drehzahl bewegen müßten, um die größtmögliche Aufschaukelung der Brücke zu verursachen.

Betrachten wir die zeichnerische Darstellung (Abb. 3) im Zusammenhang mit den zugehörigen Werten der Zahlentafel auf S. 339, Spalte II, so sind folgende Hauptmerkmale der durch das Anfahren der Lokomotive hervorgerufenen Schwingungsvorgänge zu erkennen.

Mit der dem Fall des Mitschwingens entsprechenden Erregerkreisschwingzahl, die wegen der 15 vollen, auf die Brückenlänge von 60 m entfallenden Triebbradumdrehungen gegenüber dem vorangehenden Beispiel  $\omega = 30$   $\nu = 19,18$  beträgt und nahezu gleich der Eigenschwingzahl  $\nu$  ist, ergibt sich, wie es bei Mitschwingen der Fall sein muß, zwischen der Erregerschwingung und der Eigenschwingung eine Gangverschiebung von genau 90°, während der Winkel der Gangverschiebung zwischen Erregerschwingung und erzwungener Schwingung nahezu ein rechter Winkel ist, wodurch die Vorbedingungen für das Aufschaukeln gegeben sind.

Die Schwingweite  $C_1$  der erzwungenen Schwingung wird, weil die zugehörigen Winkel der Gangverschiebung einander nahezu gleich sind, ebenfalls nahezu gleich der Schwingweite  $C_0$  der Eigenschwingung, und beide Schwingweiten werden, wie aus Gl. (42) u. (44) zu ersehen ist, sehr groß ausfallen. Dabei ist in den genannten Formeln sinngemäß statt  $P$   $K$  zu setzen.

Vergleichen wir nun den für die Beurteilung der dynamischen Wirkungen in erster Linie maßgebenden Wert der Schwingweite  $C_1 = 6,247$  zunächst mit der größten vom Lokomotivgewicht  $P = 100$  t verursachten statischen Durchbiegung

$$(61) \quad \max y_{P\text{stat}} = \frac{P}{c} = \frac{100 \text{ t}}{100 \text{ t/cm}} = 1 \text{ cm,}$$

so ergibt sich daraus die sehr beträchtliche Vergrößerung  $(V)_P = 6,247$ .



Denkt man sich die Triebkraft  $K = 15 \text{ t}$  als ruhende Last in Brückenmitte angreifend, so würde die zugehörige statische Durchbiegung nur

$$(62) \quad y_{K\text{stat}} = 0,15 y_{P\text{stat}} = 0,15 \text{ cm} = 1,5 \text{ mm}$$

betragen, wodurch sich die Vergrößerung auf  $(V)_K = 6,247 : 0,15 = 41,6$  erhöht. Durch diese Zahl ist die Wirkung einer regelmäßig wechselnden Kraft mechanisch am treffendsten gekennzeichnet, da ja eine in Brückenmitte aufgestellte Schwingmaschine unter den dem vorliegenden Beispiel zugrunde gelegten Annahmen eine solche Vergrößerung tatsächlich hervorzubringen würde.

Für die bau- und betriebstechnische Beurteilung der Anfahrwirkung auf der Brücke kommt jedoch nur die erstgenannte Vergrößerungszahl  $(V)_P$  in Frage, die theoretisch zwar erst nach unendlich langer Zeit zustande käme, praktisch aber doch angenähert verhältnismäßig bald erreicht werden kann. Wie nämlich aus der die Aufschaukelung bestimmenden

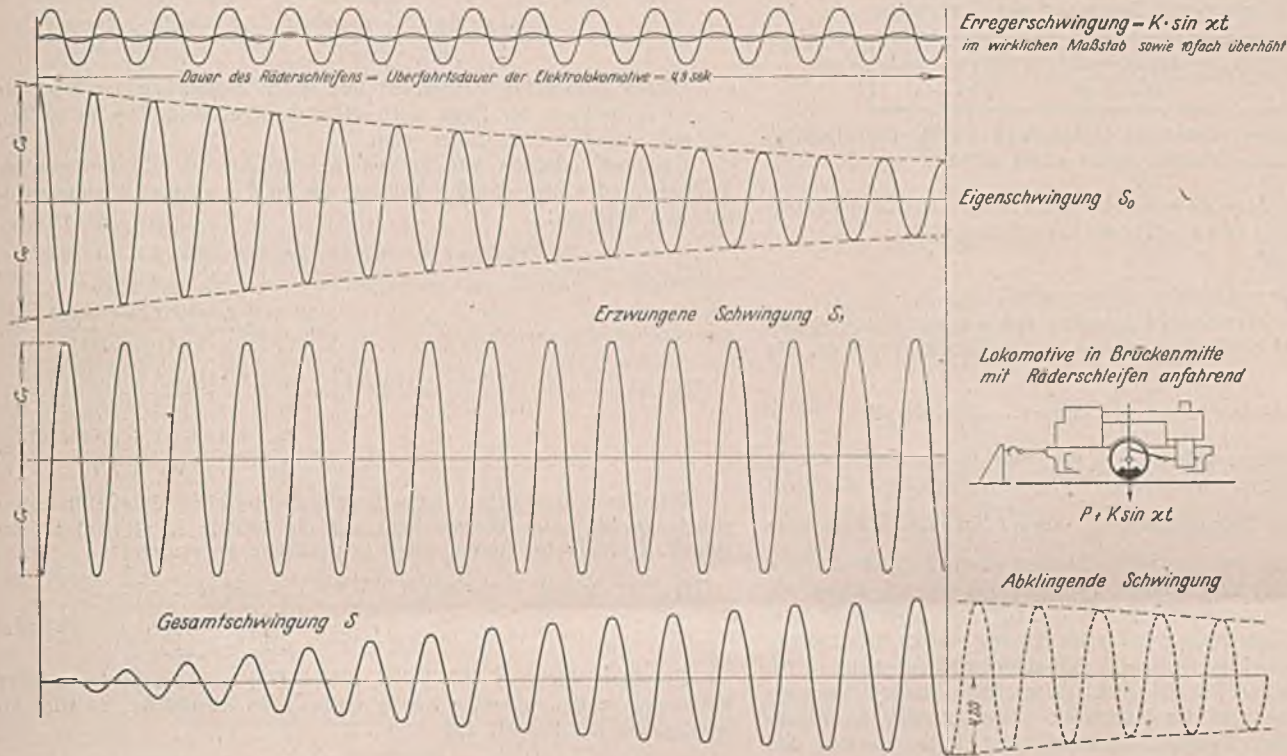


Abb. 3.

Eigenschwingungslinie (Abb. 3) zu ersehen ist, vermindert sich ihre Schwingweite während der mit 4,9 sek angenommenen Anfahrzeit bis auf 2,00 cm, wonach von der Linie der erzwungenen Schwingung  $S$  nach Beendigung des Anfahrvorgangs die aufgeschaukelte größte Ordinate  $y = -4,20 \text{ cm}$  verbleibt, der dann die immer kleiner werdenden Ordinaten der abklingenden Eigenschwingung folgen.

Nach 4,9 sek entstände somit eine Vergrößerung

$$(V)_P = 4,20 \quad \text{oder} \quad (V)_K = 28,00,$$

welche Werte nur 67 % der theoretisch errechneten ausmachen.

Würden die Anfahrversuche jedoch ungefähr doppelt so lange, das ist etwa 10 sek, dauern, was praktisch immerhin denkbar wäre, so hätte sich die Schwingweite der Eigenschwingung auf  $1/10$  ihres Anfangswertes herabgemindert und demgemäß jene der Gesamtschwingung bis auf  $9/10$  ihres durch  $C_1$  begrenzten Wertes erhöht, wodurch die Vergrößerungszahlen ebenfalls auf 90 % der theoretischen Höchstwerte, das ist auf

$$(V)_P = 5,62 \quad \text{und} \quad (V)_K = 37,44$$

anwachsen würden.

Beim Anfahren der Dampflokomotive ergeben sich somit rechnungsmäßig rd. 5- bis 6 mal so große Durchbiegungen als bei der Überfahrt einer gleich schweren Elektrolokomotive.

An die am Schluß des vorangehenden Abschnitts gemachten Bemerkungen anknüpfend, ist jedoch zu erwägen, daß die beiden soeben behandelten Belastungsarten der Brücke ja vereinfacht gedachte Grenzfälle darstellen, innerhalb derer die in Wirklichkeit zu erwartenden oder zu befürchtenden Beanspruchungen einzureihen sein werden. Dabei wird, wie es sich in der technischen Praxis vielfach als notwendig erweist, auch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeitsziffer gerechnet werden müssen, indem man annimmt, daß nicht alle ungünstigen Wirkungen in

ihrem theoretisch denkbaren Höchstmaß auf einmal zusammentreffen werden, woraus sich dann wirtschaftlich nicht mehr zu begründende Überbemessungen ergeben würden.

Im vorliegenden Falle kann angenommen werden, daß die wirklich auftretenden Beanspruchungen ungefähr in der Mitte zwischen den aus den beiden Beispielen errechneten Grenzwerten liegen, wobei die aus dem Anfahren der Lokomotive erwachsenden Höchstbeanspruchungen durch betriebstechnische Maßnahmen entweder vermeidbar oder doch zu mildern sein werden.

### E. Erzwungene Schwingungen mit doppelt harmonischer Erregung.

#### 1. Gleichzeitige Wirkung des Eigengewichts und der Triebkraft.

Lassen wir Eigengewicht und Triebkraft unter Berücksichtigung einer sinusförmig angenommenen Einflußlinie gleichzeitig auf die Brücke wirken, so erhalten wir den schon im Abschnitt B besprochenen

Belastungsfall, durch den die bei Lokomotiv-Einzelfahrten auftretenden Beanspruchungen in einer der Wirklichkeit sehr nahekommenen Weise erfaßt werden. Um diesen den eigentlichen Inhalt des vorliegenden Aufsatzes bildenden Belastungsfall rechnerisch in geschlossener Form und in einem Zuge — ohne Zerlegung in Stufen <sup>4)</sup> — behandeln zu können, ist es notwendig, den sehr reichhaltigen Formelschatz der Schwingungslehre durch die Auswertung eines bisher entweder mathematisch nicht beachteten oder in der Ingenieurmechanik nicht angewendeten Inte-

grals zu ergänzen. Während nämlich das in der Differentialgleichung (14) enthaltene einfach harmonische Störglied  $P \cdot \sin \omega t$  bei der im Abschnitt C erläuterten Lösung (durch Abwandlung der Unveränderlichen) die Integration einer Abhängigen erfordert, die aus dem Produkt der  $e$ -Potenz und bloß einer Kreiswinkelfunktion besteht, verlangt das neu hinzugekommene, doppelt harmonische Störglied  $K \cdot \sin \omega t \cdot \sin x t$  die Integration eines Produktes, das die  $e$ -Potenz und zwei Kreiswinkelfunktionen enthält.

Wie vorauszusehen ist, wird die Lösung der zuletzt genannten, im einschlägigen Schrifttum bisher nicht behandelten Aufgabe (nach dem Verfahren der teilweisen Integration) in verhältnismäßig einfacher Weise gelingen, wenn die Integration des aus den beiden Kreiswinkelfunktionen bestehenden Produktes einen Ausdruck ergibt, in dem diese Funktionen nicht miteinander vervielfältigt, sondern bloß zusammengezählt werden.

Wie aus den mathematischen Handbüchern <sup>5)</sup> zu entnehmen ist, haben die Integrale der drei aus je zwei Kreiswinkelfunktionen bestehenden Produkte tatsächlich diese sehr erwünschte Eigenschaft, womit der Lösungsweg vorgezeichnet ist. Um dem Leser den Einblick in den Gang der Rechnung zu erleichtern, wollen wir von den drei oben genannten, kurz als „doppelt harmonische Integrale“ zu bezeichnenden Ausdrücken das hier in Frage kommende Integral des Sinus-Produktes  $\sin \omega t \cdot \sin x t$  entwickeln, dessen Berechnung grundsätzlich auch für die Integration der beiden übrigen Produkte  $\sin \omega t \cdot \cos x t$  und  $\cos \omega t \cdot \cos x t$  gilt.

<sup>4)</sup> Vgl. B. Brückmann: Einschwingvorgänge von Brückenhauptträgern infolge periodischer Kräfte aus der Triebkraftwirkung. Als Doktorarbeit gedruckt von R. Noske, Borna bei Leipzig 1939.

<sup>5)</sup> u. a. Hütte, 26. Aufl. (Bericht-Neudruck), I. Bd., S. 93. Berlin 1936. Wilh. Ernst & Sohn.



II. Entwicklung des doppelt harmonischen Integrals.

Durch Anwendung der teilweisen Integration erhalten wir zunächst:

$$(63) \int \sin \omega t \cdot \sin \times t dt = \frac{\omega \cdot \cos \omega t \cdot \sin \times t - \times \cdot \sin \omega t \cdot \cos \times t}{\omega^2 - \times^2}$$

Um dieses Integral für unsere Zwecke verwenden zu können, muß es derart umgeformt werden, daß die Sinus- und Cosinusfunktionen darin nicht in Produktform verbunden sind, sondern einzeln auftreten.

Die Umgestaltung gelingt in nachstehender Weise  
Schreiben wir zunächst statt Gl. (63):

$$(64) \int \sin \omega t \cdot \sin \times t dt = \frac{2(\omega \cdot \cos \omega t \cdot \sin \times t - \times \cdot \sin \omega t \cdot \cos \times t)}{2(\omega + \times)(\omega - \times)}$$

und erweitern den Zähler durch Hinzufügen und gleichzeitiges Abziehen von Sinus- und Cosinusprodukten, so wird nach entsprechender Zusammenfassung

$$(65) \int \sin \omega t \cdot \sin \times t dt = \frac{(\omega - \times) \sin(\omega + \times)t}{2(\omega + \times)(\omega - \times)} - \frac{(\omega + \times) \sin(\omega - \times)t}{2(\omega + \times)(\omega - \times)}$$

oder schließlich nach Kürzung und Beachtung der Vorzeichen:

$$(66) \int \sin \omega t \cdot \sin \times t dt = \frac{\sin(\omega - \times)t}{2(\omega - \times)} - \frac{\sin(\omega + \times)t}{2(\omega + \times)}$$

Das Integral erscheint somit als Unterschied zweier Einzelposten, von denen jeder nur eine Winkelfunktion allein enthält.

III. Aufstellung des dem doppelt harmonischen Störungsglied entsprechenden allgemeinen Integrals.

Setzen wir in Gl. (66)

$$(67) (\omega - \times) = \alpha \quad (\omega + \times) = \beta,$$

so nimmt das doppelt harmonische Integral, das wir der Kürze wegen mit dem Buchstaben *H* bezeichnen wollen, die einfachste Form an, die möglich ist, nämlich:

$$(67) H = \int \sin \omega t \cdot \sin \times t dt = \frac{1}{2\alpha} \cdot \sin \alpha t - \frac{1}{2\beta} \cdot \sin \beta t.$$

Mit diesem Rechnungsergebnis sind wir nun in der Lage, die in Gl. (14 u. (16) angegebene vollständige Differentialgleichung, die auch das doppelt harmonische Störungsglied  $\frac{K}{m} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \times t$  enthält, zu integrieren. Da die linearen Differentialgleichungen durch Zusammenzählen einzelner Posten gebildet sind, kommt es dabei offenbar nur darauf an, das aus dem doppelt harmonischen Störungsglied entspringende Integral zu bilden, durch welches dann das bereits für das einfach harmonische Störungsglied gewonnene Integral der Gl. (35) sinngemäß zu ergänzen ist.

Die allgemeine Regel für die Aufstellung dieses neuen Integrals ist in Gl. (21) angegeben, in der jedoch die beiden ersten, die Eigenschwingung bezeichnenden Posten zunächst keine Rolle spielen. Sie kommen vielmehr erst am Schluß der Rechnung in Betracht, wenn es sich um die Bestimmung der beiden wirklichen Unveränderlichen des Gesamtintegrals handelt.

Unter den beiden Integralzeichen der Gl. (21) wäre nun für *F* das gesamte Störungsglied aus Gl. (16), das ist

$$(69) F(t) = F_1(t) + F_2(t) = \frac{P}{m} \cdot \sin \omega t + \frac{K}{m} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \times t,$$

einzusetzen. Da jedoch die Integration der bloß mit dem ersten Störungsglied behafteten Differentialgleichung bereits durch Gl. (35) erledigt ist und ebenfalls erst bei der Aufstellung des Gesamtintegrals in Frage kommt, brauchen wir uns hier nur mit dem doppelt harmonischen

Störungsglied  $F_2(t) = \frac{K}{m} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \times t$  zu befassen und haben dieses in Gl. (21) an Stelle von *F* zu setzen. Beachten wir, daß die beiden Teilintegrale  $y_1$  und  $y_2$  dieselben sind wie bei der Integration der homogenen Gl. (17) und daß auch die Nennerdeterminante nach Gl. (20) die nämliche bleibt, so erhalten wir mit Bezug auf Gl. (22) u. (23) für die beiden letzten Posten der Gl. (21), deren Summe wir vorübergehend mit  $\Sigma$  bezeichnen wollen:

$$(70) \Sigma = \frac{-K}{m(z_2 - z_1)} \cdot \left[ e^{z_1 t} \int \frac{e^{-z_1 t} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \times t dt}{J'} - e^{z_2 t} \int \frac{e^{-z_2 t} \cdot \sin \omega t \cdot \sin \times t dt}{J''} \right].$$

Wegen des völlig gleichartigen Baues der beiden Integrale *J'* und *J''*, die sich bloß durch die Beiwerte  $z_1$  und  $z_2$  in den Exponenten der *e*-Potenz voneinander unterscheiden, genügt es, die allgemeine Integration nur an einem der Integrale vorzunehmen, das wir unter Weglassung des Zeigers von *z* mit *J* bezeichnen wollen. Die Integration gestaltet sich nun mit Berücksichtigung der in Gl. (67) vorgenommenen Vereinfachungen wie folgt:

$$(71) J = - \int \frac{e^{-z t}}{u} \cdot \frac{\sin \omega t \cdot \sin \times t dt}{v} = \frac{e^{-z t}}{u} \int \frac{\sin \omega t \cdot \sin \times t}{v} dt - \int \frac{\sin \omega t \cdot \sin \times t (-z) e^{-z t} dt^2}{v du}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (67), abgekürzt geschrieben:

$$(72) J = e^{-z t} H + z \int H e^{-z t} dt = \frac{e^{-z t}}{2} \left( \frac{\sin \alpha t}{\alpha} - \frac{\sin \beta t}{\beta} \right) + \frac{z}{2} \left[ \frac{1}{\alpha} \int \frac{e^{-z t} \cdot \sin \alpha t dt}{J^*} - \frac{1}{\beta} \int \frac{e^{-z t} \cdot \sin \beta t dt}{J^{**}} \right].$$

Nach Ersatz des positiven Exponenten der *e*-Potenz durch den negativen<sup>9)</sup> und sinngemäßer Änderung der Bezeichnung können wir statt Gl. (72) schreiben:

$$(73) J = \frac{e^{-z t}}{2} \left\{ \left( \frac{\sin \alpha t}{\alpha} - \frac{\sin \beta t}{\beta} \right) - z \left[ \frac{z \cdot \sin \alpha t + \alpha \cdot \cos \alpha t}{\alpha(z^2 + \alpha^2)} - \frac{z \cdot \sin \beta t + \beta \cdot \cos \beta t}{\beta(z^2 + \beta^2)} \right] \right\}.$$

Dieses allgemeine Integral ist nun durch Einführung der Werte für  $z_1$  und  $z_2$  in zwei der Form nach gleichwertige Ausdrücke zu spalten, die mit  $J_I$  und  $J_{II}$  bezeichnet seien.

Demnach erhalten wir bei Gliederung der Gl. (73) in lotrechter Richtung und entsprechender Teilung des in der eckigen Klammer enthaltenen Betrages:

$$(74) J_I = \frac{e^{-z_1 t}}{2} \left\{ \left( \frac{\sin \alpha t}{\alpha} - \frac{\sin \beta t}{\beta} \right) - \frac{z_1}{\alpha} \left[ \frac{z_1 \cdot \sin \alpha t + \alpha \cdot \cos \alpha t}{(z_1^2 + \alpha^2)} + \frac{z_1}{\beta} \left[ \frac{z_1 \cdot \sin \beta t + \beta \cdot \cos \beta t}{(z_1^2 + \beta^2)} \right] \right] \right\}$$

$$(75) J_{II} = \frac{e^{-z_2 t}}{2} \left\{ \left( \frac{\sin \alpha t}{\alpha} - \frac{\sin \beta t}{\beta} \right) - \frac{z_2}{\alpha} \left[ \frac{z_2 \cdot \sin \alpha t + \alpha \cdot \cos \alpha t}{(z_2^2 + \alpha^2)} + \frac{z_2}{\beta} \left[ \frac{z_2 \cdot \sin \beta t + \beta \cdot \cos \beta t}{(z_2^2 + \beta^2)} \right] \right] \right\}.$$

Mit diesen Ausdrücken lautet das allgemeine Integral der Differentialgleichung (16) unter Bezugnahme auf die bereits in Gl. (35) für das einfach harmonische Störungsglied gewonnenen Ergebnisse:

$$(76) v = e^{-\rho t} C_0 \cdot \sin(\rho t + \varphi_0) + C_1 \cdot \sin(\omega t - \varphi_1) - \frac{K}{2m(z_2 - z_1)} \left[ e^{z_1 t} J_I - e^{z_2 t} J_{II} \right].$$

Beachten wir zunächst in Gl. (74) u. (75) nur die in den eckigen Klammern in den obersten Zeilen enthaltenen Ausdrücke, so wird bei Weglassung des Faktors 1/2

$$(77) \frac{e^{z_1 t} e^{-z_1 t} [\cdot/\cdot]}{1} - \frac{e^{z_2 t} e^{-z_2 t} [\cdot/\cdot]}{1} = 0.$$

Bei der weiteren Rechnung müssen wir uns daher bloß mit den in der 2. und 3. Zeile der Gl. (74) u. (75) vorkommenden Klammerausdrücken befassen. Da hierbei für alle weiteren Rechnungsvorgänge die *e*-Potenz wie in Gl. (77) herausfällt, gestaltet sich die Auswertung von  $J_I$  und  $J_{II}$  wie folgt:

$$(78) \Sigma = + \frac{K}{2m\alpha(z_2 - z_1)} \left[ \frac{z_1(z_1 \cdot \sin \alpha t + \alpha \cdot \cos \alpha t)}{(z_1^2 + \alpha^2)} - \frac{z_2(z_2 \cdot \sin \alpha t + \alpha \cdot \cos \alpha t)}{(z_2^2 + \alpha^2)} \right] - \frac{K}{2m\beta(z_2 - z_1)} \left[ \frac{z_1(z_1 \cdot \sin \beta t + \beta \cdot \cos \beta t)}{(z_1^2 + \beta^2)} - \frac{z_2(z_2 \cdot \sin \beta t + \beta \cdot \cos \beta t)}{(z_2^2 + \beta^2)} \right].$$

Wegen des gleichartigen Baues der beiden Zeilen der Gl. (78) genügt es, die einzelnen Rechnungsvorgänge nur für einen dieser beiden Ausdrücke durchzuführen und dann für den anderen sinngemäß nachzubilden.

Der Ausdruck in der oberen eckigen Klammer der Gl. (78) ergibt umgeformt:

$$(79) \frac{Z}{N} = \frac{(z_2^2 + \alpha^2) z_1 (z_1 \cdot \sin \alpha t + \alpha \cdot \cos \alpha t) - (z_1^2 + \alpha^2) z_2 (z_2 \cdot \sin \alpha t + \alpha \cdot \cos \alpha t)}{(z_1^2 + \alpha^2)(z_2^2 + \alpha^2)}.$$

Dieser Bruch ist nun auszurechnen, und es ergibt sich der Reihe nach für den Zähler:

$$(80) Z = z_1^2 z_2^2 \cdot \sin \alpha t + z_1^2 \alpha^2 \cdot \sin \alpha t + z_1 z_2^2 \alpha \cdot \cos \alpha t + z_1 \alpha^3 \cdot \cos \alpha t - z_1^2 z_2^2 \cdot \sin \alpha t - z_2^2 \alpha^2 \cdot \sin \alpha t - z_1^2 z_2 \alpha \cdot \cos \alpha t - z_2 \alpha^3 \cdot \cos \alpha t = z_1 z_2 (z_2 - z_1) \alpha \cdot \cos \alpha t - (z_2^2 - z_1^2) \alpha^2 \cdot \sin \alpha t - (z_2 - z_1) \alpha^3 \cdot \cos \alpha t = \frac{\alpha}{m} (z_2 - z_1) [(c - m \alpha^2) \cos \alpha t + b \alpha \cdot \sin \alpha t].$$

<sup>9)</sup> Hütte, 26. Aufl., I. Bd., S. 94, Integralformel (34).



Der Nenner  $N$  ergibt sich mit

$$(81) \quad N = \frac{1}{m^2} [(c - m\alpha^2)^2 + b^2\alpha^2],$$

somit wird:

$$(82) \quad \frac{Z}{N} = \frac{\alpha m (z_2 - z_1) [(c - m\alpha^2) \cos \alpha t + b\alpha \cdot \sin \alpha t]}{[(c - m\alpha^2)^2 + b^2\alpha^2]}$$

Daher nimmt die obere Zeile der Gl. (78) die Form an:

$$(83) \quad \frac{K}{2} \cdot \frac{[(c - m\alpha^2) \cos \alpha t + b\alpha \cdot \sin \alpha t]}{[(c - m\alpha^2)^2 + b^2\alpha^2]},$$

während die untere Zeile nach Ersatz von  $\alpha$  durch  $\beta$

$$(84) \quad \frac{K}{2} \cdot \frac{[(c - m\beta^2) \cos \beta t + b\beta \cdot \sin \beta t]}{[(c - m\beta^2)^2 + b^2\beta^2]}$$

lautet.

Führen wir nun die Ersatzwerte ebenso wie in Gl. (33) ein, so erhalten wir mit

$$(85) \quad W_2 = \sqrt{(c - m\alpha^2)^2 + b^2\alpha^2} \quad \text{und} \quad W_3 = \sqrt{(c - m\beta^2)^2 + b^2\beta^2}$$

$$(86) \quad \begin{cases} \frac{b\alpha}{W_2} = \sin \varphi_2 & \frac{b\beta}{W_3} = \sin \varphi_3 \\ \frac{c - m\alpha^2}{W_2} = \cos \varphi_2 & \frac{c - m\beta^2}{W_3} = \cos \varphi_3 \end{cases}$$

und wenn

$$(87) \quad \frac{K}{2W_2} = C_2 \quad \frac{K}{2W_3} = C_3$$

gesetzt wird, mit Bezug auf Gl. (78)

$$(88) \quad \Sigma = C_2 \cdot \cos(\alpha t - \varphi_2) - C_3 \cdot \cos(\beta t - \varphi_3).$$

Diese Summe, die aus der Integration des doppelt harmonischen Störungsgliedes der Differentialgleichung (14) und (16) hervorgegangen ist, muß nun dem die Eigenschwingung  $S_0$  und das einfach harmonische Störungsglied enthaltenden Integral der Gl. (35) hinzugefügt werden, um das allgemeine Integral der Gl. (14) u. (16) zu erhalten.

Dieses lautet somit:

$$(89) \quad y = \underbrace{e^{-pt} C_0 \cdot \sin(\nu t + \varphi_0)}_{S_0} + \underbrace{C_1 \cdot \sin(\omega t - \varphi_1)}_{S_1} + \underbrace{C_2 \cdot \cos(\alpha t - \varphi_2)}_{S_2} - \underbrace{C_3 \cdot \cos(\beta t - \varphi_3)}_{S_3}$$

oder, wenn statt  $\alpha$  und  $\beta$  wieder  $(\omega - \kappa)$  bzw.  $(\omega + \kappa)$  gesetzt wird:

$$(90) \quad y = \underbrace{e^{-pt} C_0 \cdot \sin(\nu t + \varphi_0)}_{S_0} + \underbrace{C_1 \cdot \sin(\omega t - \varphi_1)}_{S_1} + \underbrace{C_2 \cdot \cos[(\omega - \kappa)t - \varphi_2]}_{S_2} - \underbrace{C_3 \cdot \cos[(\omega + \kappa)t - \varphi_3]}_{S_3}$$

### F. Rechnerische Ausgestaltung des im Abschnitt E gewonnenen allgemeinen Integrals für die praktische Anwendung.

#### 1. Der Aufbau der linearen Differentialgleichungen.

Das in seinem Aufbau sehr übersichtliche und zahlenmäßig leicht auswertbare allgemeine Integral bestätigt die Erfahrung, daß rechnerische Untersuchungen oft über eine anscheinend schwer entwirrbare Menge von Einzelrechnungen hinweg zu überraschend einfachen Endergebnissen führen. Besonders bemerkenswert ist an der Schlußformel der Gl. (90), daß sie zu dem aus dem einfach harmonischen Störungsglied hervorgehenden allgemeinen Integral der Gl. (35) zwei weitere Posten hinzufügt, die den beiden ersten wesensgleich sind und den Einfluß der Triebbradwirkung zum Ausdruck bringen.

Der schon erwähnte Aufbau der linearen Differentialgleichungen aus einzelnen zusammenzählenden Posten ist somit gewahrt geblieben, woraus sich die Wahrscheinlichkeit ergibt, daß diese wichtige, den Aufbau der einschlägigen Untersuchungen sehr erleichternde Eigenschaft der Schwingungs-Differentialgleichungen auch bei Berücksichtigung anderer Einflüsse der Wanderlast bestehen bleiben wird.

Wie ein Blick auf Gl. (90) zeigt, wird die zeichnerische Darstellung des Schwingungsvorganges, der im Ersatzgebilde (Abb. 1) durch die gleichzeitige Drehung von Kurbel und Kurbelscheibe hervorgerufen wird, nicht aus bloß zwei zyklischen Linien bestehen, sondern es treten deren vier auf, die, als (für sich allein nicht bestehende) Teilschwingungen überlagert, die wirkliche Schwingung in Form einer fünften endgültigen Linie liefern.

In den später kurz zu besprechenden Abb. 6 bis 9 ist außer diesen fünf Sinus-Cosinus-Linien zuoberst noch die aus der Überlagerung der Eigenlastwirkung  $P \cdot \sin \omega t$  und der Triebbradwirkung  $K \cdot \sin \omega t \cdot \sin \kappa t$  gebildete Erregerschwingung (Abb. 1) eingetragen, wobei alle sechs Linien des unmittelbaren Vergleichs wegen in ein und demselben, durch das Verhältnis  $P : c$  gegebenen Maßstab gezeichnet sind.

### II. Bestimmung der Unveränderlichen der Integration.

Um Gl. (90), die in abgekürzter Schreibweise

$$(91) \quad S = S_0 + S_1 + S_2 + S_3$$

lautet, praktisch anwenden zu können, müssen vor allem die beiden wirklichen Unveränderlichen der Integration  $C_0$  und  $\varphi_0$  bestimmt werden. Die Handhabe hierzu ergibt sich wieder daraus, daß die Eigenschwingung  $S_0$  ebenso wie im Integral der Gl. (35) eine eindeutige Abhängigkeit der erzwungenen Schwingung ist, die aber hier aus den drei Teilschwingungen  $S_1, S_2$  und  $S_3$  besteht, weshalb entsprechend Gl. (36) gilt:

$$(92) \quad S_0 = F(S_1, S_2, S_3) = (P, m, c, p, \omega, \kappa, t)$$

und

$$(93) \quad S = F(S_1, S_2, S_3) + S_1 + S_2 + S_3 = \phi(P, m, c, p, \omega, \kappa, t).$$

Zu den fünf Bestimmungsstücken der früheren einfach harmonischen Schwingungsaufgabe ist als sechstes die Kreisfrequenz  $\kappa$  der Triebbradumdrehung getreten. Damit sind die im Sinne der Integralrechnung als scheinbare Unveränderliche anzusprechenden Werte  $C_1, C_2, C_3$  durch Gl. (33) u. (87) festgelegt, und es ergibt sich für die Ermittlung der beiden wirklichen Unveränderlichen der Integration  $C_0$  und  $\varphi_0$  der den Gl. (35) bis (40) völlig entsprechende Rechnungsweg.

Durch Differentiation des allgemeinen Integrals der Gl. (89) erhalten wir:

$$(94) \quad y' = -p e^{-pt} C_0 \cdot \sin(\nu t + \varphi_0) + e^{-pt} C_0 \nu \cdot \cos(\nu t + \varphi_0) + C_1 \omega \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) - C_2 \alpha \cdot \sin(\alpha t - \varphi_2) + C_3 \beta \cdot \sin(\beta t - \varphi_3);$$

für  $t=0$  ist

$$(95) \quad y = y_0 = C_0 \cdot \sin \varphi_0 - C_1 \cdot \sin \varphi_1 + C_2 \cdot \cos \varphi_2 - C_3 \cdot \cos \varphi_3$$

und

$$(96) \quad y' = y_0' = -p C_0 \cdot \sin \varphi_0 + C_0 \nu \cdot \cos \varphi_0 + C_1 \omega \cdot \cos \varphi_1 + C_2 \alpha \cdot \sin \varphi_2 - C_3 \beta \cdot \sin \varphi_3.$$

Hieraus ergeben sich die beiden Teilbeträge  $A_0$  und  $B_0$  der Schwingweite  $C_0$  und diese selbst wie folgt:

$$(97) \quad A_0 = C_0 \cdot \sin \varphi_0 = (y_0 + C_1 \cdot \sin \varphi_1 - C_2 \cdot \cos \varphi_2 + C_3 \cdot \cos \varphi_3)$$

$$(98) \quad B_0 = C_0 \cdot \cos \varphi_0 = \frac{1}{\nu} [y_0' + p(y_0 + C_1 \cdot \sin \varphi_1 - C_2 \cdot \cos \varphi_2 + C_3 \cdot \cos \varphi_3) - C_1 \omega \cdot \cos \varphi_1 - C_2 \alpha \cdot \sin \varphi_2 + C_3 \beta \cdot \sin \varphi_3]$$

$$(99) \quad C_0 = C_0 \sqrt{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0} = \sqrt{A_0^2 + B_0^2}.$$

Der zugehörige Winkel  $\varphi_0$  der Gangverschiebung ist bestimmt durch:

$$(100) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_0}{B_0}.$$

### III. Umformung der Rechnungsergebnisse für die zahlenmäßige und zeichnerische Auswertung.

Wie aus den zuletzt durchgeführten Entwicklungen hervorgeht, wird es bei der praktischen Anwendung der allgemeinen Formeln vor allem auf eine möglichst rasche und dennoch ausreichend genaue Gewinnung der die Eigenschwingung  $S_0$  bestimmenden Werte  $C_0$  und  $\varphi_0$  ankommen, wofür sich rechentechnisch der nachstehende Weg als zweckmäßig erweist. Nehmen wir — ohne der allgemeinen Gültigkeit der Untersuchungen Abbruch zu tun — der Einfachheit wegen an, daß sich die Brücke vor dem Auffahren der Lokomotive in Ruhe befunden habe, so ist in obigen Formeln  $y_0 = 0$  und  $y_0' = 0$  zu setzen.

Ist  $u$  die Anzahl der auf die ganze Brückenlänge  $l$  oder auf die ganze Überfahrzeit  $\frac{T}{2}$  entfallenden Triebbradumdrehungen, denen die Kreisfrequenz  $\kappa$  entspricht, so kommen  $2u$  Umdrehungen auf eine volle, von der Wanderlast allein hervorgerufene Schwingung, deren Kreisfrequenz mit  $\omega$  bezeichnet wurde. Daher ist:

$$(101) \quad \omega = \frac{1}{2u} \cdot \kappa \quad \alpha = \omega - \kappa = \left(\frac{1}{2u} - 1\right) \kappa = -\left(\frac{2u-1}{2u}\right) \kappa$$

$$\beta = \omega + \kappa = \left(\frac{1}{2u} + 1\right) \kappa = \left(\frac{2u+1}{2u}\right) \kappa.$$

Dabei wird, weil in allen praktisch vorkommenden Fällen auf die Brückenlänge  $l$  stets mehr als eine halbe Triebbradumdrehung entfällt, also  $\frac{1}{2u} < 1$  ist, der Wert  $\alpha$  stets mit negativem Vorzeichen erscheinen, worauf bei der zahlenmäßigen Auswertung sehr zu achten ist.

Wird weiterhin

$$(102) \quad \frac{p}{\nu} = \delta \quad \text{und} \quad \text{für} \quad \frac{\kappa}{\nu} = \mu$$

geschrieben, so erhalten wir aus Gl. (97) u. (98) mit Bezug auf Gl. (101) u. (102)

$$(103) \quad A_0 = (C_1 \cdot \sin \varphi_1 - C_2 \cdot \cos \varphi_2 + C_3 \cdot \cos \varphi_3)$$

$$(104) \quad B_0 = \delta (C_1 \cdot \sin \varphi_1 - C_2 \cdot \cos \varphi_2 + C_3 \cdot \cos \varphi_3) +$$

$$\mu \left( -C_1 \cdot \frac{1}{2u} \cdot \cos \varphi_1 - C_2 \cdot \frac{2u-1}{2u} \cdot \sin \varphi_2 + C_3 \cdot \frac{2u+1}{2u} \cdot \sin \varphi_3 \right)$$

$B_0$



oder einfacher

$$(105) \quad B_0 = \delta A_0 + \mu B_0$$

und daraus

$$(106) \quad C_0 = \sqrt{(1 + \delta^2) A_0^2 + 2 \delta \mu A_0 B_0 + \mu^2 B_0^2}$$

oder, weil  $\delta$  zumelst sehr klein ist und im ersten Posten weggelassen werden kann,

$$(107) \quad C_0 = \sqrt{A_0^2 + 2 \delta \mu A_0 B_0 + \mu^2 B_0^2}$$

Zur zahlenmäßigen und zeichnerischen Auswertung der zuletzt angegebenen Formeln ist nun folgendes zu bemerken. Die Schwingweiten  $C_1, C_2, C_3$  der drei erzwungenen Schwingungen  $S_1, S_2, S_3$  sind rechnerisch von gleicher Wesensart, und zwar ergeben sie sich nach Gl. (33) aus ein und derselben Funktionsgestalt, in welcher  $P$  durch  $\frac{K}{2}$  und  $\omega$  durch  $\alpha = (\omega - \omega_0)$  und  $\beta = (\omega + \omega_0)$  zu ersetzen sind, um statt  $C_1$  die beiden anderen Schwingweiten  $C_2$  und  $C_3$  zu erhalten. Zur Gewinnung der trigonometrischen Funktionen  $\text{tg } \varphi_1, \text{tg } \varphi_2, \text{tg } \varphi_3$  der Phasenwinkel (sowie  $\sin \varphi_1, \dots, \cos \varphi_1, \dots$ ) genügen die beiden zuletzt genannten Ersatzwerte allein, weil die Werte  $P$  und  $\frac{K}{2}$  in Gl. (34) u. (86) durch Kürzung ausfallen.

Fassen wir zunächst die zeichnerische Darstellung der soeben angeführten, zur Berechnung von  $C_0$  erforderlichen Größen ins Auge, so ist leicht zu erkennen, daß wir für die drei Schwingweiten  $C_1, C_2, C_3$  bloß zwei, nach Anweisung der Gl. (33) zu zeichnende Linien brauchen, von denen die mit  $P$  gebildete kurz die „P-Linie“ und die mit  $\frac{K}{2}$  berechnete die „K-Linie“ heißen möge.

Die beiden Linien, die sich demnach nur durch den Maßstab ihrer Ordinaten voneinander unterscheiden, sind in Abb. 4 über der Waagerechten I—I' aufgetragen, während die unterhalb gezeichnete, nach  $\omega$  und  $\alpha$  fortschreitende, quadratische Parabel den Aufbau der Linien aus den gegebenen Größen zeigt.

Der Wert von  $C_1$  ist nun auf der P-Linie bei der Kreisschwingzahl  $\omega$  abzulesen; die Werte  $C_2$  und  $C_3$  hingegen sind auf der für sie gemeinsam geltenden  $\frac{K}{2}$ -Linie bei den zugehörigen Abszissen  $(\omega - \omega_0)$  und  $(\omega + \omega_0)$  zu entnehmen. Hierzu sei bemerkt, daß hier sowie in anderen Teilen der Rechnung an Stelle des praktisch stets negativen Wertes  $\alpha = (\omega - \omega_0)$  der umgekehrte, demnach stets positive Unterschiedsbetrag  $(\omega_0 - \omega)$  als Abszisse gewählt werden kann, weil die für die Berechnung der  $\frac{K}{2}$ -Linie maßgebende

Gl. (33) vom Vorzeichen der in ihr enthaltenen Kreisschwingzahl unabhängig ist. Um überflüssige Zeichen- und Rechenarbeit von vornherein zu vermeiden, ist zu beachten, daß von der P- und  $\frac{K}{2}$ -Linie nur jene Teile in Betracht

kommen werden, die der größtmöglichen Triebbradwirkung entsprechen, die also im Bereich der kritischen Triebbraddrehzahlen oder der kritischen Triebbradkreisschwingzahlen  $\alpha$  liegen. Wird von den erst später zu erörternden Erscheinungen des Mitschwingens (der Resonanz) abgesehen, so werden hierfür offenbar die auf einen verhältnismäßig kurzen Abstand der Kreisschwingzahl  $\alpha$  zusammengedrängten, im Scheitelpunkt der  $\frac{K}{2}$ -Linie liegenden Ordinaten maß-

gebend sein. Diesen sind auf der P-Linie die nahezu unveränderlich bleibenden Ordinaten zugeordnet, die den stets klein ausfallenden Abszissen  $\omega = \frac{\alpha}{2u}$  entsprechen. Von der P-Linie wird daher nur das der Abszissenachse nahezu gleichlaufende Anfangsstück benötigt. Der leichteren Arbeit und größeren Genauigkeit wegen wurden die für die weiteren Untersuchungen nötigen Linientelle unter Weglassung der belanglosen Zwischenstücke gegenüber der Abb. 4 fünfmal vergrößert in die Abb. 5 übertragen. Außerdem sind hier die in Gl. (103) u. (104) enthaltenen Produkte  $C_1 \cdot \sin \varphi_1, C_2 \cdot \cos \varphi_2, C_3 \cdot \cos \varphi_3$  oder

$$C_1 \cdot \frac{1}{2u} \cdot \cos \varphi_1, \quad C_2 \cdot \frac{2u-1}{2u} \cdot \sin \varphi_2, \quad C_3 \cdot \frac{2u+1}{2u} \cdot \sin \varphi_3$$

zeichnerisch dargestellt, wobei die drei zuletzt genannten Produkte mit dem für unser Zahlenbeispiel geltenden Wert  $2u = 30$  berechnet worden sind.

Da die Produkte  $C_1 \cdot \sin \varphi_1$  und  $C_1 \cdot \frac{1}{30} \cdot \cos \varphi_1$  innerhalb des praktisch in Frage kommenden, kurzen Bereichs

der kleinen Werte  $\omega$  nahezu unveränderlich sind, können sie als unveränderliche Zahlen in die Rechnung eingestellt werden, und es kommen für die zeichnerische Auswertung der Hauptsache nach nur die vier mit

$$C_2 \cdot \cos \varphi_2, \quad C_3 \cdot \cos \varphi_3, \quad C_2 \cdot \frac{29}{30} \cdot \sin \varphi_2, \quad C_3 \cdot \frac{31}{30} \cdot \sin \varphi_3$$

bezeichneten Linien in Betracht, aus denen die Ordinaten  $C_2 \cdot \cos \varphi_2, C_2 \cdot \frac{29}{30} \cdot \sin \varphi_2$  zu den Abszissen  $\frac{29}{30} \cdot \alpha$ , die Ordinaten  $C_3 \cdot \cos \varphi_3, C_3 \cdot \frac{31}{30} \cdot \sin \varphi_3$  hingegen an den Stellen  $\frac{31}{30} \cdot \alpha$  zu entnehmen sind. Um

die jedesmalige Ausrechnung der Werte  $\frac{29}{30} \cdot \alpha$  und  $\frac{31}{30} \cdot \alpha$  zu ersparen, wurde sowohl für die im Verhältnis  $\frac{29}{30}$  verkürzten wie für die im Ver-

hältnis  $\frac{31}{30}$  gestreckten Abszissen je ein eigener Maßstab entworfen und unterhalb und oberhalb des für  $\omega$  und  $\alpha$  selbst geltenden Hauptmaßstabs eingezeichnet. Auf einem vierten Maßstab sind die den Kreisschwingzahlen  $\omega$  und  $\alpha$  entsprechenden Fahrgeschwindigkeiten zu ersehen.

Durch Einsetzen der aus den vorstehend beschriebenen Linien entnommenen Werte in Gl. (103) bis (107) und (100) lassen sich die Unveränderlichen  $C_0$  und  $\varphi_0$  der Eigenschwingung  $S_0$  größtenteils auf zeichnerischem Wege, also sehr rasch und in übersichtlicher Weise bestimmen, wobei auch die in den Formeln noch vorzunehmenden Rechnungen (Multiplizieren, Dividieren, Quadrieren und Wurzelziehen) nach bekannten Verfahren zeichnerisch mit Hilfe von Rechentafeln (Nogramm) ausgeführt werden können.

Wo größere Genauigkeit der End- oder Zwischenergebnisse erforderlich ist, wird man jedoch zur zahlenmäßigen Rechnung greifen und die zeichne-

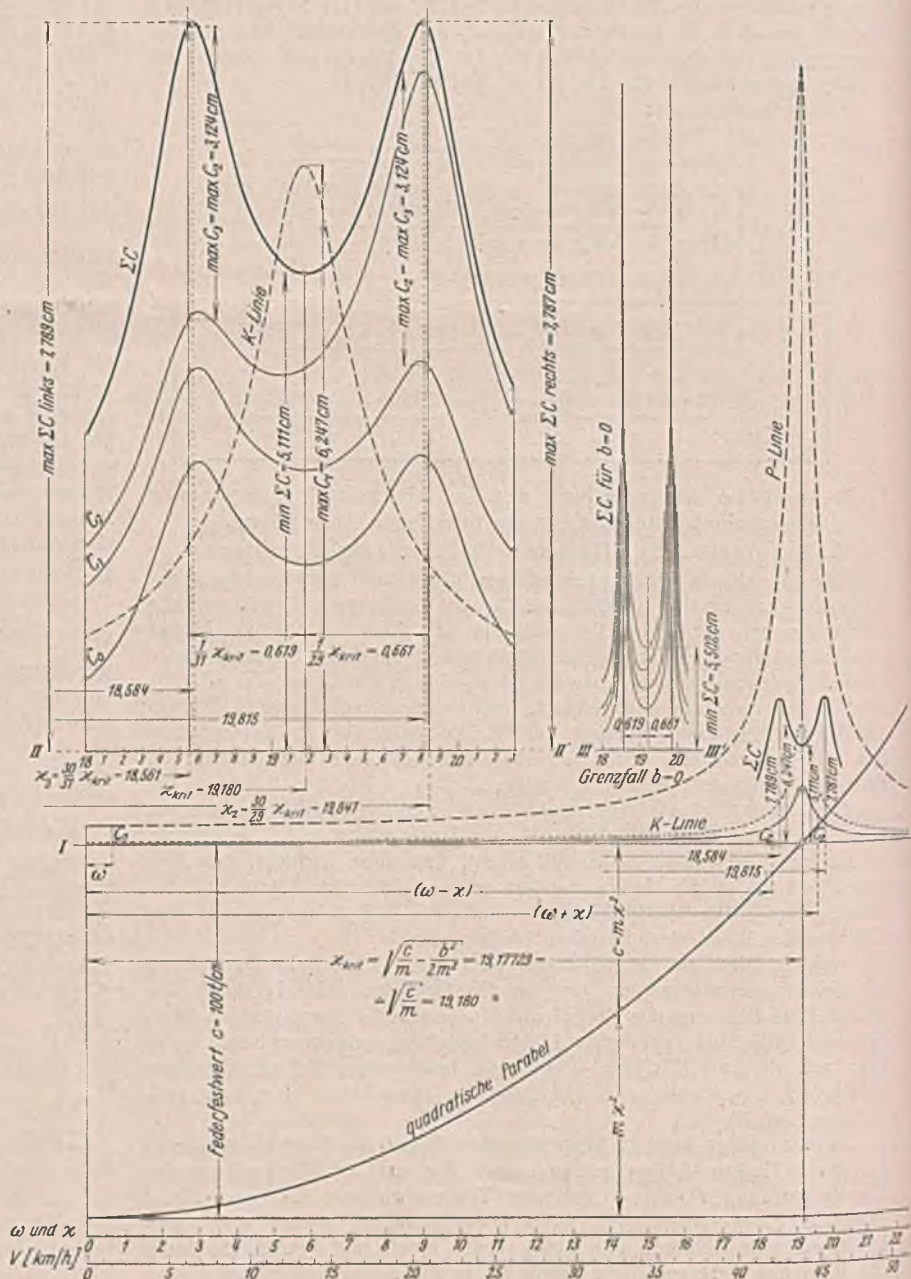


Abb. 4.



rische Darstellung als Wegweiser benutzen sowie zur Nachprüfung heranziehen. Wie ein Blick auf die vorstehend besprochenen Formeln zeigt, sind durch die Ermittlung der Unveränderlichen  $C_0$  und  $\varphi_0$  der Eigenschwingung  $S_0$  auch die Hauptwerte  $C_1, \varphi_1; C_2, \varphi_2; C_3, \varphi_3$  der drei erzwungenen Schwingungen  $S_1, S_2, S_3$  mitbestimmt, weil ihre Kenntnis ja erforderlich ist, um zu  $C_0$  und  $\varphi_0$  zu gelangen. Mit der Berechnung dieser, die Eigenschwingung bestimmenden Größen ist daher auch der gesamte aus den vier Teilschwingungen  $S_0, S_1, S_2, S_3$  sich ergebende Schwingungsvorgang  $S$  festgelegt, dessen Verlauf in gleicher Art wie in Abb. 2 u. 3 durch zeichnerische Zusammensetzung der Einzelschwingungen zu ermitteln ist.

Zeichnerische Auswertung der Formeln:

$$A_0 = (C_1 \sin \varphi_1 - C_2 \cos \varphi_2 + C_3 \cos \varphi_3)$$

$$\bar{B}_0 = (-C_1 \frac{1}{30} \cos \varphi_1 - C_2 \frac{29}{30} \sin \varphi_2 + C_3 \frac{31}{30} \sin \varphi_3)$$

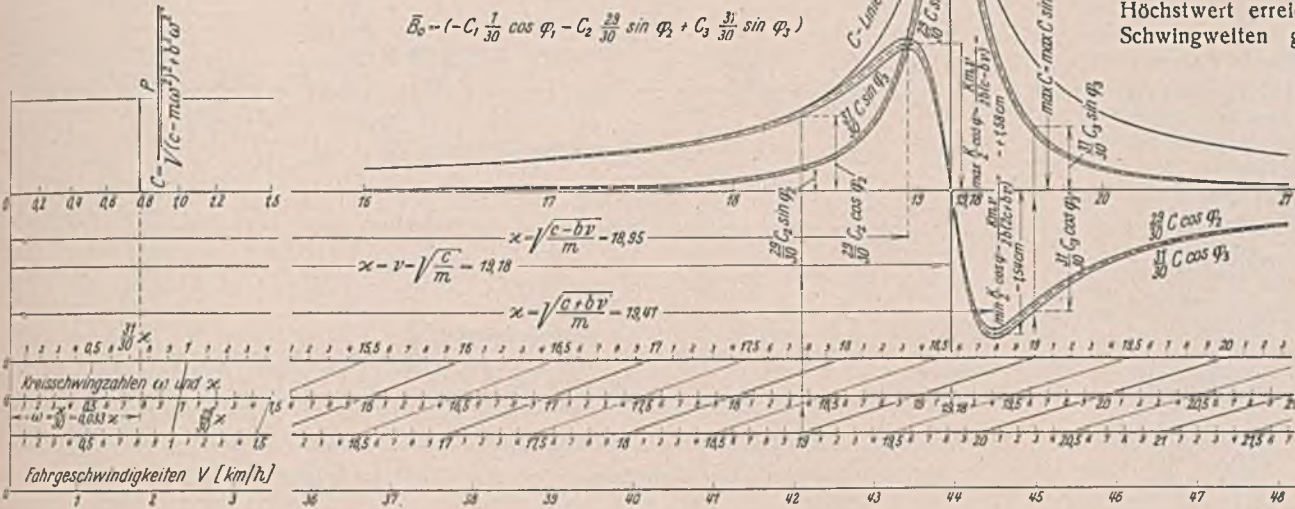


Abb. 5.

Da es wie bei den durch einfach harmonische Erregung hervorgerufenen Schwingungsvorgängen auch hier darauf ankommen wird, vor allem die ungünstigen Belastungsfälle zu behandeln, ist es nötig, zunächst die für die Auswahl solcher Fälle maßgebenden Erscheinungen des Mitschwingens (der Resonanz) zu untersuchen.

#### IV. Mitschwingen (Resonanz) und Aufschaukeln bei doppelt harmonischer Erregung.

1. Allgemeine Bemerkungen. Konnten schon die aus bloß zwei Teilschwingungen  $S_0$  und  $S_1$  entstehenden Schwingungen sehr verschiedener Art sein, so erhöht sich die Mannigfaltigkeit der aus dem Zusammenwirken von vier Einzelschwingungen hervorgehenden Gesamtbewegung in beträchtlichem Maße. Daher können die äußerst zahlreichen Möglichkeiten, die sich aus der Verschiedenheit der Brückentragwerke selbst sowie der Fahrzeuge, Zugattungen und Fahrgeschwindigkeiten ergeben, im engen Rahmen der vorliegenden Untersuchung nicht eingehend behandelt werden. Wir müssen uns vielmehr hier damit begnügen, aus den vorangehenden rechnerischen Entwicklungen die für die praktische Anwendung wichtigsten Folgerungen zu ziehen und an Hand der Abbildungen und der Zahlentafel kurz zu erläutern.

Vor allem wird es wertvoll sein, zu wissen, ob die für die Beurteilung der größtmöglichen dynamischen Beanspruchungen maßgebenden drei Hauptbegriffe: Mitschwingen, Aufschaukelung und kritische Geschwindigkeit auch bei der aus vier statt aus bloß zwei Teilschwingungen entstehenden Gesamtschwingung in Geltung bleiben oder ob andere, zumindest ebenso brauchbare rechnerische Urteilsbehelfe an ihre Stelle treten.

Es ist nun unschwer vor auszusehen, daß das zuletzt Gesagte der Fall sein wird, und zwar aus folgenden Gründen. Während bei einer aus bloß zwei Teilschwingungen entstehenden Schwingung Mitschwingen, Aufschaukeln und kritische Geschwindigkeit durch den Höchstwert der Schwingweite  $C_1$  (oder kurz: der „erzwungenen Schwingweite“) allein eindeutig bestimmt sind, welcher Wert selbst wieder durch die gegebenen Größen der Aufgabe festgelegt ist, bestehen so einfache Beziehungen nicht mehr, wenn die Gesamtschwingung aus dem Zusammenspiel von vier Einzelschwingungen zu bilden ist. Dann haben nämlich die drei erzwungenen Schwingweiten  $C_1, C_2$  und  $C_3$  — jede für sich — ihre eigenen Höchstwerte, die sich aus den Gl. (33) bis (87) für ganz bestimmte Kreisfrequenzen  $\alpha = (\omega - \kappa)$  und  $\beta = (\omega + \kappa)$  oder für die „kritischen Fahrgeschwindigkeiten“ der Lokomotive  $V$  [km/h] oder  $v$  [m/sek] berechnen lassen. Man kann aber nicht sagen, daß die endgültige Schwingung durch das Abklingen der Eigenschwingung schließlich bis zu einem dieser Höchstwerte aufgeschaukelt werde, weil ja keiner von ihnen gegenüber den beiden anderen den Vorzug hat.

Auch ist zu erkennen, daß die Eigenschwingung  $S_0$ , deren Schwingweite  $C_0$  sich aus den Gl. (97) bis (99) als Abhängige aller drei er-

zwungenen Unveränderlichen  $C_1, C_2$  und  $C_3$  ergibt, nicht mehr der für den Höchstwert der Gesamtschwingung allein maßgebende Einzelvorgang ist, sondern mit den drei erzwungenen Schwingungen  $S_1, S_2$  und  $S_3$  zusammen eine Gesamtschwingung liefert, deren Verlauf sehr verschiedener Art sein kann und sich von vornherein nicht so leicht überblicken läßt wie beim Vorhandensein bloß zweier Teilschwingungen.

Um nun trotz der Vielfalt der hieraus erwachsenden Möglichkeiten doch zu einem Urteil über die äußerstenfalls zu erwartende größte Schwingweite zu gelangen, gehen wir von der Erwägung aus, daß die größte Gesamt-Schwingweite dann entsteht, wenn die augenblicklichen Auslenkungen aller vier Einzelschwingungen gleichzeitig den durch ihre Schwingweiten begrenzten Höchstwert erreichen, d. h. wenn ihre Schwingweiten gleichen Gang haben.

Hierbei kann aber die Schwingweite  $C_0 e^{-pt}$  der Eigenschwingung nicht mit ihrem vollen Wert  $C_0$  zum Ausdruck kommen, weil sie diesen ja nur zur Zeit  $t=0$  hat und dann abklingt.

Der größte, für eine bestimmte Kreisfrequenz oder Fahrgeschwindigkeit überhaupt denkbare Gesamtausschlag, der ja infolge der Massenträgheit der aus der Ruhelage angehobenen Brücke erst nach einer ge-

wissen Aufschaukelungszeit zustande kommen kann, muß daher stets etwas kleiner sein als die Summe der vier Einzelschwingweiten.

Wir gehen also vollkommen sicher, wenn wir der Einfachheit wegen die vom Abklingen der Eigenschwingung unbeeinflusste Summe der Schwingzahlen

$$(108) \quad \max \sum C = C_0 + C_1 + C_2 + C_3$$

als Kennzeichen für den größtmöglichen Gesamtausschlag gelten lassen.

Es ist somit zu untersuchen:

- bei welcher Triebbradkreisfrequenz  $\kappa$  die größte Summe der Schwingweiten  $\max \sum C$  erreicht wird und
- in welchem Maße ein solcher Höchstwert praktisch zur Wirkung kommen kann.

Bei der Beantwortung dieser Fragen, deren rein rechnerische Lösung hier zu weit führen würde, wollen wir den bereits im Absatz III erläuterten, zeichnerisch-rechnerischen Weg einschlagen.

2. Ermittlung des Höchstwertes  $\max \sum C$ . Da für das Aufsuchen von  $\max \sum C$  der Scheitelpunkt der  $\frac{K}{2}$ -Linie maßgebend ist,

sind die Werte  $C_0, C_1, C_2, C_3$  für die Umgebung des Scheitels dieser Linie ermittelt und in Abb. 4 (links oben) von der Grundlinie II—II' aus der Reihe nach im Maßstabe der Abb. 5 übereinander aufgetragen. In diesem Übersichtsbild kommt von den kennzeichnenden Eigenschaften der rechnerischen Endergebnisse vor allem die durch die unabhängigen Veränderlichen  $(\kappa - \omega)$  und  $(\kappa + \omega)$  bedingte Spaltung des doppelt harmonischen Integrals in einer Zweiteilung des Begriffs  $\max \sum C$  deutlich zum Ausdruck. So müssen zunächst die beiden für die Ermittlung von  $\max \sum C$  in erster Linie den Ausschlag gebenden Beträge  $\max C_2$  und  $\max C_3$  an zwei Stellen des für  $\kappa$  geltenden (Haupt-)Maßstabs auftreten, die zu dem der einfach harmonischen Erregung entsprechenden Punkt  $\kappa_{krit} = 19,180$  nahezu symmetrisch liegen. Setzt man nämlich in den zur Berechnung von  $C_2$  und  $C_3$  dienenden Gl. (85) u. (87) mit Bezug auf Gl. (67) und auf das im Absatz III über das Vorzeichen von  $\alpha$  Gesagte

$$(109) \quad \alpha = \beta = \kappa_{krit} = \left( \frac{2u-1}{2u} \right) \kappa_2 = \frac{29}{30} \cdot \kappa_2 = \left( \frac{2u+1}{2u} \right) \kappa_3 = \frac{31}{30} \cdot \kappa_3,$$

so liefern die obengenannten, sich nur durch die Bezeichnung der laufenden Veränderlichen voneinander unterscheidenden Formeln zahlenmäßig ein und denselben, dem Scheitel der  $\frac{K}{2}$ -Linie entsprechenden Wert, dem auf dem  $\kappa$ -Maßstab die beiden Abszissen:

$$(110) \quad \left\{ \begin{aligned} \kappa_2 &= \left( \frac{2u}{2u-1} \right) \kappa_{krit} = \frac{30}{29} \cdot \kappa_{krit} = \frac{30}{29} \cdot 19,180 = 19,841 \\ \kappa_3 &= \left( \frac{2u}{2u+1} \right) \kappa_{krit} = \frac{30}{31} \cdot \kappa_{krit} = \frac{30}{31} \cdot 19,180 = 18,561 \end{aligned} \right.$$

zugeordnet sind.



Der Scheitelwert 3,123 cm der  $\frac{K}{2}$ -Linie ist somit in Abb. 4 (links oben), je nachdem, ob er die Schwingweite  $C_2$  oder  $C_3$  bedeutet, bei der Ermittlung von  $\max \Sigma C$  bei  $x_2$  und  $x_3$  über den zugehörigen Ordinaten  $C_0 + C_1$  aufzutragen.

Da die darunterliegende  $C_0$ -Linie fast an denselben Stellen zwei voneinander nur sehr wenig verschiedene Scheitelwerte aufweist, während die  $C_1$ -Ordinaten nahezu unveränderlich bleiben, ergeben sich auch auf der  $\Sigma C$ -Linie in der Nähe von  $x_2$  und  $x_3$  zwei fast gleich große Gesamtordinaten  $\max \Sigma C$ , und zwar wird bei

$$x = \begin{cases} 18,584 \dots \\ 19,815 \dots \end{cases} \quad \max \Sigma C = \begin{cases} 7,789 \\ 7,787. \end{cases}$$

Der Wert  $\min \Sigma C = 5,111$  hingegen liegt ungefähr in der Mitte zwischen diesen beiden Scheitelordinaten, und zwar bemerkenswerterweise fast an der Stelle  $x_{krit} = 19,180$ , wo sich bei einfach harmonischer Erregung die größtmöglichen Schwingweiten  $C_1$  und  $C_0$  ergeben.

Anschließend an die vorstehende auszugswise Beschreibung des Verlaufes der  $\Sigma C$ -Linie sei noch der in Abb. 4 (oben Mitte) über der Grundlinie III—III' dargestellte Grenzfall kurz besprochen, in dem die  $C$ - und  $\Sigma C$ -Linien bei abnehmender Dämpfung  $b$  besonders ausgeprägte Formen annehmen. Wird  $b$  immer kleiner und schließlich zu Null, so nähern sich die Schwingweiten  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  und mit ihnen auch die Gesamtschwingweiten  $\Sigma C$  für die Abzissen  $x_2$  und  $x_3$  gleichzeitig dem Wert  $\infty$ . Die beiden (theoretischen)

Grenzwerte  $\max \Sigma C = \infty$  liegen dann auf den in den Abständen  $\frac{x_{krit}}{29}$

und  $\frac{x_{krit}}{31}$  vom kritischen Punkt der einfach harmonischen Erregung zu erreichenden Asymptoten, während sich  $\min \Sigma C = 5,502$  für  $x_{krit} = 19,180$  ergibt.

3. Ermittlung der Werte  $\max y$ . Wie bereits im Absatz IV erwähnt, sind die  $\max \Sigma C$  als äußerste Grenzwerte anzusehen, hinter denen die tatsächlich auftretenden größten Auslenkungen  $\max y$  schon infolge des Abklingens der Eigenschwingung  $S_0$  stets um einen gewissen Betrag zurückbleiben müssen. Dieser Unterschied wird um so größer sein, je größer die Schwingweite  $C_0$  der Eigenschwingung ist und je länger das durch den Faktor  $e^{-\rho t}$  ausgedrückte Aufschaukeln andauert, bis sich ein Höchstwert des Gesamtausschlages  $y$  ergibt. Damit ist aber noch kein Anhaltspunkt für die Berechnung von  $\max y$  gegeben, weil die gedachten Grenzwerte  $\max \Sigma C$  praktisch nicht zustande kommen, sondern nur angenähert erreicht oder sogar merklich unterschritten werden.

Um dies zu erkennen, denken wir uns — was immer möglich ist — alle vier Einzelschwingungen durch die Sinusfunktion ausgedrückt und die Winkel der Gangverschiebung vom waagerechten Nullstrahl aus gezählt. Dann wird, wenn unter Weglassung der Zeiger und ohne Rücksicht auf das Vorzeichen des Winkels der Gangverschiebung eine der Einzelschwingungen einfach durch

$$(111) \quad y = C \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

beschrieben ist, der positive Höchstwert

$$(112) \quad \max y = C \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = C$$

für alle ganzzahligen Werte  $n = 1, 2, 3$  usw. eintreten, d. h. für alle in bezug auf  $n$  ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$(113) \quad (\omega t + \varphi) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{(4n + 1)\pi}{2},$$

woraus sich dann die vom Beginn der Bewegung an gezählten Zeiten

$$(114) \quad t_{1,2,3\dots} = \frac{(4n + 1)\pi - 2\varphi}{2\omega}$$

ergeben, zu denen die den Fahrstrahl bildende Schwingweite  $C$  immer wieder senkrecht steht. Soll dies bei allen vier Einzelschwingungen gleichzeitig der Fall sein, so müssen, wenn wir

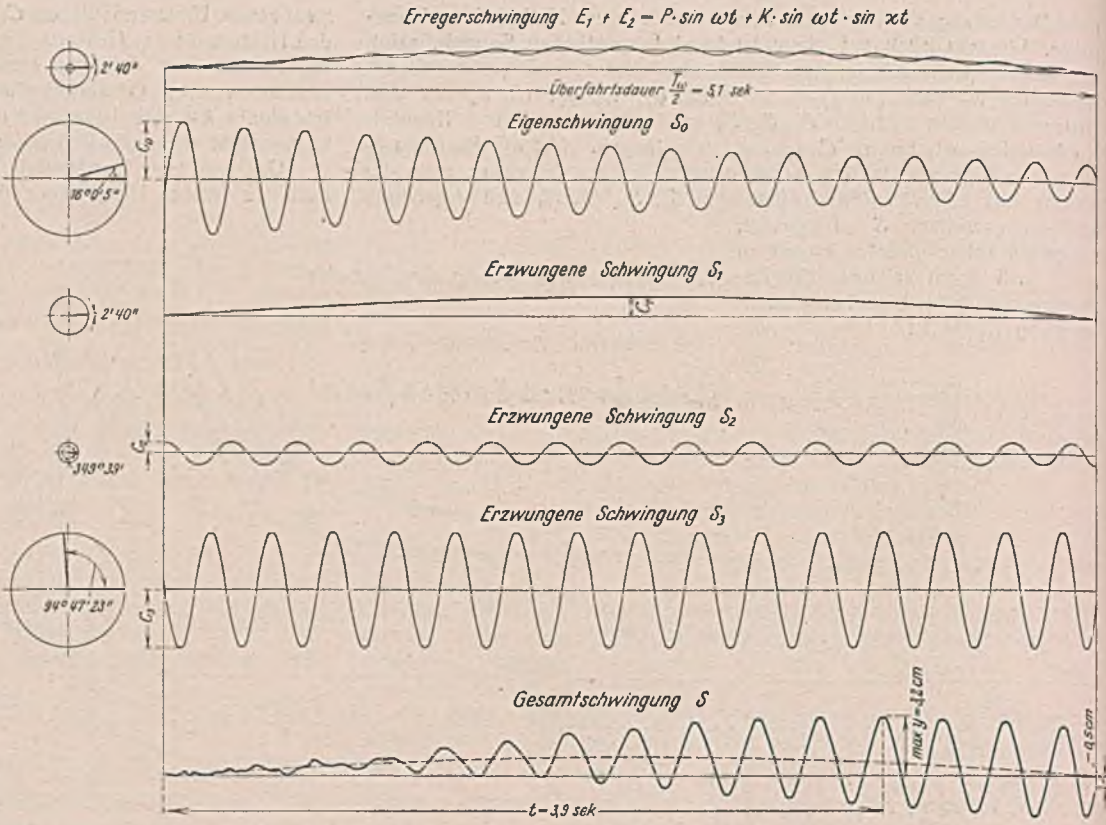


Abb. 6. Überfahrt einer Dampflokomotive  $V = 42,591$  km/h ( $\max \Sigma C$  links).

der Unterscheidung wegen wieder Zeiger gebrauchen, die vier Gleichungen:

$$(115) \quad t_{1,2,3\dots} = \frac{(4n_0 + 1)\pi - 2\varphi_0}{2\omega} = \frac{(4n_1 + 1)\pi - 2\varphi_1}{2\omega} = \frac{(4n_2 + 1)\pi - 2\varphi_2}{2(\omega - \omega)} = \frac{(4n_3 + 1)\pi - 2\varphi_3}{2(\omega + \omega)}$$

ganzzahlige Lösungen für  $n_0, n_1, n_2, n_3$  haben, deren kleinste die „kritische“ Zeit  $t_{krit}$  angibt, zu welcher die Einzelschwingungen erstmalig gleichen Gang haben. — Die vier als Fahrstrahlen aufzufassenden Schwingweiten  $C_0 \dots C_3$  liefern dann (in ein und derselben senkrechten Geraden skalar addiert) den vollen Betrag  $\max \Sigma C$ .

Wie leicht einzusehen ist, werden sich jedoch für die praktisch aus mehrstelligen Dezimalbrüchen gebildete Gleichungsgruppe (115) keine ganzzahligen Lösungen finden lassen, weshalb die Fahrstrahlen der Schwingweite  $C_0 \dots C_3$  nicht genau gleichen Gang haben können — ähnlich wie die Kurbelstellungen eines Lokomotivzuges, wenn die Triebbrad Durchmesser in keinem einfachen Zahlenverhältnis zueinander stehen.

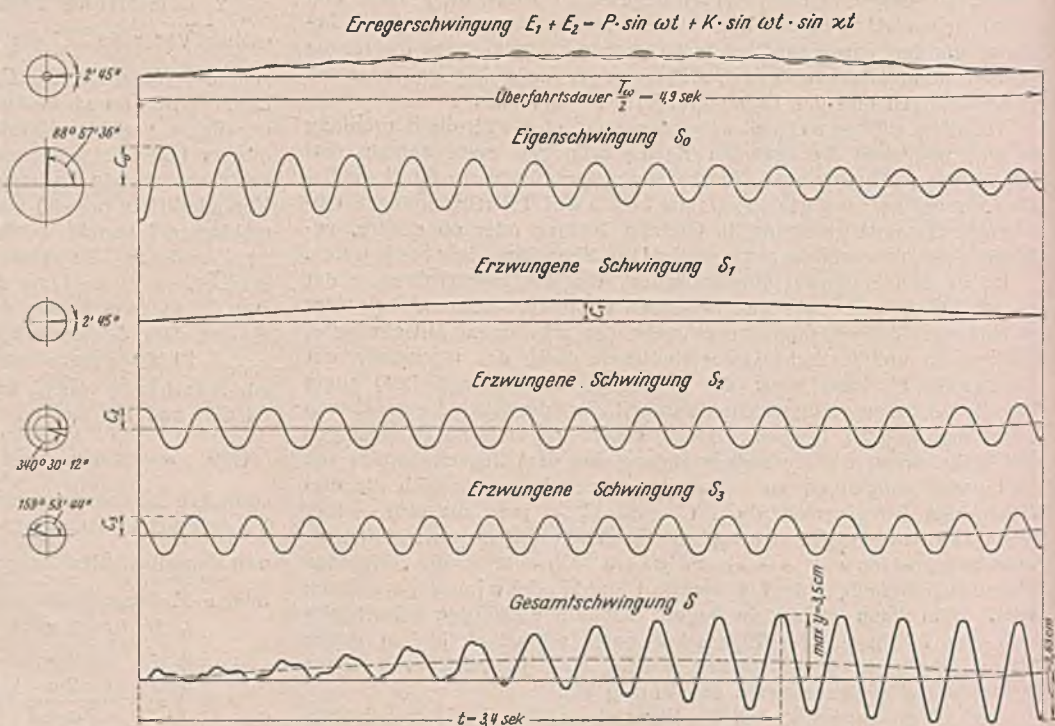


Abb. 7. Überfahrt einer Dampflokomotive  $V = 43,957$  km/h ( $\min \Sigma C$ ).



Erregerschwingung  $E_1 + E_2 = P \cdot \sin \omega t + K \cdot \sin \omega t \cdot \sin \alpha t$

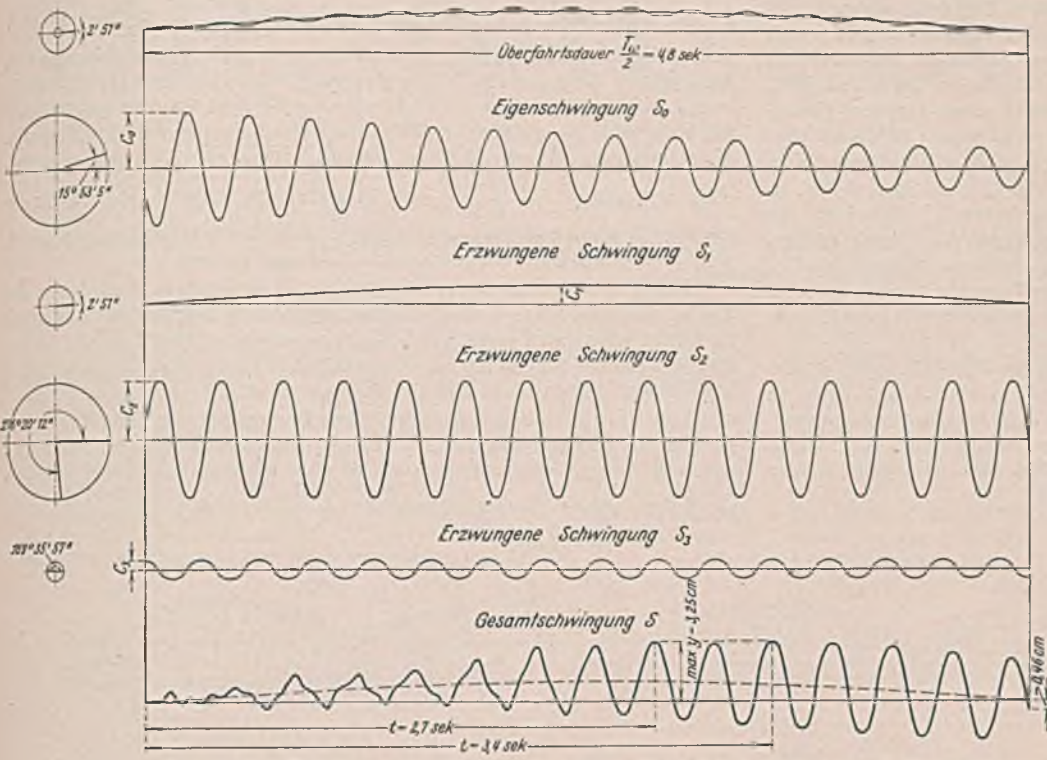


Abb. 8. Überfahrt einer Dampflokomotive  $V = 45,413$  km/h (max  $\Sigma C$  rechts).

Ist demnach das Zustandekommen von genauen Werten max  $\Sigma C$  nicht zu erwarten, so können sie doch nahezu erreicht werden, wenn die Fahrstrahlen der Schwingweiten gleichzeitig fast senkrecht nach oben oder unten gerichtet sind. Ist außerdem die Schwingweite  $C_0$  sowie die Dämpfung  $b$  sehr klein und die Aufschaukelungszeit  $t_{krit}$  kurz, so wird die wirklich auftretende größte Ordinate max  $y$  von ihrem äußersten Grenzwert max  $\Sigma C$  nicht viel verschieden sein.

wirkung hervorgerufene Schwingungsvorgang gerade an jener Stelle verhält, wo bei einfach harmonischer Erregung die größten Ausschläge auftreten.

In Abb. 6 bis 8 sind die den drei obengenannten Sonderfällen entsprechenden Gesamtschwingungen  $y$  aus den vier Einzelschwingungen  $S_0 \dots S_3$  durch algebraisches Zusammensetzen der Ausschläge  $y_0 \dots y_3$  ermittelt, während in Abb. 9 nur die auf gleiche Art gewonnene Gesamtschwingungen für zwei weitere Überfahrten dargestellt sind. Bemerkenswert ist der aus allen fünf Abbildungen zu ersehende, unruhige, „zittrige“ Beginn der Gesamtschwingungen, die erst später einen ruhigen Verlauf zeigen, indem sie in regelmäßige Sinuswellen übergehen, als deren Grundlinie gewissermaßen die der Wanderlastwirkung entsprechende, halbe Sinuswelle gelten kann. In den Gesamtschwingungen kommt die Eigentümlichkeit der doppelt harmonischen Erregelinie deutlich zum Ausdruck, insbesondere das im allgemeinen Integral (90) genau erfaßte An- und Abswellen der Wanderlast und der Triebkraftwirkung. Dabei sind die als Endergebnis entstehenden Linien, weil die Brücke erst aufgeschaukelt werden muß, gegenüber der Erregerwirkung in der Zeitrichtung (das ist nach rechts) mehr oder weniger verschoben oder verzerrt und enden, während sie sämtlich mit Null beginnen, mit einer der Lokomotivausfahrt

Wollte man die soeben kurz erörterten Zusammenhänge in allgemeine Formeln kleiden, so würde dies zu sehr verwickelten Ausdrücken führen, deren Handhabung viel umständlicher wäre als das zeichnerische Verfahren, das nun zur Auswertung einiger bei verschiedenen Fahrgeschwindigkeiten auftretenden Schwingungsvorgänge angewendet werden soll.

G. Einige kennzeichnende Beispiele.

Für die zeichnerisch-rechnerische Auswertung wählen wir vorerst die drei hervorstechenden Fälle, in denen sich die theoretischen Grenzwerte max  $\Sigma C$  und min  $\Sigma C$  zumindest annähernd ergeben könnten, wenn die Fahrstrahlen der Schwingweiten in die hierzu erforderlichen Ausnahmestellungen gelangen würden. Dabei sei ausdrücklich bemerkt, daß der Wert min  $\Sigma C$  im Vergleich mit min  $y$  selbstredend keinerlei Bedeutung hat, weil ja min  $y$  stets gleich Null sein muß und durch algebraisches Zusammensetzen der Einzelausschläge  $y_0 \dots y_3$  sehr oft zustande kommen kann und auch zustande kommen muß, damit die vier Einzelschwingungen zusammen wieder eine ausgesprochene Schwingung (das ist eine um den Nullpunkt pendelnde Bewegung) ergeben.

Wenn der Fall min  $\Sigma C$ , obwohl er für min  $y$  nicht maßgebend ist, doch behandelt wird, so geschieht dies, um zu zeigen, wie sich der durch Wanderlast und Triebkraft

Zahlentafel

Nr.	Bezeichnung	I		III						IV
		Elektrolokomotive mit Einzelantrieb über die Brücke fahrend (Abb. 2)	Dampflokomotive in Brückenmitte mit Räderschleifen anfahren (Abb. 3)	Dampflokomotive mit verschiedenen Geschwindigkeiten über die Brücke fahrend (Abb. 6-9)						
				a	b	c	d	e	f	
1	$V$ km/h	43,957		40	42,591	43,957	45	45,413	50	Anmerkung  Den zahlenmäßigen Berechnungen liegen folgende Festwerte zu Grunde:  $c = \frac{100L}{cm} - [m \cdot t^{-2}]$ $m = \frac{2}{3} \frac{G+P}{g} = \frac{2}{3} \frac{(300+100)L}{981 \text{ cm/sek}^2}$ $= 0,271832$ wobei der vorangestellte Wert $\frac{2}{3}$ eine mit theoretischen Erwägungen und praktischen Versuchen im Einklang stehende Erfahrungsziffer bedeutet.  $b = 0,125183 - [m \cdot t^{-1}]$ $p = \frac{b}{2m} = 0,230258 - [t^{-1}]$  Da den Rechnungen der Wert $v = \frac{E}{m}$ statt $v = \sqrt{\frac{E}{m} - \frac{N^2}{4m^2}}$ zugrunde gelegt ist, ergeben sich mitunter belanglose, erst in den höheren Dezimalstellen zum Ausdruck kommende Abweichungen gegenüber den strengen theoretischen Werten, so u.a. bei den Phasenwinkeln der Gangverschiebung in Zeile 27 u. 28.
2	$v$ m/sek	12,210		11,111	11,831	12,210	12,500	12,615	13,889	
3	$\nu$			19,180						
4	$n_\nu$			3,053						
5	$T_\nu$			0,327589						
6	$\omega$	0,639335		0,581776	0,619467	0,639335	0,654500	0,660500	0,727220	
7	$n_\omega$	0,101753		0,092592	0,098591	0,101753	0,104167	0,105124	0,115741	
8	$T_\omega$	9,827682		10,800000	10,142897	9,827682	9,600000	9,572778	8,640000	
9	$\alpha - 30^\circ \omega$		19,180	17,453293	18,584000	19,180000	19,634977	19,815000	21,816583	
10	$n_\alpha$		3,053							
11	$T_\alpha$		0,327589							
12	$\alpha - (\omega - \alpha)$			-16,871577	-17,964545	-18,540726	-18,980480	-19,154500	-21,089370	
13	$n_{\alpha - \alpha}$			2,685185	2,859145	2,950850	3,020833	3,048535	3,356481	
14	$T_{\alpha - \alpha}$			0,372414	0,349755	0,338885	0,331034	0,328026	0,291931	
15	$\beta - (\omega + \alpha)$			18,035062	19,203495	19,819409	20,289486	20,475519	22,543834	
16	$n_{\beta + \alpha}$			2,870370	3,056331	3,154358	3,229170	3,258782	3,587967	
17	$T_{\beta + \alpha}$			0,348387	0,327190	0,317022	0,309677	0,306863	0,278710	
18	$C_0$	0,033370	6,247793	0,302016	3,082691	1,991931	2,752646	3,748877	0,772670	
19	$C_1$	1,001113	6,247340	1,000922	1,001045	1,001113	1,001166	1,001167	1,001439	
20	$C_2$			0,330074	0,601077	1,078485	2,379781	3,708728	0,356013	
21	$C_3$			0,635540	3,103864	1,039074	0,616215	0,528249	0,786048	
22	$\Sigma C$	1,034483	12,495133	2,268552	7,788677	5,110603	6,749808	7,787041	1,726170	
23	max $y$			2,20	3,20	3,50	3,80	3,25		
24	(V)	1,001113		2,268552	7,788677	5,110603	6,749808	7,787041	1,726170	
25	(V)			2,20	3,20	3,50	3,80	3,25		
26	$t$			2,61	3,90	3,40	3,60	2,70	3,40	
27	$\varphi_0$	0,024039 - -1° 22' 38"	1,558,792 - -89° 18' 44"	1,369000 - -78° 26' 16"	0,279276 - -16° 00' 05"	1,552,643 - -88° 57' 36"	0,505293 - -51° 52' 10"	0,277240 - -15° 53' 05"	1,165244 - -66° 45' 49"	
28	$\varphi_1$	0,000801 - -0° 02' 45"	1,570796 - -90°	0,000729 - -0° 02' 30"	0,000776 - -0° 02' 40"	0,000801 - -0° 02' 45"	0,000820 - -0° 02' 49"	0,000914 - -0° 03' 08"		
29	$\varphi_2$			6,190702 - -349° 39' 00"	6,102542 - -349° 39' 00"	5,942903 - -340° 30' 12"	5,429168 - -311° 04' 05"	4,822987 - -276° 20' 12"	3,267242 - -187° 11' 57"	
30	$\varphi_3$			0,192500 - -11° 01' 46"	1,654392 - -94° 47' 23"	2,790702 - -159° 53' 44"	2,931364 - -167° 57' 17"	2,960063 - -169° 35' 57"	3,067756 - -175° 46' 10"	



entsprechenden Ordinate  $y$  und der Tangenteigung  $y'$ . Durch diese beiden Größen ist das Ausschlagen der leeren Brücke bestimmt. Zu ersehen ist, daß die beiden nahezu gleich großen Größtwerte  $\Sigma C$  weder in Abb. 6 u. 8, noch bei dem dazwischen liegenden Fall (Abb. 7) erreicht werden. Die Größtwerte  $y$  kommen vielmehr nur bis auf rd. 50% an die in Abb. 4 u. 5 sowie in die Zahlentafel eingetragenen Grenzwerte 7,787 und 7,789 heran. Demnach ist nicht eine 7,788fache Vergrößerung ( $V$ ), sondern nach dem in Abb. 6 u. 8 ersichtlichen Wert  $\max y = 3,20$  und  $3,25$  cm bloß eine solche von ( $V$ ) = 3,20 und 3,25 in Rechnung zu stellen. Zu Abb. 8 sei noch bemerkt, daß hier ein  $\max y = 3,25$  zweimal, und zwar für  $t = 2,7$  sek und  $t = 3,4$  sek auftritt. Damit ist der Ansatz für einen schwebungsartigen Verlauf der Gesamtschwingung gegeben, der in ausgeprägterer Form um so eher erwartet werden kann, je länger die Brücke und je kleiner der Triebdardurchmesser ist.

Die an Hand der Abb. 6 bis 8 gemachten Feststellungen dürfen nun keineswegs dahingehend verallgemeinert werden, daß auch in anderen Fällen  $\max y$  nicht näher an  $\max \Sigma C$  herankommen könne. Dies ist allein schon aus Abb. 9 (oben) zu ersehen, wo die Werte  $\max \Sigma C = 2,27$  und  $\max y = 2,20$  nahezu gleich sind. Dabei sind diese Zahlen allerdings nicht die absoluten Grenzwerte des Belastungsfalles, sondern gelten bloß für eine Fahrgeschwindigkeit  $V = 40$  km/h. Es hängt jedoch von den Bestimmungsstücken der jeweiligen Aufgabe ab, ob nicht auch die absoluten Größtwerte  $\Sigma C$  bei einer gewissen Geschwindigkeit  $V$  ebenso angenähert erreicht werden können wie in Abb. 9, was sich aber erst nach Ermittlung des betreffenden gesamten Schwingungsvorgangs beurteilen läßt.

#### H. Praktische Anwendungen.

Für die praktische Anwendung kommen die vorstehenden Untersuchungen zunächst als Handhabe für die Überprüfung der Stoßzahlen in Betracht. Bei großen Brücken und solchen von besonderer Bauart, bei denen eine einzige starre Ziffer nicht mehr ausreicht, um die dynamischen Lastwirkungen zu erfassen, wird es sich jedoch empfehlen, diese Einflüsse eigens zu ermitteln. Das gleiche gilt für alte Tragwerke, die noch eine Zeitlang im Verkehr bleiben sollen.

Bei Überprüfungen und Neuberechnungen wird die Hauptaufgabe darin bestehen, die Verhältniszahl zwischen der dynamischen und der statischen Lastwirkung zu bestimmen. Diese durch die Vergrößerung ( $V$ ) oder ( $V$ ) ausgedrückte Kennziffer wird praktisch wesentlich kleiner ausfallen als in dem in dieser Untersuchung behandelten Erläuterungsbeispiel, bei dem die Annahmen so getroffen wurden, daß der Leitgedanke der rechnerischen Entwicklungen möglichst deutlich zum Ausdruck kommt. So wurde vor allem die Triebdardruckerkraft mit ihrem vollen Höchstbetrag (das ist mit 15% des Raddruckes) in Rechnung gestellt, obwohl sie, auf die Achslast bezogen, selbst bei den für Brückenschwingungen ungünstigsten Zweizylinderlokomotiven, deren Kurbeln um 90° gegeneinander versetzt sind, nur mit

$$(116) \quad K = \frac{0,15 P \sqrt{2}}{2} = 0,105 P = 10,5 t$$

anzunehmen ist. Daher sind die beiden von  $K$  abhängigen Posten der Gl. (90) im Verhältnis 10,5 : 15 = 0,70 zu verkleinern, und es ergibt sich, weil diese beiden Posten im kritischen Bereich nahezu allein ausschlaggebend sind, für die Ordinaten der Schwingungslinien sowie für die in der Zahlentafel angegebenen Schwingweiten ebenfalls eine Abminderung bis auf 70% ihrer mit  $K = 15 t$  berechneten Werte.

Der grundsätzliche Zusammenhang zwischen der Vergrößerung  $V$  und der Stoßzahl  $\gamma$ , die ja begrifflich dasselbe bedeuten, ist ohne Rücksicht auf die bei der Ermittlung der wirklichen Stoßzahlen zu beachtenden Einzelheiten aus folgenden einfachen Überlegungen zu ersehen. Wird als Belastung der N-Zug angenommen, so beträgt das größte Biegemoment für eine Stützweite  $l = 60$  m  $\max M_p = 5325$  tm, dem eine statische Durchbiegung  $\max \delta$  in Brückenmitte entspricht. Demgegenüber erzeugt die 100 t schwere Elnachslokomotive ein Biegemoment

$$M_p = \frac{P l}{4} = 1500 \text{ tm}$$

und eine statische Durchbiegung  $\delta = 1$  cm. Die dynamischen Wirkungen der allein fahrenden Lokomotive könnten somit  $\frac{5325}{1500} = 3,55$  mal so groß sein wie die statischen, ehe die Stoßzahl  $\gamma$  den Wert Eins überschreitet, weil ja erst dann die vom N-Zug hervorgerufene statische Durchbiegung  $\max \delta = 3,55$  cm erreicht wäre. In unserem Beispiel ist dies jedoch nicht der Fall, weil die größte, im kritischen Bereich (bei 45 km/h) auftretende Ausschwingung  $\max y = 3,80$  cm beträgt, also, auf 70% abgemindert, eine Stoßzahl  $\gamma = \frac{0,70 \cdot 3,80}{3,55} = 0,75$  ergibt, die selbstredend nur für die aus der Tenderlokomotive allein bestehende Versuchsbelastung gilt und, weil kleiner als Eins, praktisch nicht in Frage kommt.

Bei der Überfahrt von zwei oder drei Lokomotiven (aus denen der für die wirkliche Stoßzahl maßgebende, dynamisch ungünstigste Lastenzug zu bilden wäre) wird jedoch, besonders wenn sie gleiche Gangart haben eine wesentliche Steigerung der dynamischen Wirkungen auftreten, während angehängte Wagen diese zumeist mildern werden.

Die Stoßzahl ist somit, da bei ihrer Bemessung auch die Bauart der Brücke berücksichtigt werden muß, von vielerlei Umständen abhängig, deren Wirkungen sich entweder aufsummieren oder auch aufheben können.

#### Überfahrt einer Dampflokomotive

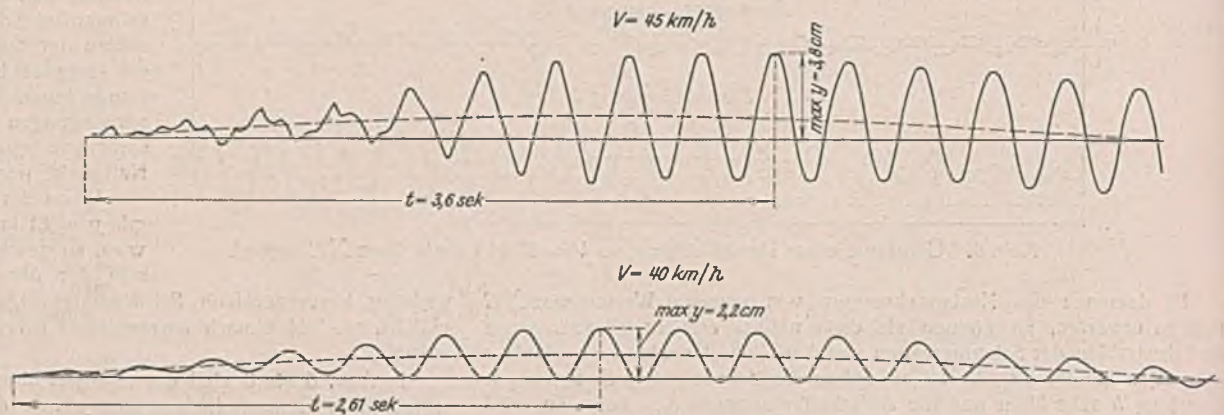


Abb. 9.

Eine gegenseitige Tilgung der dynamischen Einflüsse wird um so eher zu erwarten sein, je mehr Fahrzeuge verschiedener Gattung sich gleichzeitig auf der Brücke befinden können, d. h. je länger diese ist. Auch wird auf längeren Brücken die Triebdardwirkung gewöhnlicher, bloß mit einer Lokomotive bespannter Züge gegenüber der sonstigen Belastung mehr in den Hintergrund treten. Hingegen sind Lokomotivzüge, die aus mehreren kurzen und schweren Maschinen gleicher Bauart bestehen, gerade bei langen Brücken als besonders ungünstig anzusehen, weil sich innerhalb der längeren Überfahrzeit eher Resonanzerscheinungen ausbilden können als bei kürzeren Brücken. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit nicht sehr groß, daß die Lokomotiven die Brücke gerade mit einer im kritischen Bereich liegenden Geschwindigkeit und obendrein mit ganz gleichen Kurbelstellungen befahren werden, wodurch eine Art „Springflut“ der dynamischen Wirkungen zustande käme.

Da sich die sehr zahlreichen, soeben kurz angedeuteten Möglichkeiten nicht leicht in wenige einfache Regeln kleiden lassen, kann es nicht wundernehmen, wenn bei der Ermittlung der Stoßzahlen noch manche Frage offen ist. So wird es u. a. zweckmäßig sein, bei großen und teuren Brücken ohne Beeinträchtigung des Betriebes gewisse, besonders ungünstige, dabei aber nur selten zu erwartende dynamische Lastwirkungen einfach auszuschließen, statt ihretwegen mit einer allzu großen starren Sicherheitsziffer zu rechnen.

Mit der in dieser Untersuchung gebotenen Möglichkeit, die gleichzeitige Wirkung der Wanderlast und Triebdardkraft rechnerisch zu erfassen sowie durch Modellversuche zu ermitteln, mag auf dem vom verstorbenen Abteilungspräsidenten Dr.-Ing. Krabbe richtunggebend behandelten Forschungsgebiet ein weiterer Schritt getan sein.

7) Vgl. G. Schaper: Die neuen Lastenzüge der Deutschen Reichsbahn und die Verstärkungen der Brücken. Org. Eisenbahn 1925, S. 103 bis 105.

INHALT: Die Gebäudeschäden des Bukarester Erdbebens vom 10. November 1940. — Gleichzeitige Wirkung der Wanderlast und der Triebdardkraft bei Brückenschwingungen. —

Verantwortlich für den Inhalt: Dr.-Ing. Erich Lohmeyer, Oberbaudirektor a. D., Berlin-Steglitz, Am Stadtpark 2. — Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9. — Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.