GEOMETRYA

DZIEŁA G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO.

ARYTMETYKA. — Kurs zupełny, zawierający : Liczenie. Działania na liczbach całkowitych. Podzielność liczb, największy spólny dzielnik, i najmniejszy wielownik. Ułamki. Liczby dziesiętne. Działania skrócone. Miary dziesiętne i dawne. Rachunek liczb wielorakich. Wyciąganie pierwiastku kwadratowego i sześciennego. Stosunki i proporcye. Reguły trzech. Teoryę przybliżeń liczebnych, błędy samoiste i względne. NOTY, wiadomość o postępniach arytmetycznej i geometrycznej; wyciąganie skrócone pierwiastku kwadratowego; kilka twierdzeń własności liczb. Przeszło 100 zagadnień rozwiązanych, i różne ćwiczenia. in-8° Paryż. 1866. Cena fr. 4.

Wkrótce wyjdzie z druku:

TRYGONOMETRYA PROSTOLINIJNA I SFERYCZNA.

Paryż. — Drukarnia E. MARTINET, ulica Mignon, 2.

GEOMETRYA

PRZEZ

G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

PROFESSORA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO,
W SZKOLE WYŻSZEJ POLSKIEJ W PARYŻU.

WYDANIE DRUGIE CAŁKIEM PRZEROBIONE I POWIĘKSZONE.

PARYŻ
W KSIĘG. K. KROLIKOWSKIEGO
ULICA DE SEINE, 20

LWÓW
W KOMMISIE KSIĘGARNI
KAROLA WILDA

1869

DO CZYTELNIKA.

Jako Arytmetyka tak i drugie wydanie mojej Geometryi wychodzi kosztem Hr. Jana Działyńskiego.

Nie każdemu dany jest niepospolity rozum, a nie każdy ma wzniosłe uczucia, żeby mógł pojąć doniosłość i chciał zamiłować myśl wydawania dzieł, zwłaszcza matematycznych, których trzeba ponieść koszta napisania i koszta druku bez żadnego przemysłowego zysku, i przestać na samem tylko moralnem zadowoleniu z dopełnienia narodowej powinności! Cześć więc i dzięki Hr. Działyńskiemu że, rozumiejąc na czem się opiera przyszłość narodu, mógł i chciał z poświęceniem przedsięwziąć takie wydawnictwo. Bez Niego nasza młodzież, mówię z głębokiem westchnieniem, nie czytałaby ani mojej Arytmetyki ani Geometryi!

To drugie wydanie Geometryi całkiem się różni od pierwszego. Wszystko w niem na nowo przerobione, znacznie powiększone, i ułożone w porządku w jakim dzisiaj wykładają Geometryę na zachodzie.

Od niedawnego czasu, Geometryę Starożytnych uzupełniono wprowadzeniem ogólnych metod Geometryi nowoczesnej. Pierwszą wyłożyłem w całości, z drugiej dałem tyle ile zakres elementarnego dzieła obejmować powinien, to jest: teoryę figur jednokładnych na płaszczyznie i w przestrzeni; stosunek nieharmoniczny i podział harmoniczny; biegunowę i oś pierwiastną, prostolinijną i sferyczną; figury biegunowe wzajemne; teoryę jednokreślności i pęków jednokreślnych, inwolucyę i pęki w inwolucyi; płaszczyzny biegunowe i pierwiastne.

Nadto, wyłożyłem maxima i minima figur płaskich i w przestrzeni; dałem wiedzę fundamentalnych własności trzech linij stożkowych; pokazałem przecięcia stożka i walca obrotowego, i przecięcia przeciwrównoległe stożka kołowego pochyłego. Nakonieć, dałem wiedzę o helicy, zasady perspektywy, teoryę przekształcenia przez promienie wodzące odwrotne, i rzut stereograficzny.

O użytku metod Geometryi nowoczesnej jedno słowo wystarczy. Wiadomo że, aby samą Geometryą Euklidesa otrzymać koło styczne do trzech kół danych, trzeba przejść przez szereg poprzednich zagadnień, tak że ostatnie wykreślenie staje się prawie niemożebnem praktycznie; gdy tymczasem metody Geometryi nowoczesnej dają rozwiązanie *wprost* i ogólne. To rozwiązanie, wskazane przez różnych autorów, uprościłem tak, że odrazu znajduję środek i promień każdego dwojanu kół stycznych do trzech danych.

Do wyłożonych teoryj dołączyłem zastosowania, i wiele rozwiązanych zagadnień; a po każdej księdze umieściłem rozmaite zadania do rozwiązania, dla uczniów którzy chcą zgłębić umiejętność.

Idąc w duchu nowoczesnych metod uczenia, dałem dla twierdzeń dowodzenia wprost, a dla wzajemnic dowodzenia zwane *per absurdum;* dla zagadnień rozwiązania analityczne. W przypadkach niespółmierności, w liniach krzywych i w powierzchniach krzywych, użyłem metody granic, jako jedynej ściśle dydaktycznej.

W tem miejscu, dla lepszego wyjaśnienia rzeczy, zacny Czytelniku, weźmy przykład, i przypuśćmy że chodzi o dowodzenie twierdzenia : *Okręgi dwóch kół są proporcyonalne do promieni,* to jest $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$.

Przedtem, dowodzono tego twierdzenia mówiąc : jeśli ta proporcya nie jest prawdziwa, to dlatego że jeden z jej wyrazów, na przykład C', jest za wielki albo za mały. Biorąc okrąg najpierwej mniejszy od C' a potem większy, okazywano że żaden z dwóch nie sprawdza proporcyi. Ztąd wnoszono że, ponieważ okrąg C' nie jest ani za wielki ani za mały, proporcya $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$, jest prawdziwa. To rozumowanie nie jest zupełnie ściśłe; bo, przypuszczając że okrąg większy albo mniejszy od C' sprawdza proporcyę, przypuszcza się temsamem że istnieją okręgi wszelkiej wielkości; a to właśnie było pytaniem. Jest tu więc petycya zasad! żeby jej uniknąć, trzebaby, uważając promień większy albo mniejszy od R', dowodzić że oba przypuszczenia są niemożebne. Ale, mimo tego ulepszenia, dowodzenie zostaje zawsze uboczne.

Gdyby, stosując metodę nieskończenie małych, powiedziano :

Można uważać okrąg jako wielokąt foremny o nieskończenie małych bokach; owoż wielokąty foremne podobne mają się jako promienie, więc dwa okręgi kół mają się także jako promienie; wysłowionoby poprostu twierdzenie bez rzeczywistego dowodu. Albowiem, trzeba przede wszystkiem dowieśdź że biorąc, zamiast okręgu, wielokąt foremny wpisany o nieskończenie małych bokach, popełnia się błąd mniejszy od ilości nieskończenie małej 2° rzędu.

Przejdźmy nareszcie do metody granic. Uważając za widoczne że, *długość okręgu koła jest granicą do której dąży obwód wielokąta wpisanego w miarę jak jego boki maleją nieskończenie*, niektórzy dowodzą rzeczonego twierdzenia, mówiąc : Obwody wielokątów foremnych podobnych są proporcyonalne do swych promieni, *jakkolwiek małe mają boki;* więc okręgi jako granice tych obwodów są także proporcyonalne do swych promieni. To rozumowanie nie jest logiczne, bo przypuszcza że granice ilości zmiennych posiadają ich własności; co nie jest konieczną prawdą.

Żeby można użyć metody granic z całą matematyczną ścisłością, trzeba dać określenie długości łuku koła, dowodząc najpierwej że obwód łamanej wpisanej, której liczba boków rośnie nieskończenie i każdy bok dąży do zera, ma zawsze jedną i tę samą granicę, *jakakolwiek jest* USTAWA *wedle której te boki się zmieniają*; a potem, że łuk koła jest granicą tej łamanej. Czytelnik, przeglądając nasze dowodzenie twierdzenia, osądzi czy jest tak ścisłe jako być powinno. — Niech mi tu będzie wolno zwrócić uwagę uczonych professorów na dowodzenie powierzchni strefy i objętości wycinka sferycznego.

Z tablicy niżej umieszczonej, czytelnik będzie miał wyobrażenie o układzie tej książki, i o liczbie wyłożonych przedmiotów; a przebiegając nawet szybko rozdziały, zobaczy z jakiemi trudnościami miałem do walczenia.

Każdy pojmuje że nie łatwo pisać o rzeczach nad któremi mało kto w naszym języku pracował. Nie znając żadnego polskiego dzieła Geometryi nowoczesnej, musiałem, rad nierad, tworzyć techniczne wyrazy. Jeśli dobre, światli professorowie przyjmą je za swoje; a jeśli niedostateczne, utworzą lepsze. W każdym razie będę korzystał z dobrej rady.

We wszystkich częściach Geometryi, nietylko starałem się o jak największą jasność i nadewszystko o ścisłość dowodzeń, aby dzieło polskie nie ustępowało dziełom umiejętnego zachodu; ale jeszcze pragnąłem zachować wszędzie czystość i dobitność naszej mowy.

Jeśli ta praca, którą poddaję pod sąd ludzi specyalnych, zostanie przyzwoicie oceniona, i przyczyni się do umysłowego rozwoju naszej młodzieży, jako śmiem się spodziewać, będzie to dla Hr. Działyńskiego i dla mnie miłą nagrodą, i zachętą do wydania innych dzieł matematycznych które gotujemy.

Pisałem w Paryżu dnia 31 Stycznia 1869.

G.-H. NIEWĘGŁOWSKI.

TABLICA RZECZY

ZAWARTYCH W TEM DZIELE.

KSIĘGA TRZECIA

PROPORCYONALNOŚĆ LINIJ, PODOBIEŃSTWO WIELOKĄTÓW.

KSIĘGA CZWARTA

MIARA POWIERZCHNI.

Stronica

KSIĘGA PIĄTA

WŁASNOŚCI ODCINKOWE.

GEOMETRYA PRZESTRZENI.

KSIĘGA SZÓSTA

PŁASCZYZNY.

Stronica

KSIĘGA SIÓDMA

WIELOŚCIANY.

KSIĘGA ÓSMA

WALEC, STOŻEK, SFERA.

Stronica

KSIĘGA DZIEWIĄTA

MIARA TRZECH CIAŁ OKRĄGŁYCH, I WIELOŚCIANY FOREMNE.

KSIĘGA DZIESIĄTA

POWIERZCHNIE KRZYWE W OGÓLNOŚCI.

NOTY.

SKRÓCENIA UŻYWANE W TEM DZIELE.

Dla łatwiejszego zrozumienia dowodzeń, będziemy czasem odsyłali do zadań poprzednio wyłożonych; wtedy, jedna liczba położona w nawiasie, jako (3), oznacza twierdzenie *trzecie* księgi bieżącej; dwie zaś liczby, rzymska i arabska, jako (II, 3), oznaczają księgę *drugą*, twierdzenie *trzecie*.

Litery *uw*, *wn*, *wz*, *zag*, znaczą: *uwagę*, *wniosek*, *wzajemnicę*, *zagadnienie*, do których się odsyła; i tak: (16, *wn.* 2) oznacza twierdzenie XVI, wniosek II księgi bieżącej.

GEOMETRYA PRZESTRZENI (*)

KSIĘGA SZÓSTA

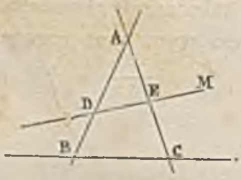
PŁASCZYZNY.

Wiemy już że *płasczyzną* nazywa się taka powierzchnia do której przystaje całkiem wszelka linia prosta jak tylko ma z nią dwa punkta spólne.

TWIERDZENIE I.

Przez trzy punkta A, B, C, *nie w linii prostej, można zawsze poprowadzić płasczyznę, ale tylko jedną.*

Jakoż, można zawsze wyobrazić linię prostą przechodzącą



przez dwa punkta A i B, i przez nią poprowadzić jakąkolwiek płasczyznę; a potem, obracając tę płasczyznę około prostej AB, można oczywiście otrzymać położenie w którem dotyka punktu C. Istnieje więc płasczyzna przechodząca przez trzy dane punkta A, B, C.

Ta płasczyzna jest jedyna. Albowiem, niech będzie, jeśli można, M jeden z punktów drugiej płasczyzny przechodzącej przez te

(*) Geometryę przestrzeni nazywano dawniej SOLIDOMETRYĄ; niewłaściwie, bo solidometrya (mierzenie brył) jest małą tylko częścią geometryi przestrzeni.

same trzy punkta A, B, C. Przez punkt M, i przez punkt D wzięty na prostej AB, poprowadźmy linię prostą MD która spotka prostę AC w punkcie E różnym od D. Owoż, prosta MED, mająca dwa punkta D i E spólne z obydwiema płaszczyznami, leży cała na obydwóch; zatem wszelki punkt M drugiej płaszczyzny należy do pierwszej, i temsamem druga płaszczyzna nie jest różna od pierwszej.

Więc, przez trzy punkta nie leżące w linii prostej można zawsze poprowadzić jedną płaszczyznę, i tylko jedną. To wszystko razem wyraża się treściwie mówiąc :

Trzy punkta nie w linii prostej WYZNACZAJĄ *płaszczyznę.*

WNIOSEK I. — Ztąd wynika że : *Linia prosta i punkt leżący zewnątrz wyznaczają płaszczyznę.*

Dwie proste przecinające się wyznaczają płaszczyznę.

II. — *Dwie proste równoległe wyznaczają płaszczyznę.* Bo dwie równoległe leżą na tej samej płaszczyznie ; a przez jedną z nich i przez punkt wzięty na drugiej, jedną tylko płaszczyznę poprowadzić można.

UWAGA. — Z tego co poprzedza łatwo wnosimy że:

Miejscem położeń po sobie idących linii prostej, która przechodzi przez punkt stały i opiera się na drugiej prostej, jest płaszczyzna wyznaczona przez ten punkt i tę prostę.

Miejscem położeń po sobie idących linii prostej, która zostaje równoległą do siebie samej i spotyka daną prostę, jest płaszczyzna wyznaczona przez tę prostę i przez jedno z położeń prostej ruchomej.

TWIERDZENIE II.

Przecięcie się dwóch płaszczyzn jest linią prostą.

Bo, gdyby trzy punkta przecięcia dwóch płaszczyzn nie były w linii prostej, te dwie płaszczyzny, przechodzące prez takie trzy punkta, nie byłyby oddzielne.

WNIOSEK. — *Przecięcie się trzech płaszczyzn jest punktem*, w którym przecięcie dwóch pierwszych płaszczyzn spotyka trzecią płaszczyznę.

Płaszczyzna jest powierzchnią nieograniczoną; ale, dla utkwienia myśli, przedstawia się zwykle płaszczyzny ograniczone równoległobokami; jako pokazują figury poniżej.

LINIE PROSTE I PŁASCZYZNY PROSTOPADŁE.

Określenie I. — Mówi się że linia prosta jest *prostopadła do płaszczyzny*, gdy jest prostopadła do wszystkich prostych które przechodzą przez jej spodek na tej płaszczyznie. Nawzajem, *płaszczyzna* jest wtedy *prostopadła do tej prostej*.

Nazywa się *pochyłą do płaszczyzny* wszelka prosta która, spotykając tę płaszczyznę, nie jest do niej prostopadła.

Twierdzenie III.

Jeśli linia prosta PO *jest prostopadła do dwóch prostych* OA, OB, *przechodzących przez jej spodek na płaszczyznie* MN, *to jest prostopadła do tej płaszczyzny*.

Jakoż, przez spodek O prostopadłej OP poprowadźmy, na płaszczyznie MN, jakąkolwiek prostę OC i poprzeczną ACB; po czem, przedłużmy OP długością $OP' = OP$, i połączmy punkta P, P' z punktami A, C, B.

Owoż, prosta AO jest prostopadła we środku prostej PP', zatem pochyłe AP, AP' są równe; dla tej samej przyczyny pochyłe BP, BP' są równe. Więc dwa trójkąty ABP, ABP', mające trzy boki odpowiednio równe, przystają do siebie, a temsamem proste CP, CP' przystają także i są równe. Ztąd wynika że w trójkącie równoramiennym CPP' prosta CO jest prostopadła do podstawy PP'. Więc linia PO, prostopadła do wszelkiej prostej OC przechodzącej przez jej spodek na płasczyznie MN, jest prostopadła do tej płasczyzny.

Nawzajem, *wszystkie prostopadłe* OA, OB, OC...... *wyprowadzone z jednego punktu prostej* OP, *leżą na jednej płasczyznie, prostopadłej do tej linii.*

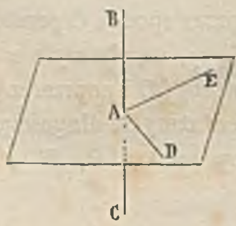
Jakoż, prosta OP, jako prostopadła do OA i OB, jest prostopadła do płasczyzny AOB; zatem jeśli przez OP i OC poprowadzimy płasczyznę POC, jej przecięcie z płasczyzną AOB będzie prostopadłe do OP. Owoż, prosta OC leżąca na płasczyznie POC jest właśnie prostopadła do OP; więc prosta OC jest przecięciem tych dwóch płasczyzn, to jest leży na płasczyznie AOB która jest prostopadła do OP.

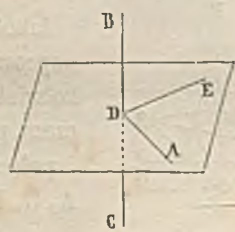
Ztąd wnosimy że

Płasczyzna prostopadła do linii prostej jest miejscem geometrycznem prostopadłych do tej linii przez jeden jej punkt przechodzących.

Twierdzenie IV.

Przez punkt dany A *można zawsze poprowadzić płasczyznę prostopadłą do linii prostej* BC, *ale tylko jedną.*





1° Jeśli punkt A jest dany na prostej BC, wyobraźmy dwie różne płasczyzny przechodzące prez tę linię, i na nich poprowadźmy przez punkt A proste AD i AE prostopadłe do BC; płasczyzna DAE będzie prostopadła do prostej BC w punkcie A.

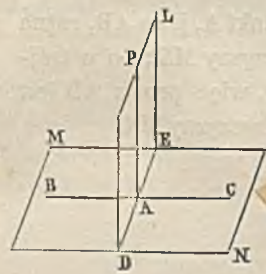
Ta płasczyzna DAE jest jedyna, jako miejsce prostopadłych wyprowadzonych z jednego punktu A prostej BC (3. *wz.*).

2° Przypuśćmy punkt A dany zewnątrz prostej BC. Na płasczyznie ABC, spuśćmy z punktu A prostopadłę AD na BC, i ze spodka D wyprowadźmy, na innej płasczyznie przechodzącej przez BC, prostopadłę DE do BC; płasczyzna ADE będzie oczywiście prostopadła do danej prostej BC.

Ta płasczyzna jest jedyna; bo płasczyzna przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej BC, zawierając prostopadłę AD do BC, musi przechodzić przez punkt D; owoż przez punkt D prostej BC jedną tylko płasczyznę prostopadłę do tej linii poprowadzić można (1°).

Twierdzenie V.

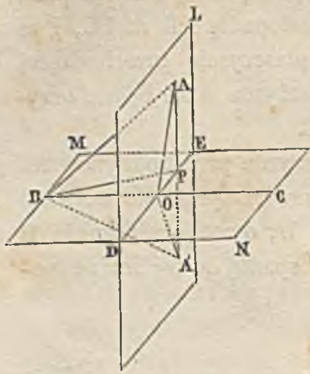
Przez punkt dany A *można zawsze poprowadzić prostopadłę do płasczyzny* MN, *ale tylko jedną.*



1° Jakoż, niech będzie punkt A dany na płasczyznie MN. Można zawsze, na tej płasczyznie i przez ten punkt, poprowadzić jakąkolwiek prostę BC, i w punkcie A wystawić na prostej BC płasczyznę prostopadłą DL która przecinie płasczyznę MN wedle prostej DE. Jeśli więc na płasczyznie DL wyprowadzimy z punktu A prostopadłę AP do DE, ta prosta AP, jako prostopadła do dwóch prostych DE i BC leżących na płasczyznie MN, będzie prostopadła do tej płasczyzny.

Nadto, z punktu A nie można wyprowadzić drugiej prostopadłej do płasczyzny MN; bo wszelka prosta przechodząca przez punkt A, ale różna od AP, albo leży na płasczyznie DL a więc nie jest prostopadła do DE, albo leży zewnątrz płasczyzny DL a więc nie jest prostopadła do BC.

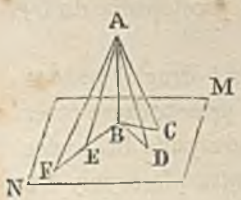
2° Jeśli punkt A jest dany zewnątrz płasczyzny MN, można zawsze, na tej płasczyznie, wziąć jakąkolwiek prostę BC, i poprowadzić do niej przez punkt A płasczyznę prostopadłą DL która przecina BC w punkcie O i płasczyznę MN wedle prostej DE; potem na płasczyznie DL spuścić z punktu A prostopadłę AP na DE; ta prosta AP będzie prostopadła do płasczyzny MN. Jakoż, przedłużmy prostę AP długością PA′ = PA, i połączmy BA, BA′, OA, OA′. Ponieważ pochyłe OA, OA′ są równe, dwa trójkąty prostokątne OBA, OBA′, mające kąty proste BOA, BOA′ zawarte między bokami równemi każdy każdemu, są równe; zatem BA = BA′. Co dowodzi że prosta AP jest prostopadła do PB. Więc prosta AP, prostopadła do dwóch prostych PD i PB leżących na płasczyznie MN, jest prostopadła do tej płasczyzny.



Żadna inna prosta przechodząca przez punkt A, jako AB, różna od AP, nie może być prostopadła do płasczyzny MN; bo w trójkącie ABP bok AP jest prostopadły do BP, więc prosta AB jest pochyłą do BP a temsamem pochyłą do płasczyzny MN.

Twierdzenie VI.

Jeśli z punktu A, wziętego zewnątrz płasczyzny MN, spuszczono na tę płasczyznę prostopadłę AB i pochyłe AC, AD, AE,... wtedy



1° *Prostopadła* AB *jest krótsza od wszelkiej pochyłej* AC.

2° *Dwie pochyłe* AC, AD, *równo oddalone od spodka prostopadłej, są równe.*

3° *Z dwóch pochyłych* AC, AF, *ta jest krótsza która się mniej oddala od spodka prostopadłej.*

I nawzajem.

Co do 1° W trójkącie ABC kąt B jest prosty; więc AB < AC.

2° Ponieważ z założenia BC = BD, trójkąty prostokątne ABC, ABD są równe. Więc pochyłe AC, AD są równe.

3° Jeśli BC < BF, na prostej BF weźmy BE = BC; będzie pochyła AE = AC (2°). A że pochyłe AE, AF i prostopadła AB leżą na jednej płaszczyznie, mamy AE < AF; więc AC < AF.

Wzajemnice są oczywiste.

Wniosek. — Ztąd wynika że *miejscem spodków, pochyłych równych poprowadzonych z jednego punktu do płasczyzny, jest okrąg mający za środek spodek prostopadłej spuszczonej z tego punktu na płasczyznę.*

Określenie II. — odległością *punktu od płasczyzny jest* prostopadła *spuszczona z tego punktu na płasczyznę*, jako najkrótsza droga.

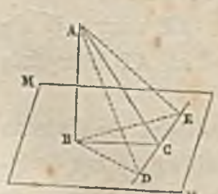
III. — Nazywa się osią koła prostopadła do płasczyzny tego koła przechodząca przez jego środek.

Więc, na mocy tego co poprzedza, *oś koła jest miejscem punktów równo oddalonych od jego okręgu.*

Uwaga. — Można praktycznie spuścić prostopadłę na płasczyznę. Za pomocą nici wytężonej, której jeden kraniec jest utkwiony w danym punkcie A a drugi zaopatrzony ołówkiem, oznacz na płasczyznie trzy punkta C, D, E. Środek koła przez te punkta przechodzącego będzie spodkiem prostopadłej szukanej.

Twierdzenie VII.

Jeśli ze spodka B *prostopadłej* AB *do płasczyzny* MN *spuścimy prostopadłę* BC *na prostę* DE *tej płasczyzny, wszelka prosta* AC *łącząca spodek* C *drugiej prostopadłej z jakimkolwiek punktem* A *pierwszej będzie prostopadła do* DE.



Jakoż, weźmy CE = CD, i połączmy AD, AE, BD, BE, Pochyłe BD i BE, równo oddalone od spodka prostopadłej BC, są równe; zatem pochyłe AD i AE są równe (6). Więc prosta AC, mająca dwa punkta A i C równo oddalone od skrajności D i E prostej DE, jest do niej prostopadła.

Uwaga. — To zadanie znane pod nazwiskiem *twierdzenia trzech prostopadłych*, pokazuje że prosta DE jest prostopadła do płasczyzny ABC, i temsamem prostopadła do wszelkiej prostej AC leżącej na tej płasczyznie. Dobrze jest uważać że dwie proste jako AB i DE, nie leżące na jednej płasczyznie, mają *spólną prostopadłę* BC *która jest ich najkrótszą odległością*. Wszelka albowiem inna prosta AD, łącząca punkta A i D tych dwóch prostych, jest większa od AC a tem bardziej większa od BC. To zarazem dowodzi że w przestrzeni mogą być dwie proste AB i DE, prostopadłe do trzeciej BC, a nie być równoległe, ani się spotykać.

Twierdzenie VIII.

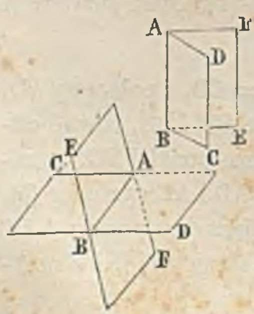
Płasczyzna prostopadła we środku linii prostej jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od obydwóch skrajności tej linii.

1° Jakoż, niech będzie K punkt płasczyzny MN prostopadłej we środku C prostej AB. Połączmy KA, KB, KC. Będzie pochyła KA = KB.

2° Uważajmy punkt I poza płasczyzną MN, i niech będzie K punkt jej przecięcia z prostą AI. Mamy widocznie IB < IA.

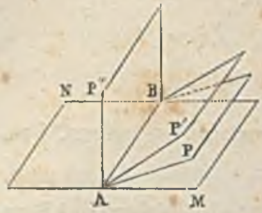
KĄTY DWÓJŚCIENNE, ICH MIARA.

Określenie IV. — Dwie płasczyzny wychodzące z jednej lini prostej tworzą figurę która się nazywa *kątem dwójściennym* jako DABE.



Te płasczyzny AC, AE nazywają się *ścianami*, a prosta spólna AB *krawędzią* kąta dwójściennego.

Kąt dwójścienny oznacza się dwiema literami krawędzi, i mówi się kąt dwójścienny AB; ale, gdy kilka kątów mają tę samą krawędź, wtedy należy brać cztery litery, kładąc we środku litery krawędzi a na skrajnościach litery ścian. I tak, cztery kąty drugiej figury czytają się jako następuje : DABE, CABE, CABF, DABF.



Aby mieć wyobrażenie wielkości kąta dwójściennego, dość jest przypuścić że jedna z jego ścian P, najpierwej przyłożona do ściany M, obraca się potem około krawędzi AB, i bierze różne położenia P′, P″... nieprzerwanie po sobie idące; w tym obrocie ściana ruchoma P czyni ze ścianą niezmienną M kąt dwójścienny który, zaczynając od zera, rośnie ciągle. To jasno pokazuje że wielkość kąta dwójściennego nie zależy od rozciągłości jego ścian ale od ich roztworu.

Pojmujemy teraz łatwo co znaczy *dodawać* albo *odciągać* kąty dwójścienne, i widzimy zaraz że kąt dwójścienny MABP′ jest summą kątów MABP i PABP′, a zaś kąt dwójścienny MABP różnicą kątów MABP′ i PABP′.

V. — Dwa kąty dwójścienne, jako MABP i PABP″ mające spólną krawędź i spólną ścianę, a będące zewnątrz jeden drugiego, nazywają się *przyległemi*.

Płaszczyzna BP dzieląca kąt MABP′ na dwie równe części jest płaszczyzną dwójsieczną tego kąta.

Dwa kąty dwójścienne są *krawędzią przeciwległe* gdy obie ściany jednego są przedłużeniem ścian drugiego, jako CABE i DABF (*figura poprzednia*).

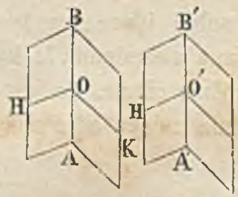
VI. — Gdy jedna płaszczyzna spotykając drugą czyni z nią dwa kąty przyległe równe, każdy z tych kątów nazywa się *kątem dwójściennym prostym*, a te płaszczyzny tworzące kąt dwójścienny prosty są *płaszczyznami prostopadłemi* do siebie.

Płaszczyzna sieczna która nie jest prostopadła do drugiej jest do niej *pochyła*.

VII. — Kąt dwóch prostopadłych, wyprowadzonych z jednego punktu krawędzi na ścianach kąta dwójściennego, nazywa się kątem *prostolinijnym* (albo kątem płaskim) kąta dwójściennego; takim jest kąt HOK odpowiedający kątowi dwójściennemu AB (*figura poniżej*.)

Twierdzenie VIII.

Kąty dwójścienne równe mają kąty prostolinijne równe. I nawzajem.



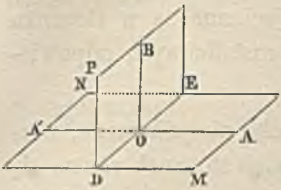
Połóżmy kąt dwójścienny AB na dwójściennym A′B′, tak żeby punkt O padł na O′ i krawędź AB przystała do A′B′. Ponieważ te dwa kąty dwójścienne są równe, ich ściany odpowiedne przystają do siebie; zatem prostopadła OH przystaje do O′H′, i OK do O′K′. Więc kąty prostolinijne HOK, H′O′K′ są równe.

Nawzajem, *gdy kąty prostolinijne są równe, kąty dwójścienne odpowiedające są także równe*. Bo, przenieśmy kąt dwójścienny AB na dwójścienny A′B′, tak żeby kąt prostolinijny HOK przystał do swego równego H′O′K′. Wtedy, krawędzie AB i A′B′ jako prostopadłe odpowiednio do płaszczyzn HOK, H′O′K′, przystaną do siebie (5), a temsamem ściana HOB przystanie do H′O′B′. Więc kąty dwójścienne HABK, H′A′B′K′ są równe.

Wniosek I. — Kąt prostolinijny HOK ma za wierzchołek jakikolwiek punkt O krawędzi AB; więc, na mocy powyższego twierdzenia, *w jednym kącie dwójściennym wszystkie kąty prostolinijne są równe.*

II. — *Gdy kąt dwójścienny jest prosty, kąt prostolinijny jest także prosty*; i nawzajem.

Niech będzie kąt dwójścienny prosty PDEM, to jest równy swojemu przyległemu PDEN który się tworzy z przedłużenia ściany DEM. Ponieważ te dwa kąty dwójścienne są równe, ich kąty prostolinijne BOA i BOA′ są także równe, a że są przyległe i mają ramiona niespólne w linii prostej, więc są kątami prostemi.



Nawzajem, jeśli kąty prostolinijne przyległe BOA,BOA' są proste, kąty dwójścienne odpowiedające PDEM, PDEN są także proste; bo są przyległe równe i mają ściany niespólne na jednej płaszczyznie.

Więc *kąt dwójścienny prosty ma kąt prostolinijny prosty*, i NAWZAJEM *kątowi prostolinijnemu prostemu odpowieda kąt dwójścienny prosty.*

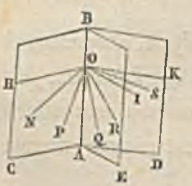
Ztąd wynika że

Wszystkie kąty dwójścienne proste są równe.

Kąt dwójścienny jest *ostry* albo *rozwarty*, według jak jest mniejszy albo większy od kąta dwójściennego prostego.

TWIERDZENIE X.

Dwa kąty dwójścienne mają się jako kąty prostolinijne odpowiedające.



Niech będą dwa kąty dwójścienne CABD, CABE. Poprowadźmy płaszczyznę HOK prostopadłą do krawędzi AB, jej przecięcia ze ścianami utworzą kąty prostolinijne odpowiedające HOK, HOI (3).

Trzeba, jako zwykle, uważać dwa przypadki.

1° Kąty prostolinijne spółmierne. Przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że te kąty są w stosunku liczb 7 do 5; to jest, że pewny kąt prostolinijny HON mieści się 7 razy w kącie HOK, a 5 razy w HOI.

Przez linie podziału ON, OP... i krawędź AB, poprowadźmy płaszczyzny, które podzielą kąt dwójścienny CABD na 7 kątów dwójściennych równych, jako odpowiedających kątom prostolinijnym równym : kąt dwójścienny HOI zawierać będzie 5 z tych kątów dwójściennych. Więc kąty dwójścienne są w stosunku liczb 7 : 5, zatem w stosunku kątów prostolinijnych odpowiedających.

2° Gdy kąty prostolinijne są między sobą niespółmierne, wiadome rozumowanie (II, 14) okazuje że ich stosunek równa się stosunkowi kątów dwójściennych.

Miara kąta dwójściennego. Wynika z dopiero co dowiedzionego twierdzenia, że *kąt dwójścienny ma tę samą miarę co kąt prostolinijny odpowiedający, byle za jedność kąta dwójściennego wzięto kąt dwójścienny któremu odpowieda kąt prostolinijny wybrany za jedność kątów prostolinijnych.*

To się wyraża treściwiej, mówiąc że; kąt dwójścienny ma za miarę kąt prostolinijny odpowiedający.

Na mocy tej proporcyonalności kątów dwójściennych i prostolinijnych, można zaraz z własności kątów prostolinijnych, dowiedzionych w geometryi płaskiej, wywieśdź podobne własności kątów dwójściennych. I tak :

Wszelka płaszczyzna spotykająca drugą czyni z nią kąty dwójścienne przyległe spełniające. I nawzajem, *jeśli dwa kąty dwójścienne przyległe są spełniające, ich ściany niespólne są przedłużeniem jedna drugiej.*

Summa wszystkich kątów dwójściennych przyległych, utworzonych z jednej strony płaszczyzny która przechodzi przez ich krawędź, jest równa dwom kątom dwójściennym prostym; a summa wszystkich kątów przyległych na około jednej linii prostej jest równa czterem kątom dwójściennym prostym.

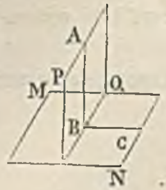
Dwa kąty dwójścienne krawędzią przeciwległe są równe.

PŁASCZYZNY PROSTOPADŁE MIĘDZY SOBĄ.

Twierdzenie XI.

Wszelka płaszczyzna PQ, *przechodząca przez prostopadłę* AB *do płaszczyzny* MN, *jest prostopadła do tej płaszczyzny.*

Na płaszczyznie MN poprowadźmy prostopadłę BC do przecięcia BQ dwóch płaszczyzn. Prostopadła AB do płaszczyzny MN



jest prostopadłą do prostej BC. Zatem kąt prostolinijny ABC jest prosty. Więc płaszczyzny PQ i MN, tworzące kąt dwójścienny prosty ABQC, są prostopadłe do siebie.

Albo innemi słowy: *Płaszczyzna* MN, *prostopadła do prostej* AB *jest prostopadła do wszystkich płaszczyzn przechodzących przez tę linię.*

Wniosek I. — Dowodzenie powyższe okazuje że

Gdy dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe, wszelka prosta, poprowadzona na jednej z nich prostopadle do spólnego przecięcia, jest prostopadła do drugiej płaszczyzny.

II. — *Gdy dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe, wszelka prostopadła do pierwszej płaszczyzny, poprowadzona przez punkt drugiej, leży cała na tej drugiej.* Bo nie może być różna od prostopadłej poprowadzonej przez ten punkt do przecięcia dwóch płaszczyzn, z przyczyny że ta ostatnia jest prostopadła do pierwszej płaszczyzny.

III. — Gdy trzy proste, przez jeden punkt przechodzące, są do siebie prostopadłe, każda z nich jest prostopadła do płaszczyzny dwóch innych, i trzy płaszczyzny są prostokątne.

Twierdzenie XII.

Przecięcie się dwóch płaszczyzn prostopadłych do trzeciej jest prostopadłe do tej ostatniej.

Bo, jeśli przez punkt przecięcia dwóch płaszczyzn poprowadzimy prostopadłę do trzeciej płaszczyzny, ta prostopadła będzie całkiem leżała na dwóch pierwszych, a więc będzie ich przecięciem.

Nawzajem, *płaszczyzna prostopadła do dwóch płaszczyzn jest prostopadła do ich przecięcia.*

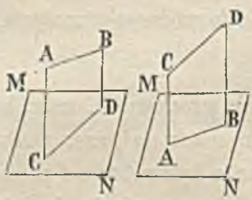
Wniosek I. — Jeśli trzy płaszczyzny są prostopadłe do siebie, ich przecięcia są prostokątne.

Uwaga. — Płaszczyzny przechodzące przez dwójsieczne kątów trójkąta, i prostopadłe do jego płaszczyzny, spotykają się wedle osi koła wpisanego w ten trójkąt.

Płaszczyzny prostopadłe we środku boków trójkąta spotykają się wedle osi koła opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie XIII.

Przez linię prostą AB *można zawsze poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do danej płaszczyzny* MN.



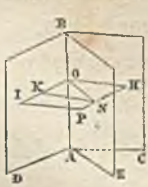
Przez jakikolwiek punkt A prostej AB poprowadźmy prostopadłę AC do płaszczyzny MN; płaszczyzna BAC będzie prostopadła do płaszczyzny MN (11).

Nadto, jeśli prosta AB nie jest prostopadła do płaszczyzny MN, nie można przez nią prowadzić drugiej płaszczyzny prostopadłej do danej MN. Bo przecięcie AB dwóch płaszczyzn prostopadłych do trzeciej MN byłoby prostopadłe do tej ostatniej; co się sprzeciwia założeniu.

Wniosek. — Płaszczyzna prostopadła do danej płaszczyzny jest miejscem geometrycznem prostopadłych wyprowadzonych ze wszystkich punktów przecięcia tych dwóch płaszczyzn.

Twierdzenie XIV.

Płaszczyzna dwójsieczna kąta dwójściennego jest miejscem punktów równo oddalonych od ścian tego kąta.



Jakoż, 1° Z punktu N, wziętego na płaszczyznie dwójsiecznej BE, spuśćmy prostopadłe NH, NK na ściany kąta dwójściennego. Ponieważ płaszczyzna HNK jest prostopadła do krawędzi AB, zatem kąt HOK jest prostolinijny, i prosta ON jego dwójsieczną. Więc NH = NK (I, 15).

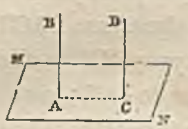
2° Niech będzie punkt P poza płasczyzną dwójsieczną BE. Zrobiwszy wykreślenie jako wyżej, łatwo widzimy że punkt P leży poza dwójsieczną ON kąta prostolinijnego HOI. Więc odległości PH, PI nie są równe.

LINIE PROSTE I PŁASCZYZNY RÓWNOLEGŁE.

Określenie VIII. — Linia prosta i płasczyzna są równoległe gdy się nie mogą spotykać jakkolwiek daleko byłyby przedłużane.

Twierdzenie XV.

Dwie proste AB *i* CD *prostopadłe do jednej płasczyzny* MN *są równoległe.*



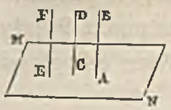
Jakoż, płasczyzna BAC jest prostopadła do płasczyzny MN (11); a prosta CD, prostopadła do płasczyzny MN i przechodząca przez punkt przecięcia C tych dwóch płasczyzn, leży cała na płasczyznie BAC. Więc dwie proste AB i CD, leżące obie na jednej płasczyznie BAC i prostopadłe do AC, są równoległe.

Nawzajem. *Gdy jedna prosta* AB *jest prostopadła do płasczyzny* MN, *wszelka równoległa* CD *do tej prostej jest prostopadła do płasczyzny* MN. Albowiem, jeślibyśmy przez punkt przecięcia C prostej CD z płasczyzną MN poprowadzili prostopadłę do tej płasczyzny, ta linia byłaby równoległa do prostej AB; owoż prosta CD jest właśnie równoległa do AB, więc prosta CD jest prostopadła do płasczyzny MN.

Ta wzajemnica może się jeszcze wysłowić jako następuje: *Dwie proste równoległe są obie prostopadłe do tej samej płasczyzny*

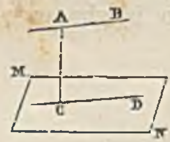
Wniosek. — Dwie proste AB i CD równoległe do trzeciej EF są równoległe między sobą.

Jakoż, poprowadźmy płaszczyznę MN prostopadłą do prostej EF; ta płaszczyzna będzie prostopadła do prostych AB, CD. Więc te ostatnie są równoległe między sobą.



TWIERDZENIE XVI.

Wszelka prosta AB *równoległa do prostej* CD *leżącej na płaszczyźnie* MN *jest równoległa do tej płaszczyzny, albo leży na niej cała.*



Jakoż, płaszczyzna BACD dwóch równoległych AB, CD, albo nie ma na zewnątrz przecięcia CD żadnego punktu spólnego z płaszczyzną MN, albo do niej przystaje; w pierwszym przypadku prosta AB jest równoległa do płaszczyzny MN, a zaś w drugim leży na niej cała.

NAWZAJEM, *gdy prosta* AB *i płaszczyzna* MN *są równoległe, wszelka prosta* CD *równoległa do* AB *i przechodząca przez punkt* C *płaszczyzny* MN *leży na niej cała.* Albowiem, płaszczyzna BACD dwóch równoległych AB, CD przecina płaszczyznę MN wedle linii prostej która jest oczywiście równoległa do AB; owoż prosta CD jest właśnie równoległa do AB, więc ta prosta CD jest przecięciem płaszczyzn BACD i MN, to jest leży na płaszczyznie MN.

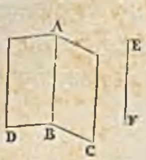
WNIOSEK. — Ztąd wynika że, *jeśli prosta* AB *jest równoległa do płaszczyzny* MN, *i przez tę prostę poprowadzono płaszczyznę która przecina pierwszą, przecięcie* CD *tych dwóch płaszczyzn jest równoległe do prostej* AB.

UWAGA. — Powyższe twierdzenie zogólnia się w następującem wysłowieniu. *Gdy prosta* AB *i płaszczyzna* MN *są równoległe, wszelka prosta równoległa do* AB *jest równoległa do płaszczyzny* MN *albo leży na niej cała.*

TWIERDZENIE XVII.

Przecięcie AB *dwóch płaszczyzn* AC, AD, *równoległych do prostej* EF, *jest równoległe do tej linii.*

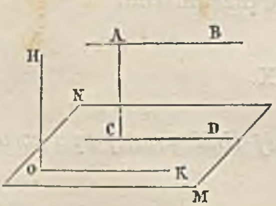
Jakoż, prosta równoległa do EF, poprowadzona przez którykolwiek punkt przecięcia dwóch płasczyzn, leży cała na tych płasczyznach, a więc jest ich przecięciem.



Wniosek. — *Przecięcie się dwóch płasczyzn, przechodzących przez dwie proste równoległe, jest równoległe do tych linij.*

Twierdzenie XVIII.

Linia prosta AB *i płasczyzna* MN, *obie prostopadłe do jednej linii prostej* AC, *są równoległe.*

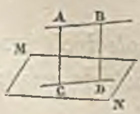


Jakoż, płasczyzna BAC przecina płaszczyznę MN wedle prostej CD która jest prostopadła do AC i równoległa do AB; więc prosta AB jest równoległa do płasczyzny MN.

Nawzajem, *gdy prosta* AB *i płasczyzna* MN *są równoległe, wszelka prosta* GH *prostopadła do płasczyzny* MN *jest prostopadła do prostej* AB. Albowiem, jeśli przez spodek prostopadłej GH poprowadzimy równoległę GK do prostej AB, ta równoległa będzie leżała na płasczyznie MN, i temsamem będzie prostopadła do GH. Owoż, chociaż prosta GH nie spotyka prostej AB, mówi się jednak że jest do niej prostopadła, dlatego że tworzy kąt prosty z jej równoległą GK. Więc prostopadła GH do płasczyzny MN jest prostopadłą do prostej AB.

Twierdzenie XIX.

Równoległe AC, BD, *zawarte między prostą* AB *i płasczyzną równoległą* MN, *są równe.*



Płasczyzna dwóch równoległych AC, BD spotyka płasczyznę MN wedle prostej CD równoległej do AB; więc czworobok ABDC jest równoległobokiem, i AC = BD.

Wniosek. — Dwie proste AC i BD, prostopadłe do płasczyzny MN, są temsamem prostopadłe do równoległej AB; więc mierzą odległości dwóch którychkolwiek punktów A i B tej prostej od płasczyzny. Ztąd wynika że prosta równoległa do płasczyzny jest wszędzie od niej równoodległa.

PŁASCZYZNY RÓWNOLEGŁE.

Określenie IX. — Dwie płasczyzny są *równoległe* gdy się nie mogą spotykać, jakkolwiekby daleko je przedłużano.

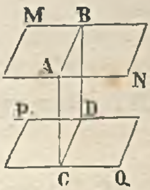
Twierdzenie XX.

Dwie płasczyzny prostopadłe do jednej linii prostej są równoległe.

Bo, gdyby się spotykały, możnaby z któregokolwiek punktu ich przecięcia spuścić dwie płasczyzny prostopadłe na jedną linię prostą; co niemożebne (4).

Twierdzenie XXI.

Przecięcia AB, CD, *dwóch płasczyzn równoległych* MN *i* PQ *przez trzecią* AD, *są równoległe.*

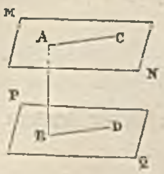


Jakoż, przecięcia AB i CD są dwiema liniami prostemi na jednej płasczyznie AD, i nie mogą się spotykać dlatego że należą do płasczyzn MN i PQ które nie mają żadnego punktu spólnego; więc te przecięcia AB i CD są równoległe.

Wniosek. — *Przecięcia dwóch płasczyzn równoległych przez dwie inne płasczyzny także równoległe są równoległe między sobą.*

Twierdzenie XXII.

Gdy dwie płaszczyzny są równoległe, wszelka prosta prostopadła do jednej z nich jest prostopadła do drugiej.

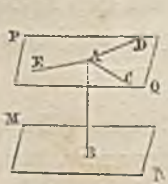


Niech będą dwie płaszczyzny równoległe MN i PQ; jeśli z punktu A pierwszej spuścimy prostopadłę AB na drugą, i przez tę linię poprowadzimy jakąkolwiek płaszczyznę CABD, przecięcia AC i BD będą równoległe; zatem prosta AB, prostopadła do płaszczyzny PQ, jest prostopadła do prostej BD i temsamem prostopadła do jej równoległej AC. Owoż ta ostatnia jest jakakolwiek; więc prosta AB, prostopadła do wszelkiej prostej AC leżącej na płaszczyznie MN, jest prostopadła do tej płaszczyzny.

Uwaga. — Powyższe twierdzenie można inaczej wyrazić, mówiąc: *Dwie płaszczyzny równoległe są prostopadłe obie do tej samej linii prostej*; tak wysłowione jest wzajemnicą twierdzenia XX.

Twierdzenie XXIII.

Przez punkt A, *dany zewnątrz płaszczyzny* MN, *można zawsze poprowadzić płaszczyznę równoległą do tej płaszczyzny; ale tylko jedną.*



Jakoż, z punktu A można zawsze spuścić prostopadłę AB na płaszczyznę MN, i przez punkt A poprowadzić płaszczyznę PQ prostopadłą do płaszczyzny MN. Płaszczyzna PQ będzie równoległa do płaszczyzny MN (20).

Ta płaszczyzna PQ jest jedyną równoległą do płaszczyzny MN; bo dwie płaszczyzny równoległe są prostopadłe do tej samej prostej, a przez punkt A jedną tylko płaszczyznę prostopadłą do prostej AB poprowadzić można.

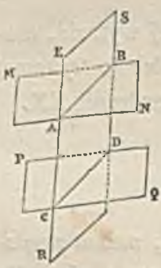
Wniosek. — *Jeśli przez punkt* A, *wzięty zewnątrz płaszczyzny* MN, *poprowadzono równoległe* AC, AD, AE,.. *do tej płaszczyzny, miejscem* *tych równoległych jest płaszczyzna* PQ *równoległa do płaszczyzny* MN. Albowiem, jeśli z punktu A spuścimy prostopadłę AB na płaszczyznę MN, ta linia będzie prostopadła do każdej z prostych AC, AD, AE... (18, *wz.*); więc miejscem tych prostych jest płaszczyzna prostopadła do AB, to jest równoległa do płaszczyzny MN.

TWIERDZENIE XXIV.

Gdy dwie płaszczyzny równoległe są przecięte przez trzecią, wtedy :

1° *Kąty dwójścienne odpowiedające, naprzemianległe wewnętrzne, naprzemianległe zewnętrzne są odpowiednio równe.*

2° *Kąty dwójścienne wewnętrzne, albo zewnętrzne, będące z jednej strony płaszczyzny siecznej, są spełniające.*



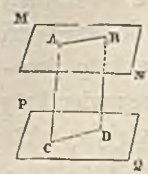
Niech będą dwie płaszczyzny równoległe MN i PQ przecięte płaszczyzną RS; przecięcia AB i CD tych płaszczyzn są równoległe. Poprowadźmy do tych dwóch równoległych płaszczyznę prostopadłą ECQ, która przetnie trzy płaszczyzny MN, PQ, RS wedle linij AN, CQ, ER prostopadłych do AB i CD. Owoż, równoległe AN, CQ tworzą z sieczną ER kąty prostolinijne, które odpowiedają ośmiu kątom dwójściennym mającym krawędzie AB i CD; a że twierdzenie już jest dowiedzione dla tych kątów prostolinijnych, więc jest także prawdziwe dla kątów dwójściennych. Więc, etc.

UWAGA. — Pięć wzajemnie tego twierdzenia wtenczas tylko są prawdziwe gdy kąty dwójścienne, które porównywamy, mają nadto krawędzie równoległe.

TWIERDZENIE XXV.

Dwie proste równoległe AC, BD, *zawarte między dwiema płaszczyznami równoległemi* MN, PQ, *są równe.*

Płaszczyzna dwóch prostych równoległych AC, BD przecina dwie płaszczyzny równoległe MN, PQ wedle dwóch prostych



równoległych AB, CD (21). Więc czworobok ABDC jest równoległobokiem i jego boki przeciwległe AC, BD są równe.

Wniosek. — *Dwie płaszczyzny równoległe są wszędzie równo od siebie oddalone.* Bo odległością dwóch płaszczyzn równoległych jest spólna prostopadła, a dwie takie linie są równoległe i równe.

Twierdzenie XXVI.

Trzy płaszczyzny równoległe M, N, P *dzielą dwie jakiekolwiek proste* AB, CD *na części proporcyonalne.*

Niech będą dwie jakiekolwiek proste AB, CD w przestrzeni, przecięte trzema płaszczyznami równoległemi M, N, P, w punktach A, E, B i C, F, D. Jeśli przez punkt A poprowadzimy prostę AH równoległą do CD, i wyobrazimy płaszczyznę ABH, ta płaszczyzna przetnie płaszczyzny równoległe N i P wedle dwóch równoległych EK i BH; zatem w trójkącie ABH, będzie

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AK}{KH}.$$

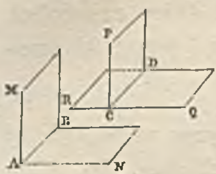
Owoż, odcinek $AK=CF$, i $KH=FD$, jako równoległe zawarte między płaszczyznami równoległemi; więc

$$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}.$$

Twierdzenie XXVII.

Dwa kąty dwójścienne, mające ściany równoległe, są równe albo spełniające.

Krawędzie AB, CD dwóch kątów dwójściennych MABN, PCDQ, mających ściany równoległe każda do każdej, są równoległe (21 *wn.*). Poprowadźmy do tych krawędzi płaszczyznę prostopadłą która przetnie ściany kątów wedle równoległych AM i CP, AN i CQ. Te linie, prostopadłe do krawędzi odpowiednych AB, CD, tworzą kąty prostolinijne równe albo spełniające: więc kąty dwójścienne które im odpowiedają są także równe albo spełniające, to jest kąt dwójścienny ostry równa się dwójściennemu ostremu a jest spełnieniem dwójściennego rozwartego.

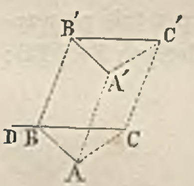


Uwaga. — *Kąty dwójścienne, mające ściany prostopadłe każda do każdej i krawędzie równoległe, są równe albo spełniające.*

Dowodzenie jako wyżej.

Twierdzenie XXVIII.

Dwa kąty ABC, A'B'C' *w przestrzeni, mające ramiona odpowiedne równoległe, są równe albo spełniające, a ich płaszczyzny są równoległe.*



Weźmy na odpowiednych ramionach tych kątów długości BA = B'A', BC = B'C', i połączmy AA', BB', CC', AC, A'C'. Czworobok ABB'A', mający dwa boki przeciwległe AB, A'B' równe i równoległe, jest równoległobokiem; zatem boki AA', BB' są równe i równoległe. Dla tej samej przyczyny boki BB', CC' są równe i równoległe. Więc dwa boki AA' i CC' są równe i równoległe, i czworobok ACA'C' jest równoległobokiem; przeto bok AC = A'C'. Ztąd wynika że dwa trójkąty ABC, A'B'C' są równoboczne między sobą; więc kąt ABC = A'B'C'.

Z tego co poprzedza wnosimy że dwa kąty ABD, A'B'C', mające ramiona równoległe ale nie ułożone podobnie, są spełniające.

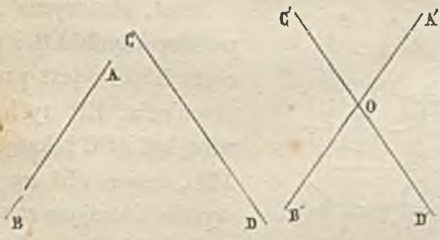
Płaszczyzny dwóch kątów ABC, A'B'C' *mających ramiona równoległe każde do każdego są równoległe.* Bo ramiona B'A', B'C' drugiego kąta, odpowiednio równoległe do ramion pierwszego, są równoległe do płaszczyzny ABC; więc płaszczyzna A'B'C' jest równoległa do płaszczyzny ABC (23 *wn*).

Wniosek I. — *Dwie płasczyzny prostopadłe do trzeciej i przechodzące przez dwie proste równoległe nieprostopadłe do tej płasczyzny, są równoległe.* — Bo są płasczyznami dwóch kątów mających ramiona równoległe każde do każdego.

II. — *Przez dany punkt można zawsze poprowadzić płasczyznę równoległą do dwóch prostych w przestrzeni, ale tylko jedną.*

KĄTY LINIJ PROSTYCH W PRZESTRZENI I PŁASCZYZN. RZUTY.

Wiemy że każda linia prosta jako AB ma dwie strony, jedną AB gdy się idzie od punktu A do B, drugą BA gdy się idzie od B do A.



Mając wzgląd na kierunek i na stronę, nazywa się *kątem dwóch linij prostych w przestrzeni*, kąt który tworzą dwie równoległe do tych linij, poprowadzone w te same strony przez jakikolwiek punkt przestrzeni.

Aby więc otrzymać kąt dwóch prostych AB i CD, prowadzi się, przez punkt O przestrzeni, równoległę OB′ do AB idącą w stronę AB, i równoległę OD′ do CD idącą w stronę CD; kąt B′OD′ jest kątem dwóch prostych AB i CD. Tak samo kąt dwóch prostych AB i DC wyraża się kątem B′OC′; etc.

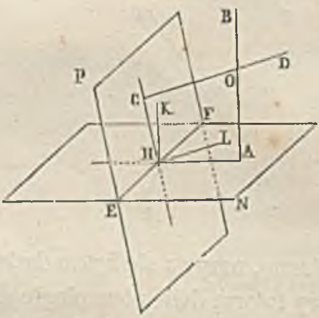
Mówi się że dwie *proste w przestrzeni są prostopadłe gdy ich kąt jest prosty*. Na mocy twierdzenia XXVIII, wielkość kąta utworzonego przez równoległe do dwóch danych prostych nie zależy od położenia punktu O w przestrzeni, ale tylko od kierunku tych dwóch prostych. To usprawiedliwia powyższe określenia.

Uwaga. — Widzimy teraz łatwo że, mając dane dwie jakiekolwiek proste w przestrzeni można zawsze, przez jedną z nich, poprowadzić płaszczyznę *równoległą* do drugiej. Ale nie można, przez jedną z dwóch danych prostych, prowadzić płaszczyzny *prostopadłej* do drugiej prostej, tylko wtedy gdy te proste są do siebie prostopadłe.

Kąt dwóch płaszczyzn może się wyrazić przez kąt dwóch linij prostych w przestrzeni, jako pokazuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie XXIX.

Jeśli przez punkt O *przestrzeni poprowadzono dwie proste* AB *i* CD, *prostopadłe każda do jednej z dwóch płaszczyzn* N *i* P, *te linie tworzą cztery kąty odpowiednio równe czterem kątom tych płaszczyzn.*



Jakoż, płaszczyzna AOC, dwóch prostopadłych AB i CD do płaszczyzn N i P, jest prostopadła do przecięcia EF tych płaszczyzn; więc kąt AOC i kąt prostolinijny AHC, leżące oba na jednej płaszczyznie i mające ramiona prostopadłe każde do każdego, są równe albo spełniające (I, 24). Ztąd wynika że cztery kąty utworzone przez dwie prostopadłe AB i CD do płaszczyzn N i P są te same co kąty prostolinijne czterech kątów tych płaszczyzn. Więc zamiast kątów płaszczyzn można uważać kąty linijne które są daleko dogodniejsze.

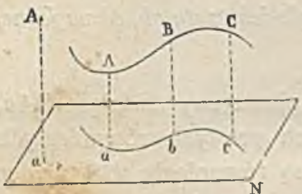
Wniosek I. — Jeśli z punktu H krawędzi kąta dwójściennego NEFP wyprowadzimy do jego ścian prostopadłe HK i HL idące w strony tych ścian, kąt KHL tych prostopadłych będzie spełnieniem kąta dwójściennego. Jakoż, płaszczyzna KHL jest prostopadła do krawędzi EF; więc kąt KHL prostopadłych i kąt prostolinijny AHC, oba na jednej płaszczyznie, mające ramiona prostopadłe każde do każdego ale niejednakowo ułożone, są spełniające.

Dowiedzie się podobnie że kąt AOC, prostopadłych spuszczonych z punktu O wziętego *wewnątrz* kąta dwójściennego NEFP na jego ściany, jest spełnieniem tego kąta.

II. — Wynika z powyższego twierdzenia że:

Dwie płaszczyzny odpowiednio prostopadłe do dwóch prostych nierównoległych przecinają się. I NAWZAJEM, dwie proste odpowiednio prostopadłe do dwóch płaszczyzn przecinających się nie są równoległe.

OKREŚLENIE X. — Nazywa się *rzutem* punktu A na płaszczyznie N spodek *a* prostopadłej spuszczonej z tego punktu na płaszczyznę.

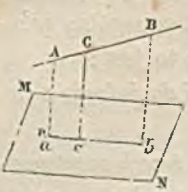


Płaszczyzna N jest *płaszczyzną rzutu* a prostopadła A*a* jest *rzutującą* punktu A.

Rzutem jakiejkolwiek linii ABC... na płaszczyznie N jest *miejsce rzutów abc.. wszystkich punktów tej linii.*

TWIERDZENIE XXX.

Rzut linii prostej na płaszczyznie MN *jest linią prostą.*



Jakoż, prostopadłe A*a*, B*b*,... spuszczone z różnych punktów prostej AB na płaszczyznę MN, leżą na płaszczyznie AB*b* prostopadłej do tej płaszczyzny (11, *wn.* 2); więc miejscem spodków *a*, *b*, *c*,... tych prostopadłych jest linia prosta *ab* wedle której te dwie płaszczyzny się przecinają.

OKREŚLENIE XI. — Punkt w którym prosta AB przebija płaszczyznę rzutów nazywa się jej *śladem*.

Gdy linia prosta jest, jako A*a*, prostopadła do płaszczyzny rzutów MN, wtedy jej rzutem jest jej ślad *a*.

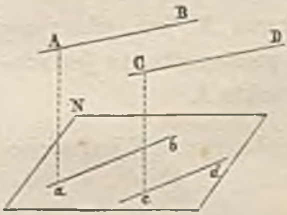
Rzut linii prostej jest oczywiście od niej mniejszy, i tylko wtedy jej równy gdy ta prosta jest równoległa do płaszczyzny rzutów: w tem szczególnem położeniu mówi się że linia prosta *rzutuje się w prawdziwej wielkości*.

Rzutem linii krzywej na płaszczyznie jest linia krzywa ; ale, jeśli linia krzywa leży na płaszczyznie prostopadłej do płaszczyzny rzutów, wtedy jej rzut jest linią prostą.

Rzuty linii jakiejkolwiek na dwóch płaszczyznach równoległych są oczywiście równe.

Twierdzenie XXXI.

Gdy dwie proste AB, CD *są równoległe ich rzuty ab, cd na jednej płaszczyznie są równoległe.*



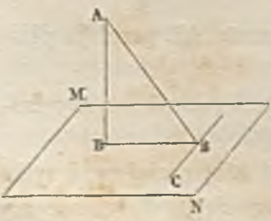
Jakoż, płaszczyzny rzutujące BA*a*, DC*c* dwóch prostych równoległych AB, CD są równoległe (28) ; więc przecięcia *ab, cd* tych płaszczyzn z płaszczyzną rzutów MN są równoległe.

Wniosek. — Jeśli rzuty dwóch prostych są równoległe, te proste leżą na dwóch płaszczyznach równoległych.

Uwaga. — Gdy dwie proste są prostopadłe, ich rzuty nie są koniecznie prostopadłe ; ani nawzajem. Ale jest szczególny przypadek tych linij o którym dobrze jest wiedzieć ; to jest :

Rzut kąta prostego na płaszczyznie równoległej do jednego z ramion jest kątem prostym. I nawzajem.

Chociaż to zadanie nie różni się od *twierdzenia trzech prostopadłych* tylko samem wysłowieniem, dowiedziemy go jednak wprost, aby jaśniej pokazać na czem polega tosamość tych dwóch zadań.

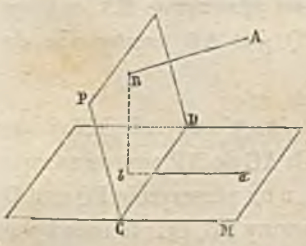


Rzuty jednej figury na dwóch płaszczyznach równoległych są równe ; jeśli więc, przez ramie BC kąta prostego ABC, poprowadzimy płaszczyznę MN i spuścimy na nią prostopadłę AD, kąt DBC będzie rzutem kąta prostego ABC, na płaszczyznie równoległej do ramienia BC. Owoż, prosta BC jest prostopadła do AD, a jeśli nadto jest prostopadła do BA albo do BD, to będzie temsamem prostopadła do płasczyzny ABD. Więc rzut DBC kąta prostego ABC jest kątem prostym; i nawzajem, kąt ABC jest prosty jeśli jego rzut DBC na płasczyznie równoległej do jednego z ramion jest kątem prostym.

Ztąd, zogólniając, wynika że: *Jeśli dwie proste w przestrzeni są prostopadłe, ich rzuty na płasczyznie równoległej do jednej z nich są także prostopadłe między sobą.*

Twierdzenie XXXII.

Jeśli linia prosta jest prostopadła do płasczyzny, jej rzut jest prostopadły do śladu tej płasczyzny.

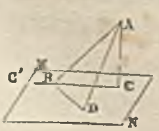


Niech będzie prosta AB prostopadła do płasczyzny P; powiedam że rzut *ab* tej prostej i ślad CD płasczyzny P na płasczyznie M są do siebie prostopadłe. Jakoż, prosta AB, prostopadła do płasczyzny P, jest prostopadła do jej śladu CD; więc rzuty *ab* i CD tych dwóch prostych prostopadłych, na płasczyznie M przechodzącej przez CD, są do siebie prostopadłe.

Wniosek. — Jeśli rzut *ab* prostej AB jest prostopadły do śladu CD płasczyzny P, ta prosta AB leży na płasczyznie prostopadłej do płasczyzny P (11, *wn.*).

Twirdzenie XXXIII.

Pochyła AB *tworzy ze swoim rzutem* BC, *na płasczyznie* MN, *kąt* ABC *mniejszy niż z wszelką inną prostą* BD *tej płasczyzny*



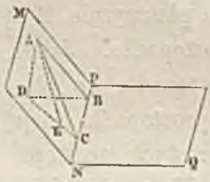
Spuśćmy prostopadłę AC na płasczyznę MN, weźmy BD = BC i połączmy AD. Prostopadła AC < AD. Zatem dwa trójkąty ABC, ABD mają dwa boki równe każdy każdemu, a trzeci bok AC < AD. Więc kąt ABC < ABD.

Wniosek. — Ponieważ kąt ostry ABC jest najmniejszy, czyli jako się mówi, *minimum* między kątami jakie pochyła AB do płaszczyzny MN czyni z liniami prostemi tej płaszczyzny, kąt rozwarty ABC′ będzie kątem *maximum.*

Określenie XII. — Nazywa się *kątem linii prostej i płaszczyzny* kąt minimum który ta prosta czyni ze swoim rzutem na płaszczyznie.

Twierdzenie XXXIV.

Gdy dwie płaszczyzny MN i PQ *przecinają się, ze wszystkich prostych przechodzących przez punkt* A *na płaszczyznie* MN, *ta która czyni największy kąt z płaszczyzną* PQ *jest* AB *prostopadła do spólnego przecięcia* NP *tych płaszczyzn.*



Niech będzie, na płaszczyznie MN, jakakolwiek pochyła AC do NP poprowadzona przez punkt A, a na płaszczyznie PQ rzut D punktu A. Połączmy DB, DC; te linie będą rzutami prostych AB, AC na płaszczyznie PQ. Aby dowieśdź że kąt ABD jest większy od kąta ACD, uważajmy że, na mocy twierdzenia trzech prostopadłych, rzut DB jest prostopadły do NP; przeto DB $<$ DC. Jeśli więc na DC weźmiemy DE $=$ DB i połączymy AE, dwa trójkąty prostokątne ADB, ADE będą równe; zatem kąty ABD, AED są równe. Ale w trójkącie ACD, kąt zewnętrzny AED jest większy od wewnętrznego ACD; więc kąt ABD jest większy od kąta ACD.

Wniosek. — Kąt ABD jest kątem prostolinijnym dwóch płaszczyzn MN, PQ. Gdy płaszczyzna PQ jest *pozioma*, wtedy pochyła AB nazywa się *linią największej spadzistości płaszczyzny* MN.

Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi linia jej największej spadzistości, ale tylko jedna.

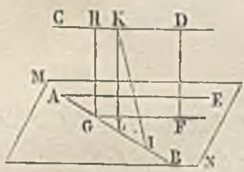
NAJKRÓTSZA ODLEGŁOŚĆ DWÓCH LINIJ PROSTYCH W PRZESTRZENI.

TWIERDZENIE XXXV.

Gdy dwie proste AB, CD *nie leżą na jednej płasczyznie,* wtedy :

1° *Istnieje zawsze spólna prostopadła do tych prostych, ale tylko jedna.*

2° *Ta spólna prostopadła jest najkrótszą odległością tych dwóch prostych.*



Niech będzie GH spólna prostopadła do dwóch prostych AB i CD nie leżących na jednej płasczyznie. Jeśli przez spodek G poprowadzimy równoległę GF do CD, prosta GH będzie prostopadła do GF i temsamem prostopadła do płasczyzny BGF która jest równoległa do CD. To pokazuje że spólna prostopadła do dwóch prostych w przestrzeni powinna leżeć na dwóch płasczyznach, które przechodzą każda przez jedną z tych prostych i są prostopadłe do płasczyzny równoległej do obydwóch prostych. Owóż, te dwie płasczyzny prostopadłe przecinają się; bo ich ślady AB i GF na płasczyznie BGF spotykają się w punkcie G, z przyczyny że proste AB i CD nie są równoległe. Więc istnieje spólna prostopadła, i tylko jedna, do dwóch prostych nie równoległych w przestrzeni.

2° Ta spólna prostopadła GH do prostych AB, CD jest mniejsza od wszelkiej prostej KI która łączy dwa którekolwiek ich punkta. Bo prostopadłe HG i KL, spuszczone z punktów prostej CD na płasczyznę równoległą BAE, są równe, a oczywiście KL < KI.

UWAGA. — Jeśli poprowadzimy najpierwej, przez jakikolwiek punkt przestrzeni, dwie płaszczyzny prostopadłe do prostych AB, CD, ich przecięcie będzie prostopadłe do tych prostych ; a jeśli potem poprowadzimy prostę równoległą do tego przecięcia i opierającą się na AB i CD, ta równoległa będzie spólną prostopadłą do tych dwóch prostych.

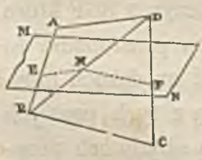
Powyższa uwaga, która także dowodzi istnienia spólnej prostopadłej do dwóch jakichkolwiek prostych AB, CD w przestrzeni, daje w *Geometryi opisującej* łatwe wykreślenie najkrótszej odległości tych dwóch prostych.

CZWOROBOK SPACZONY.

Określenie XIV. — Nazywa się *czworobokiem spaczonym albo skośnym* figura zamknięta ABCD którą tworzą cztery linie proste nie leżące na jednej płaszczyznie.

Twierdzenie XXXVI.

Wszelka płaszczyzna równoległa do dwóch boków przeciwległych czworoboku spazonego dzieli proporcyonalnie dwa inne boki.



Niech będzie czworobok spaczony ABCD i płasczyna MN, równoległa do boków AD, BC, która przecina dwa inne boki w punktach E, F. Boki AD i BC leżą na płasczyznach równoległych do płasczyzny MN (23, wn); więc

$$\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}.$$

Uwaga. — Można wprost dowieśdź tego twierdzenia, uważając że EH jest równoległe do AD a zaś FH równoległe do BC.

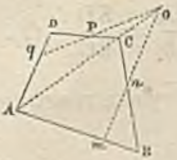
Nawzajem, wszelka prosta EF dzieląca proporcyonalnie dwa boki przeciwległe czworoboku spaczonego leży na płasczyznie równoległej do dwóch innych boków.

Dowodzenie jako zwykle.

TWIERDZENIE XXXVII.

Płaszczyzna spotykająca cztery boki czworoboku spaczonego wyznacza cztery stosunki odcinkowe, których wieloczyn równa się jedności dodatnej.

I NAWZAJEM.



Poprowadźmy przekątnę AC ; płaszczyzna poprzeczna $m\ n\ p\ q$ spotka ją, mówiąc ogólnie, w punkcie O, i będzie :

w trójkącie ABC, $\frac{mA}{mB} \cdot \frac{nB}{nC} \cdot \frac{OC}{OA} = 1$;

a w trójkącie ACD $\frac{pC}{pD} \cdot \frac{qD}{qA} \cdot \frac{OA}{OC} = 1.$

Więc $\frac{mA}{mB} \cdot \frac{nB}{nC} \cdot \frac{pC}{pD} \cdot \frac{qD}{qA} = 1.$

NAWZAJEM, *jeśli cztery punkta m, n, p, q, leżące na kierunkach czterech boków czworoboku spaczonego, dają wieloczyn stosunków odcinkowych równy jedności dodatnej, te cztery punkta są na jednej płaszczyźnie.*

Przez trzy punkta m, n, p poprowadźmy płaszczyznę która spotka bok AD w punkcie q', i będzie

$$\frac{mA}{mB} \cdot \frac{nB}{nC} \cdot \frac{pC}{pD} \cdot \frac{q'D}{q'A} = 1;$$

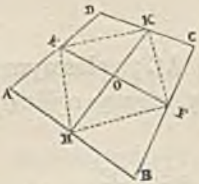
ale z założenia $\frac{mA}{mB} \cdot \frac{nB}{nC} \cdot \frac{pC}{pD} \cdot \frac{qD}{qA} = 1$. Więc $\frac{q'D}{q'A} = \frac{qD}{qA}$.

Ostatnie równanie pokazuje że dwa stosunki odcinkowe są tego samego znaku, to jest punkta q',q leżą oba na boku AD, albo oba zewnątrz ; zkąd wynika $\frac{AD}{q'A} = \frac{AD}{qA}$; a zatem $q'A = qA$.

Więc płaszczyzna trzech punktów m, n, p przechodzi przez q.

UWAGA. — Przypuściliśmy w dowodzeniu że płaszczyzna poprzeczna spotyka przekątnę AC; gdyby ta płaszczyzna była równoległą do AC, poprzeczne *mn*, *pq* byłyby także równoległe do AC ; wtedy równanie odcinkowe otrzymałoby się jeszcze prościej niż poprzednio.

WNIOSEK. *W czworoboku spaczonym* ABCD, *dwie proste* EF, HK, *które dzielą boki przeciwległe na odcinki proporcyonlne, dzielą się nawzajem na części proporcyonalne do tych odcinków.*



Jakoż, z założenia

$$\frac{EA}{ED} = \frac{FB}{FC} \quad (1) \qquad \text{i} \qquad \frac{HA}{HB} = \frac{KD}{KC} \quad (2).$$

Z tych dwóch proporcyj wynika równanie

$$\frac{EA}{ED} \cdot \frac{KD}{KC} \cdot \frac{FC}{FB} \cdot \frac{HB}{HA} = +1,$$

które dowodzi że czworobok EHFK jest płaski ; więc jego przekątne EF i HK przecinają się w punkcie O.

Nadto, proporcya (1) pokazuje że prosta EF leży na płaszczyźnie równoległej do boków AB i DC. Więc, w czworobokach spaczonych HKDA, HKCB prosta EF dzieli proporcyonalnie boki przeciwległe AD, HK, BC, to jest daje

$$\frac{OH}{OK} = \frac{EA}{ED} = \frac{FB}{FC}.$$

I tak samo czworoboki spaczone EFBA i EFCD dają

$$\frac{OE}{OF} = \frac{HA}{HB} = \frac{KD}{KC}.$$

Ztąd wynika że, w czworoboku spaczonym, środki boków są wierzchołkami równoległoboku.

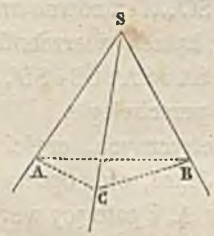
UWAGA. — Gdy płaszczyzna poprzeczna staje się równoległą do dwóch boków przeciwległych AB i CD, punkta m i p oddalają się w nieskończoność i stosunki $\frac{mA}{mB}$, $\frac{PC}{PD}$, przywodzą się do jedności ; więc wtedy wieloczyn stosunków odcinkowych staje się

$$\frac{nB}{nC} \cdot \frac{qD}{qA} = 1 \qquad \text{albo} \qquad \frac{qD}{qA} = \frac{nC}{nB}.$$

Co daje twierdzenie XXXVI jako szczególny przypadek powyższego.

KĄTY WIELOŚCIENNE.

Określenie XV. — Figura utworzona z wielu płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt S i zawartych między ich przecięciami SA, SB... nazywa się *kątem wielościennym* albo bryłowym.



Punkt S jest *wierzchołkiem*, przecięcia SA, SB..., *krawędziami* a płaszczyzny zawarte w kątach ASB, BSC... są *ścianami* kąta wielościennego SABCDE.

Oznacza się kąt wielościenny literą wierzchołka, po której kładzie się litery wszystkich ścian, i mówi się kąt SABCD. Ale, jeśli niema wątpliwości, można oznaczać kąt wielościenny samą literą jego wierzchołka, i mówić kąt wielościenny S.

Kąt wielościenny jest *trójścienny*, *czworościenny*..., według jak ma *trzy*, *cztery*... ściany.

Najprostszy z kątów wielościennych jest kąt trójścienny SABC; albowiem trzeba przynajmniej trzech płaszczyzn do utworzenia kąta wielościennego. W kącie trójściennym jest sześć części do uważania: trzy ściany ASB, BSC, CSA, i trzy kąty dwójścienne SA, SB, SC.

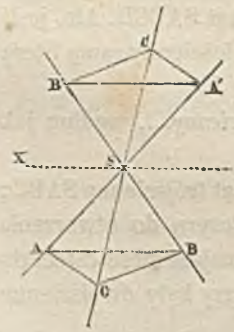
Uwaga. — Dla skrócenia mówi się często *trójścian* zamiast kąt trójścienny, a czasem *dwójścian* zamiast kąt dwójścienny. Ale nie można mówić *czworościan*, *pięciościan*,... zamiast kąt czworościenny, pięciościenny, etc.; bo czworościan, pięciościan... oznaczają figury zamknięte przestrzeni o których później będzie mowa.

Kąt wielościenny jest *wypukły* gdy leży całkiem z jednej strony płaszczyzny każdej ściany. Kąt trójścienny jest oczywiście wypukły.

Dwa kąty wielościenne SABCD, SA'B'C'D' są *wierzchołkiem*

przeciwległe, gdy krawędzie jednego są przedłużeniami krawędzi drugiego. Takie kąty nazywają się *symetrycznemi* jeden drugiego. Dwa *kąty symetryczne* SABCD, SA'B'C'D' są *równe we wszystkich częściach;* bo ich ściany ASB i A'SB', BSC i B'SC',... są równe między sobą, jako zawarte w kątach wierzchołkiem przeciwległych, a ich kąty dwójścienne SA i SA', SB i SB',... są także równe między sobą jako krawędzią przeciwległe.

Ale w tych dwóch kątach symetrycznych, części równe są w porządku odwrotnym ułożone. Jakoż, widz oparty na krawędzi SA, mający głowę w S a nogi w A, i patrzący wewnątrz kąta SABCD, spostrzega jego krawędzie, idące od prawej ręki ku lewej, w porządku SB, SC, SD; gdy tymczasem drugi widz, mający podobną postawę w drugim kącie SA'B'C'D', to jest głowę w S a nogi w A', spostrzega krawędzie idące od prawej ręki ku lewej w porządku odwrotnym SD', SC', SB'.



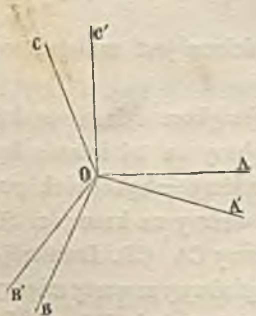
Ztąd wynika że w ogólności *dwa kąty wielościenne symetryczne nie są przystawalne.* Na dowodzenie tego, uważajmy naprzykład dwa trójściany symetryczne SABC, SA'B'C', i przypuśćmy że krawędź SC wystaje nad płaszczyzną ASB, a temsamem że jej przedłużenie SC' jest pod tą płaszczyzną. Jeśli więc, dla wykonania przystawania dwóch trójścianów, położymy ścianę A'SB' na ścianie ASB tak, żeby krawędź SA' przystała do SA i krawędź SB' padła na SB, jako gdybyśmy obrócili trójścian SA'B'C' na 180 stopni około osi prostopadłej do płaszczyzny ASB w punkcie S, wtedy krawędź SC' zostanie ciągle pod płaszczyzną ASB, i trójścian SA'B'C' nie przystanie do SABC.

Jeśli zaś wykonamy przystawanie tych dwóch trójścianów, przykładając przewróconą ścianę A'SB' na ścianę ASB, jako gdybyśmy dali trójścianowi SA'B'C' pół obrotu około dwójsiecznej SX kąta ASB'; wtedy krawędź SA' przystanie do SB, i krawędź SB' do SA. Ale krawędź SC', chociaż tą razą przypada nad płaszczyzną ASB, nie pójdzie po krawędzi SC, bo płaszczyzna ściany B'SC' nie przystaje do płaszczyzny ASC, z przyczyny że kąty dwójścienne SA i SB są ogólnie nierówne, a temsamem i kąty dwójścienne SA i SB' także nierówne. Więc dwa trójściany symetryczne SABC, SA'B'C' nie przystają do siebie.

Jednakże, to co poprzedza pokazuje że, gdyby kąty dwójścienne SA i SB były równe, płaszczyzna A'SC' przystałaby do BSC i płaszczyzna B'SC' do ASC; zatem krawędź SC' padłaby na SC. Więc wtedy dwa trójściany symetryczne byłyby równe.

TWIERDZENIE XXXVIII.

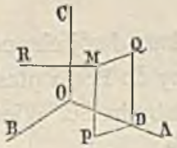
Jeśli z wierzchołka kąta trójściennego OABC *wyprowadzimy do jego ścian prostopadłe* OA', OB', OC', *każdą z tej samej strony ściany co krawędź nieleżąca na niej, otrzymamy kąt trójścienny* OA'B'C' SPEŁNIAJĄCY *pierwszego,* to jest taki którego ściany są spełnieniami kątów dwójściennych przeciwległych w pierwszym, a jego kąty dwójścienne spełnieniami ścian tego kąta.



Jakoż, uważajmy w trójścianie OABC kąt dwójścienny OA. Prostopadła OB' do ściany AOC, z tej samej strony co krawędź OB, idzie w stronę ściany AOB, a zaś prostopadła OC' do ściany AOB, z tej samej strony co krawędź OC, idzie w stronę ściany AOC; więc ściana B'OC' czyli kąt B'OC' jest spełnieniem kąta dwójściennego OA (29 *wn.*). Tak samo ściana A'OC' jest spełnieniem kąta dwójściennego OB, a ściana A'OB' spełnieniem kąta dwójściennego OC.

Nadto, ponieważ prosta OA' jest prostopadła do płaszczyzny BOC, a prosta OC' prostopadła do płaszczyzny BOA, zatem krawędź OB jest prostopadła do ściany A'OC'; podobnie krawędź OC jest prostopadła do ściany A'OB'. Owoż, w trójścianie OA'B'C' krawędzie OB, OC są prostopadłe do ścian kąta dwójściennego OA'; więc kąt BOC, czyli ściana BOC trójścianu OABC, jest spełnieniem kąta dwójściennego OA'. Tak samo ściany AOC i AOB są odpowiednio spełnieniami kątów dwójściennych OB' i OC'.

Dla tej wzajemnej własności dwa powyższe trójściany nazywają się *spełniającemi.*



Wniosek. — *Jeśli z punktu* M, *wziętego wewnątrz kąta trójściennego* OABC, *spuścimy prostopadłe* MP, MQ, MR *na jego ściany, otrzymamy trójścian* MPQR *spełniający pierwszego.*

Uwaga. — Trzy płaszczyzny, spotykające się w jednym punkcie O, tworzą osiem kątów trójściennych; łatwo widzieć że tylko dwa z tych kątów są spełniającemi trójścianu M, jakiekolwiek jest położenie jego wierzchołka w przestrzeni.

Twierdzenie XXXIX.

W kącie trójściennym, każda ściana jest mniejsza od summy dwóch innych, a większa od ich różnicy.

Dosyć jest dowieśdź że największa ściana jest mniejsza od summy dwóch innych.

Niech będzie ASB największa ściana w kącie trójściennym S. Zróbmy na tej ścianie kąt BSD = BSC, i poprowadźmy jakąkolwiek poprzeczną AB; po czem, weźmy na krawędzi SC długość SC = SD, i połączmy CA, CB. Dwa trójkąty BSC, BSD, mające kąt równy zawarty między dwoma bokami równemi, są równe; zatem bok BC = BD. Owoż, w trójkącie ABC

$$AD + DB < AC + BC; \quad \text{więc} \quad AD < AC.$$

Uważając teraz że dwa trójkąty ASD, ASC mają bok AS spólny, bok SD równy SC, a trzeci bok AD mniejszy od AC, widzimy że

$$\text{kąt } ASD < ASC.$$

Więc, dodając do pierwszej strony kąt BSD a do drugiej kąt równy BSC, otrzymujemy

$$ASB < ASC + BSC.$$

Z nierówności

$$ASC + BSC > ASB \quad \text{wynika} \quad ASC > ASB - BSD.$$

WNIOSEK. — *W jakimkolwiek kącie wielościennym każda ściana jest mniejsza od summy wszystkich innych.* Aby tego dowieśdź, dość rozłożyć kąt wielościenny na trójściany, prowadząc płasczyzny przez krawędzie tego kąta.

TWIERDZENIE XL.

W każdym trójścianie, a ogólnie w kącie wielościennym WYPUKŁYM, *summa ścian (kątów płaskich) jest mniejsza od czterech kątów prostych.*

Niech będzie kąt wielościenny SABCDE. Ponieważ ten kąt jest wypukły z założenia, wszystkie jego krawędzie SA, SB, SC,... leżą z jednej strony każdej ściany. Jeśli więc przez jakąkolwiek poprzeczną AB, wziętą naprzykład na ścianie ASB, poprowadzimy płasczyznę i będziemy ją obracali około AB tak żeby, zaczynając od wierzchołka S w którym spotyka wszystkie krawędzie, weszła wewnątrz kąta wielościennego, ta płasczyzna może oczywiście wziąć różne położenia, w których przecina wszystkie ściany kąta i daje wielokąty wypukłe jako ABCDE. Łącząc teraz jakikolwiek punkt wewnętrzny O tego wielokąta z jego wierzchołkami, utworzymy tyle trójkątów ile jest ścian w kącie wielościennym. Ztąd wynika że summa kątów w trójkątach mających wierzchołek w S jest ta sama co summa kątów w trójkątach mających wierzchołek w O

Owoż, w trójścianie ABES, mamy (39)

$$BAE < SAB + SAE, \quad \text{albo} \quad OAB + OAE < SAB + SAE;$$

tak samo, w trójścianach B, C,...

$$OBA + OBC < SBA + SBC$$
$$OCB + OCD < SCB + SCD$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

To pokazuje że summa kątów przy podstawie w trójkątach mających wierzchołek w O jest mniejsza od summy kątów przy podstawie w trójkątach mających wierzchołek w S; zatem dla zrównania, summa kątów przy wierzchołku S musi być mniejsza od summy kątów przy wierzchołku O. Ale wielokąt ABCDE jest wypukły, z przyczyny że kąt wielościenny S jest wypukły; przeto kąty AOB, BOC,... około wierzchołka O nie zachodzą jeden na drugi, i ich summa czyni cztery kąty proste. Więc summa kątów płaskich które tworzą kąt wielościenny S *wypukły* jest mniejsza od czterech kątów prostych.

Twierdzenie XLI.

W każdym trójścianie, 1° *summa kątów dwójściennych jest zawarta między* DWOMA *i* SZEŚCIOMA *kątami prostemi*, 2° *Każdy kąt dwójścienny powiększony dwoma prostemi jest większy od summy dwóch innych.*

Jeśli nazwiemy A, B, C kąty dwójścienne kąta trójściennego SABC, ściany (to jest kąty płaskie) trójścianu spełniającego będą $2^p - A$, $2^p - B$, $2^p - C$. Zatem

1° Ponieważ w trójścianie spełniającym summa ścian jest mniejsza od *czterech* kątów prostych, mamy

$$2 - A + 2 - B + 2 - C < 4 ; \quad \text{więc} \quad A + B + C > 2^p.$$

Do tego, każdy kąt dwójścienny trójścianu jest mniejszy od dwóch kątów prostych; więc

$$A + B + C < 6^p.$$

2° Każda ściana trójścianu jest mniejsza od summy dwóch innych (39); ztąd wynika że w trójścianie spełniającym jest

$$2 - A < 2 - B + 2 - C; \quad \text{więc} \quad A + 2p > B + C$$

Wniosek. — *W trójścianie kąt dwójścienny zewnętrzny jest większy od różnicy dwóch kątów dwójściennych wewnętrznych nieprzyległych.* Jakoż, na mocy 2° mamy

$$2p + C > A + B; \text{ więc } 2p - A > B - C.$$

przypuszczając $B > C$.

Uwaga. — Należy uważać że w trójścianie summa kątów dwójściennych nie jest stała jako w trójkącie, i tylko się zawiera między 2 i 6 kątami prostemi.

Zatem, trójścian może mieć *jeden*, *dwa* a nawet *trzy* kąty dwójścienne proste albo rozwarte. I tak, gdy trzy krawędzie trójścianu są prostopadłe między sobą, trójścian ma trzy kąty dwójścienne proste, i nazywa się *trójprostokątnym*; gdy jedna krawędź jest prostopadła do dwóch innych, trójścian jest *dwójprostokątny*; nareszcie trójścian mający jeden tylko kąt dwójścienny prosty nazywa się *prostokątnym*.

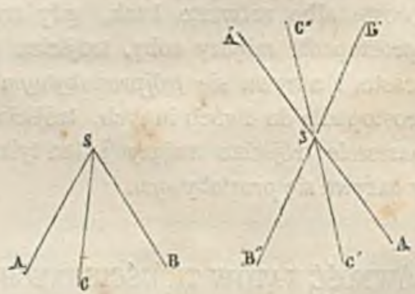
RÓWNOŚĆ KĄTÓW TRÓJŚCIENNYCH.

Twierdzenie XLII.

Dwa kąty trójścienne są równe gdy mają ścianę równą PRZYLEGŁĄ *dwom kątom dwójściennym równym każdy każdemu i podobnie ułożonym.*

Niech będą dwa trójściany SABC, S'A'B'C', w których ściana ASB jest równa ścianie A'S'B', kąty dwójścienne SA, S'A' równe między sobą, i kąty dwójścienne SB, S'B' także równe między sobą. Przypuszczamy nadto że układ części równych jest jednakowy w obydwóch trójścianach, to jest: że widz, oparty na ścianie ASB mając głowę w S i patrząc wewnątrz trójścianu SABC, spotrzega ścianę ASC na prawo a ścianę BSC na lewo; tak samo, widz mający podobną postawę w trójścianie S'A'B'C, spostrzega ścianę A'S'C' na prawo a ścianę B'S'C' na lewo. Powiedam że takie trójściany są przystawalne, to jest równe.

Jakóż, połóżmy trójścian S'A'B'C' na trójścianie SABC tak, żeby ściana A'S'B' przystała do swej równej ASB, i krawędź S'A' padła na SA a krawędź S'B' na SB; wtedy, płaszczyzna A'S'C' przystanie do ASC, bo kąty dwójścienne S'A' i SA są równe; i tak samo, płaszczyzna B'S'C' przystanie do BSC, bo kąty dwójścienne S'B', SB są równe. Więc krawędź S'C' pada na SC, i dwa trójściany przystają do siebie



Niech będą teraz dwa trójściany SABC, S'A'B'C' w których ściana ASB = A'S'B', i kąty dwójścienne przyległe równe SA = S'A', SB = S'B', ale niejednakowo ułożone w obydwóch trójścianach; to jest: widz oparty na ścianie ASB ma kąt dwójścienny SA na *prawo;* a zaś widz, podobnie oparty na ścianie A'S'B', ma kąt dwójścienny odpowiedny S'A' na *lewo.* Powiedam że te dwa trójściany, mające części równe każda każdej ale w porządku odwrotnym ułożone, są symetrycznie. Jakoż, trójścian S'A'B'C' i jego symetryczny S'A''B''C'' mają te same części równe ale w porządku odwrotnym ułożone; ztąd wynika że trójściany SABC i S'A''B''C'' czyniące zadość powyższemu twierdzeniu, są przystawalne. Więc trójściany SABC, S'A'B'C' są symetryczne.

TWIERDZENIE XLIII.

Dwa kąty trójścianu są równe, albo symetryczne, gdy mają kąt dwójścienny równy zawarty między dwiema ścianami równemi każda każdej.

Dowodzenie jako wyżej: te trójściany są przystawalne albo symetryczne, według jak części równe są albo nie są podobnie ułożone.

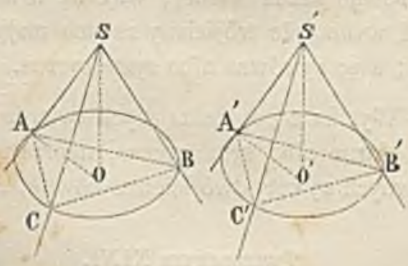
UWAGA. — Powtarzając wiadome dowodzenie geometryi płaskiej (I, 11), przyzwoicie zastosowane, nie trudno okazać następujące twierdzenie:

Gdy dwa trójściany mają dwie ściany równe każda każdej, zawierające kąt dwójścienny nierówny, wtedy naprzeciw kąta dwójściennego mniejszego jest ściana mniejsza. I NAWZAJEM.

TWIERDZENIE XLIV.

Dwa kąty trójścienne są równe gdy mają ściany równe między sobą i w tym samym porządku.

Niech będą dwa trójściany S, S', mające kąty płaskie równe i



w tym samym porządku idące. Możnaby, opierając się na ostatniej uwadze, dowieśdź tego twierdzenia rozumowaniem któregośmy w geometryi płaskiej użyli (I, 12). Ale wolimy dać następujące dowodzenie wprost.

Weźmy sześć krawędzi równych SA, SB, SC, S′A′, S′B′, S′C′; wyobraźmy podstawy ABC, A′B′C′, i z wierzchołków S, S′ spuśćmy na nie odpowiedające prostopadłe SO, S′O′, których spodki O, O′ będą środkami kół opisanych na tych podstawach.

Teraz, uważajmy że dwa trójkąty równoramienne ASB, A′S′B′, mające kąty przy wierzchołku równe z założenia, są równe; zatem bok AB = A′B′. Dla tej samej przyczyny bok AC = A′C′ i BC = B′C′. Więc dwa trójkąty ABC, A′B′C′ są równe. Ztąd wynika że promienie OA, O′A′ kół opisanych są równe, a następnie że trójkąty prostokątne AOS, A′O′S′ są równe.

Jeśli więc położymy trójścian SABC na S′A′B′C′ tak żeby podstawa ABC przystała do swej równej A′B′C′, wtedy środek koła O padnie na O′, wysokość OS przystanie do O′S′ (5), i wierzchołek S padnie na S′. Więc dwa trójściany są przystawalne, to jest równe.

Wniosek. — *Dwa trójściany mające ściany równe każda każdej, ale w porządku odwrotnym ułożone, są symetryczne.*

Twierdzenie XLV.

Dwa kąty trójścienne są równe albo symetryczne, gdy mają kąty dwójścienne równe każdy każdemu.

To twierdzenie, spółwzględne poprzedzającego, jest jego następstwem. Jakoż, dwa trójściany spełniające trójścianów zadanych mają ściany równe każda każdej; więc są równe albo symetryczne. Ztąd wynika że trójściany zadane mają ściany równe każda każdej; więc są równe albo symetryczne.

Uwaga. — Wynika z poprzedzających twierdzeń że, gdy dwa trójściany są równe albo symetryczne, naprzeciw ścian odpowiednych równych są kąty dwójścienne równe, i nawzajem.

Twierdzenie XLVI.

W każdym trójścianie, 1° naprzeciw ścian równych są kąty dwójścienne równe, 2° naprzeciw ściany mniejszej jest kąt dwójścienny mniejszy. I nawzajem.

1° Niech będzie trójścian SABC (*fig.* 1), w którym dwie ściany

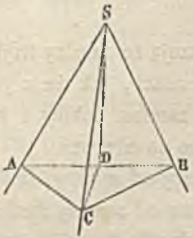


Fig. 1.

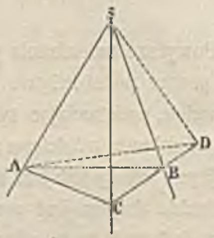


Fig. 2.

ASC i BSC są równe; powiedam że kąty dwójścienne SB i SA naprzeciw tych ścian leżące są równe. Jakoż, przez dwójsieczną SD kąta ASB i przez krawędź SC poprowadźmy płasczyznę DSC. Dwa trójściany SDCA i SDCB majace ściany równe każda każdej ale w porządku odwrotnym ułożone, są symetryczne (44). Więc kąty dwójścienne SA i SB są równe.

Uwaga. — Z symetryi dwóch trójścianów SACD, SBCD, wynika że kąty dwójścienne ASCD i BSCD są równe, i kąty dwójścienne ASDC, BSDC spełniające także równe między sobą. Więc w trójścianie który ma dwie ściany równe ASC, BSC, płasczyzna przechodząca przez krawędź spólną SC i przez dwójsieczną SD ściany ASB dzieli kąt dwójścienny SC na dwie równe części, i jest prostopadła do ściany przeciwległej ASB.

2° Jeśli w trójścianie SABC (*fig.* 2), ściana ASC jest większa od ściany BSC, kąt dwójścienny CBSA jest większy od dwójściennego CASB. Jakoż, na płasczyznie ściany mniejszej BSC weźmy kąt CSD = CSA, i poprowadźmy płasczyznę ASD; otrzymamy trojścian SACD, w którym kąty dwójścienne SD i CASD, przeciwległe ścianom równym, są równe. Owoż, w trójścianie SABD

$$\text{kąt} \quad ABSC > SD - BASD\,;$$

więc, podstawiając zamiast kąta dwójściennego SD jego równy CASD, będzie

$$ABSC > CASD - BASD, \quad \text{albo} \quad ABSC > BASC.$$

Wzajemnice są oczywiste.

WNIOSEK. — *Trójścian równoramienny jest równokątny,* I NAWZAJEM.

UWAGA. — Powyższe twierdzenia pokazują że między trójkątami i trójścianami jest pewne podobieństwo własności; tak że z jednych można przejść do drugich, podstawiając tylko zamiast boków i kątów trójkąta ściany i kąty dwójścienne trójścianu; albo na odwrot.

I tak, w trójkącie *każdy bok jest większy od summy dwóch innych*; a w trójścianie, *każda ściana jest mniejsza od summy dwóch innych.* Ale niema potrzeby dodawać że ta odpowiedność własności jest ograniczona. *Kąt zewnętrzny trójkąta równa się summie dwóch kątów wewnętrznych nieprzyległych*; gdy tymczasem *kąt dwójścienny zewnętrzny trójścianu jest większy od różnicy dwóch kątów wewnętrznych nieprzyległych*, i nie ma stałego związku z summą tych kątów.

TWIERDZENIE XLVII.

W kącie wielościennym WYPUKŁYM *mającym n ścian,* 1° *summa kątów dwójściennych jest zawarta między* $2(n-2)$ *i* $2n$ *kątów prostych;* 2° *każdy kąt dwójścienny jest większy od różnicy między summą wszystkich innych i summą* $2(n-2)$ *kątów prostych.*

Albowiem, prowadząc płaszczyzny przez jedną krawędź i przez każdą z innych, można rozłożyć ten kąt wielościenny *wypukły* na $2(n-2)$ trójścianów.

Owoż, 1° w trójścianie, summa kątów dwójściennych jest większa od dwóch kątów prostych; więc summa kątów dwójściennych kąta wielościennego jest większa od $2(n-2)$ kątów dwójściennych prostych.

2° W kącie wielościennym *wypukłym* każdy kąt dwójścienny jest mniejszy od *dwóch* kątów prostych; więc summa wszystkich jego kątów dwójściennych jest mniejsza od $2n$ kątów dwójściennych prostych.

WNIOSEK. — *W kącie wielościennym* WYPUKŁYM, *summa kątów dwójściennych zewnętrznych jest mniejsza od* CZTERECH *kątów dwójściennych prostych.* Bo, przy każdej krawędzi, kąt dwójścienny zewnętrzny jest spełnieniem dwójściennego wewnętrznego; zatem summa wszystkich kątów dwójściennych zewnętrznych i wewnętrznych czyni $2n$ kątów dwójściennych prostych. Ale summa samych kątów dwójściennych wewnętrznych jest większa od $2n-4$ kątów dwójściennych prostych; więc summa kątów dwójściennych zewnętrznych jest mniejsza od *czterech* kątów dwójściennych prostych.

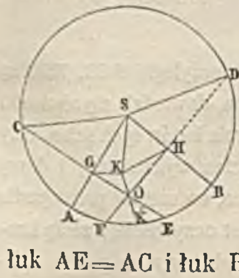
Ztąd wynika że, *kąt wielościenny* WAPUKŁY *nie może mieć więcej niż trzy kąty dwójścienne wewnętrzne ostre*; bo nie może mieć więcej niż trzy kąty dwójścienne zewnętrzne rozwarte.

UWAGA. — Dla uzupełnienia teoryi kątów wielościennych, trzebaby tutaj dać twierdzenia ich równości, i powiedzieć jak się mierzy te kąty za pomocą kąta trójściennego trójprostokątnego wziętego za jedność. Ale o tych rzeczach lepiej będzie mówić po wielokątach sferycznych którym kąty wielościenne odpowiedają.

ZAGADNIENIE.

Zbudować trójścian którego trzy ściany są dane.

Żeby można zbudować trójścian ze trzech ścian danych, *trzeba*, jako wiemy, żeby największa ściana była mniejsza od summy dwóch innych, i żeby summa trzech ścian była mniejsza od czterech kątów prostych. Następujące rozwiązanie dowodzi że te warunki są *dostateczne*.



Nakreślmy na płasczyznie kąt ASB równy kątowi największej ze trzech ścian danych, i kąty przyległe ASC, BSD równe dwom innym ścianom; z wierzchołka S jako środka, promieniem dowolnym, opiszmy koło które przetnie ramiona tych kątów w punktach A, B, C, D; weźmy łuk AE=AC i łuk BD=BF, i poprowadźmy cięciwy CE, DF które będą prostopadłe odpowiednio do promieni SA, SB.

Ponieważ z założenia ściana ASB jest mniejsza od summy dwóch innych ASC, BSD, będzie łuk $AB < AE + BF$; zatem punkta E i F leżą oba na łuku AB, i punkt E przypada między

B i F. Nadto, ponieważ summa trzech ścian ASB, ASC, BSD jest mniejsza od czterech kątów prostych, summa łuków AB + AC + BD jest mniejsza od okręgu; zatem punkt C znajduje się zewnątrz łuku ABD. Dla tych dwóch przyczyn punkta C i E leżą osobno na obydwóch łukach cięciwy DF; więc cięciwy CE i DF przecinają się wewnątrz koła w punkcie O.

Teraz z punktu O wyprowadźmy do płaszczyzny ASB prostopadłę OK, i na płaszczyznie GOK nakreślmy z punktu G jako środka, promieniem GC, łuk koła który przetnie prostopadłę OK w dwóch punktach K i K', bo promień GG jest większy od GO; nakoniec, jeśli połączymy przecięcie K z wierzchołkiem S, trójścian SABK będzie miał ściany dane. Jakoż, poprowadźmy KG, KH; te proste są prostopadłe odpowiednio do SA, SB na mocy twierdzenia trzech prostopadłych. Zatem dwa trójkąty SGK, SGC, mające kąty proste przy G zawarte między dwoma bokami równemi każdy każdemu, są równe. Ztąd wynika że ściana ASK jest równa danej ASC, i bok SK = SC = SD. Więc dwa trójkąty SHK, SHD prostokątne przy H, mające przeciwprostokątnę równą i bok spólny, są równe; to dowodzi że trzecia ściana SHK jest równa danej SHD.

Zagadnienie ma drugie rozwiązanie, trójścian SABK', który się otrzymuje łącząc wierzchołek S z drugim punktem przecięcia K'. Te dwa trójściany SABK, SABK', mające ściany równe każda każdej, ale w porządku odwrotnym ułożone, są symetryczne.

Uwaga. — Na figurze przypuszczono że kąty przyległe ASC, BSD są ostre; gdy jedna ze ścian *np.* ASC jest rozwartokątna, dowiedzie się równości ścian ASK i ASC, uważając trójkąty mające spełnienia kątów tych ścian. Gdy jedna ze ścian jest prostokątna, wtedy równość ścian wykreślonej i danej jest widoczna; a gdy dwie ściany są prostokątne, natenczas prostopadła wyprowadzona z punktu S do płaszczyzny ASB jest oczywiście trzecią krawędzią żądanego trójścianu, który jest dwójprostokątny albo nawet trójprostokątny.

Zbudować trójścian którego trzy kąty dwójścienne A, B, C *są dane.* To zagadnienie jest *spółwzględne* poprzedzającego; aby je rozwiązać, dość zbudować trójścian spełniający którego ściany są: $2-A$, $2-B$, $2-C$ (biorąc kąt prosty za *jedność kątową*), i wyznaczyć jego kąty dwójścienne które będą ścianami szukanego.

Owoż, aby trójścian spełniający był możebny, trzeba i dość jest żeby, przypuszczając $A < B < C$, było:

$$2-A < 2-B+2-C \quad \text{i} \quad 2-A+2-B+2-C < 4$$

albo $$A+2 > B+C \quad \text{i} \quad 6 > A+B+C > 2.$$

Więc *aby, mając dane trzy kąty dwójścienne* A, B, C, *można było zbudować trójścian, trzeba i dość jest żeby najmniejszy z tych kątów powiększony dwoma prostemi przewyższał summę dwóch innych, i żeby summa trzech kątów dwójściennych była zawarta między dwoma i sześcioma kątami prostemi.* Wiemy już że te warunki są *konieczne* (41), teraz widzimy że są *dostateczne.*

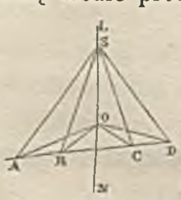
PĘK CZTERECH PŁASCZYZN.

Płasczyzny przechodzące przez jedną linię prostą stanowią *pęk płasczyzn.*

Twierdzenie XLVIII.

Gdy pęk czterech płasczyzn, przechodzących przez jedną linię prostą SN, *jest przecięty płasczyzną poprzeczną jakąkolwiek* SAD, *stosunek nieharmoniczny czterech linij przecięć* SA, SB, SC, CD *jest stały, niezależny od położenia płasczyzny poprzecznej.*

Jakoż, do prostej SD poprowadźmy płasczyznę prostopadłą OAD, która przetnie cztery płasczyzny pęku i płasczyznę poprzeczną wedle prostych OA, OB, OC, OD, i AD. Pęki (S . ABCD) i (O . ABCD), przecinając poprzeczną AD w tych samych punktach A, B, C, D, mają ten sam stosunek nieharmoniczny. Ale stosunek nieharmoniczny pęku (O . ABCD) jest stały, bo promienie tego pęku tworzą kąty prostolinijne czterech płasczyzn danego pęku;



więc stosunek nieharmoniczny pęku (S.ABCD) jest także stały, jakiekolwiek płaszczyzna poprzeczna bierze położenie.

Na mocy tego twierdzenia, nazwano *stosunkiem nieharmonicznym pęku czterech płaszczyzn* stosunek nieharmoniczny czterech linij przecięć tego pęku przez płaszczyznę poprzeczną.

Uwaga. — To wszystko staje się oczywistem jeśli użyjemy trygonometryi; albowiem wartość stosunku nieharmonicznego pęku czterech linij prostych zależy tylko od samych kątów tych linij. I w samej rzeczy, w pęku (O . ABCD) mamy

$$\frac{CA}{\text{wst COA}} = \frac{AO}{\text{wst C}}, \quad \text{i} \quad \frac{CB}{\text{wst COB}} = \frac{BO}{\text{wst C}}; \quad \text{zląd} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{AO \text{ wst COA}}{BO \text{ wst COB}}.$$

Znajdziemy tak samo

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AO \text{ wst DOA}}{BO \text{ wst DOB}}.$$

Więc

$$(O\ .\ ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\text{wst COA}}{\text{wst COB}} : \frac{\text{wst DOA}}{\text{wst DOB}}.$$

Widzimy teraz jasno co znaczy stosunek nieharmoniczny pęku czterech linij prostych, albo pęku czterech płaszczyzn.

Wniosek. — *Gdy jakakolwiek poprzeczna* AD *spotyka pęk czterech płaszczyzn,* SOA, SOB, SOC, SOD, *stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięć* A, B, C, D *jest równy stosunkowi nieharmonicznemu tych płaszczyzn.* Bo oba stosunki nieharmoniczne są równe stosunkowi nieharmonicznemu czterech linij przecięć SA, SB, SC, SD, wyznaczonych przez płaszczyzny pęku na płaszczyznie poprzecznej która przechodzi przez AD.

Pęk czterech płaszczyzn nazywa się *harmonicznym* gdy jego stosunek nieharmoniczny jest —1. Wtedy, wszelka płaszczyzna poprzeczna albo wszelka sieczna wyznacza układ harmoniczny czterech linij prostych albo czterech punktów.

ZADANIA.

803. — Linia prosta jest prostopadła do płaszczyzny jeśli czyni kąty równe ze trzema liniami prostemi które leżą na tej płaszczyznie.

804. — Jakie jest miejsce geometryczne punktów płaszczyzny które są równo oddalone od dwóch punktów danych zewnątrz tej płaszczyzny?

805. — Jakie jest miejsce geometrycne spodków linij prostopadłych, spuszczonych z punktu danego zewnątrz płaszczyzny, na linie proste które przechodzą na tej płaszczyznie przez jeden z jej punktów?

806. — Dwie płaszczyzny jedna prostopadła a druga pochyła do trzeciej spotykają się.

807. — Znaleźć miejsce środka linii prostej która, mając długość zmienną, opiera się na ścianach kąta dwójściennego prostego i porusza się równolegle do danego kierunku.

808. — W kącie trójściennym, summa kątów utworzonych przez krawędzie ze ścianami przeciwległemi, jest mniejsza od summy ścian, (a równa w trójścianie trójprostokątnym).

809. — Gdy dwie płaszczyzny są prostokątne, wszelka sieczna tworzy z niemi dwa kąty których summa jest mniejsza od kąta prostego, a najwięcej mu równa.

810. — Przez trzy punkta A, B, C linii prostej, poprowadzono trzy równoległe które spotykają płaszczyznę M w punktach P, Q, R; dowieść że

$$AB \,.\, CR = AC \,.\, BQ \pm BC \,.\, AP;$$

znak + albo — według jak punkt C jest między A i B albo zewnątrz.

811. — W kącie trójściennym,

1° Płaszczyzny dwójsieczne kątów dwójściennych spotykają się wedle linii prostej, która jest miejscem punktów równo oddalonych od ścian tego trójścianu.

2° Płaszczyzny poprowadzone przez krawędzie, prostopadle do ścian przeciwległych, przecinają się wedle jednej linii prostej.

3° Płaszczyzny poprowadzone przez dwójsieczne ścian, prostopadle do tych ścian, spotykają się wedle linii prostej, która jest miejscem punktów równo oddalonych od trzech krawędzi trójścianu.

4° Płaszczyzny poprowadzone przez krawędzie i przez dwójsieczne ścian przeciwległych spotykają się wedle linii prostej.

Uwaga. — Te cztery twierdzenia są prawdziwe, gdy wierzchołek kąta trójściennego oddala się w nieskończoność, to jest gdy trzy krawędzie stają się równoległemi.

812. — Linia prosta równo nachylona na dwie płaszczyzny spotyka je w dwóch punktach równo oddalonych od ich precięcia. I nawzajem.

813. — Wszelkie przecięcie trójścianu prostokątnego przez płasczyznę prostopadłą do jednej z krawędzi jest trójkątem prostokątnym.

814. — Przecinając trójścian prostokątny płasczyzną spotykającą wszystkie krawędzie, otrzymuje się trójkąt w którym punkt spotkania wysokości jest rzutem wierzchołka trójścianu na tej płasczyznie.

815. — Przez punkt dany poprowadzić linię prostą któraby spotykała dwie proste nie leżące na jednej płasczyznie.

816. — Poprowadzić linię prostą równoległą do danej, i któraby spotykała dwie dane proste nie leżące na jednej płasczyznie.

817. — Przeciąć kąt czworościenny wypukły płasczyzną tak żeby przecięcie było równoległobokiem.

818. — Przez punkt dany w przestrzeni poprowadzić linię prostą któraby czyniła kąty równe ze trzema liniami prostemi danemi, albo ze trzema płasczyznami danemi.

819. — Przez dany punkt poprowadzić płasczyznę któraby czyniła kąty równe ze trzema liniami prostemi danemi: — albo ze trzema płasczyznami danemi.

820. — Między dwiema liniami prostemi, nie leżącemi na jednej płasczyznie, poprowadzić linię prostą długości danej, równoległą do płasczyzny danej.

821. — Są dane w przestrzeni dwa punkta i linia prosta. Poprowadzić przez tę linię płasczyznę taką, żeby prostopadłe na nią spuszczone z tych dwóch punktów miały się w stosunku $m : n$.

822. — Są dane cztery punkta A, B, C, D w przestrzeni; przez punkt D poprowadzić płasczyznę taką, żeby prostopadłe na nią spuszczone z punktów A, B, C były proporcyonalne do liczb m, n, p.

823. — Poprowadzić płasczyznę taką, żeby prostopałe na nią spuszczone ze czterech danych punktów A, B, C, D, były proporcyonalne do liczb m, n, p, q.

824. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, 1° równo oddalonych od trzech punktów danych; albo 2° równo oddalonych od trzech prostych które leżą na jednej płasczyznie: albo jeszcze 3° równo oddalonych od trzech płasczyzn.

825. — Miejsce punktów równo oddalonych od dwóch prostych nie leżących na jednej płasczyznie.

826. — Miejsce punktów takich żeby summa prostopadłych spuszczonych na dwie płaszczyzny dane równała się linii danej.

Zamiast summy wziąć różnicę.

827. — Miejsce punktów takich żeby summa prostopadłych spuszczonych na *n* płaszczyzn danych równała się linii danej.

828. — Miejsce punktów których stosunek odległości od dwóch płaszczyzn danych jest ilością daną.

829. — Miejsce punktów których odległości od trzech płaszczyzn danych są proporcyonalne do m, n, p.

830. — Znaleźć na płaszczyznie miejsce geometryczne punktów takich, żeby summa kwadratów odległości każdego z nich od dwóch punktów danych zewnątrz tej płaszczyzny była ilością stałą.

831. — Znaleźć na płaszczyznie miejsce geometryczne punktów takich, żeby różnica kwadratów odległości każdego z nich od dwóch punktów danych zewnątrz tej płaszczyzny była ilością stałą.

832. — Znaleźć miejsce geometryczne środka linii prostej, mającej długość daną, której skrajności pomykają się po dwóch prostych prostokątnych nie leżących na jednej płaszczyznie.

833. — Dane są dwie płaszczyzny jakiekolwiek i punkt zewnętrzny przez który poprowadzono poprzeczną do tych płaszczyzn; znaleźć miejsce punktów harmonicznie sprzężonych z danym, względem dwóch punktów spotkania poprzecznej z danemi płaszczyznami.

834. — Znaleźć miejsce punktów których summa odległości od dwóch płaszczyzn danych równa się linii danej.

835. — Zogólnić za pomocą znaków + i —, miejsce punktów których summa odległości od trzech płaszczyzn danych równa się linii danej.

836. — Znaleźć na danej prostej punkt taki, żeby summa jego odległości od dwóch płaszczyzn przecinających się była minimum.

837. — Mając dane trzy proste w przestrzeni, nie leżące po dwie na jednej płaszczyznie; poprowadzić poprzeczną taką, żeby jej odcinki zawarte między temi liniami były proporcyonalne do liczb danych.

838. — Mając dane dwa punkta A i B zewnątrz płaszczyzny, znaleźć na tej płaszczyznie punkt taki, żeby summa jego odległości od punktów A i B była minimum.

839. — Mając dane dwa punkta A i B, zewnątrz płaszczyzny P, znaleźć

na tej płaszczyźnie punkt taki, żeby różnica jego odległości od punktów A i B była maximum.

840 — Linia prosta, opierająca się na dwóch prostych danych w przestrzeni, zmienia ciągle położenie, ale zostając równoległą do danej płaszczyzny; jakie jest miejsce geometryczne punktów które dzielą tę prostę ruchomą w stosunku danym?

841. — Jeśli zrzutujemy punkt przestrzeni na dwóch płaszczyznach przecinających się, prostopadłe spuszczone z tych dwóch rzutów na spólne przecięcie płaszczyzn spotykają się w jednym punkcie. I nawzajem, dwa punkta leżące na dwóch płaszczyznach przecinających się są rzutami jednego punktu przestrzeni, jeśli prostopadłe spuszczone z tych punktów na spólne przecięcie płaszczyzn spotykają się w jednym punkcie.

842. — Mając dany czworobok spaczony i linię prostą która dzieli dwa boki przeciwległe na części proporcyonalne, znaleźć drugą prostę któraby była prostopadła do pierwszej i dzieliła także proporcyonalnie dwa inne boki czworoboku.

843. — W czworoboku spaczonym, trzy linie łączące środki przekątnych i środki boków przeciwległych przecinają się zobopólnie na równe części.

844. — Jeśli linia prosta EF posuwa się po dwóch bokach przeciwległych AB i CD czworoboku spaczonego tak żeby było

$$\frac{EA}{ED} = \frac{\lambda FB}{FC},$$

λ jest ilością stałą, ta linia ruchoma spotyka zawsze trzy proste niezmienne.

845. — Płaszczyzna poprzeczna spotykająca boki wielokąta spaczonego ABCD... w punktach a, b, c,... daje

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cD} \ldots\ldots = +1.$$

846. — W sześciokącie spaczonym, mającym boki przeciwległe równe i równolegle, środki boków są na jednej płaszczyźnie.

Albo ogólniej. W wielokącie spaczonym *parzystej* liczby boków, mającym boki przeciwległe równe i równoległe, linie które łączą wierzchołki przeciwległe i linie które łączą środki boków przeciwległych spotykają się w jednym punkcie.

KSIĘGA SIÓDMA

WIELOŚCIANY.

Określenie I — *Wielościan* jestto część przestrzeni zamknięta płasczyznami. Ale czasem nazywa się także wielościanem wszelka powierzchnia zamknięta utworzona z wielokątów.

Te wielokąty nazywają się *ścianami*, linie spotkania ścian *krawędziami* albo *bokami*, a punkta spotkania krawędzi *wierzchołkami* wielościanu.

Summa wszystkich ścian wielościanu stanowi jego *powierzchnię*.

Wielościan jest *czworościanem*, *pięciościanem*, *sześciościanem*,... według jak ma *cztery*, *pięć*, *sześć*,... ścian.

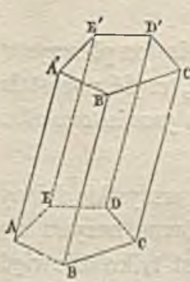
Czworościan jest najprostszy z wielościanów; albowiem trzema płasczyznami nie można zamknąć przestrzeni.

Nazywa się *przekątną* wielościanu wszelka prosta która łączy dwa wierzchołki nie należące do jednej ściany; a *płasczyzną przekątną*, wszelka płasczyzna która przechodzi przez trzy wierzchołki nie należące wszystkie do jednej ściany.

Wielościan jest wypukły jeśli leży cały z jednej strony każdej ściany.

Między wielościanami odróżnia się szczególniej *graniaston i piramidę*.

II. — Graniaston (graniastosłup) jestto wielościan mający dwie ściany równoległe i równe a wszystkie inne równoległoboczne.



Można wyobrazić graniaston utworzony następującym sposobem:

Z wierzchołka A wielokąta ABCDE prowadzi się, zewnątrz jego płasczyzny, prostę AA' i przez jej skrajność A' płasczyznę równoległą do płasczyzny ABCDE; potem, przez wszystkie inne wierzchołki B, C, D, E prowadzi się, aż do spotkania z tą płaszczyzną równoległą, proste BB′, CC′, DD′,.. równoległe do AA′. Te równoległe są wszystkie równe prostej AA′ (23); zatem wszystkie boczne ściany ABB′A′, BCC′B′,... są równoległobokami; wielokąty ABCDE, A′B′C′D′E′ są równoległe i równe, bo mają boki odpowiedne równe i równoległe. Więc wielościan tak otrzymany jest graniastonem.

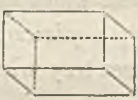
Te dwa wielokąty ABCDE, A′B′C′D′E′ równe i równoległe nazywają się *podstawami* graniastonu, a ich odległość jest jego *wysokością.*

Proste AA′, BB′... są *krawędziami bocznemi* graniastonu, a summa równoległoboków ABB′A′, BCC′B′... stanowi jego *powierzchnię boczną.*

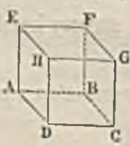
Graniaston jest *prosty* albo *pochyły,* według jak krawędzie boczne są prostopadłe albo pochyłe do podstaw.

Graniaston nazywa się *foremnym* gdy jest prosty i ma za podstawy wielokąty foremne.

Graniaston jest *trójkątny*, *czworokątny*, *pięciokątny* gdy ma za podstawę *trójkąt*, *czworokąt*, *pięciokąt*,...

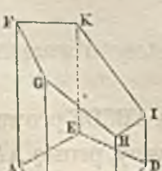


III. — Graniaston mający za podstawy *równoległoboki* nazywa się RÓWNOLEGŁOŚCIANEM.



Równoległościan może być *prosty* albo *pochyły.* Równoległościan prosty, mający za podstawy *prostokąty,* jest równoległościanem *prostokątnym.* Wszystkie ściany równoległościanu prostokątnego są prostokątami.

Nazywa się SZEŚCIANEM równoległościan którego podstawy i ściany boczne są kwadratami.



IV. — Jeśli zetniemy graniaston płaszczyzną nierównoległą do podstawy, część pozostała ABCDEFGHIK będzie *pniem graniastonu* albo *graniastonem ściętym.*

V. — Wielościan mający wszystkie ściany równe i wszystkie kąty równe nazywa się *foremnym,* jako sześcian. Jest tylko dziewięć wielościanów foremnych, pięć wypukłych a cztery gwiaździste, jako później zobaczymy.

VI. — Piramida (niewłaściwie *ostrosłup*) jestto wielościan którego jedna ściana jest wielokątem jakimkolwiek ABCDE, a wszystkie inne ściany są trójkątami mającemi boki tego wielokąta za podstawy, i punkt S przestrzeni za spólny wierzchołek.

Ten wielokąt ABCDE jest *podstawą*, a punkt S *wierzchołkiem* piramidy.

Wysokością piramidy jest prostopadła SF spuszczona z wierzchołka S na podstawę ABCDE.

Proste SA, SB,... są *krawędziami bocznemi* piramidy, a summa ścian trójkątnych SAB, SBC,... stanowi jej *powierzchnię boczną*.

Piramida jest wielościanem którego wszystkie wierzchołki, prócz jednego, są na jednej płaszczyznie.

Przecinając kąt wielościenny S płaszczyzną spotykającą wszystkie krawędzie, otrzymujemy wielościan SABCDE który jest piramidą.

Piramida nazywa się *foremną*, gdy ma za podstawę wielokąt foremny którego środkiem jest spodek wysokości. Krawędzie boczne piramidy foremnej są równe jako pochyłe równo oddalone od spodka wysokości; zatem jej ściany boczne są trójkątami równoramiennemi równemi. Wysokość jednego z tych trójkątów nazywa się *apotemą* piramidy foremnej.

Piramida jest *trójkątna*, *czworokątna*, *pięciokątna*,... według jak ma za podstawę *trójkąt*, *czworokąt*, *pięciokąt*,...

Piramida trójkątna, mająca *cztery* ściany, nazywa się zwykle *czworościanem*.

W czworościanie można wziąć każdą ścianę za podstawę, a wierzchołek przeciwległy za jego wierzchołek.

Czworościany w przestrzeni grają rolę trójkątów na płaszczyznie. I tak, wyznacza się położenie punktu na płaszczyznie wiążąc go z *dwoma* danemi punktami tej płaszczyzny za pomocą trójkąta; podobnie, wyznacza się położenie punktu w przestrzeni wiążąc go za pomocą czworościanu ze *trzema* punktami danemi także w przestrzeni.

VII. — Jeśli od piramidy SABCDE odetniemy, jakąkolwiek płaszczyzną, piramidę S*abcde*, wielościan pozostały ABCDE*abcde* będzie *pniem piramidy* albo *piramidą ściętą*.

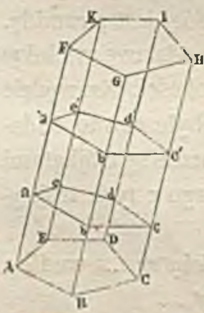
Wielokąty ABCDE, *abcde* są *podstawami* pnia piramidy; gdy te podstawy są równoległe ich odległość jest *wysokością* pnia.

Jeśli piramida jest foremna, jej pień o podstawach równoległych jest pniem piramidy *foremnym*.

GRANIASTONY, ICH RÓWNOŚĆ.

Twierdzenie I.

Przecięcia powierzchni bocznej graniastonu przez dwie płaszczyzny równoległe są wielokątami równemi.



Jakoż, równoległe aa', bb'..., zawarte między płaszczyznami równoległemi, są równe; więc czworoboki $abb'a'$, $bcc'b'$..., są równoległobokami. Zatem, bok $ab = a'b'$, $bc = b'c'$, etc. i kąt $abc = a'b'c'$, kąt $bcd = b'c'd'$...

Więc dwa wielokąty $abcde$, $a'b'c'd'e'$, są równe.

Określenie VIII. — Nazywa się *przecięciem prostem* graniastonu przecięcie wyznaczone w tym graniastonie przez płaszczyznę prostopadłą do jego krawędzi bocznych.

Twierdzenie II.

Dwa graniastony są równe, gdy mają kąt dwójścienny równy zawarty *między podstawą i ścianą równą każda każdej, i w tym samym porządku.*

Niech będą dwa graniastony ABCDEF, A'B'C'D'E'F', w których kąt dwójścienny AB = A′B′, podstawa ABCDE = A′B′C′D′E′, i ściana ABGF = A′B′G′F′.

Połóżmy pierwszy graniaston na drugim, tak żeby punkt A padł na A′, i podstawa ABCDE przystała do swej równej A′B′C′D′E′. Ponieważ kąt dwójścienny AB = A′B′, ściana ABGF przystanie do swej równej A′B′G′F′ i wierzchołki F, G padną na F′, G′. Zatem, płaszczyzna FGH przystanie do płaszczyzny równoległej F′G′H′, a następnie podstawa FGHIK do swej równej F′G′H′I′K′. Więc dwa graniastony przystają do siebie i są równe.

Wniosek I. — *Dwa graniastony są równe gdy mają podstawę i dwie ściany przytykające równe każda każdej i podobnie ułożone.*

Bo mają kąt trojścienny równy; a zatem kąt dwójścienny równy zawarty między podstawą i ścianą równą każda każdej, i w tym samym porządku.

II. — *Dwa graniastony* PROSTE *są równe gdy mają równe podstawy i równe wysokości.* Bo są oczywiście przystawalne.

III. — *Dwa równoległościany* PROSTOKĄTNE *są równe gdy mają trzy krawędzie przyległe równe każda każdej.*

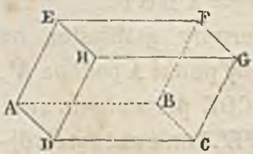
Dwa sześciany mające bok równy są równe.

Uwaga. — Jako widać z powyższego twierdzenia, równość dwóch graniastonów, których podstawy mają n boków, wymaga $2n$ oddzielnych warunków. Ta liczba warunków, potrzebna do wyznaczenia graniastonów, czyni $\frac{2}{3}$ liczby krawędzi. Ale, żeby wielościan, ograniczony dwiema podstawami o n bokach a bocznie czworobokami w liczbie n, był graniastonem, jego podstawy muszą być równoległe i krawędzie boczne równoległe między sobą. To wszystko potrzebuje n warunków które, dodane do poprzedzających, czynią liczbę $3n$ równą liczbie krawędzi graniastonu.

Twierdzenie III.

W każdym równoległościanie : 1° *ściany przeciwległe są równe i równoległe*; 2° *kąty dwójścienne przeciwległe są równe.*

1° Niech będzie równoległościan ABCDF mający za podstawy dwa równoległoboki ABCD, EFGH równe i równoległe. Trzeba



dowieśdź że dwie inne ściany przeciwległe jakiekolwiek, ABFE, DCGH, są także równe i równoległe.

Owoż, w równoległoboku ABCD dwa boki przeciwległe AB, DC są równe i równoległe; dla podobnej przyczyny boki AE, DH są równe i równoległe; więc dwa równoległoboki ABFE, DCGH, mające kąt równy zawarty między dwoma bokami równemi każdy każdemu, są równe i równoległe.

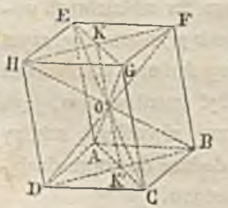
2° W równoległościanie kąty dwójścienne przeciwległe, jako AD i FG, są równe; bo są oba spełnieniem kąta dwójściennego BC.

Wniosek. — *Przecięcie równoległościanu płaszczyzną spotykającą cztery krawędzie równoległe jest równoległobokiem* (VI, 21).

Uwaga. — Z tego twierdzenia wynika że w równoległościanie można brać dwie którekolwiek ściany przeciwległe za podstawy, i że cztery krawędzie przyległe podstawie są równe i równoległe między sobą.

Twierdzenie IV.

W równoległościanie przekątne i linie łączące środki ścian przeciwległych spotykają się w jednym punkcie, który jest spólnym ich środkiem.



Jakoż, połączmy AC, EG. Czworobok ACGE, mający dwa boki przeciwległe AE, CG równe i równoległe, jest równoległobokiem. Zatem, przekątne AG, CE, i prosta KK′ łącząca środki boków przeciwległych AC, EG, spotykają się we spólnym środku O. Więc wszystkie cztery przekątne równoległościanu, i cztery proste łączące środki ścian przeciwległych, spotykają się we środku O przekątnej AG który jest spólnym środkiem tych linij.

Określenie VIII. — Punkt O nazywa się *środkiem* równoległościanu, dlatego że dzieli na dwie równe części wszelką prostę która przezeń przechodzi (I, 30 *określ.*).

TWIERDZENIE V.

W każdym równoległościanie summa kwadratów z przekątnych równa się summie kwadratów z krawędzi (Figura poprzednia).

W równoległoboku ACGE, $\overline{AG}^2 + \overline{CE}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{AE}^2$;

W równoległoboku BDHF, $\overline{BH}^2 + \overline{DF}^2 = 2\overline{BD}^2 + 2\overline{BF}^2$;

W równoległoboku ABCD, $2\overline{AC}^2 + 2\overline{BD}^2 = 4\overline{AB}^2 + 4\overline{AD}^2$.

Dodając stronami, zważając że BF = AE i redukując, otrzymujemy

$$\overline{AG}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DF}^2 = 4\left(\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2\right).$$

WNIOSEK I. — Jeśli równoległościan jest prostokątny, wszystkie jego równoległoboki są prostokątami. I tak, równoległobok BCHE jest prostokątem; bo bok BC, prostopadły do płaszczyzny DCG, jest prostopadły do boku CH. Owoż, w prostokącie przekątne są równe; zatem wszystkie cztery przekątne równoległościanu są równe.

Na mocy tej uwagi, ostatnie równanie staje się

$$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2;$$

Więc *kwadrat z przekątnej równoległościanu prostokątnego równa się summie kwadratów ze trzech krawędzi przyległych.*

Ten ważny wynik łatwo się wprost otrzymuje.

II. — W sześcianie wszystkie boki są równe; zatem

$$\overline{AG}^2 = 3\overline{AB}^2, \qquad \text{zkąd} \qquad \frac{AG}{AB} = \sqrt{3};$$

więc, *w sześcianie stosunek przekątnej do boku jest niespółmierny, i równa się pierwiastkowi kwadratowemu z* 3.

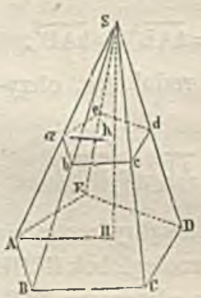
PIRAMIDY, ICH RÓWNOŚĆ.

Twierdzenie VI.

Jeśli piramida jest przecięta płaszczyzną równoległą do podstawy, wtedy :

1° *Krawędzie boczne i wysokość są podzielone proporcyonalnie.*

2° *Przecięcie jest wielokątem podobnym podstawie.*



Niech będzie piramida SABCDE i jej wysokość SH, przecięte płaszczyzną *abd* równoległą do podstawy ABD. Połączmy AH, *ah*.

1° Proste AH i *ah*, AB i *ab*..., są równoległe (VI, 21); więc

$$\frac{SH}{Sh} = \frac{SA}{Sa} = \frac{SB}{Sb} = \frac{SC}{Sc} = \text{etc.}$$

2° Wielokąty *abcde*, ABCDE mają boki proporcyonalne, bo trójkąty podobne S*ab* i SAB, S*bc* i SBC..., dają

$$\frac{ab}{AB} = \frac{sb}{SB} = \frac{bc}{BC} = \frac{Sc}{SC} = \frac{cd}{CD} = \dots .$$

Nadto, kąty odpowiednie *abc* i ABC, *bcd* i BCD..., są równe jako mające ramiona równoległe i skierowane w te same strony,

Więc przecięcie *abcde* i podstawa ABCDE, mające boki proporcyonalne i kąty między niemi zawarte równe, są wielokątami podobnemi.

Wniosek I. — Ponieważ wielokąty *abcde* i ABCDE są podobne, mamy

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}.$$

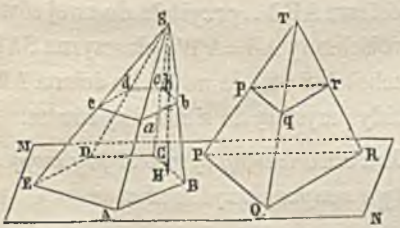
Owoż, trójkąty podobne S*ab*, SAB dają $\dfrac{ab}{AB} = \dfrac{Sa}{SA}$, albo, na mocy tego co poprzedza, $\frac{ab}{AB} = \frac{Sh}{SH}$;

więc $$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2},$$

to jest, w piramidzie przecięcia równoległe do podstawy i ta podstawa są proporcyonalne do kwadratów z ich odległości od wierzchołka piramidy.

II. — *Gdy dwie piramidy równej wysokości, i mające podstawy na jednej płaszczyznie, są przecięte płaszczyzną równoległą do podstaw, przecięcia są proporcyonalne do tych podstaw.*

Niech będą dwie piramidy SABCDE, TPQR, równej wyso-



kości SH, postawione na płaszczyznie MN. Mamy, według poprzedzającego wniosku,

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2} \quad \text{i} \quad \frac{pqr}{PQR} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2};$$

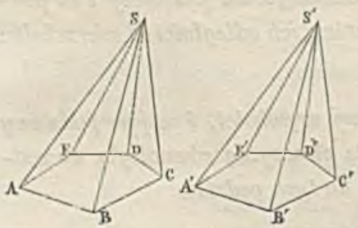
więc $$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{pqr}{PQR};$$

Ztąd wynika że, *jeśli podstawy dwóch piramid równej wysokości są równoważne, przecięcia abcde, pqr są także równoważne.*

Uwaga. — Jeśli piramidę foremną przetniemy płaszczyzną równoległą do podstawy, otrzymamy pień piramidy o podstawach foremnych, w którym ściany boczne będą trapezami równoramiennemi i równemi. Wysokość jednego z tych trapezów jest *apotemą* pnia piramidy.

TWIERDZENIE VII.

Dwie piramidy są równe gdy mają kąt dwójścienny równy ZAWARTY *między podstawą i ścianą równą każda każdej i podobnie ułożoną.*



Niech będą dwie piramidy SABCDE, S'A'B'C'D'E', w których kąt dwójścienny AB = A'B', podstawa ABCDE = A'B'C'D'E', i ściana ABS = A'B'S'.

Połóżmy piramidę S na piramidzie S' tak, żeby punkt A padł na A' i podstawa ABC... przystała do swej równej A'B'C'... Ponieważ kąt dwójścienny AB=A'B', płaszczyzna SAB przystanie do S'A'B'; wierzchołek S padnie na S', bo ściana ABS = A'B'S'. Więc dwie piramidy przystają do siebie i są równe.

WNIOSEK. — *Dwa czworościany są równe gdy mają ściany równe każda każdej, i w tym samym porządku ułożone.*

TWIERDZENIE VIII.

Dwie piramidy są równe gdy mają podstawę równą PRZYLEGŁĄ *trzem kątom dwójściennym równym i w tym samym porządku.*

Dowodzenie przez przystawanie.

WNIOSEK. — *Dwie piramidy są równe gdy mają podstawę równą przyległą trzem krawędziom równym i w tym samym porządku.* Bo czworościany które mają za krawędzie te trzy krawędzie boczne i przekątne łączące ich spodki, są równe; więc, etc.

TWIERDZENIE IX.

Dwie piramidy równokątne między sobą są równe, gdy mają dwie odpowiedne krawędzie równe.

Dowodzenie przez przystawanie.

Z tego twierdzenia wynika że dwie piramidy są równokątne między sobą, gdy mają, *prócz jednego*, wszystkie kąty dwójścienne, albo wszystkie kąty płaskie, równe każdy każdemu i podobnie ułożone.

Wniosek. — *Dwie piramidy są równe gdy mają kąt wielościenny przy wierzchołku równy i zawarty między trzema krawędziami równemi każda każdej.*

Uwaga. — Dwa powyższe twierdzenia pokazują że równość dwóch piramid, których podstawy mają n krawędzi, wymaga $2n$ warunków. Zatem na wyznaczenie piramidy trzeba i dość tyle oddzielnych warunków ile jest krawędzi.

MIARA WIELOŚCIANÓW.

Określenie IX. — Dwa wielościany mające tę samą objętość nazywają się *równowartemi*.

Dwa wielościany równe są temsamem równowarte; ale dwa wielościany równowarte mogą nie być równe, bo, nie mając koniecznie tego samego kształtu, nie są przystawalne.

Twierdzenie X.

Powierzchnia boczna graniastonu prostego ma za miarę wieloczyn z obwodu podstawy przez wysokość.

Jakoż, powierzchnia boczna graniastonu składa się z prostokątów, których spólną wysokością jest wysokość tego graniastonu a podstawami boki jego podstawy. A że powierzchnia prostokąta ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość, więc summa powierzchni tych prostokątów ma za miarę summę wieloczynów ze spólnej wysokości przez każdą podstawę, czyli wieloczyn z summy podstaw tych prostokątów przez wysokość, to jest wieloczyn z obwodu podstawy graniastonu przez jego wysokość.

WNIOSEK. — *Powierzchnia boczna graniastonu jakiegokolwiek ma za miarę wieloczyn z obwodu przecięcia prostego przez krawędź boczną.*

Niech będzie graniaston ABCDEA' i jego przecięcie proste *abcde*. Równoległoboki ABB'A', BCC'B',..., składające powierzchnię boczną graniastonu, mają za podstawy krawędzie boczne a za wysokość boki przecięcia prostego. Więc powierzchnia boczna tego graniastonu równa się

$$AA' . ab + BB' . bc + ... EE' . ea = (ab + bc + ... + ea)AA'.$$

UWAGA. — Powierzchnia cała graniastonu jest summą jego powierzchni bocznej i obydwóch podstaw.

TWIERDZENIE XI.

Graniaston pochyły jest równowarty graniastonowi prostemu który ma jego przecięcie proste za podstawę i krawędź boczną za wysokość.

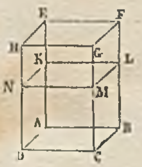
Niech będzie graniaston pochyły ABCDEFGHIK; przedłużmy

ściany boczne, i zróbmy zewnątrz graniastonu przecięcie proste RSTUV takie któreby nie spotykało podstawy ABCDE; weźmy potem krawędź RM równą AF, i poprowadźmy płasczyznę MNOPQ prostopadłą do MR, otrzymamy graniaston prosty MNOPQR, mający za podstawę przecięcie proste graniastonu pochyłego ABCDEF a za wysokość jego krawędź boczną.

Ztąd wynika że dwa pnie graniastonne RSTUVFH i MNOPQAC, mające podstawy równe a krawędzie boczne prostopadłe i odpowiednio równe, są oczywiście równe jako przystawalne. Owoż, jeśli od całej figury odejmiemy graniaston ścięty MNORQAC, zostanie graniaston pochyły ABCDEFH, a jeśli od tej samej całej figury odejmiemy graniaston ścięty RSTUVFH zostanie graniaston prosty MNOPQRT; więc te dwa graniastony pochyły i prosty są równowarte.

TWIERDZENIE XII.

Dwa równoległościany prostokątne równej podstawy są proporcyonolne do swych wysokości.



Niech będą dwa równoległościany *prostokątne* ABCDE i ABCDK mające równe podstawy, albo raczej spólną podstawę ABCD. Aby dowieśdź że te równoległościany są proporcyonalne do wysokości AE, AK, trzeba odróżnić, jako zwykle, dwa przypadki.

1° Wysokości spółmierne. Dajmy nato że wysokości AE, AK są w stosunku liczb 5 do 3, to jest $\frac{AE}{AK} = \frac{5}{3}$.

Podzielmy wysokość AE na 5 równych części; wysokość AK będzie zawierała 3 z tych części. Jeśli więc, przez punkta podziału, poprowadzimy płasczyzny równoległe do podstawy, rozłożymy równoległościan AG na 5 równoległościanów równych, z których trzy będą się mieściły w równoległościanie AM; zatem stosunek równoległościanów będzie $\frac{AG}{AM} = \frac{5}{3}$.

Więc stosunki równoległościanów i wysokości, oba wyrażone tą samą liczbą, są równe.

2° Jeśli stosunek wysokości jest niespółmierny, wiadome dowodzenie okaże że i wtedy stosunki równoległościanów i wysokości są równe.

WNIOSEK. —Długości trzech krawędzi przyległych graniastonu prostokątnego są jego *rozmiarami;* więc

Dwa równoległościany prostokątne mające dwa rozmiary spólne mają się jako ich trzecie rozmiary.

Twierdzenie XIII.

Stosunek dwóch równoległościanów prostokątnych równa się wieloczynowi stosunków ze trzech krawędzi przyległych.

Niech będą a, b, c rozmiary równoległościanu prostokątnego R, i a', b', c' rozmiary drugiego równoległościanu prostokątnego R'. Wyobraźmy dwa inne równoległościany prostokątne R'' i R''' mające rozmiary a, b, c', i a, b', c'.

Równoległościany R i R'', mające dwa rozmiary spólne a, b, dają

$$\frac{R}{R''}=\frac{c}{c'}.$$

Podobnie R'' i R''' dają także

$$\frac{R''}{R'''}=\frac{b}{b'}.$$

Nakoniec R''' i R' dają

$$\frac{R'''}{R'}=\frac{a}{a'}.$$

Ztąd, mnożąc stronami i redukując, otrzymujemy

$$\frac{R}{R'}=\frac{a}{a'}\cdot\frac{b}{b'}\cdot\frac{c}{c'}. \qquad (1)$$

To równanie pokazuje że, jakiekolwiek są *jedności linijne* któremi wymierzono wyrazy każdego stosunku, zawsze *stosunek dwóch równoległościanów prostokątnych równa się wieloczynowi stosunków trzech krawędzi przyległych.*

Ale, jeśli trzy krawędzie przyległe są wymierzone tą samą jednością linijną w obydwóch równoległościanach, powyższe równanie może się pisać

$$\frac{R}{R'}=\frac{abc}{a'b'c'}; \qquad (2)$$

to znaczy że wtedy *dwa równoległościany prostokątne jakiekolwiek mają się jako wieloczyny ich trzech rozmiarów.*

Jeśli do tego jeszcze, za *jedność powierzchni* która dotąd zostaje dowolną, weźmiemy *kwadrat* wystawiony na jedności linij, w tem przypuszczeniu, uważając c za wysokość równoległościanu, wieloczyn $a \,.\, b$ mierzy powierzchnię podstawy, i ostatnie równanie wyraża że :

Dwa równoległościany prostokątne jakiekolwiek mają się jako wieloczyny z podstaw przez wysokości.

Niech będą dwa równoległościany prostokątne R, R′ mające rozmiary : $a = 15$ metrów, $b = 6$ łokci, $c = 4$ stopy ; $a' = 16$ metrów, $b' = 5$ łokci, $c' = 3$ stopy. Aby znaleźć stosunek tych dwóch równoległościanów, niema potrzeby przywodzić wszystkich rozmiarów do tej samej jedności, dość napisać

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} = \frac{15m}{16m} \cdot \frac{6ł}{5ł} \cdot \frac{4s}{3s} = \frac{15}{16} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3}{2}. \quad \text{Ztąd} \quad \mathrm{R} = \frac{3}{2}\mathrm{R}'.$$

Ten wynik nie mógłby się otrzymać za pomocą równania (2) które wymaga żeby wszystkie rozmiary były wyznaczone tą samą jednością linijną.

Miara objętości równoległościanu prostokątnego. — Jeśli, za *jedność objętości*, weźmiemy *sześcian wystawiony na jedności linij*, równanie (1) da

$$\frac{\mathrm{R}}{1^3} = \frac{a}{1^1} \cdot \frac{b}{1^1} \cdot \frac{c}{1^1}; \quad \text{zkąd} \quad \mathrm{R} = abc.$$

Otrzymane równania znaczą że, stosunek równoległościanu prostokątnego do sześcianu wziętego za jedność objętości, to jest *miara objętości równoległościanu prostokątnego*, równa się wieloczynowi liczb które mierzą trzy krawędzie przyległe. To się wyraża krócej, mówiąc : *Objętość równoległościanu prostokątnego równa się wieloczynowi jego trzech rozmiarów.*

Jeśli weźmiemy za jedność objętości *sześcian* i za jedność powierzchni *kwadrat*, obie figury wystawione na jedności linij, wtedy wyrazimy miarę objętości równoległościanu wysłowieniem ogólniejszem i treściwszem od pierwszego, mówiąc :

Objętość równoległościanu prostokątnego równa się wieloczynowi z jego podstawy przez wysokość.

Wniosek. — *Objętość sześcianu równa się trzeciej potędze jego krawędzi*, bo $a.a.a = a^3$. Ztąd pochodzi że trzecią potęgę liczby nazwano jej sześcianem.

Uwaga. — Okazaliśmy w Geometryi płaskiej jak, *mając dany kwadrat, wykreślić kwadrat dwa razy większy*. Zastosujmy podobne pytanie do sześcianu. Nazywając x bok sześcianu dwa razy większego od danego a^3, mamy $x^3 = 2a^3$, zkąd $x = a\sqrt[3]{2}$.

Jest dowiedzione że nie można za pomocą Geometryi elementarnej, to jest, kreśląc same tylko linie proste i koła, wyrazić pierwiastku sześciennego danej iczby; jako równie nie można takim sposobem znaleźć dwóch średnich geometrycznych między dwiema liniami prostemi, ani *podzielić kąta na trzy równe części*. Ale, kreśląc pewne linie krzywe, Starożytni dawno już rozwiązali te niegdyś sławne kwestye, które dla dzisiejszej umiejętności są więcej ciekawe niż trudne.

Twierdzenie XIV.

Objętość równoległościanu jakiegokolwiek ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość.

1° Uważajmy najpierwej równoległościan prosty ABCDE (fig. 1)

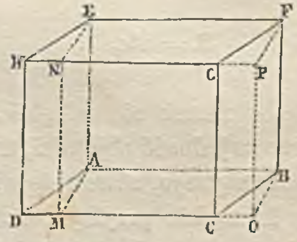


Fig. 1.

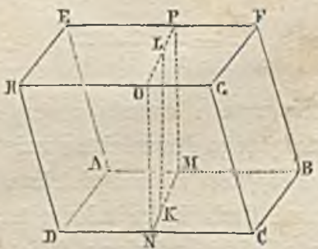


Fig. 2.

mający za podstawę równoległobok ABCD a za wysokość krawędź AE. Jeśli przez wierzchołki A i B poprowadzimy płaszczyzny AN, BP prostopadłe do krawędzi AB, otrzymamy równoległościan prostokątny ABOME równowarty danemu AG. Jakoż, dwa graniastony trójkątne proste ADMEHN i BCOFGP, mające równe podstawy i równe wysokości, są równe; więc, jeśli odejmiemy je kolejno od całej figury ABODEFPH, reszty, to jest równoległościan prostokątny AP i równoległościan prosty AG, będą równowarte.

Owoż, objętość równoległościanu prostokątnego ABOME ma za miarę wieloczyn AB . AM . AE; więc objętość równoległościanu prostego AG ma tę samą miarę AB . AM . AE, to jest, równa się wieloczynowi z podstawy ABCD przez wysokość AE.

2° Niech będzie teraz równoległościan jakikolwiek ABCDE (*fig.* 2) mający podstawę ABCD i wysokość KL. Jeśli przez punkt M krawędzi AB poprowadzimy do niej płaszczyznę prostopadłą MO, dany równoległościan AG będzie równowarty równoległościanowi prostemu który ma za podstawę przecięcie proste MNOP, i za wysokość krawędź AB. Owoż, na mocy 1°, miarą objętości ostatniego równoległościanu jest wieloczyn MN . KL . AB, albo AB . MN . KL; więc, ponieważ wieloczyn AB . MN mierzy podstawę ABCD, objętość równoległościanu jakiegokolwiek ABCDE ma za miarę wieloczyn z podstawy ABCD przez wysokość KL.

Twierdzenie XV.

Objętość graniastonu ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość.

1° Uważajmy najpierwej graniaston trójkątny ABCDEF (*fig.* 1).

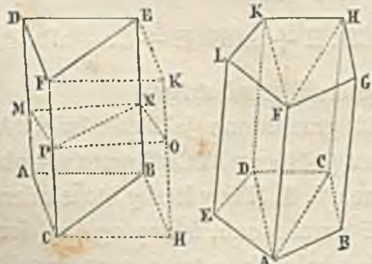


Fig. 1. Fig. 2.

Na jego podstawie ABC dopełnijmy równoległoboku ABHC, i przez boki BH, HC poprowadźmy płaszczyzny równoległe do krawędzi AD, aż do spodkania z płasczyzną podstawy DEF; utworzymy, na krawędziach AB, AC, AD, równoległościan AK którego dany graniaston ABCDEF będzie połową. Jakoż, jeśli graniaston ABCDEF jest prosty, graniaston BCHEFK jest także prosty, i te dwa graniastony, oczywiście równe, są połowami równoległościanu AK. A jeśli dany graniaston ABCDEF jest pochyły, poprowadźmy przecięcie proste MNOP; graniastony pochyłe ABCDEF, BCHEFK będą równowarte graniastonom prostym które mają odpowiednio za podstawy trójkąty równe MNP, NOP, i za wysokość krawędź AD. Owoż, te dwa graniastony proste są równe; zatem, graniastony pochyłe im równowarte są równowarte między sobą, i każdy z nich jest połową graniastonu AK.

Więc, ponieważ objętość równoległościanu AK ma za miarę wieloczyn z podstawy ABHC przez wysokość H, objętość graniastonu trójkątnego ABCDEF będzie miała za miarę połowę tego wieloczynu, to jest wieloczyn z podstawy ABC, która jest połową równoległoboku ABHC, przez wysokość H.

2° Niech będzie graniaston jakikolwiek ABCDEF (*fig.* 2). Można go rozłożyć na graniastony trójkątne, prowadząc płasczyzny przekątne przez krawędzie boczne. Te graniastony trójkątne mają wysokość danego graniastonu za spólną wysokość, a ich podstawy ABC, ACD,... składają jego podstawę ABCDE. Ztąd wynika że miara objętości graniastonu ABCDEF, równa summie miar graniastonów składających, jest

$$ABC \,.\, H + ACD \,.\, H + ADE \,.\, H + \ldots \quad \text{albo} \quad ABCDE \,.\, H,$$

nazywając H wysokość graniastonu.

Więc objętość graniastonu jakiegokolwiek ABCDEF ma za miarę wieloczyn z podstawy ABCDE przez wysokość H.

Oznaczając przez V, B, H trzy liczby które mierzą *objętość*, *podstawę* i *wysokość* graniastonu, mamy ogólną formułę objętości graniastonu jakiegokolwiek, a temsamem wszelkiego równoległościanu,

$$V = BH.$$

Ta formuła pokazuje że: *dwa graniastony mające podstawy* *równowarte i tę samą wysokość są równowarte ;* zatem, dwa graniastony mają się jako wieloczyny z podstaw przez wysokości. Ztąd wynika że : *dwa graniastony podstaw równowartych są proporcyonalne do swych wysokości ; a dwa graniastony równej wysokości są proporcyonalne do podstaw.*

Wniosek I. — Graniaston pochyły jest równowarty graniastonowi prostemu, który ma jego przecięcie proste za podstawę i krawędź boczną za wysokość.

Więc *objętość wszelkiego graniastonu* ABCDEA′ (*figura stronicy* 500) *równa się wiloczynowi z przecięcia prostego* abcde *przez krawędź boczną* AA′.

Ztąd wynika że *podstawa graniastonu ma się do przecięcia prostego jako krawędź boczna do wysokości.*

II. — Widzieliśmy że graniaston trójkątny jest połową równoległościanu tej samej wysokości i podwójnej podstawy. Więc *objętość graniastonu trójkątnego ma za miarę połowę wieloczynu ze ściany bocznej przez jej odległość od krawędzi przeciwległej.*

Zastosowanie. — *Sadzawka, mająca kształt graniastonu sześciokątnego foremnego, jest napełniona wodą na* $1^m,2$ *głębokości, a bok podstawy zawiera* 4 *metry. Wyrachować ilość wody, przypuszczając że jej powierzchnia jest zupełnie płaska.*

Apotema podstawy równa się $\sqrt{4^2-2^2} = 2^m\sqrt{3}$, a powierzchnia tej podstawy ma $24^{mk}\sqrt{3}$. Więc objętość wody w sadzawce, na mocy formuły $V = B.H$, jest

$$V = 24\sqrt{3} \times 1,2 = \sqrt{2488,32} = 49^{ms},883$$

na mniej niż litr, przez niedostatek.

Twierdzenie XVI.

Powierzchnia boczna piramidy foremnej ma za miarę połowę wieloczynu z obwodu podstawy przez apotemę.

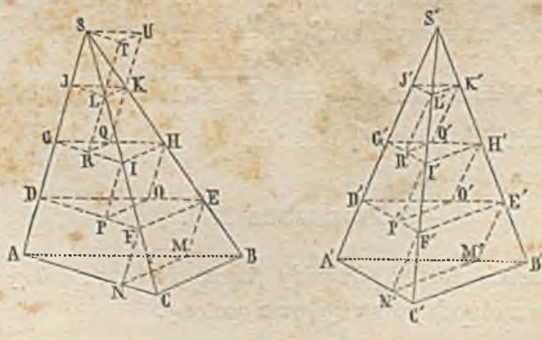
Niech będzie piramida foremna SABCDE. Jej powierzchnia boczna składa się z trójkątów równoramiennych i równych, które mają za podstawy boki AB, BC, CD.... podstawy tej piramidy, a za wysokość jej apotemę SK. Owoż, summa powierzchni tych trójkątów równa się wieloczynowi summy ich podstaw przez połowę apotemy SK; więc powierzchnia boczna piramidy foremnej ma za miarę połowę wieloczynu z podstawy przez apotemę.

Wniosek. — *Powierzchnia boczna pnia piramidy foremnej, o podstawach równoległych, ma za miarę wieloczyn z połowy summy obwodów podstaw przez apotemę tego pnia.*

Jakoż, trapezy równoramienne i równe, składające powierzchnię pnia piramidy foremnej, mają za boki odpowiedne boki AB i *ab*, BC i *bc*..., a za spólną wysokość jego apotemę K*k*. A że summa powierzchni tych trapezów równa się wieloczynowi z połowy summy ich podstaw przez spólną wysokość K*k*; więc powierzchnia rzeczonego pnia ma za miarę wieloczyn z połowy summy obwodów jego podstaw przez apotemę.

Twierdzenie XVII.

Dwie piramidy trójkątne mające podstawy równowarte i wysokości równe są równowarte.



Niech będą dwie piramidy trójkątne (dwa czworościany) SABC, S'A'B'C' mające podstawy ABC, A'B'C' równowarte i wysokości równe.

Podzielmy spólną wysokość tych piramid na *n* równych części, czyli, co wychodzi na jedno, podzielmy dwie krawędzie AS i A'S', każdą na *n* części równych, *np* na *cztery*, i przez punkta podziałów poprowadźmy płaszczyzny równoległe do podstaw, które wyznaczą odpowiedne przecięcia DEF i D'E'F', GHI i G'H'I',... Ponieważ dwie piramidy mają podstawy równowarte i wysokości równe, ich przecięcia odpowiedne, jako DEF i D'E'F', zrobione przez płaszczyzny równoległe do tych podstaw i równo od nich oddalone, są równowarte (6. wn. 2).

Wystawmy teraz na przecięciach odpowiednych DEF i D'E'F' graniastony wpisane, prowadząc przez EF płaszczyznę równoległą do krawędzi DA a przez E'F' płaszczyznę równoległą do krawędzi D'A', otrzymamy dwa graniastony wpisane DEFAMN i D'E'F'A'M'N'. Wykreślmy podobnie wszystkie inne. Te graniastony, brane po dwa odpowiednie, są równowarte, bo mają podstawy równowarte i wysokości równe z wykreślenia.

I tak, graniaston DEFAMN jest równowarty graniastonowi D'E'F'A'M'N', ponieważ przecięcia odpowiedne DEF, D'E'F' są równowarte, a wysokość każdego z tych graniastonów jest *n*tą cześcią spólnej wysokości dwóch piramid. Ztąd wynika że summa graniastonów wpisanych w piramidę SABC jest równa summie graniastonów wpisanych w piramidę S'A'B'C'.

Owoż, jeśli podzielimy krawędź SA na coraz większą liczbę równych części, summa graniastonów wpisanych w piramidę SABC będzie się coraz bardziej zbliżała do jej objętości, którą ma za granicę. Albowiem, zaniedbując piramidę SJKL popełniamy błąd oczywiście mniejszy od graniastonu JKLSTU czyli od graniastonu JKLGQR; a zaniedbując następnie wielościan HKQILR, będzie summa dwóch błędów mniejsza od pnia GHIJKL, a tem bardziej mniejsza od graniastonu GHIDEF. I tak dalej postępując, widzimy że summa wszystkich błędów jest mniejsza od ostatniego pnia piramidy ABCDEF, a tem bardziej mniejsza od graniastonu mającego podstawę tej piramidy za podstawę i *n*tą część jej wysokości za wysokość. A ponieważ liczba *n* rośnie nieskończenie, ostatni graniaston maleje aż do zera, to jest różnica między piramidą SABC i summą graniastonów wpisanych może stać się mniejszą od wszelkiej wielkości naznaczonej; więc ta summa graniastonów ma za granicę objętość piramidy SABC. Tak samo objętość piramidy S′A′B′C′ jest granicą summy graniastonów wpisanych D′E′F′A′M′N′, G′H′I′D′O′P′,... A że te summy graniastonów wpisanych w obie piramidy są ciągle równe, więc ich granice czyli objętości piramid SABC i S′A′B′C′ są równe.

Twierdzenie XVIII.

Objętość piramidy ma za miarę trzecią część wieloczynu z podstawy przez wysokość.

1° Niech będzie najpierwej piramida trójkątna SABC, Na jej podstawie ABC i na krawędzi CS wystawmy graniaston trójkątny ABCDES.

Dana piramida mająca z tym graniastonem spólną podstawę i wysokość jest jego trzecią częścią.

Jakoż, jeśli poprowadzimy płasczyznę przez trzy wierzchołki B, D, S, rozłożymy graniaston trójkątny ABCDES na trzy piramidy trójkątne SABC, SABD, SBDE.

Dwie ostatnie piramidy SABD, SBDE są równowarte, bo mają tę samą wysokość, i podstawy równowarte jako połowy równoległoboku ABED. Ale piramida SBDE albo BDES może być uważana jako mająca podstawę DES i wierzchołek B; więc dwie piramidy BDES i SABC, mające podstawy i wysokość graniastonu ABCDES za podstawę i wysokość, są równowarte.

To pokazuje że trzy piramidy na które się rozkłada graniaston ABCDES są równowarte; zatem każda z nich jest trzecią częścią tego graniastonu. A że objętość graniastonu ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość, więc objętość piramidy trójkątnej SABC ma za miarę trzecią część wieloczynu z jej podstawy przez wysokość.

2° Niech będzie piramida jakakolwiek SABCDE. Można rozłożyć podstawę ABCDE na trójkąty ABC, ACD,... przekątnemi; po czem, prowadząc płaszczyzny przez te przekątne i przez wierzchołek S, rozłożyć piramidę wielokątną na piramidy trójkątne SABC, SACD... mające za podstawy trójkąty ABC, ACD,.. składające jej podstawę, a za wysokość jej wysokość. Owoż, każda z tych piramid trójkątnych ma za miarę trzecią część wieloczynu ze swej podstawy przez wysokość piramidy wielokątnej; więc objętość piramidy jakiejkolwiek SABCDE równa się trzeciej części wieloczynu z summy podstaw składających jej podstawę przez wysokość; to jest, wszelka piramida ma za miarę trzecią część wieloczynu z podstawy przez wysokość.

Oznaczając przez V, B, H trzy liczby które mierzą *objętość*, *podstawę* i *wysokość* piramidy, mamy ogólną formułę

$$V = \frac{1}{3} BH$$

która pokazuje że *każda piramida jest trzecią częścią graniastonu tej samej podstawy i wysokości.*

Dwie piramidy podstawy równowartej i wysokości równej są równowarte. Zatem, dwie piramidy mają się jako wieloczyny z podstaw przez wysokości; *dwie piramidy mające podstawy równowarte są proporcyonalne do swych wysokości*; *a dwie piramidy równej wysokości są proporcyonalne do podstaw.*

Wniosek. — Objętość czworościanu foremnego wyraża się w funkcyi jego krawędzi a.

Jakoż, wszystkie ściany czworościanu foremnego DABC są trójkątami równobocznemi równemi. Zatem, podstawa ABC tego czworościanu równa się $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (IV, 5 *uw.*).

Jego wysokość DO jest bokiem kąta prostego w trójkącie ADO który ma za drugi bok tego kąta promień OA koła opisanego na podstawie, to jest $\frac{a}{\sqrt{3}}$, a za przeciwprostokątnę krawędź AD $= a$. Ta wysokość wyraża się tedy przez

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Więc objętość V czworościanu foremnego jest

$$V = \frac{a^2}{12}\sqrt{3} \, . \, a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Przykład. — *Wyrachować objętość piramidy pięciokątnej foremnej, której krawędź boczna ma 1 metr, a bok podstawy 2 decymetry.*

Nazywając R promień koła opisanego na podstawie, mamy

$$\frac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{2}{10} \qquad \text{(IV, } zag. \text{ 3);}$$

zkąd

$$R = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}}.$$

Następnie, apotema podstawy wyraża się przez $\frac{1}{10}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, a wysokość piramidy przez $\frac{1}{10}\sqrt{\frac{490 - 2\sqrt{5}}{5}}$. Więc objętość tej piramidy równa się

$$\frac{2 \, . \, 5}{10} \cdot \frac{1}{20}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \cdot \frac{1}{30}\sqrt{\frac{490 - 2\sqrt{5}}{5}}$$

$$= \frac{1}{3000}\sqrt{2430 + 970\sqrt{5}} = 0^{m.s},02260.$$

na mniej niż jedną setną decymetra sześciennego, przez niedostatek.

Uwaga. — Znając miarę objętości graniastonu, można samym rachunkiem otrzymać miarę objętości piramidy. Jakoż, podzielmy wysokość H piramidy na n części równych; przez punkta podziału poprowadźmy płaszczyzny równoległe do podstawy B, i na $n-1$ przecięciach wystawmy graniastony trójkątne, jako na *figurze tw.* XVII. Widzimy łatwo że, w graniastonie rzędu k, licząc od wierzchołka, podstawa wyraża się przez $B\left(\frac{k}{n}\right)^2$ (6, *wn.* 1), a objętość przez $B.H\frac{k^2}{n^3}$ Więc, nazywając Σ summę wszystkich graniastonów otrzymanych kładąc za k liczby 1, 2, 3..., aż do $n-1$, będzie

$$\Sigma\frac{B.H}{n^2}k^2=\frac{B.H}{n^3}\left\{1+2^2+3^2+\ldots(n-1)^2\right\}.$$

Ale ilość w nawiasach, jako wiadomo z Algebry, równa się $\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$; podstawiając tę wartość, znajdziemy

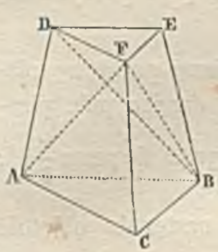
$$\Sigma\frac{B.H}{n^2}k^2=\frac{B.H}{6n^2}(n-1)(2n-1,\text{ albo }\Sigma\frac{B.H}{n^2}k^2=\frac{1}{6}B.H\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Owoż, im większe jest n tem bardziej ilość w nawiasie zbliża się do 2, a temsamem summa objętości graniastonów dąży do swej granicy $\frac{1}{3}B.H.$ Więc

$$granica\ \Sigma\frac{B.H}{n^2}k^2,\text{ czyli objętość piramidy równa się }\frac{1}{3}B.H.$$

Twierdzenie XIX.

Objętość pnia piramidy, o podstawach równoległych, ma za miarę trzecią część wieloczynu z wysokości przez summę dwóch podstaw i średniej proporcyonalnej między temi podstawami.



1° Niech będzie najpierwej pień piramidy trójkątnej ABCDEF o podstawach równoległych.

Jeśli poprowadzimy płaszczyzny ABF i BDF, rozłożymy ten pień na trzy piramidy trójkątne FABC, FBDE i FABD. Dwie pierwsze, to jest piramidy FABC i FBDE czyli BDEF mają, za podstawy i wysokość, podstawy ABC i DEF pnia i jego wysokość.

Co do trzeciej piramidy FABD, uważajmy że piramidy FBDE i

FABD, mające śpólny wierzchołek F, i podstawy BDE, ABD na jednej płasczyznie, mają spólną wysokość, zatem są proporcyonalne do swych podstaw; te zaś podstawy BDE, ABD, mając równą wysokość, są proporcyonalne do boków DE i AB. Więc

$$\frac{\mathrm{FBDE}}{\mathrm{FABD}}=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}}.$$

Ale piramidy FABD i FABC, mogą także być uważane jako mające za wierzchołek punkt B i za podstawy trójkąty AFD, AFC trapezu ACFD; zatem, mając spolną wysokość są proporcyonalne do swych podstaw, a te ostatnie są proporcyonalne do boków DF i AC; więc

$$\frac{\mathrm{FABD}}{\mathrm{FABC}}=\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}}.$$

Owoż, z założenia, podstawy DEF, ABC pnia piramidy są trójkątami podobnemi, i dają

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{AC}};$$

ztąd wnosimy że pierwsze stosunki dwóch powyższych proporcyj są równe, i mamy

$$\frac{\mathrm{FBDE}}{\mathrm{FABD}}=\frac{\mathrm{FABD}}{\mathrm{FABC}}.$$

Więc trzecia piramida FABD jest średnią proporcyonalną między dwiema pierwszemi FABC i FBDE.

Oznaczając przez B, b, h, liczby które mierzą podstawę niższą ABC, podstawę wyższą DEF, i wysokość danego pnia piramidy, widzimy że objętość piramidy FABC wyraża się przez $\frac{1}{3}\,\mathrm{B}h$; objętość piramidy BDEF przez $\frac{1}{3}\,bh$, a następnie objętość piramidy FABD przez $\sqrt{\frac{1}{3}\,\mathrm{B}h\cdot\frac{1}{3}\,bh}=\frac{h}{3}\sqrt{\mathrm{B}b}.$

Więc objętość V pnia ABCDEF piramidy trójkątnej, o podstawach równoległych, ma za miarę

$$V = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}bh + \frac{1}{3}h\sqrt{Bb} \qquad \text{albo} \qquad V = \frac{1}{3}h\,(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Inne dowodzenie. — Niech będzie pień piramidy trójkątnej ABCDEF o podstawach równoległych.

Jeśli poprowadzimy płaszczyznę ABF, odetniemy piramidę trójkątną FABC która ma za podstawę i wysokość podstawę niższą ABC i wysokość pnia; po czem, prowadząc płaszczyznę BDF, podzielimy zostającą piramidę czworokątną FABED na dwie piramidy trójkątne FBDE i FABD. Pierwsza piramida FBDE może się uważać jako mająca trójkąt DEF za podstawę i punkt B za wierzchołek; a więc ma za podstawę i wysokość podstawę wyższą i wysokość pnia. Aby znaleźć czemu się równa druga piramida FABD, poprowadźmy, przez wierzchołek F, równoległę FG do krawędzi DA; prosta FG będzie równoległa do płaszczyzny ADB (V, 16). Połączmy GD i GB. Widzimy łatwo że piramida FABD jest równowarta piramidzie GABD, bo obie mają tę samą podstawę ABD, i wierzchołki F i G na równoległej FG do tej podstawy. Owóż, piramida GABD może się uważać jako mająca podstawę ABG i wierzchołek w punkcie D; a więc jej wysokość jest równa wysokości pnia. Co do podstawy ABG, jeśli poprowadzimy przez punkt G równoległę GH do CB a temsamem do FE, trójkąty DEF i AGH będą równe, bo mają boki DF i AG równe jako równoległe zawarte między równoległemi, kąty D i A równe z założenia a kąty G i F równe z wykreślenia. Teraz, dwa trójkąty ABC i ABG, mające spólny wierzchołek B i podstawy AC, AG na jednej prostej, są proporcyonalne do swych podstaw, to jest

$$\frac{ABC}{ABG} = \frac{AC}{AG}.$$

Tak samo, dwa trójkąty ABG i AGH, mające spólny wierzchołek

G i podstawy AB, AH na jednej prostej, są proporcyonalne do swych podstaw, i mamy

$$\frac{ABG}{AGH}=\frac{AB}{AH}.$$

Ale, w trójkącie ABC, prosta GH równoległa do boku BC daje proporcyę

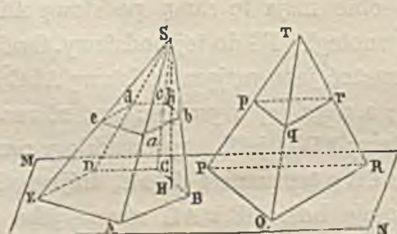
$$\frac{AC}{AG}=\frac{AB}{AH}.$$

zatem $\frac{ABC}{ABG}=\frac{ABG}{AGH}$, albo $\frac{ABC}{ABG}=\frac{ABG}{DEF}$.

To pokazuje że podstawa ABG jest średnią proporcyonalną między podstawami ABC i DEF uważanego pnia piramidy.

Znajdujemy więc, jako wyżej, że *objętość pnia piramidy trójkątnej, o podstawach równoległych, równa się summie trzech piramid które mają wysokość tego pnia za wysokość, a za podstawy jego podstawę niższą, podstawę wyższą i średnią proporcyonalną między temi dwiema podstawami.*

2° Niech będzie teraz pień piramidy jakiejkolwiek ABCDE*abcde*



o podstawach równoległych. Dopełnijmy piramidy SABCDE; na płaszczyznie jej podstawy weźmy trójkąt PQR równowarty tej podstawie, i wystawmy na nim piramidę trójkątną TPQR równej wysokości; po czem, przedłużmy płaszczyznę *abc* która da przecięcie *pqr*. Ponieważ dwie piramidy SABCDE i TPQR, mające podstawy równowarte i tę samą wysokość, są równowarte, ich przecięcia *abcde* i *pqr* są także równowarte (6 wn. 2). Więc dwie piramidy S*abcde* i T*pqr* są równowarte. Ztąd wynika że pień ABCDE*abcde* piramidy jakiejkolwiek jest równowarty pniowi PQR*pqr* piramidy trójkątnej. Owoż, pień piramidy trójkątnej o podstawach równoległych ma za miarę trzecią część wieloczynu z wysokości przez summę obydwóch podstaw i ich średniej proporcyonalnej; to wyrażenie objętości stosuje się do pnia piramidy wielokątnej, o podstawach równoległych, który jest równowarty pniowi piramidy trójkątnej i ma z nim te same podstawy i wysokość. Więc oznaczając przez V, B, b, h, objętość, obie podstawy i wysokość pnia piramidy jakiejkolwiek, o podstawach równoległych, mamy ogólną formułę jego objętości,

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

Ta formuła pokazuje że pień piramidy jakiejkolwiek, o podstawach równoległych, jest równowarty summie trzech piramid mających za spólną wysokość jego wysokość, a za podstawy jego obie podstawy i średnią proporcyonalną tych dwóch podstaw.

Wniosek. — Znając stosunek $\frac{a}{A}$ dwóch odpowiednych boków pnia piramidy o podstawach równoległych, można uniknąć rachunku jednej z dwóch podstaw.

Jakoż, proporcya $\frac{b}{B} = \frac{a^2}{A^2}$ daje $b = \frac{a^2}{A^2}.B$; podstawiając tę wartość, otrzymujemy formułę dogodną do liczebnych zastosowań,

$$V = \frac{1}{3}Bh\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Zastosowanie. — *Wyrachować objętość pnia piramidy w którym wysokość zawiera* 3 *metry, a podstawy równoległe są dwunastokątami foremnemi mającemi* 1 *metr i* 2 *metry za boki.*

Apotema dwunastokąta foremnego którego bok mierzy 2 metry, jest $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$ (IV *zag* 6); zatem podstawa $B = 12\ (2 + \sqrt{3})$. Podstawiając te wartości w powyżej danej formule, znajdujemy że szukana objętość pnia jest

$$12\,(2+\sqrt{3})\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 21\,(2+\sqrt{3}) = 78^{\text{ms}},\ 373066$$

na mniej niż 1 centymetr sześcienny.

Uwaga I. — Nie trudno otrzymać wprost wyrażenie objętości pnia piramidy o podstawach równoległych, uważając ten pień jako różnicę dwóch piramid. Jakoż, nazwijmy B, b, h podstawy i wysokość danego pnia piramidy ABCDE$abcde$, i, dopełniając piramidy SABCDE, oznaczmy przez x jej wysokość, przez y wysokość piramidy S$abcde$; będziemy mieli

$$V = \frac{1}{3}Bx - \frac{1}{3}by.$$

Owoż (VI, *wn.* 1),

$$\frac{B}{x^2} = \frac{b}{y^2} = \frac{\sqrt{B.b}}{xy}\,(*) = \frac{B.x}{x^3} = \frac{by}{y^3} = \frac{B.x - by}{h(x^2+xy+y^2)},$$

a te stosunki dają także $\displaystyle\frac{B}{x^2} = \frac{B+b+\sqrt{B.b}}{x^2+xy+y^2}$;

ztąd wynika $\displaystyle\frac{Bx-by}{h(x^2+xy+y^2)} = \frac{B+b+\sqrt{Bb}}{x^2+xy+y^2}$;

więc $\displaystyle V = \frac{1}{3}h(B+b+\sqrt{Bb}).$

Znając objętość pnia piramidy trójkątnej, o podstawach równoległych, można łatwo otrzymać wyrażenie objętości pnia piramidy wielokątnej, o podstawach równoległych, rozkładając go na pnie trójkątne. Jakoż, oznaczając przez V, B, b, h, objętość, obie podstawy i wysokość tego pnia, przez B$'$, B$''$, B$'''$,... podstawy niższe, przez b', b'', b''',... odpowiedające podstawy wyższe pni piramid trójkątnych, mamy, ograniczając się na trzech pniach trójkątnych,

$$V = \frac{1}{3}h\left(B'+b'+\sqrt{B'b'}\right) + \frac{1}{3}h\left(B''+b''+\sqrt{B''b''}\right) + \frac{1}{3}h\left(B'''+b'''+\sqrt{B'''b'''}\right),$$

albo $$V = \frac{1}{3}h\left(B+b+\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}\right).$$

(*) Zobacz naszą Arytmetykę, rozdział Stosunki.

Owoż, wiemy że trójkąty B′, B″, B‴,... i b', b'', b''',... są odpowiednio podobne i podobnie ustawione (III, 12); co daje

$$\frac{B'}{b'}=\frac{B''}{b''}=\frac{B'''}{b'''}=\frac{B}{b}$$

Ztąd wynika

$$\frac{\sqrt{B'b'}}{b'}=\frac{\sqrt{B''b''}}{b''}=\frac{\sqrt{B'''b'''}}{b'''}=\frac{\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}}{b}=\frac{\sqrt{Bb}}{b};$$

więc
$$\sqrt{B'b'}+\sqrt{B''b''}+\sqrt{B'''b'''}=\sqrt{Bb}.$$

Podstawiając tę wartość, znajdujemy wiadomy wynik

$$V=\frac{1}{3}h\left(B+b+\sqrt{B.b}\right).$$

Można zogólnić znaczenie wyrazu *pień* piramidy o podstawach równoległych, uważając za pień drugiego gatunku summę dwóch piramid SABCD i SA′B′C′D′, które są wierzchołkiem przeciwległe i mają podstawy równoległe. Wyrażenie objętości tego pnia znajduje się sposobem podobnym powyższemu. Jakoż, oznaczając przez h wysokość zadanego pnia piramidy, to jest odległość dwóch podstaw ABCD i A′B′C′D′, przez x i y wysokości dwóch piramid które składają ten pień,

mamy
$$V=\frac{1}{3}Bx+\frac{1}{3}by.$$

Owoż,
$$\frac{B}{x^2}=\frac{b}{y^2}=\frac{\sqrt{Bb}}{xy}=\frac{Bx+By}{x^3+y^3}=\frac{3V}{h(x^2-xy+y^2)};$$

ale te stosunki dają jeszcze

$$\frac{B}{x^2}=\frac{B-\sqrt{Bb}+b}{x^2-xy+y^2};$$

więc
$$\frac{3V}{h(x^2-xy+y^2)}=\frac{B-\sqrt{Bb}+b}{x^2-xy+y^2},$$

ztąd $V=\frac{1}{3}h\left(B-\sqrt{Bh}+b\right)$, i także $V=\frac{1}{3}Bh\left(1-\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}\right)$.

Dwie ostatnie formuły różnią się od poprzedzających tylko znakami średniej proporcyonalnej dwóch podstaw, i znakiem boku a.

To zogólnienie pnia piramidy tłumaczy dlaczego następujące zagadnienie ma dwa rozwiązania.

Zagadnienie. — *Mając dane: objętość* V, *wysokość* h, *i bok* A *podstawy niższej pnia piramidy o podstawach równoległych, znaleźć odpowiedny bok podstawy wyższej.*

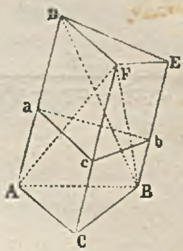
Nazywając x bok szukany, i kładąc x zamiast a, w formule objętości pnia piramidy, będzie.

$$\frac{1}{3}\mathrm{B}.h\left(1+\frac{x}{\mathrm{A}}+\frac{x^2}{\mathrm{A}^2}\right)=\mathrm{V} \quad \text{albo} \quad \frac{x^2}{\mathrm{A}^2}+\frac{x}{\mathrm{A}}+1-\frac{3\mathrm{V}}{\mathrm{B}.h}=0.$$

Równanie pokazuje że, gdy $\mathrm{V} > \frac{1}{3}\mathrm{B}h$, pień pierwszego gatunku i pień drugiego rozwiązują zagadnienie; gdy ilość V jest zawarta między $\frac{1}{4}\mathrm{B}h$ i $\frac{1}{3}\mathrm{B}h$, dwa pnie drugiego gatunku są dwoma rozwiązaniami, które się przywodzą do jednego jeśli $\mathrm{V}=\frac{1}{4}\mathrm{B}h$, albo $\mathrm{V}=\frac{1}{3}\mathrm{B}h$; nakoniec, jeśli $\mathrm{V}<\frac{1}{4}\mathrm{B}h$ zagadnienie jest niemożebne.

Twierdzenie XX.

Pień graniastonu trójkątnego jest równowarty summie trzech piramid mających jedną z jego podstaw za spólną podstawę i wierzchołki drugiej podstawy za wierzchołki.



Niech będzie ABCDEF pień graniastonu trójkątnego. Przez wierzchołki A, B, F, poprowadźmy płaszczyznę; otrzymamy piramidę FABC która ma podstawę ABC danego pnia za podstawę, i wierzchołek F podstawy przeciwległej za wierzchołek. Jeśli potem poprowadzimy płaszczyznę BDF, rozłożymy piramidę czworokątną FABED na dwie piramidy trójkątne FABD i FBDE. Owoż, piramida FABD jest równowarta piramidzie CABD, bo mają obie tę samą podstawę ABD, i równe wysokości dlatego że ich wierzchołki F i C leżą na krawędzi FC równoległej do AD a temsamem równoległej do podstawy ABD. Ale piramida CABD może być uważana jako mająca podstawę ABC pnia graniastonu za podstawę, i wierzchołek D podstawy przeciwległej za wierzchołek. Tak samo, piramida FBDE jest równowarta piramidzie CABE, bo mają podstawy BDE, ABE równowarte, a ich wierzchołki F, C leżą na krawędzi FC równoległej do płaszczyzny tych podstaw; ostatnia zaś piramida CABD może być uważana jako mająca podstawę ABC i wierzchołek E.

Więc pień graniastonu trójkątnego ABCDEF jest równowarty summie trzech piramid FABC, DABC, EABC które mają jego podstawę ABC za spólną podstawę i wierzchołki D, E, F drugiej podstawy za wierzchołki.

Wniosem. — Jeśli nazwiemy B, h, h', h'', liczby które mierzą odpowiednio podstawę niższą ABC pnia graniastonu trójkątnego, i wysokości wierzchołków D, E, F podstawy wyższej nad płaszczyzną podstawy niższej, objętość tego pnia wyrazi się przez

$$V = B\left(\frac{h + h' + h''}{3}\right).$$

II. — *Pień graniastonu trójkątnego ma za miarę wieloczyn z przecięcia prostego przez średnią arytmetyczną krawędzi bocznych.*

Niech będzie abc (fig. powyższa) przecięcie proste graniastonu trójkątnego ABCDEF. Na mocy poprzedzającego wniosku

objętość graniastonu ściętego abcDEF jest $abc\left(\frac{aD + bE + cF}{3}\right)$,

objętość graniastonu ściętego abcABC jest $abc\left(\frac{aA + bB + cC}{3}\right)$;

ztąd, dodając, wynika

$$\text{Objętość ABCDEF} = abc\left(\frac{AD + BE + CE}{3}\right).$$

III. — Można jeszcze mieć inne wyrażenie objętości pnia graniastonu trójkątnego. Jakoż, nazwiejmy G i G' środki ciężkości podstaw ABC i A'B'C'; te dwa środki jako też środki ciężkości wszystkich przecięć bocznych graniastonu ściętego, leżą na jednej linii prostej równoległej do krawędzi bocznych; bo leżą na płaszczyznach ośrodkowych BDD'B' i AEE'A', a więc na ich przecięciu GG' które jest równoległe do AA'. Owoż, jeśli przez punkt D' poprowadzimy, równoległe do ośrodkowej DB, prostę D'K która spotka GG' w punkcie H; dwa trójkąty podobne D'G'H i D'B'K dadzą

$$\frac{HG'}{KB'}=\frac{D'G'}{D'B'}=\frac{1}{3}; \quad \text{zkąd} \quad 3HG'=KB'.$$

Ale $$3GH = BK + 2DD' = BK + AA' + CC';$$

więc $$3GH + 3HG' \quad \text{czyli} \quad 3GG' = AA' + BB' + CC'.$$

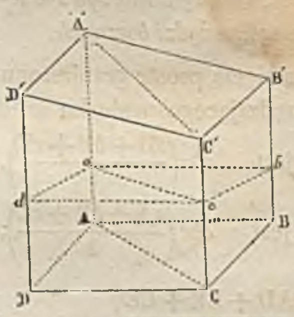
Ztąd wnosimy że

$$\text{objętość } ABCA'B'C' = abc \,.\, GG'.$$

Wysłowia się ten znakomity wynik mówiąc: *objętość pnia graniastonu trójkątnego równa się wieloczynowi z przecięcia prostego przez odległość środków ciężkości dwóch podstaw.*

Twierdzenie XXI.

Objętość pnia równoległościanu ma za miarę wieloczyn z przecięcia prostego przez średnią arytmetyczną krawędzi bocznych.



Niech będzie ABCDA'B'C'D' pień równoległościanu, i *abcd* jego przecięcie proste. Jeśli poprowadzimy płaszczyznę przekątną ACC'A', rozłożymy ten pień na dwa pnie graniastonne ABCA'B'C' i ACDA'C'D', których objętości, na mocy wniosku II poprzedzającego twierdzenia, wyrażą się przez

$$abc\left(\frac{AA'+BB'+CC'}{3}\right) \quad \text{i} \quad acd\left(\frac{AA'+CC'+DD'}{3}\right).$$

Ale trójkąty *abc* i *acd* są równe jako połowy równoległoboku *abcd*; zatem, dodając dwa powyższe wyrażenia objętości, znajdujemy że miara pnia ABCDA'B'C'D' równoległościanu równa się

$$\frac{1}{2}abcd\left(\frac{2AA'+2CC'+BB'+DD'}{3}\right).$$

Gdybyśmy poprowadzili płaszczyznę przekątną DBB'D', znaleźlibyśmy podobnie że miarą tego samego pnia jest

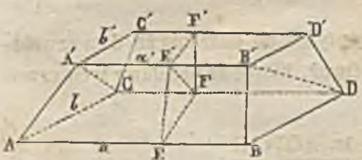
$$\frac{1}{2}abcd\left(\frac{AA'+CC'+2BB'+2DD'}{3}\right).$$

Ztąd wnosimy że objętość pnia ABCDA'B'C'D' równoległościanu ma za miarę połowę summy dwóch znalezionych wyrażeń, to jest, jakośmy zwiastowali,

$$\text{objętość }(ABCDA'B'C'D') = abcd\left(\frac{AA' + BB' + CC' + DD'}{4}\right).$$

Uwaga ogólna. — Aby wyrachować objętość jakiegokolwiek wielościanu, dość jest rozłożyć go na piramidy, albo na części którychby umiano wyrachować objętość; po czem, obliczyć objętość każdej części i dodać liczby tak otrzymane, ich summa będzie miarą objętości uważanego wielościanu.

Zastosowanie. — Na bitych gościńcach wzdłuż rowów, leżą zwykle kupy tłuczonych kamieni; te kupy, mające dwa prostokąty równoległe za podstawy i trapezy równoramienne za ściany, są pniami graniastonnemi czworobocznemi. *Mając dane rozmiary* a *i* b, a' *i* b' *dwóch podstaw i wysokość* h *tak określonej kupy, wyrachować jej objętość.*



Niech będzie ABCDA'B'C'D taka kupa kamieni. Płasczyzna poprowadzona przez krawędzie równoległe A'B' i CD rozkłada ją na dwa pnie graniastonów trójkątnych AA'CBB'D i A'C'CB'D'D. Pierwszy ma za miarę wieloczyn ze swego przecięcia prostego EFE' przez średnią arytmetyczną krawędzi bocznych AB, CD, A'B'. Owoż, powierzchnia trójkąta EFE' ma za miarę $\frac{1}{2}bh$; więc objętość pnia graniastonnego AA'CBB'D wyraża się przez $\frac{1}{6}bh(2a + a')$. Dowiedzie się podobnie że miara pnia graniastonnego A'C'CB'D'D jest $\frac{1}{6}b'h(2a' + a)$. Więc objętość kupy kamieni ma za miarę

$$\frac{1}{6}bh(2a + a') + \frac{1}{6}b'h(2a' + a).$$

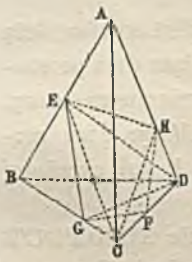
Przypuszczając $a = 2^m$, $b = 0^m,80$; $a' = 0^m,90$, $b' = 0^m,45$; $h = 0^m,60$; będzie

$$V = \frac{0,60}{6}(2 \times 0,80 + 0,90 \times 0,40)1^{ms} = 0^{ms},2005.$$

To czyni 200 decymetrów sześciennych i pół.

Twierdzenie XXII.

Wszelka płaszczyzna EGFH *przechodząca przez środki* E,F *dwóch krawędzi przeciwległych czworościanu dzieli go na dwie części równowarte.*



Wielościan EGFHAC składa się z piramidy czworokątnej CEGFH i czworościanu CAEH. Tak samo wielościan EGFHBD składa się z piramidy czworokątnej DEGFH i czworościanu DBEG.

Te dwie piramidy czworokątne, mające spólną podstawę EGFH, i wierzchołki C, D równo oddalone od tej podstawy ponieważ FC = FD z założenia, są równowarte.

Pozostaje więc tylko do okazania że dwa czworościany CAEH i DBEG są równowarte. Owoż, biorąc za podstawy tych czworościanów trójkąty AEC, BEG, mamy

$$\frac{\text{czwor. HAEC}}{\text{czwor. DBEG}} = \frac{\text{tr. AEC}}{\text{tr. BEG}} \cdot \frac{\text{AH}}{\text{AD}};$$

ale dwa trójkąty AEC, BEG, których podstawy AE, BE są równe z założenia, mają się jako ich wysokości albo jako BC do BG;

więc $$\frac{\text{czwor. HAEC}}{\text{czwor. DBEG}} = \frac{\text{BC}}{\text{BG}} \cdot \frac{\text{AH}}{\text{AD}}$$

Uważajmy teraz że, w czworoboku skośnym ABCD, płaszczyzna poprzeczna EGFH daje $\frac{\text{EA}}{\text{EB}} \cdot \frac{\text{GB}}{\text{GC}} \cdot \frac{\text{FC}}{\text{FD}} \cdot \frac{\text{HD}}{\text{HA}} = 1$ (VI, 37);

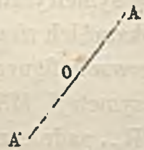
ten wieloczyn, z przyczyny $\frac{\text{EA}}{\text{EB}} = 1 = \frac{\text{FD}}{\text{FC}}$, przywodzi się do $\frac{\text{GB}}{\text{GC}} \cdot \frac{\text{HD}}{\text{HA}} = 1$,

albo do $\frac{\text{GB}}{\text{GC}} = \frac{\text{HA}}{\text{HD}}$; ztąd wynika $\frac{\text{BC}}{\text{BG}} = \frac{\text{AD}}{\text{AH}}$ albo $\frac{\text{BC}}{\text{BG}} \cdot \frac{\text{AH}}{\text{AD}} = 1$.

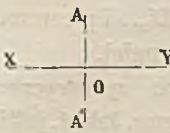
Więc $$\frac{\text{czwor. HAEC}}{\text{czwor. DBEG}} = 1.$$

Co było do dowodzenia.

SYMETRYA.

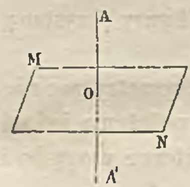


Określenie X. — Dwa punkta A, A' są *symetryczne względem trzeciego* O, zwanego środkiem symetryi, gdy ten punkt jest we środku prostej AA' która je łączy.



Dwa punkta A, A' są *symetryczne wsględem linii prostej* XY, zwanej osią symetryi, gdy ta oś jest prostopadła we środku prostej AA' która je łączy.

Dwa punkta A, A' są *symetryczne względem płaszczyzny* MN, zwanej płaszczyzną symetryi, gdy ta płaszczyzna jest prostopadła we środku prostej AA' która je łączy.

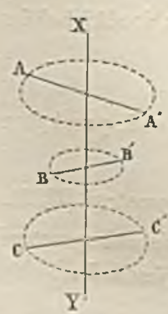


Dwie figury są symetryczne względem punktu, osi, płaszczyzny, gdy każdy punkt pierwszej ma swój symetryczny w drugiej.

Przedmiot i jego obraz odbity we źwierciadle płaskiem mogą służyć za przykład dwóch figur symetrycznych.

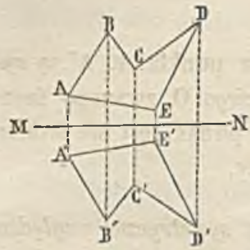
Twierdzenie XXIII.

Dwie figury symetryczne względem osi są równe.

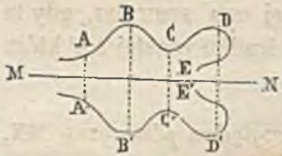


Niech będą A, B, C..., punkta pierwszej figury, i A', B', C'... ich symetryczne w drugiej, względem osi XY.

Poprowadźmy linie proste AA', BB'...; wedle określenia, oś XY jest prostopadła we środku każdej z tych linij. Jeśli przeto obrócimy około osi jedną z dwóch figur, wszystkie jej punkta opiszą łuki podobne; zatem, gdy punkt A, opisując pół okręgu, padnie na swój symetryczny A', wszystkie inne punkta pierwszej figury padną na symetryczne drugiej. Więc te dwie figury są równe.



Jeśli dwie figury płaskie, jako ABCDE i A'B'C'D'E', są symetryczne względem osi MN, aby okazać ich równość, dość jest dać pierwszej figurze pół obrotu około osi symetryi MN; wtedy, każdy punkt A, B,.. padnie na swój symetryczny A', B',.. i pierwsza figura przystanie do drugiej.



Dwie figury płaskie symetryczne względem punktu są równe. Jakoż, jeśli damy jednej z nich pół obrotu około środka symetryi, wszystkie jej punkta padną na odpowiedne punkta drugiej, i te dwie figury przystaną do siebie.

Ztąd wynika że na płaszczyznie dwie figury są symetryczne nie same przez się, ze swojego kształtu, ale tylko z położenia jednej względem drugiej; tak że każde dwie figury równe mogą być ustawione symetrycznie.

Figura złożona z dwóch części symetrycznych względem osi nazywa się *symetryczną*.

I tak, *trójkąt równoramienny* jest *symetryczny* względem swojej wysokości która jest *osią symetryi*. Zatem *trójkąt równoboczny* ma *trzy* osie symetryi.

Trapez równoramienny jest *symetryczny* względem linii która łączy środki podstaw.

W *prostokącie* osiami symetryi są linie łączące środki boków przeciwległych.

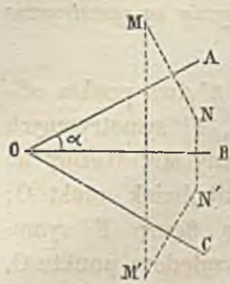
W *ukośniku* obie przekątne są osiami symetryi.

Kwadrat ma *cztery* osie symetryi, któremi są obie przekątne i linie łączące środki boków przeciwległych.

Twierdzenie. — W *kole każda średnica jest osią symetryi* (II, 4).

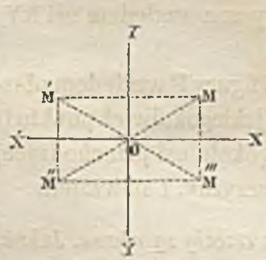
Twierdzenie. — *Gdy figura płaska posiada dwie osie symetryi* OA *i* OB *czyniące kąt* α *niespółmierny z* π, *ta figura jest kołem.*

Niech będą dwa punkta M i N symetryczne względem osi OA; weźmy ich symetryczne M′ i N′ względem osi OB. Jeśli zegniemy całą figurę według OB, punkta M i N padną na M′ i N′, i oś OA weźmie położenie OC które będzie osią symetryi dwóch punktów jakichkolwiek M′, N′ figury. To dowodzi że obracając oś OB pod kątem α około punktu O, otrzymuje się trzecią oś symetryi OC; następujący obrót pod kątem α dałby czwartą oś, i t. d. Owoż, α i π są niespółmierne; niema więc liczb całkowitych n i k któreby zadość czyniły równaniu $n\alpha = 2k\pi$, i żadne położenie osi OB nie może padać na oś już otrzymaną. Ztąd wnosimy że uważana figura płaska, mając nieskończoną liczbę osi przechodzących przez jeden punkt, jest kołem.



To twierdzenie jest wzajemnicą ostatniego.

Twierdzenie. — *Jeśli figura płaska ma dwie osie prostokątne* XX′ *i* YY′, *punkt przecięcia* O *tych osi jest środkiem figury.*

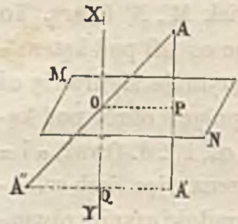


Jakoż, punkt M tej figury ma symetryczny M′ względem osi YY′, a punkt M′ ma symetryczny M″ względem osi XX′. Więc OM = OM′ = OM″, i MM″ jest średnicą koła opisanego na trójkącie prostokątnym MM′M″. To dowodzi że każdy punkt M danej figury ma swój symetryczny względem punktu O. Więc punkt O jest środkiem figury.

Graniaston foremny i równoległościan prosty są symetryczne względem linii łączącej środki ich podstaw. *Równoległościan prostokątny* ma *trzy* osie symetryi, któremi są linie łączące środki ścian przeciwległych. A jeśli podstawy równoległościanu prostokątnego są kwadratami, wtedy ten równoległościan ma jeszcze dwie inne osie symetryi przechodzące przez środki krawędzi bocznych przeciwległych. Zatem *sześcian* ma *dziewięć osi* symetryi.

Twierdzenie XXIV.

Dwie figury symetryczne względem płaszczyzny są symetryczne względem punktu.

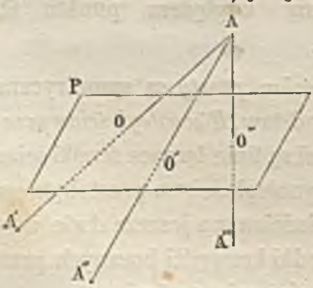


Niech będą A i A' dwa punkta odpowiedne figur F, F' symetrycznych względem płaszczyzny MN. Weźmy na tej płaszczyznie jakikolwiek punkt O; wyobraźmy trzecią figurę F'' symetryczną figury F względem punktu O, i niech będą A'' i A dwa punkta odpowiedne tych dwóch figur. Połączmy A'A'', i przez punkt O poprowadźmy oś XY prostopadłą do płaszczyzny MN.

W trójkącie AA'A'', prosta OP, łącząca środki dwóch boków, jest równoległa do trzeciego boku A'A'' i równa jego połowie. Owoż, oś XY, prostopadła do płaszczyzny MN a temsamem do prostej OP, jest równoległa do boku AA' i przechodzi przez środek boku AA''; więc ta oś jest prostopadła do boku A'A'' i przechodzi przez jego środek. A zatem punkta A' i A'' są symetryczne względem osi XY, i figury F', F'' są równe.

Ztąd wnosimy że figura F', symetryczna figury F względem płaszczyzny, staje się jej symetryczną względem jakiegokolwiek punktu O tej płaszczyzny, zrobiwszy tylko półobrotu około osi przechodzącej przez ten punkt i prostopadłej do tej płaszczyzny. I nawzajem.

Wniosek.—*Dwie figury symetryczne z trzecią są równe.* Jakoż,



niech będą dwie figury A' i A'' symetryczne z figurą A względem środków O i O'. Przez te dwa środki poprowadźmy jakąkolwiek płaszczyznę P, i weźmy figurę A''' symetryczną figury A, względem płaszczyzny P. Na mocy powyższego twierdzenia, figury A' i A'', są równe każda figurze A'''; więc figury A' i A'', obie symetryczne z figurą A, są równe. To znaczy innemi słowy że *wszelka figura ma tylko jedną symetryczną.*

To co poprzedza jasno dowodzi że jedna tylko jest symetrya figur, względem punktu albo względem płaszczyzny, co to samo, zależąca od kształtu układu części tych figur, nie zaś od położenia jednej względem drugiej, ani od położenia środka symetryi albo płaszczyzny symetryi. I tak, dwie ręce, dwie rękawiczki są symetryczne same przez się, nie z położenia względem siebie. Jeśli przewrócimy rękawiczkę prawej ręki, wtedy można ją wdziać na lewą. Co pokazuje jakby trzeba przewrócić jedną z dwóch figur symetrycznych żeby przystała do drugiej. Dla tych przyczyn nazywać będziemy dwie takie figury poprostu *symetrycznemi*, nie wyrażając ani punktu ani płaszczyzny symetryi.

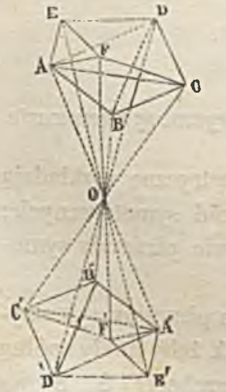
Figura, złożona z dwóch części symetrycznych względem spólnej płaszczyzny nazywa się SYMETRYCZNĄ. Taką jest naprzykład postać ciała ludzkiego, pięknych świątyń, gmachów, etc.

Graniaston prosty, a temsamem równoległościan prosty, jest symetryczny względem płaszczyzny prostopadłej do krawędzi bocznych i przechadzącej przez ich środki. *Równoległościan prosty*, którego podstawa *jest ukośnikiem,* ma nadto jeszcze dwie inne płaszczyzny symetryi które przechodzą przez krawędzie boczne przeciwległe.

Sześcian ma *dziewięć płaszczyzn* symetryi.

Twierdzenie XXV.

Dwa wielościany symetryczne mają ściany odpowiedne równe, kąty dwójścienne odpowiedne równe, i kąty wielościenne odpowiedne symetryczne.



Niech będą A, B, C,... i A', B', C',... wierzchołki odpowiedne wielościanów symetrycznych względem jakiegokolwiek środka O.

Z równości trójkątów ABO i A'B'O', ACO i A'C'O',.. wynika że: dwie *proste symetryczne*, (to jest dwie proste które łączą dwa punkta symetryczne), jako dwie krawędzie symetryczne AB, A'B', dwie przekątne symetryczne

AC, A'C',... są *równe i równoległe*. Zatem dwie ściany odpowiedne ABCF, A'B'C'F',... mając boki odpowiedne równe i kąty między niemi zawarte równe, są *równe* i *symetryczne*. Płaszczyzny tych ścian są równoległe i równo od środka symetryi oddalone.

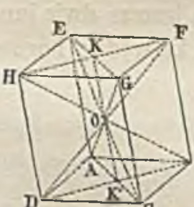
Aby pokazać że kąty dwójścienne odpowiedne AB, A'B' są równe, i kąty wielościenne A i A' symetryczne, dość wziąć za środek symetryi wierzchołek A, to jest przypuścić AO = *o*; wtedy przy punkcie A będą dwa kąty wielościenne A i A' wierzchołkiem przeciwległe; to dowodem że kąty dwójścienne odpowiedne są równe, i kąty wielościenne odpowiedne są symetryczne.

Wniosek. — Wynika z tego twierdzenia że

Dwa wielościany złożone z tej samej liczby piramid symetrycznych i w porządku odwrotnym ustawionych są symetryczne.

I nawzajem, *dwa wielościany symetryczne rozkładają się na tę samą liczbę piramid symetrycznych i w porządku odwrotnym ustawionych.*

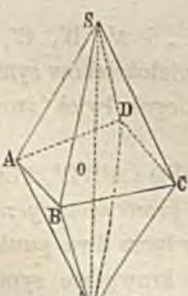
Wniosek. — *Płaszczyzna, przechodząca przez dwie krawędzie przeciwne równoległościanu, dzieli go na dwa graniastony trójkątne symetryczne.*



Jakoż, dwa graniastony trójkątne ABCEFG, ACDEGH, mające wierzchołki symetryczne względem środka O równoległościanu, są symetryczne.

TWIERDZENIE XXVI.

Dwa wielościany symetryczne są równowarte.



Dwa wielościany symetryczne rozkładają się na równą liczbę piramid symetrycznych; dość więc okazać że dwie piramidy symetryczne są równowarte.

Niech będą tedy dwie piramidy symetryczne, które ustawiamy tak żeby miały spólną podstawę ABCD, a wierzchołki S, S' po bydwóch stronach płaszczyzny tej podstawy. Ponieważ wierzchołki S, S′ są dwoma punktami symetrycznemi względem płaszczyzny ABC, wysokości SO, S′O tych piramid są równe. Więc dwie piramidy symetryczne są równowarte.

PODOBIEŃSTWO WIELOŚCIANÓW.

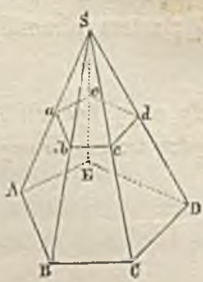
Określenie XI. — *Dwa wielościany nazywają się* PODOBNEMI *gdy mają ściany podobne zawierające kąty wielościenne równe.*

Ściany podobne, kąty dwójścienne albo wielościenne, krawędzie, wierzchołki,.. które mają *odpowiedające położenia* w dwóch wielościanach podobnych, nazywają się *odpowiednemi.*

Istnienia wielościanów podobnych dowodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie XXVII.

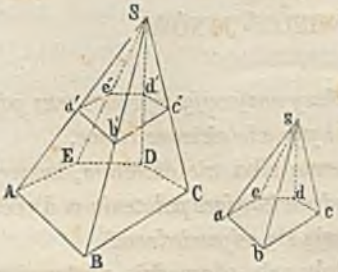
Płaszczyzna sieczna równoległa do podstawy piramidy wyznacza drugą piramidę podobną pierwszej.



Niech będzie piramida SABCDE. Płaszczyzna sieczna równoległa do podstawy, dająca przecięcie *abcde,* wyznacza piramidę S*abcde* podobną piramidzie SABCDE. Jakoż, przecięcie *abcde* jest wielokątem podobnym podstawie (6), a ściany boczne S*ab* i SAB, S*bc* i SBC..., są oczywiście trójkątami podobnemi. Zatem kąty wielościenne odpowiedne, jako A i *a* ,... są równe; bo mają kąty płaskie równe i kąty dwójścienne równe każdy każdemu, i podobnie ułożone. Więc piramidy S*abcde,* SABCDE, mające ściany podobne i kąty wielościenne między niemi zawarte równe, są podobne.

Twierdzenie XXVIII.

Dwie piramidy są podobne gdy mają kąt dwójścienny równy zawarty *między podstawą i ścianą podobną każda każdej, i podobnie ułożoną.*



Niech będą dwie piramidy SABCDE i *sabcde*, mające kąty dwójścienne AB i *ab* równe, podstawy ABCDE i *abcde* podobne, i ściany ABS, *abs* podobne.

Na krawędzi SA weźmy długość $Sa' = sa$, i przez punkt a' poprowadźmy płaszczyznę $a'b'c'$ równoległą do podstawy ABCDE. Piramidy $Sa'b'c'd'e'$, SABCDE są podobne.

Ztąd wynika że ściana $Sa'b'$, podobna ścianie SAB, jest podobna ścianie *sab*, i jest jej równa ponieważ bok $Sa' = sa$; następnie, podstawa $a'b'c'd'e'$, podobna podstawie ABCDE, jest równa podstawie *abcde*; i kąt dwójścienny $a'b'$, równy dwójściennemu AB, jest równy kątowi dwójściennemu *ab*. Więc dwie piramidy S*abcde*, $Sa'b'c'd'e'$ są równe (7); zatem piramidy SABCDE i S*abcde* są podobne.

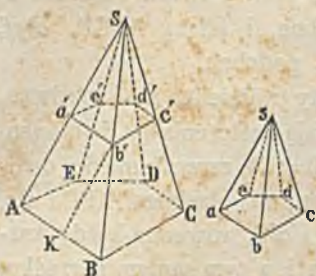
Wniosek. — *Dwie piramidy są podobne gdy mają kąt wielościenny przy wierzchołku równy, zawarty między trzema krawędziami odpowiednemi proporcyonalnemi.*

Twierdzenie XXIX.

Dwie piramidy są podobne gdy mają podstawę podobną przyległą *trzem kątom dwójściennym równym każdy każdemu, i w tym samym porządku.*

Niech będą dwie piramidy SABCDE, *sabcde*, mające podstawy podobne ABCDE, *abcde*, i dwójściany $AB = ab$, $CD = cd$, $DE = de$.

Na krawędzi AB, weźmy długość AK $=$ *ab*; poprowadźmy



przez punkt K prostę K*b'* równoległą do krawędzi AS, aż do spotkania *b'* z krawędzią BS, i przez punkt *b'* poprowadźmy płaszczyznę równoległą do podstawy ABCDE.

Piramidy SABCDE i S*a'b'c'd'e'* są podobne; zatem podstawy *abcde*, ABCDE, *a'b'c'd'e'* są podobne. Ztąd wynika że podstawy *abcde*, *a'b'c'd'e'* są równe, ponieważ bok *ab* $=$ AK $=$ *a'b'*. Nadto, dwójścian *ab* $=$ AB $=$ *a'b'*, dwójścian *cd* $=$ CD $=$ *c'd'*, i dwójścian *de* $=$ DE $=$ *d'e'*. Więc piramidy *sabcde* i S*a'b'c'd'e'*, mające podstawę równą przyległą trzem kątom dwójściennym równym każdy każdemu i wtym samym porządku, są równe. Więc dwie piramidy SABCDE i *sabcde* są podobne.

Twierdzenie XXX.

Dwie piramidy równokątne między sobą są podobne.

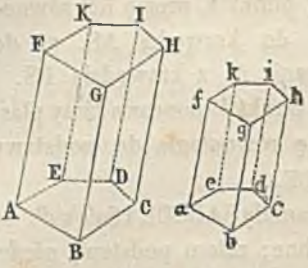
Niech będą dwie piramidy SABCDE i *sabcde* równokątne między sobą (fig. powyższa).

Na krawędzi SA weźmy długość S*a'* $=$ *sa*, i przez punkt *a'* poprowadźmy płaszczyznę równoległą do podstawy ABCDE; piramida S*a'b'c'd'e'* będzie równokątna z piramidą SABCDE, i temsamem równokątna z piramidą *sabcde*. Ztąd wynika że piramidy *sabcde* i S*a'b'c'd'e'*, równokątne między sobą i mające dwie krawędzie odpowiednie równe S*a* i S*a'*, są równe (9); więc piramidy SABCDE i S*abcde* równokątne między sobą są podobne.

Twierdzenie XXXI.

Dwa *graniastony są podobne gdy mają kąt dwójścienny równy* ZAWARTY *między podstawą i ścianą podobną każda każdej i podobnie ułożoną.*

Niech będą dwa graniastony ABCDEF, *abcdef*, w których kąty dwójścienne AB i *ab*, są równe, podstawy ABCDE i *abcde* są podobne, i ściany ABGF, *abgf*, także podobne.



Kąty trójścienne B i *b* są równe, bo mają z założenia kąt dwójścienny AB = *ab*, zawarty między dwoma kątami płaskiemi ABC i *abc*, ABG i *abg*, równemi każdy każdemu i w tym samym porządku. Zatem kąt dwójścienny BC = *bc*, kąt dwójścienny BG = *bg*, i kąt płaski CGB= *cbg*.

Nadto $$\frac{BG}{bg} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$

Więc dwa równoległoboki BCGH, *bcgh* są podobne (III, 16 wn.) Ztąd wynika że kąty trójścienne C, *c* są równe, a następnie dwa równoległoboki CDIH, *cdih* są podobne; i tak dalej. Owoż, kąty dwójścienne FG i *fg*, etc. są równe jako spełnienia kątów równych. Więc dwa graniastony zadane są podobne.

Wniosek I. — Dwa graniastony *prostę* są podobne, gdy mają podstawę i ścianę podobną każda każdej i podobnie ułożone.

II. — Dwa równoległościany są podobne, gdy mają kąt wielościenny równy zawarty między trzema krawędziami proporcyonalnemi i w tym samym porządku.

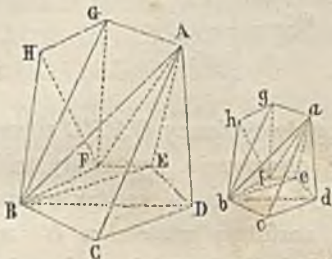
Zatem, dwa równoległościany *prostokątne* są podobne, gdy mają trzy krawędzie przyległe proporcyonalne.

Wszystkie sześciany są podobne.

Uwaga. — Widzimy łatwo że podobieństwo dwóch graniastonów i podobieństwo dwóch piramid, których podstawy mają n boków, wymaga $2n - 1$ warunków, to jest jednego mniej niż równość.

Twierdzenie XXXII.

Dwa wielościany złożone z równej liczby piramid trókątnych, czyli czworościanów, podobnych i podobnie ustawionych są podobne. I nawzajem.

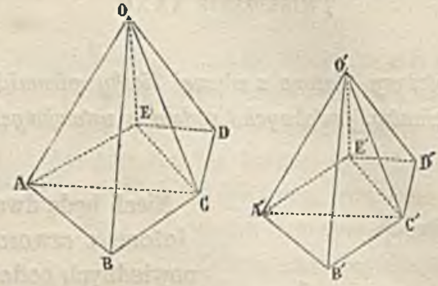


Niech będą dwa wielościany łożone z czworościanów odpowiednych podobnych ABCD i *abcd*, ABDE i *abde*, ABEF i *abef*, etc. Uważajmy przede wszystkiem że, jeśli ściany przyległe BCD i BDE, dwóch czworościanów ABDC i ABDE, znajdują się na jednej płasczyznie, ściany odpowiedne *bcd* i *bde* leżą także na jednej płasczyznie; bo kąty dwójścienne *abdc* i *abde* są spełniające, jako równe dwom kątom dwójściennym spełniającym ABDCi ABDE. Zatem, w tych dwóch wielościanach, 1° ściany odpowiedne ABC i *abc*, BCD i *bcd*, etc są podobne i podobnie ustawione, bądź jako ściany odpowiedne czworościanów podo-dobnych, bądź też jako złożone z równej liczby trójkątów podobnych i podobnie ustawionych. 2° Kąty wielościenne, jako C i *c*, D i *d*, E i *e*.., zawarte między ścianami podobnemi są równe, bądź jako kąty odpowiedne czworościanów podobnych, bądź też jako złożone z równej liczby kątów trójściennych równych każdy każdemu i podobnie ustawionych. Więc dwa zadane wielościany są podobne.

Nawzajem, *dwa wielościany podobne rozkładają się na równą liczbę piramid trójkątnych, czyli czworościanów, podobnych każda każdej i podobnie ustawionych.*

1° Jeśli dwa dane wielościany podobne W i W′ są *wypukłe*, można zawsze rozłożyć wielościan W na czworościany, dając im jakikolwiek punkt wewnętrzny O za spólny wierzchołek. Niech będzie OABC jeden z tych czworościanów; przez krawędź A′B′

wielościanu W′ odpowiedną AB poprowadźmy płasczyznę A′B′O′



tak żeby czyniła ze ścianą A′B′C′ kąt dwójścienny O′A′B′C′ równy dwójściennemu OABC, i na tej płasczyznie wystawmy trójkąt A′B′O′ podobny trójkątowi ABO ; po czem, biorąc tak wyznaczony punkt O′ za wierzchołek, rozłóżmy wielościan W′ na czworościany O′A′B′C′, O′A′C′E′,... które będą podobne odpowiedającym czworościanom OABC, OACE,... pierwszego wielościanu W.

Jakoż, uważajmy dwa czworościany odpowiedne OACE i O′A′C′E′ przyległe czworościanom podobnym OABC i O′A′B′C′. Ściany OAC, O′A′C′ są podobne, jako ściany odpowiedne dwóch czworościanów podobnych OABC, O′A′B′C′ ; a zaś ściany ACE, A′C′E′ są podobne, jako trójkąty odpowiedne które składają ściany podobne dwóch wielościanów. Teraz, jeśli trójkąty ACB, ACE są na jednej płasczyznie, dwa kąty dwójścienne OACE i O′A′C′E′ są równe, jako spełnienia kątów dwójściennych równych OACB i O′A′C′B′ ; a jeśli trójkąty ACB, ACE nie leżą na jednej płasczyznie, wtedy, ponieważ kąty dwójścienne BACE i B′A′C′E′ są równe jako kąty odpowiedne wielościanów podobnych, i kąty dwójścienne OACB, O′A′C′B′ także równe jako kąty odpowiedne czworościanów podobnych OABC, O′A′B′C′, różnice tych kątów, to jest kąty dwójścienne OACE, O′A′C′E′, są równe. Więc dwa czworościany OACE, O′A′C′E′ są podobne.

Rozumując tak samo, dowiedzie się następnie podobieństwa wszystkich innych czworościanów odpowiednych.

2° Jeśli dwa wielościany podobne nie są wypukłe, byle tylko ich kąty wielościenne nie przebijały ścian, można zawsze, płasczyznami przyzwoicie prowadzonemi, rozłożyć te wielościany na wielościany wypukłe, a te ostatnie na czworościany podobne i podobnie ustawione.

Uwaga. — Dwa punkta O i O′ nazywają się *odpowiednemi*, względem dwóch wielościanów podobnych, jeśli, łącząc każdy z nich ze trzema wierzchołkami po sobie idącemi jako A, B, C i A′, B′, C′, otrzymuje się dwa czworościany OABC i O′A′B′C′ podobne i podobnie ustawione.

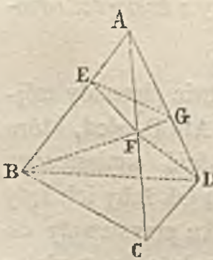
Dwie linie proste, które łączą punkta odpowiedne dwóch wielościanów podobnych, nazywają się *odpowiednemi*, jako *np* dwie przekątne łączące wierzchołki odpowiedne.

W dwóch wielościanach podobnych, stosunek dwóch linij odpowiednych równa się stosunkowi podobieństwa dwóch ścian odpowiednych.

Dowodzenie podobne do tego któreśmy dali w księdze IIIej *tw.* XVI.

Twierdzenie XXXIII.

Dwa czworościany, mające kąt trójścienny równy, mają się jako wieloczyny z trzech krawędzi tego kąta.



Niech będą dwa czworościany ABCD i AEFG mające kąt trójścienny A spólny. Poprowadźmy płasczyznę BDF.

Czworościany ABCD, ABDF, mające spólny wierzchołek B, mają się jako podstawy ADC, ADF, a te ostatnie są proporcyonalne do krawędzi AC, AF; zatem

$$\frac{ABCD}{ABDF} = \frac{AC}{AF}.$$

Podobnie, czworościany ABDF, AEFG, mające spólny wierzchołek F, mają się jako podstawy ABD, AEG, a te ostatnie mają się jako prostokąty AB . AD, AE . AG;

więc $$\frac{ABDF}{AEFG} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AD}{AG}.$$

Ztąd, mnożąc te równości stronami, otrzymujemy

$$\frac{ABCD}{AEFG} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AC}{AF} \cdot \frac{AD}{AG} = \frac{AB \,.\, AC \,.\, AD}{AE \,.\, AF \,.\, AG}.$$

WNIOSEKI. — *Dwa czworościany, mające kąt bryłowy symetryczny mają się jako wieloczyny ze trzech krawędzi tego kąta.*

II. — *Dwa graniastony trójkątne mające kąt trójścienny równy albo symetryczny mają się jako wieloczyny ze trzech krawędzi tego kąta.*

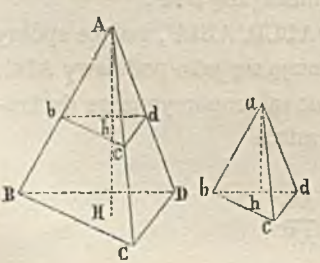
Bo każdy z dwóch graniastonów jest trzy razy większy od czworościanu wystawionego na tym kącie i jego krawędziach.

Zatem, *dwa równoległościany, mające kąt bryłowy równy albo symetryczny, mają się jako wieloczyny ze trzech krawędzi tego kąta.*

Co jest zogólnieniem twierdzenia XIII.

TWIERDZENIE XXXIV.

Dwie piramidy podobne mają się jako sześciany z krawędzi odpowiednich.



Niech będą dwie piramidy trójkątne podobne ABCD, *abcd*, które można przypuścić umieszczone jedna w drugiej tak żeby ich kąty przy wierzchołku przystawały do siebie. W tem położeniu, podstawy BCD, *bcd* dwóch piramid są równoległe, i wysokości AH, A*h* są na jednej prostej.

Teraz, ponieważ objętości piramid są proporcyonalne do wieloczynów z podstaw przez wysokość, mamy

$$\frac{Obj.\ ABCD}{Obj.\ Abcd}=\frac{BCD\,.\,AH}{bcd\,.\,Ah}=\frac{BCD}{bcd}\cdot\frac{AH}{Ah}.$$

Ale płaszczyzna bcd jest równoległa do podstawy BCD; zatem (6, wn.)

$$\frac{BCD}{bcd}=\frac{\overline{AH}^2}{\overline{Ah}^2},\quad \text{i}\quad \frac{AH}{Ah}=\frac{BC}{bc}.$$

Więc, podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$\frac{Obj.\ ABCD}{Obj.\ Abcd}=\frac{\overline{AH}^3}{\overline{Ah}^3}\quad \text{albo}\quad \frac{Obj.\ ABCD}{Obj.\ Abcd}=\frac{\overline{BC}^3}{\overline{bc}^3}.$$

Uwaga. — Powyższe dowodzenie stosuje się do piramid podobnych jakichkolwiek.

Jeśli piramidy podobne są trójkątne, można dowieśdź twierdzenia inaczej. Jakoż, dwa czworościany ABCD, $abcd$, mające kąty trójścienne A i a równe, dają (33).

$$\frac{\text{obj. }ABCD}{\text{obj. }abcd}=\frac{AB}{ab}\cdot\frac{AC}{ac}\cdot\frac{AD}{ad}.$$

Owoż, podobieństwo tych dwóch czworościanów daje

$$\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}=\frac{AD}{ad};$$

więc
$$\frac{Obj.\ ABCD}{Obj.\ abcd}=\left(\frac{AB}{ab}\right)^3=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3}.$$

Twierdzenie XXXV.

Dwa wielościany podobne mają się jako sześciany z krawędzi odpowiednych.

Wiemy że dwa wielościany podobne W i W′ mogą się rozłożyć na równą liczbę czworościanów podobnych i podobnie ustawionych. Więc, oznaczając przez C, C_1, C_2,... czworościany wielościanu W, przez C', C'_1, C''_2,... czworościany odpowiednie wielościanu W', przez a i a' dwie krawędzie odpowiedne, będzie

$$\frac{C}{C'} = \frac{a^3}{a'^3}, \quad \frac{C_1}{C'_1} = \frac{a^3}{a'^3}, \quad \frac{C_2}{C'_2} = \frac{a^3}{a'^3}, \ldots$$

Zatem
$$\frac{C}{C'} = \frac{C_1}{C'_1} = \frac{C_2}{C'_2} = \ldots = \frac{a^3}{a^3}.$$

Ztąd, na mocy wiadomego twierdzenia, wynika

$$\frac{C + C_1 + C_2 +}{C' + C'_1 + C'_2 +} = \frac{a^3}{a'^3} \quad \text{albo} \quad \frac{V}{V'} = \frac{a^3}{a'^3}.$$

Uwaga. — *Powierzchnie wielościanów podobnych są proporcyonalne do kwadratów z krawędzi odpowiednych.*

Zastosowanie. — *Wyrachować krawędzie i objętość równoległościanu prostokątnego, którego powierzchnia ma 4 metry kwadratowe, a rozmiary są proporcyonalne do liczb* 2, 3, 6.

Oznaczmy przez a, b, c trzy krawędzie przyległe tego równoległościanu; jego powierzchnia wyrazi się przez $2(ab + ac + bc) = 4$, i będzie

$$\frac{a^2}{2^2} = \frac{b^2}{3^2} = \frac{c^2}{6^2} = \frac{ab}{2.3} = \frac{ac}{2.6} = \frac{bc}{3.6} = \frac{2}{36}.$$

Ztąd wynika
$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \sqrt{\frac{2}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{2}.$$

Więc wartości krawędzi, wyrażone w metrach, są:

$$a = \frac{1}{3}\sqrt{2}, \qquad b = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad c = \sqrt{2};$$

a następnie objętość danego równoległościanu

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{2} = 0^{m^3},471404$$

na mniej niż centymetr sześcienny.

WŁASNOŚCI OGÓLNE WIELOŚCIANÓW.

Twierdzenie XXXVI (*).

W każdym wielościanie liczba ścian S *więcej liczba wierzchołków* W *równa się liczbie krawędzi* K *więcej* 2, *to jest*

$$S + W = K + 2.$$

Dowiedziemy najpierwej że ilość $S + W - K$ jest stała, a potem że się równa liczbie 2. Połączmy tedy jakikolwiek punkt S przestrzeni ze wszystkiemi wierzchołkami jednej ściany ABCD. Przystawiając piramidę SABCD, której odejmujemy podstawę, tworzymy nowy wielościan w którym ilość $S + W - K$ staje się $S' + W' - K'$. Ale nie wszystkie przystawione ściany są różne od dawnych; albowiem, niektóre z nich mogą być przedłużeniem tych ostatnich; tak samo, niektóre z nowych krawędzi mogą być także przedłużeniem dawnych. Uważając że każde przedłużenie ściany niszczy jedną krawędź a każde przedłużenie krawędzi niszczy jeden wierzchołek, jeśli oznaczymy przez n liczbę boków odjętej ściany, przez s liczbę przedłużonych ścian, przez w liczbę straconych wierzchołków, znajdziemy łatwo

$$S' = S - 1 + n - s$$
$$W' = W + 1 - w$$
$$K' = K + n - s - w$$

Ztąd wynika równość

$$S' + W' - K' = S + W - K$$

która pokazuje że ilość $S + W - K$ nie zmienia się przez przystawienie piramidy do jednej ze ścian wielościanu. Ta ilość nie zmienia się także gdy odejmujemy piramidę od wielościanu; bo, gdyby się zmieniała przez odjęcie piramidy, toby się musiała

(*) Twierdzenie sławnego matymatyka Eulera.

zmienić przez jej przystawienie na powrót; co nie jest. Więc ilość S + W — K jest stała w wielościanach.

Owoż, odejmując piramidy od wielościanu albo je dodając, możemy dojść aż do czworościanu, w którym ilość S + W — K równa się oczywiście liczbie 2; więc w każdym wielościanie liczba *ścian więcej liczba wierzchołków równa się liczbie krawędzi więcej* 2.

Uwaga. — Powyższe dowodzenie pokazuje że twierdzenie stosuje się do wszelkiego wielościanu, byle tylko żadna ściana nie przenikała innej, jako w wielościanach gwiaździstych, o których później mówić będziemy.

Wniosek I. — Oznaczmy przez $a, b, c, d, \ldots$ liczbę trójkątów, czworokątów, pięciokątów,..., przez $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ liczbę kątów trójściennych, czworościennych, pięciościennych,... Ponieważ każda krawędź należy do dwóch ścian i do dwóch wierzchołków, będzie

$$2K = 3a + 4b + 5c + 6d + \ldots \qquad (1).$$

$$2K = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + \ldots \qquad (2).$$

To dowodzi że w każdym wielościanie 1° *liczba ścian mających nieparzystą liczbę boków*, jako trójkąty, pięciokąty,.. *jest parzysta*; 2° *liczba kątów wielościennych mających nieparzystą liczbę krawędzi*, jako kąty trójścienne, kąty pięciościenne,... *jest parzysta*.

II. *Nie istnieje żaden wielościan któryby nie miał ani ściany trójkątnej ani kąta trójściennego.*

Mamy

$$S = a + b + c + d + \ \ (3), \qquad W = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ \ (4);$$

owoż, jeśli w formule Eulera, którą można pisać

$$4S + 4W = 4K + 8,$$

wyrugujemy S, W, i podstawimy zamiast 4K summę wartości (1) i (2), otrzymamy równanie

$$a + \alpha = 8 + (c + \gamma) + 2(d + \delta) + 3(e + \epsilon) +$$

które dowodzi że summa $a + \alpha$ nie może być zero, ani mniejsza od liczby 8.

W czworościanie $a + \alpha = 8$.

III. *Nie istnieje żaden wielościan w którymby wszystkie ściany miały więcej niż pięć boków, ani wielościan w którymby wszystkie kąty wielościenne miały więcej niż pięć ścian.*

Jakoż,

1° Z porównania formuł (2) i (4) wynika że $2K \geq 3W$; a jeśli w formule *Eulera* podstawimy za K i S ich wartości (1) i (3), będzie

$$2W = 4 + a + 2b + 3c + \qquad (5);$$

zatem, podstawiając tę wartość i wartość (1) w powyższej nierówności, otrzymamy nierówność

$$+ 2b + c \geq 12 + d + 2c + \ldots,$$

która dowodzi że a, b, c nie mogą zarazem być zero.

2° Z symetryi formuły *Eulera* względem S i W, i z formuł (1) i (2), (3) i (4), wynika że jest także

$$2S = 4 + \alpha + 2\beta + 3\gamma + \qquad (6)$$

a następnie $\quad 3\alpha + 2\beta + \gamma \geq 12 + \delta + 2\varepsilon + \ldots$

Co dowodzi że α, β, γ, nie mogą zarazem być zero.

Liczba warunków koniecznych do wyznaczenia wielościanu.

Uważajmy układ n punktów w przestrzeni, albo wielościan *gatunku nieokreślonego* mający n wierzchołków. Na wyznaczenie *trzech* wierzchołków trzeba *trzech oddzielnych* warunków; wyznaczy się położenie w przestrzeni pozostałych $n—3$ wierzchołków dając *np.* odległość każdego z nich od trzech pierwszych, co uczyni $3(n — 3)$ różnych warunków; więc liczba warunków koniecznych do wyznaczenia wielościanu mającego n wierzchołków, albo ogólniej, *liczba warunków koniecznych do wyznaczenia układu* n *punktów w przestrzeni jest* $\quad 3 + 3(n — 3) \quad$ czyli $\quad 3n — 6$.

Pojmujemy łatwo że liczba warunków koniecznych do wyznaczenia wielościanu zmniejsza się w miarę ścisłości jego określenia; albowiem niektóre wierzchołki mogą leżeć na jednej płasczyznie albo nawet na jednej linii prostej z innemi. I tak, wyznaczenie czworościanu wymaga $3.4 - 6 = 6$ warunków; gdy tymczasem wyznaczenie piramidy, której podstawa ma n boków, potrzebuje mniej warunków niż $3(n+1) - 6 = 3n - 3$.

Uważajmy teraz wielościan *danego gatunku*, i weźmy za podstawę jedną ze ścian mającą n boków. Trzeba $2n - 3$ warunków do wyznaczenia tej ściany. Zostaje tedy $W - n$ wierzchołków poza podstawą; położenie każdego z nich w przestrzeni wymaga trzech warunków, co czyni $3(W - n)$; dodając $2n - 3$ warunki podstawy, będzie razem $3W - n - 3$. Ale ta liczba warunków jest, ogólnie mówiąc, za wielka, i trzeba ją zmniejszyć liczbą warunków które wyrażają że wierzchołki jednej ściany znajdują się na jej płasczyznie. Owóż, trzy punkta wyznaczają płasczyznę; jeśli więc nazwiemy n', n'', n''',... liczbę boków ścian będących zewnątrz podstawy, przewyżka każdej z tych liczb nad 3 wyrazi ile trzeba warunków żeby wierzchołki należące do jednej ściany były na jej płasczyznie. Odejmując summę tych przewyżek od poprzednio znalezionej liczby warunków, otrzymujemy $3W - n - 3 - (n' - 3) - (n'' - 3) - \ldots$,

albo $3W - 6 - (n - 3) - (n' - 3) - (n'' - 3) - .$

Ale ostatnie wyrażenie jest to samo co $3W - 6 - 2K + 3S$; to zaś, z przyczyny $S + W - A = 2$, przywodzi się do K. Więc *liczba warunków koniecznych do wyznaczenia wielościanu równa się liczbie* K *jego krawędzi*.

Twierdzenia II, VII, VIII, i IX mogą tu służyć za sprawdzenie.

Jeden bok i $K - 1$ kątów wyznaczają wielościan; inny bok, dany dowolnie, i te same kąty wyznaczają drugi wielościan oczywiście podobny pierwszemu. Więc, *żeby dwa wielościany tego samego gatunku były podobne, trzeba* $K - 1$ *warunków.*

Jeśli dwa wielościany nie są określonego gatunku i mają tylko równą liczbę W wierzchołków, trzeba $3W - 7$, warunków dla ich podobieństwa.

To dowodzi że podobieństwo dwóch wielościanów wymaga jednego warunku mniej niż ich równość.

Twierdzenie XXXVII.

W każdym wielościanie, summa kątów wszystkich ścian równa się czterem kątom prostym wziętym tyle razy ile jest wierzchołków mniej 2.

Wiadomo że, biorąc kąt prosty za jedność kątów, summa kątów wewnętrznych wielokąta mającego n boków wyraża się przez $2n - 4$; zatem, jeśli oznaczymy przez n, n', n''... liczby boków ścian danego wielościanu, summa kątów wszystkich ścian będzie

$$(2n - 4) + (2n' - 4) + (2n'' - 4) +$$

Owoż, ta summa zewiera S wyrazów, a zaś $n + n' + n'' + ... = 2K$; więc summa kątów wszystkich ścian wielościanu ma za miarę

$$\Sigma = 4(K - S) \quad \text{albo} \quad \Sigma = 4(W - 4) \quad (36).$$

ZAGADNIENIA KSIĘGI SIÓDMEJ.

Zagadnienie I.

Znaleźć powierzchnię boczną i objętość piramidy sześciokątnej foremnej, mając daną jej wysokość H *i promień* R *podstawy.*

Nazwijmy S powierzchnię boczną, V objętość piramidy zadanej.

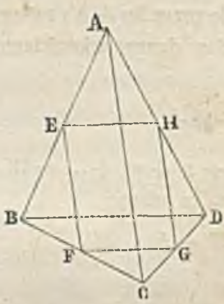
1° Apotema podstawy wyraża się przez $\frac{1}{2}R\sqrt{3}$; a wysokość jednego z sześciu trójkątów równoramiennych które składają powierzchnię boczną piramidy, przez $\sqrt{H^2 + \frac{3}{4}R^2}$; zatem powierzchnia boczna tej piramidy jest

$$S = 6R \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{H^2 + \tfrac{3}{4}R^2} = \tfrac{3}{2}R\sqrt{4H^2 + 3R^2}.$$

2° Podstawa piramidy ma za miarę $\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$; więc objętość piramidy jest $V = \frac{1}{2}HR^2\sqrt{3}.$

ZAGADNIENIE II.

Przeciąć czworościan ABCD *płaszczyzną równoległą do dwóch krawędzi przeciwległych* AC, BD, *tak żeby przecięcie* EFGH *miało powierzchnię największą możebną.*



Ponieważ płaszczyzna sieczna ma być równoległa do dwóch krawędzi przeciwległych AC i BD, przecięcie EFGH jest równoległobokiem, w którym kąt E jest stały jako równy kątowi krawędzi AC i BD. Ztąd wynika że maximum powierzchni tego równoległoboku zależy od maximum wieloczynu EF.EH dwóch boków przyległych (IV, 7).

Owoż, $\frac{EF}{AC}=\frac{BE}{BA}$ i $\frac{EH}{BD}=\frac{AE}{AB}$;

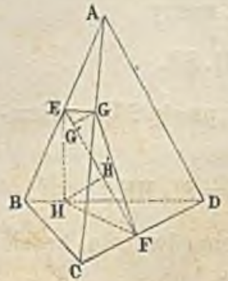
więc $EF \cdot EH = \frac{AC \cdot BD}{\overline{AB}^2} \times AE \cdot BE.$

Teraz uważajmy że spółczynnik $\frac{AC \cdot BD}{\overline{AB}^2}$ jest stały, a summa dwóch czynników zmiennych AE i BE równa się krawędzi AB. Więc wieloczyn AE.BE jest maximum gdy te czynniki zmienne są równe. Ztąd wnosimy że w czworościanie płaszczyzna równoległa do dwóch krawędzi przeciwległych wyznacza przecięcie maximum gdy jest równo oddalona od tych krawędzi.

ZAGADNIENIE III.

Przeciąć czworościan ABCD *płaszczyzną przechodzącą przez środki* E *i* F *dwóch krawędzi przeciwległych tak, żeby przecięcie miało powierzchnię najmniejszą możebną.*

Niech będzie EGFH czworobok wyznaczony przez jedną z płasczyzn siecznych. Poprowadźmy przekątnę EF i spuśćmy na nią, z wierzchołków G, H, prostopadłe GG′, HH′.



Czworobok EGFH ma za miarę wieloczyn $\frac{1}{2}$EF (GG′ + HH′), w którym czynnik EF jest stały; więc ten czworobok będzie miał powierzchnię minimum gdy summa prostopadłych GG′, HH′ będzie minimum.

Owoż, jeśli przez punkt E poprowadzimy płasczyznę, równoległą do dwóch krawędzi przeciwległych AC, BD, ta płasczyzna przejdzie przez punkt F (VI, 36), i proste GG′, HH′, równoległe między sobą, będą do niej pochyłe. Te pochyłe są równe, bo rzeczona płasczyzna jest równo oddalona od krawędzi AC, BD. Ztąd wynika że summa GG′ + HH′ będzie minimum gdy proste GG′ i HH′ będą prostopadłe do tej płasczyzny. Wtedy, prosta GG′ będzie spólną prostopadłą do prostych EF, AC, a zaś HH′ spólną prostopadłą do prostych EF, BD.

Więc, aby rozwiązać zagadnienie, poprowadź przez punkt E płasczyznę równoległą do krawędzi przeciwległych AC, BD, i potem do tej płasczyzny poprowadź, przez prostę EF, płasczyznę prostopadłą która wyznaczy przecięcie najmniejszej powierzchni.

Zagadnienie IV.

Podzielić piramidę, która ma podstawę równoległoboczną, na dwie części równowarte, płasczyzną przechodzącą przez jeden z boków podstawy.

Niech będzie BCFE płasczyzna szukana; SO wysokość danej piramidy równoległobocznej SABCD, i SP wysokość piramidy odciętej SBCFE której podstawa jest trapezem. Płasczyzna OSP, prostopadła do dwóch podstaw, jest prostopadła do ich przecięcia BC i spotyka te podstawy wedle prostych HG, HI, odpowiednio prostopadłych do prostych AD, EF.

Wedle zagadnienia, piramida SBCEF powinna być połową danej SABCD; więc, wyrażając ich objętość, mamy

$$AD \,.\, GH \,.\, SO = (BC + EF) \,.\, HI \,.\, SP.$$

Owoż, jeśli spuścimy prostopadłę HK na prostę SG, powierzchnie trójkątów SHG i SHI dadzą

$$GH \,.\, SO = SG \,.\, HK \quad \text{i} \quad HI \,.\, SP = SI \,.\, HK;$$

zatem, podstawiając te wartości w powyższem równaniu, będzie

$$AD \,.\, SG = (BC + EF) \,.\, SI,$$

zkąd
$$\frac{BC+EF}{SG} = \frac{AD}{SI} = \frac{EF}{GI}.$$

Nakonice, jeśli w ostatniej równości zamiast AD i EF podstawimy ilości proporcyonalne SG i SI, otrzymamy proporcyę

$$\frac{SG}{SI} = \frac{SI}{GI},$$

która pokazuje że płasczyzna szukana BCFE *dzieli w stosunku średnim i skrajnym wysokość* SG ściany ADS równoległej do krawędzi BC przez którą przechodzi.

Uwaga. — Rozwiązać zagadnienie gdy dwa boki równoległe AB i BC są nierówne.

Zagadnienie V.

Podzielić całą powierzchnię piramidy czworokątnej foremnej na dwie części równowarte, płasczyzną przechodzącą przez jeden z boków podstawy.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie BCFE płasczyzna szukana (*fig. powyższa*); połączmy BE, i oznaczmy przez k *apotemę* piramidy, przez a bok jej podstawy, przez x wysokość trapezu ADFE; będzie

$$\text{trój. } ABE = \frac{1}{2}ax, \quad \text{i} \quad EF = \frac{a}{k}(k - x);$$

zatem
$$\text{trapez } ADFE = \frac{ax}{2k}(2k - x).$$

Wedle zadania, summa powierzchni 2ABE + ADFE + ABCD powinna być połową całej powierzchni piramidy; więc

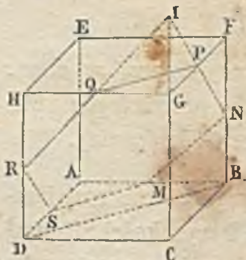
$$2ax + \frac{ax}{k}(2k - x) + 2a^2 = 2ak + a^2$$

albo $$x^2 - 4kx + 2k^2 - ak = o.$$

To równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste i dodatne, ponieważ $2k > a$, bez czego piramida foremna nie mogłaby istnieć; ale pierwiastek większy od $2k$ nie odpowieda na pytanie. Więc zagadnienie ma tylko jedno rozwiązanie.

Zagadnienie VI.

Przeciąć sześcian płaszczyzną tak, żeby przecięcie było sześciokątem foremnym.



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie płaszczyzna MNQ której przecięcie z sześcianem jest sześciokątem foremnym MNPQRS. Płaszczyzna sieczna przecina oczywiście krawędź CG w punkcie I. Owoż, kąt NPQ sześciokąta foremnego równa się $\frac{4}{3}$ kąta prostego; więc trójkąt IPQ jest równoboczny, bo jego kąty P i Q, jako spełnienia kątów sześciokąta, są każdy $\frac{2}{3}$ kąta prostego. Ztąd wynika że

$$IP = PQ = PN, \quad i \quad IQ = QR; \quad zatem \quad PQ = \tfrac{1}{2}NR.$$

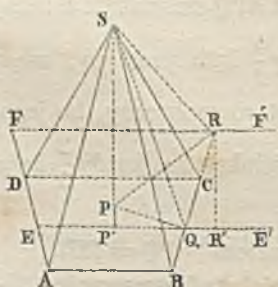
Co dowodzi że bok PQ szukanego sześciokąta foremnego jest równoległy do przekątnej FH i równy jej połowie. Więc wierzchołki P i Q tego sześciokąta są środkami krawędzi GF i GH sześcianu; i tak samo o innych. Ztąd wnosimy że w sześcianie płaszczyzna poprowadzona przez środki trzech krawędzi, po sobie idących ale nie na jednej płaszczynie, wyznacza przecięcie które jest sześciokątem foremnym jako MNPQRS. Jest cztery takich płaszczyzn zadość czyniących zagadnieniu.

Uwaga. — Niech będzie M′N′P′Q′R′S′ sześciokąt wyznaczony płaszczyzną równoległą do płaszczyzny BDG, a temsamem równoległą do płaszczyzny MNP. Widzimy łatwo że $\frac{M'S'}{BD} = \frac{AS'}{AD}$, i $\frac{P'Q'}{FH} = \frac{GP'}{GF}$ albo $\frac{P'Q'}{BD} = \frac{GP'}{AD}$. Ale GP′ i DS′ są równe, jako dwie równoległe zawarte między dwiema płaszczyznami równoległemi; zatem $GP' + AS' = AD$. Więc $M'S' + P'Q' = BD$. Ztąd wynika że sześciokąty wyznaczone płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny BDG są równoobwodowe z trójkątem równobocznym BDG. Owoż, między wielokątami równoobwodowemi i równej liczby boków największy jest foremny.

Więc, *Sześciokąt foremny* MNPQRS *jest największy ze wszystkich sześciokątów pochodzących z przecięcia sześcianu przez płaszczyzny równoległe do płaszczyzny* BDG.

Zagadnienie VII.

W piramidzie SABCD *mającej za podstawę trapez, są dane:* 1° *wysokość* SP, 2° *ściana* SAD, 3° *kąty ściany przeciwległej* SBC 4° *kierunki podstaw* AB i DC *trapezu; zbudawać tę piramidę.*



Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i że spodka P wysokości SP piramidy szukanej spuśćmy prostopadłę PQ na bok BC; prosta SQ będzie wysokością ściany SBC.

Teraz, ponieważ kąty tej ściany są dane, stosunek odcinków BQ, CQ jest wiadomy; zatem, jeśli podzielimy w tym stosunku bok AD w punkcie E, punkt Q będzie leżał na równoległej EE′ do AB.

Stosunek $\frac{BQ}{SQ}$ jest także wiadomy; więc, jeśli weźmiemy $QR = QS$, punkt R będzie się znajdował na linii FF′, równoległej do AB i przechodzącej przez punkt F który się wyznaczy za pomocą proporcyi $\frac{BQ}{QR} = \frac{AE}{EF}$.

Po czem, połączmy RS, RP; będzie

$$\overline{RS}^2 = 2\overline{QR}^2, \text{ i } \overline{RS}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2;$$

ztąd

$$\overline{QR}^2 - \overline{QP}^2 = \overline{PS}^2.$$

Więc wykreślenie żądanej piramidy przywodzi się do następującego zagadnienia Geometryi płaskiej:

Wykreślić trójkąt prostokątny PQR *w którym, różnica kwadratów wystawionych na ramionach* QR, QP *kąta prostego równa się kwadratowi z danej linii* SP, *wierzchołek* P *jest dany, a dwa inne wierzchołki* Q, R *leżą na danych równoległych* EE′, FF′.

Aby rozwiązać to zagadnienie, spuśćmy prostopadłe PP′, RR′ na EE′, będzie

$$\overline{QR'}^2 = \overline{QR}^2 - \overline{RR'}^2 \text{ i } \overline{QP'}^2 = \overline{QP}^2 - \overline{PP'}^2;$$

ztąd wynika

$$\overline{QR'}^2 - \overline{QP'}^2 = \overline{SP}^2 + \overline{PP'}^2 - \overline{RR'}^2.$$

Druga strona równania jest ilością wiadomą.

Nadto, trójkąty QPP′, QRR′, mające boki prostopadłe, są podobne i dają,

$$\frac{PP'}{QR'} = \frac{QP'}{RR'} \quad \text{albo} \quad QP' \times QR' = PP' \times RR'.$$

Mamy wieloczyn odcinków QR′, QP′ i różnicę ich kwadratów; więc te odcinki są wynaczone, i rozwiązanie zagadnienia łatwo się uzupełnia.

Zagadnienie VIII.

Przeciąć dany graniaston trójkątny płaszczyzną tak żeby przecięcie było trójkątem podobnym danemu.

Można zawsze przypuścić że płaszczyzna sieczna przechodzi przez jeden z wierzchołków podstawy; wtedy ta płaszczyzna odcina od graniastonu piramidę mającą trapez za podstawę, i zagadnienie przywodzi się do poprzedzającego.

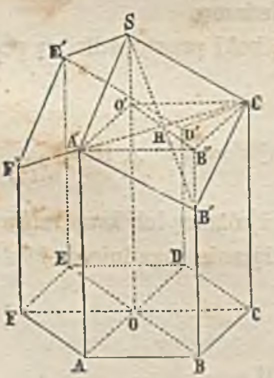
Dobrze jest szukać wprost algebrycznie rozwiązania które, prócz długości rachunku, nie przedstawia wielkiej trudności.

Uwaga — Powyższe rozwiązanie może się zastosować do następującego zagadnienia.

Na danej płaszczyznie wyznaczyć rzut jednego trójkąta podobny drugiemu trójkątowi.

Zagadnienie IX.

Na bokach sześciokąta foremnego ABCDEF *wystawiono sześć prostopadłych ścian* ABB'A', BCC'B', etc. *i wzięto trzy krawędzie równe* AA', CC', EE', *nie idące po sobie; po czem, przez punkt* S *osi sześciokąta, i, przez każdą ze trzech prostych* A'C', A'E', C'E', *poprowadzono płaszczyzny* SA'B'C', SA'F'E', SC'D'F' *które zamykają wielościan. Jak trzeba wziąć punkt* S *żeby cała powierzchnia tego dziesięciościanu była najmniejsza możebna?*



Widać z samego wykreślenia że krawędzie BB', DD', FF' są równe; zatem powierzchnia tego dziesięciościanu składa się z sześciu trapezów równych ABB'A',... z sześciu trójkątów równych SA'B',... i z podstawy ABCDEF; a ponieważ ta podstawa jest stała, trzeba i dość jest dla minimum całej powierzchni wielościanu żeby tylko summa trapezu ABB'A' i trójkąta przyległego SA'B' była minimum.

Owoż, jeśli przez wierzchołek A' poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do krawędzi AA', to ona spotka krawędzie BB', CC',... SB',.. w punktach B'', C',.. H,... oś OS w punkcie O', tak że piramidy SA'C'O' i B''A'C'B',... będą symetryczne, i prosta A'C' będzie prostopadła do krawędzi SB' w jej środku H; zatem, oznaczając przez x odległość O'S=B'B'', przez a bok podstawy, przez b krawędź AA',

będzie $HS = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}a^2}$ i $HA' = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$;

a następnie powierzchnia trapezu ABB'A' wyrazi się przez $\frac{1}{2}a(2b-x)$, i powierzchnia trójkąta SA'B' przez $\frac{1}{2}a\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}$.

Więc ilość którą trzeba uczynić minimum jest wieloczyn

$$\frac{1}{2}a\left(2b-x+\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}\right).$$

Ten wieloczyn ma jeden czynnik $\frac{1}{2}a$ stały, a w drugim ilość zmienna $\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}-x$ jest dodatna; więc dość uczynić minimum ilość

$$\sqrt{3x^2+\frac{3}{4}x^2}-x.$$

Żeby nie wychodzić z granic matematyki elementarnej, oznaczmy przez m szukaną wartość minimum, będzie

$$\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}-x=m, \text{ zkąd } 2x^2-2mx+\frac{4}{3}a^2-m^2=0.$$

Owoż, pierwiastki tego równania powinny być rzeczywiste; co wymaga żeby było $m^2 \geq 2\left(\frac{3}{4}a^2-m^2\right)$ albo $m^2 \geq \frac{1}{2}a^2$.

Ztąd wynika że najmniejsza wartość jaką można wziąć dla m jest równa $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, ~~i tej wartości~~ odpowieda $x=\frac{1}{4}a\sqrt{2}$.

Więc, *powierzchnia zadanego dziesięciościanu będzie najmniejsza możebna, jeśli różnica krawędzi* AA' i BB' *jest czwartą częścią przekątnej kwadratu wystawionego na boku a podstawy.*

Uwaga.—Dziesięciościan, o którym mowa, przewrócony stanowi budowę komórek woskowych w których pszczoły miód składają. Kąty bryłowe B'', D'', F'' są równościenne, ich ściany mają około 109° 28' 16'', a kąty dwójścienne 120° (według *Maclaurina*).

Symetrya piramid SA'C'O' i B'A'C'B'', etc., pokazuje że ten dziesięciościan jest równowarty graniastonowi ABCDEFA'B'C'D'E'F'; zatem jego objętość, niezależna od punktu S, ma za miarę wieloczyn z podstawy ABCDEF przez wysokość AA'. Widzimy tedy że pszczoły, dla tej samej objętości miodu, budują komórki z ilości wosku najmniejszej możebnej.

ZADANIA.

847. — W czworościanie mającym kąt bryłowy trójprostokątny,

1° Każda ściana tego kąta jest średnią proporcyonalną między swoim rzutem na ścianie przeciwległej kątowi i tą ścianą.

2° Kwadrat ze ściany przeciwległej kątowi bryłowemu trójprostokątnemu równa się sumie kwadratów ze trzech jego ścian.

848. — Dowiedź że objętość czworościanu, w którym dwie krawędzie przeciwległe tworzą kąt prosty, ma za miarę szóstą część wieloczynu tych dwóch krawędzi przez ich najkrótszą odległość.

Uwaga. — Twierdzenie jest szczególnym przypadkiem następującego: *Objętość czworościanu ma za miarę szóstą część wieloczynu dwóch krawędzi przeciwległych przez ich najkrótszą odległość i przez wstawę ich kąta.*

849. — Jakaby byłaby miara graniastonu i piramidy, gdyby za jedność objętości wzięto czworościan foremny zbudowany na jedności linij?

850. — Zbudować piramidę biorąc taką linię za jedność żeby objętość i powierzchnia miały za miarę tę samą liczbę.

851. — W piramidzie czworokątnej foremnej SABCD wiadomy jest stosunek $\frac{AB}{AS}$; wyznaczyć kąt dwójścienny AS.

852. — Jeśli dwa trójkąty w przestrzeni mają wierzchołki na liniach prostych które się schodzą w jednym punkcie, wtedy przecięcia boków odpowiednych są w linii prostej. *I nawzajem.*

853. — Jeśli przez punkt O przestrzeni poprowadzono do wierzchołków A, B, C, D czworościanu linie proste które spotykają ściany przeciwległe w punktach A', B', C', D', będzie

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$

854. — W czworościanie linie łączące środki krawędzi przeciwległych, i linie łączące wierzchołki ze środkami ciężkości ścian przeciwległych, spotykają się w jednym punkcie. Ten punkt, który dzieli pierwsze linie na po-

łowy, i leży na $\frac{1}{4}$ części każdej z ostatnich licząc od ścian, nazywa się *środkiem ciężkości* czworościanu.

855. — Jeśli przez środek ciężkości czworościanu poprowadzono jakąkolwiek płaszczyznę, i spuszczono na nią prostopadłe ze wszystkich wierzchołków tego czworościanu, wtedy summa prostopadłych które są z jednej strony tej płaszczyny równa się summie prostopadłych które są po drugiej stronie.

856. — Miejscem środka ciężkości czworościanów, mających tę samą podstawę i wysokości równe, jest płaszczyzna równoległa do podstawy.

857. — Czworościan SABC jest przecięty płaszczyzną poprzeczną abc; wierzchołek S i punkta A', B', C' skrzyżowań przekątnych Bc i Cb (na ścianie SBC), Ac i Ca (na ścianie SAC), Ba i Ab (na ścianie SAB), połączono liniami prostemi które spotykają krawędzie BC, AC, AB, w punktach α, β, γ. Dowieść że:

1° Linie $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ schodzą się w jednym punkcie S' podstawy ABC.

2° Cztery poprzeczne SS', AA', BB', CC' schodzą się w jednym punkcie przestrzeni.

3° Trzy płaszczyzny ABC, abc, $A'B'C'$ przechodzą przez jedną linię prostą.

4° Przez wierzchołek S czworościanu poprowadzono, do podstawy ABC, linię prostą SD tak żeby tworzyła kąty równe ze ścianami bocznemi, i połączono DA, DB, DC. Dowieść że trójkąty DAB, DAC, DBC, są proporcyonalne do ścian SAB, SAC, SBC.

858. — W czworościanie płaszczyzna dwójsieczna kąta dwójściennego, albo jego spełnienia, dzieli ścianę przeciwległą na dwa trójkąty proporcyonalne do ścian przyległych.

Ta płaszczyzna dzieli także krawędź przeciwległą na dwa odcinki proporcyonalne do ścian przyległych.

859. — W czworościan wpisano drugi czworościan mający za wierzchołki środki ciężkości ścian pierwszego. Dowieść że te dwa czworościany są podobne, i wyrachować stosunek ich objętości.

860. — Dowieść że czworościan mający trzy kąty płaskie równe nie może mieć wszystkich ścian równowartych jeśli nie jest foremny, to jest, jeśli kąty płaskie równe nie mają każdy 60°.

861. — Przez dwa punkta dane na dwóch krawędziach czworościanu, poprowadzić płaszczyznę któraby podzieliła ten czworościan na dwie części w stosunku liczb $m:n$.

862. — W czworościanie poprowadzić płaszczyznę tak żeby przecięcie było ukośnikiem.

863. — W czworościanie mającym trzy ściany równowarte, summa trzech prostopadłych spuszczonych na te ściany z jakiegokolwiek punktu czwartej ściany jest stała.

864. — Są dane dwa czworościany ABCD, A'B'C'D', w których linie łączące wierzchołki odpowiednie, AA', BB', CC', DD', schodzą się w jednym punkcie. Dowieśdź że, jeśli ściany odpowiadające tych czworościanów przecinają się, ich cztery linie przecięć leżą na jednej płaszczyznie.

865. — W piramidzie foremnej, z punktu wewnętrznego podstawy wyprowadzono prostopadłę która spotyka ściany boczne przedłużone, jeśli trzeba, dowieśdź że summa odległości punktów spotkań od podstawy jest ilością stałą.

Uwaga. — Twierdzenie stosuje się także do piramidy mającej podstawę prostokątną.

866. — W piramidzie foremnej, z punktu podstawy spuszczono prostopadłe na ściany boczne; dowieśdź że summa tych prostopadłych jest stała.

867. — Poprowadzić płaszczyznę równoległą do podstawy pnia piramidy, o podstawach równoległych, tak żeby przecięcie było średnią proporcyonalną między temi podstawami.

Zastosować to zagadnienie do piramidy.

868. — Dany jest pień piramidy o podstawach równoległych w którym wysokość ma $1^{m},12$, a stosunek dwóch odpowiędnych boków podstaw równa się 3. Podzielić ten pień na dwa pnie równowarte.

869. — Wyznaczyć rozmiary równoległościanu prostokątnego którego wiadoma jest przekątna, pawierzchnia cała, i w którym jedna z krawędzi jest średnią arytmetyczną dwóch innych.

870. — Między równoległościanami prostokątnemi równej powierzchni, jaki jest maximum ?

I nawzajem, między równoległościanami prostokątnemi równej objętości, jaki ma powierzchnię minimum ?

871. — Znaleźć objętość pontonu. (Ponton jest sześciościanem, który ma za podstawy dwa prostokąty równoległe a za ściany boczne trapezy równoramienne).

872. — Ze wszystkich graniastonów równej podstawy i równej wysokości graniaston prosty ma największą powierzchnię.

873. — Ze wszystkich graniastonów mających n ścian, graniaston foremny ma :

1° Najmniejszą powierzchnię, gdy podstawy są równowarte i wysokości równe.

2° Największą objętość i największą podstawę, gdy powierzchnie są równowarte i wysokości równe.

3° Największą objętość i największą wysokość, gdy powierzchnie są równowarte i podstawy równowarte.

4° Najmnejszą podstawę i największą wysokość, gdy powierzchnie są równowarte i objętości równowarte.

874. — Z dwóch graniastonów foremnych ten który ma najwięcej ścian posiada cztery własności wysłowione w poprzedzającym numerze.

875. — Przez linię prostą poprowadzić płaszczyznę którąby podzieliła równoległościan na dwie części równowarte.

876. — W graniastonie *czworokątnym*, summa kwadratów ze czterech przekątnych równa się summie kwadratów z dwunastu krawędzi, więcej *osiem* razy kwadrat z linii która łączy oba punkta spotkania tych przekątnych.

877. — Jest dany ciąg nieograniczony wielościanów podobnych, których krawędzie odpowiedne maleją w postępni geometrycznej $1, \left(\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}\right)^2 \ldots$ i krawędź pierwszego jest k; czemu się równa krawędź wielościanu podobnego który jest równowarty summie tych wszystkich wielościanów?

878. — Mając dany graniaston trójkątny, znaleźć miejsce geometryczne takiego punktu żeby, biorąc go za wierzchołek a ściany boczne za podstawy, trzy piramidy czworokątne były równowarte. Wyznaczyć stosunek objętości tych piramid z graniastonem.

879. — Znaleźć na płaszczyznie miejsce punktów takich, żeby summa kwadratów odległości każdego z nich od ośmiu wierzchołków równoległościanu była równa danemu kwadratowi.

880. — Mając dane trzy linie proste, nie leżące po dwie na jednej płaszczyznie, wystawić równoległościan któregoby trzy krawędzie znajdowały się na tych liniach.

881. — Wyznaczyć *graficznie* wysokość piramidy której są wiadome: podstawa, jedna ściana boczna i kąt między niemi zawarty.

882. — Przecięto daną piramidę trójkątną SABC płaszczyzną która spotyka krawędzie boczne w punktach A′, B′, C′; znaleźć objętość pnia ABCA′B′C′ tej piramidy.

883. — W czworościanie SABC, przez punkt O ściany SBC poprowadzono, równolegle do krawędzi SA, AB, AC, proste OD, OF, OE aż do ścian ABC, SAC, SAB; dowieśdź że

$$\frac{OD}{SA}+\frac{OE}{AB}+\frac{OF}{AC}=1,$$

884. — Summa odległości wierzchołków równoległościanu od płaszczyzny zewnętrznej jest równa *osiem* razy wziętej odległości jego środka od tej płaszczyzny.

885. — Płaszczyzny prostopadłe we środkach krawędzi czworościanu spotykają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od czterech wierzchołków.

886. — Płaszczyzny dwójsieczne kątów dwójściennych czworościanu spotykają się w jednym punkcie który jest równo oddalony od czterech ścian.

Uwaga. — Uważając kąty dwójścienne zewnętrzne, łatwo się przekonamy że jest *osiem* punktów równo oddalonych od ścian przedłużonych czworościanu ale trzy z tych punktów nie istnieją gdy ściany czworościanu są równowarte.

887 — Poprowadzić płaszczyznę równoległą do podstawy czworościanu tak, żeby wyznaczyła drugi czworościan któregoby powierzchnia cała była połową powierzchni danego czworościanu.

888. — Zbudować czworościan, znając:

1° Trzy proste łączące środki krawędzi przeciwległych i kąty tych trzech linij.

2° Podstawę i długość trzech prostych łączących środki krawędzi przeciwległych.

3° Podstawę i odległości jej wierzchołków od środków ciężkości ścian bocznych.

889. — Mając dane trzy równoległe nie leżące na jednej płaszczyznie, na jedną z nich poniesiono długość AB równą danej, i wzięto dowolnie punkt C na drugiej, punkt D na trzeciej. Dowieśdź 1° że objętość czworościanu ABCD jest stała, jakiekolwiek są położenia punktów C i D i długości AB. 2° że ta objętość jest proporcyonalna do długości AB.

890. — Podstawa piramidy foremnej jest sześciokątem mającym 3 metry boku; wyrachować wysokość tej piramidy, wiedząc że jej powierzchnia boczna jest dziesięć razy większa od podstawy.

891. — W każdym czworościanie w którym krawędzie przeciwległe są

prostopadłe między sobą, najkrótsze odległości tych krawędzi i cztery wysokości czworościanu spotykają się w jednym punkcie.

892. — Przeciąć kąt trójścienny płaszczyzną tak, żeby trzy ściany przy wierzchołku utworzonej piramidy były równowarte.

893. — Przeciąć piramidę płaszczyzną równoległą do podstawy tak, żeby powierzchnia piramidy wyznaczonej tą płaszczyzną i powierzchnia danej piramidy były w stosunku $m : n$.

894. — Podzielić piramidę, płaszczyzną równoległą do podstawy, na dwie części proporcyonalne do liczb $m : n$.

895. — W pniu piramidy trójkątnej o podstawach nierównoległych, punkta spotkania przedłużonych boków tych podstaw i punkta spotkania przekątnych trzech ścian bocznych są na jednej płaszczyznie.

896. — Gdy dwie wysokości czworościanu spotykają się, to i dwie inne wysokości spotykają się także.

897. — Wysokość czworościanu foremnego równa się summie prostopadłych spuszczonych z punktu wewnętrznego na cztery ściany.

898. — Jeśli w czworościanie dwa ze trzech dwojanów krawędzi przeciwległych są prostokątne, trzeci dwojan tych krawędzi jest także prostokątny.

899. — Przez dwa punkta, dane na krawędziach graniastonu trójkątnego, poprowadzić płaszczyznę tak żeby podzieliła ten graniaston na dwie części proporcyonalne do liczb m, n: a w szczególności na dwie części równowarte.

900. — Na dwóch liniach prostych nie leżących na jednej płaszczyznie wzięto, na jednej dwa punkta stałe A i B, a na drugiej odcinek ruchomy CD; znaleźć położenie odcinka CD takie żeby powierzchnia czworościanu ABCD była minimum.

901 — Prowadząc przez wierzchołki jednego czworościanu płaszczyzny równoległe do ścian przeciwległych, utworzono drugi czworościan; znaleźć stosunek objętości tych dwóch czworościanów.

902. — Wyrazić stosunek dwóch sześcianów w dwóch liniach prostych.

903. — W czworościanie foremnym ze środka ciężkości podstawy spuszczone prostopadłe na ściany boczne; dowiśdź że czworościan mający te prostopadłe za krawędzie boczne jest foremny, i wyrachować jego objętość.

904. — Czworościan, którego summa trzech ścian bocznych jest dana, ma objętość maximum gdy te ściany są trójkątami prostokątnemi równoramiennemi i prostopadłemi między sobą.

905. — Ze wszystkich piramid tej samej wysokości i podstaw równowartych z jednakową liczbą boków, piramida foremna ma powierzchnię boczną minimum. A ze wszystkich piramid których powierzchnie boczne złożone z tej samej liczby ścian są równowarte, piramida foremna ma objętość maximum.

906. — Piramida której podstawa jest podobna danemu wielokątowi i czyni summę stałą z jedną ścianą boczną, ma objętość maximum gdy ta ściana jest dwa razy większa od podstawy i do niej prostopadła.

Symetrya układu punktów. — Nazywa się *osią symetryi* układu punktów taka linia prosta około której, obróciwszy ten układ pod pawnym kątem, otrzymuje się nowe położenie w którem każdy punkt zabiera miejsce jednego z punktów układu. Najmniejszy kąt pod jakim trzeba obrócić układ około osi aby każdy jego punkt powrócił na swoje miejsce, jest częścią *podwielowną* $\frac{1}{k}$ z 360°. Według jak k równą się liczbom 2, 3, 4,... oś symetryi nazywa się *dwoistą*, *troistą*, *czwórną*,... To zrozumiawszy, dowieśdź że :

907. — Każdy układ punktów mający środek symetryi i płaszczyznę symetryi posiada oś symetryi, która przechodzi przez ten środek i jest prostopadła do tej płaszczyzny.

908. — Układ punktów mający dwie płaszczyzny symetryi nieprostokątne ma zarazem i trzecią.

909. — Gdy układ punktów ma dwie płaszczyzny symetryi, ich przecięcie jest osią symetryi.

910. — Gdy układ punktów ma płaszczyznę symetryi i oś symetryi nieprostopadłą do tej płaszczyzny, wtedy ma drugą oś symetryi która jest odpowiedną pierwszej względem płaszczyzny symetryi.

911. — Układ punktów mający trzy osie czwórne, prostopadłe między sobą, ma zarazem cztery osie troiste.

912. — Wiadomo że liczba ziaren przenicy, którą Szach Perski miał dać matematykowi *Sessa*, za wynalezienie gry szachów, jest 18 446,744 073 709 551 615 (*). Owoż, metr sześcienny czyni 10 hektolitrów a hektolitr przenicy zawiera średnio 1 587 000 ziaren; gdyby więc usypano z tej ilości zboża piramidę trójkątną foremną, jaka byłaby długość boku piramidy? *Odp.* 21 445 metrów (licząc przez logarytmy), przeszło 4 mile krajowe!

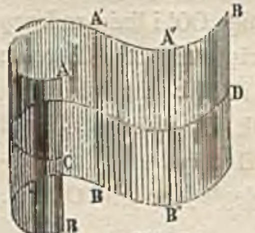
(*) *Zob.* w naszej Arytmetyce *postępnię geometryczną.*

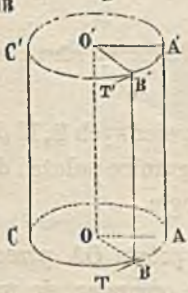
KSIĘGA ÓSMA

WALEC, STOŻEK, SFERA.

W tej księdze powiemy tylko słów kilka o powierzchniach walcowej, stożkowej i obrotowej, a zajmiemy się ogólnie własnościami opisowemi sfery i wielokątów sferycznych.

Powierzchnia walcowa. — Jeśli linia prosta AB posuwa się równolegle do prostej stałej GH, opierając się ciągle na danej linii CD, miejsce geometryczne położeń AB, A'B',... linii ruchomej nazywa się *powierzchnią walcową*.





Linia ruchoma, jako AB, która tworzy powierzchnię nazywa się *linią rodzącą*, a dana linia CD która kieruje ruch linii rodzącej bierze nazwisko *kierownicy*.

Przestrzeń zawarta między powierzchnią walcową i dwiema płaszczyznami równoległemi nazywa się walcem. Te płaszczyzny są *podstawami* a ich odległość *wysokością* walca. Linia rodząca jest *krawędzią* walca.

Powierzchnia walcowa utworzona przez krawędź AA', stanowi powierzchnię boczną walca. Dla skrócenia mowy daje się zwykle imie walca nawet powierzchni walcowej.

Walec jest *kołowy*, *elliptyczny*,... gdy ma za kierownicę koło, ellipsę,... jest *prosty* albo *pochyły*, według jak jego krawędź jest prostopadła albo pochyła do podstawy.

Nazywa się *przecięciem prostem* walca wszelkie przecięcie przez płaszczyznę prostopadłą do jego krawędzi

Płasczyzna jest szczególnym przypadkiem powierzchni walcowej; albowiem, jeśli kierownica jest linią prostą, albo krzywą płaską której płasczyzna jest równoległa do kierunku linii rodzącej, wtedy powierzchnia walcowa staje się płasczyzną.

Twierdzenie I.

Przecięcia ABC, A'B'C',... *powierzchni walcowej jakiejkolwiek* ABC A'B'C' *przez płasczyzny równoległe są liniami krzywemi równemi* (figura powyższa).

Jakoż, przez jakikolwiek punkt O płasczyzny przecięcia ABC poprowadźmy prostę OO' równoległą do linii rodzącej. Wszelka płasczyzna AA'O'O, przechodząca przez linię OO' i linię rodzącą jakąkolwiek AA', spotyka płasczyzny przecięć ABC, A'B'C' wedle dwóch prostych OA i O'A' równoległych i równych. Jeśli więc położymy płasczyznę ABC, na A'B'C' tak żeby punkt O padł na O', i punkt A na A', linia krzywa ABC przystanie do krzywej A'B'C'; bo wszystkie promienie równoległe jako OB i O'B',... są równe.

Wniosek I. — *Podstawy walca jakiegokolwiek są równe między sobą jako przystawalne.*

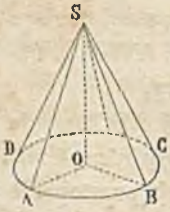
II. — Styczne BT, B'T' w punktach odpowiednych B, B' dwóch przecięć ABC, A'B'C', są równoległe, jako granice położeń dwóch siecznych odpowiednych które są równoległe.

Powiezchnia stożkowa. — Jeśli linia prosta OA przechodzi przez punkt stały O i porusza się ciągle opierając się na linii stałej ABC, miejsce geometryczne jej położeń OA, OB, OC,... nazywa się *powierzchnią stożkową.*

Punkt stały O jest *środkiem* albo *wierzchołkiem* powierzchni stożkowej i przedziela ją na dwie części OABC i OA'B'C',. zwane *płachtami.* Linia stała ABC jest kierownicą powierzchni stożkowej.

Przestrzeń zamknięta między jedną płachtą powierzchni stożkowej i płasczyzną nazywa się

STOŻKIEM (niewłaściwie *ostrokręgiem*), jako SABCD. Ta płasczyzna



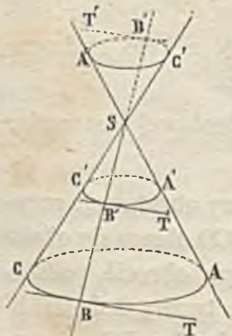
ABC jest podstawą, środek S powierzchni stożkowej *wierzchołkiem*, a linie rodzące SA, SB... *krawędziami* albo *bokami* stożka. Ale, dla skrócenia mówi się *stożek* zamiast *powierzchnia stożkowa*.

Stożek jest *kołowy*, *elliptyczny*... gdy ma za kierownicę koło, ellipsę...; jest *prosty* albo *pochyły* według jak linia łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy jest prostopadła albo pochyła do tej podstawy.

Gdy kierownica jest linią prostą, albo krzywą płaską której płasczyzna przechodzi przez wierzchołek S, wtedy powierzchnia stożkowa staje się płasczyzną.

TWIERDZENIE II.

Przecięcia ABC, A'B'C' *powierzchni stożkowej jakiejkolwiek, przez płasczyzny równoległe, są liniami krzywemi podobnemi.*



Jakoż, jeśli przez środek S powierzchni stożkowej poprowadzimy płasczyznę równoległą do płasczyzn siecznych ABC, A'B'C', te trzy płasczyzny podzielą linie rodzące SA, SB, SC..., na części proporcyonalne, i będzie (VI, 26).

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \text{etc.}$$

Więc linie krzywe ABC, A'B'C' są jednokładne (III, 35.) i punkt S jest ich środkiem podobieństwa, *prostego* albo *odwrotnego* według jak dwie krzywe odpowiedne leżą na jednej płachcie albo na dwóch płachtach stożka.

WNIOSEK. — Styczne BT, B'T' w punktach odpowiednych B, B' dwóch przecięć ABC, A'B'C' są równoległe, jako granice siecznych równoległych które przechodzą przez dwa punkta odpowiedne.

Powierzchnia obrotowa. — Jeśli jakakolwiek linia ABC obraca się około osi stałej XY z którą jest niezmiennie związana, miejsce geometryczne jej położeń ABC, A'B'C',... nazywa się *powierzchnią* obrotową.

Punkta A, B... linii rodzącej ABC opisują okręgi kół które się nazywają *równoleżnikami*, dlatego że ich płaszczyzny, prostopadłe do osi XY, są równoległe między sobą.

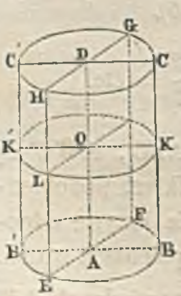
Przecięcie ABC powierzchni obrotowej, przez płaszczyznę przechodzącą przez jej oś XY nazywa się *południkiem*.

Południki są prostopadłe do równoleżników, bo ich płaszczyzny przechodzą przez oś tych ostatnich.

Wszystkie południki są oczywiście równe, i każdy z nich może się uważać za linię rodzącą powierzchni obrotowej.

Można także uważać powierzchnię obrotową jako *miejsce geometryczne koła prostopadłego do osi, którego środek przebiega te oś, a promień się zmienia tak że okrąg opiera się ciągle na linii stałej*. Wtedy południk ABC jest kierownicą, a koło ruchome linią rodzącą zmienną z położenia i wielkości.

Ten sposób tworzenia się powierzchni obrotowej jest nader użyteczny w zastosowaniach.



Aby dać przykład figury obrotowej, przypuśćmy że prostokąt ABCD obraca się około boku AD jako osi. W tym obrocie, podstawy AB i DC prostokąta tworzą koła BEB' i CDC' równe i równoległe; bok BC, równoległy do osi AD, tworzy *powierzchnię* boczną albo wypukłą walca, a prostokąt ABCD tworzy walec obrotowy BEB'CHC'G.

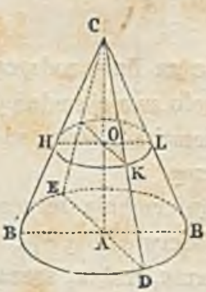
Więc *walec obrotowy jest figurą utworzoną obrotem prostokąta około jednego z boków jako osi.*

Walec prosty o podstawie kołowej jest walcem obrotowym.

Widzimy łatwo że *przecięcia proste powierzchni walcowej obrotowej są okręgami równemi,* których spólnym promieniem jest odległość linii rodzącej od osi.

Ztąd wynika że *miejscem punktów przestrzeni, które leżą w danej odległości od linii prostej stałej, jest powierzchnia walcowa obrotowa mająca tę prostę za oś i daną odległość za promień.*

Płasczyzna równoległa do osi walca obrotowego zawiera dwie linie rodzące tej powierzchni, albo tylko jedną, albo nie ma z nią żadnego punktu spólnego, według jak odległość tej płasczyzny od osi jest mniejsza od promienia powierzchni, albo mu równa albo od niego większa.



Przypuśćmy teraz, na drugi przykład że trójkąt prostokątny ABC obraca się około AC jednego z boków kąta prostego; w tym obrocie, drugi bok AB kąta prostego opisuje koło, przeciwprostokątna BC tworzy powierzchnię stożkową, a trójkąt ABC tworzy stożek obrotowy CBDB'.

Więc *stożek obrotowy jest figurą utworzoną obrotem trójkąta prostokątnego około jednego z ramion kąta prostego jako osi.*

Stożek prosty o podstawie kołowej jest stożkiem obrotowym.

W stożku obrotowym CBDB' powierzchnia utworzona obrotem przeciwprostokątnej BC jest *powierzchnią boczną* albo WYPUKŁĄ stożka; koło utworzone przez bok AB jest *podstawą,* oś AC *wysokością,* a przeciwprostokątna BC *bokiem* albo *apotemą* tego stożka.

W takim stożku wszelkie przecięcie równoległe do podstawy jest kołem, bo płasczyzna przecięcia prostopadła do osi obrotu.

Z resztą, można tego wprost dowieśdź. Jakoż, niech będzie HKL płasczyzna równoległa do podstawy stożka; dwa trójkąty podobne COK, CAD dają

$$\frac{OK}{AD}=\frac{OC}{AC}; \quad \text{zkąd} \quad OK=\frac{OC}{AC}.AD.$$

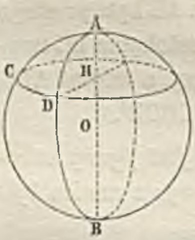
Owoż, odległości OC, AC, AD są stałe, niezależne od punktu K;

zatem odległość OK jest ilością stałą. Więc linia krzywa HKL jest okręgiem mającym środek O na osi stożka i odległość OK za promień.

Przecięcie stożka obrotowego przez płasczyznę przechodzącą przez oś jest trójkątem równoramiennym którego kąt wierzchołkowy BCB' nazywa się *kątem stożka*. Gdy ten trójkąt jest równoboczny, wtedy stożek nazywa się równobocznym.

Z tego co poprzedza wynika że, *miejscem geometrycznem linii prostej która, przechodząc przez dany punkt* S, *czyni z daną prostą* L *kąt równy danemu, jest powierzchnia stożkowa obrotowa, mająca za wierzchołek punkt* S, *a za oś linię równoległą do prostej* L *poprowadzoną przez* S.

Powierzchnia sferyczna. Weźmy nakoniec za linię rodzącą półokrąg ACB. Ten półokrąg, obracając się około swojej średnicy AB jako osi, tworzy powierzchnię którą nazwano *powierzchnią sferyczną*.



Przestrzeń zamknięta powierzchnią sferyczną nazywa się *sferą* (niewłaściwie kulą (*)).

Trzy figury obrotowe walec, stożek, sfera nazywają się w geometryi Starożytnych *trzema ciałami okrągłemi*.

WŁASNOŚCI FUNDAMENTALNE SFERY.

Chociaż sfera należy do figur obrotowych, trzeba jednak dać jej określenie właściwe i niezależne, jako następujące :

Określenie I. — Sfera jestto część przestrzeni zamknięta powierzchnią krzywą której wszystkie punkta są równo oddalone od punktu wewnętrznego zwanego *środkiem*.

Ta powierzchnia krzywa nazywa się *powierzchnią sferyczną*; ale często daje się imie sfery nawet powierzchni sferycznej.

(*) Mówi się wzniośle : *Sfera pojęć* człowieka..., *sfera działań*..., a nie można powiedzieć, *kula pojęć*, *kula działań*... Sfera jest częścią przestrzeni, a zaś kula ciałem. Geometrya nie zajmuje się ciałami.

Sfera jest najprostszą z powierzchni krzywych.

II. — *Promieniem sfery* jest wszelka linia prosta łącząca środek z punktem powierzchni.

Wszystkie promienie sfery są oczywiście równe. Zatem *Dwie sfery tego samego promienia są równe.*

III. — Gdy punkt uważany jest *zewnątrz* danej sfery, jego odległość od środka tej sfery jest większa od promienia; a gdy jest *wewnątrz* sfery, ta odległość jest mniejsza od promienia.

Ztąd wynika że, *Powierzchnia sferyczna jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od jej środka.*

IV. — *Cięciwą sfery* jest wszelka prosta łącząca dwa punkta jej powierzchni.

V. — Cięciwa przechodząca przez środek sfery nazywa się *średnicą*.

Wszystkie średnice sfery są równe jako dwa razy większe od promienia.

VI. — *Płasczyzna* jest *styczna* do sfery gdy ma jeden tylko punkt spólny z jej powierzchnią.

VII. — Dwie *sfery* są *styczne* do siebie, gdy mają jeden tylko punkt spólny; albo, co to samo, gdy mają płasczyznę styczną spólną.

VIII. — *Normalną* w punkcie danym powierzchni sferycznej jest prostopadła do płasczyzny stycznej w tym punkcie.

IX. — Wielościan jest *wpisany w sferę* gdy wszystkie jego wierzchołki leżą na powierzchni sferycznej. Wtedy, nawzajem, sfera jest *opisana na wielościanie.*

Wielościan jest *opisany na sferze* gdy wszystkie jego ściany są styczne do powierzchni sferycznej. Wtedy, nawzajem, *sfera* jest *wpisana w wielościan.*

Twierdzenie III.

Linia prosta nie może spotykać powierzchni sferycznej w więcej niż dwóch punktach.

Bo, gdyby linia prosta mogła spotykać powierzchnię sferyczną w więcej niż dwóch punktach, łącząc te punkta ze środkiem sfery, możnaby z jednego punktu poprowadzić do linii prostej więcej niż dwie pochyłe równe; co niemożebne.

Wniosek.— Powierzchnia sferyczna jest powierzchnią wypukłą.

Twierdzenie IV.

Przecięcie sfery przez płaszczyznę jest kołem.

Niech będzie ACBD linia wedle której płaszczyzna przecina sferę. Wszystkie punkta A, C, B,... tego przecięcia są równo oddalone od środka O sfery; więc przecięcie jest kołem które ma za środek spodek H prostopadłej spuszczonej ze środka sfery na płaszczyznę sieczną (VI, 6, *wn.* I).

Wniosek. — Trójkąt prostokątny AOH daje równość

$$\overline{AH}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OH}^2,$$

która dowodzi że promień HA jest tem większy im mniejsza prostopadła OH, czyli że koło HA jest tem większe im jego środek bliżej środka sfery O.

Dla tej przyczyny nazwano *wielkiem kołem* wszelkie koło którego płaszczyzna przechodzi przez środek sfery, a *małemi kołami* wszystkie te których płaszczyzny nie zawierają środka sfery.

Ztąd wynika że w jednej sferze, albo we dwóch sferach równych,

Wszystkie koła wielkie są równe, jako mające promień sfery za promień.

Dwa wielkie koła dzielą się nawzajem na dwa półkoła równe, bo ich przecięcie się przechodząc przez środek sfery jest ich spólną średnicą.

Dwa małe koła równo od środka sfery oddalone są równe; a z dwóch małych kół to jest większe które bliżej środka sfery.

Każde wielkie koło dzieli sferę i jej powierzchnię na dwie równe części. Jakoż, jeśli przyłożymy jedną z tych dwóch części do drugiej na spólnej podstawie, obracając wypukłości w jedną stronę, dwie powierzchnie przystaną do siebie; ponieważ wszystkie ich punkta są w równej odległości od środka sfery.

Określenie X. — Mianowano *biegunami koła* ACB skrajności P i Q średnicy PQ prostopadłej do tego koła. To nazwisko pochodzi ztąd że średnica PQ może być uważana jako oś obrotu danej powierzchni sferycznej.

Środek H koła ACB, jego bieguny P i Q, i środek O sfery leżą na osi tego koła.

Dwa koła równoległe mają tę samą oś i te same bieguny.

Uwaga. — Trzeba *trzech* warunków do wyznaczenia małego koła na sferze, bo trzeba trzech punktów do wyznaczenia jego płaszczyzny. Ale *dwa* warunki są dostateczne do wyznaczenia wielkiego koła, dlatego że jego środek jest wiadomy. Ztąd wynika że przez dwa punkta dane na sferze można zawsze poprowadzić okrąg wielkiego koła, i tylko jeden. Jednakże, jeśli dwa dane punkta na sferze są w linii prostej z jej środkiem, wtedy wielkie koło przechodzące przez te punkta, mając tylko daną średnicę, nie jest wyznaczone z położenia.

Określenie XI. — Nazywa się *kątem dwóch linij krzywych*, przechodzących przez jeden punkt, kąt ich stycznych w tym punkcie.

Dwie krzywe tworzące kąt prosty nazywają się *prostokątnemi* albo *prostopadłemi.*

Kąt utworzony przez dwa łuki kół wielkich jest *kątem sferycznym.*

Kąt dwóch jakichkolwiek krzywych na sferze równa się kątowi płaszczyzn przechodzących przez styczne do tych krzywych w punkcie spólnym i przez środek sfery. Albowiem, te styczne są prostopadłe do promienia sfery w punkcie spólnym, jako styczne do wielkiego koła w tym punkcie; więc tworzą właśnie kąt prostolinijny kąta dwójściennego rzeczonych płaszczyzn.

Twierdzenie V.

Łuki kół wielkich które łączą biegun koła z jego okręgiem są równe między sobą, i prostopadłe do tego okręgu.

Niech będzie na sferze jakikolwiek okrąg ACD mający bieguny B, B′. Cięciwy BA, BC... są równe, jako pochyłe równo oddalone od spodka H prostopadłej BH; więc łuki BA, BC,... kół wielkich niemi podpasane są równe.

Aby dowieśdź że łuk BC koła wielkiego jest prostopadły do łuku koła CD, poprowadźmy styczne CL i CK do tych łuków. Płaszczyzna wielkiego koła BC, przechodząca przez biegun B koła ACD, jest prostopadła do jego płaszczyzny; owoż, styczna CK, prostopadła do promienia CH, jest prostopadła do płaszczyzny CHB (VI, 10, *wn.* 1), i temsamem prostopadła do stycznej CL; więc łuk BC jest prostopadły do okręgu ACD.

Z dwóch biegunów B i B′ koła ACD uważając bliższy B jego płaszczyzny, nazwano *odległością biegunową* cięciwę BA która mierzy odległość prostolinijną bieguna od okręgu; a zaś łukowi BA koła wielkiego który łączy biegun z punktem okręgu dano imie *promienia sferycznego* tego okręgu.

Promień sferyczny wielkiego koła jest równy ćwierci jego okręgu, czyli *ćwiercianowi;* a zaś odległość biegunowa jest równa cięciwie jego ćwiercianu, to jest bokowi kwadratu wpisanego w wielkie koło.

Powyższe twierdzenie daje sposób kreślenia łuków kół na sferze z taką samą łatwością jako na płaszczyznie, za pomocą cyrkla zakrzywionego. Przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że chcemy nakreślić okrąg mający biegun B, i odległość biegunową BA. Bierzemy otwartość cyrkla równą odległości BA, i, stawiając jedną nóżkę tego cyrkla w punkcie B, drugą zakreślamy linię która będzie szukanym okręgiem ACD. Można to łatwo sprawdzić.

Jakoż, z punktu A spuśćmy prostopadłę AH na oś BB', i połączmy CH; jeśli obrócimy półkole BCB' około osi BB' tak żeby przystało do półkola BAB', punkt C padnie na A i prosta CH przystanie do AH: więc kąt CHB jest prosty. Co dowodzi że punkta A, C, D,... leżą na jednej płaszczyznie prostopadłej do osi BB' w punkcie H. Zatem linia ACD... jest okręgiem.

Biegun B koła ACD jest punktem przecięcia dwóch łuków kół wielkich prostopadłych do jego okręgu. Ztąd sposób wyznaczenia tego bieguna.

Twierdzenie VI.

Kąt ACB *dwóch łuków kół wielkich* CAC', CBC' *ma za miarę łuk koła wielkiego* AB *nakreślony z jego wierzchołka* C *jako bieguna i zawarty między jego ramionami* CA, CB.

Poprowadźmy styczne CD i CE do ramion kąta. Ponieważ punkt C jest biegunem łuku koła wielkiego AB, łuki CA, CB są ćwiercianami i kąty COA, COB są proste; zatem kąt stycznych DCE jest równy kątowi AOB. Ale ten ostatni jako środkowy ma za miarę łuk AB wielkiego koła; więc łuk AB jest także miarą kąta sferycznego ACB.

Wniosek I. — Jeśli na okręgu wielkiego koła ABA' weźmiemy łuki AH i BK, idące oba w jedną stronę i równe każdy ćwiercianowi, punkt H będzie biegunem łuku CA a punkt K biegunem łuku CB; i łuki HK i AB będą równe. Więc *kąt sferyczny* ACB *ma za miarę łuk* HK *mniejszy z dwóch łuków koła wielkiego które łączą bieguny ramion tego kąta*.

II. — Miejscem geometrycznem biegunów kół wielkich tworzących z danem kołem wielkiem AC kąt równy danemu kątowi ACB, jest okrąg opisany z bieguna H koła danego, i promieniem sferycznym równym łukowi koła wielkiego który mierzy kąt dany, A miejscem geometrycznem osi tych kół jest powierzchnia stożkowa obrotowa, mająca punkt O za środek prostę OH za oś obrotu i prostę OK za linię rodzącą.

Uwaga. — Dwa okręgi kół wielkich ACA′ i BCB′, przecinające się w punkcie C, tworzą kąty przyległe BCA, BCA′ spełniające, i kąty wierzchołkiem przeciwległe ACB, A′CB′ równe.

Twierdzenie VII.

Płaszczyzna prostopadła na skrajności promienia jest styczna do sfery. I nawzajem.

Niech będzie MN płaszczyzna prostopadła na skrajności A promienia sfery OA.

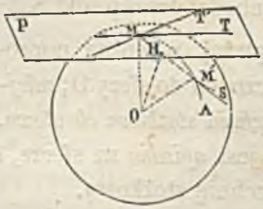
Ponieważ wszelka pochyła OH do płaszczyzny MN, jest większa od prostopadłej OA, punkt H leży zewnątrz sfery. Więc płaszczyzna MN, mająca jeden tylko punkt spólny z powierzchnią sfery a wszystkie inne zewnątrz, jest styczna do tej sfery (*Określ.* VI).

Nawzajem, *płaszczyzna styczna do sfery jest prostopadła do promienia przechodzącego przez punkt zetknięcia.*

Niech będzie A punkt zetknięcia. Ponieważ wszelki inny punkt H płaszczyzny stycznej MN leży zewnątrz sfery, odległość OA < OH. Więc promień styczności OA, najkrótsza droga ze środka sfery O do płaszczyny MN, jest prostopadły do tej płaszczyzny, i temsamem płaszczyzna styczna MN jest prostopadła do promienia w punkcie zetknięcia A.

Płaszczyzna styczna do sfery w danym punkcie jest miejscem geometrycznem stycznych do linij krzywych na sferze, które przez ten punkt poprowadzić można.

Niech będzie na sferze O jakakolwiek krzywa MA przechodząca przez punkt M; weźmy na tej krzywej punkt sąsiedni M′, poprowadźmy sieczną MM' i spuśćmy na nią ze środka sfery O



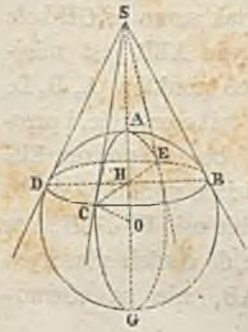
prostopadłę OH. Ponieważ trójkąt MOM' jest równoramienny, spodek H prostopałej OH jest we środku cięciwy MM', jakkolwiek blizko punkt M' dochodzi do M. Owoż, gdy punkt M' schodzi się z M, punkt H schodzi się z nim także, i temsamem prostopadła OH przystaje do promienia OM; ale wtedy sieczna MM' staje się styczną do krzywej MA w punkcie M; więc ta styczna jest prostopadła do promienia OM. To dowodzi że wszystkie styczne w punkcie M do krzywych poprowadzonych na sferze przez ten punkt, będąc prostopadłe do promienia w punkcie zetknięcia, znajdują się na płaszczyznie stycznej do sfery; więc ta płaszczyzna jest ich miejscem geometrycznem.

WNIOSEK I. — *Przez punkt dany na powierzchni sferycznej można zawsze poprowadzić płaszczyznę styczną do tej powierzchni; ale tylko jedną.*

II. — Normalna do powierzchni sferycznej przechodzi przez jej środek; i *nawzajem*.

TWIERDZENIE VIII.

Miejscem geometrycznem stycznych poprowadzonych do sfery O *przez punkt zewnętrzny* S *jest powierzchnia stożkowa obrotowa; linią punktów zetknięć tej powierzchni ze sferą jest okrąg którego oś przechodzi przez punkt* S.



Jakoż, przez prostę OS poprowadźmy jakąkolwiek płaszczyznę która przetnie sferę O wedle wielkiego koła ABGD. Jeśli teraz poprowadzimy przez punkt S styczną SB do tego koła, i obrócimy figurę SBG około prostej SO jako osi; w tym obrocie, półkole ABG tworzy daną sferę O; styczna SB, która nie zmienia ani swej długości ani nachylenia na oś SO, tworzy powierzchnię stożkową obrotową; a nakoniec, puukt zetknięcia B kreśli linię zetknięć stożka ze sferą, i ta linia jest oczywiście okręgiem którego oś przechodzi przez punkt S.

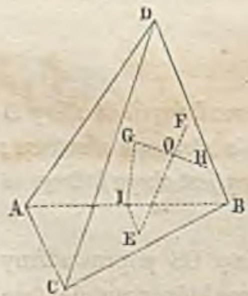
Widzimy łatwo że przez punkt zewnętrzny S można poprowadzić nieskończoną liczbę płaszczyzn stycznych do sfery O; *miejscem przecięć tych płaszczyzn jest powierzchnia stożkowa obrotowa.* Mówi się że ta powierzchnia stożkowa jest *opisana* na sferze, i nawzajem sfera jest *wpisana* w tę powierzchnię stożkową.

Wniosek. — Jeśli przypuścimy że punkt S oddala się w nieskończoność na linii prostej AG, stożek staje się walcem; więc

Miejscem geometrycznem stycznych do sfery, równoległych do danej prostej, jest powierzchnia walcowa obrotowa *opisana na sferze*; a linią zetknięć tych dwóch powierzchni jest okrąg wielkiego koła prostopadłego do linij rodzących.

Twierdzenie IX.

Przez cztery punkta nie leżące na jednej płaszczyznie mozna zawsze poprowadzić powierzchnię sferyczną; ale tylko jedną.



To znaczy że istnieje punkt, i tylko jeden, równo oddalony od czterech punktów A, B, C, D, danych nie na jednej płaszczyznie.

Jakoż, uważajmy że oś EF koła opisanego na trójkącie ABC jest miejscem punktów równo oddalonych od trzech punktów A, B, C; i tak samo oś GH koła opisanego na trójkącie ABD jest miejscem punktów równo oddalonych od trzech punktów A, B, D. Owoż, te osie mogą się przecinać w jednym tylko punkcie, i przecinają się istotnie w pewnym punkcie O; bo, płaszczyzna EIG prostopadła we środku prostej AB, jako miejsce punktów równo oddalonych od skrajności A i B, zawiera obie osie EF i GH, a te dwie linie, będąc odpowiednio prostopadłe do dwóch płaszczyzn przecinających się z założenia wedle AB, nie są równoległo (VI, 29, wn 2.). Więc istnieje punkt O, i tylko jeden, równo oddalony od czterech punktów A, B, C, D nie leżących na jednej płaszczyznie.

Zatem, sfera nakreślona z punktu O jako środka i promieniem OA przechodzi przez cztery rzeczone punkta A, B, C, D; i jest jedyna.

To twierdzenie dowodzi że

Cztery punkta nie leżące na jednej płaszczyznie wyznaczają sferę.

Gdy cztery punkta znajdują się na jednej płaszczyznie, wtedy nie wyznaczają sfery. Bo, jeśli są na jednym okręgu, to można przez te punkta poprowadzić tyle sfer różnych ile się podoba; a jeśli nie są wszystkie na jednym okręgu, to widocznie niema żadnej sfery któraby przez takie cztery punkta przechodzić mogła.

Wniosek. — Płaszczyzny prostopadłe we środkach krawędzi czworościanu spotykają się w jednym punkcie, który jest środkiem sfery opisanej.

Twierdzenie X.

Na każdym czworościanie można opisać sferę, i wpisać w niego sferę.

Poprzedzające twierdzenie dowodzi pierwszej części obecnego.

Co do drugiej części, uważajmy że płaszczyzny dwójsieczne kątów dwójściennych DA i DB przecinają się, wewnątrz czworościanu, wedle linii prostej która, będąc miejscem punktów równo oddalonych od trzech ścian DAB, DAC, DBC, leży na płaszczyznie kąta dwójściennego DC. Owoż, płaszczyzna dwójsieczna kąta dwójściennego BC, czyniąc kąt ostry z podstawą ABC czworościanu, spotyka oczywiście tę linię przecięcia, i tylko w jednym punkcie O, który jest równo oddalony od wszystkich ścian czworościanu. Więc istnieje wewnątrz czworościanu sfera, ale tylko jedna która, mając punkt O za środek i jego odległość OE od ścian za promień, dotyka każdej ściany w jednym punkcie, czyli jest *sferą wpisaną* w czworościan.

Wniosek I. — Płaszczyzny dwójsieczne wszystkich kątów dwójściennych czworościanu spotykają się w jednym punkcie, który jest środkiem sfery wpisanej.

II. — Jeśli połączymy wierzchołki czworościanu DABC ze środkiem O sfery wpisanej, rozłożymy ten czworościan na cztery inne, mające jego ściany za podstawy i promień OE sfery wpisanej za wysokość.

Oznaczając przez V objętość czworościanu DABC, przez S jego powierzchnię, i przez r promień sfery wpisanej, będzie

$$V = \frac{1}{3} Sr, \qquad \text{zkąd} \qquad r = \frac{3V}{S}.$$

To pokazuje że znając powierzchnię i objętość czworościanu można mieć promień sfery wpisanej.

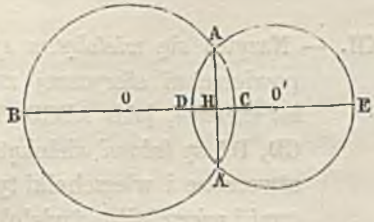
Uwaga. — Gdyby zadano ogólne zagadnienie : *Znaleźć sferę styczną do czterech płaszczyzn które się spotykają po dwie*, otrzymanoby nietylko *sferę wpisaną* w czworościan utworzony temi płaszczyznami, ale jeszcze *siedem* innych sfer stycznych zewnętrznie, to jest *cztery* zawpisane w czworościan i *trzy* inne zewnętrzne.

Rozwiązanie tego ogólnego zagadnienia będzie dane w księdze X.

Twierdzenie XI.

Przecięcie się dwóch sfer O i O′ *jest okręgiem który ma za oś linię ich środków.*

Jakoż, cztery którekolwiek punkta przecięcia są na jednej płasczyznie, bo inaczej dwie sfery O i O′ nie byłyby oddzielne (9); więc to przecięcie jest okręgiem (4).



Nadto, środki O i O′ dwóch sfer, każdy równo oddalony od punktów okręgu przecięcia, są na osi tego okręgu.

Można tego wszystkiego dowieśdź odrazu, uważając że, jeśli przetniemy dwie sfery O i O′ płasczyzną przechodzącą przez ich środki, i obrócimy figurę BAE około osi BE, punkt C spólny obydwom sferom opisze okrąg mający za oś linię środków BOO′E.

Wniosek I. — Okrąg przecięcia dwóch sfer może malejąc przywieśdź się do jednego punktu; wtedy dwie sfery mające tylko ten punkt spólny stają się stycznemi. Więc, *gdy dwie sfery są styczne, punkt zetknięcia znajduje się na linii ich środków, i sfery mają w tym punkcie spólną płasczyznę styczną.*

II. — Gdy trzy sfery przecinają się po dwie, płasczyzna ich trzech środków jest prostopadła do prostej wedle której spotykają się płasczyzny trzech kół przecięć.

Dwie sfery w przestrzeni, jako dwa koła na płasczyznie, mogą tylko *pięć* różnych mieć położeń, to jest być: 1° *zewnątrz* jedna drugiej, 2° *styczne zewnętrznie*, 3° sieczne, 4° *styczne wewnętrznie*, 5° wewnątrz jedna drugiej.

Oznaczając przez d odległość środków dwóch sfer, przez R i R′ ich promienie, i przypuszczając $R > R'$, łatwo widzimy że:

$$1^\circ\ d > R + R',\ 2^\circ\ d = R + R',\ 3^\circ\ R + R > d > R - R',$$
$$4^\circ\ d = R - R',\ 5^\circ\ d < R - R'.$$

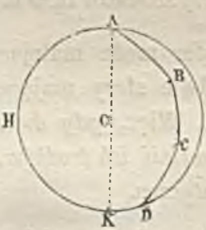
Wzajemnice są prawdziwe.

WIELOKĄTY SFERYCZNE.

Określenie XII. — Nazywa się *wielokątem sferycznym* część powierzchni sferycznej zamknięta *łukami kół wielkich*, jako ABCD. Te łuki AB, BC, CD, DA są *bokami* wielokąta, a kąty niemi utworzone i wierzchołki tych kątów są *kątami* i *wierzchołkami* wielokąta sferycznego.

Wielokąt sferyczny nazywa się *wypukłym* gdy leży cały na jednem półsferzu względem każdego ze swoich boków.

W wielokącie sferycznym wypukłym, każdy bok jest mniejszy od półokręgu koła wielkiego.



Jakoż, niech będzie wielokąt ABCD w którym bok AHD jest większy od półokręgu. Jeśli weźmiemy na tym boku łuk AHK równy półokręgowi, widzimy łatwo że okrąg do którego należy bok AB ma za średnicę linię AK; zatem ten okrąg ABK przedziela dany wielokąt na dwie części, z których jedna leży z jednej strony boku AB a druga z drugiej. Więc taki wielokąt sferyczny nie jest wypukły.

Wielokąt sferyczny mający trzy boki jest *trójkątem sferycznym.*

Uważać będziemy same tylko trójkąty sferyczne wypukłe, jako najprostsze, których *wszystkie boki są mniejsze od półokręgu.* Trójkąty sferyczne niewypukłe, mając kąty większe od dwóch prostych byłyby niedogodne ; i nawet niepotrzebne; bo, znając trójkąt wypukły na danej sferze, łatwo wyznaczyć inne.

Trójkąt sferyczny jest *równoramienny, równoboczny, równokątny, prostokątny* tak jako trójkąt prostolinijny.

Czworobok sferyczny równoboczny nazywa się *ukośnikiem* sferycznym.

Wielokąt sferyczny zarazem równoboczny i równokątny jest *foremny*.

Czworobok sferyczny *foremny* nazywa się KWADRATEM SFERYCZNYM.

Płasczyzny boków wielokąta sferycznego ABCD (*figura przedostatnia*) wyznaczają we środku sfery O kąt wielościenny OABCD, którego kąty dwójścienne są kątami tego wielokąta, a jego ściany AOB, BOC,... mają za miary boki AB, BC,... odpowiedające wielokąta sferycznego.

Ten związek wielokąta sferycznego z kątem wielościennym pokazuje że, *na każde twierdzenie kąta wielościennego odpowieda twierdzenie wielokąta sferycznego*, i NAWZAJEM. Zatem, z własności jednej figury można wywieśdź własności drugiej; co ułatwia poszukiwania.

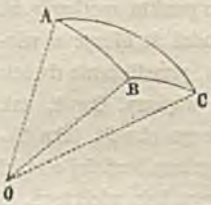
Jeśli przedłużymy krawędzie kąta wielościennego OABCD, utworzymy kąt wielościenny OA'B'C'D' symetryczny, który wyznaczy na sferze wielokąt A'B'C'D' symetryczny wielokąta ABCD.

Jako widzimy, dwa wielokąty sferyczne symetryczne mają boki i kąty równe każdy każdemu, ale w porządku odwrotnym ułożone, i dlatego takie wielokąty nie są, w ogólności przystawalne.

Aby trójkąt sferyczny mógł przystać do swego symetrycznego, trzeba i dość jest żeby był *równoramienny*.

TWIERDZENIE XII.

W trójkącie sferycznym, każdy bok jest mniejszy od summy dwóch innych, a większy od ich różnicy.



Jeśli połączymy wierzchołki trójkąta sferycznego ABC ze środkiem O sfery, utworzymy trójścian OABC, którego ściany AOB, AOC, BOC mają za miary boki AB, AC, BC tego trójkąta. Owoż, w trójścianie OABC ciana AOB jest mniejsza od summy dwóch innych AOC i BOC, a większa od ich różnicy; więc

$$AB < AC + BC, \quad a \quad AB > AC - BC \quad i \quad AB > BC - AC.$$

WNIOSEK. — Jeśli w trójkącie sferycznym ABC połączono punkt wewnętrzny D ze skrajnościami boku BC łukami kół wielkich BD i CD, będzie

$$BD + DC < BA + AC.$$

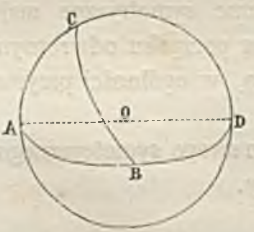
Dowodzenie jako w geometryi płaskiej

TWIERDZENIE XIII.

Obwód trójkąta sferycznego, a ogólnie obwód wielokąta sferycznego WYPUKŁEGO, *jest mniejszy od okręgu koła wielkiego.*

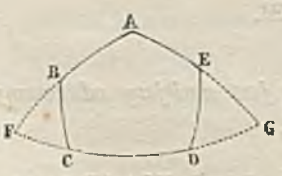
Bo summa ścian kąta wielościennego odpowiedającego jest mniejsza od czterech kątów prostych (VI, 40).

UWAGA. — Można wprost dowieśdź tego twierdzenia.



1° W trójkącie sfezycznym ABC przedłużmy dwa boki AB, AC aż do spotkania D. Łuki ABD, ACD, są półokręgami (4 *wn.*). Owoż, w trójkącie BCD, bok $BC < BD + CD$; więc, dodając po obydwóch stronach summę $BA + AC$, otrzymamy

$$AB + AC + BC < ABD + ACD.$$



Co dowodzi że obwód trójkąta sferycznego ABC jest mniejszy od okręgu koła wielkiego.

2° Niech będzie wielokąt sferyczny *wypukły* ABCDE.

Jeśli przedłużymy dwa boki AB i DC, przyległe bokowi BC, aż do punktu spotkania F, będzie w trójkącie BCF, $BC < BF + CF$. To dowodzi że,biorąc w wielokącie sferycznym wypukłym, zamiast jednego boku, przedłużenia dwóch przyległych, otrzymuje się wielokąt mający obwód większy. Owoż, tak działając dochodzi się aż do trójkąta sferycznego którego obwód, jako dowiedziono, jest mniejszy od okręgu koła wielkiego; więc tem bardziej obwód wielokąta sferycznego wypukłego jest mniejszy od okręgu koła wielkiego.

Twierdzenie XIV.

Najkrótszą drogą z jednego punktu do drugiego na sferze jest łuk mniejszy koła wielkiego który je łączy.

Między liniami które na powierzchni sferycznej poprowadzić można z jednego punktu A do drugiego B, jest oczywiście przy-

Fig. 1.

Fig. 2.

najmniej jedna od której niema krótszej. Przypuśćmy tedy że tą jedną z najkrótszych jest linia ACDB, różna od łuku AB koła wielkiego.

Na łuku AB weźmy punkt M nie należący do linii ACDB, i z punktu A jako bieguna, promieniem sferycznym AM, nakreślmy łuk koła który przetnie linię ACDB w punkcie N; po czem, poprowadźmy łuki wielkich kół AN i BN, Będzie, w trójkącie sferycznym ABN,

$$AB < AN + BN \quad \text{albo} \quad AM + BM < AN + BN.$$

Owoż, łuki AM i AN kół wielkich są równe (5), odejmując je od obydwóch stron powyższej nierówności, zostaje $BM < BN$; jeśli więc, z punktu B jako bieguna i promieniem sferycznym BM, nakreślimy koło, jego okrąg przetnie linię BDN w punkcie P między B i N.

Teraz uważajmy że, ponieważ łuki AN i AM kół wielkich są równe, i łuki BP, BM kół wielkich są także równe, można, obracając te łuki około ich biegunów A i B, przywieśdź punkta

N i P do M; tym sposobem linie ACN i BDP wezmą położenia AC'M i BD'M. Więc linia AC'MD'B, łącząca punkta A i B na sferze jest krótsza łukiem NP od linii ACNPDB którąśmy wzięli za jedną z najkrótszych. Ztąd wynika że wszystkie punkta łuku AB koła wielkiego muszą należeć do najkrótszej drogi z punktu A do B na sferze; więc temsamem łuk AB jest tą najkrótszą drogą.

Dowodzenie przypuszcza że łuk AB koła wielkiego jest mniejszy od półokręgu.

Uważajmy teraz przypadek w którym ten łuk jest półokręgiem koła wielkiego, i niech będzie (*fig.* 2), jeśli można, AMB najkrótsza droga od A do B na sferze. Przez średnicę AB poprowadźmy okrąg przecinający linię AMB w punkcie M. Ponieważ łuki AM i BM koła wielkiego są mniejsze od półokręgu, każdy z nich jest mniejszy od odpowiedającej części linii AMB; zatem półokrąg AB koła wielkiego jest mniejszy od całej linii AMB.

Ztąd wnosimy że, jakiekolwiek są dwa punkta A i B na sferze, najkrótszą drogą z jednego do drugiego jest mniejszy z dwóch łuków koła wielkiego które je łączą. Ale, gdy punkta A i B są *średnicowo* przeciwległe (to jest skrajnościami jednej średnicy), wtedy jest nieskończona liczba najkrótszych dróg od jednego z tych punktów do drugiego na sferze, i te najkrótsze drogi są półokręgami kół wielkich.

Określenie XIII. — Mniejszy z dwóch łuków koła wielkiego które łączą dwa punkta na sferze, jest ODLEGŁOŚCIĄ SFERYCZNĄ *tych dwóch punktów.*

Powyższe twierdzenie pokazuje że łuki kół wielkich są tem na sferze czem linie proste na płaszczyznie. To widać z resztą *a priori*; albowiem, jeśli promień sfery rośnie do nieskończoności, sfera staje się płaszczyzną, a łuki kół wielkich liniami prostemi.

Na mocy tej uwagi, *styczną sferyczną do krzywej sferycznej w danym punkcie* jest ostatnie położenie jakie bierze łuk koła wielkiego poprowadzony przez ten punkt i przez punkt sąsiedni; gdy ten drugi dążąc do pierwszego z nim się schodzi.

Podobnie, sieczną sferyczną, cięciwą sferyczną, prostopadłą sferyczną,... są łuki kół wielkich.

Linia sferyczna jest *wypukła* gdy leży cała na jednem półsferzu względem stycznej sferycznej każdego jej punktu. Okrąg koła wielkiego nie może spotykać krzywej sferycznej wypukłej w więcej niż dwóch punktach, i jego łuk mniejszy łączący dwa punkta przecięć jest *wewnątrz* tej krzywej.

Jeśli z wierzchołków trójkąta sferycznego jako biegunów nakreślimy okręgi kół wielkich, te okręgi podzielą powierzchnię sferyczną na *osiem* trójkątów sferycznych takich, że wierzchołki każdego z nich będą biegunami boków tego trójkąta. I tak, niech będzie trójkąt sferyczny ABC; z jego wierzchołków A, B, C jako biegunów, nakreślmy okręgi kół wielkich B'C'B''C'', C'A'C''A'', A'B'A''B''; te linie podzielą powierzchnię sferyczną na osiem trójkątów sferycznych, z których cztery są nad płaszczyzną A'B'A'' a cztery inne pod nią; to jest trójkąty C'A'B', C'B'A'', C'A''B'', C'B''A', i C''A'B', C''B'A'', C''A''B'', C''B''A'.

Wierzchołki tych ośmiu trójkątów są biegunami boków trójkąta ABC. Jakoż, uważajmy na przykład dwa trójkąty ABC i A'B'C'. Ponieważ wierzchołek B jest biegunem koła wielkiego A'C', odległość sferyczna BA' jest ćwiercianem; tak samo, ponieważ wierzchołek C jest biegunem koła wielkiego A'B', odległość sferyczna CA' jest także ćwiercianem; więc wierzchołek A', odległy na ćwiercian od każdego z wierzchołków B i C, jest biegunem boku BC. Dowiedzie się podobnie że wierzchołek B' jest biegunem boku AC, i wierzcołek C' biegunem boku AB.

Z wyłuszczonych ośmiu trójkątów sferycznych najważniejszy jest trójkąt A'B'C', który się tem odróżnia od innych że, względem trójkąta ABC, jego wierzchołek A' jest z tej samej strony boku BC co wierzchołek A, i podobnie wierzchołki B', C' z tej samej strony odpowiedających boków AC, AB co wierzchołki B, C.

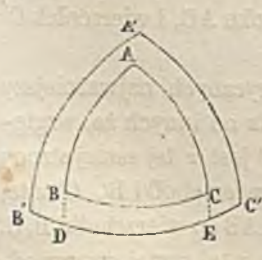
Nawzajem, wierzchołki trójkąta ABC są z tej samej strony odpowiedających boków trójkąta A'B'C' co wierzchołki A', B', C'. Jakoż, uważajmy dwa wierzchołki C i C'. Ponieważ przypuszczamy że te dwa wierzchołki są oba z jednej strony boku AB, to jest oba na jednem półsferzu, wyznaczonem przez wielkie koło AB które ma za biegun wierzchołek C', odległość sferyczna CC' jest mniejsza od ćwiercianu. Więc wierzchołki C i C' są oba z jednej strony okręgu koła wielkiego A'B' która ma za biegun wierzchołek C. Dowiedzie się podobnie że wierzchołki A i B są z tej samej strony odpowiedających boków B'C' i A'C' co wierzchołki A' i B'.

Dla tej cechującej własności, nazwano dwa trójkąty sferyczne ABC i A'B'C' *trujkątami biegunowemi*, wyłączając inne które to imie zdawałoby się oznaczać.

Dwa trójściany OABC, OA'B'C', odpowiedające trójkątom biegunowym ABC, A'B'C', są spełniające. Albowiem, z przyczyny że punkt C' jest biegunem łuku AB i odległość CC' jest mniejsza od ćwiercianu, krawędź OC' jest prostopadła do ściany AOB i skierowana w tę samą stronę co krawędź OC; tak samo co do krawędzi OB' i OA' (VI, 40). Ztąd wynika że każdy bok jednego z trójkątów biegunowych ABC, A'B'C' jest spełnieniem kąta przeciwległego w drugim trójkącie. Dlatego też dwa trójkąty biegunowe są *trójkątami spełniającemi*. Ta główna własność trójkątów biegunowych stanowi następujące twierdzenie.

Twierdzenie XV.

Gdy dwa trójkąty ABC, A'B'C' *są biegunowe, każdy kąt jednego z nich ma za miarę przewyżkę półokręgu koła wielkiego nad bokiem przeciwległym drugiego.*



Uważając naprzykład kąt A, przedłużmy jego ramiona aż do spotkań D i E z bokiem B'C'. Ponieważ wierzchołek A jest biegunem łuku B'C', kąt A ma za miarę łuk DE (6). Owoż, łuki B'E i C'D są ćwiercianami, dlatego że B' jest biegunem łuku AC i C' biegunem łuku AB; zatem

$$DE = B'E + DC' - B'C' = \tfrac{1}{2} \text{ okrąg} - B'C'.$$

Dowiedzie się podobnie że każdy z dwóch innych kątów B i C trójkąta ABC ma za miarę półokrąg koła wielkiego zmniejszony bokiem przeciwległym w trójkącie A'B'C'.

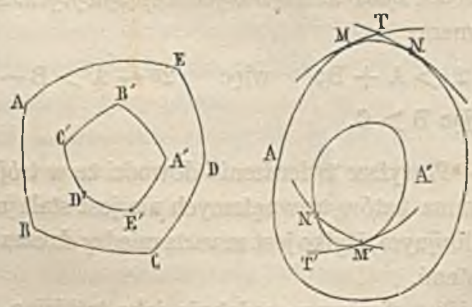
Trójkąty biegunowe ABC i A'B'C' otrzymują się jeden z drugiego jednakowem wykreśleniem; ztąd wynika że własność dowiedziona w jednym jest temsamem dowiedziona w drugim. Więc, nawzajem, każdy z kątów A', B', C', ma za miarę półokrąg zmniejszony bokiem przeciwległym w trójkącie ABC. Czego z resztą nie trudno wprost dowieśdź.

Powyższa własność trójkątu A'B'C' należy także do jego symetrycznego A''B''C''; ale nie należy do innych sześciu niby biegunowych. Co widoczne.

Uwaga. — Własności trójkątów biegunowych rozciągają się do wielokątów sferycznych i do linij krzywych sferycznych.

Jakoż, niech będzie wielokąt sferyczny wypukły ABCDE; jeśli z dwóch biegunów łuku AB koła wielkiego weźmiemy biegun będący na tem samem półsferzu co wielokąt ABCDE, i tak samo bieguny B', C', D', E' boków BC, CD, DE, EA, otrzymamy *wielokąt* A'B'C'D'E' *biegunowy* danego ABCDE. Powtarzając wiadome rozumowanie, dowiedzie się że, *nawzajem*, wielokąt ABCDE jest wielokątem biegunowym otrzymanego A'B'C'D'E'; nadto, *w dwóch wielokątach biegunowych, każdy kąt jednego z nich ma za miarę spełnienie boku mającego za biegun wierzchołek tego kąta w drugim.*

Niech będzie teraz AM krzywa sferyczna *wypukła* ; jeśli, w jakimkolwiek



jej punkcie M, poprowadzimy styczną sferyczną MT (Określ. XIII) i weźmiemy biegun M' tej stycznej, będący na tem samem półsferzu co krzywa AM. miejscem geometrycznem punktu M' będzie *krzywa biegunowa* A'M' krzywej AM. I *nawzajem*, krzywa AM jest *krzywą biegunową linii* A'M'. Bo, ponieważ punkt M' jest biegunem stycznej sferycznej MT, jeśli punkt N', sąsiedni punktu M', jest biegunem stycznej sferycznej NT do krzywej AM, w punkcie N sąsiednim punktu M, wtedy punkt T jest biegunem siecznej sferycznej M'N'; a gdy punkt N schodzi się z M, punkt T schodzi się z nim także, i sieczna M'N' staje się styczna sferyczną M'T' w punkcie M' do krzywej A'M'. Więc punkt M jest biegunem stycznej M'T', i temsamem krzywa AM jest *krzywą biegunową* krzywej A'M'.

Dwie figury sferyczne biegunowe są figurami spółwzględnemi, to jest na każdy punkt jednej odpowieda łuk koła wielkiego w drugiej, i nawzajem; tak że, jeśli trzy punkta pierwszej są na okręgu koła wielkiego, trzy łuki kół wielkich odpowiedające w drugiej przechodzą przez jeden punkt, biegun tego okręgu. Tym sposobem każde twierdzenie jednej figury daje zaraz odpowiedające twierdzenie w drugiej.

Twierdzenie XVI.

W trójkącie sferycznym, 1° *Summa trzech kątów jest zawarta między* DWOMA i SZEŚCIOMA *kątami prostemi.* 2° *Każdy kąt powiększony dwoma prostemi jest większy od summy dwóch innych.*

Dowodzenie za pomocą trójkąta biegunowego, jako w trójściannie za pomocą trójścianu spełniającego.

Wniosek. — *Kąt zewnętrzny trójkąta sferycznego jest większy od różnicy dwóch kątów wewnętrznych nieprzyległych.* Albowiem, na mocy 2° mamy

$$C + 2 > A + B; \qquad \text{więc} \qquad 2p - A > B - C;$$

przypuszczając $B > C$.

Uwaga. — Powyższe twierdzenie dowodzi że w trójkącie sferycznym summa kątów wewnętrznych nie jest stała jako w trójkącie prostolinijnym, i tylko jest zawarta między *dwoma* i *sześcioma* kątami prostemi.

Zatem, trójkąt sferyczny, podobnie jako trójścian, może być *prostokątny*, *dwójprostokątny*, albo *trójprostokątny*; to jest, mieć jeden, dwa albo trzy kąty proste; i może nawet mieć wszystkie trzy kąty rozwarte.

W trójkącie dwójprostokątnym, boki kąta prostego są ćwiercianami a jego wierzchołek biegunem boku przeciwległego (5).

W trójkącie trójprostokątnym wszystkie boki są ćwiercianami.

RÓWNOŚĆ WIELOKĄTÓW SFERYCZNYCH.

Twierdzenie XVII.

Dwa trójkąty sferyczne, leżące na jednej sferze albo na dwóch sferach równych, *są równe* albo *symetryczne :*

1° *Gdy mają bok równy* PRZYLEGŁY *dwom kątom równym każdy każdemu.*

2° *Gdy mają kąt równy* ZAWARTY *między dwoma bokami równemi każdy każdemu.*

3° *Gdy mają trzy boki równe każdy każdemu.*

4° *Gdy mają trzy kąty równe każdy każdemu.*

Te twierdzenia są następstwem podobnych twierdzeń w trójścianach.

Ale można ich wprost dowieśdź. I tak, jeśli części równe dwóch trójkątów są podobnie ułożone, dowiedzie się paragrafów 1° i 2° przez przystawanie; można nawet przywieśdź paragraf 2° do 1° posługując się trójkątem biegunowym. Aby dowieśdź paragrafu 3°, najprościej jest, powtarzając rozumowanie geometryi płaskiej, okazać najpierwej twierdzenie :

Gdy dwa trójkąty sferyczne mają dwa boki równe każdy każdemu, ZAWIERAJĄCE *kąt nierówny, wtedy naprzeciw kąta mniejszego leży bok mniejszy;* I NAWZAJEM.

Po czem, dowodzenie paragrafu 3° nie przedstawia żadnej trudności. Co do paragrafu 4°, przywodzi się go do 3° za pomocą trójkąta biegunowego.

Jeśli części równe dwóch trójkątów są odwrotnie ułożone, trzeba wziąć trójkąt symetryczny jednego z tych trójkątów, aby mieć dwa trójkąty przystawalne; wtedy dwa zadane trójkąty będą symetryczne.

Takim samym sposobem dowodzi się następujących, ogólnych twierdzeń.

Twierdzenie XVIII.

Dwa wielokąty sferyczne mające n boków, na jednej sferze albo na dwóch sferach równych, są *równe* albo *symetryczne* :

1° *Gdy mają $n-2$ boki równe* PO SOBIE IDĄCE I PRZYLEGŁE *$n-1$ kątom równym każdy każdemu.*

2° *Gdy mają $n-1$ boków równych* ZAWIERAJĄCYCH *$n-2$ kątów równych każdy każdemu.*

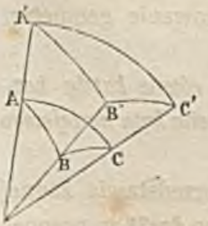
3° *Gdy są* RÓWNOBOCZNE *między sobą i mają $n-3$ kątów równych każdy każdemu.*

4° *Gdy są* RÓWNOKĄTNE *między sobą i mają $n-3$ boków równych kazdy każdemu.*

Ostatni paragraf przywodzi się do poprzedzającego przez wielokąt biegunowy.

Wniosek. — Powyższe cztery twierdzenia mają odpowiedające w kątach wielościennych którym służą za dowód.

Trójkąty sferyczne podobne. — Dwa trójkąty sferyczne które, leżąc na dwóch sferach *nierównych*, mają boki proporcyonalne zawierające kąty równe, nazywają się *podobnemi*.



Kąt trójścienny OABC, mający wierzchołek we środku O dwóch sfer spółśrodkowych, wyznacza na ich powierzchniach dwa trójkąty podobne ABC, A'B'C'.

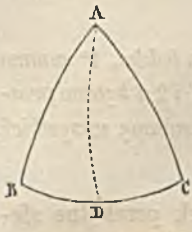
Bo te trójkąty są oczywiście równokątne między sobą; a ich boki, jako łuki podobne, są proporcyonalne do promieni OA, OA', i temsamem proporcyonalne między sobą; co daje

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

Ztąd wynika że dwa trójkąty sferyczne *równokątne między sobą* są równe albo podobne, według jak należą do jednej sfery albo do dwóch sfer nierównych.

TWIERDZENIE XIX.

W trójkącie sferycznym równoramiennym ABC, *kąty* B i C *przeciwległe bokom równym są równe.* INAWZAJEM.



Połączmy wierzchołek A ze środkiem D podstawy BC łukiem koła wielkiego AD. Dwa trójkąty sferyczne ADB, ADC, mające trzy boki równe każdy każdemu, są symetryczne; więc kąty B i C są równe.

NAWZAJEM, *trójkąt sferyczny mający dwa kąty równe ma boki przeciwległe tym kątom równe, i jest równoramienny.*

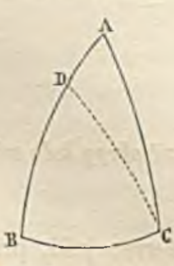
Dowodzenie jako w geometryi płaskiej, albo przez trójkąt biegunowy.

WNIOSEK. — Trójkąt sferyczny równoboczny jest zarazem równokątny, i nawzajem.

UWAGA. — Z symetryi dwóch trójkątów sferycznych ADB, ADC wynika że kąty przy D są *proste*, i kąty przy wierzchołku A są równe. *Więc, w trójkącie sferycznym równoramiennym, łuk koła wielkiego łączący wierzchołek ze środkiem podstawy jest prostopadły do tej podstawy, i dzieli kąt wierzchołkowy na dwie równe części.*

TWIERDZENIE XX.

W trójkącie sferycznym, na przeciw kąta mniejszego leży bok mniejszy; I NAWZAJEM.



Jeśli w trójkącie sferycznym ABC, kąt B jest mniejszy od kąta ACB, bok AC jest także mniejszy od boku AB.

Jakoż, zróbmy kąt BCD równy kątowi B, trójkąt BCD będzie równoramienny; więc boki CD i BD są równe.

Owoż, w trójkącie ACD; AC $<$ AD $+$ DC; więc AC $<$ AB.

Wzajemnica oczywista.

Uwaga. — Możnaby złączyć w jedno dwa powyższe twierdzenia, i dowieśdź sposobem użytym w *księdze* VI, *tw.* 46.

Twierdzenie XXI.

W wielokącie sferycznym WYPUKŁYM *mającym n boków*, 1° *summa kątów wewnętrznych jest zawarta między* 2 (*n*—2) *i* 2 *n kątami prostemi; 2° każdy kąt jest większy od różnicy między summą wszystkich innych i summą* 2 (*n* — 2) *kątów prostych.*

Co do 1°. Prowadząc przez jeden wierzchołek przekątne sferyczne do wszystkich innych, rozłożymy wielokąt sferyczny na *n* — 2 trójkątów sferycznych. Owoż, w każdym z tych trójkątów summa kątów jest większa od dwóch kątów prostych; więc summa wszystkich kątów wewnętrznych wielokąta sferycznego wypukłego jest większa od 2 (*n* — 2) kątów prostych.

Co do 2°; ponieważ wielokąt sferyczny jest wypukły, każdy jego kąt jest mniejszy od *dwóch* kątów prostych; więc summa wszystkich *n* kątów wewnętrznych jest mniejsza od 2*n* kątów prostych.

Wniosek. — *W wielokącie sferycznym* WYPUKŁYM, *summa kątów zewnętrznych jest mniejsza od* CZTERECH *kątów prostych.* Dowodzenie jako w wielokątach prostolinijnych.

Ztąd ważne wynika następstwo : *Żaden wielokąt sferyczny* WYPUKŁY *nie może mieć więcej niż* TRZY *kąty ostre.*

Twierdzenie XXII.

Przez punkt A *sfery można zawsze poprowadzić okrąg koła wielkiego prostopadły do danego okręgu* BCD.

Niech będzie jakikolwiek okrąg BCD na sferze; jeśli, przez punkt A i przez biegun G tego okręgu, poprowadzimy koło wiel-

kie, jego okrąg AFG będzie prostopadły do okręgu BCD w punktach C i E (5).

Ten okrąg AFG koła wielkiego, prostopadły do okręgu BCD, jest oczywiście jedyny, jeśli punkt A nie jest biegunem okręgu BCD.

Uwaga. — Z punktu danego na okręgu koła wielkiego, można zawsze wyprowadzić prostopadłę sferyczną, i tylko jednę. Ale, z punktu danego zewnątrz okręgu koła wielkiego, można spuścić na ten okrąg dwie prostopadłe sferyczne które są łukami jednego koła.

Twierdzenie XXIII.

Jeśli z punktu O sfery spuścimy, na okrąg koła wielkiego AB, łuk OC, koła wielkiego prostopadły i *mniejszy od ćwiercianu*, i różne łuki kół wielkich pochyłe OD, OE, OF, wtedy

1° *Dwa łuki pochyłe* OD i OE, *równo oddalone od spodka* C *łuku prostopadłego, są równe.*

2° *Łuk prostopadły* OC *jest mniejszy od wszelkiego łuku pochyłego* OD.

3° *Z dwóch łuków pochyłych* OD, OF *ten jest mniejszy który się mniej oddala od spodka łuku prostopadłego.*

I nawzajem.

Na łuku prostopadłym OC weźmy długość $CO' = CO$, i poprowadźmy łuki kół wielkich DO′, EO′, FO′, będzie:

Co do 1°, dwa trójkąty sferyczne COD i COE, mające kąty przy C proste, bok CO spólny i bok $CD = CE$ z założenia, są symetryczne; więc łuki pochyłe OD i OE są równe.

Co się tyczy dwóch innych paragrafów i wzajemnic, dowodzenie jako w geometryi płaskiej; trzeba tylko co do 3° oprzeć się na wniosku *tw.* XII.

Wniosek I. — Łuk prostopadły OC jest najkrótszą linią, jaką na sferze poprowadzić można z punktu O do okręgu koła wielkiego AB; dlatego *długość łuku OC nazywa się* ODLEGŁOŚCIĄ SFERYCZNĄ *punktu O od tego okręgu.*

Zatem, łuk OPC′ jest najdłuższy ze wszystkich łuków kół wielkich które idą od punktu O do okręgu koła wielkiego AB.

Na sferze z jednego punktu do okręgu koła wielkiego dwa tylko łuki pochyłe równe poprowadzić można.

II. — *Miejscem geometrycznem punktów sfery, równo oddalonych od dwóch punktów jej powierzchni, jest łuk koła wielkiego prostopadły we środku odległości sferycznej tych dwóch punktów.*

Twierdzenie XXIV.

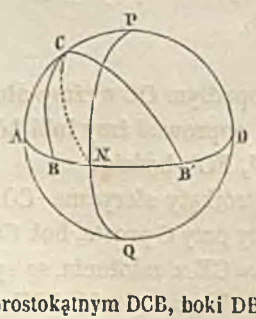
Dwa trójkąty sferyczne prostokątne, leżące na jednej sferze, albo na dwóch sferach równych, są *równe* albo *symetryczne* :

1° *Gdy mają przeciwprostokątne równą i bok równy.*

2° *Gdy mają przeciwprostokątne równą i kąt pochyły równy.*

Dowodzenie jako w geometryi płaskiej.

Uwaga. — 1° *W trójkącie sferycznym prostokątnym jest zawsze jeden bok mniejszy od ćwiercianu, albo wszystkie trzy.* Jakoż, niech będą trzy koła



wielkie ABD, ACD, PNQ prostopadłe między sobą; na ćwiercianie AP weźmy punkt C, i poprowadźmy łuki kół wielkich CB, CN, CB′. W trójkącie prostokątnym ABC, bok AC jest mniejszy od ćwiercianu i, jeśli punkt B leży między A i N, oba boki AB, CB są mniejsze od ćwiercianu; a jeśli punkt B staje się B′, wtedy oba boki AB′ i CB′ są oczywiście większe od ćwiercianu. Tak samo w trójkącie prostokątnym DCB, boki DB i DC są oba większe od ćwiercianu, a zaś bok CB mniejszy od ćwiercianu; ale jeśli punkt B staje się B′, wtedy bok DB′ jest mniejszy od ćwiercianu, a zaś boki DC i CB′ są oba większe od ćwiercianu. Widzimy więc że w trójkącie sferycznym prostokątnym liczba boków większych od ćwiercianu jest *parzysta.*

2° *W trójkącie sferycznym prostokątnym każdy kąt pochyły jest tego samego gatunku co bok przeciwległy.* Jakoż, w trójkącie sferycznym prostokątnym ABC, kąt ACB i bok przeciwległy AB są oba mniejsze od 90°; a zaś w trójkącie sferycznym prostokątnym ACB′, kąt ACB′ i bok przeciwległy AB′ są oczywiście oba większe od 90°.

TWIERDZENIE XXV.

Łuk koła wielkiego dwójsieczny kąta sferycznego jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od jego ramion.

Dowodzenie jako w geometryi płaskiej. *Zob.* Ks. I, *tw.* 15.

TWIERDZENIE XXVI.

W czworoboku sferycznym wpisanym w koło, summa dwóch kątów przeciwległych równa się summie dwóch innych. I NAWZAJEM.

Niech będzie P biegun małego koła w które jest wpisany czworobok sferyczny ABCD. Poprowadźmy łuki kół wielkich PA, PB, PC, PD, tworzymy cztery trójkąty sferyczne równoramienne. Więc będzie
Kąt PAB + PCB = B, kąt PAD + PCD = D;
zkąd, dodając, otrzymujemy

$$A + C = B + D.$$

NAWZAJEM, *czworobok sferyczny* ABCD, *w którym summa dwóch kątów przeciwległych równa się summie dwóch innych, jest wpisalny.*

Jakoż, przez trzy wierzchołki A, B, C czworoboku, poprowadźmy okrąg koła i promienie sferyczne PA, PB, PC; połączmy punkta P i D łukiem koła wielkiego. Trójkąty równoramienne PBA, PBC dają

kąt PAB = PBA, PCB = PBC; zatem PAB + PCB = B.
Ale z założenia A + C = B + D, więc kąt PAD + PCD = ADC.

To równanie pokazuje że łuk PD nie może być ani mniejszy ani większy od promienia sferycznego PA; bo, w pierwszym razie byłby kąt $PAD < PDA$ i kąt $PCD < PDC$, ztąd $PAD + PCD < ADC$; a w drugim byłoby $PAD + PCD > ADC$, co niemożebne z przyczyny ostatniego równania. Więc $PD = PA$, to jest koło ABC przechodzi przez wierzchołek D.

Wniosek. — *Jeśli trójkąty sferyczne* ABC, ABC′,... *wpisane w jedno koło mają spólną podstawę, różnica summy kątów przy podstawie i kątem przy wierzchołku, to jest* $BAC + ABC - C$, *jest stała.*

Jakoż, połączmy punkt D łuku AB ze skrajnościami podstawy łukami kół wielkich DA, DB; będzie, w czworoboku sferycznym wpisanym ABCD,

$$BAD + BAC + ABD + ABC = C + D,$$

zkąd

$$BAC + ABC - C = D - BAD - ABD.$$

Tak samo w czworoboku ADBC′,

$$BAC' + ABC' - C' = D - BAD - ABD.$$

Więc $$BAC + ABC - C = BAC' - ABC' - C'.$$

Twierdzenie XXVII.

Miejscem geometrycznem wierzchołka C *trójkątów sferycznych* ABC, *mających spólną podstawę* AB, *i tę samą różnicę między summą kątów* $A + B$ *przy podstawie i kątem* C *przy wierzchołku, jest łuk koła małego które przechodzi przez skrajności podstawy.*

To twierdzenie jest wzajemnicą wniosku twierdzenia poprzedzającego; ale można go łatwo wprost dowieśdź. Niech będzie ABC trójkąt zadość czyniący zadaniu, i P biegun koła opisanego. Trójkąty PAB, PAC, PBC są równoramienne; zatem różnica

$$(A + B) - C = PAB + PBA = 2PAB.$$

To dowodzi że kąt PAB jest stały; więc trójkąt ABP równoramienny jest stały, i jego wierzchołek P także stały, a temsamem odległość PC = PA jest stała. Ztąd wynika że wierzchołek C jest na okręgu mającym punkt P za biegun i odległość PA za promień sferyczny.

Uwaga. — To twierdzenie ma pewne podobieństwo z Tw. 20, Ks. II; albowiem, gdy w trójkącie prostolinijnym dany jest kąt przy wierzchołku C, wtedy wiadoma jest summa A + B i temsamem różnica A + B — C.

Wielokąty sferyczne foremne. — *Istnieją wielokąty sferyczne foremne wszelkiej liczby boków.* Jakoż, wyobraźmy okrąg małego koła podzielony na n równych części, i przez punkta podziału poprowadzimy łuki kół wielkich, utworzymy wielokąt foremny mający n boków. Wszystkie boki są równe, jako cięciwy sferyczne podpasujące łuki równe jednego koła. Wszystkie kąty są także równe; bo, jeśli poprowadzimy łuki AC i BE kół wielkich, dwa trójkąty ABC, ABE będą równe; zatem kąt B=A.

Są także wielokąty sferyczne *gwiazdziste foremne;* etc.

Twierdzenie XXVIII.

Jeśli z punktu A sfery spuścimy na okrąg koła małego BCD łuki kół wielkich: normalne AB, AB′, i pochyłe AC, AD, AE, wtedy:

1° *Dwa łuki pochyłe* AC *i* AD, *równo oddalone od łuku normalnego są równe.*

2° *Luk pochyły* AC *jest większy od łuku normalnego mniejszego* AB, *ale mniejszy od łuku normalnego większego* AB′.

3° *Z dwóch łuków pochyłych* AC, AE *ten jest mniejszy który się mniej oddala od łuku normalnego mniejszego.*

I nawzajem.

Połączmy biegun P koła CBD z punktami C, D, E, łukami kół wielkich.

1° Ponieważ łuki BC i BD małego koła, są równe z założenia, łuki BC i BD wielkich kół są także równe. Zatem dwa trójkąty sferyczne PBC, PBD mające trzy boki równe, są symetryczne; co dowodzi że kąty APC i APD są równe. Ztąd wynika że dwa trójkąty sferyczne ACP, ABP są symetryczne; więc łuki pochyłe AC, AD są równe.

2° W trójkącie sferycznym ACP,

$$AC > CP - AP \quad \text{i} \quad AC < CP + AP;$$

więc

$$AC > AB \quad \text{i} \quad AC < AB'.$$

3° Dwa trójkąty sferyczne ACP, AEP mają kąt APC < APE; bok AP spólny i bok PC = PE; więc AC < AE (17).

Wzajemnice widoczne.

Wniosek. — Na sferze, odległością punktu od okręgu jest łuk normalny mniejszy który łączy ten punkt z okręgiem; odległością dwóch łuków kół jest mniejszy łuk normalny spólny.

ZETKNIĘCIE KÓŁ NA SFERZE.

Twierdzenie XXIX.

Łuk wielkiego koła MT *styczny do małego koła* PM *jest prostopadły do promienia sferycznego w punkcie zetknięcia.*

Przez punkt M i punkt sąsiedni M' poprowadźmy sieczną sferyczną MM', i połączmy środek A cięciwy sferycznej MM' z biegunem P małego koła, łukiem koła wielkiego PA. Łuk PA jest prostopadły do cięciwy MM', jakkolwiek blizko punkt M' dochodzi do M. Owoż, gdy punkt M' schodzi się z M, punkt A schodzi się z nim także, i sieczna MM' staje się styczną sferyczną MT ; więc ta ostatnia jest prostopadła do promienia sferycznego PM.

Wniosek. — Normalna sferyczna do małego koła przechodzi przez jego biegun.

Twierdzenie. — *W małem kole, średnica sferyczna przostopadła do cięciwy sferycznej dzieli tę cięciwę i oba jej łuki na dwie równe części.*

Dowodzenie jako w geometryi płaskiej.

Twierdzenie XXX.

1° *Gdy dwa małe koła przecinają się na sferze, łuk wielkiego koła który przechodzi przez ich bieguny jest prostopadły we środku cięciwy sferycznej spólnej.*

2° *Gdy dwa koła na sferze są styczne, punkt zetknięcia leży na łuku koła wielkiego który przechodzi przez ich bieguny, i w tym punkcie dwa koła mają styczną sferyczną spólną.*

Dowodzenia jako w geometryi płaskiej.

Opierając się na tych twierdzeniach, i oznaczając przez R i R', promienie sferyczne dwóch kół małych, przez d *odległość sferyczną* ich biegunów, łatwo widzimy że :

Jeśli dwa koła są zewnętrzne względem siebie, będzie

$$d > R + R'.$$

Jeśli dwa koła są styczne zewnętrznie, będzie

$$d = R + R'.$$

Jeśli dwa koła przecinają się, będzie

$$R + R' > d > R - R',$$

przypuszczając $R > R'$.

Jeśli dwa koła są styczne wewnętrznie, będzie

$$d = R - R'.$$

Nakoniec, *jeśli jedno koło jest wewnątrz drugiego*, będzie

$$d < R - R'.$$

I nawzajem.

Ale przede wszystkiem trzeba żeby summa $d + R + R'$ była *mniejsza* od okręgu koła wielkiego; ten warunek jest przez się widoczny.

ZAGADNIENIA KSIĘGI ÓSMEJ.

Zagadnienie I.

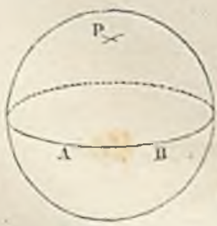
Mając daną sferę znaleźć jej promień.

Z jakiegokolwiek punktu A sfery, jako bieguna, nakreślmy łuk koła DE, i weźmy na nim łuk BD = BE; potem, z punktów D i E jako biegunów, nakreślmy jednym promieniem dwa łuki kół przecinające się w punkcie C. Trzy punkta A, B, C leżą na okręgu wielkiego koła, bo płaszczyzna ABC tych trzech punktów równo oddalonych od D i E przechodzi przez środek O sfery (VI, 8).

Jeśli więc zbudujemy trójkąt mający za boki trzy cięciwy prostolinijne AB, AC, BC, promień koła opisanego na tym trójkącie będzie szukanym promieniem sfery.

Zagadnienie II.

Przez dwa punkta A, B *na sferze poprowadzić okrąg koła wielkiego.*



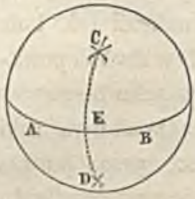
Z danych punktów A, B jako biegunów, otwartością cyrkla równą cięciwie ćwiercianu koła wielkiego, kreślimy dwa łuki kół przecinające się w punkcie P; po czem, z punktu P jako bieguna i tą samą otwartością cyrkla, kreślimy okrąg który jest oczywiście szukanym okręgiem wielkiego koła.

Uwaga I — Jeśli dane punkta A i B są skrajnościami jednej średnicy sfery, zagadnienie jest niewyznaczone; bo łuki kół wielkich, kreślone z punktów A i B jako biegunów, przypadają na okręgu koła wielkiego, którego każdy punkt jest biegunem jednego z wielkich kół mających średnicę AB.

II. — Wykreślenie powyższego zagadnienia daje sposób znalezienia bieguna łuku AB koła wielkiego.

Zagadnienie III.

Podzielić łuk AB *koła wielkiego na dwie równe części.*

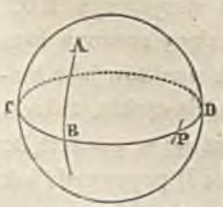


Z punktów A i B jako biegunów i tą samą otwartością cyrkla, nakreśl dwa łuki kół przecinające się w punktach C i D; po czem, przez punkta C i D, poprowadź łuk wielkiego koła który przejdzie przez środek E łuku AB.

Uwaga. — Łuk CD koła wielkiego jest prostopadły do łuku AB koła jakiegokolwiek (28); więc powyższe wykreślenie daje sposób prowadzenia łuku koła wielkiego, prostopadłego we środku łuku koła AB jakiegokolwiek, i podzielenia tego łuku na dwie równe części.

Zagadnienie IV.

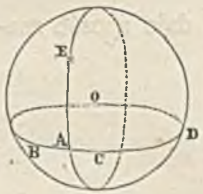
Przez punkt A *na sferze poprowadzić łuk koła wielkiego prosto padły do okręgu koła wielkiego* BC.



Z punktu A jako bieguna kreślimy łuk koła wielkiego aż do spotkania P z okręgiem danym BC; po czem, z punktu P jako bieguna kreślimy łuk koła wielkiego AB. Ten łuk jest prostopadły do danego okręgu koła wielkiego BC; bo ostatni przechodzi przez biegun pierwszego.

ZAGADNIENIE V.

Przez punkt A *dany na sferze poprowadzić łuk koła wielkiego prostopadły do danego okręgu* BCD.



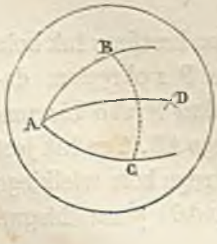
1° *Jeśli punkt* A *jest na danym okręgu* BCD, weź łuk AB = AC i z punktów B i C jako biegunów, tym samym promieniem, nakreśl dwa łuki koła przecinające się w punkcie E; po czem, poprowadź przez punkta A i E łuk koła wielkiego który będzie prostopadły do danego okręgu BCD.

2° *Jeśli punkt* A *jest zewnątrz okręgu* BCD, z punktu A jako bieguna, nakreśl łuk koła przecinający dany okrąg BCD w dwóch punktach C i D; z tych punktów jako biegunów jedną otwartością cyrkla, nakreśl dwa łuki koła przecinające się w punkcie E; nakoniec, przez punkta A i E poprowadź łuk koła wielkiego który będzie prostopadły do danego okręgu BCD.

UWAGA. — Jeśli dany punkt A jest biegunem okręgu BCD, zagadnienie zostaje niewyznaczone; bo wtedy wszelki łuk koła wielkiego przechodzący przez punkt A jest prostopadły do okręgu BCD.

ZAGADNIENIE VI.

Wykreślić łuk dwójsieczny kąta sferycznego.



Z wierzchołka A kąta sferycznego BAC, nakreśl łuk koła przecinający ramiona kąta w punktach B i C. Z tych punktów jako biegunów i tą samą otwartością cyrkla, nakreśl dwa łuki kół przecinające się w punkcie D; po czem, przez punkta A i D poprowadź łuk wielkiego koła który będzie dwójsieczną sferyczną kąta BAC. Bo, dwa trójkąty sferyczne ADB i ADC, mające trzy boki równe każdy każdemu, są równe we wszystkich częściach; więc kąt DAB = DAC.

Zagadnienie VII.

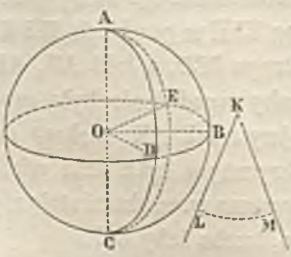
Poprowadzić okrąg przez trzy dane punkta A, B, C *na sferze.*

Biegun P żądanego koła, jako równo oddalony od trzech punktów A, B, C, jest na przecięciu łuków kół wielkich DE i FG, prostopadłych we środku łuków AB i BC (*zag.* 3, *uw.*). Wyznaczywszy biegun P, kreśli się żądane koło otwartością cyrkla równą odległości sferycznej PA.

Uwaga. — Takim samym sposobem znajduje się biegun danego łuku koła małego, biorąc tylko trzy przyzwoite punkta A, B, C na tym łuku.

Zagadnienie VIII.

Przez punkt A, *dany na łuku wielkiego koła* ABC, *poprowadzić łuk wielkiego koła któryby z nim czynił kąt równy danemu* K.

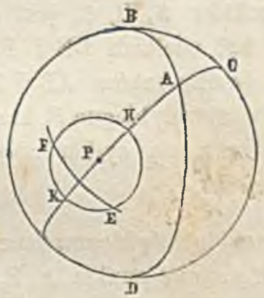


Z wierzchołka kąta danego K jako środka, promieniem sfery, nakreśl łuk koła LM. Z punktu A jako bieguna nakreśl wielkie koło BDE przecinające dany łuk ABC w punkcie B. Z punktu B jako bieguna, cięciwą łuku LM, nakreśl łuk koła spotykający okrąg BDE w dwóch punktach D i E. Nakoniec, poprowadź łuki wielkich kół AD i AE które rozwiążą zagadnienie (6).

Uwaga. — Jeśli dany kąt K jest sferyczny, wtedy rozwiązanie jako w geometryi płaskiej *Ks.* II. *zag.* 3.

Zagadnienie IX.

Przez dany punkt A *na sferze poprowadzić okrąg koła wielkiego któryby czynił z danym okręgiem koła wielkiego* BCD *kąt równy danemu.*



Niech będzie BAD okrąg koła wielkiego który rozwiązuje zagadnienie.

Aby nakreślić ten okrąg, wyznacz najpierwej biegun P danego koła wielkiego BCD; po czem, opisz okrąg EFH, miejsce biegunów okręgów kół wielkich które czynią z okręgiem BCD kąt równy danemu ostremu (6, wn.); nakoniec, z danego punktu A jako bieguna, nakreśl łuk koła wielkiego który przetnie, mówiąc ogólnie, okrąg EFH w dwóch punktach E i F. Każdy z tych punktów będzie oczywiście biegunem okręgu koła wielkiego które zadość czyni zagadnieniu.

Aby wiedzieć warunki możebności zagadnienia, poprowadźmy przez punkt A i przez biegun P, łuk koła wielkiego który przecina okrąg BCD w punkcie C, a okrąg EFH w punktach H i K. Owoż, łuk AC jest prostopadły do okręgu BCD, a łuki AH, AK prostopadłe do okręgu EFH; więc, aby zagadnienie było możebne, trzeba żeby łuk AH był mniejszy a łuk AK większy od ćwiercianu, który jest promieniem sferycznym łuku koła wielkiego nakreślonego z bieguna A. Pierwszemu warunkowi staje się zawsze zadość; aby dopełnić drugiego, trzeba żeby było

$$AP + PK > PA + AC \quad \text{albo} \quad PK > AC.$$

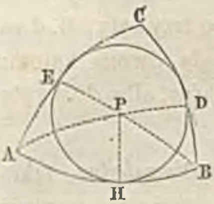
Więc możebność zagadnienia wymaga tylko żeby łuk PK, który mierzy dany kąt ostry, nie był mniejszy od najmniejszej odległości AC punktu A od okręgu BCD.

Zagadnienie ma dwa rozwiązania, albo jedno, albo nie ma żadnego, według jak łuk PK jest większy od odległości AC, albo jej równy, albo od niej mniejszy.

Uwaga. — To zagadnienie służy do zbudowania trójkąta sferycznego w którym wiadome są dwa kąty i bok przeciwległy jednemu z nich.

Zagadnienie X.

Wpisać małe koło w trójkąt sferyczny dany.



Poprowadź łuki AD i BE dwójsieczne kątów A i B; punkt ich przecięcia P, jako równo oddalony od trzech boków trójkąta (25), jest biegunem koła wpisanego które ma za promień sferyczny łuk PH prostopadły do boku AB. Więc kolo, nakreślone z punktu P jako bieguna otwartością cyrkla równą cięciwie łuku PH, będzie styczne do trzech boków trójkąta sferycznego ABC, czyli będzie wpisane w ten trójkąt,

Uwaga. — Gdyby zadano zagadnienie: *nakreślić małe koło styczne do trzech wielkich kół*, ponieważ te koła, przecinając się po dwa, tworzą osiem trójkątów sferycznych, znalezionoby osiem kół stycznych wpisanych w te trójkąty.

Zagadnienie XI.

Na danej sferze wykreślić czworobok wpisalny którego dane są boki.

Dość zbudować na płaszczyźnie czworobok wpisalny mający za boki cięciwy danych boków czworoboku sferycznego (III,27); po czem, wykreślić na sferze koło opisane na czworoboku płaskim, i oznaczyć na niem wierzchołki tego czworoboku; nakoniec, poprowadzić przez te wierzchołki łuki kół wielkich, które utworzą szukany czworobok sferyczny.

Zagadnienie jest zawsze możebne; byle tylko, ma się rozumieć, summa czterech danych łuków była mniejsza od okręgu koła wielkiego sfery, i największy łuk był mniejszy od summy trzech innych.

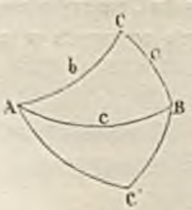
Zagadnienie XII.

Zbudować trójkąt sferyczny, mając dane trzy którekolwiek z jego części (boki i kąty).

Zagadnienie ma sześć przypadków które stanowią trzy dwojany; to jest mogą być dane: I. Trzy boki albo trzy kąty; II. dwa boki i kąt zawarty, albo jeden bok przyległy dwom kątom; III. dwa boki i kąt przeciwległy jednemu z boków, albo dwa kąty i bok przeciwległy jednemu z kątów.

Każdy dwojan zawiera dwa zagadnienia *spółwzględne*, takie że, rozwiązawszy jedno z nich, znajduje się drugie za pomocą trójkąta biegunowego. Mamy więc tylko trzy zagadnienia do rozwiązania.

I. *Dane są trzy boki* a, b, c,



Nakreślmy łuk koła wielkiego, na którym weźmy długość AB równą jednemu z danych boków np c.

Z punktu A jako bieguna otwartością cyrkla równą cięciwie łuku b, nakreślmy łuk koła, i z pnnktu B jako bieguna otwartością cyrkla równą cięciwie boku a, nakreślmy drugi łuk koła który, mówiąc ogólne, przetnie pierwszy w dwóch punktach C i C'; jeśli nakoniec połączymy AC, BC i AC', BC' łukami kół wielkich, dwa trójkąty symetryczne ABC i ABC' rozwiążą zagadnienie.

Aby trójkąt był możebny, trzeba i dość jest żeby dwa nakreślone koła przecinały się; to wymaga, przypuszczając boki a, b, c wyrażone w stopniach i w porządku wielkości $a < b < c$, żeby było (30)

$$c < a + b; \qquad c > b - a \quad \text{i} \quad a + b + c < 360°.$$

Drugiemu warunkowi staje się zadość, na mocy założenia; *więc, aby można zbudować trójkąt sferyczny, mając dane trzy boki, trzeba i dość jest żeby największy z tych boków był mniejszy od summy dwóch innych, i żeby summa trzech boków była mniejsza od okręgu koła wielkiego.* Widzieliśmy już że te warunki są *konieczne* (12 i 13), niniejsze wykreślenie pokazuje że są *dostateczne.*

Zagadnienie, *Zbudować trójkąt sferyczny znając jego trzy kąty* A, B, C, rozwiązuje się za pomocą trójkąta biegnnowego, to jest : kreśli się najpierw trójkąt sferyczny którego boki są wyrażone liczbami 2 — A, 2 — B, 2 — C (biorąc kąt prosty za jedność kątową); po czem, kreśląc trójkąt biegunowy tego trójkąta otrzymuje się trójkąt żądany.

To zagadnienie ma oczywiście dwa rozwiązania, dwa trójkąty symetryczne. Możebność zagadnienia wymaga żeby, przypuszczając $A < B < C$, było

$$2-A < 2-B + 2-C \quad \text{i} \quad 0 < 2-A + 2-B + 2-C < 4.$$

$$\text{albo} \qquad A + 2 > B + C \quad \text{i} \quad 6 > A + B + C > 2.$$

Więc, aby można zbudować trójkąt sferyczny mający trzy dane kąty A, B, C, trzeba i dość jest żeby summa tych kątów była zawarta między *dwoma* i *sześcioma* kątami prostemi, i żeby najmniejszy kąt powiększony *dwoma* prostemi przewyższał summę dwóch innych kątów.

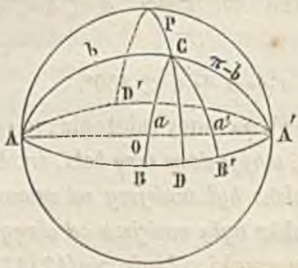
Można było przewidzieć warunki możebności tego i poprzedzającego zagadnienia, uważając odpowiedający trójścian i jego spełniający.

II. *Są dane dwa boki* a *i* b *i kąt zawarty* C, albo *jeden bok* a *przyległy dwom kątom* B i C.

Rozwiązanie jako w geometryi płaskiej.

III. *Są dane dwa boki* a *i* b *i kąt* A *przeciwległy bokowi* a.

Nakreślmy na sferze dwa łuki kół wielkich czyniące kąt równy



danemu A (*zag.* VIII); weźmy ramie AC $= b$, i z punktu C jako bieguna otwartością cyrkla równą cięciwie boku a, nakreślmy łuk koła; jeśli ten łuk przecina w punkcie B drugie ramie kąta A, trójkąt ABC rozwiązuje dane zagadnienie.

Dyskussya. — Przedłużmy ramiona kąta A aż do ich spotkania A', i z punktu C spuśćmy łuk prostopadły CD na ramie AB. Uważajmy że w trójkącie sferycznym prostokątnym ACD *łuk prostopadły* CD *jest mniejszy albo większy od ćwiercianu, według jak kąt przeciwległy* A *jest ostry albo rozwarty*. W pierwszym razie łuk CD jest *najmniejszym*, a w drugim ten łuk jest *największym* łukiem koła wielkiego jaki z punktu C do półokręgu ADA' poprowadzić można (23, wn.).

Na tej uwadze opiera się cała dyskussya trzech głównych przypadków zagadnienia. Biorąc promień sfery za jedność linijną, będzie:

1° *Gdy bok* a *zawiera się między bokiem* b *i jego spełnieniem* $\pi - b$, *zagadnienie jest zawsze możebne jakikolwiek jest kąt* A, *i ma tylko jedno rozwiązanie*. Bo okrąg, nakreślony z punktu C jako bieguna promieniem sferycznym a, przecina jeden z łuków CA albo CA' i przedłużenie drugiego; więc przecina półokrąg ADA' w jednym punkcie B.

2° *Gdy bok* a *nie jest zawarty między* b *i* $\pi - b$, *i zarazem bok* a *z kątem przeciwległym* A *nie są oba jednakowego gatunku, zagadnienie jest niemożebne*. Bo, jeśli $a < b$ i $a < \pi - b$, musi być $a < \frac{1}{2}\pi$ i $A > 90°$, a temsamem $a <$ CD; jeśli zaś $a > b$ i $a > \pi - b$, musi być $a > \frac{1}{2}\pi$ i $A < 90°$, a temsamem $a >$ CD.

W pierwszym razie, łuk a mniejszy od prostopadłej sferycznej większej i mniejszy od łuków pochyłych CA i CA', nie może mieć spodka na półokręgu ADA'; w drugim razie, ten łuk a, większy od prostopadłej sferycznej mniejszej i zarazem większy od dwóch pochyłych CA i CA', nie może także mieć spodka na półokręgu ADA'. Więc zadany trójkąt sferyczny nie istnieje.

Jeśli $a = b$ albo $a = \pi - b$ i bok a z kątem A nie są oba jednakowego gatunku, dowiedzie się tak samo że trójkąt sferyczny jest niemożebny.

3° *Gdy bok* a *nie jest zawarty miedzy* b *i* π — b, *ale ten bok* a *z kątem* A *są oba jednakowego gatunku, zagadnienie ma dwa rozwiązania albo tylko jedno; albo nawet nie ma żadnego.*

Jakoż, przypuszczając $a < b$ i $a < \pi - b$, musi być $a < \frac{1}{2}\pi$ i A $< 90°$; przypuszczając zaś $a > b$ i $a > \pi - b$ musi być $a > \frac{1}{2}\pi$ i A $> 90°$.

W pierwszym razie CD jest prostopadłą sferyczną mniejszą, w drugim prostopadłą sferyczną większą. Więc, jeśli bok a, większy albo mniejszy od obydwóch łuków pochyłych CA i CA', jest zawarty między mniejszą i większą prostopadłą sferyczną, okrąg nakreślony z punktu c jako bieguna promieniem sferycznym a, przecina półokrąg ADA' w dwóch punktach B i B', i trójkąty ACB i ACB' rozwiązują zagadnienie. Ta okoliczność stanowi tak zwany *przypadek wątpliwy*.

Widzimy teraz łatwo że, jeśli bok a jest równy jednej z dwóch prostopadłych sferycznych, wtedy zagadnienie ma tylko jedno rozwiązanie, trójkąt prostokątny ACD. A jeśli bok a jest mniejszy albo większy od obydwóch prostopadłych sferycznych, żądany trójkąt jest oczywiście niemożebny.

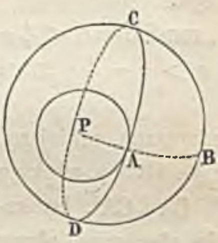
Gdy $a = b$ albo $a = \pi - b$, i zarazem bok a z kątem A są oba jednakowego gatunku, powyższe rozumowanie pokazuje że zagadnienie ma jedno tylko rozwiązanie.

Nakoniec, trzeba uważać szczególny przypadek $a = b = \frac{1}{2}\pi$, w którym, jeśli kąt A jest prosty, szukany trójkąt sferyczny jest dwójprostokątny, i *zagadnienie jest niewyznaczone*; a jeśli kąt A nie jest prosty, zagadnienie jest niemożebne.

Zagadnienie spółwzględne powyższego, to jest: *zbudować trójkąt sferyczny mając dwa kąty* A *i* B *i bok a przeciwległy jednemu z nich,* rozwiązuje się przez trójkąt biegunowy, albo wprost za pomocą zagadnienia IX.

Zagadnienie XIII.

Przez dany punkt A *na sferze poprowadzić styczną sferyczną do małego koła* P.



1° Jeśli dany punkt A jest na okręgu danego koła P, dość paprowadzić, przez ten punkt, łuk koła wielkiego CAD prostopadły do promienia sferycznego PA. Łuk CAD będzie styczną sferyczuą szukaną (29).

2° Dany punkt A jest zewnątrz okręgu da nego koła P.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie AC szukana styczna sferyczna. Biegun B tej stycznej jest oczywiście na kierunku średnicy sferycznej koła P, prostopadłej w punkcie zetknięcia C, i na okręgn koła wielkiego które ma dany punkt A za biegun. Więc, z punktu A jako bieguna, kreślimy łuk koła wielkiego; a potem, z bieguna P, otwartością cyrkla równą cięciwie różnicy między ćwiercianem i promieniem sferycznym koła P, kreślimy drugi łuk koła który przecina pierwszy w dwóch punktach B i B′. Te punkta są biegunami żądanych stycznych sferycznych które się otrzymuje kreśląc z biegunów B i B′ łuki kół wielkich.

Aby znaleźć warunki możebności zagadnienia, weźmy promień sfery za jedność linijną, i oznaczmy przez R promień sferyczny danego koła P. Uważając teraz że promienie sferyczne dwóch kół kreślonych wyrażają się przez $\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\pi - R$, widzimy że przecięcie się tych kół wymaga żeby było (30) :

$$AP < \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi - R, \quad AP > \tfrac{1}{2}\pi - (\tfrac{1}{2}\pi - R), \quad AP + \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi - R < 2\pi.$$

albo $$AP + R < \pi, \quad AP > R, \quad AP - R < \pi.$$

Ostatnia nierówność jest oczywista. Druga pokazuje że dany punkt A musi być zewnątrz danego koła, to jest zewnątrz krymki sferycznej PA; co także widoczne. Ale ten warunek, dostateczny w geometryi płaskiej, na sferze nie wystarcza, i trzeba jeszcze żeby pierwszemu warunkowi $AP + R < \pi$ stało się zadość, to jest trzeba żeby dany punkt A i dane koło P były oba na jednem półsferzu. Jeśli tym warunkom zadość uczyniono, dwie styczne sferyczne AC i AC′ rozwiążą zagadnienie.

Te dwie styczne zlewają się w jedną w przypadku szczególnym $AP + R = \pi$, albo $AP = R$.

Wniosek. — Dwa trójkąty sferyczne prostokątne APC, APC′, mające przeciwprostokątnę równą i bok równy, są symetryczne. Więc *dwie styczne sferyczne* AC i AC′, *poprowadzone z jednego punktu* A *do danego koła* P *na sferze, są równe*, i łuk AP jest dwójsieczną sferyczną kątów sferycznych CAC′ i CPC′.

Uwaga. — Powyższy wniosek prowadzi do twierdzenia :

W czworoboku sferycznym opisanym na kole summa dwóch boków przeciwległych równa się summie dwóch innych; I NAWZAJEM ; którego się dowodzi jako w geometryi płaskiej.

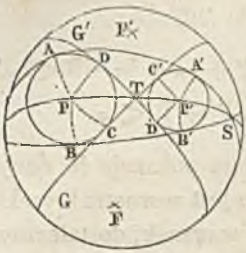
Zagadnienie XIV.

Poprowadzić styczną sferyczną spólną dwom małym kołom danym.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie :

1° Styczna sferyczna AA′ spólna dwom małym kołom P,P′, których promienie oznaczamy przez R, R′, przypuszczając

$R > R'$, Biegun F tej stycznej, leżący na kierunkach promieni sferycznych PA i PA' które przechodzą przez punkta zetknięć A i A', jest punktem przecięcia dwóch kół nakreślonych z biegunów P i P' promieniami sferycznemi $\frac{1}{2}\pi - R$ i $\frac{1}{2}\pi - R'$. Wszystko więc przywodzi się do zbudowania trójkąta sferycznego którego trzy boki są wiadome. Możebność tego trójkąta wymaga



żeby było

$$PP' < \pi - RR', \quad PP' > R - R' \quad i \quad PP' - RR' < \pi.$$

Ostatnia nierówność ma zawsze miejsce. Druga pokazuje że dwa dane koła na sferze nie powinny być wewnątrz jedno drugiego; ten warunek wystarcza w geometryi płaskiej, ale na sferze trzeba jeszcze dopełnić pierwszego $PP' + R + R' < \pi$, który wymaga żeby dwa dane koła były oba na jednem półsferzu.

Jeśli tym warunkom zadość uczyniono, dwie styczne sferyczne *zewnętrzne* AA', i BB' rozwiązują zagadnienie. Ale te styczne zlewają się w jedną w dwóch przypadkach szczególnych, to jest:

gdy $\quad PP' + R + R' = \pi$, albo gdy $PP' = R - R'$.

2° Niech będzie teraz DD' styczna sferyczna *wewnętrzna* do kół P i P'. Biegun G tej stycznej, leżący na kierunkach promieni sferycznych PD i P'D' które przechodzą przez punkta zetknięć D i D', jest punktem przecięcia dwóch kół nakreślonych z biegunów P i P' promieniami sferycznemi $\frac{1}{2}\pi R$ i $\frac{1}{2}\pi + R'$. Więc cała rzecz przywodzi się do zbudowania trójkąta sferycznego którego trzy boki są wiadome. Możebność tego trójkąta wymaga żeby było

$$PP' < \pi - R + R', \quad PP' > R + R' \quad i \quad PP' - R + R' < \pi.$$

Nierówność $PP' > R + R'$ pokazuje że dwa dane koła P i P' muszą być *zewnątrz* jedno drugiego. Ten warunek jest dostateczny w geometryi płaskiej, ale tu nie wystarcza; i trzeba jeszcze, wedle pierwszej i ostatniej nierówności, żeby dane koła zadość czyniły warunkowi $PP' + (R - R') < \pi$.

Jeśli tych warunków dopełniono, dwie styczne sferyczne wewnętrzne DD′ i EE′ rozwiązują zagadnienie. Te styczne zlewają się w jedną w szczególnych przypadkach :

$$PP' = R + R', \quad PP' + R - R' = \pi \text{ albo } PP' - R + R' = \pi.$$

Uważając że koła, kreślone dla wyznaczenia biegunów stycznych sferycznych, mogą się przecinać w dwóch punktach, albo być styczne, albo się nie spotykać, widzimy łatwo że zagadnienie ma ogólnie cztery rozwiązania, albo tylko trzy, dwa, jedno, albo nawet nie ma żadnego.

Uwaga. — Styczne sferyczne zewnętrzne AA′ i BB′ są symetryczne względem linii biegunów PP′ dwóch kół danych, i spotykają się na niej w dwóch punktach zewnątrz tych kół. Punkt spotkania S tych dwóch stycznych, który jest bliższy koła mniejszego, nazywa się *środkiem podobieństwa prostego kół* P *i* P′. Styczne sferyczne wewnętrzne CC′ i DD′ są także symetryczne względem linii biegunów PP′, i spotykają się na tej linii między danemi kołami i poza niemi. Punkt spotkania T tych stycznych, leżący między kołami P i P′, nazywa się ich *środkiem podobieństwa odwrotnego*. O tych dwóch środkach podobieństwa później mówić będziemy.

ZADANIA.

913. — Dwie figury równe leżą na jednej sferze. Dowieśdź że można sprowadzić jedną z figur na drugą, obracając ją około pewnego punktu powierzchni sferycznej.

914. — Przez dany punkt poprowadzić płaszczyznę styczną do dwóch sfer danych.

915. — Poprowadzić płaszczyznę styczną do trzech sfer.

916. — Nakreślić na sferze, promieniem sferycznym danym koło styczne do dwóch kół danych.

917. — Nakreślić na sferze koło przechodzące przez dwa dane punkta i styczne do koła danego.

918. — Nakreślić na sferze koło przechodzące przez punkt dany i styczne do dwóch kół wielkich danych.

919. — Biegun koła opisanego na trójkącie sferycznym jest wewnątrz albo zewnątrz tego trójkąta, albo pada na największym boku, według jak największy z kątów jest mniejszy albo większy od summy dwóch innych, albo jej równy.

920. — Trzy płaszczyzny prostopadłe między sobą, poprowadzone przez punkt *wewnątrz* sfery, wyznaczają na tej sferze trzy koła których summa powierzchni jest stała.

921. — Poprowadzić przez linię prostą płaszczyznę któraby podzieliła dwie sfery tak, żeby promienie przecięć były proporcyonalne do promieni tych sfer.

922. — Poprowadzić przez punkt płaszczyznę któraby podzieliła trzy sfery tak, żeby promienie przecięć były proporcyonalne do promieni tych sfer.

923. — Summa kwadratów odległości wierzchołką kąta trójściennego od sześciu punktów, w których trzy krawędzie tego kąta spotykają powierzchnię sfery, jest stała.

924. — Wykreślić sferę styczną do czterech krawędzi czworościanu.

925. — Znaleźć punkt taki żeby widziano z niego trzy dane sfery pod kątem równym.

926. — Znaleźć miejsce punktów w przestrzeni równo oświeconych przez dwa punkta światłe.

927 — Znaleźć miejsce punktów przestrzeni które są na odległość *a* od punktu A i na odległość *b* od punktu B.

928. — Miejsce punktów z których widać jedną sferę, albo dwie sfery, albo trzy sfery dane, pod kątem danym.

929. — Miejsce punktów których summa kwadratów z odległości od dwóch danych punktów jest stała.

930. — Mając dane trzy punkta, znaleźć miejsce punktów których summa odległości jest stała względem pierwszego i drugiego punktu, i zarazem względem pierwszego i trzeciego.

931. — Miejsce punktów z których widać daną prostę pod kątem danym, *albo* dwie dane proste wychodzące z jednego punktu, pod danemi kątami.

932. — Miejsce środków sfer które przecinają wedle wielkich kół *dwie sfery* albo *trzy sfery* dane.

933. — Miejsce środka przecięć danej sfery przez płaszczyzny przechodzące przez punkt dany, *albo* przez prostę daną.

934. — Miejsce punktów w przestrzeni których odległości od dwóch punktów danych są w stosunku stałym.

935. — Miejsce rzutów punktu, zewnętrznego względem płaszczyzny, na liniach prostych przechodzących na tej płaszczyznie przez jeden punkt.

936. — Wystawić czworościan, mając podstawę i odległości jej wierzchołków od trzech ścian bocznych.

937. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając kąt, bok mu przyległy i summę, *albo* różnicę, dwóch innych boków.

938. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając kąt, bok przyległy i summę, *albo* różnicę dwóch innych boków, *albo* kątów.

939. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając podstawę, wysokość i kąt.

940. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając dwa boki i wysokość odpowiedającą jednemu z nich.

941. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając bok, kąt i obwód.

942. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając obwód i dwa kąty.

943. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając obwód, kąt i wysokość.

944. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając bok, kąt, i koło wpisane, *albo* zawpisane, względem tego kąta.

945. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając kąt i promienie dwóch kół, wpisanego i zawpisanega względem tego kąta.

946. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając bok i promienie dwóch kół, wpisanego i zawpisanego, stycznych do tego boku.

947. — Wykreślić trójkąt sferyczny, znając bok, kąt przeciwległy i różnicę promieni dwóch kół wpisanego i zawpisanego względem tego kąta.

948. — W czworoboku sferycznym mającym wszystkie boki przeciwległe równe, kąty przeciwległe są równe, i przekątne przecinają się na połowy.

Nawzajem, czworobok sferyczny ma wszystkie boki przeciwległe równe jeśli ma wszystkie kąty przeciwległe równe, *albo* jeśli jego przekątne przecinają się na połowy.

949. — W czworoboku sferycznym równokątnym boki przeciwległe są równe i przekątne są równe; a cięciwy boków tworzą prostokąt.

950. — W ukośniku sferycznym, przekątne przecinają się na połowy pod kątem prostym, i są dwójsiecznemi kątów przeciwległych.

951. — W kwadracie sferycznym, przekątne przecinają się na połowy pod kątem prostym, są równe, i są dwójsiecznemi kątów przeciwległych.

952. — Linia przecięć dwóch kół na sferze jest miejscem z których poprowadzone styczne do tych kół są równe.

953. — Rozdzielić powierzchnię sfery na wielokąty sferyczne foremne i równe.

954. — Przez daną prostę poprowadzić do danej sfery płaszczyznę sieczną, którąby wyznaczyła przecięcie mające promień równy danemu.

955. — Gdy się trzy sfery przecinają po dwie, płaszczyzny trzech kół przecięć spotykają się wedle linii prostej, prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez trzy środki tych sfer.

956. — Jeśli z punktu wziętego na sferze jako bieguna, nakreślono koło promieniem sferycznym równym jednej trzeciej *albo* jednej piątej ćwiercianu, wtedy promień koła otrzymanego jest połową promienia sfery, albo większym odcinkiem tego promienia podzielonego w stosunku średnim i skrajnym.

957. — Jeśli z jednego punktu poprowadzono różne sieczne do sfery, wieloczyn odległości tego punktu od dwóch punktów przecięć każdej siecznej ze sferą jest stały.

958. — Jeśli środki dwóch kół są rzutami jednego punktu przestrzeni, i jeśli styczne poprowadzone z jednego punktu przecięcia się ich płaszczyzn są równe, te dwa koła należą do jednej sfery.

959. — Summa kwadratów z rzutów trzech promieni sfery, prostopadłych między sobą, na jakiejkolwiek płaszczyźnie, jest równa podwójnemu kwadratowi promienia sfery.

960. — Summa kwadratów ze trzech cięciw, które dana sfera przejmuje na trzech prostych prostokątnych i przechodzących przez jeden punkt, jest stała.

961. — Jeśli w trójkąt prostokątny, którego każdy kąt ma 120°, wpisano trzy małe koła tak, żeby były styczne między sobą i styczne do boków tego trójkąta, wtedy ich promień sferyczny ma 30°, i ich środki są wierzchołkami trójkąta biegunowego który odpowieda danemu.

962. — Jeśli w trójkącie sferycznym ABC punkt P jest biegunem koła wielkiigo DE przechodzącego przez środki D i E boków AB i AC, kąt BPC jest dwa razy większy od kąta DPE.

KSIĘGA DZIEWIĄTA

MIARA TRZECH CIAŁ OKRĄGŁYCH, WIELOŚCIANY FOREMNE.

Określenie I. — Graniaston jest *wpisany* w walec gdy jego podstawy są wpisane w podstawy walca. Nawzajem, walec jest wtedy *opisany* na graniastonie.

Graniaston jest *opisany* na walcu gdy jego podstawy są opisane na podstawach walca. Nawzajem, walec jest wtedy *wpisany* w graniaston.

II. — Piramida jest *wpisana* w stożek gdy ma z nim spólny wierzchołek, i jej podstawa jest wpisana w podstawę stożka. Nawzajem, stożek jest wtedy *opisany* na piramidzie.

Piramida jest *opisana* na stożku gdy ma z nim spólny wierzchołek, i jej podstawa jest opisana na podstawie stożka. Nawzajem, stożek jest wtedy *wpisany* w piramidę.

III. — *Piramidą sferyczną* OABCD (*zob.* figurę na stronicy 578) nazywa się część objętości sfery, zawarta między kątem wielościennym, mającym wierzchołek w jej środku ,i wielokątem sferycznym który jest *podstawą* tej piramidy.

Dwie piramidy sferyczne są symetryczne gdy mają za podstawy wielokąty sferyczne symetryczne.

Dwie piramidy sferyczne są podobne gdy mają podstawy podobne.

IV. — Dwa walce *obrotowe,* albo dwa stożki *obrotowe,* są *podobne* gdy ich wysokości są proporcyonalne do promieni podstaw.

V. — Część BDELKH stożka (*zob.* figurę na stronicy 565) zawarta między jego podstawą BDB′E i przecięciem HKL, wyznaczonem przez jakąkolwiek płaszczyznę która spotyka wszystkie krawędzie, nazywa się *pniem stożka.*

To przecięcie i podstawa stożka stanowią podstawy jego pnia. Gdy podstawy pnia stożka są równoległe ich *odległość* jest *wysokością* tego pnia.

Pień stożka kołowego prostego o podstawach równoległych może być uważany jako figura obrotowa, utworzona obrotem trapezu ABLO, około boku AO wziętego za oś. Ta oś AO jest *wysokością* a bok BL, tworzący powierzchnię, *bokiem* albo *apotemą* tego pnia.

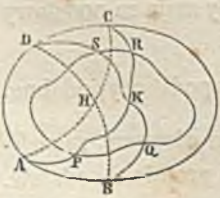
VI. — Powierzchnia krzywa nazywa się *wypukłą*, jeśli leży cała z jednej strony każdej płaszczyzny z którą ma jeden tylko punkt spólny albo jedną linię prostą spólną. Ta płaszczyzna jest płaszczyzną styczną do powierzchni (*). Powierzchnie sfery, walca kołowego, stożka kołowego, parabolicznego, etc. są wypukłe.

MIARA POWIERZCHNI.

Twierdzenie I.

Powierzchnia WYPUKŁA HABCD *jest mniejsza od wszelkiej powierzchni otaczającej* KABCD *która ma z nią ten sam obwód.*

Uważamy za oczywiste że *płaszczyzna jest mniejsza od wszelkiej powierzchni mającej z nią spólny obwód.*



Niech będzie powierzchnia wypukła HABCD, otoczona z jednej strony powierzchnią jakąkolwiek KABCD która ma z nią spólny obwód ABCD. Między powierzchniami które otaczają powierzchnię wypukłą i mają z nią spólny obwód, jest przynajmniej jedna od której niema już mniejszej. Przypuśćmy tedy jeśli można, że tą

(*) Dla ścisłości określenia, czytelnik zechce zobaczyć twierdzenie I, księgi X.

jedną z najmniejszych jest powierzchnia otaczająca KABCD, i poprowadźmy płaszczyznę styczną do powierzchni wypukłej, w jej punkcie H który nie należy do powierzchni otaczającej. Ta płaszczyzna odcina od powierzchni otaczającej część KPQRS oczywiście większą niż powierzchnia płaska HPQRS. Więc, tym sposobem, otrzymanoby powierzchnię otaczającą HPQRSABCD mniejszą od otaczającej KABCD która ma z nią spólny obwód ABCD; co przeciw założeniu. Ztąd wynika że, między powierzchniami otaczającemi, niema żadnej którąby była jedną z najmniejszych. Więc powierzchnia wypukła jest mniejsza od wszelkiej powierzchni otaczającej która ma z nią spólny obwód.

Wniosek. — Powierzchnia wypukła jest mniejsza od wszelkiej powierzchni która ją ze wszech stron otacza.

Twierdzenie II.

Powierzchnia boczna walca obrotowego *ma za miarę wieloczyn z okręgu podstawy przez wysokość.*

Wyobraźmy dwa graniastony foremne równej liczby ścian, jeden wpisany w walec a drugi na nim opisany. Powierzchnia cała walca, otaczająca zewsząd powierzchnię wypukłą graniastonu wpisanego, jest od niej większa; ale powierzchnia cała walca, jako wypukła i zewsząd otoczona powierzchnią całą graniastonu opisanego, jest mniejsza od tej ostatniej. Zatem, nazywając S powierzchnię boczną walca obrotowego, H jego wysokość, R promień podstawy, b i B podstawy dwóch graniastonów wpisanego i opisanego, p i P obwody tych podstaw; będzie (VII, 10, wn.)

$$pH + 2b < S + 2\pi R^2 < P.H + 2B.$$

Owoż, wiemy że różnica liczb które mierzą całe powierzchnie dwóch graniastonów, to jest $(P - p)\,H + 2\,(B - b)$, może stać się mniejszą od wszelkiej ilości naznaczonej; więc powierzchnia cała walca jest spólną granicą całych powierzchni tych graniastonów; co daje

$$S + 2\pi R^2 = gr. (pH + 2b) = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

Więc
$$S = 2\pi RH.$$

Wniosek I. — Oznaczając przez T powierzchnię całą walca obrotowego, będzie

$$T = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(H + R).$$

II. — Niech będą S i S' powierzchnie boczne, T i T' powierzchnie całe, R i R' promienie, H i H' wysokości dwóch walców obrotowych podobnych; mamy

$$\frac{S}{S'} = \frac{R.H.}{R'.H'} = \frac{R}{R'}.\frac{H}{H'},$$

i
$$\frac{T}{T'} = \frac{R\,(H + R)}{R'\,(H' + R')} = \frac{R}{R'}.\frac{H + R}{H' + R'}.$$

Owoż, podobieństwo tych dwóch walców daje

$$\frac{R}{R'} = \frac{H}{H'} = \frac{H + R}{H' + R'};$$

Więc
$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{H^2}{H'^2} = \frac{T}{T'}.$$

Co dowodzi że *powierzchnie boczne i powierzchnie całe dwóch walców obrotowych podobnych mają się jako kwadraty z promieni podstaw, albo jako kwadraty z wysokości.*

III. — Opierając się na twierdzeniu : *Powierzchnia boczna graniastonu równa się wieloczynowi z obwodu przecięcia prostego przez krawędź boczną* (VII, 7), i modyfikując dane wyżej rozumowanie, dowodzi się łatwo, że

Powierzchnia boczna walca jakiegokolwiek ma za miarę wieloczyn z obwodu przecięcia prostego przez krawędź.

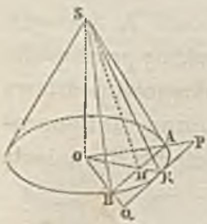
UWAGA. — Płaszczyzna sieczna ABD przechodząca przez dwie krawędzie walca oddziela część jego powierzchni ABKCDE którą nazywają *wrzecieniem walcowem*. Oznaczając przez s powierzchnię tego wrzeciona, będzie

$$\frac{s}{S} = \frac{\text{łuk AB}}{2\pi.\text{OK}} = \frac{\text{łuk AB.H}}{2\pi\text{R.H}}; \quad \text{zkąd} \quad s = \text{łuk AB.H}.$$

Więc *powierzchnia wrzeciona walcowego obrotowego ma za miarę wieloczyn z łuku podstawy przez wysokość.*

TWIERDZENIE III.

Powierzchnia boczna stożka obrotowego, *ma za miarę wieloczyn z okręgu podstawy przez połowę boku.*



Wyobraźmy dwie piramidy foremne równej liczby boków, jedną opisaną na stożku a drugą wpisaną. Powierzchnia cała stożka jest oczywiście zawarta między powierzchniami całemi tych dwóch piramid; zatem będzie (VII, 16).

$$\tfrac{1}{2}p\,.\,\text{SH} + b < \text{S} + \pi\text{R}^2 < \tfrac{1}{2}\text{P}\,.\,\text{SK} + \text{B}.$$

Owoż, różnica $\frac{1}{2}(\text{P}\,.\,\text{SK} - p\,.\,\text{SH}) + \text{B} - b$ dwóch liczb które mierzą powierzchnie całe piramid może stać się mniejszą od wszelkiej ilości naznaczonej, ponieważ różnice $\text{P} - p$, $\text{SK} - \text{SH}$ czynników dwóch wieloczynów i różnica podstaw $\text{B} - b$ mają za granicę zero. Więc powierzchnia cała stożka jest spólną granicą całych powierzchni dwóch piramid, wpisanej i opisanej, a temsamem jej miara jest granicą miary tych powierzchni, to jest

$$\text{S} + \pi\text{R}^2 = gra.\,(\tfrac{1}{2}p\,.\,\text{SH} + b) = 2\pi\,\text{R}\,.\,\tfrac{1}{2}\text{SK} + \pi\text{R}^2.$$

Ztąd, nazywając a bok SK, otrzymujemy

$$\text{S} = \pi\text{R}a.$$

WNIOSEK. — Nazywając T powierzchnię całą stożka *obrotowego*, mamy

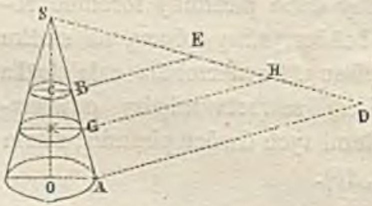
$$\text{T} = \pi\text{R}a + \pi\text{R}^2 = \pi\text{R}\,(a + \text{R}).$$

II. — Dowiedzie się łatwo, wiadomem już rozumowaniem, że *Powierzchnie boczne i powierzchnie całe dwóch stożków* OBROTOWYCH *podobnych mają się jako kwadraty z promieni albo z boków albo z wysokości.*

UWAGA. — *Powierzchnia wrzecienia* SAKB STOŻKA OBROTOWEGO *ma za miarę wieloczyn z łuku podstawy przez połowę krawędzi.*

TWIERDZENIE IV.

Powierzchnia pnia stożka OBROTOWEGO, *o podstawach równoległych, ma za miarę wieloczyn z połowy summy okręgów podstaw przez bok.*



Ze skrajności A krawędzi SA wyprowadźmy prostopadłę AD równą okręgowi podstawy stożka. Połączmy SD i poprowadźmy prostę BE równoległą do AD.

Trójkąty podobne SAD i SBE, SAO i SBC dają

$$\frac{AD}{BE}=\frac{SA}{SB}, \quad i \quad \frac{AO}{BC}=\frac{SA}{SB}; \quad \text{ztąd} \quad \frac{AD}{BE}=\frac{AO}{BC}=\frac{2\pi OA}{2\pi CB}.$$

Ale z wykreślenia $AD = 2\pi OA$, więc $BE = 2\pi CB$.

Uważajmy teraz że powierzchnia boczna stożka obrotowego SOA, mając za miarę *ok.* $OA.\frac{1}{2}SA$, równa się powierzchni trójkąta SAD którego miarą jest $AD.\frac{1}{2}SA$. Dla tej samej przyczyny, powierzchnia boczna stożka SCB równa się powierzchni trójkąta SBE. Zatem powierzchnia boczna pnia tego stożka jest równowarta trapezowi ADEB. Owoż, trapez ma za miarę wieloczyn z połowy summy podstaw przez wysokość, to jest $\frac{1}{2}(AD + BE).AB$; więc, oznaczając przez S liczbę która mierzy powierzchnię boczną pnia stożka obrotowego, będzie

$$S = \frac{1}{2}(ok.\ OA + ok.\ CB).AB.$$

A jeśli nazwiemy R i r promienie dwóch podstaw, *a apotemę* czyli bok tego pnia, będziemy mieli formułę dogodną do rachunku,

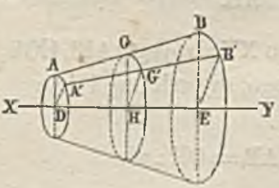
$$S = \pi (R + r)\, a.$$

Wniosek. — Jeśli, przez środek G boku AB, poprowadzimy prostę GH równoległą do AD, i płaszczyznę GK równoległą do podstaw pnia stożka obrotowego, prosta GH będzie równa okręgowi KG. A że powierzchnia trapezu ABED równa się wieloczynowi GH . AB; więc *powierzchnia boczna pnia stożka obrotowego ma za miarę wieloczyn z boku przez okrąg równoleżnika równo oddalonego od podstaw*, to jest

$$S = 2\pi KG \,.\, AB.$$

Uwaga I. — Z tego co poprzedza wynika ogólniejsze twierdzenie.

Powierzchnia utworzona obrotem linii prostej, około osi leżącej na jej płaszczyźnie, ma za miarę wieloczyn z linii rodzącej przez łuk nakreślony jej środkiem.



Jakoż, ze środka G linii rodzącej AB spuśćmy prostopadłę GH na oś XY. Oznaczając przez S całą powierzchnię obrotową, przez S' powierzchnię ABB'A', będzie

$$\frac{S'}{S} = \frac{\text{łuk } GG'}{\text{ok. } HG} = \frac{\text{łuk } GG' \,.\, AB}{2\pi HG \,.\, AB}.$$

Owoż, $S = 2\pi HG \,.\, AB$; więc $S' = \text{łuk } GG' \,.\, AB$

Jeśli linia rodząca AB jest równoległa do osi XY, łuk GG' równa się łukowi BB' i powierzchnia ABB'A' staje się wrzecieniem walcowem; co sprawdza już wiadome twierdzenie.

Uwaga II. — Twierdzenie IV wywodzi się łatwo algebrycznie z twierdzenia III. Jakoż, jeśli dopełnimy stożka S, i nazwiemy x bok małego stożka SCB, powierzchnia boczna pnia stożka obrotowego wyrazi się przez

$$S = \pi R(a + x) - \pi r x = \pi R a + \pi (R - r)x.$$

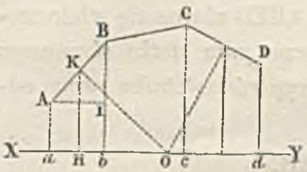
Owoż,
$$\frac{x}{r} = \frac{x + a}{R} = \frac{a}{R - r};$$

zkąd
$$(R - r)x = ar.$$

Więc
$$S = \pi R a + \pi r a = \pi (R + r) a.$$

TWIERDZENIE V.

Powierzchnia utworzona obrotem łamanej FOREMNEJ ABCD, *około średnicy koła wpisanego która jej nie przecina, ma za miarę wieloczyn z okręgu tego koła przez rzut tej łamanej na osi obrotu* XY.



Niech będzie OK promień koła wpisanego. Z wierzchołków linii rodzącej ABCD i ze środka boku AB, spuśćmy na oś XY prostopadłe Aa, Bb, Cc, Dd, i KH.

Bok AB, swoim obrotem około osi XY, tworzy powierzchnię pnia stożka; oznaczając tę powierzchnię przez *Pow.* (AB), mamy, na mocy wniosku twierdzenia poprzedzającego,

$$Pow.\ (AB) = 2\pi HK \,.\, AB.$$

Owoż, poprowadźmy równoległę AI do XY; trójkąty ABI, HOK, mające boki prostopadłe każdy do każdego, są podobne i dają

$$\frac{HK}{ab} = \frac{OK}{AB}; \quad \text{zkąd} \quad HK \,.\, AB = OK \,.\, ab.$$

Zatem $\quad Pow.\ (AB) = 2\pi OK \,.\, ab.$

Tak samo

$$Pow.\ (BC) = 2\pi OK \,.\, bc,$$
$$Pow.\ (CD) = 2\pi OK \,.\, cd;$$

Ztąd, dodając, wynika

$$Pow.\ (AB) + Pow.\ (BC) + Pow.\ (CD) = 2\pi OK\,(ab + bc + cd).$$

Więc $\quad Pow.\ (ABCD) = 2\pi OK \,.\, ad.$

WNIOSEK. — Powierzchnia utworzona obrotem półobwodu wielokąta foremnego, parzystej liczby boków, około średnicy przechodzącej przez skrajności tego półobwodu, ma za miarę wieloczyn z okręgu wpisanego przez średnicę okręgu opisanego, to jest $\quad S = 4\pi r R.$

Określenie VII. — Część powierzchni sferycznej zawarta między dwiema płaszczyznami równoległemi nazywa się *strefą sferyczną* albo *pasem sferycznym*. Okręgi wyznaczone temi płaszczyznami są *podstawami strefy*, a odległości dwóch płaszczyzn *wysokością*.

Gdy jedna z płaszczyzn równoległych jest styczna do sfery, wtedy strefa ma tylko jedną podstawę, i nazywa się *krymką sferyczną*.

Strefa i krymka sferyczna mogą się uważać jako figury obrotowe utworzone przez łuki kół wielkich.

Dwie krymki należące do dwóch sfer są *podobne* gdy mają łuki rodzące podobne; wtedy, łuki rodzące, promienie sfer, promienie podstaw, i wysokości są proporcyonalne między sobą.

Dwie strefy należące do dwóch sfer różnych są podobne gdy są różnicami krymek podobnych.

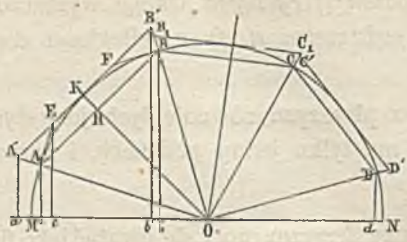
Twierdzenie VI.

Powierzchnia strefy sferycznej ma za miarę wieloczyn z okręgu koła wielkiego przez wysokość.

Niech będzie strefa sferyczna utworzona obrotem łuku koła AD około średnicy MN. Dowiedziemy najpierwej że ta strefa jest granicą powierzchni utworzonej obrotem linii łamanej wpisanej w łuk AD, jakakolwiek jest ustawa wedle której liczba boków tej łamanej rośnie nieskończenie i każdy bok dąży do zera.

Wpiszmy w łuk AD jakąkolwiek linię łamaną ABCD, i poprowadźmy styczne koła A′B′, B_1C_1, C′D′ równoległe do jej boków, i zawarte między normalnemi które przechodzą przez jej wierzchołki. Te styczne, jakośmy już widzieli (IV, 20), nie stanowią konieczne linii ciągłej opisanej. Poprowadźmy jeszcze styczne AE i BF, i spuśćmy na oś MN prostopadłe A′*a*′, A*a*, E*e*, B*b*, B′*b*′.

Powierzchnia utworzona obrotem boku AB i łuku BN koła



około osi MN, jako wypukła, jest mniejsza od powierzchni otaczającej utworzonej przez łuki kół AB i BDN; bo obie mają ten sam obwód uakreślony przez punkt A. Dla tej samej przyczyny, ostatnia powierzchnia *pow. łuk* (AB + BN), także wypukła, jest mniejsza od powierzchni otaczającej, *pow.* (AEFBDN), utworzonej obrotem łamanej AEFB i łuku koła BDN. Odejmując, od tych trzech powierzchni, część spólną *pow.* (BDN) utworzoną przez łuk koła BDN, widzimy jasno że powierzchnia strefy (AB) jest większa od *pow.* (AB) utworzonej przez bok AB, ale mniejsza od *pow.* (AEFB). Uważajmy nadto że *pow.* (AE), utworzona obrotem stycznej AE około osi MN, stanowiąc powierzchnię boczną pnia stożka obrotowego, ma za miarę $\pi(a\mathrm{A} + e\mathrm{E})\,\mathrm{AE}$; tak samo *pow.* $(\mathrm{EA}') = \pi\,(a'\mathrm{A}' + e\mathrm{E})\,\mathrm{EA}'$. Aże prostopadła EA jest mniejsza od pochyłej EA', i prosta $a\mathrm{A} < a'\mathrm{A}'$ dlatego że $\dfrac{a\mathrm{A}}{a'\mathrm{A}'} = \dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA}'}$; zatem *pow.* (EA) < *pow.* (EA'). Dowiedzie się podobnie że *pow.* (FB) < *pow.* (FB'). Więc *strefa* (AB) jest większa od *pow.* (AB), ale mniejsza od *pow.* (A'B'). Ztąd wynika oczywiście że

$$pow.\,(\mathrm{ABCD}) < strefy\,(\mathrm{AD}) < pow.\,(\mathrm{A'B'} + \mathrm{B_1\,C_1} + \mathrm{C'D'}).$$

To otrzymawszy, poprowadźmy promień OH prostopadły do cięciwy AB, będzie

$$\frac{pow.\,(\mathrm{AB})}{pow.\,(\mathrm{A'B'})} = \frac{2\pi\mathrm{OH}\,.\,ab}{2\pi\mathrm{OK}\,.\,a'b'} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OK}}\cdot\frac{ab}{a'b'}.$$

Ale podobieństwo trójkątów daje widocznie

$$\frac{Oa}{Oa'}=\frac{OA}{OA'}=\frac{OH}{OK}=\frac{OB}{OB'}=\frac{Ob}{Ob'}=\frac{Oa-Ob}{Oa'-Ob'}=\frac{ab}{a'b'}.$$

Ztąd
$$\frac{ab}{a'b'}=\frac{OH}{OK}.$$

Podstawiając tę wartość, znajdujemy

$$\frac{pow.(AB)}{pow.(A'B')}=\frac{\overline{OH}^2}{\overline{OK}^2}.$$

Jeśli więc oznaczymy przez r_1 i r_2 najmniejszą i największą apotemę boków łamanej wpisanej, przez R promień sfery, będziemy mieli, na mocy wiadomego twierdzenia arytmetyki,

$$\frac{r_1^2}{R^2}<\frac{pow\,(AB)+pow\,(BC)+pow\,(CD)}{pow\,(A'B')+pow\,(B_1C_1)+pow\,(C'D')}<\frac{r_2^2}{R^2},$$

albo
$$\frac{r_1^2}{R^2}<\frac{pow\,(ABCD)}{pow\,(A'B'+B_1C_1+C'D')}<\frac{r_2^2}{R^2}.$$

Owoż, gdy boki łamanej wpisanej w łuk AD dążą do zera,

wiemy już że $gr.\frac{r_1^2}{R^2}=1$ i $gr.\frac{r_2^2}{R^2}=1$;

więc $gr.\,pow\,(ABCD)=gr.\,pow\,(A'B'+B_1C_1+C'D')$.

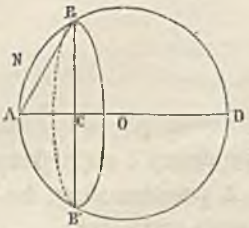
Te dwie powierzchnie, jakośmy dowiedli, zawierają między sobą *strefę* (AD); ztąd wnosimy że, jakakolwiek jest ustawa wedle której wszystkie boki łamanej wpisanej w łuk AD dążą do zera, powierzchnia utworzona przez tę łamaną ma zawsze tę samą granicę którą jest właśnie *strefa* AD.

Aby teraz znaleźć miarę powierzchni *strefy* (AD), dość wpisać w łuk AD linię łamaną foremną, przypuścić że liczba jej boków rośnie nieskończenie i wziąć granicę *pow.* (ABCD). Nazywając r apotemę tej łamanej, h wysokość powierzchni utworzonej, S miarę powierzchni strefy sferycznej, będzie

$$S=gr.\,(2\pi rh);\quad \text{więc}\quad S=2\pi Rh.$$

Wniosek. — Dwie strefy na jednej sferze są proporcyonalne do swych wysokości; zatem są równowarte gdy mają wysokości równe.

Dwie *strefy podobne* mają się jako kwadraty z promieni sfer do których należą



Uwaga. — Uważajmy krymkę sferyczną utworzoną obrotem łuku ANB około średnicy AD. Oznaczając przez S jej powierzchnię, będzie

$$S = 2\pi OA.AC = \pi AD.AC = \pi\overline{AB}^2.$$

Więc, *powierzchnia krymki sferycznej jest równowarta kołu którego promień równa się cięciwie łuku rodzącego.*

Twierdzenie VII.

Powierzchnia sfery ma za miarę wieloczyn z okręgu koła wielkiego przez średnicę; albo, co to samo, *równa się powierzchni czterech kół wielkich.*

Jakoż, (*fig.* powyższa), można uważać powierzchnię sfery jako złożoną z dwóch krymek sferycznych, utworzonych obrotem łuków kół ANB i BD około średnicy AD.

Więc, nazywając R promień sfery, będzie

$$2\pi R.AC + 2\pi R.CD = 2\pi R.AD,$$

albo $$S = 4\pi R^2.$$

Uwaga. — Ten wynik, godny uwagi, pokazuje że powierzchnia *krzywa* sfery jest równowarta powierzchni *płaskiej* koła, chociaż nie można ani rozpostrzeć powierzchni sferycznej na płaszczyznie, ani z powierzchni płaskiej zrobić powierzchni sferycznej.

Wniosek. — Nazywając D średnicę sfery, mamy

$$S = \pi(2R)^2 = \pi D^2.$$

Więc, *powierzchnie dwóch sfer mają się jako kwadraty z promieni, albo jako kwadraty ze średnic.*

ZASTOSOWANIE. — *Znaleźć powierzchnię ziemi w miryametrach kwadratowych, przypuszczając że jest sferyczną.*

Wiemy że okrąg południka ziemskiego zawiera 40 000 000 metrów, czyli 4000 miryametrów. Biorąc południk za wielkie koło sfery, powierzchnia ziemi, wyrażona w miryametrach kwadratowych, będzie

$$4\pi R^2 = \frac{1}{\pi}(2\pi R)^2 = 16\,000\,000 \times \frac{1}{\pi} = 5\,092\,958 \text{ mir. kw.}$$

na mniej niż miryametr kwadratowy.

MIARA WIELOKĄTÓW SFERYCZNYCH.

TWIERDZENIE VIII.

Dwa trójkąty sferyczne symetryczne, ABC, A′B′C′, *są równoważne.*

Niech będzie P biegun małego koła opisanego na trójkącie ABC.

Poprowadźmy średnicę POP′, i łuki kół wielkich PA = P′A′, PB = P′B′, PC = P′C′.

Trzy łuki PA, PB, PC są równe jako promienie sferyczne; zatem trzy łuki P′A′, P′B′, P′C′ są także równe, i punkt P′ jest biegunem małego koła opisanego na trójkącie A′B′C′. Owoż, dwa trójkąty APB, A′P′B′, równoboczne między sobą, są równe jako równoramienne; i tak samo są równe trójkąty ACP i A′C′P′, BCP i B′C′P′. Więc trójkąty sferyczne symetryczne ABC i A′B′C′, złożone z części równych każda każdej, są równoważne.

Gdyby biegun P padał zewnątrz trójkąta ABC, wtedy ten trójkąt byłby różnicą trójkątów równoramiennych.

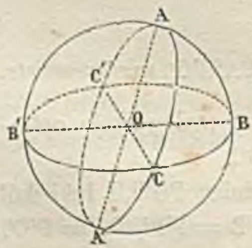
UWAGA. — Dowiedzie się podobnie że *dwie piramidy sferyczne symetryczne są równoważne.*

Wniosek I. — Dwa wielokąty sferyczne symetryczne są równowarte; bo się rozkładają na równą liczbę trójkątów sferycznych symetrycznych.

Określenie VIII. — Część CADA' powierzchni sferycznej, zawartą między dwoma półokręgami kół wielkich, nazywać będziemy *wrzecieniem* (*); kąt CAD albo CA'D tych dwóch półokręgów jest *kątem wrzecienia*.

IX. — Część CAA'D objętości sfery, zawarta między dwoma półkolami wielkiemi nazywa się *klinem sferycznym*; kąt dwójścienny CAA'D utworzony przez płaszczyzny tych dwóch półkol jest kątem klina.

Wniosek II. — Gdy się dwa półokręgi kół wielkłch BAB', CAC' przecinają na jednem półsferzu, summa trójkątów sferycznych wierzchołkiem przeciwległych ABC, AB'C' równa się wrzecieniu którego kątem jest spólny kąt BAC. Albowiem, trójkąt AB'C' jest równowarty trójkątowi symetrzycznemu A'BC, a ten ostatni z trójkątem ABC tworzy wrzecienie BACA' mające kąt BAC.



Dowiedzie się tak samo, opierając się na uwadze ostatniego twierdzenia, że dwie piramidy sferyczne trójkątne OABC, OAB'C', mające podstawy wierzchołkiem przeciwległe, tworzą klin sferyczny którego kątem jest spólny kąt dwójścienny BAA'C.

(*) Niemcy nazywają tę figurę *dwukątem*; ten wyraz nie może się stosować do walca i stożka w których, jakośmy widzieli, są także *wrzecienia* walcowe i stożkowe. Nazwano też wrzecienie *czółenkiem sferycznem*, *taśmą spiczastą*,... Rozsądny czytelnik pojmuje łatwo dlaczego, nie mogąc użyć żadnego z tych nazwisk, musiałem wziąć wyraz wrzecienie.

Twierdzenie IX.

Wrzecienie ma za miarę swój kąt podwojony; jeśli za jedność kątów wzięto kąt prosty a za jedność powierzchni trójkąt trójprostokątny.

Jakoż, widzimy łatwo że :

1° *Na jednej sferze, albo na dwóch sferach równych, dwa wrzecienia mające kąt równy są równe*, jako przystawalne.

2° *Stosunek wrzecienia do powierzchni sfery równa się stosunkowi jego kąta do czterech kątów prostych.*

Zatem, oznaczając przez S powierzchnię sfery, przez W powierzchnię wrzecienia, przez A jego kąt, mamy

$$W = \frac{A}{4^p} . S.$$

Owoż, powierzchnia sfery składa się z *ośmiu* trójkątów *trójprostokątnych*; jeśli więc za jedność kątów weźmiemy kąt prosty, i za jedność powierzchni trójkat trójprostokątny, będzie

$$S = 8 \qquad \text{i} \qquad W = 2A.$$

Co usprawiedliwia wysłowienie twierdzenia.

Wniosek. — Dwa wrzecienia jednej sfery są proporcyonalne do swych kątów.

Twierdzenie X.

Powierzchnia trójkąta sferycznego ma za miarę przewyżkę summy jego trzech kątów nad dwoma kątami prostemi.

Niech będzie trójkąt sferyczny ABC; dopełnijmy koła wielkiego AB, i przedłużmy boki AC i BC aż do punktów spotkania D i E z tem kołem.

Dwa trójkąty sferyczne ABC i BCD składają wrzecienie mające kąt A; zatem, na mocy poprzedzającego twierdzenia, mamy

$$ABC + BCD = \frac{A}{4}.S.$$

Podobnie $$ABC + ACE = \frac{B}{4}.S,$$

i (8, *wn.* 2.) $$ABC + CDE = \frac{C}{4}.S.$$

Dodając te równania, i uważając że summa czterech trójkątów sferycznych ABC + BCD + CDE + ECA czyni połowę powierzchni S sfery, otrzymujemy

$$2ABC + \tfrac{1}{2}S = \frac{S}{4}(A + B + C);$$

zkąd $$ABC = \frac{S}{8}(A + B + C - 2).$$

Ten wynik pokazuje że, *powierzchnia trójkąta sferycznego równa się ósmej części powierzchni sfery pomnożonej przez przewyżkę summy trzech kątów tego trójkąta nad dwoma kątami prostemi.*

Jeśli więc, obierając kąt prosty za jedność kątów, weźmiemy trójkąt trójprostokątny za jedność powierzchni, będzie $S = 8$, i powierzchnia trójkąta sferycznego, którą nazwiemy T, wyrazi się przez

$$T = A + B + C - 2.$$

Uwaga. — Liczba $A + B + C - 2$ nazywa się *przewyżką sferyczną* trójkąta.

W kwadracie sferycznym kąty są rozwarte, bo powierzchnia tego kwadratu ma za miarę $A + B + C + D - 4$.

Kładąc za S wartość $4\pi R^2$, otrzymujemy kwadraturę trójkąta sferycznego,

$$T = \tfrac{1}{2}\pi R^2 (A + B + C - 2).$$

Zastosowanie. — Jaka jest, na sferze promienia $2^m,40$, powierzchnia trójkąta sferycznego którego kąty są $120°20'$, $75°27'$, $36°43'$?

Mamy kąt $A = \frac{120°20'}{90°}$, $B = \frac{75°27'}{90°}$, $C = \frac{36°43'}{90°}$,

$$A + B + C - 2 = \frac{232°31' - 180°}{90°} = \frac{3150}{90.60} = \frac{7}{12}.$$

Więc szukana powierzchnia trójkąta sferycznego w *metrach kwadratowych* jest

$$T = \frac{7}{12} \cdot \tfrac{1}{2}\pi(2,40)^2 = 1^{mk},68\pi = 5^{mk},2778$$

na mniej niż centymetr kwadratowy.

Zwykle, dla skrócenia, wyraża się wielkość kątów biorąc za *jedność kątową* kąt obejmujący łuk koła równy swemu promieniowi (IV, 23). Oznaczając przez α, β, γ liczby które mierzą kąty A, B, C, odniesione do tej nowej jedności, będzie oczywiście $A = \frac{\alpha}{\frac{1}{2}\pi}$, albo $A = \frac{2\alpha}{\pi}$; tak samo $B = \frac{2\beta}{\pi}$, $C = \frac{2\gamma}{\pi}$. Wtedy powierzchnia trójkąta sferycznego równa się

$$T = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Twierdzenie XI.

Powierzchnia wielokąta sferycznego ma za miarę przewyżkę summy jego kątów nad tyle razy 2 kąty proste ile jest boków mniej dwa.

Prowadząc przekątne sferyczne można rozłożyć wszelki wielokąt sferyczny na tyle trójkątów sferycznych ile jest boków mniej dwa. Owoż, jeśli weźmiemy kąt prosty za jedność kątów a trójkąt trójprostokątny za jedność powierzchni, każdy trójkąt sferyczny będzie miał za miarę swoją przewyżkę sferyczną. Więc powierzchnia wielokąta sferycznego ma za miarę summę tych przewyżek; co właśnie czyni przewyżkę summy kątów wielokąta nad tyle razy 2 kąty proste ile jest boków mniej dwa.

Uwaga. — To twierdzenie stosuje się do wielokątów sferycznych wypukłych i niewypukłych; byle tylko w tych ostatnich uważano kąt wklęsły jako dopełnienie kąta sterczącego do czterech kątów prostych.

Wniosek I. — Jeśli, biorąc kąt prosty za jedność kątów i trójkąt trójprostokątny za jedność powierzchni, nazwiemy Σ summę kątów wewnętrznych wielokąta sferycznego mającego n boków, powierzchnia tego wielokąta będzie miała za miarę

$$\Sigma - 2(n-2) \quad \text{albo} \quad \Sigma - 2n + 4.$$

Powierzchnia S wielokąta sferycznego wyrażona w kwadratach równa się

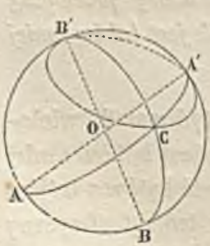
$$S = \tfrac{1}{2}\pi R^2(\Sigma - 2n + 4).$$

Zatem, *dwa wielokąty sferyczne podobne mają się jako kwadraty z promieni sfer do których należą, albo jako kwadraty z boków odpowiednych.*

Bo
$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi R^2(\Sigma - 2n + 4)}{\pi R'^2(\Sigma - 2n + 4)} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

Twierdzenie XII (*).

Miejscem wierzchołka trójkątów sferycznych spólnej podstawy i równej powierzchni jest łuk małego koła które przechodzi przez punkta średnicowo przeciwległe skrajnościom podstawy.



Niech będzie ABC jeden z trójkątów sferycznych mających tę samą podstawę AB i równowartą powierzchnię. Przedłużmy boki AC, BC aż do spotkania okręgu AB w punktach A', B', które są średnicowo przeciwległe skrajnościom A, B podstawy.

Kąty A' i B' trójkąta CA'B' są odpowiednio spełnieniami kątów A i B trójkąta CAB; zatem

$$A' + B' - C = 4 - A - B - C.$$

(*) Twierdzenie uczonego Lexell.

Ale liczba $A + B + C - 2$ jest stała, jako miara danej powierzchni trójkąta ABC; więc różnica $A' + B' - C$ jest także stała.

To dowodzi (VIII, 27) że wierzchołek C trójkąta ABC jest na okręgu małego koła przechodzącego przez punkta A′ i B′.

Uwaga. — Można łatwo wyznaczyć trzeci punkt C małego koła które przechodzi przez A′ i B′. Jakoż, między trójkątami A′B′C, uważajmy ten w którym bok $A'C = A'B'$; wtedy $B' - C = 0$, i powyższe równanie daje

$$A' = 4 - A - B - C = 2 - (A + B + C - 2).$$

Więc, dla znalezienia punktu C, dość jest wykreślić trójkąt sferyczny równoramienny, którego wiadomy jest kąt A′ i jego ramiona równe A′C, A′B′.

Twierdzenie XIII.

Trzy łuki kół wielkich, z których każdy przechodząc przez wierzchołek trójkąta sferycznego dzieli jego powierzchnię na dwie części równowartc, schodzą się w jednym punkcie.

Niech będą AD, BE, CF łuki wielkich kół dzielące powierzchnię trójkąta sferycznego ABC na dwie części równowarte. Oznaczmy przez A′, B′, C′ punkta średnicowo przeciwległe wierzchołkom A, B, C.

Dwa trójkąty równowarte ABD, ABE mają spólną podstawę; więc cztery punkta D, E, A′, B′ leżą na jednem małem kole (12). Dla tej samej przyczyny, cztery punkta D, F, A′, C′, jakoteż E, F, B′, C′, leżą także na małych kołach. Płaszczyzny tych trzech kół spotykają się wedle trzech linij prostych DA′, EB′, FC′, które, leżąc po dwie na jednej płaszczyznie i nie będąc równoległe, schodzą się w pewnym punkcie K; więc płaszczyzny ADA′, BEB′, CEC′ trzech łuków dwójsiecznych powierzchni trójkąta przechodzą przez ten punkt K. Owoż, ostatnie płaszczyzny, przechodząc także przez środek sfery O, spotykają się wedle linii prostej OK która przebija sferę w punkcie H: więc łuki AD, BE, CF przecinają się w punkcie H.

MIARA OBJĘTOŚCI.

Twierdzenie XIV.

Objętość walca jakiegokolwiek ma za miarę wieloczyn z podstawy przez wysokość.

Walec jest oczywiście zawarty między graniastonem wpisanym i opisanym. Oznaczając przez B, b, b' podstawy walca i dwóch graniastonów, przez H spólną wysokość, różnica objętości tych graniastonów wyrazi się przez

$$b'\mathrm{H} - b\mathrm{H} = (b' - b)\mathrm{H}.$$

Owoż, im większą weźmiemy liczbę boków coraz mniejszych, podstawy wpisanej i opisanej, tem bardziej różnica tych podstaw, $b' - b$, a następnie różnica objętości odpowiedających graniastonów dążyć będzie do zera. Więc walec jest spólną granicą graniastonów wpisanego i opisanego, w których liczba boków podstawy rośnie nieskończenie i każdy bok dąży do zera. Ztąd wynika że miara objętości walca równa się granicy miary każdego z tych graniastonów; tak że, nazywając V objętość walca, mamy

$$\mathrm{V} = gr.\,(b.\mathrm{H}); \qquad \text{więc} \qquad \mathrm{V} = \mathrm{B}.\mathrm{H},$$

Wniosek I. — Jeśli walec jest kołowy, oznaczając jako zwykle przez R promień jego podstawy, objętość walca wyrazi się przez

$$\mathrm{V} = \pi\mathrm{R}^2\mathrm{H}.$$

Zatem, dwa walce kołowe równej podstawy mają się jako wysokości, a dwa walce kołowe równej wysokości mają się jako kwadraty z promieni podstaw.

II. — *Objętość walca jakiegokolwiek ma za miarę wieloczyn z przecięcia prostego przez krawędź* (VII, 15, wn.).

III. — Dwa walce *obrotowe podobne* mają się jako *sześciany* z wysokości albo z promieni podstaw.

ZASTOSOWANIE.—Wiadomo że litr do mierzenia cieczy jest walcem obrotowym, objętości jednego decymetra sześciennego, którego wysokość jest dwa razy większa od średnicy podstawy. *Wyrachować rozmiary tego litra na mniej niż milltmetr.*

Jeśli weźmiemy decymetr za jedność linijną i nazwiemy x wysokość litra, promień podstawy wyrazi się przez $\frac{x}{4}$, i będzie

$$\pi\left(\frac{x}{4}\right)^2 . x = 1, \quad \text{zkąd} \quad x = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}}.$$

Żeby szukana wartość była przybliżona na mniej niż millimetr błędu, dość wziąć $\frac{1}{\pi} = 0,31830$; co daje

$$x = \sqrt[3]{5,09280} = 1,720.$$

Więc wysokość litra zawiera 172 milimetrów, a promień podstawy 43 millimetrów, na mniej niż millimetr, przez niedostatek.

TWIERDZENIE XV.

Objętość stożka jakiegokolwiek ma za miarę trzecią część wieloczynu z podstawy przez wysokość.

Stożek jest oczywiście zawarty między piramidą wpisaną i opisaną. Nazywając b i b' podstawy, H spólną wysokość tych piramid, różnica ich objętości wyrazi się przez

$$\tfrac{1}{3}B . H - \tfrac{1}{3}b . H = \tfrac{1}{3}H(B - b).$$

Owoż, im większą weźmiemy liczbę boków coraz mniejszych, podstawy wpisanej i opisanej, tem bardziej różnica tych podstaw, $b' - b$, a następnie różnica objętości piramid odpowiednych, dążyć będzie do zera. Ztąd wynika że stożek jest spólną granicą tych piramid, i ma za miarę granicę miary ich objętości.

Więc oznaczając przez B, H, V, liczby które mierzą podstawę, wysokość, i objętość stożka, mamy

$$V = gr.\ (\tfrac{1}{3}b\,.\,H), \qquad \text{albo} \qquad V = \tfrac{1}{3}B\,.\,H.$$

Wniosek. — Gdy stożek ma za podstawę koło promienia R, jego objętość wyraża się przez

$$V = \tfrac{1}{3}\pi R^2\,.\,H.$$

Zatem, dwa stożki *kołowe* równej podstawy są proporcyonalne do swych wysokości, a dwa stożki kołowe równej wysokości są proporcyonalne do kwadratów z promieni podstaw.

Dwa stożki *obrotowe podobne* mają się jako *sześciany* z wysokości albo z promieni podstaw.

Uwaga. — Niech będzie piramida foremna przecięta płaszczyzną pochyłą do osi. Jeśli przez oś i krawędzie boczne piramidy odciętej wyobrazimy przechodzące płaszczyzny, pojmiemy łatwo że powierzchnia boczna takiej piramidy pochyłej równa się jej objętości podzielonej przez trzecią część odległości ściany bocznej od punktu spotkania osi z podstawą. Ztąd wiadomem rozumowaniem wnosimy że

Powierzchnia boczna stożka pochyłego, ale takiego tylko KTÓRY JEST CZĘŚCIĄ STOŻKA OBROTOWEGO, *równa się jego objętosci podzielonej przez trzecią część odległości krawędzi od punktu spotkania osi z podstawą.*

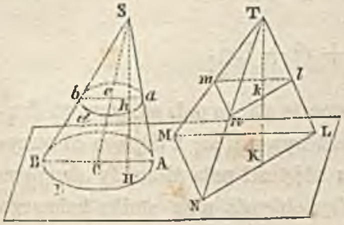
Kwadratura powierzchni bocznej stożka nieobrotowego do *Rachunku całkowego* należy.

Twierdzenie XVI.

Objętość pnia stożka, o podstawach równoległych, równa się summie trzech stożków mających wysokość pnia za spólną wysokość, a za podstawy, pierwszy podstawę niższą pnia, drugi podstawę wyższą, a trzeci średnią proporcyonalną między temi dwiema podstawami.

Niech będzie ADB*adb* pień stożka o podstawach równoległych.

Dopełnijmy stożka S, i wyobraźmy piramidę trójkątną TLMN mającą wysokość tego stożka, i której podstawa, równowarta jego podstawie, jest z nią na jednej płaszczyznie.



Piramida T jest równowarta stożkowi S, bo oboje mają tę samą wysokość i podstawy równowarte.

Jeśli teraz przedłużymy płaszczyznę podstawy wyższej abd stożka, wyznaczymy w piramidzie przecięcie lmn równowarte tej podstawie.

Jakoż (VII, 6, wn).

$$\frac{podst.\ lmn}{podst.\ \mathrm{LMN}} = \frac{\overline{\mathrm{T}k}^2}{\overline{\mathrm{TK}}^2}, \quad \text{i} \quad \frac{podst.\ abd}{podst.\ \mathrm{ABD}} = \frac{\overline{\mathrm{S}h}^2}{\overline{\mathrm{SH}}^2},$$

ale

$$\frac{\overline{\mathrm{T}k}^2}{\overline{\mathrm{TK}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{S}h}^2}{\overline{\mathrm{SH}}^2};$$

zatem

$$\frac{podst.\ lmn}{podst.\ \mathrm{LMN}} = \frac{podst.\ abd}{podst.\ \mathrm{ABD}}.$$

Podstawy LMN i ABD są równowarte z założenia; więc podstawy lmn i abd są także równowarte. Ztąd wynika że stożek Sabd i piramida Tlmn, mając podstawy równowarte i tę samą wysokość, są równowarte; a następnie pień ABDabd stożka jest równowarty pniowi LMNlmn piramidy. Owoż, ten ostatni ma za miarę $\frac{1}{3}\,\mathrm{K}k\,(\mathrm{LMN} + lmn + \sqrt{\mathrm{LMN}\,.\,lmn})$; więc, oznaczając przez H, B, b, wysokość i podstawy pnia stożka, które są równowarte odpowiedającym wielkościom pnia piramidy, znajdujemy że objętość pnia stożka o podstawach równoległych ma za miarę

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{H}\,(\mathrm{B} + b + \sqrt{\mathrm{B}\,.\,b}).$$

Jeśli pień stożka jest kołowy, nazywając R i r promienie jego podstaw, będzie $B = \pi R^2$ i $b = \pi r^2$; zatem

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H\,(R^2 + r^2 + Rr).$$

Uwaga. — Powyższe rozumowanie stosuje się do pnia stożkowego *drugiego gatunku*, którego formuła objętości wywodzi się z dopiero co otrzymanej, uważając tylko że, w wyrażeniu objętości pnia piramidy *drugiego gatunku*, pierwiastnik ma znak —. Więc objętość pnia stożka kołowego drugiego gatunku ma za miarę

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 - Rr).$$

Można z resztą otrzymać obie formuły, uważając pień stożka jako granicę pnia piramidy wpisanego w pień stożka; albo lepiej analitycznie, uważając pień stożka jako różnicę albo summę dwóch stożków (VII, 19, *uw.*).

Obliczanie objętości drzewa ściętego. Uważa się kloc jako walec mający za wysokość swoją długość, a za podstawę przecięcie proste równo oddalone od obydwóch podstaw; co daje przybliżoną formułę

$$V = \pi H\left(\frac{R + r}{2}\right)^2.$$

Błąd jaki się popełnia, biorąc objętość walcową zamiast objętości pnia stożkowego, jest $\tfrac{1}{3}\pi H\left(\frac{R - r}{2}\right)^2$. Gdy można ten błąd zaniedbać, użyje się powyższej formuły którą się jeszcze uprości jeśli, zamiast promienia $\frac{R + r}{2}$, położymy jego wartość $\frac{C}{2\pi}$ w funkcyi okręgu przecięcia kloca. Tym sposobem przybliżona objętość kloca wyraża się formułą

$$V = \frac{H.C^2}{4\pi},$$

która jest łatwa w zastosowaniu, zważając że wartości dla H i C mogą się wyznaczyć sznurkiem metrycznym.

Obliczanie objętości beczek. — Gdyby, uważając beczkę jako summę dwóch pni stożkowych równych, mających spólną podstawę przy szpuncie, wzięto formułę $\tfrac{1}{3}\pi H\,(R^2 + Rr + r^2)$, w której H oznacza *wysokość* beczki, R promień koła przy *szpuncie*, r promień *dna*; otrzymanoby objętość beczki oczywiście za małą. Gdyby w nawiasie zastąpiono Rr przez R^2, mianoby formułę $\frac{1}{3}\pi H(2R^2+r^2)$ która daje objętość beczki za wielką.

Oblicza się zwykle objętość beczek za pomocą następującej przybliżonej formuły

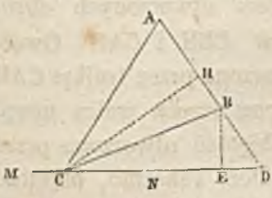
$$V=\pi H\left\{R-\tfrac{1}{3}(R-r)\right\}^2$$

która, dogodna do rachunku, daje objętość mało różną od prawdziwej.

Biorąc $H=0^m,75$; $R=0^m,326$; $r=0^m,302$; objętość beczki byłaby 236,7 litrów. Pierwsza formuła daje 232,4 a druga 238,5.

Twierdzenie XVII.

Objętość utworzona CAŁYM *obrotem trójkąta* ABC *około osi* MN, *leżącej na jego płaszczyźnie i przechodzącej przez wierzchołek* C, *ma za miarę wieloczyn z powierzchni którą opisuje bok przeciwległy* AB *przez trzecią część odpowiedającej wysokości* CH.



Przedłużmy bok AB aż do spotkania D osi MN, i spuśćmy prostopadłę BE na tę oś. Trójkąt CBD swoim obrotem około osi MN, wyznacza dwa stóżki utworzone przez trójkąty CBE i DBE. Oznaczając, dla skrócenia, przez *obj.* (CBD) objętość utworzoną obrotem trójkąta CBD, mamy

$$Obj.\ (CBD)=\tfrac{1}{3}\pi\overline{EB}^2.CE+\tfrac{1}{3}\pi\overline{EB}^2.DE=\tfrac{1}{3}\pi\overline{EB}^2.CD.$$

Ale
$$EB.CD=BD.CH;$$

bo te dwa wieloczyny wyrażają podwójną powierzchnię trójkąta CBD.

Zatem.

$$Obj.\ (CBD)=\tfrac{1}{3}\pi EB.BD.CH.$$

Owoż, $\pi EB.BD=pow.\ (BD)$ (3);

więc $$Obj.\ (CBD) = pow.\ (BD) \,.\, \frac{CH}{3}.$$

Dowiedzie się podobnie że

$$Obj.\ (CAD) = pow.\ (AD) \,.\, \frac{CH}{3}.$$

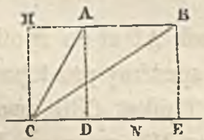
Odejmując stronami, otrzymamy

$$Obj.\ (CAD) - obj.\ (CBD) = \Big\{ pow.\ (AD) - pow.\ (BD) \Big\} \,.\, \frac{CH}{3}.$$

Więc ostatecznie

$$obj.\ (CAB) = pow.\ (AB) \,.\, \frac{CH}{3}.$$

Gdy bok AB jest równoległy do osi obrotu MN, powyższe dowodzenie nie stosuje się; ale wtedy znaleziony wynik wprost się otrzymuje. Jakoż, objętość utworzona obrotem trójkąta CAB jest



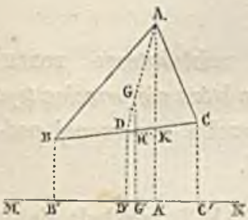
różnicą objętości utworzonych obrotem trójkątów CBH i CAH. Owoż, objętość utworzona przez trójkąt CAH równa się *dwom trzecim* walca utworzonego przez prostokąt CDAH; bo objętość utworzona przez trójkąt CDA jest *jedną trzecią* tego walca. Taksamo, objętość utworzona przez trójkąt CBH równa się dwom trzecim walca utworzonego przez prostokąt CEBH. Więc objętość utworzona przez trójkąt CAB równa się *dwom trzecim* objętości walca utworzonego przez prostokąt DEBA; co daje

$$Obj.(CAB) = \tfrac{2}{3}\pi\overline{DA}^2 \,.\, DE = 2\pi DA \,.\, AB \,.\, \frac{CH}{3} = pow.\ (AB) \,.\, \frac{CH}{3}.$$

Trójkąt CAB może być *summą* dwóch innych, zamiast różnicą jako wyżej; ale dowodzenie oczywiście to samo.

Twierdzenie XVIII.

Objętość utworzona obrotem trójkąta ABC *około osi* MN, *leżącej na jego płaszczyznie, ma za miarę wieloczyn z powierzchni tego trójkąta przez okrąg nakreślnony jego środkiem ciężkości* G (*punkt spotkania ośrodkowych trójkąta*).



Na oś MN spuśćmy prostopadłe AA′, BB′, CC′, GG′, i uczyńmy, dla skrócenia, $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, $A'B' = \alpha$, $A'C' = \beta$.

Objętość utworzona przez trójkąt ABC równa się summie dwóch pni stożkowych utworzonych przez trapezy ABB′A′, ACC′A′, mniej pień stożkowy utworzony przez trapez BCC′B′. Więc

$$Obj.\, ABC = \tfrac{1}{3}\pi\left\{(a^2+b^2+ab)\alpha+(a^2+c^2+ac)\beta-(b^2+c^2+bc)(\alpha+\beta)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi\left\{(a^2-c^2+ab-bc)\alpha+(a^2-b^2+ac-bc)\beta\right\}.$$

Ilości w nawiasach mogą się wyrazić jako następuje:

$$a^2-c^2+ab-bc=(a-c)(a+c)+(a-c)b=(a-c)(a+b+c),$$
$$a^2-b^2+ac-bc=(a-b)(a+b)+(a-b)c=(a-b)(a+b+c)$$

Zatem

$$Obj.\, (ABC) = \tfrac{1}{3}\pi(a+b+c)\left\{(a-c)\alpha+(a-b)\beta\right\}.$$

Owoż, uważajmy że trójkąt ABC równa się summie trapezów ABB′A′ i ACC′A′ mniej trapez BCC′B′; więc jego powierzchnia S wyraża się przez

$$S = \tfrac{1}{2}\left\{(a+b)\alpha+(a+c)\beta-(b+c)(\alpha+\beta)\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{(a-c)\alpha+(a-b)\beta\right\}.$$

Ztąd $$(a-c)\alpha+(a-b)\beta = 2S.$$

Aby wiedzieć co wyraża czynnik $\tfrac{1}{3}(a+b+c)$, przez spodek D ośródkowej AD poprowadźmy równoległę DK do osi MN. Trójkąt ADK, w którym $AG = \tfrac{2}{3}AD$ i prosta GH jest równoległa do AK, daje

$$GH = \tfrac{1}{3}AK, \quad \text{albo} \quad GG' - DD' = \tfrac{1}{3}(AA' - DD').$$

Ztąd $$GG' = \tfrac{1}{3}(AA' + 2DD') = \tfrac{1}{3}(AA' + BB' + CC').$$

Więc, podstawiając te wartości, otrzymujemy ostatecznie

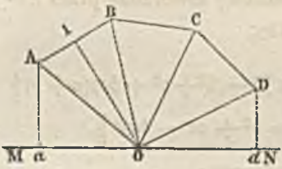
$$Obj.\ (\mathrm{ABC}) = \mathrm{S}.2\pi\mathrm{GG}'.$$

Uwaga. — Poprzedzające twierdzenie jest szczególnym przypadkiem obecnego.

Twierdzenie XIX.

Objętość utworzona obrotem wycinka wielokątnego foremnego OABCD, *około średnicy koła wpisanego która nie przecina tego wycinka, ma za miarę wieloczyn z powierzchni utworzonej podstawą* ABCD *przez trzecią część apotemy* OI.

Jakoż, wycinek wielokątny foremny OABCD rozkłada się na trójkąty równoramienne równe OAB, OBC... które, obrotem swoim około osi MN, dają następujące objętości (16) :



$$Obj.\ (\mathrm{OAB}) = pow.\ (\mathrm{AB}) . \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OI},$$

$$Obj.\ (\mathrm{OBC}) = pow.\ (\mathrm{BC}) . \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OI},$$

$$Obj.\ (\mathrm{OCD}) = pow.\ (\mathrm{CD}) . \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OI}.$$

Ztąd, dodając, otrzymujemy

$$Obj.\ (\mathrm{OABCD}) = pow.\ (\mathrm{ABCD}) . \tfrac{1}{3}\,\mathrm{OI}.$$

Wniosek I. — Jeśli oznaczymy przez r apotemę łamanej foremnej ABCD, przez h wysokość powierzchni którą tworzy; będzie

$pow.\ (\mathrm{ABCD}) = 2\pi rh.$ Więc $obj.\ (\mathrm{OABCD}) = {}_3\pi r^2 h$

Wniosek II. — Powyższe dowodzenie pokazuje że *objętość utworzona całym obrotem wycinka wielokątnego opisanego na kole, około jego średnicy, ma za miarę wieloczyn z powierzchni którą tworzy podstawa tego wycinka przez trzecią część promienia.*

Określenie X. — Figura utworzona obrotem wycinka kołowego ACD około średnicy która go nie przecina nazywa się *wycinkiem sferycznym*. Podstawą wycinka sferycznego jest strefa utworzona przez jego łuk AD, a wysokością promień sfery.

XI. — Część sfery zawarta między dwiema płaszczyznami równoległemi nazywa się *odcinkiem sferycznym*. Te płaszczyzny są *podstawami* odcinka; a ich odległość wysokością.

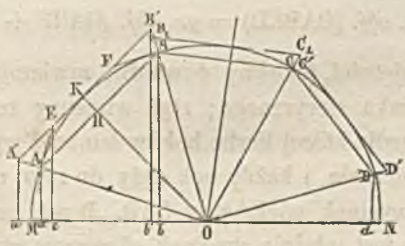
Jedna z płaszczyzn może stać się styczną do sfery; wtedy mówi się że odcinek sferyczny ma tylko jedną podstawę.

XII. — Dwa wycinki sferyczne, albo dwa odcinki sferyczne są podobne gdy odpowiedają strefom podobnym.

Twierdzenie XX.

Wycinek sferyczny ma za miarę wieloczyn ze strefy która mu służy za podstawę przez jedną trzecią promienia sfery.

Niech będzie wycinek sferyczny utworzony obrotem wycinka



kołowego AOD około średnicy MN. W łuk AD wpiszmy jakąkolwiek łamanę ABCD, i poprowadźmy styczne koła A'B', B_1C_1,... równoległe do jej boków, a zawarte między normalnemi które przechodzą przez jej wierzchołki. Oczywiście objętość wycinka sferycznego jest większa od objętości utworzonej przez wycinek wielokątny OABCD, ale mniejsza od objętości utworzonej przez summę wycinków trójkątnych OA'B', OB_1C_1,... to jest

$$Obj.\ (OABCD) < obj.\ (AOD) < obj.\ (OA'B' + OB_1C_1 +).$$

Owoż, nazywając r_1 i r_2 najmniejszą i największą apotemę boków łamanej wpisanej, wiemy (6) że

$$\frac{r_1^2}{R^2} < \frac{pow.\,(AB) + pow.\,(BC) + }{pow.\,(A'B') + pow.\,(B_1C') + } < \frac{r_2^2}{R^2};$$

jeśli więc pomnożymy każdą z tych *powierzchni* przez trzecią część odpowiedającej apotemy, stosunki skrajne przez najmniejszy i największy stosunek $\frac{r_1}{R}$ i $\frac{r_2}{R}$, będzie tem bardziej

$$\frac{r_1^3}{R^3} < \frac{pow.\,(AB)\,.\,\tfrac{1}{3}\,r' + pow.\,(BC)\,.\,\tfrac{1}{3}\,r'' + }{pow.\,(A'B')\,.\,\tfrac{1}{3}\,R + pow.\,(B_1C_1)\,.\,\tfrac{1}{3}\,R + } < \frac{r_2^3}{R^3}.$$

albo, co to samo,

$$\frac{r_1^3}{R^3} < \frac{obj.\,(OABCD)}{obj.\,(OA'B' + OB_1C_1 +)} < \frac{r_2^3}{R^3}.$$

Ale, gdy boki łamanej wpisanej w łuk AD dążą do zera, stosunki $\frac{r_1^3}{R^3}$ i $\frac{r_2^3}{R^3}$ dążą do jedności którą mają za granicę;

więc $\quad gr.\ obj.\,(OABCD) = gr.\ obj.\,(OA'B' + OB_1C' + \ldots).$

Te dwie objętości, jakośmy dowiedli, zawierają między sobą objętość wycinka sferycznego; ztąd wnosimy że, jakakolwiek jest ustawa wedle której liczba boków łamanej wpisanej AB...D rośnie nieskończenie, i każdy bok dąży do zera, objętość utworzona przez wycinek wielokątny OAB...D ma zawsze tę samą granicę, którą jest właśnie wycinek sferyczny utworzony przez wycinek kołowy AOD.

Aby teraz, znaleźć miarę objętości wycinka sferycznego, którą oznaczamy przez V, dość jest wziąć granicę miary objętości utworzonej przez wycinek wielokątny foremny, w którym liczba boków podstawy rośnie nieskończenie; co daje

$$V = gr.\ \{pow.\,(ABCD)\,.\,\tfrac{1}{3}\,r\} = gr.\ pow.\,(ABCD) \times gr.\ \tfrac{1}{3}\,r;$$

więc $\quad V = stref.\,(ABCD)\,.\,\tfrac{1}{3}\,R.$

Wniosek. — Ponieważ powierzchnia strefy (ABCD) ma zamiarę $2\pi Rh$, objętość wycinka sferycznego wyraża się przez

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Więc, w jednej sferze dwa wycinki sferyczne są proporcyonalne do wysokości swych podstaw.

Twierdzenie XXI.

Objętość sfery ma za miarę wieloczyn z powierzchni przez jedną trzecią promienia.

Można uważać sferę jako summę dwóch wycinków sferycznych, utworzonych przez wycinki kołowe COA i COB. Więc objętość sfery równa się

$$V = \textit{strefa}\ (AC)\,.\,\frac{1}{3}OA + \textit{strefa}\ (BC)\,.\,\frac{1}{3}OA.$$

albo

$$V = \left\{\textit{strefa}\,(AC) + \textit{strefa}\,(BC)\right\}\cdot\frac{1}{3}OA$$

$$= \textit{pow. sfery}\ OA\,.\,\frac{1}{3}OA.$$

Wniosek. — Powierzchnia sfery wyraża się przez $4\pi R^2$; zatem objętość sfery ma za miarę

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Jeśli nazwiemy D średnicę sfery, będzie $R = \frac{D}{2}$; więc objętość sfery, w funkcyi średnicy, wyraża się przez,

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8} = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Ztąd wynika że *objętości dwóch sfer są proporcyonalne do sześcianów z promieni albo ze średnic.*

ZASTOSOWANIE. — 1° *Wyrachować objętość ziemi.*

Biorąc formułę $V = \frac{1}{6}\pi D^3$, i uważając że średnica $D = \frac{4000}{\pi}$ miryametrów, znajdziemy, mając wzgląd na przybliżenia, że objętość ziemi, gdyby była sferyczną, zawierałaby 1 080 744 625 miryametrów sześciennych, na mniej niż miryametr sześcienny.

2° *Wiedząc że gęstość lanego żelaza jest* 7, 2 *wyrachować grubość bomby mającej* 40 *centymetrów średnicy i ważącej* 100 *kilogramów.*

Weźmy decymetr za jedność linijną i nazwijmy x średnicę wewnętrzną bomby, będzie

$$\frac{1}{6}\pi(4^3 - x^3) . 7,2 = 100; \qquad \text{zkąd} \quad x^3 = 64 - \frac{250}{3}.\frac{1}{\pi}.$$

Owoż, biorąc $\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$ (przez zbytek), znajdujemy

$x^3 = 37{,}4732$ na mniej niż 0,001 przez niedostatek ;

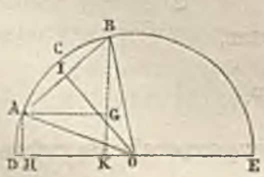
zatem $$x = \sqrt[3]{37{,}4732} = 3{,}346$$

na mniej niż 0,001 przez niedostatek.

Więc grubość bomby jest mniejsza od $4 - 3{,}346 = 0{,}654$' ale większa od $4 - 3{,}347 = 0{,}653$; to jest, zawiera 65 millimetrów, na mniej niż millimetr, przez niedostatek.

TWIERDZENIE XXII.

Objętość utworzona obrotem odcinka kołowego ABC, *około średnicy zewnętrznej* DE, *równa się jednej szóstej walca mającego za promień cięciwę odcinka i za wysokość rzut* HK *tej cięciwy na osi.*



Poprowadźmy promienie OA, OB, i apotemę OI. Objętość utworzona przez odcinek ABC jest różnicą wycinka sferycznego AOB i objętości utworzonej przez trójkąt ABO, to jest :

$$Obj.\ (ABC) = \frac{1}{3}\pi\overline{OA}^2 . HK - \frac{1}{3}\pi\overline{OI}^2 . HK = \frac{1}{3}\pi(\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2)HK$$

Ale, w trójkącie prostokątnym AIO, $\overline{OA}^2 - \overline{OI}^2 = \overline{AI}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2$.

Więc $$Obj.\ (ABC) = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 . HK.$$

Wniosek. — Gdy cięciwa AB odcinka tworzącego jest równoległa do osi, objętość utworzona nazywa się *obręczą sferyczną*;

wtedy rzut HK = AB, i $obj.\ (ABC) = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^3$.

Więc obręcz sferyczna jest równowarta sferze mającej cięciwę AB za średnicę.

Twierdzenie XXIII.

Objętość odcinka sferycznego jest równowarta objętości sfery mającej jego wysokość za średnicę, więcej połową summy objętości dwóch walców mających za wysokość i podstawy wysokość i podstawy tego odcinka.

Niech będą (*fig. powyższa*) HA i KB promienie dwóch kół które są podstawami odcinka sferycznego, HK jego wysokość. Ten odcinek sferyczny, który można uważać jako utworzony obrotem figury HACBK około średnicy DE, jest summą objętości utworzonych przez odcinek kołowy ABC i przez trapez prostokątny HABK.

Owoż, poprzedzające twierdzenie daje

$$obj.\ (ABC) = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 . HK\ ;$$

a zaś trapez HABK tworzy pień stożka obrotowego, i daje (15)

$$obj.\ (HABK) = \frac{1}{3}\pi HK\ (\overline{AH}^2 + \overline{BK}^2 + AH . BK).$$

Więc $obj.\ (DACBK) = \frac{1}{6}\pi HK\ (\overline{AB}^2 + 2\overline{AH}^2 + 2\overline{BK}^2 + 2AH . BK)$.

Aby wyrugować cięciwę AB, uważajmy że, prowadząc równoległę AG do HK, mamy

$$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 = \overline{HK}^2 + (BK - AH)^2$$

albo $$\overline{AB}^2 = \overline{HK}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{BK}^2 - 2AH \,.\, BK.$$

Podstawiając tę wartość, otrzymujemy

$$Obj.\ (HACBK) = \frac{1}{6}\pi HK(\overline{HK}^2 + 3\overline{AH}^2 + 3\overline{BK}^2);$$

więc ostatecznie

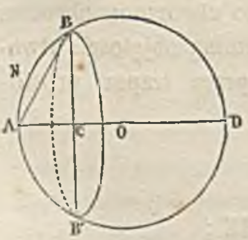
$$obj.(HACBK) = \frac{1}{6}\pi\overline{HK}^3 + \frac{1}{2}HK(\pi\overline{AH}^2 + \pi\overline{BK}^2).$$

Wniosek. — Gdy podstawa AH odcinka sferycznego staje się zerem, to jest gdy punkt A jest skrajnością średnicy DE, wtedy odcinek sferyczny ma tylko jedną podstawę i stanowi krymkę sferyczną.

Więc objętość krymki sferycznej jest

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{DK}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{BK}^2 \,.\, DK.$$

Można wprost otrzymać ten wynik. Jakoż, odcinek kołowy ABN i trójkąt ABC, obracając się około średnicy AD, tworzą krymkę sferyczną.



Więc, nazywając V objętość tej krymki, będzie

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 \,.\, AC + \frac{1}{3}\pi\overline{BC}^2 \,.\, AC$$

$$= \frac{1}{6}\pi AC\,(\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2);$$

zkąd, podstawiając wartość $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$,

wynika $$V = \frac{1}{6}\pi\overline{AC}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{BC}^2 \,.\, AC.$$

Objętość krymki sferycznej może się wyrazić w funkcyi jej wysokości AC $= h$ i promienia R sfery. Albowiem, jeśli z ostatniego równania wyrugujemy $\overline{BC}^2$, uważając że

$$\overline{BC}^2 = AC\,CD = (2R - h)\,h\,;$$

otrzymamy

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h^2 (2R - h) = \pi h^2 R - \frac{1}{3}h^3 = \pi h^2 (R - \frac{1}{3}h).$$

Uwaga. — Z objętości odcinka sferycznego o dwóch podstawach, wyprowadziliśmy objętość krymki sferycznej; nie źle teraz będzie pokazać jak, nawzajem, z ostatniej wywodzi się pierwsza. Otóż, odcinek sferyczny jest różnicą dwóch krymek sferycznych; zatem, oznaczając, przez r i r' podstawy, przez h wysokość, przez V objętość tego odcinka; przez H i H$'$ wysokości dwóch krymek, $H' - H = h$; przez R promień sfery; i wyrażając objętość krymki sferycznej w funkcyi jej wysokości i promienia sfery, mamy, na mocy powyższej formuły,

$$V = \pi H'^2(R - \frac{1}{3}H') - \pi H^2(R - \frac{1}{3}H)$$

$$= \pi Rh(H + H') - \frac{1}{3}\pi h(H^2 - HH' + H'^2)$$

Ale, (*fig. tw.* 22) $2R.H = \overline{AD}^2 = r^2 + H^2$ i $2R.H' = r'^2 + H'^2$.

Rugując zatem R.H i R.H$'$, będzie

$$V = \frac{1}{2}\pi h(r^2 + r'^2) + \frac{1}{6}\pi h(H^2 - 2H.H' + H'^2)\,;$$

więc

$$V = \frac{1}{2}h(\pi r^2 + \pi r'^2) + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

C.*b.d.d.*

Twierdzenie XXIV.

Jeśli na sferze opisano walec prosty i stożek równoboczny, powierzchnia całkowita walca jest średnią proporcyonalną między powierzchnią całkowitą sfery i stożka; objętość walca jest średnią proporcyonalną między objętością sfery i stożka. Te trzy powierzchie i trzy objętości są w stosunku tych samych liczb 4, 6, 9.

Wyobraźmy że walec i stożek równoboczny, oba opisane sferze, mają podstawy na jednej płasczyznie. Przez oś stożka GH

poprowadźmy płasczyznę która przetnie sferę wedle wielkiego koła OH; a zaś walec i stożek wedle kwadratu ABCD i trójkąta równobocznego EFG, opisanych na tem kole. Będzie

1° Powierzchnia sfery $R = 4\pi R^2$.

Powierzchnia cała walca $ABCD = 2\pi R \,.\, 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$.

Powierzchnia cała stożka $EFG = \pi HF \,.\, FG + \pi \overline{HF}^2 = 3\pi \overline{HF}^2$.

Ale $EF = 2R\sqrt{3}$ (IV, *zag.* 5, *uw.*); zkąd $HF = R\sqrt{3}$; podstawiając tę wartość, będzie *pow. cał. stoż.* $= 9\pi R^2$.

Więc $$\frac{pow.\,sfery}{4} = \frac{pow.\,cał.\,wal.}{6} = \frac{pow.\,cał.\,stożka}{9}.$$

2° *Obj. sfery* $= \frac{4}{3}\pi R$, *obj. walca* $(ABCD) = 2\pi R^3$,

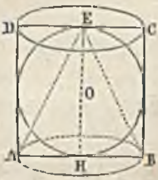
$$obj.\ stoz.\ (EFG) = \frac{1}{3}\pi(R\sqrt{3})^2 \,.\, 3R = 3\pi R^3.$$

Więc $$\frac{Obj.\,sfery}{4} = \frac{Obj.\,walca}{6} = \frac{Obj.\,stoka.}{9}.$$

Dwa otrzymane wyniki pokazują że: 1° powierzchnia *cała* walca prostego opisanego na sferze jest średnią proporcyonalną między powierzchnią sfery i powierzchnią *całą* stożka równobocznego opisanego; 2° objętości tych trzech figur są także w tej samej proporcyi.

Wniosek. — Powierzchnia sfery jest równowarta powierzchni bocznej walca prostego opisanego.

Uwaga I. — Jeśli w sferę wpiszemy walec i stożek, oba równoboczne, powierzchnia walca będzie średnią proporcyonalną między objętością sfery i stożka, objętość walca i będzie także średnią proporcyonalną miądzy objętością sfery i stożka. Ale stosunki tych trzech powierzchni i objętości nie są wyrażone temi samemi liczbami.



II. — Jeśli w walec równoboczny wpiszemy sferę i stożek prosty, objętości tych trzech figur będą w stosunku liczb 1, 2, 3.

Mówią że ta figura była wyryta na grobie ARCHIMEDESA.

TWIERDZENIE XXV.

Klin sferyczny ma za miarę podwójną liczbę która mierzy jego kąt.

Jakoż, rozumowanie użyte w *tw.* IX dowodzi że, oznaczając przez V objętość sfery, przez A kąt klina sferycznego, (*okr.* IX), jest

$$Obj.\ \text{klina} = \frac{A}{4P} . V.$$

Jeśli więc za jedność kątów weźmiemy *kąt prosty*, i za jedność objętości *piramidę trójprostokątną* która jest *ósmą częścią objętości sfery*, będzie

$$Obj.\ \text{klina} = 2A.$$

Co usprawiedliwia wysłowienie twierdzenia.

TWIERDZENIE XXVI.

Objętość piramidy sferycznej ma za miarę wieloczyn z podstawy przez trzecią część promienia sfery.

Niech będzie najpierwej piramida sferyczna trójkątna której podstawa ma kąty A, B, C; jeśli oznaczymy przez *obj. pir.* objętość tej piramidy , przez V i R objętość i promień sfery, powtarząjąc rozumowanie *tw.* X. i kładąc w niem zamiast wrzecienia klin sferyczny, znajdziemy

$$Obj.\ pir. = \frac{V}{8}(A + B + C - 2),$$

albo, podstawiając za V jego wartość $\frac{4}{3}\pi R^3$, będzie

$$Obj.pir. = \frac{1}{6}\pi R^3(A + B + C - 2) = \frac{1}{2}\pi R^2(A + B + C - 2).\frac{R}{3}.$$

Owoż, $\frac{1}{2}\pi R^2(A + B + C - 2)$ wyraża powierzchnię trójkąta sferycznego ABC który jest podstawą piramidy sferycznej; więc objętość tej piramidy ma za miarę wieloczyn z podstawy przez jedną trzecią promienia sfery.

Twierdzenie stosuje się do piramidy sferycznej wielokątnej; dowodzi się go łatwo rozkładając podstawę piramidy na trójkąty sferyczne.

Miara kątów wielościennych. — W jednej sferze, objętości dwóch piramid sferycznych są proporcyonalne do podstaw, te zaś podstawy są proporcyonalne do odpowiednych wielokątów sferyczuych na sferze spółśrodkowej z pierwszą. Owoż, gdy promień pierwszej sfery rośnie do nieskończoności, piramidy stają się kątami wielościennemi; ztąd wynika że przestrzenie dwóch kątów wielościennych, mających wierzchołek we środku jednej sfery, są proporcyonalne do wielokątów sferycznych objętych między ich ścianami na tej sferze.

Więc, jeśli za jedność kątów płaskich wzięto kąt prosty, za jedność kątów wielościennych kąt trójścienny trójprostokątny, a za jedność powierzchni sferycznej trójkąt trójprostokątny, wtedy *kąt wielościenny, którego wierzchołek jest we środku sfery, ma za miarę wielokąt sferyczny objęty między jego ścianami*, to znaczy że liczba $\Sigma - 2n + 4$, która wyraża stosunek tego wielokąta do trójkąta trójprostokątnego, daje stosunek kąta wielościennego do kąta trójprostokątnego.

Twierdzenie XXVII.

W wielościanie WYPUKŁYM *summa kątów wielościennych równa się podwójnej przewyżce summy kątów dwójściennych nad tyle razy 2 kąty dwójścienne proste ile jest ścian mniej dwie.*

Miarą kąta wielościennego jest liczba $\Sigma - 2n + 4$, w której Σ oznacza summę kątów dwójściennych, biorąc za jedność kąt dwójścienny prosty, n znaczy liczbę krawędzi. Owoż, w wielościanie każdy kąt dwójścienny i każda krawędź należą do dwóch kątów wielościennych; więc, jeśli wielościan jest wypukły, tojest mający wszystkie kąty wielościenne sterczące których liczba jest W, otrzymamy summę tych kątów zastępując w powyższej formule Σ przez 2Σ, n przez 2K, 4 przez 4W; co daje $2\Sigma - 4K + 4W$. Ale, na mocy twierdzenia Eulera, $4W - 4K = 8 - 4S$; więc summa wszystkich kątów bryłowych wielościanu wypukłego wyraża się przez

$$2\Sigma - 4(S - 2).$$

MAXIMUM I MINIMUM FIGUR W PRZESTRZENI.

Twirdzenie XXVIII.

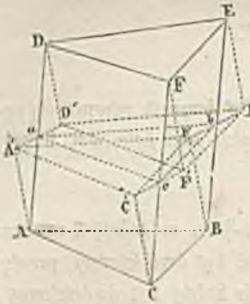
Ze wszystkich figur zamkniętych równej powierzchni sfera ma największą objętość; I NAWZAJEM, *ze wszystkich figur równej objętości sfera ma najmniejszą pawierzchnię.*

Dowodzenie tego twierdzenia opiera się na następującem które najpierwej okażemy.

Jeśli przez środki a, b, c *krawędzi bocznych* AD, BE, CF *pnia graniastonu trójkątnego poprowadzimy płaszczyznę, wtedy*: 1° *dwa odcinki pnia będą równowarte*; 2° *przecięcie* abc *będzie mniejsze od połowy summy podstaw* ABC *i* DEF.

Pierwsza część tego zadania jest oczywista (VII, 20. Wn. 2).

Co do drugiej, niech będą A'B'C' i D'E'F' rzuty dwóch podstaw ABC i DEF na płaszczyznie abc; proste A'D', B'E', C'F' są równoległe, i punkta a, b, c są ich środkami. Mamy widocznie



$$abc = A'B'C' + abB'A' - acC'A' - bcC'B'$$

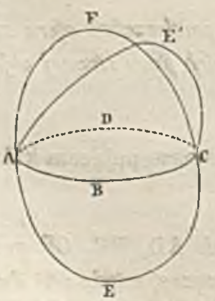
$$abc = D'E'F' + acF'D' + bcF'E' - abE'D'.$$

Ale te sześć trapezów są równowarte dwojanami, np. abB'A' i abE'D', jako mające tę samą wysokość i równe podstawy;

więc $$abc = \frac{A'B'C' + D'E'F'}{2} < \frac{ABC + DEF}{2}.$$

Ztąd wynika że, *jeśli w figurze zamkniętej powierzchnią wypukłą, poprowadzono szereg cięciw równoległych, powierzchnia będąca miejscem środków tych cięciw dzieli objętość figury na dwie części równowarte, i jest mniejsza od połowy powierzchni tej figury.*

Wyobraźmy sobie teraz figurę która ma największą objętość między figurami równej powierzchni. Powiedam że ta figura maximum ma nieskoóczoną liczbę płaszczyzn symetryi. Jakoż, istnieje oczywiście w każdym kierunku pewna płaszczyzna dzieląca powierzchnię tej figury na dwie części równowarte. Niech będzie ABC jedna z tych płaszczyzn; ona dzieli właśnie objętość figury maximum na dwie części równowarte i symetryczne. Albowiem, gdyby część wyższa F była mniejsza od części niższej E, możnaby zastąpić pierwszą przez figurę E' symetryczną drugiej; owoż powierzchnie figur E', E i F są równowarte, więc tym sposobem objętość całej figury zwiększyłaby się nie zmieniając powierzchni; co niemożebne.



Jeśli połowa wyższa F nie jest symetryczna niższej E, weźmy symetryczną E' tej ostatniej. Powierzchnie F i E' mają spólną podstawę ABCD, są równowarte i zawierają objętości równowarte. Więc jeśli poprowadzimy szereg cięciw zawartych między powierzchniami F i E', miejscem środków tych cięciw będzie, jakośmy wyżej okazali, pewna powierzchnia S mniejsza od $\frac{F+E'}{2}$, to jest mniejsza od F; ale objętość zawarta między powierzchnią S i jej podstawą ABCD będzie równowarta objętości zawartej między tą samą podstawą i powierzchnią F. Ztąd wynika że objętość maximum pod daną powierzchnią E + F mogłaby się zawrzeć powierzchnią mniejszą E + S; co przeciw założeniu. Więc każde dwie połowy figury maximum są symetryczne; i temsamem wszelka płasczyzna która dzieli powierzchnię figury maximum na dwie części równowarte jest jej płasczyzną symetryi.

To ustaliwszy, poprowadźmy w przestrzeni dwie płasczyzny jakiekolwiek czyniące kąt dwójścienny α niespółmierny z π. Figura maximum posiada oczywiście dwie płasczyzny symetryi równoległe do ścian kąta α; zatem jej przecięcie przez płasczyznę prostopadłą do krawędzi kąta α, ma za osie symetryi dwie linie proste które, leżąc na tych dwóch płasczyznach symetryi, czynią kąt α; a ponieważ kąt α jest niespółmierny z π, to przecięcie jest kołem (VII, 23, *tw.*). Owoż, krawędź kąta dwójściennego α jest dowolna w przestrzeni; ztąd wnosimy że wszelka płasczyzna przecina figurę maximum wedle koła; więc ta figura jest sferą.

Dowiedźmy nakoniec wzajemnicy.

Ze wszystkich figur równej objętości sfera ma najmniejszą powierzchnię.

Gdyby jakakolwiek figura zamknięta, różna od sfery ale tej samej objętości, miała powierzchnię mniejszą, możnaby ją przekształcić na sferę powierzchni równowartej; objętość tej sfery, na mocy powyższego twierdzenia, byłaby większa od objętości figury nieprzekształconej. Więc druga sfera miałaby objętość większą od pierwszej a powierzchnię mniejszą; co niemożebne.

WIELOŚCIANY FOREMNE.

Twierdzenie XXIX.

Pięć tylko wielościanów foremnych wypukłych istnieć może.

To twierdzenie jest następstwem ogólniejszego:

Może istnieć tylko pięć gatunków wielościanów wypukłych w których wszystkie ściany mają tę samą liczbę boków, i wszystkie kąty wielościenne tę samą liczbę ścian.

Oznaczmy przez n liczbę boków każdej ściany, przez m liczbę ścian każdego kąta wielościennego. Ponieważ każda krawędź należy do dwóch ścian i łączy dwa wierzchołki, mamy

$$2K = nS = mW. \qquad (1)$$

Rugując K i W między temi równaniami i formułą *Eulera*, otrzymujemy

$$S = \frac{4m}{2(m+n) - mn}. \qquad (2)$$

Uważajmy teraz że liczby S, m, n są całkowite i dodatne, więc musi być

$$2(m+n) > mn; \qquad \text{zkąd} \qquad n > \frac{2m}{m-2}.$$

Owoż, najmniejsza wartość jaką można dać dla m jest 3; więc $n < 6$. Z przyczyny symetryi wnosimy że $m < 6$,

Więc niema żadnego wielościanu w którymby wszystkie ściany miały więcej niż *pięć* boków, albo wszystkie kąty wielościenne miały więcej niż *pięć* ścian. Co już wiadome (VII, 36, *wn.*).

Ztąd wynika że ścianą wielościanu foremnego może być tylko:

trójkąt równoboczny, kwadrat i pięciokąt foremny; a jego kątem wielościennym tylko kąt trójścienny czworościenny i pięcio-ścienny.

Jeśli weźmiemy *trójkąty równoboczne* na ściany wielościanu foremnego, będzie $n = 3$ i $S = \frac{4m}{6 - m}$; kładąc za m liczby 3, 4, 5, otrzymamy dla S liczby 4, 8, 20.

Więc trójkąt równoboczny może służyć do utworzenia trzech wielościanów foremnych, to jest: CZWOROŚCIANU, OŚMIOŚCIANU i DWUDZIESTOŚCIANU.

Biorąc teraz *kwadrat*, mamy $n = 4$ i $S = \frac{2m}{4 - m}$.

Zatem jedyna wartość dla m jest 3, i daje $S = 6$.

To dowodzi że z kwadratu jeden tylko wielościan foremny utworzyć można, to jest SZEŚCIAN.

Nakoniec, weźmy *pięciokąt foremny*;

będzie $n = 5$ i $S = \frac{4m}{10 - 3n}$.

Jedyna wartość możebna dla m jest 3, i daje $S = 12$.

Więc z pięciokąta foremnego można utworzyć tylko DWUNASTO-ŚCIAN FOREMNY.

Powyższe wartości, do których dołączamy wartości K i W (1), przedstawiają następujący obraz wielościanów foremnych (*).

Wielośc. foremne	S	W	K	n	m
CZWOROŚCIAN	4	4	6	3	3
OŚMIOŚCIAN	8	6	12	3	4
DWUDZIESTOŚCIAN	20	12	30	3	5
SZEŚCIOŚCIAN	6	8	12	4	3
DWUNASTOŚCIAN	12	20	30	6	3

(*) Na samo spójrzenie na ten obraz widać zaraz że, w sześcianie i ośmio-

Te pięć wielościanów foremnych istnieją rzeczywiście, jako pokazują następujące wykreślenia.

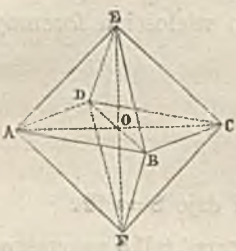
ZAGADNIENIE.

Zbudować wielościan foremny znając jego krawędź a.

Istnienie sześcianu i czworościanu foremnego nie potrzebuje dowodzenia. Zajmiemy się więc tylko ośmiościanem, dwunastościanem, i dwudziestościanem.

Ośmiościan foremny.

Wystawmy kwadrat ABCD mający bok AB $= a$. Przez środek O tego kwadratu, poprowadźmy do jego płaszczyzny prostopadłę OE, na której weźmy, z obydwóch stron, długości OE i OF równe promieniowi OF kwadratu. Jeśli połączymy E i F z wierzchołkami A, B, C, D, otrzymamy ośmiościan foremny EABCDF. Jakoż, trójkąty prostokątne i równoramienne AOB, AOE, AOF są równe; zatem AE $=$ AF $=$ AB $= a$. Co dowodzi że wszystkie ściany są trójkątami równobocznemi równemi. Nadto, czworoboki ABCD, AECF, BEDF są kwadratami równemi; więc kąty wielościenne, na przykład kąty A i B, są równe jako kąty przy wierzchołku dwóch piramid ABEDF, BAECF foremnych równych.

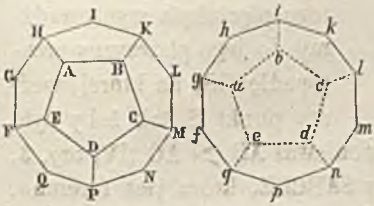


Widzimy łatwo że: 1° gdy trzy proste równe AC, BD, EF przecinają się na połowy i pod kątem prostym, ich skrajności są

ścianie, liczba krawędzi jest ta sama, a liczby ścian i wierzchołków są nawzajem te same, jako też liczby m i n. Można więc przejść z sześcianu do ośmiościanu albo na odwrót, zamieniając tylko liczbę ścian S na liczbę wierzchołków W, i nawzajem. Podobnie co do dwunastościanu i dwudziestościanu. Z przyczyny tej własności, mówi się czasem że wielościany foremne są *sprzężone po dwa;* czworościan mający tyle ścian ile wierzchołków jest sam swoim sprzężonym.

wierzchołkami ośmiościanu foremnego. 2° W ośmiościanie foremnym ściany przeciwległe są równoległe między sobą.

Dwunastościan foremny.

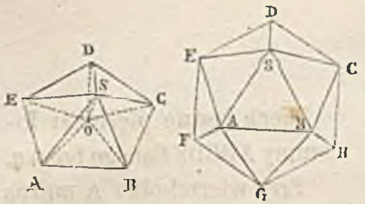


Niech będzie pięciokąt foremny ABCDE danego boku a. Przy wierzchołku A można utworzyć, z tego pięciokąta i z dwóch innych równych, kąt trójścienny który będzie foremny, bo jego ściany są równe i temsamem kąty dwójścienne równe. Zatem, kąty trójścienne A, B, H są równe, jako mające kąt dwójścienny równy zawarty między dwiema ścianami równemi każda każdej i w tym samym porządku. To dowodzi że kąty trójścienne B i H są także foremne, i kąt GHI jest kątem pięciokąta foremnego. Więc, złożywszy kąt trójścienny A ze trzech pięciokątów foremnych równych, można wstawić czwarty taki pięciokąt w kąt CBK, potem piąty w kąt DCM, i tak dalej. Otrzymuje się tym sposobem powierzchnię złożoną z sześciu pięciokątów foremnych równych i równo nachylonych. Ta powierzchnia, stanowiąca połowę powierzchni dwunastościanu, jest otwarta przy obwodzie dziesięciokąta FGHI...QR. Ten zaś dziesięciokąt jest spaczony; bo, gdyby cztery punkta GHIK były na jednej płaszczyznie, ponieważ punkt A leży na niej także, nie byłoby trójścianu A.

Zbudujmy teraz, takim samym sposobem, drugą połowę *abc...q* dwunastościanu, i przystawmy do niej pierwszą tak, żeby kąt sterczący HIK przystał do wklęsłego równego *hik*. Wtedy, utworzy się kąt trójścienny foremny I równy kątowi A; punkt K padnie na *k*, i kąt IKL przystanie do równego *ikl*, bo kąt trójścienny K jest także foremny równy kątowi A. I tak dalej.

Więc dwie powierzchnie złączone, tworząc wielościan złożony z dwunastu ścian równych i równo nachylonych, dają dwunastościan foremny.

Dwudziestościan foremny.



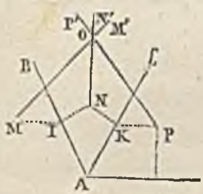
Weźmy najpierwej pięciokąt foremny ABCDE mający bok AB = *a*. Ze środka O tego pięciokąta wyprowadźmy do jego płaszczyzny prostopadłę OS, na której weźmy punkt S tak żeby było AS=AB; co zawsze możebne, ponieważ AB > AO (IV, *zag.* 3, wn.). Jeśli dopełnimy piramidy SABCDE, która jest foremna, jej kąt pięciościenny S będzie kątem dwudziestościanu foremnego.

To uczyniwszy, możemy, przy wierzchołku A, wystawić piramidę równą piramidzie foremnej SABCD tak żeby z nią miała dwie ściany spólne ABS, AES; i, przy wierzchołku B, wystawić trzecią piramidę, równą pierwszej, taką żeby z nią miała dwie ściany spólne ABS i BCS. Te trzy piramidy mają spólną ścianę ABS, a dwie przystawione piramidy mają spólną ścianę ABG. Otrzymujemy tym sposobem, powierzchnię wielościenną, złożoną z dziesięciu trójkątów równych i równo nachylonych. Ta powierzchnia stanowiąca połowę powierzchni dwudziestościanu, jest otwarta przy obwodzie sześciokąta CDEFGH. Rzeczony sześciokąt jest spaczony; bo, gdyby cztery punkta F, E, D, C były na jednej płaszczyznie, ponieważ punkt A leży na niej także, nie byłoby piramidy foremnej A. Kąty tego sześciokąta są równe, na przykład kąty CDE i DEF, dlatego że każdy z nich jest równy kątowi CSE.

Jeśli więc zbudujemy, tym samym sposobem, drugą połowę S'B'C'D'...H' powierzchni dwudziestościanu, i przystawimy dwie krymki wielościenne brzegami tak, żeby kąt sterczący D obwodu CDE... przystał do równego kąta wklęsłego E' obwodu C'D'E'F'..., wszystkie inne punkta tych obwodów przystaną do siebie. A ponieważ płaszczyzny trójkątów przy obwodzie mają między sobą nachylenia jakich trzeba do utworzenia, w każdym wierzchołku obwodu, kąta pięciościennego równego kątowi S, te dwie powierzchnie złączone utworzą dwudziestościan mający wszystkie ściany równe i równo nachylone, to jest dwudziestościan foremny.

Twierdzenie XXX.

Na każdym wielościanie foremnym wypukłym można opisać sferę, i wpisać w niego sferę.



Niech będzie AB spólna krawędź dwóch ścian przyległych wielościanu foremnego. Poprowadźmy osie MM', NN' kół opisanych na tych ścianach, i ze spodków M, N spuśćmy na krawędź AB prostopadłe które się spotkają w jej środku I. Ponieważ płaszczyzna M N jest prostopadła we środku krawędzi AB, osie MM', NN' spotykają się w punkcie O równo oddalonym od skrajności A i B.

Uważajmy teraz trzecią ścianę która ma z poprzedzającą krawędź AC spólną; dowiedziemy podobnie że osie NN', PP' tych dwóch ścian spotykają się w pewnym punkcie O' równo oddalonym od skrajności A i C. Owoż, dwa czworoboki NIMO i NKPO' są równe, jako mające bok IM = IN = NK = KP, kąt I = K, i kąty przy M, N, P proste; zatem NO' = NO, i punkt O' pada w O a temsamem OP = OM. Dowiedzie się podobnie że osie następujących ścian przechodzą przez ten sam punkt O, który jest równo oddalony od skrajności wszystkich krawędzi i także równo oddalony od wszystkich ścian.

Więc sfera mająca środek O i promień OA przechodzi przez wszystkie wierzchołki wielościanu foremnego, czyli jest na nim *opisana;* a zaś sfera mająca ten sam środek O i promień OM jest styczna do wszystkich ścian wielościanu w ich środkach, czyli jest *wpisana* w ten wielościan. Te dwie sfery są oczywiście jedyne.

Punkt O nazywa się *środkiem* wielościanu foremnego, OA jest jego *promieniem*, OM *apotemą*.

Wniosek I. — Łącząc środek z wierzchołkami, można rozłożyć wszelki wielościan foremny na tyle piramid foremnych równych ile jest ścian.

Ściany tych piramid, przedłużone jeśli trzeba, wyznaczają na sferze wpisanej albo opisanej tyle wielokątów sferycznych foremnych i równych ile wielościan foremny ma ścian.

II. — *Objętość wielościanu foremnego, albo tylko* OPISALNEGO *na sferze, ma za miarę wieloczyn z powierzchni przez trzecią część apotemy.*

Twierdzenie XXXI.

Dwa wielościany foremne równej liczby ścian są podobne.

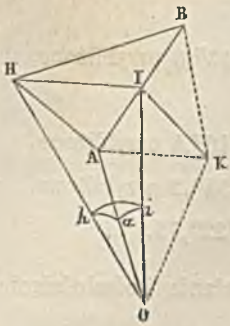
Bo ich ściany są wielokątami podobnemi, a zaś kąty wielościenne zawarte między temi ścianami są równe jako foremne złożone z równej liczby ścian. Zresztą, twierdzenie jest oczywiste jeśli będziemy zważali na liczbę warunków do wyznaczenia wielościanu.

Wniosek. — *Powierzchnie, dwóch wielościanów foremnych podobnych mają się jako kwadraty z promieni albo z apotem, a ich objętości jako sześciany z tych linij.*

Zagadnienie.

Mając dany wielościan foremny wypukły, znaleźć : 1° nachylenie dwóch ścian przyległych, 2° promienie sfer wpisanej i opisanej.

Niech będą : O spólny środek sfer wpisanej i opisanej, AB krawędź wielościanu foremnego, spólna dwom ścianom przyległym



których środki są H i K; punkt I środek krawędzi AB. Kąt HIK jest nachyleniem dwóch ścian.

Ponieważ krawędź AB jest prostopadła do płasczyzny HIK, płasczyzny ABO i HIK są prostopadłe między sobą. Jeśli więc z punktu O jako środka, opiszemy sferę która przetnie krawędzie trójścianu OAHI, otrzymamy trójkąt sferyczny ahi którego kąty będą wiadome. Jakoż, kąt i jest prosty; co do kątów h i a, oznaczmy przez n liczbę boków każdej ściany, przez m liczbę ścian każdego kąta wielościennego, będziemy mieli

$$\text{kąt } h = \text{kąt AHI} = \frac{1}{2}.\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{n}.$$

Podobnie, ponieważ przy wierzchołku A naokoło jest m ścian kąta wielościennego A, będzie

$$\text{kąt } a = \text{kąt HAOI} = \frac{1}{2}.\frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{m}.$$

Teraz, 1° aby znaleźć nachylenie I, uważajmy że IO jest dwójsieczną kąta HIK; zatem, w trójkącie prostokątnym HIO, mamy

$$\text{wst } \frac{1}{2}\text{I} = \text{dos HOI}, \quad \text{albo} \quad \text{wst } \frac{1}{2}\text{ I} = \text{dos } hi.$$

Owoż, trójkąt sferyczny prostokątny iah daje

$$\text{dos } a = \text{dos } hi \text{ wst } h, \quad \text{albo} \quad \text{dos } \frac{\pi}{m} = \text{wst } \frac{1}{2}\text{ I wst } \frac{\pi}{n};$$

więc

$$\text{wst } \frac{1}{2}\text{ I} = \frac{\text{dos. } \frac{\pi}{m}}{\text{wst. } \frac{\pi}{n}}. \qquad (1)$$

Stosując tę formułę do pięciu wielościanów foremnych wypukłych, łatwo się znajduje dla nachylenia I dwóch ścian przyległych następujące wartości :

Czworościan foremny	$I = 70° 31'43'',6$ przybliżone.
Sześcian	$I = 90°$
Ośmiościan foremny	$I = 109°28'16'',4$ przybliżone.
Dwunastościan foremny	$I = 116°33'54'',2$ przybliżone.
Dwudziestościan foremny	$I = 138°11'22'',75$.

Widzimy że nachylenia ścian w czworościanie i ośmiościanie są nawzajem spełnieniem jedno drugiego.

2° Niech będzie a bok wielościanu foremnego wypukłego, r jego apotema i R promień. Aby wyznaczyć r i R w funkcyi boku a, uważajmy że, w trójkącie prostokątnym HIO, jest

$$\mathrm{HO} = \mathrm{HI} \text{ sty } \mathrm{HIO} \quad \text{albo} \quad r = \mathrm{HI} \text{ sty } \frac{1}{2}\mathrm{I}.$$

Ale trójkąt prostokątny IAH daje

$$\mathrm{HI} = \mathrm{AI} \text{ dot } \mathrm{AHI} = \frac{a}{2} \text{ dot } \frac{\pi}{n}.$$

Więc
$$r = \frac{a}{2} \text{ dot } \frac{\pi}{n} \text{ sty } \frac{1}{2}\mathrm{I}. \tag{2}$$

Nadto, w trójkącie prostokątnym HAO, jest

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}} = \text{dos AOH}, \quad \text{albo} \quad \frac{r}{\mathrm{R}} = \text{dos } ah.$$

Owóż, trójkąt sferyczny prostokątny iah daje

$$\text{dos } ah = \text{dot } a \text{ dot } h = \text{dot}\frac{\pi}{m} \text{ dot}\frac{\pi}{n};$$

zatem
$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \text{sty } \frac{\pi}{n} \text{ sty } \frac{\pi}{m}.$$

Więc
$$\mathrm{R} = \frac{a}{2} \text{ sty } \frac{\pi}{m} \text{ sty } \frac{1}{2}\mathrm{I}. \tag{3}$$

Jeśli w formułach (2) i (3), wyrugowawszy sty $\frac{1}{2}$I, podstawimy, za n i m, liczby odpowiedające każdemu wielościanowi, otrzymamy wartości dla r i R.

I tak :

Czworościan foremny daje $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

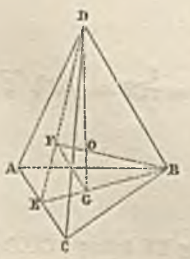
Sześcian $r = \frac{a}{2}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ośmiościan foremny $r = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dwunastościan foremny $r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$, $R = \frac{a}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{15})$

Dwudziestościan for. $r = \frac{a}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15})$, $R = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

UWAGA. — Można, i nie źle jest umieć, za pomocą samej geometryi, wyznaczyć promienie r i R sfer wpisanej i opisanej, w funkcyi danego boku a wielościanu foremnego wypukłego.



Czworościan. — Niech będą DG i BF osie kół opisanych na trójkątach równobocznych ACB i ACD; te osie spotykają się w punkcie O, spólnym środku sfer, opisanej i wpisanej, mających promienie $OD = R$, $OG = r$.

Zatem,

$$\frac{R}{r} = \frac{BD}{FG} = \frac{3}{1}; \quad \text{zkąd} \quad R = 3r.$$

Teraz, trójkąt prostokątny DFO daje

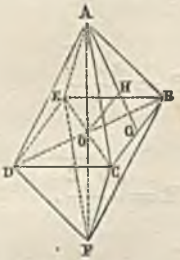
$$\overline{OD}^2 - \overline{OF}^2 = \overline{DF}^2, \quad \text{albo} \quad R^2 - r^2 = \frac{4}{9}\overline{DE}^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy

$$R = \frac{1}{4}a\sqrt{6}, \qquad r = \frac{1}{12}a\sqrt{6}.$$

Sześcian. — Mamy oczywiście $\quad R = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \quad r = \frac{a}{2}.$

Ośmiościan. — Trzy proste, OA, OB, OC są prostopadłe między sobą i równe promieniowi R. Więc



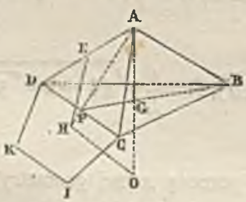
$$a^2 = 2R^2, \qquad \text{zkąd} \qquad R = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Prostopadła OH do ściany ABC jest promieniem sfery wpisanej w ośmiościan, i daje widocznie

$$R^2 - r^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Zatem $\quad r = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$

Dwunastościan. — Niech będzie ABCD kąt trójścienny dwunastościanu foremnego, którego jedną ze ścian jest pięciokąt foremny ACIKD. Prostopadła AO do trójkąta równobocznego BCD i oś HO ściany BCIKD spotykają się w punkcie O, spólnym środku sfer, opisanej i wpisanej, mających promienie AO = R, i HO = r.



Trójkąty prostokątne podobne AHO, AFG dają

$$\frac{R}{r} = \frac{AF}{FG}.$$

Ale $\quad AF = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DF}^2} = \sqrt{a^2 - \overline{DF}^2}, \quad FG = \frac{1}{3}BF = \frac{1}{3}DF\sqrt{3};$

zatem
$$\frac{R}{r} = \sqrt{3\left(\frac{a}{DF}\right)^2 - 3}.$$

Aby znaleźć stosunek $\frac{a}{DF}$, poprowadźmy apotemę HE ściany ACIKD; dwa trójkąty podobne ADF, AEH dadzą

$$\frac{AD}{DF} = \frac{AH}{EH} \qquad \text{albo} \qquad \frac{a}{DF} = \frac{AH}{EH};$$

owoż w pięciokącie foremnym stosunek promienia do apotemy jest

$$\frac{AH}{EH}=\frac{4}{\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}-1.$$

Więc $$\frac{R}{r}=\sqrt{3(\sqrt{5}-1)^2-3}=\sqrt{15-6\sqrt{5}}.$$

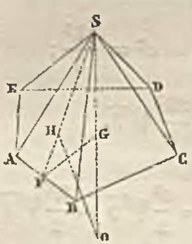
Teraz, w trójkącie prostokątnym AHO, mamy

$$R^2-r^2=\overline{AH}^2=\frac{2a^2}{5-\sqrt{5}} \quad (\text{IV, } zag.\ 3,\ wn.)$$

Z tych dwóch równań wywodzimy

$$r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \qquad R=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{9+3\sqrt{5}}{2}}=\frac{a}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{15}).$$

Dwudziestościan. — Niech będzie SABCDE kąt pięciościenny dwudziestościanu foremnego, mający za ściany trójkąty równoboczne SAB, SBC,... Oś HO ściany SAB i prostopadła SG do pięciokąta foremnego ABCDE, spotykają się w punkcie O, spólnym środku sfer, opisanej i wpisanej, mających promienie OS = R i OH = r.



Spuśćmy prostopadłę SF na AB, i połączmy FG. Dwa trójkąty podobne SOH, SFG dają

$$\frac{R}{r}=\frac{SF}{FG}.$$

Ale $SF=\frac{a}{2}\sqrt{3}$, a w pięciokącie foremnym ABCDE

$$\text{apotema} \quad FG=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

Więc $$\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}=\sqrt{15-6\sqrt{5}}.$$

Do tego, w trójkącie prostokątnym OHS, mamy

$$R^2 - r^2 = \overline{SH}^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}} = \frac{a}{12}(3\sqrt{3}+\sqrt{15}), \qquad R = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Uwaga. — Nie trudno teraz wyznaczyć, w funkcyi promienia sfery R, bok a i apotemę r wielościanu foremnego wpisanego, jego powierzchnię S i objętość V.

Jakoż, rozwiązując na a i na r powyższe formuły, i nazywając s powierzchnię jednej ściany, otrzymujemy następujące wyniki:

Czworościan. $\quad a = \frac{2R}{3}\sqrt{6}, \quad r = \frac{R}{3}. \quad s = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{2R^2}{3}\sqrt{3};$

$$S = \frac{8R^2}{3}\sqrt{3}, \qquad V = S.\frac{r}{3} = \frac{8R^3}{27}\sqrt{3}.$$

Sześcian. $\quad a = \frac{2R}{3}\sqrt{3}, \quad r = \frac{R}{3}\sqrt{3}, \quad s = a^2 = \frac{4R^2}{3};$

$$S = 6s = 8R^2, \qquad V = 8R^2.\frac{R}{3}\sqrt{3} = \frac{8R^3}{9}\sqrt{3}.$$

Ośmiościan. $\quad a = R\sqrt{2}, \quad r = \frac{R}{3}\sqrt{3}, \quad s = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{R^2}{2}\sqrt{3};$

$$S = 4R^2\sqrt{3}, \qquad V = \frac{4R^3}{3}.$$

Dwunastościan. $\quad a = \frac{R}{3}(\sqrt{15}-\sqrt{3}), \quad r = R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}},$

$$s = \frac{5a^2}{4}\,\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{R^2}{6}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}; \; S = 2R^2\sqrt{10(5-\sqrt{5})},$$

$$V = S.\frac{r}{3} = \frac{2R^3}{9}\sqrt{30(3+\sqrt{5})}.$$

WIELOŚCIANY FOREMNE GWIAŹDZISTE (*).

Widzieliśmy już wielokąty foremne *niewypukłe* które nazwano gwiaździstemi, są także wielościany foremne gwiaździste. *Rzędem* wielokąta jest liczba n jego boków, *gatunkiem* liczba k pierwsza do n i mniejsza od n, która wskazuje ile razy trzeba przebiedz okrąg, przechodząc przez wszystkie wierzchołki, żeby opisać wielokąt foremny gwiaździsty. Zatem, gatunkiem wielokąta gwiaździstego jest liczba razy jaką rzuty jego boków na okręgu pokrywają ten okrąg; tak że $4k$ wyraża summę kątów środkowych tego wielokąta.

Rzędem kąta wielościennego jest liczba jego ścian; *gatunkiem* liczba która wyraża gatunek wielokąta otrzymanego z przecięcia tego kąta wielościennego przez płaszczyznę. I tak, w piramidzie foremnej mającej za podstawę pięciokąt foremny gwiaździsty, kąt wielościenny przy wierzchołku jest *drugiego gatunku*, a jego ściany zrzutowane na podstawie tej piramidy zapełniają *dwa razy* cztery kąty proste.

Określając wielościany foremne niewypukłe jako wielościany mające ściany równe i równo nachylone, widzimy łatwo że dowodzenie *twierdzenia* XXX do nich się stosuje; więc te nowe wielościany, jeśli istnieją, są wpisalne w sferę i na niej opisalne. Jedyna różnica między niemi i wielościanami foremnemi wypukłemi jest w tem że, jeśli zrzutujemy ściany jednych i drugich, za pomocą promieni, na sferze opisanej (albo wpisanej), wielokąty sferyczne ztąd wynikłe pokrywają w tych ostatnich *raz* tylko powierzchnię sfery, gdy tymczasem w tamtych odpowiedające wielokąty sferyczne pokrywają, zupełnie i jednostajnie, *dwa*, *trzy*,.. razy powierzchnię sfery.

Rzędem wielościanu foremnego jest liczba jego ścian, a *gatunkiem* liczba razy jaką rzuty wszystkich ścian na sferze pokrywają powierzchnię tej sfery. W wielościanach foremnych zwyczajnych, wielościan i jego kąt wielościenny są oba pierwszego gatunku; w wielościanach foremnych gwiaździstych, wielościan i jego kąt wielościenny mogą niebyć tego samego gatunku.

(*) Podług PP. Poinsot, Cauchy i Bertrand, *Journal de l'École Polytechnique*, tom IV i IX; i *Comptes rendus de l'Académie des sciences.* Rok 1842.

Twierdzenie XXXII.

Jeśli jest dany wielościan foremny A *jakiegokolwiek gatunku, istnieje także wielościan wypukły* X *mający z nim wszystkie wierzchołki spólne*

Jakoż, gdy są dane jakiekolwiek punkta w przestrzeni, można oczywiście znaleźć zawsze wielościan wypukły, mający za wierzchołki punkta wzięte z pomiędzy danych i zawierający wszystkie inne wewnątrz; chyba że dane punkta są już wszystkie wierzchołkami takiego wielościanu.

Owoż, wielościan wypukły, mający wierzchołki wzięte z pomiędzy wierzchołków wielościanu A, które leżą na jednej sferze, nie może zawierać wewnątrz innych wierzchołków tego wielościanu; więc istnieje wielościan wypukły X mający wszystkie te same wierzchołki co wielościan A.

Ten wielościan X jest foremny. Albowiem, oznaczmy przez P figurę utworzoną z dwóch wielościanów A i X mających *te same* wierzchołki, przez Q inną figurę równą figurze P. Ponieważ wielościan A jest foremny z przypuszczenia, można wykonać przystawanie figur P i Q, kładąc jakikolwiek wierzchołek figury Q na obranym wierzchołku figury P, i przystawiając do siebie ściany dwóch wielościanów A należących do P i Q. To przystawienie może się [odbyć przynajmniej trojakim sposobem, dlatego że kąty wielościenne dwóch figur są przynajmniej trójścienne, czworościenne albo pięciościenne. Przystawanie figur P i Q pokazuje że kąty wielościenne dwóch wielościanów X są równe każdy każdemu. A że te kąty przystają do siebie sposobem trojakim, czworakim albo pięciorakim, według jak są trójścienne, czworościenne, pięciościenne; więc ich ściany są równe i równo nachylone.

Ztąd wynika że ściany dwóch wielościanów X są równokątne i równo nachylone, i mogą przystać do siebie jakikolwiek przystawiono wierzchołek figury Q do obranego wierzchołka figury P; co dowodzi że te ściany są wielokątami foremnemi równemi. Więc wielościan wypukły X, mający ściany foremne i kąty wielościenne równe, jest foremny.

Opierając się na tem twierdzeniu, żeby znaleźć wielościany foremne wyższego gatunku, trzeba wziąć, na każdym z wielościanów foremnych wypukłych, jeden wierzchołek i szukać czy inne wierzchołki mogą z nim tworzyć wielokąt foremny, i czy istnieje przynajmniej trzy takie wielokąty które, mając spólny wierzchołek, tworzą kąt wielościenny foremny.

Jeśli zastosujemy to poszukiwanie do czworościanu foremnego, do ośmiościanu foremnego i do sześcianu, zobaczymy łatwo że te wielościany nie prowadzą do żadnego wielościanu foremnego gwiaździstego. Rozpatrując dwunastościan foremny wypukły, spostrzegamy że mu odpowieda *dwunastościan foremny gwiaździsty*. Dwunastościan foremny wypukły daje trzy wielościany foremne gwiaździste, to jest: *dwudziestościan*, *dwunastościan* ze ścianami *wypukłemi*, i *dwunastościan* ze ścianami *gwiaździstemi*. Jest przeto, jako widzimy, *cztery* wielościany foremne gwiaździste, to jest trzy dwunastościany i jeden dwudziestościan. Więc, ze wszystkiem, istnieje *dziewięć* tylko wielościanów foremnych, i więcej ich być nie może (*).

Rozwiążmy teraz następujące zagadnienie.

ZNALEŹĆ GATUNEK WIELOŚCIANU FOREMNEGO GWIAŹDZISTEGO. — Aby otrzymać formułę ogólniejszą od formuły *Eulera*, to jest taką którąby się mogło stosować do wszystkich wielościanów foremnych, trzeba wprowadzić do rachunku gatunek wielościanu, gatunek jego ścian przypuszczając wszystkie jednego gatunku, i gatunek kątów wielościennych przypuszczając także wszystkie jednego gatunku. Mając wzgląd na te szczegóły, zrzutujmy powierzchnię wielościanu na sferze opisanej, albo wpisanej, biorąc za środek rzutu środek tej sfery.

Niech będzie n liczba boków jednej ściany wielościanu foremnego, g liczba oznaczająca gatunek tej ściany, a i s powierzchnia i summa kątów wielokąta sferycznego będącego jej rzutem na sferze. Rozłóżmy ten wielokąt na trójkąty sferyczne, łącząc jego wierzchołki z rzutem środka ściany uważanej. Jeśli nazwiemy α i β kąty przy podstawie, σ kąt przy spólnym wierzchołku w jednym z trójkątów, powierzchnia tego trójkąta będzie miała za miarę $\alpha + \beta + \sigma - 2$ (10). Zatem powierzchnia a wielokąta sferycznego który ma n takich trójkątów, będąc summą Σ ich powierzchni, wyraża się przez

$$a = \Sigma(\alpha + \beta + \sigma) - 2n.$$

Ale $\Sigma(\alpha + \beta + \sigma)$ równa się summie s kątów wielokąta sferycznego, powiększonej summą kątów σ przy spólnym wierzchołku trójkątów składających. Owoż, ostatnia summa równa się liczbie $4g$, dlatego że trójkąty

(*) KEPLER w swoim dziele *Harmonices mundi*, mówi o jednym dwunastościanie i dwudziestościanie gwiaździstym, i nadto opisuje wielościany *półforemne* zwane *ciałami Archimedesa*. Są to wielościany *wpisalne w sferę i na niej opisalne*, mające ściany foremne ale nie wszystkie jednego gatunku. *Zobacz Table des diviseurs des nombres, etc.*, par LIDONNE, Paris, 1808.

składające wielokąt sferyczny, który jest rzutem stożkowym sciany gwiaździstej, zachodzą na siebie g razy ; więc

$$a = s + 4g - 2n.$$

Wszystkie inne ściany dają podobnie

$$a' = s' + 4g - 2n'$$
$$a'' = s'' + 4g - 2n''.$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Oznaczmy teraz przez G gatunek wielościanu, to jest liczbę która wskazuje ile razy rzut powierzchni tego wielościanu pokrywa sferę, przez γ gatunek kąta wielościennego. Uważając że powierzchnia sfery wyraża się tu przez 8, mamy $a + a' + a'' + \dots = 8G$; następnie, ponieważ $s + s' + s'' + \dots$ jest summą wszystkich kątów wielokątów sferycznych, a przy każdym z wierzchołków, których liczba jest W, summa tych kątów czyni 4 kąty proste wzięte γ razy, mamy $s + s' + s'' + = 4\gamma W$; nakoniec, wiemy że $n + n' + n'' + \dots = 2K$. Więc, dodając rzuty na sferze wszystkich ścian wielościanu foremnego których liczba jest S, otrzymujemy ostatecznie:

$$8G = 4\gamma W + 4gS - 4K,$$

albo

$$2G + K = gS + \gamma W.$$

Czyniąc $G = 1 = g = \gamma$, wyprowadzamy formułę *Eulera*, której obecna jest pewnem zogólnieniem co do wielościanów foremnych.

Jeśli teraz w powyższej formule podstawimy wartości za K, S, W, g, γ, znajdziemy gatunek G wielościanu foremnego gwiaździstego.

I tak :

1° Dwudziestościan foremny gwiaździsty otrzymuje się z *trójkątów* równobocznych, które tworzą kąty pięciościenne *drugiego* gatunku około każdego wierzchołka dwudziestościanu foremnego wypukłego. W tym wielościanie $S = 20$, $W = 12$, $K = 30$, $g = 1$, $\gamma = 2$; co daje

$$2G + 30 = 1.20 + 2.12 \qquad \text{albo} \qquad G = 7.$$

Więc dwudziestościan foremny gwiaździsty jest *siódmego* gatunku.

2° Dwunastościan foremny gwiaździsty otrzymuje się z *pięciokątów* foremnych *gwiaździstych*, które tworzą kąty trójścienne *pierwszego* gatunku, około każdego wierzchołka dwunastościanu foremnego wypukłego. W tym wielościanie $S=12$, $W=20$, $K=30$, $g=2$, $\gamma=1$; podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$2G+30=2.12+20, \qquad \text{zkąd} \qquad G=7.$$

Więc pierwszy dwunastościan foremny gwiaździsty z kątami trójściennemi jest *siódmego* gatunku.

3° Dwunastościan foremny gwiaździsty ze ścianami wypukłemi, otrzymuje się z *pięciokątów* foremnych zwyczajnych, które tworzą kąty pięciościenne *drugiego* gatunku około każdego wierzchołka dwudziestościanu foremnego zwyczajnego. W tym wielościanie $S=12$, $W=12$, $K=30$, $g=1$, $\gamma=2$; co daje

$$2G+30=1.12+2.12, \qquad \text{zkąd} \qquad G=3.$$

Więc ten nowy drugi dwunastościan foremny gwiaździsty jest *trzeciego* gatunku.

4° Dwunastościan foremny ze ścianami gwiaździstemi, otrzymuje się z pięciokątów foremnych *gwiaździstych*, które tworzą kąty pięciościenne *pierwszego* gatunku około każdego wierzchołka dwudziestościanu foremnego zwyczajnego. W tym nowym wielościanie $S=12$, $W=12$, $K=30$, $g=2$, $\gamma=1$; co daje

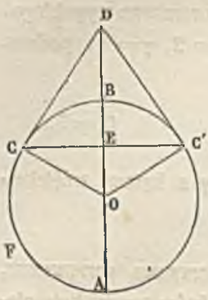
$$2G+36=2.12+1.12 \qquad \text{albo} \qquad G=3.$$

Więc trzeci dwunastościan foremny gwiaździsty jest *trzeciego* gatunku.

ZAGADNIENIA KSIĘGI DZIEWIĄTEJ.

Zagadnienie I.

Do półokręgu ACB *poprowadzono styczną* CD; *po czem, obrócono całą figurę* AFCD *około osi* ABD. *Jak trzeba wziąć styczną* CD, *żeby powierzchnia stożkowa utworzona przez tę prostę była w stosunku danym* k *z powierzchnią krymki utworzonej przez łuk* AFC?



Według zagadnienia powinno być

$$\frac{\pi EC \cdot CD}{2\pi R \cdot AE} = k$$

Trójkąty pododne CDO, CEO dają $\frac{CD}{R} = \frac{CE}{OE}$;

a zaś $\overline{CE}^2 = AE \cdot BE$.

Więc $$\frac{BE}{OE} = 2k.$$

To pokazuje że trzeba podzielić promień OB na dwa odcinki BE i EO w stosunku $2k : 1$, z punktu E wyprowadzić do promienia OB prostopadłę EC która wyznaczy punkta styczności C, C'; etc.

Zagadnienie II.

Jaką rozciągłość S *powierzchni ziemi może widzieć osoba która się wzniosła balonem na wysokość* h? (Figura poprzednia).

Wyobraźmy stożek DCC' opisany na sferze ziemskiej, mający wierzchołek D w oku osoby obserwującej; wtedy małe koło CC' oddzieli krymkę widzialną CBC'.od niewidzialnej CAC'. Jeśli więc nazwiemy R promień sfery ziemskiej, x wysokość BE szukanej krymki, będzie

$$S = 2\pi R x.$$

Ale trójkąt prostokątny CDO daje

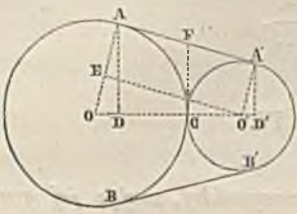
$$R^2 = (R + h)(R - x), \qquad \text{zkąd} \qquad x = \frac{Rh}{R + h}.$$

Więc $$S = \frac{2\pi R^2 h}{R + h}.$$

Uwaga. — Powyższe równanie, rozwiązane na h, daje odpowiedź na pytanie: *dojakiej wysokości trzeba się wznieść balonem żeby można ujrzeć krymkę ziemską równowartą danemu krajowi?*

Zagadnienie III.

Stożek jest opisany na dwóch sferach promieni R i R′, *stycznych zewnętrznie. Jaka jest objętość przestrzeni zawartej między trzema powierzchniami?*



Przez linię środków OO′ poprowadźmy płasczyznę która przetnie te dwie sfery wedle kół OC, O′C stycznych w punkcie C, a stożek wedle stycznych AA′, BB′.

Szukana objętość V może być uważana jako utworzona obrotem figury ACA′. Jeśli więc spuścimy prostopadłe AD, A′D′ na linię środków, odejmując od pnia stożka utworzonego przez ADD′A dwa odcinki sferyczne utworzone przez ACD, A′C′D′, będziemy mieli

$$V = \frac{1}{3}\pi DD'(\overline{AD}^2 + \overline{A'D'}^2 + AD\,.\,A'D') - \frac{1}{2}\pi(\overline{AD}^2\,.\,CD + \overline{A'D'}^2\,.\,CD')$$
$$- \frac{1}{6}\pi(\overline{CD}^3 + \overline{C'D'}^3).$$

Owoż, spólna styczna CF daje FA = FC = FA, zatem CD = CD′. A jeśli przez punkt O′ poprowadzimy równoległę O′E do spólnej stycznej AA′, trójkąty prostokątne OAD, O′A′D′, OEO′ będą podobne, i dadzą

$$\frac{OD}{OA} = \frac{O'D'}{O'A'} = \frac{OE}{OO'} \quad \text{albo} \quad \frac{OD}{R} = \frac{O'D'}{R'} = \frac{R - R'}{R + R'}.$$

Ztąd wynika:

$$CD = R - OD = \frac{2RR'}{R + R'} = CD', \quad DD' = 2CD = \frac{4RR'}{R + R'};$$

$$\overline{AD}^2 = R^2 - \overline{OD}^2 = \frac{4R^3R'}{(R + R')^2}, \quad A'D'^2 = \frac{4RR'^3}{(R + R')^2}.$$

Więc, podstawiając te wartości, będzie

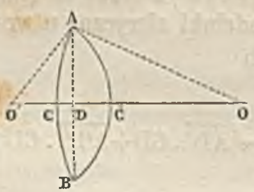
$$V = \frac{16}{3}\pi \frac{R^2R'^2}{(R+R')^3}(R^2 + R'^2 + RR') - 4\pi \frac{R^2R'^2}{(R+R')^3}(R^2 + R'^2)$$
$$- \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{R^3R'^3}{(R+R')^3},$$

a ostatecznie

$$V = \frac{4}{3}\pi \frac{R^2R'^2}{R+R'}.$$

ZAGADNIENIE IV.

Wyrachować objętość soczewki dwuwypukłej, znając jej grubość $CC' = g$ *i promienie* $OC = R$, $O'C = R'$ *sfer tworzących.*



Ta soczewka, jako pokazuje figura, jest różnicą między summą dwóch wycinków sferycznych i objętością utworzoną obrotem trójkąta AOO' około osi OO'. Zatem objętość soczewki jest

$$V = \frac{2}{3}\pi R . CD + \frac{2}{3}\pi R'^2 . DC' - \frac{1}{3}\pi \overline{AD}^2 . OO'.$$

Dla skrócenia uczyńmy $OO' = d$, będzie $d = R + R' - g$. Uważając że kwadrat powierzchni trójkąta AOO' ma za miarę

$$\frac{1}{4}\overline{AD}^2 . d^2 = \frac{1}{16}(R+R'+d)(R+R'-d)(R+d-R')(R'+d-R),$$

znajdujemy

$$\overline{AD}^2 . OO' = \frac{g}{4d}(2R + 2R' - g)(2R - g)(2R' - g).$$

Ten sam trójkąt AOO' daje także

$$\overline{AO'}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{AO}^2 - 2OO' . OD \text{ albo } R'^2 = d^2 + R^2 - 2d(R - CD),$$

zkąd $CD = \frac{R'^2 - (d-R)^2}{2a} = \frac{(R'+d-R)(R+R'-d)}{2a} = \frac{g(2R'-g)}{2d}$

Tak samo $$DC' = g\frac{(2R-g)}{2d}.$$

Więc, podstawiając te wartości, będzie

$$V = \frac{\pi g}{3d}\left\{R^2(2R'-g) + R'^2(2R-g) - \frac{1}{4}(2R+2R'-g)(2R-g)(2R'-g)\right\}$$

Wykonawszy wskazane mnożenia i uprościwszy, otrzymujemy

$$V = \frac{\pi}{12}\cdot\frac{g^2}{R+R'-g}\left\{g^2 - 4(R+R')g + 12RR'\right\}.$$

Uwaga. — Następujące zagadnienie

Z punktu wziętego na powierzchni sfery promienia R, *jako środka, opisać drugą sferę taką, żeby część zawarta między powierzchniami dwóch sfer miała objętość daną,*

przywodzi się do powyższego. Jakoż, ta część spólna objętości dwóch sfer, zawarta między ich powierzchniami, jest oczywiście soczewką dwuwypukłą, której grubość g jest promieniem R' sfery szukanej. Zatem, nazywając k stosunek objętości soczewki do objętości danej sfery, mamy

$$\frac{\pi}{12}\cdot\frac{g^2}{R}[g^2 - 4(R+g)g + 12Rg] = \frac{4}{3}\pi k R^3,$$

albo $$3g^4 - 8Rg^3 + 16kR^4 = 0.$$

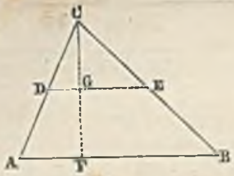
To równanie 4° stopnia ma dwa pierwiastki urojone, jako pokazuje prawidło Deskarta; i dwa *dodatne*, jeden mniejszy a drugi większy od 2R. Więc zagadnienie ma zawsze jedno rozwiązanie, byle tylko $k < 1$.

Zagadnienie V.

Przeciąć trójkąt ABC *równoległą* DE *do podstawy* AB *tak, żeby objętości utworzone obrotem trójkąta* CDE *i trapezu* ABED *około tej podstawy były równowarte.*

Nazwijmy h i x wysokości CF i CG trójkątów ABC i CDE.

Wiadomo że objętość utworzona przez trójkąt, który się obraca



około osi leżącej na jego płasczyznie, ma za miarę wieloczyn z powierzchni tego trójkąta przez okrąg nakreślony jego środkiem ciężkości (18). Na mocy tego twierdzenia mamy :

$$Obj.\,(ABC)=tr.\,ABC\times 2\pi\frac{h}{3},\quad Obj.(CDE)=tr.\,CDE\times 2\pi\left(h-x+\frac{x}{3}\right).$$

Więc, wedle wysłowienia zagadnienia, powinno być

$$\frac{tr\acute{o}j.\,ABC\times h}{tr\acute{o}j.\,CDE\times(3h-2x)}=2.$$

Owoż, trójkąty podobne ABC, CDE mają się jako kwadraty z wysokości h, x; zatem

$$\frac{h^3}{x^2(3h-2x)}=2,\qquad \text{albo}\qquad 4x^3-6hx^2+h^3=0.$$

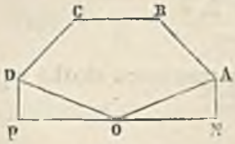
Nie trudno widzieć że $x=\frac{h}{2}$ zadość czyni temu równaniu 3° stopnia. To pokazuje że *szukana równoległa* DE *do podstawy* AB *przechodzi przez środek wysokości* CF.

Uwaga. — Dwa inne pierwiastki powyższego równania, $x=\frac{h}{2}(1\pm\sqrt{3})$, jeden dodatny większy od wysokości h, drugi odjemny nie mogą zadość czynić zagadnieniu.

Zagadnienie VI.

Półośmiokąt foremny, którego bok jest a, *obraca się około średnicy koła wpisanego. Jaka jest objętość* V *figury utworzonej ?*

Ta figura obrotowa składa się z figury utworzonej obrotem wycinka foremnego OABCDO i z dwóch stożków równych



utworzonych obrotem trójkątów AON i DOP, około średnicy NP jako osi;

więc

$$V = \frac{2}{3}\pi\overline{ON}^2 . NP + \frac{2}{3}\pi\overline{AN}^2 . ON = \frac{4}{3}\pi\overline{ON}^3 + \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 . ON.$$

Owoż, w ośmiokącie foremnym stosunek apotemy ON do boku AB $= a$ jest (IV, *zag.* VI).

$$\frac{ON}{a} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2});$$

więc

$$V = \frac{\pi a^3}{6}(1+\sqrt{2})^3 + \frac{\pi a^3}{12}(1+\sqrt{2}) = \frac{\pi a^3}{12}(15+11\sqrt{2}).$$

Zagadnienie VII.

Wpisać w daną sferę stożek największy możebny.

Niech będzie DA $= x$ promień podstawy stożka wpisanego ABC, i strzała DE $= y$. Mamy $x^2 = y(2R - y)$.

Zatem, objętość stożka ABC jest

$$V = \frac{1}{3}\pi y(2R - y)^2.$$

Owoż, wiadomo z Algebry że wieloczyn potęg, mających summę pierwiastków stałą, jest największy możebny gdy te pierwiastki są proporcyonalne do wykładników; więc powyższy wieloczyn, w którym summa pierwiastków, $y + (2R - y) = 2R$, jest stała, będzie największy możebny jeśli uczynimy

$$\frac{y}{1} = \frac{2R - y}{2}.$$

Ztąd $y = \frac{2}{3}R$, a następnie $x = \frac{2R}{3}\sqrt{2}$.

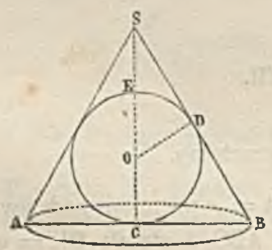
Te wartości podstawione dają objętość *maximum* stożka wpisanego, $V = \frac{32}{81}\pi R^3$.

Kończąc, uważajmy że $V : Obj.\ sf. :: 2^3 : 3^3$.

Uwaga. — Takim samym sposobem rozwiązuje się zagadnienie *Wpisać w sferę walec największy możebny*.

Zagadnienie VIII.

Opisać na danej sferze stożek prosty któregoby cała powierzchnia równała się powierzchni danego koła.



Jeśli przez oś stożka poprowadzimy płaszczyznę, przecięciem będzie trójkąt równoramienny SAB i wielkie koło OD w niego wpisane. Przeto powierzchnia sfery i szukana powierzchnia stożka są figurami obrotowemi około osi SC.

Owoż, nazywając R promień sfery, k promień koła danego, x promień CB podstawy stożka, y jego wysokość SC, mamy $BS = \sqrt{x^2 + y^2}$; więc, wedle warunków zagadnienia, powinno być

$$\pi x\sqrt{x^2 + y^2} + \pi x^2 = \pi k^2$$

albo

$$x\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = k^2 \qquad (1).$$

Ale dwa trójkąty podobne BSC, DSO dają

$$\frac{BC}{DO} = \frac{SB}{SO} = \frac{SC}{SD}, \quad \text{a zaś} \quad \overline{SD}^2 = SC \,.\, SE = y\,(y - 2R);$$

Ztąd $\frac{x}{\mathrm{R}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y-\mathrm{R}}=\frac{y}{\sqrt{y(y-2\mathrm{R})}}=\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$,

a następnie $\frac{x(x+\sqrt{x^2+y^2})}{\mathrm{R}y}=\frac{y}{y-2\mathrm{R}}$.

Rugując tym sposobem x, będzie, na mocy równania (1),

$$\frac{\mathrm{R}y^2}{y-2\mathrm{R}}=k^2 \quad \text{albo} \quad y\left(\frac{k^2}{\mathrm{R}}-y\right)=2k^2.$$

Ostatnie wyrażenie pokazuje że summa dwóch czynników niewiadomych jest $\frac{k^2}{\mathrm{R}}$, a ich wieloczyn równa się $2k^2$. Więc, aby otrzymać wysokość y stożka, trzeba wystawić prostokąt równowarty kwadratowi $(k\sqrt{2})^2$ i w którymby dwa boki przyległe czyniły summę $\frac{k^2}{\mathrm{R}}$; co już wiadome.

Uwaga. — Możebność zagadnienia wymaga żeby było $k^2 \gtreqless 8\mathrm{R}^2$. Gdy $k^2=8\mathrm{R}^2$, będzie $y=\frac{k^2}{2\mathrm{R}}=4\mathrm{R}$, i $x=\mathrm{R}\sqrt{2}$; wtedy, jako wiadomo z Algebry, powierzchnia cała stożka, $\frac{\pi\mathrm{R}y^2}{y-2\mathrm{R}}$, jest minimum $8\pi\mathrm{R}^2$, i widocznie dwa razy większa od powierzchni sfery.

Zagadnienie IX.

Opisać na sferze najmniejszy stożek możebny.

Między stożkami nierównoramiennemi opisanemi na sferze niema oczywiście żadnego minimum. Uważajmy tedy stożek opisany równoramienny (*fig. powyższa*), i oznaczmy przez x promień jego podstawy, przez y jego wysokość; będzie

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Wyraźmy teraz że nasz stożek jest opisany na sferze promienia R; to daje proporcyę

$$\frac{BC}{DO} = \frac{SC}{SD},$$

która, z przyczyny $\overline{SD}^2 = y(y - 2R)$, staje się

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{\sqrt{y(y-2R)}}.$$

Zatem $$V = \frac{1}{3}\pi R^2 . \frac{y^2}{y-2R}.$$

Żeby znaleźć wartość dla y któraby czyniła minimum ilość zmienną $\frac{y^2}{y-2R}$, uważajmy że tę ilość można pisać $\frac{1}{\frac{1}{y}\left(1 - \frac{2R}{y}\right)}$

albo $\frac{1}{\frac{1}{2R} . \frac{2R}{y}\left(1 - \frac{2R}{y}\right)}$. Więc dość jest, dla minimum objętości V, uczynić maximum wieloczyn $\frac{2R}{y}\left(1 - \frac{2R}{y}\right)$; to wymaga, jako już wiemy, żeby było

$$\frac{2R}{y} = 1 - \frac{2R}{y}, \qquad \text{zkąd} \qquad y = 4R.$$

Więc stożek prosty opisany na sferze ma objętość najmniejszą możebną, gdy jego wysokość jest dwa razy większa od średnicy sfery. Wtedy objętość tego stożka minimum, równa $\frac{8}{3}\pi R^3$, jest dwa razy większa od objętości sfery.

Zagadnienie X.

Mając dany bok a *stożka obrotowego i promień* R *jego podstawy, znaleźć kąt wycinka będącego rozwinięciem powierzchni stożkowej na płaszczyźnie.*

Łuk wycinka kołowego, będąc rozwinięciem okręgu podstawy stożka, ma długość $2\pi R$, i promień a; więc, nazywając x kąt tego wycinka, będzie

$$x = \frac{2\pi R}{a}, \quad \text{(IV, 23 wn.)}.$$

Zagadnienie XI.

Z koła promienia R wyjęto wycinek i utworzono z niego stożek obrotowy. Ile stopni powinien mieć łuk tego wycinka żeby objętość stożka była największa możebna?

Bokiem szukanego stożka jest R. A jeśli, biorąc za jedność kątową kąt mający łuk równy swemu promieniowi, oznaczymy przez x kąt wycinka kołowego, wtedy, nie trudno widzieć, promień podstawy stożka wyrazi się przez $\frac{Rx}{2\pi}$, jego wysokość przez $\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$. Zatem objętość stożka będzie

$$V = \frac{R^3 x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

Dla maximum tej objętości trzeba żeby było

$$\frac{x^2}{2} = 4\pi^2 - x^2; \qquad \text{ztąd} \qquad x = \frac{2}{3}\pi\sqrt{6}.$$

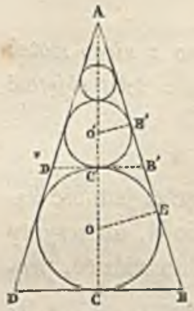
Więc liczba stopni łuku która rozwiązuje zagadnienie jest

$$\frac{180^\circ x}{\pi} = 120^\circ\sqrt{6} = 293^\circ 56' 19''$$

na mniej niż jedną sekundę.

Zagadnienie XII.

W stożek obrotowy A wpisano jedną sferę O; potem, w przestrzeń zawartą między tą sferą i powierzchnią stożkową, wpisano drugą sferę O′ styczną do pierwszej; i tak następnie. Jaka jest granica wszystkich objętości sfer wpisanych?



Środki tych sfer leżą oczywiście na osi stożka; jeśli więc przez tę oś poprowadzimy płaszczyznę, przecięcia sfer będą okręgami kół wielkich, stycznemi między sobą i do boków trójkąta równoramiennego ABD. Poprowadźmy promienie zetknięć OE=R, O′E′ = R′..., summa objętości sfer wpisanych będzie

$$V = \frac{4}{3}\pi\,(R^3 + R'^3 + R''^3 + \ldots).$$

Aby wyrazić tę objętość w funkcyi boków trójkąta tworzącego ABC, uczyńmy, dla skrócenia, BC = a, AC = b, AB = c.

Mamy $\frac{OE}{BC} = \frac{AO}{AB}$, albo $\frac{R}{a} = \frac{b - R}{c} = \frac{b}{a + c}$;

zatem $$R = \frac{ab}{a + c}.$$

Uważajmy teraz że promienie sfer O, O′ wpisanych w stożki podobne ABD, AB′D′ są proporcyonalne do wysokości AC, AC′; albowiem,

$$\frac{R'}{R} = \frac{AO'}{AO} = \frac{AC'}{AC} = \frac{b - 2R}{b}.$$

Jeśli więc nazwiemy k stosunek podobieństwa dwóch trójkątów AB′C′, ABC, ostatnia proporcya da, podstawiając wartość dla R,

$$\frac{R'}{R} = k = 1 - \frac{2a}{a + c} = \frac{c - a}{c + a}; \quad \text{zkąd} \quad R' = kR.$$

Owoż, boki trójkąta AB'C' są ka, kb, kc; zatem mamy tak samo dla promieni R'' i R' sfer wpisanych w stożki podobne AB''C'' i AB'C', równości

$$\frac{R''}{R'} = \frac{kc - ka}{kc + ka} = \frac{c - a}{c + a} = k.$$

Ztąd wynika $R'' = kR' = k^2R$; a następnie $R''' = k^3R$, etc.

Więc objętość wszystkich sfer wpisanych wyraża się przez

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 (1 + k^3 + k^6 + k^9 + \ldots$$

Wyrazy nawiasu tworzą postępnię geometryczną malejącą do nieskończoności, w której stosunkiem liczba k^3, a granicą summy jest $\frac{1}{1-k^3}$. Więc, podstawiając za R i k ich wartości, znajdujemy

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{ab}{a+c}\right)^3 \frac{1}{1 - \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^3} = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{a^2b^3}{a^2 + 3c^2}.$$

A nakoniec, z przyczyny $c^2 = a^2 + b^2$, otrzymujemy

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{a^2b^3}{4a^2 + 3b^2}.$$

ZADANIA.

963. — Jak się wyrazi objętość piramidy, gdyby wzięto sferę za jedność objętości, koło wielkie za jedność powierzchni i jego promień za jedność linij?

934. — Wyrachować promień wewnętrzny rurki szklannej walcowej, wiedząc że ta rurka próżna waży 90 grammów, a zaś 200 grammów gdy wprowadzono do niej kolumnę merkuryuszu wysokości 9 centymetrów. (Gęstość merkuryuszu jest 13,568.)

965. — Aby wyciągnąć wodę ze studni, użyto pompy której rura ma średnicę wewnętrzną d, a jej tłok przebiega drogę h. Średnica studni jest D, a H głębokość wody. Po ilu razach poruszeń tłoku studnia będzie próżna?

966. — Jeśli w półkole wpisano półwielokąt foremny parzystej liczby boków, i opisano na niem półwielokąt podobny, powierzchnia sfery utworzona obrotem półkoła około jego średnicy jest średnią proporcyonalną między powierzchniami utworzonemi przez dwa półwielokąty.

967. — Stożek obrotowy jest wpisany w walec obrotowy. Przeciąć całą figurę płaszczyzną równoległą do podstawy tak, żeby powierzchnie pnia stożka i walca tej samej wysokości były równowarte.

968. — Wpisać w sferę stożek prosty któregoby powierzchnia wypukła była równowarta powierzchni krymki sferycznej mającej ze stożkiem spólną podstawę.

969. — Wpisać w sferę walec prosty któregoby summa dwóch podstaw była równowarta jego powierzchni wypukłej.

970. — Stożek równoboczny jest wpisany w sferę; wyznaczyć między jakiemi granicami może się zmieniać różnica przecięć tych dwóch figur przez płaszczyznę równoległą do podstawy stożka.

971. — Powierzchnia obrotowa, utworzona przez linię płaską ACFI symetryczną względem prostej AF, około osi XY równoległej do AF, ma za miarę wieloczyn z długości linii tworzącej przez okrąg nakreślony środkiem ciężkości który leży na osi symetryi AF.

972. — Objętość utworzona przez powierzchnię płaską ACFI, symetryczną względem prostej AF, ma za miarę wieloczyn z powierzchni tworzącej przez okrąg nakreślony środkiem ciężkości który leży na osi symetryi AF.

Te dwa twierdzenia są szczególnym przypadkiem sławnego twierdzenia Guldina które już było znane Starożytnym.

973. — Środki ścian wielościanu foremnego są wierzchołkami innego wielościanu foremnego, sprzężonego z pierwszym.

Wierzchołki wielościanu foremnego są środkami ścian innego wielościanu foremnego, sprzężonego z pierwszym.

974. — Środki krawędzi czworościanu foremnego są wierzchołkami ośmiościanu foremnego.

975. — W każdy sześcian można wpisać czworościan foremny, którego

wierzchołki i krawędzie należą do wierzchołków sześcianu i do przekątnych jego ścian.

976. — W każdy dwunastościan foremny można wpisać sześcian którego wierzchołki i krawędzie należą do wierzchołków tego dwunastościanu i do przekątnych jego ścian.

Uwaga. — Można tym sposobem wpisać 5 sześcianów w dwunastościan foremny.

977. — Na danej sferze wykreślić cztery koła równe i styczne między sobą.

Biorąc te koła za podstawy czterech stożków równych i stycznych do sfery, wyrachować objętość całej figury.

978. — Wyrachować objętość utworzoną obrotem pięciokąta foremnego około jednego z boków.

979. — Litr do mierzenia rzeczy sypkich jest walcem obrotowym którego wysokość równa się średnicy podstawy, a objętość zawiera 1 decymetr sześcienny. Jakie są rozmiary tego naczynia?

980. — Poprowadzić równoległę do podstawy trójkąta tak, żeby objętości utworzone przez dwie części trójkąta obracającego się około tej równoległej były równowarte.

981. — Przeciąć trójkąt ABC sieczną AD tak, żeby objętości utworzone obrotem dwóch części ADB i ADC, około osi XY danej na ich płaszczyźnie, były równowarte.

982. — W stosie trójkątnym kul poprowadzono płaszczyzny styczne które zamykają ten stos w czworościan foremny. Wyrachować stosunek między częścią *pełną* i częścią *próżną* tego czworościanu.

983. — Gdy półokrąg podzielony na 3 równe części, obraca się około swej średnicy, wtedy: 1° Strefa utworzona przez łuk środkowy równa się summie stref skrajnych. 2° Wycinek sferyczny mający strefę środkową za podstawę równa się summie dwóch innych. 3° Odcinek sferyczny środkowy jest $\frac{11}{5}$ summy objętości dwóch krymek przyległych.

984. — Jaka jest krymka sferyczna zawierająca objętość maximum pod tą samą powierzchnią? I na odwrót, jaka jest krymka sferyczna mająca powierzchnię minimum z tą samą objętością?

985. — W trójkącie sferycznym kąt $A = 60°9'50''$, $B = 75°40'20''$, $C = 50°30'30''$: promień sfery 0^m05. Znaleźć powierzchnię S na mniej niż

1 millim. kwad. błędu. (Działając za pomocą logarytmów powinno się otrzymać S = 0,0003495...)

986. — Dwa trójkąty sferyczne są równowarte gdy ich trójkąty biegunowe mają ten sam obwód ; i nawzajem.

987. — Jeśli weźmiemy kąt prosty za jedność kątów i trójkąt trójprostokątny za jedność powierzchni, *powierzchnia wielokąta sferycznego wypukłego* wyrazi się przez *liczbę 4 mniej obwód wielokąta biegunowego.*

988. — Ze wszystkich trójkątów sferycznych mających dwa boki dane, trójkąt powierzchni maximum jest ten w którym kąt zawarty między temi bokami jest równy summie dwóch innych kątów.

989. — Ze wszystkich trójkątów sferycznych równoobwodowych i równej podstawy, trójkąt równoramienny jest maximum.

990. — Podzielić trójkąt sferyczny na dwie części będące w stosunku danym ; prowadząc łuk koła wielkiego przez jeden wierzchołek.

991. — Wyrachować kąty trójkąta sferycznego, wiedząc że są proporcyonalne do liczb 1, 2, 3, i że powierzchnia tego trójkąta jest ćwiercią trójkąta trójprostokątnego.

992. — Wykreślić ukośnik sferyczny równowarty danemu trójkątowi sferycznemu.

993. — Wykreślić trójkąt sferyczny znając jego powierzchnię, wielkość i położenie jednego kąta, i punkt przez który ma przechodzić bok przeciwległy.

994. — Zamienić wielokąt sferyczny na trójkąt sferyczny równowarty.

995. — Znaleźć promień R sfery złotej wartającej $100^{zł}$; wiedząc że ciężar gatunkowy złota jest 19,258, a 1 gram złota kosztuje $5^{zł},166$.

Odp. R = 6,21 millimetrów.

996. — Wpisać w daną sferę graniastoń trójkątny foremny mający objętość największą możebną.

997. — W dany stożek kołowy prosty wpisać walec danej powierzchni. Maximum tej powierzchni.

998. — W daną sferę wpisać stożek prosty mający powierzchnię wypukłą maximum.

999. — Znając trzy objętości, utworzone obrotem trójkąta około każdego ze trzech boków, wyrachować te boki.

1000. — Około którego ze trzech boków trzeba obrócić trójkąt żeby utworzył objętość największą możebną?

1001. — Przypuszczając że ziemia jest sferą, wyrachować jej powierzchnię, objętość i cężar, wiedząc że promień ziemi ma 1232 mil, a jej gęstość jest 4,5 jako okazał Cavendish.

1002. — Przypuszczając że słońce i księżyc są sferami, i wiedząc że słońce jest 65 milionów razy większe od księżyca; w jakim stosunku są odległości środków tych dwóch ciał od środka ziemi? gdy je widzimy z powierzchni ziemi pod tym samym kątem, to jest, gdy ich *średnice pozorne* są równe.

1003. — Promienie ziemi, księżyca i słońca są proporcyonalne do liczb $1, \frac{27}{100}, 110$. Wyrachować powierzchnię i objętość księżyca i słońca w stosunku do powierzchni i objętości ziemi.

1004. — Przeciąć sferę płaszczyzną taką, żeby powierzchnia przecięcia była równowarta różnicy dwóch krymek sferycznych na które ta płaszczyzna rozdziela sferę.

1005. — Przeciąć sferę płaszczyzną taką, żeby powierzchnia wielkiego koła była średnią proporcyonalną między dwiema krymkami wyznaczonemi przez tę płaszczyznę.

1006. — Przeciąć sferę płaszczyzną taką, żeby powierzchnia przecięcia była równa różnicy dwóch stref które ta płaszczyzna wyznacza.

1007. — Przeciąć sferę dwiema płaszczyznami równo oddalonemi od środka sfery, tak żeby summa powierzchni dwóch przecięć była równa strefie zawartej między temi płaszczyznami.

1008. — Przeciąć sferę płaszczyzną taką, żeby podzieliła na dwie równe części wycinek sferyczny, mający za podstawę mniejszą z dwóch krymek sferycznych które ta płaszczyzna wyznacza.

1009. — W daną sferę wpisać walec któregoby powierzchnia cała była największa możebna.

1010. — W daną sferę wpisać stożek prosty któregoby powierzchnia cała była największa możebna.

1011. — Wpisać w sferę stożek któregoby powierzchnia boczna była równowarta powierzchni krymki sferycznej przyległej.

1012. — Wyznaczyć kąt południków Paryża i Londynu, wiedząc że wrzeciono ziemskie które tworzą zawiera 3367 miryametrów kwadratowych.

1013. — Podzielić sferę na dwa odcinki w stosunku $m : n$, przez płaszczyznę prostopadłą do danej średnicy.

1014. — Wpisać w sferę stożek równowarty odcinkowi sferycznemu przyległemu.

1015. — Wpisać w półsferze walec największy możebny.

1016. — Wpisać w półsferze walec taki, żeby krymka sferyczna stojąca na podstawie wyższej była jego trzecią częścią.

1017. — Jakie powinno być położenie trójkąta ABC, żeby, mając wierzchołek A na osi leżącej na jego płaszczyznie, utworzył swoim obrotem około tej osi objętość największą możebną ?

1018. — Na danej sferze opisać stożek któregoby powierzchnia cała równała się danemu kołu πa^2.

1019. — Jakie położenie powinien mieć kwadrat żeby, obrotem swoim około osi która przechodzi przez jeden z jego wierzchołków i leży na jego płaszczyznie, utworzył objętość największą możebną ?

1020. — Znaleźć na kierunku średnicy półkola AB, punkt P taki żeby, poprowadziwszy styczną BM, objętość utworzona obrotem całej figury około tej średnicy miała wielkość daną πa^3.

1021. — To samo, żeby objętość utworzona obrotem figury AMP *albo* BMP, równała się ćwierci objętości sfery.

To samo, żeby powierzchnie utworzone przez łuk AM i przez styczną PM były w stosunku danym.

1022. — Są dane dwa koła O, O′; znaleźć na linii środków OAA′O′, punkt P taki żeby, poprowadziwszy styczne PC i PC′ do tych kół, i obracając całą figurę około linii środków jako osi, summa dwóch stref utworzonych przez łuki AC i A′C′ była największa możebna.

1023. Podzielić strefę w stosunku średnim i skrajnym płaszczyzną równoległą do jej podstaw.

1024. — Podzielić sferę w stosunku średnim i skrajnym sferą spółśrodkową.

1025. — Znaleźć maximum objętości walca obrotowego którego powierzchnia cała jest dana.

1026. — Znaleźć maximum objętości stożka obrotowego którego powierzchnia cała jest dana.

1027. — Znaleźć objętość utworzoną obrotem połowy dziesięciokąta foremnego około jednej z jego średnic.

1028. — Przeciąć sferę płaszczyzną tak, żeby powierzchnia stożka opisanego wedle okręgu przecięcia, więcej m razy powierzchnia krymki sferycznej zawartej w tym stożku, równała się danej powierzchni koła.

1029. — Podzielić powierzchnię sf ry w stosunku średnim i skrajnym, płaszczyzną prostopadłą do danej średnicy.

'1030. — Wyrachować promienie podstaw pnia stożka prostego wpisanego w daną sferę, znając objętość i wysokość tego pnia.

1031. — Wyrachować powierzchnię wypukłą, powierzchnię całą i objętość stożka równobocznego w funkcyi jego boku. Na jaką wartość tego boku powierzchnia cała stożka równa się metrowi kwadratowemu a jego objętość metrowi sześciennemu?

1032. — Podzielić powierzchnię boczną stożka obrotowego na n części równych.

1033. — W dany stożek wpisać walec danej objętości.

Na danym walcu opisać stożek danej objętości.

Dyskutować możebność tych dwóch zagadnień.

1034. — Jaka jest objętość maximum stożka obrotowego którego bok jest dany ?

1035. — W ciecz, której ciężar gatunkowy jest d, zanurzono pień stożka obrotowego mającego gęstość δ; promienie podstaw pnia są R i r, a wysokość h. Wyrachować wysokość części zanurzonej i promień przecięcia wyznaczonego przez powierzchnię poziomu cieczy.

1036. — Wyrachować promienie podstaw stożka obrotowego, znając wysokość, bok i powierzchnię *albo* objętość tego stożka.

1037. — Jaki jest stosunek objętości utworzonych przez równoległobok obracający się kolejno około dwóch boków przyległych?

1038. — Znaleźć promień sfery opisanej na piramidzie trójkątnej której jeden z kątów trójściennych jest trójprostokątny.

1039. — Wyrachować promienie podstaw pnia stożka obrotowego którego wiadome są : wysokość, bok i powierzchnia *albo* objętość.

1040. — Strefa, którą dwie dane sfery spółśrodkowe przejmują na sferze zmiennej przechodzącej przez ich środek, jest stała.

1041. — Wyznaczyć na danej sferze krymkę sferyczną, którejby powierzchnia była podwójną powierzchni utworzonej przez cięciwę łuku rodzącego tej krymki.

1042. — Znając długość osi kotła walcowego zakończonego pólsferzami, wyznaczyć rozmiary części walcowej tak, żeby objętość kotła była równa danej.

1043. — Jeśli z każdego wierzchołka równoległościanu jako środka, opisano sfery równe, te wszystkie sfery wzięte razem przejmują część objętości równoległościanu równą jednej z nich.

1044. — Objętość sześcianu jest równa sześć razy wziętej objętości ośmiościanu foremnego, który ma wierzchołki we środkach ścian sześcianu.

1045. — Mając dane dwa trójkąty i punkt na ich płaszczyźnie, poprowadzić przez ten punkt taką prostę żeby objętości utworzone przez dwa trójkąty, obracające się około tej prostej, były w stosunku danym.

1046. — Znaleźć krawędź czworościanu foremnego, wiedząc że gdy objętość zwiększa się ilością v, krawędź zwiększa się ilością k.

1047. — Objętość utworzona obrotem sześciokąta foremnego około boku jest równowarta sferze której średnica jest potrójną tego boku.

1048. —Znaleźć wysokość strefy równowartej swym równym podstawom.

1049. — Znaleźć promień sfery, wiedząc że jej objętość V powiększa się ilością v gdy promień R powiększa się ilością r.

1050. — Na sferze owloką podstaw trójkątów sferycznych, mających kąt spólny i ten sam obwód, jest koło.

1051. — Jeśli powierzchnia małego koła jest $\frac{1}{6}$ powierzchni sfery na której leży, wtedy, średnica, boki kwadratu i trójkąta równobocznego wpisane w to koło są krawędziami trzech wielościanów foremnych : czworościanu, sześcianu i ośmiościanu, wpisanych w tę sferę.

1052. — Jeśli powierzchnia małego koła jest $\frac{1}{5}$ powierzchni sfery na której leży, wtedy boki dwóch pięciokątów foremnych wpisanych w to koło są krawędziami : 1° dwóch dwudziestościanów foremnych, wypukłego i gwiaździstego ; 2° dwóch dwudziestościanów foremnych gwiaździstych z kątami pięciościennemi.

1053. — W każdym z dwóch dwudziestożcianów foremnych krawędzie przecinają się, po trzy, w dwudziestu punktach, które są wierzchołkami dwóch dwunastościanów foremnych z kątami trójściennemi, wypukłego i gwiaździstego.

1054. — Wiedząc że ciężar jednego decymetra sześciennego żelaza lanego jest $7^k,2$ wyrachować, z największem przybliżeniem możebnem, średnicę kuli ważącej 12 kilogr.

KSIĘGA DZIESIĄTA

O POWIERZCHNIACH KRZYWYCH W OGÓLNOŚCI.

Widzieliśmy na początku księgi VIII że płasczyzna, powierzchnie walcowa i stożkowa, powierzchnie obrotowe są miejscem położeń linij prostych albo krzywych, zwanych *liniami rodzącemi*, które się posuwają w przestrzeni opierając się na innych liniach, mianowanych *kierownicami*.

Zogólniając to wyobrażenie, łatwo pojmujemy że

Wszelka powierzchnia jest miejscem geometrycznem położeń linii rodzącej, która się porusza w przestrzeni, sposobem ciągłym, zmieniając nawet kształt jeśli trzeba, wedle ustawy wyznaczonej.

Do tego cośmy już powiedzieli o powierzchniach obrotowych, dodajemy tylko że te powierzchnie biorą nazwisko od krzywych południkowych które są ich liniami rodzącemi.

I tak, powierzchnia utworzona obrotem ellipsy około jednej z dwóch osi nazywa się ELLIPSOIDĄ OBROTOWĄ.

Ellipsoida obrotowa jest *przydłużona* albo *spłasczona* według jak ellipsa rodząca obraca się około wielkiej osi albo około małej.

Powierzchnia ziemi ma kształt ellipsoidy obrotowej trochę spłasczonej przy biegunach.

Nazywają także ziemię i inne planety *sferoidami.*

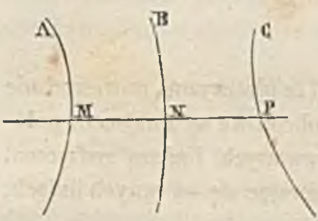
Powierzchnia utworzona obrotem hiperboli około osi *ogniskowej* nazywa się HIPERBOLOIDĄ OBROTOWĄ *o dwóch płachtach.*

Powierzchnia utworzona obrotem hiperboli około osi *urojonej* (niepoprzecznej) nazywa się HIPERBOLOIDĄ OBROTOWĄ *o jednej płachcie.*

Powierzchnia utworzona obrotem paraboli około osi nazywa się PARABOLOIDĄ OBROTOWĄ.

Powierzchnie mające linię prostą za linię rodzącą, nazwano PROSTORODNEMI.

Trzy linie jakiekolwiek A, B, C, *wzięte za kierownice wyznaczają powierzchnię prostorodną.*



Jakoż, niech będzie jakikolwiek punkt M na linii A; można zawsze wyobrazić dwa stożki mające ten punkt za wierzchołek i linie B i C za kierownice.

Ogólnie mówiąc, te dwa stożki przecinają się wedle jednej albo kilku krawędzi, jako MNP, które przechodzą przez spólny wierzchołek M, i opierają się na kierownicach B i C. Owoż, gdy punkt M posuwa się po linii A, punkta N i P posuwają się po liniach B i C; więc linia prosta MNP tworzy powierzchnię wyznaczoną.

Z tego twierdzenia wynika że wszelka powierzchnia prostorodna może być uważana jako mająca za kierownice trzy pewne linie A, B, C; bo oczywiście można wziąć za kierownice trzy jakiekolwiek linie leżące na tej powierzchni, które spotykają wszystkie jej rodzące prostolinijne.

Można zastąpić kierownice prostolinijne albo krzywolinijne przez powierzchnie na których muszą leżeć linie rodzące, albo przez płaszczyzny do których linie rodzące muszą zostawać równoległemi. Te płaszczyzny biorą wtedy nazwisko *płaszczyzn kierowniczych.*

Powierzchnie prostorodne nazywają się *rozwijalnemi*, jeśli się mogą rozpościerać na płaszczyznie bez rozdarcia ani fałdów.

Wszystkie inne powierzchnie prostorodne nie rozwijalne nazywają sie ogólnie *powierzchniami skośnemi.*

Powierzchnie walcowa i stożkowa są najprostszym przykładem powierzchni rozwijalnych. Jakoż, uważając powierzchnię walcową jako granicę powierzchni bocznej graniastonu, którego krawędzie boczne po sobie idące są nieskończenie do siebie zbliżone, otwórzmy ją wedle jednej z tych krawędzi; ponieważ dwie krawędzie sąsiednie są na tej samej płaszczyznie, można, obracając około spólnej krawędzi, sprowadzić płaszczyznę pierwszej ściany na płaszczyznę drugiej; potem płaszczyznę dwóch pierwszych ścian na plasczyznę trzeciej; i tak dalej.

Podobne rozumowanie stosuje się do powierzchni stożkowej.

Powierzchnie rozwijalne są rozmaite. *Miejsce geometryczne stycznych do danej krzywej skośnej* (linia o dwóch krzywiznach) *jest powierzchnią rozwijalną*. Dowodzi się tego, uważając krzywę skośną jako granicę wielokąta skośnego, w którym kierunki boków nieskończenie malejących dążą do stycznych tej krzywej. Taka powierzchnia składa się z dwóch różnych części, przedzielonych tą krzywą skośną której sławny MONGE dał imie *krawędzi zwrotu* (*).

Między powierzchniami skośnemi najznamienitsze są:

Hiperboloida o jednej płachcie, mająca za kierownice trzy linie proste nie równoległe do jednej płasczyzny.

Powierzchnia utworzona obrotem linii prostej około osi nie leżącej na jej płasczyznie jest hiperboloidą o jednej płachcie.

Paraboloida hiperboliczna, albo płasczyzna spaczona, która ma za kierownice trzy linie proste równoległe do jednej płasczyzny, albo ogólniej, dwie linie proste za kierownice i płasczyznę kierowniczą.

Walec skośny, który ma dwie linie krzywe za kierownice i płasczyznę kierowniczą.

Stożkowiec, mający linię prostą i linię krzywą za kierownice i płasczyznę kierowniczą.

Stożkowiec jest *prosty* gdy kierownica prostolinijna jest prosto-

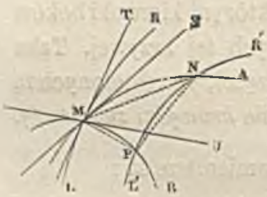
(*) Można dowieśdź że każda powierzchnia rozwijalna ma swoją krawędź zwrotu. Walec i stożek zdają się być wyjątkiem; ale ten wyjątek usunie się, jeśli będziemy uważali że w stożku krawędzią zwrotu jest punkt, wierzchołek stożka, a zaś w walcu krawędzią zwrotu jest linia prosta w nieskończoności.

padła do płasczyzny kierowniczej; wtedy ta kierownica nazywa się osią stożkowca. Powierzchnia spodnia kręconych schodów jest takim stożkowcem który się nazywa *helicoidą skośną.*

Własności tych wszystkich powierzchni są przedmiotem GEOMETRYI ANALITYCZNEJ I GEOMETRYI OPISUJĄCEJ, do których odsyłamy.

TWIERDZENIE I.

Miejscem stycznych poprowadzonych przez jeden punkt powierzchni, do różnych krzywych które na niej przez ten punkt przechodzą, jest płasczyzna.



Niech będzie dany punkt M na powierzchni której rodzącą w tym punkcie jest linia LMR. Poprowadźmy przez punkt M dwie jakiekolwiek krzywe MA i MB na powierzchni, i niech będą MT, MS, MU styczne do tych trzech linij. Możemy uważać linie MA i MB jako kierownice danej powierzchni utworzonej przez linię LR, która zmienia swoje położenie i nawet kształt, jeśli trzeba. Niech będzie L'R' położenie linii rodzącej dostatecznie zbliżone do LR, tak żeby przecinało linie MA i MB w punktach N i P. Poprowadźmy cięciwy MN, MP, NP. Te trzy proste są ciągle na jednej płasczyznie, jakkolwiek blizko linia L'R' dosięga do LR. Owoż, gdy L'R' schodzi się z LR, punkta N i P jednoczą się w punkcie M, i sieczne MN, MP stają się stycznemi MS, MU; więc, jeśli sieczna NP staje się styczną MT do MR, co zawsze ma miejsce byle punkt M nie był punktem *osobliwym*, wtedy trzy styczne MS, MT, MU leżą na jednej płasczyznie. Ale krzywa MA jest jakakolwiek; ztąd wynika że wszystkie styczne w pnnkcie M do linij leżących na powierzchni są na jednej płasczyznie.

Płasczyzna, będąca miejscem stycznych do linij które na powierzchni przez dany punkt poprowadzić można, nazywa się *płasczyzną styczną do powierzchni w tym punkcie.*

Uwaga. — Powyższe twierdzenie, jakośmy zastrzegli, może nie być prawdziwe gdy dany punkt M jest *osobliwy*, jako na przykład wierzchołek stożka. W tym punkcie, miejscem stycznych nie jest płaszczyzna, ale sama powierzchnia stożkowa. Ta okoliczność zdarza się także przy biegunie powierzchni obrotowej, jeśli linia południkowa spotyka oś pod kątem nie prostym. Jednakże, gdy jest dana linia na stożku przechodząca przez jego wierzchołek, wtedy płaszczyzna styczna do stożka w każdym punkcie tej linii jest wyznaczona; a więc także wyznaczona w punkcie który przypada w wierzchołku tego stożka.

Wniosek I. — Aby otrzymać płaszczyznę styczną do powierchni w danym punkcie, dość poprowadzić, przez ten punkt, styczne do dwóch jakichkolwiek linij nakreślonych na tej powierzchni. Jeśli powierzchnia jest prostorodna, ponieważ linia rodząca, jako prosta, jest sama swoją styczną, trzeba tylko poszukać drugiej stycznej w danym punkcie aby mieć płaszczyznę styczną.

II. — Gdy się dwie powierzchnie przecinają, styczna do tego przecięcia w danym punkcie jest przecięciem płaszczyzn stycznych w tym punkcie.

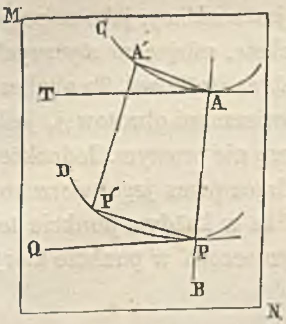
Zatem, jeśli chcemy mieć styczną do przecięcia jakiejkolwiek powierzchni z płaszczyzną w danym punkcie, prowadzimy do powierzchni w tym punkcie płaszczyznę styczną, której przecięcie z daną płaszczyzną wyznacza szukaną styczną.

Określenie. — Normalną do powierzchni w punkcie M jest prostopadła do płaszczyzny stycznej w tym punkcie.

Twierdzenie II.

Płaszczyzna styczna MN *do powierzchni rozwijalnej w danym punkcie* A *jest styczna wzdłuż całej linii rodzącej* AB *która przechodzi przez ten punkt.*

Przez punkt P linii rodzącej AB, która przechodzi przez dany punkt A, poprowadźmy jakąkolwiek krzywę PD na powierzchni i styczną PQ do tej krzywej.



Ponieważ płasczyzna MN, styczna w punkcie A do powierzchni, zawiera linię rodzącą AB, dość będzie okazać że styczna PQ leży na tej płasczyznie. Owoż, przez punkt A poprowadźmy na powierzchni dowolną krzywę AC której styczna AT będzie oczywiście na płasczyznie MN, i uważajmy położenie A'P' linii rodzącej nieskończenie blizkie położenia AP. Proste AP i A'P' leżą na jednej płasczyznie, bo powierzchnia jest rozwijalna; zatem sieczne AA' i PP' są na tej samej płasczyznie. A że, gdy prosta A'P' schodzi się z AP, sieczne AA' i PP' stają się stycznemi AT i PQ, więc te styczne są obie na płasczyznie MN która dlatego jest płasczyzną styczną wzdłuż całej krawędzi AB.

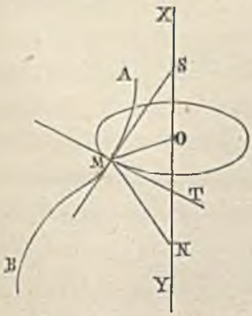
Wniosek. — Płasczyzna styczna do walca albo do stożka w danym punkcie jest styczna wzdłuż krawędzi przechodzącej przez ten punkt.

Uwaga. — Płasczyzna styczna do powierzchni skośnej w danym punkcie zawiera linię rodzącą która przez ten punkt przechodzi, ale nie jest styczna wzdłuż tej całej linii; bo w takiej powierzchni dwa położenia sąsiednie linii rodzącej, jakkolwiek blizkie, nie są nigdy na jednej płasczyznie.

Twierdzenie III.

Płasczyzna styczna do powierzchni obrotowej jest prostopadła do płasczyzny południka przechodzącego przez punkt zetknięcia.

Jakoż, płasczyzna styczna do powierzchni obrotowej w punkcie M zawiera styczną MS do południka AMB, i styczną MT do równoleżnika OM. Owoż, płaszczyzny południka i równoleżnika



są do siebie prostopadłe, i styczna MT, prostopadła do promienia OM, jest prostopadła do płaszczyzny południka AMB; więc płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej jest prostopadła do płaszczyzny południka w punkcie zetknięcia.

Wniosek. — Normalna MN do powierzchni obrotowej leży na płaszczyznie południka punktu zetknięcia, i spotyka oś w punkcie N który jest spodkiem wszystkich normalnych odpowiedających punktom zetknięcia na jednym równoleżniku. Ztąd wynika że :

Normalne do powierzchni obrotowej, w punktach jednego równoleżnika, tworzą stożek obrotowy mający wierzchołek w punkcie N *osi powierzchni.*

Styczne do południków w punktach jednego równoleżnika tworzą także stożek obrotowy mający wierzchołek w punkcie S *osi powierzchni.*

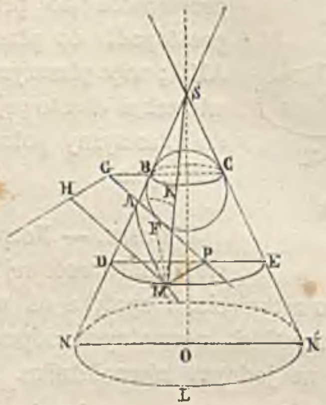
Kąt NMS, który mierzy w punkcie M kąt płaszczyzn stycznych do dwóch powyższych stożków, jest prosty; więc powierzchnie tych stożków są *prostokątne.*

PRZECIĘCIA STOŻKOWE.

Twierdzenie IV.

Przecięcie stożka kołowego prostego przez płaszczyznę jest ellipsą albo hiperbolą albo parabolą.

Niech będzie AM linia krzywa wyznaczona na stożku obrotowym S przez płaszczyznę sieczną jakąkolwiek. Poprowadźmy przez oś SO płaszczyznę SOA prostopadłą do płaszczyzny linii krzywej AM; ta płaszczyzna południkowa przetnie płasczyznę sieczną



wedle prostej AP, a zaś stożek wedle dwóch linij rodzących SN i SN', których kąt NSN' nazywa się kątem stożka. Po czem, wpiszmy w stożek sferę styczną do płasczyzny siecznej; albo, co to samo, na płasczyznie południkowej NSN' wpiszmy w kąt stożka okrąg BCF styczny wewnętrznie do prostej AP, i obróćmy całkiem tę płasczyznę około osi SO. W tym obrocie, krawędź SN utworzy daną powierzchnię stożkową, a zaś okrąg BCF utworzy sferę, która będzie styczna do tej powierzchni wedle równoleżnika BKC i styczna do płasczyzny siecznej w punkcie F.

Uważajmy teraz jakikolwiek punkt M przecięcia AM, i poprowadźmy przez M płasczyznę DME równoległą do podstawy NLN' stożka; ta płasczyzna przetnie płasczyznę sieczną wedle prostej MP prostopadłej do AP. Po czem, przedłużmy prostę AP i średnicę BC równoleżnika aż do spotkania G, i na płasczyznie siecznej wyprowadźmy prostopadłę GH do AP; nakoniec, połączmy MF, i spuśćmy prostopadłę MH na GH. Chodzi teraz o to aby znaleźć wartość stosunku $\frac{MF}{MH}$.

Owoż, jeśli poprowadzimy linię rodzącą SM która spotka w K równoleżnik BC, będzie $MF = MK = DB$; a zaś $MH = PG$.

Zatem
$$\frac{MF}{MH}=\frac{DB}{PG}.$$

Ale dwa trójkąty podobne ABG, ADP dają

$$\frac{AB}{AG}=\frac{AD}{AP}=\frac{AB+AD}{AG+AP}=\frac{DB}{PG}.$$

Więc
$$\frac{MF}{MH}=\frac{AB}{AG}.$$

Ostatnie równanie pokazuje że, na płaszczyznie siecznej AMP, odległości MF i MH jakiegokolwiek punktu M krzywej AM od punktu stałego F i od prostej stałej GH są w stosunku stałym; więc przecięcie stożkowe AM jest ellipsą albo hiperbolą albo parabolą (IV, 35), mającą punkt F za ognisko i prostę GH za kierownicę.

Jeśli $\frac{AB}{AG}<1$, w trójkącie ABG kąt G jest mniejszy od kąta ABG i temsamem mniejszy od spełnienia kąta BCE; wtedy proste AP i SE przecinają się na płachcie SNLN′ stożka, to jest, płaszczyzna sieczna AMP spotyka wszystkie położenia linii rodzącej SM. Więc w tym przypadku przecięcie stożkowe AM jest linią zamkniętą która się nazywa *ellipsą.*

Jeśli $\frac{AB}{AG}>1$, kąt AGB jest większy od kąta ABG i temsamem większy od spełnienia kąta BCE; wtedy prosta AP spotyka przedłużenie krawędzi SE, to jest, płaszczyzna sieczna AMP przecina obie płachty stożka. Więc w tym przypadku przecięcie stożkowe składa się z dwóch części oddzielnych i nieskończenie rozległych które stanowią *hiperbolę.*

Jeśli $\frac{AB}{AG}=1$, kąt AGB, równy kątowi ABG, jest spełnieniem kąta BCE; wtedy proste AP i SE są równoległe. To pokazuje że płaszczyzna sieczna AMP spotyka wszystkie linie rodzące stożka prócz jednej SE. Więc w tym przypadku przecięcie stożkowe AM jest linią krzywą otwartą, rozciągającą się nieskończenie na dwie strony, która się nazywa *parabola.*

Uwaga. — Jeśli płasczyzna sieczna AM przestaje być styczną do sfery wpisanej w stożek i przecina ją wedle pewnego koła, wtedy odległość MF, zawsze równa odległości MK, jest styczna do tego koła. Powtarzając powyższe rozumowanie, łatwo znajdujemy następujące twierdzenie :

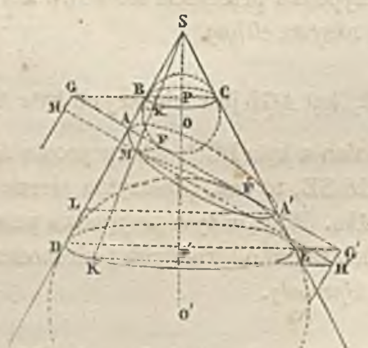
Miejscem punktów, z których poprowadzone styczne do koła stałego zostają z odległościami tych punktów od prostej stałej w stosunku stałym, jest linia stożkowa.

Zagadnienie.

Umieścić daną ellipsę, albo hiperbolę, albo parabolę, na danym stożku obrotowym.

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie :

1° Ellipsa AMA′ umieszczona na stożku obrotowym mającym



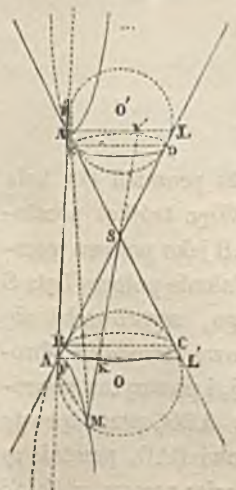
kąt $S=2\beta$. Sama figura jasno pokazuje że na płasczyznie ellipsy, ślad AA′ płasczyzny południkowej prostopadłej jest *wielką osią* tej ellipsy; ogniskami są punkta F i F′ w których koła, wpisane O i zawpisane O', dotykają wielkiej osi, a kierownicami prostopadłe GH i GH' do tej osi.

Ztąd wynika że AF' = AD; ale DL = EA' = A'F'.

Zatem $\mathrm{AL} = \mathrm{FF'}$, i $\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AG}} = \frac{\mathrm{AL}}{\mathrm{AA'}} = \frac{c}{a}$.

Więc w trójkącie AA'L wiadome są dwa boki AA', AL, i kąt L jako dopełnienie połowy kąta S stożka. Tym sposobem zadane zagadnienie przywodzi się do zbudowania trójkąta którego *znane są dwa boki i kąt przeciwległy jednemu z nich.* A ponieważ dany kąt ALA' jest przeciwległy większemu z dwóch danych boków, trójkąt jest zawsze możebny i wyznaczony. Zbudowawszy ten trójkąt, wyprowadzi się ze środka boku LA', prostopadłę która przetnie prostę LA w punkcie S; tak że powierzchnia stożkowa, utworzona obrotem prostej SL około tej prostopadłej, będzie równa danej, i płaszczyzna poprowadzona wedle AA', prostopadle do płaszczyzny trójkąta AA'L, przetnie tę powierzchnię wedle danej ellipsy. *Więc można zawsze umieścić daną ellipsę na danym stożku obrotowym.*

2° Dana hiperbola jest umieszczona na danym stożku obrotowym. Figura pokazuje że w trójkącie AA'L wiadome są: oś poprzeczna $\mathrm{AA'} = 2a$, odległość ogniskowa $\mathrm{FF'} = \mathrm{AL} = 2c$, i kąt L jako dopełnienie połowy kąta $\mathrm{S} = 2\beta$. A że ten kąt jest przeciwległy mniejszemu z dwóch boków, zagadnienie może mieć dwa rozwiązania albo tylko jedno, a nawet nie mieć żadnego. Możebność zagadnienia wymaga żeby bok AA' nie był mniejszy od prostopadłej spuszczonej z wierzchołka A na bok LA'. Za pomocą trygonometryi, wielkość tej prostopadłej wyraża się przez $2c \operatorname{wst} \mathrm{L} = 2c \operatorname{dos} \beta$; zatem trzeba żeby było



$$2a > 2c \operatorname{dos} \beta \quad \text{albo} \quad \frac{a}{c} > \operatorname{dos} \beta.$$

Owoż, odnosząc się do figury na stronicy 301, i oznaczając przez 2θ kąt niemaltycznych, mamy $\operatorname{dos}\theta = \frac{a}{c}$; jeśli podstawimy tę wartość, będzie

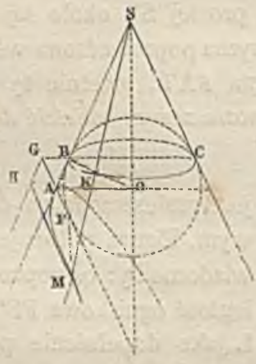
$$\operatorname{dos}\theta > \operatorname{dos}\beta;$$

zkąd, uważając że kąty θ i β są ostre, wynika

$$\theta < \beta \quad \text{albo} \quad 2\theta < 2\beta.$$

Więc, *żeby na danym stożku obrotowym można umieścić daną hiperbolę, trzeba żeby kąt niemaltycznych, zawierający tę krzywę, nie przewyższał kąta stożka.*

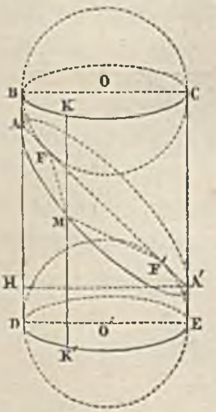
3° Niech będzie parabola AM umieszczona na danym stożku



Mamy AB = AG = AF, i widzimy łatwo że promień OA koła stycznego O jest dwójsieczną kąta BAF. Więc trójkąt prostokątny ABO, w którym wiadomy jest bok AB jako połowa parametru danej paraboli, i kąt BAO jako dopełnienie połowy kąta S stożka, jest wyznaczony. Zbudowawszy go, wyprowadzi się prostopadłę OS do OA; powierzchnia stożkowa utworzona obrotem prostej AS około OS będzie równa danej, i płasczyzna poprowadzona prostopadle do płasczyzny trójkąta ABO, przez prostę AF która tworzy z prostą AO kąt równy kątowi BAO, przetnie tę powierzchnię wedle danej paraboli. *Można więc zawsze umieścić daną parabolę na danym stożku obrotowym.*

PRZECIĘCIE WALCOWE. — Jeśli wierzchołek stożka obrotowego oddala się w nieskończoność, wtedy stożek staje się walcem obrotowym. Więc *przecięcie walca prostego o podstawie kołowej jest ellipsą.*

Mimo tego rozumowania które jest dostateczne, dobrze jest znać dowodzenie wprost. Niech będzie tedy przecięcie AM walca obrotowego przez płasczyznę jakąkolwiek. Aby okazać że ono jest ellipsą, nic łatwiejszego jak powtórzyć dowodzenie dane dla stożka; ale wskażemy jeszcze inne. W tym celu, poprowadźmy płasczyznę południkową BCED prostopadłą do płasczyzny siecznej AMA′, która ją przetnie wedle AA′; poczem, wpiszmy w walec dwie sfery O i O′, styczne do jego powierzchni wedle równoleżników BKC, DK′E, i styczne do płasczyzny siecznej w punktach F, F′. Jeśli teraz, przez jakikolwiek punkt M krzywej AM, poprowadzimy promienie wodzące MF, MF′, i krawędź KK′ walca, będzie



$$MF + MF' = MK + MK' = AA'.$$

Więc przecięcie AM walca obrotowego jest ellipsą która ma punkta F, F′ za ogniska, prostę AA′ za oś wielką, i średnicę walca za *oś małą.*

Ztąd wynika że, *na każdym walcu obrotowym, można zawsze umieścić daną ellipsę, byle tylko jej oś mała była równa średnicy tego walca.*

UWAGA. — To co poprzedza jasno pokazuje że, *Rzut prostokątny ellipsy, mającej osie* AA′ $= 2a$ *i* DE $= 2b$, *na płasczyźnie równoległej do małej osi i czyniącej z płasczyzną tej ellipsy kąt* AA′H *taki że* $\cos AA'H = \frac{HA'}{AA'} = \frac{b}{a}$, *jest kołem średnicy* $2b$.

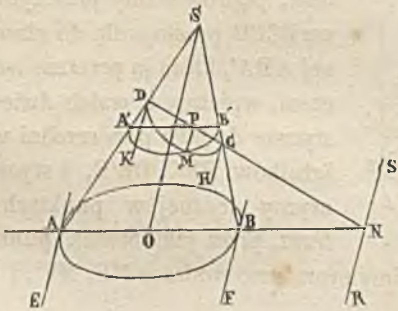
Wzajemnicy tego twierdzenia,

Rzut prostokątny koła na płaszczyznie jest ellipsą której wielka oś jest równa jego średnicy,

dowodzi się, nie można łatwiej, w geometryi analitycznej.

Twierdzenie V.

W stożku pochyłym o podstawie kołowej przecięcie przeciwrównoległe do podstawy jest kołem.



Niech będzie stożek pochyły SAB mający za podstawę koło O. Nazywa się *płaszczyzną główną* płaszczyzna SAB prostopadła do podstawy stożka, i przechodząca przez prostę SO która łączy jego wierzchołek ze środkiem podstawy.

Płaszczyzna sieczna CMD nazywa się *przeciwrównoległą* do podstawy stożka, gdy jest prostopadła do płaszczyzny głównej i jej ślad CD na tej płaszczyznie jest przeciwrównoległy do śladu AB podstawy względem kąta S.

Wiemy że w stożku kołowym przecięcie równoległe do podstawy jest kołem; przypuśćmy że w stożku kołowym pochyłym SAB istnieje drugie przecięcie kołowe CMD nierównoległe do podstawy, i niech będzie RS ślad jego płaszczyzny na płaszczyznie podstawy. Ze środka O spuśćmy na RS prostopadłę ON która spotka okrąg podstawy w punktach A, B; i poprowadźmy styczne AE, BF do podstawy, które będą równoległe do RS. Płaszczyzny styczne SAE, SBF do stożka, będąc równoległe do RS (V, 16.), przecinają płaszczyznę koła CMD wedle jego stycznych CH i DK które są równoległe do RS. Ztąd wynika że te dwie styczne CH i DK są równoległe między sobą i temsamem prostopadłe do CD; więc ślad RS jest prostopadły do prostej DN. To dowodzi że koła AB i CD są prostopadłe do tej samej płaszczyzny przechodzącej przez ich środki i przez wierzchołek S stożka.

Aby teraz wiedzieć pod jakim warunkiem przecięcie CMD jest kołem, przez jego punkt M poprowadźmy, równolegle do podstawy, płaszczyznę A'B' która przetnie stożek wedle koła A'MB', i płaszczyznę przypuszczonego koła CMD wedle prostej MP prostopadłej do płaszczyzny głównej ASB.

Owoż, koła CMD i A'MB' dają

$$\overline{MP}^2 = PC . PD \quad \text{i} \quad \overline{MP}^2 = PA' . PB';$$

ztąd

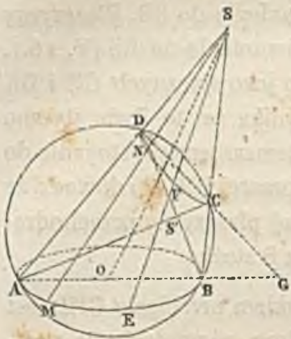
$$PC . PD = PA' . PB'.$$

Więc, żeby przecięcie CMD było kołem, trzeba żeby jego ślad CD i ślad AB podstawy, na płaszczyznie głównej SOA, były przeciwrównoległe względem kąta S. Ten warunek konieczny jest dostateczny; bo prowadzi do równania $\overline{MP}^2 = PC . PD$ które pokazuje że przecięcie CMD jest kołem (III, 17, 3°).

Ztąd wynika że, *przez każdy punkt powierzchni stożka kołowego pochyłego, można zawsze poprowadzić dwa przecięcia kołowe, ale tylko dwa; jedno równoległe do podstawy, a drugie przeciwrównoległe.*

WNIOSEK I.—*Dwa przecięcia stożka kołowego pochyłego, jedno równoległe a drugie przeciwrównoległe do podstawy, są na jednej sferze.*

Albowiem, te dwa przecięcia kołowe są prostopadłe do płasczyzny na której leżą ich średnice AB i CD, a czworobok ABCD jest wpisalny; więc koła AB i CD są na jednej sferze której wielkie koło przechodzi przez cztery punkta A, B, C, D.



Nawzajem, *przez dwa koła leżące na jednej sferze można zawsze poprowadzić dwa stożki.*

Jakoż, przez środki dwóch kół danych na sferze, poprowadźmy płaszczyznę wielkiego koła, która będzie prostopadła do tych kół i przetnie je wedle średnic AB i CD. Owoż, jeśli poprowadzimy proste AD i BC, ich punkt spotkania S będzie wierzchołkiem stożka który ma za podstawę koło AB i przechodzi przez punkta C i D. Ale proste AB i CD są przeciwrównoległe względem kąta S, jako dwa boki przeciwległe czworoboku wpisanego; zatem przecięcie CDN stożka S, przez płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny ABCD, jest kołem mającem CD za średnicę. Więc to koło przystaje do danego koła CD na sferze, i stożek S przechodzi przez oba dane koła AB i CD tej sfery.

Istnieje drugi stożek przechodzący przez te same koła AB i CD, którego wierzchołek jest na przecięciu S' przekątnych AC i BD czworoboku ABCD.

W szczególnym przypadku, pierwszy z tych dwóch stożków może stać się walcem, drugi linią prostą.

II. — Powyższe twierdzenie i jego wniosek stosują się oczywiście do walca pochyłego o podstawie kołowej.

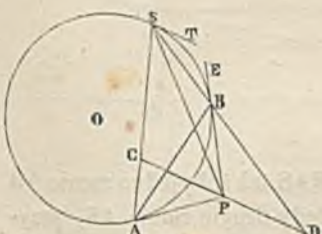
To wszystko razem dowodzi że, *jeśli stożek albo walec przenika sferę wedle koła* (AB) *to z niej wychodzi także wedle koła* (CD).

III. — Gdy w stożku S, przechodzącym przez dwa koła AB i CD na sferze, koło CD malejąc staje się punktem, płasczyzna tego koła staje się płasczyzną styczną do sfery przy wierzchołku S który wtedy leży na sferze.

Więc, *przecięcia przeciwrównoległe stożka kołowego są równoległe do płasczyzny stycznej, w jego wierzchołku, do sfery opisanej.*

Twierdzenie VI.

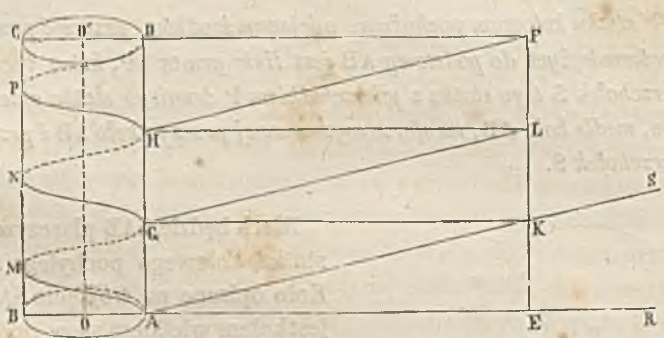
W stożku kołowym pochyłym, miejscem środków przecięć przeciwrównoległych do podstawy AB *jest linia prosta* SP, *która łączy wierzchołek* S *tego stożka z wierzchołkiem* P *drugiego stożka opisanego, wedle koła* AB, *na sferze wyznaczonej przez to koło* AB *i przez wierzchołek* S.



Niech będzie SAB płasczyzna stożka kołowego pochyłego S. Koło opisane na trójkącie SAB jest kołem wielkiem sfery opsanej na stożku SAB; styczna ST do tego koła jest rzutem płasczyzny stycznej do sfery, a cięciwa AB rzutem podstawy stożka. Zatem, biegun P cięciwy AB, względem koła ABS, jest wierzchołkiem stożka opisanego wedle koła AB, na sferze wyznaczonej przez to koło i wierzchołek stożka S. Owoż, wiemy że płasczyzny przecięć przeciwrównoległych są równoległe do płasczyzny stycznej ST; więc, aby dowieśdź twierdzenia, dość jest poprowadzić przez punkt P, równolegle do ST, prostę CD która będzie średnicą jednego z przecięć przeciwrównoległych, i okazać że punkt P jest środkiem tej średnicy CD. To uczyniwszy, uważajmy że kąty ACP i AST są równe z przyczyny równoległych CP i ST, a zaś kąty AST i SAP są równe jako mające tę samą miarę; więc trójkąt PAC jest równoramienny, i bok PC = PA. Podobnie, kąty D i DST są równe z przyczyny równoległych CD i ST, a zaś kąty DBP i BST czyli EBS i BST są równe jako mające tę samą miarę; zatem trójkąt PBD jest równoramienny, i bok PD=PB. Ale styczne PA i PB są równe, więc PC = PB.

WIEDZA O HELICY.

Niech będzie walec ABCD prosty o podstawie kołowej. Jeśli



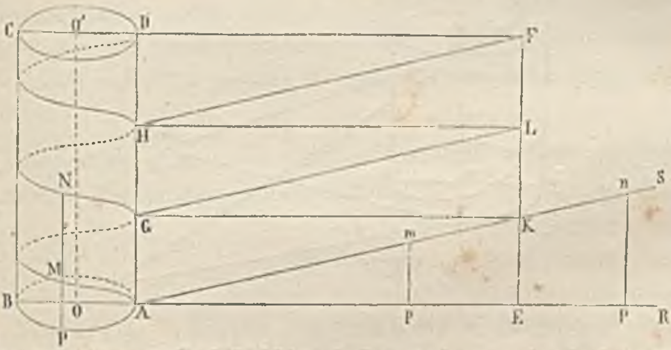
nawiniemy na niego płaszczyznę kąta RAS tak żeby jedno ramie AR przystawało do okręgu podstawy, wtedy drugie ramie AS, przystając do powierzchni walcowej, utworzy na niej linię krzywą AMG która się nazywa HELICĄ (*linią śrubową*).

Można inaczej wyobrazić sobie tworzenie helicy. Jakoż, rozwińmy na płasczyznie powierzchnię boczną walca obrotowego ABCD, i niech będzie prostokąt AEFD tem rozwinięciem. Weźmy, na bokach AD i EF, odległości równe AG, GH, EK,... i poprowadźmy poprzeczne AK, GL...; jeśli nawiniemy ten prostokąt na walec tak żeby podstawa AE przystała do okręgu AB, poprzeczne AK, GL... obwiją powierzchnię walca i utworzą na niej linię krzywą ciągłą która będzie właśnie helicą.

Części AMG, GNH helicy, mające obie skrajności na jednej linii rodzącej walca, nazywają się *skrętami* (*spira*). Wszystkie skręty helicy są równe jako długości poprzecznych równych AK, GL,... Nazwano *krokiem* helicy część linii rodzącej walca, jako AG, zawartą między dwiema skrajnościami jednego skrętu. Krok helicy, długość jednego skrętu i długość okręgu podstawy walca są trzema bokami trójkąta prostokątnego AEK. Dwie z tych trzech części są oczywiście dostateczne do wyznaczenia helicy.

Twierdzenie VII.

Rzędna punktu helicy jest proporcyonalna do odciętej krzywolinijnej.



Niech będzie MP linia rodząca walca, która przechodzi przez punkt M helicy i spotyka okrąg podstawy w punkcie P. Długość MP jest *rzędną* punktu M, a długość łuku AP koła podstawy *odciętą krzywolinijną* tego punktu. Rzędną punktu N leżącego na drugim skręcie helicy jest NP, a odciętą łuk ABAP, to jest łuk AP powiększony jednym okręgiem; i t d.

Uważajmy punkt N helicy, i niech będzie odpowiedający punkt n na ramieniu kąta które tworzy tę linię; podobieństwo trójkątów Anp i AEK daje

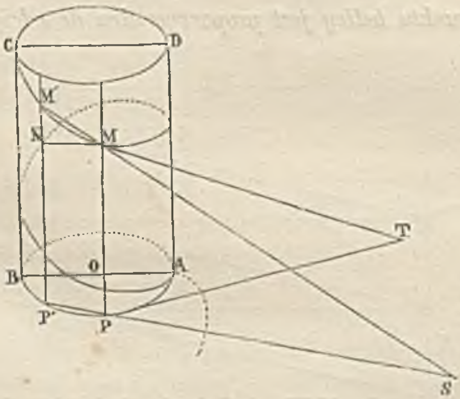
$$\frac{np}{\mathrm{A}p} = \frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{AE}}.$$

Więc, oznaczając przez x, y odciętę i rzędnę jakiegokolwiek punktu helicy, przez h jej krok, przez R promień okręgu podstawy, mamy

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{2\pi R}.$$

TWIERDZENIE VIII.

Styczna do helicy czyni kąt stały z linią rodzącą walca.



Niech będą dwa punkta sąsiednie M i M' helicy; przypuszczając $MP < M'P'$, sieczna MM' spotyka swój rzut PP' na płaszczyznie podstawy w punkcie S. Poprowadźmy prostę MN równoległą do PP'; trójkąty MPS i MNM' prostokątne podobne dają

$$\frac{MP}{SP} = \frac{M'N}{MN} \quad \text{albo} \quad \frac{MP}{SP} = \frac{M'N}{\textit{cięc.}\ PP'};$$

Ale mamy (7)

$$\frac{MP}{APBP} = \frac{h}{2\pi R} = \frac{M'P'}{APBP'} = \frac{M'P' - MP}{AP' - AP} = \frac{M'N}{\textit{łuk}\ PP'};$$

ztąd $$M'N = \frac{h.\ \textit{łuk}\ PP'}{2\pi}$$

Podstawiając tę wartość, otrzymujemy

$$\frac{MP}{SP}=\frac{h}{2\pi R}\cdot\frac{\textit{łuk.}\ PP'}{\textit{cięc.}\ PP'}.$$

Owoż, gdy punkt M′ dąży do punktu M i z nim się schodzi, sieczna MM′ staje się styczną do helicy w punkcie M, i trójkąt MPS staje się MPT. A ponieważ, jako wiemy z trygonometryi, stosunek łuku PP′ do cięciwy PP′ ma za granicę jedność gdy łuk i cięciwa dążą do zera; więc

$$gr.\ \frac{MP}{SP}=\frac{h}{2\pi R}\cdot gr.\frac{\textit{łuk.}\ PP'}{\textit{cięc.}\ PP'},\quad \text{czyli}\quad \frac{MP}{TP}=\frac{h}{2\pi R}.$$

To dowodzi że trójkąt prostokątny MPT, w którym stosunek dwóch boków zostaje stały, jest ciągle sobie podobny, jakiekolwiek punkt M bierze położenie na helicy. Ztąd wynika że *styczna do helicy w każdym punkcie* M *czyni ten sam kąt z linią rodzącą walca.*

Oznaczając przez i kąt PMT pod którym styczna do helicy przecina linię rodzącą walca, będzie

$$\text{sty}\,i=\frac{2\pi R}{h}.$$

Wniosek I. — Nazywa się *podstyczną* w punkcie M helicy rzut PT, na płasczyznie podstawy walca, stycznej MT zawartej między punktem zetknięcia M i śladem T na tej płasczyznie.

Owoż, mamy

$$\frac{MP}{TP}=\text{dot}\,i=\frac{h}{2\pi R},\quad \text{i}\quad \frac{MP}{APBP}=\frac{h}{2\pi R};$$

ztąd
$$TP=APBP.$$

Więc *podstyczna w danym punkcie helicy jest równa odciętej krzywolinijnej tego punktu.*

Ten wniosek daje sposób prowadzenia stycznej w danym punkcie M helicy. Dość wziąć, począwszy od spodka rzędnej MP, na stycznej do okręgu podstawy, długość PT równą odciętej APBP wyprostowanej, i połączyć punkta M, T.

Znając kąt i, można poprowadzić styczną do helicy w punkcie M, nie prostując odciętej krzywolinijnej; trzeba tylko, na płaszczyźnie stycznej do walca w punkcie M, nakreślić linię prostą któraby czyniła kąt i z linią rodzącą MP.

II. Jeśli na linię krzywą nawijemy nić, i, utkwiwszy jedną skrajność, będziemy ją rozwijali tak żeby zostawała ciągle styczną do krzywej; wtedy, druga skrajność nici nakreśli linię *rozwijającą* tej krzywej, która na odwrót jest *rozwitą* krzywej nakreślonej.

Widzimy więc że *miejscem śladu stycznej do helicy na płaszczyźnie podstawy jest* ROZWIJAJĄCA *koła.*

Miejscem stycznych do helicy jest powierzchnia nazwana HELICOIDA ROZWIJALNĄ.

UWAGA. — Powyższe własności helicy walca obrotowego stosują się do helicy walca prostego o podstawie jakiejkolwiek. Są także helice *stożkowe*; ale mówić o nich nie tu jest miejsce.

FIGURY JEDNOKŁADNE W PRZESTRZENI.

TWIERDZENIE IX.

Mając dany jakikolwiek układ punktów A, B, C,... *w przestrzeni, jeśli na promieniach* SA, SB, SC,... *wychodzących z punktu* S *wziętego dowolnie, wyznaczymy odcinki* Sa, Sb, Sc,... *tak żeby było*

$$\frac{Sa}{SA} = \frac{Sb}{SB} = \frac{Sc}{SC} = ... = k, \qquad (k \text{ jest liczbą jakąkolwiek})$$

układ punktów a, b, c,... będzie jednokładny do układu ABC...

Według jak stosunek k jednokładności jest dodatny albo odjemny, punkta odpowiedne, jako A i a, albo A i a', leżą oba

z jednej strony albo oba z dwóch stron przeciwnych *środka jednokładności* S, i dwa układy ABC..., *abc*.. nazywają się *jednokładnemi prostemi* albo *jednokładnemi odwrotnemi.*

Widzimy że określenie jednokładności figur w przestrzeni jest takie samo jakie dla figur płaskich. Ale trzeba uważać że na płasczyznie dwie figury jednokładne odwrotne, mające stosunek jednokładności $k = -1$, są *równe*, i przystają do siebie jeśli dano jednej z nich obrót 180° około środka jednokładności; gdy tymczasem w przestrzeni, dwie figury jednokładne odwrotne, mające stosunek jednokładności $k = -1$, są *symetryczne*, i żadnym sposobem do siebie przystać nie mogą.

Wskażemy teraz ogólne twierdzenia jednokładności figur przestrzeni, odsyłając łatwe dowodzenia do podobnych w geometryi płaskiej, i zachowując tylko ich porządek.

Twierdzenie X. — *Figura jednokładna do linii prostej jest linia prosta równoległa, a kąt dwóch linij prostych w przestrzeni jest równy kątowi linij jednokładnych* (III, 36, wn.).

Twierdzenie XI.

Figura jednokładna do płasczyzny jest płasczyzna równoległa.

Albowiem, jeśli na pierwszej płasczyznie wyobrazimy linię prostą która się obraca około punktu A, ta prosta, w każdem położeniu, będzie miała za jednokładną linię prostą równoległą, przechodzącą przez punkt A' odpowiedny punktowi A, na drugiej płasczyznie.

Ztąd wynika, że *płasczyzna przechodząca przez środek jednokładności jest sama swoją jednokładną;* i że *kąt dwóch płasczyzn jest równy kątowi płasczyzn jednokładnych.*

Styczne w dwóch punktach odpowiednych dwóch linij krzywych jednokładnych są równoległe, jako granice położeń siecznych równoległych. Zatem, *płaszczyzny styczne* do dwóch powierzchni jednokładnych w dwóch punktach odpowiednych są równoległe.

Twierdzenie XII. — *Figura jednokładna do sfery jest sfera.* Dowodzenie jako dla okręgu.

Wniosek. — Można uważać koło jako przecięcie się dwóch sfer; więc *figura jednokładna do okręgu w przestrzeni jest okrąg.*

Twierdzenie XIII. — *Dwie figury są jednokładne, jeśli istnieje w przestrzeni dwa punkta* O i O' *takie, że proste łączące punkt* O *z różnemi punktami pierwszej figury, i proste łączące punkt* O' *z punktami drugiej, są równoległe i w tym samym stosunku.*

Dowodzenie jako w tw. XXXVI księgi III.

Ztąd wynika że *dwie sfery są zarazem jednokładne proste i jednokładne odwrotne.*

Środki jednokładności dwóch sfer dzielą harmonicznie ich linię środków, i są wierzchołkami dwóch stożków opisanych spólnych. Gdy dwie sfery są styczne, punkt zetknięcia jest jednym ze środków jednokładności, *prostym* albo *odwrotnym* według jak zetknięcie jest zewnętrzne albo wewnętrzne.

Twierdzenie XIV. — *Dwie sfery jednokładne do trzeciej są jednokładne między sobą* (III, 39).

Twierdzenie XV. — *Trzy figury jednokładne po dwie mają trzy środki jednokładności w linii prostej, która jest* osią jednokładności (III, 40).

Trzy sfery uważane po dwie mają *sześć środków jednokładności*, to jest : trzy środki jednokładności prostej i trzy środki jednokładności odwrotnej; mają zatem cztery osie jednokładności, to jest : *jedną* oś jednokładności prostej i trzy osie jednokładności odwrotnej.

Te cztery osie jednokładności należą do trzech kół, które się otrzymuje przecinając trzy dane sfery płaszczyzną przechodzącą przez ich środki.

Twierdzenie XVI.

Cztery figury F, F′, F″, F‴, *jednokładne po dwie, mają* SZEŚĆ ŚRODKÓW JEDNOKŁADNOŚCI *które są na jednej płaszczyźnie zwanej* PŁASZCZYZNĄ JEDNOKŁADNOŚCI.

Jakoż, oznaczmy przez S_1, S_2, S_3, środki jednokładności figury F z każdą ze czterech innych, to jest: F i F′, F i F″, F i F‴. Płaszczyzna $S_1 S_2 S_3$, przechodząca przez środki jednokładności S_1 i S_2 układów F, F′ i F, F″, zawiera środek jednokładności układu F′, F″; bo ten środek jest na linii prostej S_1S_2, osi jednokładności trzech figur F, F′, F″ (15). Dowiedzie się tak samo że płaszczyzna S_1 S_2 S_3 zawiera środki jednokładności układów F′ F‴ i F″, F‴. Więc te środki jednokładności są wszystkie na jednej płaszczyźnie.

Wynika z dowodzenia że, sześć środków jednokładności czterech figur jednokładnych stanowią wierzchołki czworoboku zupełnego, którego bokami są cztery osie jednokładności tych figur.

Jako przykład, uważajmy cztery sfery O, O′, O″, O‴. Te figury są zarazem jednokładne proste i jednokładne odwrotne. Zatem mają *dwanaście* środków jednokładności, sześć prostych i sześć odwrotnych; cztery osie jednokładności prostej i dwanaście osi jednokładności odwrotnej. Nakoniec, mają *osiem* płaszczyzn jednokładności, to jest: jedną płaszczyznę która zawiera sześć środków jednokładności prostej; cztery płaszczyzny które stanowią ściany czworościanu O O′ O″ O‴; i nakoniec trzy płaszczyzny, z których każda zawiera dwa środki jednokładności prostej nie tworzące osi jednokładności, i cztery środki jednokładności odwrotnej odpowiedające innym środkom jednokładności prostej.

Podobieństwo figur w przestrzeni. — *Dwie figury w przestrzeni są* podobne, *gdy można sprowadzić pierwszą na jedną z figur jednokładnych prostych do drugiej.*

To co poprzedza pokazuje że, aby wyznaczyć wszystkie figury jednokładne do danej, niema potrzeby zmieniania środka jednokładności, dość tylko podstawić za k ciąg wartości od 0 do ∞. Więc, otrzymamy wszystkie figury *podobne* do danej w przestrzeni, biorąc dowolnie środek podobieństwa, i budując powierzchnie jednokładne odpowiedające ciągowi wartości dla k.

Stosując to określenie podobieństwa, widzimy zaraz że *wszystkie sfery są podobne;* co już wiemy.

Jedyną figurą podobną powierzchni stożkowej jest ta sama powierzchnia stożkowa; albowiem, jeśli weźmiemy wierzchołek O stożka za środek podobieństwa, punkt A′ jednokładny punktu A będzie leżał na krawędzi OA.

Dwie powierzchnie walcawe są padobne, gdy ich linie rodzące są równoległe i mają za kierownice dwie krzywe jednokładne.

PŁASCZYZNA BIEGUNOWA WZGLĘDEM SFERY.

Twierdzenie XVII.

Miejscem punktu M *sprzężonego harmonicznego z punktem* A *względem sfery* O *jest płasczyzna prostopadła do średnicy* OA *przechodzącej przez punkt* A.

Albowiem, jeśli przez punkt A i przez środek sfery O (*fig. ks.* V, *tw.* XI), poprowadzimy płasczyznę która przetnie sferę wedle koła OCE, biegunową punktu A względem tego koła będzie prosta MB prostopadła do AO. Owoż, jakiekolwiek jest położenie płasczyzny siecznej, biegunowa MB przechodzi zawsze przez punkt B sprzężony harmoniczny punktu A względem średnicy CD; więc miejscem punktu M jest *płasczyzna* prostopadła do średnicy AO w punkcie B.

Punkt A nazywa się *biegunem* płasczyzny MN, która nawzajem jest *płasczyzną biegunową* punktu A względem sfery O.

Wniosek. — *Płasczyzna biegunowa punktu* A *jest miejscem jego biegunowych, względem wszystkich kół sfery których płasczyzny przez ten punkt przechodzą.*

To cośmy powiedzieli o biegunowej względem koła, stosuje się oczywiście do płasczyzny biegunowej względem sfery.

I tak:

Promień sfery jest średnim proporcyonalnym między odległościami środka sfery od bieguna i od płasczyzny biegunowej, to jest $R^2 = OA . OB$.

Gdy biegun jest zewnątrz sfery, płasczyzna biegunowa jest płasczyzną zetknięć stożka opisanego na sferze i mającego ten biegun za wierzchołek.

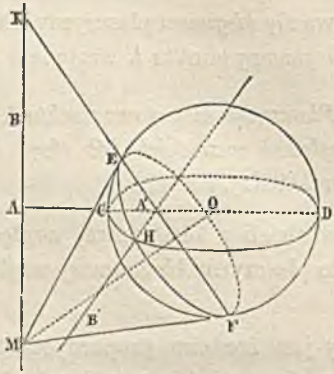
Gdy biegun jest na sferze, płasczyzna biegunowa jest płasczyzną styczną do sfery w tym punkcie.

Nakoniec, gdy biegun jest wewnątrz sfery, płasczyzna biegunowa jest zewnątrz, i tem dalej od środka sfery im bliżej niego ten biegun.

Twierdzenie XVIII. — *Płasczyzny biegunowe punktów leżących na płasczyźnie* P *przechodzą przez biegun tej płasczyzny.* I nawzajem, *bieguny płasczyzn przechodzących przez punkt* A *są na płasczyźnie biegunowej tego punktu* (V, 13).

Zatem, *jeśli z każdego punktu płasczyzny* P *jako wierzchołka opiszemy stożek na sferze, płasczyzny okręgów zetknięć tych stożków przejdą przez biegun płasczyzny* P; i nawzajem, *jeśli wedle każdego z kół sfery, których płasczyzny przechodzą przez jeden punkt, opiszemy stożek na sferze, wierzchołki tych stożków będą na płasczyźnie biegunowej tego punktu.*

Dwie proste wzajemne względem sfery. — Niech będą sfera O i jakakolwiek prosta AB. Jeśli przez biegun A′ prostej AB, wzglę-



dem koła wielkiego CED na płasczyznie ABO, poprowadzono prostopadłę A′B′ do tej płasczyzny; będzie nawzajem prosta AB prostopadłą do płasczyzny A′B′O, i przejdzie przez biegun A prostej A′B′ względem koła wielkiego na tejże płasczyznie. Dla tej wzajemnej własności, proste AB i A′B′ nazwano *prostemi wzajemnemi* względem sfery O.

Gdy dwie proste są wzajemne względem sfery, każda z nich jest miejscem biegunów wszystkich płasczyzn przechodzących przez drugą. Albowiem, płasczyzna biegunowa jakiegokolwiek punktu M prostej AB, jako prostopadła do MO, jest prostopadła do płasczyzny ABO; a że zawiera biegunowe punkta M względem koła CED, więc przechodzi przez biegun A′ prostej AB (V, 13), i temsamem zawiera prostę A′B′.

Gdy dwie proste AB i A′B′ *są wzajemne względem sfery, każda jest miejscem biegunów drugiej, względem wszystkich kół sfery których płasczyzny przechodzą przez tę drugą.* Jakoż, przez prostę A′B′ poprowadźmy płasczyznę, która przecina prostę AB w punkcie K i koło wielkie CED na płasczyznie ABO w punktach E i F. Ponieważ prosta AB jest biegunową punktu A′, względem koła CED, punktu K, E, A′, F stanowią układ harmoniczny;

więc punkt K jest biegunem prostej A'B', względem koła EHK którego płasczyzna przechodzi przez tę prostę.

Gdy dwie płasczyzny sieczne do sfery na której kreślą koła AB i CD (*fig. stronicy* 708) przecinają się, linia ich przecięcia, prostopadła w punkcie G do płasczyzny koła wielkiego ABCD prostopadłego do kół AB i CD, jest widocznie linią wzajemną prostej SS', która łączy wierzchołki dwóch stożków wyznaczonych przez te koła AB i CD. Ztąd wynika że

Gdy dwie płasczyzny są styczne do sfery, ich przecięcie się jest linią wzajemną prostej łączącej punkta zetknięć.

PŁASCZYZNA PIERWIASTNA DWÓCH SFER.

Jeśli z jakiegokolwiek punktu M przestrzeni, poprowadzimy do sfery O sieczną która ją spotyka w punktach A i B, wieloczyn MA . MB niezależny od kierunku tej siecznej, i dodatny albo odjemny albo zero, według jak punkt M jest zewnątrz albo wewnątrz albo na powierzchni, nazywa się *potęgą punktu* M *względem sfery*.

Nazywając R promień sfery, wiemy że $MA \cdot MB = \overline{MO}^2 - R^2$.

TWIERDZENIE XIX.

Miejscem punktów równej potęgi względem dwóch sfer jest płasczyzna prostopadła do linii środków.

Dowodzenie jako w *Ks.* V, *tw.* XIV.

Ta płasczyzna nazywa się *płasczyzną pierwiastną dwóch sfer*.

Gdy się dwie sfery przecinają, ich płasczyzną pierwiastną jest płasczyzna koła spólnego; a gdy dwie sfery są styczne, płasczyzną pierwiastną jest spólna płasczyzna styczna. Płasczyzna pierwiastna dwóch sfer spółśrodkowych znika w nieskończoności.

Płasczyzna pierwiastna dwóch sfer jest miejscem punktów z których można prowadzić styczne równe do tych sfer. Ta płasczyzna jest także miejscem środków sfer które przecinają prostokątnie dwie sfery dane (V, 14).

TWIERDZENIE XX. — *Płasczyzny pierwiastne trzech sfer, uważanych po dwie, przechodzą przez jedną linię prostą* (V, 16), *która się nazywa* OSIĄ PIERWIASTNĄ TRZECH SFER.

Oś pierwiastna trzech sfer danych jest prostopadła do płasczyzny ich środków, przechodzi przez środek pierwiastny trzech wielkich kół leżących na tej płasczyznie, i jest miejscem środków sfer które przecinają prostokątnie trzy dane sfery.

Gdy środki trzech sfer są w linii prostej, ich oś pierwiastna znika w nieskończoności.

Może być szczególne położenie trzech sfer w którem płasczyzny pierwiastne schodzą się w jedną; ta płasczyzna jest wtedy płasczyzną pierwiastną trzech sfer danych.

TWIERDZENIE XXI.

Płasczyzny pierwiastne czterech sfer, uważanych po trzy, przechodzą przez jeden punkt.

Jakoż, punkt, w którym oś pierwiastna trzech sfer spotyka płasczyznę pierwiastną czwartej sfery wziętej z jedną z tych sfer, ma równą potęgę względem czterech sfer; więc jest spólny sześciu płasczyznom pierwiastnym czterech sfer, i także spólny czterem osiom pierwiastnym tych sfer.

Ten jedyny punkt spotkania osi pierwiastnych nazywa się *środkiem pierwiastnym* czterech sfer.

Jeśli środki czterech sfer są na jednej płasczyznie, osie pierwiastne są równoległe; wtedy środek pierwiastny czterech sfer jest w nieskończoności.

Może nawet być szczególne położenie czterech sfer, mających środki w linii prostej, w którem cztery osie pierwiastne schodzą się w jedną, albo także wszystkie płasczyzny pierwiastne schodzą się w jedną.

Przecinając dwie sfery płasczyzną przechodzącą przez ich środki, łatwo się z twierdzeń XVI, XVII, XIX *ks.* V wnosi, że

Płasczyzna pierwiastna dwóch sfer jest równo oddalona od dwóch płasczyzn biegunowych któregokolwiek środka podobieństwa.

Płasczyzny biegunowe punktu wziętego na płasczyznie pierwiastnej dwóch sfer przecinają się na tej płasczyznie.

Płasczyzny styczne w dwóch punktach przeciwodpowiednych dwóch sfer przecinają się na płasczyznie pierwiastnej tych sfer.

Nakoniec, uważajmy szczególne przypadki gdy sfera malejąc staje się punktem, albo gdy promień rośnie do nieskończoności i sfera staje się płasczyzną.

Nie trudno widzieć że, płasczyzna pierwiastna sfery i punktu jest w równej odległości od tego punktu i od jego płasczyzny biegunowej względem sfery.

Płasczyzna pierwiastna dwóch punktów jest prostopadła we środku linii która je łączy.

Płasczyzna pierwiastna sfery i płasczyzny jest tą samą płasczyzną; i wtedy, skrajności średnicy prostopadłej do tej płasczyzny są środkami podobieństwa.

Płasczyzna pierwiastna punktu i płasczyzny jest także tą samą płasczyzną.

SFERA STYCZNA DO CZTERECH SFER.

Oznaczmy przez A, B, C, D środki czterech sfer danych, przez X i X' środki dwóch sfer jednakowo stycznych do tych sfer; i, przypuszczając dla utkwienia myśli, że sfera X jest styczna zewnętrznie a sfera X' styczna wewnętrznie, oznaczmy przez a i a' ich punkta zetknięć ze sferą A, przez b i b', c i c', d i d' punkta zetknięcia ze sferami B, C, D. Zagadnienie będzie rozwiązane zupełnie jeśli wyznaczymy środki X i X' i promienie dwóch sfer szukanych. Rozwiązanie opiera się na następującem twierdzeniu które odpowieda podobnemu w geometryi płaskiej.

Twierdzenie XXII.

Gdy dwie sfery, styczne do czterech sfer danych, należą do jednego dwojanu, wtedy: cięciwa zetknięć każdej ze sfer danych, 1° przechodzi przez ich środek pierwiastny, i 2° zawiera, względem swojej sfery, biegun płaszczyzny podobieństwa odpowiedającej temu dwojanowi.

Jakoż, 1° na mocy założenia, punkt zetknięcia a jest środkiem podobieństwa odwrotnego sfer A i X, a zaś punkt zetknięcia a środkiem podobieńsiwa prostego sfer A i X'; więc cięciwa zetknięć aa' jest osią pobobieństwa odwrotnego trzech sfer A, X, X', i temsamem przechodzi przez środek podobieństwa odwrotnego I sfer X i X'. Rozumując podobnie, widzimy łatwo że cięciwy ab i $a'b'$ przechodzą przez środek podobieństwa prostego S sfer A i B. Zatem cięciwy aa' i bb' sfer A i B są przeciwodpowiedne (V, 19), i ich punkt spotkania I należy do płaszczyzny pierwiastnej sfer A i B.

Ztąd wnosimy że wszystkie cięciwy zetknięć aa', bb', cc', dd' przechodzą przez punkt I który, należąc do płaszczyzn pierwiastnych czterech sfer, uważanych po dwie, jest ich środkiem pierwiastnym. Więc każda cięciwa zetknięć przechodzi przez środek pierwiastny czterech sfer danych.

2° Ponieważ punkt I jest środkiem podobieństwa odwrotnego sfer X i X′, cięciwy *ab* i *a′b′* tych sfer są przeciwodpowiedne, i ich punkt spotkania S, który jest środkiem podobieństwa prostego sfer A i B, należy do płaszczyzny pierwiastnej sfer X i X′. Dowiedzie się podobnie że płaszczyzna pierwiastna sfer X i X′ przechodzi przez każdy inny środek podobieństwa prostego czterech sfer A, B, C, D, branych po dwie; więc ona jest płaszczyzną podobieństwa tych sfer. Otóż, płaszczyzna pierwiastna sfer X i X′, stycznych do sfery A, zawiera przecięcie się płaszczyzn stycznych do tej sfery w punktach przeciwodpowiednych *a* i *a′*; to zaś przecięcie jest linią wzajemną cięciwy zetknięć *aa′*; więc, nawzajem, *cięciwa zetknięć* aa′ *zawiera, względem swojej sfery, biegun* K *płaszczyzny pierwiastnej sfer* X *i* X′, czyli co to samo, *zawiera biegun płaszczyzny podobieństwa czterech sfer danych.*

Uważajmy nakonicc że prosta AK jest prostopadła do płaszczyzny podobieństwa czterech sfer danych, i prosta XX′ jest prostopadła do płaszczyzny pierwiastnej sfer X i X′ (19); a że te dwie płaszczyzny są jedną płaszczyzną, więc *proste* AK i XX′ *są równoległe.*

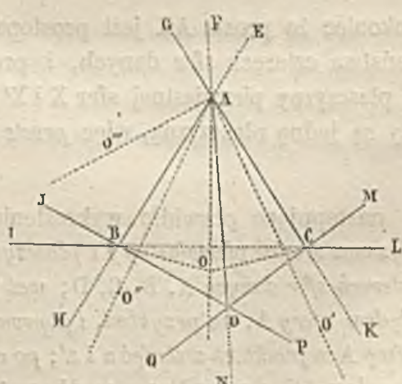
Ztąd wynika następujące prawidło wykreślenia sfer stycznych X i X′. *Wyznacz środek pierwiastny* I *i płaszczyznę podobieństwa prostego czterech sfer danych* A, B, C, D; *weź biegun* K *tej płaszczyzny względem sfery* A, *na przykład, i poprowadź prostę* IK *która przetnie sferę* A *w punktach zetknięć* a *i* a′; *po czem, pociągnij proste* Aa, Aa′; *połącz* AK, *i przez* I *poprowadź prostę* XIX′ *równoległą do* AK *aż do przecięcia w* X *i* X′ *z prostemi* Aa *i* Aa′. *Punkta* X *i* X′ *będą środkami, a odległości* Xa *i* X′a′ *promieniami dwóch sfer stycznych szukanych. Łącząc środki* X *i* X′ *ze środkami* B, C, D *sfer danych wyznaczy się wszystkie inne punkta zetknięć sfer* X *i* X′.

Jeśli, zamiast płaszczyzny podobieństwa prostego, weźmiemy każdą z siedmiu innych płaszczyzn podobieństwa czterech sfer danych, otrzymamy siedem innych dwojanów sfer stycznych. Zagadnienie ma więc ogólnie *szesnaście* rozwiązań.

Powyższe rozwiązanie, podobne do tego któreśmy dali w geometryi płaskiej, jest wprost i ogólne; stosuje się nawet do przypadków szczególnych, w których jedna albo kilka sfer danych stają się punktami albo płaszczyznami; byle tylko środki tych sfer nie były wszystkie na jednej płaszczyznie.

Sfera styczna do czterech płaszczyzn. — Moglibyśmy rozwiązać to zagadnienie jako przypadek szczególny czterech sfer; ale ważność zagadnienia wymaga rozwiązania wprost. Niech będą dane cztery płaszczyzny, które, przecinając się po dwie, tworzą czworościan ABCD. Aby wyznaczyć wszystkie sfery styczne do tych płaszczyzn, szukajmy ile może być punktów równo oddalonych od czterech ścian czworościanu albo od ich przedłużeń.

Owoż, widzimy zaraz że miejscem punktów równo oddalonych



od płaszczyzn ABC i ABD są dwie płaszczyzny dwójsieczne α i α' kątów dwójściennych przyległych DBAC i DBAH; tak samo, miejscem punktów równo oddalonych od płaszczyzn ACB i ACD są dwie płaszczyzny dwójsieczne β i β' kątów przyległych DCAB i DCAL. Te cztery płaszczyzny α, α', β, β', przechodzące przez punkt A, przecinają się wedle czterech linij prostych. Jedna z tych linij AC, przecięcie płaszczyzn α i β, pada wewnątrz czworościanu; trzy inne padają zewnątrz, to jest: przecięcie AO' płaszczyzn α i β' przebija część LCDP, przecięcie AO'' płaszczyzn α' i β przebija część HBDQ, nakoniec przecięcie AO''' płaszczyzn α' i β' przebija część IBCM. Ale cztery proste AO, AO', AO'', AO''', będąc miejscami punktów równo oddalonych od trzech płaszczyzn ABC, ABD, ACD, leżą także każda na jednej z płaszczyzn dwójsiecznych kątów przyległych mających krawędź AD. Więc środki sfer stycznych do ścian bocznych czworościanu znajdują się tylko na tych czterech prostych.

Środki tych sfer muszą się także znajdować na płaszczyznach dwójsiecznych γ i γ' dwóch kątów przyległych ABDC i ABDQ przy podstawie BCD; a ponieważ płaszczyzna i linia prosta mogą się przecinać w jednym tylko punkcie, może więc być tylko osiem przecięć między czterema prostemi AO, AO', AO'', AO''' i dwiema płaszczyznami γ i γ'. Nadto, te punkta przecięć, jako równo oddalone od czterech ścian czworościanu, leżą także na płaszczyznach dwójsiecznych innych kątów przyległych podstawie BCD. Ztąd wynika że nie może istnieć więcej niż *osiem* sfer stycznych do czterech płaszczyzn danych.

Zobaczmy teraz jakie są położenia sfer stycznych.

Sfera styczna wewnętrznie istnieje zawsze, jakośmy już dowiedli (VIII, 8).

Cztery sfery styczne zewnętrznie, każda do jednej ze ścian czworościanu i do przedłużenia innych, to jest *sfery zawpisane*, istnieją także zawsze. Bo płaszczyzna dwójsieczna kąta zewnętrznego ACDP przecina oczywiście prostę AO' w trójścianie B zewnątrz ściany ACD. Tak samo, płaszczyzny dwójsieczne kątów zewnętrznych ABDQ i ABCM przecinają proste odpowiedające AO'' i AO''' w trójścianach C i D, zewnątrz ścian ABD i ABC. Te same trzy płaszczyzny dwójsieczne spotykają się w trójścianie A, zewnątrz ściany BCD, w jednym punkcie równo oddalonym od czterech płaszczyzn; zatem w punkcie leżącym na prostej AO.

Nakoniec, mogą być sfery styczne do samych przedłużeń ścian czworościanu. Te sfery, jeśli istnieją, znajdują się niby w poddaszach graniastonnych, jako LCKPON, mających za grzbiet krawędź czworościanu. Uważajmy dwa takie poddasza KCLNDP i GAFIBI mające za grzbiety dwie krawędzie przeciwległe CD i AB. Płasczyzna dwójsieczna kąta wewnętrznego ACDB może spotykać prostę AO′, albo w tym kącie albo w kącie krawędzią przeciwległym KCDP; ale może także być równoległą do tej prostej. Więc, jeśli istnieje sfera styczna w jednem poddaszu, to nie istnieje w jego przeciwległem. Ztąd wynika że w sześciu poddaszach graniastonnych czworościanu nie może istnieć więcej niż trzy sfery styczne. Ale te ostatnie sfery, jako łatwo pojmujemy, nie zawsze są możebne; albowiem, powtarzamy, płasczyzna dwójsieczna kąta ACDB, naprzykład, może być równoległa do prostej AO′. Więc razem może być osiem sfer stycznych do czterech płasczyzn danych. Jeśli te płasczyzny tworzą czworościan, wtedy istnieje zawsze pięć sfer stycznych, a trzy inne są możebne.

Można otrzymać promienie ośmiu sfer stycznych w funkcyi ścian czworościanu. Oznaczmy przez a, b, c, d ściany przeciwległe wierzchołkom A, B, C, D tego czworościanu, przez r, r_1, r_2, r_3, r_4 promienie sfer wpisanej i zawpisanych. Jeśli połączymy środki tych sfer z wierzchołkami czworościanu ABCD, otrzymamy dla każdej sfery cztery czworościany, mające spólny wierzchołek w jej środku i ściany czworościanu ABCD za podstawy. W sferze wpisanej, jako już wiemy, wszystkie cztery czworościany są dodatne, i ich summa stanowi objętość czworościanu ABCD; w sferze zawpisanej zewnętrznie do ściany a, czworościan mający podstawę a jest sam odjemny, trzy inne są dodatne. Podobnie dla czterech innych sfer zawpisanych. Więc, nazywając V objętość czworościanu ABCD, będzie, dla dwóch sfer wpisanej i zawpisanej odpowiedających trójścianowi A,

$$V = \frac{r}{3}(a + b + c + d) \quad \text{i} \quad V = \frac{r_1}{3}(b + c + d - a)$$

ztąd $$r = \frac{3V}{a+b+c+d}, \quad \text{i} \quad r_1 = \frac{3V}{b+c+d-a}$$

Tak samo

$$r_2 = \frac{3V}{a+c+d-b}, \quad r_3 = \frac{3V}{a+b+d-c}, \quad r_4 = \frac{3V}{a+b+c-d}.$$

Te wszystkie wartości są dodatne i skończone, bo każda ściana czworościanu jest mniejsza od summy trzech innych; co potwierdza istnienie pięciu sfer stycznych wpisanej i zawpisanych.

Nazwijmy teraz ρ_1, ρ_2, ρ_3 promienie trzech sfer stycznych do samych przedłużeń ścian czworościanu. Figura jasno pokazuje że każda z tych sfer jest styczna wewnętrznie do dwóch przedłużeń ścian i zewnętrznie do dwóch innych.

Jeśli sfera promienia ρ_1 jest styczna do poddasza LCKPDN, będzie

$$V = \frac{\rho_1}{3}(c+d-a-b).$$

A jeśli ta sfera jest styczna do poddasza przeciwległego GAFTBJ, będzie przeciwnie

$$V = \frac{\rho_1}{3}(a+b-c-d).$$

Tak samo, dwa inne poddasza przeciwległe BD albo AC, BC albo AD, dają

$$V = \frac{\rho_2}{3}(b+d-a-c) \quad \text{albo} \quad V = \frac{\rho_2}{3}(a+c-b-d),$$

$$V = \frac{\rho_3}{3}(b+c-a-d) \quad \text{albo} \quad V = \frac{\rho_3}{3}(a+d-b-c).$$

Znając ściany a, b, c, d czworościanu ABCD, można zaraz wiedzieć które sfery, wpisane w same przedłużenia, istnieją a które są niemożebne.

Jakoż, przypuśćmy że liczby mierzące powierzchnie ścian czworościanu w porządku ich wielkości są: $a > b > c > d$; będziemy mieli oczywiście:

$$a + b > c + d, \quad \text{i} \quad a - d > b - c, \quad \text{albo} \quad a + c > b + d;$$

a może być także

$$a + d \gtrless b + c, \quad \text{albo jeszcze} \quad a + d = b + c.$$

Więc, gdy cztery ściany a, b, c, d są nierówne, wtedy jest zawsze *siedem* sfer stycznych do czterech danych płaszczyzn.

Co do ósmej sfery, jej promień ρ_3 wyraża się przez

$$\rho_3 = \pm \frac{3V}{a + d - b - c},$$

biorąc znak + albo — według jak summa $a + d$ jest większa albo mniejsza od $b + c$. Więc ta sfera istnieje gdy mianownik nie jest zero; ale, jeśli $a + d = b + c$, wtedy $\rho_3 = \infty$, i sfera znika w nieskończoności.

Przypuszczając $a = b$ i $c = d$, ale a i c nierówne, będzie

$$a + b \gtrless c + d \quad \text{i} \quad a + c = b + d, \quad a + d = b + c,$$

wtedy, ze trzech sfer możebnych jedna tylko mająca promień ρ_1 istnieje, a dwie inne mające promienie ρ_2 i ρ_3 znikają w nieskończoności.

Nakoniec, jeśli $a = b = c = d$, trzy ostatnie sfery znikają.

Cztery dane płaszczyzny mogą mieć przecięcia równoległe, albo nawet być same równoległe między sobą; w tych szczególnych przypadkach zagadnienie może być niewyznaczone albo niemożebne.

FIGURY NA SFERZE.

STOSUNEK NIEHARMONICZNY. — Nazywa się stosunkiem nieharmonicznym czterch punktów A, B, C, D, leżących na okręgu koła wielkiego sfery O, stosunek nieharmoniczny pęku utworzonego przez cztery promienie OA, OB, OC, OD które łączą te punkta ze środkiem sfery (VI, 48, *uw.*).

Gdy pęk czterech łuków koła wielkiego SM, SN, SP, SQ, wychodzących z jednego punktu S powierzchni sferycznej, jest przecięty łukiem L koła wielkiego, stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięć A, B, C, D jest stały, niezależny od położenia łuku poprzecznego L. Bo ten stosunek, według określenia, jest równy stosunkowi pęku (O . ABCD), a ten ostatni równa się stosunkowi nieharmonicznemu czterech płaszczyzn SOA, SOB, SOC, SOD.

Na mocy tego określenia, nazwano stosunkiem nieharmonicznym pęku czterech łuków kół wielkich, stosunek nieharmoniczny czterech punktów przecięć tego pęku przez łuk poprzeczny koła wielkiego.

Pojmuje się łatwo że fundamentalne twierdzenia II i III *ks.* V i ich następstwa, jako równie twierdzenia *Paskala* i *Brianchona* stosują się do figur sferycznych; dość tylko w rozumowaniu zamiast wyrazu *linia prosta* położyć *łuk koła wielkiego.*

Cztery punkta A, B, C, D, leżące na łuku koła wielkiego, tworzą *układ harmoniczny* gdy ich stosunek nieharmoniczny równa się — 1.

Pęk czterech łuków kół wielkich SA, SB, SC, SD jest harmoniczny gdy jego stosunek nieharmoniczny jest — 1.

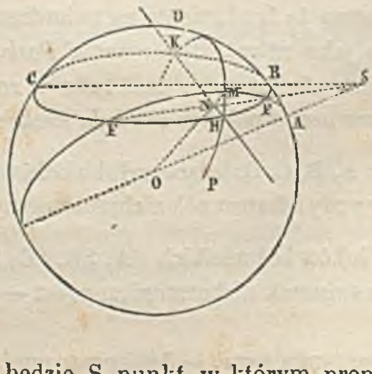
BIEGUNOWA WZGLĘDEM KĄTA. — Jeśli przez punkt C powierzchni sferycznej poprowadzimy, do kąta ASB dwóch łuków kół wielkich, różne sieczne sferyczne jako CAB, i weźmiemy na każdej punkt D sprzężony harmoniczny puuktu C, względem odcinka AB zawartego między ramionami tego kąta, miejscem punktu D będzie łuk koła wielkiego SD, sprzężony harmoniczny z łukiem SC względem kąta ASB. Punkt C nazywa się *biegunem*, a łuk koła wielkiego SD *biegunową* względem kąta ASB.

Twierdzenie czworoboku zupełnego stosuje się do sfery, i nastręcza łatwy sposób, 1° wyznaczenia czwartego punktu harmonicznego do trzech danych na łuku koła wielkiego, 2° wyznaczenia biegunowej danego punktu, względem kąta (V, 10).

BIEGUNOWA WZGLĘDEM KOŁA NA SFERZE.

Twierdzenie XXIII.

Jeśli przez punkt A *dany na sferze poprowadzono do małego koła* BEC *jakąkolwiek sieczną sferyczną* AEF, *miejscem punktu M sprzężonego harmonicznego z punktem* A *względem cięciwy sferycznej* EF *jest łuk koła wielkiego, prostopadły do okręgu koła wielkiego* AD *które przechodzi przez punkt* A *i przez biegun* D *danego koła małego.*



Jakoż, niech będzie S punkt w którym promień OA spotyka płaszczyznę danego koła BEC. Trzy punkta S, E, F są w linii prostej, i pęk (O . AEMF) jest harmoniczny z założenia; więc, jeśli oznaczymy przez N punkt przecięcia promienia OM i prostej SE, układ prostolinijny punktów S, E, N, F będzie także harmoniczny. Ztąd wynika, że miejscem punktu N jest biegunowa NK punktu S, względem koła BEC, prostopadła do średnicy BC; więc miejscem punktu M jest przecięcie PMK sfery przez płaszczyznę ONK, to jest okrąg koła wielkiego MP prostopadły do okręgu koła wielkiego AD.

Nazwano punkt A *biegunem* okręgu koła wielkiego MP, a ten okrąg *biegunową* punktu A, względem koła BEC.

Uwaga. — Wyraz *biegun* jest tu użyty w znaczeniu różnem od już wiadomego (VIII, 4). Jednakże nie wyniknie ztąd żadna wątpliwość; bo, do wyrazu biegun w nowem znaczeniu, będą zawsze dodane wyrazy *względem koła*, mówiąc *np.* jako wyżej: biegun okręgu koła wielkiego MP *względem koła* BEC.

To cośmy w geometryi płaskiej o biegunowej względem koła powiedzieli stosuje się do biegunowej względem koła na sferze. Zatem, *biegunowa wszelkiego punktu wziętego na okręgu jednego koła wielkiego przechodzi przez biegun tego okręgu względem koła*; i nawzajem, *bieguny względem koła, okręgów kół wielkich* przechodzących przez jeden punkt, leżą na biegunowej (kołowej) tego punktu.

Twierdzenie XII i XIII *ks.* V, ich dowodzenie i wnioski stosują się do sfery, i nastręczają sposób wyznaczenia biegunowej danego punktu względem koła na sferze.

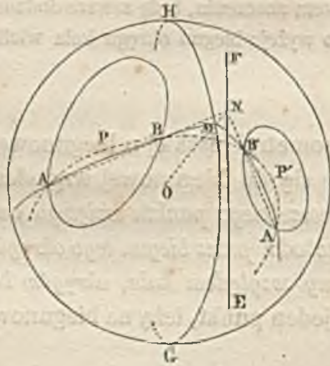
Z tych twierdzeń wynika że biegunowa punktu, leżącego zewnątrz koła, jest cięciwą zetknięć stycznych poprowadzonych przez ten punkt.

Nakoniec, metoda przekształcenia przez biegunowe wzajemne w przestrzeni stosuje się do figur sferycznych.

OŚ PIERWIASTNA KÓŁ NA SFERZE.

Twierdzenie XXIV.

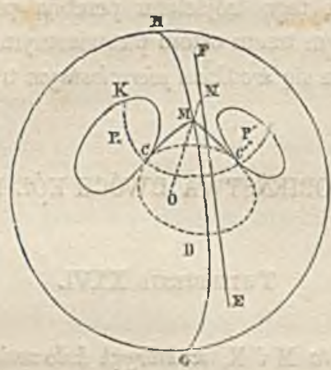
Jeśli na sferze poprowadzimy jakiekolwiek koło przecinające dwa dane koła P *i* P' *w punktach* A, B *i* A', B', *miejsce spotkania* M *siecznych sferycznych* AB *i* A'B' *będzie okrąg koła wielkiego* GH, *prostopadły do linii biegunów* PP', *którego płaszczyzna przechodzi przez linię przecięcia* EF *płaszczyzn kół danych.*



Jakoż, płaszczyzny kół P i P' przecinają się wedle prostej EF; więc sieczne AB, A'B', leżące na płaszczyznie koła zmiennego ABB'A' i na płaszczyznach kół danych P, P', spotykają się na prostej EF w punkcie N. Ztąd wynika że punkt M, w którym promień ON przebija sferę, jest przecięciem trzech kół wielkich których płaszczyzny przechodzą odpowiednio przez styczne sferyczne AB, A'B', i przez prostę EF. Owoż, promienie OP i OP' są prostopadłe do płaszczyzn kół P i P'; co pokazuje że prosta EF jest prostopadła do płaszczyzny POP'. Więc łuk GH koła wielkiego, jako miejsce punktów M leżących na płaszczyznie OEF, jest prostopadły do linii biegunów PP' kół danych.

Ten łuk GH koła wielkiego, miejsce punktu M, nazywa się *osią pierwiastną dwóch kół* P *i* P'.

Gdy koło sieczne ABB'A' staje się kołem CDC' stycznem w punktach C i C' do kół P i P', sieczne sferyczne MBA i MB'A' stają się stycznemi sferycznemi MC i MC'. Owoż, te styczne są



równe, jako wyprowadzone z jednego punktu M do koła CDC' (VIII, *zag.* XIII); więc *oś pierwiastna* GH *dwóch kół* P *i* P' *jest miejscem punktów powierzchni sferycznej z których można do nich prowadzić styczne sferyczne równe.*

Widzimy łatwo że koło KCC', nakreślone z punktu M jako bieguna promieniem sferycznym MC, przecina prostokątnie oba koła P i P', bo jest prostopadłe do stycznych sferycznych MC i MC'; więc *oś pierwiastna dwóch kół na sferze jest miejscem biegunów kół które je przecinają prostokątnie.*

Płaszczyzna koła CKC', które przecina prostokątnie dwa koła P, P', jest oczywiście płaszczyzną biegunową punktu N prostej EF. Owoż, gdy koło KCC' zmienia się, biegun N jego płaszczyzny opisuje prostę EF; więc ta płaszczyzna przechodzi ciągle przez prostę wzajemną prostej EF względem sfery. A dodajemy, co już wiadome, że prosta wzajemna przecięcia EF płaszczyzn dwóch kół P i P' na sferze jest linią która łączy wierzchołki dwóch stożków wyznaczonych przez te koła.

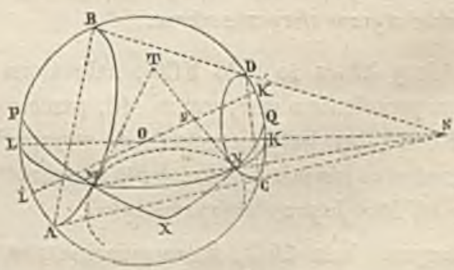
Gdy dwa koła na sferze są spółbiegunowe, ich osią pierwiastną jest widocznie okrąg koła wielkiego spółbiegunowego.

TWIERDZENIE XXV.— *Osie pierwiastne trzech kół na sferze, uważanych po dwa, przecinają się w jednym punkcie.* Albowiem płaszczyzny tych trzech kół tworzą trójścian, a promień przechodzący przez wierzchołek tego trójścianu przebija powierzchnię sfery w punkcie spólnym trzem osiom pierwiastnym rzeczonych kół. Ten punkt nazywa się *środkiem pierwiastnym* trzech kół.

ŚRODEK PODOBIEŃSTWA DWÓCH KÓŁ NA SFERZE.

TWIERDZENIE XXVI.

Jeśli przez punkta M *i* N, *w których koło zmienne* X *dotyka kół* P *i* Q *na sferze, poprowadzimy okrąg koła wielkiego, ten okrąg przetnie koła* P *i* Q *pod kątami równemi. i przejdzie przez dwa punkta stałe.*



Niech będą S i S′ dwa stożki wyznaczone przez dwa koła P i Q dane na sferze. Uważajmy koło X styczne jednakowo do kół P i Q w punktach M i N. Ponieważ styczna MT spólna kołom P i X, i styczna NT, spólna kołom Q i X, leżą na płaszczyznie koła X, ta płaszczyzna jest styczna do stożka S, i prosta MN przechodzi przez wierzchołek S tego stożka (11. wn.). Więc płaszczyzna koła wielkiego MN zawiera prostę OS ; co dowodzi że okrąg tego koła przechodzi przez dwa punkta stałe K, L w których OS spotyka sferę. Nadto łuk XP koła wielkiego, łączący bieguny X P dwóch kół stycznych, przechodzi przez punkt zetknięcia M; tak samo, łuk koła wielkiego XQ przechodzi przez punkt zetknięcia N;

zatem kąt LMP = XMN = XNM = KNQ.

To pokazuje że okrąg koła wielkiego LMNK przecina okręgi kół P i Q pod kątami równemi.

Gdyby wzięto koło zmienne X różnie styczne do dwóch kół P i Q na sferze, dowiedzionoby podobnie że okrąg koła wielkiego, poprowadzony przez punkta zetknięcia, przecina te dwa koła pod kątami równemi, i przechodzi przez dwa punkta stałe K′, L′ w których prosta OS′ spotyka sferę.

Punkta K i L, K′ i L′, niezależne od wielkości koła zmiennego X, zostają te same gdy to koło staje się styczną sferyczną spólną kołom P i Q. Więc punkta K, L, i K′, L′ są punktami spotkań stycznych sferycznych zewnętrznych i wewnętrznych, spólnych dwom kołom P i Q.

Wynika z tego co poprzedza że wszelkie koło wielkie przechodzące przez wierzchołek stożka S albo S′ przecina dwa koła P, Q pod kątami równemi ; i nawzajem.

Nazwano *środkami podobieństwa dwóch kół* P i Q *na sferze* punkta K i K′, w których promienie OS i OS′, idące do wierzchołków dwóch stożków wyznaczonych przez te koła, spotykają sferę. *Środek* K *podobieństwa prostego* odpowieda stożkowi którego wierzchołek S jest *zewnątrz*, a *środek* K′ *podobieństwa odwrotnego* stożkowi którego wierzchołek S′ jest *wewnątrz* sfery. Te oba środki są na linii biegunów PP′ dwóch kół danych (VIII, *zag.* 14, *uw.*).

Punkta M i N dwóch kół P i Q, leżące na jednej krawędzi stożka S, albo stożka S′, nazywają się *przeciwodpowiednemi* (V, 19). *Dwa dwojany punktów przeciwodpowiednych leżą na jednym okręgu ;* albowiem, te punkta należą do sfery, a będąc na dwóch krawędziach stożka leżą na jednej płaszczyznie. Ztąd i na mocy określenia osi pierwiastnej (24), wnosimy że cięciwa sferyczna dwóch punktów koła P, i cięciwa sferyczna punktów przeciwodpowiednych koła Q spotykają się na osi pierwiastnej tych dwóch kół.

Zatem, *styczna sferyczna w dwóch punktach przeciwodpowiednych dwóch kół na sferze spotykają się na osi pierwiastnej tych kół*; cośmy już widzieli.

Twierdzenie XXVII.

Sześć środków podobieństwa trzech kół na sferze, uważanych po dwa, leżą po trzy na czterech okręgach kół wielkich.

Jakoż, uważajmy trzy stożki S, S_1, S_2 wyznaczone przez dane koła, których wierzchołki są zewnątrz sfery; te trzy wierzchołki są na płaszczyznie koła stycznego zewnętrznie do trzech kół danych, ale są także na płasczyznie koła stycznego wewnętrznie do tych trzech kół (26); więc trzy wierzchołki S, S_1, S_2 są w linii prostej. Oznaczając przez S′, S'_1, S'_2, wierzchołki wewnątrz sfery trzech innych stożków, dowiedzie się podobnie że wierzchołki S, S'_1, S'_2, są w linii prostej; i tak samo S_1, S′, S'_2, i S_2, S′, S'_1 są w linii prostej. Istnieje więc cztery linie proste zawierające wierzchołki sześciu stożków. A ponieważ każdy wierzchołek należy oddzielnie do dwóch z tych prostych, te cztery proste leżą na jednej płasczyznie, i tworzą czworobok zupełny. Ztąd wynika że trzy środki podobieństwa prostego trzech kół na sferze są na jednym okręgu koła wielkiego. Tak samo, każdy ze środków podobieństwa prostego z dwoma nieodpowiedającemi środkami podobieństwa, odwrotnego leży na jednym okręgu koła wielkiego.

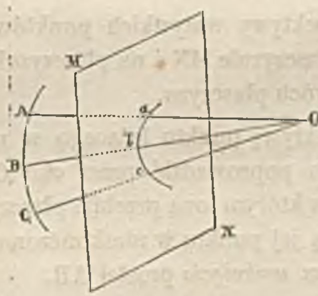
Te cztery okręgi kół wielkich, każdy przechodzący przez trzy środki podobieństwa, nazywają się *osiami podobieństwa* trzech kół na sferze. Jest więc *jedna* oś podobieństwa *prostego*, i *trzy* osie podobieństwa odwrotnego.

KOŁO STYCZNE DO TRZECH KÓŁ DANYCH NA SFERZE.

Dowodzenie i wykreślenie, któreśmy dali w geometryi płaskiej (V, 20 i *zag.*), stosuje się do kół stycznych na sferze, zastępując tylko linie proste przez łuki kół wielkich. Zwykle dość nakreślić styczne sferyczne spólne do dwóch dwojanów kół danych, aby mieć środek pierwiastny i biegun osi podobieństwa tych kół. Zagadnienie ma ogólnie osiem rozwiązań. Metoda w tem jest ważna że daje rozwiązanie wprost; jest ona ogólna, i obejmuje nawet przypadki szczególne w których dane koła stają się punktami albo kołami wielkiemi.

ZASADY PERSPEKTYWY.

Niech będzie punkt stały O który się nazywa *okiem* widza, płaszczyzna stała MN zwana *płaszczyzną wizerunku* czyli obrazu.



Perspektywa punktu A w przestrzeni jest punkt *a* w którym *promień oczny*, idący od oka O do punktu A, przebija płaszczyznę wizerunku MN.

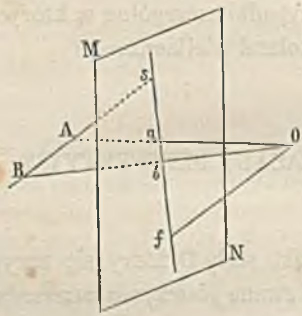
Perspektywą linii jakiejkolwiek ABC jest miejsce perspektyw *abc* wszystkich jej punktów.

Jako widzimy, perspektywa linii ABC jest przecięciem płaszczyzny wizerunku z powierzchnią stożkową, mającą punkt widzenia O za wierzchołek, a linię ABC za kierownicę. Dla tej przyczyny perspektywa linii nazywa się jej *rzutem stożkowym*, albo jeszcze *rzutem środkowym*.

Pojmujemy teraz łatwo że dwie krzywe różne mogą mieć tę samą perspektywę na jednej płaszczyźnie.

Twierdzenie XXVIII.

Perspektywą linii prostej jest linia prosta.



Albowiem, perspektywy wszystkich punktów prostej AB, będąc zarazem na płasczyznie MN i na płasczyznie OAB, są przecięciem *ab* tych dwóch płasczyzn.

Aby mieć perspektywę punktu leżącego w *nieskończoności* na prostej AB, trzeba poprowadzić przez oko O równoległę O*f* do AB; punkt *f*, w którym ona przebija płasczyznę wizerunku, będzie perspektywą jej punktu w nieskończoności. Ten punkt *f* nazywa się *punktem umknięcia* prostej AB.

Gdy prosta AB jest równoległa do płasczyzny wizerunku, jej punkt umknięcia znika w nieskończoności.

Widzimy teraz łatwo że, gdy jest kilka prostych równoległych między sobą, perspektywy punktów leżących w nieskończoności na tych równoległych schodzą się wszystkie w jednym punkcie umknięcia. Ale ten punkt znika w nieskończoności jeśli dane proste, równoległe między sobą, są zarazem równoległe do płasczyzny wizerunku.

Punkt *s* w którym prosta AB spotyka płaszczyznę wizerunku nazywa się jej *śladem*.

Gdy prosta AB przechodzi przez punkt widzenia O, jej perspektywa przywodzi się do jednego punktu który jest jej śladem. Ale i ten ślad znika, jeśli prosta AB przechodząca przez punkt O jest równoległa do płaszczyzny wizerunku.

Gdy prosta AB leży na płaszczyznie przechodzącej przez punkt widzena i równoległej do wizerunku, jej perspektywa znika w nieskończoności.

Twierdzenie XXIX.

Gdy dwie proste przecinają się, ich perspektywy przecinają się także albo są równoległe, według jak promień oczny punktu przecięcia spotyka płaszczyznę wizerunku albo jest do niej równoległy.

Fig. 1.

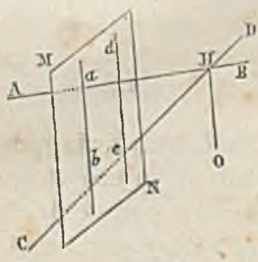


Fig. 2.

1° Niech będą dwie proste AB i CD (*fig.* 1) przecinające się w punkcie H. Ponieważ promień oczny OH spotyka płaszczyznę wizerunku w punkcie *h*, jako pokazuje figura, ten punkt *h* jes perspektywą punktu przecięcia H dwóch prostych AB i CD; więc wtedy perspektywy *ab* i *cd* tych prostych spotykają się w punkcie *h*.

2° Uważajmy teraz dwie proste AB i CD także się przecinające w punkcie H (*fig.* 2), ale w których promień OH nie spotyka płasczyzny wizerunku. W tym przypadku, płasczyzny OAB i OCD przechodzą przez promień OH; więc ich przecięcia *ab* i *cd* z płasczyzną wizerunku, to jest perspektywy dwóch prostych AB i CD, są równoległe do OH, i temsamem równoległe między sobą.

Twierdzenie XXX.

Gdy dwie proste są równoległe, ich perspektywy przecinają się albo są równoległe, według jak te proste spotykają płasczyznę wizerunku albo są do niej równoległe.

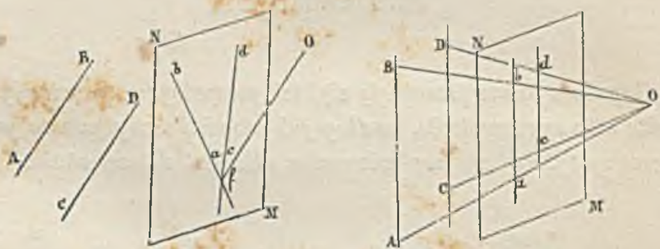


Fig. 1. Fig. 2.

1° Niech będą dwie proste równoległe AB i CD (*fig.* 1) które spotykają płasczyznę wizerunku. Jeśli przez punkt widzenia O poprowadzimy prostę O*f* równoległą do danych, ta linia wyznaczy ich spólny punkt uniknięcia *f*. Więc perspektywy *ab* i *cd* dwóch danych równoległych AB i CD przecinają się w punkcie *f*.

2° Jeśli dwie proste równolegle AB i CD (*fig.* 2) są zarazem równoległe do płasczyzny wizerunku, wtedy płasczyzny OAB i OCD przecinają tę płasczyznę wedle dwóch prostych *ab* i *cd* które są równoległe do dwóch danych równoległych AB i CD. Więc perspektywy *ab* i *cd* tych ostatnich są równoległe.

Wniosek. — Gdy dwie proste leżą na jednej płesczyznie przechodzącej przez punkt widzenia O, wtedy ich perspektywy zlewają się w jedną linię prostą.

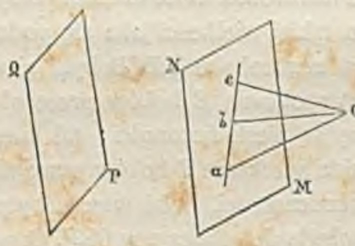
Uwaga. — Z tego co poprzedza wnosimy *ogólne twierdzenie :*

Gdy przecięcie się dwóch płaszczyzn rzutujących jest równoległe do płaszczyzny wizerunku, perspektywy jakichkolwiek linij leżących na tych płaszczyznach są równoległe. I nawzajem.

Więc, aby otrzymać perspektywy równoległe prostych AB, CD, EF,... przecinających się w jednym punkcie H, dość wziąć płaszczyznę wizerunku równoległą do prostej OH która łączy punkt H z punktem widzenia O. Można tym sposobem otrzymać perspektywy równoległe drugiej jeszcze grupy linij prostych A′B′, C′D′, E′F′,... przecinających się w punkcie H′, biorąc płaszczyznę wizerunku równoległą zarazem do OH i OH′.

Zagadnienie XXXI.

Wszystkie punkta płaszczyzny które są w nieskończoności mają perspektywy w linii prostej na płaszczyźnie wizerunku nierównoległej.



Jakoż, otrzymuje się perspektywy *a*, *b*, *c*,... punktów w nieskończoności leżących na płaszczyźnie PQ, prowadząc przez punkt O równoległe O*a*, O*b*, O*c*,...do tej płaszczyzny. Owoż, te równoległe leżą wszystkie na jednej płaszczyźnie *oab* równoległej do płaszczyzny PQ (VI, 23, wn.); więc szukane perspektywy, leżąc na dwóch płaszczyznach MN i O*ab*, są na linii prostej *abc* równoległej do przecięcia płaszczyzn MN i PQ.

Wniosek. — Jeśli figura płaska F ma punkta w nieskończoności, perspektywy tych punktów są w linii prostej. I nawzajem, punktom figury perspektywnej F', będącym w nieskończoności, odpowiedają punkta figury F leżące na linii prostej równoległej do przecięcia płaszczyzn figur F i F'. Bo figury F i F' są nawzajem perspektywą jedna drugiej, względem tego samego punktu widzenia O.

Z tego co poprzedza wynika że:

1° Można zawsze wziąć perspektywę figury płaskiej tak, żeby perspektywa jednego z jej punktów A poszła w nieskończoność; dość tylko żeby płaszczyzna wizerunku była równoległa do promienia ocznego OA. Wtedy wszystkie linie proste które się spotykają w punkcie A tej figury będą miały perspektywy równoległe.

2° Można zawsze wziąć perspektywę figury płaskiej tak, żeby perspektywa dwóch jej punktów A i B, czyli perspektywa linii prostej AB, była w nieskończoności. Dość tylko żeby płaszczyzna wizerunku była równoległa do płaszczyzny OAB.

Tym sposobem czworobok może mieć za perspektywę równoległobok, z kątem takiej wielkości jaka się podoba. Jakoż, żeby perspektywa *abcd* czworoboku ABCD była równoległobokiem, trzeba żeby punkt spotkania E boków przeciwległych AB i CD miał perspektywę w nieskończoności; tak samo, trzeba żeby perspektywa punktu spotkania F boków przeciwległych AD i BC była także w nieskończoności. Dość więc żeby płaszczyzna wizerunku była równoległa do płaszczyzny OEF. Owoż, kąt EOF jest dowolny, ponieważ punkt widzenia O może być wzięty dowolnie. Więc można dać kątowi *bad* równoległoboku taką wielkość jaką zechcemy.

RZUTY W OGÓLNOŚCI.

Wiadomo że *rzutem linii prostej na płaszczyznie jest linia prosta.* To twierdzenie nie przestaje być prawdziwe, gdy rzutujące punktów są pochyłe do płaszczyzny rzutów (VI, 16); byle tylko wszystkie rzutujące były równoległe do jednej prostej. Dla tej przyczyny obydwa rzuty są *rzutami walcowemi*; a widzieliśmy że perspektywa jest *rzutem stożkowym*. Więc, zogólniając znaczenie wyrazu *rzut*, powiemy :

Rrzut *a* punktu A na płasczyznie P nazywa się *prostokątnym* albo *pochyłym* albo *stożkowym*, według jak rzutująca A*a* jest prostopadła do płasczyzny P, albo równoległa do pewnej pochyłej do tej płasczyzny, albo wychodzi z punktu stałego O przestrzeni.

Rrzut prostokątny, pochyły, albo stożkowy figury jest miejscem rzutów prostokątnych, pochyłych, albo stożkowych wszystkich punktów tej figury; biorąc, ma się rozumieć, na jednej płasczyznie rzuty wszystkich punktów.

Cień rzucony na płasczyznę P, przez figurę którą oświeca punkt światły O, jest rzutem stożkowym czyli perspektywą tej figury.

Ztąd, i na mocy *tw.* XLVIII, *Ks.* V, wnosimy ogólne zadanie :

Gdy cztery proste zbiegające leżą na jednej płasczyznie, ich rzuty prostokątne pochyłe, albo ich cienie czyli perspektywy, na jakiejkolwiek innej płasczyznie, są czterema liniami prostemi także zbiegającemi; których stosunek nieharmoniczny jest równy stosunkowi nieharmonicznemu czterech pierwszych.

Rzuty dają następujące ważne twierdzenie.

Twierdzenie XXXII.

Styczna w punkcie m *rzutu* mm' *jakiejkolwiek krzywej* MM' *jest rzutem stycznej w odpowiedającym punkcie* M *tej krzywej.*

Albowiem sieczna *mm'* jest rzutem albo perspektywą siecznej MM', jakkolwiek blizko punkt M' i jego rzut *m'* dochodzą odpowiednio do M i *m*. Więc styczna w punkcie *m* rzutu, albo perspektywy, linii krzywej MM' jest rzutem albo perspektywą stycznej do tej krzywej w punkcie M.

Je st tu jednak wyjątek. W szczególnym przypadku w który styczna do krzywej w punkcie M jest rzutującą tego punktu, jej rzut albo perspektywa jest tylko punktem; gdy tymczasem styczna do rzutu tej krzywej, w punkcie *m*, jest linią wyznaczoną.

Określenie. — Nazywa się *własnością rzutową* figury wszelka własność która się zachowuje w rzucie tej figury. Własności opisowe są oczywiście własnościami rzutowemi.

Ale nie każda własność miarowa figury jest jej własnością rzutową; i tak, twierdzenie: *W trójkącie prostokątnym, kwadrat z przeciwprostokątnej równa się summie kwadratów z boków kąta prostego*, nie zachowuje się w rzucie trójkąta na płaszczyznie; bo ten rzut nie jest koniecznie trójkątem prostokątnym.

Stosunek nieharmoniczny czterech punktów w linii prostej jest własnością rzutową, i równa się stosunkowi nieharmonicznemu ich perspektyw. Bo cztery punkta A, B, C, D w linii prostej i ich perspektywy *a*, *b*, *c*, *d* leżą na dwóch poprzecznych jednego pęku O.ABCD (V; 1).

Perspektywa jest jedną z metod poszukiwania własności figur, odpowiedających wiadomym własnościom figur spółrodzajowych. I tak, niech będzie czworobok ABCD, w którym E i F są punktami spotkań boków przeciwległych, G przecięciem dwóch przekątnych wewnętrznych. Zrzutujmy ten czworobok wedle równoległoboku *abcd*. W równoległoboku przekątne przecinają się na połowy. Owoż, perspektywa *g* punktu G jest środkiem przekątnej *ac*; więc ta przekątna jest podzielona harmonicznie przez przekątnę *bd*, i przez prostę *ef* która jest w nieskończoności perspektywą prostej EF. Ale własność harmoniczna jest własnością rzutową; więc w czworoboku zupełnym ABCD przekątna AC jest podzielona harmonicznie przez przekątne BD i EF. Co już wiemy (V, 10).

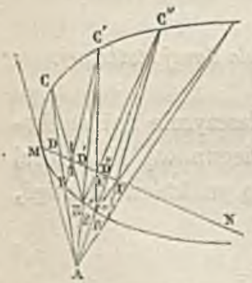
Można uważać wszelką stożkowę jako perspektywę koła, i nawzajem. Albowiem, można nakreślić tę stożkowę i dane koło na jednym stożku kołowym; więc, jeśli weźmiemy wierzchołek tego stożka za punkt widzenia O, i płaszczyznę jednej z dwóch linij za płaszczyznę wizerunku, druga linia będzie perspektywą pierwszej.

Ztąd wynika że wszystkie własności opisowe koła należą do przecięć stożkowych.

I tak, naprzykład, twierdzeniu biegunowej względem koła, odpowieda następujące w przecięciach stożkowych.

Twierdzenie XXXIII.

Jeśli przez punkt A, *leżący na płaszczyznie przecięcia stożkowego, poprowadzono jakąkolwiek sieczną* ABC, *miejscem punktu* D *sprzężonego harmonicznego z punktem* A, *względem cięciwy* BC, *jest linia prosta* DD′ *biegunowa punktu* A.



Bo te wszystkie sieczne AC, AC′... i ich punkta przecięć C, C′, C″.. ze stożkową MC mogą się uważać jako perspektywy linij i odpowiedających punktów które leżą na kole. Owoż, w kole punkta sprzężone harmoniczne których perspektywami są D, D′,... stanowią biegunowę punktu mającego perspektywę A; więc *miejscem punktów* D, D′, D″,... *jest linia prosta* DD′, *biegunowa punktu* A *względem danej stożkowej.*

Wniosek. — *Jeśli przez punkt* A, *leżący na płaszczyznie linii stożkowej, poprowadzimy sieczne* AC, AC′... ; *cięciwy łączące pnnkta przecięć, jako* BC′ *i* CB′,... *albo jako* BB′ *i* CC′,... *spotkają się na biegunowej* DD′ *punktu* A (V, 12).

Uważając na to cośmy powiedzieli w *ks.* V o biegunowej względem koła, łatwo można, za pomocą powyższego twierdzenia i jego wniosku, nakreślić biegunowę danego punktu, albo biegun danej biegunowej, względem linii stożkowej.

Stosując tę uwagę, i opierając się na *tw.* XXX, *Ks.* V, widzimy zaraz że

Każda kierownica jest biegunową odpowiedniego ogniska względnie do jego stożkowej.

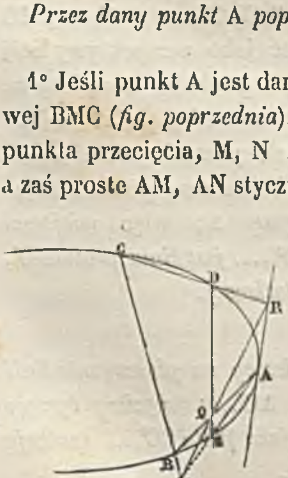
Tą samą metodą perspektywy nie trudno dowieśdź że znamienite twierdzenia *sześciokąta* Paskala i Brianchona, twierdzenie Desarga (V, 32 i 33), Karnota (III, 33), z ich wnioskami stosują się do wszystkich przecięć stożkowych.

Jako przykład ważności tych twierdzeń, rozwiążmy następujące zagadnienia.

Zagadnienie I.

Przez dany punkt A *poprowadzić styczną do danej stożkowej.*

1° Jeśli punkt A jest dany zewnątrz, na płaszczyźnie linii stożkowej BMC (*fig. poprzednia*), nakreśl jego biegunowę MN której punkta przecięcia, M, N ze stożkową będą punktami zetknięć, a zaś proste AM, AN stycznemi szukanemi.



2° Jeśli pukt A jest dany na stożkowej ABC, weź na tej linii cztery punkta przyzwoite B, C, D, E, i nakreśl pięciokąt wpisany ABCDEA. Przedłuż AE, BC i CD, poprowadź sieczną punktów spotkań PQR, i nakoniec prostę AR która będzie styczną szukaną (Zob. *Ks.* V, *tw.* VI *wn*).

Uwaga. — To piękne rozwiązanie, za pomocą samej linii prostej, pokazuje że można kreślić styczne do danej stożkowej nie znając nawet jej rodzaju; to jest, nie wiedząc czy dany łuk należy do ellipsy, hiperboli albo paraboli.

Jest więcej jeszcze. Można, znając tylko pięć punktów linii stożkowej, poprowadzić przez jeden z nich styczną do tej krzywej, chociaż ona nie jest nakreślona ani dany jej rodzaj.

Zagadnienie II.

Mając dane pięć punktów A, B, C, D, E *linii stożkowej, nakreślić inne.*

Przez jeden z danych punktów, *np.* przez E, poprowadź jakąkolwiek prostę EF. Chodzi o znalezienie punktu F w którym ona spotyka linię stożkową. Otóż, w sześciokącie wpisanym ABCDEF, przez punkt przecięcia P *pierwszego* boku AB i *czwartego* DE, i przez punkt przecięcia Q *drugiego* boku BC i *piątego* EF, poprowadź linię prostą PQ która spotka *trzeci* bok CD w punkcie R. Jeśli połączysz AR, proste AR i E'F przetną się w żądanym punkcie F.

Można tym sposobem wyznaczyć tyle punktów szukanej stożkowej ile się podoba.

Zagadnienie jest oczywiście niemożebne, gdy *trzy* z pięciu danych punktów są w linii prostej.

Zagadnienie III.

Nakreślić linię stożkową styczną do pięciu danych prostych.

Niech będzie ABCDE pięciokąt utworzony z danych stycznych. Poprowadź przekątne BD i CE; punkt skrzyżowania N i wierzchołek A połącz linią prostą AN, która spotka bok przeciwległy CD w punkcie zetknięcia F szukanej stożkowej.

Tym sposobem wyznacza się cztery inne punkta zetknięcia, i zagadnienie przywodzi się do poprzedzającego.

Zagadnienie jest niemożebne gdy *trzy* z pięciu danych stycznych zbiegają się w jednym punkcie albo są równoległe.

Uwaga. — *W każdy pięciokąt można wpisać i na nim opisać linię stożkową, ale tylko jedną.*

Stożkowa sferyczna. — Wyobraźmy sobie sferę i stożek mający za wierzchołek jej środek a za podstawę linię stożkową. Ten stożek przecina powierzchnię sferyczną wedle dwóch linij zamkniętych, symetrycznych, które uważane razem stanowią *stożkowę sferyczną*. Każda z tych dwóch krzywych jest perspektywą na sferze linij stożkowych, i nazywa się ellipsą sferyczną.

Ellipsa sferyczna ma dwie osie symetryi sferyczne prostokątne, których punkt przecięcia jest jej środkiem; ma także dwa ogniska leżące na wielkiej osi, i dwie kierownice sferyczne odpowiedające tym ogniskom.

Stosunek nieharmoniczny trzech punktów w linii prostej, jako równy stosunkowi nieharmonicznemu pęku czterech linij prostych, jest także równy stosunkowi nieharmonicznemu czterech punktów na sferze, jeśli do wyznaczenia jego wartości są wzięte nie łuki kół wielkich ale ich wstawy. Zatem, czterem punktom harmonicznym na płaszczyznie odpowiedają cztery punkta harmoniczne na sferze. Następnie, ponieważ biegunowa punktu względem podstawy stożka jest linią prostopadłą do osi ogniskowej, biegunowa punktu względem ellipsy sferycznej jest łukiem koła wielkiego, także prostopadłym do osi ogniskowej.

Ellipsa sferyczna posiada wiele własności podobnych do własności ellipsy płaskiej.

I tak:

Stosunek wstaw odległości punktu ellipsy sferycznej od ogniska i od kierownicy odpowiedającej jest ilością stałą.

Summa wstaw promieni wodzących które łączą punkt ellipsy sferycznej z obydwoma ogniskami jest ilością stałą.

Styczna do ellipsy sferycznej czyni kąty równe z promieniami wodzącemi punktu zetknięcia (V, 27); i. t. d.

Ale dowodzenia tych twierdzeń do geomotryi analitycznej należą.

FIGURY ODWROTNE; METODA PRZEKSZTAŁCENIA PRZEZ PROMIENIE WODZĄCE ODWROTNE.

Określenie. — Mając dany jakikolwiek układ punktów A, B, C... na *płaszczyznie* albo *w przestrzeni*, jeśli na promieniach wodzących SA, SB, SC,... które wychodzą z punktu dowolnego S, weźmiemy odległości SA′, SB′, SC′,... wszystkie jednakowym sposobem, i takie żeby było

$$SA.SA' = SB.SB' = SC.SC' = ... = p,$$

punkta A′, B′, C′,... będą stanowiły układ *odwrotny* układu ABC...

Jeśli punkta A, B, C,... tworzą figurę płaską albo w przestrzeni, ich odpowiedne A′, B′, C′,... tworzą także figurę płaską albo w przestrzeni odwrotną pierwszej. Sposób jakim się przechodzi z pierwszej figury do drugiej nosi nazwisko *przekształcenia przez promienie wodzące odwrotne.*

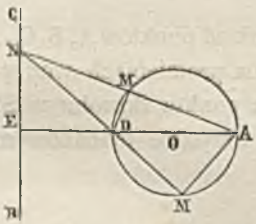
Punkt S nazywa się *biegunem* albo *początkiem*, a ilość stała *p potęgą* przekształcenia. Ta potęga, jest *dodatna* albo *odjemna,* według jak dwa punkta *odpowiedne* A i A′ leżą oba z jednej strony albo każdy ze strony przeciwnej bieguna S.

Gdy potęga *p* jest dodatna, można ją uważać jako kwadrat z promienia koła mającego środek w S. A jeśli nadamy temu promieniowi ciąg wartości, wszystkie figury odwrotne tak otrzymane będą jednokładne. Albowiem, oznaczmy przez ρ promień wodzący danej figury, przez r i r' promienie wodzące odpowiedne dwóch figur odwrotnych z pierwszą względem potęg p i p',

będzie $\rho r = p$ i $\rho r' = p'$; więc $\frac{r}{r'} = \frac{p}{p'}$.

Twierdzenie XXXIV.

Figurą odwrotną linii prostej jest okrąg przechodzący przez punkt wzięty za biegun.



Niech będzie linia prosta BC i punkt A wzięty za biegun. Poprowadźmy promień wodzący AN, i weźmy na nim punkt M taki żeby było

$$AN.AM = p;$$

z punktu A spuśćmy na BC prostopadłę AE, i weźmy na niej punkt D taki żeby było

$$AE.AD = p.$$

Z tych dwóch równań wynika

$$AN.AM = AE.AD.$$

Ostatnie równanie pokazuje że cięciwa DM i dana prosta BC są dwiema przeciwrównoległemi w kącie A (III, 10); zatem kąt DMA jest prosty.

Więc *miejscem punktu* M *jest okrąg przechodzący przez biegun* A.

Promień tego okręgu jest oczywiście $AO = \frac{p}{2AE}$.

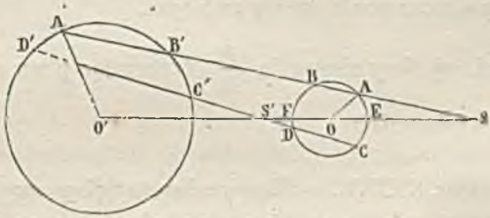
Gdyby wzięto punkt D za biegun otrzymanoby ten sam wynik.

To wszystko jest przez się widoczne; dość uważać że punkta A i D są środkami podobieństwa linii prostej BC i koła AMD.

Uwaga. — Gdyby biegun był wzięty na danej prostej, wtedy ta prosta byłaby sama swoją odwrotną.

Twierdzenie XXXV.

Figura odwrotna okręgu, względem punktu jego płasczyzny wziętego za biegun, jest okrąg mający z pierwszym ten biegun za jeden ze środków podobieństwa.



Niech będzie dany okrąg O, i punkt S na jego płasczyznie, zewnątrz albo wewnątrz tego okręgu. Na promieniu wodzącym SAB weźmy punkta A' i B' takie żeby było

$$SA \,.\, SA' = p \quad \text{i} \quad SB \,.\, SB' = p.$$

A ponieważ $SA \,.\, SB = k$, będzie, mnożąc i dzieląc stronami,

$$SA' \,.\, SB' = \frac{p^2}{k}.$$

Więc *miejscem punktów* A' i B' *jest okrąg* O'.

Punkt S jest środkiem podobieństwa okręgów O i O'; a zaś $\frac{k}{p}$ ich stosunkiem podobieństwa, bo $\frac{SA \,.\, SB}{SB \,.\, SB'} = \frac{SA}{SB'} = \frac{k}{p}$.

Zatem $\qquad SO' = \frac{p}{k}\, SO \quad \text{i} \quad O'A' = \frac{p}{k}\, OA.$

Wniosek. — Jeśli punkt S zbliża się do okręgu O, i nareszcie pada na nim w punkcie E albo F, wtedy okrąg odwrotny O' rośnie nieskończenie i staje się linią prostą.

Więc, *figura odwrotna okręgu, względem jednego z jego punktów wziętego za biegun, jest linia prosta, prostopadła do średnicy* 2R *przechodzącej przez ten biegun, i na odległość* $\frac{p}{2R}$ *od niego.*

Dobrze jest dowieśdź wprost tego wniosku, który jest niejako wzajemnicą twierdzenia XXXV.

Twierdzenie XXXVI. — *Figurą odwrotną płaszczyzny jest sfera przechodząca przez punkt wzięty za biegun.*

Promień tej sfery równa się $\frac{p}{2d}$, oznaczając przez d odległość bieguna od płaszczyzny.

Twierdzenie XXXVII. — *Figura odwrotna sfery, względem punktu przestrzeni wziętego za biegun, jest sfera mająca z daną sferą ten biegun za jeden ze środków podobieństwa.*

Dowodzi się łatwo obydwóch twierdzeń, przywodząc rzecz do linii prostej i koła, za pomocą płaszczyzny siecznej przechodzącej przez biegun.

Wniosek. — Jeśli punkt wzięty za biegun zbliża się do danej powierzchni sferycznej i nareszcie jej dosięga, wtedy sfera odwrotna rośnie nieskończenie i staje się płaszczyzną.

Więc *figura odwrotna sfery, względem jednego z jej punktów wziętego za biegun, jest płaszczyzna prostopadła do średnicy* 2R *przechodzącej przez ten biegun, i naodległość* $\frac{p}{2R}$ *od niego.*

Uwaga. Ten wniosek z wnioskiem *tw.* XXXV stanowią dwa ważne twierdzenia które nam później będą użyteczne.

TWIERDZENIE XXXVIII.

Figura odwrotna okręgu, względem jakiegokolwiek punktu przestrzeni wziętego za biegun, jest okrąg.

Albowiem, można uważać dany okrąg jako przecięcie się dwóch sfer O i O′; zatem figura odwrotna tego okręgu, będąc przecięciem się dwóch sfer O_1 i O_1' które są odwrotnemi sfer O i O′, jest także okręgiem.

TWIERDZENIE XXXIX.

Znając odległość dwóch punktów jednej figury, można wyznaczyć odległość punktów odpowiednych figury odwrotnej, względem jakiegokolwiek bieguna S *i potęgi* p.

Jakoż, równanie

$$SM \,.\, SM' = SN \,.\, SN' = p$$

dowodzi że proste MN i M′N′ są przeciwrównoległe względem kąta S; zatem dwa trójkąty podobne SMN i SM′N′ dają :

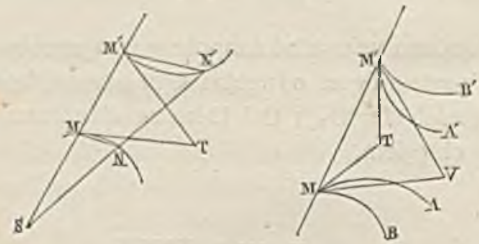
$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{SN'}{SM} = \frac{SN' \,.\, SN}{SM \,.\, SN} = \frac{p}{SM \,.\, SN};$$

zkąd
$$M'N' = \frac{MN \,.\, p}{SM \,.\, SN}.$$

Otrzymuje się podobnie $MN = \dfrac{M'N' \,.\, p}{SM' \,.\, SN'}.$

Twierdzenie XL.

Kąt dwóch linij przecinających się jest równy kątowi linij odwrotnych.



Uważajmy najpierwej że dwie jakiekolwiek linie odwrotne MN i M'N', płaskie albo skośne, tworzą z promieniem wodzącym SM kąty równe. Jakoż, cięciwy MN i M'N' są przeciwodpowiednie; zatem kąty SMN i SN'M' są równe, jakkolwiek blizko punkt N dosięga do M. Owoż, gdy promień wodzący SN schodzi się z SM, sieczne MN i M'N' stają się stycznemi MT i M'T do swoich krzywych w punktach odpowiednych M i M'; więc te styczne czynią z promieniem wodzącym SM kąty równe, to jest wyraźniej, tworzą trójkąt równoramienny TMM' mający podstawę MM'.

Niech będą teraz dwie jakiekolwiek krzywe MA, MB, i ich odwrotne M'A', M'B'; powiedam że kąt dwóch pierwszych równa się kątowi dwóch drugich, to jest kąty TMV i TM'V, utworzone przez styczne do tych krzywych, są równe.

Albowiem, jeśli dwie krzywe MA i MB leżą na jednej płaszczyznie, na mocy tego co poprzedza będzie

kąt TMM' = TM'M, i kąt VMM' = VM'M; więc kąt TMV = TM'V.

Jeśli zaś dwie dane krzywe MA i MB są skośne, uważajmy dwa trójściany MM'TV i M'MTV które, mając kąt dwójścienny MM' spólny, przyległy dwom ścianom odpowiednio równym

TMM' = TM'M i VMM' = VM'M, są symetryczne; więc kąty TMV i TM'V są równe.

Twierdzenie XLI.

Kąt dwóch powierzchni P i P_1, *w punkcie* m *linii przecięcia* amb, *jest równy kątowi pod którym się przecinają dwie powierzchnie odwrotne* P' i P'_1 *w punkcie odpowiednym* m'.

Kątem dwóch powierzchni przecinających się w danym punkcie m jest kąt ich płaszczyzn stycznych w tym punkcie. Owoż, jeśli przez punkt m, poprowadzimy na powierzchniach P i P_1 dwie odpowiedne krzywe mp i mq, przecinające pod kątem prostym linię ab spólną tym powierzchniom, krzywe odwrotne $m'p'$ i $m'q'$ przetną także pod kątem prostym linię $a'm'b'$, spólną powierzchniom odwrotnym P', P'_1. Ale kąt dwóch krzywych mp i mq mierzy kąt powierzchni P i P_1 w punkcie m, a kąt krzywych odwrotnych $m'p'$ i $m'q'$ mierzy kąt powierzchni odwrotnych P' i P'_1 w punkcie odpowiednym m', i te dwa kąty są równe (40); więc kąt dwóch powierzchni przecinających się w punkcie m jest równy kątowi powierzchni odwrotnych przecinających się w punkcie odpowiednym m'.

Ta własność zachowania kątów w dwóch figurach odwrotnych, i możebność wyrażenia odległości dwóch punktów w funkcyi odległości punktów odpowiednych, są nader ważne, i mogą służyć do poszukiwania własności *opisowych* albo *miarowych* danej figury, jeśli ją przekształcimy na inną w której te własności są wiadome.

Zastosowanie pokaże lepiej użytek tej metody, do której służą dwa następujące twierdzenia.

Można zawsze przekształcić dany układ trzech kół na inny układ trzech kół mających środki w linii prostej; miejscem biegunów tego przekształcenia jest okrąg przecinający prostokątnie trzy dane koła. Jakoż, linia prosta na której się znajdują środki trzech kół przekształconych dzieli prostokątnie ich okręgi; więc okrąg będący linią odwrotną tej prostej dzieli prostokątnie trzy dane okręgi, i jest miejscem biegunów przekształcenia.

Można także przekształcić dany układ trzech sfer na inny układ trzech sfer mających środki w linii prostej; miejscem biegunów tego przekształcenia jest okrąg który dzieli prostokątnie koła wielkie trzech sfer danych, leżące na płaszczyznie ich środków. Albowiem, biegun przekształcenia, i prosta na której mają się znajdować środki trzech sfer odwrotnych, wyznaczają płaszczyznę która zawiera oczywiście środki trzech danych sfer (35); więc zadanie przywodzi się do przekształcenia trzech kół wielkich, leżących na płaszczyznie środków trzech danych sfer, na trzy inne koła mające środki w linii prostej. Co już wiadome.

Ostatnie przekształcenie daje łatwe dowodzenie twierdzenia *Dupuis.*

Gdy jedna sfera zmienna jest jednakowo styczna do trzech sfer stałych, każdy ze trzech punktów zetknięć opisuje małe koło na swojej sferze.

Jakoż, jeśli przekształcimy układ czterech sfer tak, żeby trzy stałe sfery miały środki w linii prostej, sfera zmienna nie przestanie być styczną do tych sfer, i dotknie każdej w punkcie którego miejscem jest okrąg prostopadły do linii środków. Owoż, figurą odwrotną koła jest koło; więc, wracając do danego układu sfer, widzimy że punkt zetknięcia sfery zmiennej opisuje małe koło na każdej sferze stałej.

Zastosujemy teraz wyłożoną teoryę do kilku zadań geometryi płaskiej.

Przekształcenie własności opisowych. — Figurą odwrotną wielokąta prostolinijnego ABC..., względem punktu S jego płaszczyzny, jest wielokąt krzywolinijny A'B'C',... utworzony przez łuki kół które się krzyżują w punkcie S. Ztąd, na mocy twierdzenia równości kątów w dwóch figurach odwrotnych, wynikają następujące zadania.

1° *Summa kątów wielokąta krzywolinijnego* A'B'C'... *jest równa dwom kątom prostym wziętym tyle razy ile jest boków mniej dwa.*

2° Trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Więc, *w trójkącie krzywolinijnym* mającym za boki łuki trzech kół przechodzących przez jeden punkt, trzy łuki kół, z których każdy przechodząc przez ten punkt i przez jeden wierzchołek trójkąta dzieli prostokątnie bok przeciwległy, spotykają się w drugim punkcie spólnym.

Twierdzenie dwójsiecznych w trójkącie przekształca się podobnie.

3° Gdy dwa koła, przechodzące odpowiednio przez punkła S i A, S i B, przecinają się pod kątem stałym, miejscem drugiego punktu przecięcia jest okrąg.

Przekształcenie własności miarowych. — To przekształcenie opiera się na formule odległości dwóch punktów (39), w której można wziąć $p = 1$. Aby więc przekształcić związek między odcinkami AB, BC,... danej figury, dość zastąpić każdy z nich, jako AB, przez $\frac{AB}{SA \, . \, SB}$, biorąc punkt S za biegun.

I tak : *Miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od punktu stałego* O *na jednej płaszczyźnie jest okrąg.*

Przekształćmy to określenie.

Oznaczając przez M' i O' punkta odpowiedne punktów M i O, względem bieguna S wziętego na tej samej płaszczyźnie, będzie

$$MO = \frac{M'O' \, . \, p}{SM' \, . \, SO'}; \quad \text{zkąd} \quad \frac{O'M'}{SM'} = \frac{MO \, . \, SO}{p}.$$

To pokazuje że stosunek $\frac{O'M'}{SM'}$ jest liczbą stałą.

Więc *miejscem punktu* M′, *którego odległości od dwóch punktów* S i O′ *są w stosunku stałym, jest okrąg*. Co już wiemy.

Niech będzie, na drugi przykład, szereg punktów w linii prostej idących w porządku A, B, C,.. K. Mamy oczywiście

$$AK = AB + BC + \ldots + IK.$$

Figurą odwrotną układu tych punktów, względem bieguna S, jest szereg punktów A′, B′, C′,.. K′ idących w tym samym porządku, i leżących na okręgu który przechodzi przez biegun S. Odległości punktów figury odwrotnej są związane równaniem

$$\frac{A'K'}{SA' \,.\, SK'} = \frac{A'B'}{SA' \,.\, SB'} + \frac{B'C'}{SB' \,.\, SC'} + \ldots . \frac{I'K'}{SI' \,.\, SK'}.$$

Biorąc tylko trzy punkta A′, B′, C′, będzie

$$A'C' \,.\, SB' = A'B' \,.\, SC' + B'C' \,.\, SA'.$$

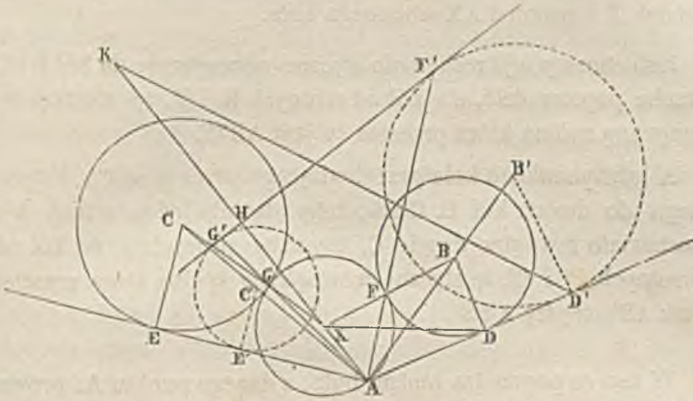
Co daje wiadome *twierdzenie Ptolemeusza* (III, 26).

Nakoniec, weźmy przykład który, dowodząc użytku metody, pokaże jak można ułatwić kreślenie figury odwrotnej z daną.

Zagadnienie IV.

Przez dany punkt A *poprowadzić koło styczne do dwóch danych kół* B i C.

Niech będzie X koło zadość czyniące zagadnieniu. Jeśli, biorąc punkt A za biegun, przekształcimy, przez promienie wodzące odwrotne, figurę trzech kół stycznych B, C, X, otrzymamy dwa koła odwrotne B′, C′, i linię prostą która będzie spólną styczną tych ostatnich kół (35). Więc, żeby rozwiązać zagadnienie, dość jest poprowadzić do kół odwrotnych B′, C′, jedną ze stycznych spólnych, jako F′G′, i połączyć punkta styczności F′, G′ z biegunem A; punkta F, G, przeciwodpowiedne punktów F′, G′, będą zetknięciami koła X z danemi kołami B i C, punkt spotkania linij środków BF i CG będzie środkiem X, a odiegłość XF promieniem tego koła.



Wykreślenie kół odwrotnych B′ i C′. — Przypuśćmy, dla utkwienia myśli, że trzeba wykreślić koło X przechodzące przez punkt A i styczne zewnętrznie do dwóch kół B, C. Przez dany punkt A prowadzimy styczne AD i AE do tych kół, i bierzemy wieloczyn AD.AE za potęgę przekształcenia; po czem, na stycznej AD wyznaczamy długość AD′ = AE, i z punktu D′ wyprowadzamy prostopadłę D′B′ aż do spotkania B′ z prostą AB; otrzymujemy tym sposobem środek B′ i promień B′D′ koła B′ odwrotnego z kołem B. Biorąc na stycznej AE′ długość AE′ = AD, i wykonywając podobne wykreślenia, znajdziemy koło C′ odwrotne z kołem C.

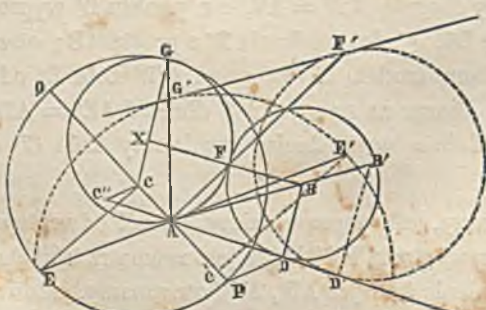
To zrobiwszy, jeśli poprowadzimy, do kół odwrotnych B′ i C′, tę styczną zewnętrzną F′G′ która jest zewnątrz trójkąta AB′C′, i potem promienie wodzące AF′, AG′, otrzymamy, jakośmy powiedzieli, punkta zetknięć F, G, a następnie środek X i promień XF koła szukanego.

Można inaczej znaleźć środek i promień koła X. Jakoż, uważajmy że środek X leży na prostopadłej AH do stycznej spólnej F'G' kół B', C', i promień $AX = \frac{p}{2AH} = \frac{AD \, . \, AD'}{2AH}$ (34); więc, jeśli weźmiemy AK = 2AH, i, połączywszy KD', poprowadzimy przeciwrównoległę DX do D'K, wyznaczymy zarazem środek X i promień AX szukanego koła.

Jeśli chcemy wykreślić koło styczne wewnętrznie do kół B i C, trzeba poprowadzić, do kół odwrotnych B' i C', tę styczną zewnętrzną spólną która przecina trójkąt AB'C'.

A gdyby szukano koła przechodzącego przez punkt A, i stycznego do dwóch kół B, C tak, żeby otaczało jedno z nich B a zostawiało zewnątrz drugie C, trzebaby prowadzić, do kół odwrotnych B' i C', tę styczną wewnętrzną spólną która przecina bok AB' między A i B'.

W tem co poprzedza można było, z danego punktu A, prowadzić styczne do obydwóch kół danych B, C; i dlatego mogliśmy wziąć za potęgę przekształcenia wieloczyn stycznych AD.AE. Uważajmy teraz szczególny przypadek w którym szukane koło X, styczne do danych B i C, powinno przechodzić przez punkt A leżący wewnątrz koła C. Jeśli poprowadzimy styczną AD do koła B a średnicę PAQ w kole C, i wyznaczymy punkt D' tak żeby



było AD' = AQ; widzimy zaraz że, biorąc wieloczyn AD . AD' za potęgę prsekształcenia, łatwo się kreśli koło B' odwrotne koła B. Nie trudno także wykreślić koło C' odwrotne koła C; bo wiemy że jego środek C′ otrzymuje się za pomocą formuły $AC' = \frac{p}{k} . AC = \frac{AD . AC}{AP}$. Owoż, łącząc DP, i prowadząc przez środek danego koła C równoległę CC″ do DP aż do spotkania C″ z prostą AD, będzie $AC'' = \frac{AD . AC}{AP}$; więc bierzemy AC′ = AC″, prowadzimy prostopadłe CE i C′E′ do AC, a potem prostę EA aż do spotkania E′ z prostą C′E′ i, mamy tym sposobem środek C′ i promień C′E′ koła odwrotnego z kołem C. Wykreśliwszy koła odwrotne B′ i C′, prowadzimy styczną zewnętrzną spólną F′G′, i znajdujemy, jako wyżej, punkta zetknięć Fi G, a następnie środek X i promień XF żądanego koła X.

Uwaga. — Powyższe rozumowania, zmodyfikowane wedle twierdzeń 36 i 37, stosują się do sfer i dają rozwiązanie zagadnienia : *Przez dany punkt poprowadzić sferę styczną do trzech sfer danych.*

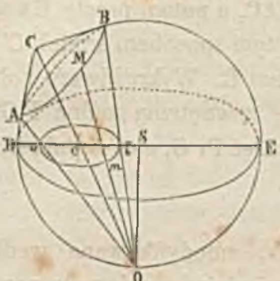
RZUT STEREOGRAFICZNY.

Rzut stereograficzny figury sferycznej jest poprostu perspektywą figury sferycznej, otrzymaną na płaszczyźnie koła wielkiego którego biegun wzięto za punkt widzenia. I tak (*fig. poniżej*), rzutem stereograficznym punktu M sfery jest punkt *m* na płaszczyznie *średnicowej* DE, prostopadłej do promienia OS który łączy oko ze środkiem sfery. Owoż, uważając że płaszczyzna średnicowa jestfigurą odwrotną swojej sfery, względem bieguna O i potęgi przekształcenia $p = 2R . R$ (37, wn), łatwo widzimy że rzut stereograficzny jest tylko szczególnym przypadkiem przekształcenia przez promienie wodzące odwrotne. Ztąd zaraz wnosimy następujące twierdzenie.

Rzuty stereograficzne dwóch linij nakreślonych na sferze przecinają się pod tym samym kątem co te linie same.

Twierdzenie XLII.

Rzut stereograficzny koła AMB *leżącego na sferze jest kołem* amb, *które ma za środek* c *rzut stereograficzny wierzchołka* C *stożka opisanego na tej sferze wedle danego koła.*



Jakoż, prosta CS jest prostopadła do płaszczyzny koła AMB; zatem, w stożku OAB kołowym pochyłym, płaszczyzna OSC jest prostopadła do płaszczyzn koła AMB i przecięcia *amb*. Ale ślady AB i *ab* tych dwóch płaszczyzn na płaszczyznie głównej OAB, są oczywiście przeciwrównoległe; więc przecięcie *amb* jest kołem przeciwrównoległem względem podstawy AMB, i jego środek *c* leży na prostej CO (6). Co dowodzi twierdzenia.

Chociaż to dowodzenie jest proste, dajemy jednak drugie, wskazane przez P. Chasles.

Wyobraźmy sferę S_1, która przechodzi przez koło AMP i ma za środek wierzchołek C stożka opisanego na sferze S. Sfery S i S_1 przecinają się prostokątnie; zatem, biorąc punkt widzenia O za biegun przekształcenia, jeśli utworzymy figury odwrotne sfer S i S_1, pierwszej będzie odwrotną płaszczyzna średnicowa D*m*E, a drugiej sfera S'_1 mająca środek na prostej OC. Owoż, te dwie figury odwrotne przecinają się także prostokątnie; więc ich przecięcie jest wielkiem kołem sfery S'_1, mającem środek na przecięciu *c* promienia OC z płaszczyzną średnicową D*m*E. To wielkie koło jest właśnie rzutem stereograficznym *amb* danego koła AMB na sferze. Co było do dowodzenia.

Wniosek. — *Mając dane koło* K *i punkt wewnętrzny* P, *można zawsze, i wieloma sposobami, zrzutować to koło środkowo* (*wziąć perspektywę*) *wedle koła mającego za środek perspektywę* p *punktu* P.

Aby dopełnić tego podwójnego warunku, dość jest poprowadzić *jakakolwiek* sferę przez dane koło K, i zrobić rzut stereograficzny tego koła, biorąc za punkt widzenia jeden z punktów przecięcia sfery z linią która łączy punkt P z wierzchołkiem stożka opisanego na sferze wedlę danego koła K.

ZADANIA GEOMETRYI PRZESTRZENI.

1055. — Płasczyzny biegunowe punktów leżących na okręgu koła danego w przestrzeni są styczne do powierzchni stożkowej obrotowej. Jaki powinien być promień tego okręgu ażeby kąt linii rodzącej stożka i osi koła miał 45° ?

1056. — Jedną płasczyzną przecięto dwa walce jednokładne. Dowieśdź że przecięcia są dwiema liniami krzywemi jednokładnemi, których środek jest na przecięciu płasczyzny siecznej z prostą równoległą do linij rodzących i przechodzącą przez środek jednokładności tych walców.

1057. — Można zawsze ustawić dwa dane czworościany tak żeby jeden był perspektywą drugiego.

1058. — Gdy dwa pęki jednokreślne spólnego środka nie mają promieni podwójnych, wtedy można je uważać za perspektywę dwóch pęków w których promienie odpowiedne czynią między sobą kąty równe i skierowane w tę samę stronę.

1059. — Znaleźć najkrótszą odległość danego punktu od danej powierzchni obrotowej stożkowej, albo walcowej.

1060.—Jaka jest najkrótsza droga między dwoma punktami na powierzchni walcowej ?

1061. — Poprowadzić płasczyznę styczną do powierzchni obrotowej, walcowej albo stożkowej, 1° przez dany punkt na powierzchni, 2° przez punkt zewnętrzny, 3° równolegle do danej prostej.

1062. — Zbudować stożek albo walec obrotowy, znając trzy linie rodzące.

1063. — Znaleźć miejsce punktów których potęgi względem trzech sfer są proporcyonalne do promieni tych sfer.

1064. — Jaki punkt trzeba wziąć za biegun przekształcenia żeby, za pomocą metody promieni wodzących odwrotnych, zamienić zagadnienie sfery stycznej do czterech sfer danych na zagadnienie sfery stycznej do jednej sfery i do trzech płaszczyzn?

1065. — Mając dane cztery sfery promieni $R+\rho$, $R_1+\rho$, $R_2+\rho$, $R_3+\rho$, znaleźć miejsce które środek pierwiastny tych sfer opisuje gdy się zmienia ilość ρ.

1066. — Stożek jest wpisany w sferę; dowieśdź że wszelka płaszczyzna, prostopadła do średnicy przechodzącej przez wierzchołek tego stożka, przecina go wedle koła.

1067. — Zbudować trójkąt sferyczny, znając powierzchnię, bok i promień koła opisanego.

1068. — Zbudować trójkąt sferyczny, znając powierzchnię, podstawę i wysokość.

1069. — Znaleść miejsce drugiego ogniska ellips mających jedno ognisko spólne i dwie styczne spólne.

1070. — Miejsce środków wszystkich cięciw ellipsy przechodzących przez jeden punkt.

1071. — Jeśli połączono ogniska hiperboli z punktami w których styczna do tej krzywej spotyka obie niemaltyczne, otrzyma się czworobok wpisalny.

1072. — W paraboli, wieloczyny odległości ogniska od wierzchołków przeciwległych czworoboku opisanego są równe.

1073. — Mając dane dwa trójkąty, zrzutować jeden z nich na płaszczyznie tak żeby rzut był trójkątem podobnym drugiemu.

1074. — Przeciąć dany stożek obrotowy wedle ellipsy której excentryczność jest dana.

1075. — W dany stożek obrotowy wpisano dwie sfery, styczne zewnętrznie między sobą. Dowieśdź że obiętość zawarta między stożkiem i sferami jest połową objętości zawartej między tym stożkiem i sferą która przechodzi przez dwa koła zetknięć stożka ze sferami wpisanemi.

1076. — Dwa stożki obrotowe przecinające się mają spólną oś, i kąt przy wierzchołku stożka wewnętrznego zawiera 60°; dowieśdź że wierzchołek stożka wewnętrznego jest spólnem ogniskiem wszystkich przecięć, wyznaczonych na stożku zewnętrznym, przez płaszczyzny styczne do stożka wewnętrznego.

1077. — Jaka jest najkrótsza droga na powierzchni stożkowej z jednego punktu do drugiego?

1078. — Jeśli na powierzchni walca obrotowego, poprowadzono przez jeden punkt dwie helice przemiające się prostokątnie, *okrąg podstawy walca jest średnim proporcyonalnym między krokami tych helic.*

1079. — Dowieść że dwie helice, przecinające się prostokątnie na walcu obrotowym, dzielą jego powierzchnię na czworoboki równe.

1080. — Ze skrajności A i A′ średnicy podstawy walca obrotowego, wychodzą dwie helice przecinające się prostokątnie. Przypuszczając że pierwszy punkt spotkania tych helic jest w M, znaleźć, w funkcyi kroku h pierwszej helicy i promienia R walca, powierzchię trójkąta krzywolinijnego AMA′. Jaki powinien być krok h żeby ten trójkąt krzywolinijny AMA′ był maximum ?

1081. — Mając daną helicę na walcu obrotowym, jeśli przez punkt przestrzeni poprowadzimy proste równoległe do stycznych helicy, miejscem tych równoległych będzie powierzchnia stożkowa obrotowa.

1082. — Zbudować sferę :

1° przechodzącą przez trzy punkta dane i styczną do płaszczyzny, albo do sfery danej,

2° przechodzącą przez dwa punkta dane, i styczną do dwóch płaszczyzn albo do dwóch sfer danych, albo do płaszczyzny i do sfery danej.

3° przechodzącą przez punkt dany i styczną do trzech płascyzn, albo do trzech sfer danych,

4° styczną do trzech płaszczyzn danych i do sfery danej,

5° styczną do dwóch płaszczyzn danych i do dwóch sfer danych,

6° styczną do płaszczyzny danej i do trzech sfer danych.

1083. — Zbudować sferę danego promienia którąby zadość czyniła trzem innym warunkom, *np.* żeby przechodziła przez trzy dane punkta ; albo żeby przechodziła przez dwa punkta dane i była styczna do płaszczyzny, *albo* do sfery danej ; etc.

1084. — Nakreślić na sferze, promieniem sferycznym danym, koło styczne do dwóch kół danych.

1085. — Opisać na sferze koło styczne do dwóch kół danych, któreby przecinało inne koło w dwóch punktach średnicowo przeciwległych.

1086. — Opisać na sferze koło któreby przecinało trzy koła dane w punktach średnicowo przeciwległych.

1087. — Opisać na sferze koło któreby przecinało trzy koła dane pod kątami danemi. Uważać przypadek gdy dane kąty są równe.

1088. — Przez dwa punkta A i B sfery poprowadzono ciąg kół, do których poprowadzono styczne sferyczne z punktu wziętego na łuku koła wielkiego AB. Jakie jest miejsce punktów zetknięć?

1089. — Mając dane na kole sfery dwa punkta A i B, znaleźć na tem kole trzeci punkt C taki, żeby dwa wielkie koła CA, CB spotykały się pod kątem danym.

1090. — Trzy sfery mające spólne koło wyznaczają na poprzecznej sześć punktów w inwolucyi, której punktem środkowym jest przecięcie tej poprzecznej z płaszczyzną koła spólnego.

1091. — Biegunową wzajemną paraboli, względem punktu kierownicy, jest hiperbola równoboczna.

1092. — Zrzutować daną stożkowę wedle hiperboli równobocznej.

1093. — W stożku kołowym nazywają się *cyklicznemi* (κύκλος koło) dwie płaszczyzny przechodzące przez jego wierzchołek i równoległe do dwóch przecięć kołowych. Dowieść że wszelka płaszczyzna styczna do stożka kołowego przecina obie płaszczyzny cykliczne wedle dwóch linij prostych, równo nachylonych na krawędź zetknięcia.

1094. — Wszelka płaszczyzna styczna do stożka kołowego czyni z dwiema płaszczyznami cyklicznemi dwa kąty których summa jest stała.

1095. — Cztery linie proste wedle których dwie płaszczyzny styczne do stożka kołowego przecinają obie płaszczyzny cykliczne, należą do stożka obrotowego którego oś jest prostopadła do płaszczyzny dwóch krawędzi zetknięć.

1096. — Nazywają się *spółcyklicznemi* dwa stożki mające spólny wierzchołek i spólne płaszczyzny cykliczne. Dowieść że gdy płaszczyzna poprowadzona przez wierzchołek dwóch stożków spółcyklicznych przecina obydwa, wtedy dwie krawędzie przecięć jednego stożka czynią z odpowiednemi krawędziami przecięć drugiego kąty równe. Przypadek szczególny gdy płaszczyzna sieczna przecina jeden z tych stożków i jest styczną do drugiego.

1097. — Gdy płaszczyzna jest styczna do dwóch stożków spółcyklicznych, krawędzie zetknięć są prostopadłe do siebie.

1098. — Jeśli SA i SB są dwie krawędzie prostokątne, wzięte na dwóch stożkach spółcyklicznych, płaszczyzna ASB przecina oba stożki wedle dwóch innych krawędzi SA′, SB′ także prostokątnych; cztery linie proste, wedle których przecinają się płaszczyzny styczne do pierwszego stożka przechodzące przez SA i SA′, i płaszczyzny styczne do drugiego stożka przechodzące przez SB i SB', należą do trzeciego stożka spółcyklicznego z dwoma pierwszemi. Ten trzeci stożek zostaje stały jakiekolwiek jest położenie dwóch krawędzi prostokątnych SA i SB.

1099. — Istnieje zawsze wewnątrz stożka kołowego pochyłego, i na płaszczyźnie największego kąta, dwie linie proste przechodzące przez wierzchołek, takie że, jeśli przez jedną z nich poprowadzono dwie płaszczyzny prostokątne jakiekolwiek, płaszczyzny styczne do stożka wedle dwóch krawędzi leżących na jednej z tych płaszczyzn przecinają się wedle linii leżącej na drugiej płaszczyznie. Te dwie proste nazywają się *liniami ogniskowemi* stożka.

1100. — Kąt dwóch płaszczyzn stycznych do stożka kołowego, i kąt dwóch płaszczyzn wyznaczonych przez przecięcie się ostatnich i przez każdą linię ogniskową, mają tę samą płaszczyznę dwójsieczną.

1101. — Wszelka płaszczyzna styczna do stożka kołowego jest równo nachylona na płaszczyzny wyznaczone przez krawędź zetknięcia i przez każdą linię ogniskową.

1102. — Summa kątów które każda krawędź tworzy z dwiema liniami ogniskowemi jest stała.

1103. — Jeśli przez wierzchołek stożka kołowego poprowadzono ciąg normalnych do płaszczyzn stycznych do tego stożka, te normalne tworzą drugi stożek którego płaszczyzny styczne są prostopadłe do krawędzi pierwszego. Dwa takie stożki nazywają się *spełniającemi.*

1104. — Gdy dwa stożki są spełniające, płaszczyzny cykliczne i linie ogniskowe pierwszego są odpowiednio prostopadłe do linij ogniskowych i do płaszczyzn cyklicznych drugiego.

1105. — Gdy dwie figury płaskie F i F' są perspektywą jedna drugiej, i gdy ich płaszczyzny przecinają się, jeśli obrócimy jedną z dwóch płaszczyzn około ich przecięcia, dwie uważane figury nie przestaną być w perspektywie, i miejscem punktu widzenia który ciągle zmienia położenie, będzie okrąg leżący na płaszczyznie prostopadłej do osi obrotu.

1106. — Jeśli dwa czworościany mają wierzchołki, po dwa, na czterech liniach prostych zbiegających się w jednym punkcie, krawędzie tych czworościanów spotykają się, po dwie, w sześciu punktach leżących, po trzy, na jednej płaszczyznie; *i nawzajem.*

1107. — Ściany obydwóch dwudziestościanów foremnych i dwóch dwunastuścianów foremnych z kątami trójściennemi, wpisanych w jedną sferę są wpisalne w jedno koło.

1108. — Bok sześcianu jest zarazem różnicą i średnią proporcyalną między bokami dwóch dwunastościanów foremnych z kątami trójściennemi.

1109. — Dowieśdź że linia krzywa, nakreślona na powierzchni walcowej przez punkt który się wznosi ilością proporcyonalną do długości łuku obrotu, jest helicą.

1110. — Gdy dwa koła styczne są wpisane w jeden kąt, oczywiście miejscem punktu zetknięcia jest dwójsieczna tego kąta. Utworzyć figurę odwrotną i dowieśdź że, jeśli w przestrzeń zawartą między dwoma kołami siecznemi, wpisano dwa okręgi styczne między sobą, miejscem punktu zetknięcia tych okręgów jest koło.

1111. — Okręgi przechodzące przez punkt stały S, i przecinające prostokątnie dany okrąg, spotykają się w drugim punkcie S'; dowieśdź że punkta S i S' są sprzężone harmonicznie, względem średnicy którą prosta SS' wyznacza na danym okręgu.

1112. — Na danym czworoboku opisano różne linie stożkowe. Dowieśdź że, 1° biegunowe jakiegokolwiek punktu p, względem tych stożkowych, przechodzą wszystkie przez jeden punkt q ; 2° jeśli punkt p opisuje linię prostą L, punkt q opisuje linię stożkową ; 3° ta stożkowa jest miejscem bieguna prostej L względem stożkowych opisanych, i przechodzi przez punkt spotkania przekątnych i przez punkt spotkania boków przeciwległych czworoboku. Uważać przypadek w którym prosta L jest w nieskończoności.

1113. — Na trzech przekątnych czworoboku zupełnego wzięto trzy dwojany punktów które dzielą harmonicznie te przekątne ; dowieśdź że te sześć punktów są na jednej stożkowej.

1114. — Wielokąt płaski odkształca się tak że wszystkie jego wierzchołki, prócz jednego, posuwają się po liniach prostych stałych, a wszystkie boki są widziane pod danemi kątami z tylu punktów ile jest tych linij ; znaleźć miejsce ostatniego wierzchołka. Jakie jest twierdzenie spółwzględne ?

1115. — Wielokąt mający $4n+2$ boków, opisany na kole, posiada $2n+1$ przekątnych które łączą wierzchołki przeciwległe ; dowieśdź że, jeśli $2n$ tych przekątnych spotykają się w jednym punkcie, ostatnia przekątna przechodzi także przez ten punkt spotkania.

1116. — Dwa punkta materyalne przebiegają, jednocześnie i ruchem jednostajnym, dwie linie proste nie leżące na jednej płaszczyźnie ; jakie jest miejsce środka linii prostej łączącej te dwa punkta ?

KONIEC.

NOTY.

I. — O LINIACH RÓWNOLEGŁYCH.

Euklides uważa jako pewnik następujące zadanie :

Jeśli jedna prosta padając na dwie proste czyni kąty wewnętrzne, z jednej strony leżące, mniejsze od dwóch kątów prostych, te dwie proste przedłużone w nieskończoność spotkają się z tej strony z której kąty są mniejsze od dwóch kątów prostych.

Niektórzy biorą za oczywiste że : *Dwie proste, jedna prostopadła a druga pochyła do trzeciej, spotykają się.* To podanie, uważane zwykle za postulatum Euklidesa, jest szczególnym przypadkiem jego pewnika, i pozornie tylko widoczniejsze. Jakoż, że pochyła EH (*fig. stronicy* 24) zbliża się ciągle do prostopadłej CD, to nie jest bynajmniej dowodem żeby ją koniecznie spotkać musiała. Bo, dlaczegożby ta pochyła nie mogła się zbliżać nieskończenie, i nigdy nie spotykać prostopadłej CD ? tak jako gałęź hiperboli zbliża się ciągle do swej niemaltycznej a nigdy jej nie spotyka, chociaż odległość może stać się mniejszą od wszelkiej małości.

Czuł to mocno uczony professor Bertrand (z *Genewy*), i chciał Geometryę uwolnić od postulatum. Aby dojść do tego, utrzymuje że *kąt jest częścią nieskończoną płaszczyzny, zawartą między dwiema liniami prostemi wychodzącemi z jednego punktu.* — Określenie niedokładne, bo jego następstwem byłoby że dwa kąty proste nie są równe. Ale idźmy dalej. Aby dowieśdź że linia pochyła EH spotyka prostopadłę CD, dosyć jest, wedle Bertranda, okazać że kąt FEH jest większy od pasa FECD. W tym celu uważajmy, mówi, że kładąc kąt FEH około siebie *n* razy można pokryć całą przestrzeń kąta prostego FEB ; gdy tymczasem, kładąc raz wedle razu pas FECD także *n* razy, nie można pokryć tej samej przestrzeni. Więc kąt FEH jest większy od pasa FECD ; zatem ramię EH musi wyjść poza ten pas ; etc.

To dowodzenie nie ma koniecznej ścisłości matematycznej ; najpierwej dlatego że się tu porównywa dwie powierzchnie *różnorodne* i *nieskończone*, co nie jest logiczne; a potem że, nie określając równości między ilościami *niekończenie wielkiemi*, które tylko dla skrócenia mowy, symbolicznie nazywają się ilościami, nie wolno jest rozumować na tych ilościach tak jak na ilościach skończonych.

Od niejakiego czasu przyjęto w szkołach francuskich postulatum podane przez Gergonne: *Przez dany punkt jedną tylko równoległę do danej prostej poprowadzić można.* Użyliśmy tego postulatum w tekscie, nie dlatego żeby było daleko widoczniejsze od innych, ale dlatego że, jako postulatum, warto tyle ile inne.

II. — PRZYPADEK NIESPÓŁMIERNOŚCI.

Wszędzie, gdzie chodziło o dowodzenie równości stosunków między ilościami niespółmiernemi, użyliśmy metody granic, jako ogólnej i jedynie ścisłej. Nie źle jednak będzie znać inny sposób dowodzenia, który nieraz korzystnie zastosować można. Dla jasności wykładu, weźmy znajome twierdzenie: *W jednem kole kąty środkowe są proporcyonalne do łuków objętych między ich ramionami*, i dowiedźmy go w przypadku łuków niespółmiernych.

Przypuśćmy, w tym celu, że podzielono łuk AB (*fig. stronicy* 69) na m części równych, z których jedna mieści się w łuku AC n razy najwięcej, ale z pewną resztą, ponieważ łuki AB i AC są niespółmierne; stosunek $\frac{AC}{AB}$ będzie oczywiście większy od $\frac{n}{m}$ a mniejszy od $\frac{n+1}{m}$, to jest

$$\frac{n+1}{m} > \frac{AC}{AB} > \frac{n}{m}.$$

Jeśli teraz poprowadzimy promienie przez punkta podziału, rozdzielimy kąt AOB na m kątów równych, z których jeden będzie się mieścił w kącie AOC n razy najwięcej, zawsze z resztą; tak że stosunek kątów $\frac{AOC}{AOB}$ będzie się zawierał między $\frac{n}{m}$ i $\frac{n+1}{m}$, to jest

$$\frac{n+1}{m} > \frac{AOC}{AOB} > \frac{n}{m}.$$

Jako widać, stosunek kątów i stosunek odpowiedających łuków są oba zawarte między temi samemi liczbami $\frac{n}{m}$ i $\frac{n+1}{m}$: zatem ich różnica jest mniejsza od różnicy tychże liczb, to jest mniejsza od $\frac{1}{m}$. Owoż, dzieląc łuk AB na części dostatecznie małe, różnica $\frac{1}{m}$ może stać się tak małą jak się podoba, gdy przeciwnie różnica stosunku kątów i stosunku łuków zostaje stałą, nie zależąc bynajmniej od liczby m podziałów; więc, gdyby stosunek kątów nie był równy stosunkowi odpowiedających łuków, różnica musiałaby się stać mniejszą od wszelkiej wartości. Co niedorzeczne, bo ta różnica jest ilością stałą. Ztąd wnosimy że te dwa stosunki są równe, to jest $\frac{AOC}{AOB} = \frac{AC}{AB}$.

III. — O KWADRATURZE KOŁA.

Zagadnienie kwadratury koła, jakośmy już powiedzieli, zależy na tem żeby, kreśląc same tylko *linie proste* i *okręgi*, wystawić kwadrat równoważny danemu kołu; albo, co wychodzi na jedno, biorąc promień za jedność, znaleźć linię prostą długości π. Ta linia istnieje niezaprzeczalnie, bo oczywiście między długościami 3,14 i 3,15 jest długość π. Ale, czy można ją wyznaczyć za pomocą samych tylko linij prostych i kół? Oto całe pytanie.

Widzieliśmy w zagadnieniach *księgi* III jak się kreślą ilości spółmierne, pierwiastki kwadratowe czyli średnie proporcyonalne, pierwiastki równania stopnia 2° albo równań przywiednych do stopnia 2°. Gdyby więc π było jedną z takich liczb, możnaby wykreślić linię prostą długości π za pomocą liniału i cyrkla.

Lambert dowiódł pierwszy, w pamiętnikach *Akademii berlińskiej*, r. 1761 że π jest liczbą niespółmierną. Legendre idąc za Lambertem posunął się dalej, i okazał że kwadrat z π jest także liczbą niespółmierną.

Kwadratura koła będzie zawsze kwestyą zajmującą teorycznie, ale obojętną w zastosowaniu; bo, jako już wiemy, wyrachowano przybliżoną wartość π aż do 540tej cyfry dziesiętnej.

IV. — O RÓWNOŚCI WIELOŚCIANÓW WYPUKŁYCH.

W księdze XI geometryi Euklidesa czytamy dwa określenia pod numerami 9 i 10.

9. *Bryły podobne są te które są zawarte w tej samej liczbie płaszczyzn* (ścian) *podobnych.*

10. *Bryły podobne i równe są te które są zawarte w tej samej liczbie płaszczyzn (ścian) podobnych i równych.*

Te określenia nie tylko nie są oczywiste, ale owszem stanowią dwa twierdzenia których trzeba dowieśdź, a szczególniej drugiego które jest jednem z najtrudniejszych w geometryi elementarnej.

« Robert Simson, matematyk angielski, stosując, mówi nasz uczony » rodak Józef Czech (*), opisanie 10 (określenie) do brył, mających kąty » bryłowe wyskakujące i wskakujące, dowodzi w przypisach swojego prze- » łożenia, iż ono jest fałszywe ogólnie, i nie bez przyczyny. » W samej rzeczy, powieda Robert Simson, można przydać jednemu wielościanowi piramidę, dając jej za podstawę jedną ze ścian tego wielościanu ; a zaś drugiemu przydać piramidę równą, stawiając ją na odpowiednej ścianie tak, żeby wierzchołek padał wewnątrz wielościanu. Takie dwa wielościany mają oczywiście ściany równe każda każdej, a jednak są nierówne. « Lecz jeżeli » odkrycie to, mówi Czech, do którego myśl pierwszą podał Le Sage Geneweńczyk, zdaje się uchybienie z jednej strony zadawać Euklidesowi, » z drugiej strony nie może wytykać błędu w dziele jego, kiedy cała nauka » jego o bryłach figurami płaskiemi ograniczonych, w księgach jedenastej i » dwunastej wyłożona, przedstawiając bryły ze samemi tylko kątami bryło- » wemi wyskakującemi, dowodzi jasno, iż Euklides ten tylko gatunek kątów » bryłowych miał na uwadze. »

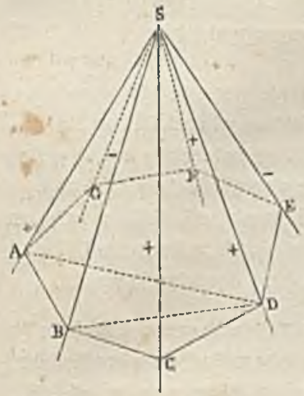
Chodzi więc teraz o dowodzenie drugiego twierdzenia, określeniem 10 wskazanego, w figurach wypukłych. Cauchy dowiódł go pierwszy; Legendre zmodyfikował dowodzenie w notach swojej geometryi, ale użył niepotrzebnie wielokątów sferycznych. Idąc za tymi sławnymi matematykami francuskimi, będziemy się starali, na tle ich dowodzeń, dać prostrze jeśli można, opierając się także na dwóch pomocniczych twierdzeniach które najpierwej wyłożymy.

I. Twierdzenie pomocnicze. — *Jeśli w kącie wielościennym* wypukłym, *mającym wszystkie ściany niezmienne prócz jednej, kąty dwójścienne nieprzyległe ścianie zmiennej zwiększają się zarazem albo zmniejszają, ta ściana zwiększa się także albo zmniejsza.*

Niech będzie kąt wielościenny wypukły SABCDEFG w którym, oprócz ściany ASB mogącej się zmieniać, wszystkie inne są stałe.

(*) Euklidesa *początków* Geometryi *ksiąg ośmioro, to jest sześć pierwszych, jedenasta i dwunasta, z dodanemi przypisami, dla pożytku młodzi akademickiej, wytłumaczone przez* Józefa Czecha. Wilno, 1817.

Przypuśćmy najpierwej że tylko jeden kąt dwójścienny SD, nieprzyległy



ścianie ASB, zwiększa się albo zmniejsza; wtedy ta ściana zwiększa się także albo zmniejsza. Jakoż, poprowadźmy płaszczyzny ASD, BSD; kąty wielościenne SDEFGA i SDCB są oczywiście stałe. To pokazuje że w trójścianie SABD, kąt dwójścienny SD jest zawarty między dwiema ścianami stałemi ASD i BSD; więc, jeśli ten kąt zwiększa się albo zmniejsza, ściana mu przeciwległa ASB zwiększa się z nim razem albo zmniejsza.

Nie trudno teraz widzieć że, jeśli kilka kątów dwójściennych nieprzyległych ścianie ASB zwiększają się wszystkie zarazem albo zmniejszają, ta ściana zwiększa się także z niemi razem albo zmniejsza. Albowiem, można zmieniać te kąty jeden po drugim, a, na mocy tego co poprzedza, zmienność każdego z nich pociągnie za sobą podobną zmienność ściany ASB.

Wniosek. — Ztąd wynika że, jeśli wszystkie ściany kąta wielościennego wypukłego są stałe, kąty dwójścienne nie mogą się zmieniać wszystkie jednakowo, i, jeśli jedne się zwiększają, to drugie muszą się zmniejszać.

II. Twierdzenie pomocnicze. — *Jeśli w kącie wielościennym* wypukłym *mającym wszystkie ściany stałe, będziemy zmieniali kąty dwójścienne zwiększając jedne a zmniejszając drugie, tak jednakże aby kąt wielościenny nie przestawał być wypukły, i położymy znak + na krawędzi każdego kąta dwójściennego który się zwiększył, a znak — na krawędzi tego który się zmniejszył; wtedy, obchodząc na około kąt wielościenny, znajdziemy przynajmniej* CZTERY *zmienności znaków.*

Widzimy zaraz że ten kąt wielościenny musi mieć więcej niż trzy ściany, bo inaczej kąty dwójścienne nie mogłyby się zmieniać (V, 44). Po czem nie trudno dowieśdź że jest więcej niż dwie zmienności znaków. Jakoż, gdyby krawędzie po sobie idące SA, SB, SC, SD (*fig. powyższa*) miały znak +, a wszystkie następujące SE, SF, SG miały znak — ; płaszczyzna ASD, poprowadzona przez pierwszą i ostatnią krawędź ze znakiem +, podzieliłaby kąt wielościenny wypukły S na dwa kąty wielościenne SADCB i SADEFG także wypukłe. Ztądby wynikało że ściana ASD, spólna tym kątom, zwiększa się w jednym a zmniejsza w drugim. Musi zatem być więcej niż dwie zmienności znaków. Ale, ponieważ obchodząc na około kąt wielościenny S powracamy do znaku wyjścia, liczba zmienności znaków jest parzysta; więc ta liczba parzysta, będąc większa od 2, jest przynajmniej 4.

Uwaga. — Twierdzenie Eulera (VII, 36) nie przestaje być prawdziwe, gdy się uważa niektóre krawędzie, i nawet niektóre wierzchołki, za niebyłe, jakoby znikały; byle tylko liczono za jedną ścianę dwie ściany mające spólną krawędź która znika, i także za jedną ścianę wszystkie ściany każdego kąta wielościennego którego wierzchołek znika z krawędziami. Ściśle mówiąc, ta uwaga może się wyprowadzić z naszego dowodzenia twierdzenia Eulera; ale, żeby nie zostawić żadnej wątpliwości, dajemy dowodzenie wprost.

Zachowując notacyę już użytą, oznaczmy jeszcze przez k liczbę niby znikających krawędzi które nie pociągają za sobą zniknięcia wierzchołków; przez w liczbę znikających kątów wielościennych które mają n, n', n''... krawędzi; nakoniec, przez K′, S′ i W′ liczbę pozostałych krawędzi, ścian i wierzchołków.

Widzimy łatwo że:

$$K'=K-k-n-n'-n''...,\quad W'=W-w,\quad S'=S-k+w-n-n'-n''..;$$

Więc $$S'+W'-K'=S+W-K=2.$$

To ustaliwszy, możemy dowieśdź zapowiedzianego twierdzenia.

Twierdzenie.

Dwa wielościany wypukłe, mające ściany równe każda każdej i podobnie ułożone, są równe.

Twierdzenie jest oczywiste w dwóch graniastosłupach albo w dwóch piramidach, a ogólnie w dwóch wielościanach których wszystkie kąty są trójścienne; bo te wielościany, mając ściany równe każda każdej i podobnie ułożone, mają temsamem kąty trójścienne odpowiednie równe; więc są przystawalne.

Aby dowieśdź równości dwóch zadanych wielościanów, dość jest okazać że ich kąty dwójścienne odpowiednie nie mogą być nierówne.

Między temi kątami, jeśli wszystkie nie są równe swym odpowiednym, mogą być jedne równe a inne nierówne; połóżmy znak + albo — na krawędzlach tych ostatnich, według jak są większe albo mniejsze od swych odpowiednych, a nie kładźmy żadnego znaku na krawędziach kątów równych. Uważając krawędzie bez żadnego znaku za niebyłe, widzimy łatwo że, w jednym kącie wielościennym, dwie krawędzie ze znakiem + albo — po sobie idące należą obie razem do jednej ściany, płaskiej albo łamanej, i tylko do jednej. Ztąd wynika że liczby zmienności znaków na około każdego kąta wielościennego i liczby zmienności znaków na obwodzie każdej z tych ścian tworzą dwie summy równe.

Owoż, wiemy że na około kąta wielościennego wypukłego jest przynajmniej 4 zmienności znaków; więc, nazywając W liczbę kątów wielościennych pozostałych, jeśli niektóre znikają, liczba wszystkich zmiennosci znaków będzie przynajmniej $4W$.

Szukajmy teraz ile jest zmienności znaków na obwodach ścian utworzonych przez krawędzie ze znakami. W tym celu, oznaczmy przez S_3 liczbę takich ścian które mają obwód trójkątny, chociażby były złożone z wielu wielokątów; przez S_4 liczbę ścian z obwodem czworokątnym: i tak dalej. Po czem, uważajmy że w trójkącie największa możebna liczba zmienności znaków, jaką się otrzymuje kładąc na przemian znak + albo — na bokach, jest 2; bo można tylko mieć układ + — + albo — + —. W czworoboku ta liczba zmienności znaków jest najwięcej 4. Ogólnie, na obwodzie zamkniętym liczba zmienności znaków jest najwięcej równa liczbie boków; a ponieważ przebiegając ten obwód powracamy do znaku wyjścia, największa możebna liczba zmienności znaków musi być parzysta. Dlatego właśnie w trójkącie może być najwięcej 2 zmienności znaków; w czworokącie i w pięciokącie najwięcej 4; w sześciokącie i w siedmiokącie 6 najwięcej; etc. Więc, nazywając N największą liczbę zmienności znaków jaka się znajdować może na obwodach wszystkich ścian płaskich albo łamanych, będzie

$$N = 2S_3 + 4(S_4 + S_5) + 6(S_6 + S_7) + \dots$$

Ale, oznaczając przez K i S liczby pozostałych krawędzi i ścian, mamy.

$$S = S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + \dots$$

$$2K = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + 6S_6 + \dots$$

$$4S + 4W = 4K + 8.$$

Ztąd, rugując $4S$ i $4K$, otrzymujemy odrazu

$$4W = 8 + 2S_3 + 4S_4 + 6S_5 + \dots$$

Zatem byłoby $$4W > N;$$

wynik niedorzeczny. Co dowodzi że nasze dwa wielościany nie mogą mieć kątów dwójściennych nierównych.

Więc *dwa wielościany wypukłe mające ściany równe każda każdej są równe albo symetryczne, według jak ściany równe są w tym samym albo w odwrotnym porządku ułożone.*

Wniosek.—Ztąd wynika że, *Gdy dwa wielościany wypukłe mają ściany podobne każda każdej, te wielościany są podobne, albo jeden z nich jest podobny symetrycznemu drugiego, według jak ściany podobne są w tym samym albo w odwrotnym porządku ułożone.*

ZNACZNIEJSZE OMYŁKI DRUKU.

Stron.	*Linia.*
XII	2 od dołu, *zamiast* zagadnie *czytaj* zagadnienie.
XIII	12 od dołu, *zamiast* twierdzdzenia *czytaj* twierdzenie.
20	6 *zamiast* wa *czytaj* dwa.
25	14 *zamiast* niema *czytaj* niemal.
32	9 *zamiast* utrzymujemy *czytaj* otrzymujemy.
85	8 od dołu, *zamiast* znając *czytaj* mając.
98	9 *zamiast* BO′ *czytaj* HO′.
100	13 *zamiast* promieni *czytaj* promień.
102	2 od dołu, *zamiast* przystawienie *czytaj* przystawanie.
106	7 *zamiast* 2AO *połóż*: równym średnicy koła O.
106	10 *zamiast* AC *czytaj* AE.
108	14 od dołu, *zamiast* ADE *czytaj* ACD.
108	2 od dołu, *zamiast* DE, FC *czytaj* CE, FD.
118	5 od dołu, *zamiast* równozamienny *czytaj* równoramienny.
122	5 *zamiast* podzielny *czytaj* podzielony.
132	Odsyłacz na dole stronicy należy do *tw.* V, a nie do *tw.* IV.
137	Poprawić drugą figurę, zamieniając B′ na C′, i nawzajem.
145	1 od dołu, *zamiast* AB i AC *czytaj* BD i CD
150	3 od dołu, *zamiast* 2BD *czytaj* 2BC.
152	15 *zamiast* ołowy *czytaj* połowy.
175	13 od dołu, *zamiast* ACB *czytaj* AB.
175	10 od dołu, *zamiast* $\frac{AC}{ac}$ *czytaj* $\frac{ab}{AB}$.
176	15 *zamiast* O′A *czytaj* O′A′.
178	Na *fig.* 1 zamienić S na S″, i nawzajem.
179	4 *zamiast* jedności *czytaj* jednokładności.
204	9 od dołu w ostatnim wyrazie, *zamiast* CB *czytaj* CE.
208	13 *zamiast* spólnych *czytaj* siecznych.
215	3 od dołu. Na końcu zadania, *dodaj*: a jeden z wierzchołków w danym punkcie.
218	*Zamiast* zadania 373, *weź*: W dany trójkąt wpisać trójkąt obwodu minimum i podobny innemu trójkątowi danemu.
222	4 *zamiast* tworą *czytaj* tworzą.
222	*Zamiast* zadania 419, *weź*: W kole O, poprowadzić cięciwę równoległą do danej prostej MN, tak żeby była podzielona w stosunku $m:n$ przez daną sieczną AB.

Stron.	*Linia.*
223	*Zamiast* zadania 426, *weź :* W dany trójkąt wpisać trójkąt równy innemu danemu.
235	4 od dołu, *zamiast* S *czytaj* S'.
244	3 od dołu, *zamiast* ot *czytaj* to.
245	Pod pierwiastnikiem ostatni wyraz, *zamiast* $a'c'$ *czytaj* $a'b'$.
255	3 *zamiast* OH *czyt.* OK, a *zamiast* OK czytaj OH.
256	9 *zamiast* średnię *czytaj* średnicę.
266	5 od dołu, *zamiast* OL *czytaj* GL.
273	3 od dołu, *zamiast* $\frac{AOB'}{AOB}$ *czytaj* $\frac{AOB}{AOB'}$.
273	9 *zamiast* odjętego *czytaj* objętego.
304	8 *zamiast* wiec *czytaj* więc.
314	8 od dołu, *zamiast* $\frac{a}{c}$ *czytaj* $\frac{c}{a}$.
335	7 *zamiast* $A' - B' < \frac{A-B}{4}$ *czytaj* $B' - A' < \frac{B-A}{4}$.
363	15 *zamiast* O.ABCD *czytaj* O. ACBD.
377	16 *zamiast* biegunowa *czytaj* oś pierwiastna.
382	9 *zamiast* SA' *czytaj* SA'.
385	7 od dołu, *zamiast* (9) *czytaj* (11 i 15).
390	13 *zamiast* ponktów *czytaj* punktów.
398	13 i 14 *zamiast* c' *czytaj* c.
483	11 od dołu, *zamiast* CD *czytaj* SD.
507	10 *zamiast* wiloczynowi *czytaj* wieloczonowi.
518	11 *zamiast* (VI) *czytaj* (6).
521	*zamiast* nazwiejmy *czytaj* nazwijmy.
541	1 na dole, *zamiast* matymatyka *czytaj* matematyka.
645	3 od dołu, *zamiast* R^3 *czytaj* D^3.
675	8 od dołu, *zamiast* FA *czytaj* FA'.
751	5 *zamiast* geomotryi *czytaj* geometryi.

Paryż. — Drukarnia E. Martinet, ulica Mignon, 2.