DER BAUINGENIEUR

23. Jahrgang 5. Juni 1942 Heft 23/24

100 JAHRE ENERGIEPRINZIP.

Von Dr.-Ing. A. Schleusner, Berlin.

DK 531.62 (091)

Die Einheit von Physik und Technik.

Technik und Physik bilden eine untrennbare Einheit. Sie sind zwei Seiten eines und desselben Erscheinungskomplexes im Leben der Menschheit. Die eine ist nicht denkbar ohne die andere, und ihrer beider Geschichte ist die Geschichte ständiger Wechselwirkungen aufeinander. Bald stellen technische Bedürfnisse der Physik Aufgaben, bald öffnet die physikalische Forschung der Technik neue, bis dahin nicht geahnte Möglichkeiten.

Jahrzehnte vergingen nach dem Bau der ersten Dampfmaschine (durch Papin im Jahre 1706), bis Daniel Bernoulli (im Jahre 1738) mit den Grundgedanken der kinetischen Gastheorie die erste physikalische Deutung des technischen Wunders schuf. Als James Watt im Jahre 1777 die inzwischen fast vergessene Dampfmaschine in unvergleichlich vollkommenerer Form zu neuem Leben erweckte, mußten wiederum Jahrzehnte vergehen, ehe Sadi Carnot (im Jahre 1824) die erste physikalische Theorie der Dampfmaschine entwickelte.

Wirkte hier die Technik als Schrittmacher der Physik, so finden wir bei der Funkentelegraphie gerade das umgekehrte Verhältnis. Seit 1865 kannte die Welt Maxwells Theorie der elektromagnetischen Wellen. Aber erst das Jahr 1890 brachte mit dem Kohärer Branlys die erste technische Erfindung, die dem Siegeszug der Funkentelegraphie vorarbeitete, und erst im Jahre 1897 stellte Marconi die erste drahtlose Nachrichtenverbindung her. Und nochmals mußten Jahrzehnte, ausgefüllt mit intensivster physikalischer Forschungsarbeit, vergehen, ehe die Funktechnik, gestützt auf diese Forschungen, ihren stürmischen Siegeszug antreten konnte.

In dem Maße, wie sich auf allen Gebieten die Fülle des menschlichen Wissens häufte, wurde der einzelne Mensch gezwungen, sein Wissen und seine Tätigkeit auf immer enger umgrenzte Teilgebiete zu beschränken. Damit ging vielen Technikern und Physikern das Bewußtsein der Einheit von Technik und Physik verloren, ein Prozeß, der nur beiden zum Schaden gereichen kann. Im Bewußtsein der Besten war und ist diese Einheit immer lebendig, und im großen setzt sie sich notwendig immer wieder durch, allen Hindernissen zum Trotz.

In diesen Tagen aber denken die Physiker und Techniker gemeinsam eines Ereignisses, das mehr als irgendein anderes geeignet ist, ihnen jene Einheit von Technik und Physik bewußt zu machen, weil es wie kein zweites zur gemeinsamen Grundlage all ihres Denkens und Schaffens wurde:

> Vor nunmehr 100 Jahren, im Mai des Jahres 1842, erschien in „Liebigs Annalen" Julius Robert Mayers Aufsatz „Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur", in dem zum erstenmal das Prinzip von der Erhaltung der Energie in unbeschränkter Allgemeinheit ausgesprochen wurde.

Die Begriffe Kraft, Energie und Arbeit.

Mayer selbst spricht noch nicht von „Erhaltung der Energie", sondern von „Erhaltung der Kraft". Wir wollen daher einige Bemerkungen über die Begriffe „Energie" und „Kraft" und über den mit ihnen zusammenhängenden Begriff der „Arbeit" vorausschicken.

Seit dem Ende des 17. Jahrhunderts wurde der Begriff „Kraft" in der Physik in doppeltem Sinne gebraucht. Newton verstand unter Kraft das, was wir heute noch unter diesem Wort verstehen: die Ursache, die eine Änderung im Bewegungszustande eines Körpers herbeiführt. Leibniz dagegen verstand unter Kraft das, was wir heute Energie nennen. Seine „lebendige Kraft" (vis viva) etwa entspricht unserer „kinetischen Energie" oder „Bewegungsenergie". Zwei Jahrhunderte sind diese beiden Kraftbegriffe nebeneinander in der Physik und in der Technik gebraucht worden, und diese Doppelsinnigkeit hat mancherlei Verwirrung und manchen sinnlosen Streit zur Folge gehabt. Wo wir im folgenden dem Leibnizschen Kraftbegriff begegnen, werden wir stets in Klammern den entsprechenden Energiebegriff beifügen.

Der erste, der das Wort „Energie" im heutigen Sinne gebrauchte, um die Leibnizsche „Kraft" von der Newtonschen zu unterscheiden, war Thomas Young, der diese Bezeichnung erstmalig 1807 für die „lebendige Kraft" (kinetische Energie) eines bewegten Körpers einführte. Aber es dauerte noch viele Jahrzehnte, bis in Physik und Technik die reinliche Scheidung der Begriffe vollzogen, das Wort „Kraft" nur noch im Newtonschen Sinne gebraucht, die Leibnizsche „Kraft" dagegen allgemein als „Energie" bezeichnet wurde. Auch Robert Mayer benutzt, wie viele seiner Zeitgenossen, noch den Leibnizschen Kraftbegriff und spricht daher von „Erhaltung der Kraft", wo wir heute von „Erhaltung der Energie" sprechen.

In den Jahrzehnten der Begriffsklärung wurde noch ein weiterer Begriff eingeführt, der der „Arbeit". Zum erstenmal benutzt ihn Poncelet, und zwar im Jahre 1826. Er versteht unter der Arbeit einer Kraft — ebenso wie wir heute — das Produkt aus der Größe der Kraft und der Projektion des von ihr zurückgelegten Weges auf die Kraftrichtung. Im gleichen Sinne gebraucht 1829 auch Coriolis das Wort „Arbeit". Er führte außerdem in das den Technikern wohlbekannte Prinzip der virtuellen Verrückungen, das man damals Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten nannte, den Begriff der „virtuellen Arbeit" an Stelle des von Lagrange geprägten Begriffes der „virtuellen Momente" ein.

Die so definierte „Arbeit" ist wesensgleich mit der Energie, wird daher auch im gleichen Maße gemessen. Dennoch decken sich die beiden Begriffe nicht vollständig. Die Energie eines physikalischen Systems ist gleichbedeutend mit seiner Fähigkeit, Arbeit zu leisten. Sie kommt einem bestimmten System in einem bestimmten Maße als Eigenschaft an sich zu. Arbeit dagegen leisten die Kräfte eines bestimmten Systems erst dann, wenn ihre Angriffspunkte sich bewegen. Betrachten wir ein System, das aus einem lediglich der Schwerkraft unterworfenen Stein von der Masse m besteht, der in der Höhe H über dem Erdboden auf einer starren Unterlage ruht. Das System besitzt eine potentielle Energie, eine Fähigkeit, Arbeit zu leisten, die wir in der klassischen Mechanik durch das Produkt $m \cdot g \cdot H$ ausdrücken können, wobei g die Schwerebeschleunigung der Erde bedeutet. Aber die Kraft dieses Systems, die Schwerkraft, leistet keine Arbeit. Sobald wir jedoch die Unterlage entfernen, beginnt die Schwerkraft Arbeit zu leisten. Das drückt sich darin aus, daß der Stein fällt, sich bewegt, also kinetische Energie (im Leibnizschen Sinne „lebendige Kraft") erhält, und das drückt sich letzten Endes bei dem Aufprall des Steines auf die Erdoberfläche in den Veränderungen aus, die der Aufprall an der Berührungsstelle erzeugt.

Die physikalischen Begriffe „Energie" und „Arbeit" sind also keineswegs miteinander identisch. In der Technik wird jedoch heute häufig der Begriff der „Arbeit" in weiterem Sinne angewendet als in der Physik. Der Techniker nennt mitunter „Arbeit", was der Physiker „Energie" nennt. So bezeichnet man in der Statik die elastische Energie oder Formänderungsenergie eines deformierten elastischen Körpers häufig als „Formänderungsarbeit" oder auch als „Arbeit der inneren Kräfte" und spricht von einem „Minimum der Formänderungsarbeit", wo der Physiker von einem „Minimum der elastischen Energie" sprechen würde. Aber diese Unschärfe in der Begriffsbildung, die sicher besser vermieden würde, kann niemals eine Verwirrung der Art schaffen wie die Doppelsinnigkeit des Wortes „Kraft" im Newtonschen und im Leibnizschen Sinne. Denn Arbeit und Energie sind, wenn auch nicht identisch, so doch im letzten Sinne wesensgleich, ineinander überführbar, während die Newtonsche und die Leibnizsche „Kraft", d. h. Kraft und Energie, zwei grundsätzlich verschiedene, einander wesensfremde Begriffe sind.

Das Prinzip der Erhaltung der Energie.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen über die Begriffe, die uns im folgenden ständig begegenen werden, wenden wir uns nun dem Satz von der Erhaltung der Energie selbst zu. Er besagt in der Form, in der Mayer ihn zuerst aussprach und in der er zur Grundlage nicht nur der klassischen Physik, sondern auch der Technik eines Jahrhunderts wurde, daß

die Energie (ebenso wie die Materie) weder aus nichts erzeugt werden noch in nichts vergehen kann, daß also die Summe der gesamten in der Welt vorhandenen Energie durch keinen Vorgang irgendwelcher Art vermehrt oder vermindert werden kann.

Jede Änderung, die in der Welt vor sich geht, kann also einzig darin bestehen, daß Energie aus einer Form in eine andere Form übergeht.

Wir kennen viele verschiedene Formen der Energie. Als mechanische Energie tritt sie uns in zwei Formen entgegen: als potentielle Energie (Energie der Lage) und als kinetische Energie (Bewegungsenergie). Ferner begegnen wir ihr als Wärmeenergie (der kinetischen Energie bewegter Moleküle), elektrischer Energie, magnetischer Energie, elastischer Energie (der potentiellen Energie gegeneinander verschobener Moleküle in elastischen Körpern), chemischer Energie (der Energie, die die Moleküle oder Atome chemischer Verbindungen aneinanderkettet), Atomenergie (der Energie, die Protonen, Elektronen, Neutronen im Atomverband zusammenhält) und als Strahlungsenergie, d. h. als Arbeitsfähigkeit der elektromagnetischen Wellen (Energie der Radiowellen, der Wärmestrahlung, Lichtenergie, Energie der Röntgen- und der γ-Strahlen usw.). Bei jedem Vorgang in der Welt geht eine gewisse Menge Energie aus einer oder mehrerer dieser Formen in eine oder mehrere andere dieser Formen über.

Der Satz von der Erhaltung der Energie besagt, daß bei diesem Formwechsel keine Energie verloren und keine gewonnen werden kann. Soll dieser Satz konkreten physikalischen Inhalt besitzen, so schließt er die Behauptung ein, daß jede Energieform sich in jede andere in einem ganz bestimmten, unveränderlichen Mengenverhältnis umwandeln läßt, d. h. daß eine bestimmte Menge einer Energieform jeweils einer bestimmten Menge jeder anderen Energieform äquivalent ist. So ist etwa das mechanische Wärmeäquivalent

$$1 \text{ Kal.} = 427 \text{ mkg} \cdot 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}.$$

Diese Gleichung sagt aus: der Energieaufwand, der erforderlich ist, um 1 kg Wasser von 0° C auf 1° C zu erwärmen, ist ebensogroß wie der Energieaufwand, der erforderlich ist, um an einer Stelle der Erde, an der die Schwerbeschleunigung $9{,}81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$ beträgt, ein Gewicht von 427 kg um 1 m zu heben.

Betrachten wir etwa wieder einen Stein der Masse m, der aus der Höhe H über dem Erdboden herabfällt. Befindet er sich in der Höhe H in Ruhe und wirkt einzig die Schwerkraft der Erde auf ihn ein, so schreiben wir diesem System Erde-Stein die potentielle Energie

$$U_0 = m \cdot g \cdot H$$

zu, wo g die Schwerebeschleunigung (die auf der Strecke H als konstant angesehen werden soll) bedeutet. Da unser System andere Formen der Energie nicht besitzen soll, ist seine Gesamtenergie

$$E = U_0 .$$

Ist der Stein bis zur Höhe h gefallen, so ist seine potentielle Energie nur noch

$$U = m \cdot g \cdot h ,$$

die verlorene potentielle Energie

$$U_0 - U = m \cdot g \cdot (H - h)$$

hat sich in kinetische Energie (Bewegungsenergie) T verwandelt. Nach dem Satz von der Erhaltung der Energie muß die Gesamtenergie des Systems

$$E = U + T$$

unverändert geblieben sein. Wir erhalten also die „Energiebilanz"

$$U + T = U_0$$

und daraus die kinetische Energie

$$T = m \cdot g \cdot (H - h) .$$

In dem Augenblick, in dem der Stein den Erdboden berührt, also die Höhe 0 erreicht, ist demnach seine kinetische Energie

$$T_1 = m \cdot g \cdot H ,$$

während aus der Energiebilanz folgt, daß die potentielle Energie des Systems nunmehr gleich Null geworden ist. Ist der Stein auf der Unterlage zur Ruhe gekommen, so ist auch seine kinetische Energie gleich Null geworden. Dafür ist die Unterlage durch den Stoß erwärmt worden. Nehmen wir an, daß der Stein keine weitere Arbeit geleistet hat, so muß nach der Energiebilanz die der Unterlage zugeführte Wärmeenergie

$$W = m \cdot g \cdot H \qquad \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$$

oder nach dem mechanischen Wärmeäquivalent mit $g = 9{,}81 \text{ m sec}^{-2}$

$$W = \frac{m \cdot H}{427} \text{ Kal.}$$

sein.

Jedem Techniker sind heute solche Gedankengänge zur Selbstverständlichkeit geworden. Es gibt technische Lehrbücher, wie etwa Kriemlers „Einführung in die energetische Baustatik", die bewußt ihr ganzes Lehrgebäude auf Robert Mayers Prinzip von der Erhaltung der Energie aufbauen. Aber welcher Baustatiker denkt wohl, wenn er die „Arbeitsgleichung": Arbeit der inneren gleich Arbeit der äußeren Kräfte aufstellt, daran, daß er Robert Mayers weltumspannendes Prinzip der Erhaltung der Energie auf einen kleinen Einzelfall anwendet? Daß ohne dieses Prinzip unsere ganze heutige Physik und Technik nicht möglich wären?

Die Geschichte des Prinzips.

So bedeutend Robert Mayers Leistung war, den Satz von der Erhaltung der Energie zuerst in seiner ganzen Tragweite erkannt und ausgesprochen zu haben, so hatten doch schon Generationen von Physikern dieser Erkenntnis vorgearbeitet.

Schon im 16. Jahrhundert, mehr als 250 Jahre vor Robert Mayer, stand für Physiker vom Range Galileis die Unmöglichkeit des perpetuum mobile unverrückbar fest, d. h. die Unmöglichkeit, aus Nichts Arbeit (oder Energie) zu erzeugen. Diese Überzeugung, gewonnen aus unzähligen fruchtlosen Versuchen, das perpetuum mobile zu konstruieren, war der erste wichtige Schritt auf dem Wege zum Energieprinzip.

Der nächste wichtige Schritt auf diesem Wege war das Gesetz von der „Erhaltung der lebendigen Kraft" (d. h. der kinetischen Energie), das mehr als 100 Jahre vor Robert Mayer von Johann Bernoulli zuerst in beschränkter Form formuliert und später von Euler und Daniel Bernoulli (Johanns

Sohn) erweitert wurde. Dieses Prinzip besagt, daß bei einem System von Massenpunkten, zwischen denen Zentralkräfte wirken, die kinetische Energie jedes einzelnen Punktes nur von der geometrischen Konfiguration des Systems abhängt, gleichgültig, auf welchem Wege diese hergestellt werde, und daß die Zunahme der gesamten kinetichen Energie gleich der Arbeit ist, die die Kräfte bei der Änderung der Konfiguration leisten. Das ist bereits das Prinzip der Erhaltung der Energie, jedoch beschränkt auf rein mechanische Systeme.

Der erste, der die mechanischen Grenzen überschreitet, ist Sadi Carnot. In seiner im Jahre 1824 erschienenen Schrift „Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers und die zur Entwicklung dieser Kraft geeigneten Maschinen" untersucht er die Bedingungen, unter denen sich Wärme in Arbeit verwandelt, und das quantitative Verhältnis dieser Umwandlung. Mit dieser Fragestellung stößt Carnot schon dicht bis zu der Mayers vor. Nur eine unglückliche Befangenheit in der materiellen Wärmetheorie, die seine Zeit beherrschte, hinderte ihn, sofort auf das Prinzip von der Erhaltung der Energie zu stoßen.

Carnot stellte sich die Wärme wie die meisten zeitgenössischen Physiker materiell, d. h. als ein Fluidum, einen Stoff, vor. Diese Wärme fließt von Stellen höherer zu solchen niederer Temperatur; dabei leistet die fließende Wärmemenge nach Carnot eine Arbeit, die dem Beispiel des fließenden Wassers gemäß gleich ist dem Produkt aus der Wärmemenge und der von ihr durchlaufenen Temperaturdifferenz. Nach Carnots allzu frühem Tode (1832) hat Clapeyron auf Grund der Carnotschen Theorie das mechanische Wärmeäquivalent experimentell bestimmt und fand, daß das Fließen einer Kalorie vom Niveau 1° C auf das Niveau 0° C eine Arbeit leistet, die gleich ist der Arbeit, die aufgewendet werden muß, um 1,41 kg um 1 m zu heben. Will man diese Zahl 1,41 kg/m nachträglich von dem Fehler befreien, der zu Lasten der falschen Vorstellung vom Wesen der Wärmeenergie geht, so muß man sie mit der absoluten Temperatur des schmelzenden Eises, also mit 273 multiplizieren und erhält dann 370 kg/m, einen guten Näherungswert für das mechanische Wärmeäquivalent, einen besseren als Robert Mayer erhielt. So nah war Carnot der Wahrheit! Aber seine Wärmetheorie machte es ihm unmöglich, sie zu erkennen. Nach dieser Theorie bleibt die Wärmemenge, da sie Materie ist und die Materie unzerstörbar ist, bei der Arbeit, die sie in der Dampfmaschine leistet, unverändert. Sie sinkt nur auf ein tieferes Temperaturniveau.

Wir wissen heute, daß die Wärmemenge gleichbedeutend mit der Wärmeenergie ist. Bleibt sie unverändert, während sie Arbeit leistet, so wäre die Dampfmaschine ein perpetuum mobile. Auf der Unmöglichkeit eines solchen aber baut Carnot alle Schlüsse der genannten Schrift auf. Es war also unabwendlich, daß er sich in unlösbare Widersprüche verwickeln mußte. Er hat sie selbst gefühlt, hat selbst darauf aufmerksam gemacht, daß verschiedene Erfahrungen mit der Theorie in Widerspruch stünden, daß diese Widersprüche noch geklärt werden müßten. Die Klärung der Widersprüche hätte ihn notwendig zur Entdeckung des Prinzips von der Erhaltung der Energie geführt. Man kann kaum zweifeln, daß ihm dieser Schritt vor Robert Mayer gelungen wäre, wenn er nicht 1832 im Alter von 36 Jahren gestorben wäre.

Von einer anderen Seite her stieß K. Fr. Mohr bis dicht an die Mayersche Erkenntnis vor. Im Jahre 1837 vertritt er in einem Zeitschriftenaufsatz entschieden den Standpunkt, daß alle „Kräfte" (d. h. alle Arten von Energie) wesensgleich seien und jede in jede andere verwandelt werden könnte. Er nennt als „Erscheinungsarten" der Energie: Bewegung, chemische Affinität, Kohäsion, Elektrizität, Licht, Wärme und Magnetismus. Hätte er diesem Gedanken noch den einen hinzugefügt: daß die Umwandlung der verschiedenen Energiearten ineinander nach ganz bestimmten, unveränderlichen Massen erfolgt, so hätte er das Energieprinzip ausgesprochen.

Aber dieser letzte Schritt war Robert Mayer vorbehalten.

Julius Robert Mayer, Sohn eines Heilbronner Apothekers, war nicht Physiker, sondern Arzt. Als junger Schiffsarzt, im Alter von 26 Jahren, beobachtete er (1840) Veränderungen des menschlichen Blutes in den Tropen. Durch diese Beobachtungen kam er dazu, das Prinzip von der Erhaltung der Energie zu formulieren. Schon 1841, sofort nach seiner Rückkehr in die Heimat, schickte er die schicksalsschwere Niederschrift an „Poggendorfs Annalen". Aber sie wurde dort nicht aufgenommen. Erst ein Jahr später, im Mai 1842, wurde sie in „Liebigs Annalen" abgedruckt.

Mayer nennt in dieser Arbeit drei „Kräfte" (Energieformen): Wärme, Fallkraft (potentielle Energie) und Bewegung (kinetische Energie), die er als wesensgleich und in festen quantitativen Verhältnissen ineinander verwandelbar bezeichnet. Er berechnet auch auf Grund der Versuchsergebnisse anderer das mechanische Wärmeäquivalent zu 365 kg/m. Vielleicht hat ihm gerade die Tatsache, daß er kein Fachphysiker und daher in vielen theoretischen Fragen unbefangener als diese war, den Weg zu seiner großen Erkenntnis erleichtert. Jedenfalls umging er die theoretische Klippe, an der Carnot kurz vor dem Ziel gescheitert war. Vom Wesen der Wärme scheint er überhaupt keine klare Vorstellung besessen zu haben. Darum bemerkte er nicht, daß die materielle Wärmetheorie mit seinem Prinzip unvereinbar war. In der Dampfmaschine wird Wärme in mechanische Energie verwandelt. Nach dem Prinzip von der Erhaltung der Energie muß also Wärme vernichtet werden, äquivalent zu den gewonnenen Mengen mechanischer Energie. War die Wärme Materie, so bedeutete dies Vernichtung von Substanz, und das Prinzip von der Erhaltung der Energie hätte nur gewonnen werden können um den Preis der Aufgabe des Prinzips von der Erhaltung der Substanz. Auf der anderen Seite aber kam Mayer auch nicht zur kinetischen Wärmetheorie. Ja, er sagt geradezu, daß man aus der Möglichkeit, kinetische Energie und Wärme ineinander zu verwandeln, nicht etwa schließen dürfe, daß Wärme Bewegung sei.

Hat der Mangel an physikalischer Fachbildung hier Mayer vor großen theoretischen Schwierigkeiten behütet, so ist er auf der anderen Seite die Ursache dafür, daß Mayers Darstellung und Begründung des Prinzips nicht physikalisch exakt, sondern metaphysisch, ja verschwommen und teilweise sehr schwach ist. Diese Mängel dürften hauptsächlich dafür verantwortlich sein, daß Mayer von der Fachwelt lange nicht beachtet wurde und sich erst nach vielen Jahren schmerzlicher Erlebnisse und Erfahrungen durchsetzen konnte. Zuerst wurde er dank Tyndalls unerschrockenem Kampf in England anerkannt, später auch in Deutschland, wo sein unvergängliches Verdienst schließlich durch die Erhebung in den Adelsstand gewürdigt wurde.

Im Jahre 1845 dehnte Mayer die Gültigkeit des Energieprinzips in seiner Schrift „Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhang mit dem Stoffwechsel" auch auf die belebte Natur aus, untersuchte insbesondere den Energieaustausch zwischen Pflanze und Tier. In dieser Arbeit nennt er sechs „Kräfte" (d. h. Energiearten): Fallkraft (potentielle Energie), Bewegung (kinetische Energie), Wärme, Magnetismus, Elektrizität und chemische Differenz.

In einer dritten Schrift vom Jahre 1848, „Beiträge zur Dynamik des Himmels", wendet er den Energiesatz auch auf kosmologische Fragen an. Er gibt dort die erste rationelle, wenn auch letzten Endes nicht aufrechtzuerhaltende Erklärung für die Sonnenwärme, erklärt das Leuchten der Meteore durch die Reibung mit der atmosphärischen Luft und weist darauf hin, daß Energie, die man aus dem Wechsel von Ebbe und Flut gewinnen würde, nur auf Kosten der kinetischen Rotationsenergie der Erde gewonnen werden könnte.

Kurz nach Robert Mayer und wahrscheinlich unabhängig von ihm wie voneinander fanden auch Youle, Colding und Helmholtz das Prinzip von der Erhaltung der Energie. In dem Vortrag, den Helmholtz am 23. Juli 1847 vor der physikalischen Gesellschaft in Berlin hielt, gab er dem Prinzip die restlos klare physikalische Formulierung. Helmholtz läßt dabei nur noch zwei Arten von Energie gelten: Kinetische Energie (dazu rechnet er sichtbare Bewegung, Licht, Wärme) und potentielle Energie (Hebung eines Gewichts, elastische und elektrische „Spannkraft" — d. h. Energie —, chemische Differenz usw.).

Nachdem das Prinzip so in exakte physikalische Form gebracht worden war, trat es seinen unwiderstehlichen Siegeszug an. Es stellte die ganze Physik auf eine neue Grundlage, und es schuf sowohl direkt wie auch indirekt durch die neue Entwicklung der Physik die Voraussetzungen für eine ungeahnte Entfaltung der Technik. Heute gibt es keinen Techniker und keinen Physiker mehr, der das Prinzip von der Erhaltung der Energie anzweifeln würde. Ja, manche physikalische Hypothese wurde einzig zu dem Zweck aufgestellt, um neue experimentelle Ergebnisse mit dem Prinzip in Einklang bringen zu können. Diese unerschütterliche Achtung vor dem Energieprinzip hat sich immer gelohnt. Was ihm zuliebe als Hypothese eingeführt worden war, konnte später stets als Wirklichkeit bestätigt werden.

Als um die Jahrhundertwende die Radioaktivität entdeckt wurde, schien es zunächst, als stünde diese fortwährende Ausstrahlung von Energie im Widerspruch zu dem Energieprinzip. Um diesen Widerspruch zu beseitigen, mußte man die bisherigen Anschauungen vom Bau der Atome über Bord werfen und sich ein ganz neues Bild von ihm machen. Durch hunderte von Versuchen ist inzwischen dieses Bild als der Wirklichkeit entsprechend bestätigt worden.

Vielleicht noch umstürzender waren die Folgerungen, die aus dem lichtelektrischen Effekt gezogen werden mußten. Dieser Effekt, der erstmalig schon im Jahre 1888 beobachtet wurde, besteht darin, daß kurzwellige Lichtstrahlen, insbesondere ultraviolette Strahlen, beim Auftreffen auf blanke Metallflächen aus diesen Elektronen auslösen, die mit erheblichen Geschwindigkeiten in den Raum geschleudert werden. Als es 1912 gelang, diese Vorgänge quantitativ genau zu untersuchen, stellte sich heraus, daß das Energieprinzip anscheinend nicht gewahrt war. Es gab nur einen Weg, die Energiebilanz wieder herzustellen: man mußte eine der größten Errungenschaften des vorangegangenen Jahrhunderts preisgeben, die Theorie von der Wellennatur des Lichts, und mußte zu der Annahme zurückkehren, daß das Licht aus winzigen Korpuskeln, den Photonen, zusammengesetzt sei. Und diese Hypothese, zunächst nur eingeführt, um den lichtelektrischen Effekt mit dem Energieprinzip in Einklang bringen zu können, wurde bald darauf durch eine große Anzahl von Versuchen einwandfrei bestätigt.

In der jüngsten Zeit erst (1936) haben Fermi und Pauli, um die Energiebilanz beim radioaktiven β-Zerfall zu sichern, hypothetisch die Existenz eines neuen stofflichen Urteilchens, des Neutrino, eingeführt. Man braucht nicht daran zu zweifeln, daß auch dieses, allein um des Energieprinzipes willen eingeführte Neutrino eines Tages als wirklich existierend nachgewiesen werden wird.

Nur von einer Seite her hat das Energieprinzip selbst sich eine entscheidende Umformung gefallen lassen müssen: durch die allgemeine Relativitätstheorie. Aber diese Umformung bedeutet weder seine Aufhebung noch auch nur eine Einschränkung seines Gültigkeitsbereiches. Sie bedeutet vielmehr seine Erweiterung zu einem wahrhaft allumfassenden physikalischen Prinzip.

Robert Mayer und Helmholtz kannten wie die ganze klassische Physik nur Energiedifferenzen, aber keine absolute Energie. Man konnte wohl genau angeben, um welchen Betrag sich die Energie eines Systems bei einem bestimmten Vorgang ändert, aber nicht, welche Menge an Energie es besitzt. Bei der letzten Angabe blieb stets eine additive Konstante, gewissermaßen der Anfangspunkt der Energiemessung, willkürlich.

Erst die allgemeine Relativitätstheorie führt den absoluten Energiebegriff ein, indem sie jede Masse m äquivalent einem wohlbestimmten Energiequantum von der Größe $m \cdot c^2$ setzt, wobei c die Geschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen bedeutet ($300\,000$ km $\cdot$ sec^{-1}).

Dadurch wird alle Materie ebenfalls zu nichts anderem als einer besonderen Erscheinungsform der Energie. Bezeichnen wir mit E die Summe aller Energie der Welt, mit M die Summe aller Masse in der Welt, Energie und Masse im Sinne der klassischen Physik verstanden, so können wir das klassische Energieprinzip Robert Mayers durch die Gleichung

$$E = \text{const.}$$

ausdrücken, während das neue, relativistische Energieprinzip durch die Gleichung

$$E + M \cdot c^2 = \text{const.}$$

ausgesprochen wird.

Nicht die Summe aller Energie, sondern diese Summe, vermehrt um die mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit multiplizierte Summe aller Massen, ist eine unveränderliche Größe, der kein Vorgang in der Welt etwas hinzufügen oder nehmen kann.

Aus der Äquivalenz der Masse mit der Energie folgt, daß auch beide ineinander verwandelbar sein müssen, und zwar in einem bestimmten quantitativen Verhältnis. Dies ist zunächst nur eine Folge der relativistischen Form des Energieprinzips. Im Jahre 1934 aber ist auch diese Folge aus dem Energieprinzip experimentell bestätigt worden. Das Ehepaar Joliot-Curie beobachtete in diesem Jahr die Umwandlung eines γ-Quants (eines elementaren Energiequantums der γ-Strahlen) in ein Elektronenzwillingspaar (d. h. in ein Elektron und ein Positron), also in Materie. Im selben Jahr beobachtete Thibaud den umgekehrten Vorgang, das Verschwinden eines Elektronenzwillingspaares bei gleichzeitigem Auftreten eines γ-Quants, also die Umwandlung von Materie in Energie.

In seiner relativistischen Form hat Robert Mayers Prinzip von der Erhaltung der Energie seine höchste Vollendung erfahren. Es hat das Prinzip von der Erhaltung der Substanz, das ihm bis dahin als gleichwertiges Korrelat zur Seite gestanden hatte, in sich aufgenommen und ist damit zu einem allumfassenden Prinzip geworden, dem schlechthin alle Vorgänge in der Welt unterworfen sind.

Blicken wir auf die letzten 100 Jahre technischer und physikalischer Entwicklung zurück, so sehen wir zahllose, bedeutende, ja gewaltige physikalische Entdeckungen und technische Erfindungen. Keine unter ihnen aber reicht an Breite des Geltungsbereiches oder an Tiefe der Wirkung auch nur entfernt an das Prinzip von der Erhaltung der Energie heran. Und so können wir rückschauend sagen, daß dieses Jahrhundert, das mit Robert Mayers Veröffentlichung vom Mai 1842 begann, gleichermaßen vom Standpunkt des Physikers wie von dem des Technikers nicht besser, nicht umfassender bezeichnet werden kann als das

Jahrhundert des Energieprinzips.

DIE KNICKSICHERHEIT DES STÜTZENROSTES.

Von Prof. Dr.-Ing. K. Gaede, Hannover.

DK 624.075.22

Übersicht: Unter Benutzung der Energiemethode wird die Knickkraft des gedrückten Stützenrostes ermittelt. Das Ergebnis ist in den Gl. 43) enthalten, die eine schrittweise, beliebig weit zu treibende Verbesserung der Lösung gestatten.

1. Aufgabenstellung.

Zur Vergrößerung ihrer Tragfähigkeit werden schlanke Druckstäbe häufig in einem oder mehreren Zwischenpunkten seitlich abgestützt. Wird der oben und unten gelenkig gelagert angenommene Knickstab von der Länge L durch genügend steife Zwischenstützungen in i gleiche Teile geteilt, so kann die wirksame Knicklänge l_K auf $\frac{L}{i}$ herabgesetzt, die Knickkraft bis auf den i^2fachen Betrag des ungestützten Stabes erhöht werden. Ist die Abstützung weicher als zur Erzwingung der Ausknickung in i Halbwellen erforderlich, so knickt der Stab in $i - 1$, $i - 2$ . . . . 2, 1 Halbwelle aus. Die Knickkraft nimmt dabei ab und nähert sich bei sehr weicher Stützung dem unteren Grenzwert $Q = \frac{\pi^2 E J}{L^2}$, d. h. der Knickkraft des beiderseits gelenkig gelagerten, seitlich nicht gehaltenen Stabes.

Derart gestützte Stäbe kommen z. B. in den Ständerrüstungen des Hoch- und Ingenieurbaus vor [1]. In der Regel werden derartige Rüstungen so ausgebildet, daß nur einige Längs- und Querreihen durch in ihren Ebenen angeordnete Schrägenverbände räumlich festgelegt werden, während die Stützen der Zwischenreihen durch waagrechte aufgenagelte Bretter gegen die — als im Raume festliegend anzusehenden — Punkte der versteiften Stützenreihen abgestützt werden. Es ergibt sich so ein „Stützenrost", bestehend aus einer Anzahl senkrechter „Stützen", die durch eine Reihe waagrechter „Balken" (in unserem Beispiel die flach in der Eebne des Rostes liegenden Bretter) gegen Ausweichen aus der Rostebene gehalten sind. Diese Abstützung ist verhältnismäßig weich und genügt in vielen Fällen nicht zur unverrückbaren Festlegung der Stützpunkte. Es liegt deshalb ein besonderer Fall von punktweise elastisch gestützten Druckstäben vor. Das dadurch gegebene Stabilitätsproblem bereitet gewisse Schwierigkeiten. Es war wegen der großen praktischen Bedeutung dieser Frage erwünscht, sie zu klären und vor allem auch ein leicht

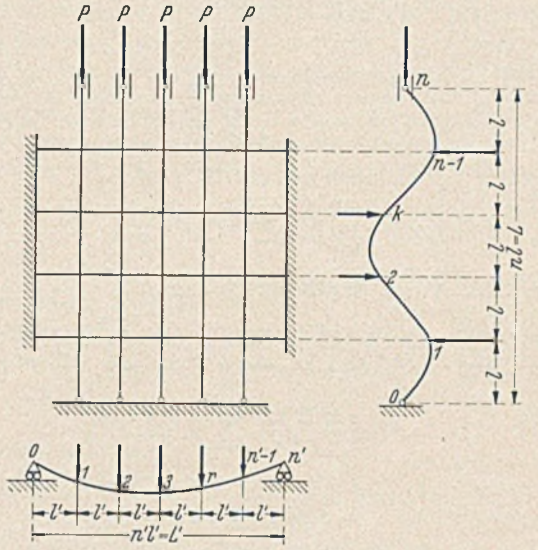

Abb. 1. Stützenrost.

zu handhabendes Berechnungsverfahren anzugeben. Die Anregung zu dieser Arbeit gab der techn. Aufsichtsbeamte der Bauberufsgenossenschaft F. Düsterhaus, Wuppertal-Elberfeld. Eine eingehende Behandlung der Knickfestigkeit der Stützenroste erschien geboten, weil die von mir in der Quelle 1 gemachten Angaben nur zur Berechnung einiger Knickfälle genügen und durch die Behandlung des mehrwelligen Knickens ergänzt werden müssen.

Es soll zur Vereinfachung des Rechnungsganges angenommen werden, daß die Stützen in gleichen Abständen l' angeordnet sind, desgleichen die Querbalken in gleichen Abständen l. Die Felderzahl sei n' bzw. n. Die auf die Stablänge unveränderlichen Trägheitsmomente für die in der Rost-Ebene liegenden Schwerachsen der Stützen- und Balken-Querschnitte seien J und J' (vgl. Abb. 1). Durch diese Annahmen ist die Aufgabe so weitgehend vereinfacht, daß eine Ableitung ohne Benutzung allgemeiner Ansätze [2] möglich und zweckmäßig erscheint. Es sei schon hier darauf hingewiesen, daß die Ableitung mit geringen Änderungen auf den in gleichen Abständen durch Querstützen gleicher Elastizität gestützten Druckstab unveränderlichen Trägheitsmoments übertragen werden kann (vgl. Abschnitt 7).

2. Allgemeine Erläuterung des Rechnungsganges.

Die strenge Lösung geht von der Differentialgleichung der Biegelinien der den Rost bildenden Stäbe aus. Die Integrationskonstanten werden aus den durch die Aufgabe gegebenen Randbedingungen erhalten. Dieser Weg erfordert schon bei einer recht einfachen Stützenanordnung einen großen Rechenaufwand [3]. Er führt auch nicht zu bequemen Annäherungslösungen.

Hierfür ist besonders geeignet die sog. Energiemethode, die bekanntlich darauf beruht, daß man für eine sehr kleine Verbiegung die von dem System aufgenommene Energie bestimmt. Zwischen den möglichen Verbiegungen ist diejenige auszuwählen, welche die kleinste potentielle Energie und damit die kleinste Knickkraft liefert. Das hierin liegende Variationsproblem wird nach Ritz dadurch gelöst, daß man für die Verbiegungen eine Summe von Ansätzen benutzt, die die Randbedingungen der Aufgabe erfüllen und deren Festwerte f_i so bestimmt werden, daß sie die potentielle Energie A zu einem Minimum machen. Di Bedingung $\frac{\partial A}{\partial f_i} = 0$ liefert für q unbekannte Festwerte q lineare Bestimmungsgleichungen. Diese sind homogen und ergeben deshalb nur dann endliche Werte, wenn die Nennerdeterminante verschwindet. Aus dieser Bedingung, die die Knickbedingung darstellt, kann die Knickbelastung ermittelt werden.

Für die Biegelinien der ausgeknickten Stützen werden zweckmäßig Folgen von Sinusfunktionen:

$$v = \sum_{i=1}^{i=q} f_i \sin \frac{i \pi y}{L} \tag{1}$$

angesetzt.

Beim Ausknicken des Rostes verbiegen sich auch die Querbalken. Dabei geben die ausknickenden Stützen an den Kreuzungspunkten quer zur Ebene des Rostes gerichtete Drücke an die Querbalken ab, die der Durchbiegung des Querbalkens an der betreffenden Stelle verhältnisgleich sind. Es bereitet keine Schwierigkeiten, die Biegelinien der Querbalken und die von ihnen aufgenommene Energie streng zu berechnen. Es genügt aber für unsere Zwecke der einfache Ansatz

$$w = W \cdot \sin \frac{\pi x}{L'}, \tag{2}$$

worin W die Ausbiegung in der Symmetrieachse des Rostes bedeutet.

Die nach diesem Ansatz berechnete Biegungsenergie der Querbalken weicht nur bei einer Stütze von dem strengen Werte merklich ab, und zwar um etwa 1,5%. Der Einfluß auf das Ergebnis ist noch wesentlich geringer, weil die Querbalken infolge ihres im Verhältnis zu den Stützen geringen Trägheitsmomentes in der Regel nur einen kleinen Bruchteil der gesamten Biegungsenergie liefern.

An den Kreuzungspunkten stimmen die Verschiebungen v der Stützen mit den Durchbiegungen w der Querbalken überein. Durch die Gl. (2) ist deshalb auch das Verhältnis der Durchbiegungen v der Stützen und damit das Verhältnis der Festwerte f_i der einzelnen Stützen festgelegt. Es gilt:

$$f_{ik} = F_i \sin \frac{\pi x_k}{L'} = F_i \sin \frac{\pi \cdot k l'}{n' l'} = F_i \cdot \sin \frac{\pi k}{n'}, \tag{3}$$

worin F_i den Festwert für die mittelste Stütze (oder bei gerader Stützenzahl denjenigen einer gedachten Stütze in der Symmetrieachse) und x_k den Abstand der betrachteten Stütze k vom linken Rande des Rostes bedeuten.

Aus (1) bis (3) erhält man:

$$v_k = \sin \frac{\pi k}{n'} \cdot \sum_{i=1}^{i=q} F_i \sin \frac{i \pi y}{L}, \tag{4}$$

$$W_r = \sum_{i=1}^{i=q} F_i \sin \frac{i \pi y_r}{L} = \sum_{i=1}^{i=q} F_i \sin \frac{i \pi r}{n}, \tag{5}$$

[1] Gaede: Die Standsicherheit von Schalungsgerüsten. Die Bauindustrie 8 (1940) S. 30, 52, 74. — Bautechn. Mitt. des Dtsch. Beton-Vereins (1940), 1, S. 1.

[2] Bleich, H. u. F.: Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung des punktweise elastisch gestützten Stabes. Stahlbau 10 (1937) S. 17 u. 28.

[3] Klemperer u. Gibbons: Z. angew. Math. Mech. 13 (1933) S. 251; Timoschenko: Theory of elastic stability, 1. Aufl. New York-London 1936, S. 96—108.

(6) $$w_r = \sin\frac{\pi x}{L'} \cdot \sum_{i=1}^{i=q} F_i \sin\frac{i\pi r}{n}.$$

Hiermit sind alle Verschiebungen durch q F_i-Werte ausgedrückt.

3. Berechnung der Energiebeträge.

a) Arbeit A_a der äußeren Kräfte P

(7) $$A_a \sum_{k=1}^{k=n'-1} P_K \cdot \Delta L_K = P \sum_{k=1}^{k=n'} \Delta L_k.$$

Die Belastung der einzelnen Stützen ist übereinstimmend für alle Stützen zu P vorausgesetzt. Da die Verkürzung ΔL_n, null ist, kann zur Vereinfachung der Schreibweise die Summe von k = 1 bis k = n' statt n' — 1 erstreckt werden.

Die Verkürzung ΔL des nach v = f (y) sich verbiegenden Stabes ist:

(8) $$\Delta L = \int_0^L ds - \int_0^L dy = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2} \cdot dy - L = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 dy.$$

Für die Mittelstütze wird mit dem Ansatz (4)

$$\Delta L_{n'/2} = \frac{1}{2}\int \left(\sum_i F_i \frac{i\pi}{L} \cos\frac{iy\pi}{L}\right)^2 dy = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sum_i \sum_j i j \cdot F_i F_j \int_0^L \cos\frac{i\pi y}{L} \cdot \cos\frac{j\pi y}{L}\, dy.$$

In dieser Doppelsumme sind für i und j alle ganzen Zahlen von 1 bis q einzusetzen. Es verschwinden, wie leicht nachzuweisen ist, die Integrale mit ungleichen Indices, während die Integrale mit gleichen Indices ergeben:

(9) $$\int_0^L \left(\cos\frac{iy\pi}{L}\right)^2 dy = \frac{L}{i\pi}\left[\frac{1}{4}\left(\sin\frac{iy\pi}{L}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{i\pi y}{L}\right]_0^L = \frac{L}{i\pi} \cdot \frac{1}{2} i\pi = \frac{L}{2}.$$

Somit

$$\Delta L_{n'/2} = \frac{\pi^2}{4L} \cdot \sum_i i^2 F_i^2.$$

Unter Beachtung von (3) wird die Verkürzung der Stütze k:

(10) $$\Delta L_k = \frac{\pi^2}{4L}\sum_i i^2 \cdot f_{ik}^2 = \frac{\pi^2}{4L}\sum_i i^2 \cdot F_i^2 \cdot \left(\sin\frac{\pi k}{n'}\right)^2.$$

Dieser Wert wird in (7) eingesetzt:

(11) $$A_a = P \cdot \frac{\pi^2}{4L}\sum_{k=1}^{k=n'} \left(\sin\frac{\pi k}{n'}\right)^2 \cdot \sum_i i^2 F_i^2.$$

Hierin ist der erste Summenausdruck:

$$\sum_{k=1}^{k=n'} \left(\sin\frac{\pi k}{n'}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_1^{n'}\left(1 - \cos\frac{2\pi k}{n}\right) = \frac{n'}{2} - \sum_1^{n'} \cos\frac{2\pi k}{\pi'}$$

$$\sum_1^{n'} \cos\frac{2\pi k}{n} + \sum_1^{n'} i \sin\frac{2\pi k}{n'} = \sum_1^{n'} i^{\frac{2\pi k}{e^{n'}}} = \frac{2i\pi}{e^{n'}}\left[1 + \left(\frac{2i\pi}{e^{n'}}\right)^1 + \left(\frac{2i\pi}{e^{n'}}\right)^2 \dots + \left(\frac{2i\pi}{e^{n'}}\right)^{n'-1}\right] = e^{\frac{2i\pi}{n'}} \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n'}}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{2i\pi}{n'}} - e^{\left(\frac{2i\pi}{n'} + 2i\pi\right)}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n'}}} = \frac{e^{\frac{2i\pi}{n'}} - e^{\frac{2i\pi}{n'}}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n'}}} = 0.$$

(An dieser Stelle bedeutet $i = \sqrt{-1}$).

Somit sind sowohl das reelle wie das imaginäre Glied der komplexen Summe und damit $\sum_1^{n'} \cos\frac{2\pi k}{n'} = 0$. Hiermit wird:

(12) $$\sum_{k=1}^{k=n'} \left(\sin\frac{\pi k}{n'}\right)^2 = \frac{n'}{2}.$$

(13) $$A_a = \frac{P\pi^2 n'}{8L}\sum_i i^2 F_i^2.$$

b) Arbeit A_i der Stützen.

Für die mittelste Stütze ist das Biegungsmoment:

(14) $$M_{n'/2} = -EJ \cdot \frac{d^2 v}{dy^2} = EJ \sum_i F_i \frac{i^2\pi^2}{L^2} \sin\frac{iy\pi}{L}$$

und die Formänderungsarbeit:

(15) $$\Delta A_{i,n'/2} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M_{n'/2}^2}{EJ} dy = \frac{\pi^4 EJ}{2L^4}\int_0^L \left(\sum_i F_i i^2 \sin\frac{iy\pi}{L}\right)^2 dy = \frac{\pi^4 EJ}{2L^4} \cdot \sum_i \sum_j i^2 j^2 F_i F_j \int_0^L \sin\frac{iy\pi}{L} \cdot \sin\frac{jy\pi}{L}\, dy.$$

Ebenso wie in Gl. (3 a) verschwinden auch hier die Integrale mit ungleichen Indices. Das Integral

$\int_0^L \left(\sin\frac{iy\pi}{L}\right)^2 dy$ hat den Wert $+\frac{L}{2}$.

Hiermit wird:

(16) $$\Delta A_{i,n'/2} = \frac{\pi^4 EJ}{4L^3}\sum_i F_i^2 i^4$$

Für die Stütze k ist ähnlich wie bei Gl. (10)

(17) $$\Delta A_{i,k} = \frac{\pi^4 EJ}{4L^3} \cdot \sum_i F_i^2 \left(\sin\frac{\pi k}{n'}\right)^2 \cdot i^4$$

und hiermit die Arbeit sämtlicher Stützen

$$A_i = \sum_{k=1}^{k=n'} \Delta A_{i,k} = \frac{\pi^4 EJ}{4L^3}\sum_i F_i^2 \cdot i^4 \cdot \sum_{k=1}^{k=n'} \left(\sin\frac{\pi k}{n'}\right)^2.$$

(18) $$A_i = \frac{\pi^4 EJ n'}{8L^3}\sum_i F_i^2 i^4.$$

c) Die Arbeit A'_i der Querriegel.

Unter Beachtung von Gl. (2) ist für den r-ten Querriegel:

(19) $$M'_r = -EJ'\frac{d^2 w_r}{dx^2} = -EJ \cdot W_r \sin\frac{\pi x}{L'}$$

und die Formänderungsarbeit:

(20) $$\Delta A'_i = \frac{1}{2}\int_0^{L'} \frac{M_r'^2\, dx}{EJ} = \frac{EJ \cdot W_r^2 \pi^4}{4L'^4}\int_0^{L'} \left(\sin\frac{\pi x}{L'}\right)^2 dx = \frac{EJ W_r^2 \pi^4}{2L'^4} \cdot \frac{L'}{2} = \frac{EJ W_r^2 \pi^4}{4L'^3}.$$

Unter Beachtung von Gl. (5):

(21) $$\Delta A'_i = \frac{EJ'\pi^4}{4L'^3}\left(\sum_i F_i \sin\frac{i\pi r}{n}\right)^2.$$

Wenn auch hier in der Summe ein n-ter unverformter Querbalken einbezogen wird, ergibt sich die Arbeit der n—1 Querbalken zu:

$$A'_i = \frac{EJ'\pi^4}{4L'^3}\sum_{r=1}^{r=n}\left(\sum_i F_i \cdot \sin\frac{i\pi r}{n}\right)^2 = \frac{EJ'\pi^4}{4L'^3} \cdot \sum_i \sum_j F_i F_j \cdot \sum_{r=1}^{n} \sin\frac{i\pi r}{n} \cdot \sin\frac{j\pi r}{n}.$$

(22) $$A'_i = \frac{EJ'\pi^4}{4L'^3}\sum_i \sum_j F_i F_j \alpha_{ij}.$$

Hierin bedeutet:

(23) $$\alpha_{ij} = \sum_{r=1}^{r=n} \sin\frac{i\pi r}{n} \cdot \sin\frac{j\pi r}{n}$$

und:

$$(24)\quad \sum_i \sum_j F_i F_j \cdot \alpha_{ij} = (F_1 F_1 \alpha_{11} + F_1 F_2 \alpha_{12} + F_1 F_3 \alpha_{13} + \ldots)$$
$$+ (F_2 F_1 \alpha_{21} + F_2 F_2 \alpha_{22} + F_2 F_3 \alpha_{23} \ldots) + (F_3 F_1 \alpha_{31} + \ldots).$$

Diese α_{ij}-Werte können, wenn man sich, wie hier vorausgesetzt wurde, auf den Fall beschränkt, daß die Druckstäbe durch die Querriegel in n gleiche Teile geteilt werden, ohne weitere Rechnung sofort angeschrieben werden. Wie leicht nachzuweisen ist, verschwindet der größte Teil der α_{ij}, während die verbleibenden nur die Werte + oder — $^n/_2$ annehmen, und zwar gelten hierfür folgende

Regeln für α_{ij}.

1. Mit der Ausnahme zu (2) werden alle α_{ij} mit gleichen Indices $+ n/2$, also:
$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots \alpha_{ii} = \alpha_{jj} = n/2 \text{ (vgl. (12)}.$$
2. Ist einer der beiden Indices (oder beide) gleich n oder einem ganzen Vielfachen (m) von n, so ist $\alpha_{ij} = \alpha_{jj} = 0$.

   Für $j = m \cdot n$ wird: $\sin \frac{j r \pi}{n} = \sin m r \pi = 0$, weil m und r nach Voraussetzung ganze Zahlen sind. Somit
$$\Sigma \sin \frac{i r \pi}{n} \cdot \sin \frac{j r \pi}{n} = 0.$$
3. Mit den Ausnahmen zu (4) und (5) sind alle α-Werte mit verschiedenen Indices gleich Null.

   a) Ein Index ist gerade, der andere ungerade. Dann ist die eine Sinusfunktion anti-, die andere symmetrisch. Deshalb verschwindet die Summe der Produkte ihrer Ordinaten.

   b) Sind beide Indices entweder gerade oder ungerade, so kann man die Summe der Produkte der Sinus umschreiben in:
$$\sum_1^n \sin \frac{i r \pi}{n} \cdot \sin \frac{j r \pi}{n} = \frac{1}{2} \sum_1^n \cos \frac{(i-j) r \pi}{n} - \frac{1}{2} \sum_1^n \cos \frac{(i+j) r \pi}{n}.$$
   Hierin sind $i-j$ und $i+j$ gerade ganze Zahlen. Deshalb sind beide Summen gleich Null (vgl. 12).
4. Ist der Unterschied zwischen i und j gleich 2n oder einem ganzen Vielfachen (k) von 2n ($j = 2kn + i$), so ist
$$\alpha_{ij} = \alpha_{i,\, i+2kn} = \frac{n}{2},$$
   denn dann wird:
$$\sin \frac{j r \pi}{n} = \sin \frac{(i + k n) r \pi}{n} = \sin \left(\frac{i r \pi}{n} + 2 k r \pi\right) = \sin \frac{i r \pi}{n}.$$
   Damit ist dieser Fall auf Fall 1 zurückgeführt.
5. Ist j um ebenso viel größer als n oder das k-fache von n, wie i kleiner ist als n bzw. das k-fache von n ($i = kn - m$, $j = kn + m$, $j = 2kn - i$), so wird $\alpha_{ij} = -\frac{n}{2}$,

   denn es ist bei $i = kn - m$ und $j = kn + m$:
$$\sum \sin \frac{i r \pi}{n} \cdot \sin \frac{j r \pi}{n} = \sum \sin \frac{(kn - m) r \pi}{n} \cdot \sin \frac{(kn + m) r \pi}{n} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum \cos \frac{[(kn + m) - (kn - m)] r \pi}{n} -$$
$$- \frac{1}{2} \sum \cos \frac{[(kn + m) + (kn - m)] r \pi}{n} = \frac{1}{2} \sum \cos \frac{2 m r \pi}{n} -$$
$$- \frac{1}{2} \sum \cos \frac{2 k n r \pi}{n} = 0 - \frac{1}{2} \sum_1^n \cos 2 k r n = -\frac{n}{2}.$$

Hiernach ergeben sich beispielsweise folgende α_{ij}-Werte:

$$n = 2$$
$$\alpha_{1,1} = \alpha_{3,3} = \alpha_{5,5} = \alpha_{7,7} = \ldots\ldots = \frac{2}{2} = 1$$
$$\alpha_{1,5} = \alpha_{1,9} = \alpha_{1,13} = \alpha_{3,7} = \alpha_{5,9} = \ldots\ldots = +1$$
$$\alpha_{1,3} = \alpha_{1,7} = \alpha_{3,5} = \alpha_{3,9} = \alpha_{5,7} = \ldots\ldots = -1.$$

Alle anderen α_{ij} verschwinden.

$$n = 3$$
$$\alpha_{1,1} = \alpha_{2,2} = \alpha_{4,4} = \alpha_{5,5} = \alpha_{7,7} = \alpha_{8,8} \ldots\ldots = + \frac{3}{2} = 1{,}5$$
$$\alpha_{1,7} = \alpha_{2,8} = \alpha_{4,10} = \alpha_{5,11} = \ldots\ldots 1{,}5$$
$$\alpha_{1,5} = \alpha_{2,4} = \alpha_{1,11} = \alpha_{2,10} = \alpha_{4,8} = \alpha_{5,7} \ldots\ldots = -1{,}5.$$

Alle anderen $\alpha_{ij} = 0$.

4. Aufstellung der Knickbedingung.

Mit Gl. (13), (18) und (22) wird die Gesamtarbeit:

$$A = A_a - A_i - A_i' = \frac{P \pi^2 n'}{8 L} \sum_i i^2 F_i^2 - \frac{\pi^4 E J n'}{8 L^3} \sum_i i^4 F_i^2 -$$
$$- \frac{\pi^4 E J'}{4 L'^3} \sum_i \sum_j F_i F_j \cdot \alpha_{ij}.$$

$$(26)\quad A = \frac{E J \pi^2 n'}{2 L^3} \left(\frac{\pi^2}{4} \frac{P L^2}{\pi^2 E J} \sum_i i^2 F_i^2 - \frac{\pi^2}{4} \cdot \sum_i i^4 F_i^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\pi^2}{2} \frac{J' L^3}{J L'^3 n'} \sum_i \sum_j F_i F_j \alpha_{ij} \right).$$

Zur Abkürzung wird geschrieben:

$$(27\text{a})\quad Q = \frac{\pi^2 E J}{L^2},\ p = \frac{P}{Q} = \frac{P L^2}{\pi^2 E J}.$$
$$(27\text{b})\quad S = \frac{\pi^4 E J'}{n' L'^3},\ s = \frac{S \cdot L}{Q} = \frac{\pi^2}{n'} \cdot \frac{J' L^3}{J \cdot L'^3} = \frac{\pi^2 n^3}{n'^4} \cdot \frac{J' l^3}{J l'^3}.$$

Hiermit geht (26) über in:

$$A = \frac{E J \pi^2 n'}{2 L^3} \left(\frac{\pi^2}{4} \sum_i (p - i^2)\, i^2 F_i^2 - \frac{s}{2} \sum_i \sum_j F_i F_j \alpha_{ij} \right) \text{ und}$$
$$(28)\quad A = \frac{E J \pi^2 n' s}{2 L^3} \left(\frac{1}{2} \frac{\pi^2}{2s} \sum_i (p - i^2)\, i^2 F_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j F_i F_j \alpha_{ij} \right).$$

Die q Festwerte F_i sind so zu bestimmen, daß die Gesamtarbeit zu einem Minimum wird, daß also $\frac{\partial A}{\partial F_i} = 0$ wird. Durch partielle Differentiation von Gl. (28) nach den F_i-Werten erhält man folgende Gruppe von q linearen Gleichungen:

$$(29)\quad \left|\begin{array}{l} \frac{\pi^2}{2s} (p - 1^2)\, 1^2 F_1 - F_1 \alpha_{11} - F_2 \alpha_{12} - F_3 \alpha_{13} - \ldots = 0 \\ \frac{\pi^2}{2s} (p - 2^2)\, 2^2 F_2 - F_1 \alpha_{21} - F_2 \alpha_{22} - F_3 \alpha_{23} - \ldots = 0 \\ \frac{\pi^2}{2s} (p - 3^2)\, 3^2 F_3 - F_1 \alpha_{31} - F_2 \alpha_{32} - F_3 \alpha_{33} - \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

(30) Mit der Abkürzung $\frac{\pi^2}{2s} = t$

$$(31)\quad \left|\begin{array}{l} [\alpha_{11} - t\,(p - 1^2)\, 1^2]\, F_1 + \alpha_{12} F_2 + \alpha_{13} F_3 + \ldots = 0 \\ \alpha_{21} F_1 + [\alpha_{22} - t\,(p - 2^2)\, 2^2]\, F_2 + \alpha_{23} F_3 + \ldots = 0 \\ \alpha_{31} F_1 + \alpha_{32} F_2 + [\alpha_{33} - t\,(p - 3^2)\, 3^2]\, F_3 + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Diese Gruppe von q homogenen Gleichungen liefert endliche Wurzeln für die q unbekannten Ausbiegungen F_i nur, wenn die Nennerdeterminante verschwindet:

$$(32)\quad D = \left|\begin{array}{llll} [\alpha_{11} + t\,(1^2 - p)\, 1^2] & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots\ldots \\ \alpha_{21} & [\alpha_{22} + t\,(2^2 - p)\, 2^2] & \alpha_{23} \ldots\ldots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & [\alpha_{33} + t\,(3^2 - p)\, 3^2] \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{42} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right| = 0.$$

Aus dieser Knickbedingung läßt sich p als Abhängige von t bzw. s darstellen. Dabei ist der kleinste positive reelle Wert von p maßgebend.

5. Auflösung der Knickbedingung. Gl. (32).

Durch Hinzunahme sehr vieler Glieder der Nennerdeterminante kann das Ergebnis beliebig weit der strengen Lösung angenähert werden. Für die praktische Anwendung genügt es, einige wenige Glieder zu berücksichtigen.

I. Erste Annäherung (ein Glied der Funktionenfolge).

Nimmt man an, daß nur eine einzige Ausbiegung F_i verschieden von Null ist, alle anderen aber verschwinden, so folgt aus Gl. (31) unmittelbar:

$$F_i\, [\alpha_{ii} + t\,(i^2 - p)\, i^2] = 0 \text{ und daraus:}$$

$$(33)\qquad p = i^2 + \frac{\alpha_{ii}}{i^2 \cdot t} = i^2 + \alpha_{ii} \cdot \frac{s\,2}{i^2 \cdot \pi^2}.$$

Wenn $i \neq m \cdot n$, ist $\alpha_{ii} = \frac{n}{2}$.

$$(34\,a)\qquad p_I = i^2 + \frac{n}{i^2 \pi^2}\, s$$

oder:

$$(34\,b)\qquad s_I = \frac{\pi^2}{n}\, i^2 (p - i^2).$$

Es besteht somit eine lineare Abhängigkeit zwischen $p = \frac{P}{Q}$ (Verhältnis der Knickkraft zu derjenigen des nicht abgestützten Stabes von der Länge $L = n \cdot l$) und der relativen Steifigkeit s der Querabstützung. Um den ungünstigsten Wert (den kleinsten für p und den größten für s) zu finden, muß man für die Zahl i der Halbwellen, in der die Stützen ausknicken, alle möglichen Werte, das sind die ganzen Zahlen von 1 bis n — 1 einsetzen und die dabei sich ergebenden Werte für p bzw. s untereinander vergleichen. Zur Erleichterung der Prüfung sollen einige allgemeine Zusammenhänge untersucht werden.

Je steifer die Abstützung, also je größer s wird, um so größer wird die Zahl der Halbwellen, mit der die Stützen ausknicken. Für die Steifigkeit, bei der das i-wellige in das (i + 1)-wellige Knicken übergeht, gilt die Gleichung:

$$p_i = i^2 + \frac{n}{i^2 \pi^2}\, s = p_{i+1} = (i+1)^2 + \frac{n}{(i+1)^2 \pi^2}\, s.$$

Hieraus ergibt sich die zugehörige Steifigkeit:

$$(35)\qquad s_{i/i+1} = \frac{\pi^2 i^2 (i+1)^2}{n}$$

Für den Übergang vom Knicken in i zu dem in n Halbwellen besteht die Bedingung:

$$p_i = i^2 + \frac{n}{i^2 \pi^2}\, s = p_n = n^2.$$

Hieraus folgt:

$$(36)\qquad s_{i/n} = \frac{\pi^2 i^2 (n^2 - i^2)}{n}.$$

Will man das Ausknicken in n Halbwellen erzwingen, so muß die Steifigkeit der Querriegel mindestens gleich dem größten Werte $s_{i/n}$ sein, der sich für alle möglichen Werte von i ergibt. Zur Auffindung der gefährlichsten Halbwellenzahl i' wird (36) nach i differentiiert und gleich Null gesetzt:

$$\frac{d\, s_{i/n}}{d\, i} = \frac{\pi^2}{n} (2\, i\, (n^2 - i^2) - 2\, i^3) = 0.$$

Hieraus:

$$(37)\qquad i' = \frac{n}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, n.$$

Die diesem Werte nächste ganze Zahl ist maßgebend.

Zahlenbeispiel.

Stützenrost mit 5 Stützen ($n' = 5 + 1 = 6$) und 9 Querriegeln ($n = 9 + 1 = 10$). Bezeichnungen s. Abb. 1.

Nach (27 b) ist die relative Quersteifigkeit:

$$s = \frac{\pi^2 n^3}{n'^4} \cdot \frac{J' l^3}{J l'^3} = \frac{\pi^2 \cdot 10^3}{6^4} \frac{J' l^3}{J l'^3} = 7{,}12\, \frac{J' l^3}{J l'^3}.$$

Für s mögen z. B. durch entsprechende Änderung der Trägheitsmomente beliebige Werte möglich sein. p wird gemäß (34 b) als Abhängige von s in einem rechtwinkligen Koordinatennetz durch Geraden dargestellt. Diese schneiden die p-Achse ($s = 0$) bei $p = i^2$.

Der größte Wert, den p erreichen kann, ist $n^2 = 10^2 = 100$. Für diesen Wert erhält man die zugehörige Steifigkeit s zu:

$$s' = \frac{\pi^2}{n}\, i^2 (n^2 - i^2) = \frac{\pi^2}{10}\, i^2 (10^2 - i^2) = 0{,}987\, i^2 (100 - i^2).$$

Die so festgelegten Geraden sind in Abb. 2 eingetragen. Für jeden Steifigkeitswert s ist der kleinste zugehörige Wert p maßgebend. Diese liegen auf dem stark ausgezogenen geknickten Linienzuge. Man erkennt, daß der Stützenrost bei weichster Querabstützung in einer Halbwelle ausknickt, daß bei steiferer Stützung das Ausknicken in 2, 3, 4 ..... 6 und 7 Halbwellen erfolgt, daß dann aber unter Überspringen der 8- und 9welligen Knickform sofort das Ausknicken in 10 Halbwellen, also mit unverrückt bleibenden Kreuzungspunkten folgt. Dies war nach (37) vorauszusehen, weil $i' = 0{,}707\, n = 0{,}707 \cdot 10 = 7{,}07 \sim 7$ die für den Übergang zum n-welligen Knicken maßgebende Halbwellenzahl ist.

II. Zweite Annäherung (2 Glieder der Funktionenfolge).

Weil Symmetrie des Stützenrostes in bezug auf seine waagrechte Mittellinie vorausgesetzt ist, können sich nur symmetrische oder antisymmetrische Biegelinien ausbilden. Deshalb treten gleichzeitig in der Funktionenfolge nur entweder symmetrische oder antisymmetrische Sinusfunktionen auf, also entweder solche

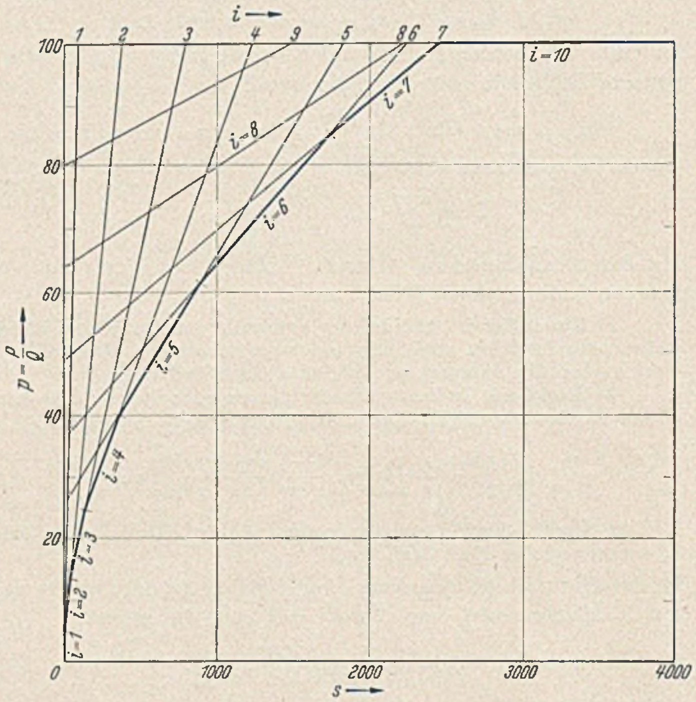

Abb. 2. p/s-Linien des Stützenrostes mit 9 Querbalken ($n = 9 + 1 = 10$) für das Ausknicken in $i = 1$ bis 10 Halbwellen. Erste Annäherung. Bedeutung von p und s vgl. 27 a/b.

mit ungerader oder mit gerader Halbwellenzahl i. Ist i_0 die Halbwellenzahl der Grundbiegelinie, so können neben ihr nur noch die Sinuslinien mit $i_0 + 2$, $i_0 + 4 \ldots$, $i_0 + 2\,k$ auftreten. Begnügt man sich mit einem Ansatz mit 2 Sinusfunktionen, so lautet somit die Nennerdeterminante:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{ii} + t\, i^2 (i^2 - p) & \alpha_{i,j} \\ \alpha_{j,i} & \alpha_{jj} + t\, j^2 (j^2 - p) \end{vmatrix} = 0.$$

Darin $j = i + 2\,k$.

Nach den Regeln für die Bildung der α_{ij} Zahlen werden diejenigen mit gleichen Indices gleich n/2, während diejenigen mit ungleichen Indices bis auf bestimmte Ausnahmen verschwinden. Deshalb hat die Determinante im allgemeinen den Wert:

$$D = \left(\frac{n}{2} + t\, i^2\, [i^2 - p]\right) \cdot \left(\frac{n}{2} + t\, j^2\, [j^2 - p]\right) = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn je eine oder beide Klammern verschwinden. Die sich so ergebenden beiden Gleichungen stimmen überein mit denen, die die erste Annäherung für i- bzw. j-welliges Knicken liefert.

Um eine Verbesserung des Ergebnisses zu erreichen, muß man j so wählen, daß α_{ij} einen endlichen Wert erhält. Dies ist nach den Regeln für die Berechnung der α_{ij} der Fall, wenn $j = 2\,kn \pm i$ ist. Weil, wie unten noch nachgewiesen wird, eine möglichst kleine Zahl j zu wählen ist, um einen möglichst großen Sicherheitsgrad zu erreichen, ist der kleinste Wert für j einzusetzen, das ist

$$j = 2\,n - i = n + (n - i).$$

j ist somit um denselben Betrag größer als n, um den i kleiner als n ist. Nach Regel (5) ist $\alpha_{i,\,2n-i} = -n/2$.

Hiermit ergibt sich folgende Nennerdeterminante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{n}{2} + t\, i^2 (i^2 - p) & -\frac{n}{2} \\ -\frac{n}{2} & \frac{n}{2} + t\, j^2 (j^2 - p) \end{vmatrix} = 0 \qquad (j = 2n - i).$$

Sie führt mit $s = \frac{\pi^2}{2t}$ (30) zu der Lösung:

$$(38) \qquad s_{II} = \frac{-\pi^2}{n} \frac{i^2 (i^2 - p) \cdot j^2 (j^2 - p)}{i^2 (i^2 - p) + j^2 (j^2 - p)} \qquad (j = 2n - i)$$

$$(39) \qquad p_{II} = \left[\frac{(i^2 + j^2)\left(i^2 j^2 + \frac{s \cdot n}{\pi^2}\right)}{2\, i^2 j^2} \right] \pm \sqrt{\left[\;\right]^2 - \frac{s \cdot n}{\pi^2} \cdot \frac{i^4 + j^4}{i^2 \cdot j^2} - i^2 j^2}\,.$$

Zur Berechnung von Wertepaaren s und p eignet sich besonders gut die erstere Gl. (38).

Schreibt man zur Abkürzung:

$$i^2 (i^2 - p) = a, \quad j^2 (j^2 - p) = b, \quad \frac{\pi^2}{n} = C,$$

so geht Gl. (38) über in:

$$s_{II} = -C \frac{a \cdot b}{a + b},$$

ebenso erhält man aus Gl. (34 b) für die erste Annäherung:

$$s_I = -Ca.$$

Hiermit kann man schreiben:

$$(40a) \qquad s_{II} = -C \frac{a \cdot b}{a + b} = -C \cdot a \frac{1}{1 + \frac{a}{b}} = s_I \frac{1}{1 + \frac{i^2 (i^2 - p)}{j^2 (j^2 - p)}}$$

$$(40b) \qquad s_{II} = s_I \frac{1}{1 + \frac{C \cdot a}{C j^2 (j^2 - p)}} = s_I \frac{1}{1 - \frac{n\, s_I}{\pi^2 \cdot j^2 (j^2 - p)}}\,.$$

Da $i^2 < p$ und $j^2 > p$, ist der Nenner stets kleiner als 1. Somit ist $s_{II} > s_I$: die genauere Lösung des Knickproblems ergibt eine kleinere Knickkraft oder verlangt bei gleichbleibender Knickkraft eine größere Steifigkeitsziffer s. Je größer der absolute Wert des zweiten Gliedes im Nenner ist, um so größer wird s. Dies ist der Fall, wenn die im Nenner dieses zweiten Gliedes stehende Funktion $j^2 (j^2 - p)$ möglichst klein wird. Somit ist für j der kleinste in Frage kommende Wert zu wählen, so wie dies schon oben als erforderlich bezeichnet worden ist.

III. Weitere Annäherungen (3 und mehr Glieder der Funktionenreihe).

Sollen zur weiteren Verbesserung der Lösung weitere Glieder der Funktionenreihe hinzugenommen werden, so müssen die Halbwellenzahlen der hinzukommenden Sinusfunktionen wieder so gewählt werden, daß die α_{ij}, α_{ik} und α_{jk} nicht verschwinden. Dies ist der Fall für $j = 2n - i$, $k = 2n + i = 2 \cdot (2n) - j$. Für α_{ik} gilt dann Regel 4, für α_{ij} und α_{jk} die Regel 5.

Somit wird:

$$\alpha_{ii} = \alpha_{jj} = \alpha_{kk} = -\alpha_{ij} = \alpha_{ik} = -\alpha_{jk} = \frac{n}{2}\,.$$

Hiermit lautet die Knickbedingung:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{n}{2} + t\, i^2 (i^2 - p) & -\frac{n}{2} & +\frac{n}{2} \\ -\frac{n}{2} & \frac{n}{2} + t\, j^2 (j^2 - p) & -\frac{n}{2} \\ +\frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & \frac{n}{2} + t\, k^2 (k^2 - p) \end{vmatrix} = 0.$$

Aus ihr folgt:

$$(41) \qquad s_{III} = \frac{-\pi^2}{n} \frac{i^2 (i^2 - p) \cdot j^2 (j^2 - p) \cdot k^2 (k^2 - p)}{i^2 (i^2 - p) \cdot j^2 (j^2 - p) + i^2 (i^2 - p) \cdot k^2 (k^2 - p) + j^2 (j^2 - p)\, k^2 (k^2 - p)}.$$

Setzt man wieder zur Abkürzung die oben benutzten Hilfswerte a, b, C und $c = k^2 (k^2 - p)$ ein, so erhält man:

$$s_{III} = -C \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{ab + ac + bc} = -C \frac{a\,b\,c}{(a + b)\left(c + \frac{ab}{a + b}\right)} = s_{II} \frac{c}{c - \frac{s_{II}}{C}}$$

$$(42) \qquad s_{III} = s_{II} \frac{1}{1 - \frac{s_{II}}{C \cdot c}} = s_{II} \frac{1}{1 - \frac{n}{\pi^2} \frac{s_{II}}{k^2 (k^2 - p)}}\,.$$

Hierdurch ist das einfache Bildungsgesetz für s gefunden. Es sei zur Übersicht noch einmal die Reihe der immer weiter verbesserten Werte für s wiederholt:

$$(43a) \qquad s_I = -\frac{\pi^2}{n} i^2 (i^2 - p)$$

$$(43b) \qquad s_{II} = s_I \cdot \frac{1}{1 - \frac{n}{\pi^2} \cdot \frac{s_I}{j^2 (j^2 - p)}} \qquad (j = 2n - i).$$

$$(43c) \qquad s_{III} = s_{II} \frac{1}{1 - \frac{n}{\pi^2} \frac{s_{II}}{k^2 (k^2 - p)}} \qquad (k = 2n + i)\,.$$

$$(43d) \qquad s_{IV} = s_{III} \frac{1}{1 - \frac{n}{\pi^2} \frac{s_{III}}{o^2 (o^2 - p)}} \qquad (o = 4n - i) \text{ usw.}$$

Die Auswirkung dieser schrittweisen Verbesserung sei an dem oben benutzten Beispiel gezeigt, und zwar zunächst für $i = 9$ und $p = n^2 = 100$, also für den Übergang vom 9- zum 10-welligen Knicken. Hierfür ist $i = 9$, $j = 2n - i = 2 \cdot 10 - 9 = 11$, $k = 2n + i = 2 \cdot 10 + 9 = 29$, $o = 4 \cdot n - i = 40 - 9 = 31$.

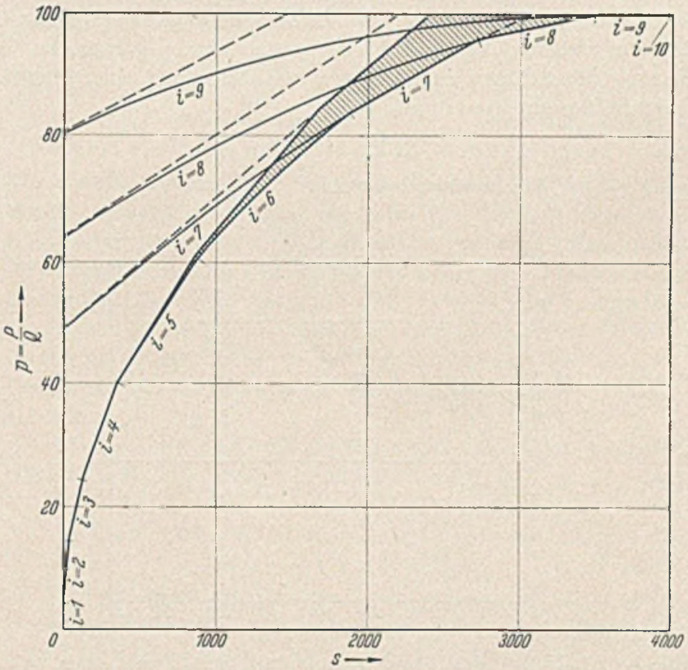

Abb. 3. p/s-Linien des Stützenrostes der Abb. 2, erste Annäherung und strengere Lösung.

Unter Benutzung der Gl. (43) erhält man:

$$s_I = -\frac{\pi^2}{10} 9^2 (9^2 - 100) = 1519$$

$$s_{II} = 1519 \frac{1}{1 - \frac{10}{\pi^2} \frac{1519}{11^2 (11^2 - 100)}} = 2{,}53 \cdot 1520 = 3852$$

$$s_{III} \sim 3852 \left(1 + \frac{10}{\pi^2} \frac{3852}{29^2 (29^2 - 100)}\right) = 1{,}0063 \cdot 3852 = 3876$$

$$s_{IV} \sim 3876 \left(1 + \frac{10}{\pi^2} \frac{3876}{31^2 (31^2 - 100)}\right) = 1{,}0047 \cdot 3876 = 3894.$$

Die genaue Lösung lautet nach Timoschenko (3) 3899. Für die Ansprüche der Praxis genügt bereits die zweite Annäherung vollauf.

In Abb. 3 ist aus Abb. 2 der geknickte Geradenzug der ersten Annäherung übernommen und außerdem der Verlauf für die 2. Annäherung, der praktisch mit der strengen Lösung übereinstimmt, eingetragen.

Die schraffierte Fläche gibt den Unterschied der ersten Annäherung gegenüber der strengen Lösung. Er ist erheblich nur in der Nähe des Übergangs zum n-welligen Knicken. Gemessen an der die Knickkraft angebenden Zahl

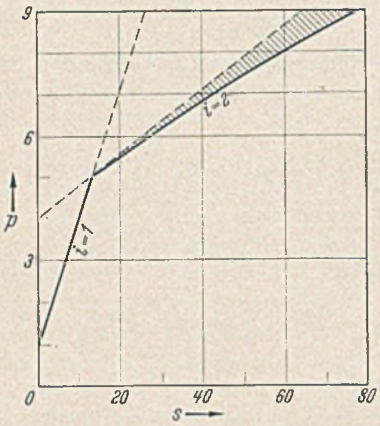

Abb. 4. p/s-Linien des Stützenrostes mit zwei Querbalken ($n = 3$), erste Annäherung und strengere Lösung.

$$p = \frac{P_k}{Q} = \frac{P_k}{\frac{\pi^2 E J}{L^2}}$$

ist der größte Unterschied bei $s = 2465$ $p_I - p_{II} = 100 - 92 = 8$. Das heißt, die Knickkraft wird um rd. 9% zu hoch errechnet. Um diese rd. 9% aufzuholen, müßte die Steifigkeit der Querverbände von 2465 auf 3899, also um 58% erhöht werden!

Aus dem Verlauf der p-Kurve ersieht man, daß zur Erreichung von $p = 25 = \frac{1}{4}\,{}_{\max}p$ eine sehr schwache Abstützung mit $s = 150$ genügt, und für

$$p = 50 = \frac{1}{2}\,{}_{\max}p : s = 620, \quad \text{für} \quad p = 75 = \frac{3}{4}\,{}_{\max}p$$

$s = 1460$, entsprechend rd. 4, 16 und 37,5% der zur Erreichung der Höchstlast ($p = n^2 = 100$) notwendigen, also der starren gleichwertigen Abstützung. Bei dieser Sachlage ist es unter Umständen zweckmäßiger, sich mit einer etwas geringeren Ausnützung der Stützen zu begnügen und dafür mit einer leichteren Querabstützung auszukommen.

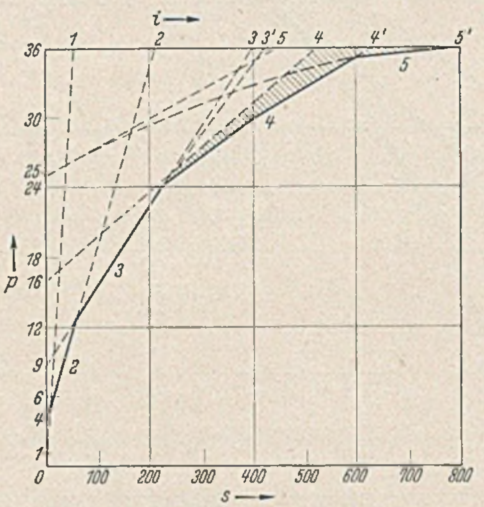

Abb. 5. p/s-Linien des Stützenrostes mit fünf Querbalken ($n = 6$), erste Annäherung und strengere Lösung.

In Abb. 4 und 5 sind die p/s-Kurven für den 3- und 6-feldrigen Stützenrost aufgezeichnet. Der Verlauf ist grundsätzlich derselbe wie in Abb. 3. Mit Hilfe der Gl. (43) lassen sich die Kurven in wenigen Minuten berechnen und mit ausreichender Genauigkeit auftragen.

Auch in Abb. 4 und 5 sind die Unterschiede zwischen der strengen Lösung und der ersten Annäherung durch Schraffur hervorgehoben.

Nennenswerte Abweichungen sind nur in dem Gebiete oberhalb von $p \sim \frac{3}{4}\,{}_{\max}p = 0{,}75\,n^2$ vorhanden. Der größte Fehler, bezogen auf die Knickkraft, bleibt unter 9%, dies ist schon im Hinblick auf die unvermeidlichen Abweichungen der Bauausführung gegenüber den rechnerischen Annahmen so unwesentlich, daß die erste Annäherung für Rechnungen der Praxis in der Regel ausreichen dürfte. Durch Erhöhung der gegebenen Rostbelastung um 10% würde die vorhandene Ungenauigkeit ausgeglichen werden können.

6. Berechnung der Biegelinie der ausknickenden Roststützen.

Setzt man den für eine gegebene Steifigkeit s gefundenen Wert p in die Gleichungsgruppe (31) ein, so erhält man soviel Gleichungen für die F-Werte, wie Sinusfunktionen eingeführt worden sind. Nimmt man einen Wert F_i als gegeben an, so lassen sich die anderen F als lineare Abhängige von F_i darstellen. Die eine überzählige Gleichung wird durch die so erhaltenen F-Werte identisch erfüllt.

Als Beispiel wurde die Biegelinie für die 10-feldrigen Stützen beim Ausknicken in 9 Halbwellen, und zwar unter Benutzung von zwei Gliedern der Sinusfunktionenreihe mit $i = 9$ und $j = 11$ berechnet und in Abb. 6 dargestellt.

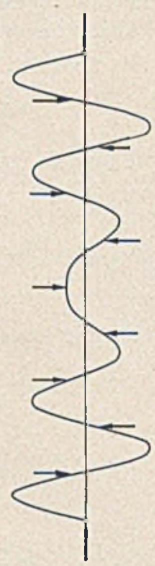

Abb. 6. Biegelinie des Stützenrostes mit neun Querbalken ($n = 10$) beim Ausknicken in 9 Halbwellen (vgl. Abb. 3).

7. Benutzung der Formeln für den elastisch gestützten Druckstab.

Für den elastisch in gleichen Abständen gestützten Druckstab ist für S an Stelle des in Formel (27 b) angegebenen Ausdrucks die Kraft einzusetzen, die die Abstützungen bei einer seitlichen Verschiebung des gestützten Punktes um 1 ausüben. Damit sind die gefundenen Gleichungen ohne weitere Änderungen für diesen Fall benutzbar.

8. Vergleich des Stützenrostes mit der gleichmäßig gedrückten Rechteckplatte mit Steifenrost.

Nach Abschluß vorstehender Arbeit wurde mir die Arbeit von G. Knipp „Über die Stabilität der gleichmäßig gedrückten Rechteckplatte mit Steifenrost" bekannt [4]). Diese Platte geht in den hier behandelten Stützenrost über, wenn man die Dicke der Platte gegen Null abnehmen läßt. Da bei diesem Grenzübergang, wie Knipp nachweist, gewisse Schwierigkeiten entstehen, und nachdem hier eine überaus bequeme unmittelbare Berechnung des Stützenrostes gebracht ist, kommt die Benutzung der sehr viel schwierigeren Arbeit Knipp für die vorliegende Aufgabe kaum in Frage.

[4] Knipp, G.: Bauingenieur 22 (1941) S. 257.

PROJEKT EINES GROSSWINDKRAFTWERKES.

Von F. Kleinhenz, Berlin.

DK 620.92 : 551.55

Übersicht: Eine eingehende Beschäftigung mit dem Problem der Windkraftausnutzung hat zur Projektierung eines Großwindkraftwerkes geführt, das nachfolgend in seinen Hauptpunkten beschrieben wird [1].

I. Allgemeines.

a) Voraussetzungen des Entwurfs.

Als Energiequelle für Kraftwerke stehen in der Natur die Kohle, das Wasser und der Wind zur Verfügung. Über die Windverhältnisse in Bodennähe und in größeren Höhen (300—500 m) geben die Untersuchungen von verschiedenen Forschern bzw. die meteorologischen Stationen Auskunft [2]. Hiernach kann als feststehend angesehen werden:

1. In der Höhe von 0—150 m, in der sogenannten Erdwirbelzone, sind die Windströmungen ungleichmäßig und durchschnittlich von geringer Stärke (2—4 m/sec.).
2. Über der Erdwirbelzone in Höhen über 150 m weist die Windströmung verhältnismäßig große Gleichmäßigkeit auf.
3. Die Windgeschwindigkeit nimmt mit der Höhe zu. In der Höhe von 200—300 m herrscht eine durchschnittliche Windgeschwindigkeit von rd. 7—10 m/sec.
4. Es gibt windstarke und windschwache Windgebiete.

Diese Hauptpunkte sind bei Aufstellung eines Projektes in erster Linie zu beachten; insbesondere ergibt sich, daß ein Großwindkraftwerk nur ein solches von großer Arbeitshöhe sein kann.

Die Steinkohle und Braunkohle werden zurzeit im größten Umfange abgebaut und verbraucht, wobei aber durch direkte Verbrennung unersetzliche Rohstoffe verloren gehen. In Deutschland wird der Vorrat an Steinkohle voraussichtlich noch rund 2000 Jahre reichen. Der Vorrat an Braunkohle wird auf etwa 28 Milliarden Tonnen und für nur ungefähr 150 Jahre ausreichend geschätzt (nach Angaben der Preußischen Geologischen Landesanstalt, Berlin). Die mit Kohle betriebenen Kraftwerke sind im Hinblick auf die Ausnutzung der Energiequelle sicher die teuersten, die es gibt. Es ist daher ohne weiteres klar, daß es für die Wirtschaft einen großen Gewinn bedeutet, wenn durch Ausnützung anderer Energiequellen soviel wie möglich an Kohlen gespart wird, damit diese besser oder, wenn möglich, anderweitig restlos verwertet werden. Bei einem wirtschaftlichen Vergleich mit einem Kohlenkraftwerk muß die Kohlenersparnis entsprechend gewertet werden. Beispielsweise betragen für ein Kohlenkraftwerk von 12 500 kW Leistung und rd. 2000 Stunden Benutzungsdauer die Brennstoffkosten rd. RM 550 000,— je Jahr.

Wasser und Wind stehen uns in nie versiegenden Mengen zur Verfügung. Die Wasserkraft ist in Deutschland nur zu einem Teil ausgenutzt, die Windkraft, abgesehen von den kleinen Windmühlen, bisher praktisch überhaupt noch nicht. Es wäre jedoch unrichtig, erst dann mit dem Bau von Großwindkraftwerken zu beginnen, wenn die Wasserkräfte voll verwertet sind, denn jede neue technische Sache benötigt zu ihrer Entwicklung und Ausreifung eine gewisse Zeitdauer. Diese läßt sich nicht ausschalten, höchstens abkürzen. Es besteht also ein Bedürfnis, neben dem weiteren Ausbau der Wasserkräfte als Ersatz für die Kohlen, insbesondere für die Braunkohle, eine andere Energiequelle einzuschalten. Hierfür kommt die Windkraft in Betracht, zumal dieselbe örtlich an anderen Stellen zur Verfügung steht als die Wasserkraft. Kann nun dieser Ersatz durch die Ausnutzung der Windkraft geleistet werden? Diese Frage ist zweifellos zu bejahen, wenn es gelingt, die Windkraft so auszunutzen, daß sie neben der Wasserkraft wirtschaftlich verwertet werden kann oder wenn die Erstellung von großen Windkraftwerken andere Vorteile mit sich bringt. Der Nachweis für die zu fordernde Wirtschaftlichkeit kann nur durch eine genaue und eingehende Projektierung bzw. durch den Bau eines ersten Windkraftwerkes erbracht werden.

Nun bietet sich die Ausnutzung der Windkraft in nicht so bequemer Weise an, wie etwa die Kohle durch Verfeuern unter dem Dampfkessel oder wie die Wasserkraft durch Aufstauung oder direkte Nutzung. Die Windenergie unmittelbar über dem Erdboden steht in nur unregelmäßiger und geringer Menge zur Verfügung. Für kleine Windkraftwerke von geringer Arbeitshöhe ergibt sich hieraus eine grundsätzliche Schwierigkeit. Außerdem ist es erschwerend, daß man zu verhältnismäßig großen Anlagen und großen Höhen übergehen muß, will man der Windströmung eine größere Leistung entnehmen.

Die größten Windstärken herrschen bei uns in Norddeutschland, auf dem Brocken und auf den Nordseeinseln. Diese Gegenden kommen hiernach in erster Linie für die Errichtung von Windkraftwerken in Betracht. Windstarke Gebiete hat besonders auch Holland.

Als Durchschnittsgeschwindigkeit, auf die einzelnen Gebiete bezogen, kann man für geringere Höhen über dem Erdboden etwa 5 m/s annehmen. Für größere Höhen wächst die Geschwindigkeit rasch an. Als Mittelwert für Messungen auf dem Eiffelturm und auf dem Funkturm in Nauen kann die Windgeschwindigkeit zu 7 bis 10 m/s angegeben werden. In Höhen bis 150 m ist der Einfluß der Bodenunebenheiten auf die Stärke und Gleichmäßigkeit der Windströmung verhältnismäßig stark, so daß hieraus der Schluß gezogen werden muß:

Die Windenergie muß dort entnommen werden, wo sie verhältnismäßig gleichmäßig und mit genügender Geschwindigkeit strömt, das sind Höhen von 200 bis 300 m.

Für die Berechnung der Wirtschaftlichkeit und Auswertung des Windkraftwerkes wird eine Windhäufigkeitskurve benutzt, die in Durchschnittswerten den zahlreichen neueren Messungen des Reichswetterdienstes (für größere Höhen gemessen) entnommen ist. Zweckmäßig wird die Ausbeute von $v = 6$ m/s bis $v = 18$ m/s vorgenommen. Über 18 m/s wird das Windrad entweder für eine konstante Leistungsabgabe entsprechend verstellt oder bei weiterer Geschwindigkeitssteigerung durch Segelstellung der Blätter stillgesetzt.

Windgeschwindigkeiten unter 5 m/s erscheinen wegen des geringen Energieinhalts nicht ausbauwürdig.

b) Die technischen Erfordernisse des Entwurfs.

Bei der Planung eines Großwindkraftwerkes ist in vieler Hinsicht technisches Neuland zu betreten. Vor allem muß gefordert werden, daß die Anlage, im einzelnen wie im ganzen, technisch zu übersehen ist und nach dem heutigen Stand der Bau- und Maschinentechnik ohne Zweifel ausführbar erscheint. Ein Windkraftwerk soll, wie andere Kraftwerke, zur Erzeugung von elektrischer Energie dienen; obige Forderung muß also auch für den elektrischen Teil aufgestellt werden. Es ist hier eigentlich gar kein Anwendungsfeld für besonders kühne und gewagte Konstruktionen. Das Windkraftwerk muß nach dem heutigen Stand der Technik vollwertig sein und in allen Teilen verantwortet werden können; je einfacher es an sich ist, desto sicherer wird es sein. Ebenso einfach und sicher muß die Wartung und Überwachung der Anlage sein. Alle lebenswichtigen Teile, wie maschinelle Einrichtungen, Kraftübertragungen und elektrische Stromerzeuger müssen vor Witterungseinflüssen geschützt liegen und leicht zugänglich sein. Es ist stets zu beachten, daß die ganze Anlage ausreichend wetterfest und für die ungünstigsten Belastungen sturmsicher erstellt werden muß. Für das Turmgerüst kann Stahl oder Stahlbeton verwandt werden.

Für die Ausnutzung der Windenergie ist das Windrad bzw.

---

[1] Seit mehreren Jahren steht der Verfasser in Verbindung mit den Firmen MAN-Gustavsburg und BBC-Mannheim, denen er auch eine Reihe von Unterlagen für den vorliegenden Aufsatz verdankt.

[2] Assmann: Die Winde in Deutschland, Braunschweig 1910. — Honnef: Windkraftwerke, Braunschweig 1932.

der Auftrieb erzeugende Flügel wegen seines hohen Wirkungsgrades jeder anderen Anordnung überlegen. Bei seiner Formgebung und Anordnung muß volle Berücksichtigung aerodynamischer Gesichtspunkte gefordert werden. Gegenüber einer Zweiradanlage hat die Einradanlage den Vorteil größerer baulicher Einfachheit und Betriebssicherheit, so daß für den Entwurf eine Einradanlage gewählt wurde. Ferner dürfen sich Windrad und Tragturm gegenseitig nicht stören. Neben dem Entwurf mit in Strömungsrichtung hinter dem Turm liegendem Windrad wurden auch Vergleichsentwürfe mit vorn liegendem Windrad untersucht. Letztere Anordnung benötigt eine entsprechend lange Windfahne oder ein zusätzliches Drehwerk. Beide Ausführungsarten sind möglich. Die zu entnehmende Windenergie muß vom Windrad möglichst störungsfrei aufgenommen werden. Das Windrad selbst wird zweckmäßig als extremer Schnelläufer ausgebildet, das der Windströmung eine möglichst kleine Angriffsfläche bietet und eine verhältnismäßig hohe Umlaufzahl hat.

II. Die Hauptpunkte der Baugestaltung.

Diese gehen aus den vorgenannten Überlegungen ganz zwangsläufig hervor:

1. Ausnutzung der Windenergie in Höhen von 200—300 m.
2. Großer Durchmesser des Windrades, um eine dem Bauaufwand entsprechende Leistung zu erhalten.
3. Ausbildung des Windrades als Schnelläufer mit 3, evtl. 4 Flügeln, für eine Windgeschwindigkeit von v = 6 m/s bis v = 18 m/s. Das Verhältnis von $\frac{u}{v}$ wird gleich 5 eingeführt.

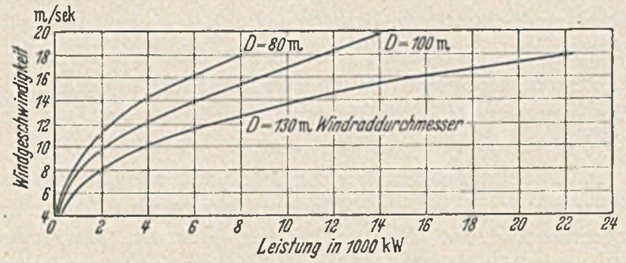

Abb. 1. Leistungskurven.

4. Selbsttätige und stabile Einstellung der Windradachse in die Windrichtung durch Benutzung einer Windfahnenwirkung. Hierdurch erhält der Tragturm nur unerhebliche Drehbeanspruchungen aus Reibungskräften an den Lagern.
5. Ausbildung des Bauwerks, insbesondere in der Höhenzone der Energieaufnahme nach aerodynamischen Grundsätzen.
6. Selbsttätige Verstellung der Flügel.

III. Die theoretischen Grundlagen.

a) Das Windrad.

Für die theoretischen Fragen, die sich bei der Ausnutzung der Windkraft ergeben, wird die Theorie von Prof. Betz, Göttingen, als grundlegend angesehen. Sie findet sich in seinem Buche: „Wind-Energie und ihre Ausnutzung durch Windmühlen". Diese Theorie gibt über alle zu stellenden Fragen Auskunft. Weitere theoretische Untersuchungen werden in Arbeiten von W. Hoff, W. Conrad, U. Noetzlin und von anderen Autoren behandelt. Vorstehendes Schaubild (Abb. 1) zeigt die maximale Leistung des Windrades $L_{max} = \eta \cdot 0{,}000285\, v^3 D^2$ in kW für die Durchmesser 80, 100 und 130 m, für Windgeschwindigkeiten von v = 4 m/s bis v = 18 m/s; $\eta = 0{,}8$. L_{max} beträgt etwa 20 000 kW.

Aus dem Schaubild ist ohne weiteres zu ersehen, daß ein Rad von 130 m Durchmesser wesentlich mehr Leistung bringt als zwei Räder von je 80 m Durchmesser. Ferner ergibt sich, daß es unvorteilhaft ist, Windgeschwindigkeiten unter 6 m/s auszunützen. Schließlich erscheint es ratsam, das Windrad in möglichst große Höhe zu legen: ist beispielsweise in 100 m Höhe v = 9 m/s und in 250 m Höhe v = 12 m/s, dann wird die Leistungssteigerung etwa 130%.

b) Annahmen für die statische Berechnung.

Für den weiter unten näher beschriebenen Entwurf ist eine statische Berechnung aufgestellt worden. Für die Windbelastung des Turmes erscheint es voll ausreichend, die von den Baubehörden geforderte Windbelastung von w = 250 kg/m² einzusetzen. Für die Tragwände wird, wie üblich, die Windfläche doppelt eingesetzt. Für den windschnittig verkleideten oberen Drehturmteil, der in der Querrichtung der Windströmung so schmal wie möglich gehalten ist, wird ein aerodynamisch bestimmter Beiwert eingeführt. Für das Windrad selbst werden zwei Werte bestimmt; der eine aus dem größtmöglichen Schraubenschub für v_{max} = 18 m/s und der andere aus einer Windbelastung von 250 kg/m² auf die größte Ansichtsfläche der Windradflügel. Für das Windradblatt wird bei v = 18 m/s noch ungünstigsterweise eine plötzlich auftretende zusätzliche Sturmböenbelastung von 20 m/s berücksichtigt. Diese Belastung wird für den ungünstigsten Fall mit dem maximalen Auftriebsbeiwert eingesetzt. Besonders berücksichtigt werden die Belastungen des Turmes bei Wirkung von Kreiselkräften und plötzlich auftretende Böenbelastung auf die Seitenflächen der Drehturmverkleidung, die mit w = 250 kg/m² eingesetzt wird. Unter Wirkung der ungünstigsten Lastkombinationen ist die Turmkonstruktion und das Windrad mit der höchstzulässigen Beanspruchung mit Einschluß der Gesichtspunkte für Dauerbeanspruchung berechnet worden. Der Turm und das Windrad sind auch auf Schwingungen zu untersuchen.

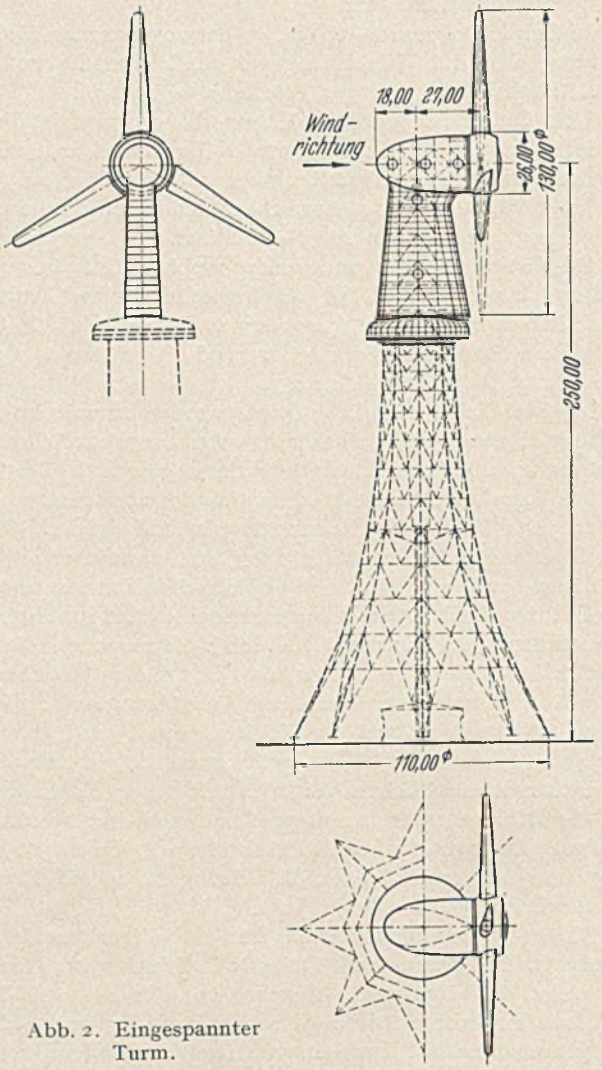

Abb. 2. Eingespannter Turm.

Die Windbelastung von 250 kg/m² entspricht mit einem Beiwert von c = 1,6 einer Windgeschwindigkeit von v ≃ 50 m/s. Da dies die Geschwindigkeit eines Orkans ist, gibt die Belastungsannahme von 250 kg/m² für Turm und Windrad dem Bauwerk die zu fordernde Sturmsicherheit. Die Bausicherheit ist die im Bauwesen übliche.

Genauere Ansätze für den Luftwiderstand des Turmes und Windrades lassen sich nur durch Anblasversuche eines Modelles im Windkanal gewinnen.

Die möglichen Belastungen durch Schnee und Eisansatz wurden als Zusatzbeanspruchungen untersucht.

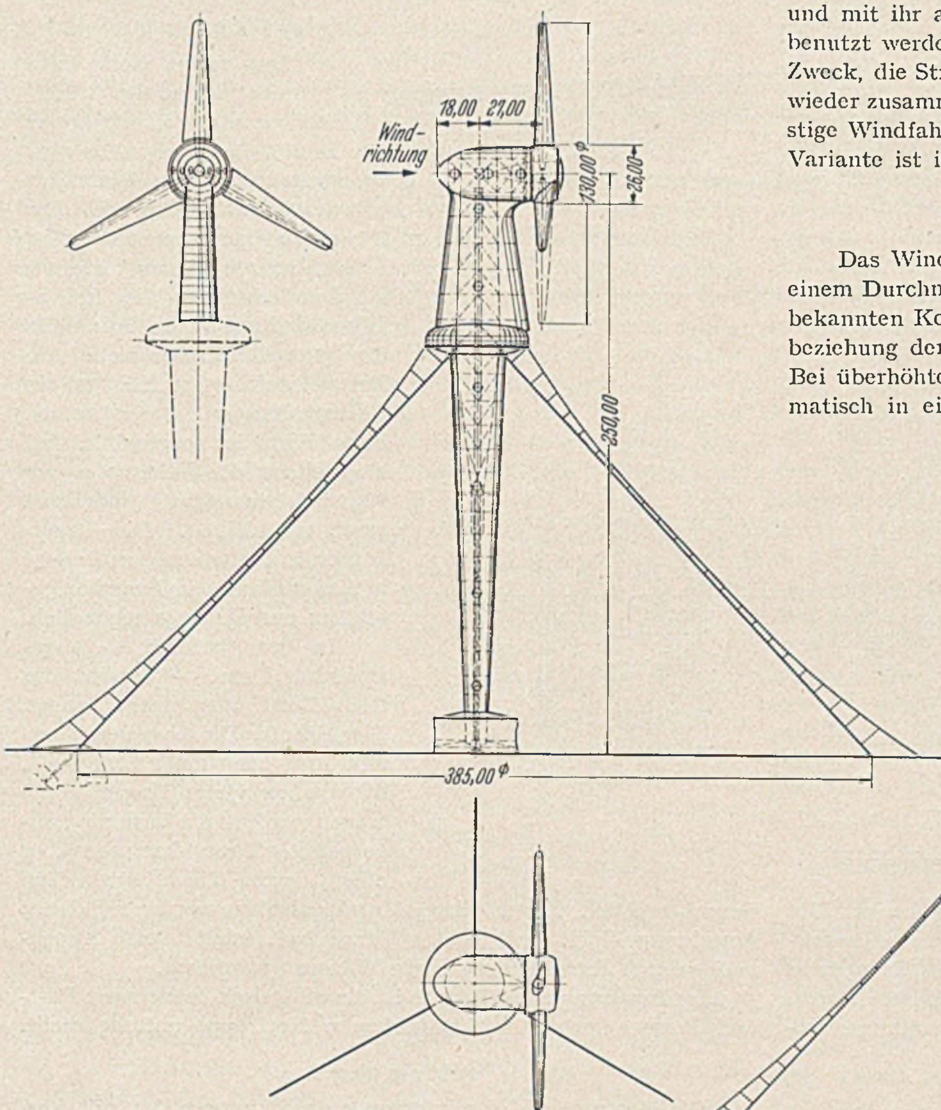

Abb. 3. Abgespannter Turm als Mast.

IV. Beschreibung des Entwurfes.

a) G e s a m t a n o r d n u n g.

Die Anlage wird mit e i n e m Windrad von 130 m ∅ ausgerüstet und hat damit gegenüber einer Zwei- oder Mehrradanlage die Vorteile der einfacheren und billigeren Gestaltung, da dieses Windrad ungefähr die gleiche Leistung hat wie 2 Räder von 90 m Durchm. Das Windrad ist entsprechend den vorgenannten allgemeinen Erwägungen in einer Höhe von 250 m über dem Erdboden und in dem um eine senkrechte Achse drehbaren Turm bzw. Maschinengondel schwenkbar gelagert. Während bei den üblichen Ausführungen das Windrad in Richtung der Windströmung gesehen vor der Tragkonstruktion angeordnet ist und durch eine rückwärtige Windfahne in die Windrichtung eingedreht wird, befindet es sich bei dieser Anordnung in einem gondelartigen Ausbau 27 m hinter der Turmachse. Die dem Rad vorgelagerte Maschinengondel dient als Staukörper, so daß die Windströmung in Nähe der Nabe entsprechend beschleunigt wird. Das zur Schwenkung in die richtige Stellung erforderliche Drehmoment wird bei ausreichender Schräganblasung durch den Wind auf die nach Lee zu vorgezogene Verkleidung des Turmes und der Gondel sowie auf das Windrad, das selbst als Windfahne wirkt, erzeugt. Bei sehr schwachen Winden wird ein elektromotorischer Drehantrieb zu Hilfe genommen, der in Höhe der oberen Turmplattform vorgesehen ist.

Abb. 2 zeigt einen Entwurf mit eingespanntem Turm, als Variante ist in Abb. 3 ein Turm mit straffer Abspannung dargestellt.

Statt einen als Windfahne ausgebildeten Drehturm zu verwenden, können auch besondere an der Maschinengondel befestigte und mit ihr an dem festen Turmschaft umlaufende Hilfsflächen benutzt werden. Gleichzeitig dienen diese Hilfsflächen auch dem Zweck, die Strömung hinter dem vorgelagerten runden Turmschaft wieder zusammenzuziehen. Durch diese Anordnung wird eine günstige Windfahnenwirkung mit baulichen Vorteilen erreicht. Diese Variante ist in Abb. 4 aufgezeichnet.

b) D a s W i n d r a d.

Das Windrad wird als Schnelläufer mit 3 oder 4 Flügeln bei einem Durchmesser von 130 m ausgebildet. Der Flügel wird nach bekannten Konstruktionsprinzipien des Flugzeugbaues unter Einbeziehung der Außenhaut in den Tragquerschnitt durchgebildet. Bei überhöhten Windgeschwindigkeiten werden die Flügel automatisch in eine ungefährdete Stellung (Segelstellung) gebracht.

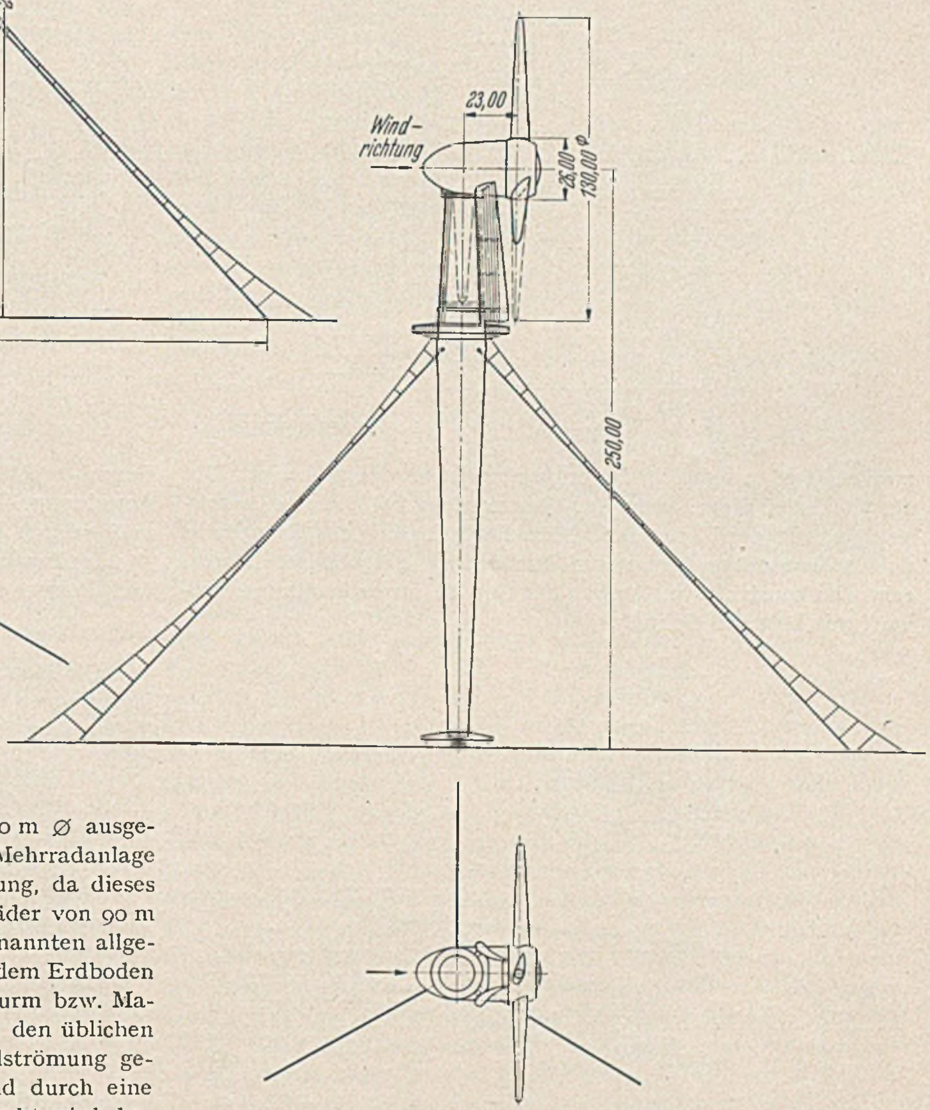

Abb. 4. Abgespannter Turm mit Hilfsflächen.

Für den Flügel wird mit Vorteil ein möglichst druckpunktfestes Profil benutzt, so daß in der Hauptsache von der Flügeltragkonstruktion nur biegende Kräfte und Zentrifugalkräfte aufzunehmen sind. Für die Außenhaut der Flügel wird nichtrostender Stahl genommen, um möglichste Wetterfestigkeit dieses wichtigen Baugliedes zu erzielen.

Die Radnabe besteht aus einem räumlich ausgebildeten Fachwerkstern, der die Lagerung der Flügel aufnimmt. Abb. 5 zeigt einen Windradflügel.

c) Die Gondel.

Das Haupttragwerk der Gondel besteht aus zwei vertikalen Fachwerkträgern, die durch horizontale und vertikale Verbände gegeneinander abgesteift sind. In der in St. 52 vorgesehenen Konstruktion ist die Windradachse (von etwa 10 m Durchmesser) in

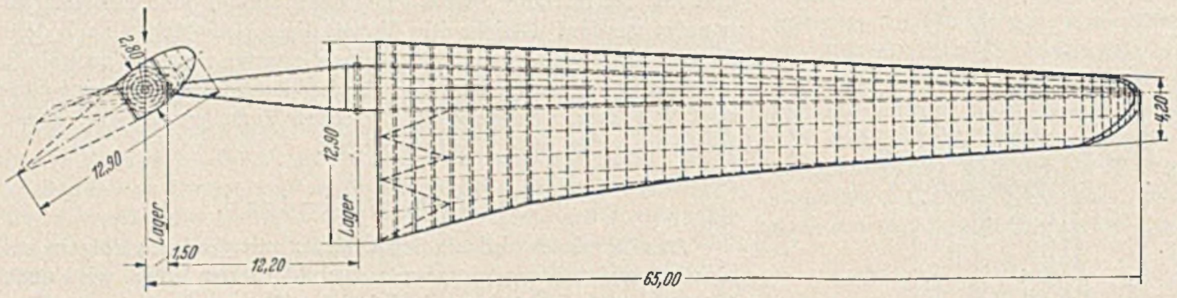

Abb. 5. Windradflügel.

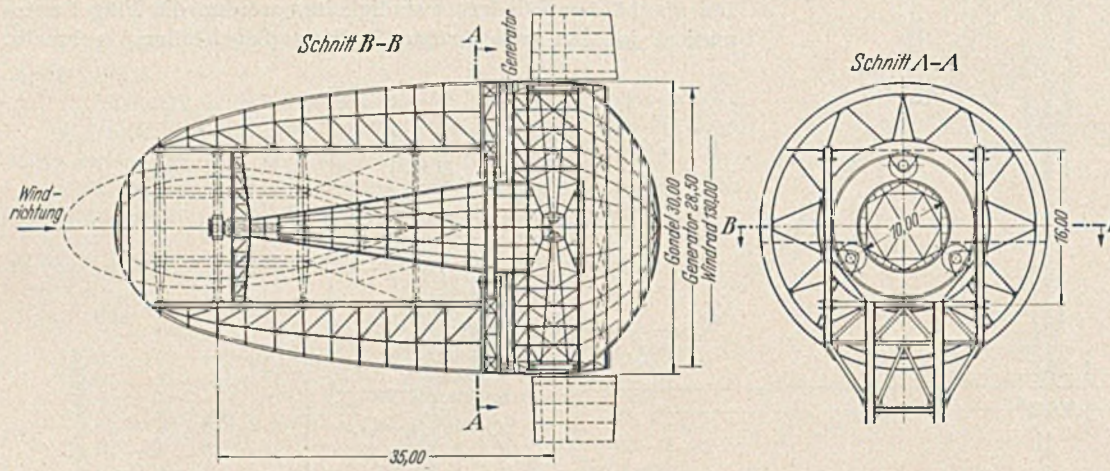

Abb. 6. Gondelzeichnung.

zwei etwa 16 m voneinander entfernten Lagern eingespannt. Um ein plötzliches Umschlagen der Windrichtung bei Böen zu berücksichtigen, ist die Konstruktion für die Aufnahme des Schubes in den beiden entgegengesetzten Richtungen ausgebildet. Abb. 6 zeigt den konstruktiven Aufbau der Gondel (für einen älteren Entwurf mit längerer Gondel).

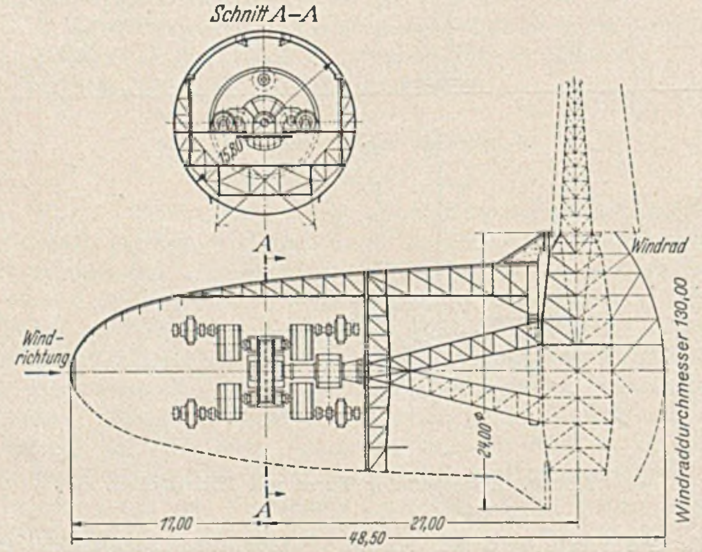

Abb. 7. Getriebeanordnung.

d) Der Drehturm.

Der Drehturm besteht aus einer rd. 157 m hohen vier- oder mehrseitigen Fachwerkkonstruktion. Am Oberteil ist die Gondelkonstruktion kragartig angeschlossen. Um Wirbelbildungen, die hinter dem Turm entstehen und das Windrad ungünstig beeinflussen würden, zu verhindern, wird die obere Hälfte des Drehturmes ebenfalls wie die Gondel windschnittig verkleidet. Hierdurch werden die Windangriffsflächen auf ein Minimum gebracht. Alle Lager sind als hochwertige Wälzlager ausgebildet. Statt des Drehturmes kann die vorgenannte Anordnung mit Hilfsflächen nach Abb. 4 verwandt werden.

e) Fester Turm.

Der 176 m hohe feste Turm hat achtseitige Grundrißform mit 110 m unterer Breite. Nach oben zu verjüngt sich seine Breite bis auf 30 m Seitenlänge. Die obere Plattform besitzt eine kreisrunde Öffnung mit einer Laufbahn für die Rollenwagen und mit einem Zahnkranz für einen Hilfsdrehantrieb. Am Turmkopf in 176 m Höhe ist ein Aufenthaltsraum vorgesehen. Seine Form ist so gewählt, daß die Spitzen des Windrades vor Aufwindströmungen möglichst geschützt bleiben. Die Lagerkonstruktion des Drehturmes liegt in diesem Raume vollkommen geschützt und ist stets zugänglich.

In der Variante — abgespannter Turm — besteht der feste Turm aus einem runden Blechschaft. Die Abspannung erhält drei oder mehr Straffseile, die von besonderen Tragseilen getragen werden; die Variante „abgespannter Turm" hat gegenüber einem festen Turm erheblichen Gewichtsvorteil. Die möglichen Turmausschläge werden bei dieser Anordnung klein. Den runden Turmschaft schützt man zweckmäßig durch Torkretierung gegen Witterungseinflüsse.

Im Innenraum des Turmes ist ein elektrisch betriebener Last- und Personenaufzug mit umlaufender Nottreppe untergebracht.

f) Montage.

Die Montage erfolgt mit besonderen Pfeilergerüsten mit Auslegern von rd. 30 m Länge. Die Flügel werden in zwei oder drei Teilen vom Innern der Gondel aus gezogen.

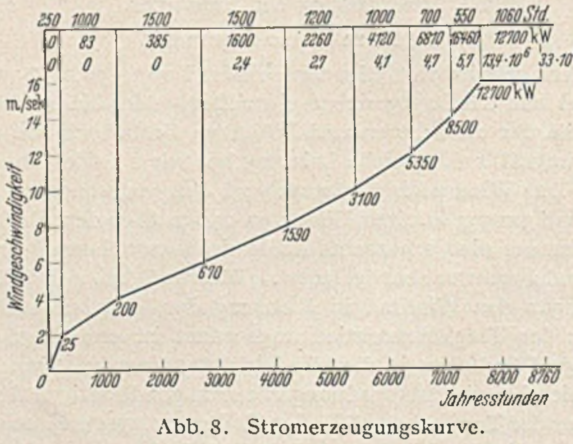

Abb. 8. Stromerzeugungskurve.

Der Turmschaft des abgespannten Turmes wird von der Turmachse aus mit Hilfe von Zwischenabstützungen montiert. Die Montage bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten; für die Flügelmontage müssen windstille Tage abgewartet werden.

g) Elektrischer und maschineller Teil.

Bei der geringen Drehzahl des Windrades von 130 m Durchmesser bzw. dem großen Drehmoment an der Welle waren für die

Stromerzeugung besondere Anordnungen notwendig. Es kommen hierfür zwei Lösungen in Frage, die sowohl in technischer als auch in wirtschaftlicher Hinsicht befriedigen. Die erste Lösung sieht die Aufstellung e i n e s Großgenerators vor, der mit dem Windrad unmittelbar zusammengebaut wird. Das Polrad sitzt auf der Nabe des Windrades an dem Orte des größten Gondeldurchmessers; der Ständer ist unmittelbar am Gondelumfang eingebaut. Der Durchmesser des Generators beträgt rd. 28,50 m. Entsprechend der geringen Drehzahl des Windrades ist der Generator als Langsamläufer auszubilden. In der Abb. 6 ist der Ring-Generator eingezeichnet.

Diese Anordnung vermeidet ein Getriebe ganz und hat hierdurch mechanische und betriebliche Vorteile. Die Nennspannung des Generators wurde mit Rücksicht auf die Witterungseinflüsse nicht über 5000 V gewählt. Die Scheinleistung beträgt 12 500 kVA und der Leistungsfaktor 0,8. Die Anzahl der Pole beträgt 500. Bei der Bestimmung des Luftspaltes im Generator mußten einerseits die mechanischen Forderungen des unbedingt sicheren Betriebes berücksichtigt werden, andererseits war maßgebend, die Erregerleistung möglichst klein zu halten, um einen guten Wirkungsgrad zu erreichen. Der Luftspalt selbst ist mit 25 mm vorgesehen. Der Generator wird fremderregt; hierzu dient ein Motorgenerator, der zweckmäßigerweise im Schaltraum steht.

Um die Drehbarkeit der Gondel nicht zu beeinträchtigen, werden die Leistungs- und Erregerkabel über Schleifringe und Bürsten geführt. Der Schleifringapparat erhält eine besondere Ausführung, die ein Festfressen der Bürsten bei längerem Stillstand der Gondel verhindert.

Bei der zweiten Lösung wird die Windradleistung über ein H o c h l e i s t u n g s g e t r i e b e von sehr hohem Wirkungsgrad auf mehrere Generatoren übertragen. Die Übersetzung erfolgt mittels eines zweifachen Getriebes von 10,5 auf 500 Umdr./Min. Die Aufteilung der Leistung auf mehrere schnell laufende Generatoren gestattet eine gute Ausnutzung der Windenergie durch An- und Abschaltung der Generatoren bei veränderlicher Windstärke. Das große Antriebsrad des Getriebes ist für das Drehmoment federnd ausgeführt, wodurch eventuell auftretende Stöße im Getriebe gemildert werden. Für die Stromerzeuger mit angebautem Erreger können normale Ausführungen genommen werden. Ihre An- und Abschaltung erfolgt auf der elektrischen Seite. Zu diesem Zwecke befindet sich in der Gondel eine Sammelschiene mit Leistungsschaltern, die vom Schaltraum aus bedient werden. Die Übertragung der Energie in das Schalthaus erfolgt in gleicher Weise wie bei der ersten Lösung. Das Windkraftwerk arbeitet in ein großes Überlandnetz mit stabiler Frequenz. Die Kupplung mit dem Ü.-Netz erfolgt entweder starr, also unmittelbar, oder nachgiebig über eine Umrichter-Anlage. Die Konstanthaltung der Drehzahl wird durch den mit dem Netz parallel geschalteten Generator erreicht. Die starre Kupplung hat gegenüber der elastischen den Vorteil geringerer Anlagekosten und besseren Gesamtwirkungsgrades. Die elastische Kupplung dagegen erlaubt, den Strom mit veränderlicher Drehzahl zu erzeugen. Welche von diesen beiden Kupplungsarten die günstigere ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden. Das Rad läuft dann nicht stets mit dem optimalen Leistungsrad und gibt auch eine entsprechend geringere Leistung an das Netz ab; die Vorteile der gleichbleibenden Drehzahl kommen jedoch der elektrischen Anlage zugute.

Bei der Ausführung eines großen Generators im Gondelumfang und starrer Kupplung mit dem Netz ergibt sich an der Übergabestelle ein Gesamtwirkungsgrad der elektrischen Anlage von etwa 85%. Durch die Umrichteranlage bei elastischer Kupplung tritt ein Wirkungsgradverlust von 7% ein. Der Wirkungsgrad der Anordnung mit Getriebe und mehreren Generatoren liegt bei 92%, hierbei sind die Getriebeverluste berücksichtigt.

Abb. 7 zeigt die Getriebeanordnung eines älteren Entwurfs von $\sim$ 10 000 kW Leistung.

V. Wirtschaftlichkeit der Anlage.

Die Wirtschaftlichkeit eines Großwindkraftwerkes ist weitgehend davon abhängig, ob die Anlage durchschnittlich in starker Windströmung arbeitet oder nicht. Große Höhe und eine windstarke Zone sind daher das Entscheidende. In Abb. 8 ist eine graphische Auftragung der Gesamt-Jahresleistung nach einer Wind-Häufigkeitskurve eingefügt. Diese Kurve wurde dem Verfasser freundlicherweise von Herrn Dr. W i t t e, Oberingenieur der Bewag Berlin, zur Verfügung gestellt. Nach der Kurve der Abb. 8 ergibt sich für den vorsichtig gering angenommenen Anlagewirkungsgrad von $\eta = 0{,}65$ eine Jahresleistung von $33 . 10^6$ kWh bei variabler Windraddrehzahl.

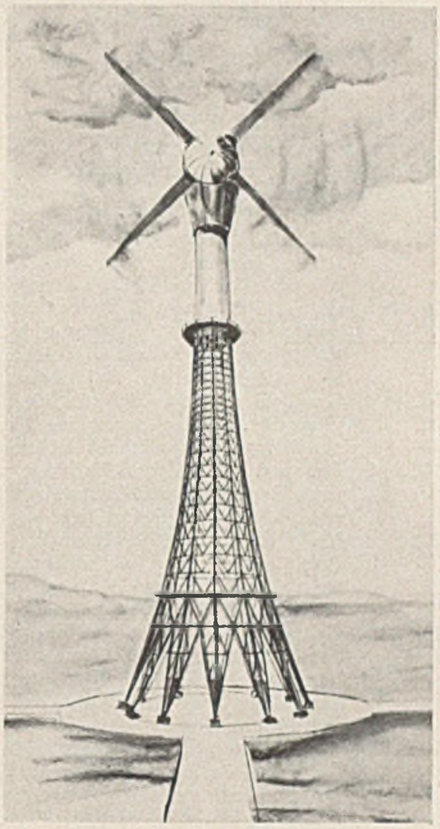

Abb. 9. Windkraftwerk MAN-KLEINHENZ. Schaubild.

Zusammenfassung.

Es wird der Entwurf eines Großwindkraftwerkes von rd. 20 000 kW Leistung näher beschrieben.

Eine Kostenaufstellung ergibt, daß das G r o ß w i n d k r a f t w e r k s i c h z w i s c h e n e i n K o h l e n - u n d W a s s e r k r a f t w e r k w i r t s c h a f t l i c h e i n r e i h t und wegen der Kohlenersparung und geringen Betriebskosten ihm eigene, besondere Vorteile hat. Über die Kosten selbst kann hier nicht berichtet werden. Den praktischen Beweis kann nur ein Versuchswerk als Großausführung erbringen. An diesem ersten Werk werden sich Erfahrungen ergeben, die für die notwendige Weiterentwicklung der technischen Aufgabe Voraussetzungen sind. Die Erstellung einer ersten Versuchsanlage wird als technischer Fortschritt sowohl für den deutschen Wirtschaftsraum als auch besonders für Auslandgebiete, die ohne Kohlen und Wasserkräfte sind, von großem Nutzen sein. Das Großwindkraftwerk wird die Lücke, die bis heute zwischen dem Kohlen- und Wasserkraftwerk bestand, mit Vorteilen für die Energiewirtschaft schließen.

Der Entwurf lag der Reichsarbeitsgemeinschaft „Windkraft", Berlin, zur Prüfung und Begutachtung vor.

VERSCHIEDENE MITTEILUNGEN.

Zweijährige Garantie für Materialmangel.

Einige Installationsfirmen hatten im Jahre 1937 in zahlreichen Neubauten einer Baugesellschaft Installationsarbeiten ausgeführt und in bezug auf die Güte des verwendeten Materials und die sachgemäße Ausführung eine zweijährige Garantie dahin übernommen, daß sie alle in der Gewährleistungsfrist auftretenden Mängel kostenlos umgehend zu beheben und durch einwandfreie Ausführung zu ersetzen sich verpflichteten. Da eine größere Anzahl der gelieferten Badeöfen aus Ausweichwerkstoff innerhalb der Garantiefrist sich als mangelhaft erwies, weil infolge zu dünner Kupferplattierung die Wasserbehälter undicht wurden, verlangte die Baugesellschaft Ersatz der mangelhaften Badeöfen durch einwandfreie.

Das Oberlandesgericht Breslau gab der Klage dem Grunde nach statt, das Reichsgericht dagegen ordnete nochmalige Verhandlung und Entscheidung der Sache an und führte u. a. folgendes aus:

Mit der Garantie übernahmen die Beklagten die Haftung für alle im Material auftretenden Schäden auf zwei Jahre. Der Inhalt der Garantie konnte bei einer Treu und Glauben und die Verkehrssitte berücksichtigenden Vertragsauslegung und der entsprechenden Beurteilung der Leistungspflicht (§ 242 BGB.) selbstverständlich nicht in einer uneingeschränkten Gutsage für das unter dem Zwange der Material-Sparmaßnahmen verwendete Material (die Lieferung kupferner Badeöfen war verboten) bestehen und nicht auf Herstellung eines Zustandes gerichtet sein, der normalen Zeiten entsprach, aber bei staatlicher Lenkung und Drosselung des Materialverbrauchs nicht zu erzielen war. Die Beklagten haben zweifellos auch alles Erforderliche getan, indem sie die Öfen von anerkannt zuverlässigen Firmen bezogen und sich auf die Lieferung einwandfreien Materials, dessen Mangelhaftigkeit nicht erkennbar war, verließen. Mit der Garantiezusage haben sie aber die zusätzliche Verbindlichkeit übernommen, alle in der Gewährsfrist auftretenden Schäden durch einwandfreie Ausführung zu ersetzen. Die Annahme des OLG., die Beklagten hätten sich bei ihren Lieferfirmen durch die gleiche Garantie sichern und andernfalls die Übernahme des Auftrages ablehnen müssen, widerspricht Treu und Glauben (§§ 157, 242 BGB.). Da die Verwendung der sog. Ausweichstoffe behördlich verlangt wurde, brauchten sie diesen kein Mißtrauen entgegenzubringen. Für den Umfang der Garantieverpflichtung ist aber entscheidend, ob im Rahmen der Anordnung der Überwachungsstelle auf fristzeitige Mängelanzeige hin überhaupt Öfen von besserer Beschaffenheit, d. h. mit einer die Haltbarkeit verbürgenden, genügend starken Kupferplattierung oder von anderer Beschaffenheit hergestellt wurden und für die Beklagten greifbar waren, so daß sie der Ersatzverbindlichkeit hätten genügen können. War das nicht der Fall, dann können sie aus der Garantie nach Treu und Glauben nicht in Anspruch genommen werden. „Reichsgerichtsbriefe" (VII 120/41. — 24. 3. 1942). K. Mißlack, Leipzig.

PATENTBERICHTE.

Bekanntgemachte Anmeldungen.

Bekanntgemacht im Patentblatt Heft 14 vom 2. April 1942 und von demselben Tage an auf drei Monate beim Reichspatentamt ausgelegt.

Kl. 19 d, Gr. 7. M 148 151. Erfinder: Bruno Hertling, Mainz. Anmelder: Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A.-G., Nürnberg. Rampe zum Aufbringen eines Montagekrans auf den Obergurt von Brücken. 10. VII. 40. Protektorat Böhmen und Mähren.

Kl. 37 b, Gr. 3/01. C 54 271. Erfinder: Wilhelm Sahlberg, Niesky, Oberlausitz. Anmelder: Christoph & Unmack A.-G., Niesky. Baustoß eines aus Sperrholz-Vollwandstegen und Kantholz-Gurtungen hergestellten Rahmenbinders. 26. I. 37.

Kl. 72 g, Gr. 5. B 188 583. Erfinder, zugleich Anmelder: Ernst Bade, Wunstorf. Erdbohrmaschine für Kriegs- und Kulturzwecke. 12. IX. 39. Protektorat Böhmen und Mähren.

Kl. 80 b, Gr. 1/05. B 194 591. Erfinder, zugleich Anmelder: Dr. phil. Karl Brandt, Berlin-Wilmersdorf. Verfahren zur Vergütung von Mörtel und Beton. 13. VI. 41.

Kl. 84 a, Gr. 3/10. C 53 868. Erfinder, zugleich Anmelder: Dr.-Ing. Paul Cicin, Wien. Vorrichtung zum Aufrichten und Niederlegen von Chanoine-Pasqueau'schen Klappenwehren. 2. IV. 38. Österreich 9. X. 37.

Kl. 84 a, Gr. 3/10. M 140 761. Erfinder: Hans Fischer, Mainz, u. Wilhelm Müller, München. Anmelder: Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg A.-G., Nürnberg. Einrichtung zur Verhinderung der Verkiesung von torsionsfesten Klappenwehren. 18. II. 38. Österreich.

Kl. 84 c, Gr. 1. G 100 634. Erfinder: Eduard Kröger, Mannheim. Anmelder: Grün & Bilfinger A.-G., Mannheim. Anlage zur Grundwasserabsenkung und gleichzeitigem Rückführen des Wassers in den Boden. 26. VIII. 39. Protektorat Böhmen und Mähren.

Bekanntgemachte Anmeldungen.

Bekanntgemacht im Patentblatt Heft 15 vom 9. April 1942 und von demselben Tage an auf drei Monate beim Reichspatentamt ausgelegt.

Kl. 19 d, Gr. 5/05. G 99 183. Erfinder: Dr.-Ing. Wilhelm Stoltenburg, Oberhausen-Sterkrade. Anmelder: Gutehoffnungshütte Oberhausen A.-G., Oberhausen Rhld. Bewegliche Brücke. 21. XII. 38. Protektorat Böhmen und Mähren.

Kl. 37 a, Gr. 7/01. B 23 210. Wilhelm Ziegler, Berlin. Wasser- und gasdichtes Mauerwerk; Zus. z. Pat. 661 664. 25. V. 36.

Kl. 42 k, Gr. 20/02. S 134 349. Erfinder: Dr.-Ing. Otto Müller, Berlin-Charlottenburg. Anmelder: Siemens & Halske A.-G., Berlin-Siemensstadt. Schwingungsprüfmaschine, auf der ein mit dem Prüfling verbundener Hilfskörper einer Drehschwingungsbeanspruchung unterworfen wird. 25. X. 38. Prot. Böhmen u. Mähren.

Kl. 84 a, Gr. 5/01. T 52 214. Carl Tiburtius, Wilhelmshaven. Dalben; Zus. z. Pat. 539 447. 8. V. 39.

Kl. 84 b, Gr. 2. D 80 462. Erfinder: August Goebel, Dortmund. Anmelder: Dortmunder Union Brückenbau A.-G., Dortmund. Schiffshebewerk mit mitten unterhalb des Schiffstrogs angeordneten Schwimmern. 17. V. 39. Protekt. Böhmen u. Mähren.

Kl. 84 b, Gr. 2. D 83 127. Erfinder: Karl Schlagenhauff, Dortmund. Anmelder: Dortmunder Union Brückenbau A.-G., Dortmund. Gewichtsausgleich für Trogtore von Schiffshebewerken. 12. VIII. 40.

Kl. 84 c, Gr. 1. G 102 773. Erfinder, zugleich Anmelder: Dipl.-Ing. August Gronauer, München. Verfahren und Vorrichtung zur Baugrundverdichtung oder zur Herstellung von Ortpfählen. 30. XII. 40.

Kl. 85 c, Gr. 6/06. B 183 756. Erfinder: Andreas Fröhlich, Bad Soden, Ts. Anmelder: Breuer-Werke G. m. b. H., Frankfurt a. M.-Höchst. Umlaufendes endloses Siebband für die Wasser- und Abwasserreinigung. 1. VIII. 38.

Bekanntgemachte Anmeldungen.

Bekanntgemacht im Patentblatt Heft 16 vom 16. April 1942 und von demselben Tage an auf drei Monate beim Reichspatentamt ausgelegt.

Kl. 19 d, Gr. 10. E 52 145. Fa. Louis Eilers, Hannover-Herrenhausen. Abdeckvorrichtung für Dehnungsfugen von Brücken. 30. I. 39.

Kl. 37 b, Gr. 5/01. Sch 117 545. Erfinder, zugleich Anmelder: Julius Schäfer, Stuttgart. Dübel zur gelenkigen Verbindung von Parallelanschlüssen. 20. I. 39. Protektorat Böhmen und Mähren.

Kl. 37 b, Gr. 6. C 56 159. Erfinder, zugleich Anmelder: Dr.-Ing. Josef Sebastian Cammerer, Tutzing (Obb.). Luftschichtisolierung. 7. XII. 40.

Kl. 37 e, Gr. 13/04. Sch 118 014. Erfinder, zugleich Anmelder: Cuno Schückhaus, Düsseldorf-Benrath. Klemmvorrichtung für die Spanndrahtenden bei Betonschalungen. 22. III. 39. Protektorat Böhmen und Mähren.

Kl. 72 g, Gr. 7/01. L 95 874. Erfinder: Kurt Krause, Berlin-Grunewald. Anmelder: Luz-Bau G. m. b. H., Berlin-Charlottenburg. Luftschutzgebäude. 14. X. 38.

Kl. 80 a, Gr. 56/10. K 158 583. Erfinder, zugleich Anmelder: Josef Klein, Bremen. Vorrichtung zum Herstellen von Schleuderbetonrohren. 2. IX. 40.

Kl. 80 b, Gr. 8/14. A 92 474. Erfinder: Dr.-Ing. Kamillo Konopicky, Köln. Anmelder: Alterra A.-G., Luxemburg. Mörtel für Magnesiasteine oder magnesiahaltige Steine. 9. XII. 40.

Kl. 84 a, Gr. 3/10. F 84 864. Erfinder, zugleich Anmelder: Arno Fischer, München. Wehranlage mit Zwischenpfeilern. 25. IV. 38. Österreich.

Kl. 84 c, Gr. 6. G 86 820. Adolf Wolfsholz, Zementpreßbau, Düsseldorf. Verfahren zum Kitten, Härten und Dichten von Mauerwerk, Beton o. dgl. und Bodenschichten aller Art. 11. XI. 33.

Bekanntgemachte Anmeldungen.

Bekanntgemacht im Patentblatt Heft 17 vom 23. April 1942 und von demselben Tage an auf drei Monate im Reichspatentamt ausgelegt.

Kl. 19 c, Gr. 2/01. M 135 967. Erfinder: Johannes Müller, Wahlfeld a. S. Anmelder: „Fablo", Falzblock-Pflasterbau G. m. b. H., Berlin-Wannsee. Pflasterblock. 12. X. 36.

Kl. 19 c, Gr. 6/10. M 142 935. Erfinder, zugleich Anmelder: Dipl.-Ing. Alexander Musall, Berlin. Dübelverbindung für Betonfahrbahnplatten. 4. X. 38.

Kl. 19 d, Gr. 1/01. H 161 789. Erfinder, zugleich Anmelder: Dr.-Ing. Hellmut Homberg, Wuppertal-Barmen. Bogenbrücke. 4. III. 40. Protektorat Böhmen und Mähren.

Kl. 37 b, Gr. 5/04. L 102 027. Erfinder, zugleich Anmelder: Albert Lüdcke, Berlin. Dübel. 7. X. 40.

Kl. 37 c, Gr. 11/04. K 153 233. Erfinder, zugleich Anmelder: Karl Kaden, Radebeul. Laufbrettstütze. 25. I. 39.

Kl. 84 c, Gr. 2. W 100 646. Erfinder: Ernst Wahlmann, Anderten über Hannover. Anmelder: Auguste Wahlmann, geb. Behn, Anderten über Hannover. Vorrichtung zur Herstellung von Ortpfählen. 9. III. 37.

Kl. 84 c, Gr. 4. I 68 555. Erfinder: Willy Below, Berlin-Wilmersdorf u. Gerhard zur Nedden, Peine. Anmelder: Ilseder Hütte, Peine, und Willy Below, Berlin-Wilmersdorf. Verfahren zur Feststellung des Ausweichens von Spundbohlen beim Rammen und Neigungsmesser für das Verfahren. 18. XII. 40.

Kl. 84 c, Gr. 4. Sch 120 050. Erfinder, zugleich Anmelder: Otto Schulze, Belzig. Pfahlhalteblock für eine auf einem schwimmenden Fahrzeug aufgebaute Ramme. 20. IX. 40.

Kl. 85 d, Gr. 1. St 60 958. Erfinder, zugleich Anmelder: Dipl.-Ing. Heinrich Stephan, Berlin-Nikolassee. Kiesschüttungsbrunnen. 1. VIII. 41.

Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr.-Ing. F. Schleicher, Berlin-Charlottenburg. — Springer-Verlag, Berlin W 9.
Druck von Julius Beltz in Langensalza. L/0190.