

DER BAUINGENIEUR

18. Jahrgang

20. August 1937

Heft 33/34

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE KNICKSICHERHEIT, DIE ELASTISCHE VERFORMUNG UND DAS KRIECHEN DES BETONS BEI BOGENBRÜCKEN.

Von Professor Dr.-Ing. Fr. Dischinger, Berlin.

Vorbemerkung.

Dem im folgenden mit seinen beiden ersten Teilen (der dritte Teil = vgl. das Inhaltsverzeichnis weiter unten = folgt in den nächsten Heften) veröffentlichten Aufsatz Dischinger ist in Hinsicht auf die besondere Bedeutung der darin behandelten Fragen für Zeitschriften ein ungewöhnlich großer Platz eingeräumt worden.

Die Arbeit bringt zunächst die Berechnung von Bögen mit beliebiger Bogenachse, beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente und beliebiger Lagerung unter Berücksichtigung elastischer Verformungen.

Es ist dem Verfasser gelungen, die Zusammenhänge zwischen den nach der üblichen Elastizitäts-Theorie berechneten Ursprungsschnittkräften und den tatsächlichen, sich unter Berücksichtigung der elastischen Verformungen ergebenden Schnittkräften unter Vermeidung von transzendenten Gleichungen durch überraschend einfache algebraische Gleichungen darzustellen. Auf diese Weise ist zum erstenmal ein Berechnungsverfahren entwickelt worden, das schnell und übersichtlich zum Ziel führt.

Die Berechnung der Schnittkräfte aus der elastischen Verformung fußt auf der genauen Ermittlung der Knickformen und der Knicksicherheit. Dadurch ergeben sich einfache, außerordentlich aufschlußreiche Rückschlüsse darauf, in welcher Weise die Bogenachse künstlich verformt werden muß, um den günstigsten Verlauf der Schnittkräfte zu erzielen.

Auf der Theorie der elastischen baut sich die der plastischen Verformung auf, die es gestattet, bei Beton- und Eisenbetontragwerken den Einfluß des Kriechens und Schwindens auf die Schnittkräfte und deren Umlagerung vom Beton auf das Eisen genau zu berücksichtigen, wenn die dafür maßgebenden Materialkonstanten, der Elastizitätsmodul der federnden Dehnungen, das Kriech- und das Schwindmaß bekannt sind.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind zum Teil sehr überraschend; sie zeigen, daß die Verformungen bei den Gewölben mit Scheiteltellen sehr hohe zusätzliche Biegemomente hervorrufen, denen nur durch eine große Knicksicherheit und eine Verminderung des Kriechmaßes entgegengewirkt werden kann. Dagegen sind die Wirkungen des Kriechens bei den Gewölben ohne Scheiteltelle zum Teil sogar günstig, und zwar um so mehr, je höher die Sicherheit gegenüber symmetrischer Knickung ist.

Die Darlegungen des Verfassers geben die Möglichkeit, Stahl- und Eisenbetontragwerke unter Berücksichtigung sämtlicher Verformungseinflüsse genau zu berechnen.

Die Herausgeber.

Vorwort.

Vier Probleme stehen heute beim Bau von Bogenbrücken im Vordergrund. Diese sind:

1. Die genaue Größe der Knicksicherheit beliebig geformter Bogenbrücken bei beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente.
2. Die Größe der zusätzlichen Momente aus der elastischen Verformung. Dieses Problem steht in innigem Zusammenhang mit dem ersten. Mit der Lösung des einen ist auch die des anderen gegeben.
3. Der Einfluß des Kriechens (plastische Verformungen) auf die Biegemomente und der Einfluß des Schwindens bei gleichzeitigem Kriechen des Betons.
4. Die Methoden zur Erreichung einer günstigeren Verteilung bzw. eines Ausgleichs der Biegemomente einerseits durch eine Verformung der Bogenachse, andererseits durch äußere Eingriffe mittels hydraulischer Pressen oder anderer gleichwertiger Maßnahmen.

Schon seit Jahrzehnten wurde darauf hingewiesen¹, daß bei kühnen Bogenbrücken der Einfluß der Verformung des Systems

auf die Biegemomente berücksichtigt werden muß. Im Gegensatz zu den Hängebrücken, bei denen die Berücksichtigung der Verformung günstigere Ergebnisse liefert, ergeben sich bei den Bogenbrücken infolge der elastischen Verformung oft nicht unwesentliche Zusatzspannungen.

Bei den Parabelbögen mit $\frac{ds}{dx} = \frac{dx}{Jc}$ lassen sich die Biegemomente

aus der elastischen Verformung mittels der Differentialgleichung ermitteln. Die Lösung führt auf transzendente Gleichungen von beträchtlichem Umfang, besonders bei dem von Fritz angegebenen Verfahren, bei dem sie teilweise die Länge einer halben Seite haben. Dadurch wird die Durchführung der Rechnung und vor allem die Übersicht erschwert.

Ing.- u. Arch.-Ver. 52 (1900) S. 553; — Die Ermittlung der Spannungen im Dreigelenkbogen und in dem durch einen geraden Balken mit Mittelgelenk versteiften Hängeträger mit Berücksichtigung seiner Formänderung. Österr. Wschr. öffentl. Baudienst (1903) S. 438; — Genauere Theorie des Zweigelenkbogens mit Berücksichtigung der durch die Belastung erzeugten Formänderung. Handb. Ingenieurwissensch. (1906) II. Bd., 5. Abtl., Kap. XII; — Der biegsame eingespannte Bogen. Bauing. 6 (1925) S. 143. — Kasarnowsky, S.: Beitrag zur Theorie weitgespannter Brückenbögen mit Kämpfergelenken. Stahlbau 4 (1931) S. 61. — Fritz, B.: Theorie und Berechnung vollwandiger Bogen-träger. Berlin: Julius Springer 1934. — Hawranek, A.: Weitgespannte Eisenbetonbogenbrücken. Int. Ver. f. Brücken- u. Hochbau. Vorbericht f. d. II. Kongreß Berlin-München 1936.

¹ Engesser, Fr.: Über den Einfluß der Formänderungen auf den Kräfteplan statisch bestimmter Systeme, insbesondere der Dreigelenkbogen. Z. Architektur u. Ingenieurwes. (1903) S. 178. — Melan, J.: Zur Bestimmung der Spannungen in den durch einen geraden Balken mit Mittelgelenk versteiften Hängeträgern. Z. öst.

Bei unseren praktischen Bauausführungen, vor allem im Massivbau, kommen jedoch parabelförmige nach der Stützlinie geformte Gewölbe nur in geringem Umfang in Frage, weil das Eigengewicht dieser Brücken vom Scheitel nach dem Kämpfer hin zunimmt. Die Seillinien unserer Gewölbe haben deshalb eine gegenüber der Parabel überhöhte Form. Wie im Abschnitt II gezeigt wird, läßt sich die Differentialgleichung auch bei überhöhten Bögen lösen, aber die Gleichungen werden hierbei noch wesentlich umfangreicher und unübersichtlicher. Außerdem nützt eine derartige Lösung nicht sehr viel, denn diese Gewölbe mit überhöhter Seillinie haben zugleich stark veränderliche Trägheitsmomente, wodurch die Lösung mittels der Differentialgleichung praktisch unmöglich wird. Durch eine Überhöhung der Gewölbe gegenüber der Parabel wird die homogene Differentialgleichung nicht beeinflusst, nur das Störungsglied wird verwickelter und damit auch die zugehörigen Integrale. Durch eine Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes wird dagegen nicht nur das Störungsglied verwickelter, sondern es treten jetzt auch an Stelle der konstanten Koeffizienten der Differentialgleichung veränderliche, wodurch praktisch die Durchführung der Rechnung unmöglich gemacht wird.

Es ist aber sehr wichtig, die elastischen Verformungen zu berücksichtigen, und zwar nicht nur bei Brücken sehr großer Spannweite, sondern auch bei kleinen Brücken, die eine geringe Knicksicherheit besitzen. Das wird nur möglich sein, wenn es gelingt, die komplizierten transzendenten Zusammenhänge durch einfache Gleichungen zu ersetzen. Vor allem aber ist es notwendig, die Gesetze zu erforschen, die bei Berücksichtigung der elastischen Verformung an Stelle des linearen Zusammenhangs zwischen den äußeren und inneren Kräften und an Stelle des Superpositionsgesetzes treten. Bekanntlich gehen bei Berücksichtigung der Verformung diese beiden Grundlagen unserer Ingenieurmechanik verloren. Die Spannungen sind nicht mehr proportional den äußeren Lasten und damit geht auch das Superpositionsgesetz verloren, so daß wir die einzelnen Lastfälle nicht mehr addieren können. Der Wegfall dieser beiden Gesetze ist ein sehr großes Hindernis für die Berücksichtigung der Verformungen bei der Ermittlung der Biegemomente der Gewölbe.

Alle diese Schwierigkeiten werden durch das nachstehend dargestellte Verfahren zur Ermittlung der Biegemomente aus der elastischen Verformung beseitigt. Es gelingt hierbei, die Biegemomente M bei Berücksichtigung der Verformung in einfacher Weise auf die bei der üblichen Berechnungsweise ermittelten Momente M_0 zurückzuführen, und zwar mittels einer Gleichung, die die Form hat:

$$M \cong M_0 \frac{\nu + \delta}{\nu - 1},$$

wobei ν die Knicksicherheit des Systems und δ ein Zahlenkoeffizient ist. Diese Gleichung gibt uns, wie ich später zeigen werde, zugleich auch Aufschluß darüber, daß an Stelle des linearen Zusammenhangs zwischen den äußeren und inneren Kräften in großer Annäherung ein quadratischer Zusammenhang getreten ist, und diese Erkenntnis ermöglicht es auch, die an Stelle des Superpositionsgesetzes getretenen allgemeineren Gesetze zu finden, nach denen die Überlagerung mehrerer Lastfälle vor sich geht.

Die obige Darstellung der Verformungsmomente gestattet es uns, schon hier einige Irrtümer zu berichtigen, die sich im Schrifttum finden. So wird behauptet, daß die zusätzlichen Biegemomente nur für weitgespannte Brücken von Bedeutung seien. Die obige Gleichung zeigt uns, daß dies ein Irrtum ist, denn die Größe der Verformungsmomente ist nur von der vorhandenen Knicksicherheit des betreffenden Bogensystems abhängig, die bei kleineren flachen Brücken auch nicht höher angesetzt wird, als bei weitgespannten Brücken. Der Konstrukteur sucht immer den in unseren Bestimmungen festgelegten Mindestwert der Knicksicherheit auszunützen. Dazu kommt noch, daß bei großen Brücken die in Rechnung gestellten ungünstigsten Verkehrslaststellungen niemals auftreten, während wir bei den kleineren Brücken hiermit unbedingt rechnen müssen.

Auch findet man die Behauptung, daß sich die Verformungsmomente bei den Massivbrücken besonders ungünstig auswirken, weil bei diesen die Gewölbekräfte aus Eigengewicht wesentlich größer seien als bei den leichteren Stahlbrücken. Dies ist ebenfalls ein Irrtum, da die Verformungsmomente nur von der Größe der vorhandenen Knicksicherheit abhängig sind. Es ist sogar gerade das Gegenteil der Fall, weil bei den Massivbrücken im allgemeinen eine größere Knicksicherheit vorgesehen wird. Dazu kommt noch, daß durch die elastische Verformung nur die Spannungen aus den Biegemomenten, nicht aber die aus den Normalkräften wesentlich vergrößert werden. Bei den Massivbrücken entfallen von dem Gesamtwert der zulässigen Spannungen mindestens 70% auf die Normalkräfte und nur 30% auf die Biegemomente, bei den Stahlbrücken dagegen ist dieses Verhältnis oft 50:50. Bei einer Steigerung der Biegemomente durch die Verformung z. B. von 50% ergibt sich bei einer Betonbrücke ein Größtwert von $70 + 30 + 15 = 115\%$, bei einer Stahlbrücke gleicher Knicksicherheit dagegen von $50 + 50 + 25 = 125\%$.

Dafür kommen aber bei den Massivbrücken zu den elastischen noch die plastischen Verformungen aus dem Kriechen des Betons hinzu². Durch das Kriechen des Betons verkürzt sich der gedrückte Beton unter dem Einfluß der Dauerlast. Das Kriechen erstreckt sich auf einen Zeitraum von mehreren Jahren, aber der weitaus größte Teil dieser plastischen Verkürzung geht im ersten Jahre vor sich. In dieser Zeit des Kriechens überlagern sich demnach elastische und plastische Vorgänge. Die Untersuchungen des Abschnittes III über den Einfluß des Kriechens ergeben zum Teil sehr überraschende Resultate, so daß wir unsere Anschauungen über die Durchbildung massiver Bogenbrücken in vielen Punkten einer Änderung unterziehen müssen. Bei den statisch unbestimmten Bogenbrücken macht sich im allgemeinen, wenigstens dann, wenn eine hohe Knicksicherheit vorhanden ist, das Kriechen in sehr günstiger Weise bemerkbar, weil durch diesen plastischen Vorgang die Zwängungsspannungen aus dem Ausweichen der Widerlager und aus den Schwindwirkungen wesentlich herabgemindert werden. Beim statisch bestimmten Dreigelenkbogen dagegen wirkt sich das Kriechen immer ungünstig aus. Daraus ergibt sich eine Verschiebung des Schwerpunktes von den bisher in Deutschland bevorzugten Dreigelenkbogen zu den statisch unbestimmten Gewölbesystemen, und zwar auch bei den flacheren Brücken. Durch das Kriechen des Betons wird nicht nur der statisch unbestimmte Horizontalschub, der sich aus der Schwindung und der Zugbandverlängerung bzw. der Widerlagerausweichung ergibt und die damit verbundene Zwängung beeinflusst, sondern auch die zusätzlichen Biegemomente aus der elastischen Verformung infolge Eigengewichts. Diese werden unter allen Umständen größer, so daß auch hieraus die Notwendigkeit folgt, unseren Brücken eine möglichst hohe Knicksicherheit zu geben. Interessant sind auch die Auswirkungen auf die verschiedenen Methoden zur Beseitigung der zusätzlichen Biegemomente aus der Bogenzusammendrückung, der Widerlagerausweichung, der Zugbandverlängerung und dem Schwinden, einerseits durch eine Verformung der Bogenachse, andererseits durch äußere Eingriffe mittels hydraulischer Pressen oder provisorischer Gelenke. Auch hier müssen wir unsere Anschauungen in vielen Punkten ändern.

Die Ermittlung der Verformungsmomente nach der obigen Gleichung setzt die Kenntnis der Knicksicherheit voraus. Die beiden Probleme sind eng miteinander verbunden; mit der Lösung des einen ist, wie schon oben bemerkt wurde, auch die Lösung des anderen gegeben. Unsere heutigen Kenntnisse über die Knicksicherheit der Gewölbe sind noch sehr dürftig. Wir kennen diese nur von Bögen konstanten Trägheitsmomentes und auch hier nicht vollständig, z. B. fehlen die Werte für den Eingelenkbogen,

² Freudenthal, A.: Die Änderung des Spannungszustandes weitgespannter flacher Eisenbetonbögen durch die plastische Dauerformung des Betons. Beton u. Eisen 34 (1935) S. 176. (Im Gegensatz zu der Überschrift behandelt jedoch Freudenthal, wie ich im Abschnitt III zeigen werde, nicht die plastische, sondern nur die elastische Verformung unter Zugrundelegung eines ideellen durch das Kriechen verminderten Elastizitätsmoduls.)

und bei dem Dreigelenkbogen sind die unseren Bestimmungen zugrunde liegenden Gleichungen unrichtig (das gleiche gilt auch für versteifte Stabbogenbrücken). Für Gewölbe mit einer gegenüber der Parabel überhöhten Bogenachse und vor allem bei Gewölben mit veränderlichem Trägheitsmoment fehlen noch jegliche Unterlagen.

In den späteren Ausführungen werde ich zeigen, daß wir grundsätzlich zwei verschiedene Möglichkeiten der Knickung unterscheiden müssen. Es gibt eine antimetrische dehnungslose Knickung, bei welcher der Horizontalschub sich nicht ändert und eine symmetrische Knickung mit Dehnung, durch welche der Horizontalschub beeinflußt wird. Bei den Gewölben mit Scheitelgelenken — d. h. beim Drei- und Eingelenkbogen — ist die symmetrische Knickung mit Dehnung, bei den Gewölben ohne Scheitelgelenk — d. h. beim eingespannten und beim Zweigelenkbogen — dagegen die antimetrische Knickung ohne Dehnung maßgebend. Es zeigt sich, daß durch die Scheitelgelenke die Werte der Knicksicherheit ganz wesentlich herabgemindert werden, und daß damit zugleich auch die Biegemomente aus der elastischen Verformung wesentlich vergrößert werden. Ich will dies durch zwei Zahlenangaben belegen. Für einen Parabelbogen mit $\frac{ds}{J_x} = \frac{dx}{J_c}$ erhält man für den eingespannten Bogen eine Knicksicherheit von $\nu = 20,19 \frac{E J_c}{H a^2}$, bei dem Eingelenkbogen dagegen beträgt die Knicksicherheit nur $\nu = 10,983 \frac{E J_c}{H a^2}$, bei dem Zweigelenkbogen ergibt sich die Knicksicherheit zu $\nu = \pi^2 \frac{E J_c}{H a^2} = 9,87 \frac{E J_c}{H a^2}$. Durch das Einschalten eines Scheitelgelenkes erhalten wir hieraus einen Dreigelenkbogen, dessen Knicksicherheit $\nu = 7,437 \frac{E J_c}{H a^2}$ ist. Bei den Gewölben ohne Scheitelgelenk ist die dehnungslose antimetrische Knickung maßgebend, Gewölbe mit Scheitelgelenk knicken dagegen symmetrisch. Die Scheitelgelenke sind, wie die obigen Zahlen zeigen, von sehr ungünstiger Wirkung auf die Knicksicherheit und infolgedessen ergeben sich für diese gemäß der Gleichung $M = M_0 \frac{\nu + \delta}{\nu - 1}$ auch wesentlich ungünstigere Verformungsmomente.

Jede unsymmetrische Belastung läßt sich bekanntlich in eine symmetrische und eine antimetrische Belastung zerlegen. Die Verformungsmomente aus einer symmetrischen Belastung ergeben sich als eine Funktion der Knicksicherheit ν_s — der symmetrischen Knickung mit Dehnung —. Demnach ergeben sich die Verformungsmomente aus einer Gleichung $M = M_{0s} \frac{\nu_s + \delta_s}{\nu_s - 1}$. Die Verformungsmomente aus einer antimetrischen Belastung sind dementsprechend abhängig von dem Wert ν_a — der antimetrischen Knickung ohne Dehnung —. Demnach $M = M_{0a} \frac{\nu_a + \delta_a}{\nu_a - 1}$.

Die späteren Untersuchungen zeigen, daß die zusätzlichen Momente aus der Verformung annähernd immer den Verlauf der zugehörigen Knickwelle zeigen. Einer symmetrischen Belastung entsprechen zusätzliche Biegemomente aus der Verformung in Form der Knickwelle des symmetrischen Knickens mit Dehnung. Der antimetrischen Belastung dagegen solche in der Form der Knickwelle des antimetrischen Knickens.

Eingehend wird auch das Problem der künstlichen Verformung der Bogenachse behandelt, über das in den letzten Jahrzehnten sehr viel Unrichtiges geschrieben wurde und wodurch eine günstigere Verteilung der Biegemomente längs der Bogenachse erzielt werden soll. Es läßt sich zeigen, daß die Balkenmomente des Bogens, die sich aus der Bogenzusammendrückung, dem Schwinden und dem Ausweichen der Widerlager ergeben und die immer nach der Form der Gewölbeachse verlaufen, niemals beseitigt werden können, wohl aber können die erwähnten zusätzlichen Biegemomente aus der elastischen und damit auch aus der plastischen Verformung restlos beseitigt werden. Hierzu muß die Bogenachse entsprechend den Biegelinien, die sich aus der symmetrischen

Knickung ergeben, künstlich verformt werden. Mit diesen Biegelinien der symmetrischen Knickung lassen sich selbstverständlich auch die erwähnten Balkenmomente beeinflussen, das bedeutet aber keine Beseitigung dieser Momente, sondern nur eine Umlagerung und deshalb entsprechen jeder Verbesserung in einem bestimmten Querschnitt Verschlechterungen an anderen Querschnitten.

Von wesentlicher Bedeutung für die Ermittlung der Spannungen aus den plastischen Formänderungen infolge des Kriechens ist die Tatsache, daß der Verlauf der Kriechkurve ohne jeden Einfluß auf den Spannungszustand ist, dieser hängt nur von dem Größtwert des Kriechens ab. Durch das Kriechen und Schwinden werden nicht nur die statisch unbestimmten Stützkkräfte des Bogens beeinflußt, sondern zugleich auch die Verteilung der inneren Kräfte und Momente auf den Beton und den Eisenquerschnitt. Mit dem Fortschreiten des Kriechens und Schwindens findet eine Umlagerung der Schnittkräfte vom Beton auf das Eisen statt und bei stark bewehrten Säulen und Gewölben kann sogar der Fall eintreten, daß mit Abschluß des Kriechens und Schwindens der Beton vollständig spannungslos wird, so daß die gesamte Last von den Bewehrungen allein getragen wird, d. h. daß das Verhältnis $n = \sigma_c / \sigma_b = \infty$ wird. Diese Umlagerung der inneren Kräfte ergibt sich aus einer leicht lösbaren linearen Differentialgleichung. Für den Bau von Brücken mit steifen Eiseneinlagen (System Melan) und die Methoden zum Erreichen von Druckvorspannungen in den Eisenquerschnitten (System Spangenberg) ergeben sich aus diesen Überlegungen wichtige Folgerungen.

Sowohl die Untersuchungen über die Knicksicherheit wie über die elastischen und plastischen Verformungen zeigen einerseits, daß die Gewölbe ohne Scheitelgelenk denen mit Scheitelgelenk weit überlegen sind und daß andererseits den statisch unbestimmten Systemen gegenüber den statisch bestimmten der Vorzug zu geben ist. Die Verformungsmomente der Gewölbe mit Scheitelgelenken infolge der Bogenverkürzung aus den Eigengewichtsdruckspannungen, dem Schwinden und dem Widerlagerausweichen können auch bei Einhalten der heute vorgeschriebenen Knicksicherheiten überraschend groß werden, vor allem bei hohen Kriechwerten und können dadurch zu einer Gefahr für das Gewölbe werden. Eine Vermeidung dieser großen zusätzlichen Momente läßt sich nur durch eine Erhöhung der Knicksicherheit bei gleichzeitiger Verringerung der Kriechmasse erreichen. Eine weitere Verbesserung ergibt sich noch durch eine künstliche Verformung der Bogenachse, wobei aber die genaue Kenntnis der verschiedenen Materialkonstanten benötigt wird.

Aber auch bei den üblichen Stockwerksbauten führt das Kriechen zu einem starken Anwachsen der Biegemomente. Die darüber im Abschnitt III angestellten Untersuchungen dürften manchen Einsturz kurz nach der Ausrüstung oder aber auch Monate später erklären, der bis heute nur auf Material- oder Konstruktionsfehler zurückgeführt wurde. Auch diesen Gefahren kann man nur durch reichliche Knicksicherheiten und geringe Kriechmaße begegnen. Eine Verminderung der Kriechmaße läßt sich leicht durch etwas spätere Ausrüstung und langes Berieseln des Betons erreichen.

Mit Ausnahme des Eingelenkbogens für den sich bei niedrigen bzw. gerade den Bestimmungen genügenden Knicksicherheiten die elastischen und plastischen Verformungen sehr unangenehm bemerkbar machen, wirkt sich das Kriechen bei den übrigen statisch unbestimmten Gewölben — dem eingespannten und dem Zweigelenkbogen — sowie auch bei Rahmen- oder ähnlichen Eisenbetontragwerken sehr günstig aus, weil dadurch die großen Zwängungsmomente aus Schwinden und Widerlagerausweichen auf einen Bruchteil der Werte erniedrigt werden, die sich nach der üblichen Berechnungsweise ergeben.

Um Mißverständnisse auszuschalten, sei gleich hier in der Einleitung festgestellt, daß als Verformungsmomenten nur solche bezeichnet werden, die sich aus den Änderungen der Ordinaten des Bogens ergeben, im Gegensatz zu den Momenten, die aus den Formänderungen wie Bogenzusammendrücken oder Widerlagerweichen berechnet werden.

Ich beschränke mich in der vorliegenden Arbeit im wesentlichen auf den Parabelbogen, um nicht durch zu großen Umfang der Arbeit in den einzelnen Punkten und Folgerungen unübersichtlich zu werden. Die Durchführung der Rechnung bei anderen Bogenarten und veränderlichen Trägheitsmomenten bringt jedoch nur eine ganz geringe Mehrarbeit mit sich. Ich komme hierauf in einer Fortsetzung dieser Arbeit noch ausführlich zu sprechen. Da die Berechnung der Knicksicherheiten der Gewölbe bei antimetrischer Knickung und ebenso auch die Berechnung der zugehörigen Verformungsmomente sich ganz allgemein auch bei beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente auf die des geraden Balkens zurückführen läßt, wird im Teil I der gerade Balken bei verschiedenen Randbedingungen behandelt. Im zweiten Teil folgen dann die Untersuchungen über die Knicksicherheiten und die Verformungsmomente der Gewölbe und im Teil III wird der Einfluß des Kriechens besprochen.

Inhaltsübersicht.

- I. Die zusätzlichen Biegemomente des geraden gedrückten Balkens infolge seiner elastischen Verformung.
 1. Das Verfahren von Vianello zur Ermittlung der Knicksicherheit von geraden gelenkig gelagerten Stäben bei beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente.
 2. Die Erweiterung des Verfahrens von Vianello zur Ermittlung der Knicksicherheit von statisch unbestimmten Stab- und Bogentragwerken und seine Anwendung zur Ermittlung der Biegemomente aus der elastischen Verformung mit Hilfe konvergenter geometrischer Reihen.
 3. Der freiaufliegende gedrückte Stab.
 4. Der einseitig eingespannte Stab.
 5. Der beiderseitig eingespannte Stab.
 6. Die Ableitung der gewonnenen Gleichungen mit Hilfe der Differentialgleichung.
- II. Die Knicksicherheit und die zusätzlichen Biegemomente aus der Verformung der Gewölbe.
 1. Ermittlung der allgemeinen Gesetze, die infolge der elastischen Verformung an Stelle des linearen Zusammenhangs zwischen der äußeren Belastung und den inneren Kräften und an Stelle des Superpositionsgesetzes treten.
 2. Die Verformungsmomente und die Knicksicherheit bei antimetrischer Belastung.
 3. Die Verformungsmomente und die Knicksicherheit bei symmetrischer Belastung.
 4. Die Ermittlung der Verformungsmomente und der Knicksicherheit bei symmetrischer Belastung mit Hilfe der Differentialgleichungen.
 5. Zusammenstellung der Ergebnisse und Rechenbeispiele.
 6. Die Anwendung des gegebenen Verfahrens auf die Berechnung von Hängebrücken bei Berücksichtigung der elastischen Verformung.
 7. Darstellung des praktischen Rechenverfahrens zur Ermittlung der Verformungsmomente aus Eigengewichtsbelastung, Widerlagerausweichen, Temperatur und Schwinden bei beliebiger Bogenform und beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente.
 8. Die Knicksicherheit der gegenüber der Parabel überhöhten Gewölbe, der Zusammenhang der Gewölbe mit der Balkenknickung und die Gründe für das ungünstige Verhalten der Gewölbe mit Scheitelgelenken.
 9. Die Methoden zur Erzielung einer günstigeren Verteilung bzw. eines Ausgleichs der Biegemomente durch künstliche Verformung der Bogenachse.
- III. Der Einfluß des Kriechens und des Schwindens des Betons (plastische Formänderungen) auf Gewölbe und Rahmen von beliebiger Form und beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente.
 1. Allgemeine Angaben über das Schwinden und die dafür maßgebenden Gesetze.
 2. Der Einfluß des Kriechens auf den unbewehrten Dreigelenkbogen bei Berücksichtigung der Verformung.
 3. Der Einfluß des Kriechens bei den unbewehrten statisch unbestimmten Gewölben beliebiger Form und bei beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente bei Vernachlässigung der zusätzlichen Momente aus der Verformung.
 4. Der Einfluß des Kriechens auf die Biegemomente aus Eigengewicht bei beliebigen Eisenbetontragwerken ohne Berücksichtigung der Bewehrung.
 5. Die Umlagerung der Normalkräfte und Biegemomente von dem Beton auf das Eisen bei den bewehrten Eisenbetongewölben und Säulen als Folge des Kriechens und des Schwindens des Betons.
 - a) Die zentrisch auf Druck beanspruchte Eisenbetonsäule.
 - b) Die zentrisch auf Druck beanspruchte umschnürte Säule.
 - c) Die Umlagerung der Momente vom Beton auf den Eisenquerschnitt bei den auf Biegung beanspruchten Säulen.
 - d) Die Umlagerungen der Normalkräfte und der Biegemomente vom Beton auf das Eisen bei den bewehrten Eisenbetongewölben infolge des Kriechens und Schwindens des Betons.
 6. Die Ermittlung der Schnittkräfte bei Betonpfeilern und Gewölben mit Quaderverkleidung.
 7. Die Ermittlung der zusätzlichen Biegemomente bei den gedrückten Balken und Gewölben infolge der elastischen und plastischen Verformung.
 - a) Die zusätzlichen Biegemomente des geraden gedrückten Balkens infolge der elastischen und plastischen Verformung.
 - b) Die zusätzlichen Biegemomente des Dreigelenkbogens infolge der elastischen und plastischen Verformung bei Berücksichtigung der elastischen Verformungen während des Kriechvorganges.
 - c) Die zusätzlichen Biegemomente des eingespannten und des Zweigelenkbogens infolge der elastischen und plastischen Verformung.
 - d) Die zusätzlichen Biegemomente des Eingelenkbogens infolge der elastischen und plastischen Verformung.
 8. Die Beseitigung der Biegemomente aus Eigengewicht, Schwinden und Widerlagerausweichen bei den verschiedenen Gewölbearten.
 9. Die Biegemomente der statisch unbestimmten Gewölbe infolge von Temperaturschwankungen.
 10. Der Einfluß der Stützensenkungen auf die Biegemomente durchlaufender Eisenbetonbalkenbrücken bei Berücksichtigung des Kriechens.
 11. Zusammenfassung der Erkenntnisse und Schlußfolgerungen.
- I. Die zusätzlichen Biegemomente des geraden gedrückten Balkens infolge seiner elastischen Verformung.
 1. Das Verfahren von Vianello^{3,4} zur Ermittlung der Knicksicherheit von geraden, gelenkig gelagerten Stäben bei beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente.

Dieses wichtige Verfahren zur Ermittlung der Knicksicherheit von gelenkig gelagerten Stäben mit beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente bildet nicht nur die Grundlage für die Untersuchungen des Abschnittes I über gerade Balken, sondern auch für die Ermittlung der Knicksicherheiten und der Verformungsmomente der Gewölbe. Aus diesem Grunde soll vorerst der Knickvorgang des geraden Stabes und das Vianello-Verfahren nachstehend besprochen werden.

Die Differentialgleichung des geraden gedrückten Stabes bei beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente lautet bekanntlich

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varrho} = -\frac{M_x}{E J_x}, & M_x = H v, & \frac{1}{\varrho} = \frac{v'''}{(1+v'^2)^{3/2}}, \\ \frac{v'''}{(1+v'^2)^{3/2}} + \frac{H v}{E J_x} = 0. \end{cases}$$

³ Vianello: Z. VDI 42 (1898) S. 1436.

⁴ Mayer, R.: Die Knickfestigkeit. Berlin: Julius Springer 1921.

Die Lösung der Gl. (1) führt auf elliptische Funktionen⁵. Wenn wir für den gebogenen Stab die Länge des Bogenelementes ds gleich der zugehörigen Abszissenlänge dx setzen, dann wird $v' = 0$ und wir erhalten die übliche angenäherte Gleichung:

$$(1a) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{H v}{E J_x} = 0.$$

Die Vernachlässigung, die mit dem Gleichsetzen von $ds = dx$ verbunden ist, bewirkt, daß uns die angenäherte Gl. (1a) zwar die richtigen Werte der Knickkraft liefert, aber uns keinen Einblick gibt über die Größenordnung der stattfindenden Verbiegungen, während durch die strenge Gl. (1) der Knickvorgang eingehend beschrieben wird. Hierbei zeigt es sich, daß der Euler-Wert der Knickkraft der Gl. (1a) nur den sogenannten Verzweigungspunkt der strengen Lösung der Gl. (1) angibt, bei dem die gerade nur auf Druck beanspruchte Form des Stabes instabil wird und der Stab deshalb die stabilere gekrümmte Form annimmt (Abb. 1). Im

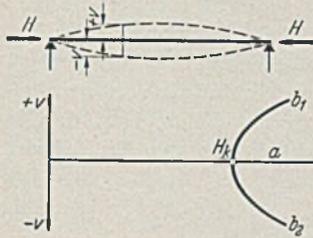


Abb. 1.

H_k = Verzweigungspunkt (Euler-Knickwert).
 a = die instabile gerade Stabform.
 b_1 u. b_2 = die stabile ausgeknickte gekrümmte Form.

Gegensatz zu der vielfach verbreiteten Ansicht, daß mit Erreichen des Euler-Wertes die Zerstörung des Balkens verbunden ist, kann die Druckkraft noch weiter anwachsen bei zunehmenden Verbiegungen, die dann allmählich den Biegungsbruch herbeiführen. Bei einem querbelasteten Balken ist diese Erscheinung noch auffallender. Die Biegemomente aus der Querbelastung leiten die Verformung, die später zum Bruch führt, schon frühzeitig ein. Mit der zunehmenden Druckkraft wachsen dann die Verbiegungen und die Biegemomente an, ohne daß der Verzweigungspunkt der Abb. 1 auftritt, denn durch die Verbiegungen aus der Querbelastung befindet sich der Stab von vornherein in der stabileren gekrümmten Form.

Die Gl. (1a) gibt uns demnach über den genauen Vorgang der Knickung und der damit verbundenen Verbiegungen keinen Aufschluß, sie zeigt uns nur, daß bei einer gewissen Größe der Druckkraft die Verbiegungen unendlich werden und daß damit der Stab zu Bruch geht. Für unsere technischen Aufgaben genügt dies meist vollständig. Die Folge der Vernachlässigung ($ds = dx$ bzw. $v' = 0$) zeigt sich darin, daß die Gl. (1a) über die Größenordnung der Verbiegungen nichts aussagt, denn wenn $v = f_x$ ein Integral der Gl. (1a) darstellt, dann ist $v = C f_x$ ebenfalls ein Integral dieser Gleichung, wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugen kann. Hierbei ist C eine beliebige Konstante. Aus der Gl. (1a) folgt $H = - \frac{E J_x \frac{d^2 v}{dx^2}}{v}$, nun ist aber $E J_x \frac{d^2 v}{dx^2} = - M_x$, wir erhalten also

$$(2) \quad H_K = + \frac{M_x}{v}.$$

In dieser Gleichung zur Ermittlung der Knickkraft ist die Konstante C nicht vorhanden. Die Knickkraft H ist also ganz unabhängig von der absoluten Größe eines angenommenen Momentes M_x und der dadurch bedingten Durchbiegung v . Zur Bestimmung der Knickkraft H ist es demnach nur notwendig, eine Momentenlinie M_x zu finden, durch welche eine Verbiegung erzeugt wird, die genau den gleichen Verlauf längs x hat; denn die Gl. (2) muß an jeder Querschnittsstelle x erfüllt sein, d. h. die Momentenlinie und die zugehörige Durchbiegungslinie müssen affin sein. Die gefundene

⁵ Schleusner, A.: Strenge Theorie der Knickung gerader Stäbe bei gleichzeitiger Biegung. Diss. Berlin 1937 (erscheint demnächst im Druck). Siehe auch die weitere dort angegebene einschlägige Literatur, insbesondere Trefftz, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorenluftschiffahrt, 1918, Seite 101.

Momentenlinie bzw. Biegelinie zeigt dann zugleich die Form der Knickwelle an. Da das Verhältnis von $\frac{M_x}{v}$ an jeder Stelle x gleich groß sein muß, können wir die Knickkraft auch aus den Flächenintegralen der beiden Kurven ermitteln.

$$(2a) \quad H_K = \frac{\int M_x dx}{\int v dx}.$$

Nehmen wir z. B. für einen freiaufliegenden Balken konstanten Trägheitsmomentes ein Moment $M_x = M_{x_0} \sin \pi \frac{x}{a}$, dann ergibt sich die zugehörige Durchbiegung zu:

$$v = - \int dx \int \frac{M_x}{E J} \sin \pi \frac{x}{a} dx = \frac{a^2 M_{x_0}}{\pi^2 E J} \sin \pi \frac{x}{a} = \frac{a^2 M_x}{\pi^2 E J}.$$

Die Momentenlinie und die Durchbiegungslinie sind zueinander affin, und infolgedessen erhalten wir die Größe der Knickkraft aus

$$\text{Gl. (2) zu } H_K = \frac{M_x}{v} = \frac{M_x}{\frac{a^2 M_x}{\pi^2 E J}} = \pi^2 \frac{E J}{a^2}.$$

Bei einer Knicksicherheit von ν ergibt sich die zulässige Druckkraft zu $H = \frac{H_K}{\nu}$, für die

$$\text{Größe der Knicksicherheit erhalten wir demnach } \nu = \pi^2 \frac{E J}{H a^2}.$$

Dies ist der Euler'sche Wert der Knicksicherheit für einen freiaufliegenden Balken. Wir kommen hier sehr einfach zum Ziel, da wir wissen, daß bei einem freiaufliegenden Balken die Knicklinie eine Sinuslinie ist, so daß wir gleich die richtige Momentenlinie benutzen können, die eine dazu affine Durchbiegung bedingt.

Bei einem Stab mit veränderlichem Trägheitsmoment und beliebigen Randbedingungen (Einspannung an den Auflagern) kennen wir jedoch die Form der Knicklinie nicht. Wir müssen deshalb für das Moment M_0 vorerst eine Annahme machen, um hieraus die zugehörige Biegelinie v_0 zu ermitteln. Diese Biegelinie ist natürlich noch nicht affin zu M_0 , aber die Übereinstimmung wird um so besser sein, je mehr wir durch den Verlauf von M_0 die tatsächliche Knicklinie erraten haben. Wenn wir jetzt einer zweiten Rechnung ein Biegemoment $M_1 = H v_0$ zugrunde legen und die zugehörige Durchbiegung v_1 ermitteln, dann werden wir schon eine bessere Übereinstimmung erhalten. Diesen Rechnungsgang setzen wir fort und legen dem nächsten Rechnungsgang ein Moment $M_2 = H v_1$ zugrunde und ermitteln v_2 . Nach drei- oder viermaliger Durchführung dieses Rechnungsganges ergibt sich eine vollständige Übereinstimmung, d. h. eine Affinität zwischen der Momenten- und der Biegelinie. Dieses Verfahren der sukzessiven Approximation liegt dem Vianello-Verfahren zugrunde. Der Beweis, daß dieses Verfahren zu mathematisch genauen Ergebnissen führt, wurde von Picard bewiesen (Picardscher Satz). Die Knickkraft erhalten wir jetzt gemäß der Gl. (2) durch Division der Ordinaten der Momentenlinie durch die der Biegelinie bzw. nach Gl. (2a) auch aus den Flächenintegralen [Gl. (2a)].

2. Die Erweiterung des Verfahrens von Vianello zur Ermittlung der Knicksicherheit von statisch unbestimmten Stab- und Bogen-tragwerken und seine Anwendung zur Ermittlung der Biegemomente aus der elastischen Verformung mit Hilfe konvergenter geometrischer Reihen.

Setzen wir in Gl. (2) die Knickkraft $H_K = H \nu$, wobei H die tatsächlich vorhandene Druckkraft und ν die Knicksicherheit bedeutet, dann ergibt sich $\nu = \frac{M_{x_0}}{H v_0}$. Die Knicksicherheit ist demnach gegeben durch die Gleichung:

$$(2b) \quad \nu = \frac{M_{n-1}}{M_n},$$

wobei wir durch die Zeiger $(n-1)$ und (n) andeuten, daß beim Übergang von dem $(n-1)$ ten zum (n) ten Rechnungsgang eine

genügende Affinität zwischen dem erregenden Moment M_{n-1} und dem dadurch erzeugten M_n sich ergeben hat.

Während das im Abschnitt 1 dargestellte Verfahren von Vianello sich auf die Ermittlung der Knicksicherheit von gelenkig gelagerten Stäben bezog, können wir die allgemeinere Gl. (2b) auch für die Ermittlung der Knicksicherheit von statisch unbestimmten Stabsystemen und auch von Bögen mit beliebiger Lagerung verwenden. Belasten wir z. B. den einseitig eingespannten Balken der Abb. 1a vorerst durch ein beliebiges Moment M_{x0} ,

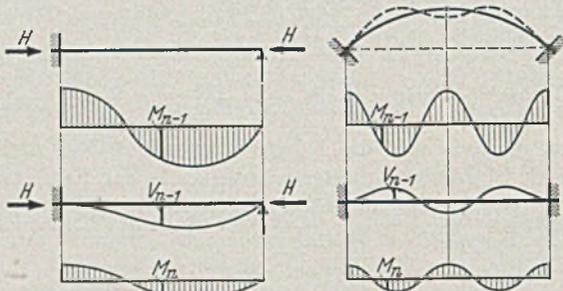


Abb. 1a.

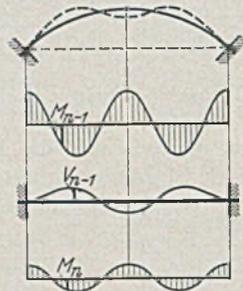


Abb. 1b.

dann ergibt sich hierdurch eine Durchbiegung und aus dieser Durchbiegung folgt ein statisch bestimmtes Moment Hv_0 und hieraus nach Bestimmung des statisch unbestimmten Einspannmomentes ein zusätzliches Moment M_{x1} , das jedoch den ursprünglichen M_{x0} noch nicht affin sein wird. Belasten wir nun den Balken mit diesem neuen Moment M_{x1} und ermitteln in gleicher Weise das Zusatzmoment M_{x2} und setzen diese Rechnung noch mehrmals fort, dann wird die Affinität zwischen den beiden Momenten beim Übergang vom Moment M_{n-1} zu M_n vollkommen sein und aus dem

Quotienten $\frac{M_{n-1}}{M_n}$ ergibt sich die Größe der Knicksicherheit. Die

Abb. 1a zeigt das Verfahren des letzten Rechnungsganges beim Übergang von M_{n-1} zu M_n . Infolge des erregenden Momentes M_{n-1} ergibt sich eine Durchbiegung v_{n-1} , daraus folgt das statisch bestimmte Moment Hv_{n-1} und nach Bestimmung des statisch unbestimmten Einspannungsmomentes ergibt sich der Verlauf von M_n . Entsprechend den obigen Darlegungen ist M_n dem Ursprungsmoment M_{n-1} affin, jedoch sind alle Ordinaten ν fach kleiner. Die Abb. 1b zeigt dasselbe Verfahren bei einem eingespannten Bogen. Unter dem Einfluß des Momentes M_{n-1} verbiegt sich der Bogen, und es ergibt sich ein statisch bestimmtes Moment Hv_{n-1} , aus dem sich nach Berechnung des statisch unbestimmten Horizontalschubes und Scheitelmomentes das Moment M_n ergibt. Um hieraus die Knicksicherheit zu finden, muß M_{n-1} wieder affin zu M_n sein, die Größe der Knicksicherheit ergibt sich dann aus der Gl. (2b).

Nachdem wir nun gezeigt haben, daß das Vianelloverfahren sich auch ohne weiteres für alle statisch unbestimmten Systeme anwenden läßt, gehen wir, auf diesem Satz aufbauend, zur Ermittlung der Momente aus der elastischen Verformung über. Belasten wir einen gedrückten Balken mit einem der Knicklinie entsprechenden Moment M_{x0} , z. B. nach Abb. 1a, dann ergibt sich aus der Exzentrizität der Druckkraft H infolge der Durchbiegung v_0 ein zusätzliches Biegemoment $M_{x1} = Hv_0$ und das Verhältnis von

$\frac{M_{x0}}{M_{x1}}$ kennzeichnet die Größe der Knicksicherheit ν bzw. es ist

$M_{x1} = \frac{M_{x0}}{\nu}$. Das zusätzliche Biegemoment M_{x1} erzeugt aber eine neue Durchbiegung v_1 und damit ein weiteres zusätzliches

Biegemoment $M_{x2} = H v_1$, wobei $M_{x2} = \frac{M_{x1}}{\nu} = \frac{M_{x0}}{\nu^2}$. Des

weiteren ergibt sich $M_{x3} = \frac{M_{x0}}{\nu^3}$ und $M_{x4} = \frac{M_{x0}}{\nu^4}$ usw. Das gesamte Biegemoment bei Berücksichtigung der elastischen Ver-

formung beträgt also $M_x = M_{x0} + M_{x1} + M_{x2} + M_{x3} + \dots$

$$(3a) \quad \begin{cases} M_x = M_{x0} \left(1 + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} + \frac{1}{\nu^4} + \dots \right) = M_{x0} \frac{1}{1 - \frac{1}{\nu}} \\ = M_{x0} \frac{\nu}{\nu - 1} \end{cases}$$

Damit ist es uns gelungen, das Verformungsmoment in einfachster Weise unter Vermeidung von transzendenten Funktionen darzustellen.

Wenn an Stelle einer Druckkraft eine Zugkraft H auf den Balken einwirkt, dann entlasten die zusätzlichen Momente das ursprüngliche Moment M_{x0} und wir erhalten, wie leicht abzuleiten, eine alternierende Reihe für das Verformungsmoment.

$$(3b) \quad \begin{cases} M_x = M_{x0} \left(1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^3} + \frac{1}{\nu^4} \dots \right) \\ = M_{x0} \frac{1}{1 + \frac{1}{\nu}} = M_{x0} \frac{\nu}{\nu + 1} \end{cases}$$

Bei dem gezogenen Stab kann man natürlich nicht von einer Knicksicherheit sprechen. Hier ist ν eine Größe, die nur als ein Eigenwert aufzufassen ist. Aus den Gl. (3) erkennen wir, daß die Verformungsmomente von der Größe der Knicksicherheit abhängig sind. Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick über den Einfluß der Knicksicherheit. Es ergibt sich

| | | | | | |
|-------------------|--------------|------|------|------|------|
| für | $\nu = 1$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
| „ den Druckstab . | $M = \infty$ | 2,00 | 1,50 | 1,33 | 1,25 |
| „ „ Zugstab . . | $M = 0,50$ | 0,67 | 0,75 | 0,80 | 0,83 |

Beim Druckstab wird für $\nu = 1$ das Biegemoment unendlich groß und der Stab knickt. Beim Zugstab dagegen nimmt das Biegemoment ständig ab und die Last wird in immer höherem Maß durch Seilwirkung getragen.

Durch die Gl. (3) ist es uns gelungen, die Biegemomente aus der elastischen Verformung in einfacher Weise unter Vermeidung von transzendenten Funktionen darzustellen und zugleich die unendlichen geometrischen Reihen der Zusatzmomente zu summieren, aber nur für den speziellen Fall, daß das Biegemoment M_{x0} der Knicklinie affin ist. Bei einer beliebigen Belastung des Balkens ist die zugehörige Momentenlinie M_{x0} keineswegs der Durchbiegeline v_0 bzw. der Knicklinie affin. Wir schreiten deshalb zum zweiten Rechnungsgang und ermitteln die Biegelinie v_1 , die dem Moment $M_{x1} = H v_0$ entspricht. Je weiter wir mit der

Approximation fortschreiten, um so mehr wird sich $\frac{M_{n-1}}{M_n}$ bei allen

Querschnitten einem konstanten Wert, der Knicksicherheit ν nähern. Wenn wir jetzt für einen beliebigen Querschnitt x die Einflüsse aus den verschiedenen Zusatzmomenten addieren, dann ergibt sich folgende Reihe:

$$M_x = M_{x0} \left(1 + \frac{a_1}{\nu} + \frac{a_2}{\nu^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{\nu^{n-1}} + \frac{a_n}{\nu^n} + \dots \right),$$

wobei a_{n-1} sehr rasch, d. h. schon nach wenigen Gliedern gleich a_n werden muß. Denn nach den bisherigen Darlegungen wird schon

nach wenigen Rechnungsgängen $\frac{M_{n-1}}{M_n} = \nu$ und damit $\frac{a_{n-1}}{a_n} = 1$

bzw. $a_{n-1} = a_n$. Diese Reihe können wir leicht durch eine Abspaltung in eine geometrische verwandeln.

$$(4) \quad \begin{cases} M_x = M_{x0} \left\{ \left[(1 - a_n) + \frac{a_1 - a_n}{\nu} + \frac{a_2 - a_n}{\nu^2} + \dots \right] \right. \\ \left. + a_n \left[1 + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^3} + \dots \right] \right\} \\ = M_{x0} \left\{ a_n \frac{\nu}{\nu - 1} + (1 - a_n) + \frac{a_1 - a_n}{\nu} + \frac{a_2 - a_n}{\nu^2} + \dots \right\} \end{cases}$$

Die Koeffizienten $(1 - a_n)$, $(a_1 - a_n)$... konvergieren aber entsprechend den obigen Darlegungen sehr rasch gegen Null, da schon bald $a_{n-1} = a_n$ wird. Im allgemeinen ist nur der erste Koeffizient $a_1 - a_n$ von Bedeutung, während die übrigen um so weniger Bedeutung haben, je höher die Knicksicherheit ν ist. In diesem Fall

ergibt sich also

$$M_x = M_{x0} \left[\frac{\nu a_n + (\nu - 1)(1 - a_n)}{\nu - 1} \right] = M_{x0} \frac{\nu + (a_n - 1)}{\nu - 1}$$

$$(4a) \quad M_x = M_{x0} \frac{\nu + \delta}{\nu - 1}$$

Damit haben wir die im Vorwort angegebene einfache Gleichung für die Verformungsmomente gewonnen. Wenn wir entsprechend unseren Bestimmungen eine hohe Knicksicherheit von $\nu \geq 3$ haben, dann ist in der Reihe der Gl. (4) meistens nur das erste Störungs-glied $(1 - a_n)$ von Bedeutung, während die folgenden von geringem Einfluß sind und deshalb vernachlässigt werden können. Für eine Ermittlung der Verformungsmomente bei kleineren Knicksicherheiten, insbesondere in der Nähe von $\nu = 1$ müssen natürlich auch die weiteren Glieder $(a_1 - a_n)$, $(a_2 - a_n)$ usw. berücksichtigt werden. Wir erhalten damit aus der Gl. (4) an Stelle der angenäherten Gl. (4a) die genauere allgemeinere Gleichung

$$(4b) \quad M_x = M_{x0} \left[\frac{\nu + \delta}{\nu - 1} + \frac{\delta_1}{\nu} + \frac{\delta_2}{\nu^2} + \frac{\delta_3}{\nu^3} + \dots \right]$$

Damit ist es uns gelungen, die unendliche Reihe der Zusatzmomente unter Vermeidung transzendenter Funktionen durch Überführung in eine geometrische Reihe zu summieren und in eine endliche Reihe mit nur wenigen Gliedern zu verwandeln. Die Restglieder $\frac{\delta_1}{\nu}$, $\frac{\delta_2}{\nu^2}$ usw. sind im allgemeinen ohne merkbaren Einfluß, und zwar um so eher, je höher der Wert der vorhandenen Knick-sicherheit ist. Die späteren Ausführungen an Hand der Zahlen-beispiele zeigen, daß sehr oft gar keine oder nur ein bis zwei Zusatz-glieder berücksichtigt werden müssen, weil die verbleibende endliche Reihe $\frac{\delta_1}{\nu} + \frac{\delta_2}{\nu^2} + \dots$ eine außerordentlich gute Konvergenz besitzt.

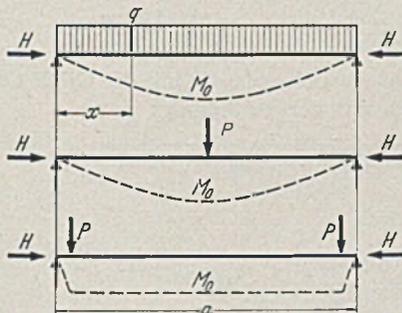


Abb. 2a—2c.

Ebenso wie die Verformungsmomente lassen sich natürlich auch die Durchbiegungen in derselben einfachen Weise darstellen. Ich komme hierauf noch in den einzelnen Abschnitten zu sprechen.

3. Der freiaufliegende gedrückte Stab.

Wir untersuchen zunächst den Fall einer gleichbleibenden Belastung (Abb. 2a), dem eine parabolförmige Momentenlinie M_0 entspricht. Die Durchbiegung aus diesem Moment $M_0 = \frac{q a^2}{2} (\xi - \xi^2)$ (wobei $\xi = \frac{x}{a}$) beträgt $v_0 = - \int dx \int \frac{M_0}{EJ} dx = \frac{q a^4}{2 EJ} \left(-\frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^4}{12} + C_1 + C_2 \xi \right)$.

Aus den Randbedingungen $v_0 = 0$ für $x = 0$ und $x = a$ folgt $C_1 = 0$, $C_2 = 1/12$, demnach

$$v_0 = \frac{q a^4}{24 EJ} (\xi - 2 \xi^3 + \xi^4)$$

und

$$M_1 = H v_0 = \frac{H a^2 q a^2}{EJ} \frac{1}{4!} (\xi - 2 \xi^3 + \xi^4) = q a^2 \frac{\lambda^2}{4!} (\xi - 2 \xi^3 + \xi^4)$$

Wenn wir in der üblichen Weise $\frac{H}{EJ} = \frac{1}{k^2}$ und $\frac{H a^2}{EJ} = \frac{a^2}{k^2} = \lambda^2$ setzen. In gleicher Weise erhalten wir dann durch Integration die Momente $M_2, M_3 \dots$ und damit das Gesamtmoment $M = (M_0 + M_1 + M_2 + \dots)$.

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= q a^2 \left[\frac{\lambda^0}{2!} (\xi - \xi^2) + \frac{\lambda^2}{4!} (\xi - 2 \xi^3 + \xi^4) + \frac{\lambda^4}{6!} (3 \xi - 5 \xi^3 \right. \\ &\quad \left. + 3 \xi^5 - \xi^6) + \frac{\lambda^6}{8!} (17 \xi - 28 \xi^3 + 14 \xi^5 - 4 \xi^7 + \xi^8) + \dots \right] \end{aligned} \right.$$

Während das ursprüngliche Moment M_0 einer Parabel folgte, verlaufen die folgenden Zusatzmomente M_2, M_3 in zunehmender Annäherung nach einer Sinuslinie (der maßgebenden Knicklinie) und zwischen den Zusatzmomenten mit höherem Index muß nach dem Vianello-Satz das Verhältnis $\frac{M_{n-1}}{M_n} = \nu$ bestehen. Eine Zusammenfassung der Glieder der unendlichen Reihe muß uns deshalb gelingen, wenn wir an Stelle von λ den Wert der Knicksicherheit ν einführen.

Für das maximale Moment in Feldmitte $\xi = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$M_{\max} = \frac{q a^2}{8} \left\{ 1 + \frac{5}{2} \frac{\lambda^2}{4!} + \frac{61}{8} \frac{\lambda^4}{6!} + \frac{1385}{32} \frac{\lambda^6}{8!} + \dots \right\}$$

Nun ist $\lambda^2 = \frac{H a^2}{EJ} = \frac{\pi^2}{\nu}$, da $\nu = \pi^2 \frac{EJ}{H a^2}$, dieser Wert der Knicksicherheit muß sich auch ohne weiteres aus dem Verhältnis von $\frac{M_2}{M_3} = \nu = \frac{8! 61}{6! 8} \frac{32}{1385} \frac{\lambda^4}{\lambda^6} \approx \frac{\pi}{\lambda^2}$ ergeben. Wir ersetzen in der unendlichen Reihe λ durch ν , um die Summierung der Reihe durchführen zu können.

$$M_{\max} = \frac{q a^2}{8} \left[1 + \frac{1,028}{\nu} + \frac{1,032}{\nu^2} + \frac{1,032}{\nu^3} + \dots \right]$$

$$= \frac{q a^2}{8} \left[-0,032 - \frac{0,004}{\nu} + 1,032 + \frac{1,032}{\nu} + \frac{1,032}{\nu^2} + \dots \right],$$

$$M_{\max} = \frac{q a^2}{8} \left[-0,032 - \frac{0,004}{\nu} + 1,032 \frac{\nu}{\nu - 1} \right]$$

Aus der obigen Gleichung ersehen wir, daß schon vom dritten Glied ab die Koeffizienten konstant werden $\left(\frac{M_3}{M_4} = \frac{M_4}{M_5} = \dots = \frac{1}{\nu} \right)$ und daß wir durch eine Abspaltung eine unendliche geometrische Reihe erhalten, die wir leicht summieren können. Wir erhalten für $\xi = \frac{1}{2}$

$$(5a) \quad M_{\max} = M_0 \left[\frac{\nu + 0,032}{\nu - 1} - \frac{0,004}{\nu} \right] \approx M_0 \frac{\nu + 0,032}{\nu - 1}$$

wobei

$$M_0 = \frac{q a^2}{8}$$

Die Annäherungsgleichung $M_0 \frac{\nu + 0,032}{\nu - 1}$ genügt bei den freiaufliegenden Balken für alle praktischen Fälle. Nur für den Fall, daß die Knicksicherheit in der Nähe von 1 liegt, muß die genauere Formel, die Glieder mit ν^2 enthält, benutzt werden.

Wir wollen nun noch untersuchen, wie sich Gl (2a) ändert, wenn an Stelle der gleichmäßigen Last eine Einzellast in Feldmitte (Abb. 2b) bzw. ein für den Balken konstantes Moment tritt, das wir nach Abb. 2c durch Kräftepaare, d. h. durch Lasten, die in der Nähe des Auflagers stehen, ersetzen können. Für den Fall des gleichbleibenden Momentes erhalten wir

$$(5b) \quad M_{\max} \approx M_0 \frac{\nu + 0,273}{\nu - 1},$$

und für den Fall der Einzellast

$$(5c) \quad M_{\max} \approx M_0 \frac{\nu - 0,188}{\nu - 1},$$

wobei in Gl. 5c

$$M_0 = \frac{P a}{4}$$

Wir erkennen, daß sich an der Gl. (5a) nicht viel ändert, wenn die gleichmäßige Belastung entweder durch eine Einzellast in Feldmitte oder durch Einzellasten in Nähe des Auflagers ersetzt wird. Bei einer beliebigen Lastverteilung an Stelle der sinusförmigen geht die Gleichung $M = M_0 \frac{\nu}{\nu - 1}$ in die allgemeinere

$$M = M_0 \frac{\nu + \delta}{\nu - 1} \text{ über.}$$

Je weiter der Schwerpunkt der Belastung einer Balkenhälfte von der Feldmitte nach den Auflagern zu wandert, um so größer

wird δ . Für eine beliebige Last können wir deshalb δ leicht durch Interpolation ermitteln. Bei einer genügenden Knicksicherheit ($\nu \approx 3,0$) ist bei den freiaufliegenden Balken die Zahl δ nur von geringem Einfluß auf das Anwachsen der Momente.

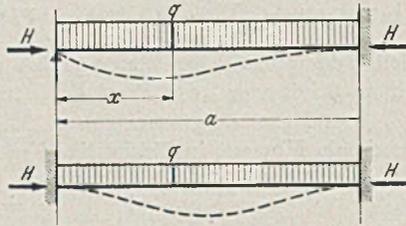


Abb. 3 u. 4.

4. Der einseitig eingespannte Stab (Abb. 3).

Wir untersuchen diesen für eine gleichmäßige Belastung. Das Biegemoment M_0 ergibt sich zu

$$M_0 = \frac{1}{2!} q a^2 \left(\frac{3}{4} \xi - \xi^2 \right).$$

Hieraus erhalten wir wieder wie vor das zusätzliche Biegemoment M_1 durch eine zweimalige Integration:

$$M_1 = q a^2 \frac{\lambda^2}{2!} \left[C \xi - \frac{3}{4} \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^4}{12} \right] \quad \lambda^2 = \frac{H a^2}{E J}.$$

Dieses Balkensystem ist statisch unbestimmt, wir müssen deshalb die Konstante C aus der Bedingung ermitteln, daß für $\xi = 0$ die Durchbiegung zu Null wird. Aus

$$\int_0^1 M_1 \xi d\xi = 0 \quad \text{folgt} \quad \frac{C}{3} - \frac{1}{40} + \frac{1}{72} = 0, \quad C = \frac{1}{30},$$

demnach

$$M_1 = q a^2 \frac{\lambda^2}{4!} \left[\frac{2}{5} \xi - \frac{3}{2} \xi^2 + \xi^4 \right];$$

in gleicher Weise ergibt sich auch M_2 zu

$$M_2 = q a^2 \frac{\lambda^4}{4!} \left[C \xi - \frac{2}{5} \frac{\xi^3}{6} + \frac{3}{2} \frac{\xi^5}{20} - \frac{\xi^6}{30} \right]$$

$$= q a^2 \frac{\lambda^4}{6!} \left[\frac{171}{280} \xi - 2 \xi^3 + \frac{9}{4} \xi^5 - \xi^6 \right]$$

aus

$$\int_0^1 M_2 \xi d\xi = 0 \quad \text{ergab sich} \quad \frac{C}{3} - \frac{1}{75} + \frac{3}{280} - \frac{1}{240} = 0, \quad C = \frac{57}{2800}.$$

Damit ergibt sich die Größe des Gesamtmomentes $M = M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + \dots$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= q a^2 \left\{ \frac{\lambda^0}{2!} \left(\frac{3}{4} \xi - \xi^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4!} \left(\frac{2}{5} \xi - \frac{3}{2} \xi^2 + \xi^4 \right) \right. \\ &+ \frac{\lambda^4}{6!} \left(\frac{171}{280} \xi - 2 \xi^3 + \frac{9}{4} \xi^5 - \xi^6 \right) \\ &\left. + \frac{\lambda^6}{8!} \left(\frac{43}{25} \xi - \frac{57}{10} \xi^3 + \frac{56}{10} \xi^5 - 3 \xi^7 + \xi^8 \right) + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Während das ursprüngliche Moment M_0 nach einer Parabel verläuft, nähern sich mit steigenden Indizes die Zusatz-Momentenlinien immer mehr der Knicklinie des einseitig eingespannten Balkens und das Verhältnis zwischen den aufeinanderfolgenden Zusatzmomenten ist wiederum durch den Wert der Knicksicherheit gekennzeichnet. Durch Einführen von ν an Stelle λ gelingt es uns wiederum die unendliche Reihe zusammenzufassen. Für die Einspannstelle $\xi = 1$ ergibt sich

$$M = -\frac{q a^2}{8} \left[1 + \frac{1}{30} \lambda^2 + \frac{13}{8400} \lambda^4 + \frac{19}{252000} \lambda^6 + \frac{13,488}{10!} \lambda^8 + \dots \right].$$

Die Größe der Knicksicherheit des einseitig eingespannten Stabes beträgt bekanntlich

$$\nu = 20,19 \frac{E J}{H a^2} = \frac{20,19}{\lambda^2},$$

diesen Wert hätten wir auch ohne weiteres aus dem Verhältnis von

$$\frac{M_3}{M_1} = \frac{19}{252000} \frac{10!}{13,488} = \frac{20,19}{\lambda^2}$$

ermitteln können. Damit ergibt sich

$$M = -\frac{q a^2}{8} \left[1 + \frac{0,673}{\nu} + \frac{0,631}{\nu^2} + \frac{0,621}{\nu^3} + \frac{0,618}{\nu^4} + \frac{0,618}{\nu^5} + \dots \right]$$

$$= -\frac{q a^2}{8} \left[0,382 + \frac{0,055}{\nu} + \frac{0,013}{\nu^2} + \frac{0,003}{\nu^3} + 0,618 \frac{\nu}{\nu-1} \right].$$

$$(6a) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{\nu - 0,382}{\nu - 1} + \frac{0,055}{\nu} + \frac{0,013}{\nu^2} + \frac{0,003}{\nu^3} \right] \\ &\approx M_0 \frac{\nu - 0,382}{\nu - 1}, \quad M_0 = -\frac{q a^2}{8}. \end{aligned} \right.$$

In gleicher Weise erhalten wir für die Feldmitte $\xi = \frac{1}{2}$

$$(6b) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{\nu - 0,014}{\nu - 1} + \frac{0,024}{\nu} + \frac{0,011}{\nu^2} + \frac{0,004}{\nu^3} \right] \\ &\approx M_0 \frac{\nu - 0,014}{\nu - 1}, \quad M_0 = +\frac{q a^2}{16} \end{aligned} \right.$$

und für das größte Feldmoment bei $\xi = \frac{3}{8}$.

$$(6c) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{\nu + 0,121}{\nu - 1} - \frac{0,036}{\nu} + \frac{0,008}{\nu^2} + \frac{0,002}{\nu^3} \right] \\ &\approx M_0 \frac{\nu + 0,121}{\nu - 1}, \quad M_0 = +\frac{9}{128} q a^2. \end{aligned} \right.$$

5. Der beiderseitig eingespannte Balken (Abb. 4).

Das Biegemoment M_0 infolge einer gleichmäßigen Belastung beträgt

$$M_0 = +\frac{q a^2}{12} [-1 + 6 \xi - 6 \xi^2],$$

hieraus ergibt sich durch zweimalige Integration

$$M_1 = \lambda^2 \frac{q a^2}{12} [C + \xi^2/2 - \xi^3 + \xi^4/2]$$

$$= \frac{q a^2 \lambda^2}{12 \cdot 4!} \left[-\frac{2}{5} + 12 \xi^2 - 24 \xi^3 + 12 \xi^4 \right].$$

Jetzt ist das Einspannmoment statisch unbestimmt, die Größe der Konstanten C folgt demnach aus der Bedingung:

$$\int_0^1 M_1 d\xi = 0, \quad C + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = 0, \quad C = -\frac{1}{60};$$

in gleicher Weise ergibt sich

$$M_2 = \frac{q a^2 \lambda^4}{12 \cdot 6!} \left(-\frac{2}{7} + 6 \xi^2 - 30 \xi^4 + 36 \xi^5 - 12 \xi^6 \right)$$

und damit das Gesamtmoment zu $M = (M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + \dots)$.

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= \frac{q a^2}{12} \left\{ \frac{\lambda^0}{2!} (-2 + 12 \xi - 12 \xi^2) \right. \\ &+ \frac{\lambda^2}{4!} \left(-\frac{2}{5} + 12 \xi^2 - 24 \xi^3 + 12 \xi^4 \right) \\ &+ \frac{\lambda^4}{6!} \left(-\frac{2}{7} + 6 \xi^2 - 30 \xi^4 + 36 \xi^5 - 12 \xi^6 \right) \\ &\left. + \frac{\lambda^6}{8!} \left(-\frac{2}{5} + 8 \xi^2 - 28 \xi^4 + 56 \xi^6 - 48 \xi^7 + 12 \xi^8 \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt für die Einspannstelle $\xi = 0$

$$M = -\frac{q a^2}{12} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{\lambda^2}{4!} + \frac{2}{7} \frac{\lambda^4}{6!} + \frac{2}{5} \frac{\lambda^6}{8!} + \frac{10}{11} \frac{\lambda^8}{10!} + \dots \right).$$

Wir führen an Stelle von λ wieder die Knicksicherheit ν ein; diese beträgt bekanntlich für den eingespannten Stab

$$\nu = 4 \pi^2 \frac{H a^2}{E J} = \frac{4 \pi^2}{\lambda^2}.$$

Dieser Wert ergibt sich auch aus dem Verhältnis von

$$\frac{M_3}{M_1} = \frac{2}{5} \frac{11}{10} \frac{10!}{8!} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{39,478}{\lambda^2} = \frac{4 \pi^2}{\lambda^2},$$

damit erhalten wir

$$M = -\frac{q a^2}{12} \left[1 + \frac{0,658}{\nu} + \frac{0,618}{\nu^2} + \frac{0,610}{\nu^3} + \frac{0,609}{\nu^4} + \frac{0,609}{\nu^5} + \dots \right]$$

$$= -\frac{q a^2}{12} \left[0,391 + \frac{0,049}{\nu} + \frac{0,009}{\nu^2} + 0,609 \frac{\nu}{\nu-1} \right].$$

$$(7a) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{\nu - 0,391}{\nu - 1} + \frac{0,049}{\nu} + \frac{0,009}{\nu^2} \right] \\ &\cong M_0 \frac{\nu - 0,391}{\nu - 1}, \quad M_0 = -\frac{q a^2}{12}. \end{aligned} \right.$$

[Man beachte die gute Übereinstimmung der Gl. (7a) mit der Gl. (6a)]. In gleicher Weise erhalten wir für die Feldmitte $\xi = \frac{1}{2}$

$$(7b) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{\nu + 0,215}{\nu - 1} - \frac{0,064}{\nu} - \frac{0,017}{\nu^2} - \frac{0,004}{\nu^3} \right] \\ &\cong M_0 \frac{\nu + 0,215}{\nu - 1}, \quad M_0 = +\frac{q a^2}{24}. \end{aligned} \right.$$

Solange die Knicksicherheit genügend ist, geben die Annäherungsgleichungen in der Form $\frac{\nu + \delta}{\nu - 1}$ genügend genaue Werte. Nur für die praktisch nicht in Frage kommenden Grenzfälle in der Nähe von $\nu = 1$ muß auf die genaueren Gleichungen zurückgegriffen werden.

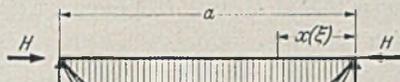


Abb. 5a

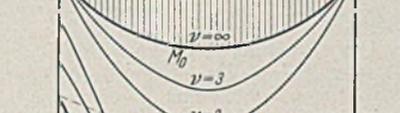


Abb. 5b.



Abb. 5c

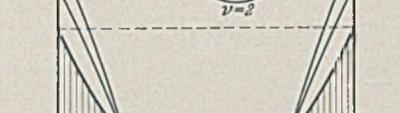


Abb. 5a—e. Abb. 6.

In der Abb. 5 sind die Ergebnisse für die drei untersuchten Balkenarten bei gleichmäßiger Belastung für $\nu = \infty$, $\nu = 3$, $\nu = 2$ aufgetragen. Wir ersehen daraus, daß bei dem geraden gedrückten Balken sowohl die Feld- als auch die Stützmente infolge der elastischen Verformung anwachsen und daß die zusätzlichen Momente annähernd die Form der Knicklinie haben.

Wir stellen als wesentliche Erkenntnis fest: die Verformungsmomente sind nichts anderes als eine Einleitung des Knickprozesses und infolgedessen haben sie angenähert immer einen der Knicklinie entsprechenden Verlauf. Das erste Zusatzmoment M_1 wird allerdings noch durch den Verlauf des Ursprungsmomentes M_0 beeinflusst; die Zusatzmomente mit höherem Index dagegen haben genau die Form der Knicklinie; um das zu zeigen, sind in der Abb. 6 für den eingespannten Stab für eine Knicksicherheit von $\nu = 2$ die einzelnen Zusatzmomente in ihrem Verlauf aufgetragen.

In der Nähe der Momentennullpunkte müssen die gegebenen Formeln versagen, weil die Verformungsmomente aus dem Ursprungsmoment M_0 abgeleitet werden und dieses Moment nicht vorhanden ist. Dies ist aber belanglos, weil dieses Moment wegen seiner geringen Größe bedeutungslos ist.

Das hier angewandte Verfahren der allmählichen Annäherung läßt sich bei genau dem gleichen Rechnungsgang auch für Balken

mit veränderlichem Trägheitsmoment durchführen, wenn wir die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes in Form eines Polynoms darstellen. Wir erhalten aus der gleichen Rechnung sowohl die Größe der Knickkraft als auch die Größe der Verformungsmomente. Bei den statisch unbestimmten Systemen ist, wie die obige Rechnung gezeigt hat, die Konvergenz etwas schlechter als bei den statisch bestimmten. Während man bei dem statisch bestimmten Balken schon aus dem Verhältnis von M_3 zu M_4 einen hinreichend genauen Wert der Knickkraft findet, muß man bei den statisch unbestimmten Systemen die Reihe um ein bis zwei Glieder weiter entwickeln. Das Kennzeichen, daß wir die Reihe weit genug entwickelt haben, ist dadurch gegeben, daß sich aus zwei hintereinanderfolgenden Quotienten $\frac{M_{n-1}}{M_n}$ und $\frac{M_n}{M_{n+1}}$ gleiche Werte für die Knicksicherheit ergeben. Sobald wir den genauen Wert der Knicksicherheit gefunden haben, sind wir, wie ich oben gezeigt habe, in der Lage, durch eine Abspaltung die unendliche Reihe der Zusatzmomente zu addieren und damit einfache geschlossene Formeln für die Größe der Verformungsmomente zu schaffen.

Ich habe schon in der Einleitung darauf hingewiesen, daß ich die Gewölbe mit veränderlichem Trägheitsmoment bei beliebiger Bogenform in einer Fortsetzung dieser Arbeit behandeln will. Aus diesem Grunde beschränke ich mich jetzt ebenfalls auf den Balken mit konstantem Trägheitsmoment.

Bei den Balken mit konstanten Trägheitsmomenten hätte man auch ohne mehr Arbeit die Verformungsmomente mittels der Differentialgleichung ermitteln können, allerdings in transzendenten Form. Bei veränderlichem Trägheitsmoment führt dagegen nur das gezeigte Verfahren der stufenweisen Annäherung zum Ziel. Zum Nachweis, daß die allmähliche Annäherung zu genauen mathematischen Resultaten führt, werden nachstehend die Verformungsmomente auch mittels der Differentialgleichung entwickelt und die transzendenten Gleichungen in die oben gegebene einfache Form übergeführt.

6. Die Ableitung der gewonnenen Formeln mit Hilfe der Differentialgleichungen.

Wir betrachten nach Abb. 7 einen Balken mit beliebiger Randeinspannung und beliebiger Belastung. Die Differentialgleichung des Balkens lautet

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_x}{EJ},$$

wobei

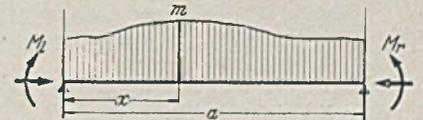


Abb. 7.

$$M_x = \mathfrak{M} + M^1 \left(1 - \frac{x}{a} \right) + M^r \frac{x}{a} + H v.$$

Bezüglich des statisch bestimmten Momentes \mathfrak{M} setzen wir nur voraus, daß dieses sich, was ja immer möglich ist, nach einem Polynom von x entwickeln läßt.

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{H}{EJ} \left[v + \frac{\mathfrak{M}}{H} + \frac{M^1}{H} \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \frac{M^r x}{H a} \right].$$

Wir setzen

$$\frac{H}{EJ} = \frac{1}{k^2}, \quad \frac{a^2}{k^2} = \lambda^2.$$

$$(8) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{v}{k^2} + \frac{f'_x}{k^2} = 0,$$

wobei

$$F_x = \frac{\mathfrak{M}}{H} + \frac{M^1}{H} \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \frac{M^r x}{H a} = \frac{\mathfrak{M}}{H} + \frac{M^1}{H} (1 - \xi) + \frac{M^r}{H} \xi.$$

Unter der obigen Voraussetzung, daß \mathfrak{M} und damit F_x ein Polynom von x ist, lautet die Lösung der Gl. (8)

$$(8a) \quad v = A \sin \frac{x}{k} + B \cos \frac{x}{k} - F_x + k^2 F_x'' - k^4 F_x^{IV} + \dots$$

$$\frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{a}{k} = \lambda$$

$$v = A \sin \lambda \xi + B \cos \lambda \xi - F_x + k^2 F_x'' - k^4 F_x^{IV} + \dots$$

$$(8b) \quad v' = \frac{dv}{dx} = \frac{A}{k} \cos \lambda \xi - \frac{B}{k} \sin \lambda \xi - F_x' + k^2 F_x''' - k^4 F_x^{V} + \dots$$

$$M_x = -EJ \frac{d^2v}{dx^2} = EJ \left(\frac{A}{k^2} \sin \lambda \xi + \frac{B}{k^2} \cos \lambda \xi + F_x'' - k^2 F_x^{IV} + k^4 F_x^{VI} - \dots \right).$$

Nun ist $\frac{EJ}{k^2} = H$, demnach

$$(8c) \quad \begin{cases} M_x = H [A \sin \lambda \xi + B \cos \lambda \xi + k^2 F_x'' - k^4 F_x^{IV} + \dots] \\ = H \cdot (v + F_x). \end{cases}$$

Umgekehrt können wir auch v durch M_x ausdrücken.

$$(8d) \quad v = \frac{M_x}{H} - F_x.$$

a) Diese allgemein gültigen Gleichungen wollen wir nun zunächst für den Sonderfall des freiaufliegenden Balkens mit gleichmäßiger Belastung q anwenden. Für diesen Balken ist $M^I = M^r = 0$

$$\mathfrak{M} = \frac{q a^2}{2} \cdot (\xi - \xi^2), \quad F_x = \frac{q a^2}{2H} (\xi - \xi^2), \quad F_x'' = -\frac{q}{H}, \quad F_x^{IV} = 0.$$

Die Konstanten A und B folgen aus den Randbedingungen

für $\xi = 0$ ist $v = 0$ und $F_x = 0$, also $B = -k^2 F_x'' = q \frac{k^2}{H} = \frac{q a^2}{H \lambda^2}$
für $\xi = 1$ ist $v = 0$ und $F_x = 0$, also $A \sin \lambda + B \cos \lambda + k^2 F_x'' = 0$,
$$A = \frac{q a^2}{H \lambda^2} \frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (8c) erhalten wir

$$(9) \quad M_x = \frac{q a^2}{\lambda^2} \left[\frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} \sin \lambda \xi + \cos \lambda \xi - 1 \right],$$

das maximale Moment für $\xi = 1/2$ beträgt

$$(9a) \quad M_{\max} = \frac{q a^2}{\lambda^2} \frac{1 - \cos \lambda/2}{\cos \lambda/2}.$$

Für $\sin \lambda = 0$ wird $M_x = \infty$, d. h., der Stab knickt. Aus $\sin \lambda = 0$ folgt $\lambda = n\pi$, maßgebend ist der Kleinstwert $n = 1$, $\lambda^2 = \pi^2 = \frac{H a^2}{EJ}$.

Demnach beträgt die Knickkraft

$$(9b) \quad H_K = \pi^2 \frac{EJ}{a^2}.$$

Entwickeln wir den Ausdruck Gl. (9) in eine Reihe für λ und ξ , dann ergibt sich die Gl.

$$(9c) \quad \begin{cases} M_x = q a^2 \cdot \left\{ \frac{\lambda^0}{2!} (\xi - \xi^2) + \frac{\lambda^2}{4!} (\xi - 2\xi^2 + \xi^4) \right. \\ \left. + \frac{\lambda^4}{6!} (3\xi - 5\xi^3 + 3\xi^5 - \xi^6) + \dots \right\}, \end{cases}$$

die mit Gl. (5), die wir durch stufenweise Annäherung abgeleitet haben, vollständig übereinstimmt.

b) Wir betrachten nun den statisch unbestimmten einseitig eingespannten Balken. Hier ist $M^I = 0$, $\mathfrak{M} = \frac{q a^2}{2} (\xi - \xi^2)$,

$$F_x = \frac{\mathfrak{M}}{H} + \frac{M^r}{H} \xi = \frac{q a^2}{2H} (\xi - \xi^2) + \frac{M^r}{H} \xi, \quad F_x' = \frac{q a}{2H} (1 - 2\xi) + \frac{M^r}{Ha}$$

$$F_x'' = -\frac{q}{H}, \quad F_x^{IV} = 0.$$

Die Konstanten ergeben sich aus den Randbedingungen:

für $\xi = 0$ ist $v = 0$ und $F_x = 0$ also $B = -k^2 F_x'' = q \frac{k^2}{H} = \frac{q a^2}{H \lambda^2}$,

für $\xi = 1$ ist $v = 0$ und $F_x = \frac{M^r}{H}$ also

$$A \sin \lambda + B \cos \lambda - \frac{M^r}{H} - \frac{q a^2}{H \lambda^2} = 0,$$

für $\xi = 1$ ist $\frac{dv}{dx} = 0$ und $F_x' = -\frac{q a}{2H} + \frac{M^r}{Ha}$ also

$$\frac{A}{k} \cos \lambda - \frac{B}{k} \sin \lambda + \frac{q a}{2H} - \frac{M^r}{Ha} = 0.$$

Daraus erhalten wir die Konstanten zu:

$$A = \frac{q a^2}{2 H \lambda^2} \frac{\lambda^2 + 2 - 2 \cos \lambda - 2 \lambda \sin \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cos \lambda}, \quad B = \frac{q a^2}{H \lambda^2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gl. (8c) erhalten wir das Biegemoment zu

$$(10) \quad M_x = \frac{q a^2}{\lambda^2} \left[\frac{\lambda^2 + 2 - 2 \cos \lambda - 2 \lambda \sin \lambda}{2 \sin \lambda - 2 \lambda \cos \lambda} \sin \lambda \xi + \cos \lambda \xi - 1 \right].$$

Das Einspannmoment an der Stelle $\xi = 1$ beträgt demnach

$$(10a) \quad M^r = -\frac{q a^2}{2 \lambda} \frac{2 - \cos \lambda - \lambda \sin \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cos \lambda}$$

für $2 \sin \lambda - 2 \lambda \cos \lambda$ wird $M_x = \infty$, der Balken knickt. Die Knickkraft folgt aus der Bedingung $\tan \lambda = \lambda$, hieraus

$$\lambda = 4,493, \quad \lambda^2 = 20,19 = \frac{H a^2}{EJ} \quad \text{und}$$

$$(10b) \quad H_K = 20,19 \frac{EJ}{a^2}$$

entwickeln wir den Wert von M_x der Gl. (10) in eine Reihe nach λ und ξ , dann ergibt sich die Gl.

$$(10c) \quad M_x = q a^2 \left\{ \frac{\lambda^0}{2!} \left(\frac{3}{4} \xi - \xi^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4!} \left(\frac{2}{5} \xi - \frac{3}{2} \xi^3 + \xi^4 \right) \right. \\ \left. + \frac{\lambda^4}{6!} \left(\frac{171}{280} \xi - 2 \xi^3 + \frac{9}{4} \xi^5 - \xi^6 \right) + \dots \right\},$$

die mit Gl. (6), die wir durch stufenweise Annäherung abgeleitet haben, genau übereinstimmt. Wir ersehen daraus wiederum, daß wir mit der stufenweisen Annäherung genaue Werte erhalten.

c) Der beiderseitig eingespannte Balken. Der Rechnungsgang ist genau der gleiche, wir erhalten als Ergebnis aus den Randbedingungen $v = 0$ für $\xi = 0$ und $\xi = 1$ und $\frac{dv}{dx} = 0$ für $\xi = 0$ bzw. $\xi = 1$ die Konstanten zu: $A = \frac{q a^2}{2 H \lambda}$,

$$B = \frac{q a^2}{2 H \lambda} \frac{\sin \lambda}{1 - \cos \lambda} \quad \text{und damit nach Gl. (8c)} \quad M_x = \frac{q a^2}{2 \lambda^2} \left[\lambda \sin \lambda \xi \right. \\ \left. + \frac{\lambda \sin \lambda}{1 - \cos \lambda} \cos \lambda \xi - 1 \right].$$

$$(11a) \quad \text{Größtes Feldmoment bei } \xi = \frac{1}{2},$$

$$M = \frac{q a^2 \lambda}{2 \lambda^2} \frac{1 - 2 \sin \lambda/2}{\sin \lambda/2}$$

$$(11b) \quad \text{Das Einspannmoment bei } \xi = 0 \text{ bzw. } \xi = 1,$$

$$M = \frac{q a^2}{2 \lambda^2} \left[\frac{\lambda \sin \lambda}{1 - \cos \lambda} - 2 \right].$$

Der Balken knickt für $1 - \cos \lambda = 0$ hieraus $\lambda = 0, 2\pi, 4\pi \dots$

$$(11c) \quad \text{Demnach } \lambda^2 = 4 \pi^2 = \frac{H a^2}{EJ}, \quad H_K = 4 \pi^2 \frac{EJ}{a^2}.$$

Entwickeln wir den Wert von M_x der obigen Gleichung in eine Reihe nach λ und ξ , dann ergibt sich die Gl.

$$(11d) \quad \begin{cases} M_x = \frac{q a^2}{12} \left\{ \frac{\lambda^0}{2!} (-2 + 12 \xi + 12 \xi^2) + \frac{\lambda^2}{4!} \left(-\frac{2}{5} + 12 \xi^3 \right. \right. \\ \left. \left. - 24 \xi^3 + 12 \xi^4 \right) + \frac{\lambda^4}{6!} \left(-\frac{2}{7} + 6 \xi^2 - 30 \xi^4 + 36 \xi^5 \right. \right. \\ \left. \left. - 12 \xi^6 \right) + \dots \right\}, \end{cases}$$

die wiederum mit Gl. (7) übereinstimmt.

Ich habe schon darauf hingewiesen, daß sich auch die Durchbiegungen in summierbare Reihen entwickeln lassen, das ist jedoch gar nicht notwendig. Das Balkenmoment an einer beliebigen Stelle ist gegeben durch $M = M_0 + H v$. Da H eine konstante Größe ist, ergibt sich hieraus die Durchbiegung zu $v = \frac{M - M_0}{H}$. Diese Gleichung ist identisch mit der früheren Gl. (8d). Wir erhalten also die Größe der Durchbiegung aus der Differenz aus dem Verformungsmoment und dem ursprünglichen Moment dividiert durch den konstanten Horizontalschub.

Mittels der Differentialgleichung haben wir bewiesen, daß die stufenweise Annäherung mathematisch genaue Resultate liefert. Voraussetzung für die Genauigkeit ist allerdings, daß die

Reihen soweit entwickelt werden, daß sich hieraus ein zuverlässiger Wert für die Knicksicherheit ergibt. Das Kennzeichen dafür war, daß sich für aus zwei aufeinander folgenden Quotienten $\frac{M_{n-1}}{M_n}, \frac{M_n}{M_{n+1}}$ der gleiche Wert ν ergab. Man könnte natürlich die Probe nur mit einen Quotienten machen, müßte sie aber auf eine größere Anzahl Querschnitte ausdehnen. Den zwei gleichen Quotienten $\frac{M_{n-1}}{M_n}, \frac{M_n}{M_{n+1}}$ müssen dann in der unendlichen Reihe von ν bei den drei letzten Reihengliedern $\frac{\delta_{n-1}}{\nu_{n-1}}, \frac{\delta_n}{\nu_n}, \frac{\delta_{n+1}}{\nu_{n+1}}$ gleiche Koeffizienten δ entsprechen.

Im nachfolgenden Abschnitt II werden wir nun dieselbe Methode auch für die Berechnung der Verformungsmomente der Gewölbe anwenden. Hier ist jedoch zu berücksichtigen, daß durch jedes Zusatzmoment, die statisch unbestimmten Größen beeinflusst werden, denn für jedes Zusatzmoment müssen die Randbedingungen eingehalten werden. Wir müssen demnach das statisch unbestimmte System ebenso oft lösen, als wir Reihenglieder entwickeln wollen. Das sieht nach einer Menge Arbeit aus. Tatsächlich macht die Berechnung der jeweiligen Konstanten für ein Zusatzmoment kaum mehr Arbeit als bei dem geraden Balken. Es empfiehlt sich jedoch, für die wenigen Rechenoperationen eine Rechenmaschine zu benutzen, um eine größere Genauigkeit zu erhalten.

II. Die Knicksicherheit und die zusätzlichen Biegemomente aus der Verformung der Gewölbe.

1. Ermittlung der allgemeinen Gesetze, die infolge der elastischen Verformung an Stelle des linearen Zusammenhangs zwischen der äußeren Belastung und den inneren Kräften und an Stelle des Superpositionsgesetzes treten.

Bei dem geraden Balken gelang es uns, die zusätzlichen Momente aus der elastischen Verformung in sehr großer Annäherung in der einfachen Form

$$(4a) \quad M \approx M_0 \frac{\nu + \delta}{\nu - 1}$$

darzustellen. Bei dem geraden Balken ist im allgemeinen die Druckkraft H unabhängig von der Belastung und damit ist die Knicksicherheit ν eine konstante Größe, infolgedessen bleibt das Grundgesetz unserer Ingenieurmechanik der Proportionalität zwischen der äußeren Belastung und den inneren Momenten erhalten und damit auch das Superpositionsgesetz. Das können wir aus der obigen Gl. (4a) ohne weiteres ablesen. Für das ursprüngliche Biegemoment M_0 , bei dem die elastische Verformung nicht berücksichtigt ist, bleibt der lineare Zusammenhang mit der Belastung gültig. Also

$$(12) \quad M_0 = \alpha q$$

und da ν konstant ist, ergibt sich

$$(12a) \quad M = \alpha q \frac{\nu + \delta}{\nu - 1} = \alpha_1 q.$$

Wir stellen also fest, daß bei konstanter Horizontalkraft der lineare Zusammenhang zwischen dem Verformungsmoment und der äußeren Belastung gewahrt bleibt und das Superpositionsgesetz seine Gültigkeit behält. Das hätten wir auch schon aus der Differentialgleichung (8) $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{v}{k^2} + \frac{F_x}{k^2} = 0$ ablesen können. Dies ist eine lineare Differentialgleichung. Wenn der Horizontalschub H und damit k konstant ist, hat sie konstante Koeffizienten und damit behalten die obigen Grundgesetze ihre Gültigkeit.

Wenn dagegen H und k veränderlich sind, dann hat diese Differentialgleichung keine konstanten Koeffizienten. Der lineare Zusammenhang bliebe jedoch trotzdem erhalten, wenn k eine Funktion der Veränderlichen x wäre; das ist aber nicht der Fall, denn k ist eine Funktion von H , also von einem Parameter, der nicht durch die Differentialgleichung bedingt ist, und damit geht der lineare Zusammenhang verloren und das Superpositionsgesetz wird ungültig.

Bei den Gewölben ist der Horizontalschub H eine veränderliche Größe und infolgedessen müssen wir nun die Gesetze ermitteln, die an Stelle des Lineargesetzes und des Superpositionsgesetzes treten. Die Gl. (4a) gibt uns hierüber den notwendigen Aufschluß. Es ist $\nu = n \frac{EJ}{Ha^2} = \frac{\beta}{q}$, da H proportional der Belastung q ist. Setzt man diesen Wert in die Gl. (4a) ein, dann ergibt sich

$$(13) \quad M = \alpha q \frac{\beta/q + \delta}{\beta/q - 1} = \alpha q \frac{\beta + q \delta}{\beta - q}.$$

Setzen wir $M = x$ und $q = y$, dann ersehen wir, daß wir es mit einer quadratischen Gleichung in der Form $y^2 \alpha \delta + y \alpha \beta + x y - x \beta = 0$ zu tun haben. Die Diskriminante hat einen negativen Wert und zeigt, daß es sich um eine Hyperbel handelt. Wir erkennen damit, daß an Stelle des linearen Zusammenhangs zwischen den äußeren Belastungen und den inneren Kräften ein quadratischer in Form einer Hyperbel getreten ist.

Das neu gefundene Gesetz ist in der Abb. 8 graphisch dargestellt. Das Biegemoment M_0 ist nach der Gl. (12) proportional der Last q . Der Horizontalschub H ist ebenfalls proportional der Last und da $\nu = \frac{\beta}{q}$, verläuft die Knicksicherheit ν nach einer Hyperbel. Für $q = q_K$ knickt der Bogen, infolgedessen ist an dieser Stelle $\nu = 1$ und damit ist der weitere Verlauf der Hyperbel ν festgelegt.

Das tatsächliche Moment M unter Berücksichtigung der elastischen Verformung verläuft nach der Gl. (13) nicht nach einer Geraden, sondern ebenfalls nach einer Hyperbel, welche die Gerade M_0 , durch die der lineare Zusammenhang gegeben ist, tangiert. Für große Werte von ν ist deshalb in großer Annäherung $M = M_0$. Je geringer aber die Knicksicherheit ist, um so größer werden infolge der elastischen Verformung die tatsächlichen Momente M gegenüber den Momenten M_0 und für $\nu = 1$ werden die Momente M sogar unendlich groß.

Wie ich schon früher auseinandergesetzt habe, ist die Gl. (4a) $M = M_0 \frac{\nu + \delta}{\nu - 1}$ eine Annäherung, die in den meisten Fällen genügend genaue Werte liefert. Nur bei Systemen mit Kämpfereinspannungen und bei geringen Knicksicherheiten ν muß auf die allgemeinere genaue Gl.

$$(4b) \quad M = M_0 \left[\frac{\nu + \delta}{\nu - 1} + \frac{\delta_1}{\nu} + \frac{\delta_2}{\nu^2} + \dots \right]$$

zurückgegriffen werden. Daraus folgt, daß die Kurve der Verformungsmomente M in der Nähe von $\nu = 1$ keine Hyperbel mehr ist, und daß an Stelle des quadratischen Zusammenhanges zwischen der Belastung q und dem Verformungsmoment M eine Kurve höherer Ordnung tritt, die bei höherem Werte von ν in eine Hyperbel übergeht.

Ersetzt man in der Gl. (4b), ebenso wie bei der Gl. (13), durch H und H wieder durch q , dann erhält man

$$(13a) \quad M = \alpha q \frac{\beta + q \delta}{\beta - q} + \beta_1 q + \beta_2 q^2 + \beta_3 q^3 + \dots$$

Durch diese Gleichung ist das allgemeine Gesetz gegeben, das bei Berücksichtigung der elastischen Verformung an Stelle des linearen Zusammenhangs zwischen den äußeren und inneren Kräften tritt. Die Gl. (13a) setzt sich zusammen aus einer Hyperbel, die von einer Anzahl Parabeln höherer Ordnung ($\beta_1 q + \beta_2 q^2 + \dots$) überlagert wird. Der Einfluß dieser Parabeln höherer Ordnung ist jedoch nur bei geringen Knicksicherheiten und bei Systemen mit Kämpfereinspannung von Bedeutung.

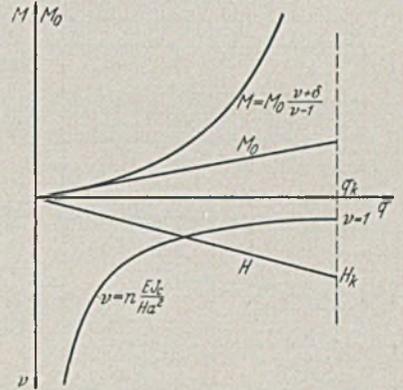
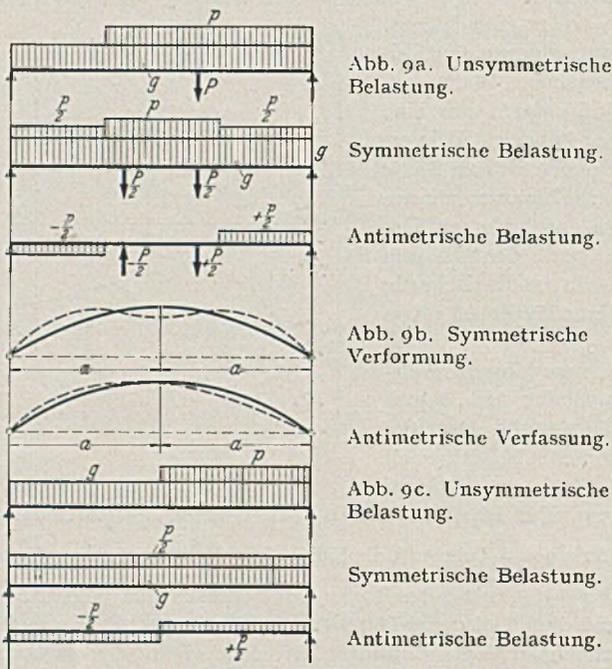


Abb. 8.

Des weiteren haben wir bei der Aufstellung der Gl. (13) den Horizontalschub H proportional der Belastung q angenommen. Auch dies ist nicht ganz streng, insbesondere in der Nähe von $\nu = 1$. Es ergeben sich hier geringfügige Abweichungen, weil infolge der Scheitelsenkungen aus der Verformung dieser Zusammenhang nicht mehr genau mathematisch linear ist; aber dieser Fehler ist noch von geringerer Bedeutung als der erste, und vor allem kommt er gar nicht zur Auswirkung, weil wir unseren weiteren Untersuchungen die Gl. (4a) bzw. (4b) zugrunde legen; die Gl. (13) sollte nur den Zusammenhang zwischen den äußeren Belastungen und den inneren Kräften klarlegen.



Wir haben damit erkannt, daß an Stelle des linearen Zusammenhangs in großer Annäherung ein quadratischer getreten ist, der durch die Gl. (4a) gekennzeichnet ist. Wir müssen uns nun noch etwas ausführlicher mit dem Superpositionsgesetz befassen. Hierzu betrachten wir nach Abb. 9a einen beliebig belasteten Bogen. Diese unsymmetrische Belastung zerlegen wir zuerst in eine symmetrische und eine antimetrische. Durch die antimetrische Belastung ergibt sich keine Änderung des Horizontalschubes und damit bleibt für die Addition dieser beiden Belastungszustände das gewöhnliche Superpositionsgesetz erhalten, d. h., wir können diese beiden Belastungsfälle ohne weiteres addieren.

In der Abb. 9b ist die Verformung für eine symmetrische und eine antimetrische Belastung dargestellt. Aus der symmetrischen Belastung ergibt sich auch eine symmetrische Verformung und eine symmetrische Knickwelle. Zugleich ergibt sich bei dieser Verformung eine Veränderung des Horizontalschubes H . Wir haben es also mit dem Fall des symmetrischen Knickens mit Dehnung zutun, für die wir den Buchstaben ν_s einführen. Die antimetrische Belastung dagegen bedingt eine antimetrische Verformung und damit eine antimetrische Knickwelle, bei welcher der Horizontalschub H sich nicht ändert. Es liegt demnach ein antimetrisches Knicken ohne Dehnung vor, das wir durch den Buchstaben ν_a kennzeichnen. In beiden Fällen gelingt es, wie ich in dem nächsten Abschnitt zeigen werde, die Verformungsmomente in der einfachen Form

$$M_s = M_{s0} \frac{\nu_s + \delta_s}{\nu_s - 1} \quad \text{und} \quad M_a = M_{a0} \frac{\nu_a + \delta_a}{\nu_a - 1} \quad \text{dazustellen.}$$

Das Gesamtmoment ergibt sich nach den obigen Darlegungen zu

$$(14) \quad M = M_s + M_a = M_{s0} \frac{\nu_s + \delta_s}{\nu_s - 1} + M_{a0} \frac{\nu_a + \delta_a}{\nu_a - 1}.$$

Sowohl der symmetrische als auch der antimetrische Belastungsfall kann aus einer Anzahl von Einzelbelastungen bestehen, für die wir in getrennter Berechnung infolge der elastischen Verformung nachfolgende Momente erhalten, z. B. bei symmetrischer

Belastung:

$$M_1 = M_{10} \frac{\nu_{s1} + \delta_{s1}}{\nu_{s1} - 1}, \quad M_2 = M_{20} \frac{\nu_{s2} + \delta_{s2}}{\nu_{s2} - 1} \quad \text{usw.}$$

Bei der Überlagerung dieser beiden symmetrischen Belastungsfälle ergibt sich eine Änderung des Horizontalschubes und damit eine Änderung von ν_s ; infolgedessen können wir die Addition nur vornehmen, wenn wir die Werte ν_{s1} und ν_{s2} der Einzelbelastungszustände ersetzen durch den Wert ν_s , welcher der Summierung der beiden Lastfälle entspricht.

$$(14a) \quad M = M_1 + M_2 = M_{10} \frac{\nu_s + \delta_{s1}}{\nu_s - 1} + M_{20} \frac{\nu_s + \delta_{s2}}{\nu_s - 1}.$$

Das gleiche gilt auch für die Summierung zweier antimetrischer Lastfälle mit den Knicksicherheiten ν_{a1} und ν_{a2} . Wir erhalten

$$(14b) \quad M = M_1 + M_2 = M_{01} \frac{\nu_a + \delta_{a1}}{\nu_a - 1} + M_{02} \frac{\nu_a + \delta_{a2}}{\nu_a - 1},$$

wobei ν_a der Wert der Knicksicherheit ist, welcher der Summierung der beiden antimetrischen Lastfälle entspricht. Soweit die Annäherungsgleichung $M = M \frac{\nu + \delta}{\nu - 1}$ keine hinreichend genauen Werte ergeben, müssen die Gl. (14) aus den Gl. (4b) zusammengesetzt werden. An den gekennzeichneten Gesetzen über die Superposition ändert sich dadurch nichts.

Wir fassen das Ergebnis nochmals zusammen:

Bei Berücksichtigung der elastischen Verformung tritt an die Stelle des linearen Zusammenhangs zwischen den äußeren und den inneren Kräften ein annähernd quadratischer gemäß Gl. (13). Der genaue Zusammenhang ist durch Gl. (13a) gegeben, bei welcher die quadratische Hyperbel durch Parabeln höherer Ordnung überlagert wird.

Das übliche Superpositionsgesetz darf nur angewandt werden, wenn durch die Überlagerung der Horizontalschub des Systems nicht beeinflusst wird, anderenfalls tritt an Stelle des üblichen ein verallgemeinertes Überlagerungsgesetz, welches jede beliebige Überlagerung gestattet, wenn die Werte der Knicksicherheit, die sich aus den Einzelbelastungszuständen ergeben, durch den Wert der Knicksicherheit ersetzt werden, welcher der Summierung der einzelnen Lastfälle entspricht.

Im allgemeinen genügt es, die Größe der Verformungsmomente für den Fall der halbseitigen Verkehrslast (Abb. 9c) nachzuweisen. Es bereitet jedoch keine Schwierigkeiten, diese auch für jeden beliebigen Belastungsfall zu ermitteln. Immer bleiben hierfür entsprechend den obigen Gleichungen die Werte ν_s und ν_a des symmetrischen und antimetrischen Knickens maßgebend, diese müssen unter allen Umständen ermittelt werden.

Bei den nachfolgenden Untersuchungen beschränke ich mich, wie schon erwähnt der Übersichtlichkeit wegen, auf den Parabelbogen mit $I_e = I_x \cos \varphi$. Die Gewölbe mit beliebiger Bogenform und beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente werden in einer Fortsetzung dieser Arbeit behandelt werden. Für den Parabelbogen mit den Trägheitsmomenten $I_e = I_x \cos \varphi$ lassen sich die Biegemomente ohne Schwierigkeiten auch mit der Differentialgleichung ermitteln, so daß damit die Genauigkeit der Resultate aus der stufenweisen Annäherung nachgeprüft werden kann.

Die Vorteile der stufenweisen Annäherung bestehen nicht nur darin, daß wir einfache Gleichungen für die Verformungsmomente und damit zugleich auch die Größe der Knicksicherheiten erhalten, sondern auch darin, daß wir dieses Verfahren auch bei beliebiger Bogenform und beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente anwenden können, wo eine Lösung der Differentialgleichung nicht mehr möglich ist. Vor allem aber erhalten wir damit für die Verformungsmomente solche Gleichungen, aus denen wir die allgemeinen Gesetze erkennen, die bei der Verformung an Stelle des linearen Zusammenhangs zwischen äußeren und inneren Kräften und an Stelle des Superpositionsgesetzes treten.

2. Die Verformungsmomente und die Knicksicherheit bei antimetrischer Belastung.

Wir betrachten einen ganz beliebig belasteten Bogen nach Abb. 9a; wir zerlegen diese Belastung in einen symmetrischen Teil

mit dem Horizontalschub H und in einen antimetrischen Belastungs-
teil, durch welchen kein zusätzlicher Horizontalschub hervorgeru-
fen wird. Die Lasten des antimetrischen Anteils werden nur durch
Balkenmomente abgetragen. Bei Gewölben mit Kämpfergelenken
ergeben sich dabei frei aufliegende Balken mit der Spannweite a
gleich der halben Gewölbespannweite, und bei Gewölben mit Kämp-
fereinspannung einseitig eingespannte Balken gleicher Spannweite a .

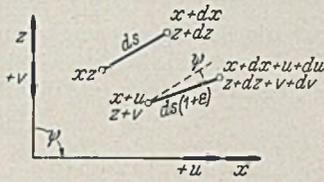


Abb. 10.

Da der Gewölbeschub des Bogen-
insolge der antimetrischen
Belastung gegenüber dem symme-
trischen Fall unverändert bleibt
($\epsilon = 0$), erhalten wir die senkrechten
Verschiebungen eines Bogen-
elementes nach Abb. 10 zu $dv =$
 ψdx und durch Differentiation

$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d\psi}{dx}$. Zwischen der Drehung des Bogens und dem Biegun-
gsmoment bestehen die Beziehungen $\frac{d\psi}{ds} = -\frac{M_x}{E J_g}$ bzw. $\frac{d\psi}{dx} =$
 $= -\frac{M_x}{E J_g \cos \varphi}$, wobei I_g das mit x ganz beliebig verlaufende
Trägheitsmoment des Bogens ist. Demnach ist

$$(15a) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_x}{E J_g \cos \varphi},$$

wobei $M_x = \mathfrak{M} - Hv$ bei dem Bogen mit Kämpfergelenken und
 $M_x = \mathfrak{M} - Hv + M_K$ bei dem Bogen mit Kämpfereinspannung ist.
Wir betrachten demgegenüber nun die Differentialgleichungen
eines Balkens mit der Spannweite a und dem ebenfalls beliebig ver-
laufenden Trägheitsmoment J_b ; diese lautet nach Gl. (5)

$$(15b) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_x}{E J_b},$$

wobei wie oben beim frei aufliegenden Balken $M_x = \mathfrak{M} - Hv$
und beim einseitig eingespannten Balken $M_x = \mathfrak{M} - Hv + M_K$.
Wir erkennen nun, daß der antimetrisch belastete Bogen sich genau
so verhält, wie ein Balken mit der halben Spannweite a , wenn zwi-
schen den Trägheitsmomenten die Beziehung besteht

$$(15c) \quad J_g \cos \varphi = J_b \quad \text{oder} \quad J_g \frac{dx}{ds} = J_b.$$

Hierbei ist J_b das Trägheitsmoment des Bogens, J_g das Trägheits-
moment des Balkens. Damit ist die Berechnung der Verformungs-
momente bei jedem beliebigen Verlauf der Trägheitsmomente auf
die Berechnung der eines geraden Balkens zurückgeführt. Das gleiche
gilt natürlich auch für die Ermittlung der Knicksicherheit.

Für den Sonderfall konstanten Trägheitsmomentes des Bal-
kens, dem nach Gl. (15c) beim Parabelbogen ein Trägheitsmoment
 $J_x \cos \varphi = J_c$ entspricht, ist damit die Größe der Knicksicherheit
und der Verformungsmomente auf Grund der im Abschnitt I ab-
geleiteten Gleichungen bekannt. Der allgemeinere Fall ganz be-
liebigen Verlaufs der Trägheitsmomente wird in einer Fortsetzung
dieser Arbeit behandelt werden.

Bei antimetrischer Belastung, bei welcher unter Voraussetzung
eines symmetrischen Bogens die Momentenlinie im Scheitel einen
Nullpunkt besitzt, so daß ein vorhandenes Gelenk ohne Bedeu-
tung ist, erhalten wir demnach bei gleichmäßiger Verkehrslast:

a) Bei den Zweigelenk- bzw. Dreigelenk-
bogen nach Gl. (5a). Da die Differentialgleichung für den anti-
metrisch belasteten Zweigelenk- und Dreigelenkbogen mit der des
freiaufliegenden Balkens mit der Spannweite a übereinstimmt,
ergibt sich für die Knicksicherheit dieselbe Bedingung. Die Knick-
sicherheit für antimetrisches Knicken ist also gegeben durch die
Gl. (9b).

(16) $v_a = 9,37 \frac{E J_c}{H a^2}$ bzw. beträgt die Knickkraft $H_K = 9,87 \frac{E J_c}{a^2}$.
Ebenso ergeben sich die Verformungsmomente aus Gl. (5a), wobei
jetzt q durch $p/2$ zu ersetzen ist. Wir erhalten für den Viertels-
punkt

$$(16a) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{v_a + 0,032}{v_a - 1} - \frac{0,004}{v_a} \right] \simeq M_0 \frac{v_a + 0,032}{v_a - 1}, \\ M_0 &= -\frac{p a^2}{16}. \end{aligned} \right.$$

b) Für den eingespannten bzw. für den Ein-
gelenkbogen. Die Werte für die Knicksicherheit und die Ver-
formungsmomente ergeben sich gemäß den obigen Darlegungen aus
den Gleichungen für den einseitig eingespannten Balken. Die
Knickersicherheit ist also gegeben durch Gl. (10b)

$$(17) \quad v_a = 20,19 \frac{E J_c}{H a^2} \quad \text{bzw. beträgt die Knickkraft } H_K = 20,19 \frac{E J_c}{a^2}.$$

Desgleichen ergeben sich die Verformungsmomente aus den Gl. (6).
Wir erhalten demnach für die Einspannstelle $\xi = 1$

$$(17a) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{v_a - 0,382}{v_a - 1} + \frac{0,055}{v_a} + \frac{0,013}{v_a^2} + \frac{0,004}{v_a^3} \right] \\ &\simeq M_0 \frac{v_a - 0,382}{v_a - 1}, \quad M_0 = -\frac{p a^2}{16} \end{aligned} \right.$$

für den Viertelspunkt $\xi = 0,5$

$$(17b) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{v_a - 0,014}{v_a - 1} + \frac{0,024}{v_a} + \frac{0,011}{v_a^2} + \frac{0,004}{v_a^3} \right] \\ &\simeq M_0 \frac{v_a - 0,014}{v_a - 1}, \quad M_0 = +\frac{p a^2}{32} \end{aligned} \right.$$

und für die Stelle der maximalen Momente $\xi = 3/8$

$$(17c) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{v_a + 0,121}{v_a - 1} - \frac{0,036}{v_a} + \frac{0,008}{v_a^2} + \frac{0,002}{v_a^3} \right] \\ &\simeq M_0 \frac{v_a + 0,121}{v_a - 1}, \quad M = +\frac{9}{256} p a^2. \end{aligned} \right.$$

Ebenso wie bei dem gewöhnlichen Balken werden also beim Bogen
mit antimetrischer Belastung infolge der Verformung sowohl die
Feld- als auch die Einspannungsmomente größer Abb. 11a zeigt

Abb. 11a. Die Biegunsmomente aus der elastischen Verformung des
Dreigelenk- und Zweigelenkbogens $\left(v_a = \pi^2 \cdot \frac{E J_c}{H a^2} \right)$.

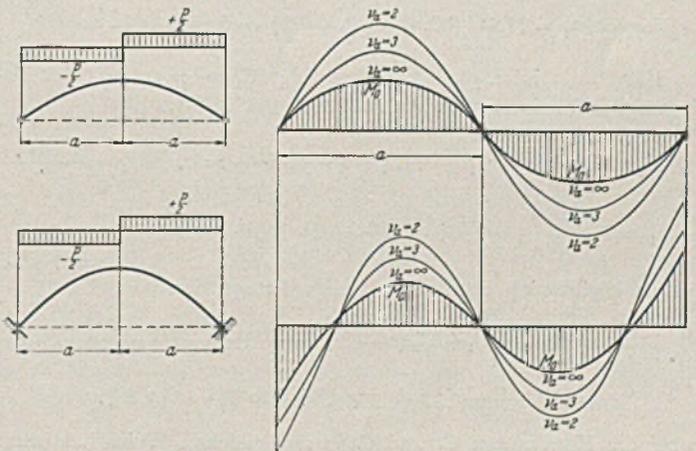


Abb. 11b. Die Biegunsmomente aus der elastischen Verformung des
Eingelenk- und eingespannten Bogens.

$$v_a = 20,19 \frac{E J_c}{H a^2}.$$

die Biegunsmomente aus der elastischen Verformung des Drei-
gelenk- und Zweigelenkbogens in Abhängigkeit von

$$v_a = \pi^2 \frac{E J_c}{H a^2},$$

den Wert der Knicksicherheit für antimetrisches dehnungsloses
Knicken, Abb. 11b desgleichen für den Eingelenkbogen und ein-
gespannten Bogen in Abhängigkeit von $v_a = 20,19 \frac{E J_c}{H a^2}$ (siehe
hierzu auch die Bemerkungen im Abschnitt II, 4, in dem die Ergeb-
nisse zusammengestellt sind).

3. Die Verformungsmomente und die Knick-
sicherheit bei symmetrischer Belastung.

Wir beschränken uns vorerst auf die Eigengewichtsbelastung
bzw. eine gleichmäßig sich über die ganze Spannweite erstreckende

Verkehrbelastung des Parabelbogens mit $J_c = J_x \cos \varphi$, $F_c = F_x \cos \varphi$.

a) Der Zweigelenbogen. Durch die Bogenzusammendrücke vermindert sich der statisch bestimmte aus der Seillinie errechnete Gewölbewindungsdruck

$$H_e = -H \frac{\int ds/F}{\int y^2 ds/J} = -\frac{15}{8} \frac{H}{f^2} \frac{J_c}{F_c} \quad (\text{Abb. 12a})$$

und infolgedessen wird von der Gewölbewirkung nicht mehr die gesamte Belastung q getragen. Der Teil $q \frac{H_e}{H}$ muß durch Balkenwirkung nach den Kämpfern übertragen werden und hierdurch ergibt sich ein parabelförmig verlaufendes Balkenmoment $M_0 = H_e \cdot z$, $z = f(1 - \xi^2)$, $M = H_e f(1 - \xi^2)$. Durch Schwinden, Temperatur und Widerlagerausweichungen ergeben sich noch weitere Verminderungen des Horizontalschubes, die beide gleiche Balkenmomente wie H_e auslösen. Wir können deshalb uns all diese Wirkungen in H_e zusammengefaßt denken. Durch zweimalige Integration, die die Konstanten C_1 und C_2 liefert, erhalten wir aus M_0 die Verbiegung v_0 . Da $\frac{ds}{J_x} = \frac{dx/\cos \varphi}{J_c/\cos \varphi}$, erfolgt die Integration wie bei einem geraden Balken.

$$v_0 = \frac{H_e f}{E J_c} a^2 \left(C_1 + C_2 \xi - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{12} \xi^4 \right).$$

C_2 muß gleich null sein, weil diese Konstante eine unsymmetrische Verbiegung ergeben würde. Das zusätzliche Biegemoment M_1 ergibt sich aus Hv_0 . Wir setzen wieder zur Abkürzung $\frac{H a^2}{E J_c} = \lambda^2$.

Mit diesem Biegemoment ist aber eine Spannweitenänderung verbunden, es entsteht ein zusätzlicher statisch unbestimmter Horizontalschub, den wir durch die Konstante C_3 bezeichnen wollen und der ein Moment $C_3 z = C_3 f(1 - \xi^2)$ ausübt. Demnach wird

$$M_1 = H_e f \frac{\lambda^2}{12} [C_1 + C_3(1 - \xi^2) - 6\xi^2 + \xi^4]$$

Für $\xi = 1$ ist $M_1 = 0$, hieraus folgt $C_1 = +5$. Aus der Bedingung, daß keine Spannweitenänderung eintritt, folgt

$$\int_0^1 M_1 z d\xi = 0, \quad C_1 \frac{2}{3} + C_3 \frac{8}{15} - \frac{12}{15} + \frac{2}{35} = 0, \quad C_3 = -\frac{34}{7}$$

$$M_1 = H_e f \frac{\lambda^2}{12} \left(5 - \frac{34}{7} + \frac{34}{7} \xi^2 - 6\xi^2 + \xi^4 \right) = H_e f \frac{\lambda^2}{84} (1 - 8\xi^2 + 7\xi^4).$$

Daraus ergibt sich durch zweimalige Integration

$$M_2 = H_e f \frac{\lambda^4}{84} \left[C_1 + C_3(1 - \xi^2) - \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{2}{3} \xi^4 - \frac{7}{30} \xi^6 \right] \\ = H_e f \frac{\lambda^4}{52920} [32 - 305 \xi^2 + 420 \xi^4 - 147 \xi^6],$$

wobei die Konstanten C_1 und C_3 in der gleichen Weise bestimmt wurden. Die weiteren Zusatzmomente ergeben sich zu

$$M_3 = H_e f \frac{\lambda^6}{10^5} [2,874 - 29,408 \xi^2 + 48,028 \xi^4 - 26,455 \xi^6 + 4,960 \xi^8].$$

$$M_4 = H_e f \frac{\lambda^8}{10^6} [1,330 - 14,001 \xi^2 + 24,507 \xi^4 - 16,009 \xi^6 + 4,724 \xi^8 - 0,551 \xi^{10}].$$

Das Gesamtmoment ergibt sich aus $M = M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \dots$

Damit wird für $\xi = 0$ (Scheitel)

$$M = H_e f \left[1 + \frac{\lambda^2}{84} + \frac{32}{52920} \lambda^4 + \frac{2,874}{10^5} \lambda^6 + \frac{1,330}{10^6} \lambda^8 + \dots \right].$$

Aus dem Verhältnis von $\frac{M_3}{M_1} = \frac{28,74}{1,330 \lambda^2} = \frac{21,607}{\lambda^2}$ ermitteln wir die Knicksicherheit zu

$$(18) \quad v_s = \frac{21,607}{\lambda^2} = 21,607 \frac{E J_c}{H a^2}.$$

Wir ersetzen nun in der obigen Reihe λ^2 durch v_s und erhalten

$$M = H_e f \left[1 + \frac{0,257}{v_s} + \frac{0,282}{v_s^2} + \frac{0,290}{v_s^3} + \frac{0,290}{v_s^4} + \dots \right].$$

Wir erkennen, daß wir mit der Reihenentwicklung weit genug gegangen sind, da die Koeffizienten der letzten drei Glieder fast genau übereinstimmen. Einen noch genaueren Wert der Knicksicherheit und der Verformungsmomente hätten wir erhalten, wenn wir die Reihe noch um zwei bis drei Glieder erweitert hätten. Aus der Differentialgleichung ergibt sich der genaue Wert der Knicksicherheit zu $v_s = 21,96 \frac{E J_c}{H a^2}$, wie ich später noch zeigen werde. Der Unterschied beträgt nur 1,5%. Durch die Einführung von v_s an Stelle von λ^2 haben wir die Reihe in eine Form gebracht, daß wir sie nach Abspaltung in eine geometrische Reihe verwandeln und damit leicht summieren können.

$$M = H_e f \left[0,290 \frac{v_s}{v_s - 1} + 0,710 - \frac{0,033}{v_s} - \frac{0,008}{v_s^2} \right],$$

demnach ergibt sich für den Scheitel $\xi = 0$

$$(18a) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{v_s - 0,710}{v_s - 1} - \frac{0,033}{v_s} - \frac{0,008}{v_s^2} \right] \\ &\approx M_0 \frac{v_s - 0,710}{v_s - 1}, \quad \text{wobei } M_0 = H_e f \text{ ist.} \end{aligned} \right.$$

In gleicher Weise erhalten wir für den Viertelpunkt $M_0 = 0,5$.

$$(18b) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= M_0 \left[\frac{v_s - 1,247}{v_s - 1} + \frac{0,055}{v_s} + \frac{0,010}{v_s^2} \right] \\ &\approx M_0 \frac{v_s - 1,247}{v_s - 1}, \quad \text{wobei } M_0 = \frac{3}{4} H_e f. \end{aligned} \right.$$

Es sei noch kurz darauf hingewiesen, daß die Durchführung der obigen stufenweisen Annäherung im Gegensatz zu der bei den Balken mathematisch nicht ganz streng ist, denn wir haben bei der Bestimmung des Einflusses der statisch unbestimmten Größe mit $C_2 z = C_2(1 - \xi^2)f$ gerechnet, anstatt mit $C_2(z + v)$. Wir haben also hier die Verbiegung v gegenüber der Ordinate z als unendlich klein vernachlässigt. Ein merkbarer Fehler ist damit, wie aus den späteren Darlegungen noch folgt, nicht verbunden. Man könnte selbstverständlich v bei der Approximation auch berücksichtigen, aber es wäre eine überflüssige Mühe.

b) Der eingespannte Bogen. Bei diesem ergibt sich die Größe von H_e bekanntlich zu $H_e = -\frac{45}{4} \frac{H}{f^2} \frac{J_c}{F_c}$. H_e greift im Schwerpunkt der elastischen Gewichte an, dieser liegt beim Parabelbogen mit $J_c = J_x \cos \varphi$ in Höhe von $f/3$ (Abb. 12b). Dem-

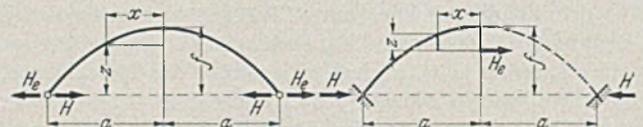


Abb. 12 a.

Abb. 12 b.

nach ist $z = f/3(1 - 3\xi^2)$. Das ursprüngliche Balkenmoment M_0 beträgt also $M_0 = \frac{H_e f}{3}(1 - 3\xi^2) = \frac{H_e f}{12}(4 - 12\xi^2)$. Hieraus erhalten wir durch zweimalige Integration die zugehörige Durchbiegung $v_0 = \frac{H_e f}{12} [C_1 + C_2 \xi - 2\xi^2 + \xi^4]$.

Die Konstante C_2 muß gleich null gesetzt werden, weil sie eine unsymmetrische Verbiegung bedingen würde. Aus der Durchbiegung v_0 erhalten wir nun das zusätzliche Biegemoment $M_1 = Hv_0$. Mit diesem Biegemoment ist eine Spannweitenänderung und eine Kämpferverdrehung verbunden, die durch einen zusätzlichen Horizontalschub und ein zusätzliches Biegemoment, die wir durch die Konstanten C_3 und C_4 kennzeichnen, zu null gemacht werden müssen. Durch den Horizontalschub C_3 wird ein Moment $C_3(1 - 3\xi^2)$ ausgeübt. Die Konstante C_4 können wir mit der Konstanten C_1 zusammenfassen. Wir setzen wieder $\frac{H a^2}{E J_c} = \lambda^2$ und erhalten damit

$$M_1 = \frac{H_e f}{12} \lambda^2 [C_1 + C_3(1 - 3\xi^2) - 2\xi^2 + \xi^4].$$

Die Konstanten bestimmen sich bei dem eingespannten Bogen daraus, daß keine Verdrehungen und Verschiebungen der Widerlager eintreten.

$$\int_0^1 M_1 d\xi = 0, \quad C_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

$$\int_0^1 M_1 z d\xi = \int_0^1 M_1 (1 - 3\xi^2) d\xi = 0, \quad C_3 \frac{4}{5} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{7} \right), \quad C_3 = -\frac{8}{21}$$

$$M_1 = H_e f \frac{\lambda^2}{12} \left[\frac{7}{15} - \frac{8}{21} + \frac{8}{7} \xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4 \right] = H_e f \frac{\lambda^2}{10^2} [0,7143 - 7,1429 \xi^2 + 8,3333 \xi^4]$$

und in gleicher Weise

$$M_2 = H_e f \frac{\lambda^4}{10^3} [0,2456 - 3,1180 \xi^2 + 5,9524 \xi^4 - 2,7778 \xi^6],$$

$$M_3 = H_e f \frac{\lambda^6}{10^4} [7,884 - 111,046 \xi^2 + 259,825 \xi^4 - 198,413 \xi^6 + 49,603 \xi^8],$$

$$M_4 = H_e f \frac{\lambda^8}{10^5} [2,442 - 36,038 \xi^2 + 92,538 \xi^4 - 86,609 \xi^6 + 35,431 \xi^8 - 5,5115 \xi^{10}],$$

$$M_5 = H_e f \frac{\lambda^{10}}{10^6} [0,744 - 11,210 \xi^2 + 30,032 \xi^4 - 30,846 \xi^6 + 15,446 \xi^8 - 3,937 \xi^{10} + 0,4175 \xi^{12}],$$

$$M_6 = H_e f \frac{\lambda^{12}}{10^7} [0,2252 - 3,422 \xi^2 + 9,341 \xi^4 - 10,011 \xi^6 + 5,508 \xi^8 - 1,7148 \xi^{10} + 0,2983 \xi^{12} - 0,0229 \xi^{14}].$$

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + M_3 + \dots$$

für den Scheitel $\xi = 0$,

$$M = \frac{H_e f}{3} \left[1 + \frac{2,1429}{10^2} \lambda^2 + \frac{0,7369}{10^3} \lambda^4 + \frac{23,650}{10^4} \lambda^6 + \frac{7,326}{10^5} \lambda^8 + \frac{2,232}{10^6} \lambda^{10} + \frac{0,6755}{10^7} \lambda^{12} + \dots \right].$$

Aus dem Verhältnis von $\frac{M_5}{M_6}$ erhält man die Knicksicherheit für die symmetrische Knickung zu $\nu_s = \frac{33,05}{\lambda^2}$. Wir ersetzen damit λ durch ν , um die Zusammenfassung der unendlichen Reihe zu ermöglichen.

$$M = \frac{H_e f}{3} \left[1 + \frac{0,708}{\nu_s} + \frac{0,805}{\nu_s^2} + \frac{0,854}{\nu_s^3} + \frac{0,874}{\nu_s^4} + \frac{0,880}{\nu_s^5} + \frac{0,880}{\nu_s^6} + \dots \right].$$

Da die letzten drei Werte schon sehr gut übereinstimmen, kann der Wert von $\nu_s = 33,05$ als genügend genau angesehen werden. Zum Vergleich sei wieder der genaue Wert aus der Differentialgleichung, den wir später ermitteln, angegeben. Er beträgt $\nu_s = \frac{33,21}{\lambda^2}$.

Damit ergibt sich die Knickkraft für das symmetrische Knicken mit Dehnung zu

$$(19) \quad H_K = 33,05 \frac{E J_c}{H a^2}.$$

Nach Abspaltung erhalten wir eine unendliche geometrische Reihe, die wir summieren können, und hieraus ergibt sich für den Scheitel $\xi = 0$

$$(19a) \quad M = M_0 \left[\frac{\nu_s - 0,120}{\nu_s - 1} - \frac{0,172}{\nu_s} - \frac{0,075}{\nu_s^2} - \frac{0,026}{\nu_s^3} - \frac{0,006}{\nu_s^4} \right] \approx M_0 \frac{\nu_s - 0,12}{\nu_s - 1}, \quad M_0 = \frac{1}{3} H_e f$$

und in gleicher Weise für den Achtpunkt beim Scheitel $\xi = \frac{1}{4}$

$$(19b) \quad M = M_0 \left[\frac{\nu_s - 0,75}{\nu_s - 1} + \frac{0,125}{\nu_s} + \frac{0,059}{\nu_s^2} + \frac{0,022}{\nu_s^3} + \frac{0,0006}{\nu_s^4} \right] \approx M_0 \frac{\nu_s - 0,75}{\nu_s - 1}, \quad M_0 = \frac{13}{48} H_e f$$

für den Viertelpunkt $\xi = \frac{1}{2}$

$$(19c) \quad M = M_0 \left[\frac{\nu_s - 3,918}{\nu_s - 1} + \frac{0,727}{\nu_s} + \frac{0,210}{\nu_s^2} + \frac{0,054}{\nu_s^3} + \frac{0,010}{\nu_s^4} \right] \quad (\text{Näherung zu ungenau}) \quad M_0 = \frac{1}{12} H_e f,$$

für den Achtpunkt am Kämpfer $\xi = \frac{3}{4}$

$$(19d) \quad M = M_0 \left[\frac{\nu_s - 0,596}{\nu_s - 1} + \frac{0,580}{\nu_s} + \frac{0,191}{\nu_s^2} + \frac{0,054}{\nu_s^3} + \frac{0,011}{\nu_s^4} \right] \quad (\text{Näherung zu ungenau}) \quad M_0 = -\frac{11}{48} H_e f,$$

für den Kämpfer $\xi = 1$

$$(19e) \quad M = M_0 \left[\frac{\nu_s - 1,418}{\nu_s - 1} - \frac{0,537}{\nu_s} - \frac{0,089}{\nu_s^2} - \frac{0,023}{\nu_s^3} - \frac{0,005}{\nu_s^4} \right] \quad (\text{Näherung zu ungenau}) \quad M_0 = -\frac{2}{3} H_e f.$$

c) Der Eingelenkbogen. Beim Eingelenkbogen greift H_e am Scheitelpunkt an (Abb. 12c). Die Größe von H_e ergibt sich für den Parabelbogen

$$J_c = J_x \cos \varphi$$

und

$$F_c = F_x \cos \varphi$$

zu

$$H_e = -5 \frac{H J_c}{f^2 F_c}.$$

Die sich aus der Verminderung des Horizontalschubes um H_e ergebenden negativen Balkenmomente betragen

$$M_0 = -H_e z, \quad z = f \xi^2$$

$$M_0 = -H_e f \xi^2 = -\frac{H_e f}{12} 12 \xi^2.$$

Durch zweimalige Integration erhalten wir wieder die Biegelinie

$$v_0 = -H_e f (C_1 + C_2 \xi - \xi^4).$$

Am Scheitelpunkt ist $v_0 = 0$, demnach $C_1 = 0$. Wegen der Kämpfereinspannung muß für $\xi = 1$ $\frac{dv_0}{dx} = 0$ sein, hieraus $C_2 = 4$.

Das zusätzliche Biegemoment M_1 ergibt sich aus $H_e v_0$, bei symmetrischer Belastung ist der Eingelenkbogen ebenso wie der Zweigelenkbogen einfach statisch unbestimmt, infolgedessen müssen wir noch eine dritte Konstante C_3 hinzufügen, durch welche der zusätzliche Horizontalschub gekennzeichnet ist, durch den die Spannweitenänderung infolge der Verbiegung v_0 zu Null gemacht wird. Durch diesen Horizontalschub ergibt sich ein Biegemoment von $C_3 \xi^2$. Wir setzen zur Abkürzung wiederum

$$\frac{H a^2}{E J_c} = \lambda^2$$

und erhalten:

$$M_1 = -\frac{H_e f}{12} \lambda^2 [4 \xi + C_3 \xi^2 - \xi^4].$$

C_3 folgt aus der Bedingung

$$\int_0^a M_1 z dx = \int_0^1 M_1 \xi^2 d\xi = 0, \quad C_3 = -\frac{30}{7}$$

$$M_1 = -H_e f \frac{\lambda^2}{12} \left[4 \xi - \frac{30}{7} \xi^2 - \xi^4 \right] = -H_e f \frac{\lambda^2}{84} [28 \xi - 30 \xi^2 - 7 \xi^4].$$

Die Konstante C_2 wird beim Eingelenkbogen im Gegensatz zu den Gewölben ohne Scheitelpunkt nicht gleich Null mit Rücksicht auf die Unstetigkeit infolge des Scheitelpunktes. In gleicher Weise erhalten wir auch die übrigen Zusatzmomente

$$M_2 = -H_e f \frac{\lambda^4}{10^2} [3,095 \xi - 1,520 \xi^2 - 5,556 \xi^3 + 2,976 \xi^4 + 0,2778 \xi^6],$$

$$M_3 = -H_e f \frac{\lambda^6}{10^3} [2,871 \xi - 1,357 \xi^2 - 5,159 \xi^3 + 1,266 \xi^4 + 2,778 \xi^6 - 0,992 \xi^8 - 0,0496 \xi^{10}],$$

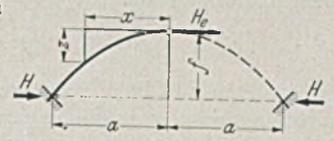


Abb. 12c.

$$M_4 = -H_e f \frac{\lambda^8}{10^4} [2,626 \xi - 1,232 \xi^2 - 4,785 \xi^3 + 1,131 \xi^4 + 2,579 \xi^5 - 0,422 \xi^6 - 0,661 \xi^7 + 0,177 \xi^8 + 0,0055 \xi^{10}],$$

$$M_5 = -H_e f \frac{\lambda^0}{10^5} [2,392 \xi - 1,121 \xi^2 - 4,376 \xi^3 + 1,026 \xi^4 + 2,393 \xi^5 - 0,377 \xi^6 - 0,614 \xi^7 + 0,754 \xi^8 + 0,0919 \xi^9 - 0,0197 \xi^{10} - 0,00042 \xi^{12}],$$

$$M_6 = -H_e f \frac{\lambda^2}{10^6} [2,178 \xi - 1,020 \xi^2 - 3,987 \xi^3 + 0,933 \xi^4 + 2,188 \xi^5 - 0,342 \xi^6 - 0,569 \xi^7 + 0,067 \xi^8 + 0,085 \xi^9 - 0,008 \xi^{10} - 0,008 \xi^{11} + 0,001 \xi^{12} + 0,00002 \xi^{14}].$$

Daraus ergibt sich für die Einspannstelle $\xi = 0$

$$M = -H_e f \left[1 - 1,0714 \frac{\lambda^2}{10} - 0,7259 \frac{\lambda^4}{10^2} - 0,6421 \frac{\lambda^6}{10^3} - 0,5819 \frac{\lambda^8}{10^4} - 0,5293 \frac{\lambda^{10}}{10^5} - 0,4817 \frac{\lambda^{12}}{10^6} \sim \dots \right].$$

Aus dem Verhältnis von $\frac{M_5}{M_6}$ ergibt sich der Wert ν_s der symmetrischen Knickung zu:

$$\nu_s = \frac{M_5}{M_6} = \frac{10,987}{\lambda^2}.$$

Wir ersetzen nun in dieser unendlichen Reihe λ durch ν_s , um die Zusammenfassung in eine geometrische Reihe zu ermöglichen:

$$M = -H_e f \left[1 - \frac{1,177}{\nu_s} - \frac{0,876}{\nu_s^2} - \frac{0,852}{\nu_s^3} - \frac{0,848}{\nu_s^4} - \frac{0,847}{\nu_s^5} - \frac{0,847}{\nu_s^6} - \dots \right].$$

Da die drei letzten Glieder annähernd gleich groß sind, ist der gefundene Wert von ν_s genügend genau. Aus der Differentialgleichung werden wir später den genauen Wert zu $\frac{10,983}{\lambda^2}$ finden.

Da $\lambda^2 = \frac{H a^2}{E J}$, erhalten wir für die Knickkraft bei symmetrischem Knicken

$$(20) \quad H_K = 10,983 \frac{E J}{a^2}.$$

Durch Abspalten verwandeln wir die obige Reihe in eine geometrische, die wir leicht summieren können. Wir erhalten also für das Einspannmoment

$$(20a) \quad \begin{cases} M = M_0 \left[\frac{\nu_s - 1,847}{\nu_s - 1} - \frac{0,330}{\nu_s} - \frac{0,029}{\nu_s^2} - \frac{0,005}{\nu_s^3} - \frac{0,001}{\nu_s^4} \right] \\ \simeq M_0 \left[\frac{\nu_s - 1,847}{\nu_s - 1} - \frac{0,33}{\nu_s} \right], \quad M_0 = -H_e f \end{cases}$$

und in gleicher Weise für den Viertelpunkt $\xi = \frac{1}{2}$

$$(20b) \quad M = M_e \left[\frac{\nu_s + 2,19}{\nu_s - 1} - \frac{0,02}{\nu_s} \right] \simeq M_0 \frac{\nu_s + 2,19}{\nu_s - 1}, \quad M_0 = -\frac{1}{4} H_e f.$$

d) Der Dreigelenkbogen. Dieser nimmt eine Ausnahmestelle ein, weil bei ihm als statisch bestimmtem System die Knicksicherheit und die Verformungsmomente ohne Reihenbildung in geschlossener Form abgeleitet werden können. Wir ermitteln zunächst die Sicherheit für symmetrisches Knicken. Hierzu belasten wir den Bogen nach Abb. 13 durch ein zum Scheitelpunkt symmetrisches Moment $M = M_{ov} \sin \pi \frac{x}{a}$. Infolge dieses symmetrischen Momentes ergibt sich eine vorerst noch unbekannte Scheitelsenkung Δf . Um diese zu ermitteln, denken wir uns zunächst den einen Bogenschenkel am Kämpfer eingespannt und berechnen die Verschiebungen Δa und Δb des Scheitelpunktes, unter Beachtung, daß $\frac{ds}{J_x} = \frac{dx}{J_c}$

$$\Delta b = \int_0^a \frac{M_{ov}}{E J_c} x \sin \pi \frac{x}{a} dx = \frac{M_{ov} a^2}{E J_c \pi}$$

$$\Delta a = \int_0^a \frac{M_{ov}}{E J_c} z \sin \pi \frac{x}{a} dx = \int_0^a \frac{M_{ov}}{E J_c} f \frac{x^2}{a^2} \sin \pi \frac{x}{a} dx = \frac{M_{cv}}{E J_c} a f \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}.$$

Jetzt lösen wir die Einspannung und drehen den Bogenschenkel so weit zurück, daß $\Delta a = 0$ wird und erhalten damit die gesuchte Scheitelsenkung

$$\Delta f = \Delta b - \Delta a \frac{a}{f} = M_{ov} \frac{a^2}{E J_c} \frac{4}{\pi^3}.$$

Infolge dieser Scheitelsenkung und der Verbiegung durch das Moment M_0 erhalten wir im Viertelpunkt ein zusätzliches Moment

$$M_{1v} = H \left(\frac{\Delta f}{4} + \Delta y_v \right) = M_{ov} \frac{H a^2}{E J_c} \left(\frac{1}{\pi^3} + \frac{1}{\pi^2} \right) = M_{ov} \frac{H a^2}{E J_c} \frac{\pi + 1}{\pi^3},$$

$$\text{da } \Delta y = - \int dx \int \frac{M_{ov}}{E J_c} \sin \pi \frac{x}{a} dx = + \frac{M_{ov}}{E J_c} \frac{a^2}{\pi^2} \sin \pi \frac{x}{a},$$

$$\text{und } \Delta y_v = \frac{M_{ov} a^2}{E J_c \pi^2}.$$

Aus dem Verhältnis von $\frac{M_{1v}}{M_0}$ erhalten wir die Sicherheit für symmetrisches Knicken zu

$$(21) \quad \nu_s = \frac{\pi^3}{\pi + 1} \frac{E J_c}{H a^2} \quad \text{oder} \quad H_k = \frac{\pi^3}{\pi + 1} \frac{E J_c}{a^2} = 7,486 \frac{E J_c}{a^2}.$$

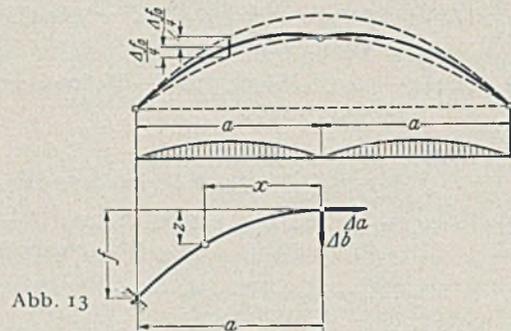


Abb. 13

Aus der Differentialgleichung erhalten wir später fast genau den gleichen Wert $H_k = 7,437 \frac{E J_c}{a^2}$. Hätte man an Stelle einer sinusförmigen eine parabelförmige Momentenlinie benutzt, dann hätten wir einen etwas geringeren Wert von $H_k = 7,272 \frac{E J_c}{a^2}$ erhalten.

Wir ersehen daraus, daß die tatsächliche Knicklinie zwischen der Sinuslinie und der Parabel liegt. In unseren amtlichen Bestimmungen rechnen wir auf Grund der Gleichungen von R. Mayer mit einem Wert von rd. $H_k = 6 \frac{E J_c}{a^2}$, der um rd. 25% zu ungünstig ist.

In ebenso einfacher Weise erhalten wir die Verformungsmomente in geschlossener Form. Bei der Ausrüstung senkt sich der Scheitel des vorher nach der Seillinie geformten Bogens durch die elastische Zusammendrückung um das Maß Δf_0 und infolgedessen ergibt sich für den Viertelpunkt ein Biegemoment $M_0 = H_g \frac{\Delta f_0}{4}$. Durch die elastische Verformung vergrößert sich M_0 auf den noch unbekanntem Wert M_v . Wir nehmen an, daß sich das Moment nach einer Parabel über die Bogenschenkel verteilt. $M = 4 M_v (\xi - \xi^2)$. Für $\xi = \frac{1}{2}$ ist $M = M_v$ (Moment im Viertelpunkt).

Wir ermitteln nun wieder wie vor die Verschiebungen Δa und Δb des Scheitels infolge dieses Momentes.

$$\Delta b = \int_0^1 \frac{4 M_v}{E J_c} (\xi - \xi^2) a \xi a d \xi = \frac{M_v a^2}{E J_c} \frac{2}{3}.$$

$$\Delta a = \int_0^1 \frac{4 M_v}{E J_c} (\xi - \xi^2) 1 \xi^2 a d \xi = \frac{M_v a f}{E J_c} \frac{1}{5}.$$

Aus diesen Verschiebungen ergibt sich eine Scheitelsenkung $\Delta f_1 = \Delta b - \Delta a \frac{a}{f} = \frac{M_v}{E J_c} \frac{2}{15} a^2$. Die gesamte Scheitelsenkung beträgt $\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_0$. Das Biegemoment im Viertelpunkt folgt aus $M_v = H \cdot \left(\frac{\Delta f}{4} + \Delta y_v \right)$, wobei Δy_v die Durchbiegung

infolge des endgültigen Momentes M_v ist, das wir über dem Bogen-
schenkel nach einer Parabel verteilt annehmen. Also

$$\Delta y_v = \frac{M_v}{E J_c} \frac{5}{48} a^2.$$

Demnach

$$M_v = H \cdot \left(\frac{\Delta f_0}{4} + \frac{\Delta f_1}{4} + \Delta y_v \right) = H \cdot \left(\frac{\Delta f_0}{4} + \frac{M_v a^2}{E J_c 30} + \frac{M_v}{E J_c} \frac{5}{48} a^2 \right)$$

hieraus

$$M_v \cdot \left(1 - \frac{H a^2 11}{E J_c 80} \right) = H \frac{\Delta f_0}{4} = M_0.$$

Nun ist

$$\nu_s = \frac{H a^2}{E J_c} 7,436,$$

demnach

$$M_v \left(1 - \frac{0,977}{\nu_s} \right) = M_0$$

und

$$(21a) \quad M_v = M_0 \frac{\nu_s}{\nu_s - 1,023},$$

wobei

$$M_0 = -H \frac{\Delta f_0}{4}.$$

Durch Reihenentwicklung hätten wir die gleichwertige Beziehung

$$(21b) \quad M_v = M_0 \left[\frac{\nu_s + 0,028}{\nu_s - 1} - \frac{0,006}{\nu_s} \right]$$

erhalten, die mit den früheren übereinstimmt. Theoretisch lassen
sich bei dem statisch bestimmten Dreigelenkbogen die Verformungs-
momente ganz beseitigen, dadurch, daß man den Bogen verformt
herstellt, so daß er nach der Ausrüstung und nach Verkürzung
durch seine Eigengewichtsdruckspannungen trotz der eingetretenen
Scheitelsenkung genau nach der Seillinie geformt ist. Hierzu
müssen die Bogenschenkel etwas verflacht hergestellt werden. Um
tatsächlich die Beseitigung der Verformungsmomente zu erreichen,
muß man natürlich die tatsächliche Größe des Elastizitätsmoduls
und des weiteren auch die Größe der Widerlagerzusammendrük-
kungen kennen.

Die obige Gl. (21b) stimmt fast genau mit der eines frei-
aufliegenden Balkens mit der Spannweite a überein. Nur daß
jetzt der Wert ν_s im Verhältnis von $\frac{\pi^3}{\pi + 1}$ zu π^2 kleiner ist, und
damit wird die Knicklänge größer als die Gelenkentfernung, ein
Resultat, das durch die Untersuchungen von Mayer schon be-
kannt war. Aber wie schon erwähnt, ist der von Mayer abgeleitete
Wert der Knicksicherheit zu klein.

Bei den Gewölben, deren Achslinie gegenüber der Parabel
stark überhöht ist — ein Fall, der bei den Eisenbetonbrücken fast
die Regel ist, weil das Eigengewicht der Brücken von dem Scheitel
nach dem Kämpfer zunimmt —, ist die Knicksicherheit wesentlich
kleiner als nach Gl. (21). Die genauen Werte der Knicksicherheit
für diese überhöhten Bögen werde ich in dem schon angekündigten
Nachtrag bringen.

In Abb. 14 sind die Verformungsmomente für $\nu_s = \infty$ (M_0)
und $\nu_s = 3$ und $\nu_s = 2$ für alle vier Bogenarten aufgetragen. Auf-
fallend ist das Verhalten der Bögen mit Kämpfereinspannung. Je
geringer die Knicksicherheit ν_s ist, um so kleiner werden die Ein-
spannmomente, während die Feldmomente andererseits stark an-
wachsen. Am stärksten ist diese Erscheinung beim Eingelenkbogen
ausgeprägt. Hier sind die M_0 -Momente durchgehend negativ, sie
nehmen vom Scheitel nach dem Kämpfer nach einer Parabel zu:
 $M_0 = H_e z = H_e f \xi^2$. Durch die elastische Verformung gehen
die Einspannungsmomente bei $\nu_s = 3$ auf 46% zurück und bei
 $\nu_s = 2$ wechseln sie sogar ihr Vorzeichen und werden positiv. Die
Feldmomente vergrößern sich infolge der Verformung ganz wesent-
lich. Am Viertelpunkt wachsen sie bei $\nu_s = 3$ von $-0,25 H_e f$
auf $-0,621 H_e f$ und bei $\nu_s = 2$ sogar auf den über vierfachen
Wert $-1,042 H_e f$ an.

Die zusätzlichen Momente aus der elastischen Verformung, ge-
geben durch $(M - M_0)$, haben, wie aus Abb. 14 ohne weiteres zu
ersehen, bei allen Bogenarten die Form der symmetrischen Knick-
welle; denn die Verformungsmomente sind eben nichts anderes
als die Einleitung des späteren Knickprozesses. Hieraus kann man
sich auch sehr leicht klarmachen, warum an den Kämpfern die
Einspannmomente zurückgehen müssen. In Abb. 15 sind für den
eingespannten und für den Eingelenkbogen die Verformungen der
Bogenachse dargestellt. Infolge der Scheitelsenkung ergeben sich
für die dem Scheitel benachbarten Zonen (Viertelpunkt) negative
Momente, aus der Senkung des Scheitels ergibt sich aber auch ein
zusätzlicher Horizontalschub, der an den Kämpfern positive
Momente bedingt, und damit kommt eine der symmetrischen
Knickung entsprechende Verformung zustande. Je geringer die
Knicksicherheit ist, um so stärker ist die sich aus der Verformung
ergebende Knickwelle und um so größer ist die Beeinflussung der
Kämpfermomente.

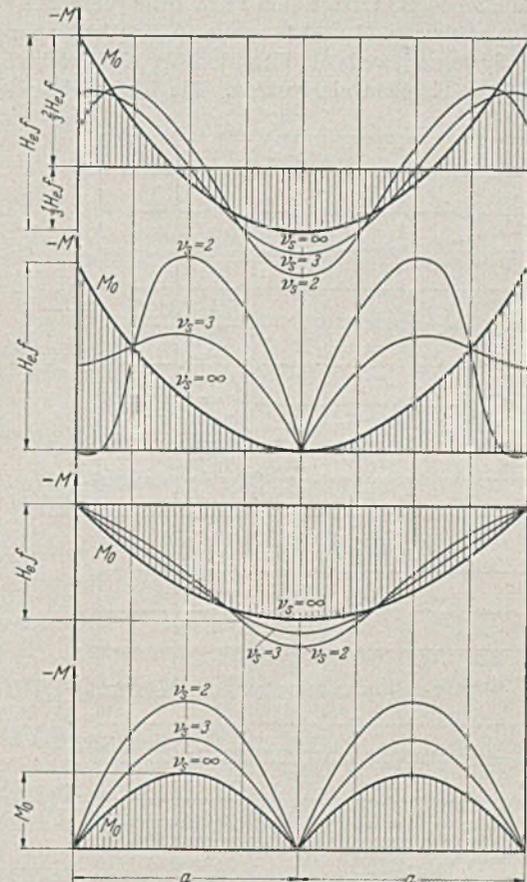


Abb. 14a.

Abb. 14b.

Abb. 14c.

Abb. 14d.

Aus Abb. 14 erschen wir, daß sich die Gewölbe ohne Scheitelgelenk
wesentlich günstiger verhalten als die mit Scheitelgelenken. Dabei
ist aber zu berücksichtigen, daß bei dem Eingelenkbogen ν_s die maß-
gebende Knicksicherheit ist, für welche die Dimensionierung durch-
zuführen ist. Bei dem eingespannten Bogen ist nicht $\nu_s = 33,21 \frac{E J_c}{H a^2}$,
sondern der antimetrische Knickwert $\nu_a = 20,19 \frac{E J_c}{H a^2}$ maßgebend.
Um demnach einen richtigen Vergleich zu erhalten, müssen wir die
Verformungsmomente auf die maßgebende Knicksicherheit ($\bar{\nu}$)
beziehen. Diese beträgt beim Eingelenkbogen $\bar{\nu} = \nu_s = 10,983 \frac{E J_c}{H a^2}$,
beim eingespannten dagegen $\bar{\nu} = \nu_a = 20,19 \frac{E J_c}{H a^2}$ und damit gehen
die Einflüsse aus der elastischen Verformung beim eingespannten
gegenüber dem Eingelenkbogen stark zurück. Abb. 16a zeigt die
Verformungsmomente für beide Systeme, bezogen auf die sym-
metrischen Knickwerte ν_s in den Grenzen von $\nu_s = 1$ bis $\nu_s = 8$.
Die ausgezogenen Linien gelten für den eingespannten, die ge-
strichelten dagegen für den Eingelenkbogen. Am rechten Außen-
rand sind die Ursprungsmomente M_0 ($\nu_s = \infty$) d. h., für den un-
elastischen Bogen dargestellt. Wir erschen daraus, daß alle Mo-

mente M mit abnehmender Knicksicherheit anwachsen und bei $\nu_s = 1$ unendlich werden. Die Kämpfermomente beider Systeme wechseln sogar bei geringen Werten von ν_s ihr Vorzeichen, das gleiche gilt auch für das Moment im Viertelpunkt des eingespannten Bogens. Diese Abbildung zeigt klar das ungünstige

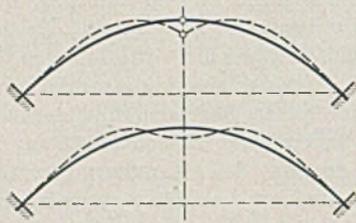


Abb. 15a. Abb. 15b.

Verhalten des Eingelenkbogens infolge der Eigengewichtsverformung gegenüber dem eingespannten Bogen. Noch auffälliger wird dies aber, wenn wir Abb. 16 b betrachten, bei welcher zwecks eines besseren Vergleiches die Verformungsmomente beider Systeme als Funktion der maßgebenden Knicksicherheit $\bar{\nu}$ aufgetragen sind.

Ein ganz ähnliches Bild zeigt sich auch beim Vergleich der Drei- und Zweigelenkbogen. In Abb. 17 a sind die Verformungsmomente beider Systeme jeweils als Funktion der Knicksicherheit ν_s für symmetrisches Knicken dargestellt. Die Linien des Zwei-

Gewölben ohne Scheitelgelenk unbedingt der Vorzug zu geben ist. Der Eingelenkbogen, der sehr oft vorgeschlagen wurde, weil er infolge seiner Weichheit im Scheitel geringere Zwängungsspannungen aus Bogenzusammendrückung, Schwinden und Widerlagerausweichung aufweist, ist nicht zu empfehlen, denn die Verformungstheorie zeigt, daß gerade diese Weichheit im Scheitel ein großer Nachteil ist, und daß sich die aus den obigen Ursachen ergebenden Biegemomente auf ein mehrfaches gegenüber den nach der üblichen Theorie berechneten vergrößern können. Berücksichtigt man dies weiteren noch den Einfluß des Kriechens nach Abschnitt III, dann ergibt sich ein noch ungünstigeres Bild. Die im vorhergehenden besprochenen Verformungsmomente beziehen sich nur auf Eigengewicht, Schwinden und Widerlagerausweichungen. Bezüglich der Verformungen aus Verkehrslast verhält sich der Eingelenkbogen nicht wesentlich schlechter als der eingespannte.

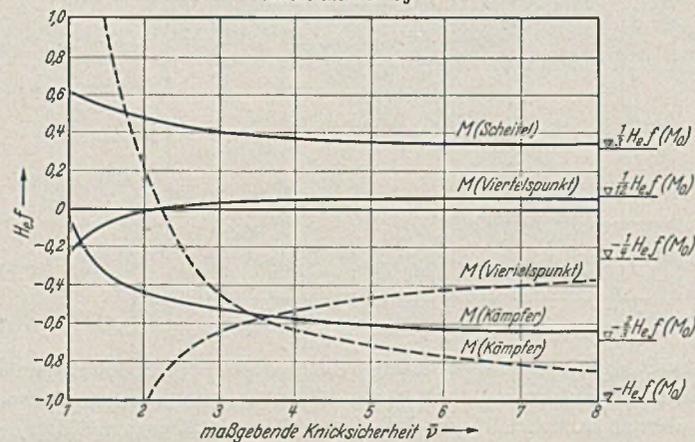
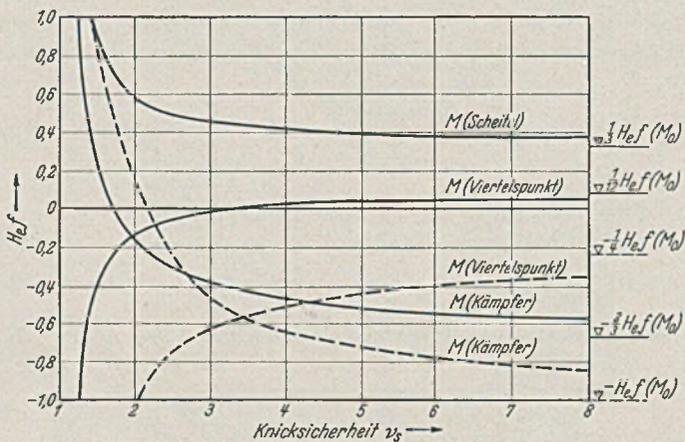


Abb. 16a. Die Verformungsmomente des eingespannten Bogens (ausgezogen) und die des Eingelenkbogens (gestrichelt) als Funktion der Knicksicherheit ν_s für symmetrisches Knicken.

Abb. 16b. Desgleichen, jedoch als Funktion der maßgebenden Knicksicherheit $\bar{\nu}$.

gelenkbogens sind wieder ausgezogen, die für den Dreigelenkbogen gestrichelt. Da beim Dreigelenkbogen kein H_c auftritt, ist als Vergleichsgrundlage M_0 benutzt (im Scheitel des Zweigelenkbogens ist $M_0 = H_c f$, im Viertelpunkt gleich $0,75 H_c f$, beim Dreigelenkbogen im Viertelpunkt $M_0 = H \frac{1}{4} f_0$). Man sieht daraus das viel günstigere Verhalten des Zweigelenkbogens. Die Verformungsmomente des Zweigelenkbogens aus Eigengewicht sind unbedeutend. Noch stärker tritt der Unterschied wieder zutage, wenn wir zum Vergleich beider Systeme nach Abb. 17 b die maßgebende Knicksicherheit $\bar{\nu}$ zugrunde legen.

Wir stellen demnach als wichtigstes Ergebnis fest, daß den

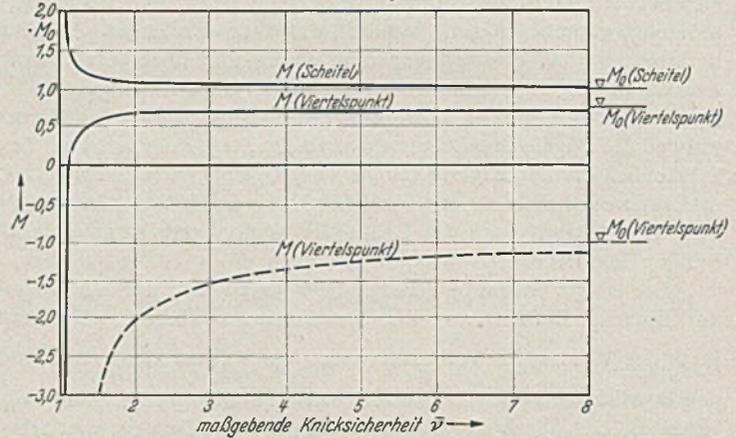
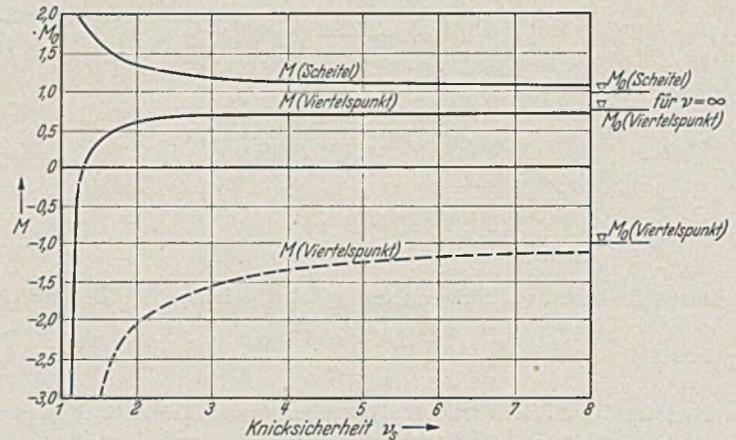


Abb. 17a. Die Verformungsmomente des Zweigelenkbogens (ausgezogen) und die des Dreigelenkbogens (gestrichelt) als Funktion der Knicksicherheit ν_s für symmetrisches Knicken.

Abb. 17b. Desgleichen, jedoch als Funktion der maßgebenden Knicksicherheit $\bar{\nu}$.

Auch der Dreigelenkbogen ist im Vergleich zum Zweigelenkbogen viel ungünstiger daran, er hat aber immerhin den Vorteil, daß wir durch eine Verformung der Bogenachse die ursprünglichen Momente M_0 und damit auch die Momente M aus der Verformung wesentlich vermindern können. Es läßt sich aber ganz allgemein sagen, daß es immer von Vorteil ist, auf Scheitelgelenke zu verzichten und bei nicht allzu flachen Brücken Zweigelenkbogen an Stelle von Dreigelenkbogen auszuführen. Die Untersuchungen des Abschnittes III über die plastischen Verformungen (Kriechen) werden uns zeigen, daß wir auch bei flacheren Brücken noch eingespannte und Zweigelenkbogenbrücken in Massivbauweise ausführen können, bei denen wir bis heute wegen der Zwängungsspannungen dem statisch bestimmten Dreigelenkbogen den Vorzug gegeben haben.

Das im vorstehenden gezeigte Verfahren der schrittweisen Annäherung für die Ermittlung der Verformungsmomente und der Knicksicherheit läßt sich in gleicher Weise auch bei überhöhten Bögen und auch bei solchen mit veränderlichem Trägheitsmoment durchführen, wo die Lösung mittels Differentialgleichung versagt.

Z. B. ergibt sich für eine vom Scheitel nach dem Kämpfer parabolförmig zunehmende Belastung $g = g_0 (1 + \alpha \xi^2)$ ein überhöhter Bogen mit den Ordinaten $z = f [\delta_1 \xi^2 + (\delta - 1) \xi^4]$. Die Berücksichtigung der Überhöhung führt bei der Durchrechnung nur zu höheren Potenzen von ξ , der Rechnungsgang selbst bleibt unverändert. Das gleiche gilt auch für ein veränderliches Trägheitsmoment. Tritt an Stelle des angenommenen Verlaufes der Trägheitsmomente $J_c = J_x \cos \varphi$ z. B. ein Gesetz $J_c = J_x \cos \varphi (1 + \beta \xi^2)$, dann ergibt sich bei den zu integrierenden Funktionen noch ein Multiplikator $(1 + \beta \xi^2)$, durch den der Rechnungsgang nicht geändert wird; es ergeben sich nur höhere Potenzen von ξ .

Das angegebene Verfahren gestattet uns deshalb in einfacher Weise bei jedem beliebigen Bogen die Knicksicherheit und die Verformungsmomente zu ermitteln und in der Form der Gl. (4b) darzustellen.

4. Die Ermittlung der Verformungsmomente und der Knicksicherheit bei symmetrischer Belastung mit Hilfe der Differentialgleichungen.

In der Zeitschrift Stahlbau 4 (1931) hat Kasarnowsky für den Drei- und Zweigelenk Stützlinienbogen, der nach der Parabel geformt ist, eine Ableitung für die Biegemomente aus der elastischen Verformung gegeben. Diese Arbeit soll dadurch ergänzt werden, daß für die Biegemomente aus der Verformung geschlossene Gleichungen abgeleitet und zugleich auch der eingespante und der Eingelenkbogen mit einbezogen werden. Zugleich werde ich zeigen, daß es mathematisch keine Schwierigkeiten bereitet, für überhöhte Gewölbe und auch für solche, die nicht nach der Stützlinie geformt sind, die Differentialgleichung zu lösen und fertige Gleichungen für die Verformungsmomente zu gewinnen. Allerdings ergeben sich in diesem verallgemeinerten Fall sehr umfangreiche transzendente Funktionen. Die Lösung gelingt aber immer nur unter der bisherigen Voraussetzung einer Verteilung der Trägheitsmomente nach $J_c = J_x \cos \varphi$, d. h. $\frac{ds}{J_c} = \frac{dx}{J_x}$, wodurch die Verbiegung des Bogens auf die eines geraden Balkens mit konstantem Trägheitsmoment zurückgeführt wird.

a) Die allgemeine Lösung für den beliebig geformten Bogen. Zwischen den Verschiebungen u, v eines Bogenelementes ds , das infolge der Bogenzusammendrückung die Länge $ds (1 + \epsilon)$ annimmt, und der Winkeldrehung ψ bestehen nach Abb 10 folgende Beziehungen

$$(22) \quad dv = -\epsilon dz + \psi dx, \quad du = -\epsilon dx + \psi dz.$$

Der Einfluß der Normalkraft $(\epsilon = \frac{N}{E F})$ auf die Verbiegung ist außerordentlich gering und kann deshalb in der üblichen Weise vernachlässigt werden. Eine Nachrechnung zeigt, daß durch diese Vernachlässigung die Verformungsmomente des Ein- und Zweigelenkbogens überhaupt nicht beeinflusst werden, und bei Gewölben mit Kämpfereinspannung ergeben sich nur unwesentliche Unterschiede. Die Knickwerte selbst werden in keinem Falle hierdurch berührt. Da es aber bei dieser Vernachlässigung möglich ist, die Darlegungen zu verallgemeinern, wollen wir den Einfluß der Normalkräfte auf die Verbiegung unberücksichtigt lassen. Durch Differentiation erhalten wir $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\psi}{dx}$. Zwischen der Drehung des Bogenelementes und dem Biegemoment besteht die Beziehung

$$\frac{d\psi}{ds} = -\frac{M_x}{E J_x} \quad \text{oder} \quad \frac{d\psi}{dx} = -\frac{M_x}{E J_x \cos \varphi}.$$

Wir setzen

$$\frac{1}{J_x} = \frac{1}{J_c} f_x \cos \varphi.$$

Demnach $\frac{d\psi}{dx} = -\frac{M_x}{E J_c} f_x$ und $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{M_x}{E J_c} f_x = 0$.

Das Biegemoment an einer beliebigen Stelle des Bogens ist nach Abb. 18 gegeben durch:

$$(22a) \quad M_x = \mathfrak{M}_x + M^c - H(z - v),$$

wobei \mathfrak{M}_x das statisch bestimmte Moment des am Scheitel durchschnittenen Bogens, H der tatsächliche bei Berücksichtigung der Verformung auftretende Horizontalschub und M^c das unbekannte Scheitelmoment ist. Bei konstantem Eigengewicht ist $\mathfrak{M} = g_0 \frac{x^2}{2}$.

Für den Fall, daß das Eigengewicht, wie bei fast allen Massivbrücken vom Scheitel nach dem Kämpfer zunimmt, können wir \mathfrak{M} in der Form $\mathfrak{M}_x = g_0 \frac{x^2}{2} \varphi_{1x}$ darstellen, wobei φ_{1x}

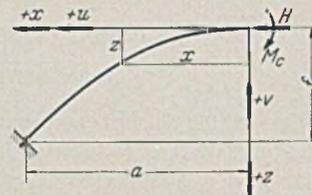


Abb. 18.

durch ein Polynom von x gegeben sein soll, z. B. $\varphi_{1x} = (1 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \dots)$. Wenn der Bogen nach der Seillinie geformt wird, dann ergeben sich die Ordinaten zu $z = f \frac{x^2}{a^2} \varphi_{1x}$. Wir wollen aber von dem allgemeineren Fall ausgehen, daß es sich um kein Stützlinien, sondern um ein beliebig geformtes Gewölbe handelt. In diesem Falle können wir z in der Form $z = f \frac{x^2}{a^2} \varphi_{2x}$ annehmen, wobei φ_{2x} ebenfalls ein Polynom von x ist. Mit Rücksicht auf die Symmetrie können die Polynome $\varphi_{1x}, \varphi_{2x}$ nur gerade Potenzen von x enthalten. Demnach

$$M_x = g_0 \frac{x^2}{2} \varphi_{1x} + M^c - H v - H f \frac{x^2}{a^2} \varphi_{2x}$$

und

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{H}{E J_c} f_x \left[\frac{M^c}{H} + g_0 \frac{x^2}{2H} \varphi_{1x} - f \frac{x^2}{a^2} \varphi_{2x} \right] + \frac{Hv}{E J_c} f_x.$$

Wir setzen in der üblichen Weise

$$(22b) \quad \frac{H}{E J_c} = \frac{1}{k^2} \quad \text{und} \quad \frac{a^2}{k^2} = \lambda^2,$$

dann lautet die Differentialgleichung

$$(22c) \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{v}{k^2} f_x + \frac{F_x}{k^2} f_x = 0,$$

wenn wir für den obigen Klammerausdruck zur Abkürzung F_x setzen, wobei F_x ebenfalls ein Polynom von x ist. Das ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit veränderlichem Koeffizienten und einem Störungsglied. Die homogene Gleichung hat den Typus der hypergeometrischen Differentialgleichung und führt zu Rechnungen mit komplexen Größen, wodurch eine Lösung bei beliebigem Trägheitsmoment praktisch unmöglich wird. Für die praktische Durchrechnung mittels der Differentialgleichung kommt deshalb nur der Sonderfall des Bogens mit $J_c = J_x \cos \varphi$ (d. h. $f_x = 1$) in Frage. Damit lautet die Differentialgleichung

$$(23) \quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{v}{k^2} + \frac{F_x}{k^2} = 0,$$

wobei F_x ein beliebiges aus den Funktionen φ_{1x} und φ_{2x} zusammengesetztes Polynom von x ist. Die Lösung lautet

$$(23a) \quad v = A \sin \frac{x}{k} + B \cos \frac{x}{k} - F_x + k^2 F_x'' - k^4 F_x^{IV} + k^6 F_x^{VI} \dots,$$

wie man sich leicht durch Einsetzen überzeugen kann. Daraus ergibt sich die Winkeldrehung zu:

$$(23b) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{A}{k} \cos \frac{x}{k} - \frac{B}{k} \sin \frac{x}{k} - F_x' + k^2 F_x''' - k^4 F_x^{V} + \dots$$

Das Biegemoment M_x folgt aus

$$M_x = -E J_c \frac{d^2v}{dx^2} = E J_c \left[\frac{A}{k^2} \sin \frac{x}{k} + \frac{B}{k^2} \cos \frac{x}{k} + F_x'' - k^2 F_x^{IV} + k^4 F_x^{VI} \dots \right]$$

Nun ist nach Gl. (22b) $\frac{E J_c}{k^2} = H$, folglich

$$(23c) \quad \left\{ \begin{aligned} M_x &= H \left[A \sin \frac{x}{k} + B \cos \frac{x}{k} + k^2 F_x'' - k^4 F_x^{IV} \right. \\ &\quad \left. + k^6 F_x^{VI} - \dots \right] = H \cdot (v + F_x). \end{aligned} \right.$$

Hiermit können wir die Durchbiegung v auch durch das Moment ausdrücken

$$(23d) \quad v = \frac{M_x}{H} - F_x.$$

Die Ermittlung des unbekanntem Horizontalschubes H folgt aus der Bedingung, daß der Scheitel keine Horizontalverschiebung ausführt. Aus der zweiten Gl. (22) ergibt sich $du = -\varepsilon dx + \psi dz$ und aus der ersten wieder unter der Voraussetzung, daß der Einfluß der Bogenzusammendrücke ε auf die Verbiegung vernachlässigt wird: $\psi = \frac{dv}{dx} = v'$, $du = -\varepsilon dx + v'$, $dz = -\varepsilon dx + v' z' dx$

$$(23e) \quad u = -\int_0^a \varepsilon dx + \int_0^a v' z' dx = 0.$$

Aus diesen Darlegungen erkennen wir, daß es keine Schwierigkeit bereitet, die Verformungsmomente und die Knicksicherheit von überhöhten Bögen, auch wenn sie nicht nach der Stützlinie geformt sind mittels der Differentialgleichung zu lösen, in gleicher Weise, wie wir dies im Rahmen der gesteckten Ziele für die nach der Stützlinie geformten Parabelbögen mit $J_c = J_x \cos \varphi$ nunmehr durchführen werden.

b) Die nach der Seillinie geformten Parabelbögen. Für diesen Sonderfall ist

$$(24) \quad F_x = \frac{\mathfrak{M}_x}{H} + \frac{M^c}{H} - z \quad [\text{s. Gl. 22a}].$$

Nun ist beim Stützlinienbogen $\mathfrak{M}_x = H_0 z$, wobei H_0 der Horizontalschub des statischbestimmten Bogens ist. $\frac{\mathfrak{M}_x}{H} - z = z \frac{H_0 - H}{H} = z \mu$.

μ gibt also die relative Verminderung des Horizontalschubes des statisch unbestimmten gegenüber dem statisch bestimmten System an. Bei dem Parabelbogen ist $z = f \frac{x^2}{a^2}$, $z' = \frac{2f}{a^2} x$, $z'' = \frac{2f}{a^2}$ und mit

$$F_x = \mu z + \frac{M^c}{H}, \quad F_x' = \mu \frac{2f}{a^2} x, \quad F_x'' = \mu \frac{2f}{a^2}, \quad F_x''' = F_x^{IV} = 0$$

lautet die Lösung für den Parabelbogen $\left(\frac{x}{a} = \xi, \frac{a}{k} = \lambda\right)$

$$(24a) \quad v = A \sin \frac{x}{k} + B \cos \frac{x}{k} - \mu z - \frac{M^c}{H} + \mu \frac{2f}{\lambda^2} = A \sin \lambda \xi + B \cos \lambda \xi - \mu z - \frac{M^c}{H} + \mu \frac{2f}{\lambda^2}$$

$$(24b) \quad v' = \frac{A}{k} \cos \frac{x}{k} - \frac{B}{k} \sin \frac{x}{k} - \mu \frac{2f}{a^2} x = \frac{A \lambda}{a} \cos \lambda \xi - \frac{B \lambda}{a} \sin \lambda \xi - \mu \xi \frac{2f}{a}$$

$$(24c) \quad M_x = H \left(A \sin \frac{x}{k} + B \cos \frac{x}{k} + \mu \frac{2f}{\lambda^2} \right) = H \left[A \sin \lambda \xi + B \cos \lambda \xi + \mu \frac{2f}{\lambda^2} \right]$$

$$(24d) \quad v = \frac{M_x}{H} - F_x = \frac{M_x}{H} - \frac{M^c}{H} - \mu z$$

$$u = -\int_0^a \varepsilon dx + \int_0^a v' z' dx = 0, \quad z' = \frac{2f}{a^2} x,$$

$$\varepsilon = \frac{N}{E F} = \frac{H}{E F_c}, \quad \text{da } F_c = F_x \cos \varphi$$

$$u = -\varepsilon a + \frac{2f}{a^2} \int_0^a \left[A \frac{x}{k} \cos \frac{x}{k} - B \frac{x}{k} \sin \frac{x}{k} - \mu \frac{2f}{a^2} x^2 \right] dx = 0$$

$$(24e) \quad \varepsilon a = \frac{2f}{a} \left[\frac{A}{\lambda} (\lambda \sin \lambda + \cos \lambda - 1) + \frac{B}{\lambda} (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda) \right] - \frac{4}{3} \mu \frac{f^2}{a}.$$

Wir wollen nun im folgenden die Verformungsmomente in geschlos-

sener Form als Funktionen der ursprünglichen Momente darstellen. Aus der Bogenzusammendrücke ergeben sich für die statisch unbestimmten Gewölbe, wie bekannt, nachstehende Abminderungen des Horizontalschubes (H_c).

Für den Zweigelenkbogen

$$(25a) \quad H_c = -\frac{\varepsilon l}{8} \frac{1}{f^2} \kappa_2 - \frac{15}{8} \varepsilon \frac{E J_c}{f^2} \kappa_2, \quad \varepsilon = \frac{H}{E F_c}$$

$$(25b) \quad \text{für den Eingelenkbogen} \quad H_c = -5 \varepsilon \frac{E J_c}{f^2} \kappa_1$$

$$(25c) \quad \text{für den eingespannten Bogen} \quad H_c = -\frac{45}{4} \varepsilon \frac{E J_c}{f^2} \kappa_0.$$

Da wir den Buchstaben ν schon für die Knicksicherheit benutzt haben, wird für die Abminderungskoeffizienten bei den verschiedenen Bogenarten die Bezeichnung $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$ eingeführt. Die ursprünglichen Momente sind demnach gegeben durch $M_0 = H_c z$. Bei dem Dreigelenkbogen dagegen ergibt sich keine Verminderung des Gewölbeschubes, die ursprünglichen Momente berechnen sich aus der Scheitelsenkung

$$\Delta f_0 = \varepsilon a \frac{a}{f} = \frac{\varepsilon a^2}{f}.$$

Hieraus wird für den Viertelpunkt das ursprüngliche Moment

$$(25d) \quad M_0^v = -H \frac{\Delta f_0}{4} = -H \frac{\varepsilon a^2}{4 f}.$$

a) Der Dreigelenkbogen. Die Konstanten erhalten wir aus den Randbedingungen

$$\text{für } x = 0 \text{ ist } M_x = 0, \text{ hieraus } B = -\frac{2f}{\lambda^2} \mu;$$

$$\text{für } x = a \text{ ist } M_x = 0, \text{ hieraus } A \sin \lambda + B \cos \lambda + \frac{2f}{\lambda^2} \mu,$$

$$A = B \frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda}.$$

Das Biegemoment ergibt sich aus der Gl. (24c)

$$\frac{M_x}{H} = \mu \frac{2f}{\lambda^2} \left[1 - \frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} \sin \lambda \xi - \cos \lambda \xi \right].$$

Die Größe von $\mu = \frac{H_0 - H}{H}$ erhalten wir aus Gl. (24e)

$$\varepsilon a = \frac{4 f^2}{a} \frac{\mu}{\lambda^3} \left[-\frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda} (\lambda \sin \lambda + \cos \lambda - 1) - (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda) - \frac{\lambda^3}{3} \right],$$

hieraus

$$\mu = -\varepsilon \frac{3 a^2}{4 f^2} \frac{\lambda^3 \sin \lambda}{6 \cdot (\cos \lambda - 1) + 3 \sin \lambda + \lambda^3 \sin \lambda},$$

nach Gl. (25d) $\varepsilon = -\frac{M_0^v}{H} \frac{4 f}{a^2}.$

Wir setzen diesen Wert in die Gleichung von M_x ein und erhalten damit das Verformungsmoment an beliebiger Stelle als Funktion des ursprünglichen Momentes M_0^v im Viertelpunkt:

$$(26) \quad M_x = M_0^v \delta \lambda \frac{\sin \lambda \cdot (1 - \cos \lambda \xi) - \sin \lambda \xi (1 - \cos \lambda)}{\lambda \sin \lambda (3 + \lambda^2) + 6 (\cos \lambda - 1)}$$

und das Maximalmoment am Viertelpunkt selbst ($\xi = \frac{1}{2}$)

$$(26a) \quad M_x = M_0^v \delta \lambda \frac{2 \sin \lambda/2 - \sin \lambda}{N}.$$

Der Bogen knickt für $N = [\lambda \sin \lambda (3 + \lambda^2) + 6 (\cos \lambda - 1)] = 0$, weil dann die Momente unendlich groß werden; hieraus

$$\lambda = 2,727, \quad \lambda^2 = \frac{H_K a^2}{E J_c} = 7,437;$$

demnach beträgt die Knickkraft

$$(26b) \quad H_K = 7,437 \frac{E J_c}{a^2},$$

die Sicherheit für symmetrisches Knicken $\nu_s = 7,437 \frac{E J_c}{H a^2}.$

Die Knicklänge ergibt sich zu

$$(26c) \quad l_K = \frac{\pi a}{\lambda} = 1,152 a.$$

β) Der Zweigelenkbogen. Für $x = 0$ ist $v' = 0$, demnach $A = 0$; für $x = a$ ist $M_x = 0$,

demnach $B = -\frac{1}{\cos \lambda} \frac{2f}{\lambda^2} \mu$. Aus Gl. (24c) erhalten wir

$$\frac{M_x}{H} = \mu \frac{2f}{\lambda^2} \left[1 - \frac{\cos \lambda \xi}{\cos \lambda} \right],$$

die Größe von μ folgt aus Gl. (24c)

$$\begin{aligned} \epsilon a &= \frac{4f^2}{a} \mu \left[-\frac{\lambda \cos \lambda - \sin \lambda}{\lambda^3 \cos \lambda} - \frac{1}{3} \right] \\ &= \mu \frac{4f^2}{a} \frac{3 \sin \lambda - 3 \lambda \cos \lambda - \lambda^3 \cos \lambda}{3 \lambda^3 \cos \lambda}, \end{aligned}$$

hieraus $\mu = \epsilon \frac{3a^2}{4f^2} \frac{\lambda^3 \cdot \cos \lambda}{3 \sin \lambda - 3 \lambda \cos \lambda - \lambda^3 \cos \lambda}$.

Nun ist nach Gl. (25a)

$$\epsilon = -\frac{8 H_e f^2}{15 E J_c K_2},$$

demnach

$$\mu = -\frac{2 H_e a^2}{5 E J_c} \frac{\lambda^3 \cos \lambda}{3 \sin \lambda - 3 \lambda \cos \lambda - \lambda^3 \cos \lambda} \frac{1}{\lambda^2}.$$

Diesen Wert setzen wir in die Gleichung für M_x ein

$$\frac{M_x}{H} = \frac{H_e a^2}{E J_c} \frac{4}{5} \frac{H_e f}{\lambda^2} \frac{\lambda^3 (\cos \lambda \xi - \cos \lambda)}{3 \sin \lambda - 3 \lambda \cos \lambda - \lambda^3 \cos \lambda} \frac{1}{\lambda^2},$$

nun ist $\frac{H_e a^2}{E J_c} = \lambda^2$ und damit

$$(27) \quad \frac{M_x}{H} = \frac{4}{5} \frac{H_e f}{K_2} \frac{\lambda^3 (\cos \lambda \xi - \cos \lambda)}{3 \sin \lambda - 3 \lambda \cos \lambda - \lambda^3 \cos \lambda} \frac{1}{\lambda^2}.$$

Der Bogen knickt, wenn $[3 \sin \lambda - 3 \lambda \cos \lambda - \lambda^3 \cos \lambda] = 0$ wird,

hieraus $\lambda = 4,6868$, $\lambda^2 = \frac{H_e K a^2}{E J_c} = 21,96$, folglich

$$(27a) \quad H_K = 21,96 \frac{E J_c}{a^2}$$

Sicherheit für symmetrisches Knicken $v_s = 21,96 \frac{E J_c}{H a^2}$.

Die Knicklänge beträgt

$$(27b) \quad l_K = \frac{\pi a}{\lambda} = 0,67 a.$$

γ) Der Eingelenkbogen. Für $x = 0$ ist $M_x = 0$,

hieraus $B = -\frac{2f}{\lambda^2} \mu$, für $x = a$ ist $v' = 0$ hieraus

$$\frac{A}{k} \cos \lambda - \frac{B}{k} \sin \lambda = \mu \frac{2f}{a}, \quad A = \frac{2f}{\lambda^2} \mu \frac{\lambda - \sin \lambda}{\cos \lambda}.$$

Aus der Gl. (24c) erhalten wir

$$\frac{M_x}{H} = \mu \frac{2f}{\lambda^2} \left[1 + \frac{\lambda - \sin \lambda}{\cos \lambda} \sin \lambda \xi - \cos \lambda \xi \right],$$

der Wert von μ folgt aus Gl. (24e)

$$\begin{aligned} \epsilon a &= \frac{4f^2 \mu}{a \lambda^3} \left[\frac{\lambda - \sin \lambda}{\cos \lambda} (\lambda \sin \lambda + \cos \lambda - 1) - (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda) - \frac{\lambda^3}{3} \right] \\ &= \frac{4f^2}{3a} \frac{\mu}{\lambda^3 \cos \lambda} [3 \sin \lambda (1 + \lambda^2) + 3 \lambda \cos \lambda - 6 \lambda - \lambda^3 \cos \lambda], \end{aligned}$$

hieraus

$$\mu = \epsilon \frac{3a^2}{4f^2} \frac{\lambda^3 \cdot \cos \lambda}{3 \sin \lambda \cdot (1 + \lambda^2) + 3 \lambda \cos \lambda - 6 \lambda - \lambda^3 \cos \lambda}$$

nach Gl. (25b) ist

$$\begin{aligned} \epsilon &= -\frac{1}{5} \frac{H_e f^2}{E J_c} \frac{1}{\lambda^2}, \\ \mu &= -\frac{H_e a^2}{\lambda^2 E J_c} \frac{3 \lambda^3 \cos \lambda}{20 N}, \end{aligned}$$

und

$$\frac{M_x}{H} = \frac{H_e a^2}{E J_c} \frac{3}{10} \frac{H_e f}{\lambda^2 \lambda^2} \frac{\lambda^3 \cos \lambda + (\lambda - \sin \lambda) \sin \lambda \xi - \cos \lambda \cos \lambda \xi}{N}$$

$$(28) \quad \frac{M_x}{H} = -\frac{3}{10} \frac{H_e f}{\lambda^2} \frac{\cos \lambda + (\lambda - \sin \lambda) \sin \lambda \xi - \cos \lambda \cos \lambda \xi}{3 \sin \lambda \cdot (1 + \lambda^2) + 3 \lambda \cos \lambda - 6 \lambda - \lambda^3 \cos \lambda}.$$

Daraus folgt das Spannungsmoment am Kämpfer für $\xi = 1$

$$(28a) \quad M_{(x=a)} = -\frac{3}{10} \frac{H_e f}{\lambda^2} \frac{3 \sin \lambda + \cos \lambda - 1}{N},$$

der Bogen knickt für

$$3 \sin \lambda (1 + \lambda^2) + 3 \lambda \cos \lambda - 6 \lambda - \lambda^3 \cos \lambda = 0,$$

hieraus

$$\lambda = 3,314, \quad \lambda^2 = \frac{H_e K a^2}{E J_c} = 10,983,$$

folglich

$$(28b) \quad H_K = 10,983 \frac{E J_c}{H a^2}$$

Sicherheit für symmetrisches Knicken $v_s = 10,983 \frac{E J_c}{H a^2}$. Die Knicklänge beträgt

$$(28c) \quad l_K = \frac{\pi a}{\lambda} = 0,948 a.$$

δ) Der eingespannte Bogen. Für $x = 0$ ist $v' = 0$,

demnach $A = 0$, für $x = a$ ist $v' = 0$ demnach $\frac{B}{k} \sin \lambda = -\mu \frac{2f}{a}$,

$B = -\mu \frac{2f}{\lambda \sin \lambda}$; aus Gl. (24c) erhalten wir $\frac{M_x}{H} = \mu \frac{2f}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda}{\sin \lambda} \cos \lambda \xi \right)$

der Wert von μ folgt aus Gl. (24e)

$$\begin{aligned} \epsilon a &= -\frac{4f^2}{a} \frac{\mu}{\lambda^2 \sin \lambda} \left[(\lambda \cos \lambda - \sin \lambda) + \frac{\lambda^3}{3} \sin \lambda \right] \\ &= -\frac{4f^2}{3a} \frac{\mu}{\lambda^2 \sin \lambda} [3 \lambda \cos \lambda - 3 \sin \lambda + \lambda^2 \sin \lambda] \end{aligned}$$

hieraus

$$\mu = -\epsilon \frac{3a^2}{4f^2} \frac{\lambda^2 \sin \lambda}{3 \lambda \cos \lambda + \lambda^2 \sin \lambda - 3 \sin \lambda}.$$

Nach Gl. (25a)

$$\epsilon = -\frac{4}{45} \frac{H_e f^2}{E J_c} \frac{1}{\lambda^2}$$

$\mu = \frac{2 H_e a^2}{15 E J_c} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\lambda^2 \sin \lambda}{3 \lambda \cos \lambda + \lambda^2 \sin \lambda - 3 \sin \lambda}$ damit ergibt sich für M_x

$$\begin{aligned} \frac{M_x}{H} &= \frac{2 H_e a^2 H_e f}{15 E J_c \lambda^2} \frac{\sin \lambda - \lambda \cos \lambda \xi}{3 \lambda \cos \lambda + \lambda^2 \sin \lambda - 3 \sin \lambda} \frac{H a^2}{E J_c} = \lambda^2 \\ (29) \quad \frac{M_x}{H} &= \frac{2 H_e f}{15 \lambda^2} \frac{\lambda^2 \cdot (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda \xi)}{3 \lambda \cos \lambda + \lambda^2 \sin \lambda - 3 \sin \lambda}. \end{aligned}$$

Der Bogen knickt für $3 \lambda \cos \lambda + \lambda^2 \sin \lambda - 3 \sin \lambda = 0$, hieraus

$\lambda = 5,763$, $\lambda^2 = \frac{H_e K a^2}{E J_c} = 33,212$, folglich

$$(29b) \quad H_K = 33,212 \frac{E J_c}{a^2}$$

Sicherheit für symmetrisches Knicken $v_s = 33,212 \frac{E J_c}{H a^2}$, die

Knicklänge beträgt $l_K = \frac{\pi a}{\lambda} = 0,545 a$.

Die im vorhergehenden Abschnitt durch schrittweise Annäherung gefundenen Werte stimmen sehr gut mit der strengen Lösung aus der Differentialgleichung überein. Die Unterschiede in den Werten für die Knicksicherheit und der Verformungsmomente betragen im Höchstfall wenige Prozent. Die Überprüfung der Werte für die Verformungsmomente erfolgte durch Zahlenrechnung, ich habe aber auch den Vergleich dadurch geschaffen, daß ich die obigen geschlossenen transzendenten Gleichungen der Verformungsmomente in Reihen von λ und dann weiterhin von v entwickelt habe. So ergaben sich z. B. für den Scheitel des eingespannten Bogens nachstehende Reihen:

mittels Annäherung

$$M = M_0 \left[1 + \frac{0,708}{v_s} + \frac{0,805}{v_s^2} + \frac{0,854}{v_s^3} + \frac{0,854}{v_s^4} + \dots \right] \text{ wobei } v_s = 33,05$$

mittels Differentialgleichung

$$M = M_0 \left[1 + \frac{0,712}{v_s} + \frac{0,813}{v_s^2} + \frac{0,813}{v_s^3} + \frac{0,866}{v_s^4} + \dots \right] \text{ wobei } v_s = 33,21.$$

Berücksichtigt man diesen Unterschied, dann ist zwischen den

beiden Reihen im Rahmen der Rechengenauigkeit überhaupt kein Unterschied vorhanden. Damit ist zugleich auch gezeigt, daß die früher erwähnte Ungenauigkeit, die in der Vernachlässigung von v gegenüber der Ordinate z bei $C_3(z + v)$ liegt, ohne jede Bedeutung ist.

Die genauen Werte der Horizontalkraft H können wir aus den Gleichungen für μ ermitteln — $\mu = \frac{H_0 - H}{H} f(\lambda)$ — und dann aus der Gl. (23d) auch die genaue Durchbiegung. Dies ist aber für die Ermittlung der Verformungsmomente aus $M = M_0 \frac{r + \delta}{r - 1}$ gar nicht notwendig, weil diese Gleichung bez. kleiner Änderungen von H sehr unempfindlich ist.

5. Zusammenstellung der Ergebnisse und Rechenbeispiele.

a) Die Knicksicherheit der Parabelbögen.

Wie wir aus den bisherigen Untersuchungen gesehen haben, ist das Verhalten der Bögen mit und ohne Scheitelgelenk grundverschieden. Bei den Gewölben mit Scheitelgelenk ist die symmetrische Knickung mit Dehnung maßgebend, bei den Bögen ohne Scheitelgelenk dagegen die antimetrische dehnungslose Knickung. Des weiteren ist auffallend, daß bei den Bögen mit Scheitelgelenk die Knicklasten ganz wesentlich niedriger sind als bei denen ohne Scheitelgelenk. Die nachstehende Zahlentafel gibt hierüber Aufschluß. Die Sicherheit für symmetrisches Knicken ist wieder mit v_s , die für antimetrisches Knicken mit v_a und die maßgebende mit v gekennzeichnet. In dieser Zahlentafel sind auch die entsprechenden Knicklängen angegeben.

| | | | Drei- gelenk- bogen | Ein- gelenk- bogen | Zwei- gelenk- bogen | Einge- spannter Bogen | | |
|------|------------|-----------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|-----------------------------|-------|-----------------------|
| (30) | Symmetr. | Knicksicherheit | $v_s =$ | 7,437 | 10,983 | 21,96 | 33,21 | $\frac{E J_c}{H a^2}$ |
| | Knickung | Knicklänge | $l_K =$ | 1,152 | 0,948 | 0,67 | 0,545 | a |
| | Antimetr. | Knicksicherheit | $v_a =$ | 9,87 | 20,19 | 9,87 | 20,19 | $\frac{E J_c}{H a^2}$ |
| | Knickung | Knicklänge | $l_K =$ | 1,000 | 0,699 | 1,000 | 0,699 | a |
| | Maßgebende | Knicksicherheit | $\bar{v} =$ | 7,437 | 10,983 | 9,87 | 20,19 | $\frac{E J_c}{H a^2}$ |
| | Knickung | Knicklänge | $\bar{l}_K =$ | 1,152 | 0,948 | 1,000 | 0,699 | a |

Wir wollen die Zahlentafel noch durch die übrigen in Frage kommenden Systeme ergänzen, nämlich den versteiften Dreigelenk- und Zweigelenkbogen (Abb. 19) und den Zweigelenkbogen mit angehängter Fahrbahn (Abb. 20). Auf Grund der bisherigen Überlegungen können wir für diese Bogensysteme die Knickwerte ohne weiteres angeben. Für den Stabbogen setzen wir wieder einen Verlauf des Trägheitsmomentes $I_c = I_x \cos \varphi$ voraus, der sehr gut der vom Scheitel bis zum Kämpfer zunehmenden Gewölbekraft entspricht. Das Trägheitsmoment des Balkens I_b sei konstant. Wir müssen nun bei den Verbiegungen für den Bogen und für den Balken bei Massivbrücken mit verschiedenen Werten des Elastizitätsmoduls rechnen, denn der Bogen hat infolge der Gewölbekraft Druckvorspannungen und demnach ist sein Elastizitätsmodul, den wir mit E_c bezeichnen wesentlich größer als der des auf reine Biegung beanspruchten Balkens (E_b). Denn in dem nur auf Biegung beanspruchten Balken ergeben sich sehr leicht Haarrisse.

Wir lassen nun auf den versteiften Stabbogen ein erregendes Moment von symmetrischer oder antimetrischer Form einwirken; dann leistet sowohl der Stabbogen als auch der Versteifungsbalken der Verbiegung Widerstand. Die Gesamtsteifigkeit ist gegeben durch $E_b I_b + E_c I_c$. Dadurch, daß wir dem Stabbogen ein Trägheitsmoment mit dem Verlauf $I_c = I_x \cos \varphi$ (bzw. $\frac{ds}{J_x} = \frac{dx}{J_c}$) gegeben haben, geht die Verbiegung des Balkens und des Stabbogens gleichförmig vor sich; die Biegelinien sind genau die gleichen. Durch dieses ursprüngliche Moment M_0 werden durch die Verformung

wieder Zusatzmomente M_1, M_2 usw. genau wie bei den steifen Dreigelenk- und Zweigelenkbogen erzeugt. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Biegesteifigkeit der steifen Bögen $E_c J_c$ durch die zusammengesetzte Biegesteifigkeit $E_b I_b + E_c I_c$ ersetzt wird. Infolgedessen gelten für diese versteiften Stabbögen die Knickwerte der steifen Drei- und Zweigelenkbogen, nur ist $E I_c$ durch $E_b I_b + E_c I_c$ zu ersetzen. Die maßgebenden Werte sind nochmals in einer Zahlentafel 31 zusammengestellt.

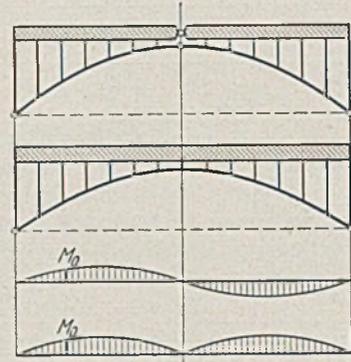


Abb. 19a.

Abb. 19b.

Abb. 19c.

Wir betrachten nun den Zweigelenkbogen mit Zugband (Abb. 20). Wenn wir diesen Bogen durch ein antimetrisches oder auch symmetrisches Moment M_0 erregen, dann ergeben sich aus der Verformung keine zusätzlichen Momente, weil die ursprünglichen durch das Moment M_0 bedingten Verformungen sich nicht weiter vergrößern können. Zwar hat die Druckkraft das Bestreben, den



Abb. 20.

Bogen weiter zu verbiegen, aber die Zugkraft des Zugbandes wirkt dem entgegen. Da das Zugband durch die Hängestangen mit dem Bogen verbunden ist, erleiden Bogen und Zugband die gleichen Verbiegungen. Aus der Abb. 20 ist ohne weiteres zu erkennen, daß bei der durch M_0 bedingten Verformung Bogen und Zugband gleich große, aber entgegengesetzte Wirkungen ausüben, die Rückhaltekraft des Zugbandes hebt die verformende Wirkung der Bogenkraft auf. Demnach erübrigt sich eine Berechnung dieses Bogensystems auf Knicken, bzw. für die Knickung ist nur der geringe Abstand der einzelnen Hängestangen maßgebend. Unsere Gl. $M = M_0 \frac{r + \delta}{r - 1}$ gibt dies sehr schön wieder. Die zusätzlichen Momente aus der Verformung werden zu null, d. h., $M = M_0$, wenn die Knicksicherheit unendlich wird.

Diese Tatsache ist von den Hängebrücken mit aufgehobenem Horizontalschub schon längst bekannt, der auf Druck beanspruchte Versteifungsbalken ist nur auf die Länge des Abstandes zweier Hängestangen auf Knicksicherheit zu berechnen. Das gleiche gilt auch für alle Spreng- und Hängewerke mit aufgehobenem Horizontalschub, d. h. für alle Systeme, die an die Auflager nur senkrechte Kräfte abgeben.

Um Irrtümer auszuschließen sei noch ergänzend bemerkt, daß dies natürlich nur für das Knicken in der Ebene des Tragsystemes gilt, senkrecht zu den Tragwandebenen sind diese Systeme analog den Druckgurten von offenen Brücken selbstverständlich auf Knicken zu berechnen.

| | | Versteifte Drei- gelenk- bogen | Versteifte Zwei- gelenk- bogen | |
|------|-------------------------------|---|---|-----------------------------------|
| (31) | Symmetr. Knicksicherheit | $\nu_s = 7,437$ | 21,96 | $\frac{E_c J_c + E_b J_b}{H a^2}$ |
| | Knickung Knicklänge | $l_K = 1,152$ | 0,67 | |
| | Antimetr. Knicksicherheit | $\nu_a = 9,87$ | 9,87 | $\frac{E_c J_c + E_b J_b}{a^2}$ |
| | Knickung Knicklänge | $l_K = 1,00$ | 1,00 | |
| | Maßgebende Knicksicherheit | $\bar{\nu} = 7,437$ | 9,87 | $\frac{E_c J_c + E_b J_b}{a^2}$ |
| | Knickung Knicklänge | $\bar{l}_K = 1,152$ | 1,00 | |

Zweigelenkbogenbrücken mit Zugbändern, desgl. sämtliche Hänge- und Sprengwerke mit aufgehobenem Horizontalschub sind nur für den Abstand zweier benachbarter Hängestangen auf Knickung zu berechnen.

Durch die obigen Gleichungen für die versteiften Zwei- und Dreigelenkbogenbrücken sollen zugleich die von R. M a y e r⁴ in seinem Buch „Knicksicherheit“ angegebenen viel zu geringen Werte der Knicksicherheit dieser Systeme berichtigt werden.

Überschreitet bei Stahlbrücken die sich aus der ν -fachen Gebrauchslast errechnete Knickspannung die Proportionalitätsgrenze, dann geht das Knicken im plastischen Bereich vor sich und wir würden aus den obigen Gleichungen viel zu günstige Werte für die Knicksicherheit errechnen. In diesem Fall gehen wir von den in den Zahlentafeln angegebenen freien Knicklängen l_K aus und errechnen für die den plastischen Bereich zulässigen Druckkräfte nach der Tetmayerschen Gleichung für Stahl

$$(32) \quad H_K = \left[3,21 - 0,0116 \left(\frac{l_K}{i} \right) \right] F$$

wobei $\left(\frac{l_K}{i} \right)$ das Schlankheitsverhältnis, bzw. ist das in den Vorschriften angegebene ω -Verfahren anzuwenden.

Bei allen Knickuntersuchungen sowohl mit Hilfe der Differentialgleichung als auch mittels schrittweiser Annäherung wird bei der Ermittlung der Verbiegungen nur der Einfluß der senkrechten Verschiebungen v berücksichtigt, während der Einfluß der waagerechten Verschiebungen u vernachlässigt wird. Insbesondere bei der antimetrischen Knickung ergeben sich vor allem bei weichen Bögen mit geringen Knicksicherheiten nicht unwesentliche waagerechte Verschiebungen. Aber auch bei dem symmetrischen Knickvorgang ergeben sich für die Viertelpunkte infolge der Verbiegungen solche Verschiebungen. Mittels der auf das feste Achsenkreuz (xz) bezogenen Differentialgleichung lassen sich diese Einflüsse nicht erfassen. Um auch diese zu ermitteln, müßte man von dem festen Achsenkreuz (xz) abgehen und die Verschiebungen auf die Bogenachse selbst beziehen. Dies bedingt bei der Differentialgleichung sehr große Schwierigkeiten. Dagegen kann man mittels der schrittweisen Annäherung diesen Einfluß leicht berechnen. Wesentliche Änderungen in den Knickwerten ergeben sich dadurch nicht; ich werde in einer späteren Veröffentlichung hierfür den Nachweis bringen.

b) Die Verformungsmomente. Der wichtigste Belastungsfall, für den die Größe der Verformungsmomente zu ermitteln ist, ist die Eigengewichtsbelastung, überlagert durch einseitige Verkehrslast, den wir nach Abb. 9c in einen symmetrischen und einen antimetrischen zerlegen können. Hierfür sollen nachstehend die Gleichungen angegeben und mit den Resultaten von Fritz¹ verglichen werden. Da durch die antimetrische Verkehrsbelastung der Horizontalschub H nicht beeinflußt wird, können wir nach Gl. (14a) die beiden Lastfälle direkt addieren; hier gilt das übliche Superpositionsgesetz. Die einzelnen Reihenglieder werden hierbei soweit berücksichtigt, als sie im Rahmen der Rechengenauigkeit noch einen Einfluß ausüben.

α) Der Dreigelenkbogen. Für den Viertelpunkt ergibt sich aus Gl. (16a) und (21b)

$$M = \pm \frac{p a^2 \nu_a + 0,032}{16 \nu_a - 1} - H \frac{l f_0 \nu_s + 0,028}{4 \nu_s - 1}$$

hier ist die symmetrische Knickung maßgebend, wir ersetzen deshalb ν_2 durch ν_s und erhalten unter Berücksichtigung, daß nach

Gl. (30)

$$\nu_a = \nu_s \frac{9,87}{7,437}$$

$$(33) \quad M = \pm \frac{p a^2}{16} \frac{\bar{\nu} + 0,024}{\bar{\nu} - 0,754} - H \frac{l f_0}{4} \frac{\bar{\nu} + 0,028}{\bar{\nu} - 1}$$

wobei jetzt mit $\bar{\nu}$ der maßgebende Wert der Knicksicherheit gekennzeichnet ist:

$$(33a) \quad \bar{\nu} = 7,437 \frac{E J_c}{H a^2}$$

β) Der Zweigelenkbogen [s. hierzu Gl. (16) und (18)]. Bei dem Zweigelenkbogen ist die antimetrische Knickung $\nu_a = \bar{\nu}$ maßgebend. Wir müssen demnach ν_s durch ν_a ausdrücken:

$$\nu_s = \nu_a \frac{21,96}{9,87}$$

Damit erhalten wir für den Scheitel $\xi = 0$:

$$(34) \quad M = + H_c f \left[\frac{\nu_s - 0,710}{\nu_s - 1} - \frac{0,033}{\nu_s} \right] = H_c f \left[\frac{\bar{\nu} - 0,319}{\bar{\nu} - 0,449} - \frac{0,015}{\bar{\nu}} \right]$$

und für den Viertelpunkt $\xi = 0,5$:

$$(34a) \quad M = \pm \frac{p a^2 \bar{\nu} + 0,032}{16 \bar{\nu} - 1} + \frac{3}{4} H_c f \left[\frac{\bar{\nu} - 0,560}{\bar{\nu} - 0,449} + \frac{0,025}{\bar{\nu}} \right]$$

wobei

$$(34b) \quad \bar{\nu} = 9,87 \frac{E J_c}{H a^2}$$

γ) Für den Eingelenkbogen [s. hierzu Gl. (17) und (20)]. Bei dem Eingelenkbogen ist wieder die symmetrische Knickung maßgebend, wir müssen deshalb den Wert ν_a durch ν_s ersetzen

$\nu_a = \nu_s \frac{20,19}{10,983}$. Wir erhalten für die Einspannstelle $\xi = 1$:

$$M = \pm \frac{p a^2}{16} \left[\frac{\nu_a - 0,382}{\nu_a - 1} + \frac{0,055}{\nu_a} \right] - H_c f \left[\frac{\nu_s - 1,847}{\nu_s - 1} - \frac{0,33}{\nu_s} \right]$$

$$(35) \quad M = \pm \frac{p a^2}{16} \left[\frac{\bar{\nu} - 0,208}{\bar{\nu} - 0,544} + \frac{0,03}{\bar{\nu}} \right] - H_c f \left[\frac{\bar{\nu} - 1,847}{\bar{\nu} - 1} - \frac{0,33}{\bar{\nu}} \right]$$

und für den Viertelpunkt $\xi = \frac{1}{2}$:

$$M = \pm \frac{p a^2}{32} \left[\frac{\nu_a - 0,014}{\nu_a - 1} + \frac{0,024}{\nu_a} \right] - \frac{H_c f}{4} \left[\frac{\nu_s + 2,19}{\nu_s - 1} - \frac{0,02}{\nu_s} \right]$$

$$(35a) \quad M = \pm \frac{p a^2}{32} \left[\frac{\bar{\nu} - 0,008}{\bar{\nu} - 0,544} + \frac{0,013}{\bar{\nu}} \right] - \frac{H_c f}{4} \left[\frac{\bar{\nu} + 2,19}{\bar{\nu} - 1} - \frac{0,02}{\bar{\nu}} \right]$$

wobei

$$(35b) \quad \bar{\nu} = 10,983 \frac{E J_c}{H a^2}$$

δ) Für den eingespannten Bogen [s. hierzu Gl. (17) und (19)]. Bei dem eingespannten Bogen ist ebenso wie bei dem Zweigelenkbogen die antimetrische Knickung maßgebend, wir ersetzen deshalb ν_s durch ν_a :

$$\nu_s = \nu_a \frac{33,21}{20,19}$$

Wir erhalten damit für den Scheitel $\xi = 0$:

$$(36) \quad \begin{cases} M = \frac{1}{3} H_0 f \left[\frac{v_s - 0,120}{v_s - 1} - \frac{0,172}{v_s} - \frac{0,075}{v_s^2} \right] \\ \approx \frac{1}{3} H_0 f \left[\frac{v - 0,073}{v - 0,608} - \frac{0,105}{v} \right] \end{cases}$$

für den Viertelpunkt $\xi = 0,5$

$$(36a) \quad \begin{cases} M = \pm \frac{p a^2}{32} \left[\frac{v - 0,014}{v - 1} + \frac{0,024}{v} \right] + \frac{H_0 f}{12} \left[\frac{v - 2,38}{v - 0,608} \right. \\ \left. + \frac{0,443}{v} + \frac{0,128}{v^2} \right] \end{cases}$$

und für die Einspannstelle $\xi = 1$

$$(36b) \quad \begin{cases} M = \pm \frac{p a^2}{16} \left[\frac{v - 0,382}{v - 1} + \frac{0,055}{v} \right] - \frac{2}{3} H_0 f \left[\frac{v - 0,862}{v - 0,608} \right. \\ \left. - \frac{0,326}{v} - \frac{0,054}{v^2} \right], \end{cases}$$

wobei $\bar{v} = 20,19 \frac{E J_c}{a^2}$.

Für die Durchrechnung der Zahlenbeispiele benötigen wir nun die Gleichungen, nach denen die übliche Berechnung der Gewölbe durchgeführt wird. Diese sind in der nachstehenden Zahlentafel für den Parabelbogen $J_c = J_x \cos \varphi$, $F_c = F_x \cos \varphi$ übersichtlich zusammengestellt. In der ersten Spalte sind die bekannten Gleichungen angegeben, zur Berechnung der Horizontalschubverminderung H_c bezogen auf den statisch bestimmten Schub H_0 aus Eigengewicht und gleichmäßiger Verkehrslast, und in der zweiten Spalte die Werte der zugehörigen Nennerintegrale. Die dritte Spalte enthält die Abminderungswerte α , die in der Literatur, wie schon erwähnt, gewöhnlich mit v bezeichnet werden. In der Spalte 4 sind die Werte von H_c ausgerechnet, sie geben uns das Maß der vorhandenen Balkenwirkung an. Von der Gesamtlast q werden demnach nur noch $q \frac{H_0 - H_c}{H_0}$ durch Bogenwirkung und der Rest $q \frac{H_c}{H_0}$ durch Balkenwirkung getragen. Die Spalte 5 enthält die Scheitelsenkung δ_{ab} infolge $H_c = 1$, und die Spalte 6 endlich die Scheitelsenkung aus H_c gleich $H_c \cdot \delta_{ab}$ zuzüglich der Senkung aus der senkrechten Verkürzung des Bogens.

| | | Einge- spannter Bogen | Eingelenk- bogen | Zweigelenk- bogen | Dreigelenk- bogen | |
|---|--|---|---|---|---|---------------------------|
| 1 | $H_c =$ | $\frac{H_0 l / E F_c}{\delta_{aa}} \alpha_0$ | $\frac{H_0 l / E F_c}{\delta_{aa}} \alpha_1$ | $\frac{H_0 l / E F_c}{\delta_{aa}}$ | — | — |
| 2 | $\delta_{aa} =$ | $\frac{4}{45}$ | $\frac{9}{45}$ | $\frac{24}{45}$ | — | $\frac{f^2 l}{E J_c}$ |
| 3 | $\alpha =$ ($\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$) | $\frac{1}{1 + 45 \frac{J_c}{4 f^2 F_c}}$ | $\frac{1}{1 + 45 \frac{J_c}{9 f^2 F_c}}$ | $\frac{1}{1 + 45 \frac{J_c}{24 f^2 F_c}}$ | — | — |
| 4 | $H_c =$ | $\frac{45 \alpha_0}{4}$ | $\frac{45 \alpha_1}{9}$ | $\frac{45 \alpha_2}{24}$ | — | $\frac{H_0 J_c}{f^2 F_c}$ |
| 5 | $\delta_{ab} =$ | $\frac{1}{48}$ | $\frac{3}{48}$ | $\frac{5}{48}$ | — | $\frac{f l^2}{E J_c}$ |
| 6 | $\Delta f_0 = H_c \delta_{ab}$ | $1 + \frac{30}{128} \left(\frac{1}{f} \right)^2$ | $1 + \frac{40}{128} \left(\frac{1}{f} \right)^2$ | $1 + \frac{25}{128} \left(\frac{1}{f} \right)^2$ | $1 + \frac{32}{128} \left(\frac{1}{f} \right)^2$ | $\frac{H_0 f}{E J_c}$ |

Bei dem statisch bestimmten Dreigelenkbogen ergibt sich keine Verminderung des Horizontalschubes H_c durch Balkenwirkung, hier berechnet sich die Senkung aus

$$\Delta f_0 = \frac{H_0}{E F_c} \left(\frac{1}{2} \frac{l}{f} + f \right) = \frac{H_0 f}{E F_c} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{f} \right)^2 \right].$$

Aus der letzten Spalte ergeben sich folgende teilweise etwas überraschende Ergebnisse. Wir vergleichen zunächst die Bögen ohne mit denen mit Scheitelgelenk.

Die Scheiteldurchbiegungen des Zwei- und Dreigelenkbogens stehen im Verhältnis 25:32 und die des eingespannten und Eingelenkbogens im Verhältnis von 30:40. Daraus folgt: durch Anordnung von Scheitelgelenken ergeben sich aus Eigengewicht wesentlich vergrößerte Durchbiegungen. Das war schon immer bekannt. Wir betrachten nun den Einfluß der Kämpfergelenke.

Die Durchbiegungen des eingespannten und des Zweigelenkbogens stehen im Verhältnis von 30:25, die des Eingelenk- und Dreigelenkbogens verhalten sich wie 40:32.

Durch die Anordnung von Kämpfergelenken wird demnach die Durchbiegung vermindert. Die Wirkung der Kämpfergelenke ist also gerade entgegengesetzt der der Scheitelgelenke. Diese auffallende Wirkungsweise der Kämpfergelenke ist jedoch sehr leicht zu verstehen. Infolge der Bogenverkürzungen müssen sich Scheitelsenkungen ergeben. Die Kämpfer einspannungen widersetzen sich dieser, dadurch wird der ideelle Drehpunkt von den Kämpfern nach den Viertelpunkten zu vorgeschoben, und zwischen diesen ideellen Drehpunkten ist das Pfeilverhältnis ungünstiger wie bei den Gewölben mit Kämpfergelenken, so daß die Verkürzungen größere Durchbiegungen erzeugen müssen.

Für die Rechenbeispiele wollen wir die von K a s a r n o w s k i und F r i t z behandelte Stahlbrücke mit den nachstehenden Form- und Querschnittsgrößen zugrunde legen.

$$\begin{aligned} l &= 212 \text{ m} & J_c &= 0,460 \text{ m}^4 & g &= 8,80 \text{ tm} \\ i &= 21,25 \text{ m} & W_c &= 0,358 \text{ m}^3 & p &= 4,20 \text{ tm} \\ a &= 106 \text{ m} & F &= 0,319 \text{ m}^2 & q &= g + p/2 = 10,90 \text{ tm} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den symmetrischen Belastungsfall $q = g + 0,5 p$ ein Horizontalschub von $H_0 = -10,90 \frac{212^2}{8 \cdot 21,25} = -2881,7 \text{ ts}$ und entsprechend der obigen Zahlentafel 37 nachfolgende Werte für H_c und Δf_0 . Unter diesen Zahlen sind die Biegemomente angegeben, die sich für den Scheitel, Viertelpunkt und Kämpfer bei der üblichen Berechnungsweise aus Eigengewicht ($H_c z$) und aus Verkehr ($p a^2/16$ bzw. $p a^2/32$) ergeben.

Bei der üblichen Berechnung berücksichtigen wir gewöhnlich nicht, daß infolge der Scheitelsenkung die Rechnung nicht mehr genau stimmt, denn jetzt ist die allgemeine Gleichgewichtsbedingung $q \frac{l^2}{8} = (H_0 + H_c) (l - \Delta f_0)$ nicht mehr erfüllt. Wir erhalten verbesserte Werte, wenn wir in Gl. (37) an Stelle f den neuen Pfeil $f' = f - \Delta f_0$ einsetzen, wobei wir den geringen Einfluß der Änderung von α außer acht lassen. Diese Werte sind in der Zahlentafel 39 zusammengestellt.

Diese verbesserten Werte M_0 nehmen wir nun als Grundlage für die Berechnung der Verformungsmomente mit Hilfe der Gl. (33) bis (36), bei denen die vor den Klammern stehenden Werte, z. B. $3/4 H_0 f$ und $p a^2/16$ durch die schon ausgerechneten Momente M_{0p} und M_{0g} zu ersetzen sind. Hierzu müssen wir aus den Horizontalschüben, die in der letzten Zeile in der Zahlentafel 39 angegeben sind, die Werte der maßgebenden Knicksicherheit \bar{v} berechnen. Wir erhalten

$$\bar{v} = 20,19 \frac{E J_c}{H a^2} = 20,19 \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 0,46}{2808 \cdot 106^2} = 6,18,$$

für den Eingelenkbogen

$$\bar{v} = 10,983 \frac{E J_c}{H a^2} = 10,983 \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 0,46}{2874 \cdot 106^2} = 3,30,$$

für den Zweigelenkbogen

$$\bar{v} = 9,87 \frac{E J_c}{H a^2} = 9,87 \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 0,46}{2889 \cdot 106^2} = 2,94,$$

(38)

| | Einge- spannter Bogen | Ein- gelenk- bogen | Zwei- gelenk- bogen | Drei- gelenk- bogen | |
|----------------|-----------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|----|
| $\alpha =$ | 0,964 | 0,984 | 0,994 | — | |
| $H_c =$ | 99,5 | 45,3 | 17,3 | — | t |
| $\Delta f_0 =$ | 0,223 | 0,294 | 0,188 | 0,238 | m |
| Scheitel | $M_{0p} =$ | — | — | — | tm |
| | $M_{0z} =$ | + 705 | + 367 | — | tm |
| Viertelspunkt | $M_{0p} =$ | ± 1475 | ± 2950 | ± 2950 | tm |
| | $M_{0z} =$ | + 176 | + 275 | — 172 | tm |
| Kämpfer | $M_{0p} =$ | ± 2950 | — | — | tm |
| | $M_{0z} =$ | — 1410 | — 968 | — | tm |

(38a)

| | Einge- spannter Bogen | Ein- gelenk- bogen | Zwei- gelenk- bogen | Drei- gelenk- bogen | |
|------------------|-----------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|----|
| $H'_0 =$ | — 2911 | — 2921 | — 2907 | — 2914 | t |
| $f' =$ | 21,027 | 20,956 | 21,062 | 21,012 | m |
| $H'_c =$ | + 102,6 | + 46,6 | + 17,8 | — | t |
| Scheitel | $M'_{0p} =$ | — | — | — | tm |
| | $M'_{0z} =$ | + 720 | + 374 | — | tm |
| Viertelspunkt | $M'_{0p} =$ | ± 1475 | ± 2950 | ± 2950 | tm |
| | $M'_{0z} =$ | + 180 | + 280 | — 173 | tm |
| Kämpfer | $M'_{0p} =$ | ± 2950 | — | — | tm |
| | $M'_{0z} =$ | — 1440 | — 980 | — | tm |
| $H = H_0 + H'_c$ | — 2808 | — 2874 | — 2889 | — 2914 | |

für den Dreigelenkbogen

$$\bar{\nu} = 7,437 \frac{E J_c}{H a^2} = 7,437 \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 0,46}{2914 \cdot 106^2} = 2,19.$$

Damit ergeben sich folgende Momente:

a) Der eingespannte Bogen.

Scheitel

$$M = 720 \left[\frac{6,18 - 0,073}{6,18 - 0,608} - \frac{0,105}{6,18} \right] = + 778 \text{ tm (nach Fritz + 809),}$$

Viertelspunkt

$$M = \pm 1475 \left[\frac{6,18 - 0,014}{5,18} + \frac{0,024}{6,18} \right] + 180 \left[\frac{6,18 - 2,38}{6,18 - 0,608} + \frac{0,443}{6,18} + \frac{0,128}{6,18^2} \right],$$

$$M = \pm 1750 + 136 = \begin{matrix} + 1886 \text{ tm} \\ - 1614 \text{ tm} \end{matrix} \quad \left(\text{nach Fritz } \begin{matrix} + 1883 \\ - 1653 \end{matrix} \right)$$

Kämpfer

$$M = \pm 2950 \left[\frac{6,18 - 0,382}{5,18} + \frac{0,055}{6,18} \right] - 1420 \left[\frac{6,18 - 0,862}{6,18 - 0,608} - \frac{0,326}{6,18} - \frac{0,054}{6,18^2} \right]$$

$$M = \pm 3340 - 1280 = \begin{matrix} - 4620 \text{ tm} \\ + 2060 \text{ tm} \end{matrix} \quad \left(\text{nach Fritz } \begin{matrix} - 4766 \\ + 1908 \end{matrix} \right)$$

β) Der Eingelenkbogen.

Kämpfer

$$M = \pm 2950 \left[\frac{3,30 - 0,208}{3,30 - 0,544} + \frac{0,03}{3,3} \right] - 9,80 \left[\frac{3,30 - 1,847}{2,3} - \frac{0,033}{3,3} \right]$$

$$M = \pm 3330 - 520 = \begin{matrix} - 3850 \text{ tm} \\ + 2810 \text{ tm} \end{matrix} \quad \left(\text{nach Fritz } \begin{matrix} - 3843 \\ + 2855 \end{matrix} \right)$$

Viertelspunkt

$$M = \pm 1475 \left[\frac{3,3 - 0,008}{3,3 - 0,544} + \frac{0,013}{3,3} \right] - 245 \left[\frac{3,3 + 2,19}{2,3} - \frac{0,02}{3,3} \right]$$

$$M = \pm 1785 - 587 = \begin{matrix} - 2372 \text{ tm} \\ + 1198 \text{ tm} \end{matrix} \quad \left(\text{nach Fritz } \begin{matrix} - 2452 \\ + 1110 \end{matrix} \right)$$

γ) Der Zweigelenkbogen.

Scheitel

$$M = 374 \left[\frac{2,94 - 0,319}{2,94 - 0,449} - \frac{0,015}{2,94} \right] = + 394 \text{ tm.}$$

Viertelspunkt

$$M = \pm 2950 \left[\frac{2,94 + 0,032}{1,94} \right] + 280 \left[\frac{2,94 - 0,56}{2,94 - 0,449} + \frac{0,015}{2,94} \right].$$

$$M = \pm 4520 + 266 = \begin{matrix} + 4788 \text{ tm} \\ - 4254 \text{ tm} \end{matrix} \quad \left(\text{nach Fritz } 4956, \text{ nach Kasarnovski } 4830 \right)$$

δ) Der Dreigelenkbogen.

Viertelspunkt

$$M = \pm 2950 \left[\frac{2,19 + 0,024}{2,19 - 0,754} \right] - 173 \left[\frac{2,19 + 0,028}{1,19} \right].$$

$$M = \pm 4530 - 324 = \begin{matrix} - 4854 \text{ tm} \\ - 4206 \text{ tm} \end{matrix} \quad \left(\text{nach Fritz } - 6562, \text{ nach Melan } - 4882 \right)$$

Die Ergebnisse aus der schrittweisen Annäherung stimmen mit den Resultaten von Fritz bis auf wenige Prozent überein, nur beim Dreigelenkbogen sind die Resultate von Fritz grundlegend von den obigen verschieden. Die Vergleichswerte von Kasarnowski und Melan sind ebenso wie die von Fritz in Klammern angegeben. Hieraus ist zu sehen, daß meine Resultate des Dreigelenkbogens mit denen von Melan sehr gut übereinstimmen. Das Resultat von Fritz für den Dreigelenkbogen ist unrichtig, das geht schon aus der von ihm angegebenen errechneten Scheitelsenkung mit 1,44 m hervor. Eine solche Senkung ist ganz unmöglich, der Bogen müßte schon lange vorher einstürzen. Die Unrichtigkeit des Resultates von Fritz läßt sich auch mittels der aus der Differentialgleichung abgeleiteten Gl. (26a) beweisen.

Die Zahlenergebnisse zeigen, daß beim eingespannten Bogen infolge der hohen vorhandenen Knicksicherheit von $\bar{\nu} = 6,18$ die Einflüsse der Verformung verhältnismäßig gering sind. Im Viertelspunkt steigt das Moment von 1651 auf 1886 tm, am Kämpfer von 4360 auf 4620 tm. Beim Eingelenkbogen liegen die Verhältnisse schon wesentlich ungünstiger, und zwar hauptsächlich wegen der Eigengewichtsverformung, während die Verformung aus der Verkehrslast annähernd gleich bleibt. Am Kämpfer fällt das Moment von 3918 auf 3850 tm, im Viertelspunkt dagegen steigt es von 1717 auf 2372 tm. Beim Zweigelenkbogen ergibt sich im Scheitel eine Steigerung von 367 auf 394 tm. Im Viertelspunkt dagegen ergibt sich eine wesentliche Erhöhung von 3225 auf 4788 tm. Beim Dreigelenkbogen liegen die Verhältnisse ähnlich, die Momente im Viertelspunkt erhöhen sich von 3122 auf 4854 tm. Die Werte von M_0 (Moment aus der üblichen Berechnung) sind der Zahlentafel 38 entnommen.

Ich glaube damit gezeigt zu haben, daß sich durch das Erkennen der Grundgesetze der Verformung die Aufgabe der Berechnung der Verformungsmomente in der denkbar einfachsten Weise erledigen läßt. Mit Gl. (33) bis (36) lassen sich für den wesentlichsten Belastungsfall der einseitigen Verkehrslast die Verformungsmomente aus den ursprünglichen Momenten in wenigen Minuten berechnen.

In der späteren Fortsetzung dieser Arbeit soll dann auch für die überhöhten und für die Bögen mit veränderlichem Trägheitsmoment das Verfahren weiter entwickelt werden.

Mit dem oben angegebenen Verfahren der Darstellung der Verformungsmomente mittels Polynomen läßt sich die Knicksicherheit und die Größe der Momente sehr genau ermitteln. Selbstverständlich kann das Verfahren auch mittels Differenzenrechnung durchgeführt werden, in gleicher Weise, wie wir unsere Gewölbe im allgemeinen berechnen. Jedoch muß in diesem Falle die Rechnung mittels der Rechenmaschine durchgeführt werden. In der schon angezeigten Fortsetzung der Arbeit werde ich ein derartiges Beispiel bringen.

Ich möchte zum Schluß dieses Abschnittes über die elastische Verformung nun noch kurz auf die Hängebrücken eingehen.

6. Die Anwendung des gegebenen Verfahrens auf die Berechnung von Hängebrücken bei Berücksichtigung der elastischen Verformung.

Im Abschnitt II, 2 habe ich schon darauf hingewiesen [Gl.(3b)], daß sich an der Gleichung für die Verformungsmomente nur der Nenner ändert, wenn der Balken anstatt auf Druck auf Zug beansprucht wird. An die Stelle der Gleichung $M = M_0 \frac{v + \delta}{v - 1}$ tritt die Gleichung $M = M_0 \frac{v - \delta}{v + 1}$, da der Stab nicht mehr auf Druck beansprucht ist, ist die Größe $v = n \frac{E J_c}{H a^2}$ nunmehr als Eigenwert anzusprechen. Die Verformungstheorie der Hängebrücken läßt sich ohne jede Schwierigkeit ebenfalls auf diese einfachen Gleichungen zurückführen. Hängebrücken mit aufgehobenem Horizontalschub haben, wenn man die unwesentlichen Einflüsse der Verlängerung der Hängestangen vernachlässigt, ebensowenig wie der Zweigelenkbogen mit Zugband der Abb. 20 aus den dort angeführten Gründen zusätzliche Momente aus der Verformung, wohl dagegen Hängebrücken mit verankertem Zugseil. In der Abb. 21 ist eine derartige Hängebrücke bei antimetrischer Belastung dargestellt. Die Gelenke des Versteifungsträgers sind direkt über dem Hauptpfeiler angeordnet. Durch diese antimetrische Belastung ergibt sich keine Änderung des Horizontalschubes. Die Verformungsmomente in den Viertelpunkten (a/2 bzw. b/2) berechnen sich aus den ursprünglichen $M_0 = p a^2/16$ bzw. $M_0 = p b^2/16$ mittels der Reihen der Gl. (5), jedoch haben diese nun wechselnde Vorzeichen.

$$\begin{aligned}
 M &= M_0 \left[1 - \frac{1,028}{v} + \frac{1,032}{v^2} - \frac{1,032}{v^3} + \dots \right], \\
 &= M_0 \left[-0,032 - \frac{0,004}{v} + 1,032 \frac{v}{v+1} \right] \\
 (39) \quad M &= M_0 \left[\frac{v - 0,032}{v + 1} - \frac{0,004}{v} \right].
 \end{aligned}$$

Für diesen antimetrischen Belastungsfall ist die Ermittlung der Verformungsmomente sehr einfach, für den symmetrischen dagegen macht die Reihenentwicklung etwas mehr Mühe. Ich werde hierauf in einem gesonderten Aufsatz über die Verformung der Hängebrücken noch zurückkommen.

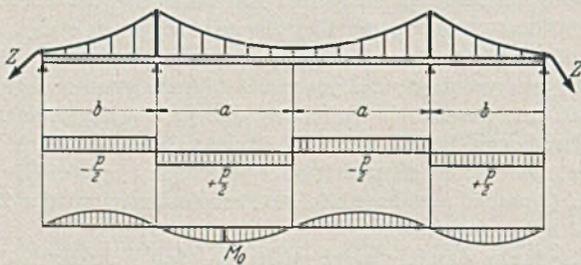


Abb. 21.

7. Darstellung des praktischen Rechenverfahrens zur Ermittlung der Verformungsmomente aus Eigengewichtsbelastung, Widerlagerausweichen, Temperatur und Schwinden bei beliebiger Bogenform und beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente.

Im Abschnitt II, 3 haben wir die Verformungsmomente aus diesen Wirkungen für den Sonderfall des Parabelbogens ermittelt. Hierbei haben wir die Wirkung aus der Verkürzung des Bogens mit Eigengewicht, durch Widerlagerausweichen, Temperatur und Schwinden, denen die Horizontalschübe H_v , H_w , H_s und H_t und die Balkenmomente ($H_0 + H_w + H_s + H_t$) z entsprechen, sämtlich unter der Bezeichnung H_0 bzw. H_z zusammengefaßt, weil sie alle gleichartige Ursprungsmomente und damit auch gleichartige Verformungsmomente auslösen.

Bei dem Parabelbogen $I_c = I_x \cos \varphi$ hatten wir für die wichtigsten Querschnitte wie Scheitel, Viertelpunkt und Kämpfer allgemeine für jede beliebige Knicksicherheit gültige Gleichung

ermittelt, um mit diesen einfachen Formeln den großen Einfluß der Knicksicherheit auf die Größe der Biegemomente zu zeigen. Bei gegebenen Aufgaben mit beliebiger Bogenform und vor allem mit beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente benötigen wir diese allgemeinen für jede Knicksicherheit geltenden Formeln nicht, weil die Verhältnisse bei jedem Brückenbau andere sind. Hier ist es vielmehr von Interesse, solche Formeln zu entwickeln, die den Verlauf der Zusatzmomente für die gesamte Bogenlänge angeben, insbesondere ist dies erwünscht bei Betonbrücken, bei welchen die Biegemomente aus der plastischen Verformung aus denen der elastischen Verformung entwickelt werden sollen.

Dieser Rechnungsgang soll nun kurz beschrieben werden. Wir gehen wiederum von den ursprünglichen Momenten $M_0 = H_z z$ aus, jedoch setzen wir einen beliebigen Bogen voraus, so daß z. B. beim eingespannten Bogen an Stelle von $z = l/3 (1 - 3 \xi^2)$ ein Polynom mit höheren Potenzen von ξ tritt. Das veränderliche Trägheitsmoment setzen wir in der Form an $\frac{1}{J_x} = \frac{1}{J_c} f(\xi) \cos \varphi$, wobei $f(\xi)$ ebenfalls ein Polynom von ξ ist. Der Rechnungsgang zur Ermittlung der einzelnen Zusatzmomente bleibt genau der gleiche wie bisher, wir haben nur bei der Integration zur Ermittlung der Durchbiegungen v , aus denen wir die Zusatzmomente berechnen, diese Funktion $f(\xi)$ unter dem Integralzeichen zu berücksichtigen. Es ergeben sich dadurch nur höhere Potenzen von $\xi = x/a$.

Auch wenn der Bogen nicht nach der Stützlinie geformt ist, wird der Rechnungsgang dadurch nicht berührt, denn wenn der Verlauf von g und z in Form eines Polynoms von ξ dargestellt wird, ergeben sich für diesen Bogen nach der üblichen Berechnung außer den Balkenmomenten $H_z z$ noch weitere Biegemomente, die sich ebenfalls als Polynome von ξ darstellen. Wir schreiben deshalb die ursprünglichen Momente aus der Balkenwirkung und aus der Abweichung von der Stützlinie in der allgemeinen Form an:

$$(40) \quad M_0 = M_{00} (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \dots) = M_{00} \varphi_0(\xi),$$

wobei mit M_{00} das Biegemoment an einer maßgebenden Stelle, entweder am Scheitel oder Kämpfer, bezeichnet ist. Hieraus entwickeln wir nun die einzelnen Zusatzmomente, die bei den Bögen ohne Scheitelgelenk wegen der Symmetrie nur quadratische Glieder bei dem Eingelenkbogen dagegen auch ungerade Potenzen enthalten (s. II, 3). Wir schreiben die Zusatzmomente in der allgemeinen Form an

$$\begin{aligned}
 M_1 &= M_{00} (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots) \\
 M_2 &= M_{00} (b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 + \dots) \\
 M_3 &= M_{00} (c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 + \dots) \text{ usw. bis } M_n \\
 M_m &= M_{00} (m_0 + m_1 \xi + m_2 \xi^2 + m_3 \xi^3 + \dots) \\
 (40a) \quad M_n &= M_{00} (n_0 + n_1 \xi + n_2 \xi^2 + n_3 \xi^3 + \dots) = M_{00} \varphi_2(\xi) \\
 M_{n+1} &= \frac{M_n}{v_s} \\
 M_{n+2} &= \frac{M_n}{v_s^2}.
 \end{aligned}$$

Bei der stufenweisen Annäherung hatten wir die Knicksicherheit aus dem Verhältnis von $M_n = M_{n-1}$ zu M_n ermittelt. Es war $v_s = \frac{M_{n-1}}{M_n}$. Genügend genaue Werte von v_s erhielten wir, wenn zwischen den Linien M_{n-1} und M_n eine hinreichende Affinität, d. h., Proportionalität für alle Querschnitte vorhanden oder wenn diese Proportionalität für zwei aufeinanderfolgende Quotienten $\frac{M_{n-1}}{M_n} = \frac{M_n}{M_{n+1}}$ gegeben war.

Die höheren Zusatzmomente als M_n ergeben sich aus denen von M_n durch Division mit v_s bzw. v_s^2 usw. Bei dieser Darstellung der Zusatzmomente nach Gl. (40a) sind die früher in den Klammern stehenden Potenzen von λ in den Koeffizienten a, b, c mitenthalten.

Die Größe $\lambda = \sqrt{\frac{H a^2}{E J_c}}$ ist für jeden Bogen eine feste Zahl, so daß

wir diese Potenzen von λ ohne weiteres mit diesen Koeffizienten vereinigen können. Die Biegemomente M_n zeigen uns die Momente des reinen Knickvorganges ohne den störenden Einfluß

aus der Verformung durch die Balkenmomente H_{cz} . Erregen wir den Bogen durch ein solches Moment, dann wird durch die elastische Verformung ein dazu affines M_{n+1} ausgelöst, das v_s -mal kleiner ist und deshalb ist $v_s = \frac{M_n}{M_{n+1}}$. Inwieweit durch den Übergang von M_n zu M_{n+1} zusätzlich neue statisch unbestimmte Größen, vor allem zusätzliche Horizontalschübe ausgelöst werden, wird im folgenden noch klargelegt werden.

Wir zerlegen nun die obigen Zusatzmomente in zwei Teile: in einen Teil, welcher der Momentenlinie M_n des reinen Knickvorganges affin ist und einen weiteren Teil, durch den die Abweichung von M_n dargestellt wird. Je höher der Index der Zusatzmomente, um so besser ist die Affinität mit dem Moment M_n des reinen Knickvorganges. Bei den ersten Zusatzmomenten dagegen ist noch eine gewisse Abweichung vorhanden, weil diese von den ursprünglichen nach einer Parabel verlaufenden Balkenmomenten beeinflusst werden. Insgesamt ist aber selbst für die Summe aller Zusatzmomente $M_z = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, die in der Abb. 14 durch die Dif-

ferenz der Verformungsmomente M und der Ursprungsmomente M_0 gegeben sind, die Abweichung von dem Verlauf der reinen Knickmomente M_n nicht sehr groß. Merklich werden diese Abweichungen nur in der Nähe der Kämpfer der eingespannten Gewölbe (Eingelenk und eingespannter Bogen), während bei den Systemen mit Kämpfergelenken zwischen dem Verlauf des gesamten Zusatzmomenten Kämpfergelenken zwischen dem Verlauf des gesamten Zusatzmomentes

$M_z = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ und M_n eine sehr gute Übereinstimmung besteht. Die Abb. 22 zeigt für den eingespannten Bogen für $v = 3$ bzw. $v_s = 3 \frac{33,21}{20,19} = 4,935$ den Verlauf von M_z und M_n , wobei M_n in seinen

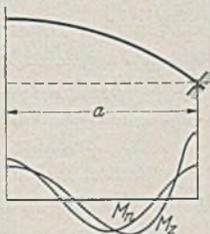


Abb. 22.

Ordinaten entsprechend vergrößert ist, um einen besseren Vergleich bezüglich der Affinität zu ermöglichen.

Um nun die Zusatzmomente in Form einer unendlichen geometrischen Reihe addieren zu können, spalten wir die Zusatzmomente mit geringerem Index als n in zwei Teile: in einen der M_n affin ist und einen Restteil. Nehmen wir z. B. an, daß aus dem Verhältnis aus $M_4 : M_5$ (d. h. $M_5 = M_n$) die Knicksicherheit v_s bestimmt wurde, dann spalten wir von $M_4 = M_{n-1}$ den Wert $M_n = M_5 v_s$ und von $M_3 = M_{n-2}$ den Teil $M_5 v_s^2$ ab usw. und erhalten dadurch für die ersten Anteile der Zusatzmomente eine unendliche geometrische Reihe. Die zweiten Anteile bilden jetzt nur noch eine Reihe, die sich vom ersten bis zum vierten ($n - 1$) Glied erstrecken. Für diese Reste führen wir die neuen Koeffizienten a', b', c' ein und erhalten damit:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= M_5 v_s^4 + M_{00} [a_0' + a_1' \xi + a_2' \xi^2 + a_3' \xi^3 + \dots] \\
 &= M_1' + M_1'' \\
 M_2 &= M_5 v_s^3 + M_{00} [b_0' + b_1' \xi + b_2' \xi^2 + b_3' \xi^3 + \dots] \\
 &= M_2' + M_2'' \\
 M_3 &= M_5 v_s^2 + M_{00} [c_0' + c_1' \xi + c_2' \xi^2 + c_3' \xi^3 + \dots] \\
 &= M_3' + M_3'' \\
 (40b) \quad M_4 &= M_5 v_s + M_{00} [d_0' + d_1' \xi + d_2' \xi^2 + d_3' \xi^3 + \dots] \\
 &= M_4' + M_4'' \\
 M_n &= M_5 = M_5 v_s^n + 0 \\
 M_6 &= M_5 \frac{1}{v_s} + 0 \\
 M_7 &= M_5 \frac{1}{v_s^2} + 0, \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

Die Anteile M' bilden eine unendliche geometrische Reihe, die wir summieren können. Die Anteile M'' können wir ebenfalls summieren, da sie sich nur bis zum Zusatzmoment $n - 1 = 4$ erstrecken. Wir erhalten damit für die zusätzlichen Momente M_z

aus der Verformung nachstehende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 M_z &= \sum_{n=1}^{\infty} M' + \sum_{n=1}^{n-1} M'' = v_s^{n-1} M_n \left[1 + \frac{1}{v_s} + \frac{1}{v_s^2} + \frac{1}{v_s^3} + \dots \right] \\
 (41) \quad &+ M_{00} [\beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \beta_3 \xi^3 + \dots].
 \end{aligned}$$

$$M_z = M_n \frac{v_s^n}{v_s - 1} + M_{00} \varphi_2(\xi) = M_{00} \left[\frac{v_s^n}{v_s - 1} \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) \right]$$

und damit das Gesamtmoment, wenn wir zu Gl. (41) das ursprüngliche Moment aus der Balkenwirkung und aus dem Abweichen des Bogens aus der Stützzinie hinzuzählen:

$$(41a) \quad M = M_0 + M_z = M_{00} [\varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi) \frac{v_s^n}{v_s - 1} + \varphi_2(\xi)].$$

Damit haben wir die Verformungsmomente des beliebig von der Stützzinie abweichenden Bogens mit beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente als Funktion der Festwerte M_{00} der Ursprungsmomente ausgedrückt und können nun damit die Momente für jeden Querschnitt des Bogens berechnen.

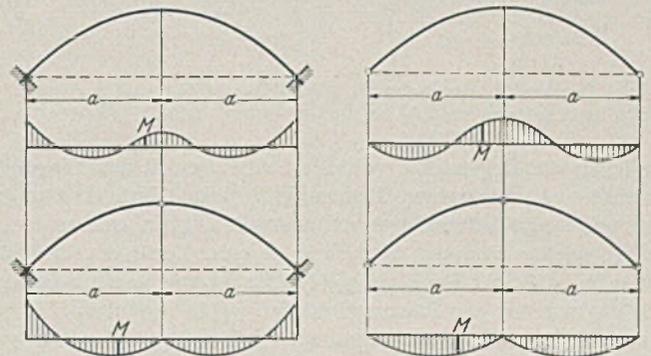


Abb. 23. Die Biegemomente M der verschiedenen Bogensysteme, die aus einem Abweichen der Stützzinie von der Bogenachse sich ergeben.

Für die spätere Ermittlung der Biegemomente aus der plastischen Verformung ist es notwendig, die Gl. (41) und (41a) in einer etwas abweichenden Form darzustellen und hierzu müssen wir die drei Funktionen der Gl. (41a) nach ihren Eigenschaften untersuchen.

Die Funktion $M_{00} \varphi_1(\xi)$ stellt die Ursprungsmomente dar. Diese setzen sich aus zwei Teilen zusammen: der erste Teil besteht aus den Balkenmomenten $(H_c + H_w + H_s + H_t) z$, diese haben die Form der Bogenachse; der zweite Teil von $M_{00} \varphi_0(\xi)$ führt von dem Abweichen der Stützzinie von der Bogenachse her. Bei einem stetigen Verlauf der Bogenachse haben diese letzteren Momente bei den verschiedenen Bogensystemen annähernd den in Abb. 23 dargestellten Verlauf. Bei den statisch unbestimmten Systemen ist für diese Biegemomente die Bedingung der nachstehenden Gl. (42) und für den Sonderfall des eingespannten Bogens zugleich auch die Bedingung der Gl. (42a) erfüllt.

$$(42) \quad \int_0^a \frac{M}{EJ} z ds = 0.$$

$$(42a) \quad \int_0^a \frac{M}{EJ} ds = 0.$$

Die Bedingungen der Gl. (42) und (42a) werden aber auch von den Funktionen $\varphi_1(\xi)$ und $\varphi_2(\xi)$ erfüllt. Diese Funktionen stellen die Summe sämtlicher Zusatzmomente dar. Da wir bei ihrer Ermittlung bei jedem einzelnen die obigen Bedingungen erfüllt haben, sind sie auch für ihre Summe erfüllt. Wir können deshalb die Gl. (41a) auch in der Form schreiben:

$$(43) \quad M = M_{00} [\Phi_0(\xi) + \Phi(\xi)],$$

wobei $\Phi_0(\xi)$ ein Moment darstellt, das die Form der Bogenlinie besitzt (Balkenmoment) und $\Phi(\xi)$ ein Moment ist, das den Bedingungen der Gl. (42) genügt. Das Moment $\Phi(\xi)$ können wir

wieder in zwei Teile mit besonderen Eigenschaften zerlegen, sein Anteil aus $\varphi_0(\xi)$ sind die Momente, die sich aus dem Abweichen der Bogenachse von der Stützlinie nach der Abb. 23 ergaben. In der nachfolgenden Abb. 25 sind die symmetrischen Knickwellen und die zugehörigen Biegemomente aufgetragen. Der Vergleich der Abb. 23 und 24 zeigt, daß die Biegemomente aus dem

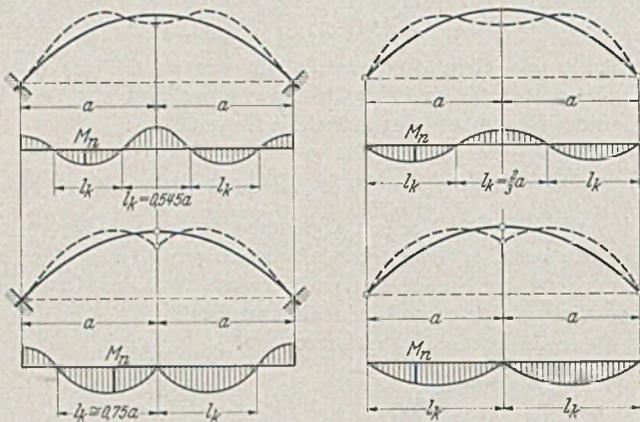


Abb. 24. Der Verlauf der symmetrischen Knickwellen und der zugehörigen Biegemomente M_n bei den verschiedenen Bogensystemen.

Abweichen der Bogenachse von der Stützlinie mit den Biegemomenten aus der reinen Knickung (M_n) im Verlauf sehr gut übereinstimmen. Wir zerlegen nunmehr die Biegemomente aus dem Abweichen von der Stützlinie in einen Teil, der den Momenten M_0 , d. h. der Funktion $\varphi_1(\xi)$ affin ist, und in ein Störungsglied, das wir mit der Störungsfunktion $\varphi_2(\xi)$ vereinigen. Damit können wir nun die Gesamtmomente in der Form der Gl. (43a) anschreiben:

$$(43a) \quad M = M_{00} [\Phi_0(\xi) + \Phi_1(\xi) + \Phi_R(\xi)].$$

Hierbei sind alle drei Funktionen Polynome von ξ :

$M_{00} \Phi_0(\xi)$ enthält die Balkenmomente aus H_v, H_w, H_t und H_s , die sämtlich die Form der Bogenachse haben;

$M_{00} \Phi_1(\xi)$ gibt den Anteil der Verformungsmomente und den Anteil der Biegemomente aus dem Abweichen von der Stützlinie an, welcher der Momentenlinie M_n des reinen Knickvorganges affin ist;

$M_{00} \Phi_R(\xi)$ dagegen ist ein Störungsglied, das die Reste aus den Verformungsmomenten und den Anteil aus den Biegemomenten infolge Abweichen von der Stützlinie enthält, die M_n nicht affin sind.

Sowohl die Biegemomente $M_{00} \Phi_1(\xi)$ als auch $M_{00} \Phi_R(\xi)$ erfüllen die Bedingungen der Gl. (42) und beim Sonderfall des eingespannten Bogens zugleich auch die Bedingungen der Gl. (42a). Diese Darstellung der gesamten Momente nach den Gl. (43) ist, wie schon erwähnt, für die Berechnung der Biegemomente aus der elastischen Verformung bedeutungslos, hier genügt die Darstellung nach Gl. (41a). Aber für die spätere Berechnung der Biegemomente aus der plastischen Verformung (Kriechen) sowie für die Untersuchungen über die Beseitigung der Biegemomente aus der elastischen und plastischen Verformung wird uns die Darstellung nach Gl. (43) bzw. (43a) sehr gute Dienste leisten.

Nun noch einige Worte zu den Biegemomenten aus dem Abweichen der Bogenachse von der Stützlinie. Diese Biegemomente haben schon auf Grund der üblichen Berechnung der Elastizitätstheorie bei Vernachlässigung der elastischen Verformung bei einem stetigen Verlauf der Bogenachse annähernd die Form der den jeweiligen symmetrischen Knicklinien zugehörigen Momentenlinie, wie der Vergleich der Abb. 23 und 24 zeigt. Wir erkennen daraus, daß diese Momente in gleicher Weise wie die zusätzlichen Momente aus der Verformung, die in den Abb. 25 dargestellt sind, annähernd den Verlauf der Knicklinie zeigen und damit den späteren Knickprozeß einleiten. Diese Feststellung zeigt uns aber auch den Weg, den wir gehen müssen, um durch eine künstliche Verformung der Bogenachse eine günstigere Verteilung der Biegemomente zu erreichen und inwieweit dieses Verfahren

Erfolg bringen kann. Ich komme hierauf noch im Abschnitt 9 zurück.

8. Die Knicksicherheit der gegenüber der Parabel überhöhten Gewölbe, der Zusammenhang der Gewölbe- mit der Balkenknickung und die Gründe für das ungünstige Verhalten der Gewölbe mit Scheitelgelenken.

Im Abschnitt II, 2 habe ich den Zusammenhang der antimetrischen Bogenknickung, die für die Gewölbe ohne Scheitelgelenk maßgebend ist, mit dem Knicken eines Balkens mit der Spannweite a (halbe Gewölbespannweite) in allgemeiner Form bei ganz

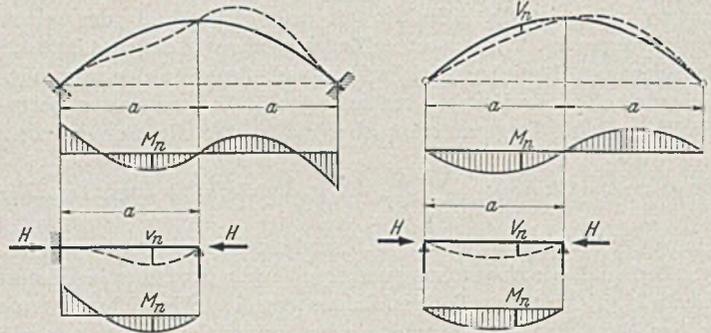


Abb. 25.

Abb. 26.

beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente dargelegt. Da bei einer antimetrischen Knickung infolge der Antimetrie der Biegemomente die Höhenlage des Scheitels unverändert bleibt, entsprechen die Knickwerte des Gewölbes mit dem veränderlichen Trägheitsmoment J_g denen eines Balkens mit dem Trägheitsmoment $J_z = \frac{J_b}{\cos \varphi}$ [s. Gl. (15c) des Abschnittes II, 2]. Die

Abb. 25 zeigt die antimetrische Knicklinie des eingespannten und Eingelenkbogens und die Knicklinie des zugehörigen einseitig eingespannten Balkens mit der Spannweite a sowie die zugehörigen Momentenlinien. Unter der Voraussetzung der Gl. (15c) haben beide Knicklinien genau den gleichen Verlauf. In gleicher Weise ist in der Abb. 26 die antimetrische Knicklinie des Zwei- und Dreigelenkbogens und die zugehörige des freiaufliegenden Balkens dargestellt. Auch hier ist eine vollständige Übereinstimmung vorhanden.

Bei der symmetrischen Knickung, die für die Dimensionierung der Gewölbe mit Scheitelgelenk maßgebend ist, bestehen ebenfalls Zusammenhänge mit der Balkenknickung, da der Balken durch die Gl. (15c) $J_g \cos \varphi = J_b$, mit dem Bogen verwandt ist. Die Zusammenhänge sind hier allerdings etwas verwickelter. Die Biegemomente aus der symmetrischen Knicklinie sind in der Abb. 24 dargestellt.

Vor allem müssen die auffallenden Resultate, die wir für die Knickwerte des Drei- und Eingelenkbogens, sowohl aus der Differentialgleichung als auch aus der stufenweisen Annäherung erhalten haben, mechanisch geklärt werden. Bei dem Dreigelenkbogen ergab sich bei der symmetrischen Knickung eine freie Knicklänge von $l_k = 1,152a$, die demnach größer ist als die Gelenkentfernung, eine Tatsache, die augenscheinlich dem Knickvorgang der Abb. 24d und 14d widerspricht, nach welchen die freie Knicklänge $l_k = a$ ist. Auf einen gleichartigen Widerspruch stoßen wir bei dem Eingelenkbogen. Aus der Differentialgleichung und aus der stufenweisen Annäherung ergab sich eine freie Knicklänge von $l_k = 0,948a$, während uns die Abb. 24b und 14b zeigt, daß die freie Knicklänge wesentlich kürzer ist. In Abb. 14b ist die Knicklinie annähernd gegeben durch die Differenz $M_z = M - M_0$. Wir können daraus die freie Knicklänge zu ca. $0,75a$ entnehmen. Eine freie Knicklänge von $l_k = 0,948a$ ist schon deshalb unmöglich, weil wir bei der stufenweisen Annäherung aus dem Zusatzmoment M_{n-1} das Zusatzmoment M_n unter Einhaltung der Bedingung

$$\Delta x = \int_0^a \frac{M_{n-1}}{E J_c} z dx = 0, \text{ wobei } z = f \xi^2, \text{ errechnet haben, d. h.,}$$

aus der Bedingung, daß das Scheitelgelenk bei der symmetrischen Knickung keine Horizontalverschiebung haben darf. In der Abb. 27 ist das Biegemoment M_n in seinem Verlauf nochmals aufgezeichnet. Man sieht schon mit dem Auge, daß durch eine Momentenlinie mit $l_k = 0,75 a$ die obige Bedingung $\Delta x = 0$ annähernd erfüllt ist, während sie bei der aus der Differentialgleichung folgenden freien Knicklänge von $l_k = 0,948 a$, die gestrichelt angegeben ist, niemals erfüllt werden kann. Wir stehen demnach hier ebenso wie bei dem Dreigelenkbogen scheinbar vor einem Widerspruch.

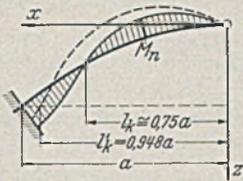


Abb. 27.

Bevor wir jedoch diese Frage klären, sollen zunächst die Gleichungen für die Knicksicherheit r_s für beliebig geformte gegenüber der Parabel überhöhte Gewölbe aufgestellt werden. Dabei wollen wir uns zugleich von der Voraussetzung des Abschnittes 4 freimachen, daß die Gewölbe nach der Stützlinie geformt sind. Da wir nur die Knicksicherheit und nicht die Verformungsmomente

Für die Ermittlung der Knicksicherheit des symmetrischen Knickens steht uns wiederum die Bedingung zur Verfügung, daß hierbei keine waagerechte Scheitelverschiebung eintreten darf [Gl. (23c)].

$$u = \int_0^a v' z' dx - \int_0^a \epsilon dx, \quad \text{nun ist } z' = \frac{2c}{a^4} x + \frac{4d}{a^4} x^3.$$

Hieraus erhalten wir nach Integration nachstehende Bedingungsgleichung:

$$(44d) \quad \int_0^a \epsilon dx = \frac{\mu}{a} F(\lambda) = \frac{\mu}{a} \cdot \left\{ \frac{A}{\lambda} 2c [\lambda \sin \lambda + \cos \lambda - 1] + \frac{B}{\lambda} 2c [\lambda \cos \lambda - \sin \lambda] + \frac{A}{\lambda^3} 4d [\lambda^3 \sin \lambda + 3\lambda^2 \cos \lambda - 6\lambda \sin \lambda - 6 \cos \lambda] + \frac{B}{\lambda^3} 4d [\lambda^3 \cos \lambda - 3\lambda^2 \sin \lambda - 6\lambda \cos \lambda + 6 \sin \lambda] + \left[\frac{4}{3} c^2 + \frac{16}{5} c d - 16 \frac{c d}{\lambda^2} + \frac{16}{7} d^2 - \frac{96}{5} \frac{d^2}{\lambda^2} \right] \right\}.$$

Löst man diese Gleichung nach μ auf: $\mu = \frac{a}{F(\lambda)} \int_0^a \epsilon dx$

und setzt diesen Wert von μ in die Gl. (44c) für M_x ein, dann erscheint $F(\lambda)$ im Nenner und wir erkennen, daß die Biegemomente unendlich groß werden bzw. daß der Bogen knickt, wenn $F(\lambda)$ zu Null wird.

Die Knickbedingung lautet also:

$$(44e) \quad F(\lambda) = 0,$$

wobei $F(\lambda)$ durch die Gl. (44d) gegeben ist.

Wenn wir die Knicksicherheit für die verschiedenen Gewölbesysteme lösen wollen, dann müssen wir die Konstanten A und B aus den Randbedingungen ermitteln.

Für den Dreigelenkbogen ergibt sich:

$$(44b) \quad \text{für } x = 0 \text{ ist } M_x = 0, \text{ hieraus: } B = \frac{2c}{\lambda^2} - 24 \frac{d}{\lambda^4}$$

für $x = a$ ist $M = 0$, hieraus:

$$A \sin \lambda + \left(\frac{2c}{\lambda^2} - 24 \frac{d}{\lambda^4} \right) \cos \lambda - \frac{2c}{\lambda^2} - 12d \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda^4} \\ A = 2c \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2 \sin \lambda} + 12d \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda^4 \sin \lambda}.$$

Für den Zweigelenkbogen ergibt sich:

$$(44g) \quad \text{für } x = 0 \text{ ist } v' = 0, \text{ hieraus: } A = 0$$

für $x = a$ ist $M_x = 0$, hieraus:

$$B = \frac{2c}{\lambda^2 \cos \lambda} + 12d \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda^4 \sin \lambda}.$$

Für den Eingelenkbogen ergibt sich:

$$(44h) \quad \text{für } x = 0 \text{ ist } M_x = 0, \text{ hieraus: } B = \frac{2c}{\lambda^2} - \frac{24d}{\lambda^4}$$

für $x = a$ ist $v' = 0$, hieraus:

$$\frac{A}{k} \cos \lambda - \frac{\sin \lambda}{k} \left(\frac{2c}{\lambda^2} - \frac{24d}{\lambda^4} \right) + \frac{2c}{a} + \frac{4d}{a} \frac{\lambda^2 - 6}{\lambda^2} \\ A = 2c \frac{\sin \lambda - \lambda}{\lambda^2 \cos \lambda} - 4d \frac{6(\sin \lambda - \lambda) + \lambda^3}{\lambda^4 \sin \lambda}.$$

Für den eingespannten Bogen ergibt sich:

$$(44i) \quad \text{für } x = 0 \text{ ist } v = 0, \text{ hieraus: } A = 0$$

für $x = a$ ist $v' = 0$, hieraus:

$$B = \frac{2c}{\lambda \sin \lambda} + 4d \frac{\lambda^2 - 6}{\lambda^3 \sin \lambda}.$$

Da die Auflösung der umfangreichen transzendenten Gleichung $F(\lambda) = 0$ nach λ sehr mühevoll ist und viel Zeit erfordert, sollen die Zahlentafeln, aus denen die Knickwerte bei beliebiger Überhöhung der Gewölbe entnommen werden können in einer ergänzenden Veröffentlichung gebracht werden. Die bisherigen Rechnungen haben aber schon gezeigt, daß durch die Überhöhung der Gewölbe die Knicksicherheiten r_s vor allem der Gewölbe

ermitteln wollen, können wir von der homogenen Differentialgleichung ausgehen, wodurch die Rechnung vereinfacht wird. Die Differentialgleichung lautet: $\frac{d^2 v^2}{dx^2} + \frac{M_x}{E J_c} = 0$, wobei für den

Verlauf der Trägheitsmomente die Beziehung $\frac{ds}{J_x} = \frac{dx}{J_c}$ bzw.

$J_c = J_x \cos \varphi$ angenommen worden war. Der Horizontalschub des Gewölbes wird bei der Verbiegung durch den Knickvorgang von H_g um ΔH auf H erhöht, zugleich entsteht durch diese Verbiegung durch die Knickung ein zusätzliches Einspannmoment M^c . Infolgedessen beträgt das bei der Knickung auftretende Biegemoment: $M_x = H v + M^c - \Delta H z$ (vgl. Abb. 18). Hierbei ist $H v$ das Moment infolge der Verbiegung, M^c ist das bei der Knickung neu entstehende Einspannmoment und $\Delta H z$ das Biegemoment infolge des neu auftretenden Schubes ΔH . Demnach ergibt sich:

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{v}{k^2} + \frac{F_x}{k^2} &= 0, \quad \text{wobei } \frac{1}{k^2} = \frac{H}{E J_c} \text{ und} \\ F_x &= \frac{M^c}{H} - \frac{\Delta H}{H} z = \frac{M^c}{H} - \mu z. \end{aligned} \right.$$

Für das überhöhte Gewölbe legen wir in üblicher Weise eine Kurve vierten Grades zugrunde. Die Gleichung für die Gewölbeordinaten lautet also:

$$z = f(1 - \delta) \frac{x^2}{a^2} + \delta \frac{x^4}{a^4} = c \frac{x^2}{a^2} + d \frac{x^4}{a^4},$$

damit ist

$$F_x = \frac{M^c}{H} - \mu \left(c \frac{x^2}{a^2} + d \frac{x^4}{a^4} \right).$$

Der Differentialgleichung (44) genügt der Ansatz:

$$v = A \sin \frac{x}{k} + B \cos \frac{x}{k} - F_x + k^2 F_x'' + k^4 F_x''''.$$

Wir trennen von den Konstanten den Faktor μ ab und erhalten:

$$(44a) \quad \left\{ \begin{aligned} v &= \mu \left[A \sin \frac{x}{k} + B \cos \frac{x}{k} + c \left(\frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{k^2}{a^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + d \left(\frac{x^4}{a^4} - 12 \frac{k^2}{a^4} x^2 + 24 \frac{k^4}{a^4} \right) \right] - \frac{M^c}{H}. \end{aligned} \right.$$

Wir setzen $\frac{a^2}{k^2} = \lambda^2$, demnach $\sin \frac{x}{k} = \sin \lambda \xi$, $\cos \frac{x}{k} = \cos \lambda \xi$, aus v folgt:

$$(44b) \quad v' = \mu \left[\frac{A}{k} \cos \frac{x}{k} - \frac{B}{k} \sin \frac{x}{k} + c \frac{2x}{a^2} + 4d \left(\frac{x^3}{a^4} - 6 \frac{x}{a^2 \lambda^2} \right) \right]$$

$$M_x = -E J_c \frac{dv^2}{dx^2} = \mu E J_c \left[\frac{A}{k^2} \sin \frac{x}{k} + \frac{B}{k^2} \cos \frac{x}{k} - \frac{2c}{a^2} - 12d \left(\frac{x^2}{a^4} - \frac{2}{a^4 \lambda^2} \right) \right], \quad \text{nun ist } \frac{E J_c}{k^2} = H, \text{ also:}$$

$$(44c) \quad \frac{M_x}{H} = \mu \left[A \sin \frac{x}{k} + B \cos \frac{x}{k} - \frac{2c}{\lambda^2} - 12d \left(\frac{x^2}{a^2 \lambda^2} - \frac{2}{\lambda^4} \right) \right].$$

mit Scheitelgelenken ganz wesentlich zurückgehen und damit zugleich die Verformungsmomente größer werden. Bei den Gewölben ohne Scheitelgelenken ist das Absinken von ν_s geringer und außerdem belanglos, weil nach Zahlentafel 30 für die Dimensionierung dieser Gewölbe die antimetrische Knickung $\nu_a = \bar{\nu}$ maßgebend ist und infolgedessen bei der vorgesehenen Sicherheit von $\bar{\nu} = 3$ der Wert von ν_s für Eigengewicht allein bei ca. $\nu_s = 6$ liegt. Bei den Gewölben mit Scheitelgelenken dagegen ist $\nu_s = \bar{\nu}$ und deshalb ist dieser Abfall von ν_s durch die Überhöhung dieser Gewölbe von wesentlicher Bedeutung, insbesondere da diese Gewölbesysteme an und für sich schon viel größere Verformungsmomente aufweisen als die ohne Scheitelgelenk. Z. B. ergibt sich bei starker Überhöhung beim Dreigelenkbogen eine Knicksicherheit von nur $\nu_s = 6,0 \frac{E J_c}{H a^2}$ gegenüber $\nu_s = 7,437 \frac{E J_c}{H a^2}$ beim Parabelbogen.

Für den Fall, daß die Überhöhung wegfällt und das Gewölbe damit eine Parabelform hat, wird $d = 0$ und $c = f$. In diesem Fall führt die allgemeine Knickbedingung der Gl. (44e) wiederum auf die im Abschnitt 4 für die einzelnen Bogenarten abgeleiteten Knickbedingungen.

Bei den Gewölben ohne Scheitelgelenk ist die Konstante $A = 0$ und damit hat nach Gl. (44c) die Momentenlinie der Knickwelle des Parabelbogens die Form einer Cosinuslinie, die, wie aus dieser Gleichung zu ersehen ist, für den Fall eines überhöhten Gewölbes durch eine parabelförmige überlagert wird, die sich als zweite Ableitung der Gewölbekurve z (Kurve vierter Ordnung) ergibt. Dies gilt ganz allgemein für jede beliebige Gewölbeform, immer ist die Momentenlinie der Knickwelle eine trigonometrische Funktion überlagert durch die zweite Ableitung der Gewölbekurve. (Voraussetzung ist naturgemäß die Bedingung $I_c = I_x \cos \varphi$.) Bei den Gewölben mit Scheitelgelenken treten dagegen beide Konstanten A und B auf, infolgedessen ist die Momentenlinie aus einer Cosinus- und Sinuslinie zusammengesetzt.

Damit ist nun sehr leicht zu erklären, warum beim Dreigelenkbogen die Differentialgleichung eine größere Knicklänge ergibt als die Gelenkentfernung. Belastet man einen geraden Balken durch ein Moment M_{n-1} , dann ergibt sich daraus nach den früheren Darlegungen ein Erregungsmoment $M_n = \frac{M_{n-1}}{\nu_s}$ und aus M_n wieder ein Moment $M_{n+1} = \frac{M_n}{\nu_s}$ usw. Das Maß der Abdämpfung von einem Erregungsmoment zum nächsten ist durch die Knicksicherheit ν_s gekennzeichnet. Bei dem Dreigelenkbogen ist aber die Abdämpfung viel geringer als bei dem geraden Balken. Die Durchbiegungen infolge des Momentes M_{n-1} sind zwar bei dem Balken und bei dem Dreigelenkbogen gleich groß, aber infolge der Verbiegung der Bogenschenkel ergibt sich eine Scheitelsenkung und damit beim Parabelbogen ein zusätzliches Moment $H_g \frac{\Delta f_0}{4}$. Das durch M_{n-1} neu erregte Moment M_n ist also im Gegensatz zum Balken nicht nur von der Durchbiegung, sondern auch von der Scheitelsenkung abhängig und deshalb ist die Abdämpfung von M_{n-1} zu M_n beim Dreigelenkbogen geringer und damit auch die Knicksicherheit. Die Differentialgleichung hat keine andere Möglichkeit als diesen Vorgang durch eine größere Knicklänge ($l_k = 1,151a$) kenntlich zu machen, die wir deshalb als eine ideelle Knicklänge betrachten müssen. Der Vorgang ist in der Abb. 28 dargestellt. Die tatsächliche Knicklänge $l_k = a$ wird durch eine Überlagerung einer Cosinus- und einer Sinusschwingung mit den ideellen Knicklängen $l'_k = 1,152a$ dargestellt, deren Differenz eine Knicklänge $l_k = a$ ergibt, aber mit einer gegenüber einer einfachen Sinusschwingung vergrößerten Amplitude.

Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse auch beim Eingelenkbogen. Hier ergab sich aus der Differentialgleichung eine ideelle Knicklänge von $l'_k = 0,948a$, während die tatsächliche Knicklänge nur ca. $l_k \approx 0,75a$ beträgt (Abb. 29). Auch bei dem Eingelenkbogen ergeben sich aus den Verbiegungen der Bogenschenkel Senkungen des Scheitelgelenkes, die ein Absacken der Seillinie zur Folge haben und damit zusätzliche Momente und Verbiegungen hervorrufen, wodurch die Abdämpfung von M_{n-1} zu M_n wesentlich verringert

wird. Infolgedessen ergeben sich aus der Differentialgleichung auch hier größere ideelle Knicklängen und erst durch die Überlagerung einer Sinus- und einer Cosinusschwingung entsteht die tatsächliche Knicklänge von $l_k \approx 0,75a$.

Bei den Gewölben ohne Scheitelgelenken kommt dagegen die Differentialgleichung mit einer Cosinusschwingung aus, ein Zeichen dafür, daß bei diesen Gewölben keine zusätzlichen Erregungen durch das Absacken der Seillinie hinzu kommen, hier stimmen deshalb auch die Knicklängen der Diff.Gl. mit den tatsächlichen überein.

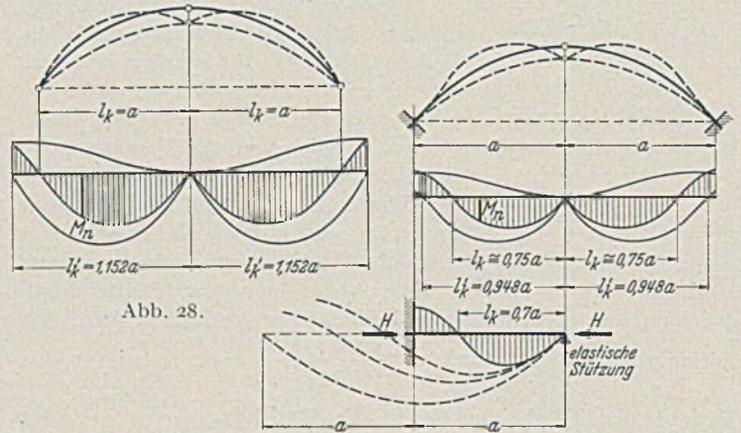


Abb. 28.

Abb. 29 und 29a.

Vergleicht man aber die Knickwerte dieser Gewölbe mit denen von Balken gleicher Randbedingungen, so zeigt sich, daß bei der symmetrischen Knickung die Gewölbe geringere Knicksicherheiten und größere Knicklängen haben. Diese Tatsache ist leicht zu verstehen. Die Abb. 24a zeigt die symmetrische Knickung des eingespannten Bogens mit der zugehörigen Momentenlinie. Infolge der Symmetrie der Knicklinie ist der Bogen im Scheitel fest eingespannt. Er wirkt also wie ein Balken mit der halben Spannweite a , dieser hat aber bekanntlich eine Knicksicherheit von $\nu = 4\pi^2 \frac{E J}{H a^2}$ und damit eine Knicklänge von $l_k = 0,5a$, während wir für den eingespannten Bogen aus der Differentialgleichung nur einen Wert von $\nu_s = 33,21 \frac{E J_c}{H a^2}$ und damit eine etwas größere Knicklänge von $l_k = 0,545a$ erhalten hatten. Das hängt damit zusammen, daß der Bogen im Scheitel in senkrechter Richtung nicht unverschieblich, sondern elastisch gelagert ist und infolgedessen wirkt er wie ein eingespannter Balken mit der Spannweite a aber mit elastischer Stützung.

Die gleiche elastische Auflagerung besitzt auch der Eingelenkbogen. Infolge der Einspannung am Kämpfer wirkt er wie ein einseitig eingespannter Balken mit der Spannweite a , der bei starrer Auflagerung eine Knicklänge von $l_k = 0,7a$ besitzt. Bei elastischer Auflagerung vergrößert sich die Knicklänge. Die Abb. 29a zeigt in den gestrichelten Linien den Einfluß der elastischen Lagerung auf die Knicklänge. Beim Eingelenkbogen vergrößert sich hierdurch die Knicklänge von $0,7a$ auf ca. $0,75a$, während die Vergrößerung von $l_k = 0,75a$ auf $l'_k = 0,948a$ wie oben erwähnt, eine Folge der zusätzlichen Erregung durch das Absinken der Seillinie ist.

Nachstehend sind nun die Knickwerte ν_s der einzelnen Gewölbe nochmals angegeben und darunter die dazugehörigen Balken mit gleichen Randbedingungen.

| | Dreigelenk- | Zweige- | Einge- | eingespannter | |
|------------------|-------------|-----------|-----------|---------------|-------------------------|
| | bogen | lenkbogen | lenkbogen | Bogen | |
| Bogen | 7,437 | 21,96 | 10,983 | 33,21 | } $\frac{E J_c}{H a^2}$ |
| Balken | 9,87 | 20,19 | 20,19 | 39,48 | |

Die Zahlentafel zeigt, daß beim Eingelenkbogen der Abfall gegenüber dem zugehörigen Balken gleicher Auflagerung mit 45% am größten ist. An zweiter Stelle steht der Dreigelenkbogen mit 25% Abfall, dann folgt der eingespannte mit 16%, ganz auffallend ist aber das Verhalten des Zweigelenkbogens, bei dem sogar eine kleine

Verbesserung gegenüber dem Balken vorliegt, indem die Knicklänge von 0,7a beim Balken auf $1/3 = 0,67a$ zurückgeht. Das gleiche günstige Verhalten zeigt der Zweigelenkbogen auch gegenüber den Verformungsmomenten.

9. Die Methoden zur Erzielung einer günstigen Verteilung bzw. eines Ausgleichs der Biegemomente durch künstliche Verformung der Bogenachse.

Es ist einerseits zu untersuchen, inwieweit die sich sehr ungünstig auswirkenden Balkenmomente ($H_e + H_w + H_s$)_z aus der elastischen Verkürzung des Bogens, dem Widerlagerausweichen und aus dem Schwinden, und andererseits ob die zusätzlichen Momente aus der elastischen Verformung durch eine künstliche Verformung der Bogenachse beseitigt werden können. Das erste Problem wird im Abschnitt a und das zweite in Abschnitt b besprochen werden.

a) Die Beeinflussung der Balkenmomente aus der Bogenzusammendrückung und Schwinden und einer Widerlagerausweichung durch künstliche Verformung der Bogenachse.

Die positiven und negativen Biegemomente aus Verkehrslast sind beim Parabelbogen gleich groß. Dasselbe gilt auch für die Temperaturmomente. Einseitige Momente entstehen in den verschiedenen Bogenquerschnitten nur durch die Balkenmomente aus der Bogenzusammendrückung, dem Ausweichen der Widerlager und dem Schwinden, wodurch sich für den Scheitel positive und für den Kämpfer negative Momente ergeben. Die Abb. 30, die einer

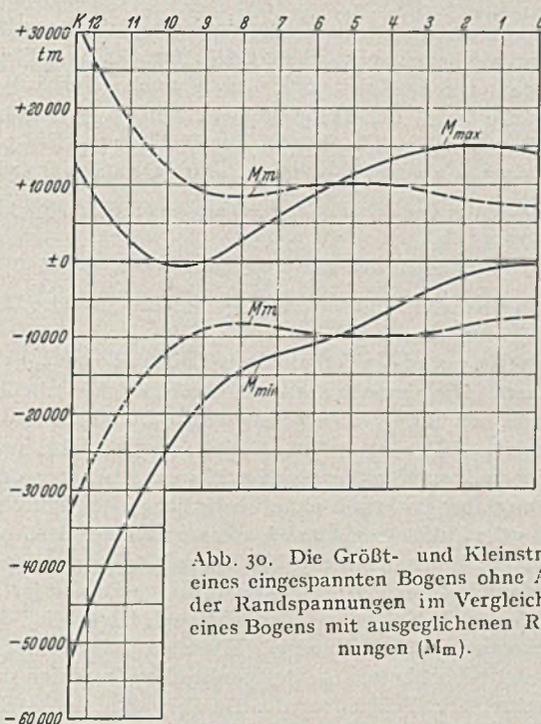


Abb. 30. Die Größt- und Kleinstmomente eines eingespannten Bogens ohne Ausgleich der Randspannungen im Vergleich zu den eines Bogens mit ausgeglichenen Randspannungen (M_m).

früheren im „Bauingenieur“ erschienenen Arbeit⁶ entnommen ist, zeigt die maximalen und minimalen Biegemomente des Entwurfs einer 400 m weitgespannten Brücke. Durch die Einwirkung der Balkenmomente aus Bogenzusammendrückung und Schwinden werden die negativen Momente im Scheitel fast vollständig beseitigt und die positiven werden verdoppelt. Umgekehrt liegen die Verhältnisse am Kämpfer, wo die negativen Momente stark anwachsen. Bei vollständigem Ausgleich würden sich daraus die gestrichelten Momentenlinien ergeben. Dieser günstige Ausgleich der Momente wurde erreicht durch Zugrundelegen eines provisorischen verformten Dreigelenkbogens. Für den Stahlbogen behält das dort gezeigte Verfahren des Ausgleichs der Momente seine

⁶ Dischinger, Fr.: Untersuchungen über weitgespannte Massivbogenbrücken „Bauingenieur“ 16 (1935) S. 125.

Gültigkeit, es müßte allerdings noch ergänzt werden durch die Mitberücksichtigung der elastischen Verformung und zwar sowohl bei dem provisorischen Dreigelenkbogen als auch bei dem endgültigen System des eingespannten Bogens. Bei den Beton- oder Eisenbetonbogenbrücken, bei denen sich im Gegensatz zu den Stahlbrücken diese Verformungen nicht genau bestimmen lassen, weil wir die genauen Werte des Elastizitätsmoduls und des Kriechmaßes nicht kennen, hat das angegebene Verfahren auf Grund der Erkenntnisse des nachfolgenden Abschnittes III über den Einfluß der plastischen Verformung keine wesentliche Bedeutung mehr. Es empfiehlt sich, den Bogen sofort als eingespanntes System herzustellen.

Wir wollen nun auf Grund der Erkenntnisse, die sich aus den Untersuchungen aus der elastischen Verformung ergeben haben klarlegen, inwieweit sich der ungünstige Einfluß der Balkenmomente aus Bogenzusammendrücken, Schwinden und Widerlagerausweichen ausgleichen läßt. Durch die elastische Verformungen werden nach Abb. 14 die positiven Momente im Scheitel noch weiter vergrößert, während die negativen Einspannmomente aus der Balkenwirkung abgebaut werden. Die elastischen Verformungen sind also für den Kämpferquerschnitt günstig.

Wenn wir zum Ausgleich der Biegemomente den Bogen verformen, dann werden dadurch immer wieder Momente ausgelöst, die gemäß den früheren Ausführungen annähernd die Form der Knicklinie haben. Eine klare Übersicht über die Einwirkung der Verformung auf die Bogenachse kann man nur gewinnen, wenn man eine solche Verformung wählt, die einen Momentenverlauf auslöst, der genau nach der Momentenlinie der Knickwelle verläuft, weil, wie wir gesehen haben, ein solcher Momentenverlauf wiederum ein gleichartiges, dazu affines Moment auslöst. Bei der Ermittlung der Werte der Verformungsmomente und der Knicksicherheit mittels der stufenweisen Annäherung, die bei den Bogensystemen mit veränderlichem Trägheitsmomente allein zum Ziele führt, ergibt sich diese der Knicklinie entsprechende Momentenlinie ohne weiteres. Aus dieser Momentenlinie (M_n) errechnen wir durch zweimalige Integration die zugehörigen Durchbiegungen v_n und verformen nun den Bogen um diese Maße bzw. dazu proportional. Aus der Verformung erhalten wir dann ein zu M_n affines Moment, aber nicht von gleicher Größe, weil die Momente aus der künstlichen Verformung noch durch die elastische Verformung vergrößert werden. Das Maß der Vergrößerung ist durch die am Anfang der Arbeit abgeleitete Gl. (3a) gegeben. Demnach ergibt sich aus der künstlichen Verformung der Bogenachse mittels M_n ein Moment:

$$45) \quad M_D = M_n \frac{v_s}{v_{s-1}}$$

Auf Grund dieser Erkenntnisse können wir nun die Momente des durch sein Eigengewicht belasteten Bogens zielbewußt in einem gewissen Maß und in einer gewissen Richtung beeinflussen.

In der Abb. 31 sind die drei statisch unbestimmten Bogensysteme aufgetragen und darunter der Verlauf der Verkehrslastmomente, wie sie sich aus der üblichen Berechnung aus der Elastizitätstheorie ergeben, d. h., ohne elastische Verformungen (für den Sonderfall des Parabelbogens ist bekanntlich $M_{pmax} = M_{pmin}$, bei den gegenüber der Parabel überhöhten Bögen dagegen bestehen zwischen diesen beiden Momenten geringe Unterschiede). Durch die elastische Verformung vergrößern sich diese Momente und zwar um so mehr, je geringer die Knicksicherheit ist. Für den wichtigsten Belastungsfall der halbseitigen Verkehrsbelastung wurden hierfür allgemein gültige Gleichungen und zwar für den Scheitel, die Viertelspunkte und den Kämpfer entwickelt, so daß damit die tatsächlichen Momente errechnet werden können. In der nächsten Reihe sind die Balkenmomente M_{og} angegeben, die sich aus der Bogenverkürzung und infolge der Eigengewichtsdruckspannungen bzw. dem Widerlagerausweichen, der Temperatur und dem Schwinden ergeben, und zugleich auch die tatsächlichen Momente M_g bei Berücksichtigung der elastischen Verformung. Diese letzteren können wir nun durch die in der zweituntersten Reihe angegebenen

Momente $M_D = M_n \frac{v_s}{v_{s-x}}$ die aus der Knicklinie folgen, im positiven oder negativen Sinn, entsprechend der angezogenen oder der gestrichelten Linie, beeinflussen. Wollen wir z. B. beim eingespannten Bogen das positive Scheitelmoment durch ein zusätzliches negatives M_D vermindern, dann müssen wir in Kauf nehmen, daß auch das Kämpfermoment in der gleichen Richtung beeinflußt wird.

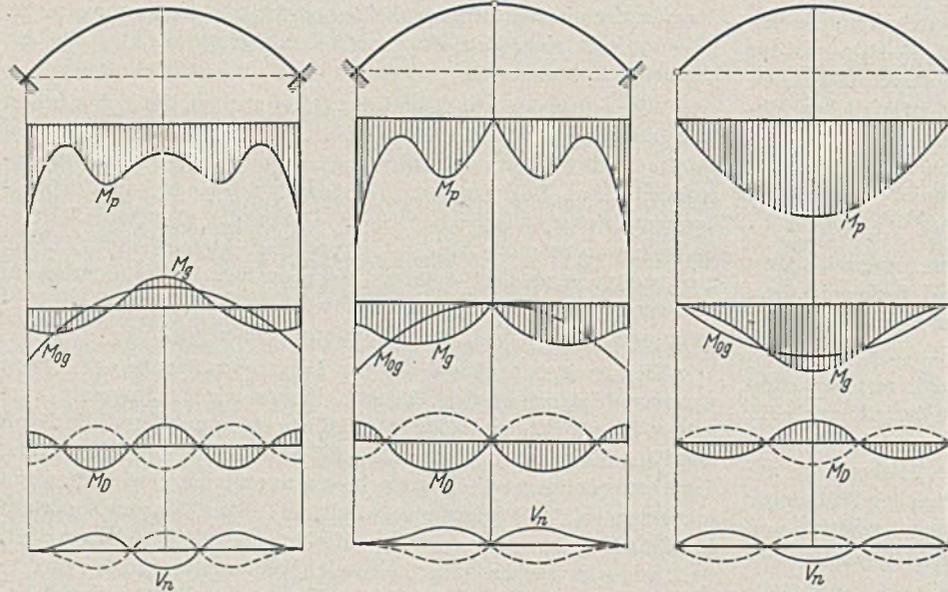


Abb. 31.

Da die Momente M_D bzw. M_n einen ganz ähnlichen Verlauf haben wie die zusätzlichen Momente $M_z = M - M_0$ aus der elastischen Verformung, können wir die Momente M_z zu einem großen Teil durch eine künstliche Verformung der Bogenachse beseitigen, jedoch nicht ganz, denn aus der Gl. (41) haben wir ersehen, daß die zusätzlichen Momente M_z sich aus zwei verschiedenen Funktionen $\varphi_2(\xi)$ und $\varphi_3(\xi)$ zusammensetzen, von denen der Teil $\varphi_2(\xi)$ dem Moment M_n proportional ist und demnach durch eine künstliche Verformung der Bogenachse ausgeschaltet werden kann, während dies bei der Störungsfunktion $\varphi_3(\xi)$ nicht der Fall ist.

In der untersten Reihe sind die Verbiegungslinien v_n infolge von M_n angegeben. Um diese Masse v_n muß die Bogenachse gehoben oder gesenkt werden. Will man demnach bei dem eingespannten Bogen das Scheitelmoment verringern, dann muß man die Bogenachse im Viertelpunkt senken, damit ergibt sich in der Nähe der Viertelpunkte eine Verflachung und am Scheitel und am Kämpfer eine verstärkte Krümmung, bzw. umgekehrt, wenn man die Scheitelmomente vergrößern und die Kämpfermomente entlasten will. Ähnlich liegen die Verhältnisse auch beim Zweigelenkbogen. Will man hier die Scheitelmomente verringern, dann verflacht man die Schenkel und gibt dem Scheitel eine stärkere Krümmung bzw. umgekehrt, wenn man die Momente im Scheitel vergrößern und die in den Viertelpunkten verkleinern will.

Wir erkennen also, daß eine künstliche Verformung der Bogenachse nur dann Zweck hat, und daß man diese zielbewußt nur dann durchführen kann, wenn die Verformungen entsprechend den Knickwellen vorgenommen werden. Die ungünstigen Wirkungen der Balkenmomente, durch die sich die ungleichartige Verteilung der maximalen und minimalen Momente gemäß Abb. 30 ergeben hatte, können nicht beseitigt werden. Wir können zwar mit den in Abb. 31 angegebenen Momentenlinie M_D eine Verlagerung erreichen in der Weise, daß wir den Scheitel entlasten, wodurch der Kämpfer ungünstiger beansprucht wird bzw. umgekehrt; mehr aber läßt sich durch eine künstliche Verformung der Bogenachse niemals erreichen.

Bei den bisherigen Untersuchungen über die Beeinflussung der Biegemomente des Bogens und insbesondere der Balken-

momente durch eine künstliche Verformung der Bogenachse sind wir von den Knickwellen ausgegangen, die wir aus der Differentialgleichung bzw. der stufenweisen Annäherung gewonnen hatten. Für den eingespannten Bogen ergaben sich aus Gl. (29), indem wir den Nenner $N = 3 \lambda \cos \lambda + \sin \lambda (\lambda^2 - 3) = 0$ setzen ein Wert von $\lambda = 5,763$ und damit eine freie Knicklänge von $l_K = 0,545a$. Dieser Bedingung genügen aber auch noch andere Werte von λ die zu kleineren Werten von l_K und damit zu größeren Knicksicherheiten

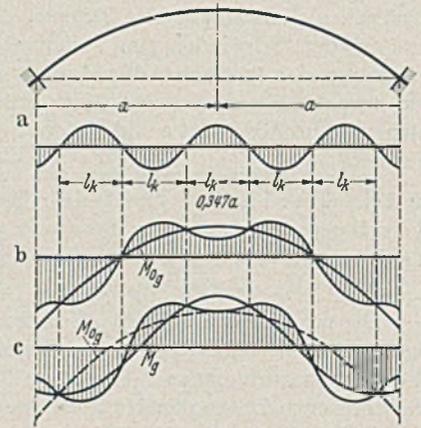


Abb. 32a bis c.

führen, die allerdings für die Dimensionierung nicht maßgebend sind, analog wie bei einem gelenkig gelagerten Stab, an Stelle der maßgebenden freien Knicklänge $l_K = a$ auch Werte $l_K = a/n$ (n eine ganze Zahl) der Differentialgleichungen genügen. Der nächstgrößere Wert von λ , welcher der Bedingung $N = 3 \lambda \cos \lambda + \sin \lambda (\lambda^2 - 3) = 0$ genügt, beträgt $\lambda = 9,07$, entsprechend einer freien Knicklänge von $l_K = \frac{\pi a}{\lambda} = 0,347a$ und einer Knicksicherheit von $r_s = 82,3 \frac{EJc}{Ha^2}$. Der Differentialgleichung genügen naturgemäß auch noch kleinere Werte von l_K , die aber für diese Betrachtungen bedeutungslos sind.

In der Abb. 32a ist der Verlauf dieser Knickwelle mit $l_K = 0,347a$ aufgezeichnet. Wie hieraus zu ersehen, ergeben sich hierbei für den Scheitel und den Kämpfer entgegengesetzte Momente und es erscheint damit das Problem gelöst zu sein, wie erwünscht, im Scheitel negative und am Kämpfer positive Momente zu erzeugen. Daß diese Lösung aber praktisch ohne wesentliche Bedeutung für die Beseitigung der Balkenmomente ist, erkennen wir aus der Abb. 32b, in welcher die Balkenmomente bei Vernachlässigung der elastischen Verformung mit den Biegemomenten aus dieser Knickwelle überlagert sind. Zwar werden hierdurch tatsächlich die Biegemomente am Scheitel und am Kämpfer kleiner, aber in den dem Scheitel benachbarten Achtelpunkten ergeben sich dadurch unerwünschte zusätzliche Momente. Da aber an diesen Stellen zugleich auch, wie aus Abb. 31a zu ersehen, größere Verkehrslastmomente auftreten, dürfte eine Beeinflussung der Balkenmomente mit den Biegemomenten der Knickwelle $l_K = 0,347a$ im allgemeinen ohne großen Wert sein. In der Abb. 32c sind in gleicher Weise die Balkenmomente einschließlich der elastischen Verformung M_g mit den Biegemomenten dieser Knickwelle $l_K = 0,347a$ überlagert. Die Ergebnisse sind im wesentlichen die gleichen wie bei der Abb. 32b, nur erhalten wir hierbei größere Scheitel- und geringere Kämpfermomente.

Zusammenfassend möchte ich feststellen, daß eine Beseitigung der Balkenmomente $(H_e + H_w + H_s)z$ durch eine künstliche Verformung der Bogenachse unmöglich ist entgegen manchen in der Literatur sich findenden Behauptungen. Man kann mit Hilfe der Biegemomente der einzelnen Knickwellen wohl eine Verlagerung im Verlauf dieser Momente herbeiführen, aber jede Verbesse-

ung im Scheitel führt zu ungünstigeren Momenten am Kämpfer und an den dem Scheitel benachbarten Zonen. Zu ähnlichen Ergebnissen allerdings bei Vernachlässigung der elastischen Verformung führt auch das von M. Ritter angegebene Verfahren mittels virtueller Zusatzlasten, wenn sich damit auch die Einflüsse der Verformung nicht genau ermitteln lassen. Das ist nur möglich, wenn man entsprechend den obigen Darlegungen die Ordinaten der Verformung der Bogenachse aus der Knicklinie errechnet, denn nur in diesem Fall läßt sich der Einfluß der Verformung der Bogenachse auf die Biegemomente genau bestimmen.

Eine Verbesserung gegenüber dem in Abb. 30 dargestellten Verlauf der maximalen und minimalen Momente durch Beseitigung der erwähnten Balkenmomente kann nur durch äußere Eingriffe mittels hydraulischer Pressen erreicht werden⁷. Diese Methoden sind bekannt, so daß ich darauf nicht näher einzugehen brauche. Bei dem eingespannten Bogen beseitigt man den Einfluß der Bogenzusammendrückung und teilweise auch den des Schwindes und des Widerlagerausweichens durch Auspressen des Gewölbes vom Scheitel aus und bei dem Zweigelenkbogen durch Ausziehen und Verkürzen der Zugbänder mittels hydraulischer Pressen. Für die Stahlbrücken behalten diese Verfahren nach wie vor ihre Gültigkeit; inwieweit sie bei den Betonbrücken durch die plastischen Verformungen (Kriechen) beeinflusst werden, geht aus den Entwicklungen des nachfolgenden Abschnittes III hervor.

b) Die Beseitigung der zusätzlichen Biegemomente aus der elastischen Verformung durch eine künstliche Verformung der Bogenachse.

Während es nach den Darlegungen des vorhergehenden Abschnittes unmöglich ist, die Balkenmomente durch eine künstliche Verformung der Bogenachse zu beseitigen, ist die für die zusätzlichen Biegemomente aus der elastischen Verformung, durch welche nach Abb. 14 die Balkenmomente überlagert und vergrößert werden, ohne weiteres möglich. Hierzu müssen wir uns etwas genauer mit den verschiedenen möglichen Knicklinien befassen. Unseren Untersuchungen legen wir den eingespannten Bogen zugrunde, jedoch gelten sie auch in gleicher Weise für alle anderen Bogensysteme. Der Knickbedingung Gl. 29 $\sin \lambda (\lambda^2 - 3) + 3 \lambda \cos \lambda = 0$ genügen eine Reihe von immer größeren Werten λ , denen ständig kleinere freie Knicklängen l_K entsprechen. Die vier kleinsten Werte von λ bzw. die vier größten Werte l_K der freien Knicklänge mit den zugehörigen Knicksicherheiten sind nachstehend angegeben:

| | | | | |
|---------------------------------------|--|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| | $\lambda_1 = 5,763$ | $\lambda_2 = 9,07$ | $\lambda_3 = 9,73$ | $\lambda_4 = 15,50$ |
| $l_K = \pi \frac{a}{\lambda}$ | $l_{K1} = 0,545a$ | $l_{K2} = 0,347a$ | $l_{K3} = 0,323a$ | $l_{K4} = 0,202a$ |
| $\nu_s = \pi^2 \frac{E J_c}{H l_K^2}$ | $\nu_{s1} = 33,21 \frac{H J_c}{H a^2}$ | $\nu_{s2} = 82,3 \frac{H J_c}{H a^2}$ | $\nu_{s3} = 94,7 \frac{E J_c}{H a^2}$ | $\nu_{s4} = 240 \frac{H J_c}{H a^2}$ |

Für die symmetrische Knickung ist, wie schon früher dargelegt, der Größtwert $l_{K1} = 0,545a$ maßgebend. Die Biegemomente der einzelnen Knickwellen sind in der Abb. 33 aufgezeichnet, wir sehen daraus, daß nur bei der ersten Knickwelle im Scheitel und am Kämpfer gleichgerichtete, bei allen folgenden dagegen entgegengesetzte Momente erzeugt werden. Durch die Biegemomente dieser Knickwellen werden, wie schon früher dargelegt, die Bedingungen Gl. 42 und 42a erfüllt.

Aus Gl. 43a $M = M_{00} [\Phi_0(\xi) + \Phi_1(\xi) + \Phi_R(\xi)]$ hatten wir ershen, daß die gesamten Biegemomente aus Eigengewicht sich aus drei Teilen zusammensetzen. Der erste Teil $M_{00} \Phi_0(\xi)$ enthält die Balkenmomente, die für unsere Betrachtungen außer acht bleiben, da wir ja nur die zusätzlichen Biegemomente aus der elastischen Verformung beseitigen wollen, von denen der Teil

$M_{00} \Phi_1(\xi)$ affin ist den Biegemomenten der ersten Knickwelle und infolgedessen der Bedingung Gl. 42 und 42a genügt. Dasselbe gilt aber auch, wie im Abschnitt 7 dargelegt, für die Restfunktion $M_{00} \Phi_R(\xi)$. Infolgedessen muß es möglich sein, diese Restmomente durch die Biegemomente der Knickwellen l_{K2} bis l_{Kn} auszudrücken, in ähnlicher Weise wie bei einer harmonischen Analyse an deren Stelle jetzt eine Analyse durch Eigenfunktionen tritt. Wir wollen dies an einem Beispiel zeigen. Die Funktion $M_{00} \Phi_R(\xi)$ enthielt außer den Biegemomenten aus der elastischen Verformung noch Biegemomente aus dem Abweichen der

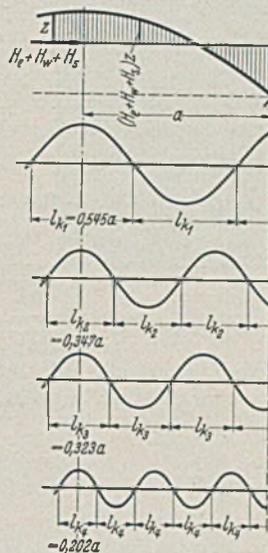


Abb. 33. Die Momentenlinie der verschiedenen symmetrischen Knickwellen eines eingespannten Bogens.

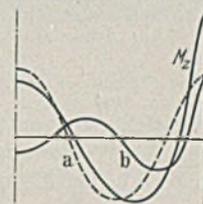


Abb. 33 a.

Stützlinie gegenüber der Bogenachse. Diese letzteren können wir außer acht lassen, denn wir können sie ja sofort beseitigen, wenn wir der Bogenform die Stützlinie zugrunde legen. Wir wollen nun für einen eingespannten Bogen mit einer Knicksicherheit von $\bar{\nu} = 3$ (antimetrisches Knicken) diese Restfunktion ermitteln. Diesem Wert $\bar{\nu} = 3$ entspricht nach der Zahlentafel ein Wert für symmetrisches Knicken von $\nu_s = 3,0 \frac{23,21}{20,19} = 4,935$ und $\lambda^2 = \frac{33,21}{4,935} = 6,73$. Diesem Wert von λ^2 setzen wir nun in den Gleichungen für die zusätzlichen Biegemomente aus der stufenweisen Annäherung (II, 3b) ein und fassen diese einzelnen Zusatzmomente entsprechend den Darlegungen zu Gl. 40 zusammen und zwar in einem Teil, welcher den Biegemomenten der Knicklinie l_{K1} affin ist und einen zweiten, welcher der Restfunktion $M_{00} \Phi_R(\xi)$ entspricht. Wir erhalten:

$$M_{00} \Phi_1(\xi) = \frac{H e f}{10} [0,76 - 11,67 \xi^2 + 31,85 \xi^4 - 34,13 \xi^6 + 18,78 \xi^8 - 5,76 \xi^{10} + 1,02 \xi^{12} - 0,08 \xi^{14}]$$

$$M_{00} \Phi_R(\xi) = \frac{H e f}{10} [-0,145 + 5,015 \xi^2 - 22,61 \xi^4 + 32,04 \xi^6 - 18,53 \xi^8 + 5,84 \xi^{10} - 1,016 \xi^{12} + 0,078 \xi^{14}]$$

In der Abb. 33 a sind die gesamten Zusatzmomente $M_z = M_{00} [\Phi_1(\xi) + \Phi_R(\xi)]$ sowie die beiden Einzelteile aufgetragen (Linie a und b). Wir sehen daraus, daß das Restmoment $M_{00} \Phi_R(\xi)$ (Linie b) durch eine Summierung der Biegemomente aus den Knickwellen l_{K2} bis l_{Kn} dargestellt werden kann. Diese umfangreiche Rechnung zur Ermittlung der verschiedenen Knickwellen brauchen wir jedoch nicht durchzuführen, es genügt, wie wir sehen werden, die Erkenntnis, daß die Restfunktion ebenfalls durch die Biegemomente aus den Knickwellen dargestellt werden kann. Wir können demnach Gl. 43a auch in der Form anschreiben

$$(43b) \quad M = M_{00} \Phi_0(\xi) + M_z = M_{00} \Phi_0(\xi) + M_{00} [\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\xi) + \dots \Phi(\xi)]$$

wobei durch Φ_0 die Balkenmomente und durch Φ_1, Φ_2, Φ_3 usw. die Momente dargestellt sind, die den Biegemomenten der einzelnen Knickwellen l_{K1}, l_{K2}, l_{K3} usw. affin sind. Berechnen wir nun die Durchbiegungen aus diesen Biegemomenten, z. B. für $M_{z3} = M_{00} \Phi_3(\xi)$ und verformen entsprechend diesen Durchbiegungen die Bogenachse, dann ergibt sich nach Gl. 44 ein Moment

⁷ Färber: Der Gewölbebau, neue Hilfsmittel für Berechnung und Bauausführung, Berlin 1916.

Dischinger, Fr.: Beseitigung der zusätzlichen Biegemomente im Zweigelenkbogen mit Zugband, Band I der „Abhandlungen“ der I.V.B.H., Zürich 1932.

$M_D = M_{z3} \frac{\nu_{s3}}{\nu_{s3}-1}$ Wenn wir demnach das Zusatzmoment M_{z3} beseitigen wollen, dann müssen wir die Durchbiegungen aus einem Moment $M_{z3} \frac{\nu_{s3}-1}{\nu_{s3}}$ ermitteln. Die gesamten zusätzlichen Biegemomente aus der elastischen Verformung können wir demnach beseitigen, wenn wir die Bogenachse entsprechend den Durchbiegungen verformen, die sich aus dem nachstehenden Moment M'_z ergeben:

$$(45a) \quad M'_z = M_{00} \left[\Phi_1(\xi) \frac{\nu_{s1}-1}{\nu_{s1}} + \Phi_2(\xi) \frac{\nu_{s2}-1}{\nu_{s2}} + \dots + \Phi_n(\xi) \frac{\nu_{sn}-1}{\nu_{sn}} \right]$$

Die Ermittlung der einzelnen Knickwellen ist insbesondere bei Bogen mit veränderlichem Trägheitsmoment mit einer sehr umfangreichen Arbeit verbunden, durch die das Verfahren praktisch unbrauchbar werden würde. Die Ermittlung der weiteren Knickwellen l_{K2} bis l_{Kn} ist aber glücklicherweise gar nicht notwendig, weil die Werte $\frac{\nu_{sn}-1}{\nu_{sn}}$ sehr rasch zu 1 konvergieren. Bei unserem Zahlenbeispiel ergibt sich $\nu_{s1} = 4,935$, $\nu_{s2} = 12,25$, $\nu_{s3} = 13,0$, $\nu_{s4} = 35,6$ und damit wird $\frac{\nu_{s1}-1}{\nu_{s1}} = 0,80$, $\frac{\nu_{s2}-1}{\nu_{s2}} = 0,92$, $\frac{\nu_{s3}-1}{\nu_{s3}} = 0,925$, $\frac{\nu_{s4}-1}{\nu_{s4}} = 0,975$. Wenn wir näherungsweise $\frac{\nu_{s2}-1}{\nu_{s2}}$, $\frac{\nu_{s3}-1}{\nu_{s3}}$ usw. gleich 1 setzen, dann können wir das Moment, das wir der künstlichen Verformung der Bogenachse zugrunde legen müssen, in der einfachen Form anschreiben

$$(45b) \quad M'_z = M_{00} [\Phi_1(\xi) \frac{\nu_{s1}-1}{\nu_{s1}} + \Phi_R(\xi)].$$

Der Fehler, der mit dieser Näherung verbunden ist, ist sehr klein, denn der größere Teil von M ist, wie aus Abb. 13a zu ersehen, durch $M_{00} \Phi_1(\xi)$ (Linie a) gedeckt und demnach in den Gl. 45a ge-

nau berücksichtigt. Die Ungenauigkeiten bei der Restfunktion $M_{00} \Phi_R(\xi)$ betragen ca. 8%, aber bezogen auf das gesamte Moment M_z ist dieser Einfluß sehr gering und beträgt nur wenige Prozent. Durch diese geringe Ungenauigkeit ist es uns gelungen, eine einfache Berechnungsweise für die Beseitigung der zusätzlichen Biegemomente zu erhalten, für die nur der Verlauf der Knickwelle l_{K1} benötigt ist, den wir mittels der stufenweisen Annäherung mit geringer Rechenarbeit erhalten. Abb. 33 bestätigt uns nochmals, daß es niemals möglich sein kann, die Balkenmomente zu beseitigen. Denn eine Beseitigung von Momenten kann nur mit Hilfe einer Verformung nach den Knickwellen erfolgen. Die Knickwelle l_{K1} mit der größten Periode hat aber annähernd nur eine halb so große Periode wie die Balkenmomente und infolgedessen kann man mit den Knickwellen niemals die Balkenmomente beseitigen, sondern man kann nur eine Umlagerung erreichen.

In einem späteren Aufsatz werde ich das Rechenverfahren bei beliebiger Bogenform und beliebigem Verlauf der Trägheitsmomente an Hand von Beispielen zeigen. Hierzu müssen wir, wie schon erwähnt, die Ordinaten z der Bogenachse desgleichen auch den Verlauf der Trägheitsmomente durch Polynome darstellen, wobei es durchaus nicht notwendig ist, die Annäherung mit den wirklichen Verhältnissen bis auf die Spitze zu treiben, wenn diese Polynome nur einigermaßen richtig den Verlauf wiedergeben, erhält man für die Verformungsmomente und für die evtl. Verformung der Bogenachse hinreichend genaue Werte.

Auf den bisherigen Untersuchungen über die elastischen Verformungen bauen sich nun die Untersuchungen des Abschnittes III über den Einfluß der plastischen Verformungen auf. Die Grundlage bildet hierbei immer wieder die stufenweise Berechnung der Biegemomente aus der elastischen Verformung, aus denen sich dann ohne wesentliche Schwierigkeiten die Einflüsse der plastischen Verformungen ergeben. (Fortsetz. folgt.)

KURZE TECHNISCHE BERICHTE.

Über den Einfluß der Querkraft auf die Knicklast eines Stabes.

1. Bei der Berechnung der Knicksicherheit gedrückter Stäbe pflegt man praktisch keine Rücksicht auf die bei der Ausbiegung auftretende Querkraft zu nehmen, weil sie zahlenmäßig fast ohne Bedeutung ist. Die Größe dieser Querkraft ist wegen $M = Py$ und $Q = \frac{dM}{dx}$ gleich $P \frac{dy}{dx}$, wo P die Axialkraft, y die Ausbiegung, x die Koordinate in Stabrichtung bedeuten. Den Einfluß dieser Querkraft hat F. Engesser bereits im Jahre 1891 festgestellt¹. Später haben F. N u ß b a u m² und S. T i m o s h e n k o³ ebenfalls diesen Querkrafteffekt berücksichtigt. Es ergibt sich, daß die Querkräfte die Knicklast P_k , wenn auch nur unerheblich, vermindern und zwar ist nach Engesser

$$(1) \quad P_k = \frac{P_e}{1 + \frac{\alpha P}{FG}}$$

wo P_e die Knicklast nach Euler, die im unelastischen wie im elastischen Bereich nach der Gl.

$$(2) \quad P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = EF \frac{\pi^2}{\lambda^2}$$

berechnet werden kann, wobei im unelastischen Gebiet der Elastizitätsmodul E in bekannter Weise durch den Knickmodul T zu ersetzen ist. In Gl. (1) ist ferner F die Querschnittsfläche des Stabes und G der Schubmodul, $\lambda = \frac{l}{i}$ die Schlankheit. α ist eine Zahl, die im allgemeinen als durch die Querschnittsform bestimmt, angegeben wird. Für den Rechteckquerschnitt wird sie gleich $\frac{6}{5}$ gesetzt. In der Tat ist α nicht nur von der Querschnittsform, sondern auch von der Querdehnungszahl ν des Werkstoffs abhängig und zwar wird für den Rechteckquerschnitt

$$(3) \quad \alpha = \frac{\frac{6}{5} + \frac{3}{4} \nu}{1 + \nu}$$

bei gleichmäßig verteilter und linear veränderlicher Belastung sowie bei Einzellasten, wenn bei diesen von örtlichen Störungen abgesehen wird⁴.

Bei anderen Lastverteilungen ist die Abweichung von dem in Gl. (3) angegebenen Wert sehr gering (z. B. bei sinusförmiger Belastung $\frac{3}{4} \frac{1}{100}$). In Abb. 1 ist in Abhängigkeit von ν aufgetragen. Der übliche Wert $\alpha = \frac{6}{5}$ entspricht $\nu = 0$, im allgemeinen ist α kleiner.

Bei einem anderen Eigenwertproblem des Stabes von Rechteckquerschnitt, nämlich bei der Biegungsschwingung habe ich nachgewiesen, daß man eine sehr gute Übereinstimmung mit der zweidimensionalen Elastizitätstheorie erzielt, wenn für die Korrektur durch die Querkraft der Wert für α aus Gl. (3) eingeführt wird⁵. Dieser Wert dürfte daher auch bei der Stabknickung zuverlässig sein.

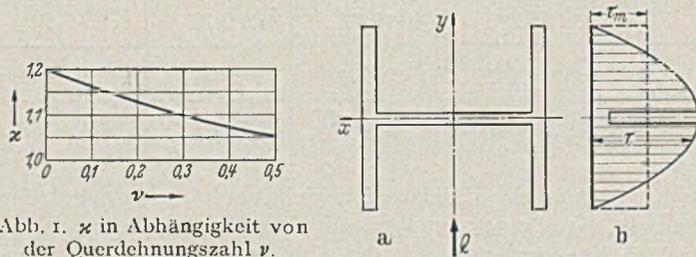


Abb. 1. α in Abhängigkeit von der Querdehnungszahl ν .

Abb. 2. Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt (τ_m gibt die mittlere Schubspannung an).

2. Werden in Gl. (1) die Werte für P_e und ν nach Gl. (2) und (3) sowie $G = E/2(1 + \nu)$ eingeführt, so wird

$$(4) \quad P_k = \frac{P_e}{1 + \left(\frac{12}{5} + \frac{3}{2} \nu \right) \frac{\pi^2}{\lambda^2}}$$

Diese Gleichung läßt deutlich den Einfluß der Querdehnungszahl erkennen. Ihr Anteil am Korrektionsglied im Nenner beträgt für die beim Baustahl üblichen Werte etwa 20% (für $\nu = 0,32$). Daß der Einfluß der Querkraft klein bleibt, ist wie eingangs erwähnt, zu erwarten, und Gl. (4) ist nur insofern geändert, als nachgewiesen wird, daß dieser Einfluß mit wachsender Querdehnungszahl sinkt (wegen der Abnahme von α mit wachsendem ν). Bezeichnet b die kleinste Seitenlänge des Rechtecks,

⁵ Gran Olsson, R.: Z. angew. Math. u. Mech. 15 (1935) S. 245.

¹ Engesser, F.: Zbl. d. Bauverwaltung 11 (1891) S. 483.

² N u ß b a u m, F.: Z. Math. u. Physik 55 (1907) S. 134 u. 297.

³ T i m o s h e n k o, S.: Z. Math. u. Physik 58 (1910) S. 337.

⁴ Gran Olsson, R.: Stahlbau 7 (1934) S. 13.

so wird mit $i^2 = b^2/12$

$$(4a) \quad P_k = \frac{P_e}{1 + \left(\frac{1}{5} + \frac{\nu}{8}\right) \frac{\pi^2 b^2}{i^2}}$$

3. Wie man bei anderen Querschnittsformen der Gl. (4) analoge Ausdrücke aufstellen kann, mag am I-Querschnitt gezeigt werden. Es sei angenommen, daß der Stab um die x-Achse ausknickt (Abb. 2). Die durch Q hervorgerufene Schubspannung nimmt den in Abb. 2b dargestellten Verlauf an. Die Querkraft wird im wesentlichen von den Flanschen aufgenommen. Der Stegquerschnitt kann demnach vernachlässigt werden. Bezeichnet F_f den Querschnitt der beiden Flansche so ist in Gl. (1) F_f statt F zu schreiben, also

$$(1a) \quad P_k = \frac{P_e}{1 + \frac{\kappa P}{F_f G}}$$

Führt man wieder die Werte für P_e , κ und G ein, so ergibt sich

$$(4b) \quad P = \frac{P_e}{1 + \left(\frac{12}{5} + \frac{3}{2} \nu\right) \frac{\pi^2 F}{F_f}}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich nur durch den Faktor $\frac{F}{F_f}$ im Korrektionsglied von Gl. (4). F Bleich bezeichnet die $\frac{F}{F_f}$ entsprechende

Größe mit γ und setzt für den I-Querschnitt angenähert $\gamma = 2,0^6$. Diese Annahme ist im Sinne erhöhter Sicherheit zu verstehen, da z. B. für die Peiner Walzträgerprofile bis $42\frac{1}{2}$ cm Höhe bei $\nu = 0,3$ die Größe $\gamma < 1,5$ ist. Ähnlich dürfte es bei anderen Profilen sein. $\gamma = 2,0$ ist somit als eine obere Grenze anzusehen.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich natürlich auch für andere gewalzte oder zusammengesetzte Profile durchführen, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

R. Gran Olsson, Trondheim.

Geschweißte Vierendeelbrücken.

Bei Lüttich wurden zwei geschweißte Straßenbrücken vollendet, die über die kanalisierte Maas und den Albertkanal führen (Abb. 1) und die neueste Entwicklung der Vierendeelbrücken kennzeichnen. Sie besitzen parabolisch gekrümmte Obergurte mit Wendepunkten an den Enden, eine bei den neuesten Ausführungen bevorzugte Form, die durch Anwendung der Schweißung besonders gefällig wirkt. Die Brücken haben Stützweiten von $12 \cdot 5,4 = 64,8$ m und $10 \cdot 5,1 = 51$ m und das gleiche Pfeilverhältnis von 1 : 7,33.

Querträger zusammengesetzte geschweißte Träger. Der Baustellenstoß der Querträger liegt, als Stumpstoß ausgebildet, unmittelbar neben dem äußeren Längsträger, so daß die Anschlüsse der Querträger an die Hauptträger im Werk geschweißt werden konnten (Abb. 3), wie auch die Gehwegkonsolen im Werk angeschweißt wurden.

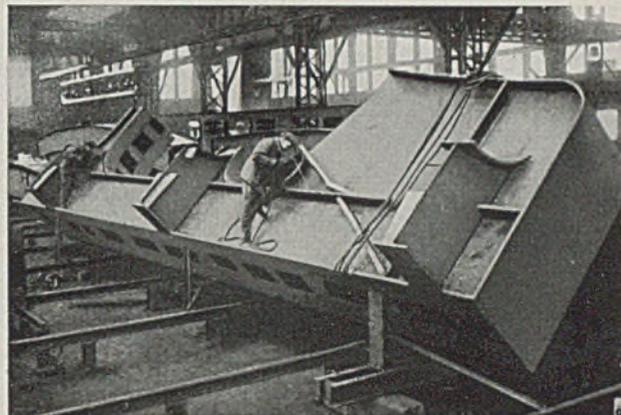


Abb. 3.

Die Untergurte bestehen aus zwei Grey-Trägern 100, die Pfosten aus zwei durch einen Mittelsteg verbundenen Grey-Trägern 55. Die Obergurte sind aus Blechen und Breiteisen zusammengesetzt. Wie aus Abb. 3 hervorgeht, sind die Eckbleche der Pfosten stumpf auf die Gurtflansche aufgeschweißt (vgl. Bauing. 1934, Brücke bei Lanaye). Ein oberer Verband und Portalriegel fehlen ganz.

Der Stahl besitzt $42-50$ kg/mm² Festigkeit und $20-24$ % Dehnung. Die Arbeit in der Werkstatt war sehr sorgfältig. Alle geraden Kanten wurden gehobelt oder gefräst, die gebogenen Kanten wurden automatisch gebrannt, und dann mit dem Luftmeißel oder Schleifstein geglättet. Die Schweißungen wurden durch geprüfte Schweißer mit Elektroden Stablen Arcos ausgeführt, die $49-53$ kg/mm² Festigkeit und $26-30$ % Dehnung besaßen. Es wurde zunächst die Wurzel mit 4 mm starken, bei X-Nähten mit 3,25 mm starken Elektroden geschweißt, bei letzteren auch noch von der Rückseite aus. Die oberste Lage der Nähte wurde geschliffen. Zur Erzielung der Wannelage erhielten die Stücke in einer einfachen Vorrichtung eine Querneigung von 45° (Abb. 3). Die Schweißnähte wurden durch den Augenschein, durch Messen ihrer Stärke und

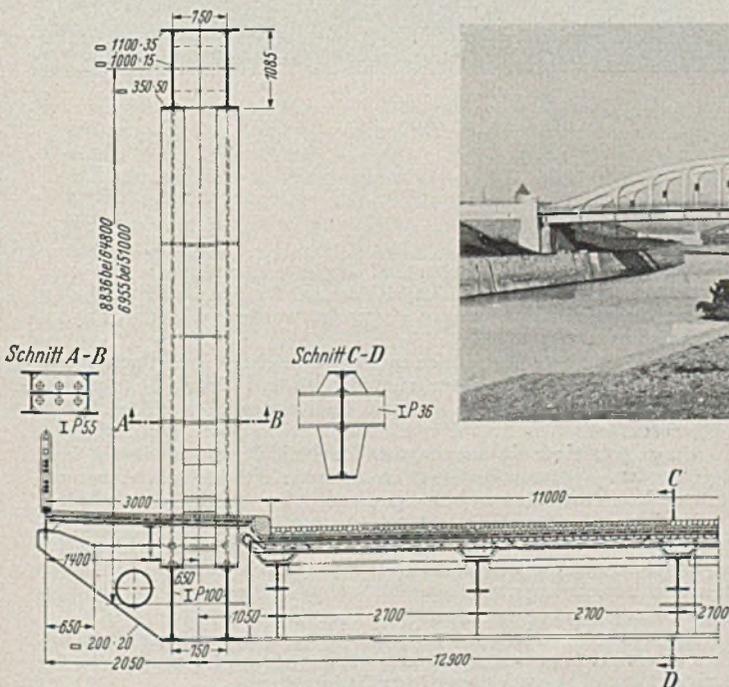


Abb. 2.

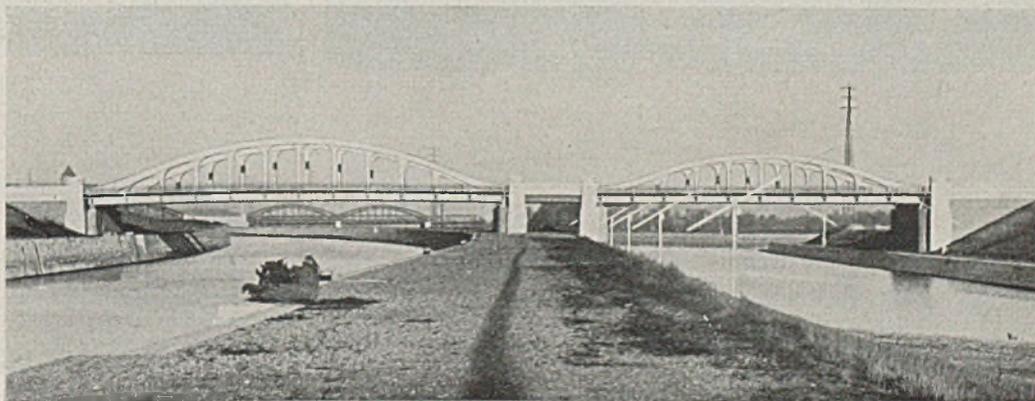


Abb. 1.

durch Anfräsen nach Schmuckler geprüft. Das Gewicht der in der Werkstatt verbrauchten Elektroden von 3,25-7 mm Durchmesser betrug 1,19 % des Überbaugewichtes. Nach der Schweißung wurden alle Stäbe auf genaue Länge gefräst. Die Aufstellung eines Überbaues im Werk dauerte weniger als 15 Tage.

Die Bauteile wurden vom Werk (Paul Würth in Luxemburg) auf dem Schienenweg nach Lüttich gebracht, auf Schuten umgeladen und zur Baustelle geschleppt.

Die 51 m Brücke wurde zuerst mit einer schwimmenden Schere aufgestellt, und zwar auf einer Stahlrüstung, da man wegen einer Stein-schüttung von 50 cm im kanalisierten Fluß nicht rammen konnte. An jedem Ufer war eine 12 m weite Schiffsfahrtsöffnung. Die Gurte waren in je 3 Teile zerlegt, deren größter 18,5 m lang und 23,5 t schwer war. Der Zusammenbau dauerte 4 Wochen, die Schweißung anschließend 5 Wochen.

Die 64,8 m Brücke wurde über dem Albertkanal auf hölzerner Rüstung aufgestellt, die an jedem Ufer ebenfalls eine 12 m weite Schiffsfahrtsöffnung freiließ. Jede Gurtung war in 5 Teile zerlegt. Der Zusammenbau dauerte 4 Wochen, die Baustellenschweißung anschließend 7 Wo-

Die Querschnittsausbildung zeigt Abb. 2. Eine Straßenfahrbahn von 11 m Breite und zwei auf Konsolen gelagerte Fußwege von 3 m Breite werden übergeführt. Die doppelt bewehrte Eisenbetonfahrbahn-tafel ist nur etwa 18 cm stark. Die Längsträger sind Grey-Träger, die

⁶ Bleich, F.: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken S. 133. Berlin 1924.

chen. Diese wurde von der Gesellschaft Arcos mittels zweier Sonderschiffe ausgeführt, auf denen die Stromerzeuger aufgestellt waren. An Elektroden wurden auf der Baustelle 0,5% des Stahlgewichts verbraucht, das bei der 51 m-Brücke 36,4 t, bei der 64,8 m-Brücke 513 t betrug.

Abb. 4 zeigt den Durchblick durch eine Straßenbrücke mit Hauptträgern gleicher Bauart. Längsträger fehlen. Es sind aber an den Kno-



Abb. 4.

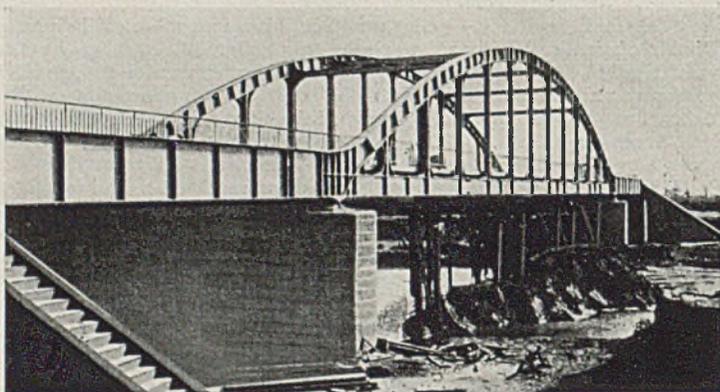


Abb. 5.

tenpunkten und in der Mitte jedes Feldes Querträger angeordnet, so daß die Fahrbahnplatte sogleich von Querträger zu Querträger gespannt werden kann. Die Geländer liegen auf der Innenseite der Hauptträger, die Obergurte sind durch 5 Querriegel miteinander verbunden.

Abb. 5 zeigt eine geschweißte Straßenbrücke bei Hérental in Bel-

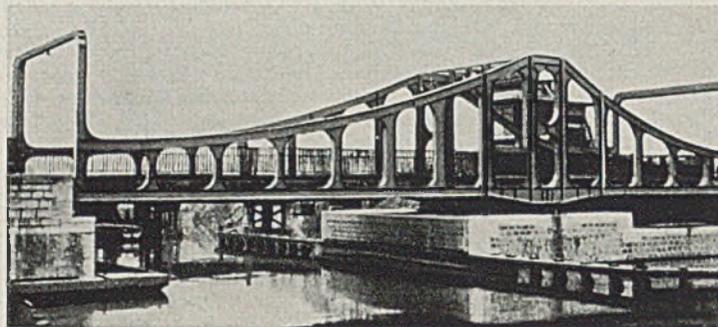


Abb. 6.

gien mit eingehängten Seitenöffnungen und einwandigen Hauptträgern. Die Pfosten haben kreuzförmigen Querschnitt. Die in ungleichmäßiger Entfernung und Richtung angeordneten Aussteifungen wirken unschön. Die Querriegel liegen unter dem Obergurt.

Abb. 6 zeigt eine ungleicharmige Drehbrücke bei Gand in Belgien mit einwandigen Hauptträgern und eigenartigen Endportalen; Abb. 7 die Brücke von Stockloye über den Albert-Kanal. (Nach „L'ossature métallique“, 6 (1937) S. 69)

Dr. phil. I h l e n b u r g, Karlsruhe.

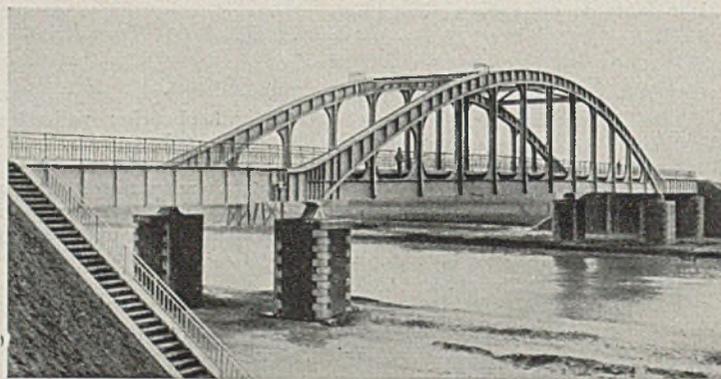


Abb. 7.

VERSCHIEDENE MITTEILUNGEN.

Alle deutschen Behörden fördern die Normung!

Die deutschen Behörden, die an den Normungsarbeiten maßgebend beteiligt sind, fördern die Einführung der Normen in die Praxis auf zweierlei Weise: Einmal dadurch, daß sie die Normen der Auftragsvergebung der öffentlichen Hand zugrundelegen und zum anderen dadurch, daß die Anwendung der Normen für den Behördenbereich durch entsprechende Verfügungen sichergestellt wird. Schließlich haben verschiedene Normen auch Gesetzeskraft erhalten, indem ihre allgemeine Anwendung in bestimmten Erlassen oder Verfügungen angeordnet wurde.

Der Deutsche Normenausschuß hat alle diese behördlichen Vorschriften nach Fachgebieten und Normblättern geordnet in einer kleinen 24seitigen Druckschrift zusammengestellt. Die einzelnen Dienststellen, Geltungsbereiche, Tag und Aktenzeichen der Verfügungen sind angegeben. Das Heft ist vom Deutschen Normenausschuß, Berlin NW 7, Dorotheenstr. 40, kostenlos erhältlich.

Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau.

Anfang Juli 1937 ist das Normblatt DIN 1050 „Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau“ als 2. Ausgabe herausgegeben worden.

In der Zweitausgabe sind neben einer Reihe kleiner Änderungen, mehr redaktioneller Art, verschiedene Punkte geregelt worden, die in der Anwendung der ersten Norm eine falsche Auslegung erfahren konnten. Außerdem wurden sachliche Änderungen vorgenommen, die auf Grund neuerer Erkenntnisse zulässig erschienen, ohne die notwendige Sicherheit unzulässig herabzusetzen.

Als wesentliche Änderungen sind folgende anzuführen:

In der Tafel 2 sind für Handelsbaustahl für den Belastungsfall 2 dieselben zulässigen Spannungen eingesetzt worden, wie für St 37.12, Belastungsfall 2.

Im § 10 sind unter Zugstäben auch die Stäbe berücksichtigt worden, die bei etwas anderer Belastungsmöglichkeit auf Druck beansprucht werden können. Diese Stäbe sind mit einer angemessenen Druckkraft zu bemessen.

Unter § 11 sind die anzunehmenden Knicklängen eindeutig festgelegt worden. Ferner ist in diesem Paragraphen die als Nachtrag herausgegebene Vorschrift über mehrteilige Druckstäbe eingearbeitet worden.

Im § 13 sind zulässige Durchbiegungen für Träger, Pfetten und Kragträger neu aufgenommen worden. Außerdem ist zur Nachprüfung der Aussteifungen der Stegbleche die Berechnung nach den Beulvorschriften in den Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken vorgeschrieben.

Bei den zuständigen Behörden ist beantragt, das Normblatt mit Wirkung vom 1. August 1937 ab einzuführen und von diesem Tage ab die Gültigkeit der 1. Ausgabe dieser Norm aufzuheben.

Das Normblatt kann von der Vertriebsstelle des Deutschen Normenausschusses, dem Beuth-Verlag G. m. b. H., Berlin SW 19, Dresdener Straße 97, zum Preise von RM 1,25 bezogen werden.

Vorschriften für geschweißte, vollwandige, stählerne Straßenbrücken.

Im Rahmen des Deutschen Normen-Sammelwerkes ist jetzt die Norm DIN 4101 „Vorschriften für geschweißte, vollwandige, stählerne

Straßenbrücken“ herausgegeben worden. Sie ist den in Betracht kommenden Behörden zur Einführung vorgelegt worden.

Im Aufbau ähnelt sie den bisher auf entsprechenden Gebieten herausgegebenen Normen, die sich mit der einheitlichen Berechnung und Ausführung von Stahlbauten oder anderen Bauwerken befassen.

Die Norm enthält Angaben über die Bedingungen, unter denen die Bauausführenden zur Ausführung von geschweißten stählernen Straßenbrücken zugelassen sind.

Ferner sind Angaben über die Werkstoffe und Schweißverfahren enthalten. Besonders eingehend ist die Berechnung der Schweißverbindungen behandelt.

Weiter sind für einzelne Bauteile, wie Fahrbahnträger und Querträgeranschlüsse Angaben über die Lastannahme enthalten.

Die zulässigen Spannungen der Schweißnähte sind in Beziehung zu den zulässigen Spannungen der verschweißten Stähle gebracht. Sie dürfen einen bestimmten Wert vom Hundertsatz der für die Stähle angegebenen zulässigen Spannung erreichen.

Da die Schweißung stählerner Brücken erst in den letzten Jahren an Bedeutung zugenommen hat, sind eingehende Hinweise auf die bauliche Durchbildung und die Ausführung aufgenommen worden.

Die Bauüberwachung und Abnahme, wie die Prüfung der Schweißer ist in derselben Weise geregelt worden, wie bei der Norm DIN 4100 „Vorschriften für geschweißte Stahlhochbauten“.

Das Normblatt kann von der Vertriebsstelle des Deutschen Normenausschusses, dem Beuth-Verlag G. m. b. H., Berlin SW 19, Dresdener Straße 97, zum Preise von RM 1,25 bezogen werden.

MITTEILUNGEN DES DEUTSCHEN NORMENAUSSCHUSSES

Noch nicht endgültig!

DIN

Entwurf 2
E 1055

Belastungsannahmen im Hochbau Verkehrslasten – Windlast

Einspruchsfrist bis 20. 9. 1937

(Einspruchszuschriften in doppelter Ausfertigung an den Deutschen Normenausschuß, Berlin NW 7, Dorotheenstr. 40, erbeten.)

A. Geltungsbereich.

Dieses Normblatt gilt für alle Bauwerke, soweit nicht in anderen Vorschriften (z. B. für Schornsteine, Funktürme, elektrische Freileitungen, Förderbrücken und Krane¹⁾) abweichende Bestimmungen getroffen sind.

B. Berücksichtigung der Windwirkung.

1. Die Bauwerke sind auf Windlast im allgemeinen in Richtung ihrer Hauptachsen zu untersuchen. In besonderen Fällen, immer aber bei mehrwandigen Fachwerktürmen, d. h. Bauwerken, die im Fundament eingespannt sind, und bei mehrwandigen Fachwerkmasten, d. h. Bauwerke die durch Halteseile abgespannt sind, ist auch eine Berechnung über Eck erforderlich.
2. Bauwerke, die durch genügend steife Wände und Decken hinreichend ausgesteift sind, brauchen in der Regel nicht auf Windlast untersucht zu werden.
3. Steht nicht zweifelsfrei fest, daß das Bauwerk ausreichend kipp- und gleitsicher ist, so ist seine Sicherheit gegen Umkippen und Gleiten durch Wind und etwaige andere waagerechte Kräfte im belasteten und unbelasteten Zustand nachzuweisen. Günstig wirkende Windbelastung von Dächern ist dabei nicht zu berücksichtigen. Die Kippsicherheit muß mindestens 1,5fach sein.
4. Als Windangriffsflächen sind anzunehmen:
 - a) Bei ebenen Flächen, die zur Windrichtung rechtwinklig stehen, die Ansichtsflächen;
 - b) bei Flächen, die zur Windrichtung unter dem Winkel α geneigt sind, die rechtwinklig zu diesen Flächen gesehenen Ansichtsflächen, wobei auch der Winddruck als senkrecht zu diesen Flächen wirkend anzusetzen ist;
 - c) bei runden Baukörpern, die rechtwinklig zur Windrichtung liegende Ebene des Achsschnittes des runden Baukörpers.
Ebenso ist die Fläche von Verkehrslasten (Verkehrsband) zu berücksichtigen.
5. Bei mehreren hintereinander liegenden Dächern (z. B. Sägedächern) ist auf die ersten drei der Windrichtung zugekehrten Dachflächen die volle Windbelastung anzusetzen, bei den folgenden die Hälfte.

C. Windlasten.

1. Die Windrichtung kann im allgemeinen waagrecht angenommen werden.
2. Die Windbelastung eines Bauwerkes ist von seiner Gestalt abhängig. Sie setzt sich aus Druck- und Sogwirkungen zusammen. Die auf die Flächeneinheit entfallende Windbelastung w wird in Vielfachen des „Staudruckes q “ gemessen und ausgedrückt in der Form

$$w = c \cdot q \text{ (kg/m}^2\text{)},$$

wobei c ein von der Gestalt des Bauwerkes abhängiger Beiwert (unbenannte Zahl) ist.

3. Der Staudruck q ist

$$q = \frac{\rho \cdot v^2}{2} \text{ (kg/m}^2\text{)},$$

worin ρ die Luftdichte und v die der Berechnung zugrunde zu legende Geschwindigkeit des Windes in m/sec bedeutet. Da hinreichend genau

$$q = \frac{1}{8} \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}^4} \right)$$

gesetzt werden kann, ergibt sich

$$q = \frac{v^2}{16} \text{ (kg/m}^2\text{)}.$$

Die in verschiedenen Höhen über dem umgebenden Gelände in Rechnung zu stellende zugehörige Windgeschwindigkeit und der zugehörige Staudruck q sind in der Tafel 1 angegeben.

Tafel 1. Staudruck q .

| 1 | 2 | 3 |
|-------------------|-------------------------|-------------------|
| Höhe über Gelände | Windgeschwindigkeit v | Staudruck q |
| m | m/sec | kg/m ² |
| von 0 bis 20 | 35,8 | 80 |
| über 20 bis 100 | 42,0 | 110 |
| über 100 | 45,6 | 130 |

Steht das Bauwerk auf einer das umliegende Gelände überragenden Erhebung, so ist die Höhe nicht von dieser, sondern von dem umliegenden Gelände aus zu rechnen.

4. Die Beiwerte c , die zur Ermittlung der auf ein Bauwerk insgesamt wirkenden Windlast maßgebend sind, sind für die verschiedenen Arten der Bauwerke aus der Tafel 2 zu entnehmen. In den angegebenen Werten sind zur Vereinfachung der Berechnung Druck und Sog zusammengefaßt. Die ermittelte Windlast ist daher, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist, als Druckkraft auf die vom Wind getroffene Fläche anzusetzen.

Bei turmartigen Bauwerken, d. h. Bauwerken, die im Fundament

¹⁾ DIN 1056: Grundlagen für die Berechnung der Standfestigkeit hoher, freistehender Schornsteine. — DIN 1072: Straßenbrücken, Belastungsannahmen. — Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken (BE) der Deutschen Reichsbahn-Gesellschaft 804. — Pflichtenheft der Deutschen Reichspost für den Bau hölzerner Antennenstützpunkte, Februar 1936. — Pflichtenheft der Deutschen Reichspost für den Bau eiserner Antennenstützpunkte, April 1936. — VDE 0210/1934: Vorschriften für den Bau von Starkstrom-Freileitungen (V.S.F.) des Verbandes Deutscher Elektrotechniker. — Die Behandlung der Betriebspläne von Abraumförderbrücken im Tagebau. Erlaß des Reichs- und Preuß. Wirtschaftsministers, früher Preuß. Minister für Handel und Gewerbe, vom 7. Juni 1932 (I G 771). — DIN 120 Blatt 1: Berechnungsgrundlagen für die Stahlbauteile von Kranen und Kranbahnen.

Tafel 2. Beiwerte c zur Ermittlung der gesamten Windlast (Druck + Sog).

| I Art des Bauwerks | 2 Beiwert c |
|---|-------------------------|
| I. Von ebenen Flächen begrenzte Baukörper mit Ausnahme der unter III. genannten Bauwerke. | |
| A. Zur Windrichtung senkrechte Flächen bei Gebäuden aller Art und bei freistehenden Wänden: | |
| im allgemeinen | 1,2 |
| bei turmartigen Bauwerken | 1,6 |
| B. Zur Windrichtung unter dem Winkel α geneigte Flächen, wobei der Winddruck als rechtwinklig zu diesen Flächen wirkend anzusetzen ist: | |
| Bei Gebäuden aller Art, im allgemeinen | $1,2 \sin \alpha$ |
| Bei offenen Gebäuden, d. h. Bauwerken, bei denen mindestens eine Wand vollständig durchgeht, und bei freistehenden Überdachungen sind gleichzeitig mit diesen Windkräften in einem 2. Rechnungsgang Windkräfte anzusetzen, die rechtwinklig zu den Dachflächen von vorn bzw. unten wirken, wenn durch diesen Ansatz das Bauwerk ungünstiger beansprucht wird, mit | 1,2 |
| Bei turmartigen Bauwerken | $1,6 \sin \alpha$ |
| II. Runde Baukörper mit kreisförmigem Querschnitt: | |
| 1. Für den ganzen Baukörper | 0,7 |
| 2. Für örtliche Beanspruchungen (Wände von Behältern u. ä.): | |
| a) für glatte Oberflächen, z. B. Metalle, glatter Putz, gehobeltes Holz, gilt Linie a | |
| b) für rauhe Oberflächen, z. B. gefugtes Mauerwerk, rauher Putz, ungehobeltes Holz, gilt Linie b | s. Abb. 1 u. 2 |
| III. Fachwerke und Vollwandträger. | |
| A. Für eine Tragwand, bei mehreren hintereinander liegenden Tragwänden für die vordere Tragwand und die Teile der folgenden Träger, die über die Fläche der vorhergehenden hervortreten: | |
| 1. Zur Windrichtung rechtwinkligen Flächen im allgemeinen und bei turmartigen Bauwerken | 1,6 |
| 2. Zur Windrichtung unter dem Winkel α geneigte Flächen, wobei der Winddruck als rechtwinklig zu diesen Flächen wirkend anzusetzen ist, im allgemeinen und bei turmartigen Bauwerken | $1,6 \cdot \sin \alpha$ |
| B. Für die zweite Tragwand und die folgenden, soweit sie in der Windrichtung gesehen von der ersten verdeckt sind: | |
| 1. Wenn der Trägerabstand bei Fachwerken kleiner als die Stabbreite und bei Vollwandträgern kleiner als die Trägerhöhe ist | 0 |
| 2. Wenn der Trägerabstand größer ist: | |
| a) Zur Windrichtung rechtwinkligen Flächen im allgemeinen und bei turmartigen Bauwerken | 1,2 |
| b) Zur Windrichtung unter dem Winkel α geneigte Flächen, wobei der Winddruck als rechtwinklig zu diesen anzunehmen ist, im allgemeinen und bei turmartigen Bauwerken | $1,2 \cdot \sin \alpha$ |

eingespannt sind, sind höhere Beiwerte festgesetzt. Als turmartige Gebäude gelten solche Bauwerke, bei denen für mindestens eine Windrichtung die getroffene Fläche ein Verhältnis der Höhe zur mittleren Breite hat, das größer als 5 ist.

5. Unabhängig von der Untersuchung mit den in Absatz 4 Tafel 2 angegebenen Beiwerten sind zur Berücksichtigung der Sogwirkungen des Windes Wände, Dächer und einzelne Bauteile gegen Sogkräfte zu sichern, die mit den in der Zahlentafel 3 angegebenen Beiwerten c zu ermitteln sind.

An den Schnittkanten von Wand- und Dachflächen können die Sogwirkungen örtlich noch erheblich größere Werte annehmen. Daher sind alle dort befindlichen Bauteile besonders sorgfältig zu verankern bzw. zu befestigen.

Tafel 3. Beiwerte c zur Ermittlung der Sogwirkungen des Windes.

| I Art des Bauwerks | 2 Beiwert c |
|---|----------------|
| A. Geschlossene Gebäude. Wände und Dächer: | |
| im allgemeinen | 0,4 |
| bei turmartigen Bauwerken | 0,8 |
| B. Offene Gebäude und freistehende Überdachungen: | |
| Wände | 0,4 |
| Dächer | 1,2 |

6. Abweichungen von den in den Tafeln 2 und 3 angegebenen Werten sind nur auf Grund besonderer Versuche zulässig.

7. Flaggen mit feststehendem Flaggentuch sind wie Wände zu behandeln. Bei Flaggen mit losem Flaggentuch ist 20% der Flaggenfläche als Windangriffsfläche anzunehmen.

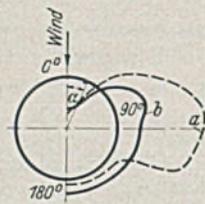


Abb. 1.

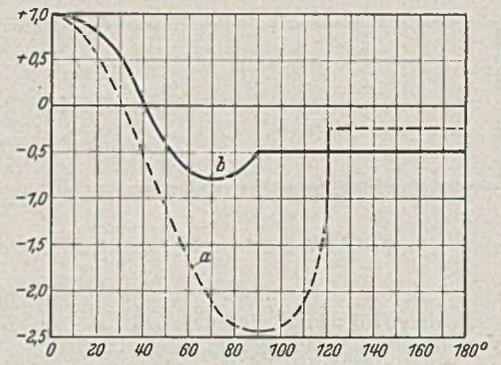


Abb. 2.

Erläuterungen zum Normblattentwurf 2 DIN E 1055 Blatt 4 „Belastungsannahmen im Hochbau, Verkehrslasten — Windlast“.

Im „Bauingenieur“, Heft 41/42 vom 12. Oktober 1934, war der 1. Entwurf des Normblattes DIN 1055 Blatt 4 „Belastungsannahmen im Hochbau, Windbelastung“ veröffentlicht.

In den zu diesem Entwurf eingegangenen Einsprüchen war besonders der Wunsch aufgetaucht, die in der Tafel „Beiwerte c“ angegebenen Hinweise auf die einzelnen Lastannahmen so zu ergänzen, daß alle in Betracht kommenden Bauwerke erfaßt sind. Der Neuentwurf fand im Ausschuß nicht allgemein Zustimmung, weil sich auch trotz der Erweiterung zeigte, daß andere Belastungsfälle als angegeben möglich sind, und daß durch bauliche Veränderungen bestimmte Bauwerksgruppen andere Belastungen erfahren können, und weil sich Bedenken erhoben, daß durch die Aufnahme zahlreicher Beispiele die Norm an Einfachheit und Übersichtlichkeit verliert. Deshalb wurde in einem Neuentwurf, der untenstehend als Entwurf 2 veröffentlicht ist, versucht, vollständig von der Angabe von Beispielen abzukommen und nur die Bedingungen festzulegen, die bei der Berechnung der Bauwerke auf Winddruck zu berücksichtigen sind.

Die im Entwurf 2 gebrachten Angaben decken die bisher vorliegenden Versuchswerte. Die Absätze „Geltungsbereich“ und „Berücksichtigung der Windwirkung“ sind im allgemeinen bestehen geblieben.

Wesentlich ist die Änderung der Tafel 2, die die Beiwerte c zur Ermittlung der gesamten Windlast enthält. Hier ist von der Absicht, die Windlasten getrennt nach Druck und Sog in Ansatz zu bringen, abgewichen worden. Zum Nachweis der Standsicherheit sind die gesamten Windlasten, also Druck und Sog zusammen, in Ansatz zu bringen. Es genügt, diese Windlast auf eine Wand wirkend anzunehmen. Auf Abbildungen ist bis auf die Angabe für runde Baukörper mit kreisförmigem Querschnitt vollständig verzichtet worden.

Für Bauteile, die Sogwirkungen unterworfen sind, sind in einer besonderen Tafel die Beiwerte c zur Ermittlung der Sogkräfte des Windes gegeben, damit die Bauteile ausreichend gesichert werden können.

Beabsichtigt ist, nach Herausgabe der Norm ein Beiblatt aufzustellen, das Hinweise über die Anwendung der Norm gibt und Zweifelsfälle klären soll. In diesem Beiblatt sollen die in dem bisherigen Entwurf enthaltenen Beispiele gebracht werden.

Einsprüche und Stellungnahmen zu dem Normblattentwurf bitten wir in doppelter Ausfertigung bis zum 1. September 1937 bei dem Deutschen Normenausschuß E. V., Berlin NW 7, Dorotheenstr. 40, einzureichen.

PATENTBERICHTE.

Bekanntgemachte Anmeldungen.

Bekanntgemacht im Patentblatt Nr. 28 vom 15. Juli 1937 und vom gleichen Tage ab im Reichspatentamt ausgelegt.

- Kl. 5 a, Gr. 34/10. M 130 295. Dipl.-Ing. Friedrich L. Müller, Wien, Vertr.: E. Meißner, Dipl.-Ing. W. Meißner u. Dipl.-Ing. H. Tischer, Pat.-Anwälte, Berlin SW 61. Flaschenzug für Tiefbohranlagen. 2. III. 35. Österreich 6. III. 34.
- Kl. 5 c, Gr. 9/10. T 42 124. Heinrich Toussaint, Berlin-Lankwitz, u. Bochumer Eisenhütte Heintzmann & Co., Bochum. Eiserner Grubenausbau in Ring- oder Bogenform. 15. II. 33.
- Kl. 5 c, Gr. 9/30. T 40 723. Alfred Thiemann, Dortmund. Kappschuh für den Grubenausbau; Zus. z. Pat. 603 371. 17. V. 32.
- Kl. 5 c, Gr. 10/01. M 134 577. Dipl.-Ing. Walter Maercklin, Hamburg. Mit Spannkeil versehenes Klemmschloß eines Grubenstempels; Zus. z. Pat. 598 253. 23. V. 36.
- Kl. 5 c, Gr. 10/01. T 40 622. Heinrich Toussaint, Berlin-Lankwitz, u. Bochumer Eisenhütte Heintzmann & Co. Bochum. Aus gewalztem Formeisen bestehendes offenes Profil in belageisenartiger Form für aus zwei ineinander verschiebbaren Teilen bestehende eiserne Grubenstempel. 12. VIII. 31. Großbritannien 15. V. 31.
- Kl. 19 d, Gr. 3. D 68 078. Dortmunder Union Brückenbau Akt.-Ges., Dortmund. Abdeckvorrichtung für Dehnungsfugen von Brücken, insbes. über den Widerlagern. 14. V. 34.
- Kl. 20 i, Gr. 39. V 32 899. Vereinigte Eisenbahn-Signalwerke G. m. b. H., Berlin-Siemensstadt. Einrichtung zur Erzielung einer von der Geschwindigkeit des fahrenden Zuges linear abhängigen Beeinflussung von durch den Zug zu steuernden Vorrichtungen, Signalen o. dgl., insbes. für die Einschaltung von Überwegsignalanlagen. 13. VI. 36.
- Kl. 20 i, Gr. 40. V 31 873. Vereinigte Eisenbahn-Signalwerke G. m. b. H., Berlin-Siemensstadt. Verfahren zum Verschießen von Fahrstraßen, Weichen und Signalen. 27. V. 35.
- Kl. 20 i, Gr. 40. V 32 023. Vereinigte Eisenbahn-Signalwerke G. m. b. H., Berlin-Siemensstadt. Einrichtung zum Verschießen von Weichen, Signalen und Fahrstraßen. 29. VII. 37.
- Kl. 20 i, Gr. 41. W 97 301. C. Theod. Wagner Akt.-Ges., Wiesbaden. Rangieranzeiger. 8. X. 35.
- Kl. 34 i, Gr. 6. G 94 813. Erf.: Dr.-Ing. Dieter Thoma, München. Anm.: Dr. Graf G. m. b. H., Gotha. Verstellbarer Zeichentisch. 15. II. 37.
- Kl. 37 e, Gr. 8/02. Sch 107 732. Karl Schlötel, Neumühlen-Dietrichsdorf über Kiel. Verbindungsstück für Querverstrebungen an eisernen Rohrgerüsten. 16. VIII. 35.
- Kl. 37 f, Gr. 2/02. St 52 275. Hans Strunz, Berlin. Bunkerabstützung auf den Verankerungssäulen von Gaserzeugungsofen. 8. VI. 34.
- Kl. 37 f, Gr. 8. G 87 233. Gutehoffnungshütte Oberhausen Akt.-Ges., Oberhausen, Rhld. Schiebeschwenktor aus mehreren unabhängigen voneinander verschiebbaren und verschwenkbaren Tortafeln. 13. I. 34.
- Kl. 38 h, Gr. 3. C 45 344. Consolidirte Alkaliwerke, Westeregeln, Bez. Magdeburg. Holzschutzmittel. 9. IX. 31.
- Kl. 42 f, Gr. 13. S 121 168. A. Spies G. m. b. H., Siegen i. W. Anordnung zum Ermitteln der Achsdrücke von Fuhrwerken mit Hilfe einer Fuhrwerkswaage. 15. I. 36.
- Kl. 42 k, Gr. 23/01. L 90 601. Losenhausenwerk Düsseldorf Maschinenbau A.-G., Düsseldorf. Optische Vorrichtung an Härteprüfmaschinen zum Ausmessen der sich bei der Härteprüfung an den Prüflingen ergebenden Eindrücke. 17. VI. 36.
- Kl. 80 b, Gr. 21/03. B 171 697. Ernst Berendt, Bremen. Asbestpuzzolane als Zuschlagstoff zu hydraulischen Bindemitteln; Zus. z. Anm. B 170 593. 9. XI. 35.
- Kl. 81 e, Gr. 125. E 45 604. Eisenwerk Weserhütte Akt.-Ges., Bad Oeynhaus. Verfahren zum Aufschütten von Deichen, Dämmen oder Halden. 17. V. 34.
- Kl. 84 a, Gr. 3/14. V 29 803. Fa. J. M. Voith, Heidenheim, Brenz. Wasserstandsfernregelung für Wasserdurchlässe in langen Werkkanälen. 3. VIII. 33.
- Kl. 84 a, Gr. 4/02. F 76 542. Jaroslav Fultner, Prag, Grégoire Krivočchène, Prag-Bubenc. u. Dr. Josef Sekla, Prag-Brank; Vertr.: Dipl.-Ing. W. Cohausz, Pat.-Anw., Berlin SW 11. Staudamm aus Stahl. 10. XI. 33. Tschechoslowakische Republik 11. XI. 32 u. 4. III. 33.
- Kl. 84 b, Gr. 2. K 135 087. Friedr. Krupp Grusonwerk Akt.-Ges., Magdeburg-Buckau. Lagerung von undrehbaren Antriebsspindeln, insbes. Trogantriebsspindeln für Schiffshebewerke. 25. VIII. 34.

Bekanntgemachte Anmeldungen.

Bekanntgemacht im Patentblatt Nr. 29 vom 22. Juli 1937 und vom gleichen Tage ab im Reichspatentamt ausgelegt.

- Kl. 5 c, Gr. 9/10. K 140 192. Fritz Kirchner, Essen-Karnap. Eiserner kreisring- oder bogenförmiger Grubenausbau. 30. XI. 35.

- Kl. 17 e, Gr. 2/30. M 133 533. Dr.-Ing. Paul H. Müller, Hannover. Kühlturm. 7. X. 35.
- Kl. 19 c, Gr. 4. D 66 561. Dr.-Ing. August Deidesheimer, Berlin-Charlottenburg. Verfahren zur Herstellung einer Holzstraße aus zugespitzten Holzzyllindern oder Spaltstücken. 6. IX. 33.
- Kl. 19 d, Gr. 1. B 168 343. Dipl.-Ing. Hans Bayer, München. Einge-spanntes Gewölbe mit Federlamellen. 18. I. 35.
- Kl. 20 i, Gr. 11/01. O 22 612. Orenstein & Koppel Akt.-Ges., Berlin. Signalantrieb mit Motorkupplung. 8. X. 36.
- Kl. 20 i, Gr. 11/01. O 22 816. Orenstein & Koppel Akt.-Ges., Berlin. Doppelschloß für behelfsmäßige Schlüsselabhängigkeiten an elektrischen Kraftstellwerken. 12. II. 37.
- Kl. 20 i, Gr. 31. F 82 310. Felten Guillaume Carlswerk Akt.-Ges., Köln-Mülheim. Schienenstromschließer; Zus. z. Anm. F 78 528. 28. I. 37.
- Kl. 35 a, Gr. 9/03. D 69 996. Demag Akt.-Ges., Duisburg. Verfahren zum Fördern von Bau- und Maschinenteilen in Bergwerken, Gruben u. dgl. 21. III. 35.
- Kl. 35 b, Gr. 3/19. M 133 369. Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg Akt.-Ges., Nürnberg. Kranplattform, die ein Windwerk mit mehreren Motoren und Windentrommeln trägt. 29. I. 36.
- Kl. 35 b, Gr. 6/05. Sch 110 260. Ludwig Bönnhoff G. m. b. H., Wetter, Ruhr. Zange zum Tragen von Blechen, Platten o. dgl. 23. VI. 36.
- Kl. 35 b, Gr. 7/02. S 99 525. Siemens-Schuckertwerke Akt.-Ges., Berlin-Siemensstadt. Triebwerk für Verladebrücken, Schiffshebewerke o. dgl. 27. VI. 31.
- Kl. 37 b, Gr. 1/01. F 77 904. Herbert Frenzel, Elbing. Aus zwei gleichen hohlen Halbsteinen zusammengesetzter Hohlbaustein. 30. VII. 34.
- Kl. 37 b, Gr. 5/01. F 77 939. Aktiengesellschaft der Eisen- und Stahlwerke vormals Georg Fischer, Singen-Hohentwiel. Verbindungsklemme für sich kreuzende Rohre. 10. VIII. 34. Italien 6. II. 34.
- Kl. 37 d, Gr. 32/01. S 120 591. Franz Suchanek, Wien; Vertr.: Dr. H. Rieder u. Dr.-Ing. E. Tilger, Pat.-Anwälte, Berlin W 50. Verfahren und Vorrichtung zum Verputzen der Innenwandung von Schornsteinen. 26. XI. 35. Österreich 30. III. 35.
- Kl. 37 e, Gr. 8/02. S 119 851. Scaffolding Great Britain, Limited u. David Henry Jones, London; Vertr.: Dipl.-Ing. B. Kugelmann, Pat.-Anw., Berlin SW 11. Gerüstklemme mit einem U-förmigen Kupplungsglied. 21. IX. 35. Großbritannien 27. XII. 34 u. 21. I. 35.
- Kl. 80 b, Gr. 1/09. H 147 852. Emil Hornstein, Mödling b. Wien; Vertr.: Dr.-Ing. K. Wolf, Pat.-Anw., Berlin-Charlottenburg. Verfahren zur Herstellung poröser Kunststoffmassen. 5. VI. 36. Österreich 7. VI. 35.
- Kl. 81 e, Gr. 29. H 147 682. Wilhelm Heusner, Bochum. Höhenförderer für Schüttgüter. 25. V. 36.
- Kl. 81 e, Gr. 125. M 130 184. Maschinenfabrik Buckau R. Wolf Akt.-Ges., Magdeburg. Abraumförderanlage; Zus. z. Pat. 647 298. 25. II. 35.
- Kl. 81 e, Gr. 128. M 129 015. Menck & Hambrock G. m. b. H., Altona. Vorrichtung zum Bewegen des Brustschildes an Raupenschleppern. 1. XI. 34.
- Kl. 85 c, Gr. 1. G 88 115. Guggenheim Brothers, New York; Vertr.: Dr. G. Joseph, Pat.-Anw., Berlin W 50. Verfahren zur Behandlung von Abwässern. 18. V. 34. V. St. Amerika 22. V. 33.

Bekanntgemachte Anmeldungen.

Bekanntgemacht im Patentblatt Nr. 30 vom 29. Juli 1937 und vom gleichen Tage ab im Reichspatentamt ausgelegt.

- Kl. 5 b, Gr. 41/10. M 135 488. Maschinenfabrik Buckau R. Wolf Akt.-Ges., Magdeburg. Fahrbares Tagebaugerät zur gesonderten Hereingewinnung von Zwischenschichten. 24. IV. 36.
- Kl. 5 c, Gr. 9/10. L 88 374. Josef Langen, Dortmund. Vielgelenkiger eiserner Grubenausbau. 5. VII. 35.
- Kl. 5 d, Gr. 11. E 48 757. Gebr. Eickhoff Maschinenfabrik und Eisengießerei, Bochum. Einrichtung zum seitlichen Austrag von Fördergut aus Brems- oder Kratzförderern. 14. IX. 36.
- Kl. 19 a, Gr. 16. H 148 709. Alfred Hertel u. Georg Buchbach, Remda, Thüringen. Schienenstoßverbindung insbesondere für sich schräg überlappende Schienenenden. 27. III. 36. Frühjahrsmesse Leipzig 1. III. 36.
- Kl. 19 a, Gr. 27/02. St 52 163. Heinrich Steinhage G. m. b. H., Hamburg. Verfahren zum Verlegen von Eisenbahnquerschwellen und Lehre zum Verlegen der Schwellen; Zus. z. Pat. 635 246. 4. V. 34.
- Kl. 19 c, Gr. 9/10. P 64 938. Hans Roß, Eisenach i. Thür. Brennkraft-ramme, insbesondere für den Straßenbau. 7. III. 32.
- Kl. 20 k, Gr. 9/01. A 75 328. Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin. Aus Leichtmetall und Eisen fest zusammengewalzter oder gezogener Fahrdrabt. 15. II. 35.

- Kl. 20 k, Gr. 9/01. A 80 421. Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin. Gleitauflösung für Fahrleitungen elektrischer Bahnen; Zus. z. Pat. 526 961. 4. IX. 36.
- Kl. 20 k, Gr. 9/01. A 80 625. Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin. Nachspannvorrichtung für einen oder mehrere Drähte von Fahrleitungen elektrischer Bahnen. 30. IX. 36.
- Kl. 20 k, Gr. 9/01. A 82 387. Erf.: Max Süberkrüb, Berlin-Karlshorst. Anm.: Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, Berlin. Stabisolator für Fahrleitungsbau. 19. III. 37.
- Kl. 37 a, Gr. 3. K 140 131. Andreas Kemler, Duisburg-Meiderich. An der tragenden Decke schwebend aufgehängte Unterdecke mit einem nachgiebigen Anschluß an die Umfassungswände, insbesondere für Bergbaugebiete. 27. XI. 25.
- Kl. 37 a, Gr. 3. K 135 216. Arno Keller, Leipzig, u. Heinz Keller, Dresden. Decke mit Profileisenträgern und mit seitlich an diesen befestigten Holzbohlen zum Anschlagen des Fußbodens und der Deckenschalung. 5. IX. 34.
- Kl. 37 c, Gr. 5/02. K 143 427. Felix Ritter Kalbacher von Türkenburg, Berlin-Friedenau. Abdeckplatte aus Metall mit aufgebogenen Längsrändern und hakenförmig umgelegten Querrändern. 24. VIII. 36.
- Kl. 37 d, Gr. 4/04. S 116 198. Hans Sieber, Luzern; Vertr.: Dr.-Ing. R. Sackheim, Pat.-Anw., Mannheim. Aufzugstreppe mit Gegengewicht. 24. XI. 34. Schweiz 24. XI. 33.
- Kl. 37 d, Gr. 4/04. S 118 903. Hans Sieber, Luzern; Vertr.: Dr.-Ing. R. Sackheim, Pat.-Anw., Mannheim. Aufzugstreppe mit Gegengewicht; Zus. z. Anm. S 116 198. 4. VII. 35.
- Kl. 68 c, Gr. 1. G 88 976. Josef Groll, München. Türband für gasdicht abzuschließende Türen mit einem Zwischengelenk. 16. X. 34.
- Kl. 80 a, Gr. 49. W 93 413. Hermann Walter, Berlin. Auf Rüttelrollen laufende Rüttelmaschine mit einer Nachverdichtungsvorrichtung; Zus. z. Pat. 635 763. 10. I. 34.
- Kl. 80 b, Gr. 19/03. D 72 945. Walter Drewes, Hamburg. Verfahren zur Herstellung von farbigen Erdbelagstoffen für Sportplätze sowie Ziergärten. 16. VI. 36.
- Kl. 80 b, Gr. 21/04. B 171 720. Naamlooze Vennootschap Maatschappij tot Exploitatie van Octrooien „Mytox“, Haag; Vertr.: E. Hoffmann und Dr.-Ing. E. Hoffmann, Pat.-Anwälte, Berlin SW 68. Verfahren zur Herstellung von leichten, porösen Formlingen aus zellulosehaltigen Stoffen und Zement; Zus. z. Pat. 585 581. 9. XI. 35.
- Kl. 80 b, Gr. 21/04. Sch 108 996. Georg Schuster, Berlin-Adlershof. Baustoff, enthaltend Kork und Zement, und Verfahren zu seiner Herstellung. 20. I. 36.
- Kl. 81 e, Gr. 118. G 87 914. Gesellschaft für Förderanlagen Ernst Heckel m. b. H., Saarbrücken. Fördereinrichtung mit entsprechend dem Vor- und Rückgang der Böschung selbsttätig verschiebbarer und die Beschickungsstelle bestimmender Tastvorrichtung. 21. IV. 34.
- Kl. 84 a, Gr. 3/07. K 136 554. Fa. Aug. Klönne, Dortmund. Bewegliches Wehr mit Stauplatte. 16. I. 35.
- Kl. 85 b, Gr. 2/02. M 132 363. Maschinenbau Akt.-Ges. Balcke, Bochum. Vorrichtung für die Druckbelüftung von Wasser. 15. X. 35.

MITTEILUNG DER HTG.

Sondertagung des Hauptamtes für Technik am Reichsparteitag 1937.

Der diesjährige Reichsparteitag wird durchgeführt in der Zeit vom 7.—13. September. Am Montag, dem 13. September, 10.30 Uhr, findet im Rathaus zu Nürnberg, Großer Saal, eine **S o n d e r t a g u n g** des Hauptamtes für **T e c h n i k** statt, die für jeden mit Einlaßkarte versehenen Parteigenossen offen ist. Die Hauptgeschäftsstellen der technisch-wissenschaftlichen Vereine haben die Teilnehmer bis zum 2. September an das Amt für Technik, Gau Franken, zu melden. Die Einlaßkarten gelangen in den Geschäftsräumen des Amtes für Technik, Gau

Franken, Nürnberg, Marienortgraben 7, während der üblichen Geschäftsstunden zur Ausgabe, wo sie unter Vorlage des Personalausweises abgeholt werden können. Für diese Tagung stehen den 33 Gauämtern sowie den Hauptgeschäftsstellen der technisch-wissenschaftlichen Vereine insgesamt etwa 500 Einlaßkarten zur Verfügung.

Die Mitglieder der Hafenbautechnischen Gesellschaft, die an der Sondertagung teilzunehmen gedenken, werden gebeten, dies der Geschäftsstelle, Berlin-Charlottenburg 2, Berliner Straße 170/171, Technische Hochschule, Zimmer 357, bis zum 30. August mitzuteilen.

BUCHBESPRECHUNGEN.

Ježek, Karl: Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl. Mit 120 Abb. und 15 Zahlentafeln. Wien: Julius Springer 1937. VIII, 252 S. Preis geh. RM 27,—; geb. RM 28,80.

Für schlanke Druckstäbe mit mittiger sowie ausmittiger und Querbelastung kann die Frage nach der Sicherheit durch gründliche Arbeiten namhafter Forscher als geklärt angesehen werden, solange alle Spannungen im elastischen Bereich verbleiben und durchweg das lineare Formänderungsgesetz gilt. Für die Anwendung von größerer Wichtigkeit sind aber die gedrunghenen Stäbe, bei denen das Verhalten im elastisch-plastischen Zustand entscheidend für die Tragfähigkeit ist. Die übliche Berechnung stützt sich auch heute noch im wesentlichen auf die Versuche von Tetmajer und die theoretische Begründung von Engesser, setzt also mittige Belastung voraus. Bei ausmittiger Belastung treten aber, wie schon die Untersuchungen von Kármán erkennen ließen, im Gegensatz zu den schlanken Stäben ebenfalls Instabilitätsgrenzen auf. Da nun Ausmittigkeit praktisch stets vorausgesetzt werden muß, ist die jeweilige Instabilitätsgrenze für die Tragfähigkeit entscheidend, nicht aber die Randspannung. In den letzten Jahren ist diese wichtige und schwierige Frage von einer Reihe von Forschern genauer untersucht worden. Der Verfasser des vorliegenden Werkes hat sich erfolgreich an diesen Arbeiten beteiligt und war in besonderem Maße berufen, einen zusammenfassenden Bericht darüber zu geben, um so mehr als ihn das Bestreben leitet, dem Stahlbauer handliche Lösungen zu geben.

Nach einigen grundlegenden Ausführungen bei gegebenen Verformungsgesetzen legt der Verfasser die vereinfachte ideal-plastische Formänderungslinie zugrunde und entwickelt für den Rechteckquerschnitt die maßgebenden Formeln für mittige, ausmittige und Querbelastung sowie für den Fall der leicht gebogenen Stabachse, wobei die bereits erwähnten Instabilitätsgrenzen im plastischen Bereich deutlich hervortreten. Unter vereinfachten Voraussetzungen werden dann Näherungslösungen abgeleitet, die sich durch den Vergleich mit den genauen Lö-

sungen als ausreichend erweisen und die Übertragung auf andere Grundquerschnitte ermöglichen. Die Ergebnisse werden in Tafeln und Schaubildern zusammengefaßt. Untersucht werden u. a. noch die Stabilität bei Ausbiegungen nach verschiedenen Richtungen und besonders das Verhalten gegliederter Stäbe im ganzen und in ihren Einzelteilen. Die Ergebnisse werden durch Zahlenbeispiele deutlich gemacht und mit den geltenden Vorschriften verglichen, deren Verbesserungsbedürftigkeit sich so deutlich ergibt. Schon aus diesem Grunde, vor allem aber zur Vertiefung der eigenen Einsichten, ist dieses vortreffliche Werk dem Stahlbauer zu gründlichem Studium dringend zu empfehlen.

D o m k e, Aachen.

Schulze, Bruno: Schwamm-Schäden. Sonderheft XXX der Mitteilungen d. deutschen Materialprüfungsanstalten. Mit 70 Abb. Berlin: Julius Springer 1936. 35 S. DIN A 4. Preis geh. RM 8,80.

Das vorliegende Heft beschränkt sich fast ausschließlich darauf, die bautechnisch wichtigsten holzerstörenden Pilze in — übrigens vortrefflichen — Lichtbildern darzustellen. Gezeigt werden in erster Linie die für die einzelnen Pilzarten charakteristischen Myzel- bzw. Strang- und Fruchtkörperbildungen, daneben Mikroaufnahmen der Hyphen und schließlich Abbildungen von Reinkulturen erprobter Pilzstämmen (Oberflächenmyzel), wie sie zur Prüfung von Holzschutzmitteln benutzt werden. Anhangsweise sind verschiedene Gutachten des Staatlichen Material-Prüfungsamtes Berlin-Dahlem über ausgeführte Hausschwamm-Untersuchungen wiedergegeben.

Die Zusammenstellung dürfte vor allem solchen Kreisen willkommen sein, die gelegentlich Hausschwamm-Schäden zu beurteilen haben, ohne selbst über eingehende persönliche Erfahrungen auf diesem Gebiet zu verfügen. Ob freilich Bildmaterial allein — selbst wenn es so gut ist, wie hier — zur einigermaßen sicheren Bestimmung eines Befalls genügt, muß dahingestellt bleiben. H. S i m o n s, Hannover.