ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 102 Automatyka z.5 1964

ADAM BUKOWY

Katedra Teorii Regulacji

O PEWNYCH OGRANICZENIACH W STOSOWANIU CAŁKOWYCH POSTACI FUNKCJI LAPUNOWA

Streszczenie. Stabilność układów elektrycznych i obwodów automatyki w przypadku, gdy opisują je równania różniczkowe nieliniowe I lub II rzędu najłatwiej badać korzystając z twierdzeń Lapunowa.

Przyjęcie całkowej postaci funkcji Lapunowa pozwala na uzyskanie dobrych rezultatów - gdy współczynniki funkcyjne w równaniu są funkcjami jednoznacznymi, bezpętlowymi. Wskazanie na możliwość zastosowania form całkowych jako funkcji Lapunowa w przypadkach współczynników funkcyjnych o charakterze pętlowym stanowi treść niniejszej pracy.

Badanie stabilności rozwiązań równania różniczkowego nieliniowego o postaci

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = 0 \qquad (1)$$

i punkcie równowagi $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ldots\ldots x^{(n-1)} = 0$

gdzie $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_{n-1}$-funkcje $x, \dot{x}, \ddot{x} \ldots\ldots x^{(n-1)}$

można przeprowadzić korzystając z twierdzeń Lapunowa [1]. Jeżeli wiadomo, że badane równanie różniczkowe dopuszcza dla danych warunków początkowych

$$x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0) \ldots\ldots x^{(n-1)}(0)$$

jedno jedyne rozwiązanie, to gdy uda się znaleźć taką funkcję $V = V(x, \dot{x}, \ldots\ldots x^{(n-1)})$, która byłaby funkcją znako-określoną (na przykład określona dodatnio lub ujemnie) i której pochodna $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$ wyliczona z użyciem zależności wynikających z badanego równania różniczkowego byłaby znako-określoną funkcją znaku przeciwnego niż V, to rozwiązanie to jest asymptotycznie stabilne.

Badanie stabilności niektórych równań różniczkowych jest często kłopotliwe ze względu na trudności w znalezieniu takiej funkcji V, której pochodna spełniałaby warunek znako-określoności, wymagany przez twierdzenie Lapunowa.

Pewnym ułatwieniem - pozwalającym na stwierdzenie,czy badane równanie różniczkowe posiada rozwiązanie stabilne asymptotycznie, może być wykorzystanie następującej własności funkcji V:

Jeżeli

$$\lim_{t \to \infty} V(t) = 0 \tag{2}$$

gdzie funkcja V(t) powstała przez wprowadzenie do znako-określonej funkcji

$$V(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots\ x^{(n-1)})$$

rozwiązania danego równania różniczkowego $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)..$ $x^{(n-1)}(t)$ to rozwiązanie to jest stabilne.

Własność ta jest oczywista, jeżeli wziąć pod uwagę pojęcie znako-określoności funkcji V.

Jest bowiem

$$V = 0 \quad \text{tylko i wyłącznie dla } x = \dot{x} = \ddot{x} = \ldots = x^{(n-1)} = 0$$

a zatem

$$\lim_{t \to \infty} V(t) = 0$$

pociąga za sobą

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} \dot{x}(t) = \ldots\ldots = \lim_{t \to \infty} x^{(n-1)}(t) = 0 \tag{3}$$

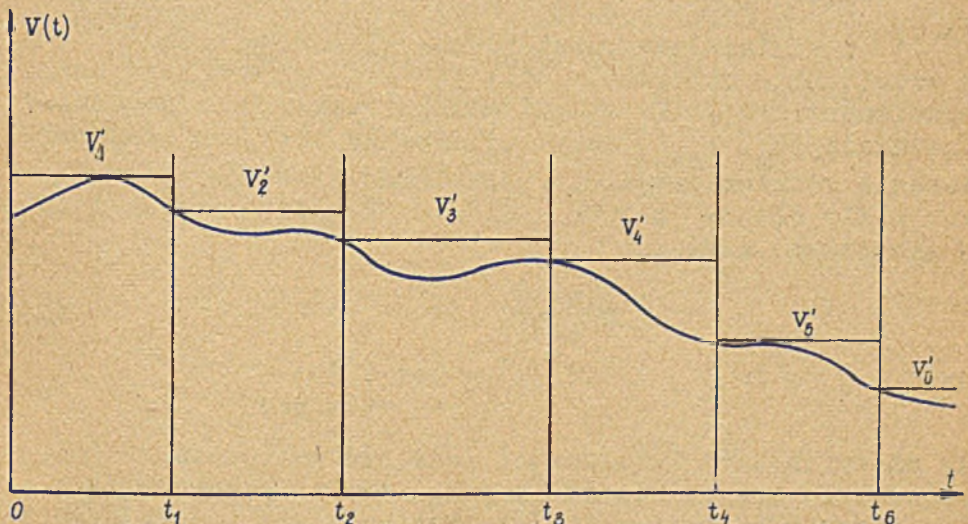
Dla wykazania, że własność (3) zachodzi dla wszystkich możliwych rozwiązań równania różniczkowego (1) wystarczy zatem wykazać, że dla wszystkich możliwych (czy rozpatrywanych) $x(0)$, $\dot{x}(0)$, ... $x^{(n-1)}(0)$ odpowiadające im funkcje V(t) spełniają własność (2). Jest to możliwe dla niektórych typów równań różniczkowych drogą wykazania, że wszystkie funkcje V(t) dla dowolnych warunków początkowych posiadają majoranty zbieżne do zera.

W niniejszej pracy przyjęto jako pewnego rodzaju "uniwersalną" najprostszą majorantę, funkcję V' spełniającą następujące warunki:

1) funkcja V' - jest funkcją stałą wewnątrz każdego pojedynczego przedziału czasu $(t_n \leq t \leq t_{n+1})$,

2) wewnątrz każdego przedziału czasowego $(t_n < t \leq t_{n+1})$ przyjmuje ona wartość równą maksymalnej wartości funkcji V w tym przedziale.

Funkcja V' jest więc pewnego rodzaju funkcją schodkową, charakteryzowaną przez ciąg $\{V'(n)\}$, którego wyrazy mają wartość równą maksymalnej wartości funkcji V jakie przyjmuje ona w poszczególnych przedziałach czasu. Graficzną ilustrację sposobu tworzenia funkcji $V'(t)$ przedstawia rys.1.



Rys. 1

Znalezienie majoranty schodkowej, funkcji V (t) nie narzuca żadnych warunków odnośnie przyjęcia podziału czasowego na poszczególne przedziały. Podział ten jest więc dowolny lecz taki aby wyczerpana została cała oś czasowa i aby przyjęte przedziały posiadały skończoną długość.

Funkcja $V'(t)$ jest zbieżna do zera gdy określający ją ciąg $\{V'(n)\}$ jest zbieżny do zera. Warunkiem dostatecznym wykazania jego zbieżności jest na przykład spełnienie przez wszystkie poszczególne wyrazy ciągu $\{V'(n)\}$ warunku d'Alemberta:

$$\frac{|V'\,n+1|}{|V'\,n|} < 1 - \varepsilon$$

gdzie $1 > \varepsilon > 0$

Na podstawie przeprowadzonego rozumowania można więc sformułować następujące, zmodyfikowane twierdzenie Lapunowa:
Badane równanie różniczkowe o postaci

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots\ldots\ldots + a_2 \ddot{x} \cdot a_1 \dot{x} + a_0 x = C$$

gdzie $a_{n-1}, a_{n-2} \ldots\ldots a_2, a_0$ są funkcjami $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots\ldots x^{(n-1)}$ i posiadające punkt równowagi $x = \dot{x} = \ddot{x} = \ldots = x^{(n-1)} = 0$ ma rozwiązanie stabilne, jeśli uda się znaleźć taką znako określoną funkcję V i taki podział czasu na skończonę przedziały (t_n, t_{n+1}) że po wyliczeniu $V(t)$ z badanego równania różniczkowego dla wszystkich warunków początkowych i dla czasów $t > T$ (gdzie T jest dowolną liczbą skończoną) zachodzi

$$\frac{V'(n+1)}{V'(n)} < 1 - \varepsilon \qquad (4)$$

gdzie $1 < \varepsilon > 0$ i $V'(n) = \max\limits_{tn < t \leq tn+1} V(t)$

Tak zmodyfikowane twierdzenie może być zastosowane tylko dla badania równań różniczkowych, których rozwiązania z góry narzucają pewien podział czasowy i gdzie spełnienie warunku (4) stwierdzić można bez konkretnej znajomości $x(t)$, $\dot{x}(t) \ldots\ldots\ldots x^{(n-1)}(t)$.

Takim typowym przypadkiem gdzie wyżej sformułowane twierdzenie może być z powodzeniem stosowane jest badanie stabilności periodycznych rozwiązań równań różniczkowych drugiego rzędu o następującej budowie

$$\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\,x = 0$$

gdzie a, b ograniczone funkcje $(x, \dot{x})$.

Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu, równanie to przybiera postać

$$\dot{x}\,\frac{d\dot{x}}{dx} + a\,\dot{x} + b\,x = 0 \tag{5}$$

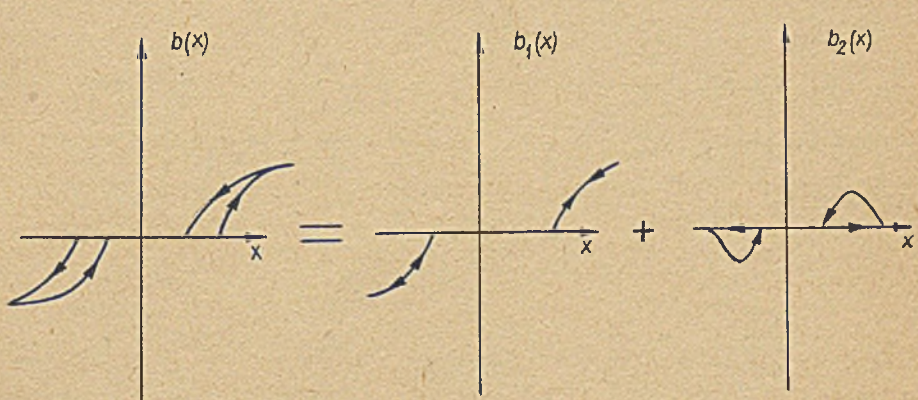
$$\int_0^{\dot{x}} \dot{x}\,d\dot{x} + \int_0^{x} b\,x\,dx = -\int_0^{x} a\,\dot{x}\,dx + C = -\int_0^{x} a\dot{x}^{2}dt + C_1 \tag{6}$$

Lewa strona równania (4) posiada własności funkcji Lapunowa w przypadku, gdy b jest jednoznaczną funkcją $(x, \dot{x})$ [2]. W przeciwnym razie jej wartość zależna jest nie tylko od granic ale i od drogi całkowania. Całka $\int_0^x b(\dot{x})\,d\,x$, mogąc przyjmować dla $x = 0$ wartości różne od zera unie możliwia spełnienie warunku: $V = 0$ dla $x, \dot{x} = 0$. Problem ten może zostać ominięty przez rozkład funkcji b na

a) funkcję jednoznaczną $b_1(x, \dot{x})$,

b) funkcję $b_2(x, \dot{x})$ różną od zera tylko w obszarze pętli jaką tworzy funkcja $b(x, \dot{x})$.

Rozkład taki dla przypadku niejednoznaczności typu pętli histerezy pokazany jest na rys. 2.



Rys. 2

Równanie (6) może być więc zapisane w postaci:

$$\underbrace{\int_0^{\dot{x}} \dot{x}\,d\dot{x} + \int_0^{x} x b_1(x,\dot{x})}_{V} = -\int_0^{x} a\dot{x}^2\,dt - \int_0^{x} x b_2(x)\,dx + c \qquad (7)$$

gdzie lewa strona spełnia już wszystkie warunki funkcji Lapunowa.

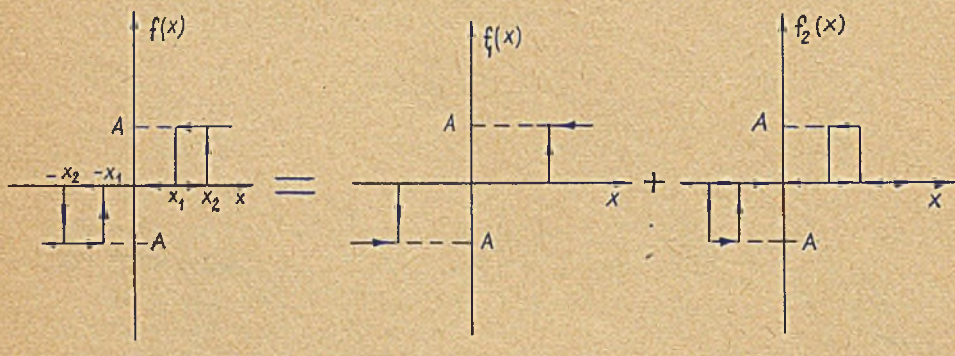
Obliczanie $\frac{V'(n+1)}{V'(n)}$ możliwe jest przy założeniu typu przebiegu $x(t)$. Sposób obliczania zostanie zilustrowany przykładami.

Przykład 1

Układ fizyczny opisany jest równaniem:

$$\ddot{x} + b\,x = 0 \qquad (6)$$

gdzie $b(x)$ jest niejednoznaczną funkcją x przedstawioną na rys. 3.



Rys. 3

Funkcja Lapunowa dla tego przypadku posiada następującą postać:

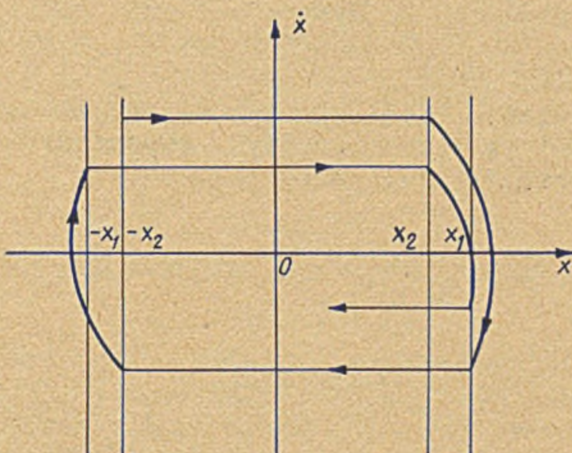
$$V = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^{x} x\, b_1(x)dx = -\int_0^{x} x b_2(x)\,dx + c \qquad (7)$$

Przyjmując podział czasu na przedziały odpowiadające półokresom drgań mogących wystąpić w układzie, obliczamy

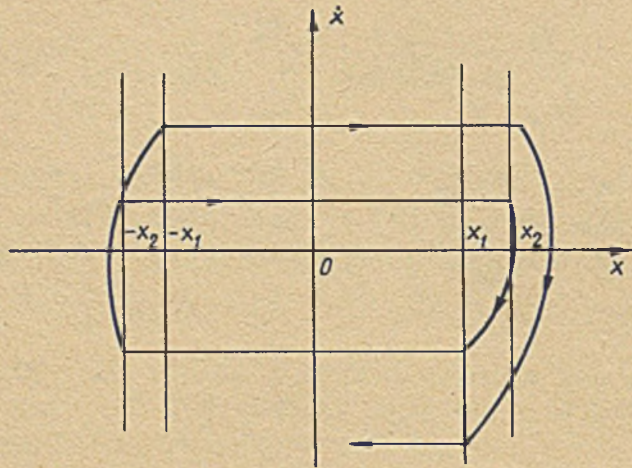
$$\Delta V_{max} = \int_{-x_1}^{x_1} x b_2(x) dx = - \int_{x_2}^{x_1} A dx = -A(x_1 - x_2) \qquad (8)$$

Dla $x_2 < x_1$, $\Delta V_{max} < 0$ co oczywiście pociąga za sobą spełnienie warunku (4) i stabilność układu.
Dla $x_2 > x_1$ $\Delta V_{max} > 0$ w układzie pojawiają się drgania
gdyż $\frac{Vn+1}{Vn} > 1$

Zachowanie się rozwiązań tego równania na płaszczyźnie fazowej zilustrowane jest na rys. 4 i 5.



Rys. 4



Rys. 5

Na zakończenie chciałbym gorąco podziękować Prof. dr S. Węgrzynowi za słowa zachęty i owocne dyskusje w trakcie przygotowania niniejszej pracy.

LITERATURA

[1] Małkin: Tieoria ustoiicziwosti dwiżenija Mattiechgiz Moskwa 1957.

[2] S. Węgrzyn, I.C. Gille: Stabilité des systèmes non lineaires du second ordre Bull. de l'Acc. Pol. des Sciences, S. Techn. Vol. X No. 9 - 1962 r.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 16.12.1963r.

О НЕКОТОРЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ В ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Резюме

Устойчивость электрических схем и систем автоматического управления, описываемых нелинейными уравнениями первого или второго порядка, легче всего исследовать, применяя теоремы Ляпунова об устойчивости движения.

Принимая интегральную форму функции Ляпунова, приходим к хорошим результатам, когда коэффициенты уравнения представляют собой однозначные функции. Целью этой работы является указание возможности применения интегральных форм функции Ляпунова также и в случае, когда коэффициенты представляют собой неоднозначные функции.

SOME LIMITS FOR INTEGRAL FORMS OF LAPUNOFF'S FUNCTION

Summary

In order test in the easiest possible way the stability of non linear first or second order automatic control systems the Lapunoff's theorem can fairly be made use of. Good results can be obtained by using the integral form of the Lapunoff's function, prowided the function coefficients of the equation are non-loop functions. It is shown in this paper here that there exists a possibility of applying the integral forms as a Lapunoff's function in such a case also in which the function coefficients have a loop character.