ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 102 Automatyka z.5 1964

OLGIERD PALUSIŃSKI

Katedra Teorii Regulacji

ZASTOSOWANIE METODY PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO DO OBLICZANIA OPTYMALNEGO STEROWANIA UKŁADAMI ELEKTRYCZNYMI

Streszczenie. W artykule przedstawiono zasady wykorzystania programowania dynamicznego do obliczania optymalnego sterowania układami dyskretnymi i zdeterminowanymi.

Przedstawioną metodę zilustrowano przykładami obliczeń optymalnego sterowania ładowaniem kondensatora w układzie RC oraz rozruchem generatora prądu stałego.

1. Wstęp

Przy analizie systemów optymalnych w automatyce i ekonomii szczególnie wtedy, gdy zastosowanie klasycznego rachunku wariacyjnego jest niemożliwe lub bardzo trudne, korzysta się z metody programowania dynamicznego. Obliczenia dokonywane tą metodą można stosunkowo łatwo automatyzować, co przy dzisiejszym rozwoju maszyn cyfrowych jest cechą bardzo istotną. Z tego powodu wydaje się być pożytecznym wprowadzenie programowania dynamicznego do analizy optymalnych układów elektrycznych.

Praca niniejsza stanowi próbę rozwiązania w oparciu o wyżej wspomnianą metodę programowania dynamicznego dwu przykładowych zagadnień optymalizacji sterowania układami elektrycznymi.

Najpierw zostaną zdefiniowane pewne podstawowe pojęcia i opisane ogólne zasady stosowania metody w odniesieniu do układów dyskretnych i zdeterminowanych.

Stan systemu, który należy optymalizować jest w każdej chwili określony przez wektor stanu (W_i)[x]. Wektor stanu jest to zbiór wielkości charakteryzujących jednoznacznie aktualny stan systemu. Zbiór ten należy do pewnej przestrzeni wektorowej D czyli $W_i \in D$.

Sterowanie systemu polega na kontroli wektorów kolejnych stanu (W_i), oraz podejmowaniu decyzji d_i o sposobie sterowania układem. Zmienne decyzyjne należą do przestrzeni S co można zapisać w sposób następujący $d_i \in S$.

Zakłada się, że kontrola układu jest prowadzona w sposób dyskretny, a układ jest zdeterminowany, co oznacza, że rezultat decyzji jest jednoznaczny. Zmienna decyzyjna jest pewną funkcją wektora stanu, czyli

$$d_i = d(W_i) \tag{1.1}$$

Zakłada się również, że ilość decyzji jakie można podjąć w dowolnym stanie procesu jest ograniczona i że zawsze należy wybrać tylko jedną z nich.

W stanie początkowym określonym wektorem W_o jest do wyboru kilka decyzji - przyjmujemy jedną z tych decyzji na przykład d_o. Rezultatem przyjęcia tej decyzji jest nowy stan układu (W_1), który jest transformacją wektora stanu początkowego wynikającą z przyjętej decyzji początkowej

$$W_1 = T_{do}(W_o) \tag{1.2}$$

W dalszym ciągu stan określony wektorem W_i będzie nazywany krótko stanem Wi.

Ogólnie można powiedzieć, że stan W_i jest transformacją T_{di-1} stanu W_{i-1}

$$W_i = T_{di-1}(W_{i-1}) \tag{1.3}$$

Transformacja T_{di} wynika z powzięcia decyzji d_i. Ciąg $\{T_{do}, T_{d1}, \ldots, T_{di}, \ldots\}$ jest zbiorem trans-

---

x) Definicja wektora stanu podana jest na końcu artykułu.

formacji, które mają taką własność, że jeśli $W_i \in D$ to $T_{di}(W_i) \in D$ dla wszystkich $d_i \in S$.
Ciąg decyzji $\{d_o, d_1, \ldots, d_i, \ldots\}$ nazywa się strategią.

W dalszym ciągu interesować nas będą układy o skończonej ilości stanów, to znaczy, że zajmiemy się zagadnieniem doprowadzenia układu ze stanu W_o do stanu W_N poprzez skończoną ilość N-1 stanów pośrednich.

O jakości prowadzonego procesu informuje pewna funkcja zależna od kolejnych wektorów stanu oraz przyjętej strategii:

$$\phi = F(W_o, W_1, \ldots, W_N, d_o, d_1, \ldots, d_{N-1}) \qquad (1.4)$$

Funkcja ta pozwala określić kryterium optymalności. Niech kryterium polega na znalezieniu minimum funkcji ϕ.

Strategia, która zapewnia spełnienie warunku $\phi = \phi_{min}$ nazywa się strategią optymalną.

Zagadnienie określania strategii optymalnej można rozwiązać różnymi metodami. Niżej przedstawiona będzie krótka ocena przydatności niektórych najbardziej znanych metod rozwiązania tego zagadnienia.

Jedną z metod jest znalezienie punktu ekstremalnego w przestrzeni N-wymiarowej na podstawie równań

$$\frac{\partial \phi}{\partial d_i} = 0 \qquad i=0,1,2,\ldots,N-1$$

Takie rozwiązanie jest bardzo trudne do uzyskania, zwłaszcza gdy funkcja posiada ekstrema lokalne lub wręcz niemożliwe gdy funkcja osiąga minimum na krańcach przedziału.

Zbadamy możliwości zastosowania rachunku wariacyjnego Pierwsza trudność polega na wyrażeniu kryterium w postaci funkcjonału

$$\phi = \int_{t_o}^{t_N} \psi[W_o, u(t), t]\, dt$$

Interesująca jest strategia optymalna u(t) dla której $\phi = \phi_{min}$.

Niech wektor $u(t)$ składa się z n zmiennych niezależnych $u_1(t)$, $u_2(t)$,......, $u_n(t)$ oraz ich pochodnych do rzędu r włącznie: $u_i^{(1)}(t)$, $u_i^{(2)}(t)$,.....,$u_i^{(r)}(t)$. Aby funkcjonał posiadał ekstremum dla wektora $u(t)$ warunkiem koniecznym jest by jego składowe spełniały następujący układ n - równań różniczkowych Eulera-Poissona rzędu $2r$:

$$\psi_{u_i} - \frac{d}{dt}\left\{\psi_{u_i^{(1)}}\right\} + \frac{d^2}{dt^2}\left\{\psi_{u_i^{(2)}}\right\} + \ldots + (-1)^r \frac{d^r}{dt^r}\left\{\psi_{u_i^{(r)}}\right\} = 0$$

$i = 1,2, \ldots, n$

gdzie $\psi_{u_i^{(k)}} = \frac{\partial \psi}{\partial u_i^{(k)}}$; $k = 0,1,2, \ldots, r$

Druga trudność przy poszukiwaniu strategii optymalnej polega na znalezieniu rodziny wektorów $u(t)$ jako rozwiązań tego układu równań różniczkowych.

Następna trudność to wyznaczenie spośród tej rodziny wektora spełniającego warunki dostateczne istnienia minimum funkcjonału oraz warunki przechodzenia układu przez punkt W_o w momencie t_o i przez punkt W_N w momencie t_N.

Trudności wzrastają jeżeli wektor $u(t)$ ma ograniczenia.

Z kolei omówione zostaną zasady programowania dynamicznego.

Kryterium optymalności większości układów technicznych wg (1) i (3) można zapisać w postaci funkcji

$$\phi = \varphi_1(W_o, d_o) + \varphi_2(W_1, d_1) + \ldots + \varphi_N(W_{N-1}, d_{N-1}) \tag{1.5}$$

gdzie $\varphi_i(W_{i-1}, d_{i-1})$ - kryterium dla optymalnego przejścia ze stanu W_{i-1} do W_i. Tego rodzaju układy podlegają tak zwanej zasadzie optymalności podanej w [1] oraz [2]:

"strategia optymalna ma własność, że jakikolwiek byłby stan początkowy i decyzja początkowa, decyzje następne muszą tworzyć strategię optymalną względem stanu będącego rezultatem pierwszej decyzji".

Zasadę tę można również zapisać w formie matematycznej. Łatwo zauważyć, uwzględniając zależności (1.1) i (1.3), że kryterium optymalności dane równaniem (1.5) jest funkcją stanu początkowego W_o oraz ilości N decyzji, można zatem oznaczyć

$$\phi_{min} = f_N(W_o)$$

i napisać

$$f_N(W_o) = \min_{d_o} \min_{d_1} \ldots \min_{d_{N-1}} \left[\varphi_1(W_o, d_o) + \varphi_2(W_1, d_1) + \ldots + \varphi_N(W_{N-1}, d_{N-1})\right]$$

wzór ten można przekształcić

$$f_N(W_o) = \min_{d_o} \left\{\varphi_1(W_o, d_o) + \min_{d_1} \min_{d_2} \ldots \min_{d_{N-1}} \left[\varphi_2(W_1, d_1) + \varphi_3(W_2, d_2) + \ldots + \varphi_N(W_{N-1}, d_{N-1})\right]\right\}$$

wyrażenie

$$\min_{d_1} \min_{d_2} \ldots \min_{d_{N-1}} \left[\varphi_2(W_1, d_1) + \varphi_3(W_2, d_2) + \ldots + \varphi_N(W_{N-1}, d_{N-1})\right]$$

przedstawia kryterium dla procesu składającego się z N-1 decyzji i rozpoczynającego się od stanu początkowego W_1.

Wobec tego uwzględniając dodatkowo zależność (1.2) można napisać

$$f_N(W_o) = \min \left\{\varphi_1(W_o, d_o) + f_{N-1}\left[T_{do}(W_o)\right]\right\} \quad (1.6)$$

Uzyskane równanie (1.6) jest matematycznym zapisem zasady optymalności.

Aby znaleźć strategię umożliwiającą optymalne przeprowadzenie układu z danego stanu W_o do stanu W_N należy wyróżnić pewną ilość stanów pośrednich, które układ może osiągnąć przechodząc od W_o do W_N. Ilość przyjętych stanów musi stanowić kompromis między dokładnością i czasem trwania obliczeń.

Następnie oblicza się optymalne wartości kryteriów krokowych $\varphi_i(W_{i-1}, d_{i-1})$ dla wszystkich stanów W_i oraz odpowiednich decyzji. Wartość funkcji ϕ dla danej strategii otrzymuje się przez sumowanie wartości kryteriów krokowych dla stanów pośrednich między W_o i W_N odpowiadających wybranej strategii.

Ponieważ prowadzenie układu od W_o do W_N może odbyć się przy przejściu przez różne stany pośrednie - obliczanie funkcji ϕ i porównywanie ich między sobą w celu określenia strategii optymalnej jest praktycznie nie wykonalne. Zasadniczym ułatwieniem jest zastosowanie za sady optymalności. Obliczanie rozpoczyna się od stanu końcowego i liczy się kolejno wartości

$$f_1(W_{N-1}), f_2(W_{N-2}), \ldots, f_{N-i}(W_i), \ldots$$

dochodząc do $f_N(W_o)$.

Wykorzystanie zasady optymalności pozwala na eliminację decyzji pośrednich nie prowadzących do optimum i łatwe znalezienie optymalnej strategii oraz wartości nu merycznej funkcji kryterium $f_N(W_o)$.

Reasumując można powiedzieć, że metodę programowania dynamicznego można stosować do analizy układów posiadających następujące właściwości:

1) w każdym momencie czasu lub inaczej w każdym kroku układ można określić za pomocą pewnego zbioru parametrów - zwanego wektorem stanu,

2) w każdym kroku podejmuje się jedną z kilku możliwych decyzji,

3) rezultatem podjęcia decyzji jest transformacja wektora stanu,

4) przeszłość układu nie ma znaczenia przy podejmowaniu decyzji,

5) celem procesu jest maksymalizacja lub minimalizacja pewnej funkcji parametrów stanów,

6) proces zachodzący w układzie może być ciągły lub dyskretny,

7) proces może być zdeterminowany lub stochastyczny - w procesie zdeterminowanym podjęcie decyzji wiąże się z określoną transformacją wektora stanu, w procesie

stochastycznym podjęcie decyzji prowadzi nie do określonej transformacji lecz do pewnego prawdopodobieństwa wystąpienia transformacji; wektor stanu W przekształca się przy tym w wektor przypadkowy Z, który może wystąpić z prawdopodobieństwem zależnym od wektora W oraz wyboru decyzji d.

Przykłady obliczeń podane w pracy ilustrują właściwości metody w zastosowaniu do układów dyskretnych i zdeterminowanych.

Obliczenia są przybliżone; dokładność można powiększyć przez zwiększenie ilości stanów pośrednich co wiąże się z koniecznością zastosowania maszyny cyfrowej do obliczeń.

2. Optymalizacja układu ładowania kondensatora

Zadanie optymalizacji układu RC przedstawionego na rys. 1 polega na naładowaniu kondensatora do napięcia U = 100 V w czasie jak najkrótszym. Napięcie początkowe na kondensatorze równe zeru. Moc źródła napięcia zasilania y(t) jest ograniczona i równa się 3 W.

Przyjęto następujące parametry układu:

opornošć $R = 1\ k\Omega$ moc $P = 3W$,

pojemność $C = 1000\,\mu F$.

Równania dla opisanego wyżej układu mają formę

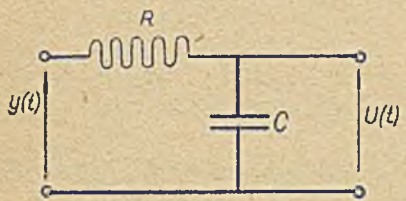
$$y(t) = R\,\frac{P(t)}{y(t)} + \frac{1}{C}\int_0^t \frac{P(t)}{y(t)}\,dt \qquad P(t) \leqslant 3W \tag{2.1}$$

$$U = \frac{1}{C}\int_0^T \frac{P(t)}{y(t)}\,dt \tag{2.2}$$

Z nieliniowego równania (2.1) należy określić funkcję P(t), następnie podstawić ją do (2.2) i obliczyć jak musi się zmieniać y(t) aby uzyskać $T = T_{min}$. Widoczne jest, że klasyczna analiza wiąże się z dużymi trudnościami. W związku z tym należy zastosować metodę programowania dynamicznego.

Stan układu w dowolnej chwili t jest jednoznacznie określony przez dwie wielkości y(t) oraz u(t), które stanowią współrzędne wektora stanu W(t).

Wybrano niewielką stosunkowo ilość stanów pośrednich równą 143. Najwygodniej jest przedstawić te stany w postaci tabeli-wykresu na płaszczyźnie y,u pokazanej na rys. 2. Tabelę, którą można nazwać tabelą stanów oznaczono numerem I.



Rys. 1. Układ ładowania kondensatora

Ponieważ moc źródła jest ograniczona nie wszystkie wybrane stany będą możliwe do osiągnięcia i w związku z tym trzeba w tabeli I wyznaczyć ograniczenia.

Przy ładowaniu kondensatora prąd maksymalny, który przepływa w chwili skokowej zmiany napięcia zasilania y jest funkcją różnicy tego napięcia i napięcia na kondensatorze w chwili początkowej

$$i_{max} = \frac{y-u}{R}$$

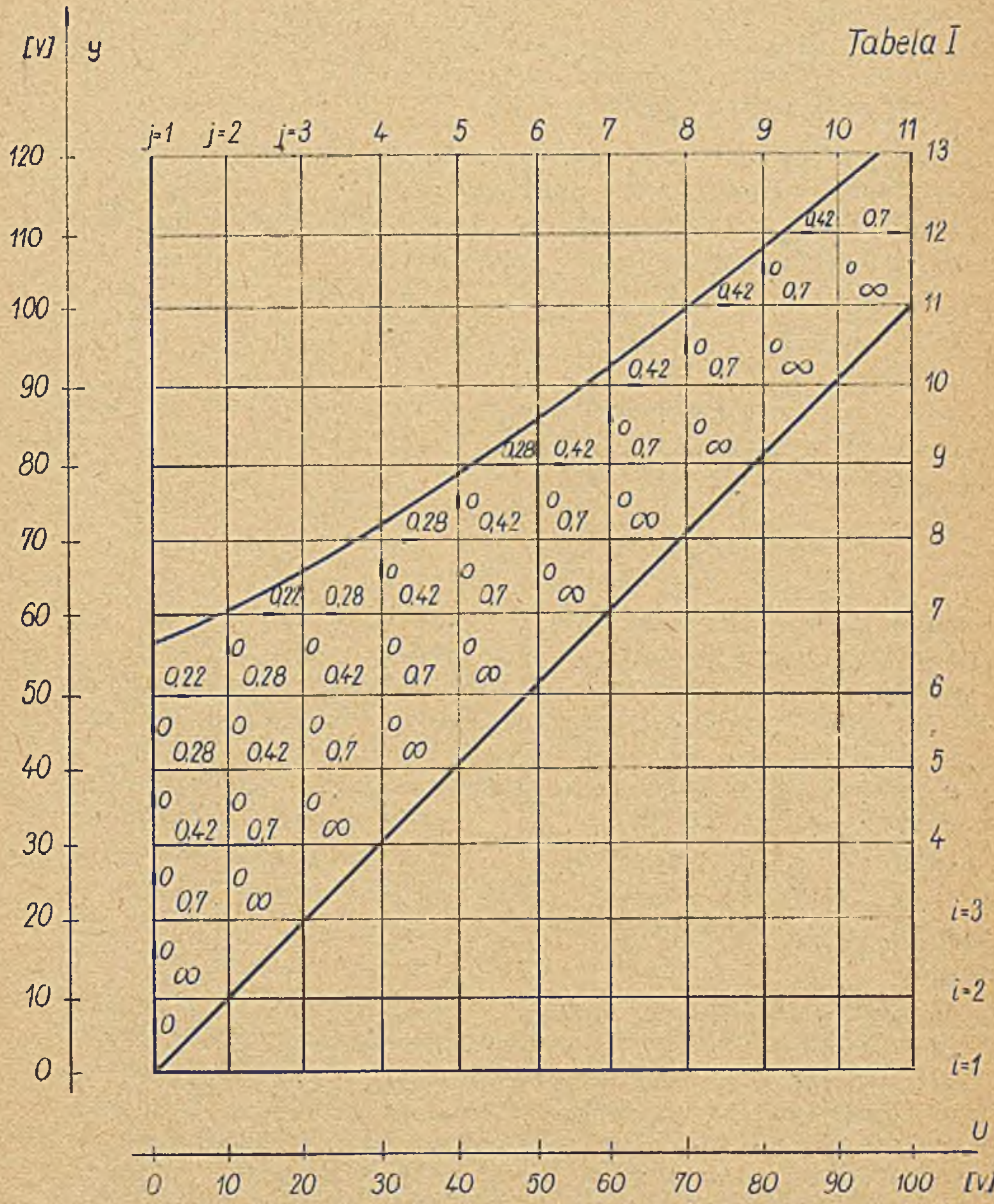
Ponieważ jest jeszcze warunek ograniczenia mocy źródła i y = P można napisać:

$$\frac{P}{y_{max}} = \frac{y_{max}-u}{R}$$

Z powyższego wzoru uzyskuje się równanie krzywej ograniczenia mocy

$$u = \frac{y_{max}-PR}{y_{max}} \tag{2.3}$$

Wspomniana krzywa jest oznaczona w tabeli stanów numerem 1. Istnieje jeszcze jedno ograniczenie wynikające z warunku ładowania $y>u$. Wobec tego równanie ograniczenia $y=u$ przedstawione prostą 2 będzie miejscem geometrycznym stanów w których napięcie na kondensatorze jest równe napięciu zasilania. Stany wyznaczone przez punkty powyżej krzywej 1 są niedostępne ze względu na przeciążenie, zaś stany wyznaczone przez punkty znajdujące się poniżej prostej 2 są nieinteresujące ponieważ w stanach tych zachodzi rozładowanie kondensatora. Następnie wy-



Rys.2. Tabela stanów dla układu ładowania kondensatora

znacza się minimalne czasy przejścia z dowolnego stanu do stanów sąsiednich - są to optymalne wartości funkcji krokowych. Zwiększenie napięcia zasilania jest natychmiastowe i dlatego przejście ze stanu $W_{i,j}$ do stanu $W_{i+1,j}$ wymaga czasu równego zeru.

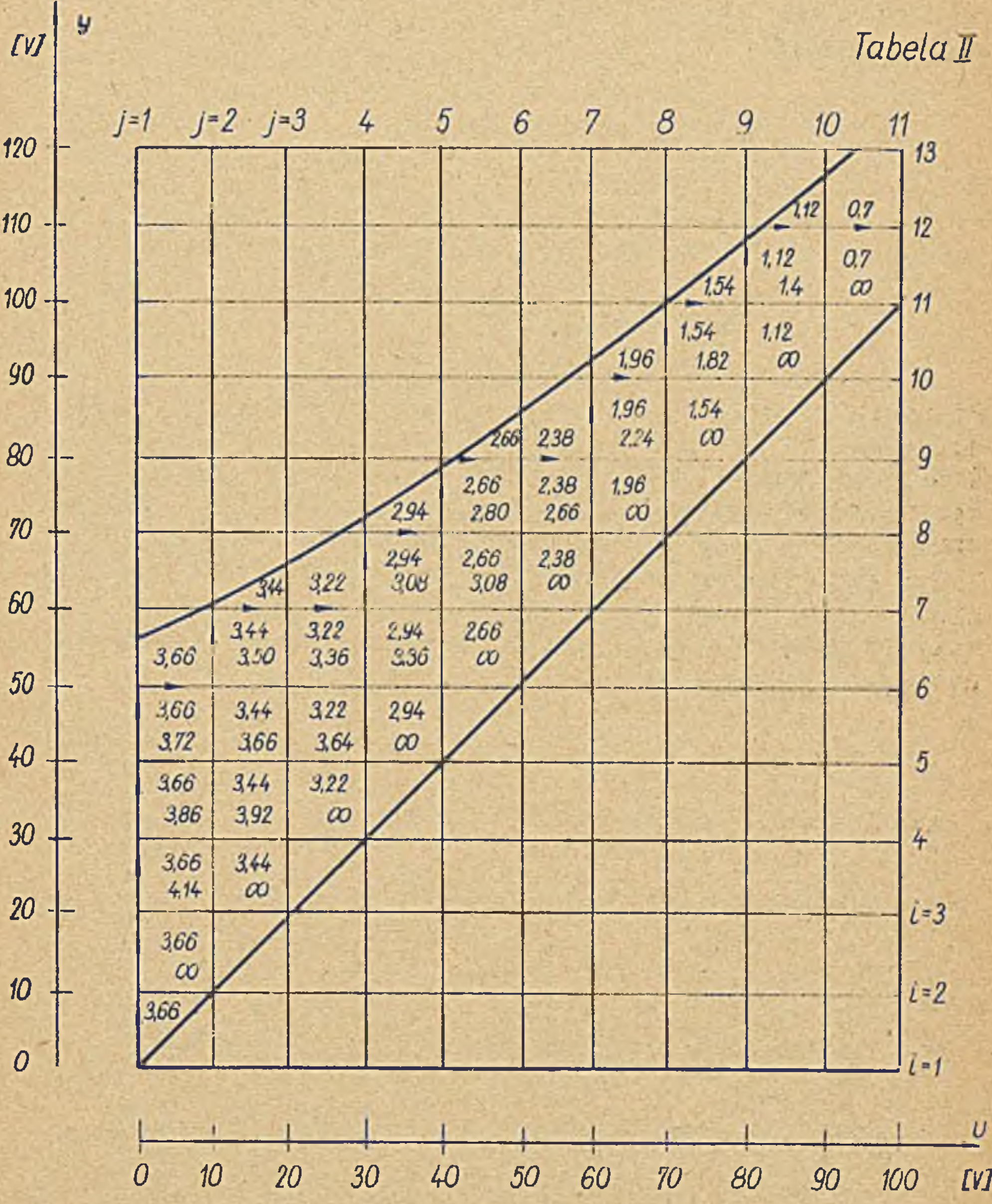
Natomiast zwiększenie napięcia na kondensatorze przy stałym napięciu zasilania czyli przejście ze stanu $W_{i,j}$ do stanu $W_{i,j+1}$ odbywa się w czasie skończonym t_x, który można wyliczyć z równania układu

$$\Delta U = (y_{i,j} - U_{i,j})\,(1 - e^{-\frac{t_x}{RC}}) \qquad (2.4)$$

gdzie $y_{i,j}$ napięcie zasilania, $u_{i,j}$ napięcie początkowe na kondensatorze, ΔU - przyrost napięcia na kondensatorze po czasie t_x

$$\Delta U = u_{i,j+1} - u_{i,j}$$

Równanie (2.4) jest napisane w formie ogólnej i jest ważne dla wszystkich stanów powyżej prostej 2.
Na podstawie tego równania obliczamy czasy t_x dla wszystkich interesujących nas stanów. Wyniki obliczeń umieszczono w tabeli stanów (rys. 2). Każdy punkt uzyskanej w ten sposób tabeli ma przyporządkowane dwie liczby. Pierwsza z nich oznaczona przez $a_{i,j}$ podaje czas przejścia ze stanu $W_{i,j}$ do stanu $W_{i+1,j}$ i w naszym konkretnym przypadku jest stale równa zeru. Druga z nich oznaczona przez $b_{i,j}$ podaje czas przejścia ze stanu $W_{i,j}$ do stanu $W_{i,j+1}$.
Aby na podstawie tabeli I znaleźć strategię optymalną dla przejścia ze stanu $W_{1,1}$ do stanu $W_{11,11}$ należy przekształcić tabelę I przy wykorzystaniu zasady optymalności w tabelę II, którą można nazwać tabelą strategii. Każdemu punktowi tabeli II będą przypisane 2 liczby z których pierwsza A_{ij} będzie podawać optymalny czas dojścia ze stanu $W_{i,j}$ do stanu $W_{11,11}$ poprzez stan $W_{i+1,j}$ a druga B_{ij} będzie podawać odpowiedni czas, ale dla przejścia przez stan $W_{i,j+1}$. Wartości tę przestawiają funkcje $f_k(W_{i,j})$. Obliczanie strategii rozpoczyna się od stanu



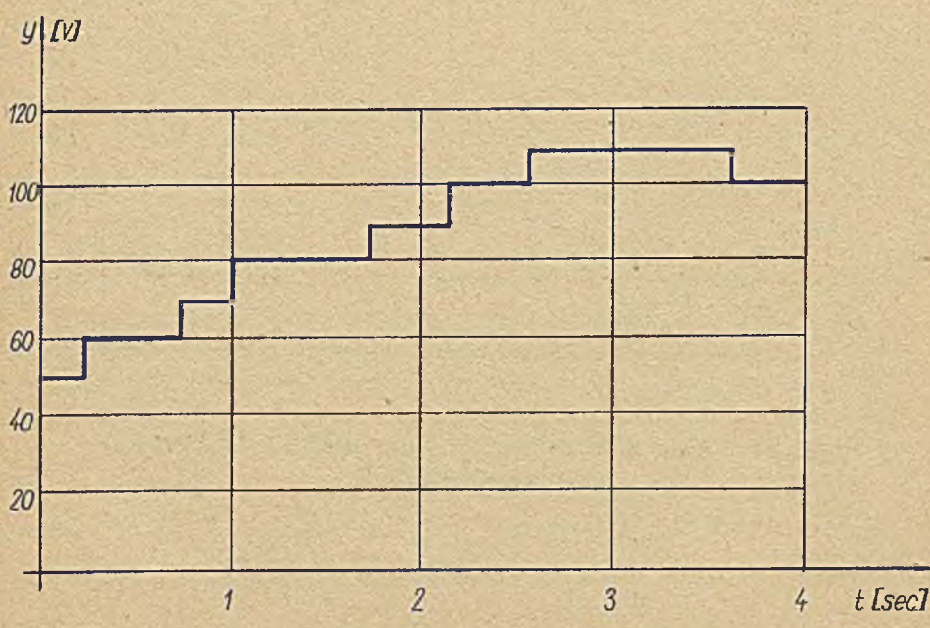
Rys.3. Tabela strategii dla układu ładowania kondensatora

końcowego $W_{11,11}$. Wielkości A_{ij} i B_{ij} określamy na podstawie równań

$$A_{i,j} = a_{i,j} + \min \begin{bmatrix} B_{i+1,j} \\ A_{i+1,j} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$B_{i,j} = b_{i,j} + \min \begin{bmatrix} B_{i,j+1} \\ A_{i,j+1} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Równania (2.5) i (2.6) wynikają wprost z zasady optymalności.
Tabela strategii jest przedstawiona na rys. 3.Strategię optymalną znajduje się rozpoczynając wybór od stanu początkowego i przy przechodzeniu od stanu do stanu kierując się wyborem minimalnych wartości A_{ij} lub B_{ij}. Uzyskaną w ten sposób strategię optymalną oznaczono w tabeli II przy pomocy strzałek. Strategię optymalną można następnie oznaczyć w tabli I.

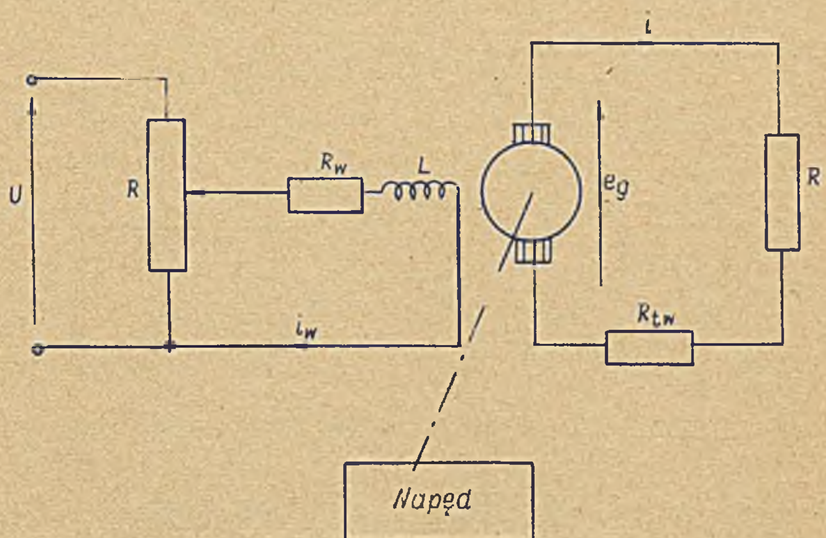


Rys. 4. Przebieg napięcia zasilania przy optymalnym ładowaniu kondensatora

Rozpatrzony powyżej przykład jest tak prosty, że nie wymaga tworzenia tabeli strategii. Tabela ta została jednak podana dla możliwie najlepszego zilustrowania metody. Na podstawie tabeli I po znalezieniu optymalnej strategii można wykreślić kształt napięcia zapewniającego optymalne ładowanie kondensatora w omawianym układzie. Napięcie W funkcji czasu jest przedstawione na rys. 4. Jest rzeczą zupełnie oczywistą, że zwiększenie liczby uwzględnianych stanów pośrednich wiąże się ze zwiększeniem dokładności obliczeń.

3. Rozruch generatora prądu stałego

Jako drugi przykład rozpatrzymy sterowanie rozruchem obcowzbudnego generatora prądu stałego, napędzanego pewnym układem mechanicznym. Generator jest stale obciążony opornością czynną R.
Schemat układu przedstawiony jest na rys. 5.



Rys. 5. Schemat układu generatora

Parametry układu

a) generator

$R = 9{,}8\Omega$, $R_{tw} = 0{,}2\Omega$, $kg = 21\ \frac{V\ sec}{A}$

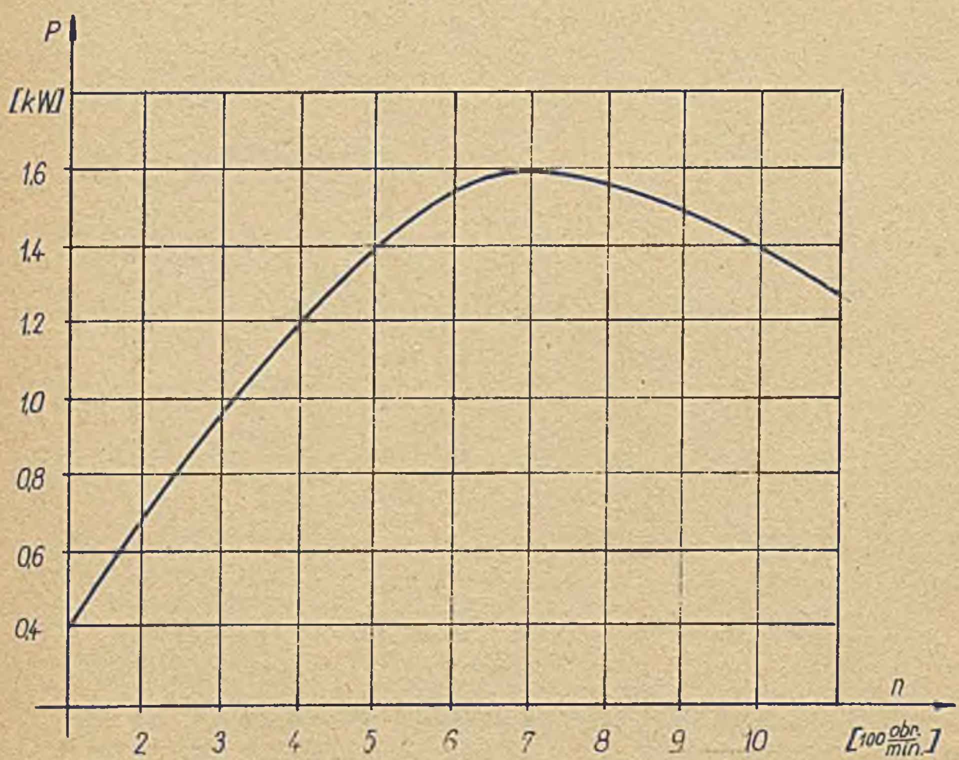
b) wzbudzenie

$R_w = 10\Omega$, $L = 10H$, $U = 0{,}7\ V$, $T = \frac{L}{R_w} = 1\ sec$

c) parametry mechaniczne

$R_m = 0{,}01\ W\ sec^2$ R_m – współczynnik strat mechanicznych

$I = 0{,}6\ W\ sec^3$ I – moment bezwładności układu sprowadzony na oś generatora



Rys. 6. Charakterystyka mocy napędu

Moc napędu mechanicznego jest ograniczona, a jej wielkość zależy od obrotów. Zależność mocy od obrotów dana jest charakterystyką przedstawioną na rys. 6.
Zadanie polega na określeniu sposobu sterowania obrotami napędu oraz napięciem wzbudzenia generatora, aby w minimalnym czasie przeprowadzić rozruch generatora bez przekroczenia mocy napędu mechanicznego.
Stan początkowy $n = 100 \frac{obr}{min}$ przy $i_w = 0$, stan końcowy $n = 1000 \frac{obr}{min}$ przy $i_w = 50$ mA.

Dla uproszczenia obliczeń nie uwzględnia się oddziaływania twornika oraz nieliniowości charakterystyki magnesowania generatora. Zakłada się również, że moment układu napędzającego może zmieniać się skokowo a jego wielkość ograniczona od góry jest zależna od sygnału sterującego. Układ napędzający zaopatrzony jest w stabilizator obrotów, dzięki któremu zmiana prądu wzbudzenia nie pociąga za sobą zmiany szybkości obrotowej generatora o ile moc dopuszczalna nie została przekroczona.

Równanie operatorowe tak uproszczonego układu są następujące:
równanie elektromechaniczne (ważne przy i_w = const)

$$E_g(p) = kg\, i_w\, \bar{I}(p) \tag{3.1}$$

równanie obwodu generatora

$$E_g(p) = J(p)\,(R+R_{tw}) \tag{3.2}$$

równanie momentów (przy i_w = const)

$$M(p)=(R_m+pI)\,(p) + k_g\, i_w\, J(p) \tag{3.3}$$

równanie mocy

$$P(t) = m(t)\,\omega(t) \tag{3.4}$$

gdzie

$M(p)$ – operatorowa postać funkcji momentu napędowego,
$m(t)$ – czasowa forma funkcji momentu napędowego.

Mimo tak znacznych uproszczeń rozwiązanie zagadnienia przy pomocy rachunku wariacyjnego jest niemożliwe – ponieważ niemożliwe jest utworzenie funkcji czasu, którą można by następnie minimalizować. Natomiast programowanie dynamiczne pozwala stosunkowo łatwo rozwiązać ten problem. Stan układu jest określony w każdym momencie przez aktualną wartość prądu wzbudzenia oraz ilość obrotów/min, wobec tego zagadnienie można rozwiązać na płaszczyźnie i_w, n przedstawionej na rys. 7 i tworzącej tabelę stanów oznaczoną numerem III. Wyróżniono 60 stanów pośrednich. Następnie należy określić najkrótsze czasy przejścia ze stanu $W_{i,j}$ do stanu $W_{i,j+1}$ tzn. obliczyć minimalny czas konieczny do zwiększenia liczby obrotów o 100 obr/min przy stałym prądzie wzbudzenia. Na podstawie równań (3.1), (3.2) oraz (3.3) można napisać:

$$M(p) = (R_m + \frac{k_g^2 i_w^2}{R + R_{tw}} + pI)\Omega(p) \qquad (3.5)$$

Uwzględniając warunek początkowy otrzymuje się równanie dla przyrostu obrotów:

$$M(p) = (R_m + \frac{k_g^2 i_w^2}{R + R_{tw}} + pI)\Omega(p) + M_{uj} \qquad (3.6)$$

gdzie M_{uj} oznacza moment ustalony przy obrotach n_j wynikający z oporów tarcia oraz obciążenia generatora. Moment ustalony dany jest równaniem

$$M_{uj} = (R_m + \frac{k_g^2 i_w^2}{R + R_{tw}})\,\omega_j \qquad (3.7)$$

Podstawiając do równania (3.7) parametry układu uzyskuje się

$$M_{uj} = (10^{-2} + 44{,}1\, i_w^2)\,\omega_j \qquad (3.8)$$

Ponieważ zależy nam na przejściu ze stanu $W_{i,j}$ do stanu $W_{i,j+1}$ w czasie jak najkrótszym, sterujemy układem napędzającym w ten sposób, by układ ten rozwijał moment maksymalny M_{max}. Równanie (3.6) pozwala obliczyć narastanie obrotów po skokowej zmianie momentu napędzającego od wartości M_{uj} do wartości M_{max}.
Moment maksymalny M_{ax} dla danych obrotów można okreś-

Tabela III

i \ j	j=1 – j=2	j=2 – j=3	j=3 – 4	4 – 5	5 – 6	6 – 7	7 – 8	8 – 9	9 – 10	
	0,185	0,205	0,220	0,270	0,304	0,374	0,510	0,813	1,628	
5 – 6	0,405 0,164	0,405 0,201	0,405 0,224	0,405 0,254	0,405 0,283	0,405 0,298	0,405 0,373	0,405 0,560	0,405 0,805	0,405
4 – 5	0,288 0,157	0,288 0,183	0,288 0,197	0,288 0,218	0,288 0,242	0,288 0,266	0,288 0,339	0,288 0,472	0,288 0,556	0,288
i=3 – 4	0,222 0,066	0,222 0,153	0,222 0,175	0,222 0,219	0,222 0,241	0,222 0,263	0,222 0,306	0,222 0,394	0,222 0,460	0,222
i=2 – i=3	0,183 0,125	0,183 0,166	0,183 0,208	0,183 0,208	0,183 0,250	0,183 0,292	0,183 0,292	0,183 0,333	0,183 0,457	0,183
i=1 – i=2	0,154 0,180	0,154 0,180	0,154 0,240	0,154 0,300	0,154 0,360	0,154 0,420	0,154 0,480	0,154 0,540	0,154 0,600	0,154

i_w [mA]: 0, 10, 20, 30, 40, 50

n $\left[\frac{obr}{min}\right]$: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000

Rys.7. Tabela stanów dla układu generatora lić na podstawie wzoru (3.4) oraz charakterystyki mocy napędu. Po przekształceniu równania (3.6) uzyskujemy:

$$\Omega(p) = \frac{M_{max} - M_{uj}}{R_m + \frac{k_g^2 i_w^2}{R + R_{tw}} + pI} = \Delta\omega_j \frac{1}{1 + pT_m} \tag{3.9}$$

gdzie

$$\Delta\omega_j = \frac{M_{max} - M_{uj}}{R_m + \frac{k_g^2 i_w^2}{R + R_{tw}}}$$

oznacza wartość ustaloną przyrostu obrotów zależną od prądu wzbudzenia i przyrostu momentów.

$$T_m = \frac{I}{R_m + \frac{k_g^2 i_w^2}{R + R_{tw}}}$$

oznacza stałą czasową układu również zmienną i zależną od wartości prądu wzbudzenia.

Forma czasowa równania (3.9) jest następująca:

$$\omega(t) = \Delta\omega_j (1 - e^{-\frac{t}{T_m}}) \tag{3.10}$$

Interesujący jest czas po jakim $\omega(t)$ osiągnie wartość ω_u wynikającą z różnicy szybkości obrotowej ω_{j+1} w stanie $W_{i,j+1}$ oraz ω_j w stanie $W_{i,j}$ czyli

$$\omega_u = \omega_{j+1} - \omega_j \tag{3.11}$$

W naszym przypadku przyjęta różnica szybkości obrotowej jest wielkością stałą i wynosi

$$\omega_u = \frac{100 . \pi}{30} = 10,47 \left[\frac{rd}{sec}\right]$$

Minimalny czas przejścia ze stanu $W_{i,j}$ do stanu $W_{i,j+1}$ wyznacza się zatem z równania

$$e^{-\frac{t_x}{T_m}} = \frac{\Delta\omega_j - \omega_u}{\Delta\omega_j} \tag{3.12}$$

Wyniki obliczeń przeprowadzone opisanym sposobem dla różnych wartości ustalonych i_w oraz dla różnych prędkości obrotowych podano w tabeli III (rys. 7) pod nazwą współczynników b_{ij}. Czas przejścia ze stanu $W_{i,j}$ do stanu $W_{i+1,j}$, to znaczy czas zmiany prądu wzbudzenia z wartości i_{w_i} do wartości $i_{w_{i+1}}$ jest zależny tylko od parametrów obwodu wzbudzenia, ponieważ przy stałych obrotach układ napędowy dysponuje znacznym "zapasem" momentu. Dzięki temu "zapasowi" układ stabilizacji obrotów pracuje poprawnie i wyrównuje przyrost momentu obciążenia wywołany zmianą prądu wzbudzenia. W związku z tym zmiany prądu wzbudzenia nie powodują zmiany obrotów. Równanie obwodu wzbudzenia z uwzględnieniem warunków początkowych jest następujące

$$I_w(p) = \frac{U_w(p) + pL_{iw}(i)}{R_w + pL} \tag{3.13}$$

gdzie $i_w(i)$ - warunek początkowy w stanie W_{ij}.
Forma czasowa równania (3.13) jest następująca

$$i_w(t) = \frac{U_w}{R_w}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + i_w(i)\, e^{-\frac{t}{T}} \tag{3.14}$$

gdzie $T = \frac{L}{R_w}$

Czas przejścia ze stanu W_{ij} do stanu $W_{i+1,j}$ wyznacza się z równania (3.14) po uprzednim podstawieniu wartości $i_w(i+1)$ w miejsce $i_w(t)$, po przekształceniu otrzymuje się:

$$e^{-\frac{t_x}{T}} = \frac{\frac{U_w}{R_w} - i_w(i+1)}{\frac{U_w}{R_w} - i_w(i)} \tag{3.15}$$

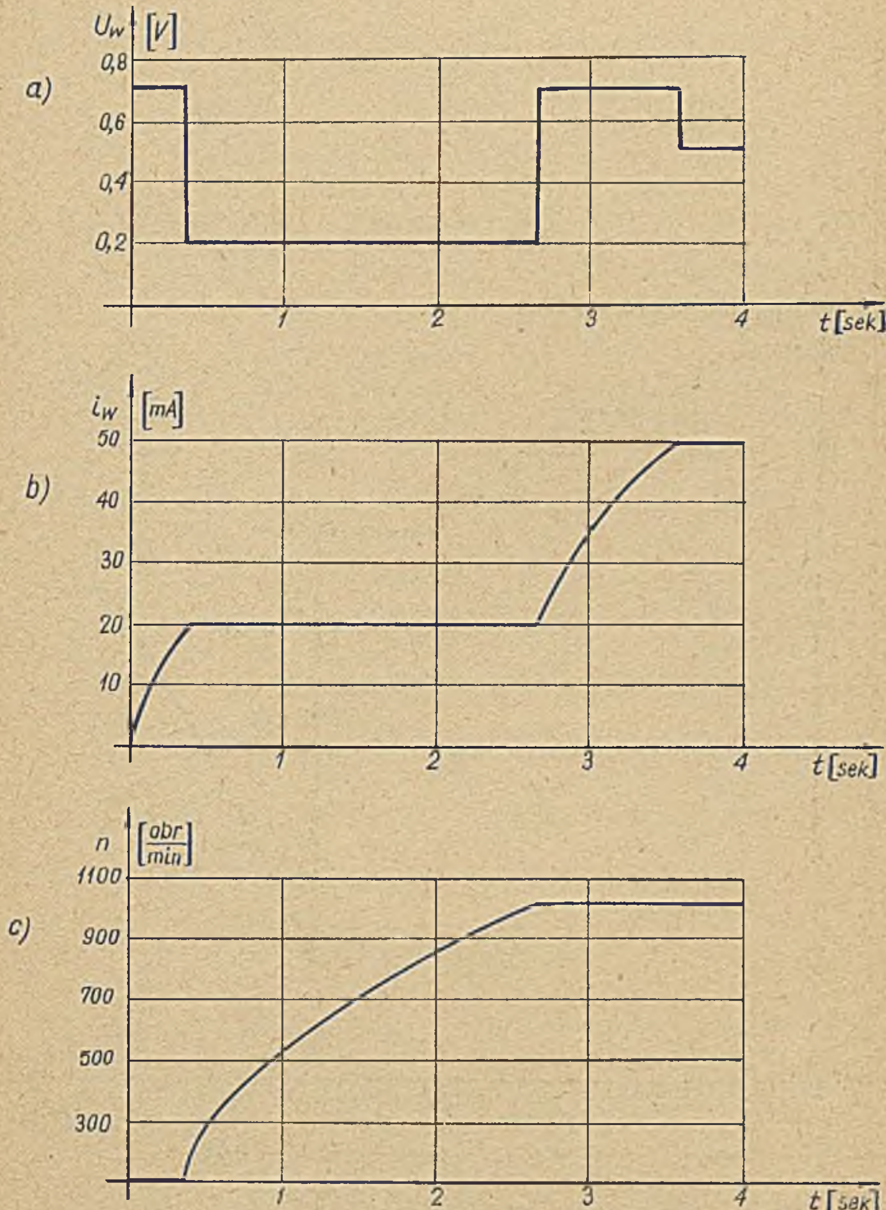
Ze wzoru (3.15) oblicza się czasy t_x niezbędne do zmiany prądu wzbudzenia z wartości $i_w(i)$ do wartości $i_w(i+1)$.

Tabela IV

i_w [mA]

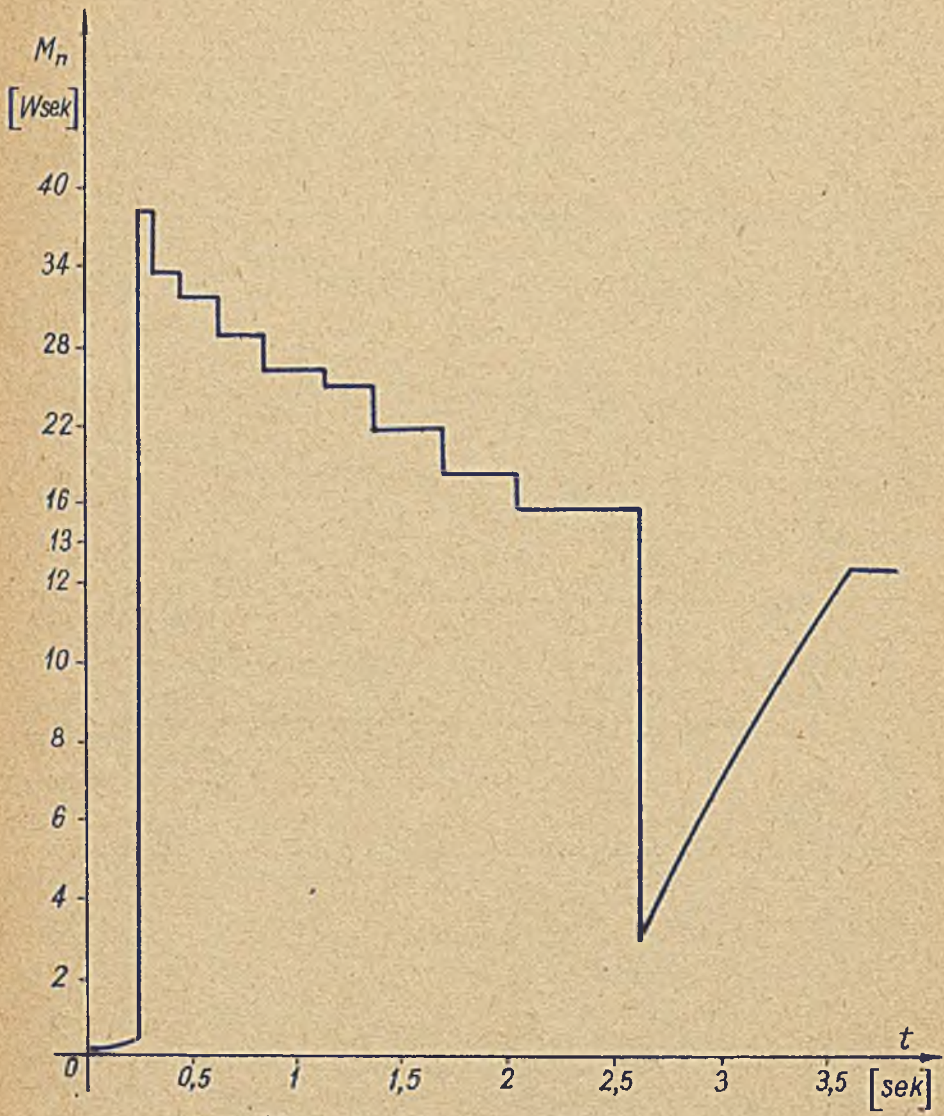
i_w [mA]	j=1 … j=2	j=2 … j=3	j=3 … 4	4 … 5	5 … 6	6 … 7	7 … 8	8 … 9	9 … 10	i
	4,509	4,324	4,119	3,899	3,629	3,325	2,951	2,441	1,628	
50										6
	4,914 3,567	4,729 3,403	4,524 3,202	4,304 2,978	4,034 2,724	3,730 2,441	3,356 2,143	2,846 1,770	2,033 1,210	0,405
40										5
	3,855 3,323	3,691 3,166	3,490 2,983	3,266 2,786	3,012 2,568	2,729 2,326	2,431 2,060	2,058 1,721	1,498 1,249	0,693
30										4
	3,545 3,192	3,388 3,126	3,205 2,973	3,008 2,798	2,790 2,579	2,548 2,338	2,282 2,075	1,943 1,769	1,471 1,375	0,915
20										i = 3
	3,375 3,429	3,309 3,304	3,156 3,138	2,981 2,930	2,762 2,722	2,521 2,472	2,258 2,180	1,952 1,888	1,558 1,555	1,098
10										i = 2
	3,529 3,638	3,458 3,472	3,292 3,532	3,084 3,176	2,876 2,986	2,626 2,754	2,334 2,522	2,042 2,249	1,709 1,852	1,252
0										i = 1
n	100 … 200	200 … 300	300 … 400	400 … 500	500 … 600	600 … 700	700 … 800	800 … 900	900 … 1000	[obr/min]

Rys.8. Tabela strategii dla układu generatora



Rys.9. Przebiegi parametrów przy optymalnym rozruchu generatora

a - przebieg napięcia w obwodzie wzbudzenia, b - przebieg prądu wzbudzenia, c - przebieg obrotów generatora



Rys.10. Przebieg momentu napędowego

Dla skrócenia czasu t_x stosuje się forsowanie tj. zwiększenie napięcia U_w do wartości napięcia zasilania (0,7V) na czas t_x. Wyniki obliczeń w formie współczynników a_{ij} podano w tabeli III na rys. 7. Tabelę strategii tworzy się na podstawie tabeli III pamiętając o zasadach obliczania współczynników A_{ij} oraz B_{ij} (wzory (2.5) i (2.6)). Tabelę strategii wraz z obliczonymi współczynnikami pokazano na rys.8. W stanie początkowym, tzn. przy $i_w = 0$ oraz $n = 100 \frac{obr}{min}$ mniejsza z liczb $A_{1,1}$, $B_{1,1}$ to jest $A_{1,1} = 3{,}529$ sek jest wartością kryterium optymalności i liczbowo przedstawia najkrótszy, optymalny czas rozruchu generatora.

Strategię optymalną określa się przechodząc kolejno od stanu początkowego $W_{1,1}$ przez stany pośrednie, którym przypisane są najmniejsze wartości A_{ij} lub B_{ij} aż do stanu końcowego $W_{6,10}$.
Określoną w ten sposób strategię optymalną zaznaczono w tabeli IV na rys. 8, a następnie w tabeli III na rys.7. Zaznaczona na rys. 7 strategia optymalna podaje jak należy zmieniać prąd wzbudzenia oraz obroty, aby uzyskać minimalny czas rozruchu.

Na rysunkach 9a, 9b, 9c podano przebiegi w czasie napięcia wzbudzenia, prądu wzbudzenia oraz prędkości obrotowej generatora. Na rys. 10 przedstawiono przebieg momentu napędzającego.

4. Zakończenie

Przedstawione w pracy przykłady obliczeń obrazują niektóre zalety stosowanej metody programowania dynamicznego w porównaniu z metodami klasycznymi. Do najistotniejszych właściwości metody programowania dynamicznego należą:

1. Problem poszukiwania punktu ekstremalnego w przestrzeni N-wymiarowej lub rozwiązywania układów równań różniczkowych zastąpiony jest przez poszukiwanie N-punktów przestrzeni dwuwymiarowej.

2. Narzucenie ograniczeń funkcyjnych (w zamieszczonych przykładach ograniczenia mocy) nie utrudnia obliczeń, a często je ułatwia ponieważ zmniejsza ilość możliwych strategii. Wprost przeciwnie, w rachunku wariacyjnym ograniczenia tego typu komplikują obliczenia.

3. Stosunkowo łatwo można obliczać układy nieliniowe.

4. W wyniku obliczeń otrzymuje się nie tylko optymalną strategię ale i wartość liczbową funkcji - kryterium.

5. W wyniku obliczeń uzyskuje się również strategie optymalne dla przeprowadzenia układu z dowolnych warunków początkowych do stanu końcowego W_N.

6. Do przeprowadzenia obliczeń można wykorzystać maszyny cyfrowe.

Właściwościami negatywnymi są: numeryczny sposób prowadzenia obliczeń oraz skończona dokładność uzyskanych wyników. Zwiększenie dokładności jest możliwe lecz wiąże się z koniecznością uwzględnienia większej ilości stanów pośrednich, a w związku z tym z większą stratą czasu przy obliczeniach.

5. Definicja wektora stanu

Rozwiązania równań kanonicznych opisujących proces (lub ściślej jego model matematyczny) nazywa się zmiennymi stanu. Zmienne stanu pozwalają określić zmienne wyjściowe S(t) w momencie początkowym t_o lub w dowolnym momencie $t_1 > t_o$ o ile znany jest przebieg sygnałów wejściowych d(t) dla $t_o \leq t \leq t_1$. Te zmienne mogą być traktowane jak składowe wektora należącego do przestrzeni wektorowej D, zwanego wektorem stanu W(t).
Jeśli do określenia wektora stanu $W(t_1)$ wystarczy znajomość wejść d(t) dla $t_o \leq t < t_1$ i jeśli wektor ma ograniczoną ilość wymiarów to proces opisany tym wektorem nazywa się procesem Markowa.

Wektor stanu jest zdefiniowany przez następujące układy równań wektorowych:

dla procesów ciągłych

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} W(t) = F\left[W(t), d(t), t\right] \\ S(t) = G\left[W(t)\right] \end{cases}$$

dla procesów dyskretnych

$$\begin{cases} \frac{W_{i+1} - W_i}{T} = F(W_i, d_i, i) \\ S_i = G(W_i) \end{cases}$$

W przypadku szczególnym dla procesu zachodzącego w układzie liniowym można napisać:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} W(t) = A(t) . W(t) + B(t) d(t) \\ S(t) = C(t) . W(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{W_{i+1} - W_i}{T} = A_i W_i + B_i d_i \\ S_i = C_i W_i \end{cases}$$

Praca niniejsza jest rezultatem badań nad nowoczesnymi zagadnieniami automatyki prowadzonych w Katedrze Teorii Regulacji.
Pragnę wyrazić serdeczne podziękowanie Panu Profesorowi Doktorowi Stefanowi Węgrzynowi kierownikowi Katedry za zachętę do podjęcia tematu oraz wiele cennych uwag i okazaną pomoc w czasie pracy.
Dziękuję również Kolegom z Katedry za owocne dyskusje nad metodami optymalizacji układów technicznych.

LITERATURA

[1] R. Bellman: Dynamic Programming. New Jersey 1957.

[2] R. Bellman: Teoria Programowania Dynamicznego, w zbiorze prac pt. Nowoczesna Matematyka dla Inżynierów PWN Warszawa 1962.

[3] L. Elsgolc: Rachunek Wariacyjny. PWN Warszawa 1960.

[4] R. Boudarel, J. Delmas, P. Guichet: "Concepts fondamenteaux de l'automatique. Paris 1963.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 16.12.1963r.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Р е з ю м е

В статье представлены возможности применения динамического программирощания для расчета оптимального управления дискретными детерминированны ми системами.

При выведении основных зависимоствй использовано понятие вектора состояния, определение кото рого дано в конце статьи.

Предлагаемый метод применено для расчета опти мального управления двух простых электрических си стем.

Расчитано оптимальное управление напряжением цепочки типа RC, при котором происходит зарядка конденсатора от источника питания ограниченной мощности. Расчитано также оптимальное управление возбуждающим напряжением и угловой скоростью генератора постоянного тока, которое дает минималь ное время разгона при ограниченной мощности привода.

APPLICATION OF THE DYNAMICAL PROGRAMMING METHOD

S u m m a r y

Some possibilities represented by the dynamical programmings method applied to determine the optimal control conditions in discret and determined systems are given. The author uses the notion of the state vector and gives its definition at the end of the paper. A calculation of optimum con trol in two simple electrical circuits illustrates how to apply the described method.

The first one contains a problem of how to control the voltage supplying a RC circuit with the help of which it is

possible to charge the condenser until a certain voltage is reached without exceeding some power limitations of the source.

In the second application of the method the authorcalculates an optimum control problem of a d.c. generator the run-up of which shoud be accomplished in the shortest possible time without exceecing its rotation speed and excitation voltage.