ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 102 Automatyka z.5 1964

ANNA SKRZYWAN

Katedra Teorii Regulacji

# UKŁADY REGULACJI IMPULSOWEJ Z MODULACJĄ CZĘSTOTLIWOŚCI IMPULSOWANIA ORAZ METODA GRAFICZNA ICH ANALIZY

## 1. Wstęp

Spośród wielu typów układów regulacji impulsowej do stosunkowo najmniej opracowanych należą układy z modulacją częstotliwości impulsowania. W literaturze znaleźć można na ten temat jedynie krótkie wzmianki. Obecnie analiza pracy takich układów staje się coraz bardziej potrzebna ze względu na rozwijające się badania systemów nerwowych organizmów żywych, pracujących jak się wydaje w sposób impulsowy i to właśnie w systemie odpowiadającym modulacji częstotliwości impulsowania. Praca niniejsza stanowi próbę analizy takich właśnie układów.

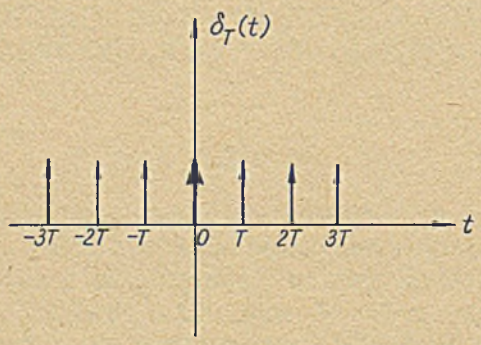
## 2. Równania układów z modulacją częstotliwości impulsowania

Celem wyprowadzenia równań omawianego układu przyjęto założenie upraszczające, a mianowicie, że sygnał wyjściowy z regulatora jest ciągiem impulsów Diraca (rys. 1). Taki ciąg impulsów można zapisać następująco:

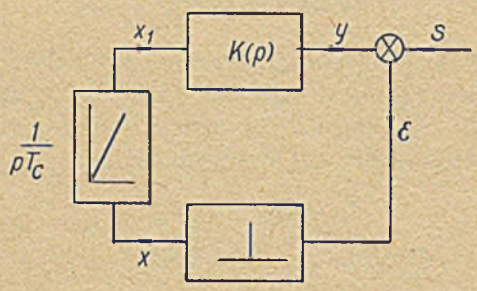
$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t-nT) \qquad (1)$$

Jest to ciąg impulsów o stałej częstotliwości. Jeżeli w układzie pokazanym na rys. 2 częstotliwość impulsowania jest proporcjonalna do sygnału błędu to możemy napisać:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A\delta\left[a|\varepsilon(t)|t-nT\right] \operatorname{sign}\varepsilon(t) \qquad (2)$$




Rys. 1. Ciąg impulsów Diraca

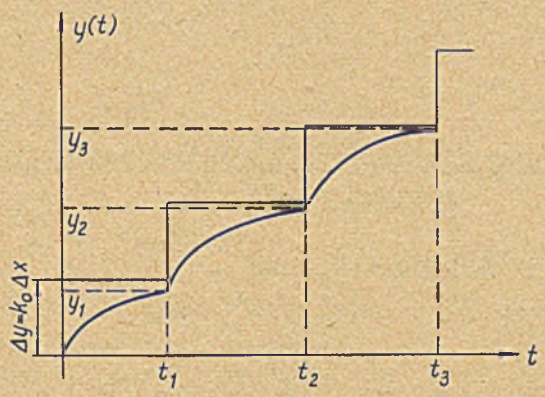



Rys. 2. Układ regulacji impulsowej z modulacją częstotliwości impulsów

Sygnał wyjściowy elementu całkującego o funkcji przejścia $\frac{1}{p\,T_c}$ jest

$$x_1(t) = \frac{1}{T_c}\int_0^{t} x(t)dt = \Delta x_1 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \mathbf{1}\left[a\left|\varepsilon(t)\right|t-nT\right] \operatorname{sign}\varepsilon(t) \tag{3}$$

gdzie $\frac{A}{T_c} = \Delta x_1$ jest przyrostem sygnału $x_1(t)$ na jeden takt impulsowania. Przebieg sygnału $x_1(t)$ jest pokazany na rys. 3. Przebieg sygnału $y(t)$ możemy określić jako sumę odpowiedzi na skok jednostkowy. Przebieg ten ilustruje również rys. 3.




Rys. 3. Przebiegi sygnałów $x_1(t)$ i $y(t)$

Wysłanie impulsu przez regulator może nastąpić tylko w tych momentach czasu, w których spełniona jest zależność:

$$a\left|\varepsilon(t)\right| \cdot t = nT \tag{4}$$

Pierwszy impuls nastąpi w chwili $t = 0$ (moment powstania zaburzenia), następny w momencie w którym $a\left|\varepsilon(t_1)\right| t_1 = T$. Możemy więc napisać:

$$y(t) = \Delta y \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sign}\varepsilon(t) \cdot k_1\,(t - t_n)\,\mathbf{1}(t - t_n) \tag{5}$$

gdzie $\Delta y$ - jest przyrostem sygnału $y(t)$ na jeden takt impulsowania w przypadku elementu bezinercyjnego o wzmocnie-

niu $k_o$ takim samym jak wzmocnienie elementu o funkcji przejścia $K(p) \triangleq k(t)$.
A więc $\Delta y = k_o \Delta x_1$, $k_1(t) = \frac{k(t)}{k_o}$ - reprezentuje własności dynamiczne elementu o funkcji przejścia $k(t)$, a

$$t_n - t_{n-1} = \frac{T}{a\,|\varepsilon(t_k)|} \tag{6}$$

Jeżeli w chwili $t = 0$ nastąpiła zmiana sygnału $s$ z wartości $s = 0$ na $s = s_o$, czyli $\varepsilon(0) = s_o$ wówczas:

$$\varepsilon(t)=s_o-y(t)=\varepsilon(0)-\Delta y \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sign} \varepsilon(t) k_1 (t - t_n) 1 (t - t_n) \tag{7}$$

## 3. Metoda graficzna znajdowania przebiegu sygnału błędu $\varepsilon(t)$

### A. Układ z elementem całkujacym

Dla układu pokazanego na rys. 4 jest:

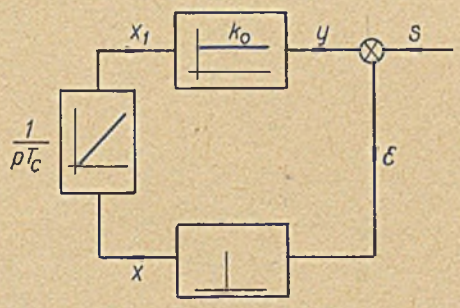
$$y(t)= \frac{k_o}{T_c} \int_0^t x(t)= \frac{k_o \Lambda}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} 1\left[a|\varepsilon(t)|t-nT\right] \operatorname{sign} \varepsilon(t) \tag{8}$$

a więc

$$\varepsilon(t)=\varepsilon(0)-\Delta y \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} 1\left[a|\varepsilon(t)|t-nT\right] \operatorname{sign} \varepsilon(t) \tag{9}$$

Współczynnik $\Delta y = k_o \Delta x_1$ reprezentuje w tym przypadku przyrost sygnału $y(t)$, a więc i $\varepsilon(t)$ na jeden takt impulsowania.
Jak wynika z wzoru (4) pierwszy impuls wystąpi w chwili $t=0$. Wskutek tego nastąpi zmniejszenie błędu z wartości $\varepsilon(0)$ do $\varepsilon_1 = \varepsilon(0) - \Delta y$.
Po czasie $t_1 = T \frac{1}{a\,|\varepsilon_1|}$ zostanie wysłany następny impuls.
Czas ten można znaleźć graficznie, rysując prostą o równaniu

$a|\varepsilon_1|t$ aż do przecięcia z prostą $t = T$. Traktując chwilę $t_1$ jako początek układu współrzędnych znaleźć można analo-




Rys. 4. Schemat blokowy układu z elementem całkującym

gicznie jak poprzednio czas $t_2$, po którym regulator ponownie zaimpulsuje.

Na rys. 5 przedstawiono przebieg sygnału błędu dla przyjętych danych: $\varepsilon(0) = 10$ V, $a = 1$ 1/V oraz w przypadkach: a) $\Delta y = 2$ V, b) $\Delta y = 1$ V, c) $\Delta y = 1{,}5$ V.

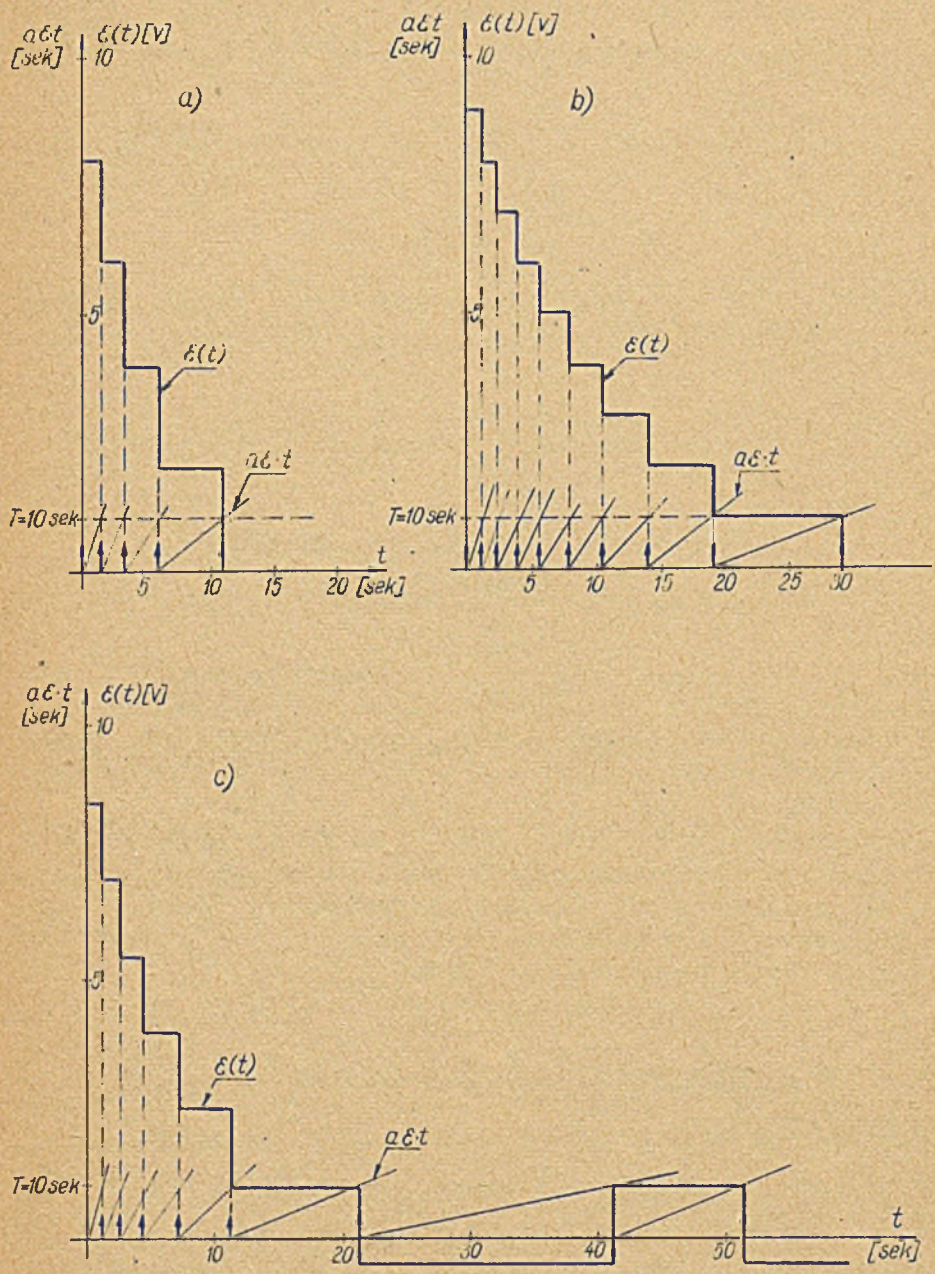
W przypadku a i b $\varepsilon(0)$ jest całkowitą wielokrotnością $\Delta y$ i błąd zostaje sprowadzony do zera po odpowiedniej ilości impulsów zależnej od $\varepsilon(0)$. W przypadku gdy $\varepsilon(0)$ nie jest całkowitą wielokrotnością $\Delta y$, układ pozostaje w stanie drgań stabilnych o amplitudzie równej $\Delta y$.

B. <u>Układ z elementem o funkcji przejścia</u> $K(p) = \frac{k_o}{1+pT_o}$ i <u>całkowaniem</u>

Korzystając z relacji (7) możemy dla układu z rys. 6 napisać:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) - \Delta y \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sign} \varepsilon(t) \left(1 - e^{-\frac{t-t_n}{T_o}}\right) \mathbf{1}(t-t_n) \qquad (10)$$

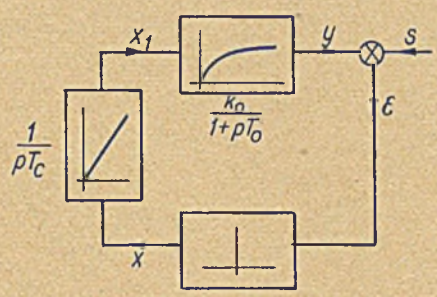
gdzie $\Delta y = \frac{Ak_o}{T_c}$.




Rys.5. Przebieg sygnału błędu w układzie z elementem całkującym

a) dla $\frac{\varepsilon(0)}{\Delta y} = 5$, b) $\frac{\varepsilon(0)}{\Delta y} = 10$, c) $\frac{\varepsilon(0)}{\Delta y} = 6{,}66$

Przebieg błędu w tym układzie pokazano na rys. 7. Sposób obliczania tego przebiegu jest analogiczny jak w przypadku układu zawierającego wyłącznie element całkujący. Również w tym układzie ustala się drgania o amplitudzie równej $\Delta y$. Przebieg pokazany na rys. 7 znaleziono dla danych: $\varepsilon(0)=10V$, $\Delta y=3V$, $T=20$ sek, $T_o=2$ sek, $a = 1 \cdot 1/V$.




Rys. 6. Schemat blokowy układu z całkowaniem i elementem inercyjnym 1 rzędu

C. Układ zawierający wyłacznie obiekt inercyjny 1 rzędu

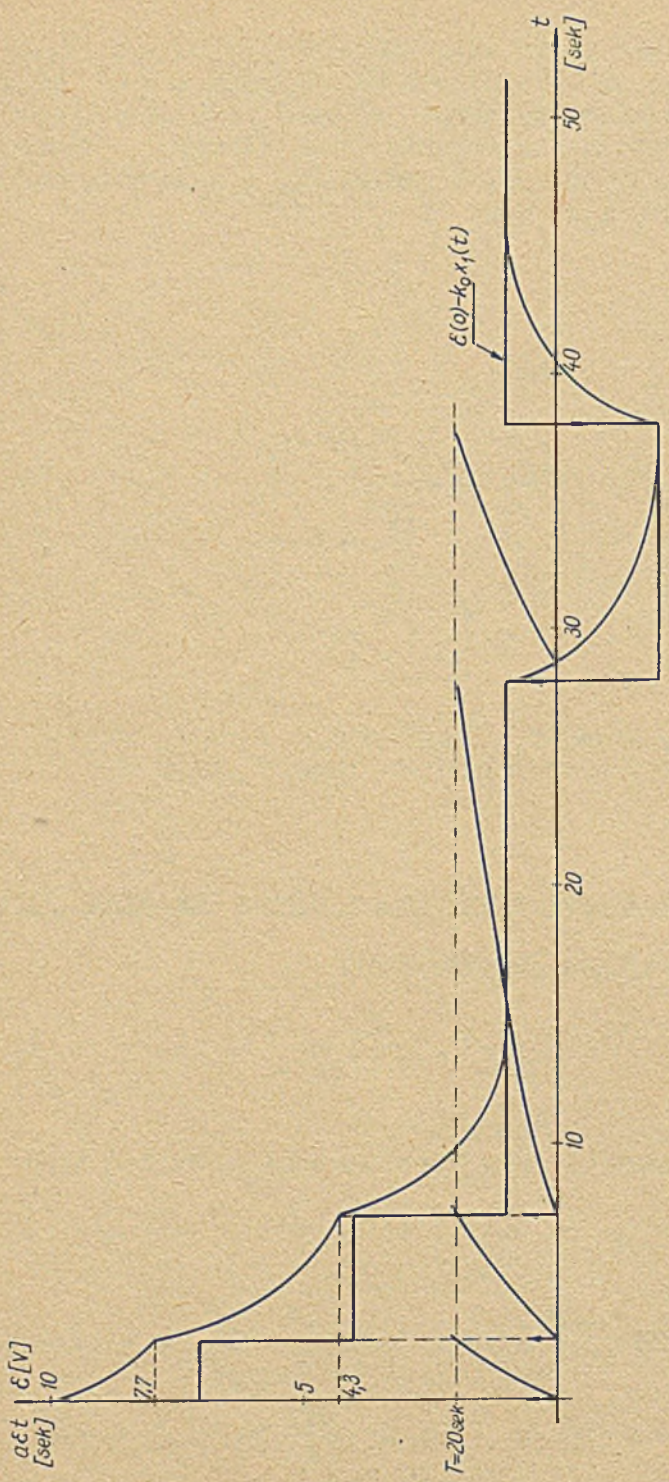
Funkcja przejścia obiektu jest:

$$K(p) = \frac{k_o}{1 + pT_o} \tag{11}$$

a schemat układu ilustruje rys. 8.
Odpowiedź elementu inercyjnego 1 rzędu na sygnał typu

$$x(t) = A\,\delta(t) \mathrel{\hat{=}} pA$$

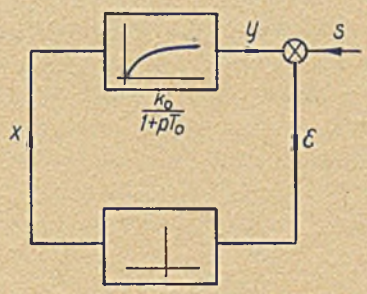
jest $Y(p) = Ak_o \frac{p}{1 + pT_o} \mathrel{\hat{=}} y(t) = \frac{Ak_o}{T_o} \cdot e^{-\frac{t}{T_o}} = \Delta y\, e^{-\frac{t}{T_o}}$



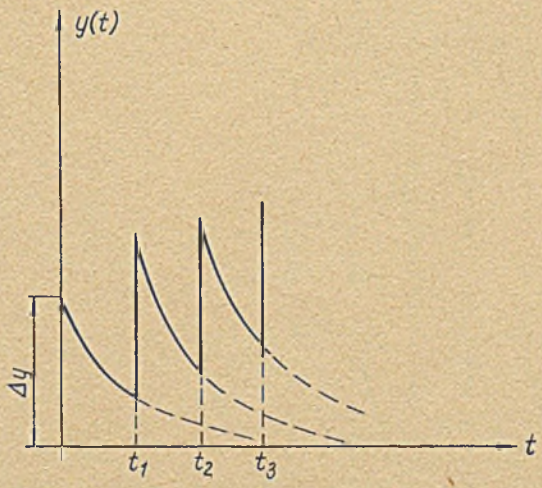

Rys.7. Przebieg ε(t) w układzie pokazanym na rys.6

W przypadku gdy $x(t)$ jest ciągiem impulsów Diraca, $y(t)$ ma przebieg pokazany na rys. 9. Dla czasu $t_{n-1} < t < t_n$ jest więc:

$$y_n(t) = \left[y_{n-1} + \Delta y \operatorname{sign} \varepsilon(t)\right] e^{-\frac{t}{T_o}} \qquad (12)$$




Rys. 8. Układ z obiektem inercyjnym 1 rzędu




Rys. 9. Przebieg sygnału $y(t)$ w układzie pokazanym na rys. 8

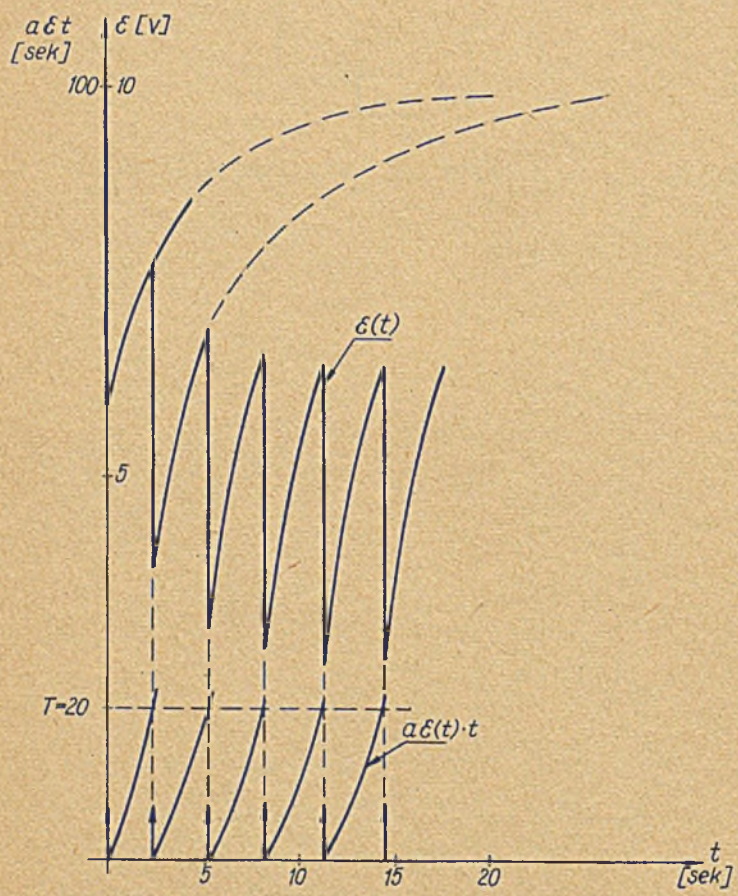
i ogólnie dla całej osi tj:

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\Delta y \quad \text{sign}\, \varepsilon(t)+y_{n-1}\right] e^{-\frac{t-t_{n-1}}{T_o}}\left[1(t-t_{n-1})-1(t-t_n)\right] \tag{13}$$

oraz

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) - y(t) \tag{14}$$

gdzie $\Delta y = \frac{Ak_o}{T_o}$ - przyrost sygnału $y(t)$ w chwili wysłania impulsu przez regulator.




Rys. 10. Przebieg $\varepsilon(t)$ w układzie pokazanym na rys. 8

Przebieg $\varepsilon(t)$ dla danych: $\varepsilon(0) = 1$ V, $T = 20$ sek, $T_o = 2$ sek, $a = 1.1/V$, ilustruje rysunek 10. Na tym przykładzie można zauważyć, że układ nie zawierający elementu astatycznego nie pozwala na sprowadzenie błędu do zera, lecz musi pracować w obecności błędu.

## 4. Wnioski

Na przykładzie powyżej omówionych układów można zauważyć, że układy nie zawierające opóźnienia a pracujące z impulsatorem o modulacji częstotliwości impulsowania są zawsze stabilne tzn., że amplituda błędu nie może narastać do nieskończoności. Jeżeli obiekt nie zawiera całkowania błąd nie może być sprowadzony do zera. W przypadku układów z elementem całkującym błąd może być sprowadzony do zera lecz z dokładnością do $\Delta y$. Aby w układzie nie było drgań w amplitudzie $\Delta y$ regulator musi mieć pewien próg czułości nie mniejszy niż $\Delta y$.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu

# ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ С МОДУЛЯЦИЕЙ ЧАСТОТЫ


## Р е з ю м е

Статья представляет попытку анализа импульсных систем регулирования с модуляцией частоты повторения импульсов. С целью нахождения сигнала ошибки применено графо-аналитической метод. Расчеты приведены для систем с безинерционным объектом и инерционным первого порядка.


# SAMPLED-DATA CONTROL SYSTEMS WITH PULSE-FREQUENCY MODULATION AND A GRAPHICAL METHOD FOR THEIR ANALYSIS


## S u m m a r y

The paper presents an attempt of how to analyse sampled--data control systems with pulse frequency modulation. Transient error signal of the control system is determined by using an analytic-grapfical method. The described method illustrates calculations showing the behaviour of mentioned above control systems containing plants of the first or of the second order.