

DR. INŻ. STANISŁAW FRYZE  
PROF. POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

# ELEKTROTECHNIKA OGÓLNA

TOM DRUGI

PRĄDY STAŁE

CZĘŚĆ PIERWSZA

TEORJA PRĄDÓW STAŁYCH

L W Ó W

NAKŁADEM „KOMISJI WYDAWNICZEJ“ TOWARZYSTWA BRATNIEJ POMOCY  
STUDENTÓW POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

1927.



69

70

73

87

76

.05

5. 64

WSZELKIE PRAWA AUTORSKIE ZASTRZEŻONE



12453/2/1

646/59

Z Drukarni i Litografji Piłser-Neumanna, Lwów, ul. Łyczakowska 3.



S P I S R Z E C Z Y  
.....

TOMU DRUGIEGO

P R A D Y S T A Ł E

Część pierwsza: Teoria prądów stałych

	Str.
I. POJĘCIA, WIELKOŚCI I JEDNOSTKI ZASADNICZE . . . . .	1 - 97
1 Prąd elektryczny. Obwód elektr. Źródła prądu . . . . .	1
2 Istota i rodzaje prądu elektrycznego . . . . .	6
3 Siła elektromotoryczna (E) . . . . .	10
4 Natężenie prądu (J) . . . . .	19
5 Oporność (R) i przewodność (G) . . . . .	25
6 Napięcie (U) . . . . .	64
7 Pole elektryczne obwodu prądu stałego . . . . .	77
8 Prawo koła napięć w obwodach prądu stałego . . . . .	91
II. PODSTAWOWE PRAWA OBWODÓW PRĄDU STAŁEGO . . . . .	98 - 183
1 Prawo Ohma . . . . .	98
2 Prawa Kirchhoffa . . . . .	124
3 Równania cykliczne Maxwella . . . . .	142
4 Równania węzłowe Coltriego . . . . .	154
5 Zasada superpozycji . . . . .	164
6 Zasada wzajemności . . . . .	168
7 Zasada wyodrębnienia . . . . .	177
III. WAŻNIEJSZE ZASTOSOWANIA PODSTAWOWYCH PRAW OBWODÓW PRĄDU STAŁEGO . . . . .	184 - 261
1 Łączenie oporów (Oporność zastępcza) . . . . .	184
2 Łączenie źródeł prądu (SEM-czna zastępcza) . . . . .	195

12'  
emi'



3. Łączenie źródeł prądu i oporów .....	202
4. SEM-czna zastępcza i oporność zastępcza dowolnego układu elementów .....	209
5. Stan jałowy i stan zwarcia obwodu .....	211
6. Zwarcie (Bezpieczniki) .....	214
7. Transfiguracja obwodów prądu stałego .....	218
8. Ważniejsze układy miernicze prądu stałego .....	240
9. Uziemienie .....	258
IV. PRACA I MOC W OBWODACH PRĄDU STAŁEGO .....	262 - 312
1. Rozważania ogólne (Wydajnik, odbiornik) .....	262
2. Moc prądu stałego (P) .....	274
3. Praca prądu stałego .....	281
4. Praca i moc w przemianach energii elektrycznej na mechaniczną i odwrotnie .....	293
5. Moc i praca w układach n-przewodowych .....	296
6. Napięcie jako „akcja” i „reakcja” .....	309
V. PRĄDY W PRZEWODNIKACH BRYŁOWYCH .....	313 - 335
1. Prądy w bryłach nieskończenie rozległych .....	313
2. Komórki w bryle przewodzącej .....	319
3. Prądy w przestrzeni, wypełnionej różnymi przewodnikami .....	321
4. Prądy w ziemi .....	322
5. Prądy w płaskich a cienkich płytach .....	324
6. Oporność i przewodność w bryłach .....	329
LITERATURA DO CZĘŚCI PIERWSZEJ .....	336
ERRATA DO CZĘŚCI PIERWSZEJ .....	...



Dr. Inż. Stanisław Fryze,  
Prof. Politechniki Lwowskiej.

ELEKTROTECHNIKA OGÓLNA.

T O M II.

P R A D Y S T A Ł E .

Część pierwsza: TEORJA PRĄDÓW STAŁYCH.

I. Pojęcia, wielkości i jednostki zasadnicze.

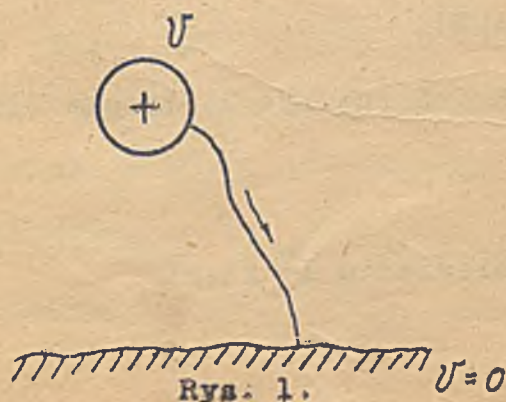
1. Prąd elektryczny. Obwód elektr. Źródła prądu.

Od czasów odkrycia Galvaniego i Volty (1789 - 1800) przywykliśmy przypisywać cały szereg działań natury elektrycznej i magnetycznej tak zwanemu prądowi elektrycznemu.

On to ma sprawiać, że żarówka świeci a motor elektryczny dostarcza pracy, że rdzeń elektromagnesu staje się magnesem, a elektrolit ulega rozkładowi i t.p.

We wstępnym traktowaniu, pojmujemy prąd jako ruch elektryczności przez przewodnik, na podobieństwo ruchu wody w rurociągach. ( Pojmowanie takie będziemy jednakże musieli dalej znacznie rozszerzyć ).

Uprawnienie do takiego stanowiska widzimy przede wszystkim w doświadczeniach z rozbrajaniem naelektryzowanych przewodników.



Łącząc n.p. kulę naelektryzowaną dodatnio z ziemią (Rys.1.) za pomocą przewodnika, spostrzegamy, że potencjał tej kuli (poprzednio wyższy od potencjału ziemi) ulega szybko obniżeniu do zera (czyli do potencjału ziemi), co w myśl praw Elektro-

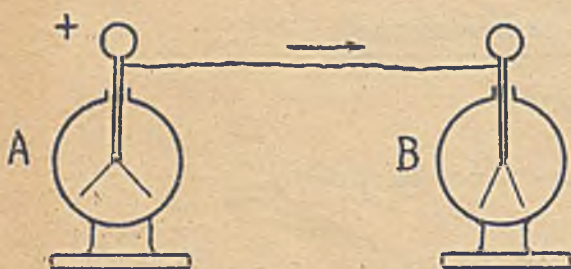


statyki mogło nastąpić tylko wskutek utraty naboju przez tę kulę, czyli wskutek jej rozbrojenia, bo  $V = -\frac{Q}{C}$ , gdy więc  $V = 0$ , musi być  $Q = 0$ , bo  $C = \text{const.}$  1)

Obserwujemy przytem, że drut łączący ową kulę z ziemią uległ w czasie jej rozbrajania ogrzaniu, z czego wnosimy, że był on pośrednikiem w p r z e m i e s z c z a n i u się czyli ruchu elektryczności z kuli do ziemi.

Do takich samych wniosków prowadzi następujące doświadczenie:

Dwa duże elektroskopy ( A i B, rys.2.) łączymy zwilżoną nitką i jeden z nich ( tu A ) elektryzujemy ( n.p. zapomocą laski szklanej potartej amalgamowaną skórą ). Spostrzeżemy wtedy że w elektroskopie pierwotnie niena-



Rys. 2.

elektryzowanym ( tu B ), listki poprzednio zwieszono, zaczynają się zwolna podnosić, podczas gdy w elektroskopie pierwotnie naelektryzowanym ( tu A ) listki poprzednio rozchylone zaczynają zwolna opadać. Wnosimy stąd że elektroskop A traci nabój, a B go zyskuje,

czyli że za pośrednictwem zwilżonej nitki łączącej oba elektroskopy odbywa się p r z e m i e s z c z a n i e elektryczności od A do B.

Przemieszczanie takie, czyli ruch elektryczności odbywa się - jak uczy doświadczenie - tak długo, aż potencjały na A i B doznają wyrównania, czyli przez cały czas istnienia r ó ż n i c y p o t e n c j a ł ó w między A i B.

W doświadczeniach opisanych poprzednio (Rys. 1 i 2) zjawisko prądu trwa bardzo krótko. Powodem tego jest bardzo szybkie wyrównanie się potencjałów obu połączonych z sobą przewodników (A i B).

Gdyby nam się udało utrzymać przewodniki A i B (na rys.2) trwale (lub

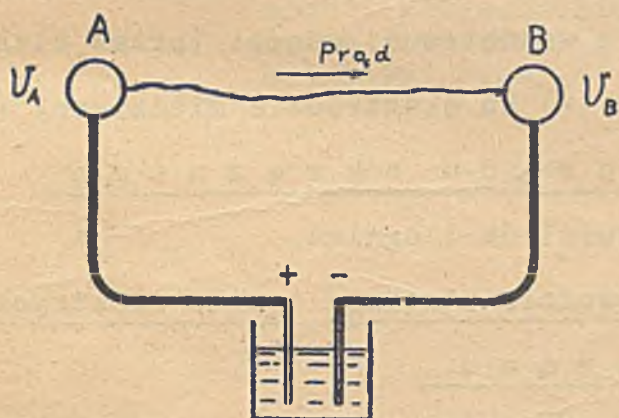
1) V oznacza tu potencjał względny, t.j. w odniesieniu do ziemi.



przez długi czas) na pierwotnych r ó ż n y c h od siebie potencjałach, to (najprawdopodobniej) ujawniłby się w przewodzie je łączącym stały (względnie długotrwały) prąd elektryczny.

Warunek taki mógłby być osiągnięty jedynie w ten sposób, że nabój w A, zmniejszający się z czasem wskutek odpływu elektryczności do B (rys.2) byłby stale uzupełniany do pierwotnej wielkości, zaś nabój w B, rosnący z czasem wskutek dopływu elektryczności z A byłby stale redukowany do pierwotnej wielkości.

Należałoby zatem przewodniki A i B (połączone ze sobą przewodem) uzupełnić urządzeniem, zdolnym utrzymywać trwale pewną różnicę potencjałów między A i B i zdolne trwale doprowadzać elektryczność do A a odprowadzać ją z B.



Rys. 3.

(Rys.3). Najprostszym takim

urządzeniem jest - jak wiadomo z fizyki elementarnej - ogniwo Volty.

Składa się ono z naczynia i dwu różnych metali, zanurzonych częściowo w elektrolicie (n.p. w rozcieńczonym kwasie siarkowym).

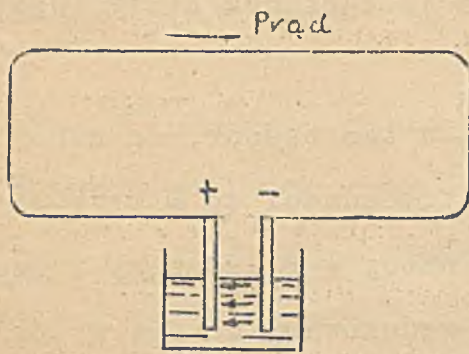
Po wstawieniu takich dwu płytek (sporządzonych z różnych metali) w elektrolit, obserwujemy między nimi trwałą różnicę potencjałów. N.p. miedź i cynk w rozcieńczonym kwasie siarkowym wykazują różnicę potencjałów około 1V, przyczem na miedzi ujawnia się wyższy a na cynku niższy potencjał. (Markujemy to oznaczając płytę miedzianą znakiem „ + ” a cynkową znakiem „ - ”).

Gdy ogniwo takie połączymy przewodnikami z A i B (rys.3), obserwujemy zjawiska towarzyszące prądowi nie tylko w części połączenia A B, lecz także w całej reszcie koła, utworzonego z połączeń między ogniwem i samego ogniwa.

Dochodzimy w ten sposób do pojęcia o b w o d u e l e k t r y c z n e -  $\mathcal{E}^0$  w którym przewodniki A i B odgrywają już drugorzędą rolę i mogą być



wyeliminowane (Rys.4). Po odrzuceniu ich bowiem zjawisko prądu trwa w dal=



Rys. 4.

szym ciągu. Ma ono taki charakter jak gdyby przewód łączący elektrodę miedzianą (+) i cynkową (-) pośredniczył w trwale utrzymującym się rozbrojeniu elektrod ogniwa, przyczem nabój na miedzi (+) jest stale uzupełniany, a nabój na cynku (-) stale redukowany do war=

tości odpowiadających trwale utrzymującym się potencjałom elektrod. W myśl poprzedniego należałoby przyjąć że w elektrolicie elektryczność dopływa do okładki miedzianej (+), a odpływa od okładki cynkowej (-), czyli, że gdy w z e w n ę t r z n e j części obwodu (przewód) płynie prąd od elektrody miedzianej (+) ku cynkowej (-), to w wewnętrznej części (przez elektrolit) musi płynąć od elektrody cynkowej (-) ku elektrodzie miedzianej (+)

Dochodzimy w ten sposób do pojęcia p r ą d u o k r ę ż n e g o

w obwodzie zamkniętym, utworzonym z przewodników i ogniwa.

Zespół elektryczny zdolny w takim obwodzie utrzymać trwale elektryczny prąd okrężny nazywamy ź r ó d ł e m p r ą d u.

Gdy zespół taki utrzymuje w obwodzie prąd stały, nazywamy go źródłem prądu stałego, gdy zaś utrzymuje prąd zmienny, będziemy go nazywać źródłem prądu zmiennego.

Rozróżniamy następujące źródła prądu:

a) Maszyny elektrostatyczne (tarciove i influencyjne).

Zdolne są utrzymywać tylko słabe prądy przy dużych różnicach potencjałów elektrod.

Używane tylko do wytwarzania prądów w specjalnych obwodach (głównie w laboratorjach fizykalnych).

b) Ogniwa elektrochemiczne (Ogniwo galwaniczne, akumulatory).

Używane głównie w urządzeniach prądów słabych.



c) Ogniwa termoelektryczne (Termostasy).

Używane głównie do pomiarów temperatury.

d) Dynamomaszyny.

Używane do wytwarzania prądu stałego.

e) Generatory prądu zmiennego.

Używane do wytwarzania prądu zmiennego.

Największe znaczenie praktyczne z powyżej wymienionych, mają maszynowe źródła prądu t.j. dynamomaszyny i generatory elekt., z pomocą tychże możemy bowiem wytwarzać w obwodach elektr. silne lub słabe prądy zarówno przy małych jak i przy wielkich różnicach potencjałów końcówek (elektrod) źródła.

Uwaga: W dalszym ciągu należy stale odróżniać "przewodnik" od "przewodu". Przewodnikiem jest każde ciało przewodzące. Przewodem nazywać będziemy przewodnik określonego kształtu (zwykle drut metalowy) nadający się do przewodzenia prądu.



## 2. Istota i rodzaje prądu elektrycznego.

Podane powyżej przedstawienie sprawy traktować należy jako supozycję umożliwiającą pojęcie tego fenomenu, który nazwalismy prądem elektrycznym.

Pytanie czy prąd jest r z e c z y w i ś c i e ruchem elektryczności nie zostało jeszcze definitywnie rozstrzygnięte.

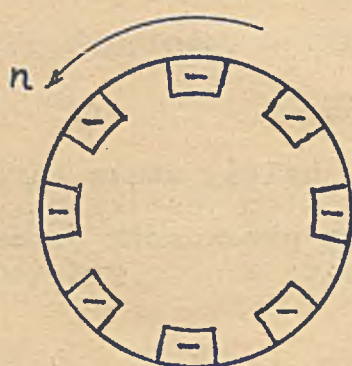
Pierwsze próby wyjaśnienia tej kwestji podjął - jak wiadomo - Rowland (w roku 1872).

### Doświadczenie Rowlanda.

Sektory metalowe przymocowane do tarczy ebonitowej naelektryzował



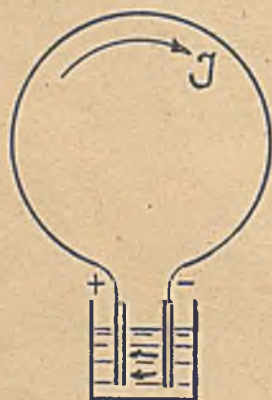
Rys. 5.



Rys. 6.

Rowland dodatnio i wprawił tarczę (a z nią i naboje dodatnie) w szybki ruch obrotowy (Rys.5). Okazało się, że przy takim ruchu wirowym powstaje w okół tarczy pole magnetyczne identyczne z

wytworzonym przez prąd płynący w pętli kołowej o średnicy tarczy (Rys.7).



Rys. 7.

Wynikałoby stąd, że prąd może być poj= mowany jako ruch elektryczności dodat= niej . Gdy jednakże Rowland naelektry= zował sektory tarczy ujemnie i wprawił tarczę w ruch wirowy w kierunku prze= ciwnym do poprzedniego (rys.6), otrzy= mał pole magnetyczne identyczne z po= przednim (rys.5). (Oczywiście przy

tej samej ilości obrotów co poprzednio i identycznych ilościach elektrycz= ności rotującej).

Stąd wniosek, że prąd może być równie dobrze pojmowany jako ruch elek= tryczności d o d a t n i e j w jedną stronę jakoteż jako ruch elektry= czności u j e m n e j w stronę przeciwną.



Mimo takiego wyniku doświadczeń, przyjęto zgodnie z propozycją Maxwella następującą umowę:

Prąd elektryczny może być pojmowany formalnie jako ruch elektryczności dodatniej w kierunku który należy wskazać strzałką.

Dobrowolna ta umowa ma służyć jedynie do ułatwienia analizy i umożliwienia wzajemnego porozumienia się, nie przesądza jednak bynajmniej istoty prądu.

Najnowsze badania zdają się wskazywać, że prąd w metalach polega na ruchu elektronów (atomów elektryczności dodatniej) w stronę przeciwną do kierunku jaki obowiązuje dla prądu w myśl poprzedniej umowy.

Nie są to najprawdopodobniej ruchy ciągłe, tylko przeskoki elektronów z orbity elektronowej jednego atomu na orbitę atomu sąsiedniego (Teoria kwantów Plancka).

Pojęcie prądu zniewoleni jesteśmy jednak rozszerzyć także na cały szereg innych zjawisk. Oto obserwujemy po załączeniu źródła prądu na końcówki metalowe lub węglowe zanurzone w elektrolicie, rozkładanie się elektrolitu (elektroliza), przyczem naokoło niego ujawniają się identyczne zjawiska, jak w okół drutu przez który płynie prąd (pole magnetyczne). Wynika stąd, że i elektrolizę przypisać można działaniu prądu, czyli że można mówić także o przepływie prądu przez elektrolity.

Jednakże dociekania na temat istoty prądu w elektrolitach ujawniły, że jest on czemś zgoła różnym od prądu w metalach. Polega mianowicie na ruchu elektryczności łącznie z materją, gdy prąd w metalach jest najprawdopodobniej ruchem swobodnych elektronów (jak wyżej).

Załączając źródło prądu stałego na końcówki metalowe (lub węglowe) zatopione w bańce szklanej zawierającej rozrzedzony gaz obserwujemy różnego rodzaju promieniowania, równocześnie zaś w okół takiej rurki ujawniają się znów identyczne działania (pole magnetyczne), jak i w okół drutu przez który przepływa prąd. I tu więc możemy mówić o prądzie w rozrzedzonych gazach, jakkolwiek i tu dociekania teoretyczne i doświadczalne ujawniają



zgoła odrębny charakter istoty tego prądu.

Maxvell posunął się w swej genialnej koncepcji tak daleko, że utożsamiał z prądem także działania zachodzące w zmieniającym się polu elektrycznym (Prądy Maxwella), jakkolwiek prąd eteroidalny (w pustej przestrzeni) stanowią jedynie zmiany pola elektrycznego, a prąd dielektryczny ruch naboży polaryzacyjnych w obrębie atomów <sup>1)</sup>.

Pod pojęcie prądów możemy wreszcie podciągnąć (opierając się na doświadczeniu Rowlanda) także ruch swobodnych elektronów (promienie katodowe) i ruch elektryczności z materją (promienie kanalikowe).

Widzimy stąd, że nowoczesne pojęcie prądu elektr. jest bardzo obszerne i że istota prądu zależy przedewszystkiem od ośrodka, w którym zachodzą działania przypisywane prądowi.

Najogólniej przeprowadzona segregacja daje następujący podział rzeczowy:

- A. Prądy w metalach (względnie ośrodkach zachowujących się jak metale - węgiel).
- B. Prądy w elektrolitach.
- C. Prądy w gazach.
- D. Prądy Maxwella (Prąd eteroidalny, prąd dielektryczny).
- E. Prądy elektronowe (Promienie katodowe i promienie kanalikowe).

Wszystkie te prądy mogą występować jako stałe (stałe natężenie, stały kierunek), lub zmienne (zmiennne natężenie, zmieniający się kierunek) <sup>2)</sup>.

Wspólne ich cechy są ogólnie tylko te, że wywołują w okół siebie jednakowe działania magnetyczne (prądy stałe i zmienne) i indukcyjne (prądy zmienne). Pozatem, w istocie swej i w innych działaniach prądy te

1) Patrz „Elektrostatyka”, Prądy Maxwella.

2) Przynależą tu także t.zw. prądy pulsujące (o zmiennym natężeniu a stałym kierunku).



różnią się wybitnie od siebie i zniewalają wskutek tego do odrębnego traktowania.

Najprościej przedstawia się analiza prądów w metalach, od niej też należy zacząć rozważania. Wybitne różnice w zachowaniu się obwodów poddanych działaniu prądów stałych i zmiennych zniewalają zasadniczo do odrębnego traktowania obu tych rodzajów prądów.

Stąd podział elektrotechniki na części omawiające oddzielnie teorię prądów stałych i teorię prądów zmiennych.

Rozważania początkowe przeprowadzimy mając na oku zasadniczo obwody złożone z przewodników metalicznych. Prądy w elektrolitach i gazach oraz prądy Maxwella i elektronowe znajdą uwzględnienie w oddzielnych rozdziałach zarówno w tym tomie traktującym o prądach stałych, jak i w następnym omawiającym prądy zmiennie.

Specjalne studjum prądów w elektrolitach, w gazach oraz prądów elektromagnetycznych przynależy do fizyki i tam znajduje obszernie opracowania. W elektrotechnice prądy te są uwzględnione tylko w stopniu koniecznym do zrozumienia nowoczesnych urządzeń na nich opartych.

W studjum początkowym, do jakiego podręcznik niniejszy ma służyć, ograniczamy się oczywiście jedynie do analizy i wyjaśnienia zjawisk najważniejszych ze stanowiska praktycznego, bez wnikania w szczegóły mniejszej wagi i przy użyciu prostych środków matematycznych.

Uwaga: Osobiście uważam, że w dzisiejszym stanie wiedzy, studjum elektrotechniki da się przeprowadzić tylko w kilku (przynajmniej) etapach. Studjujący musi się zapoznać najprzód z najprostszymi zjawiskami elektromagnetycznymi, a dopiero potem może przystąpić do rozpatrywania rzeczy trudniejszych.



### 3. Siła elektromotoryczna. (E)

Między elektrodami ogniwa wolty (miedź i cynk w rozcieńczonym kwasie



siarkowym - Rys. 8.) utrzymuje się różnica potencjałów (około 1 V) mimo to, że elektrody te (Cu i Zn) łączą ze sobą elektrolit, który jest przewodnikiem.

Mamy tu więc układ przewodników w stat. stanie elektr., którego zachowania się nie jesteśmy w stanie wytłomaczyć na zasadzie praw elektrostatyki, albowiem różnica potencjałów może się utrzymywać s t a l e t y l =  
ko między dwoma przewodnikami oddzielonymi

Rys. 8.

od siebie zupełnym izolatorem (więc próżnią). Połączenie zaś takich naelektryzowanych przewodników trzecim przewodnikiem winno spowodować wyrównanie potencjałów całego układu.

Jeżeli w przypadku omawianym - ogniwo - niema takiego wyrównania, to musimy przyjąć, że mieści ono jakieś działanie natury elektrycznej, które temu zapobiega.

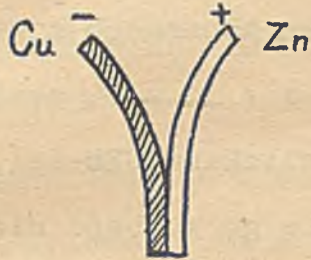
Działanie to natury elektrycznej, manifestujące się pewną określoną różnicą potencjałów na końcówkach układu złożonego z przewodników p o ł ą =  
c z o n y c h ze sobą i niedopuszczające do wyrównania potencjałów tego układu, nazywamy s i ł ą e l e k t r o m o t o r y c z n ą (skrót SEM, symbol E).

W zespole złożonym z dwu różnych metali i elektrolitu SEM-na ujawnia się natychmiast po zanurzeniu metali do elektrolitu. Wiadomo jednak, że obecność elektrolitu nie jest niezbędną. Także zespół dwu różnych metali b e z p o ś r e d n i o z sobą zetkniętych wykazuje obecność SEM-nej. Sprawdzamy bowiem doświadczalnie, że w takim styku metale wykazują pewną



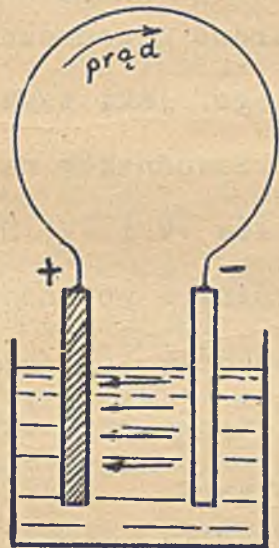
różnicę potencjałów.

Gdy zespół taki wykonamy z miedzi i cynku (Rys.9) okaże się, że w prze-



ciwienństwie do ogniwa Volty (Rys.8) potencjał miedzi będzie teraz niższy, a cynku wyższy. Także różnica potencjałów będzie teraz inna, wynosi mianowicie około 0,75 V.

Rys. 9.



Połączmy elektrody ogniwa Volty cienkim drutem metalowym (Rys.10). Pomiar różnicy potencjałów między elektrodą miedzianą (+) i cynkową (-) (n.p. przy pomocy elektrometru kwadrantowego lub woltomierza) wykaze że i teraz nie nastąpiło wyrównanie potencjałów obu elektrod. Na miedzi okaże się w dalszym ciągu potencjał wyższy niż na cynku, jakkolwiek różnica potencjałów między obu elektrodami będzie teraz mniejsza niż poprzednio (gdy połączenia drutem nie było).

Rys. 10.

W utworzonym w ten sposób kole elektrycznym płynie prąd okrężny w kierunku oznaczonym na rys.10 strzałkami.

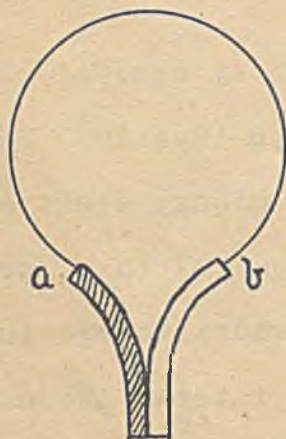
Działanie elektryczne, nazwane poprzednio SEM-ną, zdolne jest więc nie tylko utrzymać różnicę potencjałów między elektrodami w elektrycznym stanie statycznym, lecz także podczas krążenia prądu.

Ponieważ prąd jest wypływem różnicy potencjałów, a tę przypisujemy działaniu SEM-nej, możemy powiedzieć, że to właśnie SEM-na jest bezpośrednią przyczyną krążenia prądu w obwodzie zawierającym zespół, który jest jej siedliskiem.



Zespół zdolny wywołać i utrzymać prąd w obwodzie nazwaliśmy źródłem prądu. Możemy teraz dodać, że zdolność tę źródła przypisać należy SEM-nej mającej w nim swe siedlisko.

Połączmy cienkim drutem końcówki zespołu złożonego z dwu różnych metali (n.p. miedź i cynk) bezpośrednio z sobą zetkniętych (Rys. 11). Jakkolwiek i ten zespół jest siedliskiem SEM-nej, to jednakże



Rys. 11.

załączenie go w obwód nie wywoła krążenia prądu.

Subtelny pomiar wykaże tylko prawie momentalny bardzo nieznaczny prąd, analogiczny do tego, jaki towarzyszy rozbrojeniu dwu przewodników naelektryzowanych do potencjałów  $+V$  i  $-V$ . Równocześnie pierwotna różnica potencjałów elektrod

"a" i "b" spadnie (po połączeniu drutem

elektrod) do zera. Oznacza to że także SEM-na, czynna przy otwartych końcówkach, po przyłączeniu do nich drutu zmalała do zera.

Doświadczenia powyższe (Rys. 10 i 11) pouczają, że zasadniczym warunkiem utrzymania trwałego prądu w obwodzie zasilanym źródłem prądu jest trwałe utrzymanie jego SEM-nej.

Nie wszystkie zespoły, będące siedliskiem SEM-nej, spełniają ten warunek. Dlatego też nie wszystkie takie zespoły mogą być uważane za źródła prądu.

Źródłem prądu będziemy nazywać (w myśl poprzednio podanego określenia) tylko takie zespoły w których utrzymuje się SEM-na także podczas krążenia prądu.

Ogniwo Volty (Rys.10) jest więc źródłem prądu, układ dwu różnych metali bezpośrednio z sobą zetkniętych (Rys.11) nim nie jest.

Doświadczenie poucza, że tylko takie zespoły ujawniające SEM-na są



źródłami prądu, w których mogą zachodzić przemiany energetyczne, zdolne pokrywać rozpraszanie energii występujące podczas krążenia prądu w obwodzie.

W ogniwach elektrochemicznych zachodzą głównie takie przemiany natury elektrochemicznej, a mianowicie ciała bogatsze w energję chemiczną przechodzą w związki uboższe w tę energję, uwolniona w ten sposób energja zostaje przemieniona w formę elektryczną.

W ogniwach termicznych energja elektryczna powstaje z ciepła.

W maszynowych źródłach prądu (dynamomaszyny i generatory prądu zmiennego) dokonuje się przemiana pracy mechanicznej (motor popędowy) w energję elektryczną.

Do takich źródeł, zasilających prądem obwód rozpraszający energję trzeba więc dostarczyć energii, i w każdym, dostarczona energja przemienia się w formę elektryczną.

Gdy z jakiegokolwiek powodu dostawa energii do źródła ustanie (wyczerpanie ciał aktywnych elektrochemicznie w ogniwach, wstrzymanie dopływu ciepła w termostosach, odstawienie popędu w maszynowych źródłach prądu), ustaje także krążenie prądu w obwodzie zasilanym przez to źródło. Równocześnie stwierdzamy zanik różnicy potencjałów na końcówkach a z nią i SEM-nej źródła.

Widać stąd, że utrzymanie SEM-nej źródła, przez które przepływa prąd jest związane z pewnymi procesami natury energetycznej, które w dalszym ciągu bliżej rozpatrzemy.

W związku z powyższem, poprzedniej ogólnej definicji SEM-ey możemy przydać następującą szczególną, odniesioną do źródła prądu.

Działanie natury elektrycznej, manifestujące się w elektrycznym stanie statycznym źródła prądu pewną trwałą różnicą potencjałów na jego końcówkach, a w elektr. stanie kinetycznym utrzymaniem trwałego prądu w obwodzie zasilanym przez to źródło, nazywamy jego SEM-ną.



Definicja ta wyjaśnia po części nazwę SEM-nej.

Składnik "siła" ma tu nasuwać na myśl działanie  $E$  utrzymujące różnicę potencjałów w ten sposób, że niejako "rozpiera" naboje przeciwnych znaków warstwy podwójnej utworzonej na styku dwu różnych przewodników (przeciwdziałanie rozbrojeniu przez styk). Składnik "elektromotoryczna" ma ilustrować działanie  $E$  utrzymujące prąd w obwodzie.

Wielkość SEM-nej określamy liczbą woltów, odpowiadającą całkowitej różnicy potencjałów, którą przypisujemy jej działaniu.

W elektrycznym stanie **s t a t y c z n y m** zespołu, będącego siedliskiem SEM-nej, jest więc

$$\underline{E = V_1 - V_2} \dots\dots\dots(1)$$

przyczem  $V_1$  oznacza końcówkę o wyższym, a  $V_2$  końcówkę o niższym potencjale tego zespołu.

Tak określona wielkość  $E$  da się zmierzyć jedynie w zespołach nie przewodzących prądu (elektr. stan statyczny).

Gdy przez zespół taki płynie prąd, można  $E$  jedynie obliczyć (jak to dalej okażemy).

Techniczną jednostką SEM-nej jest wolt.

Taką SEM-ną wykazuje (w przybliżeniu) ogniwo Volty.

SEM-na akumulatora ołowiowego wynosi około 2,1 V.

Maszynowe źródła prądu mogą wytwarzać SEM-ną dochodzącą do kilku, a nawet kilkudziesięciu tysięcy woltów.



Rys. 12.

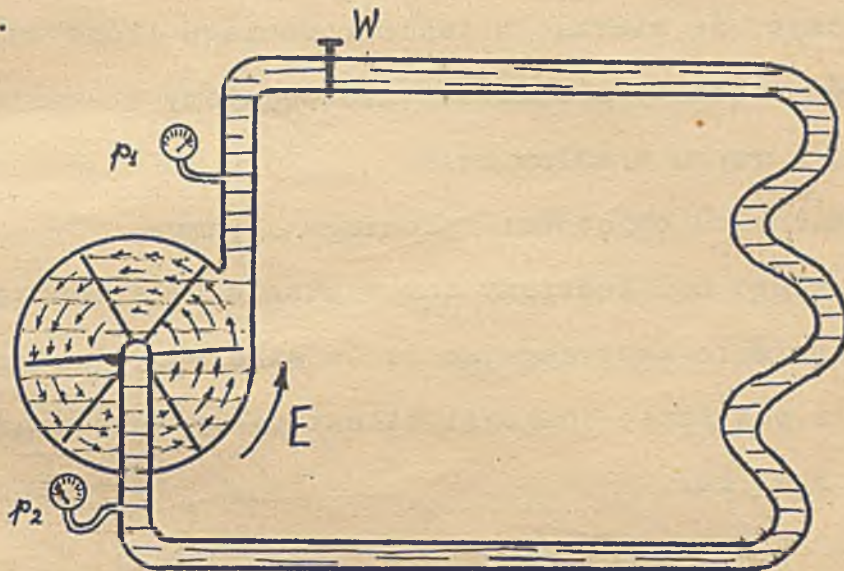
Pomiar SEM-nej, bez prądu, uskuteczniamy przy pomocy elektrometru kwadrantowego lub metodą kompensacyjną (Patrz dalej pomiary). W prosty sposób można SEM-ną źródła pomierzyć, przyłączając do jego końcówek woltomierz o dużym oporze wewnętrznym (Rys. 12).



Woltomierz taki mierzy różnicę potencjałów końcówek, a te w myśl (1) równą jest (praktycznie) SEM-nej źródła. Pomiar ten nie jest ścisły, bo przez źródło płynie prąd zasilający woltomierz.

Działanie SEM-nej w obwodzie można porównać z działaniem pompy centryfugalnej.

Pompa centryfugalna połączona jest z rurociągiem w sposób zilustrowany na rys. 13.



Rys. 13.

Całość wypełniona jest wodą. Gdy wentyl W jest zamknięty a bęben pompy wiruje w kierunku strzałki, ujawnia się między jej rurą ssącą a tłoczącą maksymalna różnica ciśnień ( $p_1 - p_2$ ).

Różnica ta reprezentuje niejako siłę mechaniczno-motoryczną pompy. w kierunku działania zgodnym ze strzałką E. Woda w rurociągu pozostaje w spoczynku mimo ruchu pompy (jedynie w samej pompie znajduje się w ruchu wirowym).

Otwórzmy wentyl W. Pod działaniem różnicy ciśnień  $p_1 - p_2$ , będącej wyrazem siły mechaniczno-motorycznej E pompy, woda w rurociągu zostanie wprowadzona w ruch okrężny, będzie mianowicie płynąć zewnątrz (w rurociągu) od wypustu pompy o wyższym ciśnieniu ( $p_1$ ) do wypustu o niższym ciśnieniu ( $p_2$ ). Wewnątrz pompy natomiast, woda będzie płynąć z  $p_2$  do  $p_1$ , czyli z miejsca o niższym ciśnieniu do miejsca o wyższym ciśnieniu.



Różnica ciśnień ( $p_1 - p_2$ ) przy ruchu wody ulega zmniejszeniu.

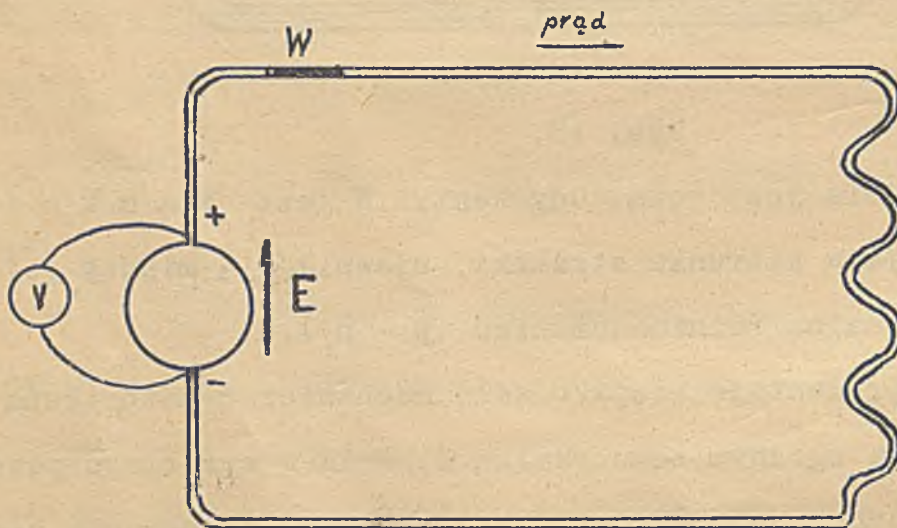
Określony taki ruch wody będzie możliwy tylko w takim razie, gdy utworzymy zamknięte koło z rurociągów i gdy koło to mieścić będzie siłę mech. motoryczną (pompe). Intensywność prądu wody zależeć będzie przytem od wielkości działania mechaniczno-motorycznego pompy.

Warto zaznaczyć, że mierząc w takim rurociągu ilość wody przepływającej przez przekrój w jednej sekundzie, nie będziemy w stanie obliczyć ile wody znajduje się w ruchu w całym kole.

Ta bowiem zależy od objętości rurociągu i pompy.

Z pomiaru takiego nie będziemy też w stanie ustalić prędkości wody w rurociągu. (Oczywiście zastrzegając że światło rury jest nieznanne).

Korzystając z powyższej analogji zilustrujemy koło prądu w sposób przedstawiony na rys. 14.



Rys 14.

Element oznaczony strzałką reprezentuje tu źródło prądu (niejako pompę elektryczną). Przewód elektryczny łączący końcówki + i - , odpowiada rurociągowi wodnemu. Woltomierz załączony na końcówki + i - , może być traktowany jako elektryczny manometr różnicowy. Wskazuje on różnicę potencjałów między dopływem (-) a odpływem (+). Wentyl W na rys. 13, zastępuje



tu wyłącznik W. Gdy wyłącznik ten jest otwarty, prąd nie płynie.

Elektrony w rurociągu elektrycznym i w źródle znajdują się w stanie spoczynku (od ruchów cieplnych materji narazie abstrahując). Woltomierz V wskazuje maksymalną różnicę potencjałów. SEM-na źródła wywiera niejako parcie na elektryczność (elektrony) w źródle manifestujące się właśnie ową różnicą potencjałów.

Po zamknięciu wyłącznika W następuje ruch elektryczności w kierunku strzałki (na rys. 14). Zewnątrz płynie prąd z końcówki o wyższym potencjale (+) do końcówki o niższym potencjale (-). Wewnątrz źródła od „-” do „+”.

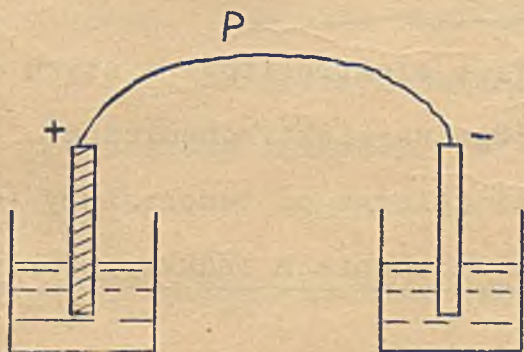
Także i tu z pomiaru ilości elektryczności, przepływającej przez przekrój przewodu w sekundzie, nie można ustalić ani ilości elektryczności biorącej udział w ruchu cyrkulacyjnym, ani też prędkości tego ruchu.

Wspierając się na powyższej analogji możemy mówić o kierunku SEM-nej i pojmować go (zgodnie z określeniem prądu) jako kierunek "parcia" wywieranego przez E na elektryczność dodatnią.

Kierunek ten należy wskazać strzałką, przyczem grot strzałki E zwrócony ma być ku końcówce o wyższym potencjale zespołu będącego siedliskiem SEM-nej (rys.14).

W prostym obwodzie zasilanym przez źródło prądu stałego płynie prąd w kierunku działania SEM-nej, czyli strzałka prądu ma ten sam kierunek co strzałka SEM-nej.

Gdy w jakiegokolwiek części obwodu uczynimy przerwę, krążenie prądu ustanie. Wyłącznik W na rys. 14., można więc umieścić w dowolnem miejscu



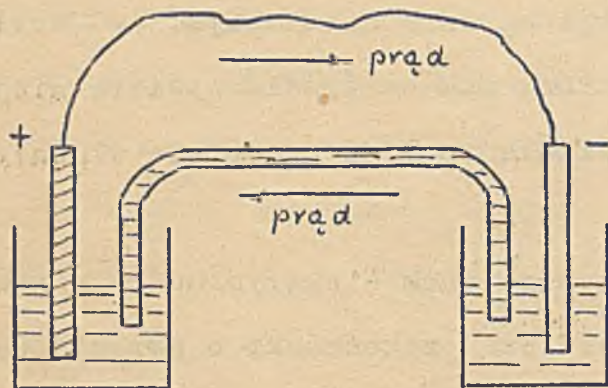
Rys. 15.

obwodu. Prądu w obwodzie nie będzie płynął i w tym wypadku gdy przerwiemy obwód wewnątrz źródła (Rys. 15), jakkolwiek i w tym przypadku (elektroda miedziana (+) i cynkowa (-) ustawione w osobnych naczyniach

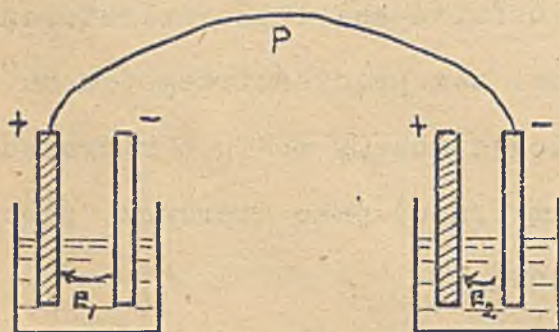




z elektrolitem), stwierdzamy przed połączeniem przewodem P że między elektrodami istnieje pewna różnica potencjałów. Krażenie prądu występuje jed-



Rys. 16.



Rys. 17.

z częścią wykonaną na niski potencjał (więc słabiej izolowaną) możemy spowodować jej przebicie.

Uwaga 2. Wypada zauważyć że żadne źródło nie utrzymuje w czasie przepływu prądu stałej SEM-nej. W elektrochemicznych źródłach prądu SEM-na doznaje zmniejszenia wskutek polaryzacji. W termicznych wskutek zmian molekularnych. W maszynowych wskutek oddziaływania twornika i magnetyzacji poprzecznej oraz innych przyczyn. Należy to uwzględnić przy obliczeniach i pomiarach.

W rozważaniach ogólnych będziemy jednak zakładać  $E = \text{const}$  (idealne źródło prądu).

SEM-na ujawnia się:

W styku dwu różnych metali, metali i elektrolitów, w styku elektrolitów, dalej w styku elektrolitów z gazami. (Ogniwa elektrochemiczne). Gdy styki te ogrzewamy, SEM-na przybiera wartości zależne od temperatury (Ogniwa termiczne). Wreszcie SEM-na ujawnia się w działaniach indukcyjnych pola magnetycznego (Mechaniczne źródła prądu).

nak natychmiast, gdy tylko oba naczynia połączymy n.p. rurką szklaną z elektrolitem (Rys.16) Podobnie nie uzyskamy prądu w przewodzie P, łączącym dwa źródła prądu w sposób okazany na rys. 17.

Uwaga 1. Należy się jednak wystrzegać takiego połączenia w urządzeniach prądów silnych. Te bowiem mają notorycznie wadliwą izolację względem ziemi, wskutek czego ziemia tworzy połączenie układu w zamknięte koło.

Także w urządzeniach na wysokie napięcie połączenie takie (jak na rys.17), może być niebezpieczne. Łącząc bowiem dwa punkty przewodem, sprowadzamy je w stanie statycznym na jednakowy potencjał. Gdy więc połączymy część o wysokim potencjale



#### 4. Natężenie prądu (J).

Krażeniu prądu w obwodzie elektr. towarzyszy cały szereg działań fizycznych (termicznych, chemicznych, magnetycznych, i t.d.). Obserwujemy, że działania te mają różną intensywność po przyłączeniu obwodu do różnych źródeł prądu, znikają zaś gdy obwód przerwiemy. Wnosimy stąd, że wywołuje je prąd i że intensywność ich zależy od intensywności prądu.

Opierając się na ~~prze~~świadczeniu, że prąd może być pojmowany jako ruch elektryczności (Doświadczenie Rowlanda), możemy pojmować intensywność prądu elektr. w ten sam sposób jak intensywność prądu wody. Uważamy że prąd wodny jest tym "silniejszy" im większa ilość wody przepływa przez przekrój poprzeczny odnośnej strugi wodnej w jednostce czasu.

Wzorując się na tej analogji, możemy pojmować intensywność prądu jako wielkość określającą ilość elektryczności przepływającej w j e d n o s t = c e c z a s u przez przekrój poprzeczny strugi prądu. Tak określoną wielkość nazywamy w elektrotechnice n a t ę ż e n i e m p r ą d u (symbol J). Przyjmując za jednostkę czasu sekundę, powiemy:

Natężenie prądu (J) jest to wielkość, określająca ilość elektryczności przepływającej w sekundzie przez poprzeczny przekrój strugi prądu:

$$I = \frac{Q}{t} \dots\dots\dots (2)$$

W technicznym (praktycznym) układzie miar, wyrażamy ilość elektryczności Q w kulombach, a t w sekundach.

Zatem jednostką J będzie kulomb na sekundę.

Tak określoną jednostkę nazywamy a m p e r e m (znak A).

( Techniczna jednostka natężenia prądu ).

Dokładne pomiary wykazały, że taki prąd (1 A) powoduje w ciągu 1 sek.

wydzielenie:

Z roztworu wodnego azotanu srebra (AgNO<sub>3</sub>) - 1.118 mg. srebra,



z roztworu wodnego siarczanu miedzi ( $\text{CuSO}_4$ ) 0,328 mg miedzi,  
z zakwaszonej kwasem siarkowym wody 0,11592  $\text{cm}^3$  wodoru  
i 0,05796  $\text{cm}^3$  tlenu, czyli łącznie 0,17388  $\text{cm}^3$  mieszaniny piorunującej  
(przy ciśnieniu atmosferycznym 760 mm słupa rtęci).

W uchwale międzynarodowego Komitetu <sup>1)</sup> ustalono, że za jednostkę prądu  
(amper) należy uważać taki prąd stały, który w sekundzie z roztworu  
azotanu srebra wydziela 0,001118 g srebra.

Celem wyrobienia sobie pojęcia o wielkości ampera należy zapamiętać następujące daty orientacyjne:

- a) Żarówki 110 woltowe węglowe dają 16 świec przy prądzie (przepływającym przez włókno) około 1/2 A.  
Żarówki 110 woltowe metalowe próżniowe dają przy tym samym prądzie około 50 świec.
- b) Do uruchomienia zwykłego dzwonka elektr. potrzeba około 1/4 A.
- c) Motor prądu stałego 110 woltowy "bierze" na 1 KM około 8 A, 220 woltowy około 4 A, 440 woltowy około 2 A.
- d) Dorosły człowiek ulega porażeniu śmiertelnemu, gdy przez wnętrze jego ciała przepłynie prąd o natężeniu 0,02 A. (Potrzebna do przepędzenia takiego prądu różnica potencjałów jest u różnych osobników różna. Patrz dalej "Działania fizjologiczne prądu").
- e) W czułych galwanometrach dają wychylenia prądy o natężeniach wynoszących milionowe części ampera.
- f) W zakładach elektrochemicznych (elektroliza, rafinowanie metali), oraz elektrometalurgicznych pracuje się prądami, których natężenie przenosi tysiące i dziesiątki tysięcy amperów.

Z zestawienia tego widać, że praktycznie mamy do czynienia zarówno z prądami bardzo silnymi, jak bardzo słabymi.

<sup>1)</sup> 1910 w Waszyngtonie (Reprezentowane następujące państwa: Ameryka, Anglja, Austrja, Belgja, Francja, Hollandja, Japonja, Rosja, Szwajcarja, Włochy).



Stąd konieczność następujących oznaczeń:

A amper (jednostka),

mA miliamper (tysięczna część ampera)  $10^{-3}$  A,

μA mikroamper (miljonowa część ampera)  $10^{-6}$  A,

kA kiloamper (tysiąc amperów)  $10^3$  A.

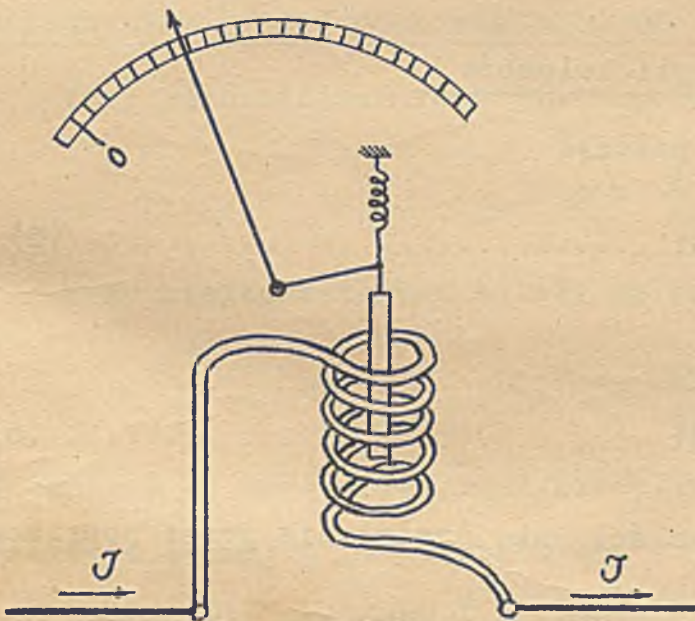
Wzór (2) obowiązuje jedynie dla prądu o s t a ł e m natężeniu (prąd stały). Gdy natężenie ulega zmianie, należy położyć

$$i = \frac{dQ}{dt} \dots\dots\dots (3)$$

"i" oznacza tu prąd chwilowy ( w amperach, gdy  $dQ/dt$  wyrażone jest w kulombach na sek.).

Techniczny pomiar natężenia prądu uskuteczniamy przy pomocy a m p e = r o m i e r z y . Przyrządy te mogą być wykonane w różny sposób, zależnie

od tego, jakie działanie prądu wykorzystywuje się celem pomiaru I. Najprostsze są a m p e r o m i e r z e e l e k t r o m a g n e t y c z n e (Rys. 18).



Rys. 18.

Przyrząd taki składa się z cewki przez którą przepływa prąd mierzony, małego pręcika żelaznego wciągane do wnętrza cewki pod działaniem pola magnetycznego cewki, oraz wska-

zówki uruchamianej za pośrednictwem lekkiej dźwigni złączonej z pręcikiem. Na empirycznie wyznaczonej skali odczytujemy natężenie prądu  $J$ , przepływającego przez cewkę przyrządu.

Opisana konstrukcja (z pominięciem tłumika) jest jedną z bardzo wielu



spotykanych odmian amperomierza elektromagnetycznego. Wszystkie te przyrządy są niezbyt dokładne, a przytem reagują na postronne wpływy magnetyczne.

W dalszym ciągu poznamy jeszcze inne rodzaje amperomierzy, jakoto: ciepłikowe, Deprez, elektrodynamiczne, indukcyjne i t.d.

I l o ś ć e l e k t r y c z n o ś c i Q

Z wzoru (2) wynika, że w czasie  $t$  przepływa przez poprzeczny przekrój strugi prądu stałego ilość elektryczności

$$Q = J \cdot t \dots\dots\dots (4)$$

Jeżeli wstawimy  $J$  w amp. a  $t$  w sek., wypadnie  $Q$  w a m p e r o s e = k u n d a c h czyli kulombach. W technicznych obliczeniach wstawiamy jednak: czas ( $t$ ) w godzinach, otrzymując  $Q$  w a m p e r o g o d z i n a c h (znak Ah).

1 Ah = 3600 amperosekund, czyli kulombów.

Zgodnie z wzorem (3) należy położyć

$$dQ = i \cdot dt \dots\dots\dots (5)$$

oraz

$$Q = \int i \cdot dt \dots\dots\dots (6)$$

$Q$  oznacza tu ilość elektryczności jaka przepłynie przez poprzeczny przekrój strugi prądu, w okresie czasu

$$t = t_2 - t_1$$

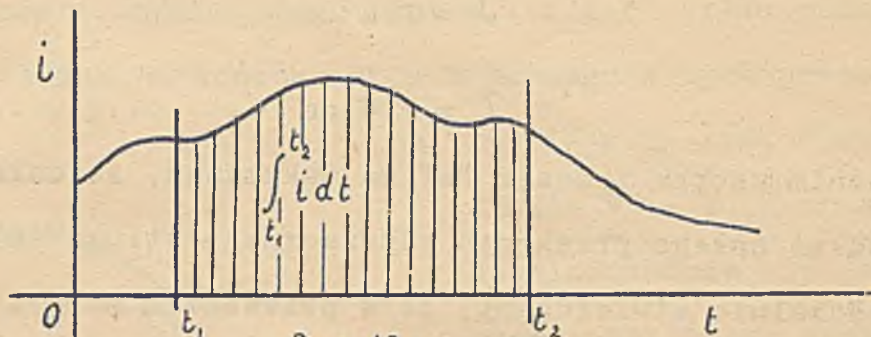
który określają granice całkowania

$$Q(t) = \int_{t_1}^{t_2} i \cdot dt \dots\dots\dots (7)$$

Przykład. Przebieg zmian natężenia strugi prądu ilustruje krzywa na rys. 19. W okresie czasu od  $t_1$  do  $t_2$  przepłynie przez tę



strugę ilość elektryczności  $Q$ , odpowiadającą powierzchni



Rys. 19.

zakreskowanej, gdyż ta jest geometrycznym obrazem całki określonej

$$Q(t) = \int_{t_1}^{t_2} i \cdot dt$$

Gęstość prądu ( $\sigma$ )

Pod gęstością prądu rozumiemy natężenie (ilość amperów) przypadające na jednostkę powierzchni poprzecznego przekroju strugi.

Przy jednostajnym rozłożeniu prądu na całym przekroju, jest

$$\sigma = \frac{J}{s} \dots \dots \dots (8)$$

Przy niejednostajnym należy położyć

$$\sigma = \frac{dJ}{ds} \dots \dots \dots (9)$$

$dJ$  oznacza tu natężenie prądu przepływającego przez element poprzecznego przekroju strugi o powierzchni  $ds$ .

Zwyczajnie podajemy  $J$  w amperach a  $s$  w  $m/m^2$ , zatem  $\sigma$  wypada w amperach na  $m/m^2$ .

Gdy  $s$  wyrażamy w  $cm^2$  należy wskazać to indeksem ( $\sigma_{cm}$ ).

$$\sigma_{cm} = \frac{I}{s_{cm^2}} = \frac{I \cdot 100}{s_{m^2}} = 100 \sigma \dots \dots \dots (10)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{cm}}{100} \dots \dots \dots (11)$$



Z wzorów (8) i (9) wynika że

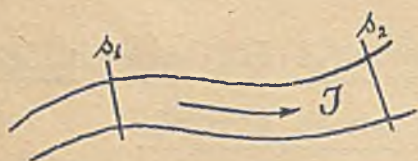
$$J = \sigma \cdot s \dots\dots\dots(12)$$

$$J = \int \sigma \cdot ds \dots\dots\dots(13)$$

W ostatnim wzorze znaczek "s" ma wskazywać, że całkowanie należy uskuteczniać wzdłuż całego przekroju poprzecznego strugi (s).

Doświadczalnie stwierdzamy, że w przewodach z jednolitego materiału gęstość prądu stałego jest w każdym miejscu poprzecznego przekroju jednakowa. Zatem gęstości prądu ( $\sigma$ ) są w takich przypadkach odwrotnie proporcjonalne do poprzecznej powierzchni przekroju przewodnika.

Przykład. Przez przewodnik, uwidoczony na rys. 20, płynie prąd stały



$J = 40$  A. Obliczyć gęstość prądu

w przekroju  $s_1 = 20$  m/m<sup>2</sup> i  $s_2 = 40$  m/m<sup>2</sup>

$$\sigma_1 = \frac{40}{20} = 2 \text{ A/m m}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{40}{40} = 1 \text{ A/m m}^2.$$

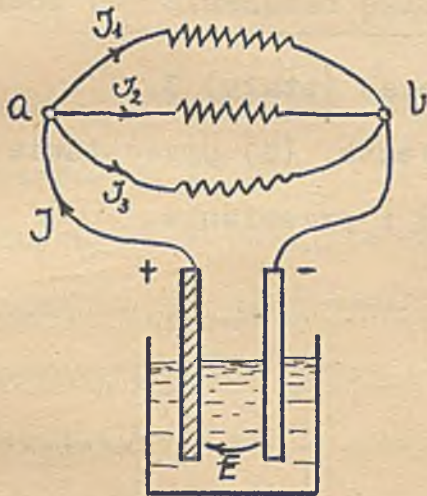
Rys. 20.

W przewodach niejednorodnych (przy prądzie stałym), oraz w przewodach jednorodnych lub niejednorodnych przy prądach zmiennych, gęstość prądu w różnych miejscach poprzecznego przekroju jest różna.



5. Oporność (R) i przewodność (G).

Załączmy na końcówki źródła prądu s t a ż e g o kilka różnych przewodów (Rys. 21). Jakkolwiek na końcówkach a b każdego z tych przewodów



Rys. 21.

istnieje ta sama różnica potencjałów  $V_a - V_b$ , (co stwierdzamy doświadczalnie n.p. woltomierzem), to jednak pomiar prądów  $J_1 J_2 J_3$  wykaże w każdym drucie inne natężenie.

Wynik ten można interpretować w dwa sposoby:

1° Albo przyjmując że poszczególne przewody mają różną zdolność przewodzenia prądu,

2° Albo też przyjmując, że poszczególne przewody przeciwstawiają prądowi różne opory elektryczne (analogicznie jak n.p. rurociągi przepływowi wody).

Interpretacja (1°) prowadzi do pojęcia p r z e w o d n o ś c i e l e k t r . (symbol G), interpretacja (2°) do pojęcia o p o r n o ś c i e l e k t r . (symbol R).

Miarą przewodności elektr. G będzie stosunek

$$G = \frac{J}{V_a - V_b} \dots\dots\dots(14)$$

natężenia prądu (J) w przewodzie do różnicy potencjałów między jego początkiem (dopływem prądu "a") a końcem (odpływem prądu "b").

Stosunek ten określa bowiem jak wielki prąd ( s t a ż y ) na jednostkę różnicy potencjałów zdolny jest przewodzić przewód, poddany na końcówkach działaniu tej (stałej) różnicy.

Miarą oporności elektr. R będzie stosunek



$$R = \frac{V_a - V_b}{J} \dots\dots\dots (15)$$

różnicy potencjałów między początkiem ( dopływem prądu "a") i końcem (odpływem prądu "b") przewodu, a natężeniem prądu J. Stosunek ten określa bowiem jak wielkiej różnicy potencjałów na jednostkę natężenia (J) potrzeba na końcówkach przewodu, aby pędzić przez niego prąd (stały) J.

Z powyższego widać, że przewodność elektr. (G) przedstawia liczbowo o d w r o t n o ś ć oporności elektr. (R) i przeciwnie.

$$G = \frac{1}{R} \dots\dots\dots (16)$$

$$R = \frac{1}{G} \dots\dots\dots (17)$$

Pojęcia oporności i przewodności elektr. wprowadził do Elektrotechniki Ohm (Prawo Ohma 1827). Miały one początkowo znaczenie czysto formalne, jako pojęcie pomocnicze, wspierające się na analogji prądu elektr. z prądem wody w rurociągach. Dopiero z biegiem czasu, gdy niezliczone pomiary wykazały że stosunki (14) i (15), dla tego samego przewodu, dają przy stałych innych warunkach (temperatura i t.d.) s t a ł e wartości, pojęcia te nabrały fundamentalnego znaczenia. Wdocznie bowiem oporność względnie przewodność można uważać za własność materji zależną - jak wykazały doświadczenia - zasadniczo od jej rodzaju, a następnie w jednakowy sposób od wymiarów geometrycznych przewodu z niej sporządzonego.

Przyjmując dla wszystkich ciał jakieś jednakowe ściśle określone wymiary jednostkowe i porównywując ich zachowanie się pod prądem (stałym), otrzymamy ze stosunków (14) i (15) wartości, zależne już tylko od rodzaju materji (przy stałych innych warunkach).

Dochodzimy w ten sposób do pojęcia o p o r n o ś c i w ł a ś c i =  
w e j (symbol  $\rho$ ) i p r z e w o d n o ś c i w ł a ś c i w e j (symbol  $\gamma$ ).



Kładąc we wzorze (15)  $V_1 - V_2 = 1$  wolt,  $J = 1$  amp, otrzymamy  $R = 1$  V/A.

Taką jednostkę oporności nazwano "om" (znak  $\Omega$ ).

Jednostkę techniczną oporności (om) ma przewód, który przy stałej różnicy potencjałów na końcówkach, równej 1 V, przewodzi prąd stały o natężeniu 1 A.

Oporność 1  $\Omega$  wykazuje słupek rtęci o długości 106,3 cm o przekroju 1  $\text{m/m}^2$  przy temperaturze 0° C.

Międzynarodowo przyjęto następującą umowę:

Om jest to oporność słupa rtęci o długości 106,3 cm o przekroju 1  $\text{m/m}^2$  przy temperaturze 0° C. Masa rtęci ma wynosić 14,4521 g.

Doświadczalnie stwierdzamy, że oporność jednolitego przewodnika jest wprost proporcjonalna do długości ( $l$ ) odwrotnie proporcjonalna do przekroju ( $q$ ) i zależy od rodzaju materiału (oporność względnie przewodność właściwa). Zależności te wyrażamy relacjami:

$$R = \frac{l}{q} \varrho \dots\dots\dots (18)$$

$$R = \frac{l}{q \cdot \gamma} \dots\dots\dots (19)$$

$\varrho$  oznacza tu oporność właściwą,  $\gamma$  przewodność właściwą. Spółczynniki te, zależne od rodzaju materiału i temperatury, definiujemy w następujący sposób:

Oporność właściwa ( $\varrho$ ) jest to oporność przewodu o jednostkowych wymiarach geometrycznych, w określonej temperaturze.

Przewodność właściwa ( $\gamma$ ) jest to odwrotność oporności właściwej ( $\varrho$ ).

Dla metali przyjęto jako jednostkowe wymiary przewodu  $l = 1$  m,  $q = 1$   $\text{m/m}^2$ , a temperature 15° C.

Dla elektrolitów i izolatorów, wynosi natomiast  $l = 1$  cm,  $q = 1$   $\text{cm}^2$  a temperature podają najczęściej 18° C. ( $\varrho'$ ).



Oporność właściwa wyraża się więc w  $\Omega$  na  $\frac{m}{m^2}$ .

Przewodność właściwą w  $\mathcal{U}$  na  $\frac{m^2}{m}$ . (Niemcy forsują dla jednostki przewodności (znak  $\mathcal{U}$ ) nazwę "s i e m e n s".).

Załączone tablice podają oporności właściwe ( $\rho$ ), oraz przewodności właściwe ( $\gamma$ )<sup>1)</sup> ważnych technicznie metali, stopów, elektrolitów i izolatorów.

Oporności elektrolitów i izolatorów podane są tu w  $\Omega$  na  $\frac{cm}{cm^2}$ . Przy przeliczaniu ich na  $\Omega$  na  $\frac{m}{m^2}$ , należy wartości podane w  $\Omega$  na  $\frac{cm}{cm^2}$  mnożyć przez  $10^4$ .

$$\rho = \rho' \cdot 10^4.$$

Przykład. Oporność właściwa 25% roztworu kwasu siarkowego ( $\rho'$ ) wynosi  $1,39 \Omega$  na  $\frac{cm}{cm^2}$ , co odpowiada  $13900 \Omega$  na  $\frac{m}{m^2}$ . Znaczy to że przewód utworzony z takiego kwasu o długości 1 cm o przekroju 1  $cm^2$ , ma oporność  $1,39 \Omega$ , zaś przewód o długości 1 m, o przekroju 1  $m^2$  ma oporność  $13900 \Omega$ . Ta druga wartość poucza, że kwas siarkowy przewodzi około 13900 razy gorzej niż rtęć ( $\rho_{Hg} = 0,9532 \Omega$  na  $\frac{m}{m^2}$ ).

Oporności właściwe  $\rho$  (a tem samem i przewodności właściwe  $\gamma$ ) zależą od temperatury (patrz dalej "Wpływ temperatury na opór"). Wpływ ten uwidoczni=ny jest w tablicach w formie współczynnika cieplnego oporności ( $\alpha$ ) bez znaku; gdy przy podwyższaniu temperatury opór rośnie, a ze znakiem "-" gdy z podwyższeniem temperatury opór maleje.

---

1) Wartości  $\gamma$  zaokrąglone.



T a b l i c a I.

Oporności właściwe ( $\rho$ ) przewodników w  $\Omega$  na  $\frac{m}{mm^2}$

w temperaturze  $t = 15^\circ C.$

Materiał	Oporność właściwa $\rho$ w $\Omega$ na $\frac{m}{mm^2}$	Spółczynnik cieplny oporn. $\alpha_{15}$	Przewodność właściwa $\gamma = 1/\rho$ (zaokrąglone)
Srebro	0'0163	0'0036	61'4
Miedź średnio	0'0175	0'004	57
Złoto	0'022	0'0035	45'5
Aluminium (glin)	0'02874	0'0037	35
Wolfram	0'056	0'0046	17'87
Cynk	0'059	0'0039	17
Kadm	0'068	0'0038	14'7
Mosiądz (drut)	0'0707	~0'0015	14'3
Platyna	0'0937	0'0023	10'7
Osm	0'095		10'5
Żelazo czyste	0'1042	0'0048	9'6
Blacha żel. średnio	0'13	~0'0045	7'7
Nikiel	0'1306	0'0042	7'7
Drut żel. telegraf.	0'135	0'0047	7'4
Cyna (średnio)	0'14	0'0045	7'15
Tantal	0'165	0'003	6
Ołów prasowany	0'2	0'0037	5
Rtęć	0'9532	0'000873	1'05
Bismut	1'2	0'0035	0'833
Węgiel	10 ÷ 100	od -0'0008 do -0'0003	0'1 ÷ 0'01



T a b l i c a II.

Oporności właściwe ( $\rho$ ) stopów metali

w  $\Omega$  na  $\frac{m}{mm^2}$  w temperaturze  $15^{\circ} C$ .

Stop	Skład stopu	$\rho$	$\alpha$
Mosiądz (średnio)	60% Cu, 30% Zn	0'075	0'002
Miedź z aluminium	5% Al	0'13	} od 0'0005 do 0'001
" " "	10% Al	0'29	
Platyna z rodem	10% Rh	0'2	0'005
Platyna ze srebrem	20% Pt	0'2	0'005
Miedź z manganem	12'3% Mn	0'43	0'00006
" " "	25% Mn	0'812	0'00005
" " "	30% Mn	1'073	0'00004
Manganin	84% Cu, 12% Mn, 4% Ni	średnio 0'45	średnio 0'00001
Nikielina <sup>1)</sup>	80% Cu, 20% Ni	0'42	0'00002
Reotan <sup>1)</sup>	80% Cu, 15% Ni, 5% Zn	0'47	0'0002
Konstantan <sup>1)</sup>	60% Cu, 40% Ni	0'5	~ 0 do - 0'000005
Kruppin <sup>1)</sup>	80% Fe, 20% Ni	0'85	0'0007

1) Pod powyższymi nazwami znajdują się w użyciu także stopy o innym składzie.



T a b l i c a III.

Oporności właściwe ( $\rho$ ) elektrolitów

w  $\Omega$  na  $\frac{cm}{cm^2}$  w temperaturze  $18^{\circ} C$ .

Roztwór	% zawartości w wodzie							$\rho$ (25%) w $\Omega m/mm^2$
	5	10	15	25	30	50	80	
$H_2SO_4$ Kwasu siarkowego	4.78	2.55	1.84	1.39	1.35	1.85	9.02	13900
$HNO_3$ Kwasu azotowego	3.87	2.17	1.63	1.30	1.27	1.58	3.75	13000
HCL Kwasu solnego	2.53	1.59	1.34	1.38	1.51	-	-	13800
KOH Wodorotlenku potasu	5.82	3.17	2.35	1.85	1.84	-	-	18500
NaCl Soli kuchennej	14.92	8.27	6.10	4.67	-	-	-	46700
$CuSO_4$ Siarczanu miedzi	52.60	31.30	23.80	-	-	-	-	-
$ZnSO_4$ Siarczanu cynku	52.60	31.30	23.80	20.85	22.74	-	-	208500
$MgSO_4$ Siarczanu magnezu	38.50	24.40	20.85	23.80	-	-	-	238000

Uwaga: Spółczynnik  $\alpha$  wynosi średnio 2% na  $1^{\circ} C$  i jest ujemny.



## T a b l i c a IV.

Oporności właściwe ( $\rho$ ) izolatoróww temperaturze  $16 \pm 19^\circ \text{C}$  i podanej wilgotności powietrza.w  $\Omega$  na  $\frac{\text{cm}}{\text{cm}^2}$ .

Materiał	$\rho$ około	Napięcie w woltach na 1 m/m grubości	Wilgotność względna powietrza w %
Mikanit	$6500 \cdot 10^{12}$	1250	48
Ebonit	$4200 \cdot 10^{12}$	540	48
Parafina	$3900 \cdot 10^{12}$	435	70
"	$240 \cdot 10^{12}$	2860	80
Guma twarda	$3600 \cdot 10^{12}$	910	70
Kauczuk	$1130 \cdot 10^{12}$	6600	80
"	$800 \cdot 10^{12}$	10500	80
"	$210 \cdot 10^{12}$	21000	80
Szkło	$8^2 \cdot 2 \cdot 10^{12}$	450	48
"	$6^2 \cdot 6 \cdot 10^{12}$	690	70
Mika	$2^2 \cdot 6 \cdot 10^{12}$	4000	48
Linoleum	$1^2 \cdot 3 \cdot 10^{12}$	286	70
"	$1 \cdot 10^{12}$	572	70
Gлина wypalona (bez glazury)	$13000 \cdot 10^6$	92	48
Marmur średnio	$450 \cdot 10^6$	16	70
Fiber	$53 \cdot 10^6$	371	48
Łupek (szyfer)	$0^2 \cdot 78 \cdot 10^6$	40	70



T a b l i c a V.

Oporności właściwe ( $\rho'$ ) izolatorów płynnych  
w  $\Omega$  na  $\frac{\text{cm}}{\text{cm}^2}$ , w temperaturze  $\sim 18^\circ \text{C}$ .

Materiał	$\rho'$ około
Parafina	$10^{13} \div 10^{23}$
Alkohol	$10^{20}$
Olej	$10^{18}$
Nafta	$10^{18}$
Rycynus	$10^{15}$
Oliwa	$10^{12}$
Benzyna	$10^{14}$
Woda (chem. czysta)	$10^9$

Tablica I wskazuje, że najlepszym przewodnikiem jest srebro, ( $\rho = 0.0158$ ,  $\gamma = 61.4$ ), nie wchodzi ono jednak w rachubę jako materiał na przewody, z powodu wysokiej ceny. Srebro stosuje się tylko w formie cienkich drutów topikowych w bezpiecznikach (bo nie oksyduje).

Jako materiału na przewody, używa się miedzi ( $\rho = 0.0175$ ,  $\gamma = 57$ ), glinu ( $\rho = 0.028$ ,  $\gamma = 35$ ), oraz żelaza ( $\rho = 0.12$ ,  $\gamma = 9.6$ ).

W czasie Wielkiej wojny (1914 - 1918) używany był także cynk Okazał się jednak zupełnie nieodpowiednim materiałem na przewody i części metalowe przewodzące prąd (Mała wytrzymałość, łatwo oksyduje na stykach, kruchy).



Miedź (elektrolityczna) ma najszersze zastosowanie ( przewody, kable uzwojenia maszyn ). Glinu używa się tylko na przewody napowietrzne (lekkość). Żelazo używane jest głównie na przewody telegraficzne.

Z Wolframu sporządzane są druciki żarówek metalowych próżniowych i gazowych (Do niedawna używane były także inne metale: Osm, Tantal i t.d.). Duża przewodność wolframu ( $\gamma = 17'87$ ) nastęrcza poważne trudności przy fabrykacji żarówek nisko-świecowych a wysoko-woltowych, zniewala bowiem do stosowania długiego i bardzo cienkiego drutu.

Ołów ma zastosowanie w akumulatorach i na paski w bezpiecznikach.

Węgla używa się w różnych przeróbkach na elektrody w ogniach na szczotki i t.p. Pręcik węglowy w żarówkach wykazuje (przy  $15^{\circ} \text{C.}$ ) oporność  $\sim 40 \Omega \text{ m/mm}^2$ , węgle lamp łukowych mają oporność  $50 - 80 \Omega \text{ m/mm}^2$ . Grafit ołówków około  $800 \Omega \text{ m/mm}^2$ .

Wpływ ciepła ( $\alpha$ ) ujawnia się u w s z y s t k i c h metali w z r o s t e m oporności ( $\rho$ ) ze w z r o s t e m temperatury.

Tylko węgiel zachowuje się w tym względzie przeciwnie ( $\alpha$  ujemne). Oporność węgla maleje ze wzrostem temperatury.

Wyszczególnione stopy metali (tablica II) cechuje ta właściwość, że ich oporność ( $\rho$ ) jest dużo większa niż  $\rho$  każdego z poszczególnych składników. Poza tem stopy te wykazują małe zmiany oporności z temperaturą (małe wartości  $\alpha$ ). Z tych powodów znajdują owe stopy zastosowanie jako drut oporowy opornic (nikielina, reotan, kruppin), jako opory grzejników (manganin), wreszcie jako druty oporowe przyrządów mierniczych (konstantan,  $\alpha \approx 0$ ).

Z tablicy III widać, że oporności elektrolitów zależne są od ich koncentracji. N.p. czysty kwas siarkowy prawie nie przewodzi prądu. Rozrzedzony wodą, przewodzi najlepiej w koncentracji około 30%.

Oporności ( $\rho$ ) elektrolitów są w ogólności bardzo wielkie.

( $\text{H}_2\text{SO}_4$  .....  $13900 \Omega \text{ m/mm}^2$ ,  $\text{HNO}_3$  .....  $13000 \Omega \text{ m/mm}^2$  i t.d.)



O tem należy pamiętać przy konstrukcji urządzeń elektrochemicznych (ogniwa, akumulatory, wanny do elektrolizy i t.p.)

Wpływ ciepła ujawnia się w tem że z podwyższeniem temperatury, oporność właściwa ( $\rho$ ) elektrolitów maleje.

Także t.zw. izolatory (tablice IV i V) wykazują pewną przewodność. (Bezwzględny izolatorem nie przewodzącym wcale prądu jest najprawdopodobniej<sup>1)</sup> tylko próżnia).

Najprawdopodobniej przewodzenie prądu przez izolatory jest natury elektrochemicznej (elektroliza), gdyż przy podwyższonej temperaturze oporności izolatorów wydatnie maleją.

Oporności właściwe izolatorów są w ogólności bardzo wielkie (dochodzą prawie do  $10^{23} \Omega \text{ na } \frac{\text{cm}}{\text{cm}^2}$ , parafina).

O tem trzeba pamiętać w praktyce. Izolacja maszyn i aparatów elektr. wykazuje znacznie mniejszą oporność, gdy ją mierzymy w stanie ogrzanym (od tej jaką konstatujemy następnie w stanie zimnym).

Oporność izolatorów i wogóle oporności bardzo wielkie wyrażamy ogólnie nie w  $\Omega$ , tylko w megomach (Znak  $M\Omega$ )

$$1 M\Omega = 10^6 \Omega, \text{ czyli milion omów.}$$

Oporność tlenków metali i związków pokrewnych (elektrotechn.).

Odmienne od izolatorów zachowują się tlenki metali i tlenki ziem rzadkich (Cyrkonu, toru i t.d.) oraz siarczków tychże.

W pokojowej temperaturze przewodzą słabo (małe  $\gamma$ ) i ulegają przytem podobnie jak i elektrolity zmianom chemicznym (elektroliza). Natomiast w wysokiej temperaturze przewodzą prawie tak jak metale (duże  $\gamma$ ), a działania elektrolityczne są minimalne. Informacyjne daty co do niektórych tlenków i innych związków, które się podobnie zachowują, podaje następujące zestawienie:

---

1) Doświadczalnie tego stwierdzić nie można, bo absolutnej próżni osiągnąć nie możemy.



T a b l i c a VI.

Oporności właściwe ( $\rho'$ ) tlenków w  $\Omega \text{ cm/cm}^2$

w temperaturze pokojowej.

Związek	$\rho'$
CuS	0'000125
PbO <sub>2</sub>	0'00023 (?)
CdO	0'0012
Ag <sub>2</sub> S (przy 200° C.)	0'0017
Cu <sub>2</sub> O	40
CuO	400 (?)
CaO (t = 490° C.)	7'25 . 10 <sup>8</sup>
BaO (t = 34° C.)	1 . 10 <sup>6</sup>

Dla porównania, przytaczamy że  $\rho'$  miedzi = 0'00000174 .

Przy ogrzaniu CaO do 1193° C, oporność jego ( $\rho'$ ) spada do wartości 9'67 . 10<sup>2</sup>. Przy ogrzaniu BaO do 224° C, oporność jego spada do wartości 22'7 ( $\Omega \text{ cm/cm}^2$ ).

Widać tu olbrzymi wpływ temperatury, czem się jeszcze bliżej zajmiemy.

Oporność ciał rozdrobnionych.

W dotychczasowych rozważaniach mieliśmy na uwadze jedynie oporność ciał jednolitych.

Opiłki metali, sproszkowany węgiel, grafit i t.p. wykazują w ogólności

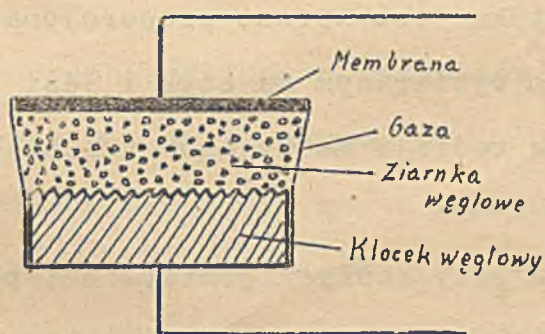


duże oporności, a przytem odrębne zachowanie się pod prądem (skoki wartości  $R$ ).

Oporności takich rozdrobnionych ciał zależne są od wielkości ziarn, nacisku wywieranego na warstwę i całego szeregu dalszych czynników (n.p. wpływ fal elektromagnetycznych na przewodność koherera i t.p.).

Praktyczne zastosowanie ciał rozdrobnionych, jako oporów, widzimy przede wszystkim w mikrofonach. Warstwa rozdrobnionego odpowiednio spreparowa-

negu węgla między dwiema ścianami stykowymi (rys. 22).



Rys. 22.

Oporności mikrofonów dla słabych prądów wynoszą około  $20 \div 50 \Omega$ .

Przy zmianie nacisku (membrany) na warstwę rozdrobnionego węgla (jaka zachodzi podczas mówienia), oporność tej warstwy ulega zmianom.

W mikrofonie  $40 \Omega$ -owym waha w granicach  $20 \div 80 \Omega$ . Zaś natężenie prądu  $I$  przepływającego warstwę w granicach  $0.4 \div 0.1$  A.

Zachowanie się różnych materiałów rozdrobnionych jako przewodników prądu można określić jedynie na drodze doświadczalnej <sup>1)</sup>.

### Oporności styków.

Także styki metali ze sobą, metali i węgla, węgla między sobą i t.p. wykazują pewne oporności, nie mające nic wspólnego z opornościami stykających się przewodników

Oporności styków zależą głównie od wielkości powierzchni stykowej, od stanu tej powierzchni, rodzaju stykających się ciał i wreszcie w bardzo dużym stopniu od nacisku wywieranego na styk.

1) Czytaj n.p. "O własnościach oporów elektr. z grafitu" J. Wąsik. P.E. N<sup>o</sup> 6,7, 1924.

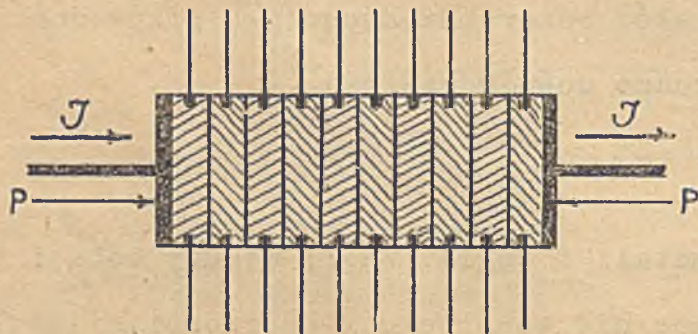


Zasadniczego znaczenia jest tu gładkość powierzchni i dobre przyleganie ciał zetkniętych (styk pod naciskiem). Ponieważ tlenki metali są w ogólności złymi przewodnikami prądu (Zestawienie na str. 36.), przeto metale zoksydowane na stykach wykazują zwiększenie oporności stykowej (Oksydacja pod prądem, przy dostępie powietrza). Aby temu zapobiec, powlekamy powierzchnie stykowe metali (miedzi, mosiądzu, żelaza) cyną lub niklem t.j. metalami nieoksydującymi. Także natłuszczenie przy silnym ścisnieniu styku chroni do pewnego stopnia przed oksydacją, (nie dopuszcza powietrza).

Praktycznie przewodność ( $G$ ) styku jest wprost proporcjonalna do powierzchni styku, rośnie z naciskiem wywieranym na styk i jest tym większa im gładziej są ściany stykowe. Wpływ rodzaju materiałów trzeba badać doświadczalnie.

Oporności stykowe są źródłem błędów przy czułych pomiarach i powodują grzanie się połączeń przy silnych prądach (patrz dalej "Działania elektrotermiczne").

Wyzyskanie oporności styków widzimy w opornicach stykowych (rys. 23),



Rys. 23.

cowe płytki są z metalu.

które składają się z wielu węglo- wych płytek doszlifowanych do siebie i ułożonych jedna na drugiej. Zmiana nacisku ( $P/P$ ) powoduje zmianę oporności takiego s t o s u o p o r o w e g o .

Blachy (B) umieszczone na bokach płytek służą do chłodzenia; koń-



Oporność przewodników i izolatorów o jednakowej gęstości prądu w każdym punkcie poprzecznego przekroju strugi prądu.

W dotychczasowych rozważaniach mieliśmy na uwadze jedynie przewodniki (względnie izolatory) kształtu cylindra o stałym przekroju wzdłuż całej długości.

Oporność takiego cylindra o długości  $dl$  i przekroju  $q$ , określa (w myśl 18) relacja

$$dR = \frac{dl}{q} \rho \dots \dots \dots (20)$$

Oporność przewodników innych kształtów zależy od rozmieszczenia elementarnych strug prądu w ich wnętrzu.

W wypadkach prostych, gdy w każdym punkcie poprzecznego o przekroju strugi prądu gęstość  $G = \frac{J}{S}$  jest jednakowa, możemy obliczyć R przewodnika wiodącego ten prąd z pomocą wzoru (20). Albowiem gdy

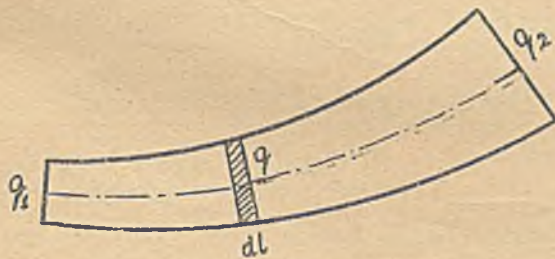
$$dR = \frac{dl}{q} \rho$$

oznacza oporność elementarnej warstwy przewodnika o przekroju (poprzecznym)

$q$ , a długości  $dl$  (rys. 24) to

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dl}{q} \rho \dots \dots \dots (21)$$

Tak określone R odnosi się do osiowego przepływu prądu (Tory strug normalne do płaszczyzn poszczególnych przekroji).



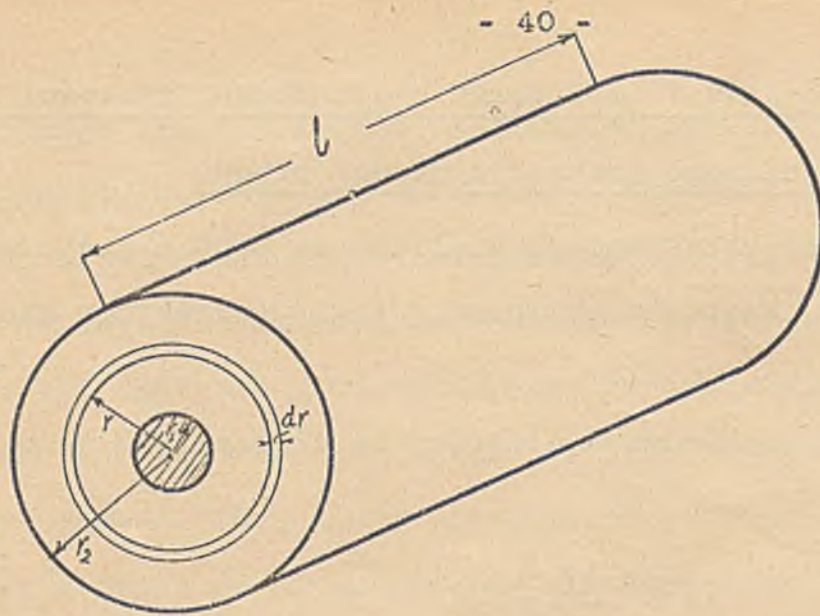
Rys. 24.

Analogicznie obliczymy także oporność izolacji kabla (rys. 25).

Strugi prądu płynącego przez izolację do ziemi mają kierunek radialny do osi kabla. Oporność warstwy cylindrycznej odległej od środka o  $r$ , której grubość jest  $dr$  wynosi

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi \cdot r \cdot l}$$





Rys. 25.

zatem oporność całkowitej warstwy izolacyjnej będzie

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \rho' \frac{dr}{2\pi \cdot r \cdot l} = \frac{\rho'}{2\pi \cdot l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\rho'}{2\pi \cdot l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Oznacza  $r_1$  promień przewodu w cm,  $r_2$  promień zewnętrzny kabla w cm,  $l$  długość kabla w cm,  $\rho'$  oporność właściwą izolacji w  $\Omega$  na  $\frac{\text{cm}}{\text{cm}^2}$ , to

$$R = \frac{\rho'}{2 \cdot \pi \cdot l} \ln \frac{r_2}{r_1} \text{ omów} \dots \dots \dots (22)$$

Uwaga: Określając oporność właściwą w  $\Omega$  na  $\frac{\text{cm}}{\text{cm}^2}$  ( $\rho'$ ), należy wstawić (celem otrzymania  $R$  w  $\Omega$ )  $l$  w cm a  $q$  w  $\text{cm}^2$

$$R = \frac{l \text{ cm}}{q \text{ cm}^2} \rho'$$



Wpływ temperatury na oporność ( $\alpha$ ).

Oporność ciał jest zależną od temperatury, jak to już poprzednio zaznaczyliśmy.

Ze wzrostem temperatury oporność metali r o ś n i e , a węgla, elektrolitów i izolatorów m a l e j e . Stopy metali zachowują się w tym względzie dwojako. Oporności tlenków i siarczków metali maleją z temperaturą.

Zależność oporności od temperatury da się wyrazić wzorem

$$R_t = R_0 ( 1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \dots ) \dots \dots \dots (23)$$

gdzie  $R_t$  oznacza oporność w temperaturze  $t$ ,  $R_0$  w temp,  $0^\circ C$ ,  $t$  temperaturę w stopniach C, zaś  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  przedstawiają t.zw. spółczynniki cieplne oporności, wyznaczalne doświadczalnie i w odniesieniu do oporności w  $0^\circ C$ , ( $R_0$ ).

W praktycznych obliczeniach, gdzie nie chodzi o zbyt dużą dokładność i w rejonie temperatur niezbyt odległym od  $0^\circ C$ , można się posługiwać wzorem przybliżonym

$$R_t = R_0 ( 1 + \alpha_0 t ), \dots \dots \dots (24)$$

w którym dalsze składniki wzoru (23) zostają pominięte, a  $t$  przedstawia temperaturę liczoną od  $0^\circ C$ , albowiem  $\beta, \gamma$  mają bardzo małe wartości.

Spółczynnik cieplny  $\alpha_0$  w tak uproszczonym wzorze określa przyrost oporności na  $1^\circ$  i stopień temperatury w odniesieniu do  $R_0$ , czyli oporności w  $0^\circ C$  (Indeksy "o" przy R i  $\alpha$ ).

Dla miedzi jest (tak wyznaczone)  $\alpha_0 = 0.00427$ , co oznacza, że miedź ogrzana od  $0^\circ$  do  $t^\circ C$ , zwiększa swą oporność o  $0.00427 \cdot t \Omega$  na każdy  $^\circ$  wykazany przy  $0^\circ C$ , czyli o  $0.427\%$  na stopień lub  $42.7\%$  na  $100^\circ C$  (Przy założeniu, że w tym rejonie temperatur jest  $\alpha_0 = \text{const}$ ).

Z uwagi na to, że oporności właściwe podane są dla temperatury  $15^\circ C$ , należy wzór (24) przekształcić.



Wypiszmy więc w myśl (24)

$$R_1 = R_0 (1 + \alpha_0 t_1),$$

$$R_2 = R_0 (1 + \alpha_0 t_2),$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1 + \alpha_0 t_2}{1 + \alpha_0 t_1}$$

i wyeliminujmy  $R_0$ , to otrzymamy

$$R_2 = R_1 \left[ 1 + \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 t_1} (t_2 - t_1) \right]$$

$$R_2 = R_1 \frac{1 + \alpha_0 t_2}{1 + \alpha_0 t_1}$$

lub kładąc

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 t_1} \dots \dots \dots (25)$$

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha_1 (t_2 - t_1)] \dots \dots \dots (26)$$

$\alpha_1$  przedstawia tu współczynnik temperatury odniesiony do dowolnie obranej temperatury  $t_1$  ( $R_1$  oporność początkowa w tej temperaturze) <sup>1)</sup>

Zaś wzór (25) podaje zależność między tak oznaczonym współczynnikiem  $\alpha_1$  a odniesionym do temperatury 0°C ( $\alpha_0$ ).

Gdy  $\alpha_0 = \text{const}$ , jest i  $\alpha_1 = \text{const}$  w odniesieniu do tej samej temperatury początkowej  $t_1$  ( $t_2$  może być dowolne).

Wzór określający współczynnik  $\alpha_1$  możemy także tak przedstawić

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 t} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + t} = \frac{1}{k + t} \dots \dots \dots (27)$$

gdzie  $t$  oznacza temperaturę odniesienia, mierzoną od 0°C.

Dla miedzi jest  $\alpha_0 = 0.00427$ , zatem  $k = \frac{1}{\alpha_0} = 235$

$$\alpha_1 = \frac{1}{235 + t} \dots \dots \dots (28)$$

Wstawiając w powyższe wzory  $t_1 = 15$ , otrzymamy

$$\alpha_{15} = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 15} \dots \dots \dots (29)$$

$$R_2 = R_{15} [1 + \alpha_{15} (t_2 - 15)] \dots \dots \dots (30)$$

1) Nie należy mieszać współczynnika temperatury  $\alpha_1$  ze współczynnikiem cieplnym oporności  $\alpha_0$ .



Dla miedzi jest

$$\alpha_{15} = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 \cdot 15} = \frac{1}{235 + 15} = \frac{1}{235} = 0.004$$

Dla innych metali wartości  $\alpha$ , podane są w tablicach na str. 28 - 30.

Z wzoru (26) wynika relacja

$$t = t_2 - t_1 = \frac{R_2 - R_1}{R_1} (235 + t_1) \dots\dots\dots(31)$$

polecana przez Związek Elektrotechników niemieckich do obliczania przyrostu temperatury  $t = t_2 - t_1$  z pomiaru oporności ( $R_1$  w temp.  $t_1$  i  $R_2$  w temp.  $t_2$ ).

Przykład. Miedź w temp.  $t_1 = 20^\circ \text{C}$  ma  $R_1 = 10 \Omega$ , po nagrzaniu do temp.

$t_2 = ?$  wykazuje  $R_2 = 15 \Omega$  o ile stopni się ogrzała ?

$$t = t_2 - t_1 = \frac{15 - 10}{10} (235 + 20) = \frac{5}{10} \cdot 255 = 127.5^\circ \text{C}.$$

Zatem miedź ta ogrzała się o  $127.5^\circ \text{C}$  ponad temperaturę początkową ( $t_1$ ), a jej temperatura końcowa wynosi

$$t_2 = 20 + 127.5 = 147.5^\circ \text{C}.$$

Uwaga: W wielu podręcznikach spotyka się mylną interpretację wzoru na  $R_t$  (26). We wzorze tym wstawia się za  $\alpha$  wartość  $\alpha_0$ , co oczywiście jest niedopuszczalne i prowadzi do fałszywych wyników.

Fizykalnie i przy założeniu, że  $\alpha_0$  w odnośnym rejonie temperatur jest stałe, określa ten współczynnik (zgodnie z 24) relacja

$$\alpha_0 = \frac{R_t - R_0}{R_0 \cdot t} \dots\dots\dots(32)$$

Tę samą wartość otrzymamy, posługując się wzorami

$$\alpha_1 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 (t_2 - t_1)} \dots\dots\dots(33)$$

$$i \quad \alpha_0 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1 t_1} \dots\dots\dots(34)$$



które wynikają z (25) i (26).

Gdy zmierzono opór w temperaturze  $t_1(R_1)$ , a trzeba obliczyć jego wartość w temperaturze  $t_2(R_2)$ , należy posłużyć się wzorem (26) i wstawić w nim za  $\alpha_1$  wartość obliczoną z wzoru (25).  $R_1$  oznacza tu opór początkowy a  $\alpha_1$  ma jak widać dla każdego oporu początkowego ( $R_1$ ) inną wartość. Jednakże dla tego samego oporu odniesienia ( $R_1$ ) wartość  $\alpha_1$  nie ulega zmianom w zależności od temperatury  $t_2$  (oczywiście przy założeniu początkowym że  $\alpha_0 = \text{const}$ ).

Wzór (26) możemy przedstawić także tak

$$R_2 = R_1 \frac{1 + \alpha_0 t_2}{1 + \alpha_0 t_1} \dots\dots\dots (35)$$

i w ten sposób uniezależnić się co do  $\alpha$  od oporności początkowej. Spółczynnik  $\alpha_0$  oznacza tu (praktyczną) stałą z wzoru (24). Mówimy „praktyczną stałą”, bo z powodu opuszczenia dalszych członów równania (23),  $\alpha_0$  nie może być uważane za stałą.

Z wpływem temperatury na oporność ( $R$ ) trzeba się liczyć zarówno przy konstrukcji aparatów mierniczych, jakoteż i maszyn elektr. Przy podwyższeniu się temperatury uzwojeń miedzianych maszyny do (dopuszczalnej) wysokości  $80^\circ \text{C}$ , oporności ich wzrosną o  $\alpha_0 \cdot t_2 = 0.00427 \cdot 80 = 0.3416 \Omega$  na każdy om, czyli o  $\sim 35\%$ . Jeżeli więc uzwojenie jakieś miało w temperaturze  $0^\circ \text{C}$  oporność  $100 \Omega$ , to w temperaturze  $80^\circ \text{C}$  osiągnie oporność  $\sim 135 \Omega$ .

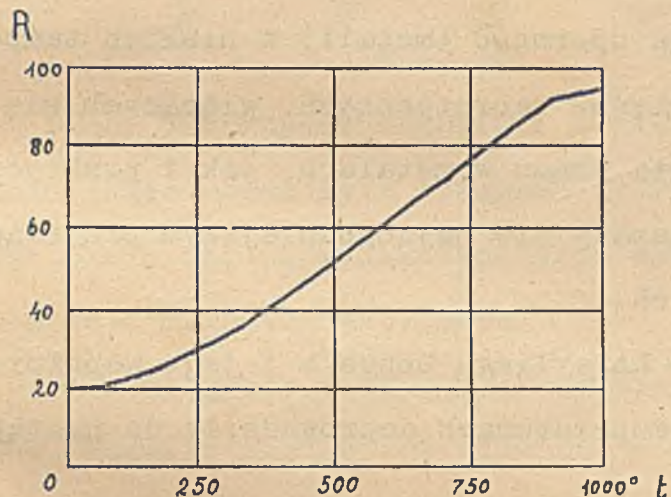
Olbrzymie wzrosty oporności wykazują druty wolframowe w żarówkach. Przyjmijmy że dla wolframu  $\alpha_{15} = 0.0046$  ma tę samą wartość także w temperaturze włókna  $t_2 \cong 2215^\circ \text{C}$  i obliczmy oporność  $R_2$  żarówki 16-świecowej 110 V. której oporność w temp.  $t_1 = 15^\circ \text{C}$  jest  $R_1 = 52 \Omega$ .

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha_{15}(t_2 - t_1)] = 52 \cdot [1 + 0.0046(2215 - 15)] = \\ = 52 \cdot [1 + 0.0046 \cdot 2200] = 52 \cdot 10.12 = 526 \Omega .$$



W rzeczywistości (oporność mierzona)  $R$  wynosi  $630\Omega$ , (bo  $\alpha_0$  nie jest stałe w rejonie temp. od  $0^\circ$  do  $2215^\circ\text{C}$ ) Jak widać oporność drutu wolframowego w temperaturze żarzenia jest (okragło) 12 razy większa niż w temperaturze pokojowej. Załączając żarówkę wolframową na źródło prądu o SEM-mej  $110\text{ V}$ , otrzymamy chwilowe uderzenie prądu osiągające 12 krotną wartość prądu normalnego (w czasie świecenia). Równoczesne załączenie większej ilości takich żarówek, połączonych równolegle, może spowodować przepalenie bezpieczników (w chwili załączania).

Szczególne zachowanie przy zmianie temperatury wykazuje żelazo chemicznie czyste. Oporność jego rośnie bowiem między  $500^\circ$  a  $750^\circ\text{C}$  (praktycznie) proporcjonalnie do temperatury, jak to ilustruje wykres na rys. 26.

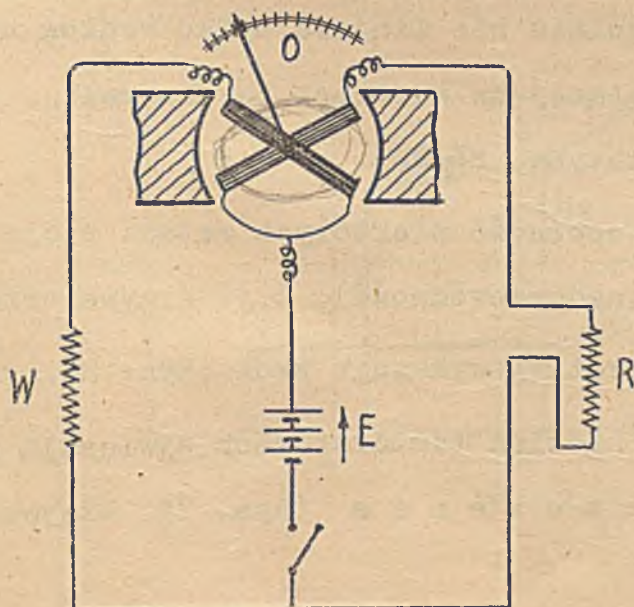


Rys. 26.

Druty z chemicznie czystego żelaza zamknięte w bańkach szklanych wypełnionych azotem służą jako oporniki do utrzymywania (praktycznie) stałego natężenia prądu przy zmniejszającej się (nie wiele) różnicy potencjałów.

Wpływ temperatury na oporność

wyzyskano w elektr. t e r m o m e t r a c h oporowych. Urządzenie takie



Rys. 27.

(Rys. 27) składa się z elementu oporowego ( $R$ ), i porównawczego ( $W$ ), ze źródła prądu ( $E$ ) i czułego omomierza ( $O$ ), wycechowanego empirycznie w stopniach  $C$ . Element oporowy, ułożony jest (w odpowiedniej ochronie) w miejscu którego temperatura ( $t$ ) ma być mierzona.



Omomierz może znajdować się w miejscu odległym od (R). Zmiany oporności (R) powodują zmiany prądów w ruchomym układzie dwu cewek skrzyżowanych omomierza, a temsamem wychyli wskazówkę przyrządu, która na odpowiedniej skali wskazuje wprost temperaturę w miejscu w którym umieszczono element oporowy  $R$ .

Jako materiału oporowego (R) używa się zwykle p l a t y n y . Aby się uchronić od wpływu zmian różnicy potencjałów źródła, stosuje się układ podany na rys. 27 (Hartmann & Braun) lub inne, analogiczny cel spełniające, kombinacje.

#### Oporności metali w temperaturach niskich.

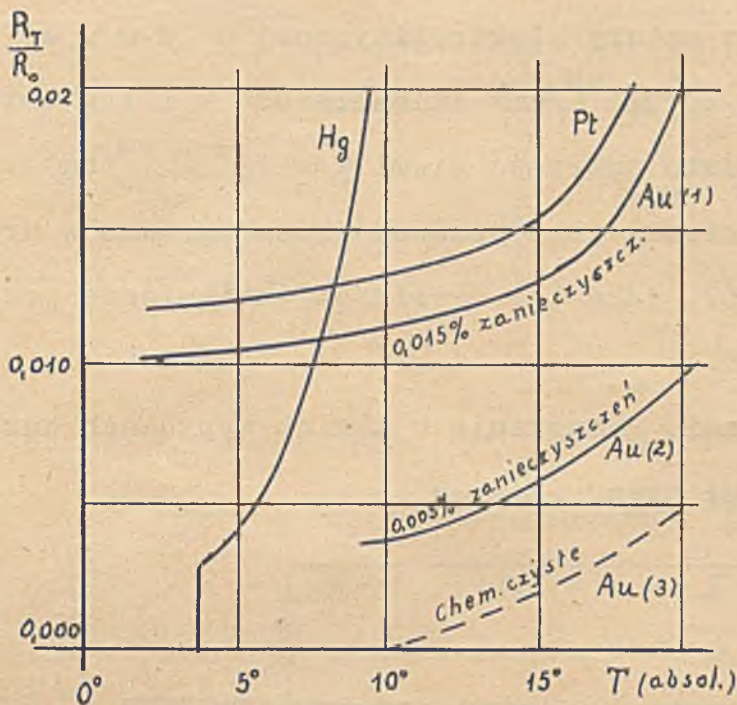
O b n i ż e n i e temperatury metali powoduje z m n i e j s z e n i e ich oporności.

Zagadnienie, jakim zmianom ulega oporność (metali) w niskich temperaturach interesuje nas zarówno ze względów teoretycznych, wiążących się z zagadnieniem mechanizmu przewodzenia prądu w metalach, jak i praktycznych, ponieważ termometry oporowe okazały się najdogodniejszym przyrządem do mierzenia temperatur bardzo niskich.

Wyniki najnowszych badań (Prace Kamerlingh Onnes'a i jego współpracowników) nad przewodnością w niskich temperaturach doprowadziły do następujących wyników:

- a) Oporność metali, pozbawionych zupełnie zanieczyszczeń, maleje ze spadkiem temperatury, ogólnie nie linjowo tylko według krzywej charakterystycznej, zmierzającej do wartości bardzo małej, *względnie do zera* (Rys. 28, platyna, *złoto*).
- b) W pobliżu zera absolutnego oporność niektórych metali staje się nagle *niemierzalnie mała* (nadprzewodność), t.j. krzywa przebiegu zmian w zależności od temperatury wykazuje skok (Rys. 28, rtęć).
- c) Na zachowanie się metali w niskich temperaturach wywierają wybitny wpływ *zanieczyszczenia* (Rys. 28, krzywe 1 i 2 dla *złota*).





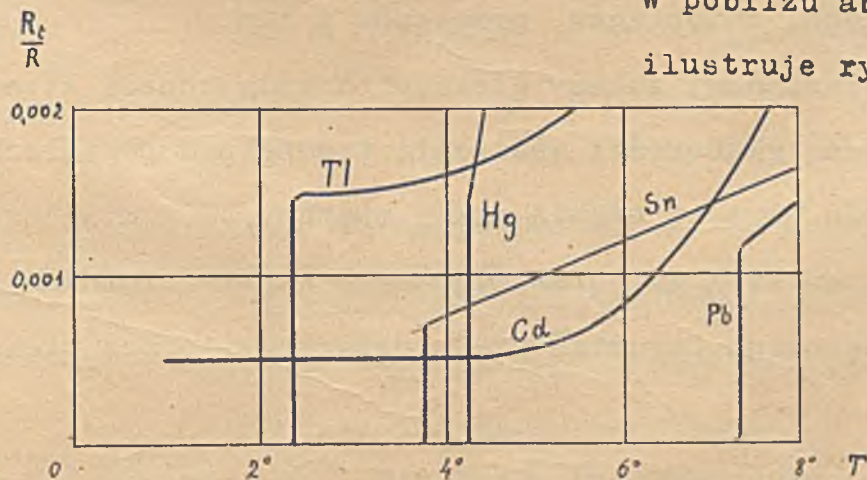
Rys. 28.

Najdrobniejsze nawet zanieczyszczenia powodują mianowicie podwyższenie oporności i ewentualny zanik „nadprzewodności”. W podobny sposób działa także pole magnetyczne (niweczy nadprzewodność), przyczem wpływ ten występuje zarówno w położeniu podłużnym jak i poprzecznym (przewodnika) do linii magnetycznych.

Prądy indukcyjne wzbudzone w pierścieniu (ołowianym) oziębionym do granic jakie można było osiągnąć (skroplony hel) utrzymywały się w nim przez wiele dni. Zjawisko znajdzie wytlómaczenie w rozdziale traktującym o indukcji magnetoelektrycznej.

(Czytaj „Opór elektryczny metali w temperaturach bardzo niskich”, Dr. W. Werner, P.E. Nr. 4, 1927).

Przebieg zmian oporności w pobliżu absolutnego zera ilustruje rys! 28 a.



Rys. 28a.

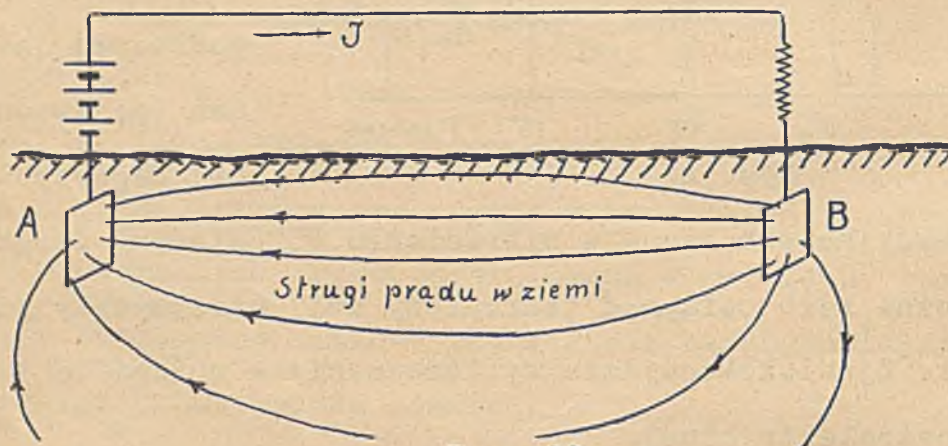


### Oporność ziemi

Ziemia jest przewodnikiem natury elektrolitycznej o dużej oporności właściwej ( $\zeta' = 5 \cdot 10^3$  do  $10^5 \Omega \text{ cm} / \text{cm}^2$  zależnie od wilgotności i zawartości soli. Średnio oporność ziemi  $\zeta' = 10^4 \Omega \text{ cm} / \text{cm}^2$ ).

Mimo to posługujemy się ziemią jako przewodnikiem zarówno w urządzeniach prądów słabych (telegraf), jako też i silnych (uziemienie przewody zerowe, szyny tramwajowe i t.d.).

Duża oporność właściwa ( $\zeta$ ) ziemi, kompensuje w takich wypadkach duży przekrój poprzeczny objęty strugami prądu (Rys 29).



Rys. 29.

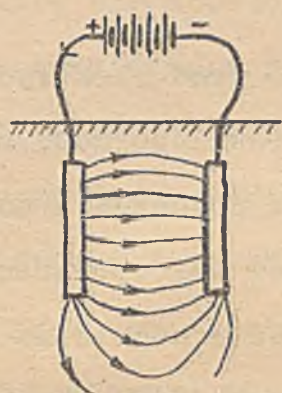
Należy tylko dbać o dobre uziemienie końcówek (A,B), łączących ziemię z przewodami metalicznymi. Końcówki te winny mieć możliwie dużą powierzchnię, co osiąga się przez zastosowanie płyt ziemnych żelaznych ( $1 \text{ m}^2$ ) miedzianych, rurociągów, przewodów i t.p.

Dobroć transmisji ziemnej zależy głównie od wilgotności ziemi, kształtu uziemionych elektrod, głębokości osadzenia tychże pod powierzchnią ziemi, natomiast odległość płyt od siebie mniej znaczący, bo w miarę zwiększania się jej, strugi prądu wnikają do coraz głębszych warstw ziemnych (porównaj Rys. 30 i 31), wskutek czego strumień prądu przechodzi przez większy przekrój.

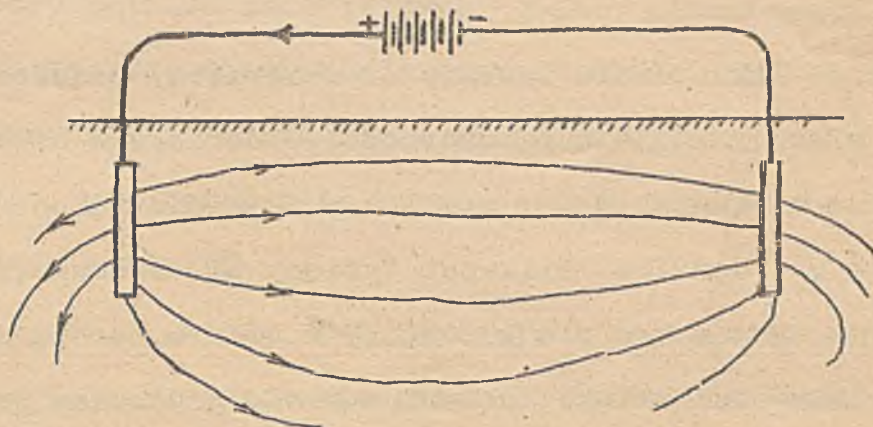
Rozłożenie strug prądu wewnątrz ziemi nie jest jednakowe, w warstwach



lepiej przewodzących gęstość prądu ( $\delta$ ) jest większa, w warstwach gorzej

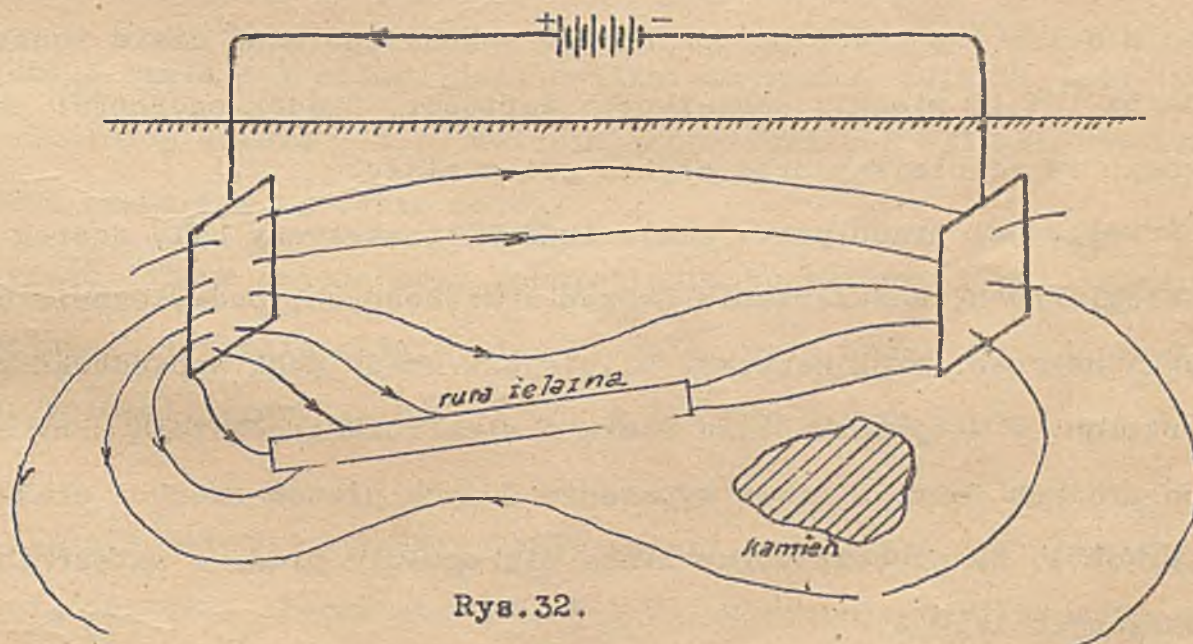


Rys.30.



Rys.31.

przewodzących jest mniejsza. Wynika stąd, że metale umieszczone w ziemi (rury wodociągowe i gazowe, szyny i t.p.), dalej warstwy mokre i przesycone solami (i t.p.) niejako skupiają strugi prądu. Natomiast suchy piasek kamień, jest niejako przez strugi prądu wymijany (rys.32.)



Rys.32.

Silne prądy ziemne, przedostając się na metale ułożone w ziemi, powodują nagryzanie tychże (w miejscach, które z tych metali w y p ł y = w a j ą , patrz elektroliza). Dlatego należy wszelkie rurociągi biegnące ulicami posiadającymi linje tramwaju elektrycznego, zabezpieczyć przed dostępem prądów ziemnych (terowanie, i t.p.). O oporności ziemi tudzież o rozprzestrzenianiu się strug prądu w ziemi, uziemieniach, patrz ETZ Nr.36. 1925).



### Oporność ciała ludzkiego.

Także ciało ludzkie (i zwierzęce) przewodzi prąd elektryczny, jakkolwiek wykazuje dużą oporność. U dorosłego człowieka oporność ciała mierzona w stanie normalnym między dłońią a podeszwą u nogi, wynosi średnio kilkaset tysięcy  $\Omega$ . Główna część tej oporności przypada na naskórek, który w stanie suchym może uchodzić za izolator, a przewodzi dzięki zawartym w nim gruczołom potnym. Sama tkanka mięsna, naczynia krwionośne, nerwy są natomiast dość dobrymi przewodnikami prądu.

Oporność ciała ludzkiego zależy głównie od stanu naskórka. Przy zawilgoceniu go wodą, kwasami i spotnieniu oporność ciała ludzkiego spada do kilku tysięcy, a nawet poniżej 1000  $\Omega$ . W stanie suchym oporność niektórych osobników dochodzi do kilku milionów  $\Omega$ . (pomiar wykonany, jak wyżej, między dłońią a podeszwą). Przy przepływie prądu przez ciało, oporność jego maleje. Już po upływie 30 sekund oporność ciała ludzkiego spada na 1/4 (i więcej) początkowej wartości. Spadek oporności jest tem większy, im silniejszy prąd płynie przez ciało.

Przepływowi prądu przez ciało ludzkie towarzyszy cały szereg działań fizjologicznych. Rozszerzanie naczyń krwionośnych, podwyższenie ciepłoty, drgawki nerwowe, szok nerwowy. Silniejsze prądy mogą spowodować porażenie śmiertelne. W miejscach styku ciała z elektrodami powstają przy silniejszych prądach rany, a nawet wypalenie dużych płatów skóry i ciała („znamię prądu”). Za niebezpieczne uważa się ogólnie prądy o natężeniach przekraczających 1/10 A.

Ponieważ zdarzają się wypadki porażenia śmiertelnego już przy napięciach 220 V a nawet przy 110 V, wynikałoby stąd, że oporność ciała może spaść aż do wartości

$$R = \frac{220}{0.1} = 2200 \Omega, \text{ względnie } R = \frac{110}{0.1} = 1100 \Omega.$$



Z drugiej strony znane są wypadki, że napięcia wynoszące nawet kilka tysięcy woltów nie spowodowały porażen śmiertelnych. Należy przeto powyższe dane traktować z rezerwą, nie wiemy bowiem dotąd pewnie, czy po wartości oporności ciała decydującej o natężeniu prądu przepływającego przez nie przy danym napięciu, nie wchodzi tu w grę jeszcze inne czynniki, jak stan fizyczny i psychiczny osobnika.

Faktem jest, że ludzie obyci z prądem, przyzwyczajeni do elektryzowania (elektromonterzy) znoszą łatwiej uderzenia prądu od osobników lękliwych, nerwowych, wrażliwych, z elektryzowaniem nie obytych.

Wypada zaznaczyć, że prądy szybkozmienne (Tesli) nie szkodzą organizmowi, płyną bowiem po powierzchni. (Patrz dalej „Fizjologiczne działania prądu”).

#### Wpływ światła na oporność ( s e l e n ).

Niektóre ciała jak selen (Se), związki antymonu, związki jodu ( $CuJ$ ,  $HgJ_2$ ), alkaloidy srebra i t.p. zmieniają oporność pod wpływem światła. Techniczne znaczenie ma tylko selen.

Oporność selenu maleje przy naświetleniu początkowo bardzo szybko, potem wolniej, wreszcie ustala się. Po zniknięciu naświetlenia pierwotna oporność (ciemni) wraca wolno ( b e z w ł a d n o ś ć ś w i e t l n a s e l e n u ).

Wrażliwość selenu na naświetlenie zależy od odmiany i preparatu.

Selen, pokrewny pierwiastkom S, P i Te, występuje w kilku odmianach allotropowych, a mianowicie jako: a) bezkształtny, b) szklisty, c) krystaliczny czerwony i d) krystaliczny szary. Ostatnia odmiana właśnie, (s e l e n krystaliczny s z a r y) wykazuje podaną wrażliwość na światło, gdy sporządzimy z niego bardzo cienką warstewkę. Oporność selenu ( $\rho$ ) wynosi (w ciemni) około  $2.5 \times 10^9 \Omega$  na m i  $m/m^2$ . Jest więc w przeciwstawieniu do metali bardzo wielka.

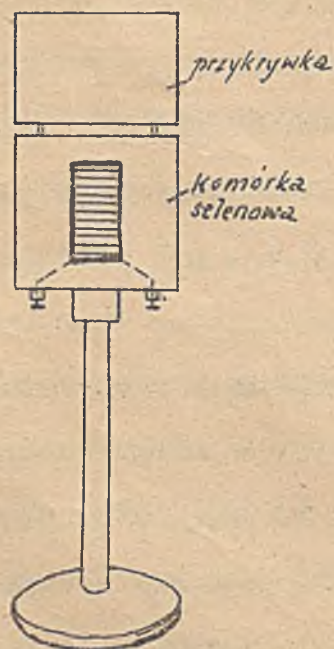


Małe zanieczyszczenia selenidami metali, zmniejszają oporność selenu aż do 1/2000 tej wartości.

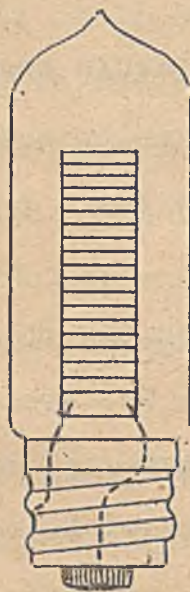
Warstwę selenową sporządza się zazwyczaj w ten sposób, że na płytce z miki nawija się dwa cienkie druty platynowe (rys.33) w ten sposób, aby się nigdzie nie stykały.



Rys. 33.



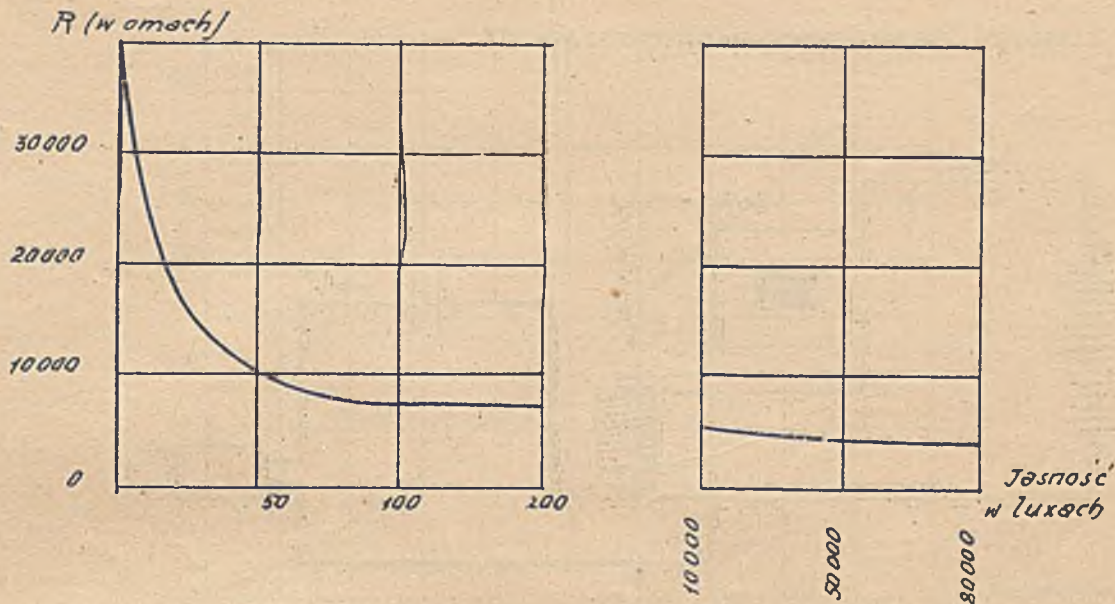
Rys. 34.



Rys. 35.

Na płytkę taką nakłada się następnie (na gorąco) selen w możliwie cienkiej warstewce. Druty platynowe służą jako doprowadzenie prądu. Tak sporządzoną komórkę selenową umieszcza się w ramce z materiału izolacyjnego (rys.34.), lub w bańce szklanej (rys.35.), z której wypompowuje się powietrze. Oporność takiej komórki wynosi zwykle (w ciemni) od 10000 do 100000  $\Omega$ . Zmianę oporności przy oświetleniu takiej komórki okazuje diagram na rys.36. (Na osi rzędnych oporność w  $\Omega$ , na osi odciętych jasność w luxach. Lux jest to jasność jaką daje 1 świeca normalna z odległości 1 metra na powierzchni prostopadłej do kierunku promieni).





Rys.36.

Jak widać z powyższego diagramu, oporność selenu oświetlonego ulega kilkakrotnemu zmniejszeniu już przy niewielu luxach.

Dla orientacji warto zapamiętać, że przewodność selenu zwiększa się w stosunku do wartości w ciemni:

2-krotnie w dziennym świetle (w pokoju),

10-krotnie przy wystawieniu na promienie słońca (w dniu słonecznym, w południe).

Podwyższanie temperatury zmniejsza wrażliwość selenu na światło; wrażliwość ta zanika w temperaturze około  $200^{\circ}\text{C}$ .

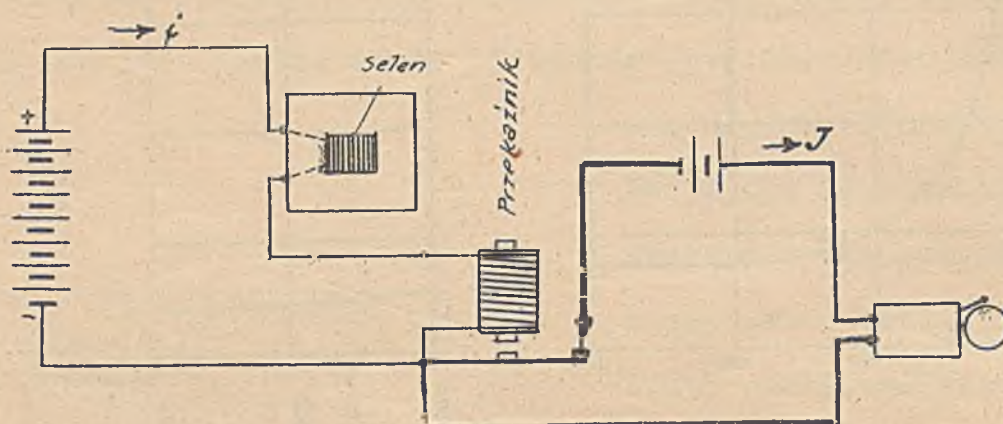
Rodzaj światła ma wybitny wpływ na zmiany oporności selenu. Najsilniejsze działanie mają wywierać promienie żółte aż do czerwonych (widma). Maximum ma przypadać dla fal świetlnych o długości około  $0,7\mu$

$$(\mu = \frac{1}{1000} \text{ m/m}).$$

Z powodu wielkiej oporności właściwej ( $\rho$ ) selenu, znosi on tylko nieznaczne prądy. Urządzenia więc wyzyskujące właściwości selenu muszą posiadać się przekaźnikami ( r e l a i s ), do uruchomienia koła o silniejszym prądzie.



Urządzenie służące do uruchomienia dzwonka elektrycznego przez naświetlanie komórki selenowej okazuje rys.37.



Rys.37.

Gdy wskutek zmniejszenia oporności selenu, w obwodzie zawierającym komórkę selenową prąd „i” wzrośnie, łączy przełącznik drugi obwód o prądzie J, uruchamiającym dzwonek. Przełącznik musi być dostatecznie czuły (zwykle stosuje się spolaryzowany, w co tu jednakże wchodzić nie będziemy).

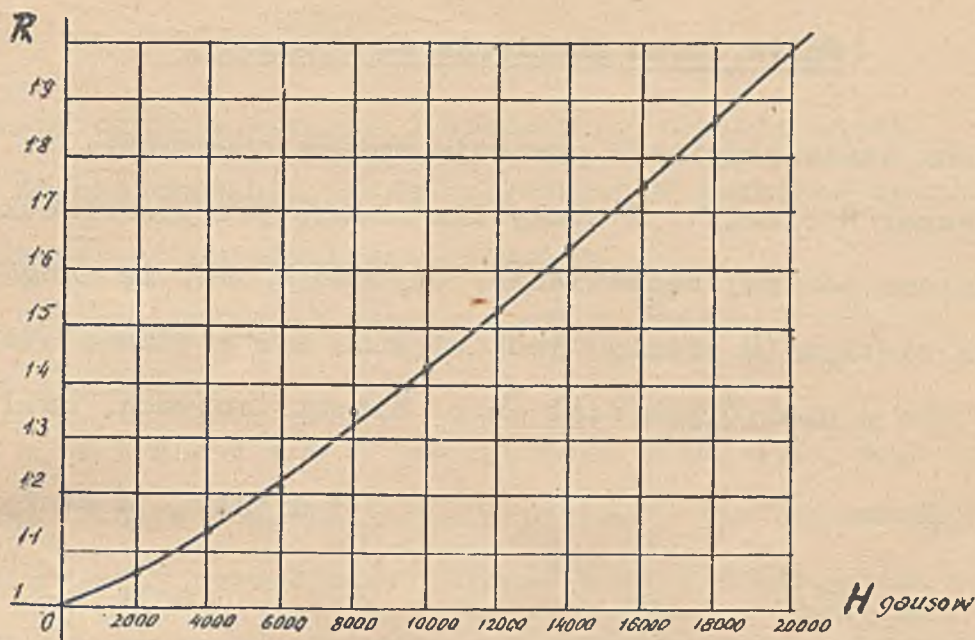
Wyczerpujące wiadomości o selenie znaleźć można w książce „Das Selen”, Ries, Diessen 1918. Tamże znajduje się literatura patentowa dotycząca zastosowań.

### Wpływ pola magnetycznego na oporność ( b i z m u t ).

Najwybitniejszy wpływ pola magnetycznego na oporność obserwujemy w bizmucie (Bi).

Oporność bizmutu ( $\rho$ ) wynosząca  $1,2 \Omega$  na m i  $m/m^2$  przy  $H = 0$ , z w i ę k s z a się w polu magnetycznym w miarę wzrostu  $H$  (natężenie pola magnetycznego). Zależność oporności bizmutu od natężenia pola  $H$  ilustruje rys.38. Jak widać oporność Bi rośnie prawie linjowo z natężeniem  $H$  i przy  $H = 20000$  gaussów zwiększa się prawie dwukrotnie.





Rys. 38.

Właściwość tę bizmutu wykorzystuje się technicznie w pomiarach magnetycznych t.zw. spiralą bizmutową (rys.39.). Drucik zwinięty



Rys. 39.

w kształt płaskiej spirali, umieszczony między dwiema cienkimi płytkami z miki, umocowuje się na ręczce i łączy ze źródłem prądu. Zmiany natężenia prądu, przy stałym napięciu źródła, pozwalają ocenić zmianę oporności spirali, umieszczonej w polu magnetycznym, płaszczyzną prostopadłą do linii sił (Spirala bizmutowa).

Ponieważ w powietrzu jest  $H = B$ , przeto za pomocą spirali Lenarda można mierzyć wprost indukcję magnetyczną  $B$  w szczelinach powietrznych magnesów i elektromagnesów.

Także inne metale n.p. nikiel reagują słabo na działanie pola magnetycznego.



Wpływ stanu skupienia na oporność.

Zmiana stanu skupienia powoduje zmianę oporności.

Stosunek R ciekły : R stały dla niektórych pierwiastków podaje uwidocznione poniżej zestawienie. Orientuje ono, że naogół, oporność w stanie ciekłym (R ciekły) jest większa niż w stanie stałym, jakkolwiek widzimy, że u niektórych ciał (n.p. bizmut, antymon, gal) jest odwrotnie.

Nazwa:	R ciekły / R stały:
Antymon .....	0·71
Bizmut .....	0·46
Cyna .....	2·2
Cynk .....	2·-
Cer .....	1·7
Gal .....	0·47
Kadm .....	1·8
Ołów .....	1·9
Potas .....	1·44
<u>Rtęć</u> .....	4·-
Rubid .....	1·58
Sód .....	1·35
Tellur .....	2·1

Także współczynnik cieplny ( $\alpha$ ) ulega zmianie ze zmianą stanu skupienia, a mianowicie u metali ciekłych zmniejsza się do (około) 1/5 wartości wykazanej w stanie stałym.



### Opory.

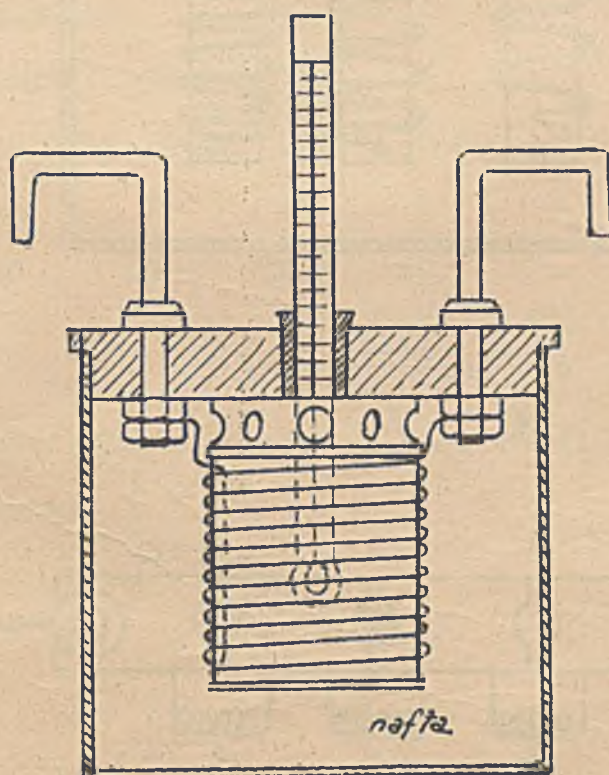
Oporem nazywamy ogólnie element obarczony opornością omową.

Odpowiednio do zastosowania, formy używanych w technice oporów są różnorodne. Wyliczymy tu najważniejsze rodzaje:

1. Normalje oporowe (wzorce). Są to opory o ściśle określonej oporności i służą do pomiarów.

W z o r z e c r t ę c i o w y ma oporność równą  $1\Omega$ . Jest to rurka szklana wypełniona rtęcią i zaopatrzona w przewody dla doprowadzenia prądu i dla pomiaru różnicy potencjałów. Całość musi być utrzymana w stałej temperaturze  $0^{\circ}\text{C}$ , co uzyskuje się przez odpowiednie otoczenie pudełka zawierającego rurkę, topniejącym lodem. Wzorce takie używane są prawie wyłącznie w centralnych izbach państwowych miar i wag.

W z o r c e m a n g a n i n o w e , ogólnie używane w laboratorjach, sporządzone są z drutu manganinowego (ze względu na bardzo małe  $\alpha$ ) i mają różne oporności (od  $0,0001$  do  $100000\Omega$ ). Konstrukcję takich wzorców ilustrację rys.40.

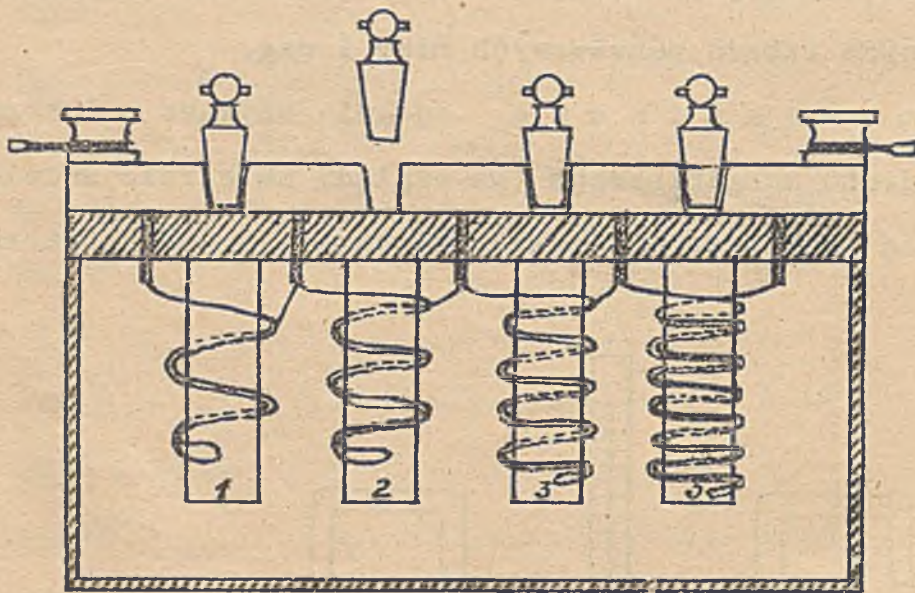


Rys. 40.

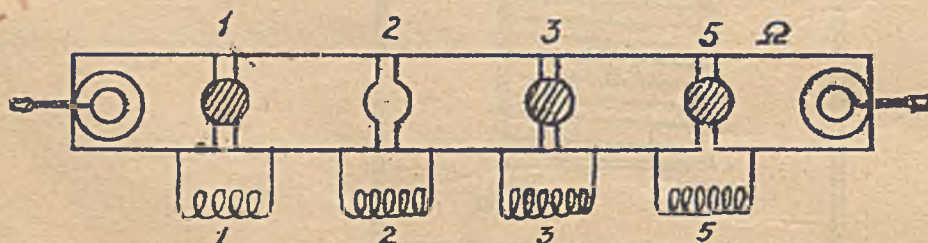


Drut manganinowy izolowany nawinięty jest na cylinder z blachy miedzianej, a końce tego drutu przymocowane są do dwóch grubych haków miedzianych. Prąd doprowadza się przez owe haki zanurzone w miseczkach napełnionych rtęcią. Cylinder z drutem oporowym, otoczony drugim cylindrem (celem ochrony przed uszkodzeniem) zanurza się w kąpeli naftowej, utrzymywanej w stałej temperaturze, którą wskazuje umieszczony w środku termometr. - Wzorce manganinowe używane są głównie do cechowania opornic pomiarowych.

2. Opornice pomiarowe (zatyczkowe). Są to zespoły ściśle określonych oporów, sporządzonych z drutu manganinowego izolowanego, nawiniętego na rolki i umieszczonych w pudełkach drewnianych (rys.41.) Końcówki każdego



Rys.41.



Rys.42.



z oporów doprowadzone są do pary klocków mosiężnych, odizolowanych od siebie i umieszczonych na wierzchniej części pudła. Ułożenie klocków jest takie, że umożliwia szeregowo łączenie oporów (rys.42.)

Z pomocą mosiężnych zatyczek można poszczególne opory spinać na krótko. (Na rys.42. uwidocznione jest spięcie oporów 1,3 i  $5\Omega$ , a załączenie oporu  $2\Omega$ ).

Celem wyeliminowania indukcyjności cewek drutu oporowego, stosuje się uzwojenie b i f i l a r n e (dwunitkowe). Jednakże taki sposób uzwojenia zwiększa pojemność. Przy dłuższych drutach stosuje się więc uzwojenie jednonitkowe, z wielokrotną zmianą kierunku nawijania. (System Chaperon'a).

Tak wykonane opory (małe uzwojone bifilarnie, duże uzwojone systemem Chaperona) uważamy praktycznie za wolne od indukcyjności i pojemności.

Opornice pomiarowe służą do pomiarów laboratoryjnych (głównie w zastosowaniu do mostku Wheatstone'a, patrz dalej „Pomiary zasadnicze”).

Skład oporów jednej skrzynki jest taki, że umożliwia nastawienie na wszystkie wartości w zakresie od minimum do maximum, z ograniczeniem miejsc dziesiętnych.

N.p. Skrzynka o oporach:

0.1	0.2	0.2	0.5	=	1 $\Omega$
1	1	2	5	=	9 $\Omega$
10	10	20	50	=	90 $\Omega$
					<hr/>
			Suma	=	100 $\Omega$

umożliwia nastawienie na opory od 1 do 100  $\Omega$  z dokładnością na jedno miejsce dziesiętne



3. Oporniki techniczne. Służą do dławienia prądu w obwodzie i sporządzone są zwykle z nikieliny, reotanu lub kruppinu w postaci drutu lub taśm umocowanych na rolkach porcelanowych. Rys.43. przedstawia opornik używany



Rys.43.

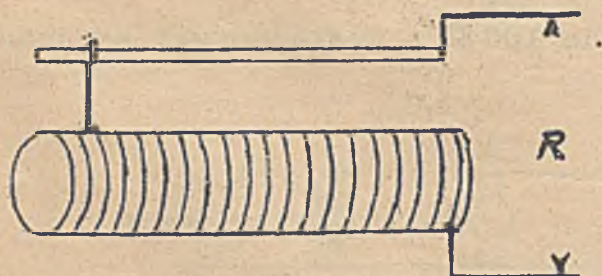


Rys.44.

w obwodach lamp żukowych (goły drut oporowy nawinięty na konstrukcji żelaznej opatrzonej porcelanowymi wkładkami).

Rys.44. ilustruje opornik, sporządzony z cylindra porcelanowego żłobkowanego, nawiniętego drutem oporowym. Oporniki tego rodzaju posiadają praktycznie stałą oporność a wielkość ich zależy od wielkości  $R$  i natężenia prądu  $J$ , który mają przewodzić. (Oporniki dla dużych prądów muszą być sporządzone z grubych drutów lub taśm, inaczej grzeją się nadmiernie i w końcu mogą ulec przepaleniu).

4. Opornice techniczne są zbudowane w ten sposób, że umożliwiają

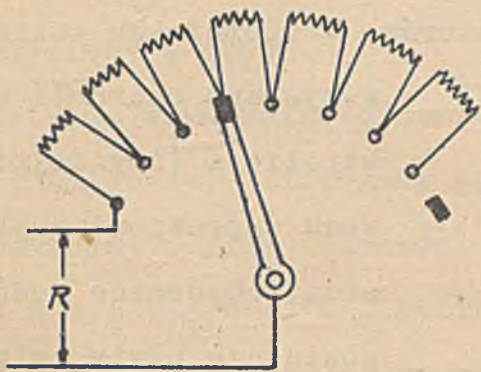


Rys.45.

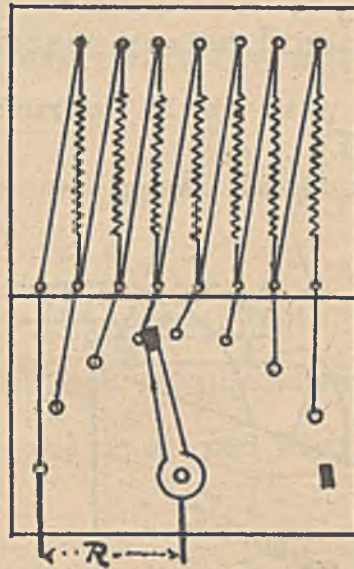
regulację oporności, bądź to z pomocą przesuwalnego styku, ślizgającego się po drutach oporowych (opornica Ruhstrata, rys.45.), bądź też przy zastosowaniu



korby z kontaktem ślizgającym się po guzikach połączonych z oporami (opornice regulacyjne, rozruszniki i t.p., rys.46.)



Rys.46.

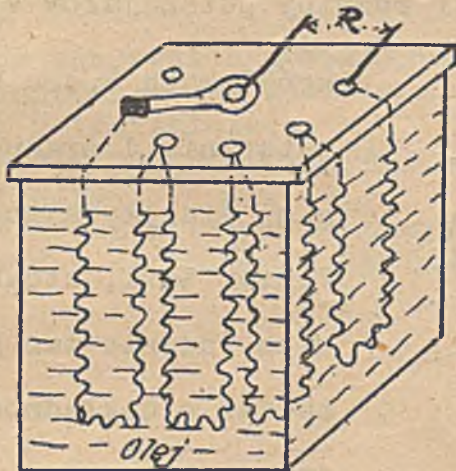


Rys.47.

Opornic Ruhstrata używa się prawie wyłącznie w laboratorjach. Opornice korbowe używane są ogólnie w instalacjach elektrycznych (siły i światła), dochodząc przy dużych opornościach i dużych prądach do bardzo wielkich rozmiarów. Przy większych opornicach obać musimy o należyte c h ł o = d z e n i e . Ze względu na chłodzenie rozróżniamy dwa rodzaje opornic

- a) z chłodzeniem powietrznym i
- b) z chłodzeniem olejowym.

Opornice z chłodzeniem powietrznym uwidacznia rys.47. Odprowadzanie ciepła z drutów oporowych uskutecznia tu cyrkulacja powietrza otaczają= cego. W opornicach olejowych odprowadzenie ciepła uskutecznia olej (mi=



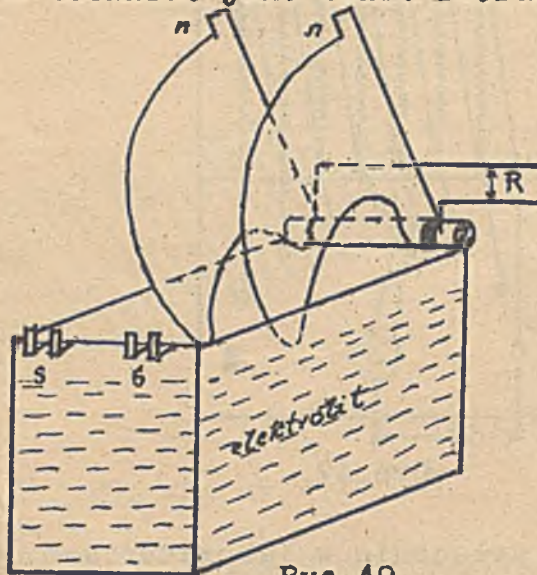
Rys.48.

neralny), w którym spirale oporowe są zanurzone (rys.48). Należy pamiętać o tem, że opornice olejowe znoszą tylko krótkotrwałe obciążenia prądem. (Aż do osiągnięcia przez olej temperatury wrzenia).



Opornice chłodzone powietrzem, a odpowiednio zdymensjonowane co do grubości drutów oporowych, mogą pozostawać stale pod prądem.

W końcu wymienić należy jeszcze opornice wodne, używane w technice jako tanie rozruszniki do motorów. W opornicach takich



Rys. 49

wyzyskano oporność elektrolitów (zwyczajnie woda zaprawiona zwykłą sodą). Opornice wodne posiadają płyty żelazne, odizolowane od siebie, i umocowane obrotowo na osi (rys.49.). W miarę zagłębiania się owych

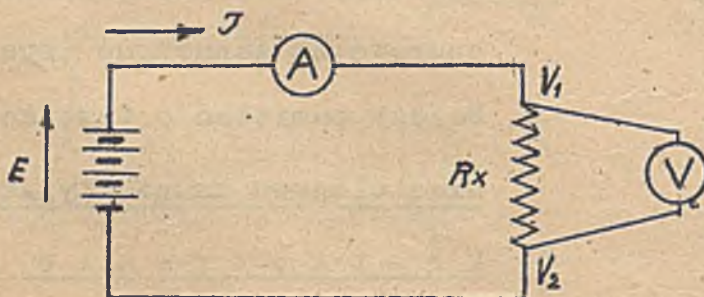
płyt w elektrolicie, opór  $R$  maleje. Po całkowitem zanurzeniu, obie płyty zostają zwarte na krótko przy pomocy noży ( $n\ n$ ) i styków ( $s\ s$ ), wskutek czego staje się  $R \approx 0$ .

### Pomiar oporności.

Korzystając z definicji oporności

$$R = \frac{V_1 - V_2}{J}$$

możemy zmierzyć  $R$ , uskuteczniając pomiar różnicy potencjałów  $V_1 - V_2$  na



Rys. 50.

końcówkach oporu  $R$  i pomiar natężenia  $J$  prądu stałego przepływającego ten opór. Pomiar taki, stosowany w technice jedynie tam gdzie nie chodzi o dokładność, ilustruje rys.50.



Jako źródła prądu stałego używa się zazwyczaj baterji akumulatorów (E). Do pomiaru różnicy potencjałów  $V_1 - V_2$  służy woltomierz V, załączony na końcówki mierzonego oporu ( $R_x$ ), a do pomiaru natężenia prądu J amperomierz wpięty w obwód.

Dzieląc wskazanie woltomierza (w voltach) przez wskazanie amperomierza (w amperach), otrzymamy wartość  $R_x$  w omach.

Dokładny pomiar oporności uskutecznia się przy pomocy mostku Wheatstone'a, którego zasada polega na porównaniu znanego oporu (normalje oporowe lub opornice pomiarowe) z oporem mierzonym (patrz dalej „Pomiary zasadnicze”).

Istnieją także przyrządy pomiarowe, zwane omomierzami, za pomocą których pomiar R uskutecznia się przez proste załączenie oporu (R) na końcówki, gdy przyrząd pomiarowy połączony jest ze źródłem prądu.



Rys. 51.

Sposób załączenia omomierza (z mierzonym oporem  $R_x$  i źródłem prądu E) okazuje rys. 51. Guzik G służy do poprzedniego nastawienia wskazówki na zero.

Uwaga: Ze wszystkich powyższych rozważań wynika, że pojęcie oporności odnieść można zasadniczo jedynie do obwodów prądu stałego (definicja).

Także pomiar oporności należy w zasadzie uskutecznić prądem stałym.

W dalszym ciągu zbadamy, w jakich warunkach będzie można mówić o oporności w obwodach prądów zmiennych.



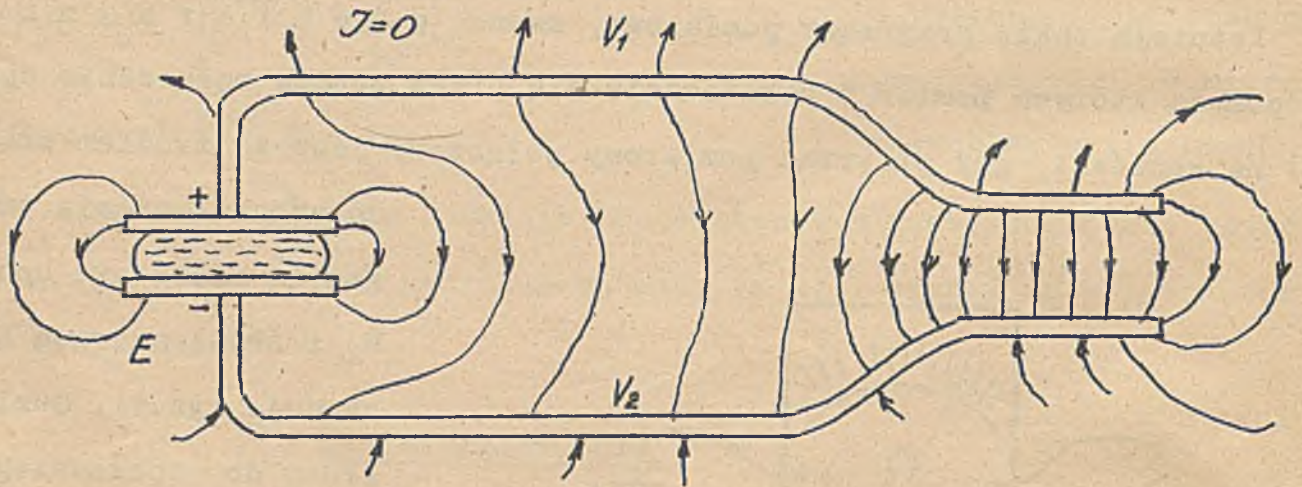
## 6. Napięcie (U).

Doświadczalnie stwierdzamy, że w przestrzeni okalającej obwód zawierający SEM-czną, istnieje pole elektryczne.

W obwodach prądu stałego ma ono analogiczne cechy jak pole wytworzone przez nieruchome naboje elektryczne.

Rozpatrzmy dwa przypadki.

Charakterystykę (linjami sił) pola elektrycznego obwodu o t w a r = t e g o t.j. takiego, który zawiera s t a ł ą SEM-czną (E), lecz w którym nie płynie prąd, przedstawia rys.52. Siedliskiem SEM-cznej jest



Rys.52.

tu ogniwo galwaniczne, złożone z płytki miedzianej (+) i cynkowej (-), przedzielonych bibułą, napojoną elektrolitem.

Pomiar czułym elektrometrem wykaże, że płytki miedziana i połączony z nią przewód, mają jednakowy potencjał ( $V_1$ ), zaś płytki cynkowa i połączony z nią przewód wykażą jednakowy, lecz niższy od poprzedniego, potencjał ( $V_2$ ). Natężenie pola elektrycznego ( $K$ ) będzie w różnych miejscach przestrzeni (mieszczącej obwód) różne i zależy od ukształtowania przewodów. Tam gdzie przewody leżą bliżej siebie, gęstość linii sił będzie

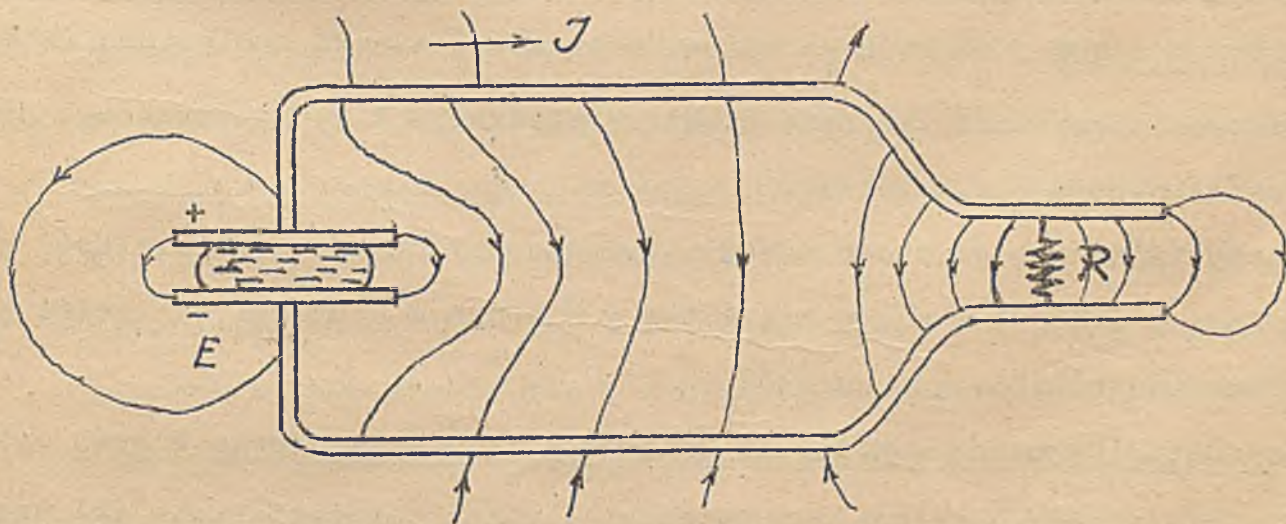


większa, konstatujemy tam bowiem większą wartość  $K$ . (Pomiar sondą elektr.).

Nie obserwując ruchów elektryczności w żadnej części obwodu (otwartego), musimy przyjąć, że wewnątrz przewodników (obwód ten składających) nie ma pola i że linje sił (a z nimi i linje indukcji elektr.) pola zewnętrznego trafiają wszystkie przewodniki p r o s t o p a d l e do powierzchni.

Przy stałej SEM-cznej  $E$  źródła, połączonego z przewodami, mamy tu więc najwidoczniej pole elektrostatyczne ze wszystkimi cechami poznanymi poprzednio w Elektrostatyce. Istotnie obwód o t w a r t y (bez prądu) na rys.52. przedstawia pewnego rodzaju k o n d e n s a t o r , którego okładki stanowią przewody, poddane różnicy potencjałów, równej SEM-cznej  $E$  ogniwa do nich przyłączonego. To wyjaśnia przyczynę powstania pola elektr. w okół przewodów. Oto ze źródła spłynął dodatni nabój na przewód połączony z dodatnią końcówką, a ujemny na przewód połączony z ujemną końcówką źródła i owe to naboje (rozłożone powierzchniowo) utrzymują w przestrzeni pole elektrostatyczne.

Połączmy końce przewodów oporem  $R$  (rys.53.). Jakkolwiek i teraz skonstatujemy w okół obwodu pole elektryczne, podobne do poprzedniego, to



Rys.53.



jednakże zauważymy pewne zmiany. Gęstość linii elektr. będzie teraz, w tych samych miejscach, inna niż poprzednio.

Linje elektr. trafiają przewodniki u k o ś n i e do powierzchni.

Wewnątrz przewodników należy przypuścić istnienie pola, bo po pierwsze płynie tam prąd a po drugie między poszczególnymi punktami zarówno górnego jak i dolnego przewodu stwierdzamy pewne różnice potencjałów, zależne od wielkości oporu  $R$ . Gdy  $R = \infty$ , niema żadnych różnic potencjałów (między punktami na tym samym przewodzie), gdy opór  $R$  maleje, różnice te rosną.

Przyjmując, że i teraz pole elektryczne z e w n ą t r z przewodników pochodzi od naboji elektrycznych, rozmieszczonych na ich powierzchni, musimy przypuścić, że po załączeniu oporu  $R$  wystąpiły zmiany w rozmieszczeniu tych naboji. Sprawą tą jednak, jakoteż badaniem pola wewnątrz przewodów wiodących prąd i jego wpływem na pole zewnętrzne, zajmiemy się oddzielnie. Tu wypada tylko stwierdzić, że podczas krążenia prądu s t a ł e g o, utrzymują się także wszystkie różnice potencjałów w s t a ł y c h wartościach, że więc także podczas zasilania obwodu prądem z ogniwa o s t a = ł e j SEM-cznej, pole elektryczne obwodu nie ztraca swego charakteru statycznego.

Zarówno więc obwody o t w a r t e (bez prądu), jak i obwody z a m = k n i ę t e, w których krążą prądy s t a ł e, otacza pole elektryczne s t a t y c z n e, do którego możemy zastosować wyniki znalezione (w Elektrostatyce) przy analizie pola elektrostatycznego t.j. wytworzonego przez nieruchome naboje elektryczne.

Korzystając z tego stanu rzeczy, wprowadzamy do rozważań wielkość nazywaną n a p i ę c i e m e l e k t r y c z n e m (Symbol  $U$ ), celem zastąpienia nią różnicy potencjałów.

Napięcie ( $U$ ) można odnieść do każdego pola elektrycznego w myśl ogólnej definicji, że napięcie jest to całka linjowa natężenia pola ( $K$ ) wzdłuż



określonego odcinka toru:

$$U_{ab} = \int_a^b K \cdot dl \cdot \cos \alpha \dots \dots \dots 36$$

W polu elektrostatycznym jednakże napięcie jest równe różnicy potencjałów początku i końca tego toru, do którego odnosi się wypisana powyżej całka:

$$U_{ab} = V_a - V_b \dots \dots \dots 37$$

Wynika stąd, że w obwodach prądu stałego, różnica potencjałów i napięcie (U), to jedno, oraz, że w obwodach takich różnica potencjałów dwu dowolnych punktów na przewodnikach może być zastąpiona napięciem toru poprowadzonego w polu między temi punktami.

Wprowadzenie napięcia w miejsce różnicy potencjałów daje nader ważne udogodnienie, z następujących powodów:

- 1) Potencjał w obwodach elektrycznych jest czemś przypadkowym, zależnym od wpływów postronnych, a przytem nie umiemy go mierzyć. (Mierzyć można tylko potencjał względny t.j. względem ziemi).
- 2) Natężenie prądu (J) w obwodzie nie zależy ani od bezwzględnych ani od względnych potencjałów, tylko od napięcia U. (Patrz dalej „Prawo Ohma”).
- 3) Napięciem można operować we wszystkich obwodach, gdyż jest ono stosowne wszędzie tam, gdzie istnieje pole elektryczne, bez względu na rodzaj tego pola. Różnica potencjałów natomiast można operować jedynie w obwodach prądu stałego. Ponieważ zaś zależy nam na tem, aby z praw, ustalonych dla obwodów prądu stałego, można było akrecyzować także w obwodach prądu zmiennego, przeto należy - ile możliwości - posilkować się napięciem, a unikać wprowadzania różnicy potencjałów.

W dalszym ciągu przekonamy się, że w obwodach, gdzie prądy pochodzą od działań indukcyjnych, pojęcie potencjału, a z nim i różnica potencjałów, nie da się utrzymać.



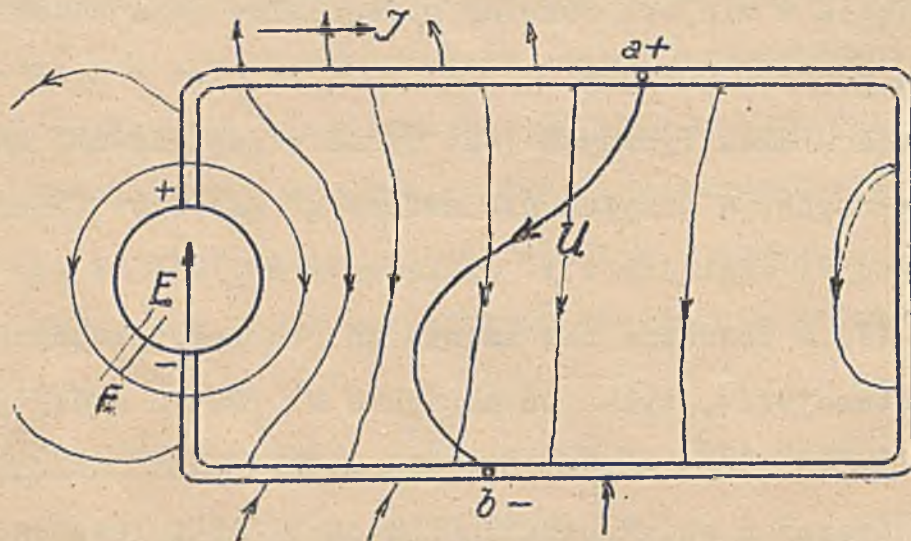
Operując napięciem musimy mieć ogólnie na względzie, że jednoznaczne określenie napięcia

$$U_{ab} = \int_a^b K.d\ell.\cos\alpha$$

wymaga bądź to wskazania kierunku całkowania (tu  $\vec{ab}$ ), bądź też wskazania, który z dwu punktów toru ma być uważany za początek (tu „a”).

Postulatom tym można uczynić zadość, albo z pomocą indeksów ( $U_{ab}$  oznacza, że  $\vec{ab}$  jest kierunkiem całkowania, a „a” początkiem toru), lub też wykreślić, w d w o j a k i sposób.

P i e r w s z y sposób polega na wykreśleniu toru U i wskazaniu strzałką kierunku strzałkowania, jak to przedstawia rys.54. (Indeksy przy U można tu pominąć).



Rys.54.

Napięcie U dla toru „ab”, uwidocznionego na rys.54., odpowiada relacji

$$U = \int_a^b K.d\ell.\cos\alpha,$$

przyczem punkt „a” uważany ma być za początek toru, odpowiednio do wskazanego strzałką kierunku całkowania.

Gdy w przedstawionym na rys.54. obwodzie płynie prąd w kierunku strzałki J, całka powyższa daje wartość dodatnią, co oznacza, że przeniesieniu dodatniego naboju próbnego (+q) z punktu „a” do „b” towarzyszy wydzielanie energii (praca dodatnia).



W przypadku prądu stałego i w związku z rys.54. jest

$$U = \int_a^b K \cdot dl \cdot \cos\alpha = V_a - V_b$$

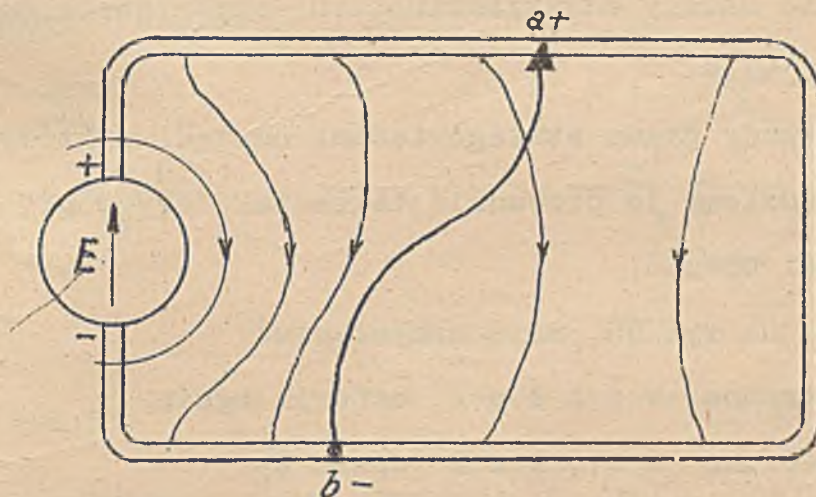
a ponieważ U jest (jak wyżej) dodatnie, przeto musi być

$$V_a > V_b$$

Wynik ten (potencjał  $V_a$  wyższy od  $V_b$ ) możemy uwidocznić w obwodzie, kładąc (na rys.54.) przy punkcie „a” znak „+” a przy punkcie „b” znak „-”

Z oznaczenia takiego korzystaliśmy już wielokrotnie, odnośnie do źródeł prądu.

D r u g i sposób (jednoznacznego określenia napięcia wykreślnie) polega na wykreśleniu toru i wskazaniu początku tego toru, jak to przedstawia rys.55. (Także i tu indeksy przy U można pominąć).



Rys.55.

P o c z ą t e k toru najdogodniej oznaczyć małym trójkącikiem, który nazywać będziemy „grotem”. Odpowiednio do oznaczenia na rys.55., będzie i tu znów

$$U = \int_a^b K \cdot dl \cdot \cos\alpha.$$

W obwodach prądu stałego całka powyższa równa jest różnicy potencjałów

$$U = V_a - V_b$$



Jak widać o d j e m n ą, w tym wzorze stanowi potencjał początku toru t.j. punktu zamarkowanego trójkącikiem (wskazanego grotem).

Jeżeli  $V_a > V_b$ , czyli, jeżeli  $U$  dodatnie, możemy opatrzyć początek toru (a) znakiem +, jeżeli zaś  $V_a < V_b$ , czyli gdy  $U$  jest ujemne, wypada oznaczyć początek toru (a) znakiem -. Zatem:

Początek toru ma ten sam znak co napięcie, obliczone dla tego toru, (to ułatwia znakowanie i interpretację). Znak „+” oznacza potencjał wyższy, znak „-” potencjał niższy odnośnych punktów końcowych toru  $U$ .

Oznaczenia p i e r w s z e g o (rys.54.) używać będziemy tam, gdzie napięcie ( $U$ ) zależy od kształtu toru, czyli tam, gdzie  $U$  nie może być wyrażone różnicą potencjałów.

Oznaczenie d r u g i e (rys.55.) będzie stosowane wszędzie tam, gdzie wartość napięcia nie zależy od kształtu toru, czyli gdzie może być wyrażone różnicą potencjałów.

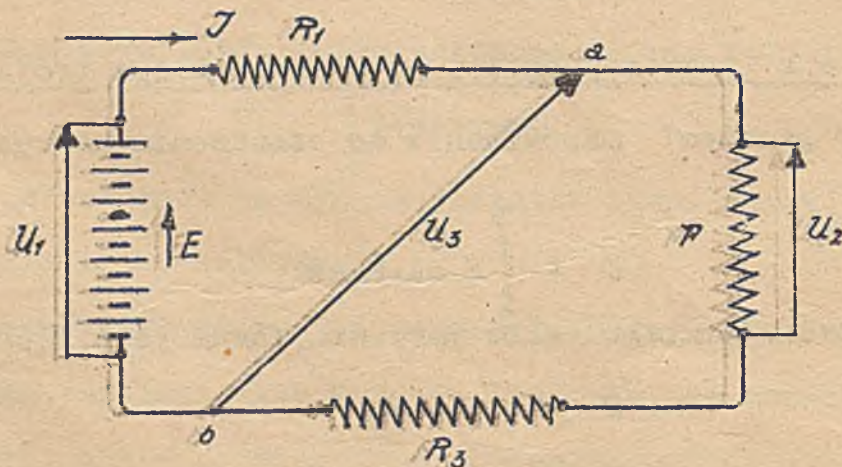
Uzupełniając układy prądu stałego torami napięć, o których mówimy lub które obliczamy, będziemy je prowadzić także tak, aby mogły być odniesione do pewnych części obwodu.

Oznaczenia n.p. na rys.56. mają uzmysławiać:

$U_1$  napięcie mierzone w z d ł u ż baterji ogniw,

$U_2$  napięcie mierzone w z d ł u ż oporu  $R_2$ ,

$U_3$  napięcie mierzone od punktu „a” do „b” przez powietrze.



Rys. 56.

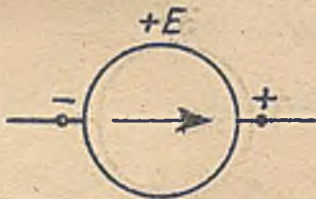


Przedstawiony powyżej sposób oznaczania  $U$  (rys. 55. i 56.) może być pojmowany jako ilustracja kierunku napięcia. Analogicznie do strzałek SEM ( $E$ ) i strzałek prądu ( $J$ ), możemy oznaczenie toru (linja) i początku (grot) uważać za strzałkę napięcia.

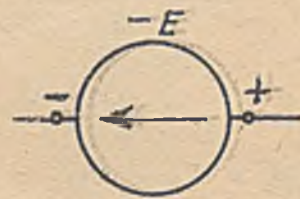
Uważając cechę początku toru (trójkąt  $\blacktriangle$ ) za grot strzałki napięcia powiemy, że wskazuje on (w obwodach prądu stałego) dla dodatnich ujemnych wartości  $U$  punkt o wyższym (+) potencjale.  
niższym (-)

Upodobniliśmy w ten sposób oznaczenie napięcia do oznaczenia SEM-cznej ( $E$ ), co umożliwi łatwiejszą orientację:

Strzałka SEM-cznej wskazuje dla dodatnich ujemnych wartości  $E$  końcówkę źródła prądu (w stanie jałowym) o wyższym (+) potencjale (kierunkowość SEM-cznej). (Rys. 57. i 58.).  
niższym (-)



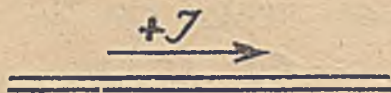
Rys. 57.



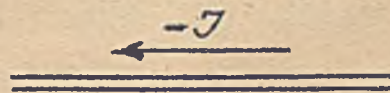
Rys. 58.

Uzupełniając powyższe także odnośnie do prądu, powiemy:

Strzałka prądu wskazuje dla dodatnich ujemnych wartości  $J$  kierunek ruchu dodatniej ujemnej elektryczności (kierunkowość prądu). Rys. 59. i 60).



Rys. 59.



Rys. 60.

Ostatnia interpretacja wspiera się na doświadczeniu Rowlanda.

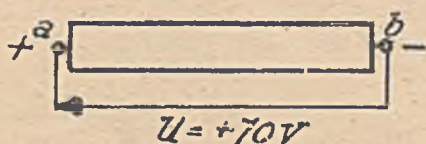


W obwodach prądów stałych będziemy mieli do czynienia jedynie z dodatnimi wartościami  $E$  i  $J$ . W obwodach prądów zmiennych mogą wypaść chwilowe wartości  $E$  ( $e$ ) i  $J$  ( $i$ ) zarówno dodatnie jak i ujemne.

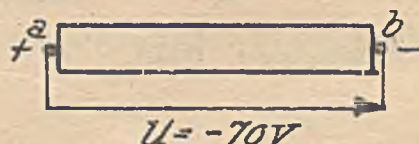
Napięcie ( $U$ ) może wypaść w obu rodzajach obwodów dodatnie lub ujemne, zależnie od obioru początku toru. Należy przeto przyzwyczajając się, już przy rozważaniu obwodów prądu stałego, do operowania zarówno dodatnimi jak i ujemnymi wartościami  $E, J, U$ , oraz wdrożyć się w pojęcie kierunku = k o w o ś c i , odnośnie do tych wielkości.

Przykład: Niech potencjał punktu „a” (rys.61. i 62.) wynosi

$V_a = + 100$  woltów, a potencjał punktu „b”  $V_b = + 30$  woltów. Napięcie, równe różnicy potencjałów tych dwu punktów, możemy przedstawić albo w sposób podany na rys.61., przyczem



Rys.61.



Rys.62.

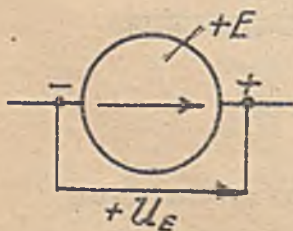
$$U_{\overrightarrow{ab}} = V_a - V_b = (+ 100) - (+ 30) = + 70 \text{ V,}$$

lub też tak, jak to ilustruje rys.62., przyczem

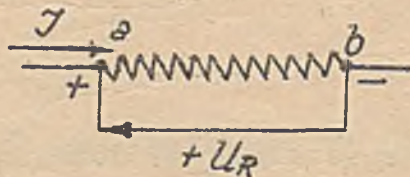
$$U_{\overrightarrow{ba}} = V_b - V_a = (+ 30) - (+ 100) = - 70 \text{ V.}$$

Indeksy przy  $U$  na rysunkach opuszczamy, gdyż oznaczenie kierunku = k i e r u n k o w o ś c i n a p i ę c i a z a ł a t w i a j ą s t r z a ł k i n a p i ę c i a. Jak widać, znak  $U$  jest identyczny ze znakiem końcówki wskazanej grotem.

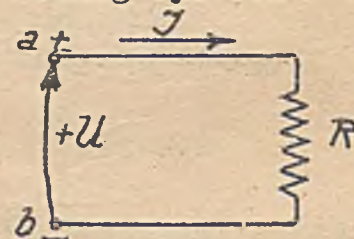
Napięcie źródła oznaczmy, w myśl powyższego, według rys.63.



Rys.63.



Rys.64.



Rys.65.

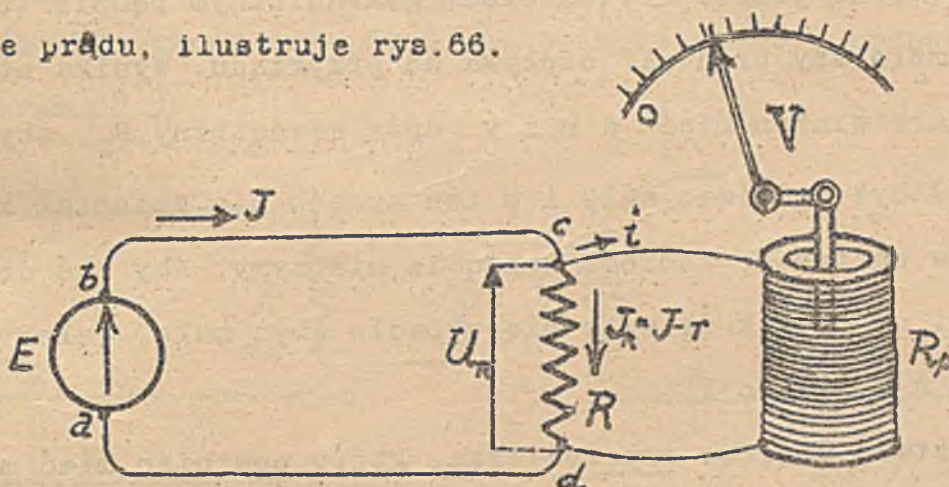


Oznaczenie napięcia na oporze  $R$  okazuje rys.64. Ma on ilustrować, że opór  $R$  załączony jest na końcówki  $a$  b o napięciu  $U$ , przyczem „ $a$ ” ma potencjał wyższy (+) od „ $b$ ” (-). To samo ilustruje rys.65. <sup>1)</sup>

Napięcie wyrażamy technicznie w woltach i mierzymy woltomierzami.

Do pomiaru napięcia w obwodach prądu stałego można użyć w zasadzie tych samych przyrządów, które poznaliśmy w Elektrostatyce (elektrometr listkowy, kwadrantowy, woltomierz elektrostatyczny). Techniczny pomiar napięcia uskuteczniamy za pomocą woltomierzy galwanicznych t.j. działających wskutek przepływu prądu.

Najprostszy taki woltomierz galwaniczny, wyzyskujący magnetyczne działanie prądu, ilustruje rys.66.



Rys.66.

Przyrząd ten jest w konstrukcji swej podobny do amperomierza elektromagnetycznego, przedstawionego poprzednio na rys.18. Składa się więc z cewki, przez którą przepływa prąd „ $i$ ”, stanowiący drobną część całkowitego prądu  $J$ , płynącego w obwodzie, i pręcika żelaznego, wciąganego do wnętrza cewki, pod działaniem pola magnetycznego cewki. Ruch ten pręcika powoduje wychylenie wskazówki, która na empirycznie wyznaczonej skali

1) Szersze traktowanie strzałkowania podane jest w P.E.1925, Fryze „Strzałki kierunkowe w obwodach elektrycznych”, Nr.12,13,14.



wskazuje napięcie (U), ujawniające się między końcówkami („c” „d”), do których przyłączone zostały końcówki cewki (rys.66.)

Natężenie prądu „i”, płynącego przez przyrząd, jest proporcjonalne (przy stałym oporze wewnętrznym przyrządu  $R_p$ ) do różnicy potencjałów ( $V_c - V_d$ ) na jego końcówkach.

$$i = \frac{V_c - V_d}{R_p} = \frac{U_A}{R_p}$$

Prąd w oporze R (na końcówkach którego mierzymy U) ulegnie po załączeniu woltomierza zmniejszeniu z wartości J do wartości  $J_R = J - i$ . Jasnym jest przeto, że pomiar woltomierzem galwanicznym będzie tem dokładniejszy, im mniejszy prąd „i” odpływa do przyrządu. Wynika stąd, że dobry woltomierz winien mieć duży opór wewnętrzny  $R_p$ , aby prąd w przyrządzie (i) był możliwie mały i w ten sposób nie zmieniał zbyt prądu  $J_R$  płynącego w oporze R, którego napięcie mierzymy. Aby zaś działanie magnetyczne cewki na pręcik żelazny nie wypadło zbyt małe, należy cewce przyrządu dać dużo zwojów.

W przeciwieństwie więc do amperomierza, który powinien mieć możliwie mały opór wewnętrzny i ma niewiele zwojów, bo płynie przez niego cały prąd obwodu, woltomierz (elektromagnetyczny) winien mieć duży opór, a cewka jego dużo zwojów.

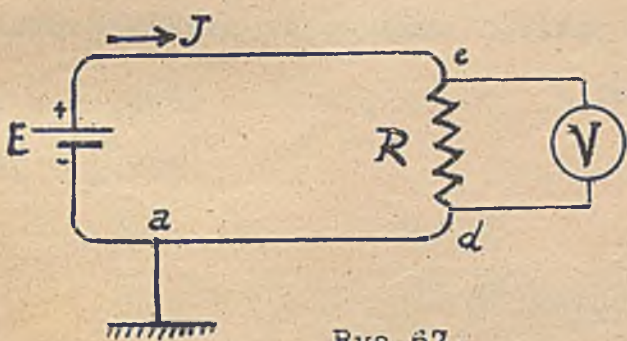
W dalszym ciągu poznamy jeszcze inne woltomierze (cieplikowe, Deprèz, elektrodynamiczne, indukcyjne i t.d.), tu należy jeszcze nadmienić, że woltomierz elektromagnetyczny wskazuje tylko bezwzględną wartość napięcia mierzonego, nie orientując zupełnie, która z końcówek ma wyższy względnie niższy potencjał. Tam gdzie chodzi nietylko o ustalenie wartości napięcia, lecz także o wyznaczenie jego kierunkowości, trzeba użyć woltomierza specjalnego (Deprèz), lub też osobno ustalić biegunowość końcówek. (Patrz dalej „Pomiary zasadnicze”).



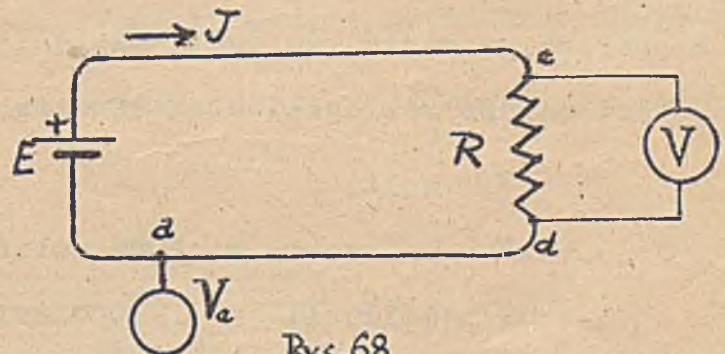
Elektrometry, woltomierze elektrostatyczne użyte do pomiaru napięcia stałego nie zmieniają prądu w obwodzie, jednakże mają ograniczone zastosowanie, bo elektrometr listkowy i woltomierz elektrostatyczny nadają się tylko do pomiaru wyższych napięć, a elektrometr kwadrantowy wymaga pomocniczej baterji. (Patrz dalej „Pomiary zasadnicze”).

Uwaga: W obwodach prądów stałych, układ przewodów łączących woltomierz z końcówkami, między którymi mierzymy napięcie, niema żadnego wpływu na pomiar.  
W obwodach prądów zmiennych układ przewodów mierniczych wpływa na pomiar napięcia.

W obwodzie prądu stałego, na pomiar napięcia mierzonego woltomierzem galwanicznym, nie mają wpływu działania postronne, jak n.p. uziemienie jednego punktu obwodu (rys.67.) lub połączenie go z przewodnikiem naelektryzowanym (rys.68.),



Rys. 67.



Rys. 68

Jakkolwiek potencjał (względny) punktu uziemionego jest równy zeru, a punkt połączony z przewodnikiem naelektryzowanym przybiera potencjał tego przewodnika, to jednakże napięcie mierzone między dowolnymi punktami obwodu n.p. „c” i „d” (rys.67. i 68.), jest w obu przypadkach jednakowe. Przedstawia to niewątpliwie duże ułatwienie w pomiarach, gdyż pozwala na abstrahowanie od wpływów postronnych tego rodzaju. Przykłady powyższe ilustrują korzyść operowania napięciem w miejsce różnicy potencjałów. (Pomiar napięcia uskuteczniamy wprost, nie bacząc na wartości potencjałów).



Dla zorientowania się w wielkości spotykanych napięć, podajemy kilka dat:

Najniższe napięcie normalne w sieciach technicznych wynosi 110V.

Łuk między węglami utrzymuje się przy napięciu około 30V.

Dzwonek zwyczajny wymaga do działania 2 ÷ 4V.

Dobre maszyny influencyjne (n.p. Wommelsdorfa) rozwijają napięcia dochodzące do kilkudziesięciu tysięcy V (około 100000V).

Trasy wysokiego napięcia buduje się dziś już dla napięć przekraczających 300000V (Ameryka).

Napięcia pojedynczych ogniw termicznych nie przekraczają tysięcznych części V.

Napięcia w antenach odbierających sygnały ze stacji radiotelegraficznych, bardzo odległych, nie przekraczają milionowych części wolta.

Z powyższego widać, że skala napięć, z jakimi mamy do czynienia w praktyce, jest bardzo rozległa. Stąd oznaczenie:

V	wolt,
kV	kilowolt = 1000 woltów,
mV	miliwolt = 1/1000 wolta, ( $10^{-3}$ ),
$\mu$ V	mikrowolt = 1/1000000 wolta, ( $10^{-6}$ ),

Stosownie do wielkości napięć rozróżniamy:

Urządzenia niskiego napięcia (do 250V między jakimkolwiek przewodem i ziemią) i

Urządzenia wysokiego napięcia (od 250V w górę).

Normalne napięcia robocze prądu stałego są:

110, 220, 440 i 500 V.

Normalne napięcia robocze prądu zmiennego są:

125, 220, 380 V, oraz

3, 6, 15, 24, 35, 60, 100 kV (wartość skuteczna).

Obecnie buduje się elektrownie dla napięć (skutecznych) dochodzących do 500 kV (Ameryka). W laboratorjach probierczych (fabryki porcelany elektrotechnicznej), napięcia przekraczają 1000 kV.

(Laborat. Howard - Uniwersytet - Cambridge 10 000 000 V)



## 7. Pole elektryczne obwodu prądu stałego.

### a) Pole wewnątrz przewodu.

Posiłkując się podanymi poprzednio wzorami:

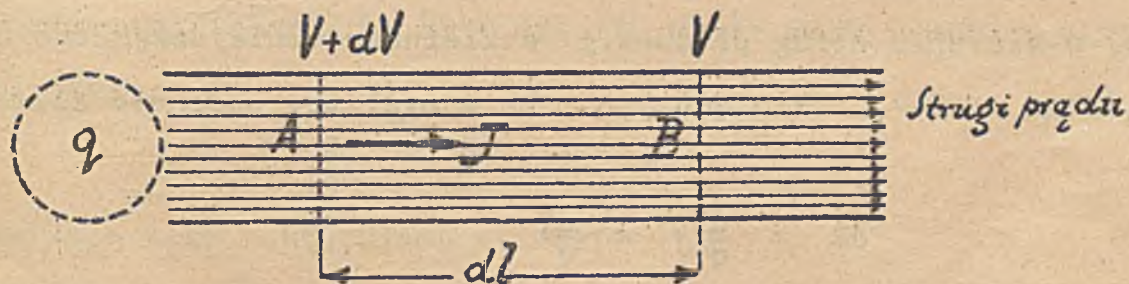
$$a) R = \frac{V_1 - V_2}{J} = \frac{U_{12}}{J} \quad (\text{definicja oporności}),$$

$$b) R = \frac{l}{q} \int \quad (\text{zależność oporności od wymiarów geometrycznych i rodzaju materiału}),$$

$$c) \frac{G_{\text{cm}^2}}{100} = \frac{J_{\text{amp}}}{\delta_{\text{cm}^2}} \quad (\text{gęstość prądu}),$$

możemy pokusić się przedewszystkiem o zbadanie wnętrza przewodnika, przez który płynie prąd stały.

Oznaczmy przez  $dl$  element długości przewodu cylindrycznego o jednakowym przekroju  $q(\text{m}^2) = s(\text{cm}^2) \cdot 100$ .  $J$ -niech będzie natężeniem płynącego w nim prądu *s t a ł e g o*, a  $\int$  opornością właściwą jednorodnego materiału (rys.69.)



Rys.69.

Doświadczenie poucza, że wewnątrz prostego, okrągłego przewodu, prąd  $J$  płynie *s t r u g a m i* równoległymi do osi przewodu i że gęstość tego prądu jest w każdym punkcie jednakowa.

Prąd płynie przez opór w kierunku spadku potencjału. Zewnątrz na powierzchni przewodu różnica potencjałów na końcach elementu  $dl$  jest  $dV$ . Zatem w miejscu dopływu prądu potencjał jest  $V + dV$ , a w miejscu odpływu  $V$ . Takie potencjały wykażą także wszystkie punkty przekroju poprzecznego,



poprowadzonego p r o s t o p a d l e do strug prądu w miejscach A i B odległych od siebie o  $dl$ , albowiem gęstość prądu i oporność właściwa są wszędzie jednakowe.

Powierzchnie poprowadzone w e w n ą t r z przewodnika (wiodącego prąd s t a ły) p r o s t o p a d l e do strug prądu są powierzchniami e k w i p o t e n c j a l n e m i .

Gdzie są powierzchnie ekwipotencjalne tam musi być także pole elektr. Wynika stąd, że wewnątrz przewodnika wiodącego prąd s t a ły istnieje pole elektryczne o linjach sił zgodnych z torami prądu tak co do przebiegu jak i co do kierunku. Albowiem linje sił w polu statycznym są zawsze prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnych, a strzałki ich wskazują kierunek spadku potencjału (Elektrostatyka).

Wobec powyższego możemy napisać

$$K = - \frac{dV}{dl} \dots\dots\dots (38)$$

gdzie K oznacza natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodnika pod prądem (stałym) w kierunku strug prądu t.j. w kierunku zmniejszającego się potencjału, (stąd znak -). Uwzględniając, że w myśl (b) oporność elementu  $dl$  jest

$$dR = \frac{dl}{q} \rho = \frac{dV}{J}$$

otrzymamy

$$\frac{dV}{dl} = \frac{J}{q} \rho$$

Jednakże w myśl (c) jest

$$\frac{J}{q} = \mathcal{C} \rho$$

Otrzymamy więc (z pominięciem znaku -)

$$K = \mathcal{C} \rho$$

Z uwagi na wymiary, wypadnie tu K w woltach na metr, gdy  $\mathcal{C}$  odpowiada ilości amperów na  $m^2$ , a  $\rho$  oznacza oporność właściwą na  $m$  i  $m/m^2$ .



Wstawiając więc  $\mathcal{G}$  w amperach na  $\text{cm}^2$ , a zamiast  $\rho$  oporność właściwą  $\rho' = \rho \cdot 10^{-4}$ , otrzymamy

$$K = \mathcal{G} \cdot \rho' \text{ woltów/cm} \dots\dots\dots (39)$$

lub 
$$K = \frac{\mathcal{G} \cdot \rho'}{300} \text{ JES} \dots\dots\dots (40)$$

Ogólnie

$$K = \rho' \frac{dJ}{ds} \text{ woltów/cm} \dots\dots\dots (41)$$

( $J$  w amperach,  $s$  w  $\text{cm}^2$ ,  $\rho'$  oporność właściwa w  $\Omega$  na  $\text{cm}$  i  $\text{cm}^2$ ).

Uogólniając powyższe wyniki powiemy:

W e w n ą t r z przewodnika pod prądem istnieje w każdym punkcie o gęstości prądu  $\mathcal{G}$  i oporności właściwej  $\rho'$  natężenie pola elektr.  $K$ , określone wzorem (39). Natężenie to ma kierunek strugi prądu, przepływającej przez ten punkt.

I odwrotnie:

Jeżeli w dowolnym punkcie w e w n ą t r z przewodnika natężenie pola elektr. ma wartość  $K$ , to przez ten punkt płynie prąd w kierunku  $K$  o gęstości

$$\mathcal{G} = \frac{dJ}{ds} = \frac{K}{\rho'} \text{ amp/cm}^2 \dots\dots\dots (42)$$

Wynikają stąd następujące wnioski:

- 1) Wewnątrz przewodników o  $\rho = 0$ , musi być  $K = 0$ , jakkolwiek  $\mathcal{G} \neq 0$ .  
Przypadek taki zachodzi w przybliżeniu przy oziębieniu przewodnika do temperatury blisko absolutnego zera. W  $T = 0$  i po wzbudzeniu (indukcyjnym) prądu stałego, będzie prąd w przewodniku (pierścieniowym) bez pola elektrycznego.
- 2) Gdy  $\rho \neq 0$ , a  $K = 0$ , musi być także  $\mathcal{G} = 0$ . Znaczy to, że w częściach przewodnika gdzie  $K = 0$ , niema prądu. Warunki te zachodzą w obwodzie bez prądu, a pozatem także w przewodach wiodących prądy s z y b k o z m i e n n e . Z powodu działań indukcyjnych natężenie pola  $K$  w środku przekroju i około niego może być równe zeru lub może mieć wartości



bardzo małe. Przez te części przekroju nie płynie wtedy żaden prąd, albo ma bardzo małe gęstości. Ku obwodowi przekroju natężenie  $K$  zwiększa się, tam też gęstości prądu są większe.

Ponieważ środek przewodu nie przewodzi prądu, możemy go bez szkody usuwać, czyli wykonać taki przewód w formie rury. Rurowe przewody stosowane są w urządzeniach przewodzących prądy szybkozmienne (Radjotechnika).

Rozważania powyższe odnoszą się ogólnie tylko do przewodów  $j e d n o = r o d n y c h$  ( $\sigma = const$ ).

Na stykach dwu różnych przewodów mogą powstać skoki potencjału czyli SEM. Tam też wzory powyższe tracą ważność.

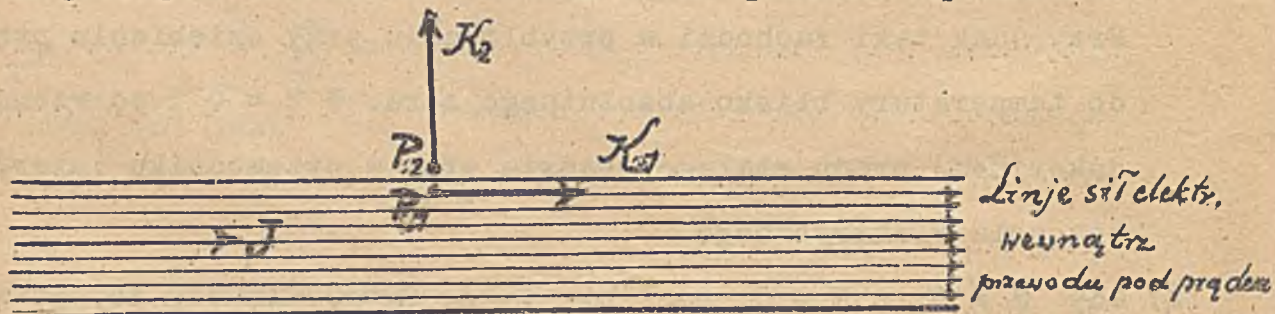
### b) Pole zewnątrz przewodów.

W warstwie granicznej przewodu pod prądem i otaczającego go dielektryku natężenie pola elektr.  $K$  ma wartość zależną nie tylko od przebiegu pola wewnątrz przewodu (tuż przy powierzchni), lecz także od rozmieszczenia naboji na powierzchni tego przewodu.

Obecność naboji na powierzchni przewodu uwarunkowana jest tem, że także zewnątrz przewodu istnieje pole elektryczne.

Zbadajmy pole tuż przy powierzchni przewodu wiodącego prąd stały.

(Rys. 70.) Tuż przy powierzchni w e w n ą t r z przewodu (punkt P )



Rys. 70.

natężenie pola  $K_1$  ma kierunek strugi prądu, przepływającej przez ten punkt i wartość

$$K_1 = G_i \cdot \rho' \text{ woltów/cm}$$



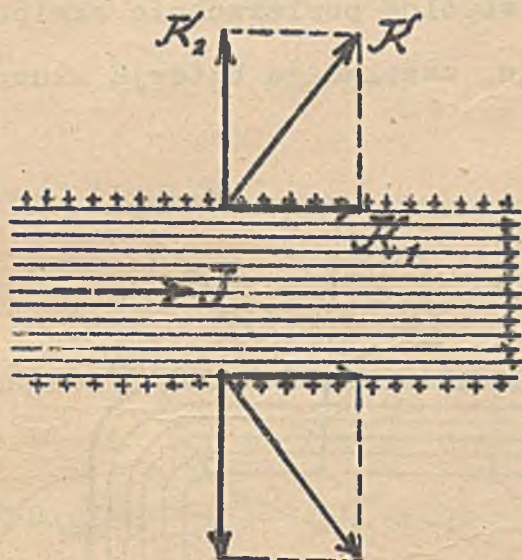
Nieskończenie blisko zewnątrz powierzchni (punkt  $P_2$ ) natężenie pola  $K_2$  jest prostopadłe do powierzchni i ma wartość

$$K_2 = 300.4\pi\sigma_a \text{ woltów/cm}$$

gdzie  $\sigma_a$  oznacza gęstość powierzchniową (w JES) naboju rozłożonego na przewodniku.

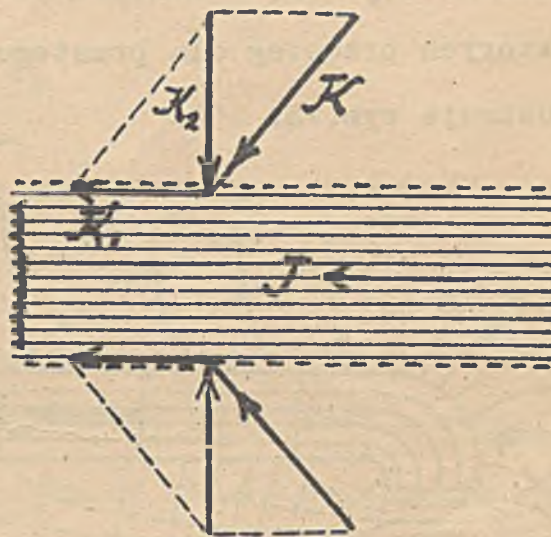
Zatem w punkcie P leżącym na powierzchni przewodnika ujawni się natężenie wypadkowe  $K$ , będące sumą geometryczną obu poprzednich (rys.71. i rys.72)

$$K = K_1 \uparrow K_2$$



Rys. 71.

(Przewód pokryty elektrycznością dodatnią).



Rys. 72.

(Przewód pokryty elektrycznością ujemną).

$K_1$  odpowiada natężeniu przy powierzchni w e w n ą t r z przewodnika (możemy go więc oznaczyć symbolem  $K_w$ ),

$K_2$  odpowiada natężeniu przy powierzchni z e w n ą t r z przewodnika (możemy go więc oznaczyć symbolem  $K_z$ ).

$K_w$  ma kierunek strug prądu (przy powierzchni)

$K_z$  jest nachylone pod kątem do powierzchni.

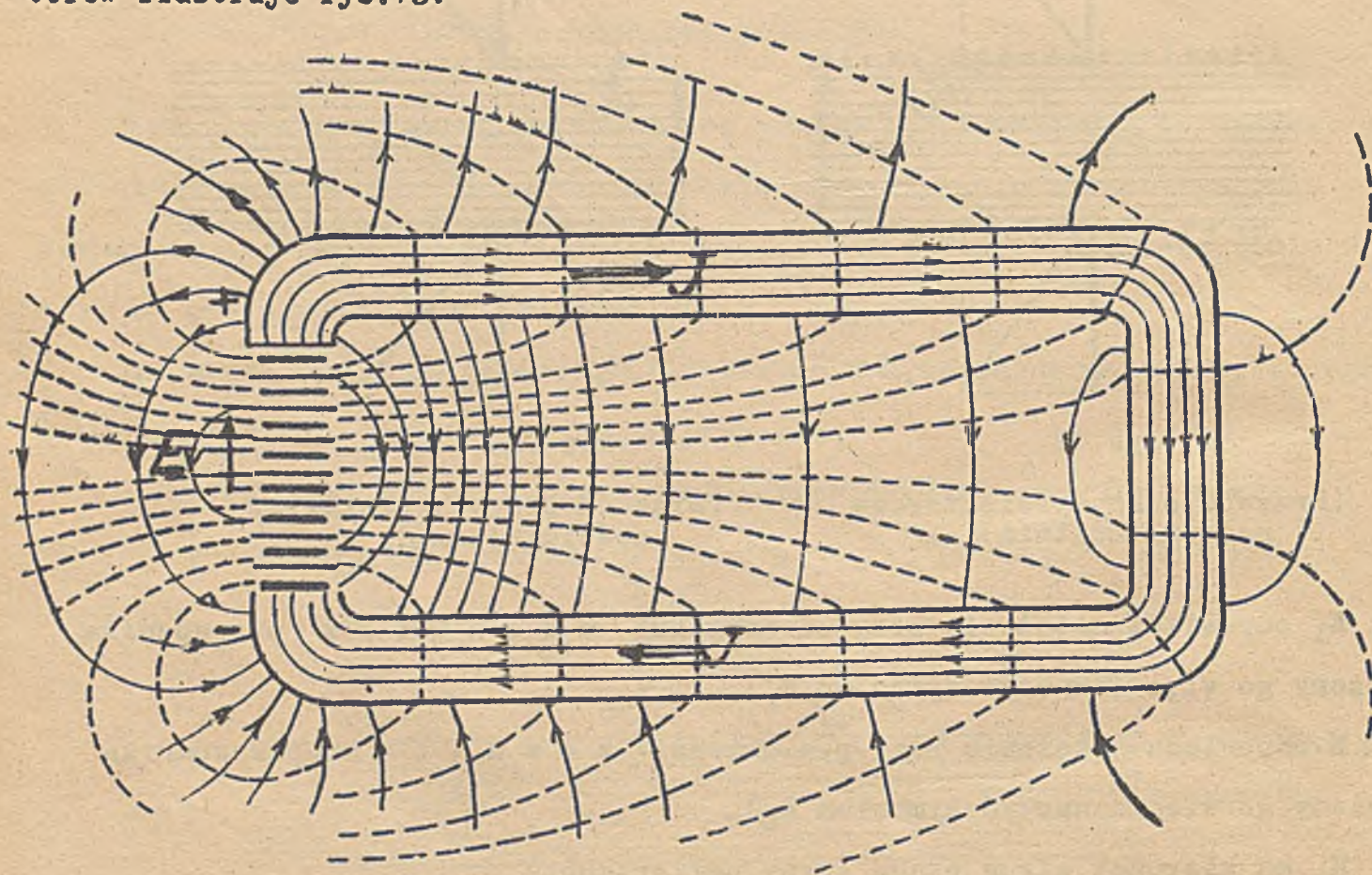
Wynika stąd, że linje natężenia (a także linje indukcji) pola z e w n ą t r z n e g o trafiają przewodnik (pod prądem) ukośnie do powierzchni.



Linje natężenia pola wewnątrznego (przewodnika pod prądem)  
mają kierunek i torę strug prądu.

Odnosnie więc do obwodów musimy odróżniać dwa pola, jedno wewnętrzne, które umiemy charakteryzować tylko co do cech dynamicznych (bo  $\epsilon$  metali niewiadome), drugie zewnętrzne, które możemy scharakteryzować tak co do cech dynamicznych jak i indukcyjnych.

W stanie statycznym oba te pola istnieją obok siebie, nie oddziałując na siebie wzajemnie. Jednocześnie tylko wspólne powierzchnie ekwipotencjalne, których przebieg dla prostego obwodu, zasilanego baterją akumulatorów ilustruje rys.73.



Rys.73.

Na rysunku tym uwidocznione są także linje sił elektr. Przebiegają one wszędzie prostopadle do powierzchni ekwipotencjalnych. Gęstość tych linii maleje z odległością od baterji, bo z nią maleje także różnica potencjałów między punktami obu przewodów, leżącemi naprzeciw siebie.



Przy niezmiennącej się konfiguracji obwodu i przy stałej różnicy potencjałów baterji zasilającej, u s t r ó j pola elektr. wewnątrz ( $K_w$ ) i zewnątrz ( $K_z$ ) obwodu, nie zależy od oporności właściwej ( $\rho$ ) przewodu.

Jeżeli bowiem w myśl relacji o oporności położymy

$$R = \frac{V_1 - V_2}{J}$$

przyczem  $V_1 - V_2 = \text{const}$  oznacza s t a ł ą różnicę potencjałów źródła, to możemy napisać

$$J = \frac{V_1 - V_2}{R} = (V_1 - V_2) \frac{q}{l\rho}$$

lub

$$\frac{J}{q} \rho = \frac{V_1 - V_2}{l}$$

Przy stałej konfiguracji jest  $l = \text{const}$ , zatem

$$K_w = \frac{J}{q} \rho = \frac{V_1 - V_2}{l} = \text{const.}$$

Zrealizowanie tego przypadku moglibyśmy sobie wyobrazić dokonane w ten sposób, że t e n s a m przewód przyłączony do baterji o stałej różnicy potencjałów naprzemian ogrzewamy i oziębiamy. Oporność przewodu metalicznego zmienia się z temperaturą, wskutek tego ulega zmianom także prąd  $J$  obwodu, jednakże ustrój pola ( $K_w$  i  $K_z$ ) pozostaje niezmienny.

W granicznych wypadkach  $R = 0$  ( $J = \infty$ ) i  $R = \infty$  ( $J = 0$ ) relacja powyższa traci ważność, przechodzi bowiem w symbol nieoznaczony. Z poprzednich rozważań wiemy, że w obu tych przypadkach  $K_w = 0$ .

Nie trzeba dodawać, że gdy w powyższym przypadku  $K_w = \text{const}$ , i g d y konfiguracja przewodu nie ulega zmianie, to musi być także  $K_z = \text{const}$ , albowiem rozkład potencjałów jest przy wszystkich wartościach  $\rho$  (z wyjątkiem obu stanów granicznych) ten sam.

W elemencie obwodu o stałej wartości  $\rho$ , wartość  $K_w$  rośnie wraz z prądem. Gdy  $K_z$  (natężenie wywołane naelektryzowaną powierzchnią) pozostaje niezmienną lub maleje, spowodować musi wzrost  $K_w$  zwiększenie kąta



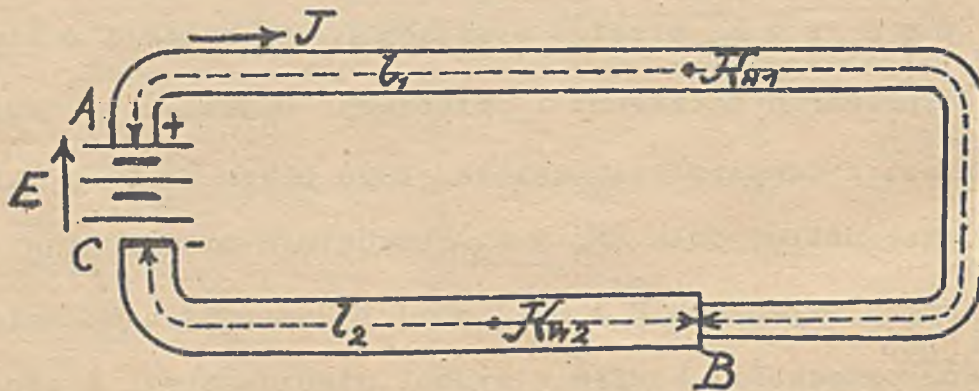
nachylenia wektora  $K_z$  (natężenie zewnętrzne przy powierzchni) (Kąt mierzony względem normalnej do powierzchni).

Wypadek taki zachodzi w tak zwanych **z w a r c i a c h**. (Spieczę źródła małym oporem). Linje natężenia pola zewnętrznego przebiegają w takim przypadku prawie równoległe do powierzchni przewodnika.

W kole prądu złożonym z różnych przewodników lub z przewodnika o różnych przekrojach ( $q$ ) i opornościach właściwych, wykazuje także  $K_w$  różne wartości. Wszędzie jednak (z wyjątkiem miejsc styku różnych przewodów) jest.

$$K_w = \frac{J}{s} \rho' \text{ woltów/cm}$$

Przykład: Obwód na rys. 74. złożony jest z dwu części: AB miedzianej  $\rho_1 = 0.0175$ ,  $q_1 = 2 \text{ m/m}^2$  i BC nikielinowej  $\rho_2 = 0.4$ ,  $q_2 = 3 \text{ m/m}^2$ . Natężenie prądu  $J$  (w całym kole jednakowe) wynosi 12 amp. Obliczyć  $K_{w1}$  i  $K_{w2}$



Rys. 74.

$$K_{w1} = \frac{J}{s_1} \rho_1' = \frac{J \cdot 100 \cdot \rho}{q_1 \cdot 10000} = \frac{12 \cdot 0.0175}{2 \cdot 100} = \underline{0.00105 \text{ V/cm}},$$

$$K_{w2} = \frac{J}{s_2} \rho_2' = \frac{J \cdot 100 \cdot \rho}{q_2 \cdot 10000} = \frac{12 \cdot 0.4}{3 \cdot 100} = \underline{0.016 \text{ V/cm}},$$

(bo  $s = q/100$ , a  $\rho' = \rho \cdot 10^{-4}$ ).



Obliczmy napięcie dla torów  $l_1 = 200\text{cm}$ ,  $l_2 = 50\text{cm}$ , pomyslaných we-  
wnątrz owých przewodów (pod prądem)

$$U_{\overrightarrow{AB}} = \int_A^B K_1 \cdot dl = K_1 \int_A^B dl = K_1 \cdot l_1 = 0 \cdot 00105 \cdot 200 = 0 \cdot 21\text{V}$$
$$U_{\overrightarrow{BC}} = \int_B^C K_2 \cdot dl = K_2 \int_B^C dl = K_2 \cdot l_2 = 0 \cdot 016 \cdot 50 = 0 \cdot 8\text{V}$$

Takie napięcia zmierzimy między końcówkami AB względnie BC.

Napięcie od A do C wyniesie

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC} = 1 \cdot 01\text{V}$$

Takie napięcie wskaże woltomierz załączony między końcówki A i C i ta-  
kie napięcie posiadać musi źródło napięte na te końcówki.

Wyobraźmy sobie teraz transport naboju dodatniego (+q) dokonany nie-  
skończenie blisko powierzchni przewodów od A do B i dalej od B do C. Spo-  
glądając na rys. 73 widzimy, że przy transporcie takim musimy przejść przez  
te same powierzchnie ekwipotencjalne, jakie przenikają wewnątrz przewodni-  
ków. Wynika stąd nader ważny wniosek (dla dalszych rozważań), że

Całka linjowa natężenia pola dla toru poprowadzonego wewnątrz przewodu  
ma tę samą wartość co całka linjowa natężenia pola dla toru poprowadzonego  
zewnątrz nieskończenie blisko powierzchni przewodnika.

Ponieważ zaś w polu statycznym napięcie (całka linjowa natężenia) nie  
zależy od ukształtowania toru, poprowadzonego między dwoma punktami, dla  
których U wyznaczamy, przeto napięcie wyrażone całką linjową natężenia  
pola dla toru z e w n ą t r z przewodnika możemy obliczyć lub zmierzyć  
na którymkolwiek innym torze, poprowadzonym między temi samemi punktami  
z e w n ą t r z przewodnika.

Ilustrację do tego stanu rzeczy widzimy na rys. 75.

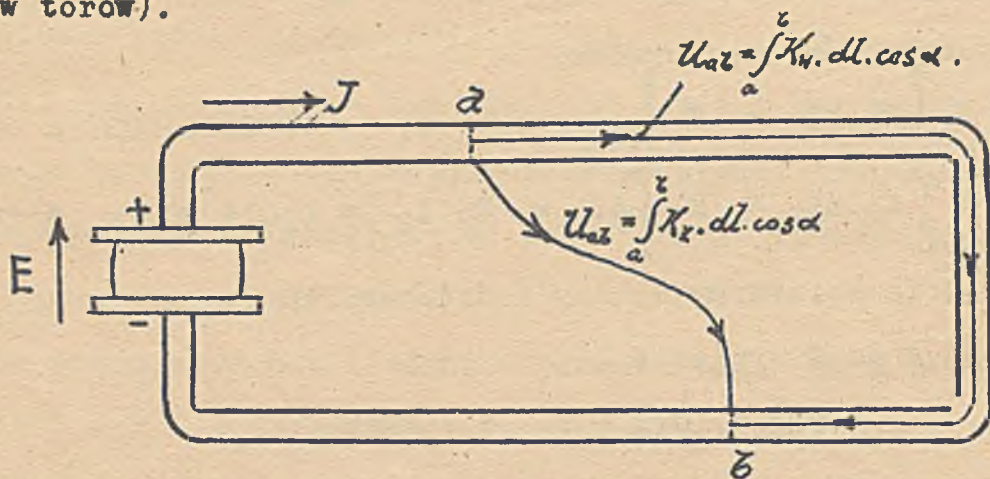
Napięcie między przekrojami w "a" i "b" ( $U_{\overrightarrow{ab}}$ ) jest równe

$$U_{\overrightarrow{ab}} = \int_a^b K_w \cdot dl \cdot \cos\alpha = \int_a^b K_z \cdot dl \cdot \cos\alpha$$

czyli może być mierzone (lub obliczone) zarówno w polu wewnętrznym jak  
i w polu zewnętrznym, dając te same wartości (dla wspólnych początków



i końców torów).



Rys.75.

Zarówno tor wewnętrzny jak i zewnętrzny możemy poprowadzić dowolnie. Ogólnie więc:

Całka linjowa natężenia  $K$  wzdłuż torów poprowadzonych dowolnie w przestrzeni ma przy tych samych początkach i końcach torów jednakowe wartości.

Tak jest jednakże tylko w obwodach prądów stałych i z wyłączeniem wnętrza źródeł prądu, którego jeszcze nie badaliśmy.

Źródło prądu, to zespół przewodników pozostających ze sobą w styku i mieszczących działanie elektromotoryczne. Na poszczególnych stykach tych przewodników ujawniają się skoki potencjałów (równe różnicy potencjałów z obu stron styku). We wnętrzu samych przewodników, składających źródło galwaniczne lub termiczne (indukcyjne źródła wykluczamy), ustrój pola jest tak samo zależny jedynie od gęstości prądu i oporności właściwej ( $\zeta$ ), jak w reszcie obwodu.<sup>1)</sup>

1) Z zastrzeżeniem stałego składu i stałej koncentracji elektrolitu, oraz jednakowej temperatury wszystkich części składowych ogniwa (Patrz dalej „ogniwa galwaniczne”).



Zbadajmy n.p. wewnątrz ogniwa Volty (rys.76.). Na styku miedzi (+)

i elektrolitu ujawnia się skok potencjału

$$V_1 - V_2$$

Na styku elektrolitu i cynku ujawnia się drugi skok potencjału

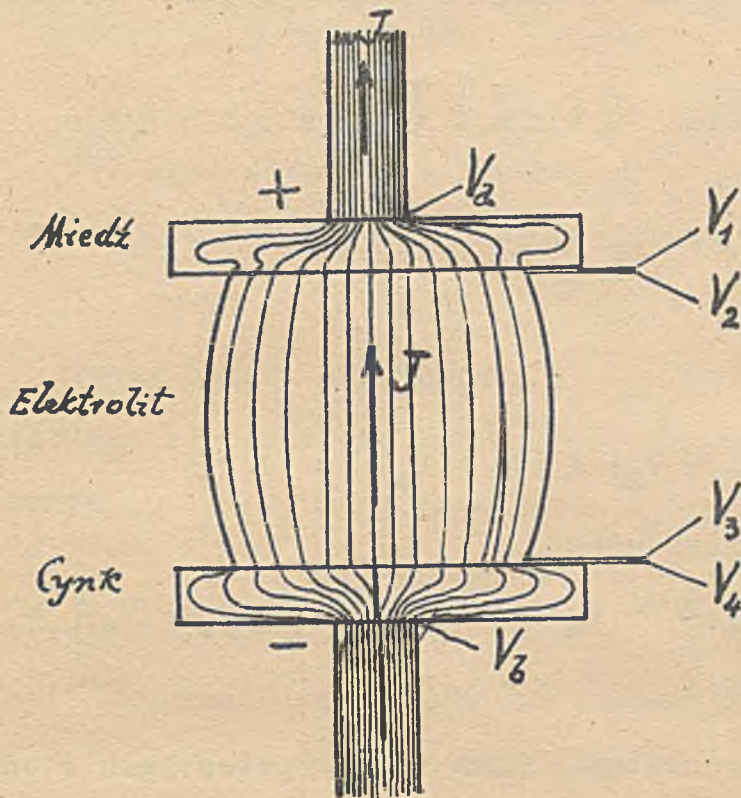
$$V_3 - V_4$$

Wewnątrz elektrolitu mamy (w kierunku prądu) spadek potencjału

$$V_3 - V_2$$

Podobnie małe spadki potencjałów wystąpią w płytkach metalowych

$$V_1 - V_a \quad \text{i} \quad V_b - V_4$$



Rys.76.

W statycznym stanie układu, różnica potencjałów na końcówkach tego źródła będzie

$$\begin{aligned} U_{ab} &= U_{a1} + U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{4b} = \\ &= (V_a - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_4) + (V_4 - V_b) = \\ &= V_a - V_b \end{aligned}$$

Natężenie pola elektrycznego ma wewnątrz płytek i elektrolitu kierunek strug prądu, a wartości  $K_w$  (w różnych punktach różne) odpowiadają tam wszędzie relacji

$$K_w = \sigma \cdot \rho' = \frac{dJ}{ds} \cdot \rho'$$

Jak widać z przebiegu strug prądu, będzie  $\sigma$  w różnych punktach różne.

Całka

$$\int_b^a K_w \cdot dl = \int_b^a \frac{J}{q} \rho' \cdot dl = J \int_b^a \frac{dl}{q} \cdot \rho' = J \cdot R_w$$



z wyłączeniem styków, gdzie ujawniają się skoki potencjałów, reprezentuje sumę spadków napięć, występujących przy przepływie prądu  $J_a$  przez źródło w kierunku  $\vec{ba}$ .

Iloczyn  $JR_w$  nazywać będziemy dalej **stratą napięcia** wewnątrz źródła, zaś całka

$$\int_b^a \frac{d\varphi}{q} \cdot \oint = R_w$$

przedstawia oporność źródła.

Uwzględniając, że

$$\int_b^a K_w \cdot dl = (V_b - V_4) + (V_3 - V_2) + (V_1 - V_a) = J \cdot R_w$$

otrzymamy w związku z poprzednim równaniem

$$\begin{aligned} U_{ab} &= (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) - \left\{ (V_1 - V_a) + (V_3 - V_2) + (V_b - V_4) \right\} = \\ &= (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) - J \cdot R_w \end{aligned}$$

Suma  $(V_1 - V_2) + (V_3 - V_4)$  przedstawia sumę skoków potencjału i odpowiada SEM-cznej źródła

$$E = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4).$$

Możemy zatem napisać

$$\vec{U}_{ab} = V_a - V_b = E - J \cdot R_w \dots \dots \dots (43)$$

Gdy  $J = 0$ , jest

$$\vec{U}_{ab} = V_a - V_b = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) = E \dots \dots \dots (44)$$

Siła SEM-czna galwanicznego (a także termicznego) źródła prądu w stanie jałowym ( $J = 0$ ) jest równa różnicy potencjałów jego końcówek i odpowiada liczbowo sumie algebraicznej skoków potencjału wewnątrz źródła (na warunkach podwójnych).

Przy przepływie prądu przez źródło SEM-czna pozostaje równa algebraicznej sumie skoków potencjału w źródle, jednakże nie może być równa różnicy potencjałów końcówek źródła, gdyż wewnątrz występują jeszcze nowe różnice potencjałów równe w sumie iloczynowi  $J \cdot R_w$ , czyli stracie napięcia.



Gdy prąd płynie zgodnie z kierunkiem SEM-cznej (jak na rys.76.), różnica potencjałów na końcówkach źródła jest liczbowo mniejsza od SEM-cznej o stratę  $JR_w$

$$U_{ab} = V_a - V_b = E - J.R_w \dots\dots\dots (45)$$

Gdy prąd płynie w kierunku przeciwnym do SEM-cznej, napięcie źródła jest większe od SEM-cznej o stratę  $JR_w$

$$U_{ab} = V_a - V_b = E + J.R_w \dots\dots\dots (46)$$

Wtedy bowiem natężenie pola  $K_w$  zmienia wszędzie (wewnątrz źródła) kierunek i całkowanie w kierunku działania  $E$ , a więc w kierunku przeciwnym do  $J$ , czyli przeciwnym do  $K_w$  daje wartość ujemną.

$$\int_b^a K_w \cdot dl = - J.R_w$$

Utrzymanie na dwu stykających się przewodnikach skoku potencjału możemy sobie wyobrazić spowodowane utworzeniem podwójnej warstwy elektrycznej. Przyjmujemy, że na ścianie stykowej (o wyższym potencjale) osadził się nabój dodatni, zaś na sąsiadującej z nią (o niższym potencjale) nabój ujemny. Działanie elektryczne, utrzymujące tę podwójną warstwę elektryczną i nie dopuszczające do rozbrojenia przez styk, nazwalibyśmy SEM-czną. Możemy sobie teraz wyobrazić, że działanie SEM-cznej polega niejako na rozpięciu tych dwu naboji na ścianach stykowych i powiedzieć, że strzałka SEM-cznej wskazuje kierunek parcia wywieranego na elektryczność dodatnią.

Oczywiście mamy na myśli działanie (parcie) wypadkowe. W źródle prądu może wystąpić kilka takich warstw podwójnych i na niektórych z nich działanie składowej  $E$  może mieć kierunek przeciwny do działania (parcia) wypadkowego.

Uwaga: Ustęp powyższy o polu elektrycznym obwodu, oraz poprzedni o napięciu elektr. uważałem za stosowne włączyć do rozważań, celem osiągnięcia możliwie ścisłego pojmowania i rozróżnienia zasadniczych wielkości ( $E, U, JR_w$ ) z jakimi elektrotechnik ma ciągle do czynienia.



Wielokrotnie stwierdzałem i stwierdzam ciągle jeszcze, że nawet zaawansowani elektrycy nie zdają sobie sprawy, jaka jest różnica między SEM-czną galwanicznych i termicznych a indukcyjnych źródeł prądu. W nowoczesnym wykładzie elektrotechniki SEM-czna źródła galwanicznego a indukcyjnego, to dwie różne rzeczy. W galwanicznym (termicznym) źródle prądu SEM-czna jest równa sumie algebraicznej skoków potencjału. W indukcyjnych źródłach prądu SEM-czna to całka okrężna ( $\oint$ ) natężenia pola elektrycznego indukowanego zmianą pola magnetycznego.

Podobnie mętne lub zgoła mylne wyobrażenia mają elektrycy odnośnie do napięcia. Notorycznie pojmują je jako różnicę potencjałów, uniemożliwiając sobie w ten sposób należyte wniknięcie w analizę prądów zmiennych.

Przekonamy się w dalszym ciągu, że w obwodach prądów zmiennych napięcie nie jest różnicą potencjałów i może mieć między tymi samymi dwoma punktami (rachunkowo i eksperymentalnie) nieskończenie wiele różnych wartości.

W polu elektr. obwodu prądu zmiennego daje mianowicie całka linijowa natężenia  $K$  różne wartości dla różnych torów, a wskazanie woltomierza zależy od sposobu ułożenia przewodów, łączących owe punkty z przyrządem.

Przy dzisiejszym stanie rozwoju elektrotechniki praktycznej (prądy zmienne, radio) niemożliwym jest pominięcie milczeniem ustroju pola elektrycznego obwodu prądu stałego, a następnie prądu zmiennego. Wszak naboje powierzchniowe na przewodach n i e r u c h o m e przy przepływie prądu stałego, są w ciągłym ruchu w obwodach prądów zmiennych. Jednakże ruch naboju to prąd. Prąd ten superponuje się z prądem prowadzonym, dając wypadkowy prąd przewodnika. Natężenie tego prądu będzie r ó = z n e w różnych przekrojach tego samego przewodnika i zasada zachowania ilości elektryczności, ważna dla obwodu prądu stałego, traci ważność dla obwodów prądu zmiennego. Część strug prądu zmiennego wychodzi przez powierzchnię na zewnątrz przewodu i zamyka koło prądu już tylko w formie linii pola elektrycznego! Około perspektywy dalszych dociekań, zniewalające do respektowania pola elektrycznego obwodów.



### 8. Prawo koła napięć w obwodach prądu stałego.

a) Tor zewnętrzny przewodów.

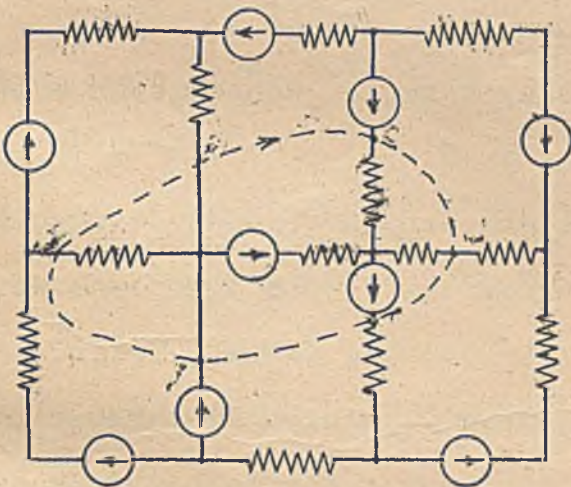
W polu elektrostatycznym, t.j. wytworzonym przez nieruchome naboje elektryczne jest

$$U_0 = \oint K \cdot dl \cdot \cos \alpha = 0 \dots \dots \dots (47)$$

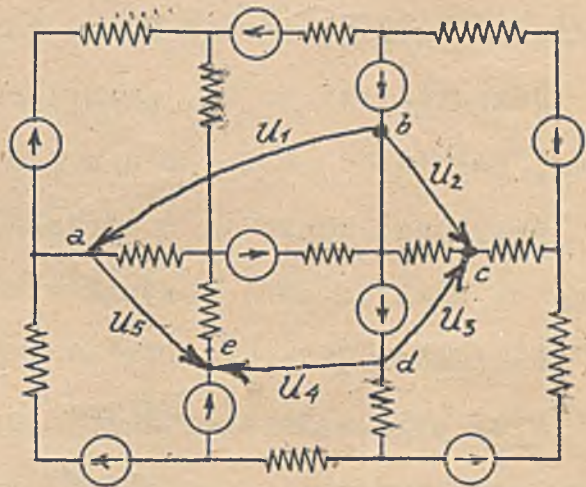
Znaczy to, że napięcie dla każdego toru zamkniętego jest równe zero. (Cecha pola elektrostatycznego).

Pole okalające obwód prądu stałego ma cechy pola elektrostatycznego, zatem równanie powyższe można odnieść także i do obwodów prądu stałego.

Oznaczmy w układzie na rys.77. dowolny tor zamknięty.



Rys. 77.



Rys. 78.

Całka linjowa natężenia pola obliczona dla tego toru, będzie w myśl (47) równa zero. Przytem całkowanie możemy uskutecznić albo w kierunku oznaczonej strzałki, lub też w kierunku przeciwnym.

Poprowadźmy linię owego toru tak, aby w punktach a b c d e dotykała obwodu. Otrzymamy w ten sposób pięć odcinków toru ab, bc, cd, de i ea (rys 78) dla których wyznaczamy pięć napięć  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$  i  $U_5$ , markując d o = w o l n i e jeden z punktów każdego odcinka toru jako jego początek.



Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys. 78 napiszemy:

$$U_1 = \int_a^b K \cdot dl \cdot \cos \alpha, \quad U_2 = \int_c^b K \cdot dl \cdot \cos \alpha, \quad U_3 = \int_c^d K \cdot dl \cdot \cos \alpha,$$

$$U_4 = \int_e^d K \cdot dl \cdot \cos \alpha, \quad U_5 = \int_e^a K \cdot dl \cdot \cos \alpha.$$

Ponieważ zaś

$$\oint K \cdot dl \cdot \cos \alpha = \int_a^b K \cdot dl \cdot \cos \alpha + \int_b^c K \cdot dl \cdot \cos \alpha + \int_c^d K \cdot dl \cdot \cos \alpha + \int_d^e K \cdot dl \cdot \cos \alpha + \int_e^a K \cdot dl \cdot \cos \alpha = 0$$

przeto

$$U_0 = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + U_5 = 0 \dots\dots\dots (48)$$

lub

$$\sum(U) = 0 \dots\dots\dots (49)$$

Suma napięć w zamkniętym kole, utworzonym w obwodzie prądu stałego, jest równa zeru. (Prawo koła napięć)

Jak widać z rys. 78. znaki poszczególnych napięć, wchodzących w ową sumę, zależą od kierunku U.

Wszystkie napięcia o strzałkach zorjentowanych w jedną stronę, wpisujemy ze znakiem "+", wszystkie zaś skierowane w stronę przeciwną wpisujemy ze znakiem "-".

Przy tworzeniu sumy  $\sum(U)$  jest obojętnym, w którym kierunku postępujemy przy sumowaniu poszczególnych napięć, gdyż równanie powyższe możemy napisać także tak

$$-U_1 + U_2 - U_3 + U_4 - U_5 = 0 \dots\dots\dots (50)$$

Równanie (48) odpowiada kierunkowi liczenia zgodnemu z kierunkiem strzałki  $U_1$ , równanie (50) odnosi się do kierunku liczenia obranego przeciwnie.

Prawo koła napięć daje nader cenne udogodnienia przy analizie obwodów prądu stałego. Będziemy się też nim często posługiwać.

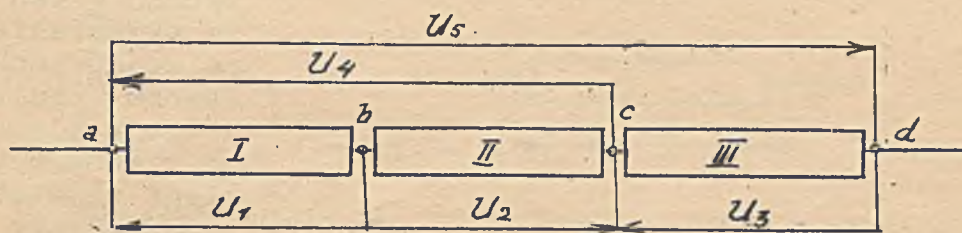
I tu widzimy, że oznaczenia początków poszczególnych torów mogą być traktowane jako grotty strzałek napięć.



Z pomocą prawa koła napięć możemy obliczyć jedno z  $n$  napięć, gdy wiadomych jest  $n-1$  napięć składowych.

Przykład: Znane są napięcia  $U_1 = +30V$ ,  $U_2 = +100V$ ,  $U_3 = -80V$ .

Obliczyć napięcie  $U_4$  lub  $U_5$ . (Rys. 79.)



Rys. 79.

Tworząc sumy:

$$U_1 - U_4 - U_2 = 0,$$

$$U_1 + U_5 + U_3 - U_2 = 0,$$

obliczamy

$$U_4 = U_1 - U_2 = (+30) - (+100) = -70V,$$

$$U_5 = -U_1 + U_2 - U_3 = -(+30) + (+100) - (-80) = +150V.$$

Pierwszy wynik oznacza, że między punktami „a” i „c” istnieje różnica potencjałów 70V i że końcówka „a” ma potencjał niższy od „c” (o 70V) (znak - dla  $U_4$ ).

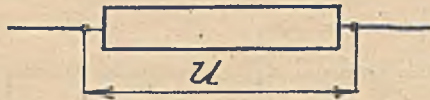
Drugi wynik poucza, że między punktami „a” i „d” istnieje różnica potencjałów 150V i że końcówka „d” ma potencjał wyższy od „a” (o 150V) (znak + dla  $U_5$ ).

Powyższe wyniki są ważne bez względu na to, czy przez elementy I, II, III, przepływa prąd (stały!) czy nie i bez względu na kierunek ewentualnego prądu (stałego!).

Stosując prawo koła napięć do dowolnego obwodu prądu stałego lub jego części, nie potrzebujemy zupełnie wnikać w ustrój tego obwodu, ani uwzględniać kierunku prądu. Stanowi to bezsprzecznie duże ułatwienie, jak to zresztą okażemy jeszcze na dalszych przykładach.



Uwaga: Podane tu zasady oznaczania napięć, jakoteż wprowadzania do Elektrotechniki ogólnej prawa koła napięć, należy traktować jako reformę, mającą na celu ułatwienie analizy. Spotykane ogólnie oznaczanie polega na kotowaniu napięć (rys.80) bez uwzględniania kierunkowości tej wielkości. Powstające wsku-



Rys.80.

tek tego niejasności stają się różni autorowie usunąć w ten sposób, że określenie napięcia na końcówkach elementu obwodu uzależniają od ustroju elementu, jakoteż od kierunku prądu przez niego płynącego. (Patrz dalej „Prawo Ohma” i „Prawo Kirchhoffa”).

Stanowiska takiego osobiście uznać nie mogę, uważam bowiem, że analogicznie do SEM-cznej i prądu, także i napięcie winno być oznaczone niezależnie od innych wielkości.

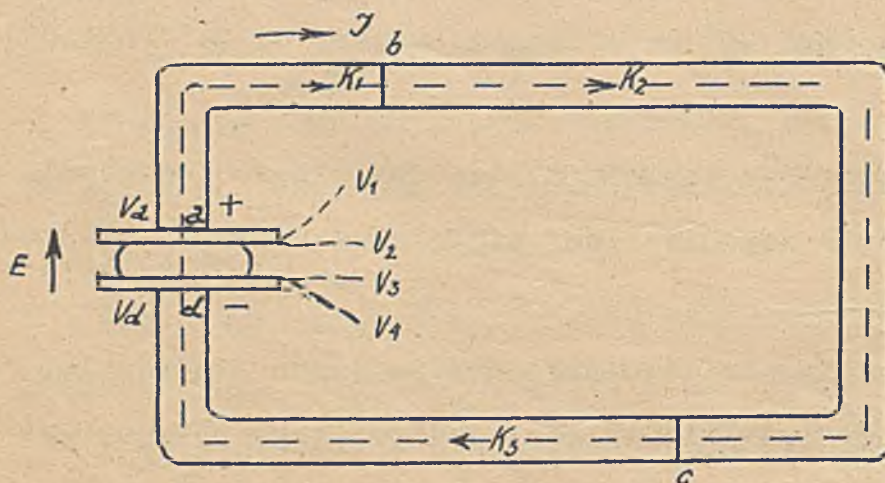
Za punkt wyjścia do takiego oznaczenia musi służyć definicja napięcia, a nie prawa ważne zresztą tylko dla obwodów prądów stałych (Ohm, Kirchhoff).

Kotować (rys.80) wolno napięcia tylko tam, gdzie nam nie zależy na kierunkowości napięcia, czyli gdzie chodzi tylko o wartość bez względu na napięcia. Wtedy też wolno mówić „napięcie między punktami”.

Wszędzie tam, gdzie kierunkowość napięcia musi być uwzględniona, należy je strzałkować i mówić „napięcie z punktu do punktu”.

b) Tor wewnątrz przewodów.

Spróbujemy zastosować prawo koła napięć dla obwodu przedstawionego na rys.81., obliczając całkę okrężną dla toru zamkniętego, oznaczonego



Rys.81.

na rys.81. linią kreskowaną. Obwód składa się z trzech różnych przewodów (o natężeniach wewnętrznych  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ), połączonych w szereg z ogniwnem galwanicznym.



Sumowanie napięć wykonamy w kierunku prądu, a więc w kierunku natężenia  $K$ .

Przy przekroczeniu warstwy podwójnej w źródle, musimy wstawić zamiast  $U$  odnośną różnicę potencjałów, albowiem wartości  $K$  wewnątrz styku nie znamy. (Pole molekularne).

Napiszemy więc

$$U_0 = \int_a^b K_1 \cdot dl + \int_b^c K_2 \cdot dl + \int_c^d K_3 \cdot dl + (V_d - V_4) + (V_4 - V_3) + (V_3 - V_2) + (V_2 - V_1) + (V_1 - V_a) = 0.$$

Oznaczając całki powyższe znakami  $U_{\vec{ab}}$ ,  $U_{\vec{bc}}$  i  $U_{\vec{cd}}$  i uwzględniając, że

$$(V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) = E,$$

a 
$$(V_d - V_4) + (V_3 - V_2) + (V_1 - V_a) = J \cdot R_w$$

możemy położyć

$$U_0 = U_{\vec{ab}} + U_{\vec{bc}} + U_{\vec{cd}} - E + J \cdot R_w = 0$$

lub

$$E - J \cdot R_w - U_{\vec{ab}} - U_{\vec{bc}} - U_{\vec{cd}} = 0$$

Iloczyn  $J \cdot R_w$  odpowiada stracie napięcia wewnątrz źródła.

Różnica  $E - J \cdot R_w$  przedstawia napięcie na końcówkach źródła

$$U_{ad} = V_a - V_d = E - J \cdot R_w$$

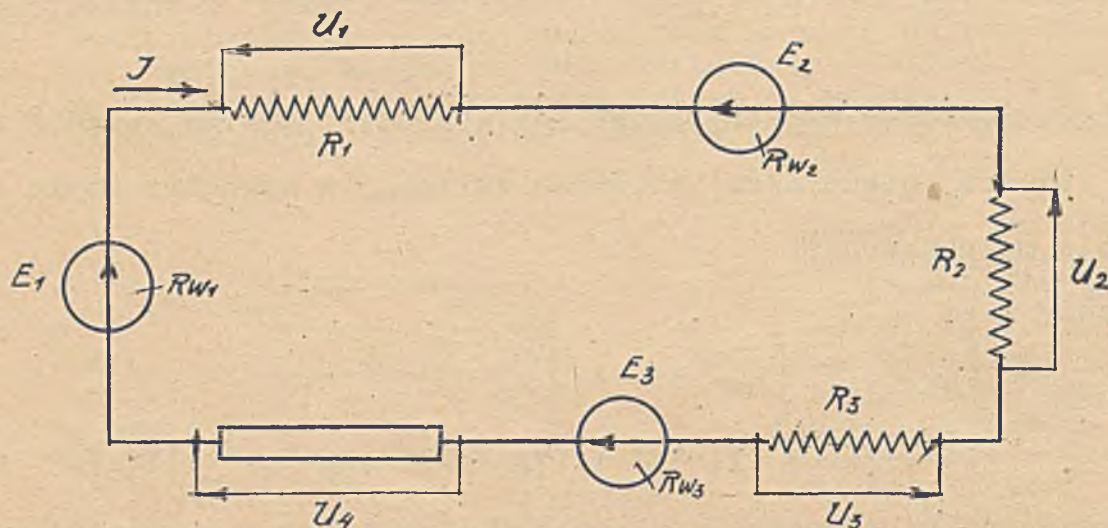
Możemy więc powiedzieć:

Dla toru zamkniętego, zawierającego źródło prądu, jest suma SEM-cznych, strat napięcia (w źródłach) i napięć w przewodach równa zeru.

Oznaczając napięcia w obwodzie przedstawionym na rys. 82. strzałkami w sposób poprzednio przyjęty i wypisując powyższe równanie, widzimy, że sumowanie SEM-cznych i napięć skutecznia się w jednakowy sposób. Wszystkie SEM-czne i napięcia zorjentowane w kierunku sumowania występują w równaniu ze znakiem "+", wszystkie SEM-czne i napięcia zorjentowane przeciwnie, otrzymują znak "-".



Strzałki napięć na oporach (R) orientujemy zawsze przeciw prądowi,



Rys. 82.

straty napięć w źródłach wpisujemy zawsze postępując w kierunku prądu ze znakami ujemnymi.

$$E_1 - (J \cdot R_{W1}) - U_1 - E_2 - (J \cdot R_{W2}) - U_2 - U_3 + E_3 - J \cdot R_{W3} + U_4 = 0$$

Nie wiemy co zawiera element o napięciu  $U_4$ , dla ustawienia jednakże powyższego równania wiadomości tej nie potrzebujemy.

Zakładając  $R_{W1} = 0$ ,  $R_{W2} = 0$ ,  $R_{W3} = 0$  (idealne źródła prądu),

mamy wprost

$$E_1 - U_1 - E_2 - U_2 - U_3 + E_3 + U_4 = 0$$

Widać tu, że SEM-czne sumujemy z napięciami w jednakowy sposób (orientując się podług strzałek).

W obu powyższych równaniach jest ~~prąd~~

$$U_1 = J \cdot R_1, \quad U_2 = J \cdot R_2, \quad U_3 = J \cdot R_3$$

w myśl określenia oporu

$$R = \frac{V_d - V_0}{J} = \frac{U_{do}}{J}, \quad JR = U_{do}, \quad V_d > V_0, \quad (d \text{ do tyłu}, o \text{ - odpływ}).$$

Reasumując powyższe wypiszemy następujące wzory ogólne dla zamkniętych torów w obwodach prądu stałego

$$\sum U = 0 \dots\dots\dots (51)$$

$$\sum (U, E) = 0 \dots\dots\dots (52)$$



Wzór (51) odnosi się do koła utworzonego z samych napięć.

Wzór (52) odnosi się do koła utworzonego z napięć i SEM-czynnych. Symbole na  $U$  kryją tu oczywiście także straty napięć w źródłach, jeżeli abstrahujemy od operowania źródłami idealnymi (bezoporowymi).

Możemy teraz poprowadzić tor zamknięty dowolnie, częściowo wewnątrz, częściowo zewnątrz przewodów, dla każdego takiego toru w obwodzie prądu stałego jest

$$\underline{\sum (U.E) = 0}$$

Oto kwintesencja naszych dociekań.



## II. PODSTAWOWE PRAWA OBWODÓW PRĄDU STAŁEGO.

### 1. Prawo Ohma.

Między wielkościami  $J, R, U$  względnie  $J, R, E$  istnieją pewne zależności, które w formie ogólnej podał Ohm (1827).

Dla jasności wyrazimy te zależności w formie dwu praw szczególnych:

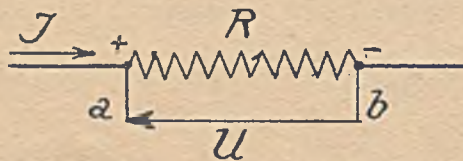
#### P I E R W S Z E P R A W O O H M A

Natężenie prądu stałego, płynącego przez opór  $R$ , jest wprost proporcjonalne do różnicy potencjałów (czyli napięcia), ujawniającej się na jego końcówkach, a odwrotnie proporcjonalne do oporności  $R$

$$J = \frac{U}{R} \dots\dots\dots (53)$$

Prawo to, wynikające wprost z pojęcia oporności, ilustruje rys. 83.

Należy je rozumieć w następujący sposób:



Jeżeli przez element obwodu o oporności  $R$  płynie stały prąd  $J$  w kierunku  $\vec{ab}$  (strzałka  $J$ ), to końcówka „a” okaże wyższy (+), a końcówka

Rys. 83

„b” niższy (-) potencjał. Oznaczając „a” jako początek toru, napiszemy

$$U_{ab} = J R = \int_a^b K \cdot dl \cdot \cos \alpha = V_a - V_b$$

Napięcie  $U$  odnosi się do toru poprowadzonego wzdłuż oporu  $R$ , z końcówki (a), przez którą prąd dopływa do końcówki (b), przez którą prąd wypływa.

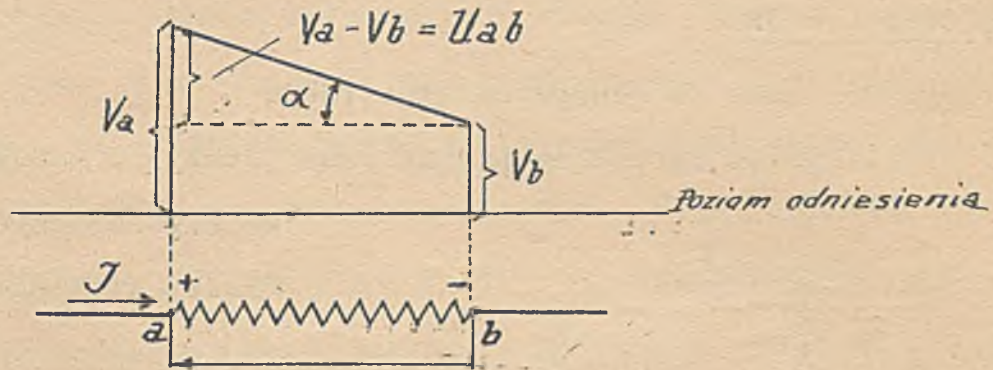
Ponieważ prąd płynie w kierunku spadku potencjału, przeto końcówka, przez którą prąd dopływa do oporu  $R$ , jest dodatnia (tu „a”), a końcówka przez którą prąd wypływa z  $R$  jest ujemna (tu „b”).

Równość (53) zachodzi także dla każdej cząstki oporu  $R$ .

$$J = \frac{dU}{dR} \dots\dots\dots (54)$$

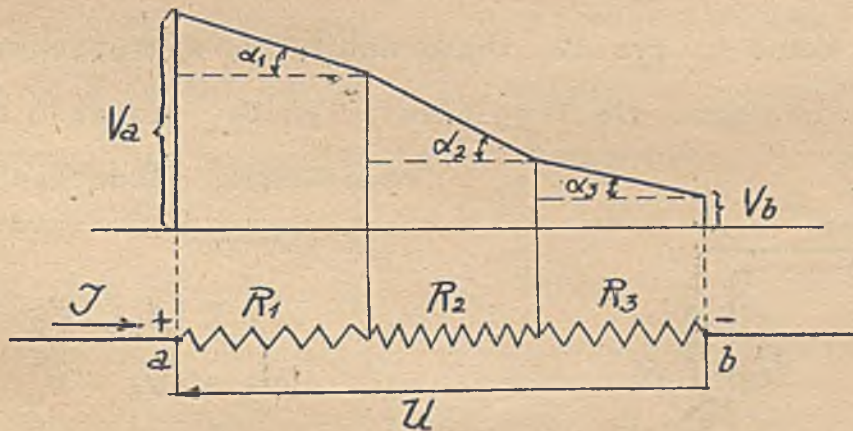


Ujawniający się wzdłuż oporu  $R$  (w kierunku prądu) spadek potencjału, można przedstawić graficznie w sposób podany na rys.84.



Rys. 84

Pochylenie linii spadku napięcia ( $\alpha$ ) orientuje, czy oporność rozłożona jest na całej długości  $ab$  jednostajnie (linia prosta, stały kąt  $\alpha$ , rys 84 ), czy niejednostajnie (linia krzywa, zmienny kąt  $\alpha$ , rys 85 )



Rys. 85

Z wzoru (53) wynikają następujące dwa wzory pochodne

$$R = \frac{U}{J} \dots \dots \dots (55)$$

$$U = J \cdot R \dots \dots \dots (56)$$

Wzór (55) określa oporność  $R$ , przez którą przepływa prąd  $s t a k y J$  przy napięciu na końcówkach równym  $U$  i znany nam już jest z ustępu traktującego o oporności. Wzór (56) pozwala obliczyć napięcie na oporze  $R$ , gdy znane jest natężenie  $J$  płynącego w nim prądu



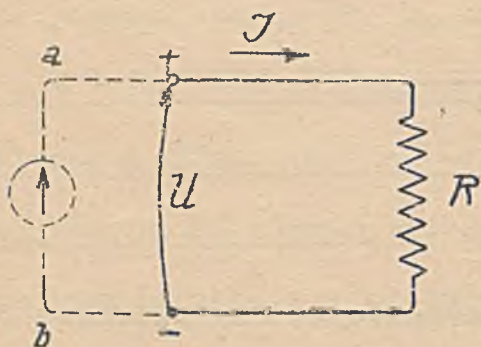
Ostatni wzór (56) można interpretować jeszcze inaczej:

Do pędzenia prądu (stałego)  $J$  przez opór  $R$ , potrzebne jest (stałe)

napięcie  $U = JR$ .

Rys. 86. może tu służyć za ilustrację.

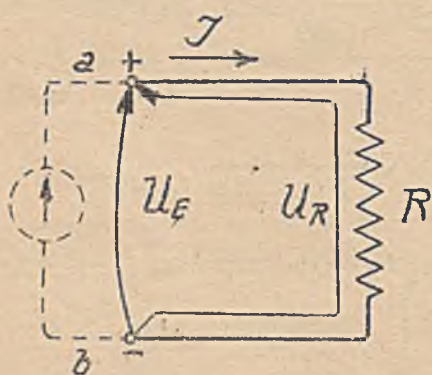
Jeżeli przez opór  $R$  ma płynąć prąd (stały) o natężeniu  $J$ , to opór ten



należy załączyć na końcówki (ab), między którymi ujawnia się (stałe) napięcie  $U = JR$ . Reprezentuje to ono niejako napięcie czynne (pędzące prąd) i symbolizuje źródło prądu, którego należy się domyślać z lewej strony układu na rys. 86.

Rys. 86.

Uzupełniając układ na rys. 87. torem napięcia, wykreślonym wzdłuż oporu  $R$  i oznaczając napięcie dla tego toru przez  $U_R$ , przy czym stosownie do



oznaczonych początków obu torów jest zarówno

$$U_E = V_a - V_b$$

jak i  $U_R = V_a - V_b$ .

możemy napisać, zgodnie z prawem **kola napięć**,

$$U_E - U_R = 0, \text{ lub } \underline{U_E = U_R}.$$

Rys. 87.

Napięcie czynne  $U_E$  może tu być pojmowane jako objaw działania, a **k c j a**, źródła prądu, którego należy się domyślać z lewej strony układu. Napięcie ( $U_R$ ) elementu  $R$ , równe tamtemu, może być przyjmowane jako **o d d z i a ł y w a n i e**, **r e a k c j a**.

Równość  $U_E = U_R$  wyraża prawo akcji i reakcji (Analogja za zerpnięta z mechaniki)



Interpretacja powyższa, mająca licznych zwolenników wśród elektrotechników praktycznych, winna służyć jedynie jako podkład myślowy, ułatwiający utrwalenie w pamięci prawa koła napięć. Widzimy, że i tu uwzględnienie kierunkowości napięć (groty) oddaje nam cenne usługi: Oznaczenie wskazujące początek toru wzdłuż którego napięcie liczymy, traktowane jako grot strzałki, orientuje niejako o kierunku działania  $U$ , a mianowicie:

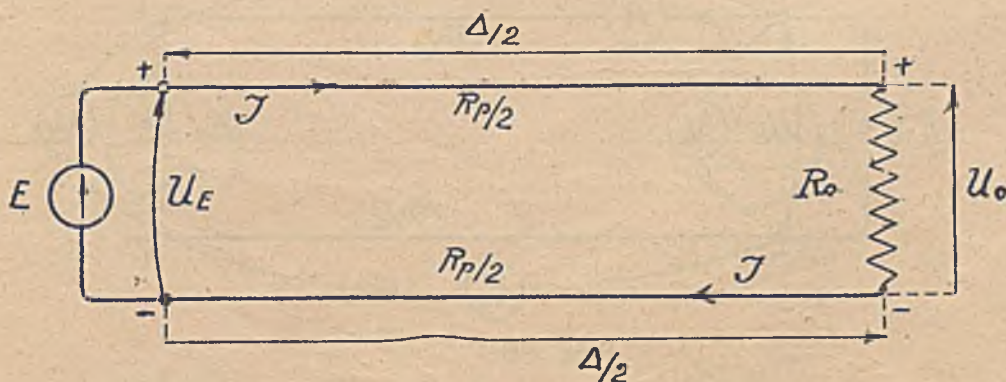
Napięcie pojmowane jako akcja ( $U_E$ ) ma kierunkowość zgodną z prądem, napięcie zaś pojmowane jako reakcja ( $U_R$ ) ma kierunkowość przeciwną do prądu.

### Strata napięcia

Oprócz powyższych pojęć, związanych z napięciem, wprowadzają praktycy jeszcze tzw. stratę napięcia.

Strata napięcia to znów iloczyn  $J \cdot R$ , jednakże odniesiony do tych części obwodu prądu stałego o oporności  $R$ , w których energia zużywająca się na przepędzenie przez nie prądu  $J$ , jest z praktycznego punktu widzenia oceniona jako strata.

Jeżeli n.p. źródło prądu ( $E$ ) dostarcza energję elektryczną odbiornikowi  $R_0$  (rys. 88.) za pośrednictwem przewodów, to iloczyn prądu  $J$ , płynącego w tych przewodach i ich oporności  $R_p$  uważany jest za stratę napięcia w przewodach, bo energja elektr. zużywająca się przy przepływie prądu przez przewody, zamienia się bezpżytecznie na ciepło.



Rys. 88.



Stratę napięcia oznaczamy symbolem  $\Delta$ . Odnosnie więc do rys.88. napię= szemy:

$U_E$  napięcie czynne na początku linii,

$$\Delta_p = \Delta/2 + \Delta/2 = J \cdot \frac{R_p}{2} + J \cdot \frac{R_p}{2} = J \cdot R_p \text{ strata napięcia}$$

w przewodach, doprowadzających energję elektr. do odbiornika  $R_0$ .

$U_0 = J R_0$  napięcie odbiornika.

Kierunkowość napięć  $\Delta$  i  $U_0$  jest przeciwna prądowi, zatem napięcia te mogą być interpretowane jako reakcje.

Kierunkowość napięcia  $U_E$  jest zgodna z prądem, oznacza więc akcję.

Stosując prawo koła napięć, napiszemy

$$U_E - \Delta/2 - U_0 - \Delta/2 = 0,$$

lub 
$$U_E - \Delta_p - U_0 = 0$$

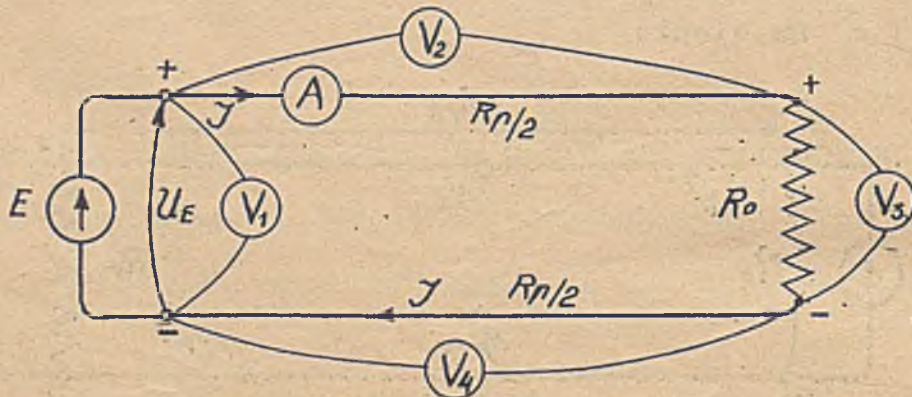
albo wreszcie

$$U_0 = U_E - \Delta_p \dots \dots \dots (57)$$

Napięcie na końcu linii, równa się napięciu na początku linii mniej strata napięcia w linii.

Poszczególne napięcia  $U_E$ ,  $\Delta/2$ ,  $\Delta/2$  i  $U_0$  możemy zmierzyć, załączając na odpowiednie końcówki woltomierze (rys.89).

Całkowitego napięcia  $\Delta_p = \Delta/2 + \Delta/2$  jednym przyrządem zmierzyć nie można, gdyż odpowiada ono sumie dwu napięć, ujawniających się w dwu różnych częściach obwodu. Ilustruje to rys.89.



Rys.89.



Woltomierz  $V_1$  wskaże napięcie  $U_E$ ,

"  $V_2$  " "  $\Delta/2 = J \cdot \frac{R_p}{2}$

"  $V_3$  " "  $U_0 = J \cdot R_0$

"  $V_4$  " "  $\Delta/2 = J \cdot \frac{R_p}{2}$

Suma wskazań woltomierzy  $V_2$  i  $V_4$  (rys. 89.) odpowiada stracie napięcia w przewodach, równej

$$\Delta_p = \Delta/2 + \Delta/2 = J \cdot R_p$$

Oznacza:  $l$  długość linii (długość pojedynczego przewodu) w m,

$q$  przekrój jednego przewodu w  $\text{m}^2$ , a

$\gamma$  przewodność właściwa, to

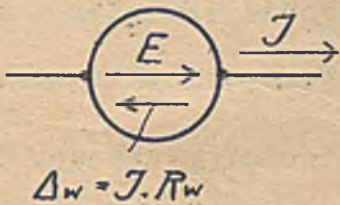
$$\Delta_p = \frac{2J \cdot l}{q \cdot \gamma} \text{ woltów.} \dots \dots \dots (58)$$

Każde źródło prądu ma pewien opór wewnętrzny  $R_w$

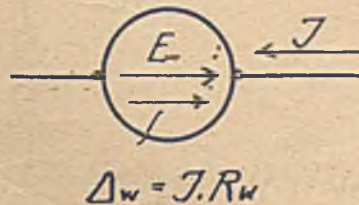
Na przepędzenie prądu  $J$  przez ten opór potrzebne jest, w myśl prawa Ohma, napięcie równe iloczynowi  $J R_w$ . I ten iloczyn nazywać będziemy stratą napięcia, albowiem energja zużyta na pędzenie prądu przez opór źródła ( $R_w$ ) zamienia się bezpożytecznie na ciepło i jest praktycznie stracona. Napiszemy zatem w związku z rys. 90. i 91.

$$\Delta_w = J \cdot R_w \dots \dots \dots (59)$$

i nazywać będziemy  $\Delta_w$  stratą napięcia w źródle prądu.



Rys. 90.



Rys. 91.



W myśl poprzedniego, kierunkowość tego napięcia ( $\Delta_w$ ) należy przyjąć przeciwną do prądu.

Straty napięcia w źródle nie możemy jednakże zmierzyć, gdyż na końcówkach źródła ujawnia się napięcie  $U_E$ , będące wyrazem nie tylko straty  $J \cdot R_w$ , lecz także działania SEM-cznej.

Stratę napięcia w źródle możemy tylko obliczyć. (Patrz dalej, napięcie źródła).

Na rys 90. oznaczona jest kierunkowość  $\Delta_w = J \cdot R_w$  w przypadku, gdy prąd płynie przez źródło w kierunku zgodnym z SEM-czną  $E$ , na rys 91. oznaczona jest kierunkowość  $\Delta_w$  dla przypadku, gdy prąd  $J$  płynie przez źródło w kierunku przeciwnym do  $E$ . W obu wypadkach kierunkowość  $\Delta_w$  jest przeciwna kierunkowości prądu.

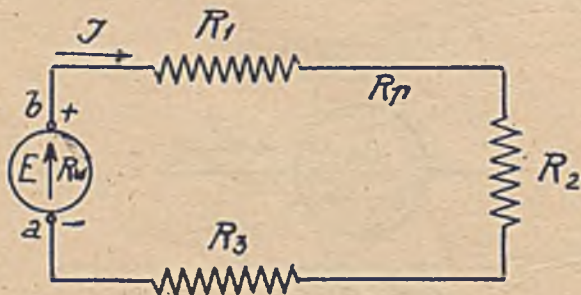
O powyższej zasadzie oznaczania należy pamiętać, tem więcej, że normalnie nie będziemy znaczyli kierunkowości strat napięcia (zarówno tu, w źródłach prądu, jakoteż i odnośnie do przewodów).

DRUGIE PRAWO OHMA.

Natężenie prądu stałego, płynącego w pojedynczym kole, jest wprost proporcjonalne do działającej w niem SEM-cznej, a odwrotnie proporcjonalne do oporności całego koła. ( $R_0$ ).

$$J = \frac{E}{R_0} \dots\dots\dots (60)$$

Prawo to ilustruje rys 92, przyczem oznaczają



- $E$  SEM źródła,
- $R_w$  oporność wewnętrzną źródła,
- $R_1, R_2, R_3$  oporności zewnętrzne,
- $R_p$  oporności przewodów łączących,
- $R_s$  oporności styków.

Rys 92



Oporność całego koła, (w którym płynie prąd  $J$ ), odpowiada sumie tych wszystkich oporności

$$R_0 = R_w + R_1 + R_2 + R_3 + R_p + R_s$$

a prąd  $J$  (jednakowy w każdym elemencie koła) określa wzór

$$J = \frac{E}{R_w + R_1 + R_2 + R_3 + R_p + R_s} \dots \dots \dots (61)$$

Prąd ten płynie w kierunku działania SEM-cznej  $E$ .

W rozważaniach teoretycznych zakładamy zwykle  $R_p = 0$ , i  $R_s = 0$ , a także często  $R_w = 0$ , a to celem uproszczenia analizy. Mamy wtedy na myśli idealne bezoporowe przewody, idealne bezoporowe styki i idealne bezoporowe źródła prądu.

W praktycznych obliczeniach i przy pomiarach uwzględniamy opory  $R_w$ ,  $R_p$  i  $R_s$  tylko wtedy, gdy ich wartości w stosunku do  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  są duże. W innych przypadkach, opory te, zwykle bardzo małe, można pominąć, nie powodują bowiem większych błędów od tych, jakimi obarczone są pomiary napięć i prądów, wykonane zwyczajnymi przyrządami.

Pierwsze prawo Ohma jest prawem eksperymentalnym. Stwierdzono je z dostateczną ścisłością w niezliczonych pomiarach.

Drugie prawo Ohma można wydedukować z pierwszego z pomocą następującego rozumowania:

Na przepędzenie prądu przez każdy opór ( $R$ ) trzeba napięcia  $U_R = J.R$ .

Na przepędzenie prądu przez całe koło o oporności  $R_0$  trzeba będzie zatem napięcia  $U_0 = J.R_0$ .

Ponieważ suma spadków potencjału jest równa sumie skoków potencjału, jak to poprzednio wykazaliśmy, przeto  $U_0 = E$ , stąd równość

$$U_0 = J R_0 = E,$$

z której otrzymujemy wzór

$$J = \frac{E}{R_0}.$$



Słuszność powyższego rozumowania sprawdzić możemy, posiłkując się źródłem o stałej SEM-cznej i stałej oporności wewnętrznej i przeprowadzając doświadczenie łącznie z obliczeniami. Ścisłe i naukowe wyprowadzenie powyższego wzoru da się skutecznie jedynie z pomocą prawa koła napięć, jak to już okazaliśmy poprzednio (wzór 52.)

Uwaga: W związku z powyższym nie rozróżnia się ogólnie dwu praw Ohma, uważając za prawo Ohma jedynie relację

$$J = \frac{U}{R}$$

Relację zaś  $J = \frac{E}{R_0}$  i inne wyprowadzone dalej, traktuje się jako wzory pochodne. Praktyka pedagogiczna wykazuje jednakże tak często nieporozumienia odnośnie do obu tych wzorów, że uważałem za stosowne rozróżnić je od siebie także w nazwie. Pierwsze prawo Ohma odnosi się jedynie do elementów obciążonych opornością, a nie zawierających SEM-cznych, drugie prawo Ohma stosuje się do koła prądu obciążonego oporami i zawierającego SEM-czną.

Napięcie źródła.

Z wzoru (60) wynikają następujące relacje pochodne:

$$R_0 = \frac{E}{J} \dots\dots\dots (62)$$

$$E = J \cdot R_0 \dots\dots\dots (63)$$

Wzór (62) wyraża jak wielką jest oporność całego koła, w którym pod działaniem stałej SEM-cznej E płynie stały prąd J.

Wzór (63) pozwala obliczyć wielkość SEM-cznej E, potrzebnej do pędzenia prądu J w obwodzie o oporności całego koła, równej  $R_0$ .

Rozwijając wzór (63), otrzymamy

$$E = J \cdot R_w + J(R_1 + R_2 + R_3 + R_p + R_g) \dots\dots\dots (64)$$

Suma po prawej stronie (w nawiasie) przedstawia oporność tej części obwodu, która jest przyłączona do końcówek źródła ab (obacz rys.92.)

Oznaczymy ją symbolem  $R_z$  (oporność z e w n ę t r z n a ).

Zastępując opornością  $R_z$  oporności zewnętrzne ( $R_1 + R_2 + R_3 + R_p + R_g$ ) zarówno w układzie (rys.93.) jak i w powyższej równości, otrzymamy



(dla podanych kierunkowości  $E$  i  $J$ )

$$E = J \cdot R_W + J \cdot R_Z$$

lub

$$J \cdot R_Z = E - J \cdot R_W$$

Iloczyn  $J \cdot R_Z$  przedstawia napięcie  $U_Z$  wzdłuż oporu  $R_Z$ , możemy więc napisać

$$U_Z = E - J \cdot R_W$$

Oznacza  $U_E$  napięcie na końcówkach źródła, to w myśl prawa o kole napięć, jest

Rys.93.

$U_E - U_Z = 0$ , czyli  $U_E = U_Z$ , zatem

$$\underline{U_E = E - J \cdot R_W} \dots \dots \dots (65)$$

Napięcie źródła prądu przez które płynie prąd w kierunku z g o d n y m z SEM-czną jest m n i e j s z e od tej SEM-cznej o stratę napięcia  $J \cdot R_W$  wewnątrz źródła.

Przypadkowi temu odpowiada rys.94. Jak widać można tu ustawić równanie

$$U_E - E + J \cdot R_W = 0,$$

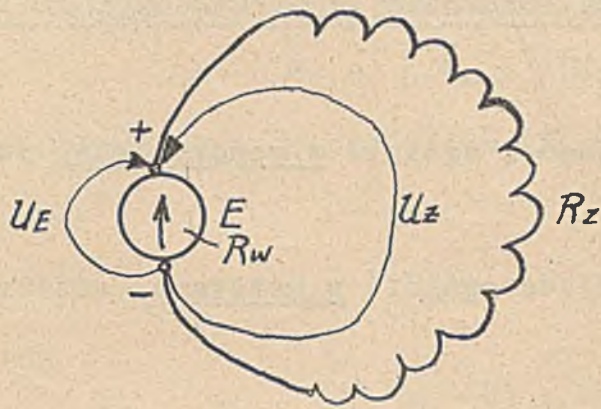
które otrzymamy, stosując prawo koła napięć do wielkości  $U_E$ ,  $E$  i  $\Delta = J \cdot R_W$  z uwzględnieniem ich kierunkowości.

Dla przypadku przedstawionego na rys.95 napiszemy więc

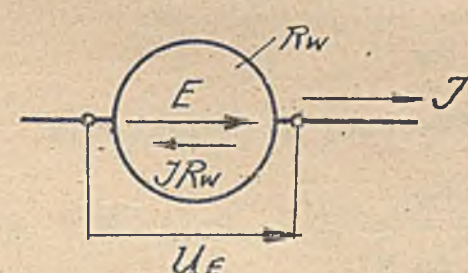
$$U_E - E - J \cdot R_W = 0,$$

skąd

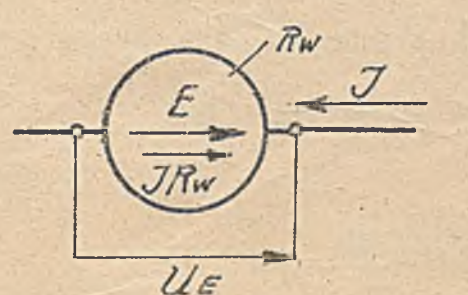
$$\underline{U_E = E + J \cdot R_W} \dots \dots \dots (66)$$



Rys.94.



Rys.95.





Napięcie źródła prądu, przez które płynie prąd w kierunku przeciwnym do SEM-cznej jest większe od tej SEM-cznej o stratę napięcia  $JR_w$  wewnątrz źródła.

Wypadek pierwszy  $U_E = E - J.R_w$  zachodzi ogólnie w generatorach dostarczających energii do obwodu.

Wypadek drugi  $U_E = E + J.R_w$  ma miejsce ogólnie w motorach, odbierających energję z obwodu.

Gdy  $J = 0$  jest w obu przypadkach

$$U_E = E \dots\dots\dots (67)$$

Napięcie źródła bez prądu równa się jego SEM-cznej.

Z równości

$$E = J.R_w + J.R_z, \text{ czyli } E - J.R_w = J.R_z,$$

lub

$$U_E = U_z$$

wynika, że napięcie na końcówkach źródła prądu można obliczyć albo uwzględniając opór zewnętrzny  $R_z$ ,

$$U_z = J.R_z$$

lub też uwzględniając SEM-czną i opór wewnętrzny  $R_w$ ,

$$U_E = E - J.R_w$$

(kierunek prądu  $J$  zgodny z kierunkiem SEM-cznej  $E$ ), względnie

$$U_E = E + J.R_w$$

(kierunek prądu  $J$  przeciwnie skierowany do  $E$ ).



Prawo koła napięć w zastosowaniu do obwodu prądu stałego.

Wykonując działanie naznaczone w równaniu

$$E = J.R_w + J(R_1 + R_2 + R_3)$$

z pominięciem oporów przewodów ( $R_p = 0$ ) i oporów stykowych ( $R_s = 0$ ),  
otrzymamy

$$E - J.R_w = J.R_1 + J.R_2 + J.R_3 ,$$

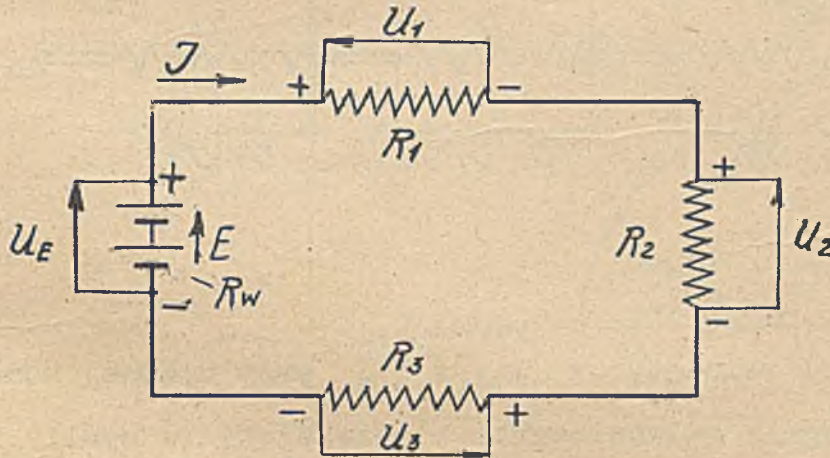
lub

$$U_E - U_1 - U_2 - U_3 = 0$$

$$\underline{\sum(U) = 0}$$

Równanie to wyraża, że suma napięć w zamkniętym kole równa się zeru.

Jest to prawo koła napięć w odniesieniu do obwodu prądu stałego, przy-  
czem uwzględniane są napięcia torów poprowadzonych wzdłuż obwodu (rys.96).



Rys. 96.

Zgodnie z podanymi na  
rys.96. kierunkowościami  
napięć położymy:

$$U_1 = J.R_1, \quad U_2 = J.R_2$$

$$U_3 = J.R_3$$

Z poprzedniego równania  
wynikają wzory, poznane  
już poprzednio:

$$U_E = E - J.R_w = J.R_2 = J(R_1 + R_2 + R_3) \dots\dots\dots (68)$$

Równości te wskazują, że napięcie źródła  $U_E$  można obliczyć w dwojaki  
sposób, o czym już zresztą poprzednio mówiliśmy.

Wstawmy w poprzednie równanie  $U_E = E - J.R_w$ , to otrzymamy

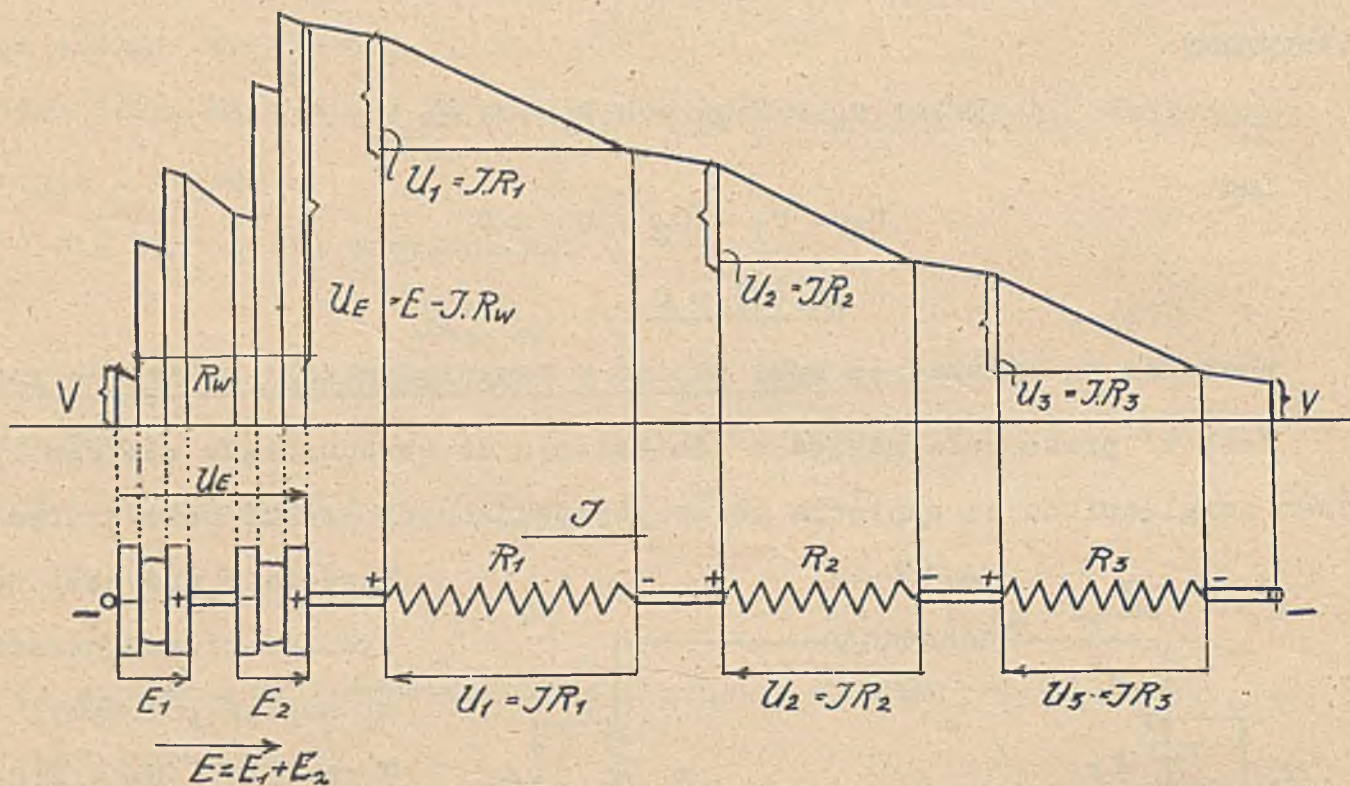
$$E - \Delta_w - U_1 - U_2 - U_3 = 0$$

czyli ogólnie

$$\underline{\sum(E, U) = 0}$$



Przedstawiając  $E$  w formie skoków potencjału, a iloczyny  $U_n = J \cdot R$  jako spadki potencjałów (analogicznie do rys.84. i 85.), otrzymamy wykres po-  
dany na rys.97.



Rys.97.

Obwód na rys.97. (u dołu) rozcięty w myśl i przy ujemnej końcówce baterji, złożonej z dwu ogniw galwanicznych i rozwinięty (w myśli) linjowo (dla lepszego zilustrowania przebiegu zmian potencjału) wykazuje wzdłuż przewodników spadki potencjałów (linje ukośne), a na stykach (w ogniwach) skoki potencjałów (linje prostopadłe). Potencjał urojonego miejsca rozcięcia przyjmujemy równy  $V$ . Jak wielki jest ten potencjał w to nie wchodzimy, jest to bowiem dla przebiegu linii łamanej przedstawiającej skoki potencjału i spadki napięć zupełnie obojętne. Gdy biegun ujemny baterji uziemimy, będzie  $V = 0$ , gdy go połączymy z przewodnikiem o potencjale  $V_p$ , będzie  $V = V_p$ .



Drugie prawo Ohma w zastosowaniu do obwodów z kilkoma SEM-cznymi.

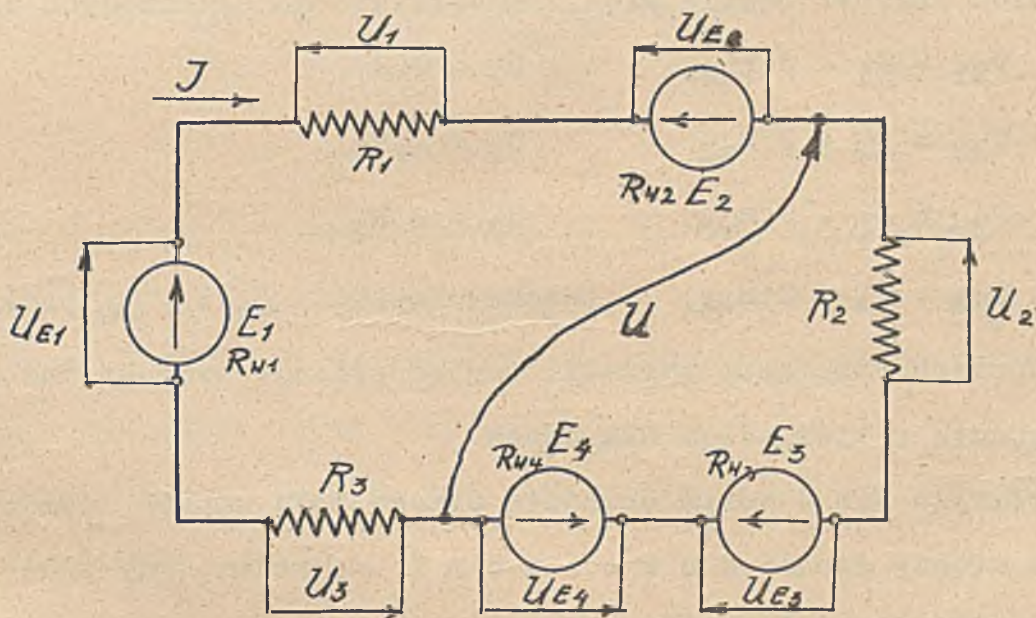
Rozumowanie przeprowadzone poprzednio dla koła prądu zawierającego jedną SEM-czną można odnieść także do obwodu zawierającego kilka SEM-yh. Otrzymamy wtedy relację

$$J = \frac{\sum(E)}{\sum R} \dots\dots\dots (69)$$

która zastosowana n.p. do obwodu przedstawionego na rys.98. daje równanie

$$J = \frac{E_1 - E_2 + E_3 - E_4}{R_{w1} + R_{w2} + R_{w3} + R_{w4} + R_1 + R_2 + R_3}$$

(Oporności przewodów i styków pominięte).



Rys.98.

SEM-czne zgodne z kierunkiem prądu należy wstawić ze znakiem dodatnim, SEM-czne przeciwne do prądu, ze znakiem ujemnym.

Strzałkę prądu orjentować należy w kierunku p r z e w a ż a j ą = c e g o działania elektromotorycznego.

Przykład: Gdy  $E_1 = 100V$ ,  $E_2 = 30V$ ,  $E_3 = 50V$ ,  $E_4 = 20V$ , przeważa działanie w kierunku oznaczonym na rys.98. strzałką J.



Działanie motoryczne w tę stronę wynosi

$$100 - 30 + 50 - 20 = 100 \text{ woltów.}$$

W obwodzie płynie więc taki prąd, jak gdyby działała w nim jedna SEM-czna ( w y p a d k o w a ) o kierunku  $E_1$  i wartości 100 wolt.

Suma w liczniku wzoru (69) przedstawia zatem SEM-czną wypadkową, a kierunek prądu  $J$  w obwodzie jest zgodny z kierunkiem działania tej wypadkowej.

Napięcia poszczególnych elementów obwodu na rys.98. obliczymy w myśl poprzednich wzorów. Będzie więc, odpowiednio do oznaczonych kierunkowości:

$$\begin{aligned} U_{E1} &= E_1 - J.R_{w1}, & U_1 &= J.R_1, \\ U_{E2} &= E_2 + J.R_{w2}, & U_2 &= J.R_2, \\ U_{E3} &= E_3 - J.R_{w3}, & U_3 &= J.R_3, \\ U_{E4} &= E_4 + J.R_{w4}, & & (\text{Straty napięć } \Delta_p \text{ i } \Delta_s \text{ pomijamy}) \end{aligned}$$

Na oporach oznaczamy strzałki napięć przeciw prądowi, na źródłach prądu zgodnie z kierunkiem SEM-czych.

Posiłkując się w takim obwodzie prawem koła napięć, możemy obliczyć napięcie między dwoma dowolnymi punktami, gdy znane są napięcia poszczególnych elementów.

Przykład: Napięcie  $U$  dla oznaczonej na rys.98. kierunkowości obliczymy z relacji

$$\begin{aligned} & U + U_{E2} + U_1 - U_{E1} + U_3 = 0, \\ \text{skąd} & \quad U = \underline{U_{E1} - U_1 - U_{E2} - U_3} \end{aligned}$$

albo z relacji

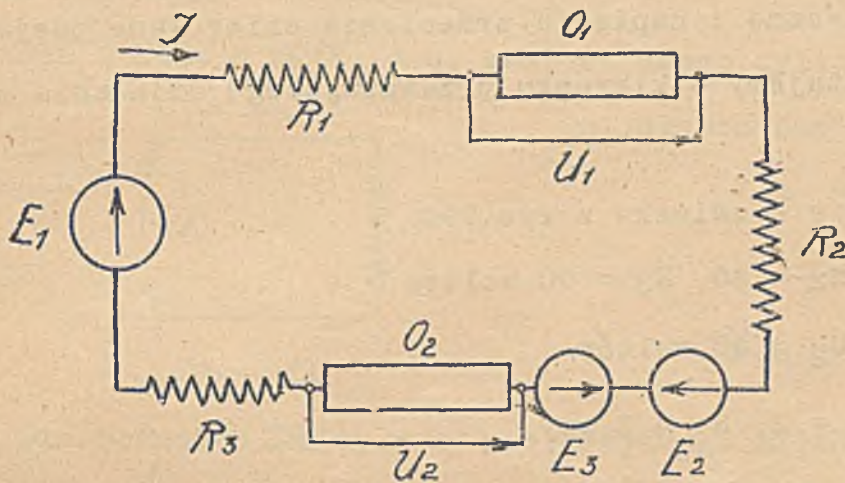
$$\begin{aligned} & U - U_2 + U_{E3} - U_{E4} = 0, \\ \text{skąd} & \quad U = \underline{U_2 - U_{E3} + U_{E4}} \end{aligned}$$

(W obliczeniu tem widoczne są korzyści strzałkowania napięć).



Ogólna postać prawa Ohma.

Idąc jeszcze dalej w kierunku uogólnienia prawa Ohma, rozpatrzmy obwód prądu stałego, przedstawiony na rys.99.



Rys.99.

Obwód ten składają trzy SEM-czne  $E_1, E_2, E_3$ , o podanych kierunkach działania (strzałki), dwa elementy  $O_1$  i  $O_2$  o nieznanymi właściwościach, na końcówkach których ujawniają się napięcia  $U_1$  i  $U_2$  o wskazanych kierunkowościach (strzałki), oraz trzy opory  $R_1, R_2$  i  $R_3$ .

Przypuśćmy, że w obwodzie tym płynie prąd w kierunku strzałki  $J$ , możemy zatem napisać

$$E_1 - J \cdot R_1 + U_1 - J \cdot R_2 + E_2 - E_3 - U_2 - J \cdot R_3 = 0$$

lub

$$E_1 + E_2 - E_3 + U_1 - U_2 = J(R_1 + R_2 + R_3)$$

skąd

$$J = \frac{E_1 + E_2 - E_3 + U_1 - U_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

lub ogólnie

$$J = \frac{\sum (E, U)}{\sum R} \dots \dots \dots (70)$$

Ostatnie równanie jest n a j o g ó l n i e j s z ą postacią prawa Ohma i mieści w sobie wszystkie poprzednie relacje.



Będziemy je więc nazywać o g ó l n e m prawem Ohma w przeciwstawieniu do poprzednio podanych s z c z e g ó l n y c h praw Ohma.

Przy tworzeniu sumy  $\sum(E,U)$  we wzorze (70) należy traktować SEM-czne (E) i napięcia (U) w jednakowy sposób: SEM-czne i napięcia (U) zgodnie skierowane dodajemy, SEM-czne i napięcia przeciwnie skierowane odejmujemy.

Strzałkę prądu orientujemy w kierunku przeważającego działania sumy E i U, czyli  $\sum(E,U)$ .

Przykład: Niech będzie w związku z rys.99.

$$E_1 = 100, E_2 = 30, E_3 = 50 \text{ woltów}$$

$$U_1 = 200, U_2 = 40 \text{ woltów}$$

$$R_1 = 1, R_2 = 2, R_3 = 3 \text{ omy,}$$

$$\sum(E,U) = E_1 + E_2 - E_3 + U_1 - U_2 =$$

$$= 100 + 30 - 50 + 200 - 40 = + 240 \text{ V.}$$

Wypadkowe działanie wynosi więc 240V i skierowane jest zgodnie z  $E_1$ .

$$\sum R = R_1 + R_2 + R_3 = 1 + 2 + 3 = \underline{6 \Omega}$$

(oporności wewnętrzne źródeł, oporności przewodów i styki pominięte).

$$J = \frac{\sum(E,U)}{\sum R} = \frac{240}{6} = \underline{\underline{40}} \text{ amp.}$$

a prąd ten płynie w kierunku  $E_1$  czyli w kierunku oznaczonym na rys.99. strzałką J.



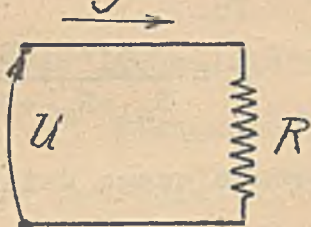
Zestawienie wzorów na prawo Ohma.

Z relacji

$$J = \frac{\sum(E, U)}{\sum R}$$

odpowiadającej o g ó l n e m u prawu Ohma wynikają wszystkie równania, podane poprzednio. I tak:

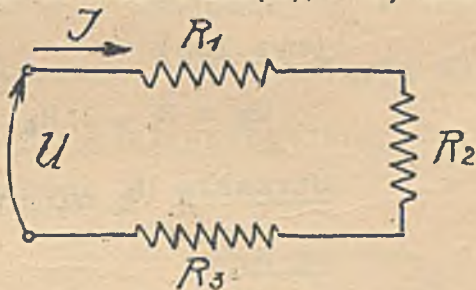
- 1) Dla obwodu o  $\sum(E) = 0$ , zawierającego tylko jeden opór  $R$ , poddany działaniu napięcia  $U$  (rys.100), jest



Rys.100.

$$J = \frac{U}{R}$$

- 2) Dla obwodu o  $\sum(E) = 0$ , zawierającego kilka oporów ( $R_1, R_2, R_3$ ),



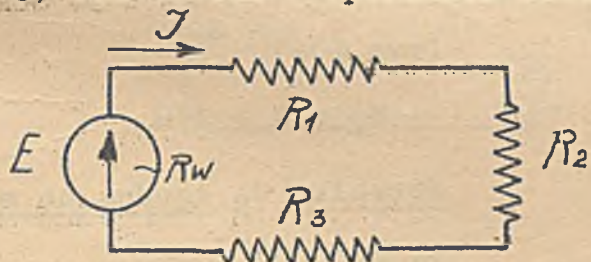
Rys.101.

poddanych działaniu napięcia  $U$  (rys.101), będzie

$$J = \frac{U}{\sum R}$$

Tu 
$$J = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$$

- 3) Dla obwodu o oporności całego koła  $R_0 = \sum R$ , zawierającego jedną



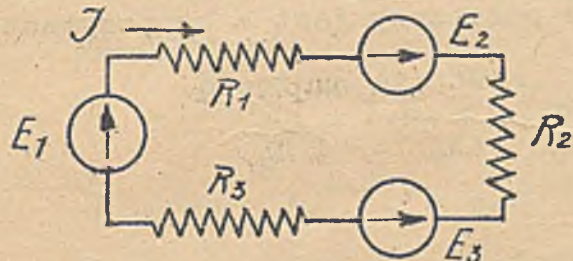
Rys.102.

SEM-czną  $E$  (rys.102), napiszemy

$$J = \frac{E}{R_0} = \frac{E}{\sum R}$$

Tu 
$$J = \frac{E}{R_w + R_1 + R_2 + R_3}$$

- 4) Dla obwodu o oporności całego koła  $R_0 = \sum R$ , zawierającego kilka



Rys.103.

SEM-cznych (rys.103), położymy

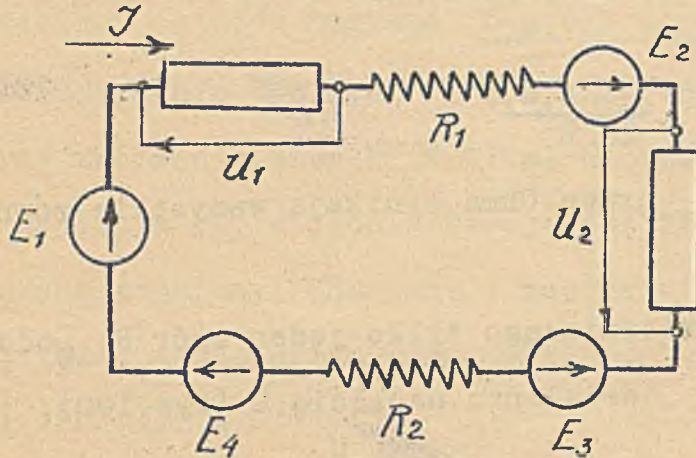
$$J = \frac{\sum(E)}{\sum R}$$

Tu 
$$J = \frac{E_1 + E_2 - E_3}{R_{w1} + R_{w2} + R_{w3} + R_1 + R_2 + R_3}$$

Strzałkę  $J$  orientujemy w kierunku przeważającego działania  $\sum(E)$ .



5) Wreszcie dla obwodu złożonego ze źródeł prądu o kilku SEM-cznych



Rys.104.

i kilku oporach, zawierają-  
cego pozatem elementy o napięciach  $U$  (rys.104), napięszemy

$$J = \frac{\sum (E, U)}{\sum R}$$

Tu

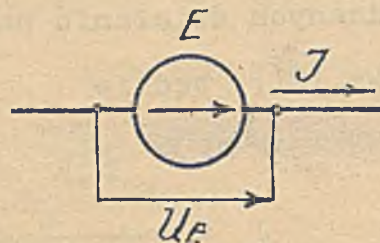
$$J = \frac{E_1 - U_1 + E_2 + U_2 - E_3 + E_4}{R_{w1} + R_{w2} + R_{w3} + R_{w4} + R_1 + R_2}$$

Strzałkę  $J$  orientujemy w kierunku przeważającego działania  $\sum (E, U)$ .

W odniesieniu do źródeł prądu, prawo Ohma daje relacje:

a) Przy przepływie prądu przez źródło w kierunku zgodnym z SEM-czną

(rys.105)



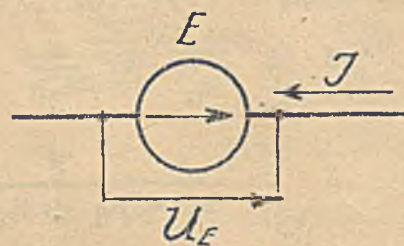
Rys.105.

$$U_E = E - J \cdot R_w$$

Strzałka  $U_E$  zgodna ze strzałką  $E$ .

b) Przy przepływie prądu przez źródło w kierunku przeciwnym do SEM-cznej

(rys.106)



Rys.106.

$$U_E = E + J \cdot R_w$$

Strzałka  $U_E$  zgodna ze strzałką  $E$ .

Wszędzie tam, gdzie przepływ prądu połączony jest z bezpożyteczną stratą energii, nazywamy iloczyn  $\Delta = J \cdot R$  stratą napięcia.

Poznaliśmy stratę napięcia w źródle:  $\Delta_w = J \cdot R_w$

i stratę napięcia w przewodach:  $\Delta_p = J \cdot R_p$

Wzory powyższe można stosować bez zastrzeżeń jedynie do obwodów prądu

stałego w stanie stacjonarnym (ustalonym).



Przykłady zastosowania prawa Ohma.

- Przez żarówkę 110-woltową, 50-świecową, załączoną na 110V płynie prąd 1/2 A; jaką oporność ma wtedy żarówka ?

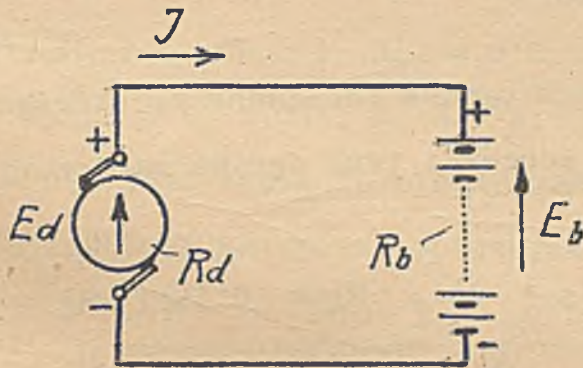
$$R = \frac{U}{J} = \frac{110}{0.5} = 220 \Omega$$

Uwaga: W stanie zimnym (gdy żarówka nie świeci) oporność jej wynosi zaledwie kilkanaście  $\Omega$ .

- Na końcówki akumulatora o SEM-cznej  $E = 2$  wolty i oporze wewnętrznym  $R_w = 0.1 \Omega$ , załączono opór  $R_z = 0.4 \Omega$ ; obliczyć natężenie prądu płynącego w tym kole.

$$J = \frac{E}{R_0} = \frac{E}{R_w + R_z} = \frac{2}{0.1 + 0.4} = \frac{2}{0.5} = 4 \text{ amp.}$$

- Dynamo o SEM-cznej  $E_d = 120V$  i oporności wewnętrznej  $R_d = 0.03 \Omega$ , połączone jest z baterją akumulatorów o całkowitej SEM-cznej  $E_b = 115V$  i oporności wewnętrznej  $R_b = 0.02 \Omega$  w sposób uwidoczniiony na rys.107.



Obliczyć natężenie prądu płynącego w kole.

$$J = \frac{\sum E}{\sum R} = \frac{E_d - E_b}{R_d + R_b} = \frac{120 - 115}{0.03 + 0.02} = \frac{5}{0.05} = 100 \text{ amp.}$$

Uwaga: Oporności przewodów łączących i styków (jako bardzo małe) pominięto. Magnesów dynamo nie uwzględniono.

Rys.107.

- Obliczyć w powyższym (3) przykładzie napięcie dynamo ( $U_d$ ) i napięcie akumulatorów.

$$U_d = E_d - J.R_d = 120 - 100.0.03 = 120 - 3 = 117V,$$

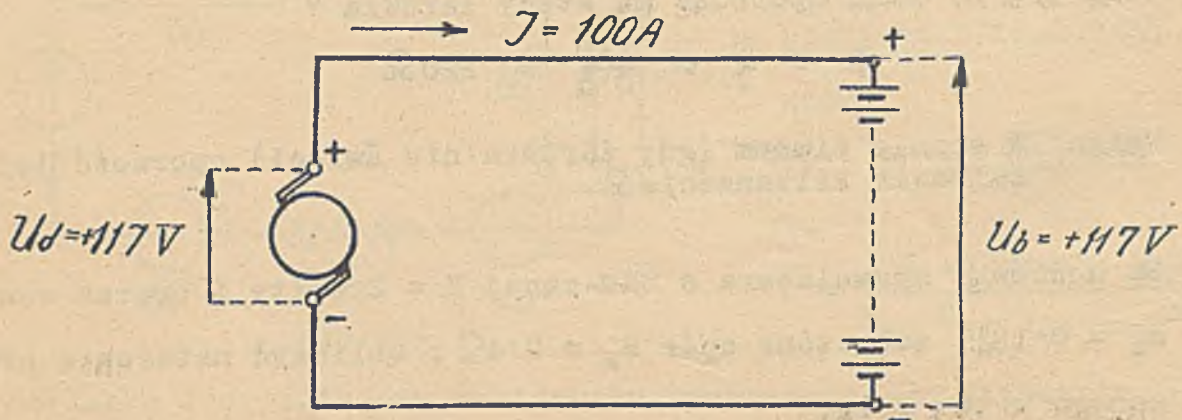
$$U_b = E_b + J.R_b = 115 + 100.0.02 = 115 + 2 = 117V.$$

Uwaga: Napięcie maszyny wypadło tu równe napięciu akumulatorów, bo pominięliśmy oporność przewodów łączących.



Oznaczyć kierunkowości napięć  $U_d$  i  $U_b$ .

Dla dodatnich wartości  $U$  orjentujemy grot ku punktowi o wyższym potencjale. Strzałki  $U_d$  i  $U_b$  oznaczmy więc w sposób podany na rys.108.



Rys.108.

Kierunkowość  $+U_d$  jest zgodna z prądem, zatem napięcie maszyny można uważać za akcję. Kierunkowość  $+U_b$  jest przeciwną prądowi, zatem napięcie baterji reprezentuje reakcję. W wypadku przedstawionym, dynamo ładuje baterję akumulatorów.

5. Obliczyć napięcie na końcówkach ogniwa Leclanche'a, którego SEM-czna  $E = 1.5V$ ,  $R_w = 0.5\Omega$ , gdy na końcówki tego ogniwa załączamy kolejno różne opory:

$$R_1 = 4.5\Omega, \quad R_2 = 1.5\Omega, \quad R_3 = 1\Omega, \quad R_4 = 0.5\Omega, \quad R_5 = 0.$$

Rozwiązanie:

Uwzględniając, że  $J = \frac{E}{R_0} = \frac{E}{R_w + R_z}$ , a  $U = E - J \cdot R_w$ ,

znajdziemy

$$J_1 = \frac{1.5}{0.5 + 4.5} = \frac{1.5}{5} = 0.3 \text{ A}, \quad U_1 = 1.5 - 0.3 \cdot 0.5 = 1.35 \text{ V},$$

$$J_2 = \frac{1.5}{0.5 + 1.5} = \frac{1.5}{2} = 0.75 \text{ A}, \quad U_2 = 1.5 - 0.75 \cdot 0.5 = 1.125 \text{ V},$$

$$J_3 = \frac{1.5}{0.5 + 1} = \frac{1.5}{1.5} = 1 \text{ A}, \quad U_3 = 1.5 - 1 \cdot 0.5 = 1 \text{ V},$$

$$J_4 = \frac{1.5}{0.5 + 0.5} = \frac{1.5}{1} = 1.5 \text{ A}, \quad U_4 = 1.5 - 1.5 \cdot 0.5 = 0.75 \text{ V},$$

$$J_5 = \frac{1.5}{0.5} = 3 \text{ A}, \quad U_5 = 1.5 - 3 \cdot 0.5 = 0 \text{ V}.$$



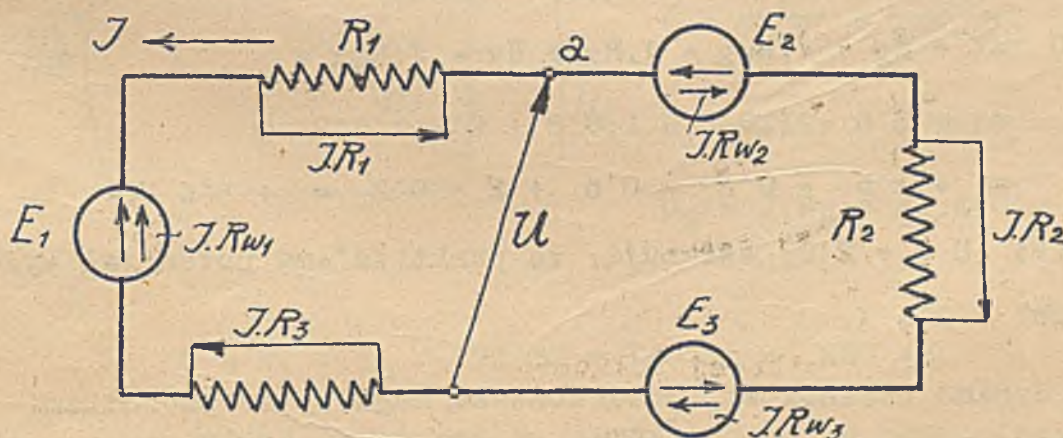
Z powyższego obliczenia widać, że zmniejszanie oporu zewnętrznego ( $R_Z$ ) powoduje powiększenie prądu od  $J = 0$  ( $R_Z = \infty$ ) do  $J_{\max} = 3 \text{ A}$  ( $R_Z = 0$ ), a zmniejszanie napięcia na końcówkach ogniwa od  $U = E = 1.5 \text{ V}$ , do  $U = 0$  ( $R_Z = 0$ ).

Załączenie na końcówki oporu  $R_Z = 0$  nazywamy zwarcie ogniwa. Przy zwarcie jest  $E = J \cdot R_W$ , a prąd ogniwa osiąga maksymalną wartość (tu  $J = 3 \text{ A}$ ), uwarunkowaną (przy danej SEM-cznej) wielkością oporności wewnętrznej ogniwa

$$J_{\text{zwarcia}} = \frac{E}{R_W}, \quad U_{\text{zwarcia}} = 0$$

Wypada jednak zaznaczyć, że SEM-czna ogniwa nie jest stała, tylko ulega zmniejszaniu w miarę wzrostu prądu (Patrz dalej „Polaryzacja ogniw”).

6. Trzy ogniwa o SEM-cznych  $E_1 = 1$ ,  $E_2 = 1.5$ ,  $E_3 = 2$  wolt i opornościach wewnętrznych  $R_{W1} = 0.1$ ,  $R_{W2} = 0.2$ ,  $R_{W3} = 0.2 \Omega$ , połączone są w szeregu z oporami  $R_1 = 0.4$ ,  $R_2 = 0.6$ ,  $R_3 = 1 \Omega$  w sposób wskazany na rys. 109. - Obliczyć napięcie między punktami „a” i „b” i podać, która z tych końcówek ma wyższy potencjał.



Rys. 109.

Rozwiązanie:

Obliczamy najprzód  $\sum(E)$  i  $\sum(R)$ , następnie ustalamy kierunek wypadkowego działania EM-cznego i zgodnie z niem orientujemy strzałkę prądu.



Strzałkę napięcia  $U$  oznaczamy dowolnie (tu grot zwracamy ku punkto= wi „a”).

$$\sum E = + E_1 - E_2 - E_3 = 1 - 1 \cdot 5 - 2 = - 2 \cdot 5 \text{ V.}$$

Zatem wypadkowe działanie jest skierowane przeciwnie do  $E_1$ .

$$\begin{aligned} \sum R &= R_1 + R_2 + R_3 + R_{w1} + R_{w2} + R_{w3} = \\ &= 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 + 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 2 \cdot 5 \Omega, \end{aligned}$$

$$J = \frac{\sum E}{\sum R} = \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 5} = 1 \text{ A.}$$

Napięcie  $U_{ab}$  można obliczyć, stosując prawo koła napięć, w dwojaki sposób:

a) Koło napięć dla lewej części obwodu:

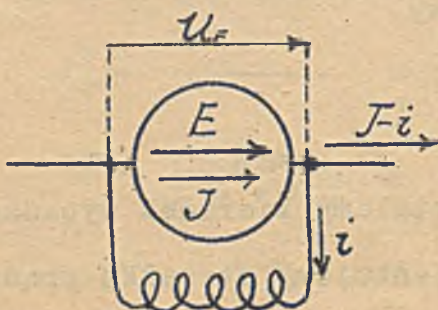
$$\begin{aligned} U - J \cdot R_1 - E_1 - J \cdot R_{w1} - J \cdot R_3 &= 0 \\ U &= + J \cdot R_1 + E_1 + J \cdot R_{w1} + J \cdot R_3 = \\ &= 1 \cdot 0 \cdot 4 + 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \\ &= 0 \cdot 4 + 1 + 0 \cdot 1 + 1 = + 2 \cdot 5 \text{ V.} \end{aligned}$$

b) Koło napięć dla prawej części obwodu:

$$\begin{aligned} U - E_2 + J \cdot R_{w2} + J \cdot R_2 - E_3 + J \cdot R_{w3} &= 0 \\ U &= + E_2 - J \cdot R_{w2} - J \cdot R_2 + E_3 - J \cdot R_{w3} = \\ &= + 1 \cdot 5 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 6 + 2 - 1 \cdot 0 \cdot 2 = \\ &= + 1 \cdot 5 - 0 \cdot 2 - 0 \cdot 6 + 2 - 0 \cdot 2 = + 2 \cdot 5 \text{ V.} \end{aligned}$$

Oba wyniki ( $U = + 2 \cdot 5$ ) wskazują, że punkt „a” ma potencjał wyższy od „b” o  $2 \cdot 5 \text{ V}$ .

7. W maszynie dynamo bocznikowej połączone są magnesy ze szczotkami



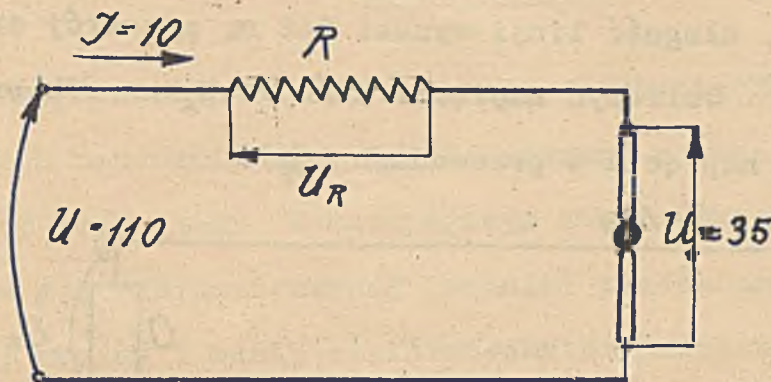
Rys.110.

(rys.110). SEM-czna maszyny  $E = 110 \text{ V}$ , oporność wewnętrzna  $R_w = 0 \cdot 1 \Omega$ , oporność magnesów  $R_m = 50 \Omega$ . Maszyna wydaje prąd  $J = 100 \text{ A}$ . Obliczyć prąd w magnesach ( $i$ )  
 $U_\epsilon = E - J \cdot R_w = 110 - 100 \cdot 0 \cdot 1 = 100 \text{ V}$

$$i = \frac{U_\epsilon}{R_m} = \frac{100}{50} = 2 \text{ A.}$$



8. Łuk lampy łukowej ma napięcie 30V przy prądzie 10 A. Lampa załączona



jest na napięciu (sieci)

$U = 110 \text{ V}$  (rys.111.).

Obliczyć oporność  $R$  opornika połączonego w szereg z lampą.

$$U - U_R - U_L = 0,$$

$$U_R = U - U_L = 110 - 30 =$$

$$= 80 \text{ V.}$$

Rys.111.

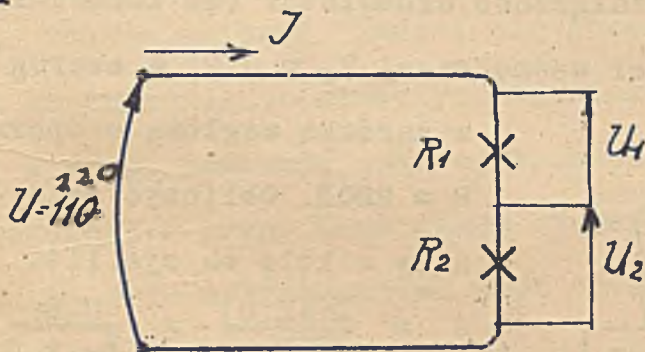
$$R = \frac{U_R}{J} = \frac{80}{10} = \underline{8 \Omega}$$

Opornik taki, załączony w szereg z lampą, „zużyje”

$$U_R = J \cdot R = 10 \cdot 8 = \underline{80 \text{ V}}$$

Reszta pozostaje do dyspozycji lampy. (30 woltów).

9. Dwie żarówki węglowe, jedna o oporności  $R_1 = 220 \Omega$ , druga o oporności  $R_2 = 440 \Omega$ , połączone w szereg na napięciu 220 V, (rys.112.). Jakie napię-



cia ( $U_1, U_2$ ) ujawnią się na każdej z tych żarówek ?

$$J = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{220}{220 + 440} = \frac{220}{660} = \frac{1}{3} \text{ A.}$$

$$U_1 = J \cdot R_1 = \frac{1}{3} \cdot 220 = 73.33 \text{ V,}$$

$$U_2 = J \cdot R_2 = \frac{1}{3} \cdot 440 = 146.66 \text{ V.}$$

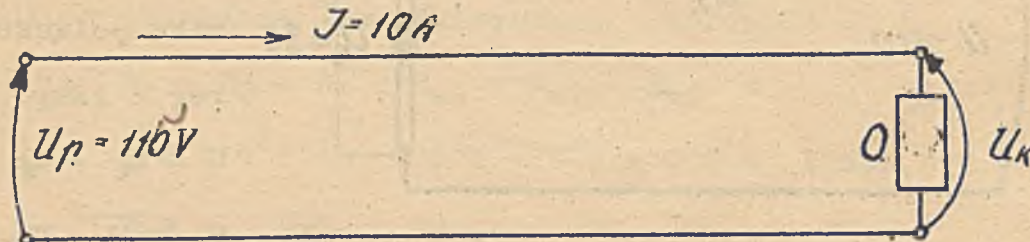
Rys.112.

$$U = U_1 + U_2 = 73.33 + 146.66 = 220 \text{ V,}$$

**Uwaga:** Jak widać, wystąpią na żarówkach różne napięcia. Jeżeli te są żarówki 110 woltowe, to żarówka o większej oporności otrzyma większe napięcie i ulegnie przepaleniu. W szereg wolno łączyć tylko żarówki (tego samego woltażu), o jednakowych opornościach.



10. Na początku linii zasilającej odbiornik „O” prądem  $J = 10 \text{ A}$ , jest napięcie  $U_p = 115 \text{ V}$ , długość linii wynosi  $342 \text{ m}$ , przekrój drutu miedzianego  $q = 10 \text{ m}^2$ . Obliczyć napięcie końcowe  $U_k$  na odbiorniku O (rys.113.) i stratę napięcia w przewodach ( $\Delta_p$ ).



Rys.113.

$$\text{Oporność linii } R_l = \frac{2 \cdot l}{q \cdot \gamma} = \frac{2 \cdot 342}{10 \cdot 57} = 1.2 \Omega.$$

$$\text{Strata napięcia w linii } \Delta_l = J \cdot R = 10 \cdot 1.2 = 12 \text{ volt.}$$

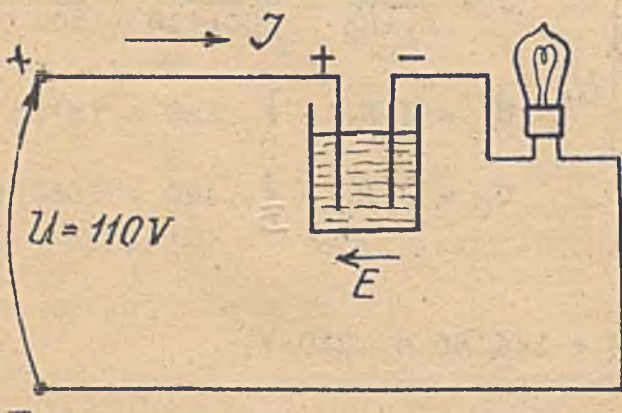
$$U_k = U_p - \Delta_l = 115 - 12 = \underline{103 \text{ V.}}$$

Na końcu linii (na końcówkach odbiornika) ujawnia się napięcie 103V.

Strata napięcia w przewodach wynosi 12 V.

11. Na końcówki o napięciu  $110 \text{ V}$  załączono akumulator (do ładowania) o SEM-cznej  $E = 2 \text{ V}$  o oporności wewnętrznej  $R_w = 0.2$  w szereg

z żarówką węglową o oporności  $R = 220 \Omega$ . Obliczyć prąd  $J$  płynący w kole na rys.114.



$$J = \frac{\sum (E \cdot U)}{\sum R} = \frac{U - E}{R_w + R} =$$

$$= \frac{110 - 2}{0.2 + 220} \approx \frac{108}{220 \cdot 2} = 4.9 \text{ A}$$

Rys.114.

Uwaga: Widać tu, że oporność wewnętrzną akumulatora można pominąć.



Uwagi końcowe.

Zwyczajnie rozpoczyna się naukę elektrotechniki wprost od prawa Ohma. Ten sposób nauczania mógł być tolerowany w czasach, gdy dominowały urządzenia na prąd stały. W dzisiejszym stanie rzeczy, gdy w naszych oczach dokonywa się olbrzymi rozwój techniki prądów zmiennych i szybkozmiennych (radio), musimy i naukę elektrotechniki dostosować do wymagań czasu.

Dostosowanie to polegać musi - że się tak wyrażę - na  $z m a x w e l = l i z o w a n i u$  pojęć i analizy.

Nie wystarcza uznawać (w duchu) teorii Maxwella, lecz trzeba ją także stosować. Gdzie tylko można, należy uwzględniać pole elektryczne i przeprowadzać analizę z uwzględnieniem praw pola. Zaczynając od prawa Ohma, musielibyśmy z konieczności operować różnicą potencjałów. Różnica ta nawet przy nadaniu jej nazwy napięcia, utrwaliłaby się w naszym umyśle jako coś zależnego jedynie od stanu punktów, do których przyłączamy przewody woltomierza i uniemożliwiłoby dalsze głębsze traktowanie rzeczy. Tego trzeba unikać, jeżeli nie chcemy popaść w błędy, lub utrudnić sobie zrozumienie podstawowych zjawisk.

Pragnąc uchronić dzisiejszych elektryków od błędzenia po manowcach, poprzedziłem prawo Ohma całym szeregiem rozważań natury ogólnej, które mają na celu ochronę przed zbyt  $g a l w a n i c z n e m$  pojmowaniem napięcia, jakie z biegiem lat, od czasu Galvaniego i Volty, zagnieździło się w umysłach elektryków praktycznych.

Mówiąc o napięciu, będziemy stale przypominać, że pod wielkością tą należy rozumieć całkę linjową natężenia pola elektrycznego, rozpościerającego się w okół każdego obwodu, oraz, że tylko w obwodach prądów stałych całka ta jest równa różnicy potencjałów, i może być mierzona woltomierzem bez zastrzeżeń.

Dotychczas zbyt jednostronnie uwzględnialiśmy w Elektrotechnice jedynie pole magnetyczne, dochodząc szczególnie w indukcji elektromagnetycznej do rażących nieścisłości, jak to jeszcze w dalszym ciągu wykażemy.



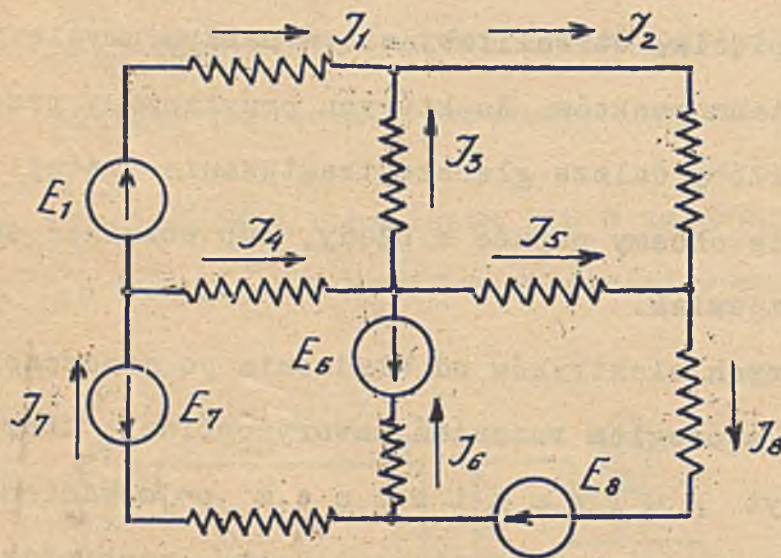
## 2. Prawa Kirchhoffa.

### Obwód złożony, czyli sieć.

Z pomocą praw Ohma można operować jedynie na obwodach prostych, lub na częściach obwodów złożonych (prądu stałego). Całkowite opanowanie obwodów złożonych (prądu stałego) wymaga wprowadzenia dwu dalszych praw, które zawdzięczamy Kirchhoffowi (1845).

Obwód złożony prądu stałego to zespół elementów, obarczonych opornościami ( $R$ ), z których niektóre (lub wszystkie) zawierają po jednym (lub więcej) źródle prądu stałego. Poszczególne elementy połączone są ze sobą w „węzłach” i tworzą „oczka” na podobieństwo sieci; stąd nazwa „sieć elektryczna” dla obwodu złożonego.

Obwód n.p. przedstawiony na rys.115. tworzy sieć o 5 węzłach, 4 oczkach i zawiera 8 elementów, z których tylko



Rys.115.

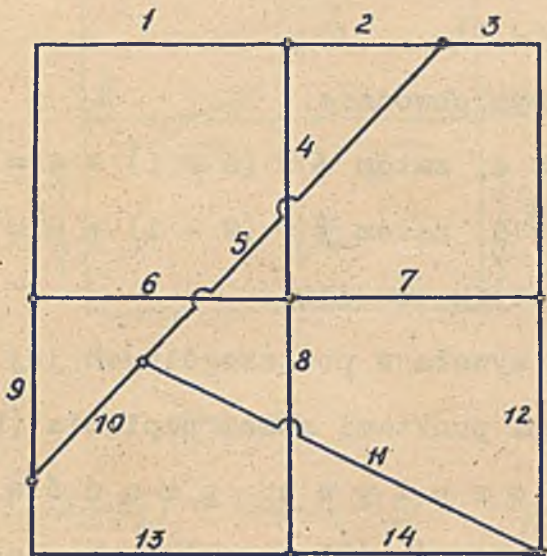
nie SEM-cznych i oporności pominięto. I w takim obwodzie jednak wskażemy bez trudności węzły (tu jest ich 9), a tylko co do ilości i oznaczenia oczek, mogą wystąpić pewne wątpliwości.

Rozproszymy je, pamiętając, że każde oczko ograniczone być musi wielobokiem zamkniętym, utworzonym z elementów sieci. Oznaczając napróżd

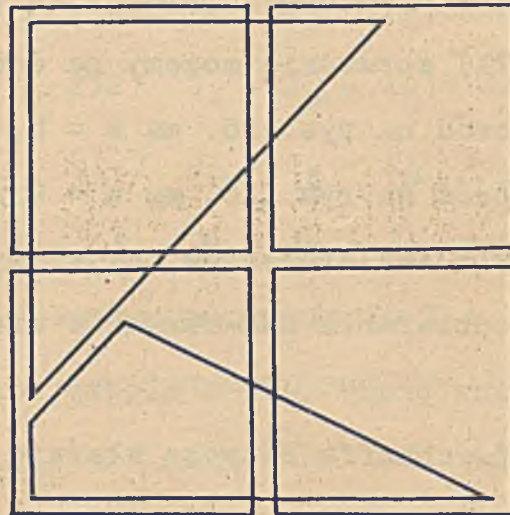
kach i zawiera 8 elementów, z których tylko niektóre (1, 6, 7 i 8) mieszczą SEM-czne. Nie wszystkie obwody wykazują tak prostą budowę, jak przedstawiony tu obok. Rys.116. ilustruje n.p. obwód złożony, w którym pewne elementy krzyżują się wzajemnie. (Oznacze=



oczka widoczne, wyznaczmy bez trudu także i te, w których skład wchodzi elementy niejako nałożone.



Rys.116.



Rys.117.

W obwodzie na rys.116. rozróżnimy w ten sposób 6 oczek, uwidoczniomych na rys.117 w formie oddzielonych od siebie wieloboków.

Między ilością węzłów ( $w$ ), oczek ( $k$ ) a liczbą elementów ( $l$ ) każdego obwodu złożonego (sieci) istnieje związek, określony równaniem

$$l = (w - 1) + k \dots\dots\dots (71)$$

Relacja ta wypływa z konstrukcji obwodu.

Dodając mianowicie do istniejącej sieci jeden (nowy) element ( $l$ ), tworzymy jedno (nowe) oczko ( $k$ ), oraz liczbę nowych węzłów zero (rys.118), jeden (rys.119.), lub dwa (rys.120).



Rys.118.



Rys.119.



Rys.120.



W pierwszym przypadku sieć zwiększyła liczbę swych elementów o 1, w drugim o 2, w trzecim o 3, czyli ogólnie o sumę d o d a n y c h węzłów, oczek i elementów, mniej 1 ( $w + k - 1$ ).

Wzór (71) sprawdzić możemy na dowolnym obwodzie.

N.p. Obwód na rys.115. ma  $w = 5$ ,  $k = 4$ , zatem  $l = (5 - 1) + 4 = 8$ .

Obwód na rys.116. ma  $w = 9$ ,  $k = 6$ , zatem  $l = (9 - 1) + 6 = 14$ .

Tyle też elementów naliczymy w tych obwodach.

Złączenie działające SEM-czynnych w sieci wywoła w poszczególnych jej elementach różne prądy ( $J$ ), a między różnymi punktami sieci napięcia ( $U$ ).

Prawa Kirchhoffa dotyczą właśnie r o z p ł y w u p r ą d ó w (I.prawo), oraz r o z k ł a d u n a p i ę ć (II.prawo) i oba łącznie pozwalają prądy te (a z nimi) i napięcia obliczyć.

#### P I E R W S Z E P R A W O K I R C H H O F F A .

Suma prądów dopływających do węzła sieci równa jest sumie prądów z niego odpływających.

Oznaczając prądy dopływające do węzła symbolem  $J_d$ , a prądy odpływające od węzła symbolem  $J_o$ , wyrażamy to prawo relacją:

$$\sum J_d = \sum J_o \dots\dots\dots (72)$$

Lub krócej (przenosząc wszystkie prądy na jedną stronę i opuszczając indeksy), relacją:

$$\sum (J) = 0 \dots\dots\dots (73)$$

w której prądy d o p ł y w a j ą c e ( $J_d$ ) możemy uważać za d o d a = t n i e , a prądy o d p ł y w a j ą c e ( $J_o$ ) za u j e m n e , zgodnie z równaniem poprzednim. (Stąd nawias około symbolu  $J$ ).

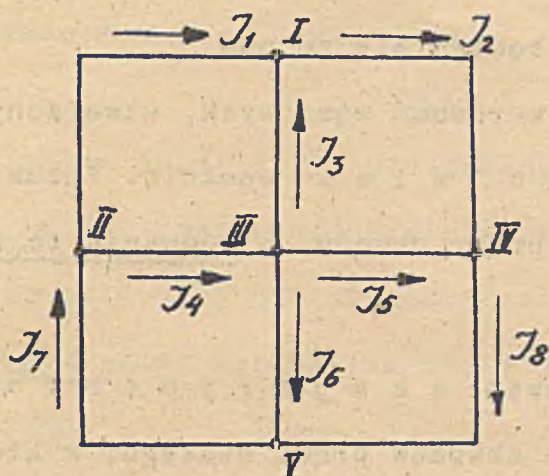
Wyrażając wzór (73) słowami, powiemy:

Suma prądów zbiegających się w węzle sieci równa się zeru. (I-sze prawo Kirchhoffa).

Powyższe I-sze prawo Kirchhoffa (Skrót I.p.K) ważne jest dla k a ż d e g o węzła sieci prądu stałego.



Stosując (I.p.K) do wszystkich 5-ciu węzłów obwodu przedstawionego



na rys.121., napiszemy

$$I) J_1 + J_3 - J_2 = 0$$

$$II) J_7 - J_1 - J_4 = 0$$

$$III) J_4 - J_3 - J_5 - J_6 = 0$$

$$IV) J_2 + J_5 - J_8 = 0$$

$$V) J_6 + J_8 - J_7 = 0$$

Zesumujmy równania I + II + IV + V,

a otrzymamy równanie III:

Rys.121.

$$(J_1 + J_3 - J_2) + (J_7 - J_1 - J_4) + (J_2 + J_5 - J_8) + (J_6 + J_8 - J_7) = - \underline{(J_4 - J_3 - J_5 - J_6)}$$

Podobnie suma II + III + IV + V. da równanie I.

$$(J_7 - J_1 - J_4) + (J_4 - J_3 - J_5 - J_6) + (J_2 + J_5 - J_8) + (J_6 + J_8 - J_7) = - \underline{(J_1 + J_3 - J_2)}.$$

Analogiczne zależności istnieją w każdej sieci, stąd

TWIERDZENIE 1: Dla każdej sieci można ustawić tylko w - 1 n i e =  
z a l e ż n y c h od siebie równań według I.p.K,  
wybierając d o w o l n y c h w - 1 węzłów tej sieci.  
Równanie jednego, opuszczonego, węzła jest bowiem  
równe sumie równań węzłów pozostałych.

Twierdzenie to wynika z ustroju sieci. Każdy element połączony jest z siecią dwoma węzłami. Prąd elementu przedstawia odnośnie do jednego z tych węzłów d o p ł y w (+) a dla drugiego o d p ł y w (-).

W zespole równań wszystkich węzłów występuje więc każdy prąd dwa razy, raz ze znakiem + drugi raz ze znakiem -.

Suma prądów każdego węzła (z uwzględnieniem znaków) jest równa zeru.

Suma równań wszystkich węzłów jest także równa zeru.

Wyodrębniając z tej sumy równanie jednego węzła, pozostawiamy



w reszcie sumy składniki (prądy) równania tego węzła ze znakami przeciwnymi i te też pozostaną; wszystkie inne bowiem się zniosą.

Z powyższego wynika, że w zespole w-równań węzłowych, utworzonych według I.p.K, można jedno k t ó r e k o l w i e k opuścić. Pozostałych w - 1 równań mieścić będzie wszystkie prądy obwodu, a równania te są od siebie niezależne.

Pierwsze prawo Kirchhoffa jest prawem e k s p e r y m e n t a l n e m i ważne jest bez zastrzeżeń dla takich obwodów prądu stałego, w których prądy płyną tylko wewnątrz elementów sieci. Traci zaś ważność tam, gdzie ruch elektryczności odbywa się także przez ośrodek, otaczający elementy sieci. Nie można więc stosować I.p.K do sieci, utworzonej z gołych drutów oporowych i zanurzonej n.p. do cieczy przewodzącej prąd (elektrolit, rtęć).

#### D R U G I E P R A W O K I R C H H O F F A .

W każdym, dowolnie obranem k o l e p r ą d ó w sieci, suma SEM-cznych (z uwzględnieniem kierunków działania) równa jest sumie spadków napięć (JR) (z uwzględnieniem znaków).

Matematycznie prawo to wyrazimy relacją:

$$\sum(E) = \sum(JR) \dots\dots\dots (74)$$

lub krócej (przenosząc wszystkie wyrazy na jedną stronę)

$$\underline{\sum(E, JR)} = 0 \dots\dots\dots (75)$$

Wyrażając ostatni wzór (75) słowami, powiemy:

W każdym, dowolnie obranem kole prądów sieci, suma SEM-cznych i spadków napięć równa się zeru (II-gie prawo Kirchhoffa).

Nawiasy około symboli E i JR mają przypominać, że przy sumowaniu należy uwzględnić kierunki E i kierunkowości iloczynów JR, czyli napięć na oporach sieci.



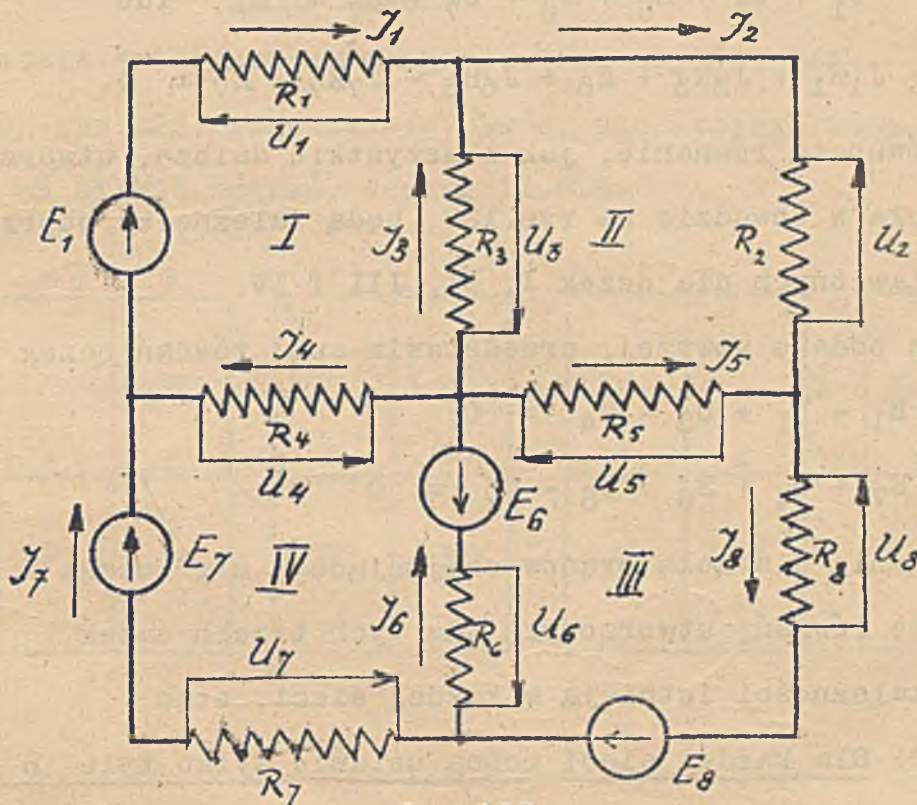
Drugie prawo Kirchhoffa wynika z prawa koła napięć, zastosowanego do toru prądu wewnątrz przewodników

$$\sum(E, U) = 0$$

i jest ważne także tylko dla obwodów prądu stałego. Przy tworzeniu sum  $E$  i  $JR$ , można posłużyć się prawem koła napięć, uzyskuje się bowiem przez to łatwość w znakowaniu poszczególnych składników równania.

Drugie prawo Kirchhoffa ważne jest dla każdego, dowolnie utworzonego koła prądu.

Stosując je więc n.p. do obwodu przedstawionego na rys.122., możemy wypisać cały szereg kołowych równań Kirchhoffa.



Rys. 122.

I tak dla poszczególnych oczek sieci ustawimy 4-ry następujące równania:

- I.  $E_1 - J_1 R_1 + J_3 R_3 - J_4 R_4 = 0,$
- II.  $J_3 R_3 - J_5 R_5 + J_2 R_2 = 0,$
- III.  $E_8 + J_6 R_6 - E_8 + J_8 R_8 + J_5 R_5 = 0,$
- IV.  $E_7 + J_4 R_4 + E_6 + J_6 R_6 - J_7 R_7 = 0$



Zgodnie z następującymi 4-ma równaniami, wynikającymi z prawa koła napięć:

$$I) E_1 - U_1 + U_3 - U_4 = 0$$

$$II) U_3 - U_5 + U_2 = 0$$

$$III) E_6 + U_6 - E_8 + U_8 + U_5 = 0$$

$$IV. E_7 + U_4 + E_6 + U_6 - U_7 = 0$$

Poza powyższymi 4-ma równaniami, ważnymi dla oczek I, II, III, IV, (rys.122), można ustawić jeszcze cały szereg dalszych. N.p. dla koła obejmującego w sobie oczka I i IV napiszemy:

$$E_1 - U_1 + U_3 + E_6 + U_6 - U_7 + E_7 = 0, \quad \text{lub}$$

$$E - J_1R_1 + J_3R_3 + E_6 + J_6R_6 - J_7R_7 + E_7 = 0.$$

Jednakże zarówno to równanie, jak i wszystkie dalsze, utworzone dla jakiegokolwiek koła w obwodzie na rys.122. będą zależne od poprzednich 4-ech równań, ustawionych dla oczek I, II, III i IV.

N.p. równanie podane powyżej, przedstawia sumę równań oczek I i IV

$$I) E_1 - U_1 + U_3 - U_4 = 0,$$

$$IV) E_7 + U_4 + E_6 + U_6 - U_7 = 0$$

Podobnie równanie dla koła prądów obejmującego n.p. oczka I, II i III będzie równe sumie równań, utworzonych dla tych trzech oczek.

Analogiczne zależności istnieją w każdej sieci, stąd

TWIERDZENIE 2. Dla każdej sieci można ustawić tylko tyle niezależnych równań według II.p.K ile sieć ta ma oczek.

TWIERDZENIE 3. Równanie koła prądów, obejmującego kilka oczek, jest równe sumie równań tych oczek.

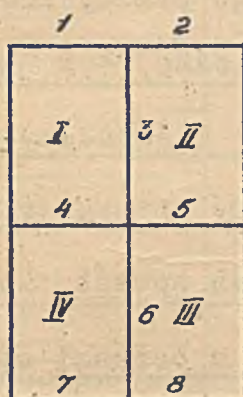


TWIERDZENIE 4 Niezależne równania otrzymamy tylko dla tych k-kół  
prądów, które tworzyć będziemy w sieci przy równocze=  
snem eliminowaniu w każdym z nich jednego, za każdym  
razem innego elementu, tak, aby po wyeliminowaniu  
k-tego elementu nie pozostała w sieci żadna figura  
zamknięta.

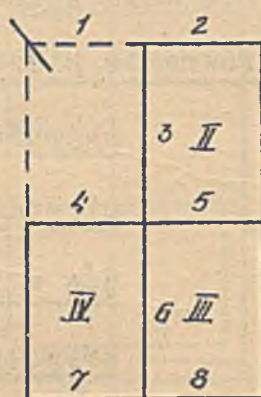
Kolejne eliminowanie k różnych elementów należy prze=  
prowadzić tak, aby nie spowodowało podziału sieci na  
luźne części.

Ostatnie twierdzenie wymaga jeszcze objaśnienia.

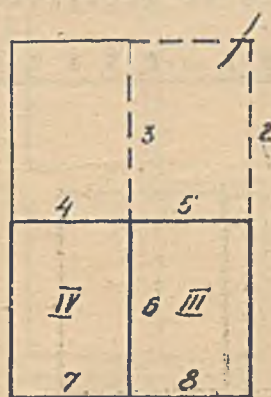
Niech rys.123. przedstawia obwód, dla którego mamy ustawić k - nieza=  
 leżnych od siebie równań, według II.p.K.



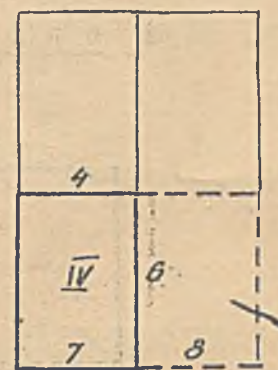
Rys.123.



Rys.124.



Rys.125.



Rys.126.

Ustawiając równanie dla koła I i odrzucając element „1”, otrzymamy figurę, przedstawioną na rys.124.

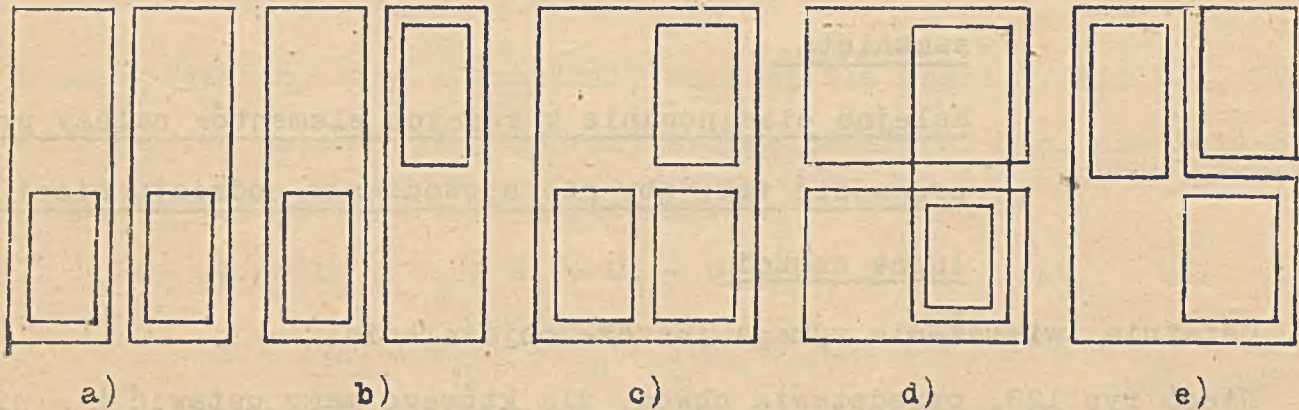
Po ustawieniu równania dla koła II i odrzuceniu elementu „2” pozosta= nie figura widoczna na rys.125.

Wreszcie po ustawieniu równania dla koła III i odrzuceniu elementu „8” zostanie ostatnie koło IV (rys.126), dla którego wypiszemy czwarte z rzędu równanie.



Twierdzenie 4-te wyraża, że koła prądów, dla których wypadają równania niezależne, nie muszą się pokrywać z oczkami sieci, tylko mogą być obierane także inaczej, byle w zgodzie z tem twierdzeniem.

Tak np. w obwodzie podanym na rys.123, otrzymamy równanie niezależne także dla kół uwidocznionych na rys.127 (a,b,c,d,e,).

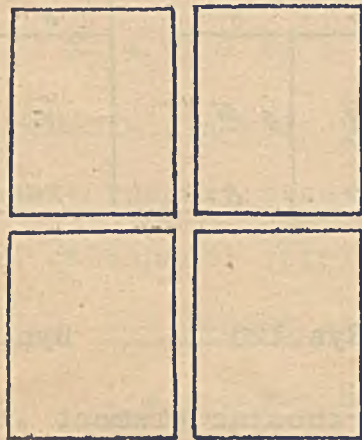


Rys.127.

Jednakże wszystkie te możliwości nie mają żadnego praktycznego znaczenia, gdyż na j p r o s t s z e równanie niezależne, t.j. zawierające

najmniej niewiadomych (prądów)

otrzymamy obierając koła prądów w ten sposób, aby się pokrywały z oczkami sieci.



Rys.128

W obwodzie przedstawionym na rys.123 należy więc ustawić równanie Kirchhoffa, dla kół uwidocznionych na rys.128.

Koła te stanowią oczka tego obwodu. Otrzymamy w ten sposób

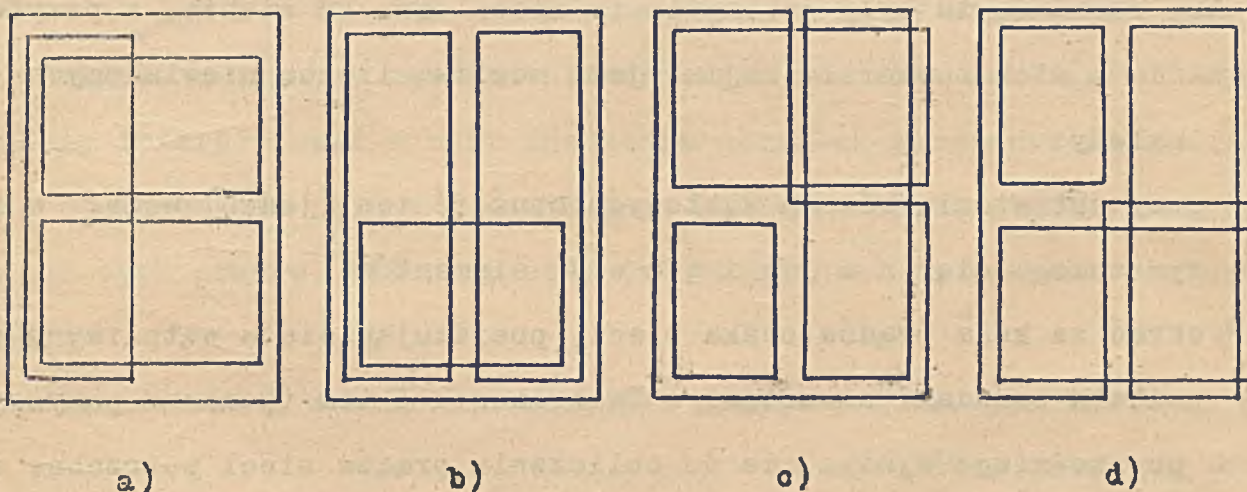
4-ry równania niezależne o n a j m n i e j s z e j ilości niewiadomych (prądów).



Twierdzenia 4-go można dowieść w następujący sposób:

Każde z  $k$ -równań, utworzonych w myśl tego twierdzenia, różni się od reszty między innymi także tem, że nie zawiera oporności i ewentualnie SEM-cznej jednego, w każdym równaniu innego, elementu. Równania te nie mogą więc być zależne od siebie. Równań takich można utworzyć tylko liczbą równą  $k$ , bo tyle oczek posiada sieć, a każde równanie koła obejmującego więcej niż jedno oczko, przedstawia w myśl Twierdzenia 3. sumę równań objętych oczek, czyli jest zależne od równań owych oczek.

Uwaga: Tworzenie równań według II.p.K. dla kół prądów sieci, nie pokrywających się z „naturalnymi” oczkami sieci, może bardzo łatwo doprowadzić do przeoczenia warunków koniecznych dla uzyskania  $k$ -równań niezależnych, a wyrażonych w twierdzeniu 4-tem. Tak n.p. koła prądów oznaczone na rys. 129. nie dają 4-rech niezależnych równań, jakkolwiek na pierwszy rzut oka wydaje się, że oznaczenie tych kół jest bez zarzutu.



Rys. 129.

Bliższe rozpatrzenie utworzonych pod a, b, c, d, kół prądów wykazuje jednak, że wszystkie cztery alternatywy uchybiają zasadom podanym w Twierdzeniu 4-tem. I z tego względu należy przeto ustawiać jedynie równania dla oczek naturalnych.



Zastosowanie równań Kirchhoffa do obliczenia rozprężu prądów.

W sieci o  $w$  - węzłach i  $k$  - oczkach jest ogólnie

$$l = (w - 1) + k$$

elementów (wzór 71.), a więc i  $l$  różnych prądów.

Uważając prąd każdego z elementów za niewiadomą ( $J$ ) mamy w obwodzie

$$l = (w - 1) + k$$

niewiadomych (prądów).

Do obliczenia tych niewiadomych potrzeba  $l$  niezależnych równań liniowych. Tyle też dają ich  $l$  a c z n i e właśnie I-sze i II-gie prawo Kirchhoffa. Albowiem stosując do sieci I.p.K., otrzymamy  $w - 1$ , a po zastosowaniu II.p.K., dalszych  $k$  - równań niezależnych od siebie.

Aby równania te były rzeczywiście niezależne od siebie, a przytem, aby każde z nich zawierało najmniejszą możliwą liczbę niewiadomych (prądów), należy:

- 1° przy ustawianiu równań węzłowych opuścić ten (jeden) węzeł, w którym zbiega się  $n$  a  $j$  w i ę c e  $j$  elementów,
- 2° obrać za koła prądów oczka sieci, posługując się w wątpliwych przypadkach zasadami zawartymi w Twierdzeniu 4-tem (podanem powyżej).

Z poprzedniego wyniku, że do obliczenia prądów sieci potrzebne są **w s z y ś t k i e** równania niezależne, ustawione według I-go i II-go prawa Kirchhoffa.

Zastosowanie samego tylko I.p.K. lub samego tylko II.p.K. nie może doprowadzić do żadnego rozwiązania.

Wypadałoby zastanowić się jeszcze, jak ostrzażkować poszczególne prądy w sieci. Kierunków tych prądów nie znamy, uważamy je bowiem na równi z wartościami  $J$  za niewiadome. Bez strzałek prądów jednakże, ustawienie



jakiegokolwiek równania Kirchhoffa jest niemożliwe. Musimy tedy strzałki prądów w sieci obrać dowolnie.

Zachodzi tylko pytanie, czy takie załatwienie sprawy jest dopuszczalne?

Uwzględniając, że wzory określające prawa Ohma i prawa Kirchhoffa są ważne zarówno dla dodatnich jak i ujemnych wartości  $J, E$ , można pytanie powyższe załatwić twierdząco. Wypada jednak zaznaczyć, że

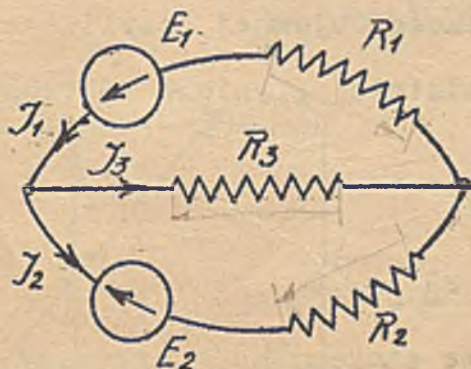
obrane dowolnie strzałki nieznanych prądów w sieci nie oznaczają już kierunków, tylko kierunkowości tych prądów.

Strzałka kierunkowości prądu wskazuje mianowicie dla dodatnich wartości  $J$  kierunek ruchu dodatniej elektryczności, podczas ujemnych ujemnej

gdy strzałka odnosząca się tylko do kierunku prądu wskazuje kierunek ruchu elektryczności dodatniej.

Rozwiązując  $l = (w - 1) + k$  równań Kirchhoffa ze względu na niewiadome (prądy), otrzymamy zarówno dodatnie jak i ujemne wartości  $J$ . Wyniki te należy interpretować w myśl znaczenia strzałek kierunkowości, a jeśli chodzi o oznaczenie kierunków poszczególnych prądów, należy strzałki tych prądów, które wypadły (z obliczenia) ze znakami ujemnymi, odwrócić.

Przykład. Celem obliczenia rozplywu prądów obwodu, przedstawionego



Rys.130.

na rys.130., ustawimy trzy

równania Kirchhoffa, a to

jedno dla któregokolwiek

z dwu węzłów, i dwa dla obu

widocznych na rys.130 oczek.

Przedtem należy jednak ozna-

czyć strzałki prądów. Obiera-

my je dowolnie, (tu

tak, jak okazano na rys.130).



Trzy niezależne równania Kirchhoffa, z których obliczymy trzy niewiadome prądy  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  są:

$$\text{I) } J_1 - J_2 - J_3 = 0$$

$$\text{II) } E_1 - J_1 R_1 - J_3 R_3 = 0$$

$$\text{III) } E_2 + J_2 R_2 - J_3 R_3 = 0$$

Z równań tych wypadają wzory:

$$J_1 = \frac{E_1(R_2 + R_3) - E_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$J_2 = \frac{E_1 R_3 - E_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \dots\dots\dots(76)$$

$$J_3 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

Przyjmijmy, że  $E_1 = 52 \text{ V}$ ,  $E_2 = 50 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 3\Omega$

i obliczmy powyższe trzy prądy z pomocą otrzymanych wzorów:

$$J_1 = \frac{52(2+3) - 50 \cdot 3}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1} = \frac{110}{11} = +10 \text{ amp}$$

$$J_2 = \frac{52 \cdot 3 - 50(1+3)}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1} = \frac{-44}{11} = -4 \text{ amp}$$

$$J_3 = \frac{52 \cdot 2 + 50 \cdot 1}{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1} = \frac{154}{11} = +14 \text{ amp}$$

Dodatnie znaki wartości  $J_1$  i  $J_3$  znaczą, że prądy  $J_1$  i  $J_3$  płyną w kierunku oznaczonych na rys. 130 strzałek  $J_1$  i  $J_3$ .

Ujemny znak wartości  $J_2$  znaczy, że w kierunku oznaczonej na rys. 130 strzałki  $J_2$  odbywa się ruch elektryczności ujemnej, czyli, że prąd  $J_2$  pojmowany jako ruch elektryczności dodatniej płynie w kierunku przeciwnym do strzałki  $J_2$ .

Kontrola powyższego obliczenia:

$$\text{W myśl I.p.K. musi być } J_1 - J_2 - J_3 = 0$$

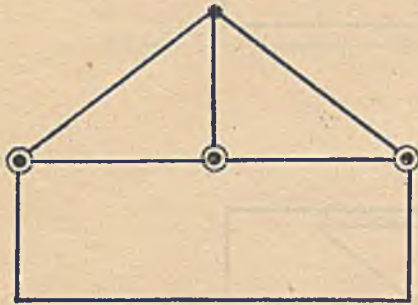
Wstawiając znalezione wartości (ze znakami!), otrzymamy

$$(+ 10) - (- 4) - (+ 14) = 0$$

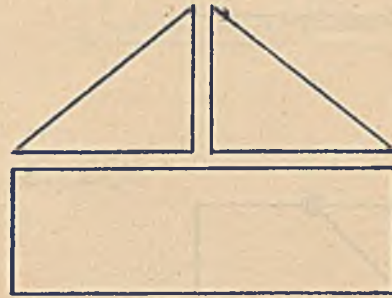


Celem ułatwienia orientacji, które węzły i oczka należy brać przy ustawieniu równań Kirchhoffa, podajemy poniżej kilka różnych sieci.

W każdej z nich oznaczone są (pod a) kółeczkami te węzły, dla których należy ustawić równania węzłowe, a obok nich (pod b), uwidocznione są (jako wieloboki oddzielone od siebie) te oczka, dla których należy ustawić równania kołowe

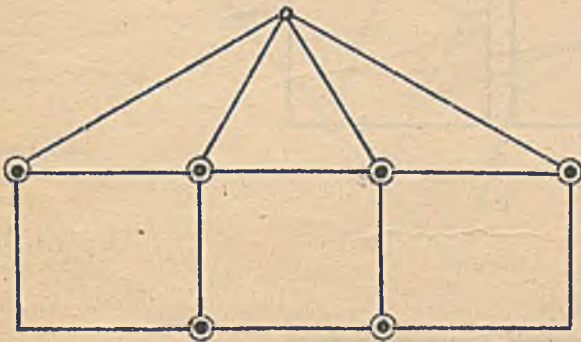


a)

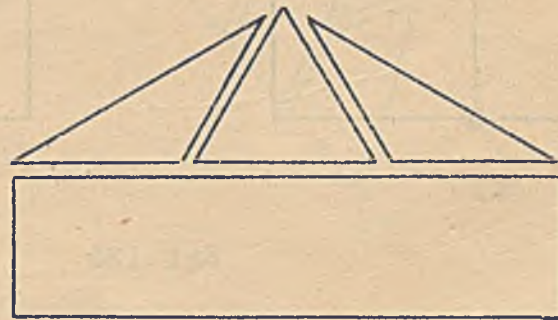


b)

Rys. 131.

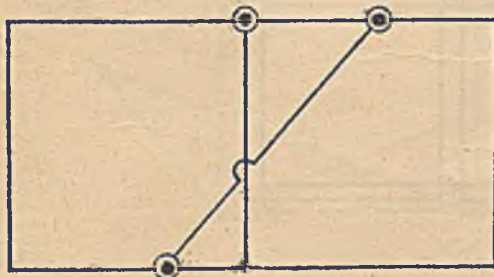


a)

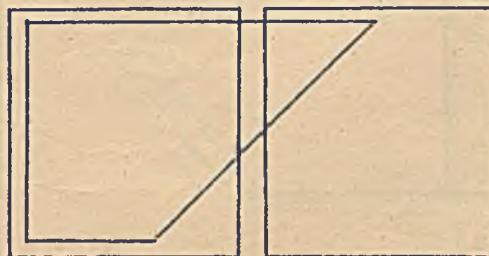


b)

Rys. 132.



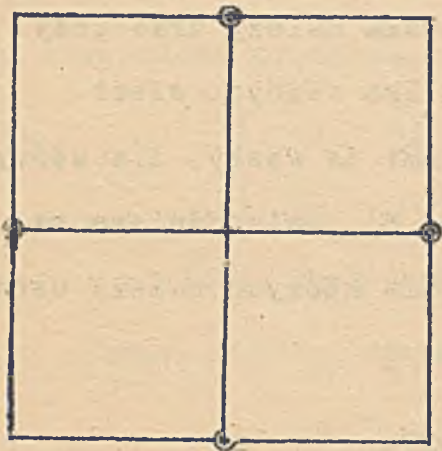
a)



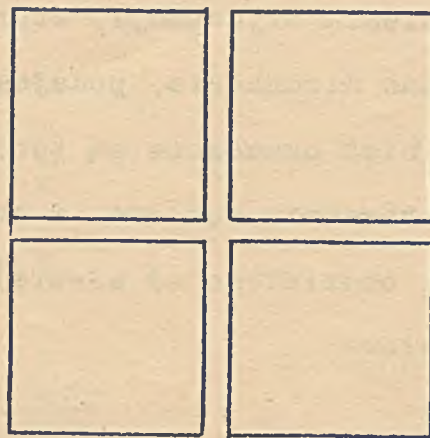
b)

Rys. 133.



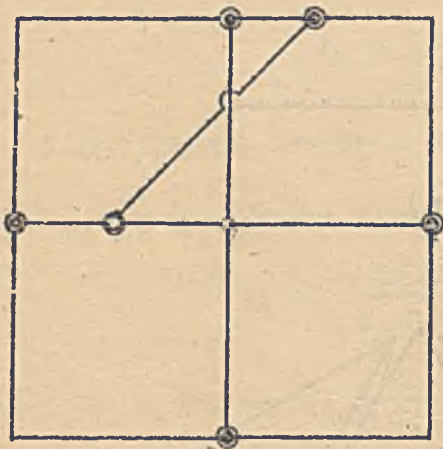


a)

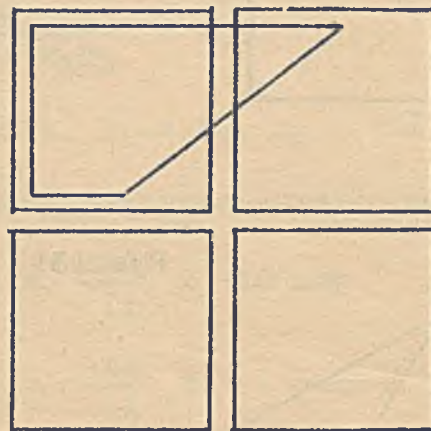


b)

Rys. 134.

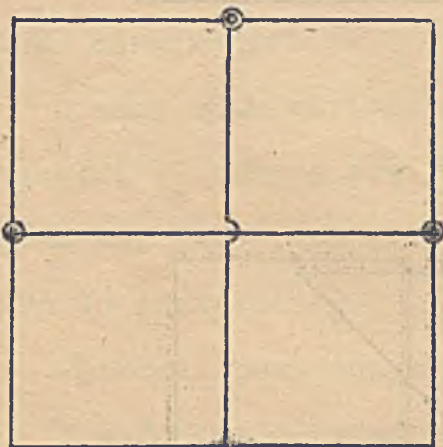


a)

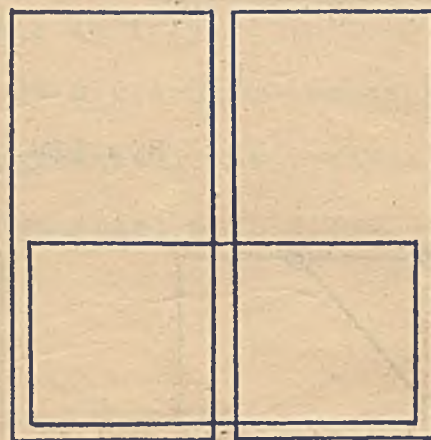


b)

Rys. 135



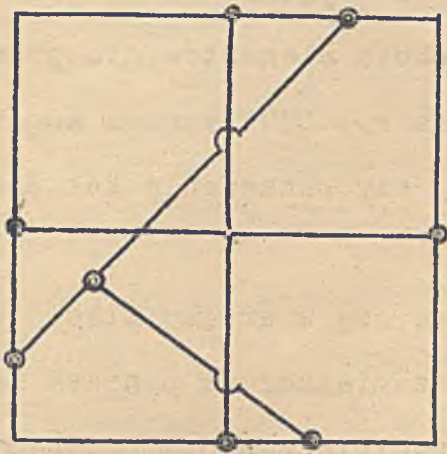
a)



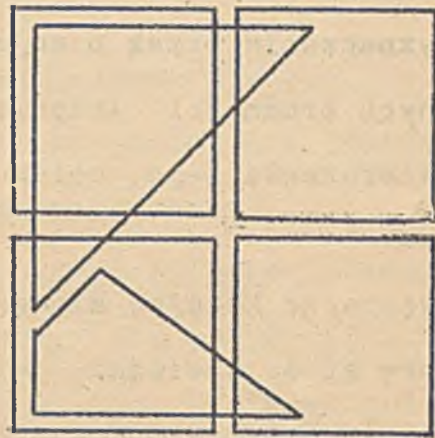
b)

Rys. 136.



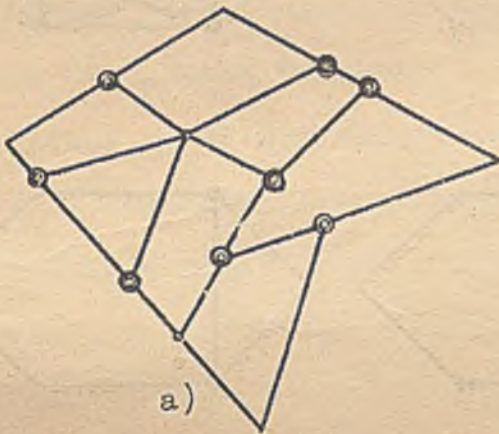


a)



b)

Рис. 137.

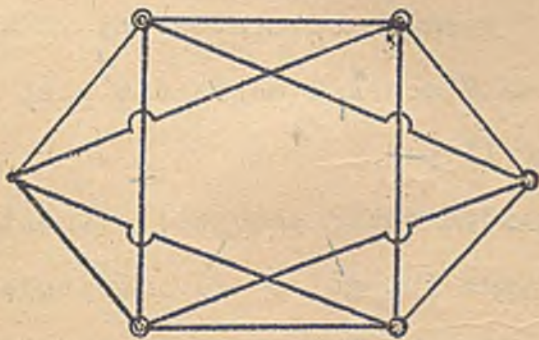


a)

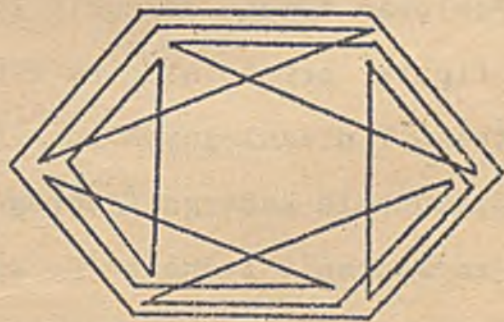


b)

Рис. 138.



a)



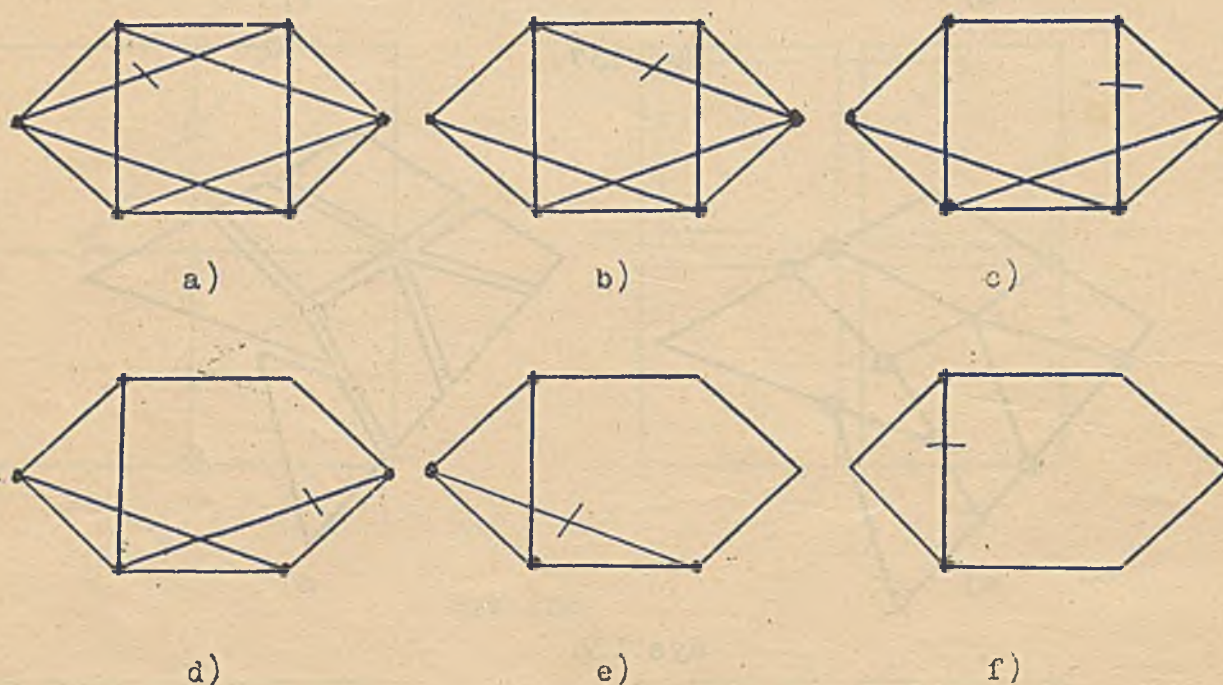
b)

Рис. 139.



We wszystkich powyższych przykładach, z wyjątkiem może sieci na rys. 139, wyznaczenie oczek o najmniejszej liczbie elementów nie przedstawiało żadnych trudności. Jedynie może sieć na rys. 139. wymaga kontroli z pomocą Twierdzenia 4-go, celem sprawdzenia, czy oznaczenie kół prądów jest właściwe.

Odrzucając kolejno elementy krzyżujące się w środku sieci, upraszczamy figurę aż do obwiedni, jak to okazuje zamieszczone poniżej zestawienie (rys. 140.). Zatem wyznaczenie oczek nie uchybia zasadom podanym w Twierdzeniu 4-tem.



Rys. 140.

Ponieważ trzeba odrzucić łącznie 7 różnych elementów aby zniweczyć całą figurę, przeto sieć na rys 139. ma 7 oczek i można dla niej ustawić tylko 7 niezależnych równań według II.p.K.

Odrzucenie każdego (jednego, za każdym razem innego,) elementu, powoduje zniweczenie jednego (za każdym razem innego) oczka. Ostatnie oczko jakie pozostaje po zniweczeniu 6-ciu różnych elementów środkowych, przedstawia sześciobok utworzony z elementów zewnętrznych.



Uwagi dotyczące praw Kirchhoffa i ich zastosowania.

Prawa i równania Kirchhoffa są ważne jedynie dla obwodów prądu stałego. Rzeczą dalszego studjum będzie ustalenie warunków, pod jakimi wolno je będzie zastosować także do obwodów prądu zmiennego.

Równań Kirchhoffa używamy głównie do analizy obwodu, rzadko do obliczeń liczbowych. Do tego celu bowiem nadają się lepiej podane dalej cykliczne równania Maxvella i równania Coltriego, ponieważ jedne i drugie zawierają dla tej samej sieci  $m$   $n$  i  $e$   $j$  niewiadomych.

Nie brakło usiłowań, zmierzających do tego, aby bez posilkowania się równaniami Kirchhoffa, można było ustawić wprost wzory określające niewiadome prądy sieci.

Pierwsza taka propozycja wyszła już od samego Kirchhoffa w roku 1847. (Annalen der Physik und Chemie, tom 72., Str.497. z roku 1847).

Następna podał Müllendorf (ETZ 1892, Str.159 i 401.), dalszą Ahrens (Mathematische Annalen tom 49., Str.311 z roku 1897.)

Propozycje te nie znalazły jednak zastosowania. Dopiero praca Feussnera p.t. „Über Stromverzweigung in netzförmigen Leitern”, ogłoszona w Annalen der Physik (Vierte Folge, Band 9, 1902, Str.1304 i w B.15, 1904) zyskała uznanie i zastosowanie.



### 3. Równania cykliczne Maxwella.

#### Przekształcenie równań Kirchhoffa w równania Maxwella.

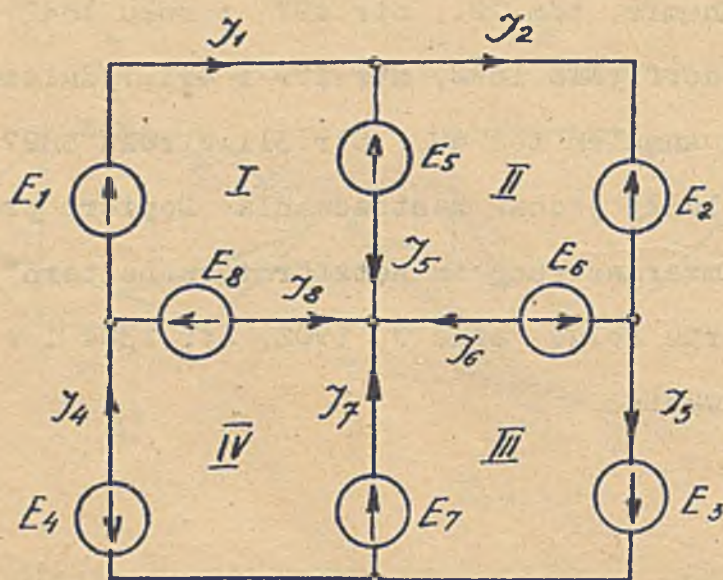
Zespół  $l = (w - 1) + k$  (niezależnych) równań Kirchhoffa, ustawionych dla sieci o  $w$ -węzłach i  $k$ -oczkach, składa się z  $w-1$  równań „węzłowych” i  $k$ -równań „kołowych”.

Każda z tych grup równań zawiera w s z y s t k i e niewiadome (prądy) w liczbie

$$l = (w - 1) + k$$

Eliminując z grupy równań kołowych, przy pomocy grupy równań węzłowych,  $w - 1$  niewiadomych prądów, otrzymamy nowy zespół, zawierający już tylko  $k$ -równań o  $k$  niewiadomych.

Okażemy to na przykładzie (rys.141.): Dla obwodu przedstawionego



na rys.141. i (obranych dowolnie) kierunków strzałek prądu, ustawimy następujące 4-ry równania węzłowe.

$$\left. \begin{aligned} 1. J_1 - J_2 - J_5 &= 0 \\ 2. J_2 - J_3 - J_6 &= 0 \\ 3. J_3 - J_4 - J_7 &= 0 \\ 4. J_4 - J_1 - J_8 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \text{I}$$

i następujące 4-ry równania kołowe:

$$\left. \begin{aligned} 5. +J_1 R_1 + J_5 R_5 - J_8 R_8 &= E_1 - E_5 + E_8 = E_I \\ 6. +J_2 R_2 + J_6 R_6 - J_5 R_5 &= -E_2 - E_6 + E_5 = E_{II} \\ 7. +J_3 R_3 + J_7 R_7 - J_6 R_6 &= E_3 + E_7 + E_6 = E_{III} \\ 8. +J_4 R_4 + J_8 R_8 - J_7 R_7 &= -E_4 - E_8 - E_7 = E_{IV} \end{aligned} \right\} \dots \text{II}$$

Rys.141.



Wszystkie te (I i II) równania są niezależne od siebie i wystarczają do obliczenia wszystkich (8) prądów sieci.

Z I-szej grupy równań wynika, że

$$J_5 = J_1 - J_2, \quad J_6 = J_2 - J_3, \quad J_7 = J_3 - J_4, \quad J_8 = J_4 - J_1$$

Wyrugujmy prądy te z II-giej grupy równań, podstawiając za  $J_5, J_6, J_7$  i  $J_8$  powyższe wartości, to (po uporządkowaniu) otrzymamy

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad + J_1(R_1 + R_5 + R_8) - J_2R_5 - J_4R_8 = E_I \\ 2. \quad + J_2(R_2 + R_5 + R_6) - J_1R_5 - J_3R_6 = E_{II} \\ 3. \quad + J_3(R_3 + R_6 + R_7) - J_2R_6 - J_4R_7 = E_{III} \\ 4. \quad + J_4(R_4 + R_7 + R_8) - J_1R_8 - J_3R_7 = E_{IV} \end{array} \right\} \dots \dots \dots III$$

Sumy oporów w nawiasach po lewej stronie, przedstawiają opory okrężne poszczególnych 4-rech oczek sieci.

Zaś symbole po prawej stronie znaku równości odpowiadają sumom SEM. owych 4-rech oczek.

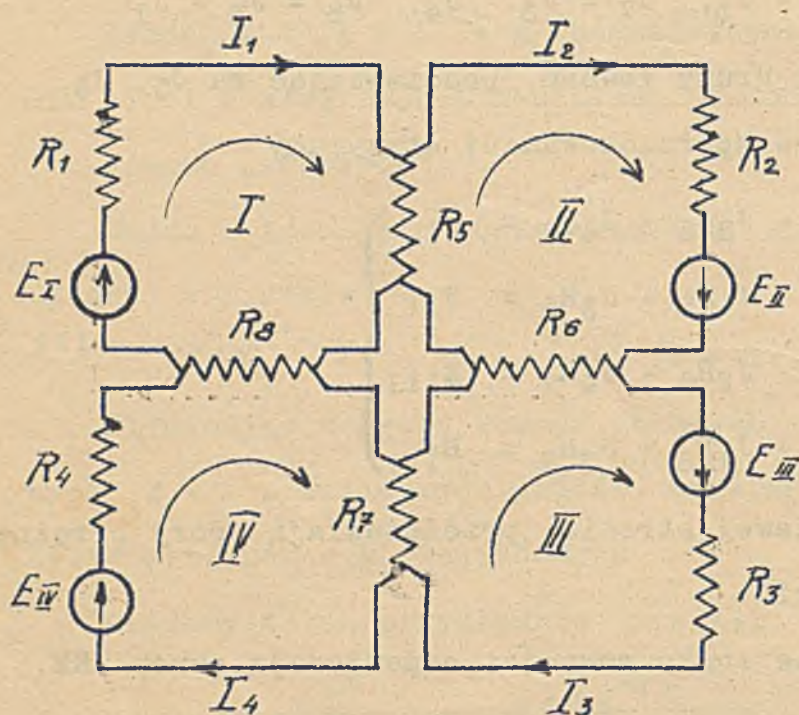
I. $R_I = R_1 + R_5 + R_8$	$E_I = + E_1 - E_5 + E_8$
II. $R_{II} = R_2 + R_5 + R_6$	$E_{II} = - E_2 - E_6 + E_5$
III. $R_{III} = R_3 + R_6 + R_7$	$E_{III} = + E_3 + E_7 + E_6$
IV. $R_{IV} = R_4 + R_7 + R_8$	$E_{IV} = - E_4 - E_8 - E_7$

Kładąc  $J_1 = I_1, J_2 = I_2, J_3 = I_3, J_4 = I_4$  i podstawiając za sumy R i sumy E podane wyżej symbole, otrzymamy następujący zespół 4-rech równań o 4-rech niewiadomych:

$$\left. \begin{array}{l} + I_1R_I - I_2R_5 - I_4R_8 = E_I \\ + I_2R_{II} - I_1R_5 - I_3R_6 = E_{II} \\ + I_3R_{III} - I_2R_6 - I_4R_7 = E_{III} \\ + I_4R_{IV} - I_1R_8 - I_3R_7 = E_{IV} \end{array} \right\} \dots \dots \dots IV \quad (77)$$



Równania te odnieść możemy do sieci, przedstawionej na rys.142, w której symbole  $I_1, I_2, I_3, I_4$  odpowiadają prądom cyklicznym poszczególnych



Rys.142.

Poszczególne prądy „oczek” ( $I_1, I_2, I_3, I_4$ ) oznaczamy strzałkami zorientowanymi w kierunku ruchu wskazówek zegarowych i ten uważać będziemy za kierunek liczenia (Strzałki wewnątrz oczek I, II, III, IV).

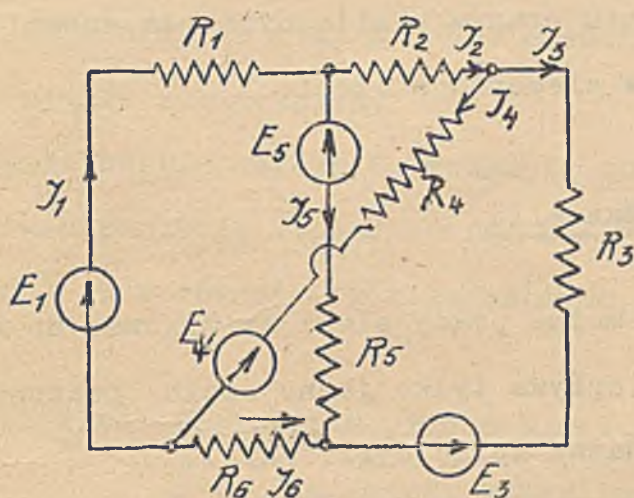
Prąd oczka w iloczynie z opornością (okrężną) oczka wstawiamy w każdym poszczególnym równaniu ze znakiem dodatnim, prądy sąsiadujących z nim oczek w iloczynie z opornością „graniczną” (między oczkami) ze znakiem ujemnym, gdy prąd cykliczny sąsiedniego oczka przepływa opór graniczny w kierunku przeciwnym, względnie ze znakiem dodatnim, gdy przepływa go w kierunku zgodnym z prądem cyklicznym oczka, dla którego ustawiamy równanie. Przy tworzeniu sum SEM-cznych, wpisujemy SEM-czne, działające w kierunku prądu cyklicznego ze znakiem +, działające w kierunku przeciwnym ze znakiem -

oczek, połączonych ze sobą jedynie za pośrednictwem oporów  $R_5, R_6, R_7, R_8$ . Opory te nazywać będziemy granicznymi. W miejsce SEM-cznych  $E_1, E_2, \dots, E_8$  weszły SEM-czne wypadkowe  $E_I, E_{II}, E_{III}, E_{IV}$ . Posiłkując się obwodem na rys.142., można ustawić równania grupy IV. wprost, bez uciekania się do równań Kirchhoffa.

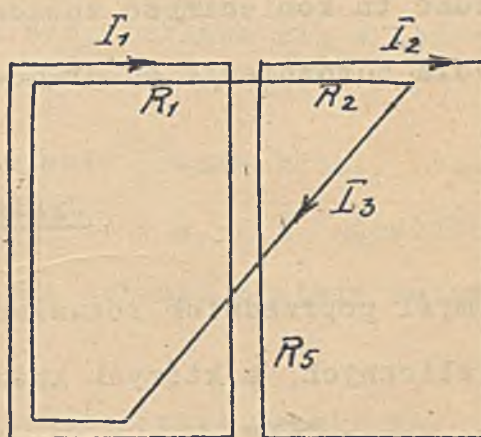


Otrzymane w ten sposób równania (grupa IV.) nazywamy równaniami cyklicznymi Maxwella. Tworzą one zespół k-równań o k-niewiadomych prądach cyklicznych. Rozwiązując ten zespół ze względu na niewiadome (prądy cykliczne) i posługując się grupą równań ustalonych według I-gó prawa Kirchhoffa, obliczymy wszystkie prądy sieci.

Przykład: Ustawić dla obwodu przedstawionego na rys.143. równanie cykliczne Maxwella.



Rys. 143.



Rys. 144.

Oznaczamy prądy cykliczne  $I_1, I_2, I_3$  (rys.144.), oraz opory graniczne, t.j. takie, przez które przepływa więcej jak jeden prąd cykliczny (tu  $R_1, R_2, R_5$ ).

Następnie wypisujemy wprost trzy następujące równania:

$$1) + I_1(R_1 + R_5 + R_6) + I_3R_1 - I_2R_5 = E_1 - E_5 = E_I$$

$$2) + I_2(R_2 + R_3 + R_5) + I_3R_2 - I_1R_5 = E_5 - E_3 = E_{II}$$

$$3) + I_3(R_1 + R_2 + R_4) + I_1R_1 + I_2R_2 = E_1 - E_4 = E_{III}$$

Iloczyn  $I_3R_1$  występuje ze znakiem dodatnim, bo prąd cykliczny  $I_3$  przepływa przez opór graniczny  $R_1$  w tym samym kierunku co  $I_1$ . Znak iloczynu  $I_2R_5$  jest ujemny, bo prąd cykliczny  $I_2$  przepływa przez opór graniczny  $R_5$  w kierunku przeciwnym do  $I_1$ .



Podobnie iloczyn  $I_3 R_2$  występuje ze znakiem dodatnim, bo prąd cykliczny  $I_3$  przepływa opór graniczny  $R_2$  zgodnie z  $I_2$ .

Znak iloczynu  $I_1 R_5$  jest ujemny, bo prąd cykliczny  $I_1$  przepływa przez opór graniczny  $R_5$  w kierunku przeciwnym do  $I_2$  i t.d.

Po obliczeniu prądów cyklicznych  $I_1, I_2, I_3$  z owych trzech równań cyklicznych, znajdziemy wszystkie prądy obwodu na rys.143, z równości:

$$J_1 = I_1 + I_3, \quad J_2 = I_2 + I_3, \quad J_3 = I_2,$$

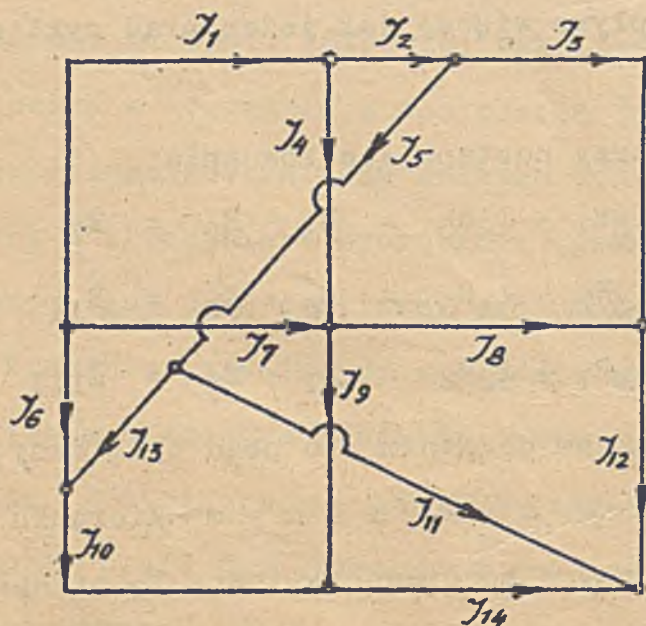
$$J_4 = I_3, \quad J_5 = I_1 - I_2, \quad J_6 = -I_1$$

Widać tu konieczność znakowania prądów cyklicznych odmiennymi symbolami, dla odróżnienia od prądów w elementach sieci.

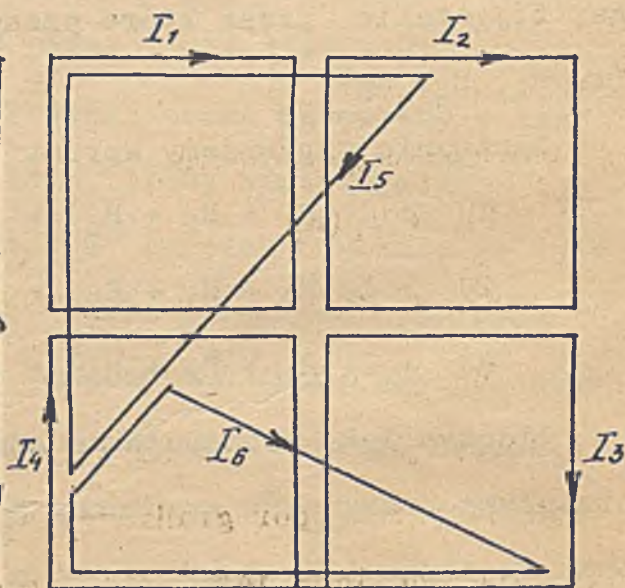
### Cykle Maxwella.

W myśl poprzednich rozważań, można prądy sieci zredukować do  $k$ -prądów cyklicznych, z których każdy opływa tylko jedno oczko, pędzony w niej niejako przez  $\sum(E)$  oczka (stąd nazwa „prąd cykliczny”).

N p. prądy sieci uwidocznionej na rys.143, zredukujemy do 6-ciu prądów cyklicznych (cykli), nadając każdemu z nich (dla lepszej orientacji) kierunek ruchu wskazówek zegarowych (rys 146).



Rys. 145.



Rys. 146.



Obliczywszy prądy cykliczne  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ , z 6-ciu równań cyklicznych Maxwella, znajdziemy następnie wszystkie prądy sieci z pomocą równań:

$$J_1 = I_1 + I_5, \quad J_2 = I_2 + I_5, \quad J_3 = I_2, \quad J_4 = I_1 - I_2,$$

$$J_5 = I_5, \quad J_6 = -I_4 - I_5, \quad J_7 = I_4 - I_1, \quad J_8 = I_3 - I_2,$$

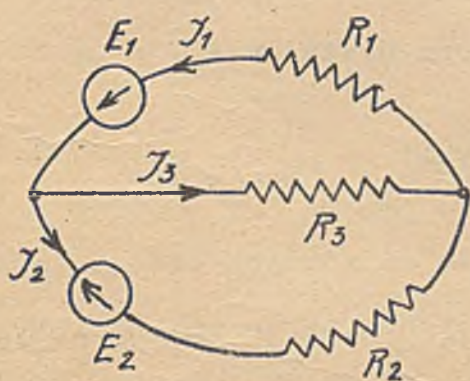
$$J_9 = I_4 - I_3, \quad J_{10} = -I_4 - I_6, \quad J_{11} = I_6, \quad J_{12} = I_3$$

$$J_{13} = I_5 - I_6, \quad J_{14} = -I_3 - I_6$$

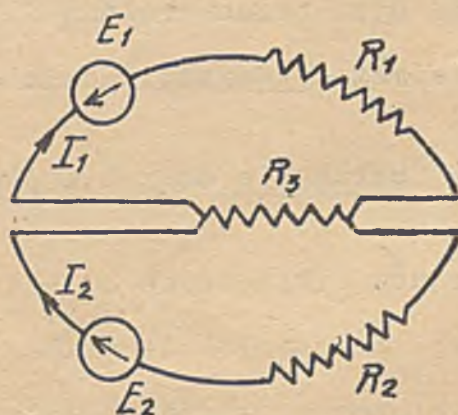
które wyrażają, że prąd każdego elementu sieci składa się z jednego lub kilku prądów cyklicznych.

Zastosowanie metody Maxwella do obliczenia prądów sieci, nie tylko umożliwia redukcję ilości równań z  $l = (w - 1) + k$ , o  $l$  niewiadomych (prądów) do  $k$  równań o  $k$  niewiadomych, lecz ponadto ułatwia ustawienie tychże.

Przykład: Obliczenie prądów sieci przedstawionej na rys. 147. wykonamy z pomocą metody Maxwella jak następuje. Naprzód oznaczymy cykle  $I_1$  i  $I_2$  i ustawimy dwa równania cykliczne (rys. 148.)



Rys. 147.



Rys. 148.

$$1) \quad + I_1(R_1 + R_3) - I_2 R_3 = - E_1$$

$$2) \quad + I_2(R_2 + R_3) - I_1 R_3 = + E_2$$



Stosując wyznaczniki, obliczymy:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -E_1 & -R_3 \\ +E_2 & (R_2+R_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1+R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2+R_3) \end{vmatrix}} = \frac{-E_1(R_2+R_3) + E_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1},$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1+R_3) & -E_1 \\ -R_3 & +E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1+R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2+R_3) \end{vmatrix}} = \frac{E_2(R_1+R_3) - E_1R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}.$$

Uwzględniając, że

$$J_1 = -I_1, \quad J_2 = -I_2 \quad \text{i} \quad J_3 = I_2 - I_1$$

napiżemy:

$$J_1 = \frac{E_1(R_2+R_3) - E_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}, \quad J_2 = \frac{E_1R_3 - E_2(R_1+R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$J_3 = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

Otrzymaliśmy tu wzory identyczne z podanymi pod (76), do obliczenia których potrzeba było trzech równań Kirchhoffa.

Zastosowanie metody Maxwella daje więc duże ułatwienie.

#### Składanie obwodu z pomocą cykli

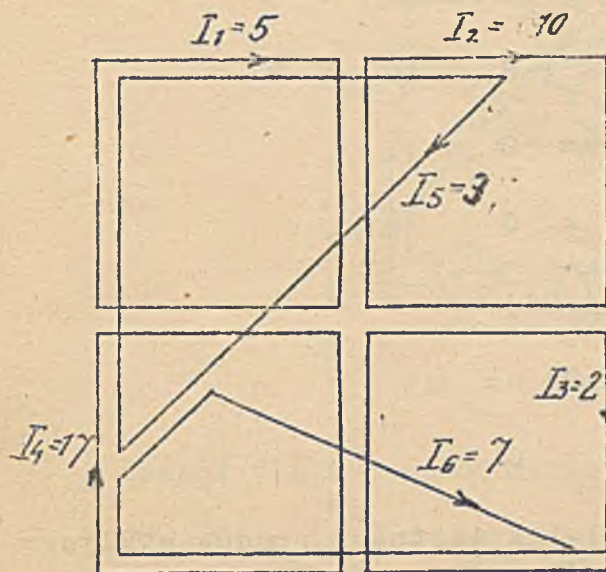
Wartości prądów cyklicznych zależą jedynie od stałych obwodu (SEM-nych i oporów). Zmieniając te stałe, spowodujemy także zmiany wszystkich prądów cyklicznych. Jednakże w żadnym z poszczególnych przypadków 1-sze prawo Kirchhoffa nie zostanie naruszone.

Znaczący to, że dowolną sieć można złożyć z pojedynczych oczek, w których krążą dowolnie obrane prądy cykliczne.

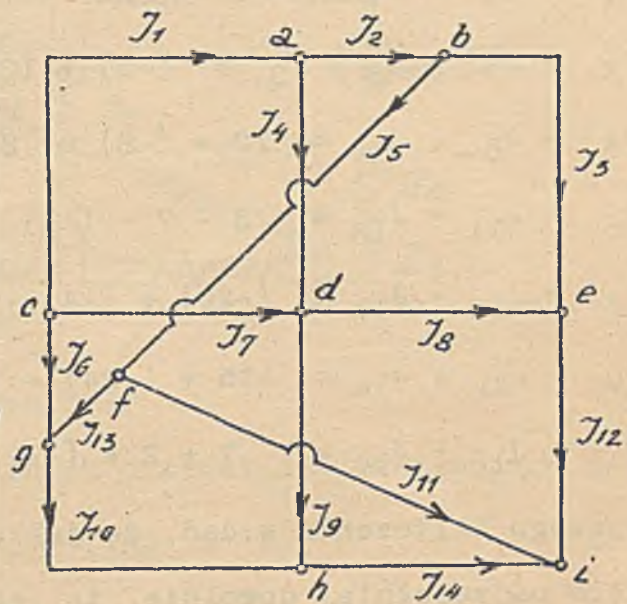
W sieci tak utworzonej będzie zawsze spełnione 1-sze prawo Kirchhoffa. Wartości prądów cykl. mogą mieć dowolne znaki (dodatnie i ujemne).



Przykład: Z cykli uwidoczniionych na rys. 149. i dowolnie obranych:  $I_1 = 5$ ,  $I_2 = 10$ ,  $I_3 = 2$ ,  $I_4 = 17$ ,  $I_5 = 3$ ,  $I_6 = 7$  amp utworzyć sieć, podaną na rys. 150.



Rys. 149.



Rys. 150.

Oznaczając dowolnie strzałki prądów  $J_1, J_2, \dots, J_{14}$  obliczamy, zgodnie z przyjętymi na rys. 150. kierunkami:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= I_1 + I_5 = 5 + 3 = +8, & J_8 &= I_3 - I_2 = 2 - 10 = -8 \\
 J_2 &= I_2 + I_5 = 10 + 3 = +13, & J_9 &= I_4 - I_3 = 17 - 2 = +15 \\
 J_3 &= I_2 = 10 = +10, & J_{10} &= -I_4 - I_6 = -17 - 7 = -24 \\
 J_4 &= I_1 - I_2 = 5 - 10 = -5, & J_{11} &= I_6 = 7 = +7 \\
 J_5 &= I_5 = 3 = +3, & J_{12} &= I_3 = 2 = +2 \\
 J_6 &= -I_4 - I_5 = -17 - 3 = -20, & J_{13} &= I_5 - I_6 = 3 - 7 = -4 \\
 J_7 &= I_4 - I_1 = 17 - 5 = +12, & J_{14} &= -I_3 - I_6 = -2 - 7 = -9
 \end{aligned}$$

amperów.



Kontrola według I-go prawa Kirchhoffa:

$$a) \quad J_1 - J_2 - J_4 = 8 - 13 - (-5) = 0$$

$$b) \quad J_2 - J_3 - J_5 = 13 - 10 - 3 = 0$$

$$c) \quad -J_1 - J_6 - J_7 = -8 - (-20) - 12 = 0$$

$$d) \quad J_4 + J_7 - J_8 - J_9 = (-5) + 12 - (-8) - 15 = 0$$

$$e) \quad J_3 + J_8 - J_{12} = 10 + (-8) - 2 = 0$$

$$f) \quad J_5 - J_{11} - J_{13} = 3 - 7 - (-4) = 0$$

$$g) \quad J_6 + J_{13} - J_{10} = (-20) + (-4) - (-24) = 0$$

$$h) \quad J_9 + J_{10} - J_{14} = +15 + (-24) - (-9) = 0$$

$$i) \quad J_{11} + J_{12} + J_{14} = 7 + 2 + (-9) = 0$$

Z powyższego obliczenia widać, że jakkolwiek wartości prądów cyklicznych przyjęto najzupełniej dowolnie, to jednakże po złożeniu ich, otrzymaliśmy prądy sieci zadawalające w zupełności I-sze prawo Kirchhoffa.

Dobierając teraz w każdym oczku odpowiednio oporności i SEM-czne, tak, aby i II-gie prawo Kirchhoffa było spełnione, uzyskamy kompletną sieć.

W tym celu obieramy dowolnie oporności wszystkich elementów i wypisując 6 równań cyklicznych obliczamy poszczególne sumy SEM-cznych.

Niech będzie:

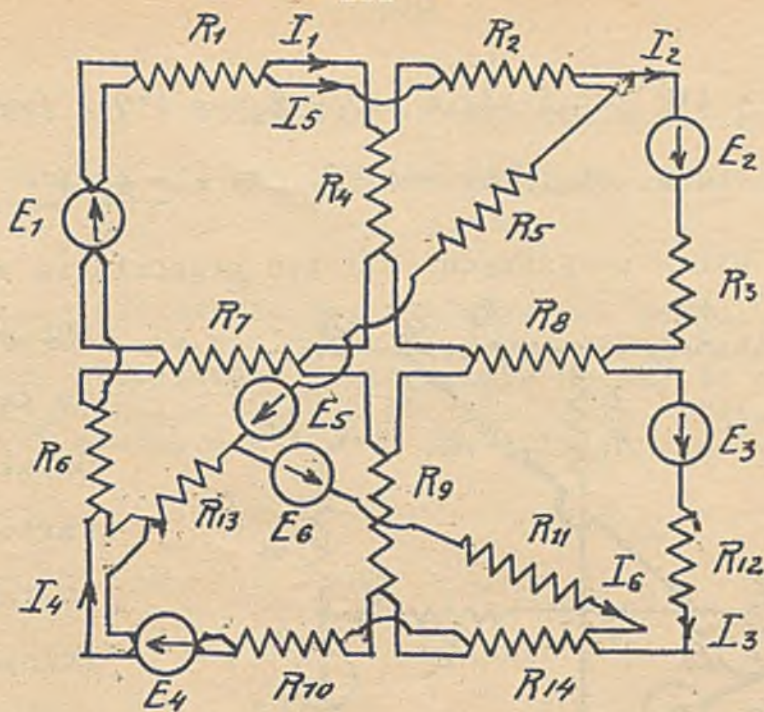
$$R_1 = 1, R_2 = 2, R_3 = 3, R_4 = 4, R_5 = 5, R_6 = 6, R_7 = 7, R_8 = 8,$$

$$R_9 = 9, R_{10} = 10, R_{11} = 11, R_{12} = 12, R_{13} = 13, R_{14} = 14 \text{ omów.}$$

Dla lepszej orientacji dodajemy rys.151., uwydatniający znaczenie cykli.

Dla każdego oczka wystarczy obrać jedną SEM-czną, a obliczenie sprowadza się do obliczenia tych SEM-cznych.





Rys. 151.

Zespół 6-ciu równań cyklicznych przedstawia następujące zestawienie:

- 1)  $I_1(R_1+R_4+R_7) + I_5R_1 - I_2R_4 - I_4R_7 = E_1$
- 2)  $I_2(R_2+R_3+R_4+R_8) + I_5R_2 - I_1R_4 - I_3R_8 = E_2$
- 3)  $I_3(R_8+R_9+R_{12}+R_{14}) + I_6R_{14} - I_2R_8 - I_4R_9 = E_3$
- 4)  $I_4(R_6+R_7+R_9+R_{10}) + I_5R_6 + I_6R_{10} - I_1R_7 - I_3R_9 = E_4$
- 5)  $I_5(R_1+R_2+R_5+R_6+R_{13}) + I_1R_1 + I_2R_2 + I_4R_6 - I_6R_{13} = E_1 + E_5$
- 6)  $I_6(R_{10}+R_{11}+R_{13}+R_{14}) + I_3R_{14} + I_4R_{10} - I_5R_{13} = E_4 + E_6$

Wstawiając w równania powyższe wartości R i I, znajdziemy wartości wszystkich 6-ciu SEM-cznych, jak to okazuje następujące obliczenie:

- 1)  $5 \cdot (1 + 4 + 7) + 3 \cdot 1 - 10 \cdot 4 - 17 \cdot 7 = -96 = E_1$
- 2)  $10 \cdot (2 + 3 + 4 + 8) + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 2 \cdot 8 = +140 = E_2$
- 3)  $2 \cdot (8 + 9 + 12 + 14) + 7 \cdot 14 - 10 \cdot 8 - 17 \cdot 9 = -49 = E_3$
- 4)  $17 \cdot (6 + 7 + 9 + 10) + 3 \cdot 6 + 7 \cdot 10 - 5 \cdot 7 - 2 \cdot 9 = +579 = E_4$
- 5)  $3 \cdot (1 + 2 + 5 + 6 + 13) + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 17 \cdot 6 - 7 \cdot 13 = +117 = E_1 + E_5$
- 6)  $7 \cdot (10 + 11 + 13 + 14) + 2 \cdot 14 + 17 \cdot 10 - 3 \cdot 13 = +495 = E_4 + E_6$

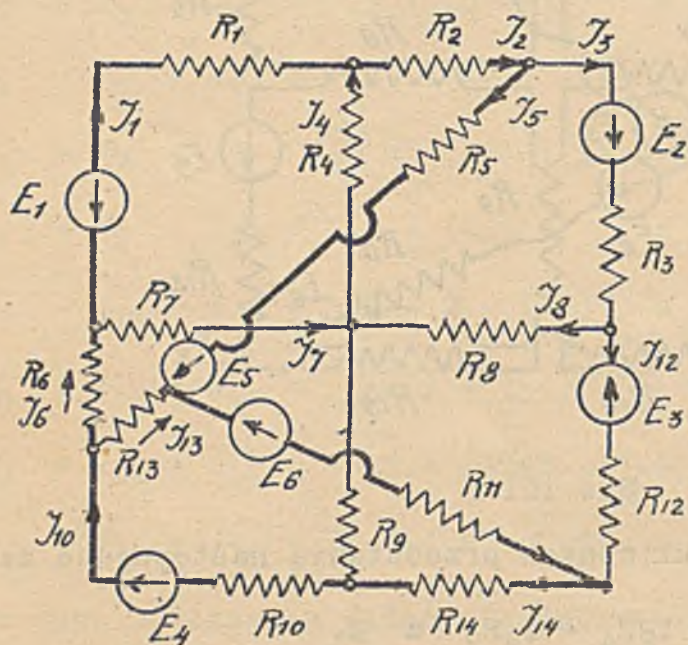
W ostatnich dwu równaniach (5 i 6) występują sumy SEM-cznych.



$$E_1 + E_5 = + 117, \text{ stąd } E_5 = 117 - E_1 = 117 - (-96) = \underline{+ 213 \text{ V}}$$

$$E_4 + E_6 = + 495, \text{ stąd } E_6 = 495 - 579 = \underline{- 84 \text{ V}}$$

Ostateczny wynik powyższych obliczeń przedstawia rys 152. Strzałki



SEM-cznych zorjentowane tu tak, aby wskazywały działania E dla dodatnich wartości E. Tak samo strzałki poszczególnych prądów (J) zorjentowane są tak, aby wszędzie wskazywały kierunek ruchu elektryczności dodatniej.

Rys 152

Kontrola z pomocą II-go prawa Kirchhoffa, zastosowanego dla dowolnych kół prądów obwodu na rys 152, przekona nas, że obliczenia powyższe są w porządku (Należy tylko pamiętać, że na rys.152 kierunki J i E odnozą się już do dodatnich wartości J i E).

Tak np dla koła prądów, uwydatnionego na rys.152. grubą linią, ma być:

$$-E_1 - J_1 R_1 - J_2 R_2 - J_5 R_5 + E_5 - E_6 - J_{11} R_{11} - J_{14} R_{14} - J_{10} R_{10} + E_4 - J_6 R_6 = 0$$

Rzeczywiście, podstawiając obliczone wartości J i E (z dodatnimi znakami, z uwagi na uskutecznioną orientację strzałek), otrzymamy:

$$-96 - 8.1 - 13.2 - 3.5 + 213 - 84 - 7.11 - 9.14 - 24.10 + 579 - 20.6 = 0.$$

Analogicznie można sprawdzić dowolne inne koło prądu.

Z możliwość złożenia obwodu przy pomocy cykli Maxwella będziemy niejednokrotnie korzystać tam, gdzie chodzi o sprawdzenie jakiegoś prawa ogólnego czy obliczenia cyfrowego. (Patrz dalej „Moc układu n-przewodowego”).



Ponieważ dają one przytem duże ułatwienie w obliczeniach rozplywu prądów, przeto należy się metodzie Maxwella poczesne miejsce w Elektro= technice.

Uwaga: Brak zainteresowania się elektryków metodą Maxwella, tłumaczyć można tem, że sam Maxwell używał jej jedynie dla sieci pozba= wionej skrzyżowań. Zastosowanie metody do składania obwodów<sup>1)</sup> winno jednakże obudzić zaciekawienie, otwiera bowiem pole do nowych zastosowań metody Maxwella.



1) P.E. 1927. Fryze, Równania Kirchhoffa, Maxwella i Coltriego dla sieci elektrycznej.



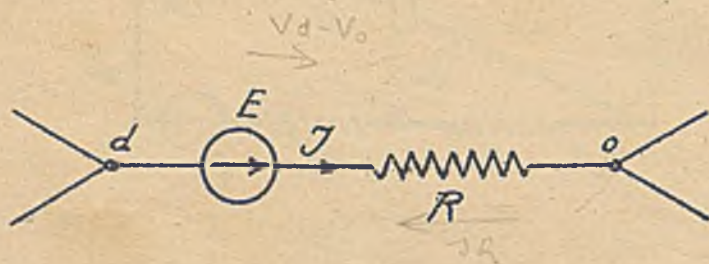
4. Równania węzłowe Coltriego.

Przekształcenie równań Kirchhoffa w równania Coltriego.

Do obliczenia rozpiływu prądów w obwodzie złożonym, można użyć także metody podanej przez Coltriego dla sieci technicznych (służących do roz-  
prowadzania energii elektrycznej):

Przedstawione tu uogólnienie owej metody dla obwodów zawierających SEM-czne, pozwala zredukować liczbę  $l = (w - 1) + k$  równań Kirchhoffa do  $w - 1$  równań węzłowych Coltriego.

Oznacza  $V_d$  potencjał węzła, przez który prąd  $J$  dopływa do elementu



„d o” o oporze  $R$  i SEM  $E$ , skierowanej zgodnie z prądem (rys.153.), a  $V_o$  potencjał węzła, przez który ów prąd odpływa z elementu, to zgodnie z II-giem prawem Kirchhoffa

Rys.153.

możemy napisać

$$V_o - V_d = E - J.R$$

skąd

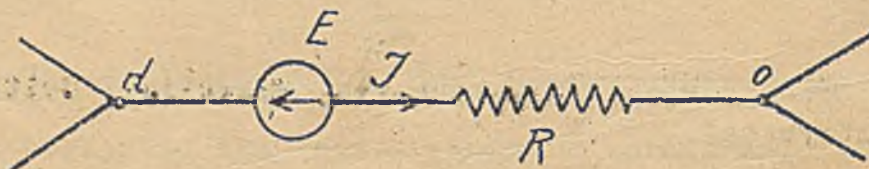
$$J = \frac{E}{R} + \frac{V_d - V_o}{R}$$

lub

$$J = E.G + (V_d - V_o).G \dots\dots\dots (78)$$

Gdy SEM elementu skierowana jest przeciw prądowi (rys.154.), wypadnie w myśl powyższego -

$$J = -E.G + (V_d - V_o).G \dots\dots\dots (79)$$



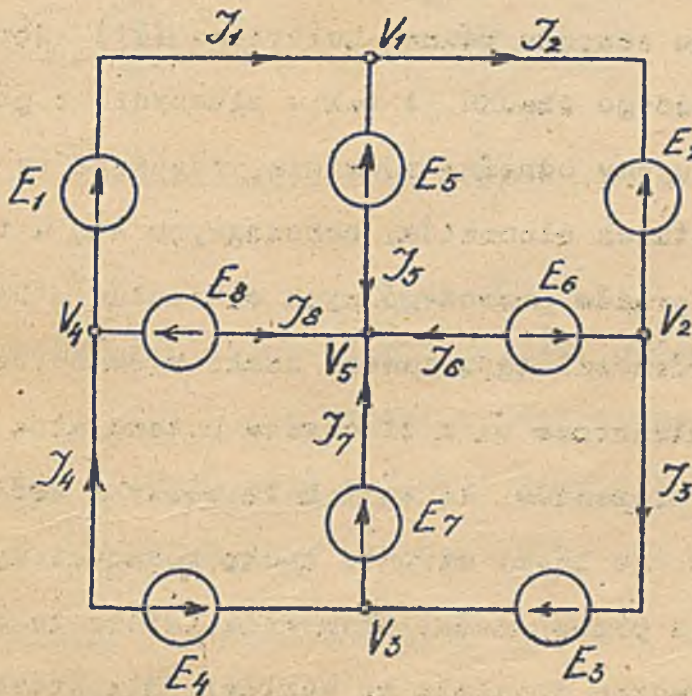
Rys.154.



Ustawiając dla dowolnego obwodu o  $w$ -węzłach,  $w-1$  niezależnych równań węzłowych według I-go prawa Kirchhoffa i wstawiając w nie wartości poszczególnych prądów według (78) i (79), otrzymamy  $w-1$  równań niezależnych o  $w$ -niewiadomych potencjałach  $w$ -węzłów sieci.

Kładąc dowolny (jeden) potencjał równy zeru, zredukujemy tę ilość niewiadomych do  $w-1$  i możemy je następnie obliczyć.

Okażemy to na przykładzie. - Dla sieci przedstawionej na rys.155. na-



piszemy (w myśl I-go prawa Kirchhoffa):

$$\left. \begin{aligned} 1) J_1 - J_2 - J_5 &= 0 \\ 2) J_2 - J_3 - J_6 &= 0 \\ 3) J_3 - J_4 - J_7 &= 0 \\ 4) J_4 - J_1 - J_8 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots I$$

Rys.155.

Podstawmy w tych równaniach (I) (według 78 i 79):

$$J_1 = +E_1 \cdot G_1 + (V_4 - V_1) \cdot G_1,$$

$$J_5 = -E_5 \cdot G_5 + (V_1 - V_5) \cdot G_5,$$

$$J_2 = -E_2 \cdot G_2 + (V_1 - V_2) \cdot G_2,$$

$$J_6 = -E_6 \cdot G_6 + (V_2 - V_5) \cdot G_6,$$

$$J_3 = +E_3 \cdot G_3 + (V_2 - V_3) \cdot G_3,$$

$$J_7 = +E_7 \cdot G_7 + (V_3 - V_5) \cdot G_7,$$

$$J_4 = -E_4 \cdot G_4 + (V_3 - V_4) \cdot G_4,$$

$$J_8 = -E_8 \cdot G_8 + (V_4 - V_5) \cdot G_8,$$

To otrzymamy po uporządkowaniu następujące 4-ry równania o 5-ciu niewiadomych:



$$1) +V_1(G_1+G_2+G_5) - V_2 \cdot G_2 - V_4 \cdot G_1 - V_5 \cdot G_5 = E_1G_1 + E_2G_2 + E_5G_5$$

$$2) +V_2(G_2+G_3+G_6) - V_1 \cdot G_2 - V_3 \cdot G_3 - V_5 \cdot G_6 = -E_2G_2 + E_6G_6 - E_3G_3$$

$$3) +V_3(G_3+G_4+G_7) - V_2 \cdot G_3 - V_4 \cdot G_4 - V_5 \cdot G_7 = +E_3G_3 + E_4G_4 - E_7G_7$$

..... II

$$4) +V_4(G_1+G_4+G_8) - V_1 \cdot G_1 - V_3 \cdot G_4 - V_5 \cdot G_8 = -E_1G_1 - E_4G_4 + E_8G_8$$

W równaniach tych możemy położyć dowolny jeden potencjał równy zeru. Najdogodniej jest uskutecznić to z potencjałem nieuwzględnionego węzła.

Charakterystyczne cechy tego zespołu równań Coltriego (II), pozwalają wypisać je w p r o s t dla każdego obwodu. I tak w iloczynie z potencjałem węzła, dla którego wypisujemy odnośne równania, figuruje (w nawiasie) suma przewodności wszystkich elementów, schodzących się w tym węzle (bez względu na kierunek prądów poszczególnych elementów). Dalsze człony po lewej stronie znaku równości mają zawsze znaki ujemne (bez względu na kierunek prądów) i utworzone są z iloczynów potencjałów sąsiednich węzłów i przewodności elementów, łączących te węzły z węzłem, dla którego wypisujemy równanie. Po lewej stronie znaku równości występują sumy iloczynów SEM-cznych i przewodności elementów, które te SEM-czne zawierają. Gdy poszczególne SEM-czne działają ku węzłowi, dla którego wypisujemy równanie, wstawiamy odnośne iloczyny EG ze znakiem dodatnim, gdy zaś działają w kierunku przeciwnym, wstawiamy je ze znakiem ujemnym.

W otrzymanym w ten sposób zespole równań Coltriego kładziemy potencjał węzła, nieuwzględnionego, równy zeru (Tu na rys.155.  $V_5 = 0$ ).

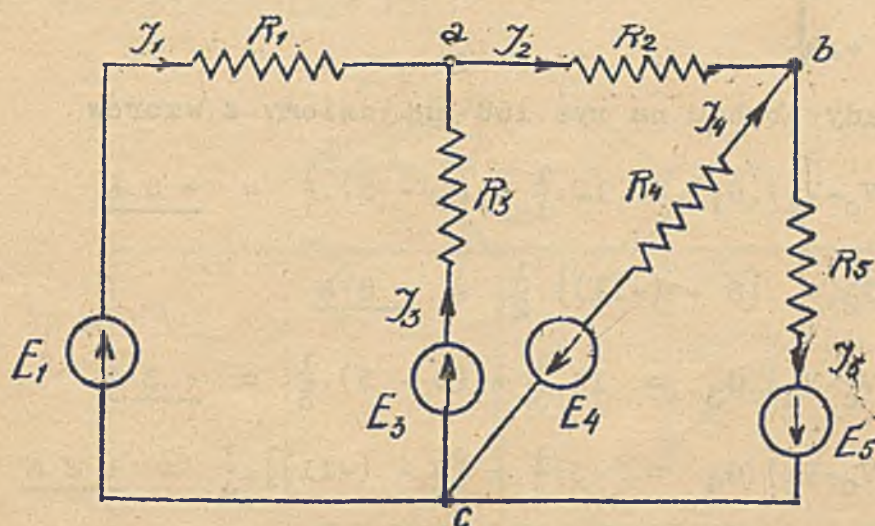
Otrzymamy w ten sposób w-1 równań o w-1 niewiadomych potencjałach (tu 4-ry równania o 4-rech niewiadomych), w których niewiadome te można obliczyć, czy to przy pomocy wyznaczników, czy też rugując kolejno niewiadome (lub wreszcie jakimkolwiek innym sposobem, nadającym się do rozwiązania n-równań o n-niewiadomych).

Gdy obliczone są potencjały w-1 węzłów (potencjał w-tego węzła przyjęto równy zeru), znajdziemy wszystkie prądy, posługując się wzorami 78. i 79.



Przykład liczbowy

Obliczyć rozptyw prądu obwodu przedstawionego na rys.156., w którym



$E_1 = 10, E_3 = 14,$   
 $E_4 = 3, E_5 = 61 \text{ wolt},$   
 $R_1 = 1, R_2 = 2,$   
 $R_3 = 3, R_4 = 4,$   
 $R_5 = 5, R_6 = 6 \text{ omów},$   
 przy pomocy równań  
 Coltriego.

Rys.156.

Rozwiązanie: Obwód ma 3 węzły, zatem ustawimy 2 równania, opuszczając węzeł o największej liczbie elementów (tu c).

a)  $V_a(G_1+G_2+G_3) - V_cG_1 - V_cG_3 - V_bG_2 = E_1G_1 + E_3G_3,$

b)  $V_b(G_2+G_4+G_5) - V_aG_2 - V_cG_4 - V_cG_5 = -E_4G_4 - E_5G_5.$

Kładąc w równaniach tych  $V_c = 0$  i podstawiając podane powyżej wartości, otrzymamy

a)  $V_a\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - V_b \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{1}{1} + 14 \cdot \frac{1}{3},$

b)  $-V_a \cdot \frac{1}{2} + V_b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = -3 \cdot \frac{1}{4} - 61 \cdot \frac{1}{5}$

a)  $V_a \cdot 11 - V_b \cdot 3 = +88,$

b)  $-V_a \cdot 10 + V_b \cdot 19 = -259.$

Skąd

$$V_a = \frac{\begin{vmatrix} 88 & -3 \\ -259 & +19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -10 & +19 \end{vmatrix}} = \frac{88 \cdot 19 - 259 \cdot 3}{11 \cdot 19 - 10 \cdot 3} = \frac{895}{179} = 5,$$



$$V_b = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 88 \\ -10 & -259 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -10 & +19 \end{vmatrix}} = \frac{-11 \cdot 259 + 10 \cdot 88}{11 \cdot 19 - 10 \cdot 3} = \frac{-1969}{179} = -11.$$

Poszczególne prądy obwodu na rys.156 znajdziemy z wzorów

$$J_1 = E_1 G_1 + (V_c - V_a) \cdot G_1 = 10 \cdot \frac{1}{1} + (0 - 5) \cdot \frac{1}{1} = \underline{+ 5 \text{ A}}$$

$$J_2 = (V_a - V_b) \cdot G_2 = [5 - (-11)] \cdot \frac{1}{2} = \underline{+ 8 \text{ A}}$$

$$J_3 = E_3 G_3 + (V_c - V_a) \cdot G_3 = 14 \cdot \frac{1}{3} + (0 - 5) \cdot \frac{1}{3} = \underline{+ 3 \text{ A}}$$

$$J_4 = -E_4 G_4 + (V_c - V_b) \cdot G_4 = -3 \cdot \frac{1}{4} + [0 - (-11)] \cdot \frac{1}{4} = \underline{+ 2 \text{ A}}$$

$$J_5 = E_5 G_5 + (V_b - V_c) \cdot G_5 = 61 \cdot \frac{1}{5} + (-11 - 0) \cdot \frac{1}{5} = \underline{+ 10 \text{ A}}$$

Sprawdzenie możemy uskutecznić przy pomocy I-go i II-go prawa Kirchhoffa.

Uwaga: Obliczone potencjały poszczególnych węzłów sieci odpowiadają wartościom względnym t.j. odniesionym do stanu, gdy potencjał jednego węzła (tu  $V_5$ ) jest równy zeru. Elektrycznie odpowiada to uziemieniu odnośnego węzła.

### Składanie obwodu przy pomocy równań Coltriego.

Analogicznie jak przy cyklach Maxwella, można i tu z pomocą równań Coltriego złożyć dowolny obwód. Wystarczy w tym celu obrać dowolnie w-potencjałów w-węzłów w sieci, oraz przewodności (G) wszystkich jej elementów

Ustawiwszy w-równań Coltriego dla w-węzłów, obliczamy (po podstawieniu dowolnie obranych wartości V i G) sumy EG (po prawej stronie znaku równości), a z nich poszczególne SEM-czne.

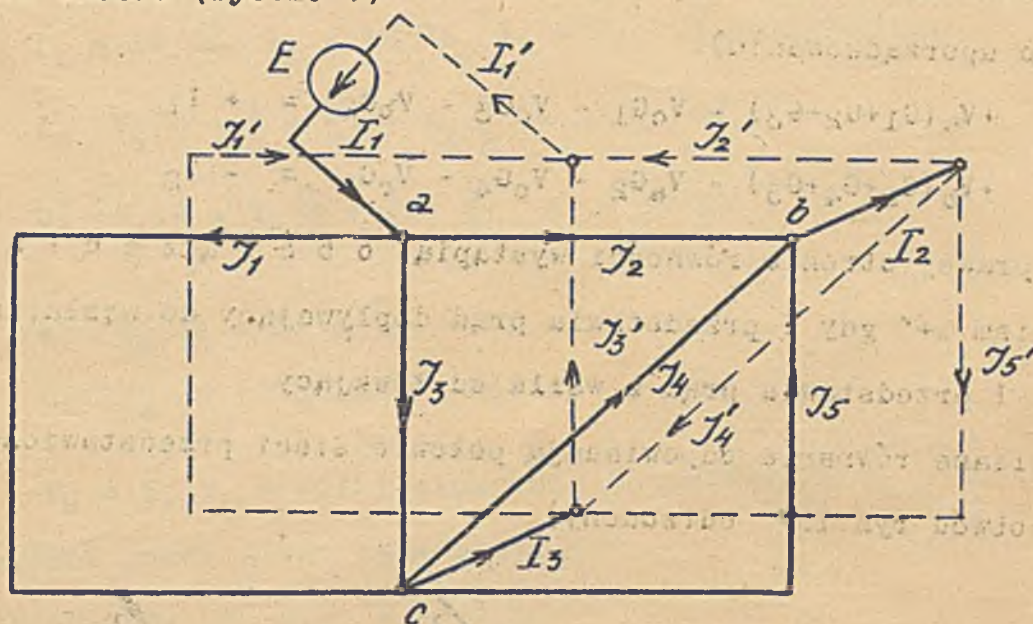
Z równań dla poszczególnych elementów (wzory 78 i 79) znajdziemy następnie wszystkie prądy.

Sposobu tego jednakże nie używamy, gdyż nastęrcza więcej roboty niż podana poprzednio metoda Maxwella.



Zastosowanie równań Coltriego do obliczania sieci technicznych.

Sieć techniczna prądu stałego składa się z dwu identycznych obwodów, ułożonych obok siebie (rys.157.)



Rys.157.

Symbole  $I_2$  i  $I_3$  odpowiadają tu obciążeniom,  $I_1$  przedstawia prąd zasila-  
jący z elektrowni, którą tu reprezentuje SEM-czna E.

Przy jednakowych opornościach elementów leżących obok siebie, płyną  
w nich jednakowe prądy, lecz o p r z e c i w n y c h kierunkach. Wystar=  
czy przeto uskutecznić obliczenie rozpiływu tylko dla jednej połowy sieci.  
Obliczenie to, przeprowadzimy przy pomocy równań Coltriego w analogiczny  
sposób, jak poprzednio dla zwykłych obwodów.

Dla jasności ustawimy naprzód równania węzłowe Kirchhoffa. (Uwzglę=  
dniona połowa sieci wyciągnięta na rys.157. pełnemi linjami):

$$a) \quad -J_1 - J_2 - J_3 + I_1 = 0,$$

$$b) \quad +J_2 + J_4 + J_5 - I_2 = 0$$

Równanie węzła „c” przedstawia znów sumę równań węzłów „a” i „b”,  
gdyż w sieci technicznej musi być

$$\sum(I) = 0$$



Tu

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Równanie węzła „c” możemy przeto opuścić.

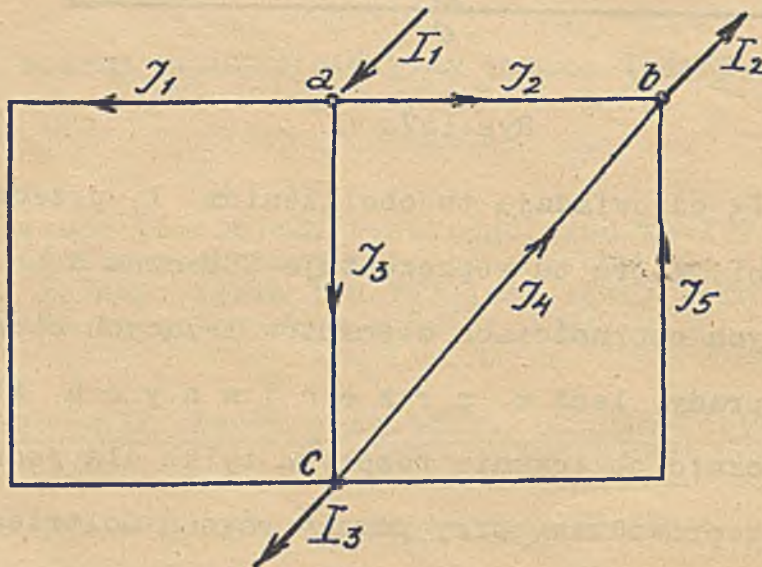
Podstawiając za każdy z prądów wartości według równań 78 i 79, otrzymamy (po uporządkowaniu):

$$a) \quad +V_a(G_1+G_2+G_3) - V_cG_1 - V_cG_3 - V_bG_2 = + I_1$$

$$b) \quad +V_b(G_2+G_4+G_5) - V_aG_2 - V_cG_4 - V_cG_5 = - I_2$$

Po prawej stronie równości wystąpią obciążenia węzłów (I), ze znakiem „+” gdy I przedstawia prąd dopływający do węzła, a ze znakiem „-” gdy I przedstawia prąd z węzła odpływający.

Wypisane równania odpowiadają połowie sieci przedstawionej na rys. 158. (Drugi otwór rys. 157. odrzucony).



Rys. 158.

Podstawiając w równaniach powyższych  $V_c = 0$ , oraz wartości obciążeń  $I_2$  i  $I_3$ , znajdziemy niewiadome prądy sieci ( $J_1, J_2, \dots, J_5$ ).



Przykład liczbowy. Niech będzie (na rys.158.)

$$R_1 = 1, R_2 = 2, R_3 = 3, R_4 = 4, R_5 = 5 \text{ omów,}$$

$$I_1 = 14^{\circ}66', I_2 = 12^{\circ}95', I_3 = I_1 - I_2 = 1^{\circ}716' \text{ amp.}$$

$$a) V_a \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - V_b \cdot \frac{1}{2} = + 14^{\circ}66',$$

$$b) -V_a \cdot \frac{1}{2} + V_b \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = - 12^{\circ}95'.$$

$$a) V_a \cdot 11 - V_b \cdot 3 = + 88,$$

$$b) -V_a \cdot 10 - V_b \cdot 19 = -259.$$

Stąd

$$V_a = 5, V_b = -11 \text{ i stosownie do założenia } V_c = 0.$$

Poszczególne prądy sieci będą więc:

$$J_1 = (V_a - V_c) \cdot G_1 = 5 \cdot \frac{1}{1} = \underline{+ 5 \text{ A}},$$

$$J_2 = (V_a - V_b) \cdot G_2 = [5 - (-11)] \cdot \frac{1}{2} = \underline{+ 8 \text{ A}},$$

$$J_3 = (V_a - V_c) \cdot G_3 = 5 \cdot \frac{1}{3} = \underline{+ 1^{\circ}66' \text{ A}},$$

$$J_4 = (V_c - V_b) \cdot G_4 = [0 - (-11)] \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = \underline{+ 2^{\circ}75 \text{ A}},$$

$$J_5 = (V_c - V_b) \cdot G_5 = [0 - (-11)] \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{5} = \underline{+ 2^{\circ}2 \text{ A}}.$$

Kontrola (z pomocą I-go prawa Kirchhoffa:

$$1) \quad + I_1 - J_1 - J_2 - J_3 = 0 \\ + 14^{\circ}66' - 5 - 8 - 1^{\circ}66' = 0.$$

$$2) \quad + J_2 + J_4 + J_5 - I_2 = 0, \\ + 8 + 2^{\circ}75 + 2^{\circ}2 - 12^{\circ}95 = 0.$$

$$3) \quad + J_1 + J_3 - J_4 - J_5 - I_3 = 0 \\ + 5 + 1^{\circ}666' - 2^{\circ}75 - 2^{\circ}2 - 1^{\circ}716' = 0.$$







Uwagi końcowe.

Czyniąc przegląd opisanych poprzednio t r z e c h metod traktowania sieci, widzimy, że do obliczenia r o z p ły w u prądu

według Kirchhoffa potrzeba  $l = (w - 1) + k$  równań,

" Maxwella "  $k$  równań,

" Coltriego "  $w-1$  równań

zasadniczych.

Równań Kirchhoffa używamy (jak to już wspomniano) prawie wyłącznie do analizy.

Obwody o  $k > (w-1)$  należałoby liczyć metodą Coltriego.

Obwody o  $(w-1) > k$  należałoby liczyć metodą Maxwella.

Pozatem cykle Maxwella nadają się znakomicie do składania obwodu, a metoda Coltriego do obliczania rozplywu prądów w sieciach technicznych. Wypada jednak zaznaczyć, że metoda Maxwella jest bardzo mało rozpowszechniona, a metoda Coltriego, w zastosowaniu do dowolnych obwodów, jest zdaje się zupełnie nieznana.







$$i_{11} = J_1 \text{ (dla stanu, gdy } E_1 \neq 0, \text{ a } E_2 = 0, E_3 = 0, \dots \dots E_p = 0),$$

$$i_{12} = J_1 \text{ (dla stanu, gdy } E_1 = 0, \text{ a } E_2 \neq 0, E_3 = 0, \dots \dots E_p = 0),$$

-----

$$i_{1p} = J_1 \text{ (dla stanu, gdy } E_1 = 0, \text{ a } E_2 = 0, E_3 = 0, \dots \dots E_p \neq 0).$$

Podobnie

$$i_{21} = J_2 \text{ (dla stanu, gdy } E_1 \neq 0, \text{ a } E_2 = 0, E_3 = 0, \dots \dots E_p = 0),$$

$$i_{22} = J_2 \text{ (dla stanu, gdy } E_1 = 0, \text{ a } E_2 \neq 0, E_3 = 0, \dots \dots E_p = 0).$$

i t.d.

Czyli  $i_{11}$  przedstawia prąd w elemencie „1” wywołany działaniem samej tylko SEM-cznej  $E_1$ .

$i_{12}$  przedstawia prąd w elemencie „1” wywołany działaniem samej tylko SEM-cznej  $E_2$ .

$i_{1p}$  przedstawia prąd w elemencie „1” wywołany działaniem samej tylko SEM-cznej  $E_p$ .

Podobnie  $i_{21}$  przedstawia prąd w elemencie „2” wywołany działaniem samej tylko SEM-cznej  $E_1$ , i t.d.

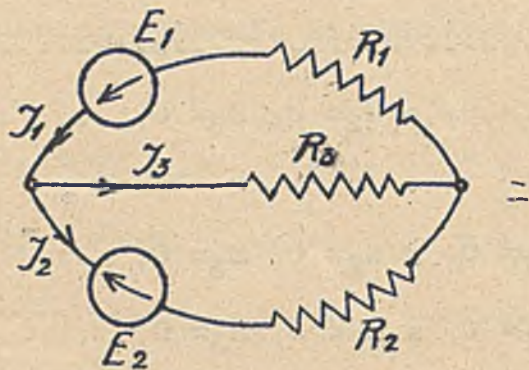
Równania II względnie III przedstawiają t. zw. zasadę superpozycji (nakładania). Zasada ta wyrażona słowami brzmi:

Każdy prąd w sieci (prądu stałego) jest sumą prądów składowych, wywołanych przez poszczególne SEM-czne sieci.

Wartość i kierunek każdego pojedynczego prądu składowego zależą od jednej tylko SEM-cznej, bez względu na wartość i rozmieszczenie wszystkich innych SEM-cznych.

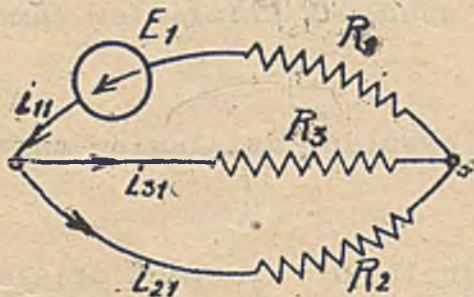


Przykład. Zastosować zasadę superpozycji do obwodu, przedstawionego na rys.160.

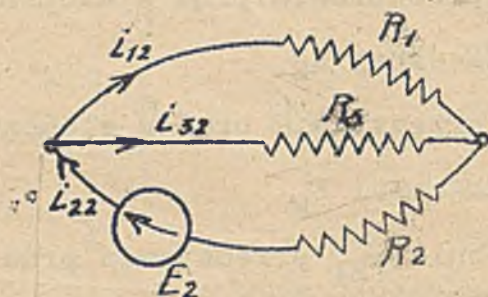


Rys.160

Obliczając osobno rozprływ prądu dla stanu, gdy  $E_1 \neq 0, E_2 = 0$ , rys.161 a następnie dla stanu, gdy  $E_2 \neq 0, E_1 = 0$ , rys.162, otrzymamy:



Rys.161.



Rys.162.

$$J_1 = i_{11} - i_{12} = \frac{E_1(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} - \frac{E_2 \cdot R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$J_2 = i_{21} - i_{22} = \frac{E_1 \cdot R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} - \frac{E_2(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$J_3 = i_{31} + i_{32} = \frac{E_1 \cdot R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} + \frac{E_2 \cdot R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

Wzory te okazują, że prądy składowe  $i_{11}, i_{21}, i_{31}$  zależą tylko od SEM-owej  $E_1$ , zaś prądy składowe  $i_{12}, i_{22}, i_{32}$  tylko od SEM-owej  $E_2$

Sumowanie składowych (i) celem otrzymania wypadkowych (J) uskuteczniamy z uwzględnieniem kierunków (i) i (J). (Rys.160, 161 : 162).



Zasada superpozycji ma nader ważne znaczenie w Elektrotechnice i wynika, jak wykazaliśmy powyżej, bezpośrednio z praw Kirchhoffa.

Należy pamiętać, że wolno ją stosować jedynie dla obwodów (prądu stałego) o stałych opornościach wszystkich elementów. Nie wolno więc superponować prądów składowych (pochodzących od pojedynczych SEM-ych) w sieciach o zmiennych opornościach jednego lub kilku elementów. Superpozycję wykonuje się zwykle dla każdej pojedynczej SEM-cznej. Można jednakże superponować także prądy pochodzące od kilku SEM-cznych. Widać to jasno w zespole równań III.

Zamiast n.p. równania

$$J_1 = i_{11} + i_{12} + i_{13} + i_{14} + i_{15} + i_{16} + i_{17}.$$

można napisać

$$J_1 = I_1' + I_1'' + I_1'''.$$

gdzie n.p.

$$I_1' = i_{11} + i_{12} + i_{13},$$

$$I_1'' = i_{14} + i_{15},$$

$$I_1''' = i_{16} + i_{17}.$$

$I_1'$  odpowiada tu prądowi wywołanemu w elemencie „1” łącznym działaniem SEM-cznych  $E_1$ ,  $E_2$  i  $E_3$ .

$I_1''$  przedstawia prąd spowodowany w elemencie „1” łącznym działaniem SEM-cznych  $E_4$  i  $E_5$ , wreszcie

$I_1'''$  reprezentuje prąd wzniecony w elemencie „1” łącznym działaniem SEM-cznych  $E_6$  i  $E_7$ .



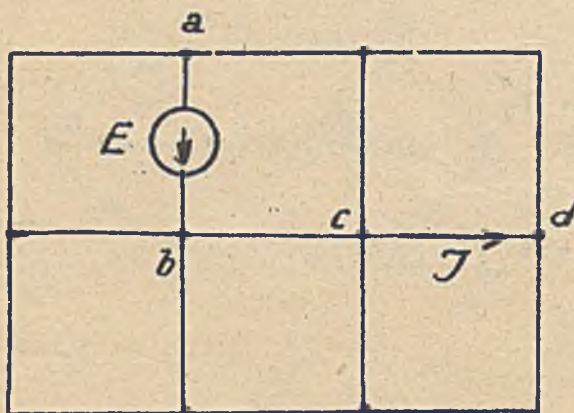
$2 \rightarrow \sum_{0 \neq} E \cdot J_i = \dots$

### 6. Zasada wzajemności.

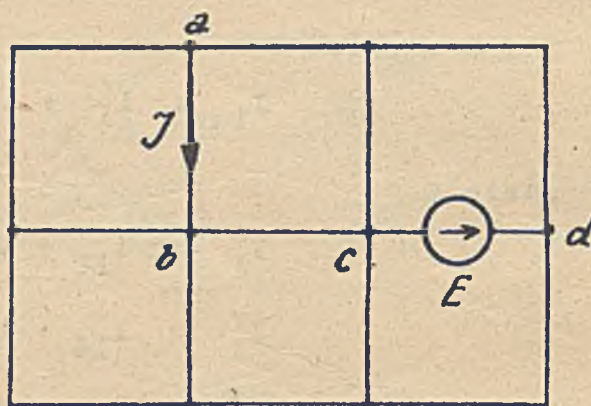
W każdym obwodzie prądu stałego, utworzonym z samych (stałych) oporów, obowiązuje następująca szczególna zasada wzajemności.

Gdy SEM E działająca w dowolnie obranym elemencie sieci „ab” wywołuje w dowolnym innym elemencie „cd” prąd J (rys.163.), to taka sama SEM E wpięta w element „cd” wywoła w elemencie „ab” również prąd J, (rys.164.).

Zasadę tę wyprowadził Kirchhoff ze swych równań (1847, Annalen der Physik, 3-Reihe, tom 12, Str.497 względnie 508).



Rys.163.



Rys.164.

Odnosnie do kierunków E i J w obu stanach obwodu zachodzą następujące zależności:

Gdy  $E_{ab}$  wzniesca prąd  $J_{cd}$ , to  $E_{cd}$  wzniesci prąd  $J_{ab}$ . Wpinając w element „cd” SEM E odwrotnie, otrzymamy także w elemencie „ab” prąd przeciwny:  $E_{dc}$  wzniesca prąd  $J_{ba}$ .

Uwaga: Oczywiście także w innych elementach sieci (na rys.163.i 164) płyną prądy. Zasada wzajemności stosuje się jednakże tylko do p a r y elementów d o w o l n i e obranej

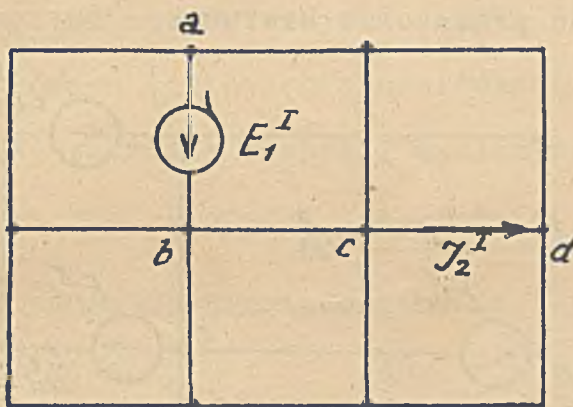


Powyższą, a z c z e g ó l n ą, zasadę wzajemności da się rozszerzyć.

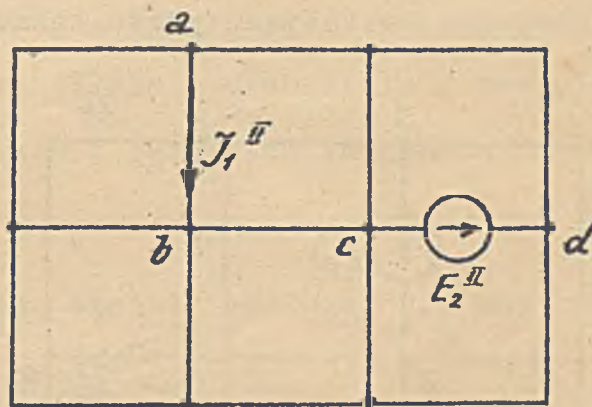
Stosunek  $\frac{E_1^I}{J_2^I} = C$  ma wartość stałą dla każdej (d o w o l n e j) wartości (z wyłączeniem 0 i  $\infty$ ) działającej SEM-cznej  $E_1^I$  i wywołanego nią prądu  $J_2^I$ .

Dla obu stanów obwodu, przedstawionych na rys.165. i 166. można więc napisać:

$$\frac{E_{ab}^I}{J_{cd}^I} = \frac{E_{cd}^{II}}{J_{ab}^{II}} \quad \text{lub} \quad \frac{E_1^I}{J_2^I} = \frac{E_2^{II}}{J_1^{II}}$$



Rys 165. (Stan I)



Rys.166. (Stan II)

Z powyższej równości wynika jednakże związek

$$\underline{E_1^I J_1^{II} = E_2^{II} J_2^I} \quad \dots \dots \dots (80)$$

Równość ta obowiązuje dla d o w o l n y c h wartości  $E_1^I, E_2^{II}$  (z wyłączeniem 0 i  $\infty$ ). Iloczyny  $E_n^I J_n^{II}$  mają znak dodatni, gdy kierunki  $E_n^I$  i  $J_n^{II}$  w elemencie „n” są w obu stanach zgodne, a znak ujemny, gdy kierunki te są przeciwne. Jak widać bowiem z poprzedniej równości, jest

$$\frac{E_{ab}^I}{J_{cd}^I} = - \frac{E_{ba}^I}{J_{cd}^I}, \quad \text{podobnie} \quad \frac{E_{cd}^{II}}{J_{ab}^{II}} = - \frac{E_{cd}^{II}}{J_{ba}^{II}}$$

(Przy zmianie kierunku strzałki E lub J należy zmienić znak wartości)

Zakładając we wzorze (80):  $E_1^I = E_2^{II} = E,$

otrzymamy równość  $J_1^{II} = J_2^I = J$

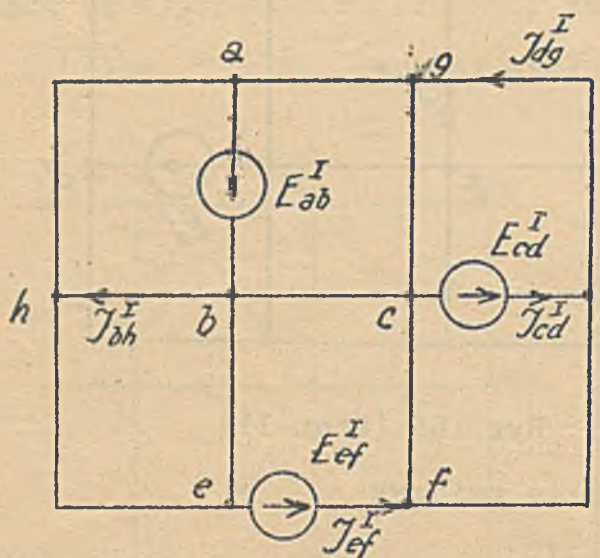
w myśl podanej poprzednio szczególnej zasady wzajemności



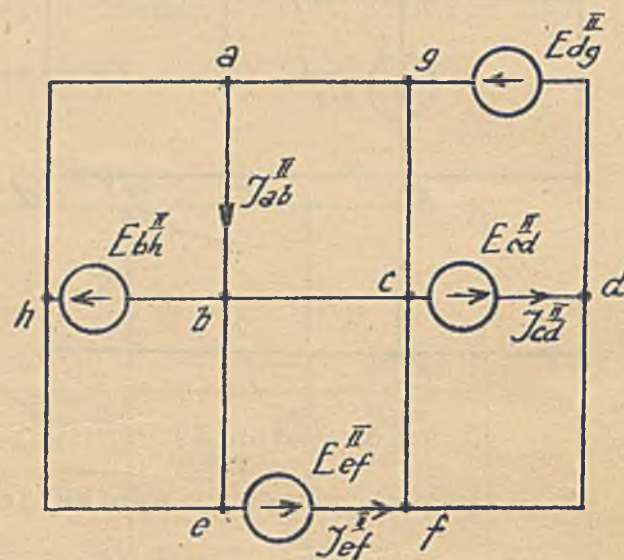
Szczególną zasadę wzajemności, wyrażoną matematycznie równością (80), można uogólnić dla przypadku, gdy sieć zawiera kilka SEM-cznych.

Oznaczmy SEM-czne działające w I-szym stanie obwodu (rys.167) symbolami  $E_{ab}^I, E_{cd}^I, E_{ef}^I$ , zaś w II-gim stanie obwodu (rys 168) symbolami  $E_{cd}^II, E_{ef}^II, E_{dg}^II, E_{bh}^II$  (Indeksy mają tu wskazywać przynależność do elementu oraz kierunek działania E).

Oznaczmy dalej symbolami  $J_{cd}^I, J_{ef}^I, J_{dg}^I, J_{bh}^I$  prądy we wskazanych indeksami elementach w stanie I, a symbolami  $J_{ab}^II, J_{cd}^II, J_{ef}^II$  prądy w stanie II (Indeksy mają wskazywać przynależność prądu oraz kierunek).



Rys.167.



Rys.168.

W myśl ogólnej zasady wzajemności, zachodzi następująca równość:

$$E_{ab}^I J_{ab}^II + E_{cd}^I J_{cd}^II + E_{ef}^I J_{ef}^II = E_{cd}^II J_{cd}^I + E_{ef}^II J_{ef}^I + E_{dg}^II J_{dg}^I + E_{bh}^II J_{bh}^I,$$

czyli ogólnie

$$\sum_1^{p_1} (E_j^I \cdot J_j^II) = \sum_1^{p_2} (E_j^II \cdot J_j^I) \dots \dots \dots (81)$$

$p_1$  oznacza tu liczbę SEM-cznych w stanie I-szym,  $p_2$  w stanie II-gim. Rozmieszczenie SEM-cznych jest w obu stanach dowolne. Zawsze jednak należy tworzyć sumy iloczynów z  $E^II \cdot J^I$ , względnie  $E^I \cdot J^II$  z SEM i prądów, przynależnych do identycznego elementu sieci. Gdy w I-szym stanie działa  $p_1$



a w II-gim  $p_2$  SEM-cznych, równość powyższa (81) zawiera  $p_1$  składników z lewej i  $p_2$  składników z prawej strony znaku równości. Gdy  $p_1 = 1$  lub  $p_2 = 1$ , wystąpi tylko jeden składnik po odnośnej stronie równości (wzór 80) - Porządek indeksów wskazuje, że E i J każdego składnika powyższej równości muszą być uzgodnione co do kierunkowości. Zmiana kierunkowości E lub J, tworzących poszczególne iloczyny, powoduje zmianę znaku odnośnego składnika. N.p.

$$E_{ab}^I J_{ab}^{II} = + E_{ba}^I J_{ba}^{II} = - E_{ab}^I J_{ba}^{II} \text{ i t.p.}$$

Ogólna zasada wzajemności (w relacji 81) wypływa z właściwości zespołu n-równań linjowych o n-niewiadomych. Jeżeli mianowicie w zespole takim (A) zachodzą równości współczynników o podobnych indeksach,

$$\underline{a_{rs} = a_{sr}} \dots\dots\dots (82)$$

to odnośnie do niewiadomych X i Y tego zespołu spełniać się musi następująca równość.

$$\underline{\sum_1^n (X_1^I Y_1^{II}) = \sum_1^n (X_1^{II} Y_1^I)} \dots\dots\dots (83)$$

przyczem symbole  $X^I$  odpowiadają kompleksowi I, a  $X^{II}$  kompleksowi II, dowolnie obranych wartości zmiennych niezależnych, a  $Y^I$  i  $Y^{II}$  przedstawiają wartości zmiennych zależnych, obliczone po wstawieniu wartości, przyjętych w I względnie II.

Przykład. W zespole równań:

$$\left. \begin{aligned} X_1 a_{11} + X_2 a_{12} + X_3 a_{13} + X_4 a_{14} &= Y_1 \\ X_1 a_{21} + X_2 a_{22} + X_3 a_{23} + X_4 a_{24} &= Y_2 \\ X_1 a_{31} + X_2 a_{32} + X_3 a_{33} + X_4 a_{34} &= Y_3 \\ X_1 a_{41} + X_2 a_{42} + X_3 a_{43} + X_4 a_{44} &= Y_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots A$$

niech będzie:



$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3, a_{14} = 4,$$

$$a_{21} = 2, a_{22} = 5, a_{23} = 6, a_{24} = 7,$$

$$a_{31} = 3, a_{32} = 6, a_{33} = 8, a_{34} = 9,$$

$$a_{41} = 4, a_{42} = 7, a_{43} = 9, a_{44} = 10.$$

Wartości tych współczynników przyjęliśmy tak, aby było:

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{14} = a_{41},$$

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{24} = a_{42}, \quad a_{34} = a_{43},$$

zgodnie z relacją (82).

Obierzmy I kompleks wartości  $X$  (dowolnie):

$$X_1^I = 1, \quad X_2^I = 2, \quad X_3^I = 0, \quad X_4^I = (-1)$$

zaś II kompleks (również dowolnie):

$$X_1^{II} = 0, \quad X_2^{II} = 0, \quad X_3^{II} = (-1), \quad X_4^{II} = 3.$$

I obliczmy wartości  $Y^I$  i  $Y^{II}$  dla obu kompleksów (I i II).

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 &= +1 = Y_1^I \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 &= +5 = Y_2^I \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 0 \cdot 8 + (-1) \cdot 9 &= +6 = Y_3^I \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 9 + (-1) \cdot 10 &= +8 = Y_4^I \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots I$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 4 &= +9 = Y_1^{II} \\ 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 + 3 \cdot 7 &= +15 = Y_2^{II} \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 8 + 3 \cdot 9 &= +19 = Y_3^{II} \\ 0 \cdot 4 + 0 \cdot 7 + (-1) \cdot 9 + 3 \cdot 10 &= +21 = Y_4^{II} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots II$$

W myśl wzoru (83) musi zachodzić równość:

$$X_1^I Y_1^{II} + X_2^I Y_2^{II} + X_3^I Y_3^{II} + X_4^I Y_4^{II} = X_1^{II} Y_1^I + X_2^{II} Y_2^I + X_3^{II} Y_3^I + X_4^{II} Y_4^I$$

Rzeczywiście, podstawiając odpowiednio, otrzymamy

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 15 + 0 \cdot 19 + (-1) \cdot 21 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 6 + 3 \cdot 8$$

$$9 + 30 - 21 = -6 + 24$$

$$\underline{18 = 18.}$$



Otóż równania Kirchhoffa, ustawione dla sieci prądu stałego, wykazują właśnie określoną wyżej równość współczynników, stojących przy niewiadomych (prądach)  $J$

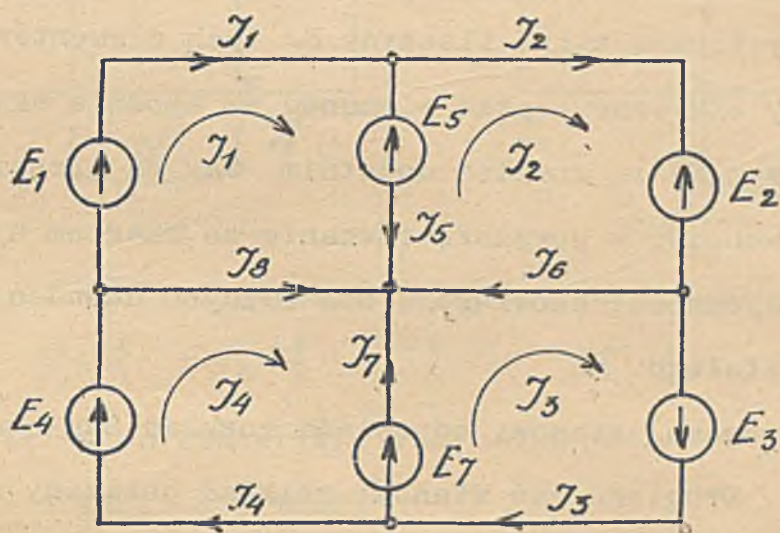
$$a_{rs} = a_{sr}$$

Wynika stąd, że także dla tych równań zachodzi równość

$$\sum_1^n (E_i^c \cdot J_i^s) = \sum_1^n (E_i^D \cdot J_i^R)$$

Najdogodniej można to wykazać, posługując się cyklami Maxwella.

Przykład: Ustawmy dla obwodu przedstawionego na rys. 169. w-1 równań cyklicznych Maxwella, uzupełniając w każdym z nich braku-



Rys 169.

brakujące człony iloczynami  $J \cdot 0 = 0$

- 1)  $+J_1 \cdot R_I - J_2 \cdot R_5 - J_3 \cdot 0 - J_4 \cdot R_8 = E_1 - E_5$ ,
- 2)  $-J_1 \cdot R_5 + J_2 \cdot R_{II} - J_3 \cdot R_6 - J_4 \cdot 0 = E_5 - E_2$ ,
- 3)  $-J_1 \cdot 0 - J_2 \cdot R_6 + J_3 \cdot R_{III} - J_4 \cdot R_7 = E_3 + E_7$ ,
- 4)  $-J_1 \cdot R_8 - J_2 \cdot 0 - J_3 \cdot R_7 + J_4 \cdot R_{IV} = E_4 - E_7$ .

(Symbole  $R_I, R_{II}, R_{III}, R_{IV}$  oznaczają tu oporności okrężne oczek)

Porównując zespół tych równań z zespołem A, widzimy, że rzeczywiście zachodzą tu przytoczone poprzednio równości współczynników (tak co do wartości jak i znaków).



Możemy przeto (zgodnie z 81) napisać:

$$\begin{aligned}
 & J_1^I (E_1^R - E_5^R) + J_2^I (E_5^R - E_2^R) + J_3^I (E_3^R + E_7^R) + J_4^I (E_4^R - E_7^R) = \\
 & = J_1^R (E_1^I - E_5^I) + J_2^R (E_5^I - E_2^I) + J_3^R (E_3^I + E_7^I) + J_4^R (E_4^I - E_7^I).
 \end{aligned}$$

Uwalniając powyższą równość od nawiasów i uwzględniając, że

$$J_1 - J_2 = J_5 \quad \text{i} \quad J_3 - J_4 = J_7,$$

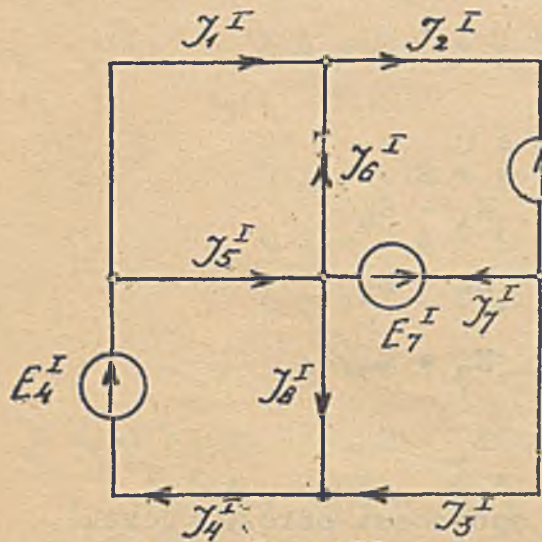
otrzymamy

$$\begin{aligned}
 & E_1^I J_1^R - E_2^I J_2^R + E_3^I J_3^R + E_4^I J_4^R - E_5^I J_5^R + E_7^I J_7^R = \\
 & = E_1^R J_1^I - E_2^R J_2^I + E_3^R J_3^I + E_4^R J_4^I - E_5^R J_5^I + E_7^R J_7^I.
 \end{aligned}$$

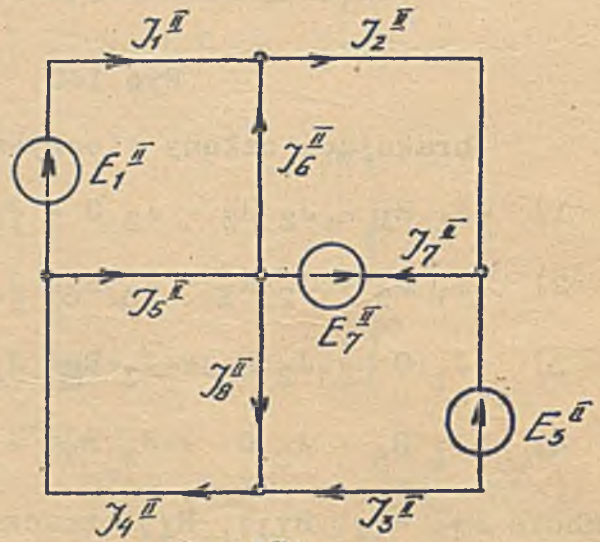
W równaniu tem występują tylko iloczyny EJ tych elementów, które zawierają SEM-czne. Gdy SEM-czne i prąd elementu są zgodnie skierowane, wchodzi odnośny iloczyn EJ ze znakiem dodatnim; Gdy są przeciwnie skierowane, iloczyn ten wchodzi w powyższe równanie ze znakiem ujemnym.

Ogólna zasada wzajemności obowiązuje dla każdych dwu dowolnych stanów obwodu prądu stałego.

Niech jednemu (I-szemu) stanowi odpowiada rozkład SEM-cznych uwi-  
doczniony na rys. 170. Drugiemu zaś stanowi rozkład pokazany na rys. 171.



Rys. 170.



Rys. 171.

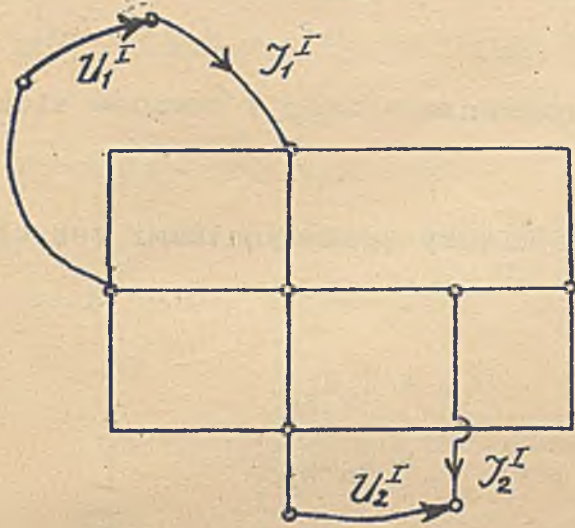
Zgodnie z poprzednimi wywodami obowiązywać tu będzie następująca równość:

$$- E_2^I \cdot J_2^R + E_4^I \cdot J_4^R - E_7^I \cdot J_7^R = + E_1^R \cdot J_1^I - E_3^R \cdot J_3^I - E_7^R \cdot J_7^I$$

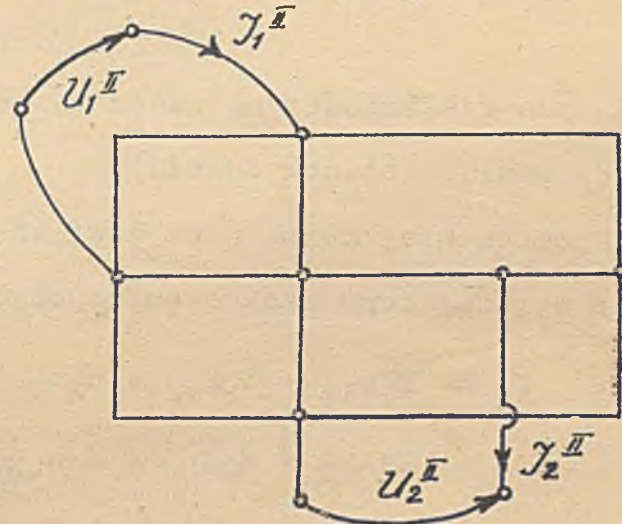


Zarówno ogólna jak i szczególna zasada wzajemności obowiązuje także w obwodach, w których SEM-czne zastąpione są napięciami.

Przykład 1. Obwód złożony z samych (stałych) oporów załączony jest raz na dwa napięcia czynne  $U_1^I, U_2^I$  (Stan I) (rys.172.), drugi raz na dwa napięcia czynne  $U_1^{II}, U_2^{II}$  (Stan II) (rys.173)



Rys.172.



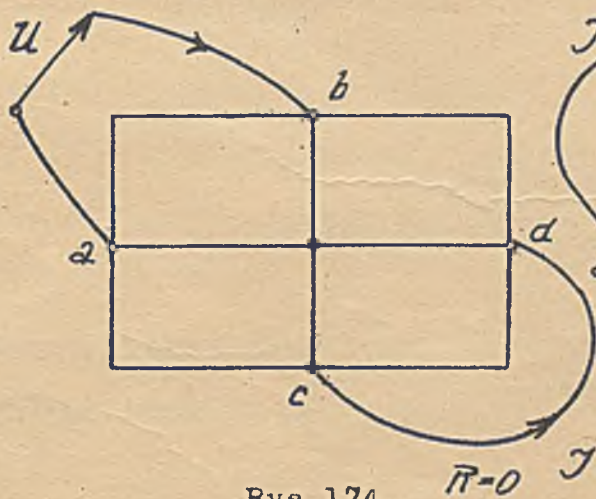
Rys.173.

W myśl ogólnej zasady wzajemności możemy położyć

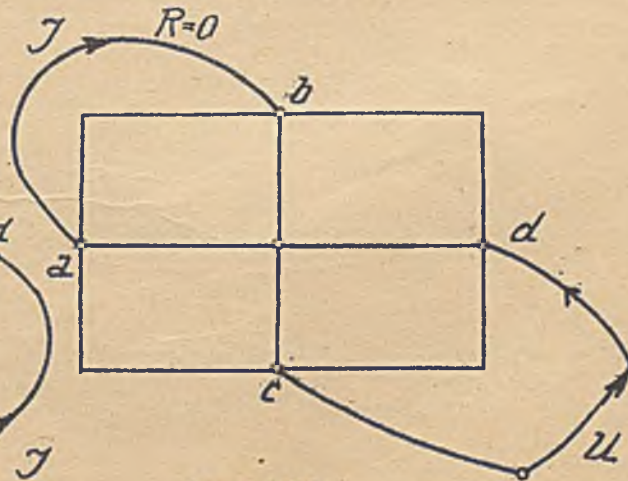
$$U_1^I \cdot J_1^{II} - U_2^I \cdot J_2^{II} = U_1^{II} \cdot J_1^I - U_2^{II} \cdot J_2^I.$$

Równość tę łatwo stwierdzić stosownym pomiarem (Pomiar U woltomierzami, pomiar J amperomierzami).

Przykład 2. Obwód złożony ze samych (stałych) oporności załączamy na napięcie U raz końcówkami „ab” (Stan I) (rys.174), drugi raz końcówkami „cd” (Stan II) (rys.175)



Rys 174.



Rys.175.



W stanie I końcówki „cd” są spięte „na krótko” (teoretycznie oporem  $R_{cd} = 0$ ). W stanie II końcówki „ab” są spięte „na krótko” ( $R_{ab} = 0$ ).

W myśl szczególnej zasady wzajemności, w obu stanach musi płynąć przez  $R = 0$  ten sam prąd  $J$ . (Połączenia i kierunki prądów  $J$ , oraz kierunkowości  $U$  widoczne na rys. 174 i 175.

Zasada wzajemności ma nader ważne znaczenie w teorii obwodów elektr. (Ogólna analiza stanów obwodu)

Z pomocą niej można n p dowieść, że między współczynnikami zespołu równań wyrażającego zasadę superpozycji:

$$J_1 = E_1 a_{11} + E_2 a_{12} + E_3 a_{13} + \dots + E_n a_{1p}.$$

$$J_2 = E_1 a_{21} + E_2 a_{22} + E_3 a_{23} + \dots + E_n a_{2p}.$$

-----

$$J_n = E_1 a_{n1} + E_2 a_{n2} + E_3 a_{n3} + \dots + E_n a_{np}.$$

zachodzą równości wyrażające się również relacją

$$\underline{a_{rs} = a_{sr}}$$

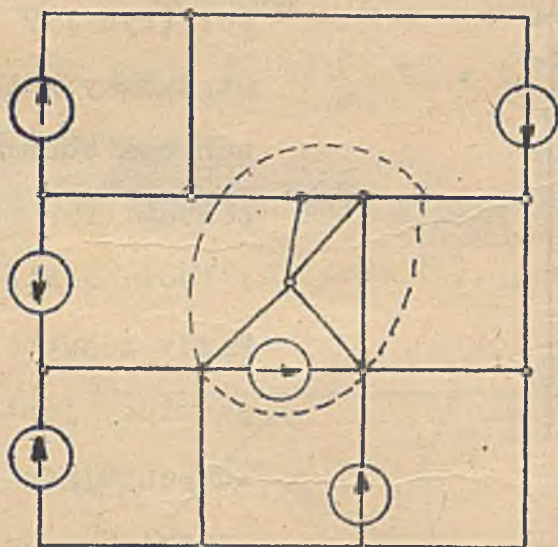


7. Zasada wyodrębnienia.

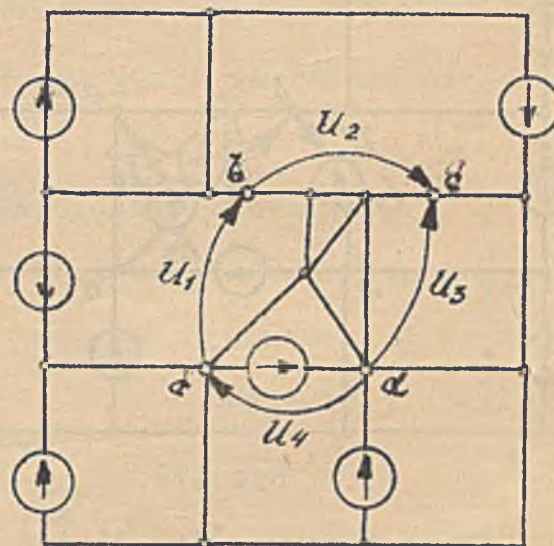
Dowolną część sieci prądu stałego można oddzielić od reszty, nie powodując żadnych zmian w rozplywie prądów i rozkładzie napięć, jeżeli do poszczególnych par punktów przecięcia dołączymy (bezopornowo) idealne źródła prądu o SEM-owych kompensujących napięcia ujawniające się między owymi parami punktów.

Znaczenie określonej tak zasady wyodrębnienia objaśnimy na przykładzie.

Z sieci przedstawionej na rys. 176, ma być wyodrębniona (oddzielona) część objęta linią kreskowaną.



Rys 176



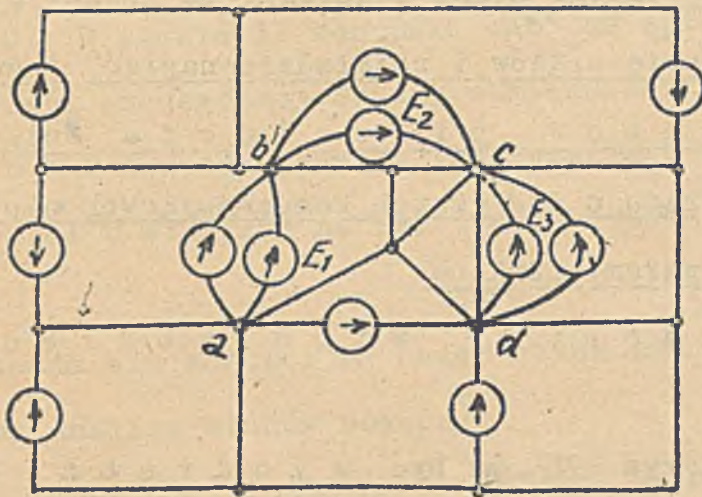
Rys 177

Tworząc z sąsiadujących punktów przyszłych przecięć (kółeczka na rys 177) pary i wyznaczając dla par tych napięcia  $U_1, U_2, U_3, U_4$ , tak, aby wszędzie grotki wskazywały punkty o wyższych potencjałach otrzymamy rys 177

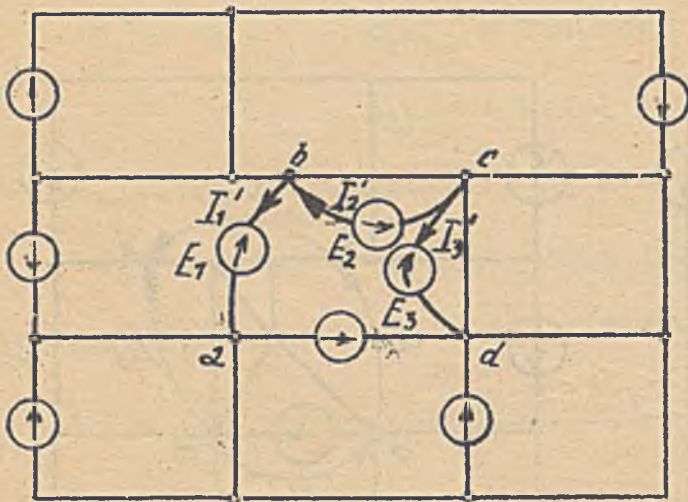
Włączmy teraz (bezopornymi przewodami) między każdą z owych par punktów po dwa idealne źródła kompensujące



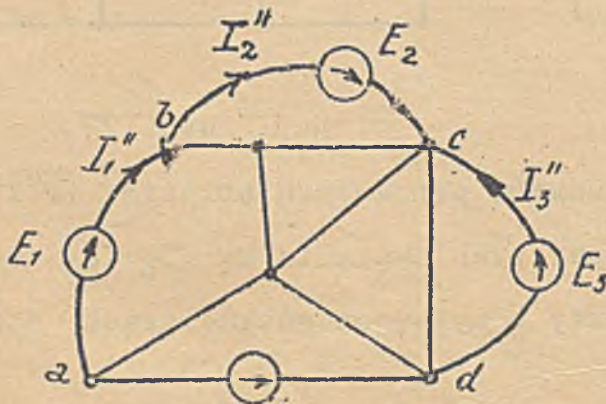
t j. równe napięciom:  $E_1 = U_1$ ,  $E_2 = U_2$ ,  $E_3 = U_3$ , (rys. 178.) i skierowane



Rys. 178



Rys. 179



Rys. 180

zgodnie ze strzałkami napięć (rys. 178.) Następnie w punktach, gdzie źródła te łączą się z obwodem, przetrnijmy elementy względnie węzły tak, aby sieć rozpadła się na dwie oddzielne części (rys. 179. i 180). Otrzymamy w ten sposób dwa oddzielne obwody (rys. 179. i 180), z których każdy z osobna uzupełniony jest elementami kompensującymi SEM-cznymi  $E_1, E_2, E_3$ . Podana powyżej zasada wyodrębnienia i wyraża, że w tak oddzielonych (wyodrębnionych) od siebie częściach sieci, poszczególne prądy i napięcia są takie same, jak w sieci pierwotnej rys. 178.

szczególne prądy i napięcia są takie same, jak w sieci pierwotnej rys. 178.



Uwaga: Wydaje się, że należałoby tu jeszcze włączyć także między punkty „da” czwartą parę SEM, kompensujących napięcie  $U_{da}$ . Rzut oka na rys 179 i 180 poucza jednakże, że ta czwarta para jest zbędna, bo kompensację napięcia między punktami „da” uskutecznią suma poprzednich trzech par SEM-cznych ( $E_1, E_2, E_3$ ). W myśl prawa koła napięć musi być bowiem

$$U_1 + U_2 - U_3 + U_4 = 0,$$

Zatem

$$U_4 = -U_1 - U_2 + U_3,$$

wskutek czego wypada, że

$$E_4 = -E_1 - E_2 + E_3$$

*nie widać*

Strugi prądu krążące w sieci pierwotnej między obu jej częściami przeznaczonymi do wyodrębnienia, płynąć będą, po rozcięciu elementów łączących te części, przez owe idealne źródła kompensujące ( $E_1, E_2, E_3$ ) za pośrednictwem idealnych ( b e z o p o r o w y c h ) przewodów łączących (rys 179 i 180), nie ulegając przytem żadnej zmianie. Zarówno na rys 179 jak i 180 jest  $I'_1 = I''_1, I'_2 = I''_2, I'_3 = I''_3$ ; prądy te różnią się od siebie tylko kierunkami.

Zasada wyodrębnienia wynika z następującego rozważania:

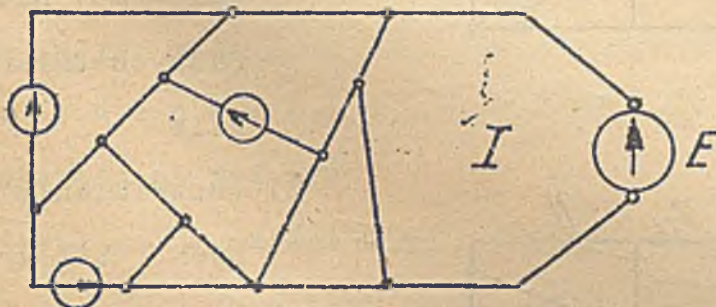
W sieci prądu stałego (I), przyłączonej do i d e a l n e g o (bez-

oporowego) źródła prądu (rys. 181) o s t a ł e j SEM-cznej

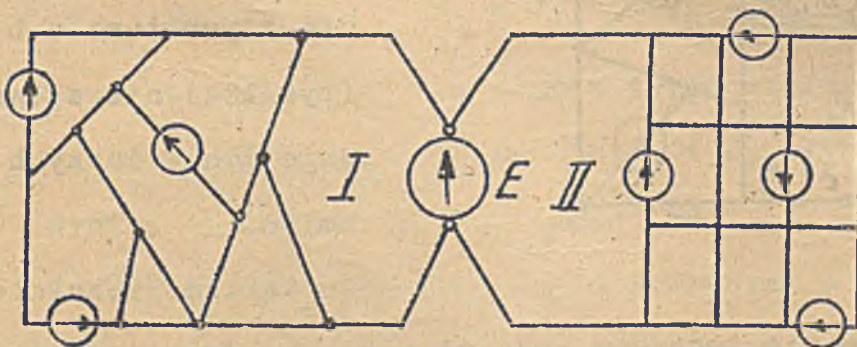
$$E = \text{const.}$$

rozpływ prądu i rozkład napięć nie ulegnie zmianie, gdy do końcówek tego źródła dołączymy je-

szcze drugi obwód (II), (rys. 182).



Rys. 181.



Rys. 182.



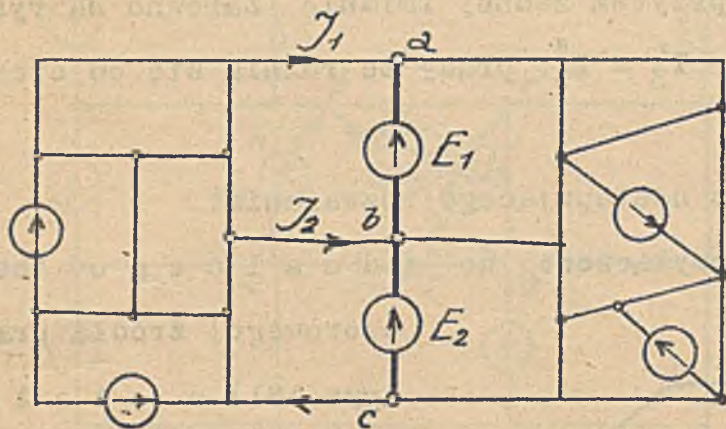
W myśl założenia jest bowiem także po załączeniu obwodu II, SEM czna  $E = \text{const}$ , czyli działa na obwód I w ten sam sposób jak poprzednio.

Prąd przepływający przez źródło  $E$  ulegnie wprawdzie zmianie, ale ponieważ w źródle idealnym jest  $R_w = 0$ , przeto zmiana ta nie wpłynie na napięcie źródła. Przy  $E = \text{const}$  i  $R_w = 0$  będzie stałe, przed i po załączeniu obwodu II

$$\underline{U_E = E = \text{const.}}$$

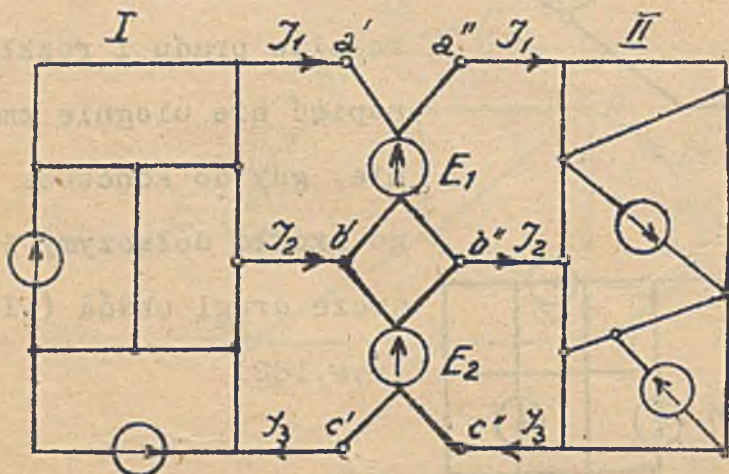
Z powyższego wynika, że także odłączenie obwodu II od końcówek źródła  $E$  nie może spowodować żadnych zmian w rozplywie i rozkładzie napięć sieci I

Wyciągnięcie części sieci można sprowadzić do rozważanego właśnie przypadku. Etapy rozumowania są tu następujące:



Rys. 183.

1) Włączenie w obwód idealnych źródeł prądu  $E_1, E_2$  (rys. 183), kompensujących napięcia  $U_{ab}$  i  $U_{bc}$ . ( $U_{ab} = E_1$ ,  $U_{bc} = E_2$ ) nie powoduje żadnych zmian w obwodzie



Rys. 184.

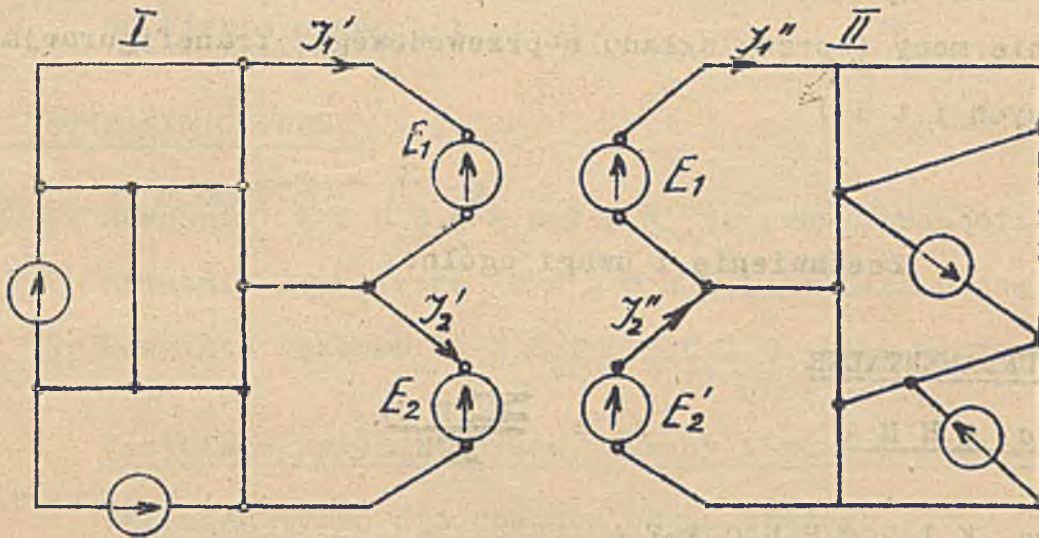
2) „Rozwidlenie” idealnych ( bez oporów ) przewodów łączących te źródła z punktami  $a, b, c$  (rys. 184) nie spowoduje także żadnych zmian

Po takim „rozwidle-

niu”-owych połączeń ujawnia się jednakże podział sieci na dwie części (I i II)



3) Części te łączą w całość jedynie źródła idealne o SEM- cznych  $E_1 = \text{const}$  i  $E_2 = \text{const}$ , analogicznie jak w przypadku przedstawionym na rys. 182. W myśl poprzednich rozważań, możemy tu zatem oddzielić II od I, nie wywołując żadnych zmian w I. i odwrotnie. (rys. 185.)



Rys. 185

Z powyższego widać, że celem utrzymania pierwotnego stanu w I i II, należy między poszczególne pary punktów, powstałych z przecięcia, włączyć zarówno po stronie I jak i po stronie II SEM- czne kompensujące odnośne napięcia. Czyli między pary przyszłych punktów przecięcia należy włączyć po parze i d e n t y c z n y c h' równolegle połączonych SEM- cznych, tak jak to okazano na rys. 178.

4) Ponieważ ani w części I ani w części II prądy nie uległy zmianie, przeto w obu tych częściach muszą przez źródła kompensujące przepływać jednakowe prądy

$$J_1' = J_1'', \quad J_2' = J_2''$$

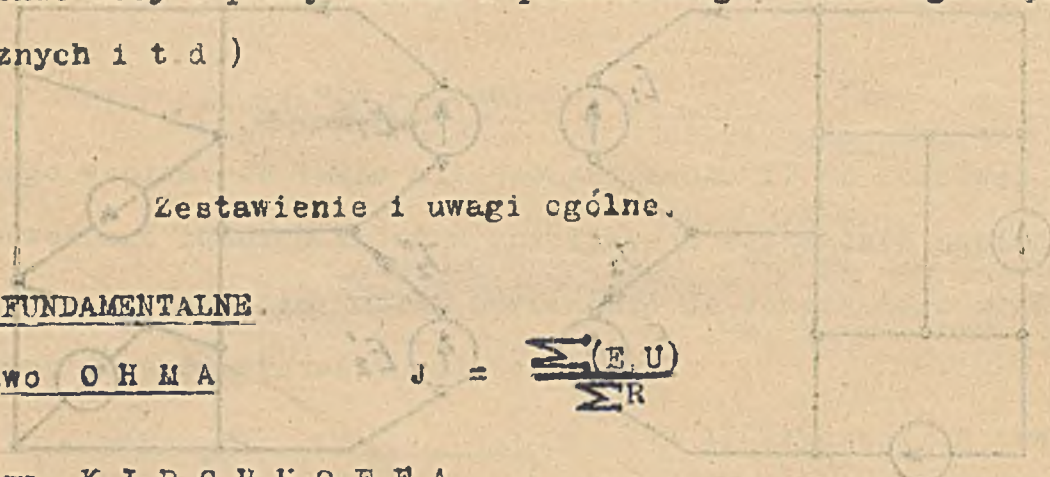
Prądy te różnią się od siebie tylko kierunkami: Jeżeli  $J_1'$  i  $J_2'$  płyną przeciw SEM- cznym  $E_1$  i  $E_2$ , to  $J_1''$  i  $J_2''$  płynąć muszą zgodnie z  $E_1$  i  $E_2$ . Wynika to z rys. 183. względnie 184.

Oczywiście możnaby tu - celem dowiedzenia zasady wyodrębnienia - posłużyć się analizą matematyczną, wspartą na prawach Kirchhoffa. Uważam



Jednakże, że nie będzie bez korzyści przyswojenie sobie także takiego „fizykalnego” rozumowania.

Podana przezemnie <sup>1)</sup> zasada wyodrębnienia ułatwia znakomicie rozwiązanie pewnych zagadnień, następujących się przy sieciach elektrycznych (N p. Obliczenie mocy i pracy układu n-przewodowego, Transfiguracja obwodów elektrycznych i t d )



Zestawienie i uwagi ogólne.

A. PRAWA FUNDAMENTALNE

1. Prawo O H M A

$$J = \frac{\sum(E \cdot U)}{\sum R}$$

2. Prawa K I R C H H O F F A

$$I) \sum(J) = 0, \quad II) \sum(JR) = \sum(E)$$

B. ZASADY WSPARTE NA PRAWACH KIRCHHOFFA

1. Zasada superpozycji:

$$J_1 = E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3 + \dots + E_p A_p$$

$$J_2 = E_1 B_1 + E_2 B_2 + E_3 B_3 + \dots + E_p B_p$$

-----  
$$J_n = E_1 C_1 + E_2 C_2 + E_3 C_3 + \dots + E_p C_p$$

2. Zasada wzajemności:

$$\sum_{P_1}^{P_1} (E_1^I J_1^I) = \sum_{P_2}^{P_2} (E_1^II J_1^II)$$

1) Fryze „Podstawowe prawa i zasady obwodów prądu stałego” P. E. 1927



3. Zasada wyodrębnienia :

Wpięcie kompensujących SEM-cznych

$$E_1 = U_1, E_2 = U_2, \dots, E_n = U_n$$

między „i” par punktów przecięcia, zapewnia utrzymanie pierwotnego rozplywu prądów i rozkładu napięć w obu oddzielonych od siebie częściach sieci.

C. RÓWNANIA OBWODU.

1. Równania K I R C H H O F F A (z praw Kirchhoffa)
2. Równania cykliczne M A X W E L L A (dla oczek sieci)
3. Równania węzłowe C O L T R I E G O (dla węzłów sieci).

Wszystkie powyższe prawa, zasady i równania są ważne bez zastrzeżeń tylko dla obwodów prądu stałego.

Wykazaliśmy poprzednio, że wszystkie podane tu zasady i równania wspierają się na dwu prawach fundamentalnego znaczenia. (Prawo OHMA, Prawa KIRCHHOFFA). Zatem wszystkie obwody, podlegające owym dwom prawom zasadniczym, muszą podlegać także podanym poprzednio trzem zasadom i dla wszystkich takich obwodów można ustawić równania KIRCHHOFFA, MAXWELLA i COLTRIEGO. -



III. WAŻNIEJSZE ZASTOSOWANIA PODSTAWOWYCH PRAW

OBWODÓW PRĄDU STAŁEGO

1. Łączenie oporów. (Oporność zastępcza).

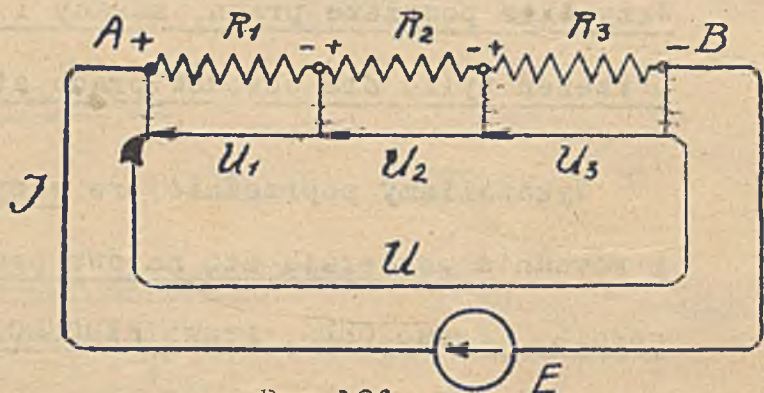
W elektrotechnice praktycznej mamy do czynienia z układami elektr. w których występują połączenia oporów szeregowe, równoległe, szeregowo-równoległe, obok połączeń specjalnych (n.p. „mostek” Wheatstone’a) i najdowolniej skombinowanych (sieci techniczne). Układy te omówimy oddzielnie.

Szeregowy układ oporów (rys. 186)

Stosowany jest n.p. przy łączeniu lamp żu- kowych, żarówek nisko- woltowych.

Zasadniczą cechą układu szeregowego jest, że przez łańcuch oporów

( $R_1 + R_2 + R_3$ ), załączony na napięcie  $U$ , plynie prąd



Rys. 186.

$$J = \frac{U}{\sum R} \dots \dots \dots (84)$$

tu

$$J = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$$

je d n a k o w y w każdym poszczególnym oporze

Potencjał końcówki każdego oporu przez którą prąd dopływa, jest wyższy od potencjału końcówki, przez którą prąd odpływa. (Znaki „+” i „-” na rys. 186.). Wartości poszczególnych napięć określają wzory

$$U_1 = J \cdot R_1, \quad U_2 = J \cdot R_2, \quad U_3 = J \cdot R_3, \quad \dots \dots \dots \quad U_n = J \cdot R_n$$

Strzałki tych napięć zorjentowane są przeciw prądowi, bo ku punktom o wyższych potencjałach.



W myśl prawa koła napięcie musi być

$$\sum(U) = 0,$$

tu

$$U - U_1 - U_2 - U_3 = 0$$

(połączenie idealne), czyli

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

Interpretując  $U$  jako napięcie czynne, mówimy (niewłaściwie), że napięcie to z u ż y w a się na poszczególnych oporach. Napięcie czynne  $U$  występuje tu jako „a k c j a”, napięcia  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  jako „r e a k c j e”.

Z wzoru 84 widać, że

Oporność szeregowego układu oporów równa się sumie poszczególnych oporności.

Oznaczając oporność mierzoną na końcówkach  $AB$  (rys. 186) symbolem  $R_x$  napiszemy ogólnie

$$\underline{R_x = \sum R} \dots\dots\dots (85)$$

Przy łączeniu szeregowym w praktyce należy pamiętać o tem, że przez każdy człon koła prądu płynie j e d n a k o w y prąd. Nie można więc łączyć w szereg elementów, które nie znoszą prądu koła.

Załączenie szeregowo lamp żukowych 6-cio i 10-cio A w koło, w którym płynie prąd 10 A, spowoduje przepalenie lampy 6-cio amperowej.

Gdy załączymy szeregowo dwie żarówki 110-woltowe o r ó ż n y c h opornościach na napięcie 220V, nastąpić może przepalenie żarówki o większym oporze. To samo może nas spotkać przy stosowaniu do oświetlenia choinki szeregowego łączenia żarówek różnych typów.

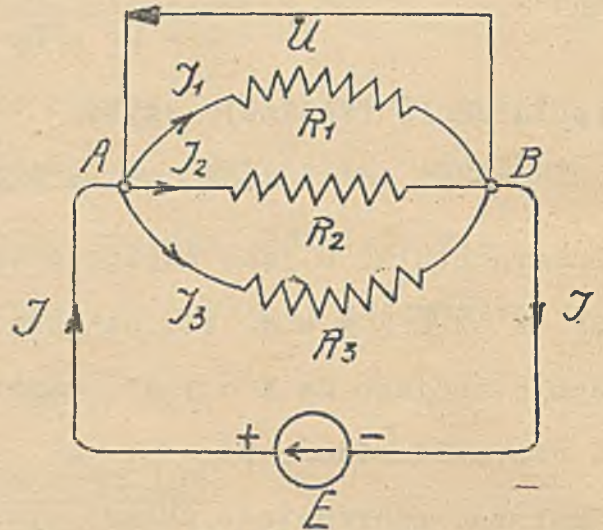
Gdy gdziekolwiek w obwodzie powstanie przerwa (przepalenie żarówki) cały obwód traci prąd (wszystkie żarówki gasną).



Równoległy układ oporów (rys.187.)

Stosowany jest ogólnie w instalacjach światła (równoległe łączenie żarówek), przy pomiarach prądu (bocznik) i t.p.

W układzie równoległym poszczególne opory ( $R_1, R_2, R_3$ ) rozgałęzienia mają jednakowe napięcie ( $U$ ). Prądy w tych oporach muszą więc (w myśl prawa Ohma) odpowiadać relacjom



Rys.187.

$$J_1 = \frac{U}{R_1}, \quad J_2 = \frac{U}{R_2}, \quad J_3 = \frac{U}{R_3}.$$

Pozatem (w myśl I-go prawa Kirchoffa) będzie

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

Wstawiając powyższe wartości, otrzymamy

$$J = U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = U(G_1 + G_2 + G_3)$$

Równanie to poucza, że układ równoległych oporów oddziaływa na resztę obwodu tak, jak element o przewodności równej sumie przewodności gałęzi równoległych.

Oznaczając przewodność wypadkową symbolem  $G_T$ , napiszemy ogólnie

$$G_T = \sum G \dots \dots \dots (86)$$

lub

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \dots \dots \dots (87)$$

Przewodność równoległego układu oporów równa sumie przewodności poszczególnych gałęzi.



Dla równoległego układu  $n$  - r ó w n y c h oporności  $R$ , będzie więc

$$R_r = \frac{R}{n} \dots\dots\dots (88)$$

$$G_r = G \cdot n \dots\dots\dots (89)$$

Wzór (86) poucza, że

dołączenie do zespołu równoległych oporów nowej gałęzi o dowolnie wielkiej oporności, z m n i, e j s z a oporność ( $R_r$ ) całości.

Dwie żarówki połączone równolegle mają łącznie (jako zespół) mniejszą oporność niż każda z nich osobno wzięta. W miarę załączania żarówek na sieć światłową, oporność tej sieci, mierzona w Elektrowni, m a l e j e (żarówki łączone równolegle).

Załączenie woltomierza na końcówki oporu  $R$  (rys.66.) powoduje zmniejszenie oporności całego koła, i t.d.

Obliczenie rozplywu prądu w równoległych układach oporów uskuteczniamy, obliczając naprzód przewodność ( $G_r$ ) lub oporność ( $R_r$ ) wypadkową.

Z wzoru (87) wynikają następujące:

Dla 2 gałęzi równoległych

$$R_r = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \dots\dots\dots (90)$$

Dla 3 gałęzi równoległych

$$R_r = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \dots\dots\dots (91)$$

Dla 4 gałęzi równoległych

$$R_r = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4}{R_1 R_2 R_3 + R_2 R_3 R_4 + R_3 R_4 R_1 + R_4 R_1 R_2} \dots\dots\dots (92)$$

i t.d.

Po obliczeniu oporności wypadkowej ( $R_r$ ), znajdziemy prąd obwodu ze wzoru

$$J = \frac{E}{R_r + R_w} \dots\dots\dots (93)$$



( $R_w$  oporność źródła zasilającego układ, rys.187.)

Następnie obliczamy napięcie rozgałęzienia (tu między punktami AB)

$$U = E - J \cdot R_w$$

Poczem znajdujemy prądy poszczególnych gałęzi ze wzorów

$$J_1 = \frac{U}{R_1}, J_2 = \frac{U}{R_2}, \dots, R_n = \frac{U}{R_n} \dots \dots \dots (94)$$

lub

$$J_1 = U \cdot G_1, J_2 = U \cdot G_2, \dots, J_n = U \cdot G_n \dots \dots \dots (95)$$

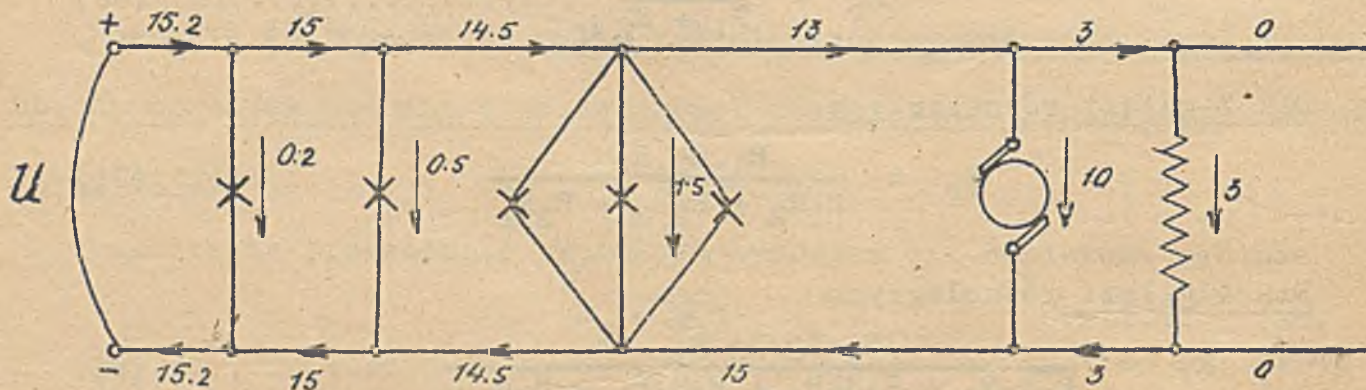
W przypadku, gdy wszystkie równoległe połączone opory są r ó w n e ( $R$ ), będzie (dla „n” oporów)

$$J = \frac{E}{R_r + R_w} = \frac{E}{\frac{R}{n} + R_w} \dots \dots \dots (96)$$

$$U = E - J \cdot R_w$$

$$J_1 = J_2 = \dots \dots \dots J_n = \frac{U}{R} \dots \dots \dots (97)$$

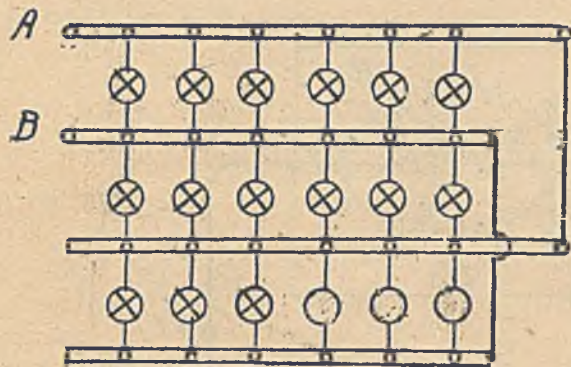
Szczególnie ważne jest łączenie równoległe odbiorników na przewody sieci technicznej. Układ taki z oznaczonym rozplywem prądów ilustruje rys.188.



Rys.188.



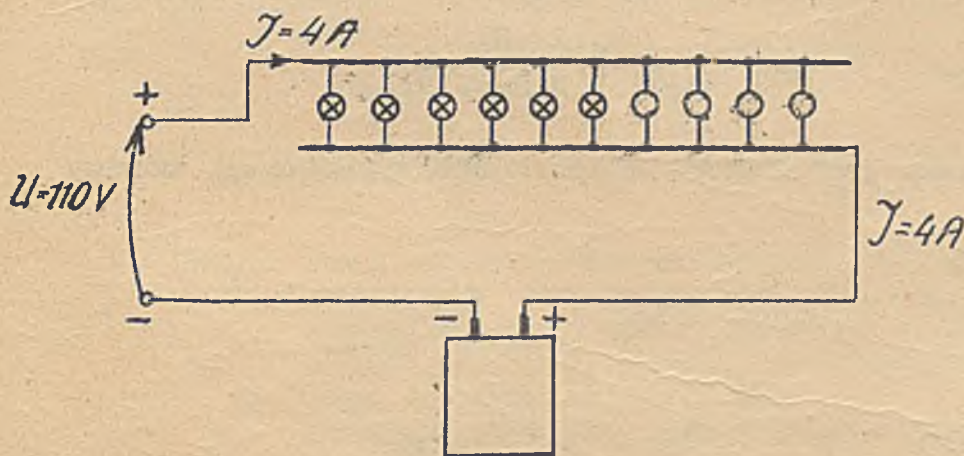
W laboratorjach, a także przy ładowaniu akumulatorów, używa się t.zw. opornic lampkowych (rys.189.). Są to zespoły równoległe



Rys.189

W miarę załączania żarówek w takiej opornicy lampkowej, oporność całości (mierzona na końcówkach AB) maleje, bo mamy tu równoległy układ oporów. Maksymalne obciążenie (prądem) jakie znosi taka opornica lampkowa odpowiada (przy równych żarówkach) normalnemu prądowi jednej żarówki razy ilość załączonych żarówek. Stosować więc należy żarówki węglowe, bo ich prąd normalny jest większy niż żarówek metalowych o jednakowej światłości.

le g l e połączonych żarówek węglowych, w których regulację oporności całego układu (odniesioną do końcówek AB) osiąga się przez załączania i wyłączania poszczególnych żarówek. (Załączenie przez dokręcenie, wyłączenie przez odkręcenie żarówki. Na rys.189. znaki  $\otimes$  mają oznaczać żarówki dokręcone, a znaki  $\circ$  żarówki odkręcone.



Rys.190.

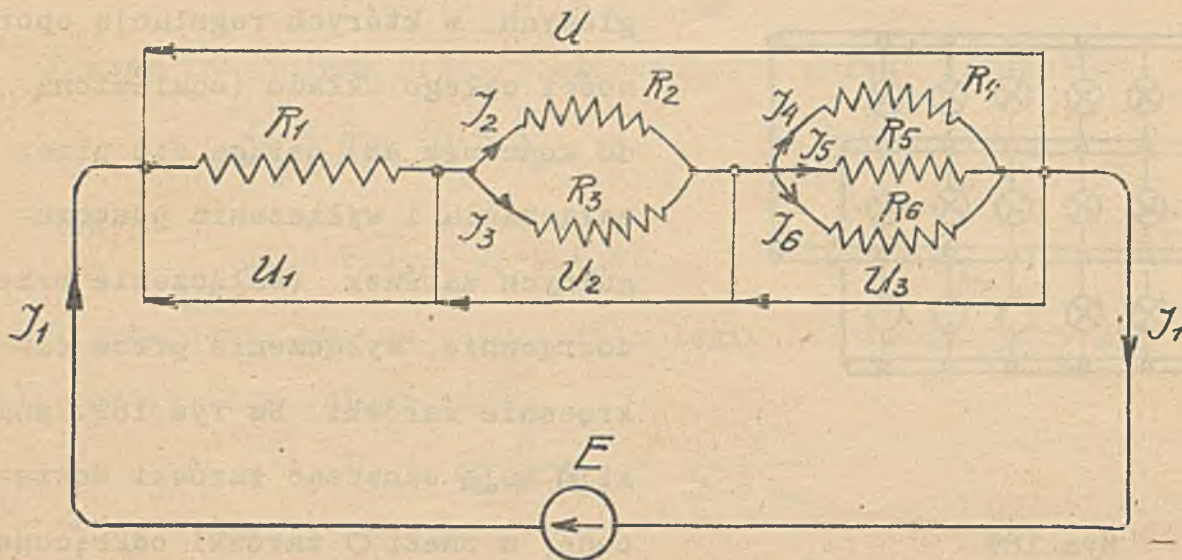
Rys.190 okazuje zastosowanie opornicy lampkowej do ładowania małego akumulatora prądem 4 A. Opornicę stanowi 12 żarówek 16-świecowych 110V, z czego 8 jest załączonych a 4 są wyłączone.

Cały obwód zasilany jest z sieci o napięciu  $U = 110V$ .



Szeregowo - równoległy układ oporów (rys.191)

Przedstawia kombinację układu szeregowego i równoległego:



Rys.191.

Obliczanie rozptywu prądów w takim zespole oporów uskuteczniamy, wyznaczając naprzód oporności (przewodności) poszczególnych rozgałęzień ( $G_{r1}$  i  $G_{r2}$ , względnie  $R_{r1}$ ,  $R_{r2}$ )

$$G_{r1} = G_2 + G_3, \quad R_{r1} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$

$$G_{r2} = G_4 + G_5 + G_6, \quad R_{r2} = \frac{R_4 \cdot R_5 \cdot R_6}{R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_6 R_4}$$

Każde rozgałęzienie działa jak element o oporności wypadkowej, możemy zatem położyć

$$J_1 = \frac{U}{R_1 + R_{r1} + R_{r2}}$$

oraz

$$U_1 = J_1 \cdot R_1, \quad U_2 = J_1 \cdot R_{r1}, \quad U_3 = J_1 \cdot R_{r2}$$

Poszczególne prądy w rozgałęzieniach są:

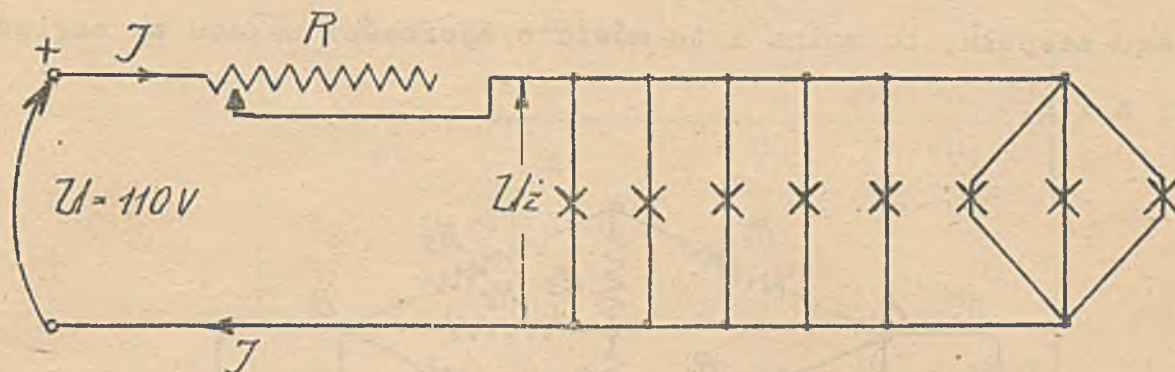
$$J_2 = \frac{U_2}{R_2}, \quad J_3 = \frac{U_2}{R_3}, \quad J_4 = \frac{U_3}{R_4}, \quad J_5 = \frac{U_3}{R_5}, \quad J_6 = \frac{U_3}{R_6}$$

$$J_1 = J_2 + J_3 = J_4 + J_5 + J_6$$

$U = 5V$   
 $J_1 = 5.5A$   
 $J_2 = 12.5A$



Technicznym przykładem na układ szeregowo - równoległy są opornice używane do ściemniania żarówek (w kinach i teatrach). Urządzenie takie ilustruje rys.192.



Rys.192.

W szeregu z grupą równoległe połączonych żarówek znajduje się opornica regulacyjna R. Cały układ załączony jest na napięciu U. Żarówki świecą normalnie pod napięciem U (tu 110 V), gdy kontakt ślizgowy opornicy R przesunięty jest całkiem na lewo. Ściemnienie osiąga się przesuwając kontakt ślizgowy na prawo.

Oznacza  $U_2$  napięcie żarówek przy ściemnieniu, U napięcie sieci, to wartość oporności R, koniecznej do ściemnienia, określa wzór

$$R = \frac{U - U_2}{J_S} \dots\dots\dots (98)$$

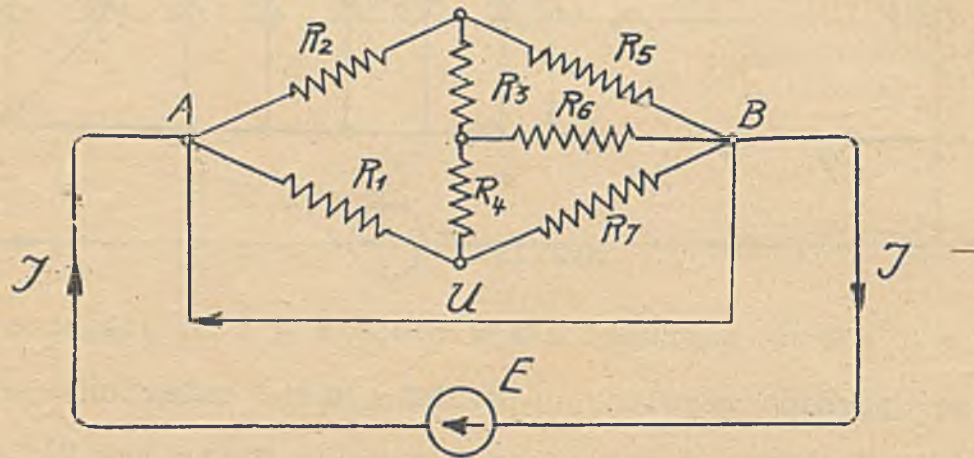
gdzie  $J_S$  oznacza prąd płynący do żarówek podczas ściemnienia.

Uwaga: Prąd  $J_S$  jest zawsze mniejszy od prądu J płynącego przy pełnym świeceniu. Nie można więc wstawić  $J_S = i \cdot n$ , gdzie „i” oznacza normalny prąd jednej żarówki, a „n” ilość jednakowych żarówek tylko należy  $J_S$  ustalić doświadczalnie, odpowiednio dożądanego stopnia ściemnienia. Doświadczenie najlepiej wykonać zaimprovizowaną opornicą wodną, (w miejsce R).



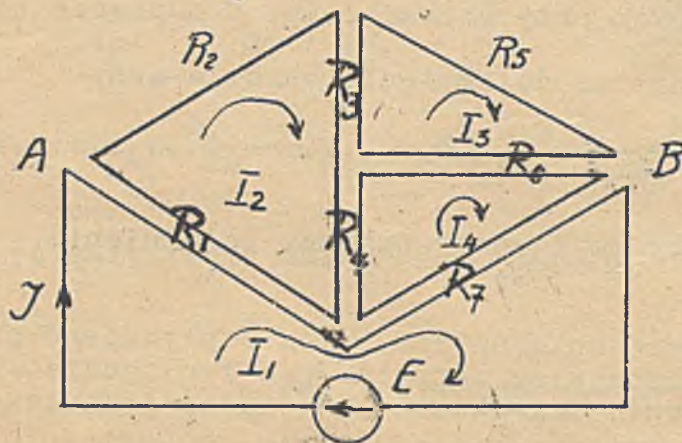
Dowolny układ oporów (rys.193).

Rys.193. przedstawia układ złożony z wielu oporów dowolnie połączonych. Jeżeli chodzi o wyznaczenie prądu  $J$  dopływającego do końcówek AB takiego zespołu, to można i tu mówić o oporności układu ze względu na końcówki A i B.



Rys.193.

Oporność tą ( $R_T$ ) obliczymy najdogodniej, posługując się cyklami Maxwella.



Rys.194.

Oznaczmy 4-ry prądy cykliczne  $I_1, I_2, I_3, I_4$  w sposób uwidoczniiony na rys.194. i ustawmy 4-ry równania cykliczne:

- 1)  $I_1(R_1+R_7) - I_2R_1 - I_4R_7 = E$
- 2)  $I_2(R_1+R_2+R_3+R_4) - I_1R_1 - I_3R_3 - I_4R_4 = 0$
- 3)  $I_3(R_3+R_5+R_6) - I_2R_3 - I_4R_6 = 0$
- 4)  $I_4(R_4+R_6+R_7) - I_1R_7 - I_2R_4 - I_3R_6 = 0$

i obliczymy z równań tych prąd  $I_1 = J$ .



$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} +E & -R_1 & 0 & -R_7 \\ 0 & (R_1+R_2+R_3+R_4) & -R_3 & -R_4 \\ 0 & -R_3 & (R_3+R_5+R_6) & -R_6 \\ 0 & -R_4 & -R_6 & (R_4+R_6+R_7) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1+R_7) & -R_1 & 0 & -R_7 \\ -R_1 & (R_1+R_2+R_3+R_4) & -R_3 & -R_4 \\ 0 & -R_3 & (R_3+R_5+R_6) & -R_6 \\ -R_7 & -R_4 & -R_6 & (R_4+R_6+R_7) \end{vmatrix}}$$

Kładąc  $I_1 = J$  i  $J = \frac{E}{R_r} = E \cdot G_r$  i  $E = U$  (połączenia między E i AB bezopierowe), możemy napisać:

$$G_r = \frac{J}{U} = \frac{\begin{vmatrix} +1 & -R_1 & 0 & -R_7 \\ 0 & (R_1+R_2+R_3+R_4) & -R_3 & -R_4 \\ 0 & -R_3 & (R_3+R_5+R_6) & -R_6 \\ 0 & -R_4 & -R_6 & (R_4+R_6+R_7) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1+R_7) & -R_1 & 0 & -R_7 \\ -R_1 & (R_1+R_2+R_3+R_4) & -R_3 & -R_4 \\ 0 & -R_3 & (R_3+R_5+R_6) & -R_6 \\ -R_7 & -R_4 & -R_6 & (R_4+R_6+R_7) \end{vmatrix}} \quad (99)$$

Ostatni wzór zawiera same tylko oporności układu i przedstawia p r z e w o d n o ś ć układu uwidocznionego na rys. 193. ze względu na końcówki AB, t zn przewodność mierzona na końcówkach AB

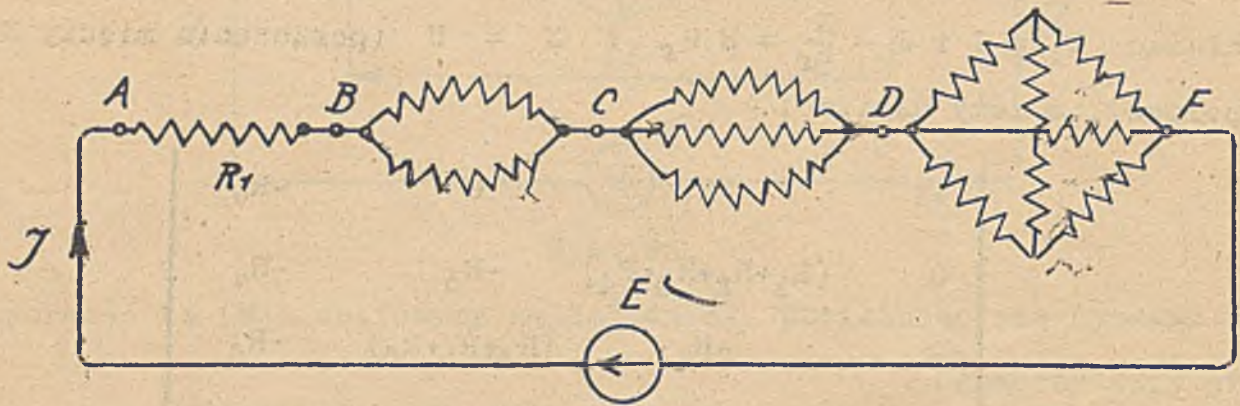
W analogiczny sposób (z pomocą cykli Maxwella) można obliczyć prze= wodność (względnie oporność) każdego układu operów. Należy tylko zawsze podać końcówki odniesienia (tu AB). albowiem oporność (przewodność) tego samego układu mierzona na różnych węzłach, jest różna.



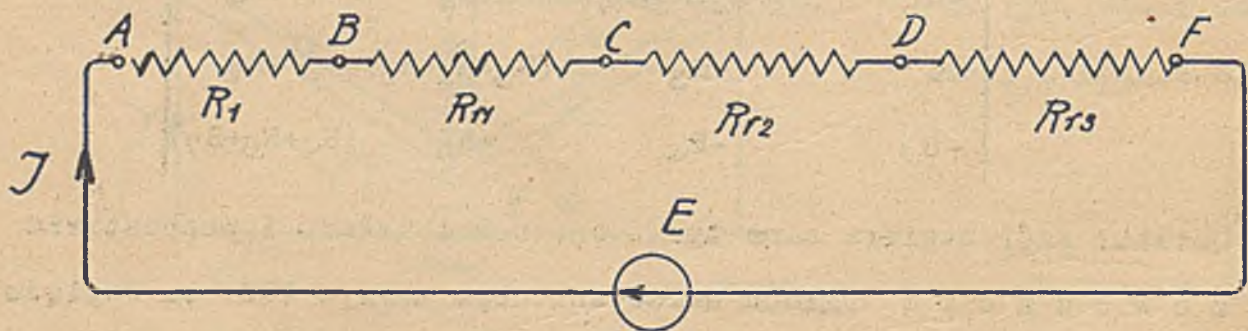
Oporność zastępcza ( $R_T$ ).

W rozważaniach dotyczących łączenia oporów określiliśmy symbolem  $R_T$  oporność układu (w odniesieniu do oznaczonych końcówek). Względem reszty obwodu układ oporów zachowuje się tak jak element o oporności  $R_T$ . Możemy przeto układ oporów zastąpić jednym oporem  $R_T$ , nie zmieniając w reszcie obwodu ani rozptywu prądów ani rozkładu napięć.

Tak np. w obwodzie przedstawionym na rys. 195. zastąpimy gałęzie równoległe o węzłach BC oporem  $R_{r1}$ , gałęzie równoległe o węzłach CD oporem  $R_{r2}$ , a zespół oporów o węzłach DF oporem  $R_{r3}$  (rys. 195.).



Rys. 195.



Rys. 196.

W ten sposób sprowadziliśmy obwód rozgałęziony (rys. 195) do prostego koła (rys. 196.). Zarówno w obwodzie na rys. 195. jak i w kole na rys. 196. płynie ten sam prąd  $J$ , określony wzorem

$$J = \frac{E}{R_1 + R_{r1} + R_{r2} + R_{r3} + R_{rw}}$$



( $R_w$  oporność wewnętrzna źródła zasilającego).

Ze względu na powyższe, nazywamy  $R_p$  także o p o r n o ś c i ą z a s t ę p c z ą .

Oporność zastępcza jest zawsze równa oporności układu, który zastępuje.

Uwaga: Wszystkie przeprowadzone powyżej rozważania dotyczą układów oporowych, nie zawierających w sobie żadnych SEM-cznych. Zachowanie układów złożonych z oporów i SEM-cznych rozpatrzemy oddzielnie, załatwiając wprzód układy złożone jedynie ze źródeł prądu.

## 2. Łączenie źródeł prądu (SEM-czna zastępcza)

Także źródła prądu możemy łączyć szeregowo, równolegle i szeregowo-równolegle. Łączenia takie wynikają z konieczności dostosowania napięcia układu źródeł do napięcia i prądu użytkowego odbiorników.

Przykłady. Do uruchomienia dzwonka elektr. potrzeba około 3V. Gdy więc użyjemy do zasilania go ogniw Léclancha, których SEM-czna wynosi około 1.5, trzeba będzie złączyć dwa takie ogniwa w s z e r e g . (Łączenie szeregowe).

W Elektrowni zasila sieć kilka maszyn połączonych r ó w n o l e g l e , gdy obciążenie prądem przekracza granicę dopuszczalną dla jednej maszyny. (Łączenie równoległe).

Chcąc skutecznie zasilanie lampy łukowej o napięciu łuku 30 V i prądzie 10 A normalnymi ogniwami Léclancha, należałoby połączyć s z e r e g o w o przynajmniej 20 grup r ó w n o l e g ł y c h po 50 takich ogniw, gdyż jedno ogniwo znosi prąd około 0.2 A i ma SEM-cznę około 1.5 V. (Łączenie szeregowo-równoległe).

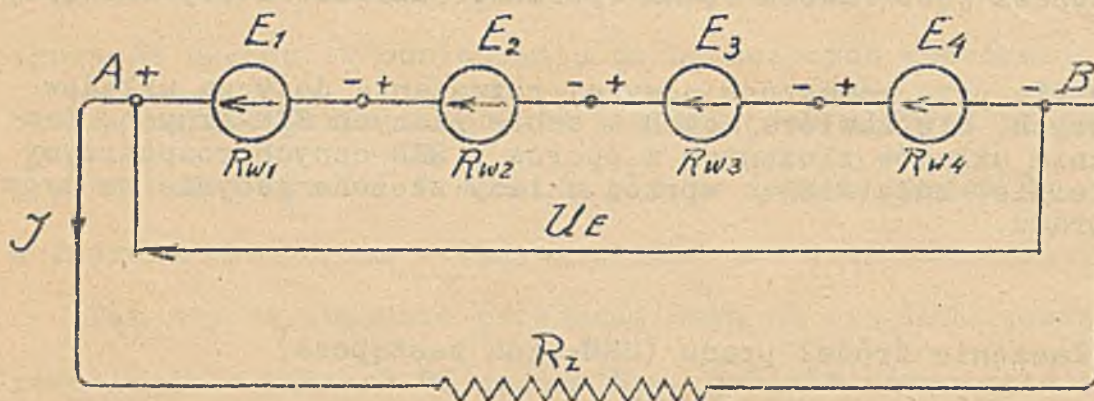
Łączenie ogniw d o w o l n e niema zastosowania i jest niedopuszczalne, albowiem wewnątrz takiego zespołu powstałyby prądy wyrównawcze.

Rozważymy wszystkie trzy sposoby łączenia źródeł oddzielnie.



a) Szeregowy układ źródeł prądu (rys 197.)

Poszczególne źródła prądu łączymy w s z e r e g p r z e c i w n e =  
m i b i e g u n a m i ( p l u s z m i n u s e m , m i n u s z p l u s e m i t . d . ) ( R y s 1 9 7 )



Rys. 197

Szeregowe łączenie źródeł ma na celu osiągnięcie napięcia w y ż =  
s z e g o niż może wytworzyć pojedyncze źródło.

W myśl prawa Ohma napiszemy

$$U_E = (E_1 - J R_{w1}) + (E_2 - J R_{w2}) + (E_3 - J R_{w3}) + (E_4 - J R_{w4}) =$$

$$= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 - J(R_{w1} + R_{w2} + R_{w3} + R_{w4}).$$

Ogólnie

$$U_E = \sum(E) - J \sum R_w \dots \dots \dots (100)$$

Oznaczmy

$$E_T = \sum_1(E) \dots \dots \dots (101)$$

1

$$R_{wr} = \sum R_w \dots \dots \dots (102)$$

$E_T$  przedstawia wypadkowe działanie elektromotoryczne

$R_{wr}$  wypadkową oporność wewnętrzną układu

Szeregowy układ źródeł czyniła na zewnątrz (oporność  $R_T$ ) lub jedno  
źródło prądu o SEM-owej  $E_T = \sum_1(E)$  i oporności wewnętrznej  $R_{wr} = \sum R_w$

W przypadku (najczęściej stosowanym), gdy

$$E_1 = E_2 = E_3 = \dots = E_n,$$

będzie



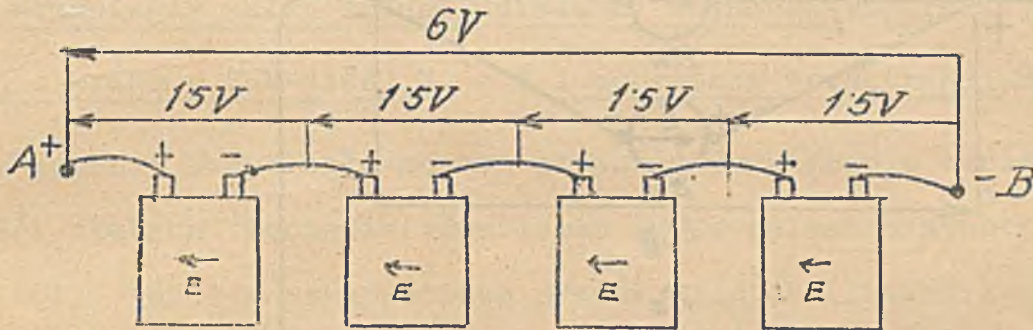
$$E_r = E \cdot n \quad (103)$$

$$R_{wr} = R_w \cdot n \quad (104)$$

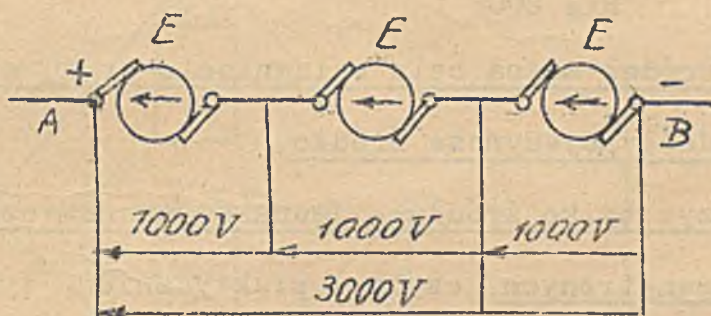
Natężenie prądu w kole utworzonym z szeregowego zespołu ogniw i oporności zewnętrznej  $R_z$  będzie

$$J = \frac{E_r}{R_{wr} + R_z} \quad (105)$$

Łączenie szeregowe źródeł stosujemy praktycznie zarówno w urządzeniach prądów słabych (zasilanie dzwonków, telefonów, baterje anodowe), jak i w urządzeniach prądów silnych (Baterje akumulatorów, rys 198. szeregowe łączenie dynamo maszyn celem uzyskania wysokiego napięcia stałego (rys. 199.)).



Rys. 198



Rys. 199

Przy łączeniu szeregowym źródeł prądu należy pamiętać o tym, że w kole tego układu płynie jednakowy prąd. Nie należy więc łączyć w kole o dużym prądzie źródeł wytrzymujących tylko słabe prądy

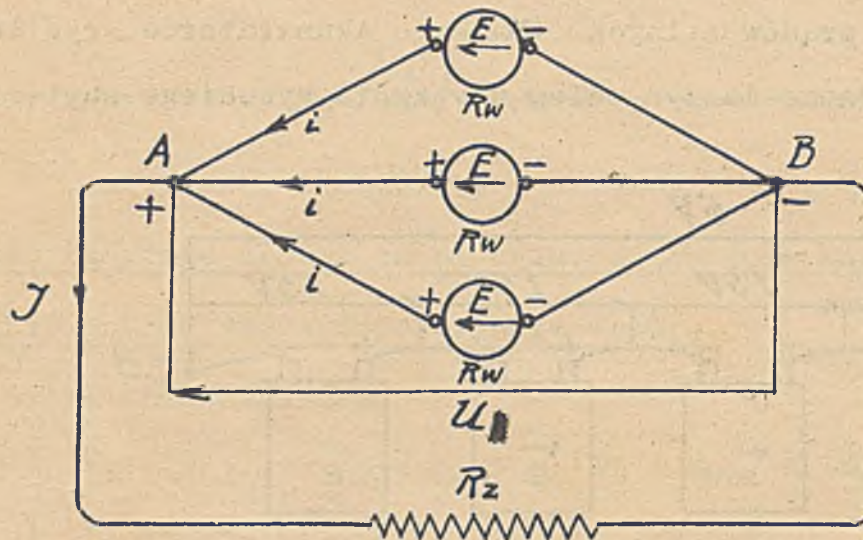
Połączenie w szereg małych akumulatorów z dużą maszyną i obciążenie tego zespołu dużym prądem spowoduje zniszczenie akumulatorów -



Zasadniczo można łączyć w szereg różne źródła prądu. Praktycznie - ze względu na łatwą możliwość zniszczenia słabszych źródeł - stosuje się przeważnie tylko szeregowe łączenie źródeł j e d n a k o w y c h.

b) Równoległy układ źródeł prądu (rys.200).

Poszczególne źródła prądu łączymy w g r u p ę z g c d n e m i biegunami (plusy z plusami, minusy z minusami). (rys.200).



Rys.200.

Równoległe łączenie źródeł ma na celu osiągnięcie prądu większego niż go może znieść (lub dać) pojedyncze źródło.

Równoległe można łączyć tylko źródła o jednakowych SEM-cznych i jednakowych opornościach wewnętrznych, czyli - praktycznie - tylko źródła j e d n a k o w e. Inaczej powstają bowiem wewnątrz układu prądy w y = r ó w n a w c z e (przy małych opornościach wewnętrznych, bardzo wielkie!)

Oznacza E SEM-czną a R<sub>w</sub> oporność wewnętrzną źródła, to napięcie na końcówkach AB równoległego układu j e d n a k o w y c h źródeł prądu, określa relacja

$$U_E = E - i \cdot R_w \dots\dots\dots (106)$$

gdzie „i” oznacza prąd przepływający przez źródło (jednakowy we wszystkich źródłach).



Kładąc

$$J = p \cdot i \dots\dots\dots (107)$$

dla  $p$  równoległe połączonych źródeł, otrzymamy

$$U_E = E - J \frac{R_W}{p} \dots\dots\dots (108)$$

lub

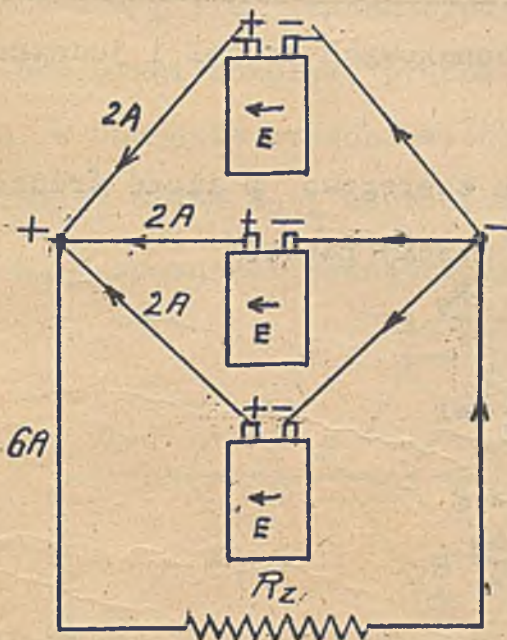
$$U_E = E - J \cdot R_{WR} \dots\dots\dots (109)$$

$$R_{WR} = \frac{R_W}{p} \dots\dots\dots (110)$$

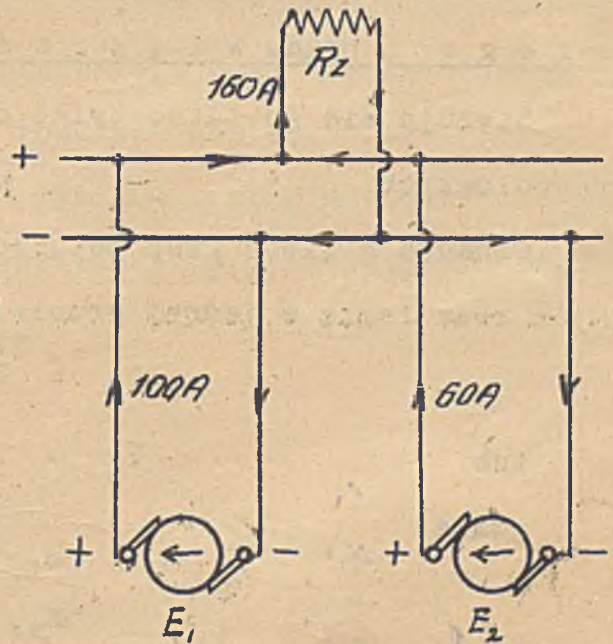
bo  $R_W/p$  przedstawia wypadkową oporność wewnętrzną układu. (Oporności połączeń pominięte)

Równoległy układ źródeł działa na zewnątrz (oporność  $R_Z$ ) jak jedno źródło prądu o SEM-cznej  $E_r = E$  i oporności wewnętrznej  $R_{WR} = R_W/p$

Łączenie równoległe możemy stosować praktycznie zarówno w urządzeniach prądów słabych (łączenie równoległe ogniw galwanicznych lub akumulatorów, rys.201), jak i w urządzeniach prądów silnych (łączenie równoległe maszyn dynamo, rys.202.)



Rys.201.



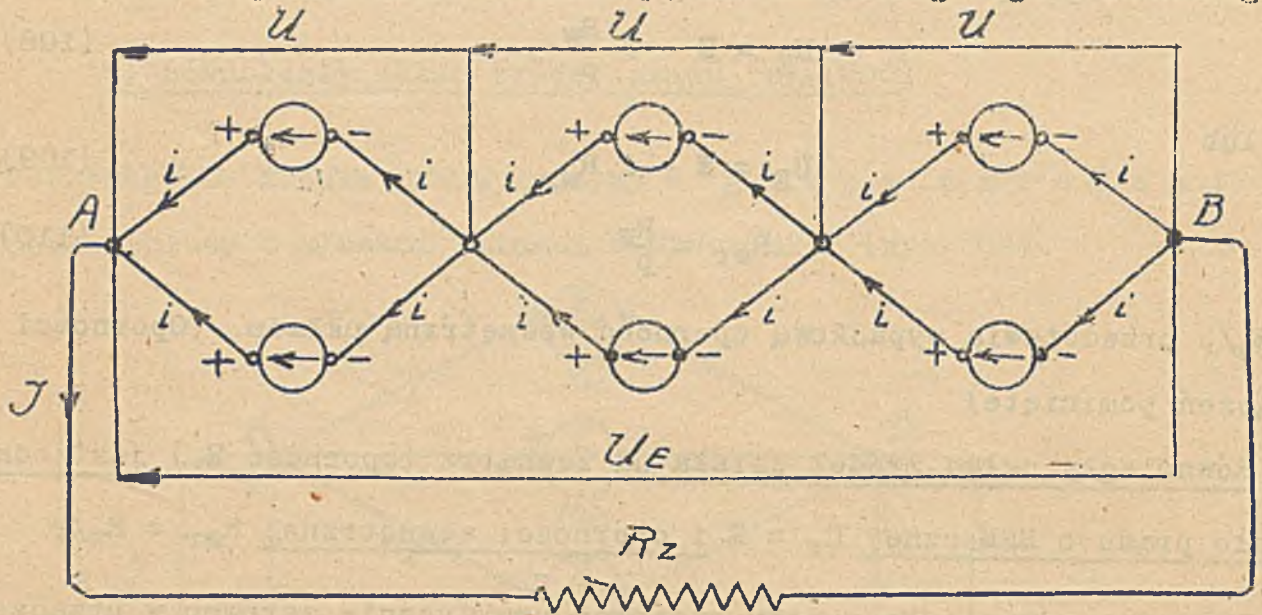
Rys.202.

W równoległych układach źródeł należy liczyć się z możliwością powstania prądów wyrównawczych, (wskutek zmiany początkowo równych  $E$  lub  $R_W$ )



Szeregowo-równoległy układ źródeł (rys. 203)

Rys 203 przedstawia kombinację układu szeregowego z równoległym:



Rys 203.

Łączenie szeregowo-równoległe ma na celu osiągnięcie napięcia w y i s z e g o i prądu w i ę k s z e g o niż je może dać pojedyncze źródło

Stosuje się je także tylko do jednakowych źródeł i jednakowych grup równoległych.

Oznacza  $g$  ilość grup połączonych szeregowo,  $p$  ilość źródeł połączonych równoległe w jednej grupie, to możemy napisać

$$U_E = E \cdot g - J \frac{R_W}{p} \cdot g \dots \dots \dots (111)$$

lub 
$$U_E = E_r - J R_{wr} \dots \dots \dots (112)$$

gdzie 
$$E_r = E \cdot g \dots \dots \dots (113)$$

$$R_{wr} = \frac{R_W}{p} \cdot g \dots \dots \dots (114)$$

Szeregowo-równoległy układ źródeł działa na zewnątrz (oporność  $R_z$ ) jak jedno źródło prądu o SEM-cznej  $E_r = E \cdot g$  i oporności wewnętrznej

$$R_{wr} = \frac{R_W}{p} \cdot g$$



Łączenie szeregowo-równoległe stosuje się praktycznie bardzo rzadko, głównie w laboratorjach, gdzie bateria akumulatorów używana jest do różnych celów (elektroliza, laboratoryjne piece elektr., grzejniki i t.p.).

Normalnie (w przemyśle) do zasilania odbiorników silnym prądem, używa się odpowiednich (wielkich) maszyn o potrzebnym napięciu, lub odpowiednio wielkich akumulatorów połączonych szeregowo.

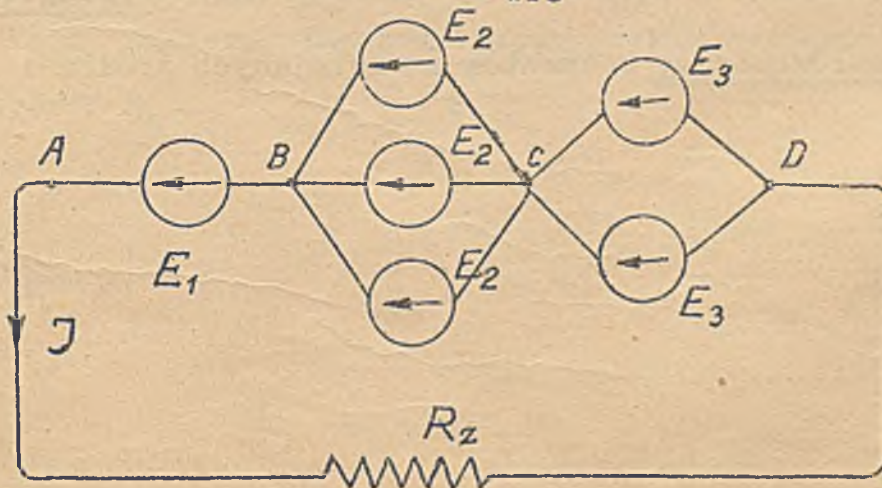
W układach szeregowo-równoległych należy się także liczyć z możliwością powstania prądów wyrównawczych. Powstają one, gdy (w czasie ruchu) SEM-czne, oporności poszczególnych źródeł lub jedne i drugie ulegną zmianie

Siła elektromotoryczna zastępcza ( $E_r$ ).

Także tu, przy rozpatrywaniu układów źródeł prądu ustaliliśmy, że układy te działają na zewnątrz jak pojedyncze źródła prądu o SEM  $R_r$  i oporności wewnętrznej  $R_{wr}$ .

Opisane układy (szeregowy, równoległy i szeregowo-równoległy) możemy przeto z a s t ą p i ć jednym źródłem prądu ( $E_r$ ,  $R_{wr}$ ) nie zmieniając w reszcie obwodu ani rozptywu prądów ani rozkładu napięć.

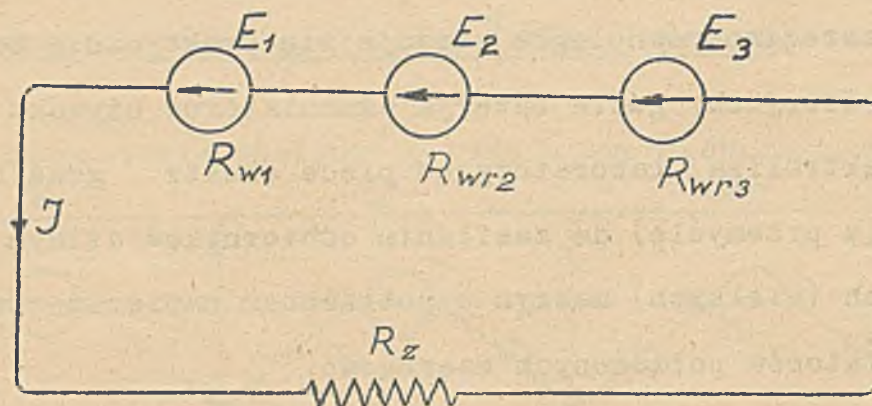
Tak n.p. w obwodzie przedstawionym na rys.204 zastąpimy zespół równoległy BC źródłem o SEM  $E_2$  i oporności wewnętrznej  $R_{wr2}$ , a zespół CD źródłem o SEM  $E_3$  i oporności wewnętrznej  $R_{wr3}$ .



Rys. 204.



Otrzymamy w ten sposób proste koło prądu o trzech źródłach (rys.205).



Rys.205

Zarówno w kole na rys.204 jak i w kole na rys.205. płynie ten sam prąd

$$J = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{R_{wr1} + R_{wr2} + R_{wr3} + R_z}$$

Z uwagi na powyższe możemy mówić także o SEM-czej zastępczej i SEM-czna zastępcza ( $E_r$ ) to działanie elektromotoryczne, którym można zastąpić wszystkie SEM-czne danego układu.

Uwaga: Nie wymieniamy tu jakiego układu, bo udowodnimy dalej, że każdy z nich (Patrz „Łączenie źródeł prądu i oporów”).

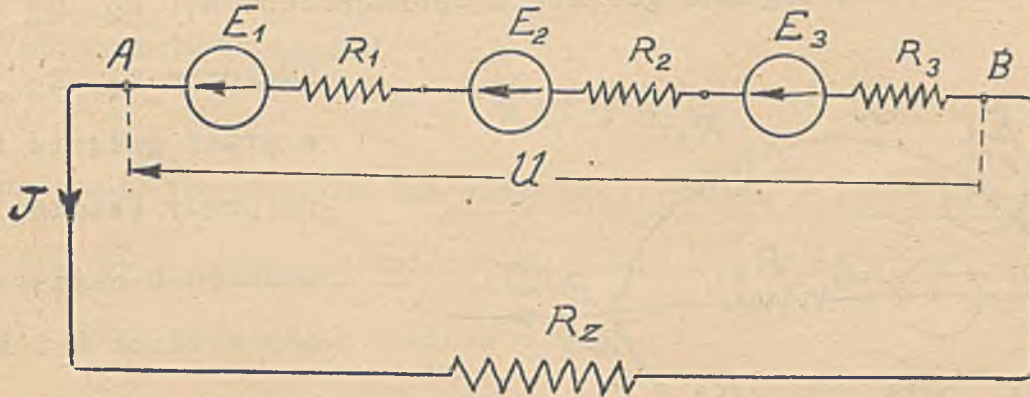
### 3. Łączenie źródeł prądu i oporów.

Ze źródeł prądu i oporów można składać dowolne obwody. Rozpatrzmy i tu trzy główne rodzaje połączeń, a mianowicie układ szeregowy, równoległy i szeregowo-równoległy elementów zawierających źródła i opory.



Układ o gałęziach połączonych szeregowo. (rys. 206)

Prosty ten układ nie odsłania nic godniejszego uwagi.



Rys. 206.

W myśl prawa Ohma napiszemy tu wprost

$$J = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{R_{w1} + R_{w2} + R_{w3} + R_1 + R_2 + R_3 + R_z} \dots\dots\dots (115)$$

Napięcie \$U\_E\$ na końcówkach układu określa wzór

$$U = E_1 + E_2 + E_3 - J(R_{w1} + R_{w2} + R_{w3} + R_1 + R_2 + R_3) \dots\dots\dots (116)$$

$$U = E_r - J \cdot R_r \dots\dots\dots (117)$$

$$E_r = \sum (E) \dots\dots\dots (118)$$

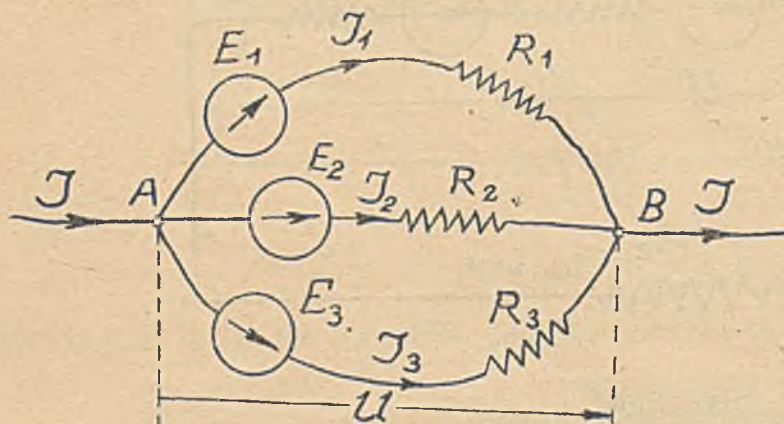
$$R_r = \sum R \dots\dots\dots (119)$$

Z wzorów (117, 118 i 119) widać, że układ szeregowy n-elementów, z których każdy zawiera SEM-czną i opór, można zastąpić jedną SEM-czną \$E\_r\$ i jednym oporem \$R\_r\$.



Układ o gałęziach połączonych równolegle (rys.207). 1)

Założmy, że część sieci elektrycznej stanowi rozgałęzienie przedstawione na rys.207. Poszczególne gałęzie o opornościach  $R_1, R_2, R_3$  mieszczą



SEM-czne  $E_1, E_2, E_3$ ,  
 a przez gałęzie te płyną prądy (stałe)  $J_1, J_2, J_3$ .  
 Oznacza  $U$  napięcie między węzłami A i B (strzałka wskazuje kierunkowość),  
 to możemy napisać:

$$\left. \begin{aligned} U &= E_1 - J_1 R_1 \\ U &= E_2 - J_2 R_2 \\ U &= E_3 - J_3 R_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (120)$$

Dzielimy pierwsze z tych równań przez  $R_1$ , drugie przez  $R_2$ , trzecie przez  $R_3$  i dodając wszystkie trzy do siebie, otrzymamy

$$U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} - (J_1 + J_2 + J_3)$$

Kładąc w tem równaniu

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2 + J_3 \\ \text{i} \quad \frac{1}{R_r} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{aligned}$$

dostaniemy

$$U = R_r \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} \right) - J \cdot R_r$$

1) Fryze, „Sur le calcul des courants circulants ...”, Revue Générale de L'Electricité, 1925, t. XVII, Str. 955.

*Handwritten notes and scribbles at the bottom of the page, including the equation E2 = ... and other illegible markings.*



Pierwszy człon ma charakter SEM-cznej

$$E_r = R_r \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} \right)$$

drugi przedstawia spadek napięcia na oporności  $R_r$ .

Możemy przeto napisać

$$U = E_r - J R_r$$

Równanie to wskazuje, że rozgałęzienie na rys.207 można zastąpić jedną SEM-czną  $E_r$  i jedną opornością  $R_r$ . Wartości  $E_r$  i  $R_r$  dla zespołu n-gałęzi równoległych określają ogólnie wzory

$$E_r = R_r \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \dots + \frac{E_n}{R_n} \right) \dots \dots \dots (121)$$

$$\frac{1}{R_r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \dots \dots \dots (122)$$

Napięcie na węzłach rozgałęzienia dla strzałki zgodnej z kierunkiem prądu  $J$ , określa ogólnie wzór

$$U_{\vec{BA}} = E_{\vec{AB}} - J_{AB} R_r \dots \dots \dots (123)$$

Wzory powyższe obowiązują dla SEM-cznych w gałęziach o kierunku działania zgodnym ze strzałką  $U$ . Gdy którakolwiek z tych SEM-cznych ( $E_1, E_2, \dots, E_n$ ) ma kierunek przeciwny do  $U$  należy wstawić ją we wzór (121) ze znakiem ujemnym. Gdy która z gałęzi nie zawiera SEM-cznej, wstawimy we wzór (121) odnośnie  $E = 0$ .

Obliczywszy napięcie  $U$  (wzór 123), znajdujemy poszczególne prądy rozgałęzienia ze wzorów

$$J_1 = \frac{E_1 - U}{R_1}, \quad J_2 = \frac{E_2 - U}{R_2}, \quad \dots \quad J_n = \frac{E_n - U}{R_n} \dots \dots (124)$$

wynikających z zespołu równań podanych pod (120). Oczywiście i w tych wzorach należy wstawić za  $E_1, E_2, \dots, E_n$  wartości z uwzględnieniem kierunków. (Gdy  $E$  zgodne ze strzałką  $U$ , wstawimy je ze znakiem +, gdy działa w kierunku przeciwnym do strzałki  $U$ , wstawimy je ze znakiem - .

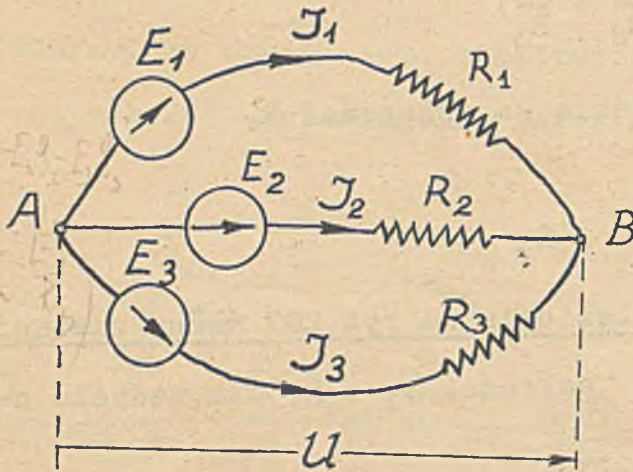


W przypadku, gdy rozgałęzienie przedstawia samoistny układ n-gałęzi

połączonych równolegle (rys.208), będzie  $J = 0$ , a wskutek tego wypadnie

$$U = E_r$$

Dla przypadku takiego możemy więc napisać ogólnie:



Rys.208.

$$U = R_r \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \dots + \frac{E_n}{R_n} \right) \dots \dots \dots (125)$$

Poszczególne prądy (o strzałkach zgodnych ze strzałką U) obliczymy znów z wzorów poprzednio podanych

$$J_1 = \frac{E_1 - U}{R_1}, \quad J_2 = \frac{E_2 - U}{R_2} \dots \dots \dots J_n = \frac{E_n - U}{R_n} \dots \dots \dots (126)$$

Przykład liczbowy: Obliczyć rozptyw prądu obwodu przedstawionego

na rys.209, przyjmując:

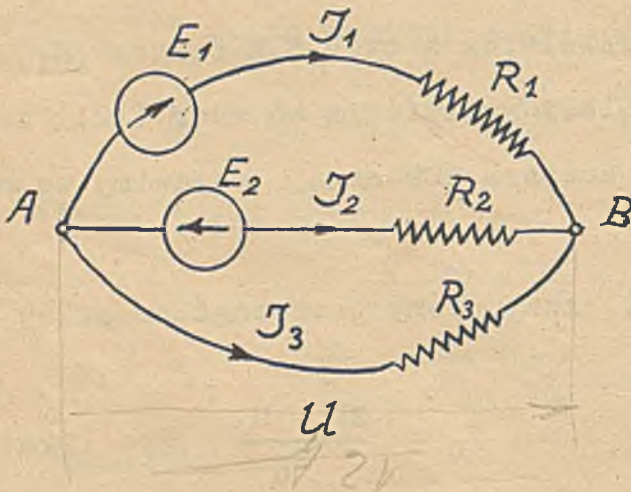
$$E_1 = 48 \text{ V}, \quad E_2 = 110 \text{ V},$$

$$R_1 = 12, \quad R_2 = 2, \quad R_3 = 8 \Omega$$

Rozwiązanie:

Obliczamy najprzód  $R_r$ :

$$R_r = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 8}{12 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 8 \cdot 12} = \frac{192}{136}$$



Rys.209

a następnie U:

$$U = R_r \left( \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} \right) = \frac{192}{136} \left( + \frac{48}{12} - \frac{110}{2} \right) = \underline{\underline{-72 \text{ V.}}}$$



$$J_1 = \frac{E_1 - U}{R_1} = \frac{48 - (-72)}{12} = \frac{120}{12} = \underline{+ 10 \text{ A}}$$

$$J_2 = \frac{-E_2 - U}{R_2} = \frac{-110 - (-72)}{2} = \frac{-38}{2} = \underline{- 19 \text{ A}}$$

$$J_3 = \frac{-U}{R_3} = \frac{-(-72)}{8} = \frac{+72}{8} = \underline{+ 9 \text{ A}}$$

Wartość ujemna  $J_2$  wskazuje, że prąd ten płynie w obwodzie w kierunku przeciwnym do oznaczonej (na rys.209) strzałki.

Kontrola: W myśl I-go prawa Kirchhoffa musi być

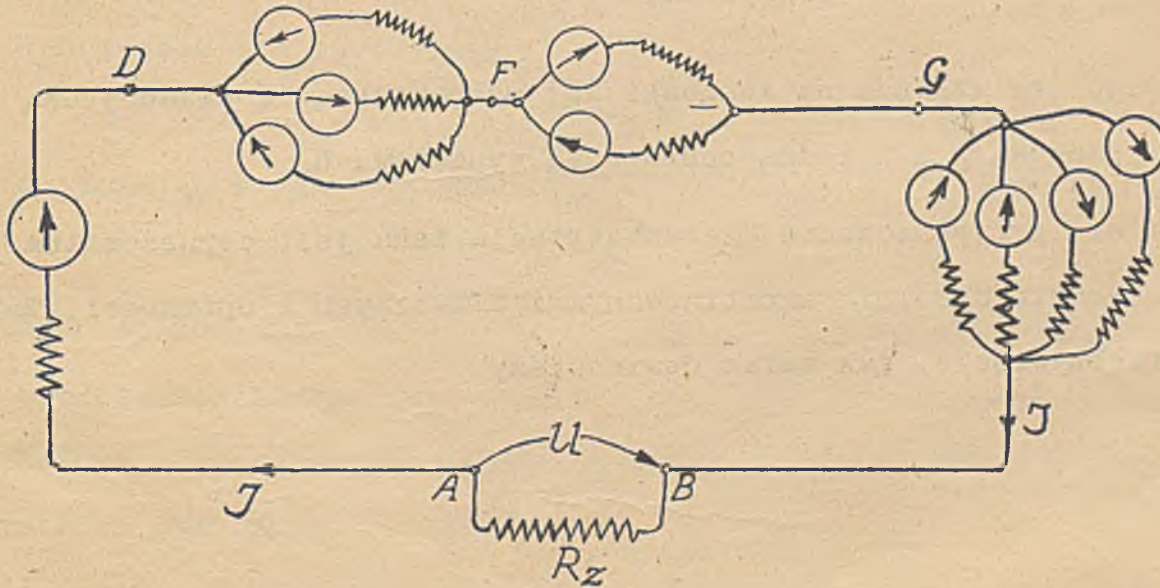
$$J_1 + J_2 + J_3 = 0$$

i jest rzeczywiście

$$+10 + (-19) + 9 = 0$$

Układ o gałęziach połączonych szeregowo i równoległe (rys.210)

Przedstawia kombinację obu poprzednich (szeregowego i równoległego).



Rys.210.

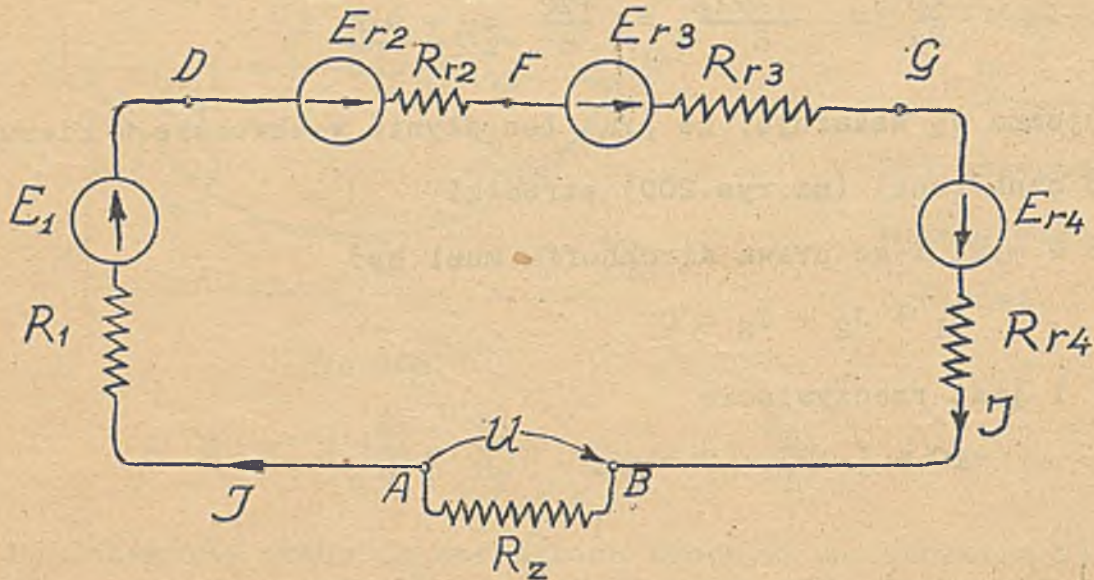
Zastępując każde z poszczególnych rozgałęzień SEM-czną zastępczą  $E_r$  i opornością zastępczą  $R_r$ , otrzymamy pojedyncze koło prądu (rys.211),



w którym

$$U = E_1 + E_{r2} + E_{r3} + E_{r4} - J \cdot (R_1 + R_{r2} + R_{r3} + R_{r4})$$

$$U = E_{rw} - J \cdot R_{rw}$$



zasada napięć  
 $\sum \frac{E}{R} = \sum \frac{E}{R}$

Rys.211.

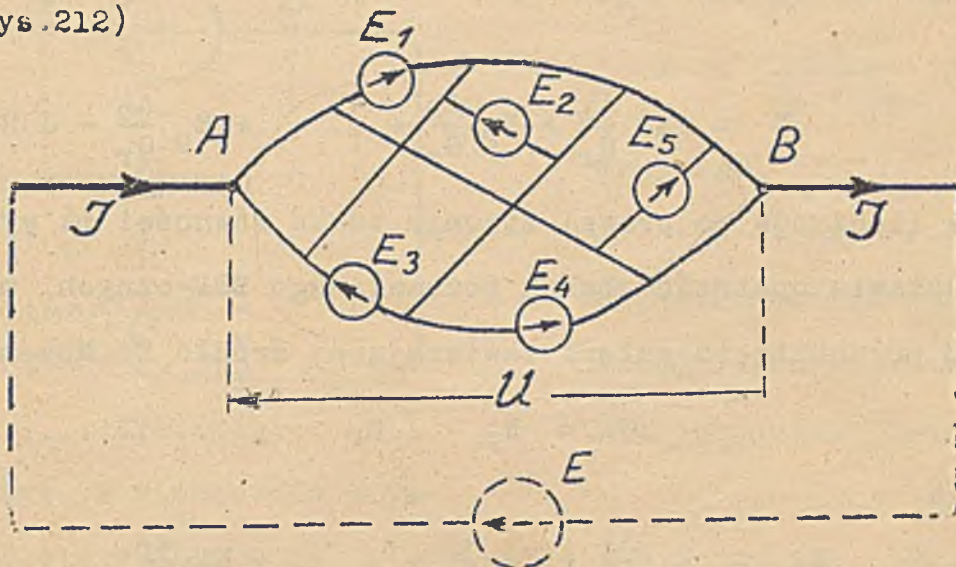
I tu więc (ze względu na końcówki AB) można zastąpić układ jedną SEM-czną wypadkową  $E_{rw}$  i jedną opornością wypadkową  $R_{rw}$ .

Nasuwa się przypuszczenie, że substytucja taka jest dopuszczalna w każdym obwodzie dowolnie skombinowanym z SEM-cznych i oporności. Tak też jest rzeczywiście, jak zaraz dowiedzimy.



4. SEM-czna zastępcza i oporność zastępcza dowolnego układu elementów.

Na węzły AB załączony jest dowolnie skombinowany obwód prądu stałego oraz bezopornowo idealne źródło prądu stałego o SEM-cznej  $E$  (rys.212)



Rys.212.

W obwodzie tym jest zatem

$$\underline{U = E}$$

Obliczając w tym obwodzie prąd  $J$ , otrzymamy ogólnie równanie

$$J = EA + E_1A_1 + E_2A_2 + \dots + E_pA_p,$$

w którym współczynniki  $A, A_1, A_2, \dots, A_p$  mają charakter przewodności.

Współczynnik  $A$  musi tu być równy przewodności obwodu  $G_r$  mierzonej na końcówkach AB po odpięciu gałęzi zawierającej SEM-czną  $E$  i usunięciu wszystkich SEM-cznych  $E_1, E_2, \dots, E_p$ , bo dla

$$E_1 = 0, E_2 = 0 \dots \dots E_p = 0$$

jest

$$J = E.A, \text{ czyli } A = \frac{J}{E} = G_r$$

Możemy zatem napisać

$$J = EG_r + E_1A_1 + E_2A_2 + \dots + E_pA_p$$



Podzielmy całe to równanie przez  $G_r$  i podstawmy

$$E = U, \text{ oraz } \frac{1}{G_r} = R_r,$$

to otrzymamy

$$J \cdot R_r = U + E_1 \cdot \frac{A_1}{G_r} + E_2 \cdot \frac{A_2}{G_r} + \dots + E_p \cdot \frac{A_p}{G_r}$$

lub

$$U = E_1 \cdot \frac{A_1}{G_r} + E_2 \cdot \frac{A_2}{G_r} + \dots + E_p \cdot \frac{A_p}{G_r} - J \cdot R_r$$

Suma iloczynów po prawej stronie znaku równości ma wymiar napięcia.  $R_r$  przedstawia oporność obwodu pozbawionego SEM-cznych, mierzona na węzłach AB po usunięciu gałęzi zawierającej źródło E. Możemy przeto położyć

$$U = E_r - J \cdot R_r \dots \dots \dots (127)$$

gdzie

$$E_r = E_1 \cdot \frac{A_1}{G_r} + E_2 \cdot \frac{A_2}{G_r} + \dots + E_p \cdot \frac{A_p}{G_r} \dots \dots \dots (128)$$

i oznacza SEM-czną zastępczą obwodu (ze względu na końcówki AB), zaś  $R_r$  odpowiada oporności (ze względu na końcówki AB), jaką wykaże układ po usunięciu wszystkich SEM-cznych. Widzimy więc, że

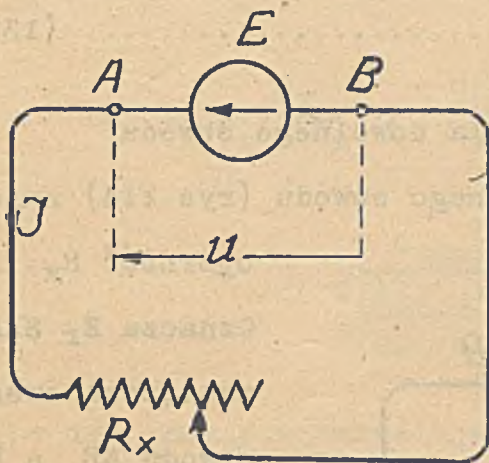
każdy układ dowolnie skombinowany z SEM-cznych i oporności da się zastąpić jedną SEM-czną  $E_r$  i jedną opornością  $R_r$ . Wartość  $E_r$  zależy od SEM-cznych i oporności składających (d o w o l n i e) obwód, wartość  $R_r$  zależy tylko od oporności układu i jest identyczna dla dwu jednakowo ukształtowanych obwodów, z których jeden zawiera dowolnie rozmieszczone SEM-czne a drugi nie zawiera ich wcale

Ogólny ten wynik pozwala jasno wytkłómaczyć ten nader ważny techniczny fakt, że pomiar napięcia i prądu w dwu charakterystycznych stanach obwodu (stan jałowy, stan zwarcia) umożliwia określenie prądu i napięcia każdego stanu innego. -



5. Stan jałowy i stan zwarcia obwodu.

Załączmy na źródło prądu o SEM  $E$  i oporności wewnętrznej  $R_w$  zmienny



Rys.213.

opór  $R_x$  (rys.213). Przez opór ten płynąć będzie prąd

$$J = \frac{E}{R_w + R_x} = \frac{U}{R_x}$$

przyczem

$$U = E - J \cdot R_w$$

Z nieskończenie wielu stanów, osiągalnych regulacją oporu  $R_x$ , dwa specjalnie zasługują na

szczególną uwagę, a mianowicie t.zw.

stan jałowy ( $R_x = \infty$ ) i stan zwarcia ( $R_x = 0$ ).

Stan jałowy osiągamy (praktycznie) przerywając obwód w miejscu  $R_x$ .

Teoretycznie odpowiada to wartości  $R_x = \infty$ . W przypadku takim jest

$$\underline{J_{(R_x=\infty)} = 0, \quad a \quad U_{(R_x=\infty)} = E \dots\dots\dots (129)}$$

Stan zwarcia osiągamy (praktycznie) łącząc „na krótko” (zwierając)

końcówki AB. Teoretycznie odpowiada to wartości  $R_x = 0$ . W przypadku takim jest

$$\underline{J_{(R_x=0)} = \frac{E}{R_w}, \quad U_{(R_x=0)} = 0 \dots\dots\dots (130)}$$

W stanie jałowym ujawnia się na końcówkach elementu AB najwyższe napięcie, jakie tam może wystąpić przy  $E = \text{const}$

W stanie zwarcia ujawnia się w obwodzie największy prąd, jaki tam może wystąpić przy  $E = \text{const}$  i  $R_w = \text{const}$ .

Z powyższych wzorów wynika, że SEM-czna działająca w elemencie AB jest równa napięciu na końcówkach tego elementu, mierzonemu w stanie jałowym



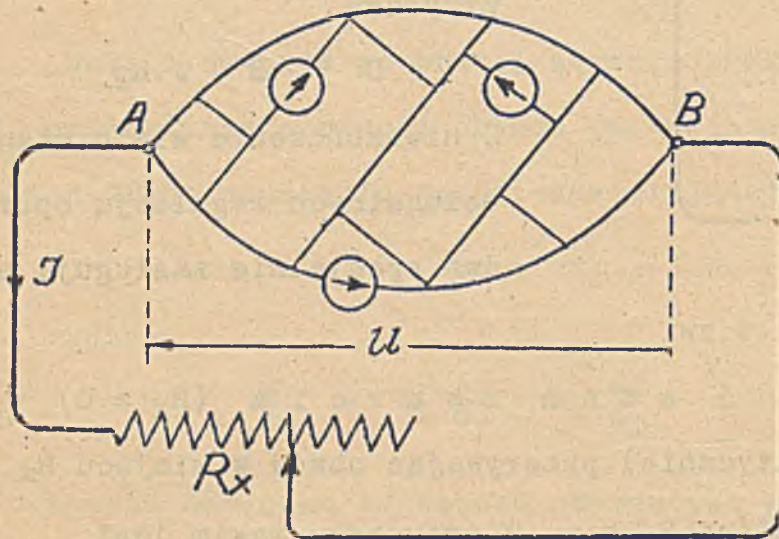
$$E = U_{(R_x = \infty)} \dots \dots \dots (131)$$

oraz, że oporność wewnętrzna  $R_w$  elementu AB równa się stosunkowi napięcia mierzonego w stanie jałowym i prądu mierzonego w stanie zwarcia

$$R_w = \frac{U_{(R_x = \infty)}}{J_{(R_x = 0)}} \dots \dots \dots (132)$$

Wyniki te. (131, 132) można uogólnić dla dowolnego obwodu.

Załączmy na końcówki AB dowolnie złożonego obwodu (rys.214) zmienną



oporność  $R_x$ .

Cznacza  $E_r$  SEM-czną

zastępczą owego

obwodu AB, a  $R_r$  je-

go oporność zastęp-

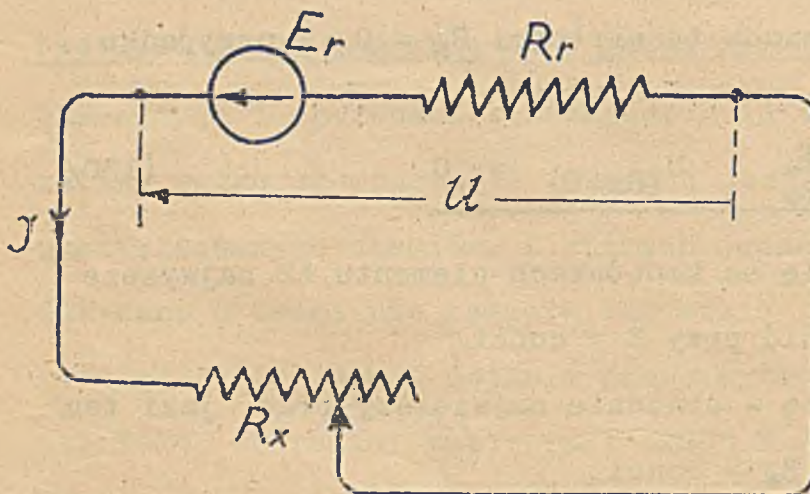
czą, to także i tu

jest

$$E_r = U_{(R_x = \infty)}$$

$$R_r = \frac{U_{(R_x = \infty)}}{J_{(R_x = 0)}}$$

Rys. 214.



albowiem w myśl

poprzednich rozwa-

zań obwód AB na

rys.214. można za-

stąpić jedną SEM-

czną  $E_r$  i jednym

oporem  $R_r$ . czyli

sprowadzić do przy-

padku omówionego

poprzednio rys.213

Rys. 215.



Prąd w dowolnym innym stanie obwodu na rys.214. określi (w związku z rys.215.) relacja

$$J = \frac{U}{R_x} = \frac{E_r - J \cdot R_r}{R_x} = \frac{U_{(R_x = \infty)} - J \cdot \frac{U_{(R_x = \infty)}}{J_{(R_x = 0)}}}{R_x}$$

skąd

$$J = \frac{E_r}{R_r + R_x} = \frac{U_{(R_x = \infty)}}{R_r + R_x} \dots\dots\dots (133)$$

lub

$$J = \frac{U_{(R_x = \infty)}}{\frac{U_{(R_x = \infty)}}{J_{(R_x = 0)}} + R_x} \dots\dots\dots (134)$$

Ostatnie dwa równania określają prąd J w elemencie R<sub>x</sub> dla dowolnej oporności R<sub>x</sub>. Wzory (133 i 134) zawierają tu jak widać, oprócz R<sub>x</sub>, jedynie wartości odnoszące się do dwóch stanów charakterystycznych t.j. stanu jałowego (R<sub>x</sub> = ∞) i stanu zwarcia (R<sub>x</sub> = 0).

Pomiary prądów i napięć w obu tych stanach dozwolą określić prądy i napięcia w każdym innym stanie obwodu.

Na powyższem oparte są metody pomiarowe całego szeregu różnych maszyn i urządzeń elektrycznych. (Czytaj: J.L.La Cour „Leerlauf- und Kurzschluss-Versuch in Theorie und Praxis“, Braunschweig 1904, łącznie z pracą: Fryze „Der allgemeine Stromkreis von J.L.La Cour, Kritische Betrachtung, E u.M 1927 zeszyt 7).

Przy stosowaniu metod pomiarowych opartych na stanach jałowym i zwarcia, nie trzeba zapominać o założeniach.

Znalezione relacje ogólne (131 i 132) ważne są tylko dla takich przypadków, gdy w obwodzie AB (rys.214) zarówno SEM-czne jak i oporności wewnętrzne są stałe (1)

Tylko bowiem w takich przypadkach jest także

$$\underline{E_r = \text{const} \quad \text{ i } \quad R_r = \text{const}}$$



Gdy ze zmianami  $R_x$  ulegają zmianom także SEM-czne wewnętrzne albo oporności wewnętrzne (lub jedne i drugie), podane poprzednio relacje (131 i 132) a z niemi i dalsze (133 i 134) tracą ważność.

Rozważania powyższe można odnieść do dowolnego elementu obwodu, otrzymując związki analogiczne do powyżej podanych (P.E.1924, Fryze „Nowa teoria ogólnego obwodu elektrycznego”, Zeszyt 11, 12 i 13).

### 6. Zwarcie (Bezpieczniki).

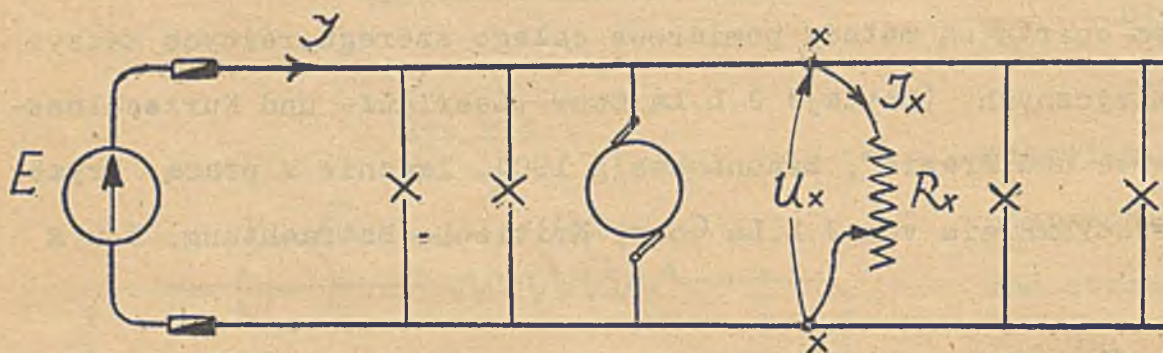
Prąd  $J_x$  w elemencie  $R_x$ , załączonym na końcówki x-x obwodu, określa według (133) wzór

$$J_x = \frac{U_x(R_x = \infty)}{R_r + R_x}$$

( $U_x(R_x = \infty)$  napięcie na końcówkach x-x dla  $R_x = \infty$ ,

$R_r$  oporność zastępcza sieci mierzona między x-x przy  $R_x = \infty$ ,

$R_x$  oporność załączona na końcówki x-x, rys.216.).

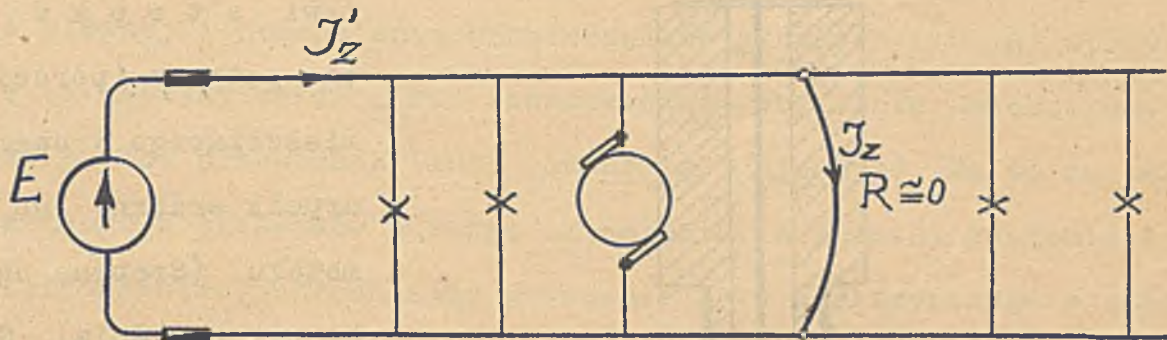


Rys. 216

Wzór powyższy wskazuje, że przy małych opornościach sieci ( $R_r$ ) powstać mogą przy załączeniu małych oporów  $R_x$  bardzo wielkie prądy ( $J_x$ ). Wypadek taki zachodzi w sieciach technicznych przy t.zw. z w a r c i u przewodów rozprowadzających energję elektryczną do odbiorników. Gdy zamiast odbiornika (żarówek, opornicy i t.p.) włączymy w przewody te element o małym oporze (drut metalowy i t.p. rys.217), popłynie przez niego t.zw. prąd zwarcia  $J_z$ , zwykle bardzo wielki. Prąd ten może spowodować stopienie owego



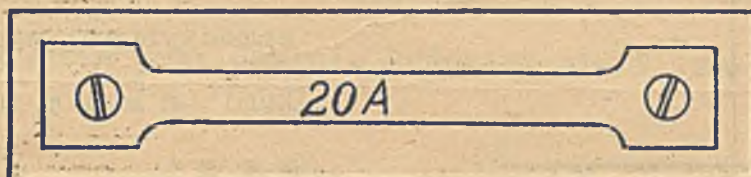
połączenia „zwierającego”, (rys.217) lub gdy to jest dostatecznie wytrzymałe (termicznie), innego przewodu, przez który płynie, albo wreszcie może uszkodzić samo źródło prądu (Wykrzywienie płyt w akumulatorach, przepalenie uzwojenia w dynamomaszynach, uszkodzenie kolektora i t.d.).



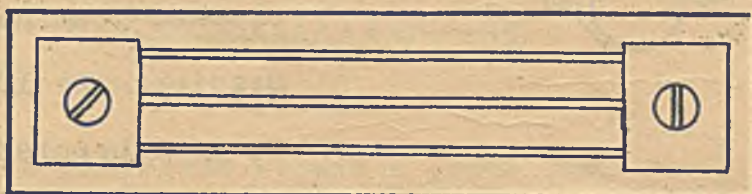
Rys. 217.

Celem ochrony przed tego rodzaju ewentualnościami, stosujemy t.zw. bezpieczniki.

Bezpiecznik, to element obwodu zawierający drucik o małej oporności, który przepala się przy przepływie oznaczonego prądu i w ten sposób przerywa prąd w obwodzie. W praktyce używane są bezpieczniki paskowe (rys 218 i 219), patronowe (rys.220) i automatyczne



Rys. 218.



Rys. 219.

Bezpiecznik paskowy (rys 218) to pasek sporządzony zwykle z ołowiu, z drucików miedzianych srebrzonych (rys 219) lub z odpowiednich stopów (cyny i ołowiu i t.p.) umocowany na podstawie ogniotrwałej i okryty puszką z takiego samego materiału.



Nakrycie ma na celu ochronę przed rozbryzgującym się gorącym metalem w chwili stopienia owego paska (podczas zwarcia).

Bezpieczniki patronowe (rys. 220) są to gniazda porcelanowe z kontak-

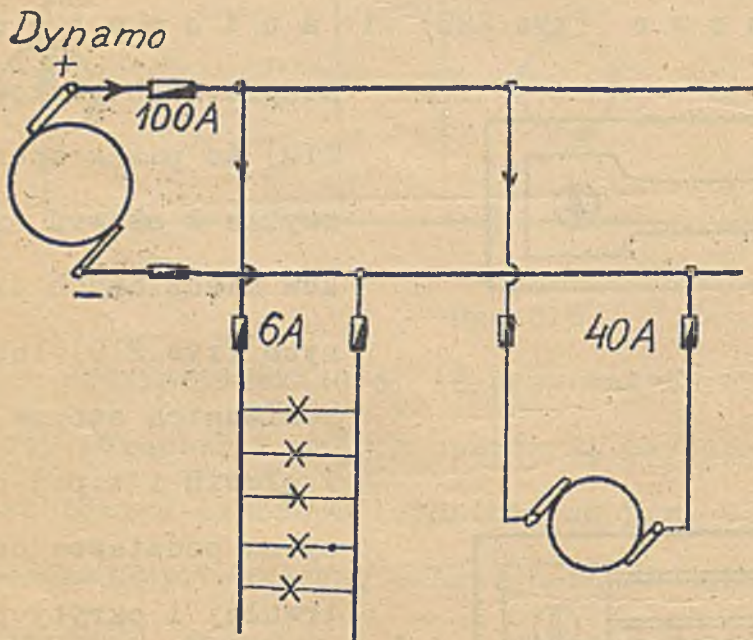


Rys. 220.

tami metalowymi, w których tkwi stopka w kształcie patronu (porcelanowego), mieszczącego w swym wnętrzu drucik srebrny lub z innego metalu. (Srebrne są najlepsze bo nie oksydują). Gdy przez ów drucik w stopce przepły-

nie za wielki prąd, ulega on przepaleniu i w ten sposób przerywa obwód. -

W ostatnich czasach poczęto stosować małe automaty (wielkie były już dawno w użyciu), celem zabezpieczenia przewodów przed skutkami zwarcia. W automatach tych (najróżnorodniejszej konstrukcji), zwiększenie prądu ponad normę przepisana, powoduje samoczynne wyłączenie przewodu zabezpie-



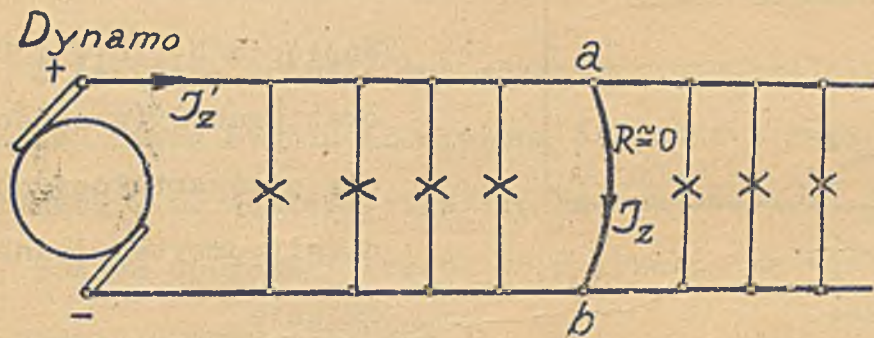
Rys. 221

czonego. Większe takie automaty nazywają się samoczynnymi wyłącznikami nadmiarowymi. Zabezpieczenie przed skutkami zwarcia różnych części sieci technicznej okazane jest na rys. 221. Bezpieczniki 100 A służą do zabezpieczenia maszyny dynamo i przewodów głównych



Bezpieczniki 6 A zabezpieczają linię światła, bezpieczniki 40 A motor przyłączony do sieci. Gdy powstanie zwarcie na linii światła, przepalą się tylko bezpieczniki 6 A, powodując odłączenie tylko tej części instalacji. Zwarcie w motorze powoduje odłączenie połączeń do motoru, wreszcie zwarcie na linii głównej i przepalenie bezpieczników głównych (100 A) sprawi odłączenie od maszyny całej sieci rozdzielczej. Normalnie umieszczamy bezpieczniki na obu przewodach linii (dodatnim i ujemnym). Ma to na celu ochronę każdego z przewodów w razie uziemienia, a poza tym gwarantuje większe bezpieczeństwo, utrudniając powstanie łuku elektrycznego w stopce, albowiem przy zwarciu powstaje przerwa od razu w dwu miejscach obwodu

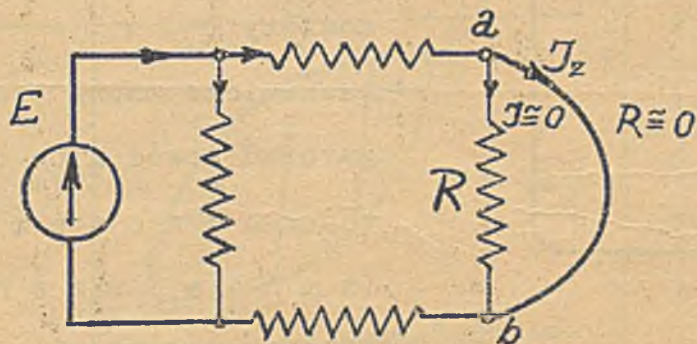
Wypada zaznaczyć, że podczas zwarcia, sąsiednie elementy są pozbawione prądu. N.p. zwarcie w punktach ab (rys. 222.) powoduje przygaszenie żarówek



Rys. 222.

załączonych na zwartą linię, w szczególności żarówek położonych na prawo od miejsca zwarcia (ab)

Podobnie przy zwarciu końcówek ab na rys. 223. traci prąd element R.



Rys 223.

Pochodzi to stąd, że podczas zwarcia, napięcie na końcówkach zwartych jest prawie równe zero (Teoretycznie przy zwarciu elementem o  $R = 0$ , będzie  $i = U = 0$ ).

Uwaga: Teoretycznie wypada z prawa Ohma  $J = \frac{U}{R}$ , dla  $R = 0$ ,  $J = \infty$ . Praktycznie prąd  $J$  nie osiąga zbyt wielkich wartości, gdyż zwarcie wywołuje zaburzenie elektromagnetyczne, powodując stopniowy wzrost prądu (z czasem) aż do przepalenia najsłabszej (termicznie) części obwodu.

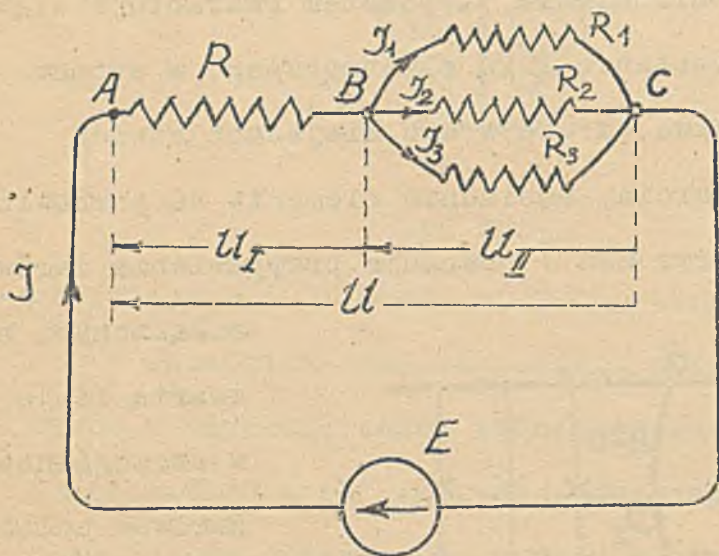


7. Transfiguracja obwodów prądu stałego.

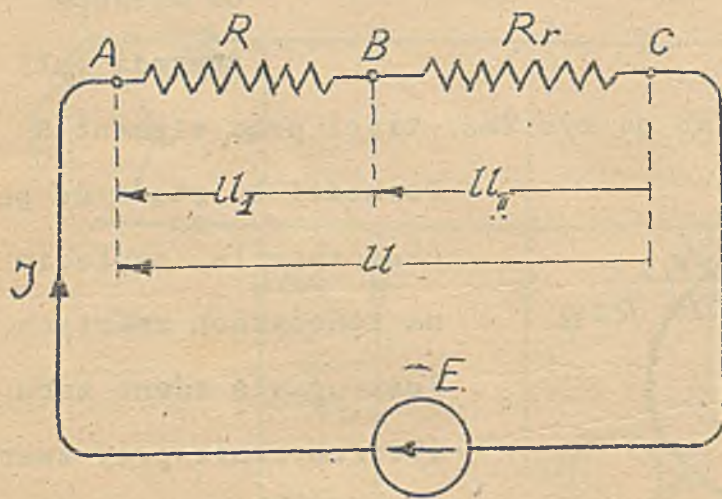
Pod transfiguracją rozumiemy p r z e k s z t a ł c e n i e obwodu nie powodujące w częściach przez nią nie objętych żadnych zmian zarówno w rozplywie prądów jak i w rozkładzie napięć.

Prosty przykład transfiguracji przedstawia n p. zastąpienie rozgałęzienia na rys 224. oporem zastępczym

$$R_r = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$



Rys. 224.



Rys. 225.

wskutek czego obwód pierwotny (rys.224) przekształci się w proste koło prądu o opornościach  $R$ ,  $R_r$  i SEM-cznej  $E$ .

Napięcia  $U_I$ ,  $U_{II}$  i  $U$  oraz prąd  $J$  (w częściach nie przekształconych) nie uległy przytem żadnej zmianie.

Transfigurację obwodu przeprowadzamy celem ułatwienia obliczeń lub analizy.

Zasadniczo można transfigurować obwód albo celem uproszczenia (zmniejszenia liczby elementów), lub też

celem przekształcenia go na inny obwód (choćby o większej liczbie elementów) jednakże łatwiejszy do opanowania (doświadczalnie lub teoretycznie).

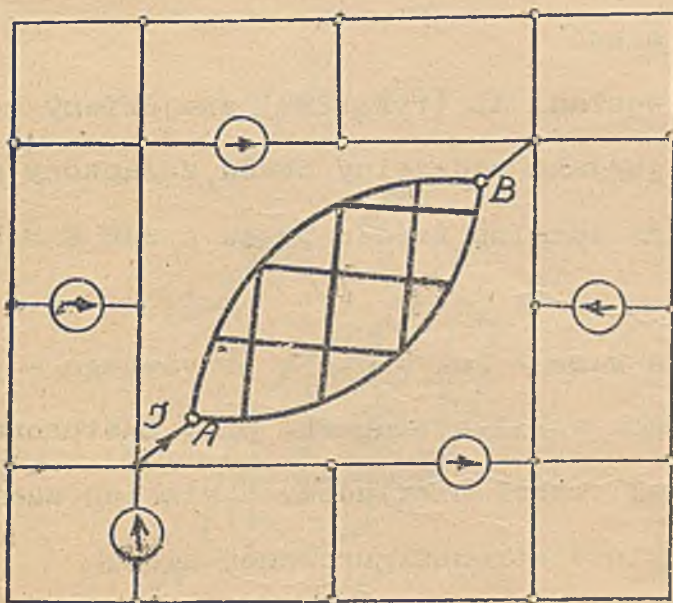


Przykład podany poprzednio (rys. 224, 225) ilustruje transfigurację części obwodu połączonej z resztą d w o m a węzłami, czyli krótko transfigurację na dwa węzły. Przytem część podlegająca transfiguracji, tu (BC), nie zawiera żadnej SEM. Jest to najprostszy przykład transfiguracji. W ogólnym traktowaniu, będziemy dążyć do ustalenia warunków, jakim trzeba zadość uczynić przy transfiguracji części obwodu d o w o l n i e złożonych z SEM-czynnych i oporów i połączonych z resztą obwodu nietylko 2-ma lecz także 3-ma, 4-ma, ogólnie n-węzłami.

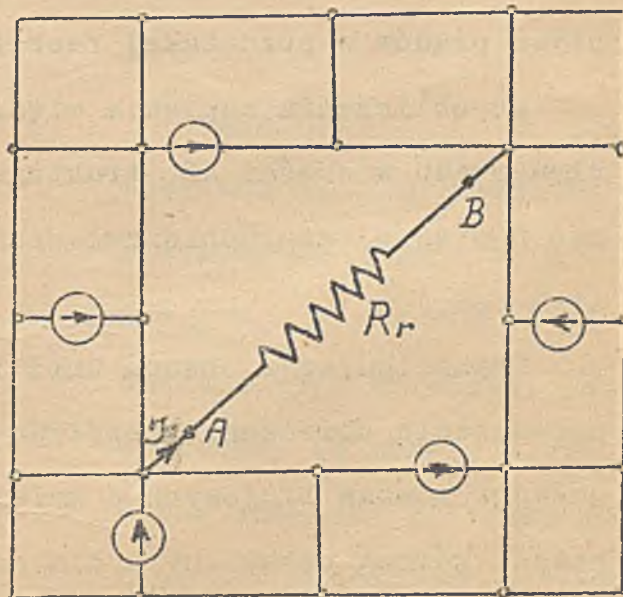
Rozważymy poszczególne przypadki oddzielnie.

a) Transfiguracja części obwodu złożonej z s a m y c h oporów i połączonej z resztą obwodu 2-ma węzłami.

Zadanie to zostało już rozwiązane poprzednio przy omówieniu łączenia oporów. Część obwodu AB złożoną dowolnie z samych oporów i połączoną z resztą 2-ma węzłami (rys. 226) można zastąpić jednym oporem zastępczym  $R_r$ , równym oporności części AB, mierzonej na węzłach AB, po odjęciu jej od reszty obwodu (rys. 227.)



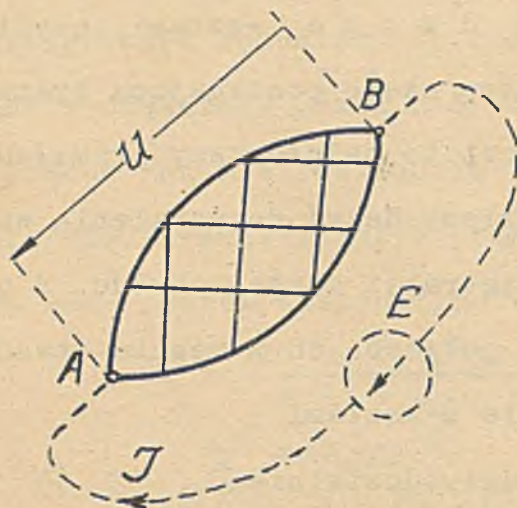
Rys. 226.



Rys. 227.



Pomiar  $R_r$  możemy sobie wyobrazić dokonany w ten sposób, że wyodrębni-



oną część AB załączamy na napięcie U (rys.228.)

Stosunek napięcia U i prądu J płynącego do części AB odpowiada oporności  $R_r$

$$R_r = \frac{U}{J}$$

Przyjmując, że na końcówki AB załączono idealne źródło prądu o SEM-

Rys.228.

cznej  $E = U$ , możemy napisać także

$$R_r = \frac{E}{J}$$

Obliczenie  $R_r$  można uskutecznić w sposób analogiczny jak to okazano poprzednio w związku z rys.193. (Najdogodniej przy pomocy cykli Maxwella, wzór 99).

Wprowadzając zamiast części AB opór zastępczy  $R_r$ , z m n i e j s z a = m y ilość elementów a temsamem ilość niewiadomych przy obliczeniu roz- pływu prądów w pozostałej reszcie sieci.

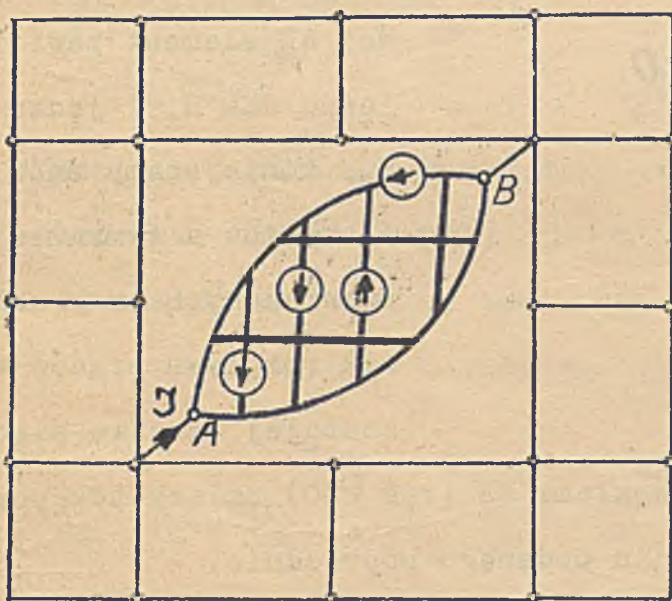
Po obliczeniu napięcia między węzłami AB (rys. 227), znajdziemy roz- pływ prądu w części AB, traktując ją jako oddzielny obwód, załączony na owo napięcie, względnie załączony na idealne źródło prądu o SEM  $E = U$  (rys.228.).

Transfiguracja obwodu umożliwia więc - jak widać z powyższego - prze- prowadzenie obliczenia rozptywu prądu w kilku etapach, przy zastosowaniu układów równań linjowych o mniejszej ilości niewiadomych niż ich zawiera zespół równań ustawicznych dla całej nie stransfigurowanej sieci.

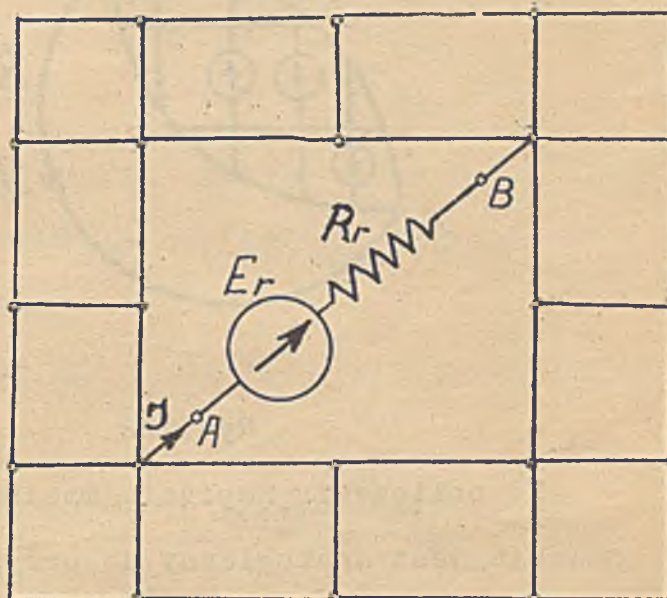


b) Transfiguracja części obwodu złożonej dowolnie z SEM-czynych i oporów i połączonej z resztą obwodu 2-ma węzłami.

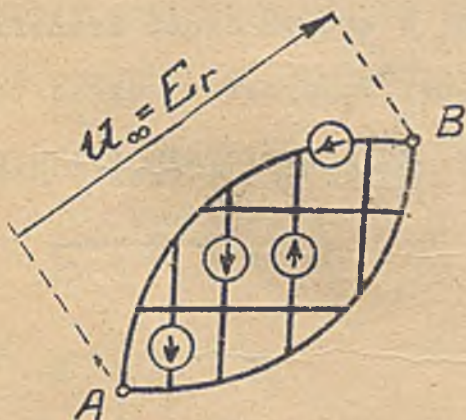
I to zadanie zostało już rozwiązane poprzednio przy omówieniu łączenia SEM-czynych i oporów. Część obwodu AB złożoną dowolnie z SEM-czynych i oporów i połączonej z resztą 2-ma węzłami (rys 229) można zastąpić jedną SEM-czną zastępczą  $E_r$  połączoną w szereg z jednym oporem zastępczym  $R_r$  (Rys.230.).



Rys. 229.



Rys. 230.



Rys. 231.

SEM-czną  $E_r$  i oporność  $R_r$  wyznaczymy ze stanów  $j$  a  $l$  o = w e g o i z w a r c i a odniesionych do części AB oddzielonej od reszty sieci. I tak SEM-czna  $E_r$  równa się napięciu mierzonemu na końcówkach AB części AB oddzielonej od reszty (rys 231.).



Czyli  $E_r$  równa się napięciu  $U_\infty$  w stanie jałowym wyodrębnionej części AB

$$E_r = U_\infty$$

Oporność  $R_r$  zaś odpowiada stosunkowi

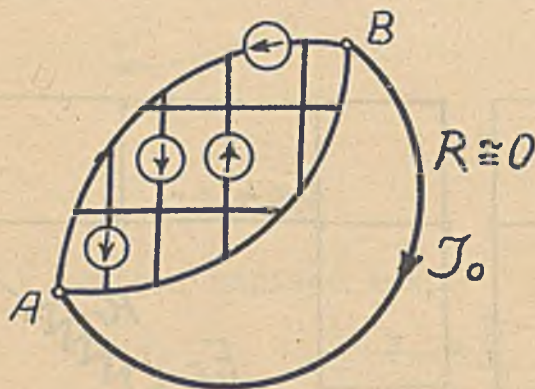
$$R_r = \frac{U_\infty}{J_0}$$

gdzie  $U_\infty$  oznacza napięcie mierzone w stanie jałowym a  $J_0$  prąd zwarcia (rys 232.) Obliczenie  $E_r$  i  $R_r$  można uskutecznić w sposób analogiczny,

jak to okazano poprzednio, w związku z rys 212. (Dowolny układ SEM-cznych

i oporów, wzory 127. i 128.)

Wprowadzając zamiast części AB element zawierający jedną SEM  $E_r$  i jeden opór  $R_r$ , zmniejszamy znów ilość elementów a temsamem ilość niewiadomych przy obliczaniu rozplywu prądów w pozostałej reszcie sieci.



Rys.232.

Po obliczeniu napięcia między węzłami AB (rys.230) dalszy tok postępowania jest analogiczny do przypadku podanego poprzednio. -

Powyższe rozważania (a,b) wyczerpują wszystkie przypadki transfiguracji „na dwa węzły”.

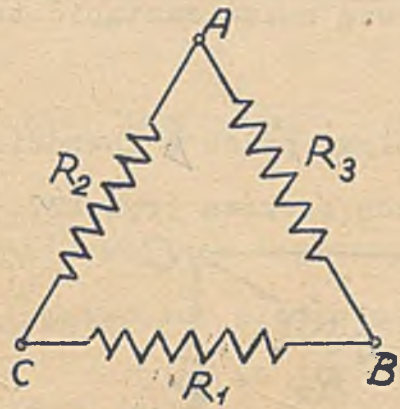
Spróbujemy teraz przekształcić obwód, w którym część transfigurowana połączona jest z resztą sieci 3-ma węzłami. Najprostszy układ tego rodzaju przedstawia trójkąt i gwiazda oporowe, gdyż zawierają tylko po trzy elementy (oporowe).



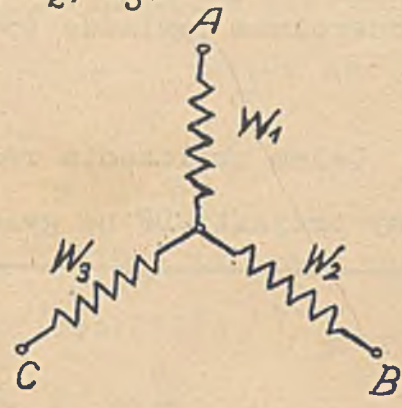
c) Transfiguracja trójkąta oporowego w gwiazdę i odwrotnie

(Podane przez Kennelly'ego)

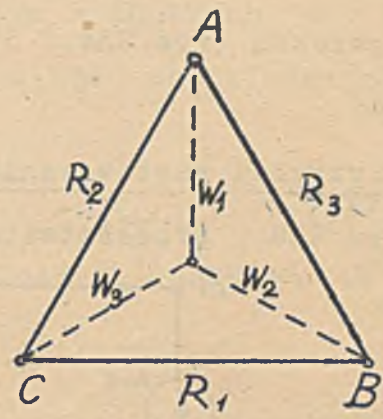
Rys. 233. przedstawia trójkąt złożony z oporów  $R_1, R_2, R_3$  rys 234 zaś gwiazdę złożoną z oporów  $W_1, W_2, W_3$ .



Rys. 233



Rys. 234.



Rys. 235

Jeżeli w jakimkolwiek obwodzie jeden z tych układów ma zastąpić drugi, to oporności, względnie przewodności, mierzone na każdym z nich, między temi samymi parami węzłów, muszą być równe

Pomiar przewodności między węzłami A i B w trójkącie i w gwiazdzie da równość

$$1) \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{W_1 + W_2}, \text{ lub } W_1 + W_2 = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Analogiczny pomiar między węzłami B i C da równość

$$2) \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} = \frac{1}{W_2 + W_3}, \text{ lub } W_2 + W_3 = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Wreszcie z pomiaru między węzłami C i A osiągniemy równość

$$3) \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3} = \frac{1}{W_1 + W_3}, \text{ lub } W_1 + W_3 = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Z tych trzech równości wynikają następujące wzory:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, & R_1 &= \frac{W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1}{W_1} \\
W_2 &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, & R_2 &= \frac{W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1}{W_2} \dots \dots \dots (135) \\
W_3 &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, & R_3 &= \frac{W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1}{W_3}
\end{aligned}$$

Wzory te łatwo spamiętać mając na uwadze schemat podany na rys 235

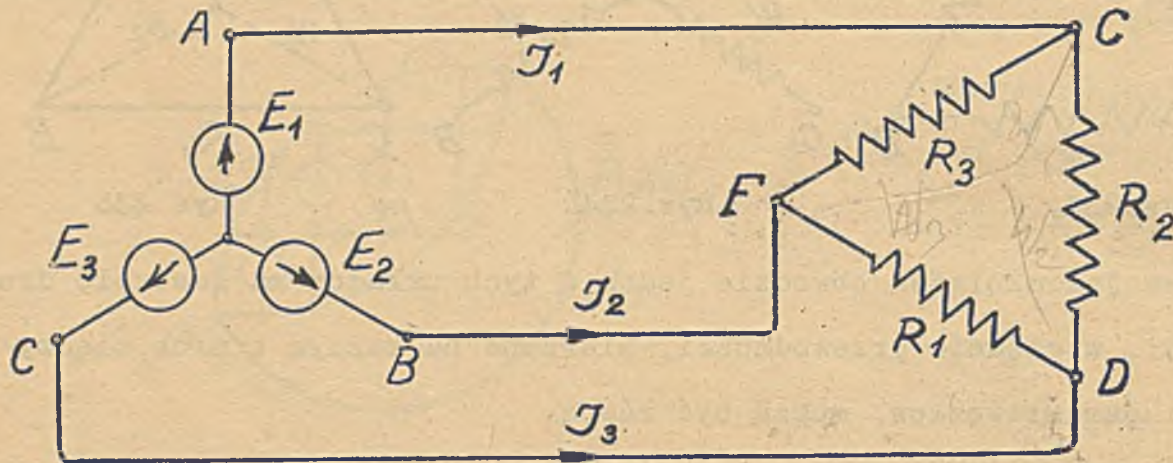


Z powyższego zespołu wynika równość

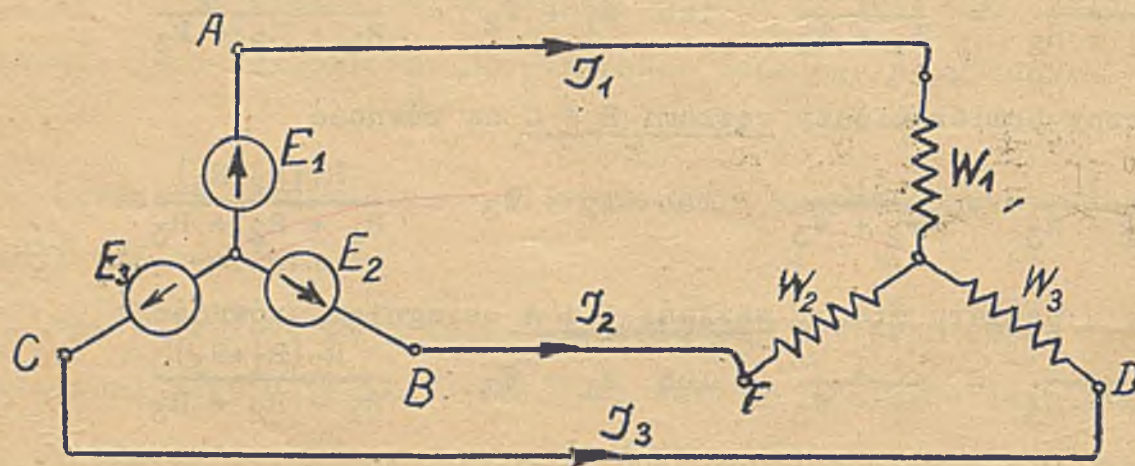
$$R_1 W_1 = R_2 W_2 = R_3 W_3 = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = W_1 W_2 + W_2 W_3 + W_3 W_1 \dots\dots (136)$$

Z zestawienia (135) widać, że trójkąt oporowy (rys.233.) można zastąpić gwiazdą (rys.234.) i odwrotnie (gwiazdę oporową można zastąpić trójkątem).

Przykład zastosowania. Celem obliczenia rozplywu prądu w obwodzie na rys.236., przekształcamy trójkąt CDF na gwiazdę oporową (rys.237.).



Rys. 236:



Rys. 237.

Otrzymamy w ten sposób obwód o trzech gałęziach równoległych, który obliczymy analogicznie jak na rys.207, a mianowicie wyznaczając napięcie między obu środkami gwiazd. (Obliczenie takie znajduje zastosowanie w układach 3-fazowych prądów zmiennych).



d) Transfiguracja „trójkąt - gwiazda”  
z uwzględnieniem SEM-cznych.<sup>1)</sup>

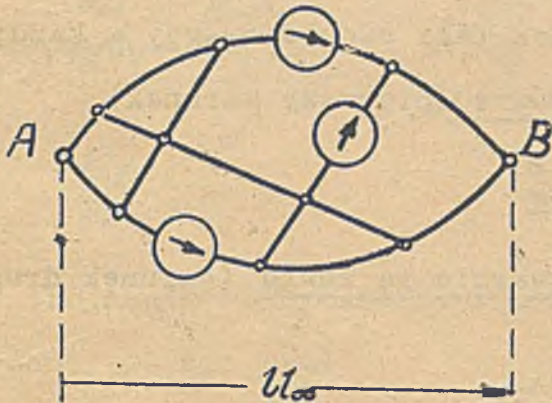
Poprzednio dowiedliśmy, że napięcie mierzone na końcówkach  $d o w o l =$   
 $n i e s k o m b i n o w a n e g o$  układu AB (rys.238) odpowiada jego  
SEM-cznej zastępczej

$$E_r = U_\infty \dots\dots\dots (137)$$

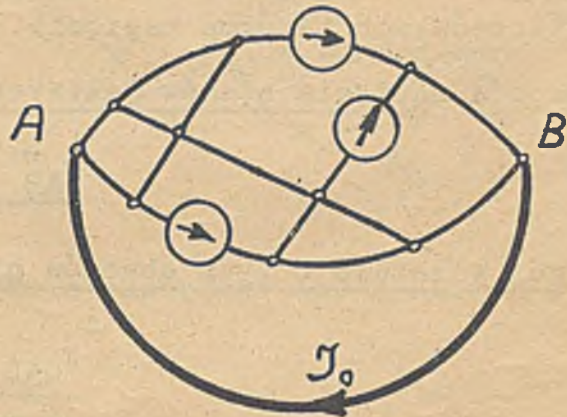
Zaś stosunek tego napięcia ( $U_\infty$ ) do prądu zwarcia  $J_0$  odpowiada opor=

ności zastępczej elementu AB (rys.239)

$$R_r = \frac{U_\infty}{J_0} \dots\dots\dots (138)$$



Rys.238.



Rys.239.

$E_r$  interpretujemy jako wypadkowe działanie elektromotoryczne SEM-cznych  
 $w e w n \acute{e} t r z n y c h$  układu AB.

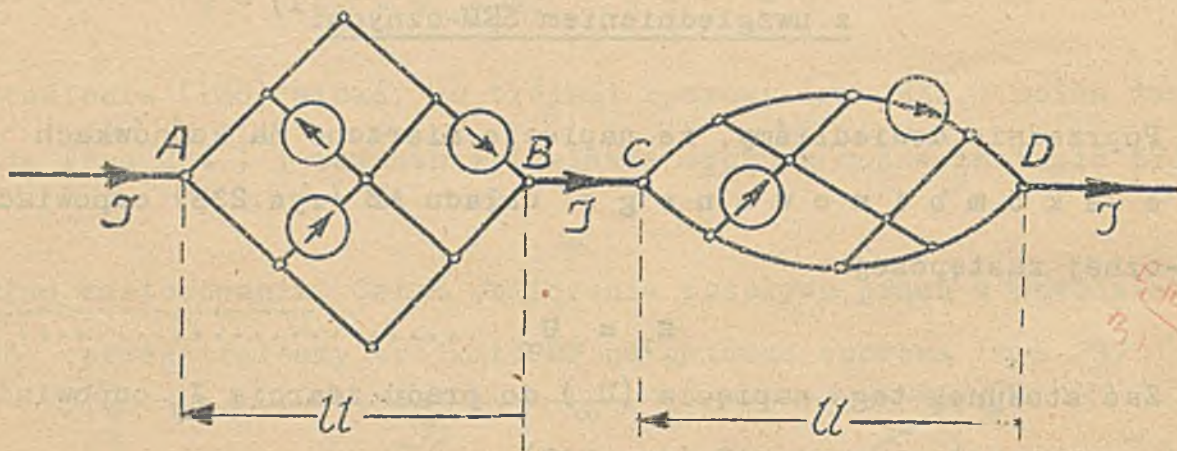
$R_r$  oznacza wypadkową oporność w e w n \acute{e} t r z n ą układu AB.

Wzory (137 i 138) są ważne dla każdego układu zawierającego w e =  
w n ą t r z s t a ł e SEM i s t a ł e oporności.

1) Obszerniejsza publikacja będzie ogłoszona w „R\u00e9vue G\u00e9n\u00e9rale de l'Elec=  
tricit\u00e9” (rocznik 1928).



Dwa r ó ż n e układy AB i CD (rys.240 i 241) są elektrycznie



Rys.240.

Rys.241.

r ó w n o w a ż n e jeżeli przy przepływie tych samych prądów J wykazują na końcówkach te same napięcia. Wypadek taki zachodzi, gdy w każdym z tych obwodów napięcia stanów jałowych są równe (pierwszy warunek)

$$\underline{U_{AB}^{\infty} = U_{CD}^{\infty}}$$

i gdy w każdym z tych obwodów prądy zwarcia są równe (warunek drugi)

$$\underline{J_{OAB} = J_{OAB_{CD}}}$$

Twierdzenie to można rozszerzyć także na układy n-węzłach głównych, czyli łączących układ z resztą sieci. (Tu na rys.240 i 241 są dwa węzły główne A i B).

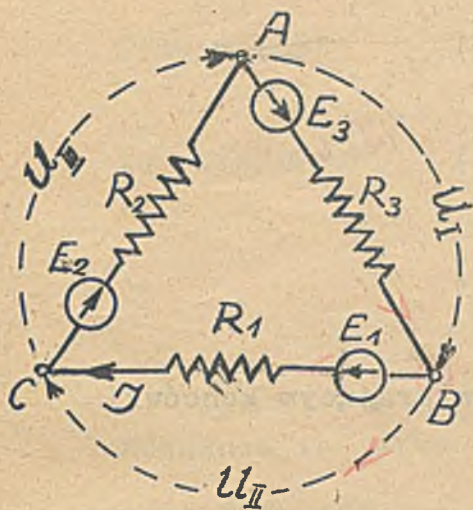
Przerobimy tu tylko transfigurację trójkąta złożonego z trzech oporów  $R_1, R_2$  i  $R_3$  i trzech SEM-nych  $E_1, E_2$  i  $E_3$ , gdyż znajduje ona zastosowanie przy obliczaniu układów 3-fazowych.

Trójkąt ten należy sobie wyobrazić połączony z resztą dowolnie ukształtowanej sieci za pomocą 3 węzłów głównych ABC (rys.242.).

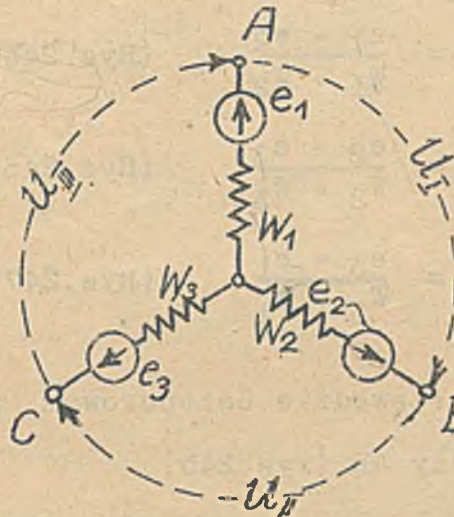
Zadaniem naszym ma być przekształcenie tego trójkąta na gwiazdę elektrycznie równoważną.



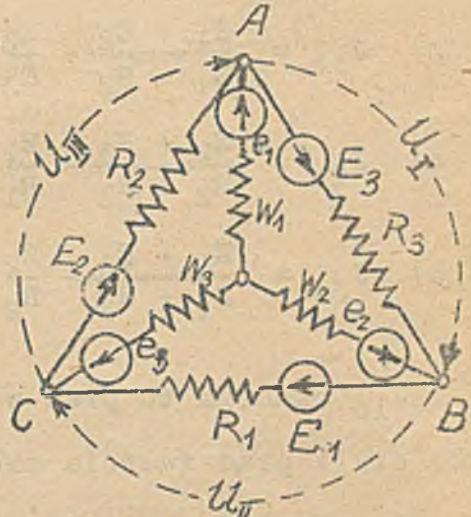
Trójkąt na rys.242 będzie równoważny gwiazdzie na rys.243, gdy napięcia jałowe ( $U_{\infty}$ ) mierzone na końcówkach poszczególnych elementów w jednym i drugim układzie będą odpowiednio równe ( pierwszy warunek ); oraz, gdy prądy zwarcia poszczególnych elementów jednego i drugiego układu będą odpowiednio równe ( drugi warunek ).



Rys.242.



Rys.243.



Rys.244.

W trójkącie na rys.242 w stanie jałowym (końcówki ABC z niczem nie połączone) płynie prąd

$$J = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

W gwiazdzie na rys.243 w stanie jałowym (końcówki ABC z niczem nie połączone) nie płyną żadne prądy. Warunek pierwszy prowadzi więc do równań

$$1) U_I = E_3 - J \cdot R_3 = \frac{E_3(R_1 + R_2 + R_3) - (E_1 + E_2 + E_3) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = e_2 - e_1$$

$$2) U_{II} = E_1 - J \cdot R_1 = \frac{E_1(R_1 + R_2 + R_3) - (E_1 + E_2 + E_3) \cdot R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = e_3 - e_2$$

$$3) U_{III} = E_2 - J \cdot R_2 = \frac{E_2(R_1 + R_2 + R_3) - (E_1 + E_2 + E_3) \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = e_1 - e_3$$



$U_I$  oznacza tu napięcie mierzone między końcówki A i B

$U_{II}$  napięcie mierzone między BC a

$U_{III}$  napięcie mierzone między CA. Lewe strony równań odpowiadają napięciom na trójkącie, prawe na gwiazdzie (w stanie jałowym t.zn. gdy ani trójkąt ani gwiazda nie są załączone na sieć).

Warunek drugi prowadzi do równań

$$3) \quad J_{10} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} - \frac{E_3}{R_3} = \frac{e_1 - e_2}{W_1 + W_2} \quad (\text{Rys.245.})$$

$$4) \quad J_{20} = \frac{E_2 + E_3}{R_2 + R_3} - \frac{E_1}{R_1} = \frac{e_2 - e_3}{W_2 + W_3} \quad (\text{Rys.246.})$$

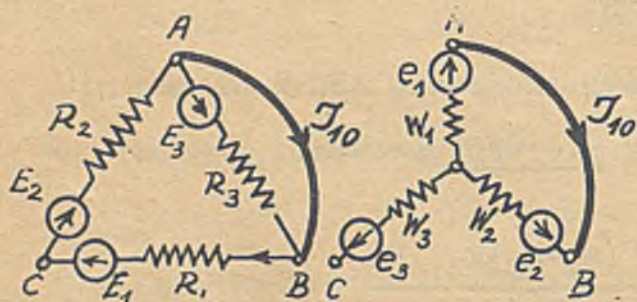
$$5) \quad J_{30} = \frac{E_1 + E_3}{R_1 + R_3} - \frac{E_2}{R_2} = \frac{e_3 - e_1}{W_3 + W_1} \quad (\text{Rys.247.})$$

$J_{10}$  oznacza tu prąd w przewodzie bezoporowym, zwierającym końcówki AB, czyli prąd zwarcia między AB (rys.245).

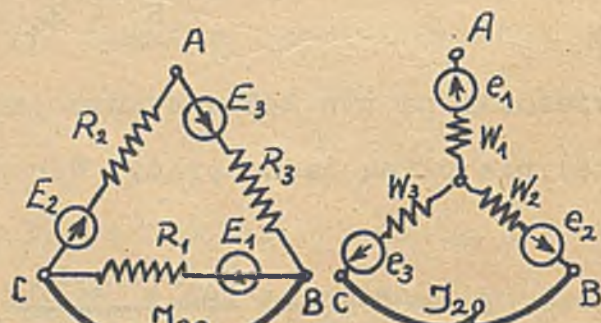
$J_{20}$  prąd zwarcia BC (rys.246), a

$J_{30}$  prąd zwarcia CA (rys.247).

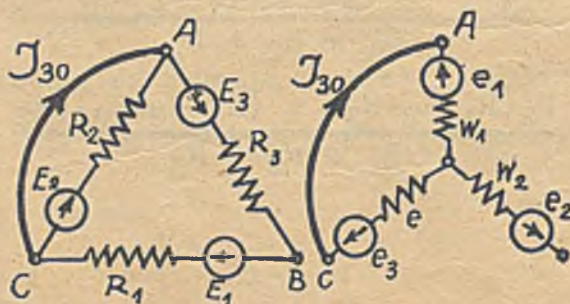
Lewe strony powyższych równań odpowiadają prądom zwarcia trójkąta, prawe gwiazdy.



Rys. 245.



Rys. 246.



Rys. 247.





Zespół pierwszy (1, 2, 3) zawiera tylko dwa równania niezależne.

Zespół drugi (3, 4, 5) składa się z trzech równań niezależnych.

P i e r w s z y zespół musi dać wartości  $e_1$ ,  $e_2$  i  $e_3$ , gdyż napięcia mierzone w stanie jałowym odpowiadają wypadkowym SEM-czynym wewnętrznym. Ponieważ zespół ten zawiera tylko dwa równania niezależne a t r z y niewiadome ( $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ), przeto jedną z nich możemy przyjąć dowolnie.

Przyjmijmy: 
$$e_1 = \frac{E_2 R_3 - E_3 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad 1)$$

to otrzymamy 
$$e_2 = \frac{E_3 R_1 - E_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad 1)$$

$$e_3 = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad 1)$$

Równania te łatwo zapamiętać, mając na uwadze rys. 244. (Iloczyny k.zyzowe SEM-czynych i oporności. Gdy odnośne E skierowane jest zgodnie z „e” do tego samego węzła, otrzymuje iloczyn ER znak dodatni, gdy E i e są przeciwnie skierowane, wstawiamy ER ze znakiem ujemnym).

Gdybyśmy przyjęli inną wartość  $e_1$ , wypadłyby także inne wartości na  $e_2$  i  $e_3$ . W szczególnym przypadku, t.j. zakładając  $e_1 = 0$ , otrzymamy, po stransfigurowaniu trzech SEM-czynych wewnętrznych trójkąta, dwie SEM-czne w gwieździe. Jest to najogólniejszy wynik, wyrażający się twierdzeniem, że przy n-węzłach głównych, SEM-czne wewnętrzne dadzą się zastąpić n-1 SEM-cznymi zewnętrznymi (patrz dalej „Transfiguracja dowolnej części obwodu”).

Z d r u g i e g o zespołu równań otrzymamy - po wstawieniu różnic ( $e_2 - e_1$ ), ( $e_3 - e_2$ ) i ( $e_1 - e_3$ ) z zespołu pierwszego, równania:

1) Oczywiście możemy tu założyć dowolną wartość nie tylko dla  $e_1$ , ale dla którejkolwiek innej SEM-cznej e i obliczyć dalsze dwie.



$$\frac{(R_1+R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = W_1 + W_2$$

$$\frac{(R_2+R_3) \cdot R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = W_2 + W_3$$

$$\frac{(R_1+R_3) \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = W_3 + W_1$$

Równania te są - jak widać - identyczne z zespołem podanym poprzednio przy transfiguracji trójkąta oporowego na gwiazdę oporową. Poszczególne wartości oporności gwiazdy są przeto równe poprzednio znalezionym pod (135). Dla transfiguracji „trójkąt - gwiazda” z uwzględnieniem SEM-cznych służą więc następujące wzory ogólne:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} , & e_1 &= \frac{E_2 R_3 - E_3 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ W_2 &= \frac{R_3 \cdot R_1}{R_1 + R_2 + R_3} , & e_2 &= \frac{E_3 R_1 - E_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \dots\dots\dots (139) \\ W_3 &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} , & e_3 &= \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

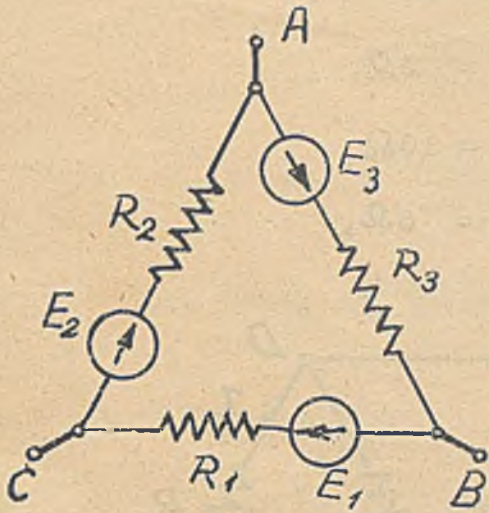
We wzorach tych widzimy doskonałą analogię formy. Pozatem obliczenie doprowadziło do tego (bardzo ważnego) wyniku, że skład oporów gwiazdy zależy tylko od składu oporów trójkąta, nie zależy zaś w zupełności od wartości, kierunku i rozmieszczenia SEM-cznych (wewnętrznych) w trójkącie.

Tak jest ogólnie w dowolnie ukształtowanych obwodach.

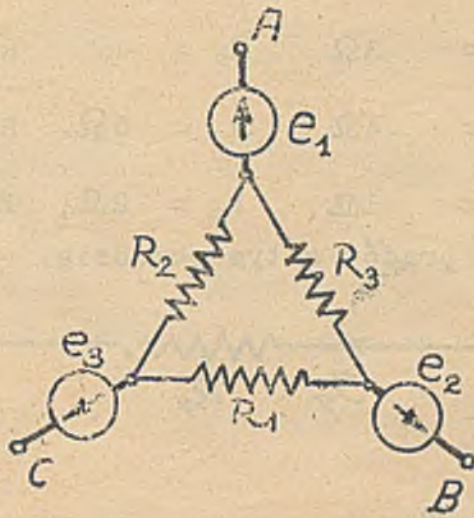
Transfigurację trójkąta zawierającego SEM-czne wewnętrzne na gwiazdę (z SEM-czną), uskuteczniamy zatem odnośnie do oporów w ten sam sposób, jak dokonana była transfiguracja trójkąta oporowego (bez SEM-cznych) (rys.233.) na gwiazdę oporową (bez SEM-cznych) (rys.234.). Do tak uzyskanej gwiazdy dodajemy następnie SEM-czne „stransfigurowane”, w wartościach podanych pod (139).



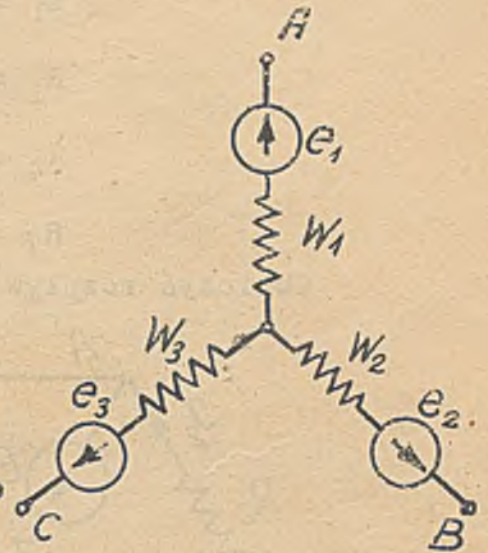
Elektrotechnicznie można to przedstawić w sposób uwidoczniony na rys.248, 249 i 250.



Rys.248.



Rys.249.



Rys.250.

Układ przedstawiony na rys.248 jest r ó w n o w a ż n y układowi uwidocznionemu na rys.249, ten zaś układowi na rys.250, t.zn., załączenie któregokolwiek z nich w sieć węzłami ABC, daje jednakowe działania elektryczne na zewnątrz.

Jak widać, można transfigurację układu (rys.248) przeprowadzić w dwu etapach. Pierwszy etap (rys.249) obejmuje transfigurację samych tylko SEM-cznych i polega na przemieszczeniu SEM-cznych z wnętrza obwodu na zewnątrz, w główne połączenie węzłowe (rys.249). Pozostaje w ten sposób obwód bez SEM-cznych wewnętrznych (rys.249), który transfigurujemy teraz odnośnie do samych tylko oporów (rys.250). Sposób ten nadaje się do transfiguracji nie tylko trójkąta lecz także dowolnych układów.

Transfiguracja trójkąta na gwiazdę z uwzględnieniem SEM-cznych ma zastosowanie techniczne przy obliczaniu rozptywu prądów w układach 3-fazowych (prądów zmiennych).

Celem łatwiejszego przyswojenia sobie metody operowania przerobimy przykład liczbowy.



Przykład liczbowy: Niech będzie w układzie na rys.251.

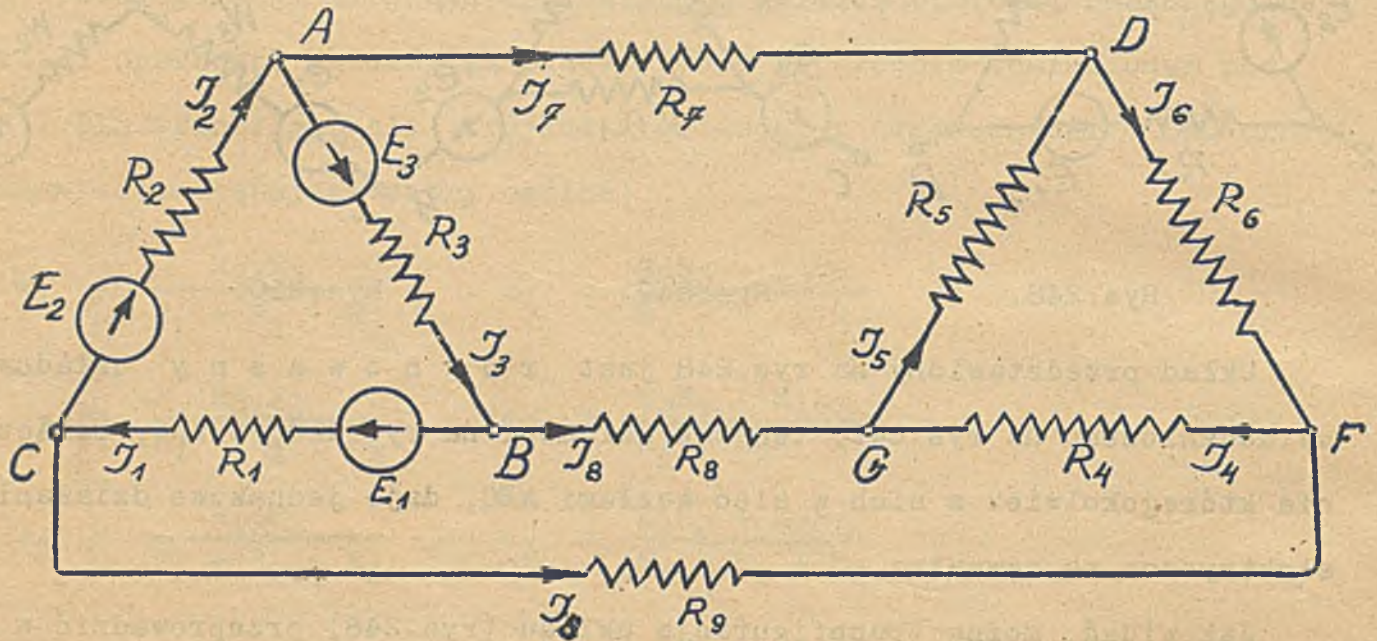
$$E_1 = +175 \text{ V}, \quad E_2 = -133 \text{ V}, \quad E_3 = 63 \text{ V}$$

$$R_1 = 3 \Omega, \quad R_2 = 4 \Omega, \quad R_3 = 3 \Omega,$$

$$R_4 = 4 \Omega, \quad R_5 = 6 \Omega, \quad R_6 = 10 \Omega,$$

$$R_7 = 1 \Omega, \quad R_8 = 2 \Omega, \quad R_9 = 5 \Omega,$$

Obliczyć rozpiływ prądów w tym obwodzie.



Rys.251.

Bez transfiguracji musielibyśmy tu ustawić 9 równań Kirchhoffa, albo 4 równania Maxwella, lub 5 równań Coltriego. Zamiast rozwiązywać 9, względnie 4 lub 5 równań o 9-ciu, 5-ciu, względnie 4-rech niewiadomych, zastosowujemy tu transfigurację lewej i prawej strony układu (rys.252.), otrzymując w ten sposób układ dwu gwiazd, który traktujemy jak trzy gałęzie połączone równolegle. Wyznaczywszy rozpiływ prądu w tak stransfigurowanym układzie (rys.252.), obliczamy napięcia między węzłami głównymi, a z pomocą nich także prądy układu pierwotnego.



Obliczenie:

a) Transfiguracja SEM-czynnych lewego trójkąta:

$$e_1 = \frac{E_2 R_3 - E_3 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{(-133) \cdot 3 - 63 \cdot 4}{3 + 4 + 3} = \underline{-65 \cdot 1 \text{ V}}$$

$$e_2 = \frac{E_3 R_1 - E_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{63 \cdot 3 - 175 \cdot 3}{10} = \underline{-33 \cdot 6 \text{ V}}$$

$$e_3 = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{175 \cdot 4 - (-133) \cdot 3}{10} = \underline{+109 \cdot 9 \text{ V}}$$

b) Transfiguracja lewego trójkąta oporowego ( $R_1, R_2, R_3$ ) na gwiazdę ( $W_1, W_2, W_3$ ):

$$W_1 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{4 \cdot 3}{3 + 4 + 3} = \underline{1 \cdot 2 \Omega}$$

$$W_2 = \frac{R_3 \cdot R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 3}{10} = \underline{0 \cdot 9 \Omega}$$

$$W_3 = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{4 \cdot 6}{10} = \underline{1 \cdot 2 \Omega}$$

c) Transfiguracja prawego trójkąta oporowego ( $R_4, R_5, R_6$ ) na gwiazdę ( $W_4, W_5, W_6$ ):

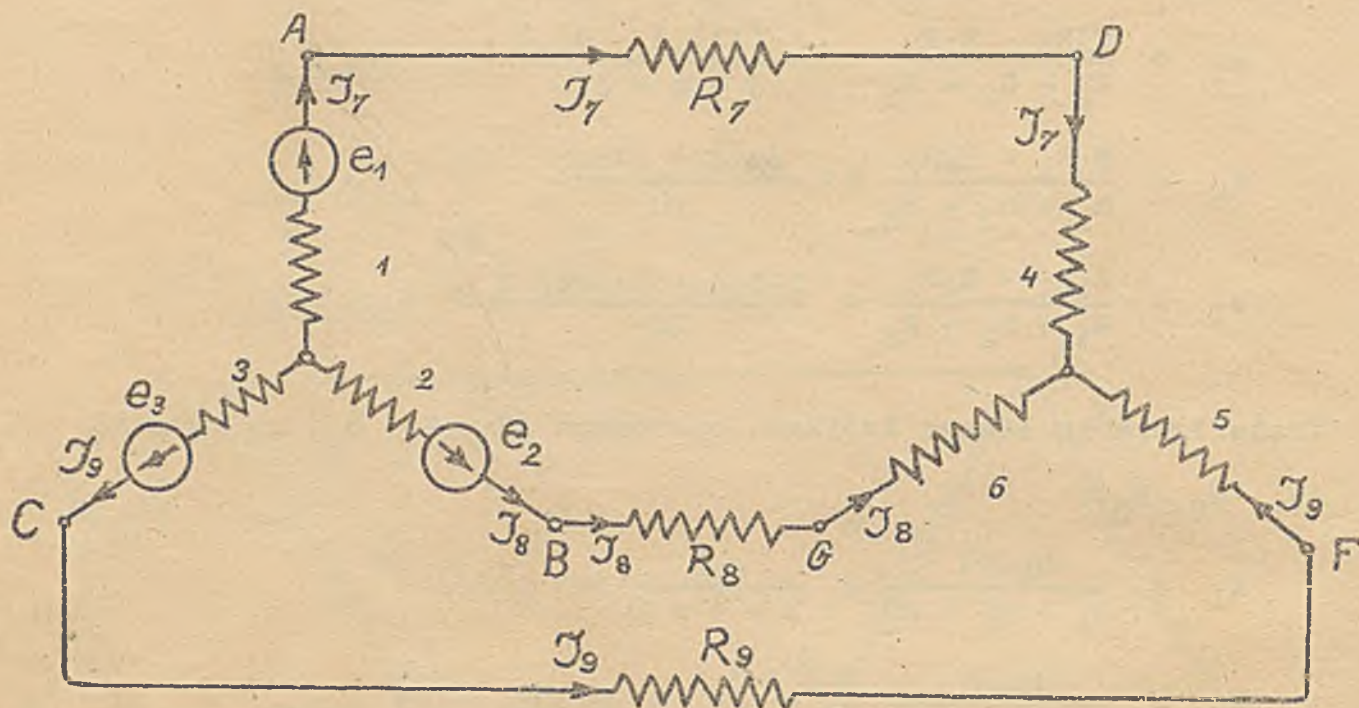
$$W_4 = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{6 \cdot 10}{4 + 6 + 10} = \underline{3 \cdot \Omega}$$

$$W_5 = \frac{R_4 \cdot R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{4 \cdot 10}{20} = \underline{2 \cdot \Omega}$$

$$W_6 = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{4 \cdot 6}{20} = \underline{1 \cdot 2 \Omega}$$



Otrzymaliśmy w ten sposób układ złożony z dwu gwiazd, połączonych ze sobą przewodami o opornościach ( $R_7, R_8, R_9$ ) (Rys.252.).



Rys.252.

Według poprzednich obliczeń, poszczególne wartości SEM-cznych i oporności w tym układzie są:

$$e_1 = -65 \cdot 1 \text{ V}, \quad W_1 = 1 \cdot 2 \Omega, \quad W_4 = 3 \Omega, \quad R_7 = 1 \Omega,$$

$$e_2 = -33 \cdot 6 \text{ V}, \quad W_2 = 0 \cdot 9 \Omega, \quad W_5 = 2 \Omega, \quad R_8 = 2 \Omega,$$

$$e_3 = +109 \cdot 9 \text{ V}, \quad W_3 = 1 \cdot 2 \Omega, \quad W_6 = 1 \cdot 2 \Omega, \quad R_9 = 5 \Omega.$$

Stransfigurowany obwód na rys.252. posiada tylko dwa oczka, obliczenie rozplywu prądów najdogodniej tu więc uskutecznić cyklami Maxwella.

Oдноśne równania są:

$$1) \quad J_7(W_1 + W_2 + R_7 + R_8 + W_4 + W_6) + J_9(W_2 + R_8 + W_6) = e_1 - e_2,$$

$$2) \quad J_7(W_2 + R_8 + W_6) + J_9(W_2 + W_3 + R_8 + R_9 + W_5 + W_6) = e_3 - e_2,$$

$$1) \quad J_7(1 \cdot 2 + 0 \cdot 9 + 1 + 2 + 3 + 1 \cdot 2) + J_9(0 \cdot 9 + 2 + 1 \cdot 2) = (-65 \cdot 1) - (-33 \cdot 6),$$

$$2) \quad J_7(0 \cdot 9 + 2 + 1 \cdot 2) + J_9(0 \cdot 9 + 1 \cdot 2 + 2 + 5 + 2 + 1 \cdot 2) = 109 \cdot 9 - (-33 \cdot 6),$$



$$1) \quad J_7 \cdot 9 \cdot 3 + J_9 \cdot 4 \cdot 1 = -31 \cdot 5$$

$$2) \quad J_7 \cdot 4 \cdot 1 + J_9 \cdot 12 \cdot 3 = +143 \cdot 5$$

Z równań tych obliczymy prądy  $J_7$ ,  $J_9$  a z nich  $J_8$ .

$$J_7 = \frac{\begin{vmatrix} -31 \cdot 5 & 4 \cdot 1 \\ 143 \cdot 5 & 12 \cdot 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 \cdot 3 & 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 & 12 \cdot 3 \end{vmatrix}} = \frac{-975 \cdot 8}{97 \cdot 58} = \underline{\underline{-10 \text{ A}}}$$

$$J_9 = \frac{\begin{vmatrix} 9 \cdot 3 & -31 \cdot 5 \\ 4 \cdot 1 & 143 \cdot 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 \cdot 3 & 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 & 12 \cdot 3 \end{vmatrix}} = \frac{1463 \cdot 7}{97 \cdot 58} = \underline{\underline{+15 \text{ A}}}$$

$$J_8 = -J_7 - J_9 = -(-10) - 15 = \underline{\underline{-5 \text{ A}}}$$

Obliczamy teraz poszczególne napięcia międzywęzłowe, a z nich prądy  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_4$ ,  $J_5$ ,  $J_6$ .

$$\begin{aligned} U_{BA} &= e_2 - e_1 - J_8 W_2 + J_7 W_1 = -33 \cdot 6 - (-65 \cdot 1) - (-5) \cdot 0 \cdot 9 + (-10) \cdot 1 \cdot 2 = \\ &= -33 \cdot 6 + 65 \cdot 1 + 4 \cdot 5 - 12 = 24 \text{ V.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{CB} &= e_3 - e_2 - J_9 W_3 + J_8 W_2 = 109 \cdot 9 - (-33 \cdot 6) - 15 \cdot 1 \cdot 2 + (-5) \cdot 0 \cdot 9 = \\ &= 109 \cdot 9 + 33 \cdot 6 - 18 - 4 \cdot 5 = 121 \text{ V.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{AC} &= e_1 - e_3 - J_7 W_1 + J_9 W_3 = -65 \cdot 1 - 109 \cdot 9 - (-10) \cdot 1 \cdot 2 + 15 \cdot 1 \cdot 2 = \\ &= -65 \cdot 1 - 109 \cdot 9 + 12 + 18 = -145 \text{ V,} \end{aligned}$$

$$U_{FD} = -J_7 W_4 + J_9 W_5 = -(-10) \cdot 3 + 15 \cdot 2 = 60 \text{ V.}$$

$$U_{GF} = +J_8 W_6 - J_9 W_5 = -5 \cdot 1 \cdot 2 - 15 \cdot 2 = -36 \text{ V.}$$

$$U_{DG} = +J_7 W_4 - J_8 W_6 = -10 \cdot 3 - (-5) \cdot 1 \cdot 2 = -24 \text{ V,}$$

Mając napięcia wyznaczmy prądy:

$$U_{BA} = E_3 - J_3 R_3, \quad 24 = 63 - J_3 \cdot 3, \quad \text{stad}$$

$$J_3 = \frac{63 - 24}{3} = \frac{39}{3} = \underline{\underline{+13 \text{ A}}}$$



$$U_{CB} = E_1 - J_1 R_1, \quad 121 = 175 - J_1 \cdot 3, \quad \text{stad}$$

$$J_1 = \frac{175 - 121}{3} = \frac{54}{3} = \underline{+ 18 \text{ A}}$$

$$U_{AC} = E_2 - J_2 R_2, \quad -145 = -133 - J_2 \cdot 4$$

$$J_2 = \frac{-145 + 133}{4} = \frac{-12}{4} = \underline{+ 3 \text{ A}}$$

$$U_{FD} = -J_6 R_6, \quad 60 = -J_6 \cdot 10, \quad \text{stad}$$

$$J_6 = \frac{-60}{-10} = \underline{- 6 \text{ A}}$$

$$U_{GF} = -J_4 R_4, \quad -36 = -4 \cdot J_4, \quad \text{stad}$$

$$J_4 = \frac{-36}{-4} = \underline{+ 9 \text{ A}}$$

$$U_{DG} = -J_5 R_5, \quad -24 = -J_5 \cdot 6, \quad \text{stad}$$

$$J_5 = \frac{-24}{-6} = \underline{+ 4 \text{ A}}$$

Poszczególne prądy układu na rys.251 są więc:

$$\begin{array}{lll} J_1 = + 18 \text{ A}, & J_4 = + 9 \text{ A}, & J_7 = - 10 \text{ A} \\ J_2 = + 3 \text{ A}, & J_5 = + 4 \text{ A}, & J_8 = - 5 \text{ A}, \\ J_3 = + 13 \text{ A}, & J_6 = - 6 \text{ A}, & J_9 = + 15 \text{ A}. \end{array}$$

Kontrola II-giem prawem Kirchhoffa:

$$1) \quad E_1 + E_2 + E_3 = J_1 R_1 + J_2 R_2 + J_3 R_3$$

$$175 - 133 + 63 = 18 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 13 \cdot 3$$

$$105 = 54 + 12 + 39$$

$$105 = 105$$

$$2) \quad 0 = J_4 R_4 + J_5 R_5 + J_6 R_6$$

$$0 = 9 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + (-6) \cdot 10$$

$$0 = 36 + 24 - 60$$

$$0 = 0$$



$$\begin{aligned} 3) \quad E_3 &= J_3 R_3 + J_8 R_8 + J_5 R_5 - J_7 R_7 \\ 63 &= 13.3 + (-5).2 + 4.6 - (-10).1 \\ 63 &= 39 - 10 + 24 + 10 \\ 63 &= 63 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad E_1 &= J_1 R_1 + J_9 R_9 + J_4 R_4 - J_8 R_8 \\ 175 &= 18.3 + 15.5 + 9.4 - (-5).2 \\ 175 &= 54 + 75 + 36 + 10 \\ 175 &= 175 \end{aligned}$$

Kontrola I-szem prawem Kirchhoffa:

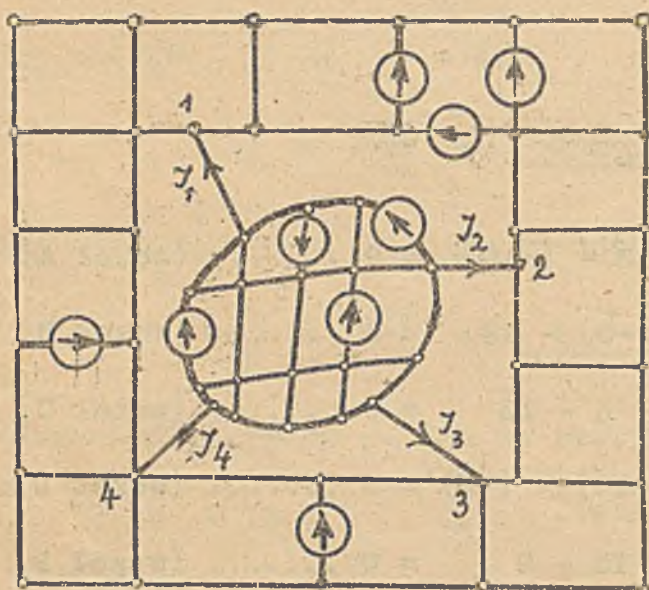
$$\begin{aligned} \text{I)} \quad &+J_2 - J_3 - J_7 = 0; \quad + 3 - 13 - (-10) = 0 \dots\dots\dots (\text{węzeł A}) \\ \text{II)} \quad &+J_3 - J_8 - J_1 = 0; \quad +13 - (-5) - 18 = 0 \dots\dots\dots (\text{węzeł B}) \\ \text{III)} \quad &+J_1 - J_2 - J_9 = 0; \quad 18 - 3 - 15 = 0 \dots\dots\dots (\text{węzeł C}) \\ \text{IV)} \quad &+J_5 + J_7 - J_6 = 0; \quad +4 + (-10) - (-6) = 0 \dots\dots\dots (\text{węzeł D}) \\ \text{V)} \quad &+J_6 + J_9 - J_4 = 0 \quad -6 + 15 - 9 = 0 \dots\dots\dots (\text{węzeł F}) \\ \text{VI)} \quad &+J_4 + J_8 - J_5 = 0; \quad +9 + (-5) - 4 = 0 \dots\dots\dots (\text{węzeł G}) \end{aligned}$$



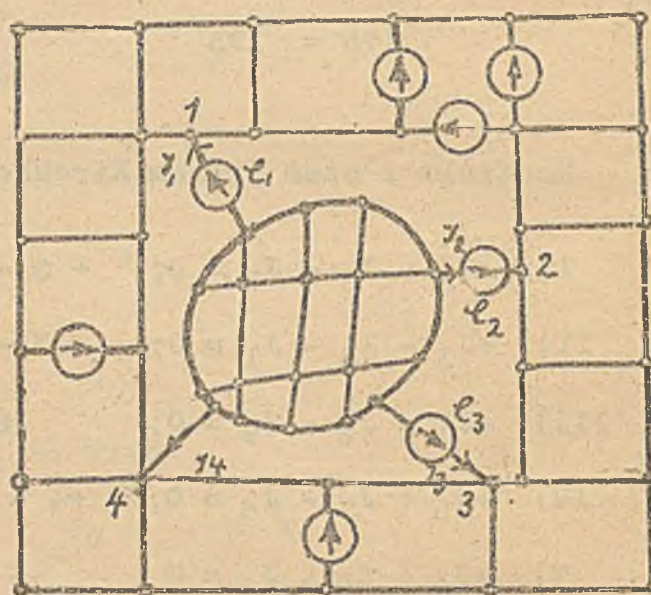
e) Transfiguracja dowolnej części obwodu. <sup>1)</sup>

Nie wdając się w szczegółową analizę, wymagającą więcej miejsca, podamy tu tylko wyniki dociekań. Problem przedstawia się następująco:

Część obwodu obramowaną na rys.253. grubą linią należy zastąpić układem równoważnym t.j. takim, którego działanie w sieci jest identyczne z działaniem części pierwotnej, przy wszelkich zmianach dokonywanych w części nie objętej transfiguracją.



Rys.253.



Rys.254.

Część podlegająca transfiguracji połączona tu jest z resztą 4-ma węzłami (1, 2, 3, 4). Chodzi więc o transfigurację na 4-ry węzły (Ogólnie może być n-węzłów).

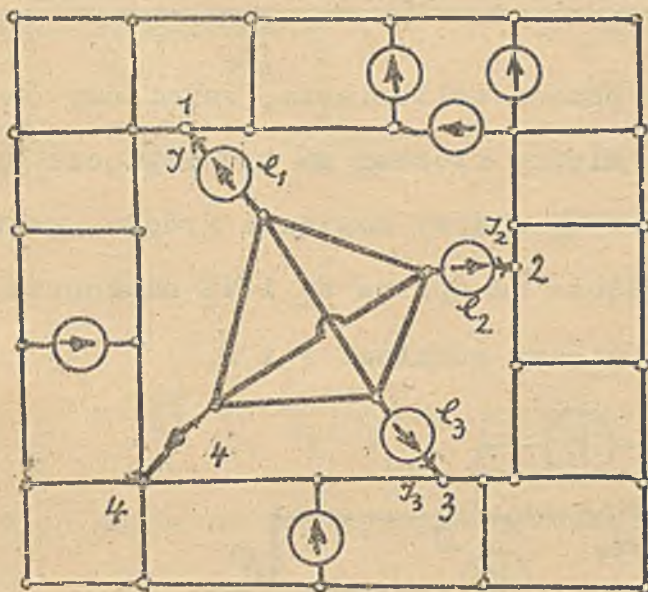
Przeprowadzamy naprzód transfigurację samych tylko SEM-cznych ( w e = w n ę t r z n y c h ) układu na rys.253. Można dowieść, że prowadzi ona do układu przedstawionego na rys.254. Działanie elektromotoryczne wszystkich SEM-cznych, pomieszczonych w e w n ę t r z części obwodu objętej transfiguracją, da się zastąpić, przy n-węzłach głównych (tu n = 4)

1) Fryze, "Nowa ogólna teoria Transfiguracji obwodów elektrycznych" P.E. 1928.



działaniem  $n-1$  SEM-czynnych  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  umieszczonych zewnątrz, w połączeniach głównych (rys.254.)

Transfiguracja układu 1-2-3-4 uwolnionego już od SEM-czynnych wewnętrznych daje w wyniku t.zw. wielobok zupełny o  $n$ -narożach (rys.255.)



Rys.255.

Wielobok taki o  $n$ -narożach (ilość naroży równa ilości węzłów głównych) zawiera

$$l = \frac{n}{2} (n - 1) \dots \dots \dots (140)$$

elementów oporowych i wewnątrz nie posiada żadnych węzłów.

Reasumując, powiemy, że układ 1-2-3-4 na rys.253 i układ 1-2-3-4 na rys.255. są elektrycznie r ó w n o w a ż n e t.zn. działają na resztę sieci w identyczny sposób. Transfiguracja układów złożonych z samych oporów ma zastosowanie przy obliczaniu sieci technicznych (Herzog-Feldmann „Die Berechnung der Leitungsnetze” Springer 1927 wyd.4-te). Poza to oddaje cenę usługi przy pomiarach Kūpfmüller „Über einen Umwandlungssatz zur Theorie der linearen Netze, Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern, tom III, z.1-szy 1923) i ułatwia rozważania (Wallct „Beweis der Determinanten-beziehung der Vierpoltheorie mit Hilfe von Umwandlungssätzen”, Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern, tom V.zeszyt 3-ci 1927).

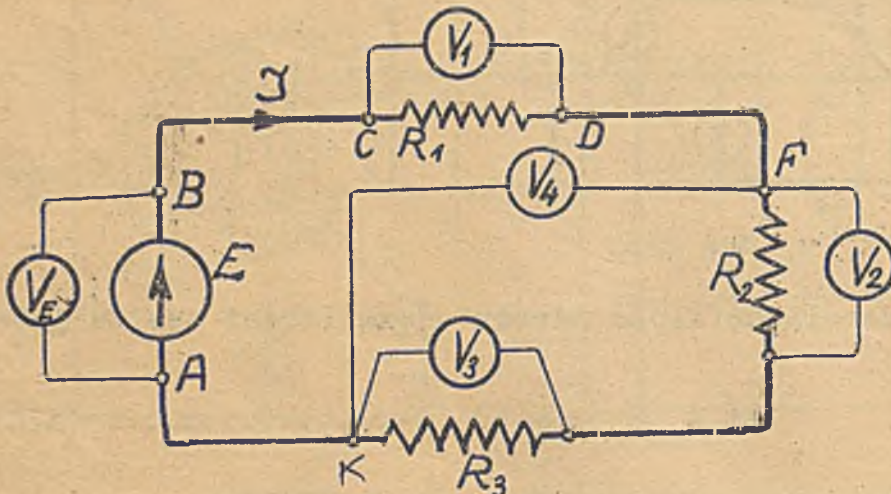


### 8. Ważniejsze układy miernicze prądu stałego.

Rozważymy tu tylko układy miernicze woltomierza, amperomierza, mostki miernicze, układ kompensacyjny i potencjometr.

#### Układy miernicze woltomierza. (Opornik woltomierzowy).

Celem pomiaru napięcia za pomocą woltomierza, załączamy ów przyrząd na odnośne dwa punkty obwodu, między którymi ma być napięcie wyznaczone. Tak n.p. na rys.256. woltomierz  $V_E$  mierzy napięcie źródła, woltomierz  $V_1$  napięcie na oporze  $R_1$ ,  $V_2$  napięcie na oporze  $R_2$  i  $V_3$  na oporze  $R_3$ ; wreszcie woltomierz  $V_4$  mierzy napięcie między punktami F i K.



Rys.256.

Wskazanie woltomierza zależy od natężenia prądu  $i_V$  przepływającego przez przyrząd, ten zaś - przy stałej oporności przyrządu  $R_V$  - jest proporcjonalny (w przypadku prądu stałego) do napięcia mierzonego

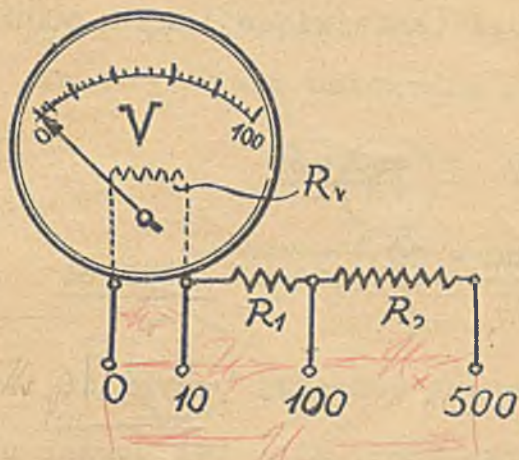
$$i_V = \frac{U(\text{mierzone})}{R(\text{woltomierza})}, \quad U = i_V \cdot R_V$$

Przez zastosowanie dodatkowych oporów, połączonych w szereg z woltomierzem, możemy tego samego przyrządu używać do pomiaru napięć w różnych granicach. Zastosowanie takie okazane jest na rys.257.

Oporność wewnętrzna przyrządu jest tu  $R_V$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  przedstawiają



dotychczasowe opory, połączone w szereg z oporem  $R_V$  i tak dobrane, że przy



Rys.257.

załączeniu przyrządu końcówkami 0 i 10, 0 i 100, 0 - 500, na napięcie 10, 100 względnie 500 V, otrzymujemy pełne wychylenie wskazówki (na całą skalę). Nastąpi to, gdy po załączeniu przyrządu na każde z tych trzech napięć, prąd przyrządu  $i_V$  będzie jednakowy,

czyli gdy

$$i_V = \frac{10}{R_V} = \frac{100}{R_V + R_1} = \frac{500}{R_V + R_1 + R_2} \dots \dots \dots (140)$$

Ze wzoru tego można obliczyć poszczególne oporności dodatkowe  $R_1$ ,  $R_2$ , jak następuje:

Oznacza  $U_V$  napięcie, jakie woltomierz znosi bez dodatkowych oporów przy pełnym wychyleniu wskazówki,  $R_V$  jego oporność wewnętrzna, a  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  ..... napięcia, przy których następuje pełne wychylenie po załączeniu woltomierza z oporem  $R_1$  względnie z oporem  $R_2$ ,  $R_3$  .... to

$$R_1 = \frac{U_1 - U_V}{U_V} \cdot R_V, \quad R_2 = \frac{U_2 - U_1 - U_V}{U_V} \cdot R_V \dots \dots \dots (141)$$

$$R_3 = \frac{U_3 - U_2 - U_1 - U_V}{U_V} \cdot R_V \quad \text{i t d.}$$

Oporność  $R_V$  i napięcie  $U_V$  są zwykle podawane przez wytwórnictwo przyrządu, pozatem wartości te łatwo zmierzyć ( $R_V$  pomiarem oporności,  $U_V$  odpowiada napięciu, przy którym otrzymuje się pełne wychylenie po załączeniu woltomierza bez dodatkowych oporów)

Wzory powyższe wynikają wprost z równości (140).



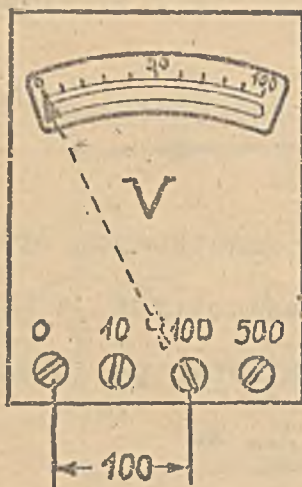


Przyjmijmy, że  $U_V = 10 \text{ V}$ ,  $U_1 = 100 \text{ V}$ ,  $U_2 = 500 \text{ V}$ ; Oporność wewnętrzna precyzyjnego woltomierza 10-woltowego wynosi (mniejwięcej)  $R_V = 5000 \Omega$ . Stosując wzory (141) otrzymamy przeto

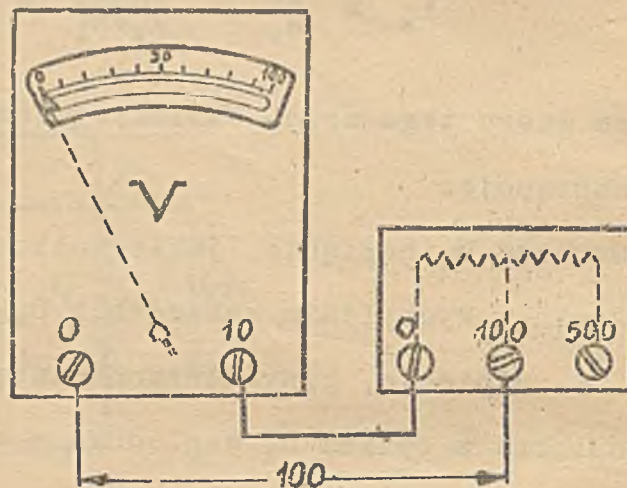
$$R_1 = \frac{U_1 - U_V}{U_V} \cdot R_V = \frac{100 - 10}{10} \cdot 5000 = 45000 \Omega$$

$$R_2 = \frac{U_2 - U_1 - U_V}{U_V} \cdot R_V = \frac{500 - 100 - 10}{10} \cdot 5000 = 195000 \Omega$$

Opory  $R_1$ ,  $R_2$  ..... mogą być albo wbudowane wewnątrz przyrządu i w takim razie woltomierz ma cztery końcówki (rys.258), albo też pomiar uskutecznia się łącząc woltomierz z oddzielnym opornikiem (rys.259).



Rys.258.



Rys.259.

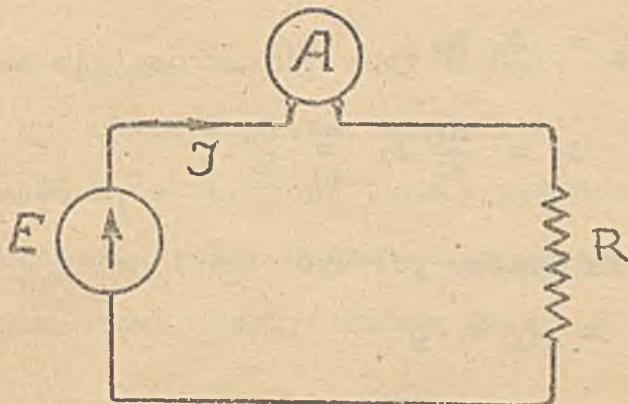
Rys.258. i 259. okazują sposób załączenia w jednym i drugim przypadku na napięciu 100 V.

Uwaga: Należy pilnie baczyć na właściwe połączenie woltomierza z opornikiem i końcówkami pod napięciem. Fałszywe załączenie n.p. końcówkami 0 i 100 na końcówki o napięciu 500 V spowoduje uszkodzenie przyrządu (przepalenie cewki lub opornika).



Układy miernicze amperomierza (Bocznik)

Celem pomiaru natężenia prądu w obwodzie włączamy weń amperomierz.

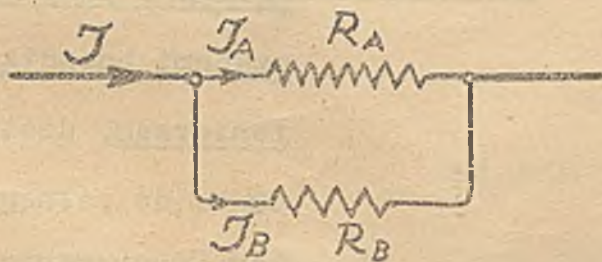


Rys.260.

Gdy amperomierz znosi prąd mierzony bez szkody pomiar uskuteczniamy w ten sposób, że obwód przerywamy i końce przerwy łączymy z końcówkami przyrządu (rys.260.)

Jednakże nie wszystkie amperomierze znoszą całkowity prąd mierzony. Przyrządy precyzyjne n.p. znoszą bez szkody tylko bardzo słabe prądy. Przy użyciu takich przyrządów oraz wszędzie tam, gdzie pomiar całkowitego prądu następuje trudności lub z innych względów nie może być dokonany, stosuje się t z w. b o c z n i k (u p u s t).

Bocznikiem (upustem), nazywamy opór włączony równolegle do innego oporu celem zmniejszenia w nim natężenia prądu  $J$  (rys.261). Układ z bocznikiem



Rys.261.

przedstawia więc prosto rozgałęzienie dwu oporów ( $R_A, R_B$ ).

W układzie takim będzie zawsze  $J_A < J$ , bo

$$J = J_A + J_B$$

W ten sposób z pomocą bocznika osiągnąć można dowolne zmniejszenie prądu  $J_A$  przepływającego przez opór  $R_A$ .

Niech  $R_A$  oznacza oporność amperomierza,  $R_B$  oporność bocznika, a  $J$  prąd obwodu, który ma być zmierzony. Chcemy tak dobrać oporność bocznika  $R_B$ , aby przez amperomierz ( $R_A$ ) płynęła tylko  $1/n$  część prądu obwodu  $J$ , czyli



aby

$$\underline{J_A = J/n}$$

W myśl II-go prawa Kirchhoffa musi być

$$J_A \cdot R_A = J_B \cdot R_B$$

przeto

$$\frac{J_A}{J_B} = \frac{R_B}{R_A} \quad \text{lub} \quad J_B = \frac{R_A}{R_B} \cdot J_A = \frac{R_A}{R_B} \cdot \frac{J}{n}$$

W myśl I-go prawa Kirchhoffa możemy położyć

$$J = J_A + J_B$$

czyli

$$J = \frac{J}{n} + \frac{R_A}{R_B} \cdot \frac{J}{n} \quad \text{lub} \quad 1 = \frac{1}{n} + \frac{R_A}{R_B} \cdot \frac{1}{n}$$

stąd

$$R_B = \frac{R_A}{n-1} \dots\dots\dots (142)$$

Gdy przez amperomierz ( $R_A$ ) ma płynąć tylko  $1/n$  całkowitego prądu  $J$ , oporność bocznika musi być  $n-1$  razy mniejsza od oporności amperomierza.

Zastosowanie amperomierza z bocznikiem okazuje rys.262. Amperomierz

cehuje się razem z bocz-

nikiem i przewodami łą-

cząciami bocznik z ampe-

romierzem, dostosowując

skalę do pełnego prądu  $J$ .

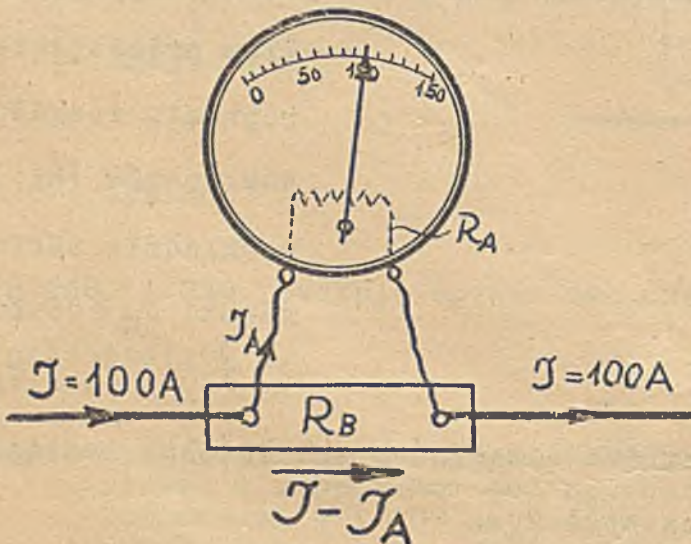
Gdy amperomierz na rys.

262 znosi tylko

$$J_{A_{max}} = 150 \text{ mA},$$

a ma służyć do pomiarów

prądu  $J_{max} = 150 \text{ A}$ ,



Rys.262.

to oporność bocznika

$$R_B = \frac{R_A}{1000-1} = \frac{R_A}{999}, \quad \text{bo} \quad n = \frac{J}{J_A} = \frac{150}{150/1000} = \underline{1000}.$$

*mp. RA = 10 Ω*

*RB = 0.011 Ω*



Precyzyjny taki amperomierz 150 mA-owy o oporności  $R_A = 1 \Omega$ , musi więc otrzymać bocznik o oporności

$$R_B = \frac{1}{999} \Omega .$$

Ze względu na przewody łączące bocznik z amperomierzem, oporność  $R_B$  musi być nieco większa, albowiem - ściśle biorąc - należy za  $R_A$  wstawić oporność  $R_A +$  oporność tych przewodów.

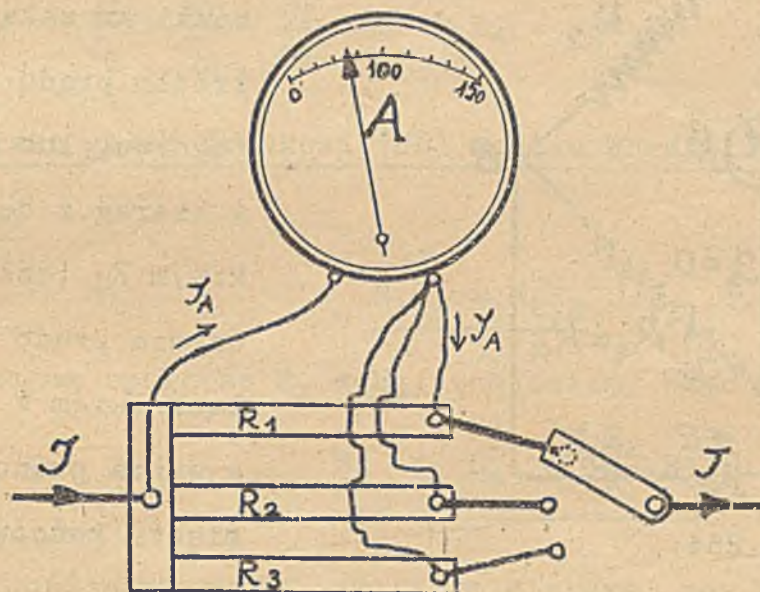
Stosując różne boczniki (o odpowiednich opornościach) można tym samym amperomierzem mierzyć różne prądy. Rys.263. okazuje amperomierz o  $R_A = 1 \Omega$

z bocznikami

$$R_1 = \frac{1}{9} \Omega, R_2 = \frac{1}{99} \Omega,$$

$$R_3 = \frac{1}{999} \Omega.$$

Amperomierzem w takim układzie (z bocznikami) można mierzyć prądy 15 A, 150 A i 1500 A, załączając w obwód odpowiedni bocznik przez przekręcenie korby K (rys.263)



Rys.263.

Uwaga: I tu należy pilnie baczyć na załączenie właściwego bocznika (Najlepiej zaczynać pomiar przy załączeniu bocznika dla największego prądu). Boczniki  $R_1, R_2, R_3$  mogą być - oczywiście - włączane także oddzielnie.



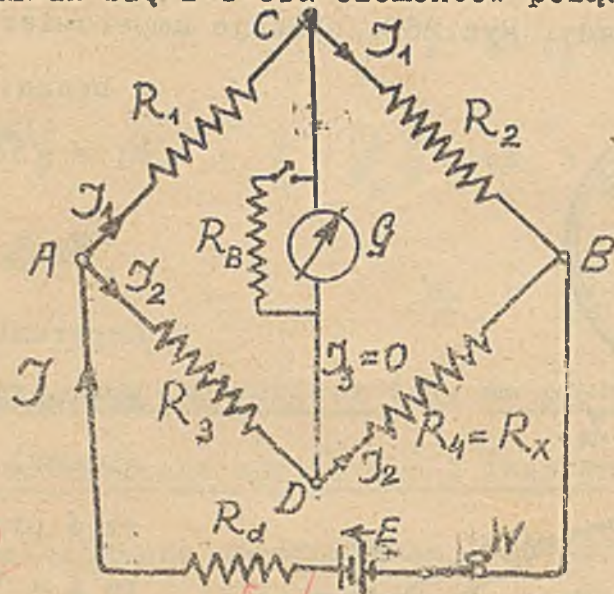
Mostki miernicze.

Z pomiędzy specjalnych układów mierniczych szczególnie ważne znaczenie mają t.zw. „mostki miernicze”, używane do pomiarów oporności, samoindukcji i pojemności.

Opiszemy tu tylko mostki służące do pomiaru oporności.

a) Mostek Wheatstone'a (rys.264).

Składa się z 6-ciu elementów połączonych ze sobą w sposób przedsta-



Rys.264.

wiony na rys.264. Na końcówki AB załączone jest źródło prądu stałego (ogniwo, lub akumulator) w szereg z oporem dodatkowym  $R_d$  (celem ograniczenia prądu  $J$ ) i z wyłącznikiem  $W$  (do przerywania prądu).

Między końcówki CD włą-

czony jest galwanometr (c oporności  $R_G$ ) z bocznikiem  $R_B$  (dla ochrony galwanometru przed zbyt wielkim prądem). Pozostałe cztery elementy stanowią trzy opornice zatyczkowe ( $R_1, R_2, R_3$ ) i jeden niewiadomy (mierzony) opór  $R_x = R_4$

Pomiar oporności  $R_4$  wykonujemy w następujący sposób: Opornice zatyczkowe nastawiamy (kołkujemy) tak, aby przez galwanometr  $G$  nie płynął żaden prąd (chroniąc go początkowo przez włączenie bocznika  $R_B$ ). Stan ten będzie osiągnięty gdy wskazówka galwanometru ustawi się na zerze. Wtedy przez opory  $R_1$  i  $R_2$  płynie jednakowy prąd  $J_1$ , a przez opory  $R_3$  i  $R_4$  jednakowy prąd  $J_2$ .



W myśl II-go prawa Kirchhoffa musi być

$$1) J_1 R_1 - J_2 R_2 - 0 \cdot R_G = 0$$

$$2) J_1 R_2 - J_2 R_4 - 0 \cdot R_G = 0$$

( $R_G$  oznacza oporność między węzłami CD, więc przy wyłączeniu bocznika  $R_B$  oporność galwanometru).

Z powyższych równań wynika, że

$$J_1 R_1 = J_2 R_3 \quad \text{i} \quad J_1 R_2 = J_2 R_4,$$

skąd równość

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \quad \text{lub} \quad R_1 R_4 = R_2 R_3$$

Gdy przez gałąź środkową (CD) mostku Wheatstone'a nie płynie żaden prąd, jest

$$\underline{R_1 R_4 = R_2 R_3} \dots\dots\dots (143)$$

Niewiadomą oporność  $R_x = R_4$ , znajdziemy więc z relacji

$$\underline{R_x = R_4 = \frac{R_2}{R_1} \cdot R_3} \dots\dots\dots (144)$$

Dokładność pomiaru  $R_x$  będzie największa, gdy mostek zestawimy tak, aby oporności  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  i  $R_x$  oraz  $R_G$  i  $R_w$  (ogniwa) niewiele się różniły od siebie. W obliczeniu powyższym nie uwzględniliśmy oporności przewodów łączących, gdyż są one bardzo małe. Nie wpływa to na wynik pomiaru dużych oporności ( $R_x$ ), powoduje jednak błędy przy pomiarze bardzo małych oporności ( $R_x$ ). Z tego powodu używamy do pomiaru bardzo małych oporności mostku Thomsona, eliminującego wpływ oporności połączeń.

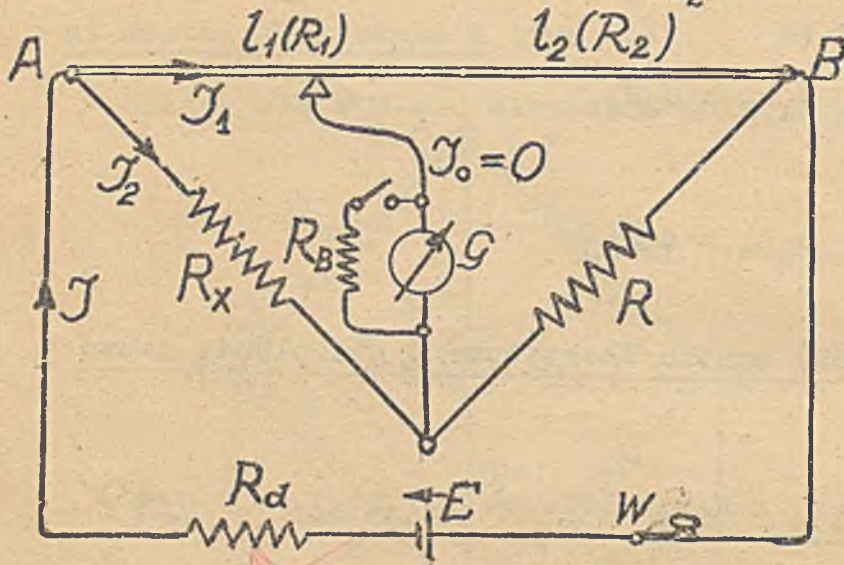
Mostkiem Wheatstone'a można mierzyć oporności od  $0,1 \rightarrow 100000 \Omega$ .



b) Mostek Kirchhoffa (rys.265.)

Zamiast opornic zatyczkowych  $R_1$  i  $R_2$  można użyć drutu oporowego z kontaktem ślizgowym. Otrzymamy w ten sposób t.zw. mostek Kirchhoffa, w którym przy  $J_g = 0$  jest

$$R_x = \frac{l_1}{l_2} \cdot R \dots \dots \dots (145)$$



bo  $R_1 = \frac{l_1}{q} \cdot \rho$  a  $R_2 = \frac{l_2}{q} \cdot \rho$ ,

a w myśl (144) jest

$$R_1 R = R_2 R_x$$

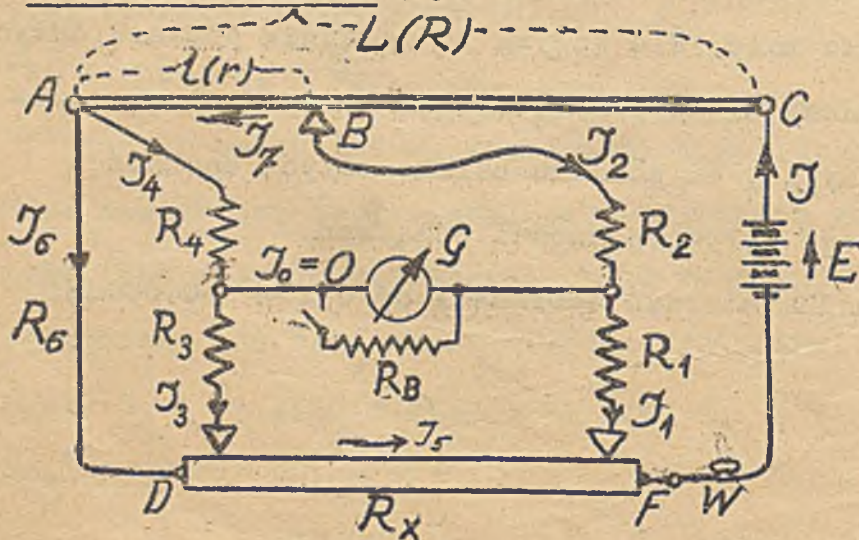
Kontakt ślizgowy przesuwamy tak długo, aż galwanometr (G) ustawi się na zero. Celem ochrony galwanometru stosujemy i tu bocznik  $R_B$  (z wyłączni-

Rys.265.

kien), zaś celem ograniczenia prądu ogniwa opór dodatkowy  $R_d$ .

Wyłącznik W służy do przerywania prądu. Drut oporowy AB wykonuje się zazwyczaj z manganinu ze względu na mały współczynnik temperatury ( $\alpha$ ).

c) Mostek Thomsona (rys.266.).



Składa się z 4-rech oporów stałych  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  manganinowego drutu oporowego ABC z kontaktem ślizgowym oraz ogniw zasilających (E) i galwanometru (G).

Rys.266.



Opór mierzony  $R_x$  załączamy na końcówki DF, kontakt ślizgowy przesuwamy tak, aby  $J_0 = 0$ . Wtedy musi być:

$$J_2 = J_1, \quad J_4 = J_3,$$

$$J_1 + J_5 = J, \quad J_7 + J_2 = J$$

$$\underline{J_5 = J_7}$$

$$J_1 R_1 = J_5 \cdot R_x + J_3 \cdot R_3, \quad J_1 R_2 = J_3 \cdot R_4 + J_5 \cdot r$$

Przez podzielenie obu tych ostatnich równań otrzymamy:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{J_5 \cdot R_x + J_3 \cdot R_3}{J_3 \cdot R_4 + J_5 \cdot r}$$

*Handwritten notes:*  
 $\frac{J_3 R_3}{J_3 R_4} ; \frac{J_5 R_x + J_3 R_3}{J_3 R_4} + \frac{J_5 R_3}{J_3 R_4} R_1$   
 $= \frac{J_3 R_3}{J_3 R_4} + \frac{J_5 R_x}{J_3 R_4} + \frac{J_5 R_3}{J_3 R_4} R_1$   
 $R_x R_4 = R_3 \cdot r$   
 $\frac{R_x}{r} = \frac{R_3}{R_4}$

Dobierzmy opory  $R_1, R_2, R_3, R_4$  tak, aby było

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2}$$

otrzymamy wtedy z ostatniego równania równość

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_x}{r}$$

a z niej wzór

$$R_x = r \cdot \frac{R_3}{R_4} = r \cdot \frac{R_1}{R_2} = R \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{R_1}{R_2} = \underline{R \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{R_3}{R_4}}$$

$$R_x = \frac{L}{L} \cdot \frac{R_1}{R_2} \dots \dots \dots (146a)$$

lub

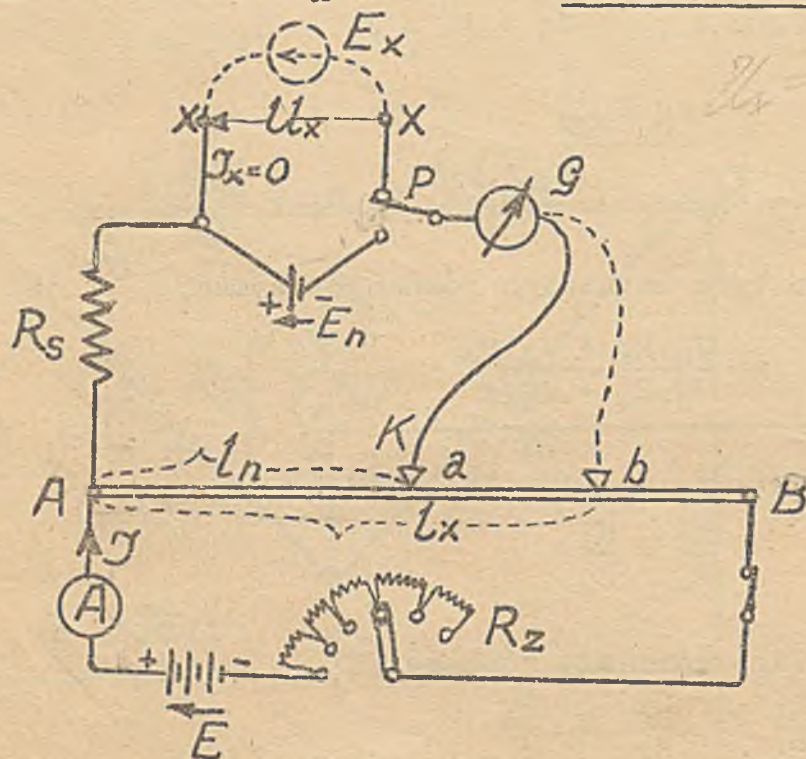
$$R_x = \frac{L}{L} \cdot \frac{R_3}{R_4} \dots \dots \dots (146b)$$

L oznacza tu długość drutu oporowego AC,  $l$  długość drutu oporowego AB. We wzory powyższe nie wchodzi oporności  $R$  i  $R_E$  gałęzi AD i CF, zatem wpływ ich jest wyeliminowany. Oporności połączeń innych gałęzi nie grają roli, bo  $R_1, R_2, R_3, R_4$  są duże w porównaniu z nimi. Mostkiem Thomsona można mierzyć oporności od  $0.000001 \rightarrow 1 \Omega$ , więc oporności szyn miedzianych, tworników dynamomaszyn o bardzo małym oporze wewnętrznym i t.p.



Układ Kompensacyjny (rys.267)

Do dokładnych pomiarów napięcia lub SEM używa się układu kompensacyjnego (rys.267.).  $U_x$  oznacza tu napięcie mierzone w ten sposób, że  $J_x = 0$ ,



Rys.267.

czyli, że do zespołu na którego końcówkach (x-x) ma być zmierzone napięcie  $U_x$ , nie płynie żaden prąd.

Układ kompensacyjny składa się z oporowego drutu ślizgowego AB połączonego z małą baterją akumulatorów (E) i opor-

nicą  $R_z$  (do regulowania prądu  $J$ ). Do końcówek drutu ślizgowego przyłącza się przez przełącznik P, raz ogniwo normalne o znanej SEM-cznej  $E_n$  w szereg z oporem  $R_s$  i galwanometrem G, drugi raz (przez przełącznik P) napięcie mierzone  $U_x$  znów w szereg z oporem  $R_s$  i galwanometrem G.

Pomiar  $U_x$  uskuteczni się w następujący sposób:

Naprzód załącza się (przełącznikiem P) ogniwo normalne  $E_n$  i przesuwają styk K tak, aby wskazówka galwanometru (G) ustawiła się na zero.

W wypadku takim (położenie K w „a”) jest

$$E_n = J \cdot \frac{l_n}{q} \cdot \rho,$$

gdzie  $\frac{l_n}{q} \cdot \rho$  oznacza oporność odcinka Aa drutu oporowego.

Następnie załącza się (przełącznikiem P) napięcie mierzone  $U_x$  i przesuwają styk K tak, aby wskazówka galwanometru (G) znów ustawiła się na zero.



W przypadku takim (położenie K w b) jest

$$U_x = J \cdot \frac{l_x}{q} \cdot \rho.$$

gdzie  $\frac{l_x}{q} \cdot \rho$  oznacza oporność odcinka Ab drutu oporowego.

Z porównania tych dwu równań otrzymamy

$$E_x = E_n \cdot \frac{l_x}{l_n} \dots\dots\dots (147)$$

Długości  $l_x$  i  $l_n$  mogą być wyrażone w dowolnej skali (więc n.p. w m/m)

Wstawiając  $E_n$  w woltach, otrzymamy  $E_x$  także w woltach (niezależnie od skali  $l_x$  i  $l_n$ ).

Uwaga: Należy dbać o to, aby pomiar z ogniwnem normalnem wykonany był przy możliwie małym prądzie w tem ogniwie. Do ograniczenia tego prądu służy opór  $R_B$ .

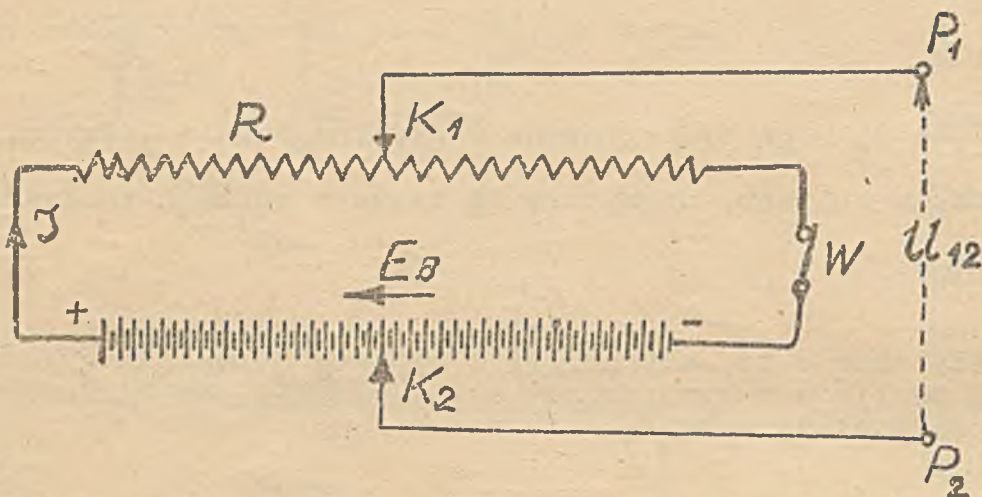
Powyższy pomiar polega na kompensowaniu napięcia  $U_x$  napięciem w drucie ślizgowym ( $J \cdot \frac{l_n}{q} \cdot \rho$  względnie  $J \cdot \frac{l_x}{q} \cdot \rho$ ).

Układu kompensacyjnego można użyć zarówno do pomiaru napięć jak i SEM-cznych. Wszak SEM-czna źródła przez które nie przepływa żaden prąd, jest równa napięciu na końcówkach tego źródła.



Potencjometr (rys.268.).

Układ zwany potencjometrem składa się z baterji akumulatorów ( $E_B$ ), opornicy  $R$  i dwu kontaktów (jeden  $K_1$  na opornicy, drugi  $K_2$  na baterji) połączonych przewodami z końcówkami  $P_1$ ,  $P_2$ , potencjometru (rys.268.

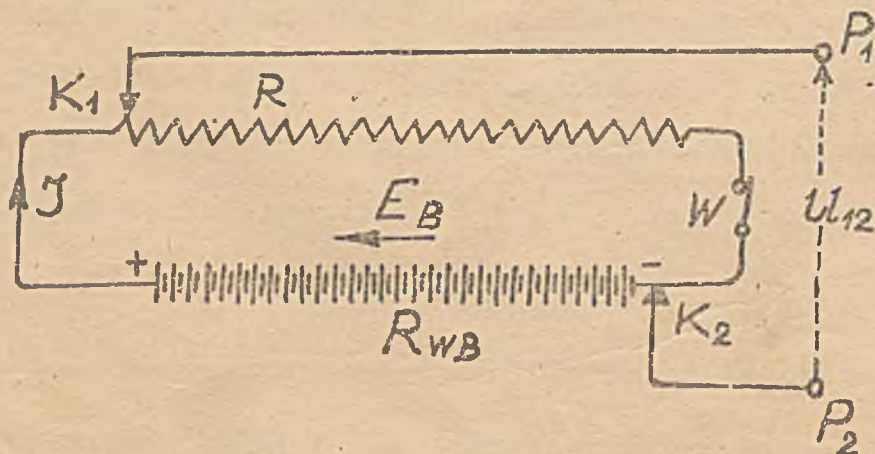


Rys.268.

Po załączeniu wyłącznika  $W$ , w obwodzie (wewnętrznym) potencjometru płynie prąd (stały)  $J = \frac{nE}{nR_W + R}$  gdzie  $nE = E_B$  oznacza SEM-czną baterji a  $n.R_W = R_{WB}$  oporność wewnętrzną baterji (n ogniów w układzie szeregowym).

Zależnie od nastawienia obu tych kontaktów stykowych ( $K_1$  i  $K_2$ ) otrzymać możemy między końcówkami  $P_1$  i  $P_2$  wszelkie napięcia w granicach od  $+(E_B - J.R_{WB})$  do  $-(E_B - J.R_{WB})$ .

Rys.269. przedstawia nastawienie potencjometru na napięcie

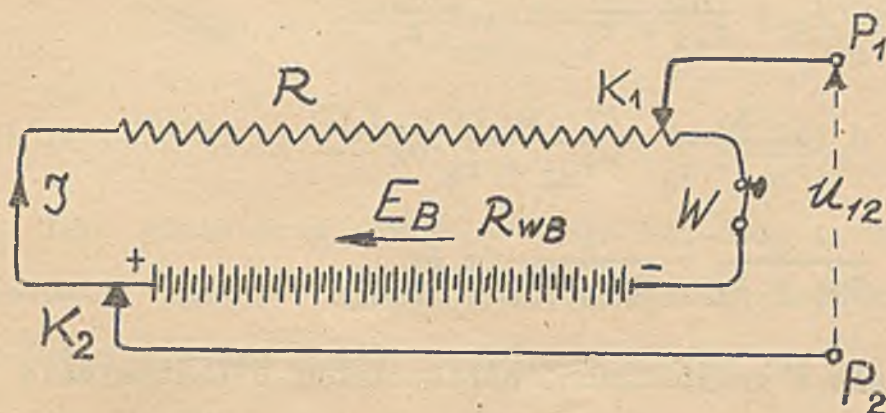


$U_{12} = E_B - J.R_{WB}$   
(końcówka  $P_1$  dodatnia, końcówka  $P_2$  ujemna). Kontakt  $K_1$  całkiem na lewo, kontakt  $K_2$  całkiem na prawo.

Rys.269.



Rys.270. ilustruje nastawienie potencjometru na napięcie

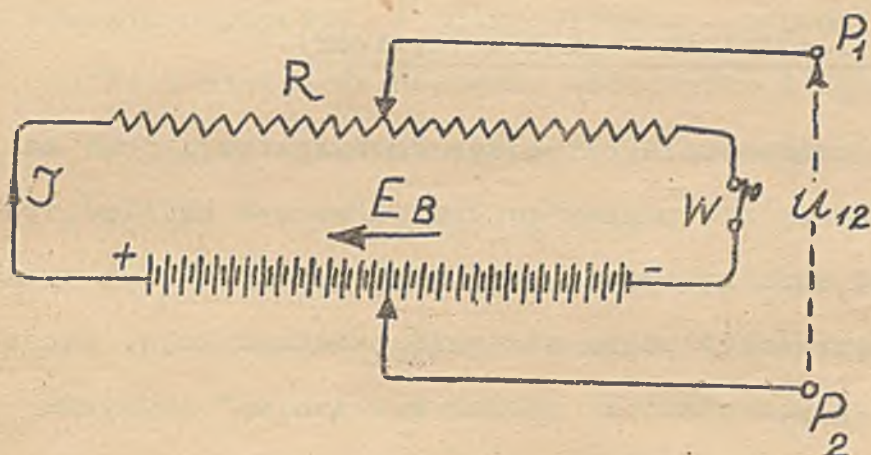


$$U_{12} = - (E_B - J \cdot R_{WB})$$

(końcówka  $P_1$  ujemna  
końcówka  $P_2$  dodatnia). Kontakt  $K_1$   
całkiem na prawo,  
kontakt  $K_2$  całkiem  
na lewo.

Rys.270.

Wreszcie rys. 271 podaje nastawienie potencjometru na napięcie

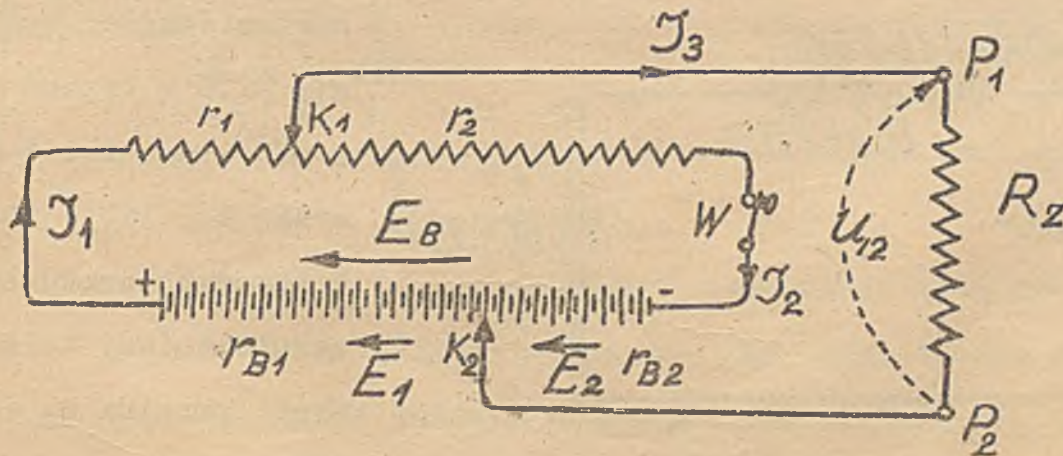


$$U_{12} = 0$$

(różnica potencjałów między  $P_1$  i  $P_2$   
równa się zeru).  
Kontakt  $K_1$  w środku  
opornicy, kontakt  
 $K_2$  w środku baterji.

Rys.271.

Rozpływ prądów i rozkład napięć w potencjometrze na którego końcówki  $P_1$  i  $P_2$  załączono opór  $R_z$  obliczymy (w związku z rys.272.) rozpatrując układ jako trzy gałęzie połączone równolegle.



Rys.272.



Oznacza  $R = r_1 + r_2$ ,  $E_B = E_1 + E_2$ ,  $R_{WB} = r_{B1} + r_{B2}$ , to

$$J_1 = \frac{E_1 - U}{r_{B1} + r_1}, \quad J_2 = \frac{E_2 - U}{r_{B2} + r_2}, \quad J_3 = \frac{U}{r_z}$$

$$U = R_r \left( \frac{E_1}{r_{B1} + r_1} - \frac{E_2}{r_{B2} + r_2} \right) \dots \dots \dots (148)$$

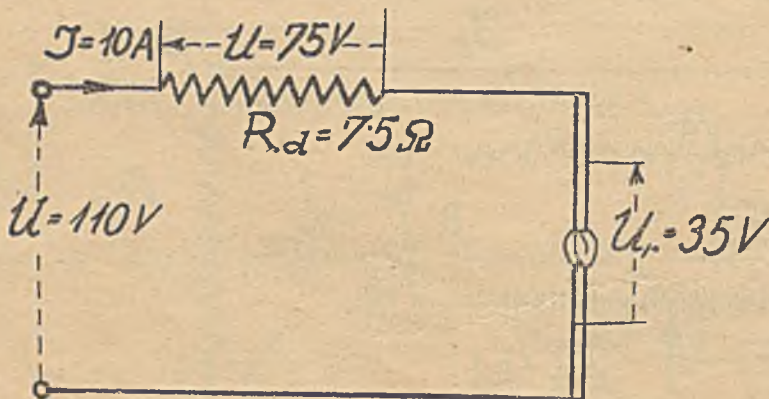
$$\frac{1}{R_r} = \frac{1}{r_{B1} + r_1} + \frac{1}{r_{B2} + r_2} + \frac{1}{R_z}$$

Potencjometru używa się w przypadkach, gdzie chodzi o nastawienie różnych napięć ( $U_{12}$ ), czy to do celów doświadczalnych, czy pomiarowych (Radiotechnika).

Opornik dławiący i dzielnik napięcia (dywisor).

Gdy napięcie (z sieci prądu stałego) będące do dyspozycji jest za wysokie dla danego odbiornika, nie możemy go łączyć wprost na sieć, tylko zastosować musimy układ redukujący napięcie sieci do wysokości wymaganej przez odbiornik. Najprościej można osiągnąć taką redukcję, łącząc w szereg z odbiornikiem „opornik dławiący” nadwyżką napięcia.

Taki układ da się zastosować jednakże tylko w obwodach o niezmiennym się prądzie  $J$ , n.p. w obwodzie lampy łukowej. Łuk między węglami utrzymuje się (w otwartym powietrzu) przy napięciu około 35 V. Gdy więc



Rys. 273.

napięcie sieci wynosi n.p. 110 V trzeba „zdławić” nadwyżkę t.j.  $110 - 35 = 75V$ . W obwodach prądu stałego uskuteczniamy to za pomocą opornika  $R_d$  (rys. 273), przyczem



oporność dławiacą ( $R_d$ ) określa wzór

$$R_d = \frac{U_{\text{sieci}} - U_{\text{odbiornika}}}{J_{\text{obwodu}}} = \frac{U(\text{dławione})}{J_{\text{obwodu}}} \dots\dots\dots (149)$$

tu

$$R_d = \frac{110 - 35}{10} = \frac{75}{10} = \underline{7.5\Omega}$$

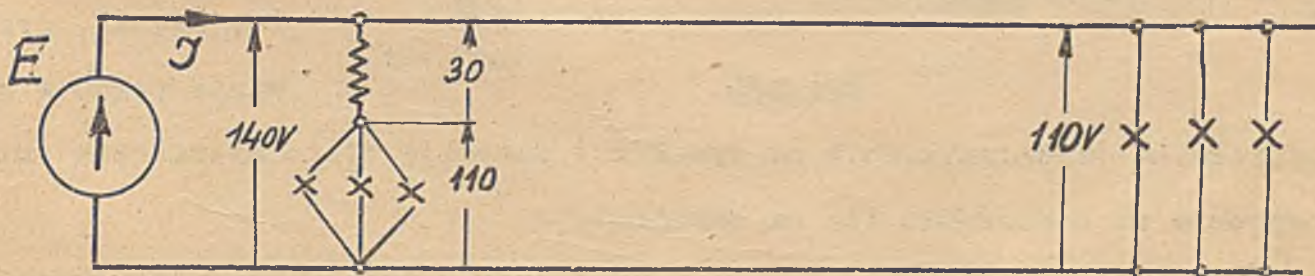
Tam, gdzie prąd obwodu  $J$  ulega zmianom, opornika dławiącego nie można stosować, zmiany  $J$  wywołują bowiem zmiany napięcia na odbiorniku. Widać to jasno z wzoru (149), z którego wynika, że

$$U_{\text{odbiornika}} = U_{\text{sieci}} - J_{\text{obwodu}} \cdot R(\text{dławiaczy}) \dots\dots\dots (150)$$

Gdy  $J = 0$  jest  $U$  odbiornika równe  $U$  sieci. (Zatem odbiornik dostaje za wysokie napięcie). W miarę wzrostu  $J$  napięcie odbiornika maleje.

Ogólnie więc może napięcie odbiornika ulegać zmianom od napięcia sieci aż do napięcia normalnego (przy  $J$  normalnem).

Przykład. W elektrowni jest napięcie (podwyższone) do 140 V aby konsumenci mieli do dyspozycji (na sieci) 110 V (30 V wynosi spadek napięcia w sieci). W ubikacjach elektrowni chcemy świecić żarówkami (normalnymi) 110 V, gdyż takie są na składzie dla wszystkich odbiorców. Łącząc żarówki te w szeregu z opornikiem dławiącym 30 V (rys.274.) osiągniemy



Rys.274.

wprowadzie to, że żarówki w elektrowni będą pod napięciem 110 V, ale tylko tak długo, jak długo świecą razem. Zgaszenie części żarówek spowoduje wyższą napięcia na reszcie i (przy znacznej takiej wyższości) może spowodować przepalenie żarówek.

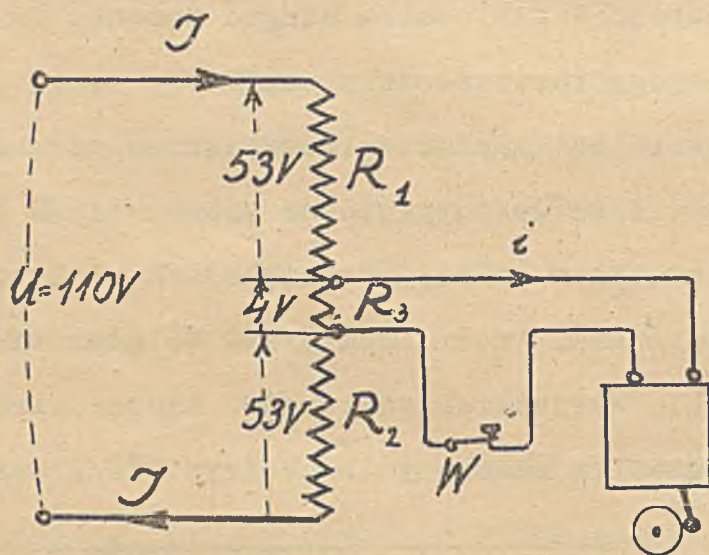


Do obwodów z żarówkami, można stosować opornik dławiący tylko wtedy, gdy żarówki te są zawsze razem świecone i gaszone.

Wszędzie tam, gdzie chodzi o utrzymanie napięcia odbiornika, także przy zmianach prądu, stosujemy układ z t.zw. „ d z i e l n i k i e m n a p i ę c i a ” (dywisoem).

Dzielnikiem napięcia nazywamy opornik (pod prądem) z którego części (środkowych) odprowadzamy przewody do odbiornika. Napięcie na części opornika pod prądem jest niższe od napięcia na końcówkach tego opornika; przez odgałęzienie przewodów od odpowiednio dobranej części opornika możemy więc uzyskać dowolnie niskie napięcie dla odbiornika.

Na rys.275. uwidoczniiony jest n.p. układ dzielnika w połączeniu



Rys.275.

z dzwonkiem elektr. któremu potrzeba do uruchomienia 4 V, gdy napięcie sieci zasilającej dzwonek prądem wynosi 110 V. Przy odpowiednim doborze oporności  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , przerywanie prądu w kole

odbiornika (wyłącznikiem W na rys.275.) powoduje tylko nieznaczne zmiany napięcia na odbiorniku (tu na dzwonku).

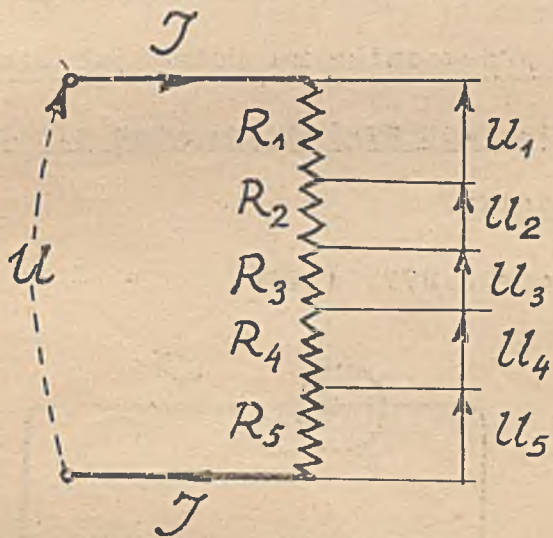
Zmiany napięcia na odbiorniku połączonym z dzielnikiem (wywołane przerywaniem prądu w odbiorniku) będą tem mniejsze, im mniejszy będzie całkowity opór dzielnika, gdyż w takim razie prąd odbiornika nie spowoduje zbyt dużych spadków napięcia w oporach dzielnika ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ).

Niestety pomniejszenie oporności dzielnika powoduje zwiększenie prądu (J) płynącego bezużytecznie przez opór dzielnika. Lepsze działanie odnośnie do stałości napięcia odbiornika, trzeba zatem okupić tu zwiększonymi stratami w dzielniku.



W takim urządzeniu jak tu na rys. 275. przedstawiono, należałoby albo utrzymywać dzielnik stale pod prądem, albo też wyłącznik do dzwonka (taster) wstawić w koło prądu dzielnika. Pierwszy sposób powoduje dość duże straty, drugi ma tę niedogodność, że wyłącznik (taster) dzwonkowy jest pod napięciem sieci. Oba te sposoby nie są więc godne polecenia, stąd małe rozpowszechnienie dzielników do sygnalizacji domowej (w instalacjach o prądzie stałym; stosuje się tam do tego celu - i obecnie - jak dawniej - ogniwo Léclanche'a).

Dzielnik napięcia znajduje natomiast zastosowanie w laboratorjach w wykonaniu takim jak je przedstawia rys. 276. Między końcówkami odgałę-



Rys. 276.

zionemi z różnych punktów oporu dzielnika, otrzymujemy różne napięcia  $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$ .

Zamiast stałych połączeń można tu zastosować styki przesuwalne, osiągając w ten sposób możliwość nastawienia poszczególnych napięć w szerokich granicach.



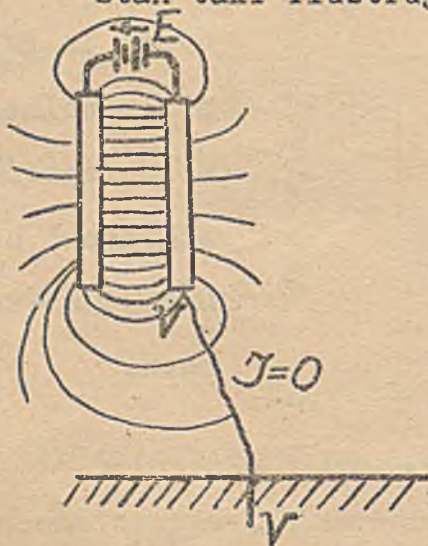
### Uziemienie.

Pod uziemieniem rozumiemy (w elektrotechnice) połączenie (przewodzące) z ziemią. Połączenie takie może stanowić przewód (metalowy), elektrolit, wogóle ciało przewodzące elektryczność. Uziemić (połączyć z ziemią) można odosobniony przewodnik, obwód elektryczny, (w jednym lub wielu miejscach) źródło prądu (którymkolwiek z biegunów), kondensator (jedną okładką) i t.d.

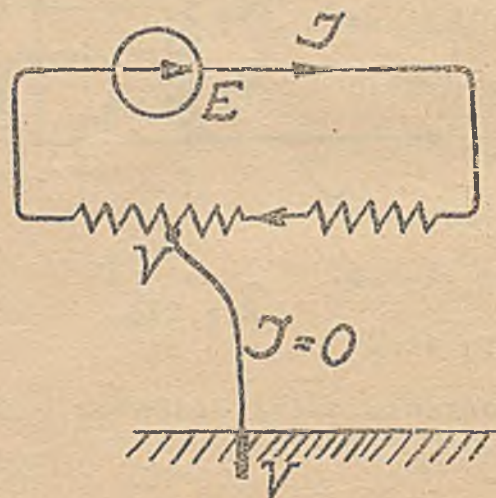
W każdym z tych przypadków uziemienie ma inny charakter, jednakże charakterystyczne cechy uziemienia dadzą się ująć w następujące ogólne twierdzenie.

Twierdzenie 1. Jeżeli przez przewód uziemiający nie płynie żaden prąd, to uziemiony punkt przewodnika ma potencjał ziemi w miejscu uziemienia, bez względu na stan elektryczny reszty tego przewodnika.

Stan taki ilustruje rys.277. i 278.



Rys. 277.



Rys. 278.

Rys.277. przedstawia uziemienie jednej okładki kondensatora ( w stanie statycznym przybierze ona potencjał  $V$  miejsca uziemienia).

Rys.278. ilustruje uziemienie jednego punktu obwodu pod prądem stałym. Punkt uziemiony przybierze potencjał  $V$  miejsca uziemienia.

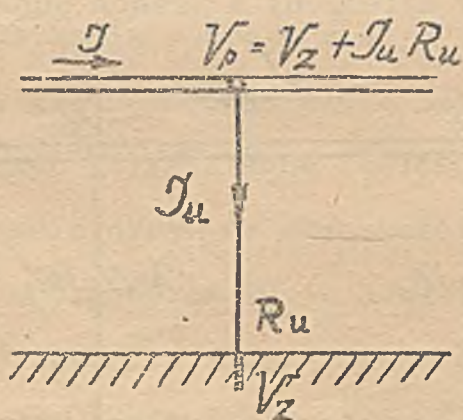
W jednym i drugim wypadku przez przewód uziemiający nie płynie żaden prąd  $J = 0$ .



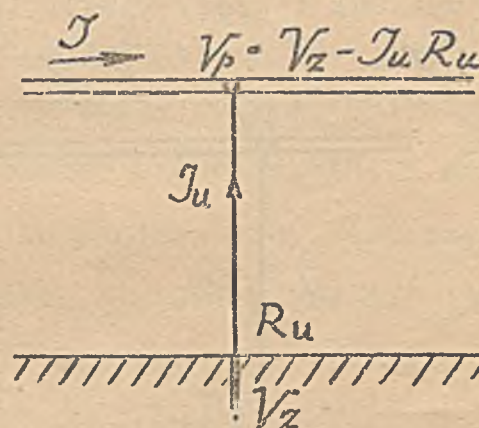
Twierdzenie 1. wynika z pojęcia potencjału (względnie napięcia). Bez względu na ukształtowanie pola elektrycznego, jest w obu wypadkach we wnętrzu przewodu uziemiającego natężenie pola elektrycznego (K) równe zeru. Zatem dla toru wewnątrz przewodnika między punktem uziemionym i ziemią, (w miejscu uziemienia) musi być  $\int K \cdot dl \cos \alpha = 0$ , czyli oba te punkty mają ten sam potencjał  $V$ .

Twierdzenie 2. Jeżeli przez przewód uziemiający płynie prąd  $s t a =$   $I$  y  $J$ , a oporność połączenia uziemiającego jest  $R_u$ , natenczas potencjał punktu uziemionego różni się od potencjału ziemi (w miejscu uziemienia) o wartość  $J \cdot R_u$ .

Stan taki ilustruje rys.279. i 280.



Rys. 279.



Rys. 280.

W obu przypadkach, przedstawionych na rys.279. i 280., strata napięcia w uziemieniu jest

$$\Delta_u = J \cdot R_u$$

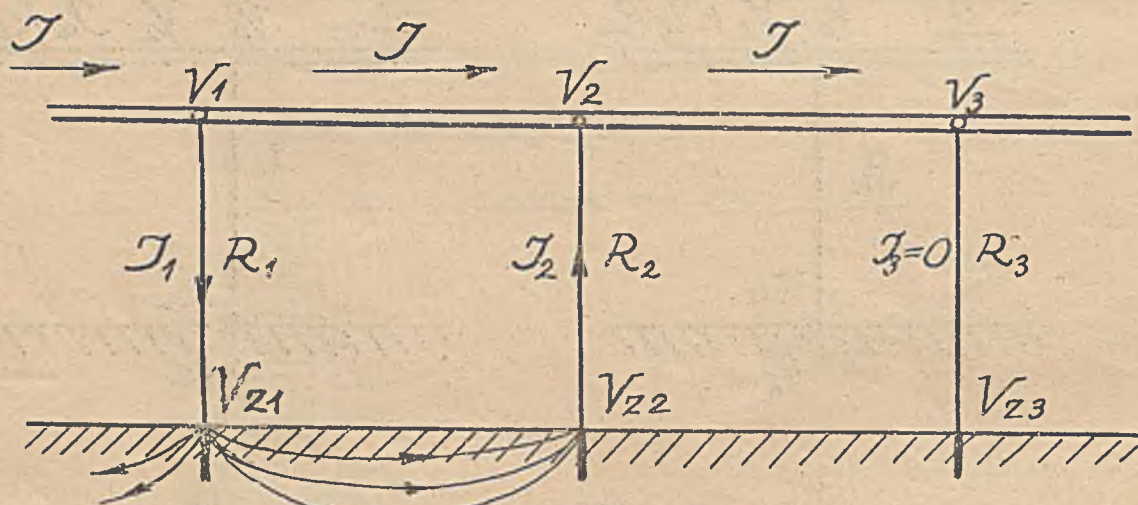
Zatem odnośnie do rys.279 jest  $V_p = V_z + J_u \cdot R_u$ , czyli potencjał punktu uziemionego jest wyższy od potencjału ziemi (w miejscu uziemienia) o  $\Delta_u = J \cdot R_u$ .

Zaś odnośnie do rys.280 jest  $V_p = V_z - J_u \cdot R_u$ , czyli potencjał punktu uziemionego jest niższy od potencjału ziemi (w miejscu uziemienia) o  $\Delta_u = J \cdot R_u$ .



Z powyższych dwu Twierdzeń wynika, że ten sam przewód uziemiony w kilku miejscach, może mieć w różnych swych częściach różne potencjały. Potencjały będą równe potencjałom odnośnych miejsc ziemi, gdy przez odnośny przewód uziemiaczący nie płynie żaden prąd, będą jednakże różne od potencjałów ziemi. (w miejscach uziemienia) gdy przez przewody uziemiaczące płyną prądy.

Wypada zaznaczyć, że także potencjał ziemi ( $V_z$ ) nie będzie wszędzie jednakowy, gdy przez ziemię płyną prądy. Przy znacznych długościach przewodu uziemionego (przewód zerowy układu 3-przewodowego sieci technicznej, szyny tramwajowe i t.p.) mogą nawet wystąpić dość znaczne różnice potencjałów między poszczególnymi punktami przewodu uziemionego. Ilustruje to jasno rys 281 i wzory (151). (Przewód uziemiony w trzech punktach).



Rys. 281.

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V_{z1} + J_1 \cdot R_1 \\
 V_2 &= V_{z2} - J_2 \cdot R_2 \quad \dots \dots \dots (151) \\
 V_3 &= V_{z3}
 \end{aligned}$$

Z wzorów (151) widać, że przy dużych opornościach uziemienia ( $R_1, R_2$ ) i dużych prądach ( $J_1, J_2$ ) płynących przez nie do ziemi, mogą wystąpić duże różnice potencjałów między przewodem uziemionym a ziemią.

Oporność uziemienia zależy od dwu czynników, a mianowicie od oporności



przewodu uziemiającego i oporności stykowej między elektrodą ziemną

a ziemią. Oporność przewodu uziemiającego jest zwykle niewielka, do uziemiń stosujemy bowiem zazwyczaj przewody miedziane od kilku do kilkadziesiąt m/m przekroju, lub grube druty żelazne (cynkowane). Oporność stykowa między elektrodą ziemną a ziemią (krótko lecz niewłaściwie zwana opornością elektrody), waha się od wartości poniżej 1 do  $100 \Omega$  i wyżej i zależy od prądu przepływającego przez uziemienie. Powoduje on bowiem wysychanie ziemi wokół elektrody wskutek czego oporność stykowa znacznie wzrasta. Tem tłumaczy się fakt, obserwowany często w praktyce, że prąd uziemienia, chwilowo silny, maleje szybko (w miarę wysychania ziemi i zwiększania się wskutek tego oporności stykowej elektrody ziemnej).

Celem otrzymania „dobrej ziemi” (uziemienia o małej oporności) należy więc stosować elektrody ziemne o dużej powierzchni stykowej. Stosowane często płyty ziemne (żelazne cynkowane) o powierzchni  $1 \text{ m}^2$ , ułożone w gruncie ornym na głębokości około 1m poniżej wody zaskórnej, mogą wykazać oporność od 10 do  $30 \Omega$  („Wskazówki dla uziemień” ETZ 1922 Str.560). W piasku lub żwirze oporność będzie wielokrotnie większa.

Płyty ziemne powinny posiadać najmniej 3 m/m grubości i stać pionowo w dobrze ubitej ziemi. Gdy chodzi o „lepszą ziemię” (mniejszą oporność stykową elektrody ziemnej) stosuje się taśmy, druty, rury żelazne, ocynkowane w ogniu. Dodatek soli do ziemi, otaczającej elektrodę, zmniejsza wydatnie oporność stykową. (Dodatek 3 kg soli na  $1 \text{ m}^3$  ziemi ma zmniejszać oporność do 0.14 pierwotnej wartości). Należy jednak odnawiać solenie ziemi (co parę lat). Oporność stykowa zależy od chwilowej wilgotności, więc od pogody i pory roku.

(Bliższe szczegóły o uziemieniu czytaj Szapiro „Uziemienia ochronne w urządzeniach elektrycznych niskiego napięcia” Odbitka z „Przeglądu Elektrotechnicznego” 1923).



IV. PRACA I MOC W OBWODACH PRADU STAŁEGO.

1. Rozważania ogólne (Wydajnik, odbiornik).

Transport naboju elektrycznego  $Q$  wzdłuż toru o napięciu  $U$  wymaga pracy określonej (dla  $U = \text{const}$ ) relacją

$$A = U \cdot Q \dots\dots\dots (152)$$

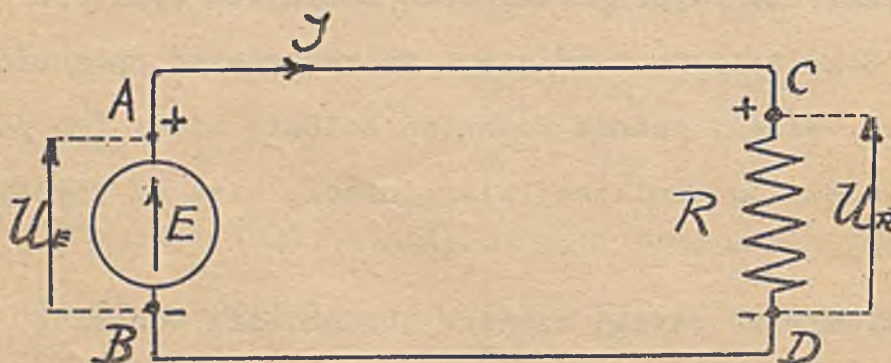
Gdy nabój  $Q$  i napięcie  $U$  wyznaczone dla toru w kierunku transportu  $Q$  mają wartość dodatnią, praca  $A$  ma także wartość dodatnią. Gdy  $Q$  lub  $U$  (wyznaczone dla toru w kierunku transportu  $Q$ ) ma wartość ujemną, wypadnie także  $A$  ujemne. Znak  $A$  zależy więc od znaków  $U$  i  $Q$ .

Dodatnia wartość  $A$  oznacza, że transport naboju  $Q$  połączony jest z wydzielaniem energii (na zewnątrz).

Ujemna wartość  $A$  wskazuje, że transport naboju  $Q$  wymaga nakładu energii (z zewnątrz).

Wiemy to z rozważań o polu elektrycznym (Elektrostatyka), których owocem jest także wzór powyższy (152). Obwód prądu stałego otacza pole elektr. Prąd stały utożsamiliśmy z ruchem dodatniej elektryczności. Należy przeto oczekiwać, że krążeniu prądu w obwodzie elektr. towarzyszyć muszą przemiany energetyczne w myśl wzoru (152) i powyższych objaśnień.

Rozpatrzmy najprostsze koło prądu (rys.282.) złożone ze źródła o SEM-



cznej  $E$  i oporu  $R$ , połączonych ze sobą bezopornymi przewodami. W obwodzie takim płynie prąd  $J$  przez źródło w kierunku od niższego (B) ku wyższemu (A) potencjałowi,

Rys.282.

zaś przez opór  $R$  w kierunku od wyższego (C) ku niższemu (D) potencjałowi.



W kierunku prądu, napięcie dla toru  $\overrightarrow{BA}$ , poprowadzonego przez źródło, jest ujemne

$$U_{BA} = \int_B^A K \cdot dl \cdot \cos \alpha = v_B - v_A, \text{ bo } v_B < v_A.$$

Zaś w kierunku prądu dla toru  $\overrightarrow{CD}$ , poprowadzonego przez opór R, napięcie jest dodatnie

$$U_{CD} = \int_C^D K \cdot dl \cdot \cos \alpha = v_C - v_D, \text{ bo } v_C > v_D.$$

Traktując prąd J jako ruch elektryczności, możemy napisać

$$Q = J \cdot t$$

W czasie t trwania prądu J, przepłynie przez źródło E nabój Q i taki sam nabój przepłynie przez opór R.

Ponieważ przez źródło transportowany jest nabój Q w kierunku dla którego napięcie jest ujemne, przeto iloczyn

$$U_{BA} \cdot Q = (v_B - v_A)Q$$

wypadnie ze znakiem ujemnym, zaś iloczyn

$$U_{CD} \cdot Q = (v_C - v_D)Q$$

ze znakiem dodatnim.

Znaczy to, że transport naboju Q przez źródło w kierunku  $\overrightarrow{BA}$  wymaga nakładu energii (z zewnątrz), zaś transport taki (Q) przez opór R w kierunku  $\overrightarrow{CD}$  połączony jest z wydzielaniem energii (na zewnątrz).

Rzeczywiście obserwujemy też w źródle prądu zużywanie energii (chemicznej, termicznej, mechanicznej i t.p., zależnie od rodzaju źródła), energia ta bowiem zostaje zamieniana na energję elektryczną i jest odprowadzana do reszty obwodu. W oporze zaś obserwujemy powstawanie ciepła, kosztem doprowadzanej (ze źródła) energii elektrycznej. Ciepło to jest rozpraszane na zewnątrz (w otoczenie).

Krażenie prądu w obwodzie połączone jest więc - jak widać z powyższego - z przemianami energii. Jedna część obwodu - źródło - pochłania energję dostarczoną z zewnątrz, przemienia ją w formę elektryczną i w tej



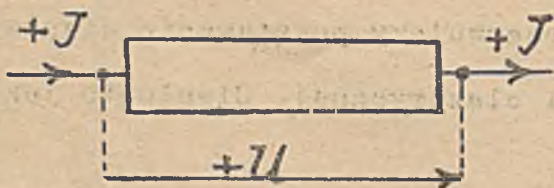
formie wydają ją do reszty obwodu, druga część obwodu - opór - odbiera energję elektryczną z obwodu, przemienia ją na inną formę (tu ciepło) i w tej formie albo gromadzi ją w sobie lub też rozprasza na zewnątrz (w otoczenie). Charakterystyczne te dwie cechy uwydatniają się w elementach każdego obwodu elektr. pod prądem. Jedne z tych elementów wydają energję elektr. do obwodu, drugie ją z niego odbierają

Element, który wydaje energję do obwodu nazwać będziemy wydajnikiem, element, który odbiera energję z obwodu nazwiemy odbiornikiem.

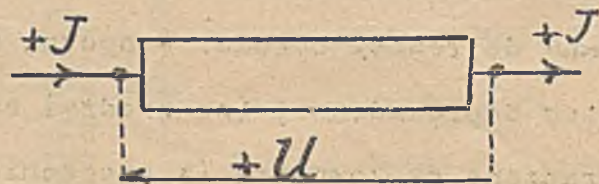
Wydajnikiem jest każdy element, przez który płynie prąd w kierunku od niższego ku wyższemu potencjałowi, czyli po torze w kierunku, dla którego napięcie jest ujemne.

Odbiornikiem jest każdy element, przez który płynie prąd w kierunku od wyższego ku niższemu potencjałowi, czyli po torze w kierunku, dla którego napięcie jest dodatnie.

Oznaczywszy zarówno dla wydajnika jak i dla odbiornika kierunkowość napięcia jednakowo w ten sposób, aby grot strzałki  $U$  wskazywał końcówkę o wyższym potencjale, widzimy, (rys.282.), że w wydajniku strzałki napięcia (dla  $+U$ ) i prądu (dla  $+J$ ) są zgodnie skierowane (rys.283.), podczas gdy w odbiorniku mają kierunki przeciwnie. (Rys.284.).



Rys.283. (Wydajnik).



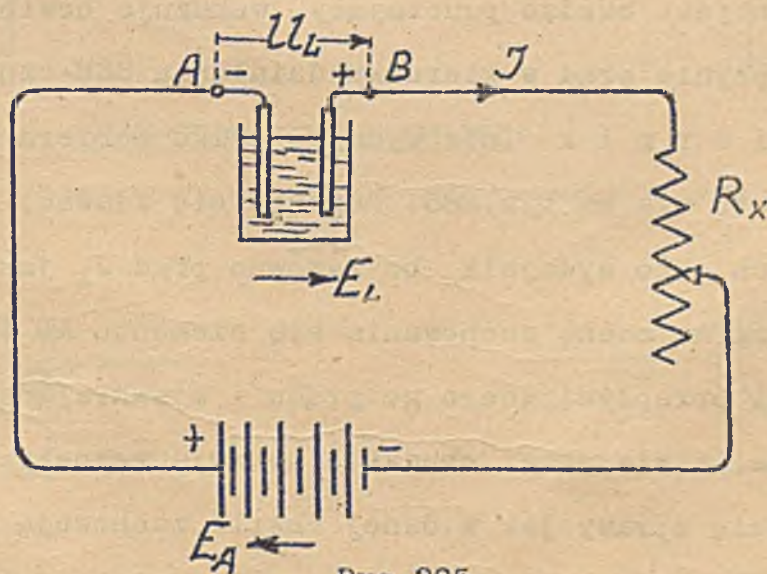
Rys.284. (Odbiornik).



Rozważania powyższe ujawniają, że celem ustalenia, czy dany element obwodu jest wydajnikiem lub odbiornikiem, wystarcza zbadanie kierunkowości przepływającego go prądu ( $J$ ) i kierunkowości ujawniającego się na jego końcówkach napięcia ( $U$ ). Badanie wewnętrznego ustroju elementu jest tu najzupełniej zbędne. Należy je uskutecznić tylko wtedy, gdy poza ustaleniem czy dany element jest wydajnikiem czy odbiornikiem, chodzi jeszcze o zbadanie, jakiego rodzaju przemiany energetyczne zachodzą wewnątrz owego elementu.

Badanie samego tylko ustroju wewnętrznego elementu, bez uwzględnienia przepływającego go prądu i ujawniającego się na jego końcówkach napięcia, nie może doprowadzić do rozpoznania, czy element ten jest wydajnikiem, czy odbiornikiem. Albowiem ten sam element może działać raz jako wydajnik drugi raz jako odbiornik, zależnie od kierunków  $J$  i  $U$ .

Przykład: Ogniwo galwaniczne o SEM-cznej  $E_L = 1.5 \text{ V}$  (Léclanche'a) i oporności wewnętrznej  $R_{WL} = 0.5 \Omega$ . Łączymy w szereg z baterją akumulatorów o SEM-cznej  $E_A = 10 \text{ V}$  i oporności wewnętrznej  $R_{WA} = 0.1 \Omega$  (rys.285.) i z opornicą regulacyjną  $R_x$



Rys.285.



Gdy zregulujemy  $R_x$  na wartość  $R_{x1} = 10,9 \Omega$ , płynie przez ogniwo (w kierunku SEM-cznej  $E_L$ ) prąd

$$J_1 = \frac{E_A + E_L}{R_{WA} + R_{WL} + R_{x1}} = \frac{10 + 1,5}{0,1 + 0,5 + 10,9} = \frac{11,5}{11,5} = 1 \text{ A}$$

Napięcie na ogniwie  $U_L$  jest zatem

$$U_{L1} = E_L - J_1 \cdot R_{WL} = 1,5 - 1 \cdot 0,5 = +1 \text{ V.}$$

Znak + oznacza tu, że końcówka B ma potencjał wyższy od A o 1 V, zatem ogniwo pracuje jako wydajnik.

Zredukujmy oporność  $R_x$  do wartości  $R_{x2} = 0,55 \Omega$ .

Przez ogniwo przepłynie teraz prąd

$$J_2 = \frac{E_A + E_L}{R_{WA} + R_{WL} + R_{x2}} = \frac{10 + 1,5}{0,1 + 0,5 + 0,55} = \frac{11,5}{1,15} = 10 \text{ A.}$$

w tym samym co poprzednio kierunku.

Napięcie na końcówkach ogniwa  $U_L$  będzie teraz

$$U_{L2} = E_L - J_2 \cdot R_{WL} = 1,5 - 10 \cdot 0,5 = -3,5 \text{ V}^1)$$

Znak „-” oznacza tu, że teraz końcówka B ma potencjał niższy od A (o 3,5 V), czyli, że ogniwo pracuje jako odbiornik.

Przykład ten jest bardzo pouczający, wskazuje bowiem, że nawet ogniwo przez które płynie prąd w kierunku działania SEM-cznej może zachowywać się jak odbiornik (nie wydaje, tylko pobiera energję z obwodu). Z pierwszego rzutu oka na rys.285. mogłoby się zdawać, że owo ogniwo pracuje w obu razach jako wydajnik, bo zarówno prąd  $J_1$  jak i  $J_2$  mają ten sam kierunek. Trafną ocenę zachowania się elementu AB (ogniwa) uzyskali badając kierunki przepływającego go prądu i ujawniającego się na jego końcówkach napięcia, a nie przez zbadanie ustroju wewnętrznego owego elementu.

Zdawanie sobie sprawy jak w danej chwili zachowują się poszczególne elementy obwodu pod względem energietycznym, jest pierwszorzędnej wagi w racjonalnie przeprowadzonej analizie obwodu elektr.

1) Abstrahujemy tu od polaryzacji i t.p. wpływów.

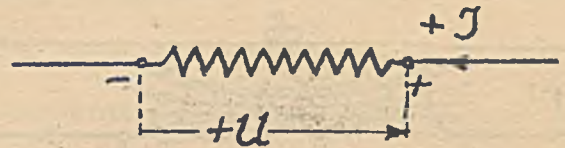


Ustrój elementu.

Wydajnik :

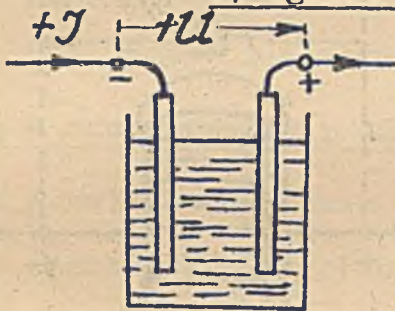
Odbiornik :

a) Opór omowy.

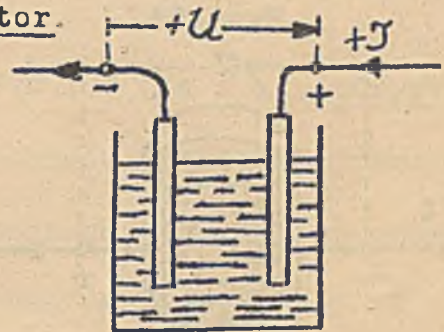


Rys.286.

b) Ogniwo galwaniczne lub akumulator.

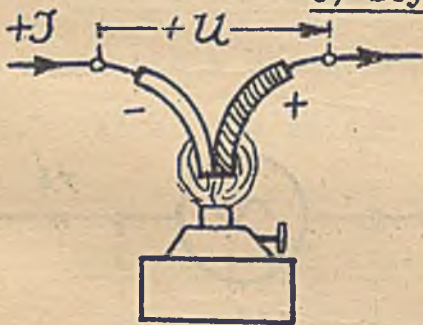


Rys.287.

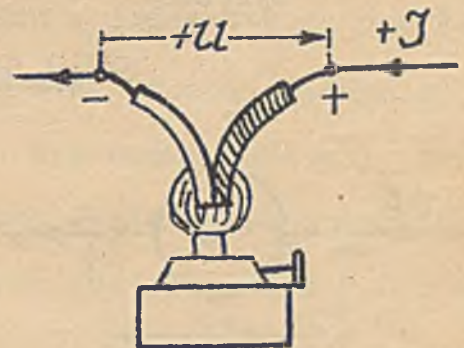


Rys.288.

c) Styk dwu różnych metali.

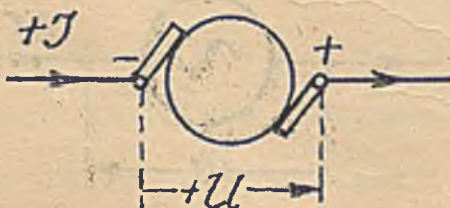


Rys.289.



Rys.290.

d) Maszyny prądu stałego.



Rys.291.



Rys.292.

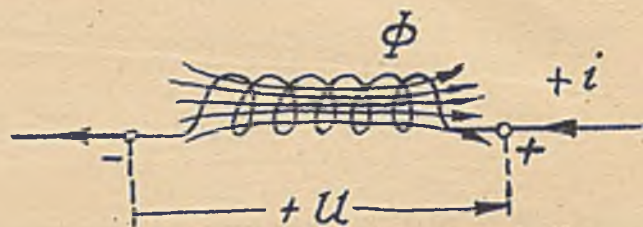
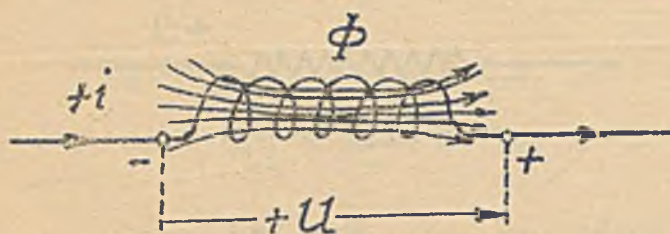


Ustrój elementu.

Wydaжник:

Odbiornik:

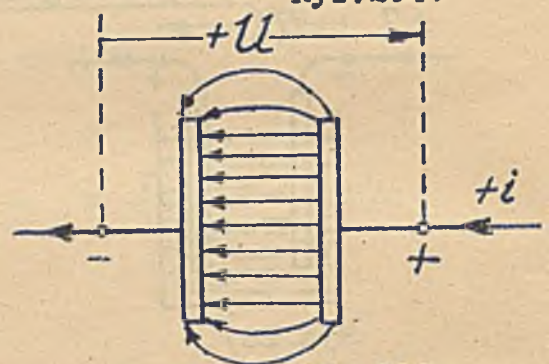
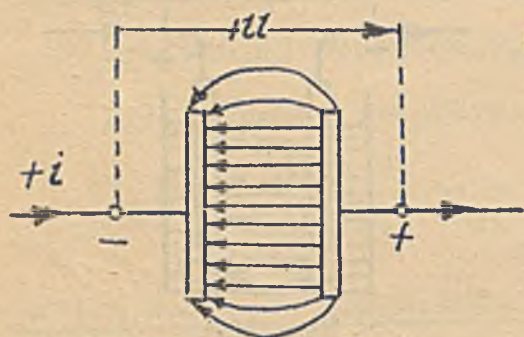
e) Solenoid.



Rys. 293.

Rys. 294.

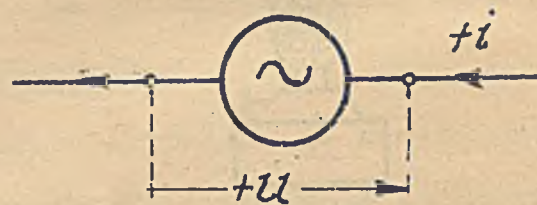
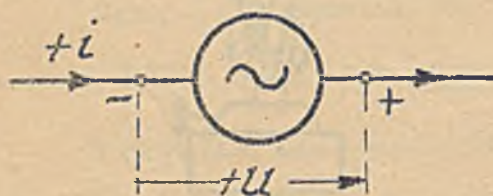
f) Kondenzator.



Rys. 295.

Rys. 296.

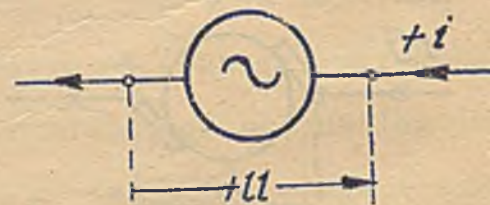
g) Generator prądu zmiennego.



Rys. 297.

Rys. 298.

h) Motor prądu zmiennego.



Rys. 299.

Rys. 300.



W zestawieniu powyższem każdy z elementów, z wyjątkiem oporu omowego, występuje raz jako wydajnik, drugi raz jako odbiornik. Przemiany energietyczne w przedstawionych tu elementach są następujące:

W ogniwie galwanicznym, względnie w akumulatorze, pracującym jako wydajnik, ciała bogatsze w energję chemiczną przechodzą w związki uboższe w tę energję. Uwolniona energja chemiczna zostaje zamieniona w formę elektryczną, która częściowo zostaje zamieniona na ciepło (w oporze wewnętrznym) a resztę oddaje ogniwo (akumulator) do obwodu. (Wyładowanie akumulatora, zużywanie ciał aktywnych w ogniwie).

Gdy ogniwo lub akumulator pracują jako odbiornik, odbywają się w nich przemiany odwrotne. Ciała ubogie w energję chemiczną przechodzą w związki bogatsze w tę energję przy równoczesnem pochłanianiu energii elektrycznej z obwodu. Poza to powstaje jeszcze ciepło (w oporze wewnętrznym). <sup>1)</sup>

Styk dwu różnych metali przy przepływie prądu w jedną stronę pochłania ciepło z otoczenia i zamienia go na energję elektryczną (wydajnik), lub też - przy zmianie kierunku prądu - ogrzewa się nadmiernie t.j. tworzy się w nim więcej ciepła niż to wypada z prawa Joule'a (odbiornik).

Maszyna prądu stałego pracując jako generator jest wydajnikiem, pracując jako motor jest odbiornikiem. W pierwszym wypadku przetwarza dostarczoną z zewnątrz pracę mechaniczną na energję elektryczną, w drugim dokonuje się przemiana odwrotna.

Solenoid jest wydajnikiem, gdy prąd przepływający go maleje, a odbiornikiem, gdy rośnie. W pierwszym wypadku bowiem uwalniana energja pola magnetycznego przemienia się na energję elektryczną, w drugim energja elektr. przemienia się w energję pola magnetycznego.

1) W niektórych ogniwach pracujących jako wydajniki, zachodzi absorbcja ciepła z przemianą na energję elektryczną, w co tu jednak nie wchodzimy.



Kondenzator w czasie wyładowania jest w y d a j n i k i e m , zaś w czasie ładowania o d b i o r n i k i e m . W pierwszym wypadku energia pola elektrycznego przemienia się w energję elektr., w drugim energia elektr. przemienia się w energję pola elektrycznego.

Generator prądu zmiennego dostarcza energii do obwodu, czyli pracuje jako w y d a j n i k , gdy prąd chwilowy „i” odpływa na zewnątrz przez końcówkę o wyższym potencjale, odbiera zaś energję, czyli pracuje jako o d b i o r n i k , gdy prąd chwilowy „i” dopływa przez końcówkę o wyższym potencjale. Momenty takie powtarzają się naprzemian (przy prądzie perjodycznym), jednakże w okresie, gdy generator jest wydajnikiem, wydaj on na zewnątrz więcej energii niż jej w następnym okresie pracy - jako odbiornik - pobiera (z sieci).

Motor prądu zmiennego zachowuje się podobnie jak generator, z tą różnicą, że jako odbiornik pobiera więcej energii, niż jej następnie jako wydajnik, na sieć oddaje.

Z powyższego przeglądu widać, że ogólnie każdy z wymienionych elementów (z wyjątkiem oporu omowego) może być wydajnikiem i odbiornikiem. W obwodach prądu zmiennego perjodycznego są też z reguły wszystkie elementy (z wyjątkiem oporu) naprzemian wydajnikami i odbiornikami. Powodują to t.zw. p u l s o w a - n i e energii między źródłem prądu zmiennego a załączonymi konsumentami, niepożądane z tego powodu, że połączone jest ze stratami energii. W przypadkach tych odbiornikiem, w znaczeniu technicznym, nazywać będziemy taki element, który w czasie pracy jako odbiornik pobiera więcej energii, niż jej następnie oddaje, pracując jako wydajnik. Wydajnikiem w znaczeniu technicznym nazwiemy taki element, który pracując jako wydajnik dostarcza do obwodu więcej energii, niż jej następnie z niego pobiera, pracując jako odbiornik.



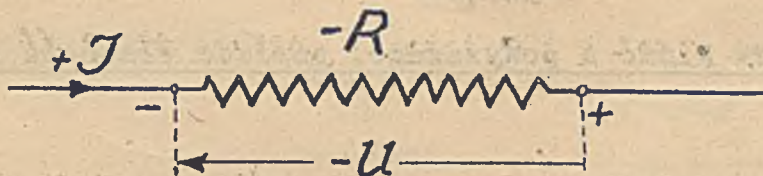
Opór ujemny.

W zestawieniu na str. 267 i 268 jedynie tylko opór omowy (R) występuje wyłącznie jako odbiornik. Stwierdzamy bowiem doświadczalnie, że bez względu na kierunek prądu przepływającego przez opór, element ten zawsze pochłania energję, zamieniając ją na ciepło. Zgodnie z tem, końcówka przez którą prąd dopływa do oporu, ma zawsze potencjał wyższy od końcówki, przez którą prąd wypływa.

Brak wydajnika o właściwościach oporu możemy usunąć, wprowadzając t.zw. o p ó r u j e m n y .

O p ó r u j e m n y to element f i k c y j n y (nie istniejący), o właściwościach diametralnie przeciwnych niż opór dodatni, więc element pochłaniający ciepło z otoczenia i zamieniający je w całości na energję elektryczną, oddawaną do obwodu. Opór ujemny jest więc wydajnikiem.

Zgodnie z tem końcówka, przez którą dopływałby prąd do oporu ujemnego, ujawniałaby potencjał niższy od końcówki, przez którą prąd odpływa (rys. 301).



Rys. 301.

Wartość oporu ujemnego określamy, zgodnie z prawem Ohma, relacją

$$R = \frac{-U}{+J} \dots\dots\dots (153)$$

wyznaczając U dla kierunku przeciwnego prądowi, analogicznie jak dla oporu dodatniego. Z uwagi na powyższe, wypadnie tu U (dla tak oznaczonej kierunku) ze znakiem ujemnym (153), zatem i R ze znakiem ujemnym.



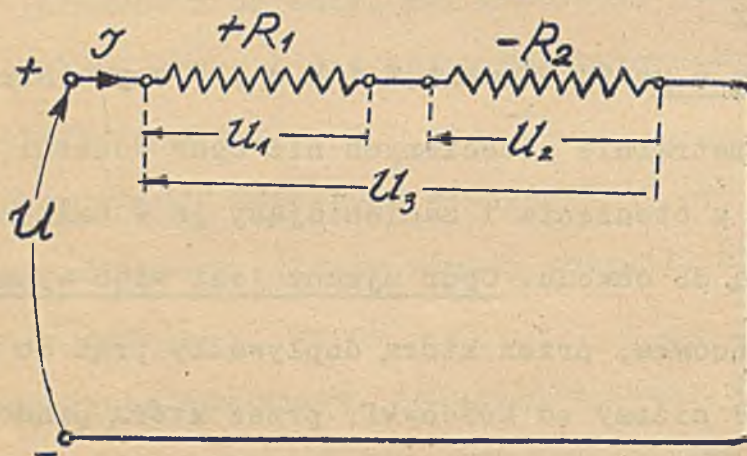
Jakkolwiek opór ujemny wcale nie istnieje, to jednakże spotkamy się z tem pojęciem (wprowadzonym do elektrotechniki w ostatnich latach), przy analizie łuku elektrycznego, lamp katodowych i t.p.

Stosując prawo Ohma do obwodu zawierającego dodatni i ujemny opór (rys.302), napiszemy

$$J = \frac{U}{R_1 - R_2} \dots\dots\dots (154)$$

$$U_1 = J.R_1, \quad U_2 = J(-R_2), \quad U_3 = U_1 + U_2 = J(R_1 - R_2)$$

Gdy  $R_1 = R_2$  jest  $U_3 = 0$ , mimo, że  $U_1$  i  $U_2$  różnią się od zera!



Rys.302.

Opór ujemny, jak widać z powyższego, posiada własność kompensowania oporu dodatniego.

Dzięki temu napięcie na oporze dodatnim (tu  $R_1$ ) może wypaść większe od napięcia zasilającego (tu  $U$ ).

Przykład: Niech będzie w związku z rys.302

$$R_1 = + 15 \Omega, \quad R_2 = - 5 \Omega, \quad U = 100 \text{ V}$$

Wypadnie zatem

$$J = \frac{U}{R_1 - R_2} = \frac{100}{15 - 5} = \frac{100}{10} = \underline{10 \text{ A}}$$

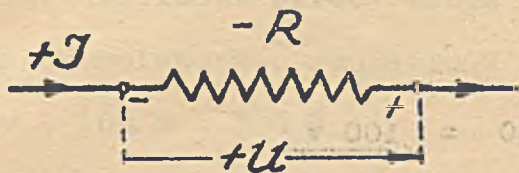
$$U_1 = J.R_1 = 10.15 = 150 \text{ V (czyli większe od } U)$$

$$U_2 = J.R_2 = 10(-5) = - 50 \text{ V,}$$

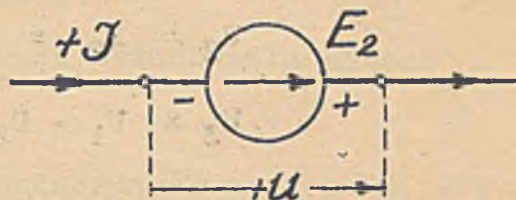
$$U_3 = U_1 + U_2 = 150 + (-50) = 100 \text{ V (równe } U).$$



Odwracając strzałkę  $U$  na rys.301, otrzymamy oznaczenie  $J$  i  $U$  identyczne z podanymi na str.267-8 dla wszystkich wydajników (porównaj rys.303 i 304).



Rys. 303.



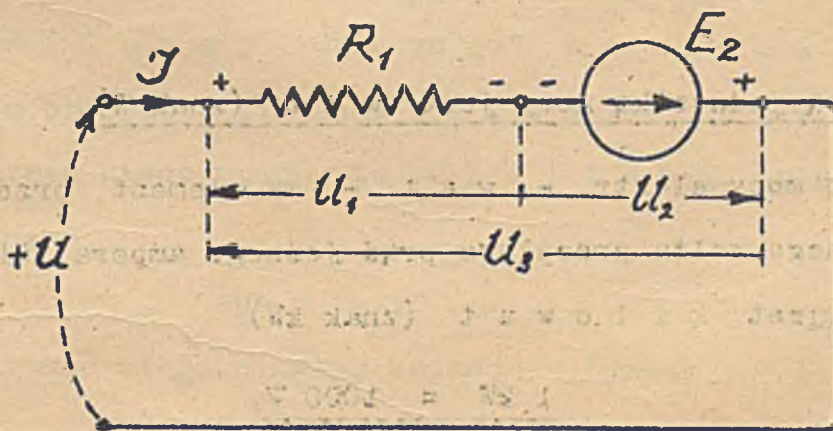
Rys. 304.

Jakkolwiek więc opór ujemny jest fikcją, to jednakże działanie jego można zrealizować, zastępując go SEM-czną o wartości

$$E = J \cdot R$$

gdzie  $J$  oznacza prąd przepływający przez opór ujemny, a  $R$  wartość bezwzględna oporu ujemnego. Kierunek  $E$  będzie zgodny ze strzałką  $U$  wyznaczoną dla dodatniej wartości  $U$  (rys.303 i 304).

Przykład: W obwodzie na rys.302 nie ulegnie zmianie ani prąd  $J$  ani napięcia  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ , gdy opór ujemny  $R_2 = -5 \Omega$ , zastąpimy SEM-czną  $E_2 = J \cdot R_2 = 10 \cdot 5 = 50 \text{ V}$ . o kierunku zgodnym z prądem (rys.305).



Rys 305.



Rzeczywiście, po takiej substytucji będzie:

$$J = \frac{U + E_2}{R_1} = \frac{100 + 50}{15} = \underline{10 \text{ A}}$$

$$U_1 = J_1 R_1 = 15 \cdot 10 = \underline{150 \text{ V}}$$

$$U_2 = E_2 = \underline{50 \text{ V}}$$

$$U_3 = U_1 - U_2 = 150 - 50 = \underline{100 \text{ V}}$$

## 2. Moc prądu stałego (P).

Moc jest to praca na jednostkę czasu.

Pracę elektryczną w elemencie o napięciu  $U$ , przez który przepływa prąd  $J$ , określa według (152) wzór

$$A = U \cdot Q = U \cdot J \cdot t$$

Zatem moc elektryczną (pobieraną przez odbiornik lub oddawaną przez wydajnik), określa relacja

$$P = \frac{A}{t} = \frac{U \cdot J \cdot t}{t} = UJ$$

$$\underline{P = U \cdot J} \dots\dots\dots (155)$$

Moc elektryczna prądu stałego przedstawia iloczyn napięcia i prądu.

Techniczną jednostką mocy jest w a t (znak W).

Jednostką mocy elektr. - w a t - ma element, przez który, przy napięciu jednego wolta przepływa prąd jednego ampera. Większą jednostką mocy elektr. jest k i l o w a t (znak kW)

$$\underline{1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}}$$

Celem zorientowania się w wielkości Wata podajemy następujące daty:



- a) Do uruchomienia dzwonka potrzeba około 0,6 W ( $3 \text{ V} \cdot 0,2 \text{ A} = 0,6 \text{ W}$ ).
- b) Żarówka węglowa zużywa na świecę około 3,5 W. Żarówka metalowa próżniowa około 1,1 W na świecę. Żarówka metalowa gazowa (o światłości kilkaset świec) około 0,5 W na świecę.
- c) Moc akumulatora o napięciu 2 V i 100 A prądu wyładowania wynosi  $2 \text{ V} \cdot 100 \text{ A} = 200 \text{ W}$ .  
Moc baterji złożonej z 63 takich ogniw, połączonych szeregowo, równa się  $63 \times 2 \times 100 = 12600 \text{ W}$  czyli 12,6 kW.
- d) Maszyna dynamo o napięciu  $U = 115 \text{ V}$  i prądzie  $J = 10 \text{ A}$  ma moc  $P = 115 \cdot 10 = 1150 \text{ W}$  czyli 1,15 kW.
- e) Obecnie buduje się generatory (prądu zmiennego) dochodzące do mocy (rzeczywistej) 65000 kW.
- f) Moc opornicy o oporności  $10 \Omega$ , przez którą przepływa prąd  $J = 20 \text{ A}$ , wynosi

$$P = U \cdot J = (10 \cdot 20) \cdot 20 = 4000 \text{ W} = 4 \text{ kW}.$$

Moc chwilowa. Moc jako funkcja czasu.

Przy stałym napięciu i stałym prądzie jest moc stała. Gdy napięcie lub prąd, albo obie te wielkości równocześnie ulegają zmianom, mówimy o mocy chwilowej. Oznacza „u” napięcie chwilowe elementu obwodu, a „i” natężenie chwilowe przepływającego przez niego prądu, to chwilową moc tego elementu określa iloczyn

$$p = u \cdot i \dots\dots\dots(156)$$

W wypadku, gdy moc ulega ciągłym zmianom, piszemy

$$P_t = U_t \cdot J_t \dots\dots\dots(157)$$

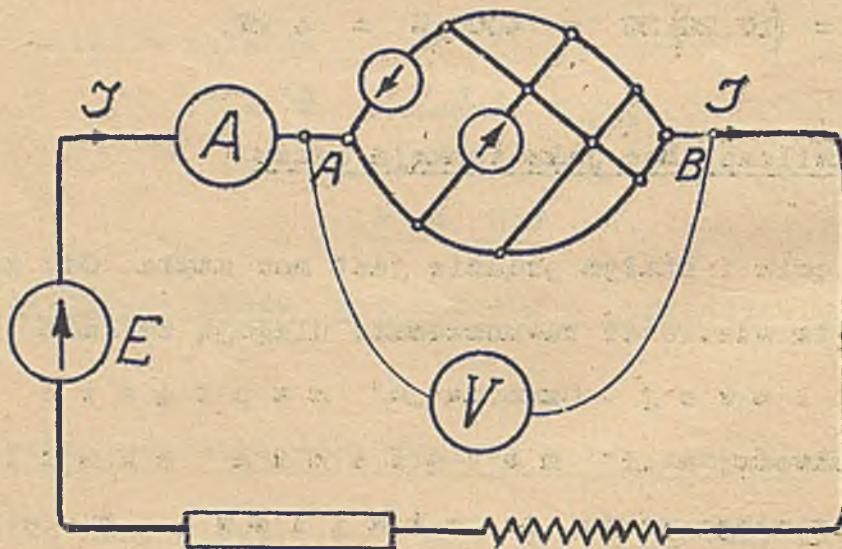
Indeksy „t” oznaczają tu funkcje czasu. Moc jako funkcja czasu ( $P_t$ ) równa się iloczynowi napięcia jako funkcji czasu ( $U_t$ ) i prądu jako funkcji czasu ( $J_t$ ).



### Pomiar mocy (Watomierz).

Pomiar mocy prądu stałego można uskutecznić w dwojaki sposób, a mianowicie albo z pomocą dwu przyrządów - woltomierza i amperomierza, lub też przy zastosowaniu jednego przyrządu t.zw. watomierza.

Pierwszy sposób (z pomocą woltomierza i amperomierza) wynika wprost z wzoru  $P = U \cdot J$ , który poucza, że moc dowolnej części obwodu (połączonej z resztą dwoma węzłami) równa się iloczynowi napięcia ( $U$ ) ujawniającego się między temi węzłami, i natężenia prądu ( $J$ ) płynącego przez te węzły. Zgodnie z tem moc elementu  $AB$  dowolnie złożonego (rys.306) określa iloczyn  $U \cdot J$ . Napięcie  $U$  wskazuje woltomierz  $V$  załączony na końcówki tego elementu, natężenie prądu  $J$  amperomierz wpięty w przewód, łączący element z resztą obwodu ( $A$ ).

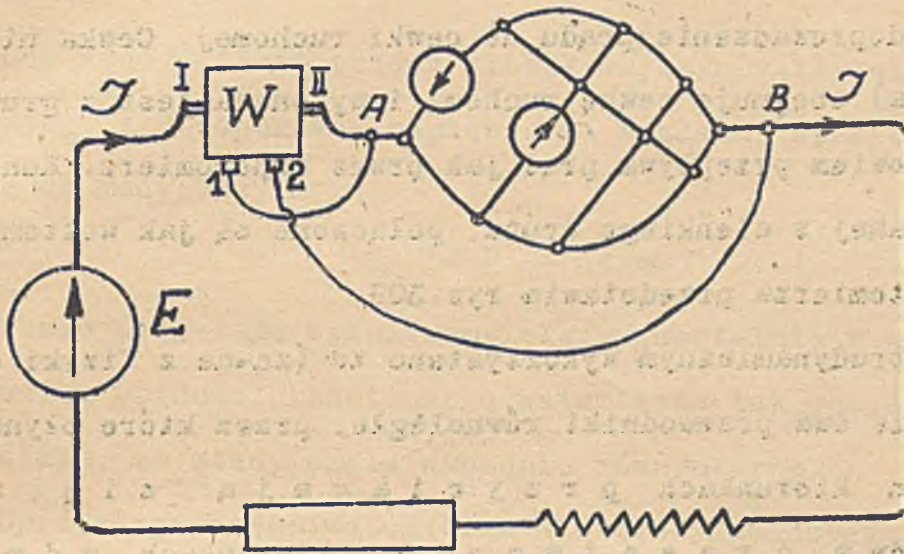


Rys. 306.

Jeżeli pomiar taki, dwoma przyrządami ma być zastąpiony jednym przyrządem, watomierzem, to przyrząd ten musi reagować równocześnie i na prąd i na napięcie. Musi więc posiadać cztery końcówki, z których dwie połączymy w ten sam sposób jak końcówki amperomierza, a dwie tak samo jak końcówki woltomierza. Odchylenia przyrządu muszą być proporcjonalne do iloczynu  $U \cdot J$ .



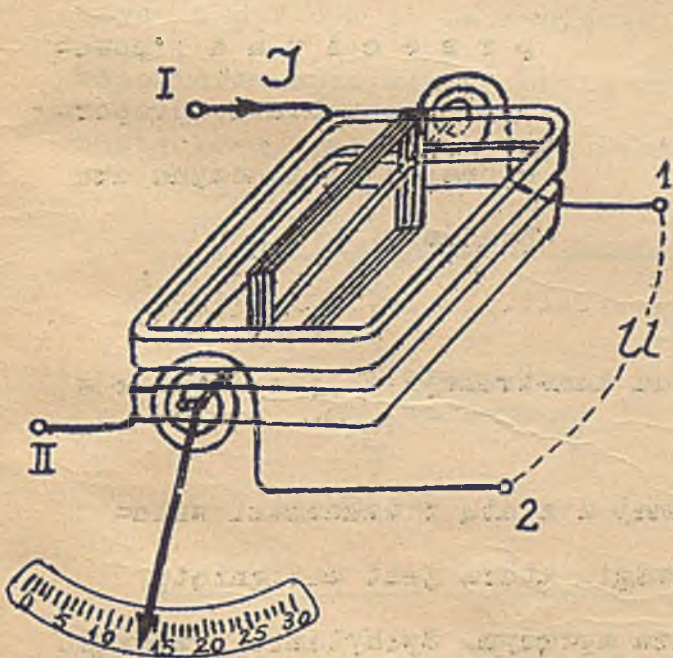
Bez względu więc na rodzaj watomierza, załączamy go celem pomiaru mocy  $P = U \cdot J$  w sposób podany na rys.307.



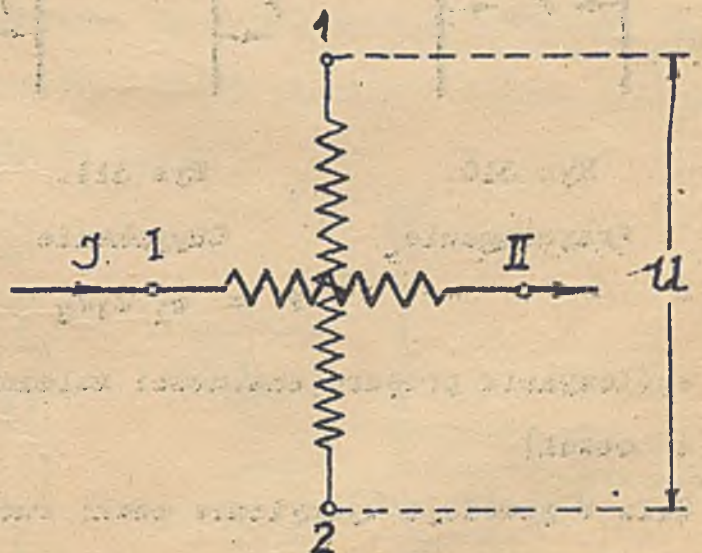
Rys. 307

Końcówkami I-II włączony tu jest watomierz tak jak amperomierz, końcówkami 1-2 tak jak woltomierz.

Używane powszechnie watomierze elektrodynamiczne składają się z dwu cewek: jednej prądowej-nieruchomej i drugiej napięciowej-ruchomej (rys.308). Cewka ruchoma osadzona jest na osi,



Rys. 308.

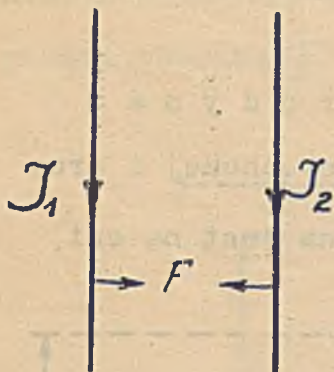


Rys. 309.



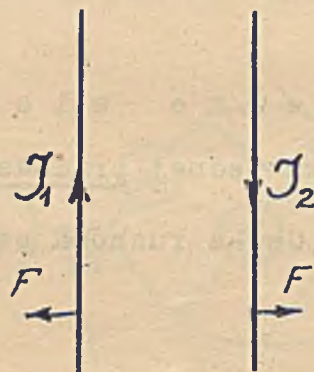
połączonej ze wskazówką i dwiema spiralnymi sprężynkami, przeciwstawiającymi się obrotowi osi a tem samem wychyleniu wskazówki. Sprężynki te służą równocześnie jako doprowadzenie prądu do cewki ruchomej. Cewka nieruchoma (tu dwudzielna) obejmuje cewkę ruchomą i wykonana jest z grubszego drutu, przez nią bowiem przepływa prąd jak przez amperomierz. Końcówki cewki ruchomej, wykonanej z cienkiego drutu, połączone są jak woltomierz. Schematyczny układ watomierza przedstawia rys.309.

W watomierzu elektrodynamicznym wykorzystano to (znane z fizyki elementarnej) zjawisko, że dwa przewodniki równoległe, przez które płyną prądy w zgodnych kierunkach przyciągają się, a takie przez które płyną prądy w przeciwnych kierunkach, odpychają się (rys.310 i 311). Cewki watomierza nie załączonego mają



Rys.310.

Przyciąganie.



Rys.311.

Odpychanie.

położenie równoległe.

Gdy cewki te załączymy właściwie, płyną w ich bokach, leżących obok siebie, prądy przeciwnie, powodując odpychanie, proporcjonalne do iloczynu obu prądów

$$F = c_1 \cdot J_1 J_2 \dots\dots\dots (158)$$

( $c_1$  współczynnik proporcjonalności zależny od konstrukcji i połączenia cewek).

Siła  $F$  powoduje wychylenie cewki ruchomej a z nią i wskazówki watomierza o kąt  $\alpha$  odpowiadający stanowi równowagi, która jest osiągnięta, gdy moment siły  $F$  zrównoważony jest momentem sprężyn. Wychylenie przyrządu jest zatem proporcjonalne do poprzedniego iloczynu

$$\alpha = c_1 \cdot J_1 J_2$$



Przy stałej oporności R cewki ruchomej jest  $J_2 = U/R$ , zatem

$$\alpha = c_1 \cdot J_1 \cdot \frac{U}{R} = c_2 \cdot J_1 U$$

Gdy więc  $J_1$  jest prądem przepływającym węzły elementu, którego moc mierzymy, a U odpowiada napięciu na węzłach, wychylenie jest proporcjonalne do mocy, czyli

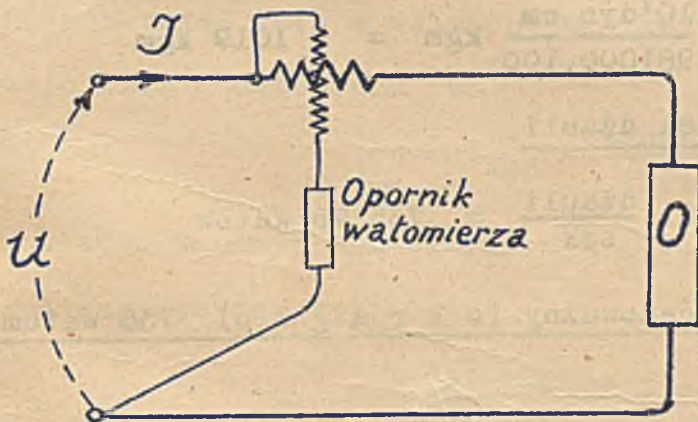
$$P = c \cdot \alpha \dots\dots\dots (159)$$

Skalę przyrządu wyznaczamy eksperymentalnie w watach lub kW, starając się o ile możliwości konstrukcją watomierza tak obmyśleć, aby c było możliwie stałe, bo wtedy skala wypadnie równomierna.

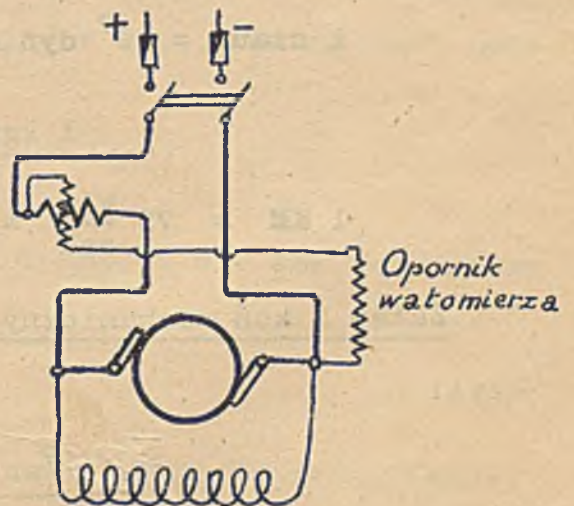
Oprócz opisanego watomierza elektrodynamicznego (bez żelaza) używane są także watomierze elektrodynamiczne (z rdzeniami żelaznymi), dalej, systemu Ferrarisa (polegające na elektrodynamicznym działaniu prądów wirowych) i ciepłikowe.

W opisy tych przyrządów nie będziemy jednakże wchodzić, przynależy to bowiem do miernictwa elektrotechnicznego.

Normalnie oporność cewki ruchomej jest zbyt mała, by ją można było łączyć wprost na napięcie elementu. Zwyczajnie więc dołączony jest do watomierza specjalny opornik precyzyjny, który łączymy w szereg z cewką napięciową, jak to okazują schematy na rys. 312 i 313.



Rys. 312.



Rys. 313.



W watomierzu, tak jak i w amperomierzach i woltomierzach, występują straty, które przy pomiarze trzeba odpowiednio uwzględnić. (Patrz dalej „Pomiary zasadnicze”).

W pomiarach watomierzem chodzi zazwyczaj o ustalenie mocy wydajnika i odbiornika. Rys.312. przedstawia układ połączeń dla wydajnika, który reprezentuje tu sieć o napięciu U. Rys.313. uwidocznia sposób załączenia watomierza, celem pomiaru mocy odbiornika, którym jest tu motor prądu stałego

Równoważnik elektromechaniczny mocy.

Porównując moc elektryczną z mocą mechaniczną, możemy napisać

$$P_{\text{elektr.}} = k \cdot P_{\text{mech.}}$$

$P_{\text{elektr.}} = U \cdot J$  przedstawia tu moc elektryczną w Watach czyli dżaulach na sekundę,  $P_{\text{mech}}$  wyrażamy w koniach mech. (KM = 75 kgm/sek).

Spółczynnik k uzgadniający obie strony powyższej równości możemy nazwać równoważnikiem elektromechanicznym

Przy założeniu, że

$$1 \text{ kg} = 981000 \text{ dyn},$$

i uwzględnieniu, że

$$1 \text{ dżaul} = 10^7 \text{ ergów},$$

otrzymamy

$$1 \text{ dżaul} = 10^7 \text{ dyn.cm} = \frac{10^7 \text{ dyn cm}}{981000 \cdot 100} \text{ kgm} = 0.1019 \text{ kgm}$$

$$1 \text{ kgm} = 9.81 \text{ dżauli},$$

$$1 \text{ KM} = 75 \frac{\text{kgm}}{\text{sek}} = 75 \cdot 9.81 \frac{\text{dżauli}}{\text{sek}} = 735.75 \text{ Watów}$$

Zatem 1 koń mechaniczny jest równoważny (o k r a g ł o) 736 watom,

czyli

$$P_{\text{watów}} = 736 P_{\text{KM}} \dots \dots \dots (160)$$

$$k = 735.75 \text{ W/KM} \dots \dots \dots (161)$$



Albo

$$1 \text{ kW} = 1.35915 \dots \text{ KM}$$

Okragło przyjmuje się

$$\underline{1 \text{ kW} = 1.36 \text{ KM}} \dots \dots \dots (162)$$

Uwaga: Powyższych związków nie należy traktować jako wzorów określających wartości mocy przy przemianach energii elektrycznej na mechaniczną i odwrotnie. Właściwie traktowane, mają one jedynie pouczać, jakie związki istnieją między różnymi jednostkami mocy. Moc mechaniczną można wyrazić zarówno w jednostkach m e c h a = n i c z n y c h (KM, kgm na sek, dżaul na sek, erg na sek) jak i e l e k t r o t e c h n i c z n y c h (Wat, kW). W ostatnich latach ujawniają się nawet tendencje zmierzające do wyrugowania KM i zastąpienia go przez kW w myśl (162). Podobnie m o c e l e k t r o t e c h n i c z n y c h (Wat, kW), jak i w m e c h a n i c z n y c h (KM, kgm na sek, dżaul na sek, erg na sek), jakkolwiek w praktyce z tego nie korzystamy. Sprawę przemiany energii elektrycznej na mechaniczną i odwrotnie załatwimy dalej odziedzielnie.

### 3. Praca prądu stałego.

Przy przepływie prądu J przez węzły elementu obwodu o napięciu U wykonana jest w czasie t praca, określona w myśl (152) relacją

$$A = U \cdot Q = U \cdot J \cdot t$$

Wstawiając tu U w woltach, Q w kulombach i J w amp., musimy za t podstawić czas w sekundach, bo

$$J_{\text{amp}} = \frac{Q_{\text{kulomb}}}{t_{\text{sek}}}$$

kładąc w powyższym wzorze U = 1 wolt, J = 1 amp, t = 1 sek, otrzymamy A = 1 Watsekunda czyli dżaul

$$\underline{1 \text{ Watsekunda} = 1 \text{ dżaul}}$$

Jednostka ta jest zbyt mała, by nią można było wyrażać pracę elektr. w urządzeniach technicznych. Ogólnie przyjęto za techniczną jednostkę pracy elektrycznej Watogodzinę (znak Wh).



1 Watogodzina = 3600 Watsekund = 3600 dżauli.

Zmodyfikowano przytem wzór na pracę elektr. w ten sposób, że czas t wstawia się wprost w godzinach

A = U.J.t .....(163)

(Watogodziny = wolty x amp x godziny)

Wzór ten nazywać będziemy technicznym, w odróżnieniu od wzoru fizykalnego

A = U.J.t ..... (164)

(Watsekundy = wolty x amp x sekundy)  
dżauli

Większą techniczną jednostkę pracy elektr. stanowi kilowatgodzina (znak kWh).

1 kWh = 1000 Wh

1kWh = 3600000 dżauli.

Jednostkowa praca elektryczna 1 Wh będzie wykonana w elemencie, przez który w czasie 1 godz. przepływa prąd 1 amp przy napięciu (na końcówkach) równem 1 woltowi.

Z uwagi, że U.J = P, możemy jeszcze napisać

A = P.t ..... (165)

(Watogodziny = waty x godziny)

Celem zorientowania w wielkości Watogodziny, podajemy następujące daty:

a) Żarówka węglowa 16-świecowa zużywa w ciągu jednej godziny świecenia

A = 16 . 3.5 . 1 = 56 Wh (Moc 3.5 W na świecę).

Żarówka metalowa próżniowa 16-świecowa w ciągu godziny

A = 16 . 1.1 . 1 = 17.6 Wh (moc 1.1 W na świecę).

Żarówka metalowa gazowa o mocy 500 W (około 1000 świec) w ciągu godz.

A = 500 . 1 = 500 Wh = 0.5 kWh.

b) Praca elektryczna akumulatora dostarczającego prądu 100 A przy napięciu 2 V wynosi w ciągu 30 minut



$$A = 2 \cdot 100 \cdot \frac{30}{60} = \underline{100 \text{ Wh}}$$

a w czasie jednej sekundy

$$A = 2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{3600} = \frac{1}{18} \text{ Wh} = \underline{200 \text{ dzauili (watosekund)}}.$$

- c) Maszyna dynamo o napięciu  $U = 115 \text{ V}$  i prądzie  $J = 10 \text{ A}$  pracując przez 8 godzin wyprodukuje pracę elektr. w ilości

$$A = 115 \cdot 10 \cdot 8 = \underline{9200 \text{ Wh}} = \underline{9.2 \text{ kWh}}.$$

- d) Całkowita produkcja Polski w roku 1925 wynosiła ogółem 1677 milionów kWh, czyli na jednego mieszkańca 61 kWh (Straszewski „Elektryfikacja Polski” Referat w Wiadomościach Związku Polskich Zrzeszeń tech. 1927 Nr. 8-9 Str. A-333).

- e) W opornicy o oporności  $10 \Omega$ , przez którą przepływa prąd  $J = 20 \text{ A}$  zużywa się na godzinę

$$A = 10 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 1 = \underline{4000 \text{ Wh}} = \underline{4 \text{ kWh}}.$$

(Praca ta zamienia się w całości na ciepło).

- f) Normalne żelazko elektr. do prasowania lub grzejnik o mocy  $P = 350 \text{ W}$  zużywa na godzinę

$$A = 350 \cdot 1 = \underline{350 \text{ Wh}} = \underline{0.35 \text{ kWh}}.$$

(Praca ta zamienia się w całości na ciepło).



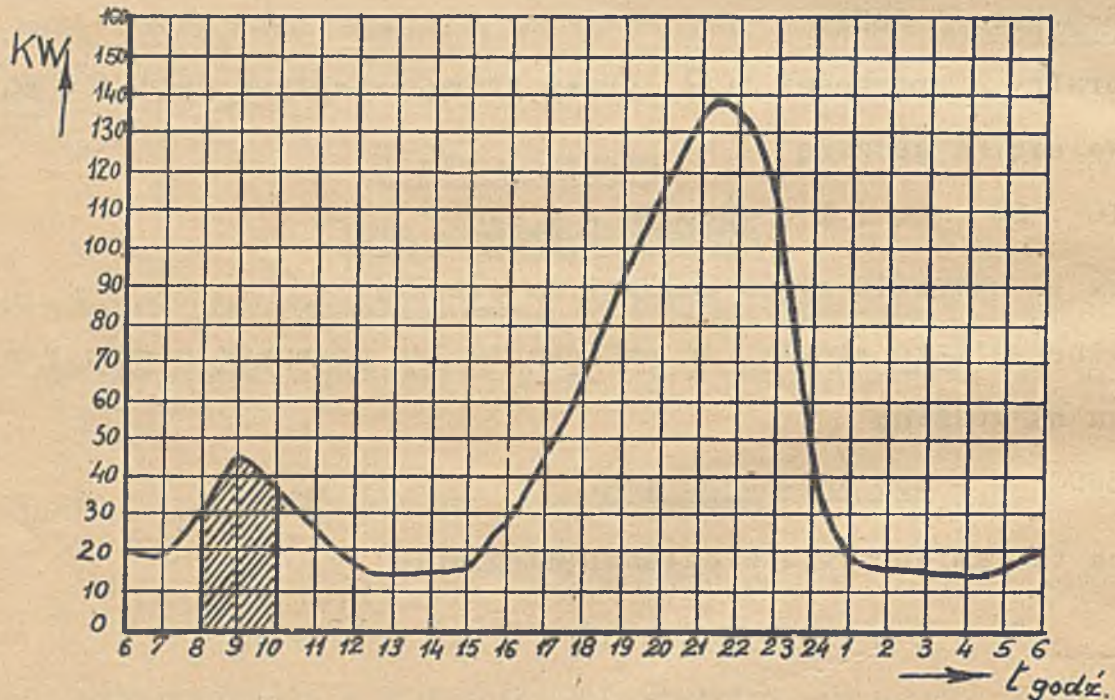
Praca przy zmiennej mocy.

W przypadku, gdy moc prądu stałego ulega zmianom w czasie, należy położyć

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P_t \cdot dt \dots\dots\dots (166)$$

A oznacza tu pracę elektr. w okresie czasu od chwili  $t_1$  do  $t_2$ ,  $P_t$  moc zmienną w czasie [ $P_t = f(t)$ ].

Przedstawiając  $P_t$  jako funkcję czasu, otrzymamy w odwzorowaniu graficznym krzywą, która ilustruje przebieg zmian mocy. Na rys. 314 jest n.p.



Rys. 314.

przedstawiony przebieg zmian mocy elektrowni prądu stałego małego miasta, w ciągu 24 godzin (od godz 6-tej rano dnia jednego do godz 6-tej rano dnia drugiego). W myśl (166) 24-godzinna praca tej elektrowni będzie równa powierzchni, objętej krzywą  $P_t = f(t)$  i osią czasu. Zaś n.p. praca elektr. w czasie n.p. od godz 8-mej do 10-tej rano, odpowiada powierzchni zakresko-

wanej.



Pomiar pracy elektrycznej. (Licznik elektryczny)

Pomiar pracy elektrycznej

$$A = U \cdot J \cdot t$$

można uskutecznić w następujące cztery sposoby:

- a) Z pomocą woltomierza, amperomierza i zegarka,
- b) Z pomocą watomierza i zegarka,
- c) Przy zastosowaniu j e d n e g o przyrządu t.zw. l i c z n i k a e l e k t r y c z n e g o ,
- d) Przy zastosowaniu licznika amperogodzin.

Pierwsze dwa sposoby nie wymagają szczegółowych objaśnień.

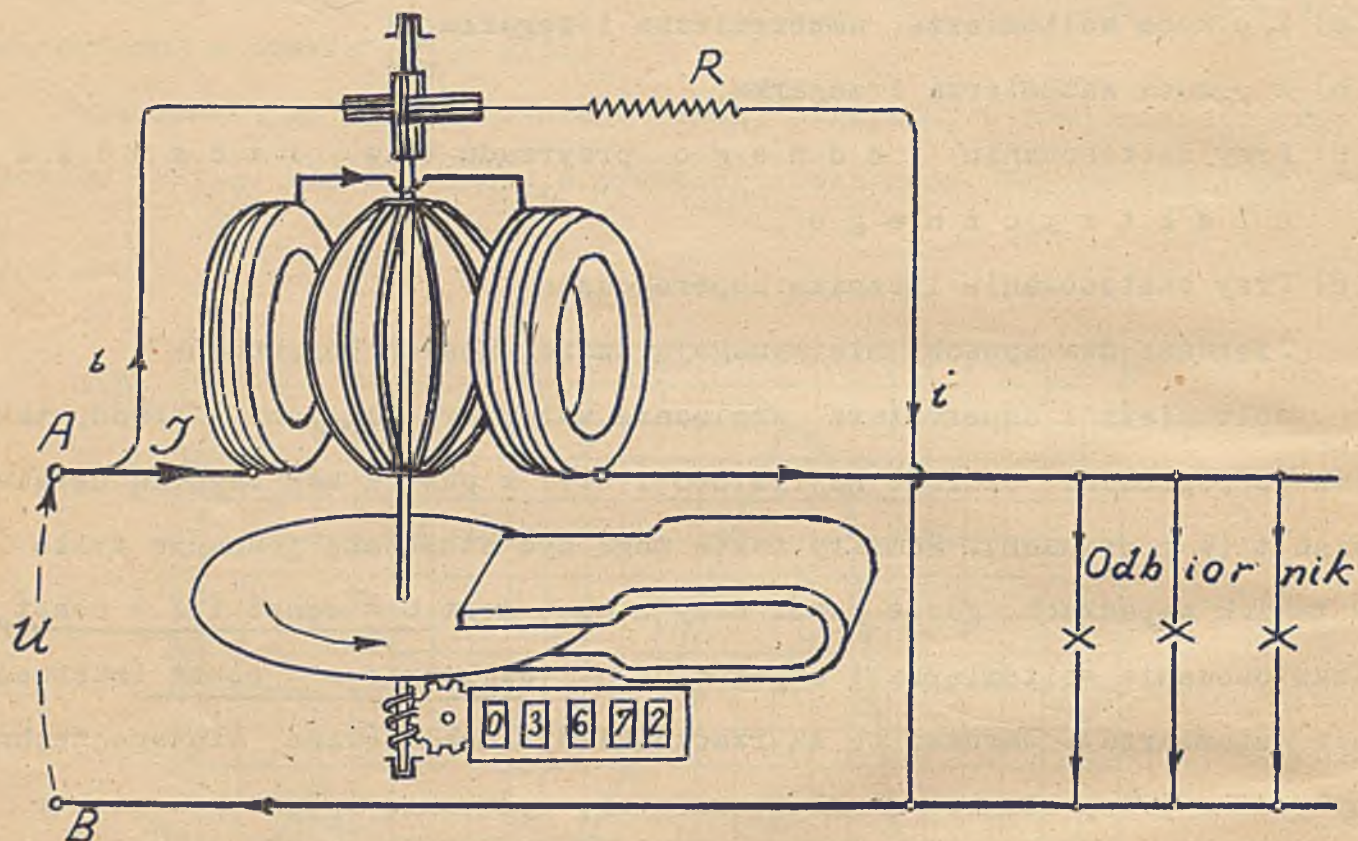
Woltomierz i amperomierz, względnie watomierz włączamy w obwód, tak jak to poprzednio okazano na rys.306 i 307, z pomocą zaś zegarka ustalamy czas  $t$  (w godzinach). Pomiar taki mogą być stosowane jednakże tylko w takich wypadkach, gdzie przez cały czas  $t$  jest  $U = \text{const}$  i  $J = \text{const}$  (zastosowanie woltomierza i amperomierza), względnie  $P = \text{const}$  (zastosowanie watomierza). Warunki te są rzadko kiedy zrealizowane, dlatego techniczny pomiar pracy elektr. A uskutecznia się wyłącznie licznikiem elektr. (kWh), lub wyjątkowo przy  $U = \text{const}$  licznikiem amperogodzin ( $Ah$ ).

Licznik elektryczny musi w zasadzie reagować na napięcie ( $U$ ) na prąd ( $J$ ) i musi w nim znaleźć uwzględnienie czas załączenia ( $t$ ). Przyrząd ten będzie więc posiadał 4 końcówki i będzie załączony 2-ma jak woltomierz, a drugimi 2-ma jak amperomierz. Poza to mechanizm licznika elektr. musi być po załączeniu w ciągłym ruchu, gdyż w ten tylko sposób możliwe jest uwzględnienie czasu. (*liczniki rotacyjne i oscylacyjne*).

Z bardzo wielu rodzajów liczników elektr. wybierzemy i opiszemy tu tylko jeden, najpowszechniej używany t.zw. l i c z n i k m o t o r k o w y .



Licznik motorkowy (rys. 315) zbudowany jest podobnie jak motor prądu stałego, z tą jednakże zasadniczą różnicą, że nie zawiera wcale żelaza. Składa się więc z dwu cewek nieruchomych (magnesy), twornika opatrzonego małym srebrnym kolektorkiem i dwu szczotek srebrnych.



Rys. 315

Pozatem posiada hamulec elektromagnetyczny (tarcza z magnesem), wyzyskujący działanie elektrodynamiczne prądów wirowych) i liczydło obrotów pędzone z osi twornika za pośrednictwem przeniesienia ślimakowego. Połączenie licznika elektr. uskuteczniamy tak, że prąd płynący przez odbiornik (tu żarówki), przechodzi przez cewki nieruchome (magnesy). Są one więc włączone tak, jak amperomierz, czyli - jak się wyrażamy fachowo - „na prąd”. Twornik licznika załączamy, za pośrednictwem szczoteczek tak jak woltomierz, czyli „na napięcie”.

Wskutek działania elektrodynamicznego, wywieranego wzajemnie na siebie przez cewki nieruchome (pod prądem) i cewki twornika (pod prądem), powstaje



moment skręcenia wprawiający twornik w ruch wirowy, hamowany w tarczy aluminiowej wirującej wraz z nim pomiędzy biegunami magnesu stalowego. Widoczne na dole liczydło rejestruje ilość obrotów twornika (n).

Całość jest tak zestawiona, że ilość obrotów jest proporcjonalna do pracy elektrycznej w czasie t

$$A = k \cdot n \quad (\text{w kWh})$$

Warunki dobiera się zwykle tak, aby współczynnik k wynosił 1 lub 0,1 (czasem także 0,5) wówczas bowiem pomiar A sprowadza się tylko do dwu odczytów stanu obrotów i ustalenia miejsca dziesiątego.

Licznik elektr. działa tylko wtedy, gdy zarówno w cewkach nieruchomych (magnesy motorku) jak i w tworniku płyną prądy, gdy więc licznik jest „na prądzie” i „pod napięciem”. Przerwanie jednego z tych obwodów powoduje zatrzymanie licznika. Intensywność wirowania twornika jest proporcjonalna do iloczynu  $U \cdot J$ , czyli do mocy  $P$  mierzonej na końcówkach linii, do której licznik jest włączony. Czynnikiem t uwzględniony jest czasem trwania wirowania od chwili załączenia do chwili wyłączenia prądu.

Pomiar pracy z pomocą licznika elektr. wymaga d w u odczytów, a mia-  
nowicie stanu obrotów w chwili załączenia i stanu obrotów w chwili wyłącza-  
nia prądu.

Przypuśćmy, że stan I wynosi 6523,43

a stan II " 6875,85

Różnica: 352,42

pomnożona przez stałą licznika (k) odpowiada pracy A w kWh. Przypuśćmy, że  $k = 1$ , to

$$A = 352,42 \text{ kWh}$$

Licznik elektr. rejestruje pracę elektryczną w myśl wzoru

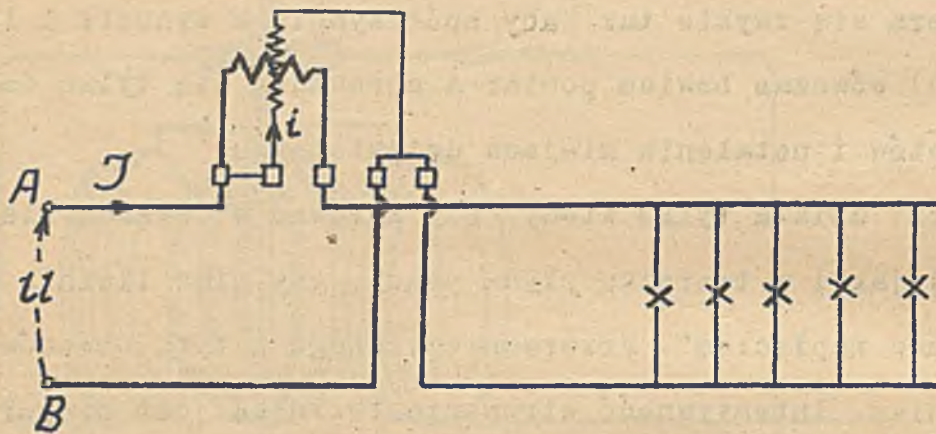
$$A = \int_{t_1}^{t_2} U \cdot J \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} P_t \cdot dt$$

to znaczy funkcjonuje prawidłowo także, gdy zarówno U i J lub P ulegają zmianom w czasie.



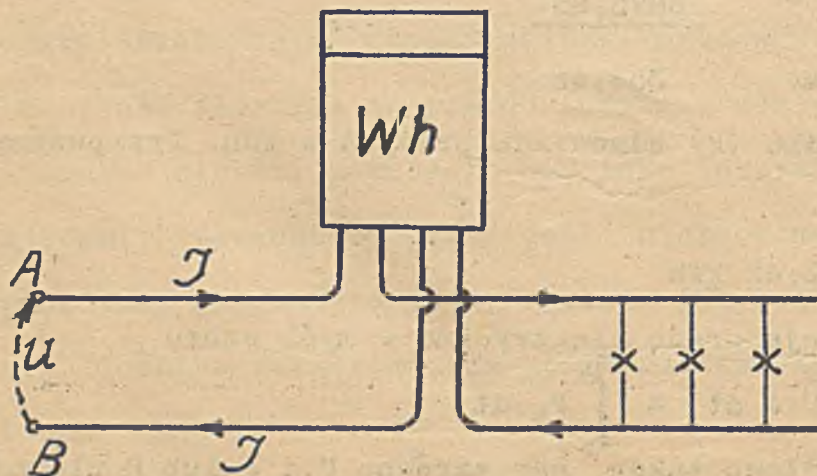
Zmiany te nie mogą być jednakże zbyt szybkie, ani rozciągać się w zbyt wielkich granicach, bo wtedy (wskutek działań indukcyjnych względnie zbyt małych momentów obrotu lub zbyt wielkich strat wewnątrz przyrządu) powstają błędy w pomiarze.

Rys. 316. przedstawia schematyczny układ połączeń licznika zastosowanego do pomiaru pracy elektr. doprowadzanej przez końcówki AB. Widać tu, że do



Rys. 316.

licznika wprowadzony jest także drugi przewód (od B). Ma to na celu przeszkodzenie ewentualnym nadużyciom (obejście licznika elektr. przy poborze energii elektr.). W układzie na rys. 315. obejście takie może być dokonane przez prostą przerwę obwodu napięciowego licznika. Tu staje się to (bez uszkodzenia przewodów) niemożliwym, bo końcówki licznika objęte



Rys. 317.

są pokrywą, zaplombowaną przez dostawcę energii elektrycznej (Rys. 317.).

Wypada zaznaczyć, że opisany tu licznik elektr. prądu stałego funkcjonuje także przy załączeniu



w obwód prądu zmiennego, bo równocześnie ulega zmianom kierunek prądu zarówno w cewkach stałych (magnesy) jak i w tworniku. Sprawą tą zajmiemy się bliżej przy omawianiu prądów zmiennych.

Pomiar pracy elektrycznej licznikiem amperogodzin.

W przypadku, gdy dostawę pracy elektrycznej uskutecznia się przy stałym napięciu  $U = \text{const}$ , można poprzestać jedynie na pomiarze ilości elektryczności  $Q$  jaka w czasie  $t$  (od  $t_1$  do  $t_2$ ) przepłynie przez odbiornik. W przypadku takim bowiem ( $U = \text{const}$ ) jest

$$A = \int_{t_1}^{t_2} U \cdot J \cdot dt = U \int_{t_1}^{t_2} J \cdot dt = U \cdot Q \dots\dots\dots (167)$$

Do pomiaru

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} J \cdot dt$$

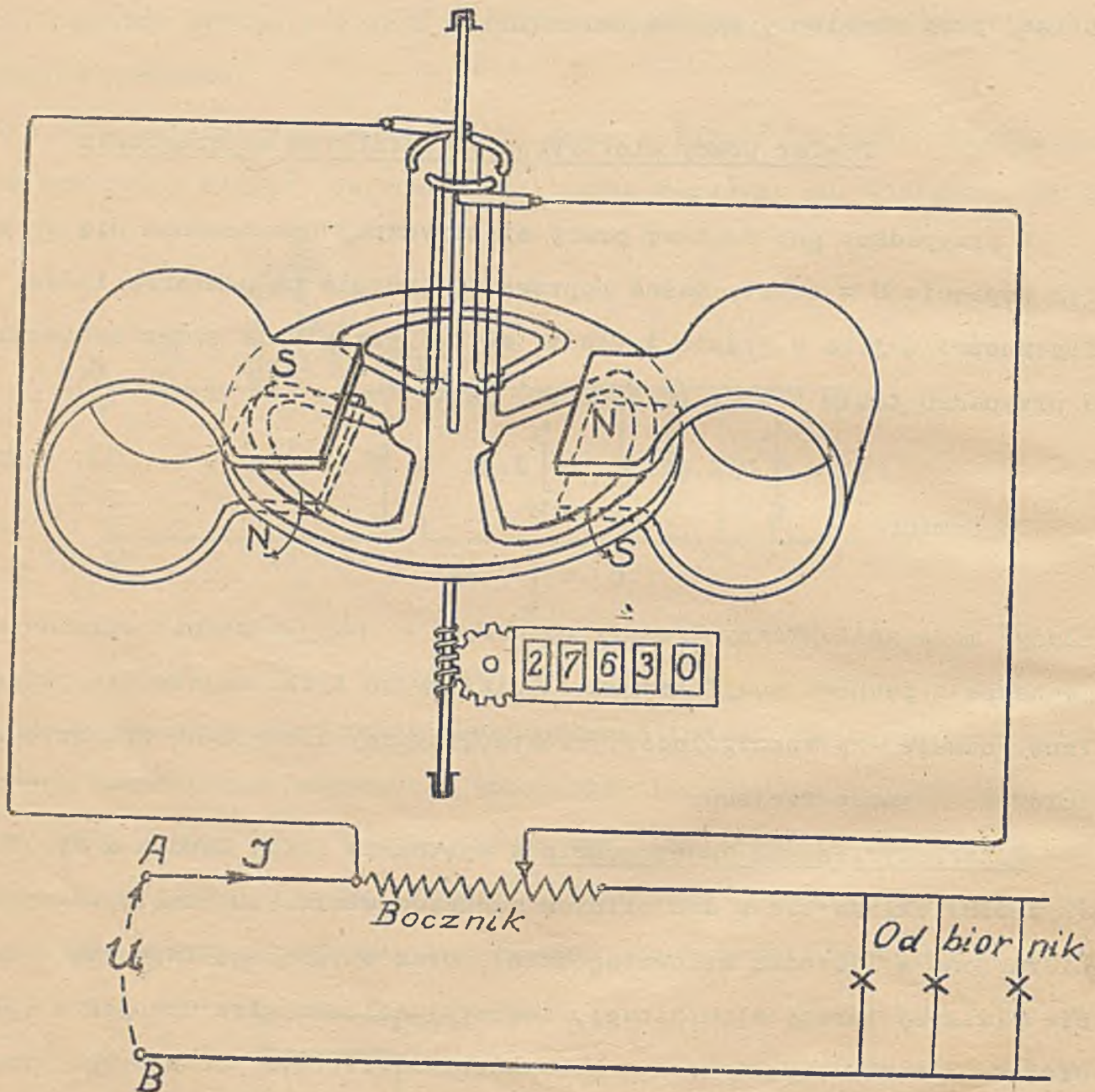
służyć może analogiczny licznik motorkowy - jak poprzednio opisano - jednakże z pewnymi modyfikacjami. Opiszemy tu tylko najczęściej używany. Inne rodzaje - w szczególności elektrolityczny licznik Ah znajdzie uwzględnienie na innym miejscu.

Motorkowy licznik amperogodzin w wykonaniu firmy Landes & Cyr A-G

(Rys. 318) składa się z dwu silnych magnesów stalowych (zastępujących cewki nieruchome w liczniku kilowatogodzin), oraz wirującego twornika w kształcie płaskiej tarczy aluminiowej, zawierającej wewnątrz uzwojenie (płasko ułożone 3 cewki), połączone z kolektorkiem srebrnym, do którego przylegają dwie srebrne szczoteczki.

Przyrząd załączony jest w obwód pobierający energję elektr. jak amperomierz, przyczem celem ograniczenia prądu w cewkach twornika zastosowany jest bocznik (drut cporowy). Do tego bocznika właśnie dołączone są szczoteczki twornika. Na druty twornika pod prądem, działa pole magnesów stalowych (N, S) dając moment skręcenia hamowany prądami wirowymi indukowanymi w blasze tarczy pod wpływem tych samych magnesów.





Rys. 318.

Licznik amperogodzin rejestruje znów jedynie liczbę obrotów, ta jednakże jest proporcjonalna do ilości amperogodzin ( $Q$ ), które przepłynęły przez bocznik,

$$Q = k_1 n$$

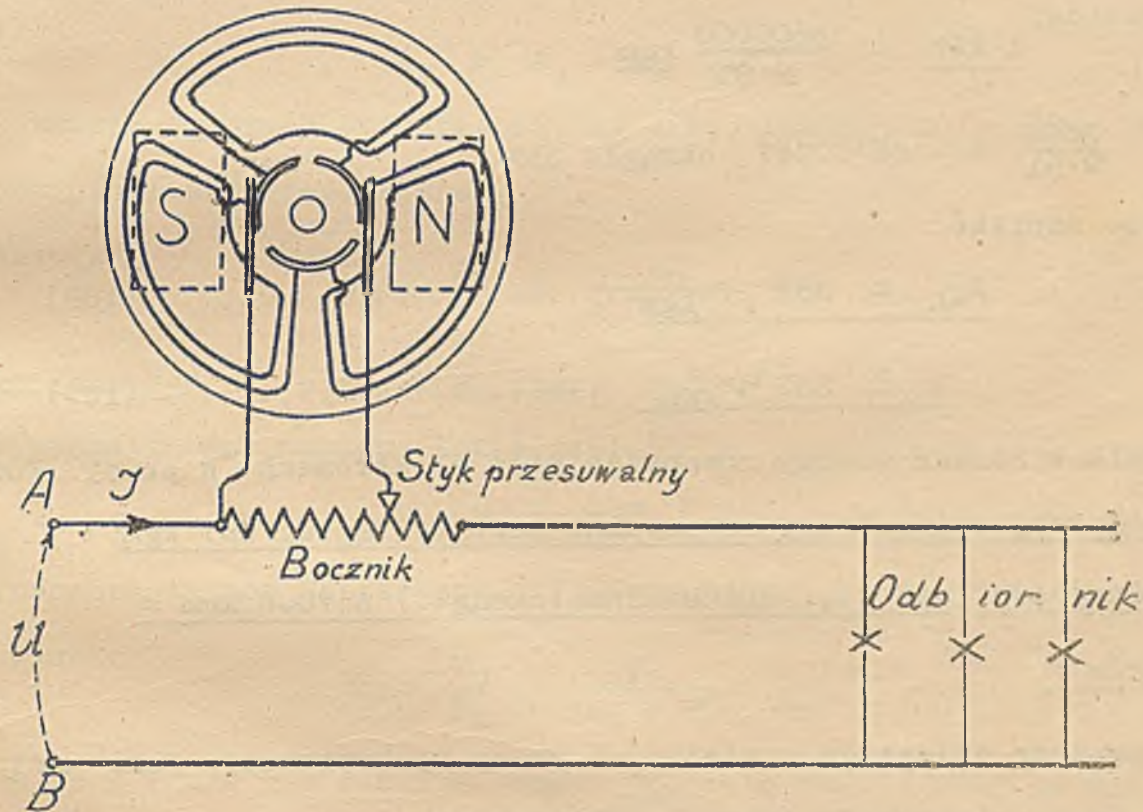
Mnożąc powyższe równanie obustronnie przez  $U = \text{const}$ , otrzymamy pracę elektryczną

$$A = U \cdot Q, \quad A = k \cdot n$$



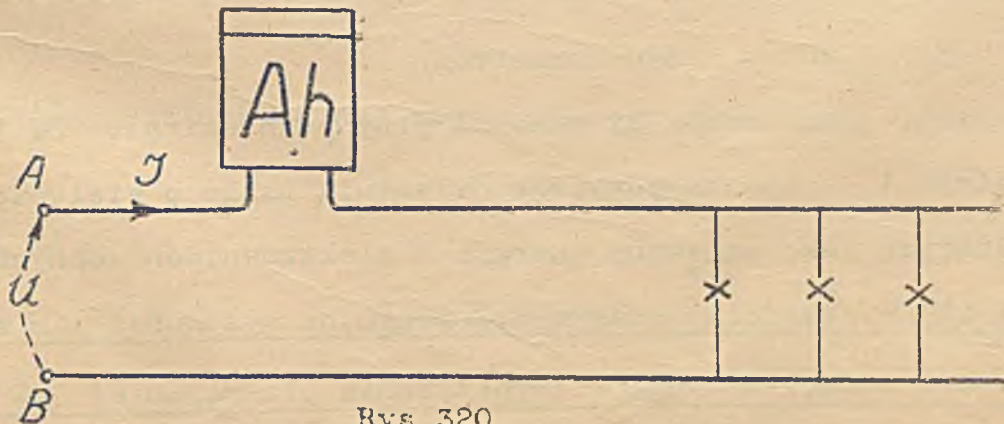
Pomiar licznikiem amperogodzin przeprowadza się więc w ten sam sposób, jak licznikiem pracy elektr., a mianowicie uskutecznia się dwa odczyty, jeden w momencie załączenia, drugi w momencie wyłączenia, oblicza różnicę  $n_2 - n_1 = n$  i mnoży przez stałą przyrządu  $k$ , w której mieści się już  $U = \text{const.}$

Rys. 319. okazuje schematyczny układ połączeń licznika amperogodzin. Widać tu dokładnie układ i sposób połączenia cewek twornika. Bieguny magnesów stałych zaznaczone są linjami kreskowanymi.



Rys. 319

Celem przeszkodzenia ewentualnym nadużyciom, bocznik umieszczony jest wewnątrz przyrządu (rys. 320.)



Rys. 320.



Równoważnik elektromechaniczny pracy.

Porównując pracę elektryczną i mechaniczną, napiszemy

$$A_{\text{mech}} = k \cdot A_{\text{elektr.}}$$

Wstawiając  $A_{\text{elektr}}$  w watosekundach, a  $A_{\text{mech}}$  w kgm, otrzymamy poznany już poprzednio związek

$$1 \text{ watosekunda} = 1 \text{ dżaul} = \frac{1}{9 \cdot 81} \text{ kgm}$$

lub

$$1 \text{ Wh} = 3600 \text{ dżauli} = \frac{3600}{9 \cdot 81} \text{ kgm}$$

Albo wreszcie

$$1 \text{ kWh} = \frac{3600000}{9 \cdot 81} \text{ kgm}$$

$$\frac{3600}{9 \cdot 81} = 366 \cdot 97247 \text{ okrągło } 367$$

Można więc napisać

$$A_{\text{Wh}} = 367 \cdot A_{\text{kgm}} \dots \dots \dots (168)$$

$$k \cong 367 \text{ kgm/Wh} \dots \dots \dots (169)$$

Spółczynnik k nazwać możemy równoważnikiem elektromech. w pracy. Podaje on, że praca jednej watogodziny równoważna jest (okrągło) 367 kgm. Praca jednej kWh jest więc równoważna (okrągło) 367000 kgm =  
= 367 tonmetrów !

Liczby powyższe orientują o wielkości pracy mechanicznej, jaka musi być wykonana przy wytwarzaniu energii elektrycznej.

Rodzina zamieszkująca 3 pokojowe mieszkanie zużywa średnio około 20 kWh miesięcznie (w miesiącach zimowych). Równoważna praca mechaniczna wynosi tu teoretycznie

$$367 \times 20 = 7340 \text{ tonmetrów,}$$

czyli odpowiada pracy, jaką trzeba by wykonać przy podniesieniu 734 ton na wysokość 10 metrów ! - Liczby powyższe orientują także o wielkości zbiorników wodnych służących jako magazyny energii w elektrowniach wodnych.

Zamagazynowanie 1 kWh w zbiorniku wodnym położonym na wysokości 1 m wymaga teoretycznie 367 m<sup>3</sup> wody ! (Praktycznie przynajmniej 30% więcej)



4. Praca i moc w przemianach energii elektr. na mech. i odwrotnie.

W generatorach elektrycznych dokonywa się przemiana pracy mechanicznej na elektryczną, w motorach, przemiana odwrotna, pracy elektrycznej na mechaniczną. Przemiany te są połączone ze stratami, za które uważamy zużycie pracy na przemiany przez nas nie pożądane. Do strat zaliczamy więc zużycie pracy na ciepło (powstające w uzwojeniach i blachach maszyny elektr.) na tarcie w łożyskach i w powietrzu i t.p.

Uwzględniając wszystkie straty, możemy napisać (w myśl prawa zachowania energii)

$$A_d = A_o + A_s \dots\dots\dots (170)$$

$A_d$  oznacza tu pracę dostarczoną,  $A_o$  pracę oddaną,  $A_s$  straty (pracę zużyta na przemiany niepożądane).

Stosunek

$$\eta_A = \frac{A_o}{A_d} = \frac{A_o}{A_o + A_s} \dots\dots\dots (171)$$

nazywamy sprawnością pracy ( $\eta_A$ ).

Wprowadzając moc, możemy także napisać

$$P_d = P_o + P_s \dots\dots\dots (172)$$

$P_d$  oznacza tu moc dostarczoną,  $P_o$  moc oddaną,  $P_s$  moc strat.

Stosunek

$$\eta_P = \frac{P_o}{P_d} = \frac{P_o}{P_o + P_s} \dots\dots\dots (173)$$

nazywamy sprawnością mocy ( $\eta_P$ ) i tę zwykle mamy na myśli mówiąc krótko o sprawności maszyny elektrycznej, transformatora lub innych urządzeń elektrycznych.

Z wzorów powyższych widać, że sprawność  $\eta$  jest liczbą bezwzględną, zawsze mniejszą od 1.

Sprawność określa stosunek mocy wzgl. pracy oddanej do dostarczonej

$$P_o = P_d \cdot \eta \dots\dots\dots (174)$$

oraz wielkość strat

$$P_s = P_d(1 - \eta) \dots\dots\dots (175)$$



W maszynach i motorach elektr. sprawność (mocy)  $\eta_p$  jest duża. Wynosi n.p. dla jednostek o mocy około 10 kW okragło  $\eta = 0.85$  i dochodzi dla większych (5000 kW) do  $\eta = 0.96$ , przekraczając nawet tę wartość w jednostkach jeszcze większych (generatory prądu 3-fazowego).

Wartość  $\eta = 0.85$  maszyny elektr. o mocy n.p. 10 kW oznacza, że w maszynie tej straty wynoszą (przy pełnym obciążeniu) 15 % dostarczanej mocy, czyli, że z dostarczonej mocy tylko 85 % ulega przemianie pożytecznej.

Uwzględniając  $\eta$  napiszemy więc

a) Dla generatora elektrycznego

$$P_{KM} = \frac{P_{\text{Watów}}}{736 \cdot \eta} \dots\dots\dots (176)$$

$$\text{Popęd mech. w KM} = \frac{\text{Oddana moc elektryczna w Watach}}{736 \cdot \eta}$$

b) Dla motoru elektrycznego

$$P_{\text{Watów}} = \frac{P_{KM} \cdot 736}{\eta} \dots\dots\dots (177)$$

$$\text{Moc elektr. pobierana w Watach} = \frac{\text{Moc mech. w KM} \times 736}{\eta}$$

Przykład 1. Obliczyć moc mechaniczną motoru benzynowego, który ma służyć do popędu dynamo o mocy elektrycznej 10 kW.

$$P_{KM} = \frac{10000}{736 \cdot 0.85} \cong 16 \text{ KM}$$

czyli 1.6 KM na 1 kW.

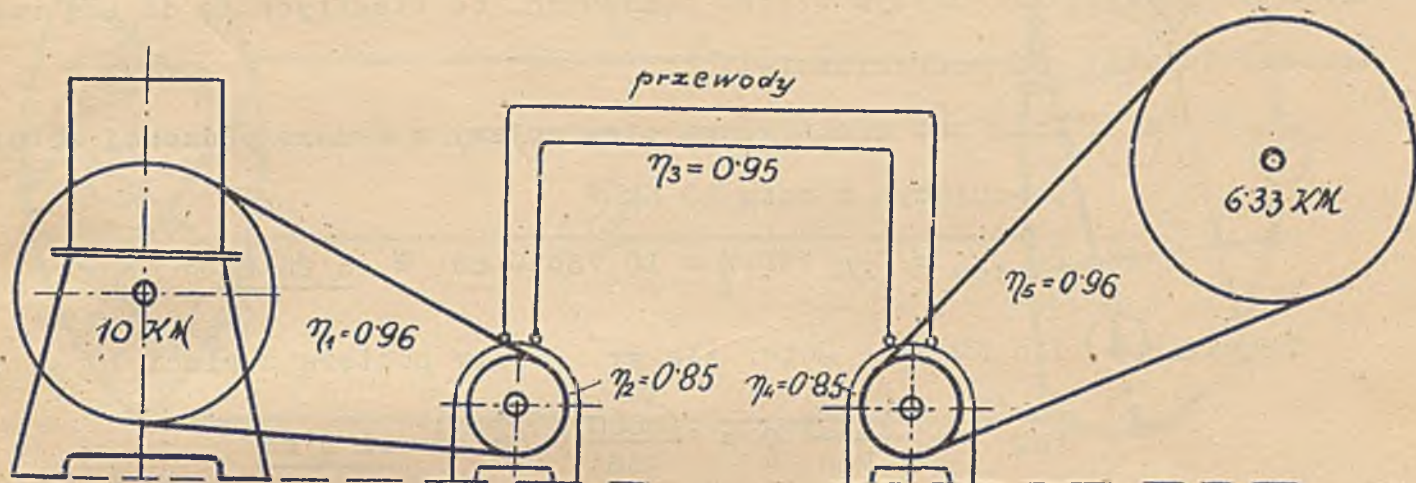
Przykład 2. Jaka moc elektr. pobiera motor elektr. (w pełnym obciążeniu) o mocy 10 KM.

$$P_{\text{Watów}} = \frac{10 \cdot 736}{0.85} \cong 8660 \text{ W} = 8.66 \text{ kW}$$

czyli 866 Watów na KM.



Warto obliczyć jaką moc uzyskamy na końcu przeniesienia złożonego z motoru mech., dynamo, motoru elektr. i transmisji (rys.321).



Rys. 321.

Oznaczają  $\eta_1 = 0.96$  i  $\eta_5 = 0.96$  sprawności obu przeniesień pasowych,  $\eta_2 = 0.85$  i  $\eta_4 = 0.85$  sprawności dynamo i motoru, a  $\eta_3 = 0.95$  sprawność przeniesienia elektrycznego (5% straty mocy w przewodach) to przy mocy motoru popędowego 10 KM

Dynamo otrzymuje  $10 \cdot \eta_1 = 10 \cdot 0.96 = 9.6 \text{ KM}$ ,

oddaje  $9.6 \cdot \eta_2 = 10 \cdot \eta_1 \eta_2 = 10 \cdot 0.816 \cong 8.16 \text{ KM}$ ,

Motor otrzymuje  $8.16 \eta_3 = 10 \cdot \eta_1 \eta_2 \eta_3 = 10 \cdot 0.7752 \cong 7.75 \text{ KM}$ ,

oddaje  $7.75 \eta_4 = 10 \cdot \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 = 10 \cdot 0.65892 \cong 6.59 \text{ KM}$ ,

Transmisja otrzymuje  $6.59 \eta_5 = 10 \cdot \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5 = 10 \cdot 0.6325632 \cong 6.33 \text{ KM}$ ,

Sprawność całkowitego przeniesienia wynosi więc

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \eta_5 \cong 0.6325$$

czyli całkowite straty (od motoru popędowego aż po transmisję) dosięgają okragło 37% i mocy motoru popędowego.



Gros tych strat przypada na dynamo ( $\eta = 0.85$ ) i motor ( $\eta = 0.85$ ).

Wynika stąd, że przy małych mocach i małych odległościach motoru pędowego i transmisji, przeniesienie pasowe jest korzystniejsze od elektrycznego. (Oczywiście, gdy nie zachodzi konieczność regulacji obrotów transmisji względnie maszyn z niej pędzonych, co elektrycznie da się uskutecznić łatwiej niż mechanicznie).

Przykład 3. Jaka moc elektryczną otrzymujemy z dynamo pędzonej motorem pracującym z mocą 10 KM ?

$$P_{\text{Watów}} = P_{\text{KM}} \cdot 736 \cdot \eta = 10 \cdot 736 \cdot 0.85 \cong \underline{6.25 \text{ kW}}$$

Przykład 4. Ile KM daje motor elektr., który pobiera z sieci 10 kW ?

$$P_{\text{KM}} = \frac{P_{\text{Watów}}}{736} \cdot \eta = \frac{10000}{736} \cdot 0.85 \cong \underline{11.5 \text{ KM}}$$

Uwaga: Trzeba sobie zdawać sprawę, kiedy należy mnożyć a kiedy dzielić przez  $\eta$ . W tym kierunku orientuje najlepiej relacja

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{oddane}} &= P_{\text{dostarczone}} \cdot \eta \\ P_{\text{dostarczone}} &= \frac{P_{\text{oddane}}}{\eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (178)$$

### 5. Moc i praca w układach n-przewodowych.

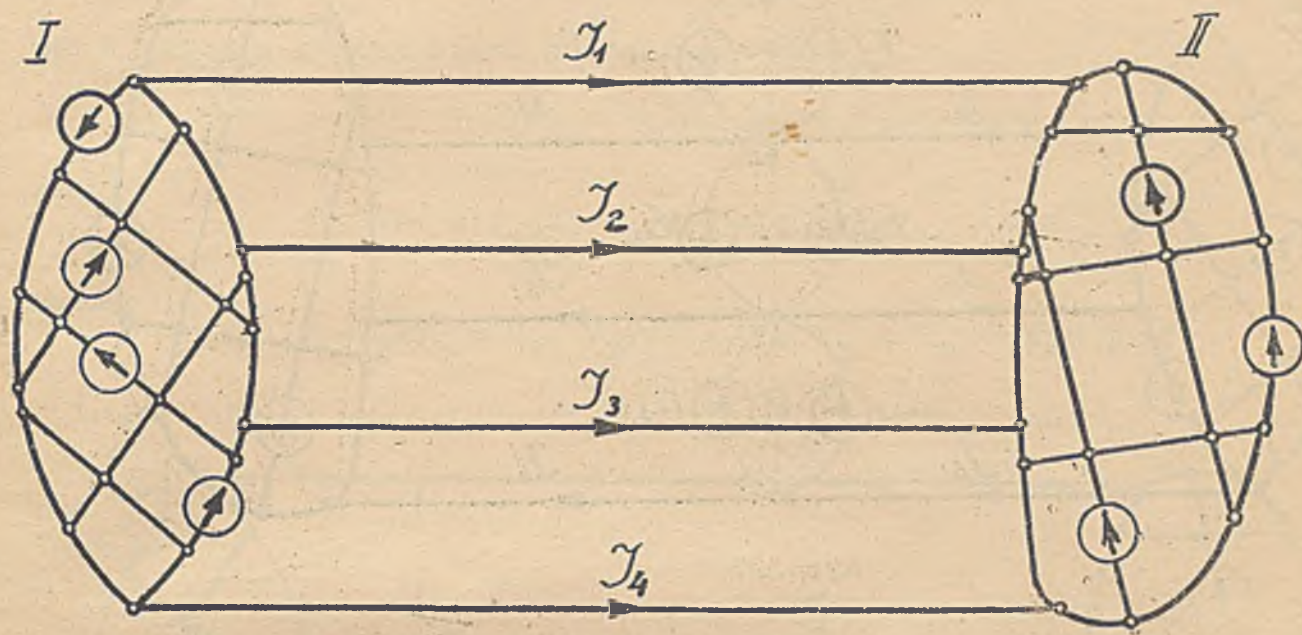
W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy, że element lub zespół elementów dostarczający pracy elektr. lub ją pobierający, połączony jest z resztą sieci tylko 2-ma węzłami (rys.306, 307). W praktyce mamy jednak do czynienia z układami, w których wydajnik połączony jest z odbiornikiem kilkoma przewodami (n.p. układy trójprzewodowe prądu stałego, układy trójfazowe ze zerem i bez zera prądu zmiennego i t.p.). Trzeba przeto zastanowić się jak określić moc i pracę, i jak ją należy mierzyć w takich właśnie układach.

Zadanie to rozwiążemy zupełnie ogólnie <sup>1)</sup>, biorąc za podstawę do

1) Fryze „Moc i praca w układach n-przewodowych”, P.E.1928.



rozważań układ 4-przewodowy (Rys.322). Przyjmujemy, że:



Rys.322.

dostępne są tylko przewody, łączące układ I z II, że więc pomiary napięć, prądów, mocy i pracy, należy uskutecznić bez możliwości wnikania w ustrój zespołów elektrycznych I i II. Zakładamy tylko, że wszędzie płyną prądy

stałe i że wszędzie działają stałe SEM-czne. Zadanie napozór trudne, spróbujemy do bardzo łatwego, stosując zasadę wyodrębnienia

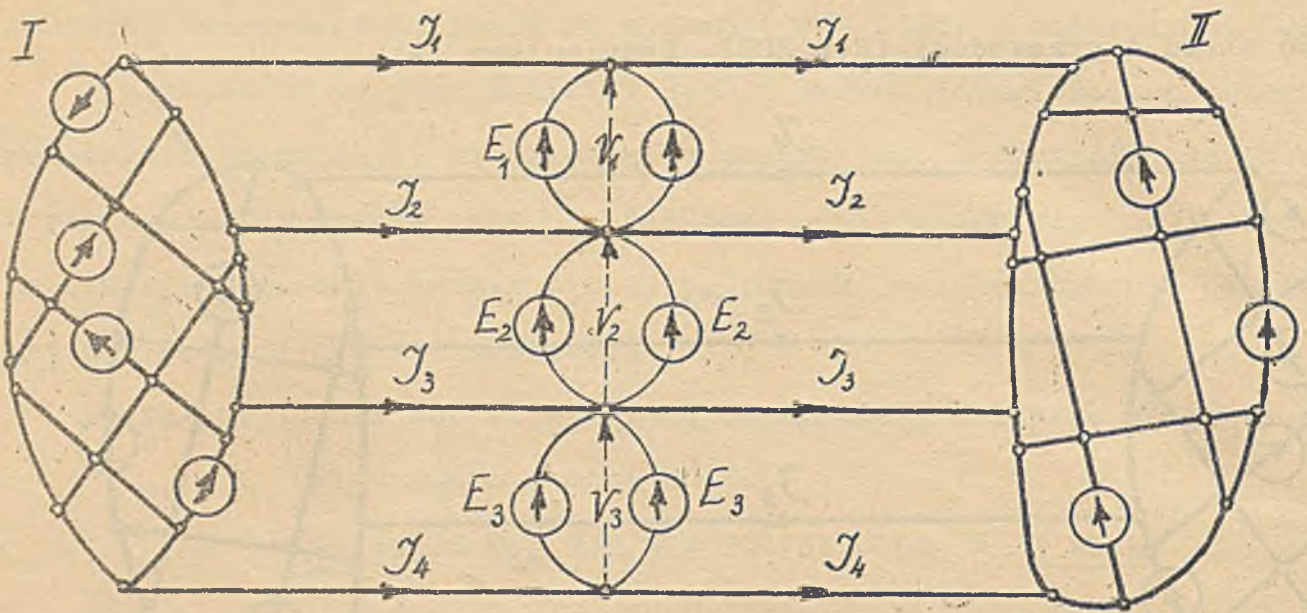
W miejscu, pomiędzy I i II, gdzie ma być zmierzona moc i praca przy równoczesnym ustaleniu, który z tych zespołów jest wydajnikiem a który odbiornikiem, włączamy w myśl i po parze kompensujących SEM-cznych, pomiędzy każde dwa przewody (Rys.323.).

W rozplywie prądów i rozkładzie napięć całego układu nie nastąpi wskutek tego żadna zmiana, bo

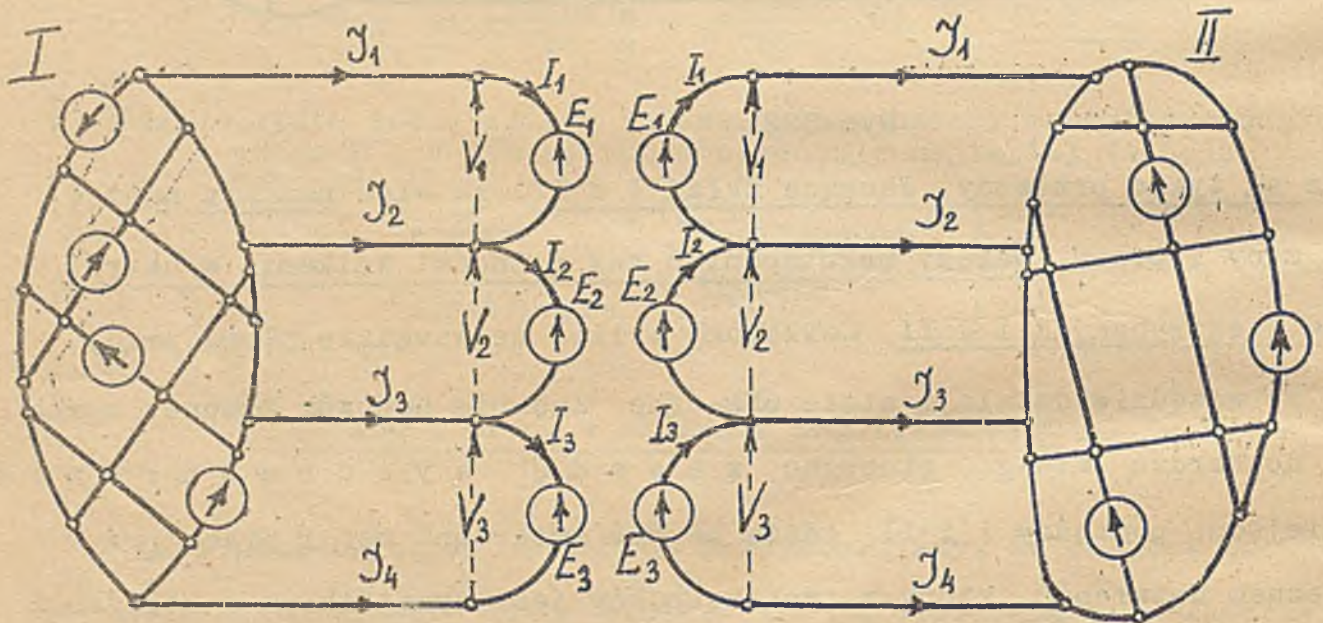
$$E_1 = V_1, \quad E_2 = V_2, \quad E_3 = V_3$$

Przecinając w myśli nowe utworzone 4-ry wężki, otrzymamy dwa oddzielne układy (Rys.324.), w których obliczenie mocy i pracy nie nastroczą już żadnych trudności.





Rys. 323.



Rys. 324.

Oznaczmy prądy przepływające przez dołączone (kompensujące) SEM-czne symbolami  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ . W myśl I-go prawa Kirchhoffa musi być

$$I_1 = J_1, \quad I_2 = J_1 + J_2, \quad I_3 = J_1 + J_2 + J_3 = \dots J_4$$

$$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0$$



Biorąc pod uwagę prawą część układu, napiszemy

$$P = V_1 I_1 + V_2 I_2 + V_3 I_3$$

lub w związku z powyższymi równaniami

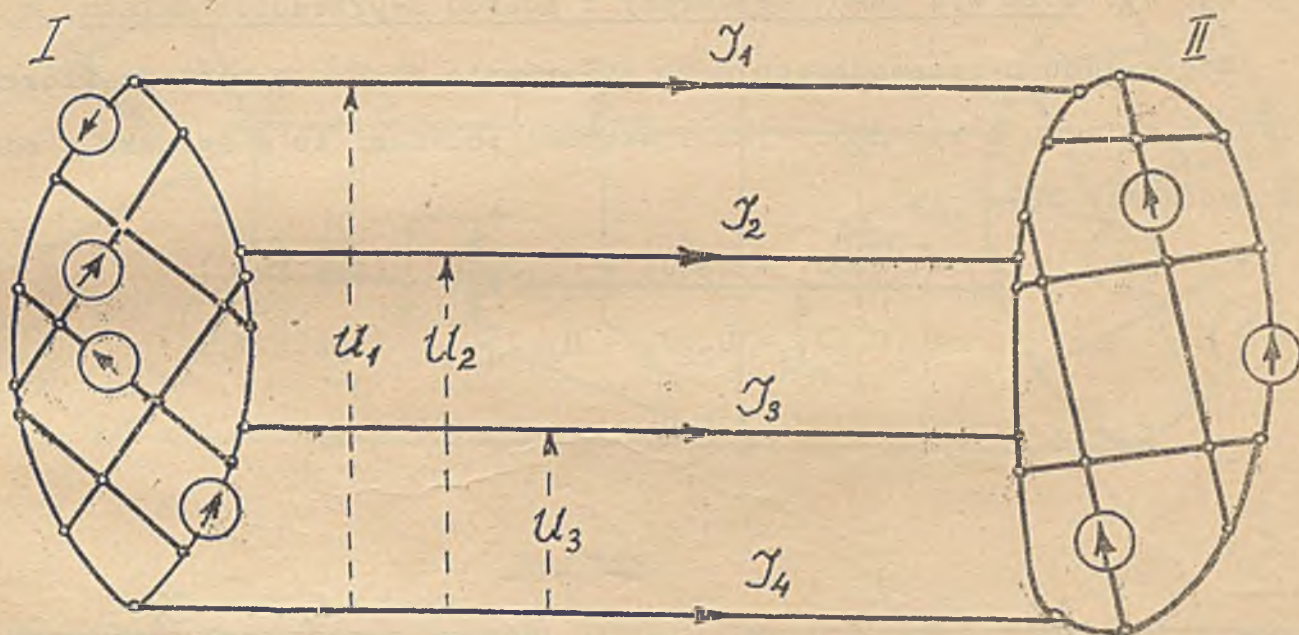
$$P = V_1 J_1 + V_2 (J_1 + J_2) + V_3 (J_1 + J_2 + J_3)$$

albo

$$P = J_1 (V_1 + V_2 + V_3) + J_2 (V_2 + V_3) + J_3 V_3$$

kładąc

$$V_1 + V_2 + V_3 = U_1, \quad V_2 + V_3 = U_2, \quad V_3 = U_3 \quad (\text{Rys. 325.})$$



Rys. 325.

możemy napisać

$$P = U_1 J_1 + U_2 J_2 + U_3 J_3 \quad \dots \dots \dots (179)$$

Powyzszy wzór określa moc układu 4-przewodowego, orientując, że gdy s u m a powyższa dla podanych (na rys. 325.) strzałek U i J da wartość dodatnią, to zespół lewy (I) jest wydajnikiem, a zespół prawy (II) odbiornikiem, jeżeli zaś wypadnie ze znakiem ujemnym, to zespół I jest odbiornikiem, a zespół II wydajnikiem, bez względu na ilość elementów i sposób ich połączenia w I i II, jednakże z zastrzeżeniem ważności tylko dla prądów stałych.



Mnożąc równanie (179) przez czas  $t$ , otrzymamy relację na pracę układu  $n$ -przewodowego

$$\underline{A = U_1 J_1 t + U_2 J_2 t + U_3 J_3 t \dots\dots\dots (180)}$$

przyczem z uwzględnieniem znaków (praca wydajnika dodatnia, praca odbiornika ujemna) wypadnie znów  $\pm A$ , zależnie od tego, czy  $I$  jest wydajnikiem (+  $A$ ), czy odbiornikiem (-  $A$ ).

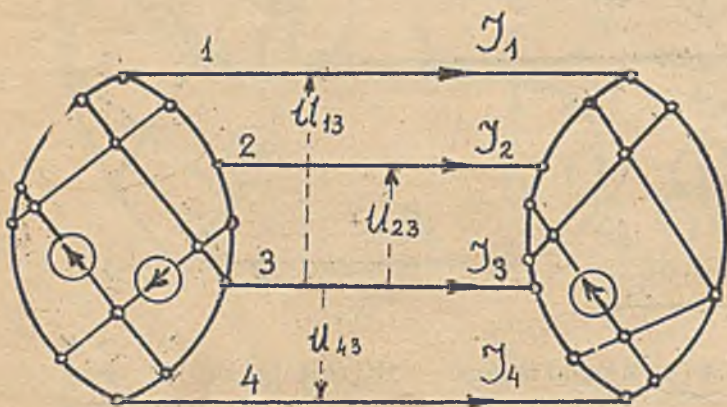
Przeprowadzone powyżej rozważanie ujawnia, że za przewód odniesienia, t.j. ten, względem którego mierzymy napięcia  $U_1, U_2, U_3$ , może być dowolnie obrany spośród  $n$ -przewodów układu.

Moc układu  $n$ -przewodowego może być równie dobrze określona wzorem (179) w związku z rys.325., jak i wzorami podanymi tu w związku z odnośnościami rys 326., 327.

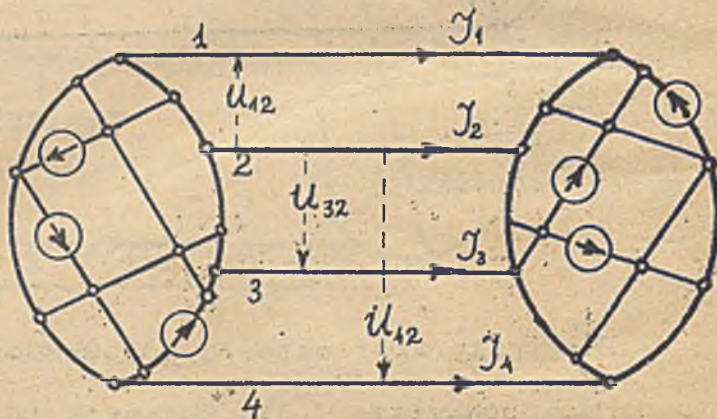
$$P = U_{13}J_1 + U_{23}J_2 + U_{43}J_4 \quad (\text{Rys. 326.})$$

$$= U_{12}J_1 + U_{32}J_3 + U_{42}J_4 \quad (\text{Rys. 327.})$$

i t.d.



Rys. 326.

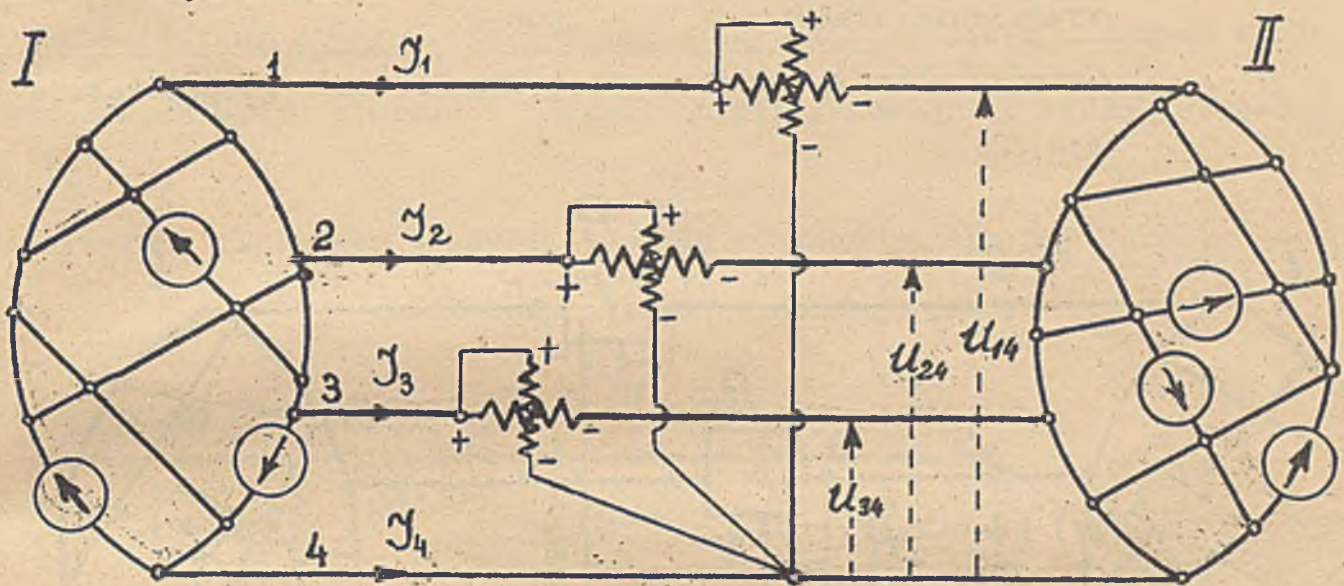


Rys. 327.



Pomiar mocy układu n-przewodowego prądu stałego.

Wzór (179) poucza, że pomiar mocy układu n-przewodowego można wykonać z pomocą n-1 watomierzy, z których każdy załączony będzie cewką prądową w jeden z n-1 przewodów, a cewką napięciową między przewód, w którym znajduje się cewka prądowa i przewód o d n i e s i e n i a , wolny od watomierza (rys.328.).

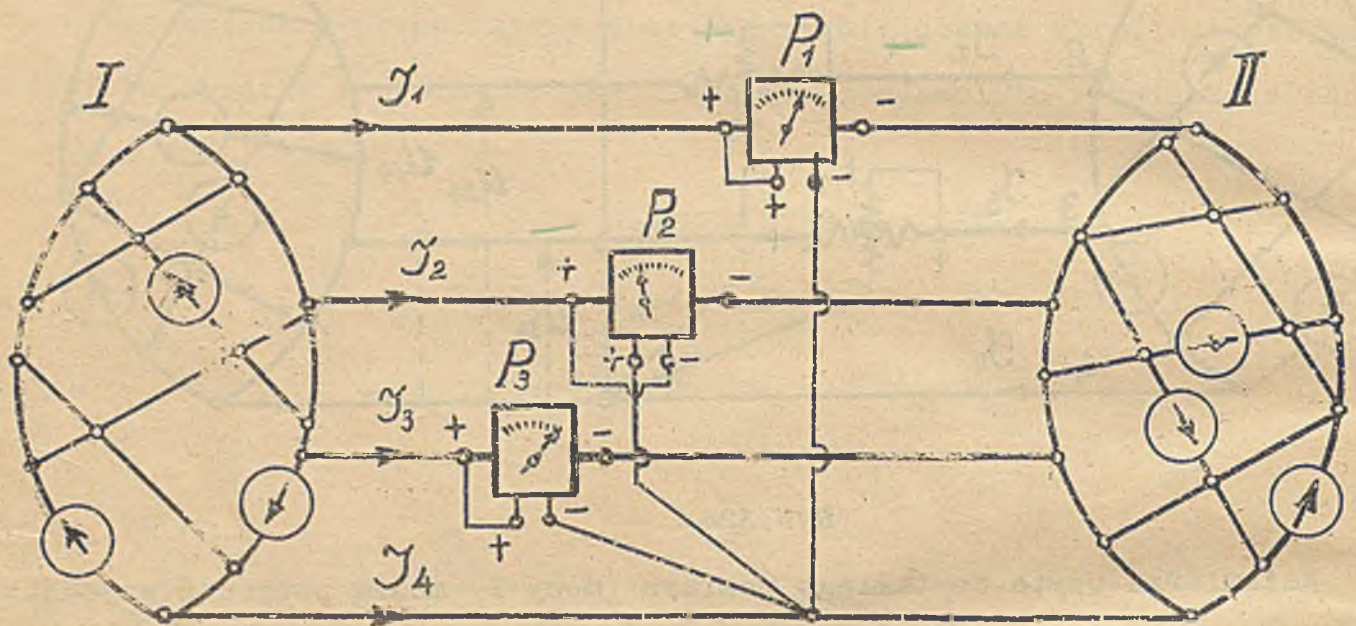


Rys.328.

Watomierze użyte do takiego pomiaru (mocy P) muszą posiadać w jednaki sposób cechowane końcówki cewek prądowych (znaki + -) i napięciowych (znaki + -). (Znaki + oznaczają dopływ prądu, znaki - odpływ prądu przy cechowaniu). Załączenie watomierzy w układ n-przewodowy należy tak uskutecznić, aby końcówki „+” cewek prądowych zwrócone były ku lewej stronie układu (tu I), z nimi też należy łączyć odnośne końcówki „+” cewek napięciowych. Wskazania watomierzy, które w takim układzie dają w ł a ś c i w e wychylenie wskazówki (od 0 ku środkowi skali) uważamy za d o d a t n i e , watomierzom zaś, które dają wychylenie n i e w ł a ś c i w e (poza zero) p r z e ł ą c z a m y końcówki cewki napięciowej i wskazania ich uważamy za u j e m n e .



Przykład. Przypuśćmy, że watomierz 1-szy (w przewodzie 1-szym na rys.328.) wskazuje wychylenie właściwe  $P_1 = + 860 \text{ W}$ , natomiast watomierz 2-gi (w przewodzie 2-gim) daje wychylenie niewłaściwe, p r z e ł ą c z a m y go więc, poczem odczytujemy  $P_2 = - 400 \text{ W}$  (znak "-" kładziemy z uwagi na przełączenie). Watomierz 3-ci zaś (w przewodzie 3-cim) niech daje wychylenie właściwe  $P_3 = + 1000 \text{ W}$ .  
Odnośny układ z przełączeniem watomierza 2-giego okazuje rys. 329.



Rys. 329.

Moc układu określi tu suma

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = (+860) + (-400) + (+1000) = + 1460 \text{ W.}$$

Ponieważ  $P$  wypada tu ze znakiem dodatnim, przeto lewa strona (I) jest wydajnikiem, dostarczając prawej (II) 1460 watów.

Uzasadnienie powyższego sposobu mierzenia mocy wynika wprost z poprzednich rozważań. W związku - mianowicie - z rys.328. napiszemy

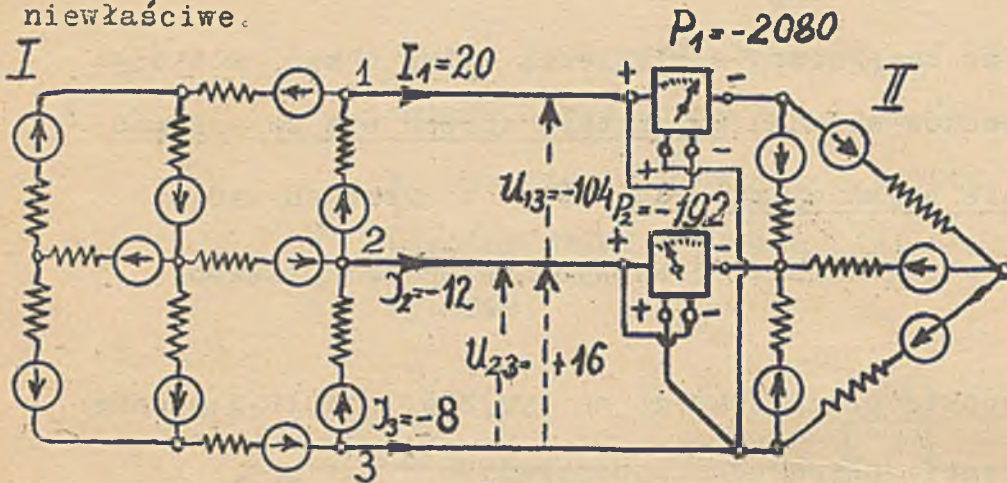
$$P_1 = J_1 U_{14}, \quad P_2 = J_2 U_{24}, \quad P_3 = J_3 U_{34}.$$







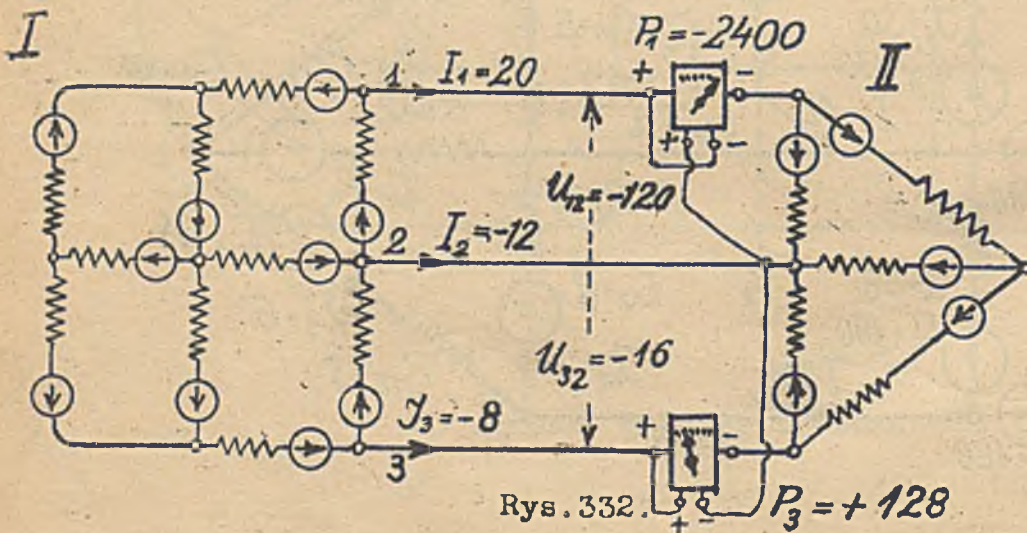
Możliwe są tylko 3 alternatywy, uwidocznione na rys. 331 ÷ 333, na których okazano także sposób załączenia watomierzy z zastosowaniem przełączania tych przyrządów, które po załączeniu wskazanem na rys. 328. dają wychylenie niewłaściwe.



$$\begin{aligned}
 U_{13} &= V_1 + V_2 \\
 &= (-120) + (+16) \\
 &= -104 \text{ woltów} \\
 U_{23} &= V_2 = +16 \text{ woltów}
 \end{aligned}$$

Rys. 331.

$$\begin{aligned}
 P &= U_{13}I_1 + U_{23}I_2 = (-104)20 + 16(-12) = \\
 &= P_1 + P_2 = -2080 - 192 = \underline{\underline{-2272 \text{ W}}}
 \end{aligned}$$

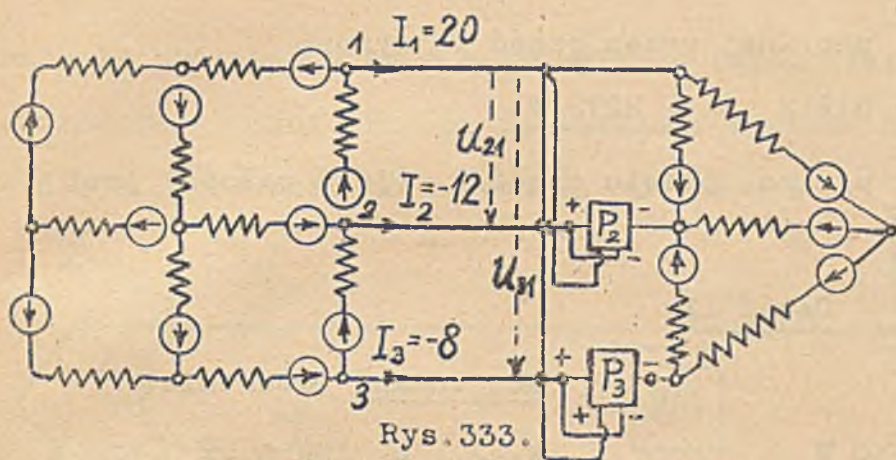


$$\begin{aligned}
 U_{12} &= -V_1 = -120 \text{ wolt} \\
 U_{32} &= -V_2 = -16 \text{ wolt}
 \end{aligned}$$

Rys. 332.

$$\begin{aligned}
 P &= U_{12}I_1 + U_{32}I_3 = (-120)20 + (-16)(-8) = \\
 &= P_1 + P_3 = -2400 + 128 = \underline{\underline{-2272 \text{ W}}}
 \end{aligned}$$





$$U_{21} = -V_1 = +120 \text{ volt}$$

$$U_{31} = -(V_1 + V_2) = +104 \text{ V}$$

$$P = U_{21}I_2 + U_{31}I_3 = (+120)(-12) + (104)(-8) =$$

$$= P_2 + P_3 = -1440 - 832 = \underline{\underline{-2272 \text{ W}}}$$

We wszystkich trzech alternatywach otrzymaliśmy tensam zgodny wynik, że część I. jest odbiornikiem i pobiera od wydajnika II. 2272 waty.

Wynik ten możemy sprawdzić obliczając bilans mocy po jednej i drugiej stronie. (Moc pobraną przez element uważamy za ujemną, oddaną z elementu za dodatnią).

Część I.

Moc pobrana (ujemna).

Moc oddana (dodatnia)

$$J_1^2 R_1 = 10^2 \cdot 4 = 400 \text{ W}$$

$$E_1 J_1 = 150 \cdot 10 = 1500 \text{ W}$$

$$J_2^4 R_2 = 30^2 \cdot 2 = 1800 \text{ W}$$

$$E_2 J_2 = 50 \cdot 30 = 1500 \text{ W}$$

$$J_3^2 R_3 = 50^2 \cdot 5 = 12500 \text{ W}$$

$$E_3 J_3 = 130 \cdot 50 = 6500 \text{ W}$$

$$J_4^2 R_4 = 58^2 \cdot 3 = 10092 \text{ W}$$

$$E_4 J_4 = 190 \cdot 58 = 11020 \text{ W}$$

$$J_5^2 R_5 = 50^2 \cdot 1 = 2500 \text{ W}$$

$$E_5 J_5 = 180 \cdot 50 = 9000 \text{ W}$$

$$J_6^2 R_6 = 8^2 \cdot 6 = 384 \text{ W}$$

$$E_7 J_7 = 150 \cdot 40 = 6000 \text{ W}$$

$$J_7^2 R_7 = 40^2 \cdot 7 = 11200 \text{ W}$$

$$E_9 J_9 = 230 \cdot 58 = 13340 \text{ W}$$

$$J_8^2 R_8 = 20^2 \cdot 4 = 1600 \text{ W}$$

$$E_{10} J_{10} = 40 \cdot 2 = \underline{80 \text{ W}}$$

$$J_9^2 R_9 = 58^2 \cdot 2 = 6728 \text{ W}$$

$$\underline{\underline{\text{Razem: 48940 W}}}$$

$$J_{10}^2 R_{10} = 2^2 \cdot 10 = 40 \text{ W}$$

$$E_6 J_6 = 46 \cdot 8 = 368 \text{ W}$$

$$E_8 J_8 = 180 \cdot 20 = \underline{3600 \text{ W}}$$

$$\underline{\underline{\text{Razem: 51212 W}}}$$

48940  
2272



*Suma*  
Różnica mocy oddanej i pobranej przez część I. wynosi

$$48940 - 51212 = \underline{\underline{- 2272 \text{ W}}}$$

a ponieważ wypadła wartość ujemna, przeto część I. (jako całość) jest odbiornikiem.

Część II.

Moc pobrana (ujemna).

$$J_{11}^2 \cdot R_{11} = 5^2 \cdot 2 = 50 \text{ W}$$

$$J_{12}^2 \cdot R_{12} = 2^2 \cdot 2 = 16 \text{ W}$$

$$J_{13}^2 \cdot R_{13} = 6^2 \cdot 3 = 108 \text{ W}$$

$$J_{14}^2 \cdot R_{14} = 9^2 \cdot 2 = 162 \text{ W}$$

$$J_{15}^2 \cdot R_{15} = 15^2 \cdot 1 = 225 \text{ W}$$

$$E_{12} \cdot J_{12} = 8 \cdot 2 = \underline{16 \text{ W}}$$

$$\underline{\underline{\text{Razem: } 577 \text{ W}}}$$

Moc oddana (dodatnia)

$$E_{11} J_{11} = 130 \cdot 5 = 650 \text{ W}$$

$$E_{13} J_{13} = 84 \cdot 6 = 504 \text{ W}$$

$$E_{14} J_{14} = 100 \cdot 9 = 900 \text{ W}$$

$$E_{15} J_{15} = 53 \cdot 15 = \underline{795 \text{ W}}$$

$$\underline{\underline{\text{Razem: } 2849 \text{ W}}}$$

Różnica mocy oddanej i pobranej przez część II. wynosi

$$2849 - 577 = \underline{\underline{+ 2272 \text{ W}}}$$

a ponieważ wypadła wartość dodatnia, przeto część II. (jako całość) jest wydajnikiem.

Widzimy, że sprawdzenie dało te same wyniki, co poprzednie obliczenie mocy P.

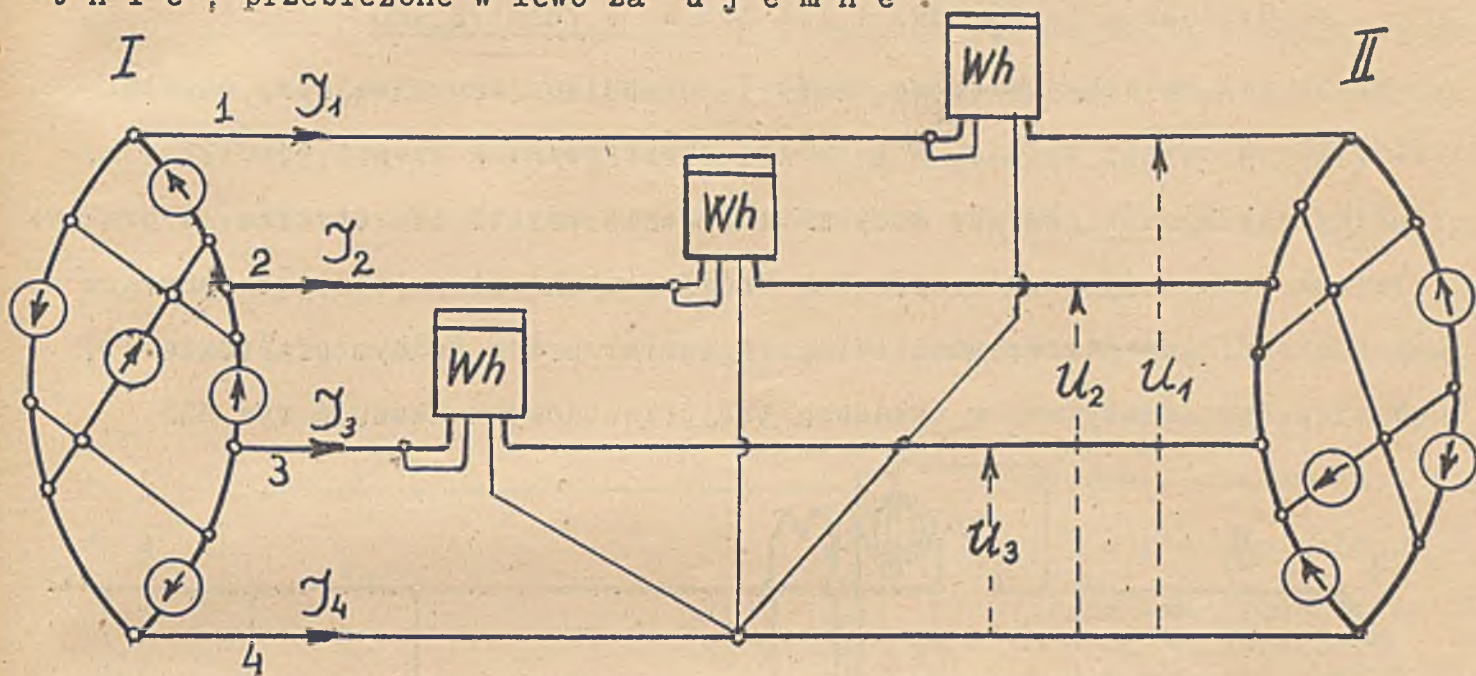
Pomiar pracy układu n-przewodowego.

Pomiar pracy układu n-przewodowego można by skutecznie - wzorując się na pomiarze mocy - z pomocą n-1 liczników pracy, załączonych w ten sam sposób, jak się łączy watomierze (rys.334.).

Przy jednakowym załączeniu końcówek każdego z liczników, jedne z tych przyrządów będą się obracać w prawo, drugie w lewo. Tu jednakże nie można zastosować przełączenia liczników idących w lewo, gdyż z biegiem czasu obserwowany w danej chwili stan rzeczy może ulec zmianie, t.zn. przy



zmianie obciążeń ulegać mogą, zmianie także kierunki obrotów poszczególnych liczników. Ilości obrotów przebieżone w prawo należy uważać za **d o d a = t n i e**, przebieżone w lewo za **u j e m n e**.



Rys. 334.

Przykład liczbowy:

Przypuśćmy, że stan licznika 1-go (załączonego w przewód 1-szy)

w chwili  $t_1$  był  $325^{\circ}67$

w chwili  $t_2$   $8439^{\circ}98$

Różnica  $+ 8114^{\circ}31$

Licznika 2-go (załączonego w przewód 2-gi)

w chwili  $t_1$  był  $636^{\circ}42$

w chwili  $t_2$   $27^{\circ}53$

Różnica  $- 608^{\circ}89$

Licznika 3-go (załączonego w przewód 3-ci)

w chwili  $t_1$  był  $936^{\circ}50$

w chwili  $t_2$   $1047^{\circ}80$

Różnica  $+ 111^{\circ}30$



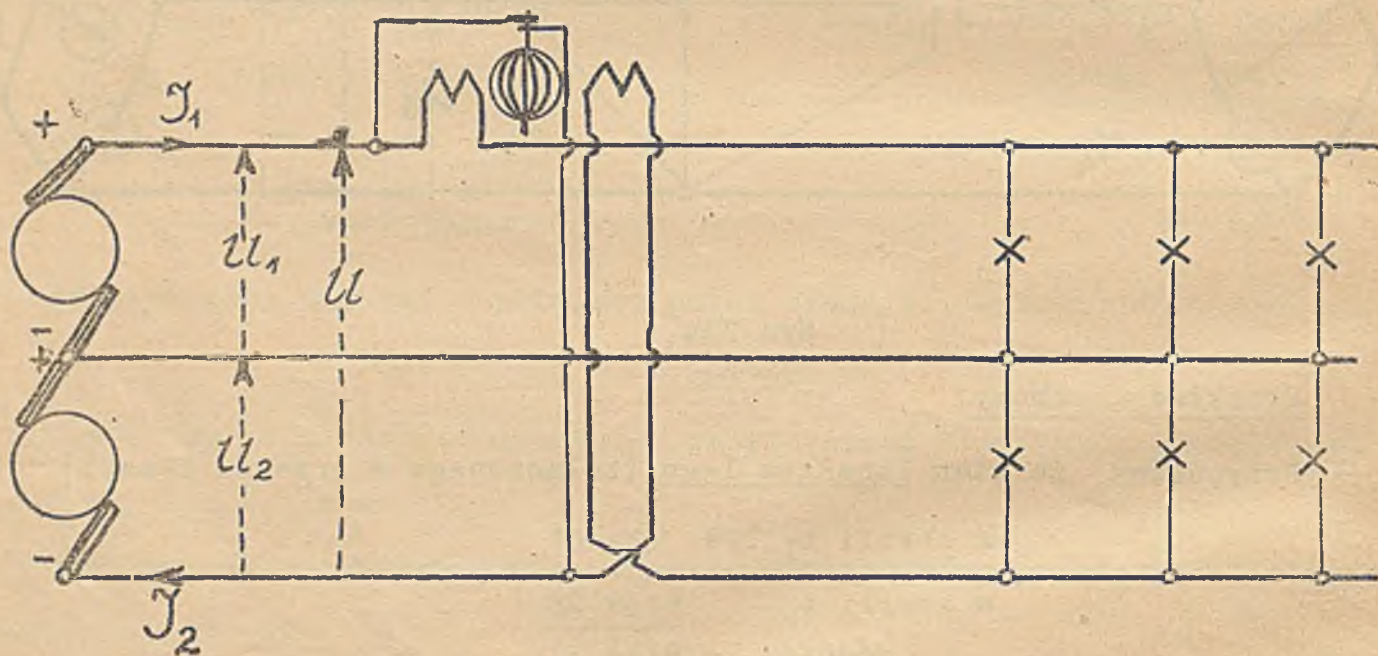
Gdy dla wszystkich trzech liczników współczynnik  $k = 1$  (kWh), będzie

$$A = A_1 + A_2 + A_3 =$$

$$= 8114 \cdot 31 + (- 608 \cdot 89) + 111 \cdot 30 = \underline{+ 7616 \cdot 72 \text{ kWh}}$$

Wynik ten ma wskazywać, że część I. pracując jako wydajnik, oddała części II. w czasie  $t_2 - t_1 = t$  pracę elektryczną w ilości 7616·72 kWh.

Powyższy sposób pomiaru mocy ma znaczenie czysto teoretyczne. W praktyce (w układach trójprzewodowych lub trójfazowych) stosuje się do pomiaru mocy liczniki specjalne, umożliwiające pomiar pracy jednym przyrządem. Schemat połączeń używany w układach trójprzewodowych ukazuje rys. 335.



Rys. 335.

Dwie cewki zwykłego elektromierza motorkowego są tu włączone, każda w jeden z przewodów zewnętrznych. Twornik wirujący otrzymuje napięcie przez przewodów skrajnych. W układzie takim licznik mierzy pracę bez błędu, tylko w przypadku gdy  $U_1 = U_2$ , bo wtedy można napisać

$$P = U_1 J_1 + U_2 J_2 = \frac{U}{2} (J_1 + J_2)$$

zatem także

$$A = U_1 J_1 t + U_2 J_2 t = \frac{U}{2} (J_1 + J_2) t.$$

Gdy  $U_1 \neq U_2$  występują błędy, które jednak praktycznie, z uwagi na małe różnice między  $U_1$  i  $U_2$ , ograniczają się do kilku %.

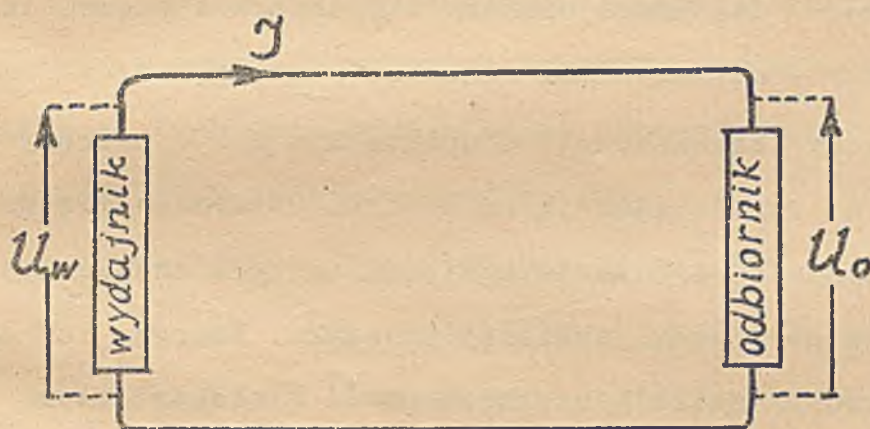
(Czyt. Möllinger „Wirkungsweise der Motorzähler u. Messwandler“ 1917 Springer)



## 6. Napięcie jako „akcja” i „reakcja”.

Rozważania poprzednich ustępów doprowadziły nas do tego ważnego wyniku, że moc i praca poszczególnych elementów obwodu prądu stałego, a nawet całych zespołów (w układach n-przewodowych) zależy jedynie od napięć i prądów mierzonych z e w n ą t r z tych elementów wzgl. zespołów.

Strzałki  $U$  i  $J$  wyznaczone dla dodatnich wartości odnośnego napięcia i prądu mają dla wydajnika zgodne a dla odbiornika przeciwne kierunki (rys. 336.). Opierając się na analogji zaczerpniętej z mechaniki, możemy



tu uważać napięcie  $U_w$  zgodne z prądem za a k = c j ę , a napięcie  $U_o$  przeciwne prądowi za r e a k c j ę (Patrz str. 100).

Rys. 336.

O d d a w a n i e energii elektr. do obwodu możliwe jest tylko wtedy gdy podczas przepływu prądu przez element ujawnia się na jego końcówkach napięcie czynne czyli akcja.

P o b i e r a n i e energii elektr. z obwodu zachodzi, gdy element „przeciwstawia” działaniu sieci r e a k c j ę w formie napięcia.

Z fizyki elementarnej wiemy, że praca elektryczna pobierana przez opór omowy zamienia się w całości na ciepło (energję promienistą). Napięcie na oporze  $R$  wynosi  $U_R = J.R$ . Jeżeli w zespole przewodników, przez który przepływa prąd, o t r z y m u j e m y prócz ciepła Joule'a jeszcze energję w innej formie (chemiczną podczas elektrolizy, mechaniczną z motoru, energję pola elektr. w kondensatorze, energję pola magnet. w cewce,



dodatkowe ciepło w styku metali i t.p.), to na końcówkach odnośnego zespo-  
łu musi się ujawnić napięcie  $U$  wyższe od  $J.R$  o  $U_e$

$$U = J.R + U_e$$

$$U = U_R + U_e$$

Obie składowe  $U_R$  i  $U_e$  działają tu jako reakcje, to jest przeciw prądowi i odpowiadają relacjom:

$$U_R = \frac{dA_c}{i \cdot dt} \quad dA_c \text{ praca elektr. zamieniona w elemencie}$$

na ciepło Joule'a (w czasie  $dt$ ).

$$U_e = \frac{dA_e}{i \cdot dt} \quad dA_e \text{ praca elektr. zamieniona w elemencie}$$

na wszystkie inne formy energii.

Przykład: Przez słup wody (zakwaszonej) o oporze  $R = 0.2 \Omega$  przepływa prąd  $J = 10 \text{ A}$ , rozkładając ją na  $H_2$  i  $O$ . Otrzymana mieszanina piorunująca  $H_2$  i  $O$  zawiera więcej energii chemicznej od równoważnej ilości wody, z której powstała. Energji tej dostarczyło źródło zasilające prądem obwód z elektrolitem. Zatem w czasie elektrolizy, napięcie na elektrodach zanurzonych w wodzie zakwaszonej musi być większe od

$$JR = 10 \cdot 0.2 = 2 \text{ V}$$

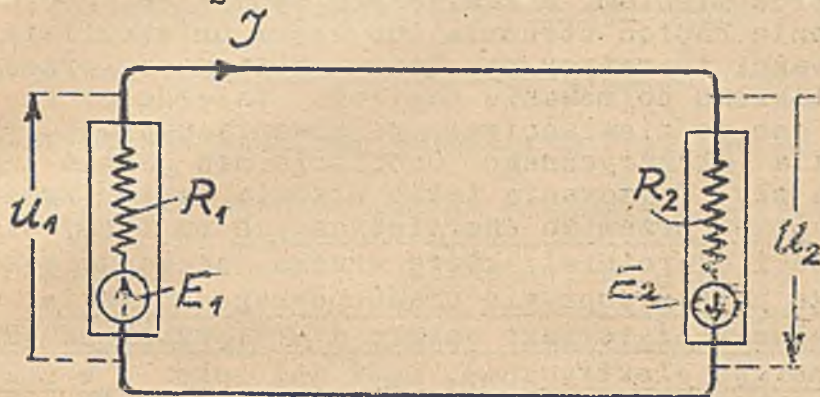
$$U = \frac{A \text{ (zużyte w czasie } t \text{ na rozkład wody)}}{V \cdot t \text{ (czas trwania elektrolizy przy } J = \text{const.)}}$$

Przytem końcówka, przez którą prąd dopływa do elektrolitu musi ujawnić potencjał wyższy. Rzeczywiście stwierdzamy, że napięcie podczas elektrolizy wody jest zawsze większe od  $J.R$  o mniej więcej  $2 \text{ V}$ . (Patrz dalej Elektroliza).

Z powyższego wynika, że element, przez który przepływa prąd  $i$ , który przytem ani nie wydziela energii do obwodu ani jej z niego nie pochłania, musi mieć na końcówkach napięcie równe zeru. Taki wypadek zachodzi nie tylko na oporze  $R = 0$  (teoretycznie) lecz także praktycznie w zespole t.zw. samowystarczalnym.



Przyjmijmy, że element o napięciu  $U_2$  na rys. 337. zawiera SEM-czną  $E_2$  i opór  $R_2$ . Dla oznaczonego tu kierunku prądu  $J$  napiszemy



$$U_2 = E_2 - J_2 R_2$$

Gdy dobierzemy tak warunki, aby było

$$E_2 = J_2 R_2,$$

wówczas będzie

$$U_2 = 0.$$

Rys. 337.

W wypadku takim niema żadnej wymiany energii między owym elementem a resztą sieci, jakkolwiek wewnątrz elementu zachodzą przemiany energetyczne. W obrębie bowiem owego elementu źródło  $E_2$  dostarcza energii, pochłanianej w całości przez opór  $R_2$ .

Twierdzenie: Element o napięciu  $U = 0$  można zastąpić oporem  $R = 0$ , nie zmieniając w niczym działań w reszcie sieci.

Twierdzenie to wynika wprost z ogólnego prawa Ohma, które tu, w zastosowaniu do obwodu na rys. 336. możemy wypisać w postaci wzoru

$$J = \frac{E_1 + U_2}{R_1}$$

Dla  $U_2 = 0$ , wzór ten przejdzie w relację

$$J = \frac{E_1}{R_1}$$

Z powyższego wynika, że, gdy między siecią a elementem istnieje wymiana energii elektr., to napięcie tego elementu musi być różne od zera, a wielkość jego musi odpowiadać relacji

$$U = \frac{p}{i} = \frac{dA}{i \cdot dt}$$

$p$  oznacza tu chwilową moc elementu,  $i$  chwilowe natężenie prądu, przepływającego przez element, a  $dA$  pracę elementu w czasie  $dt$ . Podane powyżej zależności odnoszą się nie tylko do obwodu prądu stałego, lecz także do obwodów prądu zmiennego.



Uwaga: Przedstawiony powyżej sposób pojmowania napięcia (akcja - reakcja) wprowadzili do elektrotechniki praktycy. Miał on chronić przed nieporozumieniami w zawilszych wypadkach, gdzie brak strzałkowania napięć utrudnia lub wręcz uniemożliwia orientację. Poważni teoretycy np Emde w Niemczech, przeciwstawiają się takiemu pojmowaniu napięcia, twierdząc, że przyczynia się ono do niewłaściwego pojmowania napięcia, jako d z i a ł a n i a elektrycznego. Osobiście nie uważam tego stanu rzeczy za zły. Pojmowanie takie ułatwia bowiem zrozumienie ważnego prawa przemian energetycznych (z formy elektr. na wszelkie inne i odwrotnie), które orzeka, że każda taka przemiana wymaga przy przepływie prądu pewnego napięcia, które musi działać bądź to jako a k c j a (przemiana innych form na energję elektryczną), bądź też jako r e a k c j a (przemiana energii elektrycznej na inne formy).

7. Zestawienie jednostek siły, mocy i pracy.

(Liczby zaokrąglone do obliczeń techn.)

S I Ł A .

	Dyn	kilogramów
Dyna	1	$1,02 \cdot 10^{-6}$
Kilogram	981000	1

M O C .

	Ergów/sek	Watów	kgm/sek	Koni par.
Erg/sek	1	$10^{-7}$	$0,102 \cdot 10^{-7}$	$1,36 \cdot 10^{-10}$
Wat	$10^7$	1	0,102	$1,36 \cdot 10^{-3}$
Kgm/sek	$9,81 \cdot 10^7$	9,81	1	$13,3 \cdot 10^{-3}$
Koń par.	$736 \cdot 10^7$	736	75	1

P R A C A .

	Ergów	dżauli cz. watosekund	Watogodzin	kgm	kalor kgm
Erg	1	$10^{-7}$	$0,278 \cdot 10^{-10}$	$0,102 \cdot 10^{-7}$	$0,24 \cdot 10^{-10}$
dżaul cz. watosek.	$10^7$	1	$0,278 \cdot 10^{-3}$	0,102	$0,24 \cdot 10^{-3}$
watogodź	$3600 \cdot 10^7$	3600	1	367	0,865
kilogramometr	$9,81 \cdot 10^7$	9,81	$2,72 \cdot 10^{-3}$	1	$2,35 \cdot 10^{-3}$
kalor.kg	$4180 \cdot 10^7$	4180	1,16	427	1



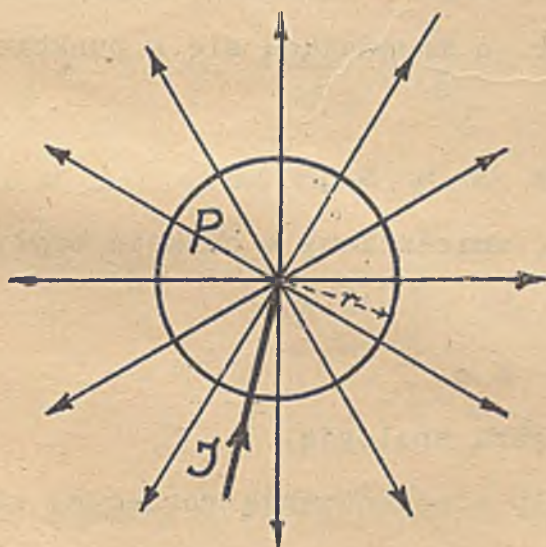
V. PRĄDY W PRZEWODNIKACH BRYŁOWYCH.

Dotychczas rozważaliśmy rozptyw prądu w przewodach (drutach), t.j. przewodnikach o dużych długościach a małych przekrojach. Niniejszy rozdział poświęcimy rozważaniom, dotyczącym rozptywu prądów w przewodnikach bryłowych.

Ponieważ ścisła analiza matematyczno-fizyczna przekracza ramy niniejszego podręcznika poprzestaniemy jedynie na wykazaniu analogji, jaka zachodzi w rozptywie prądów w bryłach a przebiegiem linii elektrycznych wzgl. magnetycznych w ośrodkach materjalnych.

1. Prądy w bryłach nieskończenie rozległych.

Wyobraźmy sobie nieskończenie rozległą bryłę o przewodności  $\gamma'$  ( $\gamma'$  odniesione do 1 cm długości i 1 cm<sup>2</sup> przekroju), a w środku tej bryły elektrodę punktową P, z której wypływa prąd J (Rys.338). (Drugą elektrodę kulistą otaczającą punkt P należy sobie wyobrazić w odległości  $r = \infty$ ).



Rys. 338.

Otoczmy punkt P powierzchnią kulistą o promieniu r (cm).

Jeżeli z punktu P wypływa J amp, to przez powierzchnię owej kuli przepływa również J amp (prąd stały). Zatem gęstość prądu na powierzchni owej pomyślonej kuli jest

$$j = \frac{J}{4\pi r^2} \text{ amp/cm}^2$$

Przepływowi prądu stałego przez przewodnik towarzyszy natężenie pola elektrycznego, które według (39) określa relacja

$$K = j \cdot \gamma' = \frac{j}{\gamma'} = \frac{J}{4\pi r^2 \gamma'} \text{ V/cm} \dots\dots\dots (181)$$



(gęstość prądu przypadająca na  $\text{cm}^2$  oznaczamy tu symbolem  $\mathcal{J}$  zamiast  $\mathcal{G}$ ).

Porównując prąd  $J$  z masą elektryczną  $Q$  lub magnetyczną  $m$ , natężenie elektr.  $K$  wewnątrz bryły z natężeniem pola elektr.  $K$  względnie magn.  $H$ , a gęstość prądu  $\mathcal{J}$  z indukcją elektr.  $D$  względnie magnet.  $B$ , widzimy tu (181) analogję między wzorem określającym natężenie pola  $K$  i gęstość prądu  $\mathcal{J}$  w bryle, a natężeniem i indukcją pola elektr. względnie magnet., wytworzonego przez masę punktową.

W odległości  $r$  od masy magnetycznej punktowej  $m$  jest

$$H = \frac{m}{\mu \cdot r^2}, \quad B = \frac{m}{r^2}, \quad B = H \cdot \mu$$

W odległości  $r$  od masy elektrycznej punktowej  $Q$  jest

$$K = \frac{Q}{\epsilon \cdot r^2}, \quad D = \frac{Q}{r^2}, \quad D = K \cdot \epsilon$$

W odległości  $r$  od elektrody punktowej o prądzie  $J$  jest

$$K = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{J}{\gamma \cdot r^2}, \quad \mathcal{J} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{J}{r^2}, \quad \mathcal{J} = K \cdot \gamma' \dots \dots \dots (182)$$

Na masę magn. względnie elektr.  $q$  znajdującą się w punkcie pola magn. o natężeniu  $H$ , działa siła

$$F = H \cdot m \quad \text{względnie} \quad F = K \cdot q$$

Podobnie na nabój elektryczny, umieszczony w punkcie bryły o natężeniu  $K$  działa siła

$$F = K \cdot q$$

I tu więc widzimy najzupełniejszą analogję.

W przypadku, gdy wewnątrz bryły nieskończenie rozległej znajduje się  $n$  elektrod punktowych o prądach  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , będzie

$$K = \frac{1}{4\pi \cdot \gamma'} \sum \frac{J_i}{r_i^2}, \quad \mathcal{J} = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{J_i}{r_i^2}, \quad \mathcal{J} = K \cdot \gamma' \dots \dots \dots (183)$$

Przez każdy punkt bryły będzie bowiem przepływał prąd wypadkowy, złożony ze składowych, pochodzących z szczególnych  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , a składowe te są w myśl prawa superpozycji prądów niezależne od siebie.



Sumowanie należy uskutecznić geometrycznie, albowiem poszczególne składowe prądy mają różne kierunki w przestrzeni (znaczek  $\wedge$ ).

I w ostatnich wzorach dostrzegamy najzupełniejszą analogję z układem mas elektrycznych względnie magnetycznych punktowych, w przestrzeni wypełnionej jednorodnym ośrodkiem, o stałej dielektrycznej  $\epsilon$ , względnie przenikalności  $\mu$ , który tu (w bryle) zastępuje przewodność  $\gamma'$ .

Obliczenie potencjału  $V$  i napięcia  $U$  prowadzi w bryle nieskończenie rozległej do wyrażen identycznych, jak znalezione poprzednio w Elektrostatyce. W bryle bowiem, w której płyną prądy stałe, ujawnia się (jak to widać ze wzorów 183) pole elektrostatyczne

Potencjał elektr. dowolnego punktu ( $a$ ) w bryle nieskończenie rozległej określa więc wzór

$$V_a = \int_a^{\infty} K \cdot dl \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4\pi \gamma'} \sum \frac{J_i}{l_i} \dots \dots \dots (184)$$

przyczem całkę  $\int_a^{\infty}$  należy obliczyć dla dowolnego toru w bryle od  $a$  do  $\infty$

Napięcie elektr. wzdłuż toru  $ab$  w bryle będzie

$$U_{ab} = \int_a^b K \cdot dl \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4\pi \gamma'} \sum \frac{J_i}{l_{ia}} - \frac{1}{4\pi \gamma'} \sum \frac{J_i}{l_{ib}} = V_a - V_b \dots \dots (185)$$

Zarówno w polu elektrostatycznym jak i w bryle, przez którą przepływają prądy stałe, jest

$$U_0 = \oint K \cdot dl \cdot \cos \alpha = 0 \dots \dots \dots (186)$$

oraz

$$K = - \frac{dV}{dl} \dots \dots \dots (187)$$

Wszystkie wzory więc, na których oparliśmy rozważania o polu elektrostatycznym, względnie magnetostatycznym, mają tu swoje analogje. Wszędzie należy tylko położyć

$J$  zamiast  $Q$  względnie zamiast  $m$ ,  $\gamma'$  zamiast  $\epsilon$  względnie zamiast  $\mu$

$\chi$  zamiast  $D$  względnie zamiast  $B$ .

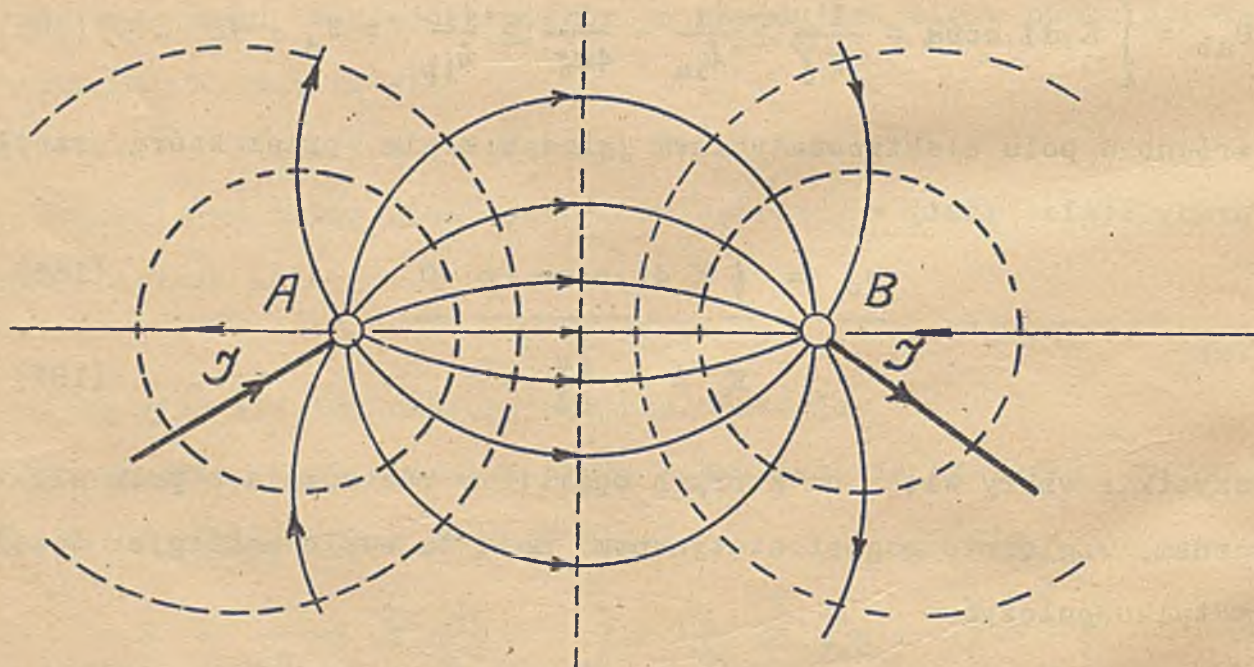


Wynika stąd, że rozpływ prądów stałych w bryle nieskończenie rozległej o jednakowej wszędzie przewodności  $\gamma'$  jest analogiczny do przebiegu linii indukcji w polu elektrostatycznym względnie magnetostaticznym.

Mozemy go przeto scharakteryzować geometrycznie, z pomocą linij prądu. Linjom prądu przydajemy następujące atrybuty:

- a). Styczna do linii prądu odpowiada kierunkowi prądu w danym punkcie bryły.
- b). Strzałka, którą uzupełniamy każdą linię prądu, wskazywać ma kierunek ruchu elektryczności dodatniej.
- c). Gęstość linii prądu w każdym punkcie przestrzeni ma odpowiadać gęstości prądu czyli ilości amp/cm<sup>2</sup>.

Na rys. 339. mamy przedstawiony przebieg linii prądów dla przypadku, gdy w bryle nieskończenie rozległej znajdują się dwie elektrody kuliste, z których jedną (tu A) prąd  $J$  dopływa, a drugą (tu B) prąd  $J$  odpływa.



Rys. 339.

Obraz linii prądu jest tu najzupełniej identyczny z obrazem linii indukcji elektr. dla dwu jednakowych naboji elektrycznych przeciwnych znaków (+Q i -Q).



Obraz ten możemy uzupełnić geometryczną charakterystyką potencjału, wyznaczając powierzchnie ekwipotencjalne na tych samych zasadach jak w polu elektrostatycznym (na rys. 339. linje kreskowane).

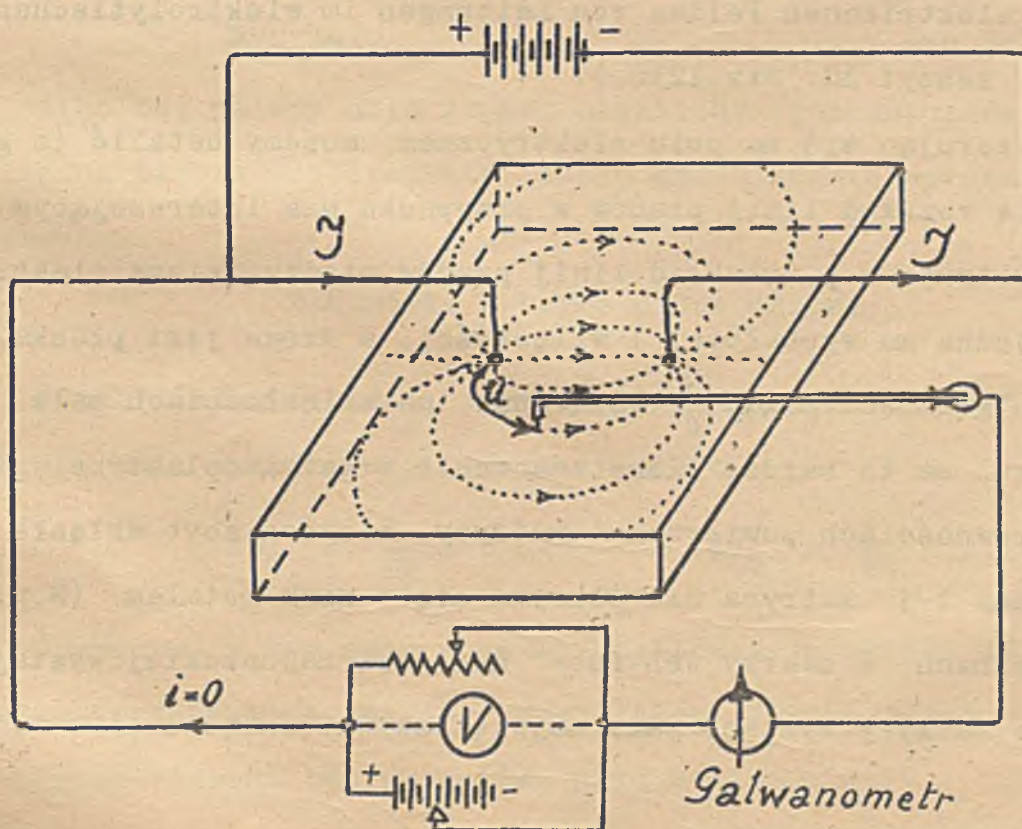
Powierzchnie ekwipotencjalne muszą być wszędzie prostopadłe do linii sił elektr. (K) a więc i do linii prądów, albowiem w każdym punkcie bryły jest

$$\underline{j} = K \cdot r'$$

a wektory K i  $\underline{j}$  padają na siebie.

Każdy punkt bryły na powierzchni ekwipotencjalnej ma względem jednej z elektrod jednakowe napięcie.

Powyższe rozważania teoretyczne można sprawdzić z dowolnie wielkim przybliżeniem w dużych zbiornikach, zawierających elektrolit. Odpowiednią sondą, połączoną z woltomierzem i potencjometrem, wyszukujemy punkty (we wnętrzu elektrolitu) o jednakowych potencjałach (rys. 340.).



Rys. 340.



Gdy prąd „i” płynący przez elektrodę jest równy zeru, co poznajemy obserwując galwanometr połączony w szereg z sondą, jest

$$\underline{U(\text{w elektrolicie}) = V(\text{wskazanie woltomierza})} \quad 1)$$

Nastawiając potencjometr na pewne napięcie U, wyszukujemy sondą takie punkty w elektrolicie, dla których jest  $i = 0$ , więc  $U = \text{const}$ , czyli  $V = \text{const}$ . Punkty te leżą na powierzchni ekwipotencjalnej.

Oczywiście „pole prądów” w naczyniu ograniczonym, musi się różnić od „pola prądów” znalezionego teoretycznie dla bryły nieskończenie rozległej. Różnice wystąpią, tem znaczniejsze, im mniejszego użyjemy naczynia (wpływ ograniczenia). W ostatnich latach używamy w technice opisanej wyżej metody badania „pola prądów” w naczyniach wodnych do eksperymentalnego oznaczenia przebiegu linii elektrycznych układów pracujących przy wysokich napięciach. W wielu wypadkach łatwiej jest bowiem wyznaczyć eksperymentalnie przebieg linii prądów, jak przebieg linii sił elektr. (Czytaj Zschaage „Nachahmung des elektrischen Feldes von Leitungen im elektrolytischen Trog”, ETZ 1925, zeszyt 33, Str. 1215.).

Odwrotnie, wzorując się na polu elektrycznym, możemy ustalić (z grubszą), jaki będzie rozkład linii prądów w przypadku nas interesującym.

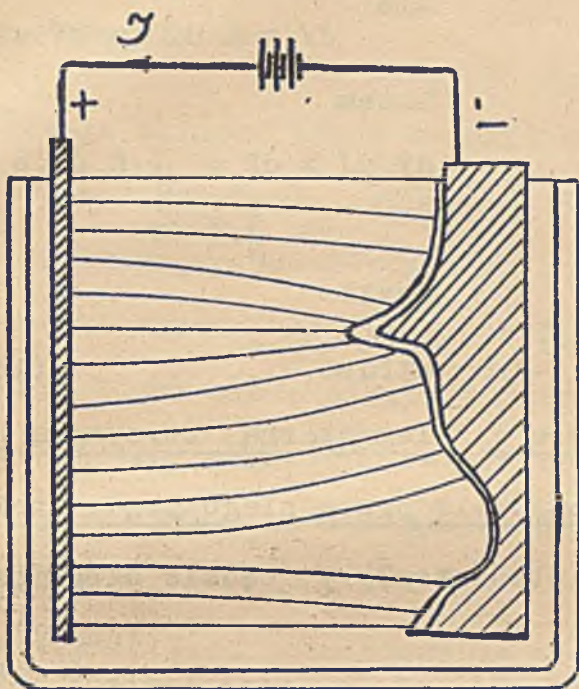
Rys 341. ilustruje n.p. rozkład linii prądów między dwiema elektrodami, z których jedna ma wypukłości i wklęsłości, a druga jest płaska. Na wypukłościach gęstości prądu  $j$  będą duże, na wklęsłościach małe, lub prawie równe zeru. Ma to bardzo ważne znaczenie w galwanoplastyce, gdyż przy dużych nierównościach powierzchni matrycy, miejsca zbyt wklęsłe występują z dziurami t.j. matryca nie pokrywa się w nich metalem. (N.p. nosy w płaskorzeźbach. W twarzy „en face” nos jest najbardziej wystającą częścią, zatem w matrycy wystąpi jako największe wklęsnięcie.)(!

---

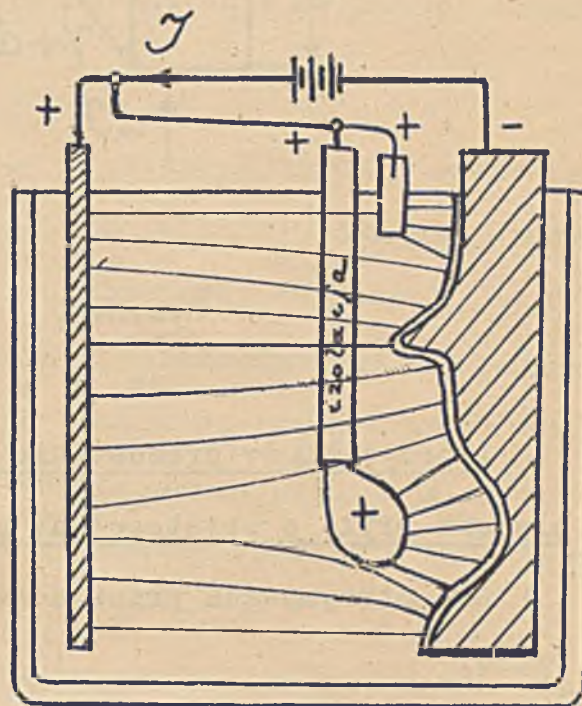
1) Abstrahujemy tu od polaryzacji, którą można wyeliminować, stosując do pomiaru prądy zmienne



Celem uzyskania równomiernej warstwy metalu (na powierzchni matrycy), należy w pobliżu wklęsnięć umieszczać dodatkowe elektrody z metalu, który ma być nałożony (rys.342.), izolując przewód, przechodzący przez elektrolit



Rys. 341.



Rys. 342.

Albo też należy obie główne elektrody (rozpuszczaną i powlekaną) oddalić od siebie dostatecznie, celem zmniejszenia wpływu nierówności powierzchni.

## 2. Komórki w bryle przewodzącej

Warto jeszcze zbadać, jaką analogję w „polu prądów” mają wzory na energję pola elektr. wzgl. magnetycznego.

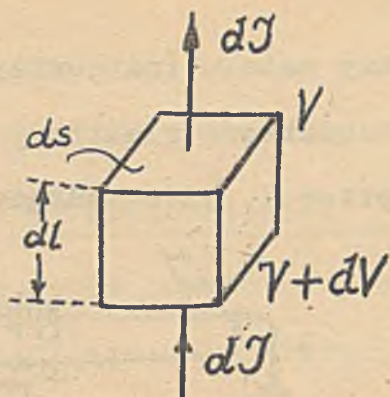
$$dW_e = \frac{1}{8\pi} K \cdot D \cdot dv, \quad dW_m = \frac{1}{8\pi} H \cdot B \cdot dv$$

Wyznamy w tym celu element objętości  $dv$  między dwiema powierzchniami ekwipotencjalnymi o różnicy potencjałów  $dV$  (rys. 343.).

Przez element ten przepływa prąd stały

$$dJ = ds \cdot j.$$





Rys. 343.

Mnożąc obustronnie przez  $dV$  otrzymamy

$$dV \cdot dJ = ds \cdot j \cdot dV$$

ale

$$dV = K \cdot dl, \text{ a } dV \cdot dJ = dP$$

zatem

$$dV \cdot dJ = dP = j \cdot K \cdot ds \cdot dl = j \cdot K \cdot dV$$

czyli

$$dP = K \cdot j \cdot dV = j^2 \cdot \rho \cdot dV \text{ watów} \dots \dots \dots (188)$$

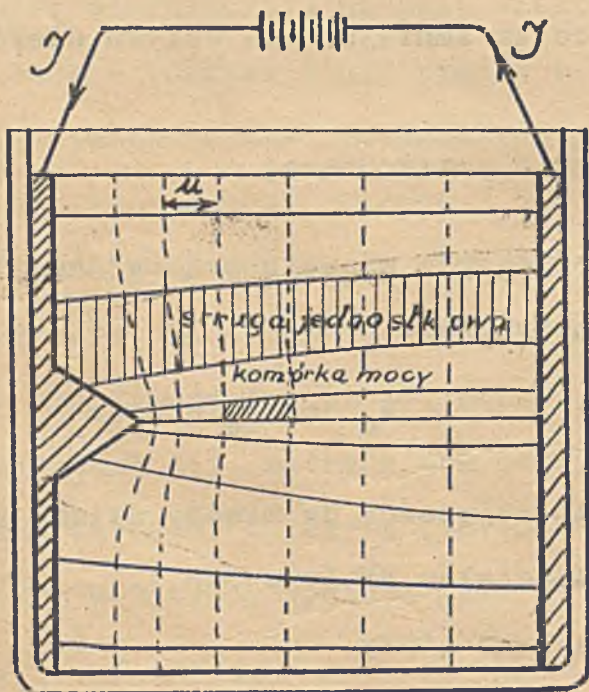
Iloczyn  $K \cdot j \cdot dV$  przedstawia więc moc elementarną, otrzymaną przez element bryły o objętości  $dV$  przy przepływie przez niego prądu stałego.

Moc otrzymywana przez dowolną objętość bryły  $v$ , będzie określona wzorem

$$P = \int_V K \cdot j \cdot dV \dots \dots \dots (189)$$

(Znak „ $v$ ” ma tu wskazywać na całkę objętościową).

Podobnie jak w polu elektrycznym <sup>1)</sup>, możemy i tu podać obraz prze-



Rys. 344.

strzennego rozmieszczenia mocy pochłanianej w bryle. W tym celu wyznaczamy strugi prądów o jednakowej gęstości prądu ( $j$ ), oraz powierzchnie ekwipotencjalne w odstępach odpowiadających jednakowym różnicom potencjałów (rys. 344) Moc k a ż d e j komórki będzie tu równa w myśl 189

$$P_k = \int_V K \cdot j \cdot dV = u \cdot i$$

1) Patrz Elektrostatyka str. 172.



albowiem „i” oznacza prąd dopływający do ścian komórki a „u” napięcie między temi ścianami

Przy stałym prądzie, w czasie t, dostarczona zostanie do każdej komórki praca elektryczna

$$A_k = P_k = u \cdot i \cdot t$$

Praca ta zamieni się w całości na ciepło. W każdej komórce o jednakowej mocy (stałej) powstanie jednakowa ilość ciepła. Najbardziej będą się więc grzać (abstrahując od chłodzenia) komórki o najmniejszej objętości, na rys. 344 komórki otaczające kolce elektrody dodatniej. Tem tłumaczy się np. wysychanie ziemi około elektrod uziemiających (Patrz poprzednio uziemienia), grzanie się końcówek cienkich elektrod, doprowadzających prąd do elektrólitów i t p. (Jakkolwiek występuje tam jeszcze zmiana oporności, o czym jeszcze pomówimy).

Eksperymentalne potwierdzenie wyniku analizy, która (na podstawie analogji z polem elektr.) doprowadziła nas do wniosku, że przy narożach, ostrych kantach i t p. będzie gęstość prądu największa, znajdujemy np. w galwanoplastyce, jak to już poprzednio wspomnieliśmy.

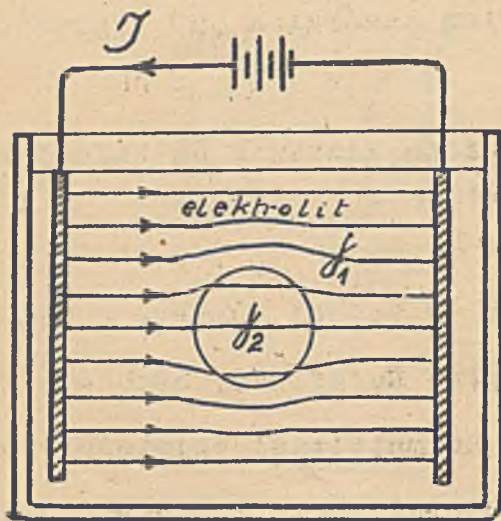
### 3 Prądy w przestrzeni, wypełnionej różnymi przewodnikami

Opierając się na analogji między linjami prądów a linjami indukcji elektrycznej, względnie magnetycznej, możemy i tu podać ogólne zasady przepływu prądów przez różne ośrodki.

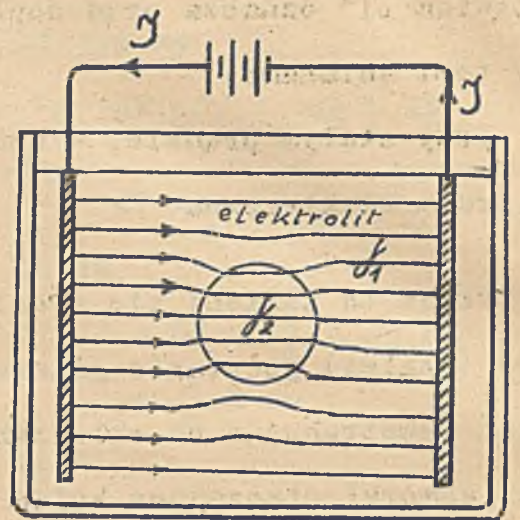
Wyrażają się one w następujących tezach:

- a Ośrodki o dużej oporności właściwej (więc małej przewodności) są „wymijane” przez strugi (linje) prądów (rys 345.).
- b Ośrodki o dużej przewodności skupiają linje (strugi) prądów (rys 346.).
- c Linje prądów, przechodzące ukośnie przez styk dwu przewodników o różnych przewodnościach, ulegają z a ł a m a n i u (rys. 347.)





Rys. 345.

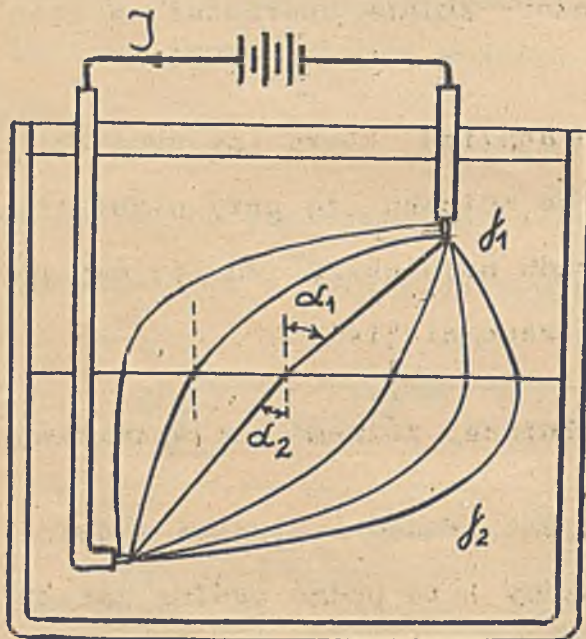


Rys. 346.

Obowiązuje tu analogiczne prawo jak przy załamaniu linii magnetycznych (Patrz Elektrostatyka i Magnetostatyka), a mianowicie

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \dots (190)$$

$\alpha_1$  i  $\alpha_2$  oznaczają kąty padania i odbicia,  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  przewodności ośrodków będących w styku.



Rys. 347.

#### 4. Prądy w ziemi.

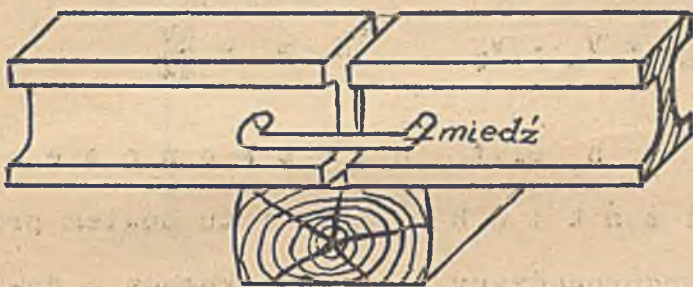
Rozważania poprzednie wyjaśniają dostatecznie, dlaczego przy najlepszej nawet przewodności gołych przewodów ułożonych na ziemi (lub w ziemi), odgałęziają się od nich t.zw. „prądy błądzące” (N p. prądy błądzące szyn tramwajowych). Podobnie, jak z żelaza (o dużej przenikalności  $\mu$ ) wychodzą linje magnetyczne w powietrze (ośrodek o małym  $\epsilon$ ), tak też



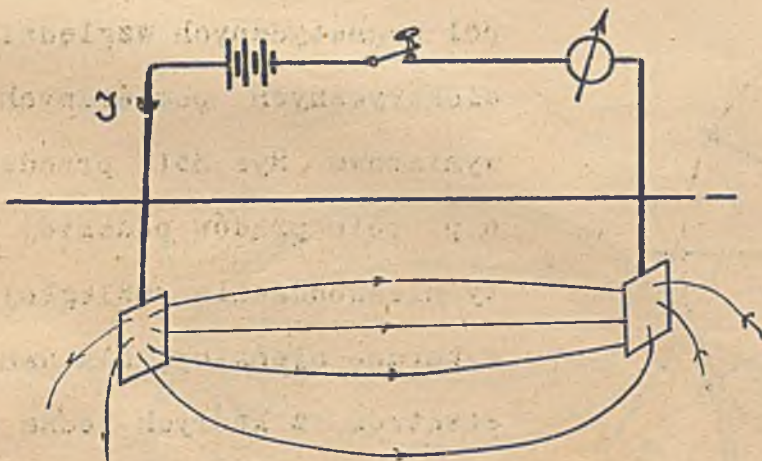
i z przewodnika o dużej przewodności wypływają prądy do ziemi, przenikając do najgłębszych nawet warstw. Rury metalowe, pokłady przesiąknięte wodą (szczególnie zawierającą sole), zagęszczają linje prądu. Kamienie, piasek i t.p., jako złe przewodniki, są niejako wymijane przez prądy błędzące.

Ze względu na szkodliwe działania elektryczne (nagryzanie metali) prądy błędzące są niepożądane i należy się starać zmniejszać je do minimum.

Ten cel ma n.p. łączenie szyn tramwajowych (przy stykach) grubym przewodem miedzianym (rys.348.), gdyż zmniejsza oporność styku. Także ten fakt, zna-



Rys.348.



Rys.349.

ny z doświadczeń, że oporność ziemi między dwiema stacjami telegrafu (posługującego się ziemią jako przewodem powrotnym), jest praktycznie niezależna od odległości obu stacyj, znajduje wyjaśnienie w poprzednich rozważaniach. Im większa odległość, tem głębiej wnikają strugi prądu w głąb ziemi, wskutek czego gęstość prądu maleje, a z nią maleje także i natężenie  $K$  w myśl relacji

$$K = J \cdot \rho$$

Jakkolwiek więc odległość ( $l$ ) między stacjami a i b rośnie, to jednakże

$$\int_a^b K \cdot dl \cdot \cos \alpha = U_{ab}$$

nie doznaje zbyt wielkiego powiększenia, czyli na przepędzenie tego samego



prądu przez ziemię między dwiema parami stacyj, ustawionemi w różnych odległościach, trzeba praktycznie tego samego napięcia  $U$ . Zastrzegamy przytem, że oporności stykowe uziemień są w obu wypadkach jednakowe, oraz, że ziemia ma w obu wypadkach jednakową oporność właściwą, które to warunki praktycznie nie są spełnione.

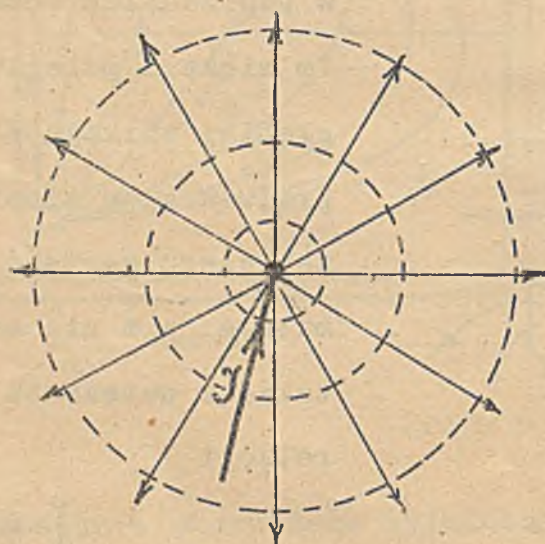
### 5. Prądy w płaskich a cienkich płytach.

Podane poprzednio równania zasadnicze

$$K = \int \cdot S' = \frac{1}{4\pi \cdot \gamma} \sum \frac{J_i}{l_i^2}, \quad \gamma = \frac{1}{4\pi} \sum \frac{J_i}{l_i^2}.$$

$$V = \frac{1}{4\pi \cdot \gamma} \sum \frac{J_i}{l_i} \quad U_{ab} = V_a - V_b \quad K = - \frac{dV}{dl}$$

obowiązują także i dla płaskich płyt nieskończenie rozległych a bardzo cienkich. Także i tu bowiem prąd  $J$  doprowadzony do płyty punktowo, a odprowadzony elektrodą kołową o dowolnym promieniu, przepływa przez płytę w strugach promienistych (rys. 350), jak to stwierdzić można doświadczalnie. I tu więc obrazy „pola prądów” są naj-



zupełniej podobne do obrazów pól magnetycznych względnie elektrycznych, pomyślanych dwuwymiarowo. Rys. 351. przedstawia n.p. pole prądów płaskiej płyty nieskończenie rozległej a bardzo cienkiej, dla dwu elektrod, z których jedna odprowadza a druga doprowadza prąd  $J$ .

Rys. 350.



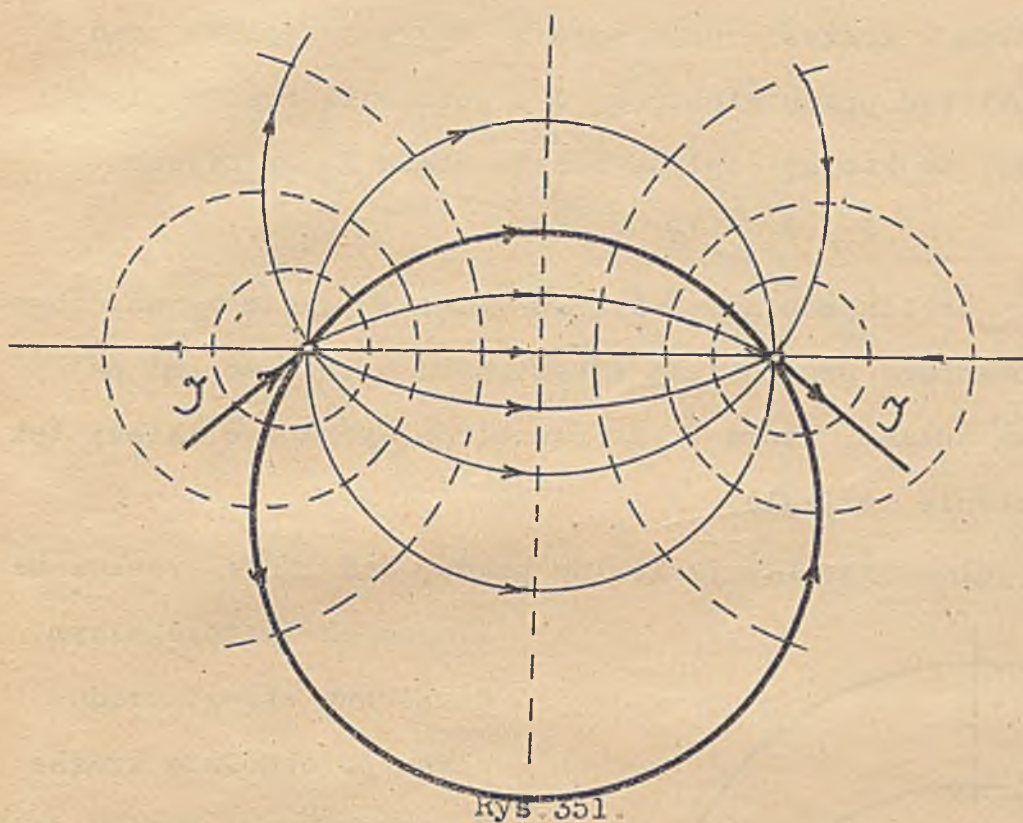
Wrysujemy w obrazie tego pola (rys.351.) koło, przechodzące przez obie

elektrody punktowe

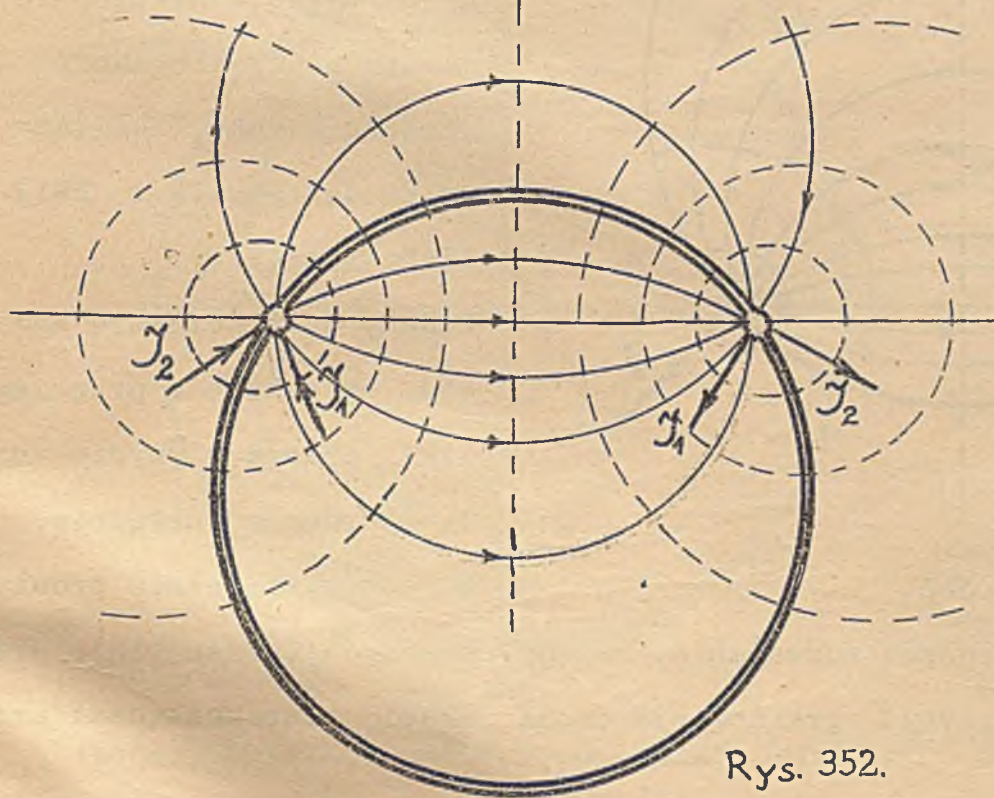
obierając dowolnie promień tego koła  $r$ .

Ponieważ wszystkie linje prądów w płycie nieskończenie rozległej o dwu elektrodach (jak na rys. 351) są kołami przechodzącymi przez owe elektrody, przeto wrysowane koło, przechodzące także przez te elektrody, nie przecnie nigdzie żadnej linii prądu.

Wyobraźmy sobie teraz, że wzdłuż oznaczonego koła o promieniu  $r$ , przecinamy płytę, pozostawiając nienaruszone tylko miejsca, gdzie znajdują się elektrody (rys.352.) Rozpływ prądu w wyciętym krążku i w reszcie płyty nieskończenie



Rys. 351.



Rys. 352.

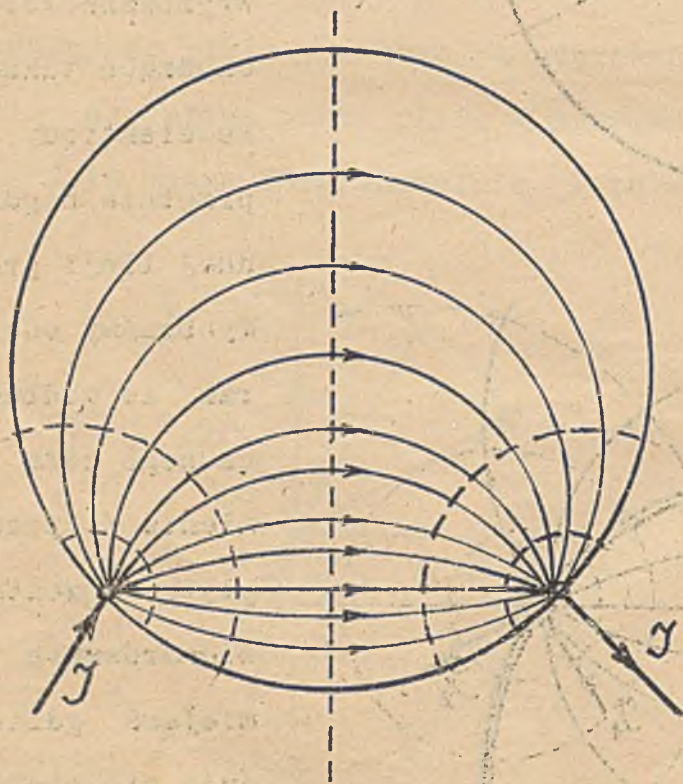


rozległej nie ulegnie po takiej operacji żadnej zmianie, bo nigdzie nie naruszyliśmy żadnej linii prądu (szerokość wyciętego kanaliku nieskończenie mała). Uzyskaliśmy teraz jednakże podział płyty nieskończenie rozległej na dwie części, skończoną - krążek o promieniu  $r$ , który przepływa prąd  $J_1$  stanowiący część całkowitego prądu elektrody  $J$  i pozostałą resztę płyty nieskończenie rozległej, do której dopływa reszta prądu  $J_2$ , przyczem

$$J = J_1 + J_2$$

Z powyższego widać, że linje prądu w krążku (więc w płycie ograniczonej), do którego doprowadzamy prąd dwiema elektrodami umieszczonymi na obwodzie (rys. 353.), są kołami, które co do przebiegu wyznaczyć należy tak jak dla płyty nieskończenie rozległej.

Na rys. 353. linje pełne odpowiadają linjom prądu, zaś linje kreskowane



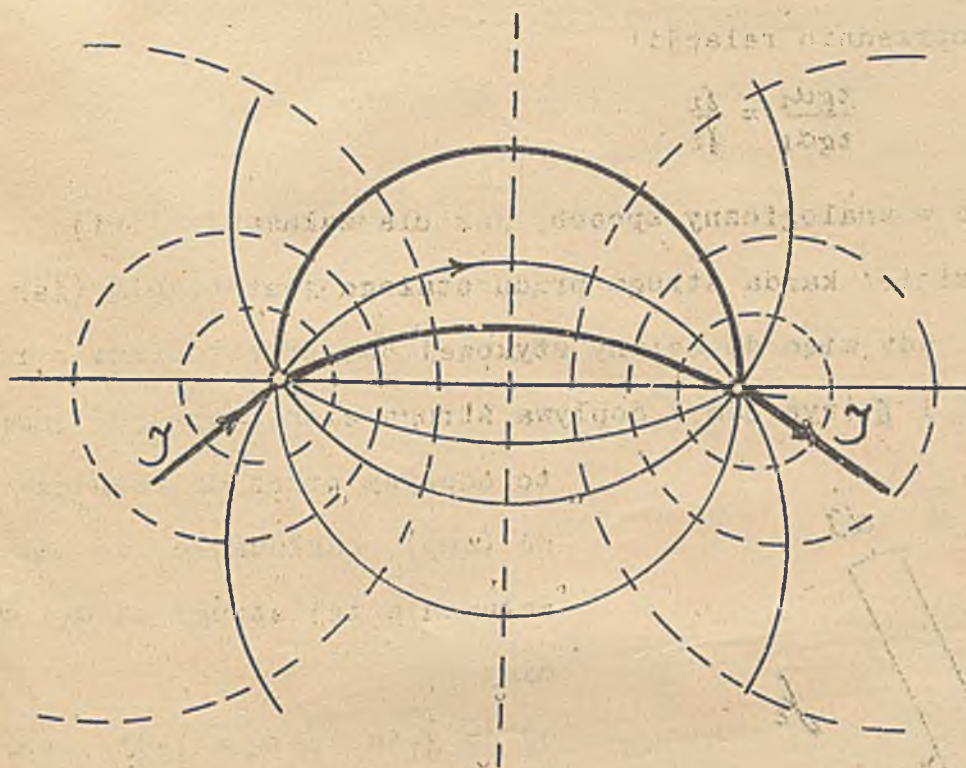
linjom ekwipotencjalnym. Graniczne strugi prądu płyną po obwodzie krążka. Do otrzymanego wyniku dojść można także analitycznie, jak to podał Kirchhoff jeszcze w roku 1845 (Annalen der Physik t. LXIV, 1845, Str. 497). Podany tu przezemnie wywód, orjeнтуje o przebiegu linii prądów w płycie kołowej równie dokładnie, a jest niezmiernie prosty.

Rys. 353.

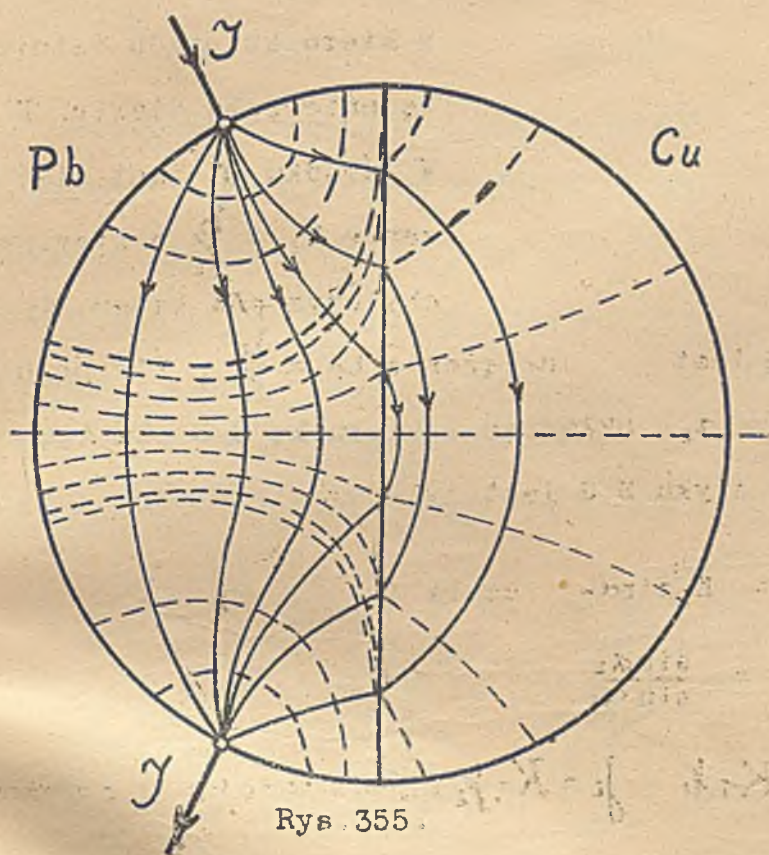
Stosując powyższy sposób rozważania, możemy oznaczyć jeszcze linje prądu w dowolnym wycinku płyty, ograniczonym dwoma kołami, przechodzącymi przez obie elektrody.



(Na rys. 354. brzeg wycinka oznaczony grubymi linjami). Analiza dotycząca



Rys. 354.



Rys. 355.

ca przebiegu linii prądu w płytach ograniczonych innych kształtów, jakoteż w blachach wichrowatych, dalej w przewodnikach bryłowych ograniczonych (kula, elipsoid, cylinder i t.p.), wymaga obszerniejszego traktowania i uwzględnienia równań różniczkowych pola elektrycznego, których zarówno tu jak i w Elektrostatyce nie wprowadzaliśmy (przynależą bowiem do wykładu Elektrotechniki teoretycznej, projektowanego na IV. roku studjów).

Pomijając mniej interesujące przypadki, podamy tu tylko obraz przebiegu linii prądów i linii potencjałów krążka płaskiego, złożonego w połowie z ołowiu (Pb), a w połowie z miedzi (Cu), znaleziony analitycznie

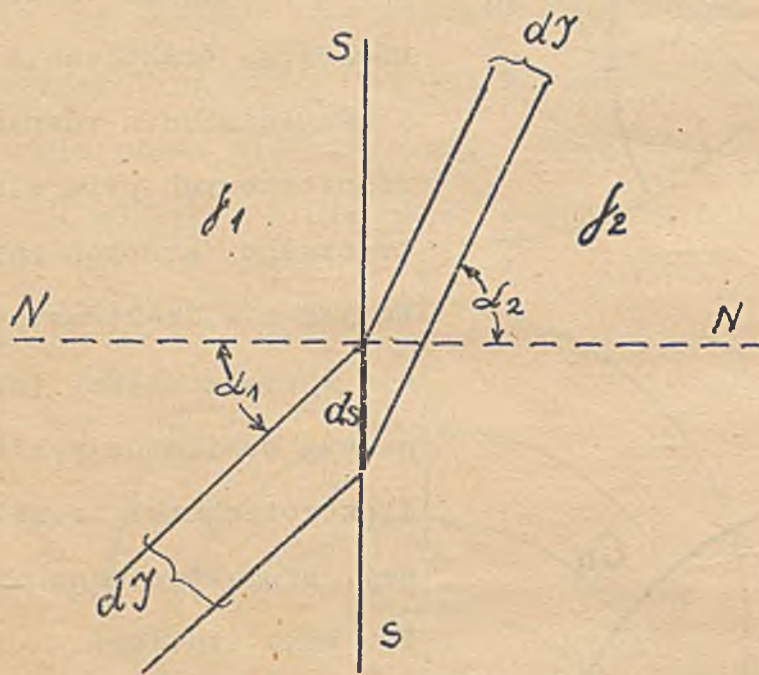
i eksperymentalnie stwierdzony (przez Quincke'go, Poggendorfer Annalen 1856 tom 97. Str 382). (Rys 355.).



Widoczne są tu załamania linii prądu na ścianie stykowej między  $F_b$  i  $C_u$ , w myśl podanej poprzednio relacji

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

którą można wyprowadzić w analogiczny sposób, jak dla załamania linii elektrycznych. A mianowicie: każda struga prądu stałego jest ciągłą (jak wiązka linii indukcji). Gdy więc do ściany stykowej dwu przewodników o różnych przewodnościach  $\delta_1$  i  $\delta_2$  (rys. 356.) dopływa struga elementarna  $dJ$  (amp)



Rys. 356.

to odpływa przez  $ds$  również  $dJ$  (amp). Zakładając, że kąty załamania tej strugi są  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  mamy

$$dJ = J_1 ds \cdot \cos \alpha_1 = J_2 ds \cdot \cos \alpha_2$$

skąd 
$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$$

W kierunku prądu istnieje natężenie pola elektr.  $K = \frac{J}{\delta}$

W ośrodku  $\delta_1$  jest więc natężenie  $K_1 = \frac{J_1}{\delta_1}$  o kierunku nachylonym pod kątem  $\alpha_1$  do nor-

malnej pod kątem  $\alpha_1$  do normalnej  $N-N$ . W ośrodku zaś  $\delta_2$  jest natężenie  $K_2 = \frac{J_2}{\delta_2}$  o kierunku nachy-

lonym do normalnej pod kątem  $\alpha_2$ . Składowe w kierunku  $S-S$  obu tych natężeń muszą być równe sobie, bo w styku  $S-S$  jest tylko jakieś jedno natężenie.

Zatem musi być

$$K_1 \sin \alpha_1 = K_2 \sin \alpha_2 \quad \text{czyli}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \quad \dots \dots \dots ( )$$

Uwzględniając, że  $J_1 = K_1 \delta_1$   $J_2 = K_2 \delta_2$  i podstawiając w powyższe dwa

równania otrzymamy

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$



### 6. Oporność i przewodność w bryłach.

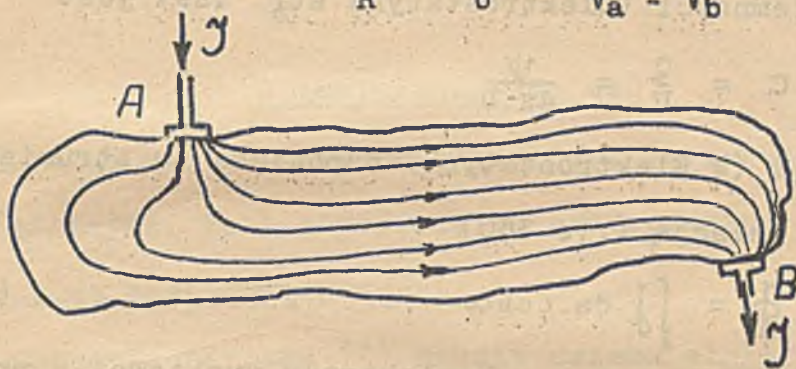
Oporność (omowa) bryły przewodzącej zależy od przebiegu linii prądu, ten zaś od położenia i kształtu elektrod.

Pomijając oporność stykową między elektrodą a bryłą i przyjmując, że w każdym punkcie elektrody jest ten sam potencjał, możemy wyrazić oporność bryły relacją

$$R = \frac{U}{J} = \frac{V_a - V_b}{J} \dots\dots\dots(193)$$

względnie przewodność bryły relacją

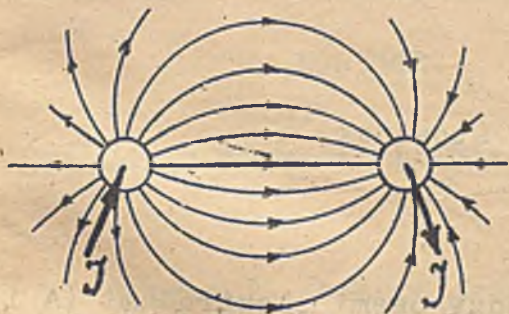
$$G = \frac{1}{R} = \frac{J}{U} = \frac{J}{V_a - V_b} \dots\dots\dots(194)$$



Rys. 357.

Elektroda punktowa, jaką w poprzednich rozważaniach mieliśmy na uwadze, to fikcja, którą trzeba zastąpić kształtem rzeczywistym (krążek, kula, półkula, płyta prostokątna, cylinder i t.p.).

O oporności bryły można mówić dopiero po ustaleniu kształtu i położenia elektrod. Przy tej samej bowiem różnicy potencjałów ( $V_a - V_b$ ) elektrod i w tym samym ośrodku przewodzącym, otrzymamy między dwiema elektrodami n.p. kulistymi (Rys. 358) inne natężenie prądu  $J$  niż między



Rys. 358.



Rys. 359.

dwiema elektrodami płaskimi, ustawionymi w tej samej odległości (Rys. 359)



Obliczenie oporności względnie przewodności między elektrodami różnych kształtów ułatwimy sobie, wprowadzając analogję między przewodnością omową (G) a pojemnością elektrostatyczną (C).

Oznacza A i B dwa przewodniki o jednakowych nabożach przeciwnych znaków (+Q i -Q), ustawione w odosobnieniu od wszelkich innych ciał, w ośrodku jednorodnym izotropowym o stałej dielektrycznej ε, to strumień indukcji elektrycznej (Ψ) łączący oba te naboże jest

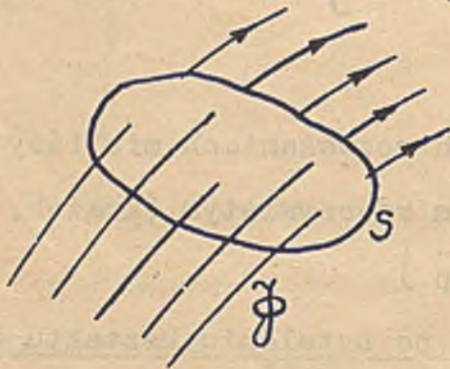
$$\Psi = 4\pi Q$$

Oznacza  $U = V_a - V_b$  różnicę potencjałów obu tych przewodników (A i B), to w myśl określenia pojemności (Elektrostatyka str. 129) jest

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\Psi}{4\pi U}$$

Strumieniowi indukcji (w Elektrostatyce) odpowiada tu strumień prądu  $\oint$  określony analogiczną relacją (rys. 360)

$$\oint = \iint j \cdot ds \cdot \cos \alpha \dots \dots \dots (195)$$



Rys. 360.

Z elektrody punktowej o prądzie J amp wychodzi strumień

$$\oint = J \text{ amp} \dots \dots \dots (196)$$

Zatem przez powierzchnię zamkniętą otaczającą n elektrod o prądach  $J_1, J_2, \dots, J_n$  przechodzi strumień

$$\oint = \sum (J) \dots \dots \dots (197)$$

Między dwiema bezoporowemi elektrodami A i B (Rys. 361) o potencjałach  $V_a$  i  $V_b$  istnieje napięcie

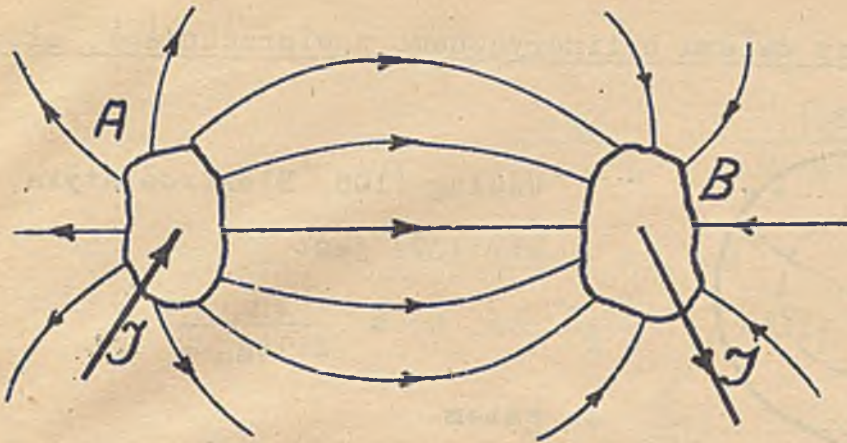
$$U = V_a - V_b$$

Płynie między temi elektrodami prąd J, to stosunek

$$G = \frac{J}{V_a - V_b}$$

odpowiada w myśl (194) przewodności bryły między owemi elektrodami (A i B)





Rys. 361.

Jednakże w myśl 196 jest

$$J = \oint$$

możemy zatem napisać

$$G = \frac{\oint}{V_a - V_b} = \frac{\oint}{U} \dots \dots \dots (198)$$

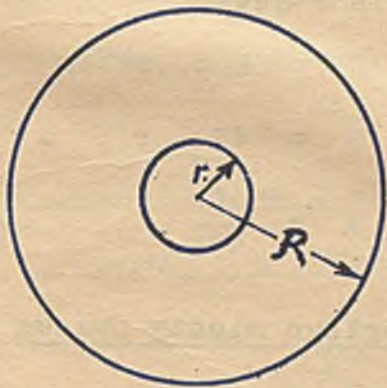
otrzymując analogiczny wzór do podanego poprzednio na pojemność elektrostatyczną

$$C = \frac{1}{4\pi} \frac{\Psi}{U} \quad \text{lub} \quad 4\pi C = \frac{\Psi}{U}, \quad G = \frac{\oint}{U}$$

G analogiczne do 4πC.

Opierając się na powyższej analogji (przewodności z pojemnością) i uwzględniając, że ε odpowiada tu przewodności γ', a ε' = 1/γ', możemy wypisać wprost następujące wzory:

- a) Oporność ośrodka (ρ) między dwiema elektrodami kształtu kul współśrodkowych (rys.362)



Rys. 362.

Przypadek ten ma swą analogję w kondensatorze kulistym (Elektrostatyka str.140, wzór 108)

$$C = \frac{\epsilon \cdot R \cdot r}{R - r}$$

$$4\pi C = 4\pi \cdot \frac{\epsilon \cdot R \cdot r}{R - r}$$

$$G = 4\pi \cdot \frac{\gamma' \cdot R \cdot r}{R - r}$$

$$R = \frac{1(R-r)}{4\pi \cdot R \cdot r} \rho \dots \dots \dots (199)$$

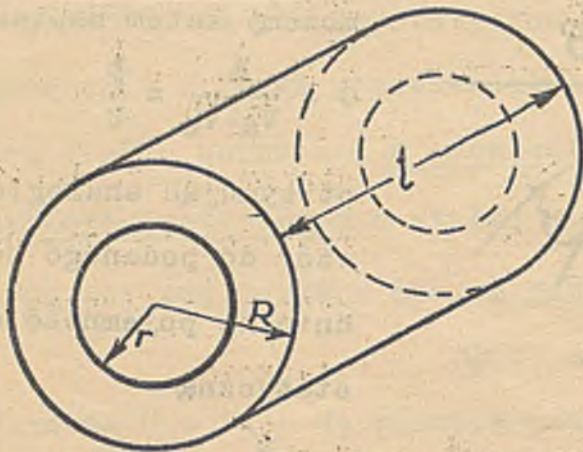
Gdy R w przeciwstawieniu do r bardzo duże, można położyć

$$R \cong \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\rho}{r} \dots \dots \dots (200)$$

Uwaga: γ' oznacza przewodność właściwą na cm długości i cm<sup>2</sup> przekroju  
ρ' = 1/γ'. Wymiary R, r należy wstawić w cm, to R wypadnie Ω.



- b) Oporność ośrodka między dwiema cylindrycznymi powierzchniami, ułożonymi osiowo (rys.363.).



Rys.363.

Według (106, Elektrostatyka str.139) jest

$$C = \frac{\epsilon \cdot l}{2 \cdot \log_n \frac{R}{r}}$$

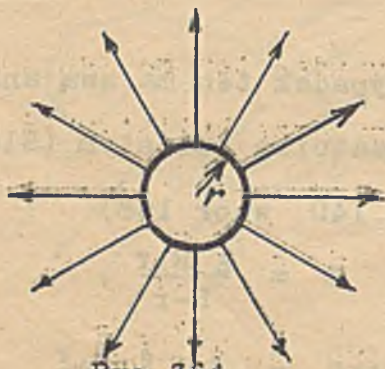
zatem

$$G = 4\pi \frac{\delta \cdot l}{2 \cdot \log_n \frac{R}{r}}$$

$$R = \frac{\int'}{2\pi \cdot l} \log_n \frac{R}{r} \dots \dots \dots (201)$$

Uwaga: Identyczny wzór znaleźliśmy już poprzednio (22, str.40) na innej drodze.

- c) Oporność ośrodka nieskończenie rozległego między elektrodą kulistą o promieniu r, a współśrodkową powierzchnią kulistą w nieskończoności (Rys.364.).



Rys.364.

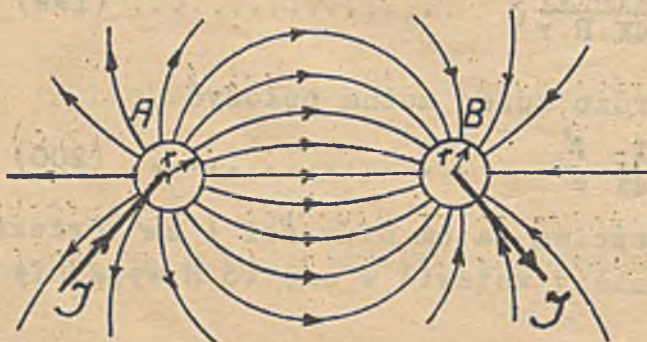
Pojemność kuli odosobnionej o promieniu r jest

$$C = \epsilon \cdot r, \text{ zatem}$$

$$G = 4\pi \delta \cdot r, \text{ a}$$

$$R = \frac{\int'}{4\pi r} \dots \dots \dots (202)$$

- d) Oporność ośrodka nieskończenie rozległego między dwiema elektrodami kulistymi o promieniach r (Rys.365.)



Rys.365.

Przy dużej odległości

takich dwu kul o promieniach (r) bardzo małych w porównaniu z ich odległością, można położyć także i tu (elektrostat.)



$$V_a = \frac{Q}{r \cdot \epsilon} \quad V_b = \frac{Q}{r \cdot \epsilon}$$

zatem

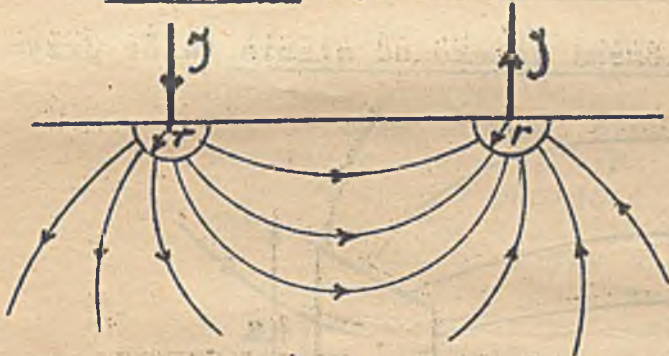
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{Q}{\frac{Q}{r \cdot \epsilon} + \frac{Q}{r \cdot \epsilon}} = \frac{r \cdot \epsilon}{2}$$

Przewodność wyrazi się więc wzorem

$$G = 4\pi \cdot \frac{r \cdot \epsilon'}{2} = 2\pi r \epsilon'$$

$$R = \frac{\epsilon'}{2\pi r} \dots \dots \dots (203)$$

e) Oporność ośrodka nieskończenie rozległego, ograniczonego jednostronnie płaszczyzną, między dwiema elektrodami w formie półkul o promieniach  $r$  (Rys. 366.)



Rys. 366.

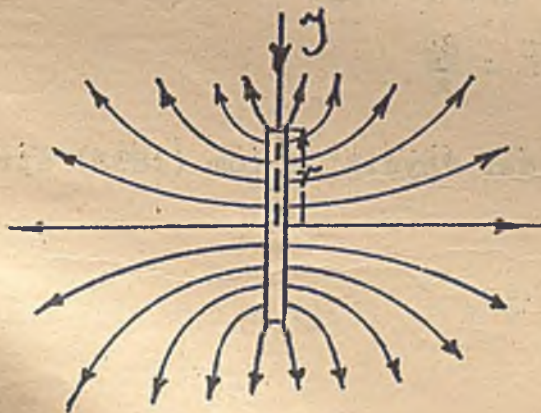
Wobec (203) będzie

$$R = \frac{1}{\pi \cdot r} \epsilon' \dots \dots \dots (204)$$

Uwaga. Odległość elektrod znaczna w porównaniu z promieniem  $r$  (jak w 203).

Analogicznie znaleziono: (patrz Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften tom 5. 2-ga część, Debye Spezielle Behandlung körperlicher Leiter str.401)

f) Oporność ośrodka nieskończenie rozległego między płaskim krążkiem o promieniu  $r$  a powierzchnią kulistą w nieskończoności (rys.367).

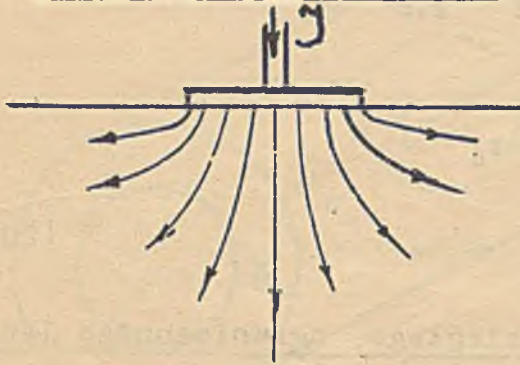


Rys. 367.

$$R = \frac{1}{8r} \epsilon' \dots \dots \dots (205)$$



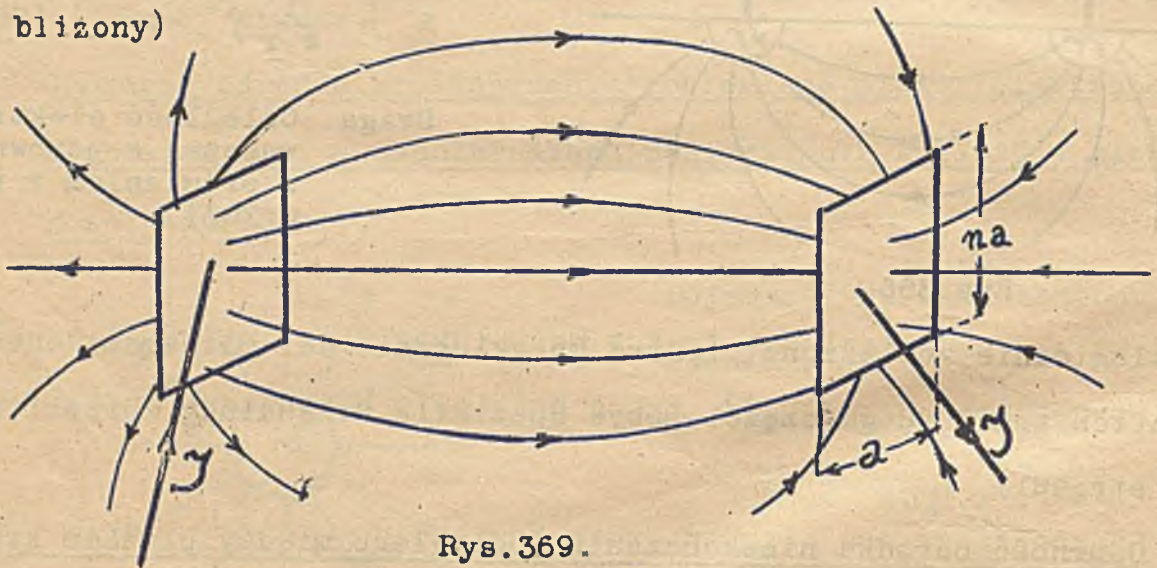
- g) Oporność ośrodka nieskończenie rozległego, ograniczonego płaszczyzną, między krążkiem o promieniu r, umieszczonym na owej płaszczyźnie, a nieskończonością (Rys.368).



$$R = \frac{1}{4r} \zeta' \dots \dots \dots (206)$$

Rys.368.

- h) Oporność nieskończenie rozległego ośrodka między dwiema płaskimi płytami prostokątnymi, ustawionymi daleko od siebie (wzór przybliżony)



Rys.369.

$$R \approx \frac{1}{\pi a \sqrt{N}} \log_n \frac{n+1+\sqrt{N}}{n+1-\sqrt{N}} \zeta' \dots \dots \dots (207)$$

$$N = (1+n)^2 - \frac{8n}{\pi}$$

(Według Winkelmann „Handbuch der Physik“ 3 tom (1893) str.202).







LITERATURA DO CZĘŚCI I. TOMU II-GO (TEORJA PRADU STAŁEGO).

1. POŻARYSKI Podstawy naukowe Elektrotechniki, Wyd. 2-gie 1927 (układ podręcznika i opracowanie pozostawia wiele do życzenia).
2. DREWNOWSKI Podstawy Elektrotechniki 1921, litografowane. Układ doskonały, opracowanie zawiera jednak kilka błędów rzeczowych. (Specjalnie indukcja).
3. STANIEWICZ Podstawy Elektrotechniki (2 części) litografowane 1925. Opracowanie dobre, lecz za szczupłe.
4. BENISCHKE Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik (Wyd. 6-te 1922). (Zawiera wiele błędów rzeczowych, szczególnie w działach traktujących o Elektrostatyce, Magnetostatyce i indukcji).
5. THOMALEN Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik (Wyd. 9-te 1922) Podręcznik bardzo dobry ale opracowanie zanadto treściwe, wskutek czego miejscami trudne do zrozumienia.
6. HEINKE Einführung in die Elektrotechnik (Wyd. 2-gie 1924) Podręcznik bogaty w treść, lecz mało pedagogiczny.
7. BLATTNER Lehrbuch der Elektrotechnik 2 tomy Wyd. 3-cie 1925, jeden z najlepszych podręczników niemieckich, lecz na poziomie średnich szkół technicznych.
8. HOLZT Die Schule des Elektrotechnikers 4 tomy (Wyd. 2-gie 1920) Bardzo praktyczne opracowanie, lecz na poziomie średnich szkół technicznych.
9. HERZOG - FELDMANN Die Berechnung der Leitungsnetze Wyd. 3-cie 1921. (Wyd. 4-te 1927). Mieści w początkowych rozdziałach teorię obwodu elektr. i cytuje obfitą literaturę. Dzieło o wysokiej wartości naukowej, jednakże mało praktyczne.
10. HERRMANN Elektrotechnik, 3 tomiki Nr. 196, 197 i 198 Sammlung Göschen. Treściwe i dobre opracowanie.

Zadania:

1. HENSEL Elektrotechnika w zadaniach (4 części) 1923. Na poziomie średnich szkół technicznych.
2. GERARD Elektryczność w zadaniach (polski przekład Kamińskiego) 1917.
3. VIEWEGER Aufgaben u. Lösungen aus der Gleich - u. Wechselstromtechnik (Wyd. 6-te 1921). Na poziomie średnich szkół technicznych.
4. MAYER Aufgaben aus der Elektrotechnik 1910. Na poziomie średnich szkół technicznych.
5. MÜLLENDORF Aufgaben aus der Elektrotechnik Wyd. 3-cie 1919. Na poziomie szkół akademickich, jednakże opracowanie mało praktyczne.

