UOGÓLNIENIE PRAW KIRCHHOFF'A I ZASADA WYODRĘBNIENIA.

Prof. Dr. Inż. Stanisław Fryze.

1. Uogólnienie praw Kirchhoff'a.

W obwodach prądu stałego możemy wypisać dla węzłów wzgl. zamkniętych oczek równania Kirchhoff'a:

$$\Sigma (J) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

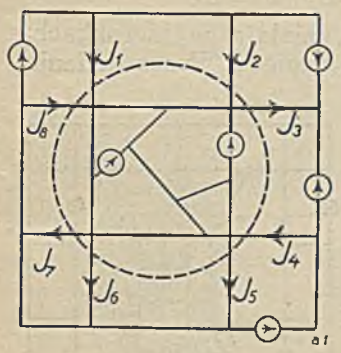
$$\Sigma (JR) = \Sigma (E) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Równania te obowiązują (przy znanych założeniach) także w obwodach sinusoidalnych, jeżeli wszystkie wielkości wyrazimy symbolicznie:

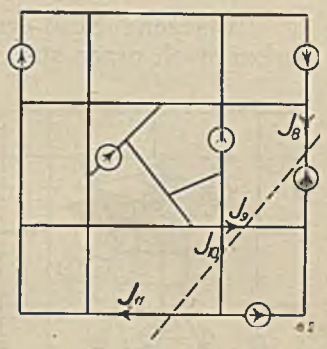
$$\Sigma (\dot{J}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

$$\Sigma (\dot{J}\dot{Z}) = \Sigma (\dot{E}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

Powyższe dwa prawa Kirchhoff'a można uogólnić.



Rys. 1.



Rys. 2.

Weźmy pod uwagę dowolny obwód prądu stałego (rys. 1 wzgl. rys. 2) i wydzielmy z niego część przy pomocy zamkniętej linji kreskowanej. Obwód rozpadnie się przez to na dwie części. Elektryczność nie może się gromadzić w żadnej z nich, z czego wynika pierwsze uogólnione prawo Kirchhoff'a:

Suma algebraiczna wszystkich prądów, dopływających do dowolnej części obwodu, wydzielonej z niego linją zamkniętą, wzgl. z niej odpływających, jest równa zeru.

$$\Sigma (J) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

W sumie tej liczymy prądy dopływające jako dodatnie, odpływające jako ujemne. Na rys. 1 dopływają do wewnętrznej części obwodu prądy J_1 J_2 J_4 J_8, a odpływają z niej prądy J_3 J_5 J_6 J_7. Mamy więc według (I)

$$J_1+J_2-J_3+J_4-J_5-J_6-J_7+J_8=0.$$

Na rys. 2 dopływają do prawej części obwodu prądy J_8 i J_9, a odpływają z niej prądy J_{10} i J_{11}. Mamy tu:

$$J_8+J_9-J_{10}-J_{11}=0.$$

Widzimy też, że pierwsze prawo Kirchhoff'a (1) jest szczególnym przypadkiem podanego tu prawa (I), mianowicie takim, w którym wydzielona część obwodu redukuje się do węzła.

Wróćmy do naszego obwodu prądu stałego (rys. 3) i obierzmy na elementach składających go kilka dowolnie położonych punktów *a, b, c, d, f*. Połączmy je ze sobą zamkniętą linją, kreskowaną na rysunku i oznaczmy napięcia między dwoma sąsiedniemi punktami przez U_1 U_2 U_3 U_4 i U_5. Ponieważ elektryczne napięcie okrężne w obwodzie prądu stałego jest równe zeru

$$U_o = \oint K_l \, dl = 0$$

przeto możemy napisać, że *algebraiczna suma napięć wzdłuż zamkniętej linji, łączącej dowolne punkty obwodu prądu stałego, jest równa zeru.*

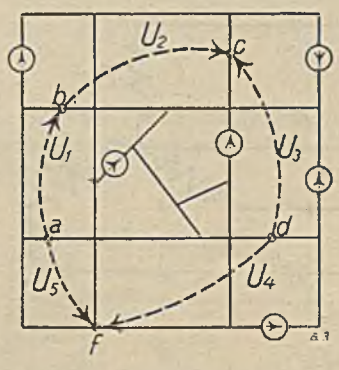
$$\Sigma (U) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

Jest to drugie uogólnione prawo Kirchhoff'a. Wartości U należy przytem wstawiać w równanie (II) z przynależnemi znakami, odpowiednio do ich strzałek kierunkowości.[1]) Tak np. otrzymamy dla zamkniętej linji (kreskowanej) na rys. 3 równanie:

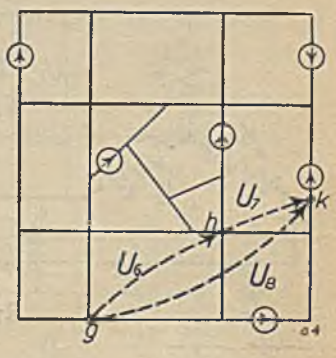
$$U_1+U_2-U_3+U_4-U_5=0,$$

a dla rys. 4

$$U_6+U_7-U_8=0.$$



Rys. 3



Rys. 4.

[1]) Patrz St. Fryze: „Strzałki kierunkowe w obwodach elektrycznych". Przegląd Elektrotechniczny, 1925, Nr. 12, 13, 14.

Strzałki napięcia wskazują, w jaki sposób należy obliczać odpowiednie różnice potencjałów. Dla strzałek zorjentowanych, jak na rys. 3, ważne są równania

$U_1 = P_b - P_a$; $U_2 = P_c - P_b$; $U_3 = P_c - P_d$ i t. d

przyczem P_a, P_b, P_c [2]) i t. d. oznaczają potencjały punktów *a*, *b*, *c*, i t. d.

Gdy poprowadzimy naszą linję zamkniętą wzdłuż przewodów i podstawimy $U = E \pm J \cdot R$, otrzymamy z równania (II) drugie prawo Kirchhoff'a. Widzimy więc, że oba prawa Kirchhoff'a są tylko szczególnemi przypadkami ogólnych równań (I) i (II).

Równania te są ważne (przy tych samych zastrzeżeniach, jak dla (1) i (2)), także w obwodach sinusoidalnych, jeżeli napięcia i prądy będą wyrażone symbolicznie:

$$\Sigma(\dot{J}) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Ia)}$$

$$\Sigma(\dot{U}) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(IIa)}$$

Znaki symbolicznych wartości prądów i napięć zależą i tu (tak samo, jak przy prądzie stałym) *od strzałek (kierunkowości).* [3]) Dla przykładu podamy zastosowanie naszych równań w obwodzie trójfazowym, połączonym w gwiazdę z wyprowadzonym przewodem zerowym (rys. 5). Z równania (IIa) otrzymamy związki:

$$\dot{V}_1 - \dot{U}_1 - \dot{V}_2 = 0 \quad \text{lub} \quad \dot{U}_1 = \dot{V}_1 - \dot{V}_2$$

$$\dot{V}_2 - \dot{U}_2 - \dot{V}_3 = 0 \quad \text{lub} \quad \dot{U}_2 = \dot{V}_2 - \dot{V}_3$$

$$\dot{V}_3 - \dot{U}_3 - \dot{V}_1 = 0 \quad \text{lub} \quad \dot{U}_3 = \dot{V}_3 - \dot{V}_1$$

przyczem jest, w myśl poprzedniej naszej umowy,

$$\dot{V}_1 = \dot{P}_1 - \dot{P}_0 \qquad \dot{V}_2 = \dot{P}_2 - \dot{P}_0 \qquad \dot{V}_3 = \dot{P}_3 - \dot{P}_0$$

$$\dot{U}_1 = \dot{P}_1 - \dot{P}_2 \qquad \dot{U}_2 = \dot{P}_2 - \dot{P}_3 \qquad \dot{U}_3 = \dot{P}_3 - \dot{P}_1$$

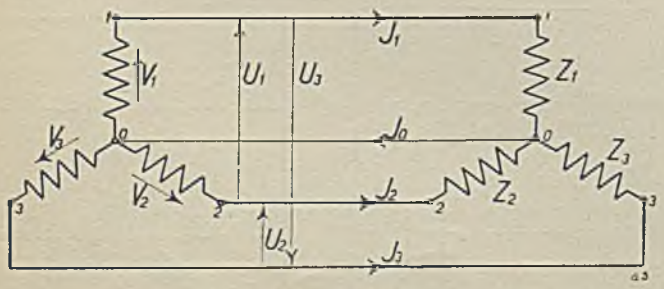
gdzie $\dot{P}_1$ $\dot{P}_2$ $\dot{P}_3$ $\dot{P}_0$ odpowiadają potencjałom punktów 1, 2, 3, wzgl. 0.

(W naszych rozważaniach ograniczamy się, oczywiście, do prądów zmiennych o niskiej częstotliwości, przy których możemy jeszcze operować potencjałami na wzór obwodów prądu stałego).

Z równania (Ia) otrzymamy:

$$\dot{J}_1 + \dot{J}_2 + \dot{J}_3 - \dot{J}_0 = 0$$

Z tych związków wynikają znane diagramy promieniste dla układów trójfazowych.



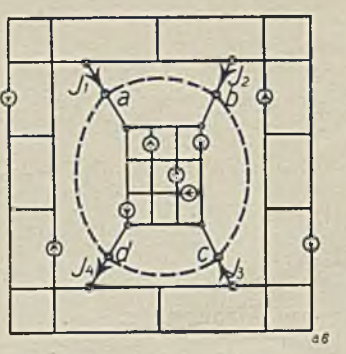
Rys. 5.

[2]) Użyto tu na oznaczenie potencjału litery *P* zamiast *V*, aby uzgodnić treść z rysunkami, przeznaczonemi do publikacji w języku niemieckim.

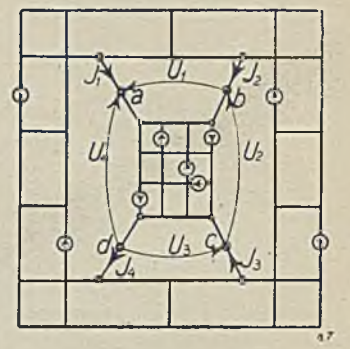
[3]) Patrz St. Fryze „Strzałki kierunkowe w obwodach elektrycznych". Przegląd Elektrotechniczny, 1925, Nr. 12, str. 14.

2. Zasada wyodrębnienia.

Weźmy pod uwagę dowolnie ukształtowany obwód prądu stałego i ograniczmy w nim część przy pomocy zamkniętej linji kreskowanej (rys. 6).



Rys 6.



Rys. 7

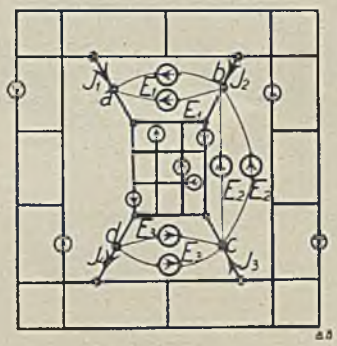
Punkty przecięcia tej linji z przewodami oznaczamy przez *a*, *b*, *c*, *d*, i znajdujemy napięcia między dwoma sąsiedniemi punktami (rys. 7).

$U_1 = P_a - P_b$, $U_2 = P_b - P_c$, $U_3 = P_c - P_d$, $U_4 = P_a - P_d$

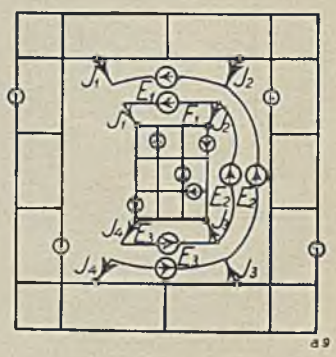
Włączamy teraz, przy pomocy *bezoporowych przewodów* między punkty *ab*, *bc*, *cd* po dwie jednakowe SEM-czne E_1 E_2 E_3 takiej wielkości, aby skompensowały istniejące między temi punktami napięcia (rys. 8). *Wtedy nie popłyną przez połączenia z SEM-cznemi żadne prądy,* ponieważ w myśl założenia jest

$$U_1 = E_1 \quad U_2 = E_2 \quad U_3 = E_3$$

Włączone SEM-czne działają w kierunkach, wskazanych przez strzałki napięcia. Przez dodanie



Rys 8



Rys. 9.

tych SEM-cznych nic się w naszym obwodzie nie zmieniło, rozpływ prądów i rozkład napięć są takie, jak poprzednio. Rozcinamy teraz nasz obwód wzdłuż linji kreskowanej na rys. 6, wskutek czego rozpada on się na dwie części (rys. 9). *Rozpływ prądów i rozkład napięć będą* (w stanie ustalonym) *w każdej z tych części znów takie same, jak przed rozcięciem, bo z obu uogólnionych praw Kirchhoff'a wypadają dla każdej części identyczne równania przed i po rozcięciu. Jedynem następstwem oddzielenia* elektrycznego obu części obwodu *będzie to, że przez nasze bezoporowe połączenia z SEM-cznemi popłyną prądy.* Aby je obliczyć, oznaczmy prądy, które (przed rozcięciem) dopływały do wewnętrznej części sieci wzgl. z niej odpływały, przez J_1 J_2 J_3 J_4, a prądy, płynące przez połączenia

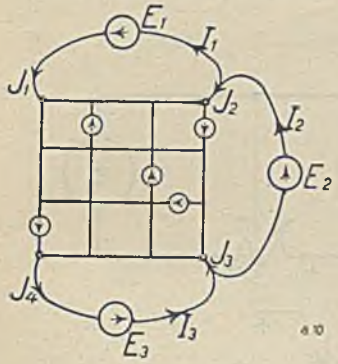
z SEM-cznemi I_1 I_2 I_3. Wtedy otrzymamy równania (rys. 10):

$$J_1=I_1 \quad J_2=I_2-I_1 \quad J_3=I_3-I_2 \quad J_4=I_3$$

a stąd

$$I_1=J_1 \quad I_2=J_1+J_2 \quad I_3=J_1+J_2+J_3$$

Tę metodę, umożliwiającą oddzielenie jakiejkolwiek części obwodu od reszty, bez zmiany rozpływu prądów, rozkładu napięć i t.p. nazwiemy *zasadą wyodrębnienia*. Jej ważność wynika wprost z obu uogólnionych praw Kirchhoff'a.



Rys. 10.

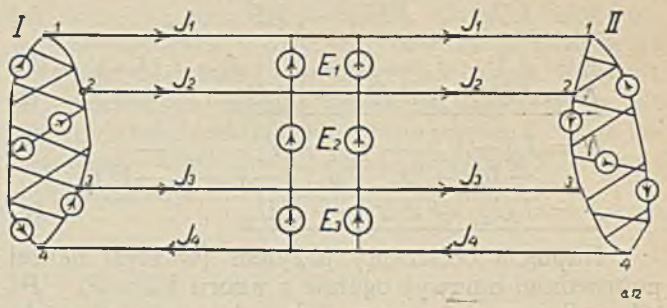
Zasada wyodrębnienia umożliwia wydzielenie dowolnej części obwodu bez względu na to, czy ona zawiera SEM-czne, czy nie. Na pierwszy rzut oka wydaje się może dziwnem, że kompensujemy n napięć (u nas U_1 U_2 U_3 U_4) przy pomocy tylko (n-1) SEM-cznych (tu E_1 E_2 E_3). Tłumaczy się to jednak tem, że n-ta SEM-czna równa się sumie pozostałych (n-1) SEM-cznych, zatem n-te napięcie zostaje właśnie tą sumą skompensowane. Tak np. w naszym układzie (rys. 9) jest

$$E_1+E_2+E_3=U_4.$$

Zasada wyodrębnienia jest ważna zarówno w obwodach prądu stałego, jak i w obwodach sinusoidalnych o niskiej częstotliwości. Odda ona znakomite usługi w tych wszystkich wypadkach, gdzie przez wydzielenie skomplikowanej części obwodu analiza się upraszcza. Dla przykładu podamy zastosowanie zasady wyodrębnienia przy obliczeniu mocy w układzie n-przewodowym.

3. Obliczenie mocy układu n-przewodowego przy pomocy zasady wyodrębnienia i uogólnionych praw Kirchhoff'a.

Dane są dwa dowolnie ukształtowane układy prądu stałego I i II, połączone ze sobą n przewodami i zawierające dowolną ilość dowolnie rozmieszczonych SEM-cznych (kółka ze strzałkami na rys. 11). Mamy obliczyć moc przenoszoną n przewodami z jednego układu do drugiego. Dla przejrzystości ograniczymy się tu do $n = 4$ (rys. 11). Oznaczamy prądy w przewodach J_1 J_2 J_3 J_4 i napięcia między przewodami V_1 V_2 V_3. Włączamy następnie (przy pomocy bezoporowych połączeń) między cztery przewody trzy pary SEM-cznych, kompensujących $E_1=V_1$, $E_2=V_2$, $E_3=V_3$ (rys. 12), a następnie oddzielamy od siebie (według zasady



Rys. 12.

wyodrębnienia) części I i II (rys. 13). Ponieważ rozpływ energji w I i II nie uległ przez to zmianie, więc możemy napisać

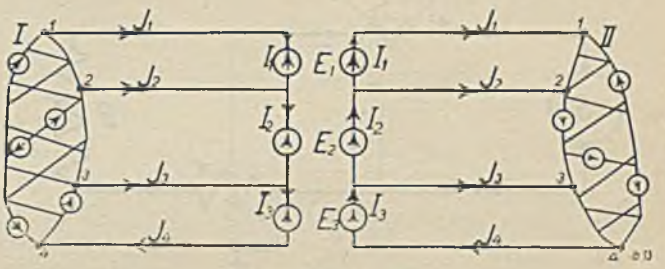
$$N = E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3 =$$
$$= E_1J_1 + E_2(J_1 + J_2) + E_3(J_1+J_2+J_3) \quad . \quad . \quad (a)$$

albo

$$N = V_1J_1 + V_2(J_1+J_2) + V_3(J_1 + J_2 + J_3) \quad (b)$$

Przy n przewodach otrzymalibyśmy ogólne równanie:

$$N = V_1J_1 + V_2(J_1 + J_2) + \ldots\ldots$$
$$+ V_{n-1}(J_1 + J_2 + \ldots\ldots + J_{n-1}) \quad (c)$$

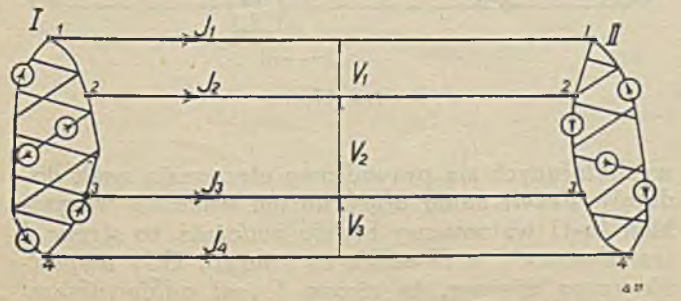


Rys. 13.

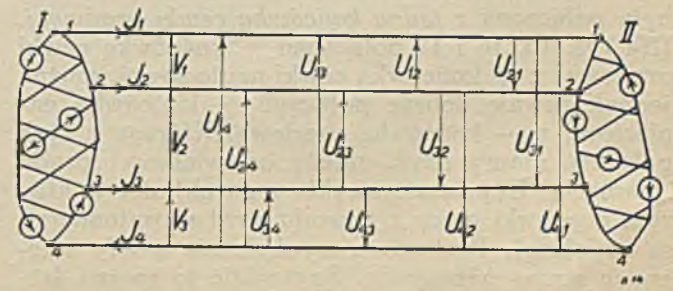
W równaniu tem możemy pojedyńcze człony V_pJ_r zbierać razem w rozmaity sposób tak, że otrzymamy równanie (c) w n różnych postaciach. Wynik, oczywiście, nie ulegnie przez to żadnej zmianie. Pokażemy te przekształcenia na naszym przykładzie. Mieliśmy tam

$$N = J_1V_1 + J_1V_2 + J_2V_2 + J_1V_3 + J_2V_3 + J_3V_3$$
$$J_1 + J_2 + J_3 - J_4 = 0.$$

Stąd otrzymamy równanie na moc w czterech postaciach, odpowiednio do układu połączeń na rys. 14.



Rys. 11.



Rys. 14.

$$N = J_1(V_1+V_2+V_3) + J_2(V_2+V_3) + J_3V_3$$
$$N = J_1U_{14} + J_2U_{24} + J_3U_{34} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

$$N = J_1(V_1+V_2)+J_2V_2-(J_1+J_2+J_3)(-V_3)$$
$$N = J_1U_{13} + J_2U_{23} - J_4U_{43} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (e)$$

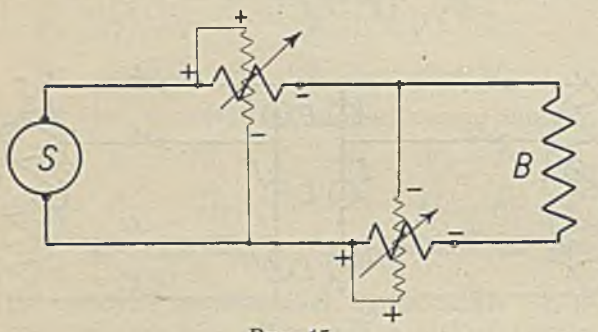
$$N = J_1V_1+J_3(-V_2)-(J_1+J_2+J_3)(-V_2-V_3)$$
$$N = J_1U_{12} + J_3U_{32} - J_4U_{42} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (f)$$

$$N = J_2(-V_1) + J_3(-V_1-V_2) - (J_1+J_2+J_3)(-V_1-V_2-V_3)$$
$$N = J_2U_{21} + J_3U_{31} - J_4U_{41} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (g)$$

Napięcia obliczamy przytem (w myśl naszej poprzedniej umowy) ogólnie z wzoru $V_{ab} = P_a - P_b$, gdzie P oznaczają potencjały odpowiednich punktów. W naszym przykładzie jest więc $V_1 = P_1 - P_2$, $V_2 = P_2 - P_3$, $V_3 = P_3 - P_4$, (P_1, P_2, P_3, P_4 oznaczają potencjały przewodów 1, 2, 3, 4).

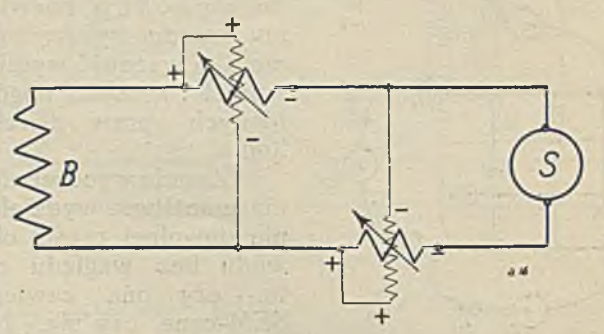
Z wzorów (d) (e) (f) (g) wynika, że moc N w układzie n-przewodowym można obliczyć i zmierzyć na n sposobów. Do pomiaru potrzeba (n-1) watomierzy.

Którą z tych n możliwości wybierzemy, to zależy wyłącznie od względów praktycznych. W układzie trójprzewodowym np. jest korzystnem włączenie cewek prądowych obu watomierzy w przewody skrajne, przyczem przewód środkowy (zerowy) służy jako „przewód odniesienia", t. zn. końce obu cewek napięciowych są do niego przyłączone.



Rys. 15.

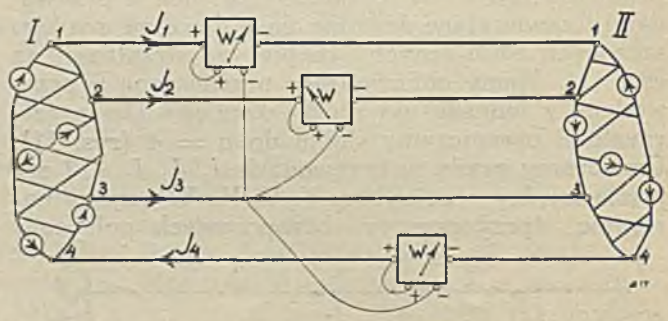
Co do samego pomiaru należy zauważyć, że watomierz wskazuje nietylko wielkość mocy, ale może też podać, po której stronie się znajduje odbiorca, a po której dostawca energji. W tym celu należy tylko oznaczyć początki i końce obu cewek watomierza w ten sposób, aby wskazówka dawała wychylenie dodatnie, gdy przez obie cewki przepływają prądy od końcówki + do końcówki —. Tak oznaczony watomierz załącza się w obwód w ten sposób, aby *końcówka + cewki napięciowej* była połączona *z jedną końcówką cewki prądowej.* (Na rys. 15, 16 i 17 połączono + końcówkę cewki prądowej z + końcówką cewki napięciowej, można jednak równie dobrze połączyć + końcówkę napięciową z — końcówką prądową. Którego z tych połączeń mamy użyć, zależy od wielkości prądu i napięcia. Używa się zwykle tego układu, w którym poprawki mocy z powodu strat w watomierzu są mniejsze). *Watomierz wychyla się wtedy zawsze w stronę odbiornika.* Sprawdzić to można łatwo na podstawie rys. 15 i 16. Na rys. 15 znajduje się odbiornik *B* po *prawej* stronie. Oba watomierze mają wtedy *dodatnie* wychylenie (na prawo), gdy według poprzedniej umowy są *końcówki + cewek napięciowych połączone* z odpowiedniemi *końcówkami cewek prądowych,* jak to łatwo sprawdzić, kontrolując przepływ prądów przez cewki prądowe i napięciowe obu przyrządów. Na rys. 16 leży odbiornik *B* po *lewej* stronie. Watomierze są znowu załączone jak poprzednio. Oba instrumenty



Rys. 16.

dają wtedy wychylenie *ujemne* (na lewo), bo gdy w jednej cewce prądowej płynie prąd od zacisku + do —, to w przynależnej napięciowej płynie prąd od końcówki — do + i odwrotnie. *Oba watomierze wychylają się więc i w tym przypadku w stronę odbiornika B.* Stąd widać także, że jest rzeczą *obojętną, w który przewód włączymy watomierz,* byleby tylko była + *końcówka cewki napięciowej połączona z jedną końcówką prądową.*

Do pomiaru mocy w układzie n-przewodowym potrzeba (n-1) watomierzy. Załączamy je w (n-1) dowolnie obranych przewodów, zgodnie z powyższą regułą i to w ten sposób, aby przewody przychodzące z I były przyłączone do + zacisków prądowych watomierzy, a wszystkie zaciski — cewek napięciowych były przyłączone do „przewodu odniesienia" (rys. 17). Wtedy dadzą niektóre watomierze wychylenie dodatnie, a niektóre ujemne. *Przełączamy* w znany sposób *cewki napięciowe watomierzy wychylających się ujemnie,* aby móc je odczytać, ale *wstawiamy ich wskazania* w naszą sumę *ze znakiem ujemnym.* (Wskazania watomierzy



Rys. 17.

wychylających się prawidłowo otrzymują znak dodatni). *Jeżeli suma algebraiczna* wskazań wszystkich (n-1) watomierzy będzie *dodatnia,* to *strona I jest dostawcą, a II odbiorcą energji.* Gdy *wypadnie suma ujemna,* to *strona I jest odbiornikiem, a II źródłem energji.*

Przykład: W układzie 4-przewodowym na rys. 11 obrano trzeci przewód jako „przewód odniesienia". Watomierze włączono więc, jak na rys. 17. *Górny* watomierz wychyla się np. *dodatnio* i wskazuje *1500 W. Środkowy* watomierz ma wychylenie *ujemne. Po przełączeniu* jego cewki napięciowej wskazuje *700 W. Dolny* watomierz wychyla się *dodatnio* i wskazuje *500 W.* Moc przenoszona w naszym układzie czterema przewodami wynosi zatem:

$N = (+1500) + (-700) + (+500) = +1300$ W,

a ponieważ wypadł *dodatni znak sumy N*, przeto *musi być strona I dostawcą, a II odbiorcą energji.* Ustrój części I i II jest przytem rzeczą obojętną, tak samo nie wpływa symetrja czy asymetrja obciążenia na metodę pomiaru mocy w układach n-przewodowych. Powyższe rozważania zachowują swą ważność także w obwodach sinusoidalnych. W oddzielnych pracach podam obliczenie mocy dla sinusoidalnych układów n-przewodowych, oraz zastosowanie uogólnionych praw Kirchhoff'a i zasady wyodrębnienia do zagadnień transfiguracji.

Sp. Akc. Zakł. Graf. „Drukarnia Polska", Warszawa, Szpitalna 12. Tel.: 717-98, 504-46.