19 19

Sonderabdruck aus der
ELEKTROTECHNISCHEN ZEITSCHRIFT
53. Jahrg. 1932, Heft 25, Seite 596; Heft 26, Seite 625; Heft 29, Seite 700.
(Im Buchhandel durch Julius Springer in Berlin.)

Wirk-, Blind- und Scheinleistung in elektrischen Stromkreisen mit nichtsinusförmigem Verlauf von Strom und Spannung*.

Von Prof. Dr.-Ing. **S. Fryze**, Lwów (Lemberg).

Übersicht. Im folgenden wird eine neue Lösung des Problems der Leistungsdefinition im nichtsinusoidalen Zweileitersystem angegeben. Die Definitionen werden so erfaßt, daß die für Sinusströme geltenden Formeln auch in nichtsinusoidalen Stromkreisen bestehen bleiben. Es wird die allgemeine physikalische Deutung der abgeleiteten Beziehungen angegeben und die experimentelle Prüfungsmöglichkeit besprochen.

Einleitung.

In sinusoidalen Stromkreisen unterscheiden wir drei Arten von Leistung: Wirkleistung P, Blindleistung P_b und Scheinleistung P_s, die miteinander durch die Formel $P_s^2 = P^2 + P_b^2$ verbunden sind. In der Praxis haben wir es jedoch durchwegs mit verzerrten Stromkurven zu tun. Es entstand daher die Frage, wie man den Begriff der Blindleistung auf nichtsinusoidale Stromkreise übertragen soll, ohne daß die für Sinusströme bestehenden Gleichungen ihre Gültigkeit verlieren. Diese Frage wurde bis jetzt noch nicht gelöst.

F. Emde beweist[1], daß der Begriff der Blindleistung nur auf Sinusströme anwendbar ist und sich nicht auf verzerrte Stromkurven übertragen läßt. H. Schering schlägt vor[2], die Blindleistung mit der pendelnden Energie des magnetischen und elektrischen Feldes in Zusammenhang zu bringen. Da diese Beziehung in nichtsinusoidalen Stromkreisen eine andere Gestalt hat als in sinusoidalen, so muß man sich nach Schering mit einer Näherungsrechnung zufriedenstellen. E. Weber behauptet[3], daß es unmöglich sei, die Blindleistung in nichtsinusoidalen Stromkreisen ebenso zu definieren wie in sinusoidalen Stromkreisen, weil die dort bestehende Gleichung $P_s^2 = P^2 + P_b^2$ für verzerrte Stromkurven ihre Gültigkeit verliert.

C. Budeanu[4] berechnet die Scheinleistung P_s mittels Fourierscher Reihen und erhält die Beziehung $P_s^2 = P^2 + P_b^2 + P_v^2$, wobei er eine neue Größe, die sog. „Verzerrungsleistung" P_v einführt.

L. P. Krijger macht den Vorschlag[5], den Leistungsfaktor λ als ein Produkt von zwei Faktoren darzustellen: $\lambda = \lambda_0 \cos\psi$, wobei λ_0 den „Verzerrungsfaktor" und ψ den (Phasen-) „Verschiebungsfaktor" bezeichnen soll. Einen ähnlichen aber anders begründeten Vorschlag machen Brynhildsen und Kern[6]. K. E. Müller wendet ein[7], daß man dabei in einigen Fällen $\cos\varphi > 1$ erhält, was mathematisch sinnwidrig ist, und rät, den Leistungsfaktor auf eine andere Weise zu zerlegen.

Im Jahre 1930 weist Emde auf eine mit der Blindleistung verwandte Größe, die „Entohmung", hin[8]. In demselben Jahre taucht schließlich der Vorschlag von Müller-Lübeck[9] auf, zwei Arten von Leistungsfaktoren zu unterscheiden: einen elektrischen λ_E und einen magnetischen λ_M.

Die Internationale Elektrotechnische Kommission (IEC), deren Tagung im Sommer 1930 in Stockholm stattfand[10], hatte alle ihr vorgelegten Vorschläge mit Recht verworfen, denn es gab unter ihnen keinen, der ganz allgemein gültig wäre, also eine einheitliche Behandlung aller Stromkreise gestattete.

Die vorliegende Arbeit soll beweisen, daß die bisherigen Definitionen der Blindleistung unrichtig waren. Sie formuliert den Begriff der Blindleistung (vorläufig für Zweileitersysteme) in einer Fassung, die eine einheitliche Behandlung aller Stromkreise, unabhängig von der Form ihrer Spannungs- und Stromkurve, ermöglicht. Es bleiben dabei die für Sinusströme abgeleiteten Formeln weiter bestehen und erfahren nur in nichtsinusoidalen Stromkreisen eine Verallgemeinerung. Insbesondere bleibt die quadratische Leistungsgleichung

$$P_s^2 = P^2 + P_b^2$$

für beliebige Stromkreise erhalten.

Allgemeine Definitionen der Wirk-, Blind- und Scheinleistung in Zweileitersystemen.

Wir betrachten eine Stromquelle I, die einen der Beschaffenheit nach unbekannten Verbraucher II speist (Abb. 1). Die Verbindungsleiter seien der Einfachheit wegen widerstandslos; ebenso vernachlässigen wir ihre Induktivität und Kapazität[11]. Strom und Spannung sollen beliebige einwertige periodische Zeitfunktionen U_t und I_t von derselben Frequenz $f = 1/T$ sein. Dann zeigt das Hitzdrahtvoltmeter V die effektive Spannung

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_t^2\, dt},$$

das Hitzdrahtamperemeter A den effektiven Strom

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_t^2\, dt}$$

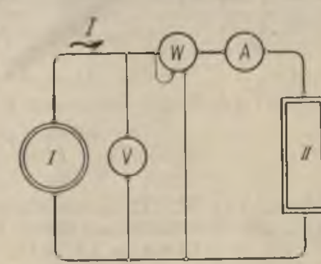

Abb. 1.

und das elektrodynamische Wattmeter W die mittlere Leistung

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T P_t\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_t I_t\, dt.$$

Wir nennen diese Leistung Wirkleistung und bezeich-

* Nach einem Vortrag im Polnischen Elektrotechnischen Verein in Lwów (Lemberg). Sonder-Abdrucke werden vom „AEF" in beschränkter Anzahl besorgt.
1 Elektrotechn. u. Maschinenb. Bd. 39, S. 545 (1921).
2 ETZ 1924, S. 710.
3 ETZ 1929, S. 1547.
4 Puissances réactives et fictives sowie Les différentes opinions et conceptions concernant la notion de puissance réactive en régime non sinusoidal. Veröffentl. Nr. 2 u. 4 des Inst. nat. Roumain pour l'étude de l'aménagement et de l'utilisation des sources d'énergie. 1927.
5 ETZ 1925, S. 48.
6 BBC-Mitt. Bd. 14, S. 204 u. 205 (1927).
7 ETZ 1928, S. 251.
8 ETZ 1930, S. 533.
9 Forschung u. Technik, S. 134. Verlag Julius Springer, Berlin 1930.
10 Vgl. ETZ 1930, S. 1349, 1381, 1413 u. 1418.
11 Selbstverständlich sind dabei auch die Meßinstrumente verlustlos gedacht.

nen sie mit P_w. Das Produkt $U\,I$ heißt Scheinleistung und wird mit P_s bezeichnet. Das Verhältnis

$$\lambda = \frac{P}{U\,I} = \frac{P_w}{U\,I}$$

wird Leistungsfaktor genannt. Dabei muß $\lambda < 1$ sein, was man mit Hilfe der Ungleichung von Schwarz[12]

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right] \tag{1}$$

leicht beweisen kann.

Wir stellen nun die Frage: Wann erreicht der Leistungsfaktor, von dem die Wirtschaftlichkeit der Anlage abhängig ist, den Höchstwert 1? Auch diese Frage läßt sich mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung beantworten. Die Ungleichung (1) geht nämlich dann in eine Gleichung über, wenn der Quotient

$$\frac{f(x)}{g(x)} = k$$

eine von x unabhängige Funktion ist. In diesem Falle wird

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ entsprechen in unserem Falle die Zeitfunktionen U_t und I_t, der Variablen x unsere Variable t. Da sich sämtliche physikalische Vorgänge in der Zeit abspielen, so bedeutet eine von der Zeit unabhängige (also mit der Zeit unveränderliche) Größe physikalisch eine Konstante. Ist also in unserem Falle

$$\frac{U_t}{I_t} = R = \text{konst.}\ ^{*13},$$

somit von t unabhängig, dann folgt:

$$P_w = U\,I = R\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_t^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_t^2\,\mathrm{d}t} = R\,I^2;$$

dabei ist

$$R = \frac{U_t}{I_t} = \frac{P_w}{I^2} = \frac{U}{I}\,.$$

Unsere Frage läßt sich also folgendermaßen beantworten:

Besteht zwischen dem Strome und der Spannung die Beziehung, daß $U_t/I_t = R =$ konst. einen von der Zeit unabhängigen Wert annimmt, dann erreicht der Leistungsfaktor λ seinen Höchstwert, die Einheit. Ist dagegen $U_t/I_t = R_t$ eine Zeitfunktion, dann muß der Leistungsfaktor λ kleiner als 1 werden. Es ist dann

$$P_w = \lambda\,U\,I < U\,I.$$

Zur Erzeugung einer bestimmten Wirkleistung P_w müssen wir allgemein bei gegebenem Strome I eine Spannung

$$U = \frac{P_w}{I\,\lambda} \tag{2}$$

oder bei gegebener Spannung U einen Strom

$$I = \frac{P_w}{U\,\lambda} \tag{3}$$

liefern. Aus Gl. (2) ist ersichtlich, daß die Speisespannung dann ihr Minimum erreicht, wenn $\lambda = 1$ ist. Diesen Wert wollen wir als Wirkspannung bezeichnen:

$$\underline{U_w = \frac{P_w}{I} = U\,\lambda.} \tag{4}$$

Bei gegebener Spannung wiederum erreicht der Speisestrom seinen Kleinstwert im Falle $\lambda = 1$. Diesen Kleinstwert nennen wir Wirkstrom:

$$\underline{I_w = \frac{P_w}{U} = I\,\lambda.} \tag{5}$$

Die Wirkspannung Gl. (4) und den Wirkstrom Gl. (5) können wir nun als Effektivwerte folgender Zeitfunktionen auffassen:

$$\underline{U_{wt} = \frac{P_w}{I^2}\,I_t} \tag{6}$$

$$\underline{I_{wt} = \frac{P_w}{U^2}\,U_t\,.} \tag{7}$$

Es ist in der Tat

$$\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_{wt}^2\,\mathrm{d}t} = \frac{P_w}{I^2}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_t^2\,\mathrm{d}t} = \frac{P_w}{I} = U_w$$

usw. Wir betrachten U_{wt} und I_{wt} als Teilfunktionen von U_t und I_t und setzen

$$U_t = U_{wt} + U_{bt} \tag{8}$$

$$I_t = I_{wt} + I_{bt}\,, \tag{9}$$

dabei ist

$$U_{bt} = U_t - \frac{P_w}{I^2}\,I_t \tag{10}$$

$$I_{bt} = I_t - \frac{P_w}{U^2}\,U_t\,. \tag{11}$$

Wir setzen diese Werte in die Gleichung

$$P_w = \frac{1}{T}\int_0^T U_t\,I_t\,\mathrm{d}t$$

ein und erhalten:

$$P_w = \frac{1}{T}\int_0^T U_t\,I_t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_{wt}\,I_t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T U_{bt}\,I_t\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

$$P_w = \frac{1}{T}\int_0^T U_t\,I_{wt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^T U_t\,I_{bt}\,\mathrm{d}t. \tag{13}$$

Aus Gl. (6) und (7) folgt aber

$$\frac{1}{T}\int_0^T U_{wt}\,I_t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_t\,I_{wt}\,\mathrm{d}t = P_w.$$

Setzen wir das in Gl. (12) und (13) ein, so erhalten wir:

$$\int_0^T U_{bt}\,I_t\,\mathrm{d}t = 0\,, \qquad \int_0^T U_t\,I_{bt}\,\mathrm{d}t = 0$$

oder, wenn wir I_t und U_t durch die Werte aus Gl. (6) und (7) ausdrücken:

$$\int_0^T U_{wt}\,U_{bt}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{14}$$

$$\int_0^T I_{wt}\,I_{bt}\,\mathrm{d}t = 0\,. \tag{15}$$

Die Gl. (14) und (15) sind für unsere Zerlegung gemäß Gl. (8) und (9) charakteristisch: Sie besagen, daß die Teilfunktionen U_{wt} und U_{bt} bzw. I_{wt} und I_{bt} orthogonal sind. Eine solche Zerlegung ermöglicht die Ableitung der quadratischen Strom- und Spannungsgleichungen.

Wir quadrieren nämlich Gl. (8) und (9), integrieren sie und bilden den Mittelwert; berücksichtigen wir (14) und (15), so ergeben sich die gesuchten Formeln, die nur Effektivwerte enthalten:

$$\underline{\underline{U^2 = U_w^2 + U_b^2}} \tag{16}$$

$$\underline{\underline{I^2 = I_w^2 + I_b^2\,.}} \tag{17}$$

Aus ihnen folgt unmittelbar die quadratische Leistungsgleichung in derselben Form wie sie für Sinusströme gilt. Es ist nämlich

$$U^2\,I^2 = (U_w^2 + U_b^2)\,I^2 = U^2\,(I_w^2 + I_b^2),$$

ferner laut Gl. (4) und (5)

$$U_w\,I = U\,I_w = P_w.$$

Nun setzen wir

$$U_b\,I = U\,I_b = P_b$$

und erhalten

$$\underline{\underline{P_s^2 = P_w^2 + P_b^2.}} \tag{18}$$

[12] Pólya u. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin 1925.

*[13] Die Bezeichnung R wurde hier deshalb gewählt, weil der Quotient U_t/I_t als ein Widerstand aufgefaßt werden kann.

Um diese (vorläufig noch rein formalen) Gleichungen [(16), (17) u. (18)] physikalisch zu deuten, müssen wir die Funktionen

$$P_t = U_t I_t \tag{19}$$

und

$$R_t = \frac{U_t}{I_t} \tag{20}$$

untersuchen. Durch unsere Zerlegung (8) und (9) zerfallen auch Gl. (19) und (20) in zwei Teilfunktionen:

$$P_t = U_{wt} I_t + U_{bt} I_t = P^{\mathrm{I}}_{wt} + P^{\mathrm{I}}_{bt} \tag{21 a}$$

$$P_t = U_t I_{wt} + U_t I_{bt} = P^{\mathrm{II}}_{wt} + P^{\mathrm{II}}_{bt} \tag{21 b}$$

$$R_t = \frac{U_t}{I_t} = \frac{U_w}{I} + \frac{U_{bt}}{I_t} = R^{\mathrm{I}}_w + R^{\mathrm{I}}_{bt} \tag{22 a}$$

$$G_t = \frac{1}{R_t} = \frac{I_w}{U} + \frac{I_{bt}}{U_t} = G^{\mathrm{II}}_w + G^{\mathrm{II}}_{bt}. \tag{22 b}$$

Dabei gelten:

$$\frac{1}{T}\int_0^T P^{\mathrm{I}}_{wt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_{wt} I_t\,\mathrm{d}t = P_w = U_w I = I^2 R^{\mathrm{I}}_w$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T P^{\mathrm{II}}_{wt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_t I_{wt}\,\mathrm{d}t = P_w = U I_w = U^2 G^{\mathrm{II}}_w$$

und

$$\frac{1}{T}\int_0^T P^{\mathrm{I}}_{bt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_{bt} I_t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T I_t^2 R^{\mathrm{I}}_{bt}\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T P^{\mathrm{II}}_{bt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_t I_{bt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_t^2 G^{\mathrm{II}}_{bt}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Gl. (22 a) besagt physikalisch, daß wir unseren unbekannten Verbraucher *II* (Abb. 1) durch zwei hintereinander geschaltete Elemente R^{I}_w und R^{I}_{bt} ersetzen können (Abb. 2). Der schraffierte Teil R^{I}_w verhält sich wie ein fester ohmscher Widerstand, dessen Größe nur von der Wirkleistung P_w und dem Effektivwerte des Stromes I abhängt. Er verbraucht die ganze Wirkarbeit, die der Erzeuger liefert, und verwandelt sie in eine andere Energieform. Wir wollen daher diesen Teil den Wirkbestandteil des Verbrauchers nennen. Der andere Teil R^{I}_{bt} verhält sich wie ein periodisch veränderlicher ohmscher Widerstand. Die von ihm während einer Periode verbrauchte Energie ist gleich Null. Er verbraucht also entweder gar keine Energie oder gibt die während eines Bruchteiles einer Periode aufgenommene Energiemenge in dem anderen Bruchteile der Periode wieder an den Erzeuger zurück. Diesen Teil nennen wir den Blindbestandteil des Verbrauchers, die Spannung U_b an seinen Klemmen die Blindspannung.

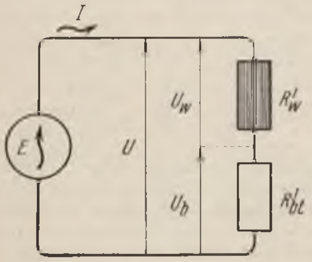

Abb. 2.

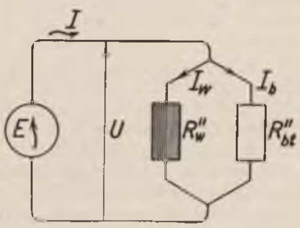

Abb. 3.

Gl. (22 b) drückt physikalisch aus, daß der Verbraucher *II* in Abb. 1 durch zwei parallel geschaltete Elemente R^{II}_w und R^{II}_{bt} ersetzt werden kann (Abb. 3). Der schraffierte Teil R^{II}_w verhält sich wie ein fester ohmscher Widerstand, dessen Größe nur von der Wirkleistung P_w und dem Effektivwerte der Spannung U abhängt. In ihm wird die ganze vom Erzeuger gelieferte Wirkarbeit in eine andere Energieform umgesetzt. Wir fassen ihn als den Wirkbestandteil unseres Verbrauchers auf. Der andere Teils R^{II}_{bt} verhält sich, was den Energieverbrauch anbelangt, genau so wie der Teil R^{I}_{bt} in Abb 2. Wir nennen ihn also den Blindbestandteil des Verbrauchers und den durch ihn fließenden Strom I_b Blindstrom.

Aus vorstehendem erhellt, daß jeder Verbraucher, unabhängig von seiner inneren Beschaffenheit, durch zwei hintereinander bzw. parallel geschaltete Elemente R_w und R_{bt} ersetzt werden kann.

Aus Abb. 2 ersehen wir, daß zur Speisung eines Verbrauchers, der ein Blindelement enthält, bei gegebener Wirkleistung P_w und dem Strome I eine Spannung U nötig ist, die größer als die Wirkspannung $U_w = P_w/I$ sein muß; denn es ist laut Gl. (16):

$$U = \sqrt{U_w^2 + U_b^2} > U_w.$$

Abb. 3 zeigt, daß die Speisung eines Verbrauchers, der einen Blindbestandteil enthält, bei gegebener Wirkleistung P_w und der Spannung U einen größeren Strom erfordert als im Falle eines reinen Wirkverbrauchers, denn es ist ja laut Gl. (17)

$$I = \sqrt{I_w^2 + I_b^2} > I_w.$$

In beiden Fällen ist die Scheinleistung P_s des Erzeugers größer als die vom Verbraucher benötigte Wirkleistung P_w:

$$P_s = U I > P_w,$$

denn es ist laut Gl. (18):

$$P_s = \sqrt{P_w^2 + P_b^2} > P_w.$$

Wir sehen, daß hier der Größe P_b dieselbe Bedeutung zukommt wie der Blindleistung bei Sinusströmen. Sie ist ein Maß für die zur Erzeugung einer bestimmten Wirkleistung nötige Strom- bzw. Spannungserhöhung. Wir wollen also diese Größe Blindleistung nennen. Der allgemeine Ausdruck für sie ist das Produkt aus den Effektivwerten von Strom und Spannung eines reinen Blindelementes, wobei unter einem reinen Blindelement ein solches Element zu verstehen ist, dessen Energieverbrauch während einer Periode gleich Null ist, für das also bei Reihen- bzw. Parallelzerlegung (Abb. 2 und 3) die Gleichungen

$$\int_0^T U_{bt} I_t\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \int_0^T U_t I_{bt}\,\mathrm{d}t = 0$$

gelten.

Zu den bekanntesten Blindelementen zählen ideale verlustlose Induktionsspulen und Kondensatoren. Diese Elemente speichern während des Bruchteiles einer Periode Energie auf, um sie während des nächsten Bruchteiles wieder zurückzugeben. Dadurch entstand die irrige Meinung, daß die Blindleistung an das Pendeln der Energie gebunden ist. Das ist jedoch im allgemeinen nicht richtig, denn es gibt, wie wir bald sehen werden, Stromkreise, in denen gar keine Energiependelungen stattfinden und in denen die Blindleistung trotzdem einen von Null verschiedenen Wert aufweist.

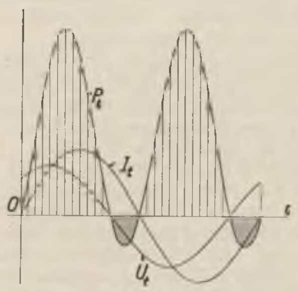

Abb. 4.

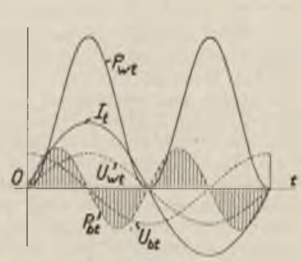

Abb. 5.

Wir betrachten eine Drosselspule mit der Induktivität L und dem ohmschen Widerstand R, die an eine sinusoidale Wechselstromquelle angeschlossen ist. Der Strom bleibt hinter der Spannung um den Phasenwinkel φ zurück, und die Stromquelle liefert die Wirkleistung $P_w = U I \cos\varphi$ und die Blindleistung $P_b = U I \sin\varphi$. Abb. 4 zeigt den zeitlichen Verlauf von Strom, Spannung und Leistung.

Zerlegen wir noch die Leistungskurve P_t in eine Wirk- und eine Blindleistungskurve P_{wt} und P_{bt} (Abb. 5), dann entspricht die zwischen der letzteren und der Abszissenachse eingeschlossene schraffierte Fläche der Energie, welche im magnetischen Felde der Drosselspule bald aufgespeichert und bald zurückerstattet wird. Denken wir uns an Stelle der Drosselspule einen derart veränderlichen ohmschen Widerstand, daß der Spannungs-, Strom- und Leistungsverlauf derselbe bleibt, dann treten Energiependelungen anderer Art auf: der veränderliche Widerstand gibt einen Energiebetrag, welcher dem horizontal schraffierten Flächenstück in Abb. 4 proportional ist, an die Stromquelle zurück. Die Blindleistung ist in beiden Fällen die gleiche.

Nun überlagern wir dem Strome und der Spannung eine entsprechend große Gleichstromkomponente (Abb. 6); Wirk- und Blindleistung nehmen einen anderen Wert an, es verändert sich auch der Wert der im magnetischen Felde der Drosselspule pendelnden Energie. Ersetzen wir die Drosselspule durch unseren veränderlichen Widerstand, der denselben Verlauf von Spannung, Strom und Leistung im Stromkreise bedingt, dann verhält er sich in jedem Zeitmoment wie ein Verbraucher, gibt also nichts an die Stromquelle zurück. Es gibt dann auch keine Energiependelungen im Stromkreise, der veränderliche Widerstand nimmt nur positive Werte an. Trotzdem ist die Blindleistung die gleiche wie im Falle einer eingeschalteten Drosselspule. Daraus ist ersichtlich, daß die Energiependelung im Magnetfelde einer Drosselspule verschieden ist von der zwischen Erzeuger und Verbraucher tatsächlich stattfindenden. Da wir bei einem unbekannten Verbraucher nur die letztere feststellen können, so haben wir kein Recht, im Innern des Verbrauchers irgendwelche Energiependelungen anzunehmen, denn bei derselben Blindleistung und demselben äußeren Verhalten kann ein Verbraucher in seinem Innern ebenso gut eine Drosselspule als auch einen veränderlichen ohmschen Widerstand enthalten. Analoge Betrachtungen lassen sich für einen Kondensator anstellen. Daraus ist ersichtlich, daß die Blindleistung im allgemeinen nicht an die Energiependelungen gebunden ist.

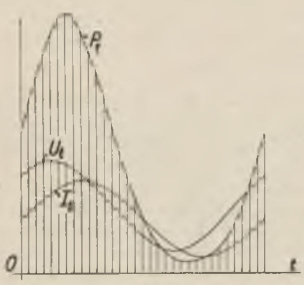

Abb. 6.

Es gibt übrigens auch Blindelemente, bei denen die Energieaufnahme in jedem Zeitpunkt gleich Null ist, bei denen also überhaupt kein Pendeln möglich ist und die dennoch den Erzeuger mit Blindleistung belasten. Zu solchen zählt, so überraschend es auch erscheinen mag, ein periodisch wirkender verlustloser Unterbrecher. Da sein Verhalten im elektrischen Stromkreis zur klaren Erfassung der Blindleistung viel beiträgt, so wollen wir hier folgendes Experiment besprechen.

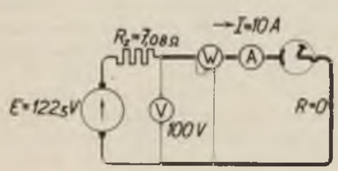

Abb. 7.

Wir schalten einen ohmschen Widerstand $R_z = 7{,}08\,\Omega$, einen rotierenden verlustlosen Unterbrecher und einen dicken Metalldraht von verschwindend kleinem Widerstand in Reihe und verbinden sie mit den Klemmen einer widerstandslosen Gleichstromquelle E von 122,5 V (Abb. 7). Wir stellen dabei fest, daß das Wattmeter W fast gar keinen Ausschlag ergibt, obwohl das Hitzdraht-Amperemeter A 10 A und das Hitzdraht-Voltmeter V 100 V anzeigt[14]. Die Wirkleistung ist also verschwindend klein und es findet auch kein Pendeln der Energie statt. Dürfen wir aber darum behaupten, daß auch die Blindleistung gleich Null ist? Keinesfalls! Die Stromquelle liefert ja einen effektiven Strom von 10 A und weist an ihren Klemmen die effektive Spannung (welche hier gleich der EMK der Stromquelle ist) 122,5 V auf[14]. Ist sie für 1,225 kW Leistung bemessen, so kann sie keinen anderen Verbraucher mehr speisen. Der Unterbrecher mit dem dicken Metalldraht verhält sich hier also genau so wie eine ideale Induktionsspule an den Klemmen einer sinusoidalen Stromquelle: Er belastet den Generator mit Strom, ohne Energie zu verbrauchen. Wir müssen ihn also als Blindelement und das Produkt aus den Effektivwerten von Strom und Spannung (10 A · 100 V = 1000 VA) als Blindleistung auffassen.

[14] S. Beispiel 2 im Anhang.

Das stimmt mit unseren früheren Überlegungen vollkommen überein, denn nach ihnen muß der Leistungsfaktor λ kleiner als 1 werden, also Blindleistung auftreten, sobald

$$\frac{U_t}{I_t} = R_t$$

eine Zeitfunktion ist. In unserem Beispiele ist das tatsächlich der Fall. In dem Zeitpunkte nämlich, in welchem der Unterbrecher die Strombahn schließt, ist die Spannung an den Klemmen des Voltmeters verschwindend klein, $U_t \approx 0$, während der Strom rd. 17,3 A beträgt (Abb. 8). Es ist dann

$$\frac{U_t}{I_t} \approx \frac{0}{17{,}3} = 0\,.$$

In einem anderen Zeitpunkte, in welchem der Stromkreis unterbrochen ist, erreicht die Spannung an den Klemmen des Voltmeters den Wert 122,5 V, während der Strom gleich Null ist. Der Widerstand unseres Verbrauchers ist dann — theoretisch — unendlich groß. Während der Dauer einer Umdrehung des rotierenden Unterbrechers ändert sich der Widerstand unseres Verbrauchers von Null auf Unendlich. Es muß also Blindleistung auftreten, was auch tatsächlich der Fall ist.

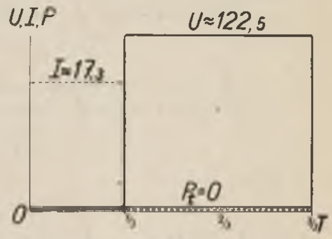

Abb. 8.

In der Praxis kann ein ähnlicher Fall bei der Speisung eines Induktors mit Unterbrecher aus einem Gleichstromnetze auftreten (solche Induktoren werden zum Betrieb von Röntgenröhren benutzt). In einer solchen Anlage von 10 kW Leistung zeigt bei 200 V Netzspannung das Deprèz-Amperemeter 50 A an, während ein Hitzdraht-Strommesser einen größeren Wert, z. B. 71 A, anzeigen muß. Bei konstanter Netzspannung $U =$ konst. zeigt ein Deprèz-Instrument denselben Wert wie ein Hitzdrahtinstrument an, nämlich 200 V. Das Wattmeter muß den Ausschlag 10 000 W ergeben. Der Leistungsfaktor beträgt

$$\lambda = \frac{P_w}{U\,I} = \frac{10\,000}{200 \cdot 71} \approx 0{,}704\,,$$

die Scheinleistung

$$P_s = \frac{P_w}{\lambda} = \frac{10\,000}{0{,}704} \approx 14{,}2\ \mathrm{kVA}$$

und die Blindleistung

$$P_b = \sqrt{P_s^2 - P_w^2} \approx \sqrt{14{,}2^2 - 10^2} \approx 10\ \mathrm{kVA}.$$

Das bedeutet aber, daß man einen Gleichstromgenerator von fast 15 kW benötigt und die Speiseleitungen nicht für 50 A, sondern für 71 A bemessen muß.

Die Blindleistung steht ferner in keinem Zusammenhang mit unseren Teilfunktionen

$$P^{\mathrm{I}}_{bt} = P_t - P^{\mathrm{I}}_{wt} = U_t\,I_t - U_{wt}\,I_t = U_t\,I_t - \frac{P_w}{I^2}\,I_t^2$$

$$P^{\mathrm{II}}_{bt} = P_t - P^{\mathrm{II}}_{wt} = U_t\,I_t - U_t\,I_{wt} = U_t\,I_t - \frac{P_w}{U^2}\,U_t^2,$$

denn obwohl wir unseren Verbraucher durch zwei in Reihe oder parallel geschaltete Elemente ersetzen können, so haben wir kein Recht anzunehmen, daß er tatsächlich aus nur zwei solchen Elementen besteht. Er kann ebenso gut aus beliebig vielen verschiedenen Elementen (Motoren, Drosselspulen, Unterbrechern usw.) zusammengesetzt sein. Es läßt sich auch der Fall verwirklichen, in dem $P^{\mathrm{I}}_{bt} = P^{\mathrm{II}}_{bt} = 0$ ist und P_b einen von Null verschiedenen Wert aufweist (s. Beispiel 2 im Anhang).

Das einzige Merkmal für das Vorhandensein oder Fehlen der Blindleistung ist die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit des Quotienten $U_t/I_t = R_t$ von der Zeit. Da die Ausdrücke für Wirk-, Blind- und Scheinleistung gleich den Produkten aus den Effektivwerten sind, so hat auch die Gestalt der Strom- und Spannungskurven keinen Einfluß auf das Resultat, so lange die Effektivwerte dieselben bleiben. Die harmonische Analyse ist zur Ermittlung der Blindleistung unnötig. Es lassen sich unendlich viele, v e r s c h i e d e n e Strom- und Spannungsfunktionen I_t und U_t bilden, für die der Leistungsfaktor λ und die Effektivwerte U und I d i e g l e i c h e n sind. Wir berechnen die Blindleistung einfach aus der Formel

$$P_b^2 = P_s^2 - P_w^2$$

ohne uns um die Kurvenform selbst zu kümmern, über deren Verlauf uns nur ein Oszillogramm unterrichten kann.

Die Blindleistung läßt sich ebenso wie die Wirk- und Scheinleistung als ein Produkt von Strom und Spannung darstellen, nur müssen wir für jede der drei Leistungsarten die entsprechenden Komponenten nehmen. So ist die Wirkleistung gleich dem Produkt aus den Effektivwerten der Wirkspannung und des Speisestromes (Reihenschaltung Abb. 2) bzw. der Speisespannung und des Wirkstromes (Parallelschaltung Abb. 3):

$$P_w = U_w I = U I_w, \tag{23}$$

die Blindleistung gleich dem Produkt aus den Effektivwerten der Blindspannung und des Speisestromes bzw. der Speisespannung und des Blindstromes:

$$P_b = U_b I = U I_b \tag{24}$$

und die Scheinleistung gleich dem Produkt aus den Effektivwerten der Speisespannung und des Speisestromes

$$P_s = U\ I. \tag{25}$$

Besteht also unser Verbraucher nur aus einem Wirk- und einem Blindelement, dann kann man alle drei Leistungen

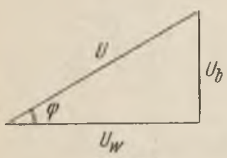

Abb. 9.

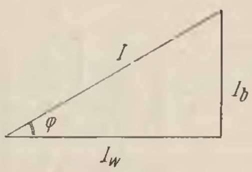

Abb. 10.

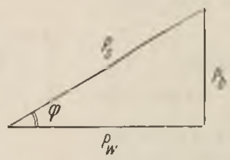

Abb. 11.

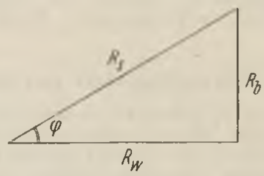

Abb. 12.

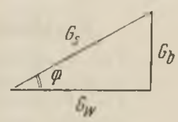

Abb. 13.

mit Hilfe von Strom- und Spannungsmesser nach Gl. (23), (24) und (25) bestimmen. Ist er anders beschaffen, dann muß man (wenn man mit Strom- oder Spannungsmessern allein auskommen will) sich der Flemingschen oder Swineburneschen Schaltung bedienen. In der Praxis ziehen wir es selbstverständlich vor, zur Ermittlung der drei Leistungen den Strom-, Spannungs- und Leistungsmesser zu benutzen. Diese drei Instrumente genügen auch vollkommen, um in jedem Zweileitersystem (unabhängig von der Strom- und Spannungskurve) die Wirk-, Blind- und Scheinleistung zu bestimmen. Trotzdem wäre ein Blindleistungsmesser (wie er bei Sinusströmen verwendet wird) auch für nichtsinusoidale Stromkreise sehr erwünscht. Die Konstruktion eines solchen Instrumentes bildet auch kein unlösbares Problem mehr, nachdem der allgemeinste Ausdruck für die Blindleistung hier erfaßt wurde. Das ist jedoch eine Aufgabe für sich, mit der wir uns hier nicht befassen wollen.

Obwohl alle drei Leistungsarten durch das Produkt aus Strom und Spannung ausgedrückt werden, so ist doch ihre Bedeutung verschieden. Die Wirkleistung ist für den Energieverbrauch maßgebend, die Blindleistung ist ein Maß für die zur Erzeugung einer bestimmten Wirkleistung notwendige Erhöhung des Speisestromes bzw. der Speisespannung, und die Scheinleistung entscheidet über die Größe der Kraftanlage, da diese Größe von dem Produkt des Speisestromes und der Speisespannung abhängt. Es ist also vollkommen richtig, für diese drei Größen drei verschiedene Einheiten (die natürlich physikalisch von derselben Dimension VA sind) zu wählen, was auch in einem Beschlusse der I E C seinen Ausdruck fand.

Aus den quadratischen Spannungs-, Strom- und Leistungsgleichungen (16), (17) und (18) ergeben sich quadratische Beziehungen zwischen Widerständen bzw. Leitwerten. Aus Gl. (16), die der Zerlegung (8) entspricht, folgt

$$\frac{U^2}{I^2} = \frac{U_w^2}{I^2} + \frac{U_b^2}{I^2}.$$

Fassen wir $U/I = R_s$ als Schein-, $U_w/I = R_w^{\mathrm{I}}$ als Wirk- und $U_b/I = R_b^{\mathrm{I}}$ als Blindwiderstand auf, dann gilt

$$R_s^2 = R_w^{\mathrm{I}\,2} + R_b^{\mathrm{I}\,2}. \tag{26}$$

Analog leiten wir aus Gl. (17) ab:

$$\frac{I^2}{U^2} = \frac{I_w^2}{U^2} + \frac{I_b^2}{U^2}$$

$$G_s^2 = G_w^{\mathrm{II}\,2} + G_b^{\mathrm{II}\,2}, \tag{27}$$

wobei G_s dem Schein-, G_w^{II} dem Wirk- und G_b^{II} dem Blindleitwert entspricht.

Wollen wir Gl. (16), (17), (18), (26) und (27) graphisch darstellen, so erhalten wir fünf ähnliche rechtwinklige Dreiecke (Abb. 9 ... 13), denn es ist ja

$$\frac{P_w}{P_s} = \frac{U_w I}{U I} = \frac{U I_w}{U I} = \frac{U_w}{U} = \frac{I_w}{I}$$

$$= \frac{R_w^{\mathrm{I}}}{R_s} = \frac{G_w^{\mathrm{II}}}{G_s} = \lambda = \cos\varphi \tag{28}$$

und analog

$$\frac{P_b}{P_s} = \frac{U_b}{U} = \frac{I_b}{I} = \frac{R_b^{\mathrm{I}}}{R_s} = \frac{G_b^{\mathrm{II}}}{G_s} = \lambda_b = \sin\varphi. \tag{29}$$

Die Bedeutung von λ als $\cos\varphi$ kann also auch hier aufrecht erhalten bleiben, wobei φ den Winkel in den Leistungs-, Spannungs-, Strom-, Widerstands- und Leitwert-Dreiecken bezeichnet.

Wir bemerken dabei die vollständige Übereinstimmung dieser Formeln mit den für Sinusströme bestehenden Gleichungen. Nur hat dort außerdem der Winkel φ die Bedeutung einer Phasenverschiebung, und der Blindwiderstand R_b hängt mit L und C durch die Formel

$$R_b = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

zusammen. Der Begriff der Phasenverschiebung läßt sich natürlich auf beliebige Stromkreise nicht übertragen, er gilt nur für Sinusströme. Ebenso geht in nichtsinusoidalen Stromkreisen der positive (induktive) und negative (kapazitive) Charakter der Blindleistung verloren. Trotzdem ist auch hier eine Kompensierung der Blindleistung durch in Reihe oder parallel geschaltete Elemente möglich. Aus den Gleichungen

$$R_t = R_{1t}^{\mathrm{I}} + R_{2t}^{\mathrm{I}} = \left(R_{w_1}^{\mathrm{I}} + R_{w_2}^{\mathrm{I}}\right) + \left(R_{b_1t}^{\mathrm{I}} + R_{b_2t}^{\mathrm{I}}\right) \tag{30}$$

und

$$G_t = G_{1t}^{\mathrm{II}} + G_{2t}^{\mathrm{II}} = \left(G_{w_1}^{\mathrm{II}} + G_{w_2}^{\mathrm{II}}\right) + \left(G_{b_1t}^{\mathrm{II}} + G_{b_2t}^{\mathrm{II}}\right) \tag{31}$$

ist ersichtlich, daß eine vollständige Kompensierung der durch den Verbraucher 1 hervorgerufenen Blindleistung dann eintritt, wenn das kompensierende Element 2 sich derart verhält, daß

$$R_{b_1t}^{\mathrm{I}} + R_{b_2t}^{\mathrm{I}} = 0$$

oder

$$G_{b_1t}^{\mathrm{II}} + G_{b_2t}^{\mathrm{II}} = 0$$

wird. Ist das nicht der Fall, dann muß Blindleistung auftreten. Durch ein entsprechendes zugeschaltetes Element kann man aber ihre Größe verringern (teilweise Kompensierung).

Aus Gl. (16) und (17) folgt noch, daß man in a l l e n e l e k t r i s c h e n S t r o m k r e i s e n, unabhängig von ihrer Stromart, d i e E f f e k t i v w e r t e d e r W i r k- u n d B l i n d s p a n n u n g e n, bzw. d e r W i r k- u n d B l i n d s t r ö m e g e o m e t r i s c h u n d r e c h t w i n k l i g z u s a m m e n s e t z e n m u ß! Diese bisher unbekannte, sehr wichtige Beziehung bildet den Prüfstein unserer Theorie. Wird sie durch das Experiment bestätigt, dann ist die Richtigkeit unserer Ausführungen experimentell bewiesen. Um die Formeln (16) und (17) zu prüfen, müßten wir ein reines Wirk- und ein reines Blindelement zu Verfügung haben. Das läßt sich praktisch folgendermaßen verwirklichen: Als Wirkelement benutzt man einen ohmschen Widerstand mit sehr kleinem Temperaturkoeffizienten, der außerdem so ausgebildet ist, daß seine Selbstinduktion und Kapazität gering sind. Dem idealen Blindelement kommt ein periodischer Unterbrecher am nächsten, wenn er so beschaffen ist, daß die Kontaktgebung bzw. Unterbrechung sehr rasch vor sich geht und der Öffnungsfunke sofort abreißt (sonst treten Energiewandlungen auf, die das reine Blindelement teilweise in einen Wirkverbraucher umwandeln). Schalten wir also einen ohmschen Widerstand und einen verlustlosen Unterbrecher hintereinander und verbinden sie mit den Klemmen einer beliebigen Stromquelle (Abb. 2), dann ergibt die Messung tatsächlich

$$U^2 = U_w^2 + U_b^2,$$

vorausgesetzt, daß die Spannungsmesser Effektivwerte anzeigen, also Hitzdraht- oder elektrodynamische Instrumente sind. Ebenso läßt sich Gl. (17) an Hand der Schaltung Abb. 3 experimentell bestätigen.

Aus unseren Ausführungen folgt, daß der Entwurf V des AEF, wonach die für Sinusströme gültigen Formeln

3. a) $N_s = E\,I$ Scheinleistung

b) $N =$ Leistung

c) $N_b = \sqrt{N_s^2 - N^2}$ Blindleistung

6. a) $F = \dfrac{N}{E\,I}$ Leistungsfaktor (Wirkfaktor)

b) $B = \sqrt{1 - \left(\dfrac{N}{E\,I}\right)^2}$ Blindfaktor

auch in nichtsinusoidalen Stromkreisen gelten sollen, in Zweileitersystemen aufrecht erhalten bleiben kann. Diese Übertragung ist nicht rein formal, wie H. Schering[15] meint, sondern sie hat, wie aus unseren Überlegungen erhellt, physikalischen Inhalt.

Im Anhang geben wir noch eine Zusammenstellung der wichtigsten hier vorkommenden Formeln und einige Zahlenbeispiele.

Ergebnisse, Formelübersicht und Beispiele.

Die wichtigsten Ergebnisse vorliegender Arbeit lassen sich auf folgende Weise zusammenstellen:

1. Der Leistungsfaktor λ erreicht seinen Höchstwert, die Einheit, nur dann, wenn der Strom in jedem Augenblick der Spannung proportional ist. In allen anderen Fällen muß der Leistungsfaktor kleiner werden.
2. Es wird die Spannung (der Strom) in zwei Komponenten zerlegt, von denen die Wirkkomponente den Kleinstwert der Spannung (des Stromes) darstellt, der zur Speisung des Verbrauchers bei gegebener Leistung P_w und dem Strom I (der Spannung U) nötig ist.
3. Aus dieser Zerlegung folgen die quadratischen Spannungs-, Strom- und Leistungsgleichungen in derselben Form wie für sinusoidal veränderliche Wechselströme.
4. Es wird der physikalische Inhalt der Zerlegung angegeben und die Folgen der Existenz der Blindelemente werden besprochen.
5. Es wird die allgemeinste Definition der Blindleistung angegeben und ihre Unabhängigkeit von der pendelnden Energie bewiesen.
6. Es wird ein Beispiel für das Auftreten der Blindleistung in einem Gleichstromnetz angegeben.
7. Es wird auf die Unnötigkeit der harmonischen Analyse zur Ermittlung der Blindleistung hingewiesen.
8. Es werden die Begriffe Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand auf nichtsinusoidale Stromkreise ausgedehnt und die Bedeutung des $\cos\varphi$ daselbst erklärt.
9. Es werden die Bedingungen einer vollständigen Kompensierung der Blindleistung aufgestellt.
10. Es werden die experimentellen Prüfmethoden vorstehender Behauptungen erwogen.

Formeln.

Wirkleistung:

$$P_w = \frac{1}{T}\int_0^T P_t\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_t I_t\,dt = U_w I = U I_w$$

Effektivwert der Speisespannung: $U = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T U_t^2\,dt}$

Effektivwert des Speisestromes: $I = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T I_t^2\,dt}.$

[15] ETZ 1924, S. 712, Abschnitt C.

Aus diesen drei Hauptgrößen lassen sich alle anderen Größen berechnen:

Scheinleistung: $P_s = U\,I$

Leistungsfaktor: $\lambda = \dfrac{P_w}{P_s} = \dfrac{P_w}{U\,I}$

Blindleistung: $P_b = \sqrt{P_s^2 - P_w^2} = U_b I = U I_b$

Blindleistungsfaktor: $\lambda_b = \sqrt{1-\lambda^2}$

Wirkspannung: $U_w = \lambda\,U$

Blindspannung: $U_b = \sqrt{1-\lambda^2}\,U = \lambda_b U$

Wirkstrom: $I_w = \lambda\,I$

Blindstrom: $I_b = \sqrt{1-\lambda^2}\,I = \lambda_b I.$

Zahlenbeispiele.

1. Beispiel: Den Verlauf der Speisespannung U_t an den Klemmen eines Verbrauchers und des durch ihn fließenden Speisestromes I_t stellt das Diagramm in Abb. 14 dar. Die zahlenmäßigen Auswertungen der verschiedenen Größen sind in Zahlentafel 1 enthalten.

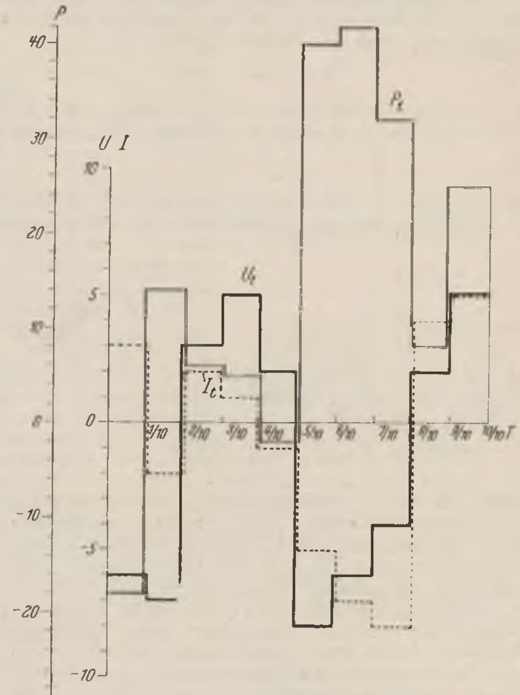

Abb. 14.

$$P_w^2 = U_w^2 I^2 = 11{,}66866 \cdot 19{,}8 = 231{,}039468 = 231{,}04$$
$$P_w^2 = U^2 I_w^2 = 26{,}8 \cdot 8{,}620884 = 231{,}039691 = 231{,}04$$
$$P_b^2 = U_b^2 I^2 = 15{,}13132 \cdot 19{,}8 = 299{,}600136 = 299{,}6$$
$$P_b^2 = U^2 I_b^2 = 26{,}8 \cdot 11{,}179098 = 299{,}599826 = 299{,}6$$
$$P_w^2 + P_b^2 = 231{,}04 + 299{,}60 = 530{,}64$$
$$P_s^2 = U^2 I^2 = 26{,}8 \cdot 19{,}8 = 530{,}64$$
$$\lambda_w = \frac{P_w}{U\,I} = \frac{15{,}2}{5{,}17687 \cdot 4{,}44971} = \underline{0{,}65985}$$
$$\lambda_b = \frac{P_b}{U\,I} = \frac{17{,}3089}{5{,}17687 \cdot 4{,}44971} = \underline{0{,}7513988}$$
$$U_w^2 + U_b^2 = 11{,}66866 + 15{,}13132 = 26{,}79998$$
$$U^2 = 26{,}8$$
$$I_w^2 + I_b^2 = 8{,}620884 + 11{,}179098 = 19{,}799982$$
$$I^2 = 19{,}8$$

Diese Ergebnisse bestätigen ziffernmäßig die Richtigkeit unserer Formeln.

2. Beispiel. Es ist ein Stromkreis wie in Abb. 7 gegeben, wobei E eine Gleichstromquelle ist. Der rotierende Unterbrecher ist so beschaffen, daß die Dauer der Unterbrechung zweimal so groß ist wie die Schließungsdauer. Der Widerstand R_z verhindert den Kurzschluß der Stromquelle E. Den Strom- und Spannungsverlauf wäh-

Zahlentafel 1 (zum 1. Beispiel).

Nr.	Funktion	T: I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Wert
1	U_t	— 6	— 7	+ 3	+ 5	+ 2	— 8	— 6	— 4	+ 2	+ 5	
2	U_t^2	+36	+49	+ 9	+25	+ 4	+64	+36	+16	+ 4	+25	$U^2 = 26,8\ U = \sqrt{26,8} = 5,17687$ V
3	I_t	+ 3	— 2	+ 2	+ 1	— 1	— 5	— 7	— 8	+ 4	+ 5	
4	I_t^2	+ 9	+ 4	+ 4	+ 1	+ 1	+25	+49	+64	+16	+25	$I^2 = 19,8\ I = \sqrt{19,8} = 4,44971$ A
5	P_t	—18	+14	+ 6	+ 5	— 2	+40	+42	+32	+ 8	+25	$P_w = 15,2$ W
6	U_{wt}	+ 2,30303	— 1,53535	+ 1,53535	+ 0,76767	— 0,76767	— 3,83838	— 5,37373	— 6,14141	+ 3,07070	+ 3,33838	$U_{wt} = P_w/I^2 \cdot I_t \approx 0,7676767\, I_t$
7	U_{wt}^2	+ 5,30395	+ 2,3573	+ 2,3573	+ 0,58932	+ 0,58932	+14,73316	+28,87697	+37,71692	+ 9,4292	+14,73316	$U_w^2 = 11,66866$
8	U_{bt}	— 8,30303	— 5,46465	+ 1,46465	+ 4,23233	+ 2,76767	— 4,16162	— 0,62627	+ 2,14141	— 1,07070	+ 1,16162	$U_{bt} = U_t - U_{wt}$
9	U_{bt}^2	+68,94031	+29,8624	+ 2,1452	+17,91262	+ 7,66	+17,31908	+ 0,39221	+ 4,58563	+ 1,1464	+ 1,34936	$U_b^2 = 15,13132$
10	I_{wt}	— 3,40298	— 3,97015	+ 1,70149	+ 2,83582	+ 1,13433	— 4,53731	— 3,40298	— 2,26866	+ 1,13433	+ 2,83582	$I_{wt} = P_w/U^2 \cdot U_t \approx 0,5671641\, U_t$
11	I_{wt}^2	+11,58027	+15,76209	+ 2,89507	+ 8,04187	+ 1,28670	+20,58718	+11,58027	+ 5,14682	+ 1,28670	+ 8,04187	$I_w^2 = 8,620884$
12	I_{bt}	+ 6,40298	+ 1,97015	+ 0,29851	— 1,83582	— 2,13433	— 0,46269	— 3,59702	— 5,73134	+ 2,86567	+ 2,16418	$I_{bt} = I_t - I_{wt}$
13	I_{bt}^2	+40,99815	+ 3,88149	+ 0,08911	+ 3,37024	+ 4,55536	+ 0,21408	+12,93855	+32,84826	+ 8,21206	+ 4,68368	$I_b^2 = 11,179098$
14	P^{I}_{wt}	+ 6,90909	+ 3,07071	+ 3,07071	+ 0,76768	+ 0,76768	+19,19192	+37,61616	+49,13131	+12,28283	+19,19192	P^{I}_{w} mitt. $\approx 15,200001$
15	P^{I}_{bt}	—24,90909	+10,92929	+ 2,92029	+ 4,23232	— 2,76768	+20,80808	+ 4,38384	—17,13131	— 4,28283	+ 5,80808	P^{I}_{b} mitt. ≈ 0
16	P^{II}_{wt}	+20,41791	+27,79104	+ 5,10448	+14,17910	+ 2,26866	+36,29850	+20,41791	+ 9,07463	+ 2,26866	+14,17910	P^{II}_{w} mitt. $\approx 15,20000$
17	P^{II}_{bt}	—38,41791	—13,79104	+ 0,89552	— 9,17910	— 4,26866	+ 3,70150	+21,58209	+22,92537	+ 5,73134	+10,82090	P^{II}_{b} mitt. ≈ 0
18	R_t	— 2,0	+ 3,5	+ 1,5	+ 5,0	— 2,0	+ 1,6	+ 0,85714	+ 0,5	+ 0,5	+ 1	
19	R^{I}_{w}	+ 0,76767	+ 0,767675	+ 0,767675	+ 0,76767	+ 0,76767	+ 0,767676	+ 0,767675	+ 0,767676	+ 0,767675	+ 0,767676	$R_w = U_{wt}/I_t \approx 0,76767\ \Omega$
20	R^{I}_{bt}	— 2,767676	+ 2,732325	+ 0,732325	+ 4,23233	— 2,76767	+ 0,832324	+ 0,089467	— 0,267676	— 0,267675	+ 0,232324	
21	G_t	— 0,5	+ 0,285714	+ 0,666666	+ 0,2	— 0,5	+ 0,625	+ 1,16666	+ 2,0	+ 2,0	+ 1	
22	G^{II}_{w}	+ 0,567163	+ 0,567164	+ 0,567163	+ 0,567164	+ 0,567165	+ 0,567163	+ 0,567163	+ 0,567165	+ 0,567165	+ 0,567164	$G_w = I_{wt}/U_t \approx 0,56716\ \Omega^{-1}$
23	G^{II}_{bt}	— 1,067163	— 0,28145	+ 0,099503	— 0,367164	— 1,067165	+ 0,057836	+ 0,599503	+ 1,432835	+ 1,432835	+ 0,432836	

rend einer Periode zeigt das Diagramm in Abb. 8. In diesem Beispiel hat die Blindleistung einen von Null verschiedenen Wert, obwohl, wie Zahlentafel 2 zeigt, die Funktionen P^{I}_{bt} und P^{II}_{bt} gleich Null sind.

Zahlentafel 2 (zum 2. Beispiel).

Nr.	Funktion	T: I	II	III	Wert
1	U_t	0	122,5	122,5	
2	U_t^2	0	15006,25	15006,25	$U^2 = 10004,16 \quad U \approx 100,2$ V
3	I_t	17,3	0	0	
4	I_t^2	299,29	0	0	$I^2 = 99,763 \quad I \approx 9,988$ A
5	P_t	0	0	0	$P_w = 0$ W
6	U_{wt}	0	0	0	$U_{wt} = P_w/I^2 \cdot I_t = 0$
7	U_{wt}^2	0	0	0	$U_w^2 = 0;\ U_w = 0$ V
8	U_{bt}	0	+122,5	+122,5	$U_{bt} = U_t - U_{wt}$
9	U_{bt}^2	0	15006,25	15006,25	$U_b^2 = 10004,16;\ U_b \approx 100,02$ V
10	I_{wt}	0	0	0	$I_{wt} = P_w/U^2 \cdot U_t = 0$ A
11	I_{wt}^2	0	0	0	$I_w^2 = 0,\ I_w = 0$ A
12	I_{bt}	+17,3	0	0	$I_{bt} = I_t - I_{wt}$
13	I_{bt}^2	299,29	0	0	$I_b^2 = 99,763;\ I_b \approx 9,988$ A
14	P^{I}_{wt}	0	0	0	P^{I}_{w} mitt. $= 0$
15	P^{I}_{bt}	0	0	0	P^{I}_{b} mitt. $= 0$
16	P^{II}_{wt}	0	0	0	P^{II}_{w} mitt. $= 0$
17	P^{II}_{bt}	0	0	0	P^{II}_{b} mitt. $= 0$
18	R_t	0	∞	∞	
19	R^{I}_{w}	0	0/0	0/0	$R_w = U_{wt}/I_t = 0\ \Omega$
20	R_{bt}	0	∞	∞	
21	G_t	∞	0	0	
22	G^{II}_{w}	0,0	0	0	$G_w = I_{wt}/U_t = 0\ \Omega^{-1}$
23	G_{bt}	∞	0	0	

$$P_w = U_w\, I = 0 \cdot 9{,}988 = 0 \text{ W}$$
$$P_w = U\, I_w = 100{,}02 \cdot 0 = 0 \text{ W}$$
$$P_b = U_b\, I = 100{,}02 \cdot 9{,}988 = 999 \text{ Var}$$
$$P_b = U\, I_b = 100{,}02 \cdot 9{,}988 = 999 \text{ Var}$$
$$P_s = U\, I = 100{,}02 \cdot 9{,}988 = 999 \text{ VA}$$
$$P_w^2 + P_b^2 = 0^2 + 999^2 = 998001$$
$$P_s^2 = 999^2 = 998001$$
$$\lambda_w = \frac{P_w}{U\,I} = \frac{0}{999} = \underline{0} \qquad \lambda_b = \frac{P_b}{U\,I} = \frac{999}{999} = \underline{1}$$
$$\underline{U_w^2 + U_b^2 = 0^2 + 100{,}02^2 = 100{,}02^2 = U^2}$$
$$\underline{I_w^2 + I_b^2 = 0^2 + 9{,}988^2 = 9{,}988^2 = I^2}$$

3. Beispiel. Es ist ein Stromkreis wie in Abb. 15 gegeben. Es bedeuten $\tilde{E}_t$ eine sinusoidale Wechselstromquelle, $\bar{E}$ eine Gleichstromquelle, R einen festen ohmschen Widerstand.

$$\tilde{E}_t = 100\sqrt{2}\sin(\omega t) \text{ Volt}, \qquad \bar{E} = 50 \text{ V}, \qquad R = 10\,\Omega.$$

Wir vernachlässigen den Widerstand der Stromquellen und der Verbindungsleitungen sowie ihre Induktivität und Kapazität. Dann ist die Klemmenspannung

$$U_t = \tilde{E}_t = 100\sqrt{2}\sin(\omega t) \text{ Volt}$$

und der Strom

$$I_t = \frac{\tilde{E}_t - \bar{E}}{R} = 10\sqrt{2}\sin(\omega t) - 5 \text{ Amp.}$$

Ihre Effektivwerte sind $U = \tilde{E} = 100$ V.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_t^2\, dt}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^T \frac{\tilde{E}_t^2}{R^2}\, dt - \int_0^T \frac{2\,\tilde{E}_t\,\bar{E}}{R^2}\, dt + \int_0^T \frac{\bar{E}^2}{R^2}\, dt\right]}$$
$$= \sqrt{\frac{\tilde{E}^2}{R^2} - 0 + \frac{\bar{E}^2}{R^2}} = \sqrt{100 + 25} \approx 11{,}18 \text{ A.}$$

Die Leistung ergibt sich aus

$$P_w = \frac{1}{T}\int_0^T U_t I_t \, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\widetilde{E}_t(\widetilde{E}_t - \overline{E})}{R}\, dt = \frac{\widetilde{E}^2}{R} - 0 = 1000 \text{ W},$$

der Leistungsfaktor

$$\lambda_w = \frac{P_w}{U I} = \frac{1000}{100 \cdot 11{,}18} \approx 0{,}895.$$

Ferner ist

$$U_{wt} = \frac{P_w}{I^2} I_t = \frac{1000}{125} I_t = 8 I_t; \quad U_w = 8 I \approx 89{,}44 \text{ V}$$

$$I_{wt} = \frac{P_w}{U^2} U_t = \frac{1000}{10000} U_t = 0{,}1\, U_t; \quad I_w = 0{,}1\, U = 10 \text{ A}$$

$$U_w I = 89{,}44 \cdot 11{,}18 = 8 \cdot 11{,}18^2 = 8 \cdot 125 = 1000 \text{ W} = P_w$$

$$U I_w = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ W} = P_w$$

$$U_b = \sqrt{U^2 - U_w^2} = \sqrt{10000 - 8000} \approx 44{,}721 \text{ V}$$

$$I_b = \sqrt{I^2 - I_w^2} = \sqrt{125 - 100} = 5 \text{ A}$$

$$U_b I = 44{,}721 \cdot 11{,}18 = \sqrt{2000} \cdot \sqrt{125} = 500 \text{ Var} = P_b$$

$$U I_b = 100 \cdot 5 = 500 \text{ Var} = P_b$$

$$P_s = U I \approx 1118 \text{ VA} = \sqrt{1250000} = \sqrt{P_w^2 + P_b^2}.$$

Es wäre hier noch zu bemerken, daß die Wirkspannung U_w nicht mit der Effektivspannung an den Klemmen unseres Widerstandes $R = 10\,\Omega$ identisch ist, sondern die Effektivspannung angibt, die bei einer gedachten Reihenzerlegung nach Gl. (8) an den Klemmen des Wirkelementes auftreten würde. Da die Spannung $U_w = 89{,}44$ V ist und die Spannung an den Klemmen unseres Widerstandes R gleich $U = I \cdot R = 11{,}18 \cdot 10 = 111{,}8$ V, so sehen wir, daß der Widerstand R nur einen Teil des idealen Ersatz-Wirkbestandteiles darstellt. Die Gleichstromquelle $\overline{E}$ könnte also in unserem Falle als ein Element betrachtet werden, das aus einem Wirkbestandteil (in unserem Falle aus einem gedachten festen negativen Widerstand) und einem Blindbestandteil zusammengesetzt ist. Obwohl also unser Stromkreis weder Kondensatoren noch Drosselspulen, noch irgendwelche veränderliche ohmsche Widerstände enthält, sondern aus Elementen zusammengesetzt ist, die der „Praktiker" als „reine Wirkelemente" bezeichnen würde, so tritt trotzdem Blindleistung auf, was übrigens nach früheren Ausführungen einleuchtend ist, da eben in unserem Falle die Klemmenspannung U_t dem Strome I_t nicht proportional ist.

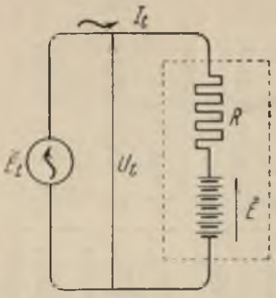

Abb. 15.

Bemerkung: In obigen Ausführungen habe ich die Mehrphasensysteme absichtlich nicht berücksichtigt, weil sich aus meinen Untersuchungen ergeben hatte, daß bezüglich der Begriffe der Blind- und Scheinleistung [wie bereits H. Schering in seinem Gutachten (ETZ 1924, S. 710) richtig hervorgehoben hatte] noch in sinusoidalen Mehrphasensystemen eine große Verwirrung herrscht. Übrigens will ich der Untersuchung der n-Leitersysteme eine besondere Arbeit: „Die Erweiterung der Kirchhoffschen Sätze und das Absonderungsprinzip" vorausschicken, da die daraus sich ergebende Methode die Behandlung der Mehrleitersysteme wesentlich erleichtert.

Druck von H. S. Hermann G. m. b. H., Berlin SW 19.
Printed in Germany.