(17)

Sonderabdruck aus „Elektrotechnik und Maschinenbau", Zeitschrift des Elektrotechnischen Vereines in Wien, 49. Jahrg., Heft 50, 1931.

Nachdruck nur mit Bewilligung der Schriftleitung, auszugsweise Wiedergabe nur mit Angabe der Quelle „E. u. M. Wien" gestattet.

Erweiterung der Kirchhoffschen Sätze und das Absonderungsprinzip.

Von Prof. Dr.-Ing. S. **Fryze**, Lwów (Polen).

Inhaltsübersicht: Es wird gezeigt, daß die beiden Kirchhoffschen Sätze nur spezielle Fälle zweier allgemeiner Sätze sind und daß sich aus diesen die Möglichkeit ergibt, einen beliebigen Stromkreis aus einem Netz abzutrennen und ihn abgesondert zu untersuchen. Beispiele zeigen die Anwendung dieses Rechnungsvorganges auf praktische Fälle.

1. Erweiterung der Kirchhoffschen Sätze.

Die zwei fundamentalen Sätze von Kirchhoff

$$\Sigma(J) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\Sigma(J R) = \Sigma(E) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

gelten für Knoten (1) bzw. geschlossene Maschen (2) in Gleichstromnetzen. Sie gelten auch (bei bekannten Voraussetzungen) für sinusoidale Wechselstromkreise, wenn sie in symbolischer Form geschrieben werden:

$$\Sigma(\mathfrak{J}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1a),$$

$$\Sigma(\mathfrak{J}\mathfrak{Z}) = \Sigma(\mathfrak{E}) \quad \ldots\ldots\ldots (2a).$$

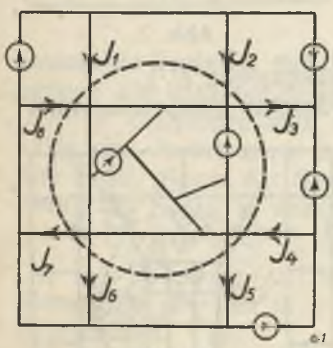

Abb. 1.

Beide Sätze lassen sich nun erweitern. Wir betrachten ein beliebig vermaschtes Gleichstromnetz (Abb. 1 bzw. Abb. 2) und sondern einen Teil davon durch eine geschlossene, gestrichelte Linie ab. Das Netz zerfällt dadurch in zwei Teile. Da sich in keinem von ihnen Elektrizität anhäufen kann, so folgt daraus Satz I:

Die algebraische Summe aller Ströme, die zu einem durch eine geschlossene Linie abgesonderten Netzteile zu- oder von ihm abfließen, ist gleich Null.

$$\Sigma(J) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (I).$$

In dieser Summe sind die zufließenden Ströme mit positivem, die abfließenden mit negativem Vorzeichen einzusetzen. In Abb. 1 fließen dem inneren Netzteile die Ströme $J_1 J_2 J_4 J_8$ zu, während die Ströme $J_3 J_5 J_6 J_7$ von ihm abfließen. Es ist also laut Gl. (I):

$$J_1 + J_2 - J_3 + J_4 - J_5 - J_6 - J_7 + J_8 = 0.$$

In Abb. 2 fließen dem rechten Netzteile die Ströme J_8 und J_9 zu, während die Ströme J_{10} und J_{11} von ihm wegfließen. Also ist hier

$$J_8 + J_9 - J_{10} - J_{11} = 0.$$

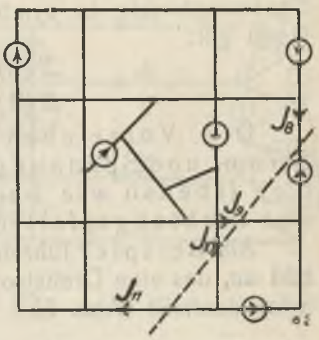

Abb. 2.

Wir sehen also, daß der erste Kirchhoffsche Satz (1) einen Sonderfall des hier angegebenen, erweiterten Satzes (I) darstellt, in welchem der abgesonderte Netzteil zu einem Knoten zusammengeschrumpft ist.

Wir betrachten nun wieder unser voriges Gleichstromnetz (Abb. 3) und wählen einige auf den Stromleitern beliebig gelegene Punkte *a b c d* und *f*. Wir verbinden sie mittels eines geschlossenen Linienzuges, der auf der Abbildung gestrichelt eingetragen ist, und bezeichnen die Spannungen zwischen je zwei benachbarten Punkten mit $U_1\, U_2\, U_3\, U_4$ und U_5. Da in einem Gleichstromkreis die elektrische Umlaufspannung längs einer geschlossenen Linie gleich Null sein muß,

$$\oint \mathfrak{E}_l \, d\, l = 0,$$

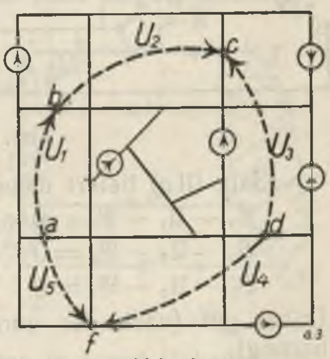

Abb. 3.

so folgt daraus sogleich Satz II:

Die algebraische Summe der Spannungen längs einer geschlossenen Linie, die beliebige auf den Stromleitern gelegene Punkte verbindet, ist gleich Null.

$$\Sigma(U) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (II).$$

Die *U*-Werte müssen also mit ihren Vorzeichen, entsprechend den zugehörigen Richtungspfeilen, in Gl. (II) eingesetzt werden. Für den Linienzug in Abb. 3 zum Beispiel gilt die Gleichung:

$$U_1 + U_2 - U_3 + U_4 - U_5 = 0$$

und für Abb. 4 erhalten wir:

$$U_6 + U_7 - U_8 = 0.$$

Die Spannungspfeile zeigen, wie die entsprechenden Potentialdifferenzen zu bilden sind. In der hier gewählten Darstellung gilt

$U_1 = P_b - P_a;\ U_2 = P_c - P_b;\ U_3 = P_c - P_d$ usw.[1]).

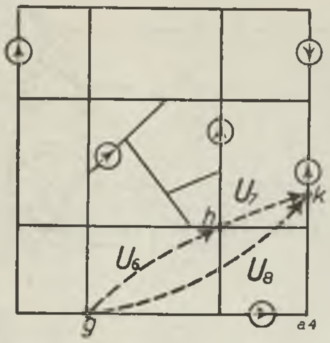

Abb. 4.

Führen wir den gestrichelten Linienzug längs der Stromleiter und setzen dabei die Werte für U ein ($U = E \pm JR$), so erhalten wir aus Gl. (II) die zweite Kirchhoffsche Regel. Die beiden Kirchhoffschen Regeln stellen also Sonderfälle der Sätze (I) und (II) dar.

Diese Sätze gelten unter denselben Voraussetzungen wie (1) und (2) auch in sinusoidalen Wechselstromkreisen, wenn wir die Strom- und Spannungswerte in symbolischer Form einsetzen. Dann gilt:

$$\Sigma(\mathfrak{J}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I}\,a),$$
$$\Sigma(\mathfrak{U}) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II}\,a).$$

Die Vorzeichen der symbolischen Strom- und Spannungswerte hängen auch hier (ebenso wie beim Gleichstrom) von den Richtungspfeilen ab.

Als Beispiel führen wir das folgende Schaltbild an, das eine Drehstromsternschaltung mit Nullleiter darstellt (Abb. 5).

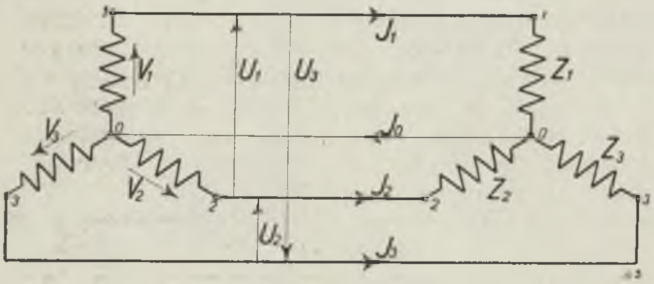

Abb. 5.

Satz (II a) liefert dann die Gleichungen:

$$\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{V}_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_2,$$
$$\mathfrak{V}_2 - \mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_3 = 0 \quad „ \quad \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{V}_2 - \mathfrak{V}_3,$$
$$\mathfrak{V}_3 - \mathfrak{U}_3 - \mathfrak{V}_1 = 0 \quad „ \quad \mathfrak{U}_3 = \mathfrak{V}_3 - \mathfrak{V}_1.$$

Dabei gilt (nach der vorher getroffenen Vereinbarung):

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_0,\quad \mathfrak{V}_2 = \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_0,\quad \mathfrak{V}_3 = \mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_0,$$
$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2,\quad \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_3,\quad \mathfrak{U}_3 = \mathfrak{P}_3 - \mathfrak{P}_1,$$

wobei $\mathfrak{P}_1\ \mathfrak{P}_2\ \mathfrak{P}_3\ \mathfrak{P}_0$ den Potentialen von 1, 2, 3 bzw. 0 entsprechen.

Aus Satz (I a) erhalten wir für unseren Stromkreis die Gleichung:

$$\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_3 - \mathfrak{J}_0 = 0.$$

[1]) Die Zweckmäßigkeit einer solchen Spannungsdarstellung ist in einer besonderen Arbeit: „Richtungspfeile in elektr. Stromkreisen", Przegląd Elektrotechniczny Nr. 12, 13, 14 usw. (1925) Warschau, näher besprochen und begründet worden. Hier soll nur bemerkt werden, daß die Pfeilspitze für positive (negative) Werte von U auf den Plus- (Minus-) Pol hinweist.

Aus diesen Gleichungen folgen die bekannten Strahldiagramme für Ströme und Spannungen in Dreiphasensystemen.

2. Das Absonderungsprinzip.

Wir betrachten ein beliebig gestaltetes Gleichstromnetz und umgrenzen einen Teil davon mit einer geschlossenen, in der Abb. 6 gestrichelten Linie. Die Schnittpunkte dieser Linie mit den Stromleitern bezeichnen wir mit a, b, c, d und ermitteln die Spannungen zwischen je zwei benachbarten Schnittpunkten U_1, U_2, U_3, U_4 (Abb. 7).

$$U_1 = V_a - V_b;$$
$$U_2 = V_b - V_c;$$
$$U_3 = V_c - V_d;$$
$$U_4 = V_a - V_d.$$

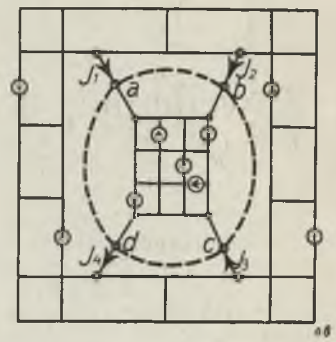

Abb. 6.

Zwischen je zwei benachbarte Punkte ab, bc, cd schalten wir nun mittels widerstandslos gedachter Verbindungen je ein Paar EMKe von solcher Größe ein, daß sie die vorhandenen Spannungen kompensieren, also selbst stromlos sind (Abb. 8). Dann ist:

$$E_1 = U_1,\quad E_2 = U_2,$$
$$E_3 = U_3.$$

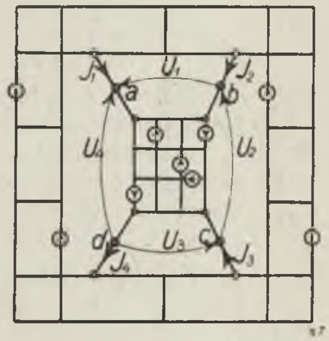

Abb. 7.

Diese EMKe wirken sämtlich in der Richtung der entsprechenden Spannungspfeile U[2]).

Durch das Zuschalten solcher kompensierender EMKe (hier drei Paar) sind sowohl die Ströme wie auch die Spannungen in jedem Netzteile unverändert geblieben. Sie werden aber (bei stationären Zuständen) auch dann unverändert bleiben, wenn wir das ganze Netzgebilde nach Abb. 9 in zwei Teile auftrennen. Denn die erweiterten Kirchhoffschen Regeln (I) und (II) liefern sowohl vor wie nach der Trennung identische Gleichungen. Das einzige elektrische Kennzeichen der stattgefundenen Absonderung besteht darin, daß unsere kom-

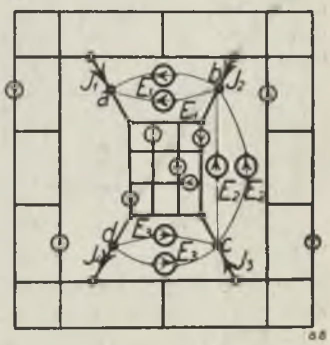

Abb. 8.

[2]) Hier ist die Zweckmäßigkeit der für die Spannung gewählten Darstellung deutlich ersichtlich. Die Richtungspfeile der Spannungen stimmen nämlich mit den entsprechenden E-Pfeilen überein. Es lassen sich aber auch noch mehrere andere Gründe für die hier gewählte Darstellung anführen.

pensierenden EMKe jetzt von Strömen durchflossen werden, die man nun leicht berechnen kann. Bezeichnet man die (vor der Auftrennung) nach dem inneren Netzteile zu- bzw. abfließenden Ströme mit J_1, J_2, J_3, J_4 und die durch unsere idealen EMKe E_1, E_2, E_3 fließenden Ströme mit I_1, I_2, I_3 (Abb. 10), so gilt:

$J_1 = I_1; \quad J_2 = I_2 - I_1;$
$J_3 = I_3 - I_2; \quad J_4 = I_3.$

Daraus folgt sofort

$I_1 = J_1; \quad I_2 = J_1 + J_2;$
$I_3 = J_1 + J_2 + J_3.$

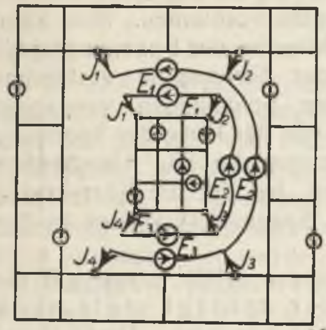

Abb. 9.

Diese Methode, die eine vollständige Abtrennung eines Netzteiles ermöglicht, wollen wir als Absonderungsprinzip bezeichnen. Ihre Gültigkeit folgt ohne weiteres aus den erweiterten Kirchhoffschen Regeln I und II. Das Absonderungsprinzip bietet uns die Möglichkeit, einen beliebigen Stromkreis vom ganzen Netze abzutrennen und ihn abgesondert zu untersuchen (Abb. 10). Dabei ist es gleichgültig, ob der abgesonderte Teil irgendwelche EMKe enthält oder nicht. Das auf den ersten Blick sonderbar anmutende Ergebnis, daß bei n vorhandenen Spannungen (in unserem Beispiel U_1, U_2, U_3, U_4) nur $(n-1)$ kompensierende EMKe zur Absonderung nötig sind, findet seine Begründung darin, daß die n-te EMK gleich der Summe der übrigen $(n-1)$ EMKe ist. So ist in unserem Beispiele:

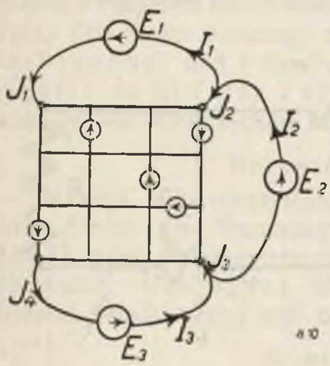

Abb. 10.

$$E_1 + E_2 + E_3 = U_4.$$

Die n-te Spannung (U_4) wird also schon durch die Summe der übrigen $(n-1)$ EMKe $(E_1 + E_2 + E_3)$ kompensiert.

Das Absonderungsprinzip gilt sowohl in Gleich- wie auch in sinusoidalen Wechselstromkreisen. Es liefert vorzügliche Dienste in allen Fällen, wo sich die Analyse durch Absonderung eines komplizierten Netzteiles vereinfachen läßt.

Als Beispiel führen wir hier die Berechnung der Leistung eines n-Leitersystems durch[3]).

3. Berechnung der Leistung eines n-Leitersystems unter Zuhilfenahme des Absonderungsprinzips.

Es stellen I und II (Abb. 11) zwei beliebig zusammengesetzte Gleichstromnetzgebilde dar, die mittels n Leitern verbunden sind. Sowohl I als auch II kann beliebig viele und beliebig verteilte EMKe enthalten. Es ist die Gesamtleistung, die vermittels der n Leitungen übertragen wird, zu berechnen.

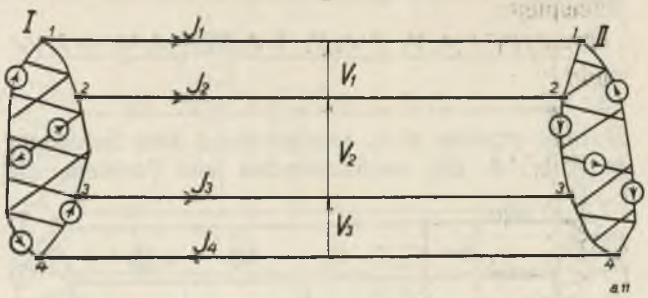

Abb. 11.

Der Übersichtlichkeit wegen beschränken wir uns hier auf $n = 4$. Wir bezeichnen die Leiterströme mit J_1, J_2, J_3, J_4 und die Spannungen zwischen den

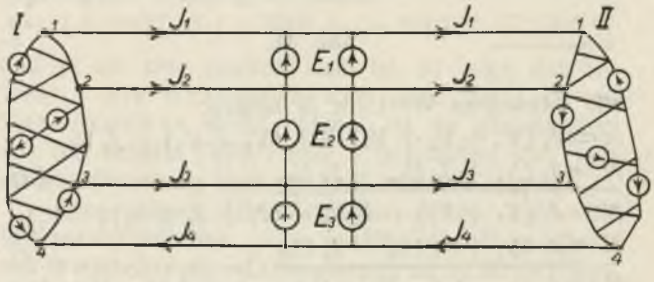

Abb. 12.

Leitern mit V_1, V_2, V_3. Wir schalten nun zwischen die vier Leiter mittels widerstandsloser Verbindungen drei Paar kompensierender EMKe: $E_1 = V_1$; $E_2 = V_2$; $E_3 = V_3$ ein und trennen hierauf (nach dem Absonderungsprinzip) die Teile I und II voneinander (Abb. 12 und 13). Da nach einer solchen Absonde-

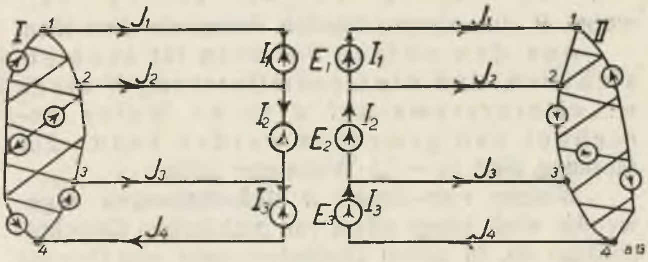

Abb. 13.

rung die Energieströmungen in I und II keine Änderung erfahren haben, so können wir folgende Gleichung aufstellen:

$$N = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 =$$
$$= E_1 J_1 + E_2 (J_1 + J_2) + E_2 (J_1 + J_2 + J_3) \quad (a)$$

oder

$$N = V_1 J_1 + V_2 (J_1 + J_2) + V_3 (J_1 + J_2 + J_3) \quad (b).$$

Bei n Leitern gilt die allgemeine Gleichung:

$$N = V_1 J_1 + V_2 (J_1 + J_2) + \ldots$$
$$\ldots + V_{n-1} (J_1 + J_2 + \ldots + J_{n-1}) \quad . \quad . \; (c).$$

In dieser Formel lassen sich die einzelnen Glieder $V_p J_q$ auf verschiedene Weise zusammenfassen und die Gl. (c) kann auf diese Weise in n verschiedenen

[3]) Ein analoges Beispiel für Wechselstrom folgt in einem besonderen Aufsatze, weil dabei noch auf einige wichtige Begriffe, wie Blindleistung und Scheinleistung, näher eingegangen werden muß.

Gestalten geschrieben werden, die natürlich dasselbe Ergebnis liefern müssen.

Wir zeigen diese Umformungen an unserem Beispiele:

$$N = J_1 V_1 + J_1 V_2 + J_2 V_2 + J_1 V_3 + J_2 V_3 + J_3 V_3$$

und

$$J_1 + J_2 + J_3 - J_4 = 0.$$

Daraus ergeben sich, entsprechend dem Schaltbild in Abb. 14, die nachstehenden vier Formeln, die

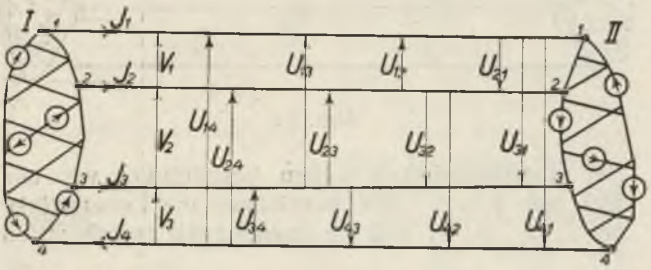

Abb. 14.

alle denselben Wert für N liefern:

$$N = J_1 (V_1 + V_2 + V_3) + J_2 (V_2 + V_3) + J_3 V_3,$$
$$\underline{N = J_1 U_{14} + J_2 U_{24} + J_3 U_{34}} \quad \ldots\ldots\ldots (d),$$

$$N = J_1 (V_1 + V_2) + J_2 V_2 - (J_1 + J_2 + J_3)(- V_3),$$
$$\underline{N = J_1 U_{13} + J_2 U_{23} - J_4 U_{43}} \quad \ldots\ldots\ldots (e),$$

$$N = J_1 V_1 + J_3 (- V_2) - (J_1 + J_2 + J_3)(- V_2 - V_3),$$
$$\underline{N = J_1 U_{12} + J_3 U_{32} - J_4 U_{42}} \quad \ldots\ldots\ldots (f),$$

$$N = J_2 (- V_1) + J_3 (- V_1 - V_2) -$$
$$- (J_1 + J_2 + J_3)(- V_1 - V_2 - V_3),$$
$$\underline{N = J_2 U_{21} + J_3 U_{31} - J_4 U_{41}} \quad \ldots\ldots\ldots (g).$$

Dabei gilt allgemein (wie schon früher bemerkt wurde) $V_{ab} = P_a - P_b$, also in unserem Falle

$$V_1 = P_1 - P_2; \quad V_2 = P_2 - P_3; \quad V_3 = P_3 - P_4;$$

wobei P die entsprechenden Potentiale darstellen.

Aus den obigen Formeln ist auch ersichtlich, daß die Gesamtleistung N eines n-Leitersystems auf n-fache Weise berechnet und gemessen werden kann. Zur Messung sind $(n - 1)$ Wattmeter nötig.

Welche von diesen n Meßschaltungen angewendet wird, hängt allein von praktischen Gesichtspunkten ab. In einem Dreileitersystem zum Beispiel schaltet man zweckmäßig die Stromspulen der beiden Wattmeter in die Außenleiter ein, während der mittlere Leiter (Nulleiter) als „Spannungsbezugsleiter“ verwendet wird, das heißt die Spannungsspulen der beiden Wattmeter werden an ihn angeschlossen.

Was die Messung selbst betrifft, so soll noch bemerkt werden, daß ein Wattmeter nicht nur die Größe der Leistung anzeigt, sondern auch darüber Aufschluß geben kann, wo der Erzeuger und wo der Verbraucher liegt. Voraussetzung ist, daß die Strom- und Spannungsspulenklemmen mit $+$ und $-$ bezeichnet werden, und zwar derart, daß das Instrument einen positiven Ausschlag (also nach rechts in die Skala hinein) ergibt, wenn die Ströme in beiden Spulen in der Richtung von $+$ nach $-$ fließen. Ein so bezeichnetes Wattmeter schalten wir nun derart ein, daß die $+$-Klemme der Spannungsspule mit der einen Stromspulenklemme verbunden ist. (In Abb. 15, 16 und 17 ist die $+$-Klemme der Spannungsspule mit der $+$-Klemme der Stromspule verbunden. Man kann aber ebensogut die $+$-Klemme der Spannungsspule mit der $-$-Klemme der Stromspule verbinden. Welche von den beiden Schaltungen verwendet wird, hängt bekanntlich von der Höhe der Spannung und der Größe der Stromstärke ab. Gewöhnlich wählt man die Schaltung, bei der die Korrekturen infolge des Strom- bzw. Spannungsverlustes in den Spulen kleiner sind.)

Sind obige Bedingungen erfüllt, dann gilt die Regel: Das Wattmeter schlägt stets nach der Verbraucherseite hin aus. Diese Regel ist aus Abb. 15 und 16 leicht ersichtlich. In Abb. 15 liegt der Verbraucher B[4]) rechts. Beide Instrumente haben dabei positiven Ausschlag, denn die $+$-Klemmen der Spannungsspulen eines jeden Wattmeters sind laut obigen Bedingungen mit den zugehörigen Stromspulenklemmen verbunden und in

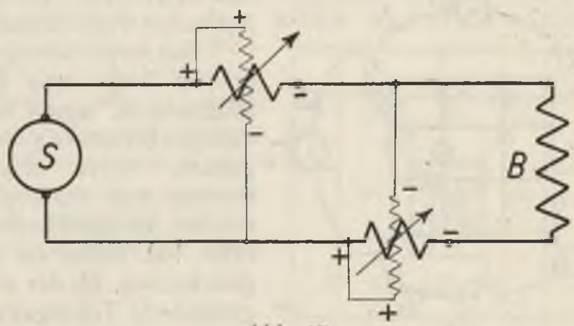

Abb. 15.

jedem Wattmeter werden beide Spulen entweder in der Richtung $+-$ oder beide in der Richtung $-+$ von Strömen durchflossen. In Abb. 16 liegt

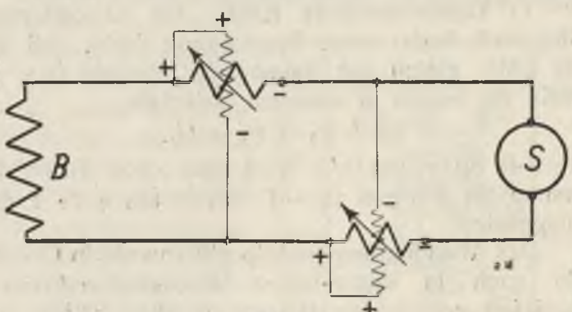

Abb. 16.

der Verbraucher links. Schalten wir die Wattmeter wie vorhin ein, das heißt so, daß die $+$-Klemmen der Strom- und Spannungsspule eines jeden Instrumentes miteinander verbunden sind, so schlagen beide Wattmeter nach links aus, denn in jedem Wattmeter fließen die Spulenströme in verschiedenen Richtungen, das heißt die Stromspule führt Strom in $+-$-Richtung, während in der Spannungsspule der Strom von der $-$ zur $+$-Klemme fließt und umgekehrt. Auch in diesem Falle schlagen also beide Instrumente nach der Verbraucherseite hin

[4]) B Belastung, S Speisung.

aus. Daraus ergibt sich auch, daß es gleichgültig ist, in welchen der beiden Leiter die Stromspule geschaltet wird, wenn nur die +-Klemme der Spannungsspule eines jeden Wattmeters mit der zugehörigen Stromspulenklemme verbunden ist.

In einem n-Leitersystem werden nun $(n-1)$ Wattmeter nach der obigen Regel geschaltet, und zwar so, daß alle von I kommenden Leiter an die +-Klemmen der Stromspulen angeschlossen werden, während die —-Klemmen aller Spannungsspulen zusammen verbunden und an den Spannungsbezugsleiter angeschlossen werden. Dabei schlagen einige Instrumente in positiver und einige in negativer Richtung aus. Wir schalten nun die Spannungsspulen der negativ ausschlagenden Instrumente (um sie ablesen zu können) um und führen die von ihnen angezeigten Werte mit negativen Vorzeichen in unsere Summe ein. (Die Angaben der positiv ausschlagenden Wattmeter erhalten positives Vorzeichen.) Ist nun die algebraische Summe aller abgelesenen Werte (die Gesamtleistung) positiv, so ist II der Verbraucher und I der Erzeuger. Ist die Summe negativ, so ist I der Verbraucher und II der Erzeuger der elektrischen Energie.

Beispiel:

In dem Vierleitersystem Abb. 11 wurde der dritte Leiter als Spannungsbezugsleiter gewählt. Abb. 17 zeigt die dementsprechende Schaltung der Wattmeter. Das obere Wattmeter schlägt zum Beispiel positiv aus und zeigt den Wert 1500 W an. Das mittlere Wattmeter hat negativen Ausschlag. Nach erfolgter Umschaltung zeigt es 700 W an, das untere Wattmeter schlägt positiv aus und

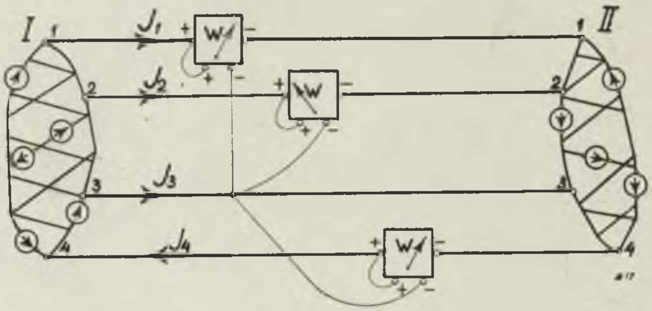

Abb. 17.

zeigt 500 W an. Die vermittels der vier Leitungen übertragene Leistung ist somit:

$$\underline{N} = (+1500) + (-700) + (+500) = \underline{+1300\ \mathrm{W}}$$

und da sie eine positive Zahl ist, so folgt, daß der Teil I als Erzeuger und der Teil II als Verbraucher wirkt. Dabei ist es gleichgültig, wie die beiden Teile I und II beschaffen sind und ob die Belastung symmetrisch ist oder nicht.

Die obigen Überlegungen gelten auch für Wechselstromkreise. Eine ausführliche Behandlung des Wechselstrom-n-Leitersystems unter Anwendung des Absonderungsprinzips wird jedoch in einem besonderen Aufsatze erscheinen. Ebenso bleibt die Lösung der Transfigurationsprobleme mit Hilfe der erweiterten Kirchhoffschen Sätze und des Absonderungsprinzips einer eigenen Arbeit vorbehalten.

Druck von Alois Mally & Co., Wien V, Wiedner Hauptstraße 98.