PRZEGLĄD ELEKTROTECHNICZNY

ORGAN STOWARZYSZENIA ELEKTRYKÓW POLSKICH

pod naczelnym kierunkiem prof. M. POŻARYSKIEGO.

Rok XIII. | **15 Lipca 1931 r.** | **Zeszyt 14.**

Redaktor inż. WACŁAW PAWŁOWSKI | Warszawa, Czackiego 5, tel. 690-23.

SIŁA ELEKTROMOTORYCZNA ZASTĘPCZA W OBWODACH ELEKTRYCZNYCH.

Prof. Dr. Inż. Stanisław Fryze.

W elektrotechnice posługujemy się często pojęciem „oporu zastępczego" pewnego układu oporów. Gdy w szczególności układ oporów składa się z *n* oporów, połączonych równolegle, wzór na „opór zastępczy" R_z przyjmuje prostą postać

$$R_z = \frac{1}{\sum\limits_{p=1}^{p=n} \frac{1}{R_p}}$$

W niniejszej pracy, opublikowanej już w „Revue générale de l'Electricité" 1925, t. XVII, str. 955—957, okażę, że można z korzyścią wprowadzić podobne pojęcia także odnośnie do SEM-cznych. „SEM-czna zastępcza" daje analogiczne uproszczenia przy obliczaniu rozpływu prądów i rozkładu napięć, jak „opór zastępczy".

Weźmy pod uwagę rozgałęzienie, przedstawione na rys. 1, stanowiące część sieci elektrycznej prądu stałego. Poszczególne gałęzie o opornościach R_1, R_2 ..... R_n mieszczą SEM-czne E_1, E_2 .... E_n, a przez gałęzie te płyną prądy (stałe) J_1, J_2 .... J_n.

Oznaczając napięcie między węzłami A i B literą U (strzałka wskazuje kierunkowość)*) możemy napisać:

$$\begin{aligned} U &= E_1 - J_1 R_1 \\ U &= E_2 - J_2 R_2 \quad \ldots\ldots \quad (1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U &= E_n - J_n R_n \end{aligned}$$

Dzieląc pierwsze z tych równań przez R_1, drugie przez R_2, n-te przez R_n i dodając wszystkie do siebie, otrzymamy

$$U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right) =$$

$$= \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \ldots + \frac{E_n}{R_n} - (J_1 + J_2 + \ldots + J_n)$$

*) $U = V_B - V_A$.

Podstawiając

$$J = J_1 + J_2 + \ldots + J_n$$

i $$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

otrzymamy

$$U = R_z\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \ldots + \frac{E_n}{R_n}\right) - J \cdot R_z$$

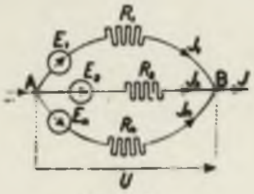
Pierwszy z tych wyrazów ma charakter SEM-cznej

$$E_z = R_z\left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \ldots + \frac{E_n}{R_n}\right)$$

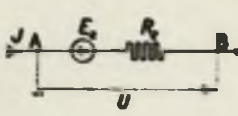
drugi przedstawia spadek napięcia na oporności R_z. Możemy przeto napisać

$$U = E_z - J \cdot R_z \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Równanie (2) wskazuje, że rozgałęzienie na rys. 1 można zastąpić jedną SEM-czną E_z i jedną opornością R_z (rys. 2). Wartości E_z i R_z dla zespołu *n* gałęzi równoległych określają ogólnie wzory



Rys. 1.



Rys. 2.

$$E_z = R_z \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \frac{E_p}{R_p} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\frac{1}{R_z} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{R_p} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

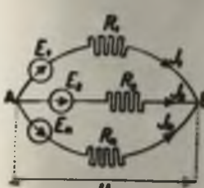
Napięcie na węzłach rozgałęzienia wyraża się, dla strzałki zgodnej z kierunkiem prądu J, ogólnie wzorem

$$U_{BA} = V_B - V_A = E_{AB} - J_{AB} \, . \, R_z \quad . \quad . \quad (5)$$

Wzory powyższe obowiązują dla SEM-cznych w gałęziach o kierunku działania zgodnym ze strzałką U. Gdy którakolwiek z tych SEM-cznych (E_1, E_2 ..... E_n) ma kierunek przeciwny do U, należy wstawić ją we wzór (3), ze znakiem ujemnym. Gdy która z gałęzi nie zawiera SEM-cznej, wstawimy we wzorze (3) odnośne $E = 0$. Obliczywszy napięcie U (wzór 5) znajdujemy poszczególne prądy rozgałęzienia ze wzorów

$$J_1 = \frac{E_1 - U}{R_1}, \quad J_2 = \frac{E_2 - U}{R_2} \ldots J_n = \frac{E_n - U}{R_n} \quad (6)$$

wynikających z zespołu równań, podanych pod (1). Oczywiście i w tych wzorach należy podstawić za E_1, E_2 ..... E_n wartości z uwzględnieniem kierunków. (Gdy E zgodne ze strzałką U, wstawimy je ze znakiem $+$, gdy działa w kierunku przeciwnym do strzałki U, wstawimy je ze znakiem $-$).



Rys. 3.

W przypadku, gdy rozgałęzienie przedstawia samoistny układ n gałęzi, połączonych równolegle (rys 3), będzie $J = 0$, a wskutek tego wypadnie

$$U = E_z$$

Dla przypadku takiego możemy więc napisać ogólnie:

$$U = R_z \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \ldots + \frac{E_n}{R_n} \right) \quad . \quad . \quad (7)$$

Poszczególne prądy (o strzałkach zgodnych ze strzałką U) obliczymy znów z wzorów poprzednio podanych (6).

Przykład liczbowy: Obliczyć rozpływ prądu obwodu, przedstawionego na rys. 4, przyjmując $E_1 = 48$ V, $E_2 = 110$ V, $R_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 8\ \Omega$.

Rozwiązanie: Obliczamy naprzód R_z:

$$R_z = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \frac{24}{2 + 12 + 3} = \frac{24}{17}\ \Omega$$

a następnie U:

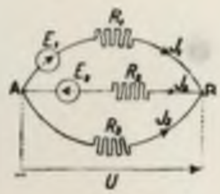
$$U = R_z \left(\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} \right) = \frac{24}{17} \left(\frac{48}{12} - \frac{110}{2} \right) = \frac{24}{17} (-51) = -72\ \mathrm{V}$$

$$J_1 = \frac{E_1 - U}{R_1} = \frac{48 - (-72)}{12} = \frac{120}{12} = +10\ \mathrm{A}$$

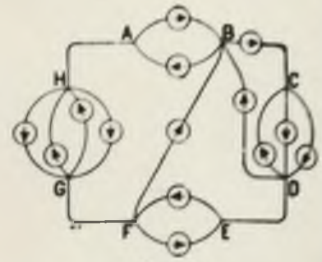
$$J_2 = \frac{-E_2 - U}{R_2} = \frac{-110 - (-72)}{2} = \frac{-38}{2} = -19\ \mathrm{A}$$

$$J_3 = \frac{0 - U}{R_3} = \frac{-(-72)}{8} = +9\ \mathrm{A}$$

Wartość ujemna J wskazuje, że prąd ten płynie w obwodzie w kierunku przeciwnym do oznaczonej (na rys. 4) strzałki J.



Rys. 4.



Rys. 5.

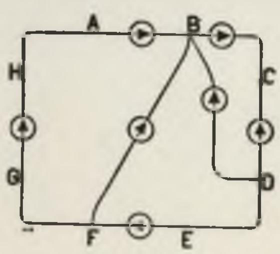
Kontrola: W myśl I-go prawa Kirchhoffa musi być:

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0.$$

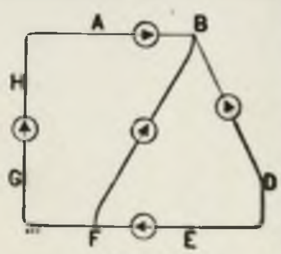
i jest rzeczywiście

$$+10 + (-19) + 9 = 0.$$

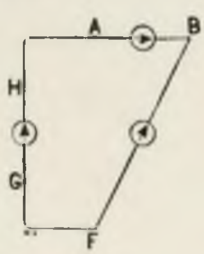
Rozważmy teraz sieć, przedstawioną na rys. 5. Wprowadzając „SEM-czne zastępcze" można taką sieć upraszczać kolejno, aż przejdzie w pojedyńczy obwód zamknięty. Zastępując każdy z zespołów gałęzi równoległych między punktami *AB*, *CD*, *EF* i *GH* przez jedną SEM-czną „zastępczą" i jeden opór „zastępczy", otrzymamy układ jak na rys. 6. Dodajemy do siebie algebraicznie (z uwzględnieniem znaków) SEM-czne, działające w *BC* i *CD* i zastępujemy obie gałęzie równoległe między punktami *BD* znów jedną SEM-czną „zastępczą" i jednym oporem „zastępczym". Otrzymujemy w ten sposób uproszczony obwód, przedstawiony na rys. 7. Powtarzając takie uproszczenie jeszcze raz (t. zn. zastępując gałęzie równoległe *BF* i *BEF* jedną SEM-czną „zastępczą" i jednym oporem „zastępczym") otrzymujemy ostatecznie prosty, zamknięty obwód (rys. 8), w którym natychmiast potrafimy wyznaczyć prąd jedynie przy pomocy prawa Ohm'a.



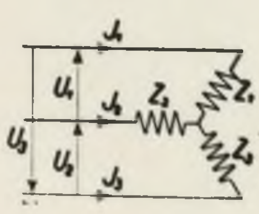
Rys. 6



Rys. 7.

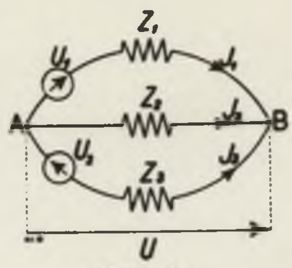


Rys. 8.


Rys. 9

Znając prąd, możemy obliczyć napięcie U_{BF} (rys. 8), a z jego pomocą prądy w gałęziach *BF* i *BDEF* (rys. 7). Stąd znów potrafimy wyznaczyć napięcie U_{BD} i prądy w gałęziach *BCD* i *BD* (rys. 6). Ostatecznie znajdziemy napięcie U_{BA}, U_{CD}, U_{FE} i U_{HG} a z ich pomocą rzeczywisty rozpływ prądów w sieci pierwotnej, przedstawionej na rys. 5.

Poprzednie rozważania i wzory stosują się także do obwodów o przebiegach ustalonych, sinusoidalnych, o jednakowych częstotliwościach, jeżeli wszystkie wielkości przedstawimy w formie symbolicznej.



Rys. 10.

Okażemy to na przykładzie następującym:

Dany jest układ trójfazowy, jak na rys. 9. Mamy obliczyć prądy $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$, $\hat{J}_3$, znając napięcia $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$, $\hat{U}_3$ oraz impedancje $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$, $\hat{Z}_3$. Ponieważ $\hat{J}_1 + \hat{J}_2 + \hat{J}_3 = 0$ i $\hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \hat{U}_3 = 0$, czyli $\hat{U}_3 = -\hat{U}_1 - \hat{U}_2$, przeto możemy układ nasz zastąpić obwodem, jak na rys. 10. Do obwodu tego stosujemy otrzymane poprzednio wzory i otrzymujemy:

$$\hat{E}_z = \left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_1} - \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_3} \right) \cdot \hat{Z}_z = \hat{U}$$

przyczem

$$\hat{Z}_z = \frac{1}{\frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \frac{1}{\hat{Z}_3}}$$

Poszczególne prądy wyrażą się wzorami:

$$\hat{J}_1 = \frac{\hat{U}_1 - \hat{U}}{\hat{Z}_1} \quad \hat{J}_2 = \frac{-\hat{U}}{\hat{Z}_2} \quad \hat{J}_3 = \frac{-\hat{U}_2 - \hat{U}}{\hat{Z}_3}$$

Równanie $\hat{J}_1 + \hat{J}_2 + \hat{J}_3 = 0$ można jeszcze napisać w innej formie, która może się w niektórych wypadkach okazać dogodną:

$$\hat{U}_1\hat{Z}_2\hat{Z}_3 - \hat{U}_2\hat{Z}_1\hat{Z}_2 - \hat{U}(\hat{Z}_1\hat{Z}_2 + \hat{Z}_1\hat{Z}_3 + \hat{Z}_2\hat{Z}_3) = 0.$$