

Inż. I. KIERNIAKIEWICZ

Nowe konstrukcje i dowody twierdzeń podstawowych aksonometrii

Odbitka z „Czasopisma Technicznego“
Tom LVI. — Nr 12 i 14 z r. 1939.

PIERWSZA ZWIĄZKOWA DRUKARNIA WE LWOWIE, UL. LINDEGO 4
LWÓW 1939

*HPan Prof. D. J. Stanisław Fryze
raczej pogięte od autora.*

A. O konstrukcjach osi ze średnic sprzężonych elipsy i konstrukcji punktów elipsy ze średnic sprzężonych.

I. Niechaj przyjęty na płaszczyźnie rysunku trójkąt prostokątny ABC , ryc. 1. obracając przesuwają się w ten sposób, że wierzchołek A pozostaje stale na prostej a , zaś wierzchołek B na prostej b , prostopadłej do a . Następne położenie poruszającego się trójkąta oznaczają znaki $A' B' C'$. Punkt R jest środkiem przeciwprostokątnej \overline{AB} , podobnie jak punkt R' środkiem przeciwprostokątnej $\overline{A' B'}$.

Odcinek $\overline{B' A}$ jest rzutem prostokątnym przeciwprostokątnej $\overline{B' A'}$ na prostą b . Ponieważ $\overline{B' R'} = \overline{R' A'}$, to prosta $R' N_b$, prostopadła z punktu R' do prostej b , jest symetryczną odcinka $\overline{B' A}$. Więc mamy tu następujące odcinki i kąty równe:

$$\overline{B' N_b} \cong \overline{N_b A}, \overline{B' R'} = \overline{A R'}, \sphericalangle A B' A' = \sphericalangle B A R' = \varphi. \quad (\alpha)$$

Połączmy punkt R' z punktami A i C' to otrzymamy trójkąt równoramienny $A C' R'$ bowiem:

$$\overline{R' C'} = \overline{R' B'} = \overline{A R'}$$

Z trójkąta tego $A C' R'$ wynika ruch punktu C po prostej $c = A C = A C'$, ponieważ:

$$\sphericalangle A C' R' = \sphericalangle C' A R' = \sphericalangle C A R' = 90^\circ - \beta - \varphi.$$

Miejscem geometrycznym punktów $C \dots C' \dots$ jest odcinek leżący na prostej $c = AC$, o środku w punkcie A , o długości równej podwójnej przeciwprostokątnej $2 \cdot \overline{AB}$, którego każdy punkt, przy pełnym obrocie trójkąta ABC ($\varphi = 360^\circ$), zostaje przez punkt C dwukrotnie przekroczony w kierunkach przeciwnych.

Jak też: Gdy trójkąt prostokątny ABC , na płaszczyźnie rysunku obracając przesuwają się w ten sposób, że wierzchołek B pozostaje stale na prostej b , zaś wierzchołek C na prostej c , to miejscem geometrycznym punktów $A \dots A' \dots$ jest odcinek leżący na prostej a , prostopadłej

w punkcie A do przeciwprostokątnej \overline{AB} , o środku w punkcie A , o długości równej $2 \cdot \overline{AB}$.

Z równości pod (α) mamy:

$$\overline{B' R'} = \overline{A R} = \overline{A R'} = \frac{1}{2} \overline{A B} = \text{const.} \quad (\beta)$$

Miejscem geometrycznym punktów $R \dots R' \dots$ jest koło k , zakreślone z punktu A promieniem $r = \frac{1}{2} \overline{AB}$, zaś kąty obrotu (φ), trójkąta $A' B' C'$ i promienia $\overline{A R'}$ są równe i przeciwnie skierowane.

Na danych osiach $2a$ i $2b$ ryc. 2. jako na średnicach zakreślmy koła k_1 i k_2 , poprowadźmy proste prostopadłe $\overline{S B_2} \perp \overline{S C_2}$, znajdziemy odpowiadające im w układzie elipsy średnice sprzężone \overline{AB} , \overline{CD} , odetnijmy $\overline{C_b P} = a$, narysujmy prostą $\overline{P C E}$ i z punktu S koło o promieniu:

$$r = \overline{S R} = \overline{R P} = b + \frac{a-b}{2}.$$

Trójkąty przystające $\triangle B B_a B_b = \triangle C C_b C_a$ dają odcinki równe i prostopadłe do siebie, co oznaczymy jednym znakiem: $\overline{B B_a} \perp \overline{C C_b}$ zaś trójkąty przystające $\triangle B B_a S = \triangle C C_b P$ dają:

$$\overline{S B} \perp \overline{C P}.$$

Z rysunku czytamy:

$$\overline{S R} = \overline{R P}, \overline{R C} = \overline{R C_a}, \overline{C_a C} \perp \overline{S B_0},$$

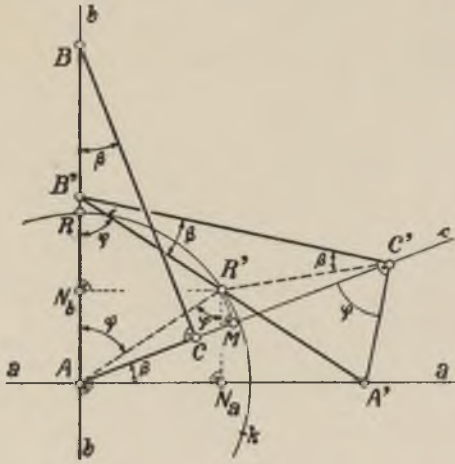
$$\overline{S C_a} = a, \overline{C_a P} = b.$$

Obracając przesuniemy trójkąt prostokątny SEP w ten sposób, że wierzchołek P pozostaje stale na prostej SP , zaś wierzchołek E na prostej SB . Dowolne położenie tak przesuniętego trójkąta oznaczają znaki $S' E' P'$, przy czym prosta ECP jak też $E' C' P'$ przedstawiać może skrawek papieru. Wedle powyżej dowiedzonego związków punkt S porusza się po prostej $\overline{S B_a} \perp \overline{S P}$ do punktu S' , zaś punkt R po kole $r = b + \frac{a-b}{2}$ do punktu R' , przytym kąty

obrotu φ odcinka $\overline{R' C'}$ i promienia $\overline{S R'}$ wraz z punktami C'_b , C'_a , są równe i przeciwnie skierowane, to następujące proste pozostają stale równoległe:

$$\overline{C'_a C'} \parallel \overline{C_a C}, \overline{C'_b C'} \parallel \overline{C_b C}.$$

Miejszem geometrycznym punktów $C...C'$... jest elipsa o średnicach sprzężonych AB, CD .



Ryc. 1.

Pierwszą konstrukcją osi elipsy, danej średnicami sprzężonymi AB, CD , podaje ryc. 3. Czyniąc jak wyżej kolejno:

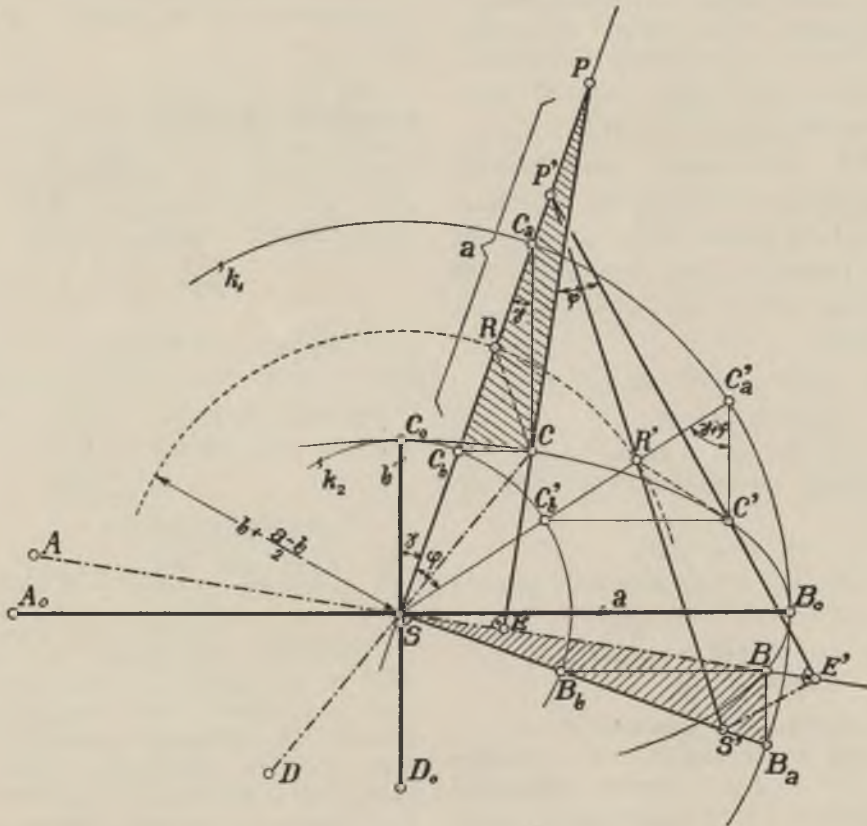
$$\overline{CP} \perp \overline{SB}, \overline{SR} = \overline{RP}, \overline{RC} = \overline{RC}_a, \\ A_0 SB_0 \perp C_a C // C_0 SD_0, a = \overline{SC}_a, b = \overline{C}_a P,$$

wanie dwu kresek w okolicy punktu R (ostrze cyrkla raz w punkcie S , drugi raz w punkcie P), co usprawiedliwia znana i w miernictwie stosowana własność naszego oka, że przy nastawianiu na kreskę, popoźnia większe błędy jak przy nastawieniu na środek podziału dwu kresek.

Powracając do omawianej tu konstrukcji zauważymy jeszcze, że punkty C_a i C określają tu powinowactwo prostokątne o osi $p = A_0 B_0$, tak że koło o środku S , o promieniu $\overline{SC}_a = a$, może być użyte do dalszych ewentualnych konstrukcyj w elipsie, czego nie mamy w konstr. Rytza.

W dalszym ciągu podkreślimy, że odcinek $C_a C$, oznaczający kierunek szukanych osi jest przyprostokątnią trójkąta, w którym bok $A' C$ jest przeciwprostokątnią ($A' C > C_a C$) oznaczającą pośrednio kierunki osi. Zatem wyprowadzona tu konstrukcja osi o tyle stoi w tyle za tak często stosowaną konstr. Rytza. W celu usunięcia tego niedomagania i niezręcznego podziału odcinka \overline{SP} , przekształcimy ją w następujący sposób.

II. Druga konstrukcja osi z pary średnic sprzężonych. Trójkąt SCP wraz z punktami R ,



Ryc. 2.

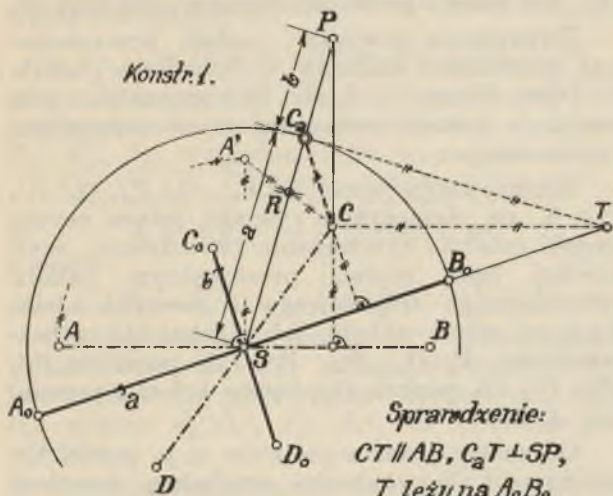
uzyskujemy prosty wykres osi, przyczym linie kreskowane i skreślone na rycinie są zbędne.

Pominęliśmy milczeniem podział odcinka \overline{SP} na dwie równe części $\overline{SR} = \overline{RP}$, co najlepiej uskutecznić przez próby. Biegłym w rysowaniu wystarczy jedno nastawienie cyrkla i naryso-

C_a , ryc. 3. przesuniemy po boku SC w położenie DS , wtenczas punkt C znajdzie się w punkcie S , ryc. 4. punkt S w punkcie D , punkt P w punkcie A' . Następnie powiększmy dwukrotnie przesunięty trójkąt:

$$\triangle DSA' \text{ (ryc. 4.)} = \triangle SCP \text{ (ryc. 3.)}$$

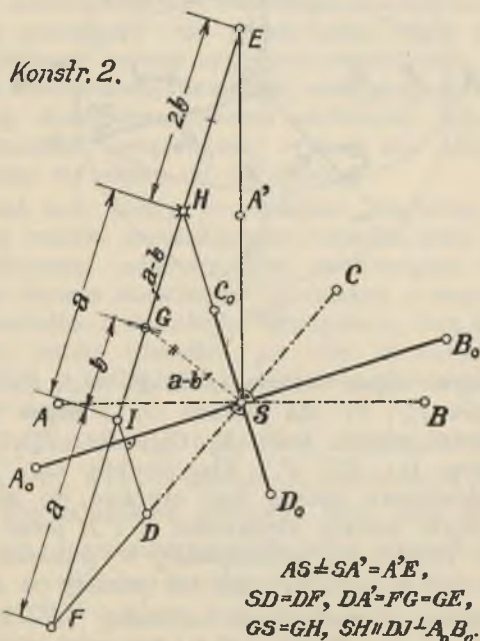
wraz z punktami R, C_a , zachowując boki ryc. 4. DS i SA' w nowym położeniu a przejdziemy do trójkąta FSE , gdzie poprzednio punkt R przejdzie w punkt G , punkt C_a w punkt H , przyczym 2. $DA' = FE$, zaś kierunek SH narkrywa oś małą.



Sprawdzenie:
 $CT \parallel AB, C_a T \perp SP,$
 T leży na $A_0 B_0$
 Linje $---$ w konstr. 1. zbędne.
 Ryc. 3.

Zatym tok postępowania: prowadzimy w środku S prostą do średnicy AB i odcinamy na niej połowę tejże średnicy AS od punktu S dwukrotnie $SA' = A'E$, zaś na drugiej średnicy $SD = DF$. Rysujemy prostą FE i na niej biorąc w cyrkiel odcinek DA' wyznaczamy środek G odcinka FE :

$$\overline{DA'} = \overline{FG} = \overline{GE}.$$



$AS = SA' = A'E,$
 $SD = DF, DA' = FG = GE,$
 $GS = GH, SH \parallel DJ \perp A_0 B_0.$
 Ryc. 4.

Ostrze cyrkiela w G (punkt S należy chronić przed ostrzem) czynimy $GS = GH = a - b$ i ry-

sujemy oś HSD_0 , prostą równoległą $ID \parallel HS$, jak też prostą $A_0 SB_0$, tak otrzymujemy długość osi małej $b = IG$.

Gdy przecięcie prostych ID i FE jest niewyraźnym (proste nachylone pod kątem małym), to wtenczas należy użyć odcinka $HE = 2 \cdot b$, spłócić go i wyznaczyć w tej drodze punkt I , w celu wyznaczenia a . W ostatnio wskazanej możliwości znalezienia osi małej, przez podział odcinka HE , kryje się zaleta tej konstrukcji w wypadkach skrajnych, gdy osie są prawie równe sobie a średnice sprzężone prawie prostopadłe do siebie, co okazuje się w razie stosowania jej w tych wypadkach.

B. Z teorii aksonometrii prostokątnej.

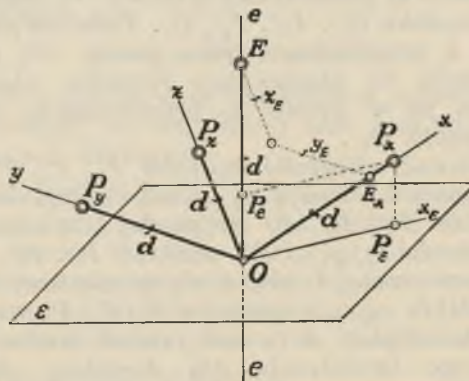
Oznaczmy sumę kwadratów odległości poszczególnych punktów (tworzących grupę P_1, P_2, \dots) od punktu O , od prostej e , lub od płaszczyzny ϵ przez $I_{O, P_1, P_2, \dots}, I_{e, P_1, P_2, \dots}$ lub $I_{\epsilon, P_1, P_2, \dots}$ jako momenty bezwładności grupy punktów P_1, P_2, \dots względem punktu O , prostej e , lub płaszczyzny ϵ .

Odetnijmy na osiach układu prostokątnego trójosiowego od początku układu O odcinek d , ryc. 5. to otrzymamy trzy odcinki $OP_x = OP_y = OP_z = d$, o wierzchołkach P_x, P_y, P_z tworzących grupę punktów. Przez początek układu O poprowadźmy dowolną płaszczyznę ϵ i prostą e prostopadłą do płaszczyzny ϵ .

Moment bezwładności I_O któregośkolwiek z punktów P_x, P_y, P_z , względem początku układu O równa się sumie momentu bezwładności tegoż punktu względem płaszczyzny ϵ i względem prostej e :

$$I_{O, P_i} = I_{e, P_i} + I_{\epsilon, P_i} \dots (1)$$

(n. p. $\overline{OP_x^2} = d^2 = \overline{OP_e^2} + \overline{PE_x^2}$).



Ryc. 5.

Odetnijmy również na prostej e odcinek $d = OE$ i poprowadźmy przez punkt E płaszczyznę prostopadłą do osi x , przecinającą ją w punkcie E_x .

Moment bezwładności punktu P_x względem prostej e równa się momentowi bezwładności punktu E względem osi x :

$$I_{e, P_x} = I_{x, E} = \overline{EE_x^2} = y_E^2 + z_E^2$$

analogicznie:

$$I_{e, P_y} = I_{y, E} = \overline{EE_y^2} = z_E^2 + x_E^2$$

$$I_{e, P_z} = I_{z, E} = \overline{EE^2} = x_E^2 + y_E^2,$$

co dodając otrzymamy moment bezwładności punktów P_x, P_y, P_z względem dowolnej prostej e przez początek układu przechodzącej:

$$I_{e, P_x, P_y, P_z} = 2 \cdot (x_E^2 + y_E^2 + z_E^2) = 2 \cdot d^2. \quad (2)$$

Ponieważ moment bezwładności tychże punktów P_x, P_y, P_z względem początku układu $I_{O, P_x, P_y, P_z} = 3 \cdot d^2$ to wedle równ. (1) i (2) otrzymujemy:

$$I_{e, P_x, P_y, P_z} = I_{O, P_x, P_y, P_z} - I_{e, P_x, P_y, P_z} = 3 \cdot d^2 - 2 \cdot d^2 = d^2. \quad (3)$$

„Moment bezwładności trzech punktów na osiach układu prostokątnego leżących, o równych odległościach d od początku układu, względem dowolnej płaszczyzny przez początek układu przechodzącej, równa się kwadratowi tej odległości”.

Też: *Elipsoida trójosiowa bezwładności trzech dowolnych punktów P_1, P_2, P_3 , nie leżących na jednej prostej, względem dowolnego punktu O nie leżącego na płaszczyźnie trzech punktów poprzednich, w wypadku, gdy te punkty znajdują się w równych odległościach d od punktu O , na trzech kierunkach wzajemnie prostopadłych do siebie w punkcie O , jest kulą o środku O , o promieniu $R = d$, gdy punkty P_1, P_2, P_3 posiadają masy jednostkowe.*

Jak też: *Wszystkie układy prostokątne trójosiowe o wspólnym początku O , dla punktów o masach jednostkowych na osiach tych układów leżących w równych odległościach d od początku O , mają kulę o środku O , o promieniu $R = d$, jako wspólną kulę bezwładności tych trzech punktów jednostkowych na osiach któregokolwiek z tych układów, względem tego początku O .*

Omawiany układ prostokątny wraz z równymi odcinkami na osiach $OP_x = OP_y = OP_z = d$, dowolnie w przestrzeni skierowany, rzucemy prostopadle na płaszczyznę rysunku. Otrzymamy rzuty punktów O_n', P_x', P_y', P_z' . Dowolna płaszczyzna λ , przechodząca przez prostą OO_n jako prostopadła do płaszczyzny rysunku, niechaj przecina ją w prostej l , przechodzącej stale przez punkt O_n' .

Ponieważ odległości punktów P_x, P_y, P_z od płaszczyzny λ równają się po kolei odległościom ich rzutów P_x', P_y', P_z' od prostej l , to moment bezwładności $I_{l, P_x', P_y', P_z'}$ punktów P_x', P_y', P_z' , względem prostej l , równa się momentowi bezwładności $I_{\lambda, P_x, P_y, P_z}$ punktów P_x, P_y, P_z , względem płaszczyzny λ , a ten ostatni wedle poprzedniego twierdzenia dla dowolnej płaszczyzny przez początek układu przechodzącej, równa się wartości stałej:

$$I_{l, P_x', P_y', P_z'} = I_{\lambda, P_x, P_y, P_z} = d^2. \quad (4)$$

W płaszczyźnie rysunku zatem twierdzenie poprzednie przejdzie w twierdzenie:

„Trzy dowolnej długości odcinki $O'P_x', O'P_y', O'P_z'$, na płaszczyźnie rysunku leżące, o wspólnym wierzchołku O' i o dowolnym nachyleniu, przedstawiają tylko wtenczas rzut prostokątny układu prostokątnego $[O, P_x, P_y, P_z]$, o równych odcinkach na osiach układu $OP_x = OP_y = OP_z = d$ —

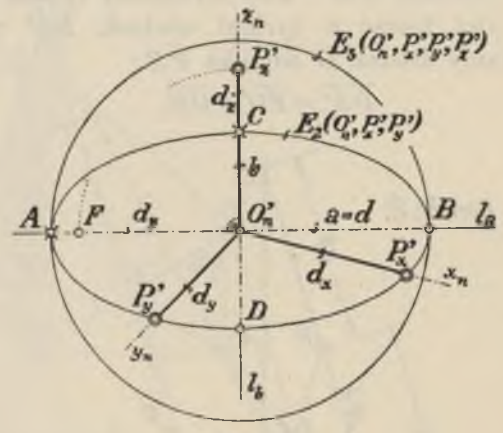
— „gdy moment bezwładności punktów P_x', P_y', P_z' względem dowolnej prostej l przez punkt O_n' przechodzącej, a na płaszczyźnie rysunku leżącej, jest ilością stałą równą d^2 ”.

— „lub gdy elipsa bezwładności $E_3(O_n', P_x', P_y', P_z')$ grupy punktów P_x', P_y', P_z' dla punktu O_n' , jest kołem o promieniu równym odcinkowi d ”.

Twierdzenie powyższe, postaci przeznaczonnej, powtórzone wedle Dr. G. Scheffersa „Lehrb. d. Darst. Geom.” t. I. str. 63 i poprzednie, prowadzi do postaci oznaczonej przez następujące rozumowanie:

Niechaj trzy odcinki $O_n'P_x', O_n'P_y', O_n'P_z'$, ryc. 6. na płaszczyźnie rysunku leżące czynią zadość ostatnio cytowanemu twierdzeniu, czyli niechaj będą rzutem prostokątnym układu prostokątnego trójosiowego o równych odcinkach na osiach układu, lub niechaj elipsa bezwładności $E_3(O_n', P_x', P_y', P_z')$ punktów P_x', P_y', P_z' , dla punktu O_n' , będzie kołem o promieniu d .

Odrzućmy jeden z punktów n. p. punkt P_z' , to moment bezwładności względem dowolnej prostej l przez punkt O_n' przechodzącej a na płaszczyźnie rysunku leżącej, zmniejszy się do momentu bezwładności pozostałych dwu punktów P_x', P_y' , względem tejże prostej l , dając elipsę bezwładności $E_2(O_n', P_x', P_y')$. Zmniejszenie to momentu bezwładności przez nieuwzględnienie punktu P_z' jest tym mniejszym im bliżej prosta l przechodzi obok punktu P_z' , najmniejszym równym zeru, gdy prosta l przechodzi przez punkt P_z' , ($l = O_n'P_z'$).



Ryc. 6.

Zatem elipsa bezwładności $E_2(O_n', P_x', P_y')$ punktów P_x', P_y' dla punktu O_n' i elipsa bezwładności równa kołu $E_3(O_n', P_x', P_y', P_z')$, punktów P_x', P_y', P_z' , dla punktu O_n' , jako współśrodkowe muszą być styczne do siebie, przy czym punkty styczności A i B leżeć muszą na prostej l_a , prostopadłej w punkcie O_n' do prostej $l_b = O_n'P_z'$, jak też punkty te A i B być muszą wierzchołkami osi dużej $AB = 2 \cdot a = 2 \cdot d$, elipsy $E_2(O_n', P_x', P_y')$, zaś oś mała $CD = 2 \cdot b$ tej elipsy, leżeć musi na prostej $O_n'P_z'$.

Elipsa bezwładności $E_2(O_n', P_x', P_y')$ nie ulegnie zmianie gdy punkty materialne P_x', P_y' ,

zastąpimy dowolnymi punktami materialnymi na tej elipsie leżącymi, będącymi wierzchołkami dowolnych dwu średnic sprzężonych tej elipsy P_x'', P_y'' , lub też wierzchołkami jej osi np. A i C :

$$E_2(O_n', P_x', P_y') \equiv E_2(O_n', P_x'', P_y'') \equiv \\ \equiv E_2(O_n', A, C)$$

to moment bezwładności punktów P_x', P_y' , względem prostej l_a :

$$I_{l_a, P_x', P_y'} = \overline{P_x' l_a^2} + \overline{P_y' l_a^2} = \overline{A l_a^2} + \overline{C l_a^2} = b^2,$$

gdzie $\overline{P_x' l_a}$ wyraża odległość punktu P_x' od prostej l_a , zaś moment bezwładności punktów P_x', P_y', P_z' , względem tejże prostej l_a :

$$I_{l_a, P_x', P_y', P_z'} = \overline{P_x' l_a^2} + \overline{P_y' l_a^2} + \overline{P_z' l_a^2} = \\ = b^2 + \overline{O_n' P_z'^2} = b^2 + d_z^2 = d^2,$$

z czego:

$$d_z = \overline{O_n' P_z'} = \overline{P_z' l_a} = \pm \sqrt{d^2 - b^2} = \pm \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (5)$$

Tu wyłączyliśmy punkt P_z' . Analogiczne związki zachodzą przy wyłączeniu punktu P_y' , lub punktu P_x' , przy elipsie $E_2(O_n', P_z', P_x')$, lub elipsie $E_2(O_n', P_y', P_z')$, co pozwala powiedzieć:

Dwa dowolnej długości odcinki $\overline{O_n' P_x'}$, $\overline{O_n' P_y'}$, (na płaszczyźnie rysunku leżące), o wspólnym wierzchołku i o dowolnym nachyleniu, możemy uważać za rzut prostokątny układu prostokątnego trójosiowego $[O, P_x, P_y, P_z]$ o równych odcinkach na osiach układu $OP_x = OP_y = OP_z = d$, przy czym kierunek rzutu osi pozostałej (trzeciej), jak też długość rzutu jej odcinka są dwuznacznie określone, mianowicie: rzut osi trzeciej nakrywa oś małą elipsy wyznaczonej danymi dwoma odcinkami jako połowami średnic sprzężonych tej elipsy, zaś długość rzutu odcinka osi trzeciej jest równy odległości ogniska tejże elipsy od jej środka.

Też: Dwa dowolnej długości odcinki o wspólnym wierzchołku i o dowolnym nachyleniu, możemy uważać za rzut prostokątny trzech krawędzi jednego naroża sześcianu umiarowego, przy czym rzut trzeciej krawędzi, nakrywając oś małą elipsy, danej tymi dwoma odcinkami jako półśrednicami sprzężonymi, równa się odległości ogniska tej elipsy od jej środka.

Jak też: Rzuty prostokątne biegunów kuli, danej rzutem prostokątnym równika, jako elipsy wyznaczonej półśrednicami sprzężonymi, będącymi dwoma dowolnymi odcinkami o wspólnym wierzchołku i dowolnym nachyleniu, leżą na osi małej rzutu równika, po obu stronach jego środka, w odległości ogniska rzutu równika od tegoż środka.

Wykluczwszy przy dwu odcinkach dowolnych $\overline{SP_1}$, $\overline{SP_2}$, o dowolnym nachyleniu wypadek obu odcinków równych zeru jako tu nieistotny, dopuszczając tylko jeden odcinek równy zeru, wyróżnimy następujące wypadki:

1. Oba odcinki różne od zera o kącie nachylenia równym 0° lub 180° .

Szukany rzut prostokątny odcinka trzeciego, nakrywa prostą prostopadłą w punkcie S , do prostej $\overline{SP_1 P_2}$, przyjmując długość:

$$\overline{SP} = d_3 = \pm \sqrt{\overline{SP_1^2} + \overline{SP_2^2}}. \quad (6)$$

Którykolwiek z obu punktów P , spełniających równ. (6), leżących na prostej $\overline{SP_1 P_2}$, po przeciwnych stronach punktu S , w odległości $\pm \overline{SP}$, może zastąpić grupę punktów P_1, P_2 , dla punktu S . Albowiem znacząc odległość punktu P_i , od prostej dowolnej s , przez punkt S przechodzącej, przez $\overline{P_i s}$, niezależnie od kąta nachylenia α prostej s do prostej $\overline{SP_1 P_2}$, na i poza płaszczyznę rysunku leżącej, gdy tylko:

$$\overline{SP^2} = \overline{SP_1^2} + \overline{SP_2^2} = (\overline{SP_1} \cdot \cos \alpha)^2 + \\ + \overline{P_1 s^2} + (\overline{SP_2} \cdot \cos \alpha)^2 + \overline{P_2 s^2}$$

to też:

$$\overline{SP^2} = (\overline{SP} \cdot \cos \alpha)^2 + \overline{Ps^2} = \\ = (\overline{SP_1^2} + \overline{SP_2^2}) \cdot \cos^2 \alpha + \overline{Ps^2}.$$

Porównując prawe strony równań powyższych powiemy:

Takie punkty P na prostej $\overline{SP_1 P_2}$, dla których ma miejsce równ. $\overline{SP^2} = \overline{SP_1^2} + \overline{SP_2^2}$, ze względu na dowolną prostą s , przez punkt S przechodzącą, na i poza płaszczyznę rys. leżącą, niezależnie od jej kąta nachylenia α , czynią za-
dość stale równość:

$$\overline{Ps^2} = \overline{P_1 s^2} + \overline{P_2 s^2}, \text{ czyli: } \underline{I_{s, P} = I_{s, P_1, P_2}}. \quad (7)$$

W wypadku omawianym:

$$b = 0, \quad d_3 = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = a = d$$

płaszczyzna rysunku (aksonometrii prostokątnej) jest równoległą do osi, której rzut wyznaczyliśmy.

2. Oba odcinki różne od zera o kącie nachylenia równym 90° lub 270° .

Szukany rzut prostokątny odcinka trzeciego nakrywa z danych odcinków krótszy, lub jest jego przedłużeniem o długości:

$$d_3 = \pm \sqrt{\overline{SP_1^2} - \overline{SP_2^2}}, \text{ gdy: } \overline{SP_1} > \overline{SP_2}.$$

Wtenczas:

$$a = d = \overline{SP_1}, \quad b = \overline{SP_2}.$$

W wypadku tym płaszczyzna rysunku jest równoległą do osi, której rzut jest odcinkiem z danych dłuższym.

3. Gdyby jeden z danych odcinków był równy zeru, lub gdyby oba odcinki, nachylone pod kątem 90° lub 270° , były równe sobie, wtenczas płaszczyzna rysunku jest równoległą do dwu osi układu prostokątnego, czyli równoległą do jednej z płaszczyzn układu.

Uogólniając powiemy:

Dwa punkty dowolne P_1, P_2 , na płaszczyźnie rysunku leżące wyznaczają dwuznacznie kierunek trzeciego punktu P_3 , grupy punktów P_1, P_2, P_3 , dla punktu S , których elipsa bezwładności $E_3(S, P_1, P_2, P_3)$ jest kołem. Punkt ten P_3 leży na kierunku osi małej elipsy $E_2(S, P_1, P_2)$, w odległości ogniska tejże elipsy od jej środka S po jednej lub po drugiej stronie tego środka.

Każdy punkt O , przed lub za płaszczyznę rysunku, jedynej tu prostej $p = SO$, prostopadłej w punkcie S do płaszczyzny rysunku może być uważany za początek układu prostokątnego, trójosiowego, o równych odcinkach na

osiach układu $\overline{OP_x} = \overline{OP_y} = \overline{OP_z} = a = d$, tak ułożonego, że punkty P_1, P_2, P_3 , są rzutami prostokątnymi po kolei punktów P_x, P_y, P_z .

Ponieważ miejscem geometrycznym punktów P_x, P_y, P_z , wszystkich układów o równych odcinkach $a = d$ na osiach, o tym samym początku O , jest kula o środku w tymże punkcie O , o promieniu $R = d$, jako wspólna kula bezwładności punktów jednostkowych na osiach tych układów dla początku O , której rzut prostokątny jest kołem bezwładności $E_3(S, P_1, P_2, P_3)$ o promieniu $a = d$, to każda prosta równoległa do prostej $p = SO$, a przez punkty P_1, P_2, P_3 , przechodząca, przebija kulę w dwu punktach rzeczywistych, dając dwa takie układy prostokątne, przeciwwrotne, symetrycznie ułożone względem płaszczyzny prostopadłej do prostej p , w punkcie O , których rzut na płaszczyźnie rysunku jest danymi dwoma odcinkami $\overline{SP_1}, \overline{SP_2}$, jak też niemi określonym odcinkiem trzecim $+\overline{SP_3}$, lub $-\overline{SP_3}$.

Więc: *W każdym punkcie prostej $p = SO$, prostopadłej do płaszczyzny rysunku, mają początek cztery układy prostokątne, trójosiowe, o równych odcinkach na osiach układów, nakrywające swym rzutem prostokątnym na płaszczyźnie rysunku dwa dowolne odcinki $\overline{SP_1}, \overline{SP_2}$, o dowolnym nachyleniu, przy czym tylko jeden z tych odcinków może być równym zeru.*

Wychodząc z podstawowego twierdzenia aksonometrii ukośnej K. Polkiego, jasnym staje się dla nas warunek, jakiemu poddać należy odcinek trzeci, przy dowolnie obranych dwu pierwszych, jeśli ominąć zechcemy zniekształcenia rzutu rysowanego utworu rzutem ukośnym, wyraźnie odbiegającym od rzutu prostokątnego. A gdy z drugiej strony, stosowanie aksonometrii prostokątnej o z góry przyjętym stosunku skróceń, wyznaczanie odcinka d , rysowanie podziałek lub kątów skróceń dla poszczególnych osi, jako uciążliwe też ominąć zechcemy, wtenczas aksonometria ukośna, zbliżona do prostokątnej, w jakiej dla wszystkich trzech osi użyć będziemy mogli jednej podziałki, będzie tą aksonometrią, której ważność techniczną podkreślić należy.

W tym celu, jak to wskazuje twierdzenie dwu odcinków, powrócić musimy do konstrukcji osi elipsy, danej średnicami sprzężonymi, ryc. 4, jako rysunku zawierającego już w sobie wielkości omawiane: $d, d_x = l, d_y = m, d_z = n$, ułożone w ich zależności. Wydobędziemy je na jaw w ryc. 7, przyjmując dwa dowolne odcinki np. $d_x = \overline{O_n' P_x'}$, $d_y = \overline{O_n' P_y'}$, jako półśrednice sprzężone elipsy $E_2(O_n', P_x', P_y')$ czyniąc:

$$d_x = \overline{O_n' P_x'} \perp \overline{O_n' A'} = \overline{A'E}, \quad d_y = \overline{O_n' P_y'} = \overline{P_y' F}, \\ \overline{P_y' A'} = \overline{FG} = \overline{EG}, \quad \overline{O_n' G} = \overline{GH}, \quad \overline{P_y' I} \parallel \overline{O_n' H},$$

otrzymamy:

$$\overline{FI} = \overline{IH} = a = d, \quad \overline{IG} = b$$

Poprowadźmy jeszcze prostą: $\overline{P_y' G} \perp \overline{O_n' P_x'} = d_x$, i zatoczmy promieniem $a = d = \overline{FI} = \overline{IH}$ koło o środku w punkcie I . Prosta prosto-

padła do prostej FE w punkcie G przecina koło w punkcie L , wyznaczając zgodnie z równaniem (5), str. 5:

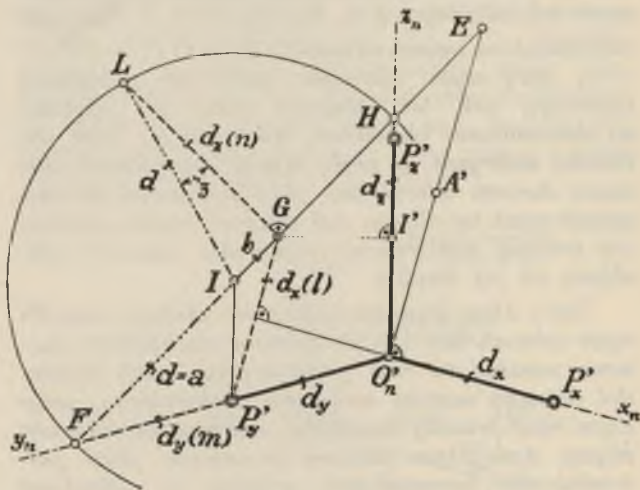
$$d_z = \overline{GL} = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{d^2 - b^2}.$$

Odmierzywszy odcinek $\overline{GL} = \overline{O_n' P_z'} = d_z$ od punktu O_n' na prostej $O_n' H$ otrzymamy ostatecznie punkt P_z' , określający rzut odcinka d na osi z .

Wyłączmy z ryc. 7 trójkąt $O_n' FH$, wraz z punktami P_y', I, G , i zauważmy, że dwa boki trójkąta FGP_y' , tworzą odcinki: $d_x = \overline{GP_y'} \perp \overline{O_n' P_x'}$, $d_y = \overline{FP_y'}$, wyznaczające już w następstwie odcinek $d = \overline{FI}$ i pozostały odcinek d_z , pod warunkiem, że punkt G leży na symetralnej $I'G$ odcinka $O_n' H$, przy czym:

$$\overline{P_y' I} = \overline{O_n' I'} = \overline{HI'}.$$

Jak widzimy trójkąt $O_n' FH$, wraz z punktami P_y, I, G , streszcza w sobie związki dotyczące aksonometrii prostokątnej tak, że obierając go dowolnie, przy spełnieniu wskazanego wyżej warunku dotyczącego punktu G , będziemy mogli w krótkiej drodze oznaczać aksonometrie prostokątne, a wyznaczenie podziałek lub kątów skróceń nie nastęrczyłoby przy znanym tu d żadnej trudności.



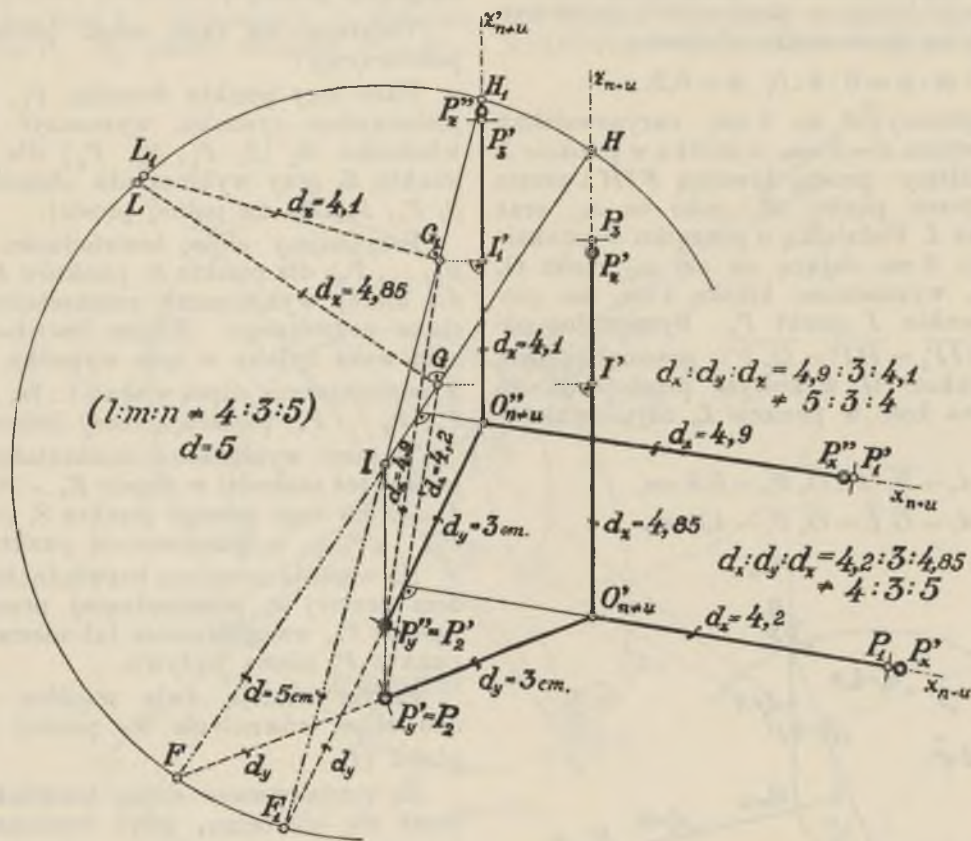
Ryc. 7.

Postąpić zatem możemy odmiennie jak przy klasycznym sposobie wyznaczania aksonometrii prostokątnej, wychodzącej z dobranych stosunków skróceń, przez które wartość d , jaką tam dodatkowo wyznaczamy, jako wartość wynikową, zwykle niewspółmierną wobec d_x, d_y, d_z , (l, m, n), co zmusza nas w następstwie do używania trzech podziałek, lub trzech kątów skróceń. Mianowicie możemy, korzystając z twierdzenia dwu odcinków dowolnych o dowolnym nachyleniu, przyjąć najpierw wartość d i kierunek osi z_n , będący prostą pionową, przechodzącą przez punkt H , ryc. 7. Wyczerpujemy w ten sposób jeden odcinek dowolny i kierunek. Drugi odcinek np. d_y , współmierny z odcinkiem d , jak jego kierunek możemy obrać stosownie a w następstwie wyznaczyć d_x wraz z jego kierunkiem i długość d_z , starając się przy tym otrzymać dla d_x i d_z długości w przybliżeniu współmierne z długością d .

Tak np. wzorując się tylko na aksonometrii prostokątnej o stosunku skrótów $l:m:n=4:3:5$, $d=5,00$, jako aksonometrii szczególnej (płaszczyzna równoległa do osi z), zatoczmy z punktu I jako środka koło o promieniu $d=5\text{ cm}$, ryc. 8 i poprowadźmy przez punkt I dowolną prostą FH . Przez punkt H , narysujmy prostą pionową jako oś z_n , jak też przez punkt I , prostą do z_n równoległą. Ustawmy początek podziałki w punkcie F i skracając podziałkę dookoła punktu F , sprowadźmy ją do położenia takiego, by kreska 6 cm leżała na prostej z_n , wskazując rzut początku układu O_n' . Wówczas kreska 3 cm podziałki na prostej pionowej, przez punkt I przechodzącej, wskazuje punkt P_y' ($FP_y' =$

Zadawając się otrzymanymi kątami nachylenia osi i zbliżeniem odcinków d_x , d_z , do wartości całkowitych, zaokrąglamy je:

d_x do $O'_{u=n}P_1 = 4\text{ cm}$, d_z do $O'_{n=u}P_3 = 5\text{ cm}$, przechodząc w ten sposób do aksonometrii ukośnej, o stosunku skrótów $d_x:d_y:d_z = 4:3:5$, $d \approx 5\text{ cm}$, określonej odcinkami $O'_{u=n}P_1$, $O_n'P_2$, $O'_{n=u}P_3$, którą nazwać możemy aksonometrią zbliżoną do prostokątnej, pozwalającą użyć wprost jednej podziałki do wszystkich trzech osi, jak to czynimy w aksonometrii ukośnej, dowolnie obieranej odbiegającej często znacznie od rzutu prostokątnego, tym samym zniekształcającej szczególnie rysowany.



Ryc. 8.

$= P_y' O_n' = d_y = 3\text{ cm}$). Tak wyznaczony odcinek $\overline{IP_y'}$ przenieśmy cyrklem raz z punktu O_n' , drugi raz z punktu H na oś z_n a otrzymamy punkt I' , przez który przechodzi symetralna odcinka $O_n'H$, wyznaczająca na prostej FH punkt G . Prostopadła w punkcie G , do teźże prostej FH , daje na kole punkt L .

Otrzymaliśmy w ten sposób odcinki:

$$\overline{P_y' G} \perp \overline{O_n' P_x'} = d_x = 4,2\text{ cm},$$

$$\overline{GL} = \overline{O_n' P_z'} = d_z = 4,85\text{ cm},$$

określające aksonometrię prostokątną $[O_n', P_x', P_y', P_z']$ o stosunku skrótów $d_x:d_y:d_z = 4,2:3:4,85$ przy $d = 5\text{ cm}$.

Przyglądnijmy się jeszcze zmianom w przykładzie wyżej przyjętym, ryc. 8, jakie wywoła obrót dookoła punktu I , prostej FIH np. w kierunku zgodnym do obrotu wskazówki na zegarze.

Wówczas znacznie większemu obrotowi ulegnie podziałka ustawiona w prostej $\overline{FO_n'} = 6\text{ cm}$, powodując znaczne obniżenie punktu O_x' , obniżenie się punktu I , co pociąga za sobą zbliżanie się punktu G , do punktu I , a w następstwie zmniejszanie się odcinka $d_x = \overline{P_y' G}$, przy zwroście odcinka $d_z = \overline{GL}$, przy czym kąt nachylenia osi $x_n y_n$ rośnie zbliżając się do 180° . Korzystniej zatem będzie obrócić prostą FIH w kierunku przeciwnym do obrotu wskazówki na zegarze, np. do położenia $F_1 IH_1$.

Postępując analogicznie jak to uczyniono powyżej dla FIH , otrzymujemy przy $d = 5 \text{ cm}$, $d_y = \overline{F_1 P_y''} = \overline{P_y'' O_n''} = 3 \text{ cm}$:

$$d_x = \overline{P_y'' G_1} \perp \overline{O_n'' P_x''} = 4,86 \text{ cm},$$

$$d_z = \overline{G_1 L_1} = \overline{O_n'' P_z''} = 4,1 \text{ cm},$$

jako odcinki określające aksonometrię prostokątną $[O_n'', P_x'', P_y'', P_z'']$ o stosunku skróceń: $d_x : d_y : d_z = 4,9 : 3 : 4,1$, przy $d = 5 \text{ cm}$, którą przy prawie niezauważalnej zmianie rzutu, zastąpić możemy aksonometrią ukośną, zbliżoną do prostokątnej: $d_x : d_y : d_z = 5 : 3 : 4$, $d \neq 5 \text{ cm}$, określoną odcinkami:

$$\overline{O''_{n-u} P_1'}, \overline{O''_{n-u} P_2'}, \overline{O''_{n-u} P_3'}.$$

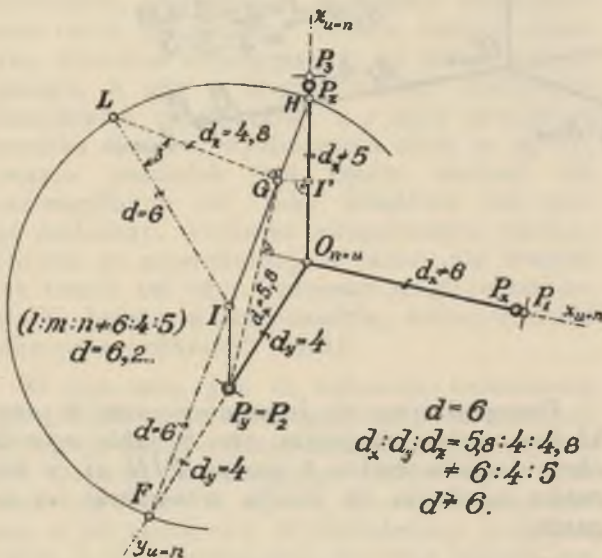
Reasumując na koniec w przykładzie ryc. 9, gdzie podano jedną z aksonometrii prostokątnych, zbliżoną do stosunku skróceń:

$$l : m : n = 6 : 4 : 5, \quad d = 6,2 \dots$$

Zaokrągliwszy d do 6 cm , narysowaliśmy koło promieniem $d = 6 \text{ cm}$, o środku w punkcie I , poprowadziliśmy: prostą dowolną FIH i proste pionowe, przez punkt H , jako oś z_n , oraz przez punkt I . Podziałką o początku w punkcie F , o kresce 8 cm dającą na osi z_n punkt O_n ($d_y = 4 \text{ cm}$), wyznaczono kreską 4 cm , na pionowej z punktu I punkt P_y . Symetralna odcinka HO ($IP_y = HI' = O_n I'$), przecięła prostą FH w punkcie G , w którym prostopadła do FH przecina koło w punkcie L , dając szukane odcinki:

$$d_x = \overline{P_y G} \perp \overline{O_n P_x} = 5,8 \text{ cm},$$

$$d_z = \overline{G L} = \overline{O_n P_z} = 4,8 \text{ cm}.$$



Ryc. 9.

Tak otrzymaliśmy aksonometrię prostokątną (O_n, P_x, P_y, P_z), o stosunku skróceń: $d_x : d_y : d_z = 5,8 : 4 : 4,8$, przy $d = 6 \text{ cm}$, którą możemy stosować wprost, narysowawszy podziałki lub kąty skróceń już tylko dla dwu osi x_n, z_n , lub też bez znacznej zmiany rzutu, zaokrągliwszy odcinki: d_x do 6 cm , d_z do 5 cm , stosować aksonometrię zbliżoną do prostokątnej, określoną odcinkami $\overline{O_{n-u} P_1}, \overline{O_{n-u} P_2}, \overline{O_{n-u} P_3}$, $d_x : d_y : d_z =$

$= 6 : 4 : 5$, $d \neq 6 \text{ cm}$, pozwalającą użyć dla wszystkich trzech osi jedną podziałkę.

C. Z teorii aksonometrii ukośnej i elipsa bezwładności grupy n -punktów.

Uwypukiając rozprawę niniejszą, powiemy słowami K. W. Pohlkego twierdzenie:

„Trzy dowolnej długości odcinki $\overline{SP_1}, \overline{SP_2}, \overline{SP_3}$, o wspólnym wierzchołku i dowolnym nachyleniu, na płaszczyźnie rysunku leżące, są rzutem ukośnym (równoległym) trzech równej długości odcinków $\overline{OP_x} = \overline{OP_y} = \overline{OP_z} = d$, odmierzonych na osiach układu prostokątnego, jeśli nie leżą wszystkie cztery punkty S, P_1, P_2, P_3 , na jednej prostej”.

Traktując na razie część płaską dowodu, powtórzmy:

Dane trzy punkty dowolne P_1, P_2, P_3 , na płaszczyźnie rysunku, wyznaczyć elipsę bezwładności $E_3(S, P_1, P_2, P_3)$ dla dowolnego punktu S , przy wykluczeniu obrania punktów S, P_1, P_2, P_3 , na jednej prostej.

Przyjmijmy elipsę bezwładności $E_n(S, P_1, P_2, \dots, P_n)$, dla punktu S , punktów P_1, P_2, \dots, P_n , dla której wykluczamy zniekształcenie do odcinka podwójnego. (Elipsa bezwładności Culmanowska byłaby w tym wypadku dla punktu S , pomniejszoną elipsą w skali $1 : \sqrt{n}$, gdy punkty P_1, P_2, \dots, P_n , posiadają masy jednostkowe).

To samo wykluczenie zniekształcenia niechaj jeszcze też zachodzi w elipsie $E_{n-1}(S, P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$, dla tego samego punktu S , punktów P_1, P_2, \dots, P_{n-1} , z opuszczeniem punktu P_n .

Na wartość momentu bezwładności I_s , względem prostej s , przechodzącej przez punkt S i punkt P_n , uwzględnienie lub nieuwzględnienie punktu P_n niema wpływu.

Zatym istnieją dwie wspólne styczne do obu elips, równoległe do prostej s , w odległości $\sqrt{I_s}$.

Że rozpatrywane elipsy bezwładności przecinać się nie mogą, gdyż wtenczas mogłyby istnieć punkty materialne zewnątrz elipsy E_n , co jest niemożliwym przy masach równych lub większych od jedności poszczególnych punktów, to jasnym staje się, że elipsy E_{n-1} i E_n są styczne w wierzchołkach średnicy sprzężonej z kierunkiem s .

Powracając do zagadnienia trzech punktów P_1, P_2, P_3 , ryc. 10, wyłączmy punkt P_3 . To elipsa $E_2(S, P_1, P_2)$, punktów P_1, P_2 , dla punktu S , posiadać będzie punkt styczności z szukaną elipsą $E_3(S, P_1, P_2, P_3)$. Nazwijmy ten punkt, nam na razie nie znany przez P_1^e .

Że elipsę $E_2(S, P_1, P_2)$, możemy uważać jako elipsę bezwładności dwu punktów dowolnych, o masach jednostkowych, na tej elipsie leżących, a będących wierzchołkami dwu średnic sprzężonych, to obierając jednym z nich punkt P_1^e , zagadnienie uprościmy do możliwości stosowania powinowactwa z kołem, bo wtenczas, jak to wyżej okazaliśmy, drugi punkt P_2^e , leżeć będzie na znanym nam kierunku SP_3 ,

sprężonym z kierunkiem SP^e , i leżeć będzie na elipsie:

$$E_2(S, P_1, P_2) \equiv E_2(S, P^e_1, P^e_2).$$

Zbierając, punkty dane P_1, P_2, P_3 , zastąpimy punktami P^e_1, P^e_2, P_3 , a szukana elipsa nie ulegnie zmianie:

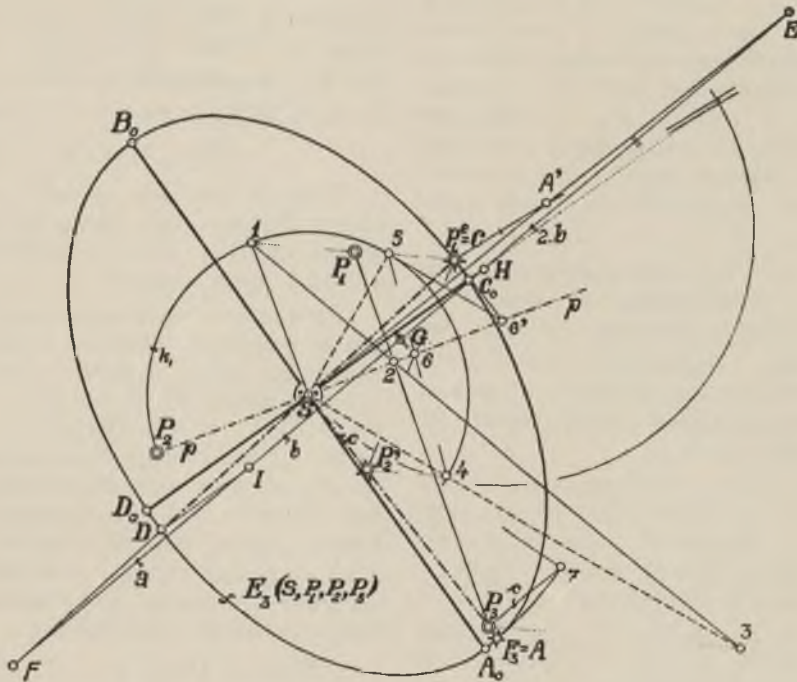
$$E_3(S, P_1, P_2, P_3) \equiv E_3(S, P^e_1, P^e_2, P_3).$$

Punkty P^e_1 i P^e_2 znajdziemy najprościej, zakładając powinowactwo koła k_1 z elipsą $E_2(S, P_1, P_2)$, o osi $p = P_2S$, (lub $p = P_1S$), rysując koło o środku S i o promieniu $\overline{P_2S}$. Punkt 1, przecięcia się koła k_1 z prostą $lS \perp p$ i punkt P_1 , określają kierunek powinowactwa, w którym P_1P_3 odpowiada prosta 123.

Zatym proste prostopadłe $S43, 5S$, punktami 4, 5, na kole k_1 , wyznaczają w układzie elipsy $E_2(S, P_1, P_2)$ punkty szukane P^e_1, P^e_2 .

(Przypominając tu konstrukcję Rytza użylibyśmy odcinka $\overline{CA'} \neq \frac{1}{2}SH$, co dałoby mniej pewne zorjentowanie prostej CA' i niepewne nastawienie promienia koła, gdyż punkt S w toku poprzednich zabiegów został ostrzem cyrkla rozdarty, wpływa to też ujemnie na postawienie kierunku SH).

Gdy porównamy sposób podany, wyznaczenia elipsy bezwładności trzech punktów, dla dowolnego punktu, z konstrukcją prof. F. Schura (Strassburg, Breslau) „Über den Pohlkeschen Satz“, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 117. Bd. 1896, S. 24–28, stosującej powinowactwo elipsy, określonej osiami z elipsą szukaną, to sposób podany tu pozwala conajmniej ominąć po pierwsze, niezręcznego wyszukiwania środka \mathcal{M} elipsy pomocniczej, po drugie uciążliwego wyznaczania długości jej osi.



Ryc. 10.

Jako sprawdzenie posłużyć tu mogą proste: $56'$, styczna do koła k_1 w punkcie 5 i prosta $6'P^e_1 \parallel SP_3$.

Punkty P_3 i P^e_2 dla punktu S , leżące na prostej SP_3 , jak to wykazaliśmy pod 1., str. 5, równ. (7), zastąpić możemy punktem F_3 . Punkty te określają elipsę $E_2(S, P_3, P^e_2)$, zniekształconą do odcinka podwójnego, którego wierzchołek F_3 może być uważany za ognisko tej elipsy, o osi $2.b = 0$, jak też za wierzchołek średnicy $2.\overline{SF_3}$, sprzężonej w elipsie $E_3(S, P_1, P_2, P_3)$ z średnicą $2.\overline{SP^e_1}$ przy czym:

$$\overline{SF_3} = \pm \sqrt{\overline{SP_3}^2 + \overline{SP^e_2}^2}.$$

W dalszym ciągu stosując konstrukcję osi dla znalezionych średnic sprzężonych $2.\overline{SF_3}$, $2.\overline{SP^e_1}$, odcinkiem \overline{SH} , orjentujemy osie i wyznaczamy ich wierzchołki: $\overline{A_0B_0} = 2.a$, $\overline{C_0D_0} = 2.b$.

O tyle tylko uprościć się daje konstrukcja w porównaniu z cytowaną konstrukcją, którą K. W. Pohlke uznał historycznie ważnym i wystarczającym dowodem swego twierdzenia, powtórzywszy w całości dowód H. A. Schwarza-Schura z r. 1864.

Opisując tu jego ciąg dalszy, możemy każdy punkt O (lub O'), dwu prostych $p = SO$ i $p' = SO'$, przez punkt S , przed i za płaszczyzną rysunku przechodzących a nachylonych do płaszczyzny rysunku pod kątem $\varphi = \arcsin b/a$ tak, by znaleziona oś duża elipsy bezwładności $E_3(S, P_1, P_2, P_3)$, była ich rzutem prostokątnym na płaszczyznę rysunku, uważać za początek układu prostokątnego o równych odcinkach na osiach układu $\overline{OP_x} = \overline{OP_y} = \overline{OP_z} = b = d$, (lub $\overline{O'P_x} = \overline{O'P_y} = \overline{O'P_z} = b = d$), tak ułożonego, że punkty P_1, P_2, P_3 , są rzutami ukośnymi po kolei punktów P_x, P_y, P_z .

Że miejscem geometrycznym punktów P_x, P_y, P_z , wszystkich układów o równych odcinkach $d = b$, na osiach, o tym samym początku O , (lub O'), jest kula o środku w tymże punkcie O , (lub O'), o promieniu $R = d = b$, jako wspólna kula bezwładności punktów jednostkowych na osiach tych układów dla początku O , której rzut ukośny, równoległy do prostej p , (lub p'), jest wyznaczoną wyżej elipsą $E_3(S, P_1, P_2, P_3)$, to każda prosta równoległa do prostej p (lub p') a przez punkty P_1, P_2, P_3 , przechodząca, przebija kulę w dwu punktach rzeczywistych, dając dwa takie układy prostokątne, przeciwzwrotne, symetrycznie ułożone względem płaszczyzny prostopadłej do prostej p w punkcie O , (lub do prostej p' w punkcie O'), że ich rzut ukośny, równoległy do p , (lub p'), na płaszczyźnie rysunku jest przyjętymi na wstępie trzema odcinkami $\overline{SP_1}, \overline{SP_2}, \overline{SP_3}$.

Więc: *W każdym punkcie dwu prostych $p = SO$ i $p' = SO'$, przez punkt S przechodzących, przed i za płaszczyzną rysunku pod kątem $\varphi = \arcsin b/a$, nachylnych tak, by oś duża elipsy bezwładności $E_3(S, P_1, P_2, P_3)$ była ich rzutem prostokątnym na płaszczyznę rysunku, mają początek dwa układy prostokątne, przeciwzwrotne, o równych odcinkach na osiach układów $\overline{OP_x} = \overline{OP_y} = \overline{OP_z} = b = d$, (lub $\overline{O'P_x} = \overline{O'P_y} = \overline{O'P_z} = b = d$), nakrywające swym rzutem ukośnym, równoległym do prostej p , (lub p'), na płaszczyźnie rysunku przyjęte na wstępie, trzy dowolne odcinki $\overline{SP_1}, \overline{SP_2}, \overline{SP_3}$, o wspólnym wierzchołku i dowolnym nachyleniu, jeśli tylko nie leżą wszystkie cztery punkty S, P_1, P_2, P_3 , na jednej prostej.*

Sposób wyżej podany wyznaczenia elipsy bezwładności trzech punktów, ryc. 10, jak wykażemy, może być stosowanym do wyznaczenia elipsy bezwładności dowolnej ilości punktów materialnych o masach jednostkowych.

Ponieważ elipsa $E_2(S, P_1, P_2)$, jest elipsą bezwładności punktów P_1 i P_2 , dla punktu S a punkt P_3 został po zastąpieniu punktów P_1 i P_2 , przez punkty P_1^e i P_2^e , dodatkowo uwzględniony dając elipsę:

$$E_3(S, P_1^e, P_2^e, P_3) \equiv E_3(S, P_1, P_2, P_3),$$

to postępując analogicznie, dołączając będziemy mogli po kolei dowolną ilość punktów.

Mianowicie biorąc punkt następny P_4 , opuścimy konstrukcję osi w elipsie E_3 , zakładając ponownie powinowactwo koła k_2 , o promieniu $\overline{SF_3}$, lub $\overline{SP_1^e}$, z elipsą:

$$E_3(S, P_1^e, P_3) \equiv E_3(S, P_2^e, P_3^e),$$

znajdziemy jak poprzednio punkty P_2^e i P_3^e , przy tym P_2^e jest punktem styczności elipsy E_3 z szukaną elipsą bezwładności $E_4(S, P_1, P_2, P_3, P_4)$ w kierunku $\overline{SP_2^e}$, sprzężonym z kierunkiem $\overline{SP_4}$, na którym leżeć musi znaleziony punkt P_3^e .

Punkty dane P_1, P_2, P_3, P_4 , zastąpią punkty P_2^e, P_3^e, P_4 , wyznaczając tożsamość:

$$E_4(S, P_1, P_2, P_3, P_4) \equiv E_4(S, P_2^e, P_3^e, P_4) \equiv E_4(S, P_2^e, P_4).$$

Punkty materialne P_3^e, P_4 , dla punktu S , na prostej $\overline{SP_4}$ leżące, dają elipsę zniekształconą do odcinka podwójnego, którego wierzchołek F_4 , określa średnicę sprzężoną $2 \cdot \overline{SF_4}$ z średnicą $2 \cdot \overline{SP_2^e}$, w elipsie E_4 , przy czym:

$$\overline{SF_4} = \pm \sqrt{\overline{SP_3^e}^2 + \overline{SP_4}^2}.$$

Więc w ten sam sposób, jak przy uwzględnieniu Punktu P_3 , uwzględniwszy punkt P_4 , wyznaczyliśmy elipsę bezwładności E_4 , jej średnicami sprzężonymi

Sposób ten wyznaczenia elipsy bezwładności grupy punktów, pozwala ominąć kolejnego wyznaczenia osi i ognisk poszczególnych elips, podany przez K. Heumanna (Prof. mechaniki Politechniki w Stockholmie), w rozprawie z r. 1905: „Über Trägheitsmomente von Punktsystemen u. über eine fundamentale Aufgabe in der Theorie der axonometrischen Abbildung“. Dzięki niemu, pojęcia wynikłe w nauce mechaniki ciał sztywnych, urobione przez Eulera, Cauchy, Culmana, przystosowane zostały do celów geometrii wykreślnej.

JW Panu Prof. Dr. K. Bartłowi za cenne uwagi, które wpłynęły na tok rozprawy powyższej, w tym miejscu wyrażam jak najserdeczniejsze podziękowanie.