

Inż. Dr. ALEKSANDER PAREŃSKI

Officium per auctora

Brno 11/XII-1935

L. Pareński

NOWE SPOSOBY BADAŃ WZORÓW EMPIRYCZNYCH



LWÓW 1935

ODBITKA Z »CZASOPISMA TECHNICZNEGO«

Pierwsza Związkowa Drukarnia we Lwowie, ul. Lindego 1. 4.

I.

Badaniem przyrody, a mianowicie tych jej dziedzin, w których występują siły mechaniczne, zajmują się nauki ścisłe i empiryka, a badanie zużytkowania i zapręgnięcia tych sił do pracy — dla dobra ludzkości — należy do wiedzy technicznej.

W naukach ścisłych przyjmuje się przy badaniu — bardzo często — absolutną doskonałość badanych elementów, przyczem statystyka spostrzeżeń może, ale nie musi odgrywać tu pewnej roli (szczególniej w naukach klasycznych). Pozatem zaznacza się, że w przyrodzie nie istnieje absolutna t. j. stuprocentowa doskonałość. Nie posiadamy ciał doskonale lekkich (t. j. bez ciężaru), sprężystych, gładkich, nieściśliwych i t. p. Z tego powodu wyniki badań, niektórych nauk ścisłych a szczególnie nauk klasycznych streszczają się we formach, których wyniki są także ważnymi poza obszarami doświadczeń, ale wartość ich — tak na obszarach doświadczeń jak i poza nimi — może być tylko przybliżoną do rzeczywistości i przedstawiać obraz idealny, który jest mniej lub więcej wiernem odbiciem lub odwzorowaniem obrazu rzeczywistego.

Zdarza się często — podczas rozważań ścisłych — wtrącanie albo w toku, albo też przyjęcie u podstaw tych rozważań — wyników rozważań empirycznych z zasadniczymi uproszczeniami, co jest niedopuszczalnym, ponieważ nie tylko łamie całą linię rozważań ścisłych, lecz powoduje także niedomagania niedające się następnie usunąć.

Inaczej przedstawia się sprawa w dziedzinie wiedzy empirycznej. Tu oparto badania o statystykę spostrzeżeń, przyczem przyjęcie u podstaw lub wtrącenie w toku badania wyników rozważań ścisłych jest dopuszczalnym o ile to tylko będzie możliwym.

Pozatem dopuszczalnymi są tu także zasadnicze uproszczenia, przy stosowaniu których należy uważać, aby z tego powodu wynikłe cyfrowe różnice — między wartościami pomierzonymi, a obliczonymi wzorami empirycznymi — nie przekraczały co do swojej wartości absolutnej (t. j. mieściły się w granicach) różnic i błędów występujących między wartościami spostrzeżeń.

Wyniki rozważań tak ścisłych jak i empirycznych streszczają się zwykle we wzorach matematycznych, dających możność wyznaczenia — w pierwszym przypadku na obszarze doświadczeń i poza nim a w drugim tylko na obszarze doświadczeń — wartości nie pomierzonych, odpowiadających tym samym względnie przybliżonym warunkom, w których spostrzeżenia dokonano i zebrano, oraz materiałowi statystycznemu, na podstawie którego wzór zbudowano.

Oczywista rzecz, że opisane metody badań należy odpowiednio zmienić, przy zmianie czy to badanych warunków (n. p. przez użycie liczby Reynolds'a przy badaniach laboratoryjnych, której wartość jest tymi warunkami ograniczoną) czy to materiału (n. p. przyjmując przy badaniu mechaniki kształtu ichtjoidalnego tak wodę jak i powietrze za ciecz lepka), ponieważ analogja wniosków w podobnych przypadkach jest ściśle ograniczoną.

Z tego wynika, że odpowiednie zbudowanie i dobór wzorów tak *teoretycznych* jak i *empirycznych* nie jest rzeczą łatwą, przyczem te ostatnie opracowywane bywają dość powierzchownie (szczególnie w statyce budowli) a ich wartość przyjmowana bezkrytycznie przez ogół praktykujących inżynierów wprowadza ich niejednokrotnie w błąd.

Należy tu zaznaczyć, że w naukach technicznych występuje jeszcze trzeci rodzaj formuł, mianowicie tylko technicznych (n. p. niektóre formuły ze statyki budowli, żelbetu, konstrukcji ustrojów tak budowlanych jak i maszynowych), które nie są ani formułami otrzymanymi drogą badań ścisłych, ani też z naukami empirycznymi nie mają nic wspólnego.

Formuły te nazywane także empirycznymi, ustawiane są na podstawie doświadczeń konstrukcyjnych, a będziemy je nazywali *wzorami budowlanymi*.

W naukach rozróżniamy trzy rodzaje wartości zjawisk, mianowicie wartości: 1. *rzeczywiste* t. j. istniejące, 2. *pomierzone* i 3. *obliczone*. Różnice między nimi są bardzo znaczne, przekraczają bowiem czasem 100%.

Jakie są wartości rzeczywiste tego nie wiemy, staramy się je zbadać zapomocą pomiaru. Przy każdym pomiarze popełniamy jednak

błędy, których suma stwarza różnicę między wartością rzeczywistą i pomierzoną. Oczywiście rzecz, że błędy te zależne są od rodzaju pomiaru, np. mierząc opór przewodnika prądu elektrycznego otrzymamy inne błędy, jeżeli mierzymy przewodnik o danej długości i przekroju jednym i tym samym przyrządem pomiarowym, a inne jeżeli do pomiaru użyjemy różnych przyrządów pomiarowych, a jeszcze inne, jeżeli wymiary lub gęstość przewodnika będziemy zmieniali, lub mierząc prędkość sekundową przepływu wody w jednym przekroju łożyska przyrodzonego przy tych samych wodostanach otrzymamy również pewne błędy — inne, przy różnych wodostanach — a jeszcze inne w różnych przekrojach tej samej rzeki i t. p. Błędy te mogą być jednokierunkowe (o tym samym znaku) lub różnokierunkowe, takie, które można wyrównać względnie wyeliminować i takie, których wyrównanie usuwa się z pod naszej wiedzy. Z tego powodu powstają różnice nie tylko między wartościami rzeczywistymi a pomierzonymi lecz także między wartościami wyników samych pomiarów. Różnice te są czasem bardzo znaczne, zależnie od rodzaju pomiarów, dochodzą one — podobnie jak wyżej wspomniane — także do 100%.

Na podstawie tak zdobytego materiału statystycznego budujemy formuły empiryczne, które są — jak wspomniano — formułami wyłącznie interpolacyjnymi, a celem ich jest ułatwienie technikowi orientacji, szczególnie tam, gdzie zbadanie sprawy pomiarem byłoby zupełnie niemożliwe w danej chwili, albo zbyt kosztowne. Wartości otrzymane temi formułami są wartościami obliczeniowymi, a dokładność ich jest wówczas wystarczającą, jeżeli różnice między nimi a wartościami otrzymanymi z pomiaru nie przekraczają wartości błędów samego pomiaru.

Wzorami takimi posługujemy się w inżynierji lądowej i wodnej, budowie maszyn i elektrotechnice, wreszcie w naukach pomocniczych i granicznych.

II.

Wyrazem każdego wzoru empirycznego jest funkcja matematyczna a jej obrazem w układzie płaskim lub przestrzennym (bo tylko o takich układach będzie w przyszłości mowa) krzywa lub powierzchnia względnie zbiór krzywych lub powierzchni (oczywista rzecz, że krzywe w układzie przestrzennym mogą być płaskie lub przestrzenne a powierzchnie prosto lub krzywokreślne). Jeżeli wyniki spostrzeżeń z powodu niedostatecznej ilości i wielkiej dyspersji lub jakiegokolwiek innego powodu, nie dadzą się ująć w kształt funkcji matematycznej, wówczas ułożenie jakiegokolwiek formuły jest niemożliwym.

Funkcja matematyczna może być nieciągłą lub ciągłą, w drugim przypadku może być ciągłą albo w całym przebiegu lub też w pewnym n. p. badanym interwale wreszcie może przebiegać bez zakłóceń lub posiadać punkty osobliwe, punkty istotnie osobliwe lub inne zakłócenia. Również trzeba sobie zdać dokładnie

sprawę czy się ma do czynienia z funkcją prostą czy też uwikłaną.

Ponieważ celowo ułożony wzór empiryczny musi być jasny i jaknajprostszy, przeto przyjmuje się — przy jego układaniu — funkcje jaknajprostsze i w miarę możliwości elementarne.

A) Funkcje o obrazach jednowymiarowych.

Do tych funkcyj należą funkcje algebraiczne wymierne całkowite i ułamkowe, następnie funkcje wykładnicze i logarytmiczne. Przyjmowanie innych funkcji — dla omawianego celu jak np. funkcji geometrycznych, cyklometrycznych, hiperbolicznych i hiperbolometrycznych względnie ich odwróceń może być również matematycznie poprawnem, lecz mniej wskazanem ze względu na trudniejsze operowanie niemi w praktyce inżynierskiej, oraz na ich trudniejsze badanie matematyczne.

1. *Funkcja algebraiczna wymierna, całkowita n-tego stopnia kształtu:*

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

jest całkowalną, a jej całka:

$$\int f(x) dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \frac{a_2}{n-1} x^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + C$$

jest funkcją algebraiczną wymierną całkowitą (n+1)-go stopnia, a zatem funkcje algebraiczne wymierne, całkowite są zawsze całkowalne a ich funkcje pierwotne są również funkcjami wymiernymi, całkowitemi, stopnia o jeden wyższego.

2. *Funkcja algebraiczna wymierna ułamkowa, przedstawiająca się w postaci ilorazu dwóch funkcji wymiernych całkowitych.*

$$y = f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n} = \frac{\varphi_m(x)}{\varphi_n(x)}$$

może być albo niewłaściwą, gdy $m \geq n$, albo właściwą, gdy $m < n$. W pierwszym przypadku otrzymujemy całkę z funkcji wymiernej całkowitej, oraz całkę funkcji ułamka właściwego, mianowicie:

$$\int f(x) dx = \int \varphi(x) dx + \int \frac{\varphi_{n-1}(x)}{\varphi_n(x)} dx, \quad 1c$$

a w drugim ogólnie:

$$\int \frac{A dx}{(ax+b)^r}, \dots \dots \dots 1d$$

przyczem należy także dopuścić spółczynniki urojone przy oparciu się na twierdzeniu, że wszelka funkcja całkowita n-tego stopnia da się rozłożyć na wyrazy stopnia pierwszego względnie ich potęgę. W odniesieniu do funkcji ułamkowej otrzymamy zatem dwa rodzaje ułamków prostych dla $r =$ liczbie całkowitej, kształtu:

$$\frac{A}{x-a} \text{ oraz } \frac{A}{(x-a)^r} \text{ względnie } \frac{A_1}{ax+b} \text{ oraz } \frac{A_r}{(ax+b)^r}, \quad 1e$$

z czego wynika, że funkcje algebraiczne, wymierne, ułamkowe są zawsze całkowne a ich całki składają się z funkcji algebraicznych wymiernych i z funkcji logarytmicznych.

3. *Funkcje wykładnicze* należy tylko wówczas używać przy układaniu wzorów empirycznych, gdy dana całka z funkcji złożonej z funkcji wykładniczych, da się zapomocą odpowiednich podstawień, sprowadzić do całki funkcji algebraicznej wymiernej, nowej zmiennej, czy też zapomocą częściowego całkowania można ją sprowadzić ostatecznie do całek znanych n. p. całka :

$$\int f(e^{ax}) dx \dots \dots \dots 2a$$

da się zapomocą podstawienia :

$$e^{ax} = z$$

sprowadzić do kształtu :

$$\int f(e^{ax}) dx = \frac{1}{a} \int \frac{f(z)}{z} dz \dots \dots \dots 2b$$

funkcji algebraicznej wymiernej, lub w przypadku drugim mając całkę kształtu :

$$\int f(x) e^{ax} dx, \dots \dots \dots 2c$$

w której $f(x)$ jest funkcją całkowitą wymierną o pochodnych $f'(x), f''(x) \dots$, wówczas stosując całkowanie częściowe otrzymujemy redukcje :

$$\left. \begin{aligned} \int f(x) \cdot e^{ax} dx &= \frac{1}{a} f(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int f'(x) e^{ax} dx, \\ \int f'(x) e^{ax} dx &= \frac{1}{a} f''(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int f''(x) e^{ax} dx, \\ \dots \dots \dots \\ \int f^{(n-1)}(x) e^{ax} dx &= \frac{1}{a} f^{(n)}(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int f^{(n)}(x) e^{ax} dx, \end{aligned} \right\} 2d$$

a więc temsamem sprowadzamy naszą całkę do całek znanych.

4. *Funkcje logarytmiczne* należy wówczas stosować, gdy ich całki dadzą się sprowadzić do logarytmu całkowego :

$$Li(x) = \int \frac{dx}{\log x}, \dots \dots \dots 3a$$

lub do całek funkcji algebraicznych wymiernych.

W pierwszym przypadku są to funkcje typu :

$$y = (\log x)^n \text{ i } y = f(x, \log x) \dots \dots \dots 3b$$

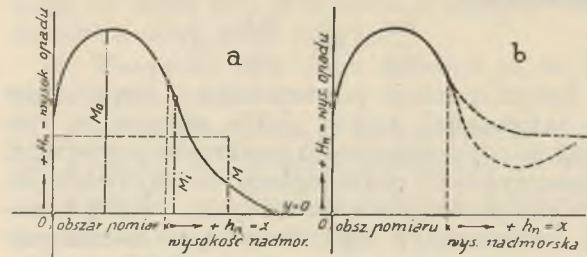
a w drugim :

$$y = f(x) \cdot \log x, \text{ oraz } y = f(x) \cdot \log \varphi(x). \dots \dots \dots 3c$$

Zaznacza się tu, że logarytm całkowity $Li(x)$ jest funkcją przestępną, nie dającą się wyrazić przez znane funkcje.

Przy badaniu obranej funkcji należy zwrócić baczną uwagę na jej przebieg. Zdarzyć się bowiem może, że pomimo zgodnego z wynikami pomiarów jej przebiegu w badanym interwale, występują poza nim odchyłki, które dochodzą często do nonsensów i wykazują tem samem niewłaściwość obranego kształtu. N. p. krzywa objętości rocznego opadu w zależności od wysokości nadmorskiej dla pewnego obszaru powierzchni ziemi (ryc. 1 a i b), nie może poza interwałem pomiaru wykazywać tendencji rosnących lub stałych wartości rzędnych (ryc. 1 b), lecz jej rzędne muszą maleć aż do wartości ze-

rowej (ryc. 1 a). Oczywiście rzecz, że wartość odciętej dla zerowej wartości rzędnej możemy w tym przypadku wyznaczyć tylko metodą dedukcji, ponieważ o jakimkolwiek pomiarze z powodu trudności technicznych, niema tu mowy.



Ryc. 1.

Może się również zdarzyć, że związek matematyczny dwóch zmiennych opisujący pewne zjawisko przyrodnicze, na podstawie dedukcji powinien być monotoniczny t. zn. powinien zawierać wartości rzędnych dodatnich tylko rosnących od zera do ∞ w sposób ciągły w zależności od rosnących wartości odciętych, przyczem obszary pomiarów w okolicy zerowej i pewnej granicznej wartości odciętej, nie są dostępne, czyli interwał doświadczeń — zresztą jak zwykle — jest tu ściśle ograniczony.

W takim przypadku należy skrupulatnie badać obraną funkcję nie tylko w interwale doświadczeń, ale i poza nim. Może się bowiem zdarzyć, że pomimo właściwego przebiegu funkcji w obszarze doświadczeń, funkcja ta poza tym obszarem, może wykazać przebieg zakłócony względnie niewłaściwy t. j. punkty osobliwe, brak ciągłości, maxima i minima niezgodne z właściwym przebiegiem zjawiska w badanym interwale i t. p. niespodzianki, które wskazują na niewłaściwość obranego kształtu funkcji.

W podręcznikach inżynierskich spotyka się takie niewłaściwe wzory empiryczne, które tylko w pewnych szczególnych granicach dają dobre wyniki i są pożytecznymi; zastosowane jednak bezkrytycznie wprowadzają w błąd rachującego niemi i stają się niebezpieczne, szczególnie tam, gdzie służą za podstawę do obliczeń projektów.

B) Funkcje o obrazach dwuwymiarowych.

Określenie kształtów tych funkcji przy stosowaniu ich do wzorów empirycznych natrafia na znaczne trudności, ponieważ nie mamy możliwości — zapomocą matematyki — ich kształtu wyraźnie i jednoznacznie określić.

Tylko w szczegółowym przypadku, jeżeli we funkcji :

$$f(x, y) = 0 \dots \dots \dots 4a$$

zachodzi związek :

$$y = \varphi(x) \text{ oraz } x = \psi(y)$$

rozwiązanie tego zagadnienia nie natrafia na większe trudności.

Inaczej przedstawi się rozwiązanie funkcji dwu zmiennych niezależnych kształtu :

$$z = f(x, y), \dots \dots \dots 4b$$

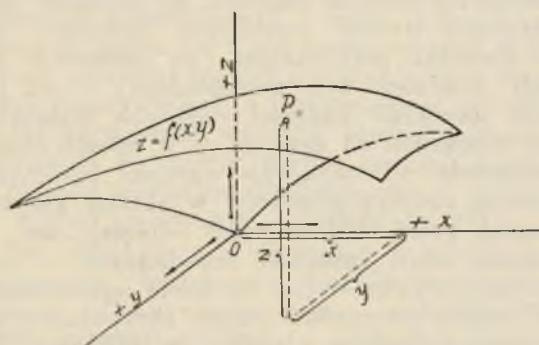
której obraz przedstawia powierzchnię (ryc. 2).

Kształt tej powierzchni łatwo zbadać zapomocą przekrojów otrzymanych płaszczyznami współrzędnymi, jakoteż płaszczyznami do nich równoległymi.

Następnie należy zbadać wartości pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = m \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = n$$

w danym punkcie powierzchni $z = f(x, y)$, które są tangensami kątów, jakie styczne w tym punkcie poprowadzone do przekrojów powierzchni (płaszczyznami równoległymi do obydwóch pionowych płaszczyzn współrzędnych), tworzą z osiami poziomymi x i y . Badanie to ma na celu orientację co do rosnących względnie malejących wartości rzędnych powierzchni $z = f(x, y)$, w dowolnie obranym na niej punkcie.



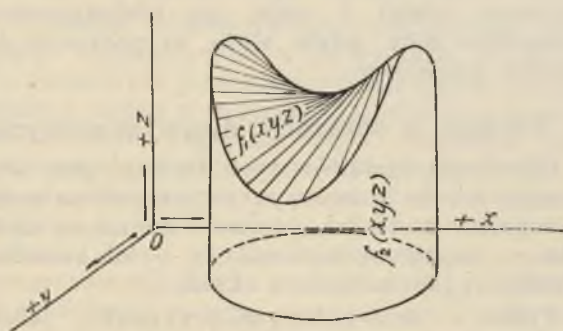
Ryc. 2.

Przy dokładniejszym rachunku można również zbadać płaszczyznę styczną w danym punkcie powierzchni, oraz kąty nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzn rzędnych, wreszcie przebieg krzywizn tej powierzchni, jej ciągłość i ewentualnie, gdy to potrzebne, jej monotonię.

Sprawa komplikuje się, jeżeli wzór empiryczny powstaje z dwóch równań funkcji uwikłanych ogólnego kształtu:

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad . \quad 4c$$

określających pewną krzywą przestrzenną jako przekrój dwóch powierzchni (ryc. 3).



Ryc. 3.

Zapomocą tych dwóch równań możemy przeprowadzić szereg innych powierzchni przez tę krzywą przestrzenną przechodzących, ponieważ każda funkcja kształtu:

$$f_1(x, y, z) + \lambda f_2(x, y, z) = 0, \quad . \quad 4d$$

gdzie λ jest dowolnym współczynnikiem, przedstawia powierzchnię przechodzącą przez krzywą

przestrzenną określoną równaniem 4d, a tem samem szczegółowy kształt szukanych funkcji empirycznych nie da się jednoznacznie określić.

Równanie 4d możemy zastąpić — przy pomocy dowolnego parametru λ , dwoma innymi funkcjami kształtu:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y) &= 0 \\ F_2(x, z) &= 0 \end{aligned} \right\} 4e$$

przedstawiające dwie powierzchnie walcowe prostopadłe do odpowiednich płaszczyzn współrzędnych XOY i XOZ .

Równania 4e wyraźniej otrzymają kształt:

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x), \quad 4f$$

a funkcje te można również zastąpić trzema funkcjami o dowolnym parametrze u , mianowicie:

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u). \quad . \quad 4g$$

Widzimy więc, że sprawa zastosowania takiego związku matematycznego do oznaczania kształtu funkcji empirycznych natrafia tu — z powodu zupełnej dowolności w przyjęciu współczynnika λ — na niepokonane dotychczas trudności matematyczne. Przez krzywą przestrzenną możemy bowiem nieskończenie wiele powierzchni prostokreślnych przesunąć, z których każda przedstawia obraz funkcji trzech zmiennych, przeto takie zagadnienie jest matematycznie nierozwiązalne w sensie jednoznacznego określenia kształtu funkcji trzech zmiennych.

Jednak w praktyce inżynierskiej spotyka się wzory empiryczne i budowlane ułożone z funkcji wyżej opisanych i podobnych typów, których szczegółowy kształt jest rozmaity n. p.

$$\begin{aligned} z &= \alpha \cdot f_1(x) \cdot f_2(y) \\ z &= \alpha \cdot \frac{f_1(x)}{f_2(y)} \\ z &= \alpha \cdot f_1(x) \cdot y^{f_2(y)} \\ z &= \alpha \cdot f_1(y)^{f_2(x)} \end{aligned}$$

i t. p. Jednoznaczne określenie kształtu poszczególnych takich funkcji nie da się ściśle drogą matematyczną przeprowadzić a to z powodu — jak wyżej wykazano — nieokreślonej ilości warunków, których może być nieskończenie wiele.

Celem rozwiązania tego zawilego zagadnienia radzimy sobie w rozmaity sposób. Oczywiście rzecz, że sposoby te nie mogą mieć pretensji do ścisłości, a wyniki niemi otrzymane należy przyjmować z pewną rezerwą jako wartości mniej lub więcej prawdopodobne t. j. mniej lub więcej zbliżone do rzeczywistości.

Jeden z tych sposobów polega na tem, że w dowolnej surowej funkcji statycznej $z = f(x, y)$ przyjmujemy jej dokładniejszy kształt zupełnie dowolnie n. p. $z = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot \alpha$, gdzie $\alpha =$ stałej. Następnie przyjmujemy wartość cyfrową jednej z funkcji składowych n. p. $f_2(y) = R$ na podstawie wyników pomiarowych i szukamy wartości i kształtu drugiej funkcji składowej $f_1(x)$ wówczas:

$$z = \alpha f_1(x) \cdot R,$$

$$\text{z czego:} \quad f_1(x) = \frac{z}{\alpha R} 5)$$

pod warunkiem, że wartości z, x i y dadzą się pomierzyć, przyczem y jest zupełnie niezależne

od x . Końcowy wynik t. j. obliczona wartość z może tu być nawet zupełnie zgodną z wynikiem pomiarowym lub spostrzeżeniowym, natomiast nie otrzymamy dokładnego obrazu współdziałania obydwóch czynników składowych na wartość z a to z powodu zupełnie swobodnego przyjęcia kształtu funkcji z , jakoteż wartości jednej z funkcji składowych.

Wzór taki może jednak w praktyce oddać dobre usługi, lecz tylko wówczas, jeżeli obliczona nim wartość z zgodną jest z wynikami pomiarowymi a znajomość wpływu wartości składowych x i y na wynik z , nie jest nam potrzebną.

Jeżeli nam chodzi także o wpływ, jaki poszczególne składowe x i y wywierają na wynik z obliczony wzorem empirycznym, wówczas stosujemy drugą metodę (podaną przez autora) nieco dokładniejszą, polegającą na tem, że wyniki spostrzeżeń układamy grupami dla różnych wartości jednego z czynników, a stałych wartości drugiego (n. p. przy pomiarze średniej prędkości wody w łożyskach przyrodzonych, która jest zależną od dwóch czynników od siebie niezależnych t. j. od spadu zwierciadła wody i od głębokości średniej przekroju, układamy grupy wyników uzyskanych z pomiarów dla różnych wartości spadów i stałych wartości głębokości średniej względnie dla stałych wartości spadów i różnych wartości głębokości średnich), tworząc k grup o n równaniach, z których przy obranym kształcie funkcji czynnika zmiennego możemy wartość jej obliczyć. Zatem mając układ równań, tworzymy:

$$\left. \begin{array}{l} z_{a_1} = f(x_{a_1}, C_1) \\ z_{b_1} = f(x_{b_1}, C_1) \\ \dots \\ z_{n_1} = f(x_{n_1}, C_1) \end{array} \right\} \text{grupę 1-szą}$$

$$\left. \begin{array}{l} z_{a_2} = f(x_{a_2}, C_2) \\ z_{b_2} = f(x_{b_2}, C_2) \\ \dots \\ z_{n_2} = f(x_{n_2}, C_2) \end{array} \right\} \text{grupę 2-gą} \quad \dots \quad 6$$

$$\left. \begin{array}{l} z_{a_k} = f(x_{a_k}, C_k) \\ z_{b_k} = f(x_{b_k}, C_k) \\ \dots \\ z_{n_k} = f(x_{n_k}, C_k) \end{array} \right\} \text{grupę } k \text{ tą}$$

oraz obieramy i badamy szczegółowy kształt funkcji $z = f(x, C)$

według równań 1 lub 2, które rozwiązujemy w myśl wskazówek podanych w ustępie A.

Mając — tym sposobem — określony kształt i wartość jednej z funkcji (w powyższym przypadku funkcji x) z równania 4c można łatwo znaleźć kształt i wartość drugiej według metody podanej pod 1). Oczywiście rzecz, że podane powyżej rozwiązania matematyczne funkcji dwu zmiennych niezależnych nie są ściśle a tylko przybliżone.

Rozwiązań ścisłych — tego rodzaju zagadnień — nie udało się dotychczas przeprowadzić.

C) Funkcje trzech zmiennych

w postaci:

$$u = f(x, y, z) \text{ lub } u = F[f_1(x), f_2(y), f_3(z)] \quad 7$$

trzeba w pierwszym rzędzie zbadać co do wzajemnej zależności poszczególnych zmiennych, mogą tu zajść trzy przypadki, z których trzeba dokładnie zdać sobie sprawę.

1. Wszystkie trzy ilości zmienne są od siebie zależne t. zn.:

$$\begin{array}{l} y = \varphi(x) \text{ oraz } z = \psi_0(x, y) = \psi_0[x, \varphi(x)] = \psi(x) \\ \text{lub } y = \varphi(z) \quad \text{„} \quad x = \psi_0(z, y) = \psi_0[z, \varphi(z)] = \psi(z) \\ \quad \quad \quad \text{„} \quad x = \varphi(y) \quad \quad z = \psi_0(x, y) = \psi_0[y, \varphi(y)] = \psi(y) \end{array}$$

a podstawivszy te wartości we funkcjach zasadniczych (7) otrzymamy:

$$\left. \begin{array}{l} u = F[f_1(x), \varphi(x), \psi(x)] \text{ czyli } u = f(x) \\ \text{lub przy innych wyrażeniach } u = f(y) \\ \text{oraz } u = f(z) \end{array} \right\} \quad 8$$

a zagadnienie to redukuje się do badania funkcji jednej zmiennej niezależnej.

2. Jedna ze zmiennych jest zależną od a) jednej lub b) obydwóch pozostałych zmiennych niezależnych.

a) Jeżeli $y = \varphi(x)$, $x = \varphi(z)$ lub $z = \varphi(y)$, to $u = F_a[f_1(x), f_2[\varphi(x)], f_3(z)]$; jeżeli uczynimy

$$g_0\{f_1(x), f_2[\varphi(x)]\} = g(x),$$

to: $u = F_a[g(x), f_3(z)] \quad \dots \quad 9$

otrzymamy funkcję dwóch zmiennych niezależnych, podobnie w przypadku:

b), jeżeli n. p. $f_2(y) = f_2[\psi_1(x), \psi_2(z)]$, ponieważ $y = \psi(x, z)$, wówczas funkcja zasadnicza przyjmie kształt:

$$u = F_b[f_1(x), \psi_1(x), f_3(z), \psi_2(z)],$$

a położywszy:

$$g_1[f_1(x), \psi_1(x)] = g_1(x)$$

oraz $g_2[f_3(z), \psi_2(z)] = g_2(z)$

otrzymamy znów funkcję dwóch zmiennych niezależnych:

$$u = F_b[g_1(x), g_2(z)], \quad \dots \quad 10$$

którą badamy sposobem podanym w ustępie B.

3. W przypadku, jeżeli we funkcji $u = f(x, y, z)$ wszystkie trzy zmienne są od siebie niezależne, to wówczas zagadnienie to rozwiązać się — w zastosowaniu do wzorów empirycznych — żadnymi sposobami nie da, ponieważ zawiera ∞^3 ilość rozwiązań.

D) Wykresy.

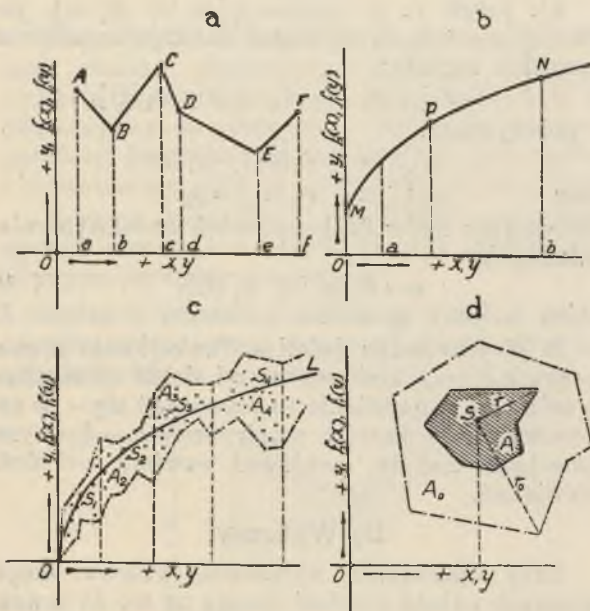
Przy omawianiu układania wzorów empirycznych należy zwrócić uwagę na to, że w naukach inżynierskich spotyka się często nawet bardzo zawile wzory analityczne dla rozwiązywania zagadnień, które można prędzej, łatwiej a nawet często dokładniej rozwiązać wykresem geometrycznym. Należy zatem po zbadaniu analitycznym, dane zagadnienie zbadać wykreślnie przy pomocy geometrii płaskiej, przestrzennej, wielowymiarowej lub syntetycznej i jeżeli się okaże, że wyniki otrzymane wykresem są wystarczająco dokładne, łatwiejsze do przeprowadzenia i wymagają mniejszego wysiłku, natenczas należy — te sposoby wykreślnie — wprowadzić do podręczników w miejsce analitycznych wzorów empirycznych i budowlanych.

Szczególnie geometria syntetyczna nadaje się do takich rozwiązań (np. w statyce budowli i teorii mostów, budowlach ziemnych i t. p.). Omawia ona cechy stosunku pojedynczego i podwójnego podziału, oraz perspektywiczność i jednokreślność zbiorów elementów jednorodnych, wreszcie związki harmoniczne, inwolucyjne i kolineacyjne występujące tak często w przyrodzie.

Pozatem analityczne wzory empiryczne należy tak układać, aby je łatwo można było rozwiązywać sposobami elementarnymi lub nomogramami lub wreszcie podziałkami logarytmicznymi.

III.

Jeżeli w układzie płaskim prostokątnym, (dla funkcji pojedynczej $y=f(x)$) obierzemy osie y i x , a dla funkcji trzech zmiennych, złożonej z dwóch funkcji pojedynczych osie y i $f_1(y)$ oraz x i $f_2(x)$, naniesimy wyniki spostrzeżeń, to możemy otrzymać albo a) linię łamaną matematycznie jednym wyrazem niewyraźną, lub b) krzywą ciągłą, wreszcie c) i d) powierzchnie płaskie utworzone ze zbioru punktów, przy czym powierzchnia taka będzie c) posiadać kształt podłużny, t. zn. że jeden z wymiarów będzie dominował, albo d) kształt jej będzie zbliżony do kołowego, t. zn. wymiary jego we wszystkich kierunkach będą co do wielkości do siebie zbliżone (ryc. 4 a, b, c i d).



Ryc. 4.

Dla poszczególnych przypadków otrzymamy:

- a) wzór n -członowy względnie n wzorów t. j. dla każdego odcinka i jego interwału osobno;
- b) funkcję ciągłą $f(x)=y$, która będzie wtedy odpowiednią, jeżeli każdy jej punkt P będzie się pokrywał z odpowiednim punktem krzywej powstałej z połączenia punktów naniesionych spostrzeżeń w badanym interwale $a-b$;
- c) powierzchnię A , którą zastępujemy osią ciężkości L przechodzącą przez środki ciężkości

poszczególnych dowolnie obranych pasków powierzchni $A=A_1+A_2=A_3+\dots+A_n$, przy czym poszczególne punkty t. j. środki ciężkości obranych pasków, S_1, S_2, \dots, S_n wyznaczamy analitycznie z uwzględnieniem układu naniesionych wyników spostrzeżeń;

d) powierzchnię A , którą możemy zastąpić jej środkiem ciężkości S , jeżeli wartość cyfrowa odległości r najdalej odległego punktu leżącego na jej obwodzie od środka ciężkości S nie jest większą od błędów pomiaru t. zn. od jednokierunkowej największej dyspersji funkcji statystycznej.

Dokładność ułożonej formuły empirycznej możemy sprawdzić różnymi metodami, które podamy poniżej, przy czym badając funkcje o obrazach dwuwymiarowych będziemy nazywali wyniki spostrzeżeń literą y , a wyniki obliczeń formułą empiryczną literą y_0 , analogicznie przy funkcjach uwikłanych x, y, z i u względnie x_0, y_0, z_0 i u_0 .

A) Badanie przy pomocy różnic.

Jeżeli nazwiemy różnicę między wartością pomierzoną (spozrzedzoną) a obliczoną wzorem empirycznym, przez Δ , to:

$$y_0 - y = \Delta \text{ lub } u_0 - u = \Delta$$

a średni błąd przy n spostrzeżeniach i obliczeniach, wykonanych temi samymi metodami będzie wówczas równy:

$$\sqrt{\frac{\sum[\Delta^2]}{n}}$$

czyli błąd jednostkowy w procentach $(100 \Delta : y)\%$, a dla n spostrzeżeń (obliczeń) otrzymamy błąd:

$$\frac{\sum \left[\frac{100 \Delta}{y} \right]}{n} \% \dots \dots \dots 11$$

wreszcie po uporządkowaniu według znaków otrzymamy:

$$\sum(+\Delta) - \sum(-\Delta) < \sigma\%, \dots \dots 12$$

gdzie $\sigma\%$ leży w granicy błędu popełnionego przy spostrzeżeniach.

To samo możemy zastosować do wyników funkcji złożonej:

$$z = F[f_1(x), f_2(y)],$$

wówczas pojedynczy błąd dla n spostrzeżeń będzie dla wyniku:

$$\frac{\sum \left[\frac{100 \Delta}{z} \right]}{n} \%$$

a przy dostępnym pomiarze jednego lub obydwóch czynników, dla poszczególnych czynników

$$\frac{\sum \left[\frac{100 \Delta_x}{f_1(x)} \right]}{n} \% \text{ oraz } \frac{\sum \left[\frac{100 \Delta_y}{f_2(y)} \right]}{n} \%$$

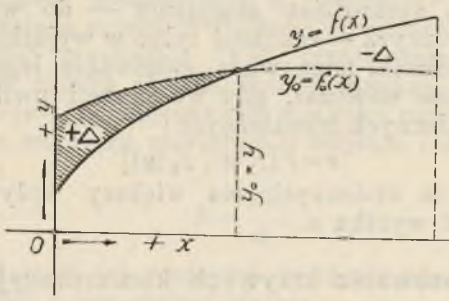
przy czym:

$$\Delta_x = f_1(x) - f_1(x) \text{ a } \Delta_y = f_2(y) - f_2(y) \dots 13$$

Metoda ¹⁾ ta nie jest jednak sprawdzianem dokładnym. Może się bowiem zdarzyć, że dla

¹⁾ Metodę tę opracował Blomquist, tytułu pracy oraz wydania nie pamiętam i nie zdołałem jej odszukać w bibliotekach.

pewnej wartości $y=y_0$ otrzymamy $\Delta=0$, zaś dla wszystkich innych wartości $y < y_n$ różnice tylko dodatnie lub ujemne, a dla wartości $y > y_n$ również różnice jednokierunkowe o znaku



Ryc. 5.

przeciwnym, aniżeli wykazują różnice w interwale, w którym $y < y_n$, wówczas różnica $\Sigma(+\Delta) - \Sigma(-\Delta)$ może być bardzo małą lub nawet równą zeru, pomimo niewłaściwie ułożonego wzoru empirycznego (ryc. 5).

Sprawdzeniu tego można zatem wówczas użyć, jeżeli tak ujemne jak i dodatnie różnice Δ są równomiernie rozłożone na całym obszarze sporządzeń.

B) Badanie przy pomocy szeregów Taylora²⁾.

Jeżeli wartości liczebne pochodnych $f'(x), f''(x) \dots f^{(n)}(x)$ uzyskanych z istniejącego związku funkcyjnego $y=f(x)$ zgadzają się z odpowiadającymi im wartościami pochodnych $\varphi'(x), \varphi''(x) \dots \varphi^{(n)}(x)$ ustalonej formuły empirycznej $y=\varphi(x)$, to ta ostatnia jest odpowiednio ułożoną.

W rozważaniach tej metody można użyć szeregu Lagrange'a lub Taylora. K. Weigel przyjmuje wzór Taylora kształtu:

$$f(x_k) = f(x_i) + \frac{x_k - x_i}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_k - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots + \frac{(x_k - x_i)^n}{n!} f^{(n)}(x_i) \{x_i + \Theta_{i,k}(x_k - x_i)\}, \quad 14$$

przy czym: $0 < \Theta_{i,k} < 1$
 a n jest liczbą parzystą, i tworzy n związków kształtu:

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) - f(x_i) &= (x_1 - x_i) f'(x_i) + \frac{(x_1 - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots \\ &+ \frac{(x_1 - x_i)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_i) \{x_i + \Theta_{i,1}(x_1 - x_i)\} \\ &\dots \\ f(x_{n+1}) - f(x_i) &= (x_{n+1} - x_i) f'(x_i) + \\ &+ \frac{(x_{n+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots \\ &\dots + \frac{(x_{n+1} - x_i)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_i) \{x_i + \Theta_{i,n+1}(x_{n+1} - x_i)\}, \end{aligned} \right\} 15$$

przy czym najkorzystniej będzie, gdy $i = \frac{n}{2} + 1$

Celem korzystania z powyższych związków zakłada autor pewne uproszczenia, mianowicie:

1. podstawia: $f^{(n-1)}(x_i) \{x_i + \Theta(x_k - x_i)\} = f^{(n-2)}(x_i) + (x_k - x_i) \Theta f^{(n)}(x_i)$, oraz

2. przyjmuje poszczególne funkcje Θ równe sobie, co nie wpłynie praktycznie na wyniki liczebne kilku początkowych pochodnych (rzędu pierwszego, drugiego, ewentualnie trzeciego) pod założeniem, że funkcje $f(x)$ są dostatecznie proste, ponieważ ich zgodność wystarczy zupełnie do sprawdzenia formuły.

Wyniknie stąd n związków kształtu:

$$f(x_k) - f(x_i) = (x_k - x_i) f'(x_i) + \frac{(x_k - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots + \frac{(x_k - x_i)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_i) + \frac{(x_k - x_i)^n}{(n-1)!} \Theta f^{(n)}(x_i), \quad 16$$

po rozwiązaniu których możemy obliczyć poszczególne Θ przy rozwinięciu szeregów o jeden człon mniej, na podstawie n następujących związków:

$$f(x_k) - f(x_i) = (x_k - x_i) f'(x_i) + \frac{(x_k - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \dots + \frac{(x_k - x_i)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}(x_i) + \frac{(x_k - x_i)^{n-1}}{(n-1)!} \Theta_{i,k}^{(n-1)} f^{(n-1)}(x_i) \quad 17$$

uzyskując poszczególne:

$$\Theta_{i,k}^{(n-1)}, \text{ a więc } \Theta_{i,1}^{(n-1)}, \Theta_{i,2}^{(n-1)}, \dots, \Theta_{i,n+1}^{(n-1)}$$

Gdyby wartość liczebna niektórych funkcji Θ przekroczyła granice podane w założeniu t. j. gdyby te wartości wypadły ujemne lub większe od jedności, to: a) badana funkcja nie jest rozwijalną w szereg Taylora, albo b) wprowadzie jest rozwijalną, lecz wartości pochodnych odbiegają zbyt od ich wartości rzeczywistych, w konsekwencji czego poszczególne Θ są również błędne.

Następnie podaje autor w cytowanej pracy sposób kontroli rachunku, przykład liczbowy, zastosowanie tej metody do funkcji ilukolwiek zmiennych $f(x, y, z, \dots) = u$, oraz sposób zastosowania tej metody przy dyspersji wartości prawdziwego związku funkcyjnego $f(x) = y$ z zastosowaniem równań błędów, na czym K. Weigel pracę swą ukończył.

Metoda ta podana w powyższym rozwinięciu nadaje się do porównania dwóch formuł empirycznych, mianowicie ta z nich będzie lepszą, której wartości pierwszych pochodnych (wyrażeń szeregu Taylora) będą bliżej leżały rzeczywistości. Natomiast prawdziwy związek funkcyjny jest nam na razie nieznanym i musimy go wyznaczyć.

W tym celu stosujemy całkę nieokreśloną danej funkcji w postaci szeregu potęgowego, przy czym zadanie rachunku całkowego będzie polegało na wyznaczeniu niewiadomej funkcji $f(x)$, której pochodną $f'(x)$ jest dana funkcja $\varphi(x)$ (wzór empiryczny).

Znając pochodną:

$$f'(x) = \varphi(x)$$

²⁾ Metodę tę podał K. Weigel „Badanie formuł empirycznych przy pomocy szeregów Taylora“. Wydawnictwo Akademii Nauk Technicznych. Zeszyt 6, r. 1928.

niewiadomej funkcji $f(x)$, wyznaczamy pochodne rzędów wyższych $f''(x)$, $f'''(x)$... $f^{(n)}(x)$ tej niewiadomej funkcji $f(x)$, otrzymując:

$$f''(x) = y'' = \varphi'(x),$$

$$f'''(x) = y''' = \varphi''(x) \dots f^{(n)}(x) = y^{(n)} = \varphi^{(n-1)}(x).$$

Na tej podstawie możemy wyznaczyć pochodne w dowolnym miejscu $x=a$ i przedstawić wartość niewiadomej funkcji $f(x)$, w postaci szeregu uporządkowanego według potęg dwumianu $(x-a)$, jeżeliby wartość $f(a)$ była nam znana. Ponieważ jej jednak nie znamy przyjmujemy jej wielkość równą dowolnej stałej C a wówczas otrzymamy według szeregu Taylora

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots \dots \dots 18$$

niewiadomą funkcję $f(x)$ w kształcie:

$$f(x) = C + \frac{\varphi(a)}{1!} (x-a) + \frac{\varphi'(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

$$+ \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

a ponieważ $f(x) = \int \varphi(x) dx$, przeto:

$$f(x) = \int \varphi(x) dx = C + \frac{\varphi(a)}{1!} (x-a) +$$

$$+ \frac{\varphi'(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

a więc zapomocą danej funkcji, w omawianym przypadku wzoru empirycznego $\varphi(x)$, możemy znaleźć prawdziwy związek funkcyjny $f(x)$, jako jej całkę nieokreśloną przedstawioną szeregiem potęgowym w przypadku, jeżeli istnieje takie miejsce $x=a$, w którym dana funkcja $\varphi(x)$ oraz jej wszystkie pochodne mają wartości skończone, czyli okazuje się, że *sprawdzian podany przez K. Weigla można również wówczas zastosować, gdy prawdziwy związek funkcyjny czyli surowa funkcja statystyczna jest nam nieznaną.*

Należy tu również wspomnieć o rozwinięciu funkcji w szereg Lagrange'a szczególnie w przypadku rozwinięcia funkcji uwikłanej ze względu na jedną z jej zmiennych niezależnych, co w zastosowaniu do wzorów empirycznych rzadziej się zdarza.

Dla pewnej funkcji n. p.:

$$z = y + x \varphi(z),$$

w której $\varphi(z)$ jest jakąkolwiek funkcją zmiennej z , stosujemy ogólny szereg Lagrange'a:

$$f(z) = f(y) + x \varphi(y) f'(y) + \frac{x^2}{2!} \frac{d}{dy} [\{\varphi(y)\}^2 f'(y)] + \dots$$

$$+ \dots + \frac{x}{n!} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} [\{\varphi(y)\}^n f'(y)] + \dots \dots \dots 19$$

w czem $f(y) = u_0$ a $f'(y) = \left(\frac{du}{dy}\right)_0$, gdzie $u = f(z)$ jest pewną funkcją z przyjętą w trakcie rozwijania zagadnienia.

Oczywista rzecz, że jeżeli ta funkcja pomocnicza $f(z)$ sprowadza się do z , to wówczas $f(y) = y$ a $f'(y) = 1$, a ogólny szereg zamienia się w szczególny szereg Lagrange'a kształtu:

$$z = y + x \varphi(z) + \frac{x^2}{2} \frac{d[\varphi(y)^2]}{dy} + \frac{x^3}{3!} \frac{d^2[\varphi(y)^3]}{dy^2} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{x^n}{n} \frac{d^{n-1}[\varphi(y)^n]}{dy^{n-1}} + \dots \dots \dots 20$$

Ten sprawdzian stosujemy — do wzorów empirycznych — rzadko i tylko w wyjątkowych przypadkach, mianowicie, stosowanie jego jest wskazane wówczas, gdy we funkcji uwikłanej dwuzmiennych niezależnych:

$$z = F[f_1(x), f_2(y)]$$

jedna ze zmiennych ma większy wpływ na wartość wyniku z .

C) Stosowanie krzywych koncentracyjnych.

W technicznej literaturze polskiej zwrócił uwagę A. Rundo³⁾ na pewną nową metodę porównawczą w matematyce statystycznej, która pojawiła się w ostatnich dziesiątkach lat w światowej literaturze nauk statystycznych — mianowicie na krzywe koncentracyjne — opis których podajemy w skróceniu z obowiązku sprawozdawczego.

„Jeżeli danej funkcji matematycznej nadamy pewną formę wtórną, bardziej skupioną, podkreślającą w jej obrazie pewne jej cechy charakterystyczne* — to przez porównanie dwóch otrzymanych obrazów (np. jeden ze surowej funkcji statystycznej a drugi z funkcji wyrównanej (empirycznego wzoru) lub dwóch różniących się funkcji wyrównanych) — możemy zbadać dokładność ułożenia tych formuł wyrównanych.

Spółrzędne krzywej koncentracyjnej $y_k = r(x_k)$ wyznaczamy z danej funkcji $y = f(x)$, następująco:

W prostokątnym płaskim układzie osiowym przyjmujemy odcięte krzywej koncentracyjnej, równające się odciętym danej funkcji $f(x)$ i wyznaczamy rzędne szukanej krzywej koncentracyjnej, które będą się równały tylu jednostkom długości, ile jednostek powierzchni zawiera w sobie powierzchnia płaska, ograniczona osiami spółrzędnymi (prostokątnymi), odcinkiem krzywej $y = f(x)$ oraz rzędną tej krzywej y , odpowiadającej przyjętej odciętej $x = x_k$, czyli że

$$x_k = x$$

$$y_k = \int_0^{a=x} f(x) dx,$$

pod założeniem, że funkcja f jest stale dodatnią, czyli $f(x) > 0$, wówczas bowiem $\int_0^x f dx$ jest funkcją rosnącą.

Celem skupienia, wyżej podanym sposobem otrzymanych spółrzędnych, wyrażamy je, nie w wartościach bezwzględnych tylko liczbą procentową w stosunku do największych wartości obydwóch spółrzędnych otrzymując tem samym układ, będący kwadratem o boku = 100% wartości x i y , którego przekątne są nachylone do

³⁾ A. Rundo: „O wartościach charakterystycznych wodostanu i przepływu rzek“. Prace meteorologiczne i hydrograficzne. Zeszyt II. Warszawa 1926

*) Definicja ta podana przez A. Rundo'a nie jest jasną i ścisłą.

obydwóch osi spólrzędnych, pod kątem $\pi/4$ a krzywe koncentracyjne są zwrócone stroną wklęsłą do przekątnej przechodzącej przez ośrodek układu O (ryc. 6).

Stopień koncentracji K mierzymy liczbą, wyrażającą stosunek wielkości powierzchni ograniczonej przekątnią OM , przechodzącą przez środek układu O oraz skoncentrowaną krzywą $y_k = r(x_k)$ t. j. stosunkiem wielkości powierzchni A_r do wielkości powierzchni trójkąta $OMN = A$, czyli:

$$K = \frac{A_r}{A} \quad . \quad . \quad . \quad 21$$

Wartość tej wielkości waha się od zera do jedności i jest stale dodatnią:

$$0 \leq \frac{A_r}{A} \leq 1.$$

Przy absolutnej koncentracji $K=1$ otrzymujemy krzywą koncentracyjną przekształconą w dwie proste prostopadłe do siebie, które są bokami ON i MN kwadratu koncentracji. Przy braku koncentracji $K=0$ otrzymujemy krzywą koncentracyjną przekształconą w przekątnię OM przechodzącą przez środek układu spólrzędnych. Ten przypadek nazwano *przypadkiem rozdziału absolutnie równomiernego*.

Zamiast stopnia koncentracji można stosować *stopień stałości* otrzymany równaniem:

$$S = 1 - K = 1 - \frac{A_r}{A} \quad . \quad . \quad . \quad 22$$

Przy absolutnej koncentracji otrzymamy tu stopień stałości $S=0$, a w przypadku rozdziału absolutnie równomiernego $S=1$.

Według A. Rundo'a zostały krzywe koncentracyjne wprowadzone do metodyki statystycznej przez statystyków amerykańskich, a przyjęte przez ekonomistów francuskich Chatelain'a i Séailles'a. Szczegóły odnoszące się do obliczenia stosunku koncentracji podał C. Gini⁴⁾ a do badań hydrologicznych zastosował tę metodę Giulio de Marchi⁵⁾.

Krzywych koncentracyjnych można użyć do poglądowo porównawczego przedstawienia charakteru pewnego regimu w przyrodzie przez porównanie dwóch lub więcej układów przyrodzonych lub technicznych n. p. stosunku odpływu do opadu dwóch rzek lub stosunki urodzaji gleb pola przyrodzonego i zmeljorowanego i t. p.

W matematyce statystycznej używa się krzywych koncentracyjnych także jako sprawdzianu dokładności wzorów empirycznych przez porównanie surowej funkcji statystycznej $f(x)$ z wyrównaną funkcją $\varphi(x)$ t. j. wzorem empirycznym lub też porównując dwa wzory empiryczne między sobą.

W tym celu tworzymy stosunek stopni koncentracji względnie stałości przyjmując jedną

surową funkcję statystyczną $f(x)$ i jej odpowiadającą krzywą koncentracyjną $y_k = r(x)$ oraz drugą krzywą wyrównaną $\varphi(x)$ i jej krzywą koncentracyjną $y_k = \varphi(x)$, mianowicie:

$$\kappa = \frac{K_r}{K_\varphi} = \frac{A_r}{A_\varphi} = \text{miarę koncentracji} \quad . \quad . \quad 23$$

$$\sigma = \frac{S_r}{S_\varphi} = \frac{A - A_r}{A - A_\varphi} = \text{miarę stałości} \quad . \quad . \quad 24$$

Oczywista rzecz, że funkcja wyrównana $\varphi(x)$ będzie pozornie tem dokładniej dobraną t. j. zbliżoną do prawdziwego związku funkcyjnego $f(x)$, w danym (badanym) interwale, im bardziej wartości κ wzgl. σ będą się zbliżały do jedności. Tego sprawdzianu można użyć tylko wówczas, gdy wielkości rzędnych porównywanych funkcji nie są względem siebie proporcjonalne. W przypadku proporcjonalności rzędnych, może się zdarzyć, że $\kappa = \sigma = 1$, pomimo różniących się między sobą wartości funkcji.

Taki negatywny przykład podano poniżej w tabelach I i II, przyjmując prawdziwy związek funkcyjny $f(x) = \sqrt[3]{4x}$ oraz wzór $\varphi(x) = \sqrt{x}$.

Tabela I.

$f(x) = \sqrt[3]{4x}$		$y_k = r(x_k)$		%		A_r	Uwaga
x	y	x_k	y_k	x_k	y_k	jednostek powierzchni	
0.1	0.2739	0.1	0.01826	10	3.163	0.003419	Ponieważ $y=f(x)$ jest parabola 2-go stopnia, przeto $y_x = \int_{a-x}^x f(x) dx = \frac{2}{3}xy$
0.2	0.3873	0.2	0.05164	20	8.944	0.008947	
0.3	0.4743	0.3	0.09486	30	16.431	0.012313	
0.4	0.5477	0.4	0.14605	40	25.298	0.014136	
0.5	0.6124	0.5	0.20413	50	35.357	0.014673	
0.6	0.6708	0.6	0.26832	60	46.478	0.014088	
0.7	0.7246	0.7	0.33815	70	58.571	0.012476	
0.8	0.7746	0.8	0.41312	80	71.556	0.009937	
0.9	0.8216	0.9	0.49296	90	85.386	0.006529	
1.0	0.8660	1.0	0.57733	100	100.000	0.002307	
$\Sigma A_r = 0.098820$							

Tabela II.

$\varphi(x) = \sqrt{x}$		$y_k = \varphi(x_k)$		%		A_φ	Uwaga
x	y	x_k	y_k	x_k	y_k	jednostek powierzchni	
0.1	0.3162	0.1	0.02108	10	3.162	0.003419	Jeżeli zbadamy jakkolwiek inny interwał danych funkcji otrzymamy wyniki te same.
0.2	0.4472	0.2	0.05963	20	8.944	0.008947	
0.3	0.5477	0.3	0.10954	30	16.431	0.012313	
0.4	0.6325	0.4	0.16867	40	25.300	0.014135	
0.5	0.7071	0.5	0.23570	50	35.354	0.014673	
0.6	0.7746	0.6	0.30984	60	46.476	0.014085	
0.7	0.8367	0.7	0.39046	70	58.569	0.012478	
0.8	0.8944	0.8	0.47701	80	71.551	0.009940	
0.9	0.9487	0.9	0.56922	90	85.388	0.006533	
1.0	1.0000	1.0	0.66667	100	100.000	0.002308	
$\Sigma A_\varphi = 0.096831$							

⁴⁾ C. Gini: „Sulla misura della concentrazione et della variabilita dei caratteri“. Venezia 1914.

⁵⁾ Giulio de Marchi: „Preliminare esame comparative delle condizioni idrologiche della varie regioni italiane“ Servizio Idrografico-Memoire et studi idrografici. Vol. III. Roma 1924.

Powyższy przykład — z powodu proporcjonalności rzędnych przyjętych funkcji, których wartości różnią się między sobą — daje wynik martwy, ponieważ:

$$K_r = A_r : A = 0.09882 : 0.5 = 0.19764$$

$$K_e = A_e : A = 0.098831 : 0.5 = 0.197662$$

$$\kappa = K_r : K_e = 0.99989,$$

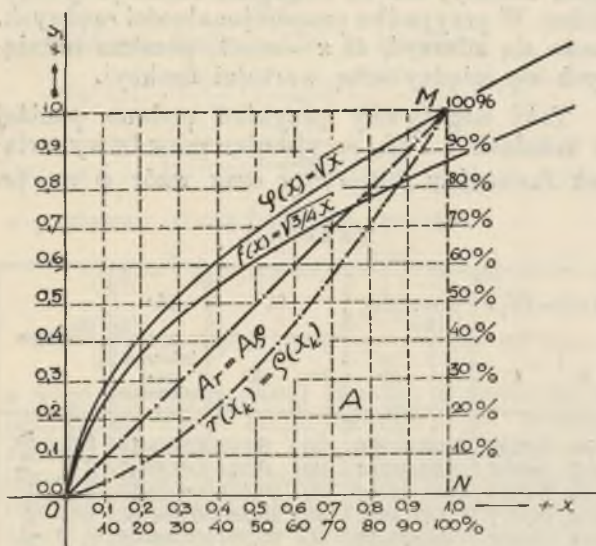
oraz:

$$S_r = 1 - K_r = 1 - 0.19764 = 0.80236$$

$$S_e = 1 - K_e = 1 - 0.19766 = 0.80234$$

$$\sigma = S_r : S_e = 1.000027,$$

przyczem zauważa się, że minimalne odchyłki od jedności wartości κ i σ powstały wskutek zaokrągleń podczas rachunku. Przy użyciu metody krzywych koncentracyjnych, czy to jako sprawdzianu dla wzorów empirycznych, czy w celu porównania układów przyrodzonych wzgl. technicznych opisanych matematycznie, należy zatem dokładnie zbadać ich ustrój a szczególnie stosunek ich rzędnych względem siebie.



Ryc. 6.

Konkretny przykład zastosowania krzywych koncentracyjnych, przy braku znajomości surowej funkcji statystycznej a danej funkcji wyrównanej podano przy końcu niniejszej pracy (tabela VIII, ryc. 9).

Ustalenie wartości granicznej dla κ i σ — przy użyciu tej metody do sprawdzenia wzorów empirycznych — nie da się łatwo przeprowadzić. Wartość ta zależy bowiem nie tylko od stopnia dokładności wymaganego od badanego wzoru empirycznego, lecz także od jego kształtu oraz od kształtu danej funkcji statystycznej. Jeżeli bowiem obie te funkcje przedstawimy w kształcie równań pierwszego stopnia (prostych) to oczywista rzecz, omawiane wartości κ i σ wystąpią w granicach szerszych, aniżeli przy badaniu funkcji nieprzekształconych.

D) Metoda korelatów.

Stosowanie korelatów (metody współzależności) jest naogół niełatwe, a metoda ta mało popularną i znaną, dlatego też — pomimo, że można ją znaleźć w podręcznikach teorii statystyki, oraz w niektórych pracach naukowych z dziedziny badania przyrody i technicznych — podam ją sposobem elementarnym.

Teoria współzależności powstała na podstawie pewnych określonych twierdzeń dotyczących formy rozdziału liczebności t. zw. rozdziału normalnego. Bravais⁶⁾ wprowadził sumę iloczynów, lecz nie dał definicji współzależności. F. Galton⁷⁾ podał graficzną metodę tego współzależności nazwaną pierwotnie funkcją Galtona. Edgeworth⁸⁾ rozwinął stronę teoretyczną, a Pearson⁹⁾ wprowadził wzór dla sumy iloczynów i podał teorię korelatów, wreszcie Yule¹⁰⁾ opracował podręcznik dla statystyki matematycznej.

W polskim języku istnieje kilka podręczników statystyki¹¹⁻¹⁶⁾ i dwa tłumaczenia podręczników obcych¹⁷⁻¹⁸⁾, w których teoria współzależności podana jest albo bałamutnie albo niewystarczająco z wyjątkiem podręcznika J. Czekanowskiego¹²⁾, w którym omawiana teoria podana została wyczerpująco, oraz ścisłego opracowania statystyki dwóch i więcej zmiennych i teorii korelacji przez A. Łomnickiego¹⁹⁾, wreszcie Yule'go „Wstęp do teorii statystyki“ tłumaczony przez Z. Limanowskiego¹⁸⁾.

Nim przystąpimy do opisu właściwego zagadnienia, należy podać określenia niektórych wartości używanych w statystyce, mianowicie:

1. Średnia arytmetyczna M , jest ilorazem ze sumy wartości spostrzeżonych zjawisk lub cech (w przyszłości będzie mowa tylko o zjawiskach, ponieważ chodzi tu o zastosowanie metody współzależności do wzorów empirycznych) dowolnego szeregu liczbowego X , przez ilość spostrzeżeń N i wyraża się wzorem:

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i. \quad \dots \quad 25$$

⁶⁾ A. Bravais: „Analyse mathématique sur les probabilités de situation d'un point“. Acad. des Sciences. T. IX. Paryż 1846.

⁷⁾ Fr. Galton: „Regression towards Mediocrity in Hereditary Stature“. Jour. Anthropol. Inst. T. XV. 1886.

Fr. Galton: „Family Likeness in Stature“. Proc. Royl. Soc. T. XL. 1886.

Fr. Galton: „Correlations and their Measurement“. Proc. Royl. Soc. T. XLV. 1888.

⁸⁾ F. Y. Edgeworth: „On Correlated Averages“. Phil. Mag. Tom. XXXIV. r. 1892.

⁹⁾ K. Pearson: „Regression Heredity and Pamixia“. Phil. Trans. Royl. Soc. T. CLXXXVII. r. 1896.

¹⁰⁾ G. U. Yule: „On the Theory of Correlation“. Proc. Royl. Soc. Tom. LX. 1897.

¹¹⁾ Danielewicz-Dickstein: „Zarys arytmetyki politycznej“. Warszawa 1910.

¹²⁾ J. Czekanowski: „Zarys metod statystycznych“, Warszawa, 1913.

¹³⁾ Grabowski: „Podręcznik Statystyki“, Warszawa, 1917.

¹⁴⁾ Horowicz: „Wstęp do statystyki teoretycznej“. Warszawa, 1917.

¹⁵⁾ K. Maciejewski: „Podręcznik statystyki. Teoria statystyki“. Warszawa, 1925.

¹⁶⁾ L. Wańciszkowski: „Teoria metody statystycznej“. Lublin 1930.

¹⁷⁾ Bleicher: „Statystyka“ tłum. S. Szulc. Warszawa, 1919.

¹⁸⁾ G. U. Yule: „Wstęp do teorii statystyki“ tłum. Z. Limanowski. Warszawa, 1921.

¹⁹⁾ A. Łomnicki: „Zagadnienia statystyki matematycznej“. Kosmos, Tom LIII i LV, Lwów, 1928 i 1930.

2. Średnia geometryczna G szeregu wartości $X_1, X_2 \dots X_n$ określa związek:

$$G = (X_1 X_2 \dots X_n)^{\frac{1}{n}} \dots \dots \dots 26$$

3. Średnia harmoniczna H szeregu wartości jest odwrotnością odwrotnej wartości sumy spostrzeżeń i wyraża się wzorem:

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{X_i}\right)} \dots \dots \dots 27$$

4. Odchylenie przeciętne v służy w statystyce do ujmowania stopnia ześrodkowania (koncentracji) liczb około ich średniej arytmetycznej i wyraża się wzorem:

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i), \dots \dots \dots 28$$

wreszcie

5. Odchylenie średnie σ jest odchyleniem od średniej arytmetycznej szeregu spostrzeżeń i wyraża się pierwiastkiem kwadratowym ze średniej arytmetycznej wszystkich odchyleń:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2)}, \text{ a z tego } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i^2)}{n} \dots \dots \dots 29$$

Jeżeli przyjmiemy jakąkolwiek funkcję dwóch zmiennych:

$$X_1 = F[X_2, X_3]$$

to może się zdarzyć, że: 1. zmienna X_2 jest zupełnie niezależną od zmiennej X_3 lub 2. zmienna X_2 jest w pewnym stopniu zależną od zmiennej X_3 np. szeregowi wartości zmiennej X_2 odpowiada szereg wartości X_3 w pewnych określonych granicach, mianowicie:

$$\text{od } X_{3n} - \delta \text{ do } X_{3n} + \delta.$$

W przypadku drugim istnieje współzależność między zmiennymi X_2 i X_3 . Np. objętość średniego rocznego odpływu w łożyskach przyrodzonych zależy od: 1. wielkości dorzecza, 2. jego rzeźby, 3. jego ustroju geologicznego, 4. opadu, 5. wysokości nadmorskiej i 6. roślinności. Mamy zatem sześć zmiennych, między którymi wysokość opadu, wysokość nadmorska, rzeźba terenu i roślinność są w pewnym stopniu współzależne, pozostają zatem zupełnie niezależne od siebie dwie zmienne t. j. wielkość dorzecza i ustrój jego podłoża.

Zagadnienie rachunku korelacyjnego sprowadza się zatem do określenia funkcji dającej możliwość najdokładniejszego sądzenia na podstawie wielkości jednego zjawiska wyrażonego szeregiem liczb Y o wielkości drugiego zjawiska wyrażonego szeregiem X o tej samej liczebności.

Zastosowanie tego rachunku w omawianym przedmiocie jest podwójne, mianowicie: przy układaniu wzorów empirycznych i sprawdzaniu tych wzorów. W pierwszym przypadku wartość czynnika korelacyjnego może wahać w granicach dopuszczalnych od -1 do $+1$ a regresja wyrażać się w kształcie prostoliniowym lub krzywoliniowym, w drugim przypadku przy sprawdzaniu wzorów empirycznych, za-

gadnienie to ogranicza się do określenia wartości czynnika korelacyjnego, która musi być wysoką — leżąca zwykle w interwale $0.9-1.0$ i wyznaczenia regresji tylko prostoliniowej, przy czym przyjmujemy znakowanie następujące: szeregiem X będziemy oznaczali badane zjawisko a szeregiem Y skojarzone z nim wyniki wzoru empirycznego.

Jeżeli średnie arytmetyczne badanych szeregów X i Y nazwiemy przez M_x i M_y a odchylenia od tych średnich przez x i y , to równania ogólne prostych regresji obydwóch szeregów przedstawia się w postaci ogólnej (ryc. 7):

$$y = a_{12} + b_{12} x$$

$$x = a_{21} + b_{21} y,$$

przez co wartości współczynników a_{12}, a_{21}, b_{12} i b_{21} , oznaczają odchylenia obydwu zjawisk od ich średnich arytmetycznych.

Według teorii najmniejszych kwadratów będzie:

$$\sum_{i=1}^n (y_k - a_{12} - b_{12} x_k)^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_k^2) = \text{minimum} \quad 30$$

jeżeli $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\lambda_k^2) = 0$, gdzie t jest zmienną zależną od a_{12} i b_{12} .

Różniczkując równanie 30 otrzymamy:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \lambda_k^2 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (y_k - a_{12} - b_{12} x_k)^2 =$$

$$= - \sum_{i=1}^n \{y_k - (a_{12} + b_{12} x_k)\} \cdot \left(\frac{da_{12}}{dt} + x_k \frac{db_{12}}{dt} \right) = 0.$$

Warunek powyższy spełni się, jeżeli:

$$\sum_{i=1}^n \{y_k - (a_{12} + b_{12} x_k)\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \{y_k - (a_{12} + b_{12} x_k)\} x_k = 0,$$

a uwalniając od nawiasów otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^n y_k = \sum_{i=1}^n a_{12} + \sum_{i=1}^n (b_{12} x_k) = n a_{12} + b_{12} \sum_{i=1}^n x_k \quad 31$$

oraz:

$$\sum_{i=1}^n (x_k y_k) = \sum_{i=1}^n (a_{12} y_k) + \sum_{i=1}^n (b_{12} x_k^2) =$$

$$= a_{12} \sum_{i=1}^n y_k + b_{12} \sum_{i=1}^n x_k^2, \dots \dots \dots 32$$

a ponieważ:

$$\sum_{i=1}^n x_k = \sum_{i=1}^n y_k = 0,$$

przeto z równania 31 wynika, że $a_{12} = 0$, oraz analogicznie $a_{21} = 0$, czyli:

$$\sum_{i=1}^n (x_k y_k) = b_{12} \sum_{i=1}^n x_k^2,$$

oraz według równania 29-go:

$$\sum_{i=1}^n x_k^2 = n \cdot \sigma_x^2, \text{ i analogicznie } \sum_{i=1}^n y_k^2 = n \cdot \sigma_y^2,$$

przeto podstawiając te wartości otrzymujemy równania współczynników regresji:

$$\text{tg } a_{12} = b_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_k y_k)}{n \sigma_x^2} \text{ i } \text{tg } a_{21} = b_{21} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_k y_k)}{n \cdot \sigma_y^2} \quad 33$$

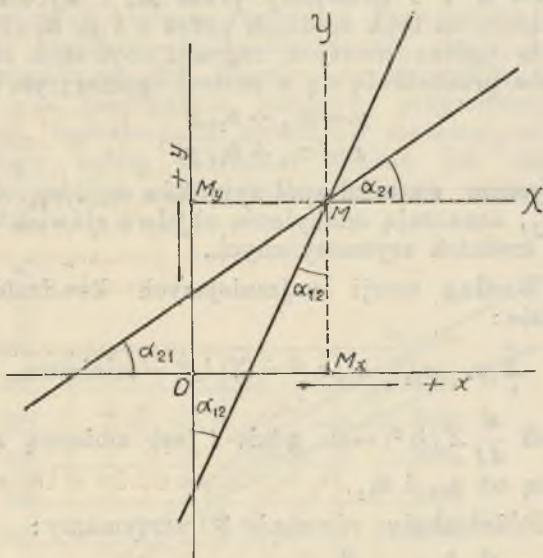
a wprowadzając t. zw. funkcję Galtona otrzymamy wartość czynnika korelacyjnego:

$$r = \frac{\sum (x_k y_k)}{n \cdot \sigma_x \sigma_y} \dots 33a$$

i wreszcie równania regresji prostolinijnej:

$$y = r_{12} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x \text{ i } x = r_{21} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y, \dots 34$$

w czem: $r = r_{12} = r_{21} = \sqrt{b_{12,21}} \dots 34a$



Ryc. 7.

W razie zupełnej identyczności obu prostych lub krzywych regresji czynnik korelacyjny $r = +1$, a gdy proste lub krzywe regresji są o przebiegu odwrotnym, to $r = -1$ i w tych granicach wahają się wartości czynnika r . Jeżeli $r = 0$, wtedy w układzie rozpatrywanym niema określonej korelacji, a więc ze zmian lub odchyłeń jednego elementu nie można sądzić o zmianach drugiego.

Gdy czynnik korelacyjny posiada pewną wartość np. 0,5, to wprawdzie istnieje wówczas pewna współzależność obydwóch szeregów, ale z charakteru zmian jednego z nich, można tylko z częściową dokładnością sądzić o zmianach drugiego. Ważną rolę odgrywają tu także odchylenia średnie:

$$s_x = \sigma_x \sqrt{1 - r^2}, \text{ oraz } s_y = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}, \dots 35$$

które można uważać za błędy średnie popełniane przy wyrażaniu jednej zmiennej drugą zapomocą równań regresji. Wielkość czynnika korelacyjnego wyrażonego błędem średnim będzie wówczas:

$$r = \sqrt{1 - \frac{s_x^2}{\sigma_x^2}} \text{ lub } r = \sqrt{1 - \frac{s_y^2}{\sigma_y^2}} \dots 36$$

Również ważnem jest twierdzenie, że suma iloczynów z kwadratów odległości średniej od prostych (wzgl. krzywych) regresji i liczby spostrzeżeń, jest wartością najmniejszą, mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^n (x_k - b_{12} y_k)^2 &= n \sigma_x^2 (1 - r^2) = \min. \\ \sum_1^n (x_k - b_{21} y_k)^2 &= n \sigma_y^2 (1 - r^2) = \min. \end{aligned} \right\} \dots 37$$

Bardziej ogólnie i dokładniej aniżeli czynnik współzależności charakteryzuje nam współzależność dwóch badanych elementów lub zjawisk t. zw. stosunek współzależnościowy.

Biorąc średnie arytmetyczne poszczególnych kolumn powierzchni korelacji możemy obliczyć kwadraty ich odchyłeń od średniej szeregu i mnożąc je przez liczebności tych kolumn określić ich średni kwadrat ze wzoru:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{N} \sum \{n_i (M_{y_i} - M_y)^2\}, \dots 38$$

w którym σ_M jest średnim kwadratem średnich arytmetycznych poszczególnych kolumn, n_i jest liczebnością kolumny i , M_{y_i} jest średnią arytmetyczną a N liczebnością szeregu.

Stosunek pierwiastka z tego średniego kwadratu σ_M do odchylenia średniego cechy σ_y :

$$\eta = \frac{\sigma_M}{\sigma_y} = \left[\frac{1}{N} \frac{\sum n_i (M_{y_i} - M_y)^2}{\sigma_y^2} \right]^{1/2} \dots 39$$

jest stosunkiem współzależnościowym, który przedstawia dokładniejszą miarę współzależności aniżeli r . Stosunek ten, nie jest bowiem warunkowany dowolnem zupełnie założeniem, że linja regresji jest prostą t. zn., że $r = \eta$, gdyż:

$$|\eta| > |r|,$$

przyczem można mówić o zupełnym związku dwóch zjawisk, nawet wówczas, gdy $\eta \neq \pm 1$.

W rozumowaniach powyższych zakłada się, że liczba n wyrazów spostrzeżeń jest dostatecznie wielką, tymczasem w przypadkach konkretnych nie zawsze to się zdarza. Ponieważ zaś w razie szczupłego szeregu wartości spostrzeżonych, nawet czynnik korelacyjny wartością swoją leżący blisko jedności n. p. 0,95, nie daje nam gwarancji co do istotnej współzależności obu rozpatrywanych zjawisk lub cech, więc wypada tu ustalić jeszcze wchodzący w grę błąd prawdopodobny, w przeciwnym bowiem razie możemy znaleźć korelację o charakterze przypadkowym lub też nie zauważyć względnie pominać korelację rzeczywistą.

Błąd prawdopodobny czynnika współzależności zjawisk wymierzalnych dla dowolnej dyspersji, daje się dokładnie obliczyć wzorem Pearson'a²⁰⁾:

$$E(r) = e_1 = 0,67449 \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}} \dots 40$$

ważnym dla współczynników współzależności całkowitej i cząstkowej, a zbudowanym na podstawie uporządkowanych odchyłeń x i y według reguły Gaussa. (Wartości cyfrowe tego błędu, jeszcze nie publikowane w języku polskim — obliczone przez autora — podano w tablicy III-ciej). W niektórych podręcznikach oraz pracach naukowych podano błędnie stałą wartość błędu równą $\frac{2}{3}$ zamiast 0,67449, na co należy zwrócić uwagę.

Błąd prawdopodobny przybliżonej wartości czynnika korelacyjnego, obliczonej na podsta-

²⁰⁾ K. Pearson: „On the Probable Errors of Frequency Constants and the Influence of Random Selection on Variation and Correlation“. Phil. Trans. Royl. Soc. Londyn 1898. Tom CXCI.

wie liczb porządkowych uszeregowanych według wielkości, dwu zjawisk otrzymujemy ze wzoru Pearson'a ²¹⁾:

$$E(r) = e_2 = 0.70633 \frac{1-r^2}{(1-\frac{1}{2}r^2)^{1/2} \cdot \sqrt{n}} \quad . \quad 41$$

(Wartości cyfrowe tego błędu — również jeszcze nie publikowanych w polskiej literaturze, podano według obliczenia autora w tablicy IV-tej).

Przy regresji parabolicznej otrzymujemy wzór prawdopodobnego błędu stosunku współzależnościowego według Pearson'a ²⁰⁾, mianowicie:

$$E(\eta) = f = 0.67449 \frac{1-\eta^2}{\sqrt{n}}, \quad . \quad 42$$

który kształtem swym nie różni się od wzoru 40.

Wielkość powyższych błędów prawdopodobnych, można znaleźć bezpośrednio w graficznej tablicy Heron'a ²²⁾.

Celem uniknięcia zawilych rachunków w razie otrzymania związku korelacji krzywoliniowej, przekształcamy ją na prostoliniową, co zawsze uczynić możemy przy użyciu rachunku korelacyjnego do badania wzorów empirycznych.

Jeżeli zatem mamy związek dwóch zmiennych, którego obrazem jest krzywa płaska, to możemy go w pewnych przypadkach przekształcić tak, aby jego obraz zamienił się na prostą. N. p. krzywą:

$$X \cdot Y = A + B X,$$

zamienimy na prostą dzieląc przez X i kładąc $1/X = Z$, wówczas:

$$Y = A \cdot Z + B.$$

Podobnie krzywą:

$$Y = A B^X$$

przekształcamy na prostą zapomocą logarytmów:

$$\log Y = \log A + X \log B.$$

Ogólnie, krzywą:

$$Y = A + B \cdot F(X)$$

przekształcamy na prostą, podstawiając $F(X) = Z$, wówczas:

$$Y = A + B Z.$$

Jeżeli mamy więcej czynników współzależnych n. p.:

$$X_1 = F(X_2 \cdot X_3 \dots X_n),$$

natenczas zagadnienie się wikła, a ściśle określenie współzależności pojedynczych czynników od pozostałych jest matematycznie trudnem a często niemożliwem. Rozwiązujemy je w przybliżeniu zapomocą współzależności częściowej. Np. urodzaj zboża zależy od ilości opadów, temperatury powietrza, stopnia insolacji oraz jakości gleby. Z tych czterech czynników (stojących po prawej stronie równania) tylko dwa, t. j. temperatura powietrza i stopień insolacji są w pewnych granicach od siebie współzależne. W pozostałych czynnikach współzależności wykazać się nie da.

²¹⁾ K. Pearson: „On Further Methods of Determining Correlation“. Biometric Series 1907. T. IV.

²²⁾ D. Heron: „An Abac for Determining the Probable Errors of Correlation Coefficients“. Biometrika 1910. Tom VII.

W zagadnieniach tego typu rozszerzamy metodę stosowaną do dwu zmiennych, na poszczególne pary zmiennych, uważając zawsze pozostałe zmienne kolejno za stałe i wyznaczamy współczynniki regresji $b_{11}, b_{12}, \dots b_{1n}$, oraz $b_{21}, b_{22}, \dots b_{2n}$, a to między zmienną stojącą po lewej stronie równania X_1 a każdą ze zmiennych prawej strony równania $X_2, X_3, \dots X_n$ osobno, następnie czynimy to samo z poszczególnymi zmiennymi stojącymi po prawej stronie równania t. j. wyznaczamy współzależności między X_2 a X_3, X_2 a $X_4 \dots X_2$ a $X_n, \dots X_3$ a X_4, X_3 a $X_5 \dots X_3$ a X_n i t. d.

Znakowanie przyjmujemy tu, według teorii statystyki, zapomocą subskryptów głównych — oznaczających regresję zmiennej X_1 z każdą zmienną prawej strony równania n. p. $b_{12}, b_{13}, \dots b_{1n}$, oraz subskryptów następujących, oddzielonych od głównych, kropką lub przecinkiem — oznaczających regresję poszczególnych par czynników prawej strony równania — np. $b_{12, 345}, b_{13, 245}$ i t. d.

Przyjąwszy to znakowanie otrzymamy równanie regresji n elementów:

$$x_1 = b_{12, 345 \dots n} \cdot x_2 + b_{13, 245 \dots n} \cdot x_3 + \dots + b_{1n, 234 \dots (n-1)} \cdot x_n \quad . \quad 43$$

oraz równanie czynnika współzależności w kształcie ogólnym:

$$r_{12, 345 \dots n} = (b_{12, 345 \dots n} \cdot b_{21, 345 \dots n})^{1/2} \quad . \quad 44$$

Zależności $r_{12}, r_{13}, r_{14} \dots r_{1n}$ uważamy, w myśl poprzedniego za całkowite, w odróżnieniu od zależności częściowych $r_{34}, r_{35}, \dots r_{3n}, r_{45}, r_{46} \dots r_{4n}$ i t. d.

Szczegółowy kształt równania czynnika korelacyjnego dla n elementów będzie zatem następujący:

$$r_{12, 34 \dots n} = \frac{r_{12, 34 \dots (n-1)} - r_{1n, 34 \dots (n-1)} \cdot r_{2n, 34 \dots (n-1)}}{(1-r_{1n, 34 \dots (n-1)}^2)^{1/2} \cdot (1-r_{2n, 34 \dots (n-1)}^2)^{1/2}} \quad 45$$

Stosując ten wzór np. do trzech elementów otrzymujemy:

$$r_{12, 3} = \frac{r_{12} - r_{13} \cdot r_{23}}{(1-r_{13}^2)^{1/2} \cdot (1-r_{23}^2)^{1/2}}$$

oraz średnie odchylenia $\sigma_{1, 23}$, które dla kontroli możemy obliczyć dwa razy niezależnie od siebie, mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1, 23} &= \sigma_1 (1-r_{12}^2)^{1/2} \cdot (1-r_{13, 2}^2)^{1/2} \\ &= \sigma_1 (1-r_{13}^2)^{1/2} \cdot (1-r_{12, 3}^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad 46$$

podobnie jak każde inne odchylenie średnie. Mając wartości σ obliczamy regresję wzorem

$$b_{12, 3} = r_{12, 3} \cdot \frac{\sigma_{1, 23}}{\sigma_{2, 13}} \quad . \quad 47$$

Te zasady możemy stosować także dla większej ilości elementów, przyczem rachunek staje się już przy czterech elementach żmudnym, ponieważ wzór na σ rozszerza się w trójczłonowy mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1, 234} &= \sigma_1 (1-r_{12}^2)^{1/2} \cdot (1-r_{13, 4}^2)^{1/2} \cdot (1-r_{14, 23}^2)^{1/2} \\ \text{lub} &= \sigma_1 (1-r_{14}^2)^{1/2} \cdot (1-r_{13, 4}^2)^{1/2} \cdot (1-r_{12, 34}^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad 48$$

przyczem równanie regresji będzie:

$$b_{12, 34} = r_{12, 34} \cdot \frac{\sigma_{1, 234}}{\sigma_{2, 134}} \quad . \quad 49$$

Tabela III.

$$E(r) = 0,67449 \frac{1-r^3}{\sqrt{n}} = \text{blad prawdo-}$$

$r \rightarrow$ n	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	$\leftarrow r$ n
10	0,00425	0,00844	0,01261	0,01672	0,02079	0,02482	0,02881	0,03277	0,03667	0,04052	10
20	,00300	,00597	,00892	,01182	,01470	,01756	,02038	,02316	,02593	,02866	20
30	,00245	,00487	,00728	,00965	,01201	,01433	,01663	,01891	,02118	,02340	30
40	,00212	,00422	,00630	,00836	,01008	,01241	,01441	,01638	,01833	,02026	40
50	,00190	,00378	,00564	,00747	,00930	,01110	,01288	,01465	,01640	,01812	50
60	,00173	,00345	,00515	,00683	,00849	,01014	,01176	,01338	,01500	,01655	60
70	,00160	,00319	,00476	,00632	,00786	,00938	,01089	,01238	,01385	,01532	70
80	,00150	,00299	,00446	,00591	,00735	,00878	,01018	,01158	,01296	,01433	80
90	,00141	,00282	,00422	,00557	,00693	,00828	,00960	,01092	,01222	,01350	90
100	,00134	,00267	,00399	,00529	,00658	,00785	,00911	,01036	,01159	,01282	100
120	,00123	,00244	,00364	,00483	,00600	,00717	,00832	,00946	,01058	,01170	120
140	,00113	,00225	,00337	,00447	,00556	,00664	,00770	,00875	,00978	,01083	140
160	,00106	,00211	,00315	,00417	,00520	,00621	,00720	,00819	,00916	,01013	160
180	,00100	,00199	,00297	,00394	,00490	,00585	,00679	,00772	,00864	,00955	180
200	,00095	,00189	,00282	,00375	,00466	,00556	,00648	,00735	,00822	,00909	200
220	,00091	,00180	,00268	,00357	,00443	,00529	,00619	,00699	,00782	,00864	220
240	,00087	,00172	,00257	,00342	,00425	,00507	,00591	,00670	,00750	,00829	240
260	,00083	,00165	,00247	,00328	,00408	,00486	,00565	,00642	,00719	,00796	260
280	,00080	,00159	,00238	,00316	,00393	,00469	,00544	,00619	,00692	,00767	280
300	,00078	,00154	,00230	,00305	,00380	,00453	,00526	,00598	,00669	,00740	300
325	,00074	,00148	,00221	,00294	,00365	,00435	,00505	,00574	,00644	,00712	325
350	,00071	,00143	,00213	,00283	,00351	,00420	,00487	,00554	,00620	,00685	350
375	,00069	,00138	,00205	,00273	,00340	,00405	,00470	,00535	,00599	,00662	375
400	,00067	,00134	,00199	,00264	,00329	,00393	,00454	,00518	,00580	,00641	400
425	,00064	,00130	,00193	,00256	,00319	,00380	,00441	,00502	,00563	,00623	425
450	,00062	,00126	,00188	,00249	,00310	,00370	,00429	,00489	,00547	,00606	450
475	,00061	,00122	,00183	,00242	,00302	,00360	,00417	,00475	,00532	,00589	475
500	,00060	,00119	,00178	,00236	,00294	,00351	,00407	,00463	,00519	,00573	500
550	,00057	,00114	,00170	,00226	,00281	,00336	,00389	,00442	,00496	,00548	550
600	,00055	,00109	,00163	,00216	,00268	,00321	,00372	,00423	,00473	,00523	600
650	,00053	,00105	,00157	,00208	,00258	,00308	,00357	,00407	,00455	,00503	650
700	,00051	,00101	,00151	,00201	,00248	,00296	,00344	,00392	,00438	,00484	700
750	,00049	,00097	,00146	,00193	,00240	,00287	,00332	,00378	,00423	,00468	750
800	,00047	,00094	,00141	,00187	,00232	,00278	,00322	,00366	,00410	,00453	800
850	,00046	,00091	,00137	,00181	,00226	,00270	,00313	,00355	,00398	,00440	850
900	,00045	,00089	,00133	,00176	,00221	,00262	,00304	,00345	,00386	,00427	900
950	,00044	,00086	,00129	,00171	,00214	,00255	,00296	,00336	,00376	,00416	950
1000	,00043	,00084	,00126	,00167	,00208	,00248	,00288	,00328	,00367	,00405	1000
1100	,00041	,00080	,00120	,00160	,00199	,00237	,00274	,00313	,00351	,00387	1100
1200	,00039	,00077	,00115	,00153	,00190	,00227	,00263	,00299	,00335	,00370	1200
1300	,00037	,00074	,00111	,00146	,00183	,00218	,00251	,00287	,00322	,00355	1300
1400	,00036	,00071	,00107	,00141	,00176	,00210	,00243	,00277	,00310	,00342	1400
1500	,00035	,00069	,00103	,00136	,00170	,00203	,00234	,00267	,00299	,00333	1500
1600	,00034	,00067	,00100	,00132	,00165	,00197	,00227	,00259	,00289	,00325	1600
1700	,00033	,00065	,00097	,00126	,00159	,00190	,00220	,00251	,00280	,00313	1700
1800	,00032	,00063	,00094	,00121	,00155	,00185	,00215	,00244	,00273	,00303	1800
1900	,00031	,00061	,00091	,00119	,00151	,00179	,00209	,00238	,00261	,00295	1900
2000	,00030	,00060	,00089	,00118	,00147	,00176	,00204	,00232	,00259	,00287	2000
2200	,00029	,00057	,00086	,00113	,00140	,00167	,00194	,00221	,00247	,00274	2200
2400	,00027	,00054	,00082	,00108	,00134	,00160	,00186	,00211	,00236	,00262	2400
2600	,00026	,00052	,00078	,00103	,00128	,00154	,00179	,00203	,00227	,00251	2600
2800	,00025	,00050	,00075	,00100	,00123	,00148	,00172	,00195	,00219	,00242	2800
3000	,00025	,00049	,00073	,00097	,00120	,00143	,00166	,00189	,00212	,00234	3000
3500	,00023	,00045	,00067	,00091	,00109	,00133	,00154	,00176	,00196	,00216	3500
4000	,00021	,00042	,00063	,00084	,00100	,00124	,00144	,00164	,00183	,00203	4000
4500	,00020	,00040	,00059	,00079	,00096	,00117	,00136	,00155	,00173	,00191	4500
5000	,00019	,00038	,00056	,00075	,00093	,00111	,00129	,00147	,00164	,00181	5000
6000	,00017	,00034	,00052	,00068	,00085	,00101	,00118	,00134	,00150	,00166	6000
7000	,00016	,00032	,00048	,00063	,00079	,00094	,00109	,00124	,00139	,00153	7000
8000	,00015	,00030	,00045	,00059	,00074	,00088	,00102	,00116	,00130	,00143	8000
9000	,00014	,00028	,00042	,00056	,00069	,00083	,00096	,00109	,00122	,00135	9000
10000	,00013	,00027	,00040	,00053	,00066	,00079	,00091	,00104	,00116	,00128	10000

podobny czynnika współzależności.

$r \rightarrow$ n	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	$\leftarrow r$ n
10	0,04812	0,05554	0,06280	0,06988	0,07689	0,09328	0,10880	0,12316	0,13652	10
20	,03403	,03928	,04440	,04941	,05429	,06598	,07689	,08708	,09652	20
30	,02778	,03207	,03625	,04034	,04433	,05387	,06280	,07112	,07878	30
40	,02408	,02777	,03139	,03493	,03839	,04665	,05438	,06159	,06826	40
50	,02152	,02483	,02808	,03125	,03434	,04173	,04864	,05509	,06105	50
60	,01964	,02268	,02563	,02844	,03134	,03810	,04441	,05028	,05573	60
70	,01820	,02099	,02374	,02641	,02902	,03527	,04112	,04655	,05159	70
80	,01701	,01963	,02220	,02470	,02715	,03308	,03847	,04355	,04826	80
90	,01604	,01851	,02093	,02329	,02563	,03110	,03626	,04106	,04550	90
100	,01522	,01756	,01986	,02210	,02428	,02951	,03440	,03895	,04317	100
120	,01389	,01603	,01813	,02021	,02217	,02695	,03140	,03556	,03940	120
140	,01286	,01485	,01678	,01868	,02052	,02494	,02906	,03292	,03648	140
160	,01203	,01387	,01570	,01746	,01920	,02333	,02719	,03079	,03412	160
180	,01134	,01309	,01480	,01647	,01810	,02200	,02564	,02903	,03217	180
200	,01079	,01246	,01410	,01568	,01723	,02094	,02441	,02763	,03062	200
220	,01025	,01184	,01342	,01490	,01637	,01989	,02319	,02625	,02910	220
240	,00983	,01135	,01287	,01429	,01571	,01908	,02225	,02520	,02792	240
260	,00943	,01088	,01234	,01370	,01506	,01830	,02133	,02416	,02677	260
280	,00909	,01050	,01189	,01321	,01453	,01765	,02058	,02331	,02584	280
300	,00878	,01014	,01146	,01275	,01402	,01704	,01986	,02249	,02495	300
325	,00844	,00977	,01104	,01227	,01348	,01636	,01911	,02159	,02400	325
350	,00813	,00942	,01063	,01181	,01298	,01572	,01839	,02082	,02307	350
375	,00786	,00909	,01027	,01142	,01255	,01522	,01773	,02014	,02231	375
400	,00761	,00878	,00993	,01105	,01214	,01475	,01720	,01948	,02158	400
425	,00738	,00852	,00964	,01072	,01174	,01427	,01673	,01891	,02094	425
450	,00717	,00828	,00936	,01041	,01146	,01381	,01621	,01836	,02035	450
475	,00698	,00806	,00911	,01014	,01115	,01349	,01580	,01788	,01982	475
500	,00681	,00785	,00888	,00988	,01086	,01319	,01541	,01742	,01930	500
550	,00650	,00751	,00849	,00944	,01037	,01262	,01472	,01665	,01845	550
600	,00621	,00717	,00811	,00902	,00990	,01205	,01404	,01590	,01762	600
650	,00597	,00690	,00780	,00868	,00952	,01159	,01351	,01529	,01696	650
700	,00575	,00664	,00750	,00835	,00917	,01115	,01300	,01472	,01632	700
750	,00556	,00642	,00725	,00807	,00887	,01078	,01257	,01411	,01578	750
800	,00538	,00621	,00702	,00781	,00858	,01043	,01216	,01353	,01526	800
850	,00522	,00603	,00682	,00758	,00833	,01012	,01181	,01325	,01481	850
900	,00507	,00585	,00662	,00737	,00809	,00983	,01147	,01298	,01438	900
950	,00493	,00570	,00644	,00718	,00788	,00962	,01116	,01263	,01400	950
1000	,00481	,00555	,00628	,00700	,00769	,00933	,01088	,01232	,01365	1000
1100	,00459	,00530	,00600	,00668	,00734	,00891	,01039	,01177	,01305	1100
1200	,00439	,00507	,00573	,00638	,00701	,00852	,00993	,01125	,01247	1200
1300	,00422	,00488	,00551	,00618	,00673	,00818	,00954	,01082	,01200	1300
1400	,00407	,00471	,00531	,00591	,00649	,00786	,00919	,01041	,01154	1400
1500	,00396	,00454	,00513	,00571	,00627	,00761	,00889	,01007	,01115	1500
1600	,00385	,00439	,00497	,00553	,00607	,00738	,00860	,00974	,01079	1600
1700	,00371	,00426	,00481	,00536	,00589	,00715	,00834	,00945	,01047	1700
1800	,00359	,00414	,00468	,00521	,00572	,00695	,00811	,00918	,01018	1800
1900	,00349	,00403	,00455	,00507	,00557	,00677	,00789	,00894	,00991	1900
2000	,00340	,00393	,00444	,00494	,00543	,00660	,00769	,00871	,00965	2000
2200	,00324	,00374	,00423	,00471	,00518	,00629	,00734	,00831	,00921	2200
2400	,00310	,00358	,00405	,00451	,00496	,00603	,00702	,00795	,00882	2400
2600	,00298	,00344	,00389	,00433	,00476	,00579	,00674	,00764	,00846	2600
2800	,00287	,00332	,00375	,00417	,00459	,00558	,00640	,00737	,00816	2800
3000	,00278	,00321	,00363	,00403	,00443	,00539	,00628	,00711	,00788	3000
3500	,00257	,00296	,00336	,00373	,00411	,00500	,00582	,00659	,00729	3500
4000	,00241	,00278	,00314	,00349	,00384	,00467	,00544	,00616	,00683	4000
4500	,00227	,00262	,00296	,00330	,00362	,00440	,00513	,00582	,00644	4500
5000	,00215	,00248	,00280	,00313	,00343	,00417	,00486	,00551	,00611	5000
6000	,00196	,00227	,00256	,00284	,00313	,00381	,00444	,00503	,00557	6000
7000	,00182	,00210	,00237	,00264	,00290	,00353	,00411	,00466	,00516	7000
8000	,00170	,00196	,00222	,00247	,00272	,00331	,00385	,00436	,00483	8000
9000	,00160	,00185	,00209	,00233	,00256	,00311	,00363	,00411	,00455	9000
10000	,00152	,00176	,00199	,00221	,00243	,00295	,00344	,00389	,00432	10000

Tabela IV.

$$E(r) = 0,70633 \frac{1-r^2}{(1-\frac{1}{2}r^2)^{1/2} \sqrt{n}} = \text{błąd prawdopodobny czynnika korelacyjnego}$$

$r \rightarrow$ n	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	$\leftarrow r$ n
10	0,00467	0,00928	0,01388	0,01833	0,02210	0,02715	0,03112	0,03576	0,03998	0,04414	10
20	,00330	,00656	,00978	,01296	,01610	,01920	,02226	,02526	,02826	,03121	20
30	,00269	,00536	,00799	,01058	,01315	,01568	,01818	,02064	,02308	,02548	30
40	,00233	,00464	,00692	,00915	,01138	,01358	,01574	,01788	,01999	,02201	40
50	,00209	,00415	,00619	,00820	,01019	,01214	,01408	,01599	,01788	,01974	50
60	,00191	,00379	,00565	,00748	,00929	,01108	,01285	,01460	,01632	,01802	60
70	,00176	,00351	,00523	,00693	,00861	,01026	,01190	,01352	,01511	,01668	70
80	,00165	,00328	,00489	,00648	,00805	,00960	,01113	,01264	,01413	,01561	80
90	,00156	,00309	,00461	,00611	,00759	,00901	,01049	,01192	,01333	,01471	90
100	,00148	,00293	,00437	,00580	,00720	,00859	,00996	,01131	,01264	,01396	100
120	,00134	,00267	,00399	,00529	,00658	,00784	,00906	,01032	,01154	,01274	120
140	,00125	,00248	,00369	,00490	,00609	,00726	,00841	,00956	,01069	,01179	140
160	,08117	,00233	,00347	,00458	,00569	,00679	,00789	,00895	,01000	,01104	160
180	,00111	,00219	,00326	,00432	,00536	,00640	,00743	,00843	,00941	,01040	180
200	,00105	,00208	,00310	,00409	,00509	,00607	,00704	,00799	,00894	,00987	200
220	,00100	,00198	,00295	,00391	,00485	,00578	,00671	,00762	,00852	,00941	220
240	,00096	,00190	,00282	,00374	,00465	,00554	,00643	,00730	,00816	,00902	240
260	,00092	,00182	,00271	,00359	,00446	,00533	,00617	,00701	,00784	,00866	260
280	,00088	,00175	,00261	,00344	,00430	,00513	,00595	,00675	,00756	,00834	280
300	,00088	,00169	,00253	,00334	,00416	,00496	,00575	,00653	,00729	,00806	300
325	,00082	,00163	,00243	,00321	,00400	,00477	,00552	,00627	,00701	,00774	325
350	,00079	,00157	,00234	,00310	,00385	,00459	,00533	,00604	,00676	,00746	350
375	,00076	,00151	,00225	,00299	,00372	,00443	,00514	,00584	,00653	,00720	375
400	,00074	,00147	,00218	,00289	,00360	,00429	,00497	,00565	,00632	,00697	400
425	,00072	,00142	,00212	,00281	,00349	,00416	,00483	,00548	,00613	,00677	425
450	,00070	,00138	,00206	,00273	,00339	,00405	,00469	,00533	,00596	,00658	450
475	,00068	,00134	,00200	,00265	,00330	,00394	,00456	,00519	,00579	,00640	475
500	,00066	,00131	,00195	,00259	,00322	,00384	,00445	,00506	,00565	,00624	500
550	,00063	,00125	,00186	,00247	,00307	,00366	,00425	,00483	,00540	,00596	550
600	,00060	,00119	,00178	,00237	,00294	,00350	,00406	,00461	,00516	,00569	600
650	,00058	,00115	,00171	,00228	,00282	,00336	,00390	,00443	,00496	,00547	650
700	,00056	,00111	,00165	,00219	,00272	,00324	,00376	,00427	,00477	,00527	700
750	,00054	,00107	,00160	,00212	,00263	,00314	,00365	,00413	,00461	,00409	750
800	,00052	,00104	,00155	,00205	,00255	,00304	,00354	,00400	,00447	,00493	800
850	000,50	,00101	,00135	,00199	,00247	,00295	,00343	,00388	,00434	,00478	850
900	,00049	,00098	,00145	,00193	,00240	,00286	,00332	,00377	,00421	,00465	900
950	,00048	,00095	,00141	,00188	,00230	,00279	,00321	,00366	,00410	,00452	950
1000	000,47	,00093	,00138	,00183	,00221	,00272	,00311	,00358	,00400	,00441	1000
1100	,00045	,00089	,00132	,00174	,00214	,00259	,00299	,00341	,00382	,00421	1100
1200	,00043	,00085	,00126	,00167	,00208	,00248	,00287	,00326	,00365	,00403	1200
1300	,00041	,00081	,00121	,00161	,00200	,00238	,00276	,00313	,00351	,00387	1300
1400	,00040	,00078	00,117	,00156	,00193	,00229	,00266	,00302	,00338	,00373	1400
1500	,00038	,00075	,00113	,00150	,00186	,00222	,00257	,00292	,00326	,00360	1500
1600	,00037	,00073	,00109	,00145	,00180	,00215	,00249	,00283	,00316	,00349	1600
1700	,09036	,00071	,00106	,00140	,00174	,00208	,00241	,00274	,00306	,00338	1700
1800	,00035	,00069	,00103	,00136	,00169	,00202	,00235	,00266	,00298	,00329	1800
1900	,00034	,00067	,00100	,00133	,00165	,00197	,00229	,00259	,00290	,00320	1900
2000	,00033	,00066	,00098	,00130	,00161	,00192	,00223	,00253	,00283	,00312	2000
2200	,00032	,00063	,00093	,00123	,00153	,00183	,00212	,00241	,00269	,00298	2200
2400	,00030	,00060	,00089	,00118	,00146	,00175	,00203	,00231	,00259	,00285	2400
2600	,00029	,00058	,00086	,00113	,00141	,00168	,00195	,00222	,00248	,00274	2600
2800	,00028	,00056	,00082	,00109	,00136	,00162	,00188	,00213	,00239	,00264	2800
3000	,00027	,00054	,00079	,00106	,00132	,00157	,00182	,00206	,00231	,00255	3000
3500	,00025	,00050	,00074	,00098	,00122	,00146	,00168	,00192	,00214	,00237	3500
4000	,00023	,00046	,00069	,00092	,00114	,00136	,00157	,00179	,00200	,00220	4000
4500	,00022	,00044	,00065	,00087	,00107	,00128	,00148	,00169	,00189	,00208	4500
5000	,00021	,00042	,00062	,00082	,00102	,00121	,00141	,00160	,00179	,00197	5000
6000	,00019	,00038	,00057	,00075	,00093	,00111	,00129	,00146	,00163	,00180	6000
7000	,00018	,00035	,00052	,00069	,00086	,00103	,00119	,00135	,00151	00,167	7000
8000	,00017	,00033	,00049	,00065	,00081	,00096	,00111	,00126	,00141	,00156	8000
9000	,00016	,00031	,00046	,00061	,00076	,00090	,00105	,00119	,00133	,00147	9000
10000	,00015	,00029	,00044	,00058	,00072	,00086	,00100	,00113	,00126	,00140	10000

dla dwu szeregów liczb uporządkowanych według ich wielkości.

$r \rightarrow$ n	0,88	0,86	0,84	0,82	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	$\leftarrow r$ n
10	0,05231	0,06026	0,06799	0,07554	0,08288	0,10033	0,11654	0,13149	0,14526	10
20	,03700	,04261	,04809	,05341	,05859	,07096	,08243	,09302	,10274	20
30	,03019	,03479	,03925	,04361	,04802	,05791	,06728	,07593	,08303	30
40	,02615	,03013	,03400	,03776	,04142	,05016	,05827	,06576	,07263	40
50	,02339	,02695	,03011	,03378	,03705	,04485	,05212	,05882	,06496	50
60	,02135	,02461	,02776	,03084	,03383	,04096	,04758	,05369	,05930	60
70	,01977	,02278	,02570	,02855	,03131	,03791	,04405	,04971	,05491	70
80	,01849	,02131	,02404	,02671	,02929	,03547	,04121	,04650	,05136	80
90	,01743	,02009	,02267	,02529	,02762	,03344	,03885	,04383	,04842	90
100	,01654	,01905	,02150	,02388	,02620	,03171	,03683	,04157	,04593	100
120	,01510	,01740	,01964	,02181	,02392	0,2896	,03363	,03794	,04193	120
140	,01398	,01610	,01818	,02019	,02215	,02683	,03116	,03517	,03884	140
160	,01307	,01505	,01698	,01887	,02071	,02506	,02912	,03287	,03631	160
180	,01233	,01419	,01602	,01780	,01953	,02364	,02746	,03099	,03425	180
200	,01169	,01346	,01520	,01689	,01853	0,2244	,02606	,02941	,03248	200
220	,01115	,01284	,01449	,01610	,01767	,02140	,02486	,02805	,03098	220
240	,01069	,01230	,01394	,01541	,01692	,02050	,02383	,02689	,02968	240
260	,01026	,01182	,01334	,01481	,01625	,01967	,02286	,02580	,02848	260
280	,00989	,01140	,01286	,01428	,01562	,01893	,02205	,02485	,02739	280
300	,00954	,01100	,01241	,01379	,01512	,01832	,02127	,02394	,02634	300
325	,00922	,01057	,01193	,01326	,01454	,01762	,02047	,02307	,02542	325
350	,00883	,01017	,01149	,01276	,01400	,01695	,01969	,02223	,02455	350
375	,00854	,00983	,01110	,01233	,01356	,01639	,01904	,02149	,02374	375
400	,00827	,00953	,01075	,01194	,01315	,01585	,01841	,02079	,02297	400
425	,00802	,00925	,01043	,01159	,01274	,01539	,01787	,02018	,02230	425
450	,00780	,00898	,01014	,01126	,01235	,01495	,01737	,01960	,02165	450
475	,00758	,00873	,00986	,01096	,01202	,01456	,01691	,01918	,02107	475
500	,00740	,00852	,00962	,01069	,01172	,01419	,01648	,01860	,02055	500
550	,00707	,00814	,00918	,01021	,01120	,01356	,01575	,01777	,01964	550
600	,00675	,00777	,00877	,00975	,01069	,01295	,01504	,01697	,01875	600
650	,00649	,00748	,00844	,00937	,01028	,01246	,01447	,01633	,01804	650
700	,00625	,00720	,00812	,00903	,00991	,01199	,01393	,01572	,01736	700
750	,00604	,00695	,00785	,00872	00957	,01158	,01346	,01522	,01678	750
800	,00585	,00673	,00760	,00844	,00926	,01121	,01302	,01474	,01624	800
850	,00567	,00653	,00738	,00819	,00898	,01088	,01263	,01428	,01576	850
900	,00551	,00635	,00717	,00796	,00873	,01057	,01227	,01385	,01531	900
950	,00536	,00618	,00698	,00775	,00850	,01029	,01195	,01349	,01491	950
1000	,00523	,00603	,00680	,00755	,00829	,01003	,01165	,01315	,01453	1000
1100	,00499	,00577	,00650	,00721	,00791	,00958	,01113	,01256	,01388	1100
1200	,00477	,00553	,00621	,00689	,00756	,00916	,01064	,01200	,01326	1200
1300	,00459	,00520	,00597	,00662	,00726	,00880	,01023	,01154	,01274	1300
1400	,00442	,00509	,00575	,00638	,00700	,00848	,00985	,01111	,01228	1400
1500	,00427	,00491	,00555	,00616	,00678	,00819	,00952	,01074	,01187	1500
1600	,00413	,00476	,00537	,00597	,00658	,00793	,00921	,01040	,01149	1600
1700	,00400	,00462	,00520	,00579	,00637	,00769	,00894	,01009	,01114	1700
1800	,00388	,00449	,00505	,00563	,00617	,00748	,00868	,00980	,01082	1800
1900	,00378	,00437	,00492	,00548	,00600	,00728	,00845	,00954	,01053	1900
2000	,00370	,00426	,00481	,00534	,00586	,00710	,00824	,00930	,01027	2000
2200	,00353	,00406	,00458	,00509	,00558	,00674	,00786	,00887	,00979	2200
2400	,00337	,00383	,00438	,00487	,00535	,00646	,00753	,00850	,00938	2400
2600	,00324	,00374	,00422	,00468	,00514	,00622	,00723	,00816	,00901	2600
2800	,00312	,00360	,00406	,00451	,00496	,00599	,00697	,00786	,00865	2800
3000	,00302	,00348	,00393	,00435	,00480	,00579	,00673	,00759	,00831	3000
3500	,00280	,00323	,00365	,00415	,00446	,00539	,00626	,00707	,00777	3500
4000	,00262	,00301	,00340	,00378	,00414	,00502	,00583	,00658	,00726	4000
4500	,00247	,00284	,00321	,00357	,00392	,00424	,00511	,00582	,00647	4500
5000	,00234	,00269	,00304	,00338	,00371	,00449	,00521	,00588	,00650	5000
6000	,00214	,00246	,00278	,00308	,00338	,00410	,00476	,00537	,00593	6000
7000	,00198	,00228	,00257	,00286	,00313	,00379	,00441	,00497	,00549	7000
8000	,00185	,00213	,00240	,00267	,00293	,00355	,00412	,00465	,00514	8000
9000	,00174	,00201	,00227	,00253	,00276	,00334	,00389	,00438	,00484	9000
10000	,00165	,00191	,00215	,00239	,00262	,00317	,00368	,00416	,00459	10000

a przy pięciu elementach otrzymujemy wzór czteroczłonowy przy sześciu pięcioczłonowy, wreszcie przy n elementach wzór $(n-1)$ -członowy.

Liczby σ z odpowiednimi subskryptami przedstawiają całkowite dyspersje zmiennych $X_1, X_2, X_3 \dots X_n$, a liczby r są współczynnikami korelacji całkowitej dla subskryptów głównych 12, 13 i t. d., a współczynnikami korelacji częściowej dla subskryptów wtórnych.

Badając średnie częściowe zmiennej X_1 przy danych X_2 i X_3 otrzymujemy już nie linię regresji, lecz powierzchnię regresji, która jest płaszczyzną P_1 w przypadku rozkładu zwyczajnego (normalnego).

Równanie tej płaszczyzny regresji przybierze formę:

$$M(X_1) = b_{12,3} X_2 + b_{13,2} X_3.$$

Podobnie otrzymamy jeszcze odpowiednie dwie inne płaszczyzny regresji, mianowicie:

$$M(X_2) = b_{21,3} X_1 + b_{23,1} X_3$$

$$M(X_3) = b_{31,2} X_1 + b_{32,1} X_2,$$

przyczem współczynniki b można wyrazić w dość prosty sposób za pomocą współczynników korelacji całkowitej, n. p.:

$$b_{12,3} = \frac{r_{12} - r_{13} \cdot r_{23}}{1 - r_{23}^2}.$$

Z płaszczyzn regresji przechodzimy w prosty sposób do prostych regresji za pomocą przecięć płaszczyznami równoległymi (w stałym odstępnie C) do płaszczyzn układu n. p. weźmy pod uwagę płaszczyznę równoległą do płaszczyzny układu X_1, X_2 w odstępnie $X_3 = C$. Płaszczyzny P_1 i P_2 przecinają ją wzdłuż prostych, których równania:

$$M(X_1) = b_{12,3} X_2 + b_{13,2} C$$

$$M(X_2) = b_{21,3} X_1 + b_{23,1} C$$

są prostymi regresji zmiennych X_1 i X_2 , gdy trzecia zmienna $X_3 = C$ jest stałą, a zadanie to redukuje się do dwóch zmiennych.

Z tego wynika, że ułożenie wzoru empirycznego złożonego choćby z czterech elementów zależnych od siebie przy użyciu rachunku korelacyjnego jest czynnością bardzo żmudną, której wynik może być zadowalającym tylko w wyjątkowych przypadkach, natomiast zbudowanie takiego wzoru jest niemożliwością, skoro nie wszystkie elementy wykazują współzależność, choćby częściową. Przedstawiony w niniejszym rozdziale rachunek nadaje się jednak do sprawdzenia nawet takich zawiłych wzorów, w których elementy prawej strony równania nie wykazują współzależności między sobą.

Przykład: Sprawdzić dokładność wyników wzoru empirycznego autora:

$$v = \frac{48 m^{1/2} \cdot s^{-1} \cdot T m}{\sqrt{T m + 0,9 m}} \cdot \left(\frac{I}{0,2 + \sqrt{1000 I}} \right)^{1/2}$$

na średnią prędkość wody w łożyskach przyrodzonych $v_0 = Y$ dla rzeki Dunaju i wyznaczyć procentową różnicę wartości obliczonych z wynikami pomiarów $v_p = X$, dla jednego pomiaru względnie obliczenia, a więc w przypadku, gdy funkcja statystyczna nie jest znana. Wynik zestawiono w tablicy V-tej.

Ostatecznie otrzymano z tabeli V-tej:

$$p = \frac{\Sigma(xy)}{n} = \frac{17,68540}{60} = 0,294757,$$

$$r = \frac{p}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0,294757}{0,311308} = 0,9468,$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,999462, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 1,000538,$$

a ponieważ dla doskonałej zgodności wyników pomiarowych z wynikami obliczeniowymi powinien czynnik współzależności równy być jedności t. j. $r=1$, czyli:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{0,294757} = 0,54291,$$

a wówczas regresja:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta = b_1 = b_2 = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 1, \text{ a } Y = X,$$

co odpowiada wartościom $\alpha = \beta = 45^\circ$.

W badanym przykładzie otrzymamy równania regresji prostoliniowej:

$$\text{tg } \alpha = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,9468 \times 1,000538 = 0,947309, \\ \text{z czego } \alpha = 43^\circ 27'$$

$$\text{tg } \beta = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,9468 \times 0,999462 = 0,94629, \\ \text{z czego } \beta = 43^\circ 25',$$

a kąt γ zawarty między prostymi regresji:

$$\gamma = 90^\circ - (\alpha + \beta) = 3^\circ 8'.$$

Jeżeli uwzględnimy odchylenia średnie jako błędy popełniane przy wyrażaniu jednej zmiennej drugą, to według wzorów 35 otrzymamy:

$$s_y = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} = 0,1796$$

$$s_x = \sigma_x \sqrt{1 - r^2} = 0,1795,$$

a wielkość czynnika korelacyjnego wyrażonego temi odchyleniami będzie:

$$r = \sqrt{1 - \frac{s_x^2}{\sigma_x^2}} = \sqrt{1 - \frac{s_y^2}{\sigma_y^2}} = 0,9706,$$

a tem samem zmniejszy się wartość kąta zawartego między regresją prostoliniową na:

$$\gamma = 1^\circ 42'.$$

Uwzględniając jeszcze prawdopodobny błąd czynnika korelacyjnego dla dwu szeregów liczb, z których jeden uporządkowano według wielkości liczb a drugi odpowiada mu swymi wartościami parami skojarzonymi z pierwszym — otrzymamy według Pearson'a (tabela IV-ta) dla $r=0,97$ oraz $n=60$:

$$r + e_2 = 0,9706 + 0,00565 = 0,97625,$$

a według tej wartości obliczony kąt $\gamma = 1^\circ 26'$ co czyni +1,592% różnicy dla jednej wartości obliczonej wzorem empirycznym, czyli, że każda wartość obliczona $v_0 = Y$ jest przeciętnie o 1,592% większą od każdej wartości pomierzonej $v_p = X$.

Z powyżej przytoczonego przykładu wynika, że dokładność wzoru empirycznego będzie wówczas wystarczająca, jeżeli suma wartości czynnika korelacyjnego i wielokrotności błędu tego czynnika będzie większą lub równą jedności, czyli:

$$r + m e_2 \geq 1. 50$$

gdzie wartość m zależną jest od rodzaju badanego zjawiska, sposobu badania oraz wielkości dyspersji pomiarowej.

Tabela V.

Sekundowa prędkość wody na Dunaju.

L. p.	Przekrój	Prędkość	Prędkość	Odchyłka	Odchyłka	x^2	y^2	Iloczyny	
		pomierzona	obliczona	od średniej	od średniej			$x \cdot y$	
		v_p	v_0	v_p	v_0			dodatnie	ujemne
w metrach									
1	Wiedeń (obsz. zal.)	0,760	0,562	-1,065	-1,285	1,1342	1,6512	1,36853	—
2	Stein	1,010	1,275	-0,815	-0,572	0,6642	0,3272	0,46618	—
3	"	1,040	1,288	-0,785	-0,559	0,6162	0,3125	0,43882	—
4	"	1,050	1,267	-0,775	-0,580	0,6006	0,3364	0,44950	—
5	"	1,120	1,284	-0,705	-0,563	0,4970	0,3170	0,39692	—
6	Wiedeń	1,230	1,310	-0,595	-0,537	0,3540	0,2884	0,31952	—
7	Stein	1,260	1,442	-0,565	-0,405	0,3192	0,1640	0,22883	—
8	"	1,260	1,571	-0,565	-0,276	0,3192	0,0762	0,15594	—
9	Linz	1,280	1,291	-0,545	-0,556	0,2970	0,3091	0,30302	—
10	Wiedeń	1,290	1,437	-0,535	-0,410	0,2862	0,1681	0,21935	—
11	Linz	1,300	1,345	-0,525	-0,502	0,2756	0,2520	0,26355	—
12	Wiedeń	1,300	1,413	-0,525	-0,434	0,2756	0,1884	0,22785	—
13	Linz	1,320	1,323	-0,505	-0,524	0,2550	0,2746	0,26462	—
14	Tulln	1,350	1,370	-0,475	-0,477	0,2256	0,2275	0,22658	—
15	Wiedeń	1,360	1,519	-0,465	-0,328	0,2162	0,1076	0,15252	—
16	Mauthausen	1,360	1,061	-0,445	-0,786	0,1980	0,6178	0,34977	—
17	Wiedeń	1,390	1,441	-0,435	-0,406	0,1892	0,1648	0,17661	—
18	Tulln	1,420	1,453	-0,405	-0,394	0,1640	0,1552	0,15957	—
19	Mauthausen	1,430	1,368	-0,395	-0,479	0,1560	0,2294	0,18921	—
20	"	1,430	1,368	-0,395	-0,479	0,1560	0,2294	0,18921	—
21	Stein	1,490	1,736	-0,335	-0,111	0,1122	0,0123	0,03719	—
22	Wiedeń	1,500	1,643	-0,325	-0,202	0,1056	0,0408	0,06565	—
23	Treismauer	1,520	1,242	-0,305	-0,605	0,0930	0,3660	0,18453	—
24	Wiedeń	1,520	1,585	-0,305	-0,262	0,0930	0,0686	0,07991	—
25	"	1,590	1,377	-0,235	-0,470	0,0552	0,2209	0,11045	—
26	"	1,590	1,313	-0,235	-0,034	0,0552	0,0012	0,00799	—
27	Stein	1,600	1,848	-0,225	+0,001	0,0506	0,0000	—	0,00023
28	Treismauer	1,610	1,299	-0,215	-0,548	0,0462	0,3003	0,11782	—
29	Stein	1,660	1,747	-0,165	-0,100	0,0272	0,0100	0,01650	—
30	Tulln	1,660	1,837	-0,165	-0,010	0,0272	0,0001	0,00165	—
31	Wiedeń	1,670	1,456	-0,155	-0,391	0,0240	0,1529	0,06061	—
32	Mauthausen	1,700	1,613	-0,125	-0,234	0,0156	0,0548	0,02925	—
33	"	1,770	2,093	-0,055	+0,146	0,0030	0,0213	—	0,00803
34	Wiedeń	1,800	1,742	-0,025	-0,105	0,0006	0,0110	0,00263	—
35	"	1,810	1,631	-0,015	-0,216	0,0002	0,0467	0,00324	—
36	Engelhardszell	1,850	2,303	+0,025	+0,456	0,0006	0,2079	0,01140	—
37	Linz	1,920	1,464	+0,095	-0,383	0,0090	0,1467	—	0,03639
38	Wiedeń	2,010	1,832	+0,185	-0,015	0,0342	0,0002	—	0,02775
39	Mauthausen	2,040	2,384	+0,215	+0,537	0,0462	0,2884	0,11546	—
40	Engelhardszell	2,060	1,814	+0,235	-0,033	0,0552	0,0011	—	0,00776
41	Linz	2,070	2,241	+0,245	+0,394	0,0600	0,1552	0,09653	—
42	"	2,120	1,820	+0,295	-0,027	0,0870	0,0007	—	0,00797
43	Wiedeń	2,140	1,900	+0,315	+0,053	0,0992	0,0028	0,01669	—
44	Mauthausen	2,210	2,542	+0,385	+0,695	0,1482	0,4830	0,26758	—
45	"	2,360	2,998	+0,535	+1,131	0,2862	1,2792	0,60509	—
46	Wiedeń	2,440	2,168	+0,615	+0,321	0,3782	0,1030	0,19742	—
47	"	2,450	2,303	+0,625	+0,456	0,3906	0,2079	0,28500	—
48	"	2,450	2,483	+0,625	+0,636	0,3906	0,4045	0,39750	—
49	"	2,460	2,595	+0,635	+0,748	0,4032	0,5595	0,47498	—
50	Linz	2,470	2,233	+0,645	+0,386	0,4160	0,1490	0,24897	—
51	Stein	2,470	2,514	+0,645	+0,667	0,4160	0,4449	0,43022	—
52	Wiedeń	2,510	2,242	+0,685	+0,395	0,4692	0,1560	0,27058	—
53	"	2,510	2,289	+0,635	+0,442	0,4692	0,1954	0,30277	—
54	"	2,520	2,424	+0,695	+0,577	0,4830	0,3329	0,40102	—
55	"	2,650	2,531	+0,825	+0,684	0,6806	0,4679	0,56430	—
56	Linz	2,650	2,361	+0,825	+0,514	0,6806	0,2642	0,42405	—
57	Wiedeń	2,790	2,895	+0,965	+1,048	0,9312	1,0983	1,01132	—
58	"	2,890	3,086	+1,065	+1,239	1,1842	1,5351	1,31953	—
59	"	2,960	3,189	+1,135	+1,342	1,2882	1,8010	1,52317	—
60	"	3,010	3,152	+1,185	+1,305	1,4042	1,7030	1,54643	—
		Σ 109,480	110,813			18,6686	18,6911	17,77353	0,08813
		średnia	średnia			$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma(x^2)}{n} = \frac{18,6686}{60} = 0,31114$	$\sigma_y^2 = \frac{\Sigma(y^2)}{n} = \frac{18,6911}{60} = 0,31152$	—	—
		1,825	1,847			$\sigma_x = 0,5578$	$\sigma_y = 0,5581$	17,68540	—

Możemy tu ułożyć konwencjonalną skalę, n, p , dla wzorów empirycznych zbudowanych na podstawie badań laboratoryjnych będzie wystarczającą dokładność przy zastosowaniu $m=1$ do 3, wzory geofizyczne (meteorologia, hydrologia, magnetyzm ziemski i t. p.) wymagają już wartości większej np. $m =$ od 1 (3) do 7, wreszcie wzory budowlane używane w inżynierji (budowa mostów, żelbeton, budowa maszyn itd.) mogą mieć wystarczającą dokładność przy użyciu wartości $m =$ od 1 (7) do 10. Oczywiście rzecz, że wartość sprawdzianu m zależy także od wielkości dyspersji otrzymanej przy pomiarach. Przy małej dyspersji nie przekraczającej 0,1% wartości pomierzonej można stosować niższe krańce podanych wyżej wartości m , przy średnich wartościach dyspersji — średnie wartości m , a przy wielkiej dyspersji — górne graniczne wartości m .

Podaną powyżej skalę należy uważać za nieobowiązującą propozycję o szerokich granicach.

Stosując dla naszego przykładu $m=6$ otrzymamy $r+6 \cdot e_2 = 0,9706 + 6 \cdot 0,0565 = 1,0045$, czyli że ułożony wzór empiryczny spełnia swoje zadanie z wystarczającą dokładnością.

E) Metody analityczne.

Metody analityczne polegają na porównywaniu wzajemnego położenia i przebiegu dwóch linii, z których jedna jest obrazem surowej funkcji statystycznej jakichkolwiek pomiarów lub spostrzeżeń, a druga obrazem funkcji empirycznej, a więc na porównywaniu dwóch szeregów statystycznych w niniejszym przypadku jednego szeregu X_1, X_2, \dots, X_n uzyskanego drogą pomiaru z drugim szeregiem Y_1, Y_2, \dots, Y_n uzyskanym drogą obliczenia wzorem empirycznym.

W obydwóch szeregach:

$$\begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & \dots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots & Y_n \end{matrix}$$

odpowiadają poszczególnym wartościom X_i , odpowiednie wartości Y_i , tak że Y_i odpowiada wartość $X_1, Y_2 \sim X_2, \dots, Y_n$ wartość X_n , przy czym X może być podane jako dowolna funkcja jednoznaczna $f(x)$ zmiennej x (przebiegająca nietylko liczby podane o subskryptach 1, 2...n) a Y jako jakaś inna funkcja $\varphi(x)$ tej samej zmiennej x .

W celu porównania przebiegu obydwóch krzywych t. zn. surowej funkcji statystycznej $f(x)$ z odpowiednio wyrównaną, otrzymaną wzorem empirycznym funkcji $\varphi(x)$, możemy tu użyć metody analityczne: a) *niezmienników* (inwaryjacyjnej), lub b) *współzmienników* (kowaryjacyjnej), wreszcie c) najprostszej metody analitycznej *funkcyj linjowych (prostych) w układzie dwuwymiarowym*.

a) Dowolną daną formę p -tego stopnia o q zmiennych kształtu $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ mającą $\binom{q+p-1}{p}$ współczynników a, b, c, \dots , przekształcamy linjowo relacją:

$$x_i = l_{i1} y_1 + l_{i2} y_2 + \dots + l_{iq} y_q$$

gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, q$, czyli modulem $L = |l_{iq}|$, i otrzymamy nową formę również p -tego stopnia o q zmiennych $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_q)$ mającą analogicznie $\binom{q+p-1}{p}$ współczynników a_1, b_1, c_1, \dots , przyczem zachodzi związek:

$$\psi(a_1, b_1, c_1, \dots) = L^p \psi(a, b, c, \dots) \quad . \quad 51$$

Funkcja ψ jest tu *niezmiennikiem* (inwariantem) formy f , ze względu na przekształcenie o module L a wykładnik λ jest wskaźnikiem odnośnego niezmiennika.

Oczywista rzecz, jeżeli wartość wskaźnika niezmiennika $\lambda=0$, natenczas:

$$\psi(a_1, b_1, c_1, \dots) = \psi(a, b, c, \dots) \quad . \quad 52$$

czyli otrzymujemy *niezmiennik bezwzględny* danej formy, który jest zupełnie niezależnym od przyjętego przekształcenia.

b) Jeżeli funkcja $\psi(a, b, c, \dots)$, oprócz współczynników (a, b, c, \dots) danej formy $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ zawiera jeszcze zmienne x_1, x_2, \dots, x_q tej formy, a więc przedstawia się w kształcie:

$$\psi(a, b, c, \dots, x_1, x_2, \dots, x_q),$$

a wskutek przekształcenia o module L , na formę $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_q)$ dostaniemy związek:

$$\begin{aligned} \psi(a, b, c, \dots, x_1, x_2, \dots, x_q) &= \\ &= L^p \psi(a_1, b_1, c_1, \dots, y_1, y_2, \dots, y_q) \quad . \quad 53 \end{aligned}$$

to wówczas funkcję $\psi(a, b, c, \dots, x_1, x_2, \dots, x_q)$ nazywamy *współzmiennikiem* (kowariantem) danej formy $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$ a wykładnik λ jest wskaźnikiem współzmiennika.

Należy tu jeszcze zauważyć, że w grupie przekształceń linjowych, o których będzie tu mowa, niezmienniki danych form algebraicznych są zawsze funkcjami *jednorodnymi* współczynników tych form, oraz że wszystkie współzmienniki $\psi(a, x)$ danej formy algebraicznej są funkcjami *jednorodnymi*, tak ze względu na współzmienniki, jak ze względu na zmienne tej formy.

Oczywista rzecz, powyższa wzmianka o tych metodach podaną została w formie ogólnej. Przechodzą one jednak do matematyki statystycznej, która jest gałęzią matematyki stosowanej jeszcze dość młodą, gdzie przybierają formy bardziej szczegółowe, a zatem prostsze.

Przypadki współzmienności rozwiązywano dotychczas jako szczególne przypadki współzależności (korelacji). Współzmiennosc różni się jednak znacznie od współzależności.

I tak, Darmois²⁴⁾ proponuje, by z zagadnień tego rodzaju stworzyć nową teorię, mianowicie teorię kowaryjacji w odróżnieniu od teorii korelacji. Wyprowadza on, zawiłą drogą, współczynnik r i inne podobne współzmienniki używając rozumowań z zakresu wielowymiarowej (n -wymiarowej) geometrii i posługuje się metodami interpolacji C z e b, y s z e w a. M a r c h²⁵⁾

²⁴⁾ A. Darmois: „Statistique mathématique“. Paris 1928.

²⁵⁾ M. L. March: „Essai sur un mode d'exposer les principaux éléments de la théorie statistique“.

używa systematycznie terminu kowariancji. Łomnickiemu¹⁹⁾, który nazwał ten sposób współzależnością w odróżnieniu od współzależności, nasunął się pomysł traktowania tego zagadnienia odmienny i o wiele prostszy od podanego przez Darmois'a. Sposób ten podano poniżej.

Współzależność szeregu $X_1, X_2 \dots X_n$ uważa się za najściślejszą z szeregiem $Y_1, Y_2 \dots Y_n$ wtedy, gdy wartości Y są proporcjonalne do odpowiadających im wartości X i to przy każdym x , czyli gdy zachodzi związek:

$$Y = aX \dots \dots \dots 54a$$

lub wyraźnie:

$$f(x) = a\varphi(x) \dots \dots \dots 54b$$

Jeżeli zaś nie zachodzi proporcjonalność, to

$$Y_i \neq aX_i$$

Biorąc więc za Y_i wartość aX_i , popełniamy błąd: $Y_i - aX_i$.

Obierzmy współczynnik a tak, aby suma kwadratów wszystkich błędów była minimum tj. aby:

$$B^2 = (Y_1 - aX_1)^2 + (Y_2 - aX_2)^2 + \dots + (Y_n - aX_n)^2 \dots \dots \dots 55a$$

było minimum. Po wykonaniu prostych rachunków otrzymamy z tego warunku następującą wartość na współczynnik a :

$$a = \frac{X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_n^2} \dots \dots \dots 55b$$

Oznaczmy krótko:

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n = s_{xy}$$

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = s_x^2$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2 = s_y^2,$$

to:
$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \dots \dots \dots 56$$

a podstawiając tę wartość we wzorze 55 otrzymamy:

$$B = s_y \sqrt{1 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2 \cdot s_y^2}} = s_y \sqrt{1 - \rho^2}, \dots \dots \dots 57$$

gdzie:

$$\rho = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n Y_i^2}} \dots \dots \dots 58$$

Łatwo można udowodnić, że bezwzględna wartość tej liczby ρ nie przekracza 1, t. j. że: $-1 \leq \rho \leq 1$.

Jeżeli $\rho = \pm 1$ to całkowity błąd $B=0$ (wzór 57). To zaś znaczy, że wszystkie błędy $Y_i - aX_i$ są zerami, a więc wtedy zachodzi ścisła proporcjonalność:

$$Y_i = aX_i.$$

Odwrotnie, jeżeli zachodzi ścisła proporcjonalność, to ze wzoru 58 otrzymamy $\rho = +1$ lub $\rho = -1$. Im mniejsze jest ρ co do bezwzględnej wartości, im bliżej zera, tem dalej odbiega od proporcjonalności związek badanych szeregów. Tę liczbę ρ przyjęto jako najprostszą

miarę kowariancji danych szeregów statystycznych. Miarę tę nazwał Łomnicki *wskaźnikiem linjowości* związku Y z X .

Tabela VI.

L. p.	v_p	v_0	$v_p \cdot v_0$	v_p^2	v_0^2	Uwaga
1	0,760	0,562	0,4271	0,5776	0,3158	
2	1,010	1,275	1,2879	1,0201	1,6256	
3	1,040	1,288	1,3395	1,0816	1,6589	
4	1,050	1,267	1,3304	1,1025	1,6053	
5	1,120	1,284	1,4381	1,2544	1,6487	
6	1,230	1,310	1,6118	1,5129	1,7161	
7	1,260	1,442	1,8169	1,5876	2,0794	
8	1,260	1,571	1,9795	1,5876	2,4680	
9	1,280	1,291	1,6525	1,6384	1,6667	
10	1,290	1,437	1,8537	1,6641	2,0650	
11	1,300	1,345	1,7485	1,6900	1,8090	
12	1,300	1,413	1,8369	1,6900	1,9966	
13	1,320	1,323	1,7464	1,7424	1,7503	
14	1,350	1,370	1,8495	1,8225	1,8769	
15	1,360	1,519	2,0658	1,8496	2,3074	
16	1,380	1,061	1,4642	1,9044	1,1257	
17	1,390	1,441	2,0029	1,9321	2,0765	
18	1,420	1,453	2,0633	2,0164	2,1112	
19	1,430	1,368	1,9562	2,0449	1,8714	
20	1,430	1,368	1,9562	2,0449	1,8714	
21	1,490	1,736	2,5866	2,2201	3,0137	
22	1,500	1,643	2,4645	2,2500	2,6994	
23	1,520	1,242	1,8878	2,3104	1,5426	
24	1,520	1,585	2,4046	2,3104	2,5122	
25	1,590	1,377	2,1894	2,5281	1,8961	
26	1,590	1,813	2,8827	2,5281	3,2869	
27	1,600	1,848	2,9568	2,5600	3,4151	
28	1,610	1,299	2,0914	2,5912	1,6874	
29	1,660	1,747	2,9000	2,7556	3,0520	
30	1,660	1,837	3,0494	2,7556	3,3746	
31	1,670	1,456	2,4315	2,7889	2,1199	
32	1,700	1,613	2,7421	2,8900	2,6018	
33	1,770	2,093	3,7046	3,1329	4,3805	
34	1,800	1,742	3,1356	3,2400	3,0346	
35	1,810	1,631	2,9521	3,2761	2,6602	
36	1,850	2,303	4,2606	3,4225	5,3038	
37	1,920	1,464	2,8109	3,6864	2,1433	
38	2,010	1,832	3,6823	4,0401	3,3562	
39	2,040	2,384	4,8634	4,1616	5,6835	
40	2,060	1,814	3,7368	4,2436	3,2906	
41	2,070	2,241	4,6389	4,2849	5,0221	
42	2,120	1,820	3,8584	4,4944	3,3124	
43	2,140	1,900	4,0660	4,5796	3,6100	
44	2,210	2,542	5,6178	4,8841	6,4618	
45	2,360	2,998	7,0753	5,5696	8,9779	
46	2,440	2,168	5,2899	5,9536	4,7002	
47	2,450	2,303	5,6424	6,0025	5,3038	
48	2,450	2,483	6,0834	6,0025	6,1653	
49	2,460	2,595	6,3837	6,0516	6,7340	
50	2,470	2,233	5,5155	6,1009	4,9863	
51	2,470	2,514	6,2096	6,1009	6,3202	
52	2,510	2,242	5,6274	6,3001	5,0266	
53	2,510	2,289	5,7454	6,3001	5,2395	
54	2,520	2,424	6,1085	6,3504	5,8758	
55	2,650	2,531	6,7072	7,0225	6,4009	
56	2,650	2,361	6,2567	7,0225	5,5696	
57	2,790	2,895	8,0771	7,7841	8,3810	
58	2,890	3,086	8,9185	8,3521	9,5236	
59	2,960	3,189	9,4394	8,7616	10,1697	
60	3,010	3,152	9,4875	9,0601	9,9351	
Σ	109,480	110,813	219,9114	218,4337	224,5394	

Przykład z tabeli V-tej.
Średnia sekundowa prędkość wody na Dunaju.
 $X = v_p =$ prędkości pomierzonej
 $Y = v_0 =$ prędkości obliczonej.

Wskaźnik linjowości ρ ma budowę podobną do współczynnika korelacji r , ma jednak inne znaczenie i inną wartość liczbową, o czym przykład podany poniżej najlepiej objaśni.

Wzór 33 i 33a:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k Y_k)}{n \sigma_x \cdot \sigma_y} = \sqrt{b_{12} \cdot b_{21}}$$

¹⁹⁾ A. Łomnicki j. w.

wyrażający wartość czynnika korelacyjnego r możemy także napisać w formie:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - M_x)(Y_k - M_y)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (X_k - M_x)^2 \cdot \sum_{k=1}^n (Y_k - M_y)^2}} \quad 59$$

gdzie M_x i M_y są średnimi arytmetycznymi obydwóch rozważanych szeregów.

Podobieństwo budowy wzorów 58 wskaźnika linjowości ρ i 59 współczynnika korelacji r polega na wartości średnich arytmetycznych, które dla współczynnika linjowości mają wartość zerową t. j. $M_x = M_y = 0$. Graficznie można to przedstawić przesunięciem środka układu współrzędnych do punktu D przecięcia się obydwóch linii regresji.

Ponieważ dla omawianego celu przyjęto podstawową linię regresji $y = x$, przeto kąt γ zawarty między podstawową prostą L a prostą L_4 uległ obrotowi około wierzchołka O o pewien kąt β , co nie wpływa zupełnie ani na wartość kąta γ ani też na proporcjonalność badanych szeregów (rys. 8).

Jako przykład użycia współczynnika współzmienności obliczono przykład (ten sam co dla współczynnika korelacyjnego) podany w tabeli VI.

W wyniku otrzymano:

$s_{xy} = 219,9114$, $s_x^2 = 218,4337$, $s_y^2 = 224,5394$,
przeto wielkość współczynnika a dla równania 56 otrzymamy:

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{219,9114}{218,4337} = 1,00676,$$

a następnie:

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = 14,779, \quad s_y = \sqrt{s_y^2} = 14,984,$$

$$s_x s_y = \sqrt{s_x^2 s_y^2} = 221,4485,$$

a więc wielkość współczynnika współzmienności (kowarjacyjnego) będzie:

$$\rho = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{219,9114}{221,4485} = 0,99306.$$

Wartość ta leży o wiele bliżej jedności aniżeli wartość współczynnika współzależności r , obliczona dla tego samego przykładu (tab. V), którą obliczono $r = 0,9468$.

Występuje tu dość znaczna różnica $\rho - r = 0,04626$, która jednak nie wpływa na sprawdzenie dokładności wzoru, gdyż suma błędów wyników wzoru empirycznego w stosunku do surowej funkcji statystycznej badana jedną i drugą metodą t. j. zapomocą czynnika współzależności i czynnika współzmienności pozostała prawie niezmienną co do wartości absolutnej.

Sumę błędów obliczamy wzorem 57-mym.

$$\rho^2 = 0,98627, \quad \sqrt{1 - \rho^2} = 0,1176,$$

a więc suma błędów:

$$B = s_y \sqrt{1 - \rho^2} = 1,7621 m,$$

co czyni dla jednego pomiaru $1,7621 : 60 = 0,02937 m$, czyli $1,609\%$.

Przy badaniu dokładności wzoru empirycznego metodą korelacyjną otrzymano $B = 1,7432 m$ czyli $1,592\%$, a więc różnice tu występujące są minimalne i spowodowane zaokrągleniami podczas rachunku.

Oczywista rzecz, że przykład powyższy nie jest realnym z powodu braku proporcjonalności obydwóch badanych szeregów v_p, v_0 , które po przekształceniu na funkcje linjowe proste nie przechodzą przez środek układu współrzędnych, przyczem $f(x) \neq a \cdot \varphi(x)$. Przykład ten podano li tylko dla celów porównawczych, mianowicie porównania wyniku zastosowania metody kowarjacyjnej z wynikiem stosowania metody korelacyjnej.

e) *Zastosowanie funkcji linjowych prostych w układzie dwuwymiarowym. (Metoda autora).* Metoda ta jest bardzo prostą, polega bowiem na tem, że zapomocą związku matematycznego określającego położenie dwóch prostych względem siebie w układzie prostokątnym płaskim, oznaczamy stopień dokładności wyników wyrównanej funkcji (wzoru empirycznego) w stosunku do wyników nieznannej surowej funkcji statystycznej względnie stopień dokładności wyników dwóch różnych badanych wzorów empirycznych w stosunku do funkcji statystycznej oraz względem siebie.

W tym celu, oba otrzymane zbiory punktów, leżących na płaszczyźnie, pierwszy otrzymany zapomocą pomiaru lub spostrzeżeń i drugi otrzymany obliczeniem jako wynik zastosowania badanego wzoru empirycznego, przekształcamy na dwie proste L_p i L_0 , a w drugim przypadku, w którym chodzi o porównanie dokładności wyników dwóch wzorów empirycznych — na trzy proste L_p, L_{0I} i L_{0II} .

Prosta L_p jest obrazem wyników surowej funkcji statystycznej f , a proste L_0 względnie L_{0I} i L_{0II} są obrazami wyników wyrównanych funkcji (wzorów) empirycznych, nazwijmy je φ, φ_I i φ_{II} . Ilość zmiennych niezależnych w każdej z tych funkcji oraz ich kształt nie odgrywają tu żadnej roli, ponieważ będziemy rozważali tylko wyniki tych funkcji, a więc wartości liczb szeregu naturalnego, które można uporządkować według ich wielkości.

Równania obydwóch prostych:

$$\left. \begin{array}{l} L_p \quad \dots \quad Y = \Theta(X) \\ L_0 \quad \dots \quad Y_1 = \Omega(X) \end{array} \right\} \dots \dots 60$$

otrzymamy odcinając — w układzie prostokątnym płaskim — na osi ix ów cyfrowe wartości pomierzone (t. j. wartości wyników surowej funkcji statystycznej f) a na osi y — dla pierwszego zbioru punktów t. j. dla obrazu funkcji f , te same wyniki co na osi ix ów, zaś dla drugiego zbioru punktów t. j. dla obrazu wyników wyrównanej funkcji empirycznej φ wyniki tej funkcji t. zn. cyfrowe wartości otrzymane obliczeniem przez zastosowanie badanego wzoru empirycznego.

Tym sposobem otrzymujemy odrazu równanie prostej L_p , nazwijmy ją *prostą podstawową*, w którym:

$$\Theta(X) = X$$

czyli: $L_p \quad \dots \quad Y = X. \quad \dots \dots 61$

Drugą prostą L_0 otrzymamy wyznaczając spólrzędne dwóch jej punktów $A_I(X_I Y_I)$ i $A_{II}(X_{II} Y_{II})$ w sposób następujący: Drugi zbiór punktów określony równaniem 60:

$$L_0 \dots Y_1 = \Omega(X)$$

dzielimy na dwie odpowiednie grupy i z każdej bierzemy średnie arytmetyczne osobno dla każdej spólrzędnej. Otrzymamy zatem spólrzędne punktów:

$$\left. \begin{aligned} A_I - X_I &= \frac{\sum_{i=1}^k (X_i)}{k}, & Y_I &= \frac{\sum_{i=1}^k (Y_i)}{k} \\ A_{II} - X_{II} &= \frac{\sum_{i=k+1}^n (X_i)}{n-k}, & Y_{II} &= \frac{\sum_{i=k+1}^n (Y_i)}{n-k} \end{aligned} \right\} \dots 62$$

gdzie n jest całkowitą liczbą spostrzeżeń całego zbioru, a k całkowitą liczbą spostrzeżeń jednej grupy zbioru. N. p. przy parzystym n i podziale zbioru punktów na dwie równe — co do ilości punktów — grupy, otrzymamy $k = n/2$. W przykładach podanych w tabeli VII zastosowano podział zbioru punktów na dwie równe grupy, przyczem $n = 60$ a $k = 60/2 = 30$.

Podstawiając wartości z równań 62 w równaniu prostej przechodzącej przez dwa punkty otrzymamy:

$$y_1 - Y_I = \frac{Y_{II} - Y_I}{X_{II} - X_I} x - \frac{Y_{II} - Y_I}{X_{II} - X_I} X_I \dots 63$$

lub
$$\frac{y_1 - Y_I}{Y_{II} - Y_I} = \frac{x - X_I}{X_{II} - X_I} \dots 63a$$

lub
$$(X_I - X_{II})y_1 - (Y_I - Y_{II})x = X_I \cdot Y_I - X_{II} \cdot Y_{II} \dots 63b$$

lub wreszcie:

$$\begin{vmatrix} x & y_1 & 1 \\ X_I & Y_I & 1 \\ X_{II} & Y_{II} & 1 \end{vmatrix} = 0 \dots 63d$$

Jeżeli nazwiemy krótko:

$$\text{tang } \alpha = \frac{Y_{II} - Y_I}{X_{II} - X_I} = b, \dots 64a$$

oraz:

$$Y_I - \frac{Y_{II} - Y_I}{X_{II} - X_I} X_I = Y_{II} - \frac{Y_{II} - Y_I}{X_{II} - X_I} X_{II} = d \dots 64b$$

wreszcie zważymy, że spólrzędne x i y są spólrzędnymi punktu bieżącego prostej L_p a x i y_1 spólrzędnymi punktu bieżącego prostej L_0 , to otrzymamy obrazy przekształconych α surowej funkcji statystycznej (nieznanej):

$L_p - f(x_1, x_2 \dots x_n)$ — na prostą $y = x$ 65
oraz β) wyrównanej funkcji empirycznej:

$$L_0 - \varphi(x_1, x_2 \dots x_n) - \text{na prostą } y_1 = bx + d. \dots 66$$

Jeżeli chodzi o porównanie — co do stopnia dokładności dwóch wzorów empirycznych, postępujemy tak samo i z drugim wzorem empirycznym, w wyniku czego otrzymamy równania trzech prostych:

1. $L_p - y = x$

2. $L_{0I} - y_1 = bx + d$

i 3. $L_{0II} - y_2 = b_1x + d_1,$

badając wzajemne położenie względem siebie prostych L_{0I} i L_p oraz L_{0II} i L_p .

We wzajemnym tem położeniu dwóch prostych L_0 i L_p mogą zajść cztery przypadki (rys. 8):

1. Prosta L_0 jest nachyloną do osi spólrzędnych (prostokątnych) pod kątem $\pi/4$ i przechodzi przez środek układu 0.

2. Prosta L_0 jest nachyloną do osi spólrzędnych pod kątem $\pi/4$ i nie przechodzi przez środek układu.

3. Prosta L_0 jest nachyloną do osi spólrzędnych pod kątem różnym od $\pi/4$ i przechodzi przez środek układu 0.

4. Prosta L_0 jest nachyloną do osi spólrzędnych pod kątem różnym od $\pi/4$ i nie przechodzi przez środek układu.

Przypadek pierwszy:

Dla prostej przechodzącej przez środek układu pod kątem 45° otrzymamy:

$$\text{tg } \alpha = b = 1,$$

oraz: $Y_I - b X_I = Y_{II} - b X_{II} = d = 0,$

z czego wynika:

$$Y_I = X_I \text{ i } Y_{II} = X_{II},$$

czyli dla punktu bieżącego prostej otrzymamy:

$$y_1 = x. \dots 67$$

Jest to przypadek doskonały, w którym surowa krzywa statystyczna będąca obrazem funkcji $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ pokrywa się w zupełności z obrazem wyrównanej funkcji empirycznej $\varphi(x_1, x_2 \dots x_n)$ czyli:

$$\varphi(x_1, x_2 \dots x_n) = f(x_1, x_2 \dots x_n). \dots 68$$

Stosując do tych dwóch pokrywających się krzywych przekształconych w powyższym przypadku na proste metodę inwaryjacyjną otrzymamy bez względu na wartość modułu L :

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = L^2 \varphi(x_1, x_2 \dots x_n),$$

a ponieważ wskaźnik niezmiennika t. zn. wykładnik modułu $\lambda = 0$, przeto f musi być równe φ .

Przy użyciu metody kowariacyjnej $s_{xy} = s_x^2$, czyli:

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = 1, \text{ oraz } \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \rho = 1.$$

a więc suma błędów:

$$B = s_y \sqrt{1 - \rho^2} = 0,$$

z czego znów wynika, że:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \varphi(x_1, x_2 \dots x_n).$$

Stosując wreszcie metodę korelacyjną otrzymamy dla tego przypadku:

$$\sigma_x = \sigma_y \text{ a } r = 1,$$

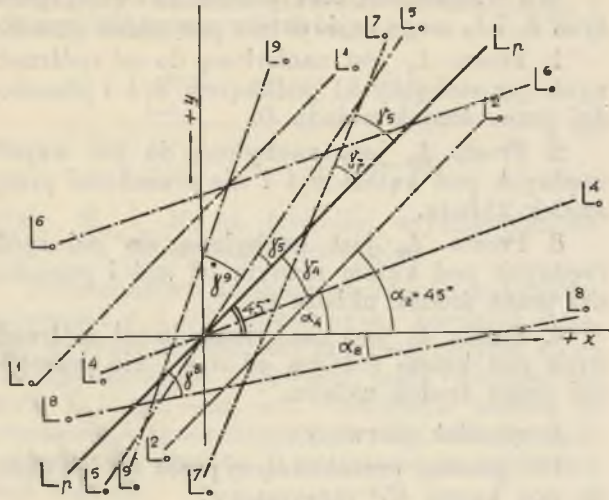
z czego wynika, że w równaniu prostych regresyj:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta = r \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 1,$$

a obie proste tworzą jedną $y = x$ czyli j. w. $f = \varphi$.

Należy tu zaznaczyć, że między obydwoma funkcjami φ i f nie zachodzi identyczność, lecz tylko równość, ponieważ pomimo, że suma błędów funkcji φ jest równą 0, może tu wystąpić dyspersja różna od dyspersji funkcji f .

2. Prosta L_0 (na ryc. 8, L_0^1 i L_0^2) jest nachyloną do osi spólrzędnych pod kątem 45° i nie przechodzi przez środek układu:



Ryc. 8.

wówczas wprowadzicie wyrażenie:

$$b = \frac{Y_{II} - Y_I}{X_{II} - X_I} = 1,$$

lecz drugi człon równania prostej L_0 :

$$d = Y_I - b X_I = Y_{II} - b X_{II} \neq 0,$$

a wartość jego może być ujemną lub dodatnią. Zależnie od tej wartości położenie prostej L_0 , będzie dwójakie (na ryc. 8 L_0^1 i L_0^2) albo a) prosta L_0^1 będzie leżała powyżej prostej podstawowej L_p a jej przebieg będzie równoległy do niej lub b) prosta L_0^2 będzie przebiegała równoległe i poniżej prostej L_p .

W pierwszym przypadku otrzymamy równanie prostej:

$$L_0^1 - y_{1a} = x + d_a,$$

a w drugim:

$$L_0^2 - y_{1b} = x - d_b \dots \dots \dots 70$$

Równoległy przebieg tych poszczególnych prostych L_0^1 i L_0^2 do prostej podstawowej L_p , łatwo udowodnić następująco:

Mając dane równania dwóch dowolnych prostych w układzie płaskim:

$$\begin{aligned} L_1 - y_1 - b_1 x - d_1 &= 0 \\ \text{i } L_2 - y_2 - b_2 x - d_2 &= 0 \end{aligned}$$

badamy położenie ich wspólnego punktu przecięcia D . Spółrzędne tego punktu będą:

$$x_D = \frac{d_1 - d_2}{b_2 - b_1} \text{ oraz } y_D = \frac{d_1 b_2 - b_1 d_2}{b_2 - b_1},$$

przyczem dla $b_2 = b_1$ spółrzędne te są nieskończenie wielkie a punkt przecięcia prostych L_1 i L_2 leży w nieskończoności, z czego wynika, że obie te proste zawierają ze sobą kąt $\gamma = 0$, czyli są do siebie równoległe.

W rozważanym przypadku 2. mamy dwie pary prostych o równaniach:

$$L_p - y = x \text{ i } L_0^1 - y_{1a} = x + d_a$$

$$\text{oraz } L_p - y = x \text{ i } L_0^2 - y_{1b} = x - d_b$$

a ponieważ dla pierwszej pary prostych L_p i L_0^1

$$b = b_a$$

a dla drugiej pary prostych L_p i L_0^2

$$b = b_b,$$

przeto proste L_0^1 i L_0^2 są równoległe do prostej podstawowej L_p oraz temsamem są wzajemnie do siebie równoległe.

Ponieważ dalej, prosta L_p jest obrazem przekształconej surowej funkcji statystycznej f a proste L_0^1 i L_0^2 są obrazami przekształconych wzorów empirycznych φ_1 lub φ_2 , przeto łatwo przeprowadzić, zapomocą tych prostych L_0^1 i L_0^2 , rektyfikację danych funkcji φ_1 lub φ_2 . Dla funkcji φ_1 otrzymamy zatem:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n) - d_1, \quad 71$$

zaś dla funkcji φ_2 otrzymamy:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \varphi_2(x_1, x_2 \dots x_n) + d_2. \quad 72$$

3. Prosta L_0 jest nachyloną do osi spółrzędnych pod kątem $\gamma \neq \pi/4$ i przechodzi przez środek układu (na ryc. 8 proste L_0^4 i L_0^5), wówczas:

$$b = \frac{Y_{II} - Y_I}{X_{II} - X_I} \neq 1, \text{ oraz } d = Y - b X = 0,$$

a równanie prostej L_0 będzie:

$$y_1 = b x. \dots \dots \dots 73$$

I tu mogą się zdarzyć dwa różnorakie przypadki położenia prostej L_0 względem prostej L_p , mianowicie: przy $\text{tg } \alpha > 1$ lub $\text{tg } \alpha < 1$.

Dla pierwszego przypadku otrzymamy prostą L_0 (na ryc. 8 L_0^5) tworzącą z osią ix ów kąt większy jak $\pi/4$ a tem samem kąt γ (na ryc. 8 γ_5) zawarty między prostymi L_0^5 i L_p będzie leżał ponad prostą L_p , nazwijmy go dodatnim (jest to rzeczczą konwencją) a w drugim przypadku $\alpha < \pi/4$ a kąt γ_4 (na ryc. 8 γ_4), nazwijmy go ujemnym, leży pod prostą podstawową L_p , która tworzy jego lewe ramię.

Oczywista rzecz, że dla wartości $\text{tg } \alpha = b = \infty$, $y_1 = \infty$, a prosta L_0 pokrywa się wówczas z osią y , zaś dla wartości $\text{tg } \alpha = b = 0$, $y_1 = 0$, a prosta L_0 przechodzi w oś ix ów, tworząc w jednym i drugim przypadku z podstawową prostą L_p kąt $\gamma = \pi/4$.

Szczegółową dyskusję tych ostatnich dwóch przypadków nie przeprowadza się, ponieważ przy badaniu wzorów empirycznych omawianym sposobem przypadki te nie wystąpią, a gdyby się pojawiły to należy takie wzory empiryczne odrzucić i ułożyć nowe o większej dokładności.

Ponieważ wartości rzędnych obydwóch prostych L_p i L_0 (na ryc. 8 L_0^4 i L_0^5 oraz L_p) przechodzących przez środek układu 0, są do siebie proporcjonalne, przeto możemy tu zastosować metodę współzmienników, mianowicie:

Daną funkcję ogólną:

$$\psi(a_1 y) = L^2 \psi(a_1 x)$$

przekształcamy formą linjową określoną wzorami:

$$x_1 = l y_1, \quad x_2 = l y_2 \dots x_n = l y_n$$

o module $L = l^n$ i otrzymujemy spółczynniki a_1 formy przekształconej:

$$a_1 = l^m \cdot a,$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b-1}{b+1} - \gamma,$$

czyli krótko jakąś funkcją dwu zmiennych:

$$\eta = \psi(D, \gamma), \quad 85$$

którą należałoby tak dobrać, aby.

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \eta \cdot \varphi(x_1, x_2 \dots x_n), \quad . 86$$

co jest rzeczą niemożliwą, ponieważ brak nam odnośnych warunków określających funkcję η . Możemy jednak inną drogą znaleźć związek między f i φ , a stanie się to wówczas, jeżeli oprócz danych dwóch szeregów liczb, mianowicie szeregu Y przedstawionego obrazem $y=x$, oraz szeregu Y_1 przedstawionego obrazem $y_1 = bx + d$, znajdziemy taki trzeci szereg Y_2 wyrażony wartościami szeregu drugiego Y_1 , którego obraz będzie również prostą przechodzącą przez środek układu O i nachyloną do obydwóch osi współrzędnych pod kątem $\pi/4$, czyli obraz tego nowego szeregu Y_2 będzie się pokrywał z obrazem szeregu podstawowego Y , uzyskanego z pomiarów.

Równanie tej nowej postej szeregu Y_2 będzie miało kształt:

$$y_2 = x, \quad 87$$

a wprowadzając tu wartości szeregu drugiego Y_1 , otrzymamy:

$$\psi(y_1) = y_2 = (y_1 - d) \frac{1}{b} = x = y, \quad . . 88$$

a tem samym *otrzymamy w przypadku ogólnym, bez względu na ilość zmiennych niezależnych badanych funkcji, za pomocą linjowych przekształceń zrównanie dwóch szeregów liczb, z których jeden przedstawia wyniki surowej funkcji statystycznej $f(x_1, x_2 \dots x_n)$, a drugi wyniki — odpowiadające tej nieznannej z kształtu funkcji statystycznej — wyrównanej funkcji empirycznej $\varphi(x_1, x_2 \dots x_n)$.*

Ostateczny kształt równania 88 będzie:

$$y = (y_1 - d) \frac{1}{b} 89$$

lub wyraźniej:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = [\varphi(x_1, x_2 \dots x_n) - d] \frac{1}{b}. \quad 90$$

Oczywista rzecz, że przy praktycznym zastosowaniu wyżej opisanych operacji matematycznych wystąpią drobne błędy wynikające z przekształceń prostych — podobnie jak przy użyciu metody korelacyjnej — oraz niedokładności w rachunkach powstałe z powodu zaokrąglenia poszczególnych wyników pośrednich. Suma tych błędów i niedociągnięć względnie przeciągnięć rachunków jest w prostym stosunku zależną od ilości spostrzeżeń t. j. od liczby n — nie odgrywa ona jednak poważniejszej roli i nie wywiera decydującego wpływu na stopień dokładności obliczonych wzorami empirycznymi przekształconymi sposobem wyżej opisanym.

Sumę tych błędów wyrażoną czynnikiem:

$$\mu = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n Y_{2i}} = 1 - \nu \quad 91$$

możemy zupełnie pominąć, jeżeli jej wartość bezwzględna nie przekracza 5‰ t. znaczy:

$$\nu = \left| \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n Y_{2i}} \right| \geq 0,995,$$

gdzie Y jest szeregiem statystycznym a Y_2 przekształconym szeregiem funkcji empirycznej, przyczem szereg statystyczny jest uporządkowany według wielkości liczb, wreszcie n = ilości spostrzeżeń.

Nie można pominąć tu uwagi, że *przy budowie wzorów empirycznych nie zawsze jest wskazany zbyt wielki stopień dokładności*, szczególnie, jeżeli w materiale statystycznym występuje znaczna dyspersja punktów (przekraczająca 100%). Odchylenia takie należy — przy ustalaniu formuły empirycznej — uwzględnić na równi z wszystkimi innymi odchyleniami, o ile przy tych spostrzeżeniach niema szczegółowych wskazówek dotyczących ich wyjątkowych wielkości. Uwzględniając je, czynimy te wprawdzie kosztem stopnia dokładności wobec mniejszych odchyień, szczególnie tam, gdzie wielkie odchylenia idą w jednym kierunku (operujemy bowiem sumami i średnimi arytmetycznymi), lecz tem samem ogólny wynik zbliżamy bardziej do obrazu przedstawionego materiałem statystycznym czyli do rzeczywistości.

Podana metoda analityczna do badania stopnia dokładności wzorów empirycznych jest elementarną, jasną, prostą i obrazową a zatem przejrzystą.

Można jej użyć: 1. do sprawdzenia stopnia dokładności wyników wzoru empirycznego w stosunku do wyników pomierzonych względnie spostrzeżonych t. j. do wyników surowej nieznannej funkcji statystycznej; 2. do porównania stopnia dokładności wyników dwóch danych funkcji empirycznych, wreszcie 3. do podwyższenia stopnia dokładności badanej funkcji empirycznej.

We wszystkich tych przypadkach możemy — zależnie od stopnia dokładności (wyrażonego np. w procentach), jaki przy rachowaniu zastosować pragniemy — ograniczyć odpowiednimi warunkami wzajemne położenie obydwóch prostych, mianowicie: prostej L_p będącej obrazem przekształconej funkcji statystycznej oraz prostej L_0 będącej obrazem przekształconej funkcji empirycznej.

W przypadku pierwszym ustalamy konwencjonalną największą dopuszczalną wartość kąta γ zawartego między oboma prostymi L_p i L_0 oraz położenie punktu przecięcia obydwóch prostych L_p i L_0 , w zależności od rodzaju wzoru empirycznego. Stopień dokładności będzie tu tem wyższy im mniejszy będzie kąt γ oraz im bliżej środka odcinków prostych L_p i L_0 ogra-

niczonych spólrzędniemi punktów największej i najmniejszej wartości szeregu spostrzeżeń — będzie leżał punkt D przecięcia się obydwóch tych prostych.

W przypadku drugim: z dwóch badanych wzorów empirycznych będzie ten dawał dokładniejsze wyniki, którego obraz L_0 z prostą podstawową L_p będzie zawierał mniejszy kąt γ , przy równych wartościach spólrzędnych punktów przecięcia się $D_1 = D_2$ obydwóch prostych badanych L_0 i L_0' z prostą L_p ; względnie przy równych kątach γ , będzie ten wzór dawał dokładniejsze wyniki, którego obraz L_0 przetnie prostą L_p bliżej jej środka odcinka ograniczonego spólrzędniemi punktów największej i najmniejszej wartości szeregu statystycznego Y .

W przypadku trzecim możemy stopień dokładności wzoru empirycznego dowolnie podnieść przekształcając daną funkcję empiryczną według wzoru 88:

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2 \dots x_n) \text{ na } y_2 = \psi(y_1),$$

z czego wynika, że:

$$\psi(y_1) = \psi[\varphi(x_1, x_2 \dots x_n)],$$

czyli:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \psi[\varphi(x_1, x_2 \dots x_n)] \cdot \nu, \quad 92$$

w czym f = surowej funkcji statystycznej, a φ = wyrównanej funkcji empirycznej.

Wzór 92 nie daje jednak w praktycznym użyciu wyników absolutnie ścisłych tylko przybliżone, a to z powodu całego szeregu błędów i nieścisłości popełnianych podczas rachowania (o czym wyżej była mowa). W wyjątkowych przypadkach, jeżeli prosta L_0' będąca obrazem funkcji ψ przechodzi przez środek układu, wówczas kąt γ' zawarty między prostami L_p i L_0' , równy jest zeru a spólrzędniemi $\nu = 1$. Jeżeli zaś kąt $\gamma' \neq 0$ jednakowoż zawsze bardzo mały w stosunku do kąta γ zawartego między prostami L_p i L_0 (będącymi obrazami przekształconych funkcji f i φ) to prosta L_0' nie przechodzi przez środek układu tylko jej punkt przecięcia z prostą L_p , zbliża się do niego i dlatego możemy spólrzędniemi ν przyjąć za spólrzędniemi proporcjonalności między rzędniemi prostej L_p i L_0' . Ta mała strata ścisłości niema żadnego znaczenia w praktycznym zastosowaniu opisanej metody.

W tabeli VII-mej podano przykład zastosowania metody analitycznej, obliczony już poprzednio w tabeli V-tej przy pomocy korelatów oraz w tabeli VI-tej; przy pomocy metody kowariacyjnej. Równocześnie obliczono dyspersje poszczególnych spostrzeżeń Y i im odpowiadających wyników obliczeń Y_1 .

Według wzorów 62 otrzymano spólrzędne punktów prostej przedstawiającej szereg liczb otrzymamy wzorem empirycznym $v_0 = Y_1$:

$$A_I - X_I = \frac{40.720}{30} = 1.357, \quad Y_I = \frac{42.495}{30} = 1.417$$

$$A_{II} - X_{II} = \frac{68.760}{30} = 2.292, \quad Y_{II} = \frac{68.318}{30} = 2.277.$$

Przez te dwa punkty przechodzi prosta L_0 wyrażona równaniem:

$$L_0 - y_1 = 0,9198x + 0,169,$$

Tabela VII.

p. L.	v_p $X=Y$	v_0 Y_1	v Y_2	$v_p - v = \Delta_1$		$v_0 - v = \Delta_2$		Uwaga
				+	-	+	-	
1	0,760	0,562	0,427	0,333	—	0,135	—	
2	1,010	1,275	1,202	—	0,192	0,073	—	
3	1,040	1,288	1,217	—	0,177	0,071	—	
4	1,050	1,267	1,194	—	0,144	0,073	—	
5	1,120	1,284	1,213	—	0,093	0,071	—	
6	1,230	1,310	1,240	—	0,010	0,070	—	
7	1,260	1,442	1,384	—	0,124	0,058	—	
8	1,260	1,571	1,524	—	0,264	0,047	—	
9	1,280	1,291	1,220	0,060	—	0,071	—	
10	1,290	1,437	1,379	—	0,089	0,058	—	
11	1,300	1,345	1,279	0,021	—	0,066	—	
12	1,300	1,413	1,352	—	0,052	0,061	—	
13	1,320	1,323	1,255	0,065	—	0,068	—	
14	1,350	1,370	1,317	0,033	—	0,053	—	
15	1,360	1,519	1,468	—	0,108	0,051	—	
16	1,380	1,061	0,970	0,410	—	0,091	—	
17	1,390	1,441	1,383	0,007	—	0,058	—	
18	1,420	1,453	1,396	0,024	—	0,057	—	
19	1,430	1,368	1,304	0,126	—	0,064	—	
20	1,430	1,368	1,305	0,125	—	0,063	—	
21	1,490	1,736	1,704	—	0,214	0,032	—	
22	1,500	1,643	1,603	—	0,103	0,040	—	
23	1,520	1,242	1,167	0,353	—	0,075	—	
24	1,520	1,585	1,539	—	0,019	0,046	—	
25	1,590	1,377	1,313	0,277	—	0,064	—	
26	1,590	1,830	1,787	—	0,197	0,043	—	
27	1,600	1,848	1,824	—	0,224	0,024	—	
28	1,610	1,299	1,229	0,381	—	0,070	—	
29	1,660	1,747	1,716	—	0,056	0,031	—	
30	1,660	1,837	1,813	—	0,153	0,024	—	
31	1,670	1,456	1,399	0,271	—	0,057	—	
32	1,700	1,613	1,570	0,130	—	0,043	—	
33	1,770	2,093	2,092	—	0,322	0,001	—	
34	1,800	1,742	1,710	0,090	—	0,032	—	
35	1,810	1,631	1,589	0,221	—	0,042	—	
36	1,850	2,303	2,320	—	0,470	—	0,017	
37	1,920	1,464	1,408	0,512	—	0,056	—	
38	2,010	1,832	1,808	0,202	—	0,024	—	
39	2,040	2,334	2,408	—	0,368	—	0,024	
40	2,060	1,814	1,788	0,272	—	0,026	—	
41	2,070	2,241	2,470	—	0,400	—	0,029	
42	2,120	1,820	1,795	0,325	—	0,025	—	
43	2,140	1,900	1,882	0,258	—	0,018	—	
44	2,210	2,542	2,580	—	0,370	—	0,038	
45	2,360	2,998	3,076	—	0,716	—	0,078	
46	2,440	2,163	2,174	0,266	—	—	0,006	
47	2,450	2,303	2,330	0,120	—	—	0,027	
48	2,450	2,483	2,516	—	0,066	—	0,033	
49	2,460	2,595	2,638	—	0,178	—	0,043	
50	2,470	2,233	2,244	0,226	—	—	0,011	
51	2,470	2,514	2,549	—	0,079	—	0,035	
52	2,510	2,242	2,258	0,252	—	—	0,016	
53	2,510	2,239	2,305	0,221	—	—	0,016	
54	2,520	2,424	2,452	0,068	—	—	0,023	
55	2,650	2,531	2,568	0,082	—	—	0,037	
56	2,650	2,361	2,383	0,267	—	—	0,022	
57	2,790	2,895	2,964	—	0,174	—	0,069	
58	2,890	3,086	3,171	—	0,281	—	0,085	
59	2,960	3,189	3,283	—	0,323	—	0,094	
60	3,010	3,152	3,243	—	0,233	—	0,091	
Σ	109,480	110,813	109,697	5,998	6,199	2,132	0,799	

Przykład ten sam jak w tab. V i VI. Sekundowa prędkość wody w rzece Dunaju.

kąta z prostą $L_p - y = x$ zawiera kąt $\gamma = 2^\circ 23'$. Obie te proste przecinają się w punkcie D o spólrzędnych:

$$X_D = D_x = \frac{0,169}{1 - 0,9198} = 2.107.$$

Punkt ten leży niedaleko środka odcinka prostej L_p ograniczonego spólrzędniemi o wartościach granicznych szeregu spostrzeżeń t. j. 0,76 i 3,01. Spólrzędne środka tego odcinka będą zatem:

$$X_s = Y_s = \frac{0,76 + 3,01}{2} = 1,885,$$

zatem różnica:

$$X_D - X_s = Y_D - Y_s = 2,107 - 1,885 = 0,222.$$

Gdy prostą L_0 przekształcimy wzorem 70 na prostą L_0' otrzymamy jej dwa punkty:

$$A'_I - X_I = 1,35733, \quad Y'_I = \frac{40,724}{30} = 1,35747$$

$$A'_{II} - X_{II} = 2,292, \quad Y'_{II} = \frac{68,973}{30} = 2,2991$$

i równanie:

$$L_0' - y_2 = 1,0074x - 0,0099,$$

wreszcie kąt, jaki zawiera z prostą L_p :

$$\gamma = 14' 15'',$$

a więc szereg Y_1 otrzymany zapomocą wzoru empirycznego $\varphi(x)$ przedstawiony obrazem L_0 , zbliżyliśmy (bez uwzględnienia sumy błędów) zapomocą przekształcenia na szereg Y_2 przedstawiony obrazem L_0' do danego szeregu statystycznego Y , przedstawionego obrazem L_p , którego kształt funkcji $f(x)$ nie jest znany.

Czynnik sumy błędów dla powyższego przykładu według wzoru 71, wynosi:

$$\mu = 1 - \frac{109,480}{1,09,697} = 0,00199$$

czyli średni błąd jednostkowy jest mniejszym od 2‰, a przybliżony współczynnik proporcjonalności:

$$\nu = \frac{109,480}{1,09,697} = 0,99801.$$

Przy dokładniejszym rachunku należałoby tu zastosować metodę kowariacyjną, przesuwając środek układu do punktu przecięcia się obydwóch prostych L_p i L_0' .

Ponieważ obie funkcje empiryczne y_1 i y_2 są ciągle, a funkcja y_2 jest przekształconą na prostą zbliżoną do prostej podstawowej możemy łatwo obliczyć dyspersje szeregów Y i Y_1 równaniami:

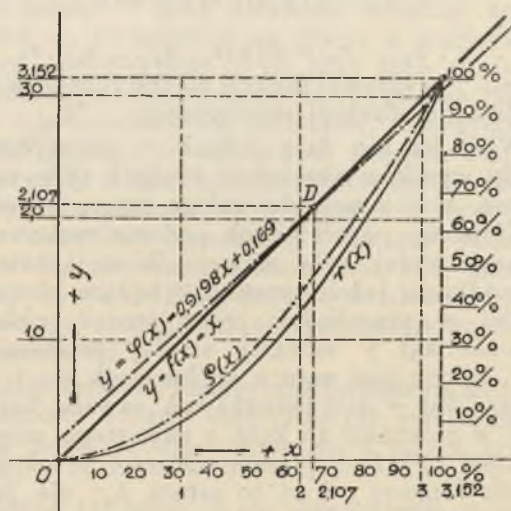
$$Y - Y_2 = \Delta_1, \\ Y_1 - Y_2 = \Delta_2,$$

przyczem różnica sum dodatnich i ujemnych dyspersyj przy uwzględnieniu błędów, dla szeregu Y surowej funkcji statystycznej $f(x)$, musi być równą 0, czyli:

$$\Sigma(+\Delta_1) - \Sigma(-\Delta_1) = 0.$$

Dyspersja funkcji empirycznej y_1 musi być mniejszą od dyspersji funkcji statystycznej y w przeciwnym bowiem razie wzór empiryczny zbudowano na fałszywych podstawach.

W powyższym przykładzie dyspersja funkcji empirycznej tylko w dziewięciu pozycjach (6, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18 i 24) jest większą od dyspersji szeregu statystycznego, we wszystkich innych pozycjach t. j. w pozostałych 51 pozycjach — jest ona mniejszą i wogóle z wyjątkiem pozycji 1-szej nie przekracza 10‰, co przy wzorach empirycznych dla średniej prędkości wody w łożyskach przyrodzonych — uważa się za wystarczający stopień dokładności.



Ryc. 9.

Tabela VIII.

L. pomiaru	Prosta $y=x$					Prosta $y_1 = 0,9198x + 0,169$				
	$x = x_k = v_p$		y_k		A_r jednostek pow.	v_0	y_1			A_e
	x_k	$x_k \%$	y_k	y_k			y_1	y_{1k}	$y_{1k} \%$	
1	0,760	25,25	0,289	6,38	0,02405	0,562	0,868	0,394	8,43	0,02143
2	1,010	33,55	0,510	11,26	0,01725	1,275	1,098	0,639	13,66	0,01539
5	1,120	37,21	0,627	13,84	0,00836	1,284	1,199	0,766	16,38	0,00746
6	1,230	40,86	0,756	16,69	0,00876	1,310	1,300	0,903	19,31	0,00781
14	1,350	44,85	0,911	20,11	0,00988	1,370	1,411	1,067	22,82	0,00880
22	1,500	49,83	1,125	24,83	0,01251	1,643	1,548	1,289	27,56	0,01114
31	1,670	55,48	1,394	30,77	0,01418	1,456	1,705	1,565	33,47	0,01263
35	1,810	60,13	1,638	36,15	0,01143	1,631	1,834	1,813	38,77	0,01020
38	2,010	66,78	2,020	44,59	0,01550	1,832	2,018	2,198	47,01	0,01381
42	2,120	70,43	2,247	49,60	0,00793	1,820	2,118	2,424	51,84	0,00707
45	2,360	78,40	2,785	61,48	0,01519	2,998	2,340	2,961	63,32	0,01355
51	2,470	82,06	3,050	67,33	0,00585	2,514	2,441	3,223	68,92	0,00521
52	2,650	88,04	3,511	77,51	0,00763	2,531	2,606	3,644	77,93	0,00702
57	2,790	92,69	3,892	85,91	0,00406	2,895	2,735	4,051	86,63	0,00380
58	2,890	96,01	4,176	91,96	0,00182	3,086	2,827	4,329	92,58	0,00176
59	2,960	98,34	4,381	96,71	0,00056	3,189	2,892	4,530	96,87	0,00047
60	3,010	100,00	4,530	100,00	0,00014	3,152	2,938	4,676	100,00	0,00012
					Σ					Σ
					0,16510					0,14767

Wreszcie podamy jeszcze przykład liczbowy (ten sam, który opracowano w tabelach V, VI i VII) stosując metodę krzywych σ koncentracyjnych opisanych w ustępie C niniejszej pracy.

Otrzymano tu stopnie koncentracji:

$$K_r = A_r : A = 0,1651 : 0,5 = 0,3302$$

$$K_e = A_e : A = 0,14767 : 0,5 = 0,29534,$$

oraz miarę koncentracji:

$$* = \frac{K_r}{K_e} = \frac{A_r}{A_e} = \frac{0,3302}{0,29534} = \frac{0,1651}{0,14767} = 1,11808,$$

następnie stopnie stałości:

$$S_r = 1 - K_r = 1 - 0,3302 = 0,6698$$

$$S_e = 1 - K_e = 1 - 0,29534 = 0,70466,$$

wreszcie miarę stałości:

$$\sigma = \frac{A - A_r}{A - A_e} = \frac{S_r}{S_e} = \frac{0,3349}{0,35233} = \frac{0,6698}{0,70466} = 0,95053.$$

W wyniku badań — także i przy użyciu tej metody — dążą miary koncentracji i sta-

łości do wartości jednostkowej, którą osiągają przy równych stopniach koncentracji względnie stałości.

Warunków stopnia dokładności wyrównanej funkcji empirycznej $\varphi(x)$ w stosunku do surowej funkcji statystycznej $f(x)$ — ułożyć tu jednak nie można, a to ponieważ stosunek stopni koncentracji względnie stałości nie zależy od wartości funkcji, tylko od proporcjonalności ich rzędnych. Przy doskonałej proporcjonalności miary koncentracji i stałości równają się jedności bez względu na wartość współczynnika proporcjonalności.

Metoda ta przeto nie odda nam tych usług przy badaniu krzywych empirycznych — z jakich korzystamy przy stosowaniu innych metod w niniejszej pracy opisanych, podano ją jednak z obowiązku sprawozdawczego.

Kończąc, dziękuję gorąco Panu Dr. Władysławowi Nikliborcowi, Docentowi U. J. K. i P. L., za przejrzenie niniejszej pracy przed oddaniem jej do druku.