JERZY MIHUŁOWICZ

PODRĘCZNIK ARYTMETYKI I ALGEBRY

DLA V KLASY GIMNAZJÓW

KSIĄŻNICA-ATLAS LWÓW-WARSZAWA

Ciąg dalszy na 3-ciej stronie okładki.

JERZY MIHUŁOWICZ

PODRĘCZNIK ARYTMETYKI I ALGEBRY

DLA V KLASY GIMNAZJALNEJ

WYDANIE SZÓSTE

Jana Cieszyńska

K S I Ą Ż N I C A - A T L A S
ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE
TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ., SP. AKC.
LWÓW — WARSZAWA
1929

170
Zakłady Graficzne Ski. Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

O RÓWNANIACH W OGÓLNOŚCI.

§ 1. Pojęcie równania warunkowego.

Dotąd wyobrażaliśmy sobie, że równanie powstaje w następujący sposób: Dana jest jakaś równość; w tej równości zastąpiono jakąś liczbę literą x; chodzi o odnalezienie tej liczby. (Porównaj kl. IV przykład 2 i 4 w § 17 rozdz. II). Istnienie pierwiastka równania nie ulega przy takiem pojmowaniu równania wątpliwości; przyjmujemy je jako założenie. Wskutek tego mogliśmy równania traktować jako równości i przekształcać, stosując twierdzenia: „Jeżeli do równych liczb dodamy równe, otrzymamy równe sumy" i t. p. Pojęcie równania obecnie rozszerzymy.

Niechaj będą dane dwie funkcje jednej zmiennej (lub kilku zmiennych): $f(x)$ i $g(x)$. Gdy za x podstawiać będziemy rozmaite wartości, funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą też przyjmowały wartości rozmaite. *Równanie* $f(x) = g(x)$ zawiera pytanie, czy istnieje taka wartość (jedna lub więcej) zmiennej x, dla której obie funkcje przyjmują równe wartości, a jeżeli istnieje, jaka jest ta wartość. Każda taka wartość nazywa się *pierwiastkiem* równania. Równanie może mieć jeden pierwiastek, lub więcej; może też nie mieć wcale pierwiastka.

Np.: Równanie $x = 3$ ma oczywiście tylko 1 pierwiastek: 3.
„ $x^2 + 6 = 5x$ ma 2 pierwiastki. 2 i 3 (sprawdź!).
„ $x^2 = -4$ nie ma wcale pierwiastka. Wszak niema takiej liczby, która podniesiona do kwadratu daje na wynik liczbę ujemną.

Wyjaśnimy na następującym przykładzie, że także praktyczne zagadnienia prowadzą do takiego pojmowania równania:

Z dwóch stacyj A i B, oddalonych od siebie o 8 *km*, wyjeżdżają równocześnie w tym samym kierunku (od A przez B i t. d.) dwa pociągi. Pociąg pierwszy przebywa w każdej minucie np. $\frac{3}{4}$ *km*, drugi np. $\frac{1}{2}$ *km*. Czy pierwszy pociąg dopędzi drugi i po ilu minutach stanie się to?

Przedstawmy odległość y każdego pociągu od stacji A jako funkcję czasu x:

Pierwszy pociąg oddala się od A w każdej minucie o $\frac{3}{4}$ *km*, zatem po x min. odległość jego od A wynosić będzie: $y=\frac{3}{4}x$. Odległość drugiego pociągu od A wynosi już w chwili rozpoczęcia ruchu 8 *km* i wzrasta w każdej minucie o $\frac{1}{2}$ *km* tak, że po x minutach odległość ta wyniesie: $y=8+\frac{1}{2}x$.

Zagadnienie zawiera pytanie, czy odległości obu pociągów od A będą kiedy równe i po jakim czasie, czyli czy dla jakiejś wartości x będą miały funkcje: $y=\frac{3}{4}x$ i $y=8+\frac{1}{2}x$ równe wartości. Według naszego określenia chodzi o rozwiązanie równania: $\frac{3}{4}x=8+\frac{1}{2}x$. Istnienie pierwiastka nie jest zgóry oczywiste; gdyby np. prędkości obu pociągów były równe, to oczywiście pierwszy pociąg nie dopędziłby nigdy drugiego, a równanie nie miałoby pierwiastka.

§ 2. Przekształcanie równań.

Wobec nowego pojmowania równania musimy poddać rewizji sposoby, które prowadziły do rozwiązywania równań.

Dwa równania nazywamy *równoważnemi*, jeżeli każda liczba, która sprawdza pierwsze równanie, sprawdza też i drugie, ale też i naodwrót, jeżeli każda liczba, sprawdzająca drugie równanie, sprawdza też i pierwsze. *Przekształcić* równanie znaczy zastąpić je innem, równoważnem. Przekształcanie równań polega na następujących twierdzeniach:

1. *Otrzymamy równanie równoważne, jeżeli do obu stron danego równania dodamy te same liczby lub wyrażenia.*

Dowód: Niech będzie dane równanie:

$$f(x)=g(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Dodajmy do obu stron wyrażenie $A(x)$. Otrzymamy:

$$f(x)+A(x)=g(x)+A(x) \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Jeżeli x_1 jest pierwiastkiem równania 1) to prawdziwa jest równość: $f(x_1)=g(x_1)$. Jeżeli do obu stron tej równości dodamy równe liczby $A(x_1)=A(x_1)$, otrzymamy równość: $f(x_1)+A(x_1)=$ $=g(x_1)+A(x_1)$, która oznacza, że x_1 jest też pierwiastkiem równania 2).

Jeżeli x_2 jest pierwiastkiem równania 2), to prawdziwa jest równość: $f(x_2)+A(x_2)=g(x_2)+A(x_2)$. Odejmując od obu stron tej równości $A(x_2)=A(x_2)$, otrzymamy równość $f(x_2)=g(x_2)$, która wskazuje, że x_2 jest pierwiastkiem równania 1).

Równania 1) i 2) są zatem równoważne.

2. *Otrzymamy równanie równoważne, jeżeli od obu stron danego równania odejmiemy te same liczby lub wyrażenia.*

Dowód wynika z poprzedniego, jeżeli zważymy, że odejmowanie można zawsze zastąpić dodawaniem liczby przeciwnej.

Przy dodawaniu (lub odejmowaniu) wyrażenia ułamkowego do (od) obu stron równania wskazana jest pewna ostrożność. Wiemy, że wyrażenia ułamkowe nie mają sensu dla wartości zmiennych, dla których mianownik staje się zerem (kl. IV rozdz. IV § 9). Jeżeli więc przy przekształcaniu dodajemy do obu stron równania wyrażenie ułamkowe, zawierające niewiadomą, należy po rozwiązaniu równania stwierdzić dodatkowo, czy dla znalezionej wartości niewiadomej dodane wyrażenie nie zatraca sensu. Gdyby tak było, to równania nie byłyby równoważne. Np.:

Równania: $x - \frac{1}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2}$ i $x = 2$, z których drugie powstaje z pierwszego przez dodanie do obu stron ułamka $\frac{1}{x-2}$ nie są równoważne. Drugie równanie ma pierwiastek 2, dla której to wartości dodany ułamek nie ma sensu; 2 nie jest pierwiastkiem pierwszego równania.

3. *Otrzymamy równanie równoważne, jeżeli obie strony danego równania pomnożymy przez tę samą liczbę różną od zera lub przez to samo wyrażenie różne od zera.*

Dowód: Niech będzie dane równanie:

$$f(x) = g(x) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 1)$$

Pomnóżmy obie jego strony przez $A(x) = A(x) \neq 0$. Otrzymamy:

$$f(x) \cdot A(x) = g(x) \cdot A(x) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 2)$$

Jeżeli x_1 jest pierwiastkiem równania 1), to $f(x_1) = g(x_1)$ jest równością. Mnożąc obie strony tej równości przez liczbę $A(x_1) \neq 0$, otrzymamy równość $f(x_1) \cdot A(x_1) = g(x_1) \cdot A(x_1)$, która wskazuje, że x_1 jest pierwiastkiem równania 2).

Jeżeli x_2 jest pierwiastkiem równania 2), to $f(x_2) \cdot A(x_2) = g(x_2) \cdot A(x_2)$ jest równością. Dzieląc obie strony przez $A(x_2) = A(x_2) \neq 0$, otrzymamy równość $f(x_2) = g(x_2)$, która wskazuje, że x_2 jest pierwiastkiem równania 1).

Równania 1) i 2) są zatem równoważne.

4. *Otrzymamy równanie równoważne, jeżeli obie strony danego równania podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera lub przez to samo wyrażenie różne od zera.*

Dowód wynika z poprzedniego, jeżeli dzielenie zastąpimy mnożeniem przez odwrotność.

Że zastrzeżenie, że liczba lub wyrażenie, przez które mnożymy czy dzielimy, nie może być zerem, jest konieczne, wyjaśnimy na kilku przykładach.

Gdybyśmy obie strony równania: $3(x-2) = 2(x-2)$ podzielili przez $x-2$, otrzymalibyśmy niedorzeczny wynik: $3 = 2$. Zdawaćby się mogło, że dane pierwotnie równanie jest niedorzeczne. Tymczasem rozwiązując je innym sposobem (rozwiąż!), znajdujemy pierwiastek $x = 2$, który rzeczywiście sprawdza równanie. Niedorzeczny wynik otrzymaliśmy dlatego, że obie strony równania dzieliliśmy przez $x-2$, a wyrażenie to ma właśnie wartość 0, jak z innego sposobu rozwiązania wynika. — Unikaj więc dzielenia nietylko przez 0, lecz także przez wyrażenia, co do których nie masz pewności, że mają wartość różną od zera!

Pomnożenie obu stron równania przez 0 sprawiłoby, że obie strony równania stałyby się identycznie równemi sobie, bo obie byłyby równe zeru. Nowe równanie sprawdzałoby się dla każdej wartości podstawionej za niewiadomą, a nietylko dla pierwiastka pierwotnego równania. Unikać należy również mnożenia obu stron równania przez wyrażenie, zawierające niewiadomą lub liczby ogólne, o którem nie wiemy z pewnością, że ma wartość różną od zera. Mnożenie takie (działanie, nie mające działania przeciwnego) może spowodować łatwo błąd, jak poucza następujący przykład:

Gdybyśmy pomnożyli obie strony równania: $5x - 1 = 2x + 5$ przez $x - 1$, otrzymalibyśmy równanie: $5x^2 - 6x + 1 = 2x^2 + 3x - 5$, które sprawdza się (sprawdź!) dla $x = 2$ i dla $x = 1$. Mylnem byłoby sądzić, że i pierwsze równanie ma te dwa pierwiastki. Pierwsze równanie sprawdza się dla $x = 2$, nie sprawdza się dla $x = 1$. Oba równania nie są równoważne, bo drugie powstało z pierwszego przez pomnożenie przez $x - 1$, które to wyrażenie, jak z rozwiązania drugiego równania wynika, ma wartość 0.

Zaznaczamy, że wszystkie powyższe twierdzenia odnoszą się również do równań z dwiema i więcej niewiadomemi. Aby się o tem przekonać, wystarczy w powyższych dowodach uważać funkcje: f, g, A za funkcje kilku zmiennych.

§ 3. Porządkowanie równań.

Mając dane do rozwiązania równanie, *porządkujemy* je najpierw, t. j. przekształcamy w następujący sposób:

1. *Wykonywamy naznaczone działania* (uwalniamy od nawiasów).

2. *Jeżeli pozostaną ułamki, uwalniamy od nich równanie,* mnożąc obie jego strony przez wspólny mianownik ułamków.

3. *Przenosimy wszystkie wyrazy na jedną stronę* tak, że po drugiej stronie zostaje 0.

4. *Redukujemy podobne jednomiany, względnie wyłączamy równe potęgi niewiadomych przed nawias i porządkujemy wyrazy malejąco według ich stopni ze względu na niewiadome.*

Otrzymane w ten sposób równanie nazywamy *uporządkowanem*. Po jednej stronie równania znajduje się wtedy wielomian, uporządkowany według potęg niewiadomej (niewiadomych), po drugiej zero.

Dalsze postępowanie zależy od ilości niewiadomych, jako też od stopnia równania. Przez *stopień równania* rozumiemy stopień wielomianu, znajdującego się po lewej stronie uporządkowanego równania, ze względu na niewiadome.

Tak np. są równania: $2x+3=0$, $2x+3y=0$ i t. p. równaniami stopnia pierwszego. Równania: $x^2y+x^2-y+7=0$, $x^3+x^2-2x-5=0$ są równaniami stopnia trzeciego.

§ 4. Rozwiązywanie równań stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

Jeżeli równanie ma po urządkowaniu postać: $ax+b=0$, to nazywa się równaniem stopnia pierwszego z jedną niewiadomą. Aby to równanie rozwiązać, przenosimy wyraz b na stronę prawą i otrzymujemy: $ax=-b$.

Można też, jeżeli wiemy, że dane równanie jest stopnia pierwszego, już przy porządkowaniu równania przenosić wyrazy zawierające niewiadomą na lewą stronę, a wyrazy wiadome na prawą.

Dalsze postępowanie zależy od wartości współczynnika a. Rozróżniamy następujące przypadki:

1. *Jeżeli* $a \neq 0$, dzielimy obie strony równania przez a i otrzymujemy: $x=-\frac{b}{a}$. Równanie to sprawdza się widocznie tylko wtedy, jeżeli za x podstawimy $-\frac{b}{a}$; ta wartość jest więc pierwiastkiem ostatniego równania, a tem samem i wszystkich poprzednich, z których to równanie przez przekształcenie powstało. W tym przypadku ma zatem równanie *zawsze jeden pierwiastek.*

2. Jeżeli $a=0$, rozróżniamy znowu dwa przypadki:

a) Jeżeli $a = 0$ i $b = 0$, to równanie $ax = -b$ (a więc i wszystkie poprzednie) sprawdza się dla każdej dowolnej wartości podstawionej za x, bo każda liczba, pomnożona przez 0, daje na wynik 0. Mówimy wtedy, że dane równanie jest *nieoznaczone*.

b) Jeżeli $a = 0$, a $b \neq 0$, to lewa strona równania $ax = -b$ jest zerem dla każdej wartości podstawionej za x, prawa zaś jest różna od zera. Niema takiej liczby, któraby, podstawiona za x, sprawdzała równanie. Mówimy, że dane równanie jest *sprzeczne*.

Przykład. Rozwiązać i sprawdzić równanie:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{10}{x+2} = 1.$$

Mnożymy przez $x^2 - 4$:	$x^2 + 2x - 10x + 20 = x^2 - 4$.
Porządkujemy:	$x^2 + 2x - 10x - x^2 = -4 - 20$.
Redukujemy:	$-8x = -24$.
Dzielimy przez -8:	$x = 3$.

Uwalniając równanie od ułamka, pomnożyliśmy obie strony przez $x^2 - 4$. Nie wiedzieliśmy, wykonując to działanie, czy wyrażenie to nie jest zerem. Otrzymane równania były równoważne z danem tylko pod warunkiem: $x^2 - 4 \neq 0$. Rozwiązawszy równanie znaleźliśmy, że $x = 3$; stwierdzamy więc dodatkowo, że $x^2 - 4 = 5$ ma wartość różną od zera, że więc mnożenie przez $x^2 - 4$ było dozwolone.

Każde następne równanie jest więc równoważne poprzedniemu. A że jedynym pierwiastkiem ostatniego równania jest 3, to ta liczba jest też jedynym pierwiastkiem równania danego.

§ 5. Rozwiązywanie układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi.

Układ dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi rozwiązywaliśmy trzema metodami: metodą podstawiania, metodą porównania i metodą równych współczynników. Wymagają one jednak uzasadnienia; nasuwa się bowiem pytanie, czy stosując je otrzymamy zawsze rozwiązanie danego układu równań, czy więc przez przekształcenia, używane w tych metodach, nie wprowadzamy nowych pierwiastków, lub czy nie zatracamy istniejących.

Tak np. aby rozwiązać metodą podstawiania układ:

$$3x + 2y = 12, \qquad 4x - 3y = -1,$$

wyraziliśmy z pierwszego równania y przez x i podstawiliśmy znalezione wyrażenie w drugiem równaniu. Otrzymane w ten sposób równanie rozwiązaliśmy ze względu na x, a potem rozwiązaliśmy pierwsze równanie ze względu na y, podstawiwszy w niem za x znalezioną wartość. Tak więc, zamiast rozwiązywać dany układ równań, rozwiązaliśmy układ:

$$4x - 3 \cdot \frac{12 - 3x}{2} = -1; \quad 3x + 2y = 12.$$

Chodzi o zbadanie, czy ten drugi układ ma takie same pierwiastki, jak pierwszy.

Dwa układy równań, mające takie same pierwiastki, nazywamy *równoważnemi*.

Uzasadnienie wszystkich trzech metod rozwiązania polega na na twierdzeniu:

Otrzymamy układ równań równoważny danemu układowi, jeżeli jedno z równań danego układu zastąpimy równaniem, które powstaje w ten sposób, że obie strony każdego z danych równań przez jakieś liczby (różne od zera) pomnożymy, a otrzymane równania stronami do siebie dodamy. Czyli: *Układy równań:*

$$\begin{cases} ax + by - c = 0 \\ a'x + b'y - c' = 0 \end{cases} \text{ i } \begin{cases} ax + by - c = 0 \\ m(ax + by - c) + n(a'x + b'y - c') = 0 \end{cases}$$

są równoważne, jeżeli $n \neq 0$.

Wykażemy najpierw, że każda para wartości x i y, sprawdzająca pierwszy układ równań, sprawdza i drugi. Pierwsze równanie drugiego układu jest identyczne z pierwszem równaniem pierwszego układu. Lewa strona drugiego równania drugiego układu jest sumą dwóch iloczynów, których drugie czynniki są identyczne z lewemi stronami równań pierwszego układu. Dla wartości x i y, które sprawdzają pierwszy układ, stają się te czynniki zerami, a więc staje się zerem cała lewa strona; drugie równanie drugiego układu sprawdza się również.

Przyjmijmy teraz, że drugi układ sprawdza się dla jakiejś pary wartości x i y. Pierwsze równanie pierwszego układu sprawdza się dla tych samych wartości, bo jest identyczne z pierwszem równaniem drugiego układu. Aby wykazać, że także i drugie równanie pierwszego układu sprawdza się dla tych wartości x i y, pomyślmy sobie te wartości podstawione w równaniach drugiego układu, które przez to sprawdzają się identycznie. Pomnóżmy obie strony pierwszej równości przez m i odejmijmy od drugiej, to otrzymamy: $n(a'x + b'y - c') = 0$, a po podzieleniu przez $n \neq 0$ obu stron: $a'x + b'y - c' = 0$, co wskazuje, że drugie równanie pierwszego układu sprawdza się dla tych samych wartości x i y. — Nasze twierdzenie jest więc udowodnione.

Uzasadnimy teraz kolejno poznane 3 metody rozwiązywania układu równań:

1. *Metoda podstawiania.* Chodzi o uzasadnienie, że układy równań:

$$\begin{vmatrix} ax+by-c=0 \\ a'x+b'y-c'=0 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} ax+by-c=0 \\ a'x+b' \cdot \dfrac{c-ax}{b}-c'=0 \end{vmatrix}$$

są równoważne.

Pierwsze równania obu układów są takie same. Drugie równanie drugiego układu otrzymamy, mnożąc obie strony pierwszego równania pierwszego układu przez $-\dfrac{b'}{b}$ i dodając stronami do drugiego. (Wykonaj rachunek!). Według twierdzenia o równoważności układów równań oba układy są równoważne. Oczywiście musi być $b \neq 0$.

2. *Metoda porównania* nie różni się istotnie od metody podstawiania. Wszak przy niej również podstawiamy wyrażenie znalezione dla y z pierwszego równania w drugiem równaniu, któremu nadajemy postać $y=\dfrac{c'-a'x}{b'}$. Oczywiście musi być $b \neq 0$ i $b' \neq 0$.

3. *Metoda równych współczynników* znajduje bezpośrednie uzasadnienie w twierdzeniu o równoważności układów równań.

Przez zastosowanie wymienionych metod rozwiązania sprowadzamy rozwiązanie układu równań z dwiema niewiadomemi do rozwiązania układu dwu równań, z których jedno zawiera tylko jedną niewiadomą. Równanie takie, o ile współczynnik przy niewiadomej nie jest zerem (co w każdym szczególnym przykładzie okazuje się bezpośrednio przy rachunku), ma jeden i tylko jeden pierwiastek. Gdy ten pierwiastek podstawimy w drugiem równaniu, otrzymamy do wyznaczenia drugiej niewiadomej znów równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą. O ile współczynnik przy niewiadomej nie jest zerem, ma i to równanie jeden i tylko jeden pierwiastek. *Przy powyższych zastrzeżeniach* powiemy zatem:

Układ równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi ma jedno i tylko jedno rozwiązanie.

Ćwiczenia.

1. W następujących równaniach uważać oddzielnie lewą, a oddzielnie prawą stronę równania za funkcję zmiennej x i przedstawić graficznie obie funkcje na jednym rysunku. Rozwiązać następnie równanie i wyjaśnić, jakie znaczenie geometryczne ma pierwiastek równania.

a) $2x = x - 1$; *b)* $4 - x = \frac{1}{2}x + 1$;

c) $3 - \frac{1}{2}x = 2x - 2$; *d)* $\frac{2}{3}x + 1 = \frac{1}{3}x + 2$;

e) $5 - x^2 = 2 - (x - 1)^2$; *f)* $(x - 1)^2 = x^2 - x - 1$.

2. Rozwiązać równania:

a) $(2x + 2)^2 - (2x - 3)^2 = 1 - 6(2 - 3x)$;

b) $(3x - 4)^2 - (x + 7)(3x - 5) = 6x(x - 1)$;

c) $(x + 4) : (x - 2) = (x - 16) : (x + 2)$;

d) $(4x + 1\frac{1}{2}) : (x + 1) = (4x - 1\frac{1}{2}) : x$;

e) $3x - \frac{5x - 4}{6} = 7 - \frac{7x - 6}{4}$; *f)* $\frac{x + 4}{12} - \frac{x - 2}{9} = 3 + \frac{x}{8}$;

g) $\frac{18x - 23}{21} - \frac{3x - 40}{14} - \frac{x - 2}{4} = 2$;

h) $5x - \{\frac{5}{4}x + \frac{1}{3}[3x - \frac{1}{2}(x + \frac{2}{3})]\} = \frac{5}{3}$;

i) $\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\left\{x - \frac{1}{4}\left[\frac{x}{3} - 2\left(x + \frac{1}{6}\right)\right]\right\} = 1$;

j) $\frac{5}{6x - 12} - \frac{1}{4x - 8} = \frac{5}{4} - \frac{3}{2x - 4}$;

k) $\frac{7}{24x - 12} - \frac{2}{18x - 9} = \frac{10}{9} - \frac{3}{8x - 4}$;

l) $\frac{3x^2 + 3}{x^2 + x} + \frac{3}{x + 1} - \frac{2}{x^2 - 1} = 3$; *m)* $\frac{4}{x^2 - 1} + \frac{3}{x} = \frac{3}{x - 1}$;

n) $\frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{1}{x}$; *o)* $\frac{3}{x - 2} - \frac{1}{x - 3} = \frac{2}{x - 1}$;

p) $\frac{2x}{x - 2} - \frac{x}{x - 4} = \frac{x + 4}{x - 2} - \frac{6}{x - 6}$; *r)* $\frac{2x + 3}{x + 1} - \frac{x}{x + 2} - \frac{3}{x + 3} = 1$;

s) $\frac{1}{x} - \frac{5}{3x^2 + 3x} + \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 4x} = \frac{1}{2}$;

t) $\frac{x + 14}{x^2 - 1} - \frac{6}{x^2 - x} - \frac{x + 3}{x^2 + x} = \frac{6}{x^2}$;

u) $\frac{2(x^2 - 2)}{(x - 2)^2} - \frac{8(x + 1)}{x^2 + 2x} = 3 - \frac{x^2 - 32}{x^2 - 4}$;

w) $\frac{1}{(2x - 1)^2} + \frac{5}{(2x + 1)^2} = \frac{6}{4x^2 - 1}$;

x) $\frac{4x}{(x - 1)^3} + \frac{4x - 11}{(x - 1)^2} - \frac{5}{x^2 - 1} = \frac{4}{x + 1}$;

y) $\frac{x^2 - 2}{x^3 + 1} + \frac{2x^2 + 3x}{(x + 1)^2} = 2$; *z)* $\frac{x^2 + 2}{x^3 - 1} - \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x + 1}$.

3. Rozwiązać układy równań:

a) $\frac{x+y}{6}-\frac{y-x}{4}=1,$
$\frac{2x-y}{3}-\frac{x-3y}{2}=1;$

b) $\frac{x+2y}{4}-\frac{x+2}{12}=\frac{y+1}{3},$
$\frac{x-1}{3}-\frac{y+1}{2}=\frac{x-2}{6};$

c) $x=\frac{3}{4}(x-3y-4),$
$y=\frac{2}{3}(x+5y+1);$

d) $y+\frac{2}{3}(x+2y+2)=0,$
$x-\frac{1}{4}(1-y-x)=0;$

e) $\frac{5x+y+1}{2x+4y}+\frac{3x-y+2}{3x+6y}=1,$
$20x+7y=34;$

f) $\frac{x+5}{x+1}-\frac{2}{y-2}=1,$
$5x-3y=3;$

g) $x:y=\frac{3}{4}:\frac{5}{6},$
$5{\cdot}2y+2{\cdot}5x=14{\cdot}9;$

h) $(x+1{\cdot}5):(y+0{\cdot}6)=3:1,$
$2x+5y=27;$

i) $(3x-5y-6):(2x+y+1{\cdot}4):(x+y+2{\cdot}4)=15:5:3;$

j) $\frac{7x-4y}{6x-12y}-\frac{6y+1}{4x-8y}=1,$
$\frac{3x+2}{x}-\frac{2y+1}{2y}=2;$

k) $\frac{x+y}{x+y+1}+\frac{5}{2x-3}=1,$
$\frac{7x-6}{6x-12y}-\frac{5y-2}{4x-8y}=1;$

l) $\frac{x(2x+3)}{x^2-y^2}-\frac{x}{x-y}=\frac{x+1}{x+y},$
$\frac{2x+1}{x+y}-\frac{x^2-y^2-3}{x^2+2xy+y^2}=1;$

m) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{y+1}{y-1}=2,$
$\frac{x^2-1}{x}-\frac{3y(x-4)}{3y-1}=4-\frac{x}{3y-1};$

n) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=4,$
$\frac{3}{x}-\frac{8}{y}=5;$

o) $\frac{18}{x-y}-\frac{25}{x+y}=1,$
$\frac{3}{x-y}+\frac{25}{x+y}=6;$

p) $\frac{x-3}{2y+4}+\frac{x+1}{6y+3}=3,$
$\frac{5x-15}{y+2}-\frac{6x+6}{2y+1}=2;$

r) $\frac{y+2}{5x-5}+\frac{2x}{y+1}=2,$
$\frac{y+2}{2x-2}-\frac{x}{y+1}=2;$

s) $\frac{2}{x+1}-\frac{3}{y-1}=10,$
$\frac{8}{x+1}+\frac{1}{y-1}=1;$

t) $\frac{5x-20y}{6x+30}-\frac{3x}{4y-4}=3, \quad \frac{2x-8y}{3x+15}-\frac{3x}{2y-2}=2.$

4. *a)* Za posłańcem, idącym z prędkością $4\ \frac{km}{godz.}$, wysłano o $1\frac{1}{2}$ godz. później drugiego posłańca, idącego z prędkością $5\frac{1}{2}\ \frac{km}{godz.}$; kiedy drugi posłaniec dopędzi pierwszego?

b) Za posłańcem, idącym z prędkością $5\ \frac{km}{godz.}$, ma być wysłany posłaniec konny, jadący z prędkością $12\ \frac{km}{godz.}$. O ile później może wyjechać posłaniec konny, jeżeli ma posłańca pieszego dopędzić za 1 godz. 15 min, od chwili swego wyjazdu?

c) Za posłańcem, przebywającym 42 *km* dziennie wysłano o dwa dni później drugiego z żądaniem, aby pierwszego dopędził po 6 dniach. Z jaką prędkością musi jechać drugi posłaniec?

d) O godz. 5-tej rano wysłano z A posłańca, idącego z prędkością $4\frac{1}{2}\ \frac{km}{godz.}$, z ważną wiadomością do B, oddalonego od A o $19\frac{1}{2}$ *km.* O godz. 7-mej zaszła potrzeba odwołania tego posłańca. Wysłano więc za nim drugiego posłańca, który ma pierwszego dopędzić w chwili, gdy ten przybędzie do B. Z jaką prędkością musi jechać drugi posłaniec?

5. *a)* Za posłańcem pieszym, idącym z prędkością $75\ \frac{m}{min.}$, wysłano posłańca konnego, jadącego z prędkością $200\ \frac{m}{min.}$, w chwili, gdy posłaniec pieszy uszedł już 3 *km.* Kiedy posłaniec konny dopędzi pieszego?

b) Po ilu latach zrównają się kapitały 1850 *zł* i 1700 *zł*, jeżeli pierwszy jest złożony na $4\frac{1}{2}\%$, a drugi na 6%?

6. *a)* Kapitały 700 *zł* i 1300 *zł* złożono na 5% i 6%; po ilu latach będzie drugi kapitał 2 razy większy od pierwszego?

b) Ojciec ma 44 lat, a syn 12; po ilu latach będzie ojciec 2 razy starszy od syna? kiedy będzie 5 razy starszy?

c) Ojciec ma lat 40, a dwaj jego synowie 10 i 7; po ilu latach będzie miał ojciec tyle lat, ile obaj synowie razem?

7. *a)* Ze stacji A wyjeżdża pociąg o godz. 8-mej do stacji B, z B zaś wyjeżdża do A pociąg o godz. 8 min. 6. Kiedy spotkają się, jeżeli oba poruszają się z jednakową prędkością $0{\cdot}6 \frac{km}{min.}$, a odległość $AB = 18$ *km*? Jak daleko od A spotkają się?

b) Ze stacyj A i B, oddalonych od siebie o 22 *km*, wyjeżdżają naprzeciw siebie równocześnie dwa pociągi; pierwszy jedzie z prędkością $26 \frac{km}{godz.}$, drugi z prędkością $40 \frac{km}{godz.}$. Kiedy spotkają się? Jak daleko od A spotkają się?

ROZDZIAŁ II.

PROPORCJONALNOŚĆ I FUNKCJA LINJOWA.

A) PROPORCJONALNOŚĆ PROSTA.

§ 1. Określenie i algebraiczne przedstawienie.

Związek, jaki zachodzi pomiędzy ceną towaru a jego ilością, między drogą a czasem, w którym tę drogę odbyto ruchem jednostajnym, między ilością robotników a należną im zapłatą, między czasem pracy a płacą i t. p., nazywamy *proporcjonalnością prostą*. Zależność ta objawia się tem, że gdy wartość jednej zmiennej zwiększy się 2, 3, 4,... razy, to wartość drugiej zmiennej zwiększy się także 2, 3, 4,... razy.

Dwie zmienne nazywamy *wprost proporcjonalnemi*, jeżeli są tak od siebie zależne, że gdy wartość jednej zmiennej zwiększy (zmniejszy) się bezwzględnie n razy, to wartość drugiej zmiennej zwiększy (zmniejszy) się bezwzględnie także n razy.

By zależność tę zbadać, ułóżmy tabelki w następujących przykładach: Przedstawić cenę y towaru jako funkcję ilości x, jeżeli 1 *kg* kosztuje: 1) ½ zł, 2) 2 zł, 3) 3 zł, 4) a zł. Otrzymamy:

1.	x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	....
	y	...	-1	$-0{\cdot}5$	0	$0{\cdot}5$	1	$1{\cdot}5$	2	....
2.	x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	....
	y	...	-4	-2	0	2	4	6	8	....
3.	x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	....
	y	...	-6	-3	0	3	6	9	12	....
4.	x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	....
	y	...	$-2a$	$-a$	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	....

Przypatrując się uważnie tym tabelkom, zauważymy, że w każdym przykładzie każda liczba drugiego zbioru powstaje przez pomnożenie odpowiedniej liczby pierwszego zbioru przez tę samą liczbę (w 1. przykładzie przez $\frac{1}{2}$, w 2. przez 2, w 3. przez 3, w 4. przez a). Funkcje powyższe przedstawią się więc wzorami: $y=\frac{1}{2}x$, $y=2x$, $y=3x$, $y=ax$. Naodwrót, nietrudno stwierdzić, że wzór $y=ax$ wyraża, że gdy x zwiększymy n razy, to y zwiększa się również n razy. Zatem:

Proporcjonalność prosta wyraża się wzorem: $y=ax$, w którym a oznacza liczbę w każdym przykładzie inną, lecz w jednym przykładzie stałą.

Jeżeli o dwóch wielkościach wiemy, że są wprost proporcjonalne, to zależność ich możemy wyrazić wzorem: $y=ax$. Aby z tego wzoru móc obliczyć, jaka wartość y odpowiada każdej wartości x, musimy znać wartość stałej a.

Stała a, która dokładnie określa proporcjonalność, nazywa się *współczynnikiem proporcjonalności*. Jest to liczba, przez którą należy pomnożyć liczbę x, aby otrzymać odpowiednią liczbę y. Zatem:

Współczynnik proporcjonalności obliczamy, dzieląc dowolną wartość zmiennej y przez odpowiednią wartość zmiennej x.

Obliczając tym sposobem współczynnik proporcjonalności z liczb $x=1$ i odpowiedniego y (tab. 4, str. 1), znajdziemy:

Współczynnik proporcjonalności równa się wartości zmiennej y, która odpowiada wartości $x=1$.

Tak więc oznacza współczynnik proporcjonalności w tabelkach na str. 1 cenę 1 *kg* towaru.

§ 2. Graficzne przedstawienie.

Przedstaw graficznie przy pomocy tabelek na str. 1 funkcje: $y=\frac{1}{2}x$, $y=2x$ i $y=3x$! Z rysunku zauważymy, że proporcjonalność prostą przedstawia prosta, przechodząca przez początek układu współrzędnych. Skoro tak jest, to przy graficznem przedstawieniu tej funkcji wystarczy uwzględnić tylko jedną (którąkolwiek) parę odpowiadających sobie w tabelce wartości x i y, wyznaczyć punkt, mający te liczby za współrzędne, i wykreślić przez ten punkt i przez początek układu współrzędnych prostą. Wszystkie inne punkty, odpowiadające innym parom wartości x i y, leżą na tej prostej.
Aby w szczególności przedstawić graficznie funkcję: $y=ax$, wyrażoną także tabelką 4 na str. 1, zauważymy, że wartości $x=1$ odpowiada $y=a$. Wyznaczamy więc punkty: $O(0,\ 0)$ i $A(1,\ a)$ (fig. 2) i kreślimy przez nie prostą OA. Ta prosta przedstawia funkcję: $y=ax$.

Proporcjonalność prostą, wyrażoną wzorem: $y = ax$, przedstawia prosta, przechodząca przez początek układu współrzędnych i przez punkt A (1, a).

Ze sposobu kreślenia prostej OA wynika, zgodnie z końcowem twierdzeniem w § 1, geometryczne znaczenie współczynnika proporcjonalności:

Współczynnik proporcjonalności równa się rzędnej punktu prostej, którego odcięta równa się jedności.

Fig. 1 przedstawia funkcję: $y = ax$ dla różnych wartości a. Z rysunku zauważymy, że wielkość współczynnika proporcjonalności pozostaje w związku z kątem, jaki prosta, przedstawiająca proporcjonalność tworzy z osią X.

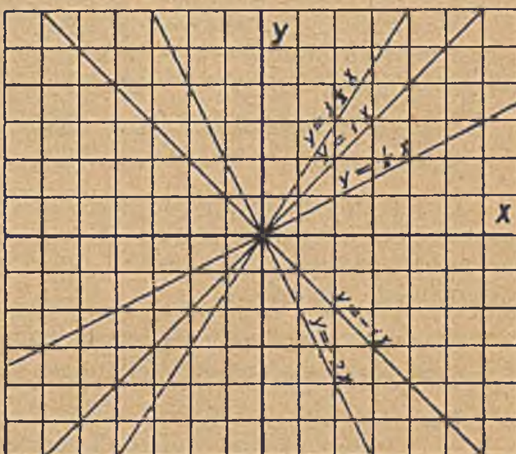

Fig. 1.

Aby związek ten wygodnie wyrazić, wprowadzamy następujące określenie kierunku obrotu: Każdą prostą można obrócić na płaszczyźnie około dowolnego punktu leżącego na niej, albo w kierunku przeciwnym do kierunku, w którym poruszają się wskazówki zegarka, położonego na płaszczyźnie, albo w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek. Pierwszy kierunek nazywać będziemy dodatnim, drugi ujemnym. Uwzględniając to określenie kierunku obrotu i znaczenie współczynnika proporcjonalności, odczytamy z fig. 1:

Jeżeli $a = 0$, to prosta przedstawiająca proporcjonalność nakrywa oś X. — Jeżeli a przyjmuje coraz większe wartości dodatnie, to prosta odchyla się coraz bardziej od osi X w kierunku dodatnim. — Jeżeli a przyjmuje coraz większe (bezwzględnie) wartości ujemne, to prosta odchyla się coraz bardziej od osi X w kierunku ujemnym.

Odchylenia te wzrastają początkowo szybko (dla $a = 1$ kąt wynosi 45^0), później powoli, nie dochodzą jednak nigdy do 90^0.

§ 3. Przebieg funkcji: $y = ax$.

1. Z geometrycznego przedstawienia proporcjonalności prostej odczytujemy, że y rośnie, gdy x rośnie, a maleje, gdy x maleje, jeżeli współczynnik proporcjonalności jest dodatni. Gdy ten współczynnik jest ujemy, to y maleje, gdy x rośnie, a rośnie, gdy x maleje.

Do tego samego wyniku dojdziemy, badając wzór: $y = ax$. Niech x_1 i x_2 oznaczają dwie wartości zmiennej x, przyczem niech będzie $x_1 < x_2$. Wartości funkcji, odpowiadające tym wartościom zmiennej x, oznaczmy y_1 i y_2 tak, że: $y_1 = ax_1$, a $y_2 = ax_2$. Ponieważ chodzi nam o zbadanie, czy $y_2 > y_1$, czy $y_2 < y_1$, tworzymy różnicę:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 = a\,(x_2 - x_1).$$

Ponieważ $x_2 - x_1 > 0$ według założenia, to iloczyn $a\,(x_2 - x_1)$ będzie dodatni, jeżeli $a > 0$, a ujemny, jeżeli $a < 0$. W pierwszym przypadku będzie $y_2 > y_1$, w drugim $y_2 < y_1$. Zatem:

Funkcja $y = ax$ rośnie ze wzrostem x, jeżeli $a > 0$, a maleje, jeżeli $a < 0$.

2. Z faktu, że proporcjonalność prosta przedstawia się linją prostą, wysnuwamy ważną własność tej funkcji. Linja prosta wznosi się (opada) równomiernie; zatem i funkcja $y = ax$ rośnie (maleje) równomiernie. To znaczy:

Równym przyrostom zmiennej x odpowiadają równe między sobą przyrosty (ubytki) zmiennej y.

Ścisłe uzasadnienie tego twierdzenia wynika z fig. 2. Niech x_1, y_1 i x_2, y_2 będą dwiema parami odpowiadających sobie wartości

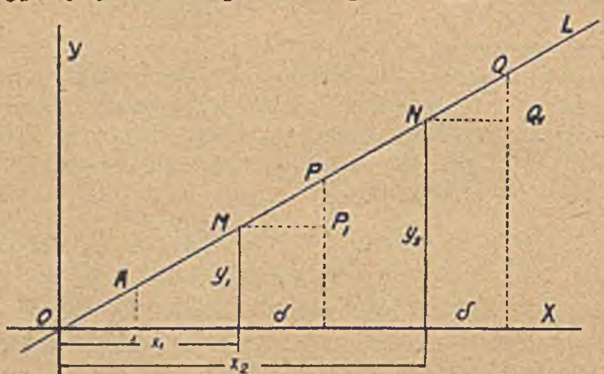

Fig. 2.

zmiennej niezależnej i funkcji: $y = ax$, przedstawionej prostą OA. Jeżeli tak x_1, jako też x_2 powiększymy o δ, to y_1 i y_2 powiększą się o PP_1 względnie o QQ_1. Ponieważ $\triangle MPP_1 \cong NQQ_1$ (dlaczego?), to $PP_1 = QQ_1$, a więc rzeczywiście równym przyrostom δ zmiennej x odpowiadają równe przyrosty PP_1 i QQ_1 zmiennej y.

Gdybyśmy dobrali $\delta = 1$, to $\triangle MPP_1 \cong \triangle NQQ_1 \cong \triangle OA1$. Z przystawania tych trójkątów wynika: $PP_1 = QQ_1 = A1 = a$. Zatem:

Współczynnik proporcjonalności wyraża przyrost (ubytek) zmiennej y, gdy zmienna x wzrasta o 1.

Takie same wyniki otrzymamy, badając wzór: $y = ax$. Niech x_1, y_1 i x_2, y_2 oznaczają dwie pary odpowiadających sobie wartości tak, że $y_1 = ax_1$, $y_2 = ax_2$. Przyrost funkcji, gdy x rośnie od x_1 do x_2, wynosi $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$. Ilekroć różnica obu wartości x jest ta sama, to i różnica obu wartości y jest taka sama; tę ostatnią otrzymujemy bowiem, mnożąc różnicę obu wartości x przez stałą liczbę a. Jeżeli w szczególności $x_2 - x_1 = 1$, to $y_2 - y_1 = a$ zgodnie z wynikiem badania geometrycznego.

Przykład: Cena sukna zwiększa się zawsze o tę samą ilość zł, gdy ilość m sukna wzrasta o tę samą ilość. Gdy ilość m sukna wzrasta o 1, to cena wzrasta o cenę jednego m (współcz. prop.).

§ 4. Ruch jednostajny.

Jako przykład proporcjonalności prostej rozpatrzymy ruch jednostajny.

Przez *ruch jednostajny* rozumiemy ruch, przy którym ciało w równych, dowolnie małych odstępach czasu odbywa równe drogi. Wskutek tego określenia i określenia proporcjonalności prostej (§ 1) droga s, przebyta przez ciało w czasie t, jest wprost proporcjonalna do czasu t, a więc $s = c \cdot t$.

Współczynnik proporcjonalności c oznacza (końcowe twierdz. w § 1 i § 3) drogę, jaką ciało przebywa w jednostce czasu. Drogę tę uważamy za miarę prędkości ciała i nazywamy krótko *prędkością*.

Wartość c zależy, jak wogóle wartość współczynnika proporcjonalności, od doboru jednostek, w jakich mierzymy czas i drogę. Np.: Jeżeli ciało przebywa ruchem jednostajnym w 2 godzinach drogę 36 *km*, to ruch jego opiszemy wzorem: $s = ct$. Mierząc t w godzinach, a s w *km*, znajdziemy $c = \frac{36}{2} = 18$ (§ 1); gdybyśmy mierzyli s w metrach, a t w sekundach, znaleźlibyśmy $c = \frac{36000}{7200} = 5$ i t. p. Aby uniknąć nieporozumienia, dajemy prędkości miano i piszemy:

$c = 18 \frac{km}{\text{godz.}}$, $c = 5 \frac{m}{\text{sek.}}$ (czytaj: 18 *km* na godz., 5 *m* na sek.).

Funkcję $s = ct$ przedstawiamy graficznie, przedstawiając t jako odcięte, a s jako rzędne. Miejscem geometrycznem równania $s = ct$ jest prosta, przechodząca przez początek układu współrzędnych.

Przykład. Przez stację A (Fig. 3 *a*) przejeżdża o godz. 12-tej pociąg, poruszający się ruchem jednostajnym z prędkością $\frac{3}{4}\,\frac{km}{min.}$ w kierunku do B.

Odległość jego s od stacji A wyrazi się wzorem $s = \frac{3}{4}t$, albo graficznie prostą L (Fig. 3 *b*), jeżeli jednostki na osi X oznaczają minuty, a jednostki na osi Y kilometry.

Z rysunku możemy odczytać, że odległość pociągu od stacji A wynosić będzie po 2 min. $1\frac{1}{2}$ *km*, po 4 min. 3 *km* i t. d. — Kreśląc prostą L, nadaliśmy zmiennej t także wartości ujemne. Czy wartości ujemne t mają jednak znaczenie praktyczne? Z figury odczytamy, że dla $t = -2$, $s = -1\frac{1}{2}$, dla $t = -4$, $s = -3$ i t. d. Ponieważ dodatnie wartości s oznaczają odległość pociągu od A w kierunku ku B, to ujemne wartości s będą oznaczały odległość pociągu od A w kierunku ku C. Ponieważ wartościom $s = -1\frac{1}{2}$ *km*, $s = -3$ *km* i t. d. odpowiadają wartości $t = -2$ min., $t = -4$ min., i t. d., a w odległościach tych od A znajdował się pociąg przed 2 min., 4 min., i t. d. przed godziną dwunastą, to ujemne wartości czasu uważać możemy za ilości minut przed godziną dwunastą. W ogólności:

Fig. 3 *a*.

Przy ruchu jednostajnym uważamy czas przyszły (ilość minut po chwili, od której czas liczymy) za dodatni, a czas ubiegły (ilość minut przed chwilą, od której czas liczymy) za ujemny.

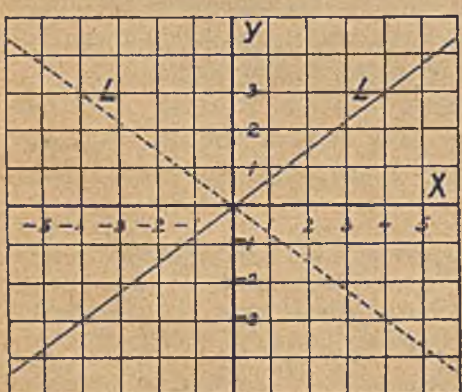

Fig. 3 *b*.

Wróćmy do naszego przykładu, uzupełniając go następującym obrazem: Równocześnie z pierwszym pociągiem, t. j. o godz. 12-tej przejeżdża przez stację A drugi pociąg, przebywający także ruchem jednostajnym $\frac{3}{4}$ *km* w każdej minucie, ale w kierunku od A do C (Fig. 3 *a*). Jakim wzorem algebraicznym można ruch tego pociągu opisać? Jak przedstawi się ruch tego pociągu graficznie?

Ponieważ ruch pociągu jest jednostajny, to droga s, przebyta przez pociąg w czasie t, przedstawi się wzorem $s = ct$. Aby wyznaczyć współczynnik c, zauważmy, że np. po upływie 2 min. odległość pociągu od A wynosić będzie $1\frac{1}{2}$ *km* w kierunku ku C, że więc wartości $t = 2$ odpowiada $s = -1\frac{1}{2}$. Z tych dwu odpowiadających sobie wartości obliczymy: $c = (-1\frac{1}{2}) : 2 = -\frac{3}{4}$. Wzór, opisujący ruch pociągu, ma postać: $s = -\frac{3}{4}t$. Graficznie przedstawia ten wzór prosta L' w fig. 3 *b*.

W przykładzie tym ma prędkość wartość ujemną. Znaczenie jej widoczne jest z graficznego przedstawienia funkcji. Przed godziną 12-tą odległość pociągu od stacji A jest dodatnia i zmniejsza się z biegiem czasu coraz bardziej; o godzinie 12-tej jest pociąg na stacji A; po godzinie dwunastej odległość pociągu od A bezwzględnie zwiększa się, ale jest ujemna. Pociąg porusza się w kierunku, przyjętym dla drogi za ujemny. Ogólnie:

Dodatnia wartość prędkości (przy przyjętem znaczeniu względnych wartości czasu) oznacza, że ruch odbywa się w kierunku, przyjętym dla drogi za dodatni; ujemna wartość prędkości oznacza, że ruch odbywa się w kierunku, przyjętym dla drogi za ujemny.

§ 5. Reguła trzech prosta.

Jeżeli x_1, y_1 i x_2, y_2 oznaczają dwie pary odpowiadających sobie wartości wielkości wprost proporcjonalnych x i y tak, że $y_1 = ax_1$, $y_2 = ax_2$, to dzieląc przez siebie te równości, znajdziemy: $y_1 : y_2 = x_1 : x_2$, czyli:

Jeżeli dwie zmienne są wprost proporcjonalne, to stosunek wartości jednej zmiennej równa się stosunkowi odpowiednich wartości drugiej zmiennej.

Zadanie. 8 *kg* towaru kosztuje 48 zł; ile należy zapłacić za 13 *kg*?

Rozwiązanie 1. Cena i ilość towaru są wprost proporcjonalne. Naznaczywszy cenę przez y, a ilość towaru przez x, możemy napisać: $y = ax$. Do wyznaczenia a mamy podane dwie odpowiadające sobie wartości obu zmiennych: 8 *kg* i 48 zł. Znajdziemy więc (§ 1): $a = \frac{48}{8} = 6$. Funkcja przyjmie kształt: $y = 6x$. Zapomocą tego wzoru można obliczyć cenę każdej ilości towaru. Chcąc obliczyć cenę 13 *kg*, podstawiamy $x = 13$ i otrzymujemy: $y = 6 . 13 = 78$. — Za 13 *kg* należy zapłacić 78 zł.

Ten sposób rozwiązywania zadań z reguły trzech nie różni się zasadniczo od sposobu rozwiązywania tych zadań zapomocą wnioskowania. Obliczanie współczynnika proporcjonalności nie jest bowiem niczem innem, jak obliczaniem ceny jednostki ilości towaru.

Rozwiązanie 2. Zważywszy, że ilość towaru i cena są wprost proporcjonalne, znajdziemy, stosując ostatnie twierdzenie: $8:13 = 48:x$. Stąd $x = 78$, a więc 13 *kg* towaru kosztuje 78 *zł*.

B) PROPORCJONALNOŚĆ ODWROTNA.

§ 6. Określenie i algebraiczne przedstawienie.

Związek, jaki zachodzi między ilością robotników a czasem, potrzebnym do wykonania jakiejś pracy, między prędkością a czasem, potrzebnym do przebycia danej drogi ruchem jednostajnym, między ilością osób a czasem, na który wystarcza dany zapas żywności i t. p. nazywamy *proporcjonalnością odwrotną*. Zależność ta objawia się tem, że gdy wartość jednej zmiennej zwiększy się bezwzględnie 2, 3, 4,... razy, to wartość drugiej zmiennej zmniejszy się bezwzględnie 2, 3, 4,... razy.

Dwie zmienne nazywamy *odwrotnie proporcjonalnemi*, jeżeli są tak od siebie zależne, że gdy wartość jednej zmiennej zwiększy się (bezwzględnie) n razy, to odpowiednia wartość drugiej zmiennej zmniejszy się (bezwzględnie) n razy i naodwrót.

W celu wyrażenia tej zależności wzorem algebraicznym, ułóżmy tabelki w następujących przykładach: Poruszając się ruchem jednostajnym z prędkością 1 *km* na godzinę, przebywamy daną drogę: 1) w 6 godzinach, 2) w 12 godz., 3) w 60 godz.; przedstawić czas y, potrzebny do przebycia tej drogi, jako funkcję prędkości x.

1.

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	....
y	18	12	6	3	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{5}$	....

2.

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	2	3	4	5	....
y	36	24	12	6	4	3	2·4	....

3.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	....
y	240	120	60	30	20	15	12	10	....

Zauważymy, że w tych tabelkach każda wartość zmiennej y powstaje z odpowiedniej wartości zmiennej x, gdy pewną stałą liczbę (w 1-szym przykładzie 6, w drugim 12, w trzecim 60) przez ową wartość x podzielimy. Funkcje więc, wyrażone powyższemi tabelkami, można przedstawić wzorami: 1) $y = \frac{6}{x}$, 2) $y = \frac{12}{x}$, 3) $y = \frac{60}{x}$. Naodwrót widzimy, że gdy w tych wzorach x zwiększy się n razy, to y pomniejsza się n razy. — Ogólnie:

Proporcjonalność odwrotna przedstawia się wzorem: $y = \frac{c}{x}$, w którym c oznacza liczbę w każdym przykładzie inną, lecz w jednym przykładzie stałą. Ta stała c nazywa się *współczynnikiem proporcjonalności*. Jest to liczba, którą podzielić należy przez wartość zmiennej x, aby otrzymać odpowiednią wartość zmiennej y. Z tego powodu równa się ona iloczynowi dowolnych odpowiadających sobie wartości obu zmiennych.

Obliczając c z wartości $x = 1$ i odpowiedniego y, znajdziemy: *Współczynnik proporcjonalności równa się wartości zmiennej y, która odpowiada wartości $x = 1$.*

Dotąd uwzględnialiśmy tylko dodatnie wartości x, y i c. W dalszym ciągu dopuścimy dla x, y i c także ujemne wartości z wyłączeniem zera.

§ 7. Graficzne przedstawienie.

Fig. 4 przedstawia graficznie funkcje: $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{6}{x}$, $y = \frac{12}{x}$ i $y = -\frac{8}{x}$.

Proporcjonalność odwrotna przedstawia się linją krzywą zwaną *hiperbolą*. Krzywa ta składa się z dwu gałęzi, które przebiegają w ćwiartkach I i III, względnie II i IV, stosownie do tego, czy współczynnik proporcjonalności jest liczbą dodatnią, czy ujemną. Obie gałęzie są do siebie przystające i nakrywają się, gdy je około początku układu współrzędnych obrócimy o 180°.

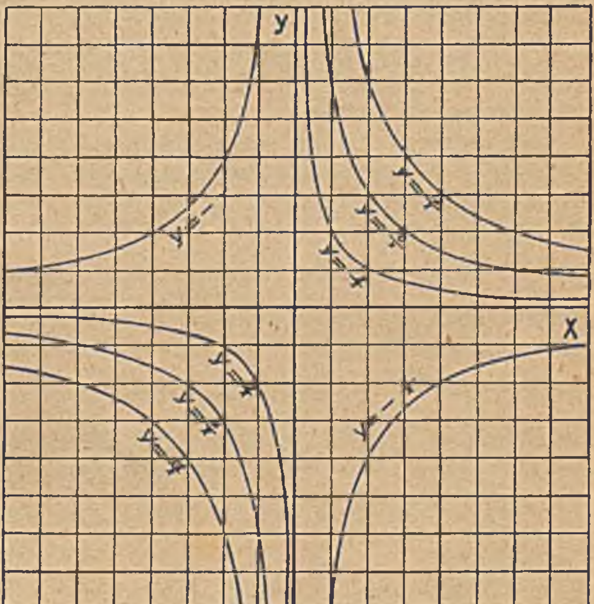

Fig. 4.

Przyglądając się jednej takiej gałęzi, znajdującej się w ćwiartce pierwszej, a więc odpowiadającej dodatnim wartościom c, x i y, zauważymy, że

y maleje, gdy x rośnie. Ubytek zmiennej y nie jest jednak równomierny, lecz staje się ze wzrostem x coraz mniejszy.

Tak np.: zmniejsza się $y=\frac{6}{x}$ o 3, gdy x rośnie od 1 do 2, o 1, gdy x rośnie od 2 do 3, o $\frac{1}{2}$ gdy x rośnie od 3 do 4 i t. d.

§ 8. Reguła trzech prosta. (Ciąg dalszy).

Jeżeli x_1, y_1 i x_2, y_2 oznaczają dwie pary odpowiadających sobie wartości wielkości odwrotnie proporcjonalnych tak, że $y_1=\frac{c}{x_1}$, a $y_2=\frac{c}{x_2}$, to dzieląc przez siebie te równości, znajdziemy: $y_1:y_2=$ $=\frac{c}{x_1}:\frac{c}{x_2}$, a po uwolnieniu od ułamków i uproszczeniu przez c: $y_1:y_2=x_2:x_1$, czyli:

Jeżeli dwie zmienne są odwrotnie proporcjonalne, to stosunek wartości jednej zmiennej równa się odwrotnemu stosunkowi odpowiednich wartości drugiej zmiennej.

Zadanie. Pisząc dziennie po $1\frac{1}{2}$ godz., można przepisać pewne dzieło w 42 dniach; w ilu dniach można przepisać to dzieło, pisząc dziennie po $3\frac{1}{2}$ godz.?

Rozwiązanie 1. Ilość dni, potrzebna do przepisania dzieła, jest odwrotnie proporcjonalna do ilości godzin dziennej pracy. Oznaczając ilość dni, potrzebną do przepisania dzieła, przez y, a ilość godzin dziennej pracy przez x, wyrazimy tę zależność wzorem: $y=\frac{c}{x}$. Do wyznaczenia współczynnika proporcjonalności c mamy podane dwie odpowiadające sobie wartości obu zmiennych: $1\frac{1}{2}$ godz. i 42 dni. Znajdziemy więc (§ 6): $c=1\frac{1}{2}\,.\,42=63$. Funkcja przyjmie kształt: $y=\frac{63}{x}$. Zapomocą tego wzoru możemy obliczyć ilość dni, potrzebną do przepisania dzieła, przy każdej ilości godzin dziennej pracy. Jeżeli w szczególności czas dziennej pracy wynosi $3\frac{1}{2}$ godz., to $y=\frac{63}{3\frac{1}{2}}=18$, czyli: czas, potrzebny do przepisania dzieła, wynosi 18 dni.

Rozwiązanie 2. Nazwijmy szukaną ilość dni literą x. Ponieważ czas potrzebny do przepisania dzieła jest odwrotnie proporcjonalny do ilości godzin dziennej pracy, to na podstawie ostatniego twierdzenia: $1\frac{1}{2}:3\frac{1}{2}=x:42$. Rozwiązując tę proporcję, znajdziemy: $x=18$. Do przepisania dzieła potrzeba 18 dni.

C) FUNKCJA LINJOWA.

§ 9. Określenie i algebraiczne przedstawienie.

Kapitał, złożony na procent prosty, przynosi dochód, który jest wprost proporcjonalny do czasu. Np.: Jeżeli złożymy 200 zł na 5%, to dochód po różnej ilości lat przedstawi się tabelką:

Ilość lat	0	1	2	3	4	5	....
Dochód	0	10	20	30	40	50	....

Gdy nam chodzi nie o dochód, lecz o wartość końcową kapitału po pewnym czasie (t. j. kapitał wraz z dochodami), to ta wartość końcowa będzie funkcją czasu, którą można przedstawić tabelką:

Ilość lat	0	1	2	3	4	5	....
Wartość końc. kap.	200	210	220	230	240	250	....

albo wzorem: $y = 10x + 200$, jeżeli x oznacza ilość lat, a y wartość końcową kapitału po x latach.

Gdyby kapitał i procent w powyższym przykładzie miały inną wartość, to wzór zmieniłby się tylko o tyle, że współczynnik przy x miałby inną wartość, a także wyraz, wolny od zmiennej. Wartość końcowa kapitału przedstawi się w każdym razie wzorem: $y = ax + b$, w którym a i b oznaczają stałe, mające w każdym przykładzie inne wartości.

Funkcję, wyrażoną wzorem: $y = ax + b$, nazywamy *funkcją linjową*. Zawiera ona dwie stałe a i b; a nazywać będziemy *współczynnikiem kierunkowym*, a b *wyrazem wolnym od zmiennej*.

§ 10. Graficzne przedstawienie.

Aby funkcję linjową $y = ax + b$ graficznie przedstawić, zestawmy ją z funkcją $y = ax$. (W fig. 5 przedstawione są funkcje: $y = \frac{1}{2}x$ i $y = \frac{1}{2}x + 3$).

Wartości y, odpowiadające w obu funkcjach tej samej wartości x, różnią się o b. Aby więc z obrazu funkcji $y = ax$ otrzymać obraz funkcji $y = ax + b$, należy każdy punkt prostej $y = ax$ przesunąć w kierunku równoległym do osi Y o długość b. Zatem:

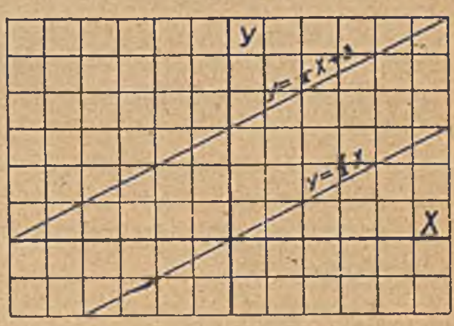

Fig. 5.

Równanie $y = ax + b$ przestawia prostą, równoległą do prostej $y = ax$, a odcinającą na osi Y odcinek równy b.

Aby prostą, wyrażoną równaniem: $y = ax + b$, wykreślić, wystarczy wyznaczyć dwa jej punkty. W tym celu należy znaleźć dwie pary wartości x i y, czyniące zadość równaniu, a te będą współrzędnemi punktów, leżących na prostej.

Np.: Aby wykreślić prostą $y = \frac{1}{2}x + 3$, układamy tabelkę:

x	y
0	3
—2	2

i kreślimy punkty: A (0, 3) i B (—2, 2) (Wykreśl!). Prosta, wykreślona przez te punkty, będzie miejscem geometrycznem równania $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Naodwrót można każdą prostą przedstawić równaniem: $y = ax + b$.

Należy w tym celu najpierw zmierzyć odcinek, który dana prosta odcina na osi Y, i odcinek ten przyjąć za b. Aby znaleźć a, należy wykreślić przez początek układu współrzędnych prostą równoległą do danej prostej i znaleźć jej równanie: $y = ax$ (przyjmując za a rzędną punktu prostej, którego $x = 1$. § 2). Równaniem danej prostej będzie: $y = ax + b$.

Wyjątek stanowią proste równoległe do osi Y.

Aby znaleźć równanie takiej prostej, zważmy, że jest ona miejscem geometrycznem punktów, oddalonych od osi Y o tę samą długość c. Dla każdego punktu prostej $x = c$, podczas gdy y może mieć dowolną wartość. Zatem $x = c$ jest równaniem prostej, równoległej do osi Y, a oddalonej od niej o c. Podobnie jest $x = 0$ równaniem osi Y.

§ 11. Charakterystyczna własność funkcji linjowej.

W § 3 udowodniliśmy, że funkcja, przedstawiona linją prostą, rośnie (maleje) równomiernie. Dowód przeprowadzony tam dla prostej, przechodzącej przez początek układu współrzędnych, można powtórzyć bez zmian dla dowolnej prostej (uczyń to!). Zatem:

Cechą charakterystyczną funkcji linjowej jest to, że funkcja ta rośnie (maleje) równomiernie, t. j., że równym przyrostom zmiennej x odpowiadają równe między sobą przyrosty (ubytki) zmiennej y.

Nazwaliśmy tę własność funkcji linjowej własnością charakterystyczną, bo inne funkcje, przedstawione linjami krzywemi, tej własności nie mają. Dla takich funkcyj bowiem $\triangle MPP_1$ (fig. 2 str. 20) nie może być zawsze przystającym do $\triangle NQQ_1$.

Niezależnie od wykresu możemy własność tę funkcji linjowej wywnioskować bezpośrednio ze wzoru: $y = ax + b$. Niech x_1, y_1 i x_2, y_2 oznaczają dwie pary odpowiadających sobie wartości x i y tak, że:

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b.$$

Przyrost lub ubytek funkcji, gdy wartość x zmieni się z x_1 na x_2, wynosi:

$$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a\,(x_2 - x_1).$$

Ilekroć $x_2 - x_1$ (przyrost lub ubytek wartości zmiennej x) ma tę samą wartość, to także $y_2 - y_1$, (przyrost lub ubytek zmiennej y) ma tę samą wartość, bo $y_2 - y_1$ powstaje przez pomnożenie $x_2 - x_1$ przez stałą liczbę a.

Stosownie do tego powiedzenie: „długość sprężyny jest funkcją linjową obciążenia", nie oznacza nic innego, jak tylko to, że sprężyna wydłuża się zawsze o tę samą ilość *cm*, gdy obciążenie wzrasta o tę samą ilość *g*. — Podobnie oznacza powiedzenie: „przy pewnym ruchu droga jest funkcją linjową czasu" to samo, co powiedzenie: „pewien ruch jest jednostajny" i t. p.

§ 12. Znaczenie stałych *a* i *b*.

Ułóżmy dla funkcji $y = ax + b$ tabelkę. Otrzymamy:

x	....	-2	-1	0	1	2	3	4	....
y	....	$-2a+b$	$-a+b$	b	$a+b$	$2a+b$	$3a+b$	$4a+b$	....

Z tej tabelki i fig. 5 (str. 27) wysnuwamy:

Wyraz b, wolny od zmiennej, oznacza wartość y, odpowiadającą $x = 0$. Geometrycznie przedstawia się b jako odcinek, który prosta $y = ax + b$ odcina na osi Y.

Z tabelki zauważymy, że gdy x rośnie od 0 do 1, to y rośnie o a (względnie maleje, gdy a jest ujemne). A ponieważ funkcja linjowa rośnie (maleje) równomiernie, to:

Współczynnik kierunkowy a podaje, o ile wzrasta (maleje) y, gdy x wzrasta o 1. Geometrycznie oznacza on różnicę rzędnych dwóch punktów prostej, których odcięte różnią się o 1.

Współczynnik kierunkowy a jest miarą wzrastania funkcji linjowej. Gdy a jest dodatnie, to funkcja rośnie ze wzrostem x; gdy a jest ujemne, to funkcja maleje ze wzrostem x i to szybko lub powoli, zależnie od bezwzględnej wartości a.

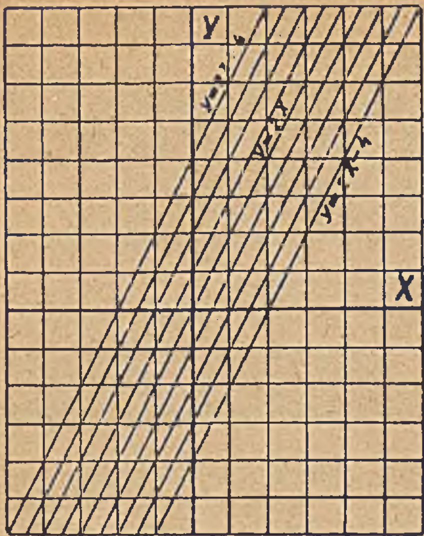

Fig. 6.

Twierdzenie to udowodnimy w następujący sposób: Niech x_1, y_1 i x_2, y_2 oznaczają dwie pary wartości x i y, sprawdzające równanie: $y = ax + b$ tak, że $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$. Niech będzie nadto $x_1 < x_2$. Chcąc zbadać, czy $y_2 \gtreqless y_1$, tworzymy różnicę: $y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$. Ponieważ $x_1 < x_2$, to $x_2 - x_1 > 0$, a $y_2 - y_1$ ma taki znak jak a. Jeżeli $a > 0$, to $y_2 > y_1$, a więc większej wartości x odpowiada większa wartość y; jeżeli $a < 0$, to $y_2 < y_1$, a więc większej wartości x odpowiada mniejsza wartość y.

Od wartości stałych a i b zależy położenie prostej $y = ax + b$. Fig. 6 przedstawia proste, dla których a ma tę samą wartość, a b zmienia się; fig. 7 przedstawia proste, dla których b ma tę samą wartość, a a zmienia się. Z figur tych odczytujemy twierdzenia:

Jeżeli w równaniu prostej: $y = ax + b$ stała $b = 0$, to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych. Jeżeli b przyjmuje przy stałem a coraz większe wartości dodatnie, to prosta przesuwa się równolegle do pierwotnego położenia, odcinając na dodatniej osi Y coraz większy odcinek. Jeżeli b przyjmuje coraz większe bezwzględnie wartości ujemne, to prosta przesuwa się równolegle do pierwotnego położenia, odcinając na ujemnej osi Y coraz większy odcinek.

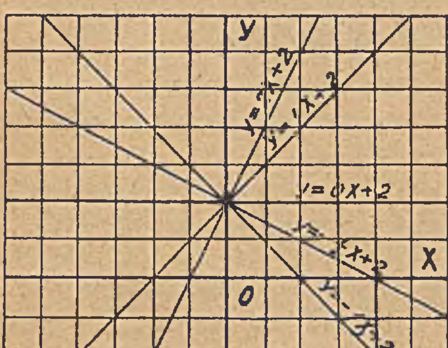

Fig. 7.

Jeżeli $a = 0$, to równanie $y = b$ przedstawia prostą, równoległą do osi X, oddaloną od niej o długość b. Jeżeli a przyjmuje przy stałem b coraz większe wartości dodatnie, to prosta odchyla się w kierunku dodatnim od położenia równoległego do osi X. Jeżeli a przyjmuje coraz większe bezwzględnie wartości ujemne, to prosta odchyla się coraz bardziej w kierunku ujemnym od położenia równoległego do osi X.

Jeżeli $a=0$ i $b=0$, to równanie ma kształt: $y=0$ i jest równaniem osi X.

Z tych twierdzeń wynika, że współczynnik kierunkowy pozostaje w związku z kątem, jaki prosta tworzy z osią X. *Jeżeli dwie proste mają ten sam współczynnik kierunkowy, to są do siebie równoległe.*

Ze znaków stałych a i b można natychmiast wywnioskować, przez które ćwiartki przechodzi prosta, której równanie jest dane. Wyznaczmy np. położenie prostej: $y=-2x-3$. Prosta ta przecina ujemną oś Y, bo b jest ujemne. Gdyby a było równe zeru, to prosta byłaby równoległa do osi X; ponieważ jednak a jest ujemne, to prosta odchyla się od tego położenia w kierunku ujemnym, przechodzi więc przez ćwiartki: II, III i IV.

§ 13. Zastosowania.

Przykład 1. Sprężyna nieobciążona ma długość 20 *cm*, a obciążona ciężarkiem 3 *g* ma długość 25 *cm*. Jaka jest długość sprężyny, gdy ją zgnieciemy ciężarem 4 *g*?

Fizyka uczy, że długość y sprężyny jest funkcją linjową obciążenia x. Zatem: $y=ax+b$. Stała b oznacza (§ 12) długość sprężyny nieobciążonej, więc $b=20$. Stała a oznacza wydłużenie sprężyny przy obciążeniu 1 *g*; ponieważ przy obciążeniu 3 *g* sprężyna wydłuża się o 5 *cm*, to przy obciążeniu 1 *g* wynosi wydłużenie: $a=\frac{5}{3}$. Zatem: $y=\frac{5}{3}x+20$.

Dla $x=-4$ (zgniecenie należy uważać za ujemne obciążenie) otrzymamy: $y=\frac{5}{3}.(-4)+20=-6\frac{2}{3}+20=13\frac{1}{3}$. Sprężyna, zgnieciona ciężarkiem 4 *g*, ma długość $13\frac{1}{3}$ *cm*.

Przykład 2. Przy torze kolejowym, biegnącym od zachodu na wschód, leżą kolejno stacje A, B i C. Odległości ich wynoszą $AB=12$ *km* a $BC=18$ *km*. O godz. 12-tej wyjeżdża z A pociąg i, poruszając się ruchem jednostajnym, przybywa na stację C o godz. 12 min. 40. Przedstawić odległość s pociągu od stacji B jako funkcję czasu t.

Czas t będziemy liczyć w minutach od godz. 12-ej, a odległość s od B w *km* na zachód ujemnie, na wschód dodatnio. Ponieważ pociąg porusza się ruchem jednostajnym, to odległość jego od B jest funkcją linjową czasu (§ 11). Zatem: $s=ct+s_0$. Według § 12 oznacza wyraz s_0 wolny od zmiennej odległość pociągu od B w czasie $t=0$, t. j. o godzinie 12-ej. Zatem $s_0=-12$. Współczynnik kierunkowy c oznacza (§ 12) przyrost s, gdy t wzrasta o 1, a więc prędkość, z jaką pociąg się porusza (§ 4). Ponieważ drogę $AC=30$ *km* przebywa pociąg w 40 min., to w 1 min. przebywa $\frac{3}{4}$ *km*. Ponieważ ze wzrostem t przedstawia się s liczbą coraz większą (dla $t=0$, $s=-12$; dla $t=40$, $s=18$), to c jest dodatnie. Zatem $c=\frac{3}{4}$. Wzór: $s=\frac{3}{4}t-12$ przedstawia odległość pociągu od B jako funkcję czasu. (Przedstaw graficznie ten wzór, przedstawiając minuty na osi X, a kilometry na osi Y odcinkami milimetrowemi!).

Przy pomocy tego wzoru można rozwiązać różne zadania. Np.:
a) Jak daleko od B będzie pociąg o godz. 12 min. 20?
Chodzi o obliczenie s, gdy $t = 20$. Znajdziemy ze wzoru:

$$s = \tfrac{3}{4} \,.\, 20 - 12 = 15 - 12 = 3.$$

O godz. 12 min. 20 będzie pociąg o 3 *km* na zachód od B.
b) O której godzinie będzie pociąg na stacji B?
Chodzi o obliczenie t, gdy $s = 0$. Ze wzoru otrzymamy:

$$0 = \tfrac{3}{4} t - 12.$$

Rozwiązując to równanie, znajdziemy: $t = 16$.
Pociąg przybywa na stację B o godz 12-ej min 16.
[Wyjaśnij wyniki na prostej, przedstawiającej funkcję!]

Często mierzymy drogę przy ruchu jednostajnym nie od punktu, w którym ciało znajduje się w czasie 0, lecz od innego punktu. Wtedy przedstawia się droga s jako funkcja linjowa czasu t: $s = s_0 + ct$, w której s_0 oznacza drogę, jaką ciało już przebyło do czasu $t = 0$, a c prędkość, z jaką ciało się porusza.

Podobną zależność, jak między drogą a czasem przy ruchu jednostajnym, znajdujemy między wielu innemi wielkościami. Np.:

1. Wiek człowieka, liczony od pewnej chwili, jest funkcją linjową czasu. (Współczynnik kierunkowy jest tu zawsze równy 1, prosta, przedstawiająca tę funkcję, tworzy z osią X kąt 45^0; wyraz wolny od zmiennej oznacza wiek człowieka w chwili, od której czas liczymy).

2. Ilość (lub stan poziomu) wody w zbiorniku, do którego dopływa jednostajnie woda, jest funkcją linjową czasu.

3. Wartość końcowa kapitału, złożonego na procent prosty, jest funkcją linjową czasu. (Ujemne wartości czasu nie mają tu znaczenia).

4. Objętość wielu ciał (zwłaszcza gazów) jest funkcją linjową temperatury. (Współczynnik kierunkowy jest zwykle dodatni, wyjątkowo ujemny).

Często zależność taka istnieje tylko w pewnych granicach tak, że graficznie przedstawia się funkcja nie prostą nieograniczoną, lecz pewnym odcinkiem. (Np. wiek człowieka, ruch pociągu, ilość wody w zbiorniku, wartość końcowa kapitału i t. p.).

P r z y k ł a d 3. Wyznaczyć funkcję linjową $y = ax + b$, która dla $x = 1{\cdot}5$ przyjmuje wartość $y = 2$, a dla $x = -1{\cdot}2$ wartość $y = 3{\cdot}8$.

W poprzednich dwóch przykładach rozwiązywaliśmy podobne zagadnienie, wyznaczając wartości stałych a i b z ich znaczenia podanego w § 12. Często łatwiej jest rozwiązać takie zagadnienie zapomocą następującego rozumowania:

Stałe a i b muszą mieć takie wartości, aby równanie $y = ax + b$ sprawdzało się dla danych, odpowiadających sobie wartości x i y. Zatem otrzymujemy w naszym przykładzie:

$$2 = 1{\cdot}5\,a + b,$$

$$3{\cdot}8 = -1{\cdot}2\,a + b.$$

Rozwiązując ten układ równań, znajdziemy: $a = -\frac{2}{3}$, $b = 3$. Szukana funkcja linjowa ma postać: $y = -\frac{2}{3}x + 3$.

Funkcja linjowa jest zupełnie oznaczona, jeżeli dane są dwie pary odpowiadających sobie wartości x i y.

§ 14. Zmienność funkcji linjowej.

Funkcja linjowa $y = ax + b$ może przyjmować każdą wartość czy to dodatnią, czy ujemną, czy 0, jeżeli tylko $a \neq 0$.

Wynika to już z geometrycznego przedstawienia funkcji. Chcąc znaleźć, dla jakiej wartości x przyjmuje funkcja wartość m, odmierzamy na osi Y od punktu O odcinek m i kreślimy przez koniec odcinka prostą, równoległą do osi X. Ponieważ $a \neq 0$, to otrzymana prosta musi przeciąć prostą $y = ax + b$ w jakimś punkcie M. Rzędna punktu M wynosi m, odcięta zaś podaje wartość zmiennej x, dla której funkcja przyjmuje daną wartość m.

Również i rozważania algebraiczne prowadzą do tego samego wyniku. Chcąc znaleźć, dla jakiej wartości x przyjmuje funkcja $y = ax + b$ wartość m, rozwiązujemy równanie: $m = ax + b$; otrzymamy: $x = \frac{m-b}{a}$. Rozwiązanie jest zawsze możliwe, jeżeli $a \neq 0$. (Gdyby było $a = 0$, nie moglibyśmy dzielenia przez a wykonać). Dla każdej wartości m można zatem obliczyć taką wartość dla x, że gdy x przyjmuje tę wartość, to $y = m$.

Przyjmując w szczególności $m = 0$, znajdziemy, że dla $x = -\frac{b}{a}$ staje się funkcja $y = ax + b$ zerem ($a \neq 0$).

Wartość zniennej niezależnej, dla której funkcja przyjmuje wartość 0, nazywamy *miejscem zerowem* funkcji. Miejsce zerowe funkcji oznacza geometrycznie odciętą punktu przecięcia się prostej: $y = ax + b$ z osią X.

Zdajmy sobie dokładnie sprawę z tego, jak zmienia się funkcja $y = ax + b$, gdy x przebiega wszystkie wartości od bardzo wielkich bezwzględnie wartości ujemnych do bardzo wielkich wartości dodatnich.

Przyjmijmy najpierw, że $a > 0$. Wtedy, jak wiemy, y rośnie ze wzrostem x; a że y może przybierać wszelkie (nawet dowolnie wielkie) wartości tak dodatnie jako też ujemne, to bardzo wielkie bezwzględnie wartości ujemne y muszą odpowiadać bardzo wielkim bezwzględnie wartościom ujemnym x, a bardzo wielkie wartości dodatnie y, bardzo wielkim wartościom dodatnim x. Oznaczając znakami $+\infty$ i $-\infty$ odpowiednio bardzo wielkie bezwzględnie wartości dodatnie i ujemne*), a znakami $\nearrow$ i $\searrow$, że zmienna rośnie względnie maleje, uzyskujemy następującą tabelkę, wyrażającą zmienność funkcji linjowej:

1. Jeżeli $a > 0$, to:

x	$-\infty \nearrow -\frac{b}{a} \nearrow +\infty$
$y = ax + b$	$-\infty \nearrow \quad 0 \nearrow +\infty$

Powtarzając podobne rozumowanie dla $a < 0$, otrzymamy:

2. Jeżeli $a < 0$, to:

x	$-\infty \nearrow -\frac{b}{a} \nearrow +\infty$
$y = ax + b$	$+\infty \searrow \quad 0 \searrow -\infty$

3. Jeżeli $a = 0$, to:

x	$-\infty \nearrow +\infty$
$y = ax + b$	stale równe b

Tabelki te wskazują wyraźnie, kiedy funkcja rośnie, kiedy maleje, kiedy staje się zerem, kiedy przyjmuje wartości dodatnie, a kiedy ujemne.

§ 15. Graficzne rozwiązanie równania z jedną niewiadomą.

Nauka o funkcji linjowej pozostaje w ścisłym związku z nauką o równaniu stopnia pierwszego. Uporządkowane równanie stopnia pierwszego ma postać: $ax + b = 0$. Po lewej stronie tego równania znajduje się funkcja linjowa $y = ax + b$, którą geometrycznie przedstawia pewna prosta. Aby rozwiązać równanie: $ax + b = 0$, mamy znaleźć taką wartość x, dla której funkcja linjowa $y = 0$, czyli mamy wyznaczyć miejsce zerowe tej funkcji (§ 14). Geometrycznie znaczy to, że mamy znaleźć odciętą punktu prostej $y = ax + b$, którego rzędna jest zerem, który zatem leży na osi X.

*) Znakom tym nadamy później nieco inne znaczenie.

Równanie: $ax + b = 0$ rozwiązujemy graficznie w ten sposób, że kreślimy prostą: $y = ax + b$ i odczytujemy odciętą punktu przecięcia się tej prostej z osią X; odczytana liczba jest pierwiastkiem danego równania.

Wyznaczenie miejsca zerowego funkcji linjowej ułatwia ten fakt, że dla wartości x, odpowiadających punktom, położonym po jednej stronie miejsca zerowego, funkcja linjowa ma wartość dodatnią, a dla wartości x, odpowiadających punktom, położonym po drugiej stronie, wartość ujemną, jak to bezpośrednio z rysunku widzimy.

P r z y k ł a d: Rozwiązać graficznie równanie: $2x - 5\frac{1}{2} = 0$. Kreślimy prostą $y = 2x - 5\frac{1}{2}$ (fig. 8). Miejsce zerowe funkcji (odcięta punktu przecięcia się prostej z osią X) leży, jak odczytujemy z rysunku, między 2 a 3. Jeżeli $x = 2$, to y jest ujemne; jeżeli $x = 3$, to y jest dodatnie. Próbujemy, czy $x = 2\frac{1}{2}$ nie jest miejscem zerowem. Dla tej wartości wypada jednak y ujemne; miejsca zerowego należy więc szukać między $2\frac{1}{2}$ a 3. Gdy wreszcie podstawimy $x = 2\frac{3}{4}$, to znajdziemy $y = 0$. Zatem $x = 2\frac{3}{4}$ jest miejscem zerowem funkcji, a tem samem i pierwiastkiem równania: $2x - 5\frac{1}{2} = 0$.

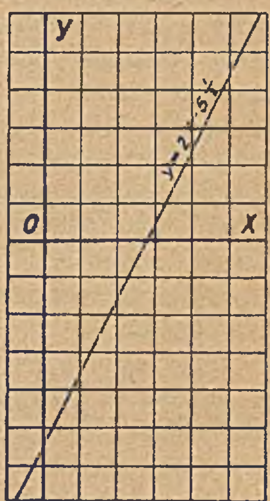

Fig. 8.

Prosta $y = ax + b$ przecina oś X tylko wtedy, gdy nie jest do niej równoległa, t. j. gdy $a \neq 0$. Wtedy jednak przecina ją w jednym tylko punkcie, bo dwie proste nierównoległe mają tylko jeden punkt wspólny. Zgodnie z wynikiem, znanym z nauki o równaniach, stwierdzamy i drogą geometryczną, że równanie $ax + b = 0$ ma zawsze jeden i tylko jeden pierwiastek, jeżeli $a \neq 0$.

Jeżeli $a = b = 0$, to prosta $y = ax + b$ nakrywa oś X, ma więc z nią wszystkie punkty wspólne. Każda wartość podstawiona za x sprawdza równanie $ax + b = 0$, równanie to jest więc nieoznaczone.

Jeżeli $a = 0$, a $b \neq 0$, to prosta $y = ax + b$ jest równoległa do osi X, nie ma więc z nią żadnego wspólnego punktu. Niema na tej prostej punktu, którego rzędna byłaby zerem, równanie $ax + b = 0$ nie ma rozwiązania, jest więc równaniem sprzecznem.

§ 16. Graficzne rozwiązanie układu dwu równań z dwiema niewiadomemi.

Równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi ma po uporządkowaniu postać: $mx + ny = p$. Jeżeli $n \neq 0$, to równanie można przekształcić w następujący sposób: Przenosimy wyraz, zawierający y, na lewą stronę, a inne wyrazy na stronę prawą; dzielimy potem obie strony równania przez n i otrzymujemy równanie równoważne: $y = ax + b$. Zatem:

Równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi wyraża, że jedna niewiadoma jest funkcją linjową drugiej niewiadomej i przedstawia geometrycznie pewną prostą. Współrzędne każdego punktu tej prostej sprawdzają równanie.

Dołączmy do równania $y = ax + b$ jeszcze drugie: $y = a'x + b'$ i postawmy żądanie: rozwiązać ten układ równań. Drugie równanie przedstawia też pewną prostą, a współrzędne każdego punktu tej prostej sprawdzają to równanie. Wartości x i y, które sprawdzają oba równania, muszą być współrzędnemi punktu, leżącego i na jednej i na drugiej prostej, a więc punktu przecięcia się tych prostych. Rozwiązaniu układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi odpowiada zatem geometrycznie wyznaczenie współrzędnych punktu przecięcia się prostych, przedstawiających te równania.

Stąd wynika następująca metoda graficzna rozwiązywania układu dwu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomemi: Aby taki układ równań rozwiązać, sprowadzamy (jak przy metodzie porównania) oba równania do postaci: $y = ax + b$. Kreślimy następnie proste, będące miejscami geometrycznemi tych równań. Współrzędne punktu przecięcia się tych prostych są wartościami dla x i y, które sprawdzają dane równania.

Przykład 1. Rozwiązać graficznie układ równań:

$$x + y = 4,$$
$$x + 2y = 2.$$
$$y = -x + 4; \quad y = -\tfrac{1}{2}x + 1.$$

Kreślimy proste AB i CD (fig. 9), odpowiadające tym równaniom, i odczytujemy współrzędne punktu M, w którym te proste się przecinają. Odczytamy $x = 6$, $y = -2$. Te wartości będą też pierwiastkami danego układu równań. Sprawdź!

Przykład 2. Między stacjami I i II, oddalonemi od siebie o 30 *km*, kursują dwa pociągi. Pierwszy pociąg jest na stacji I o godz. 11 min. 45, a na stacji II o godz. 12 min. 45; drugi pociąg jest na stacji I o godz. 13, a na stacji II o godz. 11 min. 30. O której godzinie i jak daleko od stacji I spotykają się oba pociągi, jeżeli ruch ich jest jednostajny?

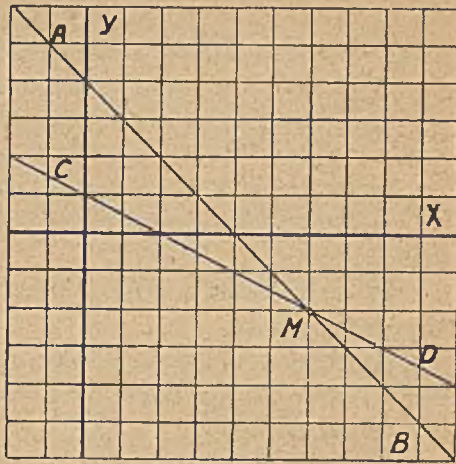

Fig. 9.

Czas liczyć będziemy w godzinach począwszy od godz. 12-ej. Ponieważ ruch każdego pociągu jest jednostajny, to odległość y każdego pociągu od stacji I jest funkcją linjową czasu, którą nietrudno graficznie przedstawić. W figurze 10 przedstawia podziałka na osi X godziny, a podziałka na osi Y kilometry. Prosta, przedstawiająca ruch pierwszego pociągu, przechodzić musi przez punkty $A\ (-\frac{1}{4},\ 0)$ i $B\ (\frac{3}{4},\ 30)$; prosta, przedstawiająca ruch drugiego pociągu, musi przechodzić przez punkty $C\ (1,\ 0)$ i $D\ (-\frac{1}{2},\ 30)$. Wykreśliwszy proste AB i CD, odczytujemy współrzędne punktu M, w którym obie proste się przecinają; znajdziemy $x=\frac{1}{4}$, $y=15$. Pociągi spotykają się o godz. 12 min. 15 w odległości 15 *km* od stacji I.

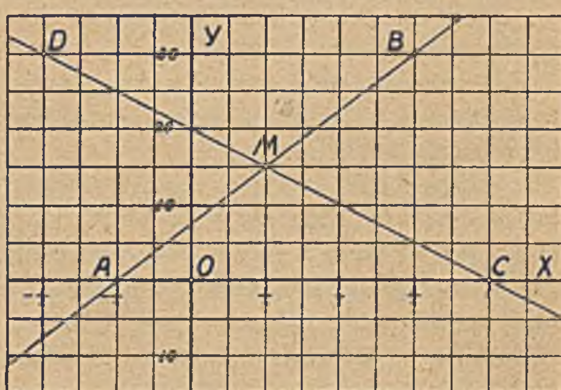

Fig. 10.

Aby rozwiązać zadanie rachunkiem, należałoby wyznaczyć funkcje linjowe, przedstawiające ruch każdego pociągu (według przykładu 3 w § 13). Otrzymalibyśmy: $y=30x+7{\cdot}5$ i $y=-20x+20$. Rozwiązując ten układ równań, znaleźlibyśmy rozwiązanie danego zagadnienia. (Przeprowadź rachunek!).

Ćwiczenia.

1. Wykreślić dowolną prostą, przechodzącą przez początek układu współrzędnych, i znaleźć jej równanie.

2. Przedstawić wzorem algebraicznym i graficznie:

a) Dochód z kapitału 20 zł jako funkcję czasu, licząc procent prosty: 2%, 4%, 5%, 6%.

b) Objętość jednego *g* ciała, jako funkcję gęstości.

c) Drogę jako funkcję ilości obrotów koła u wozu o obwodzie 2 *m*.

d) Ilość obrotów koła u wozu na drodze 12 *m* jako funkcję obwodu koła.

e) Długość cienia w pewnej porze dnia jako funkcję wysokości przedmiotu, jeżeli przedmiot wysoki na 1·6 *m* rzuca cień długi na 2 *m*.

f) Czas potrzebny do wykonania pewnej pracy jako funkcję ilości godzin dziennej pracy, jeżeli pracując po 2 godziny dziennie, wykonamy tę pracę w 3 miesiącach.

Jakie znaczenie ma w każdym z tych przykładów współczynnik proporcjonalności?

3. Rozwiązać zapomocą algebraicznego przedstawienia proporcjonalności i zapomocą proporcyj następujące zadania:

a) 14 *m* sukna kosztuje 217 zł; ile należy zapłacić za $8\frac{1}{2}$ *m* tego sukna?

b) Kapitał jakiś, złożony na procent prosty, przyniósł w 3 latach 31·5 zł dochodu; w ilu latach przyniesie ten kapitał 84 zł dochodu?

c) Przedmiot, mający 2 *m* wysokości, rzuca w pewnej porze dnia cień długi na 4 *m* 5 *dm*; jak wysoka jest wieża, która w tym samym czasie rzuca cień o długości 101 *m* 25 *cm*?

d) $6\frac{1}{2}$ *kg* towaru kosztuje 41·6 zł; ile *kg* tego towaru otrzymamy za 24 zł?

e) Ktoś przepisał w 1 godz. $5\frac{1}{2}$ stronic rękopisu; w ilu godzinach przepisze 66 stronic?

f) Ile *g* czystego srebra jest w monecie ważącej 5 *g*, jeżeli monety takie sporządza się ze srebra 835 próby?

g) Towar brutto (wraz z opakowaniem) waży 84 *kg*, tara (opakowanie) waży $7\frac{1}{2}$%; ile zapłacić należy za ten towar, jeżeli 5 *kg* towaru netto (bez opakowania) kosztuje 17 zł?

h) Obliczono, że do usypania wału w 40 dniach potrzeba

35 robotników; w ilu dniach praca będzie ukończona, jeżeli zdołano znaleźć tylko 28 robotników?

i) Pewien zapas nafty wystarczy do 15 lamp na 90 dni; na ile dni wystarczy ten zapas, w tych samych warunkach, do 18 lamp?

j) Przednie koło u wozu, o obwodzie $2\frac{1}{5}$ *m*, wykonało 700 obrotów; ile obrotów wykonało równocześnie koło tylne, którego obwód wynosi $2\frac{3}{4}$ *m*?

k) Sadzawka napełnia się wodą w $10\frac{1}{2}$ godz., jeżeli woda dopływa do niej jedną rurą; w ilu godzinach wypełni się, jeżeli woda będzie dopływała jeszcze jedną rurą, ale o przekroju dwa razy mniejszym?

l) Ciężarek mosiężny ma objętość 253 cm^3; jaką objętość mieć będzie tak samo ciężki ciężarek żelazny, jeżeli ciężar właściwy żelaza wynosi 7·7 *g*, a mosiądzu 8·4 *g*?

m) Pociąg, jadąc z przepisaną prędkością, ma przebyć drogę między dwiema stacjami w 20 min.; o ile minut spóźni się, jeżeli z powodu przeszkód ruchu drugą połowę drogi przebywa z prędkością dwa razy mniejszą?

4. Przedstawić graficznie funkcje:

a) $y = \frac{3}{4}x + 2$; *b)* $y = \frac{1}{2}x + 3$; *c)* $y = -x - 2$; *d)* $y = 2x - 4$.

5. Wykreślić dowolną prostą, przechodzącą przez ćwiartki:

a) I, II i III, *b)* I, IV i III, *c)* II, I i IV, *d)* II, III i IV,

i znaleźć jej równanie.

6. *a)* Pociąg wyjeżdża ze stacji A o godz. 12; o godz. 12 min. 15 przybywa do stacji B, oddalonej od A o 12 *km*, i zatrzymuje się tu do godz. 12 min. 30. O godz. 12 min. 50 przybywa do stacji C, oddalonej od A o 30 *km*, i zatrzymuje się tu do godz. 13. Stąd wyjeżdża do stacji D, oddalonej od A o 40 *km*, i przybywa tu o godz. 13 min. 10. Dobrawszy odpowiednio podziałkę, przedstawić graficznie odległość pociągu od stacji A jako funkcję czasu, przyjmując, że ruch pociągu między stacjami jest jednostajny.

b) Inny pociąg wyjeżdża o godz. 12 ze stacji C i przybywa do B o godz. 12 min. 25. Zatrzymawszy się tu 15 min., odjeżdża do stacji A i przybywa tu o godz. 13 min. 10. — Przedstawić na poprzednim rysunku graficznie także ruch tego pociągu.

[Rysunek przedstawia graficzny rozkład jazdy obu pociągów między stacjami A i C].

c) Sporządź graficzny rozkład jazdy pociągów między dwiema stacjami według obowiązującego rozkładu jazdy.

7. Orzec bez rysunku, przez które ćwiartki przechodzą proste, których równania są niżej podane, a następnie wykreślić je:

a) $y = \frac{1}{2}x + 2$; *b)* $y = -2x + 2\frac{1}{2}$; *c)* $y = -2x$; *d)* $y = x - 1$;
e) $y = -x$; *f)* $y = -x - 2$; *g)* $x = -3$; *h)* $y = 5$;
i) $y = -\frac{2}{3}x - 1\frac{1}{3}$; *j)* $y = -1$; *k)* $x = 0$; *l)* $y = 0$.

8. Przez które ćwiartki przechodzą proste; $y = 2x + 1$; i $y = \frac{1}{2}x - 5$? Która z tych prostych tworzy z osią $+X$ większy kąt? W której ćwiartce przecinają się zatem? Stwierdzić przewidziany wynik rysunkiem!

9. Zbadać w podobny sposób, jak w ćwicz. 8, w których ćwiartkach leżą wierzchołki trójkąta, którego boki mają równania:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \qquad y = 5x - 12 \quad \text{i} \quad y = -x.$$

10. Napisać równania dwu prostych, równoległych do prostej: $y = \frac{1}{3}x + 2$, a zresztą dowolnych i wykreślić te proste.

11. *a)* Obliczyć stałe a i b i znaleźć równanie prostej, przechodzącej przez punkty: A $(0, -2)$ i B $(6, 1)$. Obliczyć odciętą punktu, leżącego na tej prostej, którego rzędna wynosi 0.

b) Długość słupka rtęci w termoskopie wynosi przy 0° C 8 *cm*, a przy 100° C 23 *cm*. Przedstawić długość słupka rtęci jako funkcję temperatury. Obliczyć, jak wysoka jest temperatura, jeżeli słupek rtęci ma 11 *cm* długości.

c) Przedstawić temperaturę w stopniach F, jako funkcję temperatury w stopniach C, wiedząc, że 0° i 100° C odpowiadają temperatury 32° F i 212° F. Ile stopni F odpowiada temperaturze 20° C, -15° C? Ile stopni C odpowiada temperaturze 95° F, 14° F?

d) Objętość gazu wzrasta przy ogrzaniu o 1° C o $\frac{1}{273}$ część objętości gazu przy 0° C. Przedstawić objętość gazu jako funkcję temperatury, jeżeli objętość gazu przy 0° C wynosi: *α)* 8190 cm^3, *β)* v cm^3. Jaka będzie objętość gazu przy temperaturze: *α)* -30° C, *β)* $+273^\circ$ C. Przy jakiej temperaturze będzie objętość gazu dwa razy mniejsza od objętości przy 0° C?

e) Przy wzlotach balonem zaobserwowano, że temperatura powietrza obniża się w miarę oddalania się od ziemi o $0{\cdot}59^0$ C na każdych 100 *m*. Przedstawić temperaturę powietrza jako funkcję odległości od ziemi, jeżeli temperatura jego przy ziemi wynosi 20^0 C. W jakiej odległości od ziemi wynosi temperatura powietrza 0^0 C?

f) Na każdy cm^2 ciała wywiera powietrze atmosferyczne ciśnienie 1 *kg*. Gdy ciało zanurzamy w wodę, to ciśnienie na 1 cm^2 wzrasta o 0·1 *kg*, gdy ciało zanurza się o 1 *m* głębiej. Przedstawić ciśnienie na 1 cm^2 ciała jako funkcję głębokości, do której ciało zanurzono. Jak wielkie jest to ciśnienie w głębokości 9600 *m* (największa znana głębokość morza)? W jakiej głębokości wynosi ciśnienie 10 *kg* na 1 cm^2?

12. *a)* Wyznaczyć funkcję linjową $y = ax + b$, która dla $x = 2$ i $x = -3$ przyjmuje odpowiednio wartości $y = 2$ i $y = 4\frac{1}{2}$. Przedstawić tę funkcję graficznie i znaleźć jej miejsce zerowe.

b) Znaleźć równanie prostej, przechodzącej przez punkty $A(-6, -6)$ i $B(2, -\frac{2}{3})$. Wyznaczyć punkty przecięcia się tej prostej z osiami układu współrzędnych.

c) Znaleźć równanie prostej, która na osiach X i Y odcina odcinki 5 *cm* i -2 *cm*. Rozwiązać zadanie także w liczbach ogólnych, przyjmując, że te odcinki wynoszą *c cm* i *b cm*!

d) Pociąg porusza się ruchem jednostajnym i jest o godzinie 11 min. 20 oddalony od stacji A o $+24$ *km*, a o godz. 12 min. 10 o -6 *km*; przedstawić wzorem algebr. i graficznie odległość pociągu od stacji A jako funkcję czasu, liczonego od godz. 12-tej. O której godzinie pociąg przejeżdża przez stację A?

13. Rozwiązać graficznie równania:

a) $3x - \frac{3}{4} = 0$; *b)* $\frac{7}{2}x - 5\frac{1}{4} = 0$; *c)* $2\frac{1}{3}x + 4\frac{2}{3} = 0$;
d) $-\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} = 0$; *e)* $2\frac{1}{2}x = 0$; *f)* $-2\frac{1}{5}x - 5\frac{1}{2} = 0$.

14. W następujących równaniach przedstawić graficznie lewą i prawą stronę jako funkcje x i podać, jakie znaczenie geometryczne mają pierwiastki równań:

a) $\frac{1}{2}x - 3 = 2x - 6$; *b)* $-x + 6 = 2x$;
c) $0{\cdot}3x + 1 = -0{\cdot}2x + 3$: *d)* $3 = \frac{1}{2}x + 1$;
e) $3x - 5 = -2$; *f)* $\frac{2}{3}x + 2 = 0$.

15. *a)* Ze stacji A wyjeżdża pociąg o godz. 8-ej do stacji B, z B zaś wyjeżdża do A pociąg o godz. 8 min. 20. Kiedy

spotkają się, jeżeli oba poruszają się z jednakową prędkością, $\frac{3}{4}\frac{km}{min.}$, a odległość AB $= 30\ km$?

[Przedstawić graficznie drogi pociągów jako funkcje czasu *)]. Jak daleko od A spotkają się?

b) Ze stacyj A i B, oddalonych od siebie o 27 *km*, wyjeżdżają naprzeciw siebie równocześnie dwa pociągi; pierwszy jedzie z prędkością 36 $\frac{km}{godz.}$, drugi z prędkością 45 $\frac{km}{godz.}$. Kiedy spotkają się? Jak daleko od A spotkają się?

[Rozwiązać zadanie także graficznie *)].

c) O godz. 2 min. 45 przejeżdża przez stację pociąg towarowy, jadący z prędkością 24 $\frac{km}{godz.}$; o godz. 3 min. 10 przejeżdża przez tę samą stację, w tym samym kierunku pociąg pośpieszny, jadący z prędkością 54 $\frac{km}{godz.}$. O której godzinie pociąg pośpieszny dopędzi pociąg towarowy?

[Przedstawić graficznie ruch każdego pociągu i podać geometryczne znaczenie rozwiązania **)].

d) Z kapitału 4100 zł pobiera ktoś co roku dochód i 200 *zł*; kapitał 2000 *zł* powiększa się zaś co roku o 100 *zł*. Kiedy oba kapitały będą równe?

[Rozwiązać zadanie także graficznie, przedstawiając wartości obu kapitałów jako funkcje czasu ***)].

16. *a)* Po obwodzie koła, wynoszącym 200 *cm*, poruszają się ruchem jednostajnym, w tym samym kierunku dwa punkty. Prędkość jednego wynosi 10 $\frac{cm}{sek.}$, prędkość drugiego 15 $\frac{cm}{sek.}$. Kiedy spotkają się pierwszy raz, kiedy drugi raz, kiedy *n*-ty raz, jeżeli oba punkty zaczęły ruch równocześnie od tego samego miejsca? Ile razy spotkają się w ciągu 20 minut?

[Przedstawić drogę każdego punktu jako funkcję czasu i uwzględnić, że spotkanie się nastąpi, gdy różnica dróg równa będzie obwodowi koła lub jego wielokrotności].

b) Większa wskazówka zegara zakreśla kąt 360° w 12 godzinach, mniejsza w 1 godz. O godz. 12 nakrywają się obie;

---

*) Minutę przedstawić odcinkiem 1 *mm*, 1 *km* odcinkiem 1 *mm*.

**) Godzinę przedstawić odcinkiem 4 *cm*, 1 *km* odcinkiem 1 *mm*.

***) Rok przedstawić odcinkiem 1 *cm*, 100 *zł* odcinkiem 1 *mm*.

kiedy nakryją się znowu pierwszy, kiedy drugi, kiedy n-ty raz? Ile razy nakryją się w ciągu 12 godzin? Ile minut po 12-tej tworzyć będą kąt prosty?

[Przedstawić graficznie drogę (w stopniach) jako funkcję czasu, uważając kąt $360^0 . n + a$ za równy kątowi a].

c) Rozwiązać zadanie 16*a*, przyjmując, że drugi punkt zaczął ruch o 7 sekund później od pierwszego.

d) Na arenie cyrkowej biegną po równoległych torach kołowych w przeciwnych kierunkach dwa konie; jeden biegnie z prędkością $4 \frac{\text{stopnie}}{\text{sek.}}$, drugi z prędkością $5 \frac{\text{stopni}}{\text{sek.}}$. Kiedy spotkają się po raz pierwszy, drugi, n-ty, jeżeli wyszły równocześnie z punktów, leżących na jednym promieniu kół? Ile razy spotkają się w ciągu 10 minut?

[Spotkanie się nastąpi, gdy suma dróg (w stopniach) równać się będzie 360^0 lub wielokrotności tej liczby. Przedstawić graficznie drogę jako funkcję czasu, podobnie, jak w zad. 16 *b*].

17. Rozwiązać graficznie układy równań:

a) $y = 2x - 1$, $y = -x + 8$;	*b)* $y = \frac{1}{2}x + 3$, $y = 3x - 7$;	*c)* $y = -\frac{1}{2}x$, $y = x + 6$;
d) $2x + y = 4$, $x - y = 5$;	*e)* $x + y = 0$; $-\frac{1}{3}x + y = 4$;	*f)* $3x - 4y = 8$, $-x - 2y = 14$;
g) $x - 2y = 3$, $y = -2$;	*h)* $2x + 3y = 10$, $x = 2$;	*i)* $x + 2y = 3$, $y = 0$.

18. Plan jazdy dla dwóch pociągów I i II uwidoczniony jest w tabelce:

km	I	Nazwa stacji	II
0	12,20	↓ A ↑	14,50
30	13,00	B	13,50

Przedstawić odległość każdego pociągu od stacji A jako funkcję czasu (liczonego od godz. 12 min. 20); przedstawić graficznie obie funkcje (1 godz. przedstawić odcinkiem 2 *cm*, a 30 *km* odcinkiem 1 *cm*); obliczyć kiedy i jak daleko od stacji A spotykają się oba pociągi.

19. Przedstawić graficznie następujące funkcje i ułożyć dla nich tabelki zmienności:

a) $y=\frac{1}{2}x+2$; *b)* $y=-\frac{3}{5}x$; *c)* $y=-1\frac{1}{2}x+3$;
d) $y=\frac{2}{3}x-1$; *e)* $y=-2x-4$; *f)* $y=mx+m$:
g) $y=mx-m$; *h)* $y=\frac{1}{m}x-m$; *i)* $y=\frac{1}{m}x+m$.

[W ostatnich czterech przykładach rozróżnić przypadki $m \gtreqless 0$!].

20. *a)* Przedstawić graficznie funkcję zmiennej x, znajdującą się w liczniku i oddzielnie funkcję zmiennej x, znajdującą się w mianowniku ułamka: $z=\frac{-2x+5}{x-1}$, i ułożyć dla tych funkcyj tabelki zmienności. Na podstawie rysunku i tabelek rozstrzygnąć, dla jakich wartości x jest ułamek z dodatni, a dla jakich ujemny.

[Ułamek jest dodatni, jeżeli licznik i mianownik mają jednakowe znaki, a ujemny, jeżeli licznik i mianownik mają różne znaki].

b) To samo dla $z=\frac{x}{\frac{1}{2}x-4}$; *c)* To samo dla $z=\frac{x-2}{x+3}$;

d) To samo dla $z=\frac{5-x}{x-3}$; *e)* To samo dla $z=\frac{-x-4}{\frac{1}{2}x-4}$.

ROZDZIAŁ III.

NIERÓWNOŚCI.

§ 1. Nierówności warunkowe w ogólności i ich przekształcanie.

W § 13 drugiego rozdziału zaznaczyliśmy, że bardzo często istnieje pewna zależność między wielkościami tylko w pewnych granicach. Rozpatrzmy następujący przykład: Długość y (w cm) pewnej sprężyny jest taką funkcją linjową obciążenia x (w g), że $y = \frac{1}{2}x + 30$; wzór ten jest jednak ważny tylko wtedy, gdy długość sprężyny przy wydłużaniu nie dochodzi do 70 cm, a przy ściskaniu do 20 cm. Przy przekroczeniu tych granic wzór przestaje być ważnym. Wynika stąd zadanie: w jakich granicach zmieniać się może ciężar rozciągający lub zgniatający sprężynę, jeżeli powyższy wzór ma pozostać ważnym? Chodzi o znalezienie takich wartości x, dla których $\frac{1}{2}x + 30 < 70$ i $\frac{1}{2}x + 30 > 20$. To zagadnienie prowadzi nas do zajęcia się nierównościami.

Nierówność, zawierającą jedną lub więcej zmiennych, a sprawdzającą się tylko dla wartości zmiennych, spełniających pewne warunki, nazywamy *nierównością warunkową*. *Rozwiązać nierówność* warunkową znaczy ustalić dla zmiennej (zmiennych) zakres zmienności, w którym nierówność jest spełniona.

Np. Nierówność $2x + 5 > 2x + 3$ nie jest nierównością warunkową, bo sprawdza się dla każdej wartości zmiennej x. — Natomiast nierówność $x + 2 > 5$ jest nierównością warunkową, bo nie spełnia się dla wszelkich wartości x. (Podaj przykłady!). Łatwo jednak widzieć bezpośrednio, że powyższa nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $x > 3$. Ostatnia nierówność stanowi rozwiązanie poprzedniej, bo podaje dla x taki obszar zmienności (od 3 do $+\infty$), że gdy x przyjmuje jedną z wartości tego obszaru, to dana nierówność jest zawsze spełniona; dla wartosci x poza tym obszarem dana nierówność nie spełnia się. — Czasami

rozwiązanie musi być podane w postaci kilku nierówności. Np.: Nierówność $\frac{x-3}{x-1} < 0$, jest spełniona wtedy i tylko wtedy, jeżeli $1 < x < 3$. Ostatnia podwójna nierówność stanowi rozwiązanie danej.
W tym paragrafie mówić będziemy dla uproszczenia tylko o nierównościach z jedną zmienną. Wszystkie twierdzenia wyprowadzone tu, można jednak odnieść i do nierówności, zawierających więcej zmiennych.

Dwie nierówności nazywamy *równoważnemi*, jeżeli sprawdzają się dla tych samych wartości zmiennej, czyli jeżeli każda wartość zmiennej, sprawdzająca pierwszą nierówność, sprawdza i drugą, a każda wartość, sprawdzająca drugą nierówność, sprawdza także i pierwszą. *Przekształcić nierówność* znaczy zastąpić ją nierównością równoważną. Podobnie jak w równaniach, prowadzi przekształcanie nierówności do rozwiązania. Zbadajmy, czy zasady przekształcania równań można stosować do przekształcania nierówności. Znajdziemy:
1. Otrzymamy nierówność równoważną, jeżeli do obu stron danej nierówności dodamy równe liczby, lub gdy od obu jej stron równe liczby odejmiemy.

Gdy bowiem nierówność $A(x) > B(x)$ sprawdza się dla pewnej wartości x, to pozostanie ona prawdziwą, gdy do (od) obu jej stron tę samą liczbę C dodamy (odejmiemy). Z powyższej nierówności wynika: $A(x) \pm C > B(x) \pm C$. Naodwrót: jeżeli ostatnia nierówność sprawdza się dla jakiejś wartości x, to odejmując (dodając) od (do) obu jej stron C, znajdziemy, że i pierwsza nierówność sprawdza się dla tej samej wartości x.

2. *a)* Otrzymamy nierówność równoważną, jeżeli obie strony danej nierówności przez równe liczby dodatnie pomnożymy lub podzielimy.
2. *b)* Otrzymamy nierówność równoważną, jeżeli obie strony danej nierówności przez równe liczby ujemne pomnożymy lub podzielimy, a równocześnie zmierimy kierunek nierówności.

2. *a)* Nierówności: $A(x) > B(x)$, $A(x) \,.\, C > B(x) \,.\, C$, $A(x) : C > B(x) : C$ są równoważne, jeżeli $C > 0$.
2. *b)* Nierówności: $A(x) > B(x)$, $A(x) \,.\, C < B(x) \,.\, C$, $A(x) : C < B(x) : C$ są równoważne, jeżeli $C < 0$.
Przeprowadź dowód, jak w przypadku 1, powołując się na znane twierdzenia o mnożeniu i dzieleniu liczb nierównych przez liczby względne.

Z twierdzenia 1. wynika, że w nierównościach wolno przenosić wyrazy z jednej strony na drugą zupełnie tak, jak w równaniach. Po przeniesieniu wszystkich wyrazów nierówności na jedną stronę, otrzymamy nierówność w postaci: $A(x) > 0$ lub $A(x) < 0$ (porównaj ze sprowadzaniem równań do zera). Jeżeli lewa strona zawiera ułamki o mianownikach, będących liczbami szczególnemi lub ogólnemi, o których wiemy z pewnością, że mogą mieć tylko wartość dodatnią lub tylko ujemną, to możemy nierówność uwolnić od ułamków (jak równanie), stosując twierdzenie $2a$ lub $2b$. Wolno też nierówność uprościć przez liczbę dodatnią lub ujemną, zmieniając w tym ostatnim przypadku kierunek nierówności na przeciwny.

Wystrzegać się należy tylko mnożenia lub dzielenia przez wyrażenie, zawierające zmienną lub liczby ogólne, które może przyjmować wartości dodatnie i ujemne, lub stać się zerem.

Po *uporządkowaniu* nierówności otrzymamy po lewej stronie albo ułamek, albo wielomian uporządkowany według potęg zmiennej. Zajmiemy się na razie tym drugim przypadkiem. Zależnie od stopnia tego wielomianu ze względu na x, nazywać będziemy nierówność *nierównością stopnia pierwszego*, *drugiego* i t. d.

Przykłady porządkowania nierówności podane są przy końcu § 2.

§ 2. Nierówność stopnia pierwszego z jedną zmienną.

Nierówność stopnia pierwszego z jedną zmienną ma postać:

$$ax + b > 0 \text{ lub } ax + b < 0.$$

Zajmiemy się tylko pierwszą nierównością; rozwiązanie bowiem nierówności drugiej otrzymamy z rozwiązania pierwszej, zmieniając kierunek nierówności na przeciwny.

Aby nierówność $ax + b > 0$ rozwiązać, przenosimy wyraz zawierający zmienną na lewą, a wyraz wolny od zmiennej na prawą stronę. Otrzymamy: $ax > -b$. Gdy chcemy po lewej stronie otrzymać zmienną x bez współczynnika, musimy obie strony ostatniej nierówności podzielić przez a. Rozróżniamy dwa przypadki:

1. Jeżeli $a > 0$, to $x > -\frac{b}{a}$ stanowi rozwiązanie danej nierówności.

2. Jeżeli $a < 0$, to $x < -\frac{b}{a}$ stanowi rozwiązanie danej nierówności.

P r z y k ł a d 1. Rozwiązać nierówność: $2x - 3 > 0$.
Otrzymamy kolejno: $2x > 3$.
$x > 1\frac{1}{2}$.

P r z y k ł a d 2. Rozwiązać nierówność: $-3x + 5 > 0$.
Otrzymamy kolejno: $-3x > -5$,
$x < 1\frac{2}{3}$.

Nierówność $ax + b > 0$ można rozwiązać również zapomocą następującego rozumowania:

Po lewej stronie danej nierówności znajduje się funkcja linjowa zmiennej x. Miejscem zerowem tej funkcji jest $x = -\frac{b}{a}$, jak wynika z rozwiązania równania $ax + b = 0$. Ponieważ funkcja linjowa rośnie ze wzrostem x, jeżeli $a > 0$, a maleje, jeżeli $a < 0$, to:

$$ax + b > 0, \text{ jeżeli } x > -\frac{b}{a}, \text{ gdy } a > 0;$$

$$ax + b > 0, \quad " \quad x < -\frac{b}{a}, \quad " \quad a < 0.$$

Ostatni sposób rozwiązywania nierówności możemy interretować geometrycznie. Lewa strona nierówności $ax + b > 0$ (oznaczamy ją literą y) przedstawia, jako funkcja linjowa zmiennej x, prostą odchyloną od dodatniego kierunku osi X o dodatni lub ujemny kąt ostry zależnie od tego, czy $a > 0$, czy $a < 0$ (proste I i II w fig. 11). Prosta przecina oś X w punkcie, którego odcięta wynosi $-\frac{b}{a}$.

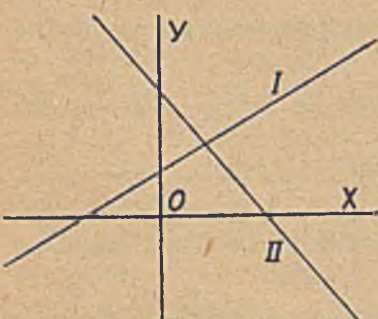

Fig. 11.

Dana nierówność żąda wyznaczenia odciętych tych punktów prostej, które mają rzędną dodatnią czyli leżą nad osią X. Rzut oka na fig. 11 poucza, że warunek ten spełniają punkty prostej, dla których $x > -\frac{b}{a}$, jeżeli $a > 0$ (prosta I), a punkty, dla których $x < -\frac{b}{a}$, jeżeli $a < 0$.

Powtórz całe rozumowanie dla nierówności $ax+b<0$!

Przykład 3. Rozwiązać nierówność: $-\frac{2}{3}x+2>0$.

Rozwiązujemy równanie $-\frac{2}{3}x+2=0$ w celu wyznaczenia miejsca zerowego funcji $y=-\frac{2}{3}x+2$. Znajdziemy, że $y=0$ dla $x=3$. Ponieważ funkcja y maleje ze wzrostem x (bo współczynnik kierunkowy jest ujemny), to: $-\frac{2}{3}x+2>0$, jeżeli $x<3$.

Wreszcie podajemy 2 przykłady porządkowania i rozwiązywania nierówności.

Przykład 4. Rozwiązać nierówność:

$$(x+\tfrac{1}{3})^2-x(x+1)>\tfrac{5}{6}(x-1).$$

Wykonywamy naznaczone działania: $x^2+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}-x^2-1>\frac{5x}{6}-\frac{5}{6}$;

$$\frac{2x}{3}-\frac{8}{9}>\frac{5x}{6}-\frac{5}{6}.$$

Mnożymy obie strony przez 18: $12x-16>15x-15$.

Porządkujemy: $-3x>1$

Dzielimy obie strony przez -3: $x<-\frac{1}{3}$.

Przykład 5. Rozwiązać nierówność: $\frac{x+4}{3-x}>1$.

Odejmujemy od obu stron 1: $\frac{x+4}{3-x}-1>0$.

Wykonywamy działania:

$$\frac{x+4-3+x}{3-x}>0,$$

$$\frac{2x+1}{3-x}>0.$$

Ostatni ułamek będzie dodatni, jeżeli licznik i mianownik będą miały znaki jednakowe, a więc jeżeli:

albo: $2x+1>0$ i $3-x>0$,
albo: $2x+1<0$ i $3-x<0$.

Pierwsza nierówność (rozwiąż ją!) będzie spełniona, jeżeli $x>-\frac{1}{2}$, druga (rozwiąż!), jeżeli $x<3$. Obie nierówności będą spełnione, jeżeli $-\frac{1}{2}<x<3$.

Trzecia nierówność (rozwiąż!) sprawdza się, jeżeli $x<-\frac{1}{2}$, czwarta (rozwiąż!), jeżeli $x>3$. Obie nierówności nie mogą więc być równocześnie prawdziwe. Zatem:

$$\frac{2x+1}{3-x}>0 \text{ tylko wtedy, jeżeli } -\tfrac{1}{2}<x<3.$$

[Rozwiąż tę nierówność sposobem, podanym w zad. 20 str. 44 i porównaj wyniki!]

§ 3. Nierówność stopnia pierwszego z dwiema zmiennemi.

Ogólną postacią nierówności stopnia pierwszego z dwiema zmiennemi jest: $mx + ny + p > 0$ lub $mx + ny + p < 0$. Zajmiemy się tylko pierwszą nierównością i to pod warunkiem $n \neq 0$.

Podstawiając za x dowolną wartość, otrzymamy dla y nierówność stopnia pierwszego, która, jak wiemy, określa dla y pewien obszar zmienności. Gdy za x podstawiać będziemy inne wartości, otrzymamy dla y inne obszary zmienności. Tak więc podporządkowuje nierówność $mx + ny + p > 0$ każdej wartości jednej zmiennej pewien obszar zmienności drugiej zmiennej.

Geometryczne znaczenie takiej nierówności poznamy, przekształcając ją w następujący sposób:

Podzielmy obie strony nierówności $mx + ny + p > 0$ przez $n \neq 0$ i oznaczmy: $\frac{m}{n} = -a$, $\frac{p}{n} = -b$. Otrzymamy:

$$-ax + y - b > 0, \text{ czyli } y > ax + b, \text{ jeżeli } n > 0;$$
$$-ax + y - b < 0, \text{ czyli } y < ax + b, \text{ jeżeli } n < 0.$$

Wykreślmy prostą $y = ax + b$. Dla punktów, leżących na tej prostej, rzędna $y = ax + b$; nierówność $y > ax + b$ sprawdza się dla współrzędnych punktów, leżących nad tą prostą; nierówność $y < ax + b$ sprawdza się dla współrzędnych punktów, leżących pod tą prostą. W tem znaczeniu powiemy, że nierówność $y > ax + b$ przedstawia część płaszczyzny, leżącą nad prostą $y = ax + b$, a nierówność $y < ax + b$ część płaszczyzny, leżącą pod tą prostą.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać nierówności:

a) $4x + 1 < 3x - 2$; *b)* $3x + 2 > 2x + 5$;
c) $4x - 2 > x + 1$; *d)* $5x + 1 < x + 7$;
e) $2x - 3 > 3x + 5$; *f)* $3x + 2 < 4x - 1$;
g) $3 - 2x > 1 - x$; *h)* $5 + x < 2 + 2x$;
i) $2x + 9 > 4x + 5$; *j)* $x + 5 > 3x - 1$;
k) $\frac{2}{3}x + 3 < \frac{3}{4}x - 2$; *l)* $\frac{1}{6}x + 1 < \frac{2x + 1}{9}$;
m) $(x - \frac{1}{2})^2 > (x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$; *n)* $(x - \frac{2}{3})^2 - (x + \frac{2}{3})^2 < \frac{1}{2}x - 1$;
o) $(x + 1)^2 > x(x - 1)$; *p)* $(3x - 1)^2 + (4x - 1)^2 > (5x - 1)^2$.

2. Rozwiązać nierówności podwójne:

a) $3 < 2x + 1 < 11$; *b)* $0 < \frac{2}{3}x - 4 < 6$;
c) $0 > \frac{2}{3}x + 5 > -3$; *d)* $7 > \frac{3}{4}x - 2 > 4$;
e) $5x + 1 > 4x - 2 > 3x + 1$; *f)* $3x - 2 > 4x + 1 > 2x - 5$;
g) $\frac{2}{3}x + 1 > x - 2 > \frac{3}{4}x - 1$; *h)* $0{\cdot}4x - 1 < 0{\cdot}5x - 0{\cdot}9 < 0{\cdot}3x - 1{\cdot}1$.

3. Zbadać, czy mogą być spełnione nierówności podwójne:

a) $2 - 3x > 4 - x > 5 - 2x$; *b)* $\frac{1}{2}x - 1 > \frac{3}{4}x + 3 > \frac{1}{6}x - 1$.

4. *a)* Ojciec ma 40 lat, a dwaj jego synowie 10 lat i 12 lat. Kiedy obaj synowie razem będą mieli więcej lat niż ojciec?

b) Jeden zbiornik zawiera 400 *l* wody, a drugi 500 *l*. Do pierwszego dopływają 2 *l* wody w każdej minucie, a z drugiego odpływają 3 *l* wody w minucie. Kiedy w pierwszym zbiorniku będzie więcej wody niż w drugim, lecz mniej, niż dwa razy tyle, ile w drugim?

c) Odległość y (w kilometrach) pociągu od stacji A jest następującą funkcją czasu x, liczonego w minutach od godz. 3-ciej: $y = -\frac{2}{3}x + 20$. Kiedy znajduje się pociąg między stacjami: 1) A i B, 2) A i C, 3) D i A, 4) D i C, jeżeli $\overrightarrow{AB} = +10$ *km*, $\overrightarrow{AC} = +16$ *km*, $\overrightarrow{AD} = -8$ *km*?

d) Długość y sprężyny (w *cm*) jest następującą funkcją obciążenia x (w *g*): $y = 2x + 30$. Jakim ciężarkiem można sprężynę obciążać (lub zgniatać), aby długość jej nie przekraczała granic od 20 *cm* do 70 *cm*?

5. *a)* Przedstawić graficznie lewą i prawą stronę nierówności: $2x + 1 < \frac{1}{2}x + 4$ jako funkcje zmiennej x, objaśnić geometryczne znaczenio tej nierówności i odczytać z wykresu, dla jakich wartości x nierówność ta spełnia się.

To samo dla nierówności:

b) $x - 3 > 3 - x$; *c)* $1 - 2x > \frac{1}{2}x - 4$;
d) $3x - 2 > -5$; *e)* $\frac{3}{4}x + 2 < 5$.

6. Rozwiązać nierówności:

a) $\dfrac{x+1}{3-x} > 0$; *b)* $\dfrac{x-1}{4x-3} < 0$; *c)* $\dfrac{2x-3}{x+1} > 0$;

d) $\dfrac{1-x}{x+2} < 0$; *e)* $\dfrac{2x+1}{2x-3} < 0$; *f)* $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$;

g) $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$; *h)* $\dfrac{2x+3}{x-4} > 3$; *i)* $\dfrac{x-1}{2x+3} < 1$.

7. Podać geometryczne znaczenie następujących nierówności podwójnych (porównaj ćwicz. 5) i odczytać z wykresu ich rozwiązania:

a) $-\frac{2}{3}x+3\frac{2}{3}>\frac{4}{3}x+1\frac{2}{3}>\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$;
b) $-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}<\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}<-2x+9$;
c) $-1<\frac{1}{2}x+1<3$;
d) $3<-2x-1<7$.

8. Wskazać część płaszczyzny, na której leżą punkty, których współrzędne sprawdzają nierówności:

a) $2x-y+3>0$, $x+2y-6>0$;
b) $x+y-2>0$, $y<3$;
c) $2x-3y+1<0$, $x-y-1>0$;
d) $x>0$, $y<2$;
e) $x+3y+6>0$, $4x-3y-6<0$, $x-2y+1>0$;
f) $x-y>0$, $y>1$, $x<3$;
g) $x+y-6<0$, $2x-y>0$, $x-2y<0$;
h) $2x>y>x$, $x+y<6$.

9. Jakie nierówności stopnia pierwszego z dwiema zmiennemi spełniają współrzędne punktów, leżących na polu trójkąta ABC, jeżeli *a)* $A\,(0, 0)$, $B\,(1, 3)$, $C\,(3, 1)$; *b)* $A\,(0, 4)$, $B\,(4, 4)$, $C\,(2, 0)$; *c)* $A\,(-3, -1)$, $B\,(0, 3)$, $C\,(2, 0)$?

10. *a)* Na polu trójkąta ABC, w którym $AC=6$ *cm*, $AB=BC$, a wysokość wykreślona z wierzchołka B wynosi 4 *cm*, obrano punkt M. Prostopadła wykreślona z M do AC przecina AC w punkcie M'. Oznaczmy: $AM'=x$, $MM'=y$. Jakie nierówności spełniać muszą x i y, jeżeli punkt M ma leżeć na polu trójkąta ABC?

b) To samo dla trójkąta ABC, jeżeli $AB\perp AC$, a $AB=AC=4$ *cm*.

c) Jakie nierówności spełniać muszą boki x i y trójkąta, jeżeli trzeci bok wynosi 5 *cm*? Przedstawić graficznie te nierówności i wymienić na podstawie wykresu kilka liczb, które sprawdzają te nierówności, i kilka liczb, które ich nie sprawdzają.

ROZDZIAŁ IV.

DYSKUSJA RÓWNAŃ STOPNIA PIERWSZEGO.

§ 1. Równania z jedną niewiadomą.

Równanie $ax + b = 0$ ma, jak wiemy, zawsze jedno rozwiązanie, jeżeli $a \neq 0$. Jeżeli $a = 0$, to równanie jest nierozwiązalne, a mianowicie sprzeczne, jeżeli $b \neq 0$, a nieoznaczone, jeżeli $b = 0$.

Jeżeli równanie zawiera tylko liczby szczególne, to samo rozwiązanie równania wskazuje, czy zadanie jest rozwiązalne, czy nieoznaczone lub sprzeczne. Gdy jednak równanie zawiera także liczby ogólne, to może ono dla pewnych wartości liczb ogólnych być rozwiązalnem, a dla innych nieoznaczonem lub sprzecznem. Rozwiązanie takiego równania wymaga zatem uzupełnienia, które nazywamy *dyskusją*.

W dyskusji podajemy przedewszystkiem, czy i dla jakich wartości liczb ogólnych równanie staje się sprzecznem lub nieoznaczonem. Ponieważ nadto rozwiązanie takiego równania nie jest liczbą szczególną, lecz przedstawia tylko pierwiastek równania jako funkcję *parametrów* (t. j. liczb ogólnych zawartych w równaniu), to należy w dyskusji także rozstrzygnąć, dla jakich wartości parametrów pierwiastek równania jest zerem, dla jakich jest dodatni, a dla jakich ujemny, lub w ogólności podać, jak zmienia się pierwiastek równania ze zmianą parametrów.

P r z y k ł a d 1. Rozwiązać równanie: $4(x - 3) = -3m$ i przeprowadzić dyskusję.

Po uporządkowaniu równanie ma postać:

$$4x + 3m - 12 = 0; \text{ stąd:}$$
$$x = -\tfrac{3}{4}m + 3.$$

Dyskusja:

a) Równanie jest zawsze rozwiązalne, a x jest funkcją linjową parametru m. Ponieważ współczynnik przy m jest ujemny, to x

maleje ze wzrostem m. Aby wyznaczyć wartość m, dla której $x=0$, rozwiązujemy równanie: $-\tfrac{3}{4}m+3=0$ i otrzymujemy $m=4$. Zatem:

m	$-\infty \nearrow 4 \nearrow +\infty$
x	$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$

b) Geometrycznie:

Lewa strona równania, z którego wyznaczyliśmy x, jest funkcją linjową x; oznaczamy tę funkcję literą y. Otrzymamy:

$$y=4x+3m-12.$$

Pierwiastek równania jest miejscem zerowem tej funkcji. Aby je wyznaczyć, przedstawmy tę funkcję graficznie. Otrzymamy prostą równoległą do prostej $y=4x$ (wykreśl!), której położenie zależy od wartości wyrazu $3m-12$, wolnego od zmiennej.

Ta prosta przetnie oś X w początku układu współrzędnych, jeżeli $3m-12=0$, czyli gdy $m=4$; wtedy $x=0$ jest pierwiastkiem danego równania.

Ta prosta przetnie ujemną oś X, jeżeli $3m-12>0$ (wynika z rysunku!), co nastąpi, gdy $m>4$; wtedy pierwiastek równania $x<0$.

Badana prosta przetnie dodatnią oś X, jeżeli $3m-12<0$, czyli gdy $m<4$; wtedy pierwiastek równania $x>0$.

Dyskusja daje taki sam wynik jak poprzednio.

P r z y k ł a d 2. Rozwiązać równanie: $a(x+2)=3x-1$ i przeprowadzić dyskusję.

Równanie ma po uporządkowaniu postać:

$$(3-a)\,x-(2a+1)=0, \text{ a stąd:}$$

$$x=\frac{2a+1}{3-a}, \text{ jeżeli } 3-a\neq 0.$$

Dyskusja:

a) Jeżeli $3-a=0$, czyli $a=3$, to równanie jest sprzeczne. Dla $a\neq 3$ jest równanie rozwiązalne, a pierwiastek jego ma postać ilorazu. Ponieważ iloraz jest dodatni, jeżeli dzielna i dzielnik mają jednakowe znaki, a ujemny, jeżeli znaki dzielnej i dzielnika są różne, to:

$x>0$, jeżeli $2a+1>0$ i $3-a>0$, albo
jeżeli $2a+1<0$ i $3-a<0$.
$x<0$, jeżeli $2a+1>0$ i $3-a<0$, albo
jeżeli $2a+1<0$ i $3-a>0$. Do tych warunków dołączamy:
$x=0$, jeżeli $2a+1=0$.

Rozwiązując powyższe nierówności, znajdziemy, że pierwsza para nierówności sprawdza się, jeżeli $-\tfrac{1}{2}<a<3$, trzecia, jeżeli $a>3$, czwarta, jeżeli $a<-\tfrac{1}{2}$, a druga para nierówności sprawdzać się nie może. Uwzględniwszy wreszcie, że ostatnie równanie ma pierwiastek $-\tfrac{1}{2}$, otrzymamy:

jeżeli $a < -\frac{1}{2}$, to $x < 0$;
jeżeli $a = -\frac{1}{2}$, to $x = 0$;
jeżeli $-\frac{1}{2} < a < 3$, to $x > 0$;
jeżeli $a = 3$, to x nie istnieje;
jeżeli $a > 3$, to $x < 0$.

Podamy jeszcze inne sposoby dyskusji:

b) Jeżeli $a = 3$, to równanie jest sprzeczne. Jeżeli $a \neq 3$, to x jest ilorazem dwu funkcyj linjowych parametru a, a mianowicie licznik $l = 2a + 1$, a mianownik $m = -a + 3$. Fig. 12 przedstawia na jednym rysunku obie funkcje. Łatwo widzieć, że $l > 0$, gdy $a > -\frac{1}{2}$, a $l < 0$, gdy $a < -\frac{1}{2}$; natomiast $m > 0$, gdy $a < 3$, a $m < 0$, gdy $a > 3$.

$x = \frac{l}{m}$ jest zatem liczbą dodatnią, gdy $-\frac{1}{2} < a < 3$, a ujemną, gdy $a < -\frac{1}{2}$, lub gdy $a > 3$. Dla $a = -\frac{1}{2}$, $l = 0$, a więc i $x = 0$.

c) Oznaczmy lewą stronę uporządkowanego równania, która jest funkcją linjową zmiennej x, literą y tak, że:

$$y = (3 - a)\,x - (2a + 1).$$

Ta funkcja przedstawia prostą.

Jeżeli $3 - a = 0$, czyli $a = 3$, to prosta jest równoległa do osi X; równanie nie ma rozwiązania.

Jeżeli $3 - a > 0$, czyli $a < 3$, to prosta tworzy z dodatnim kierunkiem osi X kąt ostry*). Aby pierwiastek równania był dodatni, t. j. aby taka prosta przecięła dodatnią oś X, musi być wyraz wolny od zmiennej ujemny (wynika z poglądu), czyli: $-(2a + 1) < 0$, skąd $a > -\frac{1}{2}$. W przeciwnym razie jest pierwiastek równania ujemny.

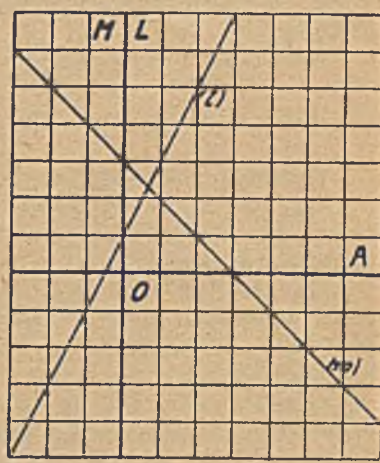

Fig. 12.

Jeżeli $3 - a < 0$, czyli $a > 3$, to prosta tworzy z dodatnim kierunkiem osi X kąt rozwarty. Aby pierwiastek równania był dodatni, t. j. aby taka prosta przecięła dodatnią oś X, musiałoby być, jak wskazuje pogląd, $-(2a + 1) > 0$, co wobec $a > 3$ jest niemożliwe. Taka prosta przecina zawsze tylko ujemną oś X, to znaczy, że gdy $a > 3$, to równanie ma pierwiastek ujemny.

Wyniki te są zgodne z wynikami otrzymanemi poprzednio.

P r z y k ł a d 3. Po ilu latach zrównają się kapitały 1500 zł i 2000 zł, jeżeli pierwszy złożono na 4%, a drugi na p%?

*) Kąt liczymy w kierunku dodatnim (str. 19).

Oznaczając literą x ilość lat, po której to nastąpi, otrzymamy:

$$1500 + 60x = 2000 + 20px, \text{ a po uporządkowaniu:}$$

$$(3 - p)\, x - 25 = 0, \text{ skąd:}$$

$$x = \frac{25}{3 - p}.$$

Równanie jest sprzeczne, jeżeli $p = 3$, w każdym innym przypadku jest równanie rozwiązalne. Mylnem byłoby jednak uważać każde rozwiązanie równania za rozwiązanie zagadnienia. *Zagadnienie zawiera bowiem pewne warunki, których przy układaniu równania nie uwzględniliśmy*. I tak wynika ze znaczenia p i x, że żadna z tych liczb nie może być liczbą ujemną. $x = \frac{25}{3 - p}$ jest tylko wtedy rozwiązaniem zagadnienia, jeżeli $x \geqq 0$ i $p \geqq 0$.

Z obliczonego dla x wzoru wynika, że x nie może być zerem. Dodatniem będzie x, jeżeli mianownik $3 - p > 0$, skąd wynika $p < 3$. Zadanie jest więc tylko wtedy rozwiązalne, jeżeli $0 \leqq p < 3$.

Jeżeli p, rosnąc, przebiega wartości od 0 do 3 (wyłącznie), to $3 - p$ maleje, a $x = \frac{25}{3 - p}$ rośnie.

Pierwszy kapitał tylko wtedy może zrównać się z drugim, jeżeli ten ostatni jest złożony na procent niższy niż 3. Zrównanie się nastąpi tem wcześniej, im niższa jest stopa procentowa p.

Przykład 4. Ile (x) *kg* czystego spirytusu dolać należy do 1 *kg* spirytusu a-procentowego, aby otrzymać spirytus b-procentowy?

Układamy równanie: $\frac{a}{100} + x = (1 + x) \cdot \frac{b}{100}$.

Rozwiązując to równanie, otrzymamy: $x = \frac{b - a}{100 - b}$.

Warunki nieuwzględnione w równaniu są: $0 \leqq a \leqq 100$, $0 \leqq b \leqq 100$, $x \geqq 0$. Możnaby wprawdzie objaśnić i ujemne wartości x jako usuwanie spirytusu z a-procentowej mieszaniny, ale taką interpretację pomijamy.

Zadanie jest sprzeczne, jeżeli $b = 100$, a $a < b$. Rzeczywiście przez dolewanie czystego spirytusu do a-procentowego spirytusu ($a < 100$) nie można nigdy otrzymać b-procentowego (czystego, bo $b = 100$) spirytusu.

Jeżeli $a = b = 100$, to zadanie staje się nieoznaczonem. I rzeczywiście dolewając do 100-procentowego spirytusu ($a = 100$) dowolną ilość 100-procentowego spirytusu, otrzymamy zawsze 100-procentowy spirytus ($b = 100$).

Jeżeli $b < 100$, to zadanie jest zawsze rozwiązalne, o ile dla x otrzymamy wartość dodatnią. Ponieważ mianownik ułamka $\frac{b - a}{100 - b}$ jest dodatni, to ułamek ma taki znak jak licznik. Zatem x jest dodatnie, jeżeli $b > a$; dla $a = b$ otrzymamy $x = 0$. To znaczy: Z a-procentowej mieszaniny możemy przez dolewanie czystego spirytusu otrzymać tylko spirytus więcej niż a-procentowy; aby otrzymać spirytus a-procentowy, nie potrzebujemy wcale spirytusu dolewać.

Przykład 5. Kupiec miał a *kg* towaru. Z tego sprzedał $\frac{m}{n}$-tych części z zarobkiem 3 zł na 1 *kg*, a resztę z zarobkiem 4 zł na 1 *kg*. Na całej sprzedaży zarobił 420 zł. Obliczyć $\frac{m}{n}$!

Oznaczając $\frac{m}{n} = x$, układamy równanie: $3ax + 4(1 - x)a = 420$.

Rozwiązując to równanie, otrzymamy: $x = \frac{4a - 420}{a}$.

Warunki nieuwzględnione w równaniu są: $a > 0$, $0 < x < 1$.

Chcąc uwzględnić ostatni warunek, rozwiązujemy nierówność: $0 < \frac{4a - 420}{a} < 1$ i otrzymujemy (wobec $a > 0$): $105 < a < 140$. Pierwiastek równania tylko wtedy przedstawia rozwiązanie zadania, jeżeli a spełnia ostatnią nierówność. W przeciwnym razie zadanie jest nierozwiązalne.

Wreszcie możemy zbadać, jak zmienia się x ze wzrostem a. W tym celu napiszemy: $x = 4 - \frac{420}{a}$. Gdy a rośnie, to $\frac{420}{a}$ maleje, a $x = 4 - \frac{420}{a}$ rośnie.

Podaj dla a kilka szczegółowych wartości, rozwiąż zagadnienie i przekonaj się o prawdziwości powyższych wyników!

§ 2. Układ równań nieoznaczony.

Przykład. Rozwiązać układ równań:

$$2x + y = 3,$$
$$4x + 2y = 6.$$

Użyjmy metody podstawienia:

Z pierwszego równania: $y = 3 - 2x$.

Podstawiamy ten wyraz za y w drugiem równaniu. Otrzymamy: $4x + 6 - 4x = 6$, a po zredukowaniu:

$$6 = 6.$$

Przez wyrugowanie niewiadomej y z układu równań odpada i druga niewiadoma x. Można więc niewiadomej x nadać dowolną wartość, a wartość y, obliczona z pierwszego równania, sprawdzać będzie zawsze i drugie równanie. Układ równań ma niezliczoną ilość rozwiązań, i dlatego będziemy go nazywać nieoznaczonym.

Zbadajmy, w czem szukać należy przyczyny tego zjawiska, że podany wyżej układ równań jest nieoznaczony.

Przyglądając się dokładnie obu równaniom, zauważymy, że w drugiem równaniu współczynniki przy x i y, a także i wyraz wolny od niewiadomej są dwa razy większe od odpowiednich liczb w pierwszem równaniu. Drugie równanie powstaje przez pomnożenie obu stron pierwszego równania przez 2. Stąd też pochodzi, że każda para wartości, która, podstawiona za x i y, sprawdza pierwsze równanie, musi sprawdzać i drugie. Takich par wartości x i y, które sprawdzają pierwsze równanie, jest niezliczona ilość. Aby dowolną ilość takich par wartości znaleźć, wystarczy obrać za x dowolną liczbę, a odpowiednie y obliczyć z pierwszego równania.

Tak np. przyjmując: $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3,$ i t. d.
otrzymamy odpowiednio: $y = 7, 5, 3, 1, -1, -3,$ i t. d.

Każda para tych wartości sprawdza i drugie równanie.

Rozumowanie takie możemy powtórzyć zawsze, ilekroć współczynniki przy niewiadomych i wyraz wolny od niewiadomej w drugiem równaniu powstają z odpowiednich liczb w pierwszem równaniu przez pomnożenie przez tę samą liczbę, czyli ilekroć współczynniki przy niewiadomych i wyrazy wolne od niewiadomych w drugiem równaniu są wprost proporcjonalne do odpowiednich liczb w pierwszem równaniu. Stąd twierdzenie:

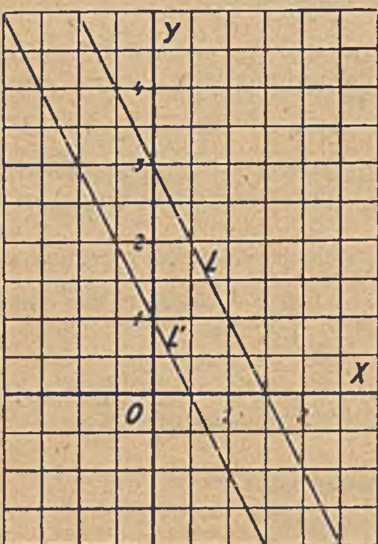

Fig. 13.

Jeżeli w układzie dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi współczynniki przy niewiadomych i wyrazy wolne od niewiadomych w jednem równaniu są (wprost) proporcjonalne do odpowiednich liczb w drugiem równaniu, to układ równań jest nieoznaczony.

Do takiego samego wyniku dojść można na podstawie graficzego przedstawienia układu równań.

Z pierwszego równania w naszym przykładzie otrzymamy:

$$y = -2x + 3;$$

z drugiego:

$$y = \tfrac{4}{2}x + \tfrac{6}{2}, \text{ czyli również:}$$
$$y = -2x + 3.$$

Oba równania przedstawiają tę samą prostą L (fig. 13). Współrzędne każdego punktu tej prostej sprawdzają oba równania; układ równań ma więc niezliczoną ilość rozwiązań.

§ 3. Układ równań sprzeczny.

Przykład: Rozwiązać układ równań:

$$2x + y = 3.$$
$$4x + 2y = 2.$$

Zastosujemy metodę podstawienia.
Z pierwszego równania: $y = -2x + 3$.
Podstawiając ten wyraz za y w drugiem równaniu otrzymamy:

$$4x - 4x + 6 = 2,$$

a po zredukowaniu: $$6 = 2.$$

Wynik jest oczywiście fałszywy. Ponieważ przy rozwiązywaniu układu równań nie popełniliśmy żadnego błędu, to przyczyna fałszywego wyniku musi tkwić w samym układzie równań. Przypatrzmy mu się dokładniej!

W pierwszem równaniu żądamy wyznaczenia takich dwu liczb, aby suma podwójnej pierwszej i drugiej wynosiła 3; w drugiem żądamy, aby suma poczwórnej pierwszej i podwójnej drugiej (a więc suma składników dwa razy większych, niż poprzednio) wynosiła nie 6, lecz 2. Liczb czyniących zadość pierwszemu warunkowi można podać niezliczoną ilość (np.: 0 i 3, 1 i 1, 2 i -1, i t. d.). Każda jednak para takich liczb, podstawiona w drugiem równaniu, sprawia, że lewa strona tego równania przyjmuje wartość 6, a więc nie równa się prawej stronie. Oba równania przedstawiają żądania sprzeczne, których żadne liczby nie mogą równocześnie spełnić. Mówimy, że układ równań jest sprzeczny.

Sprzeczność taką znajdziemy zawsze, ilekroć współczynniki przy niewiadomych w drugiem równaniu są jednakowemi wielokrotnościami (są wprost proporcjonalne do) odpowiednich współczynników w pierwszem równaniu, a związek taki nie zachodzi między wyrazami wolnemi od niewiadomej. Dlatego możemy powiedzieć ogólnie:

Jeżeli w układzie dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi współczynniki przy niewiadomych w jednem równaniu są (wprost) proporcjonalne do odpowiednich współczynników w drugiem równaniu, a związek taki nie zachodzi między wyrazami wolnemi od niewiadomej, to układ równań jest sprzeczny.

Że układ równań podany w przykładzie podanym na początku jest sprzeczny, wykażemy jeszcze na podstawie graficznego przedstawienia.

Z pierwszego równania otrzymujemy:

$$y = -2x + 3,$$

z drugiego: $$y = -\tfrac{4}{2}x + \tfrac{2}{2}, \text{ czyli}$$
$$y = -2x + 1.$$

Pierwsze równanie przedstawia w fig. 13 prosta L, drugie prosta L'. Obie proste są do siebie równoległe, bo mają jednakowe współczynniki kierunkowe. Rozwiązaniu układu równań odpowiada przy graficznem przedstawieniu wyznaczenie punktu przecięcia się obu prostych. A że proste równoległe nie mają punktu przecięcia się, więc i rozpatrywany układ równań nie ma rozwiązań.

§ 4. Układ równań oznaczony.

Przykład: Rozwiązać układ równań:

$$2x + 3y = 7,$$
$$5x + 4y = 14.$$

Zastosujemy metodę porównania.

Z pierwszego równania: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$;
Z drugiego: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{2}$.
Zatem: $-\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{2}$.
Stąd: $x = 2$, $y = 1$.

Aby układ równań rozwiązać graficznie, kreślimy proste L i L' (fig. 14), mające równania: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$
i $y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{2}$.

Współczynniki kierunkowe obu prostych są różne, proste więc nie są do siebie równoległe, lecz przecinają się w jednym punkcie.

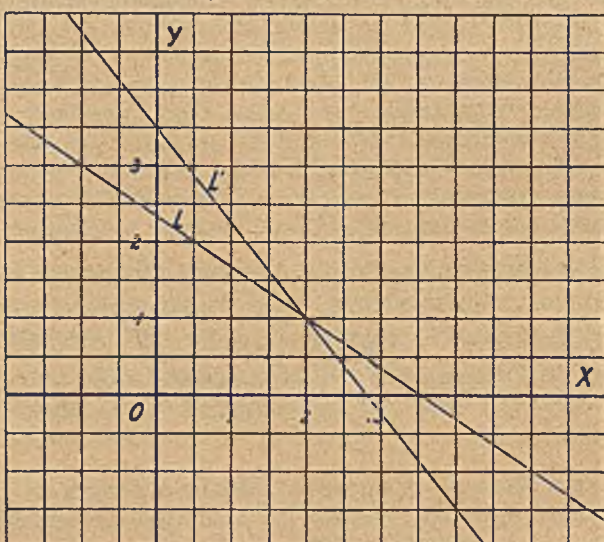

Fig. 14.

Rzeczywiście odczytamy z figury, że punkt przecięcia się ma współrzędne: $x = 2$, $y = 1$. Wartości te przedstawiają rozwiązanie układu równań.

Aby rozstrzygnąć, kiedy współczynniki kierunkowe dwu prostych wypadają równe, a kiedy różne, zauważmy z ostatniego przykładu, że współczynnik kierunkowy obliczamy, dzieląc współczynnik przy x w uporządkowanem równaniu przez współczynnik przy y i dając otrzymanemu ułamkowi znak przeciwny. Z obu równań danego układu mogą tylko wtedy wypaść jednakowe współczynniki kierunkowe, jeżeli licznik (współczynnik przy x) i mianownik (współczynnik przy y) jednego ułamka są jednakowemi wielokrotnościami (są wprost proporcjonalne do) licznika, względnie mianownika drugiego ułamka (odpowiednich współczynników w drugiem równaniu). Jeżeli zaś współczynniki przy niewiadomych w jednem równaniu nie są proporcjonalne do odpowiednich współczynników w drugiem równaniu, to współczynniki kierunkowe prostych, przedstawiających te równania, nie są równe, proste nie są ani równoległe, ani się nie nakrywają, lecz muszą się przecinać. Układ równań da się w tym przypadku zawsze rozwiązać. Zatem:

Jeżeli w układzie dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi współczynniki przy niewiadomych w jednem równaniu nie są (wprost) proporcjonalne do odpowiednich współczynników w drugiem równaniu, to układ równań ma zawsze jedno rozwiązanie.

Uzasadnienie ostatniego twierdzenia wymaga uzupełnienia w tym przypadku, gdy współczynnik przy y jest zerem. Wtedy bowiem współczynnik kierunkowy nie da się obliczyć sposobem wyżej zastosowanym.

Przedstawmy graficznie układy równań:

$$\begin{array}{lll} 2x+0\,.\,y=3, & \quad 2x+0\,.\,y=3, & \quad 2x+0\,.\,y=3, \\ 4x+0\,.\,y=6; & \quad 4x+0\,.\,y=3; & \quad x+\ \ 2y=4. \end{array}$$

W pierwszym z tych układów wpółczynniki przy niewiadomych i wyrazy wolne od niewiadomych w pierwszem równaniu są proporcjonalne do odpowiednich liczb w drugiem równaniu.

Pierwsze równanie: $2x=3$, czyli $x=\frac{3}{2}$, przedstawia prostą L równoległą do osi Y (fig. 15).

Drugie: $4x=6$, czyli $x=\frac{3}{2}$, przedstawia tę sąmą prostą L. Układ równań jest nieoznaczony; reguła podana w § 2 odnosi się i do tego przypadku.

W drugim układzie są współczynniki przy niewiadomych w jednem równaniu proporcjonalne do odpowiednich współczynników w drugiem równaniu, a wyrazy wolne od niewiadomych nie.

Pierwsze równanie da się przedstawić w postaci:

$x=\frac{3}{2}$ i przedstawia prostą L (fig. 15).

Drugie równanie: $4x=2$ da się przedstawić w postaci:

$x=\frac{1}{2}$ i przedstawia prostą $L' \parallel Y \parallel L$.

Równania przedstawiają proste równoległe, są więc sprzeczne, zgodnie z regułą podaną § 3.

W trzecim układzie nie są współczynniki przy niewiadomych w obu równaniach proporcjonalne.

Pierwsze równanie, napisane w postaci:

$x = \frac{3}{2}$, przedstawia prostą L (fig. 15).

Drugie równanie da się przedstawić w postaci:

$y = -\frac{1}{2}x + 2$ i przedstawia prostą L'',

która przecina prostą L w punkcie M $(\frac{3}{2}, \frac{5}{4})$. Układ równań ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{4}$, zgodnie z ostatnią regułą.

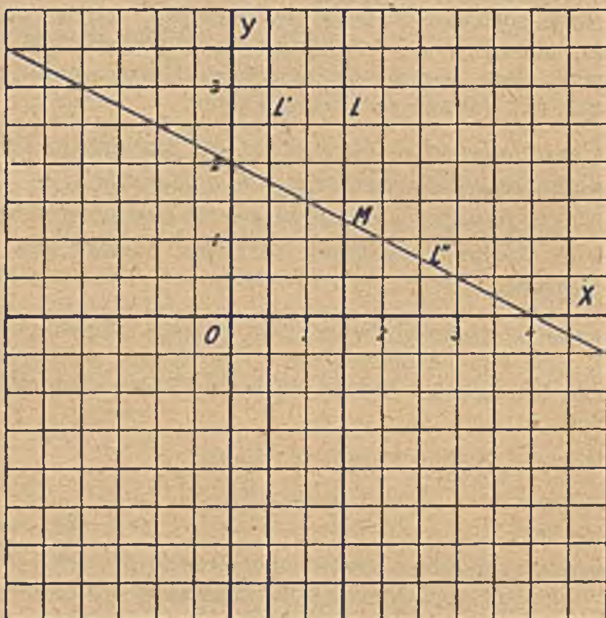

Fig. 15.

Ostatnie 3 twierdzenia obowiązują zatem ogólnie. (Równania takie jak $0 . x + 0 . y = 3$, zawierające w sobie sprzeczność, lub $0 . x + 0 . y = 0$, sprawdzające się dla wszelkich wartości podstawionych za x i y, wykluczamy).

§ 5. Zestawienie.

Te same wyniki, do których doszliśmy w poprzednich paragrafach, można otrzymać także w następujący sposób:

Niech $a_1 x + b_1 y = c_1$,

$a_2 x + b_2 y = c_2$

przedstawia układ równań z dwiema niewiadomemi. Przyjmujemy, że współczynniki a_1, a_2, b_1 i b_2 mają wartości różne od zera. Mnożąc oba równania kolejno przez b_2 i $-b_1$, a następnie przez $-a_2$ i a_1 i dodając je do siebie (metoda równych współczynników), otrzymamy:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$
$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = c_2 a_1 - c_1 a_2.$$

Oba te równania, służące do wyznaczenia x i y, mają rozwiązanie, jeżeli $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Jeżeli $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, to oba równania, a więc i dany układ równań, są albo sprzeczne, albo nieoznaczone zależnie od tego, czy prawe strony dwu ostatnich równań mają wartości różne od zera czy równe zeru. Zauważymy przytem, że (przy założeniu $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$) z warunku $c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0$ wynika $c_2 a_1 - c_1 a_2 = 0$ i naodwrót. (Wykaż to!)

Wyrażenie: $a_1 b_2 - a_2 b_1$, od którego wartości zależy rozwiązalność układu równań, nazywamy *wyznacznikiem* układu równań. Wynik, do którego doszliśmy, wyrazimy słowami w następujący sposób:

Układ równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi ma zawsze jedną parę pierwiastków, jeżeli wyznacznik jego ma wartość różną od zera; układ równań takich jest sprzeczny lub nieoznaczony, jeżeli wyznacznik jego jest zerem.

Do łatwiejszego zapamiętania tych wyników służyć może schemat:

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{matrix}$$

Aby utworzyć wyznacznik układu równań, należy od iloczynu liczb, połączonych pierwszą kreską $\diagdown$ odjąć iloczyn liczb połączonych pierwszą kreską $\diagup$; aby otrzymać licznik wyrazu dla x (bez względu na znak), należy od iloczynu liczb, połączonych drugą kreską $\diagdown$, odjąć iloczyn liczb, połączonych drugą kreską $\diagup$.

Ostatnie twierdzenie wyraża zupełnie to samo, co twierdzenia w §§ 2, 3 i 4. Z warunku bowiem $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ wynika, że

$$a_1 b_2 = a_2 b_1,$$
$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2,$$

a więc, że a_1 i a_2 są proporcjonalne do b_1 i b_2 i naodwrót.

Podobnie wynika z równości $c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0$, że $b_1 : b_2 = c_1 : c_2$.

Przeprowadźmy wreszcie dyskusję układu równań, podanego na początku tego paragrafu, geometrycznie. Piszemy te równania w postaci:

$$y = -\frac{a_1}{b_1} x + \frac{c_1}{b_1},$$
$$y = -\frac{a_2}{b_2} x + \frac{c_2}{b_2}$$

i wnioskujemy, że przedstawiają one dwie proste.

Te dwie proste są równoległe, jeżeli $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$, czyli $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, a $\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}$. Wtedy punktu przecięcia się niema; układ równań jest sprzeczny.

Jeżeli obok równości współczyników kierunkowych, t. j. obok $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, także wyrazy wolne od zmiennych są równe, t. j. jeżeli $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$, czyli $c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0$, to obie proste nakrywają się; układ równań jest nieoznaczony.

W przeciwnym razie, t. j. gdy $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, układ równań ma jedno rozwiązanie.

§ 6. Przykłady dyskusji.

Jak układ dwu równań z dwiema niewiadomemi niezawsze ma pierwiastki, tak i zadanie tekstowe, które można przedstawić zapomocą układu dwu równań z dwiema niewiadomemi, niezawsze da się rozwiązać.

P r z y k ł a d 1. Po obwodzie koła, wynoszącym 72 *cm*, poruszają się dwa punkty ruchem jednostajnym w przeciwnych kierunkach. Ruch rozpoczynają równocześnie z tego samego miejsca i spotykają się po raz pierwszy po 5 sekundach, a po raz drugi *a)* po 10 sekundach, *b)* po 15 sekundach, od chwili rozpoczęcia ruchu. Jakie są ich prędkości?

Oznaczając prędkości punktów literami x i y, otrzymamy układ równań (porównaj zad. 16. str. 42):

a) $5x + 5y = 72,$
$10x + 10y = 144.$

Ten układ równań jest nieoznaczony; warunki podane w zadaniu nie wystarczają do wyznaczenia niewiadomych. Można to wywnioskować także z samego tekstu zadania. Ciała, poruszające się w sposób podany w zadaniu, muszą się spotykać w równych odstępach czasu. Skoro więc spotykają się po raz pierwszy po 5 sek., to po raz drugi spotykają się po 10 sek., po raz trzeci po 15 sek. i t. d. Drugi warunek nie jest nowym warunkiem, lecz wynikiem pierwszego.

b) $5x + 5y = 72,$
$15x + 15y = 144.$

Układ równań jest sprzeczny. Rzeczywiście drugi warunek, jak wynika z poprzedniego wyjaśnienia, pozostaje w sprzeczności z pierwszym; nie mogą się więc oba równocześnie spełniać.

Zadanie tekstowe, zawierające dwie niewiadome, prowadzi do nieoznaczonego układu równań, jeżeli oba warunki wyrażone w zadaniu są tak od siebie zależne, że drugi jest wynikiem pierwszego. Zadanie takie prowadzi do układu sprzecznego, jeżeli drugi warunek zawiera żądanie sprzeczne z pierwszym warunkiem.

Przykład 2. Zbadać, czy układ równań: $2x + ay = a + 5$,
$3x + 2by = 3b$.
może stać się sprzecznym lub nieoznaczonym.

Obliczamy wyznacznik: $2 \cdot 2b - 3 \cdot a = 4b - 3a$. Jeżeli $4b - 3a = 0$, czyli $4b = 3a$, to dany układ równań nie ma rozwiązań, lecz jest w ogólności sprzeczny. Może on jednak stać się i nieoznaczonym, jeżeli $3ab - 2b(a + 5) = 0$ (§ 5), czyli (po uproszczeniu przez $b \neq 0$) jeżeli $a = 10$. Zestawiając ten warunek z poprzednim, znajdziemy, że dany układ równań jest nieoznaczony, jeżeli $a = 10$, $b = 7\frac{1}{2}$. Jeżeli $4b \neq 3a$, to układ równań da się rozwiązać; znajdziemy:

$$x = \frac{b(a - 10)}{3a - 4b},\quad y = \frac{3a - 6b + 15}{3a - 4b}.$$

Zbadaj wykluczony w toku dyskusji przypadek $b = 0$!

Dalszą dyskusję przeprowadzimy, przyjmując $b = 3$. Wtedy

$$x = \frac{a - 10}{a - 4},\quad y = \frac{a - 1}{a - 4}.$$

Dla $a = 4$ układ jest sprzeczny. — Zbadajmy kiedy x i y mają wartości dodatnie, a kiedy ujemne:

Mianowniki obu ułamków są dodatnie, jeżeli $a > 4$, ujemne, jeżeli $a < 4$.

Licznik ułamka x jest dodatni, jeżeli $a > 10$, ujemny, jeżeli $a < 10$.

Licznik ułamka y jest dodatni, jeżeli $a > 1$, ujemny, jeżeli $a < 1$.

Zatem:

Jeżeli	$a < 1$,	to	$x > 0$, $y > 0$;
„	$a = 1$,	„	$x > 0$, $y = 0$;
„	$1 < a < 4$,	„	$x > 0$, $y < 0$;
„	$4 < a < 10$,	„	$x < 0$, $y > 0$;
„	$a = 10$,	„	$x = 0$, $y > 0$;
„	$10 < a$,	„	$x > 0$, $y > 0$.

Przeprowadź podobną dyskusję dla $b = -3$!

Jeżeli w układzie równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi współczynniki przy niewiadomych i wyrazy wolne od niewiadomych zawierają liczby ogólne, to układ równań może stać się sprzecznym lub nieoznaczonym dla pewnych szczególnych wartości, podstawionych za liczby ogólne, albo gdy między liczbami ogólnemi zachodzą pewne związki.

Przykład 3. Przez stacje A i B oddalone od siebie o 40 *km* przejeżdżają równocześnie dwa pociągi. Pierwszy jedzie w kierunku ku B z prędkością $\frac{3}{4}\frac{km}{min.}$, drugi z prędkością c. Kiedy i jak daleko od A spotykają się?

Uważając drogę od A ku B za dodatnią, czas przyszły za dodatni, a przeszły za ujemny, przedstawimy ruch obu pociągów wzorami:

$$s = \tfrac{3}{4}t,\quad s = ct + 40.$$

Czas x, po upływie którego oba pociągi spotkają się, i odległość y miejsca spotkania się pociągów od A muszą sprawdzać równania:

$$y = \tfrac{3}{4}x,\quad y = cx + 40.$$

Ten układ równań przyjmuje po uporządkowaniu postać:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 0, \\ -cx + y &= 40. \end{aligned}$$

Współczynnik przy y w drugiem równaniu powstaje z współczynnika przy y w pierwszem równaniu przez pomnożenie go przez $-\frac{1}{4}$. Układ równań nie będzie miał rozwiązania, jeżeli między współczynnikami przy x zachodzi taki sam związek, t. j. jeżeli:

$$-c = (-\tfrac{1}{4}) \cdot 3, \text{ czyli gdy } c = \tfrac{3}{4}.$$

Układ równań jest wtedy sprzeczny (bo wyrazy wolne od niewiadomych nie są proporcjonalne do współczynników przy niewiadomych). Oznacza to, że pociągi nie spotykają się, jeżeli prędkość drugiego pociągu jest taka sama, jak prędkość pierwszego. Rzeczywiście jadą wtedy pociągi w tym samym kierunku z jednakową prędkością, a drugi wyprzedza pierwszy zawsze o 40 *km*.

(Przedstaw graficznie ruch pociągów w tym przypadku!)

W każdym innym przypadku istnieje rozwiązanie. Znajdziemy:

$$x = \frac{40}{3-4c},\quad y = \frac{30}{3-4c}.$$

x i y mogą mieć wartości dodatnie lub ujemne.

Ponieważ liczniki obu ułamków są dodatnie, to ułamki będą dodatnie, jeżęli mianowniki będą dodatnie. Nastąpi to albo gdy c jest ujemne, albo gdy $c = 0$, albo gdy $c < \frac{3}{4}$ (wtedy bowiem $3 > 4c$).

Pociągi spotykają się w czasie przyszłym, w odległości dodatniej od A, jeżeli drugi pociąg porusza się w kierunku przeciwnym pierwszemu, albo jeżeli drugi pociąg stoi na stacji B, albo jeżeli drugi pociąg porusza się w tym samym kierunku, co pierwszy, ale z prędkością mniejszą. (Przedstaw na poprzednim rysunku ruch drugiego pociągu, przyjmując: $c = -\frac{3}{4}$, 0, $\frac{1}{2}$!).

Jeżeli zaś $3 < 4c$, czyli $c > \frac{3}{4}$, to mianowniki obu ułamków są ujemne, a więc x i y mają wartości ujemne.

Jeżeli prędkość drugiego pociągu jest większa od prędkości pierwszego, a oba pociągi jadą w tym samym kierunku, to oba pociągi spotkały się przed przybyciem na stację A. (Przedstaw graficznie na poprzednim rysunku ruch drugiego pociągu, przyjmując $c = 1$!).

Gdy zadanie tekstowe, prowadzące do układu dwu równań z dwiema niewiadomemi, zawiera liczby ogólne, to może się zdarzyć, że dla pewnych wartości liczb ogólnych zadanie staje się nieoznaczonem lub sprzecznem. Dlatego też podajemy przy takich zadaniach oprócz rozwiązania jeszcze dyskusję, w której rozstrzygamy, dla jakich wartości liczb ogólnych zadanie jest nieoznaczone lub sprzeczne. Nadto rozstrzygamy jeszcze w dyskusji, dla jakich wartości liczb ogólnych są pierwiastki ujemne, a dla jakich dodatnie i jakie znaczenie mają takie pierwiastki.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać następujące równania i przeprowadzić dyskusję:

a) $x - a = 2(a - 2)$; *b)* $2(x + a) = 12 - x$;

c) $\frac{x + a - 3b}{x + a} = \frac{x - 2b}{x}$; *d)* $\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} = \frac{x}{x^2 - a^2}$;

e) $(x + a)^2 - 4a = (x - a)^2 - a^2$;

f) $\left(a + \frac{x}{2}\right)^2 + \left(3 + \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2(a + 3)^2 + x^2}{2}$;

g) $(2a + x) : (a - x) = (1 - x) : (2 + x)$;

h) $a(x - 1) = 3(x - 2)$; *i)* $2a(x - 1) = a - 3(x + 1)$;

j) $\frac{ax + 3}{2} = a - x$; *k)* $\frac{a^2}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} = \frac{a - 1}{x^2 - 1}$;

l) $(b + x)^2 - (a - x)^2 = 0$.

2. Rozwiązać następujące zagadnienia i przeprowadzić dyskusję:

a) Ojciec ma 45 lat, a syn *a* lat; po ilu latach będzie ojciec 3 razy starszy od syna?

b) Z 3 *m* listewki ma być zrobiona taka prostokątna rama do obrazu, aby wysokość jej różniła się od podstawy o *a m*. Jaka musi być wysokość, a jaka podstawa?

c) Z 3 *m* listewki ma być zrobiona taka prostokątna rama, aby wysokość jej była n razy większa od podstawy. Obliczyć podstawę i wysokość!

d) W handlu otrzymujemy 90-cioprocentowy roztwór kwasu siarkowego. Ile g wody należy dodać do 100 g tego roztworu, aby otrzymać roztwór b-procentowy?

e) W handlu otrzymujemy 90-cioprocentowy roztwór kwasu siarkowego. Ile g tego roztworu należy dodać do 100 g wody, aby otrzymać roztwór a-procentowy?

f) Jeden robotnik wyrabia dziennie a m płótna, a drugi w tym samym czasie b m. Pierwszy wyrobił już c m, a drugi o d m więcej. Za ile dni od chwili obecnej obaj będą mieli wyrobioną jednakową ilość płótna?

g) Ile kg herbaty po 7 zł za kg należy dosypać do 20 kg herbaty po 10 zł za kg, aby otrzymać herbatę po a zł za kg?

h) A ma 16 lat, B 7 lat, a C 5 lat. Po ilu latach będą B i C razem mieli n razy tyle lat, co A?

i) Jeden robotnik, pracując sam, wykonałby pewną pracę w 30 dniach; drugi, pracując sam, wykonałby tę pracę w czasie krótszym o a dni. W ilu dniach wykonają pracę, pracując razem?

j) Kapitał a rozdzielono na dwie części: $\frac{m}{n}a$ i $\left(1 - \frac{m}{n}\right)a$ i włożono każdą część w inne przedsiębiorstwo. Pierwsze przedsiębiorstwo przyniosło 15% zysku, drugie 12%. Cały dochód wynosił 3000 zł. Obliczyć $\frac{m}{n}$!

k) W ciemni optycznej Porty (z otworem bez soczewki) jest wielkość obrazu przy stałem położeniu przedmiotu i otworu wprost proporcjonalna do odległości obrazu od otworu. Przy pewnem położeniu zasłony, na którą chwytamy obraz, wynosi wysokość obrazu 5 cm; po przesunięciu zasłony o a cm wynosi wysokość obrazu b cm. Jaka była pierwotna odległość zasłony od otworu?

l) Na drągu o długości 1·2 m niesie dwóch ludzi ciężar, ważący Q kg, w ten sposób, że każdy z nich trzyma inny koniec drąga. Jak daleko od środka należy zawiesić ten ciężar, aby pierwszy człowiek dźwigał $\frac{m}{n} = a$ części ciężaru, a drugi resztę?

m) Na drągu niosą dwa tragarze ciężar Q, zawieszony w środku drąga. Pierwszy trzyma drąg w odległości 0·6 m od środka; jak daleko od środka musi trzymać drąg drugi tragarz, jeżeli chce dźwigać tylko $\frac{m}{n} = a$ części ciężaru?

n) Na belce, podpartej w punktach A i B, zawieszony jest w odległości s od A ciężar Q *kg*. Jak wielki nacisk wywiera ten ciężar na A, a jaki na B, jeżeli $AB = 3\ m$?

[Uważając Q za stałą, zbadać, jak zmienia się nacisk x na A i nacisk $Q - x$ na B ze zmianą s, które może być dodatnie lub ujemne! Kiedy nacisk na A i B jest dodatni?]

o) Na punkt A sztaby (której ciężaru nie uwzględniamy) działa siła 4 *kg*, a na punkt B, oddalony od A o 1 *m*, siła Q, równoległa do tamtej (zgodnie lub przeciwnie skierowana). Jak daleko od A należy umieścić oś, aby na dźwigni, która w ten sposób powstanie, była równowaga?

p) Do kalorymetru, zawierającego 300 *g* wody o temperaturze 15^0C, dolano 200 *g* wody o temperaturze t^0C. O ile stopni zmieni się temperatura wody w kalorymetrze?

[Przyjąć, że kalorymetr nie zabiera wcale ciepła!].

3. Które z podanych niżej układów równań dadzą się rozwiązać, które są nieoznaczone, które sprzeczne?

a) $x + y = 3,\quad 2x + y = 4;$ *b)* $x - \frac{1}{2}y = 4,\quad 2x - y = 8;$ *c)* $-x + y = 6,\quad x + y = 8;$

d) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 2,\quad x + \frac{3}{4}y = 3;$ *e)* $-\frac{5}{6}x + y = 3,\quad x - 1{\cdot}2y = 2;$ *f)* $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{6},\quad 10\frac{1}{2}x - 7y = 3\frac{1}{2}.$

Odpowiedzieć na to pytanie: *α)* wykazując bezpośrednio sprzeczność, względnie równoważność obu równań: *β)* przedstawiając każdy układ graficznie.

4. Rozwiązać następujące układy równań i przeprowadzić dyskusję:

a) $x + 2y = 7 - a,\quad x + 4y = 9;$ *b)* $4x - 2y = 5a,\quad 4x + 3y = 20;$

c) $ax + y = 3,\quad 2x + y = 5;$ *d)* $(a+1)x - y = 5,\quad (2a - 13)x + 3y = 5;$

e) $(a-5)x + (a-1)y = -6,\quad (a-2)x + ay = 2;$ *f)* $ax + y = a - 2,\quad 3x - y = 2;$

g) $x + 2y = a,\quad 4x - 4y = a + 3b;$ *h)* $\dfrac{x}{a-b} - \dfrac{y}{a+b} = \dfrac{b}{a+b},\quad y - x = b;$

i) $(x+y):(y-x) = a:b,\quad \dfrac{x+y}{a} + \dfrac{x+y}{b} = \dfrac{2a}{a-b};$ *j)* $\dfrac{x}{a+1} + \dfrac{y+2}{a^2+2a+1} = 1,\quad x + y = 2a;$

$k)\ 3x - 2y = b,\quad 9x + ay = 3;$ $\qquad l)\ 3x - ay = 9,\quad 4x - (a+2)y = b;$

$m)\ ax + 2y = b,\quad (a-1)x - y = 2;$ $\qquad n)\ a^2x - b^2(x+4y) = (a-b)^2,\quad (x+y):\frac{1}{b} = (a^2+b^2):(a-b).$

5. *a)* Wyznaczyć współrzędne punktu, w którym prosta $y = -2x + 4$ przecina prostą $y = \frac{2}{3}x + b$. Zbadać, w której ćwiartce przecinają się te proste zależnie od różnych wartości b.

b) Wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia się prostych $y = ax - 1$ i $y = \frac{1}{2}x + 2$. W których ćwiartkach przecinają się te proste, gdy a przyjmuje różne wartości?

c) Znaleźć równanie prostej, przechodzącej przez punkty $A\,(c,\ 0)$ i $B\,(0,\ 2)$, i wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia się otrzymanej prostej z prostą $y = -2x + 1$. W których ćwiartkach znajduje się punkt przecięcia się, jeżeli c przyjmuje różne wartości?

6. *a)* Dla jakich wartości a spełniają pierwiastki układu równań: $2x + 3y = -a + 3$,
$x + 3y = 4$
nierówności: $-1 < x < +1$, $-1 < y < +1$?

b) Jakie warunki spełniać muszą liczby m i n, aby proste: $y = x + m$ i $y = -x + n$ przecinały się na polu kwadratu $ABCD$, jeżeli $A\,(5,\ 5)$, $B\,(-5,\ 5)$, $C\,(-5,\ -5)$, $D\,(5,\ -5)$?

7. Rozwiązać następujące zagadnienia i przeprowadzić dyskusję:

a) Dwa kapitały przyniosły w jednym roku 80 zł dochodu, gdy pierwszy był oddany na p%, a drugi na $(p - \frac{1}{2})$%. Gdy w następnym roku podniesiono stopę procentową pierwszego kapitału o 2, a drugiego kapitału o $1\frac{3}{4}$, to dochód wynosił 130 zł. Obliczyć oba kapitały.

b) Kupiec sprzedał a q węgla i b q drzewa, przyczem zarobił 4 zł; drugim razem sprzedał o 3 q węgla więcej, a o 2 q drzewa mniej i zarobił na tem 5 zł. Ile zarabiał (tracił) na sprzedaży 1 q węgla, ile na sprzedaży 1 q drzewa?

c) Przez stację A przejeżdżają dwa pociągi, drugi o τ minut później od pierwszego. Kiedy i jak daleko od A spotykają się, jeżeli pierwszy jedzie z prędkścią $\frac{1}{2}\frac{km}{\text{min.}}$, a drugi z prędkością c?

d) Złotnik ma dwa gatunki złota: a-tej próby i b-tej próby. Ile g złota każdego gatunku wziąć musi, aby po zmięszaniu otrzymać 200 g złota c-tej próby?

e) Przedmiot, zrobiony ze stopu złota waży 100 g, a zanurzony we wodzie traci na ciężarze a g. Obliczyć ile g złota, a ile domieszki zawiera ten przedmiot, jeżeli ciężar właściwy złota wynosi 19 g, a ciężar właściwy domieszki s g. ($s < 19$).

f) Do próżni barometru lewarowego dostało się nieco suchego powietrza. W pewnej chwili wynosiła różnica poziomów rtęci w obu ramionach 720 *mm*. Po dolaniu pewnej ilości rtęci do otwartego ramienia wynosiła różnica poziomów 718 *mm*, a objętość powietrza w „próżni" zmniejszyła się o $p\%$. Jakie było ciśnienie powietrza atmosferycznego, a jaka prężność powietrza w „próżni"?

g) Sztabka metalowa AB składa się z dwu części AC i CB, zrobionych z różnych metali, które mają współczynniki rozszerzalności linjowej α i β. Długość sztabki $AB = AC + CB$ przy 0°C wynosi 600 *mm*, a przy 100°C 601 *mm*. Obliczyć długość części AC i CB przy 0°C.

h) Na belce poziomej, podpartej w punktach A i B, zawieszone są dwa ciężary: 100 *kg* i P *kg* tak, że nacisk obu ciężarów razem na A i na B jest jednakowy. Po przemienieniu obu ciężarów nacisk na A staje się dwa (n) razy większy, niż nacisk na B. Obliczyć, jaka była pierwotna odległość punktów zawieszenia każdego z ciężarów od A, jeżeli $AB = 3$ *m*.

ROZDZIAŁ V.

PRZYBLIŻENIA LICZBOWE.

§ 1. Liczby niedokładne.

Wszelkie pomiary fizyczne, obliczenia statystyczne i t. p. dostarczają nam danych liczbowych niezupełnie dokładnych, lecz obarczonych większemi lub mniejszemi błędami.

Niech A oznacza *prawdziwą wartość* jakiejś liczby, a a jej *przybliżoną wartość*, znalezioną np. przez pomiar. Różnicę $A - a = \alpha$ nazywamy *błędem*, przyczem α może być liczbą dodatnią lub ujemną. Jeżeli $\alpha > 0$, to $A > a$ i a nazywa się przybliżoną wartością liczby A z błędem *przez niedomiar;* jeżeli zaś $\alpha < 0$, a więc $A < a$, to a nazywa się przybliżoną wartością liczby A z błędem przez *nadmiar*.

Np. zbudujmy trójkąt równoramienny o podstawie 43 *cm*, a ramionach 55·9 *cm*, wykreślmy jego wysokość i zmierzmy ją. Przypuśćmy, że z jednego pomiaru otrzymamy 51·3 *cm*, a z drugiego 51·8 *cm* zamiast prawdziwej wartości 51·6 *cm*. Pierwsza z otrzymanych liczb jest wartością przybliżoną wysokości z błędem przez niedomiar (+ 0·3); druga jest wartością przybliżoną z błędem przez nadmiar (— 0·2).

Zazwyczaj błąd nie jest znany, bo w przeciwnym razie znalibyśmy prawdziwą wartość liczby i nie potrzebowalibyśmy zadowalać się przybliżoną wartością. Nie wiemy też zwykle, czy błąd jest dodatni czy ujemny. Znajomość przybliżonej wartości liczby nie miałaby jednak żadnego znaczenia, gdybyśmy nie znali t. zw. *górnego kresu (górnej granicy)* α' błędu, t. j. liczby, od której bezwzględna wartość błędu jest mniejsza. Dopiero gdy wiemy, że $|\alpha| < \alpha'$, gdzie α' jest liczbą wiadomą, ma dla nas znajomość przybliżonej wartości pewne znaczenie, bo wtedy wiemy, że znaleziona przybliżona wartość różni się od prawdziwej wartości o mniej niż o a'.

Tak np. gdybyśmy w poprzednim przykładzie znali tylko przybliżoną wartość wysokości 51·3, a nie znali górnego kresu błędu, moglibyśmy równie dobrze przypuszczać, że owa wysokość wynosi 40 *cm* lub 60 *cm*. Gdy jednak dokładność konstrukcji i dokładność pomiaru pozwalają przypuszczać, że górny kres błędu wynosi 0·5, to wtedy wiemy, że prawdziwa wartość A wysokości spełnia nierówność: $50{\cdot}8 < A < 51{\cdot}8$. Gdyby więc np. chodziło o zbudowanie modelu takiego trójkąta z drutu, to przycinając drut, obierzemy drut, mający być wysokością, na 51·8 *cm*, pozostawiając mniej niż 1 *cm* na odcięcie przy ostatecznem składaniu modelu.

Jeżeli mamy podaną przybliżoną wartość a jakiejś liczby A i górny kres błędu a', to mówimy, że *liczba A jest wyznaczona z dokładnością do a'*.

Jeżeli podamy, że długość jakiegoś odcinka wynosi 4·26 *cm*, z dokładnością do jednej setnej, to znaczy, że prawdziwa długość x tego odcinka spełnia nierówność: $4{\cdot}25 < x < 4{\cdot}27$. Podobnie oznacza powiedzenie: „miasto pewne ma 430000 mieszkańców z dokładnością do 10000", że liczba M mieszkańców tego miasta spełnia nierówność: $420000 < M < 440000$.

Przybliżonemi wartościami posługujemy się nietylko wtedy, gdy nie znamy prawdziwej wartości, lecz także w celu *zaokrąglenia* liczb, przy których nie chodzi nam o zupełną dokładność.

Np. jeżeli 1 *m* płótna kosztuje 2·45 zł, to za 6·25 *m* należy zapłacić 15·3125 zł. Ponieważ tylko setne *zł* posiadają pewną wartość praktyczną, ograniczamy ostatnią liczbę do dwu miejsc dziesiętnych i mówimy, że za 6·25 *m* należy zapłacić 15·31 zł.

Liczby dziesiętne zaokrąglamy w praktycznych rachunkach w ten sposób, że zatrzymujemy tylko tyle najwyższych miejsc, ile ma w danym przykładzie praktyczne znaczenie, a resztę cyfr odrzucamy. Otrzymana tak liczba jest przybliżoną wartością danej liczby z dokładnością do jednostki najniższego zatrzymanego miejsca. — Tak np. jest w ostatnim przykładzie 15·31 przybliżoną wartością ceny z dokładnością do 0·01. Dokładność zwiększamy jeszcze w następujący sposób: Jeżeli cyfra, stojąca na najwyższem miejscu opuszczonej części liczby, wynosi mniej niż 5 (jak w ostatnim przykładzie), to górny kres błędu wynosi 0·5 jednostki najniższego zatrzymanego rzędu (w naszym przykładzie 0·005); jeżeli cyfra, stojąca na najwyższem miejscu odrzuconej części liczby, wynosi 5 lub więcej niż 5, to odrzucając miejsca zbędne, powiększamy cyfrę, stojącą na najniższem miejscu w przybliżonej wartości, o 1. Błąd popełniamy wtedy przez nadmiar, ale błąd ten będzie bezwzględnie mniejszy (lub niewiększy) niż 0·5 jednostki najniższego zatrzymanego rzędu. — Stosownie do tego ma liczba 61·827 następujące przybliżone wartości:

61·83	z dokładnością do	0·005	(błąd przez	nadmiar);
61·8	„ „ „	0·05	(„ „	niedomiar);
62	„ „ „	0·5	(„ „	nadmiar);
60	„ „ „	5	(„ „	niedomiar).

Ten sposób zaokrąglania liczb jest przyjęty powszechnie w rachunkach praktycznych.

Wykonując działania liczbami przybliżonemi, otrzymujemy oczywiście wynik także tylko przybliżony. Zadaniem naszem będzie ustalić dla wszystkich działań górny kres błędu wyniku, jeżeli dane są górne granice błędów wszystkich liczb, wchodzących w skład działania.

§ 2. Dodawanie.

Niech a, b, c oznaczają przybliżone wartości liczb A, B, C, liczby α, β, γ błędy, a α', β', γ', ich górne kresy tak, że

$$A - a = \alpha, \quad B - b = \beta, \quad C - c = \gamma;$$
$$|\alpha| < \alpha', \quad |\beta| < \beta', \quad |\gamma| < \gamma'.$$

Dodając pierwsze trzy równości, otrzymamy:

$$|(A + B + C) - (a + b + c)| = |\alpha + \beta + \gamma| \leqq |\alpha| + |\beta| + \\ + |\gamma| < \alpha' + \beta' + \gamma'.$$

Czyli:

Błąd sumy kilku wartości przybliżonych jest bezwzględnie mniejszy od sumy górnych kresów błędów wszystkich składników.

Np. Jeżeli w sumie: $2·783 + 15·47 + 36·2863 = 54·5393$ górne kresy błędów składników wynoszą kolejno: 0·001, 0·005, 0·00005, to górny kres błędu sumy wynosi 0·00605.

W praktyce zaokrąglamy poszczególne składniki do dwu miejsc dziesiętnych i piszemy: $2·78 + 15·47 + 36·29 = 54·54$. Górne granice błędów składników wynoszą po 0·005, a górny kres błędu sumy: $0·005 . 3 = 0·015$. Wprawdzie przy takiem *skróconem dodawaniu* kres górny błędu sumy jest nieco większy (w naszym przykładzie o 0·00895), jednak w praktyce używamy często tego sposobu dodawania ze względu na to, że skraca on mechanizm rachunkowy.

§ 3. Odejmowanie.

Zatrzymując znaczenie liter, przyjęte w poprzednim paragrafie, znajdziemy:

$$|(A-B)-(a-b)|=|\alpha-\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|<\alpha'+\beta'.$$

Bezwzględna wartość błędu różnicy jest mniejsza od sumy górnych granic błędów odjemnej i odjemnika.

Np. Jeżeli w różnicy: $18{\cdot}476-12{\cdot}5934=5{\cdot}8826$ górne kresy błędów odjemnej i odjemnika wynoszą: $0{\cdot}0005$ i $0{\cdot}00005$, to górny kres błędu różnicy wynosi $0{\cdot}00055$.

W praktyce używamy *skróconego odejmowania.* Zaokrąglamy obie liczby w poprzednim przykładzie do trzech miejsc dziesiętnych i odejmujemy: $18{\cdot}476-12{\cdot}593=5{\cdot}883$ z dokładnością do $0{\cdot}001$.

§ 4. Mnożenie.

Zajmiemy się najpierw przypadkiem, że jeden czynnik jest liczbą dokładną, a drugi przybliżoną. Zatrzymując znaczenie liter podane w § 2, znajdziemy:

$$|AB-Ab|=|A(b+\beta)-Ab|=|A\,.\,\beta|=|A|\,.\,|\beta|<A\beta'.$$

Błąd iloczynu, którego jeden czynnik jest liczbą dokładną, jest bezwzględnie mniejszy od iloczynu tego czynnika i górnego kresu błędu drugiego czynnika.

Np. Jeżeli w iloczynie $4{\cdot}247\,.\,8{\cdot}2=34{\cdot}8254$ górny kres błędu mnożnej wynosi $0{\cdot}0005$, a mnożnik jest liczbą dokładną, to błąd iloczynu jest bezwzględnie mniejszy, niż $8{\cdot}2\,.\,0{\cdot}0005=0{\cdot}0041$.

Jeżeli oba czynniki są liczbami niedokładnemi, to:

$$|AB-ab|=|(a+\alpha)(b+\beta)-ab|=|a\beta+b\alpha+\alpha\beta|\leqq a|\beta|+$$
$$+b|\alpha|+|\alpha|\,.\,|\beta|<a\beta'+b\alpha'+\alpha'\beta'.$$

Np. Jeżeli w iloczynie $8{\cdot}64\,.\,3{\cdot}14=27{\cdot}1296$ górny kres błędu każdego czynnika wynosi $0{\cdot}005$, to błąd iloczynu jest bezwzględnie mniejszy niż: $8{\cdot}64\,.\,0{\cdot}005+3{\cdot}14\,.\,0{\cdot}005+0{\cdot}005\,.\,0{\cdot}005=0{\cdot}058925$.

Ostatni składnik $\alpha'\beta'$ sumy, wyrażającej górny kres błędu iloczynu, jest bardzo mały w porównaniu z dwoma początkowemi składnikami, bo α' i β' są zazwyczaj małe w porównaniu z a i b (porównaj ostatni przykład!). Wskutek tego opuszczamy zwykle ten składnik i mówimy:

Błąd iloczynu dwu liczb jest bezwzględnie mniejszy od sumy iloczynów każdego czynnika i górnego kresu błędu drugiego czynnika.

Ostatni przykład wskazuje, że górna granica błędu iloczynu jest dość wysoka; wynik otrzymaliśmy na 4 miejsca dziesiętne, a z nich zaledwie pierwsze jest bez błędu. Aby uniknąć owego długiego rachunku, dającego nam wiele miejsc dziesiętnych, ale niepewnych, używamy t. zw. *skróconego mnożenia,* dającego wprawdzie wynik nieco gorszy, ale upraszczającego niezmiernie rachunek.

Zacznijmy od przykładu i wykonajmy zwykłym sposobem mnożenie: 8·64? . 3·14?, w którem „?" zastępuje nieznaną dalszą cyfrę. Otrzymamy:

```
 8·64? . 3·14?
 ─────────────
 2592?
   864?
   3456?
    ?????
 ─────────────
27·1?????
```

Widzimy stąd, że już drugie miejsce dziesiętne nie będzie pewne. Mnożąc zatem przez 3 jednostki, nie będziemy pisali setnych (3 . 4 = 12), lecz opuszczając 0·02, doliczymy tylko 0·1 do dziesiątych. Rachuję więc: 0·04 . 3 = 0·12, doliczam 0·1. Następnie: 3 . 0·6 = 1·8 więcej „poprawka" 0·1 jest 1·9; piszę 9, doliczam 1 i t. d. W ten sposób otrzymam pierwszy częściowy iloczyn 25·9, w którym błąd wynosi bezwzględnie mniej niż 0·1. (Granica górna błędu jest w naszym przykładzie mniejsza; mogłaby jednak tyle wynosić, gdyby w mnożniku zamiast cyfry 3 była cyfra 9). — Mnożąc potem przez 0·1 w celu otrzymania drugiego częściowego iloczynu nie będę mnożył setnych, bo otrzymałbym niepotrzebnie trzecie miejsce dziesiętne; mnożę dopiero 0·1 . 0·6 = 0·06; lecz i tej cyfry nie napiszę. Ponieważ jednak 0·06 jest więcej, niż pół dziesiątej, to popełnię mniejszy błąd, doliczając 0·1, niż opuszczając 0·06 zupełnie. Rachuję więc dalej: 0·1 . 8 = 0·8, a doliczając „poprawkę" 0·1, otrzymam jako drugi częściowy iloczyn 0·9 z błędem z pewnością mniejszym bezwzględnie, niż 0·1 (wyjaśnij!). — Przez 0·04 nie mnożę ani setnych, ani dziesiątych, bo na iloczyn otrzymałbym czwarte, względnie trzecie miejsce dziesiętne. Mnożę dopiero: 0·04 . 8 = 0·32; setne opuszczam i piszę „poprawkę" 0·3 jako trzeci i ostatni częściowy iloczyn z dokładnością do 0·1.

Aby w ciągu rachunku nie zastanawiać się, od której cyfry mnożnej mamy zaczynać mnożenie przez każdą cyfrę mnożnika, ustalamy to na początku rachunku i zaznaczamy przez odpowiednie podpisanie cyfr mnożnika pod cyframi mnożnej. Ponieważ w wyniku chcę otrzymać dziesiąte, to przez 3 jednostki mnożyć będę dziesiąte; będę mnożył przez 3 również i setne, ale tylko nato, aby wydzielić z iloczynu dziesiąte, czyli aby uzyskać poprawkę.

Podobnie podpiszę 1 pod jednostkami, a 4 pod dziesiątkami mnożnej. Uzyskam schemat:

$$\begin{array}{l} 8{\cdot}64\,.\,3{\cdot}14 \\ \underline{41\;3} \end{array}$$

i rachuję:

Słowami:

8·64	3 . 4 = 12; poprawka 1.
41 3	3 . 6 = 18; poprawka 1, czyni 19; piszę 9, doliczam 1.
25 9	3 . 8 = 24, więcej 1 jest 25; piszę 25.
9	1 . 6 = 6; poprawka 1.
3	1 . 8 = 8 więcej 1 jest 9; piszę 9.
27·1	4 . 8 = 32, poprawka 3; piszę 3.

Dodając częściowe iloczyny i odcinając jedno miejsce dziesiętne, otrzymam szukany iloczyn.

W każdym iloczynie częściowym popełniliśmy błąd mniejszy niż 0·1; a że takich iloczynów częściowych mieliśmy trzy, zatem błąd iloczynu jest wskutek tego bezwzględnie mniejszy niż 0·3; do tego należy dodać błąd, popełniony przez nieuwzględnienie dalszych cyfr mnożnika. Górny kres tego błędu wynosi 0·1 tak, że górny kres błędu całego iloczynu wynosi 0·4. Gdybyśmy mnożenie wykonali zwykłym sposobem, otrzymalibyśmy 27·1296 z dokładnością do 0·1178. Górny kres błędu przy użyciu skróconego mnożenia jest większy, ale mechanizm rachunkowy jest tak prosty, że pomimo tej niedokładności posługujemy się często tem działaniem. Nie należy zresztą sądzić, aby błąd w rzeczywistości był zawsze tak wielki, jak obliczona górna granica błędu. Błędy w częściowych iloczynach są bądź dodatnie, bądź ujemne, znoszą się więc zazwyczaj częściowo.

Podajemy wreszcie wskazówki, jak można bez długich rozważań poznać, do ilu miejsc dziesiętnych należy skrócone mnożenie wykonywać, jeżeli czynniki są podane z dokładnością do jednostki najniższego miejsca.

Za mnożnik obieramy liczbę, mająca mniej cyfr. Cyfrę mnożnika, oznaczającą najniższe jednostki, podpisujemy o jedno miejsce na lewo od cyfry mnożnej, oznaczającej jednostki najwyższe, a pozostałe cyfry mnożnika piszemy w porządku odwrotnym.

Np.:

$$\begin{array}{l} 54{\cdot}823\,.\,25{\cdot}67 \\ \underline{765\;2} \end{array}$$

Najniższa cyfra iloczynu będzie miała taką wartość miejscową, jaką ma cyfra mnożnej, pod którą są podpisane jednostki mnożnika.

W otatnim przykładzie najniższa cyfra iloczynu będzie oznaczała jednostki.

Uzasadnij na przykładzie powyższe reguły!

Skróconego mnożenia używamy również często przy mnożeniu liczb dokładnych, jeżeli nam chodzi tylko o wynik przybliżony.

Np.: Chcemy obliczyć, ile należy zapłacić za 17·826 *kg* towaru, którego 1 *kg* kosztuje 47·84 zł. Gdybyśmy użyli zwykłego mnożenia, otrzymalibyśmy w wyniku 5 miejsc dziesiętnych, z których tylko dwa najwyższe mają praktyczne znaczenie. Użyjemy więc skróconego mnożenia; a że przy skróconem mnożeniu najniższe miejsce bywa obarczone błędem, wykonamy mnożenie do trzech miejsc dziesiętnych. Jednostki mnożnika podpiszemy pod trzeciem miejscem dziesiętnem mnożnej, a inne cyfry w odwrotnym porządku; otrzymamy:

$$\begin{array}{r}
17{\cdot}826\ .\ 47{\cdot}84 \\
4874\phantom{\ .\ 47{\cdot}84} \\
\hline
713\,040\phantom{\ .\ 47{\cdot}84} \\
124\,782\phantom{\ .\ 47{\cdot}84} \\
14\,261\phantom{\ .\ 47{\cdot}84} \\
713\phantom{\ .\ 47{\cdot}84} \\
\hline
852{\cdot}796\phantom{\ .\ 47{\cdot}84}
\end{array}$$

Po zaokrągleniu otrzymamy wynik: 852·80 zł.

§ 5. Dzielenie.

$$\left|\frac{A}{B}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{Ab-Ba}{Bb}\right|=\left|\frac{(a+\alpha)\,b-(b+\beta)\,a}{(b+\beta)\,b}\right|=$$

$$=\left|\frac{ab+\alpha b-ab-\beta a}{(b+\beta)\,b}\right|=\frac{|\alpha b-\beta a|}{|b+\beta|.\,b}<\frac{\alpha'\,b+\beta'\,a}{(b-\beta').\,b}.$$

W ostatnim dzielniku napisaliśmy zamiast $|b+\beta|$ różnicę $b-\beta'$, wskutek czego dzielnik zmniejszył się, a więc iloraz powiększył się.

Wyraź słowami otrzymany wzór!

Aby granicy błędu nie przekroczyć, należałoby dzielenie $a:b$ wykonać dokładnie, a więc w postaci ułamków zwyczajnych. Tego w praktyce zazwyczaj nie czynimy, zadowalając się t. zw. *skróconem dzieleniem*. Istotę tego działania wyjaśnimy na przykładzie:

$$48314{\cdot}7?:5873{\cdot}?.$$

Zaczynamy dzielenie zwykłym sposobem:

$$\begin{array}{l}
48314{\cdot}7?:5873{\cdot}?=8 \\
\underline{46984} \\
1330
\end{array}$$

Ponieważ cyfra 3 dzielnika nie jest dokładna, lecz obarczona błędem mniejszym niż 1, to mnożąc ją przez 8 popełniamy błąd mniejszy niż $8 \,.\, 1 = 8$; odejmując od dzielnej, obarczonej błędem mniejszym niż 0·1, otrzymujemy resztę (drugą częściową dzielną) z błędem mniejszym niż 8·1.

Wykonywamy dalsze częściowe dzielenie:

$$\begin{array}{l} 1330{\cdot}7\,?:5873{\cdot}\,?=0{\cdot}2 \\ \underline{1174{\cdot}6} \\ \;\;156{\cdot}1 \end{array}$$

Ponieważ dzielnik zawiera błąd mniejszy niż 1, to mnożąc go przez 0·2 popełniamy błąd mniejszy, niż $1\,.\,0{\cdot}2=0{\cdot}2$. Odejmując otrzymany iloczyn od częściowej dzielnej 156·1, obarczonej błędem mniejszym niż 8·1, otrzymamy resztę (trzecią częściową dzielną) z błędem mniejszym niż $8{\cdot}1+0{\cdot}2=8{\cdot}3$. Następna częściowa dzielna nie wynosi więc dokładnie 156·1, lecz jest zawarta między granicami $156{\cdot}1+8{\cdot}3=164{\cdot}4$, a $156{\cdot}1-8{\cdot}3=147{\cdot}8$. W obu przypadkach wynosi następna cyfra ilorazu 0·02 (wykonaj!). Otrzymamy:

$$\begin{array}{l} 156{\cdot}10:5873{\cdot}\,?=0{\cdot}02 \\ \underline{117{\cdot}46} \\ \;\;38{\cdot}64 \end{array}$$

Mnożąc dzielnik, obarczony błędem mniejszym niż 1, przez 0·02, popełniamy w iloczynie błąd mniejszy niż $1\,.\,0{\cdot}02=0{\cdot}02$. Odejmując ten iloczyn od częściowej dzielnej, mającej już błąd mniejszy niż 8·3, otrzymujemy resztę (czwartą częściową dzielną) z błędem mniejszym niż 8·32. Pozostała częściowa dzielna zawarta jest zatem w granicach: $38{\cdot}64+8{\cdot}32=46{\cdot}96$, a $38{\cdot}64-8{\cdot}32=30{\cdot}32$. Dzieląc pierwszą z nich przez 5873, otrzymamy 0·007, dzieląc drugą, 0·005. Trzecia cyfra dziesiętna ilorazu nie jest zatem pewna; opuścimy ją, zadowalając się ilorazem 8·22 z dokładnością do 0·01.

Z tego przykładu wysnuwamy następującą *metodę obliczania górnego kresu błędu ilorazu:*

Dzielenie warto prowadzić tak długo, dopóki błąd reszty nie stanie się tak wielkim, że podzielony przez dzielnik, daje jednostkę (lub więcej) tego rzędu, który oznacza szukana cyfra ilorazu. Kres górny błędu reszty obliczymy (wynika z ostatniego przykładu), dodając do górnego kresu błędu dzielnej iloczyn: znalezionej części ilorazu i górnego kresu błędu dzielnika. Ponieważ na początku rachunku nie znamy ilorazu, zastępujemy go przy obliczaniu górnego kresu błędu ilorazu jego przybliżoną wartością z błędem przez nadmiar, po znalezieniu pierwszej cyfry ilorazu.

W naszym przykładzie wynosi górny kres błędu reszty: $0{\cdot}1+9\,.\,1=9{\cdot}1$. Ponieważ $9{\cdot}1:5873$ daje na wynik przeszło 0·001, to błąd reszty wpływa na wartość trzeciej cyfry dziesiętnej ilorazu. Dzielić warto więc tylko do dwu miejsc dziesiętnych.

Napiszmy całe dotychczasowe dzielenie:

$$\begin{array}{r|l} 4831 & 4{\cdot}7:5873=8{\cdot}22 \\ 133 & 0\;7 \\ 15 & 6\;10 \\ 3 & 8\;64 \end{array}$$

Ponieważ począwszy od drugiej częściowej dzielnej błąd wynosił niewiele mniej niż 10, to cyfr po prawej stronie kreski w ostatnim rachunku nie piszemy często wcale, rachując w następujący sposób:

Pisemnie: 4831 4·7 : 5 8 7 3 = 8·22
133
16
4

Słowami: Odcinam w dzielniku cyfrę 3, a w dzielnej pozostawiam tyle cyfr, aby dzielnik w niej się mieścił t. j. 4831. Rachuję: 587 dzisiątek w 4831 dziesiątkach mieści się **8** razy (cyfry zaznaczone grubszym drukiem zapisuję); 3 . 8 = 24, do poprawki 2; 8 . 7 = 56, więcej 2 jest 58, a **3** jest 61, 6 doliczam; 8 . 8 = 64, więcej 6 jest 70, a **3** jest 73, 7 doliczam; 8 . 5 = 40, więcej 7 jest 47, a **1** jest 48. — Odcinam w dzielniku cyfrę 7 i rachuję: 58 w 133 mieści się **2** razy; 2 . 7 = 14, do poprawki 1; 2 . 8 = 16, więcej 1 jest 17, a **6** jest 23, 2 doliczam; 2 . 5 = 10, więcej 2 jest 12, a **1** jest 13. — Odcinam w dzielniku cyfrę 8 i rachuję: 5 w 16 mieści się **2** razy; 2 . 8 = 16, do poprawki 2; 2 . 5 = 10, więcej 2 jest 12, a **4** jest 16.

Naturalnie, że przez odrzucenie szeregu cyfr popełniamy znów pewne błędy. Obliczenie granic tych błędów nie jest proste; pomijamy je. W każdym razie wpłynąć mogą te błędy na wartość ostatniej cyfry ilorazu. Wskutek trudności przy wyznaczaniu górnego kresu błędu ilorazu używamy skróconego dzielenia tylko tam, gdzie nie zależy nam na znajomości górnego kresu błędu wyniku.

P r z y k ł a d. Wykonać dzielenie: 97·856 : 175·4, jeżeli dzielna podana jest z dokładnością do 0·001, a dzielnik z dokładnością do 0·1.

Ocena dokładności ilorazu:

Mnożę dzielną i dzielnik przez 10; otrzymam:

978·56 : 1754

Pierwszą cyfrą ilorazu będzie 0·5, a więc przybliżoną jego wartością z błędem przez nadmiar 0·6. Tworzymy iloczyn 0·6 . 1 = 0·6, gdzie 1 jest górnym kresem błędu dzielnika. Powiększamy 0·6 o górny kres błędu dzielnej 0·01, a znalezioną sumę 0·61 dzielimy przez dzielnik. Otrzymamy 0·61 : 1754 = 0·0003.., z czego wnosimy (porównaj str. 63), że czwarte miejsce dziesiętne nie będzie już pewne. Dzielenie wykonać należy zatem do trzech miejsc dziesiętnych.

Wykonanie dzielenia:

a) Zwykły sposób:

978·56 : 1754 = 0·557 z dokładnością do 0·0014.
10156
13860
1582

b) Skrócone dzielenie:

Ponieważ pierwsza cyfra ilorazu oznacza dziesiąte, a dzielić będziemy do trzech miejsc dziesiętnych, to w ilorazie będziemy mieli 3 cyfry znaczące. Pozostawiamy więc w dzielniku tylko 3 cyfry (cyfrę 4 odcinamy), a w dzielnej tyle cyfr, aby dzielnik w niej się mieścił (odcinamy cyfry 56). Dzielimy:

$$
\begin{array}{l}
978{\cdot}56 = 1\,7\,5\,4 = 0{\cdot}557 \\
101 \\
\;\;13 \\
\;\;\;\;1
\end{array}
$$

Wynik otrzymujemy taki sam jak poprzednio, ale górnego kresu błędu ilorazu nie znamy.

§ 6. Zamiana ułamka zwyczajnego na dziesiętny.

W praktyce posługujemy się niemal wyłącznie ułamkami dziesiętnemi, a ilekroć otrzymamy w wyniku ułamek zwyczajny, zamieniamy go na dziesiętny. Najczęściej jednak zamiana taka nie da się uskutecznić zupełnie dokładnie; otrzymujemy tylko pewne przybliżone wartości, któremi właśnie chcemy się dokładniej zająć.

Przypuśćmy, że chcemy wyrazić liczbę $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ w postaci liczby dziesiętnej. W tym celu wykonywamy dzielenie:

$$8 : 3 = 2{\cdot}666 \ldots.$$

Dzielenie oczywiście nie skończy się, lecz dostarcza nam nierówności:

$$
\begin{array}{l}
2 \quad\;\; < 8 : 3 < 3 \\
2{\cdot}6 \quad < 8 : 3 < 2{\cdot}7 \\
2{\cdot}66 \;\; < 8 : 3 < 2{\cdot}67 \\
2{\cdot}666 < 8 : 3 < 2{\cdot}667 \\
\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Ciąg liczb: 2, 2·6, 2·66, 2·666,..... (nazwijmy go „ciąg I“) jest ciągiem przybliżonych wartości ilorazu 8 : 3 z błędami przez niedomiar, które nie przekraczają kolejno: 1, 0·1, 0·01, 0·001....

Ciąg liczb: 3, 2·7, 2·67, 2·667,.... (nazwijmy go „ciąg II“) jest ciągiem przybliżonych wartości ilorazu 8 : 3 z błędami przez nadmiar, które nie przekraczają kolejno: 1, 0·1, 0·01, 0·001,....

Te ciągi liczb mają następujące własności: 1. Każdy ciąg zawiera nieskończenie wiele liczb. 2. Liczby ciągu I rosną (co najwyżej niektóre mogą być równe), liczby ciągu II maleją (co najwyżej niektóre mogą być równe). 3. Każda liczba ciągu I jest mniejsza od każdej liczby ciągu II, a każda liczba ciągu II jest większa od każdej liczby ciągu I. 4. Różnica odpowiadających sobie liczb obu ciągów może stać się dowolnie małą, jeżeli obierzemy dostatecznie dalekie liczby obu ciągów. Dwa takie ciągi (powstałe z dzielenia) określają zupełnie **jedną liczbę** (w naszym przykładzie $2\frac{2}{3}$) większą od wszystkich liczb ciągu I, a mniejszą od wszystkich liczb ciągu II.

Ostatnie zdanie należy rozumieć w następujący sposób: Liczba m, odgraniczająca oba ciągi, istnieje tylko jedna. Jeżeli bowiem jakaś liczba różni się od m chociażby o bardzo małą liczbę δ, to między m a $m + \delta$ znajdują się już liczby ciągu I lub II, mianowicie te, które od m różnią się o mniej niż o δ.; $m + \delta$ nie odgranicza więc obu ciągów. — Gdybyśmy mieli dane tylko dwa takie ciągi (otrzymane z dzielenia), a nie wiedzieli z podzielenia jakich liczb je otrzymano, a więc nie znali ułamka zwyczajnego m, to te dwa ciągi mogłyby nam zastąpić ów ułamek we wszystkich rachunkach. Tak np. moglibyśmy porównać m z jakąkolwiek daną liczbą, moglibyśmy znaleźć iloczyn liczby m i danej liczby z **dowolną** dokładnością i t. p.

Np. Porównać m, odgraniczające ciągi I i II, z $2\frac{463}{700}$.

Porównywamy $2\frac{463}{700}$ kolejno z liczbami ciągu I i II i znajdujemy: $2{\cdot}66 < 2\frac{463}{700} < 2{\cdot}666$. A że $2{\cdot}666 < m$, to: $2\frac{463}{700} < m$.

Ćwiczenia.

1. Zamiast liczby 37·85 znaleziono przy pomiarze *a)* 37·9, *b)* 37·83, *c)* 38, *d)* 36·9; obliczyć błąd!

2. Zamiast 108°56′15″ znaleziono: *a)* $108\frac{3}{4}$°, *b)* 107°, *c)* 109°, *d)* 108°40′, *e)* 108°56·2′; obliczyć błąd.

3. Zamiast 365 dni, 5 godz., 48 min. 46 sek. znaleziono: *a)* 360 dni, *b)* 366 dni, *c)* 365 dni, *d)* 365 dni 6 godz. *e)* 365 dni, 5 godz., 50 min.; obliczyć błąd!

4. *a)* W jakich granicach zawarta jest liczba A, jeżeli jej przybliżona wartość $a = 37{\cdot}5$, a górny kres błędu $\alpha' = 0{\cdot}1$?

b) To samo, jeżeli $a = 690$, a $\alpha' = 3$.
c) „ „ „ $a = 0{\cdot}873$, a $\alpha' = 0{\cdot}0005$.
d) „ „ „ $a = 3{\cdot}14$, a $\alpha' = 0{\cdot}002$.

5. *a)* 14·5 jest przybliżoną wartością liczby A z dokładnością 0·05 z błędem przez nadmiar. W jakich granicach jest zawarte A?

b) 16·4 jest przybliżoną wartością liczby A z dokładnością do 0·1 z błędem przez niedomiar. W jakich granicach jest zawarte A?

6. *a)* Podać przybliżone wartości liczby 495·432 z dokładnością do 10, do 1, do 0·1, do 0·01!

b) Podać przybliżone wartości liczby: 530·556 z dokładnością do 50, do 5, do 0·5, do 0·05!

7. Zaokrąglić różnemi sposobami liczby: *a)* 37543824, *b)* 375·057, *c)* 0·012505, *d)* 45·37 i podać górny kres błędu!

8. Obliczyć sumę i górny kres jej błędu:

a) 48·75	z	dokładn.	do 0·04,	*b)* 7·825	z	dokładn.	do 0·001,
3·8	„	„	„ 0·05,	3·25	„	„	„ 0·03,
3·74	„	„	„ 0·01,	13·7	„	„	„ 0·1,
16·7	„	„	„ 0·1.	83·71	„	„	„ 0·02.

Podać granice, w których zawarta jest prawdziwa wartość sumy.

9. Dodać następujące liczby, które podane są z dokładnością do jednostki najniższego zatrzymanego miejsca i obliczyć górny kres błędu sumy:

a) $4{\cdot}75 + 6{\cdot}3 + 14{\cdot}723 + 36{\cdot}4 + 6{\cdot}8263$;

b) $6700 + 17000 + 36900 + 485000$;

c) $38{\cdot}4 + 37 + 45{\cdot}64 + 81 + 146 + 821{\cdot}3$.

10. Następujące liczby podane są z dokładnością do 0·5 jednostki najniższego zatrzymanego miejsca. Obliczyć sumę i wyznaczyć górny kres jej błędu:

a) $6{\cdot}85 + 0{\cdot}94 + 17{\cdot}32 + 4{\cdot}03$;

b) $2{\cdot}8 + 3{\cdot}19 + 17 + 41{\cdot}3 + 6{\cdot}15$;

c) $6{\cdot}27 + 0{\cdot}843 + 0{\cdot}042 + 0{\cdot}72$.

11. Wykonać działania w zad. 9 i 10 skróconem dodawaniem i obliczyć górny kres błędu sumy.

12. *a)* Boki trókąta, zmierzone z dokładnością do 0·2 *cm*, wynoszą: 17·4 *cm*, 20·7 *cm*, 23·4 *cm*. Obliczyć obwód!

b) Wykreśl dowolny wielobok, zmierz boki, oceń dokładność pomiaru i oblicz obwód! Narysuj (geometrycznie) odcinek równy obwodowi i zmierz! Porównaj wyniki, a w razie niezgodności ich, podaj jej przyczynę!

c) Zważ oddzielnie kilka ciał, oceń dokładność! Oblicz, ile ważą wszystkie ciała razem! Zważ wszystkie ciała razem! Porównaj wyniki!

13. Obliczyć różnicę następujących liczb i górny kres jej błędu:

a) 47·85 z dokładn. do 0·07 *b)* 63·8 z dokładn. do 0·2
32·9 „ „ „ 0·05 51·64 „ „ „ 0·04.

14. Następujące liczby podane są z dokładnością do jednostki najniższego zatrzymanego miejsca. Obliczyć ich różnicę i górny kres jej błędu:

a) 48·65 — 46·3; *b)* 49 — 38·4; *c)* 8·47 — 8·45.

15. Następujące liczby podane są z dokładnością do 0·5 jednostki najniższego zatrzymanego miejsca. Wykonać naznaczone działania i obliczyć górny kres błędu wyniku:

a) 8·736 — 7·822; *b)* 6·4 — 3·6; *c)* 4800 — 4600;
d) 0·87 + 0·48 — 0·15 — 0·73 + 1·04 — 0·93;
e) 6·1 + 8·4 — 5·7 + 3·2 — 5·2 — 6·7;
f) 386 + 27 — 289 + 517 — 495.

16. Wykonać naznaczone*) działania i wyznaczyć górny kres błędu wyniku:

a) 4·83$_{(0·02)}$. 7; *b)* 15·6$_{(0·1)}$. 4·5; *c)* 17·8$_{(0·5)}$. 6·24;
d) 6·81$_{(0·01)}$. 3·4 + 8·6 . 7·46$_{(0·01)}$;
e) 15·9$_{(0·05)}$. 6·5 — 7·8$_{(0·05)}$. 7·2;
f) 8·15$_{(0·01)}$. 16·12$_{(0·01)}$; *g)* 6·7$_{(0·05)}$. 7·15$_{(0·01)}$;
h) 4·826$_{(0·002)}$. 0·723$_{(0·001)}$; *i)* 6153$_{(1)}$. 583$_{(1)}$;
j) 4·83$_{(0·01)}$. 13·5$_{(0·1)}$ + 6·25$_{(0·01)}$. 15·4$_{(0·1)}$;
k) 61·5$_{(0·05)}$. 52·3$_{(0·05)}$ — 27·2$_{(0·1)}$. 42·6$_{(0·05)}$;
l) 65·4$_{(0·1)}$. 73·4$_{(0·1)}$. 28·7$_{(0·1)}$;
m) 430$_{(10)}$. 870$_{(10)}$. 510$_{(10)}$.

17. Wykonać skróconym sposobem mnożenia następujących liczb, podanych z dokładnością do jednostki najniższego zatrzymanego miejsca:

a) 67·45 . 5·16; *b)* 47·63 . 8·07; *c)* 173·67 . 48·62;
d) 154·6 . 175·825; *e)* 67·823 . 47·5; *f)* 597 . 48700;
g) 6·725 . 3·14159; *h)* 48·624 . 14·87; *i)* 0·057 . 0·6239;
j) 48·75 . 0·005943; *k)* 1·0705 . 0·08947.

18. *a)* W koło o promieniu 8 *cm* wpisać umiarowy ośmiobok, zmierzyć jego bok, a oceniwszy dokładność pomiaru, obliczyć obwód.

*) Małe liczby w nawiasach oznaczają górny kres błędu liczby przy której stoją. Liczby bez takich znaków są liczbami dokładnemi.

b) Ciężar właściwy miedzi wynosi 8·94 g (z dokładnością do 0·01 g); ile waży przedmiot miedziany, mający objętość 27·4 cm^3 (z dokładnością do 0·1 cm^3)?

c) Drut miedziany, o długości 1 m wydłuża się przy ogrzaniu o 1° C o 0·016 mm (z dokładn. do 0·001 mm). O ile wydłuży się drut o długości 43·5 m (z dokładn. do 0·02 m) przy ogrzaniu o 40° C (z dokładn. do 1° C)?

19. Wykonać dzielenia (dokładnie):

a) 106·59 : 37·4; *b)* 22·701 : 48·3; *c)* 1029·21 : 507;

Obliczyć górny kres błędu ilorazu, jeżeli: *α)* dzielna jest podana z dokładn. do jednostki najniższego zatrzymanego miejsca dzieś., a dzielnik jest liczbą dokładną; *β)* dzielna jest liczbą dokładną, a dzielnik jest podany z dokładnością do jednostki najniższego zatrzymanego miejsca dzieś.; *γ)* dzielna i dzielnik są podane z dokładnością do jednostki najniższego zatrzymanego miejsca dzieś.

20. Wykonać naznaczone działania i obliczyć górny kres błędu wyniku*):

a) $547{\cdot}6_{(0{\cdot}1)} : 312$; *b)* $7{\cdot}26 : 7{\cdot}45_{(0{\cdot}01)}$;
c) $187{\cdot}6_{(0{\cdot}1)} : 3821_{(1)}$; *d)* $4873{\cdot}5_{(0{\cdot}1)} : 0{\cdot}816_{(0{\cdot}001)}$;
e) $4{\cdot}86_{(0{\cdot}01)} : 3{\cdot}26_{(0{\cdot}01)}$; *f)* $4785_{(1)} : 76{\cdot}25_{(0{\cdot}001)}$;
g) $(61{\cdot}82_{(0{\cdot}01)} \,.\, 6{\cdot}15_{(0{\cdot}01)}) : 85{\cdot}4_{(0{\cdot}1)}$;
h) $(6{\cdot}85_{(0{\cdot}01)} : 3{\cdot}85_{(0{\cdot}01)}) \,.\, (7{\cdot}823_{(0{\cdot}001)} : 3{\cdot}14_{(0{\cdot}01)}$;
i) $(84{\cdot}63_{(0{\cdot}01)} \,.\, 5{\cdot}82_{(0{\cdot}01)}) : (61{\cdot}24_{(0{\cdot}01)} \,.\, 3{\cdot}15_{(0{\cdot}1)})$.

21. *a)* Zważ jedną monetę, oceń dokładność i oblicz, ile waży 17 takich monet. Zważ 17 monet i porównaj wyniki!

b) Zważ 17 monet jednakowych, oceń dokładność i oblicz, ile waży jedna moneta.

Jaka praktyczna wskazówka wynika z obu zadań?

22. *a)* Ile razy obróci się na drodze, wynoszącej 1 km, koło roweru, mające $2{\cdot}35_{(0{\cdot}05)}$ m obwodu?

b) Obliczyć objętość 1 g srebra, jeżeli ciężar właściwy srebra wynosi $10{\cdot}5_{(0{\cdot}01)}$ g.

c) Przedmiot, mający $1{\cdot}75_{(0{\cdot}01)}$ m wysokości, rzuca w pewnej porze dnia cień długi na $2{\cdot}9_{(0{\cdot}05)}$ m; jak wysoka jest wieża, która w tym samym czasie rzuca cień o długości $97_{(0{\cdot}5)}$ m?

---

*) Porównaj uwagę do str. 84!

23. Znaleźć ciągi przybliżonych wartości ułamków:

a) $\frac{17}{11}$, *b)* $3\frac{2}{7}$, *c)* $\frac{23}{110}$, *d)* $\frac{50}{99}$.

24. Wykonać następujące działania raz w ułamkach zwyczajnych, drugi raz, przedstawiając ułamki zwyczajne w postaci ułamków dziesiętnych z dokładnością do 0·1, 0·01, 0·001,.... Porównać wyniki!

a) $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$; *b)* $\frac{2}{3}+\frac{8}{9}$; *c)* $\frac{5}{11}\cdot 3$; *d)* $\frac{18}{65}\cdot 4$;
e) $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4}$; *f)* $1\frac{5}{6}\cdot 1\frac{3}{4}$; *g)* $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}$; *h)* $2\frac{2}{3}\cdot 1\frac{7}{15}$;
i) $\frac{2}{3}:7$; *j)* $\frac{17}{18}:2$; *k)* $\frac{5}{6}:\frac{4}{11}$; *l)* $\frac{5}{11}:\frac{2}{3}$.

ROZDZIAŁ VI.

DZIAŁANIA STOPNIA TRZECIEGO.

A) POTĘGOWANIE.

§ 1. Działania potęgami.

Działaniem prostem stopnia trzeciego jest *potęgowanie* t. j. mnożenie, w którem ten sam czynnik powtarza się. *Potęgą* nazywamy iloczyn równych czynników, *zasadą*, powtarzający się czynnik, *wykładnikiem*, liczbę, wyrażającą, ile razy zasada powtarza się jako czynnik.

Stosownie do tego określenia potęgowania jest wykładnik potęgowy liczbą naturalną, większą niż 1. Określamy nadto, że: $a^1 = a$.

W ciągu nauki poznaliśmy niektóre działania potęgami, które niżej wraz z uzasadnieniami zestawiamy:

$$1.\quad (ab)^n = \overbrace{(ab)\,.\,(ab)\,.\,(ab)\ldots}^{n \text{ razy}} = \overbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots}^{n \text{ razy}}\;\overbrace{b\,.\,b\,.\,b\ldots}^{n \text{ razy}} = a^n b^n;$$

$$2.\quad a^m\,.\,a^n = \overbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots}^{m \text{ razy}}\;\overbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots}^{n \text{ razy}} = \overbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots}^{m+n \text{ razy}} = a^{m+n};$$

$$3.\quad (a^m)^n = \overbrace{a^m\,.\,a^m\,.\,a^m\ldots}^{n \text{ razy}} = a^{\overbrace{m+m+m+\ldots}^{n \text{ razy}}} = a^{mn};$$

$$4.\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b}\,.\,\frac{a}{b}\,.\,\frac{a}{b}\ldots}^{n \text{ razy}} = \frac{\overbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots}^{n \text{ razy}}}{\underbrace{b\,.\,b\,.\,b\ldots}_{n \text{ razy}}} = \frac{a^n}{b^n};$$

$$5.\quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots}^{m \text{ razy}}}{\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots}_{n \text{ razy}}} = \frac{\overbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots}^{n \text{ razy}}\;\overbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots}^{m-n \text{ razy}}}{\underbrace{a\,.\,a\,.\,a\ldots}_{n \text{ razy}}} = a^{m-n},\ [m>n].$$

Wyraź słowami powyższe twierdzenia!

Suma lub różnica potęg, o ile one nie mają jednakowych zasad i wykładników, nie da się przedstawić w prostszej postaci. Działania: $a^2 + a^3$, $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$, i t. p. nie dadzą się dalej wykonać. Natomiast: $a^2 + a^2 = 2a^2$, $3a^{n+1} - 5a^{n+1} = -2a^{n+1}$ i t. d.

Potęgowanie sumy i różnicy (wogóle wielomianu) można zawsze wykonać przez wielokrotne mnożenie. Ogólny wzór, który podaje wynik potęgowania wielomianów, pomijamy; ograniczamy się do następujących wypadków:

1. *a)* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
   b) $(a+b+c)^2 = ([a+b]+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2$;
   c) $(a+b+c+d)^2 = ([a+b+c]+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2$;
2. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Wyraź słowami te twierdzenia!

§ 2. Podnoszenie liczb dziesiętnych do kwadratu.

Na ostatnich twierdzeniach polega podnoszenie do kwadratu liczb, napisanych *w układzie dziesiątkowym pozycyjnym*. Każda liczba naturalna, napisana w takim układzie, jest w skróceniu napisanym wielomianem, uporządkowanym według potęg liczby 10.

Tak np. 4673 jest napisanym w skróceniu wielomianem: $4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3$.

W przyjętym sposobie pisania liczb opuszcza się potęgi liczby 10, bo samo miejsce, na którem cyfra jest napisana, pozwala domyśleć się, przez jaką potęgę liczby 10 każda cyfra ma być pomnożona. Potęga liczby 10, przez którą cyfra jest pomnożona, stanowi *wartość miejscową* tej cyfry. Różne potęgi liczby 10 otrzymują różne nazwy; i tak nazywamy 10^1 dziesiątką, 10^2 setką i t. d.

Chcąc obliczyć $4673^2 = (4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3)^2$ stosujemy twierdzenie:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 = a^2 + [2a+b]b + [2(a+b)+c]c + [2(a+b+c)+d]d.$$

Podstawiając $a = 4000$, $b = 600$, $c = 70$, $d = 3$, otrzymamy:

$$\begin{array}{ll} & \underline{\quad 4673^2 \quad} \\ a^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & 4000^2 = 16000000 \\ (2a+b)\,b \;.\;.\;.\;.\;. & 8600\,.\,600 = 5160000 \\ [2\,(a+b)+c]\,d \;.\;.\;. & 9270\,.\,70 = 648900 \\ [2\,(a+b+c)+d]\,d \;. & 9343\,.\,3 = 28029 \\ \hline (a+b+c+d)^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & 21836929 \end{array}$$

Przy praktycznem przeprowadzeniu rachunku opuszczamy zera tak, że rachunek przedstawia się w następującej postaci:

$$\begin{array}{rl} \underline{\quad 4673^2} & \\ 4^2 = & 16 \\ 86\,.\,6 = & 516 \\ 927\,.\,7 = & 6489 \\ 9343\,.\,3 = & 28029 \\ \hline & 21836929 \end{array}$$

Aby podnieść do kwadratu liczbę dziesiętną, przedstawiamy ją w postaci ułamka, mającego za licznik liczbę, otrzymaną z danej liczby przez opuszczenie kropki dziesiętnej, a za mianownik stosowną potęgę liczby 10. Następnie stosujemy twierdzenie o potęgowaniu ułamka.

Np.:

$$4{\cdot}673^2 = \left(\frac{4673}{10^3}\right)^2 = \frac{4673^2}{10^6} = \frac{21836929}{1000000} = 21{\cdot}836929.$$

Stąd wysnuwamy regułę: Liczbę dziesiętną podnosimy do kwadratu, nie zważając na kropkę dziesiętną; w wyniku jednak odcinamy dwa razy tyle miejsc dziesiętnych, ile ich miała liczba potęgowana.

§ 3. Potęga jako funkcja zasady.

Wynik potęgowania zależy od zasady i od wykładnika. By zmienność wyniku zależnie od zmienności zasady zrozumieć, przedstawmy graficznie funkcje: $y = x^1$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$.

Sporządź dla tych funkcyj tabelki, podstawiając za x wartości: 0, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{4}$, ± 1, $\pm 1\frac{1}{2}$, ± 2, ± 3, ... i przedstaw je graficznie!

W fig. 16 przedstawiają te funkcje kolejno: linja prosta, krzywa wyciągnięta, krzywa kreskowana i krzywa kropkowana.

Możnaby także wykładnik uważać za zmienną i badać zależność potęgi od wartości wykładnika. Przedstawienie graficzne takiej funkcji nie dałoby nam jednak całej linji, lecz tylko szereg oddzielnych punktów. Wykładnik potęgowy bowiem może być według dotychczasowego określenia tylko liczbą naturalną, a więc zmienna niezależna byłaby także tylko do tych wartości ograni-

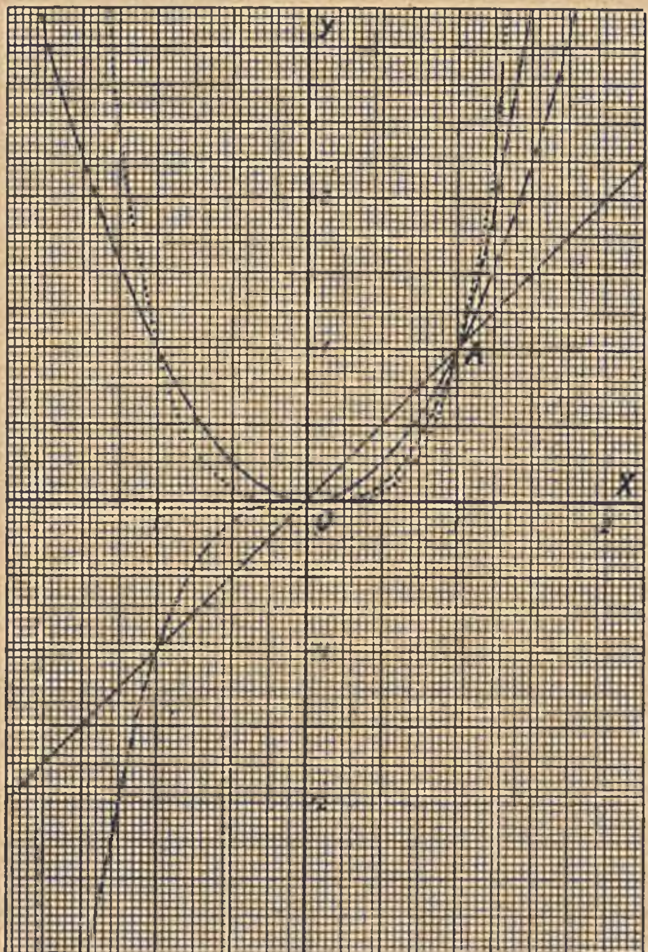

Fig. 16.

czona. Nasuwa się już tu pytanie, czy nie dałoby się określenie potęgowania rozszerzyć tak, aby obejmowało i wykładniki ułamkowe i ujemne. Pytanie to zajmować nas będzie w dalszej nauce.

W fig. 16 dostrzegamy przedewszystkiem różnicę między krzywemi, odpowiadającemi wykładnikom parzystym, a krzywemi, odpowiadającemi wykładnikom nieparzystym. Pierwsze przebiegają w ćwiartkach I. i II., drugie w ćwiartkach I. i III. Odpowiada to faktowi, że liczba ujemna potęgowana liczbą parzystą daje na wynik liczbę dodatnią, a potęgowana liczbą nieparzystą daje za wynik liczbę ujemną. W pierwszym przypadku krzywa jest symetryczna względem osi Y (symetrja osiowa), w drugim przypadku krzywa nakrywa się, gdy ją obrócimy o 180^0 około początku układu współrzędnych (symetrja środkowa). Z tego powodu zajmiemy się niżej tylko gałęziami krzywych, przebiegającemi w I. ćwiartce, które odpowiadają wartościom dodatnim zasady.

Przyglądając się jednej takiej krzywej, zauważymy, że krzywa ta wznosi się ciągle, z początku powoli (przebiega blisko osi X), później coraz bardziej stromo. Zatem:

1. *Ze wzrostem dodatniej zasady wzrasta wartość potęgi.*

Twierdzenie to jest wynikiem twierdzenia, że iloczyn rośnie ze wzrostem czynników.

Wskutek ciągłego wzrostu potęgi z zasadą potęga nie przyjmuje nigdy jednakowych wartości dla dwóch różnych wartości zasady. Dlatego:

2. *Dwie potęgi o dodatnich zasadach, mające równe wykładniki, mogą być tylko wtedy równe, jeżeli mają równe zasady.*

B) PIERWIASTKOWANIE.

§ 4. Określenie pierwiastkowania.

Aby utworzyć działanie odwrotne do potęgowania, stawiamy sobie zadanie:

Mając dane liczby n i b (n liczba naturalna), znaleźć taką liczbę a, któraby sprawdzała równanie: $a^n = b$. Działanie, zapomocą którego taką liczbę znajdujemy, naznaczamy w postaci: $a = \sqrt[n]{b}$ (czytaj: n-ty pierwiastek liczby b) i nazywamy *pierwiastkowaniem,* określając:

Obliczyć *n-ty pierwiastek* jakiejś liczby (wyciągnąć n-ty pierwiastek z jakiejś liczby) znaczy znaleźć liczbę, która podniesiona do n-tej potęgi daje na wynik liczbę pierwiastkowaną. Liczbę n nazywamy wykładnikiem pierwiastkowym, wynik pierwiastkowania (a także naznaczone pierwiastkowanie) nazywamy pierwiastkiem.

Stosownie do tego określenia znajdziemy:

$\sqrt[3]{125}=5$, bo $5^3=125$; $\sqrt[5]{32}=2$, bo $2^5=32$; $\sqrt[1]{7}=7$, bo $7^1=7$.

Zamiast znaku $\sqrt[2]{\ }$ pisze się krótko $\sqrt{\ }$.

Potęgowanie i pierwiastkowanie są działaniami odwrotnemi i przeciwnemi.

Działania te są odwrotne, bo wyprowadziliśmy je z jednego równania: $a^n=b$. Że działania te są przeciwne, wynika z następującego rozpatrzenia:

Mając obliczyć $\sqrt[n]{a^n}$, szukamy liczby, która podniesiona do n-tej potęgi daje na wynik a^n. Liczbą tą jest oczywiście a tak, że $\sqrt[n]{a^n}=a$.

Ponieważ $\sqrt[n]{a}$ jest to liczba, która podniesiona do n-tej potęgi daje wynik a, to $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$. Zatem:

Dowolna liczba potęgowana i pierwiastkowana tą samą liczbą i to w dowolnym porządku nie zmienia się. Czyli: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a$. Potęgowanie jakąś liczbą usuwa zatem zmianę, spowodowaną poprzedniem pierwiastkowaniem tą liczbą i naodwrót.

Związek między potęgowaniem a pierwiastkowaniem występuje wybitnie przy graficznem przedstawieniu. Fig. 17 przedstawia graficznie funkcję $y=x^2$. Każdej wartości x odpowiada pewna wartość y, którą możemy łatwo z figury odczytać. Przy pierwiastkowaniu mamy zadanie odwrotne: do danej wartości y, znaleźć odpowiednią wartość $x=\sqrt{y}$. Geometrycznie rozwiążemy to zadanie przy pomocy tej samej figury, uważając x za zmienną zależną. Tak np. znajdziemy, że wartości $y=OA$ odpowiadają dwie wartości x przestawione odcinkami AB i AB': wartości te są wprawdzie bezwzględnie równe, ale mają znaki przeciwne. Funkcja $x=\sqrt{y}$, *odwrotna* do funkcji $y=x^2$, jest funkcją *dwuwartościową.*

Stwierdzić to możemy także rachunkiem: Np. $\sqrt{4}$ może mieć albo wartość $+2$ albo -2, bo tak $(+2)^2=4$, jako też $(-2)^2=4$. Podobnie: $\sqrt{9}=\pm 3$, $\sqrt{1}=\pm 1$ i t. d.

Dwuznaczność taka występuje zawsze przy odwracaniu potęg o wykładnikach parzystych, jak poucza rzut oka na fig. 16.

Pierwiastek o wykładniku parzystym liczby dodatniej może mieć dwie wartości, dodatnią i ujemną, o tej samej wartości bezwzględnej. Pierwiastek o wykładniku nieparzystym jakiejkolwiek liczby może mieć tylko jedną wartość.

Nadto zauważymy jeszcze jedną różnicę między pierwiastkami o wykładnikach parzystych i nieparzystych (fig. 16). Potęga o wykładniku parzystym jakiejkolwiek liczby (dodatniej czy ujemnej) jest zawsze liczbą dodatnią; potęga o wykładniku nieparzystym liczby dodatniej jest liczbą dodatnią, taka sama potęga liczby ujemnej jest liczbą ujemną. Wskutek tego można wykładnikiem nieparzystym pierwiastkować liczby dodatnie i ujemne; w razie wykładnika parzystego można mówić tylko o pierwiastkach liczb dodatnich.

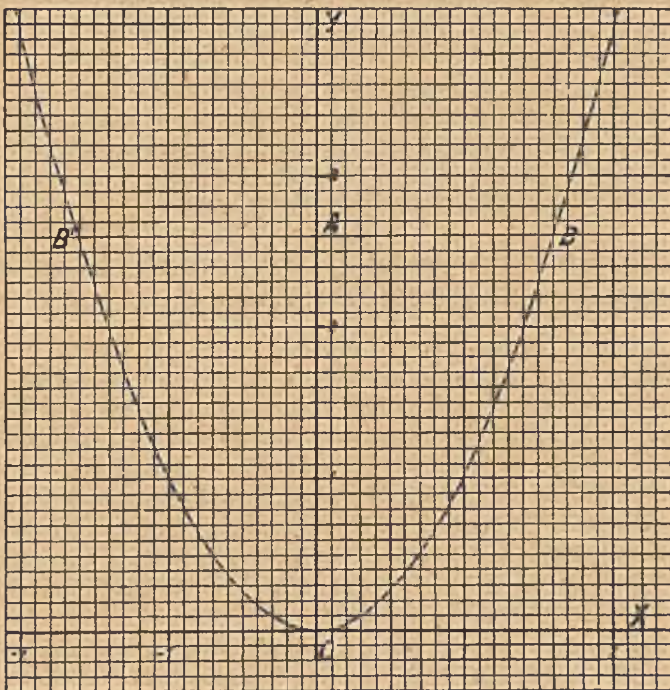

Fig. 17.

Aby uniknąć dwuznaczności i nie rozróżniać wykładników parzystych i nieparzystych, będziemy się zajmowali tylko pierwiastkami liczb dodatnich i będziemy uwzględniali tylko wartości dodatnie pierwiastków, o ile inaczej wyraźnie nie zaznaczymy. Przy tem ograniczeniu staje się pierwiastkowanie (o ile jest wogóle wykonalne) działaniem *jednoznacznem*, bo potęga rośnie ze wzrostem dodatniej zasady, nie może więc dwu różnym zasadom odpowiadać jednakowa wartość potęgi.

Również i graficzne przedstawienie funkcji $y = x^2$ (fig. 17) potwierdza ten wynik. Co więcej: wykres pozwala przypuszczać, że rzeczywiście każdej wartości y odpowiada jedna wartość x. Tak, przyjmując kolejno $y = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4$, odczytamy z figury: $x = 0{\cdot}5, 0{\cdot}7, 1, 1{\cdot}4, 1{\cdot}7, 2$. Znalezione jednak z wykresu wartości x nie są wszystkie liczbami dokładnemi, o czem łatwo przekonać się, podnosząc je do kwadratu. Należy zbadać, czy niedokładność tę należy sobie tłumaczyć tylko niedokładnością rysunku, czy też ma ona głębsze przyczyny. Nasuwają się więc następujące zagadnienia:

1. Zbadać, czy $\sqrt[n]{a}$ istnieje dla każdej dodatniej wartości a czyli, czy do każdej dodatniej liczby a da się dobrać taka liczba, która podniesiona do n-tej potęgi daje na wynik a.

2. Mając daną dodatnią liczbę a, obliczyć $\sqrt[n]{a}$.

Zaczniemy od drugiego zagadnienia, przyczem ograniczymy się do obliczania drugiego pierwiastka liczb, napisanych w układzie dziesiątkowym pozycyjnym, o których zakładamy, że są kwadratami liczb całkowitych, względnie dziesiętnych.

§ 5. Obliczanie pierwiastka kwadratowego liczb, będących zupełnemi kwadratami.

Zadanie 1. Obliczyć $\sqrt{21836929}$.

Liczba pod znakiem pierwiastkowania jest ta sama, którą otrzymaliśmy w § 2, wykonując potęgowanie: 4673^2. Przyglądając się temu potęgowaniu, zauważymy, że na liczbę pierwiastkowaną złożyło się kilka składników; ponieważ każdy następny składnik był przesunięty o dwa miejsca, wygodnie będzie podzielić liczbę pierwiastkowaną na klasy po dwie cyfry. Otrzymamy: $\sqrt{21|83|69|29}$.

Łatwo poznać, że liczba pierwiastkowana powstała z podniesienia do kwadratu liczby czterocyfrowej, bo $1000^2 = 1000000$, a $10000^2 = 100000000$. Można więc napisać:

$$21836929 = (a \,.\, 10^3 + b \,.\, 10^2 + c \,.\, 10^1 + d)^2 = a^2 \,.\, 10^6 + (2a \,.\, 10 + b)\, b \,.\, 10^4 + [2\,(a \,.\, 10 + b) \,.\, 10 + c]\, c \,.\, 10^2 + [2\,(a \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + c) \,.\, 10 + d]\, d.$$

a, b, c, d oznaczają tu cyfry, które są zatem mniejsze niż 10.

Porównując to przedstawienie liczby pod znakiem pierwiastkowania z przykładem na str. 89, zauważymy:

1. Na pierwszą (najwyższą) klasę $21 \,.\, 10^6$ składa się głównie $a^2 \,.\, 10^6$. Aby wyznaczyć a, szukamy zatem takiej cyfry, która podniesiona do kwadratu, daje w przybliżeniu 21. Cyfrą tą jest 4, bo $4^2 = 16$, a $5^2 = 25$ (za wiele).

2. Odjąwszy $a^2 \,.\, 10^6 = 16 \,.\, 10^6$ od pierwszej klasy $21 \,.\, 10^6$, a do reszty dodawszy drugą klasę, otrzymamy: $583 \,.\, 10^4$. Na tę liczbę (porównaj rachunek na str. 89) składa się głównie $(2a \,.\, 10 + b)\, b \,.\, 10^4 = (80 + b)\, b \,.\, 10^4 = (80\, b + b^2) \,.\, 10^4$. Ponieważ $80\, b$ jest znacznie większe niż b^2, bo $b < 10$, można próbować obliczyć b, wyznaczając pierwszą znaczącą cyfrę ilorazu $583 : 80$. Otrzymamy tak dla b

wartość 7. Ponieważ jednak wtedy $80\,b+b^2=609>583$, to widzimy stąd, że za b przyjąć należy cyfrę mniejszą, a więc $b=6$.

3. Odejmując od $583 : 10^4$ liczbę $(80+b)\,b\,.\,10^4=86\,.\,6\,.\,10^4=516\,.\,10^4$, otrzymamy $67\,.\,10^4$. Gdy dodamy do tej liczby klasę trzecią, to zostanie $6769\,.\,10^2$. Na tę liczbę składa się głównie:

$$[2\,(a\,.\,10+b)\,.\,10+c]\,c\,.\,10^2=[2\,.\,46\,.\,10+c]\,c\,.\,10^2=(920\,c+c^2)\,.\,10^2.$$

Ponieważ znowu $920\,c>c^2$, to można c wyznaczyć, wyznaczając pierwszą cyfrę ilorazu $6769 : 920$. Otrzymamy: $c=7$.

4. Odejmując od $6769\,.\,10^2$ liczbę $(2\,.\,46\,.\,10+c)\,c\,.\,10^2=927\,.\,7\,.\,10^2=6489\,.\,10^2$, otrzymamy jako resztę $280\,.\,10^2$, a po dodaniu następnej klasy, liczbę 28029. Na tę liczbę składa się głównie:

$$[2\,(a\,.\,10^2+b\,.\,10+c)\,.\,10+d]\,d=[2\,.\,467\,.\,10+d]\,d=9340\,d+d^2.$$

Ponieważ znowu $9340\,d>d^2$, to możemy znaleźć d, wyznaczając pierwszą cyfrę ilorazu $28029 : 9340$. Otrzymamy: $d=3$.

Odejmując $(2\,.\,467\,.\,10+d)\,d=(9340+3)\,.\,3=28029$ od ostatniej reszty, otrzymamy na wynik zero.

Zatem: $\sqrt{21836929}=4673$.

Rachunek powyższy przedstawia się schematycznie tak:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{21|83|69|29}=4673. \\
a^2\,\ldots\ldots & 16 \\
\hline
 & 583 : 80 \\
(2a\,.\,10+b)\,b\,\ldots\ldots & 516 \\
\hline
 & 6769 : 920 \\
[2\,(a\,.\,10+b)\,.\,10+c]\,c\,\ldots\ldots & 6489 \\
\hline
 & 28029 : 9340 \\
[2\,(a\,.\,10^2+b\,.\,10+c)\,.\,10+d]\,d\,\ldots\ldots & 28029 \\
\hline
 & 00000
\end{array}$$

W praktyce piszemy tylko:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{21|83|69|29}=4673. \\
\;\;5\,83 : 86\,.\,6 \\
\;\;\;\;676\,9 : 927\,.\,7 \\
\;\;\;\;\;\;2802\,9 : 9343\,.\,3 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0
\end{array}$$

Z powyższego przykładu wynika, że obliczanie pierwiastka kwadratowego jest właściwie wyznaczeniem jego przybliżonych wartości z błędem przez niedomiar, z dokładnością do 1000, 100, 10, ... Nie znajdujemy natychmiast wartości tego pierwiastka, lecz wyznaczamy stopniowo nierówności:

$$4000<\sqrt{21836929}<5000,$$
$$4600<\sqrt{21836929}<4700,$$

i t. d.

Pierwszą (najwyższą) cyfrę wyznaczamy drogą próby; dalsze cyfry, a więc i przybliżone wartości wyznaczamy w następujący sposób:

Przypuśćmy, że nam się już udało wyznaczyć jedną lub kilka najwyższych cyfr kwadratowego pierwiastka danej liczby A, i oznaczmy te cyfry (czytane jako liczba) literą a. Wtedy:

$$a \cdot 10^n < \sqrt{A} < (a+1) \cdot 10^n.$$

Tak np. jeżeli w pierwiastku $\sqrt{6844914756} = 82734$ wyznaczyliśmy już cyfry 82 tak, że $82 \cdot 10^3 < \sqrt{6844914756} < 83 \cdot 10^3$, to $a = 82$, a $n = 3$.

Chcemy wynaczyć następną cyfrę β, t. j. taką liczbę naturalną mniejszą niż 10, lub równą 0, aby było:

$a \cdot 10^n + \beta \cdot 10^{n-1} \leqq \sqrt{A} < a \cdot 10^n + (\beta+1) \cdot 10^{n-1}$ *) t. j. aby:
$(a \cdot 10^n + \beta \cdot 10^{n-1})^2 \leqq A < [a \cdot 10^n + (\beta+1) \cdot 10^{n-1}]^2$, czyli:
$a^2 \cdot 10^{2n} + 2a\beta \cdot 10^{2n-1} + \beta^2 \cdot 10^{2n-2} \leqq A < a^2 \cdot 10^{2n} + 2a(\beta +$
$+ 1) 10^{2n-1} + (\beta+1)^2 \cdot 10^{2n-2}$.

Odejmując od obu stron każdej nierówności $a^2 \cdot 10^{2n}$, otrzymamy:

$$\beta(2a \cdot 10 + \beta) \cdot 10^{2n-2} \leqq A - a^2 \cdot 10^{2n} < (\beta+1)[2a \cdot 10 + (\beta+1)]\, 10^{2n-2}.$$

Liczbę β, która sprawdza pierwszą nierówność, moglibyśmy wyznaczyć, dzieląc pierwszą nierówność przez $(2a \cdot 10 + \beta) \cdot 10^{2n-2} = 2a \cdot 10^{2n-1} + \beta \cdot 10^{2n-2}$. Ale że β nie znamy, więc dzielimy $A - a^2 \cdot 10^{2n}$ przez $2a \cdot 10^{2n-1}$ i otrzymujemy przybliżony (całkowity) iloraz β'. Badamy, czy otrzymana liczba β', podstawiona za β, sprawdza pierwszą nierówność; jeżeli nie, to podstawiamy za β liczbę $\beta' - 1$, a gdyby i ta nierówności pierwszej nie spełniała, $\beta' - 2$ i t. d. W ten sposób znajdziemy wreszcie koniecznie liczbę, która pierwszą nierówność spełnia; dla $\beta = 0$ jest bowiem ta nierówność koniecznie spełniona (dlaczego?). Badamy następnie, czy znaleziona w ten sposób liczba β spełnia drugą nierówność, o ile nie wynika to już z prób poprzednich. Skoro przekonamy się, że znaleziona liczba β spełnia i drugą nierówność, przyjmujemy ją za następną cyfrę pierwiastka. Rzeczywiście, skoro dla tej liczby β

*) Gdyby $n = 1$, to zamiast 10^{n-1}, 10^{2n-2} należy napisać 1.

spełniona jest ostatnia nierówność podwójna, to spełnione muszą być kolejno wszystkie poprzednie, a więc i pierwsza:

$$\alpha \,.\, 10^n + \beta \,.\, 10^{n-1} \leqq \sqrt{A} < \alpha \,.\, 10^n + (\beta + 1) \,.\, 10^{n-1}.$$

(Wykaż to stopniowo!)

W ten sposób, znając jedną lub kilka najwyższych cyfr kwadratowego pierwiastka jakiejś liczby, możemy znaleźć następną najwyższą cyfrę, a więc zmniejszyć górny kres błędu danej pierwotnie przybliżonej wartości pierwiastka 10 razy. Z otrzymaną nową przybliżoną wartością postępujemy jak z poprzednią, póki nie wyznaczymy pierwiastka zupełnie dokładnie, co wskutek założenia na początku tego paragrafu nastąpić musi.

Zadanie 2. Obliczyć $\sqrt{2183{\cdot}6929}$.

Przedstawiamy liczbę pod znakiem pierwiastkowania w postaci ułamka zwyczajnego:

$$\sqrt{2183{\cdot}6929} = \sqrt{\frac{21836929}{10000}}.$$

Zważywszy, że $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, bo $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$, otrzymamy:

$$\sqrt{2183{\cdot}6929} = \frac{\sqrt{21836929}}{\sqrt{10000}} = \frac{4673}{100} = 46{\cdot}73.$$

Opowiedz na podstawie tego przykładu, jak obliczamy kwadratowy pierwiastek ułamka dziesiętnego, będącego zupełnym kwadratem! Rozważ, czy nie można przytem obejść się bez zamiany ułamka dziesiętnego na zwyczajny!

§ 6. Ograniczona wykonalność pierwiastkowania w zakresie liczb wymiernych.

Zajmiemy się teraz pierwszem z pytań, postawionych przy końcu § 4. Rozstrzygniemy to pytanie najpierw dla jednego szczególnego przypadku, mianowicie dla $\sqrt{2}$.

Z graficznego przedstawienia funkcji $y = x^2$ mogliśmy otrzymać $\sqrt{2}$ tylko w przybliżeniu. Nasuwa się pytanie, czy można $\sqrt{2}$ obliczyć całkiem dokładnie, a więc wyrazić albo liczbą całkowitą albo ułamkiem.

Przedewszystkiem zauważymy, że $\sqrt{2}$ nie może być liczbą całkowitą; podnosząc bowiem kolejno liczby całkowite do kwadratu, znajdziemy: $1^2=1$, $2^2=4$, a więc $1<\sqrt{2}<2$, bo ze wzrostem zasady, wzrasta wartość potęgi.

Przyjmijmy dalej, że $\sqrt{2}$ jest ułamkiem, że więc $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. Ułamek $\frac{a}{b}$ niech będzie ułamkiem, sprowadzonym do najprostszej postaci tak, że a i b są liczbami względnie pierwszemi, a nadto $b>1$. Z równości $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ wynika: $\frac{a^2}{b^2}=2$. Skoro a i b są liczbami względnie pierwszemi, muszą być także a^2 i b^2 liczbami względnie pierwszemi. Z tego wynika, że ułamek $\frac{a^2}{b^2}$ nie da się uprościć, a tem bardziej nie może b^2 mieścić się w a^2 całkowitą ilość razy, jak tego wymagałaby równość $\frac{a^2}{b^2}=2$. Niema zatem ułamka, który, podniesiony do kwadratu, dałby 2 na wynik, czyli $\sqrt{2}$ nie może być ułamkiem.

Podobne rozumowanie można powtórzyć dla $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{4}$ i t. d., wogóle dla $\sqrt[n]{a}$, gdzie a oznacza liczbę całkowitą, która nie jest n-tą potęgą żadnej liczby całkowitej. Stąd twierdzenie:

Pierwiastek n-ty liczby całkowitej, która nie jest n-tą potęgą żadnej liczby całkowitej, nie może być ułamkiem.

Obliczanie n-tego pierwiastka liczby a jest zatem działaniem niezawsze wykonalnem.

Podobnie nie istnieje n-ty pierwiastek ułamka, jeżeli w nim po sprowadzeniu do najprostszej postaci licznik i mianownik nie są n-temi potęgami liczb naturalnych.

Przypuśćmy bowiem, że $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{r}{s}$. Wtedy $\frac{a}{b}=\frac{r^n}{s^n}$. Przyjmujemy, że a i b, oraz r i s są liczbami względnie pierwszemi; wskutek tego muszą być też r^n i s^n liczbami względnie pierwszemi, a ułamki $\frac{a}{b}$ i $\frac{r^n}{s^n}$ ułamkami w najprostszej postaci. Ułamki te mogą być tylko wtedy równe, jeżeli $a=r^n$, $b=s^n$. Nasze twierdzenie jest więc udowodnione.

§ 7. Przybliżone obliczanie pierwiastków.

Doszliśmy do wyniku, że niema ułamka, który, podniesiony do kwadratu, daje 2 na wynik. Z wykresu funkcji $y=x^2$

znaleźliśmy jednak liczbę 1·4, której kwadrat różni się od 2 tylko o 0·04. Zadaniem naszem będzie teraz wyszukanie ułamków, których kwadraty różnią się jeszcze mniej od 2 niż $1{\cdot}4^2$ z tą myślą, że ułamki takie będą nam mogły w praktycznych rachunkach zastąpić $\sqrt{2}$. Z ułamków takich zestawimy dwa ciągi liczb, których kwadraty różnić się będą od 2 coraz mniej. W ciągu I zestawimy liczby, których kwadraty są mniejsze niż 2; w ciągu II zestawimy liczby, których kwadraty są większe niż 2.

Ponieważ $1^2 < 2 < 2^2$, to za pierwszą liczbę ciągu I przyjmujemy 1, a za pierwszą liczbę ciągu II liczbę 2.

Część linji liczbowej między 1 i 2 przedstawia fig. 18. Podzielmy ten odcinek na 10 równych części i oznaczmy punkty podziału odpowiedniemi liczbami:

1, 1·1, 1·2, 1·3, 1·4, 1·5, 1·6, 1·7, 1·8, 1·9, 2.

Podnosząc kolejno te liczby do kwadratu, znajdziemy:

$$1{\cdot}1^2 = 1{\cdot}21, \ldots\ldots, \quad 1{\cdot}4^2 = 1{\cdot}96, \quad 1{\cdot}5^2 = 2{\cdot}25, \ldots.$$

Ponieważ $1{\cdot}4^2 < 2 < 1{\cdot}5^2$, przyjmiemy 1·4 za drugą liczbę ciągu I, a 1·5 za drugą liczbę ciągu II.

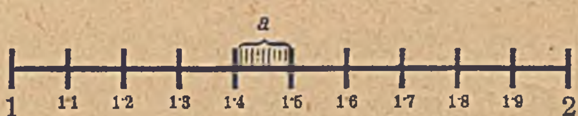

Fig. 18.

Podzielmy odcinek *a* (fig. 18) znowu na 10 równych części; punktom podziału (wliczając i końcowe punkty odcinka *a*) będą odpowiadały liczby:

1·4, 1·41, 1·42, 1·43, 1·44, 1·45, 1·46, 1·47, 1·48, 1·49, 1·5.

Podnosząc te liczby do kwadratu, znajdziemy:

$$1{\cdot}4^2 = 1{\cdot}96, \quad 1{\cdot}41^2 = 1{\cdot}9881, \quad 1{\cdot}42^2 = 2{\cdot}0164, \ldots\ldots$$

Ponieważ $1{\cdot}41^2 < 2 < 1{\cdot}42^2$, to 1·41 przyjmujemy za trzecią liczbę ciągu I, a 1·42 za trzecią liczbę ciągu II.

Postępując w ten sposób dalej, znajdziemy:

Ciąg I: 1, 1·4, 1·41, 1·414, 1·4142,.....

Ciąg II: 2, 1·5, 1·42, 1·415, 1·4143,.....

Liczby tych ciągów spełniają nierówności:

$$1^2 < 2 < 2^2,$$
$$1{\cdot}4^2 < 2 < 1{\cdot}5^2,$$
$$1{\cdot}41^2 < 2 < 1{\cdot}42^2,$$
$$1{\cdot}414^2 < 2 < 1{\cdot}415^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Odpowiadające sobie liczby obu ciągów różnią się od siebie kolejno o: 1, 0·1, 0·01, 0·001,.... a ich kwadraty nie o więcej, niż o 3, 0·3, 0·03, 0·003,... *). Od liczby 2 różnią się ich kwadraty jeszcze mniej. — Tak rozwiązaliśmy zadanie, które postawiliśmy sobie na początku paragrafu.

Matematyka nie może jednak zadowolić się takiem rozwiązaniem zagadnienia. Pomimo wszystko musimy twierdzić, że działanie $\sqrt{2}$ jest niewykonalne w zakresie liczb wymiernych. Na podobną trudność natrafiliśmy już przy odejmowaniu i dzieleniu; przez stosowne rozszerzenie zakresu liczb zdołaliśmy jednak uczynić te działania wykonalnemi bez ograniczenia. Staramy się więc i teraz zakres znanych dotąd liczb tak rozszerzyć, aby pierwiastkowanie (oczywiście liczb dodatnich) było działaniem zawsze wykonalnem.

§ 8. Liczby niewymierne.

Ciągi I i II, otrzymane w § 7, posiadają zupełnie takie same własności, jak ciągi I i II w § 6 rozdz. V; a mianowicie:

1. Każdy ciąg zawiera nieskończenie wiele liczb.
2. Liczby ciągu I rosną (co najwyżej niektóre mogą być równe), liczby ciągu II maleją (co najwyżej niektóre mogą być równe).
3. Każda liczba ciągu I jest mniejsza od każdej liczby ciągu II, a każda liczba ciągu II jest większa od każdej liczby ciągu I.
4. Różnica odpowiadających sobie liczb obu ciągów maleje ciągle i może stać się dowolnie małą, jeżeli dobierzemy dostatecznie dalekie liczby obu ciągów.

Ciągi takie, jak wykazaliśmy, określają dokładnie liczbę, która je odgranicza, oczywiście, jeżeli liczba taka istnieje. W przypadku, którym zajmujemy się obecnie, liczby takiej,

---

*) Jeżeli a oznacza liczbę ciągu I, a b odpowiednią liczbę ciągu II, a δ ich różnicę, to: $b^2 - a^2 = (b + a)\ (b - a) = (b + a)\ \delta$. Ponieważ $b + a \leqq 3$, to $b^2 - a^2 \leqq 3\ \delta$.

większej od wszystkich liczb ciągu I, a mniejszej od wszystkich liczb ciągu II, niema. Kwadrat bowiem takiej liczby musiałby się różnić (według rozważań w § 7) od 2 o mniej niż o 0·3, 0·03, 0·003,..., co byłoby możliwe tylko wtedy, gdyby kwadrat tej liczby był równy 2; liczba taka jednak, której kwadrat równa się 2, nie istnieje. Wprowadzamy tedy nową liczbę na podstawie określenia:

$\sqrt{2}$ *jest to liczba, większa od wszystkich liczb ciągu I* (i liczb mniejszych od którejkolwiek liczby tego ciągu), *a mniejsza od wszystkich liczb ciągu II* (i liczb większych od którejkolwiek liczby tego ciągu).

Określoną tak liczbę $\sqrt{2}$ możemy porównać z każdą liczbą wymierną. Wyjaśnimy to na przykładach:

Przykład 1. Chcąc porównać $\sqrt{2}$ z liczbą 1·7, zauważymy, że 1·7 jest większe od liczby 1·5 ciągu II, określającego $\sqrt{2}$. Powiemy więc w myśl naszej definicji, że $1{\cdot}7 > \sqrt{2}$.

Przykład 2. Aby porównać $1\frac{5}{12}$ z liczbą $\sqrt{2}$, obliczamy przybliżenia dziesiętne ułamka $1\frac{5}{12}$. Otrzymamy $1\frac{5}{12} = 1{\cdot}4166\ldots$ Ponieważ $1{\cdot}416 < 1\frac{5}{12} < 1{\cdot}417$, a 1·416 jest większe od liczby 1·415 ciągu II, określającego $\sqrt{2}$, to $1{\cdot}415 < 1{\cdot}416 < 1\frac{5}{12}$. Zatem w myśl naszej definicji jest: $\sqrt{2} < 1\frac{5}{12}$.

$\sqrt{2}$, określony w powyższy sposób, ma tedy ściśle wyznaczone położenie wśród liczb wymiernych, nie jest jednak równy ani żadnej liczbie całkowitej, ani żadnemu ułamkowi; nazwiemy $\sqrt{2}$ *liczbą niewymierną*. Liczby ciągów I i II można uważać za przybliżone wartości liczby $\sqrt{2}$ z dokładnością do 1, 0·1, 0·01,..., można przeto przedstawić liczbę niewymierną w przybliżeniu zapomocą ułamka z dowolną dokładnością. Liczby wymierne i niewymierne nazywamy *liczbami rzeczywistemi*.

Ponieważ liczba $\sqrt{2}$ jest wyznaczona zapomocą ciągów I i II w § 7, będziemy pisać:

$$\sqrt{2} = \begin{cases} 1,\ 1{\cdot}4,\ 1{\cdot}41,\ 1{\cdot}414,\ 1{\cdot}4142,\ldots \\ 2,\ 1{\cdot}5,\ 1{\cdot}42,\ 1{\cdot}415,\ 1{\cdot}4143,\ldots \end{cases}$$

albo krócej: $\sqrt{2} = 1{\cdot}4142\ldots$

Ten ostatni sposób pisania uważać należy tylko za skrócenie poprzedniego (porównaj § 6 w rozdz. V).

Podobne rozumowanie jak to, które przeprowadziliśmy w § 7 i § 8 dla $\sqrt{2}$, można bez istotnych zmian powtórzyć dla n-tego pierwiastka każdej liczby naturalnej lub dodatniego ułamka.

Tak np. znajdziemy, stosując postępowanie przeprowadzone w § 7:

$$\sqrt{5} = \begin{cases} 2,\ 2{\cdot}2,\ 2{\cdot}23,\ 2{\cdot}236,\ 2{\cdot}2360,\ldots \\ 3,\ 2{\cdot}3,\ 2{\cdot}24,\ 2{\cdot}237,\ 2{\cdot}2361,\ldots \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{30} = \begin{cases} 3,\ 3{\cdot}1,\ 3{\cdot}10,\ 3{\cdot}107,\ 3{\cdot}1072,\ldots \\ 4,\ 3{\cdot}2,\ 3{\cdot}11,\ 3{\cdot}108,\ 3{\cdot}1073,\ldots \end{cases}$$

Dochodzimy więc do wyniku:

Pierwiastek n-ty *liczby naturalnej jest albo liczbą naturalną albo liczbą niewymierną. Pierwiastek* n-ty *dodatniego ułamka uproszczonego* (nie pozornego) *jest albo ułamkiem albo liczbą niewymierną.*

Liczby niewymierne można porównywać nietylko z liczbami wymiernemi (jak wyżej na przykładach wyjaśniliśmy), lecz także ze sobą.

Aby np. porównać $\sqrt{2}$ z $\sqrt{3}$, przedstawiamy te liczby zapomocą ciągów:

$$\sqrt{2} = \begin{cases} 1,\ 1{\cdot}4,\ 1{\cdot}41,\ldots \\ 2,\ 1{\cdot}5,\ 1{\cdot}42,\ldots \end{cases} \qquad \sqrt{3} = \begin{cases} 1,\ 1{\cdot}7,\ 1{\cdot}73,\ldots \\ 2,\ 1{\cdot}8,\ 1{\cdot}74,\ldots \end{cases}$$

Z określenia liczby niewymiernej wynika, że $\sqrt{2} < 1{\cdot}5$ i $1{\cdot}7 < \sqrt{3}$. Ponieważ $1{\cdot}5 < 1{\cdot}7$, to przyjmując dla nierówności liczb rzeczywistych zasadę przechodniości, powiemy, że $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

Również i każdą liczbę wymierną można przedstawić zapomocą dwóch ciągów liczb. W § 6 rozdz. V otrzymaliśmy już:

$$2\tfrac{2}{3} = \begin{cases} 2,\ 2{\cdot}6,\ 2{\cdot}66,\ 2{\cdot}666,\ldots \\ 3,\ 2{\cdot}7,\ 2{\cdot}67,\ 2{\cdot}667,\ldots \end{cases}$$

Podobnie łatwo widzieć, że:

$$2 = \begin{cases} 1{\cdot}9,\ 1{\cdot}99,\ 1{\cdot}999,\ldots \\ 2{\cdot}1,\ 2{\cdot}01,\ 2{\cdot}001,\ldots \end{cases} \qquad \tfrac{3}{4} = \begin{cases} 0{\cdot}749,\ 0{\cdot}7499,\ 0{\cdot}74999,\ldots \\ 0{\cdot}751,\ 0{\cdot}7501,\ 0{\cdot}75001,\ldots \end{cases}$$

§ 9. Obliczanie przybliżonych wartości drugiego pierwiastka.

Sposób, podany w § 7, obliczania przybliżonych wartości $\sqrt{2}$ może być zastosowany do obliczenia przybliżonych wartości każdego (nietylko drugiego) pierwiastka. Gdy chodzi o obliczenie przybliżonych wartości pierwiastka kwadratowego, możemy też posługiwać się tą samą metodą, której użyliśmy do obliczania pierwiastka dokładnego (§ 5). Rzeczywiście możemy i tu zastosować wszystkie rozumowania na str. 96, rozumiejąc przez a najwyższe cyfry przybliżonej (a nie dokładnej, jak tam) wartości pierwiastka. Tym sposobem możemy obliczyć przybliżoną wartość kwadratowego pierwiastka z dokładnością do 1. Jak można uzyskać dokładność do 0·1, 0·01, 0·001,... wskazuje następujący przykład:

Aby obliczyć $\sqrt{3}$ z dokładnością do 0·001, piszemy:

$\sqrt{3} = \sqrt{\dfrac{3000000}{1000000}} = \dfrac{\sqrt{3000000}}{1000}$ i obliczamy z dokładnością do 1:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{3|00|00|00} = 1732_{(1)}*) \\
\;\; 20|0 : 27 \,.\, 7 \\
\;\;\; 110|0 : 343 \,.\, 3 \\
\;\;\;\;\; 710|0 : 3462 \,.\, 2 \\
\;\;\;\;\;\;\; 176
\end{array}
$$

Wtedy: $\sqrt{3} = 1{\cdot}732_{(0{\cdot}001)}$

Reszta 176 wskazuje, że $1{\cdot}732^2$ różni się od 3 o 0·000176.

§ 10. Dodawanie i odejmowanie pierwiastków.

Wprowadziwszy liczby niewymierne, określimy działania temi liczbami:

Aby dodać liczby 3 i $\sqrt{2} = \begin{cases} 1,\ 1{\cdot}4,\ 1{\cdot}41,\ 1{\cdot}414,\ldots \\ 2,\ 1{\cdot}5,\ 1{\cdot}42,\ 1{\cdot}415,\ldots \end{cases}$, tworzymy dwa nowe ciągi, dodając do liczb ciągów, określających $\sqrt{2}$, liczbę 3. Te dwa ciągi określają liczbę rzeczywistą, którą nazywamy sumą liczb 3 i $\sqrt{2}$ i oznaczamy: $3 + \sqrt{2}$.

Jest więc: $3 + \sqrt{2} = \begin{cases} 4,\ 4{\cdot}4,\ 4{\cdot}41,\ 4{\cdot}414,\ldots \\ 5,\ 4{\cdot}5,\ 4{\cdot}42,\ 4{\cdot}415,\ldots \end{cases}$

Wykaż, że ciągi te mają rzeczywiście zasadnicze cztery własności, wymienione w § 8, a więc określają liczbę rzeczywistą.

Aby dodać liczby $\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}$, dodajemy odpowiednie liczby ciągów, określających $\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}$. Otrzymane ciągi wyznaczają liczbę (sumę): $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Tak więc:

$$\sqrt{3} = \begin{cases} 1,\ 1{\cdot}7,\ 1{\cdot}73,\ 1{\cdot}732,\ldots \\ 2,\ 1{\cdot}8,\ 1{\cdot}74,\ 1{\cdot}733,\ldots \end{cases},\quad \sqrt{2} = \begin{cases} 1,\ 1{\cdot}4,\ 1{\cdot}41,\ 1{\cdot}414,\ldots \\ 2,\ 1{\cdot}5,\ 1{\cdot}42,\ 1{\cdot}415,\ldots \end{cases}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \begin{cases} 2,\ 3{\cdot}1,\ 3{\cdot}14,\ 3{\cdot}146,\ldots \\ 4,\ 3{\cdot}3,\ 3{\cdot}16,\ 3{\cdot}148,\ldots \end{cases}$$

---

*) Porównaj uwagę do str. 84

Wykaż, że ostatnie dwa ciągi mają zasadnicze cztery własności, wymienione w § 8, a więc określają liczbę rzeczywistą.

Nietrudno w taki sam sposób określić sumę 3, 4,... liczb; nietrudno też widzieć, że określona tak suma ma zasadnicze własności sumy liczb wymiernych, znajdujące swój wyraz w prawach przemienności i łączności.

Przedstaw zapomocą dwóch ciągów sumy liczb:

$$3+\sqrt{2}+\sqrt{3}, \quad 3+\sqrt{3}+\sqrt{2}, \quad 3+(\sqrt{3}+\sqrt{2}),$$

a przekonasz się, że te wszystkie trzy sumy są określone zapomocą jednakowych ciągów, a więc że: $3+\sqrt{2}+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}+\sqrt{2}=$ $=3+(\sqrt{3}+\sqrt{2})$. Do sumy liczb rzeczywistych stosują się przeto prawa przemienności i łączności.

Wprowadzimy też niewymierne liczby względne, rozumiejąc np. przez $+\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$ liczby określone zapomocą ciągów:

$$+\sqrt{2}=\begin{cases}+1, & +1{\cdot}4, & +1{\cdot}41, & +1{\cdot}414,\ldots \\ +2, & +1{\cdot}5, & +1{\cdot}42, & +1{\cdot}415,\ldots\end{cases},$$

$$-\sqrt{2}=\begin{cases}-2, & -1{\cdot}5, & -1{\cdot}42, & +1{\cdot}415,\ldots \\ -1, & -1{\cdot}4, & -1{\cdot}41, & -1{\cdot}414,\ldots\end{cases}.$$

Dla porównywania niewymiernych liczb względnych i dla działań temi liczbami pozostawiamy te same określenia, które przyjęliśmy dla wymiernych liczb względnych.

Wymierne liczby względne można także przedstawiać zapomocą dwóch ciągów. Wyjaśnij, że:

$$-\tfrac{1}{3}=\begin{cases}-0{\cdot}4, & -0{\cdot}34, & -0{\cdot}334,\ldots \\ -0{\cdot}3, & -0{\cdot}33, & -0{\cdot}333,\ldots\end{cases}$$

$$0=\begin{cases}-1, & -0{\cdot}1, & -0{\cdot}01, & -0{\cdot}001,\ldots \\ +1, & +0{\cdot}1, & +0{\cdot}01, & +0{\cdot}001,\ldots\end{cases}$$

$$0=\begin{cases}-2, & -0{\cdot}2, & -0{\cdot}02, & -0{\cdot}002,\ldots \\ +2, & +0{\cdot}2, & +0{\cdot}02, & +0{\cdot}002,\ldots\end{cases}$$

Odejmowanie liczb niewymiernych określamy jako dodawanie do odjemnej liczby przeciwnej względem odjemnika.

Np.: $\sqrt{3}-\sqrt{2}=(+\sqrt{3})+(-\sqrt{2})=\begin{cases}-1, & 0{\cdot}2, & 0{\cdot}31, & 0{\cdot}317,\ldots \\ 1, & 0{\cdot}4, & 0{\cdot}33, & 0{\cdot}319,\ldots\end{cases}$

Liczba ta ma (jak i różnica liczb wymiernych) tę własność, że gdy do niej dodamy odjemnik, otrzymamy na wynik odjemną. Sprawdź! Odejmowanie liczb niewymiernych jest przeto działaniem odwrotnem do dodawania.

W praktyce rachujemy liczbami niewymiernemi, zastępując je przybliżonemi wartościami z dokładnością potrzebną w danem zagadnieniu. Górny kres błędu obliczamy według zasad, wyłożonych w rozdz. V.

Np.: $3 + \sqrt{2} - \sqrt{3} \doteq 3 + 1{\cdot}41_{(0{\cdot}005)} - 1{\cdot}73_{(0{\cdot}005)} = 2{\cdot}68_{(0{\cdot}01)}$.

§ 11. Mnożenie i potęgowanie pierwiastków. Pierwiastkowanie iloczynów i potęg.

Jeżeli $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[n]{b}$ są liczbami wymiernemi, to:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}, \text{ ponieważ } \left(\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Np.: $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$.

Zanim ustalimy, czy wzór ten można zastosować także wtedy, gdy $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[n]{b}$ są liczbami niewymiernemi, musimy najpierw określić, co rozumiemy przez iloczyn liczb niewymiernych. Określenie to wyjaśnimy na szczegółowych przykładach:

Aby pomnożyć $\sqrt{2}$ przez liczbę wymierną (bezwzględną) m, pomnóżmy każdą liczbę ciągów, wyznaczających $\sqrt{2}$, przez m. Otrzymane dwa ciągi określają liczbę rzeczywistą, którą nazywamy iloczynem liczb $\sqrt{2}$ i m i oznaczamy: $m\,.\,\sqrt{2}$.

Jest więc: $m\,.\,\sqrt{2} = \begin{cases} 1\,m, & 1{\cdot}4\,m, \quad 1{\cdot}41\,m, \quad 1{\cdot}414\,m, \ldots \\ 2\,m, & 1{\cdot}5\,m, \quad 1{\cdot}42\,m, \quad 1{\cdot}415\,m, \ldots \end{cases}$.

Wykaż, że ciągi te posiadają cztery zasadnicze własności, wymienione w § 8, a więc wyznaczają liczbę rzeczywistą.

Niech będą dane liczby niewymierne:

$$\sqrt{2} = \begin{cases} 1, & 1{\cdot}4, \quad 1{\cdot}41, \quad 1{\cdot}414, \ldots a, \ldots \\ 2, & 1{\cdot}5, \quad 1{\cdot}42, \quad 1{\cdot}415, \ldots a + \varepsilon, \ldots \end{cases}$$

$$\text{i } \sqrt{3} = \begin{cases} 1, & 1{\cdot}7, \quad 1{\cdot}73, \quad 1{\cdot}732, \ldots b, \ldots \\ 2, & 1{\cdot}8, \quad 1{\cdot}74, \quad 1{\cdot}733, \ldots b + \varepsilon, \ldots \end{cases}$$

Literą a oznaczyliśmy n-tą liczbę pierwszego ciągu, wyznaczającego liczbę $\sqrt{2}$. Odpowiednią liczbą drugiego ciągu jest $a + \varepsilon$, gdzie ε oznacza różnicę n tych liczb obu ciągów. Dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ jest więc kolejno $\varepsilon = 1, 0{\cdot}1, 0{\cdot}01, \ldots$, a więc ε jest liczbą, którą możemy uczynić dowolnie małą. Podobnie oznaczamy przez b i $b + \varepsilon$ n-te liczby ciągów, wyznaczających $\sqrt{3}$.

Utwórzmy dwa nowe ciągi, mnożąc odpowiednie liczby pierwszych i drugich ciągów, wyznaczających $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$. Otrzymamy:

Ciąg I: $1 . 1,\ 1{\cdot}4 . 1{\cdot}7,\ 1{\cdot}41 . 1{\cdot}73,\ 1{\cdot}414 . 1{\cdot}732, \ldots ab, \ldots$
Ciąg II: $2 . 2,\ 1{\cdot}5 . 1{\cdot}8,\ 1{\cdot}42 . 1{\cdot}74,\ 1{\cdot}415 . 1{\cdot}733, \ldots (a+\varepsilon)(b+\varepsilon), \ldots$

Zbadajmy czy ciągi I i II wyznaczają liczbę rzeczywistą. Otóż oba ciągi zawierają nieskończenie wiele liczb, bo ciągi, z których je utworzyliśmy zawierały nieskończenie wiele liczb. Liczby ciągu I rosną, bo każda następna liczba jest iloczynem liczb większych, niż poprzednia; liczby ciągu II maleją, bo każda następna liczba jest iloczynem liczb mniejszych, niż poprzednia. Każda liczba ciągu II jest większa od każdej liczby ciągu I, bo jest iloczynem większych czynników niż ta ostatnia. Chodzi tylko o zbadanie, czy różnice odpowiednich liczb ciągów I i II stają się dowolnie małe. Obliczmy w tym celu różnicę d n-tych liczb tych ciągów. Ponieważ n-tą liczbą ciągu II jest $(a+\varepsilon)(b+\varepsilon)$, a n-tą liczbą ciągu I jest ab, to:

$$d = (a+\varepsilon)(b+\varepsilon) - ab = a\varepsilon + b\varepsilon + \varepsilon^2 = (a+b+\varepsilon)\varepsilon.$$

W tym wzorze jest $a < 2$, bo a, jako liczba pierwszego ciągu wyznaczającego $\sqrt{2}$, jest mniejsze od 2, które jest liczbą drugiego ciągu wyznaczającego $\sqrt{2}$. Podobnie jest $b < 2$. Nadto jest $\varepsilon \leq 1$ jako różnica n-tych liczb wyznaczających $\sqrt{2}$ lub $\sqrt{3}$. Gdy więc w znalezionym dla d wzorze napiszemy w wyrażeniu w nawiasie zamiast a, b, ε odpowiednio 2, 2, 1, to wyrażenie to zwiększy się tak, że będzie:

$$d = (a+b+\varepsilon)\varepsilon < (2+2+1)\varepsilon, \text{ czyli } d < 5\varepsilon.$$

Różnicę d możemy tedy uczynić dowolnie małą, zmniejszając dostatecznie ε. Chcąc np. aby było $d < 0{\cdot}0001$, wystarczy dobrać ε tak, aby było $5\varepsilon < 0{\cdot}0001$, czyli $\varepsilon < 0{\cdot}00002$, co jest zawsze możliwe. Różnice liczb ciągów I i II stają się więc w miarę wzrastania ilości wyrazów ciągów dowolnie małemi.

Ciągi I i II wyznaczają zatem jakąś liczbę rzeczywistą, a liczbę tę nazwiemy iloczynem liczb $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ i oznaczymy symbolem $\sqrt{2} . \sqrt{3}$.

Określamy więc:

Aby pomnożyć liczby $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, mnożymy odpowiednie liczby ciągów, określających $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$. Otrzymane ciągi wyznaczają iloczyn $\sqrt{2} . \sqrt{3}$.

Tak więc: $\sqrt{2} . \sqrt{3} = \begin{cases} 1 . 1,\ 1{\cdot}4 . 1{\cdot}7,\ 1{\cdot}41 . 1{\cdot}73,\ 1{\cdot}414 . 1{\cdot}732, \ldots \\ 2 . 2,\ 1{\cdot}5 . 1{\cdot}8,\ 1{\cdot}42 . 1{\cdot}74,\ 1{\cdot}415 . 1{\cdot}733, \ldots \end{cases}$

Tak samo określamy iloczyn dowolnych liczb niewymiernych.

Przypatrzmy się liczbom ciągów, określających $\sqrt{2} . \sqrt{3}$. Zauważymy, że kwadraty liczb ciągu I są mniejsze niż $2 . 3 = 6$, a kwadraty liczb ciągu II są większe niż $2 . 3 = 6$. Liczbę,

którą takie ciągi określają, oznaczamy przeto (według § 8) symbolem $\sqrt{6}$, czyli $\sqrt{2 \,.\, 3}$. Jest więc:

$$\sqrt{2 \,.\, 3} = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{3}.$$

Zupełnie takie samo rozumowanie jak dla $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ można przeprowadzić dla $\sqrt[n]{a}$ i $\sqrt[n]{b}$, jeżeli te liczby są liczbami niewymiernemi. Otrzymamy:

$$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}.$$

Ostatni wzór obowiązuje tedy ogólnie. Powiemy: *Iloczyn pierwiastkujemy, pierwiastkując każdy czynnik oddzielnie, a otrzymane pierwiastki mnożąc przez siebie.*

Twierdzenie to znajduje zastosowanie w tak zwanem *wyłączaniu* liczb *przed pierwiastek*. Jeżeli liczba pod znakiem pierwiastkowania da się rozłożyć na dwa czynniki, z których jeden przynajmniej można pierwiastkować, rozkładamy ją na takie dwa czynniki i stosujemy twierdzenie o pierwiastkowaniu iloczynu.

Np.: 1) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \,.\, 3} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$

2) $\sqrt[3]{2a^3} = \sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{a^3} = a\sqrt[3]{2}.$

3) $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3 \,.\, a} = a\sqrt[3]{a}.$

Pisząc równość: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$ odwrotnie, otrzymamy wzór: $\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$; czyli:

Pierwiastki o jednakowych wykładnikach pierwiastkowych mnożymy, pierwiastkując wspólnym wykładnikiem pierwiastkowym iloczyn liczb pod znakami pierwiastkowania.

Np.: 1) $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$. Obliczyć $\sqrt[3]{6}$ jest łatwiej, niż $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ i iloczyn $\sqrt[3]{2} \,.\, \sqrt[3]{3}.$

2) $\sqrt[3]{a^2} \,.\, \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} = a.$

Na tem twierdzeniu polega *włączanie pod pierwiastek* czynnika, stojącego przed znakiem pierwiastkowania. Czynnik, stojący przed znakiem pierwiastkowania, potęgujemy i pierwiastkujemy wykładnikiem pierwiastka, przez co wartość tego czynnika się nie zmienia, a następnie stosujemy twierdzenie o mnożeniu pierwiastków.

Np.: 1) $2{\cdot}5\sqrt{2} = \sqrt{2{\cdot}5^2}\,.\,\sqrt{2} = \sqrt{6{\cdot}25}\,.\,\sqrt{2} = \sqrt{12{\cdot}5}.$

2) $2a^2\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{(2a^2)^3}\,.\,\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{8a^6}\,.\,\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{8a^7}.$

Określiliśmy wyżej iloczyn dwu liczb niewymiernych. Łatwo to określenie przenieść na iloczyn 3, 4,... liczb niewymiernych. Łatwo też zrozumieć, że prawa przemienności, łączności i rozdzielności odnoszą się do iloczynów liczb niewymiernych. Wszak odnoszą się one do iloczynów przybliżonych wartości tych liczb, a właśnie ciągi takich iloczynów określają iloczyny liczb niewymiernych.

Przekonaj się, że; $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{2} = \sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}$, $(\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3})\,.\,\sqrt{5} = \sqrt{2}\,.$ $.\,(\sqrt{3}\,.\,\sqrt{5})$, $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\sqrt{2} = \sqrt{5}\,.\,\sqrt{2}+\sqrt{3}\,.\,\sqrt{2}$, przedstawiając według definicji iloczyny, znajdujące się po obu stronach tych równości, zapomocą ciągów liczb.

Określenie potęgi liczby niewymiernej, jako iloczynu równych czynników, nie sprawia już teraz trudności:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\ldots\ (m \text{ razy}).$$

Stosując twierdzenie o mnożeniu pierwiastków, otrzymamy:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a\,.\,a\,.\,a\ldots}\ (m \text{ razy}) \text{ i wreszcie:}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}. \text{ Słowami:}$$

Pierwiastek potęgujemy, zostawiając wykładnik pierwiastkowy niezmieniony, a potęgując liczbę pod znakiem pierwiastkowania.

Np.: $\left(\sqrt[3]{a}\right)^5 = \sqrt[3]{a^5} = a\sqrt[3]{a^2}.$

Jeżeli we wzorze $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ podstawimy $m = n$, otrzymamy: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$. Jeżeli $\sqrt[n]{a}$ jest liczbą wymierną, wzór ten nie podaje nam nic nowego; wszak $\sqrt[n]{a}$ określiliśmy jako liczbę, której n-ta potęga wynosi a. Przyjmijmy jednak, że $\sqrt[n]{a}$ jest liczbą niewymierną np. $\sqrt{2}$. Liczbę $\sqrt{2}$ określiliśmy (§ 8) zapomocą dwóch ciągów o pewnych własnościach jako liczbę większą od liczb, których kwadraty są mniejsze niż 2, a mniejszą od liczb, których kwadraty są większe niż 2. Teraz dowiadujemy się że $(\sqrt{2})^2 = 2$, że więc liczba $\sqrt{2}$ ma tę własność, że jej kwadrat wynosi dokładnie 2. Teraz dopiero możemy odnieść pierwotne określenie n-go pierwiastka liczby dodatniej a, jako liczby dodatniej, której n-ta potęga wynosi a, także do tego przypadku, gdy $\sqrt[n]{a}$ jest liczbą niewymierną. Pierwiastkowanie dodatnich liczb wymiernych, jako działanie odwrotne do potęgowania, jest działaniem w zakresie liczb rzeczywistych zawsze wykonalnem.

Pisząc równość $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ odwrotnie, otrzymamy:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$ Słowami:

Potęgę pierwiastkujemy, pierwiastkując zasadę, a wykładnik potęgowy zostawiając niezmieniony:

Np.: $\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$.

Ostatnie dwa twierdzenia możemy zebrać w jedno następujące:

Naznaczone potęgowania i pierwiastkowania można wykonywać w dowolnym porządku.

§ 12. Dzielenie pierwiastków. Pierwiastkowanie ułamków.

Dzielenie liczb niewymiernych określamy jako działanie odwrotne do mnożenia. Podzielić jedną liczbę rzeczywistą przez drugą znaczy znaleźć taką trzecią liczbę, która pomnożona przez drugą daje na wynik pierwszą.

Pomijamy szczegółowe omówienie, jak można wyznaczyć iloraz dwu liczb, danych zapomocą ciągów. Zakładamy, że iloraz taki, o ile dzielnik jest różny od zera, zawsze istnieje i to tylko jeden. Przybliżoną wartość takiego ilorazu możemy obliczyć, dzieląc przybliżone wartości dzielnej i dzielnika i zaokrąglając wynik według zasad, wyłożonych w rozdz. V.

Określony tak iloraz ma zasadnicze własności ilorazu liczb wymiernych; w szczególności można taki iloraz upraszczać i rozszerzać. Gdy bowiem $A : B = C$ (gdzie A, B i C oznaczają liczby rzeczywiste, przyczem $B \neq 0$), to według definicji ilorazu $A = BC$. Mnożąc ostatnią równość przez $D \neq 0$, otrzymamy: $AD = BD \cdot C$, a stąd $AD : BD = C$ czyli $AD : BD = A : B$. Ta równość wyraża twierdzenie o upraszczaniu i rozszerzaniu ilorazów (ułamków).

Określiwszy iloraz liczb rzeczywistych, zajmiemy się dzieleniem pierwiastków.

Ponieważ: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a}$, to:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$ Słowami:

Pierwiastki o jednakowych wykładnikach pierwiastkowych dzielimy, dzieląc liczbę pod znakiem pierwiastkowania w liczniku przez liczbę pod znakiem pierwiastkowania w mianowniku, a otrzymany iloraz pierwiastkując wspólnym wykładnikiem pierwiastkowym.

Np.: 1) $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}} = \sqrt[5]{\frac{a^3}{a^2}} = \sqrt[5]{a};$

2) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{a^2}} = \sqrt[3]{a}.$ (Włączanie pod pierwiastek).

Pisząc równość $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ odwrotnie, otrzymamy:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$ czyli:

Ułamek pierwiastkujemy, dzieląc pierwiastek licznika przez pierwiastek mianownika.

Np.: 1) $\sqrt{\frac{2a^2}{9}} = \frac{\sqrt{2a^2}}{\sqrt{9}} = \frac{a\sqrt{2}}{3};$

2) $\sqrt[3]{\frac{a^4}{27}} = \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{a}{3}\sqrt[3]{a}.$ (Wyłączanie ułamka przed pierwiastek).

§ 13. Pierwiastkowanie pierwiastków.

Zanim postawimy pytanie, jak pierwiastkujemy pierwiastek, musimy zdać sobie sprawę z tego, co rozumiemy przez pierwiastek liczby niewymiernej. Wyjaśnimy to na przykładzie $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$.

Przedewszystkiem obliczymy metodą wskazaną w § 7:

$$\sqrt[3]{6} = \begin{cases} 1,\ 1{\cdot}8,\ 1{\cdot}81,\ 1{\cdot}817,\ 1{\cdot}8171, \ldots \\ 2,\ 1{\cdot}9,\ 1{\cdot}82,\ 1{\cdot}818,\ 1{\cdot}8172, \ldots \end{cases}$$

Następnie, postępując podobnie jak w § 7, obliczamy 1^2, 2^2, 3^2, ... i badamy, między kwadratami których liczb naturalnych jest zawarty $\sqrt[3]{6}$. Znajdziemy: $1^2 < \sqrt[3]{6} < 2^2$. Dzielimy przedział 1...2 na 10 równych części i badamy, między któremi z liczb: 1^2, $1{\cdot}1^2$, $1{\cdot}2^2$, ... $1{\cdot}9^2$, 2^2 zawarty jest $\sqrt[3]{6}$. Znajdziemy: $1{\cdot}3^2 < \sqrt[3]{6} < 1{\cdot}4^2$. Dzielimy znów przedział 1·3... 1·4 na 10 równych części i postępujemy jak wyżej. Otrzymamy dwa ciągi liczb:

$$\begin{matrix} 1,\ 1{\cdot}3,\ 1{\cdot}34,\ 1{\cdot}348, \ldots. \\ 2,\ 1{\cdot}4,\ 1{\cdot}35,\ 1{\cdot}349, \ldots. \end{matrix}$$

Ciągi te wyznaczają liczbę większą od liczb, których kwadraty są mniejsze niż $\sqrt[3]{6}$, a mniejszą od liczb, których kwadraty są większe niż $\sqrt[3]{6}$. Stosownie do określenia w § 7 nazwiemy tę liczbę $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$.

Liczba ta podniesiona najpierw do kwadratu, a potem do trzeciej potęgi daje na wynik 6. Lecz podnieść liczbę najpierw do potęgi 2-ej, a potem do potęgi 3-ej jest to samo, co podnieść ją do potęgi 6-ej. A że liczbą, która podniesiona do potęgi 6-ej daje 6 na wynik, jest $\sqrt[6]{6}$, to: $\sqrt{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[6]{6}$. Ogólnie:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \text{ czyli:}$$

Pierwiastek pierwiastkujemy, pierwiastkując liczbę pod znakiem pierwiastkowania iloczynem wykładników pierwiastkowych.

Np.: $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.

Ponieważ tak $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, jako też $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, daje na wynik $\sqrt[mn]{a}$, to:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}, \text{ czyli:}$$

Przy wielokrotnem pierwiastkowaniu wolno naznaczone pierwiastkowania wykonywać w dowolnym porządku.

Np.: 1) $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}} = \sqrt[3]{2}$;

2) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

Pisząc równość $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ odwrotnie, otrzymamy:

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}, \text{ czyli:}$$

Dowolną liczbę pierwiastkujemy iloczynem, pierwiastkując ją najpierw jednym, a otrzymany pierwiastek drugim czynnikiem iloczynu.

Np.: 1) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[2.3]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2} = 1{\cdot}414\ldots$;

2) $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{1{\cdot}4142\ldots} = 1{\cdot}189\ldots$.

Przy pierwiastkowaniu pierwiastka mamy do czynienia zwykle z pierwiastkowaniem liczby niewymiernej. Liczby takie zastępujemy w praktycznych rachunkach ich przybliżonemi wartościami, pierwiastkując zaś liczbę przybliżoną, otrzymujemy wynik również tylko przybliżony. Zdajmy sobie tedy sprawę z dokładności pierwiastka liczby przybliżonej. Ograniczymy się przytem tylko do pierwiastków kwadratowych.

Niech a oznacza przybliżoną wartość liczby bezwzględnej A, α błąd, a α' górny kres błędu tak, że: $A - a = \alpha$, $|\alpha| < \alpha'$. Przyjmując $\sqrt{a}$ zamiast $\sqrt{A}$ popełniamy błąd $\sqrt{A} - \sqrt{a}$. Aby obliczyć górny kres tego błędu, pomnóżmy i podzielmy $\sqrt{A} - \sqrt{a}$ przez $\sqrt{A} + \sqrt{a}$. Otrzymamy:

$$\sqrt{A} - \sqrt{a} = \frac{A - a}{\sqrt{A} + \sqrt{a}} = \frac{\alpha}{\sqrt{a + \alpha} + \sqrt{a}}.$$

Zastępując w liczniku ostatniego ułamka $|\alpha|$ przez α', a w mianowniku α przez $-\alpha'$, powiększymy bezwzględną wartość tego ułamka tak, że będzie:

$$|\sqrt{A} - \sqrt{a}| = \frac{|\alpha|}{\sqrt{a + \alpha} + \sqrt{a}} < \frac{\alpha'}{\sqrt{a - \alpha'} + \sqrt{a}}.$$

Zważywszy, że α' jest bardzo małe w porównaniu z a, możemy w mianowniku ostatniego ułamka zamiast $\sqrt{a - \alpha'}$ napisać $\sqrt{a}$, a wtedy otrzymamy na szukany górny kres błędu pierwiastka kwadratowego: $\frac{\alpha'}{2\sqrt{a}}$. Słowami:

Górny kres błędu pierwiastka kwadratowego liczby przybliżonej równa się połowie ilorazu górnego kresu błędu liczby pierwiastkowanej i pierwiastka kwadratowego pierwiastkowanej liczby przybliżonej.

Oczywiście jest to górny kres błędu, spowodowanego niedokładnością liczby pierwiastkowanej. Jeżeli $\sqrt{a}$ nie jest obliczony dokładnie, należy do obliczonego w powyższy sposób górnego kresu błędu dodać górny kres błędu, pochodzącego z zaokrąglenia wyniku. Np.: Mając obliczyć $\sqrt{40{\cdot}67_{(0{\cdot}01)}}$, obliczamy $\sqrt{40{\cdot}67} = 6$, przyczem zaokrąglamy wynik tak, aby błąd był popełniony przez niedomiar (dlaczego?). Górny kres błędu wyniku wynosić będzie:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{0{\cdot}01}{6} = \frac{1}{1200} = 0{\cdot}0008.$$

Ze względu na otrzymaną wartość górnego kresu błędu pierwiastka obliczamy $\sqrt{40{\cdot}67}$ do czterech miejsc dziesiętnych: $\sqrt{40{\cdot}67} = 6{\cdot}3773\ldots$ Zaokrąglając ten wynik do trzech miejsc dziesiętnych, popełniamy błąd mniejszy niż $0{\cdot}0004$, co wraz z obliczonym poprzednio górnym kresem błędu pierwiastka daje $0{\cdot}0012$. Jest więc:

$$\sqrt{40{\cdot}67_{(0{\cdot}01)}} \doteq 6{\cdot}377_{(0{\cdot}0012)}.$$

§ 14. Przekształcanie pierwiastka potęgi.

Jeżeli w wyrażeniu $\sqrt[n]{a^m}$ wykładniki m i n mają wspólny podzielnik p tak, że $m = xp$, $n = yp$, to:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[yp]{a^{xp}} = \sqrt[y]{\sqrt[p]{(a^x)^p}} = \sqrt[y]{a^x}, \text{ czyli:}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}}$$

Wykładnik potęgowy i pierwiastkowy wolno przez wspólny podzielnik obu wykładników podzielić.

W ten sposób możemy często przedstawić pierwiastki potęg w prostszej postaci.

Np.: $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$.

Jeżeli w szczególności: α) wykładnik pierwiastkowy n jest podzielnikiem wykładnika potęgowego m, lub β) wykładnik potęgowy m jest podzielnikiem wykładnika pierwiastkowego n, to:

$$\alpha)\ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};\quad \beta)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}.$$

Wyraź te twierdzenia słowami!

Np.: 1) $\sqrt[3]{a^6} = a^2$; 2) $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$.

Pisząc równość $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}}$ odwrotnie, a równocześnie podstawiając $m = xp$, $n = yp$, otrzymamy:

$$\sqrt[y]{a^x} = \sqrt[yp]{a^{xp}};\ \text{czyli:}$$

Wykładnik potęgowy i pierwiastkowy wolno przez tę samą liczbę pomnożyć.

Na podstawie tego twierdzenia można każdy pierwiastek zamienić na pierwiastek o innym wykładniku, który jednak musi być wielokrotnością wykładnika danego pierwiastka.

Np.: $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[9]{a^3} = \sqrt[12]{a^4} = \sqrt[15]{a^5}$ i t. p.

Można także dwa pierwiastki o różnych wykładnikach sprowadzić do wspólnego wykładnika pierwiastkowego, przyjmując za ten wykładnik najmniejszą wspólną wielokrotność wykładników danych pierwiastków.

Np.: Sprowadzić do wspólnego wykładnika pierwiastkowego $\sqrt[4]{a}$ i $\sqrt[6]{a}$.

n. w. w. $(4, 6) = 12$;

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^3},\quad \sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{a^2}.$$

Sprowadzaniem do wspólnego wykładnika pierwiastkowego posługujemy się zawsze, ilekroć mamy mnożyć lub dzielić pierwiastki o różnych wykładnikach.

Np.: 1) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[8]{a^5} = \sqrt[24]{a^{20}} \cdot \sqrt[24]{a^{15}} = \sqrt[24]{a^{35}} = a\sqrt[24]{a^{11}}$;

2) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt[6]{\frac{a^4}{b^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{b^3}{a^3}} = \sqrt[6]{\frac{a^4 b^3}{a^3 b^2}} = \sqrt[6]{ab}$;

3) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} : \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{a}$.

Twierdzenia o działaniach pierwiastkami, omówione w §§ 11—14, ująć można w następujących pięć wzorów:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$; 2) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$; 3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; 5) $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Czytając te wzory tak, jak są napisane, i odwrotnie, otrzymujemy wszystkie powyższe twierdzenia.

§ 15. Przekształcanie wyrażeń niewymiernych.

Przykłady, przerobione w poprzednich paragrafach, wskazują, że wyrażenia, zawierające pierwiastki, można przedstawiać w rozmaitych postaciach. Gdy chodzi o obliczenie wartości takiego wyrażenia dla pewnych wartości szczególnych, nie jest rzeczą obojętną, w jakiej postaci wyrażenie to przedstawimy.

Gdy np. mamy obliczyć $\frac{a}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{a^2}$ dla $a = 2$, to pierwsza postać wymaga wykonania działań: $\sqrt[3]{2}$ i $2 : \sqrt[3]{2}$, a więc oprócz pierwiastkowania, jeszcze dzielenia przez liczbę niewymierną. Dzielenie takie jest bardzo żmudne, jeżeli chcemy otrzymać wynik dość dokładny. Druga postać wymaga tylko obliczenia $\sqrt[3]{4}$.

Przykład ten poucza nas, że szczególnie niewygodne jest obliczanie wartości ułamków, których mianowniki zawierają liczby niewymierne. Dlatego zajmiemy się bliżej przekształcaniem ułamków o niewymiernych mianownikach.

1. *a) Jeżeli w mianowniku ułamka znajduje się* $\sqrt{a}$ *jako czynnik, można mianownik uczynić wymiernym, rozszerzając ułamek przez* $\sqrt{a}$.

Np.: 1) $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$.

b) Jeżeli w mianowniku ułamka znajduje się $\sqrt[n]{a^m}$ *jako czynnik, można mianownik uczynić wymiernym, rozszerzając ułamek przez* $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Np.: 1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$;

2) $\frac{3}{2\sqrt[4]{8}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{2^3}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{2\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}$.

2. *a) Jeżeli mianownik jest sumą (różnicą) iloczynów, zawierających drugie pierwiastki jako czynniki, można mianow-*

nik uczynić wymiernym, rozszerzając ułamek przez różnicę (sumę) tych liczb.

Np.: $$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{8-3\sqrt{6}}{8}.$$

b) Jeżeli mianownik jest sumą (różnicą) iloczynów, zawierających trzecie pierwiastki, można mianownik uczynić wymiernym, sprowadzając ułamek do mianownika, który jest sumą (różnicą) trzecich potęg tych liczb.

Ponieważ $(a \pm b)\,(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$, to:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$$

3. Wyrażenie niewymierne można często przekształcić na prostsze, potęgując i pierwiastkując je tą samą liczbą.

Np.: $$\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{7+2\sqrt{6}-2\sqrt{49-24}+7-2\sqrt{6}}=\sqrt{14-2\sqrt{25}}=\sqrt{4}=2.$$

Ćwiczenia.

1. Wykonać działania:

a) $(ab)^{n-1}=?$ *b)* $(-ab)^{2n}=?$ *c)* $(+ab)^{2n-1}=?$
d) $(-ab)^{2n+1}=?$ *e)* $(-ab)^{4n}=?$ *f)* $(-ab)^{4n+1}=?$

2. Korzystając z twierdzenia: $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, wykonać działania:

a) $\left(\frac{27}{20}\right)^3 \cdot \left(\frac{40}{27}\right)^3=?$ *b)* $(-1{\cdot}25)^3(-16)^3=?$

c) $\left(\frac{a^2}{2b}\right)^2 \cdot \left(\frac{2b}{a}\right)^2=?$ *d)* $\left(\frac{5a^3}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{14}{5a^3}\right)^3=?$

e) $(2a-3)^2 \cdot (2a+3)^2=?$ *f)* $(ab+1)^2 \cdot (ab-1)^2=?$

3. Wykonać działania:

a) $a^n \cdot a^{n-1}=?$ *b)* $x^{n-2} \cdot x=?$ *c)* $a^{n-2} \cdot a^{n+3} \cdot a^{n-1}=?$
d) $x^{5-n} \cdot x^{n-1} \cdot x^{n+1}=?$ *e)* $2a^{n-1}b^{n-2} \cdot 3a^{3n-1}b^{5-n}=?$
f) $(-3a^{n-2}b^3)(+2a^2b^n)=?$ *g)* $(-4a^{n-2}b^{2n}) \cdot (-3a^3b^{5-n})=?$
h) $(a^{n+1}-2a^n)(a^2+3a)=?$

i) $(a^{2n+1} - 3a^{2n} - a^{2n-1})(a^{n+1} - 2a^n) = ?$

j) $(x^n - 3x^{n-1} + 3x^{n-2})(x^{n+1} - 2x^n - x^{n-1}) = ?$

k) $(a^2 b^{n-2} - a b^{n-1})(a^n b^2 + a^{n-1} b^3) = ?$

4. Przedstawić w następujących przykładach potęgi, mające za wykładniki sumy, w postaci iloczynów potęg i zredukować otrzymane wyrazy:

a) $2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n = ?$ *b)* $3^{2n+2} - 2 \,.\, 3^{2n+1} + 4 \,.\, 3^{2n} = ?$

c) $5 \,.\, 2^{n+3} - 4 \,.\, 2^{n+2} - 2^{n+1} + 3 \,.\, 2^n = ?$

d) $(3 \,.\, 2^{n+1} - 2^n)(2 \,.\, 3^{n+2} - 4 \,.\, 3^{n+1}) = ?$

e) $(3 \,.\, 5^{2n+2} - 2 \,.\, 5^{2n+1} - 5^{2n})(3 \,.\, 2^{n+3} - 2^{n+2} - 2^{n+1}) = ?$

5. Wykonać działania:

a) $(a^2)^3 = ?$ *b)* $(a^3)^4 = ?$ *c)* $(a^{n-1})^{n+1} = ?$

d) $(a^{n-2})^{2n} = ?$ *e)* $(-2a^n)^2 = ?$ *f)* $(+3a^{n+1})^3 = ?$

g) $(a^{2n} b^{2n-1})^2 = ?$ *h)* $(a^n b^{2n+1})^3 = ?$ *i)* $(a^{n+1})^n \,.\, (a^{n-1})^n = ?$

j) $(a^{n-1} b^{2n-1})^{n+1} \,.\, (a^n b^{2n-1})^{n+1} = ?$

6. Wykonać działania:

a) $2^{2n} \,.\, 3^n = ?$ *b)* $3^{2n} \,.\, 5^n = ?$ *c)* $4^{2n} + 3 \,.\, 2^{4n} - 2 \,.\, 16^n = ?$

d) $4^{n+1} - 2^{2n} + 2^{2n+1} = ?$ *e)* $2 \,.\, 3^{2n+1} - 4 \,.\, 3^{2n} + 9^n = ?$

[Wykonać najpierw potęgowania iloczynami, a potem dalsze działania, np.: $2^{2n} \,.\, 3^n = 4^n 3^n = 12^n$].

7. Wykonać:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = ?$ *b)* $\left(+\frac{2}{3}a\right)^3 = ?$ *c)* $\left(\frac{2a^2}{3b^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3b^2}{2a}\right)^3 = ?$

d) $\left(\frac{2}{3a^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3a}\right)^2 = ?$ *e)* $\left(\frac{a^{n-1}}{b^n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{a^n}{b^{n+1}}\right)^n = ?$

f) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b^2}\right)^{n+1} = ?$ *g)* $\left(\frac{a^{n-1}}{x^n}\right)^2 \left(\frac{a^2}{x^2}\right)^n = ?$

8. Korzystając z twierdzenia: $a^n : b^n = (a:b)^n$, wykonać działania:

a) $\frac{520^3}{260^3} = ?$ *b)* $\frac{18^2}{36^2} = ?$ *c)* $\left(\frac{20}{49}\right)^3 : \left(\frac{10}{49}\right)^3 = ?$

d) $\left(\frac{a^2 - 3b}{a + b}\right)^2 : (a^2 - 3b)^2 = ?$ *e)* $(x^2 - 1)^3 : (x + 1)^3 = ?$

f) $(a^3)^{2n-1} : (a^2)^{2n-1} = ?$ *g)* $(ab^2)^{n+1} : (ab)^{n+1} = ?$

9. Wykonać działania:

a) $a^{2n} : a^n = ?$ *b)* $a^{n+2} : a^n = ?$ *c)* $a^{n+2} : a^{n+1} = ?$

d) $a^{n+1} : a^{n-1} = ?$ *e)* $a^{2n} : a^{n+1} = ?$ *f)* $a^{2n-1} : a^{n+1} = ?$

g) $a^{2n+2} : a^{2n-1} = ?$ *h)* $a^n : a^{n-1} = ?$ *i)* $a^{n+1} : a^{5-n} = ?$

j) $(4x^{n+2} - 6x^{n+1} + 2x^n) : 2x^{n-1} = ?$

k) $(a^{n+1} - 2a^n + a^{n-1}) : a^{n-1} = ?$

10. Wyłączyć przed nawias najniższą potęgę z następujących wielomianów:

a) $2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 2^n = ?$ *b)* $2 \cdot 3^{n+1} - 4 \cdot 3^n + 3^{n-1} = ?$

c) $2 \cdot 5^n - 4 \cdot 5^{n-1} - 5^{n-3} = ?$ *d)* $5 \cdot 2^{2n} - 3 \cdot 2^{2n-1} + 3 \cdot 2^{2n-2} = ?$

11. Przedstawić w zadaniu 10 potęgi, mające w wykładniku sumę lub różnicę, jako iloczyny, względnie ilorazy potęg i zredukować podobne jednomiany. Porównać wyniki zadania 10 i 11!

12. Wykonać działania:

a) $(a^2 - 2a + 3)^2 = ?$ *b)* $(2x^2 - 3x - 1)^2 = ?$

c) $(-a^2 - 2a + 1)^2 = ?$ *d)* $(a^3 + 2a^2 + a - 3)^2 = ?$

e) $(a^3 - 3a^2 + 3a - 1)^2 = ?$

13. Obliczyć:

a) 85^2, *b)* 97^2, *c)* 348^2, *d)* 759^2, *e)* 803^2,

f) 701^2, *g)* 2374^2, *h)* 9804^2, *i)* 9007^2, *j)* 38452^2,

k) $4{\cdot}8^2$, *l)* $3{\cdot}07^2$, *m)* $35{\cdot}08^2$, *n)* $0{\cdot}584^2$, *o)* $0{\cdot}07115^2$.

14. Obliczyć:

a) $\sqrt{7569}$, *b)* $\sqrt{8281}$, *c)* $\sqrt{24649}$, *d)* $\sqrt{77841}$,

e) $\sqrt{790321}$, *f)* $\sqrt{259081}$, *g)* $\sqrt{28174864}$, *h)* $\sqrt{6594624}$,

i) $\sqrt{1162673604}$, *j)* $\sqrt{56{\cdot}25}$, *k)* $\sqrt{0{\cdot}002601}$, *l)* $\sqrt{0{\cdot}516961}$,

m) $\sqrt{3340{\cdot}84}$. *n)* $\sqrt{556{\cdot}0164}$, *o)* $\sqrt{177156{\cdot}81}$.

15. Wykazać, że *a)* $\sqrt[3]{5}$, *b)* $\sqrt{\frac{2}{3}}$ nie może być ułamkiem.

16. Metodą, opisaną w § 7, znaleźć ciągi liczb, wyznaczające:

a) $\sqrt{17}$, *b)* $\sqrt{52}$, *c)* $\sqrt[3]{11}$, *d)* $\sqrt[3]{75}$, *e)* $\sqrt[3]{31}$.

17. Metodą, podaną w § 9, obliczyć:

a) z dokładnością do $0{\cdot}001$: *α)* $\sqrt{3}$, *β)* $\sqrt{5}$, *γ)* $\sqrt{8}$, *δ)* $\sqrt{4{\cdot}5}$, *ε)* $\sqrt{1{\cdot}25}$, *ζ)* $\sqrt{0{\cdot}8}$;

b) z dokładnością do 0·01: *α)* $\sqrt{100{\cdot}5}$, *β)* $\sqrt{5000}$, *γ)* $\sqrt{257{\cdot}5}$, *δ)* $\sqrt{734{\cdot}3}$, *ε)* $\sqrt{1000}$, *ζ)* $\sqrt{483{\cdot}523}$.

18. Porównać:

a) $2\frac{43}{67}$ z $\sqrt{7}$, *b)* $6\frac{1}{4}$ z $\sqrt{39}$, *c)* $\sqrt[3]{11}$ z $\sqrt{5}$,

d) $8\frac{19}{21}$ z $\sqrt{79}$, *e)* $\sqrt[3]{75}$ z $\sqrt{18}$, *f)* $\sqrt[3]{31}$ z $\sqrt{9{\cdot}87}$.

[Przy zadaniach *c)*, *e)* i *f)* korzystać z wyników zadania 16].

19. Przedstaw zapomocą dwóch ciągów liczb:

a) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ i $\sqrt{7}+\sqrt{5}$;

b) $(5+\sqrt{3})+\sqrt{2}$ i $5+(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

c) $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{7}$ i $\sqrt{5}-(\sqrt{7}-\sqrt{3})$;

d) $\sqrt{10}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ i $\sqrt{10}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Porównaj wyniki!

20. Oblicz z dokładnością do 0·01 pierwiastki podane w następujących zadaniach, wykonaj naznaczone działania i oblicz kres górny wyniku:

a) $\sqrt{30}+\sqrt{18}+\sqrt{23}=?$ *b)* $\sqrt{7{\cdot}4}+\sqrt{3{\cdot}2}+\sqrt{0{\cdot}5}=?$

c) $\sqrt{8}-\sqrt{5}=?$ *d)* $\sqrt{12}-\sqrt{3}-\sqrt{0{\cdot}75}=?$

e) $\sqrt{137}-\sqrt{15}+\sqrt{225}-\sqrt{120}=?$ *f)* $\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{125}=?$

21. Wyjaśnij określenie mnożenia liczb niewymiernych na następujących przykładach:

a) $2\sqrt{3}$; *b)* $0{\cdot}5\sqrt{10}$; *c)* $\frac{2}{3}\sqrt{7}$; *d)* $\sqrt{5}\,.\,\sqrt{2}$; *e)* $\sqrt{8}\,.\,\sqrt{2}$;

f) $\sqrt[3]{11}\,.\,\sqrt{2}$.

22. Przedstaw zapomocą dwóch ciągów liczb:

a) $\sqrt{5}\,.\,\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{5}$; *b)* $3\sqrt{3}\,.\,\sqrt{5}$ i $3\,.\,(\sqrt{3}\,.\,\sqrt{5})$;

c) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{5}\,.\,\sqrt{7}$ i $\sqrt{2}(\sqrt{5}\,.\,\sqrt{7})$; *d)* $(2+\sqrt{3})\,.\,5$ i $10+5\sqrt{3}$;

e) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})\sqrt{3}$ i $\sqrt{5}\,.\,\sqrt{3}-\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}$; *f)* $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ i $7\sqrt{3}$;

g) $7\sqrt{2}-3\sqrt{2}$ i $4\sqrt{2}$; *h)* $\sqrt{8}\,.\,\sqrt{2}$ i $\sqrt{16}$.

Porównaj wyniki.

23. Sprawdzić następujące równości, obliczając pierwiastki z dokładnością do 0·001 i obliczając górne kresy wyników działań:

a) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{7}=\sqrt{21}$; *b)* $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$; *c)* $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$;

d) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{5}=\sqrt{15}$; *e)* $\sqrt{18}\,.\,\sqrt{20}=6\sqrt{10}$; *f)* $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}\,.\,\sqrt{5}=\sqrt{30}$.

24. Zredukować:

a) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}=?$ b) $3\sqrt{8}-2\sqrt{18}+\sqrt{50}=?$

c) $2\sqrt{45}-\sqrt{125}+3\sqrt{20}-\sqrt{80}=?$ d) $2\sqrt{300}-5\sqrt{108}+3\sqrt{27}=?$

e) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{54}=?$ f) $\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}=?$

g) $2\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{375}+3\sqrt[3]{24}=?$ h) $\sqrt[3]{750}-2\sqrt[3]{48}+3\sqrt[3]{384}=?$

25. Wyłączyć przed pierwiastek możliwie najwyższe potęgi:

a) $\sqrt{a^7}=?$ b) $\sqrt{2a^3}=?$ c) $\sqrt[3]{16a^4b^5}=?$ d) $\sqrt{8a^4b^3}=?$

e) $\sqrt[3]{2a^3}=?$ f) $\sqrt[4]{x^5y^{12}}=?$ g) $\sqrt{18a^2bc^3}=?$ h) $\sqrt[n]{a^{2n}b^{3n+1}}=?$

i) $\sqrt[2n]{a^{2n+1}b^{3n}}=?$

26. Wykonać następujące działania, a w wyniku wyłączyć przed pierwiastki możliwie najwyższe potęgi:

a) $\sqrt{ab}\,.\,\sqrt{ab}=?$ b) $\sqrt{ab^3}\,.\,\sqrt{ab^2}=?$ c) $\sqrt{2}\sqrt{6}=?$

d) $\sqrt{2}\sqrt{8}\sqrt{6}=?$ e) $\sqrt[3]{4}\,.\,\sqrt[3]{6}=?$ f) $\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[3]{18}\,.\,\sqrt[3]{6}=?$

g) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})=?$ h) $(3-\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=?$

i) $(5+\sqrt{6}-\sqrt{2})(3+\sqrt{3}-\sqrt{2})=?$

j) $(\sqrt{5}+2\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}-3\sqrt{2}+2)=?$

k) $(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})=?$ l) $(3\sqrt{5}-\sqrt{3})(3\sqrt{5}+\sqrt{3})=?$

m) $(5+\sqrt{5}-\sqrt{2})(5-\sqrt{5}+\sqrt{2})=?$

n) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=?$ o) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2=?$ p) $(3\sqrt{2}+4)^2=?$

q) $(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=?$ r) $(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=?$

s) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=?$ t) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2=?$

u) $\left[\sqrt{\frac{2a+\sqrt{4a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{2a-\sqrt{4a^2-b}}{2}}\right]^2=?$

v) $\left(\sqrt{(a+1)-\sqrt{a-1}}-\sqrt{(a+1)+\sqrt{a-1}}\right)^2=?$

27. Włączyć pod pierwiastki liczby, stojące przed pierwiastkami:

a) $3\sqrt{2}=?$ b) $\frac{2}{3}\sqrt{4\cdot5}=?$ c) $\frac{2}{5}\sqrt{200}=?$

d) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^5}{a}}=?$ e) $\frac{1}{b}\sqrt[4]{b^4-a^4}=?$ f) $\frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}=?$

g) $a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}=?$ h) $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}=?$ i) $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=?$

j) $(a-b)\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a-b)^2}} = ?$ *k)* $(a-1)\sqrt[3]{\dfrac{a+1}{a^2-2a+1}} = ?$

28. Wykonać następujące działania, a w wyniku wyłączyć możliwie najwyższe potęgi przed pierwiastki:

a) $(\sqrt[3]{a^2})^2 = ?$ *b)* $(\sqrt[4]{a^3})^5 = ?$ *c)* $(\sqrt[3]{a^2b})^2 = ?$ *d)* $(\sqrt{a^3b})^3 = ?$

e) $(\sqrt[3]{a+b})^2 = ?$ *f)* $(\sqrt{x-y})^3 = ?$ *g)* $(\sqrt{x-1})^3 . (\sqrt{x+1})^3 = ?$

29. Wykonać pierwiastkowania:

a) $\sqrt[3]{8^2} = ?$ *b)* $\sqrt{36^3} = ?$ *c)* $\sqrt[3]{(8a^3b^3)^2} = ?$ *d)* $\sqrt{(a^2b^4)^3} = ?$

e) $\sqrt{(a^2-4a+4)^3} = ?$ *f)* $\sqrt{(x^4+6x^2+9)^3} = ?$

g) $\sqrt[3]{(a^3-3a^2+3a-1)^2} = ?$

30. Wykonać dzielenia:

a) $\sqrt{24} : \sqrt{6} = ?$ *b)* $\sqrt{6} : \sqrt{3} = ?$ *c)* $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} = ?$

d) $\sqrt[4]{18} : \sqrt[4]{6} = ?$ *e)* $\sqrt{a^3} : \sqrt{a} = ?$ *f)* $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[3]{a} = ?$

g) $\sqrt{a^5} : \sqrt{a^3} = ?$ *h)* $\sqrt{2} : \sqrt{5} = ?$ *i)* $\sqrt{2a^3b} : \sqrt{2ab} = ?$

j) $\sqrt{x^2-1} : \sqrt{x+1} = ?$ *k)* $\sqrt[3]{2a^3-2ab^2} : \sqrt[3]{a^2-ab} = ?$

31. Wykonać działania:

a) $\sqrt{\tfrac{1}{4}} = ?$ *b)* $\sqrt{0{\cdot}49} = ?$ *c)* $\sqrt{\tfrac{9}{16}} = ?$ *d)* $\sqrt[3]{0{\cdot}125} = ?$

e) $\sqrt[3]{0{\cdot}008} = ?$ *f)* $\sqrt{\dfrac{4a^2}{9}} = ?$ *g)* $\sqrt[3]{\dfrac{a^6}{8b^3}} = ?$ *h)* $\sqrt{0{\cdot}25a^2b^4} = ?$

32. Wyłączyć, co można, przed pierwiastki:

a) $\sqrt{\dfrac{8a^3}{9}} = ?$ *b)* $\sqrt{\dfrac{3r^3}{16}} = ?$ *c)* $\sqrt{\dfrac{3(a-b)^3}{4}} = ?$

d) $\sqrt{\dfrac{2r^3\pi^2}{9}} = ?$ *e)* $\sqrt[3]{\dfrac{8a^3}{27}} = ?$ *f)* $\sqrt[3]{\dfrac{54a^8}{8}} = ?$

33. Przekształcić następujące wyrażenia tak, by zawierały tylko jeden pierwiastek:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{a^5}} = ?$ *b)* $\sqrt[n]{\sqrt{a}} = ?$ *c)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^7}} = ?$ *d)* $\sqrt{\sqrt[3]{4}} = ?$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}} = ?$ *f)* $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = ?$ *g)* $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = ?$ *h)* $\sqrt{3\sqrt{3}} = ?$

i) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = ?$ *j)* $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3\sqrt{2}}} = ?$ *k)* $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}}} = ?$ *l)* $\sqrt[3]{\dfrac{a^5}{\sqrt{a}}} = ?$

34) Wykonać następujące działania i obliczyć górny kres błędu wyniku:

a) $\sqrt{3{\cdot}14_{(0{\cdot}002)}} = ?$ *b)* $\sqrt{31{\cdot}85_{(0{\cdot}01)}} = ?$ *c)* $\sqrt{27{\cdot}3_{(0{\cdot}1)}} = ?$

d) $\sqrt{83200_{(100)}} = ?$ *e)* $\sqrt{5{\cdot}3_{(0{\cdot}1)}} \cdot \sqrt{8{\cdot}2_{(0{\cdot}1)}} = ?$

f) $\sqrt{17{\cdot}3_{(0{\cdot}1)} \cdot 4{\cdot}25_{(0{\cdot}01)}} = ?$ *g)* $2\sqrt{3{\cdot}75_{(0{\cdot}01)}} + \sqrt{12{\cdot}4_{(0{\cdot}1)}} = ?$

h) $3{\cdot}5_{(0{\cdot}1)}\sqrt{7{\cdot}8_{(0{\cdot}1)}} - 8{\cdot}4_{(0{\cdot}1)}\sqrt{0{\cdot}30_{(0{\cdot}01)}} = ?$

i) $7 : \sqrt{31{\cdot}8_{(0{\cdot}1)}} = ?$ *j)* $\sqrt{43{\cdot}51_{(0{\cdot}01)}} : \sqrt{2{\cdot}81_{(0{\cdot}01)}} = ?$

35. Obliczyć z dokładnością do 0·01:

a) $\sqrt[4]{2} = ?$ *b)* $\sqrt[4]{100} = ?$ *c)* $\sqrt[4]{20736} = ?$ *d)* $\sqrt[8]{625} = ?$

36. Przedstawić w prostszej postaci:

a) $\sqrt[4]{a^6} = ?$ *b)* $\sqrt[9]{a^6} = ?$ *c)* $\sqrt[3]{a^6} = ?$ *d)* $\sqrt{a^6} = ?$

e) $\sqrt[2n]{a^{3n}} = ?$ *f)* $\sqrt[2n-2]{a^{n-1}} = ?$ *g)* $\sqrt{a^{2n}} = ?$ *h)* $\sqrt[n-1]{a^{2n-2}} = ?$

i) $\sqrt[n^2+n]{a^{2n+2}} = ?$ *j)* $\sqrt[2n]{a^{4m}} = ?$ *k)* $\sqrt[n^2-1]{a^{2n-2}} = ?$

37. Wykonać działania:

a) $(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3 = ?$ *b)* $(\sqrt{4} - \sqrt[3]{2})^3 = ?$ *c)* $(2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})^3 = ?$

d) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^3 = ?$ *e)* $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 = ?$ *f)* $(3\sqrt{2} - 2)^3 = ?$

g) $(\sqrt[3]{(a-x)} - \sqrt[3]{(a-x)^2})^3 = ?$

38. Wykonać działania:

a) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a} = ?$ *b)* $\sqrt[4]{a^3}\sqrt[6]{a^5} = ?$ *c)* $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a} = ?$ *d)* $\sqrt[6]{a^5} : \sqrt[9]{a^2} = ?$

e) $\sqrt[n-1]{\dfrac{a}{\sqrt[n]{a}}} = ?$ *f)* $\sqrt[n-2]{\dfrac{a}{\sqrt[n-1]{a}}} = ?$ *g)* $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}} = ?$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[3]{a^5}} = ?$ *i)* $a\sqrt{\dfrac{b}{a}}\sqrt[2]{\dfrac{a}{b}} = ?$ *j)* $\dfrac{a^2}{b}\sqrt[4]{\dfrac{b^3}{a^3}}\sqrt{\dfrac{b}{a}} = ?$

k) $(2x\sqrt[2]{x} + 3\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{y^2}) \cdot (x\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{y^2}) = ?$

l) $(x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x} - 1) \cdot (x - 2\sqrt{x} - 3) = ?$

m) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{\sqrt{x}}} : \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}} = ?$ *n)* $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x}}} : \sqrt{\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}} = ?$

39. Obliczyć (w przybliżeniu) wartości wyrażeń:

$$x = \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}\right)} \text{ i } y = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}}$$

jeżeli: *a)* $a = 1$, *b)* $a = \sqrt{2}$, *c)* $a = 2 - \sqrt{2}$, *d)* $a = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

40. Zamienić na ułamki o wymiernych mianownikach:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$; *b)* $\dfrac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}$; *c)* $\dfrac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$; *d)* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

e) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$; *f)* $\dfrac{6}{\sqrt[3]{4}}$; *g)* $\dfrac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$; *h)* $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$;

i) $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$; *j)* $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$; *k)* $\dfrac{4}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$; *l)* $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$;

m) $\dfrac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$; *n)* $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$; *o)* $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}$; *p)* $\dfrac{2 + \sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}}$;

41. Przedstawić w prostszej postaci wyrażenia:

a) $\dfrac{\sqrt{a + b} - \sqrt{a - b}}{\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}}$; *b)* $\dfrac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$; *c)* $\dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$;

d) $\dfrac{x + y + 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$; *e)* $\dfrac{2x}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}$;

f) $\dfrac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a - \sqrt{a^2 - 1}} - \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}$; *g)* $\sqrt{\dfrac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a + b - 2\sqrt{ab}}}$;

h) $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a + b}}$; *i)* $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}}$;

j) $\dfrac{a\sqrt{1 - a^2} + b\sqrt{1 - b^2}}{a\sqrt{1 - b^2} + b\sqrt{1 - a^2}}$.

ROZDZIAŁ VII.

RÓWNANIA STOPNIA DRUGIEGO Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ.

§ 1. Postać normalna równania stopnia drugiego.

Równanie, które po uporządkowaniu ma postać: $ax^2 + bx + c = 0$, nazywamy *równaniem stopnia drugiego* lub *równaniem kwadratowem*. Zawiera ono trzy wyrazy, a mianowicie: kwadrat niewiadomej z jakimś współczynnikiem a, niewiadomą w stopniu pierwszym z jakimś współczynnikiem b i wyraz c, wolny od niewiadomej. Przyjmujemy, że współczynnik a przy x^2 ma wartość różną od zera (w przeciwnym razie dane równanie byłoby równaniem stopnia pierwszego). Dzieląc obie strony równania przez a, otrzymamy:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, a po podstawieniu: $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Tę postać równania kwadratowego nazywać będziemy *postacią normalną*. Do tej postaci można sprowadzić każde równanie kwadratowe, jeżeli $a \neq 0$. Dlatego będziemy się zajmowali narazie tylko rozwiązaniem równania kwadratowego w postaci normalnej.

§ 2. Rozwiązanie równania $x^2 + q = 0$.

Przyjmijmy najpierw, że równanie stopnia drugiego nie zawiera wyrazu z niewiadomą w pierwszej potędze, czyli że w postaci normalnej równania $p = 0$. Przenosząc wtedy kwadrat niewiadomej na lewą stronę, a wyraz wolny od niewiadomej na prawą, otrzymamy równanie, mające postać: $x^2 = m$.

W rozważaniach w rozdz. VI upewniliśmy się, że równanie $x^2 = m$ ma dla każdej dodatniej wartości m w zakresie liczb dodatnich jedno rozwiązanie $x = \sqrt{m}$ i nauczyliśmy się tę wartość obliczać, bądź całkiem dokładnie, bądź z wszelką żądaną dokładnością. Z rozważań w § 4 rozdz. VI wynika jednak, że równanie takie ma jeszcze jedno rozwiązanie. Zbadajmy tę rzecz ściśle.

1. Jeżeli $m > 0$, to równanie $x^2 = m$ można przekształcić w następujący sposób:

Napiszmy równanie w postaci: $x^2 - m = 0$.

Podstawmy $m = (\sqrt{m})^2$; otrzymamy: $x^2 - (\sqrt{m})^2 = 0$.

Lewą stronę tego równania można jako różnicę kwadratów rozłożyć na dwa czynniki. Równanie będzie miało postać:

$$(x - \sqrt{m})\ (x + \sqrt{m}) = 0.$$

Lewa strona ostatniego równania jest iloczynem dwóch czynników. Iloczyn taki jest zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli jeden czynnik jego jest zerem.

Pierwszy czynnik: $(x - \sqrt{m}) = 0$, jeżeli $x = \sqrt{m}$;

drugi czynnik: $(x + \sqrt{m}) = 0$, jeżeli $x = -\sqrt{m}$.

Równanie $x^2 = m$ ma dla każdej dodatniej wartości m dwa i tylko dwa pierwiastki: $x_1 = \sqrt{m}$ i $x_2 = -\sqrt{m}$.

2. Jeżeli $m = 0$, to równanie $x^2 = 0$ ma tylko jeden pierwiastek $x = 0$, bo $x^2 = x \,.\, x$ może być zerem tylko wtedy, gdy $x = 0$.

3. Jeżeli $m < 0$, to równanie $x^2 = m$ nie ma rozwiązania, bo każda liczba, podniesiona do kwadratu, daje na wynik liczbę dodatnią.

Również i z badania postaci $x^2 - m = 0$ otrzymamy taki sam wynik. Zważywszy bowiem, że $m = -|m|$, otrzymamy: $x^2 + |m| = 0$. Równanie to zawiera sprzeczność: Niemożliwe jest bowiem, aby suma dwu liczb, z których pierwsza nie jest ujemna (x^2, jako kwadrat jakiejś liczby, ma albo wartość dodatnią, albo jest zerem), a druga jest dodatnia, równała się zeru.

§ 3. Rozwiązanie równania $x^2 + px + q = 0$.

Aby rozwiązać równanie $x^2 + px + q = 0$, będziemy się starali przedstawić lewą jego stronę jako różnicę lub sumę dwóch kwadratów.

Wykonajmy to najpierw na kilku przykładach:

Przykład 1. Rozwiązać równanie: $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Uzupełnijmy pierwsze dwa wyrazy tak, aby otrzymać kwadrat dwumianu. Dodajemy zatem do x^2-6x liczbę 9, aby zaś nie zmienić wartości lewej strony, odejmujemy równocześnie 9. Otrzymamy:

$$x^2-6x+9-9+5=0, \text{ czyli}$$
$$(x-3)^2-4=0.$$

Lewą stronę, jako różnicę kwadratów, rozkładamy na czynniki:

$$(x-3-2)\,.\,(x-3+2)=0, \text{ czyli}$$
$$(x-5)\,(x-1)=0.$$

Iloczyn, znajdujący się po lewej stronie równania, jest tylko wtedy zerem, jeżeli albo:

$$x-5=0, \text{ albo } x-1=0.$$

Stąd otrzymujemy:

$$x_1=5,\ x_2=1,$$

jako pierwiastki ostatniego, a więc i danego równania. Sprawdź!

Przykład 2. Rozwiązać równanie: $x^2+4x+4=0$.

Rozumując, jak w poprzednim przykładzie, otrzymamy:

$$(x+2)^2=0,$$
$$(x+2)\,(x+2)=0,$$
$$x_1=x_2=-2. \text{ Sprawdź!}$$

Przykład 3. Rozwiązać równanie: $x^2+3x-4=0$.

Znajdziemy, jak w poprzednich przykładach:

$$(x^2+3x+\tfrac{9}{4})-\tfrac{9}{4}-4=0,$$
$$(x+\tfrac{3}{2})^2-\tfrac{25}{4}=0,$$
$$(x+\tfrac{3}{2}+\tfrac{5}{2})\,(x+\tfrac{3}{2}-\tfrac{5}{2})=0,$$
$$(x+4)\,(x-1)=0.$$
$$x_1=-4,\ x_2=+1. \text{ Sprawdź!}$$

Przykład 4. Rozwiązać równanie: $x^2-4x+6=0$.

Postępujemy, jak w poprzednich przykładach:

$$(x^2-4x+4)-4+6=0,$$
$$(x-2)^2+2=0.$$

Wyraz $(x-2)^2 \geqq 0$ dla każdej wartości x (dlaczego?); zatem $(x-2)^2+2>0$ dla każdej wartości x. Dane równanie nie ma więc pierwiastka.

Rozwiążmy zadanie ogólnie:

Równanie $x^2+px+q=0$ przekształcamy w następujący sposób:

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=0,$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}=0, \text{ czyli}$$

$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\Delta=0$, jeżeli oznaczymy $\Delta=p^2-4q$.

Rozróżniamy następujące trzy przypadki:

1. Jeżeli $\Delta>0$, wtedy istnieje liczba $\sqrt{\Delta}$, a równanie można przekształcić w następujący sposób:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^2=0,$$

$$\left(x+\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)=0.$$

Lewa strona ostatniego równania, jako iloczyn dwóch czynników, jest zerem wtedy, jeżeli:

albo $x+\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}=0$, albo $x+\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}=0$.

Z równań tych otrzymujemy pierwiastki:

$$x_1=\tfrac{1}{2}(-p+\sqrt{\Delta}) \text{ i } x_2=\tfrac{1}{2}(-p-\sqrt{\Delta}).$$

2. Jeżeli $\Delta=0$, to równanie przyjmuje postać:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0, \text{ czyli}$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}\right)=0.$$

Stąd otrzymamy pierwiastki x_1 i x_2 danego równania:

$$x_1=x_2=-\tfrac{1}{2}p.$$

3. Jeżeli $\Delta<0$, czyli $\Delta=-|\Delta|$, to równanie ma postać:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\tfrac{1}{4}|\Delta|=0.$$

Lewa strona jest sumą dwu wyrażeń: pierwsze, jako kwadrat jakiejś liczby, ma dla każdej wartości x wartość dodatnią, lub też jest zerem; drugie jest liczbą dodatnią niezależną od x. Lewa strona ma więc dla jakiejkolwiek wartości x wartość większą od zera. Niema zatem takiej liczby, którąby, podstawiona za x, sprawdzała równanie. Równanie nie ma w tym przypadku pierwiastków, jest więc sprzeczne.

Wyrażenie $\Delta=p^2-4q$, od którego rozwiązalność równania zależy, nazywamy *wyróżnikiem* równania.

Zbierając otrzymane wyniki, powiemy:

Aby rozwiązać równanie stopnia drugiego, mające postać normalną $x^2 + px + q = 0$, *obliczamy wyróżnik* $\Delta = p^2 - 4q$. *Jeżeli wyróżnik jest dodatni* ($\Delta > 0$), *to równanie ma dwa różne pierwiastki:* $x_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{\Delta})$ i $x_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{\Delta})$; *jeżeli wyróżnik jest zerem* ($\Delta = 0$), *to równanie ma dwa równe pierwiastki:* $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}p$; *jeżeli wyróżnik jest ujemny* ($\Delta < 0$), *to równanie nie ma pierwiastka.*

Jeżeli $\Delta > 0$, piszemy często wzór na oba pierwiastki razem w postaci $x = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{\Delta})$. Wzór ten można zastosować również w przypadku $\Delta = 0$. Ponieważ oba pierwiastki mają wtedy jednakową wartość, mówimy też często, że równanie ma w tym przypadku jeden pierwiastek, lub jeden pierwiastek podwójny. Znaczenie tego powiedzenia wyjaśnimy później.

Odtąd rozwiązywać będziemy równania kwadratowe bezpośrednio zapomocą powyższych wzorów.

Przykład 5. Rozwiązać równanie: $x^2 + 3x - 28 = 0$.

Obliczamy: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-28) = 121$.

Zatem: $x = \frac{1}{2}(-3 \pm 11)$,

$x_1 = 4$, $x_2 = -7$. Sprawdź!

Przykład 6. Rozwiązać równanie: $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Obliczamy: $\Delta = 4 - 20 = -16$.

Ponieważ $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Przykład 7. Rozwiązać równanie:

$$4\frac{2x-1}{x-3} + 9\frac{x-3}{2x-1} + 15 = 0.$$

Za niewiadomą uważamy $a = \frac{2x-1}{x-3}$. Równanie przyjmuje postać:

$$4a + \frac{9}{a} + 15 = 0.$$

Porządkujemy: $4a^2 + 15a + 9 = 0$.

Sprowadzamy do postaci normalnej, dzieląc obie strony przez 4:

$$a^2 + \frac{15}{4}a + \frac{9}{4} = 0.$$

Ponieważ $\Delta = \frac{225}{16} - 9 = \frac{81}{16} > 0$, to równanie ma pierwiastki:

$$a = \frac{1}{2}\left(-\frac{15}{4} \pm \frac{9}{4}\right),$$

$$a_1 = -\frac{3}{4},\ a_2 = -3.$$

Różnym wartościom a odpowiadają różne wartości x, które oznaczymy x_1 i x_2 i obliczymy z równań:

$$\frac{2x_1-1}{x_1-3}=-\frac{3}{4};\qquad \frac{2x_2-1}{x_2-3}=-3.$$

Rozwiązując te równania, znajdziemy:

$$x_1=1\tfrac{2}{11},\ x_2=2.\ \text{(Sprawdź!)}$$

§ 4. Związki między współczynnikami równania kwadratowego a pierwiastkami.

W przypadku nieujemnego wyróżnika ma równanie: $x^2+px+q=0$ pierwiastki:

$$x_1=-\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}.$$
$$x_2=-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}.$$

Dodając stronami ostatnie dwie równości, znajdziemy:

$$x_1+x_2=-p;$$

mnożąc je zaś stronami, otrzymamy:

$$x_1\,.\,x_2=(-\tfrac{1}{2}p)^2-\tfrac{1}{4}\Delta=\tfrac{1}{4}p^2-\tfrac{1}{4}(p^2-4q)=q.$$

Tak znajdujemy związki: $p=-(x_1+x_2)$, $q=x_1\,.\,x_2$, czyli:

Współczynnik przy niewiadomej w stopniu pierwszym w normalnem równaniu stopnia drugiego równa się sumie obu pierwiastków równania ze znakiem przeciwnym; wyraz wolny od niewiadomej równa się iloczynowi obu pierwiastków.

Twierdzenie to pozwala rozwiązać zadanie odwrotne do zadania, rozwiązanego w § 3. Tam nauczyliśmy się wyznaczać pierwiastki równania, mającego postać normalną; na podstawie ostatniego twierdzenia potrafimy znaleźć równanie kwadratowe w postaci normalnej, mające dane pierwiastki.

Np.: Ułożyć równanie, mające pierwiastki: 3 i -5.

Równanie będzie miało postać: $x^2+px+q=0$. Wskutek ostatniego twierdzenia:

$$p=-[(+3)+(-5)]=+2;\quad q=(+3)\,.\,(-5)=-15.$$

Żądanem równaniem będzie: $x^2+2x-15=0$. Sprawdź przez rozwiązanie równania!

Postawmy zadanie ogólne:

Ułożyć równanie kwadratowe w postaci normalnej, mające pierwiastki x_1 i x_2.

Stosując ostatnie twierdzenie, znajdziemy:

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2 = 0.$$

Sprawdź, rozwiązując to równanie!

Przy rozwiązaniu tego równania zasługuje na uwagę wyróżnik:

$$\triangle = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - 4x_1 x_2 =$$
$$= x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2.$$

Wyróżnik równania kwadratowego w postaci normalnej równa się kwadratowi różnicy pierwiastków równania.

Powyższe rozwiązanie zagadnienia pozostawia jeszcze jedną wątpliwość. Współczynniki p i q obliczyliśmy, rozwiązując układ równań: $x_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{\triangle})$, $x_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{\triangle})$. Że znalezione wartości spełniają warunki zadania, stwierdziliśmy, rozwiązując równanie: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$. Należy zbadać, czy znalezione wartości p i q są jedynemi wartościami, które sprawdzają ów układ równań; czy niema jeszcze innego równania, któreby miało pierwiastki x_1 i x_2.

Odpowiedź na to pytanie dają nam następujące rozważania:

Przekształćmy lewą stronę równania $x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2 = 0$ w następujący sposób:

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2 = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 =$$
$$= x(x - x_1) - x_2(x - x_1) =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2).$$

Nazwawszy wyrażenia $x - x_1$ i $x - x_2$ *czynnikami pierwiastkowemi* równania, powiemy:

Lewa strona normalnego równania stopnia drugiego jest identycznie równa iloczynowi czynników pierwiastkowych.

Taki rozkład lewej strony równania normalnego na czynniki, mające postać $x - m$, może istnieć tylko jeden. Gdyby bowiem lewa strona dała się przedstawić w postaci $(x - \alpha)(x - \beta)$, to przyjmowałaby ona dla $x = \alpha$ i dla $x = \beta$ wartość 0; α i β byłyby pierwiastkami równania: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Musiałoby zatem być: $(\alpha - x_1)(\alpha - x_2) = 0$ i $(\beta - x_1)(\beta - x_2) = 0$. Ponieważ iloczyn dwóch czynników tylko wtedy może być zerem, jeżeli jeden z czynników jest zerem, to ostatnie równości mogą być prawdziwe tylko wtedy, jeżeli $\alpha = x_1$, $\beta = x_2$ (lub $\alpha = x_2$, $\beta = x_1$).

Równania kwadratowe w postaci normalnej, mające te same pierwiastki, są identyczne.

Zaznaczamy raz jeszcze, że wszystkie twierdzenia tego paragrafu wyprowadzono pod warunkiem: $\triangle \geqq 0$.

§ 5. Rozwiązanie równania $ax^2 + bx + c = 0$.

Każde równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ da się przedstawić w postaci normalnej (jeżeli $a \neq 0$) i rozwiązać na podstawie wzorów otrzymanych w § 3. W praktyce jednak jest często niewygodnie sprowadzać równanie do tej postaci, zwłaszcza gdy a jest liczbą wielocyfrową. Rozwiążemy dlatego niżej ogólne równanie kwadratowe i uzyskamy wzór wygodniejszy nieraz w rachunku.

Aby rozwiązać równanie: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$,

dzielimy je przez a: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Obliczamy wyróżnik: $\frac{b^2}{a^2} + 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$.

Ponieważ przy wyróżniku chodzi nam wyłącznie o znak, a ostatni ułamek ma taki znak, jak licznik $b^2 - 4ac$, będziemy wyróżnikiem nazywali nie cały ostatni ułamek, lecz tylko jego licznik. Oznaczymy więc: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastka.

Jeżeli $\Delta \geqq 0$, to $x = \frac{1}{2}\left[-\frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right]$, czyli:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Dla $a = 1$ przechodzą te wzory (a także wzór na Δ) w odpowiednie wzory dla postaci normalnej. Oczywiście teraz:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \quad (x_1 - x_2)^2 = \frac{\Delta}{a^2}.$$

P r z y k ł a d. Rozwiązać równanie: $27x^2 - 183x + 208 = 0$.

Obliczamy: $\Delta = 183^2 - 4 \cdot 27 \cdot 208 = 11025$; $\sqrt{\Delta} = 105$;

$$x = \frac{183 \pm 105}{54}.$$

$$x_1 = 5\tfrac{1}{3}, \quad x_2 = 1\tfrac{4}{9}.$$

§ 6. Zastosowanie do rozwiązywania zagadnień.

Podobnie, jak równania stopnia pierwszego, służą i równania stopnia drugiego do rozwiązywania wielu zagadnień wyrażonych słowami. Rozwiązanie takiego zagadnienia składa się: z ułożenia równania, rozwiązania równania i sprawdzenia, czy znalezione pierwiastki równania spełniają warunki zadania.

Układanie zadania w postać równania odbywa się zupełnie tak samo, jak przy zadaniach, rozwiązalnych zapomocą równań stopnia pierwszego; rozwiązywaniem równań zajmowaliśmy się w poprzednich paragrafach; pozostaje zatem do omówienia tylko badanie, czy rozwiązanie równania jest zarazem rozwiązaniem zadania.

Jeżeli równanie nie ma pierwiastków, to zadanie zawiera jakąś sprzeczność i nie ma również rozwiązania. Jeżeli równanie ma dwa pierwiastki, to zdarzyć się może, że albo oba pierwiastki spełniają warunki zadania, albo tylko jeden z nich, albo żaden. Ostatnie dwa wypadki zdarzają się wtedy, gdy równanie ma jeden pierwiastek ujemny, lub dwa pierwiastki ujemne, a warunki zadania są tego rodzaju, że dopuszczają tylko rozwiązania dodatnie.

Przykład 1. Znaleźć liczbę, której kwadrat jest o 5 mniejszy od jej czterokrotności.

Oznaczając szukaną liczbę literą x, znajdziemy:

$$x^2 = 4x - 5, \text{ czyli } x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Wyróżnik tego równania: $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$, równanie zatem nie ma pierwiastka. Niema takiej liczby, której kwadrat jest o 5 mniejszy od jej czterokrotności. Wyjaśnij ten wynik na kilku przykładach, podstawiając za x kolejno 1, 2, 3,...!

Przykład 2. Aby z pewnego kwadratu, ułożonego z płytek kwadratowych, otrzymać prostokąt tak samo wysoki, ale mający wzdłuż podstawy 8 płytek, trzeba było dodać 15 płytek. Ile płytek było ułożonych wzdłuż boku kwadratu?

Jeżeli x oznacza szukaną liczbę, to kwadrat zawiera x^2 płytek, a prostokąt $8x$ płytek. Z warunków zadania wynika:

$$x^2 + 15 = 8x, \text{ czyli } x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Równanie ma dwa pierwiastki: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$.

Oba pierwiastki dają rozwiązanie zadania. Wykaż to rysunkiem!

Przykład 3. Kupiec sprowadził za 144 zł pewną ilość *kg* towaru. Drugim razem sprowadził za taką samą sumę, taki sam towar. Ponieważ jednak towar podrożał na każdym kilogramie o 20 gr, to otrzymał drugim razem o 3 *kg* mniej, niż pierwszym razem. Ile *kg* towaru sprowadził kupiec pierwszym razem?

Kupiec sprowadził pierwszym razem x *kg*, płacąc za każdy *kg* $\frac{144}{x}$ zł; drugim razem sprowadził $(x - 3)$ *kg*, płacąc za każdy *kg*

$\frac{144}{x-3}$ zł. Różnica w cenie jednego *kg* wynosi: $\frac{144}{x-3}-\frac{144}{x}$. Według zadania wynosi ta sama różnica 0·2 zł; zatem:

$$\frac{144}{x-3}-\frac{144}{x}=0{\cdot}2.$$

Równanie ma pierwiastki: $x_1 = 48$, $x_2 = -45$.

Oba pierwiastki sprawdzają równanie; warunkom zadania odpowiada tylko pierwszy, bo, stosownie do znaczenia x, ujemne rozwiązanie nie ma żadnego znaczenia.

Sprawdzenie: Kupiec sprowadził pierwszym razem 48 *kg* towaru za 144 zł, za 1 *kg* płacił więc 3 zł. Drugim razem otrzymał za 144 zł 45 *kg*; 1 *kg* kosztował 3·2 zł, a więc rzeczywiście o 20 gr więcej.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać i sprawdzić równania:

a) $4x^2=361$; *b)* $2x^2=9$; *c)* $0{\cdot}16x^2=44{\cdot}89$;

d) $x^2=8427+\left(\frac{x}{2}\right)^2$; *e)* $x^2=16{\cdot}2-\left(\frac{x}{2}\right)^2$; *f)* $1+\frac{x-3}{5}=\frac{1}{x-2}$;

g) $x+3=1-\frac{x-10}{x-3}$; *h)* $\frac{2x+5}{2x-3}+2(x+1)=0$;

i) $\frac{2x+3}{x-1}-\frac{3x+8}{x+1}=4$; *j)* $(x+3)^3-31(x+1)=x(x^2-4)$;

k) $(x-3)^2-\frac{(x-2)^3}{x-1}=3$; *l)* $x^2=a^2-x^2$; *m)* $x^2=a^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2$;

n) $x^2=a^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2$; *o)* $\frac{3x^2}{4}=6a^2+x^2$;

p) $(a+x):x=x:2(a-x)$.

2. Rozwiązać i sprawdzić równania:

a) $x^2+7x-18=0$; *b)* $x^2-3\frac{1}{2}x-65=0$; *c)* $x^2+x-132=0$;

d) $x^2-15x+56=0$; *e)* $x^2+19x+84=0$; *f)* $x^2-6x=0$;

g) $x^2+x=0$; *h)* $2x^2-5x-12=0$; *i)* $6x^2-13x+6=0$;

j) $2x^2+x-21=0$; *k)* $10x^2+33x+20=0$.

3. Rozwiązać i sprawdzić równania:

a) $x+\frac{2}{3}=\frac{1}{3x}$; *b)* $\frac{x}{15}-\frac{5}{6x}=\frac{7}{12}$; *c)* $1:\left(x-\frac{6}{x}\right)=1$;

d) $10:\left(x+\frac{1}{x}\right)=3$; *e)* $\frac{5}{2x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{6}$;

f) $\frac{3}{2x-2}-\frac{5}{4x+4}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$; *g)* $\frac{x^2+3}{x^2-1}-\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+6}{2x-2}$;

h) $\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{2x+1}{3}-3=0$; *i)* $\left(\frac{2x-3}{x+2}\right)^2+3\cdot\frac{2x-3}{x+2}=108$;

j) $2(x+\frac{3}{4})[19-12(x+\frac{3}{4})]=15$; *k)* $5\cdot\frac{4x-1}{x+7}=\left(\frac{4x-1}{x+7}\right)^2+6$;

l) $\frac{x^2-3}{x^2+x-5}+\frac{x^2+x-5}{x^2-3}=2$; *m)* $\frac{5x-8}{2(x+4)}+\frac{2(x+4)}{5x-8}=2{\cdot}5$;

n) $\frac{4x}{5-x}+\frac{4(5-x)}{x}=17$; *o)* $\frac{3x-1}{2x+3}+\frac{4x+6}{3x-1}=3$.

4. Ułożyć równania, mające pierwiastki:

a) 3, 5; *b)* $-2, -1$; *c)* $-5, +4$; *d)* $+3, -3$; *e)* 0, 2; *f)* $-1, 0$; *g)* 3, 3; *h)* $-2, -2$; *i)* $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$; *j)* $-3+\sqrt{5}, -3-\sqrt{5}$; *k)* $m+\sqrt{n}, m-\sqrt{n}$.

5. Jakie wnioski wysnuć można z 1 twierdzenia w § 4 o znakach pierwiastków równania $x^2+px+q=0$, jeżeli wiemy, że $\triangle>0$, a nadto, że: *a)* $q>0$; *b)* $q<0$; *c)* $q=0$; *d)* $q>0$, $p<0$; *e)* $q>0$, $p>0$; *f)* $q=0$, $p<0$; *g)* $q=0$, $p>0$?

[Wykazać, że wobec $\triangle>0$ niemożliwe są przypadki: *a)* $p=q=0$; *b)* $q>0$, $p=0$].

6. Zbadać, dla jakich wartości *a* nie ma rozwiązania następujący układ równań:

a) $ax+y=1$, $x+ay=-1$; *b)* $(a-1)x+ay=3$, $(a+1)x-2ay=5$;

c) $ax+y=a$, $2x+(2a+3)y=8a^2$; *d)* $3x-ay=2a+3$, $(a-2)x-y=a$;

e) $ax-2y=1$, $(a+4)x-ay=3$; *f)* $ax+2y=3$, $(a-1)x+ay=2$.

Rozstrzygnąć, czy dla znalezionych wartości *a* jest układ równań nieoznaczony, czy sprzeczny.

7. Wykazać, że gdy $q\leqq 0$, to równanie $x^2+px+q=0$ ma zawsze pierwiastki.

8. Zbadać, dla jakich wartości *a* nie mają następujące równania pierwiastków:

a) $2x^2-x+a=0$; *b)* $3x^2+1{\cdot}6x-(a-3)=0$;

c) $x^2-(2a+1)x+a^2=0$; *d)* $3x^2+(6a-5)x+3(a-\frac{1}{3})^2=0$.

9. *a)* Znaleźć liczbę, której podwójny kwadrat jest od jej 15-krotności o 18 mniejszy.

b) Jaką liczbę należy odjąć od następnika stosunku 3 : 5, aby wykładnik stosunku o tyle się powiększył, o ile zmniejszy się następnik?

c) Rozłożyć 2331 na dwa czynniki, których suma wynosi 100.

d) Rozłożyć 342 na dwa czynniki, różniące się o 1.

e) Liczbę 25 przedstawić jako sumę kwadratów dwu liczb. różniących się o 1.

10. *a)* Z 224 płytek, mających kształt kwadratów o boku 1 *dm*, ma być ułożony taki prostokąt, aby podstawa jego była o 2 *dm* dłuższa niż wysokość. Ile *dm* ma mieć podstawa, a ile wysokość?

b) Z 221 płytek, mających kształt kwadratów o boku 1 *dm*, ułożono prostokąt o podstawie 13 *dm*, a wysokości 17 *dm*. Z tych samych 221 płytek ułożyć inny prostokąt, którego podstawa byłaby o tyle *dm* dłuższa od podstawy danego prostokąta, o ile krótsza będzie wysokość od wysokości danego prostokąta.

c) Z 345 płytek, mających kształt kwadratów o boku 1 *dm*, zbudować prostokąt o podstawie 8 *dm* i kwadrat tak wysoki, jak ten prostokąt.

d) Z płytek, mających kształt kwadratów o boku 1 *dm*, zbudowano prostokąt, którego podstawa wynosi 18 *dm*; po odjęciu od tego prostokąta kwadratu, o boku tak wielkim jak wysokość prostokąta, pozostał prostokąt złożony z 77 płytek. Obliczyć wysokość prostokąta.

11. *a)* Ile boków ma wielobok, jeżeli można w nim wykreślić 104 przekątnych?

b) Kąt umiarowego wielokąta zwiększa się o 12^0, jeżeli ilość boków zwiększymy o 1. Ile boków ma wielokąt?

12. *a)* Kupiłem dwie sztuki płótna, jedno o 40 gr na metrze droższe od drugiego. Za każdą sztukę zapłaciłem 24 zł. Ile kosztował 1 *m* każdego gatunku płótna, jeżeli droższego płótna było w sztuce o 10 *m* mniej, niż tańszego?

b) Kupiłem za 6 zł 24 gr paczkę zeszytów. Gdyby kupiec był zniżył cenę każdego zeszytu o 1 gr, byłbym otrzymał za tę samą sumę o 4 zeszyty więcej. Ile zeszytów było w paczce?

c) Klasa ma złożyć na kolonje wakacyjne 14·4 zł. Taką samą sumę zebrano już raz w klasie. Ponieważ jednak wtedy było w klasie o 4 uczniów więcej, płacił każdy o 5 gr mniej, niż teraz. Ilu uczniów jest w klasie?

d) Koszta wycieczki pewnej klasy wynosiły 120 zł. Ponieważ sześciu niezamożnych uczniów jechało kosztem wszystkich innych, to każdy z tych ostatnich musiał zapłacić o 1 zł więcej, niż przypadałoby na niego przy równym podziale kosztów. Ilu uczniów jechało?

e) Na wykonanie pewnej roboty przeznaczono 357 zł. Zamówiono stosowną ilość robotników, z których jednak siedmiu nie stanęło do pracy. Pozostali wykonali pracę sami i rozdzielili sumę przeznaczoną dla nieobecnych na równe części między siebie, wskutek czego każdy otrzymał o 1·7 zł więcej. Ile zł przeznaczono pierwotnie dla każdego robotnika?

13. *a)* Zbiornik można napełnić dwiema rurami; pierwszą o 2 godz. prędzej, niż drugą. Gdy otworzymy obie rury, to zbiornik napełnia się w 2 godz. 55 min. W ilu godzinach napełni się zbiornik, jeżeli woda dopływa tylko jedną rurą?

b) Dwóch uczniów podjęło się przepisania rękopisu za pewnem wynagrodzeniem. Pierwszy z nich, pisząc sam, potrzebowałby na przepisanie całego rękopisu o 9 godz. więcej czasu, niż drugi. Pracowali jednak razem i skończyli pracę w 20 godzinach. W ilu godzinach przepisałby rękopis każdy z nich, pracując sam? W jakim stosunku podzielą się zarobkiem?

14. *a)* Ze stacyj A i B, oddalonych od siebie o 34 *km*, wyjeżdżają równocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi i spotykają się po 24 min. Pierwszy pociąg potrzebuje do przebycia 1 *km* o 10 sek. więcej, niż drugi. Obliczyć prędkości obu pociągów!

[Prędkość pierwszego pociągu wynosi $x\,\frac{km}{min.}$; pociąg ten potrzebuje do przebycia jednego *km* $\frac{1}{x}$ min. Drugi pociąg przebywa 1 *km* w $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\right)$ min.; zatem prędkość jego wynosi: $1 : \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\right) = \frac{6x}{x+6}$ i t. d.].

b) Do przebycia drogi, wynoszącej 18 *km*, potrzebuje jeden podróżny o ½ godz. więcej czasu, niż drugi, który przebywa w 1 godz. o $\frac{1}{2}$ *km* więcej niż pierwszy. Ile godzin potrzebuje każdy z nich do przebycia tej drogi?

c) Ktoś przebył 18 *km* rowerem, a $2\frac{1}{2}$ *km* piechotą. Cała podróż trwała 2 godz. Z jaką prędkością szedł, a z jaką jechał, jeżeli prędkość jazdy rowerem jest o 7 $\frac{km}{\text{godz.}}$ większa, od prędkości podróży pieszej?

d) Statek przebywa na rzece drogę od A do B i z powrotem do A, wynoszącą razem 45 *km*, w 4 godz. Prędkość prądu rzeki wynosi 3 $\frac{km}{\text{godz.}}$. Jaka jest prędkość statku?

15. *a)* Ktoś złożył w kasie oszczędności 2500 *zł* na pewien procent. Po roku nie pobrał dochodu, lecz dodał go do kapitału tak, że w następnym roku procentował się kapitał wraz z dochodem z pierwszego roku. Przy końcu drugiego roku wyjął całą sumę i otrzymał 2704 zł. Jaki procent płaciła kasa?

b) Gospodarz posiał 5 *kg* żyta. Zebrany plon posiał po raz drugi i zebrał w następnym roku 720 *kg*. Ile *kg* żyta zyskiwał przy jednym zbiorze z 1 *kg* zasiewu, jeżeli przyjmiemy, że urodzaj był w obu latach jednakowy?

c) Z naczynia, zawierającego 100 *kg* wyskoku, odlano pewną ilość kilogramów i dolano taką samą ilość wody. Drugim razem odlano o 5 *kg* większą ilość tej mieszaniny i dolano znowu wody tak, aby w naczyniu było znowu 100 *kg*. Okazało się, że mieszanina zawierała wkońcu $1\frac{1}{2}$ razy więcej wyskoku niż wody. Ile *kg* wyskoku odlano pierwszym razem?

d) Z dwóch *kg* złota wzięto pewną ilość *g* i dodano taką samą ilość *g* miedzi. Drugim razem wzięto o 100 *g* więcej tej mieszaniny niż pierwszym razem złota i dodano taką samą ilość *g* miedzi. Ile złota wzięto pierwszym razem, jeżeli pozostały przy końcu stop był 680 próby?

16. Jubilerowi rozłamał się na dwie części diament, mający wartość 3600 *zł*, wskutek czego stracił jubiler 1000 zł. Jaka część odłamała się, jeżeli cena diamentu jest wprost proporcjonalna do kwadratu jego ciężaru?

[Odłamała się x-ta część całego diamentu. Ciężar całego diamentu wynosił q, ciężar jego części: $\frac{q}{x}$ i $q - \frac{q}{x} = q\left(1 - \frac{1}{x}\right)$; cena zaś wynosiła kolejno: 3600, $\frac{3600}{x^2}$, $3600\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$].

17. *a)* Do szybu kopalni opuszczono kamień, a równocześnie dano sygnał głosowy. Po jakim czasie dopędziłby spadający kamień falę głosową? W jakiej głębokości nastąpiłoby to?

[Prędkość głosu wynosi 333 $\frac{m}{\text{sek.}}$; wzór na drogę przy wolnem spadaniu: $s = \frac{g}{2} t^2$, gdzie $g = 9{\cdot}81 \frac{m}{\text{sek.}^2}$. Oporu powietrza nie uwzględniamy].

b) To samo zadanie, przyjmując, że sygnał dano o 1 min. później.

c) Winda zjeżdża na dno szybu, głębokiego na 210 *m* ruchem jednostajnym z prędkością 3 $\frac{m}{\text{sek.}}$. O ile sekund później opuścić należy do szybu jakiś przedmiot, aby, spadając wolno, spadł na dno szybu równocześnie z przybyciem windy?

[Jak zad. *a*].

d) W tym samym szybie porusza się winda wgórę z prędkością 3 $\frac{m}{\text{sek.}}$; równocześnie z wyruszeniem windy z dna szybu opuszczono do szybu zgóry kamień. Po ilu sekundach dosięgnie kamień windę?

[Jak zad. *a*].

e) Lampy 25 świec i 16 świec są oddalone od siebie o 3·6 *m*. W jakiej odległości od pierwszej lampy umieścić należy kartkę papieru prostopadle do prostej, łączącej obie lampy, aby obie lampy jednakowo ją oświetlały?

[Oświetlenie lampą, mającą *s* świec, w odległości *x* od lampy wynosi $\frac{cs}{x^2}$, gdzie *c* oznacza pewną stałą].