Politechnika Śląska
Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki

Michał Niezabitowski

CHARAKTERYSTYKI LICZBOWE DYSKRETNYCH UKŁADÓW HYBRYDOWYCH

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem

Prof. dr. hab. inż. Adama Czornika

Gliwice (2014)

Dziękuję mojemu promotorowi Panu Prof. dr. hab. inż. Adamowi Czornikowi, który wprowadził mnie w zupełnie nowy dla mnie obszar teorii sterowania, pomógł zgłębić niezliczone meandry tego obszaru wiedzy oraz inspirował mnie w pracy. Dziękuję również za czas, który mi poświęcił, jego ogromną pomoc oraz setki cennych uwag, bez których ta praca nigdy by nie powstała.

Dziękuję moim rodzicom i Justynie za cierpliwość, wyrozumiałość, wiarę, miłość i wsparcie w dążeniu do celu.

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Wiele własności układów dynamicznych może być z powodzeniem scharakteryzowanych przez pewne wielkości liczbowe nazywane charakterystykami lub wykładnikami charakterystycznymi. Należą do nich między innymi: wykładniki Lapunowa, Perrona, Bohla, Izobowa, Grobmana oraz uogólnione promienie spektralne. Liczby te opisują różne typy stabilności, tempo wzrostu lub malenia trajektorii układu czy wrażliwość własności dynamicznych układu na niedokładności parametryczne.

W ostatniej dekadzie zaobserwowano duże zainteresowanie specjalistów z dziedziny teorii układów dynamicznych klasą modeli, które są kombinacją logicznych przełączeń, których wartości nazywane są modami lub trybami pracy, i różniczkowych lub różnicowych równań, które nazywamy dynamikami układu lub podukładami. Układy takie w teorii sterowania nazywane są układami z przełączeniami i stanowią podklasę układów hybrydowych. Zainteresowanie układami z przełączeniami podyktowane jest przede wszystkim olbrzymią użytecznością takich modeli przy modelowaniu obiektów rzeczywistych co przekłada się na rosnące zapotrzebowanie na metody modelowania, analizy i zrozumienia układów o takiej strukturze.

W przypadku gdy poszczególne dynamiki układu z przełączeniami są modelowane w postaci stacjonarnych równań w czasie dyskretnym to dobrym modelem całego układu jest dyskretna inkluzja. O ile prostsze własności dynamiczne inkluzji dyskretnych, takie jak stabilność czy sterowalność zostały już częściowo zbadane, to podejście oparte na wykładnikach charakterystycznych nie było jeszcze w literaturze dyskutowane.

Główna hipoteza badawcza może być sformułowana w sposób następujący: **własności dynamiczne dyskretnych układów hybrydowych mogą być scharakteryzowane przez zbiór wykładników charakterystycznych**.

Jeżeli w rozważanym układzie hybrydowym ustalimy funkcję przełączającą to otrzymamy klasyczny układ niestacjonarny. Metoda badawcza, która jest głównie stosowana w pracy, polega na poszukiwaniu związków pomiędzy wykładnikami charakterystycznymi tak otrzymanych układów o zmiennych w czasie współczynnikach, a własnościami dynamicznymi wyjściowych układów hybrydowych. Na potrzeby opisu tych własności dynamicznych zaproponowano w pracy szereg charakterystyk liczbowych dyskretnych inkluzji liniowych.

Dla układów niestacjonarnych techniki oparte na wykładnikach charakterystycznych są w teorii sterowania dobrze znane głównie dla układów w czasie ciągłym. Dlatego w ramach badań, w pierwszym kroku, dokonano przeniesienia części wyników dotyczących układów ciągłych na układy dyskretne oraz usystematyzowania i uporządkowania tych rezultatów.

Jedną z podstawowych własności dynamicznych rozważanych w teorii sterowania jest stabilność. Obecnie nie ma efektywnego algorytmu, który w pełny sposób rozstrzygałby nawet najprostsze problemy stabilności układów hybrydowych. W pracy podano opis, w postaci nierówności, różnych typów stabilności dyskretnych inkluzji liniowych poprzez wprowadzone wcześniej charakterystyki liczbowe. Sugeruje to możliwość opracowania w przyszłości algorytmu rozstrzygającego o pewnych typach stabilności opartego na zaproponowanych charakterystykach liczbowych.

Praca zorganizowana jest w sposób następujący. W rozdziale 2-gim wprowadzono definicje i podstawowe pojęcia używane w dalszej części pracy. Rozdział 3-ci zawiera motywację do badania układów hybrydowych w postaci szeregu przykładów praktycznych. W 4-tym rozdziale opisano różne typy stabilności dyskretnych niestacjonarnych układów liniowych. Rozdziały 5-ty i 6-ty stanowią centralną część pracy. Pierwszy z nich zawiera szereg oryginalnych wyników dotyczących wykładników charakterystycznych dyskretnych niestacjonarnych układów liniowych. Z kolei rozdział 6-ty zawiera propozycje charak-

terystyk liczbowych dyskretnych inkluzji liniowych oraz wyniki opisujące ich stabilność poprzez te charakterystyki. W rozdziałach tych sformułowano również szereg pytań otwartych, które mogą stać się przedmiotem przyszłych badań. Ostatnim rozdziałem jest zakończenie zawierające podsumowanie uzyskanych wyników.

Rozdział 2

Rozpatrywane układy i podstawowe pojęcia

W tym rozdziale opiszemy rozpatrywane układy, wprowadzimy definicje inkluzji oraz takich pojęć jak norma macierzowa, promień spektralny zbioru macierzy i wspólny promień spektralny zbioru macierzy.

2.1 Rozpatrywane układy

2.1.1 Liniowy dyskretny układ niestacjonarny oraz jego macierz tranzycji

Rozważmy następujący liniowy dyskretny układ niestacjonarny

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \geq 0 \tag{2.1}$$

gdzie $A = (A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczonym ciągiem macierzy kwadratowych stopnia s. Zdefiniujmy również macierz tranzycji układu (2.1) jako

$$\mathcal{A}(n,m) = A(n-1)\dots A(m) \quad \text{dla} \quad n > m$$

$$\mathcal{A}(n,m) = \mathcal{A}^{-1}(m,n) \quad \text{dla} \quad n < m$$

i $\mathcal{A}(n,n) = I$, gdzie I jest macierzą jednostkową. Dla warunku początkowego $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^s$ rozwiązanie układu (2.1) będziemy oznaczać przez $x(n,x_0)$ i jest ono równe

$$x(n,x_0) = \mathcal{A}(n,0)x_0.$$

Bardzo często w teorii sterowania dyskretne liniowe równania różnicowe (2.1) występują bezpośrednio jako modele układów rzeczywistych lub w wyniku linearyzacji układów nieliniowych. Pojawiają się one również w wyniku dyskretyzacji układów liniowych ciągłych. W tym przypadku należy zauważyć, że nawet jeżeli zdyskretyzujemy układ liniowy stacjonarny ze zmienną częstotliwością próbkowania, to i tak wynikowy układ dyskretny będzie niestacjonarny [2].

2.1.2 Układ sprzężony

Jeżeli macierze $A(n)$ są odwracalne to razem z układem (2.1) będziemy rozpatrywać układ sprzężony

$$y(n+1) = B(n)y(n), \quad n \geq 0, \tag{2.2}$$

gdzie $B(n) = (A^*(n))^{-1}$ i * oznacza sprzężenie. Macierz tranzycji układu sprzężonego jest wyrażona poprzez

$$\mathcal{B}(n,m) = B(n-1)...B(m)$$

dla $n > m$ i $\mathcal{B}(n,m) = I$.

2.1.3 Układ z niedokładnościami parametrycznymi

W zastosowaniach praktycznych typową sytuacją jest, że parametry modelu są znane tylko z pewną dokładnością (np. są wynikiem estymacji). Zatem w naturalny sposób prowadzi to do rozpatrywania układu (2.1) wraz z układem z niedokładnościami parametrycznymi postaci

$$z(n+1) = (A(n) + \Delta(n))\, z(n), \tag{2.3}$$

gdzie $\Delta = (\Delta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem macierzy kwadratowych stopnia s z pewnej klasy $\mathfrak{M}$ modelującym niedokładności parametryczne.

Wraz z układem (2.3) będziemy rozważać układ do niego sprzężony postaci

$$t\,(n+1) = C\,(n)\, t\,(n)\,, \tag{2.4}$$

gdzie

$$C\,(n) = \left[(A\,(n) + \Delta\,(n))^{*}\right]^{-1}.$$

Rozważmy następujący zbiór niedokładności parametrycznych

$$\mathfrak{M}_q = \{\Delta = (\Delta(n))_{n\in\mathbb{N}} : \|\Delta\|_{\infty} \le q\}\,, \tag{2.5}$$

gdzie $\|\Delta\|_{\infty} = \sup \|\Delta(n)\|$. Dla każdego ciągu $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ współczynników układu (2.1) będziemy rozważać tak małe q aby układ z niedokładnościami parametrycznymi (2.3) miał zarówno odwracalne współczynniki jak i by ciąg $\left((A(n) + \Delta(n))^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ był ograniczony dla wszystkich $\Delta \in \mathfrak{M}_{q'}$, $0 < q' < q$. Jest naturalnym, że przy naszych założeniach takie q zawsze istnieje.

2.2 Definicja rozpatrywanych układów hybrydowych

Zdefiniujemy teraz jeden z głównych obiektów naszych rozważań, czyli dyskretną inkluzję. Proponowana przez nas definicja różni się od występujących w literaturze a dokładniej mówiąc jest ich uogólnieniem, które pozwoli nam rozpatrywać układy ze skokowo zmieniającymi się parametrami i układy hybrydowe jako dyskretne inkluzje.

Rozważmy zbiór $\Sigma = \{A\,(i) : i \in \mathbb{I}\}$ macierzy kwadratowych stopnia s. Oznaczmy

$$D = \{d = (d\,(0)\,, d\,(1)\,, \ldots) : d\,(i) \in \mathbb{I}\}\,.$$

Ponadto dla liczby naturalnej m i $\mathbb{I} = \{1, \ldots, m\}$ rozpatrzmy zbiór

$$D_m = \{d = (d\,(0)\,, d\,(1)\,, \ldots) : 1 \le d\,(i) \le m\}\,.$$

Rozważmy pewien pozdbiór $\bar{D} \subset D$ i zbiór funkcji $\Sigma' = \{F_i : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s : i \in \mathbb{I}\}$.

Definicja 1 *Dyskretną inkluzją* $DI\left(\Sigma', \bar{D}\right)$, *którą będziemy oznaczać*

$$x\,(j+1) \in F_{d(j)}\,(x\,(j))\,,$$

$j = 0, 1, 2, \ldots$ *nazywamy zbiór wszystkich takich ciągów* $(x\,(j))_{j\in\mathbb{N}}$, $x\,(j) \in \mathbb{R}^s$ *takich, że*

$$x\,(j+1) = F_{d(j)}\,(x\,(j))\ \ ,\ \ j = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

dla pewnego ciągu $d \in \bar{D}$.

1. Jeżeli $\bar{D} = D$ oraz funkcje F_i są funkcjami liniowymi, czyli $F_i\,(x) = A\,(i)\,x$ otrzymujemy klasyczną dyskretną inkluzję liniową oznaczaną w skrócie $DIL\,(\Sigma)$ rozpatrywaną m.in. w pracy [118]. $DIL\,(\Sigma)$ będziemy utożsamiali ze zbiorem wszystkich takich ciągów $(x\,(j))_{j\in\mathbb{N}}$, $x\,(j) \in \mathbb{R}^s$, że

$$x\,(j+1) = A\,(d\,(j))\ x\,(j) \tag{2.7}$$

dla pewnego $d \in D$. Ciąg $(x\,(j))_{j\in\mathbb{N}}$ będziemy nazywali wówczas trajektorią inkluzji odpowiadającą ciągowi d.

Badanie asymptotycznych własności takiej inkluzji sprowadza się tak naprawdę do badania wszystkich nieskończonych iloczynów macierzowych

$$\left(\prod_{l=1}^{n} A\left(j_l\right)\right)_{l\in\mathbb{N}} : \left(j_l\right) \in D$$

o czym traktuje praca [95] w kontekście istnienia granicy takich iloczynów. Tutaj i w całej pracy

$$\prod_{i=l}^{k} A\left(i\right) = A\left(k\right)\ldots A\left(l\right)$$

dla $k \geq l$.

2. Jeżeli $\bar{D} = D$ lecz funkcje F_i nie są funkcjami liniowymi to otrzymujemy dyskretne inkluzje, które w literaturze także już były badane [41], [59], [105].

3. Rozważmy teraz pewien stacjonarny (prawdopodobieństwa przejść nie zależą od czasu) łańcuch Markowa $\left(r\left(j\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ [135] o skończonej przestrzeni stanów $S = \{1,\ldots,m\}$. Każda trajektoria takiego łańcucha Markowa jest jednym z ciągów z D_m. Jednakże, nie każdy ciąg z D_m musi być trajektorią pewnego łańcucha Markowa co przedstawia poniższy przykład macierzy przejść

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

Dla powyższego przykładu nie jest możliwe przejście ze stanu 1 do 3 albo z 3 do 2, zatem zbiór wszystkich trajektorii takiego łańcucha Markowa nie będzie ciągiem, który zawiera elementy $1,3$ lub $3,2$ kolejno po sobie następujące.

Jeżeli dla dowolnego łańcucha Markowa o macierzy prawdopodobieństw $P = \left[p_{k\,l}\right]_{k,\,l\,\in\mathbb{I}}$ zdefiniujemy następująco zbiór

$$\bar{D}\left(P\right) = \left\{d = \left(d\left(0\right), d\left(1\right), \ldots\right) : 1 \leq d\left(i\right) \leq m \quad , \quad p_{d(i-1)\,d(i)} > 0 \quad , i = 1,2,\ldots\right\} , \tag{2.8}$$

to dochodzimy do wniosku, że dyskretne układy liniowe ze skokowo zmieniającymi się parametrami [186] mogą być rozważane jako dyskretne inkluzje liniowe (2.7). Dalsze szczegóły tego podejścia będą opisane w podrozdziale 3.3.

4. Uzasadnienie dla stosowania powyższego zbioru $\bar{D}\left(P\right) \neq D$ można również odnaleźć w teorii układów hybrydowych. Mianowicie, jeżeli występuje tam przełączenie pomiędzy poszczególnymi podukładami takiego układu hybrydowego to nie zawsze wydaje się zasadne rozważanie wszystkich możliwych przełączeń ponieważ czasami natura tego obiektu, który modelujemy wyklucza występowanie pewnych przełączeń. Rozpatrywanie podzbioru $\bar{D}\left(P\right)$ pozwoli nam rozpatrywać również pewne układy hybrydowe, dla których taka sytuacja ma miejsce.

2.3 Norma macierzowa i operatorowa

2.3.1 Definicja normy macierzowej

Niech $\mathbb{R}^{s\times s}$ oznacza zbiór wszystkich macierzy kwadratowych stopnia s o elementach rzeczywistych. Normą macierzową jest funkcja $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{s\times s} -> [0,\infty]$ spełniająca następujące 4 warunki:

1. nieujemność

$$\bigvee_{A\in\mathbb{R}^{s\times s}} \quad \|A\| > 0 \text{ jeżeli } A \neq 0$$

$$\bigvee_{A\in\mathbb{R}^{s\times s}} \quad \|A\| = 0 \iff A = 0,$$

2. jednorodność

$$\bigvee_{k\in\mathbb{R}} \bigvee_{A\in\mathbb{R}^{s\times s}} \|kA\| = |k|\,\|A\|\,,$$

3. nierówność trójkątna

$$\bigvee_{A,B\in\mathbb{R}^{s\times s}} \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|\,,$$

4. podmultiplikatywność

$$\bigvee_{A,B\in\mathbb{R}^{s\times s}} \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|\,.$$

Norma macierzowa różni się od normy dodatkowym warunkiem 4. Jeżeli $\|\cdot\|_{wek}$ jest normą w $\mathbb{R}^s$ to indukowana norma macierzowa $\|\cdot\|_{ind}$ powstaje z normy wektorowej $\|\cdot\|_{wek}$ w następujący sposób:

$$\|A\|_{ind} = \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|_{wek}}{\|x\|_{wek}},$$

a następnie dzięki własności liniowości możemy bez straty ogólności zredukować powyższą równość do następującej:

$$\|A\|_{ind} = \max_{\|x\|_{wek}=1} \|Ax\|_{wek}\ .$$

Dla uproszczenia, w dalszej części pracy indeksy *ind* i *wek* będziemy pomijać, gdyż ich użycie będzie wynikać z kontekstu. Każda norma macierzy jednostkowej jest równa 1 niezależnie od normy wektorowej.

Każda norma indukowana jest podmultiplikatywna, czyli jest normą macierzową. Istotnie,

$$\|AB\| = \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \max_{\|y\|\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|\,\|B\|\,.$$

Powszechnie znanym jest [129], że każde dwie normy macierzowe $\|\cdot\|_a$ i $\|\cdot\|_b$ są równoważne. Oznacza to, że istnieją dodatnie stałe a i b takie, że

$$a\,\|A\|_b \leq \|A\|_a \leq b\,\|A\|_b$$

dla każdej macierzy A. Z powyższej równoważności będziemy wielokrotnie korzystali.

2.3.2 Przykłady norm

Jeżeli rozpatrywanymi normami wektorowymi są:

- $\|x\|_p$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_i |x_i|^p}\,,$$

w szczególności:

- $\|x\|_1$ będąca sumą wartości bezwzględnych elementów x

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|\,,$$

- $\|x\|_\infty$ będąca maksymalną wartością bezwzględną elementów x

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

to odpowiednie indukowane normy macierzowe mają następujące postaci

- $$\|A\|_p = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}\quad,$$

- $$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_i |a_{i,j}| \quad ,$$

- $$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}| \quad ,$$

- Norma $\|A\|_2$ znana jest jako norma spektralna A.

Jeżeli opisywana przez nas własność nie będzie zależeć od wyboru normy to będziemy pomijać indeksy dolne przy symbolu normy.

2.4 Promień spektralny zbioru macierzy

2.4.1 Wprowadzenie

Definicja wspólnego promienia spektralnego została wprowadzona w 1960 roku, kiedy to po raz pierwszy została przedstawiona przez Rota i Strang w pracy [244]. W latach 90. XX w. Daubechies i Lagarias zdefiniowali w swoich pracach [94]-[96] uogólniony promień spektralny. Następnie Berger i Wang udowodnili w pracy [26], że te dwie wartości są równe dla ograniczonych zbiorów macierzy. Następnie, pojęcie to znalazło szereg zastosowań, do których należą:

- agenci autonomiczni [49], [71], [143], [149], [202], [257], [271],
- teoria kodowania [39], [40], [147], [176], [197], [207],
- teoria falek [6], [62], [93], [96], [97], [233],
- kombinatoryka słów [28], [145], [178],
- teoria sterowania (układy hybrydowe) [17]-[19], [148], [159],
- projektowanie krzywych [101],
- teoria liczb [230], [232],
- sieci sensorowe [71],
- teoria prawdopodobieństwa (automaty probabilistyczne) [36], [231].

W rozdziale 3 naszej pracy jest mowa o zastosowaniach promienia spektralnego zbioru macierzy wymienionych w pierwszych dwóch powyższych podpunktach i ich powiązaniu z dyskretnymi inkluzjami liniowymi.

2.4.2 Definicja promienia spektralnego macierzy

Wartością własną macierzy A jest skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ taki, że

$$\bigvee_{v \neq 0} Av = \lambda v \, .$$

Wówczas v nazywamy wektorem własnym macierzy A odpowiadającej wartości własnej λ. Promień spektralny $\rho(A)$ macierzy A definiujemy jako największy moduł jej wartości własnych

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : Av = \lambda v, \ v - \text{wektor własny}\} \, . \tag{2.9}$$

Podstawowe własności promienia spektralnego

- Promień spektralny potęgi macierzy

$$Av = \lambda v \implies A^k v = \lambda^k v,$$

co w konsekwencji dzięki definicji 2.9 sprowadza się do postaci:

$$\rho\left(A^k\right) = \rho\left(A\right)^k.$$

- Warunek zbieżności

Dla każdej macierzy $A \in \mathbb{R}^{s\times s}$, promień spektralny decyduje o zbieżności do zera kolejnych potęg A^k macierzy A:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \iff \rho\left(A\right) < 1. \tag{2.10}$$

Dzięki tej własności promień spektralny macierzy jest postrzegany jako wielkość opisująca asymptotyczne zachowanie kolejnych potęg tej macierzy, co pozwala w jego terminach opisywać stabilność dyskretnych układów postaci

$$x\left(n+1\right) = Ax\left(n\right).$$

Powyższy układ jest absolutnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\rho\left(A\right) < 1.$$

- Nierówność z normą

Niech $A \in \mathbb{R}^{s\times s}$ i $\rho\left(A\right) = \lambda'$, natomiast $v^{'}$ będzie wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ'. Zdefiniujmy macierz $V' \in \mathbb{R}^{s\times s}$, której kolumny są wektorem kolumnowym v' powtórzonym s-krotnie. Używając własności podmultiplikatywności otrzymamy:

$$AV = \lambda' V \implies \left|\lambda'\right| \left\|V\right\| = \left\|\lambda\prime V\right\| = \left\|AV\right\| \leq \left\|A\right\| \left\|V\right\|.$$

Reasumując, jeżeli $\|\cdot\|$ jest dowolną normą macierzową i jeżeli $A \in \mathbb{R}^{s\times s}$ to:

$$\rho\left(A\right) \leq \left\|A\right\|.$$

2.5 Wspólny promień spektralny zbioru macierzy

Istnieją dwa naturalne uogólnienia definicji promienia spektralnego pojedynczej macierzy na zbiór macierzy. Pierwsze jest oparte na promieniu spektralnym, natomiast drugie na normach macierzowych. Rozpatrzmy (niekoniecznie ograniczony) zbiór Σ macierzy A_i kwadratowych stopnia s

$$\Sigma = \left\{A_i : i \in \mathbb{I}\right\}.$$

2.5.1 Uogólniony promień spektralny

Dla danego $k \in \mathbb{N}$ niech $\rho_k\left(\Sigma\right)$ będzie kresem górnym promieni spektralnych wszystkich iloczynów k macierzy wybranych ze zbioru Σ

$$\rho_k\left(\Sigma\right) := \sup\left\{\rho\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) : A_i \in \Sigma \quad \text{dla} \;\; 1 \leq i \leq k\right\}.$$

Korzystając z powyższego oznaczenia definiujemy uogólniony promień spektralny [95]

$$\rho\left(\Sigma\right) := \limsup_{k\to\infty} \left(\rho_k\left(\Sigma\right)\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Uogólniony promień spektralny jest zatem asymptotycznym maksymalnym promieniem spektralnym iloczynów macierzy, które mogą być utworzone ze zbioru Σ. Wykładnik potęgi pozwala postrzegać uogólniony promień spektralny jako tempo wzrostu promienia spektralnego, gdy liczba czynników rośnie.

2.5.2 Wspólny promień spektralny

Idea wspólnego promienia spektralnego wywodzi się z następującej formuły Gelfanda [129]

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{\frac{1}{k}}.$$

Promień spektralny można w tym przypadku postrzegać jako kres górny możliwych norm wszystkich iloczynów k macierzy wybranych ze zbioru Σ, tj.

$$\hat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|) := \sup\left\{\left\|\prod_{i=1}^{k} A_i\right\| : A_i \in \Sigma \quad \text{dla} \quad 1 \le i \le k\right\}. \tag{2.11}$$

Wspólny promień spektralny [244] określony jest w następujący sposób

$$\hat{\rho}(\Sigma) := \limsup_{k\to\infty} \left(\hat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|)\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Reasumując, wspólny promień spektralny jest asymptotyczną maksymalną normą iloczynów macierzy, które mogą być utworzone ze zbioru Σ. Wykładnik potęgi pozwala postrzegać wspólny promień spektralny jako tempo wzrostu normy. Ponieważ wszystkie normy są równoważne, więc powyższa definicja wspólnego promienia spektralnego nie zależy od wyboru normy macierzowej. Gdy zbiór Σ zawiera tylko jedną macierz, to definicje wspólnego i uogólnionego promienia spektralnego są ekwiwalentne definicji promienia spektralnego pojedyńczej macierzy. Okazuje się, że zachodzi następujące

Twierdzenie 2 *Dla dowolnego zbioru ograniczonego Σ mamy*

$$\hat{\rho}(\Sigma) = \rho(\Sigma). \tag{2.12}$$

Liczba występująca po lewej stronie po raz pierwszy pojawiła się w pracy [244], natomiast wielkość po prawej stronie równości w pracy [95], gdzie postawiono również hipotezę, że te liczby są sobie równe dla zbiorów ograniczonych oraz podano przykład, że w przypadku, gdy Σ nie jest zbiorem ograniczonym to te liczby nie muszą być równe. Hipotezę tę dla zbiorów skończonych udowodnili Berger i Wang w publikacji [26], a w przypadku ogólnego zbioru ograniczonego Ludwig Elsner w pracy [104].

Wspólną wartość wspólnego i uogólnionego promienia spektralnego będziemy nazywali wspólnym promieniem spektralnym i oznaczali $\overline{\rho}(\Sigma)$. Podsumowanie wyników prac dotyczących uogólnionego i górnego promienia spektralnego można odnaleźć w [147], [177].

W dalszej części pracy będziemy wykorzystywali następujące twierdzenie z pracy [104].

Twierdzenie 3 *Dla dowolnego zbioru ograniczonego*

$$\overline{\rho}(\Sigma) = \inf_{\|\cdot\|} \|\Sigma\|,$$

gdzie

$$\|\Sigma\| = \sup\{\|A\| : A \in \Sigma\}.$$

2.5.3 Dolny promień spektralny zbioru macierzy

Pojęcie dolnego promienia spektralnego zostało wprowadzone w [118], a pozostałe własności z nim związane są opisane w [74]. W przeciwieństwie do wspólnego i uogólnionego promienia spektralnego, gdzie interesował nas kres górny, tym razem bierzemy pod uwagę kres dolny. Oznaczmy

$$\underline{\rho}_k(\Sigma) := \inf\left\{\rho\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right) : A_i \in \Sigma \quad dla\ 1 \le i \le k\right\},$$

$$\underline{\hat{\rho}}_k(\Sigma, \|\cdot\|) := \inf\left\{\left\|\prod_{i=1}^{k} A_i\right\| : A_i \in \Sigma \quad dla\ \ 1 \le i \le k\right\}.$$

Wówczas uogólniony podpromień spektralny definiujemy jako

$$\underline{\rho}(\Sigma) := \liminf_{k\to\infty} \left(\underline{\rho}_k(\Sigma)\right)^{\frac{1}{k}}.$$

natomiast wspólny podpromień spektralny jest postaci

$$\underline{\hat{\rho}}(\Sigma) := \liminf_{k\to\infty} \left(\underline{\hat{\rho}}_k(\Sigma, \|\cdot\|)\right)^{\frac{1}{k}} = \inf_{k\to\infty} \left[\underline{\hat{\rho}}_k(\Sigma, \|\cdot\|)\right]^{\frac{1}{k}}.$$

Twierdzenie 4 *[74]. Dla dowolnego zbioru Σ zachodzi*

$$\underline{\rho}(\Sigma) = \underline{\hat{\rho}}(\Sigma). \tag{2.13}$$

Zatem uogólniony/wspólny podpromień spektralny lub dolny promień spektralny są synonimami.

W dalszej części pracy wspólną wartość dwóch powyższych liczb będziemy nazywali dolnym promieniem spektralnym i oznaczali $\underline{\rho}(\Sigma)$. Powyższe równanie jest analogiem równości (2.12). Podkreślić jednak należy, że równość (2.13) zachodzi dla dowolnego zbioru Σ podczas, gdy równość (2.12) tylko dla zbioru ograniczonego.

2.5.4 Obliczanie i aproksymowanie

Dokonamy teraz zwięzłej oceny jak powyższe wielkości mogą być obliczane lub aproksymowane. Nierówność

$$\hat{\rho}_k(\Sigma)^{\frac{1}{k}} \leq \rho(\Sigma) \leq \hat{\rho}(\Sigma) \leq \hat{\rho}_k(\Sigma, \|\cdot\|)^{\frac{1}{k}}$$

udowodniona w Lemacie 3.1 pracy [95] może być użyta do otrzymania algorytmu, który obliczy w sposób dowolnie precyzyjny przybliżenia uogólnionego promienia spektralnego (zobacz np. [116], gdzie pokazano jeden z takich algorytmów).

Zobaczymy w dalszej części pracy (twierdzenie 81), że z punktu widzenia stabilności dyskretnych inkluzji liniowych istotne jest pytanie czy promień spektralny jest > 1 lub < 1. Nie jest wiadomym czy problem ten jest problemem rozstrzygalnym. Udowodniono [34], że problem czy promień spektralny jest ≤ 1 jest nierozstrzygalny. Innymi słowy, nie ma algorytmu, który w skończonej liczbie kroków odpowie na pytanie czy dowolny zbiór macierzy ma promień spektralny ≤ 1.

Do tej pory nie jest znane czy problem kiedy uogólniony promień spektralny będzie równy 1 jest algorytmicznie rozwiązywalny (tzn. rozstrzygnalny) (zobacz rozważania w pracy [118] oraz [165], gdzie przeprowadzono dyskusję na temat tej kwestii oraz dokonano opisu jej związku z hipotezą skończoności (hipoteza 85)). Negatywnym wynikiem tej dyskusji jest wniosek Kozyakina, który w swojej pracy [157] pokazał, że zbiór par macierzy o wymiarach 2×2, które mają wspólny promień spektralny mniejszy od 1 nie jest semialgebraiczny.

Twierdzenie 1 zamieszczone w pracy [258] pokazuje, że jeżeli zachodzi równość P=NP to algorytmy aproksymujące uogólniony promień spektralny nie działają w czasie wielomianowym. Precyzyjniej, twierdzenie to ukazuje, że nie ma algorytmu, który mógłby obliczyć uogólniony promień spektralny z względnym błędem ograniczonym przez $\varepsilon > 0$ w czasie, który byłby wielomianową funkcją ilości elementów zbioru Σ, wymiaru macierzy ze zbioru Σ i ε. Autorzy pokazują, że jest NP-trudnym zdecydowanie czy wszystkie możliwe iloczyny nieskończone dwóch danych macierzy dążą do zera. Sytuacja dla dolnego promienia spektralnego jest nieco inna od tej dla wspólnego promienia spektralnego. Możliwość obliczenia górnych ograniczeń dla uogólnionego podpromienia spektralnego dla przypadku, gdzie Σ zawiera nieujemne macierze jest pokazana w pracy [118]. W publikacji [174] znajdziemy analityczne rozwiązanie dla przypadku, gdy Σ składa się z macierzy o wymiarach 2×2 , z których jedna jest macierzą singularną. Jednak ogólnie rzecz biorąc do obliczania podpromienia spektralnego nie ma żadnej dokładnej lub chociaż aproksymującej metody obliczeniowej innej niż obliczanie wartości $\underline{\hat{\rho}}_k$.

Rozdział 3

Motywacja do badania układów hybrydowych

W poprzednim rozdziale formalnie zdefiniowaliśmy pojęcie dyskretnej inkluzji. Ten rozdział jest poświęcony szczegółowej prezentacji kilku przykładów, w których dyskretna inkluzja jest wykorzystywana. Zanim jednak przejdziemy do wspomnianych opisów podamy czytelnikowi wiele odsyłaczy do literatury traktującej o zastosowaniach układów, które jak powiedzieliśmy w poprzednim rozdziale mogą być modelowane dyskretnymi inkluzjami.

W następnych podrozdziałach szczegółowo będziemy rozpatrywać zastosowania dyskretnej inkluzji w następujących obszarach:

- pojemność kodów;
- współdziałanie agentów autonomicznych;
- śledzenie obiektu;
- elektrownia słoneczna.

3.1 Pojemność kodów

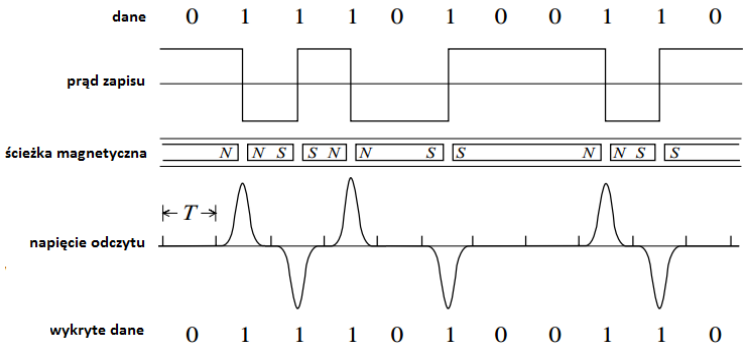
3.1.1 Nagrywanie magnetyczne

Ten podrozdział będzie wprowadzeniem do zagadnienia magnetycznych urządzeń nagrywających. Bardzo szczegółowy opis omawianych zagadnień można odnaleźć w pracach [185], [263]. Zainteresowanych zagadnieniami związanymi z teorią kodowania a w naszej pracy nieporuszanych odsyłamy do następujących prac traktujących o algorytmie Viterbiego [111], [112], [155], [197], [249], [269], [273] oraz o kodowaniu w nagrywaniu optycznym [125], [133], [134].

Magnetyczne urządzenie nagrywające składa się z kilku elementów. W przypadku dysku twardego należą do nich głowica nagrywająca, głowica odczytu oraz obracający się dysk magnetyczny. Każdy taki dysk jest podzielony na koncentryczne ścieżki, na których możemy zapisać ciąg znaków, zwany również łańcuchem (ang. string).

Proces nagrywania jest przedstawiony na rysunku 3.1. Gdy nad ścieżką jest umieszczona głowica nagrywająca to przepływający przez nią prąd namagnesowywuje ścieżkę w jednym z dwóch kierunków, zwanych biegunami magnetycznymi. Okres czasu między kolejno odczytywanymi bitami jest stały i równy T. W czasie zmiany pomiędzy kolejnymi okresami T głowica odczytu ma możliwość zmiany biegunowości dysku. Bit 1 jest nagrywany poprzez zmianę kierunku prądu, podczas gdy bit 0 jest nagrywany w przypadku braku zmiany kierunku prądu. Innymi słowy możemy myśleć o ciągu binarnym jako o ciągu przejść/braku przejść pomiędzy biegunami magnetycznymi i będziemy go dalej nazywać ciągiem przejść.

Proces odczytu charakteryzuje się tym, że głowica odczytująca ustawiona nad ścieżką obracającego się dysku reaguje na magnetyczne przejścia poprzez zmianę napięcia. Jeżeli wystąpi w danym okresie T odpowiednio wysoki pik napięcia (bez znaczenia czy dodatni czy ujemny, gdyż wiele wykrywaczy pików ignoruje znak), to wykrytym bitem będzie 1. Podobnie jak w przypadku procesu nagrywania tak i tutaj brak przejścia nie powoduje zmiany napięcia w głowicy odczytującej i odczytanym bitem jest 0.



Rysunek 3.1: Cyfrowe nagrywanie magnetyczne.

Wprowadźmy teraz pojęcie *kanału*. Na początku możemy kanał postrzegać jako ćzarną skrzynkę"(ang. black box) z wejściami i wyjściami. Wejścia reprezentują informacje transmitowane przez tę skrzynkę. Wyjścia z założenia powinny wiernie odzwierciedlać wejścia. Niestety, zniekształcenia w kanale mogą wpłynąć niekorzystnie na wyjście. Dlatego też w celu zabezpieczenia wyjść przed takimi zniekształcenia stosuje się kodowanie.

Słowo kanał może być łączone z infrastrukturą telekomunikacyjną w skład której wchodzą urządzenia telekomunikacyjne (oprócz telekomunikacyjnych urządzeń końcowych) oraz w szczególności linie telekomunikacyjne, kanalizacje kablowe, słupy, wieże, maszty, kable, przewody oraz osprzęt wykorzystywane do zapewnienia telekomunikacji. Tutaj informacja jest przesyłana z jednego punktu w przestrzeni do drugiego. Okazuje się jednak, że również urządzenia nagrywające mogą być postrzegane jako kanały z tą jednak różnicą, że tutaj informacja jest nagrywana w jednej i wyszukiwana w drugiej chwili czasu.

W dzisiejszych czasach trudno jest sobie wyobrazić życie i pracę bez komputera (a co za tym idzie bez jego podzespołu jakim jest dysk twardy). Żyjemy i pracujemy w dobie niesamowicie szybkiego postępu technologicznego. Na potwierdzenie tych słów warto dodać, że ponad pół wieku temu (w 1956 roku) firma IBM skonstruowała pierwszy dysk twardy o nazwie RAMAC 350 [132]. Miał on pojemność 5 MB $\left(5 \times 10^3 \text{ bajta}\right)$, prędkość obrotową równą 1200 RPM (ang. Revolutions per minute), średnicę 24-cali oraz wymiary $60 \times 68 \times 29$ cali. Dzisiejsze dyski są znacznie mniejsze, dużo tańsze, pojemniejsze i szybsze. Dla przykładu można podać $3,5$-calowy dysk Barracuda® XT Internal Kitted Drive produkowany przez firmę Seagate Technologies. Jego parametry są następujące: 3 terabajty (3×10^{12} bajta) pojemności, prędkość obrotowa 7200 RPM, średnica 3.5 cala i wymiary $1 \times 4 \times 5.8$ cala [247].

Dzisiejsze aplikacje nagrywające wymagają pamięci o dużej odporności na błędy. Z drugiej jednak strony stale rosnące zapotrzebowanie na coraz większą pamięć wymusza na projektantach tych urządzeń możliwości zapisu większej liczby danych w każdej jednostce alokacji co w efekcie powoduje, że urządzenie staje się mniej niezawodne czego przyczynami są np. nieregularne cykle czasu zegarowego czy losowe zakłócenia.

Przez ostatnie 40 lat w celu nagrywania bitów na dyski twarde był stosowany tzw. zapis równoległy. Charakteryzował się on tym, że tzw. domeny magnetyczne, czyli spontaniczne namagnesowane obszary w ferromagnetykach lub ferrimagnetykach, w których występuje uporządkowanie momentów magnetycznych są ustawione prostopadle do pozycji tzw. talerza (ang. plate), czyli magnetycznej powierzchni obracającej się ze stałą prędkością i umożliwiającej odczyt danych przez głowicę odczytująco-zapisującą. Wraz ze wzrostem gęstości nagrywania zaczyna się pojawiać tzw. efekt superparamagnetyzmu czego skutkiem jest, że pojedynczy krystalit staje się wtedy cząstką jednodomenową, tzn. nie ma w sobie podziału na odrębne domeny magnetyczne. Dlatego też od niedawna stosuje się tzw. zapis prostopadły (ang. perpendicular recording), gdzie domeny magnetyczne są ułożone prostopadle do powierzchni talerza. Tutaj wzrostowi gęstości nagrywania towarzyszy wzrost pola odmagnesowującego czego efektem jest większa pojemność dysku.

Zgodnie z prawem Moore'a [131], [200], [201], opisującym eksponencjalny przyrost w czasie liczby tranzystorów w układzie zintegrowanym, ich liczba rośnie dwukrotnie z każdym rokiem. Analogiczna sytuacja, opisywana prawem Krydera, jest z pojemnością dysku twardego.

Jednym z nierozerwalnie związanych pojęć z wieloma magnetycznymi urządzeniami nagrywającymi jest tzw. stopa błędu, czyli wskaźnik, który określa prawdopodobieństwo wystąpienia przekłamania bitu informacji w strumieniu przesyłanej informacji. Są dwa sposoby definiowania tego wskaźnika. Jednym

z nich jest tzw. współczynnik błędnych bitów (ang. BER-Bit error ratio) będący współczynnikiem ilość bitów błędnie otrzymanych do ogólnej liczby otrzymanych bitów wysłanych podczas ustalonego interwału czasowego.

Problem z odczytem pewnych informacji nagranych na magnetyczne urządzenie występuje w momencie pojawienia się różnicy między nagranymi wzorcami, zwanych dalej słowami, która z kolei została opisana za pomocą błędu [4], [153], [196]. Współczynnik błędnych bitów na ogół zależy od małego zbioru potencjalnych różnic słów. Jednym z celów jest utrzymanie małego prawdopodobieństwa błędu odczytu/zapisu w czasie zapisu danych. Propozycją na rozwiązanie problemu są kody binarne, które są tak projektowane by unikać najbardziej problematycznych różnic słów poprzez ograniczanie zbioru dozwolonych nagranych ciągów [31], [109], [152], [154], [195], [199].

A teraz podamy formalne sformułowanie problemu.

Ciągami o danej długości n nazywamy uporządkowane podczas zapisu bity. Zbiór takich ciągów nazywamy n-bitowym *kodem*, który będziemy oznaczać literą C. Z matematycznego punktu widzenia kod jest zatem zbiorem ciągów długości n, których elementami są liczby 0 i 1. Jednym z przykładów jest bajt będący uporządkowanym ciągiem 8 bitów. Kodem w tym przypadku jest zbiór 2^8 możliwych bitów.

Stopa błędu danego kodu jest ściśle związana z odpowiednio zdefiniowaną odległością pomiędzy słowami. Nie wdając się na razie w szczegóły co jest miarą używaną do zdefiniowania odległości pomiędzy ciągami bitów, zdecydowaliśmy się na pokazanie prostego przykładu. Mając do dyspozycji 3 ciągi

$$w_1 = 00000101,$$

$$w_2 = 11110110,$$

$$w_3 = 00001100$$

można bez problemu zauważyć, że ciąg w_1 jest dużo prościej odróżnić od ciągu w_2 niż od w_3.

Niech $\{0, 1, \ldots, m\}^n$ oznacza rodzinę ciągów o długości n i utworzonych z elementów zbioru $\{0, 1, \ldots, m\}$ zwanych również słowami. Poszczególne elementy tego ciągu będziemy nazywali cyframi. Rozważmy teraz $\{0, 1\}^n$ utworzonych z elementów zbioru $\{0, 1\}$. Dowolny podzbiór zbioru $\{0, 1\}^n$ będziemy nazywali *kodem* i oznaczać literą C. *Różnicą* słów

$$u = (u_1, \ldots, u_n)$$

i

$$v = (v_1, \ldots, v_n)$$

nazywamy ciąg

$$u - v = ((u - v)_1, \ldots, (u - v)_n)$$

o długości n, gdzie

$$(u - v)_i = u_i - v_i\,,$$

dla $i = 1, \ldots, n$. Zauważmy, że różnica słów nie musi być elementem zbioru $\{0, 1\}^n$ bo wyrazami ciągu $u-v$ są elementy zbioru $\{-1, 0, +1\}$. W dalszym ciągu zamiast -1 i $+1$ będziemy pisali $-$ i $+$ odpowiednio.

Stosując powyższą definicję do naszego przykładu otrzymujemy

$$w_1 - w_2 = (-, -, -, -, 0, 0, -, 1)\,,$$

$$w_1 - w_3 = (0, 0, 0, 0, -, 0, 0, 1)\,.$$

Używając wektorowej normy euklidesowej otrzymujemy

$$\|w_1 - w_3\| = \sqrt{2} < \|w_1 - w_2\| = \sqrt{6}.$$

Zauważmy, że to potwierdza wcześniej odnotowane na podstawie intuicji przypuszczenie, że słowo w_1 jest łatwiej odróżnić od w_2 niż w_1 od w_3. Dla tego prostego przykładu norma euklidesowa okazała się dobrą miarą rozróżniania słów.

Interesującym problemem jest znalezienie normy, która wyznacza te pary ciągów w tym samym kodzie, które trudno rozróżnić. Niestety problem ten nie jest w ogólnym przypadku tak prosty jak w przykładzie powyżej zaprezentowanym. Dlatego w teorii kodowania zdecydowano się na to, że z góry podaje się pewien zabroniony zbiór różnic, których kod powinien unikać w tym sensie, że różnica nie powinna do tego zbioru należeć.

Niech D będzie zbiorem zawierającym ciągi stworzone z $\{-, 0, +\}$ i reprezentującym różnice, których istnienie pomiędzy słowami w kodzie jest zabronione. Innymi słowy, zbiór D jest zbiorem *zabronionych różnic słów.* Natomiast mówimy, że n-bitowy kod C *unika* D, jeżeli

$$\bigwedge_{u,v\in C} \quad \bigwedge_{i\leq \ j\in[1,n]} u_{[i,j]} - v_{[i,j]} \notin D,$$

gdzie $[i,\, j]$ oznacza $(i, \ldots, j)$ i

$$u_{[i,\,j]} = (u_i, \ldots, u_j)\,.$$

Największą *liczebność* zbioru n-bitowych ciągów unikających zakazanych różnic zdefiniowanych przez zbiór D oznaczymy przez

$$\delta_n\,(D) := \max\{|C| : C \quad \text{unika} \quad D\}\,,$$

gdzie $|C|$ oznacza liczebność zbioru C.

W celu liczbowego scharakteryzowania ograniczeń, które wprowadza zbiór D w teorii informacji wprowadzono pojęcie *pojemności.* Pojemność zbioru D definiujemy jako

$$poj\,(D) := \log_2\left[\lim_{n\to\infty}\left(\delta_n\,(D)\right)^{\frac{1}{n}}\right].$$

Zauważmy, że ma ona tę własność, iż

$$0 \leq poj\,(D) \leq 1.$$

Pojemność pokazuje nam jak bardzo zbiór D jest ograniczający w tym sensie, że im mniejsza pojemność, tym więcej ograniczających zabronionych różnic.

Reasumując pojemność zbioru D jest zdefiniowana jako eksponencjalne tempo wzrostu maksymalnej liczby ciągów, których różnice unikają zbioru D, gdy długość rozpatrywanych ciągów rośnie. Można to zauważyć obserwując zdolność kodu do transmisji mniejszej lub większej ilości informacji dla danej liczby przesyłanych symboli. Głównym celem badania pojemności jest uzyskanie odpowiedzi na pytanie jak osiągnąć najlepszą możliwą szybkość transmisji uwzględniając zabronione różnice wzorców narzucone przez zbiór D.

3.1.2 Przykłady

Za pomocą przykładów zilustrujemy powyższe zagadnienia.

- **Przykład 5** *Najprostszy przypadek* $D = \emptyset$

W tym prostym przypadku, gdzie D jest zbiorem pustym, to nie mamy żadnych zabronionych różnic i liczba $\delta_n\,(D)$ możliwych ciągów bitów o długości n jest równa 2^n co implikuje, że pojemność takiego kodu binarnego bez ograniczeń jest równa $\log_2(2) = 1$.

- **Przykład 6** *Przypadek, gdy* $D = \{-+\}$

W tym przypadku różnica $-+$ jest zabroniona. Poniżej przedstawiliśmy $2-$, $3-$ i $4-$bitowe kody, które unikają D :

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla powyżej przedstawionej sytuacji

$$\delta_2\,(D) = 3,$$
$$\delta_3\,(D) = 5,$$
$$\delta_4\,(D) = 8.$$

Dalszą analizę tego przykładu będziemy kontynuować w następnym podrozdziale.

Podejście oparte na uogólnionym promieniu spektralnym oraz dyskretnej inkluzji liniowej ma charakter uniwersalny. Okazuje się, że w szczególnych przypadkach pojemność D można również wyznaczyć nie odwołując się do wyżej wymienionych pojęć o czym traktuje poniższy

- **Przykład 7** *Przypadek, gdy* $D = \{++, +-\}$

W tym przypadku różnice $++$ i $--$ są zabronione. Poniżej przedstawiliśmy $2-$, $3-$ i $4-$bitowe kody, które unikają D :

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dla powyżej przedstawionego przypadku

$$\delta_2(D) = 2,$$

$$\delta_3(D) = 4,$$

$$\delta_4(D) = 4.$$

Przypatrując się powyższym kodom C_2, C_3 i C_4 warto zauważyć, że co najmniej jedna z każdych dwóch kolejnych sąsiadujących kolumn w C jest stała. Jeżeli jeszcze dodamy, że kody typu

$$C_n = [u_1 0 u_3 0 \ldots 0 u_n]$$

dla n nieparzystych lub

$$C_n = [u_1 0 u_3 0 \ldots u_{n-1} 0]$$

dla n parzystych unikają D, gdzie 0 oznacza kolumnę złożoną z samych zer, a u_i są dowolnymi kolumnami. W efekcie otrzymujemy

$$\delta_n(D) = 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil},$$

gdzie $\lceil x \rceil$ oznacza największą liczbę całkowitą $\leq x$ co oznacza, że

$$poj(D) = 0.5.$$

Warto w tym miejscu wspomnieć, że pojemność zbioru $D = \{++, +-\}$ jest równa pojemności zbioru $D = \{++, +-, --, -+\}$, który oznaczamy $D = \{+, -\}^2$.

Podsumowując dwa powyższe przykłady należy zauważyć, że gdy D nie jest zbiorem pustym, to $\delta_n(D)$ rośnie eksponencjalnie z długością słowa n i jest asymptotycznie równa

$$2^{poj(D)n}.$$

3.1.3 Połączenie z dyskretnymi inkluzjami liniowymi i w szczególności z wspólnym promieniem spektralnym

W tym podrozdziale przedstawimy związek pomiędzy pojemnością kodu i dyskretnymi inkluzjami liniowymi.

Wzorce i zbiory reprezentujące

Wspólny wzorzec, przez który będziemy rozumieli zbiór dwóch słów $\{p, p'\}$ o tej samej długości m, będziemy nazywać zabronionym w zbiorze D, jeżeli

$$p - p' \in D$$

lub

$$p' - p \in D.$$

Przez $W(D)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich wspólnych zabronionych wzorców. Zbiór $R \subseteq \{0,1\}^m$ będziemy nazywać zbiorem *reprezentującym* dla $W(D)$, jeżeli ma część wspólną z każdym elementem $W(D)$. Taki zbiór reprezentujący nazywamy *minimalnym*, jeżeli żaden jego właściwy podzbiór nie jest zbiorem reprezentującym dla $W(D)$. Zbiór wszystkich zbiorów reprezentujących będziemy oznaczać przez $R(D)$.

Spójrzmy na powyższą definicję poprzez przykład 7, gdzie $D = \{++, +-\}$. Dla takiego zbioru D zbiorem wszystkich zabronionych wzorców jest

$$W(D) = \{\{11, 00\}, \{10, 01\}\}.$$

Na podstawie powyższej definicji wszystkie zbiory zawierające co najmniej jeden element z każdego $\{11, 00\}$ i $\{10, 01\}$ to

$$\{11, 10\}, \{11, 01\}, \{00, 10\}, \{00, 01\}, \{11, 00, 10\},$$
$$\{11, 00, 01\}, \{00, 10, 01\}, \{11, 10, 01\}, \{11, 00, 10, 01\}, \ldots.$$

Zatem zbiory minimalne to takie, których żaden właściwy podzbiór nie jest dla nich reprezentujący. Dla przykładu rozpatrzmy zbiór $\{00, 10, 01\}$, który nie jest minimalny, ponieważ zawiera $\{10, 01\}$, który jest zbiorem reprezentującym dla $W(D)$. Naszą rodziną wszystkich zbiorów reprezentujących jest:

$$R(\{++, +-\}) = \{\{11, 10\}, \{11, 01\}, \{00, 10\}, \{00, 01\}\}.$$

Grafy dwudzielne, kaskadowe, ścieżki i zastosowanie wspólnego promienia spektralnego

Graf dwudzielny to uporządkowana trójka (L, P, K) gdzie:

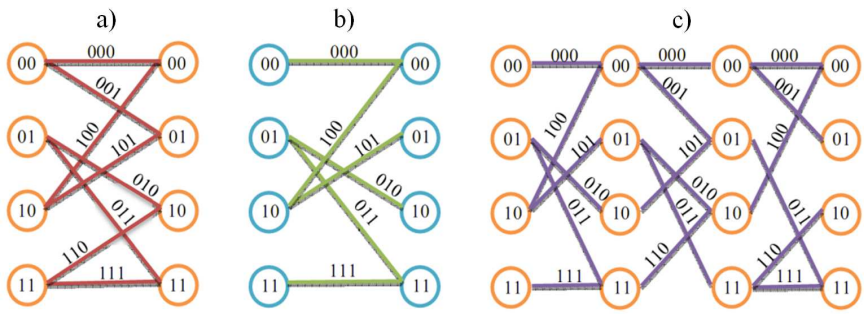
- L: zbiór lewych wierzchołków,
- P : zbiór prawych wierzchołków,
- K : zbiór krawędzi (l, p) łączących lewy wierzchołek l z prawym p.

Graf dwudzielny G_m to taki, że:

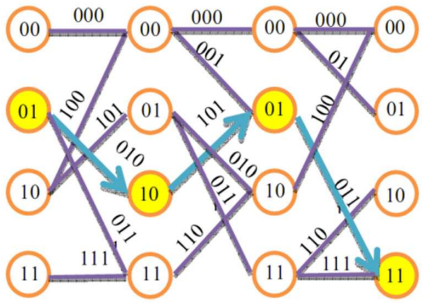
- $L = P = \{0, 1\}^{m-1}$, tzn. wierzchołki są oznakowane $(m-1)$-bitowymi ciągami, zwanym dalej etykietami wierzchołkowymi,
- K takie, że $(l_1, \ldots, l_{m-1})$ jest połączony z $(r_1, \ldots, r_{m-1})$ jeżeli ciąg bitów $(l_2, \ldots, l_{m-1})$ jest równy $(r_1, \ldots, r_{m-2})$. Takie krawędzie są oznaczone m-bitowym ciągiem, który jest połączeniem obu wierzchołków:
$$(l_1, \ldots, l_{m-1}, r_{m-1}) = (l_1, r_1, \ldots, r_{m-1}).$$
i będzie nazywany etykietą krawędziową.

Na rysunku 3.2a zaprezentowano graf G_3.

Ustalmy teraz zbiór $M \subseteq \{0, 1\}^m$ i opiszmy konstrukcję pewnego grafu G_M. Polega ona na usunięciu z grafu G_m krawędzi odpowiadających ciągom z ustalonego wcześniej zbioru M. Dla przykładu na rysunku 3.2b zaprezentowano graf $G_{\{110,001\}}$. Grafy dwudzielne mogą być ułożone kaskadowo. Rozumiemy przez to sytuację, że prawe wierzchołki jednego grafu są jednocześnie lewymi wierzchołkami kolejnego. Taką sytuację przedstawia rysunek 3.2c, gdzie przedstawiono kaskadowo połączone trzy dwudzielne grafy $(\{G_{\{110,001\}}, G_{\{100,111\}}, G_{\{101,010\}}\})$.



Rysunek 3.2: a) graf dwudzielny G_3 , b) graf dwudzielny $G_{\{110,001\}}$, c) kaskadowe grafy dwudzielne $(\{G_{\{110,001\}}, G_{\{100,111\}}, G_{\{101,010\}}\})$.



Rysunek 3.3: Kaskadowe grafy dwudzielne $(\{G_{\{110,001\}}, G_{\{100,111\}}, G_{\{101,010\}}\})$. Niebieskie krawędzie i żółte wierzchołki pokazują ścieżkę z lewej strony grafu do prawej. Startujemy z dwoma bitami 01, a następnie dodajemy za każdym razem po drugim bicie danego wierzchołka. W ten sposób otrzymujemy ciąg bitów 01011. Innymi słowy, każda etykieta krawędziowa 010, 101, 011 jest podsłowem naszego ciągu.

Łącząc w pewien specjalny sposób (szczegółowy opis znajduje się pod rysunkiem 3.3) etykiety wierzchołkowe, począwszy od najbardziej na lewo wysuniętych wierzchołków, a skończywszy na najbardziej na prawo jest możliwym odczytanie słowa bitowego. Interesującą własnością jest, aby opisany ciąg bitów składał się z etykiet krawędziowych. Sytuacja taka została zilustrowana na rysunku 3.3.

Dzięki użyciu grafu typu G_M dla odpowiedniego $M \in R(D)$ jest możliwe uniknięcie użycia pewnego wzorców bitów. Innymi słowy, generujemy tylko ciągi unikające D. Zliczanie liczby ciągów bitów unikających D sprowadza się do zliczenia liczby ścieżek z najbardziej na lewo wysuniętej części do najbardziej na prawo kaskadowego grafu dwudzielnego.

Liczenie liczby ścieżek w grafie jest możliwe dzięki użyciu *macierzy sąsiedztwa*. Graf może być powiązany z macierzą sąsiedztwa A, w której $A_{ij} = 1$, jeżeli wierzchołek i jest połączony z wierzchołkiem j, bądź $A_{ij} = 0$ w przeciwnym razie. Macierz sąsiedztwa dwudzielnego grafu G będziemy oznaczać symbolem A_G.

Bardzo istotne jest to, że gdy mamy do czynienia z grafami kaskadowymi i jesteśmy zainteresowani liczbą ścieżek z najbardziej na lewo wysuniętego wierzchołka i do najbardziej na prawo wysuniętego wierzchołka j to okazuje się, że wystarczy nam poddać analizie iloczyn kolejnych macierzy sąsiedztwa odpowiadających kolejnym grafom dwudzielnym. Wówczas liczba ścieżek z najbardziej na lewo wysuniętego wierzchołka i do najbardziej na prawo wysuniętego wierzchołka j jest równa elementowi (i, j) wspomnianego iloczynu. Natomiast całkowita liczba ścieżek z lewej części do prawej jest wyrażona jako suma wszystkich elementów macierzy będącej wynikiem tego iloczynu.

Dzięki tej własności możemy wyrazić liczbę ścieżek z lewej do prawej części grafu jako normę macierzy A:

$$\|A\|_f = \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}| \,.$$

Można udowodnić, że nie jest to norma indukowana przez żadną normę wektorową [129].

Podsumowując interesujący problem z teorii kodowania dochodzimy do następującej konkluzji. Dla zadanego zbioru zabronionych różnic D zdefiniujmy zbiór

$$\Sigma\,(D) := \{A_{G_M} : M \in R\,(D)\}\,.$$

Wówczas znalezienie kolejności grafów dwudzielnych prowadzącego do maksymalnej liczby ścieżek jest równoważne znalezieniu takiego ułożenia macierzy A_{G_M}, które odpowiada maksymalnej wartości normy $\|\cdot\|_f$.

Ponumerujmy macierze ze zbioru

$$\Sigma\,(D) := \{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$$

gdzie l jest liczbą wszystkich zbiorów reprezentujących. Następnie niech $\sigma : N \to \{1, \ldots, l\}$ i rozważmy ciąg macierzowy $(X_i)_{i=0,1,\ldots}$ określony następująco

$$X_{i+1} = X_i \cdot A_{\sigma(i)} \;\;,\;\; X_1 = A_{\sigma(0)}$$

Ciąg $(X_i\, x_0)_{i\in\mathbb{N}}$ jest trajektorią $DLI\,(\Sigma)$.

Jak już wiadomo pojemność zbioru D wyraża się następującym wzorem

$$poj\,(D) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \delta_n\,(D)}{n}. \tag{3.1}$$

W pracy [197] pokazano jak można przedstawić kody jako iloczyny macierzy. Autorzy tej pracy skonstruowali dla dowolnego zbioru D zabronionych różnic skończony zbiór $\Sigma\,(D)$ dla którego

$$\delta_{m-1+n} = \max\left\{\|A_1 \ldots A_n\| : A_i \in \Sigma\,(D)\right\}. \tag{3.2}$$

Z równości (3.1) i (3.2) otrzymujemy

$$poj\,(D) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \delta_n\,(D)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \delta_{m-1+n}\,(D)}{m-1+n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 \max_{A_i\in\Sigma} \|A_1 \ldots A_n\|}{n} = \log_2 \lim_{n\to\infty} \max_{A_i\in\Sigma} \|A_1 \ldots A_n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Liczba logarytmowana w ostatniej równości jest wspólnym promieniem spektralnego Σ. To implikuje, że pojemność kodu unikającego D jest dana następującym wzorem:

$$poj\,(D) = \log_2 \rho\,(\Sigma\,(D)).$$

Przykłady

- $D = \{-+\}$

  Poddajmy teraz analizie występujący już wcześniej zbiór zabronionych różnic $D = \{+-\}$. Zbiorem zabronionych par jest:

  $$W(D) = \{\{01, 10\}\}.$$

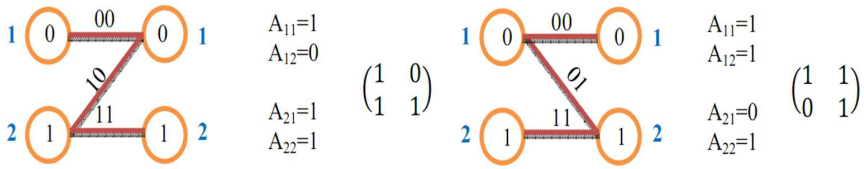
  Zbiorem wszystkich minimalnych zbiorów reprezentujących dla powyższego $W(D)$ jest:

  $$M(D) = \{\{01\}, \{10\}\},$$

  natomiast:

  $$\Sigma(D) = \{G_{\{01\}}, G_{\{10\}}\}.$$

  Grafy $G_{\{01\}}$i $G_{\{10\}}$ oraz ich macierze sąsiedztwa zostały przedstawione na rysunku 3.4.



Rysunek 3.4: Grafy dwudzielne $G_{\{10\}}$ i $G_{\{01\}}$ oraz ich macierze sąsiedztwa.

Dla naszego przykładu zbiór $\Sigma(D)$ dwóch macierzy (2×2) jest następujący:

$$\Sigma\,(D) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \right\},$$

natomiast wspólny promień spektralny jest równy $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ [257]. Ostatecznie pojemność kodu unikającego $D = \{-+\}$ wynosi

$$poj(D) = \log_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0.6942.$$

- $D = \{+-0\}$

  Jako drugi przeanalizujemy zbiór zabronionych różnic $D = \{+-0\}$. Zbiorem zabronionych par jest:

$$W(D) = \{\{101, 011\}, \{100, 010\}\}.$$

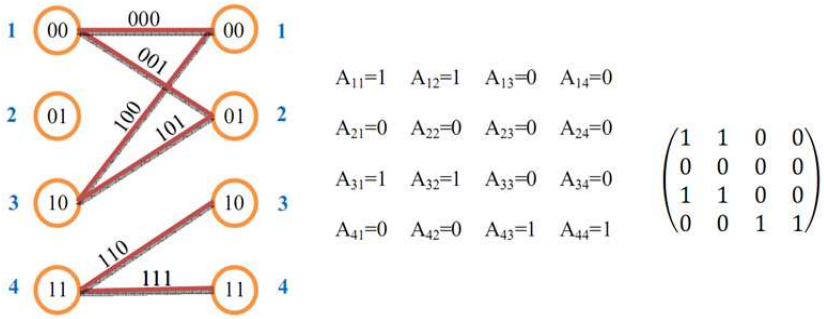
  Zbiorem wszystkich minimalnych zbiorów reprezentujących dla powyższego $W(D)$ jest:

$$R(D) = \{\{101, 100\}, \{011, 100\}, \{101, 010\}, \{011, 010\}\}$$

  natomiast:

$$\Sigma(D) = \{G_{\{101,100\}}, G_{\{011,100\}}, G_{\{101,010\}}, G_{\{011,010\}}\}.$$

  Jeden z czterech grafów ($G_{\{101,010\}}$) oraz jego macierz sąsiedztwa zostały przedstawione na rysunku 3.5.



Rysunek 3.5: Graf dwudzielny $G_{\{011,010\}}$.

  Ostatecznie zbiór $\Sigma(D)$ czterech macierzy (4×4) jest następujący:

$$\Sigma(D) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

  natomiast wspólny promień spektralny wynosi 1.618, który jest jednocześnie promieniem spektralnym trzeciej macierzy. W związku z tym pojemność kodu unikającego $D = \{+-0\}$ma dokładnie taką samą wartość, jak w przykładzie poprzednim

$$\log_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \approx 0.6942.$$

3.2 Współrzędne agentów autonomicznych

W tej części pracy przedstawimy zastosowanie dyskretnych inkluzji liniowych w całkowicie innej dziedzinie niż poprzednio opisanej.

Systemom wieloagentowym (ang. *Multi Agents System*) poświęcono w literaturze bardzo wiele miejsca. Lista ciekawych publikacji na ten temat jest tak długa, że ograniczymy się jedynie do czterech najbardziej reprezentatywnych prac [143], [149], [202], [257]. W tych publikacjach można odnaleźć wszystkie szczegóły wystarczające do pokazania związków między systemami wieloagentowymi i dyskretnymi inkluzjami liniowymi. Zanim przejdziemy do szczegółowego omówienia wspomnianego połączenia poświęcimy kilka zdań podstawowym definicjom.

Programowanie agentowe jest kolejnym poziomem abstrakcji programowania, wyższym od abstrakcji programowania obiektowego i polega na tworzeniu agentów (ang. *Software Agent*). Aby w pełni wykorzystać własności agentów należy ich połączyć w zespoły nazywane systemami wieloagentowymi (ang. *Multi Agents System*). Na początku jednak należy sobie zadać pytanie czym jest sam agent. Nie ma jasno określonych standardów, a co za tym idzie, nie ma zgodności co do definicji agenta. Patrząc na zastosowanie agenta możemy go zdefiniować jako jednostkę:

- działającą w pewnym środowisku,

- posiadającą umiejętność komunikacji z innymi agentami i/lub użytkownikiem,
- monitorującą swoje otoczenie, a co za tym idzie zdolną do postrzegania i reagowania na zmiany środowiska,
- autonomiczną, czyli zdolną do podejmowania samodzielnych decyzji.

W dalszej części pracy będziemy korzystać z następujących

Definicja 8 *Graf skierowany jest uporządkowaną parą* (W, K) *spełniającą następujące warunki:*

- W *jest skończonym, niepustym zbiorem, którego elementami są wierzchołki,*
- K *jest zbiorem uporządkowanych par nazywanych krawędziami skierowanymi, który jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego* $W \times W$ *takim, że*

$$\bigwedge_{a \in W} (a, a) \notin K,$$

Krawędź $k = (a, b)$ będziemy nazywać *skierowaną* jeżeli ma początek w wierzchołku a i koniec w b. Krawędź $k = (a, b)$ nazywamy nieskierowaną, gdy nie interesuje nas, w którym wierzchołku ma ona swój początek.

Definicja 9 *Dla danego grafu skierowanego* (W, K) *i niepustego podzbioru wierzchołków* $V \subseteq W$ *sąsiedztwem* $S(V, K)$ *jest zbiór wierzchołków* $k \in W \backslash V$, *dla których istnieje wierzchołek* $w \in V$ *taki, że* $(k, w) \in K$.

Definicja 10 *Ważonym grafem skierowanym nazywamy trójkę* (W, K, c), *gdzie* (W, K) *jest grafem skierowanym, natomiast* $c : K \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *jest funkcją przypisującą nieujemną wagę* c_{kw} *każdej krawędzi skierowanej* (k, w).

Powyższe definicje pozwalają nam postrzegać agentów w systemie wieloagentowym jako krawędzie skierowane. Krawędziami nieskierowanymi będą kanały komunikujące agentów. Natomiast sąsiedztwem każdego agenta będą pozostali agenci potrafiący wysłać do niego informacje.

Ewolucja takiego układu zależy oczywiście od wyboru algorytmu poruszania i komunikowania agentów. Poniżej zaprezentujemy sposób opisu opierający się na modelu Visecka ([143], [259]), który z kolei jest liniową aproksymacją równania Kuramoto ([161], [251]):

$$\dot{\theta}_a = w_a + \sum_{b=1}^{N} K_{ab} \sin(\theta_b - \theta_a), \; a = 1, \ldots, N.$$

Zainteresowanych odsyłamy do wymienionej wcześniej literatury oraz do publikacji [252] traktującej o zastosowaniach ostatniego równania.

Rozpatrując skończoną liczbę n autonomicznych agentów na płaszczyźnie otrzymujemy n poruszających się po niej z ustaloną prędkością, lecz w różnych kierunkach punktów i ponumerowanych od 1 do n. Należy zauważyć, że wartość kąta $\theta_a(t)$ określającego ruch agenta a względem osi OX zawiera się w przedziale $[0, 2\pi]$.

Cały układ ewoluuje w dyskretnych odstępach czasu. Agent przemieszcza się w każdym kroku zgodnie ze swoim wektorem prędkości, którego kierunek w następnym kroku może być zmieniony poprzez obliczenie średniej ważonej jego własnego kierunku i kierunków jego sąsiadów. Niech $S_a(t)$ oznacza sąsiedztwo a-tego agenta w chwili t. Ostatecznie, kierunek ruchu agenta można wyrazić za pomocą poniższego równania

$$\theta_a(t+1) = \frac{\theta_a(t) + \sum_{b \in S_a(t)} c_{ba}(t)\, \theta_b(t)}{1 + \sum_{b \in S_a(t)} c_{ba}(t)}, \tag{3.3}$$

gdzie $c_{ba}(t)$ oznacza wagę połączenia między węzłami a i b w chwili t.

Równanie (3.3) możemy zapisać w następującej postaci:

$$\theta(t+1) = A_t\, \theta(t),$$

gdzie

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_n(t) \end{bmatrix},$$

a macierz A_t dana jest następującym wzorem:

$$(A_t)_{a,k} = \begin{cases} \frac{1}{1+\sum_{b\in S_a(t)} c_{ba}(t)} & \text{jeżeli} \quad k = a \\ \frac{c_{ka}}{1+\sum_{b\in S_a(t)} c_{ba}(t)} & \text{jeżeli} \quad (k,a) \in K(t) \\ 0 & \text{w} \quad \text{pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jeżeli zdefiniujemy

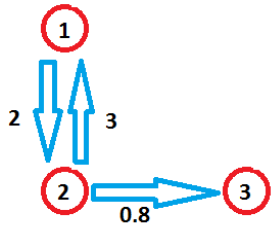
$$\Sigma = \{A_t : t \in \mathbb{N}\}$$

to dochodzimy do wniosku, że każdy $(\theta(t))_{t\in\mathbb{N}}$ jest trajektorią $DIL(\Sigma)$.

Poniżej przedstawiamy kilka przykładów dla lepszego zobrazowania przedstawionych dotąd informacji.

Przykład 11 *Załóżmy, że mamy trzech agentów. Schemat połączeń można zobrazować na dwa sposoby:*

- *za pomocą grafu ważonego co przedstawia rysunek 3.6*



Rysunek 3.6: Graf ważony

- *przy użyciu macierzy* 3×3*, gdzie przyjęto umowę, że agent* a *łączy się z agentem* b *z wagą* c*, jeżeli wartość* c *znajduje się w* a*-tym wierszu* b*-tej kolumnie.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zasada ewolucji układu w chwili t jest następująca:

$$\theta_1(t+1) = \frac{1\cdot\theta_1(t) + 3\cdot\theta_2(t) + 0\cdot\theta_3(t)}{1+3} = \frac{\theta_1(t) + 3\cdot\theta_2(t)}{4},$$

$$\theta_2(t+1) = \frac{2\cdot\theta_1(t) + 1\cdot\theta_2(t) + 0\cdot\theta_3(t)}{1+2} = \frac{2\cdot\theta_1(t) + \theta_2(t)}{3},$$

$$\theta_3(t+1) = \frac{0\cdot\theta_1(t) + 0.8\cdot\theta_2(t) + 1\cdot\theta_3(t)}{1+0.8} = \frac{0.8\cdot\theta_2(t) + \theta_3(t)}{1.8},$$

co można przedstawić w następującej postaci macierzowej:

$$\theta(t+1) = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{0.8}{1.8} & \frac{1}{1.8} \end{bmatrix} \cdot \theta(t).$$

W rozważanym przykładzie funkcje $c_{ba}(t)$ (wagi połączenia między węzłami a i b w chwili t) są stałe. Przemieszczający się agent może powodować, że w każdym kroku ewolucji graf, a co za tym idzie elementy macierzy A_t, która jest macierzą stochastyczną (jest kwadratowa; jej elementy są nieujemne i jednocześnie dodatnie na głównej przekątnej; wszystkie jej elementy w wierszu sumują się do 1) mogą się zmieniać. To natomiast oznacza, że nie będziemy mieć do czynienia z przypadkiem stacjonarnego dyskretnego układu liniowego tylko z niestacjonarnym.

Przykład 12 *W przeciwieństwie do przykładu poprzedniego teraz rozważymy przykład systemu złożonego również z 3 agentów, lecz z zmieniającymi się między nimi połączeniami. Rozpatrzmy najprostszy niestacjonarny przypadek, gdy mamy dwie macierze X i Y ewolucji układu:*

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dla macierzy X funkcje ewolucji kątów jakie tworzą kierunki ruchu agentów z osią odciętych w chwili t są następujące:

$$\theta_1(t+1) = \frac{1 \cdot \theta_1(t) + 0 \cdot \theta_2(t) + 1 \cdot \theta_3(t)}{1+1} = \frac{\theta_1(t) + \theta_3(t)}{2},$$

$$\theta_2(t+1) = \frac{2 \cdot \theta_1(t) + 1 \cdot \theta_2(t) + 2 \cdot \theta_3(t)}{1+2+2} = \frac{2 \cdot \theta_1(t) + \theta_2(t) + 2 \cdot \theta_3(t)}{5},$$

$$\theta_3(t+1) = \frac{0 \cdot \theta_1(t) + 3 \cdot \theta_2(t) + 1 \cdot \theta_3(t)}{1+3} = \frac{3 \cdot \theta_2(t) + \theta_3(t)}{4},$$

natomiast dla macierzy Y prawdziwe są poniższe równości:

$$\theta_1(t+1) = \frac{1 \cdot \theta_1(t) + 3 \cdot \theta_2(t) + 1 \cdot \theta_3(t)}{1+3+1} = \frac{\theta_1(t) + 3 \cdot \theta_2(t) + \theta_3(t)}{5},$$

$$\theta_2(t+1) = \frac{2 \cdot \theta_1(t) + 1 \cdot \theta_2(t) + 2 \cdot \theta_3(t)}{1+2+2} = \frac{2 \cdot \theta_1(t) + \theta_2(t) + 2 \cdot \theta_3(t)}{5},$$

$$\theta_3(t+1) = \frac{0 \cdot \theta_1(t) + 0 \cdot \theta_2(t) + 1 \cdot \theta_3(t)}{1} = \frac{\theta_3(t)}{1}.$$

Zatem macierze ewolucji układu w przypadku zastosowania sposobów połączeń między agentami opisanych odpowiednio przez macierze X i Y są następujące:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla zbioru $\Sigma = \{A, B\}$ układ ewoluuje zgodnie z dyskretną inkluzją liniową (2.7).

Ciekawym pytaniem jest czy wszyscy agenci będą podążać w tym samym kierunku. Pytanie to związane jest ze stabilnością dyskretnej inkluzji liniowej. Jednym z możliwych podejść do tego pytania są zaproponowane w dalszej części pracy charakterystyki liczbowe.

3.3 Układy z losowymi skokami parametrów jako dyskretne inkluzje

W tym podrozdziale opiszemy w jaki sposób układy ze skokowo zmieniającymi się parametrami mogą być postrzegane jako dyskretne inkluzje.

Wiele układów sterujących jest opartych na modelu matematycznym procesu, który ma być kontrolowany. Istotne jest by ten model opisywał z względną dokładnością zachowanie kontrolowanego procesu. W efekcie kontroler będzie wykonywać prawidłowo zaimplementowany rzeczywisty proces. Im dokładniej opiszemy występujące w procesie niepewności tym lepszy model systemu rzeczywistego otrzymamy. Należy być także świadomym, że jednym z głównych zadań układu sterującego jest zdolność do akceptowalnego zadziałania w obecności nagłych zmian w dynamice układu, które mogą być spowodowane, np. nagłymi zakłóceniami ze strony środowiska, awarią komponentu układu, zmianami w połączeniu między podukładami czy też nagłymi zmianami punktu pracy dla obiektu nieliniowego. Jeżeli mamy do czynienia ze zmianą mającą niewielki wpływ na zachowanie układu to klasyczna analiza czułości powinna zapewnić wystarczające oszacowanie skutków. Z drugiej strony, gdy zmiany spowodowane przez te wahania mogą znacząco wpłynąć na dynamikę układu to zalecanym jest model stochastyczny ukazujący względne prawdopodobieństwo różnych możliwych scenariuszy. przykłady sytuacji, gdzie występują nagłe zmiany można odnaleźć, np. w systemach sterowania obiektami latającymi czy też w sterowaniu odbiornikiem promieniowania słonecznego.

Układy z losowymi przełączeniami-bo o nich będzie traktował ten rozdział-są modelem złożonych obiektów hybrydowych [173], [180], [246] i składają się ze skończonej liczby podukładów, które są przełączane zgodnie ze zmianą w czasie trybu pracy. W układach z przełączeniami ciągłe zmienne stanu (nazywane

dalej stanami) i dyskretne zmienne stanu (zwane dalej modami lub trybami pracy) współistnieją i zależą od siebie. Analiza i synteza układów z przełączeniami jest bardzo często dużo łatwiejsza niż samych oryginalnych obiektów hybrydowych. Ciągi przejść między modami będziemy dalej nazywać ciągami przełączającymi. Układ ze skokowo zmieniającymi się parametrami (ang. Markovian jump linear system) jest układem, którego parametry zmieniają się zgodnie ze stanem skończenie-stanowego łańcucha Markowa i w typowy sposób powstają w kontekście układów sterowania np. gdy sprzężenie zwrotne jest w sposób losowy zrywane.

Układy z przełączeniami znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach, np. w układach ze zmiennym okresem próbkowania [167], [250], układach nieliniowych [23], [47], [56], sterowaniu adaptacyjnym [113], [126], [206], układach asynchronicznych [157], systemach elektroenergetycznych [245], [264], systemach rozmytych [256], przetwarzaniu sygnałów [62], [197], układach nadzorujących [204], sterowaniu przez sieć [48], [168], [275], sieciach rozproszonych [143], [220], układach biologicznych [5], [144]. Pozycjami w literaturze, w których także omawia się zastosowanie układów z przełączeniami są [99], [171], [172], [175], [253], [254].

3.3.1 Problem śledzenia celu

My zastosowanie wspomnianych powyżej układów przedstawimy na przykładzie problemu śledzenia celu.

Z roku na rok liczba obsługiwanych pasażerów przez lotniska na całym świecie rośnie. Potwierdzeniem tych słów jest plan by w 2020 roku pod Pekinem powstał ogromny hub lotniczy, który rocznie obsłuży 200 milionów pasażerów. Na pustyni niedaleko Dubaju powstaje port lotniczy o powierzchni 14 milionowego Paryża, który docelowo będzie w stanie rocznie obsłużyć 160 milionów pasażerów. Przybywa również prywatnych samolotów, helikopterów oraz innych obiektów latających. Ten ciągły przyrost powoduje konieczność tworzenia coraz bardziej zaawansowanych algorytmów śledzących dane obiekty. Ma to zastowanie np. na lotniskach-zwłaszcza tych, które na chwilę obecną obsługują prawie 80 milionów pasażerów rocznie (w Atlancie, Pekinie, Londynie) co oznacza, że średnio w ciągu doby ląduje bądź startuje 3000 samolotów czyli średnio 2 na minutę. Zadaniem kontroli ruchu lotniczego jest zapewnienie bezpiecznych separacji (odstępu w pionie i w poziomie) między samolotami, korzystającymi z przestrzeni kontrolowanej. Na to zadanie składa się udzielanie pilotom dyrektyw dotyczących zmian kursu i wysokości (tzw. wektorowanie) oraz udzielanie informacji o sytuacji w powietrzu, warunkach meteorologicznych jak również o ewentualnych ograniczeniach. Bezwzględnym warunkiem utrzymania separacji jest właściwa identyfikacja poszczególnych statków powietrznych w przestrzeni i utrzymywanie aktualnej informacji o ich stanie lotu, kursie, wysokości oraz o dalszej trasie.

Inne zastosowanie wspomnianego algorytmu śledzącego można odnaleźć w działaniach wojskowych. Tutaj problem polega na tym, że wiele obiektów latających potrafi w bardzo krótkim odstępie czasu zmienić trajektorię lotu przez co jest w stanie uniknąć np. zestrzelenia.

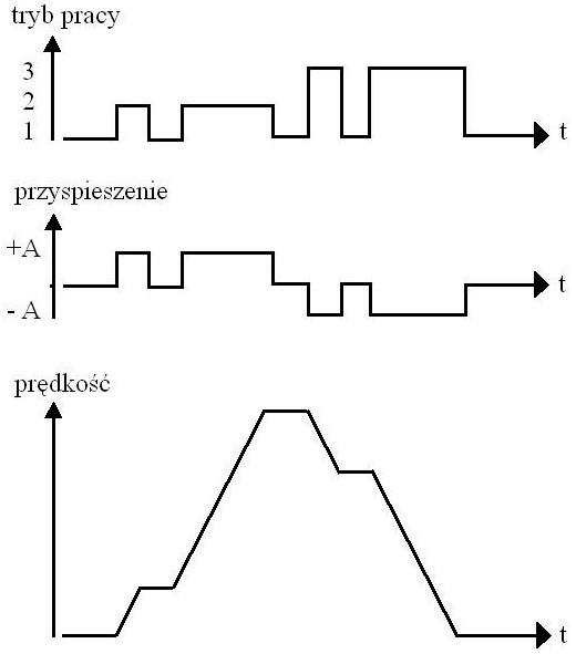
Często występujące na pewnych obszarach zakłócenia radiolokacyjne sygnałów nie sprzyjają śledzeniu wielu obiektów latających. Jednakże, zdecydowanie większym problemem są nagłe zmiany przyspieszenia obiektów.

Budując nasz model musimy w pierwszym kroku oprzeć go na równaniach różniczkowych ruchu w przestrzeni $\mathbb{R}^s$, gdzie występują takie zmienne jak np. kurs, prędkość, położenie poziome, kąt przechylenia oraz trasa lotu. Zakładając, że statek powietrzny leci z prawie stałym przyspieszeniem i kątem przechylenia możemy jego trajektorię podzielić na następujące pasma, które jednocześnie są tzw. trybami pracy:

- lot wznoszący po wystartowaniu,
- skręt,
- lot przyśpieszony,
- lot ze stałą prędkością,
- podejście do lądowania.

Przejścia pomiędzy tymi trybami pracy są dyskretne i w znacznym stopniu zależą od decyzji pilota, na które wpływ mają np. panujące warunki pogodowe, wskazania kontrolera lotu, odczyty z urządzeń pomiarowych wskazujących np. ilość zużytego paliwa. Współczynniki modelu dynamicznego lub nawet sam model muszą być dostosowane do każdego trybu lotu wybranego przez pilota.

W przypadku wspomnianego zagadnienia wojskowego problem wygląda nieco inaczej. Tutaj obiekty szybko manewrujące i jednocześnie unikające prześladowcy charakteryzowane są przez częste, duże,



Rysunek 3.7: Przykład zmian przyspieszenia.

nieregularne i w pewnym sensie irracjonalne zmiany przyśpieszenia co przedstawia rysunek (3.7). Z punktu widzenia śledzącego, te przejścia są postrzegane jako losowe co implikuje, że mamy do czynienia ze stochastycznym modelem hybrydowym z ciągłą dynamiką zakłócaną przez losowe przejścia zmiennej trybu lotu.

Innym przykładem wojskowego zastosowania z losowymi przejściami zmiennych dyskretnych są urządzenia wyposażone w różne czujniki, szeroko rozumiane systemy wizyjne bądź kamery termowizyjne. Tutaj zadanie sprowadza się np. do rozróżniania celu od innych obiektów czy klasyfikowania jego typu. Ta informacja zostaje opisana przez zmienną dyskretną, których losowe przejścia wpływają na ciągłe zmienne lokalizacji celu poprzez zmianę dynamiki.

W modelu hybrydowym występuje wektor stanu, który jest z przestrzeni $\mathbb{R}^s$ oraz dyskretny tryb pracy, który należy do skończonego zbioru S. Dla części euklidesowej dynamiki procesu wprowadźmy zmienną urządzenia $x \in \mathbb{R}^s$ (stan urządzenia) i ograniczmy się do układu skończenie wymiarowego, gdzie wejściem (wektorem sterowania) będzie $u \in \mathbb{R}^m$. Dla naszego problemu śledzenia celu stan urządzenia x zawiera zmienne położenia celu (pozycję i prędkość) natomiast u orientację obiektu śledzącego. Dyskretne tryby pracy danego modelu $r_k \in S = \{1, 2, \ldots, W\}$ charakteryzują np. występowanie manewrów bądź klasyfikują cel (wróg czy przyjaciel).

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną wyposażoną w niemalejącą rodziną σ-ciał $\Sigma_t \subset \Sigma$. Zmienne euklidesowe x, u podlegają przedziałami deterministycznemu modelowi

$$x(k+1) = f_{r_k}(x, u, k) \tag{3.4}$$

gdzie f jest analitycznym odwzorowaniem z $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m \times S$ w $\mathbb{R}^s$. Wyróżniającą się własnością (3.4) jest zależność dynamiki układu od trybu pracy. Jesteśmy zainteresowani sytuacją, gdzie przejścia między trybami pracy są losowe (np. wymijające manewry). Aby opisać dynamikę skoku wprowadzimy tzw. wskaźnik trybu pracy $\phi_k \in \mathbb{R}^W$ ze współczynnikami $\phi_{ki} = 1$, gdy $r_k = i$ oraz $\phi_{ki} = 0$ w przeciwnym wypadku dla $i = 1, \ldots, W$. Ponieważ ten wskaźnik jest przedziałami stały, więc wygodnym dla nas modelem przejść między trybami pracy będzie stacjonarny łańcuch Markowa $(r_k)_{k \in N}$ opisany macierzą prawdopodobieństw przejść

$$P = [p_{ij}], \quad i, j = 1, \ldots, W,$$

gdzie

$$p_{ij} = P(r(k+1) = i \,|\, r(k) = j).$$

Stacjonarność oznacza, że prawdopodobieństwo po prawej stronie nie zależy od chwili czasu k. Innymi słowy jest ono takie same dla każdej chwili.

W wielu sytuacjach przedziałami deterministyczny model stanu (3.4) (wcześniej opisana sytuacja z zakłóceniami radiolokacyjnymi) zawiera szeroko-pasmowe zakłócenia, np. dodane do pomiaru położenia celu. Mimo, że bieżący tryb pracy $r(k)$ często (zwłaszcza w problemach inżynieryjnych) nie jest znany w każdej chwili k to są znane przypadki, gdzie wiedza o losowych zmianach w strukturze układu jest bezpośrednio dostępna. Takim przykładem może być instalacja nieliniowa, dla której liczba punktów pracy jest skończona, a każdy z nich jest opisany przez odpowiadający mu zlinearyzowany model. Dynamika takiego układu jest reprezentowana przez nagłe zmiany powodujące przełączanie się pomiędzy punktami pracy. W teorii sterowania układami nieliniowymi szerokie zastosowanie ma kontroler harmonogramujący wzmocnienie (ang. gain scheduling controller), w którym używa się kilku regulatorów, z których każdy zapewnia satysfakcjonujące sterowanie dla różnych punktów pracy układu.

Istotna w dalszych rozważaniach będzie własność Markowa pary (stan x, tryb pracy r). Patrząc na równanie (3.4) dla ustalonych wartości r_k otrzymamy rodzinę W układów dynamicznych, pomiędzy którymi następują przełączenia zgodnie ze stanem procesu $r(k)$ dla $i = 1, \ldots, W$.

Jeżeli teraz za $\bar{D}$ weźmiemy zamiast (2.8) następujący zbiór wszystkich trajektorii łańcucha Markowa

$$\bar{D} = \left\{ r = (r(0), r(1), \ldots) : 1 \leq r(i) \leq m \quad , \quad p_{r(i-1)\, r(i)} > 0 \quad , i = 1, 2, \ldots \right\} \tag{3.5}$$

wówczas zbiór równań (3.4) stanie się dyskretną inkluzją (2.6).

3.3.2 Elektrownia słoneczna

W tym podrozdziale rozpatrzymy kolejną sytuację, gdzie hybrydowy model ze skokowo zmieniającymi się parametrami występuje. Zobaczymy na przykładzie elektrowni słonecznej jak losowe środowisko manifestuje swoją obecność poprzez nagłe zmiany parametrów modelu prowadząc do stochastycznych wzajemnych relacji pomiędzy ciągłymi i dyskretnymi zmiennymi.

Planeta, na której żyjemy oraz inne planety i ciała niebieskie krążą wokół Słońca będącego centralną gwiazdą Układu Słonecznego. Jest ono najjaśniejszym obiektem na niebie i stanowi główne źródło energii docierającej do Ziemi. Dzisiejsza technologia, oprócz wykorzystania energii wiatrowej czy paliw kopalnych jakimi są ropa oraz węgiel pozwala wykorzystywać energię promieniowania słonecznego do produkcji energii elektrycznej. Można to uczynić na dwa główne sposoby poprzez:

- konwersję fotowoltaniczną, czyli zamieniać energię promieniowania słonecznego bezpośrednio w energię elektryczną w ogniwach fotowoltanicznych zbudowanych najczęściej z germanu (Ge), krzemu (Si) lub selenu (Se). Ponieważ wielkość uzyskiwanego w ten sposób napięcia z jednego tylko ogniwa wynosi przeważnie $0,5$ $[V]$ to łączy się je szeregowo w celu podwyższenia napięcia i równolegle w celu zwiększenia mocy. Efektem jest powstanie baterii słonecznej. Jedną z największych na świecie tego typu instalacji jest plantacja baterii fotowoltanicznych zlokalizowana w miejscowości Pocking w Bawarii (rysunek 3.8) kosztem 40 mln euro. Zajmuje powierzchnię 32 $[ha]$ i osiąga moc 10000 $[kW]$ co pozwala na zaopatrzenie w energię 3300 gospodarstw domowych. Mimo, że wspomniane ogniwa nie mogą konkurować od strony ekonomicznej oraz pod względem wydajności z tradycyjnymi formami wytwarzania energii elektrycznej to jednak znalazły szereg innych zastosowań, np. są powszechnie wykorzystywane do zaopatrywania w prąd stacji kosmicznych i sztucznych satelitów.

Rysunek 3.8: Największa na świecie podłączona do sieci elektrownia z ogniwami fotowoltanicznymi będąca jednocześnie miejscem wypasu owiec w niemieckiej miejscowości Pocking w Bawarii. Źródło: http://www.martin-bucher.de

- konwersję fototermiczną, która pozwala zamieniać energię promieniowania słonecznego w ciepło, które z kolei jest wykorzystywane do wytworzenia pary potrzebnej do napędzania turbiny wprawiającej w ruch prądnice elektryczne. Słoneczne elektrownie cieplne (thermal solar systems) są uważane za jedne z najbardziej perspektywicznych i alternatywnych dla paliw kopalnych źródeł energii. Najczęściej spotykanymi koncepcjami są układy:

  - rynnowe (paraboliczne)-jak sama nazwa wskazuje są to długie rynny powlekane wewnątrz srebrem bądź polerowanym aluminium, wzdłuż których biegnie próżniowa szklana rura ograniczająca straty ciepła. Wewnątrz niej znajduje się rurka wypełniona przeważnie olejem. To na niej właśnie skupiają się odbite promienie słoneczne podgrzewając w ten sposób olej do temperatury nawet 400° $[C]$ używany następnie do produkcji pary wodnej. Najczęściej rynny ustawia się wzdłuż osi północ-południe zapewniając w ten sposób możliwość zmiany kąta nachylenia wzdłuż osi wschód-zachód by podążać za ruchem słońca. Opisana technologia wydaje się być najbardziej perspektywiczną ze względu na najniższe koszty i jednocześnie najwyższe moce. przykładem takiej farmy słonecznej jest Nevada Solar One w Stanach Zjednoczonych (rysunek 3.9) mająca moc nominalną 64 $[MW]$ i produkująca rocznie energię elektryczną na poziomie 134 $[GWh]$ zaspokajając potrzeby energetyczne ponad 14000 gospodarstw. Lokalizacja stacji jest związana z bliskością sieci energetycznej, średnimi warunkami wiatru, dostępem do wody, odpowiednimi warunkami morfologicznymi (płaskość terenu) oraz przede wszystkim z doskonałym napromieniowaniem słonecznym przez 320 dni w ciągu roku. Nevada Solar One składa się z 760 kolektorów o długości 100 $[m]$ każdy oraz powierzchnią równą 470 $\left[m^2\right]$.

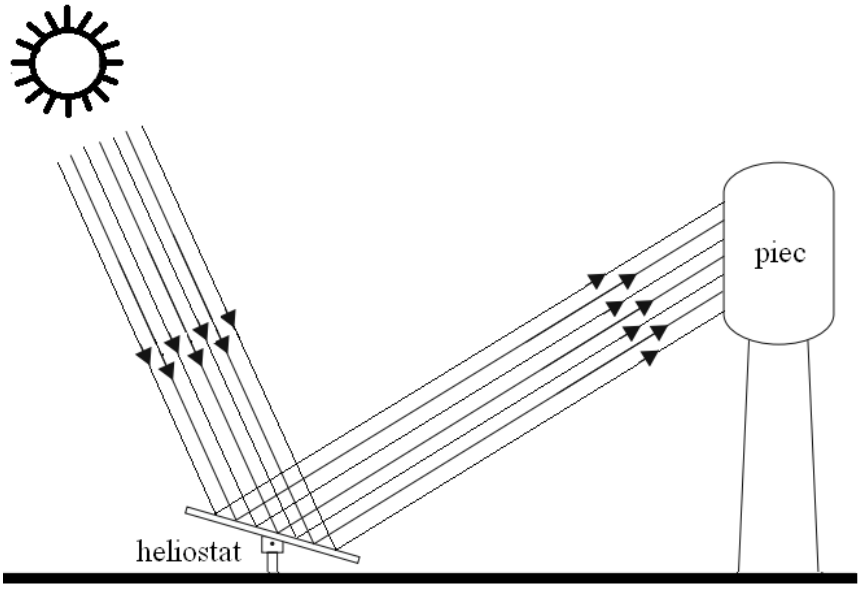
Rysunek 3.9: Elektrownia Nevada Solar One w pobliżu Las Vegas jako przykład układu parabolicznego.

  - luster z silnikiem cieplnym (silnik Stirlinga)-model cichego silnika z 1816 roku, bez wydechu i rozrządu, który zamienia energię cieplną na mechaniczną, ale bez procesu wewnętrznego spalania jak w tradycyjnym silniku spalinowym. Do rozpoczęcia pracy należy tylko dostarczyć do niego ciepło z zewnątrz a takim źródłem są skupione przez układ luster promienie słoneczne. Silnik jest napędzany generatorem elektrycznym tworząc tym samym elektrownię co przedstawia rysunek 3.10.
  - luster z centralną wieżą. Ruchome lustra, zwane dalej heliostatami są tak zamontowane, że ich kontrolowany ruch pozwala odbijać promienie słoneczne stale w jeden punkt–umieszczony na szczycie wieży piec (3.11).Ten z kolei jest wypełniony substancją posiadającą dobre parametry gromadzenia ciepła, np. ciekłym sodem. Dzięki temu elektrownia może pracować jeszcze przez kilka godzin po zachodzie słońca. Dalszy proces technologiczny jest taki sam jak w konwencjonalnej elektrowni, gdzie woda jest przemieniana w tzw. przegrzaną parę (ang. superheated steam), która z kolei napędza parę urządzeń jakimi są turbina i generator. Instalacja taka pozwala uzyskiwać bardzo wysokie temperatury rzędu 3000° $[C]$. przykłady takich elektrowni znajdują się w Daggett w Kalifornii z 1926 (3.12a) o mocy 10 $[MW]$) oraz w Hiszpanii (okolice Sevilli, PS10 mająca 624 lustra, moc 11 $[MW]$ oraz PS20 o 1255 lustrach, moc 20 $[MW]$) (rysunek 3.12b).

To właśnie elektrownia słoneczna z centralną wieżą posłuży nam za przykład układu ze skokowo zmieniającymi się parametrami.

Jednym z głównych wyzwań dla projektantów takiej elektrowni było osiągnięcie dokładnej regulacji temperatury pary w piecu, która jest głównym parametrem wynikowym, a jej wartość powinna być utrzymywana blisko wartości nominalnej. Dodatkowym utrudnieniem była wielkość przepływu wody zasilającej (ang. feedwater), która musiała zapobiec zbyt wysokiej temperaturze metalu by nie dochodziło

Rysunek 3.10: Przykład układu luster z silnikiem cieplnym (silnik Stirlinga)



Rysunek 3.11: Rysunek poglądowy przedstawiający układ luster z centralną wieżą zawierającą piec.

do nadmiernego jego odkształcania. Pewne modele, które można wykorzystać do sterowania procesem są powiązane z nieliniowymi relacjami termodynamicznymi poprzez zmienne fizykalne takie jak temperatura metalu, ciśnienie odpływu czy też entalpia wody na wejściu do pieca. Współczynnikom takiego modelu dla danego poziomu nasłonecznienia możemy przypisać wartości, które są typowymi współczynnikami transferu ciepła, masy metalu, powierzchni obszaru oraz stanowią ciągłą część modelu hybrydowego. Należy jednak pamiętać o bardzo istotnym zjawisku jakim jest ruch chmur nad heliostatami. Nawet jeżeli obiekt jest zbudowany na bardzo słonecznym obszarze jak np. w Kalifornii to czasami występują dni z częściowym zachmurzeniem w czasie których chmury blokują promieniowanie słoneczne. Tak właśnie pojawiła się natura stochastyczna problemu sterowania. Jeżeli mamy bezchmurne niebo, piec otrzymuje więcej energii słonecznej i przepływ wody powinnien być większy niż w warunkach pochmurnych. Innymi słowy, dynamika procesu jest różna dla każdych warunków. Nie jest trudnym ocenić bieżące warunki pogodowe, ale ich prognozowanie jest na tyle złożonym problemem, że należy poszukiwać jego rozwiązania w terminach prawdopodobieństwa. Zaobserwowano, że chwilowe zmiany nasłonecznienia znacząco wpływają na nieliniowe równania termodynamiki. Jest to spowodowane faktem, że np. temperatura metalu jest wrażliwa na wielkość przepływu wody. Wspomniane nagłe zmiany w nasłonecznieniu spowodowane ruchem chmur nad heliostatami są w gruncie rzeczy nieprzewidywalne. Chcąc zrobić model niezależny od możliwych zewnętrznych źródeł informacji, naturalnym wydaje się wprowadzenie dyskretnej zmien-

Rysunek 3.12: **a)** Elektrownia słoneczna w Daggett, w Kalifornii. **b)** Elektrownie słoneczne PS10 i PS20 w Seville w Hiszpanii.

nej przełączającej tryb pracy, która będzie opisywać wpływ ruchu chmur nad instalacją. Dodatkowo dla tej zmiennej dyskretnej należy stworzyć równania termodynamiki w przestrzeni ciągłej dotyczące zachowania temperatur, ciśnień, przepływów do opisania sposobu losowego skoku dla danego poziomu nasłonecznienia.

W publikacji [186] autor pisze o kwantyzacji poziomu nasłonecznienia, np. 20% i 80% pełnego nasłonecznienia odpowiednio dla dużej i małej gęstości chmur. Zbiór wartości wejściowych dzielony jest na rozłączne przedziały. Każda wartość wejściowa wypadająca w określonym przedziale jest w wyniku kwantyzacji odwzorowana na jedną wartość wyjściową przypisaną temu przedziałowi, czyli tak zwany poziom reprezentacji. W rozumieniu potocznym proces kwantyzacji można przyrównać do "zaokrąglania" wartości do określonej skali. Wartości wejściowe muszą zostać jednoznacznie skojarzone z poziomami reprezentacji, dlatego przedział dopuszczalnych wartości wejściowych jest dzielony na podprzedziały. Punkty podziału są nazywane poziomami decyzyjnymi a ich liczba jest o jeden mniejsza od liczby poziomów reprezentacji. Każda wartość należąca do danego podprzedziału jest zastępowana przez poziom reprezentacji przypisywany do danego przedziału. Poziomem reprezentacji może być górna bądź dolna granica przedziału, jednak najczęściej jest nią wartość ze środka przedziału. Takie rozwiązanie skutkuje minimalizacją błędu średniokwadratowego, jednak tylko pod warunkiem, że rozkład prawdopodobieństwa wartości wejściowych jest stały w danym przedziale. Warunek ten jest w przybliżeniu spełniony, jeśli szerokości przedziałów kwantyzacji są bardzo małe. W ten sposób została wprowadzona aproksymacja polegająca na ograniczeniu zmiennej trybu pracy do zbioru skończonego, która skutkuje, że wyjściowy model będzie matematycznie analizowalny. Ruch chmur będący procesem losowym oraz przejścia nasłonecznienia z jednego poziomu kwantyzacji do innego są wyrażone poprzez prawdopodobieństwa skoków, gdzie ich wartości są estymowane z zapisów danych z przeszłości przy typowych warunkach pogodowych. Jest to efekt połączenia prostej ścieżki charakteryzującej czas średni pomiędzy dwoma chmurami z prostym probabilistycznym mechanizmem.

Jak podają autorzy publikacji [70] na podstawie danych historycznych dotyczących nasłonecznienia zebranych na miejscu, przyjęto, że średni czas trwania okresu pochmurnego był w przybliżeniu 138 sekund, podczas gdy bezpośredniego nasłonecznienia 258 sekund. Bazując na tych informacjach wprowadzono łańcuch Markowa z dwoma trybami pracy 1) słonecznie 2) pochmurno. Uzasadnione wydaje się wybranie takiego rozwiązania jeżeli możemy założyć, że bieżący stan jest znany oraz znamy prawdopodobieństwo słonecznego lub pochmurnego nieba w najbliższej przyszłości, które oczywiście zależą od pogody w chwili obecnej.

Znając te tryby pracy i średnie interwały czasowe im przypisane, otrzymano macierz prawdopodobieństwa przejść, która dla czasu próbkowania równego 6-ciu sekundom wygląda następująco

$$P = \begin{bmatrix} 0,9767 & 0,0233 \\ 0,0435 & 0,9565 \end{bmatrix}.$$

Odbiornik cieplny może być opisany następującym uproszczonym modelem [70]

$$G = \begin{cases} x(k+1) = A_{r(k)}x(k) + B_{r(k)}u(k) \\ z(k) = C_{r(k)}x(k) + D_{r(k)}u(k) \end{cases}$$

gdzie x jest temperaturą metalu zewnętrznej części panelu, a u natężeniem przepływu. Parametry tego

modelu dla układu ciągłego są podane w [255]. Po dyskretyzacji z okresem próbkowania 6 sekund otrzymano wartości przedstawione w poniższej tabeli dla $r(k) \in \{1, 2\}$

	Słoneczny $r(k) = 1$	Pochmurny $r(k) = 2$
Instalacja	$A_1 = 0,8353$ $B_1 = 0,0915$	$A_2 = 0,9646$ $B_2 = 0,0982$

Jeżeli teraz dla każdego trybu pracy zastosujemy liniowe sprzężenie zwrotne od obserwacji

$$u(k) = K_{r(k)} z(k)$$

i zdefiniujemy zbiór $\bar{D}$ jak w (3.5) to dojdziemy do dyskretnej inkluzji liniowej (2.7)

Rozdział 4

Stabilność dyskretnych niestacjonarnych układów liniowych

Stabilność jest jedną z najważniejszych własności układów dynamicznych. O ile stabilność dla układów stacjonarnych jest dobrze znana, Twierdzenie Hurwitza, to stabilność układów o zmiennych współczynnikach jest znacznie mniej zbadana. Zajmowano się nią w pracach takich [1], [83], [142] (oraz w literaturze w tych pozycjach). W rozdziale tym przedstawimy cztery definicje stabilności dyskretnych układów liniowych o zmiennych współczynnikach (2.1) i omówimy relacje pomiędzy nimi. Rozważania tego rozdziału posłużą za punkt wyjścia do badania stabilności dyskretnych inkluzji liniowych. W rozdziale tym wielokrotnie będziemy korzystać z następującego twierdzenia Banacha-Steinhausa [60], [89], [242], które w przypadku przestrzeni skończenie-wymiarowej ma następującą postać:

Twierdzenie 13 *Jeżeli* $(D(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *jest ciągiem macierzy kwadratowych wymiaru s-na-s takim, że*

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}^s} \bigvee_{e(x)>0} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \|D(n)\,x\| \le e(x)\,\|x\|\,, \tag{4.1}$$

to

$$\bigvee_{E>0} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \|D(n)\| \le E. \tag{4.2}$$

Warunki 4.1 i 4.2 nazywamy odpowiednio punktową i jednostajną ograniczonością ciągu $D(n)$. W dalszych rozważaniach pomocny okaże się również następujący wniosek z powyższego twierdzenia ([60] wniosek 4.2).

Wniosek 14 *Jeżeli* $D(n)$ *jest ciągiem macierzy kwadratowych stopnia* s *i*

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}^s} \lim_{n\to\infty} D(n)\,x = 0,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = 0.$$

4.1 Asymptotyczna stabilność

Jako pierwszą rozpatrywać będziemy asymptotyczną stabilność dyskretnych układów liniowych niestacjonarnych (2.1). Okazuje się, że można ją sformułować na wiele równoważnych sposobów co pokazuje następujące

Twierdzenie 15 *Dla układu (2.1) następujące trzy warunki są równoważne:*

1. $\bigwedge_{x_0\in\mathbb{R}^s} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \|\mathcal{A}(n,0)x_0\| \le \varepsilon,$
2. $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \|\mathcal{A}(n,0)\| \le \varepsilon,$

3. $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \bigwedge_{x_0\in\mathbb{R}^s} \|\mathcal{A}(n,0)x_0\| \leq \varepsilon \|x_0\|.$

Dowód *Dowód twierdzenia 15 przeprowadzimy w następujących czterech krokach:*

- ***warunek 1 $\Longrightarrow$ warunek 2***

  Z warunku 1 wynika, że

  $$\bigwedge_{x_0\in\mathbb{R}^s} \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}(n,0)x_0\| = 0.$$

  Z wniosku 14 mamy

  $$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}(n,0)\| = 0,$$

  a z definicji granicy ostatecznie otrzymujemy warunek 2.

- ***warunek 2 $\Longrightarrow$ warunek 1***

  Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla $x_0 = 0$ warunek 1 zachodzi w sposób oczywisty. Ustalmy teraz $x_0 \neq 0$. Wybierzmy w warunku 2 za ε liczbę $\frac{\varepsilon}{\|x_0\|}$. Wtedy

  $$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \|\mathcal{A}(n,0)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|x_0\|}.$$

  Po obustronnym przemnożeniu przez $\|x_0\|$ otrzymujemy

  $$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \|\mathcal{A}(n,0)\| \, \|x_0\| \leq \varepsilon.$$

  Korzystając z własności podmultiplikatywności normy otrzymujemy

  $$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \|\mathcal{A}(n,0)x_0\| \leq \|\mathcal{A}(n,0)\| \, \|x_0\| \leq \varepsilon$$

  co wobec dowolności wyboru ε i x_0 implikuje warunek 1.

- ***warunek 2 $\Longrightarrow$ warunek 3***

  Jeżeli w warunku 2 skorzystamy z definicji normy (podrozdział 2.3) to otrzymamy

  $$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \sup_{x_0\neq 0} \frac{\|\mathcal{A}(n,0)x_0\|}{\|x_0\|} \leq \varepsilon.$$

  Powyższa nierówność implikuje warunek 3.

- ***warunek 3 $\Longrightarrow$ warunek 2***

  Jeżeli nierówność w warunku 3 podzielimy obustronnie przez $\|x_0\| \neq 0$ to otrzymamy

  $$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \bigwedge_{\substack{x_0\in\mathbb{R}^s \\ x_0\neq 0}} \frac{\|\mathcal{A}(n,0)x_0\|}{\|x_0\|} \leq \varepsilon.$$

  Powyższa nierówność implikuje

  $$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \sup_{x_0\neq 0} \frac{\|\mathcal{A}(n,0)x_0\|}{\|x_0\|} \leq \varepsilon,$$

  a po skorzystaniu z definicji normy operatorowej otrzymujemy warunek 2.

■

Definicja 16 *Jeżeli którykolwiek (a zatem każdy) z warunków twierdzenia 15 jest spełniony to układ (2.1) będziemy nazywali asymptotycznie stabilnym (w skrócie AS).*

4.2 Potęgowa stabilność

Kolejnym typem rozważanej stabilności będzie stabilność potęgowa, którą również można sformułować na wiele równoważnych sposobów o czym traktuje poniższe

Twierdzenie 17 *Dla układu (2.1) następujące 3 warunki są równoważne:*

1. $\bigvee\limits_{0\le\lambda<1} \bigwedge\limits_{x_0\in\mathbb{R}^s} \bigvee\limits_{\mu(x_0)\ge 1} \bigwedge\limits_{n\ge 0} \|\mathcal{A}(n,0)x_0\| \le \mu(x_0)\,\lambda^n,$

2. $\bigvee\limits_{0\le\lambda<1} \bigvee\limits_{\mu\ge 1} \bigwedge\limits_{n\ge 0} \|\mathcal{A}(n,0)\| \le \mu\lambda^n,$

3. $\bigvee\limits_{0\le\lambda<1} \bigvee\limits_{\mu\ge 1} \bigwedge\limits_{n\ge 0} \bigwedge\limits_{x_0\in\mathbb{R}^s} \|\mathcal{A}(n,0)x_0\| \le \mu\lambda^n \|x_0\|.$

Dowód *Dowód twierdzenia 17 przeprowadzimy w następujących trzech krokach:*

- ***warunek 1 $\Longrightarrow$ warunek 2***

  Po obustronnym podzieleniu nierówności w warunku 1 przez λ^n otrzymujemy

  $$\left\|\frac{\mathcal{A}(n,0)}{\lambda^n}x_0\right\| \le \mu(x_0).$$

  Stosując twierdzenie 13 do punktowo ograniczonej rodziny operatorów $\frac{\mathcal{A}(n,0)}{\lambda^n}$ otrzymujemy, że

  $$\bigvee_{\mu>0} \left\|\frac{\mathcal{A}(n,0)}{\lambda^n}\right\| \le \mu.$$

  Mnożąc obustronnie przez λ^n otrzymujemy ostatecznie warunek 2.

- ***warunek 2 $\Longrightarrow$ warunek 3***

  Jeżeli w warunku 2 skorzystamy z definicji normy (podrozdział 2.3) to otrzymamy

  $$\sup_{x_0\ne 0} \frac{\|\mathcal{A}(n,0)x_0\|}{\|x_0\|} \le \mu\lambda^n.$$

  Powyższa nierówność implikuje warunek 3.

- ***warunek 3 $\Longrightarrow$ warunek 1***

  Jeżeli w warunku 3 przyjmiemy $\mu\|x_0\| = \mu(x_0)$ to otrzymamy warunek 1.

■

Definicja 18 *Jeżeli którykolwiek (a zatem każdy) z warunków twierdzenia 17 jest spełniony to układ (2.1) będziemy nazywali potęgowo stabilnym (w skrócie PS).*

4.3 Jednostajna asymptotyczna stabilność

Następnym rozpatrywanym typem stabilności dyskretnych liniowych niestacjonarnych układów będzie jednostajna asymptotyczna stabilność. Kilka z równoważnych sposobów jej sformułowania zamieszczono w poniższym

Twierdzenie 19 *Dla układu (2.1) następujące trzy warunki są równoważne:*

1. $\bigwedge\limits_{x_0\in\mathbb{R}^s} \bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{n_0} \bigwedge\limits_{\substack{n,m\\ n-m>n_0}} \|\mathcal{A}(n,m)x_0\| \le \varepsilon,$

2. $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{n_0} \bigwedge\limits_{\substack{n,m\\ n-m>n_0}} \|\mathcal{A}(n,m)\| \le \varepsilon,$

3. $\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{\substack{n,m \\ n-m>n_0}} \bigwedge_{x_0\in\mathbb{R}^s} \|\mathcal{A}(n,m)x_0\| \leq \varepsilon \|x_0\|.$

Dowód *Dowód twierdzenia 19 przeprowadzimy w następujących czterech krokach:*

- ***warunek 1 $\Longrightarrow$ warunek 2***

  Wybierzmy dowolne $x_0 \in \mathbb{R}^s$ takie, że $\|x_0\| = 1$. Niech $e_1, \ldots, e_s$ będzie bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^s$. Dla x_0 będącego kombinacją liniową współczynników bazowych, tj. $x_0 = \left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(s)}\right)$ mamy

  $$x_0 = \sum_{i=1}^{s} x_0^{(i)} e_i \ .$$

  Jest jasnym, że

  $$\bigvee_{a>0} \bigwedge_{\substack{x_0\in\mathbb{R}^s \\ \|x_0\|=1}} \left|x_0^{(i)}\right| \leq a.$$

  Dla każdego wektora bazowego dobierzmy do liczby $\frac{\varepsilon}{as}$ wartość n_0 zgodnie z warunkiem 1, tj.

  $$\bigwedge_{\substack{n,m \\ n-m>n_0}} \|A\,(n,m)\,e_i\| \leq \frac{\varepsilon}{as}.$$

  Ostatecznie niech

  $$x\,(n,m) \in \mathbb{R}^s,$$
  $$\|x\,(n,m)\| = 1,$$
  $$x\,(n,m) = \left(x^{(1)}\,(n,m)\,, \ldots, x^{(s)}\,(n,m)\right)$$

  będzie takim wektorem, że

  $$\|A\,(n,m)\| = \|A\,(n,m)\ x\,(n,m)\|\,.$$

  Wówczas

  $$\|A\,(n,m)\| \leq \sum_{i=1}^{s} \left|x^{(i)}\,(n,m)\right| \|A\,(n,m)\,e_i\| \leq \varepsilon.$$

- ***warunek 2 $\Longrightarrow$ warunek 1***

  Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla $x_0 = 0$ warunek 1 zachodzi w sposób oczywisty. Ustalmy teraz $x_0 \neq 0$. Wybierzmy w warunku 2 za ε liczbę $\frac{\varepsilon}{\|x_0\|}$. Wtedy

  $$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{\substack{n,m \\ n-m>n_0}} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|x_0\|}.$$

  Po obustronnym przemnożeniu przez $\|x_0\|$ otrzymujemy

  $$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{\substack{n,m \\ n-m>n_0}} \|\mathcal{A}(n,m)\| \|x_0\| \leq \varepsilon.$$

  Korzystając z własności podmultiplikatywności normy otrzymujemy

  $$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{\substack{n,m \\ n-m>n_0}} \|\mathcal{A}(n,m)x_0\| \leq \|\mathcal{A}(n,m)\| \|x_0\| \leq \varepsilon.$$

- ***warunek 2 $\Longrightarrow$ warunek 3***

  Jeżeli w warunku 2 skorzystamy z definicji normy (podrozdział 2.3) to otrzymamy

  $$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{\substack{n,m \\ n-m>n_0}} \sup_{x_0\neq 0} \frac{\|\mathcal{A}(n,m)x_0\|}{\|x_0\|} \leq \varepsilon.$$

  Powyższa nierówność implikuje warunek 3.

- ***warunek 3 $\Longrightarrow$ warunek 2***

  Jeżeli nierówność w warunku 3 podzielimy obustronnie przez $\|x_0\| \neq 0$ to otrzymamy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{\substack{n,m \\ n-m>n_0}} \bigwedge_{\substack{x_0\in\mathbb{R}^s \\ x_0\neq 0}} \frac{\|\mathcal{A}(n,m)x_0\|}{\|x_0\|} \leq \varepsilon.$$

  Powyższa nierówność implikuje

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{\substack{n,m \\ n-m>n_0}} \sup_{x_0\neq 0} \frac{\|\mathcal{A}(n,m)x_0\|}{\|x_0\|} \leq \varepsilon,$$

  a po skorzystaniu z definicji normy otrzymujemy warunek 2.

■

Definicja 20 *Jeżeli którykolwiek (a zatem każdy) z warunków twierdzenia 19 jest spełniony to układ (2.1) będziemy nazywali jednostajnie asymptotycznie stabilnym (w skrócie JAS).*

Uwaga 21 *Jeżeli warunek 2 twierdzenia 19 będzie spełniony to w dalszej części pracy będziemy go zapisywali w następującej postaci*

$$\lim_{n,\, n-m\to\infty} \|\mathcal{A}(n,m)\| = 0.$$

Uwaga 22 *Jednostajna asymptotyczna stabilność implikuje*

$$\bigvee_{\gamma>0} \bigwedge_{\substack{n,m \\ n-m\geq 0}} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq \gamma. \tag{4.3}$$

Istotnie weźmy w warunku 2 twierdzenia 19 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i dobierzmy n_0. Z ograniczoności ciągu $A(n)$ możemy znaleźć $C > 1$ takie, że

$$\|A(n)\| < C.$$

Wówczas dla

$$\bigwedge_{n-m\leq n_0} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq C^{n-m} \leq C^{n_0}$$

a dla

$$\bigwedge_{n-m>n_0} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Zatem nierówność 4.3 jest spełniona dla

$$\gamma = \max\left\{\frac{1}{2}, C^{n_0}\right\} = C^{n_0}.$$

W literaturze [243] spełnienie własności (4.3) nazywane jest jednostajną stabilnością układu (2.1). Jednakże, ponieważ nie jest ona opisywana przez żadną charakterystykę liczbową, a głównym tematem tej pracy są wykładniki charakterystyczne, to nie będziemy się tym rodzajem stabilności w dalszej części pracy zajmować.

4.4 Jednostajna potęgowa stabilność

Ostatnim rodzajem rozpatrywanej stabilności liniowych dyskretnych układów niestacjonarnych jest jednostajna potęgowa stabilność.

Definicja 23 *Układ (2.1) będziemy nazywali jednostajnie potęgowo stabilnym (w skrócie JPS) wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\bigvee_{0\leq\lambda<1} \bigvee_{\mu\geq 1} \bigwedge_{n\geq m} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq \mu\lambda^{n-m}. \tag{4.4}$$

Jednostajnie potęgowa stabilność może być również scharakteryzowana w następujący sposób:

Twierdzenie 24 *Liniowy dyskretny układ niestacjonarny (2.1) jest jednostajnie potęgowo stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigvee_{\chi>0} \bigwedge_{\substack{m,n \\ n\geq m+1}} \sum_{i=m+1}^{n} \|\mathcal{A}(n,i)\| \leq \chi. \tag{4.5}$$

Dowód

- $(\Longrightarrow)$

  Zgodnie z (4.4) liniowy dyskretny układ niestacjonarny (2.1) jest jednostajnie potęgowo stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigvee_{0\leq\lambda<1} \bigvee_{\mu\geq 1} \bigwedge_{n\geq i} \|\mathcal{A}(n,i)\| \leq \mu\lambda^{n-i}.$$

  Zmieniając zmienną sumowania oraz korzystając z faktu, że $0 \leq \lambda < 1$ *otrzymujemy*

$$\bigwedge_{\substack{m,n \\ n\geq m+1}} \sum_{i=m+1}^{n} \|\mathcal{A}(n,i)\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \mu\lambda^{n-i} = \mu \sum_{v=0}^{n-m-1} \lambda^{v} \leq \mu \sum_{v=0}^{\infty} \lambda^{v} = \frac{\mu}{1-\lambda}.$$

  Reasumując

$$\chi = \frac{\mu}{1-\lambda}.$$

- $(\Longleftarrow)$

  Aby udowodnić prawdziwość implikacji odwrotnej załóżmy prawdziwość (4.5). Mamy

$$\mathcal{A}(n,m) = I + \sum_{i=m+1}^{n} [\mathcal{A}(n,i-1) - \mathcal{A}(n,i)] = I + \sum_{i=m+1}^{n} [\mathcal{A}(n,i)\,A(i-1) - \mathcal{A}(n,i)]$$

  Ponadto, używając (4.5) z $n = m+2$ *otrzymujemy*

$$\bigwedge_{m} \|A(m+1)\| \leq \chi - 1$$

  i

$$\bigwedge_{\substack{m,n \\ n\geq m+1}} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq 1 + \sum_{i=m+1}^{n} \|\mathcal{A}(n,i)\| \, \|A(i-1) - I\| \leq$$

$$1 + \chi \sum_{i=m+1}^{n} \|\mathcal{A}(n,i)\| \leq 1 + \chi^2. \tag{4.6}$$

  Dla $n \geq m+1$ *mamy*

$$\|\mathcal{A}(n,m)\|\,(n-m) = \sum_{i=m+1}^{n} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|\mathcal{A}(n,i)\| \, \|\mathcal{A}(i,m)\| \leq \chi\left(1+\chi^2\right).$$

  Wybierzmy liczbę całkowitę N *taką, że* $N \geq 2\chi\left(1+\chi^2\right)$ *i rozważmy w powyższej nierówności* $n = m+N$. *Otrzymamy wówczas*

$$\bigwedge_{m} \|\mathcal{A}(m+N,m)\| \leq \frac{1}{2}. \tag{4.7}$$

  Łącząc nierówności (4.6) i (4.7) i biorąc kolejno $p = 0, 1, \ldots$ *dla* $n = m+pN, \ldots, \ldots, m+(p+1)N-1$ *otrzymujemy poniższe nierówności*

  - *dla* $p = 0$ *mamy*

$$\|\mathcal{A}(n,m)\| \leq \frac{1+\chi^2}{2^0}$$

    dla $n = m, \ldots, m+N-1$;

– *dla* $p = 1$ *mamy*

$$\|\mathcal{A}(n,m)\| = \|\mathcal{A}(n,m+N)\mathcal{A}(m+N,m)\| \leq \|\mathcal{A}(n,m+N)\| \, \|\mathcal{A}(m+N,m)\| \leq \frac{1+\chi^2}{2}$$

dla $n = m+N, \ldots, m+2N-1$*;*

– *dla* $p = 2$ *mamy*

$$\|\mathcal{A}(n,m)\| = \|\mathcal{A}(n,m+2N)\mathcal{A}(m+2N,m+N)\mathcal{A}(m+N,m)\| \leq$$

$$\|\mathcal{A}(n,m+2N)\| \, \|\mathcal{A}(m+2N,m+N)\| \, \|\mathcal{A}(m+N,m)\| \leq \frac{1+\chi^2}{2^2}$$

dla $n = m+2N, \ldots, m+3N-1$.

Analogicznie postępując dla kolejnych wartości p *otrzymujemy następujące ograniczenie*

$$\bigwedge_{m} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq \frac{1+\chi^2}{2^p}$$

dla $n = m+pN, \ldots, m+(p+1)N-1$.

Dla $\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N}}$ *i* $\mu = 2\left(1+\chi^2\right)$ *otrzymujemy*

$$\bigwedge_{\substack{n,m \\ n \geq m}} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq \mu\lambda^{n-m}.$$

co jest (4.4).

■

4.5 Relacje pomiędzy wprowadzonymi typami stabilności

Relacje pomiędzy przedstawionymi czterema typami stabilności liniowego dyskretnego układu niestacjonarnego (2.1) są następujące:

$$\begin{array}{ccccccc} \textbf{JPS} & \Longleftrightarrow & \textbf{JAS} & \Longrightarrow & \textbf{PS} & \Longrightarrow & \textbf{AS} \\ \textbf{AS} & \not\Rightarrow & \textbf{PS} & \not\Rightarrow & \textbf{JAS} & \Longleftrightarrow & \textbf{JPS} \end{array}$$

Powyższe relacje zostały poniżej szczegółowo omówione.

- **JAS $\Longleftrightarrow$ JPS**

Twierdzenie 25 *Liniowy dyskretny układ niestacjonarny (2.1) jest jednostajnie asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednostajnie potęgowo stabilny.*

Dowód

- ***JPS $\Longrightarrow$ JAS.***

  Załóżmy, że liniowy dyskretny układ niestacjonarny (2.1) jest jednostajnie potęgowo stabilny, tj zgodnie z (4.4) spełnia następujący warunek

$$\bigvee_{\mu>0} \bigvee_{0\leq\lambda<1} \bigwedge_{n\geq m} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq \mu\lambda^{n-m}.$$

  Aby pokazać, że układ jest jednostajnie asymptotycznie stabilny dla ustalonego $\varepsilon > 0$ *wybierzmy dodatnią liczbę całkowitę* n_0 *taką, że*

$$\lambda^{n_0} \leq \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

  Wtedy

$$\|\mathcal{A}(n,m)x_0\| \leq \|\mathcal{A}(n,m)\| \, \|x_0\| \leq \mu\lambda^{n-m} \, \|x_0\| \leq \mu\lambda^{n_0} \, \|x_0\| \leq \varepsilon \, \|x_0\|$$

  co jest warunkiem 3 twierdzenia 19.

- ***JPS*** $\Longleftarrow$ ***JAS.***

  Wybierzmy w warunku 2 twierdzenia 19 wartość $\varepsilon = \frac{1}{2}$. *W dalszej części dowód przebiega tak jak w twierdzeniu 24. Z nierówności (4.6) i (4.7) otrzymujemy jednostajną potęgową stabilność.*

■

Uwaga 26 *Ze względu na równoważność, o której mowa w twierdzeniu 25, w dalszej części pracy będziemy posługiwać się tylko pojęciem jednostajnej potęgowej stabilności.*

- **PS** $\Longrightarrow$ **AS** **lecz** **AS** $\not\Rightarrow$ **PS**

Fakt, że potęgowa stabilność implikuje asymptotyczną stabilność wynika z warunku 2 twierdzenia 17, który implikuje

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}(n,0)\| = 0$$

co jest na mocy definicji granicy warunkiem 2 twierdzenia 15. Aby pokazać, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa pomocny okaże się następujący przykład ciągu o wyrazie ogólnym $A(n) = \frac{n}{n+1}$ dla $n \geq 1$ i $A(0) = 1$, dla którego

$$\prod_{i=0}^{n-1} A(i) = \frac{1}{n}.$$

Układ jednowymiarowy (2.1) jest zatem asymptotycznie stabilny. Pokażemy, że układ ten nie jest potęgowo stabilny. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że spełniona jest nierówność

$$\bigvee_{\mu\geq 1} \bigvee_{0\leq\lambda<1} \bigwedge_{n} \frac{1}{n} \leq \mu\lambda^n.$$

Wówczas logarytmując obie strony nierówności

$$\ln\frac{1}{n} \leq \ln\mu + \ln\lambda^n,$$

korzystając z własności logarytmu

$$-\ln n \leq \ln\mu + n\ln\lambda$$

oraz dzieląc obie strony nierówności przez $-n$ otrzymujemy

$$\frac{\ln n}{n} \geq -\frac{\ln\mu}{n} - \ln\lambda.$$

Przechodząc do granic i uwzględniając, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\ln\mu}{n} = 0$$

otrzymujemy

$$0 \geq -\ln\lambda$$

co jest sprzecznością.

- **JPS** $\Longrightarrow$ **PS** **lecz** **PS** $\not\Rightarrow$ **JPS**

  W celu udowodnienia, że jednostajna potęgowa stabilność implikuje potęgową stabilność wystarczy w (4.4) wziąć $m = 0$ by otrzymać odpowiedni warunek twierdzenia 17.

  Pokażemy teraz, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Przykład 27 *Rozważmy układ skalarny (2.1), w którym jako współczynniki* $A(n)$ *występują na przemian* $k-$*razy liczby* 1 *i* $\frac{1}{3}$ *dla* $k = 1, 2, \ldots,$ *tj.*

$A(0)$	$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$	$A(5)$	$A(6)$	$A(7)$	$A(8)$	$A(9)$	$A(10)$	$A(11)$	$\ldots$
1	$\frac{1}{3}$	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\ldots$

Jest jasnym, że iloczyn kolejnych elementów powyższego ciągu będzie dążyć do zera, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}(n,0) = 0,$$

czyli układ jest asymptotycznie stabilny. Pokażemy nawet, że jest on potęgowo stabilny. Oznaczmy w tym celu dla ustalonego n przez $k(n)$ liczbę wyrazów ciągu

$$A(0), \ldots, A(n)$$

równych $\frac{1}{3}$. Z konstrukcji ciągu $A(n)$ wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} k(n) = \infty.$$

Wybierzmy

$$0 < \varepsilon < 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k(n)}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

to korzystając z definicji granicy otrzymujemy

$$\bigvee_{n_o} \bigwedge_{n>n_0} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k(n)}{n}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Po przeniesieniu na drugą stronę ε

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k(n)}{n}} < \varepsilon + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oraz podniesieniu do potęgi n mamy

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k(n)} < \left(\varepsilon + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{n}.$$

Jeżeli weźmiemy $\mu = 1$ oraz

$$\lambda = \varepsilon + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

to będzie spełniony warunek 2 twierdzenia 17 zatem rozpatrywany układ będzie potęgowo stabilny.

Pokażemy teraz, że rozpatrywany układ nie jest jednostajnie potęgowo stabilny. Z konstrukcji ciągu $A(n)$ wynika, że dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$ istnieją takie n i m, że $n - m = l$ oraz

$$A(n-1) = \ldots = A(m) = 1$$

zatem

$$\mathcal{A}(n,m) = 1$$

co oznacza, że nie może być spełniona równość (4.4).

Uwaga 28 *W następnym rozdziale pokażemy, że do badania potęgowej i jednostajnej potęgowej stabilności właściwymi narzędziami są odpowiednio wykładnik Lapunowa (twierdzenie 35) i starszy górny wykładnik ogólny (twierdzenie 71). Na potwierdzenie tych słów pokażemy później (przykład 72) raz jeszcze - tym razem przy użyciu wyżej wymienionych wykładników - że opisywany układ w przykładzie 27 jest potęgowo stabilny, lecz nie jest jednostajnie potęgowo stabilny.*

Rozdział 5

Wykładniki charakterystyczne dyskretnych układów liniowych

Jednym ze sposobów opisu własności układów dynamicznych jest użycie pewnych charakterystyk liczbowych nazywanych również charakterystykami liczbowymi. W tym rozdziale podamy definicje i własności najważniejszych wykładników charakterystycznych dyskretnych układów liniowych ze zmiennymi współczynnikami. Będą to wykładniki Lapunowa, Perrona, Bohla oraz ogólne.

5.1 Wykładniki Lapunowa

Charakterystyki liczbowe, które dzisiaj nazywamy wykładnikami Lapunowa zostały wprowadzone w 1892 roku w pracy Lapunowa [179]. Ich idea polega na porównaniu rozwiązania układu z funkcją potęgową. Dlatego też opisują one wykładnicze tempo wzrostu trajektorii. Wykładniki te po dzień dzisiejszy są przedmiotem intensywnych badań, np. [7], [8], [21], [53], [83], [141] oraz doczekały się wielu uogólnień i odmian [3], [9], [10], [82], [84], [136], [210], [212], [270].

5.1.1 Definicje wykładników: górnego charakterystycznego i Lapunowa

Zanim podamy definicję wykładnika Lapunowa dyskretnego liniowego układu niestacjonarnego (2.1) wprowadzimy definicję górnego wykładnika charakterystycznego ciągu liczbowego. Jest ona następująca:

Definicja 29 *Dla danego ciągu liczb rzeczywistych $b = (b(n))_{n\in\mathbb{N}}$ liczbę (lub symbol $\pm\infty$) zdefiniowaną jako*

$$\lambda(b) = \limsup_{n\to\infty} |b(n)|^{\frac{1}{n}}$$

będziemy nazywać górnym wykładnikiem charakterystycznym ciągu $(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Dla ciągu wektorów $v = (v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ z przestrzeni unormowanej $(X, \|*\|)$ będziemy definiować jego górny wykładnik charakterystyczny $\lambda(v)$ jako wykładnik ciągu $(\|v(n)\|)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alternatywna metoda scharakteryzowania górnego wykładnika charakterystycznego w przypadku, gdy jest on liczbą jest zawarta w poniższym

Twierdzenie 30 *Skończona liczba $\lambda(b)$ jest wykładnikiem charakterystycznym ciągu $b = (b(n))_{n\in\mathbb{N}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy poniższe dwa warunki są jednocześnie spełnione:*

1. $$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{D_\varepsilon} \bigwedge_{n\in N} |b(n)| \leq D_\varepsilon \left(\lambda(b) + \varepsilon\right)^n ;$$

2. $$\bigwedge_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to\infty} \frac{|b(n)|}{\left(\lambda(b) - \varepsilon\right)^n} = \infty.$$

Dowód ($\Longrightarrow$)

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji granicy górnej wynika, że

$$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \left| |b(n)|^{\frac{1}{n}} - \lambda(b) \right| < \varepsilon,$$

a zatem dla $n > n_0$ mamy

$$|b(n)| \leq (\lambda(b) + \varepsilon)^n .$$

Wybierając $D_\varepsilon > 1$ takie, że

$$D_\varepsilon > \frac{|b(k)|}{(\lambda(b) + \varepsilon)^k}$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n_0$ stwierdzamy, że warunek 1 jest spełniony. Również z definicji granicy górnej wynika, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_\varepsilon} \lambda(b) - \frac{1}{2}\varepsilon < |b(n_\varepsilon)|^{\frac{1}{n_\varepsilon}} ,$$

zatem dla $n > n_\varepsilon$

$$\left(\frac{\lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2}}{\lambda(b) - \varepsilon} \right)^{n_\varepsilon} \leq \frac{|b(n_\varepsilon)|}{(\lambda(b) - \varepsilon)^{n_\varepsilon}} .$$

Z ostatniej nierówności wynika spełnienie warunku 2, gdyż

$$\frac{\lambda(b) - \frac{\varepsilon}{2}}{\lambda(b) - \varepsilon} > 1.$$

($\Longleftarrow$)

Załóżmy teraz, że λ spełnia warunek 1 oraz 2. Pierwiastkując nierówność z warunku 1 pierwiastkiem n-tego stopnia i uwzględniając dowolność ε otrzymamy

$$\lambda(b) \leq \lambda. \tag{5.1}$$

Z warunku 2 i definicji granicy górnej wynika, że

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_M} M \leq \frac{|b(n_M)|}{(\lambda - \varepsilon)^{n_M}}$$

i dlatego

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_M} M^{\frac{1}{n_M}} (\lambda - \varepsilon) \leq |b(n_M)|^{\frac{1}{n_M}} .$$

Z ostatniej nierówności otrzymujemy

$$\lambda(b) \geq \lambda. \tag{5.2}$$

Nierówności (5.1) oraz (5.2) implikują, że

$$\lambda(b) = \lambda.$$

■

Oznaczmy

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A(n)\| = a \qquad \text{oraz} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|A^{-1}(n)\right\| = a'. \tag{5.3}$$

Przyjęte wcześniej założenia, że $((A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczonym ciągiem macierzy kwadratowych odwracalnych stopnia s takich, że $\left(A^{-1}(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony oznaczają, że a i a' są skończone.

Definicja 31 *Dla $x_0 \in \mathbb{R}^s$ wykładnik Lapunowa $\lambda^L(x_0)$ równania (2.1) odpowiadający warunkowi początkowemu x_0 jest zdefiniowany jako wykładnik charakterystyczny $(x(n, x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ czyli*

$$\lambda^L(x_0) = \limsup_{n\to\infty} \|x(n, x_0)\|^{\frac{1}{n}} . \tag{5.4}$$

Powiemy, że wykładnik Lapunowa jest silny jeżeli $\limsup$ *może zostać zastąpione przez* $\lim$.

Należy zauważyć, że dzięki równoważności wszystkich norm w $\mathbb{R}^s$ powyższa definicja nie zależy od wyboru normy. W związku z tym, dla wygody przyjmiemy, że będzie nią norma Euklidesowa.

Zgodnie z twierdzeniem 30 wykładnik Lapunowa opisuje górne oszacowanie tempa wzrostu w następujący sposób

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{m_0} \bigwedge_{n>m_0} \|x(n,x_0)\| < \left(\lambda^L(x_0)+\varepsilon\right)^n.$$

Dokładniej traktuje o tym następujące

Twierdzenie 32 *Dla wykładnika Lapunowa zachodzi następująca równość*

$$\lambda^L(x_0) = \inf\left\{\rho : \bigvee_{N_\rho} \bigwedge_{n\geq 0} \|x(n,x_0)\| \leq N_\rho \rho^n\right\}$$

Dowód *Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}^s$ i $\varepsilon > 0$ oraz oznaczmy przez α prawą stronę powyższej równości. Z definicji kresu dolnego*

$$\bigvee_{N_\rho} \bigwedge_{n\geq 0} \|x(n,x_0)\| \leq N_\rho(\alpha+\varepsilon)^n.$$

Po obustronnym spierwiastkowaniu nierówności pierwiastkiem stopnia n i przyłożeniu granicy górnej dostajemy

$$\lambda^L(x_0) \leq \alpha+\varepsilon.$$

Wobec dowolności ε

$$\lambda^L(x_0) \leq \alpha.$$

Pokażemy teraz nierówność przeciwną. Z definicji granicy górnej mamy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \|x(n,x_0)\|^{\frac{1}{n}} < \lambda^L(x_0)+\varepsilon,$$

czyli

$$\|x(n,x_0)\| < \left(\lambda^L(x_0)+\varepsilon\right)^n.$$

Istnieje zatem stała $N_{\lambda^L(x_0)+\varepsilon}$ taka, że

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \|x(n,x_0)\| < N_{\lambda^L(x_0)+\varepsilon}\left(\lambda^L(x_0)+\varepsilon\right)^n$$

co oznacza, że

$$\lambda^L(x_0)+\varepsilon \in \left\{\rho : \bigvee_{N_\rho} \bigwedge_{n\geq 0} \|x(n,x_0)\| \leq N_\rho \rho^n\right\},$$

więc

$$\alpha \leq \lambda^L(x_0)+\varepsilon.$$

Wobec dowolności ε

$$\alpha \leq \lambda^L(x_0)$$

co kończy dowód. ■

5.1.2 Podstawowe własności wykładników Lapunowa

Poniższe twierdzenie zawiera kilka podstawowych własności wykładników Lapunowa. Oznaczmy $\mathbb{R}^s_* = \mathbb{R}^s \setminus \{0\}$.

Twierdzenie 33 *Dla wykładników Lapunowa równania (2.1) zachodzą następujące własności:*

1. *jeżeli $x_0 \in \mathbb{R}^s$ oraz $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, to*
$$\lambda^L(x_0) = \lambda^L(cx_0);$$

2. *jeżeli* $x_0 \in \mathbb{R}^s$ *oraz* $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, *to*

$$\lambda^L(cA, x_0) = c\lambda^L(x_0),$$

gdzie $\lambda^L(cA, x_0)$ *jest wykładnikiem Lapunowa układu (2.1) z ciągiem* $A = (A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *zastąpionym ciągiem* $cA = (cA(n))_{n\in\mathbb{N}}$;

3. *jeżeli* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^s$ *to*

$$\lambda^L(x_1 + x_2) \leq \max\left\{\lambda^L(x_1), \lambda^L(x_2)\right\};$$

4. *jeżeli* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^s$ *oraz* $\lambda^L(x_1) \neq \lambda^L(x_2)$ *to wtedy*

$$\lambda^L(x_1 + x_2) = \max\left\{\lambda^L(x_1), \lambda^L(x_2)\right\};$$

5. *jeżeli* $x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{R}^s_*$ *i liczby* $\lambda^L(x_1), \ldots, \lambda^L(x_l)$ *są różne, to wektory* $x_1, \ldots, x_l$ *są liniowo niezależne;*

6. *jeżeli* $x_1, \ldots, x_s$ *jest bazą* $\mathbb{R}^s$ *to wtedy*

$$\limsup_{n\to\infty} |\det \mathcal{A}(n, 0)|^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{l=1}^{s} \lambda^L(x_l); \tag{5.5}$$

7. *jeżeli* $x_0 \in \mathbb{R}^s$ *to wtedy* $\lambda^L(x_0) \leq a$ *i jeżeli* $x_0 \in \mathbb{R}^s_*$ *to wtedy* $\lambda^L(x_0) \geq \frac{1}{a'}$;

8. *jeżeli* $x_0 \in \mathbb{R}^s$ *to wtedy* $\lambda^L(v) \leq \lambda^L(x_0)$, *gdzie* $v = (v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *jest następującej postaci*

$$v(n) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{n-1} x(l, x_0) & \textit{jeżeli} \quad \lambda^L(x_0) \geq 1 \\ \sum_{l=n}^{\infty} x(l, x_0) & \textit{jeżeli} \quad \lambda^L(x_0) < 1 \end{cases}.$$

Zwykle w literaturze definiuje się wykładnik Lapunowa w postaci

$$\overline{\lambda}^L(x_0) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|x(n, x_0)\|. \tag{5.6}$$

Jednakże dla układów dyskretnych wydaje się być bardziej użyteczna, w szczególności, gdy rozważamy macierze osobliwe, zaproponowana definicja 31. Związek między tymi dwoma pojęciami jest następujący

$$\lambda \to e^{\overline{\lambda}}.$$

Dla wykładników zdefiniowanych w postaci (5.6):

- dowody punktów 1, 3-5 można odnaleźć w pracy [21], twierdzenie 2.1;
- punkt 2 wynika wprost z definicji granicy górnej;
- nierówność (5.5), która jest nazywana nierównością Lapunowa została pokazana w [100];
- punkt 7 jest oczywistą konsekwencją (5.3) i definicji $\lambda^L(x_0)$;
- punkt 8 został udowodniony w pracy [79], Lemat 4.

Z własności funkcji $e^{\overline{\lambda}}$ wynika, że wyżej wymienione dowody są prawdziwe w tym sformułowaniu, które jest zawarte w twierdzeniu 33.

5.1.3 Spektrum Lapunowa układu (2.1) oraz największy i najmniejszy wykładnik Lapunowa

W następstwie punktu 5 twierdzenia 33 widzimy, że zbiór

$$\left\{\lambda^L(x_0) : x_0 \in \mathbb{R}^s_*\right\}$$

zawiera co najwyżej s elementów, powiedzmy

$$0 < \lambda_1^L(A) < \lambda_2^L(A) < \ldots < \lambda_r^L(A) < \infty.$$

Zbiór $\left\{\lambda_1^L(A), \lambda_2^L(A), \ldots, \lambda_r^L(A)\right\}$ będzie nazywany spektrum Lapunowa równania (2.1).

Największy i najmniejszy wykładnik będziemy oznaczać odpowiednio następującymi symbolami $\lambda^L_{\max}(A)$, $\lambda^L_{\min}(A)$. W czasie rozpatrywania ustalonego układu będziemy celowo pomijać wprowadzoną konwencję oznaczeń i w uproszczeniu pisać $\lambda_1^L, \lambda_2^L, \ldots, \lambda_r^L$. To samo dotyczyć będzie oznaczenia $\lambda^L(x_0)$. Poniżej przedstawiamy największy wykładnik w terminach macierzy $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Twierdzenie 34 *Największy wykładnik $\lambda^L_{\max}(A)$ Lapunowa układu (2.1) jest wyrażony następującym równaniem*

$$\lambda^L_{\max}(A) = \limsup_{n\to\infty} \|\mathcal{A}(n,0)\|^{\frac{1}{n}} \tag{5.7}$$

Dowód powyższego twierdzenia można odnaleźć w [83], twierdzenie 4.

Związek największego wykładnika Lapunowa ze stabilnością potęgową układu (2.1) wyjaśnia następujące twierdzenie

Twierdzenie 35 *Układ (2.1) jest potęgowo stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda^L_{\max}(A) < 1.$$

Dowód

- ($\Longleftarrow$)

  Wybierzmy $\lambda \in \left(\lambda^L_{\max}(A), 1\right)$. Z definicji granicy górnej wynika, że

  $$\bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} \bigwedge_{x_0\in\mathbb{R}^s} \|x(n,x_0)\| < \lambda^n.$$

  Oznaczmy

  $$\mu = \max_{k=0,\ldots,n_0} \{\|\mathcal{A}(k,0)\|, 1\}.$$

  Wówczas

  $$\|\mathcal{A}(n,0)x_0\| \le \mu\lambda^n \|x_0\|$$

  i układ jest potęgowo stabilny na mocy warunku 3 twierdzenia 17.

- ($\Longrightarrow$)

  Z warunku 3 twierdzenia 17 wynika, że

  $$\bigvee_{0\le\lambda<1} \bigvee_{\mu\ge1} \bigwedge_{n\ge0} \bigwedge_{x_0\in\mathbb{R}^s} \|\mathcal{A}(n,0)x_0\| \le \mu\lambda^n \|x_0\|,$$

  zatem

  $$\|x(n,0)\|^{\frac{1}{n}} \le \mu^{\frac{1}{n}}\lambda \|x_0\|^{\frac{1}{n}}$$

  i dlatego

  $$\lambda^L_{\max}(A) \le \lambda < 1.$$

■

Wróćmy teraz do przykładu 27 i obliczmy największy wykładnik Lapunowa.

Przykład 36 *Ponieważ*

$$x(n, x_0) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k(n)} x_0,$$

gdzie $k(n)$ *jest liczbą wyrazów ciągu*

$$A(0), \ldots, A(n)$$

równych $\frac{1}{3}$. *Więc*

$$\limsup_{n\to\infty} \|x(n, x_0)\|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{k(n)}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

zatem na mocy twierdzenia 35 układ opisany w przykładzie jest potęgowo stabilny.

W poniższym przykładzie obliczymy wykładnik Lapunowa dla pewnego układu dwuwymiarowego.

Przykład 37 *Ustalmy liczby rzeczywiste* c *i* d *takie, że* $-d < c < 0 < d$ *oraz rozpatrzmy układ (2.1) z*

$$A(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a(n) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$a(n) = \begin{cases} e^c \text{ jeżeli } n \in \left[(2k)^2, (2k+1)^2\right) \text{ dla } k = 0, 1, \ldots \\ e^d \text{ jeżeli } n \in \left[(2k+1)^2, (2k+2)^2\right) \text{ dla } k = 0, 1, \ldots \end{cases}.$$

Z założenia, że

$$-d < c < 0 < d$$

wynika, że $e^c < e^d$. *Obliczmy iloczyn*

$$a(0)\, a(1) \ldots a\left((2v+2)^2 - 1\right).$$

Dla kolejnych wartości indeksu otrzymujemy naprzemian iloczyny e^c *i* e^d *odpowiednio długości* $4k+1$ *i* $4k+3$, *tj.*

$$a(0)\, a(1) \ldots a\left((2v+2)^2 - 1\right) = \left(e^c\right)^{\sum_{k=0}^{v}(4k+1)} \left(e^d\right)^{\sum_{k=0}^{v}(4k+3)} =$$

$$\left[\left(e^c\right)^{4\sum_{k=0}^{v} k + \sum_{k=0}^{v} 1}\right] \left[\left(e^d\right)^{4\sum_{k=0}^{v} k + \sum_{k=0}^{v} 3}\right] = \left[\left(e^c\right)^{2v(v+1)+v+1}\right] \left[\left(e^d\right)^{2v(v+1)+3(v+1)}\right] =$$

$$\left[\left(e^c\right)^{2v^2+3v+1}\right] \left[\left(e^d\right)^{2v^2+5v+3}\right].$$

Ponieważ rozpatrywany układ jest dwuwymiarowy, więc może mieć maksymalnie 2 różne wykładniki Lapunowa. Dla warunku początkowego $x_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ *jest on następujący*

$$\lambda_1 = 1,$$

natomiast dla $x_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ *jest on następujący*

$$\lambda_2 = \limsup_{v\to\infty} \left\| \mathcal{A}((2v+2)^2 - 1, 0) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^{\frac{1}{(2v+2)^2-1}} =$$

$$\limsup_{v\to\infty} \left[\left(e^c\right)^{\frac{2v^2+3v+1}{4v^2+8v+3}}\right] \left[\left(e^d\right)^{\frac{2v^2+5v+3}{4v^2+8v+3}}\right] = e^{\frac{c}{2}} e^{\frac{d}{2}} = e^{\frac{c+d}{2}}.$$

Ponieważ

$$c + d > 0,$$

więc

$$\lambda_2 = e^{\frac{c+d}{2}}$$

będzie największym wykładnikiem Lapunowa oraz omawiany układ nie jest potęgowo stabilny na mocy twierdzenia 35.

5.1.4 Spektrum Lapunowa układu sprzężonego (2.2)

Spektrum Lapunowa układu (2.2) będziemy oznaczać w następujący sposób

$$\left\{\lambda_1^S(A), \lambda_2^S(A), \ldots, \lambda_w^S(A)\right\},$$

gdzie numeracja jest taka, że

$$\lambda_w^S(A) < \lambda_{w-1}^S(A) < \ldots < \lambda_1^S(A).$$

Gdy rozpatrywany układ będzie ustalony będziemy pomijać A we wspomnianym powyżej oznaczeniu.

Stosując punkt 6 twierdzenia 33 dla układu sprzężonego (2.2) widzimy, że jego wykładniki Lapunowa są skończone. Można pokazać (po szczegóły odsyłamy do pracy [164]), że następujące, słabsze niż (5.3) warunki

$$\limsup_{n\to\infty} \|\mathcal{A}(n,0)\|^{\frac{1}{n}} < \infty$$

i

$$\limsup_{n\to\infty} \|\mathcal{B}(n,0)\|^{\frac{1}{n}} < \infty$$

implikują skończoność $\lambda^L(x_0)$ oraz $\lambda^S(x_0)$ dla wszystkich $x_0 \in \mathbb{R}^s$.

5.1.5 Pojęcie bazy normalnej

Dla każdego $\lambda_i^L(A)$ oraz $\lambda_i^S(A)$ rozpatrzmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^s$

$$E_i = \left\{v \in \mathbb{R}^s : \lambda^L(v) \le \lambda_i^L(A)\right\}$$

i

$$F_i = \left\{v \in \mathbb{R}^s : \lambda^S(v) \le \lambda_i^S(A)\right\}$$

i ustalmy

$$E_0 = F_{w+1} = \{0\}.$$

Z punktów 1 i 3 twierdzenia 33 wynika, że E_i oraz F_i są podprzestrzeniami $\mathbb{R}^s$. Wynika stąd następujące

Twierdzenie 38 *Wykładniki $\lambda_i^L(A)$ dane są*

$$\lambda_i^L(A) = \min_{L\in S_k} \max_{\substack{x\in L\\ \|x\|=1}} \limsup_{n\to\infty} \|\mathcal{A}(n,0)x\|^{\frac{1}{n}} \tag{5.8}$$

gdzie S_k jest zbiorem wszystkich k-wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^s$.

Krotności n_i i m_i wykładników Lapunowa $\lambda_i^L(A)$ oraz $\lambda_i^S(A)$ są zdefiniowane odpowiednio jako

$$\dim E_i - \dim E_{i-1},$$

$i = 1, \ldots, r$ oraz

$$\dim F_i - \dim F_{i+1},$$

$i = 1, \ldots, w$.

Dla wykładników Lapunowa $\lambda_i^L(A)$ występujących n_i razy i uszeregowanych w następujący sposób

$$0 < \lambda_1^{L\prime}(A) \le \lambda_2^{L\prime}(A) \le \ldots \le \lambda_s^{L\prime}(A) < \infty,$$

ciąg

$$\left(\lambda_1^{L\prime}(A), \lambda_2^{L\prime}(A), \ldots, \lambda_s^{L\prime}(A)\right),$$

będziemy nazywali pełnym spektrum Lapunowa układu (2.1).

Jeżeli mamy dwie bazy $v_1, \ldots, v_s$ i $w_1, \ldots, w_s$ przestrzeni $\mathbb{R}^s$, to wtedy będziemy je nazywać dualnymi, jeżeli $\langle v_i, w_j\rangle = \delta_{ij}$, gdzie $< u, v >$ jest standardowym iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^s$, natomiast δ_{ij} jest symbolem (zwanym inaczej deltą) Kroneckera zdefiniowanym w następujący sposób

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ jeżeli } i = j \\ 0 \text{ jeżeli } i \ne j \end{cases}.$$

Dla bazy $V = \{v_1, \ldots, v_s\}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^s$ zdefiniujmy iloczyn σ_V wykładników Lapunowa

$$\sigma_V = \prod_{i=1}^{s} \lambda^L(v_i).$$

Bazę $v_1, \ldots, v_s$ nazwiemy normalną jeżeli dla każdego $i = 1, \ldots, r$ istnieje baza podprzestrzeni E_i składająca się z pewnych wektorów ze zbioru $\{v_1, \ldots, v_s\}$. Formalnie, powinniśmy mówić, że baza jest normalna względem rodziny E_i, $i = 1, \ldots, s$. Można pokazać (zobacz [22], Uwaga po twierdzeniu 1.2.5), że zawsze istnieją bazy normalne $v_1, \ldots, v_s$ i $w_1, \ldots, w_s$ dla odpowiednich rodzin E_i i F_i, które są dualne. Również nie jest trudnym pokazanie (zobacz [22], twierdzenie 1.2.3), że dla baz normalnych iloczyn σ_V wykładników Lapunowa jest minimalny, co implikuje zgodnie z nierównością Lapunowa (5.5), że jest on równy

$$\limsup_{n\to\infty} |\det \mathcal{A}(n,0)|^{\frac{1}{n}}.$$

Z punktów 3 i 4 twierdzenia 33 otrzymujemy następującą charakterystykę bazy normalnej.

Lemat 39 *Baza $v_1, \ldots, v_s$ jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy górnik wykładnik charakterystyczny dowolnego rozwiązania z warunkiem początkowym będącym liniową kombinacją $v_1, \ldots, v_s$ z niezerowymi współczynnikami jest równy największemu z górnych wykładników charakterystycznych $\lambda^L(v_1), \ldots, \lambda^L(v_s)$.*

W wielu naszych dalszych rozważaniach zasadniczą rolę będzie odgrywać możliwość redukcji naszego układu do układu górnotrójkątnego. Jest to zagwarantowane przez następujące, tzw. twierdzenie Perrona o triangularyzacji, udowodnione dla układów dyskretnych np. w pracy [22] (twierdzenie 7).

Twierdzenie 40 *Dla każdego ciągu $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje ciąg $(U(n))_{n\in\mathbb{N}}$ macierzy ortogonalnych taki, że $C_n = U_{n+1}^T A_n U_n$ jest górnotrójkątna.*

5.1.6 Stabilność wykładników Lapunowa

Jeżeli parametry rozważanego układu znamy jedynie w przybliżeniu, to w naturalny sposób powstaje pytanie o zależność wykładników Lapunowa układu (2.1) i (2.3), a w szczególności o ciągłą zależność wykładników Lapunowa układu (2.1) od współczynników. Jeżeli wykładniki te są ciągłymi funkcjami współczynników to sytuację tę określa się w literaturze [1] mianem stabilności wykładników Lapunowa. Poniżej przedstawiamy definicję stabilności wykładników Lapunowa i warunek wystarczający do stabilności. W jej sformułowaniu przez

$$\left(\lambda_1^{Z\prime}(A+\Delta), \lambda_2^{Z\prime}(A+\Delta), \ldots, \lambda_s^{Z\prime}(A+\Delta)\right)$$

oznaczymy pełne spektrum Lapunowa układu (2.3).

Definicja 41 *[209], [213]. Wykładniki Lapunowa układu (2.1) nazywamy stabilnymi jeżeli*

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{\Delta\in\mathfrak{M}_\delta} \bigwedge_{i=1,\ldots,s} \left|\lambda_i^{L\prime}(A) - \lambda_i^{Z\prime}(A+\Delta)\right| < \varepsilon.$$

Zauważmy, że jeżeli zdefiniujemy funkcję na przestrzeni ograniczonych ciągów odwracalnych macierzy z normą-kres górny tak, że wartość funkcji dla ciągu $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest równa $\left(\lambda_1^{L\prime}(A), \ldots, \lambda_s^{L\prime}(A)\right)$ to wtedy, stabilność wykładników Lapunowa układu (2.1) oznacza po prostu ciągłość tej funkcji w punkcie $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Dla bazy $v_1, \ldots, v_s$ macierz $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$ której kolumnami są $x(n, v_1), \ldots, x(n, v_s)$ jest nazywana macierzą fundamentalną układu (2.1). Jeżeli macierz ta jest odwracalna to dla każdego n jądro

$$G(n,m) = V(n)V^{-1}(m),$$

gdzie $n, m \in \mathbb{N}$ jest nazywane macierzą Greena układu (2.1). Jeżeli baza jest normalna to wtedy macierze fundamentalna i Greena również są nazywane normalnymi.

Aby sformułować warunek ciągłości wykładników Lapunowa oznaczmy dla macierzy Greena układu (2.1) przez $x_i(m,n)$ jej i-tą kolumnę oraz przez $\theta_i(n)$ wykładnik charakterystyczny ciągu $(\|x_i(m,n)\|)_{m\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, s$. Następne twierdzenie jest odmianą wystarczającego warunku ciągłości wykładników Lapunowa dla układów dyskretnych autorstwa Malkina [184].

Twierdzenie 42 *Załóżmy, że dla pewnej macierzy Greena $G(m,n)$ układu (2.1) mamy*

$$\bigwedge_{\gamma>0}\bigvee_{d>0}\bigwedge_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ m\geq n}}\bigwedge_{i=1,\ldots,s}\|x_i(m,n)\|\leq d\left(\theta_i(n)+\gamma\right)^{(m-n)} \tag{5.9}$$

i

$$\bigwedge_{\gamma>0}\bigvee_{d>0}\bigwedge_{\substack{m,n\in\mathbb{N}\\ n\geq m}}\bigwedge_{i=1,\ldots,s}\|x_i(m,n)\|\leq d\left(\theta_i(n)-\gamma\right)^{(m-n)}, \tag{5.10}$$

to wtedy wykładniki Lapunowa układu (2.1) są stabilne.

Dowód powyższego twierdzenia można odnaleźć w pracy [218].

5.2 Wykładniki Perrona

Jeżeli w definicji wykładnika Lapunowa granicę górną zastąpimy granicą dolną to otrzymamy tzw. wykładnik Perrona, który po raz pierwszy pojawił się w literaturze w 1929 roku w pracy [223] (zobacz również [224]) w kontekście liniowych równań różniczkowych niestacjonarnych. Pewne własności wykładnika Perrona dla układów ciągłych można odnaleźć w pracach [53], [137], [141]. W przeciwieństwie do innych rozważanych w tej pracy wykładników (Lapunowa, Bohla) wykładniki Perrona nie opisują żadnego z rozpatrywanych typów stabilności układu (2.1).

5.2.1 Definicje wykładników: dolnego charakterystycznego i Perrona

Definicja dolnego wykładnika charakterystycznego ciągu liczbowego jest następująca:

Definicja 43 *Dla danego ciągu liczb rzeczywistych $b=(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$ liczbę (lub symbol $\pm\infty$) zdefiniowaną jako*

$$\pi(b)=\liminf_{n\to\infty}|b(n)|^{\frac{1}{n}}$$

będziemy nazywać dolnym wykładnikiem charakterystycznym ciągu $(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Dla ciągu wektorów $v=(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ z przestrzeni unormowanej $(X,\|*\|)$ będziemy definiować jego dolny wykładnik charakterystyczny $\pi(v)$ jako wykładnik ciągu $(\|v(n)\|)_{n\in\mathbb{N}}$.

Alternatywną metodą scharakteryzowania dolnego wykładnika charakterystycznego w przypadku, gdy jest on liczbą jest poniższe

Twierdzenie 44 *Skończona liczba $\pi(b)$ jest wykładnikiem charakterystycznym ciągu $b=(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy poniższe dwa warunki są jednocześnie spełnione:*

1. $$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{D_\varepsilon}\bigwedge_{n\in N}|b(n)|\geq D_\varepsilon\left(\pi(b)-\varepsilon\right)^n;$$

2. $$\bigwedge_{\varepsilon>0}\liminf_{n\to\infty}\frac{|b(n)|}{\left(\pi(b)+\varepsilon\right)^n}=0.$$

Ponownie rozpatrzmy układ (2.1), tym razem jednak o ciągu $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ nie zakładamy już, że jest ograniczony.

Definicja 45 *Dla warunku początkowego $x_0\in\mathbb{R}^s$ wykładnik Perrona $\pi^L(x_0)$ równania (2.1) jest zdefiniowany jako dolny wykładnik charakterystyczny $(x(n,x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ czyli*

$$\pi^L(x_0)=\liminf_{n\to\infty}\|x(n,x_0)\|^{\frac{1}{n}}.$$

Wykładnik Perrona jest czasami nazywany w literaturze [53], [142] dolnym wykładnikiem Lapunowa.

Zgodnie z twierdzeniem 44 wykładnik Perrona opisuje dolne oszacowanie tempa wzrostu w następujący sposób

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{m_0} \bigwedge_{n>m_0} \|x(n,x_0)\| > \left(\pi^L(x_0)-\varepsilon\right)^n.$$

Jest oczywistym, że

$$\pi^L(x_0) \leq \lambda^L(x_0).$$

Zdefiniowany wcześniej silny wykładnik Lapunowa można zdefiniować jako taki wykładnik, dla którego zachodzi równość

$$\pi^L(x_0) = \lambda^L(x_0).$$

Będziemy wówczas mówili również o silnym wykładniku Perrona.

Mimo, iż wykładniki Perrona dla układów dyskretnych są zdefiniowane podobnie do wykładników Lapunowa, to jak przedstawiono w pracy [78] są między nimi istotne różnice. Jak wiemy z punktu 4 twierdzenia 33 zbiór wykładników Lapunowa układu (2.1) zawiera co najwyżej s elementów. Autor [78] pokazuje na przykładzie, że dla dowolnej liczby k istnieje układ, który ma dokładnie k wykładników Perrona. Jest to jednak przykład układu o nieograniczonych współczynnikach. Otwartym pytaniem było czy opisana powyżej sytuacja może mieć miejsce dla układów o ograniczonych współczynnikach. Dalej w przykładzie 47 pokażemy, że istnieje układ o ograniczonych współczynnikach, których zbiór wykładników Perrona tworzy cały odcinek. Najpierw jednak przedstawmy przykład układu dyskretnego niestacjonarnego dwuwymiarowego o trzech wykładnikach Perrona.

Przykład 46 *Rozpatrzmy dwuwymiarowy układ (2.1) z*

$$A(n) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{7}\left(\frac{7}{3}\right)^n \end{bmatrix} & \textit{dla } n \textit{ nieparzystych} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\left(\frac{3}{7}\right)^n \end{bmatrix} & \textit{dla } n \textit{ parzystych} \end{cases}.$$

Dla $A(0) = I$, gdzie I jest macierzą jednostkową, macierz tranzycji jest następującej postaci

$$\mathcal{A}(n+1) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{bmatrix} & \textit{dla } n \textit{ nieparzystych} \\ \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{7}\right)^n \end{bmatrix} & \textit{dla } n \textit{ parzystych} \end{cases}.$$

Dla $x_{01} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_{03} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ otrzymujemy następujące wartości wykładników Lapunowa

$$\lambda^L(x_{01}) = \lambda^L(x_{03}) = \frac{1}{2},\ \lambda^L(x_{02}) = \frac{1}{3}$$

oraz Perrona

$$\pi^L(x_{01}) = \frac{1}{5},\ \pi^L(x_{02}) = \frac{1}{7},\ \pi^L(x_{03}) = \frac{1}{3}.$$

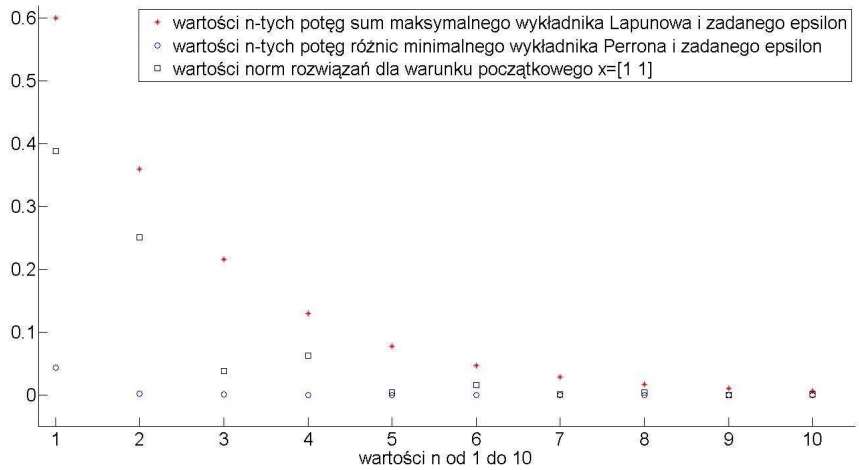
W rozpatrywanym układzie wszystkie wykładniki Lapunowa są mniejsze od 1, więc na mocy twierdzenia 35 układ (2.1) jest potęgowo stabilny.

Rysunek 5.1 pokazuje jak dla $\varepsilon = 0.1$ i warunku początkowego x_{03} ciągi $\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^n$ i $\left(\frac{1}{7}-\varepsilon\right)^n$ ograniczają odpowiednio z góry i dołu wszystkie normy trajektorii równe

$$\left\| x\left(n, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right\| = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}} \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{7}\right)^{2n}} \text{ dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$

Normy trajektorii, które mają inny warunek początkowy przebiegają inaczej, lecz nadal są ograniczone z dołu i z góry odpowiednio przez ciągi $\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)^n$ i $\left(\frac{1}{7}-\varepsilon\right)^n$.

W powyższym przykładzie rozpatrywaliśmy układ o nieograniczonych współczynnikach. Poniżej podamy przykład układ o ograniczonych współczynnikach, którego zbiór wykładników Perrona jest całym przedziałem. W konstrukcji tego przykładu wykorzystamy znany z topologii zbiór Cantora [130]. W



Rysunek 5.1: Ograniczenia na rozwiązania.

oryginalnej konstrukcji zbioru Cantora dzielimy odcinek $[0,1]$ na trzy równe części i usuwamy środkową. Analogicznie postępujemy w kolejnych krokach. Na potrzeby przykładu, który chcemy zbudować zmienimy nieco tę konstrukcję w następujący sposób. Zdefiniujmy ε_n w następujący sposób

$$\varepsilon_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{e^{\left(\sum_{i=1}^{n} 2^i\right)}}.$$

Ponadto zdefiniujmy zbiór typu Cantora i oznaczmy go przez P_0. W tym celu weźmy $\Delta = [0,1]$. Niech C_1 będzie zbiorem składającym się z dwóch rozłącznych domkniętych podprzedziałów Δ o długości ε_1. Niech lewym podprzedziałem będzie $\Delta_1^{(1)}$ (jego lewy kraniec pokrywa się z lewym końcem przedziału Δ), natomiast prawym $\Delta_1^{(2)}$(jego prawy kraniec pokrywa się z prawym końcem przedziału Δ). Dalsza definicja będzie miała charakter rekurencyjny. Jeżeli $J \in C_n$ to zawrzyjmy w zbiorze C_{n+1} jego lewo i prawo domknięte podprzedziały o długości ε_{n+1}. Oznaczmy przez $\Delta_n^{(m)}$, $m = 1, ..., 2^n$ elementy zbioru C_n oraz przez $\alpha_n^{(m)}$ ich punkty środkowe. Dodatkowo niech $\alpha_n^{(0)} := \alpha_n^{(2^n-1)}$ dla $n > 1$ i $\alpha_1^{(0)} = 0$. Możemy teraz zdefiniować zbiór P_0 w następujący sposób

$$P_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} \Delta_n^{(i)}.$$

Na rysunku 5.2 przedstawiono przedział $\Delta = [0,1]$ oraz zbiory

$$C_1 = \left\{\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}\right\},$$

$$C_2 = \left\{\Delta_2^{(1)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_2^{(3)}, \Delta_2^{(4)}\right\}$$

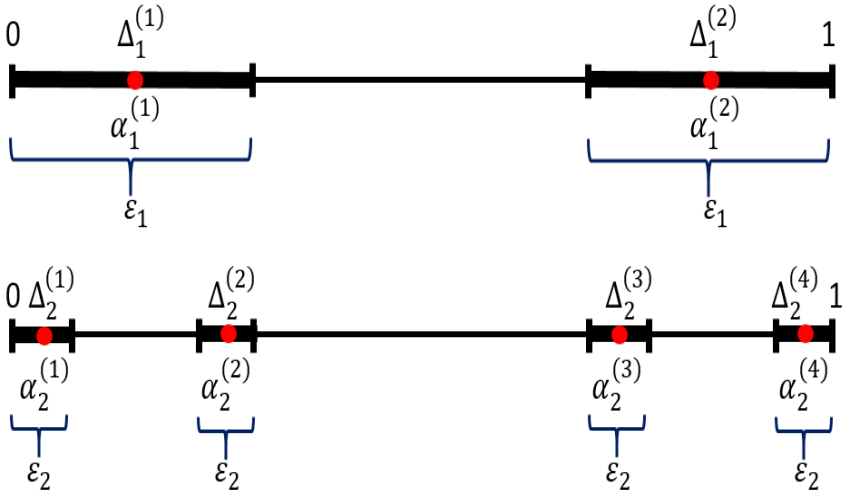
wraz z środkami ich elementów.

Stwórzmy teraz funkcję typu Cantora odpowiadającą powyższemu zbiorowi typu Cantora. Zdefiniujmy funkcję $f_1 : \Delta \to \Delta$ taką, która przyjmuje wartość

- 0 na lewym końcu przedziału Δ,
- 1 na prawym końcu przedziału Δ,
- 1/2 w przedziale $\Delta \backslash C_1$

i zinterpolujmy ją liniowo na przedziałach w zbiorze C_1. W sposób rekurencyjny stwórzmy funkcję f_{n+1} taką, że:

1. dla każdego przedziału $J = [s,t] \in C_n$, funkcja f_{n+1} pokrywa się z f_n w punktach s oraz t,



Rysunek 5.2: Rysunek przedstawia przedział $\Delta = [0,1]$ oraz zbiory $C_1 = \left\{\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}\right\}$, $C_2 = \left\{\Delta_2^{(1)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_2^{(3)}, \Delta_2^{(4)}\right\}$ wraz z środkami ich elementów.

2. ma wartość $[f_n(s) + f_n(t)]/2$ w $J \backslash C_{n+1}$

i zinterpolujmy ją liniowo na przedziałach w zbiorze C_{n+1}. Na rysunku 5.3 przedstawiamy utworzone w myśl powyższej reguły funkcje f_1 i f_2.

Z definicji ciągu f_n wynika, że jest on zbieżny jednostajnie na Δ. Zdefiniujmy funkcję typu Cantora Φ jako jego granicę. Dla dowolnego n i wszystkich $n \leq m$ funkcje Φ i f_n pokrywają się na krańcach przedziałów w $J \in C_m$.

Możemy teraz skonstruować przykład układu dwuwymiarowego z ograniczonymi współczynnikami, dla którego zbiór $\{\pi(x_0) : x_0 \in \mathbb{R}^s\}$ jest przedziałem.

Przykład 47 *Rozpocznijmy konstrukcję od zdefiniowania dwóch pomocniczych ciągów $f(n)$ i $F(n)$. Podzielmy półprostą $[0,\infty)$ punktami $T_k = e^k$, $k \geq 0$ na domknięte z lewej strony przedziały $s_n^{(m)}$ w następujący sposób (przedstawiony również na rysunku 5.4):*

- *dla dowolnego naturalnego $n \geq 1$ wartości m zmieniają się od 1 do 2^n,*
- *prawy kraniec $s_n^{(m)}$ pokrywa się z lewym krańcem $s_n^{(m+1)}$ (dla $m = 2^n$ prawy koniec $s_n^{(2^n)}$ pokrywa się lewym końcem następnego przedziału $s_{n+1}^{(1)}$).*

Ustalmy

$$F(1) = 0,\ F(k) = \alpha_n^{(m)} \text{ jeżeli } k \in s_n^{(m)},\ k \geq 2$$

oraz

$$f(k) = \begin{cases} 0 \text{ jeżeli } k \in s_n^{(m)} \backslash \widetilde{s}_n^{(m)} \\ -\Phi\left(\alpha_n^{(m)}\right) \text{ jeżeli } k \in \widetilde{s}_n^{(m)} \end{cases},$$

gdzie $\widetilde{s}_n^{(m)}$ jest otwartą prawą połową przedziału $s_n^{(m)}$. Zdefiniujmy macierze $A(n)$ dla układu (2.1) w następujący sposób

$$A(n) = \begin{bmatrix} a(n) & 0 \\ b(n) & 1 \end{bmatrix},\ n \geq 0$$

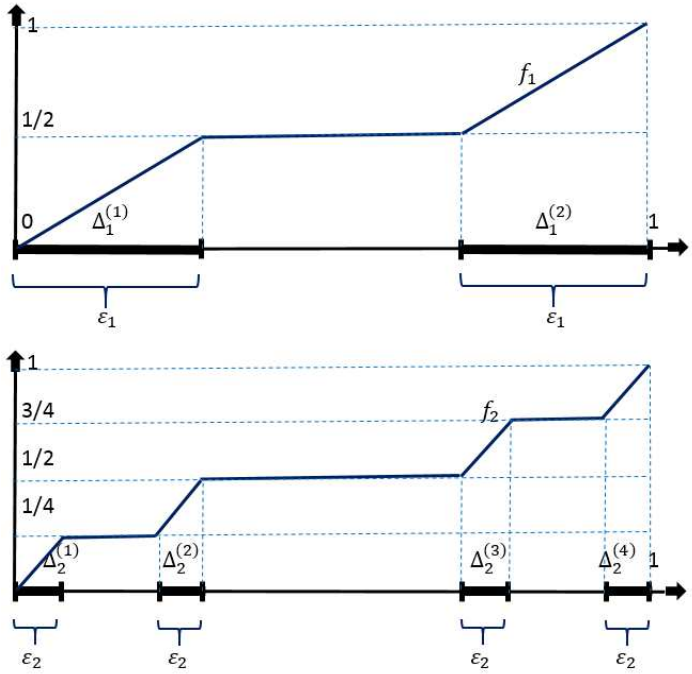
gdzie

$$a(0) = 1,\ a(n) = \exp\left((n+1)\, f(n+1) - n f(n)\right), n \geq 1$$

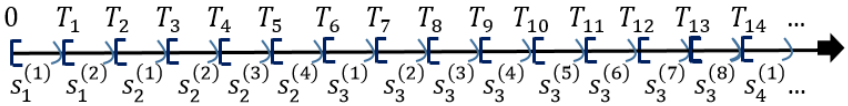
$$b(0) = 0,\ b(n) = (F(n+1) - F(n)) \exp\left(-n f(n)\right),\ n \geq 1.$$

Z definicji ciągów $f(n)$ i $F(n)$ jest jasnym, że $A(n)$ jest ciągiem ograniczonym. Rozwiązanie

$$x(n, x_0) = \begin{bmatrix} x_1(n) & x_2(n) \end{bmatrix}^T$$



Rysunek 5.3: Funkcje f_1 i f_2.



Rysunek 5.4: Półprosta $[0,\infty)$ podzielona punktami $T_k = e^k$, $k \geq 0$ na domknięte z lewej strony przedziały $s_n^{(m)}$.

układu (2.1) z warunkiem początkowym

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{02} \end{bmatrix}^T$$

jest dane przez

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \exp\left(nf(n)\right) x_{01}, \\ x_2(n) &= F(n)x_{01} + x_{02}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Obliczmy wykładnik Perrona $p(\alpha)$ dla

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \end{bmatrix}^T$$

dla $\alpha \in P_0$, $\alpha \neq 0$. Mamy

$$p(\alpha) = \liminf_{n\to\infty} \left[\exp\left(2nf(n)\right) + \left(F(n) - \alpha\right)^2\right]^{\frac{1}{2n}}. \tag{5.12}$$

Zgodnie z definicją zbioru typu Cantora P_0 dla wszystkich $\alpha \in P_0$, $\alpha \neq 0$ i $n \geq 1$ istnieje $m_n(\alpha) \leq 2^n$ takie, że

$$\left|\alpha_n^{(m_n(\alpha))} - \alpha\right| \leq \frac{\varepsilon_n}{2}. \tag{5.13}$$

Oznaczmy przez τ_n część całkowitą środka przedziału $\tilde{s}_n^{(m_n(\alpha))}$. Z tą notacją otrzymujemy $\tau_n \to \infty$ oraz

$$\exp\left(-\Phi\left(\gamma\right)\tau_n\right) > \varepsilon_n, \ \gamma \in \Delta. \tag{5.14}$$

Z ostatnich dwóch nierówności mamy

$$2\ln p(\alpha) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_n} \ln\left(2\exp\left(-2\Phi\left(\alpha_n^{(m_n(\alpha))}\right)\tau_n\right)\right),$$

a granica po prawej stronie jest równa $-2\Phi(\alpha)$ *ponieważ* Φ *jest ciągła. Dlatego*

$$\ln p(\alpha) \leq -\Phi(\alpha) < 0.$$

Teraz pokażemy nierówność przeciwną. Niech n_k *będzie ciągiem, dla którego*

$$p(\alpha) = \lim_{k\to\infty}\left[\exp\left(2n_k f(n_k)\right) + \left(F(n_k)-\alpha\right)^2\right]^{\frac{1}{2n_k}}.$$

Ponieważ $\ln p(\alpha) < 0$*, więc*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \ln|F(n_k)-\alpha| < 0 \tag{5.15}$$

i

$$\limsup_{k\to\infty} f(n_k) < 0. \tag{5.16}$$

Z nierówności (5.15) mamy równość

$$\lim_{k\to\infty} F(n_k) = \alpha,$$

która wraz z nierównością (5.16) implikuje, że $F(n_k) = \alpha_{n_k}^{(m_k)}$ *dla dostatecznie dużych* k *i dlatego*

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k}^{(m_k)} = \alpha.$$

Ostatecznie

$$\ln p(\alpha) \geq \liminf_{k\to\infty} f(n_k) \geq \liminf_{k\to\infty}\left(-\Phi\left(\alpha_{n_k}^{(m_k)}\right)\right) = -\Phi(\alpha)$$

co dowodzi, że zbiór wykładników Perrona układu (2.1) z ograniczonymi współczynnikami może być przedziałem. W naszym przykładzie

$$\left\{\pi(x_0) : x_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \end{bmatrix}^T,\ \alpha \in P_0,\ \alpha \neq 0\right\} = \left(e^{-1}, 1\right).$$

Następne twierdzenie, którego dowód można odnaleźć w [78] pokazuje, że sytuacja z przykładu 46 jest, w pewnym sensie, typowa dla układów diagonalnych, tzn. takich, których macierze $A(n)$ są macierzami diagonalnymi.

Twierdzenie 48 *Dla układu diagonalnego zbiór* $\left\{\pi^L(x_0) : x_0 \in \mathbb{R}^s,\ x_0 \neq 0\right\}$ *ma co najwyżej* $2^s - 1$ *elementów.*

Ponadto, jedno z twierdzeń zamieszczonych w pracy [78] pokazuje, że w ogólnym przypadku nie ma ograniczeń na liczbę różnych wykładników Perrona. Mianowicie, dla każdej liczby naturalnej p istnieje układ (2.1) z $s = 2$ i p różnymi wykładnikami Perrona.

Otwartą kwestią jest pełny opis zbioru możliwych wykładników Perrona dowolnego układu. Rozumiemy przez to pytanie polegające na podaniu warunków koniecznych i wystarczających na podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, które będą gwarantowały, że istnieje układ, którego wykładniki Perrona tworzą właśnie ten zbiór. Dla układów ciągłych rozwiązanie tego problemu podano w pracy [11] (zobacz także [16]).

Największy i najmniejszy wykładnik Perrona, o ile istnieją, będziemy oznaczać odpowiednio następującymi symbolami $\pi^L_{\max}(A)$, $\pi^L_{\min}(A)$. Poniżej przedstawiamy największy wykładnik w terminach macierzy $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Twierdzenie 49 *Największy wykładnik* $\pi^L_{\max}(A)$ *Perrona układu (2.1) jest wyrażony następującym równaniem*

$$\pi^L_{\max}(A) = \liminf_{n\to\infty} \|\mathcal{A}(n,0)\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dowód znajduje się w pracy [78], w której pokazano również, że wykładnik Perrona rozważany jako funkcja warunków początkowych, jest prawie wszędzie, względem miary Lebesgue'a równy wykładnikowi Perrona ciągu tych macierzy o czym traktuje poniższe

Twierdzenie 50 *Funkcja $\pi^L : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ jest prawie wszędzie stała, istnieje $x_0 \in R^s$ takie, że*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^s} \pi^L(x) = \pi^L(x_0)$$

i

$$\pi^L(x_0) = \pi^L_{\max}(A).$$

Innymi słowy twierdzenie to oznacza, że nie musimy przeglądać wszystkich warunków początkowych i szukać wśród nich największego bowiem największy z nich jest wykładnikiem Perrona $\pi^L_{\max}(A)$.

Niewszystkie z własności wykładników Lapunowa zamieszczone w twierdzeniu 33 przenoszą się na wykładniki Perrona. Jak łatwo zauważyć zachodzi następujące

Twierdzenie 51 *Dla wykładników Perrona układu (2.1) zachodzą następujące własności:*

1. *jeżeli $x_0 \in \mathbb{R}^s$ oraz $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ to wtedy*

$$\pi^L(x_0) = \pi^L(cx_0);$$

2. *jeżeli $x_0 \in \mathbb{R}^s$ oraz $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ to wtedy*

$$\pi^L(cA, x_0) = c\pi^L(A, x_0),$$

   gdzie $\pi^L(cA, x_0)$ jest wykładnikiem Perrona układu (2.1) z ciągiem $A = (A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ zastąpionym ciągiem $cA = (cA(n))_{n\in\mathbb{N}}$;

3. *jeżeli $x_0 \in \mathbb{R}^s$ to wtedy*

$$\pi^L(x_0) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A(n)\|;$$

4. *jeżeli $x_0 \in \mathbb{R}^s_*$ to wtedy*

$$\pi^L(x_0) \geq \frac{1}{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A^{-1}(n)\|}.$$

5.3 Wykładniki Bohla

Kolejnymi charakterystykami liczbowymi, zwanymi również wykładnikami charakterystycznymi, używanymi do opisu wielu własności układów dynamicznych są tzw. wykładniki Bohla, których własności, w przeciwieństwie do wykładników Lapunowa, są znacznie mniej zbadane. Zostały one wprowadzone do literatury przez słynnego łotewskiego matematyka Piersa Bohla w pracy [42]. O ile wykładniki Lapunowa opisują wykładniczy wzrost rozwiązań układu, to wykładniki Bohla opisują jednostajny potęgowy przyrost rozwiązań. O jednostajnej potęgowej stabilności liniowego niestacjonarnego układu (2.1) była mowa w podrozdziale 4.4. Wykładniki te definiuje się zarówno dla rozwiązań jak i dla współczynników układu. Od 1913 roku wykładniki rozwiązań były znane jako górny i dolny wykładnik jednostajny lub jako maksymalny i minimalny wykładnik. W pracy [262] wykładniki, o których mowa, nazwano wykładnikami Bohla. Górne wykładniki Bohla odgrywają, w pewnym sensie, tę samą rolę dla stabilności jednostajnej co wykładniki Lapunowa dla stabilności asymptotycznej układu.

Wykładnik Bohla jest również z powodzeniem stosowany do oceny wymiaru Hausdorff'a [228] pewnych zwartych zbiorów niezmienniczych oraz do opisywania stabilności odpornej liniowych niestacjonarnych równań różniczkowych [80], [128]. Zainteresowanych znakomitym streszczeniem historii rozwoju wykładników Bohla i Lapunowa odsyłamy do publikacji [53], [89], [142]. W latach 30 XX wieku Konstantin Petrovich Persidskii w pracach [225], [226], niezależnie od Bohla, używał górnego ogólnego wykładnika do badania zarówno jednostajnej jak i jednostajnej asymptotycznej stabilności. Okazało się, że warunkami koniecznymi i wystarczającymi zarówno jednostajnej asymptotycznej, jak i jednostajnej stabilności układów różniczkowych jest, aby liniowa aproksymacja miała ujemny górny ogólny wykładnik [225], [226]. Analogiczny wynik dla równań różnicowych można odnaleźć w [83]. Wykładniki Bohla były używane przez Bylova w jego teorii prawie redukowalności układów [51], [52] oraz przez Millionshchikova w jego badaniach liniowych różniczkowych układów z prawie periodycznymi lub jednostajnie ciągłymi współczynnikami [188]-[190], związków prawie redukowalności [191] oraz własności układów z całkowo rozdzielonymi współczynnikami [192]. Przyłuski i Rolewicz badają jeden z typów wykładników Bohla

dla układów dyskretnych w pracach [237], [238], [239], [240]. Wspomniani autorzy nazywają wykładniki Bohla uogólnionym promieniem spektralnym, gdyż własności promienia spektralnego dla układów stacjonarnych pokrywają się z własnościami wykładnika Bohla dla układów niestacjonarnych (zobacz również [128] i [267]).

Powyższe argumenty są powodem, dla których powstaje potrzeba analogu do teorii wykładników Lapunowa dla wykładników Bohla.

5.3.1 Górny wykładnik Bohla

Pojęcie górnego wykładnika Bohla opiera się na pojęciu górnej podwójnej granicy ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$, która zdefiniowana jest w sposób następujący

Definicja 52 *[221]. Niech $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem podwójnym liczb rzeczywistych. Dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zdefiniujmy $b(n)=\sup\{a(k,l):k,l\geq n\}$. Górna granica podwójna $\limsup\limits_{m,\,n\to\infty} a(n,m)$ ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ jest zdefiniowana w następujący sposób:*

1. *Jeżeli $b(n)=\infty$ dla każdego n to $\limsup\limits_{m,\,n\to\infty} a(n,m)=\infty$.*
2. *Jeżeli $b(n)<\infty$ dla pewnego n to $\limsup\limits_{m,\,n\to\infty} a(n,m)=\inf\{b(n):n\in\mathbb{N}\}$.*

Jeżeli $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ są rosnącymi ciągami liczb naturalnych takimi, że istnieje granica

$$\lim_{k\to\infty} a(n_k,m_k)$$

to granicę tę będziemy nazywać granicą częściową ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ lub jego punktem skupienia.

Łatwo zauważyć, że górna granica podwójna ma własności zawarte w następującym twierdzeniu [221].

Twierdzenie 53 *Dla dowolnego ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych mamy:*

1. *górna granica podwójna ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ jest największą z jego granic częściowych;*
2. *równość*
$$\limsup_{m,n\to\infty} a(n,m)=c$$
zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy poniższe dwa warunki są jednocześnie spełnione:
   - *dla wszystkich $\varepsilon>0$ istnieje P takie, że dla wszystkich par (n,m) takich, że $m,n>P$ mamy $a(n,m)<c+\varepsilon$,*
   - *dla wszystkich $\varepsilon>0$ i wszystkich P' istnieją $m,n>P'$ takie, że $a(n,m)>c-\varepsilon$.*
3. $\limsup\limits_{m,n\to\infty}[a(n,m)+b(n,m)]\leq\limsup\limits_{m,n\to\infty} a(n,m)+\limsup\limits_{m,n\to\infty} b(n,m)$.
4. *Jeżeli $(a(n_k,m_l))_{k,l\in\mathbb{N}}$ jest podciągiem ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ to*
$$\limsup_{k,l\to\infty} a(n_k,m_l)\leq\limsup_{m,n\to\infty} a(n,m).$$

Zdefiniujmy

$$\limsup_{m,\,n-m\to\infty} a(n,m)=\limsup_{m,\,k\to\infty} a(m+k,m).$$

Definicja 54 *Górnym wykładnikiem Bohla ciągu podwójnego $a=(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ nazywamy liczbę zdefiniowaną wzorem*

$$\overline{\beta}^L(a)=\limsup_{m,\,n-m\to\infty} a(n,m)^{\frac{1}{n-m}}.$$

Analogiem twierdzenia 30 jest następujące

Twierdzenie 55 *Skończona liczba $\overline{\beta}^L(a)$ jest górnym wykładnikiem Bohla ciągu podwójnego $a=(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy poniższe dwa warunki są jednocześnie spełnione:*

1. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ prawdziwa jest poniższa równość

$$\lim_{m,n-m\to\infty} \frac{|a(n,m)|}{\left(\overline{\beta}^L(a)+\varepsilon\right)^{n-m}} = 0,$$

2. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ następująca równość jest spełniona

$$\limsup_{n-m,m\to\infty} \frac{|a(n,m)|}{\left(\overline{\beta}^L(a)-\varepsilon\right)^{n-m}} = \infty.$$

Dowód

- $(\Longrightarrow)$

  Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji granicy górnej

$$\bigvee_{P} \bigwedge_{\substack{n,m \\ n>P \\ n-m>P}} |a(n,m)|^{\frac{1}{n-m}} < \overline{\beta}^L(a) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Po obustronnym podniesieniu do potęgi $n-m$ i podzieleniu przez $\left(\overline{\beta}^L(a)+\varepsilon\right)^{n-m}$ otrzymujemy

$$\bigvee_{P} \bigwedge_{\substack{n,m \\ n>P \\ n-m>P}} \frac{|a(n,m)|}{\left(\overline{\beta}^L(a)+\varepsilon\right)^{n-m}} < \left(\frac{\overline{\beta}^L(a)+\frac{\varepsilon}{2}}{\overline{\beta}^L(a)+\varepsilon}\right)^{n-m}.$$

  Dążenie prawej strony nierówności do zera pociąga za sobą dążenie do zera lewej strony nierówności co kończy dowód punktu 1.

  Wybierzmy teraz ciąg $(n_k, m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że $m_k, n_k - m_k \to \infty$ i

$$\lim_{k\to\infty} |a(n_k,m_k)|^{\frac{1}{n_k-m_k}} = \overline{\beta}^L(a).$$

  Wówczas

$$\bigvee_{P} \bigwedge_{k>P} |a(n_k,m_k)|^{\frac{1}{n_k-m_k}} > \overline{\beta}^L(a) - \frac{\varepsilon}{2}$$

  Po obustronnym podniesieniu do potęgi $n_k - m_k$ i podzieleniu przez $\left(\overline{\beta}^L(a)+\varepsilon\right)^{n-m}$ mamy

$$\bigvee_{P} \bigwedge_{k>P} \frac{|a(n_k,m_k)|}{\left(\overline{\beta}^L(a)-\varepsilon\right)^{n_k-m_k}} > \left(\frac{\overline{\beta}^L(a)-\frac{\varepsilon}{2}}{\overline{\beta}^L(a)-\varepsilon}\right)^{n_k-m_k}.$$

  Ponieważ

$$\left(\frac{\overline{\beta}^L(a)-\frac{\varepsilon}{2}}{\overline{\beta}^L(a)-\varepsilon}\right) > 1,$$

  więc prawa strona nierówności dąży do nieskończoności co kończy dowód punktu drugiego.

- $(\Longleftarrow)$

  Z punktu 1 wynika, że

$$\bigvee_{P} \bigwedge_{m,n-m>P} \frac{a(n,m)}{\left(\overline{\beta}^L(a)+\varepsilon\right)^{n-m}} < 1.$$

  Po obustronnym przemnożeniu nierówności przez $\left(\overline{\beta}^L(a)+\varepsilon\right)^{n-m}$, a następnie spierwiastkowaniu pierwiastkiem stopnia $n-m$ mamy

$$|a(n,m)|^{\frac{1}{n-m}} < \overline{\beta}^L(a) + \varepsilon.$$

Po obliczeniu górnej granicy podwójnej otrzymujemy

$$\limsup_{n-m,m\to\infty} |a(n,m)|^{\frac{1}{n-m}} < \overline{\beta}^L(a) + \varepsilon.$$

Wobec dowolności ε mamy

$$\limsup_{n-m,m\to\infty} |a(n,m)|^{\frac{1}{n-m}} \leq \overline{\beta}^L(a). \tag{5.17}$$

Niech $n_k, m_k \to \infty, n_k - m_k \to \infty$ będzie takie, że

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a(n_k,m_k)|}{\left(\overline{\beta}^L(a)-\varepsilon\right)^{n_k-m_k}} = \infty.$$

Wtedy

$$\bigvee_P \bigwedge_{k>P} \frac{|a(n_k,m_k)|}{\left(\overline{\beta}^L(a)-\varepsilon\right)^{n_k-m_k}} > 1.$$

Po obustronnym przemnożeniu nierówności przez $\left(\overline{\beta}^L(a)-\varepsilon\right)^{n_k-m_k}$ i spierwiastkowaniu pierwiastkiem stopnia $n_k - m_k$ mamy

$$|a(n_k,m_k)|^{\frac{1}{n_k-m_k}} > \overline{\beta}^L(a) - \varepsilon$$

zatem

$$\limsup_{k\to\infty} |a(n_k,m_k)|^{\frac{1}{n_k-m_k}} > \overline{\beta}^L(a) - \varepsilon.$$

Wobec dowolności ε

$$\limsup_{k\to\infty} |a(n_k,m_k)|^{\frac{1}{n_k-m_k}} \geq \overline{\beta}^L(a). \tag{5.18}$$

Nierówności (5.17) i (5.18) implikują tezę.

■

Możemy teraz określić górny wykładnik Bohla układu (2.1).

Definicja 56 *Dla $x_0 \in \mathbb{R}^s_*$ górny wykładnik Bohla $\overline{\beta}^L(x_0)$ układu (2.1) jest zdefiniowany jako*

$$\overline{\beta}^L(x_0) = \limsup_{m,\, n-m\to\infty} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}}.$$

Dalecki i Krein w pracy [89] zasugerowali, że górny wykładnik Bohla można dla układów ciągłych opisać w pewien alternatywny sposób, którego odpowiednik dla układów dyskretnych zawarty jest w punkcie 1 poniższego twierdzenia, które ponadto podaje szereg alternatywnych opisów ww. wykładnika.

Twierdzenie 57 *Dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^s_*$ zachodzą poniższe równości:*

1. $\overline{\beta}^L(x_0) = \inf\left\{\rho : \bigvee_{N_\rho} \bigwedge_{n\geq m} \|x(n,x_0)\| \leq N_\rho \rho^{(n-m)} \|x(m,x_0)\|\right\},$

2. $\overline{\beta}^L(x_0) = \limsup_{n-m\to\infty} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}},$

3. $\overline{\beta}^L(x_0) = \limsup_{n\to\infty} \left[\sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\frac{\|x(n+m,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n}}\right].$

Dowód *Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}^s_*$ i $\varepsilon > 0$ oraz oznaczmy przez α prawą stronę równości z punktu 1. Z definicji kresu dolnego*

$$\bigvee_{N_\varepsilon} \bigwedge_{n\geq m} \frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|} \leq N_\varepsilon (\alpha+\varepsilon)^{n-m}.$$

Po obustronnym spierwiastkowaniu nierówności pierwiastkiem stopnia $n-m$ i obliczeniu górnej granicy podwójnej dostajemy

$$\overline{\beta}^L(x_0) < \alpha + \varepsilon.$$

Wobec dowolności ε

$$\overline{\beta}^L(x_0) \leq \alpha.$$

Pokażemy teraz nierówność przeciwną. Z punktu 2 twierdzenia 53 mamy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{k_0} \bigwedge_{m,\, n-m>k_0} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} < \overline{\beta}^L(x_0) + \varepsilon.$$

Czyli

$$\bigwedge_{m,n-m>k_0} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right) < \left(\overline{\beta}^L(x_0) + \varepsilon\right)^{n-m}.$$

Ponieważ współczynniki układu (2.1) są ograniczone to istnieje stała N taka, że

$$\bigwedge_{n\geq m} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right) < N\left(\overline{\beta}^L(x_0) + \varepsilon\right)^{n-m}$$

co oznacza, że

$$\overline{\beta}^L(x_0) + \varepsilon \in \left\{\rho : \bigvee_{N_\rho} \bigwedge_{n\geq m} \|x(n,x_0)\| \leq N_\rho \rho^{(n-m)} \|x(m,x_0)\|\right\},$$

więc

$$\alpha \leq \overline{\beta}^L(x_0) + \varepsilon.$$

Wobec dowolności ε

$$\alpha \leq \overline{\beta}^L(x_0)$$

co kończy dowód punktu pierwszego.

Natychmiastową konsekwencją ograniczoności ciągu $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest równość z punktu 2.

Z równości z punktu 2 liczba $\overline{\beta}(x_0)$ jest kresem dolnym tych liczb ρ, dla których przy wszystkich $0 \leq m \leq n$ zachodzi nierówność

$$\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|} \leq N_\rho\, \rho^{n-m}$$

z pewną stałą N_ρ zależną tylko od ρ i warunku początku x_0. ■

Istotną cechą, która odróżnia wykładniki Bohla od wykładników Lapunowa jest to, że może być ich więcej niż wymiar s przestrzeni warunków początkowych. Podamy teraz twierdzenia pokazujące, że dla układu diagonalnego liczba górnych wykładników Bohla może być co najwyżej $2^s - 1$ i że każda liczba mniejsza od $2^s - 1$ może być liczbą górnych wykładników Bohla układu diagonalnego. Dla układu ciągłego twierdzenia takie były pokazane w pracy [156].

Twierdzenie 58 *Poniższy układ*

$$x(n+1) = diag\,[a_1(n), \ldots, a_s(n)]\, x(n) \tag{5.19}$$

ma co najwyżej $2^s - 1$ różnych górnych wykładników Bohla.

Dowód *Dowolne rozwiązanie układu (5.19) można przedstawić w następujący sposób*

$$x(n) = [c_1 x_1(n), \ldots, c_s x_s(n)]^T, \tag{5.20}$$

gdzie

$$x_p(n) = \varepsilon_p \prod_{j=0}^{n-1} a_p(j), \quad dla\ n \geq 1, \tag{5.21}$$

$$x_p(0) = 1,$$

gdzie $p \in \{1, \ldots, s\}$, $\varepsilon_p \in \{0,1\}$ oraz $c_p \neq 0$. Wówczas $x_0 = [c_1, \ldots, c_s]^T$. Następnie każdemu ciągowi $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s) \in \{0,1\}^s$ przyporządkujmy zgodnie z równaniami (5.20) i (5.21) klasę $X_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s}$ rozwiązań

równania (5.19), w których stałe c_p przyjmują dowolne wartości różne od 0. *Dowolne dwie klasy różniące się wartościami chociażby jednego indeksu ε_p są rozłączne. Liczba wszystkich takich klas $X_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s}$ równa się 2^s. Ponieważ rozpatrujemy tylko nietrywialne rozwiązania, dla których $\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \geq 1$, to liczba rozłącznych klas wynosi $2^s - 1$.*

Udowodnimy teraz, że dowolne dwa rozwiązania $x^{(1)}(n)$, $x^{(2)}(n)$, które należą do tej samej klasy $X_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s}$ mają jednakowe górne wykładniki Bohla. Z tego będzie wynikać prawdziwość twierdzenia.

Niech

$$x^{(i)}(n) = \left[c_1^{(i)} x_1(n), \ldots, c_s^{(i)} x_s(n)\right]^T, \quad i = 1, 2.$$

Pokażemy teraz, że prawdziwa jest poniższa nierówność

$$\overline{\beta}^L\left(x_0^{(1)}\right) \leq \overline{\beta}^L\left(x_0^{(2)}\right), \ \text{gdzie } x_0^{(i)} = \left[c_1^{(i)}, \ldots, c_s^{(i)}\right]^T$$

Rzeczywiście,

$$\overline{\beta}^L\left(x_0^{(1)}\right) = \limsup_{n-m\to\infty} \left(\frac{\left\|x^{(1)}(n, x_0)\right\|}{\left\|x^{(1)}(m, x_0)\right\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} =$$

$$\limsup_{n-m\to\infty} \left(\frac{\left\|x^{(2)}(n, x_0)\right\|}{\left\|x^{(2)}(m, x_0)\right\|} \frac{\left\|x^{(2)}(m, x_0)\right\|}{\left\|x^{(2)}(n, x_0)\right\|} \frac{\left\|x^{(1)}(n, x_0)\right\|}{\left\|x^{(1)}(m, x_0)\right\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} \leq$$

$$\limsup_{n-m\to\infty} \left(\frac{\left\|x^{(2)}(n, x_0)\right\|}{\left\|x^{(2)}(m, x_0)\right\|} M_1 M_2\right)^{\frac{1}{n-m}} = \overline{\beta}^L\left(x_0^{(2)}\right),$$

gdzie

$$\left\|x^{(i)}(n)\right\| = \left(\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \left[c_p^{(i)}\right]^2 \prod_{j=0}^{n-1} a_p(j)\right)^{\frac{1}{2}}$$

dla $i = 1, 2$ oraz

$$\frac{\left\|x^{(1)}(n, x_0)\right\|}{\left\|x^{(2)}(n, x_0)\right\|} = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \left[c_p^{(1)}\right]^2 \prod_{j=0}^{n-1} a_p^2(j)}{\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \left[c_p^{(2)}\right]^2 \prod_{j=0}^{n-1} a_p^2(j)}} \leq$$

$$\sqrt{\frac{\max_p \left(c_p^{(1)}\right)^2 \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \prod_{j=0}^{n-1} a_p^2(j)}{\min_p \left(c_p^{(2)}\right)^2 \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \prod_{j=0}^{n-1} a_p^2(j)}} = \frac{\max_p \left|c_p^{(1)}\right|}{\min_p \left|c_p^{(2)}\right|} = M_1,$$

$$\frac{\left\|x^{(2)}(m, x_0)\right\|}{\left\|x^{(1)}(m, x_0)\right\|} = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \left[c_p^{(2)}\right]^2 \prod_{j=0}^{m-1} a_p^2(j)}{\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \left[c_p^{(1)}\right]^2 \prod_{j=0}^{m-1} a_p^2(j)}} \leq$$

$$\sqrt{\frac{\max_p \left(c_p^{(2)}\right)^2 \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \prod_{j=0}^{m-1} a_p^2(j)}{\min_p \left(c_p^{(1)}\right)^2 \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \prod_{j=0}^{m-1} a_p^2(j)}} = \frac{\max_p \left|c_p^{(2)}\right|}{\min_p \left|c_p^{(1)}\right|} = M_2.$$

W analogiczny sposób można pokazać prawdziwość nierówności

$$\overline{\beta}^L\left(x_0^{(2)}\right) \leq \overline{\beta}^L\left(x_0^{(1)}\right)$$

co kończy dowód. ■

Twierdzenie 58 podaje liczbę $2^s - 1$ jako górne oszacowanie dla liczby różnych górnych wykładników Bohla. Jednakże, powstaje pytanie czy jest ona osiągalna? Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca. Poniżej pokażemy nawet więcej. Mianowicie, że dla każdej liczby $q \leq 2^s - 1$ istnieje układ diagonalny, który ma dokładnie q górnych wykładników Bohla. Aby przedstawić stosowny przykład wprowadźmy najpierw kilka pomocniczych oznaczeń.

Niech dane będą:

- ciąg liczb naturalnych $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że $T_k \to \infty$ oraz $T_0 = T_1 = 0$, $T_{k+1} - T_k \to \infty$ dla $k \to \infty$. Podzielmy półprostą $t \geq 0$ na odcinki

$$S_k = [T_k, T_{k+1}]\,;$$

- liczba naturalna $z \geq 1$.
- nieskończone podzbiory

$$Q_l = \{\omega\,(k,l) : k \in 1,2,\ldots\}\,, \qquad l = 1,2,\ldots,z$$

zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ takie, że

$$Q_l \cap Q_j = \emptyset, \qquad \text{gdy} \quad i \neq j$$

oraz

$$\bigcup_{i=1}^{z} Q_i = \mathbb{N}.$$

Dla dowolnego niezerowego rozwiązania $x\,(n, x_0)$ układu (2.1) i $l \in \{1,2,\ldots,z\}$ oznaczmy

$$\overline{\beta}_l^L\,(x_0) = \limsup_{\substack{n-m\to\infty \\ n,m\in S_{\omega(k,l)}}} \left(\frac{\|x\,(n,x_0)\|}{\|x\,(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}}. \tag{5.22}$$

Zauważmy, że granicę górną w równości (5.22) nie bierzemy po wszystkich n, m, takich że $n-m \to \infty$, lecz tylko tych, które należą do tego samego odcinka $S_{\omega(k,l)}$ dla $k \in 1,2,\ldots$.

Lemat 59 *Prawdziwa jest równość*

$$\overline{\beta}^L\,(x_0) = \max_{l\in\{1,2,\ldots,z\}} \overline{\beta}_l^L\,(x_0)$$

Dowód *Niech $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takie, że $n_k, m_k \to \infty$ będą monotonicznie rosnącymi ciągami liczb naturalnych takimi, że $n_k \to \infty$, $n_k - m_k \to \infty$ przy $k \to \infty$ i*

$$\overline{\beta}^L\,(x_0) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\|x\,(n_k,x_0)\|}{\|x\,(m_k,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n_k-m_k}}. \tag{5.23}$$

Niech prawdziwe będą również następujące związki $m_k \in S_{\mu_k}$, $n_k \in S_{\lambda_k}$ (jeżeli m_k lub n_k pokrywa się z jednym z końców odcinka, to μ_k wybieramy tak by był lewym końcem przedziału natomiast λ_k prawym). Jeżeli

$$\limsup_{k\to\infty} \left(T_{\mu_k+1} - m_k\right) = \infty \tag{5.24}$$

i

$$\limsup_{k\to\infty} \left(n_k - T_{\lambda_k}\right) = \infty, \tag{5.25}$$

to przyjmijmy za ciągi $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ich podciągi realizujące górne granice w równościach (5.24) i (5.25). Jeżeli natomiast nie zachodzi równość (5.24) to zdefiniujmy

$$m_k = T_{\mu_k+1}.$$

Analogicznie, w przypadku nie spełnienia równości (5.25)

$$n_k = T_{\lambda_k}.$$

Wtedy wielkość granicy w (5.23) nie zmieni się i będą spełnione warunki

$$T_{\mu_k+1} - m_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty$$

i

$$n_k - T_{\lambda_k} \underset{k\to\infty}{\to} \infty$$

co wynika ze zdefiniowania ciągu $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Zbudujmy ciągi $(n_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ *realizujące granicę w (5.23) takie, że* $n_k^* - m_k^* \to \infty$ *przy* $k \to \infty$ *dla* $k = 1, 2, \ldots$ *oraz punkty* $n_k^*, m_k^* \in S_{\xi_k}$ *dla pewnego* $\xi_k = 1, 2, \ldots$ *w następujący sposób.*

Jeżeli n_k, $m_k \in S_{\xi_k}$ *dla pewnego* $\xi_k \in \mathbb{N}$ *to zdefiniujmy*

$$m_k^* = m_k$$

oraz

$$n_k^* = n_k.$$

Jeżeli n_k *i* m_k *nie należą do tego samego odcinka* S_l *dla żadnego* $l \in \mathbb{N}$ *to między* n_k *i* m_k *leży pewna liczba elementów ciągu* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$, *którą będziemy oznaczać* p_k. *Rozpatrzmy łamaną* L_k *złożoną z* $p_k + 2$ *odcinków:*

$$A_0 = (m_k, \ln \|x(m_k)\|),$$

$$A_1 = \left(T_{\mu_k+1}, \ln \left\|x\left(T_{\mu_k+1}\right)\right\|\right),$$

$$A_2 = \left(T_{\mu_k+2}, \ln \left\|x\left(T_{\mu_k+2}\right)\right\|\right),$$

$$\ldots,$$

$$A_{p_k} = (T_{\lambda_k}, \ln \|x(T_{\lambda_k})\|),$$

$$A_{p_k+1} = (n_k, \ln \|x(n_k)\|).$$

Jest jasnym, że znajdzie się taki odcinek

$$A_{i_k}A_{i_{k+1}}, \qquad i_k \in \{0, \ldots, p_k\},$$

że tangens kąta nachylenia do osi ot nie jest mniejszy niż tangens kąta nachylenia do osi ot odcinka

$$A_0 A_{p_k+1}.$$

Niech m_k^* *i* n_k^* *oznaczają odpowiednio rzuty punktów* A_{i_k} *i* A_{i_k+1} *na oś ot. Ze sposobu konstrukcji łamanej* L_k *punkty* n_k^*, $m_k^* \in S_{\xi_k}$ *przy pewnym* $\xi_k = 1, 2, \ldots$ *i* $n_k^* - m_k^* \to \infty$ *przy* $k \to \infty$.

Nietrudno pokazać, że jeżeli podstawimy zbudowane w ten sposób ciągi $(n_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ *w równości (5.23) to wielkość granicy nie zmieni się. Z kolei, z powodu skończoności z znajdziemy dla tych ciągów podciągi* $\left(n_{r_k}^*\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(m_{r_k}^*\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *takie, że* $n_{r_k}^*, m_{r_k}^* \in S_{\eta_k}$, *gdzie* $\eta_k \in Q_l$ *dla wszystkich* $k = 1, 2, \ldots$ *i pewnego* $l \in \{1, \ldots, z\}$ *co kończy dowód lematu.* ■

Twierdzenie 60 *Dla dowolnego naturalnego* s *i*

$$q \le 2^s - 1$$

istnieje układ (5.19) z ograniczonymi współczynnikami mający dokładnie q *różnych górnych wykładników Bohla.*

Dowód *Dla* $s = 1$ *teza twierdzenia jest oczywista. Załóżmy dalej, że* $s > 1$.

Dowód przeprowadzimy w dwóch przypadkach.

1. *Udowodnijmy na początek twierdzenie dla przypadku*

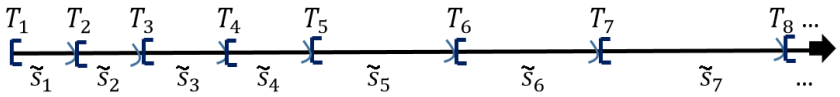
$$q = 2^s - 1.$$

Oznaczmy przez Λ *zbiór wszystkich niepustych podzbiorów zbioru* $\{1, 2, \ldots, s\}$. *Ilość elementów zbioru* Λ *wynosi* $2^s - 1$. *Niech*

$$\varphi : \Lambda \to \{1, \ldots, 2^s - 1\}$$

będzie taką bijekcją, że dla dowolnych $P, Q \in \Lambda$ *z warunku, że* $P \subset Q$ *wynika, że*

$$\varphi(P) < \varphi(Q).$$



Rysunek 5.5: Przedziały $\widetilde{S}_k = \left[\overline{T}_k, \overline{T}_{k+1}\right)$.

Taka bijekcja zawsze istnieje. Sposób jej konstrukcji dla $s = 3$ zaprezentowano poniżej

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\{1\}) & = & 1 \\ \varphi(\{2\}) & = & 2 \\ \varphi(\{3\}) & = & 3 \\ \varphi(\{1,2\}) & = & 4 \\ \varphi(\{1,3\}) & = & 5 \\ \varphi(\{2,3\}) & = & 6 \\ \varphi(\{1,2,3\}) & = & 7 \end{array}$$

Rozważmy dążący do nieskończoności ciąg liczb naturalnych $\left(\overline{T}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\overline{T}_1 = 0,$$

$$\overline{T}_{2k} - \overline{T}_{2k-1} = \overline{T}_{2k+1} - \overline{T}_{2k}$$

i

$$\overline{T}_{k+1} - \overline{T}_k \to \infty$$

przy $k \to \infty$. Oznaczmy

$$\overline{S}_k = \left[\overline{T}_k, \overline{T}_{k+1}\right]$$

oraz

$$\widetilde{S}_k = \left[\overline{T}_k, \overline{T}_{k+1}\right)$$

(patrz rysunek 5.5).

Ustalmy również zbiór liczb rzeczywistych

$$A = \{\alpha_i : i = 1, \ldots, 2^s - 1\}$$

taki, że

$$\alpha_j < \alpha_{j+1}$$

przy $j = 1, \ldots, 2^s - 2$. Określmy teraz współczynniki $a_p(n)$, $p = 1, 2, \ldots, s$ układu (5.19) na każdym odcinku

$$\widetilde{S}_{2k-1} \cup \widetilde{S}_{2k}$$

według następującej zasady. Dla $l = 1, \ldots, 2^s - 2$ niech

$$k \equiv l \pmod{2^s - 2}$$

$\left(\text{tj. } \frac{k-l}{2^s-2} \text{ jest liczbą całkowitą}\right)$. *Zdefiniujmy wówczas*

$$a_p(n) \equiv \begin{cases} e^{\alpha_{2^s-1}} & \text{jeżeli} \quad p \notin \varphi^{-1}(l) \quad i \quad n \in \widetilde{S}_{2k-1} \cup \widetilde{S}_{2k} \\ e^{\alpha_l} & \text{jeżeli} \quad p \in \varphi^{-1}(l) \quad i \quad n \in \widetilde{S}_{2k-1} \\ e^{2\alpha_{2^s-1}-\alpha_l} & \text{jeżeli} \quad p \in \varphi^{-1}(l) \quad i \quad n \in \widetilde{S}_{2k} \end{cases}, \tag{5.26}$$

co kończy konstruowanie układu.

Pokażemy, że zbiór górnych wykładników Bohla rozwiązań skonstruowanego w ten sposób układu zawiera dokładnie $2^s - 1$ różnych elementów. Aby to wykazać wystarczy pokazać, że górny wykładnik Bohla dowolnego rozwiązania ze zbioru

$$\Omega = \left\{ x(n, x_0) : [x_1(n), \ldots, x_s(n)]^T,\ x_i(n) = \varepsilon_i \prod_{j=0}^{n-1} a_i(j) \right.$$

$$i = 1, 2, \ldots, s\,, \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\}\,, \ \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i \neq 0 \Bigg\} \tag{5.27}$$

jest równy $\alpha_{\varphi(L)}$ *, gdzie* L *jest zbiorem tych indeksów* $i = 1, 2, \ldots, s$*, dla których* $\varepsilon_i = 1$ *w przedstawieniu*

$$x_i(n) = \varepsilon_i \prod_{j=0}^{n-1} a_i(j)\,,$$

$i = 1, 2, \ldots, s$ *rozwiązania* $x(n, x_0)$.

W tym celu będziemy posiłkować się lematem 59 dla

$$z = 2^s - 1,$$

zbiorami

$$Q_l = \{\omega(k, l) = 2\left[(2^s - 2)(k - 1) + l\right] : k = 1, 2, \ldots\}\,, \ l = 1, \ldots, 2^s - 2 \tag{5.28}$$

$$Q_{2^s-1} = \{\omega(k, 2^s - 1) = 2k - 1 : k = 1, 2, \ldots\} \tag{5.29}$$

i przedziałami $\overline{S}_k$*. Rozważmy teraz dwa przypadki:*

- *Niech* $L \neq \{1, 2, \ldots, s\}$ *i* $l = \varphi(L)$*. Zgodnie z konstrukcją układu*

$$x_i\left(\overline{T}_{2k-1}\right) = \prod_{j=0}^{\overline{T}_{2k-1}-1} a_i(j) = e^{\alpha_{2^s-1}\overline{T}_{2k-1}} \tag{5.30}$$

  dla wszystkich $i \in L$*,* $k = 1, 2, \ldots$*. Ponieważ jest dla nas bez znaczenia jaką z norm wektorowych weźmiemy przy wyliczeniu* $\overline{\beta}^L(x_0)$ *wszędzie niżej nasza norma będzie normą* $\|\cdot\|_\infty$ *(patrz podrozdział (2.3.2)). Na odcinkach* $S_{\omega(k,l)}$ *zgodnie z równościami (5.26) i (5.30)*

$$\|x(n, x_0)\|_\infty = e^{\alpha_{2^s-1}\overline{T}_{\omega(k,l)} + \left(n - \overline{T}_{\omega(k,l)}\right)\alpha_l}.$$

  Zatem dla $n, m \in S_{\omega(k,l)}$ *mamy*

$$\frac{\|x(n, x_0)\|_\infty}{\|x(m, x_0)\|_\infty} = e^{(n-m)\alpha_l}$$

  i

$$\overline{\beta}_l^L(x_0) = e^{\alpha_l}$$

  ponieważ różnica

$$\overline{T}_{\omega(k,l)+1} - \overline{T}_{\omega(k,l)} \underset{k\to\infty}{\to} \infty.$$

  Jeżeli $n, m \in S_{2k}$ *,* $k = 1, 2, \ldots$ *to dla dowolnego rozwiązania* $x(n, x_0) \in \Omega$ *na mocy (5.26) mamy*

$$\frac{\|x(n, x_0)\|_\infty}{\|x(m, x_0)\|_\infty} \leq e^{(n-m)\,\alpha_{2^s-1}}$$

  oraz

$$\overline{\beta}_{2^s-1}^L(x_0) = e^{\alpha_{2^s-1}}.$$

  Załóżmy teraz, że $l \neq \varphi(L)$*. Wtedy mamy dwie możliwości.*

  (a) $L \subset \varphi^{-1}(l)$ *i*

$$\overline{\beta}_l^L(x_0) = e^{\alpha_l} > e^{\alpha_{\varphi(L)}}$$

  z powodu sposobu w jaki była zadana bijekcja φ *i zbiór* A*;*

  (b) istnieje taki indeks $j \in L$*, że* $j \notin \varphi^{-1}(l)$ *i zgodnie z (5.26) i (5.30)*

$$\|x(n, x_0)\|_\infty = e^{n\,\alpha_{2^s-1}}$$

  dla $n \in S_{\omega(k,l)}$*,* $k = 1, 2, \ldots$*. Wynika stąd, że*

$$\overline{\beta}_l^L(x_0) > e^{\alpha_{\varphi(L)}}$$

  dla $l \neq \varphi(L)$ *i*

$$\overline{\beta}^L(x_0) = e^{\alpha_{\varphi(L)}}.$$

- *Niech $L = \{1, 2, \ldots, s\}$. Zgodnie ze sposobem konstrukcji układu dla dowolnego $l = 1, \ldots, 2^s - 2$ znajdzie się taki indeks $j = 1, 2, \ldots, s$, że*

$$x_j(n) = e^{n\,\alpha_{2^s-1}}$$

dla $n \in S_{\omega(k,l)}$ i dlatego

$$\overline{\beta}_l^L(x_0) = e^{\alpha_{2^s-1}}.$$

Jak już było udowodnione

$$\overline{\beta}_{2^s-1}^L(x_0) = e^{\alpha_{2^s-1}}.$$

A zatem

$$\overline{\beta}^L(x_0) = e^{\alpha_{2^s-1}}.$$

Ponieważ

$$\varphi(\{1, 2, \ldots, s\}) = 2^s - 1,$$

to

$$\overline{\beta}^L(x_0) = e^{\alpha_{\varphi(L)}}.$$

W przypadku

$$q = 2^s - 1$$

twierdzenie jest udowodnione.

2. *Rozpatrzmy teraz sytuację*

$$q < 2^s - 1.$$

Zdefiniujmy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{2^s-q},$$

gdzie $\alpha_j < \alpha_{j+1}$ dla $j = 2^s - q, \ldots, 2^s - 2$ jako elementy zbioru A. Dalszy dowód przebiega analogicznie jak w przypadku $q = 2^s - 1$.

■

Otwartym pytaniem pozostaje jak wygląda w ogólnym przypadku zbiór

$$\left\{\overline{\beta}^L(x_0) : x_0 \in \mathbb{R}_*^s\right\}.$$

Na chwilę obecną nie jesteśmy w stanie w pełni na to pytanie odpowiedzieć. Mamy jednak twierdzenie 61 w sformułowaniu którego posłużymy się następującym oznaczeniem

$$\left[\overline{\beta}^L \geq q\right] := \left\{x_0 \in \mathbb{R}_*^s : \overline{\beta}^L(x_0) \geq q\right\}.$$

Ponadto przypomnijmy, że podzbiór przestrzeni topologicznej nazywamy zbiorem typu G_δ, gdy jest on przekrojem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych [107], [162].

Twierdzenie 61 *Funkcja $\overline{\beta}^L : \mathbb{R}_*^s \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:*

1. *jest ograniczona;*
2. *dla dowolnego niezerowego rzeczywistego r i dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}_*^s$ spełniona jest równość $\overline{\beta}^L(x_0) = \overline{\beta}^L(rx_0)$;*
3. *przy każdym rzeczywistym q zbiór $\left[\overline{\beta}^L \geq q\right]$ jest zbiorem typu G_δ.*

Dowód *Udowodnijmy najpierw warunek 1*

Mamy

$$\overline{\beta}^L(x_0) = \limsup_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|x(n, x_0)\|}{\|x(m, x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} = \limsup_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|\mathcal{A}(n, 0)\,x_0\|}{\|\mathcal{A}(m, 0)\,, x_0\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} =$$

$$\limsup_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|\mathcal{A}(n, m)\,\mathcal{A}(m, 0)\,x_0\|}{\|\mathcal{A}(m, 0)\,, x_0\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} \leq \limsup_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|\mathcal{A}(n, m)\|\,\|\mathcal{A}(m, 0)\,x_0\|}{\|\mathcal{A}(m, 0)\,, x_0\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} \leq$$

$$\limsup_{n-m\to\infty}\left(a^{n-m}\right)^{\frac{1}{n-m}}=a,$$

gdzie

$$a=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|A(n)\|.$$

Czyli $\overline{\beta}^L$ *jest ograniczona.*

Przejdźmy teraz do dowodu punktu 2. Dla dowolnego niezerowego rzeczywistego r *i dowolnego* $x_0\in\mathbb{R}_*^s$ *mamy*

$$\overline{\beta}^L(rx_0)=\limsup_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|x(n,rx_0)\|}{\|x(m,rx_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}}=\limsup_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}}=\overline{\beta}^L(x_0)$$

co kończy dowód warunku 2.

Pozostaje udowodnić, że spełniony jest warunek 3. Dla dowolnego zadanego rzeczywistego q *i każdych ustalonych naturalnych* k, m $(m>k)$ *i* l *rozpatrzmy zbiór*

$$A_l^{(q)}(k,m):=\left\{x_0\in\mathbb{R}_*^s:\left(\frac{\|x(m;x_0)\|}{\|x(k;x_0)\|}\right)^{\frac{1}{m-k}}>q-\frac{1}{l}\right\}.$$

Dla ustalonych k *i* m *w konsekwencji ciągłości funkcji*

$$\frac{\|x(m;\cdot)\|}{\|x(k;\cdot)\|}:\mathbb{R}_*^s\to\mathbb{R}$$

zbiór $A_l^{(q)}(k,m)$ *jest otwarty. Udowodnimy, że*

$$\left[\overline{\beta}^L\geq q\right]=\bigcap_{l\in\mathbb{N}}\bigcap_{t\in\mathbb{N}}\bigcup_{p=t}^{\infty}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_l^{(q)}(k,k+p).\tag{5.31}$$

Niech $B^{(q)}$ *oznacza zbiór określony prawą częścią równości (5.31). Dla każdego* $l\in\mathbb{N}$ *znajdzie się taki podwójny ciąg liczb naturalnych* $\left(\left(k_i^{(l)},m_i^{(l)}\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$, *że* $m_i^{(l)}-k_i^{(l)}\to\infty$ *dla* $i\to\infty$ *oraz*

$$\left(\frac{\left\|x\left(m_i^{(l)};x_0\right)\right\|}{\left\|x\left(k_i^{(l)};x_0\right)\right\|}\right)^{\frac{1}{m_i^{(l)}-k_i^{(l)}}}>q-\frac{1}{l}$$

dla $x_0\in\left[\overline{\beta}^L\geq q\right]$ *i wszystkich* $i\in\mathbb{N}$. *W konsekwencji*

$$x_0\in A_l^{(q)}\left(k_i^{(l)},m_i^{(l)}\right)$$

dla każdego $i\in\mathbb{N}$ *i dlatego*

$$x_0\in\bigcup_{p=t}^{\infty}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_l^{(q)}(k,k+p)$$

dla każdego $t\in\mathbb{N}$. *Dodatkowo, ponieważ* $m_i^{(l)}-k_i^{(l)}\to\infty$ *dla* $i\to\infty$, *więc* $x_0\in B^{(q)}$.

Niech teraz $x_0\in B^{(q)}$. *Oznacza to, że dla każdego* $l\in\mathbb{N}$ *znajdą się takie ciągi liczb naturalnych* $\left(k_i^{(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *i* $\left(p_i^{(l)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, *gdzie* $p_i^{(l)}\to\infty$ *dla* $i\to\infty$, *że*

$$x_0\in A_l^{(q)}\left(k_i^{(l)},k_i^{(l)}+p_i^{(l)}\right)$$

dla dowolnego $i\in\mathbb{N}$. *W konsekwencji* $x_0\in\left[\overline{\beta}^L\geq q\right]$ *co kończy dowód równości (5.31) i w konsekwencji dowód punktu 3 twierdzenia.* ■

W pracy [12] udowodniono, że powyższe warunki są również wystarczające dla funkcji $\overline{\beta}^L$ aby była funkcją górnego wykładnika Bohla dla pewnego układu ciągłego. Natomiast dla układów dyskretnych pytanie o konieczność warunków pozostaje otwartym.

5.3.2 Dolny wykładnik Bohla

Jak wiadomo definicję wykładnika Perrona otrzymujemy z definicji wykładnika Lapunowa przez zastąpienie górnej granicy dolną co prowadzi do znacząco innych własności. W tym podrozdziale zobaczymy, że zastępując w definicji górnego wykładnika Bohla granicą dolną otrzymamy tzw. dolny wykładnik Bohla o własności w pełni analogicznych do górnego wykładnika Bohla. Większość rozumowań w tym podrozdziale będzie analogiczna do rozważań z podrozdziału o górnym wykładniku Bohla.

Do zdefiniowania pojęcia dolnego wykładnika Bohla posłuży nam dolna podwójna granica ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$, która zdefiniowana jest w sposób następujący

Definicja 62 *[221]. Niech $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem podwójnym liczb rzeczywistych. Dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zdefiniujmy*

$$b(n)=\inf\{a(k,l):k,l\geq n\}.$$

Dolna granica podwójna

$$\liminf_{m,\,n\to\infty} a(n,m)$$

ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ jest zdefiniowana w następujący sposób:

1. *Jeżeli $b(n)=-\infty$ dla każdego n, to $\liminf\limits_{m,\,n\to\infty} a(n,m)=-\infty$.*
2. *Jeżeli $b(n)>-\infty$ dla pewnego n, to $\liminf\limits_{m,\,n\to\infty} a(n,m)=\sup\{b(n):n\in\mathbb{N}\}$.*

Dolna granica podwójna ma własności zawarte w następującym twierdzeniu [221].

Twierdzenie 63 *Dla dowolnego ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych mamy:*

1. *dolna granica podwójna ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ jest najmniejszą z jego granic częściowych;*
2. *równość*
$$\liminf_{m,n\to\infty} a(n,m)=c$$
zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy poniższe dwa warunki są jednocześnie spełnione:
   - *dla wszystkich $\varepsilon>0$ istnieje P takie, że dla wszystkich par (n,m) takich, że $m,n>P$ mamy $a(n,m)>c-\varepsilon$;*
   - *dla wszystkich $\varepsilon>0$ i wszystkich P' istnieją $m,n>P'$ takie, że $a(n,m)<c+\varepsilon$.*
3. $\liminf\limits_{m,n\to\infty}[a(n,m)+b(n,m)]\geq\liminf\limits_{m,n\to\infty} a(n,m)+\liminf\limits_{m,n\to\infty} b(n,m)$.
4. *Jeżeli $(a(n_k,m_l))_{k,l\in\mathbb{N}}$ jest podciągiem ciągu $(a(n,m))_{n,m\in\mathbb{N}}$ to*
$$\liminf_{k,l\to\infty} a(n_k,m_l)\geq\liminf_{m,n\to\infty} a(n,m).$$

Zdefiniujmy

$$\liminf_{m,\,n-m\to\infty} a(n,m)=\liminf_{m,k\to\infty} a(m+k,m).$$

Zdefiniujmy teraz dolny wykładnik Bohla.

Definicja 64 *Dla $x_0\in\mathbb{R}^s_*$ dolny wykładnik Bohla $\underline{\beta}^L(x_0)$ układu (2.1) jest zdefiniowany jako*

$$\underline{\beta}^L(x_0)=\liminf_{m,\,n-m\to\infty}\left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}}.$$

Zgodnie z sugestią autorów pracy [89], że dolny wykładnik Bohla można dla układów ciągłych opisać w pewien alternatywny sposób, poniższe twierdzenie zawiera szereg alternatywnych opisów dolnego wykładnika Bohla dla układów dyskretnych.

Twierdzenie 65 *Dla dowolnego $x_0\in\mathbb{R}^s_*$ zachodzą poniższe równości:*

1. $\underline{\beta}^L(x_0) = \sup\left\{\rho : \bigvee_{N_\rho} \bigwedge_{n\geq m} \|x(n,x_0)\| \geq N_\rho \rho^{(n-m)} \|x(m,x_0)\|\right\}$,

2. $\underline{\beta}^L(x_0) = \liminf_{n-m\to\infty} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}}$,

3. $\underline{\beta}^L(x_0) = \liminf_{n\to\infty} \left[\inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\frac{\|x(n+m,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$.

Dowód *Ustalmy $x_0 \in \mathbb{R}^s_*$ i $\varepsilon > 0$ oraz oznaczmy przez α prawą stronę równości z punktu 1. Z definicji kresu górnego*

$$\bigvee_{N_\varepsilon} \bigwedge_{n\geq m} \frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|} \geq N_\varepsilon (\alpha-\varepsilon)^{n-m}.$$

Po obustronnym spierwiastkowaniu nierówności pierwiastkiem stopnia $n-m$ i obliczeniu dolnej granicy podwójnej dostajemy

$$\underline{\beta}^L(x_0) > \alpha - \varepsilon.$$

Wobec dowolności ε

$$\underline{\beta}^L(x_0) \geq \alpha.$$

Pokażemy teraz nierówność przeciwną. Z punktu 2 twierdzenia 63 mamy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{k_0} \bigwedge_{m,\, n-m>k_0} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} > \underline{\beta}^L(x_0) - \varepsilon,$$

czyli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{k_0} \bigwedge_{m,n-m>k_0} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right) > \left(\underline{\beta}^L(x_0) - \varepsilon\right)^{n-m}.$$

Ponieważ współczynniki układu (2.1) są ograniczone to istnieje stała N taka, że

$$\bigwedge_{n\geq m} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right) > N\left(\underline{\beta}^L(x_0) - \varepsilon\right)^{n-m}$$

co oznacza, że

$$\underline{\beta}^L(x_0) - \varepsilon \in \left\{\rho : \bigvee_{N_\rho} \bigwedge_{n\geq m} \|x(n,x_0)\| \geq N_\rho \rho^{(n-m)} \|x(m,x_0)\|\right\},$$

więc

$$\alpha \geq \underline{\beta}^L(x_0) - \varepsilon.$$

Wobec dowolności ε

$$\alpha \geq \underline{\beta}^L(x_0)$$

co kończy dowód punktu 1.

Natychmiastową konsekwencją ograniczoności ciągu $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest równość z punktu 2.

Z równości z punktu 2 liczba $\underline{\beta}^L(x_0)$ jest kresem górnym tych liczb ρ, dla których przy wszystkich $0 \leq m \leq n$ zachodzi nierówność

$$\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|} \geq N_\rho \rho^{n-m}$$

z pewną stałą N_ρ zależną tylko od ρ i warunku początku x_0 co kończy dowód punktu 3. ■

Dolne wykładnik Bohla ma podobną własność jak górne wykładnik Bohla, które odróżniają je od wykładników Lapunowa, a mianowicie, że może być ich więcej niż wymiar s przestrzeni warunków początkowych. Analogicznie do twierdzenia 58 przedstawiamy poniżej twierdzenie pokazujące, że dla układu diagonalnego liczba dolnych wykładników Bohla może być co najwyżej $2^s - 1$. Przypadek układu ciągłego jest rozpatrywany w pracy [156].

Twierdzenie 66 *Układ określony następującym równaniem*

$$x(n+1) = diag\left[a_1(n), \ldots, a_s(n)\right] x(n) \tag{5.32}$$

ma co najwyżej $2^s - 1$ różnych dolnych wykładników Bohla.

Dowód *Przyjmijmy oznaczenia z dowodu twierdzenia 58.*

Udowodnimy, że dowolne dwa rozwiązania $x^{(1)}(n)$, $x^{(2)}(n)$, które należą do tej samej klasy $X_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s}$ mają jednakowe dolne wykładniki Bohla. Z tego będzie wynikać prawdziwość twierdzenia.

Niech

$$x^{(i)}(n) = \left[c_1^{(i)} x_1(n), \ldots, c_s^{(i)} x_s(n)\right]^T, \quad i = 1, 2.$$

Pokażemy teraz, że prawdziwa jest poniższa nierówność

$$\underline{\beta}^L\left(x_0^{(1)}\right) \leq \underline{\beta}^L\left(x_0^{(2)}\right), \quad \text{gdzie } x_0^{(i)} = \left[c_1^{(i)}, \ldots, c_s^{(i)}\right]^T$$

Rzeczywiście,

$$\underline{\beta}^L\left(x_0^{(1)}\right) = \liminf_{n-m\to\infty} \left(\frac{\left\|x^{(1)}(n, x_0)\right\|}{\left\|x^{(1)}(m, x_0)\right\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} =$$

$$\liminf_{n-m\to\infty} \left(\frac{\left\|x^{(2)}(n, x_0)\right\|}{\left\|x^{(2)}(m, x_0)\right\|} \frac{\left\|x^{(2)}(m, x_0)\right\|}{\left\|x^{(2)}(n, x_0)\right\|} \frac{\left\|x^{(1)}(n, x_0)\right\|}{\left\|x^{(1)}(m, x_0)\right\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} \leq$$

$$\liminf_{n-m\to\infty} \left(\frac{\left\|x^{(2)}(n, x_0)\right\|}{\left\|x^{(2)}(m, x_0)\right\|} M_1 M_2\right)^{\frac{1}{n-m}} = \underline{\beta}^L\left(x_0^{(2)}\right),$$

gdzie

$$\left\|x^{(i)}(n)\right\| = \left(\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \left[c_p^{(i)}\right]^2 \prod_{j=0}^{n-1} a_p(j)\right)^{\frac{1}{2}}$$

dla $i = 1, 2$ oraz

$$\frac{\left\|x^{(1)}(n, x_0)\right\|}{\left\|x^{(2)}(n, x_0)\right\|} = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \left[c_p^{(1)}\right]^2 \prod_{j=0}^{n-1} a_p^2(j)}{\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \left[c_p^{(2)}\right]^2 \prod_{j=0}^{n-1} a_p^2(j)}} \leq$$

$$\sqrt{\frac{\max_p \left(c_p^{(1)}\right)^2 \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \prod_{j=0}^{n-1} a_p^2(j)}{\min_p \left(c_p^{(2)}\right)^2 \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \prod_{j=0}^{n-1} a_p^2(j)}} = \frac{\max_p \left|c_p^{(1)}\right|}{\min_p \left|c_p^{(2)}\right|} = M_1,$$

$$\frac{\left\|x^{(2)}(m, x_0)\right\|}{\left\|x^{(1)}(m, x_0)\right\|} = \sqrt{\frac{\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \left[c_p^{(2)}\right]^2 \prod_{j=0}^{m-1} a_p^2(j)}{\sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \left[c_p^{(1)}\right]^2 \prod_{j=0}^{m-1} a_p^2(j)}} \leq$$

$$\sqrt{\frac{\max_p \left(c_p^{(2)}\right)^2 \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \prod_{j=0}^{m-1} a_p^2(j)}{\min_p \left(c_p^{(1)}\right)^2 \sum_{p=1}^{s} \varepsilon_p \prod_{j=0}^{m-1} a_p^2(j)}} = \frac{\max_p \left|c_p^{(2)}\right|}{\min_p \left|c_p^{(1)}\right|} = M_2.$$

W analogiczny sposób można pokazać prawdziwość nierówności

$$\overline{\beta}^L\left(x_0^{(2)}\right) \leq \overline{\beta}^L\left(x_0^{(1)}\right).$$

■

Podobnie do twierdzenia 58 twierdzenie 66 podaje liczbę $2^s - 1$ jako górne oszacowanie dla liczby różnych dolnych wykładników Bohla. Okazuje się, że jest ona osiągalna. Pokażemy poniżej na przykładzie, że dla każdej liczby $q \leq 2^s - 1$ istnieje układ diagonalny, który ma dokładnie q dolnych wykładników Bohla. Wprowadźmy najpierw kilka pomocniczych oznaczeń.

Niech dane będą:

- ciąg liczb naturalnych $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że $T_k \to \infty$ oraz $T_0 = T_1 = 0$, $T_{k+1} - T_k \to \infty$ dla $k \to \infty$. Podzielmy półprostą $t \geq 0$ na odcinki

$$S_k = [T_k, T_{k+1}];$$

- liczba naturalna $z \geq 1$;
- nieskończone podzbiory

$$Q_l = \{\omega(k,l) : k \in 1,2,\ldots\}, \qquad l = 1,2,\ldots,z$$

zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ takie, że

$$Q_l \cap Q_j = \emptyset, \qquad \text{gdy} \quad i \neq j$$

oraz

$$\bigcup_{i=1}^{z} Q_i = \mathbb{N}.$$

Dla dowolnego niezerowego rozwiązania $x(n,x_0)$ układu (2.1) i $l \in \{1,2,\ldots,z\}$ oznaczmy

$$\underline{\beta}_l^L(x_0) = \liminf_{\substack{n-m \to \infty \\ n,m \in S_{\omega(k,l)}}} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}}. \tag{5.33}$$

Zauważmy, że granicę górną w równości (5.33) nie bierzemy po wszystkich n,m, że $n-m \to \infty$, lecz tylko takich, które należą do tego samego odcinka $S_{\omega(k,l)}$ dla $k \in 1,2,\ldots$.

Lemat 67 *Prawdziwa jest równość*

$$\underline{\beta}^L(x_0) = \min_{l \in \{1,2,\ldots,z\}} \underline{\beta}_l^L(x_0)$$

Dowód *Niech $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ i $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ takie, że $n_k, m_k \to \infty$ będą monotonicznie rosnącymi ciągami liczb naturalnych takimi, że $n_k \to \infty$, $n_k - m_k \to \infty$ przy $k \to \infty$ i*

$$\underline{\beta}^L(x_0) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\|x(n_k,x_0)\|}{\|x(m_k,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n_k-m_k}}. \tag{5.34}$$

Również niech będą prawdziwe następujące związki $m_k \in S_{\mu_k}$, $n_k \in S_{\lambda_k}$ (jeżeli m_k lub n_k pokrywa się z jednym z końców odcinka to μ_k wybieramy tak by był lewym końcem przedziału natomiast λ_k prawym). Jeżeli

$$\limsup_{k\to\infty} \left(T_{\mu_k+1} - m_k\right) = \infty \tag{5.35}$$

i

$$\limsup_{k\to\infty} (n_k - T_{\lambda_k}) = \infty, \tag{5.36}$$

to przyjmijmy za ciągi $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ich podciągi realizujące górne granice w równościach (5.35) i (5.36). Jeżeli natomiast nie zachodzi równość (5.35), to zdefiniujmy

$$m_k = T_{\mu_k+1}.$$

Analogicznie, w przypadku nie spełnienia równości (5.36)

$$n_k = T_{\lambda_k}.$$

Wtedy wielkość granicy w (5.34) nie zmieni się i będą spełnione warunki

$$T_{\mu_k+1} - m_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty$$

i

$$n_k - T_{\lambda_k} \underset{k\to\infty}{\to} \infty$$

co wynika ze zdefiniowania ciągu $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Zbudujmy ciągi $(n_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ realizujące granicę w (5.34) takie, że $n_k^* - m_k^* \to \infty$ przy $k \to \infty$ dla $k = 1,2,\ldots$ oraz punkty $n_k^*, m_k^* \in S_{\xi_k}$ dla pewnego $\xi_k = 1,2,\ldots$ w następujący sposób.

Jeżeli n_k, $m_k \in S_{\xi_k}$ dla pewnego $\xi_k \in \mathbb{N}$ to zdefiniujmy

$$m_k^* = m_k$$

oraz

$$n_k^* = n_k.$$

Jeżeli n_k i m_k nie należą do tego samego odcinka S_l dla żadnego $l \in \mathbb{N}$, to między n_k i m_k leży pewna liczba elementów ciągu $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$, którą będziemy oznaczać p_k. Rozpatrzmy łamaną L_k złożoną z $p_k + 2$ odcinków:

$$\begin{aligned} A_0 &= (m_k, \ln \|x(m_k)\|), \\ A_1 &= \left(T_{\mu_k+1}, \ln \left\|x\left(T_{\mu_k+1}\right)\right\|\right), \\ A_2 &= \left(T_{\mu_k+2}, \ln \left\|x\left(T_{\mu_k+2}\right)\right\|\right), \\ &\ldots, \\ A_{p_k} &= (T_{\lambda_k}, \ln \|x(T_{\lambda_k})\|), \\ A_{p_k+1} &= (n_k, \ln \|x(n_k)\|). \end{aligned}$$

Jest jasnym, że znajdzie się taki odcinek

$$A_{i_k}A_{i_{k+1}}, \qquad i_k \in \{0, \ldots, p_k\},$$

że tangens kąta nachylenia do osi ot nie jest większy niż tangens kąta nachylenia do osi ot odcinka

$$A_0 A_{p_k+1}.$$

Niech m_k^* i n_k^* oznaczają odpowiednio rzuty punktów A_{i_k} i A_{i_k+1} na oś ot. Ze sposobu zbudowania łamanej L_k punkty n_k^*, $m_k^* \in S_{\xi_k}$ przy pewnym $\xi_k = 1, 2, \ldots$ i $n_k^* - m_k^* \to \infty$ przy $k \to \infty$.

Nietrudno pokazać, że jeżeli podstawimy zbudowane w ten sposób ciągi $(n_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ w równości (5.34), to wielkość granicy nie zmieni się. Z kolei, z powodu skończoności z znajdziemy dla tych ciągów podciągi $\left(n_{r_k}^*\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(m_{r_k}^*\right)_{k\in\mathbb{N}}$ takie, że $n_{r_k}^*, m_{r_k}^* \in S_{\eta_k}$, gdzie $\eta_k \in Q_l$ dla wszystkich $k = 1, 2, \ldots$ i pewnego $l \in \{1, \ldots, z\}$. ■

Twierdzenie 68 *Dla dowolnego naturalnego s i*

$$q \leq 2^s - 1$$

istnieje układ (5.32) z ograniczonymi współczynnikami mający dokładnie q różnych dolnych wykładników Bohla.

Dowód *Dla $s = 1$ teza twierdzenia jest oczywista. Załóżmy dalej, że $s > 1$.*

Dowód przeprowadzimy w dwóch przypadkach.

1. *Udowodnijmy na początek twierdzenie dla przypadku*

$$q = 2^s - 1.$$

Oznaczmy przez Λ zbiór wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, s\}$. Ilość elementów zbioru Λ wynosi $2^s - 1$. Niech

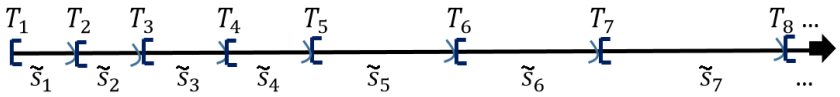
$$\varphi : \Lambda \to \{1, \ldots, 2^s - 1\}$$

będzie taką bijekcją, że dla dowolnych $P, Q \in \Lambda$ z warunku, że $P \subset Q$ wynika, że

$$\varphi(P) < \varphi(Q).$$

Taka bijekcja zawsze istnieje. Sposób jej konstrukcji dla $s = 3$ zaprezentowano poniżej

$$\begin{aligned} \varphi(\{1\}) &= 1 \\ \varphi(\{2\}) &= 2 \\ \varphi(\{3\}) &= 3 \\ \varphi(\{1,2\}) &= 4 \\ \varphi(\{1,3\}) &= 5 \\ \varphi(\{2,3\}) &= 6 \\ \varphi(\{1,2,3\}) &= 7 \end{aligned}$$



Rysunek 5.6: Przedziały $\widetilde{S}_k = \left[\overline{T}_k, \overline{T}_{k+1}\right)$.

Rozważmy dążący do nieskończoności ciąg liczb naturalnych $\left(\overline{T}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *taki, że*

$$\overline{T}_1 = 0,$$

$$\overline{T}_{2k} - \overline{T}_{2k-1} = \overline{T}_{2k+1} - \overline{T}_{2k}$$

i

$$\overline{T}_{k+1} - \overline{T}_k \to \infty$$

przy $k \to \infty$. *Oznaczmy*

$$\overline{S}_k = \left[\overline{T}_k, \overline{T}_{k+1}\right]$$

oraz

$$\widetilde{S}_k = \left[\overline{T}_k, \overline{T}_{k+1}\right)$$

(patrz rysunek 5.6).

Ustalmy również zbiór liczb rzeczywistych

$$A = \{\alpha_i : i = 1, \ldots, 2^s - 1\}$$

taki, że

$$\alpha_j < \alpha_{j+1}$$

przy $j = 1, \ldots, 2^s - 2$. *Określmy teraz współczynniki* $a_p(n)$, $p = 1, 2, \ldots, s$ *układu (5.32) na każdym odcinku*

$$\widetilde{S}_{2k-1} \cup \widetilde{S}_{2k}$$

według następującej zasady. Dla $l = 1, \ldots, 2^s - 2$ *niech*

$$k \equiv l \pmod{2^s - 2}$$

$\left(\text{tj. } \frac{k-l}{2^s-2} \text{ jest liczbą całkowitą}\right)$. *Zdefiniujmy wówczas*

$$a_p(n) \equiv \begin{cases} e^{\alpha_{2^s-1}} & \text{jeżeli} \quad p \notin \varphi^{-1}(l) \quad i \quad n \in \widetilde{S}_{2k-1} \cup \widetilde{S}_{2k} \\ e^{\alpha_l} & \text{jeżeli} \quad p \in \varphi^{-1}(l) \quad i \quad n \in \widetilde{S}_{2k-1} \\ e^{2\alpha_{2^s-1} - \alpha_l} & \text{jeżeli} \quad p \in \varphi^{-1}(l) \quad i \quad n \in \widetilde{S}_{2k} \end{cases}, \tag{5.37}$$

co kończy konstruowanie układu.

Pokażemy, że zbiór dolnych wykładników Bohla rozwiązań skonstruowanego w ten sposób układu zawiera dokładnie $2^s - 1$ *różnych elementów. Aby to wykazać wystarczy pokazać, że dolny wykładnik Bohla dowolnego rozwiązania ze zbioru*

$$\Omega = \left\{ x(n, x_0) : [x_1(n), \ldots, x_s(n)]^T,\ x_i(n) = \varepsilon_i \prod_{j=0}^{n-1} a_i(j) \right.$$

$$\left. i = 1, 2, \ldots, s, \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\},\ \sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i \neq 0 \right\} \tag{5.38}$$

jest równy $\alpha_{\varphi(L)}$, *gdzie* L *jest zbiorem tych indeksów* $i = 1, 2, \ldots, s$, *dla których* $\varepsilon_i = 1$ *w przedstawieniu*

$$x_i(n) = \varepsilon_i \prod_{j=0}^{n-1} a_i(j),$$

$i = 1, 2, \ldots, s$ *rozwiązania* $x(n, x_0)$.

W tym celu będziemy posiłkować się lematem 67 dla

$$z = 2^s - 1,$$

zbiorami

$$Q_l = \{\omega(k,l) = 2[(2^s - 2)(k-1) + l] - 1 : k = 1, 2, \ldots\}, \; l = 1, \ldots, 2^s - 2 \tag{5.39}$$

$$Q_{2^s-1} = \{\omega(k, 2^s - 1) = 2k : k = 1, 2, \ldots\} \tag{5.40}$$

i przedziałami $\overline{S}_k$. *Rozważmy teraz dwa przypadki:*

- *Niech* $L \neq \{1, 2, \ldots, s\}$ *i* $l = \varphi(L)$. *Zgodnie z konstrukcją układu*

$$x_i\left(\overline{T}_{2k-1}\right) = \prod_{j=0}^{\overline{T}_{2k-1}-1} a_i(j) = e^{\alpha_{2^s-1}\overline{T}_{2k-1}} \tag{5.41}$$

  dla wszystkich $i \in L$, $k = 1, 2, \ldots$. *Ponieważ jest dla nas bez znaczenia jaką z norm wektorowych weźmiemy przy wyliczeniu* $\underline{\beta}^L(x_0)$ *wszędzie niżej nasza norma będzie normą* $\|\cdot\|_\infty$ *(patrz podrozdział (2.3.2)). Na odcinkach* $S_{\omega(k,l)}$ *zgodnie z równościami (5.37) i (5.41)*

$$\|x(n, x_0)\|_\infty = e^{\alpha_{2^s-1}\overline{T}_{\omega(k,l)} + \left(n - \overline{T}_{\omega(k,l)}\right)\alpha_l}.$$

  Zatem dla $n, m \in S_{\omega(k,l)}$ *mamy*

$$\frac{\|x(n, x_0)\|_\infty}{\|x(m, x_0)\|_\infty} = e^{(n-m)\alpha_l}$$

  i

$$\underline{\beta}_l^L(x_0) = e^{\alpha_l},$$

  ponieważ różnica

$$\overline{T}_{\omega(k,l)+1} - \overline{T}_{\omega(k,l)} \underset{k\to\infty}{\to} \infty.$$

  Jeżeli $n, m \in S_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$ *to dla dowolnego rozwiązania* $x(n, x_0) \in \Omega$ *na mocy (5.37) mamy*

$$\frac{\|x(n, x_0)\|_\infty}{\|x(m, x_0)\|_\infty} \geq e^{(n-m)\,\alpha_{2^s-1}}$$

  i

$$\underline{\beta}_{2^s-1}^L(x_0) = e^{\alpha_{2^s-1}}.$$

  Załóżmy teraz, że $l \neq \varphi(L)$. *Wtedy mamy dwie możliwości.*

  (a) $L \subset \varphi^{-1}(l)$ *i*

$$\underline{\beta}_l^L(x_0) = e^{\alpha_l} > e^{\alpha_{\varphi(L)}}$$

  z powodu sposobu w jaki była zadana bijekcja φ *i zbiór* A;

  (b) istnieje taki indeks $j \in L$, *że* $j \notin \varphi^{-1}(l)$ *i zgodnie z (5.37) i (5.41)*

$$\|x(n, x_0)\|_\infty = e^{n\,\alpha_{2^s-1}}$$

  dla $n \in S_{\omega(k,l)}$, $k = 1, 2, \ldots$. *Wynika stąd, że*

$$\underline{\beta}_l^L(x_0) > e^{\alpha_{\varphi(L)}}$$

  dla $l \neq \varphi(L)$ *i*

$$\underline{\beta}^L(x_0) = e^{\alpha_{\varphi(L)}}.$$

- *Niech $L = \{1, 2, \ldots, s\}$. Zgodnie ze sposobem konstrukcji układu dla dowolnego $l = 1, \ldots, 2^s - 2$ znajdzie się taki indeks $j = 1, 2, \ldots, s$, że*

$$x_j(n) = e^{n\,\alpha_{2^s-1}}$$

dla $n \in S_{\omega(k,l)}$ i dlatego

$$\underline{\beta}_l^L(x_0) = e^{\alpha_{2^s-1}}.$$

Jak już było udowodnione

$$\underline{\beta}_{2^s-1}^L(x_0) = e^{\alpha_{2^s-1}}.$$

A zatem

$$\underline{\beta}^L(x_0) = e^{\alpha_{2^s-1}}.$$

Ponieważ

$$\varphi(\{1, 2, \ldots, s\}) = 2^s - 1,$$

to

$$\underline{\beta}^L(x_0) = e^{\alpha_{\varphi(L)}}.$$

W przypadku

$$q = 2^s - 1$$

twierdzenie udowodnione.

2. *Rozpatrzmy teraz sytuację*

$$q < 2^s - 1.$$

Zdefiniujmy

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{2^s-q},$$

gdzie $\alpha_j < \alpha_{j+1}$ dla $j = 2^s - q, \ldots, 2^s - 2$ jako elementy zbioru A. Dalszy dowód przebiega analogicznie jak w przypadku $q = 2^s - 1$.

■

Powyższy autorski wynik został opublikowany w pracy [217].

Podobnie jak dla górnego wykładnika Bohla tak i dla dolnego otwartym pytaniem jest jak wygląda w ogólnym przypadku zbiór

$$\left\{\underline{\beta}^L(x_0) : x_0 \in \mathbb{R}_*^s\right\}.$$

Na chwilę obecną nie jesteśmy w stanie w pełni na to pytanie odpowiedzieć. Mamy jednak twierdzenie 69 w sformułowaniu którego posłużymy posłużymy się następującym oznaczeniem

$$\left[\underline{\beta}^L > q\right] := \left\{x_0 \in \mathbb{R}_*^s : \underline{\beta}^L(x_0) > q\right\}.$$

Ponadto przypomnijmy, że podzbiór przestrzeni topologicznej nazywamy zbiorem typu F_σ, gdy jest on sumą przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych [107], [162].

Twierdzenie 69 *Funkcja $\underline{\beta}^L : \mathbb{R}_*^s \to \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:*

1. *jest ograniczona;*
2. *dla dowolnego niezerowego rzeczywistego r i dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}_*^s$ spełniona jest równość $\underline{\beta}^L(x_0) = \underline{\beta}^L(rx_0)$;*
3. *przy każdym rzeczywistym q zbiór $\left[\underline{\beta}^L > q\right]$ jest zbiorem typu F_σ.*

Dowód *Udowodnijmy najpierw warunek 1*

Mamy

$$\underline{\beta}^L(x_0) = \liminf_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|x(n, x_0)\|}{\|x(m, x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} = \liminf_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|\mathcal{A}(n, 0)\,x_0\|}{\|\mathcal{A}(m, 0)\,, x_0\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} =$$

$$\liminf_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|\mathcal{A}(n, m)\,\mathcal{A}(m, 0)\,x_0\|}{\|\mathcal{A}(m, 0)\,, x_0\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} \leq \liminf_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|\mathcal{A}(n, m)\|\,\|\mathcal{A}(m, 0)\,x_0\|}{\|\mathcal{A}(m, 0)\,, x_0\|}\right)^{\frac{1}{n-m}} \leq$$

$$\liminf_{n-m\to\infty}\left(a^{n-m}\right)^{\frac{1}{n-m}}=a,$$

gdzie

$$a=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|A(n)\|$$

Czyli $\underline{\beta}^L$ *jest ograniczona.*

Przejdźmy teraz do dowodu punktu 2. Dla dowolnego niezerowego rzeczywistego r *i dowolnego* $x_0\in\mathbb{R}_*^s$ *mamy*

$$\underline{\beta}^L(rx_0)=\liminf_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|x(n,rx_0)\|}{\|x(m,rx_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}}=\liminf_{n-m\to\infty}\left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|}\right)^{\frac{1}{n-m}}=\underline{\beta}^L(x_0)$$

co kończy dowód warunku 2.

Pozostaje udowodnić, że spełniony jest warunek 3. Dla dowolnego zadanego rzeczywistego q *i każdych ustalonych naturalnych* k, m $(m>k)$ *i* l *rozpatrzmy zbiór*

$$A_l^{(q)}(k,m):=\left\{x_0\in\mathbb{R}_*^s:\left(\frac{\|x(m;x_0)\|}{\|x(k;x_0)\|}\right)^{\frac{1}{m-k}}\le q+\frac{1}{l}\right\},$$

Dla ustalonych k *i* m *w konsekwencji ciągłości funkcji*

$$\frac{\|x(m;\cdot)\|}{\|x(k;\cdot)\|}:\mathbb{R}_*^s\to\mathbb{R}$$

zbiór $A_l^{(q)}(k,m)$ *jest domknięty. Udowodnimy, że*

$$\left[\underline{\beta}^L>q\right]=\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\bigcap_{p=t}^{\infty}\bigcap_{k\in\mathbb{N}}A_l^{(q)}(k,k+p).\tag{5.42}$$

Niech $B^{(q)}$ *oznacza zbiór określony prawą częścią równości (5.31). Dla każdego* $l\in\mathbb{N}$ *znajdzie się taki podwójny ciąg liczb naturalnych* $\left(\left(k_i^{(l)},m_i^{(l)}\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$, *że* $m_i^{(l)}-k_i^{(l)}\to\infty$ *dla* $i\to\infty$ *i*

$$\left(\frac{\left\|x\left(m_i^{(l)};x_0\right)\right\|}{\left\|x\left(k_i^{(l)};x_0\right)\right\|}\right)^{\frac{1}{m_i^{(l)}-k_i^{(l)}}}\le q+\frac{1}{l}$$

dla $x_0\in\left[\underline{\beta}^L>q\right]$ *i wszystkich* $i\in\mathbb{N}$. *W konsekwencji* $x_0\in A_l^{(q)}\left(k_i^{(l)},m_i^{(l)}\right)$ *dla każdego* $i\in\mathbb{N}$ *i dlatego*

$$x_0\in\bigcap_{p=t}^{\infty}\bigcap_{k\in\mathbb{N}}A_l^{(q)}(k,k+p)$$

dla pewnego $t\in\mathbb{N}$. *Dodatkowo, ponieważ* $m_i^{(l)}-k_i^{(l)}\to\infty$ *dla* $i\to\infty$, *więc* $x_0\in B^{(q)}$.

Niech teraz $x_0\in B^{(q)}$. *Oznacza to, że dla każdego* $l\in\mathbb{N}$ *znajdą się takie ciągi liczb naturalnych* $\left(k_i^{(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *i* $\left(p_i^{(l)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, *gdzie* $p_i^{(l)}\to\infty$ *dla* $i\to\infty$, *że* $x_0\in A_l^{(q)}\left(k_i^{(l)},k_i^{(l)}+p_i^{(l)}\right)$ *dla dowolnego* $i\in\mathbb{N}$. *W konsekwencji* $x_0\in\left[\underline{\beta}^L>q\right]$ *co kończy dowód równości (5.42) i w konsekwencji dowód punktu 3 twierdzenia.* ■

W pracy [12] udowodniono, że powyższe warunki są również wystarczające dla funkcji $\underline{\beta}^L$ aby była funkcją dolnego wykładnika Bohla dla pewnego układu ciągłego. Natomiast dla układów dyskretnych pytanie o konieczność warunków pozostaje otwartym.

5.3.3 Wykładniki ogólne

W tym podrozdziale zdefiniujmy cztery wielkości związane z macierzą tranzycji (porównaj z [14] dla układów ciągłych):

- starszy górszy ogólny wykładnik (zwany również w literaturze górnym ogólnym wykładnikiem)

$$\Omega^0(A)=\limsup_{n-m\to\infty}\|\mathcal{A}(n,m)\|^{\frac{1}{n-m}},\tag{5.43}$$

- starszy dolny ogólny wykładnik

$$\Omega_0(A) = \liminf_{n-m\to\infty} \|\mathcal{A}(n,m)\|^{\frac{1}{n-m}}, \tag{5.44}$$

- młodszy górny ogólny wykładnik

$$\omega^0(A) = \limsup_{n-m\to\infty} \|\mathcal{A}(m,n)\|^{\frac{1}{m-n}}, \tag{5.45}$$

- młodszy dolny ogólny wykładnik (zwany również w literaturze dolnym ogólnym wykładnikiem)

$$\omega_0(A) = \liminf_{n-m\to\infty} \|\mathcal{A}(m,n)\|^{\frac{1}{m-n}}. \tag{5.46}$$

Symbole Ω i ω oznaczają, iż rozpatrujemy odpowiednio $\|\mathcal{A}(n,m)\|$ i $\|\mathcal{A}(m,n)\|^{-1}$. Ponadto usytuowanie przy wspomnianych symbolach indeksu 0 u góry (dołu) oznacza, że w definicji mamy granicę górną (dolną). Tak jak w przypadku wykładników Bohla, tak i tutaj, można pokazać (patrz twierdzenia 70 i , że dodanie dodatkowego warunku $m \to \infty$ nie zmienia wartości tych wykładników. Czasami wykładniki ogólne są nazywane wykładnikami singularnymi (zobacz [53], [106], [219]).

Kolejne podrozdziały będą poświęcone starszemu górnemu i dolnemu młodszemu ogólnemu wykładnikowi.

Starszy górny ogólny wykładnik

Następne twierdzenie zawiera osiem alternatywnych formuł dla starszego górnego ogólnego wykładnika układu (2.1).

Twierdzenie 70 *Następujące równości są prawdziwe*

$$\Omega^0(A) = \limsup_{m,n-m\to\infty} (\|\mathcal{A}(n,m)\|)^{1/(n-m)} = \tag{5.47}$$

$$\inf\left\{\delta > 0 : \exists\, C > 0,\ \forall\, n > m,\ \ \|\mathcal{A}(n,m)\| \le C\delta^{n-m}\right\} = \tag{5.48}$$

$$\inf\left\{\delta > 0 :\ \lim_{j\to\infty} \delta^{-j}\left(\sup_{t\in\mathbb{N}} \|\mathcal{A}(t+j,t)\|\right) = 0\right\} \tag{5.49}$$

$$\inf_{T\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathcal{A}(k+T,k)\|\right)^{1/T} = \tag{5.50}$$

$$\lim_{T\to\infty}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathcal{A}(k+T,k)\|\right)^{1/T} = \tag{5.51}$$

$$\inf_{T\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathcal{A}(kT,kT-T)\|\right)^{1/T} = \tag{5.52}$$

$$\inf_{T\in\mathbb{N}}\left(\limsup_{k\to\infty} \|\mathcal{A}(kT,kT-T)\|\right)^{1/T} = \tag{5.53}$$

$$\lim_{T\to\infty}\left(\limsup_{k\to\infty} \|\mathcal{A}(kT,kT-T)\|\right)^{1/T}. \tag{5.54}$$

Dowód *Równość (5.47) jest natychmiastową konsekwencją ograniczoności* $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$. *Dowód równości (5.48) znajduje się w pracy [267]. Natomiast równości (5.49)-(5.51) zostały udowodnione w [240].*

Udowodnimy teraz prawdziwość (5.52). Ustalmy dowolne naturalne T *i oznaczmy*

$$\delta_0^T = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathcal{A}(kT,kT-T)\|.$$

Wtedy dla każdego naturalnego $n \ge m$, $n = pT + r$, $m = qT + r'$ *(gdzie* p *i* q *są ilorazami, a* r *i* r' *resztami z dzielenia odpowiednio* n *i* m *przez* T*) mamy*

$$\|\mathcal{A}(n,m)\| = \|\mathcal{A}(pT+r, qT+r')\| \le$$

$$a^{r+r'}\left\|\mathcal{A}(pT,qT)\right\| = a^{r+r'}\left\|\mathcal{A}(pT,(p-1)T)\mathcal{A}((p-1)T,(p-2)T)...\mathcal{A}((q+1)T,qT)\right\| \leq$$
$$a^{2T-2}\left\|\mathcal{A}(pT,(p-1)T)\right\|\left\|\mathcal{A}((p-1)T,(p-2)T)\right\|...\left\|\mathcal{A}((q+1)T,qT)\right\| \leq$$
$$a^{2T-2}\,\delta_0^{T(p-q)} = a^{2T-2}\,\delta_0^{r'-r}\,\delta_0^{n-m}.$$

Ostatnia nierówność implikuje, że

$$\delta_0 \in \left\{\delta > 0 : \exists\ C > 0,\ \forall\ n > m,\ \ \left\|\mathcal{A}(n,m)\right\| \leq C\delta^{n-m}\right\}.$$

Dlatego

$$\Omega^0(A) \leq \left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\mathcal{A}(kT,kT-T)\right\|\right)^{1/T}$$

i

$$\Omega^0(A) \leq \inf_{T\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\|\mathcal{A}(kT,kT-T)\right\|\right)^{1/T}.$$

Nierówność przeciwna wynika z równości (5.50).

W analogiczny sposób jak równość (5.52) można udowodnić równość (5.53).

Teraz pokażemy, że istnieje granica w (5.54). Oznaczmy

$$\Omega(T) = \limsup_{k\to\infty}\left\|\mathcal{A}(kT,kT-T)\right\|^{1/T}$$

oraz

$$\Omega_0 = \liminf_{T\to\infty}\Omega(T)$$

i

$$a = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|A(n)\right\|.$$

Ustalmy $\varepsilon \in (0,a)$. Zgodnie z definicją $\Omega(T)$ istnieją $T_1(\varepsilon) > 1$, $T_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ oraz $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left\|\mathcal{A}(kT_1,kT_1-T_1)\right\|^{1/T_1} \leq \Omega(T_1(\varepsilon)) + \varepsilon$$

dla wszystkich $k \geq k(\varepsilon)$. Dla $T_1(\varepsilon)$ niech

$$T_2(\varepsilon) > T_1(\varepsilon),$$

$T_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ będą takie, że

$$\frac{4T_1(\varepsilon)}{T_2(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Dla dowolnego $T > T_2(\varepsilon)$ i $m > k(\varepsilon)+1$ zdefiniujmy naturalne $k(m) > m$ poprzez następujący warunek

$$k(m)T_1(\varepsilon) \leq mT < k(m)T_1(\varepsilon) + T_1(\varepsilon).$$

Wprowadzone oznaczenie pozwala na oszacowanie

$$\left\|\mathcal{A}(mT,mT-T)\right\| \leq$$

$$\left\|\mathcal{A}(mT,k(m)T_1(\varepsilon))\right\|\prod_{k=1+k(m-1)}^{k(m)}\left\|\mathcal{A}(kT_1(\varepsilon),kT_1(\varepsilon)-kT_1(\varepsilon))\right\|\left\|\mathcal{A}(k(m-1)T_1(\varepsilon),mT-T)\right\| \leq$$

$$a^{2T_1(\varepsilon)}\left(\Omega(T_1(\varepsilon))+\varepsilon\right)^{T_1(\varepsilon)(k(m)-k(m-1))} \leq a^{4T_1(\varepsilon)}\left(\Omega(T)+\varepsilon\right)^T$$

dla $T > T_2(\varepsilon)$ i $m > 1+k(\varepsilon)$. Implikuje ono

$$\limsup_{T\to\infty}\Omega(T) \leq a^{4\frac{T_1(\varepsilon)}{T}}\left(\Omega_0+\varepsilon\right) < a^{\varepsilon}\left(\Omega_0+\varepsilon\right)$$

i dlatego

$$\limsup_{T\to\infty}\Omega(T) = \liminf_{T\to\infty}\Omega(T).$$

Jest jasnym, że

$$\|\mathcal{A}(lT, lT-T)\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathcal{A}(k+T,k)\|$$

dla każdego $l \in \mathbb{N}$ *i dlatego*

$$\Omega^0(A) = \limsup_{T\to\infty} \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\mathcal{A}(k+T,k)\|\right)^{1/T} \geq$$

$$\lim_{T\to\infty} \left(\limsup_{k\to\infty} \|\mathcal{A}(kT, kT-T)\|\right)^{1/T}.$$

Nierówność przeciwna może być pokazana w analogiczny sposób jak w dowodzie (5.52). ■

Twierdzenie 71 *Układ (2.1) jest jednostajnie potęgowo stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Omega^0(A) < 1.$$

Dowód ($\Longrightarrow$)

Niech λ *i* μ *będą stałymi z definicji 23. Wówczas*

$$\bigwedge_{n\geq m} \|\mathcal{A}(n,m)\|^{\frac{1}{n-m}} \leq \mu^{\frac{1}{n-m}}\lambda$$

i dlatego

$$\Omega^0(A) \leq \lambda,$$

a ponieważ $\lambda < 1$*, więc*

$$\Omega^0(A) \leq 1.$$

($\Longleftarrow$)

Wybierzmy $\lambda \in \left(\Omega^0(A), 1\right)$*. Na mocy punktu 1 twierdzenia 55 istnieje* $\mu > 1$ *takie, że*

$$\bigwedge_{n\geq m} \frac{\|\mathcal{A}(n,m)\|}{\lambda^{n-m}} \leq \mu.$$

Zatem

$$\bigwedge_{n\geq m} \|\mathcal{A}(n,m)\| \leq \mu\lambda^{n-m}$$

co oznacza jednostajną potęgową stabilność. ■

Rozważmy ponownie przykład 27

Przykład 72 *Dla ciągu* $A(n)$ *z przykładu 27 mamy*

$$\Omega^0(A) = \limsup_{m,n-m\to\infty} \left(\|\mathcal{A}(n,m)\|\right)^{1/(n-m)} = 1,$$

a zatem układ skalarny (2.1) nie jest JPS.

Młodszy dolny ogólny wykładnik

Własnościom dolnego młodszego ogólnego wykładnika dotychczas poświęcono bardzo mało miejsca w literaturze. Poniższe twierdzenie zawiera osiem alternatywnych formuł dla $\omega_0(A)$.

Twierdzenie 73 *Następujące równości zachodzą*

$$\omega_0(A) = \liminf_{m,\, n-m\to\infty} \left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-\frac{1}{n-m}} = \tag{5.55}$$

$$\sup\left\{\delta > 0 : \bigvee_{C>0} \bigwedge_{n>m} \left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-1} \geq C\delta^{n-m}\right\} = \tag{5.56}$$

$$\lim_{T\to\infty} \left(\inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(k,k-T)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right) = \tag{5.57}$$

$$\sup_{T\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\in\mathbb{N}}\left\|\mathcal{A}^{-1}(k,k-T)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right)= \tag{5.58}$$

$$\sup_{T\in\mathbb{N}}\left[\inf_{k\in\mathbb{N}}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT,kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right]= \tag{5.59}$$

$$\sup_{T\in\mathbb{N}}\left(\liminf_{k\to\infty}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT,kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right)= \tag{5.60}$$

$$\lim_{T\to\infty}\left[\inf_{k\in\mathbb{N}}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT,kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right]= \tag{5.61}$$

$$\lim_{T\to\infty}\left(\liminf_{k\to\infty}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT,kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right). \tag{5.62}$$

Dowód *Pierwsza równość jest natychmiastową konsekwencją ograniczoności* $(A(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\left(A^{-1}(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pokażemy teraz, że (5.56) jest równa (5.55). Dla

$$\delta_0\in\left\{\delta>0:\bigvee_{C>0}\bigwedge_{n>m}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-1}\geq C\delta^{n-m}\right\}$$

mamy

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(n,m\right)\right\|^{-1}\geq C\delta_0^{n-m}$$

i

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(n,m\right)\right\|^{-\frac{1}{n-m}}\geq C^{\frac{1}{n-m}}\delta_0.$$

Biorąc $\liminf\limits_{m,\,n-m\to\infty}$ *w powyższej nierówności otrzymujemy*

$$\liminf_{m,\,n-m\to\infty}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-\frac{1}{n-m}}\geq\delta_0$$

i dlatego

$$\liminf_{m,\,n-m\to\infty}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-\frac{1}{n-m}}\geq\sup\left\{\delta>0:\bigvee_{C>0}\bigwedge_{n>m}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-1}\geq C\delta^{n-m}\right\}.$$

Ustalmy $\varepsilon>0$. *Wtedy z definicji granicy dolnej mamy*

$$\bigvee_{k_0}\bigwedge_{n-m>k_0}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(n,m\right)\right\|^{-\frac{1}{n-m}}\geq\liminf_{m,\,n-m\to\infty}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-\frac{1}{n-m}}-\varepsilon$$

i

$$\bigvee_{k_0}\bigwedge_{n-m>k_0}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(n,m\right)\right\|^{-1}\geq\left(\liminf_{m,\,n-m\to\infty}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-\frac{1}{n-m}}-\varepsilon\right)^{n-m}.$$

Ponieważ $\left(A\left(n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\left(A^{-1}\left(n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *są ograniczone, więc*

$$\bigvee_{C>0}\bigwedge_{n>m}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(n,m\right)\right\|^{-1}\geq C\left(\liminf_{m,\,n-m\to\infty}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-\frac{1}{n-m}}-\varepsilon\right)^{n-m}$$

i

$$\liminf_{m,\,n-m\to\infty}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-\frac{1}{n-m}}-\varepsilon\in\left\{\delta>0:\bigvee_{C>0}\bigwedge_{n>m}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-1}\geq C\delta^{n-m}\right\}.$$

Ostatecznie z powodu dowolności ε *mamy*

$$\liminf_{m,\,n-m\to\infty}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-\frac{1}{n-m}}\leq\sup\left\{\delta>0:\bigvee_{C>0}\bigwedge_{n>m}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-1}\geq C\delta^{n-m}\right\}$$

co dowodzi równości pomiędzy (5.55) i (5.56).

Udowodnimy teraz, że formuły (5.57) i (5.58) definiują tę samą wielkość co (5.56). W tym celu wprowadźmy następujące oznaczenie

$$\bigwedge_{T\in\mathbb{N}} a_T = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(k,k-T)\right\|^{-1}.$$

Mamy

$$\bigwedge_{T,U\in\mathbb{N}} a_{T+U} = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(k,k-(T+U))\right\|^{-1} = \frac{1}{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(k,k-(T+U))\right\|^{-1}} \geq$$

$$\frac{1}{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(k,k-T)\right\|^{-1} \cdot \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(k,k-U)\right\|^{-1}} = a_T \cdot a_U.$$

Oznacza to, że ciąg $\left(\frac{1}{a_T}\right)_{T\in\mathbb{N}}$ *spełnia założenia lematu Fekete ([108], [147]). Dlatego istnieje*

$$\lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{a_T}\right)^{\frac{1}{T}},$$

która jest równa

$$\inf_{T\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{a_T}\right)^{\frac{1}{T}} = \frac{1}{\left(\sup\limits_{T\in\mathbb{N}} a_T\right)^{\frac{1}{T}}}$$

co kończy dowód równości pomiędzy (5.57), (5.58) i (5.56).

Udowodnimy teraz, że formuła (5.59) definiuje tę samą wielkość co (5.58).
Dla ustalonego naturalnego T następująca nierówność

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(k,k-T)\right\| \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(kT,kT-T)\right\|$$

jest prawdziwa, co implikuje zgodnie z (5.58), że

$$\sup_{T\in\mathbb{N}} \left[\inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(k,k-T)\right\|\right]^{-\frac{1}{T}} \geq \omega_0(A) \tag{5.63}$$

jest również słuszna.
Dla ustalonego $T\in\mathbb{N}$ oznaczmy

$$\delta_0^T = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(kT,kT-T)\right\|^{-1} = \frac{1}{\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(kT,kT-T)\right\|^{-1}}.$$

Z powyższej równości mamy

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(kT,kT-T)\right\|^{-1} = \frac{1}{\delta_0^T} = {\delta_0}^{-T}.$$

Dla dowolnego naturalnego $n\geq m$ niech $n=pT+r$, $m=qT+r'$ (p i q są odpowiednimi ilorazami z dzielenia n i m przez T natomiast r,r' odpowiednimi resztami). Mamy wtedy

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\| = \left\|\mathcal{A}^{-1}(pT+r,qT+r')\right\| \leq a^{r+r'} \left\|\mathcal{A}^{-1}(pT,qT)\right\| =$$

$$a^{r+r'} \left\|\mathcal{A}^{-1}((q+1)T,qT)\cdot\ldots\cdot\mathcal{A}^{-1}((p-1)T,(p-2)T))\cdot\mathcal{A}^{-1}(pT,(p-1)T\right\| \leq$$

$$a^{2T-2} \left\|\mathcal{A}^{-1}(pT,(p-1)T)\right\| \cdot \left\|\mathcal{A}^{-1}((p-1)T,(p-2)T)\right\| \cdot \ldots \cdot \left\|\mathcal{A}^{-1}((q+1)T,qT)\right\| \leq$$

$$a^{2T-2}\,\delta_0^{-T(p-q)} = a^{2T-2}\,\delta_0^{-Tp+Tq} = a^{2T-2}\,\delta_0^{r-r'}\,\delta_0^{-n+m} = C^{-1}\delta_0^{-(n-m)}, \tag{5.64}$$

gdzie $C^{-1} = a^{2T-2}\,\delta_0^{r-r'}$ oraz z faktu, że r i r' są mniejsze niż T, gdyż są resztami z dzielenia przez T.

Podnosząc teraz poniższą nierówność

$$\bigwedge_{n,m\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\| \leq C^{-1}\delta_0^{-(n-m)}$$

do potęgi minus pierwszej otrzymujemy

$$\bigwedge_{n,m\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-1} \geq C\,\delta_0^{n-m}.$$

Ostatnia nierówność implikuje

$$\delta_0 \in \left\{\delta > 0 : \bigvee_{C>0} \bigwedge_{n>m} \left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-1} \geq C\delta^{n-m}\right\}.$$

Dlatego

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT, kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}} \leq \omega_0\left(A\right) \tag{5.65}$$

i

$$\sup_{T\in\mathbb{N}} \left[\inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT, kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right] \leq \omega_0\left(A\right). \tag{5.66}$$

Nierówności (5.63) i (5.66) implikują, że (5.59) jest równa (5.55).

W analogiczny sposób możemy udowodnić równość pomiędzy (5.60) i (5.58).

Udowodnimy teraz, że (5.61) jest równoważna (5.60). Biorąc $\limsup\limits_{T\to\infty}$ *w (5.65) mamy*

$$\limsup_{T\to\infty} \left[\inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT, kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right] \leq \omega_0\left(A\right). \tag{5.67}$$

Aby skończyć dowód musimy pokazać, że następująca nierówność

$$\omega_0\left(A\right) \leq \liminf_{T\to\infty} \left(\inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT, kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right)$$

jest prawdziwa. Ponieważ

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}\left(k, k-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}} \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT, kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}$$

jest prawdziwa, więc biorąc obustronnie $\liminf\limits_{T\to\infty}$ *otrzymujemy zgodnie z (5.57) następującą nierówność*

$$\omega_0\left(A\right) = \liminf_{T\to\infty} \left(\inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}\left(k, k-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right) \leq \liminf_{T\to\infty} \left(\inf_{k\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT, kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\right). \tag{5.68}$$

Z nierówności (5.67) i (5.68) otrzymujemy (5.61).

Następnie pokażemy, że (5.62) jest równa (5.61). Najpierw udowodnimy, że granica w (5.62) istnieje. Aby to zrobić oznaczmy

$$\bigwedge_{T\in\mathbb{N}} \omega_0\left(T\right) = \liminf_{k\to\infty} \left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT, kT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}},$$

$$\underline{\omega}_0 = \liminf_{T\to\infty} \omega_0\left(T\right),$$

$$\overline{\omega}_0 = \limsup_{T\to\infty} \omega_0\left(T\right).$$

Jest jasnym, że $\underline{\omega}_0 \in \left[\frac{1}{a}; a\right]$. *Ustalmy* $\varepsilon > 0$ *i znajdźmy* $k_1, T_1 \in \mathbb{N}$ *takie, że*

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT_1, kT_1-T_1\right)\right\| < \left(\overline{\omega}_0 - \varepsilon\right)^{-T_1} \tag{5.69}$$

dla wszystkich $k \geq k_1$.

Dla dowolnych $T \geq T_1$ *i* $m \geq 1 + k_1$ *zdefiniujmy* $k\left(m\right) > m$ *przez następujący warunek*

$$k\left(m\right)T_1 \leq mT < k\left(m\right)T_1 + T_1. \tag{5.70}$$

Z nierówności (5.69), (5.70) otrzymujemy

$$\bigwedge_{\substack{T\in\mathbb{N}\\ T\geq T_1}} \bigwedge_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\geq 1+k_1}} \left\|\mathcal{A}^{-1}\left(mT, mT-T\right)\right\| \leq$$

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(mT,k\left(m\right)T_1\right)\right\|\cdot\left(\prod_{k=1+k(m-1)}^{k(m)}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT_1,kT_1-T_1\right)\right\|\right)\cdot\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(k\left(m-1\right)T_1,mT-T\right)\right\|\leq$$

$$a^{T_1}\cdot a^{T_1}\cdot\left(\overline{\omega}_0-\varepsilon\right)^{-T_1[k(m)-k(m-1)]}\leq\left[a^{2\frac{T_1}{T}}\left(\overline{\omega}_0-\varepsilon\right)^{-\left(1-\frac{T_1}{T}\right)}\right]^T.$$

Dlatego

$$\bigwedge_{\substack{T\in\mathbb{N}\\T\geq T_1}}\bigwedge_{\substack{m\in\mathbb{N}\\m\geq 1+k_1}}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(mT,mT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\geq a^{-2\frac{T_1}{T}}\left(\overline{\omega}_0-\varepsilon\right)^{\left(1-\frac{T_1}{T}\right)}$$

i

$$\bigwedge_{\substack{T\in\mathbb{N}\\T\geq T_1}}\underline{\omega}_0\left(T\right)\geq a^{-2\frac{T_1}{T}}\left(\overline{\omega}_0-\varepsilon\right)^{\left(1-\frac{T_1}{T}\right)}.$$

Przykładając obustronnie $\liminf\limits_{T\to\infty}$ *do ostatniej nierówności otrzymujemy*

$$\underline{\omega}_0\geq\overline{\omega}_0-\varepsilon.$$

Powyższa nierówność implikuje, że granica (5.62) istnieje. Oznaczmy ją przez ω_0*. Jest jasnym, że*

$$\bigwedge_{T\in\mathbb{N}}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(lT,lT-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}\geq\inf_{k\in\mathbb{N}}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(k,k-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}$$

dla wszystkich $l\in\mathbb{N}$*. przykładając obustronnie* $\liminf\limits_{l\to\infty}$ *w powyższej nierówności mamy*

$$\bigwedge_{T\in\mathbb{N}}\omega_0\left(T\right)\geq\inf_{k\in\mathbb{N}}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(k,k-T\right)\right\|^{-\frac{1}{T}}$$

i dlatego

$$\omega_0\geq\omega_0\left(A\right).\tag{5.71}$$

Następnie pokażemy nierówność przeciwną. Ustalmy $\varepsilon>0$*. Z definicji* ω_0 *istnieje* $T_1\in\mathbb{N}$ *takie, że*

$$\omega_0-\varepsilon\leq\liminf_{k\to\infty}\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT_1,kT_1-T_1\right)\right\|^{-\frac{1}{T_1}}.$$

Używając definicji $\liminf\limits_{k\to\infty}$ *możemy znaleźć* $k_0\in\mathbb{N}$ *takie, że*

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT_1,kT_1-T_1\right)\right\|^{-\frac{1}{T_1}}\geq\omega_0-\varepsilon\tag{5.72}$$

i

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\left(kT_1,kT_1-T_1\right)\right\|\leq\left(\omega_0-\varepsilon\right)^{-T_1}\tag{5.73}$$

są prawdziwe dla wszystkich $k\geq k_0$*.*
Dla T_1 *i dowolnego naturalnego* $n\geq m$*,* $n=pT_1+r$*,* $m=qT_1+r'$ *(*p *i* q *są odpowiednimi resztami z dzielenia* n *i* m *przez* T_1 *natomiast* r *i* r' *odpowiednimi resztami) rozpatrzmy teraz* n,m *tak duże, że* $p,q\geq k_0$*. Wtedy, z nierówności (5.64), (5.73) i ograniczoności* $\left(A\left(n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $\left(A^{-1}\left(n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *istnieje stała* $D>0$ *taka, że*

$$\bigwedge_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\n\geq m}}\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|\leq D\left(\omega_0-\varepsilon\right)^{n-m},$$

dlatego

$$\omega_0\left(A\right)\geq\omega_0-\varepsilon$$

i

$$\omega_0\left(A\right)\geq\omega_0.\tag{5.74}$$

Nierówności (5.71) i (5.74) implikują, że (5.62) jest równa (5.55). ■

5.4 Relacje pomiędzy wykładnikami i pytania otwarte

W tym podrozdziale opiszemy zależności pomiędzy wprowadzonymi wcześniej wykładnikami oraz ich dalsze własności.

Wprost z definicji widać, że

$$\bigwedge_{x_0 \in \mathbb{R}^s} \lambda^L(x_0) \geq \pi^L(x_0).$$

Konsekwencją powyższej nierówności jest

$$\lambda^L_{\max}(A) \geq \pi^L_{\max}(A).$$

Również z definicji granicy podwójnej jest jasnym, że

$$\overline{\beta}^L(x_0) \geq \lambda^L(x_0) \tag{5.75}$$

Mniej trywialne relacje zawiera następujące

Twierdzenie 74 *Dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^s_*$ prawdziwe są poniższe nierówności*

$$\overline{\beta}^L(x_0) \leq \Omega^0(A), \tag{5.76}$$

$$\underline{\beta}^L(x_0) \geq \omega_0(A).$$

Dowód *Ponieważ*

$$\|\mathcal{A}(n,m)\| = \max_{x_0 \in \mathbb{R}^s_*} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|} \right),$$

więc

$$\bigwedge_{x_0 \in \mathbb{R}^s_*} \|\mathcal{A}(n,m)\|^{\frac{1}{n-m}} \geq \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|} \right)^{\frac{1}{n-m}}.$$

Zatem

$$\Omega^0(A) \geq \overline{\beta}^L(x_0)$$

Podobnie, ponieważ

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-1} = \min_{x_0 \in \mathbb{R}^s_*} \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|} \right),$$

więc

$$\bigwedge_{x_0 \in \mathbb{R}^s_*} \left\|\mathcal{A}^{-1}(n,m)\right\|^{-\frac{1}{n-m}} \leq \left(\frac{\|x(n,x_0)\|}{\|x(m,x_0)\|} \right)^{\frac{1}{n-m}}.$$

Zatem

$$\omega_0(A) \leq \underline{\beta}^L(x_0).$$

■

Oczywistym jest również, że

$$\Omega^0(A) \geq \Omega_0(A)$$

oraz

$$\omega^0(A) \geq \omega_0(A).$$

Ponadto nierówność

$$\|X\| \geq \left\|X^{-1}\right\|^{-1}$$

implikuje, że

$$\Omega^0(A) \geq \omega^0(A)$$

oraz

$$\Omega_0(A) \geq \omega_0(A).$$

Pod wpływem zakłóceń Δ, wykładniki Lapunowa układu (2.3) zmieniają się, w ogólności, w sposób nieciągły. Możliwym jest, że dowolnie małemu $\sup \|\Delta(n)\|$ odpowiada stałe przesunięcie wykładników

charakterystycznych układu wyjściowego (2.1). W szczególności możliwym jest, że układ potęgowo stabilny, który jest zakłócony zakłóceniami potęgowo malejącymi do zera stanie się układem niestabilnym [77].

Wyznaczenie granic zmienności charakterystyk liczbowych pod wpływem różnych typów zakłóceń jest jednym z głównych problemów teorii stabilności. Był on badany dla układów ciągłych dla różnych klas zakłóceń, np. górne ograniczenie dla największego wykładnika Lapunowa układu (2.1) pod wpływem małych zakłóceń, tzw. wykładnik centralny $\Omega(A)$, zostało skonstruowane w pracy [53]. Osiągalność tego oszacowania została udowodniona w pracach [194] i [262]. Problem opisu zmian wykładników został rozwiązany w [138] i [139] dla układów liniowych z zakłóceniami malejącymi w nieskończoności w różnym tempie i w [13] dla układów liniowych z innymi typami zakłóceń. W pracach [182] i [183] badano zakłócenia nieskończenie małe w znaczeniu funkcji ważonej. Monografie [141] i [142] są prawie w całości poświęcone ww. problemowi. Wersje dyskretne tych problemów są intensywnie badane w pracach [83]-[86], [211] i [218].

Zajmiemy się teraz problemem wpływu zakłóceń na wykładniki Bohla. Główny wynik opisany jest przez równości (5.82) i (5.89), które są wnioskami z twierdzeń 76 i 77. W dowodzie tych twierdzeń, które opisują związki odpowiednio pomiędzy górnym wykładnikiem Bohla układu zakłóconego i starszym górnym wykładnikiem ogólnym układu niezakłóconego oraz dolnym wykładnikiem Bohla układu zakłóconego i młodszym dolnym wykładnikiem ogólnym układu niezakłóconego, użyjemy następującej dyskretnej wersji nierówności Gronwalla [2].

Twierdzenie 75 *Załóżmy, że dla dwóch ciągów* $(u(n))_{n=m,m+1,...}$ *i* $(f(n))_{n=m,m+1,...}$ *nieujemnych liczb następująca nierówność*

$$u(n) \leq p + q \sum_{i=m}^{n-1} u(i) f(i)$$

zachodzi dla pewnych $p, q \in \mathbb{R}$ *i wszystkich* $n = m, m+1, ...$ *Wtedy nierówność*

$$u(n) \leq p \prod_{i=m}^{n-1} (1 + q f(i)) \tag{5.77}$$

jest spełniona dla wszystkich $n = m, m+1, ...$

Z poniższego twierdzenia otrzymamy związek pomiędzy górnym wykładnikiem Bohla $\overline{\beta}^Z(z_0)$ układu zakłóconego i starszym górnym wykładnikiem ogólnym układu niezakłóconego (2.1).

Twierdzenie 76 *Dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieją* $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ *i* $C > 0$ *takie, że wszystkie niezerowe rozwiązania układu (2.3) z* $\Delta \in \mathfrak{M}_\delta$ *spełniają*

$$\frac{\|z(n, z_0)\|}{\|z(m, z_0)\|} \leq C \left(\Omega^0(A) + \varepsilon\right)^{n-m}, \ n \geq m \geq n_0. \tag{5.78}$$

Dowód *Zgodnie z (5.54) dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieją naturalne* $T > 1$ *i* k_0 *takie, że*

$$\|\mathcal{A}(kT + T, kT)\| \leq \left(\Omega^0(A) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^T \tag{5.79}$$

dla wszystkich $k \geq k_0$. *Używając tej nierówności można oszacować* $\mathcal{A}(n, m)$ *w następujący sposób*

$$\|\mathcal{A}(n, m)\| \leq \|\mathcal{A}(n, k_n T)\| \cdot \left(\prod_{i=k_m+2}^{k_n} \|\mathcal{A}(iT, iT - T)\| \right) \cdot \|\mathcal{A}(k_m T + T, m)\| \leq$$

$$\left(\Omega^0(A) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-m} a^{2T}, \qquad n \geq m \geq k_0 T \geq n_0$$

gdzie k_l *jest zdefiniowane przez warunek* $k_l T \leq l \leq k_l T + T$. *Oznaczmy przez* $\Psi(n, m)$ *macierz tranzycji układu (2.3). Wtedy dla dowolnego* $y(m) \in \mathbb{R}^s$ *mamy*

$$\Psi(n, m) y(m) = \mathcal{A}(n, m) y(m) + \sum_{i=m}^{n-1} \mathcal{A}(n, i+1) \Delta(i) \Psi(i, m) y(m)$$

i dlatego

$$\|\Psi(n,m)y(m)\| \leq$$

$$\|\mathcal{A}(n,m)y(m)\| + \sum_{i=m}^{n-1} \|\mathcal{A}(n,i+1)\| \, \|\Delta(i)\| \, \|\Psi(i,m)y(m)\| \, .$$

Szacując $\|\mathcal{A}(n,i)\|$ *zgodnie z (5.79) otrzymujemy*

$$\|\Psi(n,m)y(m)\| \leq$$

$$a^{2T}\left(\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-m}\|y(m)\| + a^{2T}\sum_{i=m}^{n-1}\left(\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-i-1}\|\Delta(i)\|\,\|\Psi(i,m)y(m)\|$$

lub inaczej

$$\|\Psi(n,m)y(m)\|\left(\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-n} \leq$$

$$a^{2T}\|y(m)\| + +a^{2T}\left(\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}\cdot\sum_{i=m}^{n-1}\|\Psi(i,m)y(m)\|\left(\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-i}\|\Delta(i)\| \, .$$

Z nierówności Gronwalla (5.77) z

$$u(i) = \|\Psi(i,m)\|\left(\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-i},$$

$$p = a^{2T}\|y(m)\| \, ,$$

$$q = a^{2T}\left(\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}$$

i

$$f(i) = \|\Delta(i)\|$$

otrzymujemy

$$\|\Psi(n,m)y(m)\|\left(\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-n} \leq$$

$$a^{2T}\|y(m)\|\prod_{i=m}^{n-1}\left(1+a^{2T}\left(\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}\|\Delta(i)\|\right)$$

i

$$\frac{\|\Psi(n,m)y(m)\|}{\|y(m)\|} \leq a^{2T}\prod_{i=m}^{n-1}\left(\left(\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)+a^{2T}\|\Delta(i)\|\right). \tag{5.80}$$

Z ostatniej nierówności mamy (5.78) z $C = a^{2T}$ *i*

$$\delta = \frac{\Omega^0(A)+\frac{\varepsilon}{2}}{a^{2T}}.$$

■

Z powyższego twierdzenia wynika, że wszystkie górne wykładniki Bohla niezerowych rozwiązań układu (2.3) są mniejsze od $\Omega^0(A)+\varepsilon$ dla $\Delta \in \mathfrak{M}_\delta$. W szczególności biorąc $\Delta(n) = 0$ mamy następujące oszacowanie wykładników Bohla

$$\bigwedge_{z_0\in\mathbb{R}^s} \overline{\beta}(z_0) \leq \Omega^0(A). \tag{5.81}$$

Nierówność (5.78) można również zapisać w następującej postaci

$$\Omega^0(A) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\sup_{\|\Delta\|\leq\varepsilon}\sup_{z_0\in\mathbb{R}^s_*}\overline{\beta}^Z(z_0) \, . \tag{5.82}$$

Okazuje się, że młodszy dolny wykładnik ogólny pełni analogiczną rolę do starszego górnego wykładnika ogólnego, a mianowicie zachodzi następujące

Twierdzenie 77 *Dla dowolnego $\varepsilon \in (0, \omega_0(A))$ istnieją $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ i $C > 0$ takie, że wszystkie niezerowe rozwiązania układu (2.3) z $\Delta \in \mathfrak{M}_\delta$ spełniają poniższą nierówność*

$$\frac{\|z(n, z_0)\|}{\|z(m, z_0)\|} \geq C\left(\omega_0(A) - \varepsilon\right)^{n-m}, \quad n \geq m \geq n_0. \tag{5.83}$$

Dowód twierdzenia 77 *Rozpatrzmy $\delta_0 > 0$ takie, że $\left((A(n) + \Delta(n))^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony dla wszystkich $\Delta \in \mathfrak{M}_\delta$, $\Delta < \Delta_0$. Następnie rozpatrzmy układy sprzężone do (2.1) i (2.3) (czyli (2.2) i (2.4)). Z równości (5.59) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć $T, m \in \mathbb{N}$ takie, że spełniona jest*

$$\|\mathcal{B}(kT, kT - T)\| \leq \left(\omega_0(A) - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-T}$$

dla wszystkich $k \geq m$ (przypomnijmy, że $\mathcal{B}$ jest macierzą tranzycji układu (2.2)). Oznaczmy przez $\mathcal{F}(n, m)$ macierz tranzycji układu (2.4). Używając powyższej nierówności możemy oszacować $\mathcal{B}(n, m)$ w następujący sposób

$$\|\mathcal{B}(n, m)\| \leq$$

$$\|\mathcal{B}(n, k_nT)\| \cdot \left(\prod_{i=k_m+2}^{k_n} \|\mathcal{B}(iT, iT - T)\|\right) \cdot \|\mathcal{B}(k_mT + T, m)\| \leq$$

$$\left(\omega_0(A) - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-n} a^{2T}, \tag{5.84}$$

dla $n \geq m \geq k_0T \geq n_0$, gdzie k_l jest zdefiniowane przez warunek $k_lT \leq l \leq k_lT + T$ oraz

$$a = \max\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A(n)\|, \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|A^{-1}(n)\right\|\right\}.$$

Ustalmy $z_0 \in \mathbb{R}^s_*$, $m \in \mathbb{N}$ i porównajmy rozwiązanie $t(n, t_0)$ (2.4) z rozwiązaniem $z(n, z_1)$ układu (2.3) z warunkiem początkowym

$$z_1 = (A(0) + \Delta(0))^* (A(1) + \Delta(1))^* \ldots (A(m-1) + \Delta(m-1))^* \cdot$$

$$(A(m-1) + \Delta(m-1)) \ldots (A(0) + \Delta(0))\, z_0.$$

Wtedy

$$z(m, z_0) = t(m, z_1) =: z_2 \tag{5.85}$$

i dlatego dla $n \geq m$ otrzymujemy

$$< z(n, z_0), t(n, z_1) > =$$

$$< \Psi(n, m)\, z(m, z_0), \mathcal{F}(n, m)\, t(m, z_1) > =$$

$$< \Psi(n, m)\, z_2, \mathcal{F}(n, m)\, z_2 > = < z_2, z_2 > = \|z_2\|^2.$$

Mamy

$$A^*(n)\, t(n+1, z_1) + \Delta^*(n)\, t(n+1, z_1) = t(n, z_1)$$

$$A^*(n)\, t(n+1, z_1) + \Delta^*(n) (A(n+1) + \Delta(n+1))^{-*} t(n, z_1) = t(n, z_1)$$

$$t(n+1) = A^{-*}(n)\, t(n, z_1) + \widetilde{\Delta}(n)\, t(n, z_1) \tag{5.86}$$

gdzie

$$\widetilde{\Delta}(n) = -A^{-*}(n)\, \Delta^*(n) (A(n+1) + \Delta(n+1))^{-*}.$$

Rozpatrzmy $\delta > 0$ takie, że

$$\left\|\widetilde{\Delta}(n)\right\| \leq \widetilde{\delta} := \frac{\varepsilon}{2(\omega_0 - \varepsilon)\left(\omega_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right) a^{2T}} \tag{5.87}$$

dla

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\Delta(n)\| < \delta.$$

Stosując formułę Cauchy'ego do (5.86) otrzymujemy

$$t\left(n,z_1\right)=\mathcal{B}\left(n,m\right)\,t\left(m,z_1\right)+\sum_{i=m}^{n-1}\mathcal{B}\left(n,i+1\right)\,\widetilde{\Delta}\left(i\right)\,t\left(i,z_1\right).$$

To z kolei implikuje, że

$$\left\|t\left(n,z_1\right)\right\|\leq\left\|\mathcal{B}\left(n,m\right)\right\|\,\left\|t\left(m,z_1\right)\right\|+\sum_{i=m}^{n-1}\left\|\mathcal{B}\left(n,i+1\right)\right\|\,\left\|\widetilde{\Delta}\left(i\right)\right\|\,\left\|t\left(i,z_1\right)\right\|$$

Stosując (5.84) i (5.85) do ostatniej nierówności otrzymujemy

$$\left\|t\left(n,z_1\right)\right\|\leq\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m-n}\,a^{2T}\,\left\|z_2\right\|+\sum_{i=m}^{n-1}\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{i+1-n}\,a^{2T}\,\widetilde{\delta}\left\|t\left(i,z_1\right)\right\|$$

$$\left\|t\left(n,z_1\right)\right\|\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n}\leq$$

$$\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m}a^{2T}\,\left\|z_2\right\|+a^{2T}\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sum_{i=m}^{n-1}\widetilde{\delta}\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{i}\left\|t\left(i,z_1\right)\right\|$$

Używając nierówności Gronwalla z

$$u\left(i\right)=\left\|t\left(i,z_1\right)\right\|\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{i},$$

$$f\,\left(i\right)=\widetilde{\delta}$$

dla $i=m,\ldots,n$ *oraz*

$$p=\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m}a^{2T}\,\left\|z_2\right\|,$$

$$q=a^{2T}\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

otrzymujemy

$$\left\|t\left(n,z_1\right)\right\|\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n}\leq\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m}a^{2T}\left\|z_2\right\|\left(1+a^{2T}\left(\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)\widetilde{\delta}\right)^{n-m}$$

i

$$\frac{\left\|t\left(n,z_1\right)\right\|}{\left\|z_2\right\|}\leq a^{2T}\left(\frac{1}{\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}}+\widetilde{\delta}\,a^{2T}\right)^{n-m}.$$

Z definicji $\widetilde{\delta}$ *wynika, że*

$$\frac{1}{\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}}+\widetilde{\delta}a^{2T}\leq\frac{1}{\omega_0-\varepsilon},$$

a z równości (5.85) wiemy, że

$$\left\|z\left(m,z_0\right)\right\|=\left\|z_2\right\|,$$

więc

$$\frac{\left\|t\left(n,z_1\right)\right\|}{\left\|z\left(m,z_0\right)\right\|}\leq a^{2T}\left(\omega_0-\varepsilon\right)^{m-n}.$$

Ostatecznie, nierówność Schwartza implikuje, że

$$\left\|t\left(n,z_1\right)\right\|\left\|z\left(n,z_0\right)\right\|\geq\left\|z\left(m,z_0\right)\right\|^{2}$$

i dlatego

$$\frac{\left\|z\left(n,z_0\right)\right\|}{\left\|z\left(m,z_0\right)\right\|}\geq\frac{1}{a^{2T}}\left(\omega_0-\varepsilon\right)^{n-m}.$$

■

Z powyższego twierdzenia wynika, że wszystkie dolne wykładniki Bohla niezerowych rozwiązań układu (2.3) są większe od $\omega_0(A) - \varepsilon$ dla $\Delta \in \mathfrak{M}_\delta$. W szczególności biorąc $\Delta(n) = 0$ mamy następujące oszacowanie wykładników Bohla

$$\bigwedge_{z_0 \in \mathbb{R}^s} \underline{\beta}(z_0) \geq \omega_0(A). \tag{5.88}$$

Nierówność (5.83) można również zapisać w następującej postaci

$$\omega_0\left(A\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \inf_{z_0 \in \mathbb{R}^s_*} \underline{\beta}^Z\left(z_0\right) \tag{5.89}$$

W analogiczny sposób jak twierdzenia 76 i 77 można udowodnić następujące

Twierdzenie 78 *Dla dowolnego układu prawdziwe są następujące równości*

$$\omega^0\left(A\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \inf_{z_0 \in \mathbb{R}^s_*} \overline{\beta}^Z\left(z_0\right) \tag{5.90}$$

$$\Omega_0\left(A\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \sup_{z_0 \in \mathbb{R}^s_*} \underline{\beta}^Z\left(z_0\right) \tag{5.91}$$

Widzimy zatem, że wykładniki ogólne opisują zmiany wykładników Bohla odpowiadające małym zakłóceniom.

Jeżeli jesteśmy zainteresowani opisem zmienności wykładników Lapunowa, czyli opisem wielkości

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \lambda^Z_{\max}\left(A\right),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \lambda^Z_{\max}\left(A\right),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \lambda^Z_{\min}\left(A\right),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \lambda^Z_{\min}\left(A\right),$$

to można go uzyskać wprowadzając tzw. wykładniki centralne, o których mowa w monografii [83].

Nie są znane opisy wielkości

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \pi^Z_{\max}\left(A\right),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \pi^Z_{\max}\left(A\right).$$

Rozdział 6

Stabilność dyskretnych układów hybrydowych

W literaturze [74], [118], [157], [215], [216] zdefiniowano szereg rodzajów stabilności dla $DIL(\Sigma)$. Są nimi:

- absolutna asymptotyczna stabilność,
- periodyczna asymptotyczna stabilność,
- potęgowa stabilność,
- selektywna asymptotyczna stabilność,
- markowska asymptotyczna stabilność,
- generyczna asymptotyczna stabilność.

W rozdziale tym podamy ich formalne definicje oraz opiszemy zależności pomiędzy nimi.

Wybór odpowiedniego rodzaju stabilności zależy od typu zmian parametrów uwzględnianych w budowie dyskretnej inkluzji liniowej. Jeżeli zmiany współczynników będą wywołane przez czynniki zewnętrzne, niezależne od nas i nie dysponujemy żadnym modelem tych zmian, to wtedy będziemy zainteresowani absolutną asymptotyczną stabilność. Użycie potęgowej stabilności w miejsce absolutnej asymptotycznej stabilności jest uzasadnione w przypadku pożądanego dostatecznie szybkiego tempa zbiegania do zera. Okaże się to jednak zbyteczne z powodu faktu, iż absolutna asymptotyczna stabilność jest równoważna potęgowej stabilności. Periodyczną asymptotyczną stabilność zastosujemy w przypadku okresowo pojawiających się zmian współczynników. Jeżeli natomiast możemy wpływać na przełączenia, np. poprzez zmiany nastaw regulatora, to wtedy selektywna asymptotyczna stabilność ma zastosowanie.

Markowską asymptotyczną stabilnością jesteśmy zainteresowani w sytuacji, gdy potrafimy zbudować probabilistyczny model przełączeń. Generyczną asymptotyczną stabilność stosujemy w przypadku, gdy obserwując dostatecznie długo układ zauważymy, iż każdy tryb pracy pojawia się wiele razy.

W rozdziale tym zakładamy wszędzie z wyjątkiem podrozdziału 6.4, że Σ jest dowolnym zbiorem ograniczonym macierzy kwadratowych stopnia s.

6.1 Absolutna asymptotyczna stabilność

Absolutna asymptotyczna stabilność będzie wyrażać własność dążenia każdej trajektorii $DIL(\Sigma)$ do początku układu współrzędnych dla dowolnego warunku początkowego $x(0)$. Dokładniej traktuje o tym poniższa

Definicja 79 *Dyskretną inkluzję liniową nazywamy absolutnie asymptotycznie stabilną (w skrócie AAS) jeżeli dla każdej trajektorii* $(x(j))_{j\in\mathbb{N}}$ *ze zbioru* $DIL(\Sigma)$ *spełniony jest warunek*

$$\lim_{j\to\infty} x(j) = 0.$$

Pokażemy teraz, że własność AAS może być scharakteryzowana jedynie przy pomocy macierzy ze zbioru Σ bez odwoływania się do warunku początkowego. Udowodnimy następujące

Twierdzenie 80 *$DIL(\Sigma)$ jest AAS wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{d\in D} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} A\left(d\left(i\right)\right) = 0. \tag{6.1}$$

Dowód

- $(\Longrightarrow)$

  Definicję AAS można alternatywnie sformułować w następujący sposób

  $$\bigwedge_{d\in D} \bigwedge_{x(0)\in\mathbb{R}^s} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} A\left(d\left(i\right)\right) x\left(0\right) = 0.$$

  Stosując wniosek 14 dostajemy

  $$\bigwedge_{d\in D} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} A\left(d\left(i\right)\right) = 0,$$

  czyli $DIL(\Sigma)$ jest AAS.

- $(\Longleftarrow)$

  Dowód implikacji odwrotnej jest trywialny.

■

Absolutna asymptotyczna stabilność $DIL(\Sigma)$ oznacza asymptotyczną stabilność układu

$$x\left(i+1\right) = A\left(d\left(i\right)\right) x\left(i\right)$$

dla każdego $d \in D$. W świetle twierdzenia 15 AAS jest zatem równoważna każdemu z warunków

1. $\bigwedge_{d\in D} \bigwedge_{x(0)\in\mathbb{R}^s} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{i>n_0} \left\|x\left(i\right)\right\| \leq \varepsilon,$
2. $\bigwedge_{d\in D} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{i>n_0} \left\|A\left(d\left(i-1\right)\right)\ldots A\left(d\left(0\right)\right)\right\| \leq \varepsilon,$
3. $\bigwedge_{d\in D} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{i>n_0} \bigwedge_{x(0)\in\mathbb{R}^s} \left\|x\left(i\right)\right\| \leq \varepsilon \left\|x\left(0\right)\right\|.$

W pracy [257] podano bardzo istotną charakteryzację AAS poprzez wspólny promień spektralny o czym traktuje poniższe

Twierdzenie 81 *$DIL(\Sigma)$ jest AAS wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\overline{\rho}\left(\Sigma\right) < 1.$$

Należy zwrócić uwagę na to, że pomimo, iż każda z macierzy ze zbioru Σ może mieć promień spektralny mniejszy od 1, to promień spektralny całego zbioru Σ może być większy od 1. Oznacza to w szczególności, że przełączając się pomiędzy układami, które są asymptotycznie stabilne możemy uzyskać układ, który nie ma własności AAS. Pokazuje to następujący

Przykład 82 *Niech $\Sigma = \{A, B\}$, gdzie*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad \textit{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 8 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Dla powyższych macierzy zachodzą związki

$$\rho\left(A\right) = \rho\left(B\right) = \frac{1}{4} < 1.$$

Natomiast

$$\rho(AB) = \rho\begin{pmatrix} \frac{33}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{33}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix} = \frac{17}{16} > 1$$

co implikuje, że

$$\rho(\Sigma) \geq \sqrt{\frac{17}{16}} > 1,$$

z czego wynika, że $DIL(\Sigma)$ nie ma własności AAS.

6.2 Periodyczna asymptotyczna stabilność

Periodyczna asymptotyczna stabilność jest ograniczeniem absolutnej asymptotycznej stabilności do ciągów okresowych. Formalną definicję *PAS* podajemy poniżej.

Definicja 83 *$DIL(\Sigma)$ nazywamy periodycznie asymptotycznie stabilną (w skrócie PAS) jeżeli dla każdego ciągu okresowego $d \in D$ i odpowiadającej jemu trajektorii $(x(j))_{j\in\mathbb{N}}$ mamy*

$$\lim_{j\to\infty} x(j) = 0.$$

Analogicznie jak twierdzenie 80 można udowodnić następujące

Twierdzenie 84 *$DIL(\Sigma)$ jest PAS wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{\substack{d\in D \\ d-okresowy}} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} A(d(i)) = 0.$$

Jest oczywistym, że *AAS* implikuje *PAS*. Implikacją odwrotną dla układów ciągłych po raz pierwszy zajmował się Eugeniy S. Pyatnitskiy [241].

Rozważmy dalej przykład skończonego zbioru Σ. Okazuje się, że pytanie o zależność pomiędzy *PAS* a *AAS* jest ściśle związane z tzw. hipotezą skończoności (ang. the finiteness conjecture) sformułowaną po raz pierwszy w pracy [165]. Autorzy zrobili to nie odwołując się wprost do pojęcia stabilności, lecz sformułowali ją w języku wspólnego promienia spektralnego. Hipoteza ta głosi, że dla każdego zbioru skończonego Σ istnieje takie k, że supremum w definicji promienia spektralnego (patrz równość (2.11)) jest w istocie maksimum.

Hipoteza 85 *Dla każdego skończonego zbioru Σ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$ oraz macierze $A(1), \ldots, A(k) \in \Sigma$ takie, że*

$$\overline{\rho}(\Sigma) = \rho(A(1)\ldots A(k))^{\frac{1}{k}}.$$

Związek pomiędzy powyższą hipotezą, a zależnością pomiędzy *PAS* a *AAS opisuje następujące*

Twierdzenie 86 *Dla każdego skończonego zbioru Σ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$ oraz macierze $A(1), \ldots, A(k) \in \Sigma$ takie, że*

$$\overline{\rho}(\Sigma) = (\rho(A(1)\ldots A(k)))^{\frac{1}{k}}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego skończonego zbioru Σ'

$$PAS\ DIL(\Sigma') \quad \textit{pociąga za sobą} \quad AAS\ DIL(\Sigma').$$

Dowód

- $(\Longrightarrow)$

  Z PAS $DIL(\Sigma')$ wynika, że

  $$\rho(A(1)\ldots A(k))^{\frac{1}{k}} < \overline{\rho}(\Sigma').$$

  Z kolei na mocy definicji $\overline{\rho}(\Sigma')$ mamy

  $$\bigwedge_{l\in\mathbb{N}} \bigwedge_{A(1),\ldots,A(l)\in\Sigma'} \rho(A(1)\ldots A(l))^{\frac{1}{l}} \leq \rho(A(1)\ldots A(k))^{\frac{1}{k}} < 1,$$

  zatem

  $$\overline{\rho}(\Sigma') < 1,$$

  co wobec twierdzenia 81 oznacza AAS $DIL(\Sigma')$.

- ($\Longleftarrow$)

  Przypuśćmy, że dla pewnego zbioru skończonego Σ

$$\overline{\rho}(\Sigma) > \rho(A(1)\dots A(k))^{\frac{1}{k}}$$

  dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ *i* $A(1),\dots,A(k) \in \Sigma$.

  Weźmy $\alpha > 0$ *takie, że*

$$\alpha\,\overline{\rho}(\Sigma) > 1 > \alpha\rho(A(1)\dots A(k))^{\frac{1}{k}}. \tag{6.2}$$

  Ponieważ dla dowolnego $\alpha > 0$ *zachodzi*

$$\rho(\alpha\Sigma) = \alpha\rho(\Sigma),$$

  to

$$\overline{\rho}(\alpha\Sigma) > 1 > \alpha\rho(A(1)\dots A(k))^{\frac{1}{k}}.$$

  Rozważmy $\Sigma' = \alpha\Sigma$. *Ponieważ* $\overline{\rho}(\Sigma') > 1$ *to z twierdzenia 81* $DIL(\Sigma')$ *nie jest AAS. Z drugiej strony z prawej części nierówności (6.2) wynika, że*

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} \bigwedge_{B(1),\dots,B(k)\in\Sigma'} \rho(B(1)\dots B(k)) < 1$$

  czyli $DIL(\Sigma')$ *jest PAS.*

■

Powyższe twierdzenie można również wypowiedzieć w następujący sposób:

Twierdzenie 87 *Rodzina* Σ *jest kontrprzykładem dla hipotezy skończoności wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$PAS\ DIL(\frac{1}{\overline{\rho}(\Sigma)}\Sigma) \quad \textit{nie implikuje} \quad AAS\ DIL(\frac{1}{\overline{\rho}(\Sigma)}\Sigma),$$

gdzie

$$\frac{1}{\overline{\rho}(\Sigma)}\Sigma = \left\{\frac{1}{\overline{\rho}(\Sigma)}A : A \in \Sigma\right\}.$$

Fałszywość hipotezy skończoności sformułowanej w 1995 roku wykazano w 2003 roku w pracy [44]. Oznacza to, że w ogólności *PAS* nie implikuje *AAS*. W późniejszym czasie w literaturze pojawiło się kilka innych przykładów prostszych niż ten z pracy [35] bazujący na własnościach macierzy i kombinatoryce, czy też ten oparty na własnościach układów dynamicznych [159]. Warto jednak odnotować, że wszystkie te dowody są niekonstruktywne. W 2011 roku w pracy [123] pokazano numeryczny przykład fałszywości hipotezy skończoności. Wiele pytań związanych z tą hipotezą jest nadal otwartych, jak np. jej wersja dla par macierzy binarnych [61], [146]. W pracy [75] pokazano, że hipoteza skończoności nie jest prawdziwa także dla dolnego promienia spektralnego. Mimo, że w ogólności hipoteza skończoności nie jest prawdziwa to w wielu szczególnych przypadkach, które zostały opisane w pracach [118], [165] zachodzi.

Następne twierdzenie podaje warunek konieczny i wystarczający dla *PAS*.

Twierdzenie 88 $DIL(\Sigma)$ *jest PAS wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{B\in\Sigma^n} \rho(B) < 1.$$

Dowód ($\Longrightarrow$)

Dowód przeprowadzimy niewprost. Zakładamy, że

$$\bigvee_{n_0} \bigvee_{B\in\Sigma^{n_0}} \rho(B) \geq 1.$$

Niech

$$B = A(1)\dots A(n_0), \qquad A(i) \in \Sigma,\ \ i = 1,\dots,n_0$$

Zdefiniujmy

$$d(0) = 1,$$

$$d(1) = 2, \dots, d(n_0 - 1) = n_0$$

i ciąg okresowy d o okresie n_0. Wówczas

$$\prod_{i=0}^{n} A(d(i)) = A(k(n)\, n_0 + r(n)) \dots A(k(n)\, n_0 + 1)\, B^{k(n)},$$

gdzie

$$n = k(n)\, n_0 + r(n),$$

$k(n)$ jest ilorazem, a $r(n)$ resztą z dzielenia n przez n_0.

Ponieważ $B^{k(n)}$ nie dąży do zera, gdy $\lim_{n\to\infty} k(n) = \infty$ (porównaj (2.10)), więc

$$\prod_{i=0}^{n} A(d(i)) \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$$

i w konsekwencji układ nie jest PAS na mocy twierdzenia 84.

($\Longleftarrow$)

Niech $d \in D$ będzie ciągiem okresowym o okresie n_0. Ponadto niech $n = k(n)\, n_0 + r(n)$, gdzie jak poprzednio $k(n)$ i $r(n)$ są ilorazem i resztą z dzielenia n przez n_0. Wówczas

$$\prod_{i=0}^{n} A(d(i)) = A(d(k(n)\, n_0 + r(n))) \dots A(d(k(n)\, n_0 + 1))\, B^{k(n)}.$$

Z (2.10) wiemy, że

$$\lim_{n\to\infty} B^{k(n)} = 0,$$

co wobec ograniczoności Σ oznacza, że

$$\prod_{i=0}^{n} \lim_{n\to\infty} A(d(i)) = 0.$$

Twierdzenie 84 implikuje PAS rozważanego układu. ■

6.3 Potęgowa stabilność

Analogicznie do pojęcia potęgowej stabilności (podrozdział 4.2) układu (2.1) możemy wprowadzić następującą definicję stabilności $DIL(\Sigma)$.

Definicja 89 *$DIL(\Sigma)$ jest potęgowo stabilna (w skrócie PS) jeżeli dla każdego ciągu $d \in D$ i odpowiadającej jemu trajektorii $(x(j))_{j\in\mathbb{N}}$ mamy*

$$\|x(j)\| \le \mu\lambda^j$$

dla pewnego $\mu > 0$ i $0 < \lambda < 1$.

Widzimy zatem, że $DIL(\Sigma)$ oznacza PS

$$x(i+1) = A(d(i))\, x(i)$$

dla każdego $d \in D$. W świetle twierdzenia 17 PS jest równoważna każdemu z warunków

1.
$$\bigwedge_{d\in D} \bigvee_{0\le\lambda<1} \bigwedge_{x(0)\in\mathbb{R}^s} \bigvee_{\mu(x(0))\ge 1} \bigwedge_{i\ge 0} \|x(i)\| \le \mu(x(0))\, \lambda^i, \tag{6.3}$$

2.
$$\bigwedge_{d\in D} \bigvee_{0\le\lambda<1} \bigvee_{\mu\ge 1} \bigwedge_{i\ge 0} \|A(d(i)) \dots A(d(0))\| \le \mu\lambda^i, \tag{6.4}$$

3.
$$\bigwedge_{d\in D} \bigvee_{0\le\lambda<1} \bigvee_{\mu\ge 1} \bigwedge_{i\ge 0} \bigwedge_{x(0)\in\mathbb{R}^s} \|x(i)\| \le \mu\lambda^i \|x(0)\|. \tag{6.5}$$

Z definicji $PS\ DIL(\Sigma)$ wynika, że pociąga ona za sobą $AAS\ DIL(\Sigma)$. Z drugiej strony $AAS\ DIL(\Sigma)$ oznacza na mocy twierdzenia 81, że

$$\overline{\rho}(\Sigma) < 1.$$

Wybierzmy $q \in (\overline{\rho}(\Sigma), 1)$ i ustalmy $d \in D$. Z definicji wspólnego promienia spektralnego mamy

$$\|x(i)\| = \left\| \prod_{j=0}^{i-1} A(d(j)\ x(0)) \right\| \leq q^i \|x(0)\| = \mu q^i,$$

gdzie $\mu = \|x(0)\|$, czyli $DIL(\Sigma)$ jest PS. Udowodniliśmy w ten sposób następujące

Twierdzenie 90 *$DIL(\Sigma)$ jest PS wtedy i tylko wtedy, gdy jest AAS.*

W związku z tym w dalszej części pracy będziemy używać pojęcia AAS. Ponadto z powyższego twierdzenia wynika, że kolejność kwantyfikatorów w (6.3)-(6.5) może być zmieniona w sposób następujący:

1.
$$\bigvee_{0\leq\lambda<1} \bigwedge_{d\in D} \bigwedge_{x(0)\in\mathbb{R}^s} \bigvee_{\mu(x(0))\geq 1} \bigwedge_{i\geq 0} \|x(i)\| \leq \mu(x(0))\lambda^i, \tag{6.6}$$

2.
$$\bigvee_{0\leq\lambda<1} \bigvee_{\mu\geq 1} \bigwedge_{d\in D} \bigwedge_{i\geq 0} \|A(d(i))\ldots A(d(0))\| \leq \mu\lambda^i, \tag{6.7}$$

3.
$$\bigvee_{0\leq\lambda<1} \bigvee_{\mu\geq 1} \bigwedge_{d\in D} \bigwedge_{i\geq 0} \bigwedge_{x(0)\in\mathbb{R}^s} \|x(i)\| \leq \mu\lambda^i \|x(0)\|. \tag{6.8}$$

6.4 Selektywna asymptotyczna stabilność

Kolejnym typem rozważanych stabilności $DIL(\Sigma)$ jest selektywna asymptotyczna stabilność. Zanim ją formalnie zdefiniujemy warto odnotować, iż dla prawdziwości rozważań w tym podrozdziale nie jest istotne by zbiór Σ był ograniczony.

Jeżeli funkcja przełączająca d pełni rolę sterowania, to możemy być zainteresowani następującym typem stabilności.

Definicja 91 *$DIL(\Sigma)$ nazywamy selektywnie asymptotycznie stabilną (w skrócie SAS), jeżeli istnieje ciąg $d \in D$ taki, że odpowiadająca jemu trajektoria $(x(j))_{j\in\mathbb{N}}$ dla każdego $x(0) \in \mathbb{R}^s$ spełnia warunek*

$$\lim_{j\to\infty} x(j) = 0.$$

Okazuje się, że SAS może być opisana poprzez dolny promień spektralny.

Twierdzenie 92 *$DIL(\Sigma)$ jest SAS wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\underline{\rho}(\Sigma) < 1.$$

Dowód tego twierdzenia znajduje się w pracy [74].

Już sama definicja sugeruje, że SAS jest dużo słabszą własnością niż AAS co dodatkowo ilustruje następujący

Przykład 93 *Rozpatrzmy $\Sigma = \{A_1, A_2\}$, gdzie*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Promień spektralny jest równy odpowiednio

$$\rho(A_1) = 2 > 1$$

$$\rho(A_2) = 3 > 1.$$

Ponieważ są one większe od 1 *to* $\overline{\rho}(\Sigma) > 1$ *i z twierdzenia 81 wynika, że* $DIL(\Sigma)$ *nie jest AAS.*

Natomiast

$$\rho(A_1 A_2) = \rho\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

co oznacza, że $\underline{\rho}(\Sigma) < 1$ *i z twierdzenia 92 wynika, że* $DIL(\Sigma)$ *jest SAS.*

6.5 Markowska asymptotyczna stabilność

W podrozdziale tym będziemy posługiwać się standardowymi pojęciami z teorii łańcuchów Markowa, które można odnaleźć w książce [135].

W przypadku, gdy przełączenia pomiędzy podukładami $DIL(\Sigma)$ mają charakter losowy i mogą być modelowane łańcuchem Markowa (patrz rozdział 3 oraz [73], [186]) możemy być zainteresowani tzw. *markowską asymptotyczną stabilnością* [118], której definicja jest następująca.

Definicja 94 $DIL(\Sigma)$ *nazywamy markowską asymptotycznie stabilną (w skrócie MAS), jeżeli dla dowolnego łańcucha Markowa* $(r(j))_{j\in\mathbb{N}}$ *o przestrzeni stanów* $\mathbb{I}$ *oraz macierzy przejść* $P = [p_{kl}]_{k,l\in\mathbb{I}}$ *takiej, że* $p_{kl} > 0$ *dla* $k, l \in \mathbb{I}$ *mamy*

$$\lim_{j\to\infty} x(j) = 0 \quad \text{z prawdopodobieństwem } 1,$$

gdzie $(x(j))_{j\in\mathbb{N}}$ *jest trajektorią* $DIL(\Sigma)$ *odpowiadającą ciągowi* $d = (r(j))_{j\in\mathbb{N}}$.

Leonid Gurvits ([118], Proposition 4.1) zasugerował, że

$$MAS \iff \underline{\rho}(\Sigma) < 1.$$

Poniższy przykład pokazuje, że te stwierdzenie nie jest prawdziwe.

Przykład 95 *Rozpatrzmy*

$$\Sigma = \left\{a_1 = 5, a_2 = \frac{1}{2}\right\},$$

łańcuch Markowa o macierzy przejść

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

i rozkładzie początkowym

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Jest on również rozkładem stacjonarnym dla powyższego łańcucha. Mamy

$$\left(\prod_{i=0}^{n-1} a_{r(i)}\right)^{\frac{1}{n}} = (a_1)^{\frac{\tau_1(n-1)}{n}} (a_2)^{\frac{\tau_2(n-1)}{n}},$$

gdzie τ_i *oznacza czas przebywanie w stanie* i.

Z prawa wielkich liczb dla łańcucha Markowa ([135]) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_1(n-1)}{n} = \frac{1}{2} \text{ z prawdopodobieństwem } 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_2(n-1)}{n} = \frac{1}{2} \text{ z prawdopodobieństwem } 1.$$

W efekcie

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_{r(i)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \sqrt{\frac{5}{2}} > 1 \quad \text{z prawdopodobieństwem } 1$$

co powoduje, że $\prod_{i=0}^{n-1} a_{r(i)}$ *dąży do nieskończoności z prawdopodobieństwem* 1 *i* $DIL(\Sigma)$ *nie jest MAS. Z drugiej strony jest jasnym, że*

$$\underline{\rho}(\Sigma) = \frac{1}{2} < 1$$

co oznacza, że $DIL(\Sigma)$ *jest SAS.*

Powyższy przykład pokazuje również, że *SAS* $DIL(\Sigma)$ nie implikuje *MAS* $DIL(\Sigma)$. Jest jasnym, że *AAS* $DIL(\Sigma)$ implikuje *MAS* $DIL(\Sigma)$. Ponadto *MAS* $DIL(\Sigma)$ implikuje *SAS* $DIL(\Sigma)$. Wynika to z faktu, iż jeżeli układ jest *MAS* to zbiór tych ciągów d, którym odpowiadają trajektorie dążące do zera, jest zbiorem o prawdopodobieństwie równym 1. W szczególności nie jest zbiorem pustym. A zatem biorąc dowolny ciąg d z tego zbioru otrzymamy ten, o którym mowa w *SAS*.

W pracy [203] pokazano, że

Twierdzenie 96 *Jeżeli Σ jest skończony i $DIL(\Sigma)$ jest PAS, to $DIL(\Sigma)$ jest MAS.*

Otwartymi pytaniami są czy zachodzi implikacja odwrotna oraz czy powyższe twierdzenie zachodzi dla zbiorów nieskończonych, ale ograniczonych. Jest oczywistym, że warunkiem wystarczającym dla *MAS* $DIL(\Sigma)$ jest

$$\overline{\rho}(\Sigma) < 1.$$

6.6 Generyczna asymptotyczna stabilność

Jeżeli charakter przełączeń jest taki, że na każdym dostatecznie długim przedziale czasu układ będzie pracować w każdym ze swoich trybów to możemy być zainteresowani tzw. *generyczną asymptotyczną stabilnością*. Zanim podamy formalną definicję oznaczmy przez D' podzbiór zbioru D składający się z tych ciągów d dla których, dla każdego $l \in \mathbb{I}$ zbiór

$$\{ j \in \mathbb{N} : d(j) = l\}$$

jest nieskończony.

Definicja 97 *$DIL(\Sigma)$ nazywamy generycznie asymptotycznie stabilną (w skrócie GAS) jeżeli dla każdej trajektorii $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ odpowiadającej ciągowi $d \in D'$ mamy*

$$\lim_{j\to\infty} x(j) = 0.$$

W szczególnych przypadkach *GAS* scharakteryzowana jest przez poniższe twierdzenie z pracy [118]. Aby je sformułować użyjemy pojęć wprowadzonych w Podrozdziale 3.1.

Twierdzenie 98 *Załóżmy, że $\Sigma = \{A_i : 1 \le i \le m\}$ jest zbiorem rzeczywistych macierzy kwadratowych stopnia s, i że istnieje norma macierzowa $\|\cdot\|_*$ taka, że*

$$\|A_i\|_* \le 1.$$

Wtedy $DIL(\Sigma)$ jest GAS wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała α taka, że

$$\rho(A_\omega) \le \alpha < 1$$

dla wszystkich niepustych słów ω zawierających każdą cyfrę i dla $1 \le i \le m$.

Związek pomiędzy *AAS* i *GAS* $DIL(\Sigma)$ podaje następujące

Twierdzenie 99 *Dla skończonego zbioru*

$$\Sigma = \{A_i : 1 \le i \le m\}$$

$DIL(\Sigma)$ jest AAS wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\Sigma' \subseteq \Sigma} DIL(\Sigma') \text{ jest GAS.}$$

Dowód ($\Longrightarrow$) *oczywista*

($\Longleftarrow$) *Dowód niewprost. Załóżmy, że dla każdego $\Sigma' \subseteq \Sigma$ $DIL(\Sigma')$ jest GAS, a $DIL(\Sigma)$ nie jest AAS. Na mocy twierdzenia 80 istnieje ciąg $d \in D$ taki, że*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n} A(d(j))$$

nie istnieje bądź jest różna od zera.

Zdefiniujmy

$$H = \{l = 1, \ldots, m : d(j) = l \ \text{ tylko dla skończenie wielu } j\}.$$

Zbiór H nie jest pusty. Ponadto niech

$$k = \max\{j : d(j) \in H\}.$$

Ponieważ Σ jest zbiorem skończonym, więc k jest dobrze określoną liczbą. Dla $n > k$ mamy

$$\prod_{j=0}^{n} A(d(j)) = \prod_{j=k+1}^{n} A(d(j)) \prod_{j=0}^{k} A(d(j)). \tag{6.9}$$

Z założenia o GAS $DIL(\Sigma')$ i definicji k wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=k+1}^{n} A(d(j)) = 0$$

i z (6.9) dostajemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{n} A(d(j)) = 0.$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód. ■

6.7 Relacje pomiędzy typami stabilności

Opisane w poprzednich podrozdziałach relacje pomiędzy typami stabilności dyskretnych inkluzji liniowych można poglądowo przedstawić na poniższym diagramie

$$PS \iff AAS \underset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} PAS \overset{?}{\Longleftarrow} MAS \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} SAS$$

gdzie:

- $\Longrightarrow$ jest symbolem implikacji;
- $\not\Longleftarrow$ jest oznaczeniem, że implikacji w ogólności nie zachodzi;
- $\overset{?}{\Longleftarrow}$ oznacza, że nie jest znany zarówno kontrprzykład jak i dowód na prawdziwość implikacji.

Równoważność PS i AAS wynika z twierdzenia 90. Implikacja

$$AAS \Longrightarrow PAS$$

jest oczywista. Nieprawdziwość implikacji odwrotnej jest konsekwencją nieprawdziwości hipotezy skończoności.

Twierdzenie 96 orzeka, że PAS $DIL(\Sigma)$ pociąga za sobą MAS w przypadku skończonego zbioru Σ. Nie wiadomo czy jest ono prawdą w przypadku ogólnym. Ponadto nie rozstrzygnięto prawdziwości implikacji odwrotnej.

Łatwo podać przykład $DIL(\Sigma)$, która jest MAS, a nie jest AAS.

Zadanie 100 *Niech $\Sigma = \{A_1, A_2\}$, gdzie*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$(A_1 A_2)^n = \begin{bmatrix} \lambda^{2n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

więc dla $\lambda > 1$ $DIL(\Sigma)$ nie jest AAS. Z drugiej strony dla każdego łańcucha Markowa o dodatnich prawdopodobieństwach przejść i przestrzeni stanów $\{1, 2\}$ zbiór trajektorii spełniających warunek

$$r(j) = r(j+1) = 1$$

dla pewnego j jest zdarzeniem o prawdopodobieństwie jeden oraz

$$A_1 A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

więc $DIL(\Sigma)$ jest MAS.

Implikacja

$$MAS\ DIL(\Sigma) \implies SAS\ DIL(\Sigma)$$

jest oczywista. Nieprawdziwość implikacji odwrotnej pokazał przykład 95.

Ponadto, do otwartych pytań należą relacje pomiędzy $MAS\ DIL(\Sigma)$ i $GAS\ DIL(\Sigma)$. Oczywistym jest, że

$$GAS\ DIL(\Sigma) \implies SAS\ DIL(\Sigma).$$

Nie jest trudnym pokazać, że

$$GAS\ DIL(\Sigma) \not\Leftarrow SAS\ DIL(\Sigma)$$

o czym traktuje poniższy

Przykład 101 *Niech $\Sigma = \{A_1, A_2\}$, gdzie*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Rodzina Σ jest SAS ponieważ nieskończony iloczyn macierzy A_2 dąży do macierzy zerowej. Natomiast nieskończony iloczyn postaci $\ldots A_2 A_1 A_2 A_1$ dąży do macierzy jednostkowej, więc $DIL(\Sigma)$ nie jest SAS.

6.8 Spektra dyskretnych układów hybrydowych

W rozdziale tym zaproponujemy definicje wykładników charakterystycznych dla dyskretnych inkluzji liniowych. Rozważmy $DIL(\Sigma)$ zdefiniowaną w rozdziale 2.2 przy założeniu, że Σ jest zbiorem ograniczonym. Dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}^s$ i $d \in D$ oznaczmy

$$\lambda(x_0, d) = \limsup_{n \to \infty} \left\| \prod_{j=0}^{n-1} A(d(j))\ x_0 \right\|^{\frac{1}{n}}. \tag{6.10}$$

Liczba $\lambda(x_0, d)$ jest zatem wykładnikiem Lapunowa liniowego układu

$$x(n+1) = A(d(n))\ x(n) \tag{6.11}$$

odpowiadającym warunkowi początkowemu x_0.

Ponadto oznaczmy [208]

$$\lambda(\Sigma, x_0) = \{\lambda(x_0, d) : d \in D\},$$

$$\lambda(\Sigma) = \{\lambda(x_0, d) : d \in D,\ x_0 \in \mathbb{R}^s\},$$

$$\lambda_{\max}(\Sigma) = \{\lambda_{\max}(d) : d \in D\},$$

gdzie $\lambda_{\max}(d)$ jest maksymalnym wykładnikiem układu (6.11).

Poniższe twierdzenie, którego dowód znajduje się w pracy [76], charakteryzuje zbiór $\lambda_{\max}(\Sigma)$.

Twierdzenie 102 *Jeżeli Σ składa się z macierzy odwracalnych, to*

$$\lambda_{\max}(\Sigma) \supseteq \left(\underline{\rho}(\Sigma), \overline{\rho}(\Sigma)\right).$$

Następny prosty przykład pokazuje, że powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe bez założenia o odwracalności zbioru Σ.

Przykład 103 *Rozważmy* $\Sigma = \{A_1,\ A_2\}$, $A_1 = I$, $A_2 = 0$. *Wówczas*

$$\lambda(x_0, d) = 1 \iff \bigwedge_{j\in\mathbb{N}} d(j) = 1$$

i

$$\lambda(x_0, d) = 0 \iff \bigvee_{j\in\mathbb{N}} d(j) = 2.$$

Zatem

$$\lambda_{\max}(\Sigma) = \{0, 1\}$$

oraz

$$\underline{\rho}(\Sigma) = 0,$$
$$\overline{\rho}(\Sigma) = 1.$$

W pracy [187] pokazano, że w przypadku, gdy zbiór Σ jest zwarty to

$$\overline{\rho}(\Sigma) \in \lambda_{\max}(\Sigma)$$

Pytaniem otwartym jest, czy

$$\underline{\rho}(\Sigma) \in \lambda_{\max}(\Sigma).$$

Aby dokładniej scharakteryzować zbiór $\lambda_{\max}(\Sigma)$ odnotujmy następujące

Twierdzenie 104 *Dla dowolnego zbioru ograniczonego zachodzą równości*

$$\overline{\rho}(\Sigma) = \sup_{d\in D} \lambda(d),$$

$$\underline{\rho}(\Sigma) = \inf_{d\in D} \lambda(d).$$

Dowód pierwszej równości znajduje się w pracy [104], natomiast drugiej w [74]. Zauważmy, że wprost z definicji liczb $\lambda(\Sigma)$ i $\lambda_{\max}(\Sigma)$ wynika, że

$$\lambda(\Sigma) \supseteq \lambda_{\max}(\Sigma)$$

Związek $\lambda_{\max}(\Sigma)$ ze stabilnością DIL(Σ) opisuje następujące

Twierdzenie 105 *DIL(Σ) jest AAS* $\iff \sup \lambda_{\max}(\Sigma) < 1$.

Dowód ($\Longrightarrow$)
Jeżeli $DIL(\Sigma)$ jest AAS, to z twierdzenia 81

$$\overline{\rho}(\Sigma) < 1.$$

Wybierzmy $\alpha \in (\overline{\rho}(\Sigma), 1)$. Z twierdzenia 3 wynika, że istnieje norma macierzowa $\|\cdot\|$ taka, że

$$\bigwedge_{i\in\mathbb{I}} \|A(i)\| < \alpha. \tag{6.12}$$

Zatem dla dowolnego $d \in D$ mamy

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \prod_{j=0}^{n-1} A(d(j)) \right\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} (\alpha^n)^{\frac{1}{n}} = \alpha,$$

czyli

$$\sup \lambda_{\max}(\Sigma) < \alpha < 1.$$

($\Longleftarrow$)

Jeżeli

$$\sup \lambda_{\max}(\Sigma) < 1$$

to ustalmy $\alpha \in (\sup \lambda_{\max}(\Sigma), 1)$ *i z definicji* $\lambda(\Sigma)$ *mamy*

$$\bigwedge_{d \in D} \limsup_{n \to \infty} \left\| \prod_{j=0}^{n-1} A(d(j)) \right\|^{\frac{1}{n}} < \alpha.$$

Oznacza to, że

$$\bigwedge_{d \in D} \lim_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{n-1} A(d(j)) = 0,$$

co w świetle definicji 79 oznacza, że $DIL(\Sigma)$ *jest AAS.* ■

Kolejne twierdzenie opisuje AAS w terminach $\lambda(\Sigma, x_0)$.

Twierdzenie 106 $DIL(\Sigma)$ *jest AAS* $\Longleftrightarrow$

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^s} (\sup \lambda(\Sigma, x_0)) < 1. \tag{6.13}$$

Dowód ($\Longrightarrow$)

Jeżeli $DIL(\Sigma)$ *jest AAS, to tak jak w poprzednim dowodzie mamy*

$$\bigvee_{\|\cdot\|} \bigvee_{\alpha < 1} \bigwedge_{i \in \mathbb{I}} \|A(i)\| < \alpha.$$

Zatem

$$\bigwedge_{x_0 \in \mathbb{R}^s} \bigwedge_{d \in D} \limsup_{n \to \infty} \left\| \prod_{j=0}^{n-1} A(d(j))\, x_0 \right\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{n-1} (\|A(d(j))\|\, \|x_0\|)^{\frac{1}{n}} \leq$$

$$\limsup_{n \to \infty} (\alpha^n \|x_0\|)^{\frac{1}{n}} = \alpha < 1.$$

($\Longleftarrow$)

Jeżeli zachodzi nierówność (6.13), to ustalmy

$$\alpha \in \left(\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^s} (\sup \lambda(\Sigma, x_0)), 1 \right).$$

Wówczas

$$\bigwedge_{d \in D} \bigwedge_{x_0 \in \mathbb{R}^s} \limsup_{n \to \infty} \left\| \prod_{j=0}^{n-1} A(d(j))\, x_0 \right\|^{\frac{1}{n}} < \alpha,$$

czyli

$$\bigwedge_{d \in D} \bigwedge_{x_0 \in \mathbb{R}^s} \lim_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{n-1} A(d(j))\, x_0 = 0,$$

co oznacza, że

$$\bigwedge_{d \in D} \lim_{n \to \infty} \prod_{j=0}^{n-1} A(d(j)) = 0$$

i $DIL(\Sigma)$ *jest AAS.* ■

Z twierdzeń 105 i 106 wynika następujący

Wniosek 107

$$\sup \lambda_{\max}(\Sigma) = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^s} (\sup \lambda(\Sigma, x_0)).$$

Dowód *Przypuśćmy, że*

$$\sup \lambda_{\max}(\Sigma) < \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^s} (\sup \lambda(\Sigma, x_0)). \tag{6.14}$$

Ponieważ

$$\bigwedge_{c>0} \lambda_{\max}(c\Sigma) = c\lambda_{\max}(\Sigma) \tag{6.15}$$

$$\bigwedge_{c>0} \bigwedge_{x_0 \in \mathbb{R}^s} \lambda(c\Sigma, x_0) = c\lambda(\Sigma, x_0),$$

to możemy dobrać $c > 0$ tak, że

$$\sup(\lambda(c\Sigma)) < 1 < \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^s} (\sup \lambda(c\Sigma, x_0)).$$

Prawa strona nierówności oznacza w świetle twierdzenia 105, że $DIL(\Sigma)$ jest AAS, ale z prawej strony i z twierdzenia 106 wynika, że $DIL(\Sigma)$ nie jest AAS. Czyli nierówność (6.14) nie jest prawdziwa. Analogicznie można pokazać, że nie jest prawdziwa nierówność

$$\sup \lambda_{\max}(\Sigma) > \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^s} (\sup \lambda(\Sigma, x_0)).$$

Ostatecznie

$$\sup \lambda_{\max}(\Sigma) = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^s} (\sup \lambda(\Sigma, x_0)).$$

■

Dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}^s$ i $d \in D$ oznaczmy

$$\Pi(x_0, d) = \liminf_{n \to \infty} \left\| \prod_{j=0}^{n-1} A(d(j))\, x_0 \right\|^{\frac{1}{n}}. \tag{6.16}$$

Liczba $\Pi(x_0, d)$ jest wykładnikiem Perrona układu (6.11) odpowiadającym warunkowi początkowemu x_0.

Ponadto oznaczmy

$$\Pi(\Sigma, x_0) = \{\Pi(x_0, d) : d \in D\},$$

$$\Pi(\Sigma) = \{\Pi(x_0, d) : d \in D,\ x_0 \in \mathbb{R}^s\}.$$

Z twierdzenia 50 wiemy, że przy ustalonym $d \in D$ funkcja $\Pi(\cdot, d)$ jest prawie wszędzie stała i równa

$$\liminf_{n \to \infty} \left\| \prod_{j=0}^{n-1} A(d(j)) \right\|^{\frac{1}{n}}.$$

Jak już wspomnieliśmy we wstępie do rozdziału 5.2 wykładnik Perrona nie mają interpretacji w języku stabilności układów liniowych i w związku z tym nie ma odpowiedników twierdzeń 105 i 106 dla liczb $\Pi(\Sigma)$ i $\Pi(\Sigma, x_0)$.

Jako interesujące pytania otwarte odnotujmy:

1. Opisać zbiór $\Pi(\Sigma)$. Znaleźć odpowiednik twierdzenia 102 dla $\Pi(\Sigma)$.
2. Czy zawsze istnieją $x_0 \in \mathbb{R}^s$ i $d \in D$ takie, że
$$\Pi(\Sigma) = \Pi(x_0, d)\,?$$
3. Czy zachodzi równość
$$\Pi(\Sigma) = \lambda_{\max}(\Sigma)\,?$$

Przez analogię do formuł (6.10) i (6.16) oznaczmy

$$\overline{\beta}(x_0, d) = \limsup_{n-m \to \infty} \left\| \prod_{j=m}^{n} A(d(j))\, x_0 \right\|^{\frac{1}{n-m}},$$

$$\underline{\beta}\left(x_0,d\right)=\liminf_{n-m\to\infty}\left\|\prod_{j=m}^{n}A\left(d\left(j\right)\right)x_0\right\|^{\frac{1}{n-m}},$$

$$\Omega^0\left(d\right)=\limsup_{n-m\to\infty}\left\|\prod_{j=m}^{n}A\left(d\left(j\right)\right)\right\|^{\frac{1}{n-m}},$$

$$\Omega_0\left(d\right)=\liminf_{n-m\to\infty}\left\|\prod_{j=m}^{n}A\left(d\left(j\right)\right)\right\|^{\frac{1}{n-m}}.$$

Ponadto jeżeli Σ składa się z macierzy odwracalnych to zdefiniujmy

$$\omega^0\left(d\right)=\limsup_{n-m\to\infty}\left\|\prod_{j=n}^{m}A^{-1}\left(d\left(j\right)\right)\right\|^{\frac{1}{m-n}},$$

$$\omega_0\left(d\right)=\liminf_{n-m\to\infty}\left\|\prod_{j=n}^{m}A^{-1}\left(d\left(j\right)\right)\right\|^{\frac{1}{m-n}}.$$

Odnotujmy następujące

Twierdzenie 108 *$DIL\left(\Sigma\right)$ jest AAS* $\Longleftrightarrow$

$$\bigvee_{\alpha<1}\bigwedge_{d\in D}\Omega^0\left(d\right)\leq\alpha \tag{6.17}$$

Dowód ($\Longrightarrow$)

Jeżeli $DIL\left(\Sigma\right)$ jest AAS to z twierdzenia 81 wiemy, że $\overline{\rho}\left(\Sigma\right)<1$. Wybierzmy $\alpha\in\left(\overline{\rho}\left(\Sigma\right),1\right)$. Z definicji $\overline{\rho}\left(\Sigma\right)$ wynika, że istnieje $k_0\in\mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich n, $n-m>k_0$

$$\bigwedge_{A\in\Sigma^{n-m}}\|A\|^{\frac{1}{n-m}}<\alpha.$$

Ustalmy $d\in D$. Mamy wówczas

$$\Omega^0\left(d\right)\leq\alpha.$$

($\Longleftarrow$)

Jeżeli zachodzi (6.17), to dla każdego $d\in D$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{n-1}A\left(d\left(j\right)\right)=0.$$

Z twierdzenia 80 wnioskujemy, że $DIL\left(\Sigma\right)$ jest AAS. ■

Z twierdzenia 108 wynika następujący ważny wniosek, w którego sformułowaniu użyjemy następujących oznaczeń

$$\Omega^0\left(\Sigma\right)=\left\{\Omega^0\left(d\right):d\in D\right\}.$$

Jest jasnym, że

$$\bigwedge_{c>0}\Omega^0\left(c\,\Sigma\right)=c\,\Omega^0\left(\Sigma\right) \tag{6.18}$$

Wniosek 109

$$\sup\Omega^0\left(\Sigma\right)=\sup\lambda_{\max}\left(\Sigma\right).$$

Dowód *Z nierówności (5.75) i (5.76) wynika, że dla każdego $d\in D$ mamy*

$$\Omega^0\left(d\right)\geq\lambda_{\max}\left(d\right)$$

czyli

$$\sup\left\{\Omega^0\left(d\right):d\in D\right\}\geq\sup\lambda_{\max}\left(\Sigma\right).$$

Załóżmy, że

$$\sup\left\{\Omega^0(d) : d \in D\right\} > \sup \lambda_{\max}(\Sigma).$$

Z nierówności (6.15) i (6.18) wynika, że bez straty ogólności można założyć, iż

$$\sup \Omega^0(\Sigma) > 1 > \sup \lambda_{\max}(\Sigma).$$

Nierówność

$$1 > \sup \lambda_{\max}(\Sigma)$$

oznacza na mocy twierdzenia 105, że $DIL(\Sigma)$ jest AAS, a nierówność

$$\sup \Omega^0(\Sigma) > 1$$

oznacza na mocy twierdzenia 108, że $DIL(\Sigma)$ nie jest AAS. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. ■

Oznaczmy przez D_p podzbiór D złożony z wszystkich ciągów okresowych i

$$F(\Sigma) = \{\lambda_{\max}(d) : d \in D_p\}.$$

Zbiór ten w pracy [265] nazywany jest spektrum Floqueta układu. Ponieważ

$$D_p \subset D,$$

więc

$$F(\Sigma) \subseteq \lambda_{\max}(\Sigma).$$

Zatem

$$\sup F(\Sigma) \leq \sup \lambda_{\max}(\Sigma).$$

Rozważana wcześniej hipoteza skończoności, która jak już wspomniano okazała się w ogólności fałszywa, jest równoznaczna stwierdzeniu, że

$$\sup F(\Sigma) = \sup \lambda_{\max}(\Sigma).$$

W pracy [214] pokazano jak można przy pomocy wprowadzonych powyżej charakterystyk szacować tempo wzrostu lub malenia trajektorii dyskretnych inkluzji liniowych.

Rozdział 7

Zakończenie

Szereg zjawisk rzeczywistych może być efektywnie modelowany przy użyciu dyskretnych inkluzji liniowych. Należą do nich opisane w rozdziale 3-cim pojemność kodów, agenci autonomiczni oraz układy z losowymi skokami.

W pracy zaproponowano nowatorskie podejście do opisu własności dynamicznych dyskretnych inkluzji liniowych oparte na wykładnikach charakterystycznych.

W zastosowaniach praktycznych istotną rolę odgrywa stabilność, która jest podstawowym warunkiem poprawnego działania układu. O ile dla układów liniowych stacjonarnych rozróżniamy w zasadzie tylko stabilność i asymptotyczną stabilność, to już dla układów liniowych niestacjonarnych istnieje wiele nierównoważnych, a ważnych z punktu widzenia zastosowań praktycznych, typów stabilności. Problemom tym dla układów liniowych dyskretnych niestacjonarnych poświęcony jest rozdział 4-ty pracy, w którym rozpatrywane są asymptotyczna stabilność, potęgowa stabilność, jednostajna asymptotyczna stabilność oraz jednostajna potęgowa stabilność. Dla każdej z nich przedstawiono szereg alternatywnych, ale równoważnych, warunków odpowiednio w twierdzeniach 15, 17, 19 i 24. Rozdział ten kończy się pełnym opisem zależności pomiędzy wprowadzonymi typami stabilności, który można podsumować następująco: jednostajna potęgowa stabilność i jednostajna asymptotyczna stabilność są równoważne oraz są istotnie silniejszymi żądaniami niż potęgowa stabilność, która z kolei implikuje asymptotyczną stabilność, ale implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Wykładniki charakterystyczne dla dyskretnych inkluzji liniowych, które zaproponowano w rozdziale 6-tym opierają się o omówione w rozdziale 5-tym, wykładniki charakterystyczne niestacjonarnych układów liniowych. Problem ten dla układów ciągłych jest w literaturze dobrze opracowany, natomiast wiele autorskich wyników dotyczących układów dyskretnych przedstawiono w rozdziale 5-tym. Pierwszy podrozdział tego rozdziału traktuje o wykładnikach Lapunowa. Okazuje się, że zbiór wykładników Lapunowa jest zawsze skończony i zawiera nie więcej elementów niż wymiar rozpatrywanego układu. Największy z wykładników Lapunowa charakteryzuje potęgową stabilność rozpatrywanego układu. Pokazano, że największy wykładnik Lapunowa jest mniejszy od jedności wtedy i tylko wtedy, gdy układ jest potęgowo stabilny. Centralną częścią podrozdziału 5.1 jest twierdzenie 42, które podaje warunki wystarczające dla stabilności wykładników Lapunowa rozumianej jako niewrażliwość na małe zakłócenia parametryczne.

W dalszej części rozdziału 5-tego omówiono wykładniki Perrona, których definicje otrzymujemy zastępując w definicji wykładników Lapunowa granicę górną dranicą dolną. Okazuje się, że ta zmiana ma daleko idące skutki dla własności otrzymanych charakterystyk. W tej części pracy skonstruowano nieznany wcześniej przykład układu (przykład 47), którego zbiór wykładników Perrona tworzy cały odcinek. Twierdzenie 48 charakteryzuje zbiór wykładników Perrona układu diagonalnego. Podano również formułę wyrażającą największy wykładnik Perrona poprzez macierz tranzycji (twierdzenie 49).

Kolejny podrozdział traktuje o wykładnikach Bohla, które używane są do opisu jednostajnej asymptotycznej stabilności. Zdefiniowano tutaj górny wykładnik Bohla oraz podano 3 alternatywne formuły dla niego (twierdzenie 57). Okazuje się, że wykładników Bohla, podobnie jak wykładników Perrona, może być więcej niż wymiar układu, ale dla układów diagonalnych nie może ich być więcej niż $2^s - 1$, gdzie s jest wymiarem przestrzeni stanów (twierdzenie 58). Dowód twierdzenia 60 zawiera dla każdej liczby $q \leq 2^s - 1$ konstrukcję układu diagonalnego o dokładnie q wykładnikach Bohla. Struktura zbioru wykładników Bohla w ogólnym przypadku opisana jest przez twierdzenie 61.

Kolejna część rozdziału traktuje o dolnych wykładnikach Bohla, których definicje podobnie jak wykładników Perrona, otrzymuje się poprzez zamianę granicy górnej na granicę dolną. Okazuje się jednak, że ta zmiana nie powoduje konsekwencji dla własności otrzymanych charakterystyk, które opisano w po-

drozdziale 5.3.2. Tematem podrozdziału 5.3.3 są wykładniki ogólne (starszy górny, starszy dolny, młodszy górny, młodszy dolny). Ich definicja w zestawieniu z twierdzeniem 34 mogłaby sugerować, że są one krańcami zbioru wykładników Bohla. Hipotezy takiej nie udało się jednak rozstrzygnąć. Szereg alternatywnych formuł dla starszego górnego i młodszego dolnego wykładnika ogólnego zawierają twierdzenia 70 i 73. Jednym z istotniejszych wyników tego podrozdziału są twierdzenia 76 i 77 oraz wynikające z nich wnioski, które zawierają nierówności pomiędzy wykładnikami Bohla układu zakłóconego i wykładnikami ogólnymi układu oryginalnego.

W rozdziale 6-tym omówiono różne typy stabilności dyskretnych inkluzji liniowych, którymi są: absolutna asymptotyczna stabilność, periodyczna asymptotyczna stabilność, potęgowa stabilność, selektywna asymptotyczna stabilność, markowska asymptotyczna stabilność i generyczna asymptotyczna stabilność. W podrozdziale 6.1 opisano absolutną asymptotyczną stabilność w terminach uogólnionego promienia spektralnego oraz w oparciu o wcześniej udowodnione twierdzenia dla dyskretnych układów liniowych o zmiennych współczynnikach. Wskazano na szereg równoważnych możliwości sformułowania absolutnej asymptotycznej stabilności dla dyskretnych inkluzji liniowych. W podrozdziale 6.2 przedyskutowano koncepcję periodycznej asymptotycznej stabilności i jej związku z tzw. hipotezą skończoności. Twierdzenie 88 zawiera warunek konieczny i wystarczający dla periodycznej asymptotycznej stabilności. Kolejny podrozdział traktuje o potęgowej stabilności, a jego centralny wynik, twierdzenie 90, pokazuje, że jest ona równoważna absolutnej asymptotycznej stabilności. Selektywna asymptotyczna stabilność dyskutowana jest w podrozdziale 6.4, gdzie pokazano, że do jej scharakteryzowania można użyć dolnego promienia spektralnego. W podrozdziale 6.5 omówiono koncepcję markowskiej asymptotycznej stabilności, gdzie pokazano (przykład 95) nieprawdziwość pewnego wyniku literaturowego stwierdzającego, że markowska asymptotyczna stabilność jest równoważna temu, że dolny uogólniony promień spektralny jest mniejszy od jedności. Ostatni z rozważanych typów stabilności to generyczna asymptotyczna stabilność, której własności dyskutowane są w rozdziale 6.6. Opis istniejącego stanu wiedzy na temat zależności pomiędzy rozpatrywanymi typami stabilności zawiera podrozdział 6.7. Rozdział 6-ty kończą propozycje charakterystyk liczbowych dla dyskretnych inkluzji liniowych oraz opis ich związku z różnymi typami stabilności.

Obecnie nie ma efektywnego algorytmu, który w pełny sposób rozstrzygałby nawet najprostsze problemy stabilności układów hybrydowych. W pracy podano opis, w postaci nierówności, różnych typów stabilności dyskretnych inkluzji liniowych poprzez wprowadzone wcześniej charakterystyki liczbowe. Sugeruje to możliwość opracowania w przyszłości algorytmu rozstrzygającego o pewnych typach stabilności opartego na zaproponowanych charakterystykach liczbowych.

Bibliografia

[1] L.Ya. Adrianova, *Introduction to Linear Systems of Differential Equations*, Translations of Mathematical Monographs, 146, St. Petersburg State University, Russia, 1995.

[2] R.P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities. Theory, Methods, and Applications*, Marcel Dekker, New York, 2000.

[3] T.M. Aldibekov, The upper semicontinuity of senior generalized Lyapunov exponents of systems of differential equations, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 54(5), 1–5 (2010).

[4] S.A. Altekar, *Detection and coding techniques for magnetic recording channels.* PhD thesis, University of California, San Diego, 1997.

[5] R. Alur, C. Belta, V. Kumar, M. Mintz, G.J. Pappas, H. Rubin, J. Schug, Modeling and analyzing biomolecular networks, Computing in Science & Engineering, 4(1), 20–31 (2002).

[6] L. Amara, L. Graps, An Introduction to Wavelets, *IEEE Computational Sciences and Engineering*, 2(2), 50-61 (1995).

[7] L. Arnold, V. Wihstutz, Lyapunov exponents: A survey, *Lecture Notes in Mathematics*, 1186(1986), 1-26 (1986).

[8] L. Arnold, J.-Pierre Eckmann, H. Crauel, *Lyapunov Exponents, Proceedings of a conference held in Oberwolfach Germany May 28-June 2, 1990*, Lecture Notes in Mathematics 1486. Berlin, Springer-Verlag, 1991.

[9] L.R. Awad, On the rapidly decreasing solutions for some systems of differentiale equations with unbounded coefficients, *Periodica Mathematica Hungarica,* 31(2), 97-103 (1995).

[10] L.R. Awad, E.M. E1-Kholy, Sh. El-Bendary, On the Estimation of Solutions for Some Linear Systems of Differential Equations, *Acta Mathematica Sinica*, 14(l), 41-46 (1998).

[11] E.A. Barabanov, The structure of the set of lower Perron exponent of a linear differential system, *Differentsial'nye Uravneniya*, 22(11), 1843-1853 (1986) (Russian).

[12] E.A. Barabanov, A.V. Nyukh, Uniform exponents of linear systems of differential equations, *Differentsial'nye Uravneniya* 30(10), 1665–1676 (1994) (Russian).

[13] E.A. Barabanov, O.G. Vishnevskaya, Exact bounds of Liapunov's exponents for linear differential perturbed systems with integrally restricted perturbation matrices on the semiaxis, *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 41(5), 29–34 (1997).

[14] E.A. Barabanov, A.V. Konyukh, Bohl exponents of linear differential systems, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 24, 151-158 (2001).

[15] E.A. Barabanov, Singular Exponents and Properness Criteriafor Linear Differential Systems, *Differential Equations*, 41(2), 151–162 (2005).

[16] E.A. Barabanov, E.I. Fominykh, Description of the Mutual Arrangement of Singular Exponents of a Linear Differential Systems and Exponents of Its Solutions, *Differential Equations*, 42(12), 1657–1673 (2006).

[17] N.E. Barabanov, Lyapunov indicator of discrete inclusions I, *Automation and Remote Control*, 49(2), 152-157 (1988).

[18] N.E. Barabanov, Lyapunov indicator of discrete inclusions II, *Automation and Remote Control*, 49(3), 283-287 (1988).

[19] N.E. Barabanov, Lyapunov indicator of discrete inclusions III, *Automation and Remote Control*, 49(5), 558-565 (1988).

[20] N.E. Barabanov, Method for the computation of the Lyapunov exponent of a differential inclusion. *Automation and Remote Control*, 50(4), 475-479 (1989).

[21] L. Barreira, Ya. Pesin, *Lyapunov exponents and Smooth Ergodic Theory*, University Lecture Series, 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[22] L. Barreira, C. Valls, Stability theory and Lyapunov regularity, *Journal of Differential Equations*, 232(2), 675-701 (2007).

[23] A. Bemporad, M. Morari, Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints, *Automatica*, 35(3), 407–427 (1999).

[24] A. Ben-Artzi, I. Gohberg, Dichotomy, discrete Bohl exponents, and spectrum of block weighted shifts, *Integral Equations and Operator Theory*, 14, 613-677 (1991).

[25] A. Ben-Artzi, I. Gohberg, Dichotomies of perturbed time vaying systems and the power method, *Indiana University Mathematics Journal*, 42(3), 699-720 (1993).

[26] M.A. Berger, Y. Wang, Bounded semigroups of matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 166, 21–27 (1992).

[27] E.R. Berlekamp, Technology of error-correcting codes, *Proceedings of the IEEE*, 68(5), 564-593 (1980).

[28] J. Berstel, Growth of repetition-free words–a review, *Theoretical Computer Science*, 340(2), 280–290 (2005).

[29] F.S. De Blasi, J. Schinas, Stability of multivalued discrete dynamical systems, *Journal of Differential Equations*, 14, 245-262 (1973).

[30] P.A. Bliman, G. Ferrari-Trecate, Stability analysis of discrete-time switched systems through lyapunov functions with nonminimal state, *Proceedings Volume from the IFAC Conference: Analysis and Design of Hybrid Systems 2003 (ADHS 03)*, 325–330 (2003).

[31] W. Bliss, An 8/9 rate time-varying trellis code for high density magnetic recording, *IEEE Transactions on Magnetics*, 33, 2746-2748 (1997).

[32] V.D. Blondel, J.N. Tsitsiklis, When is a pair of matrices mortal?, *Information Processing Letters*, 63, 283-286 (1997).

[33] V.D. Blondel, J.N. Tsitsiklis, Complexity of stability and controllability of elementary hybrid systems, *Automatica*, 35, 479-489 (1999).

[34] V.D. Blondel, J.N. Tsitsiklis, Boundedness of all products of a pair of matrices is undecidable, *Systems and Control Letters*, 41(2), 135-140 (2000).

[35] V.D. Blondel, J. Theys, A.A. Vladimirov, An elementary counterexample to the finiteness conjecture, *SIAM Journal on matrix analysis and applications*, 24(4), 963-970 (2003).

[36] V.D. Blondel, V. Canterini, Undecidable problems for probabilistic automata of fixed dimension, *Theory of Computing Systems*, 36(3), 231–245 (2003).

[37] V.D. Blondel, A. Megretski, *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory.* Princeton, NJ, Princeton Univ. Press, 2004.

[38] V.D. Blondel, Y. Nesterov, Computationally efficient approximations of the joint spectral radius, *SIAM Journal on matrix analysis and applications*, 27(1), 256–272 (2005).

[39] V.D Blondel, R. Jungers, V. Protasov, On the complexity of computing the capacity of codes that avoid forbidden difference patterns, *IEEE Transactions on Information Theory,* 52(11), 5122–5127 (2006).

[40] V.D. Blondel, R.M. Jungers, V. Protasov, On the complexity of computing the capacity of codes that avoid forbidden difference patterns. *Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, 207–212, (2006).

[41] N.A. Bobylev, S.V. Emel'yanov, S.K. Korovin, Attractors of discrete controlled systems in metric spaces, *Computational Mathematics and Modeling*, 11(4), 321–326 (2000).

[42] P. Bohl, Über Diferentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 144, 284-313 (1913).

[43] N. Bourbaki, *Theorie Spectrale*, Chapters 1-2, Hermann, Paris, 1967.

[44] T. Bousch, J. Mairesse, Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture, *Journal of the American Mathematical Society*, 15(1), 77–111 (2002).

[45] M.S. Branicky, Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4), 475–482 (1998).

[46] R.W. Brockett, *Finite Dimensional Linear Systems*, Wiley, New York, 1970.

[47] R.W. Brockett, Asymptotic stability and feedback stabilization, *Differential Geometric Control Theory*, Boston, MA, Birkhäuser, 181–191 (1983).

[48] R.W. Brockett, D. Liberzon, Quantized feedback stabilization of linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(7), 1279–1289 (2000).

[49] R. Brooks, D. Friedlander, J. Koch, S. Phoha, Tracking multiple targets with selforganizing distributed ground sensors, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 64(7), 874–884 (2004).

[50] R. Brayton, C. Tong, Constructive stability and asymptotic stability of dynamical systems, IEEE Transactions on Circuits and Systems, 27, 1121-1130 (1980).

[51] B.F. Bylov, Almost reducible systems of differential equations, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 3, 333–359 (1962) (Russian).

[52] B.F. Bylov, On almost reducibility for a system of linear differential equations having different characteristic exponents, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 4, 1241–1262 (1963) (Russian).

[53] B.F. Bylov, R.E. Vinograd, D.M. Grobman, V.V. Nemytskii, *Theory of Lyapunov Exponents and its Applications to Stability Theory*, Moscow, Nauka, 1966 (Russian).

[54] B.F. Bylov, N.A. Izobov, Necessary and sufficitent conditions for stability of characteristic exponents of a linear system, *Differential Equations*, 5(10), 1775-1784 (1969).

[55] B.F. Bylov, N.A. Izobov, Necessary and sufficitent conditions for stability of characteristic exponents of a diagonal system, *Differential Equations*, 5(10), 1785-1793 (1969).

[56] M. Cannon, B. Kouvaritakis, M. Grimble, B. Bulut, Nonlinear predictive control of hot strip rolling mill, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(3–4), 365–380 (2003).

[57] D. Cheban, M. Mammana, Absolute Asymptotic Stability of autonomous and Non-Autonomous Discrete Linear Inclusions, *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica* 3(46), 41–52 (2004).

[58] D. Cheban, M. Mammana, Asymptotic Stability of Discrete Linear Inclusions, *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica* 1(47), 43–68 (2005).

[59] D. Cheban, C. Mammana, Compact global attractors of control systems, *Journal of Dynamical and Control Systems*, 16(1), 23–44 (2010).

[60] Ciągi operatorów. Twierdzenie Banacha-Steinhausa, http://www.mimuw.edu.pl/~kwapstan/wAF14.pdf

[61] A. Cicone, N. Guglielmi, S. Serra Capizzano, M. Zennaro, Finiteness property of pairs of 2 x 2 signmatrices via real extremal polytope norms, *Linear Algebra and its Applications*, 432(2-3), 796-816 (2010).

[62] D. Collela, D. Heil, Characterization of scaling functions: Continuous solutions, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,* 15, 496–518 (1994).

[63] F. Colonius, Asymptotic behaviour of optimal control systems with low discount rates, *Mathematics of Operations Research*, 14, 309-316 (1989).

[64] F. Colonius, W. Kliemann, Infinite time optimal control and periodicity, *Applied Mathematics & Optimization*, 20, 113-130 (1989).

[65] F. Colonius, W. Kliemann, Stability radii and Lyapunov exponents, *Proceedings of Workshop Control of Uncertain Systems, Bremen 1989*, 6, 19-55, Basel, Birkhauser (1990).

[66] F. Colonius, W. Kliemann, Linear control semigroups acting on projective space, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 5, 495-528 (1993).

[67] F. Colonius, W. Kliemann, Maximal and minimal Lyapunov exponents of bilinear control systems, *Journal of Differential Equations*, 101, 232-275 (1993).

[68] F. Colonius, W. Kliemann, S. Krull, Stability and stabilization of linear uncertain systems - a Lyapunov exponents approach. *Report 372, Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung*, Universitat Augsburg, 1992.

[69] F. Colonius, W. Kliemann, The Lyapunov spectrum of families of time varying matrices, *Report 504, Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung*, Universitat Augsburg, 1994.

[70] O.L.V. Costa, M.D. Fragoso, R.P. Marques, *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*, Springer, 2005.

[71] V. Crespi, G. Cybenko, G. Jiang, The theory of trackability with applications to sensor networks, *ACM Transactions on Sensor Networks,* 4(3), 1–42 (2008).

[72] R.F. Curtain, A.J. Pritchard, *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, Springer, Berlin, 1978.

[73] A. Czornik, *On control problems for jump linear systems*, Rozprawa habilitacyjna, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria: Automatyka z. 137, 2003.

[74] A. Czornik, On the generalized spectral subradius, *Linear Algebra and its Applications*, 407, 242-248 (2005).

[75] A. Czornik, P. Jurgaś, Falseness of the finiteness property of the spectral subradius, *International Journal of applied mathematics and computer science*, 17, 173-178 (2007).

[76] A. Czornik, P. Jurgaś, Set of possible values of maximal Lyapunov exponents of discrete time-varying linear system, *Automatica*, 44(2), 580-583 (2008).

[77] A. Czornik, A. Nawrat, On the Sigma Exponent of Discrete Linear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(6), 1511-1515 (2010).

[78] A. Czornik, On the Perron exponents of discrete linear systems, *Linear Algebra and its Applications*, 432(1), 394-401 (2010).

[79] A. Czornik, A. Nawrat, On the regularity of discrete linear systems, *Linear Algebra and its Applications*, 432(11), 2745-2753 (2010).

[80] A. Czornik, A. Nawrat, On new estimates for Lyapunov exponents of discrete time varying linear systems, *Automatica*, 46(4), 775-778 (2010).

[81] A. Czornik, A. Nawrat, On the perturbations preserving spectrum of discrete linear systems, *Journal of Difference Equations and Applications*, 17(1), 57-67 (2011).

[82] A. Czornik, A. Nawrat, On generalized Lyapunov exponents, *19th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED 2011)*, 378-381 (2011).

[83] A. Czornik, *Perturbation Theory for Lyapunov Exponents of Discrete Linear Systems*, Wydawnictwa AGH, Kraków 2012.

[84] A. Czornik, M. Niezabitowski, Lyapunov Exponents for Systems with Unbounded Coefficients, *Dynamical Systems: An International Journal*, 28(2), 140-153 (2013).

[85] A. Czornik, A. Nawrat, M. Niezabitowski, On the Lyapunov exponents of a class of the second order discrete time linear systems with bounded perturbations, *Dynamical Systems: An International Journal*, 28(4), 473-483 (2013).

[86] A. Czornik, M. Niezabitowski, On the spectrum of discrete time-varying linear systems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 9, 27–41 (2013).

[87] J. Daafouz, P. Riedinger, C. Iung, Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11), 1883–1887 (2002).

[88] X. Dai, Exponential stability of nonautonomous linear differential equations with linear perturbations by Liao methods, *Journal of Differential Equations*, 225, 549-572 (2006).

[89] J.L. Dalecki, M.G. Krein, *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces*, Number 43 in Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1974.

[90] H. D'Angelo, *Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

[91] R. Datko, An extension of a theorem of A. M. Lyapunov to semi-groups of operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 24, 290-295 (1968).

[92] R. Datko, Extending a theorem of A. M. Lyapunov to Hilber space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 32, 610-616 (1970).

[93] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Communications On Pure & Applied Mathematics*, 41, 909–996 (1988).

[94] I. Daubechies, J.C. Lagarias, Two-scale difference equations: I. existence and global regularity of solutions, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 22, 1388-1410 (1991).

[95] I. Daubechies, J.C. Lagarias, Sets of matrices all infinite products of which converge, *Linear Algebra and its Applications*, 161, 227–263, (1992).

[96] I. Daubechies, J.C. Lagarias, Two-scale difference equations. ii. local regularity, infinite products of matrices and fractals. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 23, 1031-1079 (1992).

[97] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.

[98] I. Daubechies, J.C. Lagarias, Corrigendum/addendum to: Sets of matrices all infinite products of which converge, *Linear Algebra and its Applications*, 327, 69–83 (2001).

[99] R.A. DeCarlo, M.S. Branicky, S. Pettersson, B. Lennartson, Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, *Proceedings of the IEEE*, 88(7), 1069–1082 (2000).

[100] V.B. Demidovich, Stability criterion for difference equations, *Differentsial'nye uravneniya*, 5(7), 1247–1255 (1969) (Russian).

[101] G.A. Derfel, N. Dyn, D. Levin, Generalized refinement equations and subdivision processes, *Journal of Approximation Theory*, 80, 272–297 (1995).

[102] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part 1*, Wiley-Interscience, New York, 1966.

[103] L.E. Elsgol'c, *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument*, Nauka, Moscow, 1964 (Russian).

[104] L. Elsner, The Generalized Spectral-Radius Theorem. An Analytic-Geometric Proof, *Linear Algebra and its Applications*, 220, 151-159 (1995).

[105] S.V. Emel'yanov, S.K. Korovin, N.A. Bobylev, Attractors of Control Systems. *Doklady Mathematics,* 61(1), 91-94 (2000).

[106] Encyclopedia of Mathematics, http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Singular_exponents

[107] R. Engelking, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, Polska, 1980.

[108] M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Mathematische Zeitschrift*, 17(1), 228-249 (1923).

[109] K.K. Fitzpatrick, C.S. Modlin, Time-varying MTR codes for high density magnetic recording, *Proceedings IEEE Global Telecommunications Conference*, 3, 1250-1253 (1997).

[110] G. Floquet, Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 12, 47-89 (1883).

[111] G.D. Forney, A.R. Calderbank, Coset codes for partial response channels or cosets codes with spectral nulls, *IEEE Transactions on Information Theory*, 35, 925-943 (1989).

[112] G.D. Forney, Maximum likelihood sequence detection in the presence of intersymbol interference, *IEEE Transactions on Information Theory*, 18, 363-378 (1972).

[113] M. Fu, B.R. Barmish, Adaptive stabilization of linear systems via switching control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31(12), 1097–1103 (1986).

[114] P.A. Fuhrmann, On weak and strong reachability and controllability of infinite dimensional linear systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 9, 77-89 (1972).

[115] P.A. Fuhrmann, On observability and stability in infinite-dimensional linear systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 12, 173-181 (1973).

[116] G. Gripenberg, Computing the joint spectral radius, *Linear Algebra and its Applications*, 234, 43-60 (1996).

[117] N. Guglielmi, F. Wirth, M. Zennaro, Complex Polytope Extremality Results for Families of Matrices, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27(3), 721-743 (2005).

[118] L. Gurvits, Stability of discrete linear inclusion, *Linear Algebra and its Applications*, 231, 47–85 (1995).

[119] I. Gyori, M. Pituk, The Converse of the Theorem on Stability by the First Approximation for Difference Equations, *Nonlinear Analysis*, 47, 4635-4640 (2001).

[120] W. Hahn, *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*, Prentice Hall. Englewood Cliffs. NJ. 1963.

[121] A. Halanay, D. Wexler, *Teoria Calitativă a Sistemelor cu Impulsuri*, Editura Academiei R.S.R., Bucaresti, 1968.

[122] J.K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1977.

[123] K.G. Hare, I.D. Morris, N. Sidorov, J. Theys. An explicit counterexample to the Lagarias–Wang finiteness conjecture, *Advances in Mathematics*, 226, 4667-4701 (2011).

[124] R.Z. Has'minskii, Necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of linear stochastic systems, *Theory of Probability and Its Applications*, 12, 144-147 (1967).

[125] J.P. Heemskerk, K.A.S. Immink, Compact disc system aspects and modulation, *Philips Technical Review*, 40, 157-164 (1982).

[126] J.P. Hespanha, D. Liberzon, A.S. Morse, Overcoming the limitations of adaptive control by means of logic-based switching, *Systems & Control Letters*, 49(1), 49–65 (2003).

[127] D. Hinrichsen, A.J. Prichard, Stability radii of Linear Systems, *Systems & Control Letters*, 7, 1-10 (1986).

[128] D. Hinrichsen, A.J. Prichard, *Mathematical systems theory. I*, Springer-Verlag, Berlin 2005.

[129] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[130] http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

[131] D.A. Huffman, The synthesis of sequential switching circuits, *Journal of The Franklin Institute*, 257, 161-190 and 275-303 (1954).

[132] http://www-03.ibm.com/ibm/history/exhibits/storage/storage_350.html

[133] K.A.S. Immink, H. Ogawa, *Method for encoding binary data*, US patent 4,501,000 (1985).

[134] K.A.S. Immink, EFMPlus: The coding format of the multimedia compact disc, *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 41, 491-497 (1995).

[135] M. Iosifescu, *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1988.

[136] H. Ishida, Hyung-Ju Lee, On asymptotic behavior of solutions to linear differential systems with variable coefficients via characteristic numbers, *Funkcialaj Ekvacioj (Serio Internacia)*, 53, 359-379 (2010).

[137] N.A. Izobov, *Asymptotic Characteristic of Linear and Weakly Nonlinear Systems*, Candidate of Sciences (Phys.-Math.) Dissertation, Minsk, 1967.

[138] N.A. Izobov, The Higher Exponent of a System with Perturbations of Order Higher Than One, *Vestnik Belorusskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, I(3), 6-9 (1969) (Russian).

[139] N.A. Izobov, The Higher Exponent of a Linear System with Exponential Perturbations, *Differential Equations*, 5(7), 1186-1192 (1969).

[140] N.A. Izobov, Exponential Stability by the Linear Approximation, *Differential Equations*, 37(8), 1057–1073 (2001).

[141] N.A. Izobov, *Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova (Introduction to the Theory of Lyapunov Exponents)*, Minsk, *Vestnik Belorusskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2006 (Russian).

[142] N.A. Izobov, *Lyapunov Exponents and Stability*, Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, UK, 2013.

[143] A. Jadbabaie, J. Lin, A.S. Morse, Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6), 988–1001 (2003).

[144] H. de Jong, J.-L. Gouzé, C. Hernandez, M., T. Sari, J. Geiselmann, Qualitative simulation of genetic regulatory networks using piecewise-linear models, *Bulletin of Mathematical Biology*, 66(2), 301–340 (2004).

[145] R.M. Jungers, V. Protasov, V.D. Blondel, Computing the growth of the number of overlap-free words with spectra of matrices, *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, 4957, 84–93 (2008).

[146] R.M. Jungers, V.D. Blondel, On the finiteness property for rational matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 428(10), 2283–2295 (2008).

[147] R.M. Jungers, *The Joint Spectral Radius: Theory and Applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 385, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

[148] R. Jungers, V.Yu. Protasov, Weak stability of switching dynamical systems and fast computation of the p-radius of matrices, *Proceedings of 49th IEEE conference on decision and control (CDC), Atlanta, Georgia, USA*, 7328 - 7333 (2010).

[149] P. Jurgaś, *Zastosowanie uogólnionego promienia spektralnego do analizy stabilności układów liniowych*, rozprawa doktorska, Gliwice 2006.

[150] R.E. Kalman, J.E. Bertram, Control system analysis and design via the 'second method' of Lyapunov, Discrete-time system, *ASME Journal of Basic Engineering*, D 394-400 (1960).

[151] E.W. Kamen, W.L. Green, Asymptotic stability of linear difference equations defined over a commutative Banach algebra, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 75, 584-601 (1980).

[152] R. Karabed, P.H. Siegel, Coding for higher order partial response channels, *Proceedings of the SPIE*, 2605, 92-102 (1995).

[153] R. Karabed, N. Nazari, Analysis of error sequences for PRML and EPRML signaling performed over Lorentzian channel, *Proceedings IEEE Global Telecommunications Conference*, 1, 368-373 (1996).

[154] R. Karabed, P. Siegel, E. Soljanin, Constrained coding for binary channels with high intersymbol interference, *IEEE Transactions on Information Theory*, 45, 1777-1797 (1999).

[155] H. Kobayashi, Application of probabilistic decoding to digital magnetic recording systems, *IBM Journal of Research and Development*, 15, 64-74 (1971).

[156] A.V. Konyukh, Uniform lower exponents of solutions of linear diagonal differential systems, *Vestnik Belorusskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 1(1), 44-48 (1992) (Russian).

[157] V.S. Kozyakin, Algebraic unsolvability of problem of absolute stability of desynchronized systems, *Automation and Remote Control*, 51(6), 754–759 (1990).

[158] V.S. Kozyakin, A dynamical systems construction of a counterexample to the finiteness conjecture, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and ECC 2005*, 2338-2343 (2005).

[159] V.S. Kozyakin, Structure of extremal trajectories of discrete linear systems and the finiteness conjecture, *Automation and Remote Control* 68, 174-209 (2007).

[160] C.S. Kubrusly, *Mean square stability for discrete bounded linear systems in Hilbert space, Report*, Laboratorio de Computacao Cientifica, Rio de Janeiro, 1983.

[161] Y. Kuramoto, Cooperative dynamics of oscillator community, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 79, 223-240 (1984).

[162] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2004.

[163] N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, Counterexample of Perron in the Discrete Case, *Differentsial'nye uravneniya*, 5, 71 (2001).

[164] N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, Stability Criteria by the First Approximation for Discrete Nonlinear Systems, (part I), *Vestnik St.Petersburg University, Mathematics*, 39(2), 55-63 (2005).

[165] J.C. Lagarias, Y. Wang, The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 214, 17–42 (1995).

[166] V. Lakshmikantham, D. Trigiante, *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications*, New York, Academic Press, 1988.

[167] S. Lall, G. Dullerud, An LMI solution to the robust synthesis problem for multi-rate sampled-data systems, *Automatica*, 37(12), 1909–1922 (2001).

[168] J.-W. Lee, G.E. Dullerud, Optimal disturbance attenuation for discrete-time switched and Markovian jump linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(4), 1329–1358 (2006).

[169] J.-W. Lee, G.E. Dullerud, Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems, *Automatica*, 42(2), 205–218 (2006).

[170] T. Li, Die Stabilitätsfrage bei Differenzengleichungen, *Acta Mathematica*, 63, 99-141 (1934).

[171] Z. Li, Y. Soh, C. Wen, *Switched and Impulsive Systems: Analysis, Design and Applications*, Berlin, Germany: Springer, 2005.

[172] D. Liberzon, A.S. Morse, Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5), 59–70 (1999).

[173] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*, Boston, MA, Birkhäuser, 2003.

[174] R. Lima, M. Rahibe, Exact Lyapunov exponent for infinite products of random matrices, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 27, 3427-3437 (1994).

[175] H. Lin, P.J. Antsaklis, Stability and stabilizability of switched linear systems: A short survey of recent results, *Proceedings of the Joint Conference of the 20th IEEE International Symposium on Intelligent Contol/13th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 1, 24–29 (2005).

[176] D.A. Lind, B.H. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[177] V.D. Blondel, M. Karow, V. Protassov, F.R. Wirth, Special Issue on the Joint Spectral Radius: Theory, Methods and Applications, Linear Algebra and its Applications, 428(10), 2259-2260 (2008).

[178] M. Lothaire, *Combinatorics on words*, Encyclopedia of Mathematics, 17, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[179] A.M. Lyapunov, *General problem of stability of motion*, New York, 1966.

[180] N. Lynch, R. Segala, F. Vaandrager, Hybrid I/O automata, Information and Computation, 185(1), 105–157 (2003).

[181] M. Maesumi, Calculating joint spectral radius of matrices and Holder exponent of wavelets, *Approximation Theory IX*, 1988.

[182] E.K. Makarov, I.V. Marchenko, N.V. Semerikova, On an Upper Bound for the Higher Exponent of a Linear Differential System with Integrable Perturbations on the Half-Line, *Differentsial'nye uravneniya*, 41(2), 215–224 (2005).

[183] E.K. Makarov, I.V. Marchenko, On an Algorithm for Constructing an Attainable Upper Boundary for the Higher Exponent of Perturbed Systems, *Differential Equations*, 41(12), 1621-1634 (2005).

[184] I.G. Malkin, *Theory of stability of motion*, Nauka, Moscow, 1966 (Russian).

[185] B.H. Marcus, R.M. Roth, P.H. Siegel, *Lecture notes - Coding for Storage Systems, An Introduction to Coding for Constrained Systems*,

Draft edition, 2001.

[186] M. Mariton, *Jump Linear Systems in Automatic Control*, CRC Press, 1990.

[187] M.H. Shih, König chain for compact matrix sets, *Linear Algebra and its Applications*, 1-3, 330 205–208 (2001).

[188] V.M. Millionshchikov, A structure of fundamental matrices of R-system with almost periodic coefficients, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 171, 288–291 (1966) (Russian).

[189] V.M. Millionshchikov, Statistically correct systems, *Matematicheskii Sbornik*, 75, 140–151 (1968) (Russian).

[190] V.M. Millionshchikov, Stability criterion for a possible spectrum of linear systems of differential equations with recurrent coefficients and a criterion for almost reducibility of systems with almost periodic coefficients, *Matematicheskii Sbornik*, 78, 179–201 (1969) (Russian).

[191] V.M. Millionshchikov, On unstability of singular exponents and nonsymmetry of relation of almost reducibility for linear systems of differential equations, *Differentsial'nye Uravneniya*, 5, 749–750 (1969) (Russian).

[192] V.M. Millionshchikov, Rough properties of linear systems of differential equations, *Differentsial'nye Uravneniya*, 5, 1775–1784 (1969) (Russian).

[193] V.M. Millionshchikov, A proof of attainability of central exponents of linear systems, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 10 99-104 (1969) (Russian).

[194] V.M. Millionshchikov, Structurally stable properties of linear systems of differential equations, *Differentsial'nye Uravneniya*, 5(10), 1794-1903 (1969) (Russian).

[195] B.E. Moision, P. Siegel, E. Soljanin, Distance-enhancing codes for digital recording, *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(1), 69-74 (1998).

[196] B.E. Moision, P. Siegel, E. Soljanin, Error event characterization and coding for the equalized Lorentzian channel, *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory*, 77 (1998).

[197] B.E. Moision, A. Orlitsky, P.H. Siegel, On codes that avoid specified differences, *IEEE Transactions on Information Theory*, 47(1), 433–442 (2001).

[198] A.P. Molchanov, Y.S. Pyatnitskiy, Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory, *Systems & Control Letters*, 13(1), 59–64 (1989).

[199] J. Moon, B. Brickner, Maximum transition run codes for data storage systems, *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(5), 3992-3994 (1996).

[200] E.F. Moore, Gedanken-experiments on sequential machines, *Automata Studies Princeton University Press*, Princeton, New Jersey, 129-153 (1956).

[201] G.E. Moore, *Cramming more components onto integrated circuits*, Electronics Magazine, 2006.

[202] L. Moreau, Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2), 169-182 (2005).

[203] I.D. Morris, Mather sets for sequences of matrices and applications to the study of joint spectral radii, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 107(1), 121-150 (2013).

[204] A.S. Morse, Supervisory control of families of linear set-point controllers-Part 1: Exact matching, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(10), 1413–1431 (1996).

[205] K.S. Narendra, J. Balakrishnan, A common Lyapunov function for stable LTI systems with commuting-matrices, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12), 2469–2471 (1994).

[206] K.S. Narendra, J. Balakrishnan, Adaptive control using multiple models, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(2), 171–187 (1997).

[207] M. Niezabitowski, Zastosowania promienia spektralnego zbioru macierzy, *monografia: Postępy Automatyki i Robotyki, KAiR PAN, rozdz. mon. Modelowanie, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej*, 16(2), 274-287 (2011).

[208] M. Niezabitowski, A. Czornik, A. Nawrat, Charakterystyki liczbowe dyskretnych inkluzji liniowych, *materiały konferencyjne: Czterdziesta Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Szkoleniowa Zastosowań Matematyki 30.08-06.09.2011 r.*, Zakopane-Kościelisko (2011).

[209] M. Niezabitowski, A. Czornik, P. Mokry, On a continuity of characteristic exponents of linear discrete time-varying systems, *Archives of Control Sciences*, 22(LVIII)(1), 17–27 (2012).

[210] M. Niezabitowski, A. Czornik, A. Nawrat, Lyapunov Exponents for Discrete Time-Varying Systems, *Advanced Technologies for Intelligent Systems of National Border Security, Studies in Computational Intelligence*, 440, 29-44 (2012).

[211] M. Niezabitowski, A. Czornik, A. Nawrat, A. Szyda, On the Lyapunov and Bohl exponent of time-varying discrete linear system, *Proceedings of the 20th Mediterranean Conference on Control & Automation (MED), Barcelona, Hiszpania, 03-06.07, 2012*, 194-197 (2012).

[212] M. Niezabitowski, A. Czornik, Wykładniki Lapunowa układów liniowych z nieograniczonymi współczynnikami, *materiały konferencyjne: Czterdziesta Pierwsza Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Szkoleniowa Zastosowań Matematyki, 04.09-11.09.2012,* Zakopane-Kościelisko (2012).

[213] M. Niezabitowski, A. Czornik, O parametrycznej zależności wykładników Lapunowa dyskretnych układów liniowych, *materiały konferencyjne: XVIII Krajowa Konferencja Automatyzacji Procesów Dyskretnych w Zakopanem 19-22.09.2012, Analiza procesów dyskretnych,* I, 41-48 (2012).

[214] M. Niezabitowski, A. Czornik, A. Nawrat, Estimation of solution of discrete linear time-varying system, *Studies in Computational Intelligence, Vision Based Systems for UAV Applications*, 481, 311-326 (2013).

[215] M. Niezabitowski, A. Czornik, Controllability and stability of switched systems, *Proceedings of the 18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje, Polska, 26-29.08.2013*, 16-21 (2013).

[216] M. Niezabitowski, J. Klamka, A. Czornik, Stability and controllability of switched systems, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Technical Sciences*, 61(3), 547-555 (2013).

[217] M. Niezabitowski, A. Czornik, J. Klamka, About the number of the lower Bohl exponents of diagonal discrete linear time-varying systems, *Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Control & Automation June 18-20, 2014, Taichung, Taiwan*, (2013).

[218] A. Czornik, M. Niezabitowski, On the stability of Lyapunov exponents of discrete linear systems, *Proceedings of European Control Conference 2013*, 2210-2213 (2013).

[219] N.S. Niparko, On the Coincidence of Asymptotic Characteristics of a Linear Triangular Differential System and the Diagonal Approximation System, *Differential Equations*, 44, 1412–1418 (2008).

[220] R. Olfati-Saber, J.A. Fax, R.M. Murray, Consensus and cooperation in networked multi-agent systems, *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 215–233 (2007).

[221] R.F. Patterson, Double sequence core theorems, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 22(4), 785-793 (1999).

[222] G.K. Pedersen, *Analysis Now*, 118 of Graduate Texts in Mathematics, New York, Springer-Verlag, 1989.

[223] O. Perron, Über Stabilität und asymptotisches Verhalten des Integrale von Differentialgleichungssystemen, *Mathematische Zeitschrift*, 31, 748-766 (1929).

[224] O. Perron, Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, *Mathematische Zeitschrift*, 32(5), 702-728 (1930).

[225] K.P. Persidskii, On one theorem concerning motion stability, *Izv. Fiz.-Mat. Ob-va pri Kazansk. Un-te*, 6, 76–79 (1933) (Russian).

[226] K.P. Persidskii, To the stability theory of differential equations' system integrals. I., *Izv. Fiz.-Mat. Ob-va pri Kazansk. Un-te*, 8, 47-85 (1937) (Russian).

[227] V.N. Phat, On the stability of time-varying systems, *Optimization*, 45, 237-254 (1999).

[228] A.Y. Pogromsky, H. Nijmeijer, On estimates of the Hausdorff dimension of invariant compact sets, *Nonlinearity*, 13(3), 927-945 (2000).

[229] A. J. Pritchard, J. Zabczyk, Stability and stabilizability of infinite dimensional systems, *SIAM Review*, 30, 25-52 (1981).

[230] V.Y. Protasov, Asymptotic behaviour of the partition function, *Matematicheskii Sbornik*, 191(3), 65-98 (2000).

[231] V.Y. Protasov, Refinement equations with nonnegative coefficients, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 6(1), 55–78 (2000).

[232] V.Y. Protasov, On the Asymptotics of the Binary Partition Function, *Matematicheskie Zametki*, 76(1), 151–156 (2004).

[233] V.Y. Protasov, Fractal curves and wavelets, *Izvestiya: Mathematics*, 70, 123–162 (2006).

[234] K.M. Przyłuski, Infinite dimensional discrete-time equations as models for linear systems with time-delay, *Preprints of the 2nd IFAC Symposium on Distributed Parameter Systems*, Warwick, (1977)

[235] K.M. Przyłuski, The Lyapunov equation and the problem of stability for linear bounded discrete-time systems in Hilbert space, *Applied Mathematics & Optimization*, 6, 97-112 (1980).

[236] K.M. Przyłuski, *Stability of linear infinite dimensional systems revisited*, Memorandum 1982, Eindhoven Universe of Technology, Department of Mathematics, 1982.

[237] K.M. Przyłuski, S. Rolewicz, On stability of linear time-varying infinite-dimensional discrete-time systems, *Systems & Control Letters*, 4(5), 307-315 (1984).

[238] K.M. Przyłuski, On asymptotic stability of linear time-varying infinite-dimensional systems, *Systems & Control Letters*, 6(2), 147-152, (1985).

[239] K.M. Przyłuski, Stability of linear infinite-dimensional systems revisited, *International Journal of Control*, 48(2), 513-523 (1988).

[240] K.M. Przyłuski, Remarks on the stability of linear infinite-dimensional discrete-time systems, *Journal of Differential Equation*s, 72(2), 189-200 (1988).

[241] E.S. Pyatnitskij, New research on absolute stability of automatic control systems. (Survey), *Avtomatika i Telemekhanika*, 6, 5-36 (1968) (Russian).

[242] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[243] W.J. Rugh, *Linear System Theory*, 2nd edition, Prentice Hall, 1995.

[244] G.C. Rota, G. Strang, A note on the joint spectral radius, *Proceedings of the Netherlands Academy*, 22, 379-381 (1960).

[245] S.R. Sanders, G.C. Verghese, Lyapunov-based control for switched power converters, *IEEE Transactions on Power Electronics*, 7(1), 17–24 (1992).

[246] A.V.D. Schaft, H. Schumacher, *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*, London, United Kingdom, Springer, 251, 2000.

[247] http://www.seagate.com/www/en-us/products/internal-storage/barracuda-xt-kit/#tTabContentSpecifications

[248] J. Shen, Compactification of a set of matrices with convergent infinite products, *Linear Algebra and its Applications*, 311(1-3), 177-186 (2000).

[249] P.H. Siegel, J.K. Wolf, Modulation and coding for information storage, *IEEE Communications Magazine*, 29, 68-86 (1991).

[250] D.P. Stanford, Stability for a multi-rate sampled-data system, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 17(3), 390–399 (1979).

[251] S.H. Strogatz, From kuramoto to crawford:exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, *Physica D*, 143, 1-20 (2000).

[252] S.H. Strogatz, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*, Hyperion, 2003.

[253] Z. Sun, S.S. Ge, *Switched Linear Systems: Control and Design*, London, United Kingdom, Springer, 2005.

[254] Z. Sun, S.S. Ge, Analysis and synthesis of switched linear control systems, *Automatica*, 41(2), 181–195 (2005).

[255] D.D. Sworder, R.O. Rogers, An LQ-Solution to a Control Problem Associated with a Solar Thermal Central Receiver, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-28(10), 1983.

[256] K. Tanaka, M. Sugeno, Stability analysis and design of fuzzy control systems, *Fuzzy Sets and Systems*, 45(2), 135–156 (1992).

[257] J. Theys, *Joint spectral radius: Theory and approximations*, PhD thesis, 2005.

[258] J.N. Tsitsiklis, V.D. Blondel, The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard-when not impossible-to compute and to approximate, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 10(1), 31–40 (1997).

[259] T. Vicsek, A. Czirok, E. BenJacob, I. Cohen, O. Schochet, Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles, *Physical Review Letters*, 75, 1226-1229 (1995).

[260] R.E. Vinograd, Necessary and sufficient criteria for the behavior of the solutions of a regular system, *Matematicheskii Sbornik*, 38(1), 23–50 (1956).

[261] R.E. Vinograd, Central characteristic exponent of a system of differential equaiions, *Matematicheskii Sbornik*, 42(2), 207–222 (1957).

[262] R.E. Vinograd, Simultaneous attainability of central Lyapunov and Bohl exponents for ODE linear systems, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 88, 595-601 (1983).

[263] S.X. Wang, A. M. Taratorin, *Magnetic Information Storage Technology*, Academic Press, 1999.

[264] S.M. Williams, R.G. Hoft, Adaptive frequency domain control of PWM switched power line conditioner, *IEEE Transactions on Power Electronics*, 6(4), 665–670 (1991).

[265] F. Wirth, Dynamics of time-varying discrete-time linear systems: spectral theory and the projected system, SIAM Journal on Control and Optimization, 36(2), 447-487 (1998).

[266] F. Wirth, On the calculation of real time-varying stability radii, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8, 1043-1058 (1998).

[267] F. Wirth, On stability of infinite-dimensional discrete inclusions, *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 8(4), 507-510 (1998).

[268] B.D.O. Anderson, A. Ilchmann, F.R. Wirth, Stabilizability of linear time-varying systems, *Systems & Control Letters*, 62(9), 747-755 (2013).

[269] R. Wood, D. Peterson, Viterbi detection of class IV partial response on a magnetic recoding channel, *IEEE Transactions on Communications*, 34, 454-461 (1986).

[270] H. Wu, X. Li, Linear quadratic problem with unbounded control in Hilbert spaces, *Chinese Science Bulletin*, 43(20), 1712-1717 (1998).

[271] H. Yang, B. Sikdar, A protocol for tracking mobile targets using sensor networks, *Proceedings of the First IEEE Workshop on Sensor Network Protocols and Applications*, 71–81 (2003).

[272] J. Zabczyk, Remarks on the control of discrete-time distributed parameter systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 12, 721-735 (1974).

[273] E. Zehavi, *Coding for Magnetic Recording*, Ph. D. Thesis, University of California, San Diego, 1987.

[274] G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, A. N. Michel, Qualitative analysis of discrete-time switched systems, *Proceedings of the American Control Conference*, 3, 1880–1885 (2002).

[275] W. Zhang, M.S. Branicky, S.M. Phillips, Stability of networked control systems, *IEEE Control Systems Magazine*, 21(1), 84–99 (2001).