POLSKA AKADEMIA UMIEJĘTNOŚCI

ANTONI ŁOMNICKI
PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

# RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

## DLA POTRZEB PRZYRODNIKÓW I TECHNIKÓW

TOM III

SZEREGI NIESKOŃCZONE — RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE
GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

KRAKÓW 1936
NAKŁADEM POLSKIEJ AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA – KRAKÓW — ŁÓDŹ — POZNAŃ — WILNO — ZAKOPANE

# Wydawnictwa
# Polskiej Akademii Umiejętności
(Do nabycia)

**Pisma Mariana Smoluchowskiego** wydane z polecenia Polskiej Akademii Umiejętności, Kraków 1924—1928. zł

3 tomy . . . . . 12·—

**Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akad. Umiej.:**

tomy 1—20, 25 . . . . . po 5·—
tomy 30, 31, 32 . . . . . po 5·—
tomy 38, 39, 40 . . . . . po 5·—

Seria *A (nauki matematyczno-fizyczne)*

tomy 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . . . po 5·—
tomy 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, tom 22 *A i B (razem)*[1] . . . . . po 5·—
tomy 23-24 *A i B (razem)*, 25-26 *A i B (razem)* 27 *A i B (razem)* . . . . . po 10·—

[1] Seria B obejmuje nauki przyrodnicze.

**Rozprawy Wydziału matemat.-przyrodn. Polskiej Akademii Umiejętności. Ogólnego zbioru tom 68. Dział A i B.** (Seria III. Tom 28 A i B).

| | | | zł |
|---|---|---|---|
| Dz. A. | Nr 1. | K. Żorawski: O pewnych przekształceniach czterowymiarowej przestrzeni, będących w związku z własnościami funkcyj zmiennych zespolonych . . . . . | 1·— |
| | Nr 2. | J. Morozewicz: O składzie chemicznym nefelinu skałotwórczego . . . . . | 1·— |
| | Nr 3. | Ludomir Sawicki: Przyczynki do znajomości jezior naszych Kresów Wschodnich . . . . . | 3·— |
| Dz. B. | Nr 1. | St. Hitler: Wpływ głodu na regenerację u aksolotla . . | 1·— |
| | Nr 2. | B. Kączkowski: Studia nad wełną owiec ras i odmian miejscowych polskich . . . . . | 2·— |
| | Nr 3. | B. Pawłowski: Elementy geograficzne i pochodzenie flory tatrzańskiego piętra turniowego . . . . . | 2·— |
| | Nr 4. | Wanda Karpowiczówna: Badania nad rozwojem przedrośli oraz pierwszych liści sporofitu paproci krajowych *(Polypodiaceae)* . . . . . | 4·— |
| | Nr 5. | Janina Jentys-Szaferowa: Budowa błon pyłków leszczyny, woskownicy i europejskich brzóz oraz rozpoznawanie ich w stanie kopalnym . . . . . | 4·— |
| | Nr 6. | Tadeusz Marciniak: Uwagi do unerwienia i morfologii krótkiej głowy mięśnia dwugłowego uda u człowieka . | 1·— |
| | Nr 7. | Tadeusz Marciniak: O unerwieniu poprzecznego mięśnia podbródka i o odmianach tego mięśnia u człowieka . . | 1·50 |
| | Nr 8. | Tadeusz Marciniak: O tak zwanym wstępowaniu rdzenia kręgowego u płodów ludzkich . . . . . | 2·— |
| | Nr 9. | St. Śnieszko: Wpływ koncentracji jonów wodorowych w pożywce na wzrost bakteryj brodawkowych z fasoli, koniczu czerwonego, grochu ogrodowego i wyki zimowej . | 1·50 |

Jego Wasz. Prof. Dr. L. Grabowskiemu
z wyrazami głębokiego poważania
autor
Lwów 20/XI 1936 r.

# RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

POLSKA AKADEMIA UMIEJĘTNOŚCI

ANTONI ŁOMNICKI
PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

# RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

## DLA POTRZEB PRZYRODNIKÓW I TECHNIKÓW

TOM III

SZEREGI NIESKOŃCZONE — RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE
GEOMETRIA RÓŻNICZKOWA

KRAKÓW 1936
NAKŁADEM POLSKIEJ AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA – KRAKÓW – ŁÓDŹ – POZNAŃ – WILNO – ZAKOPANE

Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem J. Filipowskiego.

## Przedmowa do tomu III

Oddaję do użytku zainteresowanych trzeci i ostatni tom podręcznika rachunku różniczkowego i całkowego, zawierający trzy działy analizy wyższej, bezpośrednio związane z rachunkiem różniczkowym i całkowym, a mianowicie *szeregi nieskończone*, *równania różniczkowe i geometrię różniczkową*.

Nie chcąc powiększać i tak już dość poważnej objętości podręcznika, ograniczyłem się do tych rozważań i zagadnień, które spotykamy najczęściej w zastosowaniach analizy matematycznej do nauk przyrodniczych i technicznych. Tak np. pominąłem w nauce o równaniach różniczkowych szczegółowe dowody istnienia rozwiązań, dyskusję punktów osobliwych, układy równań różniczkowych i równania różniczkowe cząstkowe. Jeszcze silniej ograniczyłem materiał z geometrii różniczkowej; tak np. pominąłem wszystkie kwestie, wiążące się z rachunkiem wariacyjnym (linie geodezyjne, dokładniejsze omówienie powierzchni minimalnych).

Zamierzałem pierwotnie umieścić w mym podręczniku obszerny rozdział, poświęcony geometrii analitycznej przestrzennej, jako wstęp do geometrii różniczkowej i wprowadzić przy tej sposobności zasadnicze pojęcia rachunku wektorialnego, ułatwiające studium geometrii różniczkowej. Ponieważ jednak wyszedł właśnie z druku zwięzły podręcznik prof. F. Leji, poświęcony specjalnie geometrii analitycznej z uwzględnieniem rachunku wektorialnego (i zawierający „Dodatek o wyznacznikach"), nadający się znakomicie dla absolwentów szkół średnich, przeto odstąpiłem od pierwotnego planu, poprzestając na odesłaniu czytelnika do tego podręcznika. Wobec tego nie umieściłem też przy końcu III-go tomu not o wektorach i wyznacznikach, zapowiedzianych w przedmowie do I-go tomu.

Licząc się z rozmiarem podręcznika, potraktowałem dość dorywczo rozmaite zagadnienia i metody, należące do matematyki stosowanej (jak np. praktyczne rachowanie szeregami nieskończonymi, analizę harmoniczną, graficzne i numeryczne przybliżone rozwiązywanie równań różniczkowych), poprzestając niekiedy na krótkich wzmiankach. Sądzę, że kwestie te należy wyłożyć obszernie w specjalnym podręczniku *matema-*

*tyki stosowanej*, któryby uwzględniał w sposób szczegółowy numeryczne, graficzne i mechaniczne sposoby rozwiązywania zagadnień matematycznych.

Doprowadziwszy zamierzoną pracę do końca, składam gorące podziękowanie Polskiej Akademii Umiejętności, która nie szczędząc poważnych wydatków w czasach niepomyślnej koniunktury, umożliwiła opublikowanie podręcznika o tak pokaźnych rozmiarach, w wytwornej szacie typograficznej, mając na oku przede wszystkim ułatwienie studiów naszej młodzieży akademickiej.

Pan dr doc. S. Kaczmarz i p. dr doc. W. Orlicz pomagali mi wydatnie swymi cennymi uwagami w ostatecznym ustalaniu redakcji rękopisu i przy korektach II-go i III-go tomu, podobnie jak przy redakcji I-go tomu, za co składam im serdeczne podziękowanie.

Rysunki do III-go tomu wykonał p. mgr K. Dyba.

ROZDZIAŁ XXI

# Szeregi nieskończone

## Ustęp I

## SZEREGI LICZBOWE

### § 267. Wstępne wiadomości o szeregach liczbowych i funkcyjnych

Zarówno w elementarnej jak i w wyższej matematyce mamy często do czynienia z szeregami nieskończonymi.

*Szereg* nieskończony otrzymujemy z każdego *ciągu* nieskończonego:

$$(I) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

łącząc jego wyrazy ze sobą znakiem dodawania:

$$(II) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Utwórzmy *ciąg sum częściowych*:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2,$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

Jeżeli ten ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny, tj. posiada skończoną granicę $s$, to szereg nazywamy *zbieżnym*, a liczbę $s$ nazywamy *wartością* lub *sumą* tego szeregu (por. tom I, § 35). Jeżeli ciąg $\{s_n\}$ nie jest zbieżny, tj. nie posiada skończonej granicy, to szereg (II) nazywamy *rozbieżnym*.

Jeżeli wszystkie wyrazy $a_k$ ciągu (I) są liczbami stałymi, to szereg (II) nazywamy szeregiem *liczbowym*, jeżeli zaś są funkcjami jednej lub więcej zmiennych, to szereg nazywamy *szeregiem funkcyjnym*.

Przykłady takich szeregów spotykamy już w matematyce elementarnej. Tak np. z ciągu, zwanego *postępem arytmetycznym* (por. tom I, § 196), otrzymujemy liczbowy szereg, zwany szeregiem arytmetycznym. Biorąc pod uwagę postęp arytmetyczny pierwszego rzędu, tj. taki w któ-

rym wszystkie *różnice* sąsiednich wyrazów mają stałą wartość $d$, otrzymujemy następujący *szereg arytmetyczny pierwszego rzędu*:

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d) + \ldots$$

Suma częściowa $s_n$ takiego szeregu ma wartość:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

W § 196 tomu I podano wzór na $n$-tą sumę częściową także dla szeregu arytmetycznego wyższego rzędu (tom I, wzór 206, str. 612).

Z *postępu geometrycznego*, tj. z takiego ciągu, w którym wszystkie *ilorazy* sąsiednich wyrazów mają stałą wartość $q$, otrzymujemy *szereg geometryczny*:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots$$

Suma częściowa $s_n$ takiego szeregu ma wartość:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Jeżeli tutaj $q$ uważamy za liczbę stałą, to szereg geometryczny jest szeregiem liczbowym, jeżeli zaś $q$ uważamy za zmienną, to mamy do czynienia z szeregiem funkcyjnym.

W analizie wyższej spotykaliśmy również rozmaite szeregi, jak np. następujące szeregi liczbowe, przedstawiające liczby $e$, $\frac{1}{4}\pi$, $\log_e 2$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \ldots$$

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots$$

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Szeregi Taylora i Maclaurin'a są przykładami szeregów funkcyjnych, jak np.:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

lub:

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Z funkcyj trygonometrycznych buduje się szeregi postaci:

$$\tfrac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots +$$

$$+ (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

zwane *szeregami trygonometrycznymi*. Ogólnie z każdego ciągu funkcyj:

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots f_n(x), \ldots$$

można zbudować szereg funkcyjny, łącząc ze sobą wszystkie wyrazy tego ciągu znakiem dodawania:

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Zajmiemy się najpierw szeregami liczbowymi, własności ich bowiem są niezbędne do zrozumienia własności szeregów funkcyjnych.

## § 268. O koniecznych i dostatecznych warunkach zbieżności szeregów liczbowych

A) *Zbieżność ciągu sum częściowych* $\{s_n\}$ *jest warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności szeregu.* Rozstrzygnięcie, czy dany szereg nieskończony jest zbieżny czy też rozbieżny, jest zatem łatwe w tych nielicznych wypadkach, gdy potrafimy znaleźć dość prosty wzór na sumę częściową.

1) Tak np. dla szeregu *arytmetycznego* pierwszego rzędu jest:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \begin{cases} = +\infty & \text{dla } d \geqq 0 \text{ i } a_1 > 0 \\ = -\infty & \text{„ } d < 0 \end{cases}$$

zatem ten szereg jest *rozbieżny*. Podobnie okazuje się, że szeregi arytmetyczne wyższych rzędów są rozbieżne.

2) Dla szeregu *geometrycznego* jest:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Stąd wynika (por. tom. I, § 35), że szereg geometryczny jest zbieżny tylko dla $|q| < 1$ i ma wartość:

$$s = \frac{a_1}{1 - q}$$

3) Zbadajmy zbieżność szeregu:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

zwanego szeregiem Brounckera. Sumę częściową tego szeregu możemy przedstawić w postaci:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Wobec tego:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

Szereg Brounckera jest więc zbieżny i ma wartość 1.

4) W szeregu:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

sumą częściową jest:

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1}$$

Dla parzystego $n = 2m$ jest więc $s_n = 0$, a dla nieparzystego $n = 2m + 1$ jest $s_n = 1$. Ten szereg jest więc rozbieżny.

Te przypadki, w których się tak prosto przedstawia wzór ogólny na sumę częściową, należą do rzadkich wyjątków. Zwykle badanie szeregów tą drogą jest bardzo uciążliwe. Wobec tego uciekamy się do ogólnych twierdzeń o granicach ciągów i stosując je do ciągu $\{s_n\}$, wyprowadzamy rozmaite jego własności, które pozwalają nieraz w bardzo prosty sposób rozstrzygnąć kwestię zbieżności szeregu nieskończonego.

B) Stosując do ciągu $\{s_n\}$ ogólną zasadę zbieżności Cauchy'ego (por. tom I, § 31), otrzymujemy następujące twierdzenie.

*Koniecznym i dostatecznym warunkiem zbieżności szeregu jest, aby do każdej dodatniej liczby $\varepsilon$ można było dobrać taką liczbę $N$, żeby się dla wszystkich $n > N$ i dla wszystkich naturalnych $p$ spełniała nierówność:*

(1) $$\boxed{|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon}$$

czyli:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

*Przykłady.*

1) Zbadajmy przy pomocy tego warunku zbieżność szeregu:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

dla którego nie znamy dogodnego wzoru ogólnego na sumę częściową $s_n$.

Tworzymy:

$$|s_{n+p} - s_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

stąd:

$$|s_{n+p} - s_n| < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

Chcąc uczynić prawą stronę mniejszą od dowolnej dodatniej liczby $\varepsilon$, wystarczy obrać $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$. Wtedy bowiem jest $\frac{1}{n} < \varepsilon$, a więc tem bardziej $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \varepsilon$. Warunek (1) spełnia się zatem dla wszystkich naturalnych $p$, gdy $n > N = \frac{1}{\varepsilon}$, a to dowodzi, że badany szereg jest zbieżny. Jakkolwiek więc nie znaleźliśmy wartości (sumy) tego szeregu, to jednak wiemy, że ta wartość istnieje i jest jakąś skończoną liczbą.

*Uwaga*. Okażemy później (por. § 293. 2), że zachodzi bardzo ciekawy związek między wartością tego szeregu a liczbą $\pi$, a mianowicie, że ten szereg ma wartość $\frac{1}{6}\pi^2$.

2) Zbadajmy szereg:

$$(2) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

zwany szeregiem *harmonicznym*. Obierzmy w nierówności (1) $p = n$ i utwórzmy:

$$|s_{n+n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$$

Ostatni dodajnik prawej strony jest równy $\frac{1}{2n}$, wszystkie zaś inne są większe od $\frac{1}{2n}$, a zatem:

$$|s_{n+n} - s_n| > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Biorąc $\varepsilon = \frac{1}{2}$ widzimy, że nierówność (1) nie spełnia się dla wszystkich $p$, a mianowicie nie spełnia się dla $p = n$, jakiekolwiek obralibyśmy $n$. To dowodzi, że *szereg harmoniczny jest rozbieżny*.

Szeregi, omówione w przykładach 1) i 2), są specjalnymi przypadkami szeregów:

$$(3) \qquad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots$$

zwanych szeregami $\zeta(s)$. Okazaliśmy zatem, że szereg $\zeta(2)$ jest zbieżny a szereg $\zeta(1)$ rozbieżny. Zbieżność tych szeregów dla innych $s$ omówimy później.

Szereg nieskończony:

$$(III) \qquad r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$$

otrzymany z danego szeregu przez opuszczenie $n$ początkowych wyrazów, nazywamy $n$-tą *resztą* szeregu:

$$(II) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

Do każdego szeregu należy więc cały ciąg reszt: $r_1, r_2, \ldots r_n \ldots$

Jeżeli szereg (II) jest zbieżny i ma wartość $s$, to oczywiście:

$$s = s_n + r_n$$

Stąd:

$$r_n = s - s_n$$

a więc:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = s - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

To znaczy: *jeżeli szereg nieskończony jest zbieżny, to ciąg jego reszt dąży do zera.*

Resztę $r_n$ możemy także określić jako błąd, który popełniamy, biorąc zamiast dokładnej wartości szeregu jego $n$-tą sumę częściową. Przy rachunkach liczbowych, opartych na szeregach nieskończonych, badanie reszt ma szczególnie wielką doniosłość. Mieliśmy sposobność przekonać się o tym w rachunku różniczkowym, w rozdziale poświęconym szeregom Taylora i Maclaurina (por. tom I, str. 388 i nast.).

## § 269. O niektórych koniecznych lecz niedostatecznych warunkach zbieżności szeregów

Wiemy, że każdy ciąg zbieżny musi być obustronnie *ograniczony* (por. tom I, § 27, str. 103). *Jeżeli* więc *szereg nieskończony jest zbieżny, to ciąg jego sum częściowych musi być ograniczony*, tj. musi istnieć taka liczba $A$, że:

$$|s_n| < A$$

dla wszystkich $n$.

Ograniczoność sum częściowych jest więc koniecznym warunkiem zbieżności szeregu, lecz bynajmniej nie dostatecznym.

Tak np. w szeregu:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

ciąg sum częściowych jest ograniczony, sumy te mają bowiem wartości 0 lub 1, a więc w każdym razie jest:

$$|s_n| < 2$$

a mimo to, jak wiemy, jest ten szereg rozbieżny. Warunku tego nie można zatem użyć, bez żadnych dodatkowych założeń, do rozstrzygnięcia *zbieżności*; natomiast można go z pożytkiem używać do rozstrzygnięcia *rozbieżności*. Jeżeli się bowiem okaże, że ciąg sum częściowych nie jest ograniczony, to szereg jest napewno rozbieżny.

Drugi taki konieczny lecz niedostateczny warunek zbieżności nieskończonych szeregów otrzymujemy, badając wprost same wyrazy $a_n$ szeregu, a nie jego sumy częściowe.

I tak oczywistym jest, że:

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

Jeżeli szereg jest zbieżny, to zarówno $s_n \to s$ jak i $s_{n-1} \to s$, a więc, stosując tu twierdzenie o różnicy granic, otrzymujemy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = s - s$$

czyli:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

To znaczy: *w każdym szeregu zbieżnym wyraz ogólny dąży do zera.* Twierdzenie to wynika także odrazu z twierdzenia B z poprzedniego paragrafu, jeżeli położymy we wzorze (1) na str. 4 $p = 1$. Jest to zatem warunek konieczny zbieżności, lecz bynajmniej nie dostateczny, jak to wynika z następujących przykładów.

1) Zbadajmy szereg:

$$\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots$$

Wyraz ogólny tego szeregu dąży do zera, albowiem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log 1 = 0$$

Pomimo to ten szereg jest rozbieżny, jak łatwo okazać, obliczając bezpośrednio jego sumę częściową:

$$s_n = \log\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \log\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1)$$

Otóż:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty$$

a więc badany szereg jest rozbieżny.

2) Wiemy, że szereg harmoniczny:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

jest rozbieżny, jakkolwiek w tym szeregu $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Warunek: $a_n \to 0$ nie wystarcza zatem do rozstrzygnięcia zbieżności, natomiast niespełnianie się tego warunku dowodzi rozbieżności szeregu. Tak np. w szeregu geometrycznym o ilorazie $q = 1$, a o wy-

razie początkowym $a_1$ różnym od zera, mamy $a_n = a_1$, a więc także $\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \neq 0$, a zatem szereg geometryczny jest dla $q = +1$ rozbieżny. Dla $q = -1$ wyraz ogólny także nie dąży do zera, lecz oscyluje pomiędzy $-a_1$ a $+a_1$, a więc i w tym przypadku szereg jest rozbieżny. Dla $|q| > 1$ wzrasta $|q^n|$ nieograniczenie, a więc i $|a_n| = |a_1 q^{n-1}|$ wzrasta nieograniczenie, a nie dąży do zera. Szereg geometryczny jest więc rozbieżny dla $|q| \geqq 1$. Natomiast wiemy, że jest on zbieżny dla $|q| < 1$.

*Uwaga.* Dla szeregu geometrycznego warunek konieczny: $a_n \to 0$ jest zarazem warunkiem dostatecznym, albowiem $a_n = a_1 q^{n-1}$ dąży do zera tylko wtedy, gdy $|q| < 1$, a więc gdy szereg geometryczny jest zbieżny. Ponieważ w matematyce elementarnej omawia się zazwyczaj tylko ten jeden rodzaj szeregów zbieżnych, przeto początkujący w studium analizy popełniają często ten błąd, że uważają warunek $a_n \to 0$ za dostateczny także w ogólnym przypadku. Omówione powyżej przykłady 1) i 2) wykazują naocznie błędność tego mniemania.

Wobec niedostateczności warunków $|s_n| < A$ i $a_n \to 0$ postaramy się wyprowadzić rozmaite warunki dostateczne dla zbieżności szeregów. Najprościej przedstawia się to zadanie dla szeregów o wyrazach *dodatnich*, toteż zajmiemy się najpierw wyłącznie takimi szeregami. Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu są dodatnie, to sumy częściowe wzrastają monotonicznie. Wobec tego szereg o dodatnich wyrazach jest albo zbieżny (do skończonej granicy) albo rozbieżny do niewłaściwej granicy $+\infty$.

Warunek $|s_n| < A$, który był dla dowolnych szeregów tylko koniecznym warunkiem zbieżności, jest dla szeregów o wyrazach dodatnich zarazem warunkiem dostatecznym. Wiemy bowiem, że ciąg $\{s_n\}$ monotoniczny i ograniczony jest zbieżny (por. tom I, str. 105). Dowodzi to prawdziwości następującego twierdzenia.

*Jeżeli w szeregu o wyrazach dodatnich ciąg sum częściowych jest ograniczony, to szereg jest zbieżny.*

Jeżeli $A$ jest liczbą, ograniczającą z góry wszystkie sumy częściowe $s_n$, to i granica tych sum, czyli wartość $s$ szeregu, nie przekracza tej liczby.

## § 270. Majoryzowanie szeregów o wyrazach dodatnich

Z twierdzenia, dowiedzionego na końcu poprzedniego paragrafu, wynika bardzo ważna i często używana metoda badania zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich, a mianowicie **porównywanie dwóch szeregów**. *Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu o wyrazach dodatnich* (lub nieujemnych):

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

(o którego zbieżności nic nie wiemy) *nie przekraczają odpowiednich wyrazów szeregu zbieżnego o wyrazach dodatnich* (lub nieujemnych):

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

*to i pierwszy szereg musi być zbieżny.*

*Dowód.* Według założenia zachodzi dla każdego naturalnego $k$ nierówność:

$$a_k \leqq b_k$$

Niechaj $s_k$ oznacza sumę częściową pierwszego a $t_k$ drugiego szeregu. Musi być zatem także:

$$s_k \leqq t_k$$

Nazwijmy literą $t$ wartość (sumę) drugiego szeregu; ponieważ ciąg $\{t_k\}$ jest monotoniczny, przeto musi być $t_k \leqq t$, a więc także

$$s_k \leqq t$$

Ciąg $\{s_k\}$ jest monotoniczny i ograniczony, a więc jest zbieżny, a zatem także pierwszy szereg jest zbieżny, c. b. d. o.

Ten drugi szereg nazywamy *majorantą* pierwszego szeregu; mówimy, że drugi szereg *majoryzuje* pierwszy.

Podobne kryterium porównawcze odnosi się do szeregów rozbieżnych o wyrazach dodatnich a mianowicie, *jeżeli wszystkie wyrazy szeregu:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

(o którego zbieżności nic nie wiemy) *nie są mniejsze od odpowiednich wyrazów szeregu rozbieżnego o wyrazach dodatnich:*

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

*to także i pierwszy szereg jest rozbieżny.*

*Dowód.* Jeżeli szereg o wyrazach dodatnich jest rozbieżny, to ciąg jego sum częściowych $\{t_k\}$ jest nieograniczony, zatem do każdej dowolnie wielkiej liczby $L$ da się znaleźć takie $N$, że dla wszystkich $k > N$ spełnia się nierówność:

$$t_k > L$$

Ponieważ zaś jest $s_k \geqq t_k$, przeto także:

$$s_k > L$$

a to dowodzi, że ciąg $\{s_k\}$ jest nieograniczony a zatem rozbieżny. Wobec tego i szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest rozbieżny, e. b. d. o. Obydwa te twierdzenia można wypowiedzieć w następującej postaci: *szereg o wyra-*

*zach nieujemnych, dający się* ***zmajoryzować*** *szeregiem zbieżnym, jest zbieżny, szereg zaś,* ***majoryzujący*** *rozbieżny szereg o wyrazach nieujemnych, jest rozbieżny.*

Tych twierdzeń używa się często do badania zbieżności, a mianowicie porównuje się badane szeregi z innymi szeregami, których zbieżność lub rozbieżność zbadaliśmy poprzednio na innej drodze, np. z szeregiem geometrycznym, harmonicznym, z szeregiem $\zeta(2)$ lub z szeregiem Brounckera.

Jeszcze ważniejsze jest pośrednie zastosowanie tych twierdzeń do badania zbieżności, a mianowicie wyprowadzimy z takiego porównania szeregów pewne proste, bardzo praktyczne kryteria, które pozwolą rozstrzygnąć kwestię zbieżności w bardzo wielu przypadkach.

*Przykłady na bezpośrednie zastosowanie twierdzeń o majoryzowaniu szeregów o wyrazach dodatnich.*

1. Zbadajmy zbieżność dowolnego rozwinięcia dziesiętnego, ułamkowego, nieskończonego. Takie rozwinięcie jest szeregiem nieskończonym. I tak wiadomo, że jeżeli to rozwinięcie jest periodyczne, to można je pojmować jako szereg geometryczny. Rozwinięcia dziesiętne nieperiodyczne są także szeregami nieskończonymi, lecz już nie geometrycznymi. Tak np. rozwinięcie nieperiodyczne:

$$0{\cdot}3733773337773333\ldots$$

można przedstawić w postaci szeregu nieskończonego:

$$\frac{3}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{7}{10^5}+\ldots$$

Ogólną postacią takiego rozwinięcia jest:

$$0{\cdot}c_1 c_2 c_3 c_4\ldots$$

czyli:

$$\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\frac{c_3}{10^3}+\ldots+\frac{c_k}{10^k}+\ldots$$

Cyfry $c_k$ tego rozwinięcia spełniają warunki: $0 \leqq c_k < 10$.

Porównajmy badany szereg z szeregiem geometrycznym:

$$\frac{10}{10}+\frac{10}{10^2}+\frac{10}{10^3}+\ldots+\frac{10}{10^k}+\ldots$$

o ilorazie $q=\frac{1}{10}$. Ten szereg geometryczny o wyrazach dodatnich *majoryzuje* badany szereg, albowiem zawsze spełnia się nierówność

$$\frac{c_k}{10^k} < \frac{10}{10^k}$$

Szereg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{10}$ jest zbieżny a zatem i badany szereg jest zbieżny do jakiejś skończonej liczby. Stąd wynika, że każde dowolne, nieskończone, rozwinięcie dziesiętne ułamkowe *przedstawia* jakąś *liczbę* (nie może więc wartość tego rozwinięcia ani rosnąć nieograniczenie ani oscylować).

2) Zbadaliśmy szereg $\zeta(s)$ dla $s=1$ i $s=2$. Zbadajmy zbieżność takich szeregów także dla innych wartości $s$.

a) Dla $s>2$ jest $k^s \geqq k^2$ dla wszystkich naturalnych $k$, zatem $\frac{1}{k^s} \leqq \frac{1}{k^2}$. Wyrazy szeregu $\zeta(s)$ są więc wszystkie niewiększe od wyrazów szeregu $\zeta(2)$, który jest — jak wykazaliśmy — zbieżny. A więc i szereg $\zeta(s)$ jest zbieżny dla każdej wartości $s>2$.

b) Dla $s<1$ jest $k^s \leqq k^1$ dla wszystkich naturalnych $k$, a więc $\frac{1}{k^s} \geqq \frac{1}{k}$. Wyrazy szeregu $\zeta(s)$ są zatem wszystkie niemniejsze od wyrazów szeregu harmonicznego, który jest — jak to już poprzednio zbadaliśmy — rozbieżny. A więc i szereg $\zeta(s)$ jest rozbieżny dla wszystkich $s<1$.

c) Nie wiemy jeszcze, jak się zachowuje szereg $\zeta(s)$ dla: $1<s<2$. Tutaj już użyjemy innej metody, a mianowicie wykażemy, że ciąg sum częściowych jest wtedy ograniczony.

Chcąc oszacować sumę częściową $s_n$, obieramy $r$ tak wielkie, aby $2^r>n$. Wtedy:

$$s_n \leqq s_{2^r-1} = 1+\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}\right)+\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}\right)+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{(2^{r-1})^s}+\frac{1}{(2^{r-1}+1)^s}+\ldots+\frac{1}{(2^r-1)^s}\right)$$

Każde wyrażenie w nawiasach powiększy się, jeżeli wszystkie mianowniki zastąpimy mianownikiem pierwszego ułamka z każdego nawiasu, a więc:

$$s_n<1+\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^s}\right)+\left(\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{4^s}\right)+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{(2^{r-1})^s}+\frac{1}{(2^{r-1})^s}+\ldots+\frac{1}{(2^{r-1})^s}\right)$$

czyli:

$$s^n<1+\frac{2}{2^s}+\frac{4}{4^s}+\ldots+\frac{2^{r-1}}{(2^{r-1})^s}=1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{1}{4^{s-1}}+\ldots+\frac{1}{(2^{r-1})^{s-1}}$$

Po prawej stronie mamy sumę częściową szeregu geometrycznego o początkowym wyrazie 1 i o ilorazie $\frac{1}{2^{s-1}}$, mniejszym od 1 (bo $s>1$), a ta

suma nie przekracza wartości całego, nieskończonego geometrycznego szeregu o tym samym ilorazie, a więc:

$$s_n < \frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}} = l$$

Stąd widzimy, że ciąg sum częściowych badanego szeregu jest ograniczony, a więc badany szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny. Zbierając razem wyniki badania szeregów $\zeta(s)$, widzimy, że te szeregi są zbieżne dla $s > 1$, a rozbieżne dla $s \leqq 1$.

## § 271. Kryterium (ilorazowe) d'Alemberta

Opierając się na twierdzeniach o porównywaniu dwóch szeregów o wyrazach *dodatnich*, wyprowadzimy z nich rozmaite dogodne warunki *dostateczne* dla zbieżności i rozbieżności, zwane *kryteriami* zbieżności lub rozbieżności.

Najprostsze z nich, zwane kryterium d'Alemberta, polega na badaniu ilorazów sąsiednich wyrazów, tj. na badaniu ilorazów:

$$a_{n+1} : a_n$$

Jeżeli wyrazy szeregu stale maleją, to jest stale $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. To jednak nie wystarczy do zbieżności, nawet wtedy, gdyby te wyrazy malały monotonicznie do zera, jak to widzieliśmy w szeregu harmonicznym.

Jeżeli jednak wyrazy szeregu maleją tak szybko, że ten iloraz jest stale mniejszy od jakiegoś stałego ułamka właściwego $l$, to zobaczymy, że szereg jest zbieżny. Wystarczy nawet, jeżeli to zachowanie się wyrazów rozpoczyna się dopiero od pewnego wskaźnika $N$, albowiem zachowanie się skończonej liczby wyrazów nie wpływa na zbieżność — podobnie jak w ciągach nieskończonych.

Załóżmy zatem, że dla wszystkich $n > N$ spełnia się nierówność:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq l < 1$$

a więc:

$$a_{N+1} \leqq l a_N$$

$$a_{N+2} \leqq l a_{N+1} \leqq l^2 a_N$$

$$a_{N+3} \leqq l^3 a_N$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Wszystkie zatem wyrazy szeregu: $a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots$ nie przekraczają wyrazów szeregu geometrycznego:

$$a_N l + a_N l^2 + a_N l^3 + \ldots$$

o ilorazie $l$, przyczem $0 < l < 1$. Ponieważ taki szereg geometryczny jest zbieżny, przeto także szereg:

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots$$

jest zbieżny. Dołączając zaś do niego skończoną sumę $N$ początkowych wyrazów, otrzymamy szereg:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$$

który musi być także zbieżny.

Udowodniliśmy zatem prawdziwość następującego twierdzenia, zwanego **kryterium d'Alemberta.**

*Jeżeli w szeregu o wyrazach dodatnich spełnia się, począwszy od jakiegoś wyrazu, stale warunek:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq l < 1 \tag{4}$$

*to ten szereg jest zbieżny.*

Raz jeszcze jednak zaznaczamy wyraźnie, że ten iloraz nie ma przekraczać stałej liczby *l mniejszej od 1*, a nie wystarcza, gdy ten iloraz nie przekracza liczby 1 (jak się to np. dzieje w szeregu harmonicznym).

*Jeżeli iloraz sąsiednich wyrazów spełnia stale, począwszy od jakiegoś $n = N$, warunek:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq 1 \tag{5}$$

*czyli $a_{n+1} \geqq a_n$, to szereg jest* ***rozbieżny*** (albowiem jego wyrazy nie dążą do zera, nie spełnia się więc omówiony w poprzednich paragrafach konieczny warunek zbieżności).

*Przykłady.*

1) Zbadać zbieżność szeregu:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Tutaj:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n!}, \qquad a_n = \frac{1}{(n-1)!}$$

zatem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Począwszy od $n = 2$ jest:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq \frac{1}{2} < 1$$

a więc badany szereg jest zbieżny; ułamkiem, którego nie przekracza iloraz $a_{n+1} : a_n$, jest tu $l = \frac{1}{2}$.

2) Zbadajmy zbieżność szeregu:

$$\frac{c}{1} + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} + \ldots \frac{c^n}{n} + \ldots$$

Tutaj:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c^{n+1}}{n+1} : \frac{c^n}{n} = \frac{n}{n+1} \cdot c < c$$

Jeżeli liczba $c$ jest dodatnim ułamkiem właściwym, tj. jeżeli:

$$0 < c < 1$$

to badany szereg jest zbieżny. Jeżeli $c = 1$, to kryterium d'Alemberta nie pozwala na rozstrzygnięcie, czy szereg jest zbieżny, czy też rozbieżny. Wtedy jednak badany szereg jest szeregiem harmonicznym, a o tym szeregu już wiemy, że jest rozbieżny.

3) Spróbujmy zastosować to kryterium do szeregu $\zeta(2)$, tj. do szeregu:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Tutaj:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$$

Iloraz ten jest wprawdzie mniejszy od 1, ale zbliża się do 1 dowolnie, nie zatrzymując się przed jakimś ułamkiem stałym. Wobec tego kryterium d'Alemberta nie da się do tego szeregu zastosować. Wiemy zaś z § 268, że ten szereg jest zbieżny.

Z ostatnich dwóch przykładów widzimy, że kryterium d'Alemberta nie wyczerpuje wszystkich możliwości, nie rozstrzyga bowiem zbieżności w przypadku, gdy $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, w którym szereg może być rozbieżny (jak np. szereg harmoniczny) lub zbieżny (jak np. szereg $\zeta(2)$).

Ponadto kryterium d'Alemberta nie da się także wtedy zastosować, gdy iloraz $a_{n+1} : a_n$ oscyluje, stając się raz większym a drugi raz mniejszym od 1.

Tak np. szereg:

$$1 + 2q + q^2 + 2q^3 + q^4 + \ldots$$

w którym $\frac{1}{2} < q < 1$, jest niewątpliwie zbieżny, albowiem jego wyrazy nie przekraczają wyrazów zbieżnego szeregu geometrycznego

$$2 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + \ldots$$

Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ przyjmuje w badanym szeregu naprzemian wartości $2q$ i $\frac{q}{2}$; ponieważ $q > \frac{1}{2}$, to $2q > 1$, ponieważ zaś $q < 1$, to $\frac{q}{2} < \frac{1}{2}$. A więc iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest naprzemian większy od 1, lub mniejszy od $\frac{1}{2}$, nie utrzymuje się zatem stale ani poniżej $l = \frac{1}{2}$, ani powyżej 1. Nie możemy zatem do tego szeregu stosować kryterium d'Alemberta.

Szczególnie prostym przypadkiem kryterium d'Alemberta jest przypadek, w którym iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ dąży do jakiejś granicy $g$, tj gdy istnieje:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \tag{6}$$

*Jeżeli granica $g$ ciągu ilorazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest mniejsza od 1, to badany szereg jest zbieżny, jeżeli $g > 1$, to szereg jest rozbieżny, jeżeli zaś $g = 1$, to szereg może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny.*

*Dowód.* Wskutek istnienia granicy $g$ da się dobrać do każdego dodatniego $\varepsilon$ takie $N$, że dla wszystkich $n > N$ spełnia się nierówność:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - g \right| < \varepsilon$$

czyli:

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - g < +\varepsilon$$

Jeżeli $g < 1$, to bierzemy pod uwagę nierówność:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < g + \varepsilon$$

Obierzmy takie $\varepsilon$, aby było $g + \varepsilon < 1$. Oznaczając $g + \varepsilon$ literą $l$, mamy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l < 1$$

Spełnia się zatem warunek pierwotnego, szerszego kryterium, a więc badany szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $g > 1$, to kładąc $g - 1 = \varepsilon > 0$, otrzymujemy z nierówności:

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - g$$

nierówność:

$$g - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

czyli:

$$g - g + 1 < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

a więc:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

To zaś dowodzi rozbieżności danego szeregu.

Najczęściej używa się właśnie tej „limesowej" formy kryterium d'Alemberta, jednakże pierwotna forma jest szersza, obejmuje więcej przypadków, albowiem iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ może się utrzymywać stale pomiędzy 0 a $l < 1$, nie dążąc wcale do granicy, lecz oscylując pomiędzy 0 a $l$: szereg i w tym wypadku jest zbieżny.

*Przykład* na zastosowanie kryterium d'Alemberta, w specjalnej formie „limesowej".

Wiemy, że szereg geometryczny:

$$q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^n + \ldots$$

jest zbieżny, gdy $0 < q < 1$. Utwórzmy nowy szereg, powiększając znacznie jego wyrazy, a mianowicie:

$$q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots + nq^n + \ldots$$

lub jeszcze silniej:

$$q + 2^\alpha q^2 + 3^\alpha q^3 + 4^\alpha q^4 + \ldots + n^\alpha q^n + \ldots$$

gdzie $\alpha$ jest dowolnie wielką stałą liczbą dodatnią.

Zbadajmy, czy ten nowy szereg jest zbieżny. Utwórzmy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \frac{q^{n+1}}{q^n} = \lim_{n\to\infty} q \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = q$$

Stąd widać, że dla $0 < q < 1$ nowy szereg jest zbieżny, a dla $q > 1$ rozbieżny. Dla $q = 1$ szereg jest rozbieżny, albowiem wtedy $a_n$ nie dąży do zera, lecz wzrasta nieograniczenie. Widzimy więc, że ten szereg zachowuje się pod względem zbieżności tak samo jak szereg geometryczny.

## § 272. Kryterium (pierwiastkowe) Cauchy'ego

Ponieważ kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności szeregu we wszystkich przypadkach, przeto staramy się wyprowadzić jakieś inne, ogólniejsze kryteria. Jednym z takich kryteriów jest następujące **kryterium Cauchy'ego.**

*Jeżeli w szeregu o wyrazach dodatnich spełnia się począwszy od jakiegoś wyrazu stale warunek:*

$$\sqrt[n]{a_n} \leqq l < 1 \tag{7}$$

*to szereg jest zbieżny, jeżeli zaś*

$$\sqrt[n]{a_n} \geqq 1 \tag{8}$$

*to szereg jest rozbieżny.*

*Dowód* sprowadza się tu także do porównania z szeregiem geometrycznym. I tak, w myśl założenia pierwszej części twierdzenia, spełniają się począwszy od jakiegoś $N$ nierówności:

$$\begin{aligned} &\sqrt[N]{a_N} \leqq l \quad \text{czyli} \quad a_N \leqq l^N \\ &\sqrt[N+1]{a_{N+1}} \leqq l \quad " \quad a_{N+1} \leqq l^{N+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

A więc wyrazy szeregu: $a_N + a_{N+1} + \ldots$ nie przekraczają wyrazów szeregu geometrycznego: $l^N + l^{N+1} + \ldots$ o ilorazie $l < 1$, a zatem szereg: $a_N + a_{N+1} + \ldots$ jest zbieżny; wobec tego i pierwotny szereg: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} \ldots$ jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\sqrt[n]{a_n} \geqq 1$, to i $a_n \geqq 1$ a więc nie spełnia się konieczny warunek zbieżności: $a_n \to 0$. Wtedy zatem badany szereg jest rozbieżny.

*Przykłady.*

1) Zbadać zbieżność szeregu:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

Tutaj jest: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ począwszy od $n = 3$. Wobec tego badany szereg jest zbieżny.

2) W szeregu:

$$\frac{1}{(\log 2)^2} + \frac{1}{(\log 3)^3} + \ldots + \frac{1}{(\log n)^n} + \ldots$$

jest:

$$a_n = \frac{1}{(\log(n+1))^{n+1}}$$

a więc:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(\log(n+1))^{1+\frac{1}{n}}} < \frac{1}{\log(n+1)} < \tfrac{1}{2}$$

począwszy od $n = 100$, gdy zasadą logarytmów jest 10, a od $n = b^2$, gdy zasadą jest $b$. Wobec tego badany szereg jest zbieżny.

Specjalnym przypadkiem tego kryterium, najczęściej w praktyce używanym, jest przypadek, gdy $\sqrt[n]{a_n}$ dąży do jakiejś granicy $g$. *Jeżeli granica $g$ wyrażenia $\sqrt[n]{a_n}$ jest liczbą mniejszą od 1, to badany szereg jest zbieżny, jeżeli $g > 1$, to szereg jest rozbieżny, a jeżeli $g = 1$, to to kryterium nie rozstrzyga zbieżności,* albowiem istnieją zarówno zbieżne jak i rozbieżne szeregi, dla których ten ostatni warunek się spełnia. Dowód na to, że to kryterium wynika z pierwotnego kryterium, przeprowadza się tak samo, jak w przypadku kryterium d'Alemberta.

A więc w przypadku: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g < 1$ mamy *zbieżność*

" " " " " " $> 1$ " *rozbieżność*

a przypadek " " " " $= 1$ jest *wątpliwy.*

*Przykład.*

Zbieżności szeregu:

$$q + 2q^2 + q^3 + 2q^4 + \ldots \quad \text{(przyczem } \tfrac{1}{2} < q < 1\text{)}$$

nie można było dowieść przy pomocy kryterium d'Alemberta, można to natomiast uczynić przy użyciu kryterium Cauchy'ego. I tak, gdy $n$ jest liczbą nieparzystą, to:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{q^n} = q < 1$$

a gdy $n$ jest liczbą parzystą, to:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2q^n} = q\sqrt[n]{2} = q \cdot 2^{\frac{1}{n}}$$

W obydwu przypadkach jest:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$$

a więc szereg jest zbieżny.

Z tego przykładu widzimy, że istnieją takie szeregi, których zbieżności nie można stwierdzić przy pomocy kryterium d'Alemberta, a można ją stwierdzić przy pomocy kryterium Cauchy'ego.

*Uwaga.* Udowodniono natomiast, że zawsze, gdy kryterium d'Alemberta da się zastosować, to także i kryterium Cauchy'ego pozwala rozstrzygnąć kwestię zbieżności. Wobec tego kryterium Cauchy'ego jest istotnie szersze, rozstrzyga bowiem w większej ilości wypadków aniżeli kryterium d'Alemberta. Nie mogąc tu wnikać w te subtelne dowodzenia, odsyłamy interesującego się takimi kwestiami czytelnika do znakomitego podręcznika K. Knoppa, pt. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (Berlin, Springer 1931, str. 285 i nast.), który traktuje wyczerpująco o tych i podobnych kwestiach.

Kryterium Cauchy'ego mimo to nie wyczerpuje jeszcze wszystkich przypadków. Tak np. nie można przy pomocy tego kryterium stwierdzić zbieżności szeregu $\zeta(2)$. Dla tego bowiem szeregu:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

mamy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{2}{n}}=1 \quad \text{(por. tom I, str. 516).}$$

Ponieważ więc $g=1$, przeto na podstawie kryterium Cauchy'ego nie można orzec niczego o zbieżności tego szeregu.

## § 273. Kryterium Raabe'go

Obmyślono rozmaite inne, jeszcze szersze kryteria, z których podamy tu jeszcze jedno, wystarczające dla badania szeregów, spotykanych w praktyce, a mianowicie **kryterium Raabe'go.**

Widzieliśmy, że nie wystarcza do stwierdzenia zbieżności, jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq 1$, natomiast okażemy, że wystarcza, jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq 1-\frac{k}{n}$, gdy $k>1$.

Dokładniej wypowiada się to kryterium, podane przez Raabe'go, w następujący sposób.

*Jeżeli w szeregu o wyrazach dodatnich spełnia się od pewnego $n=N$ począwszy nierówność:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq 1-\frac{k}{n} \quad \text{przy} \quad k>1 \tag{9}$$

*to szereg jest zbieżny, jeżeli zaś*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqq 1-\frac{1}{n} \tag{10}$$

*to szereg jest rozbieżny.*

*Dowód.* Położmy $k=1+\alpha$, to $\alpha>0$. Dla $n=N$ spełnia się nierówność:

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}\leqq 1-\frac{k}{N}=1-\frac{1}{N}-\frac{\alpha}{N}$$

a stąd:

$$N a_{N+1} \leqq N a_N - a_N - \alpha a_N$$

a więc:

$$(N-1) a_N - N a_{N+1} \geqq \alpha a_N$$

Kładąc $n = N+1,\ N+2, \ldots, n$, otrzymamy:

$$N a_{N+1} - (N+1) a_{N+2} \geqq \alpha a_{N+1}$$
$$(N+1) a_{N+2} - (N+2) a_{N+3} \geqq \alpha a_{N+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-1) a_n - n a_{n+1} \geqq \alpha a_n$$

Dodając obie strony tych wszystkich nierówności, otrzymujemy:

$$(N-1) a_N - n a_{n+1} \geqq \alpha (a_N + a_{N+1} + \ldots + a_n) = \alpha (s_n - s_{N-1})$$

Stąd:

$$s_n - s_{N-1} \leqq \frac{(N-1) a_N}{\alpha} - \frac{n a_{n+1}}{\alpha} < \frac{(N-1) a_N}{\alpha}$$

$$s_n < \frac{(N-1) a_N}{\alpha} + s_{N-1}$$

Prawa strona jest skończoną liczbą stałą $L$, ponieważ $N$ jest stale obrane. Zatem:

$$s_n < L$$

Ciąg sum częściowych jest ograniczony, a więc badany szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny.

Drugą część kryterium, dotyczącą rozbieżności, udowadniamy z drugiej nierówności. Kładąc w niej kolejno $n = N,\ N+1, \ldots$, otrzymujemy:

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} \geqq 1 - \frac{1}{N}$$

a stąd:

$$a_{N+1} \geqq \frac{(N-1) a_N}{N}$$

Nazwijmy stałą liczbę $(N-1) a_N$ literą $l$, to:

$$a_{N+1} \geqq \frac{l}{N}$$

Dla $n = N+1$ otrzymujemy:

$$a_{N+2} \geqq \frac{N a_{N+1}}{N+1}$$

a stąd na podstawie poprzedniej nierówności

$$a_{N+2} \geqq \frac{N \cdot \frac{l}{N}}{N+1} = \frac{l}{N+1}$$

i podobnie:

$$a_{N+3} \geqq \frac{l}{N+2}$$

. . . . . .

Wyrazy badanego szeregu są niemniejsze od wyrazów szeregu:

$$\frac{l}{N} + \frac{l}{N+1} + \frac{l}{N+2} + \cdots$$

Szereg ten zaś jest rozbieżny, albowiem jego suma częściowa:

$$l\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+p}\right)$$

jest wielokrotnością częściowej sumy szeregu rozbieżnego, otrzymanego z szeregu harmonicznego przez opuszczenie skończonej liczby początkowych wyrazów.

W specjalnym przypadku, gdy istnieje *granica* wyrażenia $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)n$, przyjmuje kryterium Raabe'go następującą formę: *jeżeli istnieje granica* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) n = -k$, *to szereg jest zbieżny dla* $k > 1$, *rozbieżny dla* $k < 1$, *a wątpliwym pozostaje przypadek, gdy* $k = 1$.

Dowód, że to ciaśniejsze kryterium wynika z pierwotnego kryterium, przeprowadza się tak samo, jak w przypadku kryterium d'Alemberta.

*Przykłady.*

1) Widzieliśmy, że zbieżności szeregu $\zeta(2)$ nie można rozstrzygnąć ani przy pomocy kryterium d'Alemberta ani przy pomocy kryterium Cauchy'ego. Spróbujmy zastosować kryterium Raabe'go.

Tworzymy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1 - \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$$

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) n = -\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = -\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) n = -2$$

Ponieważ $k = 2$ jest *większe* od 1, przeto badany szereg jest zbieżny.

2) Zbadać zbieżność szeregu:

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}+$$

$$+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

*Uwaga.* Szereg ten otrzymuje się, kładąc $x=1$ w rozwinięciu funkcji arcsin $x$ (por. tom I, str. 419, wzór 147). Można okazać, że ten szereg przedstawia arcsin 1, czyli liczbę $\frac{1}{2}\pi$.

Tutaj jest:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=(2n-1)\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{4n^2-4n+1}{4n^2+2n}$$

Stosując kryterium d'Alemberta (w formie limesowej), otrzymalibyśmy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

a więc zbieżność nie byłaby rozstrzygnięta.

Natomiast stosując kryterium Raabe'go, otrzymujemy:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)n=\frac{4n^2-4n+1-4n^2-2n}{4n^2+2n}\cdot n=\frac{-6n+1}{4n+2}=\frac{-6+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}}$$

a więc:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)n=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}=-k$$

$$k=\frac{3}{2}>1$$

To zaś dowodzi, że ten szereg jest zbieżny.

## § 274. Całkowe kryterium zbieżności

Przy badaniu zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich cenne usługi oddają całki niewłaściwe.

*Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu o wyrazach dodatnich:*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

*są równe wartościom, które przybiera dla* $x=1,2,\ldots,n,\ldots$ *funkcja* $f(x)$, *malejąca monotonicznie, tj. jeżeli:*

$$a_n=f(n)$$

*to szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy całka niewłaściwa:*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

*jest zbieżna,* tj. gdy ta całka istnieje i ma skończoną wartość, np. $A$.

*Dowód.* Dla $x$, zawartych w przedziale $<k-1, k>$, jest $f(x) \geqq f(k) = a_k$, wskutek monotonicznego malenia tej funkcji. Dla $x$ zaś z przedziału $<k, k+1>$ jest $f(x) \leqq f(k) = a_k$, a zatem:

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqq \int_{k-1}^{k} a_k\,dx = a_k$$

i

$$\int_{k}^{k+1} a_k\,dx = a_k \geqq \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx$$

Razem więc jest:

$$\text{(a)} \qquad \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx \leqq a_k \leqq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

Dodajmy do siebie stronami takie nierówności dla $k = 2, 3, \ldots, n$, to otrzymamy:

$$\text{(n)} \qquad \int_{2}^{n+1} f(x)\,dx \leqq a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leqq \int_{1}^{n} f(x)\,dx$$

Stąd wynika, że:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = s_n \leqq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx < a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Jeżeli całka niewłaściwa $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna i ma wartość $A$, to $s_n < a_1 + A$, a to znaczy, że ciąg sum częściowych badanego szeregu o wyrazach dodatnich jest ograniczony. To zaś dowodzi, że ten szereg jest zbieżny. Odwrotnie: jeżeli badany szereg jest zbieżny, to z lewej strony nierówności (n) wnioskujemy, że całka niewłaściwa jest zbieżna. Istotnie wtedy jest:

$$a_1 + \int_{2}^{n+1} f(x)\,dx \leqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n$$

czyli:

$$a_1 + \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx - \int_{1}^{2} f(x)\,dx \leqq s_n$$

a więc:

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqq s_n - a_1 + \int_1^2 f(x)\,dx$$

Ponieważ ciąg $\{s_n\}$ jest ograniczony, przeto i ciąg całek $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ jest ograniczony, a to dowodzi, że całka niewłaściwa $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna. Istotnie więc zbieżność całki niewłaściwej $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ jest koniecznym i dostatecznym warunkiem zbieżności badanego szeregu o wyrazach dodatnich. Twierdzenie to można bardzo jasno przedstawić w postaci geometrycznej.

Niechaj linia krzywa na fig. 1 będzie obrazem funkcji $f(x)$, a wartości jej dla $x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ niechaj będą wyrazami $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ szeregu nieskończonego. Pole zacieniowanej powierzchni, przedłużonej w nieskończoność, przedstawia wartość całki niewłaściwej:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

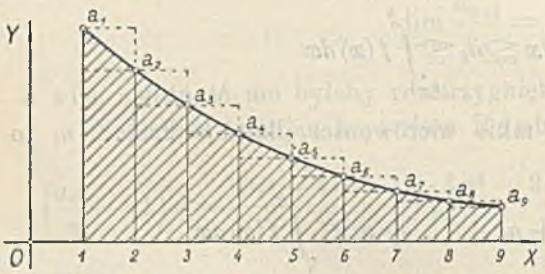


Fig. 1.

Pole schodkowatej figury, obejmującej pole zacieniowane, przedstawia wartość szeregu $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ a pole figury wewnętrznej wartość szeregu $a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

Otóż widocznem jest, że jeżeli pole zacieniowane ma wartość skończoną, to także pole wewnętrznych schodków jest skończone i odwrotnie, jeżeli figura, obejmująca pole zacieniowane, ma pole skończone, to i figura zacieniowana ma pole skończone. To zaś dowodzi prawdziwości dowiedzionego poprzednio twierdzenia.

*Przykład.*

Zbadajmy zbieżność szeregu:

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \ldots + \frac{1}{n\log n} + \ldots$$

Wyrazy tego szeregu są mniejsze od wyrazów szeregu harmonicznego, nie możemy więc z góry orzec, czy ten szereg jest zbieżny, czy też rozbieżny.

Wyrazy te otrzymujemy z funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{x \log x}$$

malejącej monotonicznie, kładąc $x = 2, 3, \ldots, n, \ldots$

Zbadajmy całkę niewłaściwą:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x} = \lim_{n \to \infty} \int_2^n \frac{dx}{x \log x}$$

Używając podstawienia $\log x = t$, otrzymujemy $\frac{dx}{x} = dt$, a więc:

$$\int_2^n \frac{dx}{x \log x} = \int_{\log 2}^{\log n} \frac{dt}{t} = \log t \Big|_{\log 2}^{\log n} = \log(\log n) - \log(\log 2)$$

Stąd wynika:

$$\lim_{n \to \infty} \int_2^n \frac{dx}{x \log x} = +\infty$$

Ponieważ ta całka niewłaściwa jest rozbieżna, przeto w myśl całkowego kryterium także badany szereg jest rozbieżny.

Pozostawiamy czytelnikowi stwierdzenie, że szereg:

$$\frac{1}{2 \log^{\alpha} 2} + \frac{1}{3 \log^{\alpha} 3} + \ldots + \frac{1}{n \log^{\alpha} n} + \ldots$$

jest zbieżny, jeżeli $\alpha > 1$.

Istnieją takie szeregi, dla których żadne z omówionych tutaj kryteriów nie rozstrzyga kwestii zbieżności. Wobec tego zbudowano dalsze kryteria, stosowalne do szerszych klas szeregów. Ponieważ jednak w zastosowaniach praktycznych rzadko spotykamy takie szeregi, dla których nie wystarczyłyby omówione tutaj kryteria, przeto nie będziemy się tu dalszemi kryteriami zajmowali.

## § 275. Szeregi liczbowe o wyrazach o dowolnych znakach. Szeregi bezwarunkowo i warunkowo zbieżne

Jeżeli wyrazy szeregu mają rozmaite znaki, np. są naprzemian dodatnie i ujemne, to do badania ich zbieżności nie można używać bezpośrednio kryteriów, któreśmy poznali dla szeregów o wyrazach dodatnich. Często jednak można sprowadzić badanie zbieżności takich szeregów do badania szeregów o wyrazach dodatnich, opierając się na następującym twierdzeniu.

*Jeżeli szereg, utworzony z bezwzględnych wartości danego szeregu, jest zbieżny, to i pierwotny szereg jest zbieżny.*

*Dowód.* Nie wiemy nic o zbieżności danego szeregu:

$$(a) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Natomiast wiemy, że szereg:

$$(b) \qquad |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$$

jest zbieżny.

Ze zbieżności tego drugiego szeregu wynika, że do każdej dodatniej liczby $\varepsilon$ da się dobrać takie $N$, że dla wszystkich $n > N$ spełnia się nierówność:

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

(por. str. 4).

Okażemy, że przy tym założeniu spełnia się konieczny i dostateczny warunek zbieżności pierwszego szeregu, wyrażony wzorem (1) na str. 4, a mianowicie:

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

A więc istotnie pierwszy szereg jest także zbieżny.

Jeżeli szereg (b), utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów danego szeregu (a), jest zbieżny, to dany szereg (a) nazywamy **bezwzględnie** lub **bezwarunkowo** zbieżnym.

*Przykład.*

Zbadać zbieżność szeregu:

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$$

Tworzymy szereg bezwzględnych wartości:

$$1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots$$

Ten szereg jest niewątpliwie zbieżny, bo składa się z wyrazów dodatnich, a jego sumy częściowe są ograniczone, a mianowicie nie przekraczają liczby $e$. Wobec tego i badany szereg jest zbieżny.

Wśród szeregów, z którymi mamy do czynienia w praktyce, najczęściej występują szeregi bezwarunkowo zbieżne. Do badania zbieżności takich szeregów wystarczają zatem te metody i kryteria, któreśmy omówili przy badaniu szeregów o wyrazach dodatnich. Zdarzają się jednak czasem i takie szeregi, które są zbieżne, jakkolwiek szereg, utworzony z bezwzględnych wartości ich wyrazów, jest rozbieżny. Tak np. okażemy wnet (w § 277), że szereg:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \dots$$

jest zbieżny, jakkolwiek szereg, zbudowany z bezwzględnych wartości jego wyrazów, a mianowicie szereg:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \dots$$

jest rozbieżny, jest to bowiem szereg harmoniczny.

*Szereg, który jest zbieżny, jakkolwiek szereg, zbudowany z bezwzględnych wartości jego wyrazów, jest rozbieżny, nazywamy szeregiem* ***warunkowo*** *zbieżnym.*

## § 276. Twierdzenie Abela o szeregach liczbowych

Do badania zbieżności szeregów warunkowo zbieżnych nie wystarczają kryteria, poznane przy badaniu szeregów o wyrazach dodatnich (wykazałyby one bowiem tylko rozbieżność szeregu bezwzględnych wartości), lecz musimy użyć jakichś innych twierdzeń lub kryteriów.

Takim twierdzeniem, znajdującym najczęstsze zastosowanie przy badaniu szeregów warunkowo zbieżnych, jest następujące twierdzenie Abela.

*Jeżeli ciąg sum częściowych szeregu:*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

*jest ograniczony, a ciąg liczb* $b_1, b_2, b_3, \dots$ *dąży do zera malejąc, to szereg:*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots$$

*jest zbieżny.*

Szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ może być także rozbieżny, jak np. szereg $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$, byleby tylko ciąg $\{s_n\}$ był ograniczony.

*Dowód.* Niechaj $s_1, s_2, \dots, s_n \dots$ oznaczają sumy częściowe pierwszego szeregu. Według założenia istnieje taka stała liczba $K$, że dla każdego $n$ spełnia się nierówność $|s_n| < K$. Zbadajmy sumy częściowe drugiego szeregu, tj.:

$$\sigma_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Możemy je przedstawić w postaci:

$$\sigma_n = s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + (s_3 - s_2) b_3 + \dots + (s_n - s_{n-1}) b_n =$$
$$= s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + s_n b_n$$

Stąd wynika, że:

$$\sigma_n - s_n b_n = s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n)$$

Zbadajmy szereg nieskończony:

$$\text{(I)} \qquad s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + \dots$$

Bezwzględne wartości jego wyrazów są mniejsze od wyrazów szeregu:

$$K(b_1 - b_2) + K(b_2 - b_3) + \ldots + K(b_{n-1} - b_n) + \ldots$$

o wyrazach dodatnich. Ten zaś szereg jest zbieżny, albowiem jego sumy częściowe mają postać:

$$S_n = K(b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \ldots + b_{n-1} - b_n) = K(b_1 - b_n)$$

Stąd:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = K b_1, \quad \text{albowiem} \quad b_n \to 0$$

A więc zbieżny jest także (bezwzględnie) szereg (I), to znaczy, że istnieje:

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma_n - s_n b_n) = \sigma$$

Ponieważ zaś $\lim_{n\to\infty} s_n b_n = 0$ (bo $b_n \to 0$, a ciąg $\{s_n\}$ jest ograniczony), przeto:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$$

a to znaczy, że szereg $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots$ jest zbieżny.

## § 277. Kryterium Leibniza

Zastosujmy twierdzenia Abela do specjalnego szeregu:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$$

Ciąg jego sum częściowych jest ograniczony (nie przekracza np. liczby 2).

Pomnóżmy jego wyrazy przez wyrazy dowolnego ciągu, malejącego monotonicznie do zera:

$$b_1 > b_2 > b_3 > \ldots \quad \text{przyczem} \quad b_n \to 0$$

to otrzymany szereg:

$$b_1 - b_2 + b_3 - \ldots$$

jest zbieżny.

To twierdzenie nazywamy kryterium Leibniza i wypowiadamy je w następującej postaci.

*Jeżeli w szeregu o wyrazach naprzemian dodatnich i ujemnych bezwzględne wartości wyrazów dążą do zera, malejąc monotonicznie, to ten szereg jest zbieżny.*

Zastosowanie tego kryterium jest zwykle bardzo proste, nie wymaga bowiem żadnych osobnych rachunków.

Tak np. szereg:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \ldots$$

ma wyrazy naprzemian dodatnie i ujemne, a ich wartości bezwzględne dążą monotonicznie do zera, a więc ten szereg jest zbieżny. Jest to szereg *warunkowo* zbieżny, ponieważ, jak widzieliśmy, szereg. zbudowany z bezwzględnych wartości jego wyrazów, jest rozbieżny.

Podobnie łatwo stwierdzamy zbieżność szeregu znakozmiennego:

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} \ldots$$

który otrzymaliśmy (w § 141, tom I) jako rozwinięcie liczby $\frac{\pi}{4}$.

Przy pomocy tego kryterium możemy stwierdzić odrazu bez rachunku zbieżność znanych rozwinięć rozmaitych funkcyj, np rozwinięcia funkcji sinus dla każdego dodatniego kąta, funkcji cosinus dla wszystkich kątów, funkcji $\log (1 + x)$ dla dodatnich ułamkowych $x$ itp.

Dla takich szeregów nie tylko łatwo jest zbadać zbieżność, lecz można także w bardzo prosty sposób ocenić resztę czyli błąd $r_n$, który popełniamy, biorąc zamiast prawdziwej jego wartości $s$, wartość $n$-tej sumy częściowej $s_n$, tj. $r_n = s - s_n$.

Niechaj:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

będzie szeregiem, w którym liczby $a_n$ dążą do zera malejąc. Jest on więc zbieżny do jakiejś wartości $s$. Zbadajmy ciąg sum częściowych o wskaźnikach parzystych. Ponieważ:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}$$

a różnica $a_{2n+1} - a_{2n+2}$ ma wartość dodatnią wskutek malenia wyrazów ciągu $\{a_n\}$, przeto:

$$s_{2n+2} > s_{2n}$$

A więc sumy częściowe o wskaźnikach parzystych *rosną* dążąc do granicy $s$, a zatem jest:

$$s_{2n} < s$$

dla każdego parzystego wskaźnika.

Przeciwnie zachowują się sumy o nieparzystych wskaźnikach, a mianowicie:

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

Ponieważ $a_{2n} > a_{2n+1}$, przeto $s_{2n+1} < s_{2n-1}$, a więc sumy częściowe o wskaźnikach nieparzystych *maleją*, dążąc do granicy $s$, a zatem:

$$s_{2n+1} > s$$

Wobec tego zachodzą nierówności:

$$s_{2n} < s < s_{2n+1}$$

a stąd:

$$0 < s - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$$

czyli:

$$0 < r_{2n} < a_{2n+1}$$

a zatem:

$$|r_{2n}| < a_{2n+1}$$

Bezwzględna wartość reszty o parzystym wskaźniku jest więc mniejsza od pierwszego opuszczonego wyrazu. Podobna nierówność zachodzi dla reszt o nieparzystym wskaźniku.

I tak:

$$s_{2n} < s < s_{2n+1} < s_{2n-1}$$

$$s_{2n} - s_{2n-1} < s - s_{2n-1} < 0$$

czyli:

$$-a_{2n} < r_{2n-1} < 0$$

a więc:

$$|r_{2n-1}| < a_{2n}$$

Dla wszystkich więc sum częściowych, zarówno o parzystych jak i nieparzystych wskaźnikach, bezwzględna wartość błędu nie przekracza bezwzględnej wartości pierwszego opuszczonego wyrazu.

Dowiedliśmy zatem prawdziwości następującego twierdzenia: *w szeregu o wyrazach naprzemian dodatnich i ujemnych, których wartości bezwzględne dążą monotonicznie do zera, bezwzględna wartość różnicy pomiędzy prawdziwą wartością szeregu a n-tą sumą częściową jest mniejsza od bezwzględnej wartości (n + 1)-szego wyrazu tego szeregu.*

*Przykłady.* 1) W szeregu:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

suma 10 początkowych wyrazów różni się co do bezwzględnej wartości od prawdziwej wartości całego szeregu o mniej aniżeli $\frac{1}{11}$, albowiem $a_{11} = \frac{1}{11}$.

2) W szeregu:

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + \cdots$$

suma 5 początkowych wyrazów różni się co do bezwzględnej wartości od prawdziwej wartości całego szeregu o mniej niż $\frac{1}{11!} \approx 0{\cdot}000000002$. Zatrzymując więc tylko 5 wyrazów tego szeregu, otrzymujemy 8 cyfr po kropce dziesiętnej dokładnych.

## § 278. Prawo łączności i przemienności w szeregach nieskończonych

W sumie skończonej liczby wyrazów można ujmować w nawiasy dowolne grupy wyrazów i przestawiać je dowolnie. W nieskończonych szeregach nie zawsze jest to dozwolone. Tak np. widzieliśmy (por. tom I, str. 140—141), że ujmując w rozbieżnym szeregu:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$$

wyrazy w rozmaite grupy, otrzymaliśmy z szeregu rozbieżnego rozmaite szeregi zbieżne.

Operacja ta nie jest zatem w tym przypadku dozwolona, czyli prawo łączności nie stosuje się do tego szeregu. Udowodnimy natomiast, że jeżeli w szeregu *zbieżnym* połączymy wyrazy w dowolne grupy, nie zmieniając przytem uporządkowania wyrazów, to otrzymamy nowy szereg, zbieżny do tej samej wartości.

A więc twierdzimy, że *prawo łączności stosuje się do szeregów zbieżnych.*

*Dowód.* W szeregu zbieżnym:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad \text{o wartości } s,$$

połączmy w grupy $r_1$ wyrazów początkowych, $r_2$ wyrazów następnych, $r_3$ wyrazów dalszych itd. Otrzymamy więc:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{r_1}) + (a_{r_1+1} + a_{r_1+2} + \ldots + a_{r_1+r_2}) + \\ + (a_{r_1+r_2+1} + \ldots + a_{r_1+r_2+r_3}) + \ldots$$

lub oznaczając krótko liczby, otrzymane z dodania wyrazów, zawartych w nawiasach, wielkimi literami:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$$

Ciąg sum częściowych $S_1, S_2, S_3, \ldots$ tego nowego szeregu jest ciągiem: $s_{r_1}, s_{r_1+r_2}, s_{r_1+r_2+r_3} \ldots$ wybranym ze zbieżnego ciągu sum częściowych $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_n, \ldots$ pierwotnego szeregu. Ponieważ zaś ciąg nieskończony, wybrany z ciągu zbieżnego do $s$, jest zbieżny do tej samej granicy $s$, przeto i nowy szereg $A_1 + A_2 + \ldots$ jest zbieżny do $s$.

Przy ujmowaniu rozmaitych grup wyrazów szeregu w nawiasy zastrzegliśmy się wyraźnie, że nie zmieniamy przy tym uporządkowania wyrazów. Zbadajmy teraz, jaki wpływ ma przestawianie wyrazów na zbieżność i na wartość szeregu. Weźmy pod uwagę szereg zbieżny:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots = s$$

Przestawmy jego wyrazy tak, aby po każdym dodatnim wyrazie występowały dwa ujemne wyrazy i połączmy je w następujący sposób:

$$(1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10}) - \tfrac{1}{12} + \ldots$$

czyli:

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \dots$$

Wyłączmy $\frac{1}{2}$, to otrzymamy:

$$\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \dots) = \tfrac{1}{2}s$$

Otrzymaliśmy w ten sposób z szeregu zbieżnego o wartości $s$ szereg zbieżny do innej wartości, a mianowicie do $\frac{1}{2}s$. Widzimy stąd, że prawo przemienności może nie być prawdziwe nawet dla zbieżnego szeregu.

Udowodniono, że w szeregach bezwzględnie zbieżnych można wyrazy przestawiać w dowolny sposób: nowy szereg jest zbieżny do tej samej wartości, co szereg pierwotny, a więc *prawo przemienności stosuje się do szeregów bezwzględnie zbieżnych.*

Dla szeregów *warunkowo* zbieżnych twierdzenie to nie jest prawdziwe, jak to widzieliśmy w przykładzie, omówionym powyżej. Okazano, że z każdego szeregu warunkowo zbieżnego można przez odpowiednie przestawianie wyrazów otrzymać szeregi zbieżne do każdej, dowolnie z góry podanej wartości, a nawet szeregi *rozbieżne* (twierdzenie Riemanna).

Tym się też tłumaczy nazwa: *warunkowo* zbieżne szeregi.

## § 279. Dodawanie i mnożenie szeregów nieskończonych

### A. Dodawanie szeregów.

Jeżeli szereg:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

jest zbieżny i ma wartość $a$, a szereg:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

jest zbieżny i ma wartość $b$, to szereg sumowy:

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

jest również zbieżny i ma wartość $a + b$.

*Dowód.* Częściowe sumy szeregu sumowego mają postać.

$$s_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \sigma_n + \tau_n$$

gdzie $\sigma_n$ oznacza sumę częściową pierwszego szeregu a $\tau_n$ drugiego.

Stąd wynika:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n + \lim_{n\to\infty} \tau_n = a + b$$ c. b. d. o.

B. **Mnożenie szeregów**

Iloczyn dwóch skończonych sum:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

tworzymy, dodając do siebie *w dowolnym porządku* wszystkie iloczyny:

$$\begin{array}{l} a_1 b_1,\ a_1 b_2,\ a_1 b_3, \ldots,\ a_1 b_n \\ a_2 b_1,\ a_2 b_2,\ a_2 b_3, \ldots,\ a_2 b_n \\ a_3 b_1,\ a_3 b_2,\ a_3 b_3, \ldots,\ a_3 b_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n b_1,\ a_n b_2,\ a_n b_3, \ldots,\ a_n b_n \end{array}$$

otrzymane przez połączenie każdego dodajnika pierwszej sumy z każdym dodajnikiem drugiej. Dla nieskończonych szeregów podobne określenie iloczynu nie zawsze jest możliwe, a w szczególności z góry można przypuszczać, że dla szeregów warunkowo zbieżnych nie będzie obojętnem, w jakim porządku będziemy dodawali do siebie iloczyny składowe. Okazano jednakże, że dla szeregów *bezwarunkowo zbieżnych* szereg, utworzony z wszystkich iloczynów składowych, dodawanych do siebie w dowolnym porządku, jest zbieżny bezwarunkowo a więc jest zbieżny stale do tej samej liczby bez względu na uporządkowanie wyrazów; jego wartość jest równa iloczynowi wartości obydwu danych szeregów.

Iloczyn dwóch szeregów nieskończonych oznaczamy, używając zwykłego znaku mnożenia:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

*Przykład.*

Wiemy, że szereg:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

jest zbieżny dla $|x| < 1$ i ma wartość $\frac{1}{1-x}$ (jest to bowiem szereg geometryczny). Jest on zbieżny bezwarunkowo, albowiem także szereg:

$$1 + |x| + |x^2| + |x^3| + \ldots$$

jest zbieżny dla tych samych wartości $x$. Wobec tego:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

Iloczyn ten możemy przedstawić zapomocą jednego szeregu nieskończonego, porządkując iloczyny składowe dowolnie i zbierając je w dowolne grupy. Tak np. bardzo dogodne jest uporządkowanie według rosnących

potęg $x$ i połączenie w jeden wyraz tych iloczynów, które mają równe potęgi. W ten sposób otrzymamy rozwinięcie:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Szereg ten jest bezwarunkowo zbieżny dla tych samych wartości $x$, co pierwotny szereg, a więc dla $|x| < 1$.

Okażemy na przykładzie, że powyższe prawo mnożenia nie odnosi się do szeregów warunkowo zbieżnych. I tak szereg:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots = a$$

jest zbieżny (na podstawie kryterium Leibniza), lecz tylko warunkowo, albowiem szereg bezwzględnych wartości jest rozbieżny (jako szereg $\zeta(s)$ dla $s = \frac{1}{2}$). Weźmy pod uwagę drugi taki sam szereg i utwórzmy wszystkie iloczyny składowe:

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}, & -\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}, & \ldots \\
-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}, & \ldots \\
\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}, & -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots &
\end{array}$$

Pozbierajmy je w grupy według ukośnych linij, a mianowicie utwórzmy grupy:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}, \quad u_2 = -\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\right),$$
$$u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\right), \ldots$$

Wartość bezwzględna każdej takiej grupy jest niemniejsza od 1.

Tak np.:

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}} > 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 1$$

Szereg, utworzony z tych grup $u_n$, jest zatem rozbieżny, a więc nie ma wartości $a \cdot a = a^2$.

## § 280. Przekształcanie szeregu na szereg szybciej zbieżny

Zbieżność szeregów jest nieraz tak powolna, że nie nadają się one dobrze do rachunków praktycznych. Przykładami takich szeregów wolno zbieżnych są: szereg Maclaurina na $\log(1+x)$ (por. tom I, str. 406) i szereg Leibniza na $\frac{\pi}{4}$ (tom I, str. 417) a mianowicie:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Przez rozmaite przekształcenia można nieraz zamienić dany szereg na szereg szybciej zbieżny. Jednym z takich przekształceń, które często prowadzi do celu, jest następujące przekształcenie Eulera.

Napiszmy dany szereg zbieżny w postaci:

$$s = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

przy czym liczby $a_k$ mogą być dodatnie lub ujemne. Oznaczając różnicę $a_{k+1} - a_k$ symbolem $\Delta a_k$, możemy napisać ten szereg w dwóch następujących postaciach:

$$s = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \ldots = -\Delta a_1 - \Delta a_3 - \Delta a_5 - \ldots$$

$$s = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots = a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_4 + \ldots$$

Sumując stronami, otrzymujemy:

$$2s = a_1 - \Delta a_1 + \Delta a_2 - \Delta a_3 + \Delta a_4 - \ldots$$

a stąd:

$$s = \frac{a_1}{2} - \frac{1}{2}(\Delta a_1 - \Delta a_2 + \Delta a_3 - \Delta a_4 + \ldots)$$

To samo przekształcenie stosujemy powtórnie do szeregu, znajdującego się w nawiasie i otrzymujemy:

$$s = \frac{a_1}{2} - \frac{\Delta a_1}{4} + \frac{1}{4}(\Delta^2 a_1 - \Delta^2 a_2 + \Delta^2 a_3 - \ldots)$$

gdzie $\Delta^2 a_k = \Delta a_{k+1} - \Delta a_k$. Stosując takie postępowanie $n-1$ razy, otrzymamy:

$$(11) \qquad \boxed{s = \frac{a_1}{2} - \frac{\Delta a_1}{2^2} + \frac{\Delta^2 a_1}{2^3} - \frac{\Delta^3 a_1}{2^4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\Delta^{n-1} a_1}{2^n} + R_n}$$

przy czym reszta $R_n$ ma postać:

$$(11\,a) \qquad R_n = \frac{(-1)^n}{2^n}(\Delta^n a_1 - \Delta^n a_2 + \Delta^n a_3 - \ldots)$$

Przekształcenie to nazywamy przekształceniem Eulera.

Zastosujmy je do szeregu Leibniza na $\frac{1}{4}\pi$. W szeregu tym jest:

$$a_k = \frac{1}{2k-1}$$

$$\Delta a_k = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} = \frac{-2}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$\Delta^2 a_k = -\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} - \frac{-2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2.4}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$$

a ogólnie:

$$\Delta^n a_k = \frac{(-1)^n . 2.4.6 \ldots \cdot 2n}{(2k-1)(2k+1)\ldots\cdot(2k+2n-1)}$$

jak łatwo stwierdzić przy pomocy indukcji zupełnej. Kładąc $k=1$, otrzymujemy następujący szereg przekształcony:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \ldots + \frac{1.2\ldots\cdot(n-1)}{3.5\ldots\cdot(2n-1)}\right) + R_n$$

przy czym:

$$R_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot (-1)^n 2^n n! \left[\frac{1}{1.3.5\ldots(2n+1)} - \frac{1}{3.5\ldots(2n+3)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5.7\ldots(2n+5)} - \ldots\right]$$

Jeżeli w zbieżnym szeregu znakozmiennym, znajdującym się w nawiasie, opuścimy wszystkie wyrazy, następujące po pierwszym, to otrzymamy liczbę większą od wartości tego szeregu, zatem:

$$0 < R_n < \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n+1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2^n}$$

Widzimy więc, że ta reszta szybko dąży do zera z wzrostem $n$.

Tak np. dla $n=10$ jest $|R_n| < \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$.

Sumując więc 10 wyrazów szeregu przekształconego, otrzymujemy 3 cyfry po kropce dokładne, podczas gdy w pierwotnym szeregu trzeba było w tym celu sumować 500 wyrazów (por. tom I, str. 417—418).

Niechaj czytelnik okaże w podobny sposób, że:

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{1.2^1} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \ldots$$

Prócz przekształcenia Eulera istnieją rozmaite inne przekształcenia, których omówienie znajdzie czytelnik w cytowanej już książce K. Knoppa (str. 249 i nast., tudzież str. 269 i nast.) lub w *Analizie* W. Sierpińskiego (tom I, część 2, wyd. 2, str. 48—62, Warszawa 1925).

## § 281. Szeregi o wyrazach zespolonych

Teorię szeregów nieskończonych możemy z łatwością rozszerzyć na szeregi o wyrazach *zespolonych*, tj. na szeregi:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

przy czym:

$$z_k = a_k + i b_k$$

($a_k$, $b_k$ są liczbami rzeczywistymi).

Koniecznym i dostatecznym warunkiem zbieżności takiego szeregu jest zbieżność ciągu sum częściowych $s_n$. Zbieżność zaś ciągu liczb zespolonych określa się przy pomocy tych samych nierówności, których się używa dla ciągów liczb rzeczywistych, a mianowicie ciąg taki nazywa się zbieżnym, jeśli do każdej dodatniej liczby $\varepsilon$ da się dobrać taka liczba rzeczywista $N$, że dla wszystkich wskaźników $n > N$ spełnia się nierówność:

(a) $$|s_n - s| < \varepsilon$$

Pamiętać jednak należy o tym, że bezwzględną wartością liczby zespolonej $\alpha + \beta i$ jest $|\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Przedstawiając liczby $s_n$ i $s$, które są w ogólnym przypadku zespolone, w postaci: $s_n = s_n' + i s_n''$, $s = s' + i s''$ (przy czym liczby $s_n' = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $s_n'' = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $s''$, $s'$ są rzeczywiste), sprowadzamy nierówność (a) do postaci:

$$|s_n' + i s_n'' - (s' + i s'')| = |(s_n' - s') + i(s_n'' - s'')| =$$
$$= \sqrt{(s_n' - s')^2 + (s_n'' - s'')^2} < \varepsilon$$

Jeżeli się zaś spełnia ta nierówność, to musi być zarówno:

$$|s_n' - s'| < \varepsilon \quad \text{jak i} \quad |s_n'' - s''| < \varepsilon$$

a to znaczy, że istnieją granice obydwu ciągów liczb rzeczywistych:

$$s_n' \to s' \quad \text{i} \quad s_n'' \to s''$$

Jeżeli więc szereg o wyrazach zespolonych $z_k = a_k + ib_k$ jest zbieżny, to musi być zbieżny osobno szereg, złożony z części rzeczywistych $a_k$ wyrazów tego szeregu a osobno szereg, złożony z spółczynników $b_k$ jednostki urojonej $i$ w każdym wyrazie.

Okażemy, że także odwrotnie, jeżeli zbieżne są szeregi:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \\ b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \end{cases}$$

to zbieżny jest także szereg o wyrazach zespolonych:

$$\text{(c)} \qquad (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \ldots + (a_n + ib_n) + \ldots$$

*Dowód.* Z założenia wynika, że:

$$s_n' \to s', \quad s_n'' \to s''$$

Do każdej dodatniej liczby $\varepsilon$ da się zatem dobrać takie $N$, że dla wszystkich $n > N$ spełnią się nierówności:

$$|s_n' - s'| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |s_n'' - s''| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

a zatem:

$$(s_n' - s')^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad (s_n'' - s'')^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

a stąd wynika, że:

$$\sqrt{(s_n' - s')^2 + (s_n'' - s'')^2} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

To zaś znaczy, że:

$$|s_n - s| < \varepsilon$$

a więc szereg, złożony z liczb zespolonych: $z_k = a_k + ib_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n\ldots)$ jest wtedy zbieżny. Zbieżność szeregów (b), o wyrazach rzeczywistych, jest więc dostatecznym warunkiem zbieżności szeregu (c). Obydwa dowiedzione twierdzenia dowodzą łącznie, że: *koniecznym i dostatecznym warunkiem zbieżności szeregu o wyrazach zespolonych jest zbieżność dwóch szeregów o wyrazach rzeczywistych, a mianowicie szeregu, złożonego z rzeczywistych części wyrazów danego szeregu i szeregu, złożonego ze spółczynników jednostki urojonej w każdym wyrazie.*

Opierając się na tym twierdzeniu, sprowadza się badanie szeregu o wyrazach zespolonych do badania szeregów o wyrazach rzeczywistych i przenosi się na te szeregi o wyrazach zespolonych całą teorię szeregów o wyrazach rzeczywistych z niewielkimi zmianami.

# Ustęp II.

## SZEREGI FUNKCYJNE

### § 282. Definicja szeregów funkcyjnych i ich zbieżność

Podobnie jak do przedstawienia rozmaitych niewymiernych *liczb* (np. liczb $e$, $\pi$, $\log_e 2$, $\sin 1^0$) używa się nieskończonych *szeregów liczbowych*, tak do przedstawienia zawilszych *funkcyj* używa się nieskończonych *szeregów funkcyjnych.*

Aby zdefiniować szereg funkcyjny, bierzemy pod uwagę najpierw *ciąg* dowolnych funkcyj, np.:

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$$

lub:

$$\sin x, \ \sin 2x, \ \sin 3x, \ldots, \sin nx, \ldots$$

ogólnie:

(I) $$f_1(x), \ f_2(x), \ f_3(x), \ldots f_n(x), \ldots$$

Zakładamy, że te wszystkie funkcje posiadają jakiś wspólny zakres istnienia. Łącząc ze sobą wyrazy tego ciągu znakiem dodawania, otrzymujemy *szereg funkcyjny*:

(II) $$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

Tworzymy ciąg sum częściowych:

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= f_1(x) \\
s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\
s_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Jeżeli ten ciąg sum częściowych jest zbieżny dla jakiejś wartości $x=a$, wziętej z wspólnego zakresu istnienia wszystkich funkcyj ciągu (I) i posiada granicę $s(a)$, to szereg *liczbowy*:

$$f_1(a) + f_2(a) + \ldots + f_n(a) + \ldots$$

jest zbieżny do wartości $s(a)$; mówimy wtedy, że szereg *funkcyjny* (II) jest zbieżny dla wartości $x = a$ i ma dla tego $x$ *wartość* czyli sumę $s(a)$.

Zbiór tych wszystkich wartości zmiennej $x$, wziętych z wspólnego zakresu istnienia wszystkich funkcyj $f_k(x)$, dla których szereg funkcyjny jest zbieżny, nazywamy *zakresem zbieżności* tego *szeregu funkcyjnego.*

Do każdej wartości $x$ z zakresu zbieżności należy jakaś wartość, czyli jakaś suma szeregu funkcyjnego, a więc ta suma jest *funkcją* zmiennej $x$; oznaczmy ją znakiem $f(x)$.

Piszemy więc wtedy:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = f(x)$$

i mówimy, że funkcja $f(x)$ jest *przedstawiona* w zakresie swego istnienia za pomocą tego szeregu funkcyjnego lub że jest *rozwinięta* na szereg funkcyjny.

Przedstawianie funkcyj za pomocą szeregów funkcyjnych ma bardzo rozległe zastosowanie. I tak przedstawianie rozmaitych funkcyj za pomocą szeregów Taylora lub Maclaurina (omówione w tomie I, w rozdziale XII) polega na użyciu szeregów funkcyjnych o ogólnym wyrazie:

$$f_n(x) = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = b_{n-1}(x-a)^{n-1}$$

lub:

$$f_n(x) = \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} = a_{n-1}x^{n-1}$$

przy czym spółczynniki $a_{n-1}$ i $b_{n-1}$ są liczbami stałymi.

Ogólnie szeregi funkcyjne postaci:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

lub:

$$b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + \ldots$$

zwane *szeregami potęgowymi*, bywają bardzo często używane.

W § 267 określiliśmy inne szeregi funkcyjne, zwane szeregami *trygonometrycznymi*. Można zaś budować szeregi funkcyjne także z dowolnych innych funkcyj, jak np. z dowolnych wielomianów, z funkcyj ułamkowych, wykładniczych. Przy przedstawianiu i badaniu nieelementarnych funkcyj grają szeregi funkcyjne szczególnie ważną rolę.

*Przykłady.*

1) W szeregu funkcyjnym:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

mają wszystkie wyrazy jako wspólny *zakres istnienia* cały przedział niewłaściwy od $-\infty$ do $+\infty$. Natomiast *zakresem zbieżności* jest tylko przedział właściwy $(-1, +1)$, albowiem ten szereg jest zbieżny tylko dla $|x| < 1$, jako szereg geometryczny o ilorazie $x$. Wartością czyli sumą tego szeregu jest, jak wiemy, funkcja:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

a więc:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

Równość ta jest prawdziwa tylko dla $|x| < 1$. Dla innych $x$ równość ta nie zachodzi; tak np. dla $x = 2$ otrzymujemy z prawej strony skończoną wartość $-1$, z lewej zaś szereg $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + \ldots$, rozbieżny do niewłaściwej granicy $+\infty$. Podobnie zachowują się szeregi potęgowe (Maclaurina), przedstawiające $\log(1+x)$, $(1+x)^s$, $\arcsin x$ (por. tom I, str. 406, 413—414, 419), tj. posiadają jako zakres zbieżności pewien przedział, otaczający symetrycznie punkt 0.

Istnieją jednak także szeregi funkcyjne, których zakresem zbieżności jest cały przedział niewłaściwy od $-\infty$ do $+\infty$, jak np. szeregi potęgowe, przedstawiające funkcje $\sin x$, $\cos x$, $e^x$, $\sin \mathrm{hyp}\, x$ (por. tom I, str. 399, 400, 395, 398).

2) Szereg funkcyjny (trygonometryczny):

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$$

jest zbieżny dla każdej wartości $x$, albowiem przy każdym stałym $x$ bezwzględne wartości jego wyrazów nie przekraczają wyrazów zbieżnego szeregu:

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

(ponieważ $|\sin nx| \leqq 1$).

Ten szereg funkcyjny przedstawia więc jakąś funkcję, określoną w całym przedziale niewłaściwym $(-\infty, +\infty)$. Jest to jakaś nowa funkcja, dla której (na razie przynajmniej) nie znamy innego, prostszego przedstawienia.

3) Zbadajmy szereg funkcyjny:

$$2\sin x + (2^2 \sin^2 x - 2\sin x) + (2^3 \sin^3 x - 2^2 \sin^2 x) + \\ + \ldots + (2^n \sin^n x - 2^{n-1} \sin^{n-1} x) + \ldots$$

Suma częściowa tego szeregu ma wartość:

$$s_n(x) = 2^n \sin^n x = (2\sin x)^n$$

Wyrażenie to posiada granicę wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$-1 < 2\sin x \leqq 1 \quad \text{czyli} \quad -\tfrac{1}{2} < \sin x \leqq \tfrac{1}{2}$$

Te zaś nierówności spełniają się dla $-\frac{\pi}{6} < x \leqq \frac{\pi}{6}$, dla $\pi - \frac{\pi}{6} \leqq x < \pi + \frac{\pi}{6}$ i periodycznie, dla $x$, otrzymanych przez przesunięcie tych przedziałów o $2n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2 \ldots$), jak na fig. 2. Zakres zbieżności tego szeregu,

a zarazem zakres istnienia funkcji, przedstawionej przez ten szereg, składa się z nieskończenie wielu przedziałów o szerokości $\frac{1}{3}\pi$, pooddzielanych od siebie przedziałami o szerokości $\frac{2}{3}\pi$, w których funkcja nie istnieje.

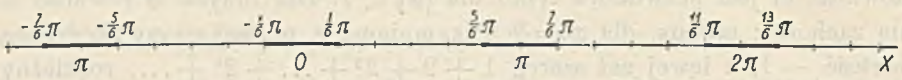


Fig. 2.

4) Przy operowaniu nieskończonymi szeregami funkcyjnymi należy postępować bardzo ostrożnie, a mianowicie nie można na nie rozszerzać bez żadnych zastrzeżeń twierdzeń, odnoszących się do sum skończonej liczby funkcyj. Tak np. suma $n$ funkcyj ciągłych w jakimś punkcie jest także funkcją ciągłą w tym punkcie. Tymczasem zbieżny szereg funkcyjny, którego wyrazami są same funkcje ciągłe, może przedstawiać funkcję nieciągłą.

Tak np. szereg funkcyjny:

$$\text{(a)} \qquad x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots + x(1-x)^n + \ldots$$

zbudowany z samych funkcyj ciągłych, jest zbieżny dla $|1-x| < 1$ (jako szereg geometryczny o ilorazie $q = 1 - x$), a więc dla:

$$-1 < 1 - x < +1$$

czyli dla:

$$0 < x < 2$$

Dla tych więc wartości przedstawia ten szereg funkcję:

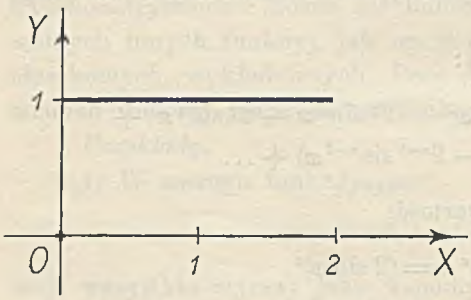


Fig. 3.

$$s(x) = \frac{x}{1-(1-x)} = \frac{x}{x} = 1$$

Także dla $x = 0$ jest dany szereg zbieżny i ma wtedy wartość $s(0) = 0$, albowiem wszystkie jego wyrazy są wtedy zerami.

A więc badany szereg przedstawia funkcję, określoną w całym przedziale $< 0, 2)$ (por. fig. 3). Funkcja ta jest widocznie *nieciągła*, a mianowicie posiada w punkcie $x = 0$ skończony skok od wartości 0 do wartości 1. Ma ona w punkcie $x = 0$ prawostronną granicę 1 (lecz nie przybiera tej granicznej wartości w punkcie $x = 0$).

Gdybyśmy zaś próbowali obliczyć tę prawostronną granicę, stosując do nieskończonego szeregu (a) twierdzenie o sumie granic, to otrzymalibyśmy błędny wynik, a mianowicie:

$$\lim_{0<x\to 0} x + \lim_{0<x\to 0} x(1-x) + \lim_{0<x\to 0} x(1-x)^2 + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0 \neq 1$$

Widzimy stąd, że twierdzenie o sumie granic nie zawsze można stosować do nieskończonego szeregu funkcyjnego.

5) Niechaj czytelnik stwierdzi podobny fakt dla szeregu funkcyjnego:

$$f(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) + \ldots$$

badając jego sumy częściowe.

Z przykładów tych widzimy, że twierdzenia o sumie granic i o sumie funkcyj ciągłych nie zawsze się stosują do szeregów nieskończonych. Podobnie ma się rzecz z twierdzeniami o różniczkowaniu i całkowaniu sumy funkcyj; podamy w dalszym ciągu przykłady na to, że te twierdzenia nie zawsze się stosują do nieskończonych szeregów funkcyjnych.

## § 283. Jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych

Widzieliśmy w poprzednim paragrafie, że *zbieżność* szeregu funkcyjnego nie wystarcza na to, aby można do niego stosować te twierdzenia analizy wyższej, które stosujemy do sumy skończonej liczby funkcyj, a mianowicie twierdzenia o przechodzeniu do granicy z każdym dodajnikiem z osobna, o różniczkowaniu i całkowaniu sum. Zachodzi więc potrzeba wybrania spośród zbieżnych szeregów funkcyjnych takich szeregów, dla których byłoby dozwolone stosowanie owych operacyj analizy wyższej. W tym celu zaostrzono pojęcie zbieżności szeregu funkcyjnego, wprowadzając pojęcie **jednostajnej zbieżności**, która, jak zobaczymy, jest już dostatecznym warunkiem stosowalności owych twierdzeń.

Aby wyjaśnić to dość subtelne pojęcie, oprzemy się na tym, że koniecznym warunkiem zbieżności szeregu jest, by *reszta* tego szeregu dążyła do zera. I tak jeżeli szereg funkcyjny:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = f(x)$$

jest zbieżny dla wartości $x$, zawartych w przedziale $<a, b>$, to reszta tego szeregu, tj.:

$$r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots$$

dąży do zera przy $n \to \infty$ dla każdego $x$ z tego przedziału, tj. spełnia się warunek:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

To znaczy, że przy każdym danym $x = x_1$ z przedziału $\langle a, b \rangle$ da się dobrać do każdej dodatniej liczby $\varepsilon$ takie $N_1$, że dla wszystkich $n > N_1$ spełnia się nierówność $|r_n(x_1)| < \varepsilon$.

Dla $x = x_2$ z przedziału $\langle a, b \rangle$ musi istnieć także takie $N_2$, że dla $n > N_2$ jest $|r_n(x_2)| < \varepsilon$ i tak dla każdego $x$ z przedziału $\langle a, b \rangle$ musi istnieć odpowiednie $N$, inne w ogólności dla każdego $x$. Te $N_1, N_2 \ldots$ mogą wzrastać nieograniczenie, gdy $x_1, x_2, \ldots$ zbliżają się do jakiejś liczby $x = \xi$ z przedziału $\langle a, b \rangle$. Takie więc warunki muszą się spełniać przy zwykłej zbieżności szeregu funkcyjnego w przedziale $\langle a, b \rangle$. Liczba $N$ jest zatem w ogólności zależna nie tylko od $\varepsilon$, lecz także od $x$. *Jeżeli* jednak dla szeregu zbieżnego *istnieje takie* $N$, *wspólne dla wszystkich* $x$ *z przedziału* $\langle a, b \rangle$, *że* $|r_n(x)| < \varepsilon$, *gdy* $n > N$, *to szereg funkcyjny nazywamy* ***jednostajnie*** *zbieżnym w tym przedziale.* Wtedy więc $N$ jest funkcją tylko zmiennej $\varepsilon$, a *nie jest funkcją zmiennej* $x$. Jeżeli zatem chcemy aproksymować *w całym przedziale zbieżności* funkcję $f(x)$, przedstawioną takim jednostajnie zbieżnym szeregiem, za pomocą sum częściowych $s_n(x)$, z błędem: $f(x) - s_n(x) = r_n(x)$, mniejszym co do bezwzględnej wartości od jakiegoś $\varepsilon$, to wystarczy obrać *jedną* taką sumę częściową, wspólną dla całego przedziału, biorąc odpowiednio wielki wskaźnik $n$. Nie trzeba zaś dostosowywać tego wskaźnika do rozmaitych $x$-ów. Wszystkie inne zbieżne szeregi funkcyjne nazywamy *niejednostajnie zbieżnymi.*

Do wyjaśnienia niejednostajnej zbieżności użyjemy przykładu 5 z poprzedniego paragrafu, pozwalającego na prostą interpretację geometryczną.

I tak zbadajmy w szeregu funkcyjnym:

$$f(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) + \ldots$$

złożonym z samych funkcyj ciągłych, ciąg sum częściowych:

$$s_n(x) = x^n$$

Ten ciąg, a zarazem i dany szereg funkcyjny, jest zbieżny w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ i przedstawia w nim funkcję, która przybiera wartość 0 dla $0 \leqq x < 1$, a wartość 1 dla $x = 1$, jest więc nieciągłą. Na fig. 4 przedstawiono wykresy kilku sum częściowych tego szeregu, a mianowicie dla $n = 1, 2, 4, 12, 24$. Widzimy, że linie, przedstawiające te sumy częściowe, aproksymują coraz lepiej z wzrostem $n$ oś $x$-ów w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Jednakże dla dowolnie wielkiego $n$ można znaleźć takie $x$ z tego przedziału (bliskie $x = 1$), że $|r_n(x)|$ nie będzie mniejsza od każdego $\varepsilon$, lecz będzie np. większa od $\frac{1}{2}$. Nie ma więc takiego $N$, wspólnego dla wszystkich $x$ z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, aby dla $n > N$ spełniała się nierówność $|r_n(x)| < \varepsilon$. Szereg nie jest więc jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Natomiast do każdego stałego $x$ z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ można

dobrać takie $N$, że będzie $|r_n(x)| < \varepsilon$ dla wszystkich $n > N$. Szereg jest więc zbieżny, ale *niejednostajnie.*

Do rozstrzygnięcia, czy dany szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny, prowadzi często następujące *kryterium Weierstrassa*, podające dostateczny (lecz nie konieczny) warunek jednostajnej zbieżności.

*Jeżeli szereg, utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów szeregu* ***funkcyjnego***, *da się w jakimś przedziale zmajoryzować zbieżnym sze-*

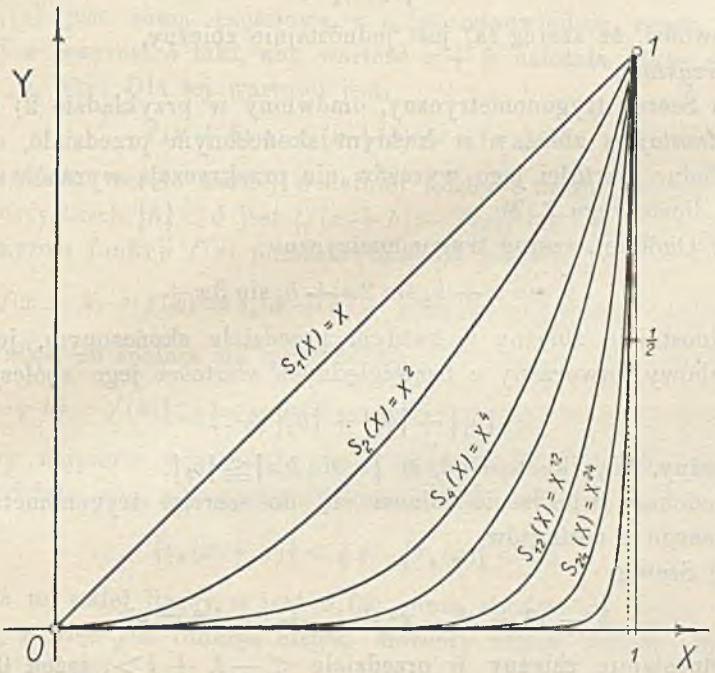


Fig. 4.

*regiem* ***liczbowym***, *to szereg funkcyjny jest* ***jednostajnie*** *zbieżny w tym przedziale.* To znaczy, jeżeli wszystkie wyrazy szeregu funkcyjnego:

(a) $$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

spełniają nierówności:

(b) $$|f_k(x)| \leqq A_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n, \ldots)$$

a szereg liczbowy:

(c) $$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$$

jest zbieżny, to dany szereg funkcyjny jest jednostajnie zbieżny.

*Dowód.* Szereg (a) jest zbieżny dla każdego $x$ z danego przedziału (na podstawie twierdzenia z § 270). Chodzi jeszcze o zbadanie, czy ta zbieżność jest jednostajna. Zbadajmy resztę tego szeregu, tj.:

$$|r_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots| \leqq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \ldots$$

Stąd wynika na podstawie nierówności (b), że:

$$|r_n(x)| \leqq A_{n+1} + A_{n+2} + \ldots = R_n$$

Ponieważ szereg liczbowy (c) jest zbieżny, przeto jego reszta $R_n$ dąży do zera. Istnieje więc przy każdym dodatnim $\varepsilon$ takie $N$, *niezależne oczywiście od* $x$, a zależne tylko od $\varepsilon$, że dla wszystkich $n > N$ jest $R_n < \varepsilon$. Dla tych wszystkich $n$ będzie więc też:

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

a to dowodzi, że szereg (a) jest jednostajnie zbieżny.

*Przykłady.*

1) Szereg trygonometryczny, omówiony w przykładzie 2) w § 282, jest *jednostajnie* zbieżny w każdym skończonym przedziale, albowiem bezwzględne wartości jego wyrazów nie przekraczają wyrazów zbieżnego szeregu liczbowego $\zeta$ (2).

2) Ogólniej, szereg trygonometryczny:

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots$$

jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale skończonym, jeżeli szereg liczbowy, utworzony z bezwzględnych wartości jego spółczynników:

$$|b_1| + |b_2| + |b_3| + \ldots$$

jest zbieżny. Wynika to stąd, że $|b_k \sin kx| \leqq |b_k|$.

Podobne twierdzenie odnosi się do szeregu trygonometrycznego, zbudowanego z cosinusów.

3) Szereg:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

jest jednostajnie zbieżny w przedziale $< -l, +l >$, jeżeli $0 < l < 1$. Wynika to stąd, że wtedy $|x| < l < 1$, a więc:

$$|(-1)^n x^{2n}| < l^{2n}$$

a szereg liczbowy:

$$1 + l^2 + l^4 + l^6 + \ldots + l^{2n} + \ldots$$

jest zbieżny, gdy $0 < l < 1$, jako szereg geometryczny.

## § 284. Ciągłość funkcyj, przedstawionych przez jednostajnie zbieżne szeregi

Widzieliśmy, że zbieżny szereg funkcyjny, złożony z funkcyj ciągłych, może przedstawiać funkcję nieciągłą. Okażemy jednak, że *jeżeli szereg funkcyjny, złożony z funkcyj ciągłych, jest w jakimś przedziale* $< a, b >$ *jednostajnie zbieżny, to przedstawia funkcję ciągłą w tym przedziale.*

*Dowód.*

Niechaj szereg funkcyjny:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = f(x)$$

będzie jednostajnie zbieżny w przedziale $<a, b>$. Obierzmy jakiekolwiek $x$ wewnątrz tego przedziału. Szereg nasz możemy przedstawić w postaci:

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

gdzie $s_n(x)$ jest sumą częściową, a $r_n(x)$ odpowiednią resztą. Dajmy zmiennej $x$ przyrost $h$ taki, aby wartość $x+h$ należała także do przedziału $<a, b>$. Dla tej wartości jest:

$$f(x+h) = s_n(x+h) + r_n(x+h)$$

Chcemy okazać, że do każdej dodatniej liczby $\varepsilon$ można dobrać takie $\delta$, że dla wszystkich $|h| < \delta$ jest $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$.

Przyrost funkcji $f(x)$ przedstawiamy w postaci:

$$f(x+h) - f(x) = s_n(x+h) - s_n(x) + r_n(x+h) - r_n(x)$$

Stąd wynika, że spełnia się nierówność:

$$|f(x+h) - f(x)| \leqq |s_n(x+h) - s_n(x)| + |r_n(x+h)| + |r_n(x)|$$

Obierzmy najpierw tak wielką stałą liczbę $n$, aby się dla wszystkich $x$ z przedziału $<a, b>$ spełniały nierówności:

$$|r_n(x+h)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad |r_n(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

Dla tej stałej liczby $n$ jest $s_n(x)$ sumą skończonej liczby funkcyj ciągłych, a więc jest funkcją ciągłą. Możemy zatem znaleźć takie $\delta$, że dla $|h| < \delta$ jest:

$$|s_n(x+h) - s_n(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

Wobec tego jest:

$$|f(x+h) - f(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \quad \text{dla} \quad |h| < \delta$$

a to dowodzi ciągłości funkcji $f(x)$.

Jednostajna zbieżność szeregu funkcyjnego, złożonego z funkcyj ciągłych, jest więc dostatecznym warunkiem na to, by funkcja, przedstawiona przez ten szereg, była funkcją ciągłą. Szeregi, omówione w przykładach 4, 5 w § 282, są więc widocznie niejednostajnie zbieżne, albowiem przedstawiają funkcje nieciągłe.

*Uwaga.* Jednostajna zbieżność szeregu funkcyjnego *nie jest* jednak *koniecznym warunkiem* ciągłości funkcji, przedstawionej przez ten szereg, to znaczy, że także niektóre niejednostajnie zbieżne szeregi funkcyjne przedstawiają funkcje ciągłe. Wystarczy zatem nieco obszerniejszy warunek, a mianowicie okazano, że wystarczy t. zw. *quasi-jednostajna* zbieżność. (Zob. W. Sierpiński, *Analiza*, Tom I, Cz. 2. Wyd. 2. str. 198 i nast.).

## § 285. Całkowanie szeregów funkcyjnych

Jeżeli jakaś funkcja jest przedstawiona w przedziale $<a, b>$ szeregiem funkcyjnym jednostajnie zbieżnym, złożonym z funkcyj ciągłych, to ta funkcja jest ciągła, a zatem istnieje całka z tej funkcji od $x = a$ do dowolnej wartości $x$ z danego przedziału. Otóż udowodnimy twierdzenie, które pozwoli obliczyć tę całkę przez całkowanie wszystkich wyrazów danego szeregu w tych samych granicach, tj. od $a$ do $x$. Ściślej mówiąc okażemy, że *szereg funkcyjny, złożony z całek wyrazów szeregu jednostajnie zbieżnego, jest także jednostajnie zbieżny, a funkcja, przedstawiona przez ten nowy szereg, jest całką funkcji, przedstawionej przez dany szereg.*

Jeżeli więc szereg złożony z funkcyj ciągłych:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = f(x)$$

jest jednostajnie zbieżny w $<a, b>$, to dla $a < x < b$ jest:

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f_1(x)\,dx + \int_a^x f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x f_n(x)\,dx + \ldots$$

a szereg po prawej stronie jest także jednostajnie zbieżny.

Mówimy krótko, że *jednostajnie zbieżny szereg można całkować wyraz po wyrazie.*

*Dowód.*

Przedstawmy $f(x)$ w postaci:

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

Obieramy takie $N$, aby się dla $n > N$ i dla wszystkich $x$ z przedziału $<a, b>$ spełniała nierówność:

(a) $$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

co jest możliwe wskutek jednostajnej zbieżności danego szeregu. Ponieważ $f(x)$ jest funkcją ciągłą, jako suma szeregu jednostajnie zbieżnego, a $s_n(x)$ jako suma skończonej liczby funkcyj ciągłych, przeto także $r_n(x) = f(x) - s_n(x)$ jest funkcją ciągłą. Istnieją więc całki z tych trzech funkcyj i mamy:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x s_n(x)\,dx + \int_a^x r_n(x)\,dx$$

Stąd:

$$\int_a^x f(x)\,dx - \int_a^x s_n(x)\,dx = \int_a^x r_n(x)\,dx$$

Z nierówności (a) wynika, że dla $n > N$ jest:

$$\left|\int_a^x r_n(x)\,dx\right| < \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) < \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon$$

Zatem dla $n > N$ jest:

$$\text{(b)} \qquad \left|\int_a^x f(x)\,dx - \int_a^x s_n(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

a to dowodzi, że:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^x s_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

przy czym $S_n(x)$ oznacza $n$-tą sumę częściową szeregu:

$$\text{(c)} \qquad \int_a^x f_1(x)\,dx + \int_a^x f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x f_n(x)\,dx + \ldots$$

Ponieważ ciąg $S_n(x)$ jest zbieżny do $F(x)$, przeto ten nowy szereg funkcyjny jest zbieżny i równy całce z funkcji $f(x)$, przedstawionej za pomocą danego szeregu. Pozostaje jeszcze tylko do okazania, że ten nowy szereg jest także jednostajnie zbieżny. Otóż to wynika odrazu z nierówności (b). Jeżeli oznaczymy resztę szeregu (c) literą $R_n(x)$, to nierówność (b) możemy napisać w postaci:

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

dla wszystkich $n > N$, przy czym $N$ było zależne tylko od $\varepsilon$ a niezależne od $x$.

Szeregi jednostajnie zbieżne można więc zawsze całkować wyraz po wyrazie; istnieją jednak także szeregi niejednostajnie zbieżne, dla których takie całkowanie jest dozwolone. Jednostajna zbieżność szeregu funkcyjnego jest tu zatem tylko warunkiem dostatecznym lecz bynajmniej nie koniecznym. Twierdzenie o całkowaniu szeregów funkcyjnych ma bardzo ważne zastosowanie w rachunku całkowym: polega na nim *całkowanie przez szeregi.*

*Przykłady.*

1) Ze znanego rozwinięcia funkcji:

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$$

według wzoru dwumiennego (tom 1, str. 411) otrzymamy przez całkowanie rozwinięcie funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$. I tak ten szereg (geometryczny) jest

jednostajnie zbieżny dla $|x| < l < 1$, jak to stwierdziliśmy w § 283 w przykładzie 3.

Wobec tego możemy dla tych $x$ zastosować twierdzenie o całkowaniu wyraz po wyrazie i otrzymamy:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \int_0^x x^6 dx + \dots$$

czyli:

$$\operatorname{arctg} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \dots$$

Wzoru tego dowiedliśmy tu dla przedziału $<-l, l>$, przy czym $0<l<1$.

To przedstawienie funkcji $\operatorname{arctg} x$ szeregiem jednostajnie zbieżnym otrzymaliśmy w rachunku różniczkowym inną, dość zawiłą drogą (por. tom I, § 141).

Podobną drogą można otrzymać szybko rozwinięcie funkcji $\log(1+x)$ z szeregu funkcyjnego (Maclaurina) funkcji: $\frac{1}{1+x}$, a funkcji $\arcsin x$ z szeregu funkcyjnego funkcji $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Całkowanie przez szeregi znajduje najważniejsze zastosowanie w tych przypadkach, w których nie potrafimy scałkować jakiejś funkcji elementarnymi metodami. Tak np. chcąc obliczyć całkę Laplace'a:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

rozwijamy funkcję podcałkową na szereg Maclaurina:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

zbieżny jednostajnie w każdym skończonym przedziale, jak się o tem przekonamy w § 288.

Wobec tego:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right)$$

Szereg ten jest, w myśl twierdzenia o całkowaniu szeregów, także jednostajnie zbieżny w każdym skończonym przedziale. Obliczmy wartość tej funkcji np. dla $x = 1$, to otrzymamy:

$$\Phi(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0 e^{-x} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \dots \right)$$

Szereg ten jest bardzo szybko zbieżny. Tak np. obliczając jego sumę częściową złożoną z 7 wyrazów, otrzymujemy:

$$\Phi(1) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360}\right) \approx 0{\cdot}84271$$

z błędem, nie przekraczającym co do bezwzględnej wartości pierwszego opuszczonego wyrazu (jest to bowiem zbieżny szereg znakozmienny), tj. $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{15 \cdot 7!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{75600} < 0{\cdot}00002$. Dla tej całki, mającej wielkie znaczenie w rachunku prawdopodobieństwa, sporządzono obszerne tablice liczbowe. Dla $x = 1$ znajdujemy w tych tablicach $\Phi(1) = 0{\cdot}8427008$.

3) Obliczyć obwód elipsy o półosiach $a = 5$, $b = 4$.

Oznaczając $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = k$, otrzymaliśmy na długość łuku elipsy (tom II, str. 139) wzór:

$$s = a \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt$$

Stąd dla całego obwodu otrzymamy wzór:

$$s = 4a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt$$

przy czym $a = 5$, $k = \frac{3}{5}$, a więc $|k| < 1$.

Tę nieelementarną całkę (eliptyczną) obliczamy, rozwijając funkcję podcałkową na szereg, a mianowicie przy pomocy wzoru dwumiennego otrzymujemy:

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} = (1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1 - \binom{\frac{1}{2}}{1} k^2 \sin^2 t + \\ + \binom{\frac{1}{2}}{2} k^4 \sin^4 t - \binom{\frac{1}{2}}{3} k^6 \sin^6 t + \ldots$$

Szereg ten jest zbieżny dla $|k^2 \sin^2 t| < 1$. Ponieważ zaś $|k^2 \sin^2 t| < k^2$, przeto bezwzględne wartości wyrazów tego szeregu funkcyjnego nie przekraczają wyrazów następującego szeregu liczbowego o wyrazach dodatnich:

$$1 + \tfrac{1}{2} k^2 - \binom{\frac{1}{2}}{2} k^4 + \binom{\frac{1}{2}}{3} k^6 - \binom{\frac{1}{2}}{4} k^8 + \ldots = \\ = 1 + \tfrac{1}{2} k^2 + \frac{1}{2.4} k^4 + \frac{1.3}{2.4.6} k^6 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} k^8 + \ldots$$

ten zaś szereg liczbowy jest *zbieżny* dla $|k| < 1$, jak się łatwo przekonać np. przy pomocy kryterium D'Alemberta. Na podstawie kryterium Weierstrassa jest więc nasz szereg funkcyjny *jednostajnie* zbieżny.

Wobec tego całkę, o którą nam chodzi, możemy obliczyć, całkując ten szereg funkcyjny wyraz po wyrazie. Otrzymamy w ten sposób:

$$s = 4a\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dt - \binom{\frac{1}{2}}{1} k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 t\,dt + \binom{\frac{1}{2}}{2} k^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 t\,dt - \binom{\frac{1}{2}}{3} k^6 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^6 t\,dt + \ldots\right]$$

czyli:

$$s = 4a\left(\frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} k^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 t\,dt - \frac{1}{2.4} k^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 t\,dt - \frac{1.3}{2.4.6} k^6 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^6 t\,dt - \ldots\right)$$

Występujące tu całki oznaczone obliczaliśmy już (por. tom II, § 221, str. 93) i otrzymaliśmy ogólnie:

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Wobec tego:

$$s = 4a \cdot \frac{\pi}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2} k^2 \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2.4} k^4 \cdot \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3}{2.4.6} k^6 \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} - \right.$$
$$\left. - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} k^8 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \ldots\right)$$

(12)
$$s = 2a\pi\left(1 - (\tfrac{1}{2})^2 k^2 - \tfrac{1}{3} \cdot \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 - \tfrac{1}{5} \cdot \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 - \right.$$
$$\left. - \ldots - \frac{1}{2n-1} \cdot \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 k^{2n} - \ldots\right)$$

Jest to ogólny wzór na obwód elipsy.

Dla $a = 5$ i $b = 4$ otrzymujemy stąd, zatrzymując 6 wyrazów tego szeregu, po wykonaniu łatwych rachunków, wartość:

$$s = 28{\cdot}3613$$

*Uwaga.* Dogodniejszy wzór na obliczenie obwodu elipsy otrzymuje się, wprowadzając zamiast liczby $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ liczbę $l = \frac{a-b}{a+b}$.

Okazano, że wtedy:

(13)
$$s = (a+b)\pi \sum_{r=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{r} l^{2r}$$

Dowód znajdzie czytelnik w podręczniku Kieperta-Stegemanna pt. *Grundriss der Differential- und Integralrechnung* (tom II, wyd. 8 z r. 1903, str. 309—317). Bardzo dogodny *przybliżony* wzór na obliczenie obwodu elipsy ma postać:

(14)
$$s \approx \pi\left(3 \cdot \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$$

Przedstawiając $\frac{a+b}{2}$ w postaci $a \cdot \frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2}$, a $\sqrt{ab} = a\sqrt[4]{1-k^2}$ i rozwijając pierwiastki według wzoru dwumiennego, można stwierdzić, że rozwinięcie prawej strony tego przybliżonego wzoru różni się od dokładnego rozwinięcia, zawartego we wzorze (12), dopiero w piątym wyrazie, zawierającym $k^8$.

## § 286. Różniczkowanie szeregów funkcyjnych

Do różniczkowalności szeregu funkcyjnego nie wystarcza jego jednostajna zbieżność.

Udowodniono natomiast, że do różniczkowania szeregów funkcyjnych odnosi się następujące twierdzenie.

*Jeżeli szereg funkcyjny*:

$$(I) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = f(x)$$

*złożony z funkcyj, posiadających ciągłe pochodne, jest zbieżny w przedziale* $<a, b>$ *i jeżeli szereg pochodnych*:

$$(II) \qquad f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots$$

*jest w tym przedziale* ***jednostajnie*** *zbieżny, to funkcja* $\varphi(x)$, *przedstawiona tym szeregiem, jest pochodną funkcji* $f(x)$, *przedstawionej pierwotnym szeregiem.*

Mówimy, że w tych warunkach jest dozwolone różniczkowanie szeregu funkcyjnego wyraz po wyrazie.

# Ustęp III.

## SZEREGI POTĘGOWE. FUNKCJE ANALITYCZNE

## § 287. Zakres zbieżności szeregu potęgowego

Poznane w poprzednim ustępie twierdzenia o ogólnych szeregach funkcyjnych zastosujemy obecnie do szeregów, które są szczególnie ważne w teorii i w praktyce, a mianowicie do szeregów potęgowych.

*Szeregiem potęgowym* nazywamy szereg funkcyjny postaci:

$$(15) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

w którym współczynniki $a_k$ kolejnych potęg zmiennej $x$ są liczbami stałymi.

Jeżeli za $x$ wprowadzimy nową zmienną za pomocą podstawienia $x = z - a$, to otrzymamy szereg funkcyjny:

$$(16) \quad a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$$

zwany *szeregiem potęgowym dla otoczenia punktu* $z = a$. Szereg (15) można więc także nazywać *szeregiem potęgowym dla otoczenia punktu* $x = 0$.

Zbadajmy przedewszystkiem zakres zbieżności szeregu potęgowego, tj. zbiór tych wartości $x$, dla których szereg potęgowy przedstawia jakąś funkcję, nazwijmy ją $P(x)$.

Jasnym jest, że punkt $x = 0$ jest dla każdego szeregu potęgowego punktem zbieżności, albowiem:

$$P(0) = a_0$$

Istnieją takie szeregi, które prócz tego punktu nie posiadają żadnego punktu zbieżności. Takim jest np. szereg potęgowy:

$$1 + 1!x + 2!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots$$

W tym bowiem szeregu wyraz ogólny: $a_n = n!x^n$ nie dąży do zera dla żadnego różnego od zera $x$, lecz wzrasta nieograniczenie. Może się jednak zdarzyć druga ostateczność, a mianowicie istnieją szeregi potęgowe, zbieżne dla *wszystkich* $x$, jak np. szereg (por. tom I, str. 395):

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x$$

Szereg potęgowy, zbieżny dla wszystkich wartości zmiennej niezależnej $x$, a więc w całym niewłaściwym przedziale $(-\infty, +\infty)$, nazywamy szeregiem *bezustannie zbieżnym*.

Okażemy, że trzecią a zarazem ostatnią kategorię tworzą szeregi potęgowe, zbieżne w pewnym *skończonym przedziale*, otaczającym symetrycznie punkt $x = 0$. Nie ma więc szeregów potęgowych, zbieżnych w pooddzielanych przedziałach (jak to ma miejsce np. dla szeregu funkcyjnego, omówionego w przykładzie 3 w § 282) lub w rozrzuconych punktach. Udowodnimy mianowicie najpierw prawdziwość następującego twierdzenia:

*jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny dla jakiejś wartości* $x = c$, chociażby warunkowo, *to jest zbieżny bezwarunkowo i jednostajnie w każdym przedziale zamkniętym* $\langle -x_1, x_1 \rangle$, *leżącym wewnątrz przedziału* $\langle -|c|, +|c| \rangle$ (na drugim końcu przedziału $\langle -|c|, +|c| \rangle$ może być szereg zbieżny lub rozbieżny).

*Dowód.* Według założenia szereg:

$$a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \ldots + a_n c^n + \ldots$$

jest zbieżny. Ciąg jego wyrazów musi zatem dążyć do zera, a więc jest ograniczony. To znaczy, że istnieje jakaś liczba $K$, której nie przekracza bezwzględna wartość żadnego wyrazu tego szeregu. Spełnia się więc dla wszystkich $n$ nierówność:

$$(a) \qquad |a_n c^n| \leqq K$$

Obierzmy dowolny przedział $< -x_1, x_1 >$, leżący wewnątrz przedziału $< -|c|, |c| >$, to $|x_1| < |c|$, a więc $\left|\frac{x_1}{c}\right| < 1$. Pomnóżmy obie strony nierówności (a) przez $\left|\frac{x_1}{c}\right|^n$, to otrzymamy:

$$|a_n x_1^n| \leqq \left|\frac{x_1}{c}\right|^n \cdot K$$

Dla każdego $x$ z przedziału $< -x_1, x_1 >$ jest $|x| \leqq |x_1|$, a więc $|a_n x^n| \leqq |a_n x_1^n|$, a zatem także $|a_n x^n| \leqq \left|\frac{x_1}{c}\right|^n K$. Wyrazy szeregu:

$$(b) \qquad |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

nie przekraczają zatem dla $|x| \leqq |x_1|$ wyrazów następującego szeregu o wyrazach dodatnich:

$$K\left(1 + \left|\frac{x_1}{c}\right| + \left|\frac{x_1}{c}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{x_1}{c}\right|^n + \ldots\right)$$

Jest to szereg geometryczny zbieżny, albowiem jego iloraz $q = \left|\frac{x_1}{c}\right| < 1$. Na mocy twierdzenia o majoryzowaniu szeregów (§ 270) jest więc szereg (b) zbieżny dla $|x| \leqq |x_1| < |c|$, a to znaczy, że dany szereg potęgowy:

$$(d) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

jest zbieżny *bezwarunkowo* dla wszystkich $x$ z zamkniętego przedziału $< -x_1, x_1 >$, leżącego wewnątrz przedziału $< -|c|, |c| >$.

Chodzi jeszcze o wykazanie, że zbieżność jest *jednostajna* w przedziale $< -x_1, x_1 >$. Wykażemy to przy pomocy kryterium Weierstrassa (str. 45). I tak wykazaliśmy zbieżność szeregu liczbowego:

$$(c) \qquad |a_0| + |a_1 x_1| + |a_2 x_1^2| + \ldots + |a_n x_1^n| + \ldots$$

Ponieważ $|a_n x^n| \leqq |a_n x_1^n|$ dla wszystkich $x$ z przedziału $< -x_1, x_1 >$, przeto zbieżny szereg liczbowy (c) o wyrazach dodatnich *majoryzuje* szereg (b), utworzony z bezwzględnych wartości szeregu funkcyjnego (d), to zaś dowodzi, że szereg funkcyjny (d) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $< -x_1, x_1 >$.

Z dowiedzionego twierdzenia wynika następujący wniosek: *jeżeli szereg potęgowy jest rozbieżny dla jakiegoś $x = d$, to jest rozbieżny także dla wszystkich $x$, spełniających warunek $|x| > |d|$, tj. leżących poza przedziałem $< -|d|, +|d| >$* Gdyby bowiem szereg był zbieżny dla jakiegoś $x$, leżącego poza tym przedziałem, to musiałby być zbieżny także dla $d$, w myśl poprzedniego twierdzenia.

Opierając się na tych twierdzeniach okażemy, że *szereg potęgowy jest zbieżny albo dla wszystkich $x$, albo tylko w skończonym przedziale, otaczającym symetrycznie punkt $x = 0$, albo tylko w punkcie $x = 0$.*

Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny tylko w przedziale $(-r, r)$, przy czym na końcach tego przedziału może być zbieżny lub rozbieżny, to liczbę dodatnią $r$, odpowiadającą prawemu końcowi tego przedziału, nazywamy **promieniem zbieżności** tego szeregu, a otwarty przedział $(-r, r)$ **przedziałem zbieżności**. Jeżeli szereg jest zbieżny tylko w punkcie $x = 0$, to promień zbieżności ma wartość $r = 0$, a punkt $x = 0$ można uważać za przedział zbieżności, zdegenerowany do jednego punktu. Jeżeli szereg jest zbieżny dla wszystkich $x$, to przedziałem zbieżności jest niewłaściwy przedział $(-\infty, +\infty)$, a promieniem zbieżności jest $+\infty$. Możemy więc wypowiedzieć powyższe twierdzenie w następującej postaci:

*zakresem zbieżności każdego szeregu potęgowego jest jakiś przedział, otaczający symetrycznie punkt $x = 0$*, przy czym może to być przedział właściwy z końcami lub bez końców, tj. $(-r, r)$, $(-r, r>$, $<-r, r)$, $<-r, r>$*), przedział niewłaściwy $(-\infty, +\infty)$ lub przedział zdegenerowany do jednego punktu $x = 0$.

*Dowód.* Zbiór punktów zbieżności szeregu może być nieograniczony lub ograniczony, a w tym drugim wypadku może się składać z większej liczby punktów lub tylko z jednego punktu $x = 0$. Rozważmy po kolei te trzy jedyne możliwości.

1°. Jeżeli zbiór punktów zbieżności jest *nieograniczony* np. z góry, to biorąc pod uwagę dowolnie wielkie dodatnie $x_1$, znajdziemy zawsze w zbiorze punktów zbieżności punkt dalszy, tj. liczbę $c > x_1$. Ponieważ zaś szereg jest zbieżny w $c$, to musi być zbieżny w przedziale zamkniętym $< -x_1, x_1 >$, a więc także dla $x_1$. A zatem szereg jest w tym przypadku zbieżny dla wszystkich dodatnich $x$, a co zatem idzie także dla wszystkich ujemnych $x$, a więc wogóle dla wszystkich $x$, czyli jest wtedy *bezustannie zbieżny*. Do tego samego wniosku dochodzimy oczywiście, gdy zbiór punktów zbieżności jest nieograniczony z dołu.

2°. Jeżeli zbiór punktów zbieżności jest *ograniczony* i zawiera więcej niż jeden punkt, to musi istnieć *kres górny* $r$ tego zbioru (por. tom I, str. 98). Ten kres górny $r$ musi być liczbą *dodatnią*. Założyliśmy bowiem, że prócz punktu $x = 0$ istnieją jakieś inne punkty zbieżności, np.

*) Te 4 symbole znaczą (jak można wywnioskować z wiersza 5-go w ustępie 1°):

$(-r, r)$: $-r < x < r$

$(-r, r>$: $-r < x \leq r$

$<-r, r)$: $-r \leq x < r$

$<-r, r>$: $-r \leq x \leq r$.

punkt $x_1 \neq 0$. W takim zaś razie także każdy punkt z wnętrza przedziału $< -|x_1|, +|x_1| >$ jest punktem zbieżności, a więc np. dla dodatniego $x_2$, spełniającego warunek $0 < x_2 < |x_1|$, szereg jest zbieżny. Zbiór punktów zbieżności zawiera więc wtedy liczby dodatnie, a zatem ich kres górny musi być także liczbą dodatnią. Dla wszystkich $x > r$ jest szereg potęgowy rozbieżny, a stąd wynika, że jest także rozbieżny dla wszystkich $x < -r$, a więc ogółem szereg jest rozbieżny *poza* przedziałem $< -r, r >$, tj. dla $|x| > r$. Dla każdego zaś $x$ z wnętrza tego przedziału szereg musi być zbieżny. Gdyby bowiem był rozbieżny dla jakiegoś $x$ z wnętrza tego przedziału, to musiałby być rozbieżny dla wszystkich punktów, leżących w przedziałach $< -r, -|x| >$ i $< |x|, r >$, a więc liczba $r$ nie byłaby kresem górnym (tj. *najmniejszą* z liczb, ograniczających z góry) zbioru punktów zbieżności. Wszystkie bowiem liczby z przedziału $< |x|, r >$ byłyby też liczbami, ograniczającymi z góry zbiór punktów zbieżności. A więc dla każdego $x$ z *wnętrza* przedziału $< -r, r >$ szereg jest zbieżny, dla każdego zaś $x$ z poza tego przedziału szereg jest rozbieżny. W tym zatem przypadku szereg potęgowy jest zbieżny *wewnątrz skończonego przedziału, otaczającego symetrycznie punkt* $x = 0$, a kres górny $r$ jest jego promieniem zbieżności. Twierdzenie to nic nie mówi o zachowaniu się szeregu na końcach przedziału, tj. dla $x = +r$ i $x = -r$. Otóż okazuje się, że istnieją zarówno takie szeregi potęgowe, które są zbieżne na jednym lub na obu końcach przedziału, jak i takie, które są tam rozbieżne (por. przykłady na końcu tego paragrafu !). A więc *zakres* zbieżności szeregu potęgowego składa się z jego *przedziału* (otwartego) zbieżności i ewentualnie z *końców* tego przedziału.

3°. Jeżeli zbiór punktów zbieżności składa się tylko z *jednego punktu*, to tym punktem jest, jak wiemy, dla każdego szeregu $x = 0$.

Dowiedliśmy wprawdzie w ten sposób, że dla każdego szeregu potęgowego *istnieje* promień zbieżności, nie poznaliśmy jednak żadnego sposobu wyznaczania jego wielkości. Otóż bardzo często można wyznaczyć ten promień, stosując do szeregu, utworzonego z bezwzględnych wartości szeregu potęgowego, kryterium zbieżności Cauchy'ego w formie limesowej (por. § 272, str. 18). I tak weźmy pod uwagę wyraz ogólny:

$$u_n = |a_n x^n|$$

szeregu:

(a) $$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

Wystarczy brać pod uwagę wartości $x \neq 0$, albowiem dla $x = 0$ każdy szereg potęgowy jest zbieżny. Dla tych wartości $x$, dla których istnieje granica ciągu:

(b) $$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$$

i jest liczbą mniejszą od 1, szereg (a) jest zbieżny, a więc także szereg potęgowy:

$$(c) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

jest dla tych $x$ zbieżny i to bezwarunkowo. Jeżeli zaś owa granica jest liczbą większą od 1, to tym bardziej granica wyrażenia $|a_n x^n|$ jest liczbą większą od 1, a więc bezwzględna wartość ogólnego wyrazu szeregu (c) nie dąży do zera. Szereg (c) jest zatem wtedy rozbieżny (nie spełnia się dla niego omówiony w § 269 konieczny warunek zbieżności). Granica ciągu (b) przy $x \neq 0$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $g$ wyrażenia $\sqrt[n]{|a_n|}$. Szereg potęgowy jest zatem zbieżny dla tych $x$, które spełniają warunek:

$$(d) \qquad |x| \cdot g < 1$$

a rozbieżny dla tych $x$, które spełniają warunek:

$$|x| \cdot g > 1$$

a) Jeżeli granica $g = 0$, to $|x| \cdot g = 0$ dla każdego $x$, a więc warunek zbieżności (d) spełnia się dla *wszystkich* $x$; szereg potęgowy jest zatem wtedy *bezustannie zbieżny*.

b) Jeżeli $g \neq 0$, to zbieżność zachodzi dla $|x| < \frac{1}{g}$ a rozbieżność dla $|x| > \frac{1}{g}$. To dowodzi, że liczba $\frac{1}{g}$ jest *promieniem zbieżności* szeregu, a więc:

$$(17) \qquad \boxed{r = \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}$$

Wzór ten można rozszerzyć także na przypadek, gdy $g = 0$, przypisując wtedy wyrażeniu $\frac{1}{g}$ znaczenie $r = +\infty$.

c) Omówiliśmy przypadki, gdy ciąg $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ posiada skończoną, tj. właściwą granicę (równą zeru lub różną od zera). Gdy ten ciąg posiada niewłaściwą granicę: $g = +\infty$, to dla każdego różnego od zera $x$ ciąg (b) jest nieograniczony, a więc tym bardziej ciąg $\{|a_n x^n|\}$ jest nieograniczony, a zatem szereg potęgowy (c) jest rozbieżny. Szereg jest wtedy zbieżny tylko dla $x = 0$, a więc promień zbieżności ma wtedy wartość $r = 0$. Także i w tym przypadku można ująć ten wynik we wzór (17), używając dla $r = \frac{1}{g}$ symbolicznej równości: $r = \frac{1}{\infty} = 0$.

Dowiedliśmy zatem następującego twierdzenia: *jeżeli istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa) ciągu* $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, *to promień zbieżności szeregu potęgowego* (c) *ma wartość* $r$, *wyrażoną wzorem* (17).

Twierdzenie to nie wyznacza wielkości promienia zbieżności, gdy ciąg $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ nie dąży do żadnej właściwej lub niewłaściwej granicy, lecz oscyluje pomiędzy jakimiś liczbami.

*Uwaga.* Wyprowadzono ogólniejsze twierdzenie o promieniu zbieżności, ujmujące i ten ostatni przypadek. Otóż w każdym razie, nawet gdy nie istnieje właściwa lub niewłaściwa granica ciągu $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, to istnieje *górna granica* tego ciągu, właściwa lub niewłaściwa (por. tom I, § 31); oznaczmy ją:

$$\bar{g} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(Jeżeli istnieje granica $g$ we właściwym znaczeniu, to $\bar{g} = g$). Otóż Cauchy i Hadamard dowiedli, że promień zbieżności istnieje dla każdego szeregu potęgowego i ma wartość:

$$r = \frac{1}{\bar{g}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{18}$$

Pomijamy tu dowód tego twierdzenia; dowód można znaleźć np. w cytowanym powyżej podręczniku Knoppa (str. 146).

*Przykłady.*

1) Dla szeregu:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

jest $a_n = 1$, $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ stale, a więc i w granicy $\lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{a_n}| = 1$. Zatem $g = 1$, a więc promieniem zbieżności tego szeregu jest $r = \frac{1}{g} = 1$. Na końcach przedziału zbieżności $(-1, +1)$, tj. dla $x = 1$ i $x = -1$ jest ten szereg, jak wiemy, *rozbieżny*.

2) Dla szeregu:

$$2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + \ldots + \frac{(2x)^n}{n} + \ldots$$

jest:

$$a_n = \frac{2^n}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 2n^{-\frac{1}{n}} = 2 = g$$

a więc promieniem zbieżności jest $r = \frac{1}{2}$. Na prawym końcu przedziału zbieżności $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, tj. dla $x = \frac{1}{2}$, szereg jest *rozbieżny* (jako szereg harmoniczny), na lewym zaś, tj. dla $x = -\frac{1}{2}$ *zbieżny*, albowiem:

$$-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \ldots$$

jest szeregiem znakozmiennym, dla którego bezwzględne wartości wyrazów dążą monotonicznie do zera.

3) Dla szeregu:

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$$

jest:

$$a_n=\frac{1}{n^2},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{2}{n}}=1=g$$

a więc $r=1$. Na końcach przedziału zbieżności $(-1,+1)$ jest ten szereg *zbieżny*, albowiem dla $x=1$ otrzymujemy szereg $\zeta(2)$ a dla $x=-1$ szereg, dla którego $\zeta(2)$ jest szeregiem złożonym z bezwzględnych wartości jego wyrazów.

Dla każdej wartości $x$ z zakresu zbieżności szeregów potęgowych można je do siebie dodawać i odejmować tak jak skończone sumy. Dla każdej zaś wartości z *wnętrza* przedziału zbieżności można wykonywać mnożenie szeregów potęgowych tak jak mnożenie skończonych sum, ponieważ te szeregi są *wewnątrz* zakresu zbieżności bezwarunkowo zbieżne.

## § 288. Ciągłość funkcji, przedstawionej przez szereg potęgowy

Dla wszystkich wartości zmiennej niezależnej, należących do zakresu zbieżności szeregu potęgowego, ma on jakieś skończone wartości, przedstawia więc jakąś funkcję $P(x)$ tej zmiennej, określoną w zakresie zbieżności. Zatem w tym zakresie jest:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = P(x)$$

Mówimy, że funkcja $P(x)$ da się w tym zakresie *rozwinąć* na szereg potęgowy.

Funkcje takie można uważać za bezpośrednie uogólnienie najprostszych funkcyj, a mianowicie funkcyj całkowitych wymiernych, tj. wielomianów czyli sum skończonych:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

Wiemy już bowiem, że wewnątrz przedziału zbieżności można rachować szeregami potęgowymi tak, jak wielomianami, a wykażemy ponadto, że są one ciągłe, całkowalne i różniczkowalne wyraz po wyrazie.

Najpierw zajmiemy się badaniem ciągłości. Weźmy pod uwagę dowolny punkt $x=x_0$, leżący wewnątrz przedziału zbieżności, tj. taki, że $|x_0|<r$. Okażemy, że funkcja $P(x)$ jest ciągła w każdym takim punkcie.

Obierzmy w tym celu pomiędzy $|x_0|$ a $r$ dwie liczby $x_1$ i $x_2$ tak, aby $|x_0| < x_1 < x_2 < r$. Ponieważ szereg potęgowy jest zbieżny dla $x = x_2$, przeto jest *jednostajnie* zbieżny w przedziale $<-x_1, x_1>$, leżącym wewnątrz przedziału $<-x_2, x_2>$. Funkcja $P(x)$ jest zatem ciągła w każdym punkcie, leżącym wewnątrz $<-x_1, x_1>$, a zatem i w punkcie $x_0$, c. b. d. o.

Dowiedliśmy więc, że *funkcja, przedstawiona przez szereg potęgowy, jest ciągła w każdym punkcie, leżącym wewnątrz przedziału zbieżności tego szeregu.*

W szczególności zatem każda funkcja, przedstawiona przez szereg potęgowy zbieżny nie tylko dla $x = 0$, jest ciągła w punkcie $x = 0$. Stąd wyprowadzamy następujący wniosek o *identyczności* dwóch szeregów potęgowych: *jeżeli dwa szeregi potęgowe mają te same wartości dla* $x = 0$ *i dla wszystkich* $x$ *z dowolnie małego otoczenia punktu* $x = 0$, *to te dwa szeregi potęgowe są identyczne, tj. mają wszystkie odpowiednie współczynniki parami równe.* Takie dwa szeregi mają oczywiście ten sam zakres zbieżności i mają te same wartości także dla wszystkich innych $x$, należących do tego wspólnego zakresu zbieżności.

*Dowód.* Niechaj:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = P_1(x)$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = P_2(x)$$

Według założenia jest najpierw $P_1(0) = P_2(0)$, tj. $a_0 = b_0$. Ponadto dla wszystkich $x \neq 0$ z jakiegoś otoczenia punktu $x = 0$ spełnia się równość:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$$

Odejmijmy od tej równości stronami równość $a_0 = b_0$ i podzielmy obie strony przez $x$ (zakładając już teraz, że $x \neq 0$).

Otrzymamy nowe szeregi potęgowe:

$$\text{(I)} \qquad a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots$$

Równość ta zachodzi na pewno dla wszystkich $x$ z otoczenia punktu $x = 0$, lecz nie wiemy, czy zachodzi także dla $x = 0$. Nazwijmy funkcję, określoną przez pierwszy z otrzymanych szeregów, $Q_1(x)$ a przez drugi $Q_2(x)$. A więc jest:

$$Q_1(x) = Q_2(x)$$

dla $x \neq 0$ z otoczenia punktu $x = 0$.

Ponieważ każda z tych funkcyj jest ciągła dla $x = 0$, przeto:

$$\lim_{x \to 0} Q_1(x) = Q_1(0) = a_1, \quad \lim_{x \to 0} Q_2(x) = Q_2(0) = b_1$$

Ponieważ zaś $Q_1(x) = Q_2(x)$, przeto i $\lim_{x \to 0} Q_1(x) = \lim_{x \to 0} Q_2(x)$, czyli $a_1 = b_1$. Odejmujemy teraz tę równość stronami od równości (I), dzielimy obie

strony przez $x$ i wykazujemy w podobny sposób jak poprzednio, że $a_2 = b_2$ i tak dalej, ogólnie $a_n = b_n$ dla każdego $n$, a to znaczy, że obydwa dane szeregi potęgowe są identyczne, c. b. d. o. Jeżeli więc jakaś funkcja da się w otoczeniu punktu $x = 0$ przedstawić szeregiem potęgowym, to to jest możliwe tylko w jeden sposób.

## § 289. Metoda nieoznaczonych współczynników

Na twierdzeniu o identyczności szeregów potęgowych polega pewien bardzo często używany sposób rozwiązywania rozmaitych zagadnień, zwany *metodą nieoznaczonych współczynników*. Myśl zasadnicza tej metody jest następująca. Jeżeli wiemy, że jakaś funkcja da się rozwinąć na szereg potęgowy, lecz nie znamy współczynników tego szeregu, natomiast znamy jakieś związki, zachodzące między tą funkcją a innymi funkcjami o znanych rozwinięciach, to przedstawiamy te związki jako równość pomiędzy dwoma szeregami potęgowymi. Przez porównanie współczynników przy równych potęgach $x$ po obu stronach tej równości otrzymujemy szereg równań, z których obliczamy współczynniki nieznanego szeregu potęgowego.

*Przykłady.*

1) Przy *dzieleniu* liczby 1 przez szereg potęgowy chodzi o znalezienie współczynników $c_0, c_1, c_2, \ldots$, znając współczynniki $a_0 \neq 0, a_1, a_2, \ldots$, jeżeli te szeregi spełniają równość:

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

czyli:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) \cdot (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots) = 1$$

Wykonujemy mnożenie szeregów po lewej stronie, porządkując iloczyny składowe według potęg $x$ i otrzymujemy:

$$a_0 c_0 + (a_0 c_1 + a_1 c_0) x + (a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0) x^2 + \\ + (a_0 c_3 + a_1 c_2 + a_2 c_1 + a_3 c_0) x^3 + \ldots = 1$$

Prawą stronę możemy uważać za szereg potęgowy:

$$1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots$$

Z porównania współczynników obu stron tej równości otrzymujemy następujący szereg równań:

$$\begin{aligned} a_0 c_0 &= 1 \\ a_0 c_1 + a_1 c_0 &= 0 \\ a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 &= 0 \\ a_0 c_3 + a_1 c_2 + a_2 c_1 + a_3 c_0 &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

z których wyznaczamy kolejno nieznane współczynniki $c_0, c_1, c_2, \ldots$ jako funkcje danych współczynników $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Tak np.:

$$c_0 = \frac{1}{a_0}, \quad c_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}, \quad c_2 = \frac{a_1^2 - a_2 a_0}{a_0^3}, \ldots$$

2) Zastosujmy metodę nieoznaczonych współczynników do rozwinięcia funkcji $\operatorname{tg} x$ na szereg potęgowy.

Ponieważ:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

przeto zachodzi związek:

(a) $$\operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$$

Podstawiamy tu za $\cos x$ i $\sin x$ znane szeregi potęgowe (por. tom I, str. 399—400), za $\operatorname{tg} x$ zaś szereg potęgowy o nieznanych współczynnikach:

$$\operatorname{tg} x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 c^3 + \ldots$$

Łatwo okazać, że współczynniki o parzystych wskaźnikach są zerami i pozostaje rozwinięcie:

$$\operatorname{tg} x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots$$

Zatem wzór (a) przyjmuje postać:

$$(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 \ldots) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Wykonujemy po lewej stronie mnożenie szeregów potęgowych i otrzymujemy:

$$c_1 x + \left(c_3 - \frac{c_1}{2!}\right) x^3 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!}\right) x^5 + \ldots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

Przez porównanie współczynników obu stron otrzymujemy następujący szereg równań:

$$c_1 = 1$$

$$c_3 - \frac{c_1}{2!} = -\frac{1}{3!}$$

$$c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!} = \frac{1}{5!}$$

$$c_7 - \frac{c_5}{2!} + \frac{c_3}{4!} - \frac{c_1}{6!} = -\frac{1}{7!}$$

. . . . . .

Z tych równań otrzymujemy kolejno:

$$c_1 = 1, \quad c_3 = \tfrac{1}{3}, \quad c_5 = \tfrac{2}{15}, \quad c_7 = \tfrac{17}{315}, \dots$$

a więc:

$$\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{17}{315}x^7 + \dots \tag{19}$$

Metoda nieoznaczonych współczynników nie daje żadnej wskazówki, dotyczącej zbieżności otrzymanego szeregu. Inną drogą okazano, że ten szereg jest zbieżny dla $|x| < \frac{1}{2}\pi$, tj. po obu stronach zera aż do najbliższych punktów, w których $\operatorname{tg} x$ przestaje być funkcją ciągłą (por. Knopp, l. c. str. 245—6).

Niechaj czytelnik zbada w podobny sposób rozwinięcie na szereg potęgowy funkcji (parzystej), określonej wzorem:

$$y = \frac{x}{2}\,\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \text{dla } x \neq 0, \quad \text{a} \quad y = 1 \quad \text{dla } x = 0$$

Metody nieoznaczonych współczynników używa się często przy rozwiązywaniu skomplikowanych zagadnień, a szczególnie przy rozwiązywaniu równań różniczkowych, o czem będzie mowa w następnym rozdziale.

Dotychczas zajmowaliśmy się tylko szeregami potęgowymi w otoczeniu punktu $x = 0$, tj. szeregami postaci:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = P(x) \tag{s}$$

Wszystkie te rozważania można przenieść na szeregi potęgowe w otoczeniu dowolnego innego punktu $x = a$, tj. na szeregi postaci:

$$b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots + b_n(x - a)^n + \dots$$

Kładąc tu $x - a = x'$, otrzymujemy bowiem szereg potęgowy:

$$b_0 + b_1 x' + b_2 x'^2 + \dots + b_n x'^n + \dots$$

w otoczeniu punktu $x' = 0$. Promień zbieżności tego szeregu wyznacza się z współczynników $b_n$ tak samo, jak promień zbieżności szeregu w otoczeniu punktu $x = 0$ z współczynników $a_n$. Przedziałem zbieżności jest odcinek, przepołowiony punktem $x = a$.

## § 290. Całkowanie i różniczkowanie szeregów potęgowych

Widzieliśmy, że każdy szereg potęgowy jest *jednostajnie* zbieżny w każdym przedziale, leżącym wewnątrz zakresu zbieżności, wyrazy zaś jego są funkcjami ciągłymi. Wobec tego (por. § 285) jest dozwolone *całkowanie* tego szeregu wyraz po wyrazie. A więc *funkcja, przedstawiona przez szereg potęgowy, jest całkowalna, a całka jej jest równa funkcji,*

*przedstawionej przez szereg, złożony z całek wyrazów danego szeregu.* Do każdej więc funkcji, przedstawionej przez szereg potęgowy, można stosować wewnątrz zakresu zbieżności metodę całkowania przez szeregi, omówioną w § 285, w którym też podano przykłady stosowania tej metody. Zbadajmy teraz *różniczkowalność* szeregów potęgowych. Tworzymy w tym celu szereg, złożony z pochodnych wyrazów szeregu:

$$\text{(a)} \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

a mianowicie szereg:

$$\text{(b)} \qquad Q(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

Wszystkie wyrazy tego szeregu są funkcjami ciągłymi.

Jeżeli ten nowy szereg jest jednostajnie zbieżny, to przedstawia on pochodną funkcji $P(x)$ (por. § 286). Otóż ten nowy szereg jest także szeregiem potęgowym (o innych współczynnikach) a więc jest wewnątrz swego przedziału zbieżności jednostajnie zbieżny. Chodzi jeszcze tylko o zbadanie, jaki przedział zbieżności posiada ten nowy szereg. Okażemy, że szereg (b) ma ten sam przedział zbieżności, co szereg (a). W tym celu udowodnimy, że każdy punkt, należący do przedziału zbieżności szeregu (a), należy także do przedziału zbieżności szeregu (b) i na odwrót.

I tak niechaj punkt $x_1$ należy do przedziału zbieżności $(-r, r)$ szeregu (a). Obierzmy w przedziale zbieżności dowolny punkt $x_0$ taki, aby $|x_1| < |x_0| < r$, a więc dla $x = x_0$ szereg jest zbieżny.

Wobec tego ciąg wyrazów $a_n x_0^n$ jest ograniczony (wyrazy te bowiem dążą do zera). Istnieje więc taka stała liczba $A$, że:

$$|a_n x_0^n| < A, \quad \text{a zatem} \quad |a_n x_0^{n-1}| < \frac{A}{|x_0|} = K$$

Ogólny wyraz szeregu (b) ma dla $x = x_1$ postać:

$$n a_n x_1^{n-1} = a_n x_0^{n-1} \cdot n \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{n-1}$$

A więc:

$$|n a_n x_1^{n-1}| < K \cdot n q^{n-1}$$

przy czym:

$$q = \left|\frac{x_1}{x_0}\right| < 1$$

Zatem:

$$|a_1| < K \cdot 1$$
$$|2a_2 x_1| < K \cdot 2q$$
$$|3a_3 x_1^2| < K \cdot 3q^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Ponieważ szereg: $K + K \cdot 2q + K \cdot 3q^2 + \ldots$ jest zbieżny (por. § 271 str. 16), przeto także szereg:

$$|a_1| + |2a_2x_1| + |3a_3x_1^2| + \ldots$$

jest zbieżny, a to dowodzi, że szereg (b) jest w punkcie $x_1$ zbieżny (i to bezwarunkowo). A więc każdy punkt $x_1$, należący do przedziału zbieżności szeregu (a), należy także do przedziału zbieżności szeregu (b).

Udowodnimy teraz prawdziwość twierdzenia odwrotnego. I tak jeżeli $x_2$ należy do przedziału zbieżności szeregu (b), to szereg:

$$|a_1| + |2a_2x_2| + |3a_3x_2^2| + \ldots$$

jest zbieżny. Mnożąc wszystkie jego wyrazy przez $|x_2|$, otrzymamy nowy zbieżny szereg:

$$|a_1x_2| + |2a_2x_2^2| + |3a_3x_2^3| + \ldots$$

Wyrazy tego szeregu są niemniejsze od wyrazów szeregu:

$$|a_1x_2| + |a_2x_2^2| + |a_3x_2^3| + \ldots$$

a zatem i ten drugi szereg jest zbieżny, a więc i szereg:

$$|a_0| + |a_1x_2| + |a_2x_2^2| + |a_3x_2^3| + \ldots$$

jest zbieżny, to zaś dowodzi, że dla $x = x_2$ także szereg (a) jest zbieżny (i to bezwarunkowo).

Z rozważań tych wynika, że *funkcja, przedstawiona przez szereg potęgowy, posiada pochodną wewnątrz przedziału zbieżności, a pochodną tę przedstawia szereg, utworzony z pochodnych wszystkich wyrazów danego szeregu, zbieżny w tym samym przedziale, co pierwotny szereg.*

Dozwolone więc jest różniczkowanie szeregu potęgowego wyraz po wyrazie.

Ponieważ do nowego szeregu stosuje się znowu to samo twierdzenie, przeto funkcja, przedstawiona przez szereg potęgowy, posiada pochodne wszystkich rzędów, a oblicza się je przez kolejne różniczkowanie szeregu potęgowego.

Twierdzenie to odnosi się zarówno do szeregów potęgowych w otoczeniu punktu $x = 0$ jak i do szeregów w otoczeniu dowolnego innego punktu $x = a$.

Za pomocą wartości funkcji, przedstawionej przez szereg potęgowy i kolejnych jej pochodnych w jednym punkcie można wyrazić wszystkie współczynniki szeregu potęgowego.

I tak z wzoru:

$$f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

otrzymujemy:

$$f(0) = a_0$$

Tworzymy pochodną:

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1} + \ldots$$

a stąd, kładąc $x = 0$, otrzymujemy:

$$f'(0) = 1 \cdot a_1$$

Z drugiej pochodnej:

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \ldots + n \cdot (n-1) \cdot a_n x^{n-2} + \ldots$$

otrzymujemy:

$$f''(0) = 2! \cdot a_2$$

Ogólnie z $n$-tej pochodnej otrzymujemy:

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n$$

a zatem:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Wobec tego można przedstawić dany szereg potęgowy w postaci:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots \tag{20}$$

to zaś jest szereg Maclaurina. Widzimy więc, że *rozwinięcie funkcji na szereg potęgowy jest jej szeregiem Maclaurina.* Stosując to samo rozumowanie do szeregu potęgowego dla otoczenia dowolnego punktu $x = x_1$, tj. do szeregu:

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)^2 + \ldots + b_n(x - x_1)^n + \ldots$$

stwierdzamy, że ten szereg jest identyczny z szeregiem:

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n + \ldots \tag{21}$$

tj. z szeregiem Taylora.

A więc *rozwinięcie funkcji na szereg potęgowy w otoczeniu dowolnego punktu jest jej szeregiem Taylora.*

Rozwijanie funkcji na szereg Maclaurina lub Taylora i rozwijanie funkcji na szereg potęgowy jest więc tym samym zagadnieniem, rozwinięcia te są bowiem identyczne. Klasa funkcyj, dających się rozwinąć na szereg Maclaurina lub Taylora, jest więc identyczna z klasą funkcyj, przedstawialnych przy pomocy szeregów potęgowych.

## § 291. Szeregi potęgowe zmiennej zespolonej

Własności szeregów potęgowych, poznane w poprzednich paragrafach, odnoszą się bez zasadniczych zmian także do takich szeregów potęgowych:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

w których zarówno zmienna $z$ jak i współczynniki $a_k$ mogą przybierać wartości zespolone. W szczególności wszystkie rozważania i twierdzenia o promieniu zbieżności stosują się do tego ogólniejszego przypadku, z tą tylko różnicą, że zamiast *przedziału* zbieżności na osi liczbowej występuje tu **koło zbieżności** na płaszczyźnie liczbowej.

I tak dochodzimy tu do rozróżnienia następujących trzech jedynie możliwych przypadków.

1) Szereg potęgowy może być zbieżny tylko w jednym punkcie $z = 0$ płaszczyzny liczbowej; mówimy wtedy, że jego promieniem zbieżności jest $r = 0$ a jego zakresem zbieżności jest koło o promieniu $r = 0$.

2) Szereg potęgowy może być zbieżny we wszystkich punktach $z$ płaszczyzny liczbowej; szereg taki nazywamy bezustannie zbieżnym. Jego promieniem zbieżności jest wtedy $r = +\infty$ a jego zakresem zbieżności jest cała płaszczyzna liczbowa czyli koło o promieniu $r = +\infty$.

3) Szereg potęgowy może być zbieżny dla wszystkich liczb zespolonych $z$, spełniających nierówność $|z| < r$, a rozbieżny dla wszystkich $z$, spełniających nierówność $|z| > r$. Dodatnia liczba $r$ jest wtedy promieniem zbieżności szeregu, a wszystkie punkty wewnątrz koła o promieniu $r$ o środku w początku układu należą do zakresu zbieżności tego szeregu. Wiemy bowiem, że bezwzględną wartością liczby zespolonej:

$$z = x + iy$$

jest:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Warunek więc $|z| < r$ ma dla takich liczb postać:

$$\sqrt{x^2 + y^2} < r$$

czyli:

$$x^2 + y^2 < r^2$$

a to znaczy, że te punkty $z$ leżą wewnątrz *koła* o promieniu $r$. Dla rozmaitych liczb, spełniających równanie $|z| = r$, tj. leżących na okręgu tego koła, może być szereg zbieżny lub rozbieżny.

We wszystkich tych przypadkach możemy mówić o *kole zbieżności* (degenerującym się do jednego punktu w przypadku $r = 0$, a zamieniającym się na całą płaszczyznę w przypadku $r = +\infty$, tj. w przypadku bezustannej zbieżności).

*Zakresem zbieżności szeregu potęgowego jest zatem zawsze jakieś koło o środku w początku układu*, przy czym punkty, leżące na samym okręgu, mogą być punktami zbieżności lub rozbieżności.

Teraz dopiero nabiera pełnego znaczenia nazwa: „promień zbieżności“ dla liczby $r$.

Rozważania te odnoszą się także do szeregów potęgowych w otoczeniu dowolnego punktu, różnego od $z = 0$, tj. do szeregu:

$$b_0 + b_1(z - z_1) + b_2(z - z_1)^2 + \ldots + b_n(z - z_1)^n + \ldots$$

należącego do otoczenia punktu $z_1 \neq 0$. Środkiem koła zbieżności jest dla tego szeregu punkt, odpowiadający liczbie zespolonej $z_1$.

Szereg potęgowy przedstawia funkcję zmiennej zespolonej, której zakresem istnienia jest wnętrze koła zbieżności, a czasem także niektóre lub wszystkie punkty, leżące na okręgu tego koła. Jest ona wewnątrz tego koła *ciągła i różniczkowalna* nieskończenie wiele razy, a pochodną otrzymuje się, różniczkując szereg potęgowy wyraz po wyrazie. Funkcja ta posiada także *całkę nieoznaczoną*. Okazano, że także całka *krzywoliniowa* (która występuje w tym wypadku zamiast całki oznaczonej) istnieje i jest *niezależna od drogi całkowania*, jeżeli ta droga leży całkowicie wewnątrz koła zbieżności. Zarówno całkę nieoznaczoną jak i całkę krzywoliniową (w przypadku, gdy droga całkowania leży wewnątrz koła zbieżności) otrzymuje się, całkując szereg potęgowy wyraz po wyrazie.

Funkcje, określone przez szeregi potęgowe, są więc wewnątrz koła zbieżności bardzo regularne: można nimi rachować podobnie jak wielomianami. *Funkcję, przedstawioną przez szereg potęgowy wewnątrz koła zbieżności, nazywamy* ***funkcją analityczną*** *w tym obszarze.*

Do funkcyj analitycznych (w pewnym obszarze) należą wszystkie funkcje elementarne i wiele innych funkcyj przestępnych. Używając szeregów potęgowych, na które dadzą się te funkcje rozwinąć, możemy rozszerzyć definicje znanych funkcyj elementarnych zmiennej rzeczywistej na funkcje *zmiennej zespolonej* i badać ich własności w tym rozszerzonym zakresie. Wykrywamy w ten sposób nieraz nowe, bardzo interesujące związki, zachodzące między funkcjami elementarnymi i dopiero z tego ogólnego punktu widzenia uzyskujemy zupełne zrozumienie ich natury.

Zastosujemy tę metodę badania do funkcji wykładniczej $e^x$. Funkcja ta da się, jak wiemy, przedstawić szeregiem potęgowym:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=e^x$$

Zbadajmy ten szereg potęgowy dla *zespolonej* zmiennej $z$, a mianowicie szereg:

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

Jest on bezustannie zbieżny, tak samo jak szereg potęgowy funkcji $e^x$. Określa więc jakąś funkcję w całej płaszczyźnie. Oznaczmy tę funkcję także i teraz symbolem $e^z$, a więc:

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z \tag{22}$$

Możemy to uczynić, ponieważ symbol $e^z$ nie miał dotychczas dla nas żadnego znaczenia, gdy $z$ nie było liczbą rzeczywistą a dla $z$ rzeczywistych, np. $z=x$, szereg ten istotnie przedstawia funkcję wykładniczą $e^x$. Nadaliśmy w ten sposób ściśle określone znaczenie potęgowaniu liczby $e$ przez wykładnik zespolony. Tak samo dla każdej innej dodatniej liczby $a$ możemy teraz definiować potęgowanie przez dowolny wykładnik, rzeczywisty lub zespolony, przedstawiając to $a$ w postaci:

$$a=e^{\log_e a}$$

i kładąc:

$$\boxed{a^z=e^{z\log_e a}} \tag{23}$$

W ten sposób nadaliśmy sens takiemu np. wyrażeniu, jak: $3^{\sqrt{-1}}$ czyli $3^i$; jest to mianowicie liczba zespolona $e^{i\log 3}$, przedstawiona następującym zbieżnym szeregiem:

$$1+\frac{i\log 3}{1!}+\frac{i^2\log^2 3}{2!}+\frac{i^3\log^3 3}{3!}+\ldots=3^i$$

Otrzymaliśmy w ten sposób potęgi nowego rodzaju. Zachodzi pytanie, czy do tych nowych potęg stosują się te same reguły rachunkowe, co do zwykłych potęg o wykładnikach rzeczywistych. Najważniejszą taką regułą jest mnożenie potęg o równych zasadach:

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$$

Zbadajmy, czy podobna reguła stosuje się do iloczynu potęg: $e^{z_1}\cdot e^{z_2}$ o wykładnikach zespolonych.

Otóż według definicji takich potęg, jest:

$$e^{z_1} = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots$$

$$e^{z_2} = 1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots$$

Stąd:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = (1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots) \cdot (1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots)$$

Wykonujemy mnożenie tych szeregów potęgowych, grupując iloczyny składowe według stopni wyrazów, zawierających potęgi liczb $z_1$ i $z_2$ i otrzymujemy:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + \frac{1}{1!}(z_1 + z_2) + \frac{1}{2!}(z_1^2 + 2 z_1 z_2 + z_2^2) +$$

$$+ \frac{1}{3!}(z + 3 z_1^2 z_2 + 3 z_1 z_2^2 + z_2^3) + \dots$$

Zatem:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = 1 + \frac{1}{1!}(z_1 + z_2) + \frac{1}{2!}(z_1 + z_2)^2 + \frac{1}{3!}(z_1 + z_2)^3 + \dots$$

W myśl wzoru (22) przedstawia szereg po prawej stronie wartość funkcji wykładniczej dla $z = z_1 + z_2$, tj. $e^{z_1+z_2}$.

A więc:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

Reguła mnożenia potęg o zasadzie $e$ a o wykładnikach zespolonych jest więc taka sama, jak dla wykładników rzeczywistych.

Reguła ta utrzymuje się także w mocy dla potęg o dowolnej dodatniej zasadzie $a$.

Z tej reguły wyprowadza się inne reguły potęgowania. Istnieją jednak także inne związki pomiędzy potęgami, niespotykane w zakresie zmiennej rzeczywistej. I tak zbadajmy funkcję wykładniczą dla czysto urojonych wykładników, np. dla $z = iy$, przy czym $y$ jest liczbą rzeczywistą. Otrzymujemy:

$$e^{iy} = 1 + i\frac{y}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right)$$

Szeregi, zawarte w nawiasach, przedstawiają rozwinięcia funkcyj $\cos y$ i $\sin y$, a zatem:

(24) $$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$

Wzór ten jest bardzo dogodny do obliczania potęg o wykładniku urojonym, nie trzeba bowiem używać nieskończonych szeregów, a wystarczą tablice funkcyj trygonometrycznych. Tak np. wartość potęgi $3^i = e^{i \log 3} = \cos(\log 3) + i \sin(\log 3)$, a to można obliczyć przy pomocy tablic.

Bezwzględna wartość każdej potęgi liczby $e$ o czysto urojonym wykładniku jest równa 1, albowiem:

$$|e^{xi}| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

Wszystkie zatem punkty płaszczyzny liczbowej, odpowiadające urojonym potęgom liczby $e$, leżą na okręgu koła o promieniu 1.

Możemy teraz obliczyć bez użycia szeregu potęgowego także potęgę liczby $e$ o wykładniku zespolonym: $z = x + iy$, a mianowicie:

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)} \tag{25}$$

Z tego wzoru wyprowadza się bardzo ważny a nieoczekiwany wniosek. I tak wartość prawej strony nie zmieni się, gdy za $y$ podstawimy $y + 2\pi$, $y + 4\pi$, ogólnie $y + 2k\pi$ o całkowitym $k$, ponieważ liczba $2\pi$ jest periodem funkcyj $\sin y$ i $\cos y$. Wobec tego także lewa strona wzoru (25) nie zmieni wartości, gdy za $y$ podstawimy $y + 2k\pi$, a więc:

$$e^z = e^{x+iy} = e^{x+i(y+2k\pi)} = e^{x+iy+2k\pi i} = e^{x+2k\pi i}$$

Zatem:

$$\boxed{e^{z+2k\pi i} = e^z} \tag{26}$$

Wzór ten dowodzi, że funkcja wykładnicza $e^z$ jest funkcją *periodyczną*, a mianowicie posiada czysto urojony period $2k\pi i$.

Kładąc w tym wzorze $z = 0$ a $k = 1$, otrzymujemy następujący związek pomiędzy liczbami $e, \pi, i$, tak ważnymi w analizie matematycznej:

$$\boxed{e^{2\pi i} = 1} \tag{27}$$

Na uwagę zasługują też następujące specjalne przypadki wzoru (24):

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = +i$$

$$e^{\frac{-\pi i}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - i \cdot 1 = -i$$

Używając wzoru (24), możemy uzyskać bardzo proste związki między funkcjami trygonometrycznymi zmiennej rzeczywistej, a funkcją wykładniczą zmiennej urojonej. I tak:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x$$

$$e^{xi} + e^{-xi} = 2 \cos x$$

$$e^{xi} - e^{-xi} = 2i \sin x$$

Stąd wynikają następujące wzory Eulera:

(28) $$\boxed{\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi})}$$

(28 a) $$\boxed{\sin x = \frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi})}$$

Tych wzorów można użyć z pożytkiem przy całkowaniu dodatnich całkowitych parzystych potęg funkcyj $\sin x$ i $\cos x$.

Podstawia się mianowicie zamiast $\sin^{2n} x$ lub $\cos^{2n} x$ wyrażenia $\frac{1}{2^{2n}}(e^{xi} + e^{-xi})^{2n}$ lub $\frac{1}{(2i)^{2n}}(e^{xi} - e^{-xi})^{2n}$ i rozwija się potęgi dwumianów według wzoru Newtona. Otrzymujemy w ten sposób zamiast skomplikowanych wzorów redukcyjnych, służących do obliczania całek z funkcyj $\sin^{2n} x$, $\cos^{2n} x$, całkę z sumy potęg postaci $e^{kxi}$, które całkujemy odrazu, a mianowicie $\int e^{kxi} dx = \frac{1}{ki} e^{kxi}$. Po wykonaniu całkowania zbieramy razem odpowiednie pary $e^{kxi}$, $e^{-kxi}$ i zastępujemy je funkcjami $\cos kx$ lub $\sin kx$.

Z wzoru (24) wyprowadzimy bardzo ważny wzór Moivre'a. Podnieśmy obie strony wzoru (24) do potęgi $m$, to otrzymamy:

$$(e^{xi})^m = e^{mxi} = (\cos x + i \sin x)^m$$

ale $e^{mxi} = \cos mx + i \sin mx$, a zatem:

(29) $$\boxed{(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx}$$

Wzór ten ma bardzo liczne zastosowania w algebrze i w analizie.

Wykonując po lewej stronie potęgowanie i porównując ze sobą części rzeczywiste i czysto urojone, można otrzymać wzory, wyrażające $\cos mx$ i $\sin mx$ za pomocą potęg funkcyj $\sin x$ i $\cos x$. Chcąc zaś uzyskać przeciwnie, wyrażenie potęg funkcyj $\sin x$ i $\cos x$ za pomocą sinusów i cosinusów wielokrotności kąta $x$, podnosimy obie strony wzorów Eulera do $m$-tej potęgi. W ten sposób otrzymamy:

$$2^m \cos^m x = (e^{xi} + e^{-xi})^m =$$

$$= e^{mxi} + m e^{(m-2)xi} + \binom{m}{2} e^{(m-4)xi} + \ldots + m e^{-(m-2)xi} + e^{-mxi}$$

Zbierając tu razem po dwa odpowiednie wyrazy od początku i końca, otrzymujemy znowu na podstawie wzoru Eulera:

$$(30)\quad \begin{aligned} 2^m \cos^m x &= 2\cos mx + 2\binom{m}{1}\cos(m-2)x + \ldots + 2\binom{m}{\frac{m-1}{2}}\cos x \\ &\qquad\qquad \text{dla nieparzystych } m \\ &= 2\cos mx + 2\binom{m}{1}\cos(m-2)x + \ldots + \binom{m}{\frac{m}{2}} \quad \text{dla parzystych } m \end{aligned}$$

Kładąc tu $\frac{\pi}{2} + x$ zamiast $x$, otrzymujemy po wykonaniu rachunków:

$$(30\,a)\quad \begin{aligned} 2^m \sin^m x &= (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot 2\left[\cos mx - \binom{m}{1}\cos(m-2)x + \right. \\ &\left. + \binom{m}{2}\cos(m-4)x + \ldots + \tfrac{1}{2}(-1)^{\frac{m}{2}}\binom{m}{\frac{m}{2}}\right] \text{ dla parzystych } m \\ &= (-1)^{\frac{m+1}{2}} \cdot 2\left[\sin mx - \binom{m}{1}\sin(m-2)x + \binom{m}{2}\sin(m-4)x + \right. \\ &\left. + \ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\binom{m}{\frac{m-1}{2}}\sin x\right] \text{ dla nieparzystych } m \end{aligned}$$

Te wzory bywają stosowane w rachunku całkowym przy obliczaniu całek z potęg funkcyj $\sin x$ i $\cos x$ dla wykładników parzystych naturalnych. Przy pomocy tej rozszerzonej definicji funkcji wykładniczej można uzupełnić pewną lukę w matematyce elementarnej. Określa się mianowicie w matematyce elementarnej tylko logarytmy liczb dodatnich. Obecnie możemy rozszerzyć tę definicję także na liczby ujemne i ogólnie na dowolne liczby zespolone. Trzymamy się mianowicie ciągle tej samej zasadniczej definicji, a mianowicie: logarytm jest to funkcja odwrotna względem funkcji wykładniczej. Jeżeli więc: $z = e^w$, to: $w = \log_e z$. Jeżeli $z = x + iy$, to $w$ jest na ogół także liczbą zespoloną: $w = u + iv$. Chodzi więc o wyznaczenie rzeczywistych liczb $u$, $v$ z warunku:

$$x + iy = e^{u+iv}$$

Na podstawie wzoru (25) otrzymujemy:

$$x + iy = e^u(\cos v + i \sin v)$$

Lewą stronę można także wyrazić za pomocą funkcyj trygometrycznych, używając na płaszczyźnie liczbowej współrzędnych biegunowych zamiast prostokątnych, a mianowicie kładąc $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, przy czym $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$. Wobec tego powyższy wzór przyjmie postać:

$$r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = e^u(\cos v + i\sin v)$$

Liczby zespolone, stojące po obu stronach tej równości, muszą mieć równe wartości bezwzględne, a argumenty (kąty) równe lub różniące się tylko o wielokrotność liczby $2\pi$. A więc:

$$e^u = r, \quad v = \vartheta + 2k\pi$$

Stąd $u = \log_e r$. Wyznaczyliśmy zatem szukaną parę liczb: $u, v$. Wobec tego:

$$w = \log_e z = u + iv = \log_e r + i(\vartheta + 2k\pi)$$

czyli:

$$\log_e (x + iy) = \log_e \sqrt{x^2 + y^2} + i\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + 2k\pi\right) \tag{31}$$

Widzimy zatem, że logarytm *każdej* liczby, nawet dodatniej, jest funkcją nieskończenie wielowartościową, można bowiem w tym wzorze podstawiać za $k$ liczby: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Pochodzi to z periodyczności funkcji $e^w$. Dla $k = 0$ otrzymujemy liczbę, zwaną *wartością główną* logarytmu.

*Przykłady.*

1) Dla $z = 1$ jest $r = 1$, $\vartheta = 0$, a więc:

$$\log_e 1 = 0 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i$$

przy czym $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Wartością główną jest liczba 0. Potęgując zasadę $e$ przez każdą z tych liczb, otrzymamy zawsze na wynik liczbę 1.

Dla logarytmu o zasadzie 10 otrzymujemy tu także nieskończenie wiele wartości, albowiem:

$$\log_{10} 1 = \log_{10} e \cdot \log_e 1 = 0{\cdot}43429\ldots \cdot 2k\pi i$$

2) Weźmy $z = -10$. Wtedy $|z| = 10$, $\vartheta = \pi$ (por. fig. 5). Obliczmy $\log_{10}(-10)$.

Z wzoru (31) otrzymujemy:

$$\log_e(-10) = \log_e 10 + i(\pi + 2k\pi)$$

Stąd zaś wynika, że:

$$\log_{10}(-10) = \log_{10} e(\log_e 10 + i(\pi + 2k\pi)) = 1 + 0{\cdot}43429\ldots \pi i(2k + 1)$$

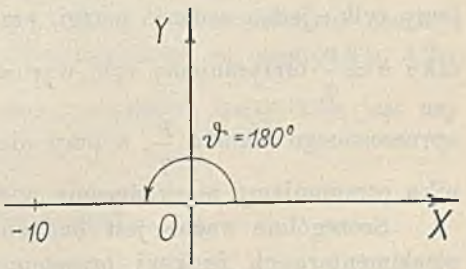


Fig. 5.

Główną wartością tego logarytmu (tj. dla $k = 0$) jest zatem liczba zespolona:

$$\log_{10}(-10) = 1 + 0{\cdot}43429\ldots \pi i$$

Wszystkie inne wartości są także zespolone.

3) Obliczmy $\log_e i$. Ponieważ $z = i$, $|z| = 1$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, przeto:

$$\log_e i = \log_e 1 + i(\tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi) = \tfrac{1}{2}\pi i + 2k\pi i$$

Wartością główną jest:

$$\log_e i = \tfrac{1}{2}\pi i$$

Wprowadziwszy tę ogólną definicję logarytmu, możemy teraz uogólnić definicję potęgi na dowolne zasady (dotychczas bowiem rozważaliśmy tylko potęgi o dodatnich zasadach). Wychodzimy z wzoru: $a = e^{\log_e a}$, którego używaliśmy dotychczas tylko dla dodatnich liczb $a$. Obecnie ma ten wzór ściśle określone znaczenie także dla dowolnych zespolonych $a$. Potęgę $a^b$ o dowolnej zasadzie $a$ określamy zatem za pomocą wzoru:

$$a^b = e^{b \log_e a}$$

Jeżeli więc $a = x + iy$, $b = u + iv$, to:

$$(x + iy)^{u+iv} = e^{(u+vi)\log_e(x+iy)}$$

Potęga ta jest w ogólności wielowartościowa, ponieważ $\log_e(x + iy)$ jest wielowartościowy.

Tak np.:

$$i^i = e^{i \log_e i} = e^{i(\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i)} = e^{-(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi)}$$

Dla $k = 0$ otrzymujemy wartość główną:

$$i^i = e^{-\frac{1}{2}\pi}$$

a więc otrzymaliśmy na wynik liczbę rzeczywistą. Także dla innych $k$ otrzymujemy wartości rzeczywiste.

Łatwo można okazać, że przy całkowitym wykładniku $b$ otrzymujemy tylko jedną wartość potęgi, przy ułamkowym wymiernym wykładniku $b = \frac{p}{q}$ otrzymujemy tyle wartości, ile jednostek zawiera mianownik uproszczonego ułamka $\frac{p}{q}$, a przy niewymiernym lub urojonym wykładniku otrzymujemy nieskończenie wiele wartości

Szczególnie ważne jest badanie za pomocą szeregów potęgowych nieelementarnych funkcyj przestępnych, jak np. funkcyj eliptycznych. Teoria funkcyj analitycznych zmiennej zespolonej jest jednym z najobszerniejszych i najdokładniej opracowanych działów matematyki wyższej. Znalazły one bardzo rozległe zastosowanie w rozmaitych działach techniki (np. w elektrotechnice, aerodynamice, geodezji). W polskiej literaturze posiadamy do tego przedmiotu tylko jeden, przestarzały już dzisiaj, podręcznik J. Puzyny p. t. *Teoria funkcyj analitycznych* (2 tomy, Lwów

1898—1900). Natomiast obca literatura obfituje w znakomite podręczniki z tego zakresu. Wymienimy tu tylko następujące, bardzo rozpowszechnione podręczniki: K. Knopp, *Funktionentheorie* (2 tomy, Sammlung Göschen, wyd. 2, 1918, 1920 r.) i A. Hurwitz-R. Courant, *Funktionentheorie* (Berlin, wyd. 2, 1925 r.).

## Ustęp IV

## SZEREGI FOURIERA

### § 291. Interpolacja trygonometryczna

Obok szeregów potęgowych odgrywają bardzo ważną rolę w matematyce czystej i stosowanej szeregi funkcyjne, zbudowane z funkcyj trygonometrycznych, a mianowicie szeregi postaci:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \\ &+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots = \tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\end{aligned} \tag{32}$$

Szeregi takie, zwane *szeregami trygonometrycznymi*, nadają się bardzo dobrze do ujmowania we wzory matematyczne zjawisk periodycznych.

Naukę o szeregach trygonometrycznych nawiążemy do *interpolacji trygonometrycznej*, tj. do przedstawiania szukanej funkcji w przybliżeniu za pomocą skończonej sumy postaci:

$$\begin{aligned}T_{2r+1}(x) = y = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \\ +\ldots+a_r\cos rx + b_r\sin rx\end{aligned} \tag{33}$$

zwanej *wielomianem trygonometrycznym*. Wzór ten przedstawia funkcję periodyczną. Periodami poszczególnych dodajników są liczby $2\pi$, $\frac{1}{2}2\pi$, $\frac{1}{3}2\pi,\ldots,\frac{1}{r}2\pi$, wspólnym zaś periodem wszystkich dodajników jest największa z tych liczb, tj. $2\pi$, a zatem:

$$y(x+2\pi) = y(x)$$

Taki wielomian nadaje się dobrze do aproksymowania funkcji $g(x)$ o periodzie $2\pi$, określonej dla wszystkich $x$. Jeżeli zaś chodzi o aproksymowanie funkcji $f(x)$ o innym periodzie $p$, to trzeba tylko zamiast $x$ wprowadzić nową zmienną $x'$, związaną ze zmienną $x$ za pomocą proporcji:

$$x : x' = p : 2\pi$$

Stąd:

$$x = \frac{p x'}{2\pi}$$

Gdy $x'$ zmienia się od 0 do $2\pi$, to $x$ zmienia się od 0 do $p$. Do aproksymacji funkcji:

$$f(x) = f\left(\frac{p x'}{2\pi}\right) = g(x')$$

należy zastosować wzór (33), tj. zastąpić ją w przybliżeniu wielomianem trygonometrycznym:

$$y = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x' + b_1 \sin x' + a_2 \cos 2x' + b_2 \sin 2x' + \\ + \ldots + a_r \cos r x' + b_r \sin r x'$$

czyli:

$$y = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi x}{p} + b_1 \sin \frac{2\pi x}{p} + a_2 \cos 2\frac{2\pi x}{p} + \\ + b_2 \sin 2\frac{2\pi x}{p} + \ldots + a_r \cos r\frac{2\pi x}{p} + b_r \sin r\frac{2\pi x}{p} \tag{34}$$

Wzór (33) lub (34) jest matematycznym ujęciem *superpozycji* skończonej liczby drgań harmonicznych. Mając bowiem daną funkcję:

$$y = f_r(t) = c_0 + c_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + c_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \ldots + c_r \sin(r\omega t + \alpha_r)$$

której dodajniki przedstawiają drgania harmoniczne o amplitudach $c_1$, $c_2, \ldots, c_r$, o periodach $p_1 = \frac{2\pi}{\omega}, p_2 = 2\frac{2\pi}{\omega}, \ldots, p_r = r \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ i o fazach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, możemy ją sprowadzić do postaci, wyrażonej wzorem (33). Kładziemy w tym celu: $\omega t = x$, a $\sin(k\omega t + \alpha_k) = \sin k\omega t \cdot \cos\alpha_k + \\ + \cos k\omega t \cdot \sin\alpha_k$. Oznaczając:

$$\tfrac{1}{2} a_0 = c_0, \quad a_k = c_k \sin\alpha_k, \quad b_k = c_k \cos\alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

otrzymujemy wzór (33).

Dowolna funkcja periodyczna $f(x)$ da się w ogólności tylko *w przybliżeniu* przedstawić *skończonym* wielomianem trygonometrycznym. Zobaczymy natomiast, że wszystkie, w zastosowaniach spotykane funkcje periodyczne, dadzą się przedstawić *ściśle nieskończonymi* szeregami trygonometrycznymi.

Rozpoczniemy od przybliżonego przedstawienia funkcyj wielomianami trygonometrycznymi czyli od interpolacji trygonometrycznej.

Postawmy to zagadnienie interpolacji w następujący sposób. Chcemy aproksymować wielomianem trygonometrycznym funkcję $f(x)$, znając jej wartości $y_k$ w $n$ punktach. Nie żądamy jednak, aby ten wielomian przybierał w tych punktach *ściśle* wartości $y_k$, żądamy natomiast, aby suma

kwadratów błędów była możliwie najmniejsza, tj. chcemy zastosować do tego zagadnienia *metodę najmniejszych kwadratów* (por. tom I, str. 456 i § 158, str. 483).

Chcemy „wyrównać" szereg dowolnie podanych punktów za pomocą linji falowej, otrzymanej przez superpozycję kilku odpowiednio dobranych fal sinusowych. Taka forma interpolacji trygonometrycznej jest potrzebna wtedy, gdy chcemy zbiór, złożony z bardzo wielu punktów, aproksymować wielomianem trygonometrycznym, złożonym z niewielu wyrazów. Wtedy liczba danych jest większa od liczby współczynników $a_k$, $b_k$, problem jest więc nadmiernie wyznaczony: żądając, aby wielomian trygonometryczny przybierał w danych punktach ściśle żądane wartości, otrzymalibyśmy więcej równań aniżeli niewiadomych, nie dałyby się więc one rozwiązać. Możemy natomiast wyznaczyć te współczynniki metodą najmniejszych kwadratów.

Do aproksymacji funkcji $f(x)$, która dla:

$$x = 0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad 2\cdot\frac{2\pi}{n}, \quad 3\cdot\frac{2\pi}{n}, \ldots, (n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}$$

przybiera wartości:

$$f(x) = y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$$

użyjmy np. następującego wielomianu trygonometrycznego, złożonego z pięciu wyrazów:

$$y = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x$$

Jeżeli $n > 5$, to nie możemy żądać, aby ten wielomian przybierał ściśle dane wartości w danych punktach. Możemy natomiast wyznaczyć współczynniki tego wielomianu z warunku, aby suma kwadratów błędów była minimum, przy czym za błąd uważamy różnicę pomiędzy daną wartością funkcji a wartością tego wielomianu w każdym danym punkcie. Suma kwadratów tych błędów jest funkcją 5 zmiennych: $a_0$, $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ i ma postać:

$$F(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2) = \left(y_0 - \tfrac{1}{2}a_0 - a_1 - a_2\right)^2 +$$

$$+\left(y_1 - \tfrac{1}{2}a_0 - a_1\cos\frac{2\pi}{n} - a_2\cos 2\cdot\frac{2\pi}{n} - b_1\sin\frac{2\pi}{n} - b_2\sin 2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)^2 +$$

$$+\left(y_2 - \tfrac{1}{2}a_0 - a_1\cos 2\cdot\frac{2\pi}{n} - a_2\cos 2\left(2\cdot\frac{2\pi}{n}\right) - b_1\sin 2\cdot\frac{2\pi}{n} - b_2\sin 2\left(2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(y_{n-1} - \tfrac{1}{2}a_0 - a_1\cos(n-1)\frac{2\pi}{n} - a_2\cos(n-1)\left(2\cdot\frac{2\pi}{n}\right) -\right.$$

$$\left. - b_1\sin(n-1)\frac{2\pi}{n} - b_2\sin(n-1)\left(2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)^2$$

Wartości współczynników: $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2$, dla których ta funkcja przybiera minimum, wyznaczymy z warunków:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_1}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_1}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial b_2}=0$$

Otóż:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0}=-\tfrac{2}{2}(y_0-\tfrac{1}{2}a_0-a_1-a_2)-$$
$$-\tfrac{2}{2}\left(y_1-\tfrac{1}{2}a_0-a_1\cos\frac{2\pi}{n}-a_2\cos 2\frac{2\pi}{n}-\ldots\right)-\ldots=0$$

Stąd:

$$y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}-n\frac{a_0}{2}-a_1\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos 2\cdot\frac{2\pi}{n}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\cos(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+a_2\left(1+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos 2\cdot\frac{4\pi}{n}+\right.$$
$$\left.+\ldots+\cos(n-1)\cdot\frac{4\pi}{n}\right)+b_1\left(\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots\right)+b_2\left(\sin\frac{4\pi}{n}+\ldots\right)=0$$

Wyrażenia, zawarte w nawiasach, są, jak łatwo dowieść, zerami. Otrzymujemy więc:

$$a_0=\frac{2}{n}(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k$$

W zupełnie podobny sposób otrzymamy z pozostałych warunków na ekstremum funkcji $F$ następujące wzory na dalsze współczynniki:

$$a_1=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k\cos\left(\frac{k}{n}\cdot 2\pi\right), \quad a_2=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k\cos\left(2\cdot\frac{k}{n}\cdot 2\pi\right)$$
$$b_1=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k\sin\left(\frac{k}{n}\cdot 2\pi\right), \quad b_2=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k\sin\left(2\cdot\frac{k}{n}\cdot 2\pi\right)$$

Ogólnie, gdyby wielomian trygonometryczny zawierał więcej dodajników, otrzymalibyśmy na współczynniki $a_p$ i $b_p$ wzory ogólne:

$$(35)\qquad \boxed{a_p=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k\cos\left(p\cdot\frac{k}{n}\cdot 2\pi\right), \quad b_p=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k\sin\left(p\cdot\frac{k}{n}\cdot 2\pi\right)}$$

Dalszym zagadnieniem interpolacyjnym jest aproksymowanie funkcji $f(x)$, podanej dla *wszystkich punktów* przedziału $\langle 0, 2\pi\rangle$, metodą najmniejszych kwadratów, przy użyciu błędu średniego. Żądamy mianowicie, aby całka z kwadratu błędu: $f(x)-T_n(x)$ była minimum, przy czym $T_n(x)$

oznacza wielomian trygonometryczny. Używając np. wielomianu trygonometrycznego, złożonego z 5-ciu początkowych wyrazów (jak w poprzednim zagadnieniu), szukamy minimum całki:

$$I = \int_0^{2\pi} (f(x) - T_5(x))^2 \, dx$$

czyli całki:

$$I = \int_0^{2\pi} [f(x) - \tfrac{1}{2} a_0 - a_1 \cos x - a_2 \cos 2x - b_1 \sin x - b_2 \sin 2x]^2 \, dx$$

Tworzymy pochodne cząstkowe tej całki według parametrów $a_0$, $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ (różniczkując pod znakiem całki) i przyrównujemy je do zera.

I tak:

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = \int_0^{2\pi} 2 (f(x) - T_5(x)) \frac{\partial T_5(x)}{\partial a_0} \, dx = 0$$

Ponieważ $\frac{\partial T_5(x)}{\partial a_0} = -\frac{1}{2}$, przeto otrzymujemy stąd:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \, dx = \int_0^{2\pi} T_5(x) \, dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_0^{2\pi} + a_1 \int_0^{2\pi} \cos x \, dx + a_2 \int_0^{2\pi} \cos 2x \, dx +$$

$$+ b_1 \int_0^{2\pi} \sin x \, dx + b_2 \int_0^{2\pi} \sin 2x \, dx$$

Wszystkie całki po prawej stronie są równe zeru, pozostaje zatem:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \, dx = a_0 \pi$$

a stąd:

(36)
$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx}$$

Z warunku:

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = \int_0^{2\pi} 2 (f(x) - T_5(x)) \frac{\partial T_5(x)}{\partial a_1} \, dx = \int_0^{2\pi} 2 (f(x) - T_5(x)) (-\cos x) \, dx = 0$$

otrzymujemy po wykonaniu prostych rachunków:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx$$

Z pozostałych warunków na ekstrema otrzymujemy w podobny sposób wartości pozostałych współczynników. Dochodzimy w ten sposób do następujących wzorów ogólnych na te współczynniki:

(37)
$$\boxed{\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx \\ b_p &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\,dx \end{aligned}}$$

Wzory te, zwane wzorami Eulera-Fouriera, mają podstawowe znaczenie w teorii szeregów trygonometrycznych. Zobaczymy bowiem, że współczynniki *nieskończonych* szeregów trygonometrycznych, przedstawiających funkcje $f(x)$, wyrażają się tymi samymi wzorami.

*Uwaga.* Wzory te można otrzymać przez przejście do granicy we wzorach, służących do interpolacji skończonego szeregu wartości. I tak, kładąc we wzorze (35):

$$\frac{2\pi}{n} = \Delta x, \quad k\cdot\frac{2\pi}{n} = x_k \quad \text{i} \quad y_k = f(x_k)$$

możemy przedstawić wzór (35) na $a_p$ w postaci:

$$a_p = \frac{\Delta x}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cos px_k = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\cos px_k\,\Delta x$$

Z tej postaci jest widoczne, że gdy $n \to \infty$, czyli $\Delta x \to 0$, to prawa strona tego wzoru dąży do $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx$.

Wprowadzając te współczynniki w wielomian trygonometryczny, możemy obliczyć średni kwadrat błędu, który popełniamy, używając tej aproksymacji, najlepszej w sensie metody najmniejszych kwadratów. Ten średni kwadrat błędu przedstawia całka:

$$I = \int_0^{2\pi}(f(x)-y)^2\,dx = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - 2\int_0^{2\pi} f(x)\,y\,dx + \int_0^{2\pi} y^2\,dx$$

Po wykonaniu rachunków otrzymamy dla $T_{2r+1}$:

(38) $$I = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - \pi\left(\tfrac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_r^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_r^2\right)$$

Ponieważ $I$ jako całka z nieujemnej funkcji $(f(x) - y)^2$ jest nieujemna, przeto zawsze, gdy $a_p$ i $b_p$ są obliczone z wzorów Eulera-Fouriera, spełnia się nierówność:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_r^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_r^2 \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx \tag{39}$$

Przedstawienie periodycznej funkcji $f(x)$ w przybliżeniu za pomocą wielomianu trygonometrycznego:

$$y = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \\ + \ldots + a_r\cos rx + b_r\sin rx$$

którego współczynniki są obliczone z wzorów Eulera Fouriera, nazywamy przybliżoną *analizą harmoniczną* funkcji $f(x)$. W teorii drgań odpowiada temu zastąpienie skomplikowanego drgania drganiem zasadniczym i skończoną liczbą drgań górnych.

*Uwaga.* Zagadnienie to jest tak ważne w zastosowaniach, że obmyślono rozmaite przybliżone rachunkowe metody wykonywania analizy harmonicznej i zbudowano wiele rozmaitych przyrządów, zwanych *analizatorami harmonicznymi*, które pozwalają rozwiązać to zagadnienie w sposób mechaniczny (zob. Runge-König, l. c. str. 211—31; A. Galle, *Mathematische Instrumente* (Lipsk, 1912, rozdział VIII, str. 131—54); A. Willers, *Methoden der praktischen Analysis* (Berlin, 1928, str. 269 i nast.)).

We wzorach (37) można zmienić przedział całkowania $\langle 0, 2\pi\rangle$ na dowolny inny przedział o tej samej długości, tzn. na $\langle c, c + 2\pi\rangle$. Często obiera się $c = -\pi$ i otrzymuje się przedział $\langle -\pi, +\pi\rangle$. Wtedy wzory (37) przyjmują postać:

$$\boxed{\begin{aligned} a_p &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos px\,dx \\ b_p &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin px\,dx \end{aligned}} \tag{40}$$

*Uwaga.* Chcąc dowieść, że przedział całkowania $\langle 0, 2\pi\rangle$ można zastąpić przedziałem $\langle c, c + 2\pi\rangle$, rozkładamy całkę od $c$ do $c + 2\pi$ na dwie całki:

$$\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos px\,dx = \frac{1}{\pi}\int_c^{2\pi} f(x)\cos px\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{2\pi}^{c+2\pi} f(x)\cos px\,dx$$

Wprowadzając w drugą całkę nową zmienną za pomocą podstawienia: $x = z + 2\pi$, zamieniamy ją na całkę z tej samej funkcji w granicach od 0 do $c$. Albowiem wskutek periodyczności $f(z + 2\pi) = f(z)$ a $\cos(pz + p2\pi) = \cos pz$.

Otrzymujemy więc:

$$\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi} f(x)\cos px\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{c}^{2\pi} f(x)\cos px\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{c} f(z)\cos pz\,dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos px dx$$

## § 292. Szeregi Fouriera

W poprzednim paragrafie zajmowaliśmy się *przybliżaniem* funkcyj periodycznych za pomocą *skończonych* wielomianów trygonometrycznych. Przejdziemy obecnie do ścisłego *przedstawiania* takich funkcyj za pomocą *nieskończonych* szeregów trygonometrycznych. Jeżeli taki szereg jest zbieżny, to przedstawia jakąś funkcję periodyczną $f(x)$ (o periodzie $2\pi$), a więc:

$$\tfrac{1}{2}a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + (a_2\cos 2x + b_2\sin 2x) + \ldots =$$

$$= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = f(x) \tag{41}$$

Przypuśćmy, że ten szereg jest *jednostajnie* zbieżny w przedziale $<0, 2\pi>$. Przedstawia on wtedy funkcję *ciągłą*, a całkę z tej funkcji można obliczyć, całkując szereg wyraz po wyrazie. Scałkujmy obie strony od 0 do $2\pi$, to otrzymamy:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}a_0 x\Big|_0^{2\pi} + a_1\int_0^{2\pi}\cos x\,dx + b_1\int_0^{2\pi}\sin x\,dx + a_2\int_0^{2\pi}\cos 2x\,dx +$$

$$+ b_2\int_0^{2\pi}\sin 2x\,dx + \ldots$$

Wszytkie całki po prawej stronie są zerami, zatem pozostaje:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = a_0\pi$$

a stąd:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

Wyznaczyliśmy w ten sposób pierwszy współczynnik w rozwinięciu funkcji $f(x)$ na szereg trygonometryczny. Aby wyznaczyć drugi współczynnik: $a_1$,

mnożymy obie strony wzoru (41) przez $\cos x$ i całkujemy od 0 do $2\pi$. Otrzymamy w ten sposób:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \tfrac{1}{2}a_0\int_0^{2\pi}\cos x\,dx + a_1\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx + b_1\int_0^{2\pi}\sin x\cos x\,dx +$$

$$+ a_2\int_0^{2\pi}\cos 2x\cos x\,dx + \ldots$$

Po prawej stronie wszystkie całki są równe 0 (por. tom II str. 83, przykład 2) prócz całki:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi$$

Wobec tego pozostaje po prawej stronie tylko $a_1\pi$, a zatem:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

Chcąc wyznaczyć ogólnie $a_p$, mnożymy obie strony wzoru (41) przez $\cos px$ i całkujemy od 0 do $2\pi$.

Wszystkie całki, występujące po prawej stronie, są zerami z wyjątkiem całki:

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 px\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2p}\sin 2px\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi$$

Wobec tego pozostaje tylko:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx = a_p\pi$$

a stąd:

(37 a)
$$\boxed{a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx}$$

Podobnie celem wyznaczenia współczynnika $b_p$ mnożymy obie strony wzoru (41) przez $\sin px$, całkujemy od 0 do $2\pi$ i obliczamy:

(37 b)
$$\boxed{b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\,dx}$$

Otrzymaliśmy zatem na współczynniki te same wzory Eulera-Fouriera, które występowały przy interpolacji trygometrycznej za pomocą skończonych wielomianów trygonometrycznych (str. 82, wzory (37)).

Aby istniały prawe strony wzorów (37), wystarczy, jeśli funkcja $f(x)$ jest *całkowalna.*

Szereg trygonometryczny, którego współczynniki są obliczone z jakiejkolwiek funkcji $f(x)$ (całkowalnej) przy pomocy wzorów Eulera-Fouriera, nazywamy **szeregiem Fouriera**, należącym do tej funkcji. Szereg ten może być nawet rozbieżny i może nie przedstawiać funkcji $f(x)$. Mówiąc, że ten szereg *należy* do danej funkcji, mamy na myśli tylko to, że jego współczynniki są obliczone przy pomocy funkcji $f(x)$. Wynik, do którego doszli, możemy więc wypowiedzieć w następujący sposób.

I) *Jeżeli jakaś funkcja da się rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg trygonometryczny, to szereg ten jest szeregiem Fouriera, należącym do tej funkcji.* Funkcja ta jest oczywiście ciągła (na podstawie twierdzenia udowodnionego w § 284). Jeżeli mamy podaną jakąś funkcję ciągłą $\varphi(x)$ i utworzymy należący do niej szereg Fouriera, to nawet wtedy, gdy ten szereg jest jednostajnie zbieżny do jakiejś funkcji $f(x)$, nie wiemy jeszcze z góry, czy $f(x) = \varphi(x)$. Otóż udowodniono następujące twierdzenie o jednoznaczności: jeżeli dwie funkcje $f(x), g(x)$ są ciągłe w jakimś punkcie $x = a$, a należące do nich szeregi Fouriera są identyczne, to musi być $f(a) = g(a)$; a więc ogólnie, gdy te funkcje są ciągłe dla wszystkich $x$, to musi być $f(x) = g(x)$. Dwie różne funkcje ciągłe posiadają zatem różne szeregi Fouriera (co nie zachodzi w przypadku funkcyj nieciągłych).

*Uwaga.* Dowód tego twierdzenia znaleźć można np. w podręczniku W. Rogosińskiego pt. *Fouriersche Reihen* (Sammlung Göschen, Nr. 1022, str. 13).

II) Stąd i z udowodnionego poprzednio twierdzenia wynika, że, *jeżeli szereg Fouriera, należący do funkcji ciągłej, jest jednostajnie zbieżny, to ten szereg przedstawia tę funkcję.*

Twierdzenie to nie rozstrzyga jednak jeszcze o tem, jakie warunki musi spełniać funkcja całkowalna, aby należący do niej szereg Fouriera był zbieżny (jednostajnie lub chociażby niejednostajnie) i aby ten zbieżny szereg przedstawiał tę funkcję.

Kwestie, dotyczące zbieżności szeregów Fouriera, należących do jakichś funkcyj, są w ogólnym przypadku zagadnieniami nadzwyczaj trudnymi i do dnia dzisiejszego nierozwiązanymi w całej ogólności. Zbadano natomiast rozmaite warunki *wystarczające* na to, aby szereg Fouriera, należący do jakiejś funkcji, był zbieżny i przedstawiał tę właśnie funkcję. Okazało się w ten sposób, że te wszystkie periodyczne funkcje (ciągłe a także nieciągłe), z którymi mamy do czynienia w technice, w fizyce i w innych zastosowaniach analizy matematycznej, dadzą się rozwinąć na

szeregi Fouriera z tym jedynym zastrzeżeniem, że w punktach nieciągłości, w których funkcja ma skok skończony, szereg Fouriera przedstawia zawsze średnią arytmetyczną z prawostronnej i lewostronnej granicy funkcji w tym punkcie. Takie *dostateczne* warunki zawiera np. następujące twierdzenie.

III) *Jeżeli funkcja $f(x)$ o periodzie $2\pi$ jest ciągła i posiada ciągłą pierwszą pochodną w przedziale $<0, 2\pi>$ z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, w których bądź to posiada skończone skoki, bądź to jest w nich ciągłą lecz nieróżniczkowalną, to szereg Fouriera, należący do tej funkcji, jest zbieżny i w przedziałach, nie zawierających skoków, przedstawia tę funkcję, a w każdym punkcie nieciągłości przybiera wartość równą średniej arytmetycznej z prawostronnej i lewostronnej granicy funkcji w tym punkcie.*

*Uwaga.* Dowód tego twierdzenia znaleźć można np. w podręczniku R. Couranta pt. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* (Berlin, 1930, wyd. 2, tom I, str. 368—378).

Teorią szeregów trygonometrycznych i szeregów Fouriera zajmowano się bardzo wiele. Obszerne rozdziały poświęcono tej teorii np. w cytowanych już podręcznikach de la Vallée Poussina (tom II), Knoppa, Couranta; prócz tego istnieje wiele dzieł specjalnych z tego działu analizy, jak np. cytowany powyżej zwięzły podręcznik Rogosińskiego lub dzieło H. Lebesgue'a pt. *Leçons sur le séries trigonometriques* (Paris 1906).

Klasa funkcyj, dających się przedstawić szeregami Fouriera, jest znacznie szersza, aniżeli klasa funkcyj, rozwijalnych na szeregi potęgowe (Taylora), funkcje te mogą być bowiem nieróżniczkowalne a nawet nieciągłe w pewnych punktach.

Zaznaczyliśmy już, że wymienione powyżej warunki są dostateczne, lecz niekonieczne. Tak np. podana przez Weierstrassa funkcja ciągła nie ma w żadnym punkcie pochodnej, a pomimo to przedstawia się ją za pomocą następującego szeregu Fouriera:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \tag{42}$$

(przy czym $0 < a < 1$, $b$ jest dodatnią liczbą całkowitą, a iloczyn $ab$ spełnia warunek: $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$).

Nie każda jednak funkcja ciągła daje się przedstawić szeregiem Fouriera, jak to wykazano za pomocą odpowiednich przykładów.

## § 293. Przykłady rozwinięć funkcyj na szereg Fouriera

1) Chcemy rozwinąć na szereg Fouriera funkcję o periodzie $2\pi$, określoną w przedziale $<0, 2\pi>$ za pomocą następujących wzorów:

$$\begin{aligned} f(x) &= x && \text{w przedziale} && <0, \tfrac{1}{2}\pi> \\ &= \pi - x && \text{„} && <\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi> \\ &= x - 2\pi && \text{„} && <\tfrac{3}{2}\pi, 2\pi> \end{aligned}$$

Z jej obrazu graficznego przedstawionego na fig. 6 widzimy, że jest to funkcja ciągła, nie posiadająca jednak pochodnej w punktach $x = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ Spełnia ona założenia twierdzenia III, a zatem da się

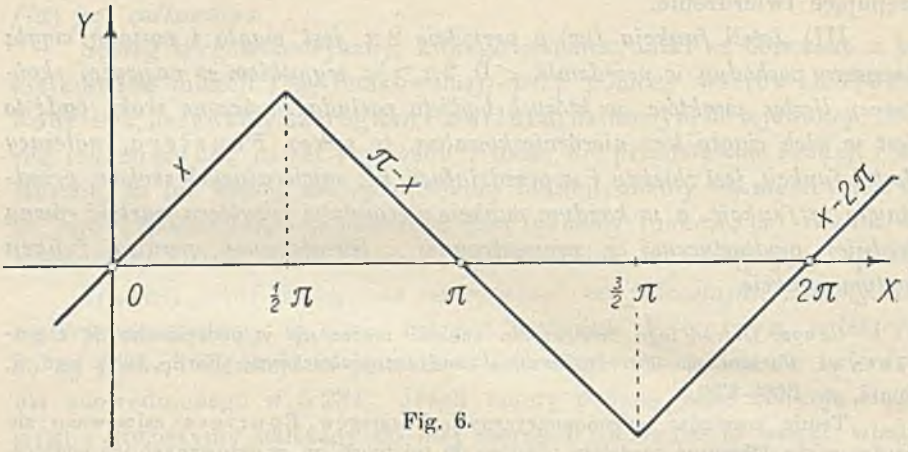


Fig. 6.

rozwinąć na szereg Fouriera. Chcąc obliczyć za pomocą wzorów Eulera-Fouriera współczynniki $a_p$, $b_p$ tego rozwinięcia, trzeba rozdzielić całki, figurujące w tych wzorach, na 3 dodajniki, odpowiadające przedziałom $<0, \frac{1}{2}\pi>$, $<\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi>$, $<\frac{3}{2}\pi, 2\pi>$, albowiem w każdym z tych przedziałów funkcja $f(x)$ jest określona innym wzorem. I tak:

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos px\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{1/2\pi} x\cos px\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{1/2\pi}^{3/2\pi}(\pi - x)\cos px\,dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{3/2\pi}^{2\pi}(x - 2\pi)\cos px\,dx$$

Nie trudno stwierdzić, że te całki są zerami dla każdego $p = 0, 1, 2, \ldots$ Na współczynniki zaś $b_p$ otrzymuje się wyrażenie:

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{1/2\pi} x\sin px\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{1/2\pi}^{3/2\pi}(\pi - x)\sin p\,x dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{3/2\pi}^{2\pi}(x - 2\pi)\sin px\,dx$$

Całkę:

$$I = \int x\sin px\,dx$$

obliczamy, całkując „per partes“ i otrzymujemy:

$$I = \frac{-x\cos px}{p} + \frac{\sin px}{p^2}$$

Zatem:

$$b_p = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos px}{p} + \frac{\sin px}{p^2}\right)\Bigg|_0^{1/3\pi} - \frac{\cos px}{p}\Bigg|_{1/2\pi}^{3/2\pi} - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos px}{p} + \frac{\sin px}{p^2}\right)\Bigg|_{1/2\pi}^{3/2\pi} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left(\frac{-x\cos px}{p} + \frac{\sin px}{p^2}\right)\Bigg|_{3/2\pi}^{2\pi} + \frac{2\cos px}{p}\Bigg|_{3/2\pi}^{2\pi}.$$

Stąd dla parzystych $p$ otrzymamy $b_p = 0$, a dla nieparzystych $p = 2r+1$ jest $b_p = (-1)^r \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{p^2}$, a więc:

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_3 = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3^2}, \quad b_5 = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5^2}, \ldots$$

Szereg Fouriera, należący do tej funkcji, ma zatem postać:

$$\frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \ldots\right)$$

Z twierdzenia III wiemy, że ten szereg *przedstawia* daną funkcję. Możnaby się także oprzeć na twierdzeniu II. W tym celu trzeba okazać, że ten szereg jest *jednostajnie* zbieżny. Otóż bezwzględne wartości wyrazów tego szeregu nie przekraczają wyrazów szeregu liczbowego:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

$\left(\text{albowiem } \left|\frac{\sin rx}{r^2}\right| \leqq \frac{1}{r^2}\right)$. Ten zaś szereg liczbowy jest zbieżny, jako część szeregu $\zeta(2)$. W myśl kryterium Weierstrassa jest zatem dany szereg Fouriera jednostajnie zbieżny. Funkcja $f(x)$ jest ciągła, a należący do niej szereg Fouriera jest jednostajnie zbieżny, a więc ten szereg przedstawia tę funkcję

Możemy zatem napisać:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{3^2}\sin 3x + \frac{1}{5^2}\sin 5x - \ldots\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\sin(2r+1)x}{(2r+1)^2}$$

Ujęliśmy w ten sposób w jeden wzór matematyczny, wspólny dla wszystkich $x$, funkcję, która była początkowo określona trzema różnymi wzorami w każdym z przedziałów $<k, k+2\pi>$, gdzie $k = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ Używając do aproksymacji tej funkcji kolejnych sum częściowych tego szeregu, widzimy, że funkcję tę można otrzymać przez super-

pozycję drgań sinusowych o coraz to mniejszych amplitudach (por. fig. 7), a mianowicie drgań:

$$u_1 = \frac{4}{\pi}\sin x \approx 1{\cdot}27 \sin x$$

$$u_2 = -\frac{4}{9\pi}\sin 3x \approx -0{\cdot}14 \sin 3x$$

$$u_3 = \frac{4}{25\pi}\sin 5x \approx 0{\cdot}05 \sin 5x$$

. . . . . .

Drganie przedstawione tą funkcją ma zatem ton zasadniczy $\sin x$ o amplitudzie $\frac{4}{\pi}$ i tony górne $\sin 3x$, $\sin 5x$,... o amplitudach $\frac{4}{9\pi}$, $\frac{4}{25\pi}$,...

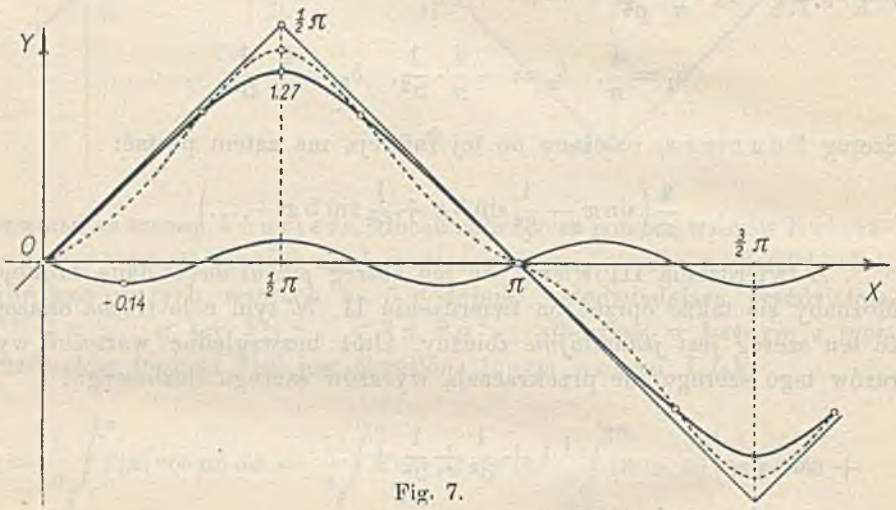


Fig. 7.

Szereg Fouriera podaje dokładną *analizę harmoniczną* (nieskończoną) danej funkcji. Funkcja ta jest nieparzystą, jak widać z środkowej symetrii jej obrazu, a także jej szereg Fouriera składa się z samych nieparzystych funkcyj, a mianowicie z samych sinusów.

*Uwaga.* Łatwo dowieść ogólnie, że szereg Fouriera, należący do dowolnej (całkowalnej) funkcji nieparzystej, składa się z samych sinusów, a funkcji parzystej z samych cosinusów. Wynika to stąd, że np. dla funkcji parzystej jest:

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin px\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin px\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\sin px\,dx = 0$$

Druga bowiem całka przechodzi przez wprowadzenie nowej zmiennej $z$, za pomocą wzoru: $x = 2\pi - z$, na całkę $-\int_0^{\pi} f(z)\sin pz\,dz$, a więc równą przeciwnej wartości pierwszej całki.

2) Rozwinąć na szereg Fouriera funkcję periodyczną o periodzie $2\pi$, określoną w przedziale $<-\pi, +\pi>$ wzorem $f(x) = x^2$. Wykres tej funkcji składa się z łuku paraboli o równaniu $y = x^2$, zawartego pomiędzy $x = -\pi$ a $x = +\pi$ i z łuków, otrzymanych przez przesunięcia tego łuku o $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$,... (zob. fig. 8). Funkcja ta spełnia założenia

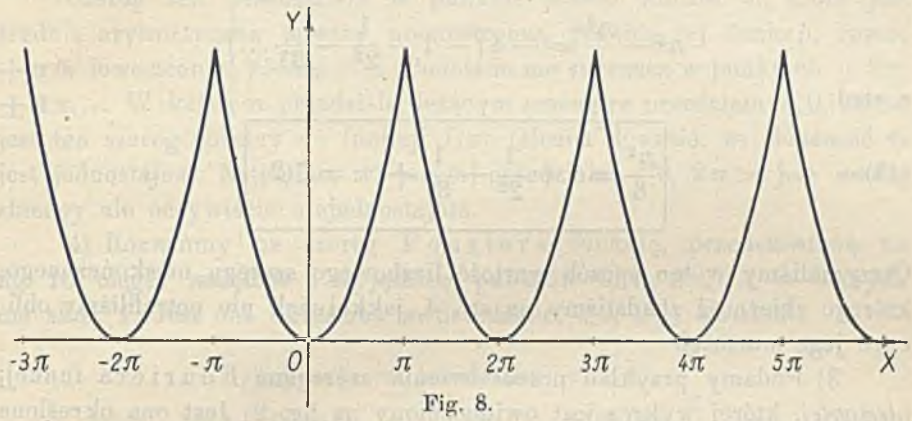

Fig. 8.

twierdzenia III, jest bowiem wszędzie ciągła a różniczkowalna wszędzie z wyjątkiem punktów $x = \pm\pi$, $\pm 3\pi$,..., a więc da się przedstawić szeregiem Fouriera. Do wyznaczania współczynników dogodnie jest teraz użyć we wzorach Eulera-Fouriera przedziału całkowania $<-\pi, +\pi>$ zamiast $<0, 2\pi>$. Ponieważ ta funkcja jest parzysta, przeto wszystkie współczynniki $b_p$ są zerami. Wystarczy zatem wyznaczyć współczynniki $a_p$ z wzoru:

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \cos px\, dx$$

Dla $p = 0$ otrzymamy:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{+\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Całkując dwukrotnie „per partes" dla $p \neq 0$, otrzymamy:

$$a_p = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \sin px}{p} - \frac{2}{p}\left(-\frac{x\cos px}{p} + \frac{\sin px}{p^2}\right)\right]_{-\pi}^{+\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{2}{p^2}\left[\pi\cos p\pi + \pi\cos(-p\pi)\right]$$

$$a_p = \frac{4}{p^2}\cos p\pi = \begin{cases} -\dfrac{4}{p^2} & \text{dla} \quad p = 2n+1 \\ +\dfrac{4}{p^2} & \text{„} \quad p = 2n \end{cases}$$

Wobec tego: $f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} \ldots\right) = x^2$ w przedziale $<-\pi, +\pi>$.

W dalszych przedziałach powtarzają się te wartości periodycznie. Kładąc w tym wzorze $x = \pi$, otrzymujemy:

$$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = -4\left(-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \ldots\right)$$

a stąd:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \zeta(2) \tag{43}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wartość liczbowego szeregu nieskończonego, którego zbieżność zbadaliśmy na str. 4, jakkolwiek nie potrafiliśmy obliczyć jego wartości.

3) Podamy przykład przedstawienia szeregiem Fouriera funkcji *nieciągłej*, której wykres jest uwidoczniony na fig. 9. Jest ona określona wzorem $f(x) = \pi - x$ w przedziale $<0, 2\pi)$ i posiada period $2\pi$.

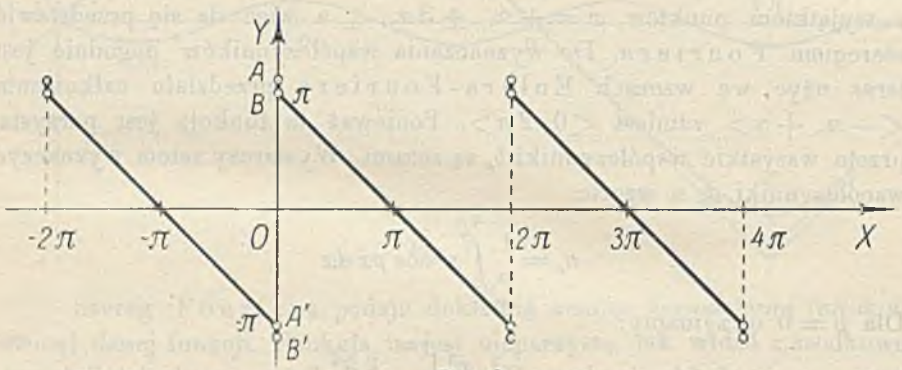


Fig. 9.

Dla $x = 2\pi$ ma ona zatem tę samą wartość $\pi$, co dla $x = 0$. Da się ona przedstawić szeregiem Fouriera i to szeregiem złożonym tylko z sinusów, jest bowiem funkcją nieparzystą. Wystarczy zatem wyznaczyć współczynniki $b_p$ z wzoru:

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)\sin px\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos px}{p}\Bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} x\sin px\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos px}{p} + \frac{\sin px}{p^2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{2}{p}$$

Zatem:

$$f(x) = 2(\sin x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \ldots) = \pi - x$$

w przedziale $(0, 2\pi)$, a poza tym przedziałem ma ten szereg odpowiednio wartości: $\pi - x + 2n\pi$ w przedziałach $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$.

Szereg ten przedstawia w punkcie $x = 0$ wartość 0, która jest średnią arytmetyczną między prawostronną granicą tej funkcji, równą $+\pi$ a lewostronną, równą $-\pi$. Podobnie ma się rzecz w punktach $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi, \ldots$ W każdym przedziale, leżącym *wewnątrz* przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$, jest ten szereg zbieżny do funkcji $f(x)$. (Można dowieść, że zbieżność ta jest jednostajna). Natomiast w całym przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ jest szereg zbieżny ale oczywiście niejednostajnie.

4) Rozwińmy na szereg Fouriera funkcję, przedstawioną na fig. 10, ciągłą wszędzie z wyjątkiem punktów $0, \pi, 2\pi, \ldots$, w których ma skok 1. Jest ona określona w przedziale $\langle 0, 2\pi)$ wzorami:

$$f(x) = 1 \quad \text{w przedziale} \quad \langle 0, \pi)$$
$$f(x) = 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \langle \pi, 2\pi)$$

i posiada period $2\pi$. Wobec tego $f(2\pi) = f(0) = 1$.

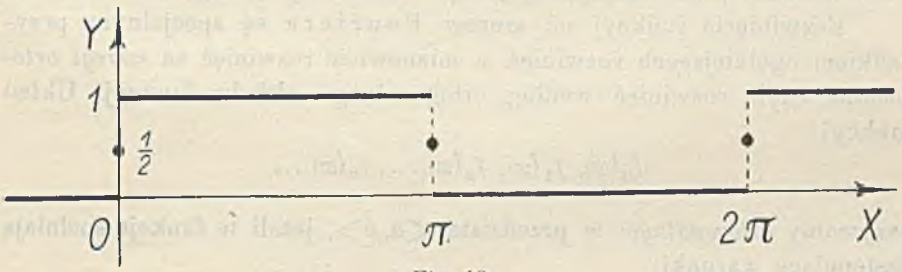


Fig. 10.

Współczynnik $a_0$ otrzymujemy z wzoru:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot dx = 1.$$

Inne współczynniki $a_p$ są zerami, jak to łatwo sprawdzić.

Natomiast $b_p$ są różne od zera, a mianowicie:

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin px\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 0 \cdot \sin px\,dx = -\left.\frac{\cos px}{\pi p}\right|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi p}(\cos p\pi - 1)$$

Stąd otrzymujemy dla nieparzystych $p = 2n + 1$ wartości:

$$b_p = \frac{2}{\pi p}$$

a dla parzystych $p = 2n$ są $b_p$ zerami. Otrzymujemy więc następujące rozwinięcie danej funkcji na szereg Fouriera:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi}(\sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \ldots)$$

Stąd otrzymujemy np. dla $x = \frac{1}{2}\pi$ znany szereg Leibniza na $\frac{1}{4}\pi$.

Zachodzi bardzo ważny związek pomiędzy *średnią kwadratową* $\sigma$ (por. tom II, str. 68) funkcji rozwijalnej na szereg Fouriera a współczynnikami $a_k$ i $b_k$ tego rozwinięcia

Okazano mianowicie, że:

$$(44) \qquad \sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \tfrac{1}{4}a_0^2 + \tfrac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \ldots)$$

(Dowód podaje np. Rogosiński, l. c. str 45).

W ten sposób można obliczyć np. *prąd skuteczny* (por. tom II, str. 91), jeżeli zmienny prąd elektryczny jest przedstawiony szeregiem Fouriera.

Rozwinięcia funkcyj na szeregi Fouriera są specjalnym przypadkiem ogólniejszych rozwinięć, a mianowicie rozwinięć na *szeregi ortogonalne* czyli rozwinięć według ortogonalnego układu funkcyj. Układ funkcyj:

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x) \ldots$$

nazywamy *ortogonalnym* w przedziale $\langle a, b\rangle$, jeżeli te funkcje spełniają następujące warunki:

$$\int_a^b f_p(x)\cdot f_r(x)\,dx = 0 \quad \text{dla} \quad p \neq r$$

$$= c_p^2 \quad " \quad p = r$$

Otóż układ funkcyj:

$$\tfrac{1}{2},\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x, \ldots$$

jest takim układem ortogonalnym w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$, jak to wynika z przykładu 2 na str. 83—84 tomu II; dla tego układu jest $c_0^2 = \frac{1}{2}\pi$, $c_p^2 = \pi$. Oprócz tego układu istnieje jednak nieskończenie wiele innych układów ortogonalnych, jak np. układ funkcyj *kulistych* lub układ funkcyj Bessela. Niektóre z nich są nadzwyczaj ważne w fizyce teoretycznej, w statystyce matematycznej i w innych dziedzinach matematyki stosowanej.

Szeregi potęgowe nie są szeregami ortogonalnymi, natomiast istnieją rozmaite szeregi ortogonalne, zbudowane z wielomianów. Teorią szeregów ortogonalnych zajmowano się w ostatnich czasach bardzo wiele. Najważniejsze dla zastosowań twierdzenia o takich szeregach znajdzie czytelnik w podręczniku Couranta-Hilberta pt. *Methoden der mathematischen Physik* (tom I, Berlin 1924) i w bardzo cennym dziele Riemanna-Webera pt. *Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, którego ósme wydanie, zredagowane przez Ph. Franka i R. Misesa, wyszło w r. 1935 pt. *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik* (Berlin, Springer, 2 tomy).

ROZDZIAŁ XXII

# Równania różniczkowe

## § 294. Definicja i klasyfikacja równań różniczkowych

Bardzo wiele zagadnień matematycznych, technicznych, fizykalnych i z innych działów wiedzy polega na znalezieniu takich funkcyj, których pochodne spełniają jakieś równania, zawierające prócz tych pochodnych ewentualnie także samą funkcję (zmienną zależną) i zmienne niezależne. Równania takie nazywamy ***równaniami różniczkowymi.***

Najprostsze są równania różniczkowe, zawierające tylko pierwszą pochodną szukanej funkcji jednej zmiennej a oprócz niej ewentualnie także samą szukaną funkcję i zmienną niezależną. Ogólną postacią takich równań jest więc:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{45}$$

gdzie $y$ oznacza szukaną funkcję, a $y'$ jej pochodną.

Zagadnienie, o które nam chodzi, możemy sformułować w następujący sposób. Dana jest jakakolwiek funkcja trzech zmiennych:

$$F(x_1, x_2, x_3)$$

Chcemy znaleźć takie funkcje $y = \varphi(x)$, dla których spełnia się warunek:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$$

przy wszystkich $x$ z pewnego zakresu.

W równaniu (45) może brakować zmiennej $x$, zmiennej $y$ lub obu tych zmiennych, musi jednak występować $y'$. W specjalnych przypadkach możemy zatem mieć do czynienia z równaniami postaci:

$$F(x, y') = 0, \quad F(y, y') = 0, \quad F(y') = 0 \tag{45a}$$

Równania postaci (45) lub (45a) (tj. zawierające tylko pierwszą pochodną a oprócz niej ewentualnie także samą szukaną funkcję i zmienną niezależną) nazywamy ***równaniami różniczkowymi zwyczajnymi pierwszego rzędu.***

Każdą funkcję $y = \varphi(x)$, spełniającą równanie różniczkowe, nazywamy jego ***rozwiązaniem*** lub jego *całką* (bez względu na to, czy tę funkcję otrzymujemy istotnie przy pomocy całki oznaczonej lub nieoznaczonej z jakiejś funkcji, czy też w jakikolwiek inny sposób, np. przez rozwinięcie na szereg). Wynajdywanie rozwiązań równania różniczkowego nazywamy jego *rozwiązywaniem* lub *całkowaniem*.

W poprzednich rozdziałach spotykaliśmy już niejednokrotnie specjalne przykłady takich równań.

Tak np. równanie (patrz tom II, str. 3):

$$(46) \qquad \boxed{y' = f(x)} \quad \text{czyli} \quad \boxed{y' - f(x) = 0}$$

jest równaniem różniczkowym, a wszystkie funkcje, spełniające to równanie, są zawarte we wzorze:

$$y = \int f(x)\,dx + C$$

Rozwiązaniem zatem równania różniczkowego (46) jest jednoparametrowa gromada funkcyj, a mianowicie całka nieoznaczona z funkcji $f(x)$. Stąd pochodzi uogólnienie nazwy „całka“ na każde dowolne rozwiązanie dowolnego równania różniczkowego, chociażby to rozwiązanie nie miało żadnego związku z całkami oznaczonymi lub nieoznaczonymi.

*Uwaga.* Podobne uogólnienie spotykamy w nauce o rozwiązywaniu zwykłych równań, nie różniczkowych, postaci: $f(x) = 0$, gdzie każde rozwiązanie równania nazywamy jego „pierwiastkiem“, chociażby się nie dało otrzymać przez „pierwiastkowanie“.

Dalszym przykładem równania różniczkowego jest równanie:

$$y' = y \quad \text{czyli} \quad y' - y = 0$$

które omawialiśmy przy badaniu funkcyj wykładniczych (por. tom I, § 87).

Zbadaliśmy, że wszystkie rozwiązania tego równania są zawarte we wzorze:

$$y = Ce^x$$

gdzie $C$ oznacza dowolną liczbę stałą. Omawiając rozmaite prawa wzrastania (por. tom I, §§ 87—90), wyraziliśmy je za pomocą równań różniczkowych:

$$y' = by, \quad y' = b(g - y), \quad y' = by(g - y)$$

i podaliśmy rozwiązania tych równań.

W przykładzie 5) na str. 19—20 tomu II mieliśmy do czynienia z równaniem różniczkowym:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2$$

określającym ruch ciała spadającego z uwzględnieniem oporu ośrodka ($g$, $k$, $m$ są tu liczbami stałymi, zmienną niezależną jest czas $t$, a zmienną zależną prędkość $v$). (Por. też przykład 7 na str. 41—43 tom II). W elektrotechnice spotykamy równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$$L\frac{di}{dt} + Ri - V_0 \sin at = 0$$

(zob. § 298, przykład 2) gdzie czas $t$ jest zmienną niezależną, a natężenie prądu $i$ zmienną zależną.

We wszystkich tych przykładach chodzi o znalezienie funkcyj, spełniających dane równanie różniczkowe.

Zajmowaliśmy się także zagadnieniem odwrotnym, a mianowicie, mając podaną jakąś jednoparametrową gromadę funkcyj jednej zmiennej, tworzyliśmy równanie różniczkowe pierwszego rzędu tych wszystkich funkcyj (por. tom I. § 177). Zastosowaliśmy te rozważania do znalezienia równania różniczkowego *trajektoryj* danej gromady linij. To zagadnienie odwrotne jest dość łatwe, rozwiązanie jego bowiem wymaga tylko różniczkowania i eliminacji. Natomiast znalezienie rozwiązań danego równania różniczkowego jest w ogólności zagadnieniem trudnym i skomplikowanym.

Równania różniczkowe ogólnej postaci:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{47}$$

w których najwyższy rząd pochodnej wynosi 2, nazywamy *równaniami różniczkowymi zwyczajnymi* ***drugiego rzędu.*** Równania te są szczególnie ważne w fizyce i technice.

Przykłady takich równań spotykaliśmy w tomie I (str. 298, przykład 5: $y'' + c^2y = 0$, $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$; str. 305, przykład 3: $(1 - x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$; str. 529: $(1 + y'^2)^3 - 16y''^2 = 0$).

Mając podaną dwuparametrową gromadę funkcyj:

$$f(x, y, c_1, c_2) = 0$$

tworzyliśmy równanie różniczkowe drugiego rzędu, które spełniają wszystkie te funkcje (por. tom I, str. 529).

Równanie postaci:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0 \tag{48}$$

zawierające $n$-tą pochodną szukanej funkcji jednej zmiennej $x$, nazywamy *równaniem różniczkowym zwyczajnym n-tego rzędu.* Równanie takie można otrzymać z $n$-parametrowej gromady funkcyj:

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$$

przez $n$-krotne różniczkowanie i eliminację stałych.

Należy dokładnie odróżniać *rząd* równania różniczkowego od jego *stopnia*. I tak, jeżeli funkcja $F$ we wzorze (48) jest funkcją całkowitą wymierną czyli wielomianem stopnia $r$ zmiennych $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$, to równanie (48) nazywamy równaniem różniczkowym *n-tego rzędu* a *stopnia r*. Nie zawsze więc można mówić o stopniu równania różniczkowego; tak np. równanie różniczkowe 1-go rzędu: $y = xy' + \log y'$ nie ma żadnego stopnia.

Ogólne równanie różniczkowe $n$-tego rzędu a stopnia 1-go ma postać:

$$P_n(x)\,y^{(n)} + P_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_2(x)\,y'' + P_1(x)\,y' + P_0(x)\,y + g(x) = 0 \tag{49}$$

Współczynniki $g(x)$, $P_0(x)$, $P_1(x)$, . . $P_n(x)$ są tu zupełnie dowolnymi funkcjami zmiennej $x$. Takie równanie 1-go stopnia a $n$-tego rzędu nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym **liniowym** $n$-tego rzędu. Równania liniowe występują szczególnie często w zastowaniach.

W algebrze bada się prócz jednego równania, posiadającego jako pierwiastki jakieś liczby, także *układy* dwóch równań, posiadających jako rozwiązania jakieś *pary* liczb. Podobnie w teorii równań różniczkowych bada się *układy* równań różniczkowych, posiadających jako rozwiązanie *pary* funkcyj. Tak np. dwa równania:

$$\begin{aligned} f(x,\ y,\ z,\ y',\ z') &= 0 \\ g(x\ \ y,\ z,\ y',\ z') &= 0 \end{aligned} \tag{50}$$

tworzą układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Chodzi o znalezienie wszystkich *par* funkcyj: $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ jednej zmiennej $x$, spełniających te obydwa równania (50).

Zasadnicze równania ruchu w mechanice tworzą następujący układ 3 równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu:

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= P\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Q\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= R\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Szukanymi funkcjami są tu składowe $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ drogi; ich pierwsze pochodne są składowymi prędkości, a drugie pochodne składowymi przyśpieszenia. Funkcje $P$, $Q$, $R$ są składowymi siły.

Każde równanie różniczkowe wyższego rzędu można zastąpić układem równań różniczkowych 1-go rzędu. Tak np. równanie drugiego rzędu:

$$f(x,\ y,\ y',\ y'') = 0$$

można zastąpić następującym układem równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} y'(x) = p(x) \\ f(x,\ y(x),\ p(x),\ p'(x)) = 0 \end{cases}$$

Odwrotnie, każdy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu można zastąpić jednym równaniem różniczkowym odpowiednio wysokiego rzędu. Tak np. układ dwóch równań, podanych wzorami (50), zastąpimy jednym równaniem drugiego rzędu. W tym celu różniczkujemy obydwa te równania według $x$ i otrzymujemy:

$$\text{(50 a)} \qquad \begin{cases} f_x + f_y \cdot y' + f_z \cdot z' + f_{y'} \cdot y'' + f_{z'} \cdot z'' = 0 \\ g_x + g_y \cdot y' + g_z \cdot z' + g_{y'} \cdot y'' + g_{z'} \cdot z'' = 0 \end{cases}$$

Z czterech równań (50) i (50 a) eliminujemy $z$, $z'$ i $z''$ i otrzymujemy jedno równanie:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0$$

Podobnie można postępować z równaniami różniczkowymi dowolnie wysokiego rzędu i z układami równań różniczkowych, złożonymi z dowolnie wielu równań. Można się więc ograniczyć albo do badania równań różniczkowych wyższego rzędu albo do badania układów równań różniczkowych pierwszego rzędu.

We wszystkich równaniach, któreśmy dotychczas rozpatrywali, występowała prócz zmiennych zależnych i ich pochodnych tylko *jedna zmienna niezależna*. Takie równania różniczkowe nazywamy **zwyczajnymi.** Równania różniczkowe, w których występują *cząstkowe pochodne* funkcyj dwóch lub więcej zmiennych niezależnych, nazywamy **równaniami różniczkowymi cząstkowymi.** Jeżeli w równaniu występują tylko pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, prócz ewentualnie zmiennej zależnej i zmiennych niezależnych, to równanie takie nazywamy równaniem różniczkowym cząstkowym *pierwszego rzędu*. Ogólną postacią takiego równania przy jednej zmiennej zależnej a dwóch niezależnych jest:

$$\text{(52)} \qquad \boxed{f\left(x,\ y,\ z(x,\ y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0}$$

Równanie różniczkowe cząstkowe *drugiego rzędu* o jednej zmiennej zależnej a dwóch zmiennych niezależnych ma ogólną postać:

$$\text{(53)} \qquad \boxed{f\left(x,\ y,\ z(x,\ y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0}$$

Bada się także *układy* równań cząstkowych, zawierających dwie lub więcej zmiennych zależnych.

Do równań różniczkowych zwyczajnych dochodziliśmy, eliminując stałe dowolne z równań, przedstawiających gromady linij. Podobnie można dojść do równań różniczkowych cząstkowych, eliminując stałe dowolne z równań, przedstawiających gromady powierzchni. I tak np. mając podane równanie:

(a) $$z = f(x, y, c_1, c_2)$$

dwuparametrowej gromady powierzchni, tworzymy cząstkowe pochodne:

(b) $$p = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y, c_1, c_2)$$

(c) $$q = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y, c_1, c_2)$$

Jeżeli wyeliminujemy stałe $c_1$ i $c_2$ z tych 3 równań, to otrzymamy jedno równanie, zachodzące pomiędzy $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, to znaczy równanie postaci:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

Doszliśmy więc w ten sposób do równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu, które spełniają wszystkie powierzchnie, należące do danej gromady (a).

Zobaczymy, że do równania różniczkowego cząstkowego można dojść także zupełnie inną drogą, a mianowicie eliminując dowolną *funkcję* z równania, zawierającego taką funkcję.

Tak np. z równania:

$$\frac{z}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{czyli} \quad z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

chcemy wyeliminować dowolną funkcję $f$, o której zakładamy jedynie, że posiada pochodną. W tym celu tworzymy cząstkowe pochodne:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) + xf'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right) - f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x} = \frac{z}{x} - f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xf'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

Wstawiając $f'\left(\frac{y}{x}\right)$, obliczone z drugiego równania, w pierwsze równanie, otrzymujemy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{y}{x}$$

a stąd:

$$z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$$

To równanie różniczkowe cząstkowe nie zawiera dowolnej funkcji $f$. Jest to równanie różniczkowe wszystkich powierzchni, których równanie ma postać $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$. (Są to powierzchnie stożkowe, mające wierzchołek w początku układu współrzędnych). Niechaj czytelnik utworzy w podobny sposób równanie różniczkowe (cząstkowe) wszystkich powierzchni obrotowych, powstających przez obrót dowolnej linii około osi $z$. Mają one równanie:

$$z = f(x^2 + y^2)$$

gdzie $f$ oznacza dowolną funkcję. (Wynik: $y\frac{\partial z}{\partial x} - z\frac{\partial z}{\partial y} = 0$).

Podobnie przez eliminację *dwóch* funkcyj dowolnych można otrzymać równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu. Weźmy np. pod uwagę równanie:

$$u = f(x + ay) + g(x - ay)$$

gdzie $f$, $g$ są dowolnymi funkcjami, posiadającymi drugie pochodne. Przez różniczkowanie otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f' + g'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f' \cdot a - g' \cdot a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f'' + g''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'' \cdot a^2 - g' \cdot (-a) \cdot a = a^2(f'' + g'')$$

a stąd:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dla rzeczywistych $a$ jest to równanie struny drgającej ($u$ oznacza wychylenie, $y$ czas, a $x$ odciętą dowolnego punktu struny). Dla urojonego $a$, a mianowicie dla $a = i$, otrzymamy $a^2 = -1$ i równanie różniczkowe zamienia się na:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Jest to równanie *potencjału* na płaszczyźnie, czyli równanie Laplace'a (por. tom II § 257). Wiemy, że każdą funkcję $f(z)$ zmiennej zespo-

lonej można przedstawić w postaci $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, gdzie $P(x, y)$, $Q(x, y)$ są rzeczywistymi funkcjami dwóch zmiennych rzeczywistych. Otóż okazano, że gdy funkcja $f(z)$ jest *analityczna* (por. § 291, str. 69), to zarówno funkcja $u = P(x, y)$ jak i $u = Q(x, y)$ spełniają równanie różniczkowe cząstkowe Laplace'a.

Niechaj czytelnik stwierdzi to np. dla funkcji:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

W podręczniku tym ograniczamy się do równań różniczkowych zwyczajnych. W ogólnych podręcznikach analizy znajdują się zazwyczaj rozdziały, poświęcone równaniom różniczkowym. Ponadto istnieje nadzwyczaj obfita specjalna literatura tego przedmiotu. Wymienimy tu tylko niektóre z tych podręczników, a mianowicie te, które mogą być przydatne technikom i przyrodnikom.

S. Kępiński, *Podręcznik równań różniczkowych* (Lwów, 1907, 2 tomy).

A. Zygmund, *Równania różniczkowe* (Warszawa, 1929, część I).

Forsyth-Maser, *Lehrbuch der Differentialgleichungen* (Braunschweig, 1889).

L. Bieberbach, *Differentialgleichungen* (Berlin, 1923).

W. Hort, *Die Differentialgleichungen des Ingenieurs* (Berlin, 1925).

L. Hopf, *Einführung in die Differentialgleichungen der Physik.* (Lipsk, 1933, Sammlung Göschen).

Riemann-Weber (Frank-Mises) cytowany na str. 95.

## § 295. Geometryczne badanie rozwiązań równania różniczkowego. Elementy liniowe. Izokliny

Zanim przystąpimy do rozwiązywania równań różniczkowych drogą arytmetyczną, postaramy się przy pomocy rozważań geometrycznych zorientować się w tym zagadnieniu. Uzyskamy w ten sposób zarazem podstawę do graficznego rozwiązywania takich równań. Ograniczymy się do równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu postaci:

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{54}$$

tj. do postaci, otrzymanej przez rozwikłanie według zmiennej $y'$ ogólnego równania różniczkowego pierwszego rzędu:

$$F(x, y, y') = 0$$

Każde rozwiązanie równania różniczkowego nazwaliśmy jego *całką*, a każdą linię, której równaniem jest całka równania, nazywamy *linią całkową* tego równania.

Otóż chcemy się zorientować w przebiegu tych linij całkowych. Obierzmy na płaszczyźnie $(XY)$ dowolny punkt $P_0$ o współrzędnych $(x_0, y_0)$,

dla których funkcja $f(x, y)$ jest określona (fig. 11) i szukajmy linii całkowej, przechodzącej przez ten punkt.

Podstawiając te wartości w równanie (54), otrzymamy należącą do nich wartość pochodnej $y'_0$ szukanej funkcji, czyli spadek szukanej linii całkowej, przechodzącej przez ten punkt, a mianowicie:

$$y'_0 = f(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$$

Wykreślmy przez ten punkt niewielki odcinek $P_0A$ linii prostej, nachylonej do osi $x$-ów pod kątem $\alpha_0$. Prosta ta jest styczną do szukanej linii całkowej w tym punkcie. Niechaj $(x_1, y_1)$ oznaczają współrzędne punktu $A$.

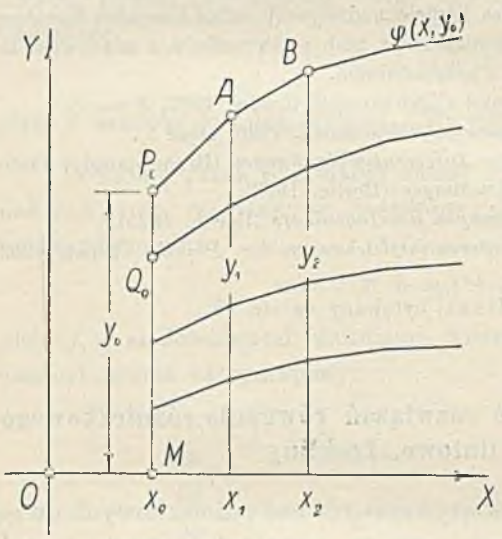


Fig. 11.

Podstawmy te wartości znowu w równanie (54); otrzymany spadek $y'_1$ w punkcie $A$ linii całkowej, przechodzącej przez $A$, a mianowicie

$$y'_1 = f(x_1, y_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$$

Wykreślmy niewielki odcinek $AB$ pod tym kątem, a następnie podstawmy współrzędne $(x_2, y_2)$ punktu $B$ znowu w równanie różniczkowe, to otrzymamy spadek stycznej w punkcie $B$. Postępując w ten sposób dalej, otrzymujemy linię łamaną. Zagęszczając wierzchołki tej linii łamanej aproksymujemy coraz bardziej linię całkową, przechodzącą przez punkt $P_0(x_0, y_0)$. Niechaj $y = \varphi(x, y_0)$ oznacza równanie tej linii całkowej. Obierzmy inny punkt początkowy, należący do tej samej odciętej $x_0$, np. punkt $Q_0(x_0, \bar{y}_0)$. Postępując tak, jak poprzednio, otrzymamy inną linię łamaną, aproksymującą inne rozwiązanie tego samego równania różniczkowego. To samo rozumowanie odnosi się do każdego punktu prostej $MP_0$. Otrzymamy zatem w ten sposób linie, aproksymujące nieskończoną gromadę linij całkowych o tej własności, że przez każdy punkt płaszczyzny, w którym jest określona funkcja $f(x, y)$, przechodzi jedna linia całkowa.

*Uwaga.* Na tej konstrukcji polegają rozmaite *graficzne metody* rozwiązywania równań różniczkowych (zob. np. C. Runge, *Graphische Methoden*, Lipsk, 1915 r. str. 116—142).

Bardzo jasny przegląd wszystkich linij całkowych można uzyskać także w inny sposób. I tak równanie różniczkowe postaci (54) przypo-

rządkowuje każdemu punktowi płaszczyzny $(XY)$, dla którego jest określona funkcja $f(x, y)$, jakiś spadek $y'$, a więc jakiś kierunek posuwania się od tego punktu. Kierunek ten jest określony kątem, obliczonym z warunku: $y' = \operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$. Układ tych trzech liczb $(x, y, y')$ nazywamy *elementem liniowym*. Równanie różniczkowe (54) określa więc pewien zbiór elementów liniowych. Zbiór ten można sobie uzmysłowić geome-

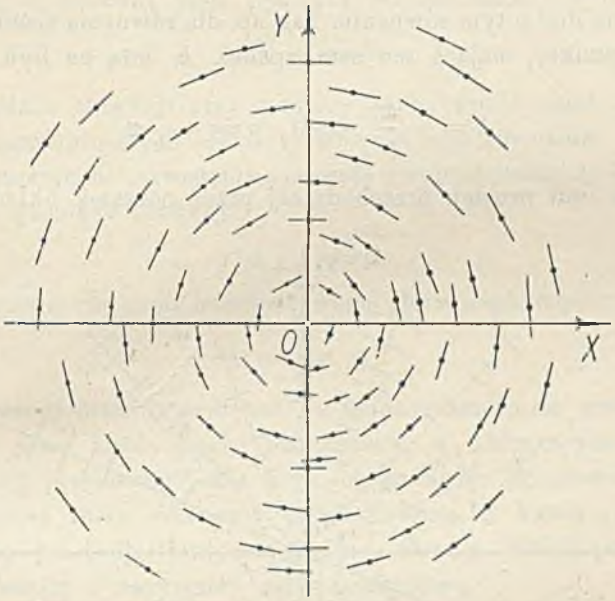


Fig. 12.

trycznie w następujący sposób: Wykreślamy przez rozmaite punkty płaszczyzny niewielkie odcinki o kierunku, wyznaczonym z warunku $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$. W ten sposób otrzymujemy np. dla równania różniczkowego:

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{b}$$

zbiór odcinków, przedstawiony na fig. 12. Każdy odcinek, wraz z zaznaczonym na nim punktem, reprezentuje element liniowy, należący do tego punktu. Z figury tej można dość łatwo odgadnąć, że linie całkowe równania (b) tworzą gromadę kół współśrodkowych o środku w początku układu, koła te są bowiem w każdym punkcie styczne do odcinków, przedstawiających elementy liniowe, należące do tych punktów. Używając terminu „element liniowy“, możemy powiedzieć, że linią całkową równania różniczkowego (54) jest każda linia, której wszystkie elementy liniowe spełniają to równanie.

Na figurze 12 są uwidocznione tylko niektóre elementy liniowe. Wybór ich jest zupełnie dowolny, można je jednak zestawić w pewne dogodne do konstrukcji grupy. I tak poszukajmy tych punktów, którym dane równanie różniczkowe (54) przyporządkowuje ten sam spadek, np. $y' = k$. Punkty te spełniają warunek:

$$k = f(x, y) \tag{c}$$

leżą zatem na linii o tym równaniu. Tak np. dla równania różniczkowego (b) wszystkie punkty, mające ten sam spadek $k$, leżą na linii o równaniu:

$$k = -\frac{x}{y} \quad \text{czyli} \quad y = -\frac{1}{k}x$$

a zatem na linii prostej, przechodzącej przez początek układu.

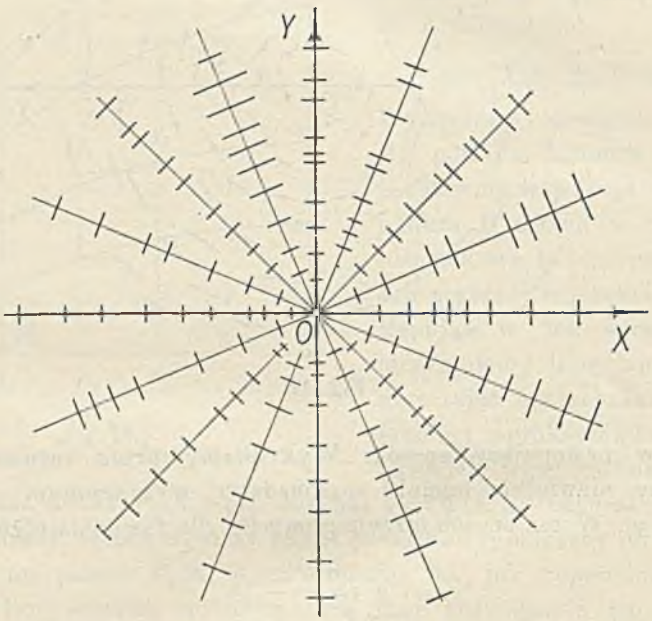


Fig. 13.

Równanie (c) określa przy zmiennym $k$ gromadę linij, zwanych *izoklinami* równania różniczkowego (54). We wszystkich punktach jednej linii, należącej do tej gromady, linie całkowe mają to samo nachylenie do osi $x$-ów: elementy liniowe, należące do wszystkich punktów jednej izokliny, są zatem do siebie równoległe. Uwaga ta ułatwia zwykle konstrukcję zbioru elementów liniowych, a mianowicie wtedy, gdy izokliny są łatwymi do konstrukcji liniami. Tak np. dla równania różniczkowego (b) izokliny tworzą pęk prostych (fig. 13). Odcinki, reprezentujące elementy

liniowe tego równania różniczkowego, są prostopadłe do tych prostych (albowiem spadek $-\frac{1}{k}$ każdej z tych prostych jest odwrotnością ze znakiem przeciwnym spadku $k$ odpowiedniego elementu liniowego).

Dla równania różniczkowego:

$$y' = x^2 + y^2$$

przedstawiają się izokliny jako pęk kół współśrodkowych o równaniu:

$$x^2 + y^2 = k$$

Niechaj czytelnik narysuje przy pomocy tych izoklin dość gęsty zbiór odcinków, reprezentujących elementy liniowe tego równania.

Te geometryczne rozważania nasuwają przypuszczenie, że jakaś jednoparametrowa gromada funkcyj:

$$g(x, y, c) = 0$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego pierwszego rzędu:

$$y' = f(x, y)$$

W geometrycznej interpretacji jest to jednoparametrowa gromada linij i to taka, że przez każdy punkt płaszczyzny, w którym jest określona funkcja $f(x, y)$, przechodzi jedna linia tej gromady. Tę gromadę funkcyj nazwiemy *ogólną całką* równania różniczkowego, a każdą poszczególną funkcję z tej gromady, otrzymaną przez obranie jakiejś szczegółowej wartości dla stałej $c$, nazywamy *całką szczegółową*.

Okazuje się jednak, że oprócz całki ogólnej i całek szczegółowych mogą istnieć jeszcze inne rozwiązania równania różniczkowego, nie dające się otrzymać przez specjalizację stałej w całce ogólnej. Całka taka występuje naprzykład, gdy gromada linij całkowych posiada *obwiednią*, która się nie pokrywa z żadną linią tej gromady. Obwiednia tej gromady jest całką równania, albowiem wszystkie jej elementy liniowe spełniają dane równanie różniczkowe. Istotnie, każdy punkt obwiedniej należy do jakiejś linii całkowej i ma styczną wspólną z tą linią całkową. Całki takie występują przy równaniach różniczkowych, podanych w formie uwikłanej:

$$F(x, y, y') = 0$$

Tak np. całką ogólną równania różniczkowego:

$$y'^2 - 4y = 0$$

jest, jak łatwo sprawdzić, gromada funkcyj:

$$y = (x + c)^2$$

Istotnie $y' = 2(x + c)$, $y'^2 = 4(x + c)^2 = 4y$.

Liniami całkowymi są zatem parabole, przedstawione na fig, 14.

Obwiednią tej gromady parabol znajdujemy, eliminując $c$ z równania

(I) $$y - (x + c)^2 = 0$$

i z równania:

(II) $$-2(x + c) = 0$$

otrzymanego przez różniczkowanie równania (I) według parametru $c$.

Wstawiając $x + c$ z równania (II) w równanie (I), otrzymujemy jako równanie obwiedniej:

$$y = 0$$

to znaczy, że obwiednią jest oś $x$-ów. Otóż ta obwiednia spełnia dane równanie różniczkowe (bo $y' = 0$ i $y = 0$, a więc $y'^2 - 4y = 0$) a zatem jest jego całką. Nie mieści

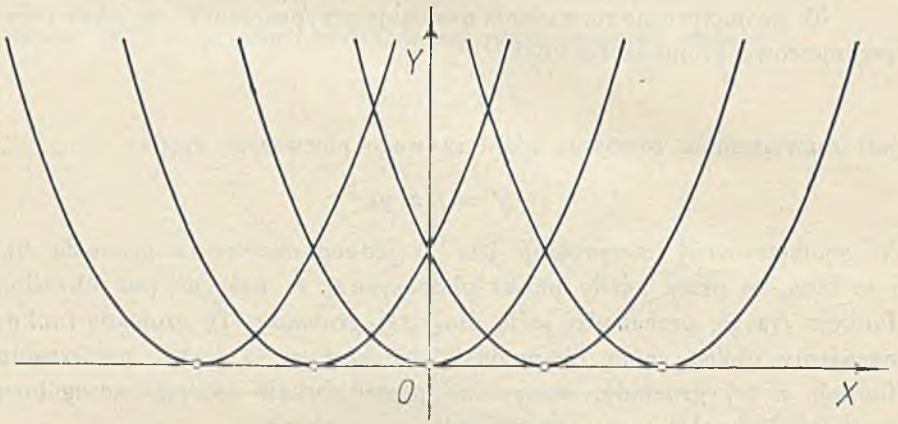


Fig. 14.

się zaś ona w gromadzie parabol, nie da się bowiem otrzymać z równania (I) przez specjalizację stałej.

Prócz obwiednich gromady linij całkowych mogą występować także inne całki, nie zawierające się w jednoparametrowej gromadzie linij całkowych. Tak np. łatwo stwierdzić, że całką ogólną równania różniczkowego:

$$y'^2 - y^3 = 0$$

jest gromada funkcyj:

$$y = \frac{4}{(x + c)^2}$$

Istotnie $y' = -8(x + c)^{-3}$, a więc $y'^2 = 64(x + c)^{-6} = \left(\frac{4}{(x+c)^2}\right)^3 = y^3$.

Oprócz tej całki ogólnej także funkcja:

$$y = 0$$

spełnia dane równanie różniczkowe, albowiem $y' = 0$ a $0^2 - 0^3 = 0$. Obrazem tej funkcji jest oś $x$-ów, która nie jest bynajmniej obwiednią znalezionej gromady linij całkowych (jest ona natomiast, jak łatwo stwierdzić, wspólną asymptotą wszystkich linij tej gromady). Tej całki $y = 0$ nie można otrzymać z całki ogólnej przez odpowiednie obranie stałej $c$, nie mieści się ona zatem w całce ogólnej.

Rozważania geometryczne i przykłady, omówione w tym paragrafie pouczają, że rozwiązaniem równania różniczkowego pierwszego rzędu może być jednoparametrowa gromada funkcyj, zwana *całką ogólną*, a ponadto mogą występować także rozwiązania, nie mieszczące się w tej gromadzie. Nie dowiedliśmy jednak jeszcze, czy każde równanie różniczkowe posiada rozwiązania i nie podaliśmy metod, służących do ścisłego wyznaczania tych rozwiązań, w razie gdy one istnieją. Kwestiami tymi zajmiemy się w dalszych paragrafach ogólnie. Najpierw jednak omówimy kilka takich prostych typów równań różniczkowych pierwszego rzędu, których rozwiązanie potrafimy sprowadzić do szukania funkcyj pierwotnych czyli całek nieoznaczonych lub oznaczonych. Ponieważ zaś obliczanie całki nazywamy także „kwadraturą" wskutek jej związku z obliczaniem pól, przeto możemy powiedzieć, że chodzi nam obecnie o takie równania różniczkowe, które się dadzą *rozwiązać za pomocą kwadratur*.

Zajmiemy się najpierw badaniem takich równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, w których pochodna $y'$ występuje w formie *wyraźnej*, tj. równań postaci:

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{54}$$

Później omówimy także równania ogólniejszej postaci:

$$F(x, y, y') = 0$$

w których pochodna $y'$ występuje w formie uwikłanej.

Równanie $y' = f(x, y)$ czyli $\frac{dy}{dx} = f(x\ y)$ dogodnie jest niekiedy pisać w postaci:

$$dy - f(x, y)\,dx = 0$$

Dla większej symetrii pisze się często to równanie (ewentualnie po uwolnieniu od ułamków) w postaci:

$$\boxed{M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0} \tag{55}$$

Równanie to jest równoważne z równaniem różniczkowym:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

Jeżeli pomieniamy z sobą role zmiennej zależnej i niezależnej, to możemy uważać równanie (55) za równoważne z równaniem różniczkowym:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$$

przy czym chodzi o znalezienie funkcyj $x = \psi(y)$, spełniających to równanie.

## § 296. Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu o zmiennych oddzielonych

a) Wspomnieliśmy już, że równanie różniczkowe:

$$\boxed{y' = f(x)} \tag{46}$$

rozwiązuje się przez jedną kwadraturę, a mianowicie:

$$y = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest więc jednoparametrowa gromada linij, z których każdą można otrzymać z jednej z nich przez przesunięcie równoległe wzdłuż osi $y$-ów.

b) W podobnie prosty sposób przedstawia się rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\boxed{y' = f(y)} \tag{56}$$

czyli: $\frac{dy}{dx} = f(y)$. Stąd $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$ a więc:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C = F(y) + C$$

Otrzymaliśmy gromadę linij całkowych, z których każdą można otrzymać z jednej z nich przez przesunięcie równoległe wzdłuż osi $x$-ów.

c) Weźmy pod uwagę ogólniejsze równanie różniczkowe postaci:

$$\boxed{f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0} \tag{57}$$

zwane *równaniem różniczkowym o zmiennych oddzielonych*. Jest ono równoważne z równaniem:

$$y' = -\frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{lub} \quad x' = -\frac{g(y)}{f(x)}$$

Gdy $g(y) = -1$, to otrzymujemy równanie typu (46), jeżeli zaś $f(x) = 1$, to otrzymujemy równanie typu (56). Aby to równanie rozwiązać, wprowadźmy nową zmienną $z$ za pomocą równania:

$$z = \int g(y)\,dy$$

Wobec tego:

$$g(y)\,dy = dz$$

i równanie (57) przechodzi na:

$$f(x)\,dx + dz = 0$$

czyli: $\frac{dz}{dx} = -f(x)$ a stąd $z = -\int f(x)\,dx + C$, czyli:

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C$$

Widzimy stąd, że równanie różniczkowe o zmiennych oddzielonych, dane w postaci (57), rozwiązuje się, całkując osobno każdy jego dodajnik według tej zmiennej, która w nim figuruje. Przez całkowanie otrzymamy jednoparametrową gromadę funkcyj:

$$F(x) + G(y) = C$$

podanych w formie uwikłanej.

Bardzo często mamy do czynienia z takimi równaniami, które nie mają wprawdzie postaci, uwidocznionej we wzorze (57), lecz dadzą się sprowadzić do tej postaci przez pewne proste przekształcenie. Tak np. równanie:

(58) $$\boxed{f(x)\,g_1(y)\,dx + g(y)\,f_1(x)\,dy = 0}$$

sprowadzamy do równania o zmiennych oddzielonych, mnożąc obie strony przez czynnik:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{f_1(x)\,g_1(y)}$$

Otrzymujemy w ten sposób:

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx + \frac{g(y)}{g_1(y)}\,dy = 0$$

a więc zmienne są oddzielone.

*Przykłady.*

Przykładami rozwiązywania równania różniczkowego postaci (46) są wszystkie całki nieoznaczone, omówione w tomie II w rozdziale XVII. W przykładzie 4 na str. 9 tomu II wyjaśniono, jak się wybiera żądaną całkę szczegółową z gromady funkcyj, tworzących całkę ogólną.

Przykładami rozwiązywania równań różniczkowych postaci (56) są zagadnienia, rozwiązane w tomie II, w przykładzie 5 na str. 19—21 i w przykładzie 7 na str. 41—43. Także równania różniczkowe, omówione w § 87—90, w tomie I, należą do tego typu.

1) Tak np. równanie różniczkowe:

$$y' = y$$

czyli: $\frac{dy}{dx} = y$ najprościej jest rozwiązać przez oddzielenie zmiennych, a mianowicie:

$$\frac{dy}{y} = dx$$

a stąd:

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\log|y| = x + c$$

$$|y| = e^{x+c} = e^c \cdot e^x$$

Oznaczmy stałą dodatnią $e^c$ literą $C_1$, to:

$$|y| = C_1 \cdot e^x$$

a stąd:

$$y = Ce^x$$

przy czym teraz już $C$ oznacza dowolną stałą, dodatnią lub niedodatnią.

2) W podobny sposób rozwiązujemy równanie różniczkowe:

$$y' = b(g - y)$$

charakteryzujące wzrastanie według prawa Mitscherlicha (por. tom I, str. 284 i nast.). Otrzymujemy:

$$\frac{dy}{b(g-y)} = dx$$

a stąd:

$$-\frac{1}{b}\log|g - y| = x + c$$

Zatem:

$$y = g - Ce^{-bx}$$

Wybierzmy z tej gromady linij całkowych tę, która przechodzi przez początek układu. Żądamy więc, aby dla $x = 0$ było $y = 0$.

Z tego warunku otrzymujemy:

$$0 = g - C \cdot 1$$

a więc $g = C$. Żądaną całką jest zatem funkcja:

$$y = g(1 - e^{-bx})$$

3) W równaniu różniczkowym:

$$(2y - 1)\,dx + x\,dy = 0$$

zmienne nie są oddzielone. Załóżmy najpierw, że $x \neq 0$ i $2y - 1 \neq 0$. Przez podzielenie obu stron równania przez $(2y - 1)x$ otrzymujemy równanie:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{2y - 1} = 0$$

o zmiennych oddzielonych. Stąd:

$$\log|x| + \tfrac{1}{2}\log|2y - 1| = c$$

czyli:

$$\log|x|\sqrt{2y - 1} = c$$

$$|x|\sqrt{2y - 1} = e^c$$

zatem: $x^2|2y-1|=C$, przy czym $C>0$ lub $x^2(2y-1)=C$, przy czym $C$ może mieć wartość dowolną. Dla $C=0$ otrzymujemy wyłączone poprzednio rozwiązania, a mianowicie $x=0$ i $2y-1=0$.

4) W termodynamice dowodzi się, że pomiędzy objętością a prężnością gazów doskonałych, poddawanych zmianom *adiabatycznym* (tj. takim zmianom, przy których nie następuje wymiana ciepła zawartego w gazie z otoczeniem), zachodzi następujący związek:

$$v\,dp + kp\,dv = 0$$

gdzie $k$ oznacza liczbę stałą, wynoszącą około 1·41 (jest to stosunek ciepła właściwego $c_p$ przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego $c_v$ przy stałej objętości). Równanie to ma postać równania (57). Zmienne nie są tu wprawdzie oddzielone, ale możemy je oddzielić, dzieląc obie strony przez $pv$. Dochodzimy w ten sposób do równania:

$$\frac{dp}{p} = -k\frac{dv}{v}$$

Stąd zaś (uważając $p$ i $v$ za wielkości dodatnie) otrzymujemy:

$$\log p + k\log v = c$$

czyli:

$$pv^k = C$$

Jest to równanie gromady linij adiabatycznych dla gazów doskonałych.

5) Znaleźć ortogonalne trajektorie (por. tom I, § 178) takiej gromady elips:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

dla których stosunek osi ma stałą wartość $k$, a więc $a:b=k$.

Równanie tej gromady ma postać:

$$x^2 + k^2y^2 - a^2 = 0$$

Stąd otrzymujemy następujące równanie różniczkowe tej gromady (tworząc pochodną $y'$ funkcji uwikłanej):

$$y' = -\frac{2x}{2yk^2} = -\frac{x}{yk^2}$$

Równanie ortogonalnych trajektoryj tej gromady elips ma zatem postać:

$$y' = \frac{yk^2}{x}$$

czyli:

$$x\,dy - k^2y\,dx = 0$$

Oddzielamy zmienne i otrzymujemy:

$$\frac{dy}{y} - \frac{k^2dx}{x} = 0$$

Ograniczmy się najpierw do dodatnich $x$ i $y$.

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\log y - k^2\log x = c$$

czyli:

$$\log(y:x^{k_1}) = c$$

Ostatnie równanie możemy napisać w postaci:

$$y = Cx^{k_1}$$

przy czym $C = e^c$ jest dowolną stałą dodatnią.

Otrzymaliśmy więc gromadę linij *parabolicznych*, przechodzących przez początek układu. Podobny wynik uzyskuje się w innych ćwiartkach, np. dla $x > 0$, $y < 0$.

6) W równaniu różniczkowym:

$$y' = x + y$$

zmienne nie są oddzielone. Możemy je jednak przekształcić na równanie o zmiennych oddzielonych, wprowadzając za $y$ nową zmienną zależną:

$$v = x + y$$

Wtedy $y = v - x$, $y' = v' - 1$, a zatem dane równanie przechodzi na:

$$v' - 1 = v \quad \text{czyli} \quad v' = 1 + v$$

Tu już dadzą się zmienne oddzielić, a mianowicie:

$$\frac{dv}{1+v} = dx$$

(zakładając, że $1 + v \neq 0$ czyli $1 + x + y \neq 0$). Stąd: $\log|1+v| = x + c$ czyli $\log|1 + x + y| = x + c$.

Zatem:

$$|1 + x + y| = e^x \cdot e^c = Ce^x$$

przy czym $C > 0$ lub $1 + x + y = Ce^x$ przy dowolnym $C$.

A więc:

$$y = Ce^x - 1 - x$$

W tym rozwiązaniu ogólnym mieści się także wyłączone poprzednio rozwiązanie $1 + x + y = 0$, a mianowicie otrzymujemy je dla $C = 0$.

7) W podobny sposób można rozwiązać ogólniejsze równania:

$$y' = f(x + y) \quad \text{i} \quad y' = f(ax + by)$$

## § 297. Równania różniczkowe jednorodne

Przy pomocy podobnego podstawienia jak w ostatnim przykładzie można scałkować równania postaci:

(59) $$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

zwane równaniami różniczkowymi jednorodnymi.

*Uwaga.* Jeżeli w równaniu różniczkowym pierwszego rzędu, napisanym w postaci:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

funkcje $M(x, y)$ i $N(x, y)$ są funkcjami *jednorodnymi* tego samego stopnia (por. tom I, str. 353) np. $n$-tego stopnia, to równanie to można sprowadzić do postaci (59). dzieląc obie strony przez $x^n$. Z jednorodności bowiem wynika, że $M(tx, ty) = t^n M(x, y)$. Biorąc zaś $t = \frac{1}{x}$, otrzymujemy:

$$M\left(1, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n M(x, y)$$

a więc:

$$M(x, y) = x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Podobnie:

$$N(x, y) = x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

a zatem:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\psi\left(\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Wprowadźmy zamiast $y$ nową zmienną niezależną $v$ za pomocą podstawienia:

$$\frac{y}{x} = v$$

Stąd: $y = vx$, $y' = v + v'x$, a więc dane równanie różniczkowe przechodzi na równanie:

$$v + \frac{dv}{dx}x = f(v)$$

czyli:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}$$

To równanie należy już do typu (57), to znaczy jest równaniem o zmiennych oddzielonych. Chcąc przenieść wszytkie wyrażenia, zawierające tylko $v$, na jedną stronę, a zawierające tylko $x$, na drugą, trzeba wykonać dzielenie przez $f(v) - v$. Trzeba zatem założyć, że $f(v) - v \neq 0$ i osobno zbadać te rozwiązania, dla których $f(v) - v = 0$ czyli $\frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Jeżeli liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ spełniają równanie $\alpha = f(\alpha)$, to funkcje $y = \alpha_1 x$, $y = \alpha_2 x, \ldots$ są rozwiązaniami danego równania różniczkowego. Pozostałe rozwiązania równania (59) otrzymamy, zakładając $f(v) - v \neq 0$. Wtedy:

$$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

a stąd:

$$\int \frac{dv}{f(v) - v} = \log|x| + c$$

a zatem:

$$|x| \cdot e^c = e^{\int \frac{dv}{f(v)-v}} \qquad \text{czyli} \qquad C|x| = F(v)$$

przy czym dodatnią stałą $e^c$ oznaczaliśmy literą $C$, a funkcję zmiennej $v$, znajdującą się po prawej stronie znaku równości, $F(v)$. Jeżeli dopuścimy, by stała $C$ przybierała dowolne wartości, zarówno dodatnie jak i niedodatnie, to ogólna całka równania różniczkowego (59) przyjmie postać:

$$Cx = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

*Przykład.*

Scałkować równanie:

$$y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$$

Jest to równanie jednorodne, ponieważ $M(x, y) \equiv y^2$ i $N(x, y) \equiv x^2 - xy$ są funkcjami jednorodnymi tego samego (drugiego) stopnia.

Kładąc $y = vx$, otrzymujemy:

$$v^2 x^2\,dx + (x^2 - x^2 v)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

a po uproszczeniu przez $x^2$:

$$(v^2 + v - v^2)\,dx + (1 - v)\,x\,dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{v - 1}{v}\,dv = \left(1 - \frac{1}{v}\right)dv$$

Zatem:

$$\log|x| + c = v - \log|v| = \frac{y}{x} - \log\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{y}{x} - \log|y| + \log|x|$$

$$\frac{y}{x} = \log|y| + c = \log|y| + \log C = \log C|y|$$

a stąd $C|y| = e^{y/x}$ przy $C > 0$ lub:

$$Cy = e^{y/x}$$

przy dowolnym $C$.

W bliskim związku z równaniami jednorodnymi jest równanie różniczkowe:

$$\boxed{y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right)} \tag{60}$$

Jeżeli $a \cdot b_1$ jest *różne* od $a_1 \cdot b$, to równanie to można sprowadzić do równania jednorodnego.

Rozwiązujemy w tym celu układ równań:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \end{cases} \tag{r}$$

i otrzymujemy $x = k$, $y = l$. Wprowadzamy za zmienną zależną i niezależną nowe zmienne za pomocą podstawień:

$$x = u + k, \quad y = v + l$$

Ponieważ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot 1 = \frac{dv}{du}$$

przeto równanie różniczkowe przyjmie postać:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a(u+k)+b(v+l)+c}{a_1(u+k)+b_1(v+l)+c_1}\right) = f\left(\frac{au+bv+(ak+bl+c)}{a_1u+b_1v+(a_1k+b_1l+c_1)}\right)$$

Ponieważ $k$ i $l$ są pierwiastkami równań (r), przeto wyrażenia, zawarte w nawiasach w ostatnim ułamku, są zerami i otrzymujemy równanie *jednorodne*:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au+bv}{a_1u+b_1v}\right)$$

Jeżeli $a \cdot b_1 = a_1 \cdot b$, lecz $b_1 \neq 0$, to wprowadzając nową zmienną zależną za pomocą podstawienia:

$$a_1x + b_1y + c_1 = z$$

otrzymujemy równanie:

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{bz + b_1c - bc_1}{b_1z}\right)$$

To równanie nie jest jednorodne, natomiast należy do omówionego już typu (56): $z' = F(z)$.

Jeżeli $a \cdot b_1 = a_1 \cdot b$ i $b_1 = 0$, to musi być także $b = 0$ lub $a_1 = 0$, a równanie (60) ma postać:

$$y' = f\left(\frac{ax+c}{a_1x+c_1}\right) \quad \text{lub} \quad y' = f\left(\frac{ax+by+c}{c_1}\right)$$

a więc należy do jednego z omówionych już typów: (46) lub przykład 7 z § 296.

## § 298. Równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

Równanie różniczkowe postaci:

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)} \tag{61}$$

nazywamy *liniowym* zgodnie z ogólną definicją równań różniczkowych liniowych (por. § 294, str. 99).

Rozwiązanie takiego równania uskuteczniamy dwoma krokami. Najpierw rozwiązujemy prostsze równanie liniowe:

$$\boxed{y' + p(x)\,y = 0} \tag{62}$$

otrzymane z równania (61) przez opuszczenie wolnego wyrazu $q(x)$.

To prostsze równanie (62) nazywamy równaniem *liniowym jednorodnym*, przy czym mamy na myśli jednorodność tylko ze względu na zmienne $y$ i $y'$, natomiast funkcja $p(x)$, zawierająca zmienną $x$, może być zupełnie dowolną funkcją. Nie należy zatem mieszać poznanej w poprzednim paragrafie definicji równań różniczkowych jednorodnych z definicją równań różniczkowych *liniowych jednorodnych*. Zupełne równanie liniowe (61) z wyrazem wolnym różnym od zera nazywamy równaniem *liniowym niejednorodnym*. Równanie (62) całkujemy łatwo, a mianowicie przez oddzielenie zmiennych otrzymujemy:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

Stąd:

$$\log|y| = -\int p(x)\,dx + c$$

a więc:

$$|y| = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^{c}$$

Oznaczając dodatnią stałą $e^{c}$ znakiem $C_1$, otrzymujemy:

$$|y| = C_1 e^{-\int p(x)dx}$$

a stąd:

$$\boxed{y = C e^{-\int p(x)\,dx}} \tag{63}$$

Tutaj stała $C$ może przybierać dowolne wartości dodatnie $+C_1$ i ujemne $-C_1$, a także dla $C = 0$ otrzymujemy jedną całkę szczególową, a mianowicie $y = 0$ (funkcja ta spełnia istotnie równanie (62), bo $y' = 0$).

Otrzymaliśmy w ten sposób całkę ogólną równania liniowego jednorodnego. Nie spełnia ona równania niejednorodnego. Jeżeli jednak stałą $C$ zastąpimy odpowiednio dobraną funkcją $C(x)$ zmiennej $x$, to okaże się, że funkcja:

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}$$

jest całką równania niejednorodnego. Tę metodę rozwiązywania równania liniowego nazywamy *metodą zmienności stałej*. Aby znaleźć funkcję $C(x)$, podstawiamy w równanie niejednorodne (61) to $y$ i jego pochodną:

$$y' = C'(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} \cdot p(x)$$

Otrzymujemy:

$$C'(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}\cdot p(x) + p(x)\cdot C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} = q(x)$$

Stąd:

$$C'(x) = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}$$

a więc:

$$C(x) = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c$$

Wobec tego:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(c + \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right) \tag{64}$$

jest *całką ogólną równania różniczkowego liniowego niejednorodnego.*

Całkę tę można przedstawić w postaci:

$$y = c\cdot\varphi(x) + \psi(x)$$

z której widać, że stała $c$ występuje tu w pierwszym stopniu. Na odwrót, łatwo stwierdzić, że każda gromada funkcyj tej postaci spełnia równanie różniczkowe jednorodne.

*Przykłady.*

1) Rozwiązać równanie:

$$y' + \frac{x}{1-x^2}\,y = \frac{x}{1-x^2}$$

Użyjemy gotowego wzoru (64). Obliczamy najpierw całkę:

$$\int p(x)\,dx = \int \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

występującą dwukrotnie w tym wzorze. Otrzymujemy:

$$\int p(x)\,dx = \log\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Stąd:

$$e^{\int p(x)\,dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

a więc:

$$y = \sqrt{1-x^2}\left(c + \int \frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)$$

Po wykonaniu drugiego całkowania otrzymamy:

$$y = \sqrt{1-x^2}\left(c + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

a więc:

$$y = 1 + c\sqrt{1+x^2}$$

2) Związek między natężeniem $I$ prądu elektrycznego w chwili $t$ a siłą elektromotoryczną $E$ w przewodzie o oporze $R$ a o indukcji własnej $L$ wyraża się wzorem:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe niejednorodne.

a) Jeżeli siła elektromotoryczna przestanie działać, tj. $E$ stanie się równe zeru, to prąd zanika według prawa:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0$$

Jest to równanie liniowe jednorodne. Całkujemy je albo według wzoru (63), albo bezpośrednio przez oddzielenie zmiennych:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

Stąd:

$$\log I = -\frac{R}{L} t + c$$

a więc:

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

Z tej całki ogólnej wybieramy odpowiednią całkę szczegółową, wyznaczając stałą $C$ np. z warunku, żeby w chwili przerwania prądu, tj. dla $t = 0$, natężenie prądu miało znaną wartość $I_0$. Wobec tego:

$$I_0 = Ce^0 = C$$

a żądana całka szczegółowa ma wartość:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Według tego prawa zanika prąd od chwili, gdy przestanie działać siła elektromotoryczna.

b) Jeżeli w chwili $t = 0$ włączono siłę elektromotoryczną stałą, różną od zera, to wzrastanie natężenia prądu należy wyznaczyć z równania różniczkowego liniowego niejednorodnego.

Stosując wzór (64) otrzymujemy:

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left(c + \int \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt\right) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

Ponieważ w chwili $t = 0$ natężenie prądu miało wartość $I = 0$, przeto stała $c$ musi mieć wartość, wyznaczoną z wzoru:

$$0 = c \cdot e^0 + \frac{E}{R} \quad \text{tj.} \quad c = -\frac{E}{R}$$

Wobec tego całka szczegółowa, która jest rozwiązaniem tego zagadnienia, ma postać:

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

To natężenie dąży bardzo szybko do wartości $\frac{E}{R}$, odpowiadającej prawu Ohma (por. tom I, str. 285).

c) Jeżeli siła elektromotoryczna zmienia się np. periodycznie według prawa:

$$E = E_0 \sin \omega t$$

to rozwiązaniem równania różniczkowego jest:

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left(c_1 + \frac{1}{L}\int E_0 \sin \omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t}\, dt\right)$$

Po wykonaniu całkowania (per partes!) otrzymuje się:

(w) $$I = c_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0 \sin(\omega t - \gamma)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

przy czym kąt $\gamma$ wyznacza się z wzoru: $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\omega L}{R}$. Z warunku, że dla $t = 0$ jest $I = 0$, otrzymujemy:

$$c_1 = \frac{E_0 \sin \gamma}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Część pierwsza po prawej stronie wzoru (w) dąży szybko z wzrostem czasu do zera, a część druga jest periodyczna, o tym samym periodzie $\frac{2\pi}{\omega}$, co siła elektromotoryczna, lecz o fazie spóźnionej o $\gamma$.

Równanie nieliniowe postaci:

(65) $$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^n}$$

zwane równaniem Bernoulli'ego, można przekształcić na równanie liniowe. Dzielimy w tym celu obie strony przez $y^n$ i otrzymujemy:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

Wprowadźmy za zmienną zależną $y(x)$ nową zmienną $z(x)$ za pomocą podstawienia:

(a) $$y^{1-n} = z$$

Stąd wynika:

$$y = z^{\frac{1}{1-n}}, \quad dy = \frac{1}{1-n} z^{\frac{n}{1-n}}\, dz$$

Wstawiając te wartości w równanie, otrzymamy po uporządkowaniu:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,p(x)\,z = (1-n)\,q(x)$$

to zaś jest równanie liniowe. Z tego równania wyznacza się funkcję $z(x)$ według wzoru (64), a następnie wraca się do zmiennej $y$ za pomocą wzoru (a).

## § 299. Równania różniczkowe zupełne. O czynniku całkującym

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu, w którym $y'$ występuje w formie wyraźnej, możemy, jak wiadomo, napisać w postaci:

(55) $$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

Jeżeli lewa strona jest *różniczką zupełną*, to równanie to nazywamy *równaniem różniczkowym zupełnym*. Jeżeli funkcję $f(x, y)$, której różniczką zupełną jest lewa strona, przyrównamy do stałej dowolnej $C$, to otrzymujemy całkę ogólną tego równania. Istotnie, jeżeli:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = df(x, y) = 0$$

to:

$$f(x, y) = C$$

Wszystkie funkcje $y(x)$, spełniające ten warunek, spełniają dane równanie różniczkowe zupełne, albowiem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,y'(x) = 0 \quad \text{czyli} \quad M + Ny' = 0$$

Znalezieniem funkcji, której różniczką zupełną jest wyrażenie:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

zajmowaliśmy się już w § 114 (tom I) i w § 257 (tom II). Widzieliśmy że koniecznym i dostatecznym warunkiem na to, aby wyrażenie:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

było różniczką zupełną, jest:

(z) $$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

Funkcję zaś $f(x, y)$, której różniczką zupełną jest badane wyrażenie, potrafimy wyznaczyć metodą, omówioną w § 114 tomu I, lub też wprost za pomocą gotowego wzoru (por. tom II, str. 246, wzór (170)):

$$f(x, y) = \int_a^x M(x, y)\,dx + \int_b^y N(a, y)\,dy$$

przy czym $a$ i $b$ są dowolnymi liczbami stałymi.

Wobec tego całką ogólną równania różniczkowego zupełnego jest gromada funkcyj $y(x)$, otrzymanych z rozwikłania wzoru $f(x, y) = C$, czyli wzoru:

(66) $$\boxed{\int_a^x M(x, y)\,dx + \int_b^y N(a, y)\,dy = C}$$

Widzimy stąd, że równanie różniczkowe zupełne rozwiązuje się za pomocą dwóch kwadratur.

*Przykład.*
Równanie różniczkowe:

$$4x^3 y\,dx + (y^2 + x^4)\,dy = 0$$

jest równaniem zupełnym, albowiem:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x^3 \quad \text{i} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x^3$$

Wobec tego całkę ogólną tego równania otrzymamy z wzoru:

$$F(x, y) = \int_a^x 4x^3 y\,dx + \int_b^y (y^2 + a^4)\,dy = c$$

to znaczy:

$$x^4 y\Big|_a^x + \left(\tfrac{1}{3}y^3 + a^4 y\right)\Big|_b^y = c$$

Stąd:

$$x^4 y + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{3}b^3 - a^4 b = c.$$

Oznaczając stałą liczbę $c + \frac{1}{3}b^3 + a^4 b$ jedną literą $c_1$, otrzymujemy:

$$x^4 y + \tfrac{1}{3}y^3 = c_1$$

Jest to jednoparametrowa gromada funkcyj, podanych w formie uwikłanej.

Łatwo stwierdzić, że równanie różniczkowe o zmiennych oddzielonych, tj. równanie postaci:

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$$

jest równaniem zupełnym. I tak w równaniu tym jest $M(x, y) = f(x)$ a $N(x, y) = g(y)$, a zatem:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Te cząstkowe pochodne są równe, to zaś dowodzi, że badane równanie jest równaniem zupełnym.

Równanie:

$$f(x) \cdot g_1(y)\, dx + g(y) \cdot f_1(x)\, dy = 0$$

nie jest wprawdzie równaniem zupełnym, można je jednak przekształcić na takie równanie, mnożąc obie jego strony przez czynnik:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{f_1(x) g_1(y)}$$

Ogólnie, jeżeli równanie:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

nie jest równaniem zupełnym, a posiada całkę ogólną, to można je zamienić na równanie zupełne, mnożąc lewą stroną przez odpowiednio dobraną funkcję $\mu(x, y)$, zwaną *czynnikiem całkującym* danego równania.

Znalezienie czynnika całkującego nie jest w ogólnym przypadku zagadnieniem łatwym.

I tak z warunku, że:

$$\mu M\, dx + \mu N\, dy$$

ma być różniczką zupełną, wynika, że czynnik całkujący $\mu$ musi spełniać następujące równanie:

(67)
$$\boxed{\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}}$$

czyli:

(67 a)
$$\boxed{\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}}$$

Jest to *równanie różniczkowe cząstkowe* pierwszego rzędu, trudniejsze zwykle do rozwiązania aniżeli pierwotne, dane równanie różniczkowe niezupełne.

Równanie to upraszcza się znacznie, jeżeli się zdarzy, że równanie różniczkowe niezupełne posiada czynnik całkujący, zależny tylko od *jednej zmiennej*, np. od $x$. Wtedy odpada $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ i mamy do czynienia z równaniem różniczkowym zwyczajnym:

$$\mu(x) M_y = \mu(x) N_x + N \frac{d\mu}{dx}$$

czyli:

$$\frac{d\mu}{dx} + \frac{N_x - M_y}{N}\mu = 0$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe jednorodne, całkujemy je zatem według wzoru (63) na str. 118 i otrzymujemy:

$$\mu(x) = Ce^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \tag{68}$$

Tak np. łatwo się można przekonać, że równanie liniowe niejednorodne, napisane w postaci:

$$(p(x)y - q(x))\,dx + dy = 0 \tag{l}$$

nie jest równaniem zupełnym, posiada jednak czynnik całkujący, zależny tylko od $x$. Z wzoru (68) otrzymujemy na ten czynnik wzór:

$$\mu(x) = Ce^{\int p(x)dx}$$

Mnożąc równanie (l) przez ten czynnik, zamieniamy istotnie lewą stronę na różniczkę zupełną, jak łatwo sprawdzić. Całkując tę różniczkę zupełną według ogólnego wzoru (66), otrzymujemy także tą drogą znany nam już wzór (64) na całkę ogólną równania liniowego niejednorodnego.

Zupełnie podobnie postępuje się, gdy istnieje czynnik całkujący, zależny tylko od $y$.

Pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie do stwierdzenia, że równanie różniczkowe jednorodne:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

napisane w postaci:

$$M(x\ y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

(przy czym, jak wiemy, $M$ i $N$ są funkcjami jednorodnymi tego samego stopnia), posiada czynnik całkujący:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x\,M + y\,N}$$

Przy dowodzie trzeba się powołać na twierdzenie Eulera o funkcjach jednorodnych (por. tom I, str. 333, wzór 78).

Omówiliśmy w ten sposób najważniejsze typy tych równań różniczkowych postaci:

$$y' = f(x, y)$$

które się dadzą scałkować przez kwadratury. Nie należy jednak sądzić, że każde takie równanie da się w ten sposób rozwiązać. Tak np. okazano, że równanie:

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$$

różniące się od równania liniowego tylko tym, że przybył dodajnik $p(x)y^2$, nie da się w ogólnym przypadku scałkować przez kwadratury. To równanie różniczkowe, posiadające szereg interesujących własności, nazywamy równaniem Riccati'ego.

Nasuwa się wobec tego pytanie, czy wogóle takie równanie posiada rozwiązania a ogólniej: jakie warunki musi spełniać funkcja $f(x, y)$, aby równanie różniczkowe $y' = f(x, y)$ posiadało rozwiązanie. Tą nader ważną kwestią zajmiemy się w § 301—302. W następnych zaś paragrafach zajmiemy się jeszcze niektórymi równaniami różniczkowyni pierwszego rzędu, podanymi w postaci:

$$F(x, y, y') = 0$$

tj. takimi, w których $y'$ występuje w formie uwikłanej.

## § 300. Równania różniczkowe Lagrange'a i Clairauta

Jeżeli równanie różniczkowe pierwszego rzędu podane jest w takiej formie, że trudno je rozwikłać względem $y'$, to próbujemy je rozwikłać względem $x$ lub $y$. Weźmy pod uwagę równanie rozwikłane względem $y$, a więc równanie postaci:

(69) $$y = \varphi(x, y')$$

Rozwiązanie takiego równania potrafimy zawsze sprowadzić do równania, w którym pochodna nieznanej funkcji występuje w formie wyraźnej. Uzyskujemy to przez wprowadzenie nowej zmiennej (zależnej):

$$p = y'$$

i *przez różniczkowanie* danego równania (69) według zmiennej $x$. I tak różniczkując obie strony równania (69) według $x$, otrzymujemy:

$$y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}$$

czyli:

$$p = \varphi_x(x, p) + \varphi_p(x, p) \frac{dp}{dx}$$

a stąd:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \varphi_x(x, p)}{\varphi_p(x, p)} = g(x, p)$$

To zaś równanie ma już formę wyraźną (względem pochodnej szukanej funkcji $p(x)$).

Jeżeli ogólną całką tego równania jest:

$$h(x, p, c) = 0$$

to czasem nie potrzebujemy nawet obliczać stąd $p$ a następnie $y$ przez kwadraturę z warunku $y' = p$, lecz możemy uniknąć tej ostatniej kwadratury. Jeżeli mianowicie uda się otrzymaną całkę ogólną rozwikłać względem zmiennej $x$, to znaczy przedstawić $x$ w postaci:

(a) $$x = \psi(p, c)$$

to wystarczy wstawić tę funkcję w dane równanie różniczkowe za $x$. Otrzymamy w ten sposób:

$$y = \varphi(\psi(p, c), p)$$

czyli:

(b) $$y = \chi(p, c)$$

Równania (a) i (b) dają razem parametrowe przedstawienie funkcyj całkowych za pomocą parametru $p$.

Podobnie postępujemy, gdy z równania różniczkowego:

$$F(x, y, y') = 0$$

możemy obliczyć $x$ w formie wyraźnej, tj. gdy można to równanie przedstawić w postaci:

(70) $$x = \varphi(y, y')$$

Wtedy dogodnie jest uważać $x$ za zmienną zależną.

Specjalnym przypadkiem równań, dających się sprowadzić do postaci (69) lub (70), są równania, zawierające $x$ i $y$ najwyżej w pierwszym stopniu, tj. równania postaci:

$$xf_1(y') + yf_2(y') + f_3(y') = 0$$

Jeżeli $f_2(y')$ nie jest identycznie zerem, to równanie to można przedstawić w postaci:

(71) $$\boxed{y = xg(y') + f(y')}$$

zwanej równaniem różniczkowym Lagrange'a.

Kładziemy $y' = p$, a więc:

(a) $$y = xg(p) + f(p)$$

Tworzymy pochodne obu stron według $x$ i otrzymujemy:

$$p = g(p) + xg'(p)\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

czyli:

$$p - g(p) = \frac{dp}{dx}(xg'(p) + f'(p))$$

Załóżmy, że $g(p)$ jest różne od $p$ i obliczmy $\frac{dx}{dp}$, uważając teraz $p$ za zmienną niezależną, a $x$ za jej funkcję. Otrzymamy:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x\,g'(p)}{p-g(p)} + \frac{f'(p)}{p-g(p)}$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe, potrafimy je zatem rozwiązać przez kwadratury. W ten sposób otrzyma się całkę ogólną tego równania w postaci:

(b) $$x = G(p, c)$$

Nie trzeba stąd wyliczać $p$, lecz wystarczy wstawić za $x$ znalezioną funkcję w równanie (a). Otrzyma się:

(c) $$y = G(p, c)\,g(p) + f(p) = H(p, c)$$

Równania (b) i (c) dają parametrowe przedstawienie całki ogólnej równania Lagrange'a.

Wyłączyliśmy przypadek $g(p) = p$ czyli:

$$g(y') = y'$$

Wtedy równanie Lagrange'a przyjmuje postać:

(72) $$\boxed{y = xy' + f(y')}$$

zwaną równaniem różniczkowym Clairauta. Chcąc je rozwiązać, kładziemy $y' = p$ i różniczkujemy obie strony równania:

(d) $$y = xp + f(p)$$

według zmiennej $x$, pamiętając o tym, że $p$ jest funkcją $x$. Otrzymujemy:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

czyli:

$$\frac{dp}{dx}(x + f'(p)) = 0$$

Równanie to spełnia się, gdy pierwszy albo drugi czynnik jest zerem, tj. gdy:

(e) $$\frac{dp}{dx} = 0$$

albo:

(f) $$x = -f'(p)$$

Rozwiązaniem równania (e) jest:

$$p = c$$

Podstawiając to w równanie (d), otrzymujemy całkę ogólną równania Clairauta w postaci:

$$y = cx + f(c) \tag{73}$$

Graficznym obrazem tej gromady funkcyj jest jakaś jednoparametrowa gromada linii prostych.

Z równania (f) otrzymamy jeszcze jedną całkę. Aby do niej dojść, nie trzeba odwracać tego równania celem obliczenia $p$, a następnie całkować równanie $y' = p$, lecz wystarczy wstawić znalezione na $x$ wyrażenie w równanie (d). Otrzyma się w ten sposób:

$$y = -pf'(p) + f(p) = h(p) \tag{g}$$

Wzory (f) i (g) dają parametrowe przedstawienie jednej całki, która nie jest całką szczegółową, nie można jej bowiem otrzymać z całki ogólnej przez specjalizację stałej $c$. Całka ta, zwana *całką osobliwą*, przedstawia *obwiednią* gromady linij prostych (73). Istotnie obwiednią gromady:

$$F(x, c) \equiv y - cx - f(c) = 0 \tag{h}$$

znajdujemy (por. tom I, str. 576), kładąc:

$$\frac{\partial F}{\partial c} \equiv -x - f'(c) = 0 \tag{i}$$

i wyznaczając z tych dwóch warunków (h), (i) zmienne $x$ i $y$ jako funkcje parametru $c$. Otrzymamy w ten sposób:

$$x = -f'(c)$$
$$y = -cf'(c) + f(c) = h(c)$$

a to są właśnie równania (f) i (g), różniące się od nich tym tylko, że parametr oznaczono inną literą.

A więc *całka ogólna* równania Clairauta przedstawia jednoparametrową gromadę prostych, a ponadto istnieje *całka osobliwa*, przedstawiająca obwiednią tej gromady.

*Przykłady.*

1) Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$y'^2 - 4xy' + 4y = 0$$

Jest to równanie Clairauta, albowiem:

$$y = xy' - \tfrac{1}{4}y'^2$$

Całką ogólną jest gromada prostych:

$$y = cx - \tfrac{1}{4}c^2 \tag{r}$$

Całkę osobliwą znajdujemy, kładąc:

$$x = -f'(p) = 2 \cdot \tfrac{1}{4} p = \tfrac{1}{2} p$$

i podstawiając tę wartość w równanie:

$$y = xp - \tfrac{1}{4} p^2$$

lub prościej, eliminując $p$ z obu ostatnich równań.

Ponieważ $p = 2x$, przeto $y = 2x^2 - \tfrac{1}{4} \cdot 4x^2 = x^2$.

Rozwiązaniem osobliwym danego równania a zarazem obwiednią gromady prostych, określonych równaniem (r), jest zatem parabola o równaniu:

$$y = x^2$$

2) Scałkować równanie:

(l) $$4y'^3 - 6y'^2 + 9(y - x) = 0$$

Jest to równanie Lagrange'a, albowiem $y$ i $x$ występują w pierwszym stopniu. Kładziemy $y' = p$ i różniczkujemy według $x$. Otrzymujemy:

$$(12p^2 - 12p)\frac{dp}{dx} + 9(p - 1) = 0$$

czyli:

$$(p - 1)\left(12p\frac{dp}{dx} + 9\right) = 0$$

Każdy czynnik z osobna kładziemy równy zeru i otrzymujemy dwa następujące równania:

(m) $$p = 1$$

(n) $$12p\frac{dp}{dx} + 9 = 0$$

Z pierwszego otrzymujemy $\frac{dy}{dx} = 1$ a więc $y = x + c_1$.

Stała $c_1$ nie jest tu dowolna, lecz należy ją tak obrać, aby znaleziona funkcja spełniała dane równanie różniczkowe (l). Musi się zatem spełniać równanie:

$$4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot (x + c_1 - x) = 0$$

a więc $c_1 = \frac{2}{9}$, wobec czego całka równania (l), otrzymana z warunku (m), ma postać:

$$y = x + \tfrac{2}{9}$$

Z drugiego równania (n) otrzymujemy przez oddzielenie zmiennych:

$$4p\,dp = -3\,dx$$

a stąd:

$$p^2 = -\tfrac{3}{2}x + c'$$

a więc:

$$x = -\tfrac{2}{3}p^2 + c$$

Eliminujemy $p$ z tego równania i z danego równania $4p^3 - 6p^2 + 9(y - x) = 0$ i otrzymujemy następującą całkę ogólną tego równania:

$$2(x - c)^3 + 3(y - c)^2 = 0$$

Łatwo jest stwierdzić, że otrzymana z warunku (m) linia całkowa jest obwiednią otrzymanej gromady.

Całka ta nie mieści się w całce ogólnej i jest całką osobliwą.

Równaniami Lagrange'a są wszystkie równania postaci:

$$y = f(y') \quad \text{i} \quad x = g(y')$$

Pozostawiamy czytelnikowi do okazania, że każde z tych równań rozwiązuje się przez jedną kwadraturę.

## § 301. Dowód istnienia całki równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu metodą kolejnych przybliżeń (metodą Picarda)

Zajmiemy się badaniem, pod jakimi warunkami równanie różniczkowe:

$$y' = f(x, y) \tag{54}$$

posiada rozwiązania. Istnienie rozwiązań zależy oczywiście od natury funkcji $f(x, y)$. Wystarczą tu bardzo ogólne założenia o funkcji $f(x, y)$. Nie trzeba nawet żądać różniczkowalności tej funkcji. Wystarczy żądać, $1^0$ aby ta funkcja była *ciągła* w jakimś obszarze $D$ i $2^0$ aby jej iloraz różnicowy względem zmiennej $y$ był w tym obszarze *ograniczony*, tj. aby istniała taka liczba $L$, że:

$$\boxed{\left|\frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1}\right| < L} \tag{74}$$

Ten ostatni warunek nazywamy *warunkiem Lipschitza*. Spełnia się on np. zawsze wtedy, gdy cząstkowa pochodna $\frac{\partial f}{\partial y}$, która jest granicą tego ilorazu różnicowego, istnieje i jest ograniczona.

Okazano, że *przy tych założeniach przez każdy punkt obszaru $D$ przechodzi jedna i tylko jedna linia całkowa równania różniczkowego* (54).

Obierzmy w obszarze $D$ dowolny punkt $A(a, b)$ i szukajmy takiej funkcji $y = \varphi(x)$, spełniającej dane równanie różniczkowe, która przybiera dla $x = a$ wartość $y = b$, czyli takiej linii całkowej, która przechodzi przez punkt $A$. Znajdziemy takie rozwiązanie, posługując się **metodą kolejnych przybliżeń.** Aby uzyskać ciąg takich kolejnych przybliżeń, podstawiamy najpierw w prawą stronę równania (54) za $y$ wartość $b$ i szukamy funkcji $y_1(x)$, spełniającej następujące prostsze równanie różniczkowe:

$$y_1' = f(x, b)$$

Ponieważ prawa strona jest funkcją jednej zmiennej $x$, przeto wszystkie rozwiązania tego równania otrzymujemy, tworząc całkę nieoznaczoną:

$$y_1(x) = \int f(x, b)\,dx + C = F(x) + C$$

Z tej gromady funkcyj wybieramy tę, która przyjmuje dla $x = a$ wartość $b$. Z tego warunku wyznaczamy stałą $C$, a mianowicie:

$$F(a) + C = b$$
$$C = b - F(a)$$

A więc:

$$y_1(x) = F(x) - F(a) + b$$

czyli:

$$\boxed{y_1(x) = \int_a^x f(x, b)\,dx + b} \tag{75}$$

Funkcja $y_1(x)$ jest pierwszym przybliżeniem całki równania (54). Aby uzyskać drugie przybliżenie, podstawiamy znalezioną funkcję znowu w prawą stronę danego równania różniczkowego i rozwiązujemy równanie:

$$y_2' = f(x, y_1(x)) = g(x)$$

Ponieważ prawa strona jest znaną funkcją jednej tylko zmiennej $x$, przeto możemy rozwiązać to równanie przez całkowanie. Wybierając z gromady funkcyj pierwotnych tę, która przyjmuje wartość $b$ dla $x = a$, otrzymujemy:

$$y_2(x) = \int_a^x f(x, y_1(x))\,dx + b$$

Postępując w ten sposób dalej, otrzymujemy ciąg kolejnych przybliżeń:

$$y_3(x) = \int_a^x f(x, y_2(x))\,dx + b$$

. . . . . .

$$\boxed{y_n(x) = \int_a^x f(x, y_{n-1}(x))\,dx + b} \tag{75a}$$

Okazano, że ciąg tych funkcyj $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)\ldots$ jest zbieżny do takiej funkcji $\varphi(x)$, która spełnia dane równanie różniczkowe i przyjmuje dla $x = a$ wartość $b$ a ponadto, że jest to *jedyna* funkcja, spełniająca te warunki.

Metodą Picarda (kolejnych przybliżeń) przeprowadza się w zupełnie podobny sposób dowód istnienia rozwiązań równań różniczkowych wyższych rzędów i układów równań różniczkowych. Metoda kolejnych przybliżeń służy nie tylko do dowodu istnienia rozwiązań, lecz pozwala także otrzymać kolejne przybliżenia tych rozwiązań, a więc rozwiązywać równania różniczkowe w przybliżeniu.

*Przykłady.*

1) Znaleźć takie rozwiązanie równania różniczkowego:

$$y' = y + x$$

które przybiera wartość $y = 1$ dla $x = 0$. Ponieważ funkcja $f(x, y) = x + y$ jest ciągła dla wszystkich $x$, $y$ i posiada ograniczoną pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$, przeto spełnia warunek Lipschitza dla wszystkich punktów. Zatem przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi jedna i tylko jedna linia całkowa, a więc istnieje taka całka, która przybiera żądaną wartość $y = 1$ dla $x = 0$. Kolejne przybliżenia tej całki uzyskamy, wstawiając w dane równanie najpierw zamiast $y$ wartość 1, a więc biorąc pod uwagę równanie:

$$y_1' = 1 + x$$

Stąd otrzymujemy na podstawie wzoru (75):

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (1 + x)\,dx = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2$$

To jest pierwsze przybliżenie szukanej całki. Drugie przybliżenie uzyskamy, wstawiając tę znalezioną funkcję znowu w pierwotne równanie i całkując. Otrzymamy w ten sposób:

$$y_2'(x) = (1 + x + \tfrac{1}{2}x^2) + x = 1 + 2x + \tfrac{1}{2}x^2$$

a zatem:

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + 2x + \tfrac{1}{2}x^2)\,dx = 1 + x + x^2 + \tfrac{1}{6}x^3$$

Dalsze przybliżenie otrzymamy z równania:

$$y_3'(x) = (1 + x + x^2 + \tfrac{1}{6}x^3) + x = 1 + 2x + x^2 + \tfrac{1}{6}x^3$$

a mianowicie:

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + 2x + x^2 + \tfrac{1}{6}x^3)\,dx = 1 + x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4$$

Porównajmy te wyniki z ścisłą wartością żądanej całki. Całkę ogólną równania $y' = y + x$ znaleźliśmy już poprzednio (por. str. 114, przykład 6), a mianowicie:

$$y(x) = Ce^x - x - 1$$

Z tej gromady funkcyj wybieramy tę, która dla $x = 0$ przyjmuje wartość $y = 1$. Z tego warunku wyznaczamy stałą $C$, a mianowicie:

$$1 = C \cdot e^0 - 0 - 1$$

a więc $C = 2$. Żądaną całką jest zatem:

$$y(x) = 2e^x - x - 1$$

czyli:

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{60}x^5 + \ldots + \tfrac{2}{n!}x^n + \ldots$$

Widzimy, że otrzymane przybliżenia $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ mają początkowe wyrazy zgodne z tym rozwinięciem szukanej funkcyj na szereg Maclaurina.

2) Zbadajmy kolejne przybliżenia tej całki równania:

$$y' = 2x + y^2$$

która przybiera wartość $y = 1$ dla $x = 1$. Jest to specjalny przypadek równania Riccati'ego (por. str. 126), którego nie potrafimy rozwiązać elementarnymi metodami, omówionymi powyżej. Natomiast możemy znaleźć ciąg kolejnych przybliżeń całki, używając metody Picarda. I tak:

$$y_1'(x) = 2x + 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_1^x (2x + 1)\,dx = 1 + x^2 + x - 2 = x^2 + x - 1$$

$$y_2'(x) = 2x + (x^2 + x - 1)^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_1^x (2x + (x^2 + x - 1)^2)\,dx = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{3}x^2 + x - \tfrac{11}{30}$$

W podobny sposób otrzymuje się dalsze przybliżenia.

## § 302. Dowód istnienia rozwiązań równania różniczkowego metodą szeregów potęgowych (metodą Cauchy'ego)

Omówiliśmy w § 301 dowód istnienia rozwiązań równania różniczkowego:

$$y' = f(x, y) \tag{54}$$

czyniąc o funkcji $f(x, y)$ założenia bardzo mało ograniczające. Nie żądaliśmy nawet różniczkowalności tej funkcji. W praktyce mamy jednak do czynienia najczęściej z takimi równaniami różniczkowymi, w których funkcja $f(x, y)$ jest regularna, a mianowicie jest funkcją *analityczną*, to znaczy rozwijalną na szereg Taylora. Okażemy, że równanie różniczkowe posiada przy tym założeniu takie rozwiązanie, które jest również rozwijalne na szereg Taylora. Twierdzenie to, udowodnione przez Cauchy'ego, wypowiada się ściśle w następującej postaci.

*Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest rozwijalna na szereg Taylora (dwóch zmiennych) w otoczeniu punktu $x = a$, $y = b$, to równanie różniczkowe $y' = f(x, y)$ posiada taką całkę, która przyjmuje dla $x = a$ wartość $y = b$, i jest rozwijalna na szereg Taylora (jednej zmiennej) w otoczeniu punktu $x = a$.*

Ponieważ przez przesunięcie osi możemy zawsze uzyskać, że punkt $A(a, b)$ będzie miał współrzędne $x = 0$, $y = 0$, przeto możemy przeprowadzić całe rozumowanie, używając szeregu Maclaurina zamiast szeregu Taylora i szukając takiej funkcji $y(x)$, spełniającej równanie różniczkowe, która przyjmuje wartość $y = 0$ dla $x = 0$.

Otóż czynimy założenie, że funkcja $f(x, y)$ da się rozwinąć na szereg Maclaurina dwóch zmiennych:

$$\text{(a)} \qquad f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)\,x + f_y(0, 0)\,y + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(0, 0)\,x^2 + 2 f_{xy}(0, 0)\,xy + f_{yy}(0, 0)\,y^2\right) + \ldots$$

czyli:

$$\text{(b)} \qquad f(x, y) = c_{00} + c_{10}\,x + c_{01}\,y + c_{20}\,x^2 + c_{11}\,xy + c_{02}\,y^2 + \ldots$$

zbieżny bezwzględnie dla $|x| \leqq r_1$, $|y| \leqq r_2$.

Chcemy okazać, że istnieje taka funkcja $y(x)$, spełniająca równanie różniczkowe (54), która da się rozwinąć na szereg potęgowy:

$$\text{(c)} \qquad y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

zbieżny w jakimś otoczeniu punktu $x = 0$. Ponieważ przyjmujemy na $y$ szereg potęgowy bez wolnego wyrazu, przeto mamy już zapewnione to, że $y$ przyjmie żądaną wartość 0 dla $x = 0$. Wiadomo, że $a_r = \frac{1}{r!}\,y^{(r)}(0)$.

Nieznane współczynniki $a_1, a_2, \ldots$ szukanego rozwinięcia możemy wyznaczyć za pomocą znanych współczynników $c_{00}, c_{10}, \ldots$ danego rozwinięcia albo wprost z równania różniczkowego (54), przez kolejne różniczkowania obu stron, albo metodą nieoznaczonych współczynników. Postępując pierwszą drogą, otrzymujemy kolejno:

$$y'(0) = f(0, 0) = c_{00}$$

a więc:

$$\underline{a_1 = c_{00}};$$

$$y''(0) = f_x(0, 0) + f_y(0, 0) \cdot y'(0) = c_{10} + c_{01} \cdot c_{00}$$

a więc:

$$a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \underline{\tfrac{1}{2}(c_{10} + c_{01}\,c_{00})};$$

$$y'''(0) = f_{xx}(0, 0) + 2 f_{xy}(0, 0)\,y'(0) + f_{yy}(0, 0)\,y'(0)^2 + f_y(0, 0)\,y''(0)$$
$$= 2\,c_{20} + 2\,c_{11}\,c_{00} + 2\,c_{02}\,c_{00}^2 + c_{01}(c_{10} + c_{01}\,c_{00})$$

a więc:

$$a_3 = \frac{1}{3!} y'''(0) = \frac{1}{3!} [(c_{20} + c_{11} c_{00} + c_{02} c_{00}^2) \cdot 2 + c_{01} (c_{10} + c_{01} c_{00})]$$

Wzory na dalsze współczynniki $a_n$ są coraz bardziej skomplikowane, otrzymuje się je wszystkie jednak tylko przez dodawanie i mnożenie danych współczynników $c_{kl}$ szeregu (b). Szereg potęgowy (c) ma zatem postać:

$$\text{(d)} \quad y = c_{00} x + \tfrac{1}{2} (c_{10} + c_{01} c_{00}) x^2 + \frac{1}{3!} [(c_{20} + c_{11} c_{00} + c_{02} c_{00}^2) \cdot 2 + c_{01} (c_{10} + c_{01} c_{00})] x^3 + \dots$$

Chodzi o to, czy ten szereg potęgowy jest zbieżny w jakimś otoczeniu punktu $x = 0$. By tego dowieść, tworzymy *majorantę* tego szeregu w następujący sposób. Dany szereg (b) posiada majorantę:

$$\text{(e)} \quad g(x, y) = M + \frac{M}{r_1} x + \frac{M}{r_2} y + \frac{M}{r_1^2} x^2 + \frac{M}{r_1 r_2} xy + \frac{M}{r_2^2} y^2 + \dots + \frac{M}{r_1^k r_2^l} x^k y^l + \dots$$

przy czym $M$ oznacza liczbę większą od bezwzględnych wartości wszystkich wyrazów zbieżnego szeregu:

$$c_{00} + c_{10} r_1 + c_{01} r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \dots + c_{kl} r_1^k r_2^l + \dots$$

Jeżeli bowiem:

$$|c_{kl}| r_1^k r_2^l < M$$

to:

$$\text{(f)} \quad |c_{kl}| < \frac{M}{r_1^k r_2^l}$$

a więc wszystkie wyrazy danego szeregu (b) są przy każdym $x$ i $y$ mniejsze co do bezwzględnej wartości od odpowiednich wyrazów szeregu (e). Istotnie więc szereg (e) majoryzuje szereg (b).

Prawa strona wzoru (e) jest, jak łatwo stwierdzić, rozwinięciem na szereg funkcji ułamkowej:

$$g(x, y) = \frac{M}{(1 - \frac{x}{r_1})(1 - \frac{y}{r_2})}$$

Jest ono zbieżne dla $|x| < r_1$, $|y| < r_2$.

Całkujemy równanie różniczkowe:

$$y' = g(x, y) = \frac{M}{(1 - \frac{x}{r_1})(1 - \frac{y}{r_2})}$$

co się da łatwo uskutecznić, ponieważ zmienne dadzą się oddzielić. Wybieramy z całki ogólnej tę całkę szczegółową, która przyjmuje wartość 0 dla $x = 0$ i otrzymujemy, jak nie trudno stwierdzić:

$$\text{(g)} \quad y = r_2 - r_1 \sqrt{1 + \frac{2 M r_1}{r_2} \log \left(1 - \frac{x}{r_1}\right)}$$

Rozwinięcie tej całki na szereg potęgowy musi mieć postać wzoru (d), w którym tylko każde $c_{kl}$ należy zastąpić odpowiednim wyrażeniem $\frac{M}{r_1^k r_2^l}$, wziętym z rozwinięcia (e). Stąd i z wzorów (f) wynika, że szereg potęgowy, przedstawiający funkcję (g) w otoczeniu punktu $x = 0$, majoryzuje szereg potęgowy (d), przedstawiający szukaną całkę. Szereg potęgowy funkcji (g) jest zbieżny dla:

$$\left| \frac{2 M r_1}{r_2} \log \left(1 - \frac{x}{r_1}\right) \right| < 1$$

(ponieważ rozwinięcie dwumienne funkcji $\sqrt{1+z}$ jest zbieżne dla $|z| < 1$) czyli dla:

$$\text{(h)} \qquad |x| < r_1 \left(1 - e^{\frac{-r_2}{2Mr_1}}\right)$$

Dla tych samych $x$ jest zatem zbieżny także szereg zmajoryzowany (d). Wykazaliśmy w ten sposób, że istnieje całka danego równania różniczkowego, rozwijalna na szereg potęgowy, zbieżny w pewnym otoczeniu punktu $x = 0$. Przy rozwiązywaniu trudniejszych równań różniczkowych używa się często rozwinięć na szeregi potęgowe.

*Przykład.*

Znaleźć taką całkę równania:

$$y' = 3x + y^2$$

która przyjmuje wartość $y = 0$ dla $x = 0$.

Prawa strona jest analityczną funkcją dwóch zmiennych i posiada bardzo proste rozwinięcie na szereg, a mianowicie $c_{10} = 3$, $c_{02} = 1$, a wszystkie inne współczynniki są zerami. Wobec tego, stosując gotowe wzory na $a_1, a_2, a_3, \ldots$ otrzymujemy: $a_1 = c_{00} = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}(c_{10} + c_{01} c_{00}) = \frac{1}{2}(3 + 0 \cdot 0) = \frac{3}{2}$, a na $c_3$ otrzymujemy wartość 0. Rozwinięcie szukanej całki ma zatem postać:

$$y = 0 \cdot x + \tfrac{3}{2} x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots = \tfrac{3}{2} x^2 + \ldots$$

Chcemy otrzymać dalsze wyrazy tego szeregu, nie mając gotowych wzorów na $a_4, a_5, \ldots$ Możemy postępować jedną z dróg, wskazanych przy dowodzie. I tak postępując tą drogą, którą wyznaczaliśmy kolejne współczynniki $a_n$, podstawiamy najpierw $x = 0$, $y = 0$ w dane równanie różniczkowe i otrzymujemy:

$$y'(0) = 3 \cdot 0 + 0^2 = 0$$

Następnie tworzymy pochodną obu stron równania różniczkowego i wstawiamy $y = 0$, a za $y'$ znalezioną wartość $y' = 0$. Zatem:

$$y''(x) = 3 + 2yy' \quad \text{a więc} \quad y''(0) = 3$$

Postępując tak dalej, otrzymujemy kolejno:

$$y'''(x) = 2(yy'' + y'^2) \quad \text{a więc} \quad y'''(0) = 0$$

$$y^{(4)}(x) = 2(yy''' + 3y'y'') \quad " \quad " \quad y^{(4)}(0) = 0$$

$$y^{(5)}(x) = 2(yy^{(4)} + 4y'y''' + 3y''^2) \quad " \quad " \quad y^{(5)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 3^2 = 54$$

$$y^{(6)}(x) = 2(yy^{(5)} + 5y'y^{(4)} + 10y''y''') \quad " \quad " \quad y^{(6)}(0) = 0$$

. . . . . .

Zatem:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2!}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{54}{5!} = \frac{9}{20}, \quad a_6 = 0, \ldots$$

a więc:

$$y = \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{20}x^5 + \ldots$$

Otrzymywanie tą drogą dalszych współczynników jest dość niedogodne (można dla ułatwienia użyć wzoru Leibniza na pochodną iloczynu). Szybciej dochodzi się zwykle do celu *metodą nieoznaczonych współczynników*. Tworzymy w tym celu pochodną szeregu (c), tj.:

(k) $$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$$

i wstawiamy w dane równanie różniczkowe za $y$ i $y'$ szereg (c) i (k). Otrzymujemy w naszym przykładzie:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots = 3x + (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots)^2$$

Porządkujemy obie strony według potęg $x$ i porównujemy współczynniki przy równych potęgach $x$. Otrzymujemy w ten sposób:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots =$$
$$= 3x + a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)x^4 + (2a_2a_3 + 2a_1a_4)x^5 + \ldots$$

Zatem:

| | | |
|---|---|---|
| $a_1 = 0$ | | |
| $2a_2 = 3$ | a stąd | $a_2 = \frac{3}{2}$ |
| $3a_3 = a_1^2 = 0$ | „ „ | $a_3 = 0$ |
| $4a_4 = 2a_1a_2 = 0$ | „ „ | $a_4 = 0$ |
| $5a_5 = 2a_1a_3 + a_2^2 = \frac{9}{4}$ | „ „ | $a_5 = \frac{9}{20}$ |
| $6a_6 = 2a_1a_4 + 2a_2a_3 = 0$ | „ „ | $a_6 = 0$ |
| $7a_7 = 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 = 0$ | „ „ | $a_7 = 0$ |
| $8a_8 = 2a_1a_6 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{20}$ | „ „ | $a_8 = \frac{27}{160}$ |
| . . . . . | | |

Wobec tego rozwinięcie szukanej całki na szereg ma postać:

$$y = \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{9}{20}x^5 + \tfrac{27}{160}x^8 + \ldots = \tfrac{3}{2}x^2(1 + \tfrac{3}{10}x^3 + \tfrac{9}{80}x^6 + \ldots)$$

Metodę dowodu istnienia całek równania różniczkowego, a zarazem metodę otrzymywania rozwinięć tych całek na szeregi potęgowe, uogólniono na równania wyższych rzędów i na układy równań różniczkowych.

Opierając się na rozwinięciu całki równania różniczkowego na szereg potęgowy, podali Runge i Kutta następującą *przybliżoną metodę* rozwiązywania równań różniczkowych.

Chcemy znaleźć przybliżoną wartość tej całki równania różniczkowego:

$$y' = f(x, y)$$

która przybiera dla $x = a$ wartość $y(a) = b$. Gdy $x$ wzrośnie o znaną wielkość $h$, tj. zmieni się na $a + h$, to szukana całka $y$ dozna jakiegoś przyrostu $k$, określonego wzorem:

$$k(h) = y(a + h) - y(a)$$

Otóż Runge i Kutta podali taką przybliżoną wartość $\bar{k}(h)$ tego przyrostu, której rozwinięcie na szereg Taylora zgadza się z rozwinięciem prawdziwego przyrostu $k(h)$ aż do wyrazów, zawierających $h^4$ włącznie.

Otrzymali w ten sposób następujący wzór na $\bar{k}(h)$:

$$\boxed{\bar{k}(h) = \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)} \tag{76}$$

przy czym kolejno:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= hf(a, b) \\ k_2 &= hf(a + \tfrac{1}{2}h,\ b + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(a + \tfrac{1}{2}h,\ b + \tfrac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= hf(a + h,\ b + k_3) \end{aligned}} \tag{76 a}$$

Wzór ten przypomina wzór Simpsona na przybliżoną wartość całki oznaczonej (por. tom II, str. 122). Można go nawet uważać za uogólnienie tego wzoru w tym sensie, że w specjalnym przypadku, gdy równanie różniczkowe ma postać:

$$y' = f(x)$$

jest:

$$k_1 = hf(a), \quad k_2 = hf(a + \tfrac{1}{2}h), \quad k_3 = hf(a + \tfrac{1}{2}h), \quad k_4 = hf(a + h)$$

a więc:

$$\bar{k}(h) = \tfrac{h}{6}(f(a) + 4f(a + \tfrac{1}{2}h) + f(a + h)) \tag{s}$$

To zaś jest przybliżony wzór Simpsona na tę całkę równania $y' = f(x)$, która przybiera dla $x = a$ wartość $y = b$. Ta całka ma bowiem postać:

$$y = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + b$$

a więc:

$$y - b = k(h) = \int_a^{a+h} f(x)\,dx$$

a wzór (s) jest właśnie wzorem Simpsona dla tej całki.

Dokładniejsze uzasadnienie tej przybliżonej metody i przykłady liczbowe na jej zastosowanie znajdują się w podręczniku C. Runge'go

i H. Königa, pt. *Numerisches Rechnen* (Berlin, 1924, str. 286 i nast.). Wzór, pozwalający ocenić błąd, popełniany przy tej metodzie, znaleźć można w podręczniku L. Bieberbacha, pt. *Differentialgleichungen* (Berlin, 1923, str. 45). Inne przybliżone metody rozwiązywania równań różniczkowych znajdzie czytelnik w podręcznikach: Robinsona-Whittakera (cytowany w tomie II, str. 125) i Willersa, pt. *Methoden der praktischen Analysis* (Berlin, 1928).

## § 303. Ogólne uwagi o równaniach różniczkowych zwyczajnych wyższych rzędów

Równaniem różniczkowym zwyczajnym $n$-tego rzędu nazwaliśmy (str. 98) równanie postaci:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0 \tag{48}$$

w którym figuruje $n$-ta pochodna szukanej funkcji $y = \varphi(x)$. Twierdzenia i metody, odnoszące się do rozwiązywania równań różniczkowych dowolnie wysokich rzędów, nie różnią się zasadniczo od rozważań, dotyczących równań drugiego rzędu, tj. równań postaci:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{47}$$

Zajmiemy się zatem prawie wyłącznie równaniami drugiego rzędu. Równania te są szczególnie ważne, ponieważ występują one najczęściej w zastosowaniach fizykalnych, technicznych i geometrycznych. Tak np. w mechanice mamy do czynienia z dwoma wielkościami: prędkością i siłą. Prędkość wyraża się pierwszą pochodną drogi według czasu, siła zaś jest w bezpośrednim związku z przyśpieszeniem, a więc z drugą pochodną. W geometrji, jeśli chodzi o styczne, normalne, trajektorie itd., to wystarcza pierwsza pochodna; jeżeli zaś chodzi o krzywiznę, to mamy do czynienia także z drugą pochodną.

Równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu otrzymywaliśmy (por. tom I, § 177), wychodząc *z dwuparametrowej gromady funkcyj*:

$$f(x, y, c_1, c_2) = 0 \tag{a}$$

Tworzyliśmy pierwszą i drugą pochodną tego równania według $x$, uważając $y$ za funkcję $x$, a mianowicie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0 \tag{b}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'' + y' \cdot \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot y' \right] = 0 \tag{c}$$

Z równań (a), (b) i (c) rugujemy stałe $c_1$ i $c_2$ (obliczając je z dwu równań i wstawiając w trzecie) i otrzymujemy:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

a więc istotnie równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu.

Zachodzi pytanie odwrotne, czy dla każdego danego równania różniczkowego 2-go rzędu istnieje dwuparametrowa gromada krzywych całkowych. Rozważania przeprowadza się najpierw dla równania różniczkowego, podanego w formie wyraźnej względem $y''$, tj. dla równania:

$$y'' = f(x, y, y') \tag{77}$$

Udowadnia się zupełnie to samo, jak dla równań 1-go rzędu, a więc metodą Picarda, tj. przy pomocy kolejnych przybliżeń, lub metodą Cauchy'ego, tj. przy pomocy rozwinięć na szeregi potęgowe, że o ile tylko funkcja $f(x, y, y')$ spełnia pewne, zresztą bardzo obszerne warunki, to istnieje taka funkcja:

$$y = \varphi(x)$$

która spełnia dane równanie różniczkowe, a ponadto czyni zadość *dwom warunkom*, a mianowicie: dla $x = a$ jest $y = b$, oraz równocześnie $y' = c$.

Istnieje więc całka takiego równania i zależy od wartości $b, c$, jakie obierzemy za zmienne $y$ i $y'$. Ponieważ otrzymujemy $y$ w zależności od $b$ i $c$, czyli:

$$y = \varphi(x, b, c)$$

więc istotnie mamy tu do czynienia z dwuparametrową gromadą krzywych całkowych, zwaną *całką ogólną* równania 2-go rzędu.

W konkretnych zagadnieniach trzeba zwykle wybrać z tej gromady jedną całkę szczegółową, spełniającą oprócz równania różniczkowego także pewne dodatkowe warunki. Najczęściej mamy do czynienia z dwoma rodzajami takich dodatkowych warunków. Bardzo jasno występują one przy badaniu linii ugięcia belki.

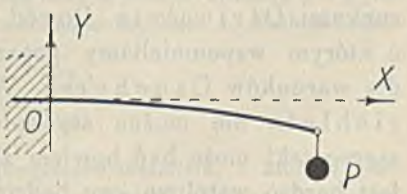

Fig. 15.

Pierwszy rodzaj warunków spotykamy w następującym zagadnieniu.

Pręt poziomy (fig. 15) jest przytwierdzony jednym końcem nieruchomo, na drugi zaś koniec działa siła $P$ pionowo. Skutkiem tej siły pręt ugina się. Otóż okazano, że linia ugięcia jest krzywą, której równanie zawiera się w całce ogólnej pewnego równania różniczkowego drugiego rzędu. Aby wybrać z tej gromady funkcyj jedną, odpowiadającą warunkom istotnym zadania, żądamy przede wszystkim, by krzywa ta przechodziła

przez pewien punkt. Jeśli punkt przytwierdzenia będziemy uważali za początek układu, to dla $x=0$ ma być $y=0$. Dalej widzimy, że styczną w tym punkcie do linii ugięcia jest oś $x$-ów. Żądamy więc ponadto, by dla $x=0$ było $y'=0$. Jeżeli zatem całką ogólną jest $y=\varphi(x, b, c)$, a jej pochodną $y'=\varphi'(x, b, c)$, to muszą się spełniać warunki:

$$0=\varphi(0, b, c)$$
$$0=\varphi'(0, b, c)$$

Z tych dwóch równań o dwóch niewiadomych trzeba wyznaczyć szczegółowe wartości stałych $b$ i $c$. W ten sposób z dwuparametrowej gromady krzywych wybiera się jedną, spełniającą żądane warunki.

Drugi rodzaj warunków spotykamy w następującym zagadnieniu. Weźmy pod uwagę pręt, podparty w dwu punktach $A$, $B$ (fig. 16). Skutkiem działania ciężaru, umieszczonego w środku odcinka $AB=l$, pręt ugina się. Okazuje się, że krzywa ugięcia spełnia pewne równanie różniczkowe drugiego rzędu. O krzywej tej wiemy, że przechodzi przez punkty podparcia $A$ i $B$, czyli wiemy, że dla $x=0$ (początek układu wyobrażamy sobie w $A$ a oś odciętych wzdłuż $AB$) jest $y=0$, oraz dla $x=l$, jest też $y=0$. Żądamy więc, by krzywa całkowa przechodziła przez dwa dane punkty. Stałe $b$ i $c$ trzeba teraz wyznaczyć z dwóch równań: $0=\varphi(0, b, c)$, $0=\varphi(l, b, c)$. Warunki poprzednie, tj. żądanie, by dla $x=a$, było $y=b$ i $y'=c$, lub ogólniej, by dla $x=m$ było $y=n$, $y'=p$, nazywamy warunkami **początkowymi**, lub warunkami Cauchy'ego. Warunki takie, jak w ostatnim przykładzie, tj. żądanie, by krzywa całkowa przechodziła przez dwa dane punkty, nazywamy **warunkami brzegowymi** lub warunkami Dirichleta. Dowód istnienia całki równania drugiego rzędu, o którym wspomnieliśmy poprzednio, wyznacza całkę równania tylko dla warunków Cauchy'ego. Widać od razu, że przy warunkach Dirichleta nie można się opierać na metodzie szeregów potęgowych; szereg taki może być bowiem zbieżny w otoczeniu jednego punktu, ale jest bardzo wątpliwe, czy będzie zbieżny aż do drugiego punktu brzegowego. Tutaj rozumowania muszą iść całkiem innym torem i są na ogół o wiele trudniejsze. Przeprowadzono jednak dowody istnienia rozwiązań także w przypadku warunków brzegowych dla rozmaitych obszernych klas funkcyj $f(x, y, y')$.

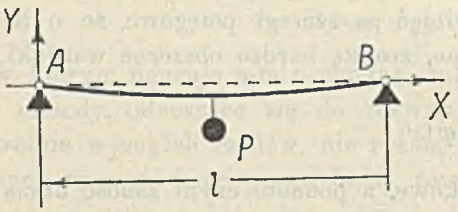

Fig 16.

## § 304. Proste przypadki całkowania równań różniczkowych wyższego rzędu. Obniżanie rzędu równania

Niekiedy można scałkować równanie różniczkowe wyższego rzędu bez uciekania się do szeregów nieskończonych lub do ciągu kolejnych przybliżeń. Niekiedy znowu można obniżyć rząd równania, tj. sprowadzić jego rozwiązanie do rozwiązania równania niższego rzędu. Są to jednak przypadki wyjątkowe; na ogół rozwiązanie równania rzędu wyższego jest zagadnieniem skomplikowanym, wymagającym wprowadzenia nowych, nieelementarnych funkcyj. Zajmiemy się tu najpierw tymi nielicznymi typami, które można bądź to scałkować przez kwadratury, bądź to sprowadzić do równań niższych rzędów. Ograniczymy się przy tym do równań drugiego rzędu.

Typ I:

$$\boxed{y'' = f(x)} \tag{78}$$

Nie występuje tu ani zmienna zależna, ani pierwsza pochodna.

Dwukrotne całkowanie prowadzi do rozwiązania tego równania. Z pierwszego całkowania otrzymujemy:

$$y' = \int f(x)\,dx + c_1$$

Całkując to jeszcze raz obustronnie, otrzymujemy:

$$y = \int\int f(x)\,dx \cdot dx + c_1 x + c_2$$

Czyli:

$$y = G(x) + c_1 x + c_2$$

*Przykłady.*

1) Jeżeli belka prosta o długości $l$ a o stałym przekroju $Q$ wygnie się pod działaniem ciężaru własnego lub zewnętrznego, to linia środkowa tej belki, przebiegająca wzdłuż osi $x$-ów, zamieni się na linię krzywą, zwaną *linią ugięcia*, o równaniu $y = \varphi(x)$. Okazuje się w statyce, że jeżeli $y = \varphi(x)$ jest równaniem tej linii, to funkcja $\varphi(x)$ spełnia równanie różniczkowe:

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{EI}{M(x)}$$

Tutaj $\varrho$ oznacza promień krzywizny, $E$ moduł sprężystości materiału, z którego jest sporządzona belka, $I$ moment bezwładności przekroju ze względu na oś poziomą, przechodzącą przez jego środek ciężkości, a $M(x)$ moment statyczny sił (obciążeń) ze względu na przekrój, leżący w odległości $x$ od początku układu (tzw. moment ugięcia). Zwykle wychylenie $y$ jest tak małe, że także spadek $y'$ jest niewielki, wobec czego można opuścić w tym wzorze $y'$. W ten sposób otrzymuje się równanie:

$$y'' = \frac{M(x)}{EI}$$

Całką ogólną tego równania różniczkowego jest:

$$y = \frac{1}{EI}\int\int M(x)\,dx + c_1 x + c_2$$

Postać funkcji $M(x)$ zależy od rodzaju obciążenia belki. Omówimy tu dwa przypadki charakterystyczne.

a) Belka jest na jednym końcu przytwierdzona, na drugim zaś obciążona ciężarem $P$ tak wielkim, że ciężar własny belki można zaniedbać. Moment ugięcia w przekroju, odległym o $x$ od punktu przytwierdzenia, ma tu wartość:

$$M(x) = -P(l - x)$$

Równanie różniczkowe linii ugięcia ma zatem w tym wypadku postać:

$$y'' = -k(l - x)$$

przy czym $k$ jest liczbą stałą, równą $\frac{P}{EI}$. Przez dwukrotne całkowanie otrzymujemy:

$$y' = \tfrac{1}{2}kx^2 - klx + c_1,$$
$$y = \tfrac{1}{6}kx^3 - \tfrac{1}{2}klx^2 + c_1 x + c_2$$

Z tej gromady krzywych całkowych należy wybrać tę, która spełnia warunki *początkowe*:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

jak o tem wspomnieliśmy na str. 142. Stąd wynikają na stałe $c_1$, $c_2$ wartości $c_1=0$, $c_2=0$. Wobec tego żądaną całką szczegółową, przedstawiającą równanie linii ugięcia, jest:

$$y = \tfrac{1}{2}k(\tfrac{1}{3}x^3 - lx^2)$$

Jest to parabola trzeciego stopnia.

b) Belka jest podparta na obu końcach i obciążona jednostajnie tak, że na 1 cm długości przypada obciążenie $p$ kg. Moment ugięcia w przekroju, odległym o $x$ od pierwszego punktu podparcia, ma w tym wypadku wartość:

$$M(x) = -\tfrac{1}{2}p\left(x - \frac{x^2}{l}\right)$$

Równanie różniczkowe linii ugięcia ma tu postać:

$$y'' = \frac{p}{2EI}\left(\frac{x^2}{l} - x\right) = k\left(\frac{x^2}{l} - x\right)$$

Przez dwukrotne całkowanie otrzymujemy:

$$y = k\left(\frac{x^4}{12l} - \frac{x^3}{6}\right) + c_1 x + c_2$$

W tym wypadku należy wybrać z gromady krzywych całkowych tę całkę szczegółową, która spełnia następujące warunki brzegowe:

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

(por. str. 142). Stąd wynika na stałą $c_2$ wartość: $c_2=0$, stałą zaś $c_1$ obliczamy z równania:

$$0 = k(\tfrac{1}{12}l^3 - \tfrac{1}{6}l^3) + c_1 l \quad \text{a więc} \quad c_1 = \tfrac{1}{12}kl^2$$

Żądana całka szczegółowa ma zatem postać:

$$y = \tfrac{1}{12} kx \left(\frac{x^3}{l} - 2x^2 + l^2\right)$$

Jest to parabola czwartego stopnia.

2) Inny przykład, w którym występuje także równanie różniczkowe typu I, spotykamy przy wyznaczeniu tzw. linii przejścia toru kolejowego.

Jeśli tor kolejowy tworzy w pewnym miejscu odcinek prosty $AB$ (fig. 17) a ma zmienić kierunek na $EF$, to trzeba go połączyć krzywą $BE$, przy czym żądamy, by zakrzywienie zmieniało się stopniowo, łagodnie, celem uniknięcia wstrząsów przy biegu

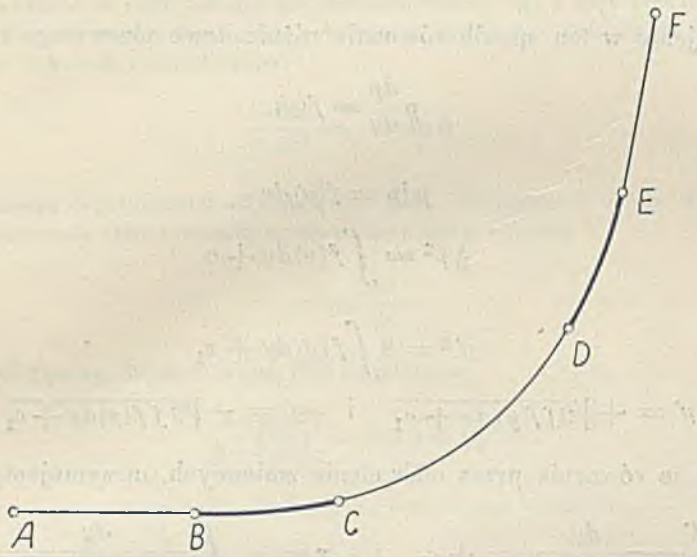


Fig. 17.

wozów. Najrównomierniejsze (stałe) zakrzywienie posiada linia kołowa, to też za część $CD$ obieramy łuk koła o odpowiednim promieniu $r$. Chodzi teraz o przejściowe łuki $\overset{\frown}{BC}$ i $\overset{\frown}{DE}$. Żądamy, aby krzywa przejścia miała w $B$ styczną identyczną z prostą $AB$, oraz by jej krzywizna wzrastała w sposób ciągły od 0 do $\frac{1}{r}$. Najodpowiedniej będzie zażądać, by krzywizna wzrastała proporcjonalnie do przebieganej drogi, a więc proporcjonalnie do $s$. Drugi warunek ma zatem postać:

$$\frac{1}{\varrho} = k \cdot s$$

Niechaj $AB$ będzie osią $x$-ów, a $B$ początkiem układu.

Jeśli chodzi o rachunek przybliżony, to wystarczy (podobnie jak w poprzednim przykładzie) wziąć za $\frac{1}{\varrho}$ pochodną $y''$, a za $s$ odciętą $x$. Uproszczone równanie ma zatem postać:

$$y''(x) = k \cdot x$$

Rozwiązaniem tego równania jest gromada parabol trzeciego rzędu, z której wybieramy odpowiednią krzywą przejścia przy pomocy warunków $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

**Typ II:**

(79) $$\boxed{y'' = f(y)}$$

Nie występuje tu ani zmienna niezależna, ani pierwsza pochodna zmiennej zależnej. Celem scałkowania tego równania wprowadzamy nową zmienną: $p = y'$. Wtedy

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y)$$

Stąd:

$$p\,dp = f(y)\,dy$$

$$\tfrac{1}{2}p^2 = \int f(y)\,dy + c$$

a więc:

(80) $$y'^2 = 2\int f(y)\,dy + c_1$$

$$y' = +\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1} \quad \text{i} \quad y' = -\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}$$

Całkując te równania przez oddzielenie zmiennych, otrzymujemy:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}} + c_2 \quad \text{i} \quad x = -\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}} + c_2$$

co można napisać także w postaci:

(81) $$x = \int_{y_1}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}} \quad \text{i} \quad x = -\int_{y_1}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + c_1}}$$

*Przykłady.*

1) Jeżeli ciało spada na ziemię z tak znacznej odległości, że trzeba uwzględnić zmianę siły przyciągania (np. meteor), to ruch tego ciała jest określony następującym równaniem różniczkowym:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -k\frac{M}{r^2}$$

przy czym $r$ oznacza odległość ciała spadającego od środka ziemi, $k$ stałą grawitacyjną a $M$ masę ziemi.

Wykonawszy pierwsze całkowanie, otrzymamy w myśl wzoru (80):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\frac{kM}{r} + c_1$$

Wzór ten określa szybkość spadania. Z drugiego całkowania otrzymamy czas $t$ jako funkcję odległości, a mianowicie w myśl wzoru (81):

$$t = \int_{r_1}^{r} \frac{dr}{\sqrt{2\frac{kM}{r} + c_1}}$$

Ujemne rozwiązanie nie ma znaczenia dla naszego zagadnienia. Stałe $c_1$ i $r_1$ określa się przy pomocy odpowiednich warunków początkowych.

2) Wahadło matematyczne o długości $l$, mające w chwili $t = 0$ wychylenie $\alpha = 0$, wprawiono w ruch, nadając mu prędkość *kątową* $\omega_0$, a więc prędkość *liniową* $v_0 = \omega_0 l$. Związek między kątem wychylenia $\alpha$ a czasem $t$ wyraża się za pomocą następującego równania różniczkowego:

$$\frac{l}{g}\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\sin\alpha$$

gdzie $g$ oznacza przyśpieszenie siły ciężkości ziemi. Równanie to należy do typu II. Celem scałkowania tego równania wprowadzamy nową zmienną:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}$$

tj. prędkość kątową. W myśl wzoru (80) otrzymujemy:

$$\text{(a)} \qquad \frac{l}{2g}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \cos\alpha + c_1$$

Stałą $c_1$ wyznaczamy z warunku, że w chwili $t = 0$, przy wychyleniu $\alpha = 0$ prędkość kątowa ma wartość $\omega_0 = \frac{v_0}{l}$. Stąd wynika, że:

$$\text{(b)} \qquad c_1 = \frac{v_0^2}{2lg} - 1$$

Drugie całkowanie prowadzi w myśl wzoru (81) do wyniku:

$$t = \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\alpha + c_1)}}$$

przy czym zatrzymujemy tylko dodatnią wartość $t$. Z warunku, że dla $\alpha = 0$ jest $t = 0$, wynika, że trzeba obrać $\alpha_1 = 0$. Wobec tego otrzymujemy następujący wzór na czas, który upływa od chwili przejścia wahadła przez punkt najniższy do chwili osiągnięcia wychylenia $\alpha$:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha + c_1)}}$$

Stała $c_1$ ma zawsze wartość większą od $-1$, jak to wynika z wzoru (b). Zależnie od wartości tej stałej rozróżniamy trzy zasadniczo odmienne przypadki tego ruchu.

a) Jeżeli $-1 < c_1 < 1$, to prędkość kątowa staje się równa zeru dla kąta $\beta$, speł-

niającego warunek $\cos\beta = -c_1$. Wtedy mamy do czynienia z zwyczajnym *ruchem wahadłowym*, a $\beta$ oznacza największy kąt wychylenia.

Kładąc dla skrócenia $\sin\frac{\beta}{2} = k$ i wprowadzając w całkę nową zmienną $\sin\frac{\alpha}{2} = k\sin\varphi$, otrzymujemy:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

Występująca tu całka jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju (por. tom II, str. 139). Czas $T$, ubiegający od chwili przejścia wahadła przez położenie równowagi do chwili osiągnięcia największego wychylenia $\beta$, wyraża się wzorem:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

Całkowanie przez rozwinięcie na szereg prowadzi tu do wyniku:

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots\right]$$

Zatrzymując tylko pierwszy wyraz, otrzymujemy znany przybliżony wzór na czas wahnienia:

$$2T \approx \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dokładny wzór na czas wahnienia wyraża się zapomocą powyższego szeregu nieskończonego.

b) Jeżeli $c_1 = 1$, to otrzymujemy

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \log \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Stąd widzimy, że wychylenie dąży do $\pi$ (tj. punkt dąży do najwyższego punktu na kole), gdy czas $t$ dąży do nieskończoności. Łatwo stwierdzić, że wtedy prędkość kątowa dąży do zera. Jest to zatem ruch *nieperiodyczny*, punkt wznosi się po kole od najniższego położenia ku najwyższemu punktowi, lecz nie osiąga go w skończonym czasie.

c) Jeżeli $c_1 > 1$, czyli $v_0^2 > 4lg$, to $c_1 + \cos\alpha > 0$, albowiem $\cos\alpha \geqq -1$. Z wzoru (a) wynika, że w tym przypadku prędkość kątowa nie staje się nigdy zerem ani nie zmienia znaku, a zatem punkt poruszający się nie zatrzymuje się nigdy, ani nie zmienia kierunku poruszania się po kole. Ruch odbywa się wtedy po kole stale w tym samym kierunku, periodycznie lecz nie jednostajnie. Uwzględniając wzór (b), kładąc $\frac{1}{2}\alpha = \varphi$ i oznaczając $\frac{2}{1 + c_1} = k^2$, otrzymujemy następujący wzór na czas, potrzebny do osiągnięcia wychylenia $\alpha$:

$$t = \frac{2l}{v_0} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

**Typ III:**

$$F(y', y'') = 0 \tag{82}$$

Nie występuje tu zmienna zależna ani niezależna. Przez wprowadzenie nowej zmiennej $y' = p$ sprowadzamy to równanie do równania pierwszego rzędu.

Ponieważ bowiem $y'' = p'$, przeto dane równanie różniczkowe przechodzi na równanie:

$$F(p, p') = 0$$

które można scałkować przez kwadraturę.

*Przykład.*

Znaleźć takie rozwiązania równania różniczkowego Laplace'a, które są funkcjami zmiennej $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Równanie to ma postać:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Uważając funkcję $f$ za funkcję zmiennej $r$, wykonujemy różniczkowanie cząstkowe, np.:

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

i w podobny sposób tworzymy dalsze pochodne. Po wykonaniu rachunków otrzymamy następujące równanie różniczkowe zwyczajne:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{df}{dr} = 0$$

Kładąc $\frac{df}{dr} = p$, otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$$p' + \frac{2}{r} p = 0$$

Przez łatwe całkowanie otrzymujemy:

$$p = \frac{c_1}{r^2} \quad \text{czyli} \quad \frac{df}{dr} = \frac{c_1}{r^2}$$

a stąd:

$$f(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

Taką więc postać mają te wszystkie rozwiązania równania Laplace'a, które zależą tylko od promienia $r$.

**Typ IV:**

$$F(x, y', y'') = 0 \tag{83}$$

W tym równaniu nie występuje zmienna zależna $y$. Wprowadzając nową zmienną $y' = p$, sprowadzamy to równanie do równania różniczkowego pierwszego rzędu:

$$F(x, p, p') = 0$$

Podobne postępowanie stosuje się do równań wyższych rzędów, jeżeli nie występuje zmienna zależna i uzyskuje się zniżenie rzędu o 1.

Przykładem typu IV jest *dokładne* równanie linii ugięcia, a mianowicie (por. str. 143) równanie:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI}$$

Już w najprostszym przypadku, gdy moment wyraża się wzorem $M(x) = -P(l-x)$, występuje w równaniu linii ugięcia całka eliptyczna.

Podobną postać ma *dokładne* równanie linii przejścia toru kolejowego.

**Typ V:**

(84) $$\boxed{F(y, y', y'') = 0}$$

W tym równaniu nie występuje zmienna niezależna $x$.

Podstawmy $y' = p$, to:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Otrzymamy zatem równanie pierwszego rzędu:

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

z którego wyznaczymy $p$. Następnie obliczymy:

$$y = \int p\,dx$$

*Przykład.*

Punkt $A$ (fig. 18) o współrzędnych $(\xi, 0)$ porusza się po osi odciętych z prędkością $v = \frac{d\xi}{dt}$. Drugi zaś punkt $B(x, y)$ porusza się z prędkością $w = \frac{ds}{dt}$ po takiej linii, że styczna przechodząca przez punkt $B$, trafia zawsze w punkt $A$. Znając stały stosunek $k$ prędkości $v$ do prędkości $w$, wyznaczyć drogę punktu $B$ (np. ruch punku $A$ przedstawia ruch pana, a ruch punktu $B$ ruch psa, biegnącego zawsze wprost do pana).

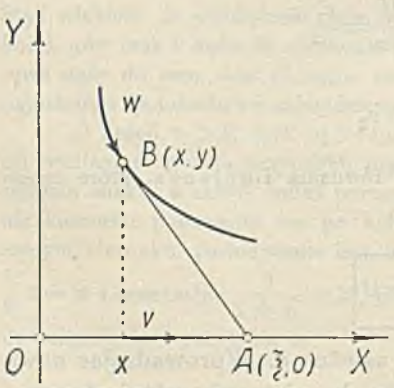


Fig. 18.

Ponieważ $v : w = k$, przeto:

$$\frac{d\xi}{dt} = k\frac{ds}{dt}$$

a stąd:

(a) $$\frac{d\xi}{dx} = k\frac{ds}{dx} = k\sqrt{1+y'^2}$$

Odcinek $\xi - x$ jest podstyczną, należącą do punktu $B$, zatem:

$$\xi - x = -\frac{y}{y'}$$

(por. tom I, str. 221, wzór 7). Stąd:

$$\frac{d\xi}{dx} - 1 = -\frac{y'^2 - yy''}{y'^2} = -1 + \frac{yy''}{y'^2}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{yy''}{y'^2}$$

Wzór (a) przyjmuje zatem postać:

$$\frac{yy''}{y'^2} = k\sqrt{1 + y'^2}$$

a to jest równanie różniczkowe typu V. Kładąc $y' = p$, otrzymujemy:

$$\frac{yp\frac{dp}{dy}}{p^2} = k\sqrt{1 + p^2}$$

a stąd:

$$k\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p\sqrt{1 + p^2}}$$

Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$k\log y + \log c_1 = \tfrac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1 + p^2} - 1}{\sqrt{1 + p^2} + 1}$$

a stąd:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{2c_1 y^k}{1 - c_1^2 y^{2k}}$$

To równanie całkujemy przez oddzielenie zmiennych i otrzymujemy:

$$\frac{y^{1-k}}{1-k} - \frac{c_1^2 y^{1+k}}{1+k} = 2c_1 x + c_2$$

Jest to równanie szukanej krzywej *pościgowej*, czyli tzw. „psiej krzywej".

## § 305. Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego

Zgodnie z ogólną definicją równań różniczkowych liniowych (str. 99, wzór 49) nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym rzędu drugiego* równanie postaci:

$$P_2(x)\,y'' + P_1(x)\,y' + P_0(x)\,y + g(x) = 0 \tag{85}$$

Zakładamy, że w pewnym przedziale $\alpha \leqq x \leqq \beta$ funkcje $g(x)$, $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ są ciągłe, a $P_2(x)$ nie jest zerem w żadnym punkcie tego

przedziału. Wtedy możemy podzielić obie strony równania przez $P_2(x)$ i otrzymamy następujące równanie:

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = q(x) \tag{86}$$

w którym funkcje $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)$ są funkcjami ciągłymi w badanym przedziale $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Ta forma równania różniczkowego liniowego będzie podstawą wszystkich dalszych rozważań.

*Uwaga.* Punkty, w których $P_2(x) = 0$, zwane punktami osobliwymi równania różniczkowego (85), wymagają szczegółowych, bardzo głębokich badań, którymi nie możemy się w tym podręczniku zajmować.

Jeżeli w równaniu (86) wyraz wolny $q(x)$ nie jest identycznie równy zeru, to równanie to nazywamy równaniem różniczkowym liniowym *niejednorodnym*. Równanie zaś:

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0 \tag{87}$$

w którym wyraz wolny $q(x)$ jest identycznie równy zeru, nazywamy równaniem różniczkowym liniowym *jednorodnym*.

Napiszmy równanie (86) w postaci:

$$y'' = -p_1(x)\,y' - p_2(x)\,y + q(x) = f(x, y, y')$$

Funkcja $f$ jest ciągłą funkcją zmiennych $x, y, y'$, a pochodne $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -p_2(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = -p_1(x)$ istnieją i są skończone w przedziale $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Z tych założeń wynika, podobnie jak dla równań różniczkowych pierwszego rzędu, że *dla każdego punktu $x = a$ z badanego przedziału i dla dowolnych liczb $b$, $c$ istnieje jedna i tylko jedna funkcja $y = \varphi(x)$, spełniająca dane równanie różniczkowe i warunki początkowe*: $\varphi(a) = b$, $\varphi'(a) = c$. Twierdzenie to dowodzi, że *istnieje* dwuparametrowa gromada całek takiego równania różniczkowego, zwana *całką ogólną* tego równania. Jednakże efektywne znalezienie tych całek jest w ogólnym przypadku zagadnieniem trudnym, nie dającym się uskutecznić przy pomocy elementarnych metod.

Okażemy później, że równanie niejednorodne da się rozwiązać metodą elementarną (mianowicie przez kwadraturę), jeżeli znajdziemy rozwiązanie równania jednorodnego, co jest zadaniem łatwiejszym, jakkolwiek także nieelementarnym.

Wobec tego zajmiemy się najpierw równaniem jednorodnym. Udowodnimy dla takich równań przede wszystkim następujące twierdzenie.

*Jeżeli $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są całkami równania jednorodnego* (87), *to także dowolna liniowa kombinacja tych całek tj.:*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{88}$$

*jest całką tego równania*, przy czym $c_1$, $c_2$ oznaczają dowolne liczby stałe.

*Dowód.* Z założenia wynika, że:

$$y_1''(x) + p_1(x) y_1'(x) + p_2(x) y_1(x) = 0$$
$$y_2''(x) + p_1(x) y_2'(x) + p_2(x) y_2(x) = 0$$

Podstawmy wyrażenie (88) na $y(x)$ w lewą stronę równania jednorodnego (87), to otrzymamy:

$$c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + p_1(x) c_1 y_1'(x) + p_1(x) c_2 y_2'(x) + p_2(x) c_1 y_1(x) + p_2(x) c_2 y_2(x) =$$
$$= c_1 [y_1''(x) + p_1(x) y_1'(x) + p_2(x) y_1(x)] + c_2 [y_2''(x) + p_1(x) y_2'(x) + p_2(x) y_2(x)]$$

Wyrażenia, zawarte w nawiasach graniastych, są zerami w myśl założenia, a zatem całe to wyrażenie jest identycznie równe zeru, a to dowodzi, że wyrażenie (88) spełnia równanie różniczkowe (87), c. b. d. o.

Wyrażenie (88), zawierające dwie stałe dowolne $c_1, c_2$, przedstawia dwuparametrową gromadę funkcyj. Nasuwa się pytanie, czy ta gromada funkcyj jest *całką ogólną* równania (87), to znaczy, czy można otrzymać z tej gromady każdą całkę szczegółową równania (87) przez specjalizację stałych $c_1$ i $c_2$. Zbadajmy, jakie warunki muszą spełnić dwie obrane całki szczegółowe $y_1(x)$ i $y_2(x)$, aby wyrażenie $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ było całką ogólną.

Obierzmy dowolny punkt $x = a$ z przedziału $\alpha \leqq x \leqq \beta$ i dwie dowolne liczby $b$, $c$ i starajmy się dobrać stałe $c_1$ i $c_2$ tak, aby $y(a) = b$, $y'(a) = c$. Wtedy $y(x)$ będzie taką całką szczegółową równania (87), która dla $x = a$ przybiera wartość $b$, a której pierwsza pochodna przybiera dla $x = a$ wartość $c$ (wiemy zaś, że istnieje tylko jedna całka, spełniająca te warunki przy danych $b$, $c$).

Żądamy zatem, aby się spełniały równania:

$$y(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = b$$
$$y'(a) = c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) = c$$

Stałe $c_1$ i $c_2$ dadzą się z tych dwóch równań wyznaczyć przy wszelkich $b$ i $c$ wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik:

$$W(a, y_1(a), y_2(a)) = \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a) \\ y_1'(a), & y_2'(a) \end{vmatrix}$$

jest *różny od zera*. Wtedy:

$$c_1 = \begin{vmatrix} b, & y_2(a) \\ c, & y_2'(a) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a) \\ y_1'(a), & y_2'(a) \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} y_1(a), & b \\ y_1'(a), & c \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a) \\ y_1'(a), & y_2'(a) \end{vmatrix}$$

Funkcja $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ z tak obranymi stałymi $c_1$, $c_2$ jest wtedy żądaną całką szczegółową.

Widzimy stąd, *że jeżeli $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są całkami szczegółowymi równania* (87), *to koniecznym i dostatecznym warunkiem na to, aby dwuparametrowa gromada funkcyj $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ była całką ogólną równania jednorodnego, jest, aby istniał przynajmniej jeden punkt $x = a$ taki, dla którego wyznacznik:*

$$W(x, y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{89}$$

*byłby różny od zera, czyli, aby ten wyznacznik nie był identycznie równy zeru.*

Wyznacznik ten nazywamy wyznacznikiem Wrońskiego lub *wrońskianem* funkcyj $y_1(x)$, $y_2(x)$.

Jeżeli zatem chcemy zbudować z dwóch całek szczegółowych równania (87) całkę ogólną tego równania za pomocą wzoru (88), to nie można tych całek szczegółowych obierać zupełnie dowolnie, lecz należy wybrać takie dwie całki, których wrońskian nie jest identycznie równy zeru.

Warunek ten możemy zastąpić następującym, prostym, równoważnym warunkiem.

*Wyrażenie*:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

*jest wtedy i tylko wtedy całką ogólną równania jednorodnego* (87), *jeżeli całki szczegółowe $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są od siebie liniowo niezależne.*

*Dowód.* Dwie funkcje $y_1(x)$, $y_2(x)$ nazywamy liniowo zależnymi, jeżeli istnieją dwie takie stałe liczby $b_1$ i $b_2$ nierówne równocześnie zeru, że $b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) = 0$ dla wszystkich $x$ z badanego przedziału, tj. jeżeli $y_1(x)$ jest proporcjonalne do $y_1(x)$, albowiem ten związek można napisać w postaci:

$$y_1(x) = -\frac{b_2}{b_1} y_2(x) = k y_2(x) \quad \text{lub} \quad y_2(x) = -\frac{b_1}{b_2} y_1(x) = m y_1(x)$$

(zależnie od tego, która z liczb $b_1$, $b_2$ jest różna od zera). Otóż jeżeli dwie funkcje $y_1(x)$, $y_2(x)$ są liniowo zależne od siebie, to dla wszystkich badanych $x$ zachodzi związek:

$$b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) \equiv 0$$

a zatem także:

$$b_1 y_1'(x) + b_2 y_2'(x) \equiv 0$$

przy czym przynajmniej jedna z liczb $b_1$, $b_2$ jest różna od zera, np. $b_1 \neq 0$. Mnożymy pierwsze równanie przez $y_2'(x)$ a drugie przez $y_2(x)$ i odejmujemy drugie od pierwszego, to otrzymamy:

$$b_1 [y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)] \equiv 0$$

Ponieważ $b_1 \neq 0$, przeto wyrażenie, zawarte w nawiasie graniastym, jest równe zeru identycznie, czyli:

$$W(x, y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

A więc, *jeżeli dwie funkcje są liniowo zależne, to ich wrońskian jest identycznie równy zeru.*

Odwrócenie tego twierdzenia nie jest prawdziwe dla wszystkich funkcyj, natomiast jest prawdziwe dla całek szczegółowych równania różniczkowego liniowego. I tak udowodnimy, że *jeżeli wrońskian dwóch całek szczególowych $y_1(x)$, $y_2(x)$ równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu jest identycznie równy zeru, to te całki są liniowo zależne od siebie.*

*Dowód.* Ponieważ według założenia wrońskian całek $y_1(x)$, $y_2(x)$ znika identycznie w przedziale $\alpha \leqq x \leqq \beta$, przeto obrawszy dowolną liczbę $x = a$ z tego przedziału, mamy:

$$\begin{vmatrix} y_1(a), & y_2(a) \\ y_1'(a), & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0$$

Stąd wynika, że dadzą się dobrać dwie takie liczby $b_1$ i $b_2$, z których jedna przynajmniej jest różna od zera, dla których spełniają się równania:

$$\text{(r)} \qquad \begin{cases} b_1 y_1(a) + b_2 y_2(a) = 0 \\ b_1 y_1'(a) + b_2 y_2'(a) = 0 \end{cases}$$

(Wtedy bowiem, jak wiadomo, układ tych dwóch równań o dwóch niewiadomych $b_1$ i $b_2$ jest równoważny z jednym równaniem o dwóch niewiadomych, możemy więc obrać np. za $b_1$ zupełnie dowolną, różną od zera liczbę, a za $b_2$ liczbę, otrzymaną z równania o jednej już tylko niewiadomej $b_2$).

Weźmy pod uwagę całkę szczegółową $y(x)$, zbudowaną z całek szczegółowych $y_1(x)$, $y_2(x)$ w następujący sposób:

$$y(x) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x)$$

Ta całka spełnia warunki początkowe:

$$y(a) = 0 \quad \text{i} \quad y'(a) = 0$$

jak to wynika z równań (r). Te same warunki spełnia jednak funkcja $y = 0$ (oś $x$-ów), która jest także całką równania jednorodnego (albowiem dla tej funkcji $y' \equiv 0$, $y'' \equiv 0$, a więc $0 + p_1(x) \cdot 0 + p_2(x) \cdot 0 = 0$). Ponieważ zaś istnieje jedna i tylko jedna całka równania, spełniająca żądane warunki początkowe, przeto całka $y(x)$ jest identyczna z całką $y = 0$. Zatem:

$$y(x) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) \equiv 0$$

a więc całki $y_1(x)$, $y_2(x)$ są liniowo zależne od siebie c. b. d. o. Dowiedliśmy w ten sposób, że identyczne znikanie wrońskianu dwóch całek jest równoważne z ich zależnością liniową. Zatem nieznikanie identyczne wrońskianu dwóch całek szczegółowych jest równoważne z ich niezależnością liniową.

Przejdźmy do badania równania różniczkowego liniowego *niejednorodnego*, tj. do równania:

$$(86) \qquad y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = q(x)$$

Przypuśćmy, że znaleźliśmy takie dwie całki szczegółowe $y_1(x)$, $y_2(x)$ równania jednorodnego:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{87}$$

które są liniowo niezależne od siebie.

Ogólną całką równania (87) jest:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Aby stąd uzyskać rozwiązanie równania niejednorodnego, zastosujmy metodę *wariacji stałych*, podobnie jak to czyniliśmy w równaniach liniowych pierwszego rzędu. Zbadajmy zatem, czy rozwiązanie równania niejednorodnego (86) da się przedstawić w postaci:

$$y = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2$$

Funkcje $c_1(x)$ i $c_2(x)$ staramy się wyznaczyć tak, aby to $y$ spełniało równanie (86). Utwórzmy pierwszą pochodną:

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_1' y_1 + c_2' y_2$$

Jako pierwszy warunek na wyznaczenie funkcyj $c_1(x)$ i $c_2(x)$ przyjmujemy żądanie, by oba ostatnie wyrazy odpadły. Pierwszy więc warunek ma postać:

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \tag{$\alpha$}$$

Tworzymy następnie drugą pochodną z uwzględnieniem warunku ($\alpha$). Otrzymujemy:

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1' y_1' + c_2' y_2'$$

Wartości $y'$ i $y''$ wstawiamy w dane równanie (86), a więc ma się spełniać równanie:

$$c_1(y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1) + c_2(y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = q(x)$$

Wyrażenie, zawarte w pierwszym nawiasie, jest zerem, ponieważ $y_1(x)$ jest całką równania jednorodnego. Podobnie wyrażenie, zawarte w drugim nawiasie, jest zerem. Pozostaje więc jako drugi warunek:

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = q(x) \tag{$\beta$}$$

Z warunków ($\alpha$) i ($\beta$) otrzymujemy:

$$\boxed{c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ q & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}},\quad c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}} \tag{90}$$

Mianownikiem jest wyznacznik Wrońskiego, jest on więc według założenia różny od zera.

A więc:

$$c_1'(x) = \frac{-qy_2}{y_1y_2' - y_2y_1'} = \varphi(x)$$

$$c_2'(x) = \frac{qy_1}{y_1y_2' - y_2y_1'} = \psi(x)$$

Stąd:

$$c_1(x) = \int \varphi(x)\,dx + C_1, \quad c_2(x) = \int \psi(x)\,dx + C_2$$

Całka równania niejednorodnego ma zatem postać:

$$y = \left(\int \varphi(x)\,dx + C_1\right) y_1(x) + \left(\int \psi(x)\,dx + C_2\right) y_2(x)$$

Całkę tę potrafimy obliczyć za pomocą kwadratur, jeżeli tylko znamy dwie całki szczegółowe równania liniowego jednorodnego. Widzimy stąd, że cała trudność rozwiązania ogólnego równania różniczkowego liniowego 2-go rzędu, tj. równania niejednorodnego, sprowadza się do wyznaczenia dwóch całek szczegółowych równania jednorodnego.

To ostatnie zagadnienie jest jednak w ogólnym przypadku trudne. Z reguły otrzymuje się na całki szczegółowe równań liniowych jednorodnych 2. rzędu nowe, nieelementarne funkcje, określone za pomocą szeregów potęgowych. Badanie każdego takiego równania stanowi oddzielną obszerną teorię.

## § 306. Równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach

W specjalnym przypadku, gdy współczynniki $p_1(x)$ i $p_2(x)$ w równaniu liniowym są liczbami stałymi: $p_1(x) = a_1$, $p_2(x) = a_2$, przedstawia się rozwiązanie równania liniowego drugiego rzędu bardzo prosto.

Okażemy mianowicie, że całki równania:

$$\boxed{y'' + a_1y' + a_2y = 0} \tag{91}$$

są funkcjami elementarnymi, a mianowicie są w bardzo prosty sposób zbudowane z funkcyj wykładniczych. I tak, nawiązując do równania różniczkowego liniowego jednorodnego pierwszego rzędu: $y' + ay = 0$ o stałym współczynniku $a$ przy $y$, zauważmy, że całką szczegółową tego równania jest: $y = e^{-ax}$ (por. str. 118, wzór 63).

Spróbujmy, czy także i równanie drugiego rzędu (91) posiada taką całkę, tj., czy istnieje całka równania (91), mająca postać: $y = e^{rx}$, gdzie $r$ jest jakąś liczbą stałą. Tworzymy:

$$y' = r \cdot e^{rx}; \quad y'' = r^2 \cdot e^{rx}$$

i wstawiamy te wyrażenia za $y$, $y'$ i $y''$ w równanie (91). Żądamy, by się to równanie spełniało, tj. aby zachodził związek:

$$r^2 \cdot e^{rx} + a_1 r \cdot e^{rx} + a_2 e^{rx} = 0$$

Ponieważ $e^{rx}$ jest dla wszelkich skończonych $x$ różne od zera, przeto możemy uprościć ostatnie równanie przez $e^{rx}$ i pozostaje:

$$\boxed{r^2 + a_1 r + a_2 = 0} \tag{92}$$

Gdy dobierzemy takie $r$, które spełnia ten warunek, to równanie różniczkowe (91) spełni się dla $e^{rx}$. Rozwiązując równanie (92), otrzymujemy dwa pierwiastki $r_1$ i $r_2$. Otrzymujemy więc dwie całki:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

Z tych dwóch całek szczegółowych można tylko wtedy utworzyć całkę ogólną, gdy *wrońskian* tych funkcyj nie jest identycznie równy zeru. Otóż tutaj:

$$W(x, y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix}$$

czyli:

$$W(x, y_1(x), y_2(x)) = r_2 e^{(r_1+r_2)x} - r_1 e^{(r_1+r_2)x} = e^{(r_1+r_2)x}(r_2 - r_1)$$

Pierwszy czynnik $e^{(r_1+r_2)x}$ jest dla wszelkich skończonych wartości $r_1, r_2, x$ różny od zera, drugi zaś: $(r_2 - r_1)$ staje się zerem tylko dla $r_1 = r_2$. Zakładając więc, że $r_1 \neq r_2$, otrzymujemy następującą ogólną całkę równania (91):

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}} \tag{93}$$

Równanie (92), służące do wyznaczenia $r_1$ i $r_2$, nazywamy *równaniem wyznaczającym* lub *równaniem charakterystycznym* równania (91). Równanie to jest łatwe do zapamiętania; otrzymujemy je bowiem z danego równania różniczkowego, podstawiając zamiast niewiadomej $y$ i jej pochodnych potęgi $r^0$, $r^1$, $r^2$. Ten sposób rozwiązywania równania odnosi się nie tylko do równań liniowych drugiego rzędu, lecz także do równań liniowych wyższych rzędów o stałych współczynnikach.

W ten sposób przedstawia się całka ogólna równania (91), gdy równanie wyznaczające posiada pierwiastki różne. Gdy $r_1 = r_2$, to znamy

jedną całkę szczegółową: $y = e^{r_1 x}$. Okazuje się, że całką szczegółową jest także funkcja:

$$y_2 = x \cdot e^{r_1 x} \tag{94}$$

jak to można łatwo sprawdzić wprost przez podstawienie. Można się też łatwo przekonać przez utworzenie wyznacznika Wrońskiego, że tak obrane $y_1$ i $y_2$ są funkcjami liniowo niezależnymi.

*Uwaga 1.*

Jeżeli znamy jedną całkę szczególową $y_1(x)$ równania jednorodnego drugiego rzędu, to drugą całkę, liniowo niezależną od pierwszej, można otrzymać przez kwadratury, a mianowicie:

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x) \int y_1^{-2} e^{-\int p_1 dx} dx} \tag{95}$$

*Dowód.*

Połóżmy $y = y_1(x) \cdot z$, to równanie (87) przyjmie postać:

$$y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z'' + p_1 (y_1 z' + y_1' z) + p_2 y_1 z = 0$$

czyli:

$$z'' y_1 + z' (2 y_1' + p_1 y_1) + z (y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1) = 0$$

Wyrażenie, zawarte w ostatnim nawiasie, jest zerem, ponieważ $y_1$ jest całką równania (87). Połóżmy $z' = u$, to otrzymamy:

$$u' y_1 + u (2 y_1' + p_1 y_1) = 0$$

Stąd:

$$\frac{u'}{u} = -\frac{2 y_1'}{y_1} - p_1$$

$$\log u = -2 \log y_1 - \int p_1 dx$$

$$z' = u = y_1^{-2} e^{-\int p_1 dx}$$

$$z = \int y_1^{-2} e^{-\int p_1 dx} dx$$

a więc:

$$y = y_1 z = y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int p_1 dx} dx$$

jest całką równania (87). Nazwijmy ją $y_2$. Tworząc wrońskian całek $y_1$ i $y_2$, otrzymamy po łatwej przeróbce $W(x, y_1, y_2) = e^{-\int p dx}$, a to wyrażenie nie jest równe zeru dla żadnej wartości $x$.

Zatem $y_2$ jest drugą całką równania (87), niezależną liniowo od $y_1$.

Stosując wzór (95) do $y_1 = e^{r_1 x}$, otrzymamy po wykonaniu rachunków (uwzględniając, że $a_1 = -(r_1 + r_2) = -2 r_1$):

$$y_2 = x e^{r_1 x}$$

*Uwaga 2.*

Rozważania te rozszerzono także na równania różniczkowe liniowe wyższych rzędów. Tak np. jeżeli $r_1$ jest 4-krotnym pierwiastkiem równania wyznaczającego, to funkcje:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = x e^{r_1 x}, \quad y_3 = x^2 e^{r_1 x}, \quad y_4 = x^3 e^{r_1 x}$$

są całkami szczegółowymi niezależnymi od siebie liniowo.

Szczególnie ważny i interesujący jest przypadek, gdy pierwiastki $r_1$, $r_2$ równania wyznaczającego są liczbami zespolonymi sprzężonymi, np. $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$. Wzór (93) ma wtedy postać:

$$y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$$

Tę całkę ogólną możemy przedstawić w takiej postaci, że znikną wyrażenia urojone. I tak każda liniowa kombinacja całek szczegółowych jest także całką równania, a zatem funkcje:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \bar{y}_1 = \frac{1}{2} e^{(\alpha+\beta i)x} + \frac{1}{2} e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \bar{y}_2 = \frac{1}{2i} e^{(\alpha+\beta i)x} - \frac{1}{2i} e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} \sin \beta x \end{cases}$$

są także całkami szczegółowymi równania (91). Nie trudno okazać, że ich wrońskian jest różny od zera, a więc ogólną całkę równania (91) możemy przedstawić w postaci:

$$\text{(96)} \qquad \boxed{y = e^{\alpha x}(\bar{c}_1 \cos \beta x + \bar{c}_2 \sin \beta x)}$$

*Przykłady.*

1) Wychylenie $y$ punktu materialnego, drgającego swobodnie pod wpływem siły sprężystości, czyni zadość następującemu równaniu różniczkowemu:

$$\text{(97)} \qquad \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} = -a^2 y}$$

czyli:

$$y'' + a^2 y = 0$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe jednorodne. Równanie wyznaczające ma tu postać:

$$r^2 + a^2 = 0$$

posiada zatem pierwiastki zespolone:

$$r_1 = ai, \quad r_2 = -ai$$

Całkami szczegółowymi niezależnymi liniowo od siebie są funkcje:

$$y_1 = e^{ait}, \quad y_2 = e^{-ait}$$

Używając wzorów (a), otrzymujemy:

$$\bar{y}_1 = \cos at$$

$$\bar{y}_2 = \sin at$$

Całka ogólna ma więc postać:

$$y = c_1 \cos at + c_2 \sin at \tag{98}$$

Tak przedstawia się wychylenie w zależności od czasu. Ten wzór łatwo można przedstawić w innej, dogodniejszej formie, a mianowicie:

$$y = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos at + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin at\right)$$

Oznaczając:

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = A, \quad \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin \varepsilon, \quad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \varepsilon$$

otrzymamy:

$$y = A(\cos at \sin \varepsilon + \sin at \cos \varepsilon)$$

czyli:

$$y = A \sin(at + \varepsilon) \tag{98a}$$

Stała $A$ nazywa się *amplitudą* a $\varepsilon$ *fazą* drgania.

Te wzory odnoszą się do drgań swobodnych. Takie drgania powtarzałyby się, jak z tego wzoru widać, periodycznie bez zmiany amplitudy i periodu. W rzeczywistości punkt materialny drgający ma do pokonania opory środowiska i sił wewnętrznych, działających przeciw temu ruchowi. Zajmiemy się teraz tym ogólniejszym przypadkiem.

2) Przyjmijmy, że opór jest proporcjonalny do prędkości $v = \frac{dy}{dt}$. Równanie różniczkowe ruchu drgającego ma wtedy postać:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a^2 y - 2\lambda \frac{dy}{dt}$$

$$y'' + 2\lambda y' + a^2 y = 0$$

Równanie wyznaczające:

$$r^2 + 2\lambda r + a^2 = 0$$

ma pierwiastki:

$$r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - a^2}$$

Należy tu odróżnić trzy przypadki:

a) $\lambda^2 > a^2$. Pierwiastki równania wyznaczającego są wtedy rzeczywiste, różne. Takie drganie nazywamy *silnie tłumionym*. Wzór na wychylenie ma postać:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Ponieważ $r_1$ i $r_2$ są liczbami stałymi, ale ujemnymi (co wynika wprost z wzoru na $r$), więc funkcja ta dąży do zera, gdy $t \to \infty$. Łatwo wykazać, że może ona co najwyżej raz przechodzić przez zero. W drganiu silnie tłumionym może więc nastąpić tylko jedno zawrócenie się punktu drgającego.

b) $\lambda^2 = a^2$

Wtedy $r_1 = r_2$. W takim razie według poznanych wzorów jest:

$$y_1 = e^{r_1 t}, \quad y_2 = t\, e^{r_1 t}$$

Całką ogólną jest więc:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} = e^{r_1 t}(c_1 + c_2 t)$$

Także i w tym przypadku funkcja przechodzi przez zero tylko jeden raz. Drganie takie nazywamy także silnie tłumionym.

c) $\lambda^2 < a^2$. Wykonując tu rachunki, otrzymamy:

$$y = e^{-\lambda t}(c_1 \cos t \sqrt{a^2 - \lambda^2} + c_2 \sin t \sqrt{a^2 - \lambda^2})$$

Jest to wzór na drgania zanikające powoli. Istnieje w tym przypadku nieskończenie wiele takich $t$, dla których funkcja staje się równą zeru.

3) Przykładem równań liniowych niejednorodnych drugiego rzędu jest równanie różniczkowe *drgań wymuszonych*, tzn. takich drgań, przy których oprócz oporu działa pewna siła, modyfikująca te drgania (zwana impulsem). Takie drgania odbywają się np. w rezonatorach. Równanie to ma postać:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a^2 y - 2\lambda \frac{dy}{dt} + f(t)$$

Jeżeli impuls działa periodycznie, np. według prawa sinusowego, to równanie ma postać:

$$y'' + 2\lambda y' + a^2 y = c \sin \gamma t$$

Dla bardziej skomplikowanych funkcyj $f(t)$ używamy ich rozwinięć na szeregi Fouriera. Celem rozwiązania tego równania całkujemy najpierw równanie jednorodne. Omówiliśmy to równanie w poprzednim przykładzie. Rozważymy tu tylko przypadek, gdy $\lambda^2 < a^2$. Całkami szczegółowymi równania jednorodnego są funkcje:

$$y_1 = e^{-\lambda t} \cos t \sqrt{a^2 - \lambda^2}; \quad y_2 = e^{-\lambda t} \sin t \sqrt{a^2 - \lambda^2}$$

Przez zastosowanie wzorów (90) oblicza się $c_1(x)$, $c_2(x)$ i dochodzi się ostatecznie do wyniku:

$$y = A \sin(\gamma t + \varepsilon) + e^{-\lambda t}(c_1 \cos t \sqrt{a^2 - \lambda^2} + c_2 \sin t \sqrt{a^2 - \lambda^2})$$

Widzimy, że wychylenie w takim ruchu drgającym jest sumą wychyleń, wynikających z drgania swobodnego i drgania zanikającego. Stałe $A$ i $\varepsilon$ są tu związane ze stałymi $a$, $\lambda$, $c$, $\gamma$, występującymi w równaniu różniczkowym, za pomocą następujących wzorów:

$$A \cos \varepsilon = \frac{c(a^2 - \gamma^2)}{(a^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}; \quad A \sin \varepsilon = \frac{-2c\lambda\gamma}{(a^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}$$

4) Scałkować równanie:

$$y^{(4)} - 2y''' + 2y' - y = 0$$

Równanie wyznaczające ma tu postać:

$$r^4 - 2r^3 + 2r - 1 = 0$$

i posiada pierwiastki:

$$r_1 = r_2 = r_3 = 1, \quad r_4 = -1$$

Liczba 1 jest pierwiastkiem *trzykrotnym*. Wobec tego całka ogólna ma postać:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 e^{-x}$$

5) Równanie „progu kolejowego" ma postać:

$$y^{(4)} + 4\alpha^4 y = 0$$

przy czym:

$$4\alpha^4 = \frac{k}{EI}$$

Równanie wyznaczające: $r^4 + 4\alpha^4 = 0$ ma pierwiastki $r_1 = \alpha(1+i)$, $r_2 = \alpha(1-i)$, $r_3 = \alpha(-1+i)$, $r_4 = \alpha(-1-i)$. Całkami szczególowymi są funkcje:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}\left(e^{x\alpha(1+i)} + e^{x\alpha(1-i)}\right) = e^{x\alpha}\cos\alpha x$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}\left(e^{x\alpha(1+i)} - e^{x\alpha(1-i)}\right) = e^{x\alpha}\sin\alpha x$$

i podobnie $y_3$, $y_4$.

ROZDZIAŁ XXIII

# Geometria różniczkowa krzywych w przestrzeni[1])

## § 307. Analityczne sposoby przedstawiania linij krzywych w przestrzeni

Przy badaniu linij, leżących w przestrzeni, trzeba rozróżnić dwie możliwości: albo taka linia leży na jednej płaszczyźnie albo się nie mieści w jednej płaszczyźnie. Istnieją więc linie płaskie i tzw. linie *skośne* czyli wichrowate czyli *linie o podwójnej krzywiźnie*. Przykładem linii skośnej jest linia śrubowa, tj. linia, przecinająca pod tym samym kątem, różnym od $0^0$ i $90^0$, wszystkie tworzące walca (obrotowego, eliptycznego, parabolicznego itp.). Na krzywe przestrzenne natrafiamy również w geometrii wykreślnej przy badaniu przenikania się takich brył jak walce, stożki, kule.

Chcąc badać linie przestrzenne metodami geometrii analitycznej, należy je ująć w równania. Jeden sposób analitycznego przedstawiania linij w przestrzeni wynika stąd, że linię możemy pojmować jako miejsce geometryczne punktów przenikania się dwu powierzchni o równaniach:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{99}$$

(por. tom I, str. 361 i nast.).

Jeżeli się te równania dadzą rozwikłać według $x$ i $y$, wówczas krzywa przenikania da się przedstawić równaniami:

$$x = F(z), \quad y = G(z) \tag{100}$$

Równania te przedstawiają dwa walce: pierwszy o osi równoległej do osi $y$-ów, oś zaś drugiego jest równoległa do osi $x$-ów. Podobnie można uważać za zmienną niezależną $x$ lub $y$.

Najdogodniejszym analitycznym przedstawieniem linij przestrzennych jest przedstawienie *parametrowe* (por. tom I, str. 377), polegające na tym,

---

[1]) Przed przystąpieniem do studiowania geometrii różniczkowej należy się zaznajomić z zasadami geometrii analitycznej przestrzennej. Nadaje się do tego bardzo dobrze np. podręcznik prof. Leji pt. *Geometria analityczna i początki geometrii różniczkowej* (Warszawa, 1934).

że 3 współrzędne $x, y, z$ punktów tej linii wyrażamy jako funkcje czwartej, pomocniczej zmiennej $t$, zwanej parametrem tego przedstawienia:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \tag{101}$$

Taki sposób przedstawiania bywa najczęściej używany w mechanice, gdzie parametrem $t$ jest zwykle czas. Parametrem tym może być jednak także każda inna wielkość, jak np. kąt, łuk. Przy takim przedstawieniu uzyskujemy symetrię wzorów ze względu na trzy współrzędne.

Co do funkcyj, używanych przy wszystkich trzech przedstawieniach, to podobnie jak przy krzywych płaskich czynimy pewne założenia. I tak zakładamy, że funkcje te są ciągłe; w pewnych punktach mogą występować nieciągłości, punkty te jednak wyłączymy z naszych rozważań. Czynimy ponadto założenie, że funkcje te są różniczkowalne, a nawet, że posiadają tyle pochodnych, ile nam do danych rozważań potrzeba, ewentualnie, że są rozwijalne na szereg Taylora. Zobaczymy jednak, że wszystkie te założenia nie wystarczają jeszcze, aby zapewnić regularny przebieg linij. Tak np. w przedstawieniu parametrowym te punkty, w których wszystkie trzy pierwsze pochodne $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ są równe zeru, są punktami *osobliwymi*. Takie punkty osobliwe wymagają osobnych badań. Takie punkty, w których funkcje $x$, $y$, $z$ są ciągłe, a pierwsze ich pochodne istnieją i nie są równocześnie równe zeru, nazywamy punktami *zwyczajnymi*.

*Przykłady.*

Linię prostą, leżącą w przestrzeni, przedstawiamy trzema równaniami liniowymi:

$$x = a + lt, \quad y = b + mt, \quad z = c + nt \tag{102}$$

Koło, leżące na płaszczyźnie $(XY)$, którego środek leży w początku układu, przedstawia się równaniami:

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = 0$$

Aby otrzymać równanie koła w położeniu najogólniejszym, należy zastosować (znane z geometrii analitycznej) równania obrotu i przesunięcia.

Spośród krzywych wichrowatych bardzo proste równania ma linia śrubowa zwyczajna, tj. opisana na prostym walcu *obrotowym*, a mianowicie (por. tom I, str. 377—8):

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt \tag{103}$$

gdzie $t$ oznacza kąt obrotu promienia, którego koniec zakreśla przy ruchu śrubowym linię śrubową, a $d = b \cdot 2\pi$ jest krokiem śruby.

Najdogodniej jest użyć do przedstawienia parametrowego jako parametru długości łuku $s$. Na element łuku linii przestrzennej (tj. na różniczkę łuku) wyprowadziliśmy (por. tom II, str. 136) wzór:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{104}$$

Stąd:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t) \tag{105}$$

Jeżeli parametrem jest łuk, to $s \equiv t$, a więc $\frac{ds}{dt} = 1$ i otrzymujemy:

$$\boxed{\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) + \chi'^2(s) \equiv 1} \tag{106}$$

Odwrotnie: jeżeli funkcje $\varphi$, $\psi$, $\chi$ spełniają to równanie, a długość łuku liczymy od punktu, dla którego $t=0$, to $s=t$, a więc parametrem jest łuk.

Równanie (106) jest więc *koniecznym i dostatecznym warunkiem na to, aby zmienna t w przedstawieniu parametrowym była łukiem.*

Tak np. dla linii śrubowej parametr $t$, figurujący we wzorach (103), nie jest długością łuku, albowiem wyrażenie:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2 = a^2 + b^2$$

nie jest identycznie równe 1. Możemy jednak wprowadzić długość łuku jako parametr. I tak wiemy (por. tom II, str. 138), że długość łuku linii śrubowej wyraża się wzorem:

$$s = t\sqrt{a^2 + b^2}$$

Stąd:

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Zatem wzory:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = a\sin\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z = b\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}\right. \tag{107}$$

dają takie przedstawienie parametrowe linii śrubowej, w którym parametrem jest długość łuku.

Przy badaniu krzywych przestrzennych zajmować się będziemy styczną, normalną i krzywizną krzywej przestrzennej. Z natury krzywej przestrzennej wynika, że zakres naszych badań rozszerzy się tu. I tak przy badaniu styczności będziemy się zajmowali nie tylko *prostymi* stycznymi, ale także i *płaszczyznami stycznymi* do takiej krzywej. Przy badaniu normalnej występuje cała płaszczyzna, w której leżą wszystkie normalne, przechodzące przez dany punkt krzywej. Krzywiznę linij płaskich pojmowaliśmy jako miarę odchylenia krzywej od linii prostej. Tutaj wystąpi to samo pojęcie, ale oprócz tego trzeba się będzie zająć odchyleniem linii od płaszczyzny, czyli tzw. torsją albo skręceniem linii.

## § 308. Styczna i płaszczyzna normalna

Styczną krzywej przestrzennej określamy jako graniczne położenie siecznej. Weźmy pod uwagę dwa punkty krzywej, odpowiadające wartościom $t_1$ i $t_2$ parametru, a mianowicie $A(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ i $A'(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$ (fig. 19). Oznaczmy dla krótkości współrzędne punktu $A$: $x_1, y_1, z_1$, a punktu $A'$:

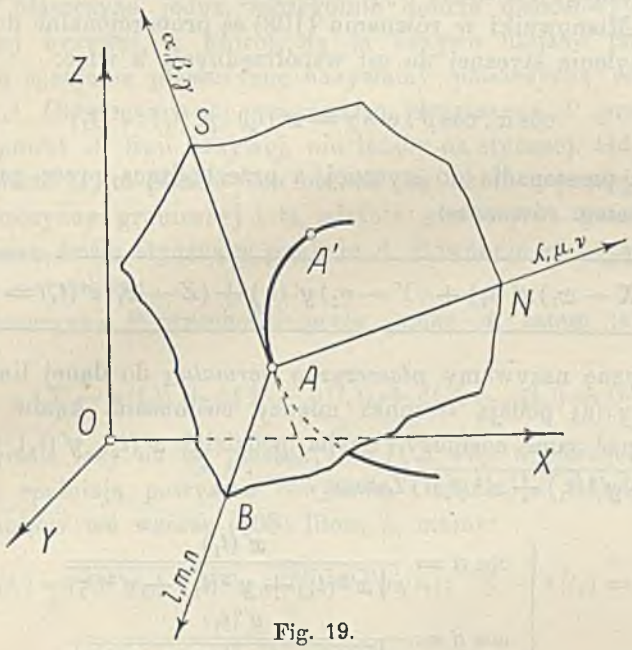


Fig. 19.

$x_2, y_2, z_2$. Wychodzimy z równania siecznej. Jeśli przez $X, Y, Z$ oznaczymy współrzędne bieżące prostej, to równania prostej, przechodzącej przez $A$ i $A'$, mają postać:

$$\frac{X - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{Z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Podzielmy wszystkie mianowniki przez $t_2 - t_1 = \Delta t$. Gdy $t_2 \to t_1$, to $\Delta t \to 0$, a stosunki $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$ dążą do pochodnych. Po przejściu do granicy otrzymamy zatem:

(108)
$$\boxed{\frac{X - x_1}{x'(t_1)} = \frac{Y - y_1}{y'(t_1)} = \frac{Z - z_1}{z'(t_1)}}$$

Taką postać mają *równania stycznej* do krzywej w punkcie $A(x_1, y_1, z_1)$, gdy używamy parametrowego przedstawienia. Z równań tych widać, że tylko w takich punktach istnieje oznaczona styczna, w których nie wszystkie pochodne są równocześnie zerami. Takie punkty, w których te pochodne są równocześnie równe 0, nazwaliśmy *osobliwymi* i zaznaczyliśmy z góry, że wyłączymy je z naszych rozważań.

Z ostatniego równania wyprowadzimy od razu równanie płaszczyzny normalnej. Mianowniki w równaniu (108) są proporcjonalne do cosinusów kątów nachylenia stycznej do osi współrzędnych, a więc:

$$\text{(a)} \qquad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x'(t_1) : y'(t_1) : z'(t_1)$$

Płaszczyzna prostopadła do stycznej, a przechodząca przez punkt styczności, ma zatem równanie:

$$\text{(109)} \qquad \boxed{(X - x_1)x'(t_1) + (Y - y_1)y'(t_1) + (Z - z_1)z'(t_1) = 0}$$

Tę płaszczyznę nazywamy *płaszczyzną normalną* do danej linii.

Wzory (a) podają stosunki między cosinusami kątów nachylenia. Aby otrzymać same cosinusy, trzeba podzielić $x'(t_1)$, $y'(t_1)$, $z'(t_1)$ przez $\varepsilon\sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1) + z'^2(t_1)}$. Zatem:

$$\text{(110)} \qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x'(t_1)}{\varepsilon\sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1) + z'^2(t_1)}} \\ \cos\beta = \dfrac{y'(t_1)}{\varepsilon\sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1) + z'^2(t_1)}} \\ \cos\gamma = \dfrac{z'(t_1)}{\varepsilon\sqrt{x'^2(t_1) + y'^2(t_1) + z'^2(t_1)}} \end{cases}$$

przy czym $\varepsilon = +1$ lub $-1$ zależnie od tego, który kierunek stycznej uważamy za dodatni.

Jeżeli parametrem jest łuk, to wzory przedstawiają się o wiele prościej, wtedy bowiem wszystkie mianowniki wypisanych ułamków są równe 1 (na podstawie wzoru (106)). Otrzymujemy więc:

$$\text{(111)} \qquad \boxed{\begin{aligned} \cos\alpha &= x'(s) \\ \cos\beta &= y'(s) \\ \cos\gamma &= z'(s) \end{aligned}}$$

Obraliśmy tu $\varepsilon = +1$, a przez to ustaliliśmy na stycznej pewien kierunek jako dodatni.

## § 309. Płaszczyzna ściśle styczna

Przy badaniu krzywych przestrzennych możemy rozpatrywać prócz *prostych* stycznych także i *płaszczyzny* styczne. Weźmy pod uwagę prostą styczną do danej krzywej w punkcie $A$ o współrzędnych $x(t_1)$, $y(t_1)$, $z(t_1)$ (fig. 19). Przez tę prostą można przesunąć pęk płaszczyzn, z których każda zasługuje na nazwę płaszczyzny stycznej. Istnieje jednak wśród tych płaszczyzn jedna, szczególnie dobrze dostosowująca się do przebiegu tej krzywej, z której się ta krzywa niejako jak najmniej wychyla. Tę specjalną płaszczyznę nazywamy płaszczyzną *ściśle styczną* w punkcie $A$. Otrzymamy ją, przesuwając płaszczyznę $P$ przez styczną i dowolny punkt $A'$ linii krzywej, nie leżący na stycznej. Gdy punkt $A'$ dąży do punktu $A$, to płaszczyzna obraca się około stycznej, dążąc do pewnej płaszczyzny granicznej i ta właśnie płaszczyzna graniczna zwie się płaszczyzną ściśle styczną w punkcie $A$. Równanie jej uzyskamy z następujących warunków:

a) Płaszczyzna $P$ przechodzi przez punkt $A$, zatem jej równanie ma postać:

$$a(X - x(t_1)) + b(Y - y(t_1)) + c(Z - z(t_1)) = 0 \tag{I}$$

b) Styczna leży na tej płaszczyźnie $P$, a więc współrzędne punktów tej stycznej spełniają powyższe równanie. Oznaczając wspólną wartość trzech stosunków we wzorze (108) literą $k$, mamy:

$$X - x(t_1) = kx'(t_1); \quad Y - y(t_1) = ky'(t_1); \quad Z - z(t_1) = kz'(t_1)$$

zatem:

$$akx'(t_1) + bky'(t_1) + ckz'(t_1) = 0$$

czyli:

$$ax'(t_1) + by'(t_1) + cz'(t_1) = 0 \tag{II}$$

c) Punkt $A'$ leży na płaszczyźnie $P$. Oznaczmy jego współrzędne $x(t_1 + h)$, $y(t_1 + h)$, $z(t_1 + h)$. Spełnia się więc równanie:

$$a(x(t_1 + h) - x(t_1)) + b(y(t_1 + h) - y(t_1)) + c(z(t_1 + h) - z(t_1)) = 0$$

Przyrosty współrzędnych przedstawmy za pomocą wzoru Taylora, to

$$x(t_1 + h) - x(t_1) = hx'(t_1) + \frac{h^2}{2!}x''(t_1 + \vartheta_1 h)$$

i podobnie dla $y$ i $z$.

Zatem:

$$h[ax'(t_1) + by'(t_1) + cz'(t_1)] +$$
$$+ \frac{h^2}{2}[ax''(t_1 + \vartheta_1 h) + by''(t_1 + \vartheta_2 h) + cz''(t_1 + \vartheta_3 h)] = 0$$

Uwzględniwszy warunek (II), otrzymujemy trzeci warunek:

$$\text{(III)} \qquad ax''(t_1+\vartheta_1 h)+by''(t_1+\vartheta_2 h)+cz''(t_1+\vartheta_3 h)=0$$

Eliminując z tych trzech warunków stałe $a, b, c$, otrzymujemy równanie płaszczyzny $P$ w postaci wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} X-x(t_1), & Y-y(t_1), & Z-z(t_1) \\ x'(t_1), & y'(t_1), & z'(t_1) \\ x''(t_1+\vartheta_1 h), & y''(t_1+\vartheta_2 h), & z''(t_1+\vartheta_3 h) \end{vmatrix}=0$$

Gdy punkt $A'$ dąży do nakrycia się z punktem $A$, to $h$ dąży do zera i otrzymujemy (opuszczając wszędzie literę $t_1$):

$$\text{(112)} \qquad \begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0$$

czyli:

$$\text{(113)} \qquad \boxed{(X-x)(y'z''-y''z')+(Y-y)(z'x''-z''x')+(Z-z)(x'y''-x''y')=0}$$

Jest to szukane *równanie płaszczyzny ściśle stycznej* w punkcie $A(x, y, z)$. Aby to równanie (112) lub (113) przedstawiało istotnie płaszczyznę, nie mogą być równocześnie zerami trzy wyrażenia:

$$y'z''-y''z', \quad z'x''-z''x', \quad x'y''-x''y'$$

Te wyjątkowe (lecz nieosobliwe) punkty, w których trzy powyższe wyrażenia są równocześnie zerami, wyłączymy zatem z dalszej dyskusji. W punktach tych zachodzą proporcje:

$$y':y''=z':z''=x':x''$$

Płaszczyzna styczna jest w tych punktach nieoznaczona. Takim punktem jest np. każdy punkt linii prostej, jakkolwiek linia prosta nie ma żadnych punktów osobliwych. Dla prostej jest od razu widocznym, skąd pochodzi ta nieoznaczność: każdą bowiem płaszczyznę, zawierającą tę prostą, możemy uważać za jej płaszczyznę ściśle styczną.

## § 310. Normalna główna, binormalna i płaszczyzna rektyfikacyjna

Płaszczyzna ściśle styczna przecina płaszczyznę normalną wzdłuż prostej ($AN$ na fig. 19), zwanej *normalną główną*. Równania jej otrzymamy zatem z warunku, że współrzędne wszystkich jej punktów spełniają równania (109) i (113), tj.:

$$(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0$$
$$(X-x)(y'z''-y''z')+(Y-y)(z'x''-z''x')+(Z-z)(x'y''-x''y')=0$$

Stąd:

$$\frac{X-x}{Z-z}=\frac{(z'x''-z''x')z'-(x'y''-x''y')y'}{(y'z''-y''z')y'-(z'x''-z''x')x'}$$
$$\frac{Y-y}{Z-z}=\frac{(x'y''-x''y')x'-(y'z''-y''z')z'}{(y'z''-y''z')y'-(z'x''-z''x')x'}$$

Zatem równania normalnej głównej mają postać:

$$\frac{X-x}{(z'x''-z''x')z'-(x'y''-x''y')y'}=$$
$$(114)\qquad =\frac{Y-y}{(x'y''-x''y')x'-(y'z''-y''z')z'}=$$
$$=\frac{Z-z}{(y'z''-y''z')y'-(z'x''-z''x')x'}$$

Jeżeli parametrem jest łuk $s$, to wzory te upraszczają się znacznie. Wtedy bowiem $x'^2+y'^2+z'^2=1$, a tworząc pochodną obu stron według $s$, otrzymujemy $2(x'x''+y'y''+z'z'')=0$. Wobec tego mianownik pierwszego ułamka przyjmuje postać:

$$x''(z'^2+y'^2)-x'(z'z''+y'y'')=x''(z'^2+y'^2)-x'(-x'x'')=$$
$$=x''(x'^2+y'^2+z'^2)=x''\cdot 1=x''$$

Podobnie pozostałe mianowniki przechodzą na $y''$ i $z''$ i otrzymujemy:

$$(115)\qquad \boxed{\frac{X-x}{x''(s)}=\frac{Y-y}{y''(s)}=\frac{Z-z}{z''(s)}}$$

Nazwijmy kąty normalnej głównej z osiami współrzędnych literami $\lambda, \mu, \nu$, to:

$$(116)\qquad \boxed{\begin{aligned}&\cos\lambda=\frac{x''(s)}{\varepsilon\sqrt{x''(s)^2+y''(s)^2+z''(s)^2}},\quad \cos\mu=\frac{y''(s)}{\varepsilon\sqrt{x''(s)^2+y''(s)^2+z''(s)^2}}\\&\cos\nu=\frac{z''(s)}{\varepsilon\sqrt{x''(s)^2+y''(s)^2+z''(s)^2}},\quad \text{gdzie}\quad \varepsilon=+1\quad\text{lub}\quad -1\end{aligned}}$$

Jeżeli parametr nie jest łukiem, to wzory na cosinusy tych kątów, otrzymane z równań (114), są bardzo skomplikowane.

Prostą, leżącą w płaszczyźnie normalnej, a prostopadłą do normalnej głównej, nazywamy *binormalną* ($AB$ na fig. 19). Niechaj $l$, $m$, $n$ oznaczają jej kąty z osiami współrzędnych. Ponieważ binormalna jest prostopadła do stycznej i do normalnej głównej, przeto jest także prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej. Jej cosinusy kierunkowe są więc proporcjonalne do współczynników w równaniu płaszczyzny ściśle stycznej. Aby

dostać wprost cosinusy kątów $l$, $m$, $n$, należy więc te współczynniki podzielić przez pierwiastek z sumy ich kwadratów.

Zatem:

$$(117)\quad \left|\begin{array}{l} \cos l = \dfrac{y'z'' - y''z'}{\varepsilon\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}} \\ \cos m = \dfrac{z'x'' - z''x'}{\varepsilon\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}} \\ \cos n = \dfrac{x'y'' - x''y'}{\varepsilon\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}} \end{array}\right.$$

przy czym $\varepsilon = +1$ lub $-1$.

Wyrażenie, zawarte w mianowniku, jest dość skomplikowane. Łatwo jednak stwierdzić, że przy użyciu łuku jako parametru wyrażenie to przechodzi na $\varepsilon\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}$. Zatem:

$$(118)\quad \boxed{\begin{array}{l} \cos l = \dfrac{y'z'' - y''z'}{\varepsilon\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}} \\ \cos m = \dfrac{z'x'' - z''x'}{\varepsilon\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}} \\ \cos n = \dfrac{x'y'' - x''y'}{\varepsilon\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}} \end{array}}$$

gdzie $\varepsilon = +1$ lub $-1$.

Równania binormalnej mają więc postać:

$$(119)\quad \boxed{\frac{X - x}{y'z'' - y''z'} = \frac{Y - y}{z'x'' - z''x'} = \frac{Z - z}{x'y'' - x''y'}}$$

Wyróżniliśmy w ten sposób dla każdego punktu linii w przestrzeni układ trzech prostych wzajemnie do siebie prostopadłych, a mianowicie styczną, normalną główną i binormalną Z układem tym jest związany układ trzech płaszczyzn wzajemnie do siebie prostopadłych, a mianowicie: płaszczyzna ściśle styczna (zawierająca prostą styczną i normalną główną), płaszczyzna normalna (zawierająca normalną główną i binormalną) i trzecia płaszczyzna ($SAB$ na fig. 19), wyznaczona przez styczną i binormalną. Tę trzecią płaszczyznę nazywamy *płaszczyzną rektyfikacyjną*. Ponieważ jest ona prostopadła do normalnej głównej i przechodzi przez punkt $A(x, y, z)$ danej linii, przeto jej równanie ma postać:

$$(X - x)\cos\lambda + (Y - y)\cos\mu + (Z - z)\cos\nu = 0$$

czyli (na podstawie wzorów (116)):

$$(120)\qquad \boxed{(X-x)x''(s)+(Y-y)y''(s)+(Z-z)z''(s)=0}$$

Układ tych trzech płaszczyzn i tych trzech prostych można przyjąć za układ współrzędnych ruchomy przy posuwaniu się wzdłuż krzywej. Chcąc badać krzywą w otoczeniu jakiegoś jej punktu, dogodnie jest przesunąć i obrócić osie współrzędnych tak, aby się nakrywały z tymi trzema prostymi.

## § 311. Pierwsza krzywizna krzywych w przestrzeni

*Pierwszą krzywizną* linii w dowolnym jej punkcie nazywamy granicę, do której dąży bezwzględna wartość stosunku kąta $\Delta\varphi$, zawartego między dwiema stycznymi, do długości łuku, zawartego między punktami styczności, gdy ta długość dąży do zera. Oznaczmy tę krzywiznę literą $k_1$. Cosinusy kierunkowe jednej stycznej są $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, drugiej zaś $\cos\alpha+\Delta\cos\alpha$, $\cos\beta+\Delta\cos\beta$, $\cos\gamma+\Delta\cos\gamma$. Cosinus kąta, zawartego między tymi stycznymi, ma zatem wartość:

$$\cos\Delta\varphi=\cos\alpha(\cos\alpha+\Delta\cos\alpha)+\cos\beta(\cos\beta+\Delta\cos\beta)+\cos\gamma(\cos\gamma+\Delta\cos\gamma)$$

Aby sprowadzić prawą stronę do dogodnej formy, dodajemy do siebie stronami równania:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$
$$(\cos\alpha+\Delta\cos\alpha)^2+(\cos\beta+\Delta\cos\beta)^2+(\cos\gamma+\Delta\cos\gamma)^2=1$$

Otrzymamy:

$$2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+2(\cos\alpha\Delta\cos\alpha+\cos\beta\Delta\cos\beta+\cos\gamma\Delta\cos\gamma)+$$
$$+(\Delta\cos\alpha)^2+(\Delta\cos\beta)^2+(\Delta\cos\gamma)^2=2$$

czyli:

$$2[\cos\alpha(\cos\alpha+\Delta\cos\alpha)+\cos\beta(\cos\beta+\Delta\cos\beta)+\cos\gamma(\cos\gamma+\Delta\cos\gamma)]=$$
$$=2-[(\Delta\cos\alpha)^2+(\Delta\cos\beta)^2+(\Delta\cos\gamma)^2]$$

Zatem:

$$2\cos\Delta\varphi=2-[(\Delta\cos\alpha)^2+(\Delta\cos\beta)^2+(\Delta\cos\gamma)^2]$$

a stąd:

$$2(1-\cos\Delta\varphi)=(\Delta\cos\alpha)^2+(\Delta\cos\beta)^2+(\Delta\cos\gamma)^2$$

czyli:

$$4\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta\varphi=(\Delta\cos\alpha)^2+(\Delta\cos\beta)^2+(\Delta\cos\gamma)^2$$

Mnożąc i dzieląc pierwszą stronę przez $\frac{1}{4}\Delta^2\varphi$, otrzymamy:

$$4\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi}{\frac{1}{2}\Delta\varphi}\right)^2\cdot\tfrac{1}{4}\Delta^2\varphi=(\Delta\cos\alpha)^2+(\Delta\cos\beta)^2+(\Delta\cos\gamma)^2$$

Dzielimy obie strony przez $\Delta s^2$ i przechodzimy do granicy.

Ponieważ wraz z $\Delta s$ także $\Delta\varphi$ dąży do zera, oraz:

$$\lim_{\Delta\varphi\to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi}{\frac{1}{2}\Delta\varphi}\right)^2=1$$

przeto:

$$k_1^2=\lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)^2=\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2$$

czyli:

$$k_1^2=\frac{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}{ds^2} \tag{121}$$

Ponieważ $\cos\alpha=x'(s)$, więc $\frac{d\cos\alpha}{ds}=x''(s)$ i podobnie inne pochodne, zatem wzór na kwadrat pierwszej krzywizny można przedstawić w postaci:

$$k_1^2=x''(s)^2+y''(s)^2+z''(s)^2 \tag{122}$$

Odwrotność pierwszej krzywizny nazywamy *promieniem krzywizny* i oznaczamy go literą $R$. Zatem:

$$R=\frac{1}{k_1}=\frac{1}{\sqrt{x''(s)^2+y''(s)^2+z''(s)^2}} \tag{123}$$

Wzory te odnoszą się do takiego przedstawienia parametrowego, w którym parametrem jest długość łuku. Chcąc przejść do ogólnego przedstawienia parametrowego, należy obliczyć:

$$x'(s)=\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{dx}{dt}:\frac{ds}{dt}=x'(t):\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}$$

$$x''(s)=\frac{d}{ds}\left[x'(t):\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\left[x'(t):\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\right]\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$=\left(x''-x'\frac{x'x''+y'y''+z'z''}{x'^2+y'^2+z'^2}\right):(x'^2+y'^2+z'^2)$$

i podobnie $y''(s)$, $z''(s)$. Po podstawieniu otrzymanych wartości we wzór (123) otrzymamy:

$$R=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+(x'y''-x''y')^2}} \tag{124}$$

Jeżeli ten promień odetniemy na normalnej głównej od punktu krzywej w tę stronę, w którą linia jest zwrócona swoją wklęsłością (jak na fig. 20), to otrzymany punkt $S$ nazywamy *środkiem krzywizny*, należącym do da-

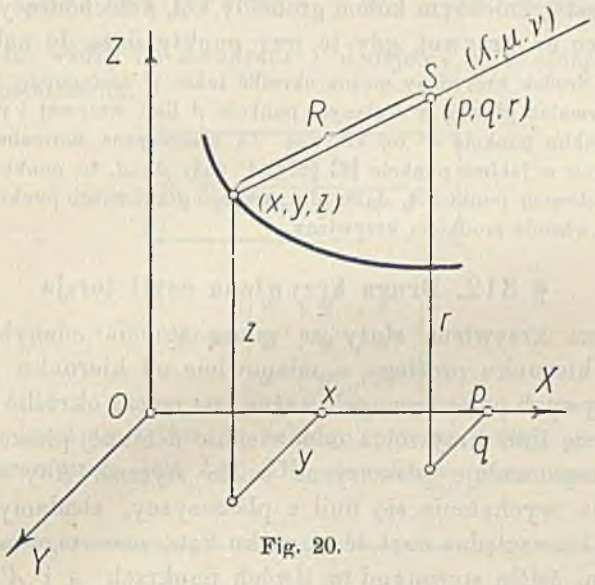


Fig. 20.

nego punktu krzywej. Współrzędne $p, q, r$ środka krzywizny obliczymy, tworząc rzut promienia $R$ na osie współrzędnych. I tak:

$$R\cos\lambda = p - x, \quad R\cos\mu = q - y, \quad R\cos\nu = r - z$$

Stąd:

$$p = x + R\cos\lambda, \quad q = y + R\cos\mu, \quad r = z + R\cos\nu$$

Wstawiając zaś za $R$, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ wyrażenia z wzorów (116) i (123 (przy czym we wzorach (116) należy obrać $\varepsilon = +1$), otrzymamy:

(125)
$$\boxed{\begin{aligned} p &= x + \frac{x''(s)}{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2} \\ q &= y + \frac{y''(s)}{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2} \\ r &= z + \frac{z''(s)}{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2} \end{aligned}}$$

Jeżeli parametr jest dowolny, to przekształcając te wzory w sposób podobny jak wzór na $R$, otrzymujemy:

(125a)
$$p = x + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}\,[z'(z'x'' - z''x') - y'(x'y'' - x''y')]$$

i analogiczne wzory na $q$ i $r$.

Koło, zakreślone z środka $S$ promieniem $R$ w płaszczyźnie, wyznaczonej przez styczną i normalną główną, tj. w płaszczyźnie ściśle stycznej, nazywamy *kołem ściśle stycznym* lub *kołem krzywiznowym*. Można okazać, że to koło jest granicznym kołem gromady kół, przechodzących przez trzy punkty, leżące na krzywej, gdy te trzy punkty dążą do nakrycia się.

*Uwaga.* Środek krzywizny można określić także w następujący sposób. Weźmy pod uwagę normalną główną w badanym punkcie $A$ linii krzywej i płaszczyznę normalną w pobliskim punkcie $A'$ tej krzywej. Ta płaszczyzna normalna przecina ową normalną główną w jakimś punkcie $S'$. Gdy $A'$ dąży do $A$, to punkt $S'$ posuwa się po normalnej głównej punktu $A$, dążąc do pewnego granicznego punktu $S$. Ten punkt graniczny jest właśnie środkiem krzywizny.

## § 312. Druga krzywizna czyli torsja

Pierwsza krzywizna służy za miarę stopnia odchylenia się linii krzywej od kierunku prostego, a mianowicie od kierunku prostej stycznej. Dla krzywych przestrzennych ważną jest rzeczą określić miarę stopnia wychylenia się linii krzywej z odpowiednio dobranej płaszczyzny. Najlepiej się do tego nadaje płaszczyzna ściśle styczna. Aby więc uzyskać miarę stopnia wychylenia się linii z płaszczyzny, zbadamy granicę, do której dąży bezwzględna wartość stosunku kąta, zawartego między dwiema płaszczyznami ściśle stycznymi w dwóch punktach $A$ i $A'$ krzywej, do długości łuku, zawartego między tymi punktami, gdy ta długość łuku dąży do zera. Niechaj $\Delta\psi$ oznacza kąt, jaki tworzą ze sobą binormalne krzywej w punktach $A$ i $A'$. Kąt, jaki tworzą binormalne, jest zarazem kątem, zawartym między płaszczyznami ściśle stycznymi. Chodzi nam więc o granicę stosunku $\Delta\psi : \Delta s$. Granicę, do jakiej dąży bezwzględna wartość tego stosunku, oznaczamy literą $k_2$ i nazywamy ją *drugą krzywizną, skręceniem* lub *torsją krzywej*. Celem obliczenia tego stosunku należy powtórzyć raz jeszcze te same rozważania, któreśmy już przeprowadzili przy obliczaniu promienia krzywizny, zastępując tylko kąty $\alpha, \beta, \gamma$ stycznej kątami $l$, $m$, $n$ binormalnej. Dochodzi się w ten sposób do następującego wzoru:

$$k_2^2 = \left(\frac{d\cos l}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos m}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos n}{ds}\right)^2 \tag{126}$$

Chcąc wszystko wyrazić za pomocą $x, y, z$, obliczamy $\frac{d\cos l}{ds}$ przy pomocy wzoru (118). Po wykonaniu dosyć uciążliwych rachunków otrzymamy:

$$\frac{d\cos l}{ds} = \frac{-x''\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}}{(x''^2+y''^2+z''^2)^{3/2}} = \frac{-x''D}{(x''^2+y''^2+z''^2)^{3/2}} \tag{a}$$

przy czym wyznacznik, zawarty w liczniku, oznaczyliśmy literą $D$.

Podobnie:

$$\text{(b)}, \quad \frac{d\cos m}{ds} = \frac{-y''D}{(x''^2+y''^2+z''^2)^{3/2}}; \quad \frac{d\cos n}{ds} = \frac{-z''D}{(x''^2+y''^2+z''^2)^{3/2}} \qquad \text{(c)}$$

Podnosimy te wzory do kwadratu i dodajemy. Po spierwiastkowaniu otrzymamy ostatecznie:

$$\text{(127)} \qquad \boxed{k_2 = \frac{|D|}{x''^2+y''^2+z''^2}}$$

przy czym

$$\text{(128)} \qquad D = \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}$$

Wzór (127) odnosi się tylko do takiego parametrowego przedstawienia, w którym parametrem jest łuk. Dla dowolnego parametru $t$ otrzymuje się wzór:

$$\text{(129)} \qquad \boxed{k_2 = \frac{|D|}{(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+(x'y''-x''y')^2}}$$

przy czym w wyznaczniku $D$ występują pochodne względem parametru $t$.

Odwrotność liczby $k_2$ oznaczamy literą $T$ i nazywamy ją *promieniem skręcenia czyli torsji*. Zatem:

$$\text{(130)} \qquad \boxed{T = \frac{x''(s)^2+y''(s)^2+z''(s)^2}{|D|}}$$

Promień torsji dąży do nieskończoności (a druga krzywizna do zera) w tych punktach, w których mianownik jest równy zeru. Nazywamy je punktami *stacjonarnymi* krzywej. W punktach tych następuje w ogólności zmiana kierunku obrotu płaszczyzny ściśle stycznej, gdy punkt posuwa się po krzywej, podobnie jak dla stycznej w punktach przegięcia następuje zmiana kierunku obrotu stycznej. Okażemy, że *jeżeli druga krzywizna jest równą zeru dla wszystkich punktów jakiejś linii, to ta linia leży cała na jednej płaszczyźnie* (a mianowicie na płaszczyźnie ściśle stycznej) *i odwrotnie, jeżeli linia jest płaska, to w każdym jej punkcie druga krzywizna jest równa zeru.*

*Dowód.*

Jeżeli $k_2 = 0$, to z wzoru (129) wynika, że $D = 0$.

Z wzorów (a), (b), (c) wynika, że wtedy także:

$$\frac{d\cos l}{ds} = 0, \quad \frac{d\cos m}{ds} = 0, \quad \frac{d\cos n}{ds} = 0$$

czyli:

$$\cos l = c_1, \quad \cos m = c_2, \quad \cos n = c_3$$

Binormalna jest prostopadła do stycznej, zatem:

$$\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n = 0$$

czyli:

$$c_1\cos\alpha + c_2\cos\beta + c_3\cos\gamma = 0$$

Ale w myśl wzorów (111) jest $\cos\alpha = x'(s)$, $\cos\beta = y'(s)$, $\cos\gamma = z'(s)$, zatem:

$$c_1 x'(s) + c_2 y'(s) + c_3 z'(s) = 0$$

Całkując obie strony według $s$, otrzymamy:

$$c_1 x(s) + c_2 y(s) + c_3 z(s) = C$$

a to dowodzi, że wszystkie punkty danej krzywej leżą na jednej płaszczyźnie.

Na odwrót: jeżeli dana linia jest płaska, to współrzędne każdego jej punktu: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ spełniają równanie jakiejś płaszczyzny:

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$$

Spełniają one zatem także równania, otrzymane przez trzykrotne różniczkowanie tego równania, tj.:

$$\begin{aligned} ax' + by' + cz' &= 0 \\ ax'' + by'' + cz'' &= 0 \\ ax''' + by''' + cz''' &= 0 \end{aligned}$$

Eliminując stąd stałe $a$, $b$, $c$, otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix} = D = 0$$

Wobec tego $k_2 = 0$, c. b. d. o.

Ponieważ $k_2 = 0$ równocześnie z $D = 0$, przeto możemy wypowiedzieć udowodnione twierdzenie także w następującej postaci:
*koniecznym i dostatecznym warunkiem na to, aby linia była płaska, jest, aby wyznacznik $D$, określony wzorem* (128), *był zerem dla wszystkich punktów tej linii.*

## § 313. Przykłady badania linij

1) Zbadać, czy linia, określona równaniami:

$$x = \tfrac{1}{2}(1+t), \quad y = \tfrac{6}{7}(1-t), \quad z = 3\left(t + \tfrac{1}{7}\right)$$

jest płaską czy skośną. Tworzymy pochodne:

$$x' = \tfrac{1}{2}, \qquad x'' = 0, \qquad x''' = 0$$

$$y' = -\frac{6}{t^2}, \qquad y'' = \frac{12}{t^3}, \qquad y''' = -\frac{36}{t^4}$$

$$z' = 3 - \frac{3}{t^2}, \qquad z'' = \frac{6}{t^3}, \qquad z''' = -\frac{18}{t^4}$$

Wyznacznik $D$, rozstrzygający o tym, czy badana linia jest płaska czy skośna, ma zatem wartość:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & 0, & 0 \\ -\frac{6}{t^2}, & \frac{12}{t^3}, & -\frac{36}{t^4} \\ 3 - \frac{3}{t^2}, & \frac{6}{t^3}, & -\frac{18}{t^4} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{-12 \cdot 18}{t^7} + \frac{6 \cdot 36}{t^7}\right) \equiv 0$$

Identyczne znikanie tego wyznacznika dowodzi, że badana krzywa jest płaska.

2) Zbadać własności *linii śrubowej zwyczajnej*. Przy użyciu długości łuku jako parametru równania linii śrubowej mają postać (por. wzory (107) na str. 166):

$$x = a\cos ks, \quad y = a\sin ks, \quad z = bks$$

przy czym $k = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a$ oznacza promień walca, a $d = 2\pi b$ jest krokiem śruby.

Dostawy kierunkowe *stycznej* mają wartości:

$$\cos\alpha = x' = -ak\sin ks$$
$$\cos\beta = y' = ak\cos ks$$
$$\cos\gamma = z' = bk = \text{constans}$$

Stąd pierwszy ważny wniosek: styczna do linii śrubowej tworzy stały kąt z osią $z$.

Obliczmy promień krzywizny. Potrzebne są do tego drugie pochodne:

$$x'' = -ak^2\cos ks, \quad y'' = -ak^2\sin ks, \quad z'' = 0$$

Zatem:

$$R = \frac{1}{\sqrt{a^2k^4}} = \frac{1}{ak^2} = \text{constans}$$

*Promień krzywizny* linii śrubowej jest więc wielkością *stałą*.

Używając wzorów (116), otrzymujemy następujące wzory na dostawy kierunkowe *normalnej głównej*:

$$\cos\lambda = -\frac{1}{ak^2}\,ak^2\cos ks = -\cos ks$$

$$\cos\mu = -\frac{1}{ak^2}\,ak^2\sin ks = -\sin ks$$

$$\cos\nu = -\frac{1}{ak^2}\,0 = 0$$

Ponieważ $\cos\nu = 0$, przeto $\nu = \frac{\pi}{2}$. Zatem normalna główna linii śrubowej jest stale *prostopadła do osi Z*.

Równanie *płaszczyzny rektyfikacyjnej* ma według wzoru (120) postać:

$$-(X-x)\cos ks - (Y-y)\sin ks = 0$$

Dowodzi to, że płaszczyzna rektyfikacyjna jest prostopadła do płaszczyzny $XY$.

Z wzorów (118) otrzymujemy następujące wartości na dostawy kierunkowe binormalnej:

$$\cos l = bk\sin ks$$
$$\cos m = -bk\sin ks$$
$$\cos n = ak = \text{constans}$$

Binormalna tworzy więc stały kąt z osią $Z$.

Obliczmy skręcenie linii śrubowej. Potrzebne tu są trzecie pochodne:

$$x''' = ak^3\sin ks, \quad y''' = -ak^3\cos ks, \quad z''' = 0$$

Najpierw obliczamy:

$$D = \begin{vmatrix} -ak\sin ks\,, & ak\cos ks\,, & bk \\ -ak^2\cos ks, & -ak^2\sin ks, & 0 \\ ak^3\sin ks\,, & -ak^3\cos ks, & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = bk\,(a^2k^5\cos^2 ks + a^2k^5\sin^2 ks)$$

$$D = bk^6a^2$$

Wobec tego:

$$T = \frac{a^2k^4}{bk^6a^2} = \frac{1}{bk^2} = \text{constans}$$

*Skręcenie* linii śrubowej jest więc *wielkością stałą*.

ROZDZIAŁ XXIV

# Geometria różniczkowa powierzchni

## § 314. Analityczne sposoby przedstawiania powierzchni

Równanie powierzchni badamy w trzech rozmaitych postaciach: w formie wyraźnej, uwikłanej lub parametrowej.

Formą wyraźną nazywamy równanie:

$$z = f(x, y) \tag{131}$$

Przykłady takiego przedstawienia spotykaliśmy już niejednokrotnie, np. równanie paraboloidy eliptycznej: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, hiperbolicznej: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, równanie płaszczyzny: $z = ax + by + c$ (por. tom I, str. 39, 43, 44).

Formą uwikłaną nazywamy równanie:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{132}$$

Przykładami tej formy są: równanie kuli $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, równanie elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, równanie powierzchni śrubowej $\frac{y}{x} - \operatorname{tg}\frac{z}{c} = 0$ (por. tom I, str. 64).

Formę parametrową równań powierzchni otrzymuje się, przedstawiając współrzędne $x$, $y$, $z$ jako funkcje dwóch parametrów:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \chi(u, v) \end{aligned} \tag{133}$$

Formę tę omówiliśmy już w tomie I, § 125.

*Przykłady.* Równania parametrowe kuli mają postać:

$$(134)\qquad \boxed{\begin{aligned} x &= r\cos u \sin v \\ y &= r\cos u \cos v \\ z &= r\sin u \end{aligned}}$$

przy czym $r$ oznacza promień kuli, $u$ szerokość geograficzną punktu, a $v$ jego długość geograficzną liczoną od południka, leżącego w płaszczyźnie $ZY$.

Jeżeli przez każdy punkt jakiejś linii wykreślimy jedną linię prostą, to zbiór tych wszystkich prostych tworzy powierzchnię, zwaną *powierzchnią prostoliniową*. Każdą powierzchnię prostoliniową można przedstawić za pomocą równań:

$$(135)\qquad \boxed{\begin{aligned} x &= f(u) + vg(u) \\ y &= f_1(u) + vg_1(u) \\ z &= f_2(u) + vg_2(u) \end{aligned}}$$

Tak np. równanie powierzchni śrubowej można przedstawić w postaci:

$$(136)\qquad \left|\begin{aligned} x &= 0 + v\cos u = v\cos u \\ y &= 0 + v\sin u = v\sin u \\ z &= ku + 0 = ku \end{aligned}\right.$$

Zmienna $u$ oznacza tu kąt obrotu prostej ruchomej (por. tom I, str. 63, fig. 36, kąt $\alpha$) a zmienna $v$ odległość dowolnego punktu tej prostej od osi obrotu (por. tom I, str. 63, fig. 36, odcinek $AP$).

Zastanówmy się nad geometryczną interpretacją parametrów $u$ i $v$. Jeśli obierzemy za $v$ jakąś liczbę stałą, np. $v = a$ i wstawimy w równania (133), to $x$, $y$ i $z$ będą funkcjami jednego tylko parametru, będą zatem przedstawiać jakąś linię. Linia ta leży na danej powierzchni. Gdy bierzemy za $v$ coraz to inne wartości, to otrzymujemy coraz to nowe linie; otrzymujemy całą gromadę linij, zwanych *liniami parametrowymi*. Podobnie przez zmianę $u$ dostajemy drugą gromadę linij parametrowych. Tak np. dla kuli biorąc $v = \text{const}$, otrzymujemy miejsce geometryczne punktów o stałej długości geograficznej, a zatem południk. Dla różnych $v$ otrzymujemy coraz to nowe południki. Jeśli zaś przyjmiemy $u = \text{constans}$, a $v$ będzie zmienne, to otrzymamy równoleżniki jako drugą gromadę linij parametrowych. Ponieważ przy pomocy liczb $u$, $v$ można określić położenie każdego punktu powierzchni, przeto liczby te zasługują na nazwę współrzędnych. Są to tzw. *krzywoliniowe współrzędne.*

Na płaszczyźnie przy użyciu zwyczajnych współrzędnych prostokątnych odpowiada tym liniom parametrowym układ prostych równoległych do osi $X$ i $Y$. Każdy punkt na płaszczyźnie jest określony jako punkt przecięcia się dwu prostych: jednej ($y = \text{const.}$) z gromady równoległych do osi $X$ i drugiej ($x = \text{const.}$), należącej do zbioru prostych równoległych do osi $Y$.

Jeżeli pomiędzy parametrami $u$ i $v$ zachodzi jakiś związek:

$$v = f(u)$$

to:

$$x = \varphi[u, f(u)] = F(u)$$
$$y = \psi[u, f(u)] = G(u)$$
$$z = \chi[u, f(u)] = H(u)$$

Współrzędne $x, y, z$ są wtedy funkcjami jednego tylko parametru, równania te przedstawiają zatem jakąś *linię*, leżącą na danej powierzchni. Chcąc zatem obrać jakąś linię na powierzchni, trzeba podać jakąś funkcję, wiążącą ze sobą parametry $u$ i $v$. Równanie $v = f(u)$ jest uogólnieniem równania $y = f(x)$ linii, leżącej na płaszczyźnie.

## § 315. Płaszczyzna styczna do powierzchni

Weźmy pod uwagę zbiór wszystkich prostych stycznych w danym punkcie $P(x, y, z)$ powierzchni do wszystkich linij, leżących na powierzchni, a przechodzących przez ten punkt. Każdą taką prostą nazywamy prostą styczną do powierzchni. Poszukajmy miejsca geometrycznego wszystkich punktów $(X, Y, Z)$ tych wszystkich stycznych. Niechaj równanie powierzchni będzie podane w formie wyraźnej:

$$z = f(x, y)$$

Załóżmy, że zarówno funkcja $f(x, y)$ jak i jej cząstkowe pochodne są funkcjami ciągłymi dla danych $x, y$.

Równaniami dowolnej linii, leżącej na tej powierzchni, niechaj będą:

(a) $$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

A więc współrzędne $x, y, z$ spełniają równanie tej powierzchni. Zachodzi zatem następujący związek między funkcjami $\varphi$, $\psi$ i $\chi$:

(b) $$\chi(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$$

Z tego związku chcemy wyprowadzić związek, zachodzący między współrzędnymi $X, Y, Z$ punktów stycznej. Równania stycznej do linii (a) mają postać (por. wzór (108), str. 167):

$$\frac{X - x}{\varphi'(t)} = \frac{Y - y}{\psi'(t)} = \frac{Z - z}{\chi'(t)}$$

Stałą wartość tych trzech stosunków oznaczmy literą $k$.

Wobec tego:

$$\text{(c)} \qquad \varphi'(t) = \frac{X - x}{k}, \quad \psi'(t) = \frac{Y - y}{k}, \quad \chi'(t) = \frac{Z - z}{k}$$

Utwórzmy pochodną obu stron równania (b) według zmiennej $t$, to otrzymamy:

$$\chi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\psi'(t)$$

Podstawiając tu wartości z wzorów (c), otrzymujemy po pomnożeniu obu stron przez $k$:

$$\text{(137)} \qquad \boxed{(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = Z - z}$$

Oznaczając jak zwykle $\frac{\partial f}{\partial x}$ literą $p$, a $\frac{\partial f}{\partial y}$ literą $q$, otrzymujemy:

$$\text{(137a)} \qquad \boxed{Z - z = p(X - x) + q(Y - y)}$$

Takie równanie muszą spełniać współrzędne $(X, Y, Z)$ wszystkich punktów wszystkich stycznych do powierzchni w jednym punkcie $P(x, y, z)$. Zmienne $X, Y, Z$ występują tu tylko w pierwszej potędze, jest to więc równanie *płaszczyzny*. Wszystkie punkty wszystkich stycznych, przechodzących przez jeden punkt powierzchni, tworzą więc płaszczyznę. Płaszczyznę tę nazywamy *płaszczyzną styczną* do powierzchni.

*Uwaga.* Tak się dzieje w punktach nieosobliwych. W punktach *osobliwych* (jak np. w wierzchołku stożka) może wystąpić zamiast płaszczyzny stycznej stożek styczny, który się może też zdegenerować do jednej prostej, do dwóch płaszczyzn lub do jednej płaszczyzny.

Z tego równania otrzymujemy dostawy kierunkowe prostej normalnej, tj. prostej prostopadłej do płaszczyzny stycznej a przechodzącej przez punkt styczności. Ponieważ dostawy te są proporcjonalne do współczynników przy zmiennych w równaniu płaszczyzny, przeto według znanych z analityki przestrzennej wzorów otrzymujemy:

$$\text{(138)} \qquad \cos\alpha = \frac{p}{\varepsilon\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

$$\cos\beta = \frac{q}{\varepsilon\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\varepsilon\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$$

przy czym $\varepsilon = +1$ lub $-1$ zależnie od tego, który kierunek normalnej uważamy za dodatni. Równania prostej normalnej mają więc postać:

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1} \tag{139}$$

Równania płaszczyzny stycznej i prostej normalnej dla innych form przedstawiania powierzchni wynikają już z łatwością z wzorów dla formy wyraźnej. I tak, jeżeli mamy podaną powierzchnię w formie uwikłanej:

$$F(x, y, z) = 0$$

to:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = -\frac{F_y}{F_z}$$

o ile $F_z \neq 0$. (Jeżeli $F_z = 0$, lecz $F_x$ lub $F_y$ jest różne od zera, to uważamy $x$ za funkcję $y, z$ lub $y$ za funkcję $x, z$. Jeżeli zaś równocześnie $F_x = F_y = F_z = 0$, to mamy do czynienia z punktami osobliwymi, których dyskusją nie będziemy się zajmować).

Wartości te wstawiamy w otrzymane poprzednio wzory i otrzymujemy po uproszczeniu następujący symetryczny wzór na równanie płaszczyzny stycznej:

$$\boxed{F_x(X-x) + F_y(Y-y) + F_z(Z-z) = 0} \tag{140}$$

*Przykład.*

Dla elipsoidy o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

jest:

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y = \frac{2y}{b^2}, \quad F_z = \frac{2z}{c^2}$$

Równanie płaszczyzny stycznej do elipsoidy ma zatem postać:

$$\frac{x}{a^2}(X-x) + \frac{y}{b^2}(Y-y) + \frac{z}{c^2}(Z-z) = 0$$

czyli:

$$\frac{X \cdot x}{a^2} + \frac{Y \cdot y}{b^2} + \frac{Z \cdot z}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Ponieważ prawa strona jest równa 1, przeto równanie tej płaszczyzny ma postać:

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1$$

Dla formy parametrowej pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ wyrażają się wzorami:

$$\text{(a)} \qquad p = \frac{\chi_u \psi_v - \chi_v \psi_u}{\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u}, \qquad q = \frac{\chi_v \varphi_u - \chi_u \varphi_v}{\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u}$$

(jak udowodniono w tomie I, str. 380). Wartości te wstawiamy we wzór (137a) i po uwolnieniu od mianowników otrzymamy równanie, które najdogodniej jest zapamiętać, przedstawiając je w formie następującego wyznacznika:

$$\text{(141)} \qquad \begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ x_u, & y_u, & z_u \\ x_v, & y_v, & z_v \end{vmatrix} = 0$$

Osobnej dyskusji wymagają punkty osobliwe, w których liczniki i mianowniki wzorów (a) są równe zeru.

*Przykład.*

Dla powierzchni śrubowej, której równania wyraziliśmy wzorami (136) na str. 182, otrzymujemy:

$$x_u = -v \sin u, \quad y_u = v \cos u, \quad z_u = k$$
$$x_v = \cos u, \quad y_v = \sin u, \quad z_v = 0$$

Równanie płaszczyzny stycznej ma zatem postać:

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ -v \sin u, & v \cos u, & k \\ \cos u, & \sin u, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Po rozwinięciu tego wyznacznika, otrzymujemy:

$$(X - x) k \sin u - (Y - y) k \cos u + (Z - z) v = 0$$

Stąd widać, że kąt normalnej z osią $z$ zależy tylko od $v$ a nie zależy od $u$. Zatem płaszczyzna styczna do powierzchni śrubowej jest dla wszystkich punktów, leżących w stałym odstępie $v$ od osi $z$, jednakowo nachylona do tej osi.

## § 316. Element łuku linii, leżącej na powierzchni

Uogólniając geometrię analityczną płaską, dwuwymiarową, możemy się zajmować badaniem utworów geometrycznych, leżących na dowolnej powierzchni krzywej. Tak np. w geodezji lub w kartografii interesują nas utwory geometryczne, leżące na powierzchni kuli lub elipsoidy obrotowej a w szczególności rozmaite linie, leżące na tych powierzchniach. Aby

uzyskać analogię z geometrią analityczną linij płaskich, najdogodniej jest używać współrzędnych krzywoliniowych na powierzchni, to znaczy używać parametrowego przedstawienia powierzchni. Widzieliśmy, że wtedy równanie: $v = f(u)$ określa jakąś linię, leżącą na powierzchni, podobnie, jak równanie: $y = f(x)$ określa linię, leżącą na płaszczyźnie. Parametry $u$, $v$ zastępują więc rolę współrzędnych $x$, $y$. Możemy także podawać równanie linii, leżącej na powierzchni, w formie uwikłanej: $f(u, v) = 0$ lub w formie parametrowej: $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$. Wyprowadzimy wzór na element łuku linii, leżącej na dowolnej powierzchni, przy czym równania tej powierzchni przyjmiemy w formie parametrowej:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

Wychodzimy z znanego wzoru:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Wyrażenia po prawej stronie znaku równości są różniczkami zupełnymi:

$$dx = x_u\,du + x_v\,dv, \quad dy = y_u\,du + y_v\,dv, \quad dz = z_u\,du + z_v\,dv$$

Stąd:

$$ds^2 = (x_u + y_u + z_u^2)\,du^2 + 2\,(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)\,du\,dv + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)\,dv^2$$

Współczynniki przy $du^2$, $2\,du\,dv$ i $dv^2$ oznacza się stale literami $E, F, G$. Otrzymujemy w ten sposób następujący *wzór na kwadrat elementu łuku linii, leżącej na danej powierzchni:*

(142)
$$\boxed{ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

Jest to tzw. *pierwsza zasadnicza forma różniczkowa* teorii powierzchni. Jest to forma jednorodna, kwadratowa zmiennych $du$, $dv$. Zapamiętać należy że:

(143)
$$\boxed{\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}}$$

Te trzy wyrażenia nazywają się *zasadniczymi wielkościami pierwszego rzędu* danej powierzchni. (Wyrażeń tych używaliśmy już w tomie II, w § 258, wzory (178)).

Wzór (142) upraszcza się, gdy chodzi o element łuku linii parametrowej. I tak dla linii parametrowej, określonej warunkiem $v = c$, jest $dv = 0$ i pozostaje:

$$ds^2 = E\,du^2$$

czyli:

(144) $$ds = \sqrt{E}\,du$$

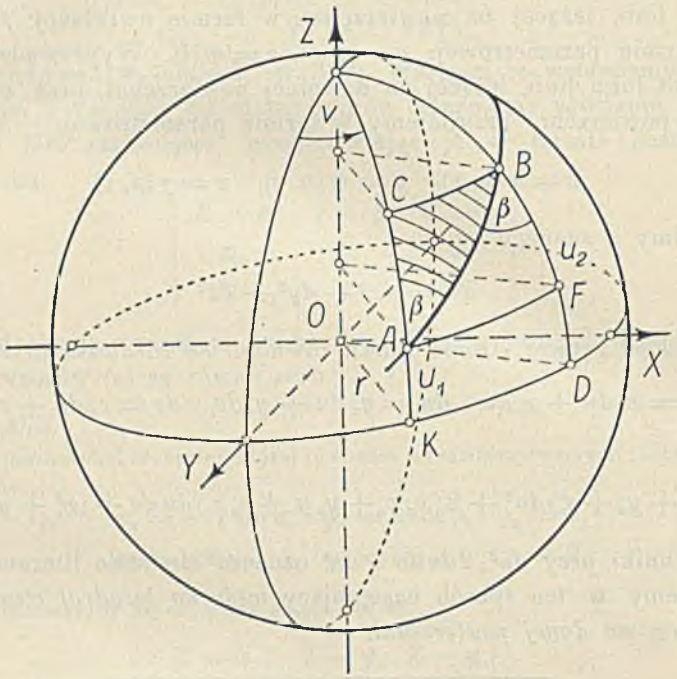


Fig. 21.

Podobnie dla linii parametrowej $u = c$ jest $du = 0$, a na element łuku takiej linii parametrowej otrzymuje się wzór:

(144a) $$ds = \sqrt{G}\,dv$$

*Przykład.*

Dla *kuli*, której równania są podane w formie parametrowej (por. wzory (134) na str. 182), otrzymujemy:

$$x_u = -r\sin u\sin v, \quad y_u = -r\sin u\cos v, \quad z = r\cos u$$

$$x_v = r\cos u\cos v, \quad y_v = -r\cos u\sin v, \quad z_v = 0$$

Zatem:

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2\cos^2 u$$

Kwadrat elementu łuku każdej krzywej, leżącej na kuli, wyraża się zatem wzorem:

(145) $$\boxed{ds^2 = r^2\,du^2 + r^2\cos^2 u\,dv^2}$$

Zastosujmy ten wzór do obliczenia długości łuku *linii loksodromicznej* na kuli (fig. 21). Jest to taka linia, leżąca na kuli, która przecina wszystkie południki pod

tym samym kątem $\beta$ (zwanym w nautyce „kursem"). Gdy $\beta \neq 0^0$ i $\beta \neq 90^0$, to ta linia obiega kulę, wijąc się nieskończenie wiele razy dokoła biegunów, które są jej punktami asymptotycznymi. Chcemy obliczyć łuk tej linii od punktu $A$ do punktu $B$. Niechaj $u_1$ i $u_2$ oznaczają szerokości geograficzne punktów $A$ i $B$. Tangens kąta, pod jakim linia loksodromiczna przecina południki, oznaczamy literą $b$. Okażemy później (str. 192), że dla każdego punktu linii loksodromicznej zachodzi następujący związek między jego szerokością geograficzną $u$, a długością geograficzną $v$: $\frac{dv}{du} = \frac{b}{\cos u}$ a stąd $v = b \log \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}u) + c$. Aby więc obliczyć element łuku linii loksodromicznej, kładziemy we wzorze (145) $dv = \frac{b\,du}{\cos u}$ i otrzymujemy:

$$ds^2 = r^2\,du^2 + r^2 \cos^2 u \frac{b^2\,du^2}{\cos^2 u}$$

czyli:

$$ds^2 = r^2(1 + b^2)\,du^2$$

stąd:

$$ds = r\sqrt{1 + b^2}\,du$$

Na długość łuku otrzymuje się zatem wzór:

$$s = r\sqrt{1 + b^2}\int_{u_1}^{u_2} du = r\sqrt{1 + b^2}\,(u_2 - u_1)$$

Ponieważ:

$$\sqrt{1 + b^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \sec\beta = \frac{1}{\cos\beta}$$

więc:

$$s = \frac{r}{\cos\beta}(u_2 - u_1)$$

Ponieważ zaś $ru_1 = \overset{\frown}{AK}$, $ru_2 = \overset{\frown}{BD}$, więc ostatecznie:

$$s = \frac{1}{\cos\beta}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AK}) = \frac{1}{\cos\beta}\overset{\frown}{BF}$$

Długość tego łuku jest więc równa przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o boku równym długości łuku południka, a o kącie ostrym równym „kursowi". Postępuje się więc tak, jak gdyby krzywoliniowy trójkąt prostokątny $ABF$ był płaskim trójkątem prostoliniowym.

Za pomocą wielkości zasadniczych wyraża się bardzo prosto także *element pola powierzchni*. Wiadomo z rachunku całkowego (por. tom II, § 258), że element pola powierzchni, podanej w formie parametrowej, wyraża się wzorem:

(146) $$\boxed{dP = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv}$$

Oznaczmy wyrażenie $\sqrt{EG - F^2}$, które jest pierwiastkiem kwadratowym z wyróżnika formy kwadratowej (142), literą $D$, to powyższy wzór przyjmie postać:

(146a) $$\boxed{dP = D\,du\,dv}$$

Wzór (146) można też napisać w postaci:

(146b) $$\boxed{dP = \sqrt{(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (y_u z_v - y_v z_u)^2 + (z_u x_v - z_v x_u)^2}\,du\,dv}$$

(por. tom II, § 258, str. 257, wzór (177)).

## § 317. Kąty, zawarte między liniami, leżącymi na powierzchni

Poznaliśmy wzory, służące do obliczania długości łuków i pól na powierzchni. Zajmiemy się obecnie obliczeniem kątów, zawartych między rozmaitymi liniami, leżącymi na powierzchni. I tak przede wszystkim zajmiemy się kątem, zawartym między dwoma liniami parametrowymi: $u = c$ i $v = c'$ w dowolnym punkcie powierzchni. Chodzi tu o kąt, zawarty między prostymi *stycznymi* do tych linij parametrowych. Dla linii parametrowej $v = c'$ zmienia się tylko $u$, zatem styczna do takiej linii ma równania:

$$\frac{X - x}{x_u} = \frac{Y - y}{y_u} = \frac{Z - z}{z_u}$$

Dla drugiej linii parametrowej otrzymujemy:

$$\frac{X - x}{x_v} = \frac{Y - y}{y_v} = \frac{Z - z}{z_v}$$

Dostawy kierunkowe kątów nachylenia tych stycznych mają wartości:

(147)
$$\begin{cases} \cos(ux) = \dfrac{x_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}} = \dfrac{x_u}{\sqrt{E}}, & \cos(vx) = \dfrac{x_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}} = \dfrac{x_v}{\sqrt{G}} \\ \cos(uy) = \dfrac{y_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}} = \dfrac{y_u}{\sqrt{E}}, & \cos(vy) = \dfrac{y_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}} = \dfrac{y_v}{\sqrt{G}} \\ \cos(uz) = \dfrac{z_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}} = \dfrac{z_u}{\sqrt{E}}, & \cos(vz) = \dfrac{z_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}} = \dfrac{z_v}{\sqrt{G}} \end{cases}$$

Przez to, że przed pierwiastkiem daliśmy wszędzie znak $+$, wybraliśmy na tych stycznych pewien określony kierunek jako dodatni.

Na dostawę kierunkową kąta, utworzonego przez te dwa kierunki, otrzymamy zatem:

$$\cos\vartheta = \frac{x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}$$

czyli:

$$\boxed{\cos\vartheta = \frac{F}{\sqrt{EG}}} \tag{148}$$

Jeśli $\vartheta = 90^0$, tj. jeżeli siatka linij parametrowych jest prostokątna, to $\cos\vartheta = 0$ a więc $F = 0$. Ten warunek $F = 0$ jest nie tylko konieczny ale i wystarczający na to, aby siatka linij parametrowych była prostokątna. Tak np. wiemy, że siatka południków i równoleżników jest prostokątna; zgodnie z tem otrzymaliśmy dla kuli $F = 0$, gdy obraliśmy południki i równoleżniki za linie parametrowe.

Zajmiemy się z kolei kątem $\varphi$, jaki tworzy dowolna linia $l$, leżąca na powierzchni, z linią parametrową $v = c'$ w punkcie przecięcia się z tą linią (odpowiada temu w geometrii płaskiej kąt nachylenia dowolnej linii do prostej $y = c$, równy kątowi nachylenia do prostej $y = 0$, tj. do osi $x$-ów).

Jeżeli ta linia $l$ jest określona równaniami:

$$u = u(s), \quad v = v(s) \tag{a}$$

to oznaczając kąty tej linii z osiami współrzędnych symbolami $(lx)$, $(ly)$, $(lz)$, otrzymamy:

$$\cos(lx) = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds} = x_u u' + x_v v'$$

$$\cos(ly) = y_u u' + y_v v'$$

$$\cos(lz) = z_u u' + z_v v'$$

Dostawy zaś linii parametrowej $v = c'$ mają według wzorów (147) wartości:

$$\cos(ux) = \frac{x_u}{\sqrt{E}}, \quad \cos(uy) = \frac{y_u}{\sqrt{E}}, \quad \cos(uz) = \frac{z_u}{\sqrt{E}}$$

Dostawę kąta $\varphi$ oblicza się z wzoru:

$$\cos\varphi = \cos(lx)\cos(ux) + \cos(ly)\cos(uy) + \cos(lz)\cos(uz)$$

Otrzymujemy zatem na dostawę kąta, jaki tworzy linia $l$, określona równaniami (a), z linią parametrową $v = c'$, następujący wzór:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{E}}(Eu'(s) + Fv'(s)) \tag{149}$$

Stąd łatwo oblicza się:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{EG - F^2} \cdot \frac{v'(s)}{Eu'(s) + Fv'(s)}$$

Jeżeli równanie linii $l$, leżącej na powierzchni, jest podane w formie:

$$v = v(u), \quad \text{to} \quad \frac{dv}{du} = \frac{v'(s)}{u'(s)}$$

a więc:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{EG - F^2} \cdot \frac{\frac{dv}{du}}{E + F\frac{dv}{du}}$$

Kładąc $\frac{dv}{du} = k$, a $\sqrt{EG - F^2} = D$, otrzymujemy:

(150)
$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = D\frac{k}{E + Fk}}$$

*Wzór na dostawę kąta, zawartego między dwoma dowolnymi liniami* $m$ *i* $n$, leżącymi na powierzchni, otrzymamy na podstawie wzoru (149) lub (150). I tak, jeżeli linia $m$ tworzy kąt $\varphi_1$ z linią parametrową $v = c'$, a linia $n$ kąt $\varphi_2$, to kąt $\alpha$, zawarty między liniami $m$ i $n$, jest równy $\varphi_2 - \varphi_1$. Wobec tego:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}$$

Jeżeli $v = v_1(u)$ i $v = v_2(u)$ są równaniami linij $m$ i $n$, a pochodne $v_1'$ i $v_2'$ oznaczymy literami $k_1$ i $k_2$, to używając wzoru (150) na obliczenie $\operatorname{tg}\varphi_1$ i $\operatorname{tg}\varphi_2$, otrzymamy po wykonaniu rachunków następujący wzór:

(151)
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{E + F(k_1 + k_2) + Gk_1k_2}{\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}}}$$

*Przykład.*

Wyprowadzić związek między długością a szerokością geograficzną dla loksodromy, tj. równanie loksodromy w współrzędnych $u$ i $v$.

Kąt $\beta$ loksodromy z południkami jest stały, a więc i $\operatorname{tg}\beta = b$ ma stałą wartość. Ponieważ południki są dla kuli liniami parametrowymi $v = c$, przeto kąt $\beta$ wyraża się z wzoru (150), tj.:

$$\operatorname{tg}\beta = D\frac{\frac{dv}{du}}{E + \frac{dv}{du}F}$$

Dla kuli jest $F = 0$, $E = r^2$, $G = r^2\cos^2 u$, a więc:

$$D = \sqrt{r^2 \cdot r^2\cos^2 u - 0^2} = r^2\cos u$$

Wobec tego:

$$\operatorname{tg}\beta = \cos u\frac{dv}{du} = b$$

Stąd:

$$\frac{dv}{du} = \frac{b}{\cos u}$$

a więc:

$$v = b\log\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}u\right) + c$$

Jest to żądane równanie loksodromy.

## § 318. Krzywizna powierzchni

Zanim się zajmiemy krzywizną powierzchni, zbadamy krzywiznę pewnych specjalnych przekrojów powierzchni, a mianowicie *przekrojów normalnych*. Przekrojem zaś normalnym nazywamy każdy przekrój, otrzymany przez przecięcie powierzchni płaszczyzną, przesuniętą przez normalną do powierzchni w dowolnym jej punkcie. Obierzmy jeden taki przekrój. Linia przecięcia, która jest oczywiście linią płaską, niechaj ma równania:

$$u = u(s), \quad v = v(s)$$

jak w § 316, powierzchnia zaś:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

Promień krzywizny tej linii otrzymamy z warunku, że normalna $PN$ do powierzchni pokrywa się z normalną tej krzywej i to z normalną główną, ta bowiem leży na płaszczyźnie ściśle stycznej, tj. na płaszczyźnie, na której leży obrana krzywa płaska. Wobec tego kąt $\omega$, zawarty między tymi normalnymi, ma wartość zero, więc $\cos\omega = 1$. Niechaj $a, b, c$ oznaczają kąty normalnej do powierzchni z osiami współrzędnych, a $\lambda, \mu, \nu$ takież kąty normalnej głównej do obranej krzywej. Zachodzi zatem związek:

$$\text{(a)} \qquad \cos a \cos\lambda + \cos b \cos\mu + \cos c \cos\nu = 1$$

Cosinusy kierunkowe normalnej do powierzchni mają wartości:

$$\cos a = \frac{y_u z_v - y_v z_u}{\sqrt{(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (z_u x_v - z_v x_u)^2 + (y_u z_v - y_v z_u)^2}}$$

czyli:

$$\cos a = \frac{1}{D}(y_u z_v - y_v z_u)$$

(jak to wynika np. z równania płaszczyzny stycznej (141)) i podobnie $\cos b$, $\cos c$. Przed pierwiastkiem obraliśmy znak $+$. Cosinusy zaś normalnej głównej mają wartości:

$$\cos\lambda = \frac{x''(s)}{\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}} = x''(s)\,R$$

(por. wzory (116) i (123)) i podobnie $\cos\mu$, $\cos\nu$. Tu także obraliśmy znak $+$ przed pierwiastkiem. Wzór (a) możemy zatem napisać w postaci:

$$\text{(b)} \qquad \frac{R}{D}[(y_u z_v - y_v z_u)x''(s) + (z_u x_v - z_v x_u)y''(s) + (x_u y_v - x_v y_u)z''(s)] = 1$$

Wyraźmy pochodne $x''(s)$, $y''(s)$, $z''(s)$ za pomocą pochodnych danych funkcyj $u(s)$, $v(s)$, $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Otóż:

$$x'(s) = \frac{dx}{ds} = x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds}$$

a stąd:

$$x''(s) = \frac{d^2x}{ds^2} = (x_{uu}u' + x_{uv}v')u' + x_u u'' + (x_{vu}u' + x_{vv}v')v' + x_v v''$$

i podobnie $y''(s)$, $z''(s)$. Wstawiamy te wyrażenia we wzór (b), to otrzymamy:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} = {} & \frac{1}{D}[(y_u z_v - y_v z_u)x_{uu} + (z_u x_v - z_v x_u)y_{uu} + (x_u y_v - x_v y_u)z_{uu}]\,u'^2 + \\ & + \frac{2}{D}[(y_u z_v - y_v z_u)x_{uv} + (z_u x_v - z_v x_u)y_{uv} + (x_u y_v - x_v y_u)z_{uv}]\,u'v' + \\ & + \frac{1}{D}[(y_u z_v - y_v z_u)x_{vv} + (z_u x_v - z_v x_u)y_{vv} + (x_u y_v - x_v y_u)z_{vv}]\,v'^2 + \\ & + \frac{1}{D}[(x_u(y_u z_v - y_v z_u) + y_u(z_u x_v - z_v x_u) + z_u(x_u y_v - x_v y_u)]\,u'' + \\ & + \frac{1}{D}[x_v(y_u z_v - y_v z_u) + y_v(z_u x_v - z_v x_u) + z_v(x_u y_v - x_v y_u)]\,v''\end{aligned}$$

Dwie ostatnie grupy wyrazów, tj. wyrazy, zawierające drugie pochodne $u''$ i $v''$, odpadają. Oznaczmy współczynnik przy $u'^2$ literą $L$, współczynnik przy $2u'v'$ literą $M$, a współczynnik przy $v'^2$ literą $N$. A więc:

$$(152)\qquad L = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uu}, & x_u, & x_v \\ y_{uu}, & y_u, & y_v \\ z_{uu}, & z_u, & z_v \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uv}, & x_u, & x_v \\ y_{uv}, & y_u, & y_v \\ z_{uv}, & z_u, & z_v \end{vmatrix}$$

$$N = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{vv}, & x_u, & x_v \\ y_{vv}, & y_u, & y_v \\ z_{vv}, & z_u, & z_v \end{vmatrix}$$

Występują tu drugie cząstkowe pochodne funkcyj $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Wyrażenia $L$, $M$, $N$ nazywamy *wielkościami zasadniczymi drugiego rzędu*. Wzór na $\frac{1}{R}$ przyjmuje przy tych skróceniach postać:

$$(153)\qquad \boxed{\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{ds^2}}$$

Licznik jest *drugą formą różniczkową* lub *drugą formą zasadniczą* teorii powierzchni. Zastąpmy $ds^2$ przez pierwszą formę zasadniczą, to ostatni wzór przyjmie postać:

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \tag{154}$$

Ponieważ nie uwzględniliśmy możliwości różnych znaków przed pierwiastkiem we wzorach na $\cos a, \ldots \cos\lambda, \ldots$, przeto możemy z tego wzoru otrzymać dodatnią lub ujemną wartość na $R$. Pochodzi to stąd, że kierunek normalnej do powierzchni, wynikający z obrania znaku + przed

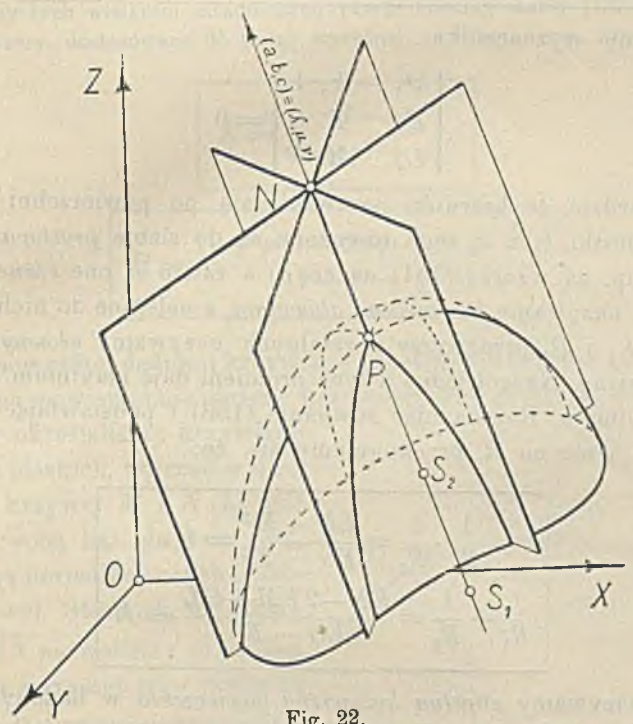


Fig. 22.

pierwiastkiem we wzorach na $\cos a, \ldots$, może być wprost przeciwny do kierunku normalnej głównej do krzywej, jaki wynika z obrania znaku + przed pierwiastkiem we wzorach na $\cos\lambda, \ldots$ Krzywiznę $\frac{1}{R}$, otrzymaną w ten sposób, nazywamy *krzywizną względną* danej linii, może ona bowiem przybierać wartości dodatnie i ujemne.

Dzieląc licznik i mianownik ostatniego ułamka przez $du^2$, otrzymujemy:

$$R = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{L + 2Mk + Nk^2} \tag{154a}$$

Wielkość tego promienia krzywizny w danym punkcie powierzchni zależy od kąta, jaki tworzy przekrój normalny z linią parametrową $v$, a ten kierunek jest określony za pomocą $k = \frac{dv}{du}$ (por. np. wzór (150)).

W każdym punkcie powierzchni można poprowadzić nieskończenie wiele przekrojów normalnych. Zbadajmy, dla jakich kierunków promień $R$ może przybierać extremum. W tym celu tworzymy pochodną prawej strony wzoru (154a) według $k$ i przyrównujemy licznik do zera. Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie:

$$EM - LF - (LG - EN)k + (FN - GM)k^2 = 0 \tag{155}$$

czyli w formie wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} k^2, & -k, & 1 \\ E, & F, & G \\ L, & M, & N \end{vmatrix} = 0 \tag{156}$$

Łatwo stwierdzić, że kierunki posuwania się po powierzchni, określone przez pierwiastki $k_1$ i $k_2$ tego równania, są do siebie *prostopadłe* (trzeba się oprzeć np. na wzorze (151) na $\cos\alpha$) a zatem są one *różne* od siebie. Kierunki te nazywamy *kierunkami głównymi*, a należące do nich promienie krzywizny $R_1$ i $R_2$ przekrojów normalnych nazywamy *głównymi promieniami krzywizny*. Naogół jeden z tych promieni daje maximum krzywizny, a drugi minimum. Rozwiązując równanie (156) i podstawiając znalezione wartości we wzór na $R$, przekonujemy się, że:

$$\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K \tag{157}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = H \tag{158}$$

Liczbę $K$ nazywamy *zupełną krzywizną powierzchni* w badanym punkcie lub krzywizną Gaussa, a liczbę $H$ *średnią krzywizną powierzchni* w tym punkcie.

Jeżeli równanie powierzchni jest podane w formie wyraźnej:

$$z = f(x, y)$$

to łatwo ją przekształcić na formę parametrową, kładąc:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v)$$

Stąd:

$$x_u = 1, \quad x_v = 0, \quad y_u = 0, \quad y_v = 1,$$

$$z_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad z_v = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y} = q$$

a więc:

$$(159) \qquad \boxed{E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2}$$

Podobnie oblicza się dla formy wyraźnej wielkości zasadnicze $L$, $M$, $N$:

$$(160) \qquad L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

przy czym:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Przy pomocy tych wielkości zasadniczych przekształcamy wzory (157) i (158) na następujące wzory, dostosowane do formy wyraźnej:

$$(161) \qquad \boxed{K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}}$$

$$(162) \qquad \boxed{H = \frac{(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}}$$

Do powyższej definicji krzywizny zupełnej doszedł Gauss, starając się uogólnić na powierzchnie pojęcie krzywizny linij płaskich. Przypomnijmy sobie, jak określaliśmy krzywiznę krzywych płaskich. Styczne w dwu punktach krzywej $M$ i $N$ (fig. 23) tworzą ze sobą kąt $\Delta\alpha$ taki sam, jaki tworzą normalne w tych punktach krzywej. Stosunek tego kąta do łuku $\widehat{MN}$ nazwaliśmy *przeciętną* krzywizną a granicę tego stosunku dla $\widehat{MN} \to 0$ krzywizną (względną) tej linii w badanym punkcie.

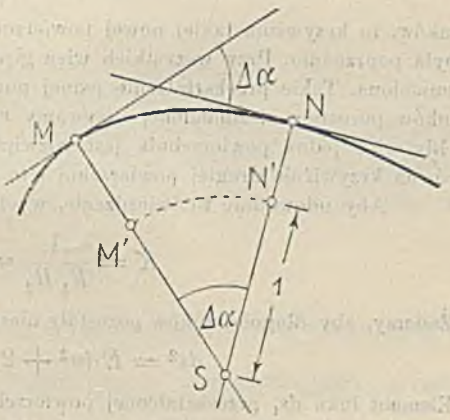


Fig. 23.

Ponieważ kąt $\Delta\alpha$ wyrażaliśmy przy tym w mierze łukowej, więc miarą tego kąta jest łuk $\widehat{M'N'}$, jaki wspomniane normalne wycinają z koła o promieniu 1, zatoczonego z punktu przecięcia się $S$ tych normalnych. Tworzy się stosunek łuku $\widehat{M'N'}$ do łuku $\widehat{MN}$, a granica tego stosunku jest miarą krzywizny. Podobną drogą poszedł Gauss przy badaniu krzywizny powierzchni. Mając jakiś płat $\Delta P$ powierzchni, któ-

rej krzywiznę chcemy badać (fig. 24), prowadzimy w każdym jego punkcie normalną. Są to naogół proste wichrowate. Weźmy pod uwagę kulę o promieniu 1, zatoczoną z dowolnego punktu $S$. Ze środka tej kuli poprowadźmy pęk promieni równoległych do normalnych, wystawionych na $\Delta P$. Te promienie wycinają na kuli jakąś powierzchnię $\Delta P'$. Otóż stosunek pola tego, leżącego na kuli, płata powierzchni $\Delta P'$ do rozważanego płata powierzchni $\Delta P$ nazwał Gauss *przeciętną krzywizną* tego płata, a granicę tego stosunku, gdy $\Delta P$ dąży do punktu, nazwał *krzywizną zupełną* powierzchni w tym punkcie. Obliczając pola $\Delta P$ i $\Delta P'$ i tworząc wspomniany stosunek, doszedł Gauss do wyniku, że:

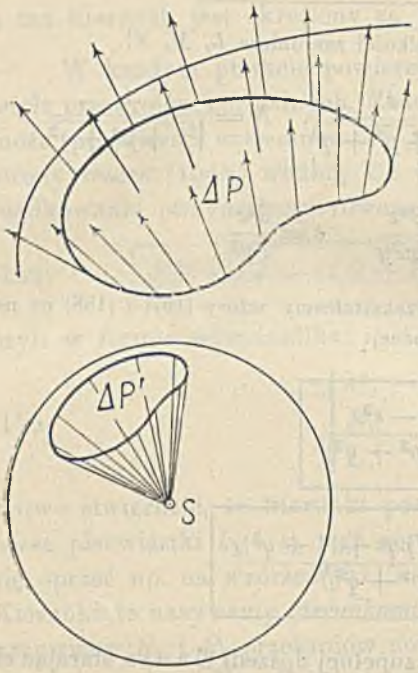

Fig. 24.

$$\lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta P'}{\Delta P} = \frac{1}{R_1 \cdot R_2} = K$$

*Uwaga.* Opierając się na wzorze na krzywiznę całkowitą, udowodnił Gauss, że gdy jakąkolwiek powierzchnię *wyginamy*, nie rozciągając jej, ani nie rozrywając, a więc gdy zachowujemy przy tym długości łuków, to krzywizna takiej nowej powierzchni jest w każdym punkcie taka sama, jaka była poprzednio. Przy wszystkich więc gięciach powierzchni krzywizna pozostaje niezmieniona. Takie przekształcenie jednej powierzchni na drugą, przy którym długości łuków pozostają niezmienione, nazywamy *rozwijaniem* jednej powierzchni na drugiej. Gdy więc jedna powierzchnia jest rozwijalna na drugiej, to krzywizna jednej jest równa krzywiźnie drugiej powierzchni i to w każdym punkcie.

Aby udowodnić to twierdzenie, wychodzi się z wzoru:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Żądamy, aby długości łuków pozostały niezmienione. Wzór na element łuku ma postać:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

Element łuku $ds_1$ przekształconej powierzchni ma mieć tę samą wartość. To znaczy, że $E$, $F$ i $G$ muszą pozostać te same. We wzorze na $K$ występują jednak jeszcze dość skomplikowane wyrażenia $L$, $M$ i $N$. Okazuje się jednak, że $K$ zależy tylko od $E$, $F$ i $G$. Dowodzi się mianowicie, że:

$$K = \frac{1}{2D^2}(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}) + \frac{E}{4D^4}(G_u^2 + E_v G_v - 2G_v F_u) +$$

$$+ \frac{G}{4D^4}(E_v^2 + E_u G_u - 2E_u F_v) + \frac{F}{4D^4}(E_u G_v - E_v G_u - 2F_u G_u - 2F_v E_v + 4F_u F_v)$$

Z tego wzoru widać, że $K$ zależy tylko od wyrażeń $E$, $F$, $G$, tak, że gdy się powierzchnia dowolnie zmienia, krzywizna pozostaje niezmieniona, jeśli się tylko $E$, $F$ i $G$ nie zmieniają. Gdy zatem przy gięciach powierzchni łuki pozostają niezmienione, to i krzywizna zupełna się nie zmienia.

## § 319. Linie krzywiznowe. Wzór Eulera

W każdym punkcie powierzchni istnieją dwa prostopadłe do siebie kierunki główne. Linie, leżące na powierzchni, których styczna ma w każdym punkcie kierunek zgodny z kierunkiem głównym, nazywamy *liniami krzywiznowymi*. Przez każdy punkt powierzchni przechodzą dwie takie linie. Celem znalezienia ich równania użyjemy równania (155). Zastąpmy w tym równaniu $k$ stosunkiem $\frac{dv}{du}$. Dotychczas uważaliśmy $E$, $F$, $G$, $L$, $M$, $N$ za stałe. Gdy się jednak zmienia położenie punktu na powierzchni, to wielkości te są funkcjami zmiennych $u$ i $v$. Otrzymamy więc z tego równania równanie postaci:

$$f_1(u, v) + f_2(u, v)\frac{dv}{du} + f_3(u, v)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu a drugiego stopnia. Rozwiązując je względem $\frac{dv}{du}$, otrzymujemy dwa równania:

$$\frac{dv}{du} = F_1(u, v); \quad \frac{dv}{du} = F_2(u, v)$$

Ich całkami ogólnymi są zatem dwie funkcje $G_1(u, v, c) = 0$ i $G_2(u, v, c) = 0$, przedstawiające dwie gromady linij krzywiznowych.

Obierzmy te linie krzywiznowe za linie parametrowe. Ponieważ są one prostopadłe, przeto $F = 0$. Łatwo dowieść, że dla takiego przedstawienia parametrowego także $M = 0$. Wobec tego wzór (154 a) przechodzi na:

$$\frac{1}{R} = \frac{L + Nk^2}{E + Gk^2}$$

Ale $k^2 = \operatorname{tg}^2\varphi \frac{E}{G}$, jak to wynika z wzoru (150) przy $F = 0$ (przy czym $\varphi$ oznacza kąt badanej linii z linią parametrową $v$, w tym wypadku z linią krzywiznową).

Zatem:

$$\frac{1}{R} = \frac{L + N\frac{E}{G}\operatorname{tg}^2\varphi}{E + G\frac{E}{G}\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{L + \frac{NE}{G}\operatorname{tg}^2\varphi}{E(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)}$$

czyli:

$$\frac{1}{R} = \frac{L}{E}\cos^2\varphi + \frac{N}{G}\sin^2\varphi$$

Gdy $\varphi = 0$, wówczas $R = R_1$, a więc:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}$$

Dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jest $R = R_2$, a więc:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}$$

Zatem:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2} \tag{163}$$

Ten wzór nazywamy *wzorem Eulera*. Gdy znamy dwa promienie główne $R_1$ i $R_2$, to możemy obliczyć z tego wzoru promień $R$ każdego przekroju, tworzącego kąt $\varphi$ z jednym z kierunków głównych. Według znaków $R_1$ i $R_2$ klasyfikujemy punkty powierzchni.

1) Jeżeli $R_1$ i $R_2$ mają w jakimś punkcie powierzchni te same znaki, to ten punkt powierzchni nazywamy punktem *eliptycznym*. W takim punkcie wszystkie promienie $R$ mają ten sam znak, jak to wynika z wzoru Eulera. Normalna (główna) zatem wszystkich przekrojów normalnych jest zwrócona w tę samą stronę. W specjalnym przypadku, gdy $R_1 = R_2$, to wszystkie przekroje normalne mają równe promienie krzywizny; taki punkt eliptyczny nazywamy *umbilikiem* lub *punktem pępkowym*. Np. każdy punkt elipsoidy i paraboloidy eliptycznej jest punktem eliptycznym; każdy punkt kuli jest umbilikiem. W punktach eliptycznych krzywizna zupełna $K$ jest liczbą *dodatnią*.

2) Jeżeli promienie $R_1$ i $R_2$ mają w jakimś punkcie znaki przeciwne, to ten punkt powierzchni nazywamy punktem *hiperbolicznym*. W takim punkcie normalna jednych przekrojów jest zwrócona w jedną stronę a innych w stronę przeciwną. W specjalnym przypadku, gdy $R_1 = -R_2$, nazywamy taki punkt punktem *pseudosferycznym*. Tak np. każdy punkt hiperboloidy jednopowłokowej jest punktem hiperbolicznym. Krzywizna zupełna $K$ ma w każdym punkcie hiperbolicznym wartość *ujemną*. Krzywizna średnia $H$ ma w punktach pseudosferycznych wartość zero.

3) Jeżeli w jakimś punkcie powierzchni jest $\frac{1}{R_1} = 0$ lub $\frac{1}{R_2} = 0$, to ten punkt nazywamy punktem *parabolicznym*. Takim punktem jest każdy punkt walca i stożka. Krzywizna zupełna ma w punktach parabolicznych wartość zero, a więc spełnia się warunek $K = 0$ czyli $rt - s^2 = 0$, jak to wynika z wzorów (157) i (161).

Okazano, że powierzchnie, składające się z samych punktów parabolicznych, są *rozwijalne* na płaszczyźnie i na odwrót: gdy jakaś powierzchnia

jest rozwijalna na płaszczyźnie, to składa się z samych punktów parabolicznych. Jeżeli więc $z = f(x, y)$ jest równaniem powierzchni, to *jest ona wtedy i tylko wtedy rozwijalna na płaszczyźnie, gdy z spełnia następujące równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu*:

$$(164) \qquad \boxed{rt - s^2 = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0}$$

Bardzo ważną rolę w zastosowaniach grają także takie powierzchnie, które się składają z samych punktów pseudosferycznych, tj. które mają w każdym punkcie krzywiznę średnią $H = 0$. Z wzoru (162) wynika, że takie powierzchnie spełniają równanie różniczkowe:

$$(165) \qquad \boxed{(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0}$$

Takie powierzchnie nazywamy *powierzchniami minimalnymi*; dowiedziono bowiem, że dowolny płat takiej powierzchni, ograniczony jakąś linią $l$, ma mniejsze pole aniżeli płat jakiejkolwiek innej powierzchni, ograniczonej tą samą linią $l$.

*Przykłady.*

1) Znaleźć główne promienie krzywizny powierzchni o równaniu: $z = x^2 + xy + y^2$ w punkcie, dla którego $x = 0$ i $y = 0$.

Obliczamy $p = 2x + y$, $q = x + 2y$, $r = 2$, $s = 1$, $t = 2$.

Zatem:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{2.2 - 1}{(1 + 0 + 0)^2} = 3$$

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1 + 0)2 - 2.0.0.1 + (1 + 0)2}{(1 + 0 + 0)^{3/2}} = 4$$

Zatem $\frac{1}{R_1}$ i $\frac{1}{R_2}$ są pierwiastkami następującego równania drugiego stopnia:

$$w^2 - 4w + 3 = 0$$

Stąd:

$$w_1 = \frac{1}{R_1} = 3, \quad w_2 = \frac{1}{R_2} = 1$$

Ponieważ $R_1$ i $R_2$ są obydwa dodatnie, przeto jest to punkt eliptyczny.

2) Pozostawiamy czytelnikowi do okazania, że powierzchnia o równaniu: $z = \cos x \cos y$ ma w punkcie $x = 0$, $y = 0$ umbilik, albowiem $R_1 = 1$ i $R_2 = 1$.

Aby znaleźć wszystkie umbiliki powierzchni, należy wyjść z wzoru (154a) na promień krzywizny przekroju normalnego. W umbilikach war-

tość $R$ musi być niezależna od kierunku, tj. od $k$. To się zaś dzieje wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą proporcje:

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} \tag{166}$$

To są warunki na wyznaczenie umbilików. Wstawiając za $L, M, N, E, F, G$ odpowiednie wartości, otrzymamy dla formy wyraźnej:

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}$$

Stąd otrzymujemy dwa równania:

$$rpq - (1+p^2)s = 0$$
$$r(1+q^2) - t(1+p^2) = 0$$

z których wyznaczamy współrzędne $x$ i $y$ umbilików.

3) Przez obrót linii o równaniu $z = f(x)$ dokoła osi $Z$ powstaje powierzchnia obrotowa (fig. 25). Z rysunku odczytujemy, że:

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u$$

Stąd nie trudno zauważyć, że:

$$v = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{a} \quad z = f(v)$$

Dla takiej powierzchni otrzymamy po przeprowadzeniu rachunków:

$$E = v^2, \quad F = 0, \quad G = 1 + f'^2(v)$$

$$L = -\frac{vf'(v)}{(1+f'^2(v))^{1/2}}, \quad M = 0,$$

$$N = \frac{-f''(v)}{(1+f'^2(v))^{1/2}}$$

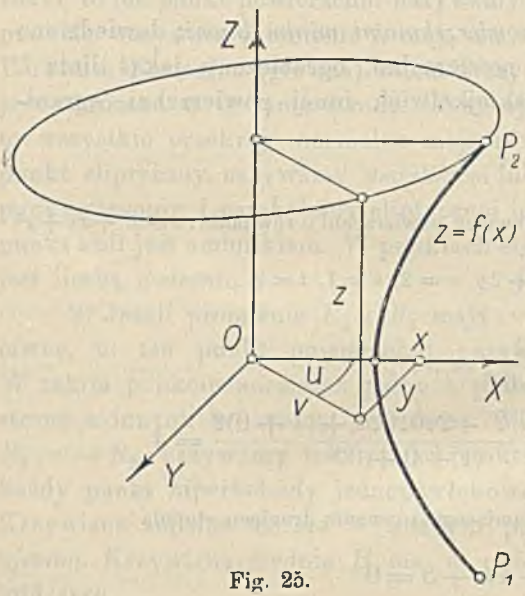


Fig. 25.

Poszukajmy powierzchni obrotowej *minimalnej*. Obierzmy dwa dowolne punkty $P_1$ i $P_2$, leżące na płaszczyźnie $(ZX)$; chodzi nam o wybranie z pośród wszystkich linij, łączących dane punkty $P_1$ i $P_2$, takiej, której łuk $\widehat{P_1P_2}$ wytwarza przez obrót koło osi $Z$ powierzchnię obrotową o najmniejszym polu. Z wzoru (158) otrzymujemy po wykonaniu rachunków:

$$-vf'(v)\sqrt{1+f'^2(v)} - \frac{v^2f''(v)}{\sqrt{1+f'^2(v)}} = 0$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego doprowadza do wyniku, że powierzchnia ta powstaje przez obrót *linii łańcuchowej* koło osi $Z$. Jest to jedyna powierzchnia obrotowa minimalna.

## § 320. O odwzorowaniach powierzchni

W wielu zagadnieniach praktycznych zachodzi potrzeba *odwzorowania* jednej powierzchni na drugą, to znaczy przyporządkowania każdemu punktowi jednej powierzchni jakiegoś punktu drugiej. Jeżeli równania obu powierzchni są podane w formie parametrowej:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \chi(u, v) \end{aligned}\right\} (P_1) \qquad \left.\begin{aligned} \xi &= \varphi_1(\bar{u}, \bar{v}) \\ \eta &= \psi_1(\bar{u}, \bar{v}) \\ \zeta &= \chi_1(\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}\right\} (P_2)$$

to uzyskujemy odwzorowanie jednej powierzchni na drugą, czyniąc parametry $\bar{u}$ i $\bar{v}$ dowolnymi funkcjami parametrów $u$ i $v$:

$$\bar{u} = f(u, v)$$
$$\bar{v} = g(u, v)$$

Jeżeli bowiem podstawimy te funkcje za $\bar{u}$ i $\bar{v}$ w równania $(P_2)$, to współrzędne $\xi$, $\eta$, $\zeta$ drugiej powierzchni będą funkcjami tych samych parametrów $u$, $v$, co współrzędne pierwszej powierzchni, np.:

$$\xi = \Phi(u, v), \quad \eta = \Psi(u, v), \quad \zeta = X(u, v)$$

Biorąc za $u$ i $v$ jakieś wartości stałe, otrzymujemy na pierwszej powierzchni pewien punkt $P(x, y, z)$, a tym samym wartościom $u$ i $v$ odpowiada na drugiej powierzchni jakiś punkt $P'(\xi, \eta, \zeta)$. Jedno z tych odwzorowań, a mianowicie *rozwijalność*, omówiliśmy na str. 198 i 200. Jest to takie odwzorowanie, przy którym spełnia się warunek:

(a) $$ds^2 = ds_1^2$$

Elementy łuków, a więc i ich całki czyli skończone łuki muszą być równe przy każdym $du$ i $dv$. Warunek ten jest równoważny ze spełnianiem się trzech następujących warunków:

(b) $$E = E_1, \quad F = F_1, \quad G = G_1$$

Nie zawsze można dobrać funkcje $\bar{u} = f(u, v)$ i $\bar{v} = g(u, v)$ tak, by się spełniały te 3 równania. Funkcje $\bar{u}$ i $\bar{v}$ potrafimy naogół wyznaczyć z dwu równań (b), wyjątkowo zaś zajdzie wypadek, że i trzecie równanie będzie spełnione. Aby tak było, musi być krzywizna Gaussa jednej powierzchni w każdym punkcie równa tejże krzywiźnie w odpowiednim punkcie drugiej powierzchni (por. str. 198). Okażemy, że przy takim specjalnym odwzorowaniu nie tylko długości łuków nie zmieniają się, lecz także i pola. Elementy pola wyraża się mianowicie wzorami (146):

$$dP = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = D\, du\, dv$$
$$dP_1 = \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}\, du\, dv = D_1\, du\, dv$$

Ponieważ jednak według założenia zachodzą równości (b), zatem $D = D_1$, stąd zaś wynika:

$$dP = dP_1$$

Okażemy, że przy rozwinięciu jednej powierzchni na drugą także i wszystkie *kąty* nie ulegają zmianie. Gdy na jednej powierzchni weźmiemy pod uwagę dwie dowolne linie $m$ i $n$, tworzące z sobą kąt $\alpha$ w punkcie przecięcia, a na drugiej odpowiadają im linie $m_1$, $n_1$, tworzące z sobą kąt $\alpha_1$, to (według wzoru (151)) jest:

$$\cos\alpha = \frac{E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2}{\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{E_1 + F_1(k_1 + k_2) + G_1 k_1 k_2}{\sqrt{E_1 + 2F_1 k_1 + G_1 k_1^2}\sqrt{E_1 + 2F_1 k_2 + G_1 k_2^2}}$$

Ponieważ $E = E_1$, $F = F_1$, $G = G_1$, przeto:

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1$$

Kąty pozostają więc przy rozwinięciach niezmienione. Figury, leżące na obu powierzchniach, nie są jednak w ogólności przystające mimo równości łuków, pól i kątów, leżą bowiem na różnych powierzchniach. Tak np. figura, leżąca na walcu, nie jest bynajmniej przystająca do figury, jaką otrzymamy, rozwinąwszy ten walec na płaszczyźnie.

Jeżeli jedna powierzchnia nie jest rozwijalna na drugiej, to przy odwzorowaniu nie będziemy mogli żądać spełnienia wszystkich tych warunków, tj. równości łuków, pól i kątów. Można jednak zawsze znaleźć takie odwzorowanie, przy którym wielkości pól pozostają niezmienione, przy którym więc $dP = dP_1$. Musi się zatem spełniać tylko jeden warunek:

$$D = D_1$$

jak to wynika z wzoru (146a) na element pola.

Takie jedno równanie (różniczkowe) muszą spełniać funkcje $\bar{u}$ i $\bar{v}$. Ponieważ z tego *jednego warunku* mamy wyznaczyć *dwie funkcje*, więc możemy to zrobić na nieskończenie wiele sposobów; jedną bowiem funkcję można przyjąć zupełnie dowolnie.

Odwzorowanie, przy którym wszystkie odpowiadające sobie elementy pól, a więc i pola, są sobie równe, nazywamy *odwzorowaniem wiernopowierzchniowym*.

*Przykłady.*

Spróbujmy w ten sposób odwzorować kulę na płaszczyznę. Znamy parametrowe równania kuli (wzory (134) na str. 182), płaszczyznę zaś obierzemy za płaszczyznę poziomą w układzie współrzędnych $(\xi, \eta, \zeta)$.

Jej parametrowe równania mają postać:

$$\xi = \Phi(u, v); \quad \eta = \Psi(u, v); \quad \zeta = 0.$$

Nie znamy jeszcze funkcyj $\Phi$ i $\Psi$. Trzeba je tak dobrać, aby się spełniał warunek $D = D_1$. Obliczyliśmy już $D$ dla kuli (str. 192), a mianowicie:

$$D = r^2 \cos u$$

Aby utworzyć $D_1$ dla płaszczyzny, użyjemy wzoru (146 b). Wszystkie te wyrażenia, w których występują pochodne funkcji $\zeta$, odpadną, albowiem $\zeta = 0$. Pozostanie więc tylko:

$$D_1 = |\xi_u \eta_v - \xi_v \eta_u|$$

Aby odwzorowanie było wiernopowierzchniowe, musi być $D = D_1$, czyli:

$$|\Phi_u \Psi_v - \Phi_v \Psi_u| = r^2 \cos u$$

Według tego równania dobierzemy teraz funkcje $\Phi$ i $\Psi$. Jedną z tych funkcyj możemy obrać zupełnie dowolnie. Przyjmijmy np.:

$$\xi = \Phi(u, v) = rv$$

Wtedy:

$$\Phi_u = 0, \quad \Phi_v = r$$

i otrzymujemy $r\Psi_u = +r^2 \cos u$ lub $r\Psi_u = -r^2 \cos u$. Obierzmy:

$$r\Psi_u = r^2 \cos u$$

Stąd:

$$\Psi_u = r \cos u$$

a więc.

$$\Psi = \int r \cos u \, du = r \sin u$$

Zatem:

$$\xi = rv; \quad \eta = r \sin u$$

Takie odwzorowanie znalazło zastosowanie w geografii: odwzorowując w ten sposób kulę wiernopowierzchniowo na płaszczyznę (mapy), otrzymujemy tzw. rzut walcowy Lamberta.

## § 321. Odwzorowania wiernokątne czyli konforemne

Chcąc odwzorować powierzchnię nierozwijalną na drugiej powierzchni, nie możemy żądać, aby wszystkie elementy łuków były wiernie zachowane. Możemy jednak żądać, aby elementy łuków, należące do odpowiadających sobie punktów, były proporcjonalne, tj. aby dla wszystkich kierunków, wychodzących z jednego punktu, zachodził związek:

(a) $$\frac{ds^2}{ds_1^2} = \lambda^2(u, v)$$

Współczynnik proporcjonalności $\lambda$ zmienia się wraz z położeniem punktu na powierzchni, jest więc funkcją zmiennych $u$, $v$, nie zmienia się jednak,

gdy pozostając w jednym punkcie, zmieniamy kierunek posuwania się, określony za pomocą pochodnej $\frac{dv}{du} = k$. Współczynnik $\lambda$ nie zależy zatem od $k$. Wzór (a) przedstawiamy w postaci:

$$\frac{E + 2Fk + Gk^2}{E_1 + 2F_1k + G_1k^2} = \lambda^2(u, v)$$

Lewa strona jest wtedy i tylko wtedy niezależna od $k$, gdy spełniają się proporcje:

$$\text{(b)} \qquad \frac{E}{E_1} = \frac{F}{F_1} = \frac{G}{G_1} = \lambda^2(u, v)$$

Mamy tu do czynienia z układem dwóch równań różniczkowych:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{F}{F_1} = \frac{G}{G_1}$$

Odwzorowanie jest wtedy i tylko wtedy konforemne, jeżeli dwie funkcje:

$$\bar{u} = f(u, v), \quad \bar{v} = g(u, v)$$

spełniają te dwa równania.

Problem ten jest więc oznaczony, a zatem a priori widzimy, że takie odwzorowanie da się z reguły przeprowadzić. Z warunku (b) łatwo można wywnioskować, że kąty będą przy takim odwzorowaniu wiernie zachowane. I tak:

$$E = E_1\lambda^2, \quad F = F_1\lambda^2, \quad G = G_1\lambda^2$$

Wstawmy to we wzór na $\cos\alpha$, to otrzymamy:

$$\cos\alpha = \frac{\lambda^2[E_1 + F_1(k_1 + k_2) + G_1k_1^2]}{\lambda\sqrt{E_1 + 2F_1k_1 + Gk_1^2} \cdot \sqrt{E_1 + 2F_1k_2 + G_1k_2^2} \cdot \lambda}$$

Upraszczając licznik i mianownik przez $\lambda^2$, otrzymujemy na $\cos\alpha$ ten sam wzór, co na $\cos\alpha_1$. Przy takim odwzorowaniu jest więc $\cos\alpha = \cos\alpha_1$.

Wobec tego odwzorowanie takie nazywamy *wiernokątnym*. Ponieważ tylko *elementy* łuków są proporcjonalne, a niekoniecznie skończone łuki, więc odwzorowań tych nie możemy nazywać „podobnymi“; natomiast utarła się obok nazwy: odwzorowania „wiernokątne“ także nazwa: odwzorowania „konforemne“. Odwzorowania te mają o wiele donioślejsze znaczenie, niż rozwinięcia lub odwzorowania wiernopowierzchniowe i to nie tylko w teorii powierzchni, lecz także w wielu innych działach matematyki i techniki.

*Przykład.*

Odwzorować kulę konforemnie na płaszczyznę, np. na płaszczyznę $(XY)$.

W równania (b) czyli:

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} EG_1 = E_1 G \\ EF_1 = E_1 F \end{cases}$$

podstawiamy wielkości zasadnicze dla kuli:

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \cos^2 u$$

Równania parametrowe płaszczyzny są: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = 0$.

Stąd $E_1 = x_u^2 + y_u^2$, $F_1 = x_u x_v + y_u y_v$, $G_1 = x_v^2 + y_v^2$.

Równania (c) mają tu zatem postać:

$$r^2(x_v^2 + y_v^2) = (x_u^2 + y_u^2) r^2 \cos^2 u$$
$$r^2(x_u x_v + y_u y_v) = (x_u^2 + y_u^2) \cdot 0$$

Po łatwych przekształceniach otrzymujemy stąd:

$$\left.\begin{aligned} x_v &= y_u \cos u \\ y_v &= -x_u \cos u \end{aligned}\right\} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} x_v = -y_u \cos u \\ y_v = x_u \cos u \end{cases}$$

Wystarczy brać pod uwagę tylko jedną parę tych równań. Jest to układ równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Układ ten możemy rozwiązać, obierając za $x$ dowolną funkcję zmiennej $v$.

Weźmy np. $x = kv$, to $x_v = k$, $x_u = 0$, a więc $y_v = 0$ na podstawie drugiego równania. To dowodzi, że $y$ jest funkcją jednej tylko zmiennej $u$. Wobec tego zamiast cząstkowej pochodnej $y_u$ mamy do czynienia ze zwyczajną pochodną $\frac{dy}{du}$. Pierwsze równanie różniczkowe przyjmuje zatem postać:

$$k = \frac{dy}{du} \cos u$$

Stąd: $\frac{dy}{du} = \frac{k}{\cos u}$, a więc:

$$y = k \log \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2}\right) + C$$

Odwzorowanie wiernokątne, określone wzorami:

$$x = kv$$
$$y = k \log \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{u}{2}\right)$$

zwane rzutem Mercatora, jest bardzo rozpowszechnione w geografii, w nautyce i w geodezji.

Obierając za $x$ inne dowolne funkcje zmiennej $v$, możemy w ten sposób otrzymywać nieskończenie wiele wiernokątnych odwzorowań kuli na płaszczyznę. Rozważania te nie trudno rozszerzyć na odwzorowanie elipsoidy obrotowej na płaszczyznę.

Bardzo ważne i interesujące jest odwzorowanie wiernokątne płaszczyzny $(XY)$ na płaszczyznę $(X_1 Y_1)$.

Obierając dla jednej płaszczyzny jako parametry współrzędne prostokątne $x$, $y$, a dla drugiej $x_1$, $y_1$, wyrażamy ich równania w postaci:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{array}\right| (XY) \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 = P(x, y) \\ y_1 = Q(x, y) \\ z_1 = 0 \end{array}\right| (X_1 Y_1)$$

Dla pierwszej płaszczyzny jest:

$$x_x = 1, \quad y_x = 0, \quad z_x = 0, \quad x_y = 0, \quad y_y = 1, \quad z_y = 0$$

zatem:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1$$

Dla drugiej zaś:

$$E_1 = P_x^2 + Q_x^2, \quad F_1 = P_x P_y + Q_x Q_y, \quad G_1 = P_y^2 + Q_y^2$$

Postępując drogą podobną jak przy wyznaczaniu $x_v$, $y_v$ w poprzednim przykładzie, otrzymujemy następujące równania różniczkowe na wyznaczenie nieznanych funkcyj $P(x, y)$, $Q(x, y)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_x = Q_y \\ Q_x = -P_y \end{array}} \tag{167}$$

Są to znane nam już równania Cauchy-Riemanna (por. tom II, str. 249); równania te spełnia część rzeczywista i współczynnik przy $i$ w urojonej części każdej takiej funkcji zmiennej zespolonej:

$$u = f(z) = f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

której całka nie zależy od drogi całkowania, czyli każdej funkcji *analitycznej*. Ten związek odwzorowania konforemnego z teorią funkcyj zmiennej zespolonej ma bardzo doniosłe znaczenie zarówno dla odwzorowań jak i dla teorii funkcyj.

Udowodnione twierdzenie możemy wypowiedzieć w następującej postaci:

*jeżeli funkcja $P(x, y)$ jest częścią rzeczywistą a $Q(x, y)$ współczynnikiem przy $i$ w części urojonej dowolnej* ***analitycznej*** *funkcji zmiennej zespolonej $u = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, to odwzorowanie płaszczyzny $(XY)$ na płaszczyznę $(X_1 Y_1)$, określone wzorami:*

$$x_1 = P(x, y)$$
$$y_1 = Q(x, y)$$

*jest* ***wiernokątne.***

Z tego twierdzenia korzysta się wydatnie w dzisiejszej technice (w geodezji, w hydrodynamice, w aerodynamice przy budowie płatowców, w elektrotechnice). Istnieją specjalne podręczniki poświęcone odwzoro-

waniom konforemnym, jak np. podręcznik L. Lewenta, pt. *Konforme Abbildung* (Lipsk, 1912) i L. Bieberbacha, pt. *Einführung in die konforme Abbildung* (Lipsk, Sammlung Göschen, nr 768).

*Przykłady.*

1) Funkcja $u = z^3$ jest analityczna:

$$u = (x + iy)^3$$

Rozwińmy tę potęgę $(x + iy)^3$ i zbierzmy osobno części rzeczywiste a osobno urojone. Otrzymamy:

$$u = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

Kładąc:

$$x_1 = x^3 - 3xy^2$$
$$y_1 = 3x^2y - y^3$$

mamy gotowe wzory na odwzorowanie konforemne jednej płaszczyzny na drugą.

2) Z funkcji wykładniczej $u = e^z$, która jest analityczna, otrzymujemy odwzorowanie wiernokątne w następujący sposób:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

Ale:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

a więc:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

Kładąc:

(a)
$$\begin{cases} x_1 = e^x \cos y \\ y_1 = e^x \sin y \end{cases}$$

uzyskujemy wiernokątne odwzorowanie płaszczyzny $(XY)$ na płaszczyznę $(X_1Y_1)$. Zastosujmy to do odwzorowań kuli na płaszczyznę. Poznaliśmy już tzw. rzut Mercatora, określony równaniami:

$$x = k \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$y = k\lambda$$

(przemieniliśmy tu osie i zastąpiliśmy litery $(v, u)$ literami $(\lambda, \varphi)$). Obierzmy $k = 1$. Każdemu punktowi na powierzchni kuli, określonemu przez odpowiednią długość i szerokość geograficzną $(\lambda, \varphi)$, przyporządkowany jest przy pomocy tych wzorów pewien punkt płaszczyzny $(XY)$. Odwzorujmy teraz konforemnie płaszczyznę $(XY)$ na drugą płaszczyznę $(X_1Y_1)$ według wzorów (a). Otrzymamy:

$$x_1 = e^x \cos y = e^{\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} \cos\lambda = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\lambda$$
$$y_1 = e^x \sin y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \sin\lambda$$

W ten sposób mamy określone nowe odwzorowanie wiernokątne kuli na płaszczyznę. Odwzorowanie to nazywamy rzutem *stereograficznym* (powstaje on przez rzut punktów kuli na płaszczyznę styczną w biegunie z przeciwległego bieguna). Podobnie moglibyśmy znaleźć nieskończenie wiele innych takich odwzorowań, przyjmując jako $f(x+iy)$ jakieś inne funkcje analityczne.

Spośród podręczników, poświęconych geometrii różniczkowej, od nacza się jasnością wykładu i elementarnym ujęciem dwutomowy podręcznik G. Scheffersa, pt. *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.* I. *Einführung in die Theorie der Curven*, II. *Einführung in die Theorie der Flächen* (Lipsk, 1901—1902). Nowsze badania geometrii różniczkowej podaje L. Bieberbach w podręczniku pt. *Differentialgeometrie* (Lipsk, 1932) i W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (2 tomy, Berlin, 1923—1924).

Krótkie rozdziały, poświęcone geometrii różniczkowej, znajdzie czytelnik w podręczniku F. Leji, pt. *Geometria analityczna i początki geometrii różniczkowej* (Warszawa, 1934),

# Alfabetyczny spis rzeczy


Abela twierdzenie 27.
adiabatyczne zmiany gazu 113.
d'Alemberta kryterium 12—16.
analityczna funkcja 69, 103, 134, 208.
analiza harmoniczna 83, 90.
analizatory harmoniczne 83.
arytmetyczny postęp, szereg 1, 3.

Bernoulli'ego równanie różniczkowe 121.
Bessela funkcje 94.
bezustanna zbieżność 54, 56, 68.
bezwarunkowa zbieżność 26.
bezwzględna zbieżność 26.
Bieberbach 103, 140, 209, 210.
binormalna 171.
Blaschke 210.
błąd średni 80, 82.
Brounckera szereg 3.

Całka eliptyczna 148.
„ Laplace'a 50.
„ równania różniczkowego 97.
„ równania różniczkowego ogólna 107, 141, 152.
„ równania różniczkowego osobliwa 107—8, 129.
„ równania różniczkowego szczegółowa 107.
całkowanie równania różniczkowego 97.
„ szeregu funkcyjnego 48.
„ „ potęgowego 64.
całkowe kryterium zbieżności 22.
całkujący czynnik 124.
Cauchy 59.
Cauchy'ego kryterium zbieżności 17—19, 57.
„ metoda całkowania rów. różn. 134, 141.
„ ogólna zasada zbieżności 4.
„ warunki początkowe 142.
Cauchy-Riemann 208.
charakterystyczne równanie 158.
ciąg sum częściowych 1, 39.
ciągłość funkcji, przedstawionej przez szereg 46, 60.
Clairaut'a równ. różn. 128.
cosinusy, zob. dostawy.
Courant 87.
Courant-Hilbert 95.
Courant-Hurwitz 77.
cząstkowe równanie różniczkowe 100, 102, 124, 207.
czynnik całkujący 124.

d'Alemberta kryterium 12 i nast.
Dirichleta warunki brzegowe 142.
dodawanie szeregów 32.
dostawy kierunkowe binormalnej 172; normalnej do powierzchni 184; normalnej głównej 171; stycznej 168.
dowody istnienia całek równ. różn. 131 i nast., 141.
drgania silnie tłumione 161.
„ sprężyste swobodne 160.
„ „ wymuszone 162.
„ „ z oporem 161.

Element liniowy 105.
„ łuku linii przestrzennej 165.
„ „ „ na powierzchni 187.
„ „ „ parametrowej 188.
„ pola powierzchni 189.
Elipsoida (płaszczyzna styczna) 185.
Elipsy łuk, obwód 51—52.
eliptyczny punkt 200.
Eulera przekształcenie szeregu 35.
„ twierdzenie o f. jednorodnych 125.
„ wzór na promień krzywizny przekroju normalnego 200.
„ wzór na $\sin x$ i $\cos x$ 73.
Eulera-Fouriera wzory 82.

Forma kwadratowa różn. pierwsza 187.
„ „ „ druga 195.
Forsyth-Maser 103.
Fouriera-Eulera wzory 82.
„ szeregi 86 i nast., 162.
Frank-Mises 95, 103.
funkcja Weierstrassa 87; wykładnicza 70, 72, 209.
funkcje analityczne 69, 103, 134, 208.
„ Bessela 94.
„ jednorodne 115, 125.
„ kuliste 94.
„ ortogonalne 94.

funkcyjny szereg 1, 39; (całkowanie) 48; (ciągłość) 46; (różniczkowalność) 53; (zbieżność jednostajna) 43.

Galle 83.
Gaussa krzywizna 196.
geometria różniczkowa 164.
geometryczny postęp 2; szereg 2, 3, 8.
główne kierunki 196.
„ promienie krzywizny 196.
graficzne metody rozwiązywania równ. różn. 104.

Hadamard 59.
harmoniczna analiza 83, 90.
harmoniczne analizatory 83.
„ drgania 78.
harmoniczny szereg 5, 7.
Hilbert-Courant 95.
hiperboliczny punkt 200.
Hopf 103.
Hort 103.
Hurwitz-Courant 77.

Interpolacja trygonometryczna 77.
izokliny równania różniczkowego 106.

Jednorodne funkcje 115, 125.
„ równ. różn. 1-go rzędu 114.
„ „ „ liniowe 118, 152.
jednostajna zbieżność 43 i nast.; szeregu potęgowego 55, 61.

Kępiński 103.
Kiepert-Stegemann 52.
kierunki główne 196.
Knopp 19, 37, 59, 64, 77, 87.
koło ściśle styczne (krzywiznowe) 176.
koło zbieżności 68.
konforemne odwzorowania 206.
König-Runge 83, 140.
kryteria zbieżności i rozbieżności 12 i nast.
kryterium zbieżności d'Alemberta (ilorazowe) 12—16; całkowe 22 i nast.; Cauchy'ego (pierwiastkowe) 17 i nast.; Leibniza 28; Raabego 19 i nast.; Weierstrassa 45.
krzywa pościgowa czyli „psia“ krzywa 151.
krzywizna linii druga 176; pierwsza 173.
„ powierzchni średnia 196; zupełna (Gaussa) 196.
„ względna 195.
krzywiznowe linie 199.
krzywizny promień 174; środek 175.
krzywoliniowe współrzędne 182.
kula 182.
kurs (w nautyce) 189.
Kutta 138.
kwadratury 109.

Lagrange'a równ. różn. 127.
Lamberta rzut 205.
Laplace'a całka 50.
Laplace'a równ. różn. 102, 149.
Lebesgue 87.
Leibniza kryterium 28.
„ szereg 35, 94.
Leja 164, 210.
Lewent 209.
liczbowy szereg 1.
linia całkowa równania różn. 103.
„ loksodromiczna 188, 192.
„ płaska 164, 177.
„ przejścia toru kolejowego 145, 150.
„ śrubowa zwyczajna 165, 166, 179.
„ ugięcia belki 141, 143, 150.
linie krzywiznowe 199.
„ parametrowe 182.
„ skośne (wichrowate, przestrzenne, o podwójnej krzywiźnie) 164.
liniowa zależność i niezależność funkcyj 154.
liniowe równanie różniczkowe, zob. równanie różniczkowe.
Lipschitza warunek 131.
logarytm dowolnej liczby (zespolonej) 75.
loksodroma 188, 192.

Łuk jako parametr 166
łuk elipsy 51; linii śrubowej 166; loksodromy 188.

Maclaurina szereg 2, 35, 40, 67.
majoranta 9, 136.
majoryzowanie szeregu 9, 45.
Maser-Forsyth 103.
Mărcatora rzut 207.
metoda Cauchy'ego dowodu istnienia całki równ. różn. 134, 141.
„ kolejnych przybliżeń (Picarda) 131, 141.
„ najmniejszych kwadratów 79.
„ nieoznaczonych współczynników 62 i nast., 138.
„ szeregów potęgowych przy rozw. równ. różn. 131, 141.
„ zmienności (wariacji) stałej 118, 156.
minimalne powierzchnie 201.
Mises-Frank 95, 103.
Mitscherlicha prawo 112.
mnożenie szeregów 33.
Moivre'a wzór 73.

Natężenie prądu elektr. (równ. różn.) 120—121.
niejednorodne równ. różn. liniowe 118, 152.
niejednostajnie zbieżny szereg 44.
nieoznaczonych współczynników metoda 62, 138.
niezależność liniowa funkcyj 154.
normalna główna 170.
„ do powierzchni 184.
normalne przekroje powierzchni 193.

Obwiednia gromady linij całkowych 107, 129.

obwód elipsy 51—52.
odwzorowania powierzchni 203 i nast.
„ wiernokątne (konforemne) 205 i nast.
„ wiernopowierzchniowe 204 i nast.
ogólna całka równ. różn. 107, 141, 152.
ortogonalny układ funkcyj 94.
ortogonalne szeregi 94.
„ trajektorie elips 113.
osobliwa całka równ. różn. 107—8, 129.
osobliwe punkty linij 165, 168.
„ „ powierzchni 184, 186.
„ „ równania różn. 152.

Paraboliczny punkt 200.
parametrowe przedstawienie linii 164.
„ „ powierzchni 181.
periodyczność funkcji wykładniczej 72.
pępkowy punkt, zob. umbilik.
Picarda metoda kolejnych przybliżeń 131, 141.
płaszczyzna normalna 168; rektyfikacyjna 172; ściśle styczna 169; styczna do powierzchni 183 i nast.
postęp arytmetyczny 1.
„ geometryczny 2.
potęga (ogólna definicja) 76.
potęgowanie przez wykładnik zespolony 70.
potęgowy szereg, zob. szereg potęgowy.
potencjał na płaszczyźnie (równ. różn.) 102.
powierzchnia minimalna 201; obrotowa 102, 202; rozwijalna 198, 200, 203; prostoliniowa 182.
prąd skuteczny 94.
prawo łączności dla szeregów 31.
„ przemienności dla szeregów 32.
„ Mitscherlicha 112.
promień krzywizny 174.
„ skręcenia (torsji) 177.
„ zbieżności 56, 69.
promienie główne krzywizny 196.
przeciętna krzywizna powierzchni 197—8.
przedstawianie funkcyj za pomocą szeregów 40, 60, 84.
przedział zbieżności 44, 56, 57.
przekrój normalny powierzchni 193.
przekształcenie Eulera 35.
przybliżona metoda rozwiązywania równ. różn. 138.
pseudosferyczne punkty 200.
punkt eliptyczny 200; hiperboliczny 200; osobliwy linii 165, 168; osobliwy powierzchni 184, 186; osobliwy równania różn. 152; paraboliczny 200; pępkowy 200; pseudosferyczny 200; stacjonarny 177; zwyczajny linii 165.

Quasi-jednostajna zbieżność 47.

Raabego kryterium zbieżności 19 i nast.
reszta szeregu 5, 29, 30, 35, 43.
Riccati'ego równ. różn. 126, 134.
Riemann-Weber 95, 103.
Riemanna-Cauchy'ego równania 208.
„ twierdzenie o szeregach warunkowo zbieżnych 52.
Robinson-Whittaker 140.
Rogosiński 86, 87, 94.
równania binormalnej 172.
równania koła 165; linii prostej 165; linii śrubowej 165; linii w przestrzeni 164—5; normalnej do powierzchni 185; normalnej głównej 171; parametrowe kuli 182; powierzchni 181; powierzchni prostoliniowej 182; powierzchni śrubowej 182.
równania różniczkowe Cauchy-Riemanna 208.
równania siecznej krzywej przestrzennej 167.
równania stycznej krzywej przestrzen. 167.
równanie loksodromy 192.
równanie płaszczyzny normalnej do krzywej przestrzennej 168.
równanie płaszczyzny rektyfikacyjnej 173; pł. ściśle stycznej 170; pł. stycznej do powierzchni 184—6.
równanie powierzchni 181.
równanie różniczkowe 96.
równanie różniczkowe Bernoulli'ego 121; Clairaut'a 128; cząstkowe 100, 124, 207; jednorodne 1-go rzędu 114; Lagrange'a 127; Laplace'a 102, 149; linii przejścia toru kolejowego 145, 150; linii ugięcia 143, 150; liniowe jednorodne 118, 152; liniowe niejednorodne 118, 152; liniowe o stałych współczynnikach 157 i nast.; na wyznaczenie czynnika całkującego 124; natężenia prądu 120—1; o zmiennych oddzielonych 110; potencjału 102; powierzchni obrotowych 102; powierzchni stożkowych 102; progu kolejowego 163; Riccati'ego 126, 134; ruchu drgającego 160; ruchu wahadłowego 147; sprowadzające się do jednorodnego 116—17; struny drgającej 102; zupełne 122; zwyczajne liniowe 99, 117, 151; zwyczajne rzędu 1-go 96, 100; zwyczajne rzędu 2-go 98, 140; zwyczajne rzędu $n$ 98, 140; zwyczajne stopnia $r$ 99.
równanie wyznaczające (charakterystyczne) 158.
rozbieżny szereg 1, 5, 11.
różniczkowanie szeregu funkcyjnego 53, 65.
różniczkowe równanie, zob. równanie różniczkowe.
rozwiązanie równ. różn. 97.
rozwiązywanie równ. różn. metodą przybliżoną 138; metodą graficzną 104.
rozwijalność powierzchni 198, 200, 203.
rozwinięcie dziesiętne nieskończone 10.
rozwinięcie funkcji na szereg 40.
„ „ „ „ Fouriera 84 i nast., 87 i nast.
rozwinięcie funkcji na szereg potęgowy 60.

rozwinięcie na szereg funkcji $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\log(1+x)$ 50; $\operatorname{tg} x$ 63.
rozwinięcie na szereg liczby $\frac{1}{4}\pi$ 22; liczby $\frac{1}{4}\pi$ 29.
ruch wahadłowy 148.
Runge 104, 138.
Runge-König 83, 139—140.
rząd równ. różn. 98.
rzut Mercatora 207.
„ stereograficzny 209.
„ walcowy Lamberta 205.

Scheffers 210.
ściśle styczna płaszczyzna 169.
Sierpiński 37, 47.
Simpson 139.
skośne linie 164.
skręcenie 176.
średni kwadrat błędu 80, 82.
średnia kwadratowa 94.
średnia krzywizna 196.
środek krzywizny 175.
śrubowa linia 165, 179.
„ powierzchnia 182, 186.
Stegemann-Kiepert 52.
stereograficzny rzut 209.
stopień równania różniczkowego 99.
styczna płaszczyzna do powierzchni 183 i nast.
„ prosta do linii w przestrzeni 167, 168.
suma częściowa 1, 2, 39.
suma szeregu funkcyjnego 39, 40.
„ „ liczbowego 1.
superpozycja drgań 78.
szczególowa całka równ. różn. 107.
szereg arytmetyczny 13; bezustannie zbieżny 54, 56, 68; bezwarunkowo czyli bezwzględnie zbieżny 26, 32; Brounckera 3; Fouriera 86 i nast., 162; funkcyjny 1, 39 i nast.; geometryczny 2, 3, 8; harmoniczny 5, 7; jednostajnie zbieżny 43 i nast.; Leibniza 35, 94; liczbowy 1; Maclaurina 2, 35, 40, 67; niejednostajnie zbieżny 44; nieskończony 1; ortogonalny 94; potęgowy 40, 53 i nast., 64, 68 i nast.; rozbieżny 1, 3, 11; Taylora 2, 40, 67; trygonometryczny 3, 40, 46, 77 i nast.; warunkowo zbieżny 27, 32; $\zeta(2)$ 5, 11, 92; $\zeta(s)$ 5, 11; zbieżny 1; znakozmienny 28, 36.

Taylora szereg 2, 40, 67.
torsja 176.
trajektorie ortogonalne gromady elips 113.
trygonometryczna interpolacja 77.
trygonometryczny szereg 3, 40, 46, 77 i nast.
twierdzenie Abela 27.
„ Eulera o f. jednorodnych 125.
„ Riemanna 32.

Układ funkcyj ortogonalnych 94.
układ równań różniczkowych 99.
umbilik 200, 202.

de la Vallée Poussin 87.

Wahadło matematyczne 147.
wartość główna logarytmu 75.
wartość szeregu, zob. suma szeregu.
warunek Lipschitza 131.
warunki brzegowe (Dirichleta) 142.
„ początkowe (Cauchy'ego) 142.
„ rozbieżności 9—10, 13, 15—16, 17, 19.
„ zbieżności 3, 4, 6, 7, 8, 9—10, 13, 15—16, 17, 19.
warunkowa zbieżność 27, 32.
Weber-Riemann 95, 103.
Weierstrassa funkcja 87; kryterium 45.
Whittaker-Robinson 140.
wichrowate linie 164.
wielkości zasadnicze 1-go rzędu 187.
„ „ 2-go rzędu 194.
wielomian trygonometryczny 77.
wiernokątne odwzorowanie 206.
wiernopowierzchniowe odwzorowanie 204.
Willers 83, 140.
wrońskian 154.
współrzędne krzywoliniowe 182.
wyróżnik formy różn. kwadratowej 190.
wyznaczające równanie 158.
wyznacznik Wrońskiego 154.
wzór Eulera na promień krzywizny 200.
„ Moivre'a 73.
„ Simpsona 139.
wzory Eulera-Fouriera 82.
„ „ na $\sin x$ i $\cos x$ 73.

Zakres zbieżności szeregu funkcyjnego 39.
„ „ „ potęgowego 57, 69.
zależność liniowa funkcyj 154.
zasadnicza forma różniczkowa pierwsza 187; druga 195.
zasadnicza wielkość 1-go rzędu 187; 2-go rzędu 194.
zbieżność 1; bezustanna 54, 56, 68; bezwarunkowa czyli bezwzględna 26; dziesiętnego rozwinięcia 10; jednostajna 43, 46; niejednostajna 44; quasi-jednostajna 47; szeregu Fouriera 86—7; szeregu potęgowego 54 i nast., 68 i nast.; warunkowa 27, 32.
zbieżności kryteria, zob. kryteria zbieżności; promień 56, 69; przedział 44, 56, 57; warunki, zob. warunki zbieżności; zakres 39, 57, 69.
znakozmienny szereg 28, 36.
zupełna krzywizna 196.
zupełne równanie różniczkowe 122.
Zygmund 103.

# Spis rzeczy

## Rozdział XXI

## Szeregi nieskończone

### Ustęp I. Szeregi liczbowe


Str.

§ 267. Wstępne wiadomości o szeregach liczbowych i funkcyjnych . . . . . 1
§ 268. O koniecznych i dostatecznych warunkach zbieżności szeregów liczbowych 3
§ 269. O niektórych koniecznych lecz niedostatecznych warunkach zbieżności szeregów . . . . . 6
§ 270. Majoryzowanie szeregów o wyrazach dodatnich . . . . . 8
§ 271. Kryterium (ilorazowe) d'Alemberta. . . . . 12
§ 272. Kryterium (pierwiastkowe) Cauchy'ego . . . . . 17
§ 273. Kryterium Raabe'go . . . . . 19
§ 274. Całkowe kryterium zbieżności . . . . . 22
§ 275. Szeregi liczbowe o wyrazach o dowolnych znakach. Szeregi bezwarunkowo i warunkowo zbieżne . . . . . 25
§ 276. Twierdzenie Abela o szeregach liczbowych . . . . . 27
§ 277. Kryterium Leibniza . . . . . 29
§ 278. Prawo łączności i przemienności w szeregach nieskończonych . . . . 31
§ 279. Dodawanie i mnożenie szeregów nieskończonych . . . . . 32
§ 280. Przekształcanie szeregu na szereg szybciej zbieżny . . . . . 35
§ 281. Szeregi o wyrazach zespolonych . . . . . 37


### Ustęp II. Szeregi funkcyjne


§ 282. Definicja szeregów funkcyjnych i ich zbieżność . . . . . 39
§ 283. Jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych . . . . . 43
§ 284. Ciągłość funkcyj, przedstawionych przez jednostajnie zbieżne szeregi . 46
§ 285. Całkowanie szeregów funkcyjnych . . . . . 48
§ 286. Różniczkowanie szeregów funkcyjnych . . . . . 53


### Ustęp III. Szeregi potęgowe. Funkcje analityczne


§ 287. Zakres zbieżności szeregu potęgowego . . . . . 53
§ 288. Ciągłość funkcji, przedstawionej przez szereg potęgowy . . . . . 60
§ 289. Metoda nieoznaczonych współczynników . . . . . 62
§ 290. Całkowanie i różniczkowanie szeregów potęgowych . . . . . 64
§ 291. Szeregi potęgowe zmiennej zespolonej . . . . . 68

## Ustęp IV. Szeregi Fouriera

Str.
§ 292. Interpolacja trygonometryczna . . . . . 77
§ 293. Szeregi Fouriera . . . . . 84

## Rozdział XXII

## Równania różniczkowe

§ 294. Definicja i klasyfikacja równań różniczkowych . . . . . 96
§ 295. Geometryczne badanie rozwiązań równania różniczkowego. Elementy liniowe. Izokliny . . . . . 103
§ 296. Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu o zmiennych oddzielonych . . . . . 110
§ 297. Równania różniczkowe jednorodne . . . . . 114
§ 298. Równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu . . . . . 117
§ 299. Równania różniczkowe zupełne. O czynniku całkującym . . . . . 122
§ 300. Równania różniczkowe Lagrange'a i Clairauta . . . . . 126
§ 301. Dowód istnienia całki równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu metodą kolejnych przybliżeń (metodą Picarda) . . . . . 131
§ 302. Dowód istnienia rozwiązań równania różniczkowego metodą szeregów potęgowych (metodą Cauchy'ego) . . . . . 134
§ 303. Ogólne uwagi o równaniach różniczkowych zwyczajnych wyższych rzędów 140
§ 304. Proste przypadki całkowania równań różniczkowych wyższego rzędu. Obniżanie rzędu równania . . . . . 143
§ 305. Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego . . . . . 151
§ 306. Równania różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach . . . . . 157

## Rozdział XXIII

## Geometria różniczkowa krzywych w przestrzeni

§ 307. Analityczne sposoby przedstawiania linij krzywych w przestrzeni . . 164
§ 308. Styczna i płaszczyzna normalna . . . . . 167
§ 309. Płaszczyzna ściśle styczna . . . . . 169
§ 310. Normalna główna, binormalna i płaszczyzna rektyfikacyjna . . . . . 170
§ 311. Pierwsza krzywizna krzywych w przestrzeni . . . . . 173
§ 312. Druga krzywizna czyli torsja . . . . . 176
§ 313. Przykłady badania linij . . . . . 179

## Rozdział XXIV

## Geometria różniczkowa powierzchni

§ 314. Analityczne sposoby przedstawiania powierzchni . . . . . 181
§ 315. Płaszczyzna styczna do powierzchni . . . . . 183
§ 316. Element łuku linii, leżącej na powierzchni . . . . . 186
§ 317. Kąty, zawarte między liniami, leżącymi na powierzchni . . . . . 190
§ 318. Krzywizna powierzchni . . . . . 193
§ 319. Linie krzywiznowe. Wzór Eulera . . . . . 199
§ 320. O odwzorowaniach powierzchni . . . . . 203
§ 321. Odwzorowania wiernokątne czyli konforemne . . . . . 205
Alfabetyczny spis rzeczy . . . . . 211

# Errata

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Str. | 3 | wiersz | 16 | od góry | *zamiast*: | $d \geqq 0$ i $a_1 > 0$ | *ma być*: | $d > 0$ |
| „ | 11 | „ | 4 | „ „ | „ | wartość | „ „ | suma częściowa |
| „ | 24 | „ | 9 | od dołu | „ | obejmująca | „ „ | zawierająca |
| „ | 28 | „ | 5 | „ „ | *po słowie*: | zbieżny | *dodać*: | Szereg liczbowy o wyrazach naprzemian dodatnich i ujemnych nazywamy szeregiem znakozmiennym. |
| „ | 32 | „ | 6 | „ „ | *zamiast*: | postać. | *ma być* | postać: |
| „ | 47 | „ | 18 | od góry | *po*: | $x$ | *dodać*: | i $x+h$ |
| „ | 50 | „ | 1 | od dołu | *zamiast*: | $\int_0$ | *ma być*: | $\int_0^1$ |
| „ | 77 | „ | 8 | od góry | „ | § 291 | „ „ | § 292 |
| „ | 82 | „ | 3 | od dołu | *po wzorze* | *dodać*: | podzielona przez $2\pi$ | |
| „ | 84 | „ | 4 | od góry | *zamiast* | § 292 | *ma być* | § 293 |
| „ | 87 | „ | 6 | od dołu | *skreślić* | § 293 | | |
| „ | 112 | „ | 1 i 2 | „ „ | *zamiast*: | $\sqrt{2y-1}$ | „ „ | $\sqrt{\lvert 2y-1 \rvert}$ |
| „ | 113 | „ | 11 | od góry | „ | (57) | „ „ | (58) |

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
w Gliwicach

**Rozprawy Wydziału matemat.-przyrodn. Polskiej Akademii Umiejętności. Ogólnego zbioru tom 69. Dział A i B.** (Seria III. Tom 29 A i B).

Dz. B. Nr 1. K. Wodzicki: Unaczynienie narośli skórnych głowy ptaków . . . . . 2·—
Nr 2. Z. Szantroch: Histogeneza zwojów nerwowych serca . . 2·—
Nr 3. Władysław Szafer: Element górski we florze niżu polskiego . . . . . 5·—
Nr 4. Stefan Macko: Badania nad geograficznym rozmieszczeniem i biologią azalii pontyjskiej w Polsce . . . . . 4·—
Nr 5. Katarzyna Kleistówna: Badania nad zespołami roślinności torfowisk obszaru wydmowego prawego brzegu Wisły pod Warszawą . . . . . 2·—
Nr 6. Czesław Penkacki: Badania nad występowaniem robaków pasożytniczych w jelicie psa . . . . . 2·—
Nr 7. Leopold Ejsmont: O dwóch rodzajach *Schistosomatidae* z ptaków . . . . . 0·50
Nr 8. Irena Turowska: Badania nad warunkami życia bakteryj żelazistych . . . . . 2·—
Nr 9. Rudolf Wilczek: Spis mchów Czarnohory . . . . 2·—
Nr10. January Kołodziejczyk: Ks. Krzysztof Kluk . . . 3·—

**Rozprawy Wydziału matemat.-przyrodn. Polskiej Akademii Umiejętności. Ogólnego zbioru tom 70. Dział A i B.** (Seria III. Tom 30 A i B).

Dz. B. Nr 1. Drugi nosorożec z warstw dyluwialnych Staruni oraz charakter jego otoczenia . . . . . 5·—
Nr 2. Jan Zaćwilichowski: Unerwienie skrzydeł owadów . 4·—
Nr 3. Emil Chroboczek: Badania nad dziedziczeniem niektórych cech u pszenicy . . . . . 3·50
Nr 4. J. Jodłowski: O budowie histologicznej gruczołów przędnych larw mrówek . . . . . 1·50
Nr 5. Kazimierz Sembrat: Badania cytologiczne nad strukturami plazmatycznymi podczas gametogenezy wypławków *Dendrocoelum lacteum* Müll. i *Planaria gonocephala* Dug., ze specjalnym uwzględnieniem aparatu Golgiego oraz wakuomu . . . . . 3·—
Nr 6. M. Ramułt: Z badań nad fauną wioślarek *(Cladocera)* Pomorza . . . . . 7·—

**Rozprawy Wydziału matemat.-przyrodn. Polskiej Akademii Umiejętności. Ogólnego zbioru tom 71. Dział A.** (Seria III. Tom 31 A).

Nr 1. A. Kocwa: Studia nad przemianami połączeń pyrazolonowych i ich pochodnych . . . . . 1·—

**Rozprawy Wydziału matemat.-przyrodn. Polskiej Akademii Umiejętności. Ogólnego zbioru tom 71. Dział B.** (Seria III. Tom 31 B).

Nr 1. St. Smreczyński: Badania embriologiczne nad rozwojem głowy omarlicy *Sipha obscura* L. *(Coleoptora)* . . 1·50
Nr 2. Wł. Szafer: Las i stepy na zachodnim Podolu . . 4·—

# Podręczniki

## Seria I

zł

Benni T., Łoś J., Nitsch K., Rozwadowski J., Ułaszyn H. Gramatyka języka polskiego . . . . . 12·—
Gawroński A. Gramatyka sanskrycka . . . . . 15·—
Morawski K. Zarys literatury rzymskiej . . . . . 4·—
Moszyński K. Kultura ludowa Słowian. Część I. Kultura materialna 24·—
— Kultura ludowa Słowian. Cz. II. Kultura duchowa, zeszyt 1 . 24·—
Pisownia polska. Przepisy. Słowniczek. Wydanie XI . . . . —·75
Sinko T. Literatura grecka. Tom I, część 1 . . . . . 15·—
— Literatura grecka. Tom I, część 2 . . . . . 20·—
Witkowski St. Historiografia grecka i nauki pokrewne. Tom I . 5·—
— Historiografia grecka i nauki pokrewne. Tom II . . . . . 5·—
— Historiografia grecka i nauki pokrewne. Tom III . . . 7·—
Zieliński T. Tragodumenon libri tres . . . . . 5·—

## Seria II

Adametz L. Hodowla ogólna zwierząt domowych, z niemieckiego rękopisu przełożył Zdz. Zabielski . . . . . 6·—
Anatomia człowieka. Tom I. Opracował A. Bochenek oprawn. 10·—
Anatomia człowieka. Tom II. Opracowali A. Bochenek i St. Ciechanowski . . . . . 10·—
Anatomia człowieka. Tom III. Opracowali A. Bochenek i St. Ciechanowski . . . . . 6·—
Anatomia człowieka. Tom IV. Część II (Nerwy obwodowe — Oko — Powłoki zewnętrzne) — opracowali E. Loth, Fr. Krzyształowicz i K. Majewski . . . . . 6·—
Anatomia człowieka. Tom IV. Część III (Ucho) — opracował J. Markowski . . . . . 5·—
Hoyer H. Anatomia porównawcza zwierząt domowych (z licznymi rycinami) . . . . . 6·—
Klecki K. Patologia ogólna. Tom I . . . . . 10·—
Kozak J. i Orzelski T. Ćwiczenia z zakresu chemii ogólnej (z rycinami) . . . . . 5·—
Lenartowicz J. T. Zarys chorób skóry . . . . . 12·—
Łomnicki A. Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom I . . . . 15·—
— Tom II . . . . . 7·—
Marchlewski L. Podręcznik do badań fizjologiczno-chemicznych 3·—
Maziarski St. Podręcznik do ćwiczeń histologicznych . . . . 6·—
Nowicki W. Anatomia patologiczna szczegółowa. T. I . . . . 20·—
— Tom II . . . . . 18·—
Oszacki A. Choroby przemiany materii i energii u człowieka. Podstawy nauki o metabolizmie. Fizjopatologia tycia i chudnięcia. Kliniczne postacie otyłości i chudości . . . . . 4·—
Pisarski T. Kamienie moczowe. Ich budowa i mechanizm powstawania . . . . . 2·—
Rosenblatt A. Geometria analityczna na płaszczyźnie (z rycinami) . . . . . 6·—
Rosner A. Ginekologia. Tom I—II . . . . . 20·—
Zakrzewski K. O promieniotwórczości (z rycinami) . . . . . 3·—
Zaremba St. Zarys mechaniki teoretycznej. Tom I. Wiadomości pomocnicze i kinematyka . . . . . 16·—

BG Politechniki Śląskiej
nr inw.: 102 - 135037
Dyr.1 135037