NAUKA FIZYKI

PODRĘCZNIK PRZEZNACZONY DO UŻYTKU
UCZNIÓW KLAS WYŻSZYCH SZKÓŁ ŚREDNICH

PRZEZ

DRA WŁADYSŁAWA NATANSONA
i
DRA KONSTANTEGO ZAKRZEWSKIEGO,
PROFESORÓW UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

TOM I

NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — KRAKÓW — LUBLIN — ŁÓDŹ — POZNAŃ

NAUKA FIZYKI

TOM I

NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA

WARSZAWA — KRAKÓW — LUBLIN — ŁÓDŹ — POZNAŃ

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO POD ZARZĄDEM J. FILIPOWSKIEGO

SPIS RZECZY TOMU I-go.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Zasady kinematyki.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Zasady dynamiki.

ROZDZIAŁ TRZECI.

O sile ciężkości.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

O pracy i energji.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

O równowadze i ruchu ciał sztywnych.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Zasady kinematyki.

§ 1. O zjawiskach ruchu. Przedmiot kinematyki.

Zjawiska ruchu odbywają się dokoła nas nieustannie. Codzień spostrzegamy, że poruszają się ludzie i zwierzęta, wozy i powozy, kłosy i drzewa, kamyki i okręty, kółka zegarków i koła lokomotywy, krople deszczu i chmury na niebie, okruszyny pyłu i słońca w przestworzu płonące. Codzień spostrzegamy, że wszystkie materjalne przedmioty, podpadające pod zmysły, są w ruchu. Niektóre ciała są w ruchu powolnym, inne są w szybkim; niektóre są w ruchu prostym i łatwo zrozumiałym, inne w zawiłym i dziwnym; ale *w ruchu są wszystkie*. O żadnem materjalnem ciele nie możemy powiedzieć, iż znajduje się w bezwzględnym spoczynku.

Łatwo widzimy, że nietylko materjalne ciała mogą poruszać się. Kiedy promień słońca wpada przez szczelinę do zaciemnionego pokoju, tworzy na ścianie lub na podłodze jasną świetlną plamę, która z biegiem czasu posuwa się widocznie; gdy przed lampą jasno świecącą przesuwamy rękę, jej cień skacze dziwacznie po powierzchni otaczających przedmiotów. A zatem światło lub cień może się także przemieszczać. Gdy wiatr wieje, widzimy, jak falowanie posuwa się szybko przez łany stojącego w polu zboża; na morzu, na rzece spostrzegamy góry i doły, które udzielają się z miejsca do miejsca. A zatem różne zmiany i rozmaite zjawiska mogą szerzyć się i roznosić się w materjalnych ośrodkach; na czem, jak zobaczymy, polegają ważne fizyczne procesy.

W *kinematyce* rozważamy zjawiska ruchu, ale nie zajmujemy się wcale tem, *co* się porusza; ograniczamy się w niej do badania ruchu samego w sobie t. j. ruchu, oderwanego od własności poruszającej się rzeczy. Ze względu na takie ograniczenie zadania, wystarcza nam w kinematyce, oprócz pojęć geometrycznych, jedno tylko *nowe* pojęcie, pojęcie *czasu*. Kinematyka jest więc geometrją, wzbogaconą o pojęcie czasu; można ją także nazwać geometrją ruchu.

Ruch brył masywnych zależy w wysokim stopniu od ich rozmaitych materjalnych własności; ale kinematyka nie próbuje odkryć tej zależności, tego związku, który stanowi przedmiot innej nauki, mianowicie *dynamiki*.

§ 2. Określenie ruchu. Układy odniesienia. Względność ruchu.

Wyobraźmy sobie pewien ruch, naprzykład ruch piłki, rzuconej w pokoju, ruch pociągu, pędzącego po szynach albo ruch okrętu, płynącego po morzu. Gdy mówimy, że piłka, pociąg lub okręt *porusza się*, jaki w gruncie rzeczy *fakt* chcemy w tych słowach wyrazić? Chcemy oczywiście powiedzieć, że z biegiem czasu zmienia się położenie piłki względem przedmiotów, znajdujących się w pokoju albo też względem podłogi, sufitu lub ścian. Chcemy powiedzieć, że z biegiem czasu zmienia się położenie pociągu na torze kolejowym, że zmienia się naprzykład jego odległość od pewnej upatrzonej stacji. Chcemy powiedzieć, że z biegiem czasu zmienia się położenie okrętu na morzu; naprzykład, że zmienia się jego odległość od stałego lądu. Co zatem mamy na myśli, mówiąc, że «ciało M porusza się»? Wyrażając się w taki sposób, chcemy powiedzieć, że z biegiem czasu zmienia się położenie tego ciała M względem pewnych *innych ciał* materjalnych A, B, C i t. d. *Jeżeli położenie pewnego ciała względem innych ciał z biegiem czasu się zmienia, zmianę tę nazywamy ruchem*. Owe *inne* ciała materjalne A, B, C i t. d., względem których położenie ciała M z biegiem czasu się zmienia, nazywamy *ciałami odniesienia*, albowiem do nich odnosimy nieustannie w umyśle poruszające się ciało M.

Położenia ciała M nie możemy poznać ani określić inaczej, tylko w odniesieniu do ciał A, B, C...; ruchu ciała M nie możemy wyobrazić sobie inaczej, jak w odniesieniu do ciał A, B, C..., które w nim *nie* biorą udziału. Mówi się zatem, że ruch ciała M jest *ruchem względnym*, mianowicie odniesionym do ciał A, B, C..., które w nim nie uczestniczą.

Wszelki ruch jest względny. Nie możemy pomyśleć innego ruchu niż względny. W nieskończonej próżni i w pustce bezwzględnej, w której nie byłoby wcale ciał odniesienia, nie byłoby podobna ruchu nietylko zbadać i zmierzyć, lecz nawet go zauważyć.

Jak powiedzieliśmy, odnosimy ruch ciała M do innych ciał materjalnych $A, B, C\ldots$, które w nim nie biorą udziału. Ale jakże wyznaczyć położenie ciała M względem ciał $A, B, C\ldots$? Ciała materjalne mają zazwyczaj zawiłą budowę i postać, którą niełatwo ściśle opisać. W kinematyce chcemy rozumować równie dokładnie i jasno jak w geometrji; lecz pragniemy zarazem posługiwać się pomocą pojęć możliwie najprostszych. Umawiamy się zatem, jak następuje: w poruszającem się ciele M wybieramy pewien określony *punkt* i przywiązujemy do niego uwagę; z ciałami odniesienia $A, B, C\ldots$ łączymy w myśli pewne geometryczne *utwory*, np. pewne powierzchnie albo płaszczyzny, pewne linje krzywe lub proste; wreszcie wybrany punkt ciała M odnosimy (jak w geometrji) do tych geometrycznych utworów, złączonych z ciałami A, B, C i jak one, nie biorących udziału w ruchu ciała M. Owe geometryczne utwory (powierzchnie, płaszczyzny, linje krzywe lub proste), połączone z ciałami odniesienia, nazywamy wówczas *układami odniesienia.*

Przypuśćmy naprzykład, że w pewnej chwili wypuściliśmy piłkę z ręki, pozwalając jej spadać swobodnie. Od owej początkowej chwili czas upływał i odległość piłki od podłogi zmniejszała się. Jeżeli w każdej chwili zjawiska możemy podać wysokość środka piłki ponad płaszczyzną podłogi, ruch środka piłki będzie opisany. W tym więc razie płaszczyzna podłogi będzie układem odniesienia.

Przypuśćmy, że rzuciliśmy piłkę ukośnie ku ścianie; jej ruch będzie wówczas bardziej zawiły niż w przypadku poprzednim. Lecz gdybyśmy w każdej chwili wiedzieli, jaka jest odległość środka piłki od trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn (dwóch ścian i podłogi), spotykających się w narożu pokoju, ruch tego środka byłby odtworzony. Całość owych trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn nazywamy w tym razie układem odniesienia.

Narysujmy na mapie Państwa Polskiego przebieg toru kolejowego, prowadzącego z Krakowa do Warszawy. Gdybyśmy w dowolnej chwili wiedzieli, w którem miejscu tej linji znajduje się np. przednia oś lokomotywy pociągu, ruch byłby znany. Linja krzywa lub łamana, złączona z powierzchnią kraju i wyobrażająca tor kolejowy, jest tutaj układem odniesienia.

Na pełnym oceanie wyobraźmy sobie okręt transatlantycki, płynący z New-Yorku do Gdańska. Gdybyśmy w każdej chwili mogli przytoczyć szerokość i długość geograficzną miejsca, w którem znajduje się okręt, jego ruch byłby wiadomy. W tym razie układem odniesienia będzie powierzchnia kuli ziemskiej, pokryta siecią południków i równoleżników.

W wielu zagadnieniach naukowych albo praktycznych, w których trzeba zbadać odbywający się ruch, za ciało odniesienia wybieramy kulę ziemską, na której mieszkamy; z kulą ziemską łączymy układy odniesienia, które wybieramy możliwie dogodnie. Przypuśćmy naprzykład, że badamy ruch tłoka w maszynie parowej, obrót wirownicy, wahanie się belki wagi lub oscylacje igiełki magnesowej w galwanometrze. Rama wirownicy albo podstawa maszyny parowej jest umocowana w podłodze; cewka galwanometru albo płyta wagi jest przytwierdzona do ściany budynku. A zatem te ciała uczestniczą w dziennym obrocie ziemi dokoła osi, w jej rocznym obiegu dokoła słońca, oraz w innych ruchach, które musimy przypisywać naszej planecie. W naszem badaniu nie troszczymy się jednak o rozmaite ruchy kuli ziemskiej, albowiem tłok, wirownica, belka wagi, igiełka magnesowa odbywają je *również*; zadanie zaś, którem jesteśmy zajęci, wymaga jedynie poznania *ruchu względnego*: ruchu tłoka względem podstawy maszyny, ruchu wirownicy względem jej ramy, ruchu belki względem słupa i płyty wagi, ruchu igiełki względem cewki galwanometru.

Przez długie wieki sądzono, że *kula ziemska jest nieruchoma*; mnóstwo ludzi jeszcze i dziś żyje i działa w tem przekonaniu. Powiedzielibyśmy źle, mówiąc, że przytoczone zdanie jest *mylne*; ono nie wyraża ani prawdy ani nieprawdy; ono *nic* nie wyraża. Każdy ruch jest względny; przeto i spoczynek, który jest szczególnym przypadkiem ruchu, może być tylko *względny*. Dwa pociągi, jadące po torach równoległych, jednakowo prędko i w tym samym kierunku, są względem siebie w spoczynku, lecz względem stacji są w ruchu. Podróżny jest w spoczynku względem wagonu, jest w ruchu względem przydrożnych słupów telegraficznych; słupy telegraficzne są w spoczynku względem Tatr, są w ruchu względem wód, Wisłą płynących lub względem księżyca. Widzimy zatem istotnie, że zdanie «*ziemia jest nieruchoma*» nie zawiera żadnej treści, dopóki nie wymieniamy ciała, względem którego ziemia ma być nieruchoma.

Starożytni astronomowie (najczęściej zresztą bezwiednie) wybierali ziemię za *ciało odniesienia*. Ponieważ ten wybór od nas zależy, więc nie popełniali bynajmniej błędu; ale utrudniali sobie osiągnięcie celu, do którego dążyli, mianowicie zrozumienie porządku ruchów niebieskich. Skoro wychodzimy z zakresu spraw ziemskich, *geocentryczny* (t. j. połączony z ziemią) układ odniesienia staje się niedogodny. Kopernik wybrał słońce za ciało odniesienia; jak zobaczymy w rozdz. II-im, ten wybór był znacznie szczęśliwszy.

§ 3. O mierzeniu kątów, długości, pól oraz objętości.

Przy badaniu jakiegobądź ruchu, jak wiadomo z artykułów poprzednich, musimy wyznaczać położenie poruszającego się ciała względem ciał odniesienia. Do takich wyznaczeń potrzebne są zwykle pomiary pewnych *kątów* albo też pewnych *długości*.

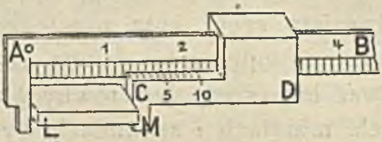
Zmierzyć pewien kąt, to znaczy: porównać go z innym kątem, który został przyjęty za jednostkę kątów. Jednostką kątów jest *radjan* czyli kąt, któremu na kole odpowiada łuk, równy promieniowi. Inną, bardziej sztuczną i dowolną jednostką kątów jest *stopień*, czyli jedna dziewięćdziesiąta część kąta prostego; stopień, jak wiadomo, zawiera 60 minut kątowych, minuta zawiera 60 sekund kątowych. Ponieważ kąt prosty jest równy $\frac{1}{2}\pi$ radjanom, zatem radjan w stopniach, minutach i sekundach wynosi: $57^0\,17'\,44{\cdot}8''$.

Zmierzyć pewną długość, to znaczy: porównać ją z inną długością, którą przyjęto za jednostkę długości. Za jednostkę długości w fizyce przyjęto *centymetr* (w skróceniu: cm). Według uchwały z dn. 26-go września 1889 r. konferencji międzynarodowej, zgromadzonej w Paryżu, określenie centymetra jest następujące: centymetr jest jedną setną częścią najkrótszej odległości, która (w temperaturze 0^0 C) oddziela od siebie kreski N^0 2 i N^0 5 na międzynarodowym *wzorcu* (t. zw. prototypie), wyrobionym z irydjoplatyny i noszącym na sobie znak M 6; ten wzorzec od 1889 roku znajduje się w Biurze międzynarodowem Miar i Wag w Sèvres, pod Paryżem. Z centymetra wynikają w znany sposób inne metryczne miary długości. Sto centymetrów stanowi *metr* (m); tysiąc metrów stanowi *kilometr* (km); jedna dziesiąta część centymetra nazywa się *milimetrem* (mm). *Mikron* (μ) jest jedną tysiączną częścią milimetra; *mikromilimetr* ($\mu\mu$) jest jedną miljonową częścią milimetra.

Układ metryczny pochodzi z czasów Wielkiej Rewolucji. Prac przygotowawczych dokonała komisja paryskiej Akademji Nauk, w której uczestniczyli Lagrange, Laplace, Monge i inni wielcy uczeni. Ustawa, uchwalona w r. 1795-ym przez Konwent, postanawiała, że «metr jest jedną dziesięcio-miljonową częścią ćwierci południka ziemskiego». Na zasadzie pomiarów geodetycznych wykonano wzorzec platynowy metra i złożono go w r. 1799-ym w Archiwum narodowem francuskiem; jego dokładną kopją jest wyżej wspomniany wzorzec M 6. Mimo wielkiej staranności owych prac, wzorce metra nie są ściśle zgodne z określeniem, przyjętem za podstawę metrycznego układu. Wiemy obecnie, że kwadrant południka ziemi wynosi $1{\cdot}0001868 \times 10^9$ cm, nie zaś 10^9 cm, jak było zamiarem prawodawcy. Jak powiedzieliśmy, określenie centymetra i metra, które dziś obowiązuje, nie ma wcale związku z wymiarami kuli ziemskiej.

Rozporządzając wzorcem centymetra lub metra, czyli t. zw. *skalą* metryczną, możemy mierzyć długości. Najprostszy sposób dokonania podobnego pomiaru polega na bezpośredniem przyłożeniu skali do mierzonego przedmiotu.

Przy takiem bezpośredniem mierzeniu długości możemy odczytywać wzrokiem nieuzbrojonym podziałki centymetrowe a nawet milimetrowe; do mierzenia części milimetra służy skala pomocnicza, zwana *nonjuszem* albo *wernjerem*.



Rys. 1.

Wyobraźmy sobie nonjusz *CD* (rys. 1), którego skala ma 9 mm długości i jest podzielona na 10 części; każda taka część ma zatem 0·9 mm a więc o 0·1 mm mniej niż podziałka skali właściwej *AB*. Przypuśćmy, że mamy zmierzyć długość *LM*, zawartą np. pomiędzy 12 a 13 mm. Przyłożywszy początek *C* nonjusza do końca *M* przedmiotu, poszukujemy najbliższej kreski nonjusza, przypadającej w przedłużeniu którejkolwiekbądź kreski skali *AB*. Jeżeli, jak na rysunku, kreska 5 nonjusza zgadza się z pewną kreską skali właściwej *AB*, wnosimy wówczas, że długość *LM* jest 12·5 mm.

W geometrji uczymy się mierzyć *pola* figur dwuwymiarowych, które można narysować na płaszczyznie lub na (zakrzywionych) powierzchniach, np. pola prostokąta, trójkąta, koła, elipsy, kulistego trójkąta, pobocznicy stożka i t. p. W geometrji poznajemy również sposoby mierzenia *objętości* utworów geometrycznych trójwymiarowych, jak prostopadłościan, walec, kula, stożek, elipsoida i t. p. Wiemy, że jednostką pól w geometrji jest pole kwadratu, którego bokiem jest jednostka długości; że jednostką objętości jest objętość sześcianu, którego krawędzią jest jednostka długości. W fizyce jednostką pól jest zatem *centymetr kwadratowy* (cm^2), jednostką objętości jest *centymetr sześcienny* (cm^3).

W pierwotnym układzie metrycznym wyraz *litr* miał oznaczać tysiąc centymetrów sześciennych. Zobaczymy jednakże w następnym rozdziale tej książki, że obecnie obowiązujące określenie tego pojęcia jest odmienne (§ 40); według tego określenia wartość litra w centymetrach sześciennych może być znaleziona tylko na drodze doświadczalnej. Z najdokładniejszych dotychczasowych pomiarów wynika, że 1 litr wynosi $1{\cdot}000027 \times 10^3$ cm^3; jeżeli zatem wysoki stopień ścisłości nie jest niezbędny, możemy uważać wyraz *litr*, jak dawniej, za synonim tysiąca centymetrów sześciennych.

§ 4. O pomiarach czasu. Jednostki czasu.

Jak powiedzieliśmy w § 2-gim, ruchem nazywamy zmianę położenia, która dla dokonania się wymaga czasu. Wyobraźmy sobie dwie stacje *A* i *B* toru kolejowego. Pociąg pośpieszny przebywa drogę *AB* w przeciągu 20 minut, pociąg towarowy na odbycie tej drogi zużywa godzinę. Zmiana położenia jest w obu razach ta sama, ale w pierwszym ruchu wymaga czasu krótszego niż w drugim. Ażeby więc zbadać ruch, nie dosyć jest zmierzyć odbywające się w nim zmiany położenia; potrzeba nadto zmierzyć *odstępy czasu*, których zmiany te wymagają.

Zasadniczą jednostką odstępów czasu w naukach ścisłych jest *sekunda gwiazdowa*, czyli jedna 86400-ta część okresu czasu, w ciągu którego kula ziemska obraca się, względem gwiazd stałych, jeden raz dokoła swej osi; albo też, co na to samo wypada, jedna 86400-ta część okresu czasu, w ciągu którego firmament gwiazd stałych obraca się, względem ziemi, jeden raz dokoła swej osi. Czas jednego takiego całkowitego obrotu nazywamy *dobą gwiazdową*; dzielimy go na 24 *godziny gwiazdowe*, lub na 1440 *minut gwiazdowych*, lub (jak powiedzieliśmy) na 86400 *sekund gwiazdowych*.

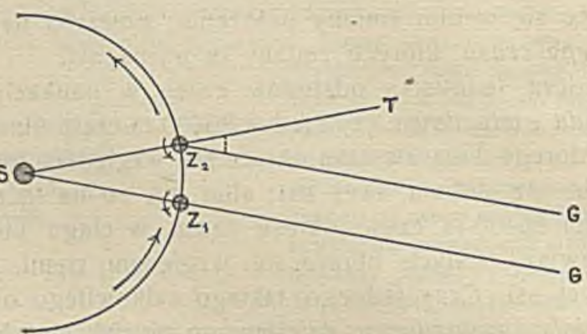
W czynnościach codziennego życia nie kierujemy się zazwyczaj ruchem gwiazd po sklepieniu niebieskiem; stosujemy się raczej do pojawiania się, do posuwania się i do znikania owej olbrzymiej pochodni, która dla nas tworzy rano, południe i wieczór, od której wszelkie życie na ziemi jest całkowicie zależne. W czynnościach codziennych nie posługujemy się tedy czasem gwiazdowym, ale raczej *słonecznym*. Wiemy jednakże, że słońce nie ma stałego miejsca na kuli niebieskiej, że przesuwa się nieustannie wśród gwiazd; z tego powodu czas *prawdziwy* słoneczny ani też t. zw. czas *średni* słoneczny nie zgadza się dokładnie z czasem gwiazdowym.

Wyobraźmy sobie, że Z_1 i Z_2 (rys. 2) są dwa położenia ziemi w jej rocznym obiegu dokoła słońca S; przypuśćmy, że odpowiadają one dwóm chwilom, których odstęp wynosi jednę dobę *gwiazdową*. Pewna gwiazda G góruje w obu położeniach Z_1 i Z_2; ze względu na niezmierną odległość gwiazd stałych, narysowano Z_1G i Z_2G jako linje równoległe. Jeżeli jednak Z_1S jest przedłużeniem GZ_1 w położeniu Z_1, tedy w położeniu Z_2 jest inaczej: Z_2S nie przypada w przedłużeniu GZ_2. Zważywszy kierunek rocznego obiegu ziemi dokoła słońca oraz kierunek dziennego obrotu ziemi dokoła osi, łatwo zrozumieć, że doba słoneczna jest nieco dłuższa niż doba gwiazdowa.

Jak wiadomo z kosmografji, *rokiem zwrotnikowym* nazywa się okres czasu, który upływa pomiędzy dwiema kolejnemi chwilami przejścia słońca przez punkt wiosenny; jest to okres niemal dokładnie stały, zmniejsza się tylko o $\frac{1}{2}$ sekundy w ciągu stulecia. *Dobą średnią słoneczną* nazywamy jednę 365·2422-tą część roku zwrotnikowego. Stosunek tej doby do doby gwiazdowej wynosi:

$$\frac{\text{doba średnia słoneczna}}{\text{doba gwiazdowa}} = \frac{366{\cdot}2422}{365{\cdot}2422} = 1{\cdot}002738;$$

doba średnia słoneczna wynosi zatem 24 godz., 3 min., 56·55 sek. gwiazdowych, czyli jest dłuższa niemal o 4 minuty od doby gwiazdowej. Stąd przeciwnie wy-

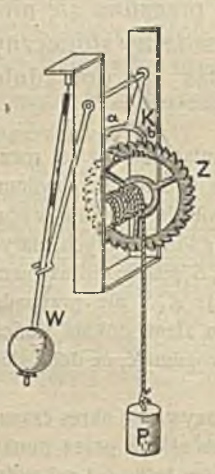


Rys. 2.

nika, że okres jednego obrotu ziemi dokoła osi trwa 23 godz., 56 min., 4·09 sek. średnich słonecznych lub 86164·09 sekund średnich słonecznych.

§ 5. *O zegarach.*

Do mierzenia okresów czasu służą przyrządy, zwane *zegarami*. Rys. 3 wyobraża (w uproszczeniu) ważniejsze części mechanizmu zegara *wahadłowego*. Widzimy na tym rysunku ciało ciężkie *P*, którego powolne opadanie, pod wpływem ciężkości, sprawia obrót kół i wskazówek czyli ruch całego mechanizmu. Pod wpływem tego działania, kółka zegara (opuszczone na rysunku), wraz z t. zw. *kołem wychwytowem Z*, poruszałyby się coraz prędzej, gdyby nie zapobiegało temu *wahadło W* wraz z *kotwicą K*. Niezmiennie złączona z wahadłem kotwica uczestniczy w jego ruchu. Gdy naprzykład wahadło odchyliło się na lewo, lewy koniec *a* kotwicy podnosi się, pewien ząb np. *c* zostaje uwolniony, koło wychwytowe wykręca się nieco na prawo; lecz jednocześnie zaczął opuszczać się koniec *b* kotwicy, który zatem powstrzyma za chwilę ruch koła wychwytowego. Ponieważ wahadło waha się dalej, koniec *b* wkrótce podniesie się, ząb *m* zostanie uwolniony, *a*

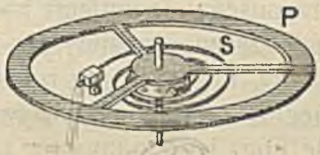


Rys. 3.

opadnie; ta sama gra powtarza się za każdem wahaniem. Zobaczymy w rozdz. III-im, że wahadła wahają się prawidłowo, że ich kolejne wahania, powtarzając się, są do siebie podobne; ruch koła *Z* bywa więc powstrzymywany i uwalniany regularnie; możnaby było powiedzieć, że jest to ruch «równomiernie skaczący». Wahadło ujednostajnia zatem ruch mechanizmu zegarowego.

Nieustanne uderzenia zębów koła wychwytowego o kotwicę udzielają zarazem wahadłu coraz nowych lekkich impulsów i pobudzają je tym sposobem do ruchu, który wyczerpałby się rychło bez tej pomocy, skutkiem rozmaitych tarć i oporów.

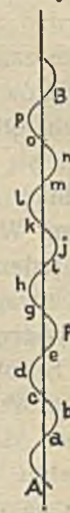
W zegarkach kieszonkowych popędu mechanizmowi dostarcza silna sprężyna, którą skręcamy przy t. zw. nakręcaniu zegarka. Rolę wahadła odgrywa tu t. zw. *balans*; jest to cienka spiralna sprężynka *S* (rys. 4), połączona jednym końcem z lekkim, obracalnym koło osi pierścieniem *P* Podczas wahań pierścienia sprężynka *S* zwija się i rozwija naprzemian, działa więc pod wpływem własnej sprężystości, jak zwykłe wahadło pod wpływem ciężkości.



Rys. 4.

Niejednokrotnie wypada w fizyce mierzyć krótkie odstępy czasu, wynoszące naprzykład kilka setnych lub tysięcznych części sekundy; zwykłe zegary nie mogą być w tym razie pomocne. Uciekamy się wówczas do innych urządzeń, z których opiszemy jedno, najprostsze. Powszechnie znane są t. zw. *widełki strojowe* (*K* na rys. 5-ym); noszą one również nazwę *kamertonu*. Kamerton jest to pręt wyrobiony z najlepszej, sprężystej stali, zgięty w podkowę i osadzony na nóżce. Uderzony, kamerton wydaje dźwięk; jak zobaczymy w późniejszym rozdziale, ramiona kamertonu odbywają wówczas ruch, przybliżenie podobny do wahadłowego; sprężystość stali, z której widełki są wyrobione, pobudza je bowiem do drgań, podobnie jak ciężkość pobudza wahadło do wahań. Przypuśćmy, iż przymocowaliśmy lekkie ostrze czyli rysik *r* do ramienia widełek (rys. 5). Do ostrza *r* zbliżamy płytkę *P* szklaną, którą poprzednio pokryliśmy sadzą. Jeżeli płytka *P* podczas drgań widełek jest nieruchoma, otrzymujemy na niej kreskę *AB* prostopadłą do długości ramion. Lecz jeżeli, podczas drgań widełek, płytka *P* posuwa się jednostajnie w kierunku prostopadłym do *AB*, otrzymujemy krzywą falistą *a b c d e f g h* (rys. 6); punkty *b, d, f, h*... są przebiegane w chwilach, gdy ruch rysika odwraca się. Ruch widełek między *a* i *e*, między *c* i *g*, między *e* i *i* i t. d. nazywamy ***całkowitem drganiem***; odstęp czasu, zajęty przez jedno drganie, nazywamy ***okresem***. Zobaczymy później, że okres danych widełek jest stały; dlatego chwile zwrotów *b, d, f, h* i t. d. a tak samo chwile *a, c, e, g* i t. d. przypadają w sta-

Rys. 5.



Rys 6.

łych odstępach; krzywa falistą jest regularna, fale *abcde* i t. d. powtarzają się na niej jednakowo. Przypuśćmy, że rysik *r* dał znaki *A*, *B* (rys. 6) w chwili początkowej i w chwili końcowej zjawiska, którego czas trwania mamy zmierzyć. Widzimy wówczas z otrzymanej krzywej, ile razy zjawisko to trwało dłużej niż okres drgania widełek. Na rys. 6-ym *AB* zawiera 9 odstępów takich jak *Aa*, lub *ac*, lub *ce* i t. d.; czas trwania zjawiska wynosił więc 9 półokresów drgania lub 4·5 okresu. Pozostaje tylko znaleźć okres drgania widełek, co jest rzeczą łatwą, jak zobaczymy w rozdziale późniejszym. Na takiej zasadzie polega urządzenie *chronografów* czyli przyrządów, służących do mierzenia krótkich odstępów czasu.

§ 6. *O pojęciu punktu w kinematyce*

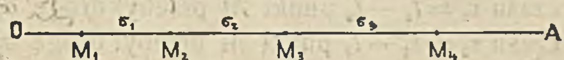
Przypuśćmy, że umiemy mierzyć odległości, kąty, okresy czasu; przypuśćmy, iż umiemy badać ruch *ilościowo*. Już z codziennych spostrzeżeń wnosimy, że ciała poruszają się naogół w sposób zawiły, który byłoby trudno opisać dokładnie. Gdy naprzykład biegnie pies albo koń, zwierzę posuwa się naprzód jako całość ale nogi jego odbywają zarazem ruch własny, zbliżony do wahadłowego. Gdy rzucamy książkę, czapkę lub inny przedmiot do góry, przedmiot ten jako całość podnosi się, a później opada, ale zazwyczaj wykręca się wówczas, odwraca się, wykonywa ruch bardzo złożony. Rozmaite punkty zwierzęcia, książki lub czapki poruszają się więc niejednakowo, odbywają ruchy różne; ile jest punktów w poruszającym się przedmiocie, tyle ruchów odmiennych. Objąć naraz tyle zjawisk jest niepodobna. Co jednak wydaje się nadmiernie trudne, nieraz może być dokonane, gdy potrafimy *rozłożyć* zadanie, zbliżając się do celu kolejnemi krokami. W każdej chwili powinniśmy umieć skierować *całą* uwagę na jeden przedmiot, na jedno pytanie; na umiejętności oderwania uwagi od nieistotnych zagadnień polega nieraz tajemnica powodzenia w abstrakcyjnej nauce.

Spróbujmy uprościć zadanie, o którem przed chwilą mówiliśmy. W poruszającem się ciele wybieramy punkt określony, który łatwo odnaleźć; skupiamy uwagę na ruchu owego wybranego punktu. Upatrzywszy naprzykład świecący guzik na obroży psa lub na uprzęży konia, śledzimy ruch tego punktu, który odtąd jest niejako wyobrazicielem zwierzęcia. Podobnie, zamiast całej piłki, uważamy jej środek; zamiast okrętu — jego latarnię. Może się zdarzyć, że wybrany punkt porusza się w sposób stosunkowo prosty, mimo iż ruch ciała jest wielce zawiły. Jeżeli np. koń biegnie w arenie cyrkowej, guzik jego uprzęży porusza się przybliżenie po kole poziomem; latarnia okrętu odbywa być może ruch prostolinjowy, chociaż okręt kołysze się i chwieje się, płynąc; środek piłki, spadającej swobodnie w pokoju, biegnie na dół po linji prostej pionowej.

W wielu zagadnieniach możemy poprzestać na zbadaniu ruchu, który odbywa pewien określony punkt ciała; niekiedy musimy, chwilowo, na takiem zbadaniu poprzestać. Często wówczas mówimy tylko o owym wybranym punkcie poruszającego się ciała, o innych zaś punktach nie wspominamy. W tem znaczeniu mówimy w kinematyce o ruchu *geometrycznego punktu.*

§ 7. *O ruchu prostolinjowym.*

Przypuśćmy, że punkt *M* porusza się wzdłuż prostej *OA* (rys. 7). To znaczy, że prosta *OA* nie uczestniczy w ruchu punktu *M*; że pozostaje w spoczynku względem ciał odniesienia lub



Rys. 7.

układów odniesienia, do których punkt *M* podczas ruchu wciąż odnosimy. Taki ruch punktu nazywa się *prostolinjowym.* Możemy również w tym razie powiedzieć, że *tor* punktu jest linją prostą.

Skoro wiadomo, że punkt może poruszać się tylko po nieruchomej prostej *OA,* zatem do wyznaczenia położenia tego punktu wystarcza w każdej chwili odległość punktu od pewnego stałego miejsca *O*, wybranego na prostej *OA*. Tę odległość, zmierzoną w centymetrach lub innych jednostkach długości, będziemy oznaczali przez *s*.

Gdy punkt *M* porusza się po prostej *OA,* odległość *s* zmienia się z biegiem czasu; rośnie, gdy *M* oddala się od *O,* maleje zaś, gdy *M* ku punktowi *O* się przybliża. Gdybyśmy wiedzieli, *według jakiego prawa odległość s zmienia się z czasem,* znalibyśmy ruch punktu *M.* Ażeby poznać to prawo, musimy prowadzić rachubę czasu podczas ruchu punktu; rozpoczynamy ją w chwili, zwanej *początkową.* Od początkowej chwili do uważanej chwili upłynęła pewna liczba sekund; tę liczbę oznaczamy przez *t.* Wartość *t* wyznacza chwilę, którą chcemy rozważać. Zamiast mówić: «chwila, aż do której, poczynając od chwili początkowej, upłynął odstęp czasu t sekund», możemy krótko powiedzieć: «chwila t»; niejednokrotnie dla zwięzłości będziemy wyrażali się w ten sposób. Wyrażenie «chwila $t=0$» oznacza więc chwilę początkową; wyrażenie «chwila $t=1$» oznacza chwilę o 1 sekundę późniejszą i t. d.

Uważajmy dwie chwile: pewną chwilę t_1 i inną, późniejszą t_2. Pomiędzy temi chwilami upłynął odstęp czasu t_2-t_1; oznaczmy go przez τ_1. Niechaj będą s_1 i s_2 odległości punktu M od miejsca O, odpowiadające chwilom t_1 i t_2. Przypuśćmy, że M z biegiem czasu oddala się od O; w takim razie mamy $s_2 > s_1$. *Droga*, którą przebył punkt M od chwili t_1 do chwili t_2, wynosi s_2-s_1; oznaczamy ją przez σ_1. Uważajmy późniejsze chwile t_3, t_4 i t. d. i postępujmy dalej w sposób wskazany; otrzymamy wyniki, zestawione w następującej tabliczce:

w odstępie czasu $\tau_1=t_2-t_1$ punkt M przebył drogę $\sigma_1=s_2-s_1$
w odstępie czasu $\tau_2=t_3-t_2$ punkt M przebył drogę $\sigma_2=s_3-s_2$
w odstępie czasu $\tau_3=t_4-t_3$ punkt M przebył drogę $\sigma_3=s_4-s_3$

i t. d.

Weźmy teraz na uwagę *stosunek* drogi σ_1 (przebytej w odstępie czasu τ_1) do długości odstępu τ_1; nazywamy go *średnią prędkością* punktu M pomiędzy chwilami t_1 i t_2; oznaczamy go przez v_1. Weźmy podobnie na uwagę stosunek drogi σ_2 do odstępu τ_2; nazywamy go *średnią prędkością* punktu M pomiędzy chwilami t_2 i t_3; oznaczamy go przez v_2; i tak dalej. Mamy więc

1. $$v_1=\frac{\sigma_1}{\tau_1}; \qquad v_2=\frac{\sigma_2}{\tau_2} \qquad \text{i t. d.}$$

Średnią prędkością punktu M pomiędzy dwiema chwilami nazywamy zawsze *stosunek drogi, przebytej przez punkt między temi chwilami, do odstępu czasu, który pomiędzy niemi upływa.*

Drogi σ wyrażamy w centymetrach, odstępy czasu wyrażamy w sekundach; stąd wynika, że prędkości ruchu v, obliczone według równań (1), wypadną wyrażone w jednostce: cm/sek.

Wyobraźmy sobie naprzykład, że, obserwując ruch punktu M, znaleźliśmy, co następuje:

w chwilach:	$t_1=3$ sek.	$t_2=5$ sek.	$t_3=7$ sek.	$t_4=9$ sek.
odległości od O:	$s_1=25$ cm	$s_2=45$ cm	$s_3=69$ cm	$s_4=99$ cm.

Obliczamy z tych spostrzeżeń, że średnie prędkości wynosiły:

w odstępie	τ_1 (od t_1 do t_2)	τ_2 (od t_2 do t_3)	τ_3 (od t_3 do t_4)
średnia prędkość	$v_1 = 10$ cm/sek	$v_2 = 12$ cm/sek	$v_3 = 15$ cm/sek.

§ 8. O ruchu prostolinjowym jednostajnym.

Ruch prostolinjowy nazywamy *jednostajnym*, jeżeli średnia prędkość jest w nim zawsze ta sama, bez względu na to, między któremi chwilami jest utworzona. Jakkolwiek wybralibyśmy chwile t_1, t_2, t_3 i t. d., pomiędzy któremi upływają odstępy τ_1, τ_2 i t. d., mamy więc zawsze w ruchu prostolinjowym jednostajnym

1. $$\frac{\sigma_1}{\tau_1} = \frac{\sigma_2}{\tau_2} = \frac{\sigma_3}{\tau_3} = \text{ i t. d.}$$

lub, innemi słowy:

2. $$v_1 = v_2 = v_3 = \text{ i t. d.}$$

W ruchu prostolinjowym jednostajnym mamy zatem tylko jednę średnią prędkość v, zawsze tę samą czyli *stałą*, która wynosi

3. $$v = \frac{\sigma}{\tau};$$

τ jest tutaj *dowolnym* odstępem czasu, σ jest drogą, przebytą w tym odstępie. Z równania (3) wynikają dalsze równania

4. $$\sigma = v\tau \quad \text{oraz} \quad \tau = \frac{\sigma}{v}.$$

W powyższych równaniach (1) załóżmy, że

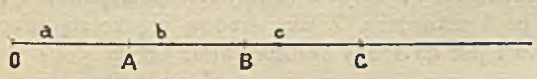
5. $$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \text{ i t. d.};$$

otrzymamy natychmiast

6. $$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \text{ i t. d.}$$

Jeżeli punkt porusza się w linji prostej jednostajnie, przebywa drogi jednakowe w jednakowych odstępach czasu.

Czy możemy odwrócić to twierdzenie? Możemy, lecz powinniśmy wówczas w niem mówić o jednakowych, ale *zresztą dowolnych* odstępach czasu. Z na-



Rys. 8.

stępującego przykładu przekonywamy się, że to zastrzeżenie jest wówczas niezbędne. Przypuśćmy, że punkt M przebiega drogę OA (rys. 8) w przeciągu pierwszej sekundy; że w przeciągu drugiej przebiega drogę $AB = OA$; że w przeciągu trzeciej przebiega $BC = AB = OA$ i t. d. Pomimo to ruch punktu M może nie być jednostajny. Jeżeli w pierwszej półsekundzie punkt przebywa drogę Oa krótszą aniżeli aA i jeżeli taka nierówność dróg półsekundowych powtarza się w następujących sekundach, tedy ruch w istocie nie jest jednostajny.

Ażeby opisać własności ruchu prostolinjowego jednostajnego, rozpoczynamy rachubę czasu w pewnej chwili początkowej, w której zatem (§ 7) kładziemy $t = 0$. Niechaj odległość ruchomego punktu M od stałego miejsca O na torze OA (rys. 7) wynosi s_0 w chwili $t = 0$; w chwili późniejszej t ta odległość niechaj wynosi s. Ponieważ ruch jest jednostajny i prędkość v jest stała, mamy według (4):

$$7. \qquad s - s_0 = vt \quad \text{czyli} \quad s = s_0 + vt.$$

Zadania.

1. Kula wystrzelona z armaty przebija najpierw zasłonę A; o 0·01 sek później przebija drugą zasłonę B. Odległość AB wynosi 5 metrów. Obliczyć średnią prędkość pocisku.

2. Przez pół godziny pociąg poruszał się ruchem jednostajnym, z prędkością $1{\cdot}7 \times 10^3$ cm/sek. Jak daleko zajechał?

3. Wózek posuwa się po drodze ruchem jednostajnym, przebywając metr w przeciągu 0·9 sekundy. Jakiego czasu wymagać będzie przebycie drogi 1·2 km?

4. Prędkość 75 cm/sek wyrazić w jednostce: km/godz. Kładąc łokieć = 57·6 cm, wyrazić tę samą prędkość w jednostce: łokieć/minuta. Kładąc milę ang. = 1609 m, wyrazić tę samą prędkość w jednostce: mila ang./doba.

5. W 4 sekundy po ujrzeniu błyskawicy usłyszeliśmy grzmot. Przypuszczając, że głos biegł w powietrzu jednostajnie, z prędkością 340 m/sek, obliczyć, jak daleko od nas piorun uderzył.

6. Światło biegnie w próżni z prędkością stałą 3×10^{10} cm/sek. Gdyby z tą prędkością mogło przebiec kulę ziemską wzdłuż osi, od bieguna do bieguna (odległość ta wynosi 12713030 m), w jakim czasie dokonałoby tej drogi?

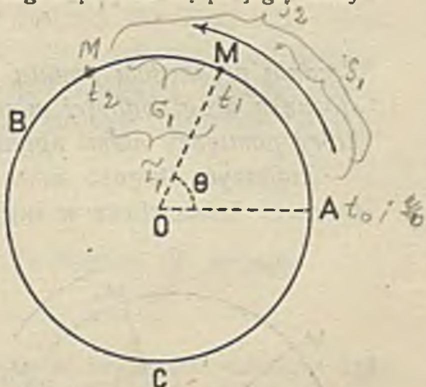
7. Światło, wysłane przez gwiazdę α Centauri, biegnie przez 3 lata i 115 dni, zanim dobiegnie do ziemi. Jak znaczna jest odległość, która dzieli nas od tej gwiazdy?

8. Balon, śród gęstej mgły, unoszony przez wiatr, zbliża się ku ścianie stromej skalistej. Huk wystrzału, odbity od tej ściany, powrócił (jako *echo*) do łódki balonu po 5 sekundach. Po upływie minuty aeronauta powtarza tę samą próbę: echo powraca po 3 sekundach. Z jaką średnią prędkością posuwał się balon? Jak daleko było i jest do ściany skalistej, która odbija głos?

§ 9. O ruchu kołowym.

Przypuśćmy, że punkt M porusza się po obwodzie koła ABC (rys. 9). Przez to zdanie chcemy powiedzieć, że koło ABC nie bierze udziału w ruchu punktu *M*; że pozostaje w spoczynku względem ciał lub układów odniesienia, do których punkt *M* odnosimy, ażeby się o jego ruchu upewnić. Taki ruch punktu *M* nazywamy *kołowym*.

Miewamy nieraz sposobność dostrzegania ruchu kołowego; często posługujemy się takim ruchem. Koniec wskazówki zegara posuwa się po jego tarczy ruchem kołowym. Dowolny punkt kamienia młyńskiego, wirownicy, skrzydeł wiatraka, koła rozpędowego w maszynie parowej, ożywiony jest również ruchem kołowym. Względem gwiazd stałych kula ziemska obraca się około swej osi; każdy punkt jej powierzchni biegnie po obwodzie równoleżnika, na którym jest położony. Księżyc krąży dokoła ziemi przybliżenie po kole; ziemia biegnie dokoła słońca przybliżenie po kole.



Rys. 9.

Przypuśćmy, że w chwili t chcemy wyznaczyć położenie punktu *M* na obwodzie koła *ABC* (rys. 9). Postępujemy w tym celu podobnie, jak postępowaliśmy w § 7-ym, w którym rozważaliśmy ruch prostolinjowy. Na obwodzie koła wybieramy punkt stały *A*; poczynając od *A*, mierzymy długość łuku *AM* w jednym z dwóch możliwych kierunków, np. w kierunku, wskazanym przez strzałkę (rys. 9). Długość łuku *AM*, w ten sposób zmierzoną i wyrażoną np. w centymetrach, będziemy oznaczali przez s.

Uważajmy dwie chwile: chwilę t_1 i późniejszą t_2; pomiędzy niemi upłynął odstęp czasu $\tau_1 = t_2 - t_1$. Niechaj s_1 i s_2 oznaczają łuki *AM* (zmierzone, jak powiedzieliśmy), które odpowiadają chwilom t_1 i t_2. Przypuśćmy, że łuk s_2 jest dłuższy niż s_1. Droga, którą odbył punkt *M* w czasie od t_1 do t_2, wynosi $s_2 - s_1$; oznaczmy ją przez σ_1. Uważajmy późniejsze chwile t_3, t_4 i t. d. i twórzmy, jak w pierwszym odstępie, drogi, zataczane przez punkt *M* w następujących odstępach czasu. Otrzymamy wyniki następujące:

w odstępie czasu $\tau_1 = t_2 - t_1$ punkt *M* przebył drogę $\sigma_1 = s_2 - s_1$
w odstępie czasu $\tau_2 = t_3 - t_2$ punkt *M* przebył drogę $\sigma_2 = s_3 - s_2$
w odstępie czasu $\tau_3 = t_4 - t_3$ punkt *M* przebył drogę $\sigma_3 = s_4 - s_3$

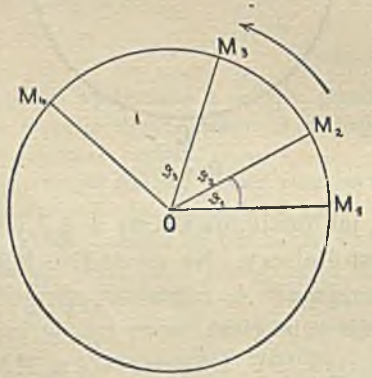
i dalej podobnie. Bierzemy teraz na uwagę stosunek drogi σ_1

(przebytej w odstępie τ_1) do długości odstępu τ_1; nazywamy go *średnią prędkością* punktu M pomiędzy chwilami t_1 i t_2; oznaczamy go przez v_1. Podobnie tworzymy średnią prędkość punktu pomiędzy chwilami t_2 i t_3, którą oznaczamy przez v_2 i t. d. Mamy zatem

$$1. \qquad v_1 = \frac{\sigma_1}{\tau_1}; \quad v_2 = \frac{\sigma_2}{\tau_2} \qquad \text{i t. d.}$$

Średnią prędkością punktu między dwiema chwilami nazywamy *stosunek drogi, odbytej między temi chwilami, do odstępu czasu, który pomiędzy niemi upływa.*

Zmierzyć długość łuku na obwodzie płaskiego krążka, jest to rzecz łatwa. Lecz w innych razach pomiar łuku może być trudny lub wręcz niemożliwy, naprzykład pomiar łuku na równiku ziemi, pomiar łuku na sklepieniu niebieskiem. Zamiast łuków, bierzemy wówczas na uwagę *kąty*, które odpowiadają im w środku koła. Naprzykład, na rys. 9-ym, łukowi AM odpowiada w środku koła kąt AOM, utworzony przez promień stały OA i ruchomy OM. Wartość kąta AOM, wyrażoną w radjanach (§ 3), będziemy oznaczali przez θ. Uważajmy chwilę t_1 i późniejszą t_2, pomiędzy któremi upłynął odstęp czasu τ_1. Niechaj będą θ_1 i θ_2 wartości kąta AOM, odpowiadające chwilom t_1 i t_2; przypuśćmy, że $\theta_2 > \theta_1$. W czasie od t_1 do t_2 promień OM wykręcił się o kąt $\vartheta_1 = \theta_2 - \theta_1$ (rys. 10). Uważając dalsze chwile t_3, t_4 i t. d., powiemy podobnie, że



Rys. 10.

w odstępie czasu:	promień OM wykręcił się o kąt:
$\tau_1 = t_2 - t_1$	$\vartheta_1 = \theta_2 - \theta_1$
$\tau_2 = t_3 - t_2$	$\vartheta_2 = \theta_3 - \theta_2$
$\tau_3 = t_4 - t_3$	$\vartheta_3 = \theta_4 - \theta_3$

i tak samo dalej. Tworzymy teraz stosunek wykręcenia ϑ_1 (dokonanego w odstępie τ_1) do długości odstępu τ_1; nazywamy ten stosunek *średnią prędkością kątową* między chwilami t_1 a t_2 i oznaczamy go przez $\tilde{\omega}_1$. Podobnie tworzymy średnią prędkość kątową między chwilami t_2 i t_3, którą oznaczamy przez $\tilde{\omega}_2$ i t. d. Mamy

2. $$\tilde{\omega}_1 = \frac{\vartheta_1}{\tau_1}; \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{\vartheta_2}{\tau_2} \quad \text{i t. d.}$$

Średnią prędkością kątową między dwiema chwilami nazywamy *stosunek wykręcenia się promienia, które dokonywa się między temi chwilami, do odstępu czasu, upływającego między niemi.*

Jeżeli r oznacza promień koła, po którego obwodzie porusza się punkt M, mamy

3. $$\sigma_1 = r\vartheta_1; \quad \sigma_2 = r\vartheta_2 \quad \text{i t. d.};$$

zatem z porównania równań (1) z równaniami (2) wypada

4. $$v_1 = r\tilde{\omega}_1; \quad v_2 = r\tilde{\omega}_2 \quad \text{i t. d.}$$

Ponieważ kąty θ oraz ϑ mierzymy w radjanach, odstępy zaś czasu τ mierzymy w sekundach, zatem prędkości $\tilde{\omega}$ będą wyrażone w jednostce: 1/sek.

§ 10. *O ruchu kołowym jednostajnym.*

Ruch kołowy nazywamy *jednostajnym,* jeżeli średnia prędkość jest w nim ta sama bez względu na to, między któremi chwilami jest utworzona. Jakiekolwiek są chwile t_1, t_2, t_3 i t. d., pomiędzy któremi upływają odstępy τ_1, τ_2 i t. d., w ruchu kołowym jednostajnym mamy

1. $$\frac{\sigma_1}{\tau_1} = \frac{\sigma_2}{\tau_2} = \frac{\sigma_3}{\tau_3} = \text{ i t. d.}$$

lub innemi słowy

2. $$v_1 = v_2 = v_3 = \text{ i t. d.}$$

Zważywszy równania (4) poprzedzającego artykułu, widzimy, że w ruchu kołowym jednostajnym mamy również

3. $$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_3 = \text{ i t. d.};$$

zatem w takim ruchu średnia prędkość kątowa jest zawsze ta sama, bez względu na chwile, między któremi jest utworzona. W ruchu kołowym jednostajnym mamy więc tylko *jednę* średnią prędkość v oraz *jednę* średnią prędkość kątową $\tilde{\omega}$, które spełniają równania

$$4. \qquad v = \frac{\sigma}{\tau}; \quad \tilde{\omega} = \frac{\vartheta}{\tau}; \quad v = r\tilde{\omega};$$

τ jest tutaj dowolnym odstępem czasu, σ jest drogą, przebytą przez punkt M po obwodzie koła w odstępie τ, ϑ jest kątem, odpowiadającym łukowi σ w środku koła. Mamy oczywiście

$$5. \qquad \sigma = v\tau; \quad \tau = \frac{\sigma}{v}; \quad \vartheta = \tilde{\omega}\tau; \quad \tau = \frac{\vartheta}{\tilde{\omega}}.$$

Przypuśćmy, że w uważanym ruchu jednostajnym *jeden całkowity obieg* po obwodzie koła trwa przez czas T; czas T nazywa się wówczas *okresem ruchu*. Okresowi T odpowiada oczywiście wartość 2π kąta ϑ; mamy zatem

$$6. \qquad \tilde{\omega} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{lub} \quad \tilde{\omega}T = 2\pi.$$

Jeżeli ruch kołowy jest bardzo szybki, okres T może być drobną cząstką sekundy; tak poruszają się koła i inne części składowe różnych maszyn. Przypuśćmy, że T wynosi jednę n^{ta} część sekundy; liczba n $\left(\text{albo } \frac{1}{T}\right)$ wyraża wówczas liczbę obiegów, dokonywanych w przeciągu sekundy. Przemysłowcy i inżynjerowie posługują się chętniej liczbą n aniżeli pojęciem okresu T lub prędkości kątowej $\tilde{\omega}$, które w zastosowaniach praktycznych mniej są dogodne.

Zadania.

1. Koło o średnicy 24 cm kręci się jednostajnie, odbywając 300 obrotów w ciągu minuty. Obliczyć liczbę n obiegów w sekundzie, okres T jednego obiegu, prędkość kątową $\tilde{\omega}$ oraz prędkość v punktu na obwodzie koła. Obliczyć: ile czasu trwa wykręcenie się koła o stopień? o ile stopni wykręca się koło w przeciągu 0·01 sekundy?

2. Jaka jest prędkość kątowa wskazówki minutowej oraz wskazówki godzinnej naszych zegarów?

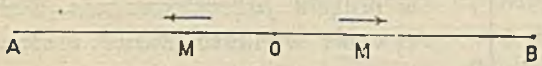
3. Czy wszystkie punkty kuli ziemskiej w jej ruchu obrotowym mają prędkość kątową tę samą? Jeżeli tak, jaka jest ta prędkość kątowa? Wyrazić ją w jednostkach: 1/sekunda gwiazdowa, 1/sekunda średnia słoneczna.

4. Promień kuli ziemskiej wynosi przybliżenie $6{\cdot}37 \times 10^8$ cm; z jaką prędkością biegnie punkt na równiku, skutkiem ruchu obrotowego kuli ziemskiej? Wiedząc, że szerokość geograficzna Warszawy wynosi $52^0 13' 5''$, Krakowa zaś $50^0 3' 52''$, obliczyć tę prędkość w obu miejscowościach.

§ 11. *Kierunek ruchu. Przemieszczenie, rozumiane jako wektor.*

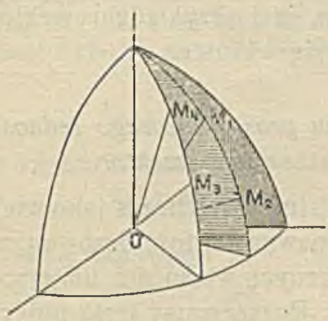
W §§ 7-ym i następnych mówiliśmy o *prędkości* ruchów prostolinjowych lub kołowych. Jest to jedna z najważniejszych cech ruchu; ale równie ważny jest *kierunek,* w którym odbywa się ruch. Obadwa pojęcia są znane z pospolitego doświadczenia; wypada nam tylko nadać im niezbędną w nauce dokładność.

Uważajmy ruch prostolinjowy (§ 7); przypuśćmy, że zadana jest prosta *AB* (rys. 11), w której ten ruch jest umiejscowiony.



Rys. 11.

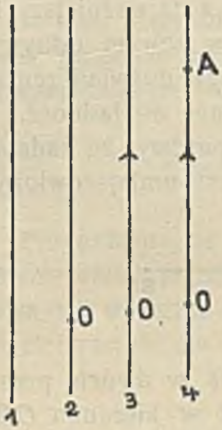
Ruch punktu *M* może odbywać się wówczas w dwóch przeciwnych kierunkach, w kierunku *OA* albo też w kierunku *OB*. Jeżeli od punktu *O* ruchomy punkt *M* poruszył się do *A* lub do *B*, powiadamy, że *M* doznał *przemieszczenia OA* lub *OB*.



Rys. 12.

Przypuśćmy teraz, że prosta, w której ruch ma być umiejscowiony, nie jest zadana; że wiadomy jest tylko początkowy punkt *O*, w którym ruch się zaczyna. Wychodząc z *O*, punkt *M* może posuwać się wówczas w nieskończenie wielu prostych, rozchodzących się z *O* jak promienie powierzchni kulistej (rys. 12); przemieszczenia punktu *M* będą więc rozmaicie położone w przestrzeni, wybiegając z *O* nakształt promieni powierzchni kulistej.

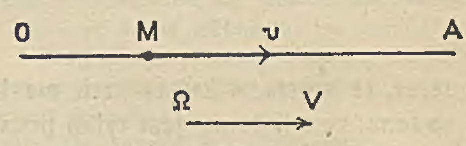
Jakie własności przemieszczenia punktu powinny być wiadome, ażeby ono było zupełnie określone? Ażeby przemieszczenie punktu było określone, ażeby nie mogło być co do niego wątpliwości, powinniśmy wiedzieć: (1) jak położona w przestrzeni jest prosta, w której ono jest umiejscowione (2) od którego punktu tej prostej ono się zaczyna (3) w którym z dwóch kierunków, możliwych w tej prostej, ono się dokonywa (4) dokąd ono sięga, czyli (innemi słowy) jaka jest jego długość, wyrażona w określonych jednostkach, np. w centymetrach (rys. 13). Będziemy odtąd upatrywali wszystkie te cechy w pojęciu *przemieszczenia*. *Wektorem* nazywamy wielkość, której można przypisywać wszystkie powyższe cechy przemieszczenia i której przypisać je należy, ażeby ją w zupełności określić. Powtarzamy: *wektor jest umiejscowiony w pewnej prostej; jest przyłożony do pewnego punktu tej prostej; ma pewien w tej prostej kierunek;* nareszcie *ma pewną długość*. Przemieszczenie punktu M, ożywionego ruchem prostolinjowym, jest przykładem wektora; z innemi przykładami zapoznamy się wkrótce.



Rys. 13.

§ 12. *Prędkość ruchu prostolinjowego jednostajnego, rozumiana jako wektor.*

Prędkość rozumieliśmy dotychczas jako wielkość arytmetyczną; przypisywaliśmy jej pewną wartość liczbową, nie przypisywaliśmy jej jednak geometrycznych własności, umiejscowienia w linji prostej lub skierowania. Rozszerzamy teraz pojęcie prędkości w taki



Rys. 14.

sposób, ażeby ona stała się wektorem; możemy z niej wówczas odczytać właściwości ruchu, których sama wartość liczbowa prędkości wyrazić nie może.

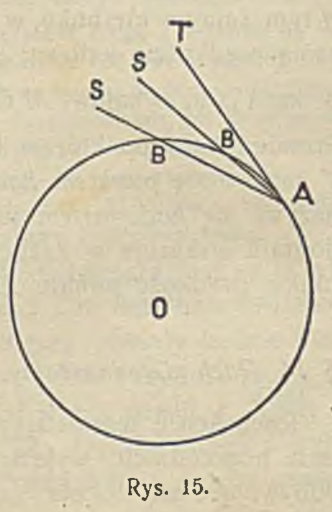
Wyobraźmy sobie, że punkt M porusza się jednostajnie w prostej OA (rys. 14); prędkość ruchu niechaj wynosi v cm/sek. W prostej OA narysujmy przemieszczenie, którego doznaje punkt

M podczas ruchu, w ciągu jednej sekundy; to przemieszczenie *Mv* wyobraża prędkość *v*, rozumianą wektorjalnie. Wektor *Mv*, wyobrażający prędkość, jest oczywiście umiejscowiony w prostej *OA*, t. j. w prostolinjowym torze punktu, zaczyna się od chwilowego położenia *M* tego punktu, jest skierowany w stronę ruchu; długość tego wektora wynosi *v* cm (t. j. tyle jednostek długości, ile prędkość *v* ma jednostek prędkości). Często rysujemy wektor, wyobrażający prędkość ruchu prostolinjowego, nie w samej linji toru, lecz w równoległej do niej linji. Wybieramy naprzykład dowolny punkt *Ω* (rys. 14), nie leżący w prostej *OA*; wyprowadzamy zeń wektor *ΩV*, równoległy do *Mv*, skierowany zgodnie z *Mv* i równie długi jak *Mv*. Ponieważ nie może być wątpliwości co do umiejscowienia i początku wektora, wyobrażającego prędkość, przeto wektor *ΩV* uzmysławia nam dostatecznie prędkość punktu *M*, rozumianą wektorjalnie.

Powinniśmy o tem pamiętać, że przemieszczenie *Mv* lub *ΩV* ***wyobraża*** prędkość *v*, ale nią ***nie jest***. Wartość prędkości wynika z pewnych pomiarów długości i czasu; wartość przemieszczenia wynika z pomiaru tylko długości. Dlatego też jednostka prędkości jest zgoła inna, niż jednostka przemieszczenia. Jeżeli np ruch jednostajny odbywa się w prostej *OA* z prędkością 2 cm/sek lub 5 km/sek, przemieszczenie *Mv* (lub *ΩV*) ma 2 cm lub 5 km długości. Wyrażenie «prędkość 2 cm» lub «prędkość 5 km» nie ma wcale określonego znaczenia, więc jest niedorzeczne.

§ 13. *Prędkośc ruchu kołowego jednostajnego, rozumiana jako wektor.*

W przypadku ruchu kołowego jednostajnego postąpmy podobnie, jak w przypadku ruchu prostolinjowego. W jakim kierunku porusza się punkt, biegnący po obwodzie koła? Uważajmy punkty *A* i *B* na obwodzie koła (rys. 15). Zbliżajmy punkt *B* nieograniczenie do *A*; ***sieczna AS***, która przecina obwód w *A* i *B*, staje się w granicy ***styczną*** *AT* w punkcie *A*. Punkt, biegnący po obwodzie koła, porusza się więc wszędzie w kierunku stycznej do obwodu.



Rys. 15.

Weźmy na uwagę punkt *M* (rys. 16), który krąży po obwodzie koła $M_1\ M_2\ M_3$

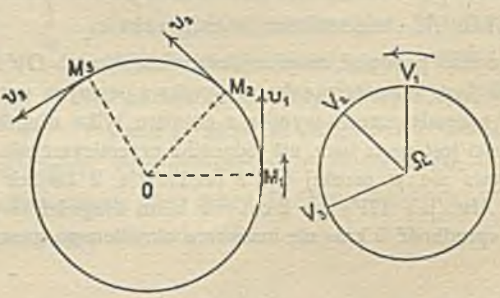
w kierunku strzałki. W miejscu M_1 punkt porusza się w kierunku M_1v_1, stycznym do obwodu w tem miejscu; w miejscach M_2, M_3 i t. d. porusza się podobnie w kierunkach stycznych M_2v_2, M_3v_3 i t. d. Jak w artykule poprzednim, wybieramy dowolny punkt Ω i prowadzimy proste

1. $\Omega V_1 \parallel M_1v_1$; $\Omega V_2 \parallel M_2v_2$; $\Omega V_3 \parallel M_3v_3$ · i t. d.

Ponieważ ruch jest jednostajny, prędkość jest stała; przypuśćmy, że wynosi v cm/sek. Na prostych ΩV_1, ΩV_2, ΩV_3 i t. d. odcinamy długości

2. $\Omega V_1 = \Omega V_2 = \Omega V_3 =$ i t. d. $= v$ cm.

Wyobraźmy sobie punkt V, umieszczony w zakończeniu odcinków ΩV_1, ΩV_2, ΩV_3 i t. d Ponieważ, według (2), te odcinki są



Rys. 16.

równe sobie, punkt V biegnie po kole $V_1 V_2 V_3$; widzimy, że biegnie w tym samym kierunku, w którym M biegnie po $M_1 M_2 M_3$ i z tą samą prędkością kątową; naprzykład

3. kąt $V_1\Omega V_2 =$ kątowi M_1OM_2: kąt $V_2\Omega V_3 =$ kątowi M_2OM_3 i t. d.

Promień koła, po którem biegnie punkt V, wynosi v cm. Punkt V nazywa się *punktem hodograficznym* punktu M; koło $V_1 V_2 V_3$ nazywa się *hodografem* toru kołowego $M_1 M_2 M_3$. Promień hodografu wskazuje w każdej chwili, co do wartości i co do kierunku, prędkość punktu M, rozumianą jako wektor.

§ 14. Ruch niejednostajny. Prędkość chwilowa albo prawdziwa.

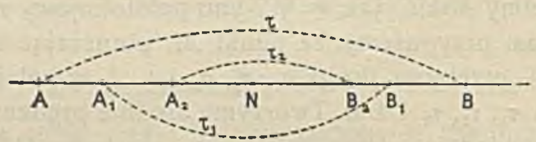
Ruch ściśle jednostajny, którym zajmowaliśmy się w artykułach poprzednich, wyjątkowo tylko wydarza się w przyrodzie; odbywające się dokoła nas rodzaje ruchu naogół są niejednostajne. O wyjeżdżającym ze stacji pociągu mówimy, że jedzie *coraz prędzej*; gdy pociąg dojeżdża do stacji, na której ma się zatrzymać, powiadamy, że posuwa się *coraz powolniej*. Mówimy, że kamień wypuszczony z ręki biegnie coraz prędzej ku ziemi; że rzucony pionowo do góry podnosi się coraz powolniej. Tworzymy więc niejako intuicyjnie pojęcie prędkości w ruchu niejednostajnym; sądzimy, że ona jest zmienna, że rośnie z czasem albo maleje. Spróbujmy wyjaśnić sobie dokładnie owo pojęcie.

Wyobraźmy sobie, jak w § 7-ym, prostolinjowy ruch punktu. Jak wówczas, przypuśćmy, że punkt *M*, poruszając się w prostej *OA* (rys. 7), przebywa drogi σ_1, σ_2, σ_3 i t. d. w kolejnych odstępach czasu τ_1, τ_2, τ_3 i t. d. Tworzymy średnie prędkości v_1, v_2, v_3 i t. d., odpowiadające tym odstępom; równania (1) § 7-go pozwalają obliczyć te średnie prędkości, które naogół nie będą równe sobie, albowiem ruch jest niejednostajny. Jasną jest rzeczą, że, utworzywszy *średnie* prędkości v_1, v_2, v_3 i t. d., *nie opisaliśmy jeszcze ruchu zupełnie dokładnie*. Ażeby to dobrze zrozumieć, powróćmy do przykładu rozpędzającego się pociągu. Przypuśćmy, że, obserwując ruch pociągu w odstępie czasu τ_1, znaleźliśmy średnią prędkość v_1. Gdybyśmy podzielili odstęp τ_1 na dwa krótsze odstępy τ' i τ'', z których τ' jest wcześniejszy, τ'' zaś późniejszy, wówczas średnia prędkość w odstępie τ' okazałaby się z pewnością mniejsza, aniżeli średnia prędkość w odstępie τ''. Opisanie ruchu w odstępie τ_1 zapomocą jednej tylko średniej v_1 jest więc ogólnikowe; jeżeli ten odstęp jest długi, opisanie może być niedostateczne, nie dosyć szczegółowe.

Wyobraźmy sobie, że pociąg kolejowy przebył drogę z Krakowa do Warszawy (która wzdłuż dzisiejszego toru wynosi około 350 km) w przeciągu 7 godzin. Powiadamy o tym pociągu, że poruszał się ze średnią prędkością 50 km/godz. Lecz pociąg w rzeczywistości nie poruszał się jednostajnie, nie biegł ze stałą prędkością 50 km/godz; w istocie pociąg zatrzymywał się na niektórych stacjach; wyjeżdżając z nich, rozpędzał się; dojeżdżając do nich, zwalniał biegu; gdy biegł «całą parą», musiał mieć prędkość większą niż 50 km/godz. Poprzestając na podaniu średniej prędkości, pomijamy mnóstwo szczegółów ruchu.

Ażeby opisanie ruchu stało się dokładniejsze, jest na to tylko jedna rada: *uczynić odstępy* τ_1, τ_2, τ_3 i t. d. *możliwie krótkiemi*; im te odstępy będą krótsze, tem bliższy prawdy będzie obraz ruchu, który dają prędkości v_1, v_2, v_3 i t. d. Przypuśćmy, że zajmuje nas osobliwie ruch punktu *M* w tej chwili *t*, kiedy on przebiega przez punkt *N* toru (rys. 17). Dokoła chwili *t* wybieramy odstęp czasu τ taki, ażeby chwila *t* była w nim zawarta.

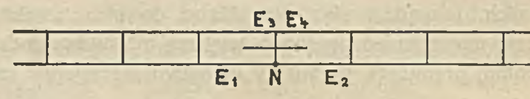
Przypuśćmy, że w przeciągu odstępu τ punkt M przebył drogę AB (rys. 17); AB oczywiście obejmuje w sobie punkt N. Średnia prędkość w odstępie τ wynosi AB/τ. Ponieważ ta średnia nie wyraża dosyć dokładnie własności ruchu w chwili t, wybieramy więc krótszy odstęp czasu τ_1, znowu obejmujący chwilę t; jeżeli A_1B_1 (rys. 17) jest drogą, przebytą w czasie τ_1, średnia prędkość w tym odstępie wynosi A_1B_1/τ_1. Jeżeli i ta średnia nie wyraża własności ruchu w chwili t z dostateczną ścisłością, tworzymy



Rys. 17.

dokoła t jeszcze krótszy odstęp τ_2; średnia prędkość w tym odstępie wynosi A_2B_2/τ_2 (zob. rys. 17). Jesteśmy przekonani o tem, że A_1B_1/τ_1 daje prawdziwszy obraz ruchu punktu w chwili t aniżeli AB/τ; że A_2B_2/τ_2 odtwarza go wierniej aniżeli A_1B_1/τ_1. Postępujemy podobnie coraz dalej i dalej. Im krótszy odstęp τ wybieramy dokoła t, im bardziej zbliżamy ku sobie granice odcinka σ, przebieganego w czasie τ, tem wiarogodniejszym wyrazem własności ruchu w chwili t wydaje się średnia prędkość σ/τ w odstępie τ. *Prawdziwą lub chwilową prędkością v punktu M w chwili t nazywamy granicę, do której dąży średnia prędkość σ/τ, utworzona w odstępie czasu τ (który zawiera chwilę t w sobie), gdy zarówno ten odstęp τ jak odpowiadająca mu droga σ dążą jednocześnie do zera.*

Niechaj rys. 18 wyobraża tor kolejowy. Przejeżdżający pociąg przebiega z pewną prędkością v przed słupem kilometrowym N; postawiono nam za za-



Rys. 18.

danie zmierzenie tej prędkości. Umieszczamy dwa przyrządy elektryczne E_1 i E_2: pierwszy przed, drugi za miejscem N; przyrządy te przesyłają sygnały o przejściu lokomotywy do chronografu, którego zasadę znamy z § 5-go. Ustawiliśmy E_1 o 3 metry przed słupem N, E_2 o 3 metry za nim; odcinek $\sigma_{12} = E_1E_2$ wynosi więc 6 m. Chronograf mierzy odstęp czasu τ_{12}, który upływa między (sygnalizowanemi przez E_1 i E_2) chwilami t_1 i t_2. Przypuśćmy, że chronograf wskazał

$\tau_{12} = 0{\cdot}29$ sekundy; otrzymujemy 2069 cm/sek jako średnią prędkość pociągu pomiędzy chwilami t_1 i t_2 lub między miejscami E_1 i E_2. Jeżeli nie posiadamy doskonalszych narzędzi mierniczych, musimy zadowolnić się tem przybliżeniem. Przypuśćmy jednakże, że nasz spółzawodnik rozporządzał przyrządami dokładniejszemi i umiał posłużyć się niemi. Umieścił on przyrząd sygnalizujący E_3 o 50 cm przed miejscem N, drugi przyrząd E_4 o 50 cm za tem miejscem; odcinek $\sigma_{34} = E_3 E_4$ w jego postępowaniu wynosił 1 metr. Na chronografie odczytał $\tau_{34} = t_4 - t_3 = 0{\cdot}049$ sek. Otrzymał więc prędkość średnią 2041 cm/sek pomiędzy miejscami E_3 i E_4 (lub odpowiedniemi chwilami t_3 i t_4); musimy uznać ten wynik za wiarogodniejszy, niż przez nas otrzymany.

Powiadamy zatem, że pociąg przebiegł przed słupem N z prędkością 2041 cm/sek. Inżynier kolejowy lub maszynista, który kieruje ruchem lokomotywy, nie wyraziłby się w taki sposób; powiedziałby raczej, że pociąg «poruszał się z prędkością 73·5 km na godzinę». Rozumiemy, że w tem zdaniu niema oczywiście nic błędnego, chociażby nawet pociąg zatrzymał się (dajmy na to) o ćwierć kilometra po za słupem N, o którym mówiliśmy. Co mamy na myśli, mówiąc, że pociąg przebiega przed słupem N z prędkością 73·5 km na godzinę? Chcemy przez to powiedzieć, że, *gdyby* on, poczynając od miejsca N, poruszał się dalej jednostajnie i *gdyby* prędkość tego ruchu jednostajnego była równa jego chwilowej czyli prawdziwej prędkości w miejscu N, w takim razie w przeciągu następującej godziny przebyłby drogę 73·5 kilometrów.

§ 15. *O ruchu prostolinjowym niejednostajnym. Średnie przyśpieszenie.*

Przypuśćmy, że punkt M porusza się w prostej OA (rys. 7) ruchem niejednostajnym. Uważajmy pewną chwilę t_1 oraz inną, późniejszą t_2. Przypuśćmy, że w chwili t_1 prawdziwa prędkość punktu M wynosi v_1; że w chwili t_2 wynosi v_2. Przypuśćmy, że $v_2 > v_1$; zatem w chwili t_2 punkt porusza się *prędzej*. Gdy ktoś idzie coraz prędzej, mówimy, że przyśpiesza kroku; o ruchu rozpędzającego się pociągu mówimy, że jest przyśpieszony. Utwórzmy więc pojęcie *przyśpieszenia*, które byłoby *miarą wzrastania prędkości podczas ruchu*. W odstępie τ_1, upływającym między chwilami t_1 i t_2, prawdziwa prędkość punktu powiększyła się o $v_2 - v_1$; tworzymy stosunek $(v_2 - v_1)/\tau_1$ i nazywamy go *średniem przyśpieszeniem* f_1 punktu M pomiędzy chwilami t_1 i t_2.

Miarą przyśpieszenia nie może oczywiście być sama wartość różnicy $v_2 - v_1$. Ruch może być słabo przyśpieszony; mimo to, czekając przez bardzo długi czas τ_1, moglibyśmy dostrzec w nim znaczną zmianę $v_2 - v_1$ prędkości. Ruch może być mocno przyśpieszony; mimo to, biorąc bardzo krótki czas τ_1, znaleźlibyśmy w nim nieznaczną zmianę prędkości.

Przyśpieszenie punktu w jego ruchu prostolinjowym jest widocznie *szybkością wzrastania* prawdziwej prędkości. Miarą prędkości ruchu nie jest sama droga, przebyta w pewnym odstępie czasu, lecz stosunek tej drogi do owego odstępu (§ 7); podobnie miarą przyśpieszenia nie jest sam przyrost prędkości, lecz stosunek tego przyrostu do odstępu czasu, w którym on się wydarzył.

Uważamy teraz dalsze chwile t_3, t_4 i t. d.; w każdym odstępie czasu, oddzielającym dwie kolejne chwile, postępujemy podobnie, jak postąpiliśmy w odstępie τ_1. Otrzymujemy co następuje:

w odstępie $\tau_1 = t_2 - t_1$ prędkość punktu M powiększyła się o $v_2 - v_1$
w odstępie $\tau_2 = t_3 - t_2$ prędkość punktu M powiększyła się o $v_3 - v_2$
w odstępie $\tau_3 = t_4 - t_3$ prędkość punktu M powiększyła się o $v_4 - v_3$

i t. d. Średnie przyśpieszenia w odstępach τ_1, τ_2, τ_3 i t. d. były zatem

$$1. \qquad f_1 = \frac{v_2 - v_1}{\tau_1}; \quad f_2 = \frac{v_3 - v_2}{\tau_2}; \quad f_3 = \frac{v_4 - v_3}{\tau_3}$$

i t. d. *Średniem przyśpieszeniem punktu pomiędzy dwiema chwilami nazywamy stosunek, który zachodzi między przyrostem prawdziwej prędkości, wydarzającym się między temi chwilami a odstępem czasu, oddzielającym je od siebie.*

Jaką jednostką powinniśmy mierzyć przyśpieszenia? Ponieważ prędkości v wyrażamy w cm/sek, odstępy zaś τ wyrażamy w sekundach, zatem, według równań (1), przyśpieszenia f wypadną wyrażone w jednostce

$$2. \qquad \frac{\left(\frac{\text{cm}}{\text{sek}}\right)}{\text{sek}},$$ którą piszemy: cm/sek².

Wyobraźmy sobie ruch prostolinjowy, w którym znaleźliśmy:

$t =$	3 sek	5 sek	7 sek	9 sek
$v =$	50 cm/sek	60 cm/sek	72 cm/sek	86 cm/sek

Średnie przyśpieszenia wynosiły w tym ruchu:

w odstępie między $t = 3$ a $t = 5$ sek. . . . . $f = 5$ cm/sek²
w odstępie między $t = 5$ a $t = 7$ sek. . . . . $f = 6$ cm/sek²
w odstępie między $t = 7$ a $t = 9$ sek. . . . . $f = 7$ cm/sek²

Przypuśćmy, że chcemy wyrazić prędkości w innej jednostce, np. w cm/min. Mamy np.

50 cm/sek = 3000 cm/min; i podobnie dalej.

Przejdźmy podobnie od sekund do minut w jednostce przyśpieszenia. Mamy np.:

$$5\,\frac{\text{cm}}{\text{sek}^2} = 5\,\frac{\text{cm/sek}}{\text{sek}} = \frac{300\ \text{cm/min}}{\text{sek}} = \frac{18000\ \text{cm/min}}{\text{min}} = 18000\,\frac{\text{cm}}{\text{min}^2}$$

W przejściu od sekund do minut liczba, wyrażająca prędkość, zwiększyła się 60 razy, liczba zaś, wyrażająca przyśpieszenie, zwiększyła się 3600 czyli 60² razy. Widzimy z tego przykładu, że pisanie jednostki przyśpieszenia w postaci cm/sek² ma pewne uzasadnienie.

§ 16. *O ruchu prostolinjowym jednostajnie przyśpieszonym.*

Ruch prostolinjowy punktu nazywamy *jednostajnie przyśpieszonym,* jeżeli średnie przyśpieszenie jest w nim zawsze to samo, bez względu na to, między któremi chwilami jest utworzone. Jakkolwiek wybralibyśmy więc chwile t_1, t_2, t_3 i t. d., pomiędzy któremi upływają odstępy τ_1, τ_2 i t. d., mamy zawsze w ruchu prostolinjowym jednostajnie przyśpieszonym

1. $$\frac{v_2 - v_1}{\tau_1} = \frac{v_3 - v_2}{\tau_2} = \frac{v_4 - v_3}{\tau_3} = \text{ i t. d.}$$

lub innemi słowy

2. $$f_1 = f_2 = f_3 = \text{ i t. d.}$$

W ruchu prostolinjowym jednostajnie przyśpieszonym mamy zatem tylko *jedno* średnie przyśpieszenie *stałe*, które oznaczamy przez f.

Jak w § 7-ym, rozpoczynamy rachubę czasu w chwili początkowej, w której kładziemy $t = 0$. Prędkość punktu M w chwili początkowej niechaj wynosi v_0; w dowolnej chwili późniejszej t niechaj wynosi v. Okres czasu, upływający od chwili początkowej do chwili t, możemy wybrać za którybądź powyższy odstęp τ; skoro f jest stałe, mamy wówczas

3. $$\frac{v - v_0}{t} = f;$$

stąd otrzymujemy

4. $$v = v_0 + ft.$$

Kładąc $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 =$ i t. d. w równaniach (1), otrzymujemy

5. $$v_2 - v_1 = v_3 - v_2 = v_4 - v_3 = \text{ i t. d.}$$

W ruchu prostolinjowym jednostajnie przyśpieszonym, jednakowym odstępom czasu odpowiadają jednakowe przyrosty prędkości. W twierdzeniu odwrotnem musimy zastrzec, że odstępy czasu, o których mówimy, są nietylko jednakowe, lecz, że mogą być dowolnie wybrane; podobnie jak w § 8-ym, przekonywamy się, że to zastrzeżenie jest niezbędne.

Zadania.

1. Jaką wartość ma przyśpieszenie punktu, poruszającego się po torze prostolinjowym, z prędkością stałą?

2. W chwili $t = 0$ prędkość $v_0 = 5$ cm/sek. Wiedząc, że ruch jest prostolinjowy jednostajnie przyśpieszony i że f ruchu $= 1$ cm/sek^2, obliczyć prędkość

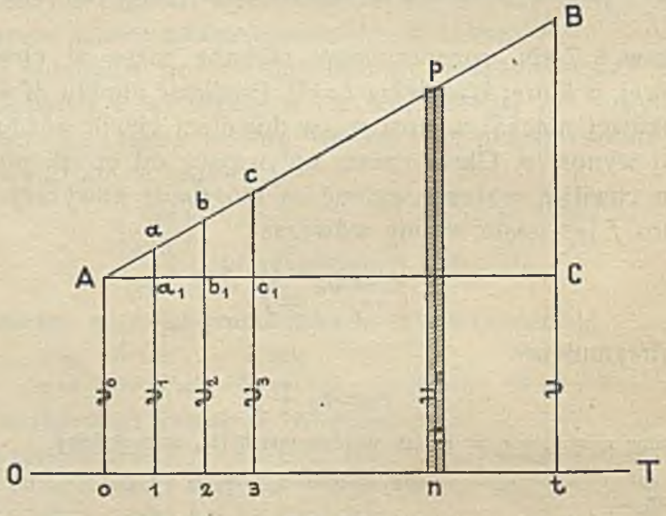
v osiągniętą po kwadransie. Znaleźć czas, w którym prędkość ruchu dojdzie do 100 m/sek.

3. Pociąg kolejowy ma 90 m długości. Przy pomocy sekundowego zegarka obserwator A spostrzegł, że pociąg (od przodu lokomotywy do tylnej ściany ostatniego wagonu) przebiegł koło niego w przeciągu 4 sekund. Inny obserwator B umieścił się dalej wzdłuż toru; koło niego pociąg przejechał w przeciągu 3 sekund. Jakie prędkości pociągu możemy obliczyć na mocy tych danych? Znaleźć je w cm/sek.

4. Wiadomo, w przypadku powyższego zadania 3-go, że pociąg przebiegł koło obserwatora B o pół minuty później, niż koło obserwatora A. Jakie przyśpieszenie pociągu możemy obliczyć? Znaleźć je w cm/sek² oraz w m/min².

§ 17. *Droga, przebywana w ruchu prostolinjowym jednostajnie przyśpieszonym.*

Wyobraźmy sobie ruch prostolinjowy jednostajnie przyśpieszony. Niechaj prędkość poruszającego się punktu M wynosi v_0



Rys. 19.

w chwili $t=0$; w późniejszej chwili t niechaj wynosi v. Ponieważ ruch jest jednostajnie przyśpieszony, przyśpieszenie f jest stałe; równania § 16-go stosują się. Oznaczmy przez s_0 odległość punktu M w chwili $t=0$ od stałego miejsca O toru; przez s rozumiejmy tę samą odległość w chwili t. W jaki sposób odległość s zależy od czasu t? Żeby na to pytanie znaleźć odpowiedź, posługujemy się rozumowaniem graficznem.

Na osi OT (rys. 19) odcinamy odcinki 01, 12, 23 i t. d., które, według umówionej skali, wyobrażają pierwszą, drugą, trzecią i t. d. sekundę, od chwili $t=0$ począwszy; punkt 0 wyobraża zatem chwilę początkową, punkt 1 chwilę $t=1$ sek i t. d. W punktach 0, 1, 2, 3... t wyprowadzamy prostopadłe do OT i odmierzamy na nich, według umówionej skali, prędkości: v_0, v_1, v_2, v_3... v, które punkt M w odpowiednich chwilach osiągnął. Powiadamy, że końce A, a, b, c,... B odcinków $0A$, $1a$, $2b$, $3c$,... tB leżą na *wspólnej prostej* AB. Istotnie, gdy poprowadzimy prostą AC równoległą do OT, widzimy, że

1. $$Ab_1 = 2Aa_1; \quad Ac_1 = 3Aa_1 \quad \text{i t. d.},$$

wnosimy zatem z równań (1) § 16-go, że

2. $$b_1 b = 2a_1 a; \quad c_1 c = 3a_1 a \quad \text{i t. d.}$$

Takie własności trójkątów Aa_1a, Ab_1b, Ac_1c i t. d. dowodzą, że te trójkąty mają kąt ostry w A wspólny, t. j. że a, b, c i t. d. leżą na wspólnej linji prostej AB.

Dzielimy teraz odstęp, który upłynął od $t=0$ do chwili t, na pewną liczbę bardzo krótkich odstępów τ, z których jeden jest wskazany na rys. 19-ym. W środkowej chwili n tego odstępu prowadzimy prostą prostopadłą do osi OT, aż do przecięcia się w p z prostą AB; długość np wyobraża wówczas, w umówionej skali, prędkość v_n punktu M w chwili n. Gdyby punkt M poruszał się jednostajnie w pobliżu chwili n, z prędkością stałą v_n, przebyłby w czasie τ drogę $v_n\tau$ (§ 8); wartość liczbową tej drogi wyobraża zatem prostokąt, zacieniowany na rysunku.

Przypuśćmy, że pewien pomocniczy (pomyślany, czyli fikcyjny) punkt N porusza się w sposób następujący: w każdym z bardzo krótkich odstępów τ ma on prędkość stałą, równą prędkości v, jaką ma punkt M w środkowej chwili tego odstępu. Droga, którą pomocniczy punkt N odbędzie pomiędzy chwilą $t=0$ a chwilą t, będzie wyrażona przez sumę wielu wąskich pasków czyli prostokątów, zbudowanych podobnie jak zacieniowany prostokąt. Im krótsze będą odstępy τ, tem bardziej zbliżać się będzie ruch fikcyjnego punktu N do ruchu rzeczywistego punktu M; im krótsze będą odstępy τ, tem bardziej zbliżać się będzie do pola figury $0ABt$ owa suma pasków czyli prostokątów, o której przed chwilą wspomnieliśmy. Dochodzimy zatem do wniosku: pole figury $0ABt$ wyobraża wartość liczbową drogi $s - s_0$, którą punkt

M przebywa pomiędzy początkową chwilą $t=0$ a chwilą t. Pozostaje obliczyć pole $0ABt$; widzimy z rysunku, że ono składa się z dwóch części:

(1) z pola prostokąta $0tCA$, które wynosi $v_0 t$

(2) z pola trójkąta ACB; to pole wynosi $\frac{1}{2}(v-v_0)t$, co podług równania (3) w § 16-ym można przepisać w postaci $\frac{1}{2}ft^2$.

Otrzymujemy zatem ostatecznie

3. $$s=s_0+v_0 t+\tfrac{1}{2}ft^2.$$

Wartość s_0 zależy od wyboru miejsca O, od którego liczymy s; jeżeli miejsce O wybierzemy w tym punkcie toru, przez który przebiega punkt M w początkowej chwili rachuby czasu, wówczas $s_0=0$. Mamy wówczas z (3)

4. $$s=v_0 t+\tfrac{1}{2}ft^2.$$

Rugując t z obecnego równania (4) i z równania (3) albo (4) w § 16-ym, otrzymujemy

5. $$v^2-v_0^2=2fs.$$

Zadania.

1. Pociąg wyjeżdża ze stacji; po upływie 2 minut od chwili wyruszenia przebył odległość 2160 m. Zakładając, że ruch był prostolinjowy i jednostajnie przyśpieszony, obliczyć przyśpieszenie. W tem samem założeniu obliczyć prędkość pociągu w odległości 540 m od stacji; obliczyć prędkość pociągu po upływie 1, 2, 3 minut od chwili wyruszenia.

2. Ciało zaczyna poruszać się ruchem prostolinjowym jednostajnie przyśpieszonym; przyśpieszenie wynosi 1 m/sek², prędkość początkowa jest żadna. Jak długo i jak daleko ciało biec musi, ażeby osiągnąć prędkość głosu w zwykłem powietrzu (340 m/sek)? Ile czasu zajmie przebycie drogi 72 m? Jak daleko ciało dobiegnie po upływie godziny?

§ 18. O ruchu prostolinjowym opóźnionym oraz jednostajnie opóźnionym.

Przypuśćmy, że punkt M porusza się w linji prostej; wyobraźmy sobie, że w chwili t_1 prędkość prawdziwa wynosi v_1, w późniejszej zaś chwili t_2 wynosi v_2, gdzie $v_2<v_1$. Powiadamy wówczas, że między t_1 i t_2 ruch jest *opóźniony*. Rozumiejąc znów przez τ_1 odstęp t_2-t_1, tworzymy stosunek $(v_1-v_2)/\tau_1$;

stosunek ten nazywamy *średniem opóźnieniem* punktu M między uważanemi chwilami t_1 i t_2. Podobnie postępujemy dalej, w następujących odstępach τ_2, τ_3 i t. d. Co powiedzieliśmy w § 15-ym o ruchu prostolinjowym przyśpieszonym, możemy powtórzyć, z łatwo zrozumiałemi zmianami, w obecnym przypadku ruchu prostolinjowego opóźnionego.

Jeżeli średnie opóźnienie w ruchu prostolinjowym jest *stałe*, bez względu na to, między któremi chwilami jest utworzone, wówczas ruch nazywamy *jednostajnie opóźnionym*. Rozumując jak w § 16-ym, możemy obliczyć prawdziwą prędkość v punktu M, odpowiadającą chwili t w takim ruchu. Jeżeli v_0, jak w § 16 ym, jest prędkością w chwili początkowej $t = 0$, f zaś wartością stałego opóźnienia, otrzymujemy

1. $$v = v_0 - ft.$$

Rozumując jak w § 17-ym, znajdujemy odległość s, która w chwili t oddziela punkt M od stałego miejsca O toru. Jeżeli s_0 oznacza tę samą odległość OM w chwili $t = 0$, otrzymujemy

2. $$s = s_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} f t^2.$$

Porównawszy obecne równania (1) i (2) z równaniami: (4) § 16-go oraz (3) § 17-go, spostrzegamy, że wartość $+f$ ówczesnych wzorów jest teraz zastąpiona przez $-f$. Umawiamy się zatem, że każde *opóźnienie* ruchu prostolinjowego będziemy uważali za *ujemne przyśpieszenie*; możemy wówczas stosować prawa §§ 16-go i 17-go zarówno w przypadku ruchu jednostajnie przyśpieszonego jak w przypadku ruchu jednostajnie opóźnionego.

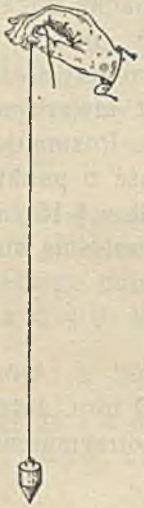
Zadania.

1. Pociąg, o którym mowa w zad. 1-em § 17-go, dojeżdża do stacji B, na której ma się zatrzymać; prędkość ruchu zmniejsza się z czasem dokładnie tak samo, jak powiększała się przy wyjeździe z ówczesnej stacji A. Jakie jest przyśpieszenie w pobliżu stacji B?

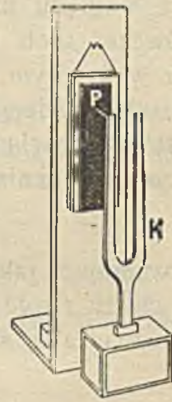
2. Dojeżdżając do stacji B, powyższy pociąg znajduje się jeszcze w odległości 10 m od miejsca, w którem zatrzyma się; jaką w tej chwili ma prędkość? Ile sekund jeszcze upłynie, zanim się zatrzyma? Jeżeli wiadomo, że za 1·5 minuty stanie, w jakiej odległości znajduje się wówczas od miejsca postoju?

§ 19. Przykład ruchu prostolinjowego jednostajnie przyśpieszonego.

W §§ 16-ym i 17-ym poświęciliśmy bliższą uwagę własnościom ruchu prostolinjowego jednostajnie przyśpieszonego, albowiem ten rodzaj ruchu wydarza się codziennie przed naszemi oczyma. Wiemy, że otaczające nas ciała materjalne, skoro zostaną swobodnie puszczone, *spadają*. Jakże poruszają się wówczas? Tego nie odkryje rozumowanie. Rozumowanie może kierować doświadczeniem, może porządkować jego wyniki i wydobywać z nich nieoczekiwane następstwa; ale doświadczenia nie może zastąpić.



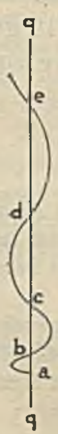
Rys. 20.



Rys. 21.

Prosty przyrząd, zwany *pionem* (rys. 20), jest każdemu znany; wiadomo, że wskazuje on t. zw. *pionowy* kierunek. Ciało swobodnie puszczone, które nie zostało rzucone ani popchnięte w żadnym kierunku, biegnie ku ziemi po linji (prawie dokładnie) prostej pionowej. Chcemy zbadać, w jaki sposób porusza się ono po tym torze.

Wyobraźmy sobie płytkę szklaną *P* (rys. 21), którą dla bezpieczeństwa przyklejono do drewnianej deseczki; płytkę tę powleczono sadzą w płomieniu świecy lub naftowej lampy. Deseczka wraz z płytką *P* wisi na nitce; jeżeli przepalimy nitkę ostrym płomykiem, deseczka wraz z płytką *P* opada ku dołowi. Rysujemy na płycie linję prostą *qq* pionową (rys. 22) i zbliżamy do niej widełki strojowe *K* (por. § 5), zaopatrzone w rysik. Przypuśćmy z początku, że płyta jest w spoczynku; niechaj *a* na prostej *qq* będzie punktem, w którym rysik dotyka wówczas płyty. Pozwólmy płycie opadać, gdy widełki jeszcze nie drgają; torem rysika na płycie jest wówczas prosta *qq*. Wyobraźmy sobie teraz, że wprowadzamy widełki w drganie i jednocześnie uwalniamy płytę, która poczyna opadać; rysik pozostawia wówczas ślad falisty na płycie, w postaci krzywej *a b c d e*... (rys. 22). Odległości *ab*, *bc*, *cd*, *de* i t. d. są to oczywiście drogi, przebyte przez płytę w ciągu pierwszego, drugiego, trzeciego i t. d. półokresu drgania widełek. Wymierzamy owe odległości starannie; znajdujemy



Rys. 22.

1. $bc = 3\,ab$; $cd = 5\,ab$; $de = 7\,ab$ i t. d.

Stąd obliczamy drogi s, przebieżone do końca pierwszego, drugiego, trzeciego i t. d. półokresu:

2. ab; $ac = ab + bc = 4\,ab$; $ad = ac + cd = 9\,ab$;
$ae = ad + de = 16\,ab$; i tak dalej.

Drogi te s mają się do siebie jak $1:4:9:16$ i t. d.; ponieważ zaś odpowiadają chwilom $t = 1, 2, 3, 4\ldots$ półokresom, więc zgadzają się z formułą, znaną nam z poprzedzającego artykułu

3. $$s = \tfrac{1}{2} f t^2.$$

Widzimy zatem, że płyta porusza się ruchem jednostajnie przyśpieszonym. Takim samym ruchem są ożywione wszelkie ciała, gdy spadają swobodnie. Zobaczymy w III-im rozdziale, że wszystkie ciała materjalne, spadając, okazują to samo przyśpieszenie, które nazywa się *przyśpieszeniem ciężkości* i bywa zwykle oznaczane literą g (od wyrazu łacińskiego *gravitas*, ciężkość).

Napiszmy g zamiast f w równaniu (3); otrzymujemy

4. $$s = \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Spróbujmy posłużyć się wzorem (4) w celu zmierzenia przyśpieszenia g. Przypuśćmy, że w opisanem doświadczeniu użyliśmy widełek, których całkowite drganie powtarza się 125 razy w przeciągu sekundy; okres wynosi więc 0·008 sek, półokres 0·004 sek. Przypuśćmy, że powtórzyliśmy doświadczenie wielokrotnie; że, tworząc wynik przeciętny, znaleźliśmy 3·14 cm jako drogę, przebytą przez płytę w przeciągu 20 półokresów. Kładąc w równaniu (4)

5. $$t = 0{\cdot}08 \text{ sek} \qquad s = 3{\cdot}14 \text{ cm},$$

otrzymujemy przybliżenie $g = 981$ cm/sek^2; tyle wynosi w istocie przyśpieszenie g w Polsce.

Zadania.

1. Przypuśćmy, że całkowite drganie widełek powtarza się 250 razy w ciągu sekundy; ile wyniesie droga, przebyta przez płytę podczas 20 półokresów? Jeżeli droga s jest przebiegana przez płytę w przeciągu x okresów drgania, ile drgań na sekundę wykonywają użyte widełki?

2. Możemy przybliżenie ocenić wartość przyśpieszenia g przy pomocy następującego doświadczenia. Trzymamy w ręku metalową kulkę w wysokości 4·905 m nad kamienną posadzką lub płytą. Uwalniamy nagle tę kulę w chwili, gdy zegar, głośno bijący sekundy, wydzwania którąkolwiek sekundę. Słyszymy wówczas, że kula uderza płytę lub posadzkę w chwili następnego sekundowego sygnału. Spadanie trwało zatem 1 sekundę. Czy wynik ten zgadza się z równa-

niem (4) i z powyżej podaną wartością przyśpieszenia g? Jakie są najważniejsze źródła błędu w tem doświadczeniu i jak możnaby je było ominąć?

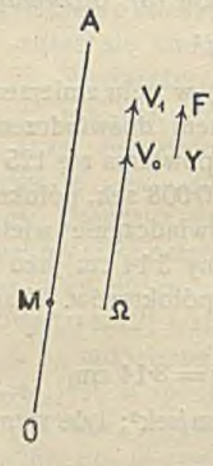
3. Pociąg kolejowy biegnie z prędkością 25 m/sek. Gdyby podróżny, ożywiony taką prędkością, uderzył o nieruchomą ścianę przedziału (jak to niestety wydarza się w razie nagłego spotkania się pociągów), skutek uderzenia byłby taki sam, jak gdyby podróżny był spadł z wysokości 31·85 m nad ziemią. Sprawdzić, że tak jest istotnie.

4. W książkach angielskich znajdujemy zazwyczaj podaną, jako wartość przyśpieszenia g, wartość 32·2 stóp ang. na sek². Przypuszczając, że stopa ang. = 30·48 cm, obliczyć, jakiej wartości g w cm/sek² odpowiada dana powyższa. Wyrazić g w jednostce: m/min².

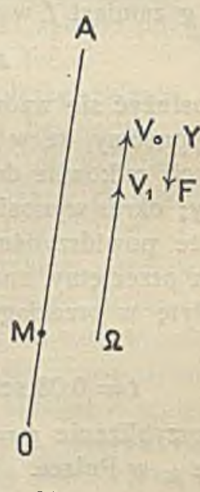
5. Przypuśćmy, że jednostką długości jest cm. Jaką jednostkę czasu τ należałoby przyjąć, ażeby liczbowa wartość g, wyrażona w cm/τ^2, wypadła równa jedności?

§ 20. *Przyśpieszenie, rozumiane jako wektor.*

Uważajmy jeszcze raz ruch prostolinjowy jednostajnie przyśpieszony; w takim ruchu obowiązuje równanie (4) § 16-go.



Rys. 23.



Rys. 24.

Weźmy na uwagę chwilę $t = 1$ sek; przypuśćmy, że prędkość punktu M wynosiła wówczas v_1 cm/sek. Kładąc $t = 1$ sek w formule (4) § 16-go, otrzymujemy

1. $$v_1 = v_0 + f \, . \, 1 \text{ sek.}$$

Ażeby otrzymać v_1, musimy więc dodać do v_0 dodatkową prędkość, wynoszącą f cm/sek. Wybieramy w tym celu dowolny punkt Ω (rys. 23); z punktu Ω wyprowadzamy wektor ΩV_0, który co do kierunku i długości wyobraża prędkość v_0. Do wektora ΩV_0 dodajemy drugi wektor V_0V_1, idący w przedłużeniu ΩV_0 i mający f cm długości; wówczas ΩV_1 co do kierunku i długości wyobraża prędkość v_1. Powiadamy, że V_0V_1 (lub równy i równoległy YF) wyobraża przyśpieszenie f poruszającego się punktu M.

Gdyby ruch prostolinjowy punktu M był jednostajnie opóźniony (§ 18), doszlibyśmy podobnie do wniosku, że wektor V_0V_1 (lub równy i równoległy YF), który wyobraża przyśpieszenie, jest skierowany przeciwnie niż ΩV_0 oraz ΩV_1 (rys. 24).

§ 21. *Ruch prostolinjowy przyśpieszony. Przyśpieszenie chwilowe albo prawdziwe.*

W kilku artykułach ostatnich, poczynając od § 16-go, zajmowaliśmy się własnościami ruchu prostolinjowego jednostajnie przyśpieszonego albo jednostajnie opóźnionego. Lecz ten przypadek ruchu nie jest oczywiście regułą, jest raczej wyjątkiem. Ażeby to twierdzenie na przykładzie objaśnić, wyobraźmy sobie jeszcze raz ruch kolejowego pociągu pomiędzy stacjami A i B. Przypuśćmy, iż pociąg, wyjeżdżając ze stacji A, ma stałe przyśpieszenie f; gdyby miał je dalej bez zmiany, poruszałby się wkrótce z ogromną, niebezpieczną i nawet niemożliwą prędkością. Ruch pociągu, który przy wyjeździe z A był jednostajnie przyśpieszony, przeobraża się wkrótce w ruch jednostajny; zatem wartość przyśpieszenia od f zeszła do zera. Gdy przyśpieszenie zmalało do zera, prędkość v nie zmniejszyła się przez to; zamiast rosnąć, utrwaliła się tylko, przemieniła się w stałą. Gdy pociąg dojeżdża do B, gdzie ma się zatrzymać, prędkość v poczyna się zmniejszać, przyśpieszenie f od zera przechodzi do wartości ujemnych. Widzimy, że pomiędzy A i B przyśpieszenie, chociaż przez pewien czas może być stałe, naogół jednak jest *zmienne*.

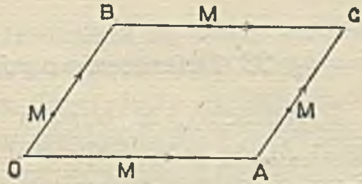
Gdy przyśpieszenie jest zmienne, mówimy, że dany ruch prostolinjowy jest *niejednostajnie przyśpieszony*. Ażeby taki ruch opisać, posługujemy się postępowaniem, które znamy z § 15-go; w kolejnych odstępach czasu τ_1, τ_2, τ_3 i t. d. tworzymy *średnie przyśpieszenia* f_1, f_2, f_3 i t. d., odpowiadające tym odstępom. Lecz utworzywszy takie średnie przyśpieszenia, nie opisaliśmy jeszcze ruchu zupełnie dokładnie. Ponieważ przez przeciąg czasu np. τ_1 charakter ruchu mógł ulegać zmianie (naprzykład u końca tego okresu ruch mógł być bardziej przyśpieszony niż na począstku), więc opisanie ruchu w odstępie τ_1 zapomocą średniego f_1 jest tylko ogólnikowe. Przypuśćmy dla objaśnienia, że podano tylko *średnią* temperaturę powietrza w Warszawie w m. maju 1920-go roku lub *średnią* ilość deszczu w Zakopanem za m. sierpień 1919, nie wchodząc w bliższe szczegóły; takie opisanie przebiegu temperatury lub opadów atmosferycznych w tych miejscowościach i okresach czasu byłoby bardzo ogólnikowe i w wielu razach okazałoby się niedostateczne.

Ażeby opisanie ruchu stało się dokładniejsze, mamy ku temu tylko jeden sposób; ten sam, który znamy z § 14-go. Tworzymy krótkie, możliwie jaknajkrótsze odstępy czasu τ_1, τ_2, τ_3 i t. d.; im one będą krótsze, tem subtelniejszy, tem wiarogodniejszy będzie obraz ruchu, który tworzą przyśpieszenia f_1, f_2, f_3 i t. d. Przypuśćmy, że zajmuje nas osobliwie ruch punktu M w pewnej chwili t. Dokoła tej chwili tworzymy odstęp czasu τ, tak żeby chwila t leżała w jego obrębie; z prędkości punktu przy końcu i u początku okresu τ oraz z długości τ wyliczamy średnie przyśpieszenie f, które odpowiada odstępowi τ. Jeżeli ta średnia nie wyraża własności ruchu w chwili t dostatecznie dokładnie, tworzymy dokoła t coraz krótsze odstępy τ_1, τ_2 i t. d. (rys. 17); w taki jednak sposób, ażeby każdy odstęp zawierał w sobie chwilę t. Im krótszy dokoła t wybraliśmy odstęp τ, tem wiarogodniejszym wyrazem własności ruchu w chwili t wydaje się średnie przyśpieszenie f, odpowiadające odstępowi τ. *Prawdziwem lub chwilowem przyśpieszeniem punktu M w chwili t jego ruchu prostolinjowego nazywamy granicę, do której dąży średnie przyśpieszenie w odstępie τ (zawierającym chwilę t w sobie), gdy zarówno odstęp τ, jak różnica prędkości punktu, u końca i u początku odstępu τ, jednocześnie dążą do zera.* Jeżeli prawdziwe przyśpieszenie w chwili t okaże się dodatnie, mówimy, że prostolinjowy ruch punktu jest w tej chwili rzeczywiście (albo dodatnio) *przyśpieszony*; jeżeli ono wypadnie ujemne, nazywamy ruch w chwili t *opóźnionym*; gdyby ono w chwili t było równe zeru, powiedzielibyśmy, że ruch w najbliższem sąsiedztwie tej chwili jest *jednostajny*.

§ 22. *Zasada niezależności ruchów.*

Wyobraźmy sobie, że człowiek M chodzi po pokładzie okrętu N, okręt zaś N jednocześnie płynie po jeziorze lub rzece. Człowiek *M* odbywa wówczas dwa naraz ruchy: (1) odbywa swój własny, osobisty ruch względem okrętu (2) uczestniczy w ruchu okrętu, który przecież wraz z sobą unosi człowieka *M*.

Uważajmy po kolei *trzy* następujące zjawiska: (I) (*a*) okręt *N* pozostaje najprzód nieruchomy; człowiek *M*, poruszając się po nim, odbywa pewną drogę, np. prostą *OA* (rys. 25); (*b*) człowiek *M* w miejscu *A* pokładu okrętu pozostaje względem niego nieruchomy; okręt płynie w kierunku *AC*, skutkiem czego jego punkt *A* a zarazem człowiek *M* przenosi się do *C*. W ostatecznym wyniku dwóch kolejnych ruchów (*a*) i (*b*) człowiek *M*, wyruszywszy z *O*, dociera do *C*.



Rys. 25.

(II) Przypuśćmy, że opisane dwa ruchy odbywają się w przeciwnym porządku: (*a*) najprzód okręt *N* posuwa się w kierunku *OB* równoległym do *AC* (rys. 25); spoczywający na pokładzie człowiek *M* przenosi się z *O* do *B*, gdzie $OB = AC$; (*b*) okręt pozostaje nieruchomy; człowiek *M*, posuwając się po nim w kierunku $BC \parallel OA$, odbywa drogę *BC*, która jest $= OA$. Widzimy, że w wyniku obecnych dwóch ruchów (*a*) i (*b*) człowiek *M* dotrze do tego samego miejsca *C*, które był w zjawisku (I) osiągnął. Porządek dodawania się ruchów nie ma wpływu na ostateczny wynik zjawiska.

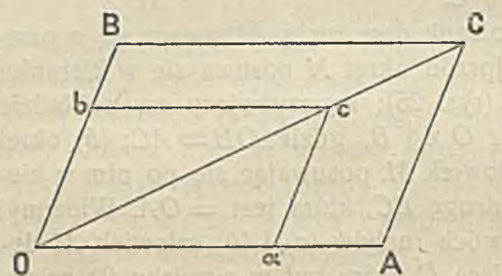
(III) Przypuśćmy, że ruchy, które uważaliśmy dotychczas za *kolejne*, odbywają się *jednocześnie*. Człowiek *M* porusza się względem okrętu *N* po torze *OA*; jednocześnie ten tor, ulegając ruchowi okrętu, posuwa się w taki sposób, iż każdy jego punkt zatacza drogę równoległą do *OB* i równą *OB*. Odbywając oba te ruchy spółcześnie, człowiek osiągnie ostatecznie to samo miejsce *C*, w którem znalazł się w wyniku I-go albo też II-go zjawiska.

Twierdzenia, które tutaj poznaliśmy, wynikają z ogolnej zasady, zwanej *prawem niezależności ruchów*; zasada ta orzeka, że *dwa ruchy, spółczesne albo kolejne, które odbywa ten sam punkt, nie przeszkadzają ani nie pomagają sobie wzajemnie*; *każdy ruch odbywa się tak samo, jak gdyby drugi nie odbywał się wcale.* Przekonamy się wkrótce, jak częste i ważne są zastosowania, które ta zasada znajduje.

Przypuśćmy, że punkt M odbywa jednocześnie dwa ruchy; nazwijmy je dla zwięzłości *składowemi* ruchami punktu M. Punkt, który wykonywa jednocześnie dwa ruchy składowe, jest ożywiony ruchem *wypadkowym*, powstającym przez *złożenie*, według zasady niezależności, obu ruchów składowych. Zobaczymy natychmiast, w prostym przypadku, jak dokonywa się *składanie* dwóch ruchów składowych.

§ 23. *Twierdzenie o równoległoboku przemieszczeń.*

Przypuśćmy, że obadwa ruchy składowe, które wykonywa punkt M, są prostolinjowe i jednostajne. Niechaj OA na rys. 26-ym wyobraża przemieszczenie, którego punkt M doznałby w pewnym odstępie czasu T, gdyby poruszał się tylko pierwszym ruchem składowym; OB na tym samym rysunku niechaj wyobraża przemieszczenie, którego doznałby M w tym samym czasie T, gdyby wykonywał tylko ruch drugi składowy. Poprowadźmy prostą AC, równą OB i równoległą do OB; według § 22 go, punkt M, ożywiony ruchem wypadkowym, dojdzie w czasie T do miejsca C. Uważajmy teraz inny odstęp czasu t, rozpoczynający się jednocześnie z T, ale krótszy niż T. Niechaj Oa i Ob (rys. 26) wyobrażają przemieszczenia, których doznaje punkt M w czasie t, zosobna w pierwszym i w drugim ruchu składowym. Prowadzimy prostą ac równą Ob i równoległą do Ob; jak przed chwilą, widzimy, że po upływie czasu t punkt M dojdzie do miejsca c. Łatwo teraz udowodnimy, że punkt c leży na przekątni OC równoległoboku $OABC$. Oznaczmy przez u prędkość punktu M w pierwszym, przez v jego prędkość w drugim ruchu składowym; mamy



Rys. 26.

1. $$Oa = ut \quad OA = uT \quad Ob = vt \quad OB = vT.$$

Stąd wyprowadzamy

2. $$Oa : OA = t : T; \quad Ob : OB = t : T$$

a zatem także

3. $$Oa : OA = Ob : OB.$$

Proporcję (3) przepisujemy w postaci

4. $$Oa : OA = ac : AC$$

skąd wynika, że c leży na prostej OC. Mamy również oczywiście

5. $$Oc : OC = Oa : OA = Ob : OB = t : T.$$

W ruchu wypadkowym punkt M przemieszcza się zatem *wzdłuż przekątni OC równoległoboku, zbudowanego na OA* i *OB i przebywa drogi proporcjonalne do czasu.* Powiadamy ogólnie: *ruch wypadkowy, złożony z dwóch ruchów prostolinjowych jednostajnych, jest prostolinjowy jednostajny*; *przemieszczenie wypadkowe, którego ruchomy punkt doznaje w ruchu wypadkowym, jest dane* (*co do długości i co do kierunku*) *przez przekątnię równoległoboku, zbudowanego na przemieszczeniach składowych*; *ta przekątnia wychodzi oczywiście ze wspólnego początku składowych przemieszczeń.* Twierdzenie to nazywamy *zasadą równoległoboku przemieszczeń.*

Zadania.

1. Przemieszczenia składowe są umiejscowione w tej samej prostej. Znaleźć wypadkowe przemieszczenie (1) gdy kierunki składowych przemieszczeń są zgodne (2) gdy te kierunki są sobie przeciwne.

2. Złożyć dwa równe sobie przemieszczenia, zakładając, że one zawierają między sobą kąt: 0°, 45°, 90°, 135°, 180°.

3. Idąc poziomo naprzód ze stałą prędkością 1 m/sek, podnoszę lampę pionowo do góry ze stałą prędkością 15 cm/sek. Znaleźć przemieszczenie, którego lampa doznaje w przeciągu 25 sekund względem ziemi oraz kąt nachylenia tego przemieszczenia względem poziomu.

4. W spokojnem powietrzu aeroplan posuwałby się prostolinjowo i jednostajnie ku północy, z prędkością 30 m/sek; silny wiatr unosi go jednak na wschód, ruchem prostolinjowym jednostajnym, z prędkością 12 m/sek. Znaleźć wypadkowe przemieszczenie po 10 sek i wyznaczyć jego kierunek.

5. Przypuśćmy, że punkt M odbywa jednocześnie dwa ruchy prostolinjowe jednostajnie przyśpieszone. Udowodnić, że ruch wypadkowy w tym razie jest również prostolinjowy jednostajnie przyśpieszony, podobnie jak ruchy składowe.

§ 24. *Twierdzenie o równoległoboku prędkości.*

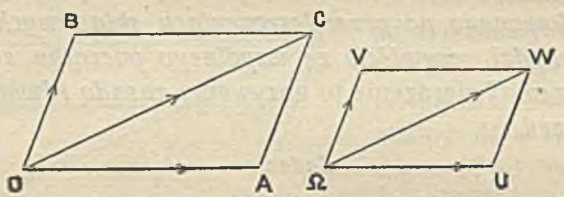
Jeżeli punkt jednocześnie odbywa dwa ruchy, zatem jest obdarzony dwiema naraz prędkościami. Przypuśćmy, że punkt M odbywa jednocześnie dwa ruchy prostolinjowe jednostajne. Niechaj będą OA i OB (rys. 27) składowe przemieszczenia, których doznaje punkt M w czasie t w pierwszym oraz w drugim swoim ruchu składowym; przekątnia OC równoległoboku $OABC$ wyobraża wówczas przemieszczenie wypadkowe, którego doznaje punkt M w czasie t. Oznaczmy przez u prędkość pierwszego składowego ruchu, przez v prędkość drugiego; te prędkości nazywamy *składowemi*. Według § 23-go ruch wypadkowy jest prostolinjowy jednostajny, odbywa się więc z prędkością stałą, którą nazywamy *wypadkową*; oznaczmy ją przez w. Mamy

1. $$OA = ut \quad OB = vt \quad OC = wt$$

zatem

2. $$OA : OB : OC = u : v : w$$

Prędkości u, v, w są wektorami; rysujemy je zatem, jak powiedziano w § 12-ym. Z dowolnego punktu Ω (rys. 27) prowa-



Rys. 27.

dzimy proste ΩU, ΩV, ΩW, równoległe odpowiednio do OA, OB, OC; na tak poprowadzonych prostych odcinamy następnie długości ΩU, ΩV, ΩW, zawierające tyle cm, ile u, v, w zawierają jednostek cm/sek. Proporcję (2) przepisujemy teraz w postaci

3. $$OA : OB : OC = \Omega U : \Omega V : \Omega W$$

która wskazuje, że figury $OABC$ i ΩUVW są *podobne*; skąd wynika, że ΩUVW jest *równoległobokiem*, zbudowanym na bokach ΩU i ΩV i że ΩW jest jego *przekątnią*. Wygłaszamy zatem twierdzenie następujące: *prędkość wypadkowa w jest dana* (*co do wartości i co do kierunku*) *przez przekątnię równoległoboku, zbudowanego na prędkościach składowych u, v.*

Przechodzimy teraz do ogólniejszego przypadku. Przypuśćmy, że ruchy składowe punktu M są prostolinjowe lecz niejednostajne. Załóżmy, że odstęp czasu t, w którym dokonywają się przemieszczenia, jest nadzwyczajnie krótki. Boki i przekątnia równoległoboku *przemieszczeń* są wówczas nadzwyczajnie krótkie;

ale boki i przekątnia wyprowadzonego zeń równoległoboku *średnich* (w czasie *t*) *prędkości* mogą wcale nie być krótkie. Niechaj długość odstępu czasu *t* zbliża się nieograniczenie do zera; średnie (w czasie *t*) prędkości dążą do prawdziwych prędkości, równoległobok średnich prędkości dąży w granicy do równoległoboku prawdziwych prędkości. *Prawdziwa prędkość wypadkowa jest dana (co do wartości i co do kierunku) przez przekątnię równoległoboku, zbudowanego na prawdziwych prędkościach składowych.*

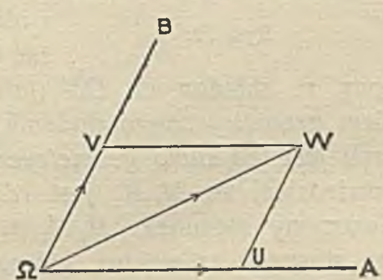
Dodawanie *arytmetyczne* stosuje się do wielkości arytmetycznych, które mają tylko jednę własność, *wartość liczbową*. *Algebraiczne* dodawanie, oprócz liczbowej wartości, uwzględnia również *znak* uważanych wielkości. Przemieszczeń ani prędkości nie możemy dodawać do siebie arytmetycznie ani algebraicznie, ponieważ one, prócz wartości liczbowej, mają jeszcze inne cechy: są *umiejscowione w prostych*, są *skierowane w przestrzeni*; musimy dodawać je do siebie *geometrycznie*. Prawidła geometrycznego dodawania są właśnie zawarte w zasadzie równoległoboku.

Zadania.

1. Wóz toczy się po drodze, która wznosi się do góry; w chwili *t* wóz ma prędkość 1·97 m/sek w kierunku poziomym, oraz 0·35 m/sek w pionowym. Obliczyć prędkość wypadkową wozu w chwili *t* oraz jej nachylenie do poziomu.
2. Znaleźć wypadkową następujących prędkości: 1 cm/sek na zachód, 2 cm/sek na północ, 3 cm/sek na wschód.
3. Ruchy składowe punktu są skierowane prostopadle do siebie; prędkości ich u, v są dane. Jak znaleźć algebraicznie wypadkową ich w oraz dostawy kątów, tworzonych z tą wypadkową przez kierunki składowych?

§ 25. O rozkładaniu prędkości. O rzutach prędkości.

W § 24-ym widzieliśmy, w jaki sposób składowe prędkości ΩU i ΩV (rys. 28) *składają się* na wypadkową ΩW. Możemy odwrócić bieg postępowania; rys. 28 uczy zarazem, w jaki sposób daną prędkość ΩW można *rozłożyć* na składowe ΩU i ΩV. Zasada równoległoboku zawiera więc w sobie prawo zarówno składania, jak rozkładania prędkości. Istnieje jednak pewna różnica między temi zagadnieniami. Gdy składowe prędkości ΩU i ΩV są dane, ich wypadkowa ΩW jako wektor jest zupełnie określona. Gdy zaś dana jest prędkość ΩW, którą mamy rozłożyć,



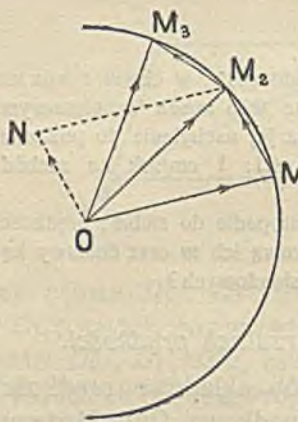
Rys. 28.

składowe jej stają się dopiero wówczas określone, gdy wiadomo, w jakich kierunkach ΩA, ΩB one mają być utworzone. Łatwo sprawdzić rysunkiem, że tę samą ΩW należy rozmaicie rozłożyć w rozmaitych kierunkach.

Prędkości składowe ΩU i ΩV rys. 28-go bywają nazywane *rzutami* prędkości ΩW na kierunki OA i OB; mówi się wówczas, że ΩW jest *odniesiona* do stałych *osi* OA i OB. Zazwyczaj odnosimy prędkości do kierunków stałych, wzajemnie prostopadłych do siebie, czyli do t. zw. *osi prostokątnych*; składowe nazywamy wówczas *prostopadłemi rzutami* prędkości na osi prostokątne.

§ 26. *Prędkość w dowolnym ruchu kołowym.*

Powracamy jeszcze raz do ruchu kołowego, którym zajmowaliśmy się już w §§ 9, 10 i 13. Niechaj $M_1 M_2 M_3$ (rys. 29) wyobraża tor kołowy czyli *orbitę* kołową, którą zatacza punkt M; M_1, M_2, M_3 są miejsca, przebiegane w chwilach t_1, t_2, t_3. Ze środka koła O prowadzimy promienie OM_1, OM_2, OM_3; nadając każdemu promieniowi kierunek od środka ku obwodowi, możemy je poczytywać za wektory. Uważajmy wektor OM_2; nie odróżnia on się długością, ale odróżnia się kierunkiem od wektora OM_1. Zbudujmy wektor $M_1 M_2$, skierowany od M_1 do M_2; oraz wektor ON, równy wektorowi $M_1 M_2$ i równoległy do niego. Możemy uważać OM_2 za wektor wypadkowy, złożony ze składowych ON (lub $M_1 M_2$) i OM_1; OM_2 jest wynikiem geometrycznego dodania do siebie wektorów OM_1 i $M_1 M_2$ czyli jest ich *sumą geometryczną*. Możemy więc równie słusznie powiedzieć, że $M_1 M_2$ jest *różnicą geometryczną* $OM_2 - OM_1$. Tworzymy stosunek: $M_1 M_2/(t_2 - t_1)$; jak w § 12-ym, uważamy ten stosunek za wektor, którego kierunek zgadza się z kierunkiem $M_1 M_2$; długość tego wektora wynosi tyle cm, ile jednostek cm/sek zawiera stosunek $M_1 M_2/(t_2 - t_1)$. Zbliżamy ku sobie chwile t_1 i t_2; skracamy więc odstęp $t_2 - t_1$ i prowadzimy go nieograniczenie do zera. Wektor $M_1 M_2$ skraca się coraz bardziej,



Rys. 29.

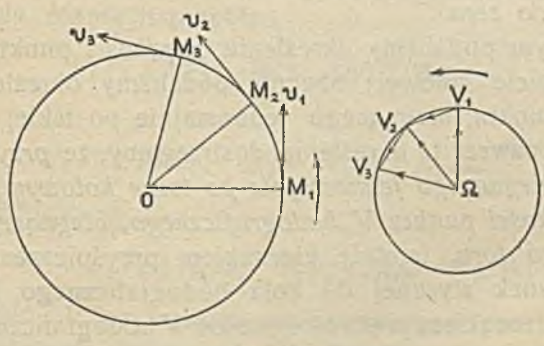
jego *długość* dąży do zera, ale jego *kierunek* nie ginie przez to, nie znika. Sieczna, zawarta pomiędzy punktami A, B obwodu koła (rys. 15), zachowywa kierunek od A do B, gdy B zbliża się ku A i w granicy przybiera kierunek stycznej (§ 13); podobnie wektor $M_1 M_2$ ma wciąż określony kierunek, jakkolwiek blisko M_2 dociera do M_1; w granicy $M_1 M_2$ przybiera kierunek stycznej do orbity w miejscu, w którem schodzą się M_2 i M_1. Jeżeli t jest chwilą, w której spotykają się t_2 i t_1, powiadamy: *prawdziwą (lub chwilową) prędkością punktu M w chwili t nazywamy wektor, umiejscowiony w stycznej do orbity; jego długością jest granica, do której dąży stosunek $M_1 M_2/(t_2 - t_1)$, gdy zarówno odstęp czasu $t_2 - t_1$, jak odpowiednia geometryczna różnica $M_1 M_2$ promieni dążą do zera.*

Podane tu określenie prędkości w ruchu kołowym zgadza się oczywiście z określeniami, zawartemi w §§ 9, 10 i 13, ale jest ogólniejsze i zupełniejsze, ponieważ tyczy się dowolnego (jednostajnego lub niejednostajnego) ruchu kołowego i ponieważ, w obecnem określeniu, prędkość jest rozumiana jako wektor.

Moglibyśmy zastosować obecne określenie do dowolnego ruchu prostolinjowego. Jeżeli punkt O wybierzemy w linji toru, promienie nie będą różniły się od dawniejszych odległości OM (rys. 7). Różnica geometryczna takich odległości sprowadza się do zwykłej algebraicznej różnicy. Natomiast w ruchu kołowym geometryczna różnica promieni nie jest zerem, chociaż długości ich są równe.

§ 27. *Przyśpieszenie w ruchu kołowym jednostajnym.*

Przypuśćmy, że punkt M krąży jednostajnie po orbicie kołowej; M_1, M_2, M_3 (rys. 30) niechaj oznaczają miejsca, które



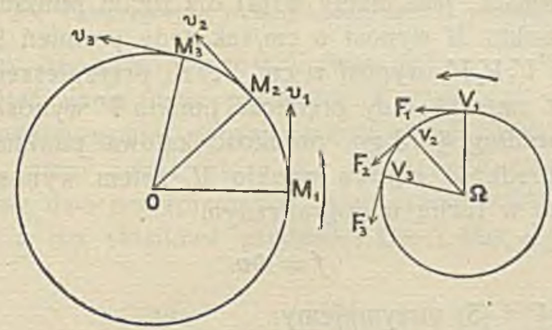
Rys. 30.

przebiega punkt M w chwilach t_1, t_2, t_3. Styczne do orbity wektory $M_1 v_1$, $M_2 v_2$, $M_3 v_3$ wskazują wartości i kierunki chwilowych prędkości v_1, v_2, v_3, któremi punkt M jest ożywiony w owych chwilach. Jak w § 13-ym, zbudujmy hodograf orbity $M_1 M_2 M_3$; niechaj nim będzie $\Omega V_1 V_2 V_3$ (rys. 30). Ponieważ punkt M krąży jednostajnie po kole $M_1 M_2 M_3$, przeto hodograf $\Omega V_1 V_2 V_3$ jest również kołem. Uważajmy wektor ΩV_2; nie różni się on od ΩV_1 długością, ale różni się kierunkiem. Zbudujmy wektor $V_1 V_2$, skierowany od V_1 do V_2; podobnie jak $M_1 M_2$ w § 26-ym, możemy poczytywać $V_1 V_2$ za różnicę geometryczną $\Omega V_2 - \Omega V_1$. Tworzymy stosunek $V_1 V_2/(t_2 - t_1)$ i uważamy go za wektor, o kierunku zgodnym z kierunkiem $V_1 V_2$, o długości zawierającej tyle cm, ile w stosunku $V_1 V_2/(t_2 - t_1)$ zawiera się jednostek cm/sek². Postępujemy dalej podobnie; tworzymy stosunek $V_2 V_3/(t_3 - t_2)$ i t. d.; następnie przechodzimy do granicy. Zbliżamy ku sobie chwile t_1 i t_2, t_2 i t_3 i t. d. Wektory $V_1 V_2$, $V_2 V_3$ i t. d. skracają się coraz bardziej; długości ich dążą do zera, ale ich kierunki *nie* nikną. Gdy M_2 dociera do M_1, gdy zatem V_2 dociera do V_1, wektor $V_1 V_2$ nie przestaje mieć kierunku; w granicy, gdy M_2 i M_1, oraz V_2 i V_1 spotykają się, $V_1 V_2$ przybiera kierunek stycznej do obwodu koła $V_1 V_2 V_3$. Jeżeli t jest chwilą, w której schodzą się t_1 i t_2, powiadamy: *prawdziwem (albo chwilowem) przyśpieszeniem punktu M w chwili t nazywamy wektor o następujących własnościach: jego kierunek zgadza się z kierunkiem stycznej do koła hodograficznego, w miejscu odpowiadającem chwili t; jego długością jest granica, do której dąży stosunek $V_1 V_2/(t_2 - t_1)$, gdy zarówno odstęp czasu $t_2 - t_1$ jak odpowiednia geometryczna różnica $V_1 V_2$ prędkości dążą do zera.*

W § 26-ym podaliśmy określenie *prędkości* punktu, biegnącego po orbicie kołowej; obecnie podaliśmy określenie *przyśpieszenia* punktu, biegnącego jednostajnie po takiej samej orbicie. Porównawszy te określenia, dostrzegamy, że *przyśpieszenie punktu M, biegnącego jednostajnie po torze kołowym, nie różni się od prędkości punktu V hodograficznego, biegnącego po hodografie tego toru.* Istotnie, kierunkiem przyśpieszenia punktu M jest kierunek stycznej do koła hodograficznego, który jest oczywiście kierunkiem prędkości punktu V hodograficznego. Wartością przyśpieszenia punktu M jest granica, do której dąży stosunek $V_1 V_2/(t_2 - t_1)$, gdy $t_2 - t_1$ oraz $V_1 V_2$ dążą do zera; ale różnica $V_1 V_2$ jest zarazem geometryczną różnicą promieni ΩV_2 i ΩV_1 hodografu; zatem wartość przyśpieszenia punktu M jest identyczna z wartością prędkości punktu V hodograficznego w tej samej chwili.

§ 28. *Wartość i kierunek przyśpieszenia w ruchu kołowym jednostajnym.*

Przypuśćmy, że punkt M krąży jednostajnie po orbicie kołowej $M_1 M_2 M_3$ (rys. 31); styczne M_1v_1, M_2v_2, M_3v_3 do orbity wyobrażają prędkości punktu M w chwilach t_1, t_2, t_3. Zbudujmy



Rys. 31.

hodograf $\Omega V_1 V_1 V_3$ orbity $M_1 M_2 M_3$. Przypuśćmy, że styczne $V_1 F_1$, $V_2 F_2$, $V_3 F_3$ do koła hodograficznego wyobrażają prędkości punktu hodograficznego V w chwilach t_1, t_2, t_3. Według § 27-go kierunki stycznych $V_1 F_1$, $V_2 F_2$, $V_3 F_3$ zgadzają się z kierunkami przyśpieszenia punktu M; ich długości wyobrażają wartości tego przyśpieszenia. Mamy naprzykład

1. $$V_1 F_1 \perp \Omega V_1; \quad \text{lecz} \quad \Omega V_1 \parallel M_1 v_1$$

a zatem

2. $$V_1 F_1 \perp M_1 v_1; \quad \text{czyli} \quad V_1 F_1 \parallel M_1 O.$$

Podobnie znajdujemy

3. $$V_2 F_2 \parallel M_2 O; \quad V_3 F_3 \parallel M_3 O \quad \text{i t. d.};$$

prędkość punktu V jest zawsze umiejscowiona w prostej równoległej do położenia promienia OM orbity i skierowana przeciwnie niż ten promień. Dochodzimy zatem do następującego wniosku: *przyśpieszenie punktu M, biegnącego jednostajnie po orbicie kołowej, jest stale skierowane od chwilowego miejsca* *punktu M ku środkowi O orbity, w kierunku przeciwnym kierunkowi OM promienia.*

Znajdźmy teraz wartość tego przyśpieszenia. Oznaczmy przez r promień orbity punktu M, przez v prędkość tego punktu, przez $\tilde{\omega}$ jego prędkość kątową; mamy wówczas, podług §§ 9 i 10:

4. $$v = \tilde{\omega} r.$$

Ruch punktu hodograficznego V jest kołowy i jednostajny, podobnie jak ruch punktu M; ustanówmy zatem dla tego ruchu taki sam związek, jaki mamy w (4) dla ruchu punktu M. Jeżeli prędkość punktu M wynosi v cm/sek, tedy promień koła hodograficznego $V_1V_2V_3$ wynosi v cm. Jeżeli przyśpieszenie punktu M wynosi f cm/sek^2, tedy prędkość punktu V wynosi f cm/sek. Nareszcie, według § 13-go, prędkość kątowa punktu V jest ta sama, jak prędkość kątowa punktu M, zatem wynosi $\tilde{\omega}$ 1/sek. Mamy zatem w ruchu hodograficznym

5. $$f = \tilde{\omega} v.$$

Z równań (4) i (5) otrzymujemy:

6. $$f = \frac{v^2}{r} = \tilde{\omega}^2 r.$$

Twierdzenie, które tu znaleźliśmy i które w równaniu (6) znajduje swój wyraz, posłuży nam do rozwiązania doniosłych zagadnień. Ruch wahadła na ziemi, ruch planety na niebie — to może najważniejsze rodzaje ruchu, które ukazuje nam wszechświat; rozmyślając nad niemi, umysł ludzki przenika powoli do coraz głębszych tajemnic. W powyższej formule (6) są w gruncie rzeczy zawarte pierwsze prawa tych ruchów.

Zadania.

1. Kręcąc się jednostajnie, koło o średnicy 80 cm wykonywa 480 obrotów w ciągu minuty. Obliczyć przyśpieszenie punktu, leżącego na obwodzie koła.

2. Dwie wirownice kręcą się jednostajnie; w tym samym czasie pierwsza odbywa dwa razy więcej obrotów niż druga. W jakim stosunku pozostają przyśpieszenia w jednakowej odległości od osi obrotu? W jakim stosunku musiałyby pozostawać promienie, ażeby przyśpieszenia na obwodzie były jednakowe?

3. Szyny toru kolejowego tworzą łuk koła o promieniu 210 m. Obliczyć przyśpieszenie pociągu, przejeżdżającego tamtędy z prędkością 90 km/godz wskazać kierunek tego przyśpieszenia.

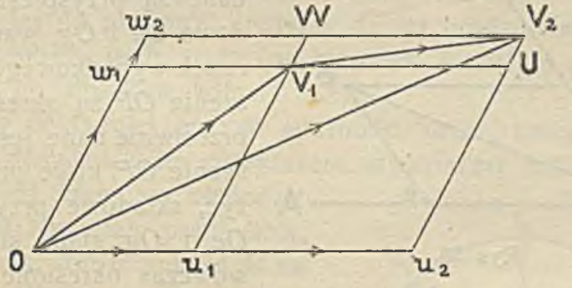
4. U końca sznurka o długości 50 cm uwiązaliśmy kamień; ująwszy drugi

koniec sznurka, wprawiamy sznurek i kamień w ruch obrotowy, kołowy i jednostajny. Ile sekund powinien trwać obrót, ażeby przyśpieszenie kamienia było równe 981 cm/sek²?

5. Uważamy ziemię za kulę o promieniu $6{\cdot}37 \times 10^8$ cm. Jaką wartość i jaki kierunek ma na równiku przyśpieszenie f, wynikające z ruchu obrotowego ziemi dokoła jej osi? W jakim stosunku do przyśpieszenia ciężkości $g = 981$ cm/sek² pozostaje owo przyśpieszenie f? Ażeby przyśpieszenia f i g były równe sobie, jaka musiałaby być prędkość kątowa dziennego obrotu ziemi? Te same zagadnienia rozwiązać dla Warszawy lub dla Krakowa (por. zad. 4 § 10-go).

§ 29. *Twierdzenie o równoległoboku przyśpieszeń.*

Wiemy, że punkt może odbywać jednocześnie dwa ruchy, zatem mieć naraz dwie prędkości. Z prędkości, przez geometryczne odejmowanie, wyprowadzamy przyśpieszenia (§§ 15, 20, 21, 27); zatem punkt, który ma naraz dwie prędkości, może mieć naraz dwa przyśpieszenia. Wyobraźmy sobie, że punkt M w chwili t_1 ma składowe prędkości Ou_1 i Ow_1 (rys. 32); prędkość wypadkowa punktu w tej chwili jest OV_1. W późniejszej chwili t_2 składowe prędkości punktu są Ou_2 i Ow_2, wypadkowa prędkość jest OV_2. Między chwilami t_1 i t_2 punkt M ma dwa składowe średnie przyśpieszenia, mianowicie wektory $u_1 u_2/(t_2 - t_1)$ oraz $w_1 w_2/(t_2 - t_1)$ (§§ 15, 20).

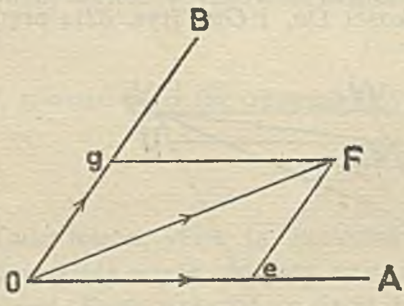


Rys. 32.

Poprowadźmy od punktu V_1 do punktu V_2 wektor $V_1 V_2$; jak w § 26-ym powiadamy, że $V_1 V_2$ jest różnicą geometryczną $OV_2 - OV_1$. Zbudujmy równoległobok $V_1 U W V_2$ (w którym $V_1 U \parallel u_1 u_2$, $V_1 W \parallel w_1 w_2$); sprawdzamy, że $V_1 V_2$ jest wypadkową składowych $u_1 u_2$ i $w_1 w_2$. Geometryczna różnica $V_1 V_2$ wypadkowych OV_2 i OV_1 jest więc wypadkową różnic $u_1 u_2$ (czyli $Ou_2 - Ou_1$) i $w_1 w_2$ (czyli $Ow_2 - Ow_1$).

Przypuśćmy, że chwile t_1 i t_2 spotykają się ze sobą w chwili t. Odstęp $t_2 - t_1$ dąży wówczas do zera; długości wektorów $u_1 u_2$, $w_1 w_2$, $V_1 V_2$ dążą do zera, ale kierunki tych wektorów *nie* zanikają. Stosunek $u_1 u_2/(t_2 - t_1)$ dąży do granicy, którą nazywamy przyśpieszeniem punktu M (w chwili t) w pierwszym ruchu składowym; stosunek $w_1 w_2/(t_2 - t_1)$ dąży do granicy, która jest przyśpieszeniem M (w chwili t) w drugim ruchu składowym; stosunek $V_1 V_2/(t_2 - t_1)$ dąży do granicy, którą nazywamy *prawdziwem* (*lub chwilowem* t. j. *odpowiadającem chwili* t) *przyśpieszeniem punktu* M *w ruchu wypadkowym. Widzimy, że prawdziwe przyśpieszenie punktu składa się w każdej chwili z obu przyśpieszeń składowych według zasady równoległoboku.*

Ponieważ jednoczesne przyśpieszenia punktu składają się ze sobą według zasady równoległoboku, zatem dowolne przyśpieszenie OF punktu M (rys. 33) możemy zawsze *rozłożyć* na składowe przyśpieszenia Oe i Og podług tej samej zasady. Gdy dane są przyśpieszenia składowe Oe i Og, wartość i kierunek wypadkowego przyśpieszenia OF są określone. Gdy przeciwnie dane jest przyśpieszenie OF, które mamy rozłożyć, składowe przyśpieszenia Oe i Og stają się dopiero wówczas określone, gdy wiadomo, w jakich kierunkach (np. OA i OB) one mają być utworzone.



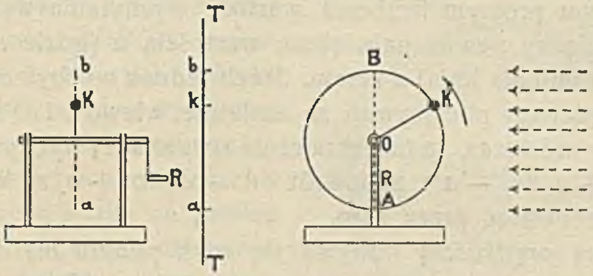
Rys. 33.

Składowe Oe i Og przyśpieszenia OF, utworzone w kierunkach osi OA i OB (rys. 33), nazywamy *rzutami* tego przyśpieszenia na kierunki OA i OB. Jeżeli OA i OB są prostokątnemi osiami, rzuty przyśpieszenia na ich kierunki nazywają się *prostopadłemi rzutami.*

§ 30. *O ruchu harmonicznym prostym.*

Wyobraźmy sobie, albo (co byłoby lepiej) wykonajmy doświadczenie następujące. Kulkę nieprzezroczystą K (rys. 34), osadzoną na pręciku OK, wprowadzamy (przy pomocy rękojeści R) w ruch kołowy jednostajny. Oświetlamy jednocześnie kulkę K

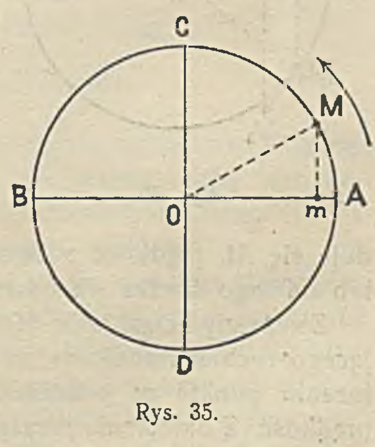
mocnem światłem, wychodzącem z lampy dostatecznie odległej, lub też pomiędzy lampą a kulą K umieszczamy soczewkę; soczewka sprawia, że promienie światła, które przez nią przeszły, stają się równoległe do siebie. Za kulą, prostopadle do padających promieni, ustawiamy ekran czyli białą tablicę TT. Kula na ekran rzuca cień k, który jest jej prostopadłym rzutem na płaszczyznę ekranu. Gdy kula K biegnie po orbicie kołowej $KBAK$,



Rys. 34.

rzut k porusza się naprzemian do góry i na dół po prostej ab, równoległej do pionowej średnicy AB tej orbity. Uzmysławiamy tym sposobem ruch rzutu (na kierunek średnicy) punktu, biegnącego po obwodzie koła.

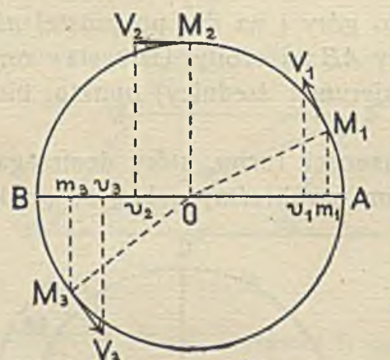
Ażeby dokładniej poznać własności ruchu, który dostrzegaliśmy w doświadczeniu powyższem, wyobraźmy sobie, że punkt M (rys. 35) krąży po obwodzie koła $ACBD$ ze stałą prędkością; prostopadły rzut m punktu M na średnicę AB porusza się wówczas po tejże średnicy, w kierunku naprzemian od A do B i od B do A. Chcemy zbadać prawa tego ruchu.



Rys. 35.

Zaczynamy od chwili $t = 0$, w której punkt M, przypuśćmy, znajduje się w miejscu A; w tejże chwili punkt m zajmuje zatem to samo miejsce A. Gdy punkt M od A przechodzi ku C, od C ku B, od B ku D, od D zaś napowrót powraca ku A, punkt m od A zbliża się ku O, od O oddala się aż do B, od B napowrót cofa się ku O, wreszcie od O wychyla się znowu ku A. Widzimy, że m odbywa ruch prostolinjowy, ale bynajmniej *nie* jednostajny, nawet niejednokierunkowy; punkt *m drga* wzdłuż średnicy *AB*, wychylając się ze środka koła *O* raz wprawo, raz wlewo. Ruch punktu *m*, który dokonywa się w tych warunkach, nazywamy *ruchem harmonicznym prostym* lub *drganiem harmonicznem prostem*; środek koła *O* nazywamy *środkiem* tego ruchu; chwilową odległość *Om* punktu *m* od środka *O* nazywamy *wychyleniem* punktu *m*. W ruchu harmonicznym prostym liczbowa wartość wychylenia waha się zatem pomiędzy pewną największą wartością *a* (gdzie *a* jest długością promienia koła) a zerem. Jeżeli jednak wychylenie wprawo od *O* będziemy poczytywali za dodatnie, wlewo od *O* za ujemne, powiemy wówczas, że (algebraicznie rozumiane) wychylenie waha się od $+a$ do $-a$ i napowrót od $-a$ do $+a$, za każdym razem przechodząc przez zero.

Z jaką *prędkością* odbywa się ruch punktu *m*? Pamiętając o tem, że punkt *m* jest rzutem punktu *M* na *AB*, łatwo widzimy z określenia pojęcia prędkości, że prędkość punktu *m* jest równa rzutowi *mv* (rys. 36) prędkości *MV* punktu *M* na kierunek *AB*. Ponieważ ruch punktu *M* jest jednostajny, prędkość *MV* jest stała; ale kierunek tej prędkości *MV* jest zmienny, dlatego prędkość *mv* wypada rozmaita (rys. 36). W miejscach *A* i *B* prędkość *v* punktu *m* jest zerem, w miejscu *O* jest największa i równa prędkości *V* punktu *M*; zależnie od tego, w której ćwierci koła znajduje się *M*, prędkość *v* zwraca się naprzemian ku środkowi *O* lub od tego środka się odwraca.

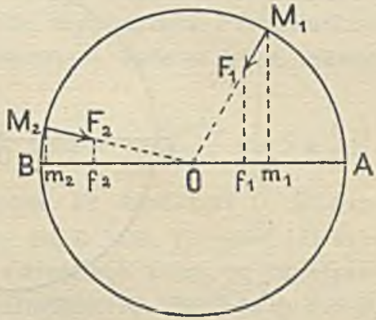


Rys. 36.

Zważajmy teraz, jakie jest *przyśpieszenie* punktu *m*, odbywającego ruch harmoniczny prosty. Znajdujemy je w każdem położeniu punktu *m* podobnie, jak przed chwilą wyznaczaliśmy prędkość. Z określenia przyśpieszenia wnosimy, że przyśpieszenie punktu *m* jest równe rzutowi *mf* przyśpieszenia *MF* punktu *M* na kierunek *AB* (rys. 37). Przyśpieszenie *F* punktu *M* wynosi V^2/a (§ 28), ma zatem wartość stałą; ale kierunek tego przyśpieszenia jest zmienny (rys. 37); dlatego przyśpieszenie *f* punktu

m ma wartość w różnych miejscach rozmaitą. W środku O przyśpieszenie f jest równe zeru, w miejscach A i B jest największe, równe mianowicie przyśpieszeniu V^2/a punktu M; zwrócone jest zawsze ku środkowi O.

Skoro punkt M dokonał jednego obiegu $ACBDA$ (rys. 35), powraca do A i rozpoczyna bieg drugi, który jest ścisłą kopją pierwszego; zatem i m, przebiegłszy od A do B i od B napowrót do A, powtarza po raz drugi tenże sam ruch $AOBOA$. Powiadamy przeto, że ruch harmoniczny prosty jest *perjodyczny* czyli *okresowy*; te same wychylenia, prędkości i przyśpieszenia powtarzają się w nim co pewien czas regularnie; cały ruch w pewnych odstępach czasu siebie odtwarza. Ruch $AOBOA$ punktu m nazywamy *całkowitem drganiem*; czas, zajęty przez jedno całkowite drganie, równy okresowi punktu M (czyli czasowi trwania jego po kole obiegu, § 10) nazywamy *okresem* ruchu harmonicznego prostego. Oznaczając ten okres przez T, prędkość zaś kątową krążenia punktu M po kole przez ω, mamy (§§ 10 i 28):



Rys. 37.

1. $$\omega = 2\pi/T; \quad V = 2\pi a/T = \omega a.$$

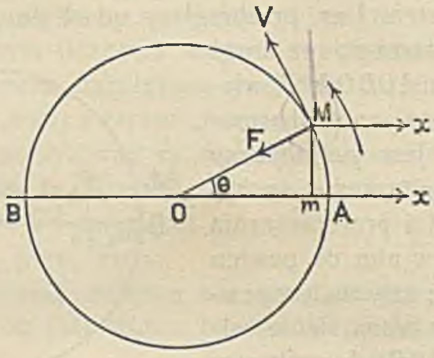
2. $$F = V^2/a = 4\pi^2 a/T^2 = \omega^2 a.$$

Wielkość ω, czyli prędkość kątowa ruchu kołowego, dającego w rzucie ruch harmoniczny prosty, jest ważną cechą tego harmonicznego ruchu; nazywamy ją jego *częstością*. Długość a nazywamy *amplitudą* ruchu harmonicznego prostego.

Ruch harmoniczny prosty wydarza się w wielu zjawiskach, którym wypada poświęcać pilną uwagę w akustyce, w optyce, w teorji zjawisk elektromagnetycznych. W tych wszystkich przypadkach częstość ω oraz okres T drgania bezpośrednio są dane przez budowę albo naturę drgającego układu, jak o tem wspomnieliśmy w przykładzie widełek strojowych (§ 5). Natomiast amplitudy drgania zazwyczaj nie są zależne od właściwości układu; dany układ może odbywać drgania rozmaitych amplitud, zależnie od wpływów, które go pobudziły albo pobudzają do drgań.

§ 31. Bliższa analiza praw ruchu harmonicznego prostego.

Rozumiejmy przez Ox kierunek (liczony dodatnio od O do A) osi, w której umiejscowiony jest ruch harmoniczny prosty punktu m (rys. 38); przez x oznaczajmy wychylenie punktu m czyli jego odległość od początku O; przez θ rozumiejmy kąt AOM, który



Rys. 38.

tworzy chwilowy promień OM z kierunkiem Ox. Czas t liczymy, jak w artykule poprzednim, od chwili, w której M przebiega przez A; mamy więc:

1. $$\theta = \bar{\omega} t.$$

Otrzymujemy tem samem

2. $$x = a \cos \bar{\omega} t = a \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Kładąc po kolei:	$t = 0$	$\frac{1}{4}T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{3}{4}T$	T	$\frac{5}{4}T$	i t. d.
mamy z (2):	$x = a$	0	$-a$	0	a	0	i t. d.,

odnajdujemy więc wyniki, które już znamy z poprzedniego artykułu.

Znajdźmy prędkość v punktu m, odbywającego ruch harmoniczny prosty. Wiemy z poprzedzającego artykułu, że prędkość V punktu M, krążącego po kole, wynosi $\bar{\omega} a$. Przypuśćmy, że M znajduje się, jak na rys. 38-ym, w pierwszej ćwierci koła; wówczas kierunek V tworzy kąt $\frac{1}{2}\pi + \theta$ z dodatnim kierunkiem osi Ox; zatem

3. $$v = \bar{\omega} a \cos(\tfrac{1}{2}\pi + \theta) = -\bar{\omega} a \sin \bar{\omega} t = -\frac{2\pi a}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T};$$

ujemny znak stąd wynika, że x w pierwszej ćwierci koła zmniejsza się z czasem; prędkość tu jest skierowana przeciwnie niż $+Ox$. Łatwo sprawdzamy, powtarzając rozumowanie, że wzór (3) stosuje się we wszystkich ćwierciach koła. Kładąc znowu $t=0$, $\frac{1}{4}T$, $\frac{1}{2}T$ i t. d., odnajdujemy na prędkość v wartości, które znamy już z artykułu poprzedzającego.

Obliczmy przyśpieszenie f punktu m, odbywającego ruch harmoniczny prosty. Wiemy z poprzedniego artykułu, że przyśpieszenie F punktu M, krążącego po kole, wynosi $\tilde{\omega}^2 a$. Przypuszczając, że M znajduje się znów w pierwszej ćwierci koła, mamy, jak na rys. 38-ym:

$$4. \qquad f = \tilde{\omega}^2 a \cos(\pi - \theta) = -\tilde{\omega}^2 a \cos \tilde{\omega} t = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

przyśpieszenie f jest tutaj skierowane ku środkowi O. Powtarzając rozumowanie, przekonywamy się o tem, że wzór (4) stosuje się bez zmiany we wszystkich ćwierciach koła; że przyśpieszenie f jest zawsze skierowane ku środkowi O. Zakładając $t=0$, $\frac{1}{4}T$, $\frac{1}{2}T$ i t. d., powracamy do wyników, które znamy z poprzedzającego artykułu.

Z równań (2) i (4) wyprowadzamy wniosek następujący:

$$5. \qquad f = -\tilde{\omega}^2 x.$$

Jeżeli $x > 0$, mamy $f < 0$ i przeciwnie; co potwierdza znaną nam własność przyśpieszenia w ruchu harmonicznym prostym.

Zadania.

1. Punkt porusza się według praw ruchu harmonicznego prostego, podanych w artykule niniejszym. Amplituda wynosi 10 cm, okres 1 sekundę. Obliczyć wychylenie, prędkość, przyśpieszenie w chwilach: $t=\frac{1}{8}$ sek, $\frac{3}{8}$ sek; $t=\frac{1}{6}$ sek, $\frac{5}{6}$ sek; $t=\frac{1}{3}$ sek, $\frac{2}{3}$ sek.

2. Do formuł (2), (3), (4) niniejszego artykułu wstawić, zamiast wartości t, wartość $t+T$; jaki wniosek wypada z otrzymanego wyniku?

3. Ruch kołowy jednostajny punktu M po obwodzie koła $ACBDA$ (rys. 35) rozłożyć na ruchy składowe, odbywające się (1) wzdłuż średnicy AB (2) wzdłuż średnicy $CD \perp AB$.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Zasady dynamiki.

§ 32. Dynamika jest nauką o ruchu jakichkolwiekbądź brył materjalnych.

Któż nie podziwiał owego widoku, który niebo gwiaździste, w noc cichą, czystą, pogodną, w nieopisanej krasie nad nami roztacza! Nic równać się na ziemi nie może z tym obrazem niezmierzonej potęgi; nic nie porusza równie głęboko każdego szlachetnego umysłu.

Ogromny, wspaniały, wciąż zmienny, świat zawsze przykuwał do siebie uwagę człowieka. Lecz długo dziwił go tylko i trwożył, budził w nim lęk i onieśmielenie. Bardzo powoli zaczynało się *świadome* dostrzeganie i badanie; w trudzie rodziła się myśl ścisła, ostrożna, która czuwa nad sobą i sprawdza samą siebie. Dzisiaj rozumiemy, że mamy przed sobą nieskończoność przemian i zjawisk, które tylko własnym wysiłkiem możemy poznać i pojąć. Jest to zadanie niezmierne, do którego pokolenie za pokoleniem przykładać się musi.

Już przed tysiącami lat chińscy, hinduscy, babilońscy, chaldejscy, egipscy i greccy uczeni i mędrcy dostrzegali wędrówki słońca, księżyca i gwiazd po sklepieniu niebieskiem i rozmyślali nad niemi. Lecz, zjawiska niebieskie, przynajmniej napozór, są bezładne i niezrozumiale zawiłe. Przez długi czas mogło wydawać się, że po firmamencie błąkają się światła bez żadnego porządku. Myśl ludzka nie wyrzekała się nigdy nadziei, że dopatrzy się prawidłowości w ruchach na niebie i przez całe stulecia wysilała się, ażeby odczytać ich tajemnicę. Dopiero w bliskich nam czasach Kopernik, Keppler, Galileusz, Newton, Laplace i inni wielcy mężowie wytłumaczyli prawa mechanizmu, który nazywamy *układem słonecznym*; mechanizmu, który unosi nas wszystkich na jednem z podrzędnych swych kółek. Dziś rozumiemy nareszcie, w jaki sposób poruszają się bryły materji, czem w swoim ruchu rządzą się ciała niebieskie i ziemskie.

Ostateczny, rozstrzygający udział w tych odkryciach miał Newton. Jego genjusz stworzył *mechanikę niebios*, czyli ścisłą teorję ruchów, dostrzeganych na niebie. Jednakże, według myśli Newtona, ogół ruchów astronomicznych jest wielkim, lecz przecież tylko szczególnym przykładem prawdziwości zasad jeszcze ogólniejszych, mianowicie *zasad dynamiki*. Dynamika jest nauką o ruchu dowolnych, małych czy wielkich, ciał materjalnych. Newton wypowiedział prawa dynamiki i zbudował tym sposobem naukę, którą w sto lat po nim Lagrange doprowadził do doskonałości.

Lagrange rzekł o Newtonie, że był on «nietylko największym, lecz i najszczęśliwszym z pomiędzy myślicieli»; albowiem «tylko raz można odkryć fundamentalne prawa zjawisk w przyrodzie». W istocie, zasady dynamiki Newtona przez dwieście lat przechowały się w nauce bez zmiany. Dopiero spółczesne nam badania, dokonane w innych dziedzinach fizyki, w teorji promieniowania, w teorji zjawisk elektromagnetycznych, rozszerzają obecnie nasz widnokrąg poznania. Wiemy dzisiaj, że, mimo swej potęgi, zasady Newtona są tylko krańcowym wyrazem (a zatem przypadkiem szczególnym) szerszych praw, wnikających znacznie głębiej w treść rzeczywistości.

§ 33. Newton. Działania i siły dynamiczne.

Izaak Newton urodził się na Boże Narodzenie 1642 roku; ojcem był mu skromny rolnik w Woolsthorpe, wiosce w Lincolnshire, niedaleko miasteczka Grantham leżącej. Za radą wykształconego wuja oddany w 19-ym roku życia do *Trinity College* (części uniwersytetu) w Cambridge, zjednał sobie wkrótce podziw powszechny; w roku 1669-ym objął już katedrę w tym słynnym uniwersytecie. W latach 1665 i 1666, z powodu panującej zarazy, zamknięto szkoły w Cambridge. Newton, który spędził ten czas w domu rodzinnym, dokonał wówczas odkryć, po wszystkie czasy pamiętnych. Stworzył tam różniczkowy i całkowy rachunek i nieporównanym tym czynem dał początek nowoczesnej analizie matematycznej. Tam także zrozumiał zasadnicze *prawa ruchu* ciał materjalnych i gdy je sformułował, położył fundament pod budowę dynamiki. I tam wreszcie przeniknął, że istnieje we wszechświecie *grawitacja* czyli ciążenie powszechne, którego odkrył prawo proste i dokładne. Te i inne jeszcze zdobycze genjuszu zebrał i ogłosił w słynnem dziele *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, które ukazało się w Londynie w roku 1687. Od pojawienia się tego dzieła na widok publiczny zaczyna się istnienie ścisłej nauki o zjawiskach, odbywających się w świecie fizycznym.

Jakiż był bieg myśli Newtona? Za jego czasów oddawna wiedziano, że kula ziemska, księżyc, planety (jak Wenus, Mars i inne) są to bryły olbrzymie, które różnią się tylko ogromem od gór, skał, głazów i kamieni, słowem od pospolitych ciał materjalnych, z któremi miewamy wciąż do czynienia na ziemi. Jakże poruszają się pospolite ciała na ziemi? nie dostrzegamy, by one krążyły bez końca po torach zawiłych. Musimy rozważyć okoliczności ruchu ziemskich ciał materjalnych, ażeby ogólne *prawa ruchu* przeniknąć.

Dostrzegamy codziennie, że można *poruszać* rozmaite przedmioty. Woły ciągną pług, który pruje glebę i odwraca skiby; koń ciągnie wóz naładowany; lokomotywa wprawia w ruch szereg wagonów; człowiek pcha taczki, kręci koło lub, siadłszy w czółnie, posuwa się wraz z niem po powierzchni wody. Z uderzenia kija lub młotka wynika ruch kuli na bilardzie albo w krokiecie; kółka w zegarku kręcą się, wskazówki na jego tarczy posuwają się pod naciskiem sprężyny; pocisk, pod działaniem naboju, wybiega z armaty z nadzwyczajną prędkością. Możemy przytoczyć wiele podobnych przykładów. Mówimy więc, uogólniając, że: *działanie* niektórych ciał nadaje ruch innym ciałom albo też zmienia ich ruch, który był się już przedtem odbywał. Powiadamy dokładniej, że: *działanie pewnych ciał zmienia bądź wartość prędkości, bądź kierunek prędkości, bądź wreszcie zarazem wartość i kierunek prędkości innych ciał materjalnych.*

Jeżeli my sami jesteśmy ciałem, wpływającem w ten sposób na ruch innych ciał materjalnych, czujemy wówczas, że, podczas wspomnianego działania, mięśnie nasze dokonywają pewnego *wysiłku*. Czujemy dobrze wysiłek, gdy coś ciągniemy albo popychamy, gdy coś uciskamy albo ugniatamy, gdy coś skręcamy albo wyciągamy, gdy coś dźwigamy albo wyrzucamy do góry. Powiadamy w tych przypadkach, że *wywieramy siłę*. Pojęcie *siły* czerpiemy zatem pierwotnie z pamięci własnego mięśniowego wysiłku; a poczucie tego wysiłku jest wszystkim znane tak dobrze, że jego świadomość nie zyskałaby na jasności przez opisywanie go w słowach. W tem rozumieniu wyraz *siła* nie wymaga zatem określeń.

Ale przed chwilą widzieliśmy (i przekonywamy się o tem codziennie), że nietylko człowiek i nietylko pociągowe zwierzęta mają możność i zdolność wywierania siły. Może ją wywrzeć wiatr albo wicher, który obraca młyny, wydyma żagle lub wzbija tumany pyłu w powietrzu. Może ją wywrzeć woda w potoku płynąca, kula wystrzelona ze strzelby, wagon rozpędzony po szynach, każde wogóle ciało, które, jak mówimy, *ożywione jest* ruchem. Wiemy także, że rozmaite inne ciała mogą wywierać siłę; naprzykład magnes, który przyciąga opiłki żelazne, pałeczka szklana naelektryzowana, skręcona sprężyna, wyciągnięta taśma kauczukowa, ściśnięte powietrze, para wodna w machinie parowej, gaz wytwarzany w motorze automobilu. W tych i w wielu innych przypadkach mówimy, że wywierane są pewne *siły*; lecz oczywiście w tych razach nie może być mowy o mięśniowym wysiłku. A zatem musimy w fizyce *rozszerzyć* pierwotny zakres pojęcia siły.

Skoro pragniemy w nauce rozszerzyć zakres pewnego pojęcia, musimy podać nowe, obszerniejsze jego określenie. To określenie powinno być jasne, dokładne, ilościowe; powinno być niezależne od wrażeń jednej osoby i mieć dla wszystkich to samo znaczenie. Ażeby uzyskać takie określenie naukowego pojęcia *siły*, przypatrzmy się ponownie przykładom zjawisk, w których pewne ciała zmieniają wartość, albo kierunek, albo i wartość i kierunek prędkości innych ciał materjalnych.

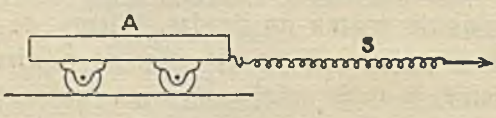
§ 34. Działanie ciał materjalnych jest zawsze wzajemne.

Człowiek ciągnie wózek po drodze. Wiemy, że nie mógłby ciągnąć, gdyby nie miał oparcia dla stóp na powierzchni ziemi. Jeżeli wprawienie w ruch wózka wymaga znacznego wysiłku, dostrzegamy wyraźnie, iż człowiek mięśniami nóg odpycha się, w kierunku ruchu, od nierówności gruntu, o które się oparł. Lecz jakże odpycha się od tych nierówności? uciska je mocno. Wie z doświadczenia (choć może nie uświadamia sobie tej wiedzy), że właśnie wówczas, gdy naciśnie, sam odepchnięty zostanie. Im mocniej przyciśnie, tem silniej zostanie popchnięty w przeciwnym kierunku.

Gdy płynie statek parowy, machina porusza w nim koła łopatkowe lub śrubę w taki sposób, jak gdyby chciała zgnieść albo ścisnąć warstwy wody najbliżej leżące. Na *działanie,* zmierzające ku takiemu celowi, woda odpowiada *przeciwdziałaniem* t. j. siłą, która wprawia w ruch cały statek. Ptak podobnie bije skrzydłami powietrze, ażeby przez chwilę wesprzeć się na niem; uderzona i ściśnięta, najbliższa warstwa powietrza odpowiada przeciwdziałaniem, skierowanem ku górze. W próżni ptak albo samolot nie mógłby szybować; o próżnię *nie* można się oprzeć. Po nadzwyczaj gładkiej albo śliskiej posadzce lub po równej tafli lodowej bardzo trudno jest ciągnąć.

Wyobraźmy sobie, że umieściliśmy się w huśtawce i że wyrzucamy ułożone w niej kamienie. Huśtawka cofa się za każdym rzutem. Gdy wywieraliśmy siłę na kamień, kamień wywierał siłę przeciwną na nas a przez nas na huśtawkę. Armata lub strzelba cofa się podobnie przy każdym strzale. Magnes przyciąga kawałek żelaza, ale jest też nawzajem przyciągany przez żelazo; dosyć umieścić te ciała na korkach, pływających po wodzie, ażeby przekonać się o wzajemności przyciągań, o zobopólnem działaniu. Wprawiajmy w ruch koło rozpędowe masywne, osadzone na osi. Dopóki przyśpieszamy obrót lub go zwalniamy, czujemy, że koło opiera się, doznajemy przeciwdziałania od poruszającego się ciała. Doznajemy zatem tego przeciwdziałania wówczas i tylko wówczas, gdy sami na koło wywieramy działanie; jeżeli koło kręci się jednostajnie, działanie nasze staje się niepotrzebne; wraz z niem znika i przeciwdziałanie.

Wyobraźmy sobie wózek *A* (rys. 39), do którego przymocowana jest sprężyna *S*; przypuśćmy, że wózek stoi na stole poziomym i gładkim i porusza się



Rys. 39.

niemal bez tarcia. Ciągnąc swobodny koniec sprężyny, możemy ją wyciągnąć czyli wydłużyć. Wyciągnięta sprężyna usiłuje, jak wiadomo, powrócić do pierwotnej długości; będzie zatem ciągnęła wózek w kierunku strzałki, będzie wywierała siłę na wózek. Ale dopóki ciągniemy, dopóki porusza się wózek, sprężyna pozostanie *wyciągnięta.* Wiemy, że nie można wyciągnąć sprężyny inaczej, jak ciągnąc końce w strony przeciwne; zatem widzimy, że, kiedy sprężyna działa na wózek pewną siłą w kierunku strzałki, wózek odpowiada działaniem, skierowanem w przeciwnym kierunku.

Podobnych spostrzeżeń możemy mnóstwo uczynić, obserwując ruch ciał i działanie jednych na inne. Wyprowadzamy z nich wniosek, który Newton wygłosił jako jednę z naczelnych zasad dynamiki. *Działanie ciał materjalnych jest zawsze zobopólne, wzajemne*; gdy ciało *A* działa na ciało *B*, jednocześnie ciało *B* działa na ciało *A*. Jak widzimy na przytoczonych przykładach, *działania są zawsze skierowane w strony przeciwne.* Jeżeli ciało *A* przyciąga ciało *B* ku sobie, tedy nawzajem ciało *B* ciągnie ku sobie ciało *A*. Jeżeli *A* odpycha ciało *B* od siebie, wówczas nawzajem ciało *B* odpycha od siebie ciało *A*. W twierdzeniach, które wypowiedzieliśmy, zawiera się *część* podstawowej zasady dynamiki, zasady *wzajemnego oddziaływania ciał materjalnych na siebie* albo *działania* i *przeciwdziałania*; zasada ta nazywa się także *trzeciem prawem ruchu* Newtona. Mówimy, że w tych twierdzeniach zawiera się tylko *część* owej zasady; zobaczymy istotnie (w § 36-ym), że one wymagają jeszcze ważnego uzupełnienia.

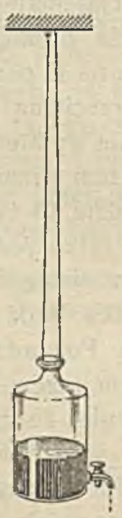
Siłą nazywamy każde z dwóch działań, z których składa się całość wzajemnego oddziaływania na siebie dwóch ciał materjalnych. Wyobraźmy sobie parę ciał: *A*, *B*; działanie pomiędzy niemi jest zobopólne. Powiadamy, że ciało *A* działa na *B* pewną siłą, że ciało *B* działa na *A* pewną siłą, wprost przeciwną poprzedniej. Gdy rozważamy ruch ciała *B*, możemy nie wymieniać wyraźnie ciała *A*, które działa na *B*; możemy i o tem przemilczać, że jednocześnie ciało *B* działa na *A*. Lecz będzie to tylko skrócony sposób wyrażania się. W istocie siła jest tylko *jednostronnym* objawem wzajemnego oddziaływania na siebie ciał materjalnych; objawem, dostrzeganym ze stanowiska bądź jednego, bądź drugiego z pomiędzy ciał działających. Powiadamy niekiedy, że ciało *A* wywiera siłę na ciało *B*; innym razem, dla wygody rozumowania, możemy powiedzieć przeciwnie, że ciało *B* wywiera siłę na *A*. Czy jednak wyrażamy się w pierwszy sposób czy w drugi, wypowiadamy w istocie ten sam fakt; tylko spoglądamy wówczas na ten fakt z przeciwnych stanowisk. Zupełnie podobnie, powiada J. Clerk-Maxwell, pewną wymianę możemy nazwać bądź *sprzedażą* bądź *kupnem*, gdy ją rozważamy z przeciwnych punktów widzenia.

§ 35. *Drugie prawo ruchu Newtona.*

Całość wzajemnego oddziaływania na siebie dwóch ciał materjalnych składa się zatem z dwóch sił czyli z dwóch działań sobie przeciwnych. Jakaż jest *ilościowa miara* tych działań?

Jak powiedzieliśmy (§ 33), działanie ciał zmienia wartość albo kierunek prędkości innych ciał materjalnych. Owóż miarą szybkości, z jaką w pewnej chwili zmienia się wartość albo kierunek prędkości poruszającego się ciała, jest (jak wiemy z rozdziału pierwszego) *przyśpieszenie* tego ciała. Widzieliśmy, że przyśpieszenie jest wektorem, którego wartość i kierunek wyraża sposób, w jaki *prędkość* w danej chwili *rośnie* lub *maleje* a ponadto, być może, *wykręca się w przestrzeni.*

Skoro działanie ciał materjalnych polega na zwiększaniu, zmniejszaniu lub wykręcaniu prędkości innych ciał materjalnych, więc *możemy uznać chwilowe przyśpieszenie ciała za miarę działania lub siły, która w danej chwili jest wywierana na ciało. Siła, przyłożona do ciała, ma zmieniać się w tym samym stosunku jak przyśpieszenie, czyli ma być wprost proporcjonalna do przyśpieszenia.* Siła, wywierana w pewnej chwili przez ciało *A* na ciało *B*, ma być wprost proporcjonalna do przyśpieszenia ciała *B* w tejże chwili; siła, wywierana przez ciało *B* na ciało *A*, ma być wprost proporcjonalna do przyśpieszenia ciała *A* w danej chwili.



Rys. 40.

Ale, jak powiedzieliśmy, przyśpieszenie jest wektorem, który ma nietylko pewną wartość liczbową, lecz zawsze pewien kierunek. *Siłę poczytujemy więc również za wektor, któremu nadajemy kierunek przyśpieszenia.*

Dopóki rozważamy ruch określonego ciała *C*, które podczas ruchu nie zmienia się wcale, dopóty chwilowe przyśpieszenie ciała *C* uważamy za miarę siły, która właśnie działa na ciało. Wyobraźmy sobie jednakże, że ciała *C* przybywa albo ubywa podczas ruchu; jaki jest wówczas związek pomiędzy przyśpieszeniem a siłą? Na sznurkach (rys. 40) zawieszamy (podobnie jak wahadło) butelkę, którą wypełniamy rtęcią. Im więcej rtęci znajduje się w butelce, tem trudniej jest ją poruszyć; im rtęci jest mniej, tem poruszyć ją łatwiej. Powiadamy dokładniej: im więcej rtęci znajduje się w butelce, tem większej siły F potrzeba, ażeby ciału nadać pewne określone przyśpieszenie f; im mniej rtęci tam się znajduje, tem mniejsza siła F wystarcza, ażeby wytworzyć określone przyśpieszenie f. Stąd wnosimy, że siła F zależy wprawdzie od przyśpieszenia f, ale *nie* zależy *wyłącznie* od niego; siła F musi zależeć jeszcze od pewnego innego czynnika. Oznaczmy ów inny czynnik (który niebawem bliżej poznamy) przez m i napiszmy równanie:

1. $$F = mf.$$

Dopóki nie dolewamy ani nie odlewamy rtęci, siła F, jak wiemy, pozostaje proporcjonalna do przyśpieszenia f. Jeżeli więc przyśpieszenie wynosi f_1, f_2, f_3... w chwilach t_1, t_2, t_3..., siła zaś ma wówczas wartości F_1, F_2, F_3..., tedy:

2. $$\frac{F_1}{f_1} = \frac{F_2}{f_2} = \frac{F_3}{f_3} = \ldots;$$

to zaś, wobec związku (1), wymaga, ażeby m była ta sama. Jeżeli dolejemy rtęci do flaszki, siła F, sprawiająca dane przyśpieszenie f, staje się większa; zatem m wówczas wzrosła. Jeżeli odlejemy rtęci, okazuje się, że siła F, sprawiająca dane przyśpieszenie f, jest mniejsza; zatem m zmalała. Wielkość m zależy więc od ilości rtęci w butelce; wolnoby nam było wybrać za m naprzykład objętość rtęci, zawartej w naczyniu.

Uogólnijmy teraz zasadę naszych doświadczeń. Wyobraźmy sobie dwa ciała C_1 i C_2 różnej natury; naprzykład koło rozpędowe żelazne (C_1) i drugie, równie wielkie, drewniane (C_2), z których każde kręci się jednakowo łatwo na osi; albo wagonik, wyładowany węglem (C_1) i drugi, równej objętości, wypełniony trocinami (C_2), które obadwa stoją na szynach; albo jeszcze, wracając do wózka, wyobrażonego na rys. 39-ym, przypuśćmy, że umieściliśmy na nim kulę ołowianą (C_1), innym zaś razem korkową (C_2). Popchnijmy jednakowo mocno wagoniki C_1 i C_2; pokręćmy w jednakowy sposób obadwa koła C_1 i C_2; pociągajmy wózek C_1 i wózek C_2 (rys. 39) jednakowym mięśniowym wysiłkiem (o czem wyciągnięcie sprężyny może zaświadczyć). Przekonamy się, że przyśpieszenia f_1 i f_2, wytworzone w tych razach przez tę samą siłę F w ciałach C_1 i C_2, są niejednakowe. Napiszemy więc teraz

3. $$F_1 = m_1 f_1; \quad F_2 = m_2 f_2$$

rozumiejąc tutaj przez m_1 cechę, charakteryzującą ciało C_1; przez m_2 cechę, charakteryzującą C_2. Tą cechą w przypadku rtęci w butelce mogła być jej objętość, albowiem rtęć dolewana lub odlewana nie różni się od pozostającej; ale dla ciał różnych m oczywiście *nie* może być objętością. Powiadamy, że m jest *nową* cechą czyli własnością ciał, którą poznajemy w zjawiskach ruchu; nazywamy ją *masą*. Dopóki ciało nie zmienia się, masa jego pozostaje stała; ciało podczas ruchu może mieć rozmaite przyśpieszenia, świadczące o działaniu odpowiednich sił, lecz masa nie zależy od przyśpieszenia, ani od siły; masa ciała nie zmienia się, dopóki natura ciała nie ulegnie zmianie. Każde jednak odmienne ciało C_1, C_2, C_3... posiada też masę m_1, m_2, m_3... *inną*, odmienną.

Równania (1), (2), (3) wyrażają t. zw. *drugie prawo ruchu* Newtona. Zasada ta mówi, że wartości: siły F, działającej na ciało i przyśpieszenia f, które ono posiada, jeżeli zmieniają się z biegiem czasu, pozostają proporcjonalne do siebie; spółczynnikiem proporcjonalności jest masa m ciała, która jest cechą stałą, w ruchu niezmienną, charakteryzującą dane ciało, dla rozmaitych ciał różną.

Posłużyliśmy się tutaj wyrazem *masa* w tem samem znaczeniu, które nadajemy mu w języku potocznym. Nazywamy ciało *masywnem*, jeżeli dana siła wytwarza w niem stosunkowo nieznaczne przyśpieszenie; lub jeżeli, dla nadania ciału danego przyśpieszenia, potrzeba siły stosunkowo znacznej. O takiem ciele nieraz co prawda mówią ludzie, że «jest ciężkie»; ale podobny sposób wyrażania się nie jest poprawny. Kto nie dostrzega różnicy między dwiema różnemi własnościami materji, pomiędzy *ciężarem* a *masą*, ten nie zrozumiał głębokiej prawdy, tkwiącej w zasadach dynamiki.

§ 36. *Zasada działania i przeciwdziałania.*

Jak w § 34-ym, wyobraźmy sobie dwa ciała materjalne A i B, które okazują w pewnej chwili przyśpieszenia f_A i f_B. Oznaczmy przez m_A i m_B masy tych ciał. Ciała A i B wywierają w owej chwili na siebie siły następujące:

1. siła, wywierana na A przez B: $F_{AB} = m_A f_A$
2. siła, wywierana na B przez A: $F_{BA} = m_B f_B$.

Wiemy, że siły F_{AB} i F_{BA} są zawsze skierowane przeciwnie (§ 34). Ale oprócz określonego *kierunku*, każda siła ma pewną *wartość* (por. § 35). Czy niema związku pomiędzy wartościami sił F_{AB} i F_{BA}?

Newton pierwszy zrozumiał, że możemy zawsze wyobrażać sobie, iż te wartości są sobie równe:

3. $$F_{AB} = F_{BA}.$$

Z równań (1), (2) i (3) wynika

4. $$m_A f_A = m_B f_B$$

czyli

5. $$f_A : f_B = m_B : m_A.$$

W ciągu ruchu ciał A i B przyśpieszenia f_A i f_B przybierają wogóle coraz nowe wartości; natomiast stosunek m_B/m_A jest niezmienny. A zatem, według równania (5), zmienne z czasem wielkości f_A i f_B muszą zachowywać stosunek *stały*. Stwierdzamy, że tak jest *zawsze*, bez żadnego wyjątku. Planeta i słońce, kula ziemska i księżyc, żelazo i magnes, woda i wiosło, skrzydło ptaka i powietrze, huśtawka i kamień, armata i pocisk, listki elektroskopu, które rozchylają się, wszystkie słowem ciała na niebie i ziemi są temu prawu posłuszne. Żeglarz i astronom, inżynier i fizyk zasadzają się na niem codziennie i sprawdzają je nieustannie. Winniśmy podziwiać Newtona, gdy pisze: *mutationes velocitatum, in contrarias itidem partes factae... sunt corporibus reciproce proportionales*; w tych kilku słowach Newton odgaduje prawdę powszechną.

Spójrzmy na tę prawdę niejako od strony odwrotnej. Skoro przyśpieszenia f_A i f_B ciał A i B, działających na siebie, zachowują w ciągu ruchu stały stosunek, przeto ów stosunek f_A/f_B możemy *uznać* za odwrotny stosunek ich mas; możemy założyć (5) jako *określenie* stosunku m_B/m_A. Zmierzywszy f_A/f_B, otrzymujemy wówczas m_B/m_A. Możemy wybrać ciało A w taki sposób, ażeby m_A była *jednostką masy*; kładąc $m_A = 1$, otrzymujemy wartość m_B ze stosunku f_A/f_B. Widzimy zatem, że moglibyśmy zmierzyć tą drogą, przynajmniej w zasadzie, masę każdego ciała. Ale mamy w praktyce dogodniejsze w tym celu metody.

Pewna dodatkowa uwaga jest tutaj potrzebna. Wyobraźmy sobie parę ciał A, B; zmierzywszy stosunek przyśpieszeń f_A/f_B, wyprowadziliśmy zeń odwrotny stosunek mas m_B/m_A oraz (jeżeli $m_A = 1$) samą masę m_B. Niechaj teraz będzie dana inna para ciał A, C; przy pomocy podobnych pomiarów znajdujemy masę m_C. Tak znaleziona m_C pozostaje w pewnym stosunku do m_B; przypuśćmy naprzykład, że znaleźliśmy $m_C = 5 m_B$. Spróbujmy sprawdzić ten wynik. Zbliżamy do siebie ciała B i C, natomiast A oddalamy daleko; obserwujemy wówczas wzajemne oddziaływanie pomiędzy ciałami B i C, oddziaływanie, któremu wpływ ciała A nie przeszkadza. Zbadawszy przyśpieszenia, które B i C okazują w takich warunkach, otrzymujemy znowu stosunek ich mas. Czy jednak znajdziemy znowu $m_C = 5m_B$, jak poprzednio? Mierzymy obecnie m_C/m_B bezpośrednio; dawniej wymierzaliśmy ten stosunek za pośrednictwem masy m_A. Tylko doświadczenie może przekonać nas o tem, że w obu razach wartość stosunku m_C/m_B wypada ta sama. Ale takich lub podobnych doświadczeń dokonano tysiące od czasów Newtona.

Wypowiedzieliśmy już całkowicie trzecią zasadę dynamiki; obecne twierdzenie (3) albo (4) jest uzupełnieniem, które zapowiedzieliśmy w § 34-ym.

Trzecia zasada dynamiki jest krótkiem i ścisłem streszczeniem olbrzymiego zasobu doświadczeń; jest zarazem źródłem pojęcia *masy*. Druga zasada jest określeniem pojęcia siły. Uczmy się wszędzie odróżniać *określenia* od *twierdzeń*. Określenia są zależne od powszechnej zgody ludzi myślących; one stwarzają język nauki ale nie wzbogacają wiedzy. Treścią nauki są twierdzenia, oparte na doświadczeniu i z doświadczeniem zgodne; one nie zależą od woli uczonych, od postanowień choćby całej ludzkości. Możnaby bez niedorzeczności wyobrazić sobie, że zwołani na kongres uczeni postanowiliby (gdyby okazała się tego potrzeba), iż mamy przez wyraz *siła* rozumieć odtąd, nie iloczyn przyśpieszenia przez masę, lecz jakąś inną wielkość, inne dynamiczne pojęcie; ale uchylić treść trzeciego prawa Newtona, zmusić słońce czy pyłek, ażeby mu nie były posłuszne, to nie jest w mocy niczyjej.

Niejednokrotnie czytujemy w książkach, że *masa* jest to «ilość materji» albo, że *siła* jest to «przyczyna, która zmienia stan spoczynku lub ruchu». Takie określenia nie przynoszą pożytku; «ilość materji» oraz «przyczyna, zmieniająca stan spoczynku lub ruchu» są to wyrazy bez treści. Na zasadzie takich określeń nikt nie potrafi zmierzyć pewnej siły lub wyznaczyć masy. Siła i masa są to *pojęcia*, więc niejako znaki albo narzędzia naszego myślenia. Niedorzecznością byłoby powiedzieć, że znak $+$ jest przyczyną dodawania, że znak 100° C jest przyczyną, iż woda gotuje się. O *przyczynach* ruchu fizyka nic nie wie, nie może wiedzieć i wiedzieć nie chce.

§ 37. Dalsze uwagi nad zasadą działania i przeciwdziałania.

Musimy dokładnie zrozumieć zasadę działania i przeciwdziałania, ponieważ ona jest fundamentem dynamiki. Spróbujmy rozproszyć wszelką niejasność, która w niej mogłaby może pozostać.

Oczywistą jest rzeczą, że dwie siły, równe i przeciwne sobie, muszą się równoważyć czyli znosić wzajemnie, *jeżeli działają na to samo ciało*. Przypuśćmy, że człowiek X popycha ciało C na prawo, jednocześnie zaś inny człowiek Y pcha to samo ciało C równie mocno na lewo; wówczas C oczywiście nie poruszy się wcale. Lecz trzecia zasada dynamiki tyczy się *innego* zjawiska. Dwa ciała A i B działają na siebie; powiadamy, że siły F_{AB} i F_{BA}, wywierane przez te ciała, są sobie przeciwne i równe.

Siła F_{AB} działa na ciało A, siła F_{BA} działa na ciało B; te dwie siły *nie* są przyłożone do tego samego ciała, lecz do dwóch różnych ciał; o znoszeniu się tych sił nie może być mowy.

Koń ciągnie wóz, do którego jest zaprzężony; przypuśćmy, że ciągnie go za pośrednictwem rzemieni, sznurów czy pasów uprzęży. Te sznury lub pasy, gdy koń ciągnie, są naprężone, napięte. Skoro nie można napiąć sznura inaczej, jak ciągnąc jego końce w strony przeciwne, więc powiadamy: koń ciągnie wózek, lecz jednocześnie wózek ciągnie konia. Przypuśćmy, że N jest siłą, którą koń wywiera na wózek; według trzeciego prawa ruchu, wózek nawzajem wywiera na konia siłę N równie znaczną i skierowaną przeciwnie. Jeżeli zobopólne działania są sobie równe, *czemuż tedy koń zwycięża w walce* ze sprzeciwiającym się wózkiem?

Nie zapominajmy o tem, o czem już wspominaliśmy na wstępie § 34-go: ażeby ciągnąć, koń musi mieć oparcie dla kopyt; koń wspiera się o nierówności gruntu, o kamienie, o piasek i odpycha się od nich w kierunku ruchu. Po gładkim asfalcie koń trudno ciągnie; w razie gołoledzi ślizga się, nie znajduje dla kopyt oparcia. Ażeby odpychać się od nierówności gruntu lub innej podstawy, o którą się wspiera, koń ją uciska; doznaje wówczas przeciwdziałania, które wprawia go w ruch. Podobnie, gdy chcemy podnieść się na palcach, uciskamy posadzkę. Niechaj F oznacza siłę, którą koń wywiera na podstawę kopyt i której wzajemnie od niej doznaje. Dopóki F jest mniejsza niż N, koń *nie* ciągnie. Wzmagając wysiłek mięśni, koń wzmaga przeciwdziałanie podstawy; skoro F stanie się większa niż N, koń poczyna iść naprzód. Jakie siły działają na wózek? Przedewszystkiem wspomniana siła N, która ciągnie naprzód; następnie różne opory i tarcia, które działają w przeciwnym kierunku. Gdy N przeważa ponad temi hamującemi wpływami, wózek rusza z miejsca.

§ 38. *Zasada zachowania masy.*

Określone ciało materjalne ma zawsze tę samą, określoną masę. Wiemy, że na dane ciało mogą działać rozmaite siły; naprzykład ciężkość (czyli przyciąganie ziemi), ciążenie powszechne (np. przyciąganie słońca lub księżyca); siły mięśniowe, wywierane przez człowieka lub zwierzę; siły sprężyste, kapilarne, elektryczne, magnetyczne. Jakakolwiek jest natura siły, która sprawia w ciele przyśpieszenie, masa ciała, obliczona z równania (1) § 35-go lub z równania (5) § 36-go, wypada zawsze ta sama. Masa ciała nie zależy również od tego, czy ono jest zimne czy gorące; masa nie zależy od temperatury. Masa ciała nie zmienia się, czy ciało jest oświetlone czy ciemne; nie zmienia się, jeśli w jego łonie odbywają się chemiczne reakcje. Masa ciała tylko wówczas zmienia się, gdy materja wpływa zzewnątrz do niego lub też nazewnątrz z niego odpływa. Trwałość i niezmienność masy, którą wyraziliśmy w zdaniach powyższych, stanowi treść prawa, zwanego *zasadą zachowania masy.*

Słynny chemik francuski Antoni August Lavoisier (1743—1794) orzekł pierwszy, że chemiczne reakcje nie zmieniają całkowitej sumy mas wszystkich ciał, które biorą w nich udział. Wygłosiwszy to prawo, Lavoisier stworzył metodę ilościowego badania, która w chemji jest fundamentalna: metodę, zasadzającą się na *ważeniu.* J. S. Stas stwierdził, że dokładność prawa Lavoisiera rozciąga się conajmniej do 0·00001 części sumy mas, która ma pozostawać niezmienna. Inni uczeni posuwają tę granicę jeszcze dalej; jakkolwiek z niektórych nowszych badań wynikły pewne w tej mierze wątpliwości, w zwykłej jednak dynamice możemy bez obawy uważać prawo zachowania masy za zupełnie dokładne.

§ 39. *Punkt materjalny.*

W rozdziale I-ym wytłumaczyliśmy, w jakiem znaczeniu mówimy w kinematyce o ruchu punktu, o prędkości punktu, o jego przyśpieszeniu. W podobnym celu posługujemy się w dynamice pojęciem punktu. Mówimy w tej nauce o masie punktu, o siłach, które działają na punkt lub które on na inne punkty wywiera. Wyrażając się w taki sposób, życzymy sobie, ażeby *punkt* wyobrażał ciało i w niektórych względach mógł je w rozumowaniu zastąpić; dlatego przypisujemy mu masę, dlatego przypuszczamy, że wpływa na ruch innych punktów i sam od nich takich wpływów doznaje. Punkt, obdarzony takiemi własnościami, nazywamy w dynamice *punktem materjalnym.*

§ 40. *Określenie grama; określenie litra.*

Międzynarodowa jednostka masy, zwana *kilogramem*, została określona w umowie 1889-go roku w sposób następujący: kilogramem jest masa pewnego ciała K, wyrobionego z irydjoplatyny, które znajduje się w Biurze międzynarodowem Miar i Wag w Sèvres, pod Paryżem; ciało to nazywa się *międzynarodowym wzorcem kilograma.* W fizyce posługujemy się zwykle jedną tysiączną częścią kilograma; taka jednostka masy nazywa się *gramem* (w skróceniu gr).

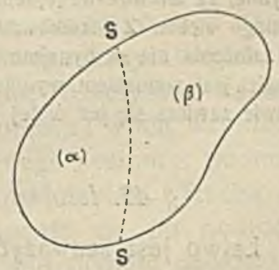
Litrem, według tej samej międzynarodowej umowy, nazywa się objętość jednego kilograma chemicznie czystej wody, znajdującej się w temperaturze 4° C i pod ciśnieniem jednej atmosfery.

Według zasad, przyjętych w pierwotnym układzie metrycznym (§ 3), litr miał być równy sześciennemu decymetrowi; miał zatem zawierać tysiąc centymetrów sześciennych. Jednakże, według powyższego określenia, przyjętego w umowie międzynarodowej 1889-go roku, kilogram nie ma związku z masą sześciennego decymetra wody; zatem litr *nie* jest równy sześciennemu decymetrowi. Według pomiarów, dokonanych przez pp. Guillaume, Benoît i Buisson i innych uczonych francuskich, litr wynosi 1·000027 dm^3; jeżeli zatem wysoka dokładność nie jest niezbędna, możemy uważać litr w przybliżeniu za 1 dm^3 czyli za 1000 cm^3.

§ 41. *Prawo bezwładności.*

Wyobraźmy sobie bryłę sztywną, np. kamień; wykonajmy nad nim w myśli pewne doświadczenie. Próbujemy usunąć kamień z pod działania wszelkich ciał materjalnych. Zabieramy kamień z powierzchni ziemi, ona bowiem wywiera pewną siłę na kamień. Oddalamy kamień od ziemi, od planet, od słońca, od wszystkich gwiazd widzialnego wszechświata; zanosimy go w nieskończone przestworze, w próżnię zupełną, gdzie znikają wszystkie obce działania, wszystkie siły zewnętrzne. Jak zachowa się kamień? Jak się będzie poruszał?

Wyobraźmy sobie w łonie kamienia pewną powierzchnię *SS* (rys. 41), która dzieli go na dwie części: (α) i (β). Pomiędzy temi częściami pewne siły muszą być czynne, chociaż naszym dostrzeżeniom nie są bezpośrednio dostępne. Skoro te siły są czynne, stosują się zatem do trzeciego prawa dynamiki. Jeżeli część (α) popycha naprzód część (β), w takim razie (β) uciska część (α) wstecz równie mocno. Jeżeli część (α) pociąga część (β) na lewo, tedy część (β) ciągnie część (α) równie mocno na prawo. Ale kamień stanowi całość spójną, sztywną, *niezmienną*; nie możemy poruszyć zosobna (α), nie wprowadzając w ruch (β) i odwrotnie. Co zatem dzieje się z dwoma ciśnieniami, albo z dwoma ciągnieniami, które, na rozległości powierzchni *SS*, są wywierane przez część (α) na część (β), przez część (β) na część (α)? Z powodu spójni kamienia te siły zniosą się, zrównoważą się ściśle. Kamień zachowa się tak, jak gdyby nie działały w nim żadne siły *wewnętrzne*. Ale na kamień, który usunęliśmy z pod wpływu całej reszty świata, nie działają również żadne siły *zewnętrzne*. Mamy więc ciało, na które nie działają żadne siły, ani zewnętrzne,



Rys. 41.

ani wewnętrzne; jakże porusza się ono? Równanie (1) § 35-go odpowiada na to pytanie. Kładąc w tem równaniu $F = 0$, otrzymujemy $f = 0$; lecz jeżeli przyśpieszenie jest stale równe zeru, tedy, według rozdziału I-go, ruch jest prostolinjowy jednostajny, albo też nie odbywa się wcale. *Ciało, usunięte z pod wpływu ogółu ciał materjalnych, poruszałoby się ruchem prostolinjowym jednostajnym względem ogółu ciał, które nie wywierają na nie żadnego działania.* Przypadek spoczynku mieści się oczywiście w ogólniejszym przypadku ruchu prostolinjowego jednostajnego, ponieważ prędkość stała może, w szczególnym przypadku, być równa zeru.

Zostaliśmy doprowadzeni do wniosku, który nazywamy *prawem bezwładności* albo *pierwszą zasadą dynamiki.* Ruch prostolinjowy i jednostajny ciała, usuniętego z pod działania wszelkich sił, nazywamy *bezwładnym*; *bezwładnością* nazywamy własność ciał materjalnych, która wyrażałaby się w ich ruchu bezwładnym, gdyby on mógł odbywać się rzeczywiście.

W trzeciem prawie dynamiki twierdzimy, że każde ciało może udzielać innym ciałom przyśpieszeń; w pierwszem prawie orzekamy jednocześnie, że samemu sobie ciało nie może udzielać przyśpieszeń. Uważamy każde ciało za czynne, za *władne* względem innych ciał, za nieczynne i bezwładne względem samego siebie. Z rozumowania, podanego w niniejszym artykule, wnosimy, że te założenia nie są bynajmniej sprzeczne ze sobą. Przeciwnie, prawo bezwładności jest wnioskiem, wynikającym z zasady działania i przeciwdziałania i właściwie zawiera się już w tej zasadzie.

§ 42. Istotne znaczenie prawa bezwładności.

Łatwo jest zauważyć, że ani jednego ciała nie potrafimy usunąć z pod wpływu wszystkich pozostałych ciał materjalnych; dlatego niektórzy sądzą, ze prawo bezwładności tyczy się jakiegoś fikcyjnego, niemożliwego przypadku. W istocie rzeczy jednak nie troszczymy się o to, czy ruch ściśle bezwładny odbywa się gdziekolwiekbądź we wszechświecie. W dynamice musimy często rozwiązać zadanie następującej natury. Przypuśćmy, że w pewnej początkowej chwili $t = 0$ znamy położenie i ruch pewnego ciała M, którego masa jest znana. Przypuśćmy, że w późniejszej chwili t dane są siły F_{MA}, F_{MB}, F_{MC} i t. d., które są wywierane na ciało M, w tej chwili t, przez obce ciała $A, B, C \ldots$; przypuśćmy, że te siły w chwili początkowej $t = 0$ nie były przyłożone do ciała M. Chcemy przewidzieć, jak w chwili t ciało M poruszać się musi. Ażeby to zadanie rozwiązać, powinniśmy wiedzieć, czy ciało *M* samo przez się spółdziała (i jak ono spółdziała) z siłami F_{MA}, F_{MB}, F_{MO} i t. d., które do niego są przyłożone. Zasada niezależności ruchów (§ 22) wraz z prawem bezwładności rozstrzyga tę sprawę. Nazwijmy dla skrócenia ruchem *własnym* ciała *M* ten ruch, który ciało *M* odbywało w chwili $t = 0$, gdy siły F_{MA}, F_{MB}, F_{MO} i t. d. nie były jeszcze do niego przyłożone. Prawo bezwładności orzeka, że ruch własny ciała *M trwa bez zmiany*, zachowywa się czyli nie ginie; podług § 22-go, *dodaje się on*, według twierdzenia o równoległoboku (§§ 22, 23, 24), do ruchu, wytwarzanego przez siły obce F_{MA}, F_{MB}, F_{MO} i t. d. Prawo bezwładności spełnia się więc nieustannie; możemy dopatrzeć się go w każdym ruchu brył materjalnych. Fikcja osamotnionego we wszechświecie ciała jest tylko wybiegiem, służącym do wypowiedzenia tego prawa w prostej i uderzającej postaci.

§ 43. *Czy bezwładność materji sama przez się jest oczywista.*

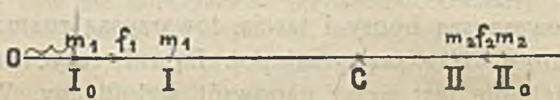
Prawda, zawarta w prawie bezwładności materji, sama przez się nie jest oczywista. Wszystkim rodzajom ruchu, dostrzeganym na ziemi, towarzyszą opory i tarcia, towarzyszą rozmaite hamowania i wstręty, które zazwyczaj potrafią zniweczyć ruch bardzo szybko, jeżeli nie jest wciąż napowrót wzbudzany. Wózek, popchnięty po bruku, zatrzymuje się rychło; rozkołysane wahadło albo dzwonek drgający uspakaja się wprędce; woda wzburzona w naczyniu układa się niebawem do równego poziomu; podmuch powietrza w zamkniętym pokoju ginie natychmiast. Trzeba ciągnąć kanapę lub skrzynię, ażeby posunęła się po podłodze; trzeba nieustannie wiosłować, ażeby czółno płynęło naprzód po stawie. Ruchy dokoła nas wyczerpują się, milkną. O tem wiedzieli A r y s t o t e l e s i jego uczniowie i dlatego tak nauczali: ruch jest skutkiem, siła przyczyną; gdy znika przyczyna, skutek ginie; *cessante causa cessat effectus.* Ruch zamiera, gdy nie podsyca go, gdy wciąż nie wzbudza go siła. Ażeby trwać, każdy ruch wymaga działania siły, nawet ruch jednostajny. Tak uczyli filozofowie przez całe stulecia; mnóstwo ludzi niewykształconych jeszcze i dzisiaj sądzi podobnie. Dopiero G a l i l e u s z dostrzegł ten błąd i wyprowadził zeń ludzkość myślącą.

Trwanie ruchu wciąż hamowanego wymaga rzeczywiście nieprzerwanego działania siły. Ale *nie* każdy ruch jest hamowany;

ruch ziemi około słońca, obrót ziemi dokoła osi, nie są hamowane. Co więcej: niektóre ruchy są słabo hamowane, inne są mocno hamowane. Opory i tarcia są przeszkodą, są zakłóceniem ruchu; *nie* należą do jego istoty. Umieśćmy skrzynię na wałkach lub kanapę na rolkach a potoczą się łatwo; ustawmy wagon na szynach, rozpędzony mknie wówczas daleko; kula, która po suknie porusza się leniwie, biegnie chyżo po tafli szkła albo lodu. Wystarczy naoliwić łożysko koła rozpędowego, ażeby zrozumieć wielką myśl Galileusza; nieco oliwy obala scholastyczną dynamikę. Siedząc w rozpędzonym wagonie, hamowniczy całym wysiłkiem mięśni działa na hamulce, kiedy chce zmniejszyć prędkość wagonu i zatrzymać go w biegu; ów hamowniczy zna dobrze bezwładność materji, lepiej niż ci, którzy o niej tylko w książkach czytali.

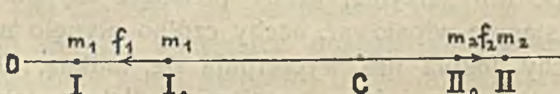
§ 44. O środku masy.

Wyobraźmy sobie dwa punkty materjalne, których masy są m_1 i m_2. W początkowej chwili $t = 0$ punkty znajdują się w spoczynku w miejscach I_0 i II_0 (rys. 42 lub 43) i wywierają na siebie



Rys. 42.

siły równe i przeciwne sobie. Jeżeli m_1 przyciąga ku sobie m_2, tedy nawzajem m_2 przyciąga m_1 (rys. 42); jeżeli m_1 odpycha m_2, tedy m_2 odpycha m_1 (rys. 43). Pod wpływem tych sił punkty



Rys. 43.

poczynają się poruszać. Jeżeli się przyciągają, zbliżają się ku sobie i po upływie pewnego czasu t znajdą się w miejscach I i II (rys. 42); jeżeli się odpychają, oddalają się od siebie i w chwili t będą zajmowały położenia I i II (rys. 43). Wybieramy na prostej $I_0 II_0$ punkt C w taki sposób, ażeby

1. $$I_0 C : C II_0 = m_2 : m_1.$$

Taki punkt C (tylko pomyślany, w którym masy niema) nazywamy *środkiem masy* układu $m_1\, m_2$. Udowodnimy niżej, że z trzeciej zasady dynamiki wynika następująca własność tego punktu: *środek masy nie porusza się, gdy punkty* m_1 i m_2 (*które były pierwotnie w spoczynku*) *poczynają poruszać się pod wpływem sił, które wywierają na siebie wzajemnie.* Naprzykład w chwili t punkt C będzie w tem samem miejscu jak w chwili $t = 0$ i będziemy mieli znowu

2. $$IC : CII = m_2 : m_1.$$

Przypuśćmy, że odstęp czasu t jest niezmiernie krótki. Oznaczmy przez f_1 i f_2 średnie przyśpieszenia punktów w tym odstępie. Czy punkty przyciągają czy odpychają się wzajemnie, mamy zawsze według § 36-go:

3. $$m_1 f_1 = m_2 f_2.$$

Oznaczmy przez v_1 i v_2 prędkości punktów w chwili t. Ponieważ początkowo punkty były w spoczynku, mamy $f_1 = v_1/t$, $f_2 = v_2/t$; zatem, podług (3)

4. $$m_1 v_1 = m_2 v_2.$$

Na linji prostej $I_0 II_0$ wybieramy dowolny punkt stały O, od którego liczymy wszystkie odległości x, naprzykład:

5. $$OI_0 = x_1^0; \quad OII_0 = x_2^0; \quad OI = x_1; \quad OII = x_2.$$

Na tej samej prostej wybieramy punkt C w taki sposób, żeby

6. $$(m_1 + m_2) x_C^0 = m_1 x_1^0 + m_2 x_2^0; \quad (m_1 + m_2) x_C = m_1 x_1 + m_2 x_2.$$

Skoro t jest czasem nadzwyczajnie krótkim, mamy, w przypadku rys. 42-go:

7. $$v_1 = (x_1 - x_1^0)/t; \quad v_2 = -(x_2 - x_2^0)/t.$$

Otrzymujemy z (7) i (4)

8. $$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_1^0 + m_2 x_2^0$$

co, według (6), znaczy:

9. $$x_C = x_C^0.$$

Tworząc podobnie v_1 i v_2 w przypadku rys. 43-go, otrzymujemy w tym razie znowu równanie (9). *Punkt C zatem* istotnie *nie porusza się wcale,* jak zapowiedzieliśmy. Z określeń (6) wypada

10. $$(x_C^0 - x_1^0) : (x_2^0 - x_C^0) = m_2 : m_1$$

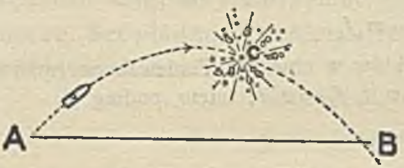
11. $$(x_C - x_1) : (x_2 - x_C) = m_2 : m_1$$

co jest zgodne z twierdzeniami (1) i (2).

W rozumowaniu powyższem moglibyśmy byli powiedzieć, że prędkość v_C środka masy C jest równa zeru; lub że jego przyśpieszenie f_C jest równe zeru. Chociażby punkty m_1 i m_2 miały dowolne prędkości w chwili $t = 0$, twierdzenie $f_C = 0$ nie przestałoby być prawdziwe. Podobnie jak kamień, o którym była mowa w § 41-ym, środek masy układu $m_1\, m_2$ porusza się ruchem *bezwładnym,* jeżeli działają w tym układzie tylko siły *wewnętrzne* t. j. wzajemne siły pomiędzy punktami.

Każdy układ punktów materjalnych, każde ciało materjalne posiada środek masy; prawo ruchu tego środka, które tutaj poznaliśmy, jest zawsze prawdziwe, jeżeli w układzie są czynne tylko siły *wewnętrzne*; *środek masy układu albo spoczywa albo porusza się ruchem bezwładnym, jeżeli w tym układzie czynne są tylko siły wewnętrzne.*

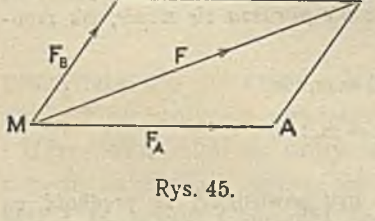
Powracając naprzykład do przypadków, wspomnianych w § 34-ym, mówimy, że w każdym z nich środek masy pozostaje w spoczynku; środek masy huśtawki i kamieni, magnesu i kawałka żelaza, armaty i pocisku, podczas ruchu tych ciał pozostaje w spoczynku. Gdyby armata wchłaniała pocisk w siebie, zamiast go wyrzucać ze siebie, posuwałaby się naprzód przy strzale. Człowiek, który zawisłby w próżni, gdzieś niezmiernie daleko od ziemi, słońca i gwiazd, nie poruszyłby swego środka masy, jakkolwiek poruszałby rękoma albo nogami. Gdyby lokomotywa wisiała na łańcuchach lub gdyby jej koła, w braku tarcia, ślizgały się po szynach, ruch tłoków wywoływałby tylko drgania różnych części i narządów maszyny, nie posuwając jej naprzód. Przypuśćmy, że wystrzelony z armaty granat, w chwili, w której wybucha, biegnie po krzywej *ACB* (rys. 44); jego części i cząstki rozpryskują się wówczas we wszystkie strony, ale środek masy *C* biegnie ruchem niezakłóconym po dotychczasowej orbicie, tak samo, jak gdyby granat nie był wybuchnął.



Rys. 44.

§ 45. *Twierdzenie o równoległoboku sił.*

Uzupełniamy teraz poprzedzające wiadomości w pewnym ważnym względzie. Może się zdarzyć, zdarza się nawet codziennie, że pewne ciało *M* pozostaje pod wpływem dwóch naraz ciał materjalnych; doznaje ono wówczas spółczesnego działania dwóch sił. Twierdzimy, że każda z tych sił działa niezależnie od drugiej; każda wytwarza w ciele *M* takie przyśpieszenie, jak gdyby pozostała siła nie istniała.



Rys. 45.

Przypuśćmy, że ciało *M* znajduje się pod wpływem dwóch ciał: *A* i *B*. Niechaj *MA* (rys. 45) wyobraża siłę F_A, którą ciało *A* wywiera na *M*; niechaj *MB* wyobraża siłę F_B, którą na *M* wywiera ciało *B*. Oznaczmy przez

f_A przyśpieszenie, które siła F_A nadałaby ciału M, gdyby ciało B nie istniało; oznaczmy przez f_B przyśpieszenie, które nadałaby ciału M siła F_B, gdyby ciało A nie było obecne; oznaczmy przez m masę ciała M. Z § 35-go wiemy, że

1. $$F_A = mf_A; \quad F_B = mf_B,$$

że kierunek siły F_A zgadza się z kierunkiem przyśpieszenia f_A, że kierunek siły F_B zgadza się z kierunkiem przyśpieszenia f_B. Umówiliśmy się przed chwilą, że MA i MB na rys. 45-ym mają wyobrażać siły F_A i F_B; lecz skoro przyśpieszenia f są proporcjonalne do sił F i skierowane jak one, zatem możemy przypuścić, że MA i MB na rys. 45-ym wyobrażają przyśpieszenia f_A i f_B; w tym celu musimy tylko założyć, że *skala* rysunku została odpowiednio zmieniona; zamiast być skalą sił, jak poprzednio, jest teraz skalą przyśpieszeń. Dodajemy teraz f_A i f_B do siebie geometrycznie, według zasad § 29-go; jeżeli MC jest przekątnią równoległoboku, którego bokami są MA i MB, MC w skali przyśpieszeń wyobraża przyśpieszenie *wypadkowe* f, które składa się geometrycznie ze składowych f_A i f_B. Wyobraźmy sobie siłę F, której wartość wynosi

2. $$F = mf$$

i której kierunek zgadza się z kierunkiem MC przyśpieszenia f. Powracając na rys. 45-ym od skali przyśpieszeń do skali sił, widzimy, że wektor MC wyobrazi wówczas siłę F co do wartości i co do kierunku. Siłę tę F nazywamy *wypadkową* sił *składowych* F_A i F_B, złożoną z nich geometrycznie. Powiadamy, że *siła wypadkowa tworzy się z sił składowych według zasady równoległoboku.*

Zasada równoległoboku stosuje się zatem do sił, podobnie jak, według §§ 24-go i 29-go, stosuje się do prędkości i do przyśpieszeń; ustanawia więc ona również sposób *rozkładania* sił, podobnie jak ustanawia sposób rozkładania prędkości i przyśpieszeń (§§ 25 i 29). Możemy tworzyć ukośne lub prostopadłe rzuty sił na kierunki danych osi, podobnie jak tworzyliśmy rzuty prędkości albo przyśpieszeń.

§ 46. *Galileusz. Jak ciała upuszczone spadają.*

«Przedstawiamy tu nową naukę o bardzo dawnym przedmio-«cie. Od niepamiętnych czasów znany jest ruch; niemało pism «o nim niebylejakich wydali filozofowie. Jednakże spostrzegłem «niektóre właściwości ruchu, które w wysokim stopniu zasługują «na uwagę; nie wiedziano o nich dotychczas lub niedosyć do«kładnie». Temi słowy rozpoczyna się rozdział trzeci, najważniejszy, dzieła Galileusza, ogłoszonego w Lejdzie 1638 roku p. t. *Discorsi e Demostrazioni matematiche intorno a due nuove Scienze,* lub raczej «dzień trzeci» rozpraw i rozstrząsań, poświęconych nowej nauce.

Była to istotnie nowa nauka o pospolitym przedmiocie. Codziennie przekonywamy się o tem, że otaczające nas ciała są *ciężkie*; że ciała te, gdy są upuszczone, spadają. Jak już Mach zauważył, filozofowie długo rozmyślali nad zapytaniem: *dlaczego* spadają? Dopiero Galileusz postawił sobie pytanie: *jak* spadają? Wszyscy wiedzą, powiada, że ciała tem prędzej biegną ku ziemi, im dłużej spadają; prędkość ruchu wzmaga się zatem w miarę spadania. Przypuśćmy, że w chwili $t = 0$ ciało ciężkie M zostało swobodnie upuszczone, bez żadnej początkowej prędkości; jaka może być prędkość v w dowolnej późniejszej chwili t? Po kilku odmiennych domysłach, które sam uznał za błędne, Galileusz przypuścił, że prędkość v jest proporcjonalna do czasu t, który upłynął od początku spadania. Jeżeli więc g oznacza pewną stałą czyli spółczynnik proporcjonalności, mamy

1. $$v = gt.$$

Ruch ciała M jest prostolinjowy i jednostajnie przyśpieszony (§§ 16, 17 i 19); przyśpieszenie ciała w tym ruchu jest stałe i równe spółczynnikowi g. Droga s, przebieżona od chwili początkowej $t = 0$, wynosi

2. $$s = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Z równań (1) i (2) wyprowadzamy

3. $$v^2 = 2gs.$$

Równania (1), (2) i (3) streszczają w sobie prawa, według których ciała ciężkie spadają swobodnie w próżni, bez początkowej prędkości. Wiemy z § 19-go, że te równania zgadzają się z doświadczeniem; że *przyśpieszenie ciężkości g* wynosi w Polsce około 981 cm/sek².

Zastosujmy jeszcze równanie (1) § 35-go do obecnego przypadku. Siłę F, która pobudza ciało do spadania, nazywamy jego *ciężarem*. Oznaczając ciężar ciała przez p (od łacińskiego *pondus*), masę ciała przez m i pisząc g zamiast f, znajdujemy

4. $$p = mg.$$

Ciężar ciała jest proporcjonalny do masy; spółczynnikiem proporcjonalności jest przyśpieszenie ciężkości g.

Możemy teraz ocenić śmiałość i doniosłość założenia, które Galileusz bierze za punkt wyjścia. Perypatetycy nauczali, że trwanie ruchu, nawet jednostajnego, wymaga nieustannego działania siły (§ 43); byli zatem w kłopocie, gdy zapytywano: czemu spadające ciała biegną coraz prędzej ku ziemi? Według ich nauki, sama ciężkość nie wystarczała, ażeby wytwarzać ruch przyśpieszony. Ażeby uratować twierdzenie, na którem budowali całą dynamikę, arystotelicy uciekali się do dodatkowych, sztucznych przypuszczeń; mówili naprzykład, że powietrze «zamyka się» za ciałem ku ziemi biegnącem i pobudza je tym sposobem do coraz większej prędkości. Galileusz nie ukrywa pogardy, którą żywi dla podobnych pomysłów; wie dobrze, że powietrze przeszkadza, a nie pomaga, ruchowi ciał w niem spadających; nie waha się jednak w pierwszem przybliżeniu zaniedbać drobne zakłócenie, które opór powietrza do zjawiska spadania wprowadza. Galileusz rozumie, że ruch ciała spadającego musi być przyśpieszony *właśnie dlatego*, że działa na nie bezustannie siła ciężkości. Siła ciężkości ma wartość stałą i kierunek stały; zatem ruch ciała spadającego jest prostolinjowy i jednostajnie przyśpieszony. Taki jest bieg myśli Galileusza. Odgaduje on prawdę prostą i głęboką: *bynajmniej nie prędkość, ale przyśpieszenie jest objawem i jest miarą siły.* I oto widzimy, jak czyta tę prawdę w zamęcie zjawisk zmiennych i zawiłych; jak po raz pierwszy, co prawda tylko w szczególnym przypadku, pojmuje istotną treść drugiego prawa ruchu Newtona, w którem pośrednio i pierwsze się mieści.

Lecz kiedy już odgadł prawa zjawiska, Galileusz postanawia domysł swój *sprawdzić* i o jego słuszności przekonać i samego siebie i innych. Ucieka się do doświadczenia; dokonywa pomiarów nad sposobem spadania ciał ciężkich; ażeby ich dokonać, stwarza metody, wynajduje przyrządy. Choć w porównaniu do dzisiejszych mało dokładne, spostrzeżenia Galileusza są dostateczne, ażeby go utwierdzić w przekonaniu, że wpadł na trop prawdy. Tym sposobem jedno zjawisko, spadanie, zostało ilościowo opanowane. Gdy Galileusz tego dokonał, giną zakręty dialektyki, rozpraszają się mgły scholastyczne; spadanie ciał ciężkich przestaje być niezrozumiałe. Stąd dla nas wynika ważna wskazówka. Myśli ludzkiej potrzeba niewzruszonego gruntu rzeczywistości, ażeby, zasadzając się na nim, umiała trwale budować; gdy zanadto oddalamy się od faktów, gubimy się zwykle w przestworzu bezbrzeżnem, bezkształtnem i niemal zawsze bezpłodnem.

Scholastyczna dynamika niewątpliwie gromadziła błędy na błędach; lecz i w niej można znaleźć ziarnko prawdy, choć przeinaczonej. Wyobraźmy sobie kulę metalową, zanurzoną w dużej masie cieczy bardzo *lepkiej*, naprzykład w mazi lub w smole. Kula jest ciężka; siła ciężkości działa na nią na dół pionowo i pobudza do spadania. Lecz ciecz bardzo lepka przeszkadza ruchowi; im ruch kuli jest szybszy, tem opór cieczy staje się większy. Jeżeli spadanie trwa długo, działanie lepkości uśmierza do pewnego stopnia wpływ siły ciężkości, znosi mianowicie przyśpieszenie, wytwarzane wciąż przez tę siłę. Ruch kuli staje się wówczas *jednostajny*; do ciężaru kuli proporcjonalna jest jej prędkość (która jest stała) a nie przyśpieszenie (które jest zerem). Prawo ruchu kuli, poruszającej się w taki sposób, odkrył w r. 1850-ym uczony angielski G. G. Stokes, nosi też ono słusznie jego nazwisko.

Widzimy, że ruch, przyśpieszany przez siłę obcą, zewnętrzną (jak tutaj przez ciężkość) ale zarazem hamowany i tamowany przez opór, może odbywać się tak, jak gdyby nie było ani obcej siły, ani oporu, jak gdyby odbywał się przez prostą bezwładność. Tylko do takiego szczególnego przypadku stosują się zasady Arystotelesowskiej dynamiki.

§ 47. *Jednostka siły; dyna. Jednostki ciężarowe.*

Przypuśćmy, że siła F, działając na ciało o masie m, sprawia w niem przyśpieszenie f; według równania (1) § 35-go mamy wówczas

$$1. \qquad F = mf.$$

Jednostka siły jest więc iloczynem jednostki masy przez jednostkę przyśpieszenia. Za jednostkę masy w § 40-ym przyjęliśmy 1 gram; za jednostkę przyśpieszenia w § 15-ym przyjęliśmy 1 cm/sek^2. Stąd wynika, że nasza jednostka siły jest następująca:

$$2. \qquad 1 \text{ gr cm/sek}^2.$$

Siła, która (sama jedna) działając na 1 gram, wytwarza w nim przyśpieszenie 1 cm/sek^2, nazywa się *dyną*.

Oznaczmy przez p ciężar ciała, którego masa jest m. Według (4) § 46-go:

3. $$p = mg.$$

Widzimy zatem, że ciężar 1 grama jest równy g dynom; odwrotnie, 1 dyna jest równa ciężarowi $1/g$ części grama.

Ciężkość jest siłą najpospolitszą, z którą w doświadczeniu codziennem zapoznajemy się stosunkowo najlepiej. Gdy więc pragniemy uzmysłowić wartość pewnej siły, porównywamy ją chętnie z ciężarem wiadomej masy; mówiąc naprzykład o sile, równej ciężarowi 3 kilogramów, powołujemy się na powszechnie znane wrażenie mięśniowe. — Technicy, przemysłowcy, nieraz i uczeni, mówią często przez skrócenie o «sile trzech kilogramów»; *ciężar kilograma* nazywają wówczas, przez skrócenie, *kilogramem*. Słuchając rozmów potocznych, przekonywamy się, że wyrazy *kilogram, gram, funt, cetnar, tonna* w rozumieniu wielu osób oznaczają raz masę, to znowu ciężar tych wzorców. *Grawitacyjną* lub *ciężarową jednostką siły* nazywamy ciężar pewnej określonej masy, naprzykład ciężar 1 grama. Zachowując 1 cm/sek^2 jako jednostkę przyśpieszenia, powiadamy na zasadzie wzoru (3): jeżeli ciężarową jednostką siły jest ciężar 1 grama, ciężarową jednostką masy jest masa g gramów. Wówczas:

4. $$\text{masa 1 grama} = \frac{1}{g} \text{ ciężarowej jednostki masy.}$$

Za przykładem A. Witkowskiego rozumiemy przez gr *masę*, przez Gr zaś oznaczamy *ciężar 1 grama*; podobnie odróżniamy kg i Kg i t. d.

Zobaczymy w rozdz. III im, że wartość przyśpieszenia g zmienia się (niezbyt zresztą znacznie), zależnie od położenia ciała na powierzchni ziemi; a zatem od tego położenia zależy również ciężarowa jednostka masy. Gdy zadawalniamy się pierwszem przybliżeniem, ciężarowe jednostki masy i siły są, jak widzimy, dogodne w codziennem użyciu; ale ponieważ są *zmienne*, zatem w ścisłej nauce nie powinniśmy posługiwać się niemi.

§ 48. *Streszczenie zasad dynamiki.*

Możemy streścić zasady dynamiki w kilku zdaniach.

Ciała materjalne wywierają siły na siebie nawzajem; to znaczy, że zobopólnie wytwarzają w sobie przyśpieszenia.

Przyśpieszenie ciała jest miarą działającej na nie siły; siła jest wprost proporcjonalna do przyśpieszenia. Spółczynnikiem proporcjonalności jest masa, cecha niezmienna, charakteryzująca ciało, dla każdego ciała inna.

Jak przyśpieszenie, siła jest wektorem i ma jego kierunek. Siły, wywierane przez dwa nawzajem na siebie działające ciała, są równe sobie i skierowane przeciwnie; stąd wynika, że masy tych ciał są odwrotnie proporcjonalne do przyśpieszeń.

Przyśpieszenie, proporcjonalne do siły, znika z nią razem; ciało, usunięte z pod działania jakichkolwiekbądź sił, poruszałoby się zatem ruchem prostolinjowym jednostajnym. Taki ruch, zwany bezwładnym, może trwać niezależnie od ruchów, wytwarzanych w ciele przez przyłożone siły.

Jeżeli siła ma wartość stałą i kierunek stały, przyśpieszenie ma również stałą wartość i stały kierunek; ruch ciała wówczas jest prostolinjowy i jednostajnie przyśpieszony.

Jeżeli na pewne ciało działają jednocześnie dwa inne ciała, siły, które one wywierają, składają się według zasady równoległoboku. Według tejże zasady siły mogą się rozkładać.

§ 49. Prawa ruchu planet dokoła słońca.

Wiele lat przed Newtonem, Mikołaj Kopernik zrozumiał, że ziemia i inne planety biegną dokoła słońca po drogach krzywych, płaskich, zamkniętych, które nazywamy *orbitami* (*Nicolai Copernici Torinensis De Revolutionibus Orbium Coelestium libri* VI. 1543). Kopernik uważał orbity ziemi i planet za koła; Keppler, na zasadzie spostrzeżeń Tychona Brahe, uznał orbitę Marsa a następnie orbity innych planet za *elipsy*, których jedno ognisko zajmuje słońce lub, dokładniej, pewien punkt bryły słonecznej. Towarzyszący nam księżyc krąży podobnie dokoła ziemi po torze przybliżenie eliptycznym, którego jedno ognisko zajmuje środek ziemi. Orbity planet i księżyca różnią się zresztą mało od kół; w pierwszem przybliżeniu możemy uważać te orbity za koła.

Wszystkie planety naszego słonecznego układu krążą dokoła tej samej wielkiej bryły centralnej, dokoła słońca; dlatego Keppler domyślał się, że pomiędzy ich orbitami lub obiegami musi zachodzić jakaś zależność; po długich latach poszukiwania, znalazł ją istotnie w r. 1618-ym. *Kwadraty okresów planet* (czyli czasów, w których one odbywają jeden obieg dokoła słońca) *mają się do siebie jak sześciany wielkich półosi ich orbit eliptycznych*; *lub w przybliżeniu* (jeżeli uznajemy te orbity za koła) *mają się do siebie jak sześciany promieni ich orbit.*

§ 50. *Prawo siły, wywieranej na planety przez słońce.*

Newton wiedział wszystko, co wyłożyliśmy w niniejszym rozdziale: o bezwładności materji, o prawach działania sił, o spadaniu ciał ciężkich ku ziemi, o krążeniu planet dokoła słońca i księżyców dokoła planet. Wiedział, że ciało, na które nie wpływałaby żadna siła, musiałoby poruszać się po torze prostym ze stałą prędkością albo też pozostawać w spoczynku. Skoro ziemia (lub dowolna inna planeta) biegnie po eliptycznej lub w przybliżeniu po kołowej orbicie, *zbacza zatem co chwila od kierunku ruchu poprzedzającego*; zdradza więc nieustannie, *że znajduje się pod wpływem pewnej siły.*

Przypuśćmy dla uproszczenia, że planeta krąży dokoła słońca jednostajnie, po orbicie kołowej. Wiemy wówczas (§ 28), że przyśpieszenie planety jest stale skierowane ku środkowi koła, gdzie znajduje się słońce. Stąd wnosimy, że *planety poruszają się tak, jak gdyby nieprzerwanie ulegały działaniu siły przyciągającej, skierowanej ku słońcu.* Ten sam wniosek wynika z praw dokładniejszych, według których poruszają się planety po eliptycznych orbitach.

Wiemy z § 28-go, jaka jest wartość przyśpieszenia f planety, ożywionej ruchem jednostajnym kołowym. Jeżeli r jest promieniem orbity, v prędkością planety, ω jej prędkością kątową, T okresem czyli czasem jednego całkowitego obiegu, mamy

1. $$f = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Według drugiej zasady dynamiki, siła F, działająca na planetę, musi mieć wartość następującą

2. $$F = mf,$$

gdzie m jest masą planety. Z (1) i (2) otrzymujemy

3. $$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}.$$

Porównajmy bieg dwóch planet: A i B. Przez m_A i m_B oznaczamy masy tych planet, przez r_A i r_B promienie ich orbit, przez

T_A i T_B ich okresy (czyli czasy obiegu); przez F_A i F_B rozumiemy wartości sił przyciągania, wywieranych na te planety przez słońce. Piszemy równanie (3) najprzód dla planety A, następnie dla planety B; z tych wzorów wyprowadzamy

4. $$F_A : F_B = \frac{m_A r_A}{T_A^2} : \frac{m_B r_B}{T_B^2}.$$

Jednakże prawo K e p p l e r a, o którem mówiliśmy w artykule poprzednim, orzeka, że:

5. $$T_A^2 : T_B^2 = r_A^3 : r_B^3.$$

Łącząc ze sobą równania (4) i (5), dochodzimy do wniosku, iż

6. $$F_A : F_B = \frac{m_A}{r_A^2} : \frac{m_B}{r_B^2}.$$

Siła, wywierana przez słońce na planetę, jest wprost proporcjonalna do masy planety, odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości planety od słońca.

§ 51. Newtona prawo wzajemnego przyciągania się ciał.

Odwołujemy się teraz do zasady działania i przeciwdziałania, którą poznaliśmy w §§ 34-ym, 36-ym i 37-ym. Jeżeli planeta P (rys. 46) doznaje od słońca S siły F_{PS}, skierowanej ku słońcu

Rys. 46.

wzdłuż prostej PS, tedy według powołanej zasady słońce S musi nawzajem doznawać od planety P siły F_{SP} skierowanej przeciwnie t. j. wzdłuż prostej SP. *Wszystkie ciała wszechświata przyciągają się wzajemnie wzdłuż kierunków łączących je linij prostych.*

Widzieliśmy w artykule poprzednim, że każde ciało jest przyciągane w stosunku prostym jego masy; zatem siła F_{PS} musi być wprost proporcjonalna do masy m_P planety P, siła F_{SP} musi być wprost proporcjonalna do masy m_S słońca S. Lecz ponieważ

1. $$F_{PS} = F_{SP},$$

przeto obiedwie te siły muszą być proporcjonalne jednocześnie i do m_P i do m_S czyli do iloczynu $m_P m_S$. Oznaczając więc przez r_{PS} najkrótszą odległość PS i rozumiejąc przez k pewną stałą powszechną, czyli jednakową dla wszelkich ciał P i S, dochodzimy do wniosku, który okrył sławą nazwisko Newtona:

2. $$F_{PS} = F_{SP} = \frac{k m_P m_S}{r_{PS}^2}.$$

Wszystkie ciała wszechświata przyciągają się wzajemnie wprost proporcjonalnie do iloczynu swych mas, odwrotnie proporcjonalnie do kwadratów dzielących je odległości.

§ 52. *Ruch dwóch ciał przyciągających się.*

Weźmy do pomocy drugie prawo dynamiki, równanie (1) § 35-go i utwórzmy przyśpieszenia planety i słońca na zasadzie prawa (2) poprzedniego artykułu. Twierdzimy, że

1. przyśpieszenie planety $f_P = \frac{F_{PS}}{m_P} = \frac{k m_S}{r_{PS}^2}$

2. przyśpieszenie słońca $f_S = \frac{F_{SP}}{m_S} = \frac{k m_P}{r_{PS}^2}$.

Stąd wynika, iż

3. $$f_P : f_S = m_S : m_P.$$

Weźmy na uwagę naprzykład kulę ziemską i słońce. Masa słońca jest 333432 razy większa niż masa ziemi; zatem według (3) przyśpieszenie ziemi jest 333432 razy większe niż przyśpieszenie słońca. Dlatego możemy w pierwszem przybliżeniu powiedzieć, że kula ziemska biegnie dokoła słońca, jak gdyby słońce było nieruchome. W istocie obiedwie te bryły krążą dokoła wspólnego środka masy (§ 44), który jednak leży zawsze o wiele bliżej środka słońca aniżeli środka ziemi.

Co tu powiedzieliśmy, stosuje się do każdej pary ciał. Ziemia przyciąga kamień ku sobie; to przyciąganie, które nazywamy ciężarem kamienia, czujemy mięśniowo, gdy trzymamy kamień w ręku. Gdy upuszczamy kamień swobodnie, nie rzucając go, nie nadając mu żadnej ubocznej początkowej prędkości, kamień spada ku ziemi; planeta bez początkowej prędkości spadałaby podobnie ku słońcu. Jak zobaczymy w rozdz. III-im, kamień rzucony ukośnie, zataczając pewną krzywą, dobiega powierzchni ziemi; gdybyśmy mogli rzucić go z pewną olbrzymią prędkością, począłby okrążać kulę ziemską, stałby się maleńkim księżycem.

Ziemia przyciąga kamień i kamień przyciąga ziemię; siły obustronnie wywierane są równe, przyśpieszenia są w odwrotnym stosunku do mas. Kamień, którego masa wynosi kilogram, posiada masę 6×10^{24} razy mniejszą niż masa ziemi; przyśpieszenie ziemi biegnącej ku kamieniowi jest więc 6×10^{24} razy mniejsze niż przyśpieszenie kamienia biegnącego ku ziemi (por. §§ 36 i 44).

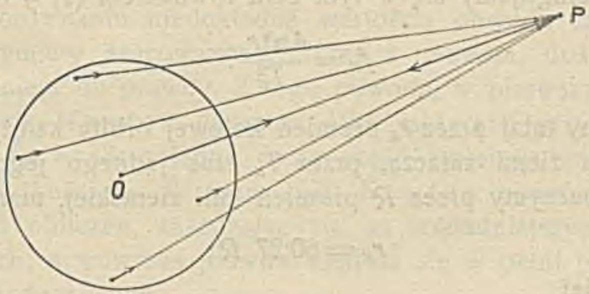
§ 53. O ciążeniu powszechnem.

Zastanowiwszy się nad prawem (2) § 51-go, dostrzegamy natychmiast, że ono nie może stosować się w tej postaci do wielkich brył, do ciał nadzwyczaj rozległych; nie może przynajmniej stosować się ściśle. Istotnie, odległość r_{PS} ma jasne i określone znaczenie, gdy ciała P i S są punktami; lecz z różnych miejsc w bryle słonecznej możemy poprowadzić rozmaite proste do różnych miejsc ziemi i proste te nie będą sobie równe. Jakaż zatem odległość r_{PS} powinna stać w formule (2) § 51-go, ażeby wypadła prawdziwa wartość przyciągania, czynnego między słońcem a ziemią? Czyżby ta formuła była tylko przybliżenie prawdziwa? czy stosowałaby się tylko w założeniu, że rozmiary własne słońca i planet wolno zaniedbać w stosunku do ogromnych odległości, które oddzielają te ciała od siebie?

Newton nie waha się w odpowiedzi na to pytanie. Według Newtona *ciążenie powszechne działa pomiędzy każdemi dwiema najmniejszemi cząstkami materji, ściśle proporcjonalnie do ich mas, odwrotnie proporcjonalnie do kwadratów dzielących je odległości.* Przyciąganie czynne pomiędzy słońcem a ziemią jest *siłą wypadkową*, wynikającą z geometrycznego dodawania się do siebie (§ 45) sił, działających pomiędzy wszystkiemi cząstkami słońca a wszystkiemi cząstkami ziemi; takie samo twierdzenie stosuje się do każdej pary dwóch (dużych czy małych) ciał materjalnych.

Nasuwało się zatem następujące zadanie. Wyobraźmy sobie ciało O kuliste (rys. 47); przypuśćmy, że każdy najmniejszy element przestrzenny tej kuli ma tę samą masę, czyli innemi słowy, że *gęstość* (§ 103) tej kuli jest stała. Należy obliczyć siłę wypadkową, która tworzy się przez geometryczne dodanie do siebie przyciągań, wywieranych przez wszystkie cząstki kuli O na punkt materjalny P, nazewnątrz kuli leżący (rys. 47). Na wiosnę 1685 roku Newton rozwiązał to zadanie, które w ówczesnym stanie nauki przedstawiało niebywałe trudności. Wynik rachunku był zdumiewający. *Kula jednostajnej gęstości działa nazewnątrz do-*

kładnie tak samo, jak gdyby jej masa była całkowicie skupiona w jej geometrycznym środku. To wspaniałe twierdzenie rozstrzygnęło o losie mechaniki niebios; skoro Newton je odkrył, me-



Rys. 47.

chanizm słonecznego układu stawał się dostępny analizie matematycznej. Wolno było odtąd przypuszczać, że formuła (2) § 51-go jest ścisła, gdy r_{PS} oznacza wzajemną odległość *środków kul*: słonecznej i ziemskiej.

§ 54. *Ciężkość jest szczególnym przypadkiem powszechnego ciążenia.*

Dostrzegamy nieustannie na ziemi działanie siły ciężkości. Wiemy, że działanie tej siły nie ogranicza się do powierzchni ziemi; możemy je stwierdzić u szczytu najwyższych wież, u szczytu najwyższych gór; wiemy, że aeroplan lub ptak, gdy szybuje, nie przestaje być ciężki. Jeżeli tak jest, czyż może gdziekolwiekbądź istnieć nagła, ostra granica działania ciężkości? Lecz jeżeli jej niema, zatem i księżyc, choć tak daleki od ziemi, musi być ciężki. Tak rozmyślając, Newton pojął, że *ciężkość przedmiotów na ziemi jest tylko przykładem, jest przypadkiem szczególnym powszechnego ciążenia*; a ta myśl, taka prosta, nadzwyczajnie pomogła do szybkiego tryumfu nauki Newtona. Albowiem ciążenie powszechne, do którego odwołuje się Newton, ażeby wytłumaczyć urządzenie słonecznego układu, nie jest czemś doraźnie wymyślonem, nie jest siłą hipotetyczną, którą *ad hoc* stwarzać potrzeba; ciążenie jest pospolitym objawem natury, z którym każdy z nas oswaja się od dzieciństwa. Jeżeli domysł Newtona jest słuszny, ciążenie jest *faktem*.

Sprawdźmy zatem ten domysł; przekonajmy się, czy rzeczywiście przyciąganie, którego księżyc doznaje od ziemi, jest jego pospolitą (powiedzmy *ziemską*) ciężkością. Możemy łatwo obliczyć przyśpieszenie f_K, które księżyc faktycznie objawia w swym ruchu. Posługujemy się w tym celu równaniem (1) § 50-go:

1. $$f_K = \frac{4\pi^2 r_K}{T_K^2}.$$

Rozumiemy tutaj przez r_K promień kołowej orbity księżyca, którą on dokoła ziemi zatacza, przez T_K czas jednego jego obiegu. Jeżeli oznaczymy przez R promień kuli ziemskiej, mamy

2. $$r_K = 60{\cdot}27\ R;$$

mamy dalej

3. $$T_K = 2360591{\cdot}5 \text{ sek};$$

wreszcie, jak dobrze wiadomo:

4. $$2\pi R = 4 \times 10^9 \text{ cm}.$$

Wstawiając te wartości do formuły (1), otrzymujemy

5. $$f_K = \frac{2\pi \times 60{\cdot}27 \times 4 \times 10^9}{(2360591{\cdot}5)^2} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2} = 0{\cdot}272 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}.$$

Zapytujemy teraz: jakie powinno być przyśpieszenie γ_K jakiegokolwiekbądź ciała, poddanego sile ziemskiej ciężkości, jeżeli odsuniemy to ciało do odległości r_K od środka ziemi? Według prawa odwrotnej proporcjonalności ciążenia do kwadratów odległości powinniśmy oczekiwać, że

6. $$\gamma_K : g = R^2 : r_K^2$$

albowiem zwykłe przyśpieszenie ciężkości (§ 46)

7. $$g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$$

obserwujemy przecież w odległości R od środka naszej planety. A zatem, według (6) i (7):

8. $$\gamma_K = g\frac{R^2}{r^2} = \frac{981}{(60{\cdot}27)^2} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2} = 0{\cdot}270 \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}.$$

Wartości f_K (5) i γ_K (8) zgadzają się ze sobą dostatecznie w stopniu przybliżenia, którego możemy oczekiwać w pobieżnym naszym rachunku.

Newton już w roku 1666-ym dokonał był porównania przyśpieszeń f_K i γ_K, które tu przytoczyliśmy; posłużył się jednakże w tem porównaniu niedokładną wartością obwodu $2\pi R$ ziemi, której wymiary szacowano wówczas z pewnem, dość grubem przybliżeniem do prawdy. Z tego powodu, w pierwszych swych rachunkach, Newton otrzymał, jako faktyczne przyśpieszenie księżyca f_K, wynik o jednę ósmą część mniejszy niż przyśpieszenie ciężkości γ_K. W roku 1679 Newton powrócił do poprzednich obliczeń, zasadzając się na dokładniejszych danych liczbowych; a wówczas prawda ukazała się w pełni przed jego wzrokiem duchowym.

Odkrycia Newtona wywarły wrażenie niezmierne. Nigdy w dziejach ludzkiego myślenia nie dokonał się postęp tak nagły, tak olśniewający. Jak przed promieniami słońca pierzchają nocne cienie i mgły, podobnie, gdy ukazały się *Principia*, potężne światło pojmowania rozbłysło. Na przeciąg dwóch niemal stuleci myśl Newtona zapanowała nad rozwojem nauki.

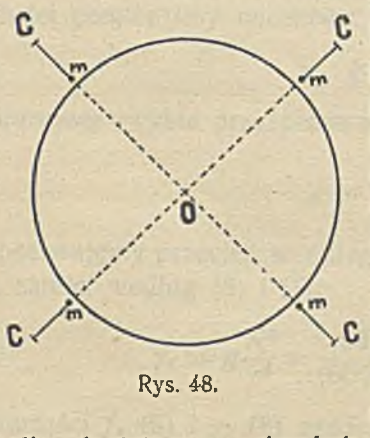
ROZDZIAŁ TRZECI.

O sile ciężkości.

§ 55. Pole ciężkości.

W pobliżu kuli ziemskiej działa siła ciężkości; powiadamy w fizyce krótko, że dokoła tej kuli istnieje *pole ciężkości.* Mówimy podobnie, że dokoła słońca rozciąga się pole ciążenia ku słońcu, pole grawitacyjne. Powiadamy, że dokoła magnesu istnieje pole magnetyczne, dokoła ciała naelektryzowanego — pole elektryczne i t. d.

Ciała, znajdujące się w polu ciężkości, spadają w kierunku niemal dokładnie pionowym, jeżeli mają swobodę poruszania się w tym kierunku (§§ 19 i 46). Dostrzegamy wprawdzie, że niektóre ciała (np. korek w wodzie, dym lub balon w powietrzu) nie spadają, lecz przeciwnie, pozostawione samym sobie wznoszą się do góry. Lecz te pozorne wyjątki nie wynikają bynajmniej z odpychania, wywieranego na owe ciała przez ziemię, lecz raczej z przeważającego przyciągania, wywieranego na ich otoczenie: wodę lub powietrze. Przekonamy się o tem w późniejszym rozdziale.



Rys. 48.

Kierunek pionowy, poprowadzony w którejkolwiek miejscowości, dąży wszędzie, w znacznem przybliżeniu, do środka *O* kuli ziemskiej (rys. 48). Ten fakt sam przez się byłby dostateczną wskazówką (gdybyśmy nie mieli w tej mierze innych dowodów), że pole ciężkości wynika z przyciągania, które kula ziemska wywiera na każde ciało, umieszczone w jej sąsiedztwie.

Kierunki pionowe, poprowadzone w dwóch miejscowościach, tworzą ze sobą w środku *O* kuli ziemskiej kąty tem mniejsze (rys. 48), im bliżej siebie położone są piony. Wiedząc, że promień kuli ziemskiej wynosi $6{\cdot}37 \times 10^8$ cm, obliczamy łatwo kąt, który tworzą ze sobą kierunki dwóch pionów, odległych od siebie (na powierzchni ziemi) np. o kilometr. Przekonywamy się tym sposobem, że w obrębie budynku, a nawet w obrębie miasta, wolno najczęściej uważać kierunki pionowe za równoległe.

Najważniejsze prawa ciężkości i spadania wyłożyliśmy już w §§ 19-ym i 46-ym. Jeżeli p jest ciężarem ciała, którego masa jest m, mamy, jak wiadomo:

1. $$p = mg$$

gdzie przez g oznaczamy *przyśpieszenie ciężkości*. Badanie siły ciężkości sprowadza się zatem do pomiaru przyśpieszenia ciężkości. Ażeby zmierzyć wartość przyśpieszenia g, musimy odwołać się do doświadczenia; musimy zbadać rozmaite sposoby spadania ciał pod wpływem ciężkości. Że jednak takie spadanie odbywa się zwykle w powietrzu, które stawia opór poruszającemu się w niem ciału (§ 46), przeto owemu oporowi poświęcamy przedewszystkiem nieco uwagi.

§ 56. *Opór powietrza.*

Skąd powstaje opór powietrza? Poruszające się ciało wprawia w ruch przyległe warstwy tego ośrodka; ponieważ udziela im przyśpieszeń, więc, stosownie do trzeciego prawa dynamiki, doznaje od tych warstw przeciwdziałania t. j. siły, która jest skierowana przeciwnie niż prędkość ciała, zatem, w spadaniu swobodnem, przeciwnie niż siła ciężkości. Łatwo zrozumieć, że opór powietrza zależy od postaci i od rozległości powierzchni, która podczas ruchu uderza o powietrze a także od prędkości ciała. Im mniejsza jest ta rozległość, im powolniejszy jest ruch, tem mniejszy jest opór.

Idąc powoli, nie uświadamiamy sobie oporu powietrza; zaczynamy go odczuwać, gdy szybko biegniemy. Wystrzelona kula armatnia, pędzący automobil, lokomotywa w ruchu doznają w powietrzu znacznego oporu. Powiewajmy wachlarzem lub arkuszem tektury; spostrzegamy natychmiast, jak dalece opór zależy od nachylenia rozległej powierzchni przedmiotu do kierunku ruchu.

Opór, który przeciwstawia się ruchowi ciała, spadającego w powietrzu, zależy więc od innych własności ciała aniżeli ciężar, który zależy przedewszystkiem od masy. Jeżeli ciało, przed-stawiając zewnętrzną powierzchnię nieznaczną, ma jednak masę stosunkowo znaczną, jeżeli np. jest wyrobione z żelaza lub z ołowiu, opór powietrza podczas spadania jest stosunkowo drobny w porównaniu do ciężaru ciała.

Gdybyśmy usunęli powietrze lub przynajmniej rozrzedzili je znacznie, uwolnilibyśmy spadające ciało od oporu powietrza. Tak postąpił Newton w znanem doświadczeniu, które do dziś dnia powtarzamy. Wyciągamy powietrze z rury szklanej, w której umieszczono monetę i piórko; odwracając szybko rurę, spostrzegamy, że obadwa ciała przebiegają jej długość w czasie jednakowym; gdy wpuścimy powietrze, piórko opada powolniej aniżeli moneta.

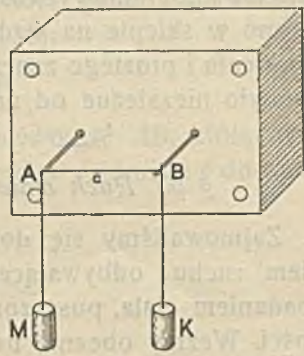
§ 57. Przyśpieszenie ciężkości nie zależy od natury ciała, poddanego działaniu tej siły.

W danej miejscowości na powierzchni ziemi przyśpieszenie ciężkości ma wartość jednakową dla wszystkich ciał materjalnych. Stąd wynika, według równania (1) artykułu poprzedzającego, że *w tej samej miejscowości ciężary ciał są wprost proporcjonalne do ich mas.* Lub innemi słowy: *kula ziemska przyciąga rozmaite ciała materjalne, jednakowo względem niej położone, w stosunku prostym ich mas.* Wszystkie te twierdzenia są oczywiście zawarte w prawie powszechnego ciążenia (§§ 51 i 54) i wynikają z tego prawa jako proste następstwa. Tem ważniejszą jest rzeczą, ażebyśmy upewnili się o ich prawdziwości.

Powróćmy do § 19-go i przypomnijmy sobie podane w nim równanie (4). Przypuśćmy, że przyśpieszenie g jest stałą, jednakową dla wszystkich ciał materjalnych. Ze wspomnianego wzoru wówczas wypada, że wszystkie ciała, ciężkie czy lekkie, spadając w próżni, bez początkowej prędkości, z wysokości jednakowej, powinny dobiegać ziemi w czasie jednakowym. Galileusz doszedł do tego wniosku, gdy rozpoczynał w Pizie swoją działalność; korzystając z istnienia w tem mieście słynnej wieży pochyłej, wypuszczał z jej szczytu kule, wyrobione z rozmaitych metali. Czasy spadania tych kul okazywały się jednakowe.

Powtarzamy doświadczenie Galileusza w prosty sposób. Na nici, przewieszonej przez dwa pręciki A, B (rys. 49), wiszą dwa walce: żelazny lub mosiężny M oraz drewniany lub kamienny K. Walce te mają jednakową postać i objętość równą; wiszą w tej samej wysokości ponad poziomem posadzki. Przepalamy nić, dotykając jej w c ostrym płomykiem. Walce M i K zaczynają biec równocześnie i jednocześnie dobiegają posadzki; słyszymy istotnie tylko *jedno*, zgodne o nią stuknięcie.

Ciała upuszczone szybko dobiegają ziemi; dostrzeganie i badanie ich ruchu jest niełatwe. Prosty przyrząd, który znamy wszyscy, zwany *wahadłem* (zob. § 63), pozwala badać działanie ciężkości na ciała w warunkach bardziej dogodnych. Ruch wahadła w istocie jest kolejnem wznoszeniem się do góry i opadaniem ku dołowi; prawa działania ciężkości muszą zdradzać się w tym ruchu podobnie jak w swobodnem spadaniu. Gdyby przyśpieszenie ciężkości było niejednakowe dla dwóch wahadeł odmiennych, skutki takiej różnicy objawiłyby się w ich ruchu. Tak rozumował 19-letni Galileusz w katedrze pizańskiej; w sto lat później Newton powraca do tej myśli i obiera ją za nić przewodnią starannego badania.



Rys. 49.

«Rzecz spróbowałem wykonać» mówi Newton (*Principia*, liber III, prop. VI) «dla złota, srebra, ołowiu, szkła, piasku, dla soli pospolitej, dla drewna, wody «i zboża. Przygotowałem dwa okrągłe, równe, drewniane pudełka; jedno wy«pełniłem drewnem, w drugiem... umieściłem kawałek złota o tym samym cię«żarze. Wahadła te... były dokładnie zgodne co do zewnętrznej postaci i co do «ciężaru i doznawały od powietrza jednakowego oporu. Umieściwszy jedno «w pobliżu drugiego, widziałem, że poruszały się długo, tam i napowrót, odby«wając jednakowe wahania».

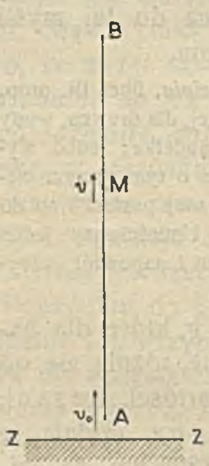
Newton wnosi, że wartości przyśpieszenia g, które dla badanych ciał wypadają, jeżeli wogóle są nierówne, różnią się od siebie nie więcej niż o 0·001 część całkowitej wartości. Bessel, powtórzywszy w r. 1830 doświadczenie Newtona, oddala tę granicę do 0·00001; Eötvös jest zdania w r. 1896-ym, że dzisiejsze metody miernicze pozwalają ją posunąć do 0·0000001.

Gdy nabywamy paczkę cukru lub woreczek mąki, zapytujemy, *ile* otrzymamy kupowanego towaru; gdy za wóz węgla uiszczamy zapłatę, pragniemy upewnić się, *ile* w nim znajduje się tego materjału. Na takie pytania odpowiadamy, *ważąc* towary, które są przedmiotem wymiany czyli, innemi słowy, stwierdzając ich *ciężar*. Gdy jednak kupujemy mąkę, kaszę, sól albo węgiel, nie dbamy o to bynajmniej, jak mocno te ciała są przyciągane przez ziemię; ciężar tych ciał (sam przez się nieraz raczej ich niepożądana właściwość) jest dla nas wskazówką, jaka jest ich *masa*. Ponieważ masy ciał są proporcjonalne do ciężarów, więc: *ciała* *iednakowo ciężkie mają masy jednakowe.* Kilogram ałunu czy salmiaku, kilogram czekolady czy herbaty ma masę tę samą, jaką ma kilogramowy wzorzec mosiężny albo niklowy, który położono w sklepie na wadze. Ważenie ciał nie miałoby praktycznego celu i prostego znaczenia, gdyby przyśpieszenie ciężkości g nie było niezależne od natury ciała, poddanego działaniu tej siły.

§ 58. Ruch ciała, rzuconego pionowo do góry.

Zajmowaliśmy się dotychczas przeważnie jednym przypadkiem ruchu, odbywającego się w polu ciężkości, mianowicie spadaniem ciała, puszczonego swobodnie, bez początkowej prędkości. Weźmy obecnie na uwagę inne przypadki.

W chwili $t = 0$, w miejscu A ponad ziemią (rys. 50), wyrzucamy do góry punkt materjalny M w kierunku pionowym; niechaj v_0 będzie początkową prędkością, którą nadajemy punktowi. Posłuszny rzutowi, bezwładny punkt M biegnie pionowo do góry; lecz jednocześnie działa nań siła ciężkości i nadaje mu drugi ruch, niezależny, taki sam, jaki odbywałby się, gdybyśmy punktu nie byli rzucili. Punkt M jest zatem ożywiony naraz dwoma ruchami. W pierwszym ruchu, bezwładnym, nie zmienia się ani wartość v_0 ani pionowy ku górze kierunek prędkości. Ruch drugi jest jednostajnie przyśpieszony i odbywa się pionowo ku dołowi ze stałem (co do wartości i co do kierunku) przyśpieszeniem g. W chwili t prędkość pierwszego ruchu wynosi v_0, podobnie jak w chwili początkowej; prędkość drugiego wynosi gt (§ 46).



Rys. 50.

Te dwie składowe prędkości tworzą ze sobą kąt 180°; wypadkowa prędkość v, liczona do góry, wypada zatem (por. § 18):

1. $$v = v_0 - gt;$$

zmniejsza się ona z czasem, jak o tem wiemy z pospolitych spostrzeżeń. Po upływie czasu

2. $$\tau = v_0/g$$

punkt dobiegnie do miejsca B (rys. 50), w którem zawróci i pocznie opadać, stosownie do praw, według których porusza się punkt, spadający bez początkowej prędkości.

Liczona od miejsca *A* droga *s*, którą punkt *M* przebywa w przeciągu *t* sekund, wynosi (por. § 18):

3. $$s = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Ażeby obliczyć osiągniętą najwyższą wysokość *AB*, którą oznaczamy przez σ, wstawmy wartość (2) czasu τ zamiast t do wzoru (3); otrzymujemy

4. $$\sigma = v_0^2/2g.$$

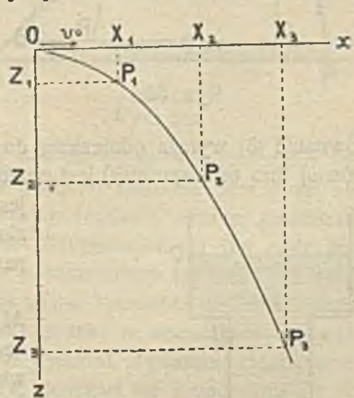
Z równań (2) i (4) wnosimy, że

5. $$\sigma = \tfrac{1}{2} g \tau^2.$$

Zmierzywszy σ i τ, moglibyśmy obliczyć z tych danych wartość przyśpieszenia ciężkości.

§ 59. *Ruch ciała, rzuconego w kierunku poziomym.*

Wyobraźmy sobie, że materjalny punkt *M* został poziomo rzucony. Przypuśćmy, że w chwili $t = 0$, w miejscu *O* ponad ziemią (rys. 51), nadaliśmy punktowi prędkość początkową v_0 cm/sek w kierunku poziomym *Ox*. Wówczas punkt *M* ożywiony jest naraz *dwoma* ruchami. Ruch pierwszy, bezwładny, wynika z rzutu; odbywa się zatem w poziomym kierunku *Ox* ze stałą prędkością v_0 cm/sek. Ruch drugi wynika z działania siły ciężkości; więc odbywa się w kierunku pionowym *Oz* ze stałem przyśpieszeniem *g* cm/sek². Na osi *Ox* odłóżmy odcinki



Rys. 51.

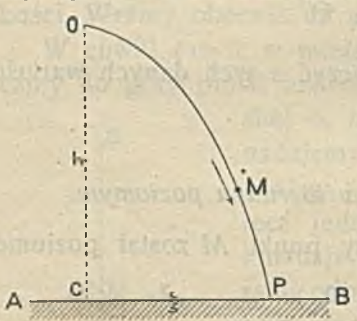
$$OX_1 = v_0 \text{ cm}; \quad OX_2 = 2v_0 \text{ cm}; \quad OX_3 = 3v_0 \text{ cm} \quad \text{i t. d.}$$

Gdyby siła ciężkości nie była czynna, punkt *M* po upływie czasu $t = 1, 2, 3\ldots$ sekund byłby dobiegł do miejsc $X_1, X_2, X_3\ldots$ na osi *Ox*. Na osi *Oz* odłóżmy odcinki

$$OZ_1 = \tfrac{1}{2} g \text{ cm}; \quad OZ_2 = \tfrac{4}{2} g \text{ cm}; \quad OZ_3 = \tfrac{9}{2} g \text{ cm} \quad \text{i t. d.}$$

Gdybyśmy nie byli rzucili punktu *M*, uwalniając go tylko, byłby on dobiegł, po upływie 1, 2, 3... sekund, do miejsc Z_1, Z_2, Z_3.. na osi *Oz*. Ażeby znaleźć rzeczywisty tor punktu, prowadzimy w X_1, X_2 i t. d. linje proste pionowe i odcinamy na nich $X_1P_1 = OZ_1$, $X_2P_2 = OZ_2$ i t. d.; otrzymujemy tym sposobem punkty P_1, P_2, P_3 i t. d. Według § 22-go, punkt *M*, posłuszny jednocześnie działaniu rzutu i sile ciężkości, dobiegnie, po upływie 1, 2, 3... sekund, do miejsc P_1, P_2, P_3... Te miejsca tworzą krzywą, zwaną *parabolą*. Tor punktu, rzuconego poziomo w polu ciężkości, jest zatem parabolą.

Ażeby dokładniej wykreślić parabolę, którą zatacza punkt *M*, możemy założyć np. $t = 0{\cdot}5$, $1{\cdot}0$, $1{\cdot}5$... sek i powtórzyć konstrukcję. Równanie tej krzywej otrzymujemy w sposób następujący.



Rys. 52.

Oznaczając przez x drogę, przebytą przez *M* w czasie t w ruchu bezwładnym, mamy

1. $$x = v_0 t.$$

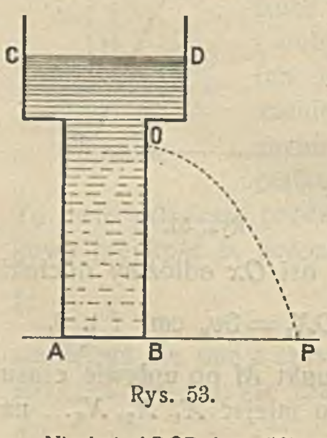
Rozumiejmy przez z drogę, przebytą przez *M* w tym samym czasie t w ruchu, który wytwarza siła ciężkości; zatem

2. $$z = \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Rugując t z (1) i (2) otrzymujemy

3. $$x^2 = \frac{2v_0^2}{g} z.$$

Równanie (3) wyraża odniesioną do prostokątnych osi *Ozx* parabolę, której osią główną (lub osią symetrji) jest pionowa oś *Oz*; wierzchołkiem głównym paraboli jest początek *O*, styczną zaś w *O* jest oś pozioma *Ox*; stała $2v_0^2/g$ jest t. zw. *parametrem* paraboli.



Rys. 53.

Przypuśćmy, że miejsce *O* (z którego punkt *M* został rzucony) znajduje się w wysokości h nad powierzchnią ziemi *AB* (rys. 52). Po upływie jakiego czasu τ punkt *M* dobiegnie powierzchni? Pisząc

4. $$h = \tfrac{1}{2} g \tau^2,$$

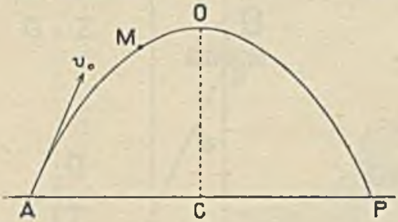
odpowiadamy na to pytanie, gdyż równanie (4) wyznacza τ. Dalsze równanie

5. $$\xi = v_0 \tau$$

pozwala wówczas znaleźć odległość *CP*, którą oznaczyliśmy przez ξ.

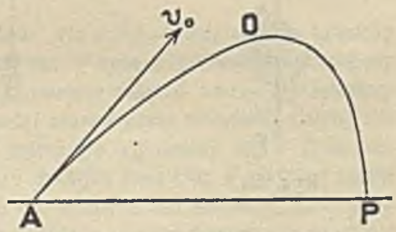
Niechaj *ABCD* (rys. 53) wyobraża wysoki zbiornik, wypełniony wodą lub rtęcią; jeżeli w miejscu *O* ścianki pionowej uczyniono w nim otwór, ciecz tryska i płynęłaby strumieniem poziomym, gdyby siła ciężkości nie zakrzywiała orbity każdej cząstki cieczy. Strumień *OP* ma istotnie kształt w przybliżeniu paraboliczny. Doświadczenie to zawdzięczamy Torricelliemu.

Wyobraźmy sobie, że punkt ciężki *M* został rzucony ukośnie (rys. 54). Poprzedni sposób rozumowania stosuje się i do tego ogólniejszego przypadku. Punkt *M* odbywa znowu dwa ruchy:



Rys. 54.

ruch jednostajny w kierunku, w którym został rzucony; ruch jednostajnie przyśpieszony w kierunku pionowym ku dołowi. Orbita, zataczana przez punkt *M*, jest parabolą *AOP* (rys. 54), o pionowej osi symetrji *OC*; przekonywamy się o tem graficznie, zapomocą konstrukcji, podobnej do tej, którą posłużyliśmy się w zadaniu o rzucie poziomym.



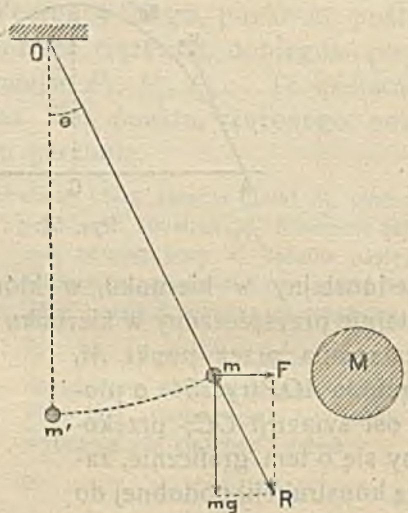
Rys. 55.

Twierdzenia o ruchu punktu, rzuconego w polu ciężkości, które streściliśmy tutaj, wykrył Galileusz. Stosowałyby się one do biegu wystrzelonych kul i pocisków, gdyby opór powietrza, który przy znacznej prędkości jest duży, nie wnosił do ich ruchu istotnych powikłań. Prawa, rządzące oporem powietrza, usiłowano odgadnąć oddawna; już Newton przypuszczał, że ten opór jest wprost proporcjonalny do kwadratu prędkości poruszającego się ciała. Ze spółczesnych badań wiadomo, że założenie Newtona sprawdza się dość przybliżenie dla prędkości, dochodzących do 300 m/sek; w sąsiedztwie tej wartości opór zaczyna rosnąć znacznie szybcej niż kwadrat prędkości. Gdyby opór powietrza, stosownie do założenia Newtona, zmieniał się proporcjonalnie do kwadratu prędkości, tor punktu, wystrzelonego ukośnie z miejsca *A* na powierzchni ziemi, miałby postać *AOP* podaną na rys. 55-ym, jak widzimy, *nie* symetryczną. Orbita *AOP* tego rysunku nazywa się *balistyczną krzywą* Eulera; obliczona została przez tego uczonego w połowie XVIII-go stulecia.

§ 60. Pion i jego zastosowanie do mierzenia sił.

Przypuśćmy, że na nici *OA* (rys. 56) zawiesiliśmy kulę *M* dość ciężką, naprzykład żelazną lub ołowianą. Pod wpływem ciężaru kuli nić wyciąga się; jej długość staje się większa. W wyciągniętej tym sposobem nici pojawia się siła, skierowana pionowo do góry, która sprzeciwia się dalszemu wydłużaniu. Ta siła *AR*, zwana *sprężystem przeciwdziałaniem* lub *reakcją*

Rys. 56.



Rys. 57.

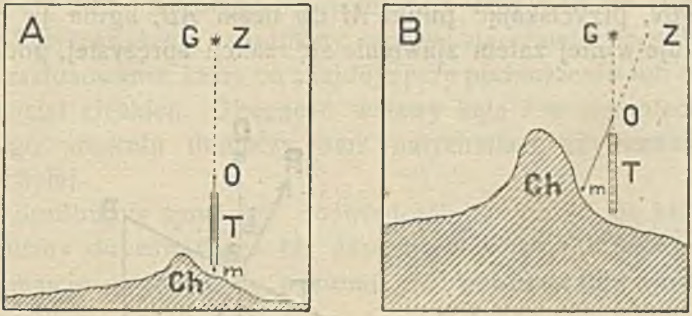
sprężystą nici, równoważy się z ciężarem *MP* kuli *M*, skierowanym pionowo ku dołowi.

Przyrząd, wyobrażony na rys. 56-ym, jest *pionem*, znanym nam już z § 19-go. Niekiedy można posługiwać się pionem w celu mierzenia sił stosunkowo nieznacznych. Przypuśćmy naprzykład, że kulka metalowa m (rys. 57), zawieszona na nici jedwabnej, została naelektryzowana i ma na sobie dodatni elektryczny ładunek. Zbliżamy ku niej kulę M naelektryzowaną ujemnie, która wywiera na m przyciąganie F. Kulka m znajduje się wówczas pod wpływem dwóch sił: własnego ciężaru, który wynosi mg (jeżeli m jest masą kulki) oraz przyciągania F. Pod działaniem tych sił pion odchyla się od pierwotnego położenia Om' i przybiera nowe położenie Om, które tworzy kąt θ z poprzedniem. Równowaga nastąpi, gdy wypadkowa R sił mg i F, przypadając w przedłużeniu nici Om, wypręży nić i zrównoważy się z jej sprężystem przeciwdziałaniem. Mamy wówczas

1. $$F = mg \text{ tang } \theta;$$

zmierzywszy kąt θ, możemy więc obliczyć siłę F.

Rozumowanie powyższe wyjaśnia myśl, którą kierował się uczony francuski Bouguer, gdy w r. 1738 próbował doświadczalnie wykazać, że ciała ziemskie, tak samo jak ciała niebieskie, przyciągają się wzajemnie, stosując się do prawa powszechnego ciążenia. W Andach peruwjańskich wznosi się potężna góra Chimborazo, mająca przeszło 6000 m. wysokości; Bouguer postanowił przekonać się, czy pion, umieszczony w pobliżu, odchyla się ku górze pod wpływem jej przyciągania. Wyobraźmy sobie dwie miejscowości: jednę *A* (rys. 58), znacznie oddaloną od górskiego masywu; drugą *B*, wybraną na południowym



Rys. 58.

stoku góry, w jej bezpośredniem sąsiedztwie. Na stacji *A* ustawiliśmy teleskop *T* w położeniu pionowem, jak świadczy pion *m*; w tym teleskopie obserwujemy gwiazdę *G*, przechodzącą przez południk. W miejscowości *B* kierujemy teleskop *T'* ku tej samej gwieździe *G*, gdy przechodzi znowu przez południk. Gdyby nie było góry (*Ch* na rysunku), kierunek osi teleskopu zgadzałby się w *B* znowu z kierunkiem pionu. Lecz przyciąganie góry odchyla pion *Om*, wydaje się zatem obserwatorowi, że gwiazda *G* oddaliła się od zenitu *Z* ku północy. Mierzymy kąt *GOZ*, który odpowiada kątowi θ poprzedniego doświadczenia; z wartości tego kąta możemy wyliczyć wartość przyciągania, wywieranego przez górę na kulkę *m* pionu. Podobne spostrzeżenia wykonał Maskelyne w r. 1774 w pobliżu góry Schiehallion; w r. 1855 powtórzyli je Clarke i James w okolicy Arthur's Seat w Szkocji. Powrócimy niebawem do wyników, które znaleziono w tych i podobnych badaniach.

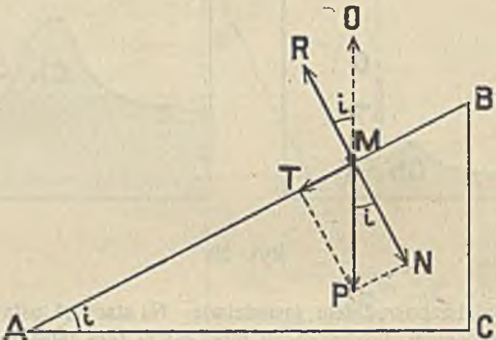
§ 61. *Równia pochyła.*

Wyobraźmy sobie deskę płaską, umieszczoną w położeniu pochyłem; na rys. 59-ym *AB* wyobraża tę deskę w przecięciu pionowem, *AC* wyobraża w takiem samem przecięciu płaszczyznę poziomą. Prostopadła *MR* do płaszczyzny *AB* tworzy z kierunkiem pionowym do góry *MO* kąt *OMR*, który oznaczamy przez *i*; tę samą wartość *i* ma kąt *CAB* na naszym rysunku.

Przypuśćmy, że na płaszczyźnie *AB* leży ciężki punkt *M*; jeżeli *m* jest masą punktu, *g* zaś (jak zwykle) przyśpieszeniem ciężkości, ciężar punktu *M* wynosi *mg*; przypuśćmy, że siłę tę wyobraża wektor MP na rys. 59-ym. Rozkładamy siłę MP na składową MN, prostopadłą do płaszczyzny AB i na drugą składową MT, równoległą do tej płaszczyzny. Widzimy, że

1. $$MN = mg \cos i; \quad MT = mg \sin i.$$

Siła MN, przyciskając punkt M do deski AB, ugina ją nieco; wywołuje w niej zatem zjawienie się reakcji sprężystej, podobnie



Rys. 59.

jak ciężar kuli zawieszonej wywołuje reakcję sprężystą nici pionu (§ 60). Reakcja sprężysta MR deski AB, stosownie do trzeciej zasady dynamiki, jest równa sile MN i skierowana wprost przeciwnie niż ona. Wyobraźmy sobie, że deska AB jest wyrobiona z tak bardzo sprzeciwiającego się, niemal doskonale sztywnego materjału, że, nawet pod działaniem znacznego ciężaru, ugięcie jej jest znikomo małe i może być zaniedbane. Uważając zatem deskę AB za płaszczyznę (taką samą, jaką była przed umieszczeniem na niej punktu M), dochodzimy do wniosku, że ruch punktu M może odbywać się tylko w kierunku MT; składowa MN nie wywiera wpływu na ruch, ponieważ jest prostopadła do jego kierunku. Punkt M posuwa się zatem ruchem jednostajnie przyśpieszonym w kierunku MT, pod działaniem siły $mg \sin i$; przyśpieszenie w tym ruchu jest $g \sin i$. Prędkość v punktu w chwili t jest dana przez

2. $$v = gt \sin i;$$

droga s przebyta aż do chwili t wynosi

3. $$s = \tfrac{1}{2} gt^2 \sin i.$$

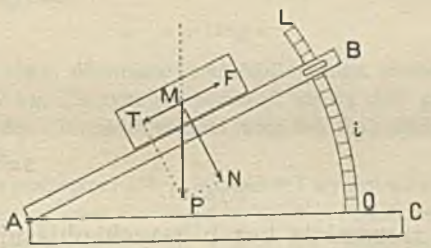
Jeżeli, wyruszywszy z B, punkt M dobiegł do A, mamy w miejscu A:

4. $$v^2 = 2g \,.\, AB \,.\, \sin i = 2g \,.\, BC;$$

prędkość v w miejscu A zależy więc tylko od pionowego opuszczenia się BC, nie zależy od nachylenia drogi AB do poziomu.

Przyrząd, który opisaliśmy, nazywa się *równią pochyłą*; znane są zastosowania, które on znajduje przy podnoszeniu lub opuszczaniu ciał ciężkich. Obecność wstawy kąta i w formułach niniejszego artykułu tłumaczy nam natychmiast użyteczność równi pochyłej.

Spróbujmy sprawdzić doświadczalnie wnioski, do których zostaliśmy doprowadzeni. Na deseczce AB (rys. 60), którą możemy rozmaicie pochylać do poziomu AC, umieszczamy ciało ciężkie

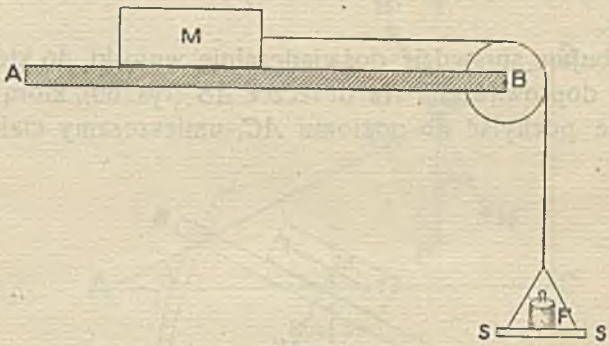


Rys. 60.

M o dość rozległej podstawie; kąt nachylenia i odczytujemy na łuku OL. Według naszych wzorów, ciało M powinno sunąć po deseczce AB, jeżeli kąt nachylenia i jest chociażby niewiele większy od zera; dla $i > 0$ mamy istotnie $\sin i > 0$, przyśpieszenie $g \sin i$ jest więc wówczas większe od zera. Doświadczenie uczy jednakże, iż rzeczywisty przebieg zjawiska jest całkiem odmienny. Dopóki kąt nachylenia i jest mały, ciało M zazwyczaj nie ześlizguje się po AB; dopiero gdy kąt i przybierze pewną wartość, ciało M zaczyna sunąć ku dołowi; lecz i wówczas okazuje się (jak zobaczymy), że przyśpieszenie ruchu jest mniejsze niż wartość $g \sin i$, której mogliśmy oczekiwać według poprzednich wzorów. Widocznie zatem, oprócz siły ciężkości, jeszcze jakaś *inna* siła działa na ciało, umieszczone na równi pochyłej. Wiemy istotnie, że ciało M doznaje *tarcia* od deseczki AB w doświadczeniu rys. 60-go; działania tej siły nie uwzględniliśmy w rozumowaniu powyższem.

§ 62. O tarciu.

Ustawiamy poziomo deseczkę AB przyrządu, wyobrażonego na rys. 60-ym. Wówczas $i = 0$, zatem $\sin i = 0$; więc składowa MT siły ciężkości działającej na ciało (ryss. 59 i 60) znika wówczas. Pomimo to i w takiem położeniu deseczki AB potrzeba pewnej siły F, ażeby poruszyć ciało M. Siła ta F jest więc miarą tarcia, którego od deski AB doznaje ciało M; nazywamy ją pospolicie «tarciem ciała M o deskę AB». Przyrząd, wyobrażony na rys. 61-ym, pozwala zmierzyć siłę F; urządzenie tego



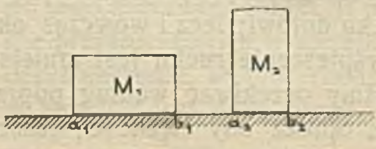
Rys. 61.

przyrządu jest zrozumiałe bez bliższych objaśnień. Jeżeli ciężar ciała, umieszczonego na szalce SS, został tak dobrany, ażeby zaledwie wystarczał do wprawienia w ruch ciała M, wówczas ciężar ten jest miarą siły F.

Dokonywając takich doświadczeń, spostrzegamy, że siła F wypada wprost proporcjonalna do ciężaru ciała M; możemy zatem założyć:

1. $$F = \mu . mg.$$

Wielkość μ, zwana *spółczynnikiem tarcia*, nie zależy od ciężaru ciała M. Nie zależy ona również od pola powierzchni ab, którą ciało M dotyka deski AB; dwa ciała M_1 i M_2, jednakowego ciężaru i jednakowej natury, wymagają w powyższem doświadczeniu (rys. 61) użycia tej samej siły F, chociaż pola $a_1 b_1$ i $a_2 b_2$ ich powierzchni zetknięcia z podstawą są rozmaite (rys. 62). Spółczynnik tarcia μ zależy natomiast w wysokim stopniu od rodzaju substancji, z której wyrobione są ciała



Rys. 62.

M i *AB*; jest naprzykład stosunkowo mały dla żelaza, dla mosiądzu i innych metali, dla drewna zaś i dla kamieni jest większy. Spółczynnik μ zależy również od stanu powierzchni zetknięcia, naprzykład od stopnia jej wygładzenia; zmniejsza się znacznie, skoro pokryjemy powierzchnie ciał *AB* oraz *M* warstewką gliceryny, oliwy lub innego smaru.

Do mierzenia wartości spółczynnika μ możemy użyć przyrządu, wyobrażonego na rys. 60-ym. Przypuśćmy, iż, przechylając deseczkę *AB*, utrafiliśmy kąt i taki, ażeby ciało *M* właśnie poczynało posuwać się na dół; mamy wówczas widocznie

2. $$F = MT = mg \sin i.$$

Stosując się do powyższego równania (1), zakładamy zarazem, że

3. $$F = \mu \, . \, MN = \mu \, . \, mg \cos i.$$

Z równań (2) i (3) wynika

4. $$\mu = \operatorname{tang} i.$$

Przypuśćmy, że na równi drewnianej umieściliśmy kloc, również drewniany, którego masa wynosi 1 kg. Zaczyna on posuwać się na dół, gdy kąt nachylenia równi wynosi: $i = 30^0$. Tarcie F wynosi więc 0·5 Kg; spółczynnik μ wypada równy 0·577.

Ustawmy równię pod kątem 45°; składowa MT wynosi wówczas 1 Kg $\times$ sin 45° czyli 0·707 Kg. Ponieważ tarcie F równoważy 0·5 Kg, pozostaje więc siła 0·207 Kg czyli 203067 dyn, która masie 1 kg nadaje przyśpieszenie 203·067 cm/sek². Skoro ruch rozpoczyna się, tarcie maleje; przy przejściu ze spoczynku do ruchu spółczynnik μ jest większy niż podczas ruchu. Im prędkość ruchu jest większa, tem mniejszy jest ten spółczynnik.

Przypuszczaliśmy wyżej, że ciało *M*, poruszając się po płaszczyźnie *AB*, dotyka jej całą powierzchnią *ab* (rys. 62); powia-

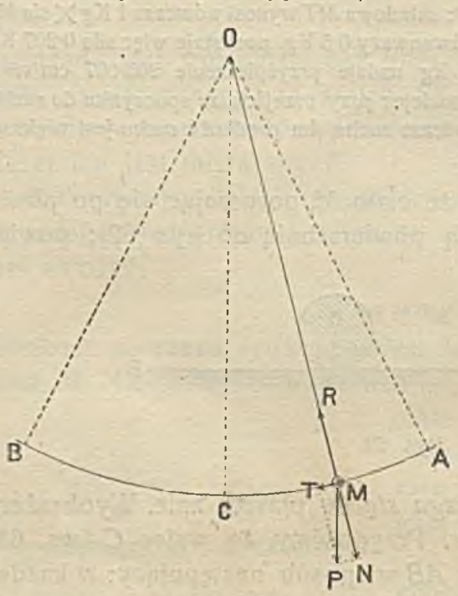
Rys. 63.

damy wówczas, że ciało *ślizga się* po płaszcz znie. Wyobraźmy sobie teraz inny przypadek. Przypuśćmy, że walec *C* (rys. 63) porusza się po płaszczyźnie *AB* w sposób następujący: w każdej chwili dotyka on płaszczyzny *AB* tylko jedną, ale (w kolejnych chwilach) coraz inną tworzącą; w chwili naprzykład, której odpowiadą rys. 63, walec dotyka płaszczyzny tworzącą *a*. Powiadamy, że walec *C toczy się* po płaszczyznie *AB*. Koła wozów i powozów toczą się po powierzchni ziemi lub szyn, ślizgając się przytem najczęściej nieznacznie. Toczeniu się towarzyszy tarcie, podobnie jak towarzyszy ślizganiu się; ale jego wartość w tym razie jest inna. Jeżeli natura i ciężar toczącego się i ślizgającego się ciała są jednakowe, tarcie w przypadku toczenia się jest mniejsze niż w przypadku ślizgania się.

W dynamice zaniedbujemy zazwyczaj wpływ tarcia. Gdy roztrząsamy ruch ciał niebieskich w niemal pustem przestworzu, postępowanie to jest uzasadnione; lecz w rozważaniu ruchów, które na ziemi dochodzą do skutku, pomijanie tarcia prowadzi nieraz do wniosków tylko zgrubsza prawdziwych. Ruchowi ciał ziemskich towarzyszą zawiłe zjawiska tarcia, które zawsze przeszkadzają ruchowi, nie pomagają mu nigdy. Dlatego też owe zjawiska bywają nam zwykle niepożądane; staramy się im zapobiegać albo je przynajmniej łagodzić. Niekiedy jednakże tarcie bywa nam pożyteczne; jako przykład można przytoczyć: tarcie podeszwy o podłogę, tarcie hamulca o koło wagonu, tarcie pasa o transmisyjne koło maszyny.

§ 63. *Wahadło.*

Na cienkiej, lekkiej i (o ile podobna) nierozciągliwej nici *OM* zawieszamy kulę *M* (rys. 64) tak małą, że wolno nam będzie poczytywać ją za punkt materjalny. Taki przyrząd nazywamy *wahadłem*. Pozostawione samemu sobie, wahadło ustanawia się w położeniu pionowem *OC*, w którem wisi spokojnie; wówczas nazywamy je *pionem* (§ 19). Skoro je odchylimy, np. do *OA*, wahadło *waha się* t. j. odbywa powszechnie znany ruch wahadłowy pomiędzy *OA* i *OB*. Spróbujmy zrozumieć ten ruch i zapoznać się z jego prawami.



Rys. 64.

Oznaczmy przez l długość nici *OM*; przez θ kąt *COM* odchylenia nici od pionowego położenia; przez x łuk *CM*, odpowiadający kątowi θ odchylenia. Uważamy θ oraz x za dodatnie, gdy *M* znajduje się w części *CA* toru; uważamy je za ujemne, gdy M znajduje się w części CB. Wyrażając kąt θ w radjanach (§ 3), mamy

$$1. \qquad x = l\theta.$$

Oznaczmy przez m masę punktu M, przez g (jak zwykle) przyśpieszenie ciężkości. Ciężar punktu M wynosi mg i jest skierowany na dół pionowo. Wyrażamy ten ciężar przez wektor MP na rys. 64-ym i rozkładamy go na dwie składowe: (1) na składową MN, skierowaną w przedłużeniu nici (2) na składową MT, styczną do łuku koła, po którem porusza się M. Składowa MN wypręża nić i wywołuje w niej napięcie MR, równe i przeciwne; ale siła MR, przyłożona do punktu M, nie wywiera wpływu na ruch, który odbywa się wciąż prostopadle do kierunku MR; punkt M w swoim ruchu jest posłuszny wyłącznie stycznej składowej MT. Widzimy, że MT jest zawsze tak skierowana, że sama przez się skłaniałaby punkt M do powrotu do C. Jeżeli M wznosi się od C do A lub od C do B, siła MT opaźnia ruch; jeżeli M od A lub od B opada ku C, siła MT ruch przyśpiesza. Ruch punktu M po łuku ACB lub BCA *nie* jest zatem jednostajny. Gdyby siła MT miała wartość *stałą*, punkt M odbywałby ruch jednostajnie przyśpieszony po łukach AC i BC, jednostajnie opóźniony po łukach CA i CB. Lecz siła MT nie jest stała wzdłuż toru; siła ta ma wartość *zmienną*. Będziemy uważali siłę MT za dodatnią, gdy jest zwrócona w kierunku od B ku A; gdy jest zwrócona w stronę przeciwną t. j. w kierunku od A do B, będziemy ją uważali za ujemną. W tem rozumieniu mamy zawsze

$$2. \qquad MT = -mg \sin \theta.$$

Istotnie, gdy M znajduje się w części CA toru, mamy $\theta > 0$, więc $\sin \theta > 0$, $MT < 0$; gdy M znajduje się w części CB toru, mamy $\theta < 0$, $\sin \theta < 0$ oraz $MT > 0$; równanie (2) pozostaje więc ważne we wszystkich fazach ruchu. W miejscach A oraz B wartość bezwzględna siły MT jest największa; w miejscu C równa się zeru, przez położenie C punkt M przebiega dzięki swej bezwładności.

Rozważmy przyśpieszenie, które okazuje punkt M w ruchu wahadłowym. Przyśpieszenie to możemy rozłożyć na dwa przyśpieszenia składowe. Pierwszem jest przyśpieszenie, znane z § 28-go; wiemy, że ono jest skierowane wzdłuż nici, od M do O. Gdyby ruch punktu M po łuku ACB lub BCA koła odbywał się jednostajnie, wzdłuż nici skierowane przyśpieszenie byłoby jedynem, a zatem też całkowitem przyśpieszeniem punktu M. Wiemy jednakże, że ruch punktu M po łuku koła jest niejednostajny; oprócz dośrodkowego przyśpieszenia, skierowanego wzdłuż nici, istnieje więc drugie, skierowane prostopadle do jej kierunku. To drugie przyśpieszenie, które oznaczamy przez f, wynika z działania siły MT; mamy zatem z (2):

3. $$f = -g \sin \theta.$$

Przypuśćmy, że kąt θ zawsze pozostaje mały; wstawę $\sin \theta$ możemy wówczas zastąpić przybliżenie przez wartość kąta θ wyrażoną w radjanach. Według (3) i (1) otrzymujemy w tem założeniu

4. $$f = -\frac{g}{l} x.$$

Widzimy teraz, że (w przyjętym stopniu przybliżenia) ruch wahadłowy punktu M jest ruchem harmonicznym prostym, którego prawa znamy z §§ 30-go i 31-go. Równanie obecne (4) zgadza się rzeczywiście z równaniem (5) § 31-go; obadwa wypowiadają zasadniczą własność ruchu harmonicznego prostego, która na tem polega, że przyśpieszenie w takim ruchu jest zawsze skierowane ku środkowi drgań i że jest wprost proporcjonalne do wychylenia x, liczonego od środka drgań.

Utażsamiamy zatem obecny wyraz g/l z wielkością $\tilde{\omega}^2$ § 31-go. Innemi słowy, rozumiejąc przez T okres ruchu, kładziemy, stosownie do równania (1) § 30-go:

5. $$\frac{g}{l} = \tilde{\omega}^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

czyli

6. $$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

OA i OB, jak powiedzieliśmy, są skrajnemi położeniami nici, pomiędzy któremi odbywa się wahanie; CA i CB są zatem największemi wartościami łuku x; podobnie jak w § 30-ym, nazywamy je *amplitudami* wahań. Okres T, dany przez (6), jest odstępem czasu, w którym dokonywa się jedno całkowite wahanie, naprzykład ruch punktu M od A przez C do B i od B napowrót przez C do A.

§ 64. *Prawa ruchu wahadłowego.*

Niektóre dalsze prawa ruchu wahadłowego możemy odczytać z równania (6) artykułu poprzedzającego.

I. Wzór (6) okazuje, że okres wahań nie zależy od amplitudy, która nie występuje w formule. Powinniśmy jednak o tem pamiętać, że owa formuła jest przybliżona i stosuje się jedynie w przypadku, gdy nawet największe możliwe odchylenie θ jest małym kątem. Jeżeli więc amplituda wahania jest mała, nie wywiera ona wpływu na okres; tę własność małych wahań wahadła, odkrytą przez Galileusza, nazywamy ich *izochronizmem.*

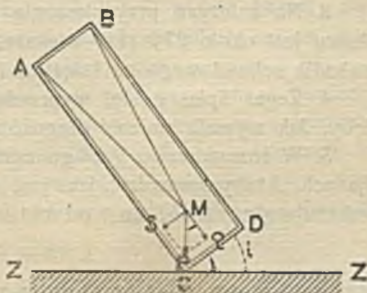
II. Z równania (6) wynika, że okres wahań nie zależy od masy wahadła. Tej niezależności mogliśmy oczekiwać ze względu na podobieństwo ruchu wahadłowego do swobodnego spadania; jak wiemy (§§ 19 i 57), czas spadania nie zależy od masy ciała spadającego.

III. Według (6) okres T wahań jest wprost proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z długości l nici wahadła.

Jeżeli np. długość l_1 pewnego wahadła Nr. 1 jest 4 razy większa niż długość l_2 innego wahadła Nr. 2, okres T_1 pierwszego wahadła jest 2 razy dłuższy niż okres T_2 drugiego; co łatwo sprawdzić pomiarem.

IV. Według (6) okres T jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z przyśpieszenia ciężkości.

Przy pomocy przyrządu, wyobrażonego na rys 65-ym, możemy uzmysłowić sobie tę zależność. Kula M wahadła jest zawieszona na dwóch lekkich, ale sztywnych pręcikach AM i BM w ramie czworokątnej $ABCD$, którą możemy przechylać względem poziomu ZZ. Wahania kuli M odbywają się tutaj widocznie nie pod wpływem całkowitego jej ciężaru MP, lecz tylko pod wpływem rzutu tego ciężaru na płaszczyznę wahań t. j. pod wpływem składowej $MP \cdot \cos i$. Okres wahań wyniesie więc:



Rys. 65.

1. $$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos i}}$$

będzie więc dłuższy niż w zwykłym przypadku pionowego ustawienia, w którym $i = 0$.

Powróćmy do równania (5) § 63-go, które przepisujemy w postaci

2. $$g = 4\pi^2 l/T^2.$$

Przypuśćmy, że zmierzyliśmy w centymetrach długość l nici wahadła i że stwierdziliśmy, ile sekund wynosi okres T jego wahań. Przy pomocy wzoru (2) możemy wówczas obliczyć w cm/sek^2 wartość przyśpieszenia ciężkości, czynnej w miejscu, w którem dokonywamy dostrzeżeń.

Podaliśmy tylko główną zasadę postępowania, które służy do znalezienia wartości przyśpieszenia g. Pragnąc poznać dokładną wartość tej stałej, musimy liczyć się z rozmaitemi okolicznościami, które tu pominęliśmy. Kula wahadła nigdy nie jest punktem; nić wahadła nie może być pozbawiona masy ani ciężaru. Każda nić jest w pewnej mierze rozciągliwa; wszelkie zawieszenie poddaje się do pewnego stopnia działaniu ciężaru kuli i bierze niejaki udział w ruchu, który ona odbywa. Powietrze, stawiając opór, sprzeciwia się wahaniom; tarcie w miejscu zawieszenia i w łonie nici wahadła przeszkadza jego ruchowi. Nareszcie i wzór (2) powyższy, jak wiemy, nie jest ścisły i stosuje się tylko w razie, gdy amplitudy są małe. W badaniu dokładnem wypada rozważyć wpływ tych zakłóceń i zapobiec im przez stosowne urządzenie przyrządu lub uwzględnić ich spółdziałanie na drodze rachunku. Udoskonalone w ten sposób wahadło jest dzisiaj, w fizyce i w geofizyce, jednem z najcenniejszych narzędzi mierniczych i badawczych.

Zadania.

1. *Sekundowem* nazywa się wahadło, którego okres T wynosi 2 sekundy; zakładając $g = 981$ cm/sek^2, obliczyć długość takiego wahadła. Jaka winna być długość wahadła, jeżeli jego okres ma wynosić 4 sek? Jaki jest okres wahadła, którego długość wynosi 1 m?

2. Sekundowe wahadło oddalamy od ziemi do odległości, w której dokoła niej krąży księżyc (§ 54). Przypuszczamy, że księżyc jest nieobecny, wahadło porusza się tylko pod wpływem ziemskiego przyciągania. Jaki jest okres wahań?

3. Na księżycu przyśpieszenie ciężkości jest około 6·1 razy mniejsze, na słońcu jest około 27·9 razy większe, niż na powierzchni ziemi. Znaleźć długość wahadła sekundowego na księżycu i na słońcu.

4. Zegar śpieszy się, wyprzedzając zegar dokładny o 5 sekund w ciągu doby. Jak wypada zmienić długość zegarowego wahadła?

5. W rozumowaniu § 63-go zastąpiliśmy $\sin\theta$ przez kąt θ, wyrażony w radjanach. Ażeby sprawdzić, jaki jest stopień tego przybliżenia, wykreślić krzywą, wskazującą zależność $\sin\theta$ od θ (dla wartości θ, idących od zera do pięciu stopni).

§ 65. Zmiany przyśpieszenia ciężkości na ziemi.

W ręku Newtona i jego następców wahadło posłużyło do udowodnienia, że w danej miejscowości na powierzchni ziemi przyśpieszenie ciężkości ma dla wszystkich ciał wartość jednakową (§ 57). Przypuśćmy, że zmieniamy miejsce spostrzeżeń. Przypuśćmy naprzykład, że przenosimy się od równika ku biegunom na powierzchni ziemi; lub też, że w danej miejscowości wznosimy się balonem w powietrzu do góry. Spostrzegamy wówczas, że wartość przyśpieszenia g zmienia się; ale zmienia się dla wszystkich ciał *jednakowo*. Przyśpieszenie ciężkości jest więc stałą powszechną, niezależną od natury ciała, które poddajemy badaniu, ale zależną od położenia tego ciała względem kuli ziemskiej.

Ciężar ciała jest równy iloczynowi masy ciała przez przyśpieszenie ciężkości (§ 46). Wiemy, że masa ciała jest niezmienna (§ 38); skoro jednak przyśpieszenie ciężkości zależy od położenia ciała względem kuli ziemskiej, zatem od tego położenia zależy również ciężar ciała, który zmienia się wprost proporcjonalnie do przyśpieszenia g.

W następującej tablicy podajemy niektóre wartości przyśpieszenia ciężkości, znalezione drogą wahadłowych dostrzeżeń lub też wyliczone pośrednio z takich dostrzeżeń.

Na równiku, u poziomu morza	$g = 978{\cdot}03$ cm/sek²
W 45° szerok. geogr., u poz. morza	980·62 . . .
We Lwowie	980·93 . . .
W Paryżu	980·94 . . .
W Krakowie	981·07 . . .
W Greenwich (pod Londynem)	981·19 . . .
W Warszawie	981·22 . . .
W Poznaniu	981·26 . . .
W Wilnie	981·44 . . .
Na biegunach, u poziomu morza	983·22 . . .

Zmienność przyśpieszenia ciężkości na powierzchni ziemi wynika z rozmaitych przyczyn. Jedną przyczyną jest niedoskonała kulistość naszej planety; ziemia, spłaszczona na biegunach, przyciąga na nich oczywiście silniej niż na równiku. Poznamy wkrótce okoliczność, która wzmacnia tę różnicę (por. § 68).

Przypuśćmy, że wznosimy się o wysokość h, w powietrzu, ponad powierzchnię ziemi. Oznaczmy przez g_0 przyśpieszenie ciężkości, zmierzone u powierzchni, gdzie $h = 0$; przez g rozumiejmy wartość, odpowiadającą wzniesieniu h. Według prawa powszechnego ciążenia (§ 51) g zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od środka kuli ziemskiej (por. § 53); mamy zatem

1. $$g : g_0 = R^2 : (R + h)^2$$

gdzie R jest promieniem ziemi, którą tu uważamy za kulę. Ponieważ h jest zwykle mała w stosunku do R, otrzymujemy z (1) w przybliżeniu

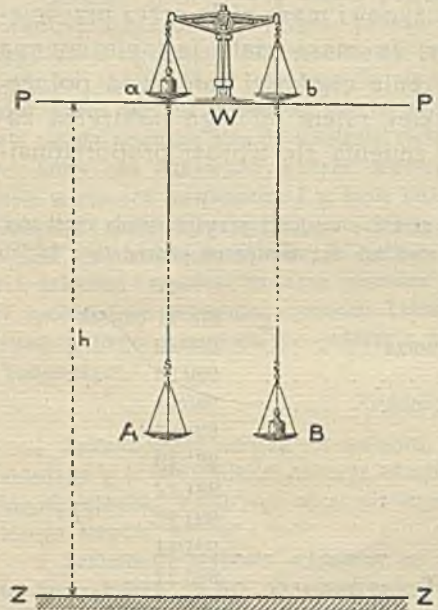
2. $$g = g_0\left(1 - 2\frac{h}{R}\right).$$

Załóżmy $g_0 = 981$ cm/sek², $R = 6{\cdot}37 \times 10^8$ cm; przypuszczając, że $h = 1$ km, otrzymujemy przybliżenie

3. $$g - g_0 = -0{\cdot}3 \text{ cm/sek}^2.$$

Jeżeli mierzymy g na powierzchni płaskowzgórza lub u szczytu góry, rozumowanie powyższe nie stosuje się; obecność wyniosłości lądu wpływa na inny sposób zmieniania się wartości g.

Jolly w Monachjum, w r. 1878-ym, sprawdził doświadczalnie, że przyśpieszenie ciężkości zmniejsza się w miarę wznoszenia się ponad powierzchnię ziemi. Wyobraźmy sobie wagę W (§ 102), ustawioną na poziomie PP w wysokości h ponad powierzchnią ziemi ZZ (rys. 66). Waga ta posiada dwie pary szalek: jedną a, b umieszczoną jak zwykle oraz drugą A, B; szalki drugie A, B wiszą znacznie niżej niż pierwsze a, b. Przypuśćmy, że zrównoważyliśmy dwa ciała, umieszczone na szalkach górnych a, b; skoro przeniesiemy jedno ciało naprzykład do szalki dolnej B, drugie zaś pozostawimy na górnej a, ciało przeniesione do B zyska na ciężarze, zatem równowagi już wówczas nie będzie.



Rys. 66.

W jednem z doświadczeń Jolly'ego masa 5 kg, spuszczona na dół o wysokość 21 m, okazała się cięższa o 32 Mg. Sprawdzamy bez trudności, że ten wynik zgadza się dość przybliżenie z wymaganiami równania (2) w artykule niniejszym.

Przyśpieszenie ciężkości zmienia się zatem, zależnie od wzniesienia ponad powierzchnią ziemi, ale zmienia się nader powolnie. W wielu zagadnieniach możemy tak rozumować, jak gdyby nad ziemią przyśpieszenie g było niezmienne. Możemy nieraz również przypuszczać, że kierunki przyśpieszeń, które wytwarza siła ciężkości, są do siebie równoległe (§ 55). Pole siły ciężkości, któremu przypisujemy tak uproszczone własności, nazywamy *jednorodnem*.

§ 66. Jak zmierzono masę ziemi i jej gęstość średnią.

Wyobraźmy sobie dwie kule, których masy wynoszą m_1 i m_2 i których środki znajdują się od siebie w odległości r. Według prawa powszechnego ciążenia, kule te przyciągają się; każda z dwóch sił, z których składa się wzajemne pomiędzy kulami działanie, wynosi

1. $$F = \frac{k m_1 m_2}{r^2}.$$

Obiedwie kule są przyciągane przez ziemię. Jeżeli M jest masą kuli ziemskiej, R jej promieniem, ciężar kuli o masie m_2 wynosi

2. $$p_2 = \frac{k M m_2}{R^2}.$$

Z równań (1) i (2) otrzymujemy

3. $$\frac{F}{p_2} = \frac{m_1}{M}\left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Gdybyśmy zatem potrafili zmierzyć siłę przyciągania F, czynnego pomiędzy kulami m_1 i m_2, moglibyśmy obliczyć masę M kuli ziemskiej; istotnie p_2, m_1, R oraz r są znane lub mogą być łatwo znalezione.

Doświadczenie, oparte na podobnej zasadzie, wykonał po raz pierwszy w r. 1797 Lord Cavendish w Clapham pod Londynem; rozmaici uczeni powtarzali je później, wprowadzając poprawki i udoskonalenia. Przypuśćmy dla przykładu, że mamy:

4. $m_1 = 150\,\mathrm{kg} = 1{\cdot}5 \times 10^5\,\mathrm{gr}$; $m_2 = 20\,\mathrm{kg} = 2 \times 10^4\,\mathrm{gr}$; $r = 30\,\mathrm{cm}$

i wyobraźmy sobie, że doświadczenie dało wynik następujący:

5. $$\frac{F}{p_2} = 1{\cdot}128 \times 10^{-8};$$

zatem siła F była równa ciężarowi 0·2256 miligrama. Powracając do równania (3) i kładąc zamiast R wartość $6{\cdot}37 \times 10^8$ cm, otrzymujemy

6. $$M = 6 \times 10^{27}\,\mathrm{gr}.$$

Wartość dokładna jest $5{\cdot}997 \times 10^{27}$ gr. Objętość V kuli ziemskiej wynosi

7. $$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = 1{\cdot}0827 \times 10^{27}\,\mathrm{cm}^3;$$

zatem stosunek M/V czyli t. zw. *średnia gęstość* ziemi D jest

8. $$D = \frac{M}{V} = 5{\cdot}54\,\mathrm{gr/cm}^3.$$

Masa kuli ziemskiej jest 5·54 razy większa niż masa kuli wodnej tej samej objętości. Ponieważ średnia gęstość powierzchownych warstw skorupy ziemskiej, które są nam dostępne, wynosi około 2·5 gr/cm³, wypada przeto przypuszczać, że wnętrze naszej planety jest utworzone z ciał stosunkowo bardzo gęstych; być może, że to wnętrze jest nadzwyczajnie mocno ściśnięte, więc z tego powodu jest gęste.

Obliczamy jeszcze wartość stałej powszechnej k czyli spółczynnika proporcjonalności, znajdującego się w formule Newtona. Przypuśćmy, że siła F, równa ciężarowi 0·2256 miligrama, była obserwowana pod Londynem, gdzie $g = 981{\cdot}2$ cm/sek² (§ 65). Z poprzednich wzorów (1) i (4) wyprowadzamy wówczas:

$$9. \qquad 0{\cdot}2256 \times 10^{-3} \times 981{\cdot}2 \text{ dyn} = \frac{k \times 1{\cdot}5 \times 10^{5} \text{ gr} \times 2 \times 10^{4} \text{ gr}}{(30 \text{ cm})^2}$$

skąd wynika

$$10. \qquad k = 6{\cdot}64 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gr sek}^2.$$

Zadania.

1. Obliczyć w dynach siłę przyciągania, czynną pomiędzy dwiema kulami, z których każda ma masę 5 kg, jeżeli ich środki znajdują się w odległości 1 m od siebie. W jakim stosunku pozostaje ta siła do ciężaru każdej kuli?

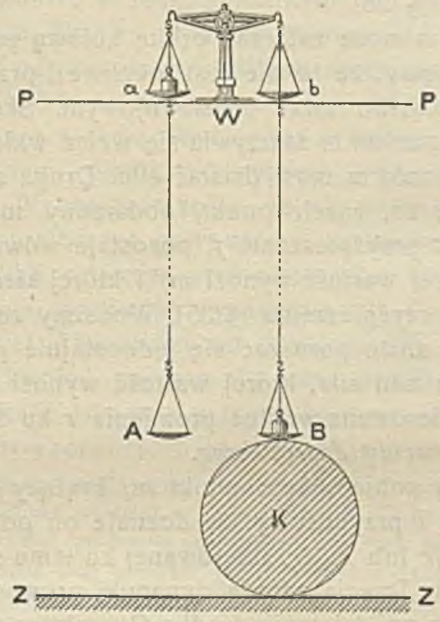
2. Jaki istnieje związek pomiędzy wielkościami k, M, R (w oznaczeniach niniejszego artykułu) a średnią wartością przyśpieszenia g?

3. Wiadomo, że średnia gęstość Marsa jest mniejsza niż średnia gęstość ziemi w stosunku 0·69 : 1. Wiadomo, że objętość Marsa jest mniejsza niż objętość ziemi w stosunku 0·157 : 1. Obiedwie planety uważamy za kule jednostajnej gęstości. Obliczyć, w jakim stosunku do średniego przyśpieszenia g na ziemi pozostaje średnie przyśpieszenie ciężkości na powierzchni Marsa.

4. Wiadomo, że masa słońca jest 333432 razy większa niż masa ziemi; że promień kuli słonecznej jest 109·05 razy większy niż promień kuli ziemskiej. Obliczyć przyśpieszenie ciężkości, działającej na powierzchni słońca.

5. Masa księżyca jest mniejsza od masy ziemi w stosunku 0·012 : 1. Obliczyć w dynach przyciąganie, czynne pomiędzy księżycem a ziemią w ich średniej odległości, która jest 60·27 razy większa niż promień kuli ziemskiej.

Wypada nam jeszcze na przykładzie objaśnić, w jaki sposób można zmierzyć siłę, którą oznaczyliśmy przez F w równaniu (1) niniejszego artykułu i w następującym wywodzie. Powróćmy w tym celu do opisanego w § 65-ym doświadczenia Jolly'ego. Przypuśćmy, że, po dokonaniu wspomnianych tam ważeń, podsunięto wielką kulę K (rys. 67) pod szalkę dolną B, w której znajduje się jedno z badanych ciał; kula K może być wyrobiona z ołowiu lub z żelaza, może nią być naczynie szklane kuliste, wypełnione rtęcią. Do przyciągania ziemi, działającego na ciało, które umieściliśmy w *B*, dołącza się wówczas dodatkowe przyciąganie, wywierane na to samo ciało przez kulę *K*. To dodatkowe przyciąganie działa wprawdzie nietylko na ciało umieszczone w *B*, lecz również na ciało, znajdujące się w *a*; ale na pierwsze działa silniej, ponieważ *B* jest bliższe kuli *K* aniżeli *a*. Widzimy, że można zmierzyć siłę *F* zapomocą wagi.



Rys. 67.

Doświadczenia Jolly'ego udoskonalili Poynting w Anglji oraz Richarz i Krigar-Menzel w Niemczech; wyniki, które otrzymano w tych badaniach, nie różnią się znacznie od wyżej przytoczonych. Inne metody, któremi posługiwano się dotychczas, celem znalezienia masy lub średniej gęstości kuli ziemskiej, prowadzą również do zgodnych z niemi rezultatów.

§ 67. *Ruch kołowy*; *siła dośrodkowa, siła odśrodkowa.*

Przypuśćmy, że punkt, obdarzony masą *m*, porusza się jednostajnie po obwodzie koła, którego środek znajduje się w punkcie *O*. Gdy punkt *m* odbywa taki rodzaj ruchu, jego przyśpieszenie, jak wiemy z § 28-go, jest skierowane wzdłuż promienia, od punktu *m* ku środkowi *O*; z tego powodu nazywamy je *dośrodkowem* przyśpieszeniem. Jeżeli *v* jest prędkością, z jaką porusza się punkt, r zaś promieniem kołowej orbity, wartość dośrodkowego przyśpieszenia wynosi v^2/r. Oznaczając przez $\bar{\omega}$ prędkość kątową obiegu, możemy wyrazić wartość tego przyśpieszenia w postaci $\bar{\omega}^2 r$ (§ 28).

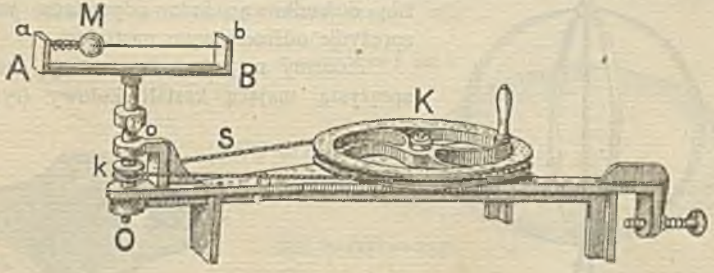
Czy punkt m może zataczać orbitę kołową przez prostą bezwładność? Wiemy, że to nie jest możliwe; przez bezwładność punkt m biegłby po torze prostolinjowym. Skoro, wbrew bezwładności, tor punktu m zakrzywia się wciąż wklęśle ku środkowi O, zatem na punkt m musi działać siła. Druga zasada dynamiki nam powiada, że, jeżeli punkt, obdarzony masą m, zdradza w swym ruchu przyśpieszenie f, pozostaje wówczas pod działaniem siły, której wartość wynosi mf i której kierunek zgadza się z kierunkiem przyśpieszenia (§ 35). Wnosimy zatem, że punkt m tylko wówczas może poruszać się jednostajnie po kołowej orbicie, gdy działa nań siła, której wartość wynosi mv^2/r albo $m\bar{\omega}^2 r$ i która jest skierowana wzdłuż promienia r ku środkowi O koła. Taką siłę nazywamy *dośrodkową*.

Wyobraźmy sobie zatem punkt m, krążący jednostajnie po obwodzie koła i przypuśćmy, że doznaje on od środka O działania siły mv^2/r lub $m\bar{\omega}^2 r$, skierowanej ku temu środkowi wzdłuż promienia koła. Trzecia zasada dynamiki prowadzi nas wówczas do wniosku, że na działanie środka O punkt m odpowiada przeciwdziałaniem, wynoszącem również mv^2/r lub $m\bar{\omega}^2 r$ i skierowanem od O ku m wzdłuż promienia koła (§ 36). To przeciwdziałanie nazywamy *siłą odśrodkową*. Siła dośrodkowa jest przyłożona do punktu m, biegnącego po torze kołowym; siła odśrodkowa jest przyłożona do środka O tego toru; siły te nie równoważą i nie znoszą się, albowiem działają na dwa różne ciała. Z dośrodkowego i z odśrodkowego działania składa się całość wzajemnego oddziaływania na siebie ciał m i O; siły te zatem są nierozłączne, każda jest towarzyszem drugiej, niejako jej nieuchronnym odgłosem; jeżeliby którakolwiek działać przestała, natychmiast znikłaby i zginęłaby druga.

Rozważmy niektóre przykłady. Wiemy, że ziemia krąży, niemal jednostajnie, po orbicie przybliżenie kołowej (§§ 49, 50); w środku tej orbity znajduje się słońce. Bez widocznego, materjalnego pośrednictwa słońce ciągnie ziemię ku sobie, stosownie do prawa N e w t o n a; ta siła, przyłożona do ziemi, jest siłą dośrodkową, objawiającą się w ruchu rocznym naszej planety. Na działanie słońca ziemia odpowiada równem przeciwdziałaniem, mianowicie przyciąganiem, wywieranem na słońce; to przyciąganie jest siłą odśrodkową w uważanym przypadku.

Przypuśćmy, że umocowaliśmy kamień na jednym końcu nici; ująwszy drugi koniec w rękę, zniewalamy kamień do krążenia po torze kołowym. Kamień wywiera wówczas odśrodkowe działanie na nić; nić odpowiada dośrodkową sprężystą reakcją. Ręka wywiera na nić działanie dośrodkowe; nić odpowiada ręce odśrodkową sprężystą reakcją. Wyciągana z dwóch końców, przeciwnie skierowanemi siłami, nić wypręża się, sprzeciwiając się obu działaniom. Wyobraźmy sobie, że nić została przecięta lub urwała się nagle; albo też przypuśćmy, że jej koniec wypuściliśmy z ręki. Znika wówczas więź materjalna, która łączyła kamień z ręką; ginie możliwość wywierania siły dośrodkowej, zatem i odśrodkowej. Uwolniony od działania siły, pozostawiony samemu sobie, kamień porusza się przez prostą bezwładność; zachowując prędkość, jaką miał w ruchu kołowym, kamień biegnie po stycznej, poprowadzonej do toru w miejscu zerwania uwięzi.

Przestrzegamy tu czytelnika przed błędem, w który wpaść łatwo. Krążąc po obwodzie koła, kamień wywiera za pośrednictwem nici na rękę siłę odśrodkową, skierowaną wzdłuż promienia nazewnątrz; ale stąd *nie* wynika bynajmniej, ażeby ten kamień miał wówczas jakąkolwiekbądź dążność do wyrwania się, do ucieczki w kierunku promienia. Kamień wywiera siłę odśrodkową, ale



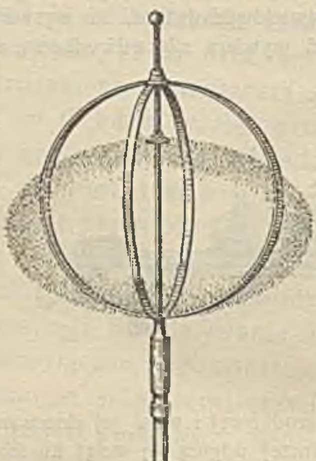
Rys. 68.

jej nie ulega; doznaje on, przeciwnie, siły dośrodkowej i musi jej doznawać, skoro porusza się po linji krzywej, która od prostej odgina się wciąż ku środkowi orbity. Kamień wywiera siłę odśrodkową i doznaje dośrodkowej, dopóki nić albo sznurek łączy go z ręką, dopóki istnieją przymusy i więzy, które ruch jego krępują; obiedwie siły giną jednocześnie, skoro tylko te więzy lub spójnie zostały zniesione.

Do badania ruchu obrotowego możemy posługiwać się przyrządem, który nazywamy *wirownicą* (lub *centryfugą*). Na osi *Oo* mniejszego koła *k* (rys. 68) utwierdzamy tę część przyrządu, którą chcemy wprowadzić w ruch obrotowy; koło to *k* poruszamy zapomocą większego koła *K*, które obracamy ręką; ruch koła *K* przenosi się na *k* za pośrednictwem sznura lub struny *S*. Na osi *Oo* wirownicy umocujmy naprzykład ramkę *AB* (rys. 68), w której po drucie *ab* może przesuwać się swobodnie kula *M*. Skoro ramce *AB* nadamy ruch obrotowy, kula *M* widocznie zdąża ku obwodowi ramy; spotykając opór sprężyny *aM*, uciska ją i dopiero pod wpływem jej przeciwdziałania poczyna zataczać orbitę kołową.

Przypuśćmy, że sprężynę *aM* wyjęliśmy i że jej niema w przyrządzie; podczas obrotu kula *M* ucieka wtedy po drucie, jak może najdalej od środka. Czy to zachowanie się kuli jest objawem działania siły odśrodkowej? Bynajmniej; wiemy z poprzedzających objaśnień, że wniosek podobny byłby mylny i błędny. Gdy kula ucieka od środka wzdłuż drutu, *nie* odbywa przecież ruchu kołowego; *nie* doznaje więc siły dośrodkowej, koniecznej w tym ruchu; nie wywiera też odpowiedniej siły odśrodkowej. Gdy niema sprężyny *aM*, kula *M* nie doznaje działania siły dośrodkowej, albowiem na przewierconą kulę drut takiej siły wywrzeć nie może; zatem kula porusza się wówczas niemal wyłącznie ruchem *bezwładnym*. Istotnie, kula nie przesuwa się wcale wzdłuż drutu nieruchomego; posuwa się ona wzdłuż drutu, który jednocześnie *wykręca się*. Gdy niema sprężyny *aM*, kula *M* porusza się zatem przybliżenie *po prostej*; dlatego oddala się wtedy od osi obrotu. Ruch kuli po orbicie kołowej staje się dopiero wówczas możliwy, gdy ściśnięta sprężyna *aM* działa na kulę *M* siłą dośrodkową; kula odpowiada wówczas sprężynie odśrodkowym naciskiem.

Załóżmy na wirownicy wstęgę metalową sprężystą, mającą kształt kołowy (rys. 69);

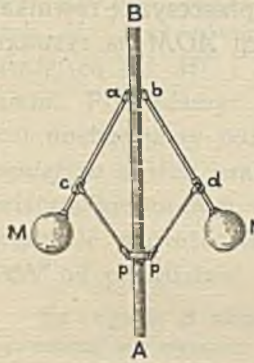


Rys. 69.

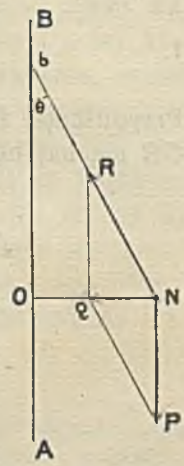
Rys. 70.

każda cząstka wstęgi zachowuje się podczas obrotu podobnie jak kula *M* w doświadczeniu poprzedniem; dlatego kołowa wstęga spłaszcza się w kierunku osi obrotu, wydyma się w kierunkach poprzecznych. Podobne zjawisko dostrzegamy w doświadczeniu następującem. W naczyniu szklanem, spłaszczonem wzdłuż osi, na równiku wydętem, znajduje się woda i rtęć. Naczynie umieszczamy na osi wirownicy i wprowadzamy je w ruch obrotowy; rtęć, która jest znacznie gęstsza niż woda (a więc w równej objętości posiada o wiele większą masę), ucieka wówczas ku obwodowi równika i zgromadza się cała w jego sąsiedztwie. Na takiej zasadzie polega działanie t. zw. *wirówek*, używanych w cukrownictwie, w mleczarstwie i w innych gałęziach przemysłu.

Regulator odśrodkowy Watta składa się z osi AB (rys. 71), po której może ślizgać się pierścień pp, połączony z pierścieniami c i d zapomocą ruchomych prętów pc, pd; pierścienie c i d mogą posuwać się wzdłuż prętów acM i bdN, ruchomych dokoła osi a, b i zaopatrzonych w masywne kule M, N. Znajdujemy bez trudności warunek równowagi prętów acM i bdN, odchylonych od pionowego położenia. Przypuśćmy, że pręt bN podczas obrotu odchylił się o kąt θ (rys. 72). Na punkt N działa ciężar NP kuli N, skierowany pionowo ku dołowi oraz przeciwdziałanie sprężyste, którem pręt opiera się wydłużaniu; wypadkowa NQ tych dwóch sił jest siłą dośrodkową przyłożoną do N. Mamy



Rys. 71.



Rys. 72.

1. $$NQ = QR \,.\, \text{tang}\ \theta.$$

Oznaczmy przez l długość pręta bN. Jeżeli m jest masą kuli N, ω prędkością kątową obrotu, r promieniem obrotu, mamy

2. $$r = ON = l \sin\theta$$

oraz

3. $$NQ = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin\theta.$$

Wiemy nakoniec, że

4. $$QR = NP = mg$$

Z równań (1), (3) i (4) otrzymujemy

5. $$\cos\theta = g/\omega^2 l.$$

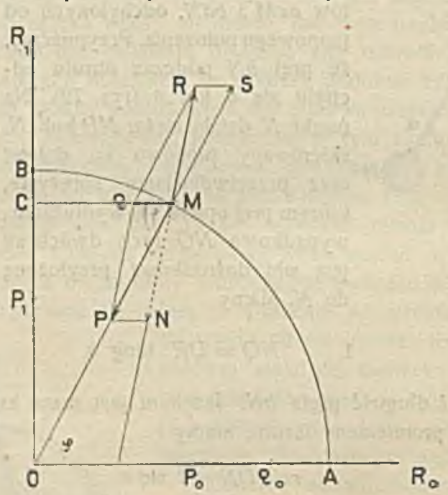
Dopóki prędkość kątowa jest mniejsza niż $\sqrt{g/l}$, równanie (5) nie daje dla kąta θ wartości możliwej; pręt istotnie nie odchyla się wówczas. Skoro pręt odchylił się, kąt θ rośnie, gdy ω zwiększa się, jak tego wymaga równanie (5). Jeżeli więc obrót jest zbyt szybki, aM i bN rozchylają się (rys. 71), pp podnosi się, skutkiem czego dopływ pary do machiny parowej, z którą regulator jest sprzężony, zmniejsza się. Dzięki połączeniu z regulatorem Watta machina parowa może więc niejako czuwać sama nad sobą i zapobiegać zbyt szybkiemu własnemu ruchowi.

§ 68. *Wpływ obrotu ziemi na przyśpieszenie ciężkości.*

Kula ziemska względem gwiazd stałych kręci się około swej osi; jeden obrót, jak wiemy, trwa 86164·09 sekund średnich słonecznych (§ 4). Prędkość kątowa $\tilde{\omega}$ obrotu ziemi wynosi więc

$$1. \qquad \tilde{\omega} = \frac{2\pi}{86164{\cdot}09 \text{ sek}} = \frac{0{\cdot}000072921}{\text{sek}}.$$

Przypuśćmy, że *OA* na rys. 73-im wyobraża płaszczyznę równika; *OB* niechaj będzie połową osi ziemskiej; kąt *AOM* na rysunku



Rys. 73.

niechaj nazywa się φ. Przypuśćmy, że ziemia jest kulista i że rozkład masy jest w niej jednostajny; punkt materjalny, umieszczony w *M*, doznaje wówczas od kuli ziemskiej przyciągania *MP*, skierowanego wzdłuż promienia *MO* ku środkowi ziemi *O*. Gdyby ziemia nie obracała się, pion w miejscu *M* wskazywałby *MS* jako kierunek pionowo do góry idący, jeżeli *MS* jest przedłużeniem *OM*; sprężysta reakcja, którą nić pionu sprzeciwia się wydłużaniu, byłaby umiejscowiona w prostej *MS* i wyobrażona przez długość $MS = MP$. Ziemia jednakże obraca się (względem gwiazd stałych) dokoła *OB* i pion w miejscu *M* nie wisi jak *SM* lecz jak *RM*; sprężysta reakcja nici pionu *MR* oraz przyciąganie ziemi *MP* składają się na stosunkowo bardzo małą siłę dośrodkową *MQ*, przyłożoną do *M* w kierunku *MC*, ku środkowi *C* koła, po którego obwodzie biegnie punkt *M*.

Ponieważ promień r tego koła wynosi $R \cos \varphi$, jeżeli R jest promieniem kuli ziemskiej, zatem

2. $$MQ = m\bar{\omega}^2 r = m\bar{\omega}^2 R \cos \varphi.$$

Wyobraźmy sobie, że w miejscu M powierzchni ziemi badamy siłę ciężkości. Ponieważ o wartości tej siły i o jej kierunku sądzimy z zachowania się pionu albo wahadła, zatem w miejscu M poczytamy MN za czynną tam siłę ciężkości, jeżeli MN jest równa i przeciwna MR. Widzimy, że MN jest *mniejsza* niż MP i *nie* jest skierowana dokładnie ku środkowi ziemi. Powiadamy: skutkiem obrotu kuli ziemskiej dokoła jej osi dostrzegamy *pozorną* siłę ciężkości, która naogół jest nieco *mniejsza* aniżeli prawdziwa i *nie* zgadza się ściśle z jej rzeczywistym kierunkiem. Dla jasności rysunku przesadziliśmy na nim znacznie wartość MQ oraz odchylenie pozornej siły ciężkości MN od prawdziwej MP.

Na biegunie B mamy $\varphi = 90^\circ$, $r = 0$ więc $MQ = 0$; na biegunie zatem prawdziwa siła ciężkości BP_1 i reakcja nici BR_1 są równe sobie i skierowane przeciwnie. Oznaczmy przez γ prawdziwe przyśpieszenie ciężkości t. j. przyśpieszenie, które kula ziemska wytwarzałaby na całej swojej powierzchni, gdyby nie obracała się koło osi. Pozorne czyli dostrzegalne na biegunie przyśpieszenie wynosi zatem również γ. Przenieśmy się teraz do miejsca A na równiku; tam mamy $\varphi = 0^\circ$, $r = R$; siła MQ przybiera więc na równiku wartość możliwie największą $m\bar{\omega}^2 R$ lub przypuśćmy AQ_0 na rys. 73-im. Siła AQ_0 stanowi wówczas różnicę pomiędzy prawdziwą siłą ciężkości AP_0 a reakcją nici AR_0:

3. $$AP_0 - AR_0 = m\bar{\omega}^2 R.$$

Pozorne czyli dostrzegalne na równiku przyśpieszenie ciężkości g_0 jest więc mniejsze od prawdziwego γ, mianowicie

4. $$\gamma - g_0 = \bar{\omega}^2 R$$

gdzie

5. $$\bar{\omega}^2 R = (0{\cdot}000072921)^2 \times 6{\cdot}37 \times 10^8 \text{ cm/sek}^2 = 3{\cdot}39 \text{ cm/sek}^2.$$

Ponieważ γ jest wartością przyśpieszenia na biegunie, widzimy zatem, że, gdyby ziemia była doskonale kulista i gdyby rozkład masy był w niej jednostajny, różnica wartości przyśpieszenia ciężkości, obserwowanych na biegunie i na równiku, powinnaby wynosić 3·39 cm/sek². Z § 65-go wiemy atoli, że ta różnica jest większa; że mianowicie wynosi 5·19 cm/sek². Domyślamy się zatem, że ruch obrotowy ziemi dokoła jej osi nie jest jedyną przyczyną zmian wartości przyśpieszenia g na powierzchni ziemi. Jak już powiedzieliśmy w § 65-ym, drugą, spółdziałającą w tym względzie okolicznością jest spłaszczenie naszej planety oraz rozmieszczenie w niej mas przyciągających, które bynajmniej nie jest jednostajne.

Zadania.

1. Przypuszczamy, że ziemia jest kulą, że rozkład masy jest w niej jednostajny, że sprawiałaby na całej swojej powierzchni przyśpieszenie γ, gdyby nie obracała się koło osi względem gwiazd stałych. Obliczyć prędkość kątową Ω obrotu, przy której nić pionu na równiku nie wyprężałaby się wcale; przy której przyśpieszenie pozorne g_0 na równiku byłoby równe zeru. Jak długo trwałby wówczas jeden obrót dokoła osi? W jakim stosunku do obecnej (istotnej) prędkości kątowej $\bar{\omega}$ pozostaje owa Ω? Znając γ, $\bar{\omega}^2 R$ oraz φ w danem miejscu M powierzchni ziemi, obliczyć pozorne czyli dostrzegalne tam przyśpieszenie ciężkości oraz kąt odchylenia kierunku MN od MP (rys. 73).

2. Kąt CMN (rys. 73) wynosi w Krakowie $50^\circ 3' 52''$, w Warszawie $52^\circ 13' 5''$. Obliczyć w przybliżeniu siłę MQ w tych miejscowościach; przekonać się, w jakim stosunku ona pozostaje do ciężaru ciał materjalnych.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

O pracy i energji.

§ 69. O pracy.

Od młodych lat uczymy się upatrywać *pracę* w naszych zajęciach codziennych. Wiemy, że niemal każda czynność żąda od nas pracy. Zaoranie pola lub wykopanie rowu, podniesienie ciężkiej skrzyni do góry lub przesunięcie jej po podłodze, rozcięcie kartek w książce, którą czytamy lub nalanie wody do szklanki: wszystko wymaga pracy. Wybicie tunelu lub przekopanie morskiego kanału jest oczywiście pracą olbrzymią; ale nawet nakręcenie zegarka, nawet podniesienie powieki łączy się z pracą, chociaż stosunkowo niewielką.

Pracują dokoła nas ludzie; pracują zwierzęta, które przymuszamy do pracy; pożytecznie, choć niewidocznie i cicho, pracują wszystkie rośliny. Pracują rozmaite machiny, budowane przez człowieka i kierowane przez niego; szybcej, sprawniej i nieporównanie obficiej pracują aniżeli człowiek mógłby pracować. Parowe, gazowe i wodne motory poruszają młocarnie, tartaki, heblarnie, tokarnie, walcownie; dźwigają młoty lub windy, wtłaczają wodę do sieci rur miejskich, wprawiają w bieg dynamomaszyny, z których otrzymujemy prąd elektryczny. Działalność maszyn powołuje do pracy papiernie, drukarnie, tkalnie, przędzalnie i niezliczone inne zakłady fabryczne; ona sprawia, że ropa może tryskać z szybu, że tonny węgla wyłaniają się na powierzchnię ziemi, które zostały wyrwane z głęboko pod nią ukrytych pokładów. Maszyny ciągną długie szeregi wagonów pełnych towaru lub w szalonym pędzie biegną na czele pośpiesznych pociągów. Maszyny wprawiają w ruch olbrzymie okręty, nie dbając o wichry, o fale morskie i prądy; inne znów w portach ładują ogromne zapasy na statki lub je wyładowują. Maszyny wyrabiają samochody, czołgi, aeroplany, którym ich własne maszyny zapewniają dzielność i sprawność.

Lecz nietylko ludzie, zwierzęta i maszyny pracują; cały wszechświat widzialny jest wciągnięty w wir pracy; wszystko wciąż pracę pochłania albo jej dostarcza. W powietrzu zrywa się wiatr albo wicher; to znowu deszcz pada, sypie śnieg albo siecze grad. Wodospady i rzeki toczą masy wód ku oceanom. Fale mórz huczą i przelewają się, szarpiąc skały, niosąc wydmy piasku; posłuszne ciążeniu, raz biegną w niepowstrzymanym pędzie ku brzegom, to znowu od nich uciekają pośpiesznie. Pod naszemi stopami chwieją się ziemskie pokłady i wszystko w nich albo na nich obsuwa i przesuwa się wiecznie, od kamyków począwszy aż do potwornych skał i lodowców. Śród pyłu przestworzy niebieskich krążą księżyce, planety, komety; ich ruch pochłania lub uwalnia nieziemskie ilości pracy. Biegnąc w dal niewiadomą, słońce rozgrzewa i rozświeca wszystko dokoła; jego dobroczynne działanie budzi do życia. Tysiące razy wspanialsze, inne promienne słońca jaśnieją z głębi otchłani przestrzennych. Gdziekolwiek zwrócimy uwagę, wszędzie odbywa się praca.

§ 70. Określenie pojęcia pracy.

Widzimy, jak ważne jest pojęcie pracy, jak szeroki ma zakres. Lecz w naukach ścisłych tylko *ilościowe* pojęcia mają wartość rzetelną; co nie może być *zmierzone*, pozostaje mgliste i ostatecznie zawsze dowolne. Praca może być duża lub mała, jak powiedzieliśmy w artykule poprzednim; możemy więc *mierzyć pracę* i powinniśmy umieć ją mierzyć.

Przypuśćmy, że punkt materjalny m pozostaje pod wpływem siły F. Jeżeli punkt m porusza się *zgodnie* z kierunkiem działania siły F (to znaczy: ściśle w jej kierunku lub pod kątem ostrym do niego), mówimy wówczas, że *siła wykonywa pracę*; rozumie się, że pracę dodatnią. Jeżeli punkt porusza się *sprzecznie* z kierunkiem siły F, czyli w kierunku wręcz mu przeciwnym lub pod kątem rozwartym do niego, powiadamy, że praca jest wykonywana *wbrew* sile; lub też mówimy, że siła wykonywa pracę ujemną. Na granicy między ruchami zgodnemi a sprzecznemi z kierunkiem działania siły znajduje się ruch, względem tego kierunku *obojętny* czyli prostopadły do niego; mówimy, że w takim ruchu siła F *nie* pracuje.

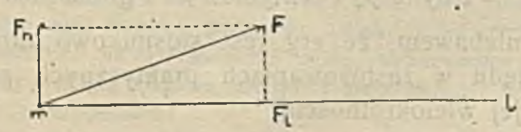
Przypuśćmy, że punkt m w pewnym czasie odbył drogę prostą l i że w tym czasie nie zmieniała się wartość ani nie zmieniał się kierunek siły F. Przez (Fl) rozumiejmy kąt, zawarty między kierunkami siły F i przemieszczenia l. Pracą siły F na drodze l nazywamy wówczas wyrażenie

1. $$W = Fl \cos (Fl),$$

które ma wartość dodatnią, gdy kąt (Fl) jest równy zeru lub jest ostry; które ma wartość ujemną, gdy ten kąt jest rozwarty lub równy dwóm prostym; które wreszcie równa się zeru, gdy kąt (Fl) jest równy prostemu. Widzimy, że te własności wyrażenia (1) są zgodne z założeniami, które, jako nieodłączne od pojęcia pracy, przed chwilą przyjęliśmy.

Można zapytać, dlaczego przemieszczenie l punktu m miałoby być skierowane pod kątem ostrym, prostym lub rozwartym do kierunku siły F? dlaczego niezawsze przypada w kierunku działania tej siły? Jeżeli punkt materjalny jest *swobodny* i jeżeli jest pozbawiony *początkowej prędkości* w chwili, gdy podpada pod wpływ siły F, wówczas porusza się w kierunku działania tej siły; mamy wówczas $(Fl) = 0$ i praca W przybiera postać iloczynu Fl. Przypuśćmy jednak, że swobodny punkt m, w chwili przyłożenia siły F, ma prędkość inaczej skierowaną niż siła F; według §§ 22-go i 42-go ruch punktu m odbywa się wówczas naogół pod kątem do kierunku siły. Mamy tego przykład w ruchu punktu ciężkiego, rzuconego ukośnie w polu ciężkości; zatacza on parabolę, mimo iż siła ciężkości działa zawsze na dół pionowo (§ 59). Przypuśćmy dalej, że punkt m nie jest swobodny, że jego ruch jest skrępowany przez ograniczające warunki; wahadło dostarcza przykładu takiego punktu (§ 63). Ruch odbywa się wówczas znowu zazwyczaj pod kątem do kierunku działania siły przyłożonej. Możemy powiedzieć, że wahadło porusza się nie pod samym tylko wpływem siły ciężkości; że działa na nie również reakcja, wywołana w nici przez jej wyprężenie. Ale reakcja ta nie dostarcza ani nie odbiera pracy wahadłu, albowiem jest zawsze prostopadła do kierunku przemieszczenia jego ciężkiego punktu.

Wyobraźmy sobie, że punkt m, na który działa siła F (rys. 74), porusza się wzdłuż prostej ml. Rozłóżmy siłę F na składową F_n



Rys. 74

prostopadłą do przemieszczenia ml i na składową F_l, przypadającą w kierunku tego przemieszczenia. Jeżeli zgodzimy się na twierdzenie, według którego składowa F_n nie pracuje w uważanym ruchu, tedy zostaje składowa F_l, której wartość wynosi $F.\cos(Fl)$ i która przypada w kierunku przemieszczenia *ml*. Mamy więc

2. $$W = F_l \, . \, l,$$

wzór, który pozwala z innej strony spojrzeć na określenie pracy i lepiej je zrozumieć.

Według określenia (1) lub (2), praca *nie* jest wektorem; jest nieskierowaną wielkością, podobnie jak naprzykład objętość lub masa. Zatem ilości pracy dodają się do siebie algebraicznie. Korzystając z tej własności pracy, możemy uogólnić wzór (1). Przypuśćmy, że wartość albo kierunek siły F zmienia się podczas odbywania przez punkt m drogi l. Rozcinamy wówczas tę drogę na mniejsze części, jeśli potrzeba, na niezmiernie małe odcinki; tworzymy dla każdej z tych części zosobna wyrażenie podobne do powyższego (1). Załóżmy np., że l składa się z części $l_1, l_2, \ldots$:

3. $$l = l_1 + l_2 + \ldots$$

oraz, że F_1 jest siłą czynną na drodze l_1, F_2 siłą czynną na l_2 i t. d. Suma

4. $$W = F_1 l_1 \cos(F_1 l_1) + F_2 l_2 \cos(F_2 l_2) + \ldots$$

wyraża pracę, wykonaną na drodze l.

§ 71. Jednostki pracy.

W artykule poprzednim wyprowadziliśmy pojęcie pracy z pojęć przemieszczenia i siły, podobnie jak naprzykład w stereometrji pojęcie objętości wyprowadzamy z pojęć pola i długości. *Jednostka pracy* musi zatem wynikać z jednostki długości i z jednostki siły. W § 3-im przyjęliśmy centymetr za jednostkę długości; w § 47-ym przyjęliśmy dynę za jednostkę siły. Powiadamy zatem, że *jednostką pracy jest praca, wykonywana przez siłę równą 1 dynie na drodze, przypadającej w kierunku tej siły i równej 1 centymetrowi.* Jednostka ta nazywa się *ergiem*:

1. $$\text{erg} = 1 \text{ dyna} \times 1 \text{ centymetr} = 1 \text{ gr cm}^2/\text{sek}^2.$$

Zobaczymy niebawem, że erg jest stosunkowo drobną pracą; z tego względu w zastosowaniach praktycznych posługujemy się chętniej jej wielokrotnością:

2. $$1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergów}.$$

Wiemy, że ciężar p ciała, którego masa jest m, wynosi

3. $$p = mg,$$

gdzie g jest przyśpieszeniem ciężkości, czynnem w miejscu dostrzeżeń (§ 46). Przypuśćmy, że ciało obniża się o wysokość h w kierunku pionowym ku dołowi; siła ciężkości wykonywa w tem przemieszczeniu pracę

4. $$W = ph = mgh.$$

Jeżeli masę m wyraziliśmy w gramach, przyśpieszenie g w cm/sek², ciężar p z formuły (3) wypadnie wyrażony w dynach; jeżeli nadto drogę h podaliśmy w centymetrach, otrzymamy z (4) pracę W wyrażoną w ergach. Załóżmy naprzykład

5. $$m = 1 \text{ kg} \quad g = 981 \text{ cm/sek}^2 \quad h = 1 \text{ m};$$

gdy kilogram obniża się o metr ku dołowi, siła ciężkości wykonywa pracę, która wynosi 98100000 ergów czyli 9·81 joule'ów; pracę tę nazywamy *kilogramometrem* (w skróceniu: kgm). Przypuśćmy podobnie, że sześcienny milimetr wody obniża się o centymetr ku dołowi; siła ciężkości wykonywa wówczas pracę, która wynosi 0·981 erga; widzimy zatem, że erg jest rzeczywiście pracą stosunkowo nieznaczną, jak wyżej powiedzieliśmy.

Określiliśmy tutaj kilogramometr oraz miligramocentymetr; podobnie moglibyśmy określić np. gramocentymetr, stopofunt i inne podobne jednostki pracy, których nazwy są już dostatecznem określeniem. Kilogramometr, gramocentymetr, stopofunt i t. p. są to oczywiście *ciężarowe jednostki pracy* (§ 47), łatwo zrozumiałe, ponieważ odwołują się do pospolitych naszych doświadczeń; skoro one jednak zależą od wartości g, przeto są zmienne i dlatego w nauce nie mogą być uznane za ścisłe, zasadnicze jednostki.

Zadania.

1. Robotnik wniósł 12 cegieł na wysokość 6 m; pozostawiwszy tam 6 cegieł, wniósł pozostałe na dalszą wysokość 5 m. Każda cegła waży 2·5 kg. Obliczyć w kilogramometrach i w ergach całkowitą pracę, którą robotnik wykonał.

2. Nakręcając zegar wagowy, podnosząc książkę, która spadła na podłogę, wbiegając po schodach na trzecie piętro domu, wykonywamy pewną pracę. Jakie dane winny nam być wiadome, ażebyśmy mogli obliczyć pracę, wykonaną w każdym z tych przypadków?

3. Pociąg kolejowy waży 150 tonn. Dla pokonania, po torze poziomym, oporów i tarcia, lokomotywa musi ciągnąć siłą, równą średnio 7·5 Kg na 1 tonnę ciężaru pociągu. Obliczyć pracę lokomotywy na drodze 1 kilometra.

4. Masa księżyca wynosi $7{\cdot}2 \times 10^{25}$ gr (§ 66); przyśpieszenie, którego on doznaje od ziemi, wynosi 0·272 cm/sek² (§ 54). Ile pracy wykonywa przyciąga-

nie ziemskie, gdy księżyc przebiega metr pod kątem 89° do promienia wodzącego orbity?

5. Punkt o masie 1 kg zesuwa się bez tarcia po równi pochyłej (§ 61), której kąt nachylenia do poziomu wynosi 45°. Jeżeli droga, liczona wzdłuż równi, wynosi 35 cm, jaką pracę wykonywa siła ciężkości?

6. W jakim stosunku do kilogramometra pracy, wykonanego na biegunie ziemi, znajduje się kilogramometr pracy, wykonany na równiku? Jaka jest różnica pomiędzy kilogramometrami, wykonanemi we Lwowie i Wilnie (§ 65)? lub u szczytu wieży Eiffla (mającej 300 m wysokości) i u jej podstawy (§ 65)?

§ 72. Dzielność.

Wyobraźmy sobie, iż, pracując przez godzinę, pewien robotnik wykonał tyle pracy, ile otrzymujemy w ciągu sześciu minut od zaprzężonego konia; tyle, ile możemy w przeciągu pół sekundy od machiny parowej uzyskać. W tych trzech razach ogólna *ilość* pracy była jednakowa, ale *szybkość* jej uskuteczniania była rozmaita; w jednakowym czasie koń dawał nam 10 razy więcej pracy niż człowiek, maszyna zaś 7200 razy więcej. Z tego przykładu widzimy, że rozmaite źródła pracy mogą nam jej dostarczać z bardzo rozmaitą szybkością; ta szybkość jest ważną własnością lub cechą źródła pracy. *Stosunek ilości dokonanej pracy do odstępu czasu, w którym została dokonana,* nazywamy (średnią w tym odstępie) *dzielnością* albo *sprawnością* pracującego organizmu lub mechanizmu.

Przypuśćmy, że praca W, dana przez wzór (1) § 70 go, została dokonana w czasie t; średnia w tym czasie dzielność D pracującego układu, przyrządu, człowieka albo zwierzęcia wynosiła

1. $$D = \frac{W}{t} = F\frac{l}{t}\cos(Fl) = Fv\cos(Fl)$$

gdzie v jest średnią w czasie t prędkością punktu, który odbywa drogę l. Jednostką dzielności jest oczywiście 1 gr cm²/sek³ czyli *erg na sekundę*; w praktycznych zastosowaniach posługujemy się zwykle wielokrotnościami tej jednostki, które wynoszą:

2. $$\mathit{watt} = 10^7 \text{ ergów na sekundę;}$$

3. $$\mathit{kilowatt} = 10^{10} \text{ ergów na sekundę.}$$

Dzielność 1 kgm/sek wynosi 9·81 wattów, jeżeli g ma wartość 981 cm/sek². *Dzielnością konia parowego* nazywamy często w technice 75 kgm/sek; jednostka ta wynosi 735·7 wattów, jeżeli g ma powyższą wartość. W końcu XVIII-go stulecia inżynier i uczony angielski James Watt wprowadził w użycie jako jednostkę dzielności, średnią dzielność mocnego (angielskiego) konia roboczego; ta jednostka, zwana *horse-power* (lub w skróceniu *HP*), wynosi 550 stopofuntów angielskich na sekundę lub w przybliżeniu 746 wattów.

Dzielność zwykłego konia waha się między 40 a 60 kgm/sek. Dzielność dorosłego mężczyzny wynosi zazwyczaj od 5 do 10 kgm/sek; naprzykład cyklista, gdy jedzie po gładkiej drodze, okazuje dzielność 5 kgm/sek; wioślarz około 10 kgm/sek; robotnik, który kręci korbę maszyny, ma dzielność 6—7 kgm/sek.

Zadania.

1. Punkt ciężki, którego masa wynosi m, spada swobodnie w próżni, bez początkowej prędkości; $g = 981$ cm/sek² Oznaczamy przez t czas, liczony od początkowej chwili zjawiska; przez s rozumiemy drogę, odbytą w czasie t pionowo ku dołowi. Udowodnić, że dzielność δ, z jaką pracuje w chwili t siła ciężkości, wynosi

$$\delta = mg^2t = mg\sqrt{2gs}.$$

Obliczyć tę dzielność w ergach na sekundę, w wattach, w koniach parowych lub w jednostkach *HP*, zakładając np.:

$$m = 1 \text{ kg}; \quad t = 1 \text{ sek} \quad \text{albo też} \quad s = 1 \text{ m}.$$

2. Taternik wszedł na górę, której wysokość, liczona pionowo, wynosi 2500 m; wejście to zajęło mu 5 godzin czasu. Wiedząc, że ciężar taternika wynosi 66 Kg, obliczyć średnią dzielność, którą okazał w tej wycieczce.

3. Wodospad Niagary toczy średnio 7650 m³ wody na sekundę. Wysokość, z której woda spada, wynosi 49 m. Jaką dzielność mogłyby rozwinąć maszyny, które zdołałyby pochwycić i zużytkować jedną dziesiątą część energji wodospadu?

§ 73. *Pojęcie energji.*

Gdy nakręciliśmy zegarek, jego wskazówki i kółka są przez pewien czas w ruchu. Zatem praca, którą włożyliśmy w skręcenie sprężyny, nie jest stracona; skręcona sprężyna jest rzetelnym dłużnikiem i skoro tylko może, stara się zwrócić pracę pobraną. Zegar wagowy jest zaopatrzony w ciężarki. Skoro podnieśliśmy je do góry, ciężarki, opuszczając się pod działaniem siły ciężkości, utrzymują w ruchu mechanizm zegara przez tydzień lub dłużej. Praca, którą wykonaliśmy wbrew sile ciężkości, nie znikła; możemy obrazowo powiedzieć, że przechowywała się i tylko stopniowo, powoli, została wydana. Każde ciało ciężkie, podniesione o pewną wysokość, dostarcza nam pracy, skoro mu pozwolimy obniżyć się napowrót. Spadając ze szczytu wieży kościelnej, cegła oddaje pracę, którą wydał na jej wyniesienie murarz, może przed kilkuset laty. Gdy kamień stacza się z Rysów albo Giewontu, wyzwala się praca, która przez długie wieki, niejako w uśpieniu, trwała nienaruszona. Nawałnica, która siecze nam pola lub wodospad Niagary, który zasila pracą ludne osady i miasta, zwraca obecnie olbrzymie zasoby pracy, wyłożonej (niewiadomo kiedy i gdzie) na odparowanie wody i na jej krążenie w atmosferze ziemskiej.

Ażeby rozłupać kłodę, drwal z rozmachem uderza siekierą; nadał więc pewną prędkość narzędziu a w tym celu musiał pracę wykonać. Ale ta praca nie jest stracona; poruszające się ciało może dostarczyć pracy, której nieruchome ciało sprawić nie zdoła. Kamień rzucony, pocisk wystrzelony z armaty, lokomotywa pędząca po torze — mogą dokonać rozmaitych skutków, mogą uskutecznić różnorodną pracę. Ażeby wprowadzić w ruch ciało masywne, potrzeba więc pracy; ale ta praca nie ginie. Poruszające się ciało ma w sobie pewien zasób pracy, z którego czerpiąc, może pracę nazewnątrz oddawać.

Z przytoczonych przykładów wnosimy, że w przyrodzie mogą gromadzić się, że w niej nawet wszędzie istnieją *zapasy* czyli *zasoby pracy*. Każdy zasób pracy nazywamy *energją*. Pojęcie energji, stworzone głównie przez Tomasza Younga (1807) i przez Lorda Kelvina (1851), jest dzisiaj fundamentalnem pojęciem nauki fizyki; jest jednem z najważniejszych narzędzi myślenia, nietylko w tej nauce, lecz we wszystkich wogóle oddziałach umiejętności, poświęconych badaniu zjawisk natury.

§ 74. Energja kinetyczna.

Wyobraźmy sobie punkt materjalny ciężki, który spada swobodnie w próżni zupełnej, bez początkowej prędkości, pod wyłącznym wpływem siły ciężkości. Pole ciężkości, w którem punkt spada, uważajmy za jednorodne (§§ 55 i 65). Przypuśćmy, że od początkowej chwili zjawiska upłynął czas t i przebieżona została droga s. Ciężar punktu wynosi mg, jeżeli m jest masą punktu, g zaś przyśpieszeniem ciężkości; wartość tej siły według założenia jest stała; kierunek jej jest niezmienny, zgodny z kierunkiem przemieszczenia. Praca W, wykonana przez ciężkość od początkowej chwili spadania aż do chwili t, wynosi

1. $$W = mgs.$$

Prędkość v punktu w chwili t czyni zadosyć równaniu

2. $$v^2 = 2gs$$

(por. §§ 17 i 46). Z równań (1) i (2) wyprowadzamy

3. $$W = \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Pracując nad punktem, ciągnąc go ku dołowi, siła ciężkości nagromadziła w nim zasób pracy $\frac{1}{2}mv^2$; ten zasób nazywamy *kinetyczną energją* poruszającego się punktu.

Spróbujmy uogólnić wynik, do którego zostaliśmy doprowadzeni. Punkt swobodny, którego masa wynosi m, porusza się pod wpływem siły F; wartość tej siły jest stała i kierunek jej jest niezmienny, zatem ruch punktu jest prostolinjowy i jednostajnie przyśpieszony, odbywa się zaś w kierunku działania siły. Oznaczamy przez v_0 prędkość punktu w początkowej chwili $t = 0$, przez v jego prędkość w chwili t. Przyśpieszenie f punktu jest stałe; wartość f możemy obliczyć z równania

4. $$f = \frac{v - v_0}{t}.$$

Droga s, przebieżona od chwili początkowej, wynosi według § 17-go:

5. $$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} ft^2$$

albo też, jak widzimy, dopomagając sobie formułą (4):

6. $$s = \tfrac{1}{2}(v + v_0)t.$$

Według tych założeń, praca W, wykonana przez siłę F na drodze s, wynosi

7. $$W = Fs = mfs = \tfrac{1}{2} m(v^2 - v_0^2),$$

jest zatem równa przyrostowi *kinetycznej energji punktu*. Dzięki nieustannym przyczynkom, pochodzącym z pracy siły F na wszystkich po kolei odcinkach drogi, nagromadza się zasób pracy czyli energja punktu, podobnie jak z gromadzenia się oszczędności powstaje majątek. Jeżeli punkt, mający kinetyczną energję, napotka na opór lub wywoła tarcie, jeżeli naprzykład uderzy o zaporę lub wpadnie do lepkiego ośrodka, nagromadzona kinetyczna energja będzie się rozpraszała; punkt wykona pracę, równą stracie, którą jego kinetyczna energja poniesie.

Zadania.

1. Kula armatnia, której masa wynosi 500 kg, została wystrzelona z prędkością 480 m/sek. Obliczyć w ergach energję kinetyczną kuli.

2. Kula, o której mowa w 1-em zadaniu, została wystrzelona z prędkością 600 m/sek lub 720 m/sek; jaka jest wówczas jej kinetyczna energja? Gdy prędkość masy m zwiększy się lub zmniejszy się x razy, w jakim stosunku zmieni sie jej kinetyczna energja?

3. Kula, o której mowa w 1-em zadaniu, odbyła we wnętrzu armaty drogę 1·75 m, zanim została z niej wyrzucona. Obliczyć w dynach średnią wartość siły, która była przyłożona do kuli podczas przebiegania tej drogi.

4. Ta sama kula (zad. 1), wpadając do grubej warstwy piasku, zatrzymuje się w niej w głębokości 6 m od powierzchni. Obliczyć w dynach średnią wartość oporu, który piasek przeciwstawia ruchowi kuli.

5. Pociąg biegnie z prędkością 75 km/godz; jego masa wynosi 250 tonn. Obliczyć kinetyczną energję tego pociągu. Jaka siła mogłaby go zatrzymać na drodze, mającej 25 m długości? Opory i tarcia zaniedbujemy.

6. Masa młotka wynosi 1 kg. Ażeby wprowadzić młotek w szybki ruch, wywieramy nań siłę, która sześciokrotnie przenosi jego ciężar. Pod wpływem naszego działania i własnego ciężaru młotek opadł o 50 cm na dół pionowo. Jaka suma pracy została tutaj wydana? Jaką prędkość osiągnął młotek po przebieżeniu wymienionej drogi? Przypuśćmy, że młotek trafia gwóźdź tkwiący w desce i wbija go głębiej o 6 mm; obliczyć średni opór, którym deska sprzeciwiała się posuwaniu się gwoździa.

Wyobraźmy sobie układ, złożony z punktów materjalnych; ich masy oznaczmy przez m_1, m_2, m_3 i t. d. Będziemy nieraz rozważali własności takiego układu, który dla skrócenia będziemy nazywali *materjalnym układem*. Niechaj prędkości punktów układu wynoszą v_1, v_2, v_3 i t. d. *Kinetyczną energją* układu nazywamy sumę

8. $$T = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + \tfrac{1}{2} m_3 v_3^2 + \text{ i t. d.},$$

złożoną z kinetycznych energij wszystkich po kolei punktów układu.

§ 75. *Ilość ruchu czyli pęd.*

Powracamy jeszcze raz do przedmiotu, którym zajmowaliśmy się w artykule poprzedzającym. Punkt o masie m, swobodny, porusza się pod działaniem siły F, której wartość jest stała i kierunek niezmienny; ruch punktu jest prostolinjowy i jednostajnie przyśpieszony, odbywa się zaś w kierunku działania siły. Oznaczamy przez v_0 prędkość punktu w chwili $t = 0$, przez v jego prędkość w chwili t, przez s drogę, przebieżoną między temi dwiema chwilami. Wiemy wówczas, że dwie następujące zależności są spełnione:

1. $$Ft = m(v - v_0);$$

2 $$Fs = \tfrac{1}{2} m(v^2 - v_0^2).$$

Pierwsze równanie wynika z (1) § 35-go i (4) § 74-go; drugie nie różni się od równania (7) § 74-go. Równanie (2) powiada, że praca, wykonywana przez siłę F na drodzę s, gromadzi i przechowywa się w postaci kinetycznej energji poruszającego się punktu. Treść równania (1) jest nam również znana; wyraża się w niem drugie zasadnicze twierdzenie dynamiki. Nadajmy iloczynowi mv nazwę *ilości ruchu* albo *pędu*; możemy wówczas wypowiedzieć treść równania (1) w sposób obrazowy. Możemy powiedzieć, że pędzący wpływ siły F, mierzony przez iloczyn Ft, równa się powiększeniu się ilości ruchu albo pędu, które dokonało się w czasie t

Równaniami (1) i (2) możemy posługiwać się w rozmaity sposób. Jeżeli znamy wartości F i s, możemy obliczyć, jaka na drodze s dokonała się zmiana kinetycznej energji. Jeżeli wartości F i t są nam wiadome, znajdujemy zmianę, która w czasie t zaszła w pędzie poruszającego się punktu. Przypuśćmy przeciwnie, że dana nam jest zmiana kinetycznej energji punktu; możemy wówczas powiedzieć, na jakiej drodze siła F wytworzyła tę zmianę lub na jakiej drodze jest w stanie ją zniszczyć. Przypuśćmy, że zmiana pędu punktu jest podana; równanie (1) pozwala wówczas przekonać się, w jakim czasie siła F sprawia taką zmianę lub w jakim czasie byłaby zdolna ją unicestwić.

Dla przykładu wyobraźmy sobie dwa ciała: pociąg kolejowy, którego masa wynosi 400 tonn oraz niewielką kulę, wystrzeloną ze strzelby; masa tej kuli niechaj wynosi 10 gramów. Przypuśćmy, że pociąg porusza się nader powoli; wyobraźmy sobie naprzykład, że właśnie zajeżdża na stację i ma już tylko prędkość 1 cm/sek. Kula przeciwnie pędzi z dużą prędkością; przypuśćmy, że posiada prędkość 400 m/sek. Znajdujemy:

$$\text{dla pociągu: } \tfrac{1}{2}mv^2 = 2 \times 10^8 \text{ gr cm}^2/\text{sek}^2; \quad mv = 4 \times 10^8 \text{ gr cm/sek}$$

$$\text{dla kuli: } \tfrac{1}{2}mv^2 = 80 \times 10^8 \text{ gr cm}^2/\text{sek}^2; \quad mv = 4 \times 10^5 \text{ gr cm/sek.}$$

Kinetyczna energja pociągu jest 40 razy *mniejsza* niż kinetyczna energja kuli; pęd pociągu przeciwnie jest 1000 razy *większy* niż pęd kuli. Jeżeli ruchowi pociągu i ruchowi kuli przeciwstawimy *tę samą* siłę stałą, zatrzyma ona pociąg *na drodze* 40 razy krótszej niż kulę; ale zatrzyma go *w czasie* 1000 razy dłuższym.

§ 76. *Dwa sposoby pojmowania masy.*

Pojęcie masy jest niezmiernie ważne w dynamice. Określaliśmy je dotychczas w związku z pojęciami przyśpieszenia i siły, ustanawiając (w drugim rozdziale) zasadnicze twierdzenia dynamiki. Możemy powiedzieć, że w tym rozdziale kierowaliśmy się równaniem (1) poprzedzającego artykułu; o sile wnioskowaliśmy z pędu, albo ze zmiany pędu, poruszającego się ciała; *masa* była dla nas *zdolnością nabierania pędu*, którą dane ciało posiada. Pojęcie kinetycznej energji prowadzi do innego sposobu pojmowania masy. Przez *masę* ciała możemy rozumieć jego *zdolność gromadzenia w sobie kinetycznej energji*. Młotek, wyrobiony z wosku lub z korka, jak wiemy wszyscy, funkcjonowałby licho. Mówiąc, że żelazna lub stalowa główka młotka ma masę większą niż drewniana albo korkowa, mamy na myśli, że, poruszając się z jednakową prędkością, ma znacznie większą kinetyczną energję. *Masa jest* zatem *pojemnością ciała na kinetyczną energję.*

Ażeby to jeszcze lepiej wyjaśnić, uciekamy się do porównania. Dobrze wiadomo, że wodę, krążącą w rurach wodociągowych miejskich, pompują czyli wtłaczają do rur machiny parowe. Ale machiny działają przerywanemi pchnięciami. Gdyby rury wodociągowe były bezpośrednio połączone z tłoczącemi pompami, woda nie płynęłaby ciągłym strumieniem z kurka wodociągu, tryskałaby raczej w podskokach, raz mocniej, to znowu słabiej. Z tego względu, pomiędzy tłoczącemi pompami a siecią wodociągowych przewodów inżynierowie, budujący installację, umieszczają zwykle *zbiornik* znacznej pojemności, który, gromadząc duży zapas wody, ujednostajnia płynięcie.

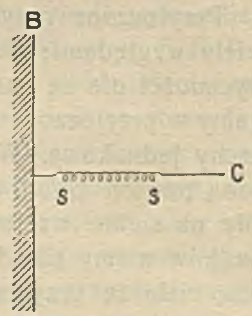
Przyjrzyjmy się teraz *kołu rozpędowemu* (albo «zamachowemu») w hali maszyn przemysłowego zakładu; zrozumiemy bez dalszych wyjaśnień, że, dzięki potężnej swej masie, to koło, skoro zostało wprawione w obrót, staje się zbiornikiem kinetycznej energji; że wobec tej energji spełnia taką rolę, jaką wobec wody odgrywa wodociągowy rezerwuar. Koło rozpędowe pobiera ilości pracy, które są chwilowo zbyteczne i gromadzi je jako kinetyczną energję; w miarę potrzeby wydaje z tego zasobu, przekazując energję mechanizmom, z któremi jest sprzężone; tym sposobem ujednostajnia bieg całego urządzenia.

§ 77. Energja potencjalna.

Energja kinetyczna nie jest jedyną postacią, w której może przechowywać się praca. Widzimy to z przykładów, przytoczonych w § 73-im. Wyobraźmy sobie jeszcze raz kamień, który leży u szczytu góry albo cegłę położoną pod dachem budynku; wyobraźmy sobie obraz uczepiony na haku, most nad przepaścią wiszący albo samolot, który unosi się wysoko w powietrzu. Ze *wzniesieniem* tych ciał, z ich *położeniem* względem ziemi łączy się istnienie pewnej energji, nawet i wówczas, gdyby one nie poruszały się wcale względem ziemi; istotnie, gdy któremukolwiek z tych ciał pozwolimy spadać ku ziemi, odzyskamy pracę, która została wydana na podniesienie ciała do góry. Przez to samo, że ciało ciężkie jest oddalone od środka ziemi, która je przyciąga, przez to samo nagromadziła się pewna energja; nazywamy ją *energją ciężkości.*

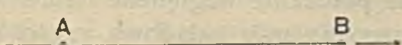
Kuli ziemskiej nie możemy dowolnie oddalać od słońca ani jej przybliżać ku słońcu. Wiemy jednak z rozdz. II-go, że ciężkość jest tylko szczególnym przypadkiem powszechnego ciążenia; że, gdy kamień znajduje się w polu ciężkości lub planeta w polu ciążenia, istota rzeczy jest w obu razach ta sama. Pomiędzy planetą a słońcem działa przyciąganie; to przyciąganie wykonywa pracę, gdy planeta zbliża się ku słońcu; gdy planeta oddala się od słońca, praca jest wykonywana przeciwko temu przyciąganiu. A zatem istnieje zasób pracy, istnieje energja, gdy planeta znajduje się w pewnej odległości od słońca; energję tę nazywamy *energją ciążenia.*

Przypuśćmy, że punkt C (rys. 75) jest połączony ze ścianą AB za pośrednictwem sprężyny SS; jeżeli C oddala się od AB, musi tę sprężynę wyciągać. Oddalenie punktu od ściany wymaga wykonania pracy przeciwko sile sprężystości, która budzi się w wyciąganej sprężynie. Skoro zostanie oddalony od ściany, punkt C zdradza energję, której nie okazywał, gdy sprężyna miała długość normalną; istotnie, pozwalając punktowi zbliżyć się napowrót ku ścianie, możemy odzyskać pracę, którą wydaliśmy na oddalenie. Gdy sprężyna jest wydłużona, istnieje więc nagromadzony zasób pracy, istnieje energja. Taką energję, zależną od wydłużenia, wygięcia, skręcenia lub innego odkształcenia ciał sprężystych, nazywamy *energją sprężystości.*



Rys. 75.

Wyobraźmy sobie dwie kule metalowe A i B (rys. 76), naelektryzowane *jednoimiennie*, naprzykład obiedwie dodatnio. Dzięki



Rys. 76.

swym elektrycznym ładunkom kule odpychają się wzajemnie; jeżeli chcemy zbliżyć je ku sobie, musimy wykonać pracę. Przypuśćmy, że zbliżyliśmy kule ku sobie; wykonaną wówczas pracę możemy odzyskać, pozwalając, by kule oddaliły się napowrót od siebie. Gdy zatem kule były zbliżone, istniał pewien zapas pracy, nagromadzona była pewna energja. Gdy wogóle dwa jednoimiennie naelektryzowane ciała znajdują się w jakiejkolwiek odległości od siebie, już przez to samo istnieje pewna energja, że one nie są nieskończenie oddalone od siebie. Dwa *różnoimiennie* naelektryzowane ciała przyciągają się; jeżeli chcemy oddalić je od siebie, musimy wykonać pracę; oddaliwszy je od siebie, możemy odzyskać pracę wydaną, gdy ciała zbliżą się ku sobie napowrót. Gdy zatem dwa różnoimiennie naelektryzowane ciała znajdują się w jakiejkolwiek odległości od siebie, już przez to samo istnieje pewna energja, że nie stanowią jednego ciała, że są rozłączone. Taką energję, zależną od wzajemnego położenia względem siebie ciał naelektryzowanych, nazywamy *elektryczną energją*.

Przytoczone przykłady różnią się oczywiście od siebie pod wielu względami; objawy ciężkości, ciążenia, sprężystości i elektryczności nie są naogół do siebie podobne. Mimo to dostrzegamy w przytoczonych przykładach niektóre rysy wspólne, pewne cechy jednakowe. W tych wszystkich przykładach mamy przed sobą pewien *układ*, którego składowe *części* wywierają pewne siły na siebie wzajemnie. W pierwszym z przytoczonych przypadków mamy układ, składający się z kuli ziemskiej i z kamienia; ciała te przyciągają się wzajemnie. W drugim przypadku mamy układ, złożony ze słońca i z planety; między temi ciałami działa ciążenie. Sprężyna jest układem, którego części, gdy je oddalamy od siebie, odpowiadają sprężystą reakcją. W ostatnim przypadku układ składał się z pewnej liczby ciał naelektryzowanych; takie ciała odpychają się lub też przyciągają się wzajemnie. Przypuśćmy, że pewna *praca* została *wykonana* w układzie; dzieje się to wówczas, gdy składowe części układu zbliżają się ku sobie albo oddalają od siebie, gdy wogóle zmienia się ich wzajemne położenie względem siebie. Praca ta *nie zginęła*, nie jest stracona; gdy składowe części układu przybiorą napowrót pierwotne swoje położenie względem siebie, wyłożona praca zostanie *zwrócona*. Praca jest wykonywana, gdy kamień oddala się od ziemi lub planeta od słońca, gdy sprężyna wydłuża się, gdy jednoimiennie naładowane ciała zbliżają się ku sobie lub różnoimiennie naładowane oddalają od siebie; praca jest zwracana, gdy kamień zbliża się ku ziemi lub planeta ku słońcu, gdy sprężyna się kurczy, gdy jednoimiennie naładowane ciała oddalają się od siebie lub różnoimiennie naładowane zbliżają ku sobie. We wszystkich zatem przytoczonych przykładach widzimy, że w układzie mogą gromadzić się *zasoby pracy*, że może w nim istnieć *energja*. Taka energja, jak mówimy, jest pracą *in potentia*; to znaczy, że w razie wyzwolenia się może przeobrażać się w pracę; dlatego taką energję nazywamy *potencjalną*.

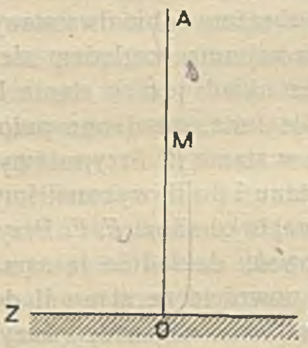
Wyobraźmy sobie układ materjalny, który w skróceniu niechaj nazywa się M. Pomiędzy składowemi częściami tego układu mają działać siły, które oznaczamy przez F, F; są to zatem czynne w układzie siły *wewnętrzne*. Wyobraźmy sobie dwa stany układu M, stan I i II. Gdy części układu zajmują względem siebie określone położenie, powiadamy, że układ jest w stanie I; gdy te części przybrały względem siebie inne, odmienne położenie, powiadamy, że układ znajduje się w stanie II. Przypuśćmy, iż, zmuszając układ M do przejścia ze stanu I do II, wykonaliśmy w układzie w tem przejściu pracę W przeciwko siłom F, F. Przypuśćmy powtóre, że otrzymujemy napowrót dokładnie tę samą pracę W, gdy układowi M pozwalamy powrócić ze stanu II do początkowego stanu I. Jeżeli układ ma takie własności, nazywamy go *zachowawczym układem*, siły zaś wewnętrzne, które są w nim czynne, nazywamy *zachowawczemi siłami*. Gdy układ jest zachowawczy, przypisujemy mu w każdym stanie pewną *potencjalną energję*; naprzykład w stanie I przypisujemy mu potencjalną energję U_I, w stanie II potencjalną energję U_{II}. Za określenie potencjalnej energji U przyjmujemy następujące równanie:

1. $$W = U_{II} - U_I.$$

Praca W, wykonana w przejściu ze stanu I do stanu II, jest zatem równa zmianie, której w tem przejściu doznała potencjalna energja układu. Jeżeli w przejściu z I do II wykonano w układzie dodatnią pracę W wbrew siłom F, F, wówczas U_{II} jest większa niż U_I; w przejściu z I do II energja potencjalna układu powiększyła się zatem. W przejściu przeciwnem, od II do I, układ zwraca napowrót pracę W; energja potencjalna zmniejsza się wówczas i powraca do początkowej wartości U_I.

§ 78. *Energja potencjalna pola ciężkości.*

Zastosujmy pojęcia, które obecnie poznaliśmy, do ponownego rozważenia praw, rządzących jednorodnem polem ciężkości. Wyobraźmy sobie punkt materjalny w jednorodnem polu ciężkości; oznaczmy przez m masę tego punktu. Punkt m, jak wiemy, nie stanowi sam przez się całkowitego układu; układ, który wypada nam obecnie rozważać, składa się z kuli ziemskiej i z punktu; jest to oczywiście układ zachowawczy. Gdy punkt m znajduje się w miejscu O, na powierzchni ziemi ZZ (rys. 77), powiadamy, że układ jest w stanie (O); gdy ten punkt podnieśliśmy do miejsca M, leżącego w wysokości z ponad poziomem ZZ, mówimy, że układ znajduje się w stanie (M). Przez U_0 oznaczamy energję potencjalną układu w stanie (O), przez U tę samą energję w stanie (M).



Rys. 77.

Podnosząc punkt m o wysokość z, wykonaliśmy pracę mgz przeciwko ciężkości; według równania (1) § 77-go mamy więc

1. $$U = U_0 + mgz.$$

Przypuśćmy, iż podnieśliśmy punkt m aż do miejsca A (rys. 77), w którem jego wzniesienie ponad ZZ wynosi OA lub przypuśćmy h. Oznaczając przez U_A energję potencjalną układu w stanie (A), mamy podług poprzedzającego wzoru (1):

2. $$U_A = U_0 + mgh.$$

W miejscu A pozostawiamy punkt m samemu sobie, nie udzielając mu żadnej prędkości. Pod wpływem przyciągania ziemi punkt biegnie na dół pionowo; gdy przebył drogę AM, którą oznaczmy przez s, znajduje się w wysokości OM czyli z (albo $h-s$) ponad powierzchnią ziemi; energja potencjalna układu ma wówczas wartość U, daną przez (1). Gdy zatem punkt spadał, energja potencjalna układu zmniejszała się; w przejściu ze stanu (A) do stanu (M) układ stracił ilość

3. $$U_A - U = mg(h-z) = mgs$$

potencjalnej energji. Jednakże widoczną jest rzeczą, że układ zyskiwał wówczas kinetyczną energję; spadając, punkt osiąga coraz większe prędkości. Prędkość v punktu m w uważanem miejscu M drogi jest dana, jak wiadomo, przez formułę

4. $$v^2 = 2gs$$

(por. §§ 17 i 46); energja kinetyczna punktu w miejscu M wynosi przeto

5. $$\tfrac{1}{2} mv^2 = mgs,$$

tyleż, ile, według (3), wynosi strata energji potencjalnej. *Układ zyskał tyle kinetycznej, ile stracił potencjalnej energji.*

Rozważmy teraz zjawisko odwrotne. Przypuśćmy, że w miejscu O na powierzchni ziemi (rys. 77) punkt m został wyrzucony pionowo do góry z prędkością v_0; w tej początkowej chwili punkt miał zatem kinetyczną energję $\frac{1}{2} mv_0^2$. Z §§ 18-go i 58-go wiemy, że punkt będzie się wznosił ruchem opóźnionym; jego kinetyczna energja będzie się więc stopniowo wyczerpywała, natomiast potencjalna energja układu (złożonego, jak dawniej, z ziemi i z punktu) będzie wzrastała. W chwili t, w której osiągnięta wysokość wynosi OM czyli z, mamy prędkość

6. $$v = v_0 - gt;$$

zarazem mamy

7. $$z = v_0 t - \tfrac{1}{2} gt^2$$

(por. § 58). Z równań (6) i (7) wyprowadzamy

8. $$v^2 = v_0^2 - 2gz$$

a zatem

9. $$\tfrac{1}{2} mv_0^2 - \tfrac{1}{2} mv^2 = mgz = U - U_0.$$

Układ zyskuje więc tyle potencjalnej, ile traci kinetycznej energji.

§ 79. *Energja całkowita pola ciężkości.*

Całkowitą energją układu, złożonego z ziemi i z punktu, nazwijmy sumę E jego kinetycznej i potencjalnej energji:

1. $$E = \tfrac{1}{2} mv^2 + U.$$

Gdy punkt m spada swobodnie, układ zyskuje tyle kinetycznej, ile traci potencjalnej energji (§ 78); zatem *całkowita energja E pozostaje niezmienna.* Ażeby sprawdzić ten wniosek, zwracamy się do równań (3) i (5) artykułu poprzedzającego; wypada z nich natychmiast, że

2. $$E = \tfrac{1}{2} mv^2 + U = U_A.$$

Mamy tu dwie energje: kinetyczną i potencjalną; każda zosobna jest zmienna podczas spadania, ale ich suma jest *stała*, ponieważ jest wciąż równa stałej wartości U_A.

Obliczamy jeszcze raz całkowitą energję układu w początkowym stanie (A) i w końcowym stanie (O); por. rys. 77. W stanie (A) mamy $v = 0$ oraz $U = U_A$; z obecnego równania (1) wynika więc, że $E = U_A$, jak być powinno. W stanie (O) mamy $v^2 = 2gh$ oraz $U = U_0$; z równania (1) wypada zatem, że

$$3. \qquad E = mgh + U_0$$

lub, według (2) § 78-go: $E = U_A$.

Weźmy na uwagę zjawisko odwrotne, opóźniony ruch punktu, wyrzuconego pionowo do góry. Z równania (9) w artykule poprzedzającym wnosimy, że

$$4. \qquad \tfrac{1}{2} mv^2 + U = \tfrac{1}{2} mv_0^2 + U_0;$$

a zatem, przez cały czas ruchu, całkowita energja E pozostaje równa swojej początkowej wartości E_0. Według § 58-go mamy $v_0^2 = 2gh$; początkowa wartość E_0 wypada więc

$$5. \qquad E_0 = mgh + U_0;$$

przez porównanie z formułą (2) § 78-go otrzymujemy $E_0 = U_A$. W miejscu A największego wzniesienia mamy $v = 0$; w tem miejscu toru mamy więc znowu $E = U_A$.

Uczyńmy tu jeszcze niektóre uzupełniające uwagi W poprzedzającym i w niniejszym artykule odnosiliśmy ruch spadającego punktu do kuli ziemskiej jako do ciała odniesienia. Rozumowaliśmy tak, jak gdybyśmy uważali kulę ziemską za nieruchomą, jak gdybyśmy jej kinetyczną energję uznawali za równą zeru. Kula ziemska nie jest nieruchoma; wiemy, że biegnie dokoła słońca po eliptycznej orbicie; wspólnie ze słońcem porusza się, prawdopodobnie po linji prostej, względem gwiazd stałych. Punkt spadający ku ziemi uczestniczy we wszystkich jej ruchach. Kinetyczna energja punktu, o której mówiliśmy w powyższym wywodzie, jest więc energją ruchu punktu *względem* ziemi. Potencjalna energja układu jest podobnie energją położenia punktu względem ziemi.

Przypuszczaliśmy w poprzedzającym wywodzie, że przyciąganie, czynne pomiędzy ziemią a punktem, jest *jedyną* siłą, czynną w układzie; innemi słowy, układ, złożony z ziemi i punktu, uważaliśmy za *odosobniony*. W istocie rzeczy taki układ nie jest ściśle odosobniony; według prawa powszechnego ciążenia księżyc, słońce, planety, nawet gwiazdy stałe, muszą wywierać pewne siły na kamień spadający albo rzucony; ale siły te są oczywiście bardzo słabe w porównaniu do siły ziemskiej ciężkości.

Jak wiemy, układ, złożony z ziemi i z punktu, jest zachowawczy. Porównajmy jego zachowanie się z własnościami innego układu. Przypuśćmy, że na poziomej powierzchni stołu leży kamień; gdy przesuwamy ten kamień po powierzchni stołu, nie wykonywamy pracy przeciwko sile ciężkości ani też siła ciężkości nie wykonywa pracy; wydajemy wówczas pracę z powodu tarcia, które stół przeciwstawia ruchowi (§ 62). Wydawanie tej pracy nie przyspasabia jednak układu do zwrócenia nam pracy wydanej. Tarcie nie może cofnąć kamienia napowrót, gdy przesunęliśmy go po powierzchni stołu; jeżeli życzymy sobie, by kamień wrócił do pierwotnego swego miejsca. musimy wyłożyć nową pracę na powrotne przemieszczenie. Układ, w którym działa tarcie, nie jest zachowawczy;

pracy, którą taki układ pochłania, niepodobna uznać za wzbogacenie jego potencjalnej energji.

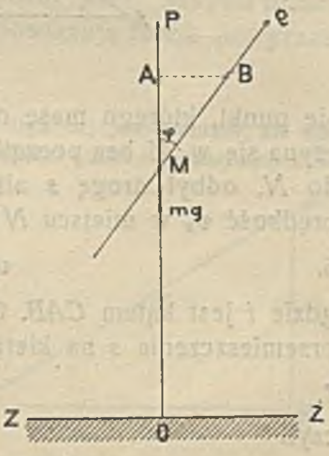
Zadania.

1. Punkt o masie 100 gr znajduje się w wysokości 5 m nad powierzchnią ziemi. Jeżeli punkt spadnie na tę powierzchnię, jak zmieni się potencjalna energja układu, złożonego z ziemi i z punktu?

2. Punkt o masie 1 kg spada (bez początkowej prędkości) ze szczytu wieży pięciopiętrowej, której każde piętro ma 5 m wysokości; opór powietrza zaniedbujemy. Obliczyć w poziomie każdego piętra kinetyczną energję punktu oraz różnicę wartości, które ma potencjalna energja układu (złożonego z ziemi i z punktu), gdy punkt jest w danym poziomie i gdy znajduje się na powierzchni ziemi; sprawdzić, że całkowita energja układu pozostaje niezmienna.

§ 80. Dalsze twierdzenia o polu ciężkości.

Przypuśćmy, że punkt, którego masa jest m, znajduje się w jednorodnem polu ciężkości. Wyobraźmy sobie, że punkt ten posuwa się w kierunku MQ (rys. 78), który tworzy kąt φ z kierunkiem MP, idącym pionowo do góry. Ciężar mg punktu działa wzdłuż MO; jeżeli więc punkt posunął się o odstęp MB (albo l) po prostej MQ, wykonaliśmy pracę



Rys. 78.

1. $$W = mgl \cos \varphi$$

wbrew sile ciężkości. Oznaczmy przez z rzut MA przemieszczenia MB na kierunek pionowy MP; mamy

2. $$W = mgz,$$

zatem praca W zależy tylko od pionowego podniesienia się z. Praca wykonana po drodze MB jest równa pracy, wykonanej po drodze MA i nie zależy od nachylenia drogi MB względem pionu.

Gdy punkt m posuwa się od M do B, energja potencjalna układu, składającego się z ziemi i z punktu, zmienia się według wzoru

3. $$U_B - U_M = W;$$

zatem

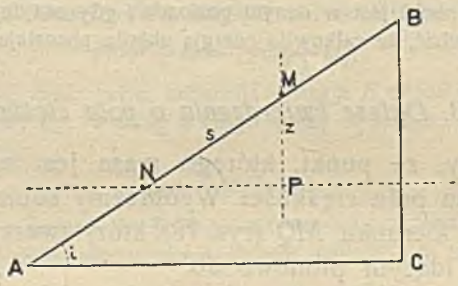
4. $$U_B = U_M + mgz.$$

Otrzymujemy więc według § 78-go:

5. $$U_B = U_A.$$

Czy punkt m zajmuje miejsce B, czy też miejsce A, nie ma to wpływu na potencjalną energję układu; zależy ona wyłącznie od t. zw. *poziomu* punktu t. j. od wysokości poziomej płaszczyzny, w której ten punkt jest położony.

Wyobraźmy sobie równię pochyłą AB (rys. 79), której tarcie zaniedbujemy (§§ 61 i 62). Przypuśćmy, że po tej równi posuwa



Rys. 79.

się punkt, którego masę oznaczamy przez m. Ruch punktu zaczyna się w M bez początkowej prędkości; gdy punkt dobiegnie do N, odbył drogę s albo MN i wiemy z § 61-go, że jego prędkość v_N w miejscu N jest dana przez

6. $$v_N^2 = 2gs \sin i$$

gdzie i jest kątem CAB. Oznaczając więc przez z ($= MP$) rzut przemieszczenia s na kierunek pionowy, otrzymujemy

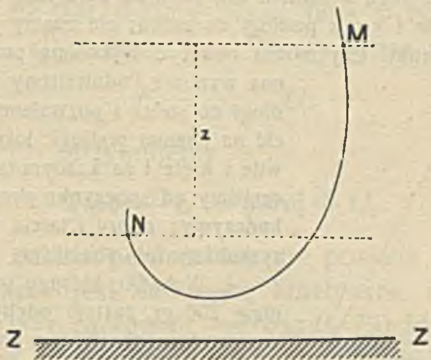
7. $$v_N^2 = 2gz$$

czyli

8. $$\tfrac{1}{2} m v_N^2 = mgz = U_M - U_N.$$

Całkowita energja, czyli suma $\frac{1}{2} m v_N^2 + U_N$, pozostaje niezmienna w ruchu punktu po równi pochyłej. Energja kinetyczna powiększa się o tyle, o ile potencjalna maleje; albo zmniejsza się o tyle, o ile potencjalna narasta. Zmiana zarówno kinetycznej jak potencjalnej energji zależy wyłącznie od pionowego przemieszczenia się punktu.

Wnioski te pozostają prawdziwe i wówczas, gdy tor punktu jest krzywodrożny. Możemy wyobrażać sobie, że krzywodrożny tor MN (rys. 80) jest granicą, do której dąży nieograniczenie rosnąca liczba nieograniczenie malejących, rozmaicie nachylonych dróg prostych; stosując się do każdej z tych dróg, twierdzenia poprzednie pozostają ważne i dla całości toru. Jako przy-

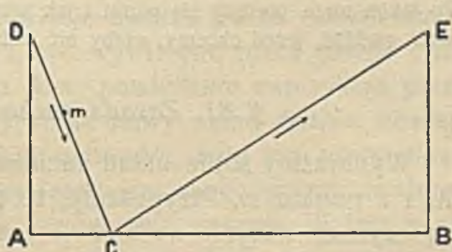


Rys. 80.

kład możemy przytoczyć ruch krzywodrożny, który odbywa punkt ciężki wahadła (§ 63); w tym ruchu obowiązują zatem powyższe twierdzenia.

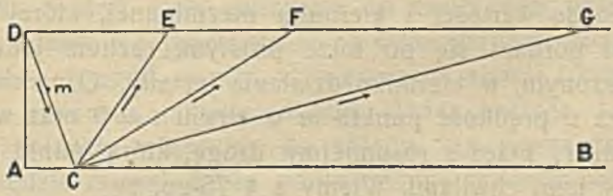
Zadania.

1. Nachylenie do poziomu równi CD i CE (rys. 81) jest rozmaite, ale ich pionowa wysokość jest jednakowa: $AD = BE$. Ciężki punkt m, spuszczony z D bez początkowej prędkości, przybiega do C z pewną uzyskaną prędkością. Gdybyśmy mogli przenieść go w C na równię CE bez zmiany tej osiągniętej prędkości, jak wysoko wzniósłby się po CE? Tarcie zaniedbujemy.



Rys. 81.

2. Wyobrażamy sobie w zadaniu pierwszem dalsze równie CF, CG i t. d.; ich pionowa wysokość AD jest jednakowa (rys. 82). Do jakich miejsc dobiega punkt m, przeniesiony w C na równie CE, CF, CG

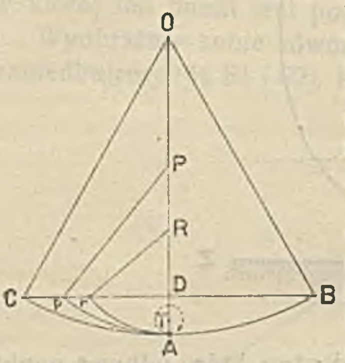


Rys. 82.

i t. d. bez straty prędkości? Pochylamy równie coraz bardziej; w końcu otrzymujemy równię CB poziomą. Dokąd dobiegnie punkt m, przeniesiony na CB

bez zmiany osiągniętej prędkości? Idąc za myślą tego rozumowania, zostajemy doprowadzeni do wygłoszenia jednego z zasadniczych praw dynamiki; mianowicie którego?

3. Pomiędzy podłogą a sufitem sali pionowa odległość wynosi 5 m. Podnosimy punkt, o masie 1 kg, z podłogi do sufitu; nie znamy jednak toru, po którym poruszał się punkt. Czy można obliczyć wykonaną pracę? Jeżeli tak, ile ona wynosi? Podnieśliśmy punkt 7 razy z podłogi do sufitu i pozwalamy mu 7 razy powrócić na poziom podłogi; tory przejścia były zawiłe i kręte i za każdym razem odmienne. Zaczęliśmy od spoczynku punktu i na spoczynku kończymy; opory i tarcia zaniedbujemy. Czy zyskaliśmy lub straciliśmy pewną ilość pracy?



Rys. 83.

4. Wahadło, którego punkt ciężki posiada masę 250 gr, zostało odchylone o 30° od pionowego kierunku; w tem położeniu nie ma prędkości. Długośc nici wahadła wynosi 80 cm. Obliczyć kinetyczną energję i prędkość, które wahadło mieć będzie, przebiegając przez najniższy punkt toru. Zakładamy $g = 981$ cm/sek², opory i tarcia zaniedbujemy. Wahadło przebiegło przez najniższy punkt toru i wznosi się do góry po stronie przeciwnej; jak wysoko wzniesie się? jaką ma prędkość w miejscu największego wzniesienia?

5. Punkt ciężki wahadła OA (rys. 83) przebiega tor BAC od B do C; BC jest pozioma. Wbijamy gwóźdź w miejscu P albo R; co stanie się wówczas? Po jakim torze poruszy się punkt i jak wysoko pobiegnie? Gdzie powinniśmy wbić gwóźdź, jeżeli chcemy, ażeby nić wahadła owinęła się dokoła niego?

§ 81. *Zasada zachowania energji.*

Wyobraźmy sobie układ zachowawczy, składający się z ciała M i z punktu m. Przypuśćmy, że pomiędzy M a m pewne siły są czynne, których wartość jest stała i kierunek niezmienny. W układzie Mm są to siły wewnętrzne; siły zewnętrzne nie działają, dlatego Mm nazywamy *odosobnionym* układem.

Przypuśćmy, że punkt m jest swobodny i że, pod wpływem siły F, co do wartości i kierunku niezmiennej, której doznaje od M, m porusza się po torze prostym, ruchem jednostajnie przyśpieszonym, w kierunku działania tej siły. Oznaczmy przez v_0 i przez v prędkość punktu m w chwili $t = 0$ oraz w uważanej chwili t; przez s rozumiejmy drogę, którą punkt m odbył pomiędzy temi chwilami. Wiemy z § 75-go, że

1. $$Fs = \tfrac{1}{2} m (v^2 - v_0^2).$$

Ponieważ układ jest zachowawczy, posiada potencjalną energję;

oznaczmy przez U_0 i przez U jej wartość w chwili $t = 0$ oraz w uważanej chwili t. Przypuśćmy, że między temi chwilami ciało M nie doznało przemieszczenia ani żadnej zmiany wewnętrznej; wówczas praca Fs jest jedyną pracą, jaką w tym czasie wykonały wewnętrzne siły układu Mm. Mamy zatem według § 77-go:

2. $$Fs = U_0 - U.$$

Z równań (1) i (2) otrzymujemy

3. $$\tfrac{1}{2}mv^2 + U = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + U_0.$$

Ponieważ masa M nie porusza się, nie posiada zatem kinetycznej energji; $\frac{1}{2}mv^2$ jest całkowitą kinetyczną energją układu; $\frac{1}{2}mv^2 + U$ jest jego *całkowitą energją* (§ 79), którą, jak dawniej, oznaczamy przez E. Równanie (3) przepisujemy zatem w postaci

4. $$E = E_0.$$

Jeżeli układ zachowawczy jest odosobniony, jego całkowita energja pozostaje niezmienna. W tem zdaniu wypowiedzieliśmy nadzwyczajnie ważne twierdzenie, które w dynamice nazywa się *zasadą zachowania energji.*

Jeżeli układ Mm pozostaje pod wpływem pewnych sił zewnętrznych, nie możemy oczywiście uważać go za odosobniony. Ale te siły zewnętrzne muszą być wywierane przez pewne ciała obce, nie należące do układu Mm; powiedzmy naprzykład przez ciała Nn. Jeżeli wyobrazimy sobie nowy układ $MnNn$, obszerniejszy, który zawiera w sobie ciała Nn, tedy ten nowy układ $MmNn$ jest już odosobniony; jeżeli jest zachowawczy, możemy zastosować do niego zasadę zachowania energji. W tem rozumieniu zasada zachowania energji może być rozciągnięta do każdego układu, którego granice zatoczyliśmy dostatecznie szeroko. Weźmy na uwagę naprzykład kulę ziemską i księżyc. Jeżeli tylko te dwa ciała zaliczamy do uważanego układu, wówczas wzajemne ich przyciągania są wewnętrznemi siłami; natomiast zewnętrznemi są siły, wywierane na ziemię i księżyc przez słońce i pozostałe planety, dokoła słońca krążące. Lecz jeżeli słońce i planety włączymy do układu, ten nowy, rozleglejszy układ będzie niemal ściśle odosobniony; gwiazdy stałe wywierają nań wpływ bardzo nieznaczny.

W szczególnym przypadku jednorodnego pola ciężkości wypowiedzieliśmy już zasadę zachowania energji w §§ 78 i 79-ym; w artykule niniejszym wygłosiliśmy ją w nieco ogólniejszych, lecz jeszcze stosunkowo dość ciasnych założeniach. Zasada zachowania energji, w takiej postaci, jaką poznaliśmy tutaj, jest *ogólna* i rozciąga się do całego zakresu dynamiki. Wyobraźmy sobie naprzykład dwie materjalne cząstki swobodne i pozbawione początkowych prędkości; cząstki te ciążą ku sobie stosownie do prawa Newtona (§ 53); pod wpływem tego ciążenia biegną ku sobie. Ponieważ wzajemne przyciąganie się punktów staje się wówczas coraz większe, ruch ich zatem *nie* jest jednostajnie przyśpieszony, jest w wyższej mierze przyśpieszony aniżeli jednostajnie. Rozumowanie niniejszego artykułu nie stosuje się do takiego przypadku; dokładniejszy rachunek wykazuje jednakże, iż zasada zachowania energji i w tym razie jest ściśle prawdziwa.

§ 82. Siły zachowawcze i niezachowawcze.

Jeżeli tylko siły zachowawcze są czynne w pewnym układzie, wówczas wszystko, co stało się w tym układzie, może się odstać; zmiany są w nim *odwracalne,* mogą, gdy dokonały się, cofać się wstecz. W polu ciężkości ciało może spadać ku ziemi, ale może też zostać rzucone do góry. Kołyszące się wahadło może wznosić się ku górze, lecz wówczas niebawem zawraca i opada ku dołowi. Obiegając słońce po eliptycznej orbicie, planeta raz zbliża się ku słońcu, to znowuż od niego oddala się. Umocowana na sprężynie cząstka materjalna, gdy odbywa drgania, może wyciągać sprężynę, ale może również ją ściskać. Wszelkie takie zjawiska możemy uważać za *odwracalne przemiany energji.* Gdy ciało spada ku ziemi, kinetyczna energja tworzy się kosztem potencjalnej; gdy ciało biegnie ku górze, potencjalna wzrasta kosztem kinetycznej. W kołysaniu się wahadła, w eliptycznym ruchu planety, w drganiu umocowanej na sprężynie cząstki dostrzegamy podobnie kolejne przemiany potencjalnej energji w kinetyczną, kinetycznej w potencjalną.

Nie wszystkie jednak siły w przyrodzie są zachowawcze; dlatego zjawiska w istocie *nie* są odwracalne. Rzeczywiste zjawiska składają się z odwracalnych i z nieodwracalnych przemian energji, sprzężonych ze sobą, nieodłącznych od siebie. Innemi słowy, odwracalnym przemianom energji towarzyszą wszędzie nieodwracalne, które nie cofają się nigdy.

Ileż razy w ciągu tej książki musieliśmy dla ścisłości zastrzegać, że wyobrażamy sobie odwracalne zjawisko *bez* nieodwracalnych, które w istocie rzeczy są z niem połączone! Przypuszczaliśmy, że planety i księżyce krążą, że ciała ciężkie spadają w próżni zupełnej; przypuszczaliśmy, że równie pochyłe, stoły i szyny mogą nie okazywać tarcia; że sprężyny lub widełki strojowe są niezmienne i niejako wieczyste; że nici wahadeł są doskonale giętkie i nierozciągliwe; że różne pręty, sztaby i płyty są bezwzględnie sztywne, że bez żadnej zmiany postaci krępują i ograniczają ruch punktów. Zakładaliśmy fikcyjne okoliczności zagadnień; przypuszczaliśmy idealnę warunki, do których zjawiska mogą się tylko przybliżać; wyobrażaliśmy sobie świat prostszym, niż nim jest rzeczywiście. W przyrodzie niema ruchu bez lepkości, bez tarcia, bez uderzeń, oporów lub przeszkód; każdy ruch napotyka na przeciwności podobne i musi z niemi się zmagać. Czy wznosi się czy opada, wahadło zawsze doznaje oporów, które ruch jego hamują; one wahadłu nigdy nie przysparzają energji, zawsze ją odbierają i gubią. Sprężyna może się skręcać i znowu rozkręcać; taśma kauczukowa może się wyciągać i napowrót się kurczyć. Ale niema sprężyn ani taśm doskonale sprężystych; ustrój ciała nieznacznie rozluźnia się przy każdem odkształceniu; własności jego sprężyste, powoli lecz niepowrotnie, zanikają i giną.

Powtarzamy: *nie* wszystkie siły są zachowawcze. Prócz zachowawczych działają w zjawiskach siły *niezachowawcze* czyli *rozpraszające*. Właściwe znaczenie tej drugiej nazwy zrozumiemy niebawem.

§ 83. Perpetuum mobile.

Perpetuum mobile jest to nazwa dawnej mrzonki, starego błędu czy obłędu; jest to napis nad smutną kartą w dziejach ludzkiej myśli. W rozmaitych epokach, zwłaszcza w XVI-em, XVII-em, nawet jeszcze w XVIII-em stuleciu niezliczeni pseudowynalazcy silili się na wymyślenie maszyny, która mogłaby wytwarzać dowolne ilości pracy z niczego. Ale wynalazek taki nie powiódł się *nigdy*, *nikomu*. Prawdziwi badacze natury ostrzegali zawsze przed takiemi bezpłodnemi próbami, twierdząc, że *perpetuum mobile* jest niemożliwe. Już w roku 1775 oświadczyła Akademja Nauk w Paryżu, że będzie odrzucała bez rozbioru rzekome rozwiązania mniemanego zagadnienia, jakiem być miało zbudowanie *perpetuum mobile*. Mimo werdyktu nauki, jeszcze i dzisiaj zdarzają się ludzie, których nieuctwo, powierzchowność i zarozumiałość sprowadzają na manowce owej ułudy.

Wyobraźmy sobie pewien układ M zachowawczy. Wyobraźmy sobie naprzykład, że ciało ciężkie znajduje się w próżni, w polu ciężkości; że planeta znajduje się w próżni, w polu ciążenia; że punkt masywny jest połączony z niezmienną sprężyną; że ciało naelektryzowane umieściliśmy w izolującym ośrodku, w polu elektrycznem. Przypuśćmy, że układ *M* jest w pewnym początkowym stanie *A*, w którym położenia i prędkości jego części składowych są określone. Wyobraźmy sobie, że zmusiliśmy układ do przejścia ze stanu *A* do innego stanu *K*, przyczem układ pochłonął zzewnątrz ilość pracy *W*. Przypuśćmy, że, dążąc od stanu początkowego *A* do końcowego *K*, układ przebiegł stany pośrednie *C*, *E*, *G*; mówimy w przenośni, że *odbył* niejako *drogę ACEGK* (rys. 84). Niechaj układ powraca teraz z końcowego stanu *K* do początkowego *A* po drodze odmiennej, np. po drodze *KFDBA*. Układ odbył ostatecznie zjawisko *ACEGKFDBA*; doprowadziło go ono napowrót do stanu *A*, od którego rozpoczęło się; takie zjawisko nazywamy *kołowem*. Ponieważ układ jest zachowawczy, zatem praca, wydana przez układ nazewnątrz po drodze *KFDBA*, jest równa pracy, pobranej przez układ zzewnątrz na drodze *ACEGK* (§ 77); i pierwsza praca i druga wynosi *W*. Ostateczna suma pracy, pochłoniętej przez układ na drodze kołowej, jest równa *zeru*; możemy równie słusznie powiedzieć, że ostateczna suma pracy, wydanej nazewnątrz przez układ na drodze kołowej, jest równa zeru.

Rys. 84.

Machina, która ma być nieprzerwanie czynna, winna odbywać zjawisko kołowe; do nieograniczonej działalności tylko wówczas jest zdolna, gdy co pewien czas perjodycznie powraca do stanu swego początkowego. Widzimy zatem, że *układ zachowawczy nie może stanowić perpetuum mobile*; okresowo pracując, układ zachowawczy nie może oddawać więcej pracy nazewnątrz, niż zzewnątrz jej czerpie; nie może pracy dostarczać, której skądkolwiekbądź nie otrzymał.

Wyrażając się obrazowo, możemy powiedzieć, że przyroda w postaci *pracy* załatwia swoje rachunki; pracę przechowywa i chroni, ale i nas także zmusza do rzetelności. Kto usiłuje zbudować *perpetuum mobile*, zamierza podstępnie podejść przyrodę. Ale natury nie można oszukać; umiemy jej rozkazywać, lecz tylko wówczas, gdy jej prawom jesteśmy posłuszni.

Łacińskie wyrażenie *perpetuum mobile* znaczy dosłownie coś, co może poruszać się wiecznie. Owóż układ zachowawczy może poruszać się wiecznie; wprawiony w ruch, taki układ musi poruszać się bez końca, jak krążąca w próżni dokoła słońca planeta lub wahające się w próżni doskonałe wahadło. Biorąc tę nazwę dosłownie, powiedzielibyśmy zatem, że *perpetuum mobile* jest urzeczywistnione w każdym zachowawczym układzie. Ci jednak, którzy upierali się przy niedorzeczności, noszącej tę nazwę, dążyli do czegoś całkiem innego: dowolne ilości pracy chcieli wytwarzać z niczego. W samej więc nazwie *perpetuum mobile* tkwi pomyłka, zresztą zrozumiała, ponieważ nazwa ta pochodzi z epoki, w której prawa ruchu i pracy nie były jeszcze znane. Nazwy w nauce bywają niekiedy przestarzałe, niestosowne lub mylne; treści żadnego pojęcia nie powinniśmy domniemywać się z nazwy, lecz wywodzić ją z określenia.

§ 84. *Uogólniona zasada zachowania energji.*

Doszliśmy przed chwilą do wniosku, że układ zachowawczy nie może stanowić *perpetuum mobile.* Ale wiemy skądinąd, że zachowawcze układy nie istnieją (§ 82); w każdym rzeczywistym materjalnym układzie, prócz zachowawczych, działają siły niezachowawcze. Zatem układ rzeczywisty, gdy odbywa zjawisko kołowe, nietylko nie może oddawać nazewnątrz coraz nowych ilości pracy, lecz przeciwnie musi czerpać, musi ssać pracę zzewnątrz za każdym obiegiem, ażeby ją wydawać na walkę z oporami i tarciem. *Perpetuum mobile* żąda więc tam *dodatniego* wyniku, gdzie w najlepszym razie otrzymać możemy *mały ujemny.*

Z pewnością nie istnieje nigdzie energja, która nie istniała już przedtem; z pewnością nie stwarzamy nigdy energji z niczego. Czy jednak nie umiemy jej niszczyć? czy nie widzimy codziennie, że ona pozornie ginie w przyrodzie? Energja kinetyczna znika, gdy pocieramy zapałkę, gdy ruch pociągu wstrzymują hamulce; w cóż zamienia się wówczas? Gdy młotem uderzamy podkowę, energja ruchu napozór gdzieś ginie. Woda, oliwa lub smoła odbiera energję ciału, które porusza się w takim ośrodku; co dzieje się z tą energją? Gdzie kryje się praca, której nie zwraca napowrót niedoskonale sprężysta taśma albo sprężyna?

Newton sądził, że energja ginie istotnie w podobnych przypadkach; tego mniemania była większość uczonych aż do połowy XIX-go stulecia. Prawo zachowania energji wydawało się wówczas twierdzeniem idealnem, wnioskiem oderwanej dynamiki, prawdziwem tylko dla zachowawczych układów, nieścisłem i nieobowiązującem dla układów rzeczywistych. Lecz w połowie XIX-go stulecia Joule, Mayer, Helmholtz i inni wielcy badacze odrzucili ten lękliwy sposób myślenia; zrozumieli, że jego bezpłodność tkwi w jego ciasnocie. Joule, Mayer i Helmholtz przypuścili, że, prócz zwykłej w dynamice (kinetycznej i potencjalnej) energji, istnieje cieplna, chemiczna, elektryczna, magnetyczna, elektromagnetyczna, promienista energja; założyli, że zasada zachowania energji stosuje się nietylko do zjawisk ruchu lecz *do wszelkich wogóle zjawisk fizycznych.* Z zasady dynamiki uczynili tym sposobem zasadę całej nauki o przyrodzie; dokonali zarazem (jak wyrzekł Lord Kelvin) «największej reformy, jakiej doznała fizyka od czasów Newtona».

Gdy kinetyczna energja działaniem tarcia pozornie zamiera, nie przepada ona istotnie; zamienia się w cieplną energję. Gdy ruch ciała, poruszającego się w powietrzu, w wodzie lub innym ośrodku, napotyka na opór, energja nie ginie; rozlewa się tylko na znaczną masę ośrodka. Uderzywszy o podłogę, kula lub piłka nie odskakuje napowrót ze ściśle tą samą kinetyczną energją, jaką miała, spadając; wyginana pałeczka, nić wyciągana, skręcana sprężyna zluźniają się i tracą sprężyste własności. Przy każdem bowiem odkształceniu ciała te zużywają nieco energji na zmianę swej własnej budowy; zmiana taka wymaga pracy, podobnie jak wymaga jej rozłupanie drzewa, zmiażdżenie kryształu soli, stopienie kawałka ołowiu lub podniesienie kamienia o pewną wysokość.

Wszystko wymaga pracy i nic jej nie niszczy. Energja przelewa się z ciała do ciała albo z miejsca do miejsca, staje się niekiedy użyteczna lub nieużyteczna, ważna dla nas albo też obojętna; zmienia kształty, własności a wówczas zmienia i nazwy, pod któremi ją znamy; ale nie tworzy się nigdy i nigdy nie ginie. Taka jest treść wielkiej prawdy, która nazywa się w fizyce *zasadą zachowania energji.* Powrócimy do niej niejednokrotnie w późniejszych rozdziałach tej książki.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

O równowadze i ruchu ciał sztywnych.

§ 85. *O ciałach sztywnych.*

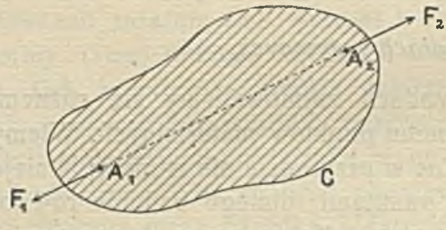
W dotychczasowych wywodach zajmowaliśmy się różnemi przypadkami równowagi lub ruchu punktów materjalnych. Wiemy jednakże, że punkty materjalne w przyrodzie nie istnieją; istnieją *ciała rozciągłe*, które nie są punktami; dlatego badanie równowagi lub ruchu punktów może być tylko wstępem do zrozumienia praw, według których ciała poruszają się lub pozostają w spoczynku. Do wykładu tych właśnie praw, jednak tylko w najprostszych przypadkach, przechodzimy obecnie.

Gdy rzeczywiste ciała materjalne poddajemy działaniu sił, dostrzegamy zazwyczaj, że one doznają pewnych zmian postaci; takie zmiany nazywamy *odkształceniami*. Odkształcenia bywają niekiedy *znaczne* i bezpośrednio podpadają pod zmysły; cienką trzcinową laseczkę łatwo wyginamy, kauczukową rurkę łatwo wyciągamy, ująwszy ją w ręce; postać sprężyny zmieniamy dowolnie, kosztem słabego wysiłku. W wielu jednak razach odkształcenia ciał są *małe* a nawet bardzo małe, jeżeli wywierane siły nie są wyjątkowo ogromne. Wyobraźmy sobie naprzykład ciało, wyrobione z kamienia, z cegły, mosiądzu lub żelaza; wiemy, że takie ciało odkształca się nader nieznacznie pod wpływem naprzykład własnego ciężaru albo też sił, które możemy wywrzeć bezpośrednim mięśniowym wysiłkiem. Od tego spostrzeżenia jest tylko jeden krok do utworzenia pojęcia *ciał doskonale sztywnych. Ciało, które nie odkształcałoby się wcale pod wpływem przyłożonych do niego sił,* nazywamy ciałem *doskonale sztywnem* (lub, dla zwięzłości, krótko *sztywnem*).

Pojęcie ciała niezmiennego, nieodkształcalnego czyli (doskonale) sztywnego oczywiście jest fikcją, podobnie jak np. pojęcie płaszczyzny jest fikcją; ciała doskonale sztywne w przyrodzie nie istnieją. Ale zjawiska równowagi i ruchu ciał materjalnych rozciągłych są nadzwyczajnie zawiłe; ścisłe poznanie praw ich zachowania się jest bardzo trudnem zadaniem. Zaczynamy zatem badanie, zaniedbując odkształcenia, których ciała doznają; w tym celu tworzymy w dynamice pojęcie ciał sztywnych. Uwzględniając owe odkształcenia, przechodzimy już do innego działu nauki, zwanego *teorją sprężystości.*

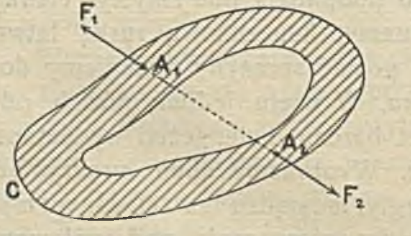
§ 86. O przesuwalności siły przyłożonej do ciała sztywnego.

Wyobraźmy sobie ciało sztywne czyli bryłę sztywną C (rys. 85), poddaną działaniu dwóch równych i przeciwnych sobie sił F_1 i F_2, których kierunek działania leży w tej samej prostej A_1A_2; o takich siłach będziemy mówili, że są *umiejscowione* w tej prostej, np. F_1 i F_2 w A_1A_2. Uznajemy za rzecz oczywistą, że siły F_1 i F_2 równoważą się czyli znoszą się wzajemnie, nie sprawiając skutku. Twierdzenie to nie przestałoby być słuszne, gdyby prosta A_1A_2, w której siły F_1 i F_2 są umiejscowione, przebiegała przez ciało C tylko w części swej długości (rys. 86).

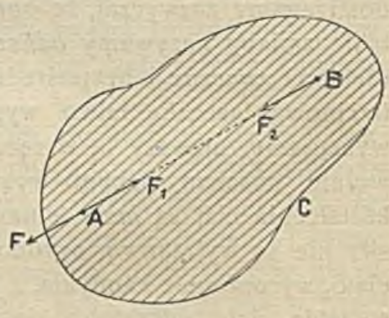


Rys. 85.

Gdyby ciało C mogło odkształcać się, siły F_1 i F_2, przedstawione na rysunkach 85 lub 86, sprawiłyby w niem pewne wydłużenia w kierunkach linji prostej A_1A_2 oraz pewne skrócenia w kierunkach poprzecznych; lecz zaniedbujemy te odkształcenia, skoro ciało C uważamy za (doskonale) sztywne.



Rys. 86.

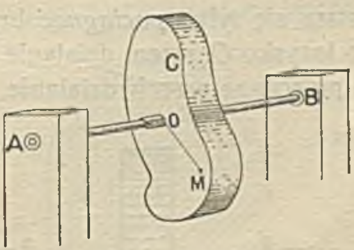


Rys. 87.

Na ciało sztywne C (rys. 87) działa siła F, przyłożona w punkcie A i umiejscowiona w prostej AB. Dodajmy w myśli dwie dalsze siły F_1 i F_2, określone jak następuje: obiedwie są umiejscowione w prostej AB; F_1 jest przyłożona do A, F_2 do B; wartość każdej z tych sił jest równa wartości danej siły F; kierunki F i F_2 są zgodne, kierunki F i F_1 są sobie przeciwne. Według poprzedniego założenia siły F_1 i F_2 znoszą się; dodając je zatem do siły F, nie zmieniamy przez to okoliczności zadania. Innemi słowy, ogół sił F, F_1 i F_2 sprowadza się do siły F. Ale tenże sam ogół sprowadza się do siły F_2, albowiem F i F_1, równe sobie, skierowane przeciwnie i przyłożone do tego samego punktu, znoszą się. A zatem siłę F możemy w zupełności zastąpić przez F_2. Widzimy, że F_2 nie różni się od F ani umiejscowieniem ani wartością ani kierunkiem, lecz różni się od niej punktem przyłożenia, mianowicie B, gdy F jest przyłożona w A. Powiadamy: *siłę, przyłożoną do ciała sztywnego, możemy dowolnie przesuwać w prostej, w której ta siła jest umiejscowiona.* Ważne to twierdzenie zawdzięczamy Varignonowi (1654—1722).

§ 87. *Obrót ciała sztywnego dokoła osi nieruchomej.*

Ważnym i zajmującym przypadkiem ruchu bryły sztywnej jest jej *obrót dokoła nieruchomej osi.* Przypuśćmy, że chcemy wprawić ciało C (rys. 88) w ruch obrotowy. Przeciągamy przez to ciało sztywny pręt i łączymy go z ciałem niezmiennie; ów pręt, zwany *materjalną osią obrotu,* osadzamy w łożyskach, w których może kręcić się swobodnie. Pręt wraz z ciałem C może obracać się wówczas dokoła pewnej prostej AB, która jest prawdziwą, *idealną* czyli *geometryczną osią obrotu.* Punkt, leżący w tej prostej, nie porusza się podczas obrotu; każdy inny punkt ciała C, naprzykład punkt M, porusza się podczas obrotu po obwodzie pewnego koła; płaszczyzna tego koła jest prostopadła do osi AB, promieniem koła jest prostopadła odległość OM punktu M od osi, środkiem koła jest przecięcie O tej prostopadłej z osią.

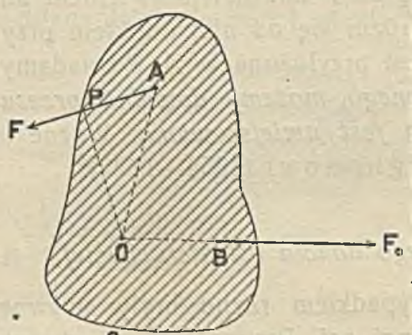


Rys. 88.

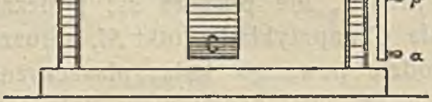
Jak powiedzieliśmy, opisany tu ruch nazywa się *obrotem* ciała sztywnego dokoła osi nieruchomej. Ruchem obrotowym ożywione bywają masywne koła rozpędowe machin, koła i kółka zegarów, a także wirownice, o których była mowa w § 67-ym. Względem firmamentu gwiazd stałych kula ziemska kręci się około prostej, łączącej bieguny; zatem ziemia dokonywa również obrotu dokoła swej osi, zachowując się przytem w przybliżeniu tak, jak gdyby była ciałem sztywnem.

§ 88. Moment siły względem osi obrotu.

Wyobraźmy sobie bryłę sztywną *C*, która może obracać się dokoła osi *O*, ale innego ruchu odbywać nie może, ponieważ oś *O* jest nieruchoma. Niechaj rys. 89 wyobraża prostopadłe do kierunku osi przecięcie bryły *C*; ponieważ oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny rysunku, przedstawia się więc na nim jako punkt *O*. Przypuśćmy, że na bryłę *C* działa prostopadła do osi siła F_0, umiejscowiona w prostej, która przechodzi przez *O*. Oczywistą jest rzeczą, że taka siła F_0 nie może wywołać *obrotu* bryły; ona stara się tylko *pociągnąć* bryłę wraz z osią. Ale bryła opiera się o łożysko *O*, zatem działanie siły F_0 wzbudza w tem łożysku równe i przeciwne przeciwdziałanie. Jedynym wynikiem działania siły F_0 jest nacisk, wywierany przez oś na łożysko i przez łożysko na oś. Wyobraźmy sobie inną (znów prostopadłą do osi) siłę *F* (rys. 89), umiejscowioną w prostej *AP*, która *nie* przechodzi przez *O*. Widzimy natychmiast, że taka siła *F może* wywołać obrót bryły *C* dokoła osi *O*.



Rys. 89.



Rys. 90.

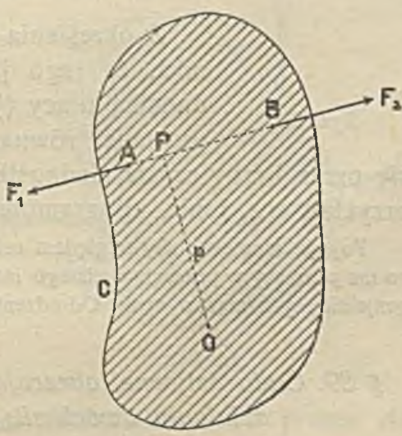
Od czego zależy wpływ, wywierany przez siłę *F* na obrót ciała *C*, czyli zdolność tej siły do wykręcania ciała? Ta zdolność nie zależy jedynie od *wartości* siły *F*; że tak jest, wiemy o tem z pospolitych doświadczeń. Jeżeli naprzykład masywne koło *C* (rys. 90) można kręcić dokoła osi *OO* zapomocą korby, na której, w rozmaitej odległości od osi, znajdują się trzy rękojeści *α*, *β*, *γ*, tedy zgadujemy, nawet nie spróbowawszy, o ile łatwiej jest poruszyć C za pośrednictwem α niż zapomocą β lub tembardziej γ. Zdolność siły F do obracania ciała C dokoła osi O (rys. 89) zależy zatem (1) od *wartości* tej siły (2) od *odległości*, w której ona działa od osi obrotu. Lecz, według § 86-go, możemy dowolnie przesuwać siłę F w prostej AP, w której jest umiejscowiona; zdolność siły F do obracania ciała C dokoła osi O nie może więc zależeć od odległości OA punktu A przyłożenia siły od osi, musi raczej zależeć od odległości całej wogóle prostej AP od osi czyli musi zależeć od długości OP prostopadłej, poprowadzonej z O do AP (rys. 89). *Ramieniem p* (względem osi O) siły F, umiejscowionej w prostej AP, nazywamy właśnie długość OP prostopadłej, poprowadzonej z O do AP; wartością *momentu siły F* (względem osi O) nazywamy iloczyn

1. Fp czyli: wartość siły $\times$ długość ramienia.

Moment siły względem osi jest *liczbową miarą pewnej właściwości tej siły*, mianowicie jej *zdolności obracania ciała sztywnego dokoła uważanej osi.*

Wniosek, do którego zostaliśmy doprowadzeni, stanie się zupełnie oczywistym w ciągu niniejszego rozdziału. Sprawdźmy go tymczasem na przykładzie siły F_0, o której była mowa na początku artykułu. Ramię, zatem i moment siły F_0 względem osi O równa się zeru; istotnie, zdolność siły F_0 do kręcenia ciała C dokoła osi O nie istnieje.

Powyższe określenie pojęcia momentu nie byłoby wystarczające. Zważmy, że siła o wartości F, umiejscowiona w prostej AB (rys. 91), może mieć dwa przeciwne kierunki, jak F_1 i F_2 na rysunku. Niechaj rys. 91 (jak rys. 89 i jak wiele innych w następnych wywodach) wyobraża prostopadłe do osi O przecięcie bryły C. *Dodatnim* kierunkiem osi obrotu O nazwijmy ten jej kierunek, który, od płaszczyzny rysunku zwracając się ku górze, biegnie ku czytelnikowi. Wyobraźmy sobie obserwatora, który spogląda na rys. 91 od strony dodatniego kierunku osi obrotu. Umawiamy się, że moment siły względem



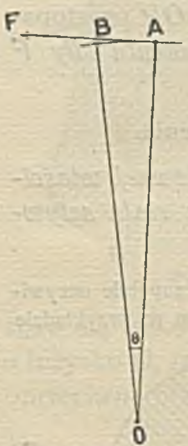
Rys. 91.

dodatniego kierunku osi obrotu uważamy za *dodatni*, gdy ta siła stara się obrócić ciało C w kierunku, dla wspomnianego obserwatora *przeciwnym* do ruchu wskazówek na tarczy zegara. Jeżeli siła dąży do obrócenia ciała w kierunku, dla tego obserwatora *zgodnym* z kierunkiem ruchu wskazówek na tarczy zegara, moment tej siły względem dodatniego kierunku osi obrotu poczytujemy za *ujemny*. Według tej umowy

2a. moment F_1 względem $+O$ jest dodatni i wynosi $+F.p$

2b. moment F_2 względem $+O$ jest ujemny i wynosi $-F.p$,

jeżeli F oznacza wartość liczbową siły F_1 lub siły F_2 na rys. 91-ym.



Rys. 92.

Przypuśćmy, że siła F, przyłożona w A, usiłuje obrócić ciało dokoła osi O (rys. 92). Wyobraźmy sobie, że dokonał się istotnie mały obrót ciała, o drobny kąt θ; praca W, wykonana wówczas przez siłę F, równa się iloczynowi siły F przez przemieszczenie AB. Promieniem obrotu jest OA lub OB czyli ramię p siły F względem osi O. Jeżeli więc kąt θ został wyrażony w radjanach (§ 3), mamy $AB = p.\theta$ oraz

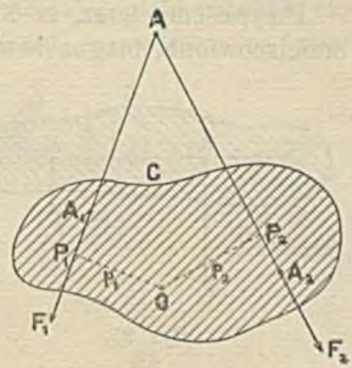
3. $W = F.AB = F.p.\theta = (\text{Mom. } F \text{ wzgl. } O) \times \theta$.

Z określenia momentu siły względem osi wynika, że jego jednostka jest identyczna z jednostką pracy (§ 71); do tego samego wniosku prowadzi równanie (3), albowiem kąty wyrażają się przez liczby czyste. Jednostką momentu może więc być naprzykład erg, joule, kilogramometr i t. p.

Pojęcie momentu siły względem osi obrotu spotykamy jasno sformułowane po raz pierwszy w pismach wielkiego inżyniera, artysty i badacza, jednego z najgenjalniejszych mężów epoki Odrodzenia, L i o n a r d a d a V i n c i (1452—1519).

§ 89. *Ciało sztywne, obracające się koło osi, jest poddane działaniu dwóch sił; warunek równowagi.*

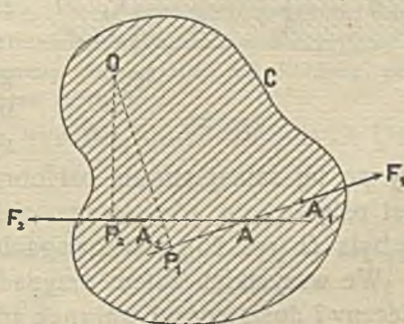
Przypuśćmy, że ciało sztywne C może tylko obracać się dokoła nieruchomej osi O; rys. 93 przedstawia przecięcie ciała prostopadłe do tej osi. Wyobraźmy sobie, że do ciała C są przyłożone dwie siły, naprzykład F_1 i F_2 na rys. 93-im; możemy łatwo rozstrzygnąć, czy one, wspólnie działając, wywołają obrót ciała C dokoła osi O, czy go nie wywołają. Każda z dwóch sił, niezależnie od drugiej, usiłuje wykręcić ciało C dokoła O; zdolność każdej siły do sprawienia tego obrotu zależy, jak wiemy, od jej momentu względem osi O. Dla obserwatora, spoglądającego na rys. 93-ci od strony dodatniego kierunku osi O, siła F_1 stara się obrócić bryłę na lewo (przeciwnie niż poruszają się wskazówki na tarczy zegara); siła F_2 stara się obrócić ją na prawo (tak samo jak poruszają się wspomniane wskazówki). Przez p_1 i p_2 oznaczmy ramiona (OP_1 i OP_2) sił F_1 i F_2 względem osi O; moment siły F_1 względem dodatniego kierunku osi O wynosi $+F_1p_1$, moment siły F_2 względem tegoż kierunku wynosi $-F_2p_2$ (§ 88). Jeżeli zatem



Rys. 93.

1. $$+F_1p_1 - F_2p_2 = 0,$$

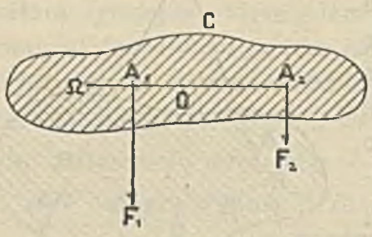
wówczas ciało C nie obraca się; dążność siły F_1 do wywołania obrotu na lewo równoważy się wówczas z dążnością siły F_2 do wywołanła obrotu na prawo. *Jeżeli ciało sztywne, które może tylko obracać się dokoła nieruchomej osi, jest poddane działaniu dwóch sił, znajduje się ono wówczas (i tylko wówczas) w równowadze, gdy momenty sił względem osi obrotu mają wartości równe, znaki zaś przeciwne.* Prawidło to nazywa się *regułą momentów*; jego słuszność sprawdza się nieustannie w doświadczeniu codziennem.



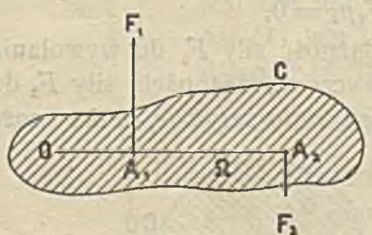
Rys. 94.

W rozumowaniu powyższem zakładaliśmy, że proste AP_1 i AP_2 (rys. 93), w których siły F_1 i F_2 są umiejscowione, przecinają się w pewnym punkcie A rysunku i że kierunki sił F_1 i F_2 tworzą w tym punkcie kąt *ostry*. Pozostawiając w mocy pierwsze z tych założeń, przypuśćmy, że kierunki sił przyłożonych F_1 i F_2 tworzą kąt *rozwarty* w punkcie A przecięcia się prostych AP_1 i AP_2 (rys. 94). Poprzednie rozumowanie stosuje się bez zmiany w obecnym przypadku; reguła momentów pozostaje w mocy, jej wysłowienie nie zmienia się w niczem.

Przypuśćmy teraz, że linje proste, w których siły F_1 i F_2 są umiejscowione, biegną równolegle do siebie; nie przecinają się one wówczas w żadnym punkcie rysunku. Kąt, który tworzą kierunki sił przyłożonych, wynosi w tym razie bądź 0°, bądź 180°; w pierwszym przypadku nazywamy siły równoległe *zgodnie* skierowanemi, w drugim *sprzecznie* skierowanemi. Jeżeli siły równoległe F_1 i F_2 są zgodnie skierowane (rys. 95), reguła momentów wskazuje, że linje proste ich umiejscowienia (A_1F_1 i A_2F_2) muszą znajdować się po przeciwnych stronach osi obrotu. Gdy naprzykład O (rys. 95) jest osią obrotu ciała C, momenty sił F_1 i F_2 względem tej osi mają znaki przeciwne; gdyby osią tą była $+\Omega$ (rys. 95), obadwa momenty byłyby ujemne i równowaga byłaby niemożliwa. Jeżeli siły równoległe F_1 i F_2 są skierowane sprzecznie (rys. 96), reguła momentów wymaga, ażeby linje proste (A_1F_1 i A_2F_2), w których siły są umiejscowione, biegły po tej samej stronie osi obrotu. Gdy naprzykład O (rys. 96) jest osią obrotu, równowaga ciała C jest możliwa; gdyby osią tą była Ω (rys. 96), równowaga byłaby widocznie niemożliwa.



Rys. 95.



Rys. 96.

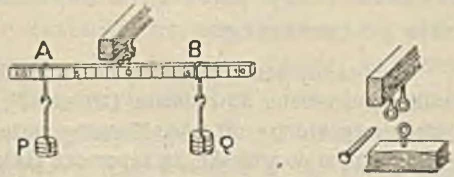
We wszystkich zatem przypadkach równanie (1) wyraża (konieczny i dostateczny) warunek równowagi ciała sztywnego, obracalnego koło nieruchomej osi. Równaniu temu możemy nadać kształt następującej proporcji:

2. $$F_1 : F_2 = p_2 : p_1;$$

do równowagi potrzeba i wystarcza, ażeby wartości sił przyłożonych były odwrotnie proporcjonalne do długości ramion.

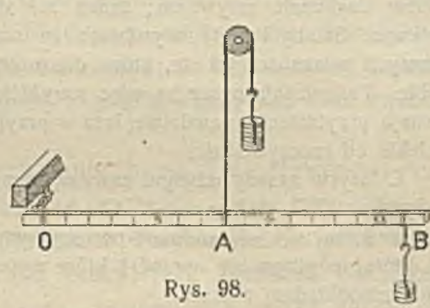
§ 90. O dźwigni.

Dźwignią w życiu potocznem nazywamy zwykle sztywny pręt albo sztabę, wogóle ciało sztywne wydłużonej postaci, które może kręcić się dokoła pewnej osi, najczęściej poziomej. Rysunki 97 i 98 wyobrażają proste typy dźwigni; ich urządzenie nie wymaga bliższych objaśnień. Zawieszając ciała różnych ciężarów w rozmaitych odległościach od osi, sprawdzamy na takich dźwigniach łatwo słuszność reguły momentów w przypadku sił równoległych, mianowicie ciężkości. W tem zastosowaniu reguła momentów bywa nazywana *zasadą dźwigni*.



Rys. 97.

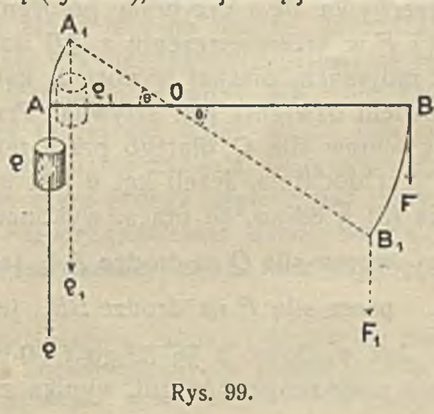
Ściśle rzecz biorąc, widzimy, że ciężary ciał zawieszonych nie są jedynemi siłami, które działają na dźwignie, wyobrażone na ryss. 97 i 98-ym; ciężary ramion dźwigni muszą spółdziałać w ustanawianiu się ich równowagi. Lecz ciężary ramion są zazwyczaj nieznaczne w stosunku do ciężarów ciał zawieszonych.



Rys. 98.

Zastosowania dźwigni są nadzwyczajnie częste i różne; oto niektóre przykłady: nożyce, szczypce, obcęgi, różne zgniatacze, krajalnice, wiosła, łopaty, drągi (służące do podważania), studnie, zwane «żorawiami», zastawy rogatek. Znany powszechnie przyrząd, zwany wagą (§ 102), jest dźwignią; nasze ręce i nogi działają również według praw dźwigni.

Wyobraźmy sobie dźwignię (rys. 99), której osią jest O. Działając w B siłą F, równoważymy ciężar Q ciała zawieszonego w A. Dla określoności przypuśćmy, że $OB = 2OA$; do równowagi potrzeba wówczas i wystarcza, aby wartość F była $= \frac{1}{2}Q$. Gdybyśmy przyłożyli w B siłę, która nieznacznie przewyższa wartość $\frac{1}{2}Q$, jej moment względem osi O byłby nieco większy niż moment ciężaru Q względem tejże osi; dźwignia poruszyłaby się zatem, jak wskazuje rysunek. Gdyby długość



Rys. 99.

ramienia OB była $=3OA$, do równowagi potrzeba byłoby i wystarczałoby, ażeby F była $=\frac{1}{3}Q$; przykładając w B siłę nieco znaczniejszą niż $\frac{1}{3}Q$, sprawilibyśmy, iż dźwignia poruszyłaby się. Widzimy, że dźwignia pozwala podnieść ciężkie ciało do góry działaniem siły słabszej, a nawet znacznie słabszej, niż ciężar ciała podnoszonego.

Wyobraźmy sobie, że ramię OA, na które działa ciężar Q, jest nadzwyczaj krótkie w stosunku do ramienia OB siły F; że jest naprzykład dziesięć lub sto tysięcy razy krótsze niż ono. Możnaby może, nie rozważywszy rzeczy dokładnie, być skłonnym do wniosku, że zapomocą takiej dźwigni potrafilibyśmy naciskiem dłoni podnieść do góry lokomotywę lub skałę. Lecz wniosek taki byłby mylny. Wszystkie powyższe nasze wywody zasadzają się na założeniu, że dźwignia jest ciałem doskonale sztywnem; żadna zaś dźwignia w istocie nie jest doskonale sztywna. Sztaby i pręty, wyrobione ze znanych nam ciał, nie mają nigdy tak prostych własności jak te, które dla uproszczenia rozumowań wyobrażaliśmy sobie. Twierdzenia nasze są więc *przybliżone*; gdy odkształcenia są małe, pozostają przybliżenie prawdziwe, lecz w przypadku znacznych odkształceń byłyby dalekie od rzeczywistości.

Odkrycie zasady dźwigni zawdzięczamy, o ile wiadomo, Archimedesowi z Syrakuz (287—212 przed N. Chr.); jemu bywa też przypisywane zdanie δὸς ποῦ στῶ, καὶ τὴν γῆν κινήσω («poruszyłbym ziemię, gdyby dano mi podstawę, na której mógłbym się oprzeć»), które wypowiada zasadę dźwigni w uderzającej, choć niedokładnej postaci.

§ 91. *Praca sił czynnych podczas ruchu dźwigni.*

Przypuśćmy, że dźwignia AB (rys. 99) znajdowała się z początku w położeniu poziomem; gdy wzmocniliśmy nieco siłę F, przechyliła się i przybrała położenie A_1B_1. Obliczmy pracę sił Q i F w przemieszczeniu z AB do A_1B_1. Kąt AOA_1, zmierzony w radjanach, niechaj wynosi θ; kąt BOB_1 wynosi również θ, albowiem dźwignia jest sztywna. Przemieszczenie AA_1 dokonywa się wbrew sile Q, dlatego praca tej siły jest ujemna; praca siły F jest dodatnia. Jeżeli kąt θ jest mały, wiemy, według twierdzenia (3) § 88-go, że praca, wykonana

1. wbrew sile Q na drodze AA_1, jest $=-Q.AA_1=-Q.OA.\theta$
2. przez siłę F na drodze BB_1, jest $=+F.BB_1=+F.OB.\theta$.

Jak wiadomo z §§ 89-go i 90-go, wartość siły F, zapewniająca równowagę dźwigni, wynika z warunku

3. $$Q.OA=F.OB;$$

do przechylenia (ale niezmiernie powolnego) dźwigni wystarcza siła, niezmiernie mało przewyższająca tę wartość *F*. Widzimy zatem z (1) i (2), że praca, dostarczana przez dźwignię, może być dowolnie mało różna od pracy, którą musimy wydać na poruszenie przyrządu; w granicy obiedwie prace stałyby się sobie równe. Słabą siłą możemy podnieść na dźwigni ciało, którego ciężar jest znaczny; ale zyskując na sile, tracimy na przemieszczeniu i w rachunku pracy nie odnosimy *żadnej korzyści*; wykonana praca jest mniejsza, ale może być dowolnie mało mniejsza od pracy, którą musimy wyłożyć. Skąd może pochodzić różnica pomiędzy pracą przez nas wydaną a tą, która nam zostaje zwrócona? Zasada zachowania energji odpowiada na to pytanie. Owa różnica musi być równa kinetycznej energji dźwigni. Ruch dźwigni może być bardzo powolny, więc kinetyczna energja tego ruchu może być znikająca; to też różnica pomiędzy pracą wyłożoną na dźwignię a pracą, którą ona nam zwraca, może być dowolnie mała.

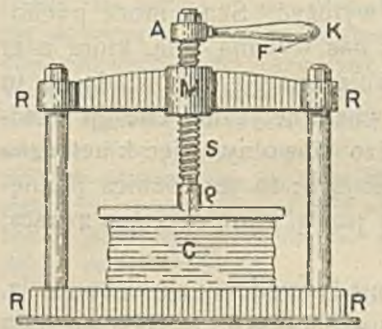
W twierdzeniach powyższych zaniedbywaliśmy zjawiska tarcia, które ruch każdej dźwigni wytwarza w osi obrotu; z tego względu musimy owe twierdzenia jeszcze nieco sprostować. Istotne dźwignie pracują nietylko bez zysku pracy, lecz owszem pociągają za sobą pewną jej *stratę*; praca, zamieniona przez tarcie na cieplną energję, rozprasza się niepożytecznie i jest stracona dla celów, do których dążymy, posługując się dźwignią.

§ 92. *O machinach.*

Gdy kamień albo ciężka kłoda leży na drodze, zagradzając przejście, ludzie niewykształceni lub niedoświadczeni usiłują ręką tę zaporę na bok odrzucić; człowiek rozumny nie traci czasu na próżne wysiłki, udaje się raczej po drągi, windy lub inne przybory, które pozwolą na dokonanie zadania. W tym prostym przykładzie spostrzegamy, na czem polega użyteczność machin. *Machiny pozwalają siłami rozporządzalnemi dokonywać dzieł i czynności, do których, bez ich pomocy, zgoła inne siły byłyby potrzebne.*

Dźwignia jest prostym przykładem machiny; innym przykładem jest równia pochyła (§ 61). Jako machina działa zarówno tragarz, gdy podnosi kuferek, jak potężny «żoraw», który łatwo dźwiga wagon wyładowany. Machiny pozwalają podnosić, przesuwać i spuszczać ciężkie przedmioty, poruszać duże masy i utrzymywać je w ruchu wbrew tarciu, pozwalają giąć, walcować, ugniatać, przebijać, krajać, łupać, piłować lub miażdżyć ciała twarde i zbite, stawiające opór ogromny.

Według zasady zachowania energji żadna machina, jakakolwiek jest jej budowa, nie może dać więcej pracy, aniżeli jej dostarczamy. Machiny nie oszczędzają pracy; mogą ją tylko tak przeobrażać, że jej dokonanie staje się możliwe. Lecz, w takim razie, czemu machiny są użyteczne? czemu pozwalają nieraz małemi siłami cel pożądany osiągnąć? Odpowiedź jest łatwa. Ilość wykonanej pracy zależy nietylko od pracującej siły, lecz nadto od drogi, na której ta siła pracuje. *Korzyść na sile, zapewniona przez machinę, bywa zwykle okupiona niekorzyścią na drodze.*



Rys. 100.

O prawdziwości tych twierdzeń przekonaliśmy się w przypadku dźwigni; zastosujmy je teraz do t. zw. *śruby*. Rys. 100 wyobraża *prasę śrubową*, która pozwala wywierać nacisk na umieszczone w niej ciało sprzeciwiające się C; w tym celu przy pomocy korby AK wkręcamy śrubę S w mutrę M, osadzoną trwale w ramie $RRRR$. Na ciało C wywieramy tym sposobem pewną siłę Q; ciało C odpowiada równem przeciwdziałaniem czyli oporem Q. Przypuśćmy, że w miejscu K działamy siłą F. Jeżeli obrócimy korbę AK raz jeden dokoła, punkt przyłożenia siły F odbywa drogę $2\pi r$ (gdzie r jest promieniem obrotu AK a zarazem ramieniem siły F względem osi obrotu), śruba zaś obniży się o pewną wysokość pionową h, która nazywa się *krokiem* śruby. Widzimy, że:

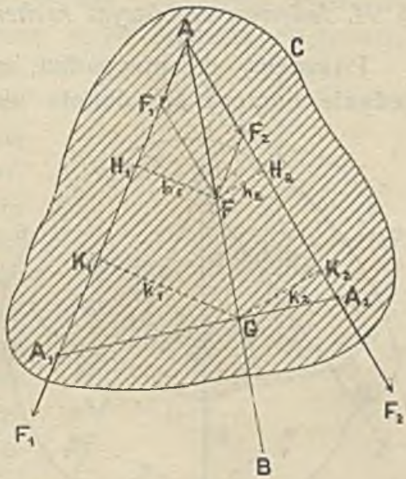
1. praca, wykonana przez siłę F na drodze $2\pi r$, jest $= 2\pi rF$
2. praca, wykonana wbrew sile Q na drodze h, jest $= hQ$.

Przypuśćmy, że ruch odbywa się nadzwyczajnie powoli i że wolno nam zaniedbać tarcie; w najkorzystniejszym (ściśle biorąc nieosiągalnym) przypadku uzyskalibyśmy pracę hQ, równą wyłożonej pracy $2\pi rF$. W istocie uzyskamy zatem pracę hQ, która jest mniejsza aniżeli $2\pi rF$, lecz może zbliżać się do tej granicznej wartości. Stosunek $F:Q$ jest więc wogóle większy aniżeli stosunek $h:2\pi r$, lecz może zbliżać się do tej granicznej wartości. Wartość graniczna, do której w najkorzystniejszym przypadku może dowolnie zbliżyć się stosunek $F:Q$, zależy od stosunku kroku śruby do promienia obrotu.

§ 93. *Wypadkowa dwóch sił, przyłożonych do ciała sztywnego.*

Poczynając od § 87-go zakładaliśmy, że uważane ciało sztywne może jedynie obracać się dokoła nieruchomej osi. Będziemy teraz rozumowali ogólniej. Przypuśćmy, że ciało jest bez ograniczeń ruchome; może naprzykład kręcić się dokoła jakiejbądź osi, ale może również posuwać się jako całość w dowolnym kierunku. O takiem ciele mówimy, że jest *swobodne*, że może odbywać wszelkie rodzaje ruchu, które zgadzają się z jego sztywnością.

Na ciało sztywne C (rys. 101) niechaj działają siły F_1 i F_2, przyłożone w A_1 i A_2, umiejscowione w prostych AA_1 i AA_2, które leżą w tej samej płaszczyźnie; rys. 101 wyobraża przecięcie ciała z tą płaszczyzną. Przypuszczamy, że proste AA_1 i AA_2 przecinają się w punkcie A; poza obrębem rozumowania pozostaje przypadek sił równoległych (§ 89), którym zajmiemy się w artykule późniejszym (§ 95).



Rys. 101.

Według twierdzenia Varignona (§ 86) wolno przesuwać siłę, przyłożoną do ciała sztywnego, w prostej, w której jest umiejscowiona. Zadane siły A_1F_1 i A_2F_2 przesuwamy zatem do punktu A przecięcia się prostych, w których one są umiejscowione. Budujemy równoległobok AF_1FF_2; jego przekątnia AF wyobraża *wypadkową* sił A_1F_1 i A_2F_2 czyli siłę, która może je w zupełności zastąpić. Ale siłę AF możemy znowu przesuwać w prostej AB, w której jest umiejscowiona; każda więc siła tej samej wartości i tego samego kierunku jak AF, umiejscowiona w prostej AB, może być uznana za wypadkową sił A_1F_1 i A_2F_2.

Wyprowadźmy z punktu F prostopadłe: $FH_1 \perp AA_1$ i $FH_2 \perp AA_2$; oznaczmy długości tych prostopadłych przez h_1 i h_2. Widzimy z rys. 101-go, że

1. pole trójkąta AF_1F jest $= \frac{1}{2}F_1h_1$

2. pole trójkąta AF_2F jest $= \frac{1}{2}F_2h_2$

gdzie F_1 i F_2 oznaczają, jak zwykle, wartości sił F_1 i F_2. Ponieważ AF_1FF_2 jest równoległobokiem, pola (1) i (2) są sobie równe; więc

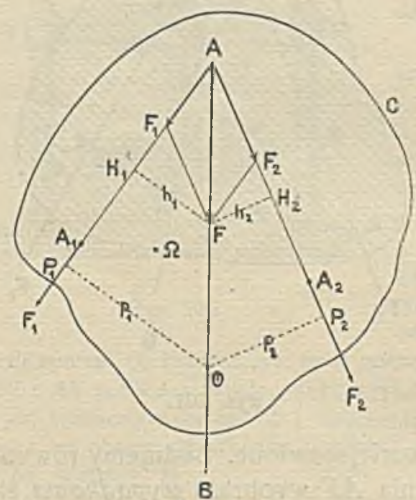
3. $$F_1h_1 = F_2h_2.$$

Poprowadźmy prostą A_1A_2 i z miejsca G jej przecięcia się z prostą AB wyprowadźmy prostopadłe: $GK_1 \perp AA_1$, $GK_2 \perp AA_2$; długości tych prostopadłych oznaczmy przez k_1 i k_2. Możemy łatwo udowodnić na zasadzie równania (3), że

4. $$F_1k_1 = F_2k_2.$$

§ 94. *Jedynym możliwym ruchem jest obrót; reguła momentów.*

Powróćmy do przypadku, w którym ciało sztywne C może jedynie obracać się dokoła nieruchomej osi O; rys. 102 wyobraża przecięcie ciała, prostopadłe do tej osi. Przypuśćmy, że na ciało C działają siły F_1 i F_2, przyłożone w punktach A_1 i A_2, umiejscowione w prostych AA_1 i AA_2. Jeżeli wypadkowa F sił F_1 i F_2 jest umiejscowiona w prostej AB, *przechodzącej przez oś obrotu* O, moment tej wypadkowej względem osi O jest równy zeru, zatem siły F_1 i F_2 nie mogą obrócić ciała C dokoła osi O. Gdyby oś obrotu leżała naprzykład w Ω (rys. 102), moment wypadkowej F względem tej osi byłby różny od zera, siły F_1 i F_2 mogłyby obrócić ciało dokoła tej osi.



Rys. 102.

Przypuśćmy, że oś obrotu leży w O i że siły F_1 i F_2 nie wywołują dokoła tej osi obrotu; jaki jest warunek równowagi? Wyprowadziwszy z punktu F prostopadłe: $FH_1 \perp AA_1$ i $FH_2 \perp AA_2$, których długości, jak w § 93-im, oznaczamy przez h_1 i h_2, mamy (§ 93):

1. $$F_1h_1 = F_2h_2.$$

Z punktu O wyprowadźmy prostopadłe OP_1 i OP_2 do tychże prostych AA_1 i AA_2; przez p_1 i p_2 oznaczmy długości tych prostopadłych czyli ramiona sił F_1 i F_2. Ponieważ A, F i O leżą na tej samej prostej, więc

2. $$h_1 : h_2 = p_1 : p_2.$$

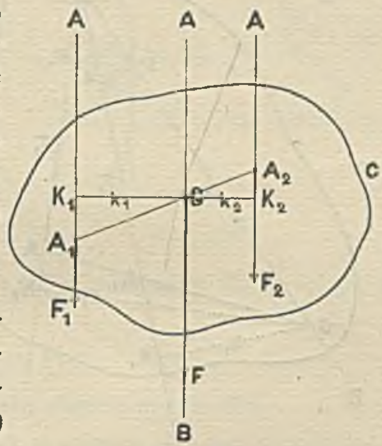
Porównawszy (2) z (1), widzimy, że

3. $$F_1p_1 = F_2p_2;$$

to równanie wyraża znaną nam już z § 89-go regułę momentów.

§ 95. *Wypadkowa sił równoległych, przyłożonych do ciała sztywnego.*

Przypuśćmy teraz, że siły, przyłożone do ciała sztywnego, są umiejscowione w prostych równoległych; w § 93-im pozostawiliśmy ten przypadek poza obrębem rozumowania. Przypuśćmy, że siły są *zgodnie* skierowane (§ 89). Powtarzamy konstrukcję (rys. 101), która posłużyła w § 93-im do znalezienia wypadkowej F sił F_1 i F_2; lecz wyobrażamy sobie przytem, że proste, w których F_1 i F_2 są umiejscowione, dążą do zajęcia równoległych położeń i że punkt A przecięcia się tych prostych oddala się coraz bardziej. Wartość wypadkowej F dąży wówczas do sumy wartości sił składowych (§ 45); równanie (4) § 93-go nie przestaje być słuszne i wyznacza wciąż miejsce punktu G na prostej A_1A_2; wreszcie prosta AB (w której wypadkowa F jest umiejscowiona) staje się w granicy równoległa do (równoległych do siebie) A_1F_1 i A_2F_2. Tym sposobem przechodzimy od rys. 101-go do rys. 103-go; od przypadku sił, tworzących ze sobą kąt ostry, przechodzimy do przypadku skierowanych zgodnie sił równoległych. Na rys. 103-im A_1F_1 i A_2F_2 są takiemi siłami; ich wypadkową może być np. siła GF, której wartość F spełnia warunek



Rys. 103.

1. $$F = F_1 + F_2;$$

odległości $k_1 = GK_1$ i $k_2 = GK_2$ czynią zadosyć równaniu

2. $$F_1k_1 = F_2k_2.$$

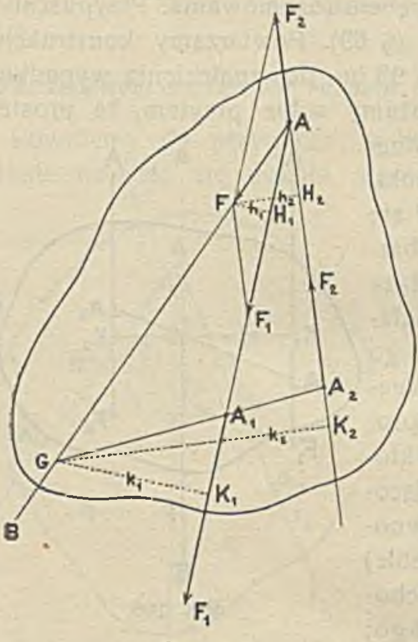
Przypuśćmy teraz, że siły F_1 i F_2 są równoległe, ale *sprzecznie* skierowane. Ażeby znaleźć prawa tworzenia wypadkowej w tym razie, zaczynamy od przypadku sił, tworzących ze sobą kąt *rozwarty*, poczem postępujemy podobnie jak wyżej.

Kierunki sił F_1 i F_2, przyłożonych w A_1 i A_2 (rys. 104), przecinając się w A, tworzą ze sobą kąt rozwarty. Przesuwamy te siły do A, budujemy równoległobok AF_1FF_2 i otrzymujemy wypadkową F, umiejscowioną w AB; AB z A_1A_2 przecina się w G. Jak w § 93-im otrzymujemy

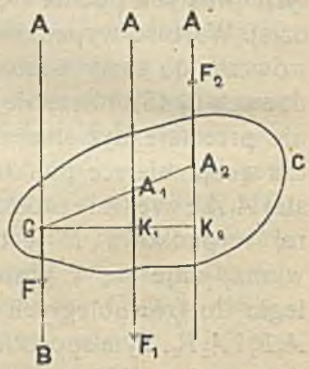
3. $F_1h_1 = F_2h_2$; 4. $F_1k_1 = F_2k_2$

gdzie h_1 i h_2 są długości prostopadłych FH_1 i FH_2, wyprowadzonych z F do AA_1 i AA_2, k_1 zaś i k_2 są długości prostopadłych GK_1 i GK_2, wyprowadzonych z G do tych samych prostych.

Przypuszczamy teraz, że proste, w których F_1 i F_2 są umiejscowione, dążą do zajęcia równoległych położeń. Punkt A oddala się wówczas coraz bardziej; wartość wypadkowej F dąży do *różnicy* wartości sił składowych (§ 45); równanie (4) nie przestaje obowiązywać i wyznacza miejsce punktu G na prostej A_1A_2; prosta AB, w której wypadkowa F jest umiejscowiona, dąży do zajęcia położenia równoległego do prostych, w których umiejscowione są F_1 i F_2. Tym sposobem od rys. 104-go przechodzimy do rys. 105-go; od przypadku sił, tworzących ze sobą kąt rozwarty, przechodzimy do przypadku sił równoległych, skierowanych sprzecznie.



Rys. 104.



Rys. 105.

Przypuśćmy, że F_1 i F_2 są wartościami dwóch sił równoległych, skierowanych sprzecznie; jeżeli (jak na rys. 105-ym) $F_1 > F_2$, mamy

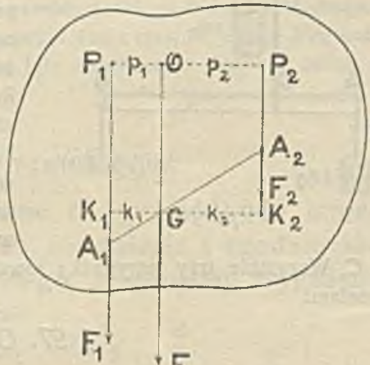
5. $$F = F_1 - F_2.$$

Z równań (4) i (5) wyprowadzamy bez trudności

6. $Fk_1 = F_2(k_2 - k_1)$; 7. $Fk_2 = F_1(k_2 - k_1)$.

§ 96. Jedynym możliwym ruchem jest obrót; równowaga pod wpływem sił równoległych.

Jak w § 94-ym, przypuśćmy ponownie, że ciało może jedynie obracać się dokoła nieruchomej osi O. Przypuśćmy, że w punktach A_1 i A_2 ciała C (rys. 106) przyłożone są siły równoległe F_1 i F_2 skierowane zgodnie. Do równowagi potrzeba i wystarcza, ażeby wypadkowa F sił F_1 i F_2 była umiejscowiona w prostej przechodzącej przez O; moment wypadkowej względem osi obrotu jest wówczas równy zeru. Jeżeli GF (rys. 106) jest prostą, w której F jest umiejscowiona, do równowagi potrzeba i wystarcza, ażeby oś przecinała płaszczyznę rysunku w punkcie O leżącym na tej prostej. Prowadząc prostopadłe $k_1 = GK_1$ i $k_2 = GK_2$ do A_1F_1 i A_2F_2 oraz ramiona $p_1 = OP_1$ i $p_2 = OP_2$ sił względem osi, mamy $k_1 = p_1$ i $k_2 = p_2$; z równania (2) § 95-go wynika więc

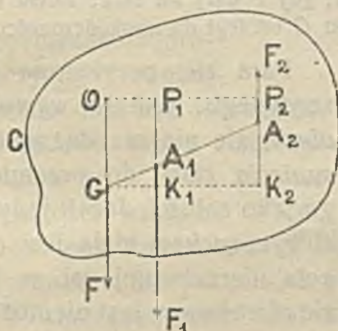


Rys. 106.

1. $$F_1 p_1 = F_2 p_2,$$

co w obecnym przypadku wyraża regułę momentów.

Jeżeli na ciało sztywne działają siły równoległe skierowane sprzecznie, rozumujemy podobnie. Do równowagi potrzeba i wystarcza, ażeby oś obrotu przecinała płaszczyznę rysunku w punkcie O leżącym na prostej GF, w której wy-



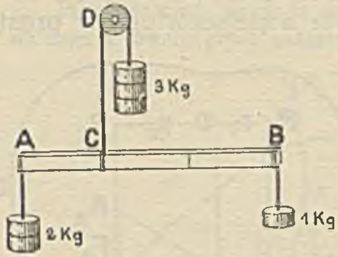
Rys. 107.

padkowa F jest umiejscowiona (rys. 107). Prowadząc prostopadłe $k_1 = GK_1$ i $k_2 = GK_2$ do A_1F_1 i A_2F_2 oraz ramiona $p_1 = OP_1$ i $p_2 = OP_2$ sił względem osi, mamy znowu $k_1 = p_1$, $k_2 = p_2$; z równań (4), (6) i (7) § 95-go otrzymujemy

2. $F_1 p_1 = F_2 p_2$ 3. $Fp_1 = F_2(p_2 - p_1)$ 4. $Fp_2 = F_1(p_2 - p_1)$;

dzięki twierdzeniu (5) § 95-go trzy ostatnie równania są sobie równoważne.

Prosie doświadczenie, przedstawione na rys. 108-ym, pozwala uzmysłowić sobie powyższe twierdzenia. Trzy siły równoważą się w tem doświadczeniu, mianowicie: siła 2 Kg, przyłożona w punkcie A i skierowana pionowo na dół; siła 1 Kg, przyłożona w B i skierowana również pionowo na dół; wreszcie siła 3 Kg, przyłożona w C i skierowana pionowo do góry. Równowagę tych trzech sił możemy wyrazić w sposób trojaki: (1) siły: 1 Kg w B i 3 Kg w C równoważą się z siłą 2 Kg w A (2) siły: 3 Kg w C i 2 Kg w A równoważą się z siłą 1 Kg w B (3) siły 2 Kg w A i 1 Kg w B równoważą się z siłą 3 Kg w C. Wszystkie trzy przypadki równowagi zgadzają się z powyższemi twierdzeniami.

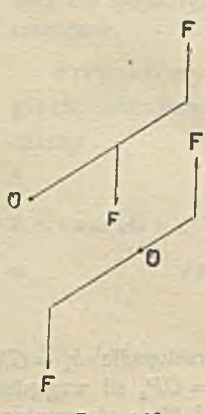


Rys. 108.

§ 97. O parze sił.

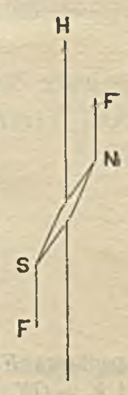
Powróćmy do wyników § 95-go i rozważmy przypadek, w którym siły F_1 i F_2, równoległe i sprzecznie skierowane, są równe sobie: $F_1 = F_2$. Mamy wówczas z równania (5) § 95-go: $F = 0$. *Siły równoległe, sprzecznie skierowane i równe sobie, nie mają wypadkowej, nie można zatem ich zrównoważyć działaniem jednej siły.* Układ dwóch takich sił nazywamy *parą sił.*

Weźmy na uwagę rys. 105 oraz równania (6) i (7) § 95-go. Różnica $k_2 - k_1$ jest odstępem K_1K_2 na wspomnianym rysunku. Jeżeli więc przypuścimy, że proste A_1F_1 i A_2F_2 nie zmieniają się, wartości zaś F_1 i F_2 dążą ku sobie, wówczas k_1 i k_2 muszą wzrastać, gdy F dąży ku zeru; zatem G oddala się coraz bardziej. Gdy $F = 0$, punkt G odbiegł do nieskończoności.



Rys. 109.

Para sił, przyłożona do ciała sztywnego, usiłuje wywołać jego *obrót,* ale nie ma dążności do *posunięcia* ciała, do przemieszczenia go jako całości. Jeżeli jedynym możliwym ruchem ciała jest obrót dokoła nieruchomej osi, w takim razie równowaga jest niemożliwa; pod działaniem pary sił ciało nie może wówczas być w równowadze (rys. 109, w którym O oznacza oś obrotu), jak to widzimy natychmiast z reguły momentów.



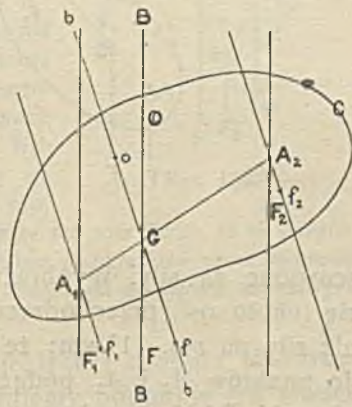
Rys. 110.

Przykłady działania pary sił spotykamy często. Gdy w korek wkręcamy korkociąg lub świder w deskę, gdy śrubę wkręcamy w obejmującą ją mutrę lub ją wykręcamy z tej mutry, wywieramy zwykle parę sił. W różnych prasach, windach, kołowrotach, gdy oś przyrządu chcemy wprawić w ruch obrotowy, wywieramy parę sił na końce średnicy obrotu.

Przekonamy się w nauce o magnetycznych zjawiskach, że ziemia wywiera na igłę magnesową *NS* (rys. 110) dwie równe sobie siły (F, F), z których jedna jest zawsze skierowana równolegle do pewnego stałego kierunku H, druga — do wprost przeciwnego kierunku; punkty przyłożenia tych sił, zwane *biegunami* igły, znajdują się w pobliżu jej końców. Igła magnesowa doznaje zatem od ziemi działania, które jest parą sił.

§ 98. *Środek sił równoległych.*

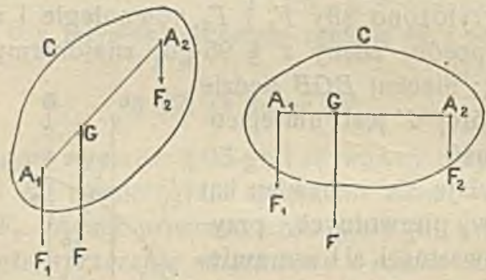
Wyobraźmy sobie ciało sztywne C (rys. 111), do którego w A_1 i A_2 przyłożono siły F_1 i F_2, równoległe i zgodnie skierowane. W sposób, znany z § 95-go, znajdujemy wypadkową F sił F_1 i F_2; niechaj BGB będzie prostą, w której F jest umiejscowiona. Przypuść [illegible] F_1 i F_2 odchylają się o pewien kąt od kierunków pierwotnych, przyczem jednak wartości sił nie zmieniają się a punkty ich przyłożenia pozostają w poprzednich miejscach bryły. Niechaj np. A_1f_1 i A_2f_2 wyobrażają przyłożone siły po wykręceniu; ich wypadkową jest f, umiejscowiona w bGb.



Rys. 111.

Przez ciało C poprowadźmy (prostopadle do płaszczyzny rysunku) oś, około której ciało ma być obracalne. Spróbujmy wybrać miejsce osi w taki sposób, ażeby ciało było w równowadze zarówno pod działaniem sił F_1 i F_2 jakoteż pod działaniem sił f_1 i f_2. Czy takie miejsce istnieje? Wiemy z § 96-go, że ciało C jest w równowadze pod działaniem sił F_1 i F_2, gdy oś przecina płaszczyznę rysunku w którymkolwiek punkcie prostej BGB; że ciało C jest w równowadze pod działaniem sił f_1 i f_2, gdy oś przecina płaszczyznę rysunku w którymkolwiek punkcie prostej bGb. Jeżeli umieścimy oś w O, ciało będzie w równowadze pod wpływem F_1 i F_2, ale nie będzie w równowadze pod wpływem f_1 i f_2; jeżeli oś tę poprowadzimy przez o, ciało będzie w równowadze pod wpływem f_1 i f_2, ale nie będzie w równowadze pod wpływem F_1 i F_2. Widzimy, że tylko punkt G spełnia nasze wymagania; ponieważ G leży zarazem na BGB i na bGb, zatem, gdy oś obrotu przechodzi przez G, ciało jest w równowadze pod wpływem zarówno F_1 i F_2 jakoteż f_1 i f_2. A więc ciało C, które może obracać się tylko dokoła osi, przechodzącej przez G prostopadle do płaszczyzny rysunku, pozostaje zawsze w równowadze, jakkolwiek wykręcą się siły równoległe przyłożone do ciała. Taki punkt G nazywamy *środkiem sił równoległych* przyłożonych do ciała.

W powyższem rozumowaniu przypuszczaliśmy, że ciało C pozostaje nieporuszone; że wykręcają się proste, w których umiej-



Rys. 112.

scowione są siły. Wyobraźmy sobie teraz, że ciało C wykręca się (około osi, przechodzącej przez G) w kierunku przeciwnym niż siły na rys. 111-ym; że siły F_1 i F_2, pozostając przyłożone do punktów A_1 i A_2, podążają za niemi, zachowując pierwotne kierunki. Takie zjawisko uzmysławia rys. 112. Rozumujemy w tym razie tak samo jak w poprzednim przypadku; istotnie, jeżeli kąt wykręcenia jest jednakowy, obrót *względny* sił względem ciała jest dokładnie ten sam w obu przypadkach.

§ 99. *Środek i wypadkowa wielu sił równoległych.*

Wyobraźmy sobie ciało sztywne C (rys. 113), do którego w punktach A_1, A_2 i A_3 przyłożone są siły F_1, F_2 i F_3, równoległe i zgodnie skierowane. Znajdujemy najprzód środek G_{23} sił F_2 i F_3 (§ 98). Budujemy następnie wypadkową F_{23} sił F_2 i F_3 (§ 95); wypadkowa ta ma wartość

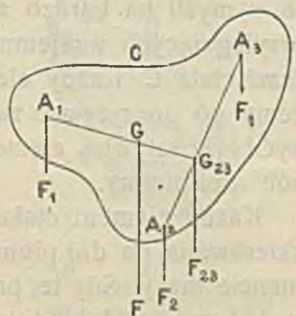
1. $$F_{23} = F_2 + F_3$$

i jest umiejscowiona w prostej $G_{23}F_{23}$, która przecina prostą

A_2A_3 w punkcie G_{23}; przypuśćmy, że wypadkowa F_{23} jest przyłożona do ciała C w punkcie G_{23}. Według tych samych zasad budujemy dalej środek G sił F_1 i F_{23} oraz ich wypadkową F. Wypadkowa F ma wartość

2. $$F = F_1 + F_{23} = F_1 + F_2 + F_3$$

i jest umiejscowiona w prostej GF, która przecina prostą A_1G_{23} w punkcie G. Obiedwie wypadkowe, F_{23} i F, są równoległe do swoich składowych i są z niemi zgodnie skierowane. Punkt G nazywamy *środkiem* zadanych trzech sił F_1, F_2 i F_3; siłę F nazywamy ich *wypadkową*.



Rys. 113.

Złożyliśmy najprzód ze sobą siły F_2 i F_3; ich wypadkową F_{23} złożyliśmy następnie z siłą F_1. Mogliśmy byli inaczej postąpić: złożyć najprzód ze sobą siły F_3 i F_1, następnie zaś ich wypadkową F_{31} złożyć z siłą F_2. Istniała jeszcze trzecia możliwość: mogliśmy złożyć siły F_1 i F_2, poczem ich wypadkową F_{12} mogliśmy złożyć z siłą F_3. Wykonawszy stosowne rysunki, przekonywamy się o tem, że wszystkie trzy drogi postępowania prowadzą do tego samego wyniku. Wypada zawsze *ten sam* środek G sił danych; wypada zawsze *ta sama* ostateczna wypadkowa F, określona przez równanie (2), umiejscowiona w tej samej prostej GF, równoległa do swoich składowych i zgodnie z niemi skierowana.

Jeżeli *dowolna* liczba sił równoległych i zgodnie skierowanych działa na bryłę sztywną, znajdujemy podobnie ich środek i ich wypadkową; miejsce tego środka i wartość owej wypadkowej nie zależą od kierunku sił ani od położenia bryły. Jeżeli w środku sił równoległych przyłożymy do ciała siłę równą i wprost przeciwną ich wypadkowej, ciało pozostanie w równowadze, jakkolwiek odchylalibyśmy (względem ciała) kierunki sił równoległych albo jakkolwiek kręcilibyśmy ciało względem niezmiennego kierunku działania przyłożonych sił równoległych.

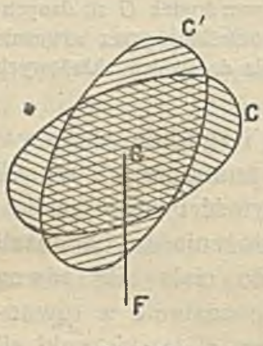
§ 100. *Całkowity ciężar ciała; środek ciężkości.*

Ciała, z któremi codziennie miewamy do czynienia, wydają się jednolite. W późniejszym rozdziale tej książki zadamy sobie pytanie, czy ta jednolitość jest rzeczywista, czy jej pozory nie wynikają raczej z niedoskonałości zmysłów, któremi posługujemy się, ażeby ciał materjalnych doświadczać i badać ich właściwości. W owem pytaniu streszcza się głęboki i piękny problemat *budowy materji.*

W dynamice wyrażamy się nieraz w taki sposób, jak gdybyśmy wierzyli w istotną jednolitość ciał, które podpadają pod zmysły. Jednakże wyniki rozumowania w dynamice nie są zależne od przypuszczeń, które w tej mierze czynimy i w każdem założeniu pozostają prawdziwe.

Przypuśćmy, że zajmujemy się pewnem ciałem *C*. Podzielmy je w myśli na bardzo znaczną liczbę bardzo drobnych części, przylegających wzajemnie do siebie; części te nazywamy *elementami* ciała *C*. Każdy element ma być tak znikomo mały, że możemy go poczytywać za punkt materjalny. Jeżeli całość ciała ma być bryłą sztywną, elementy muszą być połączone ze sobą w sposób niezmienny.

Każdy element ciała *C* jest ciężki; na każdy działa więc siła, skierowana na dół pionowo i proporcjonalna do zawartej w elemencie masy. Siły te, przyłożone do elementów ciała *C*, są (niemal zupełnie dokładnie, § 55) równoległe do siebie i zgodnie skierowane. Znajdźmy wypadkową tych sił; nazywamy ją *całkowitym ciężarem ciała.* Znajdźmy środek wszystkich tych sił; nazywamy go *środkiem ciężkości.*

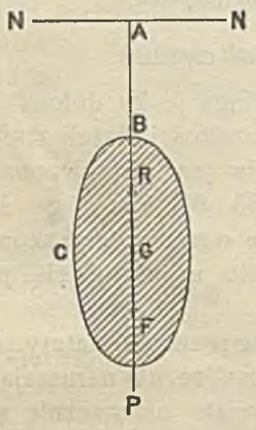


Rys. 114.

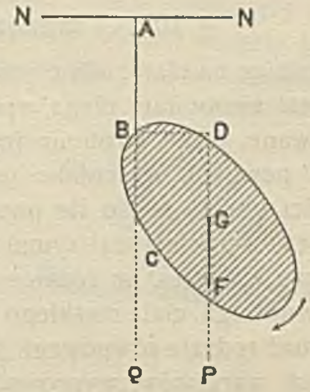
Środek ciężkości jest z określenia środkiem pewnych sił równoległych, ma zatem wszystkie własności, które przysługują takiemu środkowi. Jeżeli naprzykład ciało *C* wykręci się dowolnie, siły, przyłożone do elementów ciała i stanowiące ich ciężar, skierują się inaczej niż poprzednio względem tych elementów (rys. 114), ale środek ciężkości *G* nie zmieni miejsca w ciele (§§ 98 i 99). Miejsce środka ciężkości w danem ciele nie zależy zatem od położenia lub od ruchu ciała względem kuli ziemskiej; zależy tylko od postaci ciała i od rozłożenia w niem masy.

Całkowity ciężar ciała jest siłą, umiejscowioną w prostej pionowej, która przechodzi przez środek ciężkości; możemy zrównoważyć tę siłę, działając na ciało siłą tej samej wartości, umiejscowioną w tej samej prostej i skierowaną do góry. Uważajmy naprzykład ciało sztywne *C*, zawieszone na nici *AB* (rys. 115).

Całkowity ciężar F ciała jest umiejscowiony w prostej pionowej GP, przechodzącej przez środek ciężkości G. Jeżeli prosta GP przypada w przedłużeniu kierunku AB, obiedwie siły, ciężar F i reakcja R nici, są umiejscowione w tej samej prostej $ABGP$; ponieważ są przesuwalne w tej prostej, możemy wyobrażać sobie,



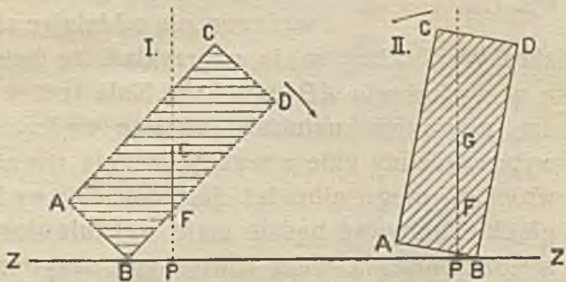
Rys 115.



Rys. 116.

że, jak GF i GR, są przyłożone w G i tam równoważą się wzajemnie.

Wyobraźmy sobie teraz, że ciało C przybrało położenie, które jest przedstawione na rys. 116-ym; prosta GP, w której ciężar F jest umiejscowiony, nie leży wówczas w przedłużeniu kierunku ABQ nici. Moment ciężaru F względem



Rys. 117.

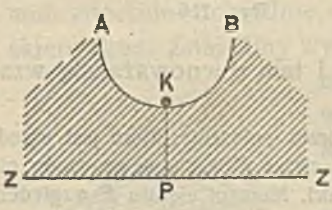
osi poziomej, przechodzącej przez B, nie jest tutaj równy zeru; siła F obraca zatem ciało C dokoła tej osi, dopóki ramię BD (a z niem razem i ów moment) nie zniknie; co właśnie nastąpi w położeniu, wyobrażonem na rys. 115-ym.

Podobnie mają się rzeczy, gdy ciało jest podparte. Wyobraźmy sobie słup $ABCD$ (rys. 117), którego podstawą jest AB; przypuśćmy, że środek ciężkości ciała znajduje się w G. Jeżeli przechylimy słup około krawędzi B jako osi, przewraca się on w położeniu I, nie przewraca się w położeniu II; w pierwszem położeniu moment ciężaru F ciała względem osi B (liczonej do góry od płaszczyzny rysunku) jest ujemny, w drugiem położeniu ten moment jest dodatni (§ 88). Znamy rozmaite zastosowania tych zasad w życiu codziennem; przestrzega ich tragarz, dźwigający ciężkie przedmioty i murarz, gdy ustawia ścianę z cegieł i cyklista usadowiony na rowerze i akrobata, który przebiega po linie; czytelnik wskaże sam bez trudności inne podobne przykłady.

§ 101. O równowadze ciał ciężkich.

Działając na ciało, siła ciężkości pociąga je ku dołowi. Jeżeli ciało jest swobodne, ulega wpływowi ciężkości. Jeżeli ciało jest skrępowane, jeżeli swoboda jego ruchów jest ograniczona działaniem pewnych warunków (por. §§ 63, 67, 70), jego środek ciężkości obniża się, o ile pozwalają te ograniczenia; skoro środek ciężkości ciała zatrzymał się i ciało uspokoiło się, powiadamy, że ciało jest *w równowadze.*

Równowaga ciała ciężkiego może być rozmaitej natury. Ażeby rozpoznać rodzaje równowagi, przypuśćmy, że, nie naruszając krępujących warunków, wyprowadziliśmy ciało nieznacznie z równowagi, w której ono się już było znalazło; poczem pozostawiamy je samemu sobie. Mogą wówczas zajść różne zdarzenia:



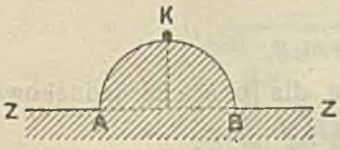
Rys. 118.

(1) Może wydarzyć się, że ciało samo przez się powróci do położenia równowagi, z którego zostało wyprowadzone, nie oddalając się od niego bardzo daleko. Wyobraźmy sobie naprzykład, że kula ciężka K znajduje się w wydrążeniu AB (rys. 118). Kula jest w równowadze, gdy zajęła najniższe miejsce wydrążenia; jeżeli wyprowadzimy kulę z tego położenia równowagi, powróci do niego albo też, jeżeli ściany wydrążenia są gładkie, odbywać będzie małe wahania dokoła najniższego położenia. Taką równowagę nazywamy *trwałą, pewną* albo *bezpieczną* równowagą. Wahadło w najniższym punkcie swego toru (§ 63) jest w trwałej równowadze; podobnie stożek ciężki, zawieszony na swoim wierzchołku (rys. 119). Kostka, która spoczywa na poziomej płaszczyznie, przylegając do niej podstawą, znajduje się w trwałej czyli bezpiecznej równowadze.


Rys. 119.

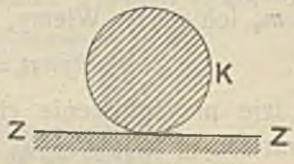
(2) Może wydarzyć się, że ciało, wychylone (choćby bardzo nie-

znacznie) z położenia równowagi i pozostawione samemu sobie, odbiega coraz bardziej od tego położenia i oddala się niepowrotnie od niego. Powiadamy wówczas, że równowaga, w której znajdowało się ciało, była *nietrwała, niepewna* lub *chwiejna*. Kula *K*, położona w najwyższym punkcie wyniosłości *AB* (rys. 120), jest w takiej niebezpiecznej równowadze; stożek, opierający się wierzchołkiem o poziomą podstawę (rys. 121), jeżeli wogóle jest w równowadze, jest w równowadze niepewnej. Oparta krawędzią



Rys. 120.

Rys. 121.

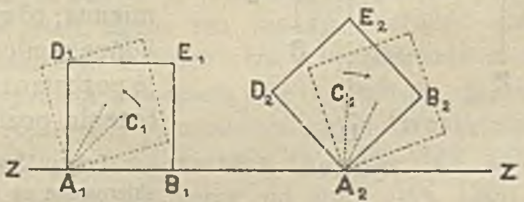


Rys. 122.

o poziomą płaszczyznę, kostka może być tylko w nietrwałej równowadze.

(3) Może wydarzyć się, że ciało, wychylone z położenia równowagi i pozostawione samemu sobie, zachowywa miejsce, w którem je pozostawiliśmy; powiadamy wówczas, że ciało jest w równowadze *obojętnej*. Na doskonale gładkiej, poziomej płaszczyznie *ZZ* (rys. 122) kula *K* jest w obojętnej równowadze; każde miejsce na płaszczyznie jest dla kuli położeniem równowagi.

Czy możemy przewidzieć, kiedy ciało ciężkie znajdzie się w trwałej, w nietrwałej lub w obojętnej równowadze? Łatwo widzimy, że ciało jest w równowadze *trwałej*, gdy jego środek ciężkości przybrał położenie, ze względu na krępujące warunki *możliwie najniższe*; słuszność tego twierdzenia sprawdzamy w przypadkach, przytoczonych pod (1). Gdy środek ciężkości zajął położenie, ze względu na warunki *możliwie najwyższe* [jak w przykładach podanych pod (2)], równowaga jest *nietrwała*. Jeżeli warunki, ograniczające swobodę ruchu ciała, nie nastręczają możności ani najniższego ani najwyższego wzniesienia się środka ciężkości, jeżeli te warunki [jak w (3)] są *wszędzie jednakowo spełnione*, równowaga jest *obojętna*.



Rys. 123.

Wyobraźmy sobie naprzykład sześcienną kostkę *ABDE* (rys. 123); niechaj *C* będzie jej środkiem ciężkości. Jeżeli kostka spoczywa na płaszczyznie poziomej ZZ, przylegając do niej ścianą, jak $A_1B_1D_1E_1$ na rys. 123-im, przechylenie kostki dokoła krawędzi A_1 zmusiłoby środek C_1 do podniesienia się do góry; zatem w położeniu $A_1B_1D_1E_1$ kostka jest w trwałej równowadze. Jeżeli przeciwnie kostka dotyka płaszczyzny ZZ tylko krawędzią, jak $A_2B_2D_2E_2$ na rys. 123-im, przechylenie około tej krawędzi pozwoli opuścić się niżej środkowi C_2; położenie $A_2B_2D_2E_2$ może więc być tylko położeniem chwiejnej równowagi.

§ 102. O wadze i ważeniu.

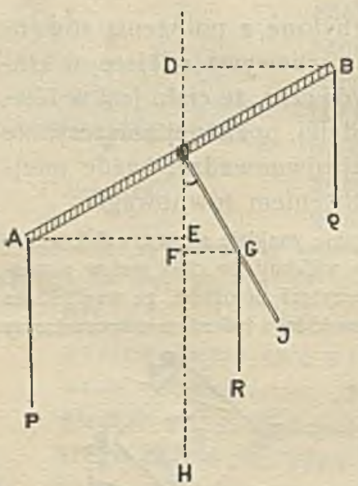
Badamy dwa ciała C_1 i C_2 w tej samej miejscowości na powierzchni ziemi; niechaj p_1 i p_2 oznaczają ciężary tych ciał, m_1 i m_2 ich masy. Wiemy, że

1. $$p_1 = m_1 g; \quad p_2 = m_2 g,$$

gdzie przyśpieszenie ciężkości g ma dla obu ciał jednakową wartość (§ 57); przeto

2. $$p_1 : p_2 = m_1 : m_2 .$$

Stosunek ciężarów jest równy stosunkowi mas, nie zależy zatem od przyśpieszenia ciężkości, nie dotykają go zmiany, którym ulega g, gdy posuwamy się po powierzchni ziemi lub wznosimy się nad nią (§ 65). Jeżeli $m_1 = m_2$, wówczas $p_1 = p_2$ i naodwrót; porównywając *ciężary*, porównywamy zarazem *masy*.



Rys. 124.

Wagą nazywa się przyrząd, służący do porównywania pomiędzy sobą ciężarów. W zasadzie waga jest poprostu dźwignią równoramienną; równe ciężary, działając na końce ramion takiej wagi, powinny ją pozostawiać w równowadze w położeniu poziomem.

Przypuśćmy, że siły P i Q, obiedwie skierowane na dół pionowo (rys. 124), działają na końce A i B ramion belki równoramiennej wagi AB, której pozioma oś przechodzi w punkcie O przez płaszczyznę rysunku. Załóżmy, że długość równych sobie ramion OA i OB wynosi l; przez R rozumiejmy ciężar całej wagi, który wyobraźmy sobie, iż jest przyłożony w jej środku ciężkości G. Gdy belka AB znajduje się w położeniu poziomem, niechaj prosta OG przybiera położenie pionowe; gdy belka przechyliła się (jak na rysunku), niechaj kąt HOG odchylenia od pionu nazywa się θ. Odległość OG oznaczmy przez h.

Pod działaniem sił P, Q, R (przyłożonych w A, B, G) przyrząd jest w równowadze; zatem, według zasady dźwigni:

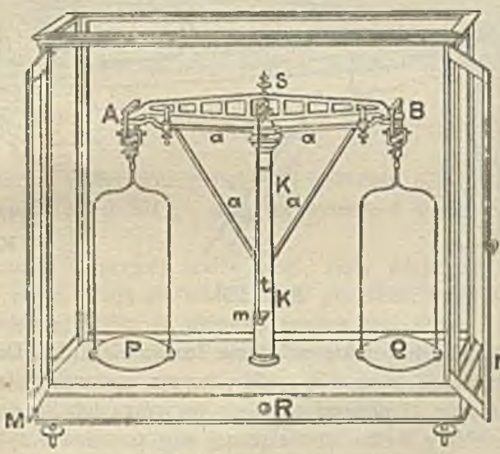
$$P \times AE = Q \times BD + R \times GF. \tag{3}$$

Wyrażając AE, BD i GF przez l, h oraz θ, otrzymujemy

$$(P - Q)l = Rh \operatorname{tang} \theta. \tag{4}$$

Jeżeli $P = Q$, mamy wówczas $\theta = 0$.

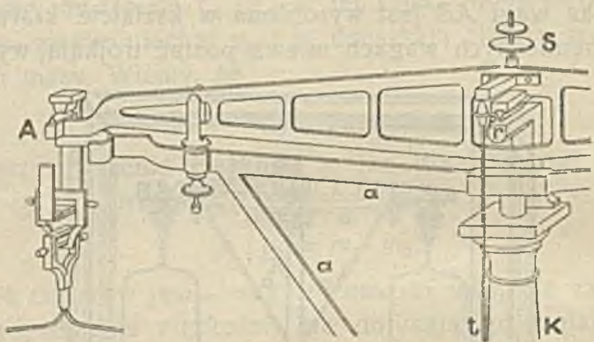
Budowę rozpowszechnionego typu wagi objaśniają rysunki 125 i 126. Belka wagi AB jest wyrobiona w kształcie kraty; w niektórych chemicznych wagach miewa postać trójkąta, wyglądając



Rys. 125.

jak daszek spadzisty. Belka wagi powinna być o ile podobna sztywna, jednak niezbyt masywna i ciężka. Osią obrotu belki jest dolna krawędź czyli *ostrze* trójściennego pryzmatu p (rys. 126), wyrobionego ze stali, agatu lub innego twardego ciała; pryzmat ten jest osadzony w belce AB i niezmiennie z nią połączony. Ostrze pryzmatu p wspiera się na górnej, płaskiej powierzchni twardej podstawki r, umieszczonej u szczytu słupa K. W pobliżu końców belki wpuszczone są w nią dwa dalsze pryzmaty, których ostrza są zwrócone do góry (rys. 126); na tych ostrzach spoczywają lekkie ramki, które dźwigają szalki P i Q (rys. 125); ciała, które ważymy, umieszczamy na owych szalkach. Z belką wagi łączy się dosyć długa, cienka wskazówka t, której położenie (albo wahania) obserwujemy przy pomocy skali m. Waga stoi na podstawie MN, zaopatrzonej w śruby, dzięki czemu możemy ustawić pionowo słup KK. Belkę AB wraz z pryzmatem p możemy podnosić do góry zapomocą podparcia *aaaa*, na które działa główka R; urządzenie to, zwane *aretowaniem* wagi, ma na celu oszczędzanie ostrza pryzmatu w czasie, w którym waga nie jest czynna.

Pod działaniem sił P, Q, R waga powinna ustanawiać się w położeniu równowagi trwałej (§ 101). Jeżeli środek ciężkości G (rys. 124) leży poniżej osi obrotu (czyli poniżej ostrza środkowego pryzmatu p, rys. 126), równowaga jest trwała; wahająca się waga nie wywraca się. W rys. 124-ym oraz w wywodzie



Rys. 126.

równania (4) przypuściliśmy takie położenie środka ciężkości. Dokładne wagi są zaopatrzone w śrubkę S (ryss. 125 i 126); kręcąc, podnosimy ją lub obniżamy, skutkiem czego środek G posuwa się nieco ku górze lub ku dołowi.

Jak powiedzieliśmy, belka nieobciążonej wagi powinna przybierać położenie poziome; nie zmieni się ono, gdy na szalkach umieścimy ciała, których ciężary są równe. Jeżeli więc belka takiej wagi obciążonej jest w równowadze w położeniu poziomem, wnosimy, że ciężary ciał leżących na szalkach są sobie równe. Waga nazywa się *rzetelną*, jeżeli czyni zadosyć tym wymaganiom. Równość długości ramion (liczonych od ostrza środkowego pryzmatu do ostrzy bocznych pryzmatów) oraz równość ciężarów szalek są warunkami rzetelności wagi.

Przypuśćmy, że dana jest różnica $P - Q$ czyli t. zw. *przewaga*; zapytujemy, kiedy wychylenie θ będzie możliwie największe? Według (4) wówczas, gdy długość l jest o ile podobna największa, ciężar zaś R i odległość h o ile podobna najmniejsze. Powiadamy, że waga jest *czuła*, gdy wychylenie θ przy nieznacznej przewadze $P - Q$ jest znaczne. Odległość h nie może być jednakże zbyt mała, wpływałoby to bowiem szkodliwie na bezpieczeństwo równowagi; długość l nie może być zbyt wielka, ponieważ wahanie się wagi byłoby wówczas powolne, ważenie zajmowałoby wiele czasu. Ważąc dokładnie, nie czekamy zresztą na ustanowienie się równowagi; obserwujemy wychylenia wskazówki i z nich wyliczamy idealne położenie równowagi.

Do wagi należy zbiór *wzorców masy* czyli t. zw. *ciężarków*; są to zwykle bryłki mosiężne lub niklowe, niekiedy szklane, złote lub platynowe, których ciężar jest dokładnie znany. Ciężary tych wzorców bywają tak dobrane, że można z nich składać dowolne ciężary. *Konikiem* nazywa się kawałek platynowego lub złotego drutu, zgięty w kabłąk (rys. 127); jego masa wynosi zwykle 10 mgr. Położony na belce, np. w odległości 0·7 długości ramienia, liczonej od osi obrotu, konik działa tak, jak gdyby 7 mgr leżało na szalce (§ 89).

Rys. 127.

Budowę wag doprowadzono obecnie do wysokiego stopnia doskonałości. Nawet zwykła *chemiczna* lub *analityczna* waga (jakie spotykamy pospolicie w pracowniach chemicznych) jest już czułym i dokładnym przyrządem; na dobrej wadze chemicznej, postępując umiejętnie i bardzo starannie, można znaleźć ciężar przedmiotu, ważącego do kilkuset gramów i nie popełnić przytem większego błędu niż ćwierć miligrama. Zakłady *metrologiczne* (jak naprzykład wspomniane w §§ 3-im i 40-ym międzynarodowe Biuro Miar i Wag pod Paryżem) posiadają wagi jeszcze znacznie doskonalsze.

Zadania.

1. Na tej samej wadze równoramiennej położono najprzód 100 i 101 gr na szalkach; następnie 200 i 201 gr. Czy wychylenie θ w obu razach będzie jednakowe?

2. Umieszczone w prawej szalce wagi, ciało zdaje się ważyć 20·50 gr; umieszczone w lewej, zdaje się ważyć 20·00 gr. Belka wagi nie jest (widocznie) ściśle równoramienna; stosunek długości ramion jest nieco różny od jedności. Biorąc zasadę dźwigni (§ 90) za punkt wyjścia, udowodnić, że prawdziwy ciężar ciała jest *średnią geometryczną* znalezionych wartości, zatem wynosi 20·248 gr; oraz że stosunek długości prawego do długości lewego ramienia wynosi 1·012. Udoskonalony ten sposób ważenia podał Gauss (1777—1855).

3. Ażeby zważyć ciało C, równoważymy je na wadze t. zw. *tarą*, np. drobnym śrutem, piaskiem, rtęcią i t. p.; zdjąwszy następnie ciało C z wagi, lecz pozostawiając tarę w jej miejscu pierwotnem, ważymy tarę w zwykły sposób. Taką metodę ważenia wskazał Borda; dlaczego ona jest pewniejsza niż pospolita? jakiego błędu możemy w tem postępowaniu uniknąć?

§ 103. *Gęstość i ciężar właściwy.*

Średnią gęstością danego ciała nazywamy stosunek jego masy do jego objętości. Oznaczając masę ciała przez M, jego objętość przez V, otrzymujemy na średnią gęstość D ciała:

$$1. \qquad D = M/V.$$

Jeżeli jednostką masy jest gram, jednostką zaś objętości centymetr sześcienny, tedy jednostką gęstości jest 1 gr/cm³.

Pojęciu gęstości możemy nadać proste znaczenie. Przypuśćmy, że V cm³ jednolitego ciała posiada masę M gramów; w takim razie 1 cm^3 tego ciała ma masę M/V czyli D gramów. Gęstość ciała wyraża się więc tą samą liczbą, która podaje masę jednostki objętości; naprzykład, w powyższych jednostkach, masę sześciennego centymetra, wyrażoną w gramach.

Ciała materjalne bywają zwykle niejednolite; gleba, rudy, minerały, które znajdujemy w przyrodzie, tkaniny, drewno, papier po bliższem zbadaniu okazują się niejednolite. Przypuśćmy, że szukamy gęstości ciała niejednolitego; otrzymamy naogół wyniki niejednakowe, jeżeli będziemy ją obliczali w różnej objętości V, np. raz w 1 cm^3, drugi raz w 1 mm^3. Znajdujemy się tu widocznie wobec podobnego zadania, jakie mieliśmy przed sobą, mówiąc o średniej i prawdziwej prędkości (§ 14). Wyrażenie (1) daje oczywiście *gęstość średnią w objętości V*. Im mniejszą posłużymy się objętością V, tem bliższa *prawdziwej* (w danem miejscu) *gęstości* będzie wartość znaleziona z (1). *Prawdziwą* albo *miejscową gęstość* określamy jako granicę, do której dąży stosunek (1), gdy M i V jednocześnie zbliżają się ku zeru.

Średnim ciężarem właściwym danego ciała nazywamy stosunek ciężaru ciała do jego objętości. Oznaczając ciężar ciała przez P, jego objętość przez V, mamy na średni ciężar właściwy Δ:

2. $$\Delta = P/V.$$

Jeżeli g oznacza przyśpieszenie ciężkości, istnieje (jak wiadomo) związek

3. $$P = Mg \qquad \text{zatem:} \qquad 4.\ \ \Delta = Dg.$$

W układzie miar, którym posługujemy się zwykle w fizyce, jednostka ciężaru właściwego jest następująca:

5. $$\frac{\text{ciężar 1 grama}}{1\ \text{cm}^3} = \frac{g\ \text{dyn}}{1\ \text{cm}^3} = g\ \text{gr/cm}^2\text{sek}^2.$$

W układzie ciężarowym (§ 47) jednostką ciężaru jest ciężar grama czyli *Gram*; w tym układzie jednostką ciężaru właściwego jest oczywiście 1 Gr/cm^3. Ciężar właściwy ciała wyraża się zatem w układzie ciężarowym tą samą liczbą, którą wyraża się gęstość w zwykłym układzie jednostek fizycznych. Przypuśćmy naprzykład, że ciężar bryłki żelaznej wynosi 46·8 Gr i że jej objętość wynosi 6 cm^3. Masa bryłki wynosi przeto 46·8 gr. Średnia gęstość bryłki wypada 7·8 gr/cm^3; średni ciężar właściwy 7·8 Gr/cm^3.

Jeżeli V cm^3 ciała jednolitego waży P Gr, tedy 1 cm^3 waży P/V Gr; ciężar właściwy wyraża się zatem tą samą liczbą, która podaje ciężar jednostki objętości; w powyższych naprzykład jednostkach układu ciężarowego, ciężar sześciennego centymetra, wyrażony w Gramach.

Jeżeli uważane ciało jest niejednolite, powinniśmy utworzyć pojęcie *prawdziwego* w danem miejscu albo *miejscowego* ciężaru właściwego, podobnie jak utworzyliśmy wyżej pojęcie prawdziwej czyli miejscowej gęstości.

Przytaczamy wartości gęstości oraz ciężaru właściwego niektórych substancyj. Liczba, podana w tablicy, wyraża gęstość w jednostce gr/cm^3 a zarazem ciężar właściwy w jednostce Gr/cm^3. Liczby ujęte w nawias są średnie przybliżone.

Korek	(0·24)	Cegła	(2·1)
Drewno.	(0·5) do (0·8)	Gips palony	(1·8)
Alkohol etylowy (20° C) .	0·79	Szkło	(2·5) do (4·7)
Nafta (15° C)	(0·80)	Glin	2·58
Oliwa (15° C)	(0·90)	Djament	(3·5)
Lód (0° C)	0·92	Żelazo	7·0 do 7·9
Woda 4° C	1·0000	Miedź	8·9
. . . 15° C	0·9991	Ołów	11·4
Mleko	(1·03)	Rtęć (15° C)	13·56
Piasek suchy	(1·5)	Platyna	21·5

Piknometrem nazywamy prosty przyrząd, służący do mierzenia gęstości cieczy. Wyobraźmy sobie flaszeczkę szklaną (rys. 128), która zamyka się szlifowaną zatyczką, otwartą jak rurka. Napełniamy to naczyńko wodą aż do kreski, umieszczonej na ściance zatyczki i ważymy je wówczas; odjąwszy ciężar pustego naczyńka, otrzymujemy objętość jego wnętrza czyli *pojemność*. Napełniamy naczyńko badaną cieczą aż do wspomnianej kreski; odjąwszy ciężar pustego piknometru, znajdujemy ciężar (lub masę) znanej objętości, wypełnionej uważaną cieczą.

Rys. 128.

Zadania.

1. Sześcian szklany, którego krawędź ma 5 cm długości, waży 355 Gramów; jaka jest średnia gęstość tego ciała?

2. Ile waży litr nafty? ile waży litr rtęci? Jaką objętość zajmuje 100 gr alkoholu lub 500 gr oliwy? O ile więcej waży litr mleka niż litr wody?

3. Wykonano z cegły mur, którego grubość wynosi 60 cm, długość 6 m, wysokość 4 m; obliczyć ciężar muru.

4. Naczynie w 15° C zawiera 339 gr rtęci; obliczyć jego pojemność.

5. Piasek wydobyty z ziemi waży 450 Kg; obliczyć objętość wykopu.

6. Po wypełnieniu rtęcią, rurka o długości 20 cm, w 15° C, waży o 34·08 Gr więcej niż pusta. Obliczyć promień średniego wewnętrznego przecięcia.

7. Ciężar właściwy kilku metali wyrazić w jednostce: $dyna/cm^3$.