Dr STEFAN BANACH
PROFESOR UNIWERSYTETU J. K.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

TOM II.

REPRODUKCJA FOTOGRAFICZNA
Z WYDANIA Z R. 1933.

KSIĄŻNICA - ATLAS * WROCŁAW—WARSZAWA

Dr STEFAN BANACH
PROFESOR UNIWERSYTETU J. K.

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

TOM II.

REPRODUKCJA FOTOGRAFICZNA
Z WYDANIA Z R. 1933

KSIĄŻNICA - ATLAS * WROCŁAW—WARSZAWA
1949

22

Nakład: 2.200 egz.
Papier: 70×100, 80 gr, kl. V.
Data wydania: marzec 1949

2273

Państw. Wrocł. Zakł. Graf., Wrocław — 203 (F 39135)

Rozdział I.

Całka nieokreślona. Metody całkowania.

§ 1. Funkcja pierwotna. Powiadamy, że funkcja $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, w pewnym przedziale (skończonym lub nieskończonym), jeżeli w każdym punkcie tego przedziału:

$$\frac{d\,F(x)}{d\,x} = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Przykłady:

1. Funkcja $y = \sin x$ jest funkcją pierwotną funkcji $y = \cos x$ w przedziale $(-\infty, +\infty)$, gdyż:

$$\frac{d \sin x}{d\,x} = \cos x.$$

2. Funkcja $y = \sqrt{1 - x^2}$ jest funkcją pierwotną funkcji $y = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ w przedziale $(-1 < x < +1)$, gdyż:

$$\frac{d\,(\sqrt{1 - x^2})}{d\,x} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Funkcję pierwotną nazywamy również całką nieokreśloną i oznaczamy symbolem:

$$\int f(x)\,d\,x.$$

Na mocy (1), jeżeli c oznacza dowolną liczbę, to

$$\frac{d\,[F(x) + c]}{d\,x} = f(x).$$

Zatem $F(x)+c$ jest również całką nieokreśloną funkcji $f(x)$. Możemy więc napisać:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c.$$

Naodwrót, jeżeli przyjmiemy, że funkcje $F_1(x)$ i $F_2(x)$ są całkami nieokreślonemi funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b), to

$$\frac{d\,[F_1(x) - F_2(x)]}{dx} = f(x) - f(x) = 0.$$

Wynika stąd na podstawie twierdzenia, o wartości średniej (T. I str. 161), że

$$F_1(x) - F_2(x) = constans.$$

Znając więc jedną funkcję pierwotną, otrzymamy wszystkie inne, dodając do niej dowolną stałą. Powstaje pytanie, jakie funkcje posiadają całkę nieokreśloną. Otóż udowodnimy później, że każda funkcja ciągła posiada całkę nieokreśloną.

Uwaga.

Jeżeli mówimy, że $F(x)$ jest całką nieokreśloną funkcji $f(x)$ i nie podajemy przytem w jakim przedziale, to rozumiemy zazwyczaj, że przedziałem tym jest dowolny przedział, w którym funkcja $f(x)$ jest określona.

§ 2. Zasadnicze wzory. Zamiast pisać $\int 1\,dx$ piszemy $\int dx$. Zatem

1. $\int dx = x + C$, (C oznacza dowolną stałą),

gdyż $\dfrac{d(x+C)}{dx} = 1$.

2. $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C, \quad n \neq -1,$

gdyż pochodną funkcji $\dfrac{1}{n+1}\,x^{n+1}$ jest x^n.

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C, \quad x > 0,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log\,(-x) + C, \quad x < 0.$$

Oba te wzory sprawdzamy przez różniczkowanie. Możemy je zastąpić jednym wzorem:

3. $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C.$

Podobnie różniczkowaniem sprawdzamy następujące wzory:

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$

5. $\int e^x\,dx = e^x + C;$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x + C = -\operatorname{arc\,cos} x + C';$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,cot} x + C'.$

§ 3. Niektóre własności całki nieokreślonej. Niechaj w przedziale (a, b)

$$\int f(x)\,dx = F(x), \qquad \int \varphi(x)\,dx = \Phi(x).$$

Ponieważ $\frac{d\,[F(x) \pm \Phi(x)]}{dx} = f(x) \pm \varphi(x)$

więc $\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = F(x) \pm \Phi(x)$

czyli $\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx.$

A zatem: Całka sumy równa się sumie całek poszczególnych składników (jeśli istnieją całki składników).

Jeżeli c oznacza dowolną liczbę,

wówczas $\frac{d\,[c\,F(x)]}{dx} = c\,\frac{d\,F(x)}{dx} = c\,f(x).$

zatem $\int c\,f(x)\,dx = c\,F(x),$

czyli $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$

A więc: **Czynnik stały możemy wyjąć przed znak całki.**

Przykłady:

1. $\int (3x^2 - 2x + 7)\, dx = \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int 7 dx = 3\int x^2 dx - 2\int x dx + 7\int dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 7 \cdot x + C = x^3 - x^2 + 7x + C;$

2. $\int \frac{x^2 - x^3 + 1}{x^5} dx = \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5}\right) dx = \int x^{-3} dx - \int x^{-2} dx + \int x^{-5} dx = \frac{1}{-2} x^{-2} - \frac{1}{-1} x^{-1} + \frac{1}{-4} x^{-4} + C = \frac{-2x^2 + 4x^3 - 1}{4x^4} + C;$

3. $\int \left(5\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = 5\int x^{\frac{1}{2}} dx - 3\int x^{\frac{3}{5}} dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}} dx = 5 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} - 3 \frac{1}{\frac{3}{5}+1} x^{\frac{3}{5}+1} - 2 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{10}{3}\sqrt{x^3} - \frac{15}{8}\sqrt[5]{x^8} - 4\sqrt{x} + C;$

4. $\int x \sqrt[m]{x}\, dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{m}} dx = \int x^{\frac{1}{m}+1} dx = \frac{m}{2m+1} x^2 \sqrt[m]{x} + C;$

5. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{7}{3}} dx = -\frac{3}{4} \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} + C;$

6. $\int \frac{2x^2\sqrt[3]{x} - 5x + 3x^2 e^x - 4}{x^2} dx = \int (2x^{\frac{1}{3}} - 5x^{-1} + 3e^x - 4x^{-2})\, dx = \frac{3}{2} x \sqrt[3]{x} - 5 \log|x| + 3e^x + \frac{4}{x} + C.$

§ 4. Całkowanie przez podstawienie. Istnieją pewne metody wyznaczania funkcji pierwotnej. Jedną z takich metod jest t. zw. metoda całkowania przez podstawienie.

Załóżmy, że w przedziale $(a\, b)$

$$\int f(x)\, dx = F(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Przypuśćmy, że funkcja $x = \varphi(t)$ jest ciągłą wraz z pierwszą pochodną w przedziale $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ i niechaj $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ dla wszystkich punktów t przedziału (α, β). Przy tych założeniach, jak wiemy, funkcja złożona $F[\varphi(t)]$ jest określoną dla $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ i

$$\frac{d F[\varphi(t)]}{d t} = F'[\varphi(t)]\, \varphi'(t).$$

Ponieważ $F'(x) = f(x)$,

więc $$\frac{d F[\varphi(t)]}{d t} = f[\varphi(t)]\, \varphi'(t),$$

stąd $$\int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, d t = F[\varphi(t)] \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Jeżeli więc nie możemy bezpośrednio obliczyć całki (1), to jednak czasem będziemy mogli obliczyć całkę (2), czyli wyznaczyć funkcję $F[\varphi(t)]$. Znając tę funkcję łatwo otrzymujemy funkcję pierwotną $F(x)$ dla tych wartości na x, które przyjmuje funkcja $x = \varphi(t)$ w przedziale $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Zauważmy jeszcze, że na mocy (1) i (2)

$$\int f(x)\, d x = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, d t, \quad \text{dla } x = \varphi(t) \quad . \quad (3)$$

Wzór ten otrzymujemy formalnie podstawiając

$$x = \varphi(t), \quad d x = \varphi'(t)\, d t.$$

Przykłady:

1. $\int (a + b\, x)^n\, d x, \quad n \neq -1, \quad b \neq 0.$

Połóżmy $a + b x = t$, czyli $x = \dfrac{t - a}{b}$.

Stąd $dx = \frac{dt}{b}$, zatem

$$\int (a+bx)^n\, dx = \int t^n \cdot \frac{dt}{b} = \frac{1}{b} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{b} \frac{(a+bx)^{n+1}}{n+1}.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log |a+bx|.$

Podstawienie to samo co poprzednio.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}, \quad a > 0.$

Połóżmy $x = \sqrt{a}\, t$, $dx = \sqrt{a}\, dt$, więc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \int \frac{\sqrt{a}\, dt}{\sqrt{a-at^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{arc sin}\, t,$$

więc $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \text{arc sin} \frac{x}{\sqrt{a}} + C.$

U w a g a.

Zamieniając litery x i t ze sobą we wzorze (3) otrzymujemy:

$$\int f[\varphi(x)]\, \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt, \quad \text{dla } t = \varphi(x).$$

Formalnie wzór powyższy otrzymujemy kładąc:

$$\varphi(x) = t,$$

zaś

$$\varphi'(x)\, dx = dt.$$

Z całką powyżej podanego kształtu spotykamy się bardzo często, nie zawsze jednak łatwo to zauważyć.

P r z y k ł a d y:

4. $\displaystyle I = \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx.$

Połóżmy $x^2+x+1 = t$, $(2x+1)\, dx = dt.$

Zatem $I = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C,$

więc $$I = \log |x^2 + x + 1| + C.$$

5. $I = \int (a + bx^2)^n x\,dx, \quad (b \neq 0, \quad n \neq -1).$

Połóżmy $a + bx^2 = t, \quad 2bx\,dx = dt,$

a więc $$x\,dx = \frac{1}{2b}\,dt.$$

Zatem $I = \int t^n \frac{1}{2b}\,dt = \frac{1}{2b} \frac{t^{n+1}}{n+1},$

więc $$I = \frac{1}{2b} \frac{(a + bx^2)^{n+1}}{n+1}.$$

6. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$

Połóżmy $\sqrt{x^2 + a} + x = t,$

stąd $$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} + 1\right) dx = dt,$$

a więc $$\frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}}\,dx = dt,$$

zatem $I = \int \frac{dt}{t} = \log |t| = \log |\sqrt{x^2 + a} + x|.$

7. $I = \int \sin^n x \cos x\,dx.$

Połóżmy $t = \sin x, \quad dt = \cos x\,dx,$ zatem $I = \int t^n\,dt,$

więc $I = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{\sin x^{n+1}}{n+1},$ gdy $n \neq -1,$

zaś $I = \log |t| = \log |\sin x|,$ gdy $n = -1.$

8. $I = \int \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n \neq 1.$

Połóżmy $x^2 + 1 = t, \quad 2x\,dx = dt.$

Zatem

$$I = \tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{t^{n-1}} = -\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

Podobnie otrzymamy $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \tfrac{1}{2}\log(x^2+1).$

§ 5. Całkowanie przez części. Załóżmy, że u, v są funkcjami zmiennej x, ciągłemi i posiadającemi pochodne w przedziale (a, b).

Mamy wówczas

$$(uv)' = uv' + vu',$$

czyli

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Biorąc całkę nieoznaczoną obu stron i uwzględniając, że

$$\int (uv)'\,dx = uv,$$

otrzymujemy $\int (uv')\,dx = uv - \int (vu')\,dx,$

o ile obie całki istnieją.

Używając różniczek, możemy wzór ten napisać w formie następującej:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

Formuła (2) pozwala nam obliczanie całki $\int u\,dv$ sprowadzić do obliczenia całki $\int v\,du$, która może być łatwiejszą do wyznaczenia.

Metoda ta nosi nazwę *całkowania przez części*.

Przykłady:

1. $I = \int xe^x\,dx.$

Położmy $u = x \qquad du = dx$

$dv = e^x\,dx \qquad v = \int e^x\,dx = e^x.$

Zatem $I = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x.$

2. $\int \log x\, dx.$

Połóżmy $\quad u = \log x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$$dv = dx \qquad v = \int dx = x.$$

Zatem $\quad I = x \log x - \int dx = x \log x - x.$

3. $I = \int x^n \log x\, dx, \qquad n \neq -1.$

Połóżmy $\quad u = \log x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$$dv = x^n\, dx \qquad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Zatem

$$I = \frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1} \log x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

§ 6. Całki funkcyj elementarnych.

1. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x| + C.$$

2. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C, \qquad \int e^x\, dx = e^x + C.$

3. $\int \log x\, dx = x(\log x - 1) + C,$ (§ 5, przykład 2)

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$

   $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

5. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\log |\cos x| + C.$

   Połóżmy $\cos x = t, \qquad -\sin x\, dx = dt.$

   Zatem $\quad \int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} =$

$$= -\log |t| = -\log |\cos x|.$$

6. $\int \cot x\, dx = \log |\sin x| + C.$

   Używamy podstawienia $\sin x = t.$

7. $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$,

$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

Zatem $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.

Położmy $\quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \frac{1}{2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = dt.$

Zatem $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$.

8. $\int \sec x\, dx = \log \left| \cot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right| + C.$

Położmy $\quad x = \frac{\pi}{2} - t, \quad dx = -dt,$

więc $\int \sec x\, dx = -\int \sec \left(\frac{\pi}{2} - t \right) dt = -\int \operatorname{cosec} t\, dt$,.

zatem:

$\int \sec x\, dx = -\log \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| = \log \left| \cot \frac{t}{2} \right| = \log \left| \cot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right|$.

9. $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$

Całkujemy przez części kładąc

$$u = \arcsin x \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$dv = dx \qquad v = x,$$

więc: $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Celem wyznaczenia ostatniej całki, połóżmy.

$1 - x^2 = t, \quad -2x\, dx = dt, \quad$ więc $\; x\, dx = -\frac{1}{2} dt,$

zatem $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}.$

10. $\int \operatorname{arc}\cos x\; dx = x \operatorname{arc}\cos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

Postępujemy podobnie jak poprzednio, lub opieramy się na wzorze $\operatorname{arc}\sin x + \operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2}$.

11. $\int \operatorname{arc}\operatorname{tg} x\; dx = x \operatorname{arc}\operatorname{tg} x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2).$

Połóżmy $\quad u = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x \qquad du = \dfrac{dx}{1+x^2}$

$$dv = dx \qquad v = x,$$

więc $\displaystyle\int \operatorname{arc}\operatorname{tg} x\; dx = x \operatorname{arc}\operatorname{tg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}.$

Celem wyznaczenia ostatniej całki, połóżmy

$$1+x^2 = t, \qquad 2x\,dx = dt, \qquad x\,dx = \tfrac{1}{2}\,dt,$$

więc $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t} = \tfrac{1}{2}\log|t| = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2).$

12. $\int \operatorname{arc}\cot x\; dx = x \operatorname{arc}\cot x + \tfrac{1}{2}\log(1+x^2).$

Postępujemy podobnie jak poprzednio lub opieramy się na wzorze

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{arc}\cot x = \frac{\pi}{2}.$$

13. $\int \operatorname{arc}\sec x\; dx = x \operatorname{arc}\sec x - \log\left(\sqrt{x^2-1} + |x|\right).$

Połóżmy $\quad u = \operatorname{arc}\sec x \qquad du = \dfrac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}},$

$$dv = dx \qquad v = x,$$

zatem $\displaystyle\int \operatorname{arc}\sec x\; dx = x \operatorname{arc}\sec x - \int \frac{x\,dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$

Ponieważ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left|\sqrt{x^2-1} + x\right| \quad (\S\ 4\ \text{przykład}\ 6),$$

zatem dla $x > 1$, $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \log(\sqrt{x^2-1}+x)$,

zaś

dla $x < -1$, $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = -\log|\sqrt{x^2-1}+x| =$

$$= \log(\sqrt{x^2-1}-x),$$

w obu więc wypadkach możemy napisać

$$\int \frac{x\,dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \log(\sqrt{x^2-1}+|x|).$$

14. $\int \operatorname{arc\,cosec} x\,dx = x \operatorname{arc\,cosec} x + \log(\sqrt{x^2-1}+|x|)$.

Postępujemy jak poprzednio lub opieramy się na wzorze:

$$\operatorname{arc\,sec} x + \operatorname{arc\,cosec} x = \frac{\pi}{2}.$$

§ 7. Wzory redukcyjne.

1. Wyznaczyć całkę: $I_n = \int \sin^n x\,dx$ (n całkowite).

Przyjmijmy na razie, że $n \neq -1$ i $n \neq 0$. Ponieważ $\sin^n x = \sin^{n-2} x \sin^2 x = \sin^{n-2} x - \sin^{n-2} x \cos^2 x$,

więc $$I_n = I_{n-2} - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx \quad . \quad . \quad (1)$$

Połóżmy

$u = \cos x \qquad du = -\sin x\,dx$

$dv = \sin^{n-2} x \cos x\,dx$, $\displaystyle v = \int \sin^{n-2} x \cos x\,dx = \frac{\sin^{n-1} x}{n-1}$ *),

więc

$$\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n-1} + \int \frac{\sin^n x}{n-1}\,dx =$$

$$= \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1} I_n.$$

Wstawiając otrzymany wynik w związek (1) mamy

$$I_n = I_{n-2} - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n,$$

*) § 4 przykład 7.

stąd $$I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \quad (1^*)$$

Zauważmy, że ostatnia formuła jest ważna dla wszystkich $n \neq 0$, a więc

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$
$$(n \neq 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Formułę powyższą stosować możemy z korzyścią gdy $n > 0$.

P r z y k ł a d:

$$\int \sin^6 x \, dx = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} + \tfrac{5}{6} \int \sin^4 x \, dx,$$

$$\int \sin^4 x \, dx = -\frac{\cos x \sin^3 x}{4} + \tfrac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx.$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{\cos x \sin x}{2} + \tfrac{1}{2} x, \qquad \text{zatem}$$

$$\int \sin^6 x \, dx = -\tfrac{1}{6} \cos x \sin^5 x - \frac{5}{6 \, . \, 4} \cos x \sin^3 x -$$
$$-\frac{5 \, . \, 3}{6 \, . \, 4 \, . \, 2} \cos x \sin x + \frac{5 \, . \, 3}{6 \, . \, 4 \, . \, 2} x.$$

Aby otrzymać wzór redukcyjny dla $n < 0$, napiszmy formułę (1*) w następujący sposób:

$$I_{n-2} = \frac{n}{n-1} I_n + \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n-1}$$

Kładąc $$n - 2 = -K$$

mamy $$I_{-K} = -\frac{\cos x \sin^{-K+1} x}{K-1} + \frac{K-2}{K-1} I_{-K+2}, \quad \text{więc}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^K x} = -\frac{\cos x}{(K-1) \sin^{K-1} x} + \frac{K-2}{K-1} \int \frac{dx}{\sin^{K-2} x}$$
$$(K > 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dla $K = 1$ mamy:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \qquad \text{(§ 6 przykład 7).}$$

Przykład:

1. $$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\log \left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right|.$$

2. Podobnie postępując, otrzymujemy:

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

$$n \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^K x} = \frac{\sin x}{(K-1)\cos^{K-1} x} + \frac{K-2}{K-1}\int \frac{dx}{\cos^{K-2} x}$$

$$K \neq 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

3. Wyznaczyć całkę: $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, ($n$ całkowite dodatnie). Mamy: $I_1 = \operatorname{arc\,tg} x$. Przyjmijmy teraz, że $n > 1$. Zastępując w liczniku czynnik 1 przez różnicę $(x^2+1) - x^2$, otrzymujemy:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^n}.$$

Połóżmy w drugiej całce

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = \frac{x\, dx}{(x^2+1)^n} \quad v = \int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}}\text{*)}$$

zatem: $$\int \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}},$$

*) § 4 przykład 8.

a więc: $I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1}$,

czyli: $I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$.

Otrzymaliśmy więc wzór redukcyjny:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

$$(n > 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

P r z y k ł a d:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \tfrac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1},$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{arc tg } x, \quad \text{zatem:}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{2 \cdot 4} \frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{2 \cdot 4} \text{ arc tg } x.$$

Z a d a n i a:

Wyznaczyć następujące całki:

1) $\int a^{mx} dx = \frac{a^{mx}}{m \log a} + C$,

2) $\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$.

3) $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log |a+bx| + C$,

4) $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C$, $(n \neq -1)$,

5) $\int \frac{x^{n-1}}{a+bx^n} dx = \frac{\log |a+bx^n|}{nb} + C$,

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{b}{a} x + C,$

7) $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} x + C,$

8) $\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 5} dx = \log |x^2 - x + 5| + C,$

9) $\int \frac{3x^2 - 6x + 1}{x^3 - 3x^2 + x - 1} dx = \log |x^3 - 3x^2 + x - 1| + C,$

10) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C,$

11) $\int \sin(ax + b)\, dx = -\frac{\cos(ax + b)}{a} + C,$

12) $\int x \sin(x^2 + 1)\, dx = -\frac{\cos(x^2 + 1)}{2} + C,$

13) $\int \frac{dx}{x (\log x)^n} = -\frac{1}{(n-1)\,(\log x)^{n-1}} + C, \quad n \neq 1,$

14) $\int \frac{[\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg}^3 x]}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x +$
$+ \frac{5}{4} \operatorname{tg}^4 x + C,$

15) $\int [\sin^5 x - 5 \sin^3 x + \sin x] \cos x\, dx = \frac{\sin^6 x}{6} -$
$- \frac{5}{4} \sin^4 x + \frac{1}{2} \sin^2 x + C,$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x + a} + \sqrt{x}} = \frac{2}{3a} [(x + a)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}] + C,$

17) $\int \sin ax \cos bx\, dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right] + C,$

18) $\int \sin ax \sin bx\, dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} - \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] + C$

19) $\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right] + C,$

20) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \cot x + C,$

21) $\int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C,$

22) $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right) + C,$

23) $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \frac{1}{2b}\log|a + b\operatorname{tg}^2 x| + C,$

24) $\int e^{ax}\cos x\,dx = \frac{e^{ax}(\sin x + a\cos x)}{1+a^2},$

25) $\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin x - \cos x)}{1+a^2},$

26) $\int \frac{a + b\sin x + c\cos x}{\sin 2x}\,dx = \frac{a}{2}\log|\operatorname{tg} x| +$

$+ \frac{b}{2}\log|\operatorname{tg}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)| + \frac{c}{2}\log|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x|,$

27) $\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(\operatorname{arc\,tg} x)^3,$

28) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}\,dx = -\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} -$

$-(x+1) - \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}.$

Wskazówki:

1) $mx = t$, 2) $ax + b = t$, 3), 4) $a + bx = t$, 5) $a + bx^n = t$, 6), 7) $\frac{bx}{a} = t$, 8) $x^2 - x + 5 = t$, 9) $x^3 - 3x^2 + x - 1 = t$, 10) $f(x) = t$, 11) $ax + b = t$, 12) $x^2 + 1 = t$, 13) $\log x = t$, 14) $\operatorname{tg} x = t$, 15) $\sin x = t$, 16) Pomnożyć licznik i mianownik przez $\sqrt{x+a} - \sqrt{x}$, 17), 18), 19) Iloczyn zamienić na sumę np. $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$, 20) $\operatorname{tg} x = t$, 21) $\sqrt{1+x} = t$, 22), 23) $\operatorname{tg} x = t$. 24), 25) Zastosować do obu całek całkowanie przez części, a następnie rozwiązać otrzymany układ równań. 26) Zastąpić $\sin 2x$ przez $2\sin x\cos x$. 27) $\operatorname{arc\,tg} x = t$. 28) $x + 1 = t^6$.

Rozdział II.

Całkowanie funkcyj wymiernych.

§ 1. Rozkład wielomianu na czynniki. W algebrze*) udowadnia się, że każdy wielomian $Q(x)$ da się przedstawić w postaci iloczynu:

$$Q(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\gamma) \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie A jest współczynnikiem, stojącym przy najwyższej potędze, zaś α, β, ..., γ są pierwiastkami równanie $Q(x) = 0$. Czynniki powyższego iloczynu: $x-\alpha$, $x-\beta$, ... $x-\gamma$ nazywamy czynnikami pierwiastkowemi. Jeżeli niektóre czynniki pierwiastkowe wielomianu $Q(x)$ są równe, to zbierając je razem otrzymamy przedstawienia:

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r (x-\beta)^s \ldots (x-\gamma)^t \qquad (2)$$

gdzie r, s ... t są liczbami naturalnemi, przyczem $r+s+\ldots+t=n$ [n oznacza stopień wielomianu $Q(x)$].

Przykłady:

1. Wielomian $3x^2+3x-6$ ma pierwiastki $\alpha = 1$, $\beta = -2$,

zatem $\quad 3x^2+3x-6 = 3(x-1)(x+2)$.

2. Wielomian x^4-1 ma pierwiastki $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = i$, $\delta = -i$, $\left(i = \sqrt{-1}\right)$,

więc $\quad x^4-1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$

3. Wielomian $x^3-2x^2+x = x(x-1)^2$.

*) Dowody twierdzeń § 1 i § 2 znajdzie czytelnik w książce dr. S. Ruziewicza i E. Żylińskiego, Wstęp do matematyki I. (Lwów, 1927) str. 263—69 i 183—87.

Jeżeli czynnik pierwiastkowy $x - \alpha$ występuje w przedstawieniu (2) w potędze r, wówczas α nazywamy pierwiastkiem r-krotnym.

Pierwiastki $\alpha, \beta \dots \gamma$ mogą być zespolone. Ważnem dla nas będzie następujące twierdzenie z algebry: jeżeli wielomian $Q(x)$ o współczynnikach rzeczywistych posiada r-krotny pierwiastek zespolony $a + bi$, wówczas posiada również r-krotny pierwiastek z nim sprzężony $a - bi$.

Jeżeli więc $Q(x)$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, to jeśli w rozwinięciu (2) występuje czynnik $[x - (a + bi)]^r$, to występuje również czynnik $[x - (a - bi)]^r$.

Łącząc te oba czynniki razem otrzymamy:

$$[x - (a + bi)]^r [x - (a - bi)]^r =$$
$$= [(x - a) - bi]^r [(x - a) + bi]^r = [(x - a)^2 + b^2]^r =$$
$$= (x^2 + px + q)^r,$$

gdzie $\qquad p = -2a, \quad q = a^2 + b^2.$

Wielomian $x^2 + px + q$ ma pierwiastki $a + bi$, i $a - bi$ i nie da się przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego, o współczynnikach rzeczywistych. Postępując podobnie z pozostałemi pierwiastkami zespolonemi, dojdziemy wkońcu do przedstawienia wielomianu $Q(x)$ w postaci:

$$Q(x) = (x - \alpha)^r (x - \beta)^s \dots (ax^2 + bx + c)^t . (dx^2 + ex + f)^u \dots \quad (3)$$

W rozwinięciu powyższem liczby $\alpha, \beta, \dots a, b, c, d, e, f \dots$ są rzeczywiste, wielomiany zaś $ax^2 + bx + c$. $dx^2 + ex + f, \dots$ nie dadzą się już przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia pierwszego o współczynnikach rzeczywistych.

Przykłady:

1) $x^3 + 1 = (x^2 - x + 1)(x + 1)$.

2) $x^3 - 1 = (x^2 + x + 1)(x - 1)$,

3) $x^4+1=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$.
4) $x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$,
5) Rozłożyć na czynniki następujące wielomiany:
a) x^2-5x+6, *b)* x^3+3x^2-6x, *c)* x^6-1,
d) x^8-1, *e)* $x^3(x^2-3x+2)^2(x^3+1)^2$.

§ 2. Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste. Funkcją wymierną nazywamy funkcję określoną jako iloraz dwu wielomianów, w tych punktach, w których dzielnik się nie zeruje. A więc funkcja wymierna da się przedstawić w postaci ułamka $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami.

Jeżeli licznik jest stopnia równego lub wyższego niż mianownik, wówczas, wykonując dzielenie, otrzymamy

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=W(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

gdzie $W(x)$ jest pewnym wielomianem, zaś $R(x)$ jest wielomianem stopnia *niższego* niż $Q(x)$.

Przykłady:

1. $$\frac{x^3+x+1}{x^2+1}=x+\frac{1}{x^2+1},$$

2. $$\frac{x^5+x^3-x^2+x+3}{x^3+2x-1}=x^2-1+\frac{3x+2}{x^3+2x-1}.$$

Przypuśćmy, że mamy daną funkcję wymierną $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Załóżmy jeszcze, że wielomian $Q(x)$ przedstawiony jest w postaci (3) str. 21.

Twierdzenie. Jeżeli licznik funkcji wymiernej $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jest niższego stopnia niż mianownik, wówczas funkcję tę możemy przedstawić w postaci:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{B}{(x-\alpha)^{r-1}} + \dots \frac{C}{x-\alpha} + \frac{D}{(x-\beta)^s} +$$
$$+ \frac{E}{(x-\beta)^{s-1}} + \dots \frac{F}{x-\beta} + \dots + \frac{Gx+H}{(ax^2+bx+c)^t} +$$
$$+ \frac{Ix+K}{(ax^2+bx+c)^{t-1}} + \dots \frac{Lx+M}{ax^2+bx+c} +$$
$$+ \frac{Nx+P}{(dx^2+ex+f)^u} + \frac{Qx+R}{(dx^2+ex+f)^{u-1}} +$$
$$+ \dots \frac{Sx+T}{dx^2+ex+f} + \dots\dots \quad (2)$$

W rozwinięciu powyższem A, B, C, ... są liczbami stałemi. Rozwinięcie powyższe nosi nazwę rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste.

Uwaga 1.

Równość (2) zachodzi dla wszystkich x rzeczywistych, z wyjątkiem liczb α, β, γ ..., t. j. pierwiastków rzeczywistych równania $Q(x) = 0$.

Każdy czynnik wielomianu $Q(x)$ występuje jako mianownik w rozwinięciu (2) we wszystkich potęgach począwszy od potęgi, którą ma w rozwinięciu (1), a skończywszy na potędze pierwszej.

Liczniki ułamków wchodzących w skład rozwinięcia (2) są albo liczbami stałemi albo wielomianami stopnia pierwszego, zależnie od tego, czy mianownikiem jest wielomian stopnia pierwszego podniesiony do potęgi, czy wielomian stopnia drugiego podniesiony do potęgi.

Chcąc wyznaczyć liczby A, B, C ..., mnożymy obie strony związku (2) przez $Q(x)$. Uwolniwszy się w ten sposób od mianowników, porządkujemy wedle potęg zmiennej x wielomian otrzymany po prawej stronie. Ponieważ równość pomiędzy wielomianem $P(x)$ a wielomianem będącym po prawej stronie zachodzi dla wszystkich wartości na x*), więc współczynniki stojące przy równych potęgach zmiennej x są równe. Otrzymujemy w ten sposób szereg równań, z których wyznaczamy niewiadome $A, B, C \ldots$

Uwaga 2.

Przed rozkładem danej funkcji wymiernej na ułamki proste należy zawsze sprawdzić:

1° Czy stopień licznika jest niższy od stopnia mianownika,

2° czy licznik i mianownik są względnie pierwsze.

Przykłady:

Następujące funkcje wymierne rozłożyć na ułamki proste:

1. $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$.

Ponieważ $x^2-5x+6=(x-3).(x-2)$, więc połóżmy

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2},$$

stąd mnożąc obie strony przez x^2-5x+6 otrzymujemy

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3),$$

zatem

$$2x-1=x(A+B)-2A-3B,$$

więc

$$\begin{matrix} A+B=2 \\ 2A+3B=1 \end{matrix}, \text{ skąd } A=5,\ B=-3.$$

A zatem

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}.$$

2. $\dfrac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}$.

*) Równość zachodzi dla wszystkich x różnych od $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ wedle założenia. Dla $x=\alpha, \beta, \gamma \ldots$ równość zachodzi na mocy ciągłości.

Użyjemy tutaj innej metody, która prowadzi do celu w wypadku, gdy mianownik posiada tylko pierwiastki rzeczywiste jednokrotne.

Połóżmy $\frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x}$,

stąd $$3x^2+3x+12=$$
$$=A(x+2)x+B(x-1)x+C(x-1)(x+2).$$

Kładąc pokolei $x=0,\ 1,\ -2$ otrzymujemy:

$$12=-2C,\ 18=3A,\ 18=6B,$$

a zatem $$A=6,\ B=3,\ C=-6,$$

więc $$\frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x}=\frac{6}{x-1}+\frac{3}{x+2}-\frac{6}{x}.$$

3. $\frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$,

gdzie $P(x)$ jest wielomianem stopnia niższego niż 3; $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ są między sobą różne.

Połóżmy:

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma},$$

stąd $$P(x)=A(x-\beta)(x-\gamma)+$$
$$+B(x-\alpha)(x-\gamma)+C(x-\alpha)(x-\beta).$$

Kładąc pokolei $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ otrzymujemy:

$$A=\frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)};\quad B=\frac{P(\beta)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)};$$
$$C=\frac{P(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

4. $\frac{3x^2+x+2}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$, więc

$$3x^2+x+2=A(x-1)^2+B(x+1)+C(x+1)(x-1) \quad (1)$$

zatem

$$3x^2+x+2=x^2(A+C)+x(-2A+B)+A+B-C,$$

a, więc $\quad A+C=3, \quad -2A+B=1, \quad A+B-C=2,$

zatem $\quad A=1, \quad B=3, \quad C=2.$

Możemy też w inny sposób wyznaczyć współczynniki A, B, C. Kładąc w (1) pokolei $x=-1, +1$, otrzymamy

$$4=4A, \quad 6=2B, \quad \text{więc } A=1, \quad B=3.$$

Celem wyznaczenia współczynnika C zróżniczkujmy (1) obustronnie: $6x+1=2A(x-1)+B+C.2x$. Kładąc teraz $x=1$, mamy

$$7=B+2C \text{ więc } C=2.$$

Metody tej możemy używać z korzyścią, w wypadku gdy mianownik funkcji wymiernej posiada pierwiastki rzeczywiste wielokrotne.

5. $$\frac{x^4+1}{x^2(x-1)(x+1)^2}=$$
$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1},$$

więc $x^4+1=Ax(x-1)(x+1)^2+B(x-1)(x+1)^2+$
$+Cx^2(x+1)^2+Dx^2(x-1)+Ex^2(x-1)(x+1).$

Kładąc pokolei $x=0, 1, -1$, dostajemy

$$1=-B; \quad 2=4C; \quad 2=-2D,$$

a więc $\quad B=-1, \; C=\tfrac{1}{2}, \; D=-1.$

Otrzymujemy więc:

$$x^4+1=Ax(x-1)(x+1)^2-(x-1)(x+1)^2+$$
$$+\tfrac{1}{2}x^2(x+1)^2-x^2(x-1)+Ex^2(x-1)(x+1).$$

Różniczkując obustronnie otrzymujemy:

$$4x^3=A[(x-1)(x+1)^2+x(x+1)^2+$$
$$+2x(x-1)(x+1)]-(x+1)^2-2(x-1)(x+1)+$$
$$+x(x+1)^2+x^2(x+1)-2x(x-1)-x^2+$$
$$+E[2x(x-1)(x+1)+x^2(x+1)+x^2(x-1)].$$

Kładąc teraz $x = 0, -1$, mamy

$$0 = -A + 1; \quad -4 = -5 - 2E,$$

zatem $$A = 1, \; E = -\tfrac{1}{2}.$$

6. $$\frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1},$$

więc $$x^2 + 2x - 1 = A(x^2+1) + (Bx + C)(x - 1).$$

Kładąc $x = 1$, mamy $2 = 2A$, zatem $A = 1$.
Wymnażając i porównując współczynniki mamy

$$1 = A + B, \; 2 = -B + C, \; -1 = A - C,$$

więc $$B = 0; \; C = 2.$$

7. $$\frac{3x^2 + 1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2+1}.$$

Uwalniając od mianowników i porównując współczynniki otrzymujemy:

$$A + D = 0, \; E + D = 0, \; 2A + B + E + D = 3,$$
$$B + C + E + D = 0, \; A + C + E = 1,$$

a zatem $A = 1, \; B = 1, \; C = -1, \; D = -1, \; E = 1$.

8. Rozwinąć na ułamki proste funkcje wymierne stojące pod znakiem całki w zadaniach podanych na końcu tego rozdziału.

§ 3. Całka funkcyj wymiernych. Rozbijając funkcję wymierną na ułamki proste sprowadzamy całkę funkcji wymiernej do całek typu:

a) $$\int \frac{A\,dx}{x - a} = A \log |x - a|,$$

b) $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^r} = -\frac{A}{(r-1)(x-a)^{r-1}} \quad (r \neq 1),$$

c) $$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^r}\,dx$$

[przyczem wielomian $ax^2 + bx + c$ nie posiada pierwiastków rzeczywistych, a zatem $b^2 - 4ac < 0$].

Aby wyznaczyć całkę typu *c)*, zauważmy, że:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right], \text{ a zatem}$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad (1)$$

Wprowadźmy nową zmienną z określoną związkiem

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a} z^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

a więc
$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Z uwagi na (1), (2) mamy

$$ax^2 + bx + c = \frac{4ac - b^2}{4a}(z^2 + 1).$$

Używając więc podstawienia (3) otrzymamy:

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^r} dx = \int \frac{Mz + N}{(z^2 + 1)^r} dz;$$

M, N oznaczają pewne liczby stałe.

Lecz: $$\int \frac{Mz + N}{(z^2 + 1)^r} dz = M \int \frac{z\,dz}{(z^2 + 1)^r} + N \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^r}.$$

Do całki drugiej stosujemy wzór redukcyjny [str. 17, wzór (6)]; kładąc zaś w pierwszej całce $z^2 + 1 = t$ (str. 9, przykł. 5), otrzymamy

$$\int \frac{z\,dz}{(z^2 + 1)^r} = -\frac{1}{2(r - 1)} \frac{1}{(z^2 + 1)^{r-1}} \quad (r \neq 1);$$

$$\int \frac{z\,dz}{z^2 + 1} = \tfrac{1}{2} \log (z^2 + 1).$$

Przykład: $\int \frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2} dx$,

$$2x^2 - 4x + 10 = 2(x^2 - 2x + 5) = 2[(x-1)^2 + 4] =$$
$$= 2(x-1)^2 + 8.$$

Położmy $2(x-1)^2 = 8z^2$ więc $x = 1 + 2z$, zatem $2x^2 - 4x + 10 = 8(z^2+1)$; $dx = 2\,dz$, więc:

$$\int \frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2} dx = \int \frac{10z+8}{8^2(z^2+1)^2} 2\,dz =$$
$$= \tfrac{5}{16} \int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} + \tfrac{1}{4} \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}.$$

Lecz $\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z^2+1}$;

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} z,$$ (por. str. 17, 6.),

a zatem $\int \frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2} dx = -\frac{5}{32} \frac{1}{z^2+1} +$

$$+ \tfrac{1}{8} \frac{z}{z^2+1} + \tfrac{1}{8} \operatorname{arc\,tg} z = \frac{-5+4z}{32(z^2+1)} + \tfrac{1}{8} \operatorname{arc\,tg} z.$$

Kładąc zpowrotem $z = \frac{x-1}{2}$ mamy

$$\int \frac{5x+3}{(2x^2-4x+10)^2} dx = \frac{2x-7}{4(2x^2-4x+10)} +$$
$$+ \tfrac{1}{8} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{2} + C.$$

Zadania:

Wyznaczyć następujące całki:

1) $\int \frac{5x^3+1}{(x+1)(2x+1)} dx =$
$= \frac{5}{4} x^2 - \frac{15}{4} x + 4 \log|x+1| + \frac{3}{8} \log|2x+1|$,

2) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{(x-1)^2\,(x+1)^2} = x - \tfrac{1}{2}\,\frac{x}{x^2-1} + \tfrac{3}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|,$

3) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)^3}\,dx = -\frac{x}{(x-1)^2},$

4) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+2)\,(x+3)^2} = -\frac{3}{x+3} + \log\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}},$

6) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)\,(x^2+4)} = \tfrac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}$

7) $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}\,dx =$

$\displaystyle = \tfrac{4}{7}\log|x-2| + \tfrac{17}{14}\log(x^2+3) - \frac{\sqrt{3}}{21}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}},$

8) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,dx = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} +$

$\displaystyle + \log\left|\frac{x-1}{x}\right|,$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a};\ a>0,$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1} = \tfrac{1}{3}\log|x+1| - \tfrac{1}{6}\log(x^2-x+1) +$

$\displaystyle + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}},$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1} = \tfrac{1}{3}\log|x-1| - \tfrac{1}{6}\log(x^2+x+1) -$

$\displaystyle - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}},$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} +$

$\displaystyle + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2},$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-1} = \tfrac{1}{6}\log\left|\frac{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\right| -$

$\displaystyle -\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2},$

14) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{4x^2+3}{4(x^2+1)^2} + \log\sqrt{x^2+1},$

15) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^6}\,dx = \tfrac{1}{6}\log\left|\frac{x^3+1}{x^3-1}\right|,$

16) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^6-10x^3+9} = \tfrac{1}{24}\log\left|\frac{x^3-9}{x^3-1}\right|$

17) $\displaystyle\int \frac{6x^5}{(5-7x^3)^3}\,dx = \frac{x^6}{5(5-7x^3)^2},$

18) $\displaystyle\int \frac{12x^{15}}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{3x^4(x^8-3x^4+4)+30}{2(x^4+1)} +$

$+ \log(x^4+1)^9,$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{[(x-\alpha)(x-\beta)]^n},\ \alpha \neq \beta;$ kładąc $\displaystyle\frac{x-\alpha}{x-\beta} = z$ mamy

$$x = \beta + \frac{\alpha-\beta}{1-z};\quad dx = \frac{\alpha-\beta}{(1-z)^2}\,dz;$$

$$(x-\alpha)(x-\beta) = (\alpha-\beta)^2\frac{z}{(1-z)^2},\ \text{zatem}$$

$$\int \frac{dx}{[(x-\alpha)(x-\beta)]^n} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^{2n-1}}\int \frac{(1-z)^{2n-2}}{z^n}\,dz.$$

Wyznaczyć tą metodą całki:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^3}$, b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^5}$, c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^3}$.

Wskazówki:

1), 2) wydzielamy część całkowitą, pozostałą funkcję wymierną rozbijamy na ułamki proste. 3), 4), 5), ... 13) rozbić na ułamki proste. 14) $x^2 = t$, 15), 16), 17) $x^3 = t$. 18) $x^4 = t$.

Rozdział III.

Całkowanie funkcyj algebraicznych.

§ 1. Jeżeli pod całką występuje zmienna x w rozmaitych potęgach ułamkowych, to oznaczając przez p najmniejszy wspólny mianownik wykładników, przez podstawienie $x = z^p$ uwalniamy się od potęg ułamkowych.

Przykłady:

1. $I = \int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)x^{\frac{1}{2}}}$; kładąc $x = z^6$, $dx = 6\,z^5\,dz$, mamy

$$I = \int \frac{6\,z^5\,dz}{(1+z^2)\,z^3} = 6\int \frac{z^2\,dz}{1+z^2} = 6\,z - 6 \text{ arc tg } z, \text{ zatem}$$

$$I = 6\sqrt[6]{x} - 6 \text{ arc tg } \sqrt[6]{x}.$$

2. $I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$; kładąc $x = z^4$, $dx = 4\,z^3\,dz$ mamy

$$I = \int \frac{z^2}{1+z}\cdot 4\,z^3\,dz = 4\int \frac{z^5\,dz}{1+z} =$$

$$= 4\left(\frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z\right) - 4\log|z+1|, \text{ zatem}$$

$$I = \tfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - x + \tfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 4\log\left(\sqrt[4]{x}+1\right).$$

Uwaga 1.

Podobnie postępujemy, jeżeli pod całką występuje dwumian $ax + b$ w rozmaitych potęgach ułamkowych.

Podstawieniem $ax + b = z^p$ (p jak poprzednio) uwalniamy się od potęg ułamkowych.

Przykład:

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}; \quad x + 1 = z^2, \quad dx = 2\,z\,dz,$$

więc $$I = \int \frac{2\,z\,dz}{(z^2-1)\,z} = 2\int \frac{dz}{z^2-1} = \log\left|\frac{z-1}{z+1}\right|,$$

zatem $$I = \log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|.$$

Uwaga 2.

Jeżeli pod całką występuje wyrażenie $\frac{ax+b}{a'x+b'}$, w rozmaitych potęgach ułamkowych, wówczas podstawieniem $\frac{ax+b}{a'x+b'} = z^p$ (p jak poprzednio) uwalniamy się od potęg ułamkowych.

Przykład:

$$I = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx; \quad \frac{1+x}{x} = z^2; \quad x = \frac{1}{z^2-1};$$

$$dx = -\frac{2\,z\,dz}{(z^2-1)^2},$$

więc $$I = \int (z^2-1)\,.\,z\,.\,\frac{-2\,z\,dz}{(z^2-1)^2} = -2\int \frac{z^2}{z^2-1}\,dz =$$

$$= -2\,z - \log\left|\frac{z-1}{z+1}\right|,$$

zatem $$I = -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \log\left|x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|.$$

§ 2. Całki dwumienne. Całki typu:

$$\int x^m (ax^n + b)^p\, dx,$$

gdzie m, n, p są liczbami wymiernemi nazywamy całkami dwumiennemi.

Jeżeli p jest liczbą całkowitą, wówczas wyznaczamy całkę metodą podaną w § 1.

Przypuśćmy teraz, że p nie jest liczbą całkowitą. Podstawmy:

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz.$$

Jeżeli $z > 0$, wówczas:

$$\int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1} (az+b)^p\, dz =$$

$$= \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}+p-1} \left(\frac{az+b}{z}\right)^p dz.$$

Widzimy zatem, że, jeżeli $\frac{m+1}{n}$ jest liczbą całkowitą wówczas całkę dwumienną przekształcimy na całkę funkcji wymiernej podstawieniem:

$$az + b = t^\alpha \quad (\alpha \text{ jest mianownikiem liczby } p).$$

Jeżeli zaś $\frac{m+1}{n} + p$ jest liczbą całkowitą, wówczas dojdziemy do funkcji wymiernej podstawieniem

$$\frac{az+b}{z} = t^\alpha \quad (\alpha \text{ jak wyżej}).$$

A więc całkę dwumienną można sprowadzić do całki funkcji wymiernej, jeżeli jedna z liczb

$$p, \quad \frac{m+1}{n}, \quad \frac{m+1}{n} + p$$

jest liczbą całkowitą.

Przykład:

$$I = \int x^3 (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx.$$

mamy tu $m = 3$, $n = 2$, $p = -\frac{3}{2}$. Ponieważ $\frac{m+1}{n} = 2$, więc całkę powyższą sprowadzimy do całki funkcji wymiernej.

Połóżmy: $$x^2 = z,$$

$$x\,dx = \tfrac{1}{2}\, dz,$$

zatem $$I = \tfrac{1}{2} \int z (1 - z)^{-\frac{3}{2}}\, dz.$$

Połóżmy teraz $1 - z = t^2$, $(t > 0)$,

$$dz = -2\, t\, dt,$$

więc $$I = -\int \frac{1 - t^2}{t^2}\, dt = \frac{1}{t} + t = \frac{1}{\sqrt{1-z}} + \sqrt{1-z}.$$

zatem $$I = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = \frac{2 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

§ 3. Całkowanie funkcyj wymiernych $R(x, y)$ *), ($y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$).

Całkowanie funkcji wymiernej $R(x, y)$, ($y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$) sprowadzamy do całki z funkcji wymiernej jednem z następujących trzech podstawień:

1) $a > 0$.

Połóżmy $$\sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a} = t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

stąd $$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\,x\sqrt{a}\,t + t^2,$$

więc $$bx + c = 2\,x\sqrt{a}\,t + t$$

Zatem podstawiając: $$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,t}$$

---

*) Funkcją wymierną $R(x, y)$ dwu zmiennych nazywamy funkcję, określoną jako iloraz dwu wielomianów zmiennych (x, y), w punktach, w których mianownik jest różny od zera. Przyjmujemy zawsze milcząco, że współczynniki wielomianów są rzeczywiste i że wielomiany te są względnie pierwsze.

otrzymujemy: $$dx = 2\frac{-\sqrt{a}\,t^2 + bt - \sqrt{a}\,c}{(b - 2\sqrt{a}\,t)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t = \frac{-\sqrt{a}\,t^2 + bt - \sqrt{a}\,c}{b - 2\sqrt{a}\,t}.$$

Przy powyższem więc podstawieniu wyrażamy

$$x, \ \sqrt{ax^2 + bx + c}, \ dx$$

wymiernie zapomocą zmiennej t, zatem $\int R(x, y)\,dx$ przejdzie w całkę funkcji wymiernej zmiennej t.

Przykład:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}.$$

Ponieważ $a = 1 > 0$,

więc kładziemy: $\sqrt{x^2 + 6x + 5} - x = t$,

stąd $$x = \frac{t^2 - 5}{6 - 2t},$$

$$dx = 2\frac{-t^2 + 6t - 5}{(6 - 2t)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2 + 6x + 5} = \frac{-t^2 + 6t - 5}{6 - 2t},$$

a więc $$I = \int \frac{2\,dt}{6 - 2t} = -\log|3 - t|,$$

zatem $$I = -\log|3 + x - \sqrt{x^2 + 6x + 5}|.$$

2) $c \geqslant 0$.

Połóżmy $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$,

stąd $$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c,$$

$$ax + b = xt^2 + 2t\sqrt{c}.$$

Zatem podstawiając: $x = \dfrac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}$, otrzymujemy: $dx = 2\dfrac{\sqrt{c}\,t^2 - bt + a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}\,dt,$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}\,t^2 - bt + a\sqrt{c}}{a-t^2}.$$

A więc i teraz po podstawieniu, $\int R(x,y)\,dx$ przechodzi na całkę funkcji wymiernej.

Przykład:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-3x+4}}; \quad \text{mamy } c = 4 > 0.$$

Połóżmy: $\sqrt{-x^2-3x+4} = xt + 2,$

stąd $\quad x = -\dfrac{4t+3}{1+t^2}; \quad dx = 2\dfrac{2t^2+3t-2}{(t^2+1)^2}\,dt,$

$$\sqrt{-x^2-3x+4} = -\frac{2t^2+3t-2}{t^2+1},$$

więc $\quad I = -\displaystyle\int \frac{2\,dt}{t^2+1} = -2\,\mathrm{arc\,tg}\,t,$

zatem $\quad I = -2\,\mathrm{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{-x^2-3x+4}-2}{x}.$

3) $b^2 - 4ac > 0.$

Oznaczając przez α, β, pierwiastki równania $ax^2+bx+c=0$, mamy $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$.

Połóżmy

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = t(x-\alpha),$$

stąd $\quad a(x-\alpha)(x-\beta) = t^2(x-\alpha)^2,$

$$a(x-\beta) = t^2(x-\alpha),$$

zatem podstawiając: $x = \dfrac{a\beta - \alpha t^2}{a-t^2},$

otrzymujemy:

$$dx = \frac{2a(\beta - \alpha)t}{(a - t^2)^2}\,dt, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\beta - \alpha)t}{a - t^2}.$$

A więc przy powyższem podstawieniu, $\int R(x, y)\,dx$ przechodzi znowu w całkę funkcji wymiernej.

Przykład:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x - 3}}.$$

Mamy: $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$;
ponieważ $\quad -x^2 + 4x - 3 = -(x-1)(x-3)$,
więc połóżmy: $\sqrt{-(x-1)(x-3)} = (x-1)t$.

Stąd:

$$x = \frac{t^2 + 3}{t^2 + 1}, \quad dx = -\frac{4t\,dt}{(t^2 + 1)^2}; \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{2t}{t^2 + 1};$$

a więc

$$I = -\int \frac{2\,dt}{t^2 + 1} = -2 \operatorname{arc\,tg} t = -2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x-3}{1-x}}.$$

Uwaga.

Jeżeli $a < 0$ i $c < 0$, wówczas zawodzą dwa pierwsze podstawienia. W tym wypadku możemy zawsze użyć podstawienia trzeciego. Gdyby bowiem było $a < 0$, $c < 0$ i $b^2 - 4ac < 0$ wówczas wielomian $ax^2 + bx + c$ byłby stale ujemny, zatem $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ byłby dla każdego x liczbą zespoloną.

§ 4. Niektóre szczególne przypadki całek funkcyj wymiernych $R(x, y)$ $[y = \sqrt{ax^2 + bx + c}]$.

1) Całkę kształtu:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad c < 0, \quad b^2 - 4ac > 0,$$

możemy obliczyć również w następujący sposób:

Mamy

$$ax^2+bx+c=-\left(x\sqrt{|a|}-\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2+\frac{b^2-4ac}{4|a|}.$$

Połóżmy $\left(x\sqrt{|a|}-\frac{b}{2\sqrt{|a|}}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4|a|}z^2,$

czyli $$x=\frac{b}{2|a|}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}z.$$

Zatem:

$$dx=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}dz, \quad ax^2+bx+c=\frac{b^2-4ac}{4|a|}(1-z^2).$$

więc $$I=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\operatorname{arc\,sin} z,$$

zatem $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\frac{1}{\sqrt{|a|}}\operatorname{arc\,sin}\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Przykład:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{5x-6x^2-1}}.$$

$$5x-6x^2-1=-\left(x\sqrt{6}-\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2+\tfrac{1}{24}.$$

Połóżmy: $\left(x\sqrt{6}-\frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2=\tfrac{1}{24}z^2,$

więc podstawiamy $x=\tfrac{5}{12}+\tfrac{1}{12}z$; $dx=\tfrac{1}{12}dz$;

$$5x-6x^2-1=\tfrac{1}{24}(1-z^2),$$

a zatem

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-6x^2-1}}=\int\frac{\tfrac{1}{12}dz}{\frac{1}{2\sqrt{6}}\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,sin} z.$$

więc $$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-6x^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \arcsin(12x-5) = -\frac{1}{\sqrt{6}} \arcsin(-12x+5).$$

2) $$I = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Połóżmy $x - a = \frac{1}{z}$, czyli $x = a + \frac{1}{z}$.

Jeżeli $x > a$, wówczas $z > 0$, zatem dla $x > a$ otrzymamy:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\frac{Lz^2+Mz+N}{z^2}} = \frac{1}{z}\sqrt{Lz^2+Mz+N}$$

$$(L = aa^2+ba+c,\ M = 2aa+b,\ N = a).$$

Ponieważ $$dx = -\frac{dz}{z^2},$$

więc $$I = -\int \frac{dz}{\sqrt{Lz^2+Mz+N}} \quad (x > a).$$

Podobnie postępując otrzymamy:

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{Lz^2+Mz+N}} \quad (x < a).$$

Przykład:

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Połóżmy $$x - 1 = \frac{1}{z},$$

stąd $x = 1 + \frac{1}{z}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$, $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\frac{2z^2+2z+1}{z^2}}$,

zatem dla $x > 1$, $z > 0$, więc $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{z}\sqrt{2z^2+2z+1}$, stąd $$I = -\int \frac{dz}{\sqrt{2z^2+2z+1}}.$$

Stosując do ostatniej całki podstawienie

$$\sqrt{2z^2+2z+1} = \sqrt{2}\,z + t \quad \text{(str. 35).}$$

otrzymamy $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \log (4z + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{2z^2+2z+1})$.

Kładąc wreszcie $z = \frac{1}{x-1}$, otrzymamy dla $x > 1$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{2x+2-2\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x-1} \right|$$

Można łatwo sprawdzić, że powyższy wzór zachodzi również dla $x < 1$.

3) $$I = \int \frac{A x\,dx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{a x^2+c}}.$$

Całkę powyższą obliczamy podstawiając

$$\sqrt{ax^2+c} = t.$$

Mamy: $ax^2 + c = t^2$, $x^2 = \frac{t^2-c}{a}$, $x\,dx = \frac{1}{a}\,t\,dt$.

Zatem $$I = \int \frac{A\,dt}{\alpha t^2 + (a\gamma - \alpha c)}.$$

Całkę ostatnią obliczamy w sposób poznany w rozdz. II.

Przykład:

$$I = \int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}.$$

Połóżmy $$\sqrt{x^2+4} = t.$$

Stąd $$I = \int \frac{dt}{2t^2-7} = \frac{1}{2\sqrt{14}} \log \left| \frac{t-\sqrt{\frac{7}{2}}}{t+\sqrt{\frac{7}{2}}} \right|,$$

więc
$$I=\frac{1}{2\sqrt{14}}\log\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{\frac{7}{2}}}.$$

4) $$I=\int\frac{A\,dx}{(ax^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}.$$

Podstawmy: $$\sqrt{ax^2+c}=xt,$$

stąd $$x^2=\frac{c}{t^2-a},\qquad \text{zatem}\qquad x\,dx=-\frac{ct\,dt}{(t^2-a)^2},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2+c}}=\frac{dx}{xt}=\frac{x\,dx}{x^2t}=-\frac{dt}{t^2-a},$$

a więc $$I=-\int\frac{A\,dt}{\gamma t^2+(ac-\gamma a)}.$$

Przykład:

$$I=\int\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+4}}.$$

Kładąc $\sqrt{x^2+4}=xt$, otrzymujemy, jak poprzednio

$$x^2=\frac{4}{t^2-1},\qquad \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{dt}{1-t^2},$$

zatem $$I=-\int\frac{dt}{t^2+7}=-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{7}}.$$

Ponieważ $t=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$, więc $I=-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{7}}$.

Uwaga.

Całkę typu: $$\int\frac{Ax+B}{(ax^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}}\,dx$$

wyznaczamy, rozbijając ją na sumę dwóch całek typów 3) i 4).

5) $$I = \int \frac{(Ax+B)\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$(\beta^2 - 4\,\alpha\gamma < 0, \quad a \neq 0)$.

Całkę powyższą staramy się sprowadzić do całki typu

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(\alpha x^2+\gamma)\sqrt{ax^2+c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

a) Jeżeli $\alpha : a = \beta : b$, wówczas podstawieniem

$$x = -\frac{b}{2a} + z$$

sprowadzamy naszą całkę do typu (1).

b) Jeżeli α, β nie są proporcjonalne do liczb a, b czyli, jeżeli $\alpha b - a\beta \neq 0$, wówczas podstawiamy:

$$x = \frac{pz+q}{z+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Liczby p i q tak dobieramy, by naszą całkę sprowadzić do całki typu (1).

Przy powyższem podstawieniu otrzymamy:

$$I = \pm \int \frac{(Lz+M)\,dz}{(\alpha_1 z^2+\beta_1 z+\gamma_1)\sqrt{a_1 z^2+b_1 z+c_1}}$$

(znak zależy od tego, czy $z > -1$, czy też $z < -1$),

gdzie $L = (Ap+B)(p-q)$, $M = (Aq+B)(p-q)$,

$\alpha_1 = \alpha p^2 + \beta p + \gamma$, $\quad a_1 = ap^2 + bp + c$,

$\beta_1 = 2\alpha pq + \beta(p+q) + 2\gamma$, $\quad b_1 = 2apq + b(p+q) + 2c$,

$\gamma_1 = \alpha q^2 + \beta q + \gamma$, $\quad c_1 = aq^2 + bq + c$.

Wyznaczamy więc p, q tak, by $\beta_1 = 0$ i $b_1 = 0$.

Należy w tym celu rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} 2\alpha pq + \beta(p+q) + 2\gamma &= 0 \\ 2apq + b(p+q) + 2c &= 0 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Można wykazać, że równania (3) mają rozwiązania rzeczywiste, jeżeli $\alpha b - a\beta \neq 0$ i $\beta^2 - 4\,\alpha\gamma < 0$.

Przykłady:

a) $$I=\int\frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+2x+6)\sqrt{2x^2+4x-1}}.$$

Ponieważ współczynniki wielomianów x^2+2x, $2x^2+4x$ są proporcjonalne, więc podstawiamy

$$x=-\frac{4}{2\,.\,2}+z=z-1.$$

Przy tem podstawieniu otrzymamy

$$I=\int\frac{(2z-1)\,dz}{(z^2+5)\sqrt{2z^2-3}}.$$

b) $$I=\int\frac{(2x-5)\,dx}{(3x^2-10x+9)\sqrt{5x^2-12x+8}}.$$

Użyjemy podstawienia $x=\dfrac{pz+q}{z+1}$.

Liczby p i q wyznaczymy z równań (3) [str. 43].

$$6pq-10(p+q)+18=0,$$
$$10pq-12(p+q)+16=0,$$

stąd $pq=2$, $p+q=3$, więc $p=1$, $q=2$.

Podstawiając więc $x=\dfrac{z+2}{z+1}=1+\dfrac{1}{z+1}$,

otrzymamy dla $z>-1$, t. j. $x>1$

$$I=\int\frac{(3z+1)\,dz}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}}=3\int\frac{z\,dz}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}}+$$
$$+\int\frac{dz}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}}.$$

Całki ostatnie obliczyliśmy w przykładach do typów 3) i 4), (str. 41, 42).

Zatem:

$$I=\frac{3}{2\sqrt{14}}\log\frac{\sqrt{z^2+4}-\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{z^2+4}+\sqrt{\frac{7}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{z^2+4}}{z\sqrt{7}};$$

ponieważ $z=-\dfrac{x-2}{x-1}$ i $\sqrt{z^2+4}=\dfrac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{x-1}$,

więc
$$I=\frac{3}{2\sqrt{14}}\log\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}-(x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{5x^2-12x+8}+(x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{(x-2)\sqrt{7}}\quad .\ .\ .\ .\quad (1)$$

Formuła powyższa ważną jest dla $x>1$.

Przyjmując teraz, że w podstawieniu $x=\dfrac{z+2}{z+1}$ $z<-1$, a zatem $x<1$, otrzymujemy

$$I=-\frac{3}{2\sqrt{14}}\log\frac{\sqrt{z^2+4}-\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{z^2+4}+\sqrt{\frac{7}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{z^2+4}}{z\sqrt{7}}.$$

Ponieważ $z=-\dfrac{x-2}{x-1}$, $\sqrt{z^2+4}=-\dfrac{\sqrt{5z^2-12x+8}}{x-1}$,

więc
$$I=\frac{3}{2\sqrt{14}}\log\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}-(x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{5x^2-12x+8}+(x-1)\sqrt{\frac{7}{2}}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{5x^2-12x+8}}{(x-2)\sqrt{7}}.$$

Widzimy więc, że formuła (1) jest prawdziwa dla wszystkich wartości zmiennej x. (Dla $x=1$ ważna z powodu ciągłości pochodnej i funkcji podcałkowej).

§ 5. Uwagi tyczące się przekształcenia całki $\int R(x,y)\,dx$. Jakkolwiek podstawienia podane w § 3 sprowadzają całkę $\int R(x,y)\,dx$ do całki funkcji wymiernej, to jednak częstokroć celem uniknięcia żmudnych rachunków, dogodną jest rzeczą funkcję $R(x, y)$ odpowiednio przekształcić.

Zauważmy, że jeżeli n jest liczbą naturalną, zaś

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \text{ wówczas}$$

$$y^{2n} = (ax^2 + bx + c)^n, \quad y^{2n+1} = y^{2n} \cdot y = (ax^2 + bx + c)^n y.$$

Widzimy stąd, że wszelki wielomian $H(x, y)$ zmiennych x, y da się przedstawić w postaci

$$H(x, y) = W_1(x) + y W_2(x),$$

gdzie $W_1(x)$ i $W_2(x)$ są wielomianami zmiennej x. A zatem funkcja wymierna $R(x, y)$, jako iloraz dwóch wielomianów, da się przedstawić w postaci:

$$R(x, y) = \frac{W_1(x) + y W_2(x)}{W_3(x) + y W_4(x)},$$

gdzie W_1, W_2, W_3, W_4 są pewnemi wielomianami.

Mnożąc licznik i mianownik przez $W_3(x) - y W_4(x)$, z uwagi na to, że $[W_3(x) - y W_4(x)][W_3(x) + y W_4(x)] = W_3^2(x) - y^2 W_4^2(x) = P_1(x)$, (gdzie $P_1(x)$ jest wielomianem), otrzymamy

$$R(x, y) = \frac{P_2(x) + y P_3(x)}{P_1(x)} = \frac{P_2(x)}{P_1(x)} + \frac{P_3(x)}{P_1(x)} \cdot y = \frac{P_2(x)}{P_1(x)} + \frac{P_3(x) y^2}{P_1(x) y}.$$

Kładąc więc $\frac{P_2(x)}{P_1(x)} = T(x)$, $\frac{P_3(x) y^2}{P_1(x)} = S(x)$ mamy

$$R(x, y) = T(x) + \frac{S(x)}{y} \quad \ldots \quad (1)$$

Widzimy stąd, że funkcję wymierną $R(x, y)$ ($y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$) możemy zawsze sprowadzić do postaci (1), gdzie $T(x)$ i $S(x)$ są funkcjami wymiernemi.

Przykłady:

1. $$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x-\sqrt{x^3-1})(x+\sqrt{x^2-1})}=$$
$$=2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1},$$

więc $$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=2x^2-1+\frac{2x^3-2x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2. $$\frac{P(x)+Q(x)y}{P(x)-Q(x)y}=\frac{P^2+Q^2y^2+2PQy}{P^2-Q^2y^2}=$$
$$=\frac{P^2+Q^2y^2}{P^2-Q^2y^3}+\frac{2PQy^2}{(P^2-Q^2y^2)y}.$$

Na mocy (1) (str. 46) mamy:

$$\int R(x,y)\,dx=\int T(x)\,dx+\int\frac{S(x)}{y}\,dx.$$

Pierwsza całka po prawej stronie jest to całka z funkcji wymiernej, całkę tę badaliśmy w rozdziale II.

Celem obliczenia całki $\int\frac{S(x)}{y}\,dx$, przedstawiamy funkcję wymierną $S(x)$ w postaci:

$$S(x)=W(x)+\frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie $W(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ są wielomianami, przyczem stopień wielomianu $P(x)$ jest niższy od stopnia wielomianu $Q(x)$. Rozkładając wreszcie funkcje $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na ułamki proste, sprowadzamy obliczenie całki $\int\frac{S(x)}{y}\,dx$ do obliczenia całek kształtu:

$$\int\frac{W(x)}{y}\,dx,\quad\int\frac{dx}{(x-a)^r y},\quad\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^r y}. \qquad (2)$$

Podamy teraz proste metody obliczania całek powyższych typów.

a) Całki typu: $\int \frac{W(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. [$W(x)$ jest wielomianem].

Jeżeli $W(x)$ jest stopnia $n \geqslant 1$, wówczas można wykazać, że całka tego typu da się zawsze przedstawić w postaci:

$$\int \frac{W(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = (Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots$$

$$\ldots + C)\sqrt{ax^2+bx+c} + D\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gdzie $A, B, \ldots C, D$ są odpowiedniemi stałemi.*).

Celem wyznaczenia tych stałych, różniczkujemy obustronnie i mnożymy następnie przez $\sqrt{ax^2+bx+c}$. Porównując z obu stron współczynniki stojące przy równych potęgach zmiennej x otrzymujemy szereg równań, z których stałe $A, B \ldots C, D$ obliczamy.

A zatem $\int \frac{W(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ sprowadzamy do obliczenia całki $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Tę ostatnią wyznaczamy zapomocą jednego z podstawień podanych w § 3 (str. 35).

Przykład:

$$\int \sqrt{5x^2-6x-1}\,dx = \int \frac{5x^2-6x-1}{\sqrt{5x^2-6x-1}}\,dx.$$

Położmy

$$\int \frac{5x^2-6x-1}{\sqrt{5x^2-6x-1}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{5x^2-6x-1} +$$

$$+ C\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-6x-1}},$$

*) Istnienie takiego rozkładu przyjmujemy bez dowodu.

różniczkując obustronnie otrzymujemy

$$\frac{5x^2-6x-1}{\sqrt{5x^2-6x-1}} = A\sqrt{5x^2-6x-1} +$$

$$+\tfrac{1}{2}\frac{(Ax+B)(10x-6)}{\sqrt{5x^2-6x-1}} + \frac{C}{\sqrt{5x^2-6x-1}},$$

mnożąc obustronnie przez pierwiastek i porządkując mamy

$$5x^2-6x-1 = 10Ax^2+(5B-9A)x+(C-A-3B),$$

zatem $10A=5,\ 5B-9A=-6,\ C-A-3B=-1,$

stąd $A=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{3}{10},\quad C=-\frac{7}{5},$

a więc $\int\sqrt{5x^2-6x-1}\,dx =$

$$=\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{10}\right)\sqrt{5x^2-6x-1}-\tfrac{7}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-6x-1}}.$$

Co się tyczy całki ostatniej, to kładąc

$$\sqrt{5x^2-6x-1} = x\sqrt{5}+t$$

otrzymamy:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-6x-1}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|10x-6-2\sqrt{5}\sqrt{5x^2-6x-1}\right|$$

b) Całki typu

$$\int\frac{W(x)\,dx}{(x-a)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

[$W(x)$ jest wielomianem stopnia niższego od r].

Jeżeli $r=1$. to wielomian $W(x)$ redukuje się do stałej; otrzymujemy zatem całkę badaną na str. 40, ustęp 2). Jeżeli $r>1$, można wykazać (dowód pomijamy), że całka tego typu da się przedstawić w postaci:

$$\int \frac{W(x)\,dx}{(x-a)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}=$$

$$=\frac{Ax^{r-2}+Bx^{r-1}+\ldots+C}{(x-a)^{r-1}}\sqrt{ax^2+bx+c}+$$

$$+D\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gdzie A, B, ... C, D są pewnemi stałemi.

Stałe wyznaczamy, jak w przypadku *a)*, str. 48.

Całkę ostatnią obliczamy, jak na str. 40, ustęp 2).

Przykład:

$$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^3}dx=\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\frac{Ax+B}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+1}+C\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Różniczkując obustronnie otrzymujemy:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3\sqrt{x^2+1}}=-\frac{Ax+A+2B}{(x-1)^3}\sqrt{x^2+1}+$$

$$+\frac{Ax+B}{(x-1)^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{C}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$$

mnożąc obustronnie przez $(x-1)^3\sqrt{x^2+1}$ i porządkując mamy:

$$x^2+1=-x^2(2A+B-C)-x(A+B+2C)-(A+2B-C).$$

Zatem
$$2A+B-C=-1,$$
$$A+B+2C=0,$$
$$A+2B-C=-1,$$

stąd $A=-\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{4}$, więc

$$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^3}dx=-\frac{1}{4}\frac{x+1}{(x-1)^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Całkę ostatnią obliczoną mamy na str. 41.

c) Całki typu

$$\int \frac{W(x)\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^r \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

[$W(x)$ jest wielomianem stopnia niższego od $2r$, wielomian zaś $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ma pierwiastki zespolone, czyli $\beta^2-4\alpha\gamma<0$].

Jeżeli $r=1$, to $W(x)$ redukuje się do wielomianu pierwszego stopnia; całka powyższa jest wówczas indentyczna z całką rozpatrywaną na str. 43.

W wypadku, gdy $r>1$ można wykazać, że całka powyższego typu da się przedstawić w postaci:

$$\int \frac{W(x)\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^r \sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{Ax^{2r-3}+Bx^{2r-4}+\ldots C}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^{r-1}} \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+ \int \frac{Dx+E}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,$$

gdzie A, B, ... C, D, E są odpowiedniemi stałemi.

Stałe te oblicza się jak w wypadku *a)*, str. 48.

Całkę $\int \frac{Dx+E}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

obliczamy, jak na str. 43.

Zadania:

1) $$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx = \log \frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6},$$

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx =$

$\displaystyle = 12\left[\tfrac{1}{9}x^{\frac{3}{4}} - \tfrac{1}{7}x^{\frac{7}{12}} + \tfrac{1}{5}x^{\frac{5}{12}} - \tfrac{1}{3}x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{12}} - \operatorname{arc\,tg}\left(x^{\frac{1}{12}}\right)\right].$

3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}\cdot\frac{dx}{(x+2)(3x+5)} = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2x+3}{x+2}},$

4) $\displaystyle\int \frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}\,dx = -\tfrac{3}{5}\sqrt[3]{(3-x)^2}\,\left(\tfrac{19}{2}+x\right),$

5) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2},$

6) $\displaystyle\int x^3\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx = -\tfrac{1}{7}\sqrt{1-x^2}\,[x^6 - \tfrac{8}{5}x^4 + \tfrac{1}{5}x^2 + \tfrac{2}{5}],$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}+3} = -\frac{x}{\sqrt{9+x^2}+3} + \log\left(x+\sqrt{9+x^2}\right),$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sin}\frac{5x-2}{3},$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-2-5x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sin}(6x+5),$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = -2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x},$

11) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{1+x+x^2} -$

$\displaystyle -\tfrac{1}{8}\log\left|1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right|,$

12) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{1-2x-3x^2} +$

$\displaystyle + \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sin}\frac{3x+1}{2},$

13) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + \tfrac{3}{2}\arcsin 2x,$

14) $\displaystyle\int \frac{11x^4-195x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,dx =$

$= \tfrac{1}{4}(11x^3 - 77x^2 + 105x - 175)\sqrt{x^2+6x+5}\,.$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{3x^2-8x+5}} =$

$\displaystyle = \frac{6x-13}{2(x-2)^2}\sqrt{3x^2-8x+5} -$

$\displaystyle - \tfrac{9}{2}\log\left|\frac{2x-3+\sqrt{3x^2-8x+5}}{x-2}\right|,$

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \log\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}},$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x+2}} = -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{2(x+1)^2} +$

$\displaystyle + \tfrac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}\right|,$

19) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{3a+x}{2}\sqrt{2ax-x^2} +$

$\displaystyle + \tfrac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x-a}{a},$

20) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\arccos\frac{1+px}{x+p}$ dla $|p| < 1.$

Rozdział IV.

Całki funkcyj wykładniczych, logarytmicznych trygonometrycznych i cyklometrycznych.

§ 1. Uwagi ogólne.

Bardzo częstym przypadkiem całek powyższych funkcyj jest całka typu

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$$

omawiana w rozdziale I, str. 8.

Przykłady:

1. $I = \int \sin(a^x)\,a^x\,dx \quad (a > 1).$

Kładąc $\quad a^x = t, \quad a^x\,dx \log a = dt$

otrzymujemy: $I = \dfrac{1}{\log a}\int \sin t\,dt = -\dfrac{\cos t}{\log a},$

więc $$I = -\frac{\cos(a^x)}{\log a} + C.$$

2. $I = \int (\log x)^3 \dfrac{dx}{x}.$

Kładąc $\quad \log x = t, \quad \dfrac{dx}{x} = dt$

otrzymujemy: $\quad I = \int t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4, \quad$ więc $\quad I = \frac{1}{4}(\log x)^4$

3. $I = \int e^{\sin x}\cos x\,dx.$

Kładąc $\quad \sin x = t, \quad \cos x\,dx = dt$

otrzymujemy: $\quad I = \int e^t\,dt = e^t, \quad$ więc $\quad I = e^{\sin x} + C.$

4. $I=\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$,

$I=\int \sin^2 x \cos^2 x \cos x\, dx=\int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x) \cos x\, dx.$

Kładąc $\sin x=t$,

mamy $I=\int t^2 (1-t^2)\, dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}$,

więc $I=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C.$

5. $I=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$,

$I=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x}=\int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x}.$

Kładąc $\operatorname{tg} x=t$, mamy: $I=\int t^2\, dt=\frac{t^3}{3}$,

więc $I=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C.$

6. $I=\int (\operatorname{arc} \sin x)^3 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Kładąc $\operatorname{arc} \sin x=t$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt$,

otrzymujemy: $I=\int t^3\, dt=\frac{1}{4} t^4$, więc $I=\frac{1}{4} (\operatorname{arc} \sin x)^4+C.$

§ 2. Całki funkcyj wykładniczych i logarytmicznych.

I. Całki typu: $\int f(a^x)\, dx$,

podstawieniem $a^x=t$, sprowadzamy do całki

$$\frac{1}{\log a}\int \frac{f(t)}{t} dt.$$

Przykład:

$I=\int \sqrt{1-a^x}\, dx.$

Połóżmy $a^x=t$, zatem $I=\frac{1}{\log a}\int \sqrt{1-t}\,\frac{dt}{t}.$

Podstawiając $1 - t = z^2$, otrzymamy:

$$I = -\frac{2}{\log a}\int \frac{z^2 dz}{1 - z^2} = \frac{1}{\log a}\left[2z + \log\left|\frac{1-z}{1+z}\right|\right].$$

Stąd, kładąc $z = \sqrt{1-t} = \sqrt{1-a^x}$, otrzymamy:

$$I = \frac{1}{\log a}\left[2\sqrt{1-a^x} + \log\left|\frac{1-\sqrt{1-a^x}}{1+\sqrt{1-a^x}}\right|\right].$$

II. Całkę typu: $\int W(x)\, a^x\, dx$,

gdzie $W(x)$ jest wielomianem, wyznaczamy metodą całkowania przez części.

Kładąc $u = W(x)$, $du = W'(x)\, dx$,

$$dv = a^x\, dx, \qquad v = \frac{a^x}{\log a},$$

otrzymujemy: $\int W(x)\, a^x\, dx = \frac{W(x)\, a^x}{\log a} - \frac{1}{\log a}\int W'(x)\, a^x\, dx.$

Ponieważ stopień wielomianu $W'(x)$ jest niższy od stopnia $W(x)$, więc postępując tak dalej dojdziemy wreszcie do

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a}.$$

P r z y k ł a d:

$I = \int (x^2 - 2x + 3)\, a^x\, dx.$

Całkując przez części otrzymamy:

$$I = \frac{(x^2 - 2x + 3)\, a^x}{\log a} - \frac{1}{\log a}\int (2x - 2)\, a^x\, dx.$$

Stosujemy do ostatniej całki ponownie metodę całkowania przez części,

zatem: $\int (2x-2)\, a^x\, dx = \frac{(2x-2)\, a^x}{\log a} - \frac{1}{\log a}\int 2a^x\, dx,$

a więc: $I = \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{\log a} - \frac{2x-2}{(\log a)^2} + \frac{2}{(\log a)^3}\right] a^x.$

III. Całkę typu: $\int W(\log x)\,dx$,

gdzie W jest wielomianem, sprowadzamy do całki poprzedniego typu podstawieniem $\log x = t$.

Mamy bowiem $x = e^t$, $dx = e^t\,dt$,

zatem $$\int W(\log x)\,dx = \int W(t)\,e^t\,dt.$$

Przykład:

$$I = \int [(\log x)^2 - 2(\log x) + 3]\,dx.$$

Podstawiamy: $\log x = t$,

zatem $$I = \int [t^2 - 2t + 3]\,e^t\,dt.$$

Całkując przez części, jak w zadaniu poprzedniem

otrzymamy $$I = (t^2 - 4t + 7)\,e^t,$$

zatem $$I = [(\log x)^2 - 4\log x + 7]\,x.$$

IV. Całkę typu: $\int x^n (\log x)^m\,dx$

(m całkowite dodatnie, n całkowite), możemy wyznaczyć podstawieniem $\log x = t$, jeżeli $n = -1$, lub metodą całkowania przez części, jeżeli $n \neq -1$.

Połóżmy mianowicie:

$$u = (\log x)^m, \quad du = m(\log x)^{m-1}\frac{dx}{x},$$

$$dv = x^n\,dx, \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{a więc}$$

$$\int x^n (\log x)^m\,dx = \frac{x^{n+1}(\log x)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n (\log x)^{m-1}\,dx.$$

Postępując tak dalej dojdziemy wreszcie do całki: $\int x^n\,dx$

Całki typu: $\int W(x)(\log x)^m\,dx$ [$m > 0$ całkowite, $W(x)$ wielomian] sprowadzają się do całek poprzednich.

Przykład:

$$I = \int [2x - 3] (\log x)^2 dx.$$

Całkujemy przez części. Zatem

$$u = (\log x)^2, \qquad du = 2 \log x \frac{dx}{x},$$

$$dv = (2x - 3) dx, \qquad v = x^2 - 3x,$$

więc $I = (x^2 - 3x)(\log x)^2 - 2 \int (x - 3) \log x \, dx.$

Całkujemy jeszcze raz przez części. Zatem:

$$\int (x - 3) \log x \, dx = (\tfrac{1}{2} x^2 - 3x) \log x - \int (\tfrac{1}{2} x - 3) dx,$$

więc $I = (x^2 - 3x)(\log x)^2 - (x^2 - 6x) \log x + \frac{1}{2} x^2 - 6x.$

§ 3. Całki funkcyj trygonometrycznych.

1. Jeżeli $R(u, v)$ jest funkcją wymierną zmiennych u, v, wówczas całkę $\int R(\sin x, \cos x) dx$ sprowadzamy do całki funkcji wymiernej podstawieniem

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

Mamy bowiem:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Ponieważ $\qquad x = 2 \operatorname{arc\,tg} t,$

więc $\qquad dx = \dfrac{2\,dt}{1 + t^2}.$

Ponieważ $\sin x$, $\cos x$ i dx wyraża się wymiernie zapomocą zmiennej t, więc $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ przy pomocy tego podstawienia przechodzi w całkę funkcji wymiernej.

Przykład:

1. $I = \int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x}$.

Podstawiamy $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Zatem

$$I = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2} - \frac{4(1-t^2)}{1+t^2}} = \tfrac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{2}t - 1}.$$

czyli $I = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\frac{2}{5}}{t - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{2}{5}}{t+2} \right) dt = \frac{1}{5} \log \left| \frac{t - \frac{1}{2}}{t+2} \right|$.

Więc: $$I = \tfrac{1}{5} \log \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} \right|.$$

II. W niektórych wypadkach chcąc wyznaczyć całkę $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ dojdziemy do celu szybciej, używając innego podstawienia.

a) Jeżeli $R(u, v)$ jest funkcją nieparzystą ze względu na zmienną u, to znaczy, jeżeli mamy $R(u, v) = -R(-u, v)$, wówczas podstawiamy:

$$\cos x = t,$$

$$\sin x = \sqrt{1 - t^2}, \qquad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \qquad (0 < x < \pi)$$

b) Jeżeli $R(u, v)$ jest funkcją nieparzystą ze względu na zmienną v, wówczas podstawiamy:

$$\sin x = t,$$

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}, \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}\right)$$

c) Jeżeli $R(u, v)$ jest funkcją parzystą ze względu na u i v, t. zn. jeżeli:

$$R(u, v) = R(-u, -v),$$

wówczas używamy podstawienia:

$$\operatorname{tg} x = t \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

Przykłady:

1. $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1} dx.$

Funkcja podcałkowa jest nieparzysta ze względu na $\sin x$, gdyż

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 1} = -\frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x + 1},$$

podstawiamy więc $\cos x = t$.

Zatem: $I = \int \frac{t^2-1}{t^2+1} dt = \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt = t - 2 \operatorname{arc\,tg} t.$

A więc: $I = \cos x - 2 \operatorname{arc\,tg} (\cos x).$

2. $I = \int \frac{\cos^3 x}{4 \sin^2 x - 1} dx.$

Funkcja podcałkowa jest nieparzystą ze względu na $\cos x$, używamy więc podstawienia $\sin x = t$.

Mamy zatem:

$$I = \int \frac{1-t^2}{4t^2-1} dt = \int \left[-\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{8} \frac{1}{2t-1} - \tfrac{3}{8} \frac{1}{2t+1}\right] dt,$$

więc $$I = -\tfrac{1}{4}\,t + \tfrac{3}{16}\log\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right|,$$

a więc $$I = -\tfrac{1}{4}\sin x + \tfrac{3}{16}\log\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right|.$$

3. $$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa jest parzysta ze względu na $\sin x$ i $\cos x$, więc podstawiamy $\operatorname{tg} x = u$.

Mamy zatem

$$I = \int \frac{du}{u^2 - 4u + 5} = \int \frac{du}{(u-2)^2+1} = \operatorname{arc\,tg}(u-2),$$

więc $$I = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x - 2).$$

III. Jeżeli mamy obliczyć całkę typu

$$\int \sin^s x \cos^k x\, dx \quad (s \text{ i } k \text{ całkowite}),$$

wówczas z ustępu II, str. 59 wynika, że

gdy s jest nieparzyste, to podstawiamy $\cos x = t$,
„ k „ „ „ „ $\sin x = t$,
gdy s i k jest parzyste, to podstawiamy $\operatorname{tg} x = t$.

Jeżeli s i k nie są liczbami całkowitemi, wówczas podstawiając $\sin x = t$, otrzymamy:

$$\int \sin^s x \cos^k x\, dx = \int t^s (1-t^2)^{\frac{k-1}{2}}\, dt.$$

Ostatnia całka jest całką dwumienną, którą umiemy wyznaczać w wypadku, gdy jedna z liczb $\frac{s+1}{2}$, $\frac{k-1}{2}$, $\frac{s+k}{2}$ jest liczbą całkowitą (str. 34).

P r z y k ł a d:

$$I = \int \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx = \int \sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{-\frac{1}{2}} x\, dx.$$

Ponieważ $\frac{s+k}{2} = 0$, więc całkę obliczamy podstawiając:

$$\sin x = t,$$

zatem $$I = \int t^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)^{-\frac{3}{4}} \, d t.$$

Kładąc $t = \sqrt{z}$, mamy $I = \frac{1}{2} \int z^{-1} \left(\frac{1-z}{z}\right)^{-\frac{3}{4}} dz.$

Podstawiając wreszcie $\dfrac{1-z}{z} = w^4$

otrzymujemy $$I = -2 \int \frac{dw}{w^4 + 1}.$$

Rozbijając funkcję podcałkową na ułamki proste*) i całkując otrzymamy

$$\int \frac{dw}{w^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{1 + w\sqrt{2} + w^2}{1 - w\sqrt{2} + w^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{w\sqrt{2}}{1 - w^2}.$$

Ponieważ

$$w = \sqrt[4]{\frac{1-z}{z}} = \sqrt[4]{\frac{1-t^2}{t^2}} = \sqrt[4]{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{\cot x},$$

więc

$$I = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{1 + \sqrt{2 \cot x} + \cot x}{1 - \sqrt{2 \cot x} + \cot x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2 \cot x}}{1 - \cot x},$$

IV. Całkę typu: $\int W(x) \cdot \sin mx \, dx$,

gdzie $W(x)$ jest wielomianem, wyznaczamy metodą całkowania przez części.

Kładąc bowiem $u = W(x)$, $\quad du = W'(x)\, dx$,

$dv = \sin mx \, dx$, $\quad v = -\frac{1}{m} \cos mx$.

otrzymamy:

$$\int W(x) \sin mx \, dx = -\frac{1}{m} W(x) \cos mx + \frac{1}{m} \int W'(x) \cos mx \, dx.$$

Postępując tak dalej, obniżamy stopień wielomianu i wreszcie dojdziemy do całki $\int \cos mx \, dx$ lub $\int \sin mx \, dx$.

---

*) $w^4 + 1 = (w^2 + w\sqrt{2} + 1)(w^2 - w\sqrt{2} + 1)$.

Przykład:

$I = \int (x^2 - 2x + 3) \sin 2x \, dx.$

Całkujemy przez części, zatem

$I = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3) \cos 2x + \frac{1}{2} \int (2x - 2) \cos 2x \, dx,$

$\int (2x - 2) \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}(2x - 2) \sin 2x - \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x \, dx,$

więc

$$I = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3) \cos 2x + \frac{1}{2}(x - 1) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x.$$

Uwaga.

Funkcję $\sin^k x$ ($k > 0$ całkowite) można zawsze przedstawić w postaci sumy sinusów i cosinusów wielokrotności x.

Mamy, jak wiadomo:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x,$$

stąd $\sin^3 x = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x \sin x.$

Ale $\cos 2x \sin x = \frac{1}{2} \sin (2x + x) - \frac{1}{2} \sin (2x - x).$

a więc $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$

Ogólnie, mając już takie przedstawienie dla $\sin^k x$, otrzymamy z niego analogiczny wzór na $\sin^{k+1} x$ przez pomnożenie obu stron przez $\sin x$ i uwzględnienie związków:

$$\sin x \cos vx = \frac{1}{2} \sin (v + 1) x - \frac{1}{2} \sin (v - 1) x,$$
$$\sin x \sin vx = \frac{1}{2} \cos (v - 1) x - \frac{1}{2} \cos (v + 1) x.$$

Wynika stąd, że całka typu $\int W(x) \sin^k x \, dx$ ($k > 0$ całkowite) sprowadza się do całki typu poprzedniego.

Przykład:

$I = \int (x^3 - 1) \sin^2 x \, dx.$

Ponieważ $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x,$

zatem $I = \frac{1}{2} \int (x^3 - 1) \, dx - \frac{1}{2} \int (x^3 - 1) \cos 2x \, dx.$

Stosując do drugiej całki metodę całkowania przez części, mamy:

$$\int (x^3-1) \cos 2x\, dx = \tfrac{1}{2}(x^3-1) \sin 2x - \tfrac{3}{2}\int x^2 \sin 2x\, dx,$$

$$\int x^2 \sin 2x\, dx = -\tfrac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x\, dx,$$

$$\int x \cos 2x\, dx = \tfrac{1}{2} x \sin 2x + \tfrac{1}{4}\cos 2x,$$

zatem
$$I = \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}[2x^3 - 3x - 2] \sin 2x -$$
$$- \tfrac{3}{16}[2x^2-1] \cos 2x.$$

§ 4. Całki funkcyj cyklometrycznych.

I. $\int f(\text{arc} \sin x)\, dx$ przez podstawienie $\text{arc} \sin x = t$ przechodzi w całkę: $\int f(t) \cos t\, dt$. Jeżeli więc $f(t)$ jest wielomianem, wówczas całkę tę obliczamy metodą całkowania przez części (str. 62).

Przykład:

$I = \int (\text{arc} \sin x)^2\, dx.$

Podstawiamy: $\text{arc} \sin x = t$. Zatem $I = \int t^2 \cos t\, dt$.

Całkując przez części otrzymamy:

$$I = t^2 \sin t - 2\int t \sin t\, dt,$$

$$\int t \sin t\, dt = -t \cos t + \int \cos t\, dt = -t \cos t + \sin t.$$

Zatem $\quad I = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t.$

Ponieważ $\sin t = x, \quad \cos t = \sqrt{1-x^2},$

więc $\quad I = [(\text{arc} \sin x)^2 - 2]\, x + 2\sqrt{1-x^2}\, \text{arc} \sin x.$

II. $\int W(x)\, \text{arc} \sin x\, dx$ (gdzie $W(x)$ jest wielomianem), wyznaczamy metodą całkowania przez części.

Kładąc bowiem $\quad u = \text{arc} \sin x, \quad du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

$$dv = W(x)\, dx, \quad v = \int W(x)\, dx = W_1(x),$$

otrzymujemy:

$$\int W(x)\,\mathrm{arc\,sin}\,x\,dx = W_1(x)\,\mathrm{arc\,sin}\,x - \int \frac{W_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Przykład:

$I = \int 2x\,\mathrm{arc\,sin}\,x\,dx.$

Całkujemy przez części, a więc:

$$I = x^2\,\mathrm{arc\,sin}\,x - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Obliczając ostatnią całkę metodą podaną na str. 48 otrzymamy:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,sin}\,x,$$

więc $I = x^2\,\mathrm{arc\,sin}\,x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,sin}\,x.$

III. $\int W(x)\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$ (gdzie $W(x)$ jest wielomianem) rozwiązujemy metodą całkowania przez części.

Kładąc bowiem: $u = \mathrm{arc\,tg}\,x$, $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$,

$$dv = W(x)\,dx, \quad v = \int W(x)\,dx = W_1(x),$$

mamy:

$$\int W(x)\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx = W_1(x)\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \int \frac{W_1(x)\,dx}{1+x^2}.$$

Przykład:

$I = \int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx.$

Całkujemy przez części. A więc:

$$I = \tfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \tfrac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx.$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \mathrm{arc\,tg}\,x,$$

zatem $\int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x.$

§ 5. Przykłady funkcyj niecałkowalnych elementarnie. Poznaliśmy poprzednio szereg metod, pozwalających w pewnych wypadkach wyrazić całkę nieoznaczoną danej funkcji przez funkcje elementarne. Nie należy jednak sądzić, że potrafimy wyznaczyć w ten sposób całkę nieoznaczoną dowolnej funkcji ciągłej. Można np. udowodnić, że całki:

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx$$

nie dadzą się wyrazić przez funkcje elementarne.

Wykazano również, że całki dwumienne nie dadzą się elementarnie wyrazić, z wyjątkiem trzech wypadków, które poznaliśmy poprzednio (str. 34). Podobnie całka

$$\int \frac{dx}{\sqrt{W(x)}},$$

gdzie $W(x)$ oznacza wielomian trzeciego lub wyższego stopnia, tylko w pewnych wyjątkowych wypadkach wyraża się elementarnie.

Przykłady.

1. Całka $\int \frac{dx}{\log x}$ nie da się wyrazić przez funkcje elementarne. Wprowadzając bowiem nową zmienną przez podstawienie $x = e^y$, otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{\log x} = \int \frac{e^y}{y} dy.$$

Ponieważ całka po prawej stronie nie wyraża się przez funkcje elementarne, to samo dotyczy danej całki.

2. Całka $\int \frac{\sin x}{x^2} dx$ przy pomocy całkowania przez części wyraża się następująco:

$$\int \frac{\sin x}{x^2} dx = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x}{x} dx.$$

Po prawej stronie mamy całkę nie dającą się wyrazić przez funkcje elementarne. A więc i dana całka również nie da się w ten sposób wyznaczyć.

Zadania:

1) $\int \frac{3e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx = \frac{5}{3}\log|e^x-1| + \frac{4}{3}\log(e^x+2)$,

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{1}{2}\log\frac{-1+\sqrt{1+e^{2x}}}{+1+\sqrt{1+e^{2x}}}$,

3) $\int \frac{dx}{a^2e^x+b^2e^{-x}} = \frac{1}{ab}\operatorname{arc\,tg}\frac{ae^x}{b} \quad (a, b \neq 0)$,

4) $\int x^4e^x\,dx = e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)$,

5) $\int e^x(x^2+x+1) = e^x(x^2-x+2)$,

6) $\int [(\log x)^2 - 2\log x]\,dx = x[(\log x)^2 - 4\log x + 4]$,

7) $\int (\log x)^5\,dx = x[(\log x)^5 - 5(\log x)^4 + 20(\log x)^3 -$
$- 60(\log x)^2 + 120\log x - 120]$,

8) $\int x^2(\log x)^2\,dx = \frac{x^3}{3}[(\log x)^2 - \frac{2}{3}\log x + \frac{2}{9}]$,

9) $\int \frac{dx}{3+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$,

10) $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx = 2(\frac{1}{7}\cos^2 x - \frac{1}{3})\cos x\sqrt{\cos x}$,

11) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx = (\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}^3 x$,

12) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\tfrac{2}{7}}\operatorname{tg} x\right)$,

13) $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx =$
$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 2x}{2} + x\right)$.

14) $\int \frac{5+3\sin x+7\cos x}{\sin 2x}\,dx =$
$= \frac{5}{2}\log|\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2}\log \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right| + \frac{7}{2}\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$

15) $\int \sin^5 x\,dx = -\frac{1}{80}\cos 5x + \frac{5}{48}\cos 3x - \frac{5}{8}\cos x,$

16) $\int \cos^2 x \sin^3 x\,dx = \frac{1}{16}[\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{3}\cos 3x - 2\cos x].$

17) $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3}\,\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3}\cot x,$

18) $\int x^3 \cos x\,dx = (3x^2-6)\cos x + (x^3-6x)\sin x,$

19) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\operatorname{tg} x + \log|\cos x|,$

20) $\int (\operatorname{arc\,sin} x)^2\,dx =$
$= x(\operatorname{arc\,sin} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sin} x - 2x,$

21) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\operatorname{arc\,tg} x + \log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}},$

22) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arc\,tg} x\,dx =$
$= (x - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x)\operatorname{arc\,tg} x - \log\sqrt{1+x^2},$

23) $\int \operatorname{arc\,sin} x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x - \sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sin} x.$

Wskazówki:

13) Zamienić najpierw iloczyn cosinusów na sumę. 19) Całkować przez części. 22) Przedstawić licznik ułamka w postaci x^2+1-1 i rozbić na dwie całki, następnie całkować przez części. 23) Całkować przez części.

Rozdział V.

Całka określona (pojedyncza).

§ 1. Definicja całki określonej. Niechaj funkcja $y = f(x)$ będzie określoną i ograniczoną w przedziale (ab) $(a < b)$. Podzielmy przedział (ab) na dowolną liczbę odcinków (niekoniecznie równych) których długości są odp.: $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$.

Niechaj $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ oznaczają punkty wybrane dowolnie, po jednym z każdego odcinka.

Utwórzmy sumę:

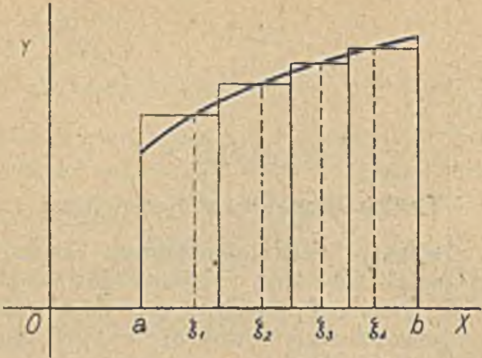
$$A = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Znaczenie geometryczne sumy A jest szczególnie proste, gdy funkcja $f(x)$ jest w przedziale (ab) nieujemną. W tym bowiem wypadku, iloczyn $f(\xi_1)\Delta x_1$ równy jest polu prostokąta o podstawie Δx_1 i wysokości $f(\xi_1)$. Suma A przedstawia zatem łączne pole prostokątów o podstawach $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$ i o wysokościach $f(\xi_1)$, $f(\xi_2), \ldots f(\xi_n)$. (Rys. 1).

Zbiór odcinków $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_n$, nazywać będziemy *podziałem* δ. Długość największego odcinka, wchodzącego w skład podziału δ, oznaczać będziemy symbolem $|\delta|$.

Ciąg podziałów $\{\delta_n\}$ nazywamy ciągiem *normalnym*, jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} |\delta_n| = 0$ innemi słowy, jeżeli długość największego odcinka, wchodzącego w skład podziału δ_n, zdąża do zera, gdy n dąży do nieskończoności.

Dzieląc np. przedział (ab) na dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. równych odcinków, otrzymujemy ciąg normalny podziałów.



Rys. 1.

Obierając dowolny ciąg normalny podziałów $\{\delta_n\}$, i tworząc dla każdego podziału δ_n sumę odpowiednią A_n, otrzymujemy ciąg sum $\{A_n\}$. Dla danego ciągu podziałów $\{\delta_n\}$ możemy otrzymać rozmaite ciągi $\{A_n\}$, zależnie od tego, jakie punkty ξ obierzemy.

Określenie: Jeżeli funkcja $f(x)$ ma tę własność, że przy każdym ciągu normalnym podziałów $\{\delta_n\}$, ciąg sum $\{A_n\}$, jest zbieżny (bez względu na to, jakie punkty ξ obierzemy), wówczas powiadamy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalną w przedziale (a, b).

Wykażemy, że, jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalną, to dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\delta_n\}$ odpowiednie sumy $\{A_n\}$ zdążają zawsze do tej samej granicy.

Przypuśćmy bowiem, że $f(x)$ jest funkcją całkowalną w (ab). Jeżeli obierzemy dwa ciągi normalne podziałów $\{\delta_n\}$ i $\{\delta'_n\}$ i przez $\{A_n\}$, $\{A'_n\}$ oznaczymy odpowiednie ciągi sum, wówczas ciąg podziałów $[\delta_1, \delta'_1, \delta_2, \delta'_2, \ldots \delta_n, \delta'_n, \ldots]$ jest również ciągiem normalnym. Zatem, wedle założenia, ciąg sum $[A_1, A'_1, A_2, A'_2, \ldots]$ jest ciągiem zbieżnym. Ponieważ ciągi częściowe ciągu zbieżnego są zbieżne do tej samej granicy, więc: $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \lim\limits_{n \to \infty} A'_n$.

Widzimy zatem, że ciągi sum $\{A_n\}$ i $\{A'_n\}$ są zbieżne do tej samej granicy.

Wspólną granicę ciągów $\{A_n\}$ odpowiadających ciągom normalnym podziałów, nazywamy **całką określoną** funkcji $f(x)$ w przedziale ab.

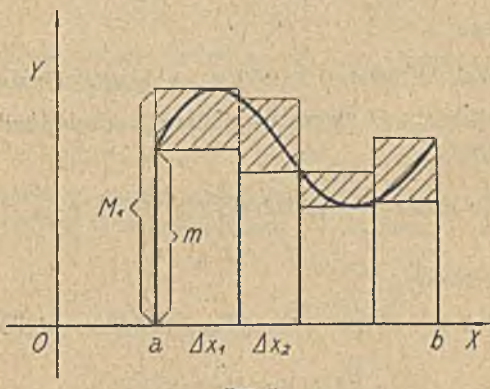
Całkę określoną oznaczać będziemy symbolem:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Uwaga 1.

Niechaj funkcja $y = f(x)$ będzie ciągłą w przedziale zamkniętym (ab). Wykażemy później, że funkcja taka jest funkcją całkowalną. Załóżmy, że $f(x) > 0$ dla $a < x < b$. Oznaczmy przez D obszar zawarty między krzywą, osią $x^{\text{ów}}$ i rzędnemi $x = a$, $x = b$. (Rys. 2).

Utwórzmy dowolny podział δ odcinka (ab). Niechaj M_1, m_1, M_2, m_2, ... oznaczają największe wzgl. najmniejsze wartości, jakie funkcja $f(x)$ przyjmuje w odpowiednich odcinkach podziału δ. Oznaczmy przez $\xi_1, \xi_2 \ldots$



Rys. 2.

wzgl. ξ'_1, ξ'_2 ... punkty, w których funkcja przyjmuje powyższe maxima, wzgl. minima.

Zatem

$$f(\xi_1)=M_1,\ f(\xi_2)=M_2,\ \ldots\ f(\xi'_1)=m_1,\ f(\xi'_2)=m_2,\ \ldots$$

Niechaj:

$$A=f(\xi_1)\,\Delta x_1+f(\xi_2)\,\Delta x_2+\ldots=M_1\,\Delta x_1+M_2\,\Delta x_2+\ldots$$
$$A'=f(\xi'_1)\,\Delta x_1+f(\xi'_2)\,\Delta x_2+\ldots=m_1\,\Delta x_1+m_2\,\Delta x_2+\ldots$$

Prostokąty o podstawach $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots$ i wysokościach odpowiednio M_1, M_2 ... pokrywają obszar D.

Prostokąty zaś o tych samych podstawach, a o wysokościach m_1, $m_2 \ldots$ mieszczą się w obszarze D.

Ponieważ dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\delta_n\}$ mamy:

$$\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty} A'_n=\int_a^b f(x)\,dx,$$

więc postąpimy zgodnie z intuicją, określając pole obszaru D, jako wartość całki:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

U w a g a 2.

W całce określonej $\int_a^b f(x)\,dx$ (w przeciwieństwie do całki nieokreślonej!) zamiast x możemy napisać inne litery.

A więc:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(z)\,dz \quad \text{i t. d.}$$

P r z y k ł a d y:

1. Funkcja $y=c$ jest w każdym przedziale całkowalna i

$$\int_a^b c\,dx=c\,(b-a).$$

Tworząc bowiem jakikolwiek podział δ i obierając punkty $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ dowolnie po jednym z każdego odcinka wchodzącego w skład podziału δ, mamy

$$f(\xi_1) = c, \quad f(\xi_2) = c, \quad \dots$$

zatem $\quad A = c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + \dots = c\,(b-a).$

W myśl zatem definicji:

$$\int_a^b c\,dx = c\,(b-a).$$

Obrazem geometrycznem funkcji $y = c$ jest prosta równoległa do osi $x^{\text{ów}}$. Jeżeli $c > 0$, całka powyższa przedstawia nam pole zawarte między tą prostą osią $x^{\text{ów}}$ i rzędnemi $x = a$, $x = b$.

2. Funkcja $y = x$ jest w każdym przedziale całkowalną i

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Utwórzmy dowolny podział δ odcinka (ab). Obierając punkty $\xi_1, \xi_2 \dots$ dowolnie po jednym z odcinków $\Delta x_1, \Delta x_2 \dots$ podziału δ i kładąc $f(x) = x$ otrzymamy:

$$f(\xi_1) = \xi_1, \quad f(\xi_2) = \xi_2 \dots,$$

zatem $\quad A = \xi_1 \Delta x_1 + \xi_2 \Delta x_2 + \dots + \xi_n \Delta x_n.$

Jeśli oznaczymy przez $x_1, x_2, \dots x_n$ środki odcinków $\Delta x_1, \Delta x_2 \dots \Delta x_n$, to:

$$A = x_1 \Delta x_1 + x_2 \Delta x_2 + \dots + x_n \Delta x_n + (\xi_1 - x_1)\Delta x_1 + \\ + (\xi_2 - x_2)\Delta x_2 + \dots + (\xi_n - x_n)\Delta x_n.$$

Oznaczmy punkty podziału (t. j. końce odcinków wchodzących w skład podziału δ) literami

$$a < a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_n = b.$$

Zatem: $\quad \Delta x_1 = a_1 - a, \quad x_1 = \dfrac{a_1 + a}{2},$

$$\Delta x_2 = a_2 - a_1, \quad x_2 = \frac{a_2 + a_1}{2} \text{ i t. d.}$$

Zatem $x_1 \Delta x_1 + x_2 \Delta x_2 + \dots x_n \Delta x_n =$

$$= \frac{a_1^2 - a^2}{2} + \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} + \dots \frac{b^2 - a_{n-1}^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Więc $$A = \frac{b^2 - a^2}{2} + R,$$

gdzie $|R| = |(\xi_1 - x_1)\Delta x_1 + (\xi_2 - x_2)\Delta x_2 + \dots| \leqslant$
$\leqslant |\xi_1 - x_1||\delta| + |\xi_2 - x_2||\delta| + \dots$

Ponieważ $|\xi_1 - x_1| \leqslant \frac{1}{2}\Delta x_1$, $|\xi_2 - x_2| \leqslant \frac{1}{2}\Delta x_2$ i t. d., więc $|R| \leqslant \frac{1}{2}\Delta x_1 |\delta| + \frac{1}{2}\Delta x_2 |\delta| + \dots = \frac{1}{2}(b - a)|\delta|$.

Jeżeli zatem obierzemy dowolny ciąg normalny podziałów $\{\delta_n\}$, to

$$A_n = \frac{b^2 - a^2}{2} + R_n, \quad \text{przyczem } |R_n| \leqslant \tfrac{1}{2}(b - a)\,|\delta_n|$$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to \infty} |\delta_n| = 0$, więc $\lim R_n = 0$, zatem

$$\lim A_n = \frac{b^2 - a^2}{2}, \quad \text{a więc } \int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Obrazem geometrycznym funkcji $y = x$ jest prosta. Jeżeli $0 < a < b$, to całka określona przedstawia pole zawarte między tą prostą osią $x^{ów}$ i rzędnemi $x = a$, $x = b$; polem tem jest oczywiście trapez.

3. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale (ab) wszędzie, z wyjątkiem skończonej liczby punktów, identycznie równa zeru, wówczas

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Niechaj k oznacza liczbę punktów, w których funkcja jest różna od zera, zaś M maximum funkcji $|f(x)|$ w przedziale (ab). Dla dowolnego podziału δ mamy oczywiście

$$|A| \leqslant 2\,kM\,|\delta|.$$

Jeżeli więc $\{\delta_n\}$ jest dowolnym ciągiem normalnym podziałów, zaś $\{A_n\}$ ciągiem odpowiednich sum, wówczas

$$|A_n| \leqslant 2\,kM\,|\delta_n| \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} |\delta_n| = 0$, więc $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = 0$, zatem

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

§ 2. Niektóre własności całek określonych. Z definicji całki określonej łatwo wynikają następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1.

Suma dwu funkcyj $f(x)$ i $\varphi(x)$ całkowalnych w przedziale (ab) jest funkcją całkowalną i

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Dowód.

Jeżeli δ jest dowolnym podziałem, wówczas mamy

$$A = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots$$
$$A' = \varphi(\xi_1)\,\Delta x_1 + \varphi(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots$$
$$A + A' = [f(\xi_1) + \varphi(\xi_1)]\,\Delta x_1 + [f(\xi_2) + \varphi(\xi_2)]\,\Delta x_2 + \ldots$$

Jeżeli więc $\{\delta_n\}$ jest dowolnym ciągiem normalnym podziałów, wówczas

$$\lim_{n = \infty} (A_n + A'_n) = \lim_{n = \infty} A_n + \lim_{n = \infty} A'_n,$$

więc funkcja $f(x) + \varphi(x)$ jest całkowalna w (ab) i

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Podobnie udowodnić można następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Iloczyn liczby stałej c przez funkcję $f(x)$ całkowalną w (ab) jest funkcją całkowalną i

$$\int_a^b c f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

Przykłady:

1. Opierając się na przykładach § 1, wyznaczyć wartość nastepującej całki:

$$I = \int_0^1 (bx + c)\, dx.$$

Mamy $$I = \int_0^1 bx\, dx + \int_0^1 c\, dx,$$

zatem: $I = b \int_0^1 x\, dx + c \int_0^1 dx,$ więc: $I = \frac{1}{2} b + c.$

2. Jeżeli funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ różnią się w przedziale (ab) tylko w skończonej liczbie punktów, wówczas zakładając, że jedna z nich jest całkowalną, możemy twierdzić, że druga jest również całkowalną i że nadto

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx.$$

Przypuśćmy bowiem, że $\varphi(x)$ jest funkcją całkowalną w (ab). Na mocy przykładu 3, str. 74, mamy:

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\, dx = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Ponieważ:

$$f(x) = [f(x) - \varphi(x)] + \varphi(x)$$

więc funkcja $f(x)$, jako suma dwu funkcyj całkowalnych jest całkowalną i na mocy (1) otrzymujemy żądany związek.

§ 3. Całkowalność funkcji ciągłej. Niechaj funkcja $y = f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$. Utwórzmy dowolny podział δ odcinka (ab). Oznaczmy przez M_1, M_2, ... największe zaś przez m_1, m_2, ... najmniejsze wartości, jakie funkcja $f(x)$ przyjmuje, odpowiednio w odcinkach Δx_1, Δx_2 ... podziału δ. Połóżmy:

$$\begin{aligned} S &= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots \\ s &= m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots \qquad \dots \quad (1) \\ A &= f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots \end{aligned}$$

Liczbę S nazywamy górną sumą, zaś s dolną sumą, odpowiadającą podziałowi δ.

Mamy oczywiście: $s \leqslant A \leqslant S$.

Lemmat 1.

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale (ab), zaś $\{\delta_n\}$ oznacza dowolny normalny ciąg podziałów odcinka (ab), wówczas

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0$$

(S_n, s_n oznaczają sumy górne wzgl. dolne odpowiadające podziałowi δ_n).

Dowód.

Niechaj δ będzie dowolnym podziałem. Zachowując poprzednie znakowania mamy na mocy (1):

$$S - s = (M_1 - m_1) \Delta x_1 + (M_2 - m_2) \Delta x_2 + \dots \qquad (2)$$

Ponieważ funkcja $f(x)$ jest jednostajnie ciągłą w przedziale (ab), więc obierając sobie dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, znaleźć możemy takie $\eta > 0$, że, jeżeli $|\xi' - \xi''| < \eta$, wówczas $|f(\xi') - f(\xi'')| < \varepsilon$. Przypuszczając, że $|\delta| < \eta$ to:

$$M_1 - m_1 < \varepsilon, \quad M_2 - m_2 < \varepsilon, \; \dots$$

A więc:

$$S - s \leqslant \varepsilon \Delta x_1 + \varepsilon \Delta x_2 + \dots = \varepsilon (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots),$$

czyli: $\quad 0 \leqslant S - s \leqslant \varepsilon (b - a)$, jeżeli $|\delta| < \eta$ . . (3)

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} |\delta_n| = 0$, więc istnieje takie N, że dla każdego $n > N$ będzie $|\delta_n| < \eta$. Mamy stąd na mocy (3):

$$0 \leqslant S_n - s_n \leqslant \varepsilon(b-a) \qquad \text{dla } n > N.$$

Ponieważ ε może być dowolną liczbą dodatnią, więc

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0.$$

Lemmat 2.

Niechaj δ i δ' będą dwoma podziałami (ab).

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w (ab), zaś S oznacza górną sumę odpowiadającą podziałowi δ, s' dolną sumę odpowiadającą podziałowi δ', wówczas

$$S \geqslant s'.$$

(czyli każda suma górna jest równa lub większa od jakiejkolwiek sumy dolnej).

Dowód: Niechaj:

$$S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots, \qquad s' = m_1 \Delta x'_1 + m_2 \Delta x'_2 + \ldots,$$

Załóżmy na razie, że $f(x) \geqslant 0$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. (Rys. 2). Niechaj w tym wypadku D oznacza obszar między krzywą $y = f(x)$, osią $x^{\text{ów}}$ i rzędnemi $x = a$ i $x = b$. Łatwo zauważyć, że prostokąty o podstawach $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots$ i wysokościach $M_1, M_2 \ldots$ pokrywają całkowicie obszar D, i że w obszarze D mieszczą się całkowicie wnętrza prostokątów o podstawach $\Delta x'_1$, $\Delta x'_2 \ldots$ i wysokościach odpowiednio $m'_1, m'_2 \ldots$ Wynika stąd, że prostokąty o podstawach Δx_1, $\Delta x_2 \ldots$ pokrywają prostokąty o podstawach $\Delta x'_1, \Delta x'_2 \ldots$ Ponieważ S jest sumą pól pierwszych prostokątów, zaś s' sumą pól drugich, więc

$$S \geqslant s'.$$

Jeżeli teraz funkcja $f(x)$ nie jest funkcją nieujemną w (ab), to kładąc

$$\bar{f}(x) = f(x) - m$$

[m oznacza najmniejszą wartość funkcji $f(x)$]

mamy: $\quad \bar{f}(x) \geqslant 0 \quad$ dla $a \leqslant x \leqslant b$.

Zatem $\bar{S} \geqslant \bar{s}'$, (gdzie $\bar{S}$ oznacza górną sumę funkcji $\bar{f}(x)$, odpowiadającą podziałowi δ, zaś $\bar{s}'$ dolną sumę, odpowiadającą podziałowi δ').

Lecz $\quad \bar{S} = \bar{M}_1 \Delta x_1 + \bar{M}_2 \Delta x_2 + \ldots =$

$$= (M_1 - m)\Delta x_1 + (M_2 - m)\Delta x_2 + \ldots$$

($\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, oznaczają największe wartości funkcji $\bar{f}(x)$ w przedziałach $\Delta x_1, \Delta x_2 \ldots$).

Zatem $\quad \bar{S} = S - m(b - a)$.

Podobnie otrzymamy

$$\bar{s}' = s' - m(b - a).$$

Ponieważ $\quad \bar{S} \geqslant \bar{s}'$,

więc $\quad S - m(b - a) \geqslant s' - m(b - a)$,

czyli $\quad S \geqslant s'$.

Twierdzenie.

Funkcja $y = f(x)$ ciągła w przedziale (ab) jest w tym przedziale całkowalna.

Dowód.

Niechaj $\{\delta_n\}$ oznacza dowolny ciąg normalny podziałów, $\{S_n\}$, $\{s_n\}$ sumy górne wzgl. dolne, odpowiadające podziałom δ_n, zaś $\{A_n\}$ sumy określone w § 1.

Jeżeli p i q są dowolnemi liczbami naturalnemi, wówczas na mocy lemmatu 2

$$S_p \geqslant s_q, \quad S_q \geqslant s_p.$$

A zatem $\quad S_p - S_q \geqslant s_q - S_q$,

$$S_q - S_p \geqslant s_p - S_p.$$

Wynika stąd:

$$-(S_q - s_q) \leqslant S_p - S_q \leqslant S_p - s_p \quad . \quad . \quad (1)$$

Ponieważ na mocy lemmatu (1) $\lim (S_n - s_n) = 0$, więc obierając dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, znajdziemy takie N, że dla $n > N$

$$0 \leqslant S_n - s_n \leqslant \varepsilon.$$

Jeżeli więc $p > N$ i $q > N$, wówczas na mocy (1)

$$-\varepsilon \leqslant S_p - S_q \leqslant \varepsilon,$$

czyli

$$|S_p - S_q| \leqslant \varepsilon.$$

Widzimy stąd, że ciąg $\{S_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, jest więc zbieżny.

Ponieważ: $\quad s_n = S_n - (S_n - s_n)$,

więc na mocy lemmatu 1:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Z uwagi na to, że

$$s_n \leqslant A_n \leqslant S_n$$

wynika na mocy (2) istnienie granicy

$$\lim_{n \to \infty} A_n.$$

A zatem funkcja $f(x)$ jest funkcją całkowalną w przedziale (ab).

§ 4. Niektóre warunki całkowalności. W ustępie tym podamy (bez dowodu) pewne warunki całkowalności funkcyj nieciągłych.

Twierdzenie 1.

Funkcja ograniczona i posiadającą skończoną liczbę punktów nieciągłości w przedziale (ab) jest w tym przedziale całkowalną.

Wynika stąd łatwo, że funkcja ograniczona i posiadająca skończoną liczbę punktów nieciągłości w (ab), jest całkowalna w każdym przedziale częściowym (α, β) $(a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$.

Ważnem jest również następujące:

Twierdzenie 2.

Jeżeli funkcja jest całkowalna w przedziale (a, b), wówczas jest również całkowalna, w każdym przedziale częściowym (α, β) $(a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$.

Przykłady:

1. Funkcja $f(x) = \dfrac{x \log x}{1 - x}$ $(0 < x < 1)$ jest ciągła wewnątrz przedziału $(0, 1)$. Jeżeli określimy ją w końcach przedziału w ten sposób, że $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, to jak łatwo sprawdzić

$$\lim_{x \to +0} f(x) = f(0), \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1).$$

Funkcja ta jest zatem również w końcach przedziału ciągła, a więc całkowalna w przedziale $(0, 1)$.

2. Funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant 1$, $f(0) = 5$, jest funkcją całkowalną w przedziale $(0, 1)$, gdyż posiada w tym przedziale tylko jeden punkt nieciągłości $x = 0$, a ponadto jest ograniczona.

3. Funkcja:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 & \;\;\text{„}\;\; 1 \leqslant x < 2, \\ 3 & \;\;\text{„}\;\; 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$
jest całkowalna w przedziale $(0, 3)$. Jest bowiem ograniczoną i posiada tylko dwa punkty nieciągłości, $x = 1$ i $x = 2$.

§ 5. Rozkładanie przedziału całkowania.

Twierdzenie.

Jeżeli $a < b < c$ i jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale (a, c), wówczas:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Dowód.

Utwórzmy ciąg normalny podziałów $\{\delta_n\}$ odcinka (a, c) taki jednak, by punkt b był punktem podziału każdego δ_n. Oznaczamy przez $\{A_n\}$ ciąg sum odpowiadających podziałowi $\{\delta_n\}$. Sumę A_n możemy przedstawić następująco:

$$A = [f(\xi_1')\,\Delta x_1' + f(\xi_2')\,\Delta x_2' + \ldots] + \\ + [f(\xi_1'')\,\Delta x_1'') + f(\xi_2'')\,\Delta x_2'' + \ldots],$$

gdzie $\Delta x_1'$, $\Delta x_2'$ ..., wzgl. $\Delta x_1''$, $\Delta x_2''$,... oznaczają odcinki podziału δ_n, mieszczące się w (a, b), wzgl. (b, c).

Oznaczając przez A_n' sumę zawartą w pierwszym nawiasie, zaś przez A_n'' sumę w drugim, mamy

$$A_n = A_n' + A_n'' \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Jeżeli założymy, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w (a, c), wówczas na mocy twierdzenia 2, § 4, będzie również całkowalna w (a, b) i (b, c), a ponadto:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \int_a^c f(x)\,dx, \quad \lim_{n\to\infty} A_n' = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n'' = \int_b^c f(x)\,dx.$$

Stąd na mocy (1) wynika nasze twierdzenie.

Przykład:

Niech dana będzie funkcja $f(x)$ określona w przedziale (0, 1) w sposób następujący:

$$f(x) = x \quad \text{dla } 0 \leqslant x < \tfrac{1}{2},$$
$$= 1 \quad \text{,,} \quad \tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1.$$

Funkcja ta jest ograniczona i ciągła w całym przedziale (0, 1) z wyjątkiem punktu $x = \frac{1}{2}$, zatem całkowalna. Mamy:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx.$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1\,.\,dx,$$

$$= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8}.$$

(Por. przykłady do § 1).

§ 6. Niektóre nierówności dla całek określonych.

Twierdzenie.

Jeżeli funkcja całkowalna $y = f(x)$ w przedziale (a, b) spełnia warunek:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \text{dla: } a \leqslant x \leqslant b,$$

wówczas $m\,(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b - a)$.

Dowód.

Dowód wynika z uwagi, że dla każdego podziału δ

mamy: $\quad m\,(b - a) \leqslant A \leqslant M\,(b - a)$.

Uwaga.

Z poprzedniego twierdzenia wynika, że jeżeli $f(x) \geqslant 0$ wówczas

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Możemy bowiem przyjąć $m = 0$.

Wynika stąd łatwo, że jeżeli dla funkcyj $f(x)$ i $\varphi(x)$ całkowalnych w (a, b) zachodzi nierówność

$$f(x) \leqslant \varphi(x), \qquad \text{dla } a \leqslant x \leqslant b,$$

wówczas
$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Mamy bowiem $\varphi(x) - f(x) \geqslant 0$, dla $a \leqslant x \leqslant b$,

zatem
$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]\, dx \geqslant 0,$$

więc
$$\int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0.$$

Stąd zaś wynika nierówność (1).

Przykłady.

1. Przez wyznaczenie extremów łatwo się przekonać, że dla $f(x) = x(1 - x)$ jest

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \tfrac{1}{4} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Przyjmując we wzorze poprzednim $m = 0$, $M = \frac{1}{4}$, otrzymujemy nierówność

$$0 \leqslant \int_0^1 x(1 - x)\, dx \leqslant \tfrac{1}{4}.$$

Istotnie, obliczając całkę w znany sposób, otrzymamy wartość $\frac{1}{6}$, spełniającą tę nierówność.

2. Funkcja $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ jest ciągła w przedziale $(0, 1)$, jeżeli się umówimy, że $f(0) = 1$ (tom I, str. 192, przykład 1). Jak łatwo sprawdzić (por. tom. I, str. 185, zad. 4), funkcja ta osiąga tam minimum dla $x = \frac{1}{e}$, wynoszące $e^{-\frac{1}{e}}$, które jest zarazem jej wartością najmniejszą. Z drugiej strony oczywiście $f(x) \leqslant 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Możemy zatem przyjąć $m = e^{-\frac{1}{e}}$, $M = 1$.

W ten sposób dostajemy nierówność

$$e^{-\frac{1}{e}} \leqslant \int_0^1 x^x \, dx \leqslant 1 \qquad (e^{-\frac{1}{e}} = 0{\cdot}692\ldots).$$

W tym wypadku dokładna wartość całki nie da się elementarnie wyznaczyć.

3. Jeżeli $f(x)$ i $\varphi(x)$ są funkcjami ciągłemi w (a, b), wówczas dla każdego λ

$$I(\lambda) = \int_a^b [f(x) + \lambda \varphi(x)]^2 \, dx \geqslant 0,$$

stąd $$I(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b \varphi^2(x) \, dx + 2\lambda \int_a^b f(x) \varphi(x) \, dx + \int_a^b f^2(x) \, dx \geqslant 0 \ldots \quad (2)$$

Ponieważ wielomian

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c$$

jest tylko wtedy dla każdego λ nieujemny, gdy

$$b^2 - ac \leqslant 0, \quad \text{czyli } b^2 \leqslant ac,$$

zatem na mocy (2)

$$\left[\int_a^b f(x) \varphi(x) \, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x) \, dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x) \, dx \quad . \quad (3)$$

lub $$\left|\int_a^b f(x) \varphi(x) \, dx\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x) \, dx} \quad (4)$$

Dla $\varphi(x) = 1$, otrzymujemy

$$\left|\int_b^a f(x) \, dx\right| \leqslant \sqrt{b - a} \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, dx}.$$

Nierówność (3) wzgl. (4) (która, jak można udowodnić, zachodzi dla każdej pary funkcyj całkowalnych), nosi nazwę nierówności Schwarza.

§ 7. Granice całki. Wprowadźmy następujące określenie: jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w (a, b) $a < b$, wówczas połóżmy:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Twierdzenie.

Jeżeli a, b, c są dowolnemi liczbami, wówczas:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \quad . \quad . \quad (1)$$

pod warunkiem, że wszystkie powyższe całki istnieją.

Dowód.

Jeżeli $a < b < c$, wówczas związek (1) wynika z twierdzenia § 5.

Przypuśćmy, że $a < c < b$. Zatem

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

a więc: $$\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx,$$

stąd: $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Jeżeli przypuścimy, że $a = c$, wówczas twierdzenie jest oczywiste. Mamy bowiem w tym wypadku

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0 = \int_a^a f(x)\,dx.$$

Podobnie, jeżeli $b = c$, lub $a = b$.

Uwaga 1.

Wzór powyższy możemy również napisać w następującej postaci:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0.$$

Uwaga 2.

Liczby a, b występujące w całce

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

nazywamy granicami powyższej całki bez względu na to, czy $a \leqslant b$ lub $a > b$. Liczbę a nazywamy granicą dolną, b zaś granicą górną.

§ 8. Funkcje górnej (dolnej) granicy całki.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalną w (a, b), zaś α jest dowolnym punktem przedziału (a, b), wówczas możemy określić nową funkcję $F(x)$ wzorem:

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Funkcja $F(x)$ będzie określoną dla wszystkich x przedziału (a, b). Funkcja $F(x)$ jest więc funkcją górnej granicy całki z funkcji $f(x)$.

Podobnie możemy rozpatrywać funkcje dolnej granicy całki z funkcji $f(x)$, t. j. funkcję

$$\Phi(x) = \int_x^\alpha f(t)\,dt.$$

Jasną jest rzeczą, że $\Phi(x) = -F(x)$.

Należy pamiętać o tem, że funkcja górnej, względnie dolnej granicy zależy jeszcze od obioru punktu α.

Twierdzenie.

Funkcja $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie przedziału (a, b).

D o w ó d.

Niechaj x_0 i $x_0+\lambda$ będą dowolnemi punktami przedziału (a, b). Mamy:

$$F(x_0+\lambda)-F(x_0)=\int_a^{x_0+\lambda} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=$$

$$=\int_{x_0}^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x_0+\lambda} f(t)\,dt,$$

zatem na mocy twierdzenia § 7

$$F(x_0+\lambda)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(t)\,dt \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Przypuśćmy, że $|f(x)|\leqslant L$ dla $a\leqslant x\leqslant b$.

Na mocy twierdzenia § 6 str. 83 i (1):

$$|F(x_0+\lambda)-F(x_0)|\leqslant L\,|x_0+\lambda-x_0|=L\,|\lambda|.$$

Widzimy stąd, że:

$$\lim_{\lambda\to 0}|F(x_0+\lambda)-F(x_0)|=0.$$

A zatem funkcja $\int_a^x f(t)\,dt$ jest funkcją ciągłą.

U w a g a.

Oczywiście funkcja $\Phi(x)=\int_x^a f(t)\,dt$ jest również funkcją ciągłą, gdyż

$$\Phi(x)=-F(x).$$

P r z y k ł a d y:

1. Całka $F(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$ jest funkcją ciągłą dla $x>0$. Jak łatwo się przekonać [por. tw. 3, § 9] jest $F(x)=\log x$.

2. Podobnie $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ jest funkcją ciągłą dla wszelkich x. (Mamy tutaj $F(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ (por. tw. 3, § 9).

3. Całka $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ $(0<k<1)$ jest również funkcją ciągłą dla $0 \leqslant x < 1$. Funkcja ta jednak nie da się wyrazić przez funkcje elementarne. Jest to t. zw. całka eliptyczna.

4. To samo dotyczy całki $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ciągłej dla wszelkich x. (Dla $t = 0$, jako wartość funkcji podcałkowej przyjmujemy 1).

§ 9. Całka określona a funkcja pierwotna.

Twierdzenie 1.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w (a, b), $a \leqslant \alpha \leqslant b$ i $a \leqslant x \leqslant b$, wówczas pochodna funkcji $\int_\alpha^x f(t)\,dt$ istnieje i równa się funkcji podcałkowej w każdym punkcie, w którym funkcja ta jest ciągła.

Dowód.

Przypuśćmy, że $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie x_0 przedziału (a, b). Obierając zatem dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć takie $\eta > 0$, że dla każdego punktu x przedziału (a, b), spełniającego nierówność

$$|x - x_0| \leqslant \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zachodzić będzie:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon,$$

czyli $$f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Kładąc $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ zauważymy, że

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

zatem. jeżeli x spełnia nierówność (1), wówczas na mocy nierówności (2) i twierdzenia z § 6:

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant f(x_0) + \varepsilon.$$

Ponieważ ε obraliśmy dowolnie, więc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

czyli $F'(x_0)$ istnieje i $F'(x_0) = f(x_0)$.

Z twierdzenia powyższego wynika odrazu następujące:

Twierdzenie 2.

Funkcja $f(x)$ ciągła w przedziale (a, b) posiada w tym przedziale funkcję pierwotną. Funkcją pierwotną jest funkcja

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c.$$

Uwaga.

Twierdzenie (1) można również wypowiedzieć dla funkcji $\Phi(x) = \int_x^a f(t)\,dt$.

Mamy bowiem

$$\int_x^a f(t)\,dt = -\int_a^x f(t)\,dt.$$

Należy jednak zauważyć, że $\Phi'(x) = -f(x)$.

Twierdzenie 3.

Jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ ciągłej w przedziale (a, b), wówczas

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(\alpha), \quad a \leqslant \alpha \leqslant b, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Dowód.

Ponieważ $F(x)$ i $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ są funkcjami pierwotnemi funkcji $f(x)$, więc różnią się tylko o stałą. Zatem

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = F(x) + c.$$

Kładąc $x = \alpha$, otrzymamy $0 = F(\alpha) + c$. Wynika stąd, że $c = -F(\alpha)$, zatem:

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(\alpha).$$

Uwaga.

Kładąc w poprzednim wzorze $x = b$, $\alpha = a$ otrzymamy:

$$\int_{a}^{b} f(t)\,dt = F(b) - F(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wzór powyższy pozwala nam obliczyć całkę określoną, gdy znamy funkcję pierwotną, t. j. całkę nieokreśloną.

Dla krótkości piszemy wzór (1) często w innej postaci:

Np. $\int_{a}^{b} f(t)\,dt = F(t)\Big|_{a}^{b}$

$$\int_{1}^{2} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{1}^{2} = \tfrac{4}{2} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.$$

Przykłady:

1. Wyznaczyć całkę: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx.$

Ponieważ $\int \sin x\, dx = -\cos x$,

więc $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$

2. Wyznaczyć całkę $\int\limits_0^1 x^n\, dx \qquad n > -1.$

Ponieważ $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

więc $\int\limits_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}.$

3. Wyznaczyć całkę $\int\limits_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}\, dx \qquad a > 0.$

Ponieważ $\int \frac{x^2}{a^3+x^3}\, dx = \frac{1}{3}\log(a^3+x^3)$, więc

$$\int\limits_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}\, dx = \tfrac{1}{3}\log 2a^3 - \tfrac{1}{3}\log a^3 = \tfrac{1}{3}\log 2.$$

4. Wyznaczyć całkę $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\, dx.$

Mamy $\frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^4 x\,(1+\operatorname{tg}^2 x).$

Kładąc więc $\operatorname{tg} x = t$ otrzymujemy

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\, dx = \int t^4(1+t^2)\frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^5}{5} = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5},$$

a stąd $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\, dx = \frac{\operatorname{tg}^5\frac{\pi}{4}}{5} - \frac{\operatorname{tg}^5 0}{5} = \frac{1}{5}.$

5. Wyznaczyć całkę $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ (n naturalne).

Dla całki nieoznaczonej $\int \sin^n x\, dx$ otrzymaliśmy (por. str. 15) wzór rekurencyjny

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx.$$

Stąd

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx.$$

Jeżeli $n \geqslant 2$, to pierwszy wyraz po prawej stronie równa się zcro, więc

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Przy pomocy tego wzoru oraz z uwagi na to, że $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ otrzymujemy łatwo przez indukcję

$$I_{2n} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2n+1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}.$$

§ 10. Twierdzenie o wartości średniej (całkowe). Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalną w przedziale (a, b), wówczas wyrażenie:

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\, dx$$

nazywamy wartością średnią funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b).

Ważnem jest następujące:

Twierdzenie (całkowe o wartości średniej).

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona i ciągła wewnątrz przedziału (a, b), wówczas istnieje taki punkt ξ wewnątrz tego przedziału (t. zn. $a < \xi < b$), że:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dowód.

Połóżmy:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{dla } a \leqslant x \leqslant b \quad . \quad . \quad (1)$$

Funkcja $F(x)$ jest funkcją ciągłą w (a, b) i na mocy § 9, posiada wewnątrz tego przedziału wszędzie pochodną:

$$F'(x) = f(x) \qquad a < x < b \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Zatem z twierdzenia o wartości średniej poznanego w rachunku różniczkowym wynika, że istnieje liczba ξ, spełniająca związek:

$$F(b) - F(a) = (b-a)\, F'(\xi) \qquad a < \xi < b \quad . \quad (3)$$

Ponieważ na mocy (1)

$$F(b) = \int_a^b f(t)\, dt, \quad F(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0,$$

więc na mocy (2) i (3)

$$\int_a^b f(t)\, dt = (b-a)\, f(\xi).$$

Stąd otrzymujemy nasze twierdzenie.

Przykłady:

1. Średnia wartość funkcji $f(x) = x(1-x)$ w przedziale (0, 1) wynosi

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \tfrac{1}{6}.$$

Ponieważ jest to funkcja ciągła, więc dla pewnego $x = \xi$ $(0 < \xi < 1)$ mamy $\xi(1-\xi) = \frac{1}{6}$, co łatwo sprawdzić bezpośrednio.

2. Średnia wartość funkcji $f(x) = x \sin x$ w przedziale $(0, \pi)$ wynosi

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 1.$$

Wobec ciągłości tej funkcji, dla pewnego ξ przedziału $(0, \pi)$ jest $\xi \sin \xi = 1$. (Łatwo bezpośrednio udowodnić, że istnieją co najmniej dwie takie wartości ξ).

Zadania.

1) Wyznaczyć następujące całki określone:

a) $$\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{\pi}{4ab},$$

b) $$\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{4 + 2x}} = \frac{9}{5}\sqrt{6} - \frac{64}{15},$$

c) $$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 4} = \frac{1}{3}\log\frac{5}{4},$$

d) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

e) $$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0 \quad \text{przy } m \neq n,$$
$$= \pi \quad \text{„} \quad m = n$$
(m, n całkowite, dodatnie),

f) $$\int_0^1 \operatorname{arc\,sin} x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$g)\ \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$h)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = 1,$$

$$i)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab} \qquad a>0,\ b>0,$$

$$j)\ \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}).$$

2) Wykazać, że średnia wartość promienia wodzącego elipsy

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

równa się połowie jej małej osi. (Jak wiadomo

$$p = \frac{b^2}{a},\quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},$$

gdzie a, b oznaczają połowę dużej i małej osi). Należy wyznaczyć średnią wartość funkcji

$$\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

w przedziale $(0,\ 2\pi)$.

3) Obliczyć średnią wartość funkcji

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$$

w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ i sprawdzić bezpośrednio, że wynik wynoszący $\frac{1}{6}$, jest wartością funkcji $f(x)$ dla pewnego $x = \xi$ tego przedziału.

4) Przyjmując w nierówności

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

za m i M najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x(1-x)^2$ w przedziale (0,1), wykazać, że

$$0 \leqslant \int_0^1 x(1-x)^2\,dx \leqslant \tfrac{4}{27},$$

następnie zaś sprawdzić to bezpośrednio, obliczając całkę.

5) Obliczyć w granicach od 0 do 3 całkę funkcji $f(x)$ określonej w sposób następujący:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x && \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ f(x) &= 0 && \text{,, } 1 < x \leqslant 2, \\ f(x) &= (2-x)^2 && \text{,, } 2 < x \leqslant 3 \end{aligned}$$

i sprawdzić bezpośrednio, że otrzymana funkcja jest ciągła w przedziale (0,3) i że jej pochodna w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału istnieje i równa się $f(x)$.

6) Przy pomocy wzoru na str. 16 (przykład 2) wykazać, że:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2 \cdot 4 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

dla wszystkich naturalnych n.

Rozdział VI.

Przekształcanie całek określonych. Całkowanie ciągów i szeregów.

§ 1. Zamiana zmiennych w całkach określonych. Przypuśćmy, że w całce określonej:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

chcemy użyć podstawienia $x = \varphi(t)$.

Wzór na zamianę zmiennych w całkach określonych jest następujący:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

gdzie $\qquad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$

Wzór powyższy udowodnimy przy założeniach:

1. Funkcje $\varphi(t)$ i $\varphi'(t)$ są ciągłe w (α, β).

2 Funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła dla wszystkich wartości, jakie funkcja $x = \varphi(t)$ przyjmuje w przedziale (α, β).

3. $\varphi(\alpha) = a \qquad \varphi(\beta) = b.$

Dowód.

Oznaczmy przez M wzgl. m największą wzgl. najmniejszą wartość funkcji

$$x = \varphi(t) \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Niechaj $\qquad F(x) = \int f(x)\,dx \qquad m \leqslant x \leqslant M.$

Na mocy twierdzenia o podstawianiu w całkach nieokreślonych (str. 7)

$$F[\varphi(t)] = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \quad \text{dla } \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Stąd

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] =$$
$$= F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Ponieważ $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

więc z porównania ostatnich dwóch równości, otrzymujemy żądany wzór.

Nieraz nie potrafimy wyznaczyć całki nieoznaczonej danej funkcji, a mimo to zdołamy obliczyć całkę określoną w pewnych granicach przy pomocy stosownej zamiany zmiennych.

U w a g a.

Gdybyśmy zamiast założenia 3. mieli

$$\varphi(\beta) = a \qquad \varphi(\alpha) = b$$

wówczas, jak łatwo stwierdzić, mielibyśmy zamiast związku (1)

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F(a) - F(b)$$

Stąd na mocy związku (2)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

P r z y k ł a d y:

1. Wyznaczyć całkę

$$I = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Podstawmy $\sqrt{1+x^2} = t,$

czyli $x = \sqrt{t^2-1}$

Mamy dla $t=1 \quad x=0, \quad t=\sqrt{2} \quad x=1.$

Ponieważ $dx = \dfrac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}},$

więc $I = \int\limits_1^{\sqrt{2}} t^2\,dt = \dfrac{t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

2. Wyznaczyć całkę:

$$\int\limits_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Połóżmy $x = \operatorname{tg} t,\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}.$

Nowe granice całkowania będą, jak łatwo widzieć, 0 i $\frac{\pi}{4}$.

Zatem

$$\int\limits_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(1+\operatorname{tg} t)}{1+\operatorname{tg}^2 t}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\operatorname{tg} t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \log\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \log\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos t} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sqrt{2}\,dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-t\right)dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t\,dt.$$

Kładąc w drugiej całce $\frac{\pi}{4} - t = u,\ dt = -du$, mamy

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-t\right)dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} -\log\cos u\,du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos u\,du.$$

Zatem dwie ostatnie całki się znoszą.

Otrzymujemy więc

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sqrt{2}\,dt = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

3. Wyznaczyć całkę:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Mamy

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Kładąc w drugiej całce $x = \pi - t$, $dx = -dt$, mamy

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt.$$

Pisząc znowu x zamiast t, mamy

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}.$$

Obliczając tę całkę w znany sposób, otrzymujemy ostatecznie

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Zadania:

Wyznaczyć następujące całki oznaczone:

1) $\int_0^1 (1 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{3\pi}{32}.$

Podstawienie $x = \sin^3 \varphi$.

2) $\int_0^a x^2 \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) a^3 \quad (a > 0).$

Podstawienie $x = a \cos \varphi$.

3) $\int_a^{2a} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = \log \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}.$

Podstawienie $x = a \operatorname{tg} \varphi$.

4) $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}.$

Podstawienie $x = 2a \sin^2 \varphi$.

§ 2. Całkowanie przez części. Przypuśćmy, że funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są ciągłe wraz z pochodnemi w przedziale (a, b).

Niechaj $F(x) = f(x)\, \varphi(x).$

Mamy $F'(x) = f(x)\, \varphi'(x) + f'(x)\, \varphi(x).$

Ponieważ $\int_a^b F'(x)\, dx = F(x) \Big|_a^b,$

więc $\int\limits_a^b [f(x)\,\varphi'(x) + f'(x)\,\varphi(x)]\,dx = f(x)\,\varphi(x)\Big|_a^b$.

Stąd

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx = f(x)\,\varphi(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (1)$$

Przykłady:

1. Wyznaczyć całkę:

$$\int\limits_0^\pi x\cos x\,dx.$$

Przyjmując we wzorze (1) $f(x) = x$, zaś $\varphi(x) = \sin x$, otrzymamy

$$\int\limits_0^\pi x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin x\,dx = -2.$$

2. Wyznaczyć całkę:

$$\int\limits_0^1 x^2(1-x)^3\,dx.$$

Przyjmując $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = -\frac{(1-x)^4}{4}$, dostajemy

$$\int\limits_0^1 x^2(1-x)^3\,dx = -x^2\frac{(1-x)^4}{4}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 2x\,.\frac{(1-x)^4}{4}\,dx.$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie równa się zeru. Całkując jeszcze raz przez części, otrzymujemy

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 x(1-x)^4\,dx = -\tfrac{1}{2}x\frac{(1-x)^5}{5}\Big|_0^1 + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^5}{5}\,dx.$$

Pierwszy wyraz znowu odpada, zaś

$$\tfrac{1}{10}\int\limits_0^1 (1-x)^5\,dx = -\tfrac{1}{10}\frac{(1-x)^6}{6}\Big|_0^1 = \tfrac{1}{60}.$$

Zatem $\qquad \int\limits_0^1 x^2(1-x)^3\,dx = \tfrac{1}{60}.$

§ 3. Całkowanie ciągów i szeregów. Udowodnimy twierdzenie następujące:

T w i e r d z e n i e 1.

J e ż e l i c i ą g f u n k c y j $\{u_n(x)\}$ c i ą g ł y c h w p r z e d z i a l e (a,b) z d ą ż a w t y m p r z e d z i a l e j e d n o s t a j n i e d o f u n k c j i $u(x)$, w ó w c z a s c i ą g f u n k c y j $\left\{\int_a^x u_n(t)\,dt\right\}$ z d ą ż a j e d n o s t a j n i e d o f u n k c j i $\int_a^x u(t)\,dt$ w p r z e d z i a l e (a,b).

D o w ó d.

Z jednostajnej zbieżności ciągu $\{u_n(x)\}$ wynika, że funkcja $u(x)$ jest funkcją ciągłą (T. I, str. 215 i 218) i ponadto, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$ dobierzemy taką liczbę N, że dla każdego $n > N$ będzie zachodzić nierówność:

$$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon \qquad \text{dla } a \leqslant x \leqslant b.$$

Zatem dla $n > N$ na mocy § 6, str. 83

$$\left|\int_a^x [u_n(t) - u(t)]\,dt\right| \leqslant \varepsilon(x-a) \leqslant \varepsilon(b-a),$$

czyli $$\left|\int_a^x [u_n(t)\,dt - \int_a^x u(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon(b-a) \qquad \text{dla } a \leqslant x \leqslant b.$$

Ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, więc ostatnia nierówność wskazuje, że ciąg funkcyj: $\left\{\int_a^x u_n(t)\,dt\right\}$ zdąża jednostajnie do funkcji $\int_a^x u(t)\,dt$.

U w a g a.

Z powyższego twierdzenia wynika dla $x = b$

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b u_n(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt.$$

A więc przy ciągu jednostajnie zbieżnym możemy znak całki zamienić ze znakiem granicy.

Analogiczne twierdzenie można wypowiedzieć dla szeregów jednostajnie zbieżnych.

Twierdzenie 2.

Jeżeli funkcje $\{f_n(x)\}$ są ciągłe dla $a \leqslant x \leqslant b$ i jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w (a,b), przyczem $f(x)$ jest sumą tego szeregu, wówczas szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

jest jednostajnie zbieżny i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

W szczególności

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Dowód wynika łatwo z określenia jednostajnej zbieżności szeregu i twierdzenia 1.

Przykłady:

1. Ciąg $\{u_n(x)\}$, gdzie $u_n(x) = x^n$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $u(x) = 0$ w przedziale $(0, \frac{1}{2})$, bo

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Na mocy tw. 1 jest więc

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^x u_n(t)\,dt = \int_0^x u(t)\,dt = 0$$

dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Istotnie, całka:

$$\int_0^x u_n(t)\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

dąży jednostajnie do zera, gdy $n \to \infty$.

2. Połóżmy: $u_n(x) = n^2 x$ dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$,

$$u_n(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \ \frac{1}{n} < x \leqslant 1.$$

Jak łatwo zauważyć, funkcje $u_n(x)$ są ciągłe w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Mamy $u_n(0) = 0$, zatem

$$\lim_{n \to \infty} u_n(0) = 0.$$

Dla $x > 0$ i $n \geqslant \frac{1}{x}$ jest $u_n(x) = \frac{1}{x}$, a więc

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = \frac{1}{x}.$$

Zatem ciąg $\{u_n(x)\}$ jest zbieżny do funkcji $u(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$, dla której $u(0) = 0$. Zbieżność ta jest niejednostajna, gdyż funkcja $u(x)$ jest nieciągła dla $x = 0$. Obliczając całkę $\int_0^1 u_n(x)\,dx$, otrzymujemy:

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} u_n(x)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 u_n(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2} + \log n.$$

Widzimy zatem, że w tym wypadku ciąg całek jest rozbieżny, mimo to, że ciąg funkcyj jest zbieżny. Założenie jednostajnej zbieżności w tw. 1 jest więc istotne.

3. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n x}{n^2}$ jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale, bo tutaj $|f_n(x)| = \left|\frac{\cos n x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, zaś szereg $\Sigma \frac{1}{n^2}$ jest, jak wiadomo zbieżny (por. T. I, str. 219).

Oznaczając jego sumę przez $f(x)$, otrzymujemy na mocy tw. 2

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{\cos nt}{n^2}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

W szczególności dla $x = \frac{\pi}{2}$ oraz $x = \pi$ dostajemy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots$$

$$\int_0^{\pi} f(t)\,dt = 0.$$

§ 4. Całkowanie szeregów potęgowych. Przypuśćmy, że szereg potęgowy

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n + \dots \quad . \quad . \quad (1)$$

posiada promień zbieżności R. Zatem szereg powyższy jest zbieżny dla $-R < x < R$, zaś jednostajnie zbieżny, w każdym przedziale (a, b), gdzie $-R < a < b < R$.

Niechaj $f(x)$ będzie sumą szeregu (1). Na mocy twierdzenia 2 mamy:

$$\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x a_0\,dx + \int_0^x a_1 x\,dx + \int_0^x a_2 x^2\,dx + \dots \int_0^x a_n x^n\,dx + \dots$$
$$(-R < x < R).$$

Zatem

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots \quad (2)$$
$$(-R < x < R)$$

Szereg powyższy jest jednostajnie zbieżny w każdym przedziale (a, b), gdzie $-R < a < b < R$.

Uwaga 1.

Jeżeli $\qquad F(x) = \int f(x)\,dx,$

wówczas $\qquad \int_0^x f(x)\,dx = F(x) - F(0).$

Stąd na mocy (2), kładąc $F(0)=C$ otrzymujemy

$$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx=c+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots$$

Szereg powyższy przedstawia więc całkę nieokreśloną funkcji $f(x)$ dla $-R<x<R$.

Przykład:

Całkując w granicach od 0 do x znane szeregi potęgowe (T. I, str. 235—36)

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\tfrac{1}{2}t^2+\frac{1.3}{2.4}t^4+\ldots+$$

$$+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}t^{2n}+\ldots$$

zbieżne dla $|t|<1$, otrzymujemy szeregi

$$\operatorname{arc\,tg} x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

$$\operatorname{arc\,sin} x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5}+\ldots+$$

$$+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

zbieżne również dla $|x|<1$.

Kładąc w ostatnim szeregu $x=\frac{1}{2}$, dostajemy

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.2^3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5.2^5}+\ldots$$

Ten szereg nadaje się dobrze do obliczania liczby π.

Uwaga 2.

Jeżeli dana funkcja $f(x)$ da się rozwinąć na szereg potęgowy, wówczas całkę tej funkcji otrzymamy całkując ten szereg wyraz po wyrazie. Sposób ten otrzymania całki dogodny jest wówczas, jeżeli innemi metodami wyznaczyć jej nie możemy.

Przykłady:

1. Całki $\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx$

nie można wyznaczyć dotąd poznanemi metodami, gdyż funkcja pierwotna funkcji $\frac{\sin x}{x}$ nie należy do znanych nam funkcyj elementarnych. Ale bardzo jest łatwo obliczyć ją, korzystając z rozwinięcia na szereg. Mamy bowiem

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

a więc, dla $x \neq 0$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny również dla $x = 0$ do granicy 1.

Funkcja $\frac{\sin x}{x}$ przedstawia się wprawdzie dla $x = 0$ w postaci nieoznaczonej, ale posiada wartość graniczną $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (por. T. I, str. 73—74). Jeżeli więc przypiszemy jej w punkcie $x = 0$ wartość 1, to otrzymamy funkcję ciągłą dla wszystkich x, przedstawioną przez ostatni szereg potęgowy.

Całkując wyraz za wyrazem, dostajemy szereg

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = (b-a) - \frac{b^3-a^3}{3 \cdot 3!} + \frac{b^5-a^5}{5 \cdot 5!} - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{b^{2n+1} - a^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots$$

bardzo szybko zbieżny, przy pomocy którego łatwo obliczyć całkę z żądaną dokładnością.

2. W teorji wahadła matematycznego dowodzi się, że czas jednego wahnienia dany jest wzorem

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}},$$

w którym l oznacza długość wahadła, g wartość przyśpieszenia ziemskiego, zaś $k = \sin \frac{\alpha}{2}$, przyczem α jest kątem zawartym między położeniem pionowem a skrajnem $(0 < \alpha < \pi)$.

Występująca po prawej stronie całka nie da się wyrazić przez funkcje elementarne, można ją jednak obliczyć przy pomocy rozwinięcia w szereg. Zastępując w rozwinięciu funkcji $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ podanem w przykładzie na str. 108 zmienną t przez $k \sin \varphi$, otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 + \tfrac{1}{2} (k \sin \varphi)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (k \sin \varphi)^4 +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} (k \sin \varphi)^6 + \ldots$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny jednostajnie w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Istotnie, jego ogólny wyraz spełnia nierówność

$$\left|\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}(k\sin\varphi)^{2n}\right| \leqslant \sin^{2n}\frac{\alpha}{2},$$

t. zn. jego wartość bezwzględna nie przekracza bezwzględnej wartości wyrazu ogólnego szeregu, otrzymanego przez podstawienie w rozwinięciu funkcji $\frac{1}{1-t^2}$ wartości $t = \sin\frac{\alpha}{2}$. Ten ostatni zaś szereg jest zbieżny, bo $0 < \sin\frac{\alpha}{2} < 1$. Możemy zatem (por. str. 105) całkować obustronnie w granicach $0, \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2} + \tfrac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\, d\varphi +$$

$$+\frac{1.3}{2.4}k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\, d\varphi + \ldots$$

Jak wiadomo (por. str. 93) mamy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Wstawiając to w otrzymany szereg, dostajemy ostatecznie:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left|1 + (\tfrac{1}{2})^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\right|.$$

Przez dodanie odpowiedniej liczby wyrazów tego szeregu możemy obliczyć czas T z dowolną dokładnością.

§ 5. Całkowanie i różniczkowanie według parametru. Niechaj funkcja $K(x,t)$ będzie określona i ciągła w prostokącie

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad a' \leqslant t \leqslant b'.$$

Ponieważ dla każdej wartości zmiennej t w przedziale (a', b') całka

$$\int_a^b K(x, t)\, dx$$

istnieje, zatem możemy zdefinjować w przedziale (a', b') funkcję $f(t)$ kładąc

$$f(t) = \int_a^b K(x, t)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wykażemy, że funkcja $f(t)$ zdefinjowana wzorem (1) jest funkcją ciągłą.

Jeżeli bowiem t' jest dowolnym punktem przedziału (a', b'), zaś $\{t_n\}$ jest dowolnym ciągiem punktów tegoż przedziału, zdążających do t', wówczas na mocy jednostajnej ciągłości ciąg funkcyj (zmiennej x) $\{K(x, t_n)\}$ zdąża jednostajnie w (a, b) do funkcji $K(x, t')$.

Zatem, na mocy twierdzenia o całkowaniu ciągów, mamy

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b K(x, t_n)\, dx = \int_a^b K(x, t')\, dx,$$

stąd na mocy (1)

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) = f(t').$$

A więc funkcja $f(t)$ jest funkcją ciągłą.

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

Twierdzenie 1.

Jeżeli funkcja $K(x, t)$ jest ciągłą i posiada pochodną cząstkową względem t, ciągłą w prostokącie $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant t \leqslant b'$, wówczas pochodna funkcji

$$f(t) = \int_a^b K(x, t)\, dx$$

istnieje i wyraża się wzorem

$$f'(t) = \int_a^b K'_t(x, t)\, dx \qquad a' \leqslant t \leqslant b'$$

D o w ó d.

Niechaj t' i $t'+\lambda$ będą dowolnemi punktami przedziału (a', b'). Mamy:

$$\frac{f(t'+\lambda)-f(t')}{\lambda}=\int_a^b \frac{K(x,t'+\lambda)-K(x,t')}{\lambda}\,dx,$$

stąd na mocy twierdzenia o wartości średniej:

$$\frac{K(x,t'+\lambda)-K(x,t')}{\lambda}=K'_t(x,t'+\vartheta\lambda) \qquad (0<\vartheta<1)$$

Zatem

$$\frac{f(t'+\lambda)-f(t')}{\lambda}=\int_a^b K'_t(x,t'+\vartheta\lambda)\,dx.$$

Jeżeli teraz λ będzie dążyć do zera, to na mocy jednostajnej ciągłości

$$K'_t(x,t'+\vartheta\lambda)$$

będzie dążyć jednostajnie do

$$K'_t(x,t').$$

Zatem $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(t'+\lambda)-f(t')}{\lambda}=\int_a^b K'_t(x,t')\,dx.$

Udowodniliśmy tedy nasze twierdzenie.

T w i e r d z e n i e 2.

J e ż e l i $K(x, t)$ j e s t funkcją ciągłą w prostokącie

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad a'\leqslant t\leqslant b',$$

w ó w c z a s całka z funkcji

$$f(s)=\int_a^b K(x,s)\,dx$$

wyraża się wzorem:

$$\int_a^t f(s)\,ds = \int_a^b \left\{\int_a^t K(x,s)\,ds\right\} dx \quad (a' \leqslant a' \leqslant b')$$

czyli: $$\int_a^t \left\{\int_a^b K(x,s)\,dx\right\} ds = \int_a^b \left\{\int_a^t K(x,s)\,ds\right\} dx.$$

Dowód.

Połóżmy $$F(t) = \int_a^b \left\{\int_a^t K(x,s)\,ds\right\} dx \tag{1}$$

Wówczas na mocy twierdzenia 1 i z uwagi na to, że

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_a^t K(x,s)\,ds\right\} = K(x,t)$$

mamy $$F'(t) = \int_a^b K(x,t)\,dx = f(t).$$

Zatem $$F(t) = \int_a^t f(t)\,dt + C.$$

Żeby stałą C wyznaczyć, połóżmy $t = a$, więc $F(a) = C$. Lecz na mocy (1)

$$F(a) = \int_a^b \left\{\int_a^a K(x,s)\,ds\right\} dx = 0.$$

Zatem $$C = 0,$$

więc $$F(t) = \int_a^t f(t)\,dt;$$

czyli $$\int_a^t f(s)\,ds = \int_a^b \left\{\int_a^t K(x,s)\,ds\right\} dx.$$

Uwaga.

Kładąc w szczególności $a \doteq a'$, $t = b'$, mamy

$$\int_{a'}^{b'} \left\{\int_a^b K(x,s)\,dx\right\} ds = \int_a^b \left\{\int_{a'}^{b'} K(x,s)\,ds\right\} dx.$$

Zatem, przy powyższych założeniach, porządek całkowania nie wpływa na wynik.

Dotychczas przyjmowaliśmy, że granice całkowania są liczbami stałemi. Zajmiemy się teraz całkami, których granice są funkcjami zmiennej t.

Niechaj funkcje $\varphi(t)$, $\psi(t)$ będą funkcjami ciągłemi i mającemi ciągłe pochodne w przedziale $(a' b')$, i niech ponadto

$$a \leqslant \varphi(t) \leqslant b, \quad a \leqslant \psi(t) \leqslant b \quad \text{dla } a' \leqslant t \leqslant b'.$$

Załóżmy, że funkcja $K(x, t)$ jest określona i ciągła w prostokącie $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant t \leqslant b'$ i że posiada w tym prostokącie cząstkową pochodną względem t, ciągłą.

Otóż przy powyższych założeniach, można wypowiedzieć następujące:

Twierdzenie 3.

Pochodna funkcji

$$f(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} K(x, t)\, dx$$

istnieje i wyraża się wzorem:

$$f'(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} K'_t(x, t)\, dx + K[\psi(t), t]\, \psi'(t) - K[\varphi(t), t]\, \varphi'(t).$$

Dowód.

Połóżmy $\int_u^v K(x, t)\, dt = F(t, u, v)$.

Mamy oczywiście:

$$f(t) = F[t, \varphi(t), \psi(t)].$$

Opierając się na twierdzeniu o różniczkowaniu funkcji złożonej, otrzymujemy

$$f'(t) = F'_t(t, u, v) + F'_u(t, u, v)\, u' + F'_v(t, u, v)\, v'.$$

Ponieważ $F'_t(t, u, v) = \int\limits_u^v K'_t(x, t)\, dx,$

$$F'_u(t, u, v) = -K(u, t),$$
$$F'_v(t, u, v) = K(v, t),$$

więc $f'(t) = \int\limits_u^v K'_t(x, t)\, dt + K(v, t)\, v' - K(u, t)\, u'.$

Stąd zaś po podstawieniu $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$, otrzymujemy nasze twierdzenie.

Przykłady:

1. Mamy: $\int\limits_1^2 x^n\, dx = \dfrac{2^{n+1} - 1}{n + 1}$. $\quad (n \neq -1)$

A więc, różniczkując ze względu na n, otrzymujemy

$$\int\limits_1^2 x^n \log x\, dx = \frac{(n+1)\, 2^{n+1} \log 2 - 2^{n+1} + 1}{(n+1)^2}.$$

2. Mamy, jak łatwo sprawdzić:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a \sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1 + a}} \qquad (|a| < 1)$$

Różniczkując ze względu na a, otrzymujemy

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(1 + a \sin^2 x)^2}\, dx = \frac{\pi}{4\,(1 + a)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Mamy: $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{dx}{1 + a \cos x} = \dfrac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$ $\qquad (|a| < 1)$

Różniczkując ze względu na a, dostajemy

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x\, dx}{(1 + a \cos x)^2} = -\frac{\pi a}{(1 - a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

zaś całkując od 0 do t ze względu na a, mamy po lewej stronie

$$\int_0^t da \int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x} = \int_0^\pi dx \int_0^t \frac{da}{1+a\cos x} =$$

$$= \int_0^\pi \frac{\log(1+t\cos x)}{\cos x}\, dx,$$

zaś po prawej stronie

$$\int_0^t \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\, da = \pi \arcsin t.$$

Ostatecznie mamy dla $|t| < 1$

$$\int_0^\pi \frac{\log(1+t\cos x)}{\cos x}\, dx = \pi \arcsin t$$

4. Kładąc $\quad f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad$ dla $x > 0$, $\quad$ mamy

$$f(xy) - f(x) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{dt}{t} = \int_x^{xy} \frac{dt}{t}.$$

Różniczkując ostatnią całkę ze względu na x, mamy

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \frac{1}{xy}\, y - \frac{1}{x} = 0.$$

A więc jej wartość nie zależy od x. Kładąc $x = 1$, otrzymujemy jako wartość tej całki $f(y)$.

Stąd $\qquad f(xy) = f(x) + f(y).$

Udowodniliśmy w ten sposób podstawową własność funkcji $\log x = f(x)$.

Zadania:

1) Obliczyć całkę $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

na 4 miejsca dziesiętne przy pomocy rozwinięcia w szereg.

2) Sprawdzić, że całkując wyraz za wyrazem szereg

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots \binom{n}{k} x^k + \ldots$$

a następnie mnożąc obustronnie przez $n+1$, otrzymujemy analogiczny szereg na $(1+x)^{n+1}$

3) Całkując w granicach od 0 do x szereg Maclaurina funkcji $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ wyprowadzić wzór

$$\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) =$$

$$= x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

ważny dla $|x| < 1$.

4) Wykazać, że ciąg $f_n(x) = x n e^{-nx}$ jest niejednostajnie zbieżny do $f(x) = 0$ w przedziale $(0, 1)$, a ciąg całek $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$ zbieżny do $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$.

5) Wykazać, że dla $|x| < 1$

$$\int\limits_0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^5}} = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^6}{6} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^{11}}{11} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^{16}}{16} + \ldots$$

6) Wykazać, że dla $|x| < 1$

$$\int\limits_0^x \frac{\log(1+t)}{t}\,dt = \frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots$$

7) Z następujących całek wyprowadzić nowe przez różniczkowanie i całkowanie względem parametru

a) $\int_0^1 e^{ax}\,dx = \frac{e^a - 1}{a}$,

b) $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{2}$ (por. str. 102, zad. 4),

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}$ (por. str. 96, zad.

d) $\int_0^{\pi} e^{-ax} \cos bx\,dx = -\frac{a}{a^2 + b^2}(e^{-a\pi} \cos b\pi - 1)$.

8) Udowodnić przez różniczkowanie całek względem parametru następujące wzory:

a) $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + y}{1 - xy}$,

b) $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\right)$.

9) Dla jakich wartości n wolno różniczkować całkę $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n + 1}$?

Rozdział VII.

Całki niewłaściwe.

§ 1. Całka funkcji nieokreślonej w kilku punktach. W rozdziale tym określimy pojęcie całki, w wypadkach, gdy funkcja podcałkowa jest nieokreślona w kilku punktach, lub gdy jest nieograniczona, lub wreszcie, gdy przedział całkowania jest nieskończony.

Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ jest określona w (a, b) wszędzie poza skończoną liczbą punktów $x_1 < x_2 < \ldots x_k$. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest funkcją ograniczoną.

Określmy funkcję $f(x)$ dowolnie w punktach $x_1, x_2, \ldots x_k$. Nową funkcję, określoną już w całym przedziale (a, b), oznaczmy przez $\varphi(x)$. Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest całkowalna w (a, b), wówczas całkę

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

nazywamy *całką niewłaściwą* funkcji $f(x)$.

Gdybyśmy określili funkcję $f(x)$ inaczej w punktach $x_1, x_2, \ldots x_k$, to otrzymalibyśmy inną funkcję $\overline{\varphi}(x)$. Lecz jak łatwo zauważyć

$$\int_a^b [\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)]\,dx = 0,$$

gdyż $\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)$ jest wszędzie zerem poza punktami $x_1, x_2, \ldots x_k$. Zatem, jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest całkowalna, to $\overline{\varphi}(x)$ jest funkcją całkowalną i

$$\int_a^b \overline{\varphi}(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Widzimy stąd, że całka niewłaściwa nie zależy od tego, jak funkcję $f(x)$ określimy w punktach $x_1, x_2, \ldots x_k$. Całkę niewłaściwą oznaczać będziemy jak poprzednio:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Przykłady.

1. Niechaj $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$.

Jeżeli położymy $\varphi(x) = f(x)$ dla $x \neq 0$, a $\varphi(0) = 0$, wówczas, jak łatwo zauważymy, funkcja $\varphi(x)$ posiada tylko jeden punkt nieciągłości $x = 0$.

Funkcja $\varphi(x)$ jest więc całkowalna w każdym przedziale.

Wynika stąd, że np. całka niewłaściwa

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x}\,dx$$

istnieje i równa się całce $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$.

Podobnie funkcja $\frac{\sin x}{x}$ posiada całkę niewłaściwą w każdym przedziale.

2. Funkcja $x \log x$ posiada całkę niewłaściwą w każdym przedziale $0 \leqslant x \leqslant a$, jest bowiem ciągła dla $x > 0$, a ponieważ $\lim\limits_{x \to 0} x \log x = 0$, jest w tym przedziale ograniczona.

§ 2. Całka funkcji nieograniczonej. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale (a, b) z wyjątkiem, być może, punktu a i że ponadto jest nieograniczona.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w każdym przedziale $(a + \varepsilon, b)$, gdzie $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon < b$ i jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

wówczas granicę tę określamy jako **całkę niewłaściwą**

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

P r z y k ł a d:

Funkcja $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ jest funkcją ciągłą w każdym punkcie przedziału (0, 1) wyjąwszy punkt $x = 0$. Mamy

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

a zatem
$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

A więc całka niewłaściwa funkcji $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ w przedziale (0, 1) jest równa 2. Zatem:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada w (a, b) skończoną liczbę punktów, w otoczeniu których staje się nieograniczoną, wówczas rozbijamy przedział (a, b) na skończoną liczbę przedziałów takich, by w każdym z nich istniał jeden tylko punkt, w otoczeniu którego funkcja staje się nieograniczoną. Jeżeli w każdym z tych przedziałów funkcja posiada całkę niewłaściwą poprzednio określoną, wówczas sumę tych wszystkich całek nazywamy całką niewłaściwą w przedziale (a, b)

P r z y k ł a d:

Funkcja $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ $(0 < x < 1)$ staje się w otoczeniu punktów $x = 0$ i $x = 1$ nieograniczoną. Aby więc zbadać czy istnieje całka niewłaściwa w (0, 1), badamy granice całek:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Ponieważ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arcsin(2x-1),$

więc granice powyższe wynoszą odpowiednio:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} [\arcsin 0 - \arcsin(2\varepsilon - 1)] = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} [\arcsin(1-2\varepsilon) - \arcsin 0] = \frac{\pi}{2}.$$

A więc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi.$

§ 3. Całki w przedziale nieskończonym. Niechaj funkcja $f(x)$ będzie określona dla wszystkich $x > a$.

Załóżmy, że w każdym przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ funkc' $f(x)$ jest całkowalna.

Jeżeli istnieje $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ . . . . . . (1)

wówczas granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji $f(x)$ w granicach od a do $+\infty$ i oznaczamy ją symbolem:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

W wypadku tym mówimy również, że całka (2) jest zbieżna. Jeżeli zaś granica (1) nie istnieje, wówczas mówimy, że całka (2) jest rozbieżna.

P r z y k ł a d:

Funkcja $y = \frac{1}{x^2}$ jest ciągłą dla $x > 1$.

Ponieważ $$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{b}.$$

zatem $$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = 1, \quad \text{a więc} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Analogicznie określamy całki niewłaściwe:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^a f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

P r z y k ł a d:

Niechaj $$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Mamy $$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to \infty} \operatorname{arc\,tg} a = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} (-\operatorname{arc\,tg} a) = \frac{\pi}{2}.$$

Zatem $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

§ 4. Kryterjum istnienia całki niewłaściwej. N i e c h a j f u n k c j a $\varphi(x)$ n i e u j e m n a p o s i a d a w (a, b) $[a < b]$ c a ł k ę n i e w ł a ś c i w ą. J e ż e l i f u n kcja $f(x)$ jest całkowalna w każdym przedziale (a', b) $[a < a' < b]$ i jeżeli

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \qquad a < x \leqslant b$$

wówczas istnieje całka niewłaściwa

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dowód.

Niechaj $\{\varepsilon_n\}$ będzie dowolnym ciągiem malejącym liczb dodatnich zdążających do zera. Niechaj nadto

$$a + \varepsilon_n < b \qquad (a < b)$$

Utwórzmy szereg:

$$\int_{a+\varepsilon_1}^{b} \varphi(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon_2}^{a+\varepsilon_1} \varphi(x)\,dx + \int_{a+\varepsilon_3}^{a+\varepsilon_2} \varphi(x)\,dx + \ldots +$$

$$+ \int_{a+\varepsilon_n}^{a+\varepsilon_{n-1}} \varphi(x)\,dx + \ldots \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Zauważmy, że jeżeli S_n oznacza sumę n pierwszych wyrazów tego szeregu, to

$$S_n = \int_{a+\varepsilon_n}^{b} \varphi(x)\,dx.$$

Zatem szereg jest zbieżny i suma jego równa się całce niewłaściwej funkcji $\varphi(x)$ w (a, b).

Ponieważ wedle założenia

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \qquad (a < x \leqslant b)$$

więc

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \leqslant \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \quad (a < \alpha < \beta \leqslant b),$$

a zatem szereg:

$$\int_{a+\varepsilon_1}^{b} f(x)\, dx + \int_{a+\varepsilon_2}^{a+\varepsilon_1} f(x)\, dx + \int_{a+\varepsilon_3}^{a+\varepsilon_2} f(x)\, dx + \ldots +$$

$$+ \int_{a+\varepsilon_n}^{a+\varepsilon_{n-1}} f(x)\, dx + \ldots \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

jest szeregiem bezwarunkowo zbieżnym, gdyż wyrazy jego są co do modułu mniejsze niż odpowiednie wyrazy szeregu (1).

Oznaczając przez s_n sumę n pierwszych wyrazów szeregu (2), mamy

$$s_n = \int_{a+\varepsilon_n}^{b} f(x)\, dx,$$

a więc istnieje

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a+\varepsilon_n}^{b} f(x)\, dx.$$

Ponieważ granica powyższa istnieje dla każdego ciągu $\{\varepsilon_n\}$ spełniającego wyżej podane warunki, zatem

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

istnieje, funkcja $f(x)$ posiada więc całkę niewłaściwą w (a, b).

P r z y k ł a d:

Całka $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$ istnieje, bo $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, a istnienie całki $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ wykazaliśmy poprzednio (str. 122).

Jeżeli $s < 1$, wówczas istnieje całka niewłaściwa

$$\int_0^a \frac{dx}{x^s} \qquad (a > 0)$$

Mamy bowiem

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{x^s} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{1-s} (a^{1-s} - \varepsilon^{1-s}) = \frac{a^{1-s}}{1-s}.$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w $(0, a)$ z wyjątkiem punktu $x=0$ i jeżeli iloczyn: $f(x)\,x^s$ jest ograniczony w $(0, a)$, przyczem $s < 1$, wówczas istnieje

$$\int_0^a f(x)\,dx.$$

Mamy bowiem $\quad |f(x)\,x^s| \leqslant A,$

zatem $\quad |f(x)| \leqslant \frac{A}{x^s} \qquad (0 < x \leqslant a)$

A ponieważ funkcja $\frac{A}{x^s}$ $(s < 1)$ posiada całkę niewłaściwą w $(0, 1)$, więc na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje całka niewłaściwa (1).

W szczególności, jeżeli istnieje

$$\lim_{x \to +0} f(x)\,x^s \qquad (s < 1)$$

wówczas istnieje całka (1).

Np. $\lim_{x \to +0} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \to +0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1.$

A więc istnieje $\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}.$

Dla całek w przedziałach nieskończonych można wypowiedzieć analogiczne kryterjum. A mianowicie:

Niechaj funkcja $\varphi(x)$ nieujemna posiada całkę niewłaściwą:

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalną w każdym przedziale (a, b) $(a < b)$, i jeżeli

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \qquad (a \leqslant x)$$

wówczas istnieje całka niewłaściwa

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Dowód przebiega podobnie, jak przy poprzedniem kryterjum.

Podobne kryterjum można wypowiedzieć dla przedziału $(-\infty, +\infty)$.

Przykład:

1. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ istnieje, bo $\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, a funkcja $\frac{1}{1+x^2}$ posiada całkę niewłaściwą $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

2. Jeżeli $|x^s f(x)| < A$ dla $x > a > 0$ i $s > 1$, wówczas istnieje $\int_a^\infty f(x)\, dx$. Zakładamy przytem, że funkcja $f(x)$ jest całkowalna w każdym przedziale (a, b) $(a < b)$.

Mamy bowiem $\quad |f(x)| < \frac{A}{x^s}, \quad$ a ponadto

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^s} = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^s} = \lim_{b \to +\infty} [b^{-s+1} - a^{-s+1}] \frac{1}{-s+1} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)\, a^{s-1}}.$$

§ 5. Zastosowanie do szeregów.

Twierdzenie.

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą, nieujemną i malejącą, określoną dla wszystkich $x \geqslant 1$, to szereg nieskończony $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny wzgl. rozbieżny, zależnie od tego, czy całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ istnieje, czy nie.

Dowód.

Zauważmy, że w przedziale $(n, n+1)$ największą wartością funkcji $f(x)$ jest $f(n)$, najmniejszą zaś $f(n+1)$.

Zatem, wedle twierdzenia na str. 83

$$f(n+1) \leqslant \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

A więc

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n+1) \leqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant f(1) + f(2) + \ldots + f(n).$$

Jeżeli istnieje całka $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, to ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest ograniczony, a więc ten szereg jest zbieżny

Załóżmy naodwrót, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny.

Wedle ostatniej nierówności ciąg $\{\int\limits_1^{n} f(x)\,dx\}$ jest, z powodu zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, ograniczony. Ciąg ten jest niemalejący, bo

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx = \int\limits_1^{n} f(x)\,dx + \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \int\limits_1^{n} f(x)\,dx,$$

gdyż $f(x) \geqslant 0$.

A więc ciąg $\{\int\limits_1^{n} f(x)\,dx\}$ jest zbieżny do pewnej granicy g. Do każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zatem takie N, że dla każdego całkowitego $n > N$ jest

$$g - \varepsilon < \int\limits_1^{n} f(x)\,dx < g + \varepsilon.$$

Niech x będzie dowolną liczbą większą od $N+1$. Wówczas istnieje całkowitę $n > N$ takie, że $n < x \leqslant n+1$. Mamy

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^n f(t)\,dt + \int_n^x f(t)\,dt = \int_1^{n+1} f(t)\,dt - \int_x^{n+1} f(t)\,dt,$$

zatem
$$\int_1^n f(t)\,dt \leqslant \int_1^x f(t)\,dt \leqslant \int_1^{n+1} f(t)\,dt,$$

a ponieważ $n > N$, więc tem bardziej

$$g - \varepsilon < \int_1^x f(t)\,dt < g + \varepsilon.$$

Ostatnia nierówność zachodzi dla każdego $x > N+1$. Tem samem udowodniliśmy, że ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ wynika istnienie całki $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, tj. drugą część naszego twierdzenia.

P r z y k ł a d y:

1. Niech $f(x) = x^{-a}$

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^{-a+1}}{-a+1} \qquad \text{dla } a \neq 1$$
$$= \log x \qquad \text{dla } a = 1$$

Zatem
$$\int_1^x f(t)\,dt = \frac{1}{1-a}\left[\frac{1}{x^{a-1}} - 1\right] \qquad \text{dla } a \neq 1$$
$$= \log x \qquad \text{dla } a = 1$$

Stąd natychmiast widać, że nasza całka istnieje jedynie dla $a > 1$. A zatem, wedle ostatniego twierdzenia, szereg nieskończony $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ jest zbieżny przy $a > 1$, rozbieżny przy $a \leqslant 1$. (Por. T. I, str. 199—200).

2. Niech $f(x) = \dfrac{1}{x \log x}$.

Jak łatwo widzieć, mamy

$$\int f(x)\,dx = \log \log x,$$

a więc $\int\limits_{2}^{x} f(t)\,dt = \log\log x - \log\log 2.$

Zatem całka $\int\limits_{2}^{\infty} f(t)\,dt$ nie istnieje, z czego, wedle naszego twierdzenia, wynika rozbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$.

Uwaga.

Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona i posiada własności wymienione w założeniu dla $x \geqslant K$. Należy w niem wówczas zastąpić $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ oraz $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ odpowiednio przez $\sum\limits_{n=K}^{\infty} f(n)$ i $\int\limits_{K}^{\infty} f(x)\,dx$. Korzystaliśmy z tego przy ostatnim przykładzie.

§ 6. Całki niewłaściwe jednostajnie zbieżne.

Niech $K(x, s)$ będzie funkcją ciągłą określoną dla $x \geqslant a$, $\alpha \leqslant s \leqslant \beta$ i posiadającą tę własność, że całka niewłaściwa $\int\limits_{a}^{\infty} K(x,s)\,dx$ istnieje dla każdego s przedziału (α, β).

Definicja:

Całkę $\int\limits_{a}^{\infty} K(x,s)\,dx$ nazywamy jednostajnie zbieżną ze względu na s w (α, β), jeżeli do każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \geqslant a$ takie, że

$$\left| \int\limits_{c}^{\infty} K(x,s)\,dx \right| < \varepsilon$$

dla każdego $c > A$ i każdego s z przedziału (α, β).

Definicja ta jest podobna do definicji szeregów nieskończonych jednostajnie zbieżnych. W istocie, całki jednostajnie zbieżne posiadają analogiczne własności, któremi się teraz zajmiemy.

Mamy oczywiście:

$$\int_a^\infty K(x,s)\,dx = \int_a^{a+1} K(x,s)\,dx + \int_{a+1}^{a+2} K(x,s)\,dx + \dots \qquad (1)$$

Szereg po prawej stronie jest jednostajnie zbieżny, bo z powodu jednostajnej zbieżności całki, do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \geqslant a$ takie, że przy każdem $n > A$, $p > 0$ i każdem s z przedziału (α, β) jest

$$\left| \int_n^{n+1} K(x,s)\,dx + \int_{n+1}^{n+2} K(x,s)\,dx + \dots + \int_n^{n+p} K(x,s)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_n^{n+p} K(x,s)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Ponieważ wyrazy szeregu (1) są ciągłemi funkcjami parametru s, więc jego suma jest funkcją ciągłą zmiennej s w (α, β). Całkując szereg (1) wyraz za wyrazem w granicach α, β, ze względu na s, dostajemy szereg zbieżny przedstawiający całkę funkcji, stojącej po lewej stronie równości (1) wziętą w tych samych granicach:

$$\int_\alpha^\beta ds \int_a^\infty K(x,s)\,dx = \int_\alpha^\beta ds \int_a^{a+1} K(x,s)\,dx +$$

$$+ \int_\alpha^\beta ds \int_{a+1}^{a+2} K(x,s)\,dx + \dots$$

Zmieniając w każdym wyrazie prawej strony porządek całkowania, co wedle twierdzenia 2, str. 113 jest dozwolone, otrzymujemy:

$$\int_\alpha^\beta ds \int_a^\infty K(x,s)\,dx = \int_a^{a+1} dx \int_\alpha^\beta K(x,s)\,ds +$$

$$+ \int_{a+1}^{a+2} dx \int_\alpha^\beta K(x,s)\,ds + \dots \qquad (2)$$

czyli $$\int_\alpha^\beta ds \int_a^\infty K(x,s)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a+n} dx \int_\alpha^\beta K(x,s)\,ds \qquad (3)$$

Udowodnimy teraz, że istnieje całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta K(x,s)\, ds.$$

Gdyby tak nie było, to istniałby ciąg rosnący do $+\infty$ liczb większych od a: $K_1 < K_2 < K_3 < \ldots$ taki, że ciąg całek

$$\left\{ \int_a^{K_n} dx \int_\alpha^\beta K(x,s)\, ds \right\}$$

byłby rozbieżny. Zatem i szereg nieskończony

$$\int_a^{K_1} dx \int_\alpha^\beta K(x,s)\, ds + \int_{K_1}^{K_2} dx \int_\alpha^\beta K(x,s)\, ds + \ldots$$

byłby rozbieżny. Ale ten szereg jest zbieżny, bo powstaje on w ten sam sposób, co szereg (2), przez całkowanie jednostajnie zbieżnego szeregu:

$$\int_a^\infty K(x,s)\, dx = \int_a^{K_1} K(x,s)\, dx + \int_{K_1}^{K_2} K(x,s) dx + \ldots$$

w granicach α, β i przez następną przemianę porządku całkowania. Tem samem udowodniliśmy zbieżność całki

$$\int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\, ds.$$

Wobec tego możemy równość (3) napisać:

$$\int_\alpha^\beta ds \int_a^\infty K(x,s)\, dx = \int_a^\infty dx \int_\alpha^\beta K(x, s)\, ds \tag{4}$$

Załóżmy teraz, że funkcja $K(x,s)$ oprócz poprzednio uczynionych założeń, spełnia jeszcze następujące:

1° Istnieje pochodna $K'_s(x, s)$ ciągła w każdym punkcie obszaru, w którym jest określona funkcja $K(x,s)$.

2° Całka niewłaściwa $\int_a^\infty K'_s(x,s)\, dx$ jest zbieżna jednostajnie ze względu na s w przedziale (α, β).

Udowodnimy, że w takim razie funkcja $\int\limits_a^\infty K(x,s)\,dx$ posiada ciągłą pochodną i że

$$\frac{d}{ds}\int\limits_a^\infty K(x,s)\,dx = \int\limits_a^\infty K'_s(x,s)\,dx.$$

Istotnie, szereg

$$\int\limits_a^\infty K'_s(x,s)\,dx = \int\limits_a^{a+1} K'_s(x,s)\,dx + \int\limits_{a+1}^{a+2} K'_s(x,s)\,dx + \ldots \quad (5)$$

jest zbieżny jednostajnie, co udowadnia się tak samo jak dla szeregu (1). Ale szereg ten powstaje przez różniczkowanie wyraz za wyrazem szeregu (1). Zatem jego suma, która z powodu jednostajnej zbieżności jest funkcją ciągłą, jest, wedle znanego twierdzenia z teorji szeregów (T. I, str. 223), pochodną sumy szeregu (1), co było do okazania.

Udowodniliśmy więc twierdzenie następujące:

Twierdzenie 1.

a) Jeżeli dla funkcji $K(x,s)$ określonej i ciągłej dla $x \geqslant a$, $\alpha \leqslant s \leqslant \beta$ istnieje całka niewłasciwa

$$\int\limits_a^\infty K(x,s)\,dx$$

przy każdem s z przedziału (α,β) i jeżeli ta całka jest w tym przedziale jednostajnie zbieżna, wówczas jest ona ciągłą funkcją parametru s.

b) Przy tych samych założeniach istnieje całka

$$\int\limits_a^\infty dx \int\limits_\alpha^\beta K(x,s)\,ds,$$

przyczem zachodzi równość

$$\int\limits_a^\infty dx \int\limits_\alpha^\beta K(x,s)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta ds \int\limits_a^\infty K(x,s)\,dx.$$

c) Jeżeli funkcja $K(x,s)$ spełnia poprzednie założenia, a ponadto dla $x \geqslant a$, $\alpha \leqslant s \leqslant \beta$ posiada ciągłą pochodną $K'_s(x,s)$, dla której całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty K'_s(x,s)\,dx$$

istnieje i jest jednostajnie zbieżna, wówczas całka

$$\int_a^\infty K(x,s)\,dx$$

posiada w przedziale (α, β) ciągłą pochodną ze względu na s, daną wzorem

$$\frac{d}{ds}\int_a^\infty K(x,s)\,dx = \int_a^\infty K'_s(x,s)\,dx.$$

Do stwierdzenia jednostajnej zbieżności całki wystarcza często następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.

Jeżeli $\varphi(x,s)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną zmiennych x, s w obszarze $x \geqslant a$, $\alpha \leqslant s \leqslant \beta$, dla której całka

$$\int_a^\infty \varphi(x,s)\,dx$$

istnieje i jest jednostajnie zbieżna, wówczas dla każdej funkcji $K(x,s)$ spełniającej nierówność $|K(x,s)| \leqslant \varphi(x,s)$ i ciągłej w tym samym obszarze, całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty K(x,s)\,dx$$

również istnieje i jest jednostajnie zbieżna.

D o w ó d.

Istnienie całki $\int\limits_a^\infty K(x, s)\, dx$

dla każdego s przedziału α, β, wynika z twierdzenia na str. 124—25, gdyż dla każdego s mamy

$$|K(x, s)| \leqslant \varphi(x, s) \qquad (x \geqslant a)$$

i ponadto dla każdego s istnieje całka:

$$\int\limits_a^\infty \varphi(x, s)\, ds.$$

Wobec jednostajnej zbieżności całki

$$\int\limits_a^\infty \varphi(x, s)\, dx$$

do dowolnie obranego $\varepsilon > 0$ istnieje $A \geqslant a$ takie, że

$$\int\limits_c^\infty \varphi(x, s)\, ds < \varepsilon$$

przy każdem $c > A$ i każdem s z (α, β). Ponieważ przy każdem $d > c$ jest

$$\left|\int\limits_c^d K(x, s)\, dx\right| \leqslant \int\limits_c^d |K(x, s)|\, dx \leqslant \int\limits_c^d \varphi(x, s)\, dx,$$

więc również

$$\left|\int\limits_c^\infty K(x, s)\, ds\right| \leqslant \int\limits_c^\infty \varphi(x, s)\, dx < \varepsilon.$$

A zatem całka $\int\limits_a^\infty K(x, s)\, dx$

jest zbieżna jednostajnie w (α, β).

U w a g a.

Jeżeli w szczególności funkcja $\varphi(x, s)$ nie zależy od s i całka

$$\int\limits_a^\infty \varphi(x)\, dx$$

istnieje, to całka ta jest oczywiście jednostajnie zbieżna. W zastosowaniach najczęściej spotykamy się z tym wypadkiem.

Przykłady:

1. Całka $\int_0^\infty e^{-x} \sin sx\, dx$

jest zbieżna jednostajnie ze względu na parametr s w każdym przedziale. Mamy bowiem $|e^{-x} \sin sx| \leqslant e^{-x}$, a całka

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx$$

jak łatwo widzieć istnieje. W istocie

$$\int e^{-x}\, dx = -e^{-x}, \quad \text{więc} \int_0^a e^{-x}\, dx = 1 - e^{-a}$$

Przechodząc do granicy dostajemy

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

Ponieważ całka $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$

nie zależy wcale od parametru s, więc jest jednostajnie zbieżna ze względu na ten parametr w każdym przedziale. Wobec poprzedniej nierówności to samo odnosi się do danej całki. Zatem przedstawia ona funkcję ciągłą parametru s.

Aby wyznaczyć tę funkcję, zauważmy, że

$$\int e^{-x} \sin sx\, dx = -\frac{e^{-x}(\sin sx + s\cos sx)}{1+s^2},$$

a więc

$$\int_0^a e^{-x} \sin sx\, dx = \frac{s}{1+s^2} - \frac{e^{-a}(\sin sa + s\cos sa)}{1+s^2}.$$

Gdy a rośnie nieograniczenie, drugi wyraz prawej strony, jak łatwo widzieć, zmierza do zera.

Otrzymujemy więc

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin sx\,dx = \frac{s}{1+s^2}.$$

Całkując obustronnie w granicach 0, y ze względu na s, dostajemy, z uwagi na jednostajną zbieżność naszej całki:

$$\int_0^y ds\int_0^\infty e^{-x}\sin sx\,dx = \int_0^\infty dx\int_0^y e^{-x}\sin sx\,ds =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\,\frac{1-\cos xy}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\log(1+y^2).$$

Różniczkując zaś naszą całkę ze względu na s, otrzymujemy

$$\int_0^\infty xe^{-x}\cos sx\,dx.$$

Ponieważ $|xe^{-x}\cos sx| \leqslant xe^{-x}$, a całka

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx,$$

jak łatwo sprawdzić, istnieje, więc całka otrzymana przez różniczkowanie jest jednostajnie zbieżna, a zatem

$$\int_0^\infty xe^{-x}\cos sx\,dx = \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{1+s^2}\right) = \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2}.$$

2. Całka
$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+s^2}$$

jest jednostajnie zbieżna ze względu na s w każdym przedziale (α, β), przy $1 \leqslant \alpha < \beta$. Istotnie, w takim przedziale mamy nierówność

$$\frac{1}{x^2+s^2} \leqslant \frac{1}{x^2+1}.$$

Całka $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}$$

istnieje i nie zależy od parametru s. Stąd, podobnie jak w poprzednim przykładzie, wynika jednostajna zbieżność danej całki i jej ciągłość w (α, β).

Całkę tę łatwo wyznaczyć, z uwagi na to, że

$$\int \frac{dx}{x^2+s^2} = \frac{1}{s} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{s},$$

a zatem $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+s^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{s} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{s} = \frac{\pi}{2s}.$$

Całkując w granicach 1, y otrzymujemy

$$\int_1^y ds \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+s^2} = \int_0^\infty dx \int_1^y \frac{ds}{x^2+s^2} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x} dx,$$

a więc $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \log y.$$

Różniczkując daną całkę, otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{-2s}{(x^2+s^2)^2} dx.$$

Całka ta jest również jednostajnie zbieżna w (α, β), bo

$$\left|\frac{-2s}{(x^2+s^2)^2}\right| \leqslant \frac{2\beta}{(x^2+1)^2}, \quad \text{a całka} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

jak łatwo stwierdzić, istnieje.

Zatem $$\int_0^\infty \frac{-2s}{(x^2+s^2)^2}\,dx = -\frac{\pi}{2s^2},$$

czyli $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+s^2)^2} = \frac{\pi}{4s^3}.$$

Podobnie należy postępować przy rozwiązywaniu poniżej podanych zadań na różniczkowanie i całkowanie całek niewłaściwych.

Zadania:

1) Wyznaczyć następujące całki niewłaściwe:

a) $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$ $\qquad (a > 0)$

b) $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$ $\qquad (a > 0)$

c) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ $\qquad (a > 0)$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos x}$

e) $\int_0^\infty \sin x\,dx$

Nie istnieją. Udowodnić to.

f) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8},$

g) $\int_0^a \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{8}{15}a^5$ $\qquad (a > 0)$

(Użyć podstawienia $x = a\sin\varphi$).

2) Wykazać istnienie następujących całek:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1}.$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$

(Przyjmujemy, że dla $x = 0$ funkcja podcałkowa jest równa 1).

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^{1+\varepsilon}}\,dx$ $(\varepsilon > 0)$

3) Wykazać, że następujące całki nie istnieją:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + x^2}$ $(a > 0)$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ (Dla $x = 0$ j. w.)

c) $\displaystyle\int_1^\infty \sin\frac{1}{x}\,dx.$

4) Wykazać, że szereg $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log^{1+\alpha} n}$ jest zbieżny przy każdem $\alpha > 0$.

5) Wykazać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right].$

6) Różniczkując i całkując całki: 1) *a*, *b*, wyprowadzić nowe całki.

7) Różniczkując całkę $I(a) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}\,dx$ ze względu na *a*, a do otrzymanej całki wprowadzając nową

zmienną $y = \frac{a}{x}$, wykazać, że $I'(a) = -2I$, czyli $\frac{I'(a)}{I(a)} = -2$. Całkując obustronnie, otrzymujemy $\log I(a) = -2a + C$. $I(a) = C'e^{-2a}$. Porównując obie strony dla $a = 0$, dostajemy

$$I(a) = e^{-2a} \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

8) Wykazać jednostajną zbieżność całek:

a) $\int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx$ dla $a \geqslant 1$

b) $\int_0^\infty e^{-ax}\, x \cos x\, dx = \frac{a^2 - 1}{(a^2 + 1)^2}$ dla $a \geqslant 1$.

Rozdział VIII.

Zastosowania rachunku całkowego.

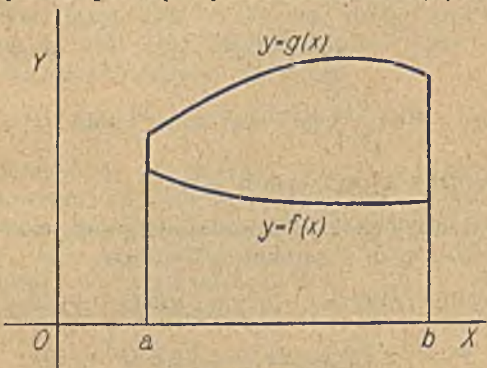
§ 1. Obliczanie pola. Określiliśmy poprzednio pole ograniczone krzywą ciągłą $y = f(x)$, prostemi $x = a$, $x = b$ i osią x-ów jako całkę z funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b), przy założeniu $f(x) \geqslant 0$.

Podamy teraz definicję pola ograniczonego prostemi $x = a$, $x = b$ oraz dwiema krzywemi ciągłemi, $y = f(x)$, $y = g(x)$, przy założeniu $f(x) \leqslant g(x)$. Mianowicie określamy je jako

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

Definicję tę można uzasadnić intuicyjnie w sposób następujący:

Jeżeli obie funkcje $f(x)$, $g(x)$, są nieujemne, wówczas (Rys. 3) pole powyższe jest różnicą pola ogra-



Rys. 3.

niczonego krzywą $y=g(x)$, prostemi $x=a$, $x=b$ i osią x-ów i pola ograniczonego krzywą $y=f(x)$, prostemi $x=a$, $x=b$ i osią x-ów, zatem jest równe

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx.$$

Jeżeli zaś funkcje $f(x)$, $g(x)$ mają dowolny znak, to, wobec ich ograniczoności, istnieje stała c taka, że funkcje $f_1(x)=f(x)+c$, $g_1(x)=g(x)+c$ są nieujemne. Pole zawarte między krzywemi $y=f_1(x)$, $y=g_1(x)$ i prostemi $x=a$, $x=b$ jest oczywiście przystające do pierwotnego i równe

$$\int_a^b [g_1(x)-f_1(x)]\,dx=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx.$$

Przykłady:

1. Wyznaczyć pole P ćwiartki elipsy. Ćwiartka elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

jest ograniczona prostemi $x=0$, $x=a$, osią x-ów i krzywą

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (0\leqslant x\leqslant a)$$

A więc $P=\dfrac{b}{a}\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, stąd $P=\dfrac{ab\pi}{4}$.

Zatem pole elipsy wynosi $ab\pi$.

2. Wyznaczyć pole P ograniczone przez proste $x=a$, $x=b$ $(0\leqslant a<b)$ i parabolę $y^2=2px$.

Mamy tu $f(x)=-\sqrt{2px}$, $g(x)=+\sqrt{2px}$,

zatem $P=\displaystyle\int_a^b 2\sqrt{2px}\,dx=\tfrac{4}{3}\sqrt{2p}\,(b^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}})$.

Dla $a=0$ otrzymujemy, kładąc $b=x$, $\sqrt{2px}=y$, znany wzór na pole odcinka paraboli $P=\frac{4}{3}xy$.

Zadania:

Obliczyć następujące pola:

1) Pole ograniczone hiperbolą $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ i prostą $x=c$ $(c>a)$.

$$P=\frac{b}{a}\left[c\sqrt{c^2-a^2}-a^2\log\frac{c+\sqrt{c^2-a^2}}{a}\right].$$

2) Pole ograniczone osią x-ów, prostą $x=1$ i krzywą:

a) $y=x\sqrt{1-x^2}$ $\qquad P=\frac{1}{3}$,

b) $y=\sqrt{1-x^2}$ $\qquad P=\frac{\pi}{4}$.

3) Pole ograniczone krzywemi $y=\sin^3 x$, $y=\cos^3 x$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ i osią y-ów. $\quad P=\frac{5}{6}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$.

4) Wykazać, że jeżeli $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ są funkcjami ciągłemi w przedziale (a, b), takiemi, że odpowiednie krzywe mają tylko skończoną liczbę punktów wspólnych, to pole ograniczone temi krzywemi i prostemi $x=a$, $x=b$ wyraża się całką

$$P=\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,dx.$$

5) Opierając się na znanym wzorze na pole wycinka kołowego, wykazać (podobnie, jak na str. 71—72), że pole ograniczone prostemi $r=r_1$, $r=r_2$ i krzywą $r=f(\varphi)$, przyczem $f(\varphi)$ oznacza funkcję ciągłą nieujemną w przedziale $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$ i $f(\varphi_1)=r_1$, $f(\varphi_2)=r_2$ (współrzędne biegunowe), wyraża się całkę

$$P=\tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

6) Korzystając ze wzoru zad. 6 obliczyć pole:

a) lemniskaty $r^2 = a^2 \cos 2\varphi \left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant +\frac{\pi}{4}\right)$, $P = a^2$,

b) liścia Descartesa $r = a \dfrac{\cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

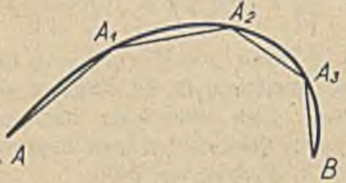
$P = \dfrac{a^2}{b}$.

7) Obliczyć pole ograniczone osiami współrzędnych i krzywą $y = \dfrac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

§ 2. Obliczanie długości łuku. Przypuśćmy, że funkcje

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t) \tag{1}$$

są określone, ciągłe i posiadają ciągłą pochodną dla $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Zbiór wszystkich punktów przestrzeni o współrzędnych (x, y, z) odpowiadających tej samej wartości zmiennej t, tworzy pewną krzywą.



Rys. 4.

Zmienną t nazywamy parametrem, funkcje (1) przedstawieniem parametrycznem tej krzywej.

Utwórzmy dowolny podział δ odcinka (α, β).

Niechaj punkty $\alpha < t_1 < t_2 \ldots < \beta$ będą punktami podziału δ. Oznaczmy przez: A, A_1, A_2, ... B (Rys. 4) punkty krzywej, odpowiadające wartościom parametru $\alpha, t_1, t_2 \ldots \beta$.

Połóżmy:
$$\Delta x_1 = f(t_1) - f(\alpha),$$
$$\Delta x_2 = f(t_2) - f(t_1).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Podobnie określmy $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots; \Delta z_1, \Delta z_2, \ldots$ Długość cięciwy AA_1 wyraża się wzorem

$$AA_1 = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2}.$$

Zatem długość linji łamanej $AA_1A_2 \ldots$ wynosi

$$L = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2} + \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2 + \Delta z_2^2} + \ldots \qquad (2)$$

Na mocy twierdzenia o wartości średniej

$$\Delta x_1 = f'(\xi_1)\,\Delta t_1 \qquad (a < \xi_1 < t_1)$$

Jeżeli więc położymy:

$$f'^2(\xi_1) = f'^2(t_1) + \varrho_1$$

wówczas: $\quad (\Delta x_1)^2 = f'^2(t_1)\,\Delta t_1^2 + \varrho_1\,\Delta t_1^2.$

Postępując podobnie dla Δy, Δz, otrzymamy

$$\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2} =$$
$$= \sqrt{[f'^2(t_1) + \varphi'^2(t_1) + \psi'^2(t_1)]\,\Delta t_1^2 + (\varrho_1 + \sigma_1 + \tau_1)\,\Delta t_1^2}.$$

Opierając się na nierówności:

$$\sqrt{|a|} \leqslant \sqrt{|a+b|} \leqslant \sqrt{|a|} + \sqrt{|b|},$$

i kładąc: $\quad \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = F(t),$

otrzymamy:

$$F(t_1)\,\Delta t_1 \leqslant \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2} \leqslant F(t_1)\,\Delta t_1 +$$
$$+ \sqrt{|\varrho_1 + \sigma_1 + \tau_1|}\,\Delta t_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

Postępując podobnie dla $\Delta x_2, \Delta y_2, \Delta z_2 \ldots$ i kładąc

$$P = F(t_1)\,\Delta t_1 + F(t_2)\,\Delta t_2 + \ldots,$$

$$R = \sqrt{|\varrho_1 + \sigma_1 + \tau_1|}\,\Delta t_1 + \sqrt{|\varrho_2 + \sigma_2 + \tau_2|}\,\Delta t_2 + \ldots \quad (4)$$

otrzymamy na mocy (2) i (3) nierówność:

$$P \leqslant L \leqslant P + R. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

Oznaczmy przez $\bar{\varrho}$ największą z liczb: $\varrho_1, \varrho_2, \ldots,$ podobnie określmy $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$.

Ze względu na (4) mamy wówczas

$$|R| \leqslant \sqrt{\bar{\varrho} + \bar{\sigma} + \bar{\tau}}\ (\beta - \alpha). \tag{6}$$

Obierzmy teraz dowolny ciąg normalny podziałów $\{\delta_n\}$. Oznaczmy, podobnie jak poprzednio, dla podziałów δ_n liczby $P_n, R_n, L_n, \bar{\varrho}_n, \bar{\sigma}_n, \bar{\tau}_n$. Mamy więc wobec (5) i (6):

$$P_n \leqslant L_n \leqslant P_n + R_n, \quad |R_n| \leqslant \sqrt{\bar{\varrho}_n + \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_n} \tag{7}$$

Z jednostajnej ciągłości funkcyj $f'^2(t)$, $\varphi'^2(t)$, $\psi'^2(t)$ i z uwagi na (3) wynika

$$\lim_{n \to \infty} \bar{\varrho}_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \bar{\sigma}_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \bar{\tau}_n = 0.$$

A więc według (7)

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0.$$

Ponieważ, jak łatwo widać,

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \int_\alpha^\beta F(t)\, dt,$$

zatem na mocy (7) ciąg $\{L_n\}$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \to \infty} L_n = \int_\alpha^\beta F(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Granicę ciągu $\{L_n\}$ nazywamy długością danej krzywej; oznaczając długość literą s, widzimy, że

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Uwaga 1.

Przypuśćmy, że funkcje $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ posiadają w przedziale (α, β) pochodne ciągłe, poza skończoną liczbą punktów Jeżeli całka (w znaczeniu zwyczajnem lub niewłaściwem):

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$$

istnieje, wówczas wartość tej całki nazywamy również długością danej krzywej. Można wykazać, że ciąg liczb $\{L_n\}$ określonych jak poprzednio, zmierza przy każdym ciągu normalnym podziałów $\{\delta_n\}$ do wartości tej całki.

Uwaga 2.

Często krzywa dana jest wzorami $y = \alpha(x)$, $z = \beta(x)$, przyczem funkcje $\alpha(x)$, $\beta(x)$ posiadają ciągłe pochodne. Jest to pewien rodzaj przedstawienia parametycznego, jak odrazu widzimy, pisząc

$$x = t,\ y = \alpha(t),\ z = \beta(t). \quad (x_1 \leqslant t \leqslant x_2)$$

Zatem $$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \alpha'^2(x) + \beta'^2(x)}\, dx.$$

W szczególności, dla krzywych płaskich ($\beta = 0$), otrzymujemy często używany wzór

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Przykłady:

1. Obliczyć długość łuku paraboli $y^2 = 2px$ od wierzchołka aż do punktu (x, y).

Przedstawienie parametryozne otrzymamy kładąc

$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t.$$

Stąd

$$s = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}}\, dt = \frac{y}{2p}\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2}\log\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}$$

2. Obliczyć długość łuku cykloidy

$$x = a\,(t - \sin t),\quad y = a\,(1 - \cos t),$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\,dt = a\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2\,(1 - \cos t)}\,dt =$$

$$= 2\,a \int_{t_1}^{t_2} \sin\frac{t}{2}\,dt = 4\,a\left(\cos\frac{t_1}{2} - \cos\frac{t_2}{2}\right)\cdot\ (0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 2\,\pi)$$

W szczególności, kładąc $t_1 = 0$, $t_2 = 2\,\pi$ otrzymujemy długość całego łuku $8\,a$.

3. Obliczyć długość łuku linji śrubowej

$$x = r\cos t,\quad y = r\sin t,\quad z = a\,t$$

w granicach t_1, t_2.

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + a^2}\;dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 + a^2}\;dt,$$

zatem $$L = \sqrt{r^2 + a^2}\,(t_2 - t_1).$$

Z a d a n i a:

Obliczyć długość łuku następujących krzywych:

1) Cyssoida $x = 2\,r\sin^2 t$, $y = 2\,r\sin^2 t\,\mathrm{tg}\,t$ w granicach 0, t.

$$\Bigl(s = 2\,r\left[\frac{\sqrt{1 + 3\cos^2 t}}{\cos t} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{3}\log\left(\sqrt{3}\cos t + \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\right) - 2 + \sqrt{3}\log\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]\Bigr).$$

2) $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$ w granicach 0, $\sqrt{3}$ $(s = 2\sqrt{3})$.

3) Linja łańcuchowa

$$y = \tfrac{1}{2}\,a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

w granicach x_1, x_2.

$$\left[s = \tfrac{1}{2}\,a\left(e^{\frac{x_2}{a}} - e^{-\frac{x_2}{a}}\right) - \tfrac{1}{2}\,a\left(e^{\frac{x_1}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}}\right)\right].$$

4) $y = \frac{x^2}{2a}$, $z = \frac{x^3}{6a^2}$ w granicach 0, x.

$$(s = x + z)$$

5) Krzywa przekroju walca parabolicznego

$$(y + z)^2 = 4ax$$

ze stożkiem eliptycznym. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ od początku układu do punktu (x, y, z).

$$(s = z\sqrt{2})$$

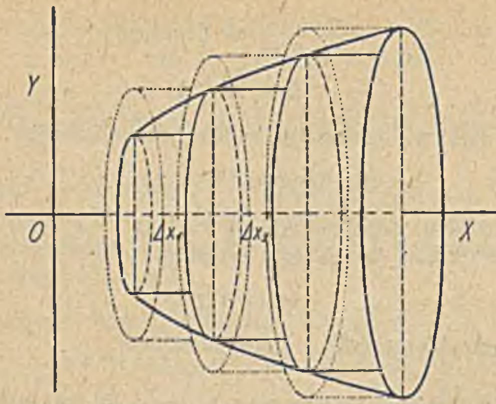
(Wskazówka: obrać x jako parametr).

§ 3. Objętość bryły obrotowej. Niechaj funkcja $y = f(x)$ będzie ciągła i nieujemna w przedziale (a, b) $[a < b]$. Oznaczmy przez D obszar zawarty między krzywą $y = f(x)$ osią x-ów i rzędnemi $x = a$, $x = b$. Przypuśćmy teraz, że krzywa $y = f(x)$ wykonała całkowity obrót około osi x-ów i że obszar D przy tym obrocie opisał bryłę T. Zajmiemy się wyznaczeniem objętości bryły T.

Utwórzmy w tym celu dowolny podział δ odcinka (a, b) i oznaczmy przez $M_1, m_1, M_2, m_2 \ldots$ największe wzgl. najmniejsze wartości, funkcji $f(x)$ w poszczególnych odcinkach podziału δ. Zauważmy, że prostokąty o podstawach Δx_1, $\Delta x_2 \ldots$, a o wysokościach odpowiednio M_1, $M_2 \ldots$, pokrywają całkowicie obszar D. A więc bryła powstała przez całkowity obrót tych prostokątów zawiera w sobie bryłę T. Jej objętość wyrazi się wzorem

$$W = \pi(\Delta x_1 M_1^2 + \Delta x_2 M_2^2 + \ldots).$$

Podobnie prostokąty o podstawach Δx_1, $\Delta x_2 \ldots$, a o wysokościach m_1, $m_2 \ldots$ zawierają się całkowicie w D, zatem bryła przez nie opisana zawiera się w bryle T.



Rys. 5.

Oznaczając przez w jej objętość, mamy:

$$w = \pi (\Delta x_1 m_1^2 + \Delta x_1 m_2^2 + \ldots).$$

Jeżeli $\{\delta_n\}$ oznacza dowolny ciąg normalny podziałów, wówczas, jak łatwo zauważyć:

$$\lim_{n \to \infty} W_n = \lim_{n \to \infty} w_n = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

A zatem postąpimy zgodnie z intuicją, określając objętość bryły obrotowej T wzorem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Przykłady:

1. Obliczyć objętość kuli o promieniu r. Kula powstaje przez obrót półkola

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (-r \leqslant x \leqslant r)$$

dokoła osi x-ów.

Zatem $V = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3} r^3 \pi$

zgodnie ze znanym wzorem.

2. Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót cykloidy $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ dokoła osi x-ów.

Gdy t zmienia się od 0 do 2π, x rośnie od 0 do $2\,a\pi$, bo

$$\frac{dx}{dt} = a\,(1 - \cos t) > 0 \quad \text{dla} \quad 0 < t < 2\pi.$$

Wobec tego y jest funkcją zmiennej x w przedziale $(0, 2\,a\pi)$, zatem

$$V = \pi \int_0^{2a\pi} y^2\, dx.$$

Wprowadzając zmienną t, otrzymujemy

$$V = \pi \int_0^{2\pi} [a\,(1 - \cos t]^2\, a\,(1 - \cos t)\, dt = 5\, a^3 \pi^2.$$

Zadania:

Obliczyć objętości następujących brył obrotowych:

1) Warstwa kulista powstała przez obrót łuku

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

dokoła osi x-ów w granicach x_1, x_2 $(-r \leqslant x_1 < x_2 \leqslant r)$

$$\left(V = \left[r^2\,(x_2 - x_1) - \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}\right] \pi\right).$$

2) Stożek ścięty (wzór znany z geometrji elementarnej).

3) Bryła otrzymana przez obrót łuku asteroidy $x = r \cos^3 t$, $y = r \sin^3 t$, $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ dokoła osi x-ów.

$$\left(V = \frac{16}{105}\, r^3 \pi\right).$$

4) Bryła powstała przez obrót krzywej

$$y^2(x - 4a) = ax(x - 3a) \quad (0 \leqslant x \leqslant 3a)$$

dokoła osi x-ów.

$$\left[V = \frac{a^3 \pi}{2}(15 - 16 \log 2)\right].$$

5) Bryła powstała przez obrót krzywej

$$(y^2 - b^2)^2 = a^3 x$$

dokoła osi y-ów $(-b \leqslant y \leqslant b)$. (Wskazówka: objętość wyraża się tu wzorem $\pi \int\limits_{-b}^{+b} x^2 dy$).

$$V = \frac{256}{315} \frac{b^9 \pi}{a^6}.$$

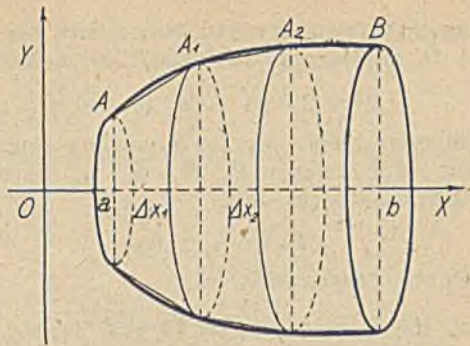
§ 4. Pole powierzchni obrotowej. Niechaj funkcja $y = f(x)$ będzie ciągłą wraz z pierwszą pochodną i nieujemną w przedziale (a, b) $[a < b]$. Przypuśćmy, że krzywa C, która jest obrazem funkcji $f(x)$, opisała całkowitym obrotem około osi x-ów powierzchnię W. Zajmiemy się wyznaczeniem pola powierzchni W. Obierzmy dowolny podział δ odcinka (a, b). Oznaczmy przez $a = x_1 < x_2 < \ldots$ punkty podziału δ. Niechaj $A_1, A_2 \ldots$ będą punktami krzywej C, odpowiadającemi odciętym $x_1, x_2 \ldots$ Linja łamana $A, A_1, A_2, \ldots B$ zakreśli powierzchnię, która będzie utworzona z pobocznic stożków ściętych. (Rys. 6).

Pole tej powierzchni wyrazi się więc wzorem

$$P = 2\pi \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}\, \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} +$$

$$+ 2\pi \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2}\, \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} + \ldots,$$

gdzie $\Delta y_1 = f(x_2) - f(x_1), \quad \Delta y_2 = f(x_3) - f(x_2) \ldots$



Rys. 6.

Zauważmy, że na mocy twierdzenia o wartości średniej, mamy:

$$\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\right)^2} \Delta x_1 =$$

$$= \sqrt{1 + f'^2(\xi_1)}\, \Delta x_1,$$

gdzie ξ_1 jest liczbą zawartą między x_1 i x_2.

Jeżeli położymy

$$\varepsilon_1 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f(\xi_1),$$

wówczas

$$|\varepsilon_1| \leqslant \tfrac{1}{2}\left[\,|f(\xi_1) - f(x_1)| + |f(\xi_1) - f(x_2)|\,\right].$$

Zatem $$P = S + R,$$

gdzie $$S = 2\pi\sqrt{1 + f'^2(\xi_1)}\, f(\xi_1)\, \Delta x_1 +$$

$$+ 2\pi\sqrt{1 + f'^2(\xi_2)}\, f(\xi_2)\, \Delta x_2 + \dots$$

$$R = 2\pi\sqrt{1 + f'^2(\xi_1)}\, \varepsilon_1 \Delta x_1 + 2\pi\sqrt{1 + f'^2(\xi_2)}\, \varepsilon_2 \Delta x_2 + \dots$$

Oznaczając przez η największą z liczb $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|\ldots$, a przez M największą wartość $|f'(x)|$ w (a, b), mamy

$$|R| \leqslant 2\pi\sqrt{1+M^2}\,(b-a)\,\eta.$$

Jeżeli teraz obierzemy sobie dowolny ciąg normalny podziałów $\{\delta_n\}$ i liczby P_n, R_n, S_n, η_n określimy podobnie jak poprzednio, to:

$$P_n = S_n + R_n.$$

Łatwo zauważyć, że

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Na mocy zaś jednostajnej ciągłości funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Zatem $$\lim_{n\to\infty} P_n = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

A zatem postąpimy zgodnie z intuicją, określając pole powierzchni obrotowej wzorem:

$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \tag{1}$$

U w a g a.

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ ciągła i nieujemna w przedziale (a, b) posiada, poza skończoną liczbą punktów, pochodną ciągłą i że istnieje całka (w znaczeniu zwyczajnem lub niewłaściwem):

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Można wykazać, że przy tych założeniach również istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ i równa się powyższej całce pomnożonej przez 2π. Dlatego też i w tym wypadku pole powierzchni obrotowej określamy wzorem (1).

Przykłady:

1. Obliczyć powierzchnię kuli:

Mamy tu $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad (-r \leqslant x \leqslant r)$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

zatem $A = 2\pi \int\limits_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx =$

$$= 2\pi \int\limits_{-r}^{+r} r\, dx = 4 r^2 \pi.$$

2. Obliczyć pole powierzchni otrzymanej przez obrót cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ dokoła osi x-ów. (Por. str. 153).

Wprowadzając zmienną t otrzymujemy:

$$A = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{1 + \left|\frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}\right|^2}\,.$$

$$.\, a(1 - \cos t)\, dt = \frac{64}{3} a^2 \pi.$$

Zadania:

Obliczyć pola następujących brył obrotowych:

1) Paraboloida obrotowa powstała przez obrót paraboli $y^2 = 2px$ dokoła osi x-ów, w granicach $0, x$.

$$A = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(p + 2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right].$$

2) Elipsoida obrotowa powstała przez obrót elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (a > b)$$

a) dokoła osi x-ów

$$A = 2\pi\left[b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arc \sin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right],$$

b) dokoła osi y-ów

$$A = 2\pi\left[a^2 + \frac{a b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right]$$

W wypadku *b)* pole jest dane wzorem

$$A = 2\pi \int_{-b}^{+b} x^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

3) Czasza kulista powstała przez obrót koła

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0$$

dokoła osi x-ów, w granicach $0, h$. $A = 2r\pi h$.

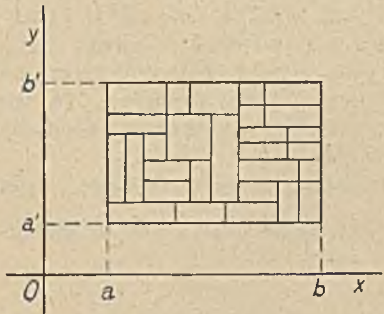
4) Pierścień powstały przez obrót koła o promieniu r dokoła prostej leżącej w tej samej płaszczyźnie, której odległość od środka koła wynosi $a > r$. Obliczyć również objętość tej bryły.

$$A = 4\,a r \pi^2, \quad V = 2\,a r^2 \pi^2.$$

Rozdział IX.

Całka określona podwójna. Warunki całkowalności.

§ 1. Definicja całki określonej podwójnej w prostokącie. Niechaj funkcja $z = f(x, y)$ będzie określoną i ograniczoną w prostokącie D, określonym nierównościami $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant y \leqslant b'$. (Rys. 7). Po-



Rys. 7.

dzielmy prostokąt D na dowolną liczbę prostokątów (niekoniecznie równych) o polach $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2 \dots \Delta\sigma_n$. Oznaczmy przez (ξ_1, η_1), $(\xi_2, \eta_2) \dots (\xi_n, \eta_n)$ współrzędne punktów wybranych dowolnie po jednym z każdego prostokąta. Utwórzmy sumę:

$$A = f(\xi_1, \eta_1)\,\Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\,\Delta\sigma_2 + \dots f(\xi_n, \eta_n)\,\Delta\sigma_n.$$

Łatwo zauważyć, że jeżeli $f(x, y) > 0$ w prostokącie D, wówczas suma A przedstawia sumę objętości prostopadłościanów, o podstawach $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$ ... i o wysokościach $f(\xi_1, \eta_1)$, $f(\xi_2, \eta_2)$ ...

Zbiór prostokątów $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$ ... nazywać będziemy *podziałem* δ. Przez $|\delta|$ oznaczać będziemy długość największej przekątni prostokątów $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$ ...

Ciąg podziałów $\{\delta_n\}$ nazywamy normalnym, jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} |\delta_n| = 0$.

Określenie. *Jeżeli przy każdym ciągu normalnym podziałów* $\{\delta_n\}$ *odpowiedni ciąg sum* $\{A_n\}$ *jest zbieżny* (bez względu na to, jakie punkty ξ, η obierzemy), wówczas powiadamy, że funkcja $f(x, y)$ jest *całkowalna* w prostokącie D.

Można udowodnić (podobnie, jak w wypadku funkcji jednej zmiennej, str. 70), że *jeżeli funkcja* $f(x, y)$ *jest całkowalna, wówczas sumy* $\{A_n\}$ *zdążają przy każdym ciągu normalnym podziałów zawsze do tej samej granicy.* Tę wspólną granicę nazywamy *całką określoną* (podwójną) funkcji $f(x, y)$ w prostokącie D.

Całkę określoną podwójną oznaczać będziemy symbolem:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \text{ lub } \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Uwaga 1.

Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ jest ciągła i nieujemna w prostokącie D, wówczas objętość obszaru zawartego między powierzchnią $z = f(x, y)$, płaszczyzną poziomą (x, y) i płaszczyznami równoległemi do osi z, przechodzącemi wzdłuż boków prostokąta D określamy, jako wartość całki:

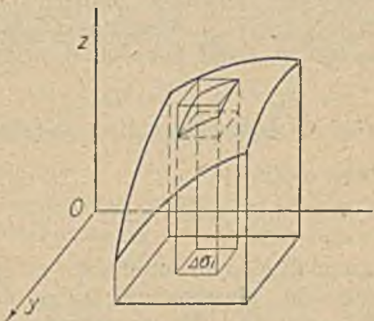
$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma.$$

(Wykażemy później, że każda funkcja ciągła w prostokącie jest całkowalna).

Intuicyjnie definicja ta jest usprawiedliwiona. Niechaj bowiem δ będzie dowolnym podziałem. Oznaczmy przez $M_1, M_2 \ldots$; $m_1, m_2 \ldots$ największe, wzgl. najmniejsze wartości funkcji $f(x, y)$ w prostokątach podziału δ, zaś przez $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots$ wzgl. $(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1), (\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2) \ldots$ punkty, w których funkcja te wartości przyjmuje.

Połóżmy:

$$S = f(\xi_1, \eta_1)\,\Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\,\Delta\sigma_2 + \ldots =$$
$$= M_1\,\Delta\sigma_1 + M_2\,\Delta\sigma_2 + \ldots$$
$$s = f(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1)\,\Delta\sigma_1 + f(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2)\,\Delta\sigma_2 + \ldots =$$
$$= m_1\,\Delta\sigma_1 + m_2\,\Delta\sigma_2 + \ldots$$



Rys. 8.

Prostopadłościany odpowiadające sumie S pokrywają w zupełności uważany obszar, prostopadłościany zaś odpowiadające sumie s, mieszczą się w nim całkowicie. Ponieważ obierając dowolny ciąg podziałów $\{\delta_n\}$ mamy:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty} s_n = \iint\limits_E f(x, y)\, d\sigma.$$

postąpimy zgodnie z intuicją, określając objętość danego obszaru, jako wartość powyższej całki.

Uwaga 2.

W całce określonej: $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ zmienne x, y nie grają istotnej roli, dlatego też zamiast x, y możemy pisać inne litery. A więc np.:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(u, v)\,du\,dv = \iint\limits_D f(w, t)\,dw\,dt.$$

Przykłady:

1. Funkcja $z = c$ jest w każdym prostokącie całkowalna i

$$\iint\limits_D c\,d\sigma = c\,|D|$$

($|D|$ oznacza pole prostokąta D).

Tworząc bowiem dowolny podział δ i obierając punkty (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) ... dowolnie z każdego prostokąta wchodzącego w skład podziału δ, widzimy, że

$$f(\xi_1, \eta_1) = c,\ f(\xi_2, \eta_2) = c, \ldots$$

zatem $$A = c\Delta\sigma_1 + c\Delta\sigma_2 + \ldots = c\,|D|.$$

W myśl więc definicji:

$$\iint\limits_D c\,d\sigma = c\,|D| \tag{1}$$

Obrazem geometrycznym funkcji $z = c$ jest płaszczyzna równoległa do płaszczyzny (x, y). Jeżeli $c > 0$, wówczas całka określona (1) przedstawia nam objętość prostopadłościanu o podstawie D i wysokości c.

2. Wyznaczyć całkę podwójną $\iint y\,dx\,dy$ po kwadracie D o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$.

Funkcja $f(x, y) = y$ jest ciągła, a zatem, na podstawie już wspomnianego twierdzenia, całkowalna. Aby obliczyć jej całkę, dzielimy kwadrat prostemi równoległemi do osi współrzędnych na n^2 równych kwadratów. W każdym z nich obieramy za ξ_i, η_i prawy górny wierzchołek. Ponieważ pole każdego kwadratu wynosi $\frac{1}{n^2}$ otrzymujemy dla sumy $\Sigma f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\sigma_i$ wartość

$\frac{1}{n^2}\Sigma\eta_i$. Ponieważ liczby η_i mają wartości $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n}{n}$, przyczem każda z tych wartości występuje w n kwadratach, tworzących jeden poziomy szereg, więc badana suma ma wartość

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n}{n}\right)n=\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

Przechodząc do granicy dla $n\to\infty$ dostajemy

$$\iint_D y\,dx\,dy=\tfrac{1}{2}.$$

Wynik ten łatwo otrzymać w sposób elementarny. Wystarczy zauważyć, że badana całka przedstawia objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest trójkąt prostokątny równoramienny o boku 1, a wysokość jest równa 1.

§ 2. Warunki całkowalności.

Twierdzenie 1.

Suma dwóch funkcyj $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ całkowalnych w prostokącie D jest funkcją całkowalną i

$$\iint_D [f(x, y)+\varphi(x, y)]\,d\sigma=\iint_D f(x, y)\,d\sigma+\iint_D \varphi(x, y)\,d\sigma.$$

Twierdzenie 2.

Iloczyn stałej c przez funkcję $f(x, y)$, całkowalną w prostokącie D, jest funkcją całkowalną i

$$\iint_D c\,f(x, y)\,d\sigma=c\iint_D f(x, y)\,d\sigma.$$

Twierdzenia powyższe wynikają bezpośrednio z określenia całki podwójnej; dowody przedstawiają się podobnie, jak dowody odpowiednich twierdzeń rozdziału V (str. 75—76).

Twierdzenie 3.

Funkcja $z = f(x, y)$ ciągła w prostokącie D jest w tym prostokącie całkowalna.

Dowód tego twierdzenia przeprowadza się podobnie jak odpowiedniego twierdzenia dla całki pojedyńczej (rozdział V, str. 79). Określamy w tym celu pojęcie sumy górnej S i sumy dolnej s, odpowiadającej podziałowi δ, podobnie jak dla całki pojedyńczej. Zatem

$$S = M_1 \Delta\sigma_1 + M_2 \Delta\sigma_2 + \ldots, \quad s = m_1 \Delta\sigma_1 + m_2 \Delta\sigma_2 + \ldots,$$

gdzie $M_1, M_2 \ldots$ wzgl. $m_1, m_2 \ldots$ oznaczają największe względnie najmniejsze wartości funkcji $f(x, y)$ w prostokątach $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2 \ldots$

O sumach tych można wykazać, że dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\delta_n\}$ zachodzi:

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0 \tag{1}$$

ponadto, że dla dwóch podziałów δ i δ' mamy zawsze

$$S \geqslant s' \tag{2}$$

Dowód tych własności otrzyma czytelnik, robiąc w dowodach lemmatów 1, 2 (rozdział V, str. 77—78) odpowiednie widoczne zmiany. Mając już własności (1) i (2) udowadniamy nasze twierdzenie, podobnie jak twierdzenie na str. 79, przyczem dowód tam podany przenosi się tutaj prawie bez zmian.

Ogólniejszem twierdzeniem jest następujące:

Twierdzenie 4.

Funkcja określona i ograniczona w prostokącie D, jest w tym prostokącie całkowalna, jeżeli wszystkie jej punkty nieciągłości leżą na skończonej liczbie krzywych, będących obrazami geometrycznemi funkcyj ciągłych [kształtu $y = \varphi(x)$ lub $x = \psi(y)$].

Dowód tego twierdzenia pomijamy.

Przykład:

Niech $f(x, y)$ oznacza funkcję określoną w prostokącie D o wierzchołkach $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(0, 1)$ w sposób następujący:

$$f(x, y) = -1 \quad \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ i dowolnego } y$$
$$f(x, y) = 2 \quad \text{dla } 1 < x \leqslant 3 \text{ i dowolnego } y.$$

Jak łatwo widzieć, funkcja ta jest ograniczona i ciągła w każdym punkcie, z wyjątkiem punktów położonych na odcinku prostej $x = 1$ leżącym w danym prostokącie. Na mocy tw. 4 funkcja $f(x, y)$ jest w tym prostokącie całkowalna.

§ 3. Całka podwójna jako całka iterowana. Poznamy teraz twierdzenie, które pozwoli nam obliczać całkę podwójną przy pomocy całek pojedyńczych.

Twierdzenie.

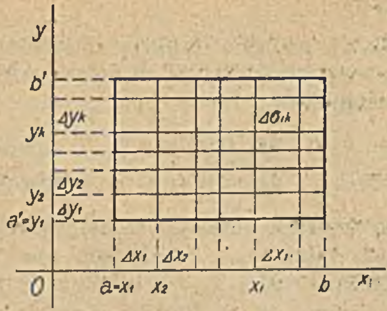
Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w prostokącie D $(a \leqslant x \leqslant b,\ a' \leqslant y \leqslant b')$, wówczas:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy \right\} dx = \int\limits_{a'}^{b'} \left\{ \int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right\} dy.$$

Dowód.

Utwórzmy dowolne podziały δ i δ' przedziałów (a, b) i (a', b') przy pomocy odcinków Δx_1, Δx_2 ... wzgl. Δy_1, Δy_2 ...

Niechaj $a = x_1 < x_2 < \ldots$ wzgl. $a' = y_1 < y_2 < \ldots$ będą końcami odcinków podziału δ i δ'. W punktach podziałów δ i δ' poprowadźmy proste równoległe do osi y-ów wzgl. x-ów. Otrzymamy w ten sposób podział δ prostokąta D na szereg prostokątów. Niechaj $\Delta \sigma_{ik}$ oznacza prostokąt podziału δ, którego rzuty na osi układu są odpowiednio Δx_i, Δy_k. Oznaczmy wreszcie przez



Rys. 9.

m_{ik} wzgl. M_{ik} najmniejszą, wzgl. największą wartość funkcji $f(x, y)$ w prostokącie $\Delta\,\sigma_{ik}$.

Połóżmy $$F(x) = \int_{a'}^{b'} f(x, y)\,dy \tag{1}$$

Obierzmy dowolnie punkty $\xi_1, \xi_2 \ldots$, odpowiednio w odcinkach $\Delta\,x_1$, $\Delta\,x_2 \ldots$ i niechaj

$$A = F(\xi_1)\,\Delta\,x_1 + F(\xi_2)\,\Delta\,x_2 + \ldots \tag{2}$$

Na mocy (1)

$$F(\xi_1) = \int_{a'}^{b'} f(\xi_1, y)\,dy =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} f(\xi_1, y)\,dy + \int_{y_2}^{y_3} f(\xi_1, y)\,dy + \ldots \tag{3}$$

Ponieważ $\quad m_{11} \leqslant f(\xi_1, y) \leqslant M_{11}$ dla $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$,

więc $$m_{11}\,\Delta\,y_1 \leqslant \int_{y_1}^{y_2} f(\xi_1, y)\,dy \leqslant M_{11}\,\Delta\,y_{11}.$$

Podobnie:

$$m_{12}\,\Delta\,y_2 \leqslant \int_{y_2}^{y_3} f(\xi_1, y)\,dy \leqslant M_{12}\,\Delta\,y_2 \quad \text{i t. d.}$$

Zatem na mocy (3)

$$m_{11}\,\Delta y_1 + m_{12}\,\Delta y_2 + \ldots \leqslant F(\xi_1) \leqslant M_{11}\,\Delta y_1 + \\ + M_{12}\,\Delta y_2 + \ldots$$

Analogicznie postępując otrzymamy:

$$m_{21}\,\Delta y_1 + m_{22}\,\Delta y_2 + \ldots \leqslant F(\xi_2) \leqslant M_{21}\,\Delta y_1 + \\ + M_{22}\,\Delta y_2 + \ldots$$

Ponieważ $\Delta\sigma_{ik} = \Delta x_i\,\Delta y_k$, więc na mocy (2) dostajemy:

$$m_{11}\,\Delta\sigma_{11} + m_{12}\,\Delta\sigma_{12} + \ldots m_{21}\,\Delta\sigma_{21} + m_{22}\,\Delta\sigma_{22} + \ldots \leqslant \\ \leqslant A \leqslant M_{11}\,\Delta\sigma_{11} + M_{12}\,\Delta\sigma_{12} + \ldots + M_{21}\,\Delta\sigma_{21} + \\ + M_{22}\,\Delta\sigma_{22} + \ldots$$

Oznaczając przez s i S pierwszy, wzgl. trzeci człon powyższej nierówności, otrzymamy:

$$s \leqslant A \leqslant S \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Jeżeli teraz obierzemy dwa ciągi normalne podziałów $\{\delta_n\}$ i $\{\delta'_n\}$ odcinków (a, b) i (a', b'), wówczas odpowiedni ciąg podziałów $\{\bar{\delta}_n\}$ prostokąta D będzie także ciągiem normalnym.

Według (4) $\qquad s_n \leqslant A_n \leqslant S_n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$, więc na mocy (5) dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\delta_n\}$, istnieje $\lim A_n$; zatem wobec (2) funkcja $F(x)$ jest całkowalna w przedziale (a, b) i

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} A_n = \iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma.$$

Stąd na mocy (1)

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma = \int\limits_a^b \{\int\limits_{a'}^{b'} f(x, y)\,dy\}\,dx.$$

Podobnie otrzymamy

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \int\limits_{a'}^{b'} \{\int\limits_a^b f(x, y)\, dx\}\, dy.$$

Uwaga.

Można udowodnić twierdzenie ogólniejsze. Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ jest całkowalna w prostokącie D i że dla każdego x funkcja $f(x, y)$ uważana jako funkcja zmiennej y jest funkcją całkowalną. Przy tych założeniach możemy twierdzić, że:

1) funkcja $F(x) = \int\limits_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy$ jest funkcją całkowalną w (a, b),

2) $\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \int\limits_a^b \{\int\limits_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy\}\, dx.$

Przykłady.

1. Obliczyć $\iint x^2 y\, dx\, dy$ po prostokącie ograniczonym prostemi $x = 2$, $x = 5$, $y = 1$, $y = 3$.

Mamy tu

$$\iint x^2 y\, dx\, dy = \int\limits_1^3 dy \int\limits_2^5 x^2 y\, dx =$$

$$= \int\limits_1^3 dy \left[\frac{x^3 y}{3}\right]_{x=2}^{x=5} = \frac{1}{3}\int\limits_1^3 (125\, y - 8\, y)\, dy = \frac{117}{3}\, \frac{y^2}{2}\Bigg|_1^3 = 156.$$

Możemy również całkować w odwrotnym porządku:

$$\iint x^2 y\, dx\, dy = \int\limits_2^5 dx \int\limits_1^3 x^2 y\, dy =$$

$$= \int\limits_2^5 dx \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=3} = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 (9\, x^2 - x^2)\, dx = 4 \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^5 = 156.$$

2. Wykazać, że

$$\iint\limits_D f(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy = [\int\limits_a^b f(x)\, dx] \cdot [\int\limits_c^d \varphi(y)\, dy],$$

przyczem $f(x)$, $\varphi(y)$ oznaczają funkcje ciągłe w przedziale (a, b) wzgl. (c, d), a całka podwójna odnosi się do prostokąta D ograniczonego prostemi $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$.

Mamy tu

$$\iint_D f(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \,.\int_c^d f(x)\,\varphi(y)\,dy.$$

Ponieważ x jest stałą przy całkowaniu ze względu na y, więc

$$\int_c^d f(x)\,\varphi(y)\,dy = f(x)\int_c^d \varphi(y)\,dy,$$

zatem $$\iint_D f(x)\,\varphi(y)\,dx\,dy = \int_a^b f(x)\,dx \int_c^d \varphi(y)\,dy.$$

Ponieważ zaś $\int_c^d \varphi(y)\,dy$ jest stałą liczbą, możemy ją wyjąć przed znak całki $\int_a^b$, przez co otrzymujemy podany wynik.

Wzór ten możemy np. zastosować do poprzedniego przykładu.

3. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ określona i ograniczona w prostokącie D $(a \leqslant x \leqslant b,\ a' \leqslant y \leqslant b')$ we wszystkich punktach tego prostokąta jest równa zeru, z wyjątkiem punktów położonych na skończonej liczbie krzywych ciągłych postaci $y = \varphi(x)$ lub $x = \psi(y)$, wówczas

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = 0.$$

Ponieważ, jak łatwo widzieć, jedynemi możliwemi punktami nieciągłości funkcji $f(x, y)$ są punkty owych krzywych, więc funkcja ta jest całkowalna (tw. 4, str. 164). Oznaczmy przez $f_1(x, y)$ funkcję równą funkcji $f(x, y)$ w całym prostokącie, z wyjątkiem krzywych postaci $x = \psi(y)$, na których przypisujemy jej wartość zero i połóżmy $f_2(x, y) = f(x, y) - f_1(x, y)$. Funkcje $f_1(x, y)$ i $f_2(x, y)$ są całkowalne z tego samego powodu co poprzednio. Wobec $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$, mamy

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f_1(x, y)\,dx\,dy + \iint_D f_2(x, y)\,dx\,dy.$$

Wystarczy oczywiście okazać, że obie całki po prawej stronie są równe zeru.

Dla pierwszej z nich mamy na mocy naszego twierdzenia:

$$\iint_D f_1(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{a'}^{b'} f_1(x, y)\, dy.$$

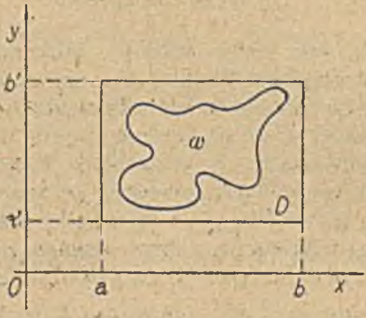
Funkcja $f_1(x, y)$ przy dowolnie ustalonem $x = x_0$ jest funkcją zmiennej y, która jest równa zeru dla wszelkich y, pomijając skończoną liczbę wartości, odpowiadających punktom przecięcia prostej $x = x_0$ z krzywemi wyjątkowemi. Zatem (por. str. 74)

$$\int_{a'}^{b'} f_1(x_0, y)\, dy = 0$$

przy każdem x_0, z czego natychmiast wynika, że całka po prawej stronie jest równa zeru.

Dla funkcji $f_2(x, y)$ dowód jest podobny.

§ 4. Całka podwójna po obszarze. Niechaj ω będzie obszarem domkniętym ograniczonym (por. T. I, str. 239). Załóżmy, że funkcja $z = f(x, y)$ jest w obszarze ω określoną i ograniczoną.



Rys. 10.

Niechaj D będzie dowolnym prostokątem ($a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant y \leqslant b'$), zawierającym w swojem wnętrzu obszar ω. Określmy nową funkcję $F(x, y)$ w prostokącie D następująco:

$F(x, y) = f(x, y)$ dla punktów (x, y) należących do ω,
$F(x, y) = \quad 0$ dla innych punktów prostokąta D.

Jeżeli funkcja $F(x, y)$ jest całkowalna w prostokącie D, wówczas powiadamy, że funkcja $f(x, y)$ jest całkowalną w obszarze ω; całką podwójną nazywać będziemy wartość całki $\iint\limits_D F(x, y)\, d\sigma$.

Całkę podwójną po obszarze ω oznaczamy podobnie, jak poprzednio, t. j. symbolem $\iint\limits_\omega f(x, y)\, d\sigma$ lub $\iint\limits_\omega f(x, y)\, dx\, dy$.

A więc według definicji:

$$\iint\limits_\omega f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_D F(x, y)\, d\sigma.$$

U w a g a.

Jeżeli prostokąt D zastąpimy przez inny prostokąt D', również zawierający obszar ω, to otrzymamy tę samą wartość całki. Łatwo to stwierdzić w wypadku, gdy prostokąt D jest całkowicie zawarty w D'. Jeżeli tak nie jest, wystarczy obrać trzeci prostokąt D'' zawierający D i D'. Całki po D i po D' są równe całce po D'', a więc i między sobą.

O k r e ś l e n i e.

Obszar domknięty ω nazywamy obszarem **r e g u l a r n y m**, jeżeli jego brzeg składa się ze skończonej liczby krzywych dających się przedstawić w postaci $y = \varphi(x)$, lub $x = \psi(y)$.

T w i e r d z e n i e 1.

F u n k c j a $f(x, y)$ o g r a n i c z o n a i c i ą g ł a w o b s z a r z e r e g u l a r n y m ω j e s t w t y m o b s z a r z e c a ł k o w a l n a.

Dowód.

Obierzmy dowolny prostokąt D i określmy funkcję $F(x, y)$ jak poprzednio. Łatwo zauważyć, że wszystkie punkty nieciągłości tej funkcji leżą na brzegu obszaru ω. Funkcja $F(x, y)$ jest więc całkowalna na mocy tw. 4, str. 164.

Przykłady:

1. Wielobok domknięty jest obszarem regularnym. Istotnie, jego brzeg składa się ze skończonej liczby odcinków, będących obrazami funkcyj ciągłych typu $y = ax + b$ lub $x = c$.

2. Elipsa domknięta jest również obszarem regularnym. Jeżeli np. dana jest równaniem $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, to jej brzeg składa sie z dwu krzywych:

$$y = + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ i } y = - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

gdzie $-a \leqslant x < a$.

3. Jeżeli obszar domknięty ω składa się ze skończonej liczby obszarów regularnych $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k$, z których żadne dwa nie mają wspólnego punktu wewnętrznego, to, jak łatwo zauważyć, sam jest obszarem regularnym. Jego brzeg składa się bowiem ze skończonej liczby krzywych ciągłych postaci $y = \varphi(x)$ lub $x = \psi(y)$, z których każda należy do brzegu jednego z obszarów $\omega_1 \ldots \omega_k$. Obszar ω nazywamy sumą obszarów $\omega_1 \ldots \omega_k$.

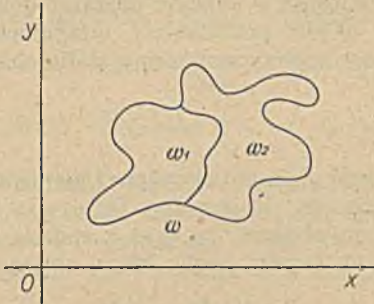
Twierdzenie 2.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze regularnym ω, będącym sumą dwu obszarów regularnych ω_1 i ω_2 (bez wspólnych punktów wewnętrznych), wówczas

$$\iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma = \iint_{\omega_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{\omega_2} f(x, y)\, d\sigma.$$

Dowód.

Obierzmy dowolny prostokąt D pokrywający obszar ω. Oznaczmy przez $F(x, y)$, $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ odpowiednie funkcje dla $f(x, y)$ odnośnie do obszarów ω, ω_1, ω_2. Mamy zatem:



Rys. 11.

$$\iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D} F(x, y)\, d\sigma; \quad \iint_{\omega_1} f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D} F_1(x, y)\, d\sigma;$$

$$\iint_{\omega_2} f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D} F_2(x, y)\, d\sigma \tag{1}$$

Zauważmy, że funkcja

$$\varphi(x, y) = F(x, y) - F_1(x, y) - F_2(x, y) \tag{2}$$

jest równa zeru, poza, być może, punktami położonemi na wspólnej części brzegów obszarów ω_1 i ω_2. Ze względu na regularność obszarów ω, ω_1 i ω_2, na mocy twierdzenia na str. 169 otrzymujemy:

$$\iint_{D} \varphi(x, y)\, d\sigma = 0.$$

Stąd z uwagi na (1) i (2) wynika nasze twierdzenie.

Uwaga 1.

Twierdzenie 1 pozwala nam określić pole dowolnego obszaru regularnego ω. Jako definicję tego pola, które będziemy oznaczać symbolem $|\omega|$, przyjmujemy formułę

$$|\omega| = \iint_{\omega} d\sigma.$$

Całka po prawej stronie istnieje, gdyż funkcja $f(x, y) = 1$ jest oczywiście ciągła w każdym obszarze domkniętym ω. Jeżeli obszar ω jest prostokątem otrzymujemy na pole wartość tę samą, co przy zwyczajnej definicji (por. str. 162, przykład 1).

Uwaga 2.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła i nieujemna w obszarze regularnym ω, to punkty (x, y, z), dla których (x, y) należy do obszaru ω, zaś z spełnia nierówność $0 \leqslant z \leqslant f(x, y)$, tworzą bryłę, której objętość określamy wzorem:

$$V = \iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma.$$

Podobnie jak poprzednio (str. 161), łatwo się przekonać, że definicja powyższa zgodna jest z intuicyjnem pojęciem objętości.

Przykłady:

1. Zastosujemy twierdzenie powyższe do obliczenia całki funkcji $f(x, y)$ określonej w przykładzie na str. 165 Prosta $x = 1$ dzieli prostokąt D na dwa prostokąty nie posiadające wspólnych punktów wewnętrznych. Oznaczając lewy prostokąt przez D_1, prawy przez D_2, mamy

$$\iint_{D} f(x, y)\, d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\, d\sigma =$$
$$= \iint_{D_1} (-1)\, d\sigma + \iint_{D_2} 2\, d\sigma = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 3.$$

2. Oznaczmy przez ω dowolny wielobok domknięty i podzielmy go w dowolny sposób na skończoną liczbę wieloboków:

$$\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n.$$

Połóżmy $f(x, y) = c_k$ wewnątrz ω_k $(k = 1, 2 \ldots n)$, gdzie $c_1, c_2 \ldots c_n$ oznaczają stałe dowolne Na brzegach wieloboków funkcję określmy w sposób dowolny, jednak tak, aby była ograniczona. Na mocy tw. 4 (str. 164) funkcja $f(x, y)$ jest całkowalna w wieloboku ω. Twierdzenie ostatnie pozwala obliczyć tę całkę:

$$\iint\limits_{\omega} f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{\omega_1} c_1\, d\sigma + \iint\limits_{\omega_2} c_2\, d\sigma + \ldots + \iint\limits_{\omega_n} c_n\, d\sigma =$$

$$= c_1 |\omega_1| + c_2 |\omega_2| + \ldots + c_n |\omega_n|.$$

§ 5. Warunki całkowalności. Twierdzenie o średniej wartości. Dla funkcyj całkowalnych w dowolnym obszarze regularnym ω są prawdziwe twierdzenia analogiczne do twierdzen z § 2 (str. 163):

Twierdzenie 1.

Suma dwóch funkcyj $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ całkowalnych w obszarze regularnym ω jest funkcją całkowalną i

$$\iint\limits_{\omega} [f(x, y) + \varphi(x, y)]\, d\sigma = \iint\limits_{\omega} f(x, y)\, d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{\omega} \varphi(x, y)\, d\sigma.$$

Twierdzenie 2.

Iloczyn stałej c przez funkcję $f(x, y)$ całkowalną w obszarze regularnym ω jest funkcją całkowalną i

$$\iint\limits_{\omega} c f(x, y)\, d\sigma = c \iint\limits_{\omega} f(x, y)\, d\sigma.$$

Twierdzeniu 3 z § 2 odpowiada twierdzenie 1 z § 4. Dowody twierdzeń powyższych wynikają bardzo łatwo z definicji całki podwójnej po obszarze regularnym i wspomnianych twierdzeń z § 2.

U w a g a.

Jeżeli funkcje $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ są całkowalne w obszarze regularnym ω i spełniają tam nierówność $f(x, y) \leqslant \varphi(x, y)$, wówczas

$$\iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma \leqslant \iint_{\omega} \varphi(x, y)\, d\sigma.$$

Istotnie, nierówność ta jest na mocy tw. 1 równoważna z nierównością

$$\iint_{\omega} [\varphi(x, y) - f(x, y)]\, d\sigma \geqslant 0.$$

Z definicji całki podwójnej wynika natychmiast, że całka funkcji nieujemnej jest również nieujemna.

Dla funkcyj dwu zmiennych zachodzi twierdzenie o średniej wartości, podobne do udowodnionego poprzednio w wypadku jednej zmiennej (str. 83):

T w i e r d z e n i e 3.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest całkowalna w obszarze regularnym ω i spełnia tam nierówność

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M,$$

wówczas $$m\,|\omega| \leqslant \iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma \leqslant M\,|\omega|.$$

Istotnie, z ostatniej uwagi wynika łatwo, że

$$\iint_{\omega} m\, d\sigma \leqslant \iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma \leqslant \iint_{\omega} M\, d\sigma,$$

zaś na mocy tw. 2 i definicji pola mamy

$$\iint_{\omega} m\, d\sigma = m\,|\omega| \text{ i } \iint_{\omega} M\, d\sigma = M\,|\omega|.$$

U w a g a.

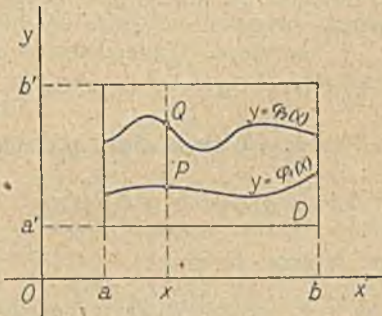
Podobnie, jak w wypadku jednej zmiennej, określamy jako średnią wartość funkcji $f(x, y)$ całkowalnej w obszarze regularnym ω, liczbę

$$\frac{1}{|\omega|} \iint_{\omega} f(x, y)\, d\sigma.$$

§ 6. Całka podwójna po obszarach, jako całka iterowana. Przypuśćmy, że ω jest obszarem regularnym określonym nierównościami

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),$$

gdzie $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ są funkcjami ciągłemi w $(a; b)$ i $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ dla $a < x < b$. Obszar taki nazywać będziemy obszarem normalnym (względem osi x-ów).



Rys. 12.

Niechaj D będzie dowolnym prostokątem określonym nierównościami $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant y \leqslant b'$, pokrywającym obszar ω.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą w obszarze ω, wówczas, jak wiemy:

$$\iint\limits_{\omega} f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{D} F(x, y)\, d\sigma. \tag{1}$$

gdzie $F(x, y) = f(x, y)$ w punktach obszaru ω, zaś $F(x, y) = 0$ w pozostałych punktach prostokąta D.

Funkcja $F(x, y)$ przy stałem x, uważana jako funkcja zmiennej y, posiada co najwyżej dwa punkty nieciągłości; punktami temi mogą być punkty P, Q, w których prosta równoległa do osi y, wykreślona w punkcie x osi x-ów przecina obszar ω. A zatem, dla każdego x istnieje całka

$$\int_{a'} F(x, y)\, dy.$$

Stąd na mocy uwagi na str. 168 wynika, że

$$\iint_D F(x, y)\, d\sigma = \int_a^b \left\{\int_{a'}^{b'} F(x, y)\, dy\right\} dx \tag{2}$$

Obierając dowolne x i kładąc $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, możemy napisać:

$$\int_{a'}^{b'} F(x, y)\, dy = \int_{a'}^{y_1} F(x, y)\, dy + \int_{y_1}^{y_2} F(x, y)\, dy + \int_{y_2}^{b'} F(x, y)\, dy.$$

Ponieważ $F(x, y) = 0$ dla $a' \leqslant y < y_1$ i dla $y_2 < y \leqslant b'$,

więc
$$\int_{a'}^{b'} F(x, y)\, dy = \int_{y_1}^{y_2} F(x, y)\, dy.$$

Zauważmy jeszcze, że dla

$$y_1 \leqslant y \leqslant y_2, \quad F(x, y) = f(x, y).$$

A więc

$$\int^{b} F(x, y)\, dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Stąd na mocy (1) i (2)

$$\iint_\omega f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b \left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right\} dx.$$

Uwaga.

Podobne rozważania stosują się do obszaru normalnego względem osi y-ów, określonego nierównościami

$$\varphi_1(y) \leqslant x \leqslant \varphi_2(y)$$
$$a \leqslant y \leqslant b$$

W wypadku tym mamy

$$\iint\limits_{\omega} f(x, y)\, d\sigma = \int\limits_{a}^{b} dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dx = \int\limits_{a}^{b} \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Jeżeli obszar ω da się rozbić na skończoną liczbę obszarów normalnych ω_1, ω_2 ..., wówczas

$$\iint\limits_{\omega} f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{\omega_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{\omega_2} f(x, y)\, d\sigma + \ldots$$

Celem obliczenia całek po obszarach $\omega_1, \omega_2 \ldots$, stosujemy wyżej wypowiedziane twierdzenie.

Przykłady:

1. Obliczyć całkę podwójną funkcji

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2\, y^2$$

pd trójkącie D ograniczonym osiami współrzędnych i prostą $y = -x + 1$.

Jak łatwo widzieć, trójkąt ten jest obszarem normalnym, określonym nierównościami

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x.$$

Zatem $\qquad \varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 1 - x.$

Otrzymujemy

$$\iint\limits_{D} (x^2 + xy + 2\, y^2)\, d\sigma = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2 + xy + 2\, y^2)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left| x^2 (1 - x) + x \frac{(1 - x)^2}{2} + 2 \frac{(1 - x)^3}{3} \right| dx = \frac{7}{24}.$$

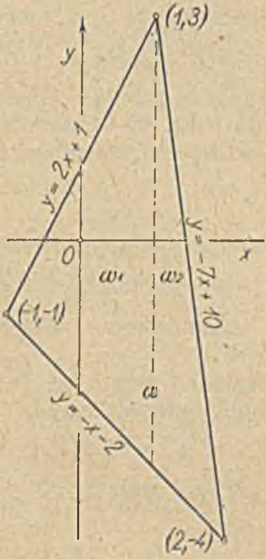
Trójkąt nasz można również określić nierównościami $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1 - y$. Czytelnik łatwo sprawdzi, że całka

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} (x^2 + xy + 2\, y^2)\, dx$$

ma tę samą wartość.

2. Obliczyć całkę $\iint\limits_{\omega} (2x + 3y + 1)\,dx\,dy$ po polu trójkąta o wierzchołkach $(-1, -1)$, $(2, -4)$, $(1, 3)$.

Wyznaczamy najpierw w znany sposób równania prostych, na których leżą boki trójkąta (podane na ry-



Rys. 13.

sunku). Następnie rozkładamy trójkąt na dwa obszary normalne ω_1, ω_2, przy pomocy prostej $x = 1$. (Moglibyśmy również użyć prostej $y = -1$).

Jak wiemy

$$\iint\limits_{\omega} (2x + 3y + 1)\,dx\,dy = \iint\limits_{\omega_1} (2x + 3y + 1)\,dx\,dy +$$
$$+ \iint\limits_{\omega_2} (2x + 3y + 1)\,dx\,dy.$$

Ponieważ obszary ω_1, ω_2 są normalne, możemy każdą z całek po prawej stronie zamienić na całkę iterowaną. Otrzymujemy:

$$\iint_{\omega_1} (2x+3y+1)\,dx\,dy = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-x-2}^{2x+1} (2x+3y+1)\,dy,$$

$$= \int_{-1}^{+1} \Big|\, 2xy + \tfrac{3}{2}y^2 + y \,\Big|_{y=-x-2}^{y=2x+1} dx,$$

$$= \int_{-1}^{+1} (\tfrac{21}{2}x^2 + 9x - \tfrac{3}{2})\,dx = 4.$$

Podobnie

$$\iint_{\omega_2} (2x+3y+1)\,dx\,dy = \int_{1}^{2} dx \int_{-x-2}^{-7x+10} (2x+3y+1)\,dy,$$

$$= \int_{1}^{2} \Big|\, 2xy + \tfrac{3}{2}y^2 + y \,\Big|_{y=-x-2}^{y=-7x+10} dx,$$

$$= \int_{1}^{2} (60x^2 - 198x + 156)\,dx = -1.$$

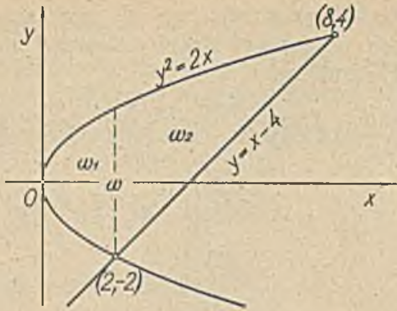
Ostatecznie

$$\iint_{\omega} (2x+3y+1)\,dx\,dy = 3.$$

Aby wyznaczyć średnią wartość funkcji $2x+3y+1$ w uważanym trójkącie, należy otrzymaną wartość całki podzielić przez pole trójkąta, wynoszące jak łatwo sprawdzić 9. Otrzymujemy zatem jako średnią wartość $\frac{1}{3}$.

3. Obliczyć pole obszaru ω ograniczonego parabolą $y^2 = 2x$ i cięciwą łączącą punkty $(2, -2)$ i $(8, 4)$.

Prosta $x = 2$ dzieli obszar ω na dwa obszary normalne. Obszar ω_1 określony nierównościami $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-\sqrt{2x} \leqslant y \leqslant +\sqrt{2x}$, i obszar ω_2 określony nierównościami $2 \leqslant x \leqslant 8$, $x - 4 \leqslant y \leqslant \sqrt{2x}$.



Rys. 14.

Zatem $\iint\limits_{\omega} dx\,dy = \iint\limits_{\omega_1} dx\,dy + \iint\limits_{\omega_2} dx\,dy,$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dy + \int\limits_2^8 dx \int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} dy,$$

$$= \int\limits_0^2 2\sqrt{2x}\,dx + \int\limits_2^8 (\sqrt{2x} - x + 4)\,dx = 18.$$

Pole obszaru ω można obliczyć jeszcze w inny sposób. Mianowicie można go uważać za obszar normalny, określony nierównościami:

$$-2 \leqslant y \leqslant 4, \quad \frac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant y + 4.$$

A więc $\iint\limits_{\omega} dx\,dy = \int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} dx = \int\limits_{-2}^{+4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right) dy = 18.$

4. Obliczyć pole obszaru normalnego ω określonego nierównościami

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x),$$

w których $f_1(x)$, $f_2(x)$ oznaczają funkcje ciągłe w przedziale (a, b), spełniające nierówność $f_1(x) < f_2(x)$ dla $a < x < b$ (por. str. 143 — 44).

Mamy tutaj $|\omega| = \iint\limits_{\omega} d\sigma = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy.$

Ale $\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy = f_2(x) - f_1(x).$

Zatem $|\omega| = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx.$

5. Obliczyć objętość kuli $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Płaszczyzna (x, y) przecina tę kulę wzdłuż koła $x^2 + y^2 = r^2$, którego wnętrze wraz z brzegiem oznaczymy przez ω. Jak łatwo widzieć, półkula znajdująca się powyżej płaszczyzny (x, y) jest zbiorem wszystkich punktów (x, y, z) o tej własności, że punkt (x, y) należy do ω, zaś z spełnia nierówność $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$.

Na mocy naszej definicji objętości (str. 174) otrzymujemy jako szukaną objętość całej kuli

$$V = 2 \iint\limits_{\omega} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, d\sigma$$

$$= 2 \int\limits_{-r}^{+r} dx \int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy.$$

Przy całkowaniu ze względu na y należy uważać x za stałe. Możemy zatem wprowadzić nową zmienną φ przez podstawienie

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \sin \varphi, \quad dy = \sqrt{r^2 - x^2} \cos \varphi\, d\varphi.$$

Wówczas

$$\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (r^2 - x^2) \cos^2 \varphi\, d\varphi =$$

$$= \tfrac{\pi}{2} (r^2 - x^2).$$

Zatem $V = 2 \int\limits_{-r}^{+r} \frac{\pi}{2} (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3} r^3 \pi.$

6. Obliczyć objętość części wspólnej dwóch walców kołowych o tym samym promieniu r, których osi przecinają się pod kątem prostym.

Obierzmy jako osie tych walców oś z-ów i oś y-ów. Ich równania są wówczas

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ i } x^2 + z^2 = r^2.$$

Część wspólna obu walców jest oczywiście określona nierównościami $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $x^2 + z^2 \leqslant r^2$.

Ponieważ jej wyobrażenie sobie lub narysowanie przedstawia pewne trudności, możemy rozumować w sposób następujący:

Jest ona symetryczna ze względu na płaszczyznę (x, y). Wystarczy zatem wyznaczyć jej górną połowę, określoną nierównościami $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $x^2 + z^2 \leqslant r^2$, $z \geqslant 0$. Oznaczmy przez (x_0, y_0) dowolny układ liczb spełniający pierwszą z tych nierówności. Na to, by punkt (x_0, y_0, z) należał do badanej górnej połowy, potrzeba i wystarcza, by $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{r^2 - x_0^2}$. A więc jest ona identyczna ze zbiorem wszystkich punktów (x, y, z) takich, że (x, y) należy do koła $x^2 + y^2 = r^2$, zaś z spełnia powyższą nierówność. Oznaczając przez ω wnętrze koła $x^2 + y^2 = r^2$ wraz z brzegiem, otrzymamy jako objętość całej części wspólnej całkę

$$V = 2 \iint\limits_{\omega} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx\, dy,$$

$$= 2 \int\limits_{-r}^{+r} dx \int\limits_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{+\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2}\, dy = 2 \int\limits_{-r}^{+r} 2(r^2 - x^2)\, dx =$$

$$= 4 \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{+r} = \frac{16}{3} r^3.$$

Zadania:

1) Obliczyć następujące całki podwójne:

a) $\iint \cos^2 y\, d\sigma$ po kwadracie $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. (Wynik $\frac{\pi^2}{8}$).

b) $\iint \sqrt{4+x+y}\, d\sigma$ po obszarze normalnym określonym nierównościami $0 \leqslant y \leqslant 5$, $0 \leqslant x \leqslant 5-y$. (Wynik $\frac{56}{15}$).

c) $\iint \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, d\sigma$ po obszarze normalnym określonym nierównościami

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad \sqrt{ax-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2-x^2}.$$

(Wynik $\frac{2}{9} a^3$).

d) $\iint \sqrt{\cos^2 y + x^2 \sin^2 y}\, d\sigma$ po prostokącie $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. (Wynik $\frac{2}{3}$).

e) $\iint \sqrt{r^2 - \frac{a^2 y^2}{x^2}}\, d\sigma$ po trójkącie ograniczonym osią x-ów, prostą $x = a$ i prostą $y = \frac{r}{a} x$; $r > 0$, $a > 0$. $\left(\text{Wynik } \frac{\pi a r^2}{8}\right)$.

2) Wyprowadzić przy pomocy całek podwójnych znane wzory na pole: *a)* trójkąta, *b)* trapezu, *c)* wycinka kołowego, *d)* elipsy.

3) Przy pomocy zamiany całki podwójnej na iterowaną wykazać, że

a) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x, y)\, dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x, y)\, dx$

dla każdej funkcji $f(x, y)$ ciągłej w trójkącie ograniczonym prostemi $y = 0$, $x = a$, $y = x$ $(a > 0)$.

b) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx$

dla każdej funkcji $f(x, y)$ ciągłej w dodatniej ćwiartce koła $x^2 + y^2 = a^2$.

4) Wykazać, że objętość odcinka kuli wyraża się wzorem $V = \pi w^2 \left(r - \frac{w}{3}\right)$, w którym r oznacza promień kuli, zaś w wysokość odcinka.

5) Obliczyć objętość ograniczoną paraboloidą eliptyczną $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ i płaszczyzną $z = k$ $(k > 0)$. (Wynik $\frac{1}{2}\, a\, b\, k^2 \pi$).

6) Współrzędne środka ciężkości obszaru płaskiego ω, obłożonego jednostajnie masą, są średniemi wartościami funkcyj x i y, t. zn.

$$\xi = \frac{1}{|\omega|} \iint\limits_{\omega} x\, d\sigma, \quad \eta = \frac{1}{|\omega|} \iint\limits_{\omega} y\, d\sigma.$$

Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości: *a)* półkola $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $y \geqslant 0$, *b)* trójkąta z przykładu 2, str. 180. (Wynik *a)* $0, \frac{4\, r}{3\, \pi}$; *b)* $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$).

Rozdział X.

Całka krzywoliniowa.

§ 1. Łuk pojedynczy. Załóżmy, że funkcje:

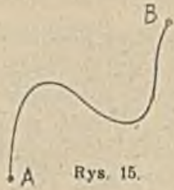
$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \qquad (1)$$

są ciągłe w (a, b). Zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których współrzędne (x, y, z) odpowiadają tej samej wartości zmiennej t, nazywamy ł u k i e m p o j e d y n c z y m (lub krótko łukiem), jeżeli punkty, odpowiadające różnym wartościom parametru t, są różne, innemi słowy, jeżeli równania:

$$f(t') = f(t''), \quad \varphi(t') = \varphi(t''), \quad \psi(t') = \psi(t'')$$

pociągają $t' = t''$.

Punkty A, B, odpowiadające skrajnym wartościom a, b parametru t, nazywamy końcami łuku. O tym łuku



Rys. 15.

mówimy, że łączy punkty A i B. Łuk pojedynczy oznaczamy również symbolem $\widehat{AB}$.

Przedstawienie parametryczne łuku pojedynczego, przy pomocy funkcyj spełniających wyżej podane warunki, nazywamy p r z e d s t a w i e n i e m n o r m a l n e m.

Przykłady:

Łukiem pojedynczym jest: a) odcinek, b) linja łamana $A, A_1, A_2 \ldots A_n$, pod warunkiem, ze sąsiednie odcinki mają tylko jeden punkt wspólny, niesąsiednie zaś nic nie mają wspólnego, c) łuk koła (odpowiadający kątowi środkowemu α, gdzie $0 < \alpha < 2\pi$), d) obraz geometryczny funkcji $y = f(x)$ ciągłej w przedziale (a, b). Przedstawienie parametryczne w tym wypadku jest następujące:

$$x = t, \quad y = f(t), \quad z = 0, \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Mając jedno przedstawienie parametryczne normalne łuku pojedynczego, możemy otrzymać nieskończenie wiele innych. Wystarczy w tym celu obrać dowolną funkcję ciągłą $t = \alpha(s)$, ściśle monotoniczną w jakimś przedziale (a', b') i przyjmującą na końcach tego przedziału wartości a, b. Nowem przedstawieniem normalnem będzie:

$$x = f[\alpha(s)] = f_1(s), \quad y = \varphi[\alpha(s)] = \varphi_1(s),$$
$$z = \psi[\alpha(s)] = \psi_1(s), \quad (a' \leqslant s \leqslant b').$$

Jeżeli łukowi $\widehat{AB}$ nadamy pewien kierunek, to znaczy, obierzemy np. jako początek punkt A, jako koniec punkt B, wówczas zdarzyć się mogą dwa wypadki: albo punktowi A odpowiada wartość parametru $t = a$, albo wartość $t = b$. W pierwszym wypadku powiadamy, że przedstawienie parametryczne jest zgodne z obranym kierunkiem, w drugim zaś wypadku, że jest niezgodne. Jeśli przedstawienie jest niezgodne z obranym kierunkiem wówczas kładąc $t = -s$, otrzymujemy zgodne przedstawienie:

$$x = f(-s) = f_1(s), \quad y = \varphi(-s) = \varphi_1(s),$$
$$z = \psi(-s) = \psi_1(s), \quad (-b \leqslant s \leqslant -a).$$

Przykłady:

1. Przedstawienie normalne odcinka łączącego punkty $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ otrzymujemy, kładąc np:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t,$$
$$z = z_1 + (z_2 - z_1)\,t$$

dla $0 \leqslant t \leqslant 1$. Przedstawienie to jest zgodne z kierunkiem od A do B.

2. Przedstawienie normalne górnej połowy elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ otrzymamy, kładąc $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = 0$ dla $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Inne przedstawienie normalne dostaniemy, kładąc np. $t = s^2$, a więc

$$x = a\cos s^2, \quad y = b\sin s^2, \quad z = 0, \quad \text{dla } 0 \leqslant s \leqslant \sqrt{\pi}.$$

§ 2. Całka krzywolinijna po łuku pojedynczym. Przypuśćmy, że łuk pojedynczy $\overset{\frown}{AB}$ dany jest przedstawieniem normalnem:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \quad (a \leqslant t \leqslant b) \qquad \text{(I)}$$

i ponadto, że funkcje (I) mają pochodne ciągłe w przedziale (a, b). Obierzmy na łuku $\overset{\frown}{AB}$ kierunek od A do B i załóżmy, że przedstawienie parametryczne (I) jest zgodne z obranym kierunkiem. Niechaj funkcja $P(x, y, z)$ będzie określona i ciągła dla wszystkich punktów łuku AB. Utwórzmy dowolny podział δ odcinka (a, b) i oznaczmy przez $t_0 = a < t_1 < t_2 \ldots$ końce odcinków $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots$, wchodzących w skład tego podziału. W odcinkach powyższych obierzmy dowolnie po jednym punkcie $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots$

Połóżmy

$$x_0 = f(t_0), \quad x_1 = f(t_1), \quad x_2 = f(t_2) \quad \text{i t. d.}$$
$$\xi_1 = f(\vartheta_1), \ \xi_2 = f(\vartheta_2), \ldots; \ \eta_1 = \varphi(\vartheta_1), \ \eta_2 = \varphi(\vartheta_2), \ldots;$$
$$\zeta_1 = \psi(\vartheta_1), \ \zeta_2 = \psi(\vartheta_2) \ldots$$

Utwórzmy sumę:

$$G = P(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)(x_1 - x_0) + P(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)(x_2 - x_1) + \ldots \quad (1)$$

Kładąc $F(t) = P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]$, możemy sumę powyższą napisać następująco:

$$G = F(\vartheta_1)[f(t_1) - f(t_0)] + F(\vartheta_2)[f(t_2) - f(t_1)] + \dots \quad (2)$$

Na mocy twierdzenia o wartości średniej istnieją punkty ϑ_1', ϑ_2' ... spełniające warunki:

$$f(t_1) - f(t_0) = f'(\vartheta_1')(t_1 - t_0), \quad (t_0 < \vartheta_1' < t_1)$$
$$f(t_2) - f(t_1) = f'(\vartheta_2')(t_2 - t_1), \quad (t_1 < \vartheta_2' < t_2) \text{ i t. d.} \quad (3)$$

Połóżmy: $F(\vartheta_1) = F(\vartheta_1') + \varepsilon_1$, $F(\vartheta_2) = F(\vartheta_2') + \varepsilon_2$ ...

Stąd na mocy (2) mamy:

$$G = G' + R \quad (4)$$

gdzie $G' = F(\vartheta_1') f'(\vartheta_1') \Delta t_1 + F(\vartheta_2') f'(\vartheta_2') \Delta t_2 + \dots$ (5)

zaś $R = \varepsilon_1 f'(\vartheta_1') \Delta t_1 + \varepsilon_2 f'(\vartheta_2') \Delta t_2 + \dots$

Jeżeli przez η oznaczymy największą z liczb: $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, ... zaś przez M największą wartość funkcji $|f'(t)|$ w przedziale (a, b), wówczas:

$$|R| \leqslant M\eta \Delta t_1 + M\eta \Delta t_2 + \dots = M\eta\,(b - a) \quad (6)$$

Obierzmy dowolny ciąg normalny podziałów $\{\sigma_n\}$ i niechaj $\{G_n\}$ będzie ciągiem sum odpowiednich, utworzonych podobnie jak suma G. Według (4), przy podobnem określeniu sum G_n' i R_n, mamy:

$$G_n = G_n' + R_n \quad (7)$$

Wobec (6) $\quad |R_n| \leqslant M\eta_n\,(b - a) \quad$ (8)

Lecz $\quad \lim\limits_{n \to \infty} G_n' = \int\limits_a^b F(t) f'(t)\,dt.$

Wskutek jednostajnej ciągłości funkcji $F(t)$, mamy $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = 0$, więc na mocy (8) $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 0$. A zatem:

$$\lim_{n \to \infty} G_n = \int_a^b F(t) f'(t)\,dt = \int_a^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]\, f'(t)\,dt.$$

Granicę ciągu $\{G_n\}$ nazywamy całką krzywoliniją funkcji $P(x, y, z)$ wziętą po łuku $\widehat{AB}$ w kierunku od A do B; oznaczać ją będziemy symbolem

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\, dx \tag{10}$$

A więc otrzymaliśmy wzór:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\, dx = \int_a^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]\, f'(t)\, dt. \tag{11}$$

Uwaga 1.

Można wykazać (dowód pomijamy), że wartość wyrażenia (10) nie zależy od przedstawienia parametrycznego (I), byleby ono było zgodne z obranym kierunkiem na łuku. Innemi słowy, jeżeli łuk $\widehat{AB}$ będzie dany innem przedstawieniem normalnem i zgodnem z obranym kierunkiem, wówczas, postępując podobnie jak poprzednio, otrzymamy tę samą wartość na wyrażenie (10).

Uwaga 2.

Jeżeli na łuku obierzemy kierunek od B do A wówczas, jak wiemy, przedstawienie:

$$x = f(-s), \quad y = \varphi(-s), \quad z = \psi(-s), \quad (-b \leqslant s \leqslant -a)$$

jest przedstawieniem normalnem łuku $\widehat{AB}$, zgodnem z kierunkiem od B do A. Zatem

$$\int_{\widehat{BA}} P(x, y, z)\, dx = \int_{-b}^{-a} P[f(-s), \varphi(-s), \psi(-s)]\,[-f'(-s)]\, ds.$$

Podstawiając $s = -t$ otrzymujemy:

$$\int_{\widehat{BA}} P(x, y, z)\, dx = -\int_a^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]\, f'(t)\, dt.$$

A więc:

$$\int_{\widehat{BA}} P(x, y, z)\, dx = -\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\, dx \tag{12}$$

Uwaga 3.

Jeżeli na łuku AB obierzemy dowolny punkt C, odpowiadający wartości parametru $t = c$ $(a < c < b)$, wówczas

$$\int_{\widehat{AC}} P(x, y, z)\, dx = \int_a^c P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]\, f'(t)\, dt,$$

$$\int_{\widehat{CB}} P(x, y, z)\, dx = \int_c^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]\, f'(t)\, dt.$$

Zatem na mocy (11):

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\, dx = \int_{\widehat{AC}} P(x, y, z)\, dx + \int_{\widehat{CB}} P(x, y, z)\, dx.$$

Uwaga 4.

Podobnie określamy całki krzywolinijne, oznaczone symbolami:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\, dy, \quad \int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\, dz.$$

Dla całek powyższych zachodzą związki:

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\, dy = \int_a^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)\, dt,$$

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\, dz = \int_a^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]\, \psi'(t)\, dt.$$

Przykład:

Obliczyć całkę $\int_{\widehat{AB}} (x^2 + y^2)\, dy$ po łuku linji śrubowej $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = at$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ od $A(r, 0, 0)$ do $B(r, 0, 2a\pi)$.

Całkę tę zamienimy na zwyczajną całkę oznaczoną, uwzględniając, że $\dfrac{dy}{dt} = r\cos t$.

Zatem

$$\int_{AB} (x^2 + y^2)\, dy = \int_0^{2\pi} r^3 \cos t\, dt = 0.$$

Podobnie otrzymujemy

$$\int_{AB} (x^2 + y^2)\, dx = \int_0^{2\pi} -r^3 \sin t\, dt = 0,$$

$$\int_{AB} (x^2 + y^2)\, dz = \int_0^{2\pi} r^2 a\, dt = 2 a\pi r^2.$$

2. Obliczyć całkę $\int x\, dy$ po łuku

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad (0 \leqslant t \leqslant \tfrac{\pi}{2})$$

w kierunku przeciwnym do kierunku przedstawienia parametrycznego.

Mamy tu

$$\int x\, dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \,.\, a \cos t\, dt = -\frac{a^2 \pi}{4}.$$

§ 3. Całka krzywolinijna po linji krzywej. Załóżmy, że krzywa C składa się ze skończonej liczby łuków pojedyńczych $\overparen{AA_1}$, $\overparen{A_1A_2}$, $\overparen{A_2A_3}$, ... Obierzmy na

Rys. 16.

tych łukach takie kierunki, by punkt, który jest końcem dwóch sąsiednich łuków był w jednym łuku początkiem, w drugim końcem. Przypuśćmy np., że obraliśmy kierunki: $\widehat{AA_1}$, $\widehat{A_1A_2}$, ... Kierunki tych łuków określają nam pewien kierunek na krzywej. Jeżeli funkcja $P(x, y, z)$ jest określona i ciągła we wszystkich punktach krzywej C, wówczas przez całkę krzywolinijną po krzywej C (w obranym kierunku) z funkcji $P(x, y, z)$ rozumieć będziemy sumę całek po poszczególnych łukach*).

A więc wedle definicji

$$\int_C P(x, y, z)\, dx = \int_{\widehat{AA_1}} P(x, y, z)\, dx + \int_{\widehat{A_1A_2}} P(x, y, z)\, dx + \ldots$$

Niechaj krzywa dana będzie przedstawieniem parametrycznem

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

Przypuśćmy, że w przedziałach (a, a_1), (a_1, a_2) ... $(a < a_1 < a_2 < \ldots < b)$ funkcje powyższe są ciągłe, mają pochodne (na brzegach jednostronne) ciągłe i że ponadto funkcje te, rozpatrywane w przedziałach (a, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3) i t. d., dają przedstawienie normalne łuków $\widehat{AA_1}$, $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$ ... zgodne z obranym kierunkiem. Łatwo zauważyć, że przy powyższych założeniach mamy:

$$\int_C P(x, y, z)\, dx = \int_a^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]\, f'(t)\, dt.$$

Jeżeli pochodna $f'(t)$ nie istnieje w punktach $a_1, a_2, \ldots$, wówczas całkę powyższą należy rozumieć w znaczeniu niewłaściwem.

Podobne uwagi stosują się do całek:

$$\int_C P(x, y, z)\, dy, \quad \int_C P(x, y, z)\, dz.$$

Przykłady:

1. Obliczyć całkę

$$\int_{AB} (x + 2y - z)\, dx$$

*) Oczywiście o ile całki po tych łukach istnieją.

po linji łamanej łączącej punkty $A\,(0, 0, 0)$, $C\,(1, 0, 0)$, $B\,(1, 1, 1)$. Na podstawie poprzedniego możemy obliczyć całkę od A do C, następnie całkę od C do B i otrzymane wyniki dodać.

Ponieważ wzdłuż odcinka AC mamy $y = z = 0$, pierwsza całka jest zwyczajną całką oznaczoną:

$$\int_{AC} (x + 2y - z)\, dx = \int_0^1 x\, dx = \tfrac{1}{2}.$$

Druga całka jest równa zeru, ponieważ x jest stałe na odcinku CB.

2. Obliczyć całkę

$$\int_{AB} (x^2 + y)\, dx$$

od punktu $A\,(0, 0)$ do punktu $B\,(0, 1)$: *a)* wzdłuż odcinka łączącego te punkty, *b)* wzdłuż krzywej składającej się z odcinka AC łączącego punkt A z punktem $C\,(1, 0)$ i (mniejszego) łuku koła jednostkowego łączącego punkty C i B, *c)* wzdłuż linji łamanej ACB.

W wypadku *a)* całka jest równa zeru, ponieważ x jest stałe na odcinku AB,

W wypadku *b)* mamy

$$\int_{AB} (x^2 + y)\, dx = \int_{AC} (x^2 + y)\, dx + \int_{CB} (x^2 + y)\, dx.$$

Pierwsza całka jest zwyczajną całką oznaczoną, przyczem $y = 0$ na AC.

Drugą całkę obliczymy kładąc $x = \cos t$, $y = \sin t$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, przyczem należy uwzględnić, że $\frac{dx}{dt} = -\sin t$.

Zatem $\displaystyle\int_{AC} (x^2 + y)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \tfrac{1}{3}$,

$$\int_{CB} (x^2 + y)\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t + \sin t) \sin t\, dt = -\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{3}\right).$$

Stąd $\displaystyle\int_{AB} (x^2 + y)\, dx = -\tfrac{\pi}{4}$

W wypadku *c)* całka

$$\int\limits_{AC} (x^2 + y)\, dx = \tfrac{1}{3}$$

według poprzedniego. Aby obliczyć całkę po odcinku CB, użyjemy przedstawienia parametrycznego $x = 1 - t$, $y = t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_{CB} (x^2 + y)\, dx = - \int\limits_0^1 [(1 - t)^2 + t]\, dt = - \tfrac{5}{6}.$$

Zatem w tym wypadku

$$\int\limits_{AB} (x^2 + y)\, dx = \tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{6} = - \tfrac{1}{2}.$$

§ 4. Praca, jako całka krzywolinijna. Wiadomo, że jeżeli punkt materjalny przesuwa się prostolinijnie z punktu $A\,(x_1, y_1, z_1)$ do punktu $B\,(x_2, y_2, z_2)$ i poddany jest działaniu stałej siły P, równoległej do osi x-ów, wówczas praca tej siły wyraża się wzorem:

$$L = P\,(x_2 - x_1).$$

Przypuśćmy teraz, że funkcje (I) (str. 189) określają ruch punktu materjalnego po krzywej (C). Załóżmy, że podczas ruchu punkt podlega działaniu siły równoległej stale do osi x-ów zmieniającej jednak swoją wielkość. Niechaj $P\,(x, y, z)$ oznacza wielkość tej siły w punkcie (x, y, z), położonym na krzywej C. Utwórzmy dowolny podział δ odcinka (a, b) przy pomocy punktów $a < t_1 < t_2 < \ldots$ Niechaj wartościom $t = a, t_1, t_2, \ldots$ odpowiadają na krzywej punkty $A_0, A_1, A_2, \ldots$ o współrzędnych odpowiednio (x_0, y_0, z_0), $(x_1, y_1, z_1) \ldots$ Wyrażenia:

$$P\,(x_0, y_0, z_0)\,(x_1 - x_0), \quad P\,(x_1, y_1, z_1)\,(x_2 - x_1), \;\ldots$$

oznaczają pracę wykonaną na odcinku $A_0 A_1$, wzgl. $A_1 A_2, \ldots$ przez stałą siłę $P\,(x_0, y_0, z_0)$, względnie $P\,(x_1, y_1, z_1), \ldots$ A zatem sumę

$$G = P\,(x_0, y_0, z_0)\,(x_1 - x_0) + P\,(x_1, y_1, z_1)\,(x_2 - x_1) + \ldots$$

uważać możemy za przybliżoną wartość pracy wykonanej przez siłę działającą.

Ponieważ dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\delta_n\}$ ciąg odpowiednich sum $\{G_n\}$ zdąża do całki krzywolinijnej:

$$\int_C P(x, y, z)\, dx,$$

więc zgodnie z intuicją postąpimy, jeżeli całkę powyższą uważać będziemy za pracę wykonaną przez zmienną siłę $P(x, y, z)$ wzdłuż krzywej C.

Uwaga.

Jeżeli siła zmienia wielkość i kierunek, to oznaczając przez $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ jej rzuty na osie układu, pracę tę określamy wzorem:

$$L = \int_C P(x, y, z)\, dx + \int_C Q(x, y, z)\, dy + \int_C R(x, y, z)\, dz.$$

Piszemy to zwykle krócej, mianowicie

$$L = \int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz.$$

Przykład:

Obliczyć pracę wykonaną przez siłę stałą co do wielkości i kierunku, np. siłę ciężkości przy przesunięciu punktu wzdłuż danej krzywej.

Przyjmując, że kierunek siły jest zgodny z dodatnim kierunkiem osi z-ów (co zawsze można osiągnąć, obierając odpowiednio układ współrzędnych), mamy tutaj

$$P(x, y, z) = Q(x, y, z) = 0, \quad R(x, y, z) = c,$$

przyczem c oznacza stałą dodatnią.

Jeżeli krzywa dana jest parametrycznie

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

a ruch odbywa się w kierunku zgodnym z tem przedstawieniem, wówczas otrzymujemy

$$L = \int_C c\,dz = \int_\alpha^\beta c\,\psi'(t)\,dt = c\,[\psi(\beta) - \psi(\alpha)].$$

Oznaczając początek i koniec krzywej przez (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2), mamy

$$L = c\,(z_2 - z_1).$$

Widzimy, że w tym wypadku praca nie zależy od drogi, ale jedynie od różnicy poziomów mierzonej na osi z-ów.

§ 5. Krzywa zamknięta. Krzywą, złożoną z dwóch łuków pojedynczych, mających ze sobą tylko końce wspólne, nazywamy krzywą pojedynczą zamkniętą.

Krzywą taką jest koło, elipsa, trójkąt, wielokąt i t. p.

Krzywą pojedynczą zamkniętą możemy również określić przy pomocy przedstawienia parametrycznego:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \quad (a \leqslant t \leqslant b) \qquad \text{(I)}$$

w którem funkcje $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ są ciągłe i spełniają warunki następujące:

1) $f(a) = f(b)$, $\varphi(a) = \varphi(b)$, $\psi(a) = \psi(b)$,

2) jeżeli dla dwóch różnych wartości parametru t', t'' zachodzi $f(t') = f(t'')$, $\varphi(t') = \varphi(t'')$, $\psi(t') = \psi(t'')$, wówczas albo $t' = a$, $t'' = b$, albo też $t' = b$, $t'' = a$.

Innemi słowy, w przedstawieniu (I) każdemu punktowi na krzywej z wyjątkiem jednego, odpowiada tylko jedna wartość parametru t; temu wyjątkowemu punktowi odpowiadają dwie wartości parametru, mianowicie $t = a$ i $t = b$. Przedstawienie zapomocą funkcyj o wyżej podanych własnościach nazywamy przedstawieniem normalnem.

Wymienimy kilka ważnych własności krzywych zamkniętych pojedynczych, leżących w płaszczyźnie:

a) Każda taka krzywa C dzieli płaszczyznę na dwa obszary, z których jeden — ograniczony — ω, nazywa się wnętrzem krzywej C, drugi zaś — nieograniczony — ω', nazywa się zewnętrzem krzywej C. Krzywa C jest brzegiem każdego z obszarów ω, ω'.

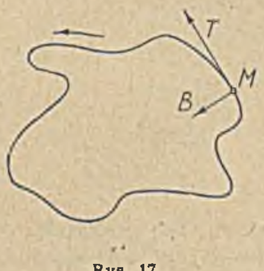
b) Dwa dowolne punkty obszaru ω (wzgl. dwa dowolne punkty obszaru ω') dadzą się połączyć linją łamaną, nie mającą nic wspólnego z krzywą C.

c) Każdy łuk pojedyńczy, którego jeden koniec leży w ω, drugi zaś w ω', przecina krzywą C.

Własności powyższe czytelnik łatwo sprawdzi intuicyjnie dla koła, trójkąta, wieloboku. Dowód w ogólnym wypadku jest trudny i dlatego go pomijamy.

Na krzywej C możemy obrać dwa kierunki. Jeżeli krzywa C jest płaska, wówczas jeden z nich nazywa się l e w y m, drugi p r a w y m. Zakładając, że poza kilkoma punktami krzywa C posiada styczną, kierunek lewy możemy scharakteryzować w sposób następujący:

Wykreślmy w dowolnym punkcie M krzywej odcinek MB prostopadły do stycznej i (oprócz punktu M)



Rys. 17.

położony całkowicie wewnątrz krzywej C. Jeżeli wektor $\overline{MB}$, tworzy z kierunkiem stycznej (obranym zgodnie z kierunkiem krzywej) kąt: $+\frac{\pi}{2}$, wówczas kierunek obrany na krzywej jest kierunkiem lewym. Poglądowo określenie to możemy wypowiedzieć w ten sposób, że obiegając krzywą w kierunku lewym, mamy jej wnętrze po lewej ręce.

Jeżeli krzywa C dana jest przedstawieniem normalnem, wówczas przedstawienie to może być zgodne lub niezgodne z obranym kierunkiem na krzywej. Przedstawienie jest zgodne, jeżeli podczas wzrastania parametru t od a do b, odpowiedni punkt na krzywej obiega ją w kierunku obranym. Jeżeli przedstawienie nie jest zgodne z obranym kierunkiem, wówczas kładąc: $t = -s$ otrzymujemy przedstawienie zgodne (por. str. 188).

Przykłady:

1. Kładąc $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ otrzymujemy normalne przedstawienie parametryczne elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, zgodne z kierunkiem lewym.

2. Normalne przedstawienie parametryczne kwadratu o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ możemy określić np. w sposób następujący:

$$
\begin{array}{lll}
x = t & y = 0 & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\
x = 1 & y = t - 1 & \quad „ \;\; 1 \leqslant t \leqslant 2 \\
x = 3 - t & y = 1 & \quad „ \;\; 2 \leqslant t \leqslant 3 \\
x = 0 & y = 4 - t & \quad „ \;\; 3 \leqslant t \leqslant 4
\end{array}
$$

Łatwo sprawdzić, że określone w ten sposób funkcje $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ są ciągłe w przedziale $(0, 4)$ i spełniają warunki 1) i 2). Jeżeli t rośnie od 0 do 4, punkt $[f(t), \varphi(t)]$ obiega kwadrat w kierunku lewym, przechodząc przez każde położenie tylko raz [z wyjątkiem $(0, 0)$].

Zastępując w tych przykładach t przez $-s$, otrzymalibyśmy przedstawienia normalne zgodne z kierunkiem prawym.

§ 6. Całka krzywolinijna po krzywej zamkniętej. Przypuśćmy, że krzywa pojedyncza zamknięta dana jest przedstawieniem parametrycznem normalnem:

$$x = f(t), \qquad \varphi = \varphi(t), \qquad z = \psi(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

Załóżmy, że w przedziałach

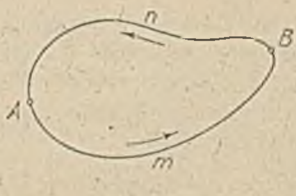
$$(a, a_1), (a, a_2) \ldots \qquad [a < a_1 < a_2 \ldots < b]$$

funkcje powyższe posiadają pochodne (na brzegach jednostronne) ciągłe. Jeżeli $P(x, y, z)$ jest funkcją określoną i ciągłą w punktach krzywej C, wówczas na mocy § 3

$$\int\limits_C P(x, y, z)\, dx = \pm \int\limits_a^b P[f(t), \varphi(t), \psi(t)]\, f'(t)\, dt,$$

przyczem znak zależy od tego, czy całka powyższa jest wzięta w kierunku zgodnym z przedstawieniem parametrycznem, czy w przeciwnym.

Jeżeli na krzywej obierzemy dwa punkty A i B, wówczas, zakładając, że łuki $\widehat{AmB}$ i $\widehat{BnA}$ mają kie-



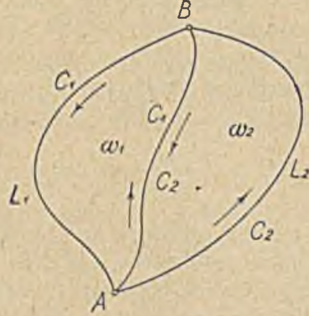
Rys. 18.

runki zgodne z kierunkiem obranym na krzywej, możemy napisać:

$$\int\limits_C P(x, y, z)\, dx = \int\limits_{\widehat{AmB}} P(x, y, z)\, dx + \int\limits_{\widehat{BnA}} P(x, y, z)\, dx.$$

§ 6a Całki krzywolinijne po krzywych zamkniętych płaskich. Niechaj dwie krzywe pojedyncze zamknięte płaskie C_1, C_2 mają tylko łuk pojedynczy AB

wspólny. Załóżmy nadto, że wnętrza ω_1, ω_2 krzywych C_1 i C_2 nie mają ze sobą nic wspólnego. Przypuśćmy, że krzywa C_1 składa się z łuków L_1 i AB, zaś krzywa C_2 z łuków L_2 i AB. Łuki L_1 i L_2 tworzą krzywą pojedynczą zamkniętą C, której wnętrze ω zawiera



Rys. 19.

w sobie obszary ω_1 i ω_2. Jeśli obierzemy na krzywych C_1 i C_2 kierunek lewy, wówczas kierunki łuków L_1 i L_2 będą na krzywej C zgodne z kierunkiem lewym krzywej C. Ponieważ łuk $\widehat{AB}$ będzie na krzywych C_1, C_2 przeciwnie skierowany, więc

$$\int_{C_1} P(x, y)\, dx = \int_{L_1} P(x, y)\, dx + \int_{\widehat{AB}} P(x, y)\, dx,$$

$$\int_{C_2} P(x, y)\, dx = \int_{L_2} P(x, y)\, dx + \int_{\widehat{BA}} P(x, y)\, dx.$$

Zatem

$$\int_{C_1} P(x, y)\, dx + \int_{C_2} P(x, y)\, dx = \int_{L_1} P(x, y)\, dx + \int_{L_2} P(x, y)\, dx,$$

a więc

$$\int_{C} P(x, y)\, dx = \int_{C_1} P(x, y)\, dx + \int_{C_2} P(x, y)\, dx.$$

Załóżmy, że brzeg C obszaru ω składa się z kilku krzywych pojedynczych zamkniętych C_1, C_2 ... Kierunkiem lewym krzywej C_1 względem obszaru ω nazywać będziemy ten kierunek, przy którym, obiegając krzywą C_1, będziemy mieli obszar ω po lewej ręce. Zatem kierunek

Rys. 20.

lewy względem obszaru zależy od tego, czy obszar leży wewnątrz, czy zewnątrz danej krzywej zamkniętej. Np. dla obszaru zawartego między dwoma kołami współśrodkowemi, kierunek lewy względem obszaru jest na kole wewnętrznem przeciwny do kierunku na kole zewnętrznem. Podobnie określamy kierunek lewy na krzywych C_1, C_2 ... względem ω. Obierając na każdej krzywej $C_1, C_2, \ldots$ kierunek lewy względem obszaru ω, całką krzywolinijną wziętą po brzegu C w kierunku lewym nazwiemy sumę całek wziętych po krzywych C_1, C_2 ...

A więc

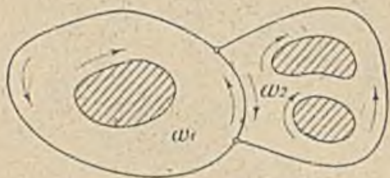
$$\int_C P(x, y)\, dx = \int_{C_1} P(x, y)\, dx + \int_{C_2} P(x, y)\, dx + \ldots$$

Jeżeli obszar domknięty ω jest sumą dwu obszarów domkniętych ω_1, ω_2 nie mających ze sobą punktów wewnętrznych wspólnych, to zakładając, że odpowiednie brzegi C, C_1, C_2 składają się ze skończonej liczby krzywych zamkniętych, możemy napisać

$$\int_C P(x, y)\, dx = \int_{C_1} P(x, y)\, dx + \int_{C_2} P(x, y)\, dx.$$

Całki są brane w tym samym kierunku.

Intuicyjnie ostatni związek będzie jasny, jeżeli zauważymy, że jeśli jakiś łuk mieści się w C, wówczas



Rys. 21.

występuje bądź tylko w C_1, bądź tylko w C_2 i to z tym samym kierunkiem co w C; jeśli natomiast jakiś łuk nie występuje w C, a występuje w C_1, wówczas występuje również w C_2, lecz z kierunkiem przeciwnym niż w C_1.

§ 7. Twierdzenie Greena. Niechaj obszar normalny ω określony będzie związkami

$$a < x < b,$$
$$f_1(x) < y < f_2(x).$$

O funkcjach $f_1(x)$ i $f_2(x)$ zakładamy, że są ciągłe w (a, b). Przypuśćmy, że mamy daną funkcję $P(x, y)$, określoną i ciągłą wewnątrz i na brzegu obszaru ω. Załóżmy nadto, że pochodna

$$\frac{\partial P}{\partial y}$$

jest ograniczona i ciągła w każdym punkcie wewnętrznym obszaru ω. Przy tych założeniach wyprowadzimy związek:

$$\int_C P(x, y)\, dx = -\iint_\omega \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma \tag{1}$$

gdzie C oznacza brzeg obszaru ω, zaś całka krzywoliniowa jest wzięta w kierunku lewym.

D o w ó d.

Łatwo widzieć (por. uwagę 2 na str. 191), że

$$\int_C P(x, y)\, dx = \int_a^b P[x, f_1(x)]\, dx - \int_a^b P[x, f_2(x)]\, dx \tag{2}$$

Lecz $$\iint_\omega \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Ponieważ

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = P[x, f_2(x)] - P[x, f_1(x)] \qquad \text{dla } a < x < b,$$

więc

$$\iint_\omega \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma = \int_a^b [P(x, f_2(x)] - P[x, f_1(x)]\, dx \tag{3}$$

Porównując (2) i (3), otrzymujemy

$$\int_C P(x, y)\, dx = -\iint_\omega \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma.$$

Gdybyśmy założyli, że obszar ω da się rozbić na skończoną liczbę obszarów $\omega_1, \omega_2, \ldots$ normalnych względem osi x-ów, to i w tym wypadku wzór (1) jest prawdziwy.

Oznaczając bowiem przez C_1, C_2 ... brzegi obszarów ω_1, ω_2 ..., mamy wedle znanego twierdzenia (str. 203):

$$\int_C P(x, y)\, dx = \int_{C_1} P(x, y)\, dx + \int_{C_2} P(x, y)\, dx + \ldots$$

Stosując przed chwilą udowodnione twierdzenie, otrzymamy

$$\int_C P(x, y)\, dx = -\iint_{\omega_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma - \iint_{\omega_2} \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma - \ldots$$

Zatem $\displaystyle\int_C P(x, y)\, dx = -\iint_{\omega} \frac{\partial P}{\partial y}\, d\sigma$

Przy odpowiednich założeniach co do brzegu ω, postępując podobnie jak poprzednio, dostaniemy:

$$\int_C P(x, y)\, dy = \iint_{\omega} \frac{\partial P}{\partial x}\, d\sigma.$$

Łącząc oba wzory, możemy napisać:

$$\int_C [P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy] = \iint_{\omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma.$$

Ten wzór zawiera jako szczególne przypadki (dla $Q = 0$, względnie $P = 0$) oba poprzednie wzory i nosi nazwę twierdzenia Greena.

Przykład:

Stosując twierdzenie Greena do całki

$$\int_C (2x - 3y)\, dx + (x - y)\, dy,$$

przyczem C oznacza koło jednostkowe, obiegane w kierunku lewym, otrzymujemy:

$$P(x, y) = 2x - 3y, \quad Q(x, y) = x - y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Zatem

$$\int_C (2x - 3y)\, dx + (x - y)\, dy = \iint_\omega 4\, d\sigma = 4\pi.$$

Łatwo sprawdzić ten wynik, obliczając daną całkę bezpośrednio.

§ 8. Zastosowania twierdzenia Greena. Twierdzenie Greena jest jednem z podstawowych twierdzeń teorji całek podwójnych. Zastosowania jego są szczególnie ważne w fizyce matematycznej,

Zasadnicze znaczenie wzoru Greena polega na tem, że pozwala przekształcać całki krzywolinjowe na całki podwójne i naodwrót.

Podamy tutaj kilka bezpośrednich konsekwencyj:

1. Jeżeli C jest brzegiem obszaru ω, wówczas kładąc

$$P(x, y) = y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$$

mamy
$$\int_C y\, dx = - \iint_\omega d\sigma = - A$$

(A oznacza pole obszaru ω).

Kładąc zaś $P(x, y) = x, \quad \dfrac{\partial P}{\partial x} = 1,$

mamy
$$\int_C x\, dy = \iint_\omega d\sigma = A.$$

Zatem
$$A = \tfrac{1}{2} \int_C (x\, dy - y\, dx).$$

Całki brane są w kierunku lewym.

2. Oznaczmy przez ω wnętrze krzywej zamkniętej C. Niechaj funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ ograniczone i ciągłe wewnątrz ω, posiadają pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial P}{\partial y} \text{ i } \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ciągłe i ograniczone w ω. Udowodnimy twierdzenie następujące:

Twierdzenie 1.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by dla każdej krzywej zamkniętej C' położonej wewnątrz ω zachodził związek

$$\int_{C'} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0,$$

jest, by w każdym punkcie (x, y) obszaru ω zachodziła równość:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

O krzywej C' zakładamy, że stosuje się do niej twierdzenie Greena.

Dowód.

Przy założeniu, że $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

mamy na mocy twierdzenia Greena

$$\int_{C'} [P(x, y)\, dx + Q(x, y)]\, dy = \iint_{\omega'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0.$$

Warunek jest więc dostateczny.

Przypuśćmy teraz, że dla każdej krzywej pojedynczej zamkniętej C' mamy

$$\int_{C'} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0.$$

Na mocy twierdzenia Greena otrzymujemy

$$\iint_{\omega'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma = 0 \tag{1}$$

Przyjmując, że w pewnym punkcie (x_0, y_0) obszaru ω mamy np.

$$\frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} - \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} = a > 0,$$

znajdziemy na mocy ciągłości tak małe koło K o środku (x_0, y_0), że w każdym punkcie tego koła zachodzi związek

$$\tfrac{1}{2} a < \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Zatem $$0 < \tfrac{1}{2} a K \leqslant \iint\limits_{K} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$$

(K oznacza pole koła K).

To zaś jest sprzeczne ze związkiem (1), zachodzącym dla każdego ω', a zatem i dla koła K.

Podobnie postępujemy przy $a < 0$.

Uwaga.

Załóżmy, że dla każdej krzywej pojedynczej zamkniętej C' położonej wewnątrz ω mamy

$$\int\limits_{C'} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0.$$

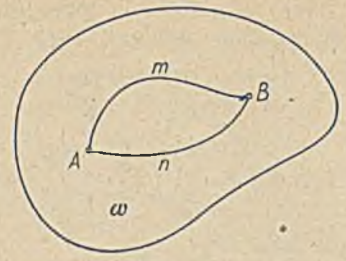
Przy założeniu powyższem możemy twierdzić, że jeśli A i B są dowolnemi punktami obszaru ω, to całka

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

(gdzie $\widehat{AB}$ jest łukiem położonym w ω, łączącym punkty A i B) nie zależy od łuku $\widehat{AB}$, lecz tylko od punktu początkowego A i końcowego B. Innemi słowy, wartość powyższej całki jest dla wszystkich łuków łączących punkt A z punktem B ta sama.

Połączmy bowiem punkty A i B dwoma łukami AmB i AnB nie mającemi nic wspólnego ze sobą poza punktami A i B. Biorąc pod uwagę krzywą zamkniętą $AmBnA$, mamy

$$\int\limits_{AmBnA} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0,$$



Rys. 22.

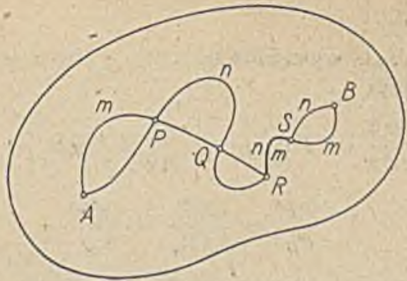
więc
$$\int\limits_{AmB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy +$$
$$+ \int\limits_{BnA} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

zatem
$$\int\limits_{AmB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$
$$= \int\limits_{AnB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{1}$$

Załóżmy, że łuki AmB i AnB mają oprócz punktów A i B jeszcze skończoną liczbę punktów odosobnionych i skończoną liczbę łuków wspólnych. Wykażemy, że i w tym wypadku zachodzi związek (1). Oznaczając bowiem przez $P, Q \ldots R, S$ pokolei punkty wspólne odosobnione i końce odcinków wspólnych, łatwo widzieć, że na mocy tego cośmy udowodnili, całki krzywolinijne wzięte po odcinkach AP, PQ, ... łuku AmB są odpowiednio równe całkom wziętym po odpowiednich odcinkach łuku AnB. Zatem

$$\int\limits_{AnB} = \int\limits_{AP} + \int\limits_{PQ} + \ldots = \int\limits_{AnB}$$

Związek (1) zachodzi również, jeżeli łuki AmB i AnB mają nieskończenie wiele punktów wspólnych. W tym wypadku dowód jednak jest trudny i dlatego go pomijamy.



Rys. 23.

Czytelnik łatwo zauważy, że naodwrót, z założenia, że całka

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

nie zależy od łuku AB, lecz jedynie od punktu początkowego i końcowego, wynika, że dla każdej krzywej zamkniętej C' mamy:

$$\int_{C'} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0.$$

Założmy, jak poprzednio, że ω jest wnętrzem krzywej zamkniętej C. Niechaj funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ będą określone i ciągłe w ω i niechaj posiadają w każdym punkcie ω pochodne cząstkowe $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ciągłe. Przy tych założeniach wykażemy twierdzenie następujące:

Twierdzenie 2.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym dla istnienia funkcji $V(x, y)$ określonej w ω, której cząstkowemi pochodnemi byłyby funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ jest, by w każdym punkcie obszaru ω zachodził związek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dowód.

Konieczność wykazaliśmy w tomie pierwszym (str. 250). Jeżeli bowiem

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{d y} = Q(x, y);$$

wówczas
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Dostateczność: załóżmy, że w obszarze ω

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1}$$

Na mocy uwagi na str. 209 wartość całki

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

nie zależy od łuku $\widehat{AB}$, lecz tylko od punktu początkowego A i końcowego B.

Funkcję $V(x, y)$ otrzymamy w następujący sposób. Obierzmy w ω dowolny punkt $A(x_0, y_0)$. Wartość funkcji $V(x, y)$ w dowolnym punkcie $B(x, y)$ obszaru ω określimy, kładąc

$$V(x, y) = \int_{\widehat{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy; \qquad V(x_0, y_0) = 0,$$

gdzie $\widehat{AB}$ jest dowolnym łukiem łączącym punkty A i B. Celem wyznaczenia pochodnych cząstkowych funkcji $V(x, y)$ zauważmy, że jeśli punkt C obszaru ω ma współrzędne $(x + h, y)$, to możemy napisać

$$V(x + h, y) = \int_{ABC} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,$$

gdzie łuk ABC składa się z łuku $\widehat{AB}$ i odcinka prostolinijnego BC równoległego do osi x-ów.

Zatem

$$V(x+h, y) = \int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy + \int_{BC} P\,dx + Q\,dy^{*}),$$

więc $$\frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{BC} P\,dx + Q\,dy.$$

Ponieważ $$\int_{BC} P\,dx + Q\,dy = \int_{x}^{x+h} P\,dx,$$

więc $$\frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} P(x, y)\,dx.$$

Stąd na mocy twierdzenia o wartości średniej (str. 94)

$$\frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h} = P(x + \vartheta h, y) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

Zatem, z uwagi na ciągłość funkcji $P(x, y)$, mamy

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y).$$

Podobnie otrzymamy

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y).$$

Uwaga 1.

Można wykazać, że przy założeniach twierdzenia poprzedniego funkcja $V(x, y)$ określona jest poza pewną stałą. Wystarczy oczywiście stwierdzić, że jeżeli funkcja $V(x, y)$ spełnia wewnątrz krzywej C związki

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

wówczas. $V(x, y) = \text{const}$. Otóż, łącząc dwa dowolne

---

*) Piszemy dla krótkości P i Q zamiast $P(x, y)$ i $Q(x, y)$.

punkty A, B obszaru ω, łukiem prostym położonym całkowicie w ω, mamy

$$\frac{dV[f(t), \varphi(t)]}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f'(t) + \frac{\partial V}{\partial y} \varphi'(t) = 0,$$

gdzie $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ jest przedstawieniem normalnem łuku AB.

Zatem $V[f(t), \varphi(t)] = \text{const.}$ Stąd wartość funkcji $V(x, y)$ w punkcie A równa się wartości funkcji w punkcie B.

Uwaga 2.

Ostatnio otrzymane wyniki są analogiczne do twierdzenia o istnieniu funkcji pierwotnej dla funkcji ciągłej jednej zmiennej. Wykazaliśmy bowiem, że przy pewnych założeniach istnieje funkcja posiadająca zgóry dane pochodne cząstkowe i że dwie takie funkcje różnią się tylko o stałą.

Przykłady:

1. Funkcje $P(x, y) = x^2 + y$, $Q(x, y) = 0$ nie spełniają warunku naszego twierdzenia, bo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \text{ zaś } \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Jak się już przekonaliśmy (por. str. 195, przykład 2), całka $\int P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ może przybierać różne wartości dla różnych krzywych łączących te same dwa punkty.

2. Dla $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = x - y^2$ mamy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Istnieje więc funkcja $V(x, y)$, dla której

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x + y, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = x - y^2.$$

Z pierwszego równania wynika

$$V(x, y) = \tfrac{1}{2} x^2 + xy + \varphi(y),$$

gdzie $\varphi(y)$ jest pewną funkcją zmiennej y. Wyznaczymy ją przy pomocy drugiego równania:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x - y^2.$$

Stad $\qquad \varphi'(y) = -y^2.$

$$\varphi(y) = -\tfrac{1}{3} y^3 + C \text{ (}C\text{ stała dowolna).}$$

Ostatecznie

$$V(x, y) = \tfrac{1}{2} x^2 + xy - \tfrac{1}{3} y^3 + C.$$

Rozdział XI.

Odwzorowania ciągłe. Zamiana zmiennych w całkach podwójnych.

§ 1. Odwzorowania. Jeżeli każdemu punktowi A pewnego zbioru E*) przyporządkowany jest jakiś punkt B innego zbioru E_1, przyczem każdy punkt zbioru E_1 odpowiada co najmniej jednemu punktowi zbioru E, wówczas powiadamy, że mamy określone jednoznaczne odwzorowanie zbioru E na zbiór E_1.

Zbiór E_1 nazywamy obrazem zbioru E. Może się zdarzyć, że zbiór ten jest częściowo lub całkowicie zawarty w zbiorze E, albo z nim identyczny.

Przykłady:

1. Niechaj zbiorem E będzie koło o środku w punkcie O i o promieniu r. Każdemu punktowi A zbioru E przyporządkujmy środek B odcinka OA. Obrazem zbioru E będzie koło współśrodkowe o promieniu $\frac{1}{2}r$.
2. Niechaj E będzie dowolnym trójkątem. Każdemu punktowi zbioru E przyporządkujmy rzut jego na oś x-ów. Obrazem będzie odcinek położony na osi x-ów.

Jeżeli punktowi A o współrzędnych x, y odpowiada punkt B o współrzędnych x', y', wówczas odwzorowanie określimy, podając dwie funkcje

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y) \tag{1}$$

określone w zbiorze E, wyznaczające współrzędne punktu B, gdy znane są współrzędne punktu A.

*) Przyjmować będziemy, że zbiory E i E są płaskie, założenie to nie jest jednak konieczne.

P r z y k ł a d y:

3. Jeżeli w przykładzie 1. p, q oznaczają współrzędne środka O, wówczas odwzorowanie powyższe jest określone funkcjami

$$x' = \frac{x+p}{2}, \quad y' = \frac{y+q}{2}.$$

4. Odwzorowanie w przykładzie 2. określone jest funkcjami

$$x' = x, \quad y' = 0.$$

5. Każdemu punktowi $A(x, y)$ zbioru E przyporządkujmy punkt $B(x', y')$, którego współrzędne określają funkcje:

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Obrazem jest zbiór, jaki otrzymamy, obracając zbiór E o kąt α dokoła początku układu.

§ 2. Odwzorowania ciągłe. Odwzorowania jedno-jednoznaczne. Jeżeli funkcje (1) określające odwzorowanie są ciągłe, wówczas odwzorowanie takie nazywa się odwzorowaniem c i ą g ł e m.

Odwzorowania podane w przykładach 1—5 są ciągłe. Jeżeli dwom różnym punktom zbioru E odpowiadają zawsze dwa różne punkty zbioru E_1, wówczas odwzorowanie takie nazywamy odwzorowaniem j e d n o-j e d n o z n a c z n e m.

Odwzorowania w przykładach 1, 5 są jedno-jednoznaczne. W przykładzie 2 mamy odwzorowanie nie jedno-jednoznaczne.

Niechaj zbiór E będzie odwzorowany jedno-jednoznacznie na zbiór E_1. Jeżeli A oznacza dowolny punkt zbioru E, zaś B odpowiedni punkt zbioru E_1, wówczas odwzorowanie, które każdemu punktowi B zbioru E_1 przyporządkowuje odpowiedni punkt A zbioru E, nazywa się odwzorowaniem o d w r o t n e m.

Aby otrzymać funkcje określające odwzorowanie odwrotne, należy rozwiązać równania (1) ze względu na x, y.

Jeżeli odwzorowanie zbioru E na zbiór E_1 jest jedno-jednoznaczne i ciągłe, i jeżeli odwzorowanie odwrotne jest również ciągłe, wówczas powiadamy, że odwzorowanie zbioru E na zbiór E_1 jest obustronnie ciągłe. Dla krótkości mówimy często, że zbiór E_1 jest ciągłym (jedno-jednoznacznym) obrazem zbioru E.

Przykłady:

1. Odwzorowanie odwrotne dla przykładu 1 (patrz również przykład 3) określają funkcje:

$$x = 2x' - p \quad y = 2y' - q.$$

2. Odwzorowanie odwrotne dla przykładu 5 określają funkcje:

$$x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha, \quad y = y' \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

3. Odwzorowania podane w przykładach 1 i 5 są obustronnie ciągłe.

Podamy teraz kilka twierdzeń o odwzorowaniach ciągłych i jedno-jednoznacznych (dowody pomijamy).

Twierdzenie 1.

Odwzorowanie ciągłe jedno-jednoznaczne pojedynczego łuku (względnie krzywej zamkniętej) jest pojedynczym łukiem (względnie krzywą zamkniętą). Odwzorowanie takie jest obustronnie ciągłe.

Twierdzenie 2.

Obrazem ciągłym i jedno-jednoznacznym obszaru jest obszar.

Twierdzenie 3.

Obrazem ciągłym i jedno-jednoznacznym krzywej pojedynczej zamkniętej C i jej wnętrza ω jest krzywa pojedyncza zamknięta C' i jej wnętrze ω'. Przy odwzorowaniu tem obrazem krzywej C jest krzywa C', obrazem zaś jej wnętrza obszar ω'.

Odwzorowanie takie jest obustronnie ciągłe.

§ 3. **Wyznacznik funkcyjny** (jakobjan). Jeżeli funkcje $x' = f(x, y)$, $y' = \varphi(x, y)$ określone w otoczeniu punktu x, y, posiadają w tym punkcie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, wówczas wyrażenie:

$$f'_x(x, y)\,\varphi'_y(x, y) - f'_y(x, y)\,\varphi'_x(x, y) = \begin{vmatrix} f_x(x, y), & f_y(x, y) \\ \varphi_x(x, y), & \varphi_y(x, y) \end{vmatrix}$$

nazywamy wyznacznikiem funkcyjnym lub jakobjanem tych funkcyj. Jakobjan oznaczamy symbolem:

$$\frac{D(x', y')}{D(x, y)} \text{ lub } \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}.$$

Przykład:

Jeżeli: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

wówczas: $\dfrac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial r} = r.$

Udowodnimy teraz następujące:

Twierdzenie.

Jeżeli funkcje $x' = f(x, y)$, $y' = \varphi(x, y)$, ciągłe w obszarze ω, posiadają pochodne cząstkowe ciągłe, wówczas do każdego punktu (x, y), w którym jakobjan jest różny od zera, można dobrać takie otoczenie, że odwzorowanie, określone temi funkcjami, będzie w tem otoczeniu jedno-jednoznaczne*).

---

*) Można również wykazać, że odwzorowanie to będzie w tem otoczeniu obustronnie ciągłe.

Dowód.

Załóżmy, że w punkcie $A(x_0, y_0)$ jakobjan jest różny od zera, t. zn.:

$$f'_x(x_0, y_0)\,\varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)\,\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0 \qquad (1)$$

Przypuśćmy, że twierdzenie jest nieprawdziwe. A zatem w każdem otoczeniu punktu A istnieją dwa różne punkty $A'(x, y)$, $B'(x+h, y+k)$ spełniające związki

$$f(x+h, y+k) = f(x, y), \quad \varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) \qquad (2)$$

Obierzmy ciąg kół o środku w punkcie $A(x_0, y_0)$ i o promieniach $\{r_n\}$ zdążających do zera. W każdem z tych kół znajdziemy dwa różne punkty $A'_n\{x_n, y_n\}$, $B'_n\{x_n+h_n, y_n+k_n\}$, dla których zachodzą związki:

$$f(x_n+h_n, y_n+k_n) = f(x_n, y_n),$$
$$\varphi(x_n+h_n, y_n+k_n) = \varphi(x_n, y_n).$$

Na mocy twierdzenia o wartości średniej mamy:

$$f(x_n+h_n, y+k_n) - f(x_n, y_n) =$$
$$= h_n f'_x(\xi_n, \eta_n) + k_n f'_y(\xi_n, \eta_n) = 0,$$
$$\varphi(x_n+h_n, y_n+k_n) - \varphi(x_n, y_n) =$$
$$= h_n \varphi'_x(\xi'_n, \eta'_n) + k_n \varphi'_y(\xi'_n, \eta'_n) = 0,$$

(por. T. I, str. 268) gdzie

$$\xi_n = x_n + \vartheta_n h_n, \quad \eta_n = y_n + \vartheta_n k_n, \quad \xi'_n = x_n + \vartheta'_n h_n,$$
$$\eta'_n = y_n + \vartheta'_n k_n; \quad 0 < \vartheta_n < 1, \quad 0 < \vartheta'_n < 1.$$

Ponieważ h_n i k_n nie są równocześnie zerami, więc ostatnie związki dają

$$f'_x(\xi_n, \eta_n)\,\varphi'_y(\xi'_n, \eta'_n) - f'_y(\xi_n, \eta_n)\,\varphi'_x(\xi'_n, \eta'_n) = 0 \qquad (3)$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0,$

więc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0,$

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} k_n = 0.$$

Przechodząc do granicy, otrzymamy z uwagi na (3) i założoną ciągłość pochodnych cząstkowych:

$$f'_x(x_0, y_0)\,\varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0)\,\varphi'_x(x_0, y_0) = 0.$$

To zaś jest sprzeczne z nierównością (1). A zatem istnieje takie otoczenie punktu x_0, y_0, w którem odwzorowanie jest jedno-jednoznaczne.

Przykład:

Niech dany będzie układ równań

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y),$$

przyczem funkcje $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ są ciągłe i posiadają ciągłe pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu (x_0, y_0), w którym jakobjan jest różny od zera i niechaj

$$f(x_0, y_0) = a, \quad \varphi(x_0, y_0) = b.$$

Na mocy ostatniego twierdzenia istnieje koło K o środku (x_0, y_0), w którem odwzorowanie określone powyższemi równaniami jest jedno-jednoznaczne i ciągłe. Wedle twierdzenia 3 na str. 218 obrazem koła K jest pewna krzywa zamknięta C i jej wnętrze ω, do którego należy w szczególności punkt (a, b). Odwzorowanie jest nadto obustronnie ciągłe. Jeżeli zatem (a_1, b_1) jest dowolnym punktem wewnątrz krzywej C, to wewnątrz koła K istnieje dokładnie jeden punkt spełniający równania

$$f(x, y) = a_1, \quad \varphi(x, y) = b_1.$$

Punkt ten zmienia się w sposób ciągły wraz z (a_1, b_1).

Uwaga 1.

Jeżeli jakobjan w każdym punkcie obszaru ω jest różny od zera, to odwzorowanie w otoczeniu każdego punktu tego obszaru jest jedno-jednoznaczne. Może się jednak zdarzyć, że odwzorowanie całego obszaru nie jest jedno-jednoznaczne.

Weźmy np. odwzorowanie określone funkcjami

$$x' = e^x \cos y, \quad y' = e^x \sin y \quad (-\infty < x, y < +\infty)$$

Jakobjan wynosi e^{2x}, jest więc zawsze różny od zera. Mimo to dla $x = 0$, $y = 0$ i $x = 0$, $y = 2\pi$ otrzymujemy $x' = 1$, $y' = 0$. Odwzorowanie nie jest więc jedno-jednoznaczne. Z drugiej strony, jeżeli jakobjan jest w jakimś punkcie równy zeru, to odwzorowanie może być mimo to w otoczeniu tego punktu jedno-jednoznaczne. Np. odwzorowanie określone funkcjami

$$x' = x^3, \quad y' = y^3, \quad (-\infty < x, \quad y < +\infty) \qquad (1)$$

jest odwzorowaniem jedno-jednoznacznem; odwzorowanie odwrotne określone jest funkcjami

$$x = \sqrt[3]{x'}, \qquad y = \sqrt[3]{y'}.$$

Jakobjan odwzorowania (1) wynosi $9x^2y^2$; jest więc równy 0 dla $x = 0$, lub $y = 0$.

Uwaga 2.

Przypuśćmy, że funkcje $x' = f(x, y)$, $y' = f(x, y)$ są ciągłe wraz z pochodnemi cząstkowemi pierwszego rzędu w obszarze spójnym (T. I, str. 238). Jeżeli założymy, że odwzorowanie określone temi funkcjami jest jedno-jednoznaczne, wówczas można udowodnić, że jakobjan jest stale > 0 lub stale < 0. Dowód pomijamy.

Przykłady:

1. Jakobjan odwzorowania linjowego

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

wynosi $a_1 b_2 - a_2 b_1$. Jeżeli jest różny od zera, to — jak wiadomo z teorji równań linjowych — można równania powyższe rozwiązać ze względu na x, y, przyczem otrzymuje się równania podobnej postaci. Mamy tu zatem odwzorowanie ciągłe i jedno-jednoznaczne całej płaszczyzny (x, y) na całą płaszczyznę (x', y'). Jeżeli jednak jakobjan (który w tym przykładzie nie zawiera zmiennych x, y) jest równy zeru, to jak wiadomo z geometrji analitycznej, odwzorowaniem płaszczyzny x, y jest linja prosta albo punkt. W tym wypadku odwzorowanie jest ciągłe, ale nie jest jedno-jednoznaczne.

2. Wprowadzenie współrzędnych biegunowych

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

możemy uważać za odwzorowanie płaszczyzny zmiennych r, φ na płaszczyznę (x, y). Jakobjan tego odwzorowania wynosi, jak wiemy, r (str. 219). Dla $r = 0$ i dowolnego φ otrzymujemy $x = 0$, $y = 0$, t. zn. wszystkie punkty prostej $r = 0$ przechodzą w początek układu płaszczyzny (x, y). W otoczeniu punktu (r, φ), którego $r \neq 0$, odwzorowanie jest jedno-jednoznaczne, a odwzorowanie odwrotne dane jest wzorami

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arc} \sin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arc} \cos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

przyczem wybór znaku pierwiastka oraz wartości kąta φ jest jednoznacznie określony ze względu na ciągłość odwzorowania.

Ponieważ punktom (r, φ) i $(r, \varphi + 2n\pi)$, gdzie n oznacza dowolną liczbę całkowitą, odpowiada ten sam punkt płaszczyzny (x, y), każdy punkt tej płaszczyzny jest obrazem nieskończenie wielu punktów płaszczyzny (r, φ).

W zastosowaniach przyjmuje się zwykle $r \geqslant 0$ i ogranicza się często kąt φ przez warunek $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Łatwo się przekonać, że obrazem ciągłym i jedno-jednoznacznym wnętrza prostokąta określonego nierównościami $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, jest obszar otrzymany z wnętrza koła $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ przez usunięcie z niego odcinka osi x-ów: $0 \leqslant x \leqslant a$, $y = 0$.

3. Odwzorowanie

$$x' = x + y, \quad y' = xy$$

jest ciągłe, ale nie jest jedno-jednoznaczne dla całej płaszczyzny x, y. Istotnie, punktom (x, y) i (y, x) położonym symetrycznie ze względu na prostą $y = x$ i w ogólności różnym, odpowiada ten sam punkt (x', y'). Wyznacznik funkcyjny wynosi tutaj $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y$, a więc jest równy zeru na prostej $y = x$. Aby znaleźć obraz płaszczyzny x, y przy tem odwzorowaniu, zauważmy, że przy danem (x', y') liczby x, y są pierwiastkami równania drugiego stopnia

$$z^2 - x'z + y' = 0.$$

Jak wiadomo, równanie to posiada wtedy i tylko wtedy rzeczywiste pierwiastki, gdy $x'^2 - 4y' \geqslant 0$. A więc obrazem płaszczyzny (x, y) jest zbiór punktów (x', y') położonych poniżej paraboli $y' = \frac{x'^2}{4}$, lub na tej paraboli.

Na mocy twierdzenia na str. 219 odwzorowanie nasze jest jedno-jednoznaczne w otoczeniu każdego punktu (x_0, y_0) nie leżącego na prostej $y = x$. Istotnie, rozwiązując równania określające odwzorowanie ze względu na x, y, dostajemy

$$x = \frac{x' + \sqrt{x'^2 - 4y'}}{2}, \quad y = \frac{x' - \sqrt{x'^2 - 4y'}}{2},$$

lub $$x = \frac{x' - \sqrt{x'^2 - 4y'}}{2}, \quad y = \frac{x' + \sqrt{x'^2 - 4y'}}{2}.$$

Dla pewnego otoczenia punktu x_0, y_0 zachodzi pierwsza lub druga z tych możliwości, zależnie od tego, czy $x_0 > y_0$, czy też $x_0 < y_0$.

Jeżeli natomiast $x_0 = y_0$, to odwzorowanie nie jest jedno-jednoznaczne w żadnem otoczeniu punktu (x_0, y_0), bo w każdem otoczeniu znaleźć można dwa punkty symetryczne ze względu na prostą $y = x$, których obrazem jest ten sam punkt płaszczyzny $(x'; y')$.

Jeżeli nasze odwzorowanie jest w pewnym obszarze spójnym ω jedno-jednoznaczne, to ten obszar nie może zawierać żadnego punktu prostej $y = x$, a więc leży całkowicie powyżej lub poniżej tej prostej. Stąd wynika, że jakobjan ma w obszarze ω stały znak (por. uwagę 2).

Zadania:

1) Wykazać, że przy odwzorowaniu $x' = x^2 - y^2$, $y' = 2xy$ obrazem płaszczyzny (x, y) jest cała płaszczyzna (x', y'). Odwzorowanie to nie jest jedno-jednoznaczne w żadnem otoczeniu punktu $(0, 0)$.

2) Wykazać, że przy odwzorowaniu $x' = x$, $y' = x^2 + y^2$ obrazem płaszczyzny (x, y) jest zbiór punktów płaszczyzny (x', y'), położonych powyżej paraboli $y' = x'^2$ lub na tej paraboli. Odwzorowanie nie jest jedno-jednoznaczne w otoczeniu punktów osi x-ów.

§ 4. Zamiana zmiennych w całkach podwójnych. Niechaj ω i ω' będą obszarami regularnemi, których brzegami są krzywe zamknięte pojedyncze C, wzgl. C'. Przypuśćmy, że funkcje

$$x' = f(x, y), \quad y' = \varphi(x, y) \tag{a}$$

są określone i ciągłe wraz z pierwszemi pochodnemi cząstkowemi w pewnym obszarze domkniętym D, zawierającym w swojem wnętrzu ω. Niechaj $P(x', y')$ będzie funkcją ciągłą w ω'. Jeżeli w całce

$$\iint_{\omega'} P(x', y')\, dx'\, dy'$$

chcemy wprowadzić nowe zmienne x, y, związane ze zmiennemi x', y' równaniami (a), to uskuteczniamy to przy pomocy wzoru

$$\iint\limits_{\omega'} P(x', y')\, dx'.dy' =$$

$$= \varepsilon \iint\limits_{\omega} P[f(x, y), \varphi(x, y)] \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} dx\, dy \qquad \text{(I)}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$.

Wzór powyższy ważny jest przy następujących założeniach:

1. Funkcja $P(x', y')$ jest określona i ciągła w pewnym obszarze domkniętym D' zawierającym nietylko ω', lecz również cały obraz obszaru ω przy odwzorowaniu (a).

2. Funkcje f i φ odwzorowują jedno-jednoznacznie krzywą C na krzywą C'.

3. Jeżeli punkt obiega krzywą C w kierunku lewym, wówczas odpowiedni punkt krzywej C' obiega ją wedle 2. w kierunku lewym lub prawym.

W pierwszym wypadku ma być $\varepsilon = 1$, w drugim $\varepsilon = -1$. Zatem ε nie zależy od funkcji $P(x', y')$, lecz tylko od odwzorowania określonego funkcjami f i φ.

Uwaga.

Z założenia: 1. wynika istnienie całki po prawej stronie równości (I). O jedno-jednoznaczności odwzorowania wnętrza krzywej C nic nie zakładamy.

Dowód przeprowadzimy jedynie przy pewnych założeniach dodatkowych. W ogólnym wypadku dowód pomijamy. Założymy mianowicie, że:

a) Krzywa C posiada przedstawienie normalne spełniające warunki podane na str. 194.

b) Obszar ω (wzgl. ω') da się rozbić na skończoną liczbę obszarów normalnych względem każdej z osi x, y, (wzgl. x', y').

c) Funkcje $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ posiadają cząstkowe pochodne drugiego rzędu, ciągłe w ω.

d) Istnieje funkcja $F(x', y')$, określona w D' i spełniająca związek

$$F'_{y'}(x', y') = P(x', y') \tag{1}$$

w obszarze ω'.

Na mocy twierdzenia Greena (str. 206) mamy:

$$\int\limits_{C'} F(x', y')\,dx' = -\iint\limits_{\omega'} \frac{\partial F}{\partial y'}\,dx'dy' =$$

$$= -\iint\limits_{\omega'} P(x', y')\,dx'\,dy' \tag{2}$$

Całkę krzywolinijną obliczamy w kierunku lewym na krzywej C'.

Niechaj funkcje

$$x = \alpha(t), \quad y = \beta(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$$

będą przedstawieniem normalnem krzywej C, zgodnem z kierunkiem lewym.

Zatem, na mocy założenia 2., funkcje

$$x' = f[\alpha(t), \beta(t)] = u(t), \quad y' = \varphi[\alpha(t), \beta(t)] = v(t) \tag{3}$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$$

będą przedstawieniem normalnem krzywej C'.

Ponieważ funkcje f, φ mają cząstkowe pochodne ciągłe, a według założenia krzywa C spełnia warunek *a)*, więc możemy przyjąć, że przedział (t_0, t_1) da się rozbić na skończoną liczbę przedziałów, w których funkcje $\alpha(t)$, $\beta(t)$ mają pochodne (na końcach przedziałów pochodne jednostronne) ciągłe, a zatem funkcje $u(t)$ i $v(t)$ mają również w tych przedziałach pochodne (na końcach jednostronne) ciągłe. Na mocy więc (3) mamy

$$\int\limits_{C'} F(x', y')\,dx' = \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t_1} F[u(t), v(t)]\,u'(t)\,dt \tag{4}$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$ zależnie od tego, czy obiegając krzywą C w kierunku lewym, obiegamy krzywą C' również w kierunku lewym, czy w przeciwnym (patrz str. 194).

Ze związku (3) otrzymujemy (poza skończoną liczbą punktów):

$$u'(t) = f'_x\,[\alpha(t), \beta(t)]\,\alpha'(t) + f'_y\,[\alpha(t), \beta(t)]\,\beta'(t).$$

Stąd i z (4) wynika:

$$\int_{C'} F(x', y')\,dx' = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} F[u(t), v(t)]\,f'_x\,[\alpha(t), \beta(t)]\,\alpha'(t)\,dt +$$

$$+\,\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} F[u(t), v(t)]\,f'_y\,[\alpha(t), \beta(t)]\,\beta'(t)\,dt.$$

Łatwo zauważyć, że całki stojące po prawej stronie powyższej równości, są odpowiednio równe całkom:

$$\int_C F\,[f(x, y), \varphi(x, y)]\,f'_x(x, y)\,dx,$$

$$\int_C F\,[f(x, y), \varphi(x, y)]\,f'_y(x, y)\,dy,$$

przyczem obie całki oblicza się w kierunku lewym.

Opuszczając dla krótkości zmienne x, y, możemy więc napisać:

$$\int_{C'} F(x', y')\,dx' = \varepsilon \int_C F(f, \varphi)\,f'_x\,dx + \varepsilon \int_C (f, \varphi)\,f'_y\,dy \qquad (5)$$

Zastosujmy do całek stojących po prawej stronie twierdzenie Greena. Mamy:

$$\frac{\partial\,[F(f, \varphi)\,f'_x]}{\partial y} =$$

$$= [F'_{x'}(f, \varphi)\,f'_y + F'_{y'}(f, \varphi)\,\varphi'_y]\,f'_x + F(f, \varphi)\,f''_{xy},$$

$$\frac{\partial\,[F(f, \varphi)\,f'_y]}{\partial x} =$$

$$= [F'_{x'}(f, \varphi)\,f'_x + F'_{y'}(f, \varphi)\,\varphi'_x]\,f'_y + F(f, \varphi)\,f''_{xy}.$$

Zatem z twierdzenia Greena i na mocy (5) wynika:

$$\int\limits_{C'} F(x', y')\,dx' =$$

$$= \varepsilon \iint\limits_{\omega} \left[-\frac{\partial\,[F(f,\varphi)\,f'_x]}{\partial y} + \frac{\partial\,[F(f,\varphi)\,f'_y]}{\partial x} \right] dx\,dy.$$

A więc $\int\limits_{C'} F(x', y')\,dx' = -\varepsilon \iint\limits_{\omega} F'_{y'}(f, \varphi)\,\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}\,dx\,dy.$

Stąd na mocy (1) i (2)

$$\iint\limits_{\omega'} P(x', y')\,dx'\,dy' =$$

$$= \varepsilon \iint\limits_{\omega} P[f(x, y), \varphi(x, y)]\,\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}\,dx\,dy.$$

Uwaga 1.

Jeżeli brzeg obszaru ω' składa się z kilku krzywych zamkniętych C'_1, C'_2, ... C'_n, to twierdzenie poprzednie będzie również prawdziwe, jeśli brzeg obszaru ω składa się z takiej samej liczby krzywych zamkniętych C_1, C_2, ... C_n, które funkcje f, φ odwzorowują jedno-jednoznacznie odpowiednio na krzywe C'_1, C'_2 ... Należy jeszcze założyć, że jeżeli punkt obiega krzywe C_1, C_2 ... w kierunku lewym, wówczas odpowiedni punkt obiega krzywe C'_1, C'_2, ... C'_n, albo stale w kierunku lewym, albo stale w kierunku prawym.

Dowód przebiega podobnie jak poprzednio, jeśli oprzemy się na ogólnem twierdzeniu Greena (str. 205/6).

Uwaga 2.

Załóżmy, że jakobjan $\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}$ nie zmienia znaku w obszarze ω. Na mocy formuły (I)

$$\iint\limits_{\omega'} P(x', y')\,dx'\,dy' =$$

$$= \iint\limits_{\omega} P(f, \varphi) \left| \varepsilon\,\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} \right| dx\,dy \qquad (6)$$

Liczba $\varepsilon = \pm 1$ i zależy tylko od funkcyj f i φ, nie zależy natomiast od P. Kładąc $P(x', y') = 1$ otrzymamy:

$$\iint_{\omega'} dx'\,dy' = \iint_{\omega} \left| \varepsilon \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} \right| dx\,dy.$$

Ponieważ lewa strona ma wartość dodatnią, więc funkcja $\varepsilon \dfrac{D(f, \varphi)}{D(x, y)}$ musi być nieujemna, założyliśmy bowiem, że jakobjan nie zmienia znaku. Z uwagi na to, że $\varepsilon = \pm 1$, wynika, że:

$$\varepsilon \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} \right|$$

Zatem na mocy (6) mamy w tym wypadku

$$\iint_{\omega'} P(x', y')\,dx'\,dy' =$$
$$= \iint_{\omega} P(f, \varphi) \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} \right| dx\,dy \qquad \text{(II)}$$

Uwaga 3.

Można udowodnić, że wzór (II) zachodzi również wtedy, jeżeli założymy, że

1) obszary ω, ω' są regularne i

2) funkcje $f(x, y)$ i $\varphi(x, y)$ odwzorowują jedno-jednoznacznie wnętrze obszaru ω na całe wnętrze obszaru ω'.

Nie zakładamy natomiast, że na brzegu odwzorowanie jest jedno-jednoznaczne.

Przykłady:

1. Obliczyć całkę $\iint (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ po wycinku kołowym ω, ograniczonym osią x-ów, prostą $y = x \operatorname{tg} \alpha$ $(0 < \alpha < 2\pi)$ i kołem $x^2 + y^2 = 1$.

Połóżmy
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Równania te odwzorowują jedno-jednoznacznie wnętrze prostokąta D $(0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha)$ płaszczyzny (r, φ) na wnętrze wycinka ω, przyczem jakobjan

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$$

ma stały znak.

Zatem

$$\iint_{\omega} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint_{D} (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^1 r^3\, dr = \frac{\alpha}{4}.$$

Dla obliczenia całki po całem kole jednostkowem nie moglibyśmy stosować naszego twierdzenia, ponieważ odwzorowanie nie jest jedno-jednoznaczne w żadnem otoczeniu punktu $r = 0$. Ponieważ jednak otrzymany wynik jest ważny dla każdego dodatniego $\alpha < 2\pi$, więc przechodząc do granicy dla $\alpha \to 2\pi$, otrzymamy dla całki po całem kole wartość $\frac{\pi}{2}$.

Ponieważ w ten sposób możemy rozumować dla każdej funkcji ciągłej, zatem w kole jednostkowem można zawsze wprowadzać współrzędne biegunowe przy całkowaniu po całem kole, mimo to, że założenia naszego twierdzenia nie są tu spełnione.

Wynika to zresztą również z uwagi 3 i własności naszego odwzorowania (por. przykład 2, str. 223).

2. Obliczyć objętość elipsoidy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ponieważ elipsoida jest symetryczna ze względu na płaszczyznę (x, y), mamy

$$V = 2 \iint_{\omega} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy.$$

przyczem obszarem całkowania ω jest elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Połóżmy $x=au$, $y=bv$. Łatwo sprawdzić, że wzory te określają jedno-jednoznaczne odwzorowanie koła jednostkowego K płaszczyzny (u, v) na elipsę ω. Ponieważ

$$\frac{D\,(x, y)}{D\,(u, v)}=a\,.\,b>0,$$

otrzymujemy

$$\iint\limits_{\omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=\iint\limits_{K}\sqrt{1-u^2-v^2}\,a\,b\,du\,dv.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$ (por. przykład poprzedni), dostajemy

$$\iint\limits_{K}\sqrt{1-u^2-v^2}\,du\,dv=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=\tfrac{2}{3}\,\pi.$$

Ostatecznie $\qquad V=\frac{4}{3}\,a\,b\,c\,\pi.$

3. Oznaczmy przez $f\,(x, y)$, $\varphi\,(x, y)$ dwie funkcje ciągłe i posiadające ciągłe pochodne cząstkowe w otoczeniu punktu (x_0, y_0). Załóżmy nadto, że ich jakobjan

$$\frac{D\,(f, \varphi)}{D\,(x, y)}$$

jest różny od zera w tym punkcie.

Odwzorowanie określone przez równania

$$x'=f\,(x, y), \quad y'=\varphi\,(x, y)$$

jest w pewnem otoczeniu punktu (x_0, y_0) jedno-jednoznaczne. Jeżeli zatem dokoła punktu (x_0, y_0) opiszemy koło K_r o dostatecznie małym promieniu r, to obrazem tego koła będzie pewna krzywa zamknięta K_r' wraz z wnętrzem. Pole tej krzywej wynosi

$$\iint\limits_{K'_r} dx'\,dy' = \varepsilon \iint\limits_{K_r} \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\,dx\,dy.$$

Oznaczając przez m_r, M_r najmniejszą wzgl. największą wartość jakobjanu w kole K_r, mamy na mocy twierdzenia o średniej wartości (str. 176)

$$m_r |K_r| \leqslant \iint\limits_{K_r} \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\,dx\,dy \leqslant M_r\,|K_r|,$$

czyli $$m_r \leqslant \frac{1}{|K_r|} \iint\limits_{K_r} \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\,dx\,dy \leqslant M_r.$$

Jeżeli promień r zdąża do zera, to liczby m_r, M_r z powodu ciągłości jakobjanu dążą do jego wartości w miejscu (x_0, y_0). Zatem

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|K_r|} \iint\limits_{K_r} \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\,dx\,dy = \frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

Mnożąc obustronnie przez ε, otrzymujemy

$$\lim_{r\to 0} \frac{|K'_r|}{|K_r|} = \varepsilon\,\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\bigg|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

Widzimy zatem, że wartość bezwzględna jakobjanu jest równa granicy ilorazu K'_r i K_r, zaś jego znak jest dodatni lub ujemny, zależnie od tego, czy odwzorowanie zachowuje zwrot obiegu, czy go odwraca. Mamy tu pewną analogję do znanych własności pochodnej funkcji jednej zmiennej.

Zadania:

1) Przy pomocy zamiany zmiennych używanej w przykładach poprzednich obliczyć:

a) Objętość części elipsoidy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

położoną w dodatniej ósemce układu współrzędnych, między płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$ i płaszczyzną

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \quad V=\tfrac{1}{24}\,abc\,\pi\,(5\sqrt{2}-4).$$

b) Objętość wyciętą z kuli $x^2+y^2+z^2=r^2$ przez walec kołowy $x^2+y^2=a^2$ $(a<r)$.

$$V=\tfrac{4}{3}\,\pi\,[r^3-(r^2-a^2)^{\frac{3}{2}}].$$

c) Współrzędne środka ciężkości (por. str. 186, zad. 6) dodatniej ćwiartki elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad \xi=\frac{4a}{3\pi},\ \eta=\frac{4b}{3\pi}.$$

2) Wykazać przy pomocy zamiany zmiennych, że odwzorowanie $x'=\sqrt{y}$, $y'=-2x\sqrt{y}$, jedno-jednoznaczne dla $y>0$, jest równopowierzchniowe, t. zn. że obrazem dowolnego obszaru domkniętego płaszczyzny (x, y) (położonego powyżej osi x-ów) jest obszar domknięty o tem samem polu.

Rozdział XII.

Całka wielokrotna.

§ 1. Całka potrójna. Niechaj D będzie zbiorem punktów w przestrzeni, o współrzędnych (x, y, z), spełniających nierówności: $a \leqslant x \leqslant a', b \leqslant y \leqslant b', c \leqslant z \leqslant c'$.

Zbiór D jest oczywiście prostopadłościanem o objętości $\tau = (a' - a)(b' - b)(c' - c)$ i o przekątni

$$l = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}.$$

Podzielmy D na skończoną liczbę prostopadłościanów o objętościach $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots.$

Zbiór tych prostopadłościanów nazywać będziemy podziałem δ. Przez $|\delta|$ oznaczać będziemy długość największej przekątni prostopadłościanów $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots.$

Ciąg podziałów $\{\delta_n\}$ nazywamy normalnym, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} |\delta_n| = 0$.

Przypuśćmy, że w prostopadłościanie D jest określona ograniczona funkcja $f(x, y, z)$. Utwórzmy dowolny podział δ i wybierzmy z każdego prostopadłościanu, wchodzącego w skład podziału δ, dowolnie po jednym punkcie. Oznaczmy współrzędne obranych punktów przez $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \ldots.$ i utwórzmy sumę:

$$A = f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,\Delta\tau_1 + f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\,\Delta\tau_2 + \ldots.$$

Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\delta_n\}$ odpowiedni ciąg sum $\{A_n\}$ ma granicę, wówczas powiadamy, że funkcja $f(x, y, z)$ jest całkowalna w D. Można wykazać (podobnie jak dla całki pojedynczej), że w tym wypadku ciągi $\{A_n\}$ zdążają do wspólnej granicy, którą nazywamy całką potrójną funkcji $f(x, y, z)$ w prostopadłościanie D.

Oznaczamy ją symbolem

$$\iiint_D f(x, y, z)\, d\tau \quad \text{lub} \quad \iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

§ 2. Całka wielokrotna. Niechaj D będzie zbiorem punktów przestrzeni czterowymiarowej o współrzędnych (x, y, z, t), spełniających nierówności: $a \leqslant x \leqslant a'$, $b \leqslant y \leqslant b'$, $c \leqslant z \leqslant c'$, $d \leqslant t \leqslant d'$. Zbiór D nazywamy przedziałem przestrzeni czterowymiarowej. (T. I, str. 285).

Jako miarę tego przedziału (którą nazywamy również objętością) uważamy liczbę

$$\tau = (a' - a)(b' - b)(c' - c)(d' - d).$$

Przekątnią przedziału D nazywamy liczbę

$$l = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2 + (d' - d)^2}$$

Dzieląc przedział D na skończoną liczbę przedziałów o miarach $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots$ otrzymujemy podział δ. Największą przekątnię przedziałów wchodzących w skład podziału δ oznaczamy przez $|\delta|$. Ciąg podziałów $\{\delta_n\}$ nazywamy normalnym, jeżeli $\lim\limits_{n \to \infty} |\delta_n| = 0$.

Niechaj $f(x, y, z, t)$ będzie funkcją określoną i ograniczoną w przedziale D. Obierzmy w każdym z przedziałów $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots$ dowolnie po jednym punkcie o współrzędnych $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, t_1)$, $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, t_2), \ldots$ i utwórzmy sumę

$$A = f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, t_1)\,\Delta\tau_1 + f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, t_2)\,\Delta\tau_2 + \ldots$$

Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów $\{\delta_n\}$ odpowiedni ciąg sum $\{A_n\}$ ma granicę, wówczas powiadamy, że funkcja $f(x, y, z, t)$ jest całkowalna w przedziale D. Wspólną granicę ciągów $\{A_n\}$ nazywamy całką poczwórną funkcji $f(x, y, z, t)$ w przedziale D. Oznaczamy ją symbolem

$$\iiiint_D f(x, y, z, t)\, dz \quad \text{lub} \quad \iiiint_D f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Analogicznie określamy całkę wielokrotną w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów.

§ 3. Warunki całkowalności. Twierdzenia 1, 2, 3, 4 (§ 2 str. 163) są ważne również dla całek potrójnych i wielokrotnych. W twierdzeniach 1, 2, 3 należy za D przyjąć prostopadłościan, względnie przedział. Dowody tych twierdzeń są podobne. W twierdzeniu 4 należy poczynić następujące zmiany. W wypadku całki potrójnej zakładamy, że punkty nieciągłości leżą na skończonej liczbie powierzchni, będących obrazami geometrycznemi funkcyj ciągłych kształtu $z = f(x, y)$, lub $x = \varphi(y, z)$, lub $y = \psi(x, z)$. W wypadku całki poczwórnej zakładamy, że punkty nieciągłości leżą na skończonej liczbie utworów, będących obrazami geometrycznemi funkcyj ciągłych $t = f(x, y, z)$, lub $x = \varphi(x, z, t)$ i t. d. Analogiczne zmiany należy uwzględnić przy większej liczbie wymiarów.

§ 4. Całka wielokrotna, jako całka iterowana.

Twierdzenie.

Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ jest ciągła w prostopadłościanie D $(a \leqslant x \leqslant a', \; b \leqslant y \leqslant b', \; c \leqslant z \leqslant c')$, wówczas

$$\iiint_D f(x, y, z)\, d\tau = \int_a^{a'} \left[\int_b^{b'} \left\{\int_c^{c'} f(x, y, z)\, dz\right\} dy\right] dx.$$

Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu twierdzenia z § 3, str. 165.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla całek wielokrotnych.

Uwaga.

Można udowodnić twierdzenie ogólniejsze. Załóżmy, że $f(x, y, z)$ jest funkcją całkowalną w D i że dla każdej pary wartości x, y funkcja $f(x, y, z)$, uważana jako funkcja jednej zmiennej z, jest całkowalna. Przy tych założeniach można twierdzić, że

1) $F(x, y) = \int\limits_c^{c'} f(x, y, z)\, dz$ jest funkcją całkowalną w prostokącie D' $(a \leqslant x \leqslant a', \ b \leqslant y \leqslant b')$.

2) $\iiint\limits_D f(x, y, z)\, d\tau = \iint\limits_{D'} \{\int\limits_c^{c'} f(x, y, z)\, dz\}\, d\sigma.$

Przykład.

Obliczyć całkę $\iiint\limits_D (x^2 + y^2 + z^2)\, d\tau$ po prostopadłościanie D określonym nierównościami $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

Otrzymujemy

$$\iiint\limits_D (x^2 + y^2 + z^2)\, d\tau = \int\limits_0^a [\int\limits_0^b \{\int\limits_0^c (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\}\, dy]\, dx =$$

$$= \int\limits_0^a \left| \int\limits_0^b \left(cx^2 + cy^2 + \frac{c^3}{3}\right) dy \right| dx =$$

$$= \int\limits_0^a \left| bcx^2 + \frac{b^3}{3} c + b\frac{c^3}{3} \right| dx =$$

$$= \frac{a^3bc}{3} + \frac{ab^3c}{3} + \frac{abc^3}{3} = \frac{abc}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

§ 5. Całka wielokrotna po obszarze. Niechaj ω będzie obszarem ograniczonym i domkniętym, położonym w przestrzeni trójwymiarowej (por. T. I, str. 285).

Załóżmy, że funkcja $f(x, y, z)$ jest w obszarze ω określona i ograniczona. Niechaj D będzie dowolnym prostopadłościanem $(a \leqslant x \leqslant a', \ b \leqslant y \leqslant b', \ c \leqslant z \leqslant c')$

zawierającym w swojem wnętrzu obszar ω. Określmy w D nową funkcję $F(x, y, z)$ w następujący sposób: $F(x, y, z) = f(x, y, z)$, jeżeli punkt (x, y, z) należy do ω; $F(x, y, z) = 0$ dla innych punktów prostopadłościanu D.

Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ jest całkowalna w D, wówczas powiadamy, że funkcja $f(x, y, z)$ jest całkowalna w ω. Całką potrójną funkcji $f(x, y, z)$ po obszarze ω nazywać będziemy wartość całki $\iiint\limits_D F(x, y, z)\, d\tau$. Całkę potrójną po obszarze ω oznaczać będziemy podobnie jak poprzednio, t. j. symbolem $\iiint\limits_\omega f(x, y, z)\, d\tau$ lub $\iiint\limits_\omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

A więc według powyższej definicji

$$\iiint\limits_\omega f(x, y, z)\, d\tau = \iiint\limits_D F(x, y, z)\, d\tau.$$

Odnosi się tutaj (jak czytelnik łatwo sprawdzi), przy odpowiednich zmianach, uwaga na str. 171.

Obszar domknięty ω nazywamy obszarem **regularnym**, jeżeli jego brzeg składa ze skończonej liczby powierzchni, dających się przedstawić w jednej z postaci $z = f(x, y)$, $y = \varphi(x, z)$, $x = \psi(y, z)$.

Czytelnik łatwo sprawdzi, że twierdzenia 1 (str. 171) i 2 (str. 172) są również ważne dla całek potrójnych (przy odpowiednich zmianach).

Jako definicję objętości obszaru domkniętego regularnego ω przyjmujemy formułę

$$|\omega| = \iiint\limits_\omega d\sigma.$$

Te same definicje i twierdzenia stosują się do dowolnych całek wielokrotnych.

Czytelnik łatwo wypowie twierdzenia 1, 2, 3 (§ 5, str. 175) dla całek wielokrotnych. Dowody są podobne.

Jako średnią wartość funkcji $f(x, y, z)$ w obszarze ω określamy całkę

$$\frac{1}{|\omega|} \iiint\limits_\omega f(x, y, z)\, d\tau.$$

§ 6. Całka wielokrotna po obszarach, jako całka iterowana. Niechaj ω_1 będzie obszarem regularnym położonym w płaszczyźnie (x, y), zaś ω obszarem regularnym położonym w przestrzeni trójwymiarowej określonym jak następuje: punkt (x, y) należy do ω_1, $\varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x, y)$, gdzie $\varphi_1(x, y)$ i $\varphi_2(x, y)$ są funkcjami ciągłemi określonemi w ω_1. Obszar taki nazywać będziemy obszarem normalnym względem płaszczyzny (x, y). Obszar ω ograniczony jest powierzchniami $z = \varphi_1(x, y)$, $z = \varphi_2(x, y)$ i pobocznicą walca, o podstawie ω_1, którego tworzące są równoległe do osi z-ów. Niechaj D będzie dowolnym prostopadłościanem określonym nierównościami $a \leqslant x \leqslant a'$, $b \leqslant y \leqslant b'$, $c \leqslant z \leqslant c'$, pokrywającym ω. Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ jest ciągła w ω, wówczas, jak wiemy

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\tau = \iiint\limits_{D} F(x, y, z)\, d\tau$$

gdzie $F(x, y, z) = f(x, y, z)$ w ω, zaś $F(x, y, z) = 0$ w pozostałych punktach D.

Funkcja $F(x, y, z)$, uważana jako funkcja zmiennej z, posiada co najwyżej dwa punkty nieciągłości; punktami temi mogą być punkty, w których prosta równoległa do osi z-ów przechodząca przez punkt (x, y) przecina brzeg obszaru ω. A zatem dla każdego (x, y) istnieje całka

$$\int\limits_{c}^{c'} F(x, y, z)\, dz = W(x, y).$$

Stąd na mocy uwagi na str. 238 wynika, że

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\tau = \iiint\limits_{D} F(x, y, z)\, d\tau =$$

$$= \iint\limits_{D'} \left\{\int\limits_{c}^{c'} F(x, y, z)\, dz\right\} d\sigma \tag{1}$$

gdzie D' oznacza prostokąt $(a \leqslant x \leqslant a', b \leqslant y \leqslant b')$. Lecz łatwo można zauważyć, że przy stałem (x, y) mamy:

$$W(x, y) = \int_{c}^{c'} F(x, y, z)\, dz = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} F(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \tag{2}$$

jeżeli (x, y) należy do ω_1, zaś

$W(x, y) = \int_{c}^{c'} F(x, y, z)\, dz = 0$ w pozostałych punktach D'.

A więc

$$\iint_{D'} W(x, y)\, d\sigma = \iint_{\omega_1} W(x, y)\, d\sigma.$$

Zatem na mocy (1), (2)

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z)\, dt = \iint_{\omega_1} \left\{ \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right\} d\sigma.$$

Analogiczny wzór otrzymuje się dla obszaru normalnego ze względu na płaszczyznę (y, z) lub (z, x).

Przykład.

1. Obliczyć całkę $\iiint_{\omega} (2x + 3y - z)\, dx\, dy\, dz$ po graniastosłupie trójkątnym ω, ograniczonym płaszczyznami $z = 0$, $z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = b$ $(a > 0,\ b > 0)$.

Mamy tutaj $\varphi_1(x, y) = 0$, $\varphi_2(x, y) = a$. Obszarem ω_1 w płaszczyźnie (x, y) jest trójkąt ograniczony prostemi $x = 0$, $y = 0$, $x + y = b$.

Zatem

$$\iiint_{\omega} (2x + 3y - z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\omega_1} \left\{ \int_0^a (2x + 3y - z)\, dz \right\} d\sigma.$$

Ponieważ

$$\int_0^a (2x + 3y - z)\, dz = (2x + 3y)\, a - \frac{a^2}{2},$$

zatem otrzymujemy jako wartość danej całki

$$\iint_{\omega_1} \left[(2x + 3y)\, a - \frac{a^2}{2} \right] d\sigma = \int_0^b dx \int_0^{b-x} \left[(2x + 3y)\, a - \frac{a^2}{2} \right] dy =$$

$$= \tfrac{5}{6}\, a b^3 - \tfrac{1}{4}\, a^2 b^2.$$

2. Obliczyć objętość obszaru normalnego ze względu na płaszczyznę (x, y).

Przy zachowaniu oznaczeń używanych poprzednio, mamy

$$V = \iiint_{\omega} dx\,dy\,dz = \iint_{\omega_1} \left\{ \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz \right\} d\sigma,$$

czyli

$$V = \iint_{\omega_1} [\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)]\, d\sigma$$

(por. str. 182, przykład 4).

Zadania.

1) Obliczyć całkę potrójną

$$\iiint (1 - x^2)\sqrt{1 - y^2}\, dx\,dy\,dz$$

po prostopadłościanie ograniczonym płaszczyznami $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$. $\left(\text{Wynik } \frac{4\pi}{3}\right)$.

2) Współrzędne środka ciężkości bryły jednorodnej ω są średniemi wartościami funkcyj x, y, z, t. zn.

$$\xi = \frac{1}{|\omega|} \iiint_{\omega} x\, d\tau, \quad \eta = \frac{1}{|\omega|} \iiint_{\omega} y\, d\tau, \quad \zeta = \frac{1}{|\omega|} \iiint_{\omega} z\, d\tau.$$

Wyznaczyć środek ciężkości:

a) dodatniej ósemki elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,

b) stożka kołowego o promieniu r i wysokości w. (Wynik *a)* $\xi = \frac{3}{8} a$, $\eta = \frac{3}{8} b$, $\zeta = \frac{3}{8} c$; *b)* na wysokości, w odległości $\frac{1}{4} w$ od podstawy).

3) Obliczyć całkę potrójną $\iiint_{\omega} x^2 \sin y\, d\tau$ po obszarze ω normalnym ze względu na płaszczyznę (y, z), zawartym między tą płaszczyzną a powierzchnią

$$x = 1 + \cos y \qquad (0 \leqslant y \leqslant \pi,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\pi).$$

$\left(\text{Wynik } \frac{8\pi}{3}\right)$.

Spis rzeczy.

Rozdział I.

Całka nieokreślona. Metody całkowania.

Rozdział II.

Całkowanie funkcyj wymiernych.

Rozdział III.

Całkowanie funkcyj algebraicznych.

Rozdział IV.

Całki funkcyj wykładniczych, logarytmicznych, trygonometrycznych i cyklometrycznych.

Rozdział V.

Całka określona (pojedyncza).

Rozdział VI.

Przekształcanie całek określonych. Całkowanie ciągów i szeregów.

Rozdział VII.

Całki niewłaściwe.

Rozdział VIII.

Zastosowania rachunku całkowego.

Rozdział IX.

Całka określona podwójna. Warunki całkowalności.

Rozdział X.

Całka krzywolinijna.

Rozdział XI.

Odwzorowania ciągłe. Zamiana zmiennych w całkach podwójnych.

Rozdział XII.

Całka wielokrotna.