Antoni Łomnicki.

GEOMETRYA

Część I.

Planimetrya. Stereometrya

Dla kl. IV. i V.

Cena egzemplarza oprawnego 3 K 40 hal.

Lwów.
Nakład Gubrynowicza i syna.
1911.

Dyr. 1

L. 15.

Graufellner

Szarzan

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
w Gliwicach

122741

Szafran

wysokości). Grecy, opierając się bezwątpienia na wiedzy Egipcyan, zaczęli dopiero geometryę uprawiać dla samej nauki. Już w VI. wieku przed n. Chr. Pytagoras zakłada w Krotonie sławną szkołę, w której wysunięto na pierwszy plan geometryę idealną i wzbogacono zbiór znanych prawd geometrycznych. Tradycye tej szkoły przeszły w IV. wieku do szkoły Platona w Atenach, (Akademia platońska) i Eudoxusa w Cyzikos. Wszystkie te badania i odkrycia zebrał w III. wieku przed n. Chr. Euklides, żyjący w Aleksandryi, twórca szkoły aleksandryjskiej, w jednem dziele, złożonem z 13 ksiąg, znanem pod nazwą: „Elementy geometryi". Książka ta przez dwadzieścia wieków przeszło stanowiła najważniejsze źródło dla wszelkich badań geometrycznych. We wszystkich szkołach do niedawna uczono prawie bez zmiany tylko tego, co się w tem dziele zawiera. W Anglii do dziś dnia w szkole używa się jako podręcznika do nauki geometryi, tłumaczenia Euklidesa. Oprócz biblii — zdaniem historyków — żadna inna książka nie rozpowszechniła się tak i nie była tłumaczona na tyle języków, co właśnie dzieło Euklidesa. Dlatego też całą geometryę, której się uczymy, nazywamy „geometryą euklidesową".

Badaczem samodzielniejszym, największym matematykiem starożytności był Archimedes z Syrakuz (287—212 przed n. Chr.), który wyszedł ze szkoły aleksandryjskiej. Obok niego odznaczył się także Apolloniusz z Pergi, również uczeń szkoły aleksandryjskiej, badaniem przecięć stożkowych.

Z wieku I. przed n. Chr. posiadamy ważne badania Herona, a z wieku II. po n. Chr. Ptolomeusza, twórcy trygonometryi. Rzymianie nie przyczynili się w niczem do zdobyczy Greków. Także Hindusi i Arabowie, którym tak znaczne postępy zawdzięczamy w algebrze i arytmetyce — nie poszli w geometryi dalej od Greków. Przez całe średnie wieki matematyka była w zastoju: w epoce humanizmu odkryto dopiero na nowo całą wiedzę starożytnych, to też dopiero od XVI. wieku rozwija się geometrya dalej. Pod wpływem genialnego Galileusza, pracuje w geometryi Włoch Cavalieri (1591—1677), jego myśli dalej rozszerza niemiecki astronom Jan Kepler (1571—1630), którzy przyczynili się zwłaszcza do rozwoju stereometryi. We Francyi sławny filozof Descartes (1596—1650) wprowadza zupełnie nową metodę badań geometrycznych, wiążącą ściśle algebrę z geometryą (t. zw. geometryą analityczną), obok niego pracują Fermat, Desargues i Pascal, wzbogacając geometryę w nowe twierdzenia i nowe metody badań.

Wiek XVII. przynosi przewrót w całej matematyce: odkrycie rachunku różniczkowego i całkowego, niezależnie od siebie przez Leibniza (w Niemczech) i Newtona (w Anglii). Metoda Descartesa z jednej, rachunek zaś różniczkowy z drugiej strony, wywołują niebywały rozwój całej matematyki wogóle, a geometryi w szczególności. To też wiek XVIII. nagromadził tyle nowego materyału — czasem niezupełnie dokładnie sprawdzonego, że wiekowi XIX. pozostało poważne zadanie uporządkowania tych wszystkich wiadomości, wprowadzenia ścisłości logicznej we wszystkie rozumowania a przedewszystkiem

zbadanie samych podstaw geometryi i algebry. Z wieku XVIII. zwrócimy tylko uwagę na rozwój t. zw. geometryi rzutowej i wykreślnej, której twórcą był Francuz, G. Monge (1796—1818), na prace niemieckiego uczonego L. Eulera (1707—1783), tudzież na zasługi K. F. Gaussa (1777—1855), który dla swej wszechstronnej wiedzy zwany był „księciem matematyków". Jego działalność należy już jednak w znacznej części do wieku XIX., wieku krytyki matematycznej.

§ 3. Pewniki geometryczne.

Mając przystąpić do ścisłego badania utworów geometrycznych, musimy sobie przedewszystkiem uświadomić, że każda nauka ścisła — a geometrya była po wszystkie czasy pierwowzorem ścisłości — musi się oprzeć na jakichś założeniach (hypotezach) i z nich dopiero wyprowadzać dalsze wnioski. Te założenia muszą być oczywiste, dla każdego zrozumiałe i odpowiadać temu, czego nas doświadczenie naucza. *Udowodnić prawdziwości tych założeń nie możemy na drodze geometrycznej*, bo wszystko, czego nas uczy geometrya, wynika dopiero właśnie z tych założeń. Ponieważ jednak nasze zmysły i najlepsze nasze przyrządy miernicze są bądź co bądź niedoskonałe, spostrzegamy w świecie zewnętrznym wszystkie prawidłowości niedokładnie, z pewnem przybliżeniem jedynie. Możnaby się n. p. spierać o to, czy pomiędzy dwoma punktami da się tylko jedna linia prosta poprowadzić — a doświadczenie zewnętrzne nie pomogłoby do rozstrzygnięcia sporu (p. str. 14). Wiadomo bowiem, że ani punktu, ani linii prostej narysować ściśle nie możemy. Aby takiej niepewności uniknąć, zgodzono się raz na zawsze przyjąć pewne proste twierdzenia za prawdziwe i nazwano je pewnikami (aksyomatami). *Pewniki są to więc umowy, zbudowane na podstawie doświadczenia zewnętrznego, a odnoszące się do idealnych utworów geometrycznych.*

Abyśmy byli jak najmniej zawiśli od niepewności doświadczenia zewnętrznego, staramy się wybrać jak najmniej tych pewników, a jak najwięcej z nich budować. Tak n. p. moglibyśmy łatwem doświadczeniem przekonać się, że suma kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180° w przybliżeniu i możnaby to wyidealizowane (zaokrąglone, jak się nieraz wyrażamy) doświadczenie przyjąć za pewnik. Jednakowoż na podstawie innych prostszych pewników da się już to twierdzenie udowodnić, niema więc potrzeby wprowadzać jeszcze jeden pewnik. Otóż: zbiór pewników powinien zawierać tylko takie twierdzenia, które się nie dadzą udowodnić przy pomocy pozostałych pewników, czyli innemi słowami, pewniki powinny być niezależne od siebie. Wreszcie musimy uważać, aby te pewniki wystarczały już do zbudowania całej geometryi, aby się już nie trzeba było więcej w ciągu nauki powoływać na doświadczenie.

Z tych uwag widzimy, że podanie wszystkich odpowiednich pewników jest zadaniem niełatwem, to też czekało ono przez długie wieki na ścisłe rozwiązanie.

Euklides, którego geometryę aż do XIX. wieku uważano za najdoskonalsze dzieło matematyczne, podaje zamało pewników, a i z tych nie wszystkie są od siebie niezależne. Przez cały XIX. wiek znakomici badacze, jak Gauss, Łobaczewskij, Bolyai, Riemann, Helmholtz, Klein, Peano i wielu innych, starali się usunąć i uzupełnić te braki. Uwieńczeniem tej pracy było dzieło Hilberta p. t. „Podstawy geometryi“ w r. 1898, w któremto dziele znakomity niemiecki uczony podaje wystarczający i konieczny zbiór pewników. Można powiedzieć, że dopiero od tego czasu wiemy, na jakich podstawach spoczywa cała nasza geometrya. W szkole średniej za trudno byłoby zapamiętać zbiór tych wszystkich pewników (a jest ich 21) i zrozumieć ich konieczność, toteż podajemy je tutaj w streszczeniu.

Przyjmujemy jako znane pojęcia: punkt, linię prostą i płaszczyznę. Przypisujemy im następujące własności:

I. Przez dwa punkty jest wyznaczona (przechodzi) tylko jedna prosta i to przez każde dwa punkty na niej leżące.

II. Między dwoma punktami linii prostej i poza nimi znajdują się zawsze inne punkty prostej, jest ich więc nieskończenie wiele.

III. Mimo to od każdego punktu linii prostej można się dostać do każdego innego, a nawet go przekroczyć zapomocą skończonej liczby równych kroków, choćby te kroki były bardzo małe (jestto pewnik Archimedesa).

IV. Mając dany jakiś odcinek AB jednej prostej, **można na każdej prostej znaleźć odcinek równy** mu i to tylko jeden, jeżeli obiorę punkt początkowy A' i kierunek.

Te 4 pewniki zawierają najważniejsze własności linii prostej; wystarczają one do zrozumienia rozdziału I., str. 7—13.

V. Mając dany jakiś kąt na jednej płaszczyźnie, **można na każdej płaszczyźnie znaleźć kąt równy** mu i to tylko jeden, jeżeli obiorę jedno ramię, wierzchołek i kierunek.

VI. Jeżeli w dwóch trójkątach są po dwa boki parami równe i kąty między nimi zawarte równe, to i pozostałe dwie pary kątów muszą być równe.

Uwaga: Pewniki IV., V. i VI. sprawiają, że można w geometryi wykonywać ruchy odcinków, kątów i trójkątów, a co za tem idzie, wszystkich innych utworów (*przenoszenie* odcinków i kątów, *nakrywanie* trójkątów).

VII. Przez punkt leżący poza linią prostą da się na jednej płaszczyźnie zawsze poprowadzić jedna, ale tylko jedna linia równoległa.

VIII. Przestrzeń, którą bierzemy za podścielisko zjawisk geometrycznych jest tak wypełniona punktami, że nie można już do tego zbioru dodać żadnego nowego punktu. (Gdybyśmy zaś dodali — trzebaby zmieniać poprzednie pewniki.) Mówimy krótko: przestrzeń jest nieprzerwana, ciągła.

Pewniki I.—VIII. wystarczają dla planimetryi.

Trzy pozostałe pewniki IX.—XI. znajdują się na początku stereometryi, gdyż tam dopiero będą potrzebne. Potrzeba tych wszystkich pewników stanie się dla nas zrozumialszą, gdy przystąpimy do badania utworów geometrycznych, o których w nich mowa. To jest wszystko, czego nam potrzeba z doświadczenia zewnętrznego. Pozatem budujemy już całą geometryę jedynie przy pomocy naszego umysłu, przy pomocy rozumowania, przyczem moglibyśmy nawet być już odcięci od świata otaczającego. Zobaczymy jednakże niejednokrotnie, że pogląd, spostrzeganie zewnętrzne, ułatwiają bardzo odkrywanie i zrozumienie nowych praw geometrycznych.

Ponieważ pewniki są tylko umowami, mógłby się ktoś na nie nie zgodzić, a więc odrzucić jakiś pewnik i wziąć na jego miejsce inny, sprzeciwiający się mu. N. p. mógłby ktoś przyjąć, że przez punkt poza linią prostą nie da się żadna linia równoległa do niej poprowadzić, a więc, że każda linia odpowiednio przedłużona przetnie drugą leżącą na tej samej płaszczyźnie. Doświadczeniem sprawdzić tego ściśle nie możemy, bo ani linii ściśle narysować nie zdołamy, ani też przedłużać jej na tysiące kilometrów nie potrafimy. Wtedy jednakowoż cała geometrya musiałaby uledz gruntownej zmianie, nie byłaby jednak fałszywą, nieprawdziwą. Mogłaby ona nawet równie dobrze zbliżać się do rzeczywistości, jak nasza, t. zw. Euklidesowa geometrya. Istotnie też takie próby zrobiono i w ten sposób powstały geometrye nieeuklidesowe, którym nic co do ścisłości zarzucić nie można. Co najwyżej można powiedzieć, że inne geometrye są niewygodne, mają trudniejsze wzory i twierdzenia. Podobnie nie można się sprzeczać, czy prawdziwszą miarą jest metr, czy łokieć lub arszyn — można tylko utrzymywać, że miary metryczne są najwygodniejsze, bo polegają na systemie dziesiątkowym. Można jednakowoż równie dobrze zmierzyć wszystko metrem, jak i łokciem. Przy nauce o liniach równoległych powrócimy raz jeszcze do tych geometryi nieeuklidesowych, ponieważ właśnie pewnik VII. o liniach równoległych dał powód do tych ciekawych badań.

Część I.

Planimetrya.

Rozdział I.

O linii prostej.

§ 4. Nieograniczoność linii prostej.

Postępując od utworów geometrycznych najprostszych do corazto więcej złożonych, zajmiemy się najpierw jedną linią prostą.

Z pewnika II. wynika, że każda linia prosta jest *nieograniczoną*, to znaczy, że jakkolwiek daleko obralibyśmy dwa punkty linii prostej, to poza nimi istnieją jeszcze dalsze punkty.

Można się spotkać z twierdzeniem, że linia prosta zamyka się w nieskończoności, nakształt koła o ogromnym promieniu czyli innemi słowami: że prosta ma w nieskończoności jeden punkt. Takie twierdzenie sprzeciwia się jednakowoż pewnikowi Archimedesa (III), byłby to bowiem taki punkt, do którego nie można się dostać zapomocą skończonej liczby kroków. W geometryi euklidesowej jest więc to twierdzenie błędnem. Jeżeli jednakowoż weźmiemy za podstawę geometryi inny zbiór pewników, jakto n. p. robimy w t. zw. geometryi rzutowej, to tam może prosta mieć w nieskończoności jeden i tylko jeden punkt. Tak samo błędnem byłoby — po przyjęciu naszych pewników — powiedzenie, że linia prosta ma dwa punkty w nieskończoności (jeden na prawo, drugi na lewo). Nieograniczoność prostej tak tylko należy rozumieć, że jakkolwiek daleko posunęlibyśmy się na linii prostej, to istnieją zawsze punkty jeszcze dalsze.

Ile razy mówimy „linia prosta“ bez żadnego dodatku, mamy zawsze na myśli prostą nieograniczoną.

Jeżeli na linii prostej obierzemy jakiś jeden punkt A, to otrzymujemy dwie części, zwane promieniami, z których każdy jest z jednej strony ograniczony (punktem A), z drugiej nie. Często jeden promień nazywamy kierunkiem *dodatnim*, drugi *ujemnym*! Jeżeli na linii prostej obierzemy dowolnie dwa punkty A i B, *to część prostej, ograniczoną już z obu stron* punktami A i B, nazywamy odcinkiem lub odległością punktów A i B.

§ 5. Odcinki.

Do wykreślenia figury zbliżonej do odcinka używa się w geometryi praktycznej lineału. Aby sprawdzić *dokładność lineału*, powołujemy się na pewnik I., orzekający, że między dwoma punktami da się tylko jedna linia prosta poprowadzić. W tym celu przykładamy lineał do dwóch podanych punktów i wzdłuż niego kreślimy linię. Następnie odwracamy lineał i drugi raz kreślimy wzdłuż niego linię; jeżeli obydwie linie się nakryją, lineał jest dobry. Odcinek oznaczamy albo dwoma literami wielkiemi, oznaczającemi punkty ograniczające, albo jedną małą literą, umieszczoną pośrodku i czytamy: odcinek AB, lub odcinek a.

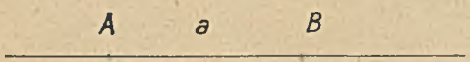


Fig. 1.

Często zachodzi potrzeba znalezienia odcinka równego danemu odcinkowi na tej samej prostej, tylko w innem miejscu, lub na innej prostej. Że to się da zrobić, o tem nas poucza pewnik IV. W geometryi praktycznej robi się to tak, że dany odcinek bierzemy w rozwartość *cyrkla*, usztywniwszy odpowiednio jego ramiona i przenosimy odcinek do żądanego miejsca. (Jak wykonać to zadanie przy pomocy lineału?) Takiego samego sposobu używamy w celu porównania dwóch odcinków AB i $A'B'$. Jeżeli jeden odcinek przeniesiemy tak, aby jeden jego punkt graniczny, n. p. A nakrył się z punktem A' ograniczającym drugi odcinek i jeżeli zachowamy ten sam kierunek dla obu odcinków, to mogą zajść trzy przypadki:

1. drugi koniec B odcinka padnie pomiędzy punkty $A'B'$, wtedy nazywamy pierwszy odcinek mniejszym i piszemy

$$AB < A'B';$$

2. punkt B padnie na punkt B', wtedy pierwszy odcinek jest równy drugiemu

$$AB = A'B';$$

3. punkt B padnie poza odcinek $A'B'$, wtedy pierwszy odcinek nazywamy większym i piszemy

$$AB > A'B'.$$

Do tych znaków $=$, $>$, $<$, można zastosować te same prawa, których się używa w arytmetyce dla liczb równych i nierównych, a więc n. p.: dwa odcinki równe trzeciemu są i między sobą równe, lub: jeżeli jeden odcinek jest równy drugiemu, a ten drugi jest większy od trzeciego. to i pierwszy jest większy od trzeciego i t. p.

Prawa: 1. $a = a$ i 2. $a = b$ i $c = b$ pociąga za sobą $a = c$, stanowią u Hilberta osobne pewniki, ponieważ nie dadzą się wysnuć z innych pewników, a są twierdzeniami oczywistemi i niezbędnemi przy wszelkich dowodzeniach matematycznych.

Na odcinkach możemy wykonywać podobne działania, jak na liczbach w arytmetyce.

I tak odcinki możemy dodawać, to znaczy od końca jednego odciąć drugi w tym samym kierunku, na tej samej linii prostej.

N. p. odcinek AC jest sumą odcinków AB i BC. Aby tę konstrukcyę wykonać, bierzemy odcinki $a = AB$, i $b = BC$ w cyrkiel i odcinamy na tej samej linii prostej jeden za drugim. Piszemy: $AC = a + b$.

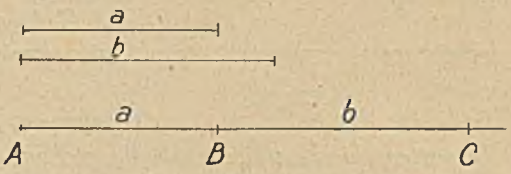


Fig. 2.

Aby odjąć jeden odcinek od drugiego, odcinamy pierwszy od końca drugiego, ale w kierunku przeciwnym, na tej samej linii prostej. N. p. odcinek NR na fig. 3 jest rożnicą odcinków NP i RP. Konstrukcyę wykonujemy podobnie, jak przy szukaniu sumy dwóch odcinków. Piszemy: $NR = c - d$.

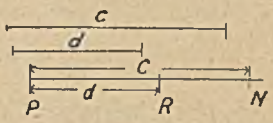


Fig. 3.

Jeżeli na linii prostej chcemy odróżniać kierunki i umówimy się, n. p. kierunek od N ku P uważać za dodatni, to odcinki NR, RP, NP uważamy za dodatnie, odcinki zaś RN, PR, PN za ujemne. Wtedy $RN = -NR$ i odwrotnie, jeżeli więc $NP = c$, to $PN = -c$. Przemiana porządku liter, oznaczających końce odcinków, wywołuje zmianę znaku. Działania odcinkami opatrzonymi znakami wykonuje się tak, jak liczbami dodatniemi i ujemnemi w algebrze (n. p. dodać odcinek ujemny, znaczy odjąć jego wartość przeciwną).

Jeżeli jakiś odcinek kilka razy do siebie dodamy, n. p. 5 razy, to mówimy, żeśmy *odcinek pomnożyli przez liczbę 5*.

N. p. fig. 4 $AB = 5 . CD$

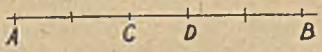


Fig. 4.

Później będziemy także mówili o *mnożeniu odcinka przez odcinek* (przy proporcyonalności figur i przy mierzeniu powierzchni).

Co się tyczy *dzielenia odcinka przez liczbę*, to jasnem jest, co znaczy podzielić odcinek na 2, 3, 4, ... 10, ... równych części (odwrócenie mnożenia przez liczbę!). Sposób rozwiązywania tego zagadnienia omówimy również później. Piszemy n. p. $AB : 5 = CD$. Dzielenie to można prowadzić dowolnie daleko. Nigdy nie dojdziemy do tak małego odcinka, któregoby już dalej dzielić nie można. Pewnik bowiem II. poucza, że między dwoma punktami znajdują się zawsze inne jeszcze punkty prostej. W geometryi praktycznej przeciwnie, dzielenie odcinka można doprowadzić tylko do pewnej granicy, poniżej której już dwa końce odcinka zlewają się ze sobą i z wszystkimi punktami, któreby mogły między nimi leżeć.

Działaniem bardzo pokrewnem z dzieleniem jest mierzenie odcinków, t. j. badanie, ile razy jeden odcinek mieści się w drugim. Dzia-

łanie to wykonujemy przez odejmowanie kolejne jednego odcinka od drugiego. Jeżeli n. p. odcinek CD odejmiemy od AB, od pozostałej reszty znowu odejmiemy CD i jeżeli po 5 odejmowaniach wyczerpiemy cały odcinek AB, to mówimy, że *stosunek odcinka AB do odcinka CD* wynosi 5, a piszemy to używając znaku dzielenia:

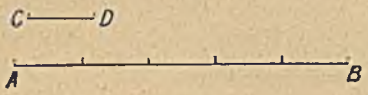


Fig. 5.

$$AB : CD = 5.$$

Odcinek AB *nazywamy poprzednikiem, CD następnikiem, a liczbę niemianowaną 5 wykładnikiem stosunku.*

Jeżelibyśmy odcinek CD obrali za jednostkę mierniczą, to wykładnik 5 (wynik mierzenia) *nazwalibyśmy liczbą wymiarową odcinka AB.* Przy mierzeniu może pozostać jakaś reszta, wtedy mierzymy ją jakimś mniejszym odcinkiem, n. p. jakąś całkowitą częścią odcinka CD lub wogóle jednostki mierniczej.

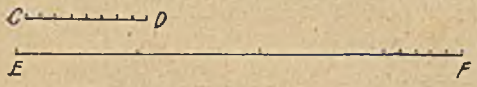


Fig. 6.

N. p. odcinek EF zawiera trzy całe odcinki CD i pięć ósmych części odcinka CD.

Wtedy liczbą wymiarową odcinka EF (przy użyciu jednostki CD) jest liczba $3\frac{5}{8}$.

$$EF : CD = 3\tfrac{5}{8} \text{ lub } EF = 3\tfrac{5}{8}\, CD.$$

Tu z góry trudno było przewidzieć, na jakie części należy podzielić odcinek CD. Później poznamy metody, prowadzące do tego celu i przekonamy się, że czasem nawet rozbicie odcinka CD na *dowolnie drobne części nie wystarcza.* Wtedy liczbą wymiarową odcinka EF (przy użyciu jednostki CD) jest t. zw. *liczba niewymierna.* (W algebrze rozważa się obszerniej ten nowy gatunek liczb). To może się zdarzyć naturalnie tylko w geometryi idealnej. W geometryi praktycznej każdy odcinek da się wymierzyć przy pomocy każdej jednostki. Najpospoliciej używaną jednostką mierniczą jest, jak wiadomo metr, który wzięto pierwotnie z wymiarów ziemi, mianowicie jako 1/40,000.000 część obwodu ziemi. Dokładniejsze pomiary ziemi wykazały jednakowoż, że obwód ziemi zawiera o kilkaset metrów więcej a i ten wynik zmieni się zapewne przy dalszych, jeszcze dokładniejszych pomiarach. Mimo to zatrzymujemy tę miarę — nie starając się jej już pogodzić z wymiarami kuli ziemskiej. Metr wprowadzono najpierw we Francyi w r. 1799, podczas wielkiej rewolucyi francuskiej. Jako jednostek mniejszych używa się, jak wiadomo 1 *dm*, 1 *cm*, 1 *mm*, t. j. $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ części metra. *Zamiennikiem tych miar jest liczba 10.*

Wszystkie te działania wykonywane na odcinkach podlegają tym samym prawom, co działania arytmetyczne, wykonywane na liczbach (n. p. dodawanie podlega prawu łączności, przemienności i. t. p.) co łatwo sprawdzić przez konstrukcyę. Korzystając z tego, możemy sobie często ułatwić działania aryt-

metyczne, jeżeli liczby zastąpimy odcinkami (rachunek graficzny) i odwrotnie: mając wykonać działanie na odcinkach, zastępujemy je liczbami (wymiarowemi) i rachujemy arytmetycznie.

N. p. mając wykonać odejmowanie 732—189 możemy z korzyścią użyć metra opatrzonego podziałką milimetrową. Wynajdujemy punkt 732 *mm* i cyrklem odcinamy od tego punktu ku początkowi podziałki odcinek 189 *mm*: otrzymamy naturalnie punkt 543 *mm*. Odwrotnie: mając dodać n. p. odcinek o długości 5 *m* do odcinka wynoszącego 18 *m*, nie będziemy wykonywali konstrukcyi, ale od razu podamy jako wynik odcinek 23 *m*.

§ 6. Wektory.

W niektórych naukach, n. p. w mechanice, odcinki tylko wtedy uważamy za równe, jeżeli oprócz równej długości mają jeszcze tensam kierunek w przestrzeni, leżą na tejsamej linii prostej.

N. p. na fig. 7 odcinki *a* i *b* są w tem pojmowaniu równe, ale odcinki *b* i *d*, *a* i *c* już nie są równe. Takie *odcinki, pojmowane wraz z kierunkiem, nazywamy wektorami.* N. p. siłę w mechanice przedstawiamy odcinkiem o pewnym kierunku i tam nie jest obojętnym ten kierunek siły: siły bowiem tesame, działające nawet na tensam punkt, ale w różnych kierunkach wywołują różne skutki. Geometrya „wektorowa“ odrzuca więc pewnik IV, a na jego miejsce przyjmuje następujący: Mając dany jakiś odcinek *A B* (wektor) jednej prostej, *można na niej* (ale tylko na tejsamej linii prostej) *znaleźć odcinek* (wektor) *równy* i to tylko jeden, jeżeli obiorę punkt początkowy *A'* i kierunek na tej prostej. Także wszystkie działania wykonujemy na wektorach zupełnie inaczej, aniżeli na zwykłych odcinkach. Tak n. p. dodawanie wektorów *a* i *b* uskutecznia się przy pomocy równoległoboku. Wektor *a* przesuwa się po linii prostej do przecięcia się z prostą, na której leży wektor *b*; wektor *b* przenosimy także do tego punktu i kreśli się równoległobok. *Przekątnię* tego *równoległoboku nazywamy sumą wektorów a i b* (lub wektorem wypadkowym). Mnożenie wektorów ma także zupełnie inne znaczenie, aniżeli mnożenie odcinków, a co najciekawsze, to mnożenie to nie ma prawa przemienności (to znaczy, co innego otrzymamy z mnożenia *a b*, a co innego z mnożenia *b.a.*) Geometryę wektorów rozwinięto bardzo w ostatnich czasach, ze względu na liczne zastosowania do fizyki. My będziemy się opierali na pewniku IV, więc wektory wykluczamy z naszych rozważań.

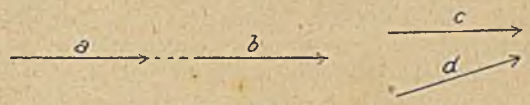


Fig. 7.

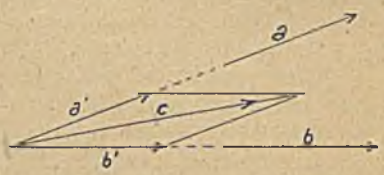


Fig. 8.

§ 7. Szeregi punktów.

Na każdym odcinku możemy obrać skończoną a nawet nieskończoną liczbę punktów, które mogą być oddzielone od siebie lub nie. N. p. na odcinku *A B* odetnijmy połowę: otrzymamy punkt *C*. Odcinek *A C* przepołówmy znów punktem *D*, odcinek *A D* punktem *E* i t. d.

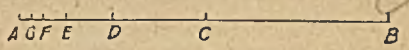


Fig. 9.

Postępując według tego prawa dalej, możemy otrzymać dowolnie wiele punktów oddzielnych C, D, E, F, G, H i t. d. (W geometryi praktycznej, gdzie punkt ma zawsze pewien rozmiar, można na skończonym odcinku wyznaczyć tylko skończoną liczbę punktów.)

Taki skończony lub nieskończony zbiór punktów nazywamy szeregiem punktów lub mnogością punktów.

Mnogościami punktów zajmowano się w ostatnich dziesięcioleciach bardzo wiele i badano je bardzo dokładnie. Pierwszym, który te badania naukowo przeprowadzał, był uczony niemiecki G. Cantor (od r. 1876). Okazało się, że dopiero ścisłe badanie mnogości wyjaśnia pojęcia tak trudne, jak nieskończoność, liczba niewymierna i t. p. Wszystkie te badania opierają się na jednem, zasadniczem twierdzeniu, zwanem twierdzeniem Bolzano-Weierstrassa: *Każda nieskończona mnogość punktów na skończonym odcinku posiada przynajmniej jeden punkt skupienia*, t. j. taki punkt, w którego dowolnej blizkości znajdują się inne punkty tej mnogości. Punkty te muszą się przynajmniej w jednem miejscu zgęszczać, chociażby były zupełnie nieregularnie na odcinku porozrzucane. W naszym przykładzie n. p. takim punktem jest A. O prawdziwości tego twierdzenia łatwo się przekonujemy następującem rozumowaniem:

Jeżeli na jakimś odcinku AB jest nieskończenie wiele punktów wybranych, to przynajmniej w jednej połowie musi ich być nieskończenie wiele (w drugiej połowie może ich być skończona liczba lub nieskończenie wiele). Wybieramy tę połowę i znowu ją dzielimy na dwie równe części, to znowu w jednej przynajmniej części musi ich być nieskończenie wiele. Postępując w ten sposób ciągle, otrzymujemy coraz to mniejszy odcinek zawarty w poprzednich, a zawierający zawsze nieskończenie wiele punktów. W ten sposób zbliżamy się coraz więcej do jakiegoś jednego punktu, wspólnego tym wszystkim odcinkom, w którego dowolnej blizkości jest nieskończenie wiele punktów naszej mnogości. Ten punkt jest więc punktem skupienia.

Jeżelibyśmy wzięli pod uwagę wszystkie punkty jakiegoś odcinka, to każdy z nich jest punktem skupienia.

Jeżeli jakiś punkt przebiega kolejno wszystkie punkty jakiegoś odcinka, mówimy, że ten punkt wykonuje ruch postępowy od jednego końca odcinka do drugiego.

Ćwiczenia I.

§ 1. 1. Wymień znane ci powierzchnie, nie ograniczone liniami!

2. Wymień powierzchnie ograniczone liniami!

3. Wymień linie ograniczone punktami i linie nie posiadające takich ograniczeń!

4. Wykazać błąd w następującej definicyi linii prostej: Jestto zbiór punktów, które nie zmieniają się, gdy przestrzeń wykonuje ruch obrotowy. (Uwaga: zacząć od określenia ruchu obrotowego!)

5. Wymień więcej znane linie krzywe; powierzchnie krzywe!

6. Czy przez ruch punktu może powstać powierzchnia?

§ 2. 7. Jaki wpływ mają różnice temperatur na przenoszenie odcinków, kątów, trójkątów przy pomocy przyrządów rysunkowych?

8. Czy prawo: „w równoległoboku przekątnie połowią się“ zasługuje na nazwę pewnika?

§ 4. 9. Na jakie części rozpada się linia prosta, jeżeli obierzemy na niej dwa dowolne punkty? 3, 4, 5, dowolnych punktów?

§ 5. 10. Przenieś na papier podziałkę centymetrową przy pomocy cyrkla!

11. Udowodnij geometrycznie, że jeżeli $a = b$, $ab > c$, to i $a > c$.

12. Dodaj dwa dowolne podane odcinki i wykaż prawo; $a + b = b + a$.

13. Obrawszy dowolny trójkąt, dodaj jego boki.

14. Wykaż w zadaniu 13, że $a + (b + c) = (a + b) + c$
$= (a + c) + b$ (prawo łączności).

15. Odejmij od dowolnie podanego odcinka drugi: *a*) mniejszy, *b*) większy odcinek.

16. Odejmij od siebie dwa boki trójkąta, prostokąta!

× 17. Znając odległość dwu miejsc *A B*, znaleźć punkt, mający 7 razy większą odległość od *A*, aniżeli punkt *B*.

× 18. Mając podane dwa odcinki, znaleźć (w przybliżeniu) wykładnik ich stosunku drogą geometryczną.

19. Zmierzyć długość i szerokość zeszytu, używając odstępu 2 jego linii jako jednostki mierniczej.

20. Zmierzyć długość i szerokość zeszytu, używając 1 *dm* jako jednostki mierniczej.

× 21. Wykreśliwszy kwadrat o boku 1 *dm* i jego przekątnię, zmierzyć (w przybliżeniu) przekątnię, używając boku jako jednostki mierniczej.

× 22. Zbadaj, ile centymetrów — przeciętnie — wynosi krok i oblicz ile jest kroków ze Lwowa do Krakowa (342 *km*). Jak długo trzebaby odbywać pieszo tę drogę, licząc 2 kroki na sekundę?

× 23. Zmierzyć obwód ziemi, używając kroku jako jednostki mierniczej (patrz zad. 22 i str. 20). Jak długo trwałaby podróż piechotą na około ziemi, gdyby nie było oceanów?

24. Wykonaj geometrycznie działania: $312 - 178 =$, $847 + 65 - 198 =$, $47 - 123 =$, używając podziałki milimetrowej na metrze.

× § 6. 25. Dodać dwa wektory wychodzące z tego samego punktu:

a) wzdłuż tej samej linii prostej w tym samym kierunku,

b) wzdłuż tej samej linii prostej w przeciwnym kierunku,

c) znajdujące się na dwóch odrębnych prostych.

Jaki stąd wniosek co do wielkości sumy 2 wektorów?

× 26. Dodać dwa wektory nierównoległe, nie mające punktu wspólnego.

× 27. Dodać dwa wektory nierównoległe przecinające się, ale nie w punktach początkowych.

× 28. Dodać 5 wektorów wychodzących z tego samego punktu w rozmaitych kierunkach.

× 29. Znając sumę dwóch wektorów i kierunki wektorów składowych, znaleźć ich wielkość (rozkładanie wektora!).

§ 7. 30. Podaj jakiś przykład nieskończonej mnogości punktów.

31. Wykaż, że punkty końcowe odcinków 1·4, 1·44, 1·444, 1·4444, ... tworzą mnogość nieskończoną z punktem skupienia $1\frac{4}{9}$.

32. Wykazać, że zbiór odcinków o liczbach wymiarowych: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, ... posiada dwa punkty skupienia: 0, $\frac{1}{2}$.

Rozdział II.

O dwóch liniach prostych. Kąty.

Dwie proste, leżące na jednej płaszczyźnie mogą mieć względem siebie trojakie położenie: mają dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie mają żadnego punktu wspólnego.

§ 8. Proste nakrywające się.

Pewnik I. poucza, że przez dwa punkty da się tylko jedna linia prosta poprowadzić. Jeżelibyśmy więc okazali o dwóch liniach prostych, że mają dwa punkty wspólne, to linie te miałyby już wszystkie inne punkty wspólne, czyli tworzyłyby jedną linię prostą. Tem bardziej, gdyby dwie linie proste miały trzy lub więcej punktów wspólnych. O takich dwóch prostych mówimy, że się n a k r y w a j ą. W geometryi praktycznej pewnik I. nie jest ściśle spełniony, ponieważ punkty geometryi praktycznej mają zawsze pewne rozmiary. I tak n. p. na fig. 10 poprowadziliśmy przez „punkty“ A i B jedną „linię prostą“. Jeżeli jednak weźmiemy linie nieco cieńsze, to możemy ich trzy lub więcej między punktami A' i B' poprowadzić. Stąd wynika w praktyce bardzo często chwiejność, niepewność konstrukcyi zwłaszcza, jeżeli punkty $A'B'$ leżą blizko, a linia prosta ma być daleko poza nie przedłużona.

Fig. 10.

§ 9. Proste równoległe.

Dwie linie proste a, b, na jednej płaszczyźnie, które nie mają żadnego punktu wspólnego (choćbyśmy je dowolnie daleko przedłużali), nazywamy p r o s t e m i r ó w n o l e g ł e m i. Słowa: proste nie przecinające się, a proste równoległe, mają więc dla nas zupełnie to samo znaczenie. Piszemy to w sposób następujący: $a \parallel b$. Że takie proste istnieją, o tem nas poucza pewnik VII. Już od starożytności próbowano u d o w o d n i ć, t. j. wysnuć jako wniosek z innych pewników, że przez każdy punkt poza linią prostą da się do niej tylko jedna linia równoległa poprowadzić. Żadna jednak próba nie doprowadziła do celu.

Już Proclus, kommentator Euklidesa w V. wieku po n. Chr. podawał kilka takich „dowodów“; w czasach nowożytnych Saccheri (1667—1733) w dziele p. t. „Euclides ab omni naevo vindicatus“, J. Lambert 1766, Legendre (1752—1833) i inni przyczynili się bardzo do wyjaśnienia całej teoryi linii równoległych, jakkolwiek zawsze jeszcze usiłowali udowodnić pewnik VII.

Doświadczenie nie może nam dać w tej sprawie żadnej pewności Gdybyśmy bowiem spróbowali *narysować* najpierw dwie proste równoległe. $a \parallel b$, w odstępie 1 *cm*, a potem dwie proste c i d, w takim samym odstępie, ale przecinające się dopiero w odległości 20 *km*, to przecież nikt nie potrafiłby odróżnić prostych c i d od prostych równoległych. Tak samo nikt nie może zapewnić, czy proste a i b nie przetną się, jeżeli je odpowiednio przedłużymy: owszem jest bardzo prawdopodobnem, że przy rysowaniu zboczymy o bardzo mały kąt.

Dlatego też nie sprzeciwia się zupełnie zdrowemu rozumowi, jeżelibyśmy przyjęli, że przez punkt A, poza linią prostą m, nie da się ani jedna linia równoległa poprowadzić (przypadek ten badał Riemann w połowie XIX wieku), lub też, że są dwie równoległe, w obydwie strony od punktu A, a pomiędzy niemi cała wiązka prostych nie przecinających się z m, ale nie równo oddalonych (przypadek ten zbadali J. Bolyai, Węgier 1832 in N. J. Łobaczewskij, Rosyanin 1826). Na takich pewnikach oparta geometrya jest również prawdziwa, niema w tem bowiem niczego sprzecznego ani z innymi pewnikami, ani ze zdrowym rozsądkiem.

Kąty.

§ 10. Proste przecinające się

Dwie linie proste — różne od siebie — mogą mieć najwyżej jeden punkt wspólny. Wtedy mówimy, że się te linie przecinają. Punkt wspólny nazywamy punktem przecięcia (lub spodkiem prostej). W geometryi praktycznej i to twierdzenie nie jest prawdziwe, jeżeli się bowiem dwie „linie proste“ przecinają, to mają kawałek płaszczyzny wspólny (w przybliżeniu równoległobok $EFGH$ na fig. 11).

Fig. 11.

Dwie przecinające się proste dzielą całą płaszczyznę na cztery części nieograniczone. *Utwór geometryczny złożony z dwóch promieni, wychodzących z jednego punktu, nazywamy kątem.*

Powstały więc cztery kąty. Punkt przecięcia nazywamy wierzchołkiem każdego kąta, a promienie tworzące kąt *ramionami* kąta. Jeżeli sobie wyobrazimy człowieka, stojącego na płaszczyźnie kąta, w jego wierzchołku i zwróconego twarzą do pola kąta, to jego prawe ramię wskaże *prawe ramię kąta*, a lewe: *lewe ramię kąta*. Jeżeli bierzemy pod uwagę najpierw prawe ramię a poźniej lewe, to kąt nazywamy dodatnim, w przeciwnym razie ujemnym. Część płaszczyzny leżącą między ramionami kąta, nazywamy *polem* kąta. Z pola kąta nie można się dostać na zewnątrz, nie przekraczając ramion (które trzeba naturalnie pojmować jako nieograniczone). Skró-

conym znakiem kąta jes $\sphericalangle$. Kąt znaczymy albo trzema literami, przyczem literę, oznaczającą wierzchołek bierzemy zawsze za środkową: $\sphericalangle AEC$, $\sphericalangle CEB$ i. t. p., albo jedną literą, zwykle grecką, umieszczoną na polu kąta przy wierzchołku, n. p. $\sphericalangle \alpha$, $\sphericalangle \beta$, lub wreszcie jedną wielką literą oznaczającą wierzchołek, o ile nie zachodzi żadna wątpliwość, t. j. o ile nie ma więcej kątów przy tym samym wierzchołku.

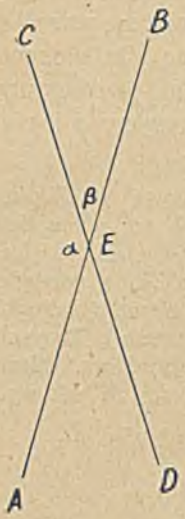


Fig. 12.

Według pewnika V. można do każdego kąta znaleźć w każdem innem miejscu kąt równy. Praktycznie robi się to przy pomocy osobnego przyrządu: kątomierza, lub też osobną konstrukcyą, przy pomocy cyrkla. Nazywamy to przenoszeniem kąta. Obydwa te sposoby omówimy dokładniej później — będziemy się jednak już teraz posługiwali kątomierzem, znanym z elementarnej nauki geometryi. Takiego samego sposobu używamy w celu *porównania dwóch kątów:* $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle A'B'C'$. Jeżeli jeden kąt przeniesiemy tak, aby jego ramię AB i wierzchołek B nakryły się z ramieniem $A'B'$ i wierzchołkiem B', i jeżeli zachowamy ten sam kierunek dla obydwu kątów, to mogą się zdarzyć trzy przypadki:

1. drugie ramię BC padnie na pole kąta $A'B'C'$, wtedy pierwszy kąt nazywamy mniejszym i piszemy:

$$\sphericalangle ABC < \sphericalangle A'B'C'$$

2. ramię BC padnie na ramię $B'C'$; wtedy pierwszy kąt jest równy drugiemu i piszemy:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$$

3. ramię BC padnie poza pole kąta $A'B'C'$, wtedy pierwszy kąt jest większy i piszemy:

$$\sphericalangle ABC > \sphericalangle A'B'C'.$$

Do znaków $>$, $=$, $<$, można stosować te same prawa, których się używa w arytmetyce dla liczb równych i nierównych.

Z tych określeń wynika, że wielkość kąta nie zależy zupełnie od długości ramion.

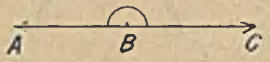


Fig. 13.

Prócz tych właściwych kątów, utworzonych przez dwie różne linie proste, nazywamy także *kątami* utwory geometryczne złożone z dwóch promieni tej samej linii prostej, biegnących w kierunkach przeciwnych. Takie kąty nazywamy kątami *półpełnymi:* $\sphericalangle ABC$ na fig. 13. *Wszystkie kąty półpełne są sobie równe,* ponieważ dwie linie proste zawsze można sprowadzić do nakrycia tak, aby jeden żądany punkt (wierzchołek kąta półpełnego) jednej prostej nakrył się z żądanym punktem drugiej prostej.

Na kątach można wykonywać zupełnie podobne działania, jak na odcinkach. Można więc kąty dodawać, przenosząc jeden tak, aby jego ramię i wierzchołek nakryły się z wierzchołkiem i ramieniem drugiego kąta, drugie zaś ramię prowadząc po przeciwnej stronie tego wspólnego ramienia.

N. p. $\sphericalangle D'A'B' = \alpha + \beta$.

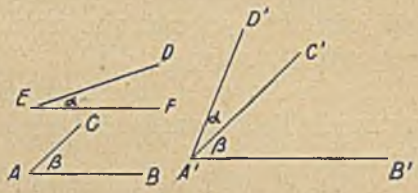


Fig. 14.

Jeżeli utworzymy sumę dwóch kątów półpełnych, to drugie ramię drugiego kąta nakryje się z pierwszem ramieniem pierwszego kąta. Otrzymamy w ten sposób utwór geometryczny, zwany *kątem pełnym*, n. p. $\sphericalangle ABC$ na fig. 15. Polem jego jest cała płaszczyzna, a ramiona nakrywają się.

Fig. 15.

Przy dodaniu kilku kątów może się zdarzyć, że otrzymamy więcej, aniżeli kąt pełny. Wtedy mówimy, że pole tego kąta pokrywa płaszczyznę drugi raz, trzeci raz i t. d.

Odejmowanie tem się tylko różni od dodawania, że drugie ramię prowadzi się po tej samej stronie wspólnego ramienia.

Jeżeli jakiś kąt kilka razy dodamy do siebie, n. p. 5 razy, to mówimy, żeśmy kąt pomnożyli przez liczbę 5. N. p. na fig. 16.

$$\sphericalangle ABC = 5\alpha.$$

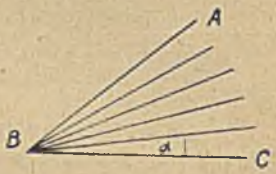


Fig. 16.

Podzielić kąt przez liczbę znaczy znaleźć taki kąt, któryby pomnożony przez tę liczbę dawał kąt pierwotny. Sposób dzielenia kąta na 2, 4, 8... równych części poznamy później.

Podział dowolnego kąta na trzy równe części jest już zagadnieniem trudniejszem, nie da sie bowiem wykonać przy pomocy jedynie cyrkla i linii, zapomocą skończonej liczby konstrukcyi. Wykazał to Gauss. — Obmyślano jednakowóż inne środki pomocnicze, inne linie krzywe oprócz koła, które pozwalają to zagadnienie z zupełną ścisłością rozwiązać n. p. Hippiasz z Elis znany sofista (V. wiek przed Chr.) obmyślił w tym celu linię krzywą, zwaną: Quadratrix, Nikomedes (II. wiek po n. Chr.) linię, zwaną muszlą Nikomedesa, później używano hyperboli i innych.

Fig. 17.

Działaniem pokrewnem z dzieleniem kąta jest mierzenie kąta, t. j. badanie, ile razy jeden kąt mieści się w drugim. Działanie to wykonujemy przez kolejne odejmowanie jednego kąta od drugiego. N. p. jeżeli kąt γ odejmiemy od kąta α, od pozostałej reszty znowu odejmiemy kąt γ i jeżeli po 6 odejmowaniach wyczerpiemy cały kąt α, to mówimy, że *stosunek kąta* α *do kąta* γ wynosi 6, a piszemy to używając znaku dzielenia

$$\alpha : \gamma = 6.$$

BIBLIOTEKA

α nazywa się poprzednikiem stosunku, γ następnikiem, a β wykładnikiem. Jeżelibyśmy kąt γ obrali za jednostkę miernicza, to wykładnik β, wynik mierzenia, *nazwalibyśmy liczbą wymiarową kąta.*

Możemy tu zauważyć to samo, co przy odcinkach. Jeżeli obierzemy jakąś jednostkę i jej całkowite części (jako jednostki podrzędne, mniejsze) to mogą zajść dwa przypadki:

1. albo kąt da się wymierzyć tą jednostką i jej częściami, wtedy otrzymujemy jako liczbę wymiarową liczbę wymierną (t. j. całkowitą, ułamkową lub mieszaną);

2. albo kąt nie da się wymierzyć przy pomocy tej jednostki i jej części całkowitych, wtedy jako liczbę wymiarową otrzymujemy liczbę niewymierną.

W geometryi praktycznej każdy kąt da się wymierzyć przy pomocy każdej jednostki z taką dokładnością, na jaką przyrządy miernicze pozwalają.

Co sie tyczy wyboru ogólnie uznanej jednostki, to mamy tu naturalnie znowu zupełną dowolność, tak samo jak przy odcinkach. Jednakowoż od najdawniejszych czasów ogólnie przyjęto jako jednostkę do mierzenia kątów t. zw. kąt prosty; znaczymy go literą R.

Kątem prostym nazywamy połowę kąta półpełnego n. p. $\sphericalangle ABC = R$. Ponieważ wszystkie kąty półpełne są sobie równe, przeto ich połowy są sobie równe, więc *wszystkie kąty proste są* także *równe.*

Euklides przyjmuje to twierdzenie za pewnik, Hilbert zaś podaje ścisły dowód tego twierdzenia, oparty na przystawaniu trójkątów. Rzecz ta wymaga dowodu, ponieważ nie wiemy z góry, czy kąt półpełny da się przepołowić, ani nie posiadamy jeszcze żadnej konstrukcyi, któraby to pozwalała wykonać.

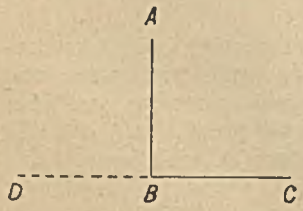


Fig. 18.

Tę jednostkę podzielono na 90 równych części, zwanych stopniami: $1^0 = \frac{R}{90}$; stopień podzielono na 60 równych części, zwanych minutami (partes minutae primae): $1' = \frac{1}{60}{}^0$; wreszcie minutę podzielono na 60 równych części, zwanych sekundami: $1'' = \frac{1}{60}{}'$ (partes minutae secundae). Sekundy są już tak drobnemi jednostkami, że tylko przy pomocy najlepszych lunet astronomicznych dadzą się odczytać. Używa się ich też wyłącznie przy pomiarach astronomicznych. Kąt prosty ma więc 90^0, kąt półpełny 180^0 a kąt pełny 360^0.

Ten podział według *systemu sześćdziesiątkowego* (mieszanego z 90-kowym) uskuteczniono już około 2000 przed n. Chr. w Babylonie, a od II. wieku przed Chr. zaczęto go używać także w Grecyi. System ten jest jednak dla nas niewygodny, ponieważ przywykliśmy używać przy innych miarach *systemu dziesiątkowego* (metr, kilogram). Dlatego też w najnowszych czasach wprowadzono we Francyi podział kąta prostego na 100 równych części, stopni nowego rodzaju.

Taki nowy stopień podzielono na 100 minut, a minutę na 100 sekund. Jednostki takie wprowadzono już nawet do przyrządów mierniczych.

Kąty mniejsze od prostego nazywamy ostrymi, kąty większe od prostego, ale mniejsze od półpełnego rozwartymi. Kąty większe od półpełnego nazywamy kątami wypukłymi, w przeciwieństwie do ostrych, prostych i rozwartych, które obejmujemy wspólnem mianem: kąty wklęsłe.

§ 11. Kąty przyległe i wierzchołkowe.

a) Dwa kąty, mające wspólny wierzchołek, wspólne ramię, a których druga para ramion tworzy jedną linię prostą (jedno ramię jest przedłużeniem drugiego) *nazywamy kątami przyległymi.*

N. p. kąty $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle CBD$ na fig. 19.

Kąt półpełny $\sphericalangle ABD$ jest sumą tych kątów przyległych, więc

$$\alpha + \beta = 180^0.$$

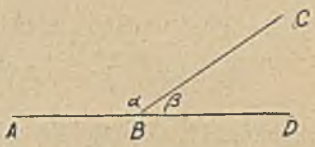


Fig. 19.

O kątach, których suma wynosi 180^0 mówimy, *że się spełniają do 2 R = 180°*. A więc: *Dwa kąty przyległe spełniają się do 180°.*

Odwrotnie: gdybyśmy o dwóch kątach wykazali, że mają wspólny wierzchołek, wspólne ramię i wynoszą razem 180^0, to druga para ramion musi tworzyć jedną linię prostą.

Jeżeli jeden z kątów przyległych jest prosty: $\gamma = 90^0$, to i drugi $\delta = 90^0$. *Proste tworzące ze sobą kąt prosty, nazywamy liniami prostopadłemi* i znaczymy to w następujący sposób:

$$DB \perp AC \text{ lub } AC \perp DB$$

Każdą inną prostą, wychodzącą z punktu B, n. p. BE, nazywamy pochyłą względem AC i BD. *Przez punkt B, leżący na linii AC można tylko jedną linię prostopadłą* do AC *wykreślić*, ponieważ w przeciwnym razie powstałyby przy wierzchołku B dwa kąty proste nierówne, co jest niemożliwe.

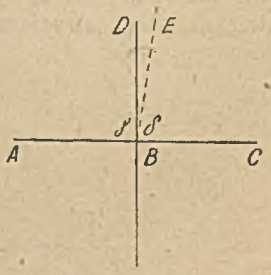


Fig. 20.

Z każdego punktu płaszczyzny można się więc po niej posuwać w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach. Tę własność płaszczyzny nazywamy dwuwymiarowością.

Także wszystkie powierzchnie krzywe są dwuwymiarowymi utworami. Wykażemy poźniej, w nauce stereometryi, że w każdym punkcie przestrzeni można wykreślić trzy linie prostopadłe do siebie, że więc przestrzeń jest trójwymiarowa.

b) Dwa kąty o wspólnym wierzchołku takie, że ramiona jednego kąta *są przedłużeniami* — poza wierzchołek — *ramion drugiego kąta, nazywamy*

kątami wierzchołkowymi. Kąty takie powstają więc przez przecięcie się dwóch linii prostych. Na fig. 21 kąty α i β są względem siebie wierzchołkowe; tak samo γ i δ. Ponieważ obydwu kątom α i β brakuje tyle samo do 180^0, mianowicie kąt δ, przeto te kąty są równe.

Fig. 21.

$$\alpha = \beta.$$

Z tej samej przyczyny: $\gamma = \delta$. Stąd wniosek: *Kąty wierzchołkowe są sobie równe.*

§ 12. Pęki promieni.

Przy omawianiu odcinków zajmowaliśmy się zbiorem punktów leżących na jednej linii prostej. Obecnie poznamy utwór geometryczny „wzajemny", to znaczy zajmiemy się zbiorem linii prostych, przechodzących przez jeden punkt.

W geometryi odgrywa ważną rolę t. zw. „prawo wzajemności". Okazuje się mianowicie, że twierdzenia, odnoszące się do punktów i linii prostych, pozostają prawdziwe, jeżeli pomieniamy słowa „punkt" i „linia prosta". N. p.: Przez dwa punkty jest wyznaczona jedna prosta. Twierdzenie wzajemne: Przez dwie proste jest wyznaczony jeden punkt z tem jednak zastrzeżeniem, że proste nie mają być równoległe. Aby to zastrzeżenie usunąć, wprowadzono do geometryi t. zw. punkty niewłaściwe, punkty leżące nieskończenie daleko, odrzucając natomiast pewnik Archimedesa. Przy takiem pojmowaniu geometryi dwie proste równoległe wyznaczają także jeden punkt, mianowicie przecinają się w punkcie nieskończenie dalekim, jaki się na każdej z tych prostych znajduje. Wtedy prawo wzajemności jest prawdziwe już bez żadnych zastrzeżeń. Geometryę nieeuklidesową opartą na takich założeniach nazywamy „geometryą rzutową" (por. str. 7).

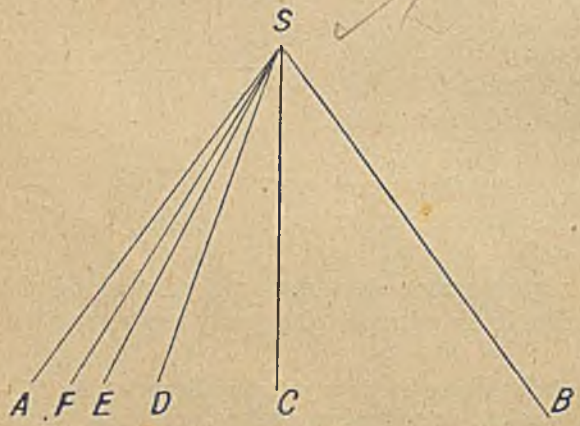


Fig. 22.

Z pomiędzy nieskończonego zbioru linii prostych, przechodzących przez dowolny punkt S płaszczyzny, możemy wybrać skończoną lub nieskończoną liczbę prostych (promieni). Promienie te mogą być oddzielone od siebie lub nie. N. p. dowolny kąt $\sphericalangle ASB$ przepołówmy; otrzymamy promień SC, $\sphericalangle ASC$ przepołówmy znowu, to otrzymamy nowy promień SD; postępując dalej według tego samego prawa, otrzymujemy dowolnie wiele promieni oddzielnych (w geometryi idealnej) SE, SF, SG.

Taki skończony lub nieskończony zbiór promieni nazywamy pękiem promieni, a punkt S nazywamy wierzchołkiem pęku. Pęki takie odgrywają ważną rolę w optyce, w rysunku perspektywicznym, wogóle wszędzie tam, gdzie mamy do czynienia z promieniami światła, wychodzącymi z jednego punktu. Zwykle, jeśli mówimy o pęku promieni bez żadnego objaśnienia, mamy na myśli wszystkie proste przechodzące przez O. Pęk promieni można wprowadzić w ścisły związek z szeregiem punktów. Obierzmy na dowolnej prostej XY szereg punktów A, B, C, D... Dowolny punkt S leżący poza tą prostą połączmy promieniami SA, SB, SC... z punktami tego szeregu. Mówimy, że pęk promieni S (A, B, C, D...) rzuca szereg punktów: A, B, C, D ...

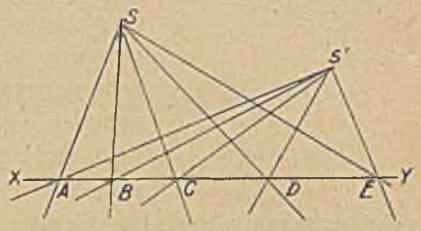


Fig. 23.

Promienie SA, SB i punkty A, B nazywamy odpowiadającymi sobie. Wykreślmy drugi pęk S' (A, B, C, D...) rzucający ten sam szereg punktów. *Dwa pęki rzucające ten sam szereg punktów nazywamy pękami perspektywicznymi.* (N. p. promienie widzenia tego samego przedmiotu z różnych punktów.) Jeżeli jeden pęk promieni przetniemy dwoma liniami prostemi, otrzymamy na każdej z nich szereg punktów. Szeregi punktów, rzucone przez ten sam pęk promieni nazywamy także *perspektywicznymi szeregami punktów.* (W geometryi praktycznej odpowiada temu n. p. oświetlanie rozmaitych przedmiotów z tego samego punktu świecącego.)

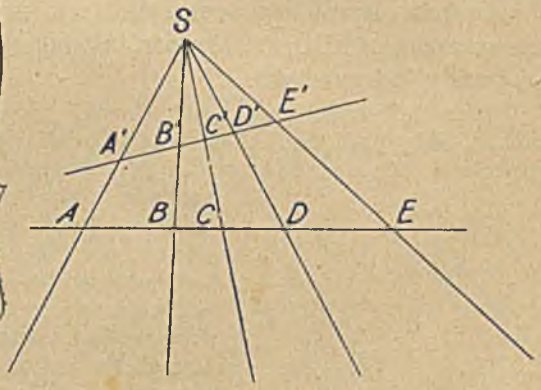


Fig. 24.

Wreszcie szereg punktów i pęk promieni, rzucający go, nazywamy także utworami perspektywicznymi względem siebie. Promienie rzucające ten sam punkt (punkty rzucone przez ten sam promień) nazywamy odpowiadającymi sobie promieniami (punktami).

§ 13. Koło.

Weźmy pod uwagę pęk promieni złożony *z wszystkich* prostych przechodzących przez jeden punkt O. Pęk taki wypełnia całą płaszczyznę. Na każdym promieniu odetnijmy od punktu O równy — zresztą dowolny —

odcinek. Końce tych odcinków utworzą jedną nieprzerwaną linię krzywą zamkniętą, zwaną kołem. *Koło jest* więc *linią, której każdy punkt jest równo oddalony od stałego punktu O.*

Fig. 25.

Wyrażamy się często także tak: koło jest *miejscem geometrycznem* punktów równo oddalonych od stałego punktu, to znaczy: 1. że punkty równo oddalone od *O*, nie mogą leżeć na innem miejscu płaszczyzny, jak tylko na kole i 2. że koło żadnych innych punktów nie zawiera. Do wykreślenia koła używa się tego samego przyrządu, który służy do przenoszenia równych odcinków, a więc cyrkla.

Stały punkt *O*, wierzchołek pęku promieni, nazywa się środkiem koła, a równe odcinki promieni pęku nazywamy promieniami koła. Punkty, których odległość od środka jest mniejsza od promienia, leżą wewnątrz koła, punkty, których odległość od środka jest większą od promienia, leżą zewnątrz koła. Zbiór wszystkich punktów leżących wewnątrz koła nazywamy powierzchnią lub polem koła, a samą linię kołową nazywamy także obwodem koła.

Odcinek, utworzony przez dwa promienie leżące na tej samej linii prostej nazywamy średnicą koła. Można także powiedzieć: *średnica jestto odcinek łączący dwa punkty obwodu, a przechodzący przez środek koła.* Każdą część obwodu koła, ograniczoną dwoma punktami, nazywamy *łukiem* koła i używamy czasem znaku $\widehat{AK}$, $\widehat{HG}$, aby odróżnić łuk od prostej *AK*, lub *HG*, łączącej punkty końcowe łuku.

Jeżeli obierzemy trzy dowolne punkty na obwodzie koła *ABC*, to zarówno punkt *B* leży pomiędzy punktami *A* i *C*, jak i punkt *C* leży pomiędzy *B* i *A*, wreszcie *A* leży pomiędzy *C* i *B*. Własność ta stanowi zasadniczą różnicę pomiędzy linią prostą a kołem. Na linii prostej bowiem z trzech punktów *A*, *B*, *C*, zawsze tylko jeden, n. p. *B* leży pomiędzy *A* i *C*. (U Hilberta stanowi to osobny pewnik.) Wskutek tego posuwając się po kole wrócimy zawsze *do punktu, z ktoregośmy wyszli* — na linii prostej zaś jestto niemożliwe. Jestto charakterystyczna własność wszystkich *linii zamkniętych.*

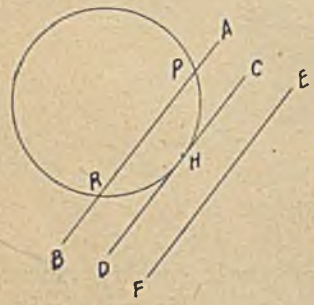


Fig. 26.

Położenie linii prostej względem koła może być trojakie: *a*) linia prosta może mieć z kołem *dwa punkty wspólne* i wtedy nazywa się *sieczną* a odcinek zawarty między tymi punktami cięciwą, n. p. *RP*; *b*) linia prosta mająca z kołem tylko *jeden punkt wspólny* nazywa się styczną, a ten punkt punktem styczności, n. p. *CD* i *c*) linia prosta nie ma z kołem żadnego punktu wspólnego, n. p. *EF*.

Uwaga: Poźniej wykażemy ściśle, że linia prosta nie może mieć z kołem więcej punktów wspólnych.

Położenie dwóch kół względem siebie: Dwa koła, mające wspólny środek (a różne promienie) nazywają się *współśrodkowe*, w przeciwnym razie: *mimośrodkowe*. Aby zbadać wszystkie możliwe położenia dwóch kół względem siebie, wyjdźmy od kół współśrodkowych: k i K o promieniach: r i R i poruszajmy mniejsze koło tak, aby jego środek posuwał się po jakiejś linii prostej OX. *a*) Najpierw koło k leży wewnątrz koła K, nie dotykając go zupełnie. *b*) Gdy k zbliży się do K tak, że odległość jego środka O_2 od O wynosi $R - r$, wtedy koła mają jeden punkt C wspólny, *dotykają się wewnętrznie*. *c*) Jeżeli przekroczymy punkt O_2 n. p. do punktu O_3, koła *przecinają się w dwóch punktach* A i B. Odległość $O\,O_3$ jest już $> R - r$

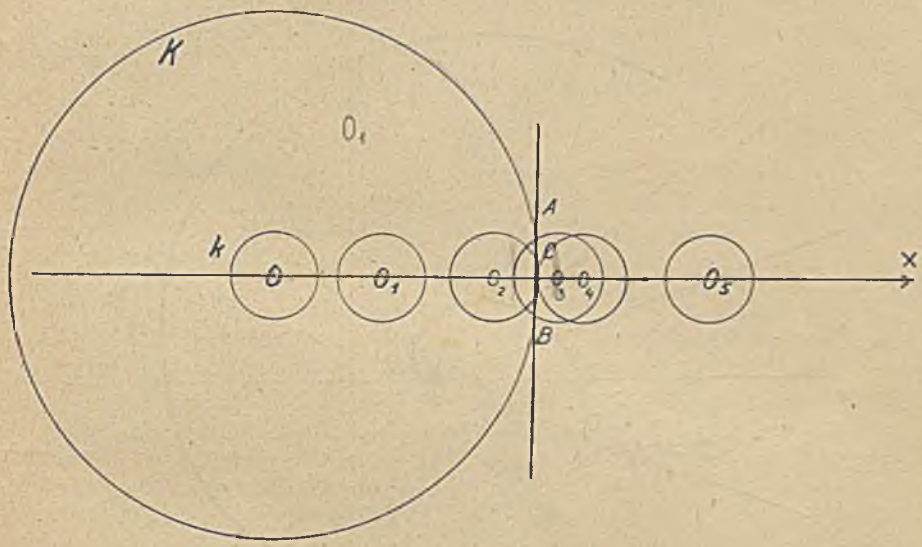


Fig. 27.

ale jeszcze $< R + r$. Części kół nie nakrywające się przytem nazywamy księżycami. *d*) Przy dalszem posuwaniu się, gdy $O\,O_4 = R + r$, koła mają znowu tylko jeden punkt wspólny, *dotykają się zewnętrznie*, wreszcie: *e*) Jeżeli $O\,O_5$ jest już większe od $R + r$ koła nie mają żadnego punktu wspólnego i jedno leży całkowicie *zewnątrz drugiego*. Widzimy więc, że jest *pięć możliwych położeń* dwóch kół względem siebie, *zależnie od długości* linii, łączącej środki, zwanej *linią środkową kół*.

Obroty: Jeżeli bierzemy pod uwagę kolejno wszystkie promienie, przechodzące przez jeden punkt S, mówimy, że promień pierwotny wykonuje ruch obrotowy około punktu S, zwanego środkiem obrotu. Każdy punkt promienia zakreśla przy obrocie koło o wspólnym środku S. Opisujemy to tak: *torem punktu przy ruchu obrotowym jest koło.* Jeżeli wszystkie promienie

z jednego punktu S wychodzące *równocześnie* wykonują ruch obrotowy, to nazywamy to *ruchem obrotowym całej płaszczyzny*. Jeżeli każdy promień naszego pęku promieni zastąpimy promieniem odchylonym o kąt α, to mówimy, żeśmy wykonali *obrót o kąt* α. Ten kąt jest miarą wielkości obrotu. Obrót o kąt pełny nazywamy pełnym obrotem lub całkowitym obrotem. Co znaczą słowa półobrót? ćwierć obrotu? Jeżeli pewien kierunek obrotu, n. p. obrót zgodny z ruchem wskazówki zegara, nazwiemy dodatnim, to obrót przeciwny nazywa się obrotem ujemnym. W związku z tem każdy kąt α może być dodatnim lub ujemnym, zależnie od tego, który obrót uważamy za dodatni i które ramię uważamy za ruchome.

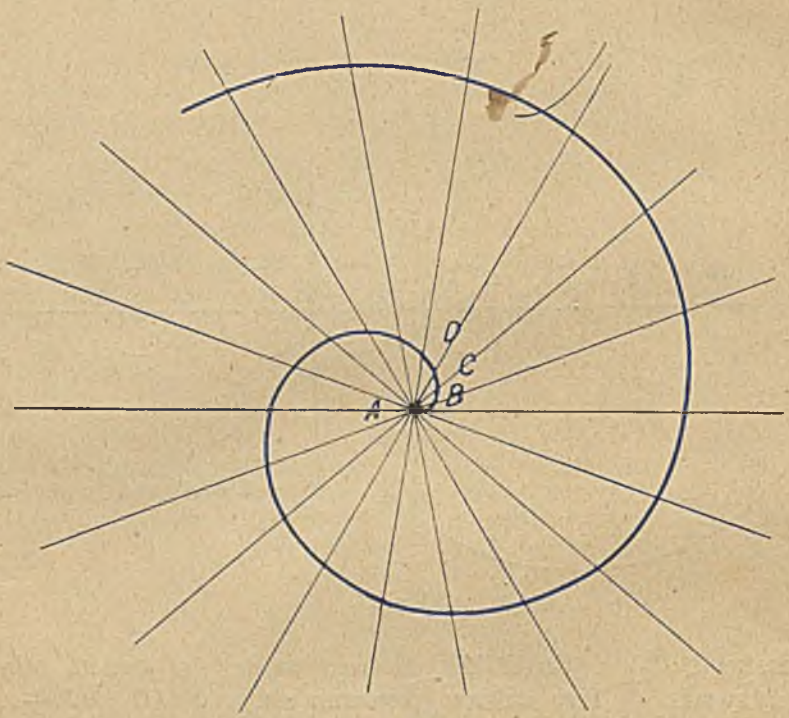


Fig. 28.

Jeżeli połączymy ruch obrotowy punktu z ruchem postępowym, to znaczy jeżeli promień obraca się, a jakiś punkt na nim równocześnie się posuwa, to jako tor otrzymujemy linię krzywą otwartą, zwaną spiralną. Z pomiędzy linii spiralnych najprostszą jest taka, w której równym obrotom odpowiadają równe przesunięcia, t. zn. gdy promień obróci się n. p. o 10^0 punkt posunie się o 1 *mm*, przy obrocie o 20^0 punkt posunie się o 2 *mm* i t. d. Taka spiralna nazywa się spiralną Archimedesa. Aby ją wykreślić, rysujemy pęk promieni, tworzących same równe kąty i obieramy na jednem ramieniu jednego kąta jakiś punkt, n. p. wierzchołek, a na drugiem odcinamy od wierzchołka jakiś odcinek $A\,B$. Na następnym promieniu odcinamy dwa razy większy odcinek $A\,C$, na dalszym

trzy razy większy AD i t. d. Jeżeli promienie weźmiemy odpowiednio gęsto i otrzymane punkty połączymy jedną, nieprzerwaną linią, otrzymamy spiralną Archimedesa. Inne spiralne otrzymuje się, jeżeli ruch postępowy nie jest jednostajny.

Można jednak inaczej połączyć ruch obrotowy z ruchem postępowym, n. p. punkt wykonuje ruch obrotowy około S, a równocześnie S przesuwa się po linii prostej SX. Tory takiego ruchu nazywamy cykloidami; ich wykreślenie jest już nieco trudniejsze.

Ćwiczenia II.

§ 10—11. 1. Wykreślić trzy proste przecinające się i wypisać kąty powstałe. Które z nich są wierzchołkowe?

2. Wykreśliwszy z jednego punktu prostej dwa promienie nachylone, leżące po tej samej stronie linii prostej, wykazać, że suma trzech powstałych kątów wynosi 180^0.

3. Dwa dowolnie obrane kąty dodać na rysunku (przy pomocy kątomierza).

4. Dodać trzy kąty dowolnego trójkąta.

5. Wykazać rysunkiem, że $(\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) + \beta$.

6. Odjąć od dowolnie podanego kąta drugi kąt.

7. Znając kąt, jaki tworzą wskazówki zegara o godzinie 1-szej, wykreślić kąt utworzony o godzinie 5-tej, 8-mej, 11-tej.

8. Mając podane dwa kąty, z których jeden jest bardzo mały, zmierzyć większy przy pomocy mniejszego (w przybliżeniu).

9. Jaki kąt zakreśla promień równoleżnika ziemskiego w ciągu 1 godziny, 1 minuty, 1 sekundy, przy dziennym obrocie ziemi koło osi?

10. Jaki kąt zakreśla wielka wskazówka zegara w ciągu 1 minuty, 1 sekundy, a jaki mała wskazówka?

11. Jaki kąt dziennie zakreśla prosta łącząca ziemię ze słońcem, przyjmując drogę ziemi jako linię kołową?

12. Znaleźć rachunkiem sumę kątów:
a) $28^0\ 36'\ 45'' + 36^0\ 42'\ 29''$,
b) $136^0\ 38' + 5^0\ 47'\ 8''$.
$84^0\ 59'\ 59'' + 5^0\ 1''$.

13. Znaleźć różnice:
a) $108^0\ 23'\ 14'' - 26^0\ 54'\ 17''$.
b) $90^0 - 42^0\ 30'$,
c) $180^0 - (29^0\ 36' + 58^0\ 42')$.

14. Znaleźć kąt trzy razy większy od kąta $19^0\ 24'\ 32''$.

15. Znaleźć kąt pięć razy mniejszy od kąta $106^0\ 34'\ 15''$.

16. Znaleźć stosunek kątów $48^0\ 36' : 5^0\ 24'$.

17. Obliczyć kąt spełniający się z kątem $24^0\ 35'\ 20''$.

18. Ile wynosi kąt przyległy do kąta $\alpha = 34^0\ 27'$?

19. Wykazać, że jeżeli jeden z kątów przyległych wzrasta, to drugi maleje.

20. Wykazać, że linie połowiące dwa kąty przyległe, są do siebe prostopałe.

21. Dwie linie proste przecinają się pod kątem $\beta = 45^0\ 31'$; obliczyć trzy pozostałe kąty utworzone przez te linie proste.

22. Wykazać, że linie, połowiące dwie pary kątów wierzchołkowych, utworzonych przez te same linie proste, są do siebie prostopadłe.

§ 12. 23. Wykreślić z dowolnego punktu pęk promieni, rzucający podziałkę centymetrową. Co się stanie z kątami pęku, jeżeli się wierzchołek pęku oddala od prostej, na której leży podziałka?

24. Narysować dowolne dwa pęki perspektywiczne.

25. Z dwóch pęków perspektywicznych S i S' przenieść jeden (bez zmiany kątów) do innego punktu S''. Oznaczyć punkty przecięcia odpowiednich promieni po przesunięciu.

26. Obrawszy dowolny punkt S poza prostą p, rzucaj coraz to dalsze punkty prostej. Do jakiego położenia dąży promień rzucający?

27. Jaki punkt rzuca promień równoległy do prostej, na której leży szereg punktów?

28. Jaki utwór geometryczny jest wzajemny do odcinka?

29. Narysować dwa perspektywiczne szeregi punktów.

30. Z dwóch perspektywicznych szeregów punktów przenieść jeden na inną linię prostą. Połączyć odpowiednie punkty liniami prostemi.

§ 13. 31. Wykreśl pięć możliwych położeń dwóch kół, każde położenie na osobnym rysunku.

32. Wykaż możliwość pięciu położeń dwóch kół, poruszając tylko większe koło.

33. Wykreśl księżyce, powstałe z dwóch równych kół.

34. Z dwóch podanych punktów mamy zakreślić koła. Jaki warunek muszą spełniać promienie, aby sie koła przecięły? stykały?

35. Koło obraca się koło osi nie przechodzącej przez jego środek (jest przytwierdzone „mimośrodkowo“). Narysować kilka położeń tego koła. Jaki tor opisuje przytem środek koła?

36. Narysuj koło stykające się wewnętrznie z kołami otrzymanemi w zadaniu poprzedniem.

37. Koło otoczyć sześcioma równemi mu kołami, stykającemi się zewnętrznie.

Pęk promieni przeciąć linią prostą p i od punktów przecięcia na każdym promieniu odciąć w obydwie strony ten sam odcinek d. Otrzymane punkty utworzą dwie gałęzie linii krzywej, zwanej muszlą Nikomedesa (p. str. 17).

Z dowolnego punktu na obwodzie koła poprowadzić pęk promieni, i na każdym z nich odciąć dwa równe odcinki od punktu przecięcia się z kołem do wnętrza koła i na zewnątrz. Linia, łącząca te wszystkie punkty nazywa się ślimakiem Pascala (matematyk i filozof francuski z XVII. wieku).

40. Wykazać, że ruch postępowy punktu i ruch obrotowy prostej są ruchami wzajemnymi.

41. Wykreślić spiralną Archimedesa, w której wzrostowi kąta o 10^0 odpowiada przesunięcie punktu o $^1/_2$ *mm*. Ile skrętów otrzymamy, posuwając się na odległość 1 *dm* od wierzchołka pęku? O ile stopni obrócił się równocześnie promień?

Rozdział III.

Trzy linie proste. Trójkąty.

§ 14. Położenie trzech linii prostych.

Dotychczas rozpatrywaliśmy dokładniej jedną linię prostą i dwie linie proste na płaszczyźnie. Przechodząc obecnie do trzech linii prostych, leżących na tej samej płaszczyźnie, zbadamy przedewszystkiem ich wszystkie możliwe położenia. Okażemy, że są cztery możliwe przypadki:

1. trzy proste *nie mają żadnego punktu przecięcia;* 2. mają *jeden punkt przecięcia;* 3. *dwa punkty przecięcia* i 4. *trzy punkty przecięcia.*

Więcej punktów przecięcia nie mogą trzy linie proste posiadać; wiemy bowiem, że dwie linie proste — nie nakrywające się — mają tylko jeden wspólny punkt n. p. A a więc trzecia linia może jeszcze przeciąć pierwszą z nich w jednym punkcie n. p. B. a drugą także tylko w jednym punkcie n. p. C, mamy więc najwyżej trzy punkty przecięcia. Zbadajmy po kolei cztery możliwe przypadki.

§ 15. Trzy linie proste równoległe.

Aby zbadać, czy są możliwe trzy proste (nieograniczone) nie mające żadnego punktu wspólnego, weźmy dowolną linię prostą a i poprowadźmy dwie linie b i c równoległe do niej: $b \parallel a$ i $c \parallel a$.

Linie te nie mają więc żadnego punktu wspólnego *z linią* a; zachodzi pytanie, czy one mogą się przeciąć *ze sobą* w jakimś punkcie n. p. P. Otóż gdybyśmy zrobili takie przypuszczenie, popadlibyśmy w sprzeczność z pewnikiem VII, o liniach równoległych, który mówi, że przez punkt P leżący poza prostą a może przechodzić tylko jedna linia równoległa do a. Tymczasem w naszym przykładzie przez punkt P przechodziłyby dwie linie równoległe do a. Otóż nasze przypuszczenie było błędne. Linie b i c nie mogą się ze sobą przeciąć, są więc także do siebie równoległe. Linie a, b, c nie mają więc żadnego punktu wspólnego. Wniosek, do któregośmy doszli, wypowiada się zwykle tak:

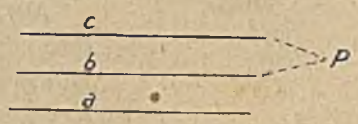


Fig. 29.

Dwie proste równoległe do tej samej trzeciej, są także między sobą równoległe. Literami: $b \parallel a$ i $c \parallel a$ pociąga za sobą $b \parallel c$. Widzimy stąd, że znak równoległości ma podobną własność, jak znak równości (z $b = a$ i $c = a$ wynika $b = c$). Wystarczy więc sprawdzić, że dwie proste są równoległe do tej samej trzeciej, aby się przekonać tem samem, że te proste są i do siebie równoległe. Sposób rozumowania, któregośmy tu użyli, nazywa się dowodem niewprost. Polega on na następującej myśli przewodniej:

Chcąc wykazać prawdziwość jakiegoś twierdzenia, robimy na razie przypuszczenie wprost przeciwne; następnie wykazujemy, że to przypuszczenie nie jest do przyjęcia, prowadzi bowiem do sprzeczności albo z przyjętymi już pewnikami, albo z udowodnionymi już prawami.

Trzeba tylko sobie jasno zdać sprawę z tego, co znaczy „twierdzenie wprost przeciwne". Otóż n. p. twierdzeniem wprost przeciwnem do: „jakaś rzecz jest biała" nie jest „ta rzecz jest czarna," ale: „ta rzecz nie jest biała". Twierdzenie wraz z twierdzeniem wprost przeciwnem muszą wyczerpywać wszystkie możliwości. Otóż barwy: biała i nie biała wyczerpują istotnie wszystkie możliwości, zaś barwy: biała i czarna nie wyczerpują wszystkiego, mogą być bowiem prócz nich barwy: zielona, żółta i t. d. Gdybyśmy więc wykazali, że rzecz jakaś nie może być czarna, to nie możemy z tego wnioskować: „a więc ta rzecz jest biała," może być bowiem również dobrze zielona, czerwona i t. d. W dowodzie naszego twierdzenia geometrycznego postępowaliśmy dobrze, bo chcąc udowodnić, że proste b i c są równoległe, zrobiliśmy tymczasowo przypuszczenie: proste b i c przecinają się. Otóż dwie odrębne linie proste b i c nie mogą mieć innych wzajemnych położeń, wyczerpaliśmy wszystkie możliwości twierdzeniem i twierdzeniem przeciwnem.

Dowodu niewprost, zwanego także dowodem ad absurdum używa się bardzo często w matematyce, w fizyce, a i w życiu potocznem ma wielkie znaczenie (n. p. „alibi" sądowe), jeżeli się go używa poprawnie, t. zn. z uwzględnieniem wszystkich możliwości.

§ 16. O trójkątach.

Trzy proste, mające tylko jeden punkt wspólny, stanowią część pęku promieni, nie przedstawiają więc dla nas nowego utworu.

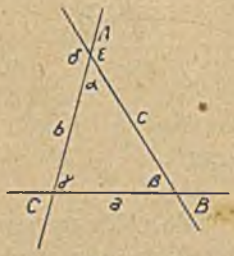


Fig. 30.

Aby zrozumieć twierdzenia o trzech prostych, mających dwa punkty przecięcia, musimy najpierw omówić przypadek czwarty: *trzy proste mające trzy punkty przecięcia.* Taki utwór geometryczny nazywamy trójkątem. Te trzy linie proste zamykają część płaszczyzny, zwaną polem trójkąta. Punkty przecięcia A, B, C nazywamy wierzchołkami trójkąta a odcinki ograniczające: AB, BC, CA nazywamy bokami trójkąta. Przy każdym wierzchołku znajdują się po cztery kąty, ale tylko jeden z nich leży wewnątrz trójkąta. Te kąty: α, β, γ nazywamy kątami wewnętrznymi, lub krótko kątami trójkąta (bez wyraźnego wymieniania nazwy). Kąty *przy-*

ległe do kątów wewnętrznych nazywamy *zewnętrznymi* n. p. kąty δ i ε; są one ograniczone bokiem z jednej, a przedłużeniem drugiego boku z drugiej strony. Kąty wierzchołkowe do kątów wewnętrznych nie mają osobnej nazwy. O wierzchołku A nie leżącym na boku BC i o kącie α mówimy, że *leżą naprzeciw* boku BC.

Dla wygodnego zapamiętania najczęściej oznacza się bok, leżący naprzeciw jakiegoś wierzchołka tą samą literą, co wierzchołek, tylko z małego alfabetu (porównaj fig. 30).

Według wielkości boków rozróżniamy trójkąty różnoboczne, jeżeli wszystkie boki są różne co do długości, równoramienne, jeżeli tylko dwa boki są równe i równoboczne, jeżeli wszystkie boki są równe. W trójkącie równoramiennym boki równe nazywamy często ramionami, a bok nierówny podstawą.

Linia prostopadła z wierzchołka trójkąta na przeciwległy bok lub na jego przedłużenie nazywa się wysokością trójkąta. Każdy trójkąt ma trzy wysokości. Zostawiając dokładniejsze badanie własności trójkąta do dalszych ustępów, udowodnimy jeszcze tylko następujące twierdzenie:

Kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od każdego z kątów wewnętrznych nie przyległych mu. Aby porównać $\sphericalangle\delta$ z $\sphericalangle\beta$, połowimy bok BC w punkcie D i prowadzimy prostą AD; przedłużamy ją o taki sam odcinek $DE = AD$ do punktu E leżącego już na polu $\sphericalangle\delta$, wreszcie łączymy E z C. Biorąc pod uwagę trójkąty DAB i DEC widzimy, że można do nich zastosować VI pewnik. Albowiem $AD = DE$, $BD = DC$ i kąty ε i ζ są sobie równe, jako kąty wierzchołkowe. Trójkąty te mają więc dwa boki równe i kąty między nimi zawarte równe, zatem i pozostałe kąty są parami równe, zatem $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\eta$. Ponieważ zaś $\sphericalangle\delta$ jest większy od $\sphericalangle\eta$ (dlaczego?) przeto także $\sphericalangle\delta > \sphericalangle\beta$. Gdybyśmy jeszcze chcieli porównać $\sphericalangle\delta$ z $\sphericalangle\alpha$, to trzebaby drugi raz to samo rozumowanie przeprowadzić, połowiąc znowu bok AC i porównując $\sphericalangle\alpha$ z $\sphericalangle\delta'$, wierzchołkowym do S (przeprowadź ten dowód!) Pokaże się, że także: $\sphericalangle\delta > \sphericalangle\alpha$.

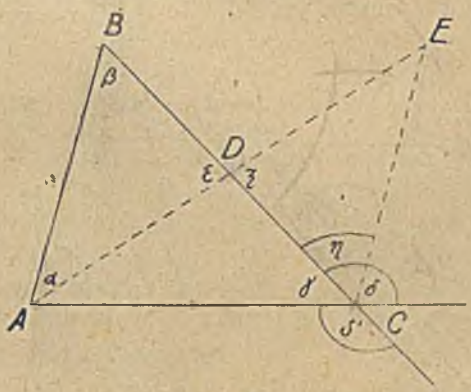


Fig. 31.

Dowodzenie, jakiegośmy tu używali, nazywamy dowodem wprost. Myślą przewodnią takiego dowodu jest: opierając się na pewnikach i na poznanych już twierdzeniach zbudować taki łańcuch logicznych rozumowań, aby jego ostatniem ogniwem było żądane twierdzenie. Innemi słowy: okazać, że nasze twierdzenie jest wynikiem pewników i twierdzeń poznanych poprzednio:

Często mamy kilka dróg, któremi możemy dojść do dowiedzenia twierdzenia; zależy to od tego, na których pewnikach i twierdzeniach się oprzemy. Zdarzają się jednak twierdzenia, do których trudno znaleźć drogę wprost. Próbujemy wtedy dowodu niewprost. Jeżeli i ta droga nie prowadzi do celu, nie możemy wciągać takiego twierdzenia w zbiór praw geometrycznych — czy też matematycznych, chociażby się wydawało bardzo prawdopodobnem.

Dlatego w nauce geometryi najczęściej nie postępujemy tak, aby z góry wpowiadać jakieś twierdzenie, a później udowadniać jego prawdziwość, tylko postępujemy krok za krokiem, budując z poznanych twierdzeń to, co się z nich daje od razu wydobyć, a z tej rozszerzonej podstawy wznosimy się znowu stopniowo do coraz to trudniejszych i zawilszych praw, nasuwających się nam w ciągu rozważań.

§ 17. Dwie proste równoległe przecięte trzecią.

Trzy proste leżące na płaszczyźnie mają tylko dwa punkty przecięcia, jeżeli dwie z nich są równoległe, a trzecia przecina jedną z nich. Ta trzecia prosta musi także i drugą przeciąć, w przeciwnym bowiem razie mielibyśmy dwie proste równoległe do tej samej trzeciej, a mimo to przecinające się, wbrew udowodnionemu na str. 27 twierdzeniu.

Linię prostą AB przecinającą dwie inne CD i EF nazywamy linią poprzeczną. Tworzy ona z niemi 8 kątów: 4 są zewnętrzne a 4 wewnętrzne t. j. leżą między liniami przeciętemi. *Kąty nie mające wspólnego wierzchołka* łączymy w pary i nadajemy im pewne nazwy. I tak: 1. Kąty takie, jak α i ε, δ i ϑ nazywamy kątami odpowiednimi. Są to kąty, *leżące po tej samej stronie linii poprzecznej, przyczem jeden jest zewnętrzny, drugi wewnętrzny.* 2. Kąty *leżące po tej samej stronie linii poprzecznej,* ale *obydwa zewnętrzne, lub obydwa wewnętrzne,* nazywamy kątami jednostronnymi.

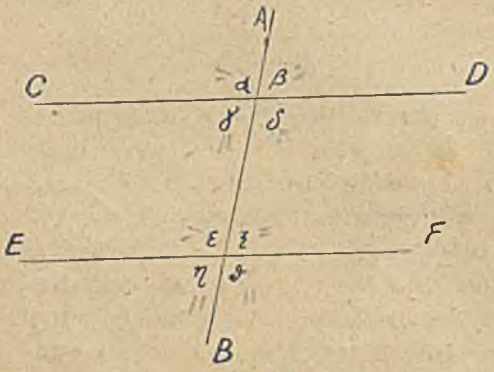


Fig. 32.

N. p. α i η, δ i ζ, γ i ε.

3. Kąty *leżące po przeciwnych stronach linii poprzecznej, obydwa zewnętrzne lub obydwa wewnętrzne,* nazywają się kątami naprzemianległymi. N. p. α i ϑ, δ i ε.

Nazwy te zachowujemy także, jeżeli linie CD, EF nie są równoległemi. O tych kątach udowodnimy:

Jeżeli linie przecięte są równoległe, to kąty odpowiednie są sobie parami równe, kąty naprzemianległe są sobie równe a kąty jednostronne spełniają się do 180°.

Prawa matematyczne wypowiadamy zwykle w postaci okresu warunkowego. Pierwsza część okresu, n. p. u nas: „jeżeli dwie linie równoległe są przecięte trzecią“ nazywa się założeniem, druga część twierdzeniem. Założenie zawiera warunek wystarczający do prawdziwości twierdzenia. Warunek ten musi być naturalnie możliwy, to znaczy nie sprzeciwiać się ani pewnikom, ani twierdzeniom udowodnionym poprzednio. Nie można więc n. p. używać założenia: „jeżeli się dwie linie równoległe przetną“ itp.

Jest to twierdzenie zasadnicze o liniach równoległych, niezbędne przy rozważaniu utworów geometrycznych, w których skład wchodzą linie równoległe. Twierdzenie to (nie całe) wypowiada się czasem także tak: Każda prosta poprzeczna przecina dwie proste równoległe pod tym samym kątem, przyczem mamy naturalnie na myśli kąty odpowiednie. Łatwo to udowodnić niewprost.

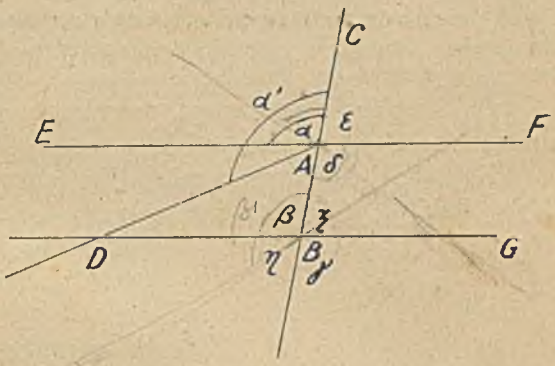


Fig. 33.

Chcemy n. p. wykazać, że $\alpha = \beta$. Spróbujmy do czegoby poprowadziło przypuszczenie, że te kąty nie są równe, a więc, że albo $\alpha < \beta$, albo $\alpha > \beta$. Rozważmy najpierw pierwsze przypuszczenie, t. j. $\alpha < \beta$. Wtedy moglibyśmy wykreślić w punkcie A, przy ramieniu AC jakiś inny kąt α' równy kątowi β, ale naturalnie większy od $\sphericalangle \alpha$. Ramię tego kąta α' musi więc leżeć poza polem kąta α, musi zatem przeciąć linię BG w jakimś punkcie D (nie może być równoległe do BG, bo już jedna linia, EF przez punkt A przechodząca, jest równoległa do BG). Powstałby więc trójkąt ABD, w którym α' jest kątem zewnętrznym a β wewnętrznym. Ponieważ jednak $\alpha' = \beta$, przeto popadamy w sprzeczność z twierdzeniem o kącie zewnętrznym trójkąta, które orzeka, że kąt zewnętrzny musi być większy od kąta wewnętrznego nie przyległego. Widzimy więc, że przypuszczenie $\alpha < \beta$ jest nie do przyjęcia. Zupełnie tak samo wykazalibyśmy, że $\alpha > \beta$ prowadzi do sprzeczności. (Udowodnij.) Pozostaje więc tylko jedna możliwość:

$$\underline{\alpha = \beta.}$$

Co do innych kątów, to już z równości $\alpha = \beta$ wynika ich równość (względnie spełnianie się).

N. p. kąty ε i ζ są równe, jako kąty przyległe do równych kątów. Kąty γ i δ są równe, jako wierzchołkowe do równych kątów. Także kąty naprzemianległe są równe, n. p. kąt $\gamma = \alpha$, ponieważ jest tak samo wielki, jak $\sphericalangle \beta$ (jako wierzchołkowy), i t. d.

Także — wreszcie — kąty jednostronne spełniają się do 180^0 n. p. $\alpha + \eta = 180^0$, ponieważ α równa się kątowi β, przyległemu do η i t. d.

Wykazaliśmy więc, że z założenia $EF \parallel DG$, wynika równość tych kątów. Można teraz wykazać *odwrotnie: z równości którejkolwiek pary kątów odpowiednich* (lub naprzemianległych, lub ze spełniania się dwóch kątów jednostronnych) *wynika równoległość linii przeciętych.* To co było w poprzedniem twierdzeniu wynikiem, to wzięliśmy teraz za założenie, a to co było założeniem, za wynik. Takie twierdzenie nazywa się twierdzeniem odwrotnem (a jakie jest twierdzenie przeciwne?).

Zastanówmy się najpierw, czy odwrócenie twierdzenia wymaga osobnego dowodu? Znamy przecież wiele przykładów, że odwrócenie jest prawdziwe tak samo, jak twierdzenie pierwotne. N. p. każde ciało posiada jakiś ciężar i odwrotnie: wszystko, co posiada jakiś ciężar, jest ciałem. Otóż istnieje o wiele więcej przykładów, w których *odwrocenie nie jest prawdą.* N. p. każdy ptak jest stworzeniem dwunożnem, ale nie każde stworzenie dwunożne jest ptakiem. Z tej przyczyny powinno się twierdzenie odwrotne zawsze osobno udowadniać.

Otóż wróćmy do naszego twierdzenia odwrotnego. Twierdzimy, że z założenia: $\alpha = \beta$ wynika: $a \parallel b$.

Najszybciej dojdziemy do celu, używając znowuż dowodzenia niewprost. Gdyby linia a nie była równoległa do b, to dałaby się przez punkt A poprowadzić jakaś inna linia $a' \parallel b$. Wtedy jednak musiałby kąt α' być równy kątowi β, a więc i kątowi α, który według założenia jest taksamo wielki jak β. Ale w takim razie linia a' musi się nakryć z linią a, jako drugie ramię kąta równego. Otóż żadna inna linia oprócz linii a nie może być równoległą do b.

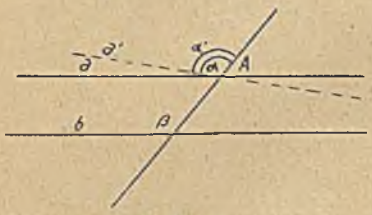


Fig. 34.

Zbierając twierdzenie i odwrócenie w jeden wniosek powiemy: *Cechą (właściwością) charakterystyczną prostych równoległych jest to, że dowolna poprzeczna tworzy z niemi równe kąty* odpowiednie (równe kąty naprzemianległe, lub spełniające się kąty jednostronne). Znaczy to, że oprócz linii równoległych, żadna inna para prostych niema tej własności, aby z poprzeczną tworzyły równe kąty odpowiednie (lub naprzemianległe i t. d.).

Z twierdzenia i twierdzenia odwrotnego wynika także prawdziwość t. zw. twierdzeń „przeciwległych". Mianowicie, jeżeli z A wynika B, i równocześnie z B wynika A, to jasnem jest, że, jeżeli nie zachodzi A, nie może zachodzić B, i jeżeli nie zachodzi B, to nie może zachodzić A. N. p. Każdy organizm jest zdolny do odżywiania się i odwrotnie: Co jest zdolne do odżywiania się, jest organizmem. Stąd już bez dowodu wynika, że, co nie jest organizmem, nie jest zdolne do odżywiania się i co nie jest zdolne do odżywiania się, to nie jest organizmem.

Jeżeli się więc wykaże prawdziwość twierdzenia i twierdzenia odwrotnego, nie trzeba już osobno wykazywać prawdziwości twierdzeń przeciwległych. W błąd ten popadano często.

Przy pomocy tej własności można odróżnić proste równoległe od innych i tak też zawsze postępujemy: *Aby się przekonać, czy dwie linie proste są równoległe*, musielibyśmy je przedłużać bez końca — tego jednak uczynić nie zdołamy. Natomiast zawsze można do nich przyłożyć trzecią linię poprzeczną i *zmierzyć, czy dwa kąty n. p. odpowiednie są równe.*

Widzimy stąd, jak ważnem jest udowodnienie nietylko twierdzenia, ale i odwrócenia — o ile jest prawdziwem. Zyskujemy przez to często łatwiejsze sposoby odróżniania pewnych utworów geometrycznych od innych. Takiej metody *odróżniania, zapomocą cech charakterystycznych* używa się w naukach przyrodniczych do odróżnienia n. p. owadów zbliżonych kształtem zewnętrznym, roślin, minerałów (nazywa się to *oznaczaniem gatunku*) pierwiastków chemicznych (*analiza*). Wiedząc n. p. że każdy kryształ soli jest sześcianem, i znalazłszy jakiś przeźroczysty sześcienny kryształ, żaden mineralog nie powie jeszcze, że ma przed sobą sól, dokąd nie zbada jakiejś własności charakterystycznej, t. j. takiej, którą ma każdy kawałek soli, ale żadne inne ciało n. p. charakterystyczny smak. Taką własność charakterystyczną nazywamy ściślej: *warunkiem koniecznym i wystarczającym.*

Na tej własności linii równoległych polega także pospolicie używany sposób wykreślania linii równoległych. Do lineału przykłada się jakiś kąt n. p. kąt prosty w dwóch różnych miejscach i wzdłuż jego ramienia nie przylegającego do lineału kreśli się każdym razem linię prostą. Taki kąt mamy urzeczywistniony (w przybliżeniu) na tak zwanych „trójkątach“ rysunkowych. Figura 35. objaśnia ten sposób. Jako przypadek szczegółowy mieszczą się w twierdzeniu o prostych równoległych także twierdzenia następujące: *Dwie linie proste, prostopadłe do tej samej trzeciej są do siebie równoległe* (dlaczego?) i odwrotnie: *Jeżeli z dwóch prostych równoległych jedna jest prostopadła do trzeciej*, poprzecznej, *to i druga musi być prostopadła.*

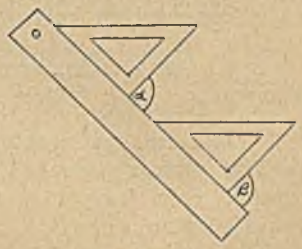


Fig. 35.

Na podstawie tego można wykazać, że z każdego *punktu poza prostą da się do niej poprowadzić jedna linia prostopadła.* Wiemy, że w punkcie A na prostej CD istnieje jedna linia prostopadła $AB \perp CD$. Aby z dowolnego punktu S poprowadzić linię prostopadłą do CD, kreślimy linię $Sx \parallel AB$ (że taka linia istnieje, o tem poucza pewnik VII) to ona jest $\perp CD$. Więcej linii $\perp$ niema (dlaczego?).

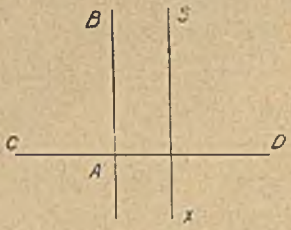


Fig. 36.

§ 18. O kątach w trójkącie.

Mówiąc o kątach zewnętrznych trójkąta, wykazaliśmy (str. 29), że kąt zewnętrzny jest większy od każdego z wewnętrznych, jemu nie przyległych.

Obecnie możemy wykazać dokładniej, czemu się *równa* kąt zewnętrzny. Wystarczy w tym celu poprowadzić przez punkt B linię $BD \parallel AC$ dzielącą kąt zewnętrzny δ na dwie części: ε i ζ.

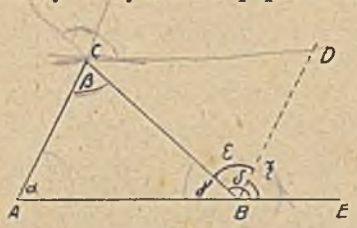


Fig. 37.

$\zeta = \alpha$ jako kąty odpowiednie, $\varepsilon = \beta$ jako kąty naprzemianległe, więc i ich sumy są równe $\zeta + \varepsilon = \alpha + \beta$.

Ale $\zeta + \varepsilon = \delta$,

więc $\delta = \alpha + \beta$.

Słowami: *Kąt zewnętrzny trójkąta równa się sumie dwóch kątów wewnętrznych, nie przyległych do niego.* Stąd łatwo obliczyć sumę wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta. Mianowicie $\delta + \gamma = 180^0$ jako kąty przyległe, ale zamiast δ można wziąć równą mu sumę $\alpha + \beta$ i otrzymamy

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Słowami: *W każdym trójkącie suma kątów wewnętrznych równa się* 180^0. Więc wielkość jednego kąta zależy od wielkości dwóch innych, czyli jest funkcyą dwóch pozostałych kątów.

(To samo można wykazać bez użycia kątów zewnętrznych, jeżeli poprowadzimy n. p. przez C linię równoległą do AB.)

W geometryi praktycznej możnaby także tak postąpić: Odciąć kawałki trójkąta wraz z wierzchołkami i poukładać te kąty obok siebie przy jednej linii prostej, przy jednym wierzchołku. Do ścisłego jednak dowodu musimy użyć linii równoległej. Twierdzenie to jest tak ściśle związane z pewnikiem VII, o liniach równoległych, że można go nawet użyć zamiast tego pewnika, a wtedy pewnik VII wyniknąłby z niego jako wniosek (udowodnij to przenosząc wszystkie kąty do jednego wierzchołka!). W geometryach nieeuklidesowych, o których mówiliśmy na str. 15, suma kątów w trójkącie jest bądźto większa (Riemann), bądźto mniejsza od 180^0 (Łobaczewskij). Sprawdzić tego żadnem mierzeniem nie można, bo już sekundy nie dadzą się ściśle zmierzyć, a cóż dopiero mówić o częściach sekundy.

Wskutek twierdzenia o sumie kątów wewnętrznych, w trójkącie może być najwyżej jeden kąt prosty a dwa inne muszą być wtedy ostre, a także najwyżej jeden kąt rozwarty, dwa zaś inne są wtedy ostre. Wypukły kąt t. j. większy od 180^0 nie może się znajdować w trójkącie. Na tem polega podział trójkątów, według wielkości kątów. I tak rozróżniamy trójkąty ostrokątne, jeżeli wszystkie kąty są ostre, prostokątne, jeżeli jeden kąt jest prosty i rozwartokątne, jeżeli jeden kąt jest rozwarty. Dla boków trójkąta prostokątnego, przyjęto pewne stałe nazwy. Mianowicie boki zamykające kąt prosty zwą się przyprostokątniami, bok zaś leżący naprzeciw kąta prostego nazywa się przeciwprostokątnią.

Ćwiczenia III.

§ 17—18. 1. Jakie położenie mogą mieć względem siebie dwa trójkąty?

2. Wykazać, że równość dwóch kątów naprzemianległych pociąga za sobą: *a*) równość innych kątów naprzemianległych; *b*) równość kątów odpowiednich; *c*) spełnianie się kątów jednostronnych. Odwrócić to twierdzenie!

3. Wykazać, że spełnianie się dwóch kątów jednostronnych pociąga za sobą: *a*) równoległość linii przeciętych; *b*) równość kątów odpowiednich; *c*) równość kątów naprzemianległych; *d*) spełnianie się innych par kątów jednostronnych. Odwrócić!

4. Wykazać, że jeżeli suma dwóch kątów jednostronnych wynosi mniej, aniżeli 180^0, linie przecięte przecinają się ze sobą po tej samej stronie, po której leżą te kąty jednostronne (u Euklidesa to twierdzenie występuje zamiast naszego pewnika o liniach równoległych). Odwrócić to twierdzenie!

5. Dwa kąty odpowiednie wynoszą po $48^0\ 36'$; obliczyć wszystkie inne kąty utworzone przez te linie.

6. Jakie kąty występują w figurach *Z*, *H*, *A*, *F*?

7. Poprowadzić w trójkącie linię równoległą do podstawy. Jakie kąty powstaną?

8. Dwie linie równoległe przecięto trzecią pod kątem $\alpha = 75^0\ 42'$; obliczyć wszystkie inne kąty!

9. W trójkącie dwa kąty wewnętrzne wynoszą po $69^0\ 50'$; obliczyć trzeci kąt i kąty zewnętrzne.

10. Kąt zewnętrzny trójkąta wynosi $141^0\ 26'$, a jeden z kątów wewnętrznych nie przyległych wynosi $35^0\ 58'$; obliczyć pozostałe kąty.

11. W trójkącie dwa kąty są równe, a trzeci jest połową każdego z nich. Obliczyć te kąty. (Jestto t. zw. Trójkąt złoty.)

12. Obliczyć sumę trzech kątów zewnętrznych, leżących przy różnych wierzchołkach.

13. Wykazać, że proste połowiące dwa kąty odpowiednie, są do siebie równoległe.

14. Wykazać, że proste połowiące dwa kąty jednostronne, są do siebie prostopadłe.

15. Ile wynosi suma kątów ostrych w trójkącie prostokątnym?

16. Jeden kąt ostry trójkąta prostokątnego wynosi $57^0\ 16'$. Ile wynoszą inne kąty?

17. Na promieniach pęku złożonego z trzech promieni obrać wierzchołki trójkąta i wykreślić na tym samym pęku trójkąt o bokach równoległych do pierwszego. Co można powiedzieć o kątach tych trójkątów?

Rozdział IV.

Przystawanie i ruch.

§ 19. Przystawanie trójkątów.

Podobnie jak odcinki i kąty, tak i trójkąty mogą być równe. Trzeba tu jednak odróżnić dwa rodzaje równości. Równość może być zupełna, co do wielkości i co do kształtu i wtedy nazywa się przystawaniem, może się zaś odnosić tylko do wielkości i wtedy się nazywa równością pola (powierzchni). N. p. trójkąty *I* i *II* są przystające, trójkąty zaś *I* i *III* są tylko równe co do powierzchni. Znakiem przystawania jest $\cong$ t. j. połączenie znaku równości $=$ i znaku $\sim$, oznaczającego podobieństwo postaci (similis — podobny, stąd przewrócona litera *S*), podczas gdy znakiem na równość powierzchni jest zwyczajny znak równości. Napiszemy więc $I \cong II$, ale $I = III$. O tym drugim gatunku równości będziemy mówili później; obecnie zajmiemy się przystawaniem.

Fig. 38.

I tak odcinki równe są zarazem przystające, tak samo kąty, albowiem o ich kształcie rozstrzyga już wielkość. Nie można tego powiedzieć już o trójkątach. Nie umiejąc jeszcze porównać ani pola. ani postaci figur, musimy inaczej określić przystawanie. Otóż *dwa trójkąty nazywamy przystającymi, jeżeli ich boki i kąty są parami równe.* Okażemy później, że takie dwa trójkąty można przez ruch sprowadzić do zupełnego nakrycia się i stąd pochodzi nazwa „przystawanie".

Aby więc zbadać, czy dwa trójkąty są przystające, trzebaby sprawdzać aż *sześć równości* (równość trzech boków i trzech kątów). Okazuje się jednakowoż, że boki i kąty są tak ze sobą związane, że wystarczy wykazać równość *trzech części*, aby mieć zapewnioną równość pozostałych trzech. (Zamiast „części trójkąta" mówimy często „kawałki".) Jednakowoż nie jest objętnem, które trzy części wybierzemy.

§ 20. Pierwszy przypadek przystawania. (I.)

Zacznijmy od najprostszego przypadku, o którym mowa w pewniku VI. Według tego pewnika dwa trójkąty mające dwa boki równe i kąty między

nimi zawarte równe, mają i dwa inne kąty równe. Chodzi więc tylko jeszcze o trzeci bok.

Czy z równości $a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$ | $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ mamy prawo wnioskować, że $c = c'$? Użyjmy dowodzenia niewprost. Gdyby $c' < c$, to odcinając c' od punktu A na boku AB, natrafilibyśmy na punkt D, leżący między A i B. Łącząc go z wierzchołkiem C otrzymamy trójkąt ADC, w którym $a = a'$, $AD = c'$, $\beta = \beta'$ } więc według pewnika VI także $\delta = \alpha'$

Ale z drugiej strony $\alpha = \alpha'$, więc musiałoby być $\delta = \alpha$, co jest niemożliwe, bo δ jest kątem zewnętrznym trójkąta CDB. Więc niemożliwem jest, aby $c' < c$. Tak samo wykazuje się, że niemożliwem jest, aby $c' > c$, musi więc być $c' = c$.

Trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają więc wszystkie boki parami równe i wszystkie kąty parami równe, są więc przystające.

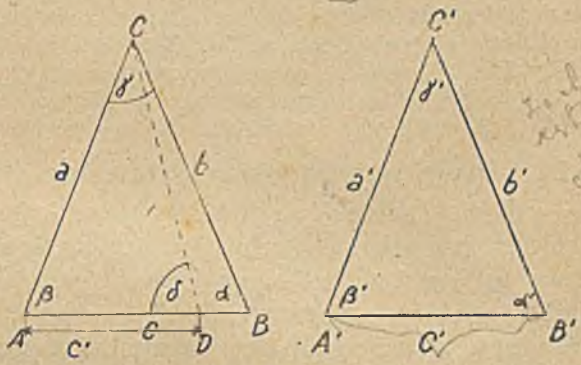


Fig. 39.

Jestto t. zw. *pierwszy przypadek przystawania.* **(I.) Dwa trójkąty, mające po dwa boki równe i kąty między nimi zawarte równe są przystające.**

Twierdzeniu temu można nadać także inną postać:

Postawmy sobie zadanie: zbudować trójkąt znając dwa boki i kąt między nimi zawarty, n. p. boki mają mieć długość a, b a kąt wielkość γ na fig. 40.

Aby tę konstrukcyę, wykonać, rysujemy w dowolnem miejscu płaszczyzny kąt $\gamma' = \gamma$ i na ramionach jego odcinamy długości $a' = a$ i $b' = b$. Łącząc punkty końcowe tych odcinków, otrzymujemy trójkąt. Otóż ilekolwiek trójkątów zbudowalibyśmy z tych trzech kawałków, wszystkie one będą przystające według naszego twierdzenia(I). Wyrażamy to tak: *Dwa boki i kąt między nimi zawarty wyznaczają dokładnie trójkąt* (co do kształtu i wielkości). Wielkość pozostałych kątów i boków zależy od wielkości boków a, b i kąta γ, czyli: bok c i kąty α i β są funkcyami wielkości a, b i γ.

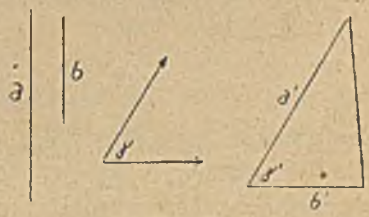


Fig. 40.

Spróbujmy teraz oprzeć się na równości innych trzech kawałków, n. p. na równości trzech kątów. Okaże się, że z równości trzech kątów nie wynika jeszcze przystawanie trójkątów (wynika tylko *podobieństwo*, o czem później). W dowolnym trójkącie ABC z punktu A' leżącego na ramieniu AC wykreślmy linię równoległą do AB. Trójkąt $A'B'C$ ma z trójkątem ABC wszystkie kąty parami, równe (dlaczego?) a mimoto widocznie $CA' < CA$, zatem o przystawaniu mowy być nie może. Zatem trzy kąty *nie wyznaczają dokładnie trójkąta* (co to znaczy?).

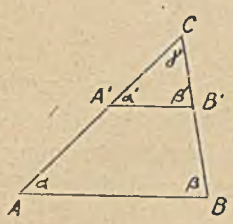


Fig. 41.

Użyliśmy tu dowodu niewprost, który polegał na wskazaniu jednego „przykładu“ sprzeciwiającego się twierdzeniu, t. zw. kontr-przykładu. Jestto najłatwiejszy sposób obalania fałszywych twierdzeń. Tem przewyższa dowód nie wprost wszystkie inne sposoby dowodzenia. Albowiem do udowodnienia prawdziwości jakiegoś twierdzenia nie wystarczy podanie jednego, ani wielu przykładów, do obalenia zaś twierdzenia wystarczy zupełnie jeden przykład przeciwny. N. p.: Gdyby ktoś twierdził, że w potęgowaniu jest prawo przemienności i podał przykład $4^2 = 2^4$, to nie udowodni przez to niczego. Natomiast wystarczy podać przykład $3^2 \neq 2^3$, aby wykazać, że w potęgowaniu niema prawa przemienności.

§ 21. Drugi przypadek przystawania. (II).

Widzimy więc, że nie jest obojętnem, które kawałki trójkątów porównujemy (lub podajemy do zbudowania). Przekonamy się, że istnieją tylko *cztery możliwości*, to jest *cztery przypadki przystawania*. (Wymień wszystkie możliwe zestawienia po trzy z trzech boków i trzech kątów!) Jedną już zbadaliśmy. Zajmijmy się teraz dalszymi. Ponieważ z równości trzech kątów nie można wnosić o przystawaniu, weźmy teraz dwa kąty i jeden bok. Jeżeli znamy dwa kąty, to trzeci zawsze możemy obliczyć według wzoru: $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$; obojętnem więc jest, które kąty są podane. Najwygodniej dla nas będzie użyć dwóch kątów leżących przy podanym boku. Z tych części łatwo zbudować trójkąt, odcinając na dowolnej linii $a' = a$, a przy końcach tego odcinka kąty $\beta = \beta'$ i $\gamma = \gamma'$ (czy wielkość kątów β i γ jest dowolna?).

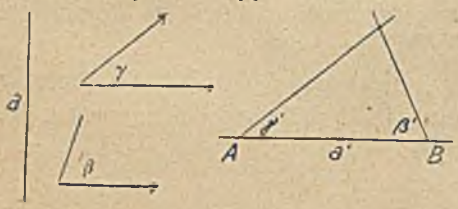


Fig. 42.

Twierdzimy, że *wszystkie trójkąty zbudowane z tych trzech kawałków są przystające*. Jestto drugi przypadek przystawania:

(II.) Dwa trójkąty mające jeden bok i dwa kąty parami równe są przystające.

Dowód: Założenie: $c = c'$

$\alpha = \alpha'$

$\beta = \beta'$

Przedewszystkiem wykażemy, że $a = a'$. Gdyby $a' < a$, odcięlibyśmy $x = a'$ i łącząc koniec odcinka x z wierzchołkiem kąta α otrzymalibyśmy trójkąt $BAD \cong B'A'C'$ (według I). Więc kąt $\delta = \alpha'$ ale ponieważ $\alpha' = \alpha$, mielibyśmy $\delta = \alpha$, co jest niemożliwe, bo ramię kąta δ leży na polu kąta α. Tak samo niemożliwem jest, aby $a' > a$. Musi więc być $a = a'$.

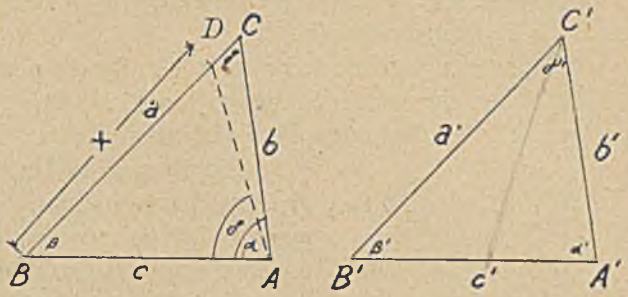


Fig. 43.

Teraz możemy już zastosować (I) przypadek przystawania, (albowiem $a = a'$, $c = c'$, $\beta = \beta'$) więc $ABC \cong A'B'C'$.

§ 22. Zastosowanie pierwszego i drugiego przypadka przystawania.

Z (I) i (II) przypadku przystawania łatwo wyprowadzić następujący ważny wniosek:

Jeżeli w jednym trójkącie są dwa boki równe, to i kąty leżące naprzeciw nich są równe i odwrotnie. (Czyli w trójkącie równoramiennym kąty przy podstawie są równe.)

Dla dowodu weźmy trójkąt równoramienny, w którym $a = b$ i narysujmy go raz jeszcze, ale w położeniu przewróconem. To a z pierwszego trójkąta równa się bokowi b z drugiego, b z pierwszego równa się bokowi a drugiego, kąt zaś γ między nimi zawarty jest ten sam; zatem te dwa trójkąty według (I) (lub nawet według samego pewnika VI) mają i inne kąty odpowiednio równe. Otoż β z pierwszego trójkąta równa się kątowi α z drugiego trójkąta. Ponieważ zaś to jest ten sam kąt co α w pierwszym trójkącie, więc β w pierwszym trójkącie równa się $\sphericalangle\alpha$ w pierwszym trójkącie, o co nam właśnie chodziło.

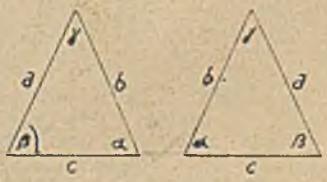


Fig. 44.

Tak samo udowadnia się odwrócenie: że naprzeciw równych kątów w jednym trójkącie leżą równe boki. (Opieramy się na równościach $c = c$, $\beta = \alpha$, $\alpha = \beta$.) Z tych twierdzeń wynika, że w trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe, więc wynoszą po 60^0.

Z twierdzenia i odwrócenia wynika już, że naprzeciw nierównych boków leżą nierówne kąty i odwrotnie. Wątpliwem jest jeszcze, czy naprzeciw większego boku leży większy kąt, czy też mniejszy? Otóż jeżeli $b > a$, to odcinamy na b odcinek

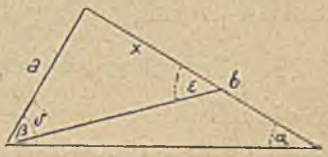


Fig. 45.

$x = a$. Wtedy musi być $\delta = \varepsilon$, ale $\varepsilon > \alpha$ więc i $\delta > \alpha$ a tembardziej $\beta > \alpha$. Otóż *naprzeciw większego boku leży większy kąt* (i odwrotnie; udowodnij!).

Stąd wniosek: *W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątnia jest dłuższa od każdej przyprostokątni.*

(Wypowiedz podobne twierdzenie o trójkącie rozwartokątnym!)

Opierając się na tem można wykazać, *że linia prosta jest najkrótszą ze wszystkich linii łamanych łączących dwa punkty.*

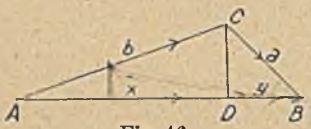


Fig 46.

Weźmy najpierw linię łamaną łączącą punkty A i B złożoną z dwóch części. Poprowadźmy z punktu C linię prostopadłą do AB, to otrzymujemy dwa trójkąty prostokątne. A więc: $b > x$, $a > y$, zatem także $b + a > x + y$, a to znaczy, że droga ACB jest dłuższa, aniżeli droga AB. Twierdzenie to wypowiadamy często tak:

W trójkącie suma dwóch boków jest zawsze większa od trzeciego. Udowodnij na podstawie tego, *że różnica dwóch boków trójkąta musi być mniejsza od trzeciego!*

Biorąc teraz linię łamaną złożoną z kilku części, dojdziemy do tego samego wniosku, rozkładając powstałą figurę na trójkąty.

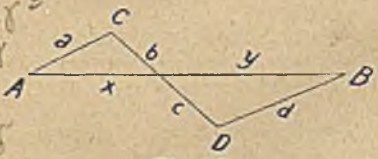


Fig. 47.

N. p.: fig 47: $a + b > x$
$c + d > y$

$a + b + c + d > x + y$

t. j.: $ACDB > AB$.

lub fig. 48

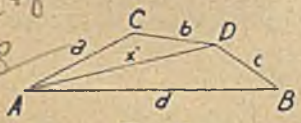


Fig. 48.

$a + b > x$ więc $a + b + c > x + c$
ale $x + c > d$

więc $a + b + c > d$

Tak samo dowodzi się dla linii łamanej złożonej z więcej części. Ponieważ zaś każdą linię krzywą uważamy za granicę, do jakiej dąży linia łamana o corazto większej liczbie boków, to twierdzenie nasze można także rozszerzyć na wszystkie linie krzywe i powiedzieć ogólnie:

Linia prosta jest najkrótszą drogą między dwoma punktami — z pomiędzy wszystkich dróg czy to łamanych, czy to krzywych.

§ 23. Trzeci wypadek przystawania. (III.)

Omówiliśmy już równość trzech kątów, dwóch kątów i dowolnego boku, jednego kąta i dwóch boków zamykających go. Pozostają jeszcze: jeden kąt i dwa boki nie zamykające tego kąta i trzy boki. Zacznijmy znowuż od konstrukcyi. Mając dane dwa boki a, b i kąt nie zawarty między nimi

a więc n. p. kąt β leżący *naprzeciw* boku większego *b*, wykreślamy najpierw ten kąt, następnie na jego ramieniu odcinamy bok *a*, wreszcie z końca tego boku zataczamy łuk koła promieniem *b*. Koło to trafi drugie ramię kąta (że trafi, to udowodnimy później) w punkcie *C*. Łącząc go z punktem *B* otrzymamy trójkąt *A B C*.

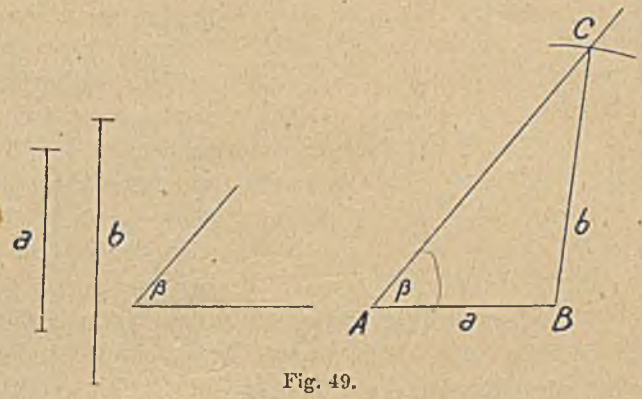


Fig. 49.

Rozważaniem podobnem, jak w (I) i (II) przypadku dochodzi się do wniosku, że wszystkie trójkąty z tych trzech kawałków zbudowane są przystające. Stąd trzeci przypadek przystawania.

(III). Dwa trójkąty, mające po dwa boki równe i kąt większemu z nich przeciwległy równy, są przystające. Inaczej zupełnie przedstawia się sprawa, jeżeli podamy *dwa boki i kąt mniejszemu bokowi przeciwległy: a, b* i α. Wykreślmy kąt α, na jego ramieniu odetnijmy *b*, a z końca *B* zatoczmy łuk koła promieniem *a*. Spostrzeżemy, że koło przetnie drugie ramię w dwóch punktach *C* i *D*. Otrzymamy więc dwa trójkąty *A B C* i *A B D*, mające:

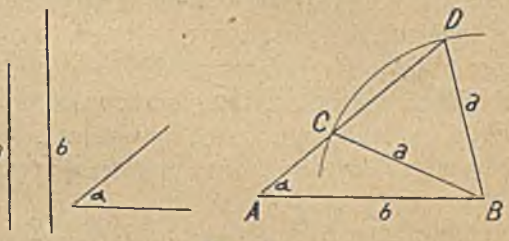


Fig. 50.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AB \\ BC = BD \\ \alpha = \alpha \end{array}\right\} \text{ a mimo to nie przystające.}$$

Co więcej: Jeżeli bok *a* za krótki, to koło zupełnie nie przetnie drugiego ramienia; wtedy więc z takich trzech kawałków nie można zupełnie zbudować trójkąta (pozostaje t. zw. trójkąt otwarty). Jest jednak jedna pośrednia długość boku *a*, przy której koło d o t k n i e drugiego ramienia w jednym punkcie. Wtedy jedynie trójkąty zbudowane z tych kawałków byłyby przystające. W ogólności zatem trzeba ten przypadek odrzucić.

§ 24. Czwarty przypadek przystawania (IV) i znaczenie przystawania w geometryi.

Pozostaje jeszcze przypadek, kiedy trzy boki są parami równe. Zacznijmy od konstrukcyi. Dane są trzy boki. Aby z nich zbudować trójkąt, odcinamy

bok a na dowolnej linii prostej, a z końców A i B zakreślamy koła promieniami b i c. Jeżeli tylko te boki są dosyć długie (jak długie?), koła przetną się w dwóch punktach C i C'. Powstają więc dwa trójkąty, ale przystające. Wszystkie trójkąty wogóle, zbudowane z tych trzech kawałków są przystające, jak to można udowodnić w sposób podobny, jak dla innych przypadków (nieco trudniejszy dowód). Stąd więc wynika czwarty i ostatni przypadek przystawania:

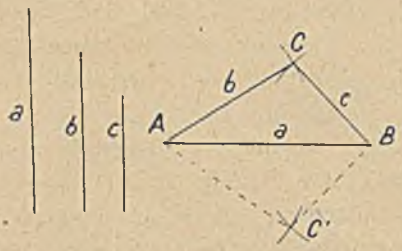


Fig. 51.

(IV.) Dwa trójkąty mające trzy boki parami równe są przystające.

Widzimy więc, że z równości boków dwóch trojkątów wynika równość kątów, ale odwrotnie: z równości kątów nie wynika bynajmniej równość boków. Aby przenieść kąt, wystarczy więc zamknąć go w trójkąt i przenieść boki trójkąta. Najczęściej używa się do tego celu trójkąta równoramiennego.

Zastanówmy się nad tem, jaką korzyść można wyciągnąć z przypadków przystawania trójkątów. Otóż przedewszystkiem służą one do ułatwienia badania, czy dwa trójkąty są przystające. Dalej do przeniesienia trójkąta w inne miejsce płaszczyzny (t. zn. do znalezienia w innem miejscu płaszczyzny trójkąta przystającego). Nadto pozwalają one z trzech podanych części zbudować trójkąt zupełnie określony co do kształtu i wielkości, ponieważ trzy części są funkcyami trzech pozostałych. Polecając n. p. rzemieślnikowi wykonanie trójkąta z drzewa, wystarczy podać mu trzy wymiary n. p. jeden bok i dwa kąty, zamiast sześciu wymiarów. Tak samo, jeżeli chodzi o zmierzenie trójkąta — wystarczy zrobić trzy pomiary: pozostałe części można wtedy otrzymać albo w przybliżeniu rysunkiem, albo ściśle rachunkiem. Rachunek prowadzący do tego, stanowi osobny dział geometryi zwany trygonometrya.

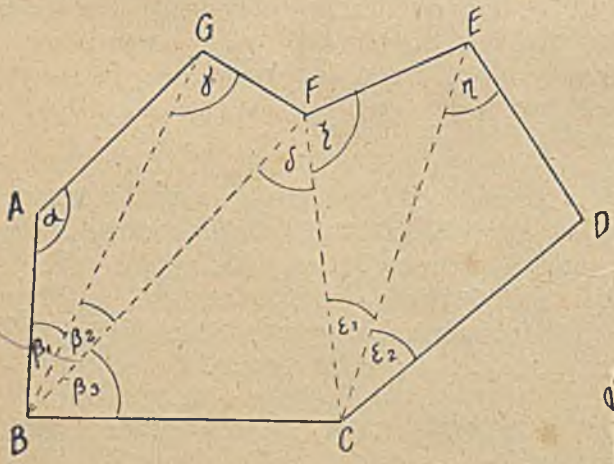


Fig. 52.

Przy zdejmowaniu planów, opieramy się również na przystawaniu trójkątów. Mając n. p. zrobić plan pola ograniczonego

dowolną linią łamaną, mierzy się tylko jeden bok, przypuśćmy AB na fig. 52, a pozatem same kąty. Przez zmierzenie jeszcze kątów α i β_1 mamy już wyznaczony trójkąt ABG, możemy go więc na planie narysować. Wskutek tego i bok BG mamy znany. Przy boku BG mierzy się znowu kąty γ i β_2 i uzyskuje się następny trójkąt: BGF. Stąd znowu od boku BF kąty δ i β_3 i t. d.

W ten sposób z jednej długości i kątów otrzymujemy wszystkie inne części składowe bez dalszego mierzenia. Mierzenie bowiem długości w polu jest połączone z pewnemi trudnościami, do mierzenia zaś kątów posiadamy bardzo dokładne i wygodne przyrządy. Takie postępowanie nazywamy „tryangulacyą“ (trójkątowaniem). Jeżeli plan narysujemy w odpowiedniem zmniejszeniu, możemy z niego już wymierzyć pozostałe części, jeżeli zaś tylko zanotujemy wielkości mierzone w polu, obliczamy pozostałe przy pomocy trygonometryi.

Dotychczas podaliśmy tylko określenie przystających trójkątów. Inne utwory geometryczne nazywamy *przystającemi, jeżeli wszystkie odcinki i kąty jednej figury są równe odpowiednim odcinkom i kątom drugiej figury.* Tak n. p. *dwa koła o równym promieniu są przystające,* bo można punkty obydwu kół tak sobie podporządkować, że wszystkie promienie i cięciwy jednego koła są równe odpowiednim promieniom i cięciwom drugiego i tworzą równe kąty.

Nasuwa się pytanie, czy nie wystarczy zbadanie równości dwóch części, celem sprawdzenia przystawania trójkątów.

Spotykamy często w rozmaitych utworach geometrycznych trójkąty, które mają tylko po dwa kawałki równe, a trzecie nie. Trójkąty takie *nie są przystające,* ale okazuje się, że jest przecież pewien związek między ich bokami a kątami. N. p.: jeżeli dwa trójkąty mają po dwa boki równe, a kąty między nimi zawarte nierówne, to trzecia para boków nie jest równa, ale naprzeciw większego kąta leży większy bok. Innemi słowami: *Jeżeli w trójkącie wzrasta kąt zamknięty dwoma bokami o stałej wielkości, to wzrasta także bok leżący naprzeciw tego kąta,*

Tak samo odwrotnie: *Jeżeli dwa boki nie zmieniają się, a trzeci wzrasta, to i kąt leżący naprzeciw niego musi wzrastać.*

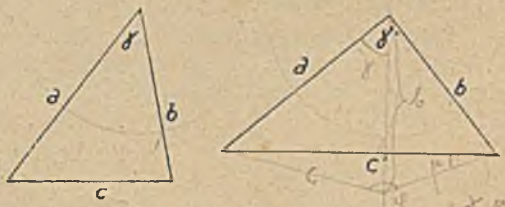


Fig. 53.

Proste dowody tych twierdzeń pomijamy.

§ 25. Ruch postępowy i obrotowy.

Poznamy obecnie bliżej związek, jaki zachodzi między przystawaniem a ruchem.

Ruchem postępowym jakiejkolwiek figury nazywamy posuwanie się wszystkich jej punktów po liniach prostych równoległych o te same kawałki.

Wykażemy, że przy takim ruchu żaden odcinek figury nie może doznać skrócenia ani wydłużenia.

Weźmyż dowolny odcinek AB i poprowadźmy z jego końców dwie linie do siebie równoległe. Odetnijmy na nich równe kawałki $BB' = AA'$.

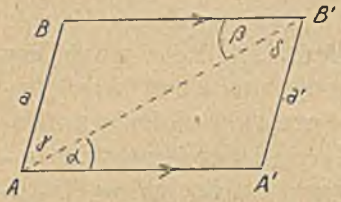


Fig. 54.

Aby można wykazać równość odcinków a i a', użyjemy przystawania trójkątów. Linia pomocnicza AB' rozetnie naszą figurę na dwa trójkąty $AB'B$ i $AA'B'$. Trójkąty te są przystające według (I), albowiem $AB' = AB'$. $BB' = AA'$ i $\alpha = \beta$ jako kąty naprzemianległe. Z przystawania trójkątów wynika równość innych jego części, więc także $a = a'$ a o to właśnie chodziło.

Dowody matematyczne piszemy często według pewnego schematu, w którym są uwidocznione trzy części dowodzenia: założenie (Z), twierdzenie (T) i dowód (D). Poprzedni dowód można n. p. ująć w następujący schemat:

$$\begin{array}{ll} Z. & BB' \parallel AA' : BB' = AA' \\ \hline T. & a = a' \\ D: & AB'B \cong AA'B \left\{ \begin{array}{l} AB' = AB' \\ AA' = BB' \\ \alpha = \beta \end{array} \right. \\ & \quad (I) \\ & a = a' \end{array}$$

W takim skróconym schemacie występują przejrzyście wszystkie pośrednie twierdzenia pomocnicze. Ten sposób pisania ma ponadto i tę zaletę, że jest rodzajem międzynarodowego pisma naukowego, zrozumiałego dla każdego, uczącego się matematyki.

Z przystawania trójkątów wynika, że $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \delta$, a więc że $A'B' \parallel AB$.

Słowami: Przy ruchu postępowym odcinek pozostaje zawsze równoległy do pierwotnego położenia.

Przy ścisłem dowodzeniu należy także wykazać, że odcinek a przy ruchu nie doznał wykrzywienia, t. j. że pozostał linią prostą, że więc żaden punkt po ruchu nie leży ani przed prostą $A'B'$, ani za prostą $A'B'$ (udowodnij!). W przeciwnym razie ta konstrukcya geometryczna nie zasługiwałaby na nazwę „ruch“.

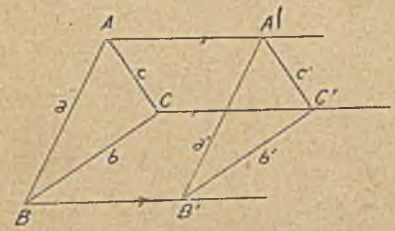


Fig. 55.

Stąd natychmiast wynika: *Trójkąt nie zmienia przy ruchu postępowym ani wielkości ani kształtu,* czyli pozostaje przystający do pierwotnego położenia. Jego boki bowiem nie doznają zmiany, a więc i kąty nie zmieniają się przy ruchu postępowym.

To samo odnosi się do każdej figury wogóle, ponieważ każda da się złożyć z trójkątów.

Odcinek AA' nazywa się wielkością przesunięcia, linie równoległe BB', AA', CC' torami ruchu postępowego.

Ruchem obrotowym jakiegokolwiek utworu geometrycznego nazywamy taki ruch, przy którym *każdy punkt figury porusza się po kole około tego samego środka* t. zw. środka obrotu (por. st. 23) *o ten sam kąt.*

Aby ten ruch geometrycznie wykonać, łączy się wszystkie punkty danej figury z jednym stałym punktem i ten pęk promieni obraca się o żądany kąt (por. str. 23).

Wykażemy znowu, że przy tym ruchu wielkość odcinka nie ulega zmianie. W tym celu porównajmy trójkąty OAB i $OA'B'$. Promień OB obrócił się o taki sam kąt, jak i OA, więc

$$\sphericalangle AOA' = \sphericalangle BOB'.$$

Odejmując od tych równych kątów część wspólną $\sphericalangle BOA'$ otrzymamy reszty także równe: $\alpha = \alpha'$. Ponieważ zaś $OA = OA'$, i $OB = OB'$ jako promienie kół, więc trójkąty nasze są przystające: (I) $OAB \cong OA'B'$. Z przystawania zaś wynika:

$$a = a'.$$

Tak samo, jak przy ruchu postępowym, należałoby wykazać, że linia prosta AB pozostaje przy tej konstrukcyi geometrycznej linią prostą. Wtedy dopiero można tę konstrukcyę nazwać ruchem w pospolitem tego słowa znaczeniu (dowodzi się niewprost!).

Fig. 56.

Ponieważ odcinki nie ulegają zmianie, to przez obrót trójkąta boki jego się nie zmienią, trójkąt więc pozostanie przystający do pierwotnego położenia. To samo odnosi się do wszystkich figur: *Przez ruch obrotowy nie zmienia się wielkość ani kształt figur geometrycznych,* pozostają one przystające od pierwotnego położenia. Z ruchu obrotowego i postępowego możemy złożyć każdy najzawilszy ruch, a więc *przy żadnym ruchu figur jako całości, ani wielkość, ani kształt figur geometrycznych nie ulega zmianie.*

Odwróćmy teraz całe to postępowanie:

Wykażemy mianowicie, że *dwie figury przystające dadzą się zawsze sprowadzić do nakrycia przez ruch.* Weźmy najpierw trójkąty przystające i to takie, w których części równe następują po sobie w tym samym porządku. Niech te trójkąty leżą w dowolnych miejscach płaszczyzny n. p.:

$$ABC \cong A'B'C'.$$

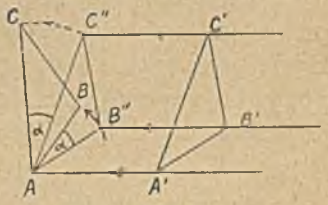


Fig. 57.

Uwaga: W tym samym porządku, t. zn., że, jeżeli postępując od A przez B do C mamy pole trójkąta po lewej ręce, to tak samo postępując od A' przez B' do C' powinniśmy mieć pole trójkąta po lewej ręce.

Wykonajmy najpierw ruch postępowy w kierunku $A'A$ o długość AA'. Otrzymamy trójkąt $AB''C''$.

Aby go sprowadzić do nakrycia z trójkątem ABC, trzeba jeszcze wykonać obrót około punktu A o kąt $\sphericalangle B''AB = \alpha$. (Wtedy istotnie punkt B'' padnie na B, bo $AB'' = AB$ a punkt C'' padnie na C, bo $AC'' = AC$ a kąt $C''AC$ wynosi także α albowiem $\sphericalangle B''AC'' = \sphericalangle BAC$, a odejmując od obydwu kątów część wspólną $\sphericalangle BAC''$ otrzymamy $\alpha = \sphericalangle C''AC$).

To samo odnosi się nie tylko do trójkątów, ale do wszystkich figur przystających (z zachowaniem tego samego porządku).

Weźmy teraz trójkąty przystające, ale *w odwrotnym porządku*. Tych figur nie sprowadzimy do nakrycia ani przez ruch postępowy, ani przez ruch obrotowy w naszej płaszczyźnie. Trzeba najpierw jeden z trójkątów „przewrócić", a więc wykonać ruch obrotowy w przestrzeni, trzeba się wznieść ponad płaszczyznę n. p. obrócić trójkąt $A'B'C'$ około prostej $A'B'$ do położenia $A'B'C''$. Teraz dopiero można ruchem obrotowym i postępowym w płaszczyźnie sprowadzić obydwa trójkąty do nakrycia, tak jak w poprzednim przypadku.

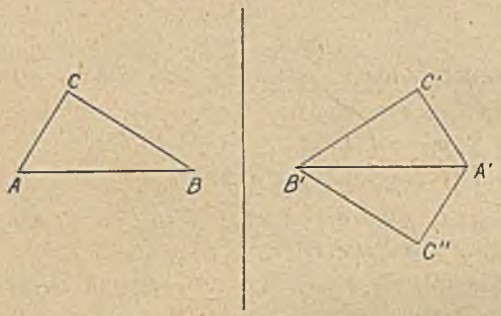


Fig. 58.

Uwaga: Ruch obrotowy w przestrzeni omówimy dokładniej dopiero w stereometryi, tam też dopiero udowodnimy, że trójkąt obrócony $A'B'C''$ jest przystający do pierwotnego $A'BC'$.

To samo odnosi się nietylko do trójkątów, ale do wszelkich innych figur płaskich. Udowodniliśmy więc w zupełności prawdziwość naszego twierdzenia.

Wystarczy więc jeden ruch postępowy i dwa obroty, aby dwie figury przystające sprowadzić do nakrycia.

Widzieliśmy z jednej strony, że przez ruch otrzymujemy same figury przystające, z drugiej zaś, że figury przystające dadzą się sprowadzić do nakrycia przez ruch. Jestto więc własność charakterystyczna figur przystających (a zarazem „ruchu"). Można więc teraz powiedzieć: *figury przystające są to takie figury, które dadzą się sprowadzić do nakrycia przez ruch.*

Teraz jasnem jest dla nas znaczenie słowa „przystawanie".

Ruch figur geometrycznych odpowiada ruchowi ciał sztywnych w mechanice. W rzeczywistości nie istnieją ciała zupełnie sztywne (n. p. spłaszczenie kuli ziemskiej).

§ 26. Odległość punktu od prostej. Proste pochyłe.

Opierając się na przystawaniu trójkątów możemy zbadać dokładniej utwory geometryczne poznane już w poprzedniej nauce. I tak najpierw zastosujemy poznane twierdzenia do pęku promieni przeciętego linią prostą, nie przechodzącą przez wierzchołek pęku. Pomiędzy promieniami pęku musi istnieć jeden (i tylko jeden) prostopadły do prostej p: $SC \perp p$. (por. str. 33). Porównajmy odcinki SA, SB, SC, SD i t. d. Otóż $SC < SB$ jako przyprostokątnia w trójkącie SCB, $SC < SA$ jako przyprostokątnia w trójkącie SCA,

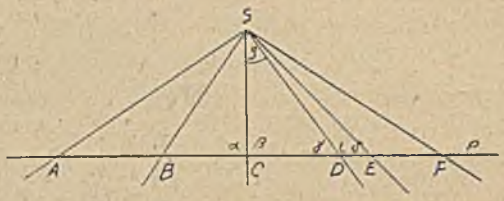


Fig. 59.

tak samo porównując SC z wszystkimi innymi odcinkami, dochodzimy do wniosku, że: *odcinek SC prostopadły do prostej p jest najkrótszy ze wszystkich odcinków, jakie można z S do p poprowadzić.*

Z tej przyczyny odcinek prostej prostopadłej z punktu poza prostą wykreślonej nazywamy odległością punktu od prostej. Punkt C, spodek prostopadłej, nazywamy także rzutem punktu S na prostą p. Punkty $A, B, D, E, \ldots$ nazywamy także rzutami, ale rzutami ukośnymi. Jeżeli zaś mówimy rzut — bez żadnego dodatku, mamy na myśli *rzut prostopadły.* Odcinki BC, AC nazywamy także *rzutami odcinków* SB, SA na prostą p.

Co do innych odcinków z punktu S wychodzących łatwo spostrzedz, że *są one tem większe, im ich spodek dalej leży od punktu C, a więc im rzut większy* n. p. $SE > SD$ bo $\sphericalangle \varepsilon > \sphericalangle \delta$ jako kąt rozwarty. Wielkość ich wzrasta nieograniczenie w miarę oddalenia się od punktu C. Jednakowoż z wyjątkiem promienia równoległego każdy inny przecina prostą (albo sam albo jego przedłużenie poza wierzchołek). Są jednakże pomiędzy tymi odcinkami także po dwa równe, mianowicie te, *których spodki są równo oddalone od spodka prostopadłej*, t. j., których rzuty są równe. Jeżeli bowiem $BC = DC$, to z porównania trójkątów SBC i SDC, stosując (I) przypadek przystawania, widzimy, że $SB = SD$.

Ponieważ od punktu C można na prostej p tylko dwa odcinki równe odmierzyć, istnieją więc tylko dwa równe odcinki pochyłe każdej wielkości.

Wszystkie te twierdzenia dadzą się odwrócić mianowicie:

Odcinki pochyłe równe z jednego punktu poza prostą poprowadzone, mają rzuty równe. Z wzrostem odcinka pochyłego wzrasta jego rzut. (Udowodnij!) (Trzeba użyć (III) przypadku przystawania.)

Można także łatwo wykazać zależność od kąta: im bardziej odcinek jest nachylony, t. j. im mniejszy kąt z prostą p tworzy, tem większy jest jego

rzut, odcinki zaś jednakowo nachylone mają równe rzuty. (Wypowiedz inne odwrócenia, n. p. zależność od kąta ρ!).

§ 27. Odległość prostych równoległych.

Jeżeli dwie linie proste są równoległe, to wszystkie punkty jednej z nich są równo oddalone od drugiej.

Wynika to z przystawania trójkątów ABC i ADC (II).

Odwrotnie: Jeżeli jakieś punkty są równe oddalone od jednej prostej q, to leżą one na prostej równoległej do q (dowód niewprost!). Jest to więc własność charakterystyczna prostej równoległej. Możemy więc twierdzenie i odwrócenie wypowiedzieć jednem zdaniem:

Miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od prostej jest prosta równoległa. Tę równą odległość punktów nazywamy *odległością prostych równoległych.* (Uwaga: na tej własności polega nazwa „proste równoległe".)

Jeżeli jakaś poprzeczna przecina kilka prostych, równoległych, poprowadzonych *w równych odstępach,* to te *równoległe odcinają na niej równe kawałki.*

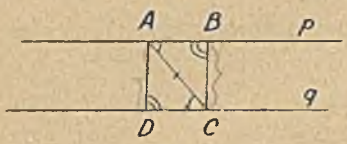


Fig. 60.

Dowód wynika z przystawania (II) trójkątów wykreślonych na fig. 61. Twierdzenie to może posłużyć do tego, aby dowolny *odcinek b podzielić na kilka równych części.* Trzeba tylko narysować kilka linii równoległych w równych odstępach i z jakiegokolwiek punktu A jednej z prostych równoległych odciąć ten odcinek tak, aby jego koniec B sięgał do ostatniej linii równoległej. Postępowanie takie jest praktyczne zwłaszcza wtedy, jeżeli mamy różne odcinki dzielić na tylesamo równych części.

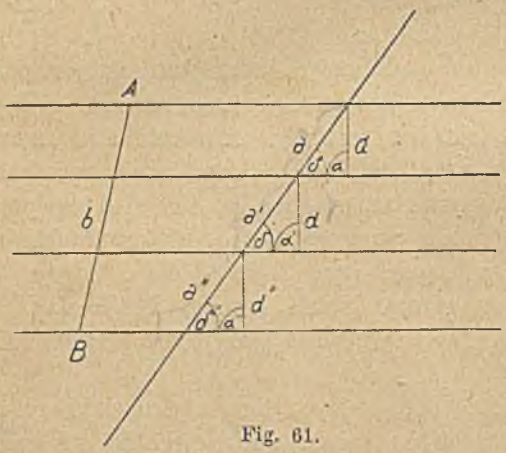


Fig. 61.

Odwrotnie: *Jeżeli z punktów dzielących jakiś odcinek na równe części wykreślimy linie do siebie równoległe, to one na każdej innej poprzecznej odcinają tyleż równych kawałków,* albowiem mają wszystkie równą odległość.

(Dowód: $a = a' = a''$, $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 90^0$, $\delta = \delta' = \delta''$ więc trójkąty przystają, a z przystawania wynika $d = d' = d''$.)

Stosując to do trójkąta, otrzymamy ważne twierdzenie: *Proste równoległe do podstawy trójkąta, a dzielące jeden bok na kilka równych części, dzielą*

i drugi na tylesamo równych części. A więc n. p. prosta równoległa do podstawy odcinająca na jednym boku $^1/_3$ część od wierzchołka, odcina także na drugim boku jego trzecią część.

§ 28. Zastosowanie twierdzeń o przystawaniu trójkątów do koła. Prosta i koło.

Opierając się na twierdzeniu o najkrótszej odległości punktu od prostej, możemy dokładniej określić położenie prostej względem koła. *Odległość prostej od środka koła może być: a) większa od promienia, b) równa promieniowi i c) mniejsza od promienia.*

a) Jeżeli $d > R$, to prowadząc ze środka koła linię $OA \perp p$ widzimy, że $OA > R$, zatem punkt A leży poza kołem. Tembardziej każdy inny punkt tej prostej musi leżeć poza kołem, bo każdy inny odcinek z O do prostej sięgający jest jeszcze dłuższy.

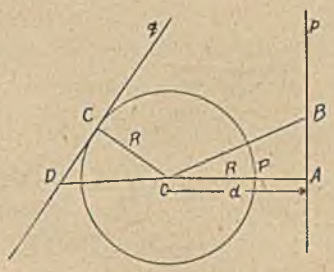


Fig. 62.

Zatem: *cała prosta p leży poza kołem, jeżeli $d > R$.*

b) Jeżeli $d = R$, n. p. dla prostej q, to prowadząc z O linię prostopadłą do q otrzymamy punkt C leżący zarazem na kole. Każdy inny punkt prostej q ma odległość od O większą, aniżeli OC, zatem większą od promienia, leży więc poza kołem. *Linia prosta q jest więc styczną koła, jeżeli $d = R$.* Widzimy, że *promień koła, przechodzący przez punkt styczności jest prostopadły do stycznej.* Ale także odwrotnie: *Linia prostopadła do promienia na końcu promienia wykreślona jest styczną koła.* (Udowodnij nie wprost!) To podaje sposób konstrukcyi stycznej, a zarazem wskazuje, że w każdym punkcie na kole istnieje tylko jedna styczna. Podaj jeszcze jedno odwrócenie!

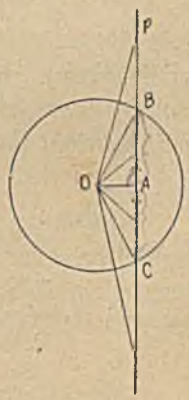


Fig. 63.

c) Jeżeli $d < R$, to prostopadła OA ze środka koła jest krótsza od promienia, zatem punkt A leży wewnątrz koła. Tak samo punkty sąsiednie. Jeżeli się jednak posuwamy od punktu A w obydwie strony, to odległość od środka O wzrasta i trafimy na dwa punkty B i C, których odległość od O jest już równa promieniowi. Te punkty leżą więc na obwodzie koła, są wspólne kołu i prostej. Więcej takich punktów nie będzie, bo z punktu O poza prostą p dadzą się do niej tylko dwa równe pochyłe odcinki poprowadzić. Jeżeli od punktów B i C posuwamy się jeszcze dalej, odległość od środka wzrasta jeszcze bardziej; punkty te leżą już poza kołem.

Jeżeli więc $d < R$, to prosta przecina koło w dwóch punktach, jest sieczną koła. Łatwo wykazać, że linia OA połowi cięciwę BC (III). Odwrotnie: linia prostopadła w środku cięciwy trafia środek koła (nie wprost!).

§ 29. Pęk promieni i koło. Odległość punktu od koła.

Zajmowaliśmy się pękiem promieni i linią prostą przecinającą go i wynikła z tych rozważań najkrótsza odległość punktu od prostej. Obecnie zbadajmy pęk promieni w stosunku do koła i otrzymamy stąd najkrótszą odległość punktu od koła.

Z dowolnego punktu S poza kołem poprowadźmy pęk promieni. Jeden z tych promieni przechodzi przez środek. Jeżeli się od tego promienia odchylamy, odległość prostej od środka wzrasta. Jeżeli odległość wzrośnie do $d = R$, sieczna zamienia się na styczną (SX, SY), wreszcie przy dalszym obrocie odległość prostej jest większa od promienia koła, prosta nie przecina już koła. (Widzimy tu różnicę pomiędzy prostą a kołem: przy prostej każdy promień pęku przecinał ją, z wyjątkiem promienia równoległego; tu tylko część pęku zawarta między SX a SY.)

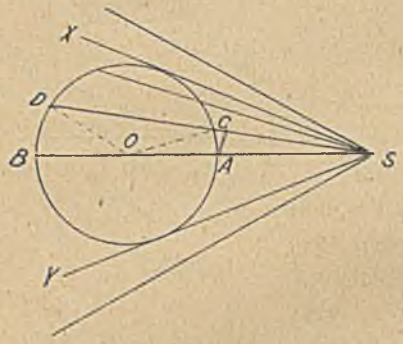


Fig. 64.

Porównajmy teraz odcinki promieni tego pęku co do wielkości. *Odcinek SB, prostej przechodzącej przez środek koła jest najdłuższy* (gdy pęk promieni przecina się z prostą niema odcinka najdłuższego). Każdy inny jest krótszy. Dla dowodu porównajmy SB z SD. Poprowadźmy linię pomocniczą OD, to $SD < SO + OD$, ale zamiast OD można wziąść równy mu OB, to $SD < SO + OB$, to znaczy

$$SD < SB.$$

Odcinek SA, którego przedłużenie przechodzi przez środek koła, jest najkrótszy. Porównajmy SA n. p. z SC. Poprowadźmy w tym celu linię pomocniczą OC, to w trójkącie OCS jest $SO - OC < SC$ (dlaczego?). Ale zamiast OC można wziąść równy mu odcinek OA i otrzymamy:

$$SO - OA < SC \text{ czyli: } SA < SC.$$

Ten odcinek daje nam więc *najkrótszą odległość punktu od obwodu koła*: Jeżeli chcę znaleźć najkrótszą drogę do obwodu koła, powinienem się kierować wprost ku środkowi.

Przeprowadzić to samo rozumowanie, jeżeli wierzchołek pęku S leży wewnątrz koła!

Teraz dopiero możnaby omówić ściśle położenie dwóch kół względem siebie (p. str. 23). N. p.: jeżeli odległość środków (linia środkowa) jest większa od sumy promieni, to linia OA będzie większa od R, zatem A leży poza kołem k. Jestto jednak najbliższy punkt od punktu O. Wszystkie inne punkty koła k leżą jeszcze dalej od O, leżą więc na pewno poza kołem K. Podobnie można przeprowadzić dyskusyę pozostałych czterech przypadków. Godnem uwagi jest to, że koła stykające się mają wspólną styczną w punkcie zetknięcia. (Udowodnij!)

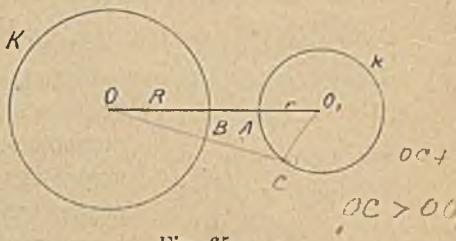


Fig. 65.

§ 30. O kątach środkowych.

Kąt, którego wierzchołkiem jest środek koła, a ramionami promienie, nazywa się kątem środkowym, n. p. $\sphericalangle \alpha$. *O* kącie α mówimy, że się wspiera na łuku $\overset{\frown}{AB}$, lub na cięciwie AB. Kąt wypukły β, wspiera się na łuku $\overset{\frown}{BDA}$.

Dwa łuki są przystające, jeżeli należą do równych kątów środkowych w tem samem kole, lub w kołach o równych promieniach n. p. AB i $A'B'$. Łuki mogą być równe a nieprzystające, to znaczy nie dadzą się sprowadzić do nakrycia przez sam ruch obrotowy i postępowy łuku jako całości. Trzebaby chyba takie łuki wyginać, wyprostować, a to już nie jest ruch figury jako całości. *Do równych kątów środkowych należą także równe cięciwy*, jakto wynika z przystawania trójkątów OAB i $OA'B'$ (I). Także odwrócenia tych twierdzeń są prawdziwe: *Do przystających łuków należą równe cięciwy i równe kąty środkowe.* (Jakie odwrócenie jest jeszcze możliwe? Udowodnij!) Na tych prostych uwagach polega budowa i użycie znanego przyrządu, zwanego kątomierzem. Jestto półkole, którego obwód jest podzielony na 180 przystających łuków, a przez to i kąt półpełny środkowy rozpada się na 180 równych kątów: każdy kąt wynosi więc 1^0.

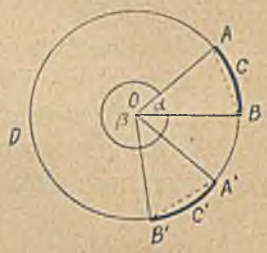


Fig. 66.

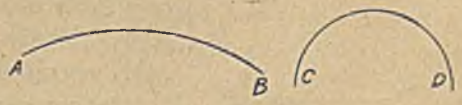


Fig. 67.

Uwaga: Używa się czasem jako kątomierza trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątnia jest podzielona na 90 części, ale już nie równych. Zwiększają się one ku brzegom (ku przyprostokątniom) od środka przeciwprostokątni, gdzie są najmniejsze. *Do przenoszenia łuku* po tem samem

kole można użyć cyrkla; mianowicie przenosimy równe cięciwy, a do nich już należą równe łuki.

1. O kątach obwodowych.

Kąt, którego wierzchołek leży na obwodzie, a ramiona są cięciwami, nazywa się kątem obwodowym, n. p.: $\sphericalangle BAC$. O kącie tym mówimy, że się wspiera na łuku BC, zawartym między jego ramionami. Między kątem obwodowym a środkowym, wspierającym się na tym samym łuku, zachodzi bardzo prosty związek. Wykreślmy promienie OB i OC i poprowadźmy średnicę AOD, to otrzymamy dwa trójkąty równoramienne. W każdym z nich kąty leżące przy boku nierównym są równe, oznaczyliśmy je więc tąsamą literą. Ponieważ kąty α i β są kątami zewnętrznymi, więc $\alpha = 2\varepsilon$, $\beta = 2\zeta$, zatem ich suma: $\alpha + \beta = 2(\varepsilon + \zeta)$ czyli

Fig. 68.

$$\sphericalangle BOC = 2 . \sphericalangle BAC$$ słowami:

Kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta obwodowego wspierającego się na tym samym łuku, lub:

Kąt obwodowy równa się połowie kąta środkowego wspierającego się na tym samym łuku.

(Udowodnij to samo, jeżeli środek O leży poza polem kąta obwodowego!)

Ponieważ zaś kąty środkowe wspierające się na równych łukach są równe, przeto i: *kąty obwodowe wspierające się na równych łukach są równe.*

Odwrócenie tego twierdzenia prowadzi do rozmaitych ważnych konstrukcyi. Brzmi ono: *Jeżeli na jakimś odcinku wspierają się równe kąty, to ich wierzchołki leżą na obwodzie koła, którego cięciwą jest ten odcinek.* Dowód niewprost: Gdyby jakiś wierzchołek C leżał poza kołem O, na którem leży wierzchołek P jednego kąta, to łącząc D z A otrzymalibyśmy w trójkącie CDA kąt zewnętrzny $ADB = \alpha$ (jako obwodowy wspierający się na tym samym łuku). Wtedy więc $\sphericalangle C$ nie mógłby wynosić α (jako wewnętrzny kąt trójkąta). Tak samo gdyby C leżał wewnątrz koła.

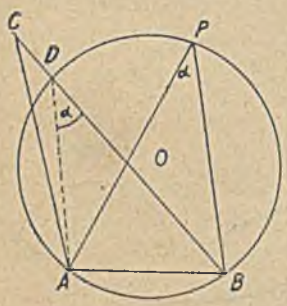


Fig. 69.

To twierdzenie można także tak wypowiedzieć: *Miejscem geometrycznem punktów, z których jakiś odcinek widać pod tym samym kątem, jest łuk koła zakreślonego na tym odcinku, jako na cięciwie,* mianowicie ta część obwodu koła, która leży z jednej strony tej cięciwy. Im mniejszy ten kąt, tem dalej leży środek tego koła od odcinka AB.

Szczegółowym przypadkiem kątów obwodowych są t. zw. kąty w półkolu; są to kąty obwodowe wspierające się na średnicy, a więc na połowie okręgu koła. Każdy taki kąt, jako połowa kąta półpełnego AOB, jest kątem prostym. Otóż: Każdy kąt w półkolu jest prosty. Twierdzenie to można odwrócić: *Jeżeli na jakimś odcinku wspierają się kąty proste, to ich wierzchołki leżą na obwodzie tego samego koła.* Z tem wiąże się konstrukcya koła bez pomocy cyrkla, a tylko przy użyciu ruchomego kąta prostego (n. p. trójkąt prostokątny z drzewa), lub też przez kreślenie linii prostopadłych za pomocą trójkąta.

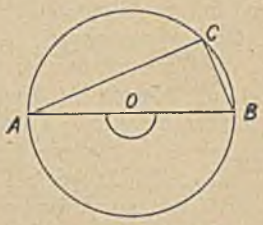


Fig. 70.

Chcąc n. p. zbudować koło o średnicy AB rysujemy z punktu A dowolny pęk promieni, a z punktu B pęk promieni prostopadłych do promieni pęku A. Spodki tych prostopadłych są punktami żądanego koła. Kreśląc je odpowiednio gęsto i łącząc jedną linią nieprzerwaną otrzymujemy koło.

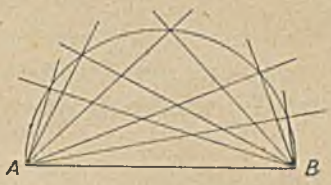


Fig. 71.

Podobnie możnaby się oprzeć na ogólnem twierdzeniu o kątach obwodowych i zbudować koło przy pomocy dowolnie obranego kąta α, lub też przy pomocy dwóch pęków promieni przecinających się pod dowolnym kątem α. Wtedy jednakże otrzymamy koło wspierające się na pewnej cięciwie krótszej a nie na średnicy. Udowodnij, że pęki A i B są *przystające!*

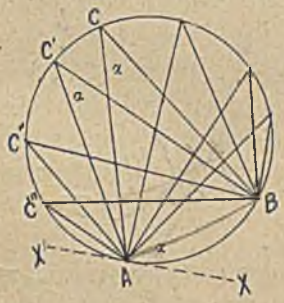


Fig. 72.

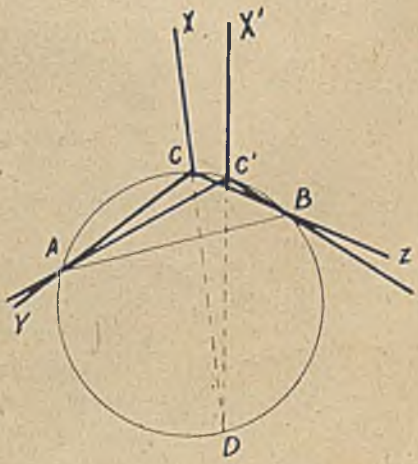


Fig. 73.

Na twierdzeniu o kątach obwodowych polega także przyrząd używany do rysowania linii zbiegających się ku jednemu punktowi, leżącemu poza płaszczyzną rysunku. Składa się on z trzech sztywnie połączonych ramion, schodzących się w jednym punkcie CX, CY, CZ. Obiera się stały odcinek AB i posuwa się

cały przyrząd tak, aby dwa skrajne ramiona przechodziły zawsze przez końce A, B odcinka. Wtedy wierzchołek C posuwa się po kole, a ramię środkowe trafia zawsze punkt D. Wszystkie bowiem punkty, z których widać odcinek AB pod kątem stałym ACB, leżą na kole. Kąty ACD, $AC'D$ i t. p. są więc (równymi) kątami obwodowymi. Ponieważ zaś jedno ramię zawsze przechodzi przez A to drugie musi zawsze przechodzić przez D (dlaczego?). Linie więc CX, $C'X'$ i t. d. zbiegają się ku jednemu punktowi D, który może leżeć już poza płaszczyzną rysunku. (A i B muszą leżeć jeszcze na płaszczyźnie rysunku.) W przyrządzie do rysowania linii CX, $C'X'$ i t. d., są zrobione tylko ramiona CA, CB i CX. Prosta zaś CD jest tylko idealnem przedłużeniem ramienia CX. Używa się go zwłaszcza w rysunku perspektywicznym, gdzie linie równoległe w naturze rysuje się jako zbieżne ku jednemu punktowi.

§ 32. Kąt między styczną a cięciwą.

W pęku promieni z poprzedniego ustępu istnieje jeden promień stycznym do koła (XX'). Jeżeli cięciwa BC fig. 72 obracając się koło punktu B przez położenia BC', BC'', BC''' dąży do położenia BA, to druga cięciwa AC dąży do położenia stycznego AX. Ponieważ przy całym ruchu kąt przy C ma ciągle tę samą wielkość, to i przy położeniu granicznem pozostanie taki sam kąt między cięciwą AB a prostą XX. Stąd twierdzenie:

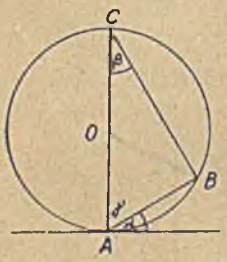


Fig. 74.

Kąt stycznej z cięciwą AB przechodzącą przez punkt styczności równa się wszystkim kątom obwodowym wspierającym się na tej cięciwie, a leżącym po przeciwnej stronie cięciwy. Moglibyśmy to także udowodnić odrazu bez rozważań granicznych, mianowicie: Poprowadźmy z punktu styczności A średnicę AOC i połączymy C z B, to $\sphericalangle B$ wynosi 90^0, jako kąt w półkolu. Na kąty β i γ razem pozostaje także 90^0. Ale α wraz z γ tworzą kąt prosty, wynoszą więc razem również 90^0. Ponieważ więc kątowi β i kątowi α tylesamo brakuje do 90^0, zatem te kąty są równe

$$\beta = \alpha.$$

Ponieważ zaś wszystkie inne kąty obwodowe wspierające się na cięciwie AB są równe kątowi β, więc α równa się istotnie każdemu kątowi obwodowemu wspierającemu się na cięciwie AB.

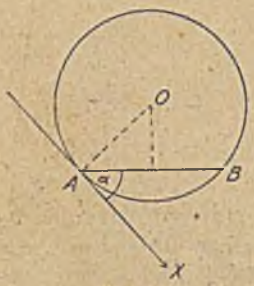


Fig. 75.

Opierając się na tem twierdzeniu można zbudować koło, z którego obwodu widać odcinek AB pod żądanym kątem. Rysujemy od jednego końca odcinka prostą AX pod danym kątem. Prosta ta ma być styczną do koła w punkcie A, prosta zaś AB cięciwą. Środek koła musi więc leżeć na linii prostopadłej do AX przechodzącej przez punkt A, a także na linii prostopadłej w środku AB, a więc w punkcie przecięcia się O tych linii. Promieniem zaś jego jest OA (lub OB).

Ćwiczenia IV.

§ 19—21. 1. Zbudować trójkąt znając dwa boki n. p. $a = 4$ *cm*, $b = 6$ *cm*, i kąt między nimi zawarty n. p. $\gamma = 35^0$.

2. Z pewnego punktu wymierzono odległości do dwóch krańców stawu: $a = 327$ *m* i $b = 452$ *m* i kąt zawarty między temi długościami: $\gamma = 56^0$. Ile wynosi długość stawu?

3. Z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym poprowadzono prostopadłą do przeciwprostokątni. Zbadać, jakie części są równe w dwóch powstałych trójkątach. Czy są one przystające?

4. Zbudować trójkąt znając jeden bok i dwa kąty przy nim leżące n. p.: $a =$ [illegible] *cm*, $\beta = 39^0$, $\gamma = 65^0$.

5. Zbudować trójkąt znając jeden bok i dwa kąty, z których jeden leży naprzeciw tego boku n. p. $a = 7{\cdot}2$ *cm*, $\beta = 123^0$, $\alpha = 28^0$.

6. Z jednej strony rzeki zmierzono wzdłuż jej biegu długość $AB = 56$ *m*. Jakie pomiary trzeba jeszcze wykonać z tej samej strony rzeki, aby można zbadać odległość punktów A i B od punktu C po drugiej stronie rzeki leżącego i szerokość rzeki.

7. Wykazać, że w dwóch trójkątach przystających odpowiednie wysokości są równe.

§ 22. 8. W trójkącie równoramiennym kąt u wierzchołka wynosi $46^0\ 29'$; ile wynoszą inne kąty?

9. Ile kawałków trzeba znać, aby wyznaczyć: *a*) trójkąt równoramienny? *b*) trójkąt równoboczny?

10. Wykazać, że różnica dwóch boków trójkąta jest mniejsza od trzeciego boku.

11. Wykazać, że linia łamana złożona z czterech odcinków jest dłuższa, aniżeli prosta łącząca jej końce.

§ 23—24. 12. Udowodnić, że trójkąty przystają w przypadku (III).

13. Jak długi musi być mniejszy bok a, aby się zamknął trójkąt zbudowany z dwóch boków a, b i kąta leżącego naprzeciw mniejszego boku a?

14. Zbudować trójkąt, znając $a = 3$ *cm*, $b = 4$ *cm*, $c = 5$ *cm*. Zmierzyć jego kąty! (trójkąt egipski).

15. Przenieść dowolny trójkąt w inne miejsce płaszczyzny.

16. Przenieść dany kąt w inne miejsce płaszczyzny, nie używając kątomierza.

17. Ile części potrzeba znać do konstrukcyi trójkąta prostokątnego?

18. Wykazać, że środki boków trójkąta równobocznego są wierzchołkami nowego trójkąta równobocznego.

19. Udowodnij, że w dwóch trójkątach mających dwa boki równe, a trzecie nierówne, naprzeciw większego boku leży większy kąt.

§ 25. 20. Przesunąć dowolny trójkąt o 4 *cm*: *a*) w kierunku jego wysokości, *b*) w kierunku jednego z boków.

21. Obrócić dany trójkąt o 60^0 około dowolnego punktu leżącego poza polem tego trójkąta. Wykonać po kolei pięć takich obrotów.

22. Obrócić trójkąt o dany kąt około jednego z wierzchołków.

23. Dwa trójkąty przystające, nieleżące równolegle, sprowadzić do nakrycia ruchem obrotowym i postępowym.

§ 26—27. 24. Znaleźć kilka punktów odległych o 3 *cm* od danej prostej p. Co jest miejscem geometrycznem tych punktów?

25. Dowolny odcinek podzielić na pięć równych części przy pomocy linii równoległych. Co trzeba zrobić, jeżeli odcinek nie sięga do ostatniej linii równoległej?

26. Boki trójkąta różnobocznego zmniejszyć pięciokrotnie i zbudować z nich nowy trójkąt.

27. Jakąkolwiek figurę przerysować w podziałce zmniejszonej trzy razy.

28. Sporządzić podziałkę zmniejszoną 1 : 8, 1 : 80, 1 : 10, 1 : 100.

§ 28. 29. Wykazać, że cięciwa wzrasta w miarę zbliżania się prostej do środka koła.

30. Wykazać, że linia prostopadła do stycznej w punkcie styczności wykreślona trafia środek koła.

31. Wykreślić w kole sześć promieni tworzących kąty środkowe po 60^0, a na ich końcach styczne do koła.

32. Wykreślić dwa koła współśrodkowe i taką cięciwę koła większego, aby była styczną koła mniejszego. Wykazać, że ta cięciwa jest przepołowiona punktem styczności z kołem mniejszem.

33. Wykreślić taką cięciwę w kole o promieniu 4 *cm*, aby jej odległość od środka wynosiła 3 *cm*. Jakie jest miejsce geometryczne środków powstałych cięciw?

34. Punkt A jest o 3 *cm* oddalony od prostej p. Znaleźć na tej prostej punkty, odległe o $4^1/_2$ *cm* od punktu A.

§ 29. 35. Znaleźć punkt, którego odległość od obwodu koła o promieniu 3 *cm* wynosi 2 *cm*. Co jest miejscem geometrycznem takich punktów?

36. Poza kołem o promieniu 4 *cm* leży punkt S w odległości 2 *cm*. Znaleźć na kole punkty odległe o 2·5 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, 6 *cm*, 7 *cm* od punktu S.

§ 30—32. 37. Dwa koła przecinają się. Wykazać, że linia środkowa połowi kąty środkowe należące w obydwu kołach do wspólnej cięciwy.

38. Dwa koła przecinają się. Wykazać, że prosta łącząca punkty przecięcia jest: *a*) prostopadła do linii środkowej, *b*) jest przepołowiona linią środkową.

39. Przenieść dowolny kąt przy pomocy cyrkla, uważając go za kąt środkowy koła o dowolnym promieniu.

40. Zbudować koło na danej średnicy przy pomocy ruchomego kąta prostego.

41. Zbudować koło na danej cięciwie przy pomocy ruchomego kąta ostrego. Ile takich kół można zbudować; od czego zależy ich wielkość?

42. Obierając odcinek $AB = 2$ *cm* jako cięciwę koła, a kąt prostej AX z tym odcinkiem $\sphericalangle XAB = 15^0$ jako kąt stycznej z cięciwą, wykreślić koło.

Rozdział V.

Symetrya.

§ 33. Twierdzenia o trójkątach równoramiennych.

Widzieliśmy już, że w trójkącie równoramiennym kąty leżące przy podstawie są równe i odwrotnie: jeżeli kąty leżące przy podstawie są równe, to trójkąt jest równoramienny.

Wysokość przedziela trójkąt równoramienny na dwa trójkąty przystające:

$$ADC \cong BDC \text{ (III)}.$$

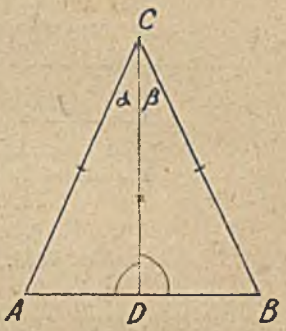


Fig. 76.

Z przystawania wynika równość pozostałych części, więc:

1. $\alpha = \beta$: *wysokość połowi kąt u wierzchołka w trójkącie równoramiennym.*

2. $AD = BD$: *wysokość połowi podstawę w trójkącie równoramiennym.*

Twierdzenie to można odwrócić w rozmaity sposób:

Linia połowiąca kąt u wierzchołka trójkąta równoramiennego połowi podstawę i jest do niej prostopadła.

Linia łącząca wierzchołek trójkąta równoramiennego ze środkiem podstawy połowi kąt u wierzchołka i jest prostopadła do podstawy.

Prostopadła w połowie podstawy przechodzi przez wierzchołek i połowi kąt u wierzchołka.

Proste dowody tych twierdzeń wynikają z przystawania, jedynie ostatnie twierdzenie udowadnia się niewprost.

Fig. 77.

Mianowicie: Czynimy założenie:

$$AC = BC,\ AD = BD \text{ i } \alpha = \beta = 90^0.$$

Gdyby prostopadła DE nie trafiła wierzchołka, tylko bok, n. p. AC, to łącząc E z B otrzymalibyśmy $ADE \cong BDE$ (I); więc musiałoby być $\gamma = \delta'$, a to niemożliwe, bo $\gamma = \delta$, a δ' jest przecież

mniejsze od δ. Tak samo nie może linia DE trafić między B i C, musi więc trafić w punkt C, a wtedy już z przystawania wynika połowienie kąta u wierzchołka.

§ 34. Utwory symetryczne.

Figury takie, jak dwie części trójkąta równoramiennego, powstałe przez poprowadzenie wysokości, spotykamy często w geometryi idealnej i praktycznej. Są to figury przystające, ale części równe następują po sobie w obydwu figurach w odwrotnym porządku. Figury takie nazywają się: względem siebie symetryczne. Figury dające się rozłożyć na symetryczne względem siebie części nazywamy utworami symetrycznymi. Linię prostą, dzielącą figurę symetryczną na dwie części względem siebie symetryczne nazywamy osią symetryi tej figury, lub symetralną figury. — N. p. w trójkącie równoramiennym osią symetryi jest wysokość. (Figur symetrycznych używa się często do ornamentów.)

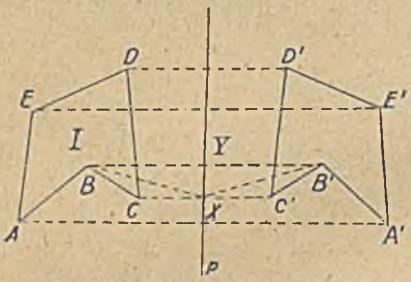


Fig. 78.

Aby do jakiejś figury znaleźć symetryczną względem niej, używamy następującej konstrukcyi: Obieramy dowolną prostą p za oś symetryi. Z punktów A, B, C, D, E danej figury I kreślimy linie prostopadłe do p i przedłużamy je poza linię p o takiesame odcinki do punktów A', B', C', D', E'.

Figura II ma wszystkie boki i kąty równe odpowiednim bokom i kątom figury I, ale w odwrotnym porządku, jest więc istotnie figurą symetryczną względem I. — Taką figurę nazywamy także obrazem figury I (zwierciadło płaskie). N. p. aby wykazać, że $BC = B'C'$ łączymy B i B' z X. Z przystawania trójkątów BXY i $B'XY$ (I) wynika $XB = B'X$, i $\alpha = \beta$ zatem i ich reszty do 90^0 są równe $\gamma = \delta$.

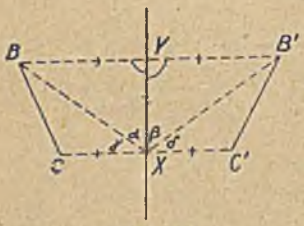


Fig. 79.

Teraz wykazuje się przystawanie $BCX = B'C'X$ (I), więc $BC = B'C'$. O takich figurach jak I i II mówimy, że nietylko są względem siebie symetryczne, ale mają także położenie symetryczne.

Z nauki o przystawaniu wiemy już, że figur symetrycznych względem siebie nie można sprowadzić do nakrycia przez ruch w jednej płaszczyźnie. Można je jednak zawsze sprowadzić do położenia symetrycznego, t. j. do takiego położenia, że punkty odpowiadające sobie w obydwu figurach leżą na tychsamych liniach prostopadłych do osi symetryi i w tych samych od

niej odległościach, tylko po przeciwnych stronach osi. Wtedy już wystarczy jeden obrót w przestrzeni około tej osi symetryi, aby je sprowadzić do nakrycia.

Aby to wykazać, weźmy dwie dowolne figury symetryczne, t. j. przystające, ale w odwrotnym porządku, n. p. I i II. (Na czem polega ten „odwrotny porządek“?) Do figury I rysujemy figurę symetryczną III, obierając dowolną prostą p jako oś symetryi i prowadząc z punktów A, B, C, D linie prostopadle do p a następnie przedłużając każdą z nich o takisam odcinek poza p, do punktów A'' B'' C'' D''.

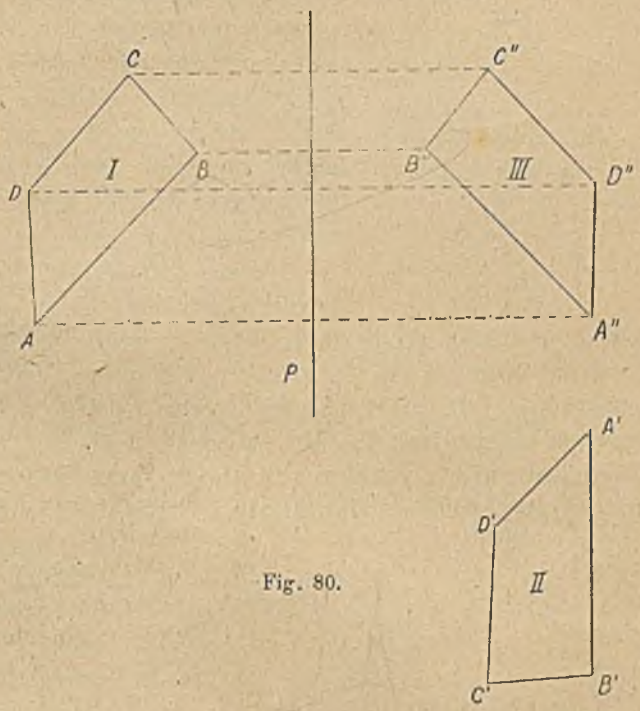


Fig. 80.

Względem figury II jest figura III przystająca, przyczem części równe następują już w tymsamym porządku w obydwu figurach ponieważ III $\cong$ I. Wiemy już, że takie figury dadzą się przez ruchy w płaszczyźnie sprowadzić do nakrycia. Otóż figura II. daje się przez ruch w płaszczyźnie sprowadzić do położenia III, zgodnie z naszem twierdzeniem.

Widzieliśmy, że do każdego utworu można znaleźć utwór względem niego symetryczny, ale nie każdy utwór jest sam dla siebie figurą symetryczną. N. p. trójkąt równoramienny jest figurą symetryczną, ale trójkąt różnoboczny już nie. (Podaj inne przykłady!)

§ 35. Symetralna odcinka.

Każdy odcinek jest utworem symetrycznym, t. zn. da się podzielić na dwie części symetryczne. Można bowiem każdy odcinek przepołowić i można w tym środku wykreślić doń jedną linię prostopadłą. N. p. $AO = OB$ i $SO \perp AB$, to linia SO jest symetralną odcinka AB. Łącząc dowolny punkt symetralnej, n. p. P z końcami odcinka AB, widzimy odrazu, że $PA = PB$.

Słowami: Każdy punkt symetralnej odcinka jest równo oddalony od obu końców odcinka. Odwrotnie: Każdy punkt równo oddalony od końców odcinka leży na symetralnej. (Udowodnij!) (IV). Jestto więc własność charakterystyczna dla linii symetralnej, można po niej odróżnić symetralną od innych prostych przecinających *A B*. Własność tę wyrażamy także w następujący sposób: *Miejscem geometrycznem wszystkich punktów równo oddalonych od dwóch stałych punktów jest linia prosta, mianowicie symetralna odcinka łączącego te dwa stałe punkty* (por. str. 22 o znaczeniu słowa: miejsce geometryczne).

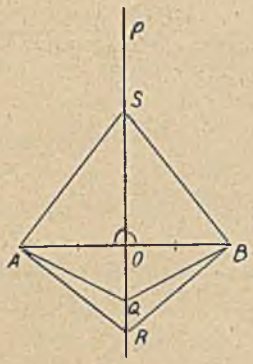


Fig. 81.

Ponieważ z drugiej strony miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od jednego punktu jest koło, przeto każdy punkt symetralnej odcinka będzie zarazem leżał na dwóch kołach o równych promieniach, a o środkach w punktach *A* i *B*. W ten sposób można znaleźć dowolnie wiele punktów, leżących na symetralnej. Aby ją jednak zbudować, wystarczą dwa punkty. Zakreślamy więc z punktów *A* i *B* dwa równe koła, a drugiej pary kół już nie potrzeba, ponieważ dwa koła przecinają się już w dwóch punktach (o ile ich promienie są odpowiednio wielkie). Nie trzeba nawet całych kół rysować — wystarczą niewielkie łuki zawierające punkty przecięcia *C*, *D*. Linia prosta łącząca punkty *C* i *D* jest symetralną odcinka *A B*.

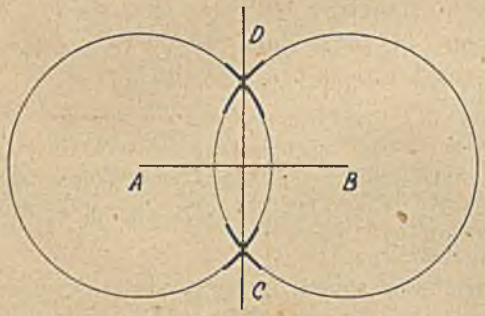


Fig. 82.

Konstrukcya symetralnej odcinka daje nam zarazem możność wykonania wielu innych, pokrewnych zadań:

I tak przy pomocy linii symetralnej można:

a) przepołowić dowolny odcinek;

b) wykreślić linię prostopadłą w środku odcinka;

c) wykreślić linię prostopadłą w dowolnym punkcie na linii prostej i

d) wykreślić linię prostopadłą z punktu poza prostą.

Konstrukcye *a*) i *b*) nie wymagają już bliższych objaśnień. Konstrukcyę *c*) wykonujemy w następujący sposób:

Od punktu A, przez który ma przechodzić linia prostopadła, odcinamy na obydwie strony równe odcinki $BA = AC$ i z punktów B i C zakreślamy równe koła (łuki). Ich punkt przecięcia D jest jednym punktem symetralnej, punkt A drugim (bo jest równo oddalony od końców odcinka BC). Linia DA jest żądaną prostopadłą. Aby wykonać konstrukcyę *d)*, uważamy dany punkt A poza prostą p za jeden punkt symetralnej. Z tego punktu — jako środka — zataczamy koło, przecinające prostą p w dwóch punktach B i C, równo oddalonych od A. Z punktów B i C zataczamy jeszcze dwa równe łuki otrzymujemy drugi punkt symetralnej D. Linia AD jest żądaną prostopadłą z punktu A do p.

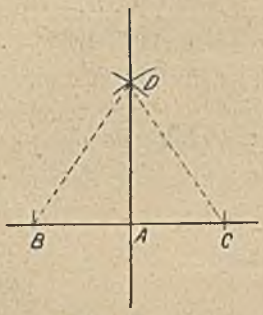


Fig. 83.

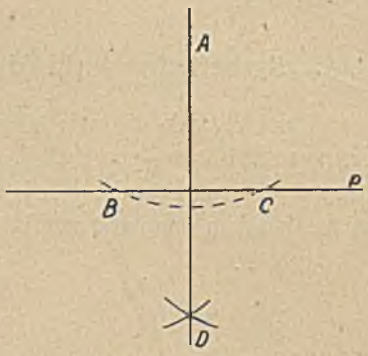


Fig. 84.

Te trzy zadania: kreślenie symetralnej odcinka, prostopadłej w punkcie na prostej, prostopadłej z punktu poza prostą nazywamy zadaniami konstrukcyjnemi zasadniczemi. Przy pomocy tych konstrukcyi można wykonać już wiele innych bardziej zawiłych zagadnień, o czem w osobnym ustępie będzie mowa.

Przy pomocy linii symetralnej odcinka możemy znacznie uprościć ruch potrzebny, aby sprowadzić do nakrycia figury przystające (z zachowaniem tegosamego porządku równych części). Wykazaliśmy, że wystarczy wykonać jeden ruch postępowy i jeden obrót. Obecnie wykażemy, że można przez sam obrót, bez przesuwania równoległego, sprowadzić figury przystające do nakrycia, lub przez samo przesunięcie równoległe, jeżeli odpowiednie boki są równoległe.

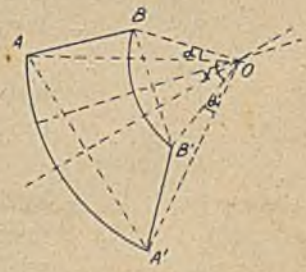


Fig. 85.

Drugą część twierdzenia udowodniliśmy już przy ruchu postępowym; dla dowodu pierwszej części weźmy najpierw dwa odcinki równe, dowolnie umieszczone na płaszczyźnie, n. p. AB i $A'B'$. Poprowadźmy symetralne odcinków AA' i BB' (nie trzeba nawet rysować tych odcinków w całości — wystarczą ich punkty końcowe). O ile AB nie jest || do $A'B'$, te symetralne przetną się, n. p. w punkcie O. Wykażemy, że przez obrót około tego punktu O można sprowadzić $A'B'$ do nakrycia z AB. Dla dowodu połączmy O z A, B i z A', B'.

Ponieważ O leży na symetralnej odcinka AA', to $OA = OA'$, promień OA powstał więc przez obrót z OA', taksamo $OB = OB'$, wreszcie $AB = AB'$, więc trójkąty OAB i $OA'B'$ są przystające. Stąd $\alpha = \alpha'$ więc i $\alpha + x = \alpha' + x$ a to znaczy, że o taki sam kąt obrócił się promień OA', co i OB', odcinek więc AB powstał istotnie przez obrót odcinka $A'B'$ około punktu O o kąt x. Zupełnie taksamo znajduje się środek obrotu dla dowolnej figury.

§ 36. Symetralna kąta (dwusieczna kąta).

Podobnie jak odcinek, tak i każdy kąt jest utworem symetrycznym. Osią symetryi kąta (symetralną kąta) jest linia połowiąca kąt, czyli dwusieczna kąta. Istotnie, jeżeli $\alpha = \beta$, to każdy punkt P na jednem ramieniu ma na drugiem ramieniu punkt P' odpowiedni, leżący na linii prostopadłej do linii AX i w takiej samej odległości na prawo od osi AX, w jakiej P leży na lewo. Jeżeli bowiem z P poprowadzimy prostopadłą PP', to otrzymamy dwa trójkąty przystające: $AOP \cong AOP'$ (II) a więc $PO = P'O$.

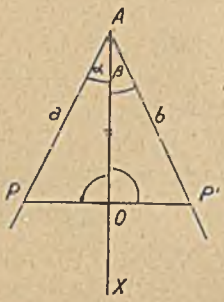


Fig. 86.

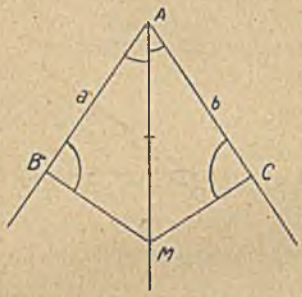


Fig. 87.

Prowadząc z dowolnego punktu symetralnej odcinki prostopadłe do ramion: $MB \perp a$ i $MC \perp b$, czyli odległości punktu M od ramion, spostrzegamy, że te odległości są równe, albowiem trójkąty MAB i MAC przystają według (II) przypadku. Odwrotnie: jeżeli jakiś punkt jest równo oddalony od obu ramion kąta, to leży na jego symetralnej (III). Jestto własność charakterystyczna dla symetralnej kąta: Żadna inna linia tej własności nie ma. Wypowiadamy to także tak: Miejscem geometrycznem wszystkich punktów równo oddalonych od obydwu ramion kąta jest symetralna tego kąta.

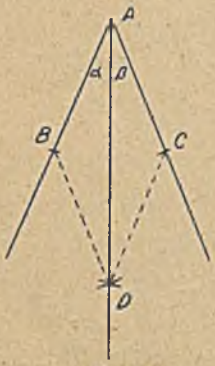


Fig. 88.

Na tej podstawie możnaby zbudować symetralną każdego kąta. Trzebaby użyć linii równoległych do ramion kąta w równych odstępach od ramion (jako miejsc geometrycznych punktów równo oddalonych od jednej linii prostej). Znajdziemy jednakże wygodniejszą konstrukcyę, opierając się na przystawaniu trójkątów. Mianowicie: Na ramionach kąta A odcinamy

równe kawałki AB i AC a z punktów B i C zataczamy znowu równymi promieniami łuki BD i CD. Łatwo okazać, że linia AD łącząca wierzchołki kąta z punktem D przecięcia się łuków, jest symetralną kąta. Albowiem: $ADB \cong ADC$ według (IV) przypadku, a więc i kąty są równe:

$$\alpha = \beta.$$

Jestto czwarte zasadnicze zadanie konstrukcyjne (połowienie kąta). Z własności symetralnej kąta wynika: W każdym pęku promieni istnieją tylko dwie proste równo oddalone od stałego punktu. (Dowód przy pomocy [III] przypadku przystawania.)

§ 37. Ogólniejsze rodzaje symetryi.

Istnieją utwory geometryczne posiadające więcej osi symetryi, n. p. dwa trójkąty równoramienne o wspólnej podstawie i o równych ramionach posiadają *dwie osie symetryi*, trójkąt równoboczny ma *trzy osie symetryi*, później zaś poznamy utwory mające kilka osi symetryi. Koło posiada nieskończenie wiele osi symetryi, mianowicie: *każda linia prosta przechodząca przez środek koła jest jego osią symetryi.* (Udowodnij!)

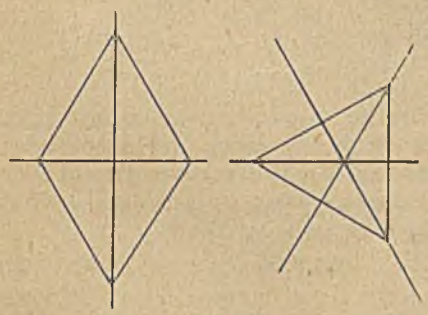


Fig. 89.

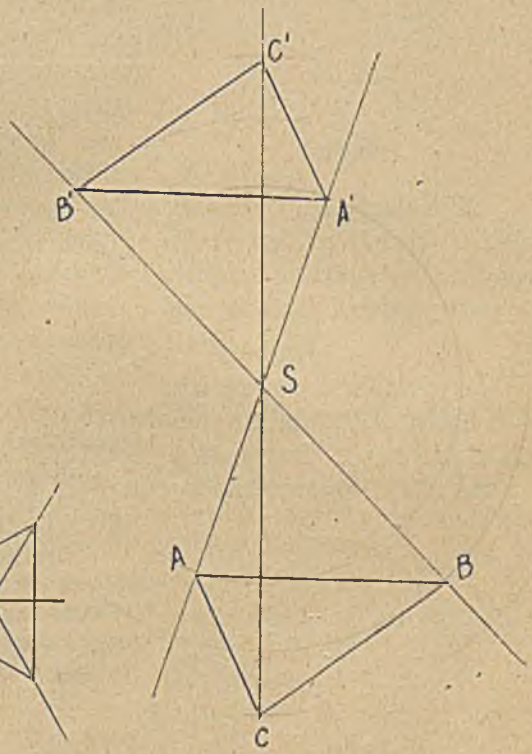


Fig. 90.

Oprócz symetryi osiowej istnieje jeszcze t. zw. symetrya środkowa. Dwie figury są środkowo symetryczne, jeżeli ich punkty leżą na tychsamych liniach prostych przechodzących przez jeden punkt i w równych odległościach od tego punktu, ale po przeciwnych stronach. Takie figury są przystające (z zachowaniem tego samego porządku równych części) i dadzą się sprowadzić

do nakrycia przez obrót o 180°. (Udowodnij przystawanie!) N. p. trójkąty ABC i $A'B'C'$ na fig. 90. Punkt S zowie się środkiem symetryi. Dwie figury symetryczne względem osi nie muszą być symetryczne względem punktu ani też odwrotnie.

§ 38. Zastosowanie symetryi do koła.

Symetryi używa się w geometryi często do dowodzenia twierdzeń. Wiedząc n. p., że koło jest utworem symetrycznym względem każdej linii prostej, przechodzącej przez środek, zbadamy własności stycznych koła. Wykreślmy w dowolnym punkcie A koła styczną i poprowadźmy przez środek linię OP nierównoległą do stycznej. Ponieważ linia OP jest osią symetryi koła, przeto i pod nią znajdzie punkt A' leżący symetrycznie względem A na tem samem kole. Prosta PA' wskutek symetryi jest także styczną, jest równo odchylona od linii OP, a jej odcinek $PA' = PA$ również wskutek symetryi. Zbierając te wnioski w jedno twierdzenie powiemy:

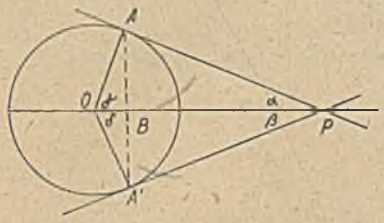


Fig. 91.

Z punktu poza kołem dadzą się poprowadzić dwie linie styczne do koła; ich odcinki od tego punktu do punktu styczności są równe a prosta łącząca dany punkt ze środkiem koła połowi kąt zawarty między stycznemi. Z symetryi można także wysnuć wnioski:

$$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \delta, \quad AA' \perp OP, \quad AB = A'B.$$

Wypowiedz te twierdzenia!

Kąt $\sphericalangle APA'$ zawarty między stycznemi nazywa się kątem widzenia koła z punktu P. Im więcej się oddalamy od koła, tem mniejszy jest ten kąt widzenia a równocześnie styczne dążą do położenia równoległego. (Dowód polega na twierdzeniach § 20.)

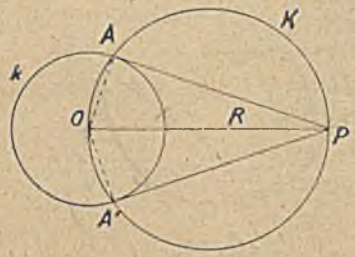


Fig. 92.

Ogólnie w geometryi nazywamy kątem widzenia jakiegoś utworu geometrycznego z jakiegoś punktu kąt zawarty między skrajnymi promieniami pęku wychodzącego z P do wszystkich punktów tej figury.

Aby otrzymać konstrukcyjnie styczne z punktu poza kołem, opieramy się na tem, że kąty OAP i $OA'P$ są proste. Jeżeli zakreślimy na OP jako średnicy półkole, to każdy kąt wspierający się na tem półkolu jest prosty. Z pomiędzy tych kątów wybieramy jednak ten, którego wierzchołek leży zarazem na kole k. Taksamo postępujemy z półkołem leżącem pod osią OP. Punkty przecięcia A i A' koła K z kołem k ymi punktami styczności, a proste PA i PA' stycznemi.

Cięciwę AA' nazywamy także biegunową punktu P, a punkt P biegunem tej prostej. Jeżeli biegun zbliża się do koła, to biegunowa oddala się od środka, zbliża się więc także do obwodu koła. Jeżeli biegun padnie na obwód koła, to jego biegunowa stanie się styczną w tym punkcie. (Wykonaj odpowiednie rysunki!)

§ 39. Koło opisane na trójkącie.

Jeżeli wierzchołki jakiejś figury leżą na obwodzie koła, a boki są cięciwami, figura nazywa się wpisana w koło, a koło jest opisane na tej figurze.

Wykażemy, że *na każdym trójkącie można opisać koło.*

Wykreślmy w tym celu symetralne dwóch boków trójkąta, linie OD i OE. Punkt, w którym się one przecinają, (a czy muszą się przeciąć?) jest równo oddalony od punktów A, B i C, jako punkt leżący na symetralnych boków AB i AC. Każdy zaś punkt równo oddalony od punktów A i C leży na symetralnej odcinka AC, zatem przez punkt O musi przechodzić także trzecia symetralna OF. Jeżeli teraz ze środka O zatoczymy koło promieniem OA, to także punkty B i C leżą na tem kole, ponieważ $OA = OB = OC$. Dowód ten podaje zarazem konstrukcyę koła opisanego. *Środkiem koła opisanego jest punkt, w którym się przecinają symetralne boków trójkąta.* Jestto pierwszy *osobliwy punkt trójkąta.* W dalszej nauce spotkamy takich szczególnych punktów więcej. Twierdzenie to dowodzi zarazem, że przez trzy punkty można tylko jedno koło przeprowadzić, czyli: *koło jest dokładnie wyznaczone zapomocą trzech punktów* podobnie, jak linia prosta zapomocą dwóch.

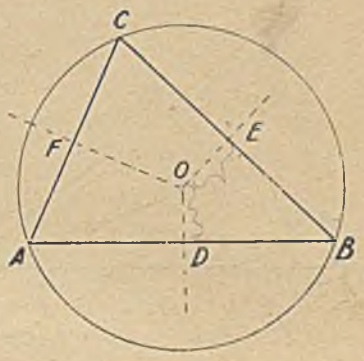


Fig. 93.

Opisanie koła na trójkącie jest zadaniem równoważnem z następującem zagadnieniem, spotykanem często w geometryi praktycznej: *Znaleźć punkt równo oddalony od trzech danych na płaszczyźnie punktów,* n. p. na mapie Galicyi znaleźć miejsce równo oddalone od Krakowa, Lwowa i Stanisławowa.

Gdyby konstrukcya była niedokładna, symetralne nie zeszłyby się w jednym punkcie, ale utworzyłyby mały trójkąt XYZ. (Fig. 94.) Opierając się jednak na naszem twierdzeniu, poprawilibyśmy odpowiednio ten rysunek. Widzimy tu, jak geometrya idealna pozwala prostować błędne nieraz wyniki geometryi praktycznej, poprawiać niedokładność rysunku.

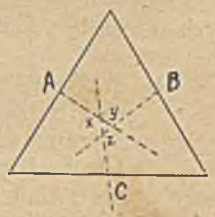


Fig. 94.

Uwaga: Na niedokładności rysunku polegają niektóre znane „sofizmaty geometryczne“, n. p. fałszywy dowód na to, że kąt prosty równa się rozwartemu i t. p.

§ 40. Koło wpisane w trójkąt.

Jeżeli boki jakiejś figury są stycznemi koła, to figura nazywa się *opisana na kole, a koło jest wpisane* w tę figurę.

Wykażemy, że: *w każdy trójkąt da się wpisać koło.*

Wykreślmy w tym celu symetralne dwóch *kątów.* Punkt O, w którym się one przecinają, jest równo oddalony od boków AC i BC, i od boków AB i BC, czyli od wszystkich trzech boków trójkąta, a więc także od AC i BC. Stąd widzimy, że punkt O leży także na symetralnej trzeciego kąta C, a więc symetralne trzech kątów przecinają się w jednym punkcie. Jeżeli z tego punktu, jako ze środka, zakreślimy koło promieniem OD, równym odległości punktu O od wszystkich boków, to wszystkie boki będą *stycznemi* tego koła. Dowód ten podaje zarazem konstrukcyę koła wpisanego. *Środkiem koła wpisanego jest punkt, w którym się przecinają symetralne kątów trójkąta.* Jestto drugi osobliwy punkt trójkąta. Punkt ten nie nakrywa się ze środkiem koła opisanego, chyba w trójkącie równobocznym!

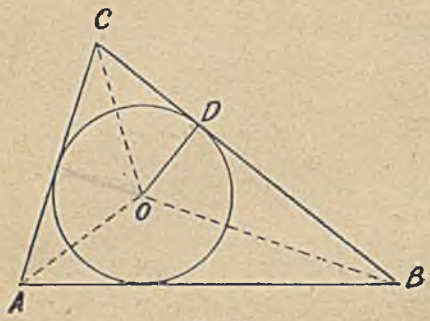


Fig. 95.

Ćwiczenia V.

§ 33. 1. Udowodnić odwrócenia twierdzeń z § 33.

2. Udowodnić, że prostopadła ze środka koła do cięciwy połowi ją.

§ 34—35. 3. Wykazać, że symetralna cięciwy przechodzi przez środek koła.

4. Opierając się na poprzedniem twierdzeniu znaleźć środek koła, z którego mamy podany tylko łuk.

5. Wykazać, że prosta łącząca wierzchołki dwóch trójkątów równoramiennych o wspólnej podstawie jest symetralną podstawy i symetralną kątów u wierzchołków.

6. Wykreślić figurę symetryczną do dowolnego trójkąta.

7. Dwa trójkąty symetryczne, ale leżące w położeniu dowolnem, niesymetrycznem, sprowadzić do położenia symetrycznego.

8. Dany odcinek podzielić na dwie, cztery, ośm równych części przy pomocy cyrkla i linii (bez podziałki).

9. Dowolny łuk przepołowić.

10. Wykreślić trzy wysokości trójkąta.

11. Znaleźć odległość punktu od prostej konstrukcyjnie.

12. Przy pomocy cyrkla wykreślić w kilku punktach prostej linie prostopadłe i odciąć na nich równe długości. Końce połączyć! Jaka linia powstanie?

13. Dowolny odcinek sprowadzić do nakrycia z drugim równym odcinkiem przez jeden obrót.

14. Dwa trójkąty przystające (z zachowaniem tego samego porządku równych części) ale leżące w dowolnych miejscach płaszczyzny, nierównoległe, sprowadzić przez jeden obrót do nakrycia.

§ 36. 15. Dowolny kąt przepołowić.

16. Znaleźć konstrukcyjnie kąty: 45^0, 30^0, 15^0, $22^0\ 30'$, $7^0\ 30'$.

17. Dowolny kąt podzielić na ośm równych części.

18. Wykreślić symetralną kąta przy pomocy linii równoległych.

§ 37. 19. Z równych kół ułożyć figury mające dwie, trzy, cztery osie symetryi.

20. Wykazać, że dwa różne koła w jakiemkolwiek położeniu posiadają jedną oś symetryi (są więc utworem symetrycznym).

21. Wykreślić figurę środkowo symetryczną względem dowolnego wielokąta.

22. Wykazać, że figura posiadająca dwie prostopadłe osie symetryi, posiada także środek symetryi.

23. Wykazać, że wspólna oś symetryi dwóch kół przecinających się, jest symetralną wspólnej cięciwy.

§ 38. 24. Wykreślić styczne z punktu poza kołem leżącego.

25. Znaleźć kąt widzenia koła o promieniu 3 *cm* z punktu odległego o 5 *cm* od koła (zmierzyć).

26. Wykreślić biegun dowolnej cięciwy koła.

27. Dla kilku punktów linii prostej leżącej poza kołem znaleźć biegunowe. Co spostrzeżemy?

28. Przez punkt wewnątrz koła leżący poprowadzić kilka cięciw i wykreślić ich bieguny. Co spostrzeżemy?

29. Jaki byłby kąt widzenia kuli ziemskiej, gdybyśmy się wznieśli na wysokość równą promieniowi ziemi? (Zmierzyć na figurze!)

§ 39—40. 30. Opisać koło na dowolnym trójkącie.

31. Znaleźć punkt równo oddalony od trzech danych punktów.

32. Opisać koło na trójkącie ostrokątnym, prostokątnym i rozwartokątnym. Jakie prawo spostrzeżemy?

33. W dowolny trójkąt wpisać koło.

34. W trójkąt prostokątny wpisać koło i opisać na nim koło.

35. W trójkąt rozwartokątny wpisać koło i opisać na nim koło.

36. Przedłużyć boki trójkąta poza wierzchołki i wpisać koło w otwarte przestrzenie zawarte między każdym bokiem i przedłużeniami dwóch innych boków.

Rozdział VI.

Zadania konstrukcyjne.

§ 41. Ogólne uwagi o zadaniach konstrukcyjnych.

Opierając się na poznanych dotychczas twierdzeniach niejednokrotnie już budowaliśmy pewne nowe utwory geometryczne z utworów danych, używając tylko linii prostych i kół — a w geometryi praktycznej lineału i cyrkla (bez kątomierza!). Już Platon wprowadził zasadę, że do konstrukcyi geometrycznych dozwala się użycia tylko linii i cyrkla. Konstrukcye wykonane przy pomocy innych środków pomocniczych (n. p. kątomierza, ruchomego kąta prostego, podziałki i t. p.) nazywamy konstrukcyami mechanicznemi. Otóż bardzo wiele zagadnień tak z geometryi jakoteż z algebry — jak to później zobaczymy — można rozwiązać przy pomocy konstrukcyi czysto geometrycznej (lineałem i cyrklem). Zadania, do których trzeba użyć bądźto nieskończonej liczby kolejnych konstrukcyi geometrycznych, bądźto konstrukcyi mechanicznych, uważał Plato za nierozwiązalne ściśle. Do takich zadań należy n. p. podział kąta na trzy części, zamiana koła na kwadrat, podwojenie sześcianu. W tym ustępie zajmiemy się tylko konstrukcyami przy pomocy lineału i cyrkla.

Przedewszystkiem należy odróżnić konstrukcyę idealną od konstrukcyi praktycznej, materyalnej. Konstrukcya idealna poucza, jak należy kombinować ze sobą rozmaite idealne proste i koła, istniejące już na płaszczyźnie w naszej wyobraźni, aby otrzymać żądaną figurę. Tak n. p. konstrukcya symetralnej odcinka ma takie znaczenie: Mamy znaleźć sposób przepołowienia odcinka zapomocą linii prostopadłej. Z pewników wiemy, że taki idealny odcinek istnieje. Istnieją także około każdego z jego końców koła o równych promieniach i to dowolnie wiele kół o dowolnie wielkich promieniach. Z pomiędzy tych kół wybieramy w myśli dwa koła równe tak wielkie, aby się przecięły w dwóch punktach. Pomiędzy tymi dwoma punktami istnieje jedna linia prosta łącząca je i to jest właśnie symetralna odcinka. W ten sposób wykonaliśmy idealną konstrukcyę symetralnej, to znaczy: wykazaliśmy, że ona istnieje i w jakim jest związku z danym odcinkiem. Geometrycznie rzecz biorąc, zadanie byłoby już wykonane. Uciekamy się jednakowoż z dwóch względów do rysunku, a więc do geometryi praktycznej:

1. Łatwiej wyobrażamy sobie utwory geometryczne, które mamy przynajmniej w przybliżeniu narysowane, a więc które działają na nasz zmysł wzroku.

2. W geometryi praktycznej zadania te są potrzebne (często n. p. trzeba przepołowić materyalny odcinek).

W geometryi praktycznej zadanie każde da się naturalnie wykonać tylko w przybliżeniu. Może się więc zdarzyć, że biorąc dwie różne pary kół równych otrzymamy aż dwie symetralne odcinka i t. p. Wtedy jednakowoż geometrya idealna poucza nas, że jest tylko jedna taka linia, możemy więc rysunek poprawić, sprostować (n. p. rysując cieńsze koła). Tak więc geometrya idealna chroni nas w praktyce od zbyt jaskrawych błędów, reguluje niedokładność naszego oka, naszych przyrządów rysunkowych.

Konstrukcye, któreśmy dotychczas wykonywali i które nadal wykonywać będziemy, będziemy zawsze pojmowali ze stanowiska geometryi idealnej a rysunek będzie dla nas tylko illustracyą rozumowań, odbywających się w naszym umyśle. Będziemy się mimoto starali wykonać rysunek możliwie najdokładniej, aby się jak najwięcej zbliżyć do prawidłowości geometryi idealnej.

Zadania konstrukcyjne mają wielkie znaczenie w geometryi praktycznej. Zdarzają się bowiem zagadnienia z życia praktycznego trudne do obliczenia, ale łatwe do wykreślenia. N. p. chcąc znaleźć odległość dwóch miejsc B i C, między któremi znajduje się jakaś przeszkoda, obieramy punkt A dowolnie i mierzymy odległości c, b i kąt α. (Por. ćw. 2, str. 55.) Z tych części budujemy konstrukcyjnie trójkąt (w pomniejszonej skali). Mierząc na rysunku bok BC otrzymujemy tę odległość z przybliżeniem, zależnem od dokładności rysunku. Gdybyśmy zaś chcieli obliczyć bok BC, musielibyśmy wykonać mozolne obliczenia, wymagające pewnych głębszych wiadomości z trygonometryi. Otrzymalibyśmy wprawdzie dokładniej długość boku BC, ale w praktyce wystarcza zwykle wartość przybliżona, otrzymana z rysunku.

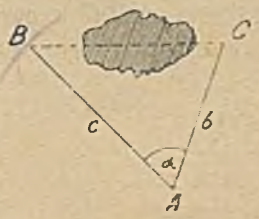


Fig. 96.

§ 42. Zasadnicze zadania konstrukcyjne.

Niektóre najprostsze zadania konstrukcyjne są podstawą dla wszelkich dalszych zagadnień. Dlatego omawiamy je raz na zawsze dokładnie i staramy się zachować w pamięci sposób ich konstrukcyi.

Za takie zasadnicze zadania konstrukcyjne uważa się zwykle następujące zagadnienia:

1. Kreślenie symetralnej odcinka (por. § 35.).
2. Kreślenie symetralnej kąta (por. § 36.).
3. Kreślenie linii prostopadłych (por. § 35) i to: *a*) przez punkt poza prostą, *b*) przez punkt na prostej, *c*) przez punkt na końcu odcinka.
4. Kreślenie linii równoległych (naturalnie przy pomocy linii i cyrkla, bez trójkąta!).
5. Przenoszenie kątów (por. § 30.).
6. Kreślenie trójkątów z trzech danych części w czterech przypadkach (§ 20—24).

7. Kreślenie stycznych do koła *a*) przez punkt na kole (§ 28), *b*) przez punkt poza kołem leżący (§ 38.).

Z tych zadań omówiliśmy już 1., 2., 3 *a b*, 5., 6., 7 *a*, 7 *b*. (Zadanie 5. omówiono w zadaniach z. 16, str. 55 i z. 39, str. 56.)

Zajmijmy się jeszcze pozostałemi zadaniami: 3*c* i 4.

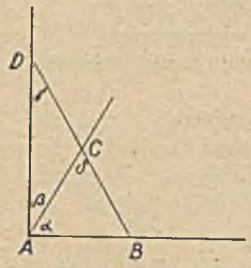


Fig. 97.

Chcemy wykreślić prostopadłą na końcu A odcinka AB, nie przedłużając go poza punkt A. Kąt prosty przy A można złożyć z kąta $\alpha = 60^0$ i $\beta = 30^0$. Kąt 60^0 otrzymuje się przez wykreślenie trójkąta równobocznego ABC cyrklem. Następnie trzebaby do tego kąta dodać połowę jego. Ale łatwiejszą konstrukcyę otrzymamy przedłużając bok BC aż do przecięcia się z linią prostopadłą. Wtedy bowiem kąty γ i β wynoszą razem 60^0, ponieważ kąt zewnętrzny δ trójkąta ABC wynosi 60^0. Ponieważ zaś $\beta = 30^0$ to i γ musi wynosić 30^0, a więc boki leżące naprzeciw tych kątów są równe: $AC = DC$. Otóż bok BC należy przedłużyć o taki sam kawałek poza C, to otrzymamy punkt D, który jest punktem linii prostopadłej do AB. Z tych rozważań wynika następująca szybka i praktyczna konstrukcya: Na prostej AX *budujemy przy wierzchołku A trójkąt równoboczny o dowolnym boku. Następnie łączymy punkt B z punktem C* (boku AC nie trzeba nawet wykreślać), *na przedłużeniu tego boku odcinamy raz jeszcze tensam odcinek CD*. Linia AD jest prostopadła do AX i przechodzi przez punkt skrajny A.

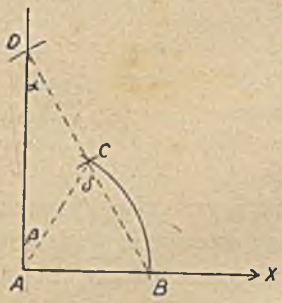


Fig. 98.

Linie ważniejsze, zwłaszcza linie podane i szukane kreśli się zwykle wyraźniej; inne linie pomocnicze kreskujemy, kropkujemy lub rysujemy je o wiele cieńsze od linii ważnych.

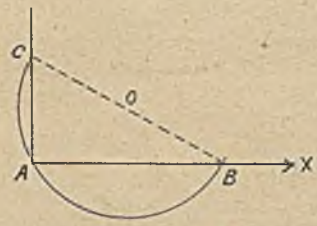


Fig. 99.

Dla upewnienia się, czy konstrukcya jest dobra, przeprowadza się zwykle jeszcze d o w ó d: Otóż $CAB = 60^0$, jako kąt trójkąta równobocznego. Dalej: wykreśliliśmy $DC = AC$ więc i $\alpha = \beta$. Ponieważ $\delta = 60^0$ i $\delta = \alpha + \beta$, przeto $\alpha + \beta = 60^0$, a że są równe, więc $\beta = 30^0$. Zatem $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \beta = 60^0 + 30^0 = 90^0$, czyli:

$$AD \perp AX.$$

To samo zadanie możnaby także rozwiązać *przy pomocy kąta w półkolu*. Z dowolnego punktu O nie leżącego na prostej AX zataczamy promieniem OA półkole. Od punktu B, w którym to półkole przecina prostą AX, pro-

wadzimy średnicę BOC. Prosta CA jest prostopadła do BX, ponieważ $\sphericalangle BAC$ jest kątem w półkolu.

Konstrukcya linii równoległych: Aby wykreślić przez punkt poza prostą linię równoległą, musimy się oprzeć na jakiejś charakterystycznej własności tych linii. Wiemy n. p., że dwa kąty odpowiednie utworzone przez dwie linie równoległe przecięte trzecią muszą być równe. Mając więc przez punkt A wykreślić linię równoległą do p, prowadzimy dowolną linię poprzeczną i kąt β przenosimy (cyrklem) do punktu A jako wierzchołka, a do prostej AX jako ramienia. Powstanie w ten sposób równy kąt odpowiedni, a więc jego ramię q jest równoległe do p. Możnaby użyć także kątów naprzemianległych. Można się oprzeć także na tem, że dwie linie prostopadłe do tej samej trzeciej są do siebie równoległe. Najpraktyczniejszy jednak sposób polega na przystawaniu trójkątów.

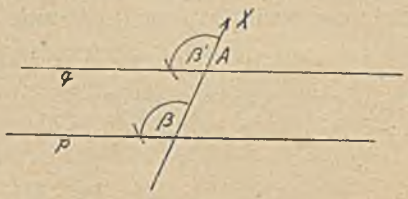


Fig. 100.

Z punktu A zataczamy dosyć wielki łuk BD. Z punktu B tą samą rozwartością cyrkla odcinamy BC na prostej p, wreszcie z punktu C tymsamym ciągle promieniem łuk przecinający w D łuk BD. Linia AD jest żądaną równoległą, albowiem trójkąty ABD i ADC są przystające według (IV.) przypadku przystawania, więc i kąt D w trójkącie I jest równy kątowi B w trójkącie II. Kąty te zaś są kątami naprzemianległymi, więc z ich równości wynika równoległość:

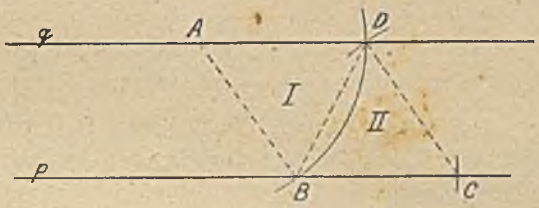


Fig. 101.

$$q \parallel p.$$

Odcinki AB, BC, CD, DA nie muszą być wszystkie równe. Wystarczy, jeżeli $AB = DC$ i $BC = AD$. Wygodniej jest jednak wykonywać całą konstrukcyę jedną rozwartością cyrkla.

§ 43. Systematyczny sposób rozwiązywania zadań konstrukcyjnych.

Rozporządzając takim zasobem konstrukcyi zasadniczych, możemy obecnie przejść do zadań zawilszych. W rozwiązywaniu każdego zadania — zwłaszcza trudniejszego — można odróżnić cztery kroki.

1. Wyobrażamy sobie, że utwór już jest zbudowany i rozpatrujemy, jaką drogą można dojść do wynalezienia części potrzebnych, mając ciągle na oku już gotową figurę. W tym celu najczęściej rysujemy pobieżnie, szkicujemy żądaną figurę. Ta część rozwiązywania zadań nazywa się rozbiorem lub analizą. Zrozumiemy to lepiej *na przykładzie:* (por. str. 70, kreślenie

prostopadłej na końcu odcinka). *Znając wysokość trójkąta i dwa kąty, które ona tworzy z bokami, zbudować ten trójkąt.* Jeżeli tylko narysujemy jakikolwiek trójkąt, a w nim wysokość, zoryentujemy się odrazu, jak należy przeprowadzić konstrukcyę. Trzeba będzie mianowicie narysować osobno każdy z trójkątów prostokątnych *I* i *II*; każdy zaś z nich da się łatwo narysować, bo znamy w nim bok h i dwa kąty α i 90^0 lub β i 90^0.

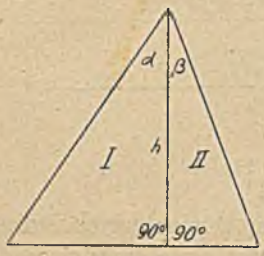


Fig. 102.

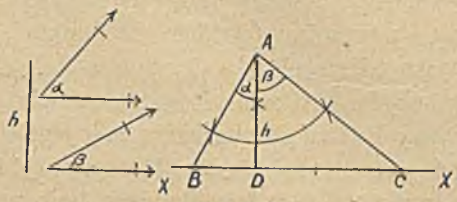


Fig. 103.

Jestto najważniejsza część zadania, podaje nam ona plan pracy. Po tym rozbiorze następuje druga część zadania:

2. Konstrukcya. Na dowolnej linii nieograniczonej, w dowolnym jej punkcie, kreślimy linię prostopadłą (3 *b*) i odcinamy na niej podaną wysokość h. Do otrzymanego w ten sposób punktu A przenosimy z jednej strony kąt α, z drugiej β (5. zad. zasadnicze).

Przedłużając ramiona tych kątów do przecięcia się z prostą XX otrzymamy żądany trójkąt, złożony z trójkątów prostokątnych BAD i DAC. Teraz należałoby przeprowadzić:

3. Dowód, że ta figura spełnia rzeczywiście żądane warunki. Dowód mamy już zwykle gotowy przy analizie. Tu n. p. dowód jest tak prosty, że mógłby się wydać zbytecznym. Istotnie:

$AD = h$, ponieważ tak odcięliśmy.

$\alpha' = \alpha$, użyliśmy bowiem konstrukcyi udowodnionej już dawniej, tak samo $\beta' = \beta$. Prócz tego $AD \perp BC$, więc trójkąt odpowiada warunkom zadania. W niektórych zadaniach jednakże dowód jest konieczny.

4. Po dowodzie powinna nastąpić dyskusya, czy jest możliwe jedno rozwiązanie, czy więcej a dalej: kiedy rozwiązanie jest wogóle możliwe, a kiedy nie. Tak n. p. w naszem zadaniu widzimy, że możnaby zbudować także drugi trójkąt, spełniający te same warunki, odcinając kąt α z prawej strony, a β z lewej. Ten nowy trójkąt byłby symetryczny względem pierwszego. Widzimy więc, że przy danych warunkach są tu możliwe dwa rozwiązania. Co się tyczy możliwości rozwiązania, to gdyby któryś z kątów α, β był prosty, a tem bardziej rozwarty, zadanie nie dałoby się

rozwiązać. Wtedy bowiem któryś z trójkątów prostokątnych *I* lub *II* musiałby zawierać dwa kąty proste lub jeden kąt prosty i jeden rozwarty, a to niemożliwe wobec twierdzenia o sumie kątów w trójkącie.

Tę dyskusyę nazywamy determinacyą zadania (*oznaczeniem*). Jest ona uwieńczeniem zadania i daje przegląd wszystkich możliwości w zależności od podanych warunków.

Takiego rozbijania zadania na cztery części używa się tylko przy trudniejszych zadaniach, przy których łatwo można popaść w błąd bądźto przez przeoczenie pewnych możliwości, bądźto przez niedokładność analizy.

§ 44. Metoda miejsc geometrycznych.

Do rozwiązania każdego zadania konstrukcyjnego prowadzi odmienne rozważanie, są jednakowoż pewne myśli przewodnie wspólne dla wielkiej ilości zadań, pewne metody pozwalające podobnem rozumowaniem ująć rozmaite problemy.

Jedną z takich ogólnych metod jest metoda miejsc geometrycznych, której używaliśmy już nieraz.

Metody tej używa się, jeżeli chodzi o znalezienie jakiegoś punktu spełniającego jakieś dwa warunki. Rysujemy najpierw miejsce geometryczne M_1 punktów spełniających jeden warunek, później miejsce g. M_2 punktów spełniających drugi warunek. Punkty wspólne obydwu miejscom M_1 i M_2 spełniają obydwa warunki, są więc żądanymi punktami. Wymień poznane w dotychczasowej nauce miejsca geometryczne!

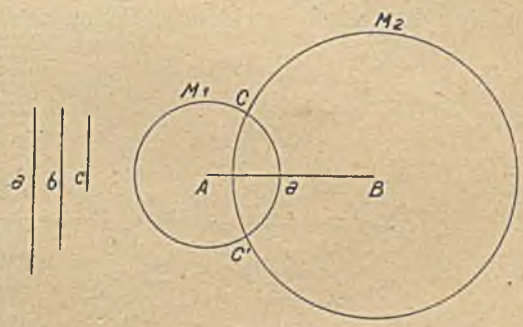


Fig. 104.

Łatwo tę metodę zrozumieć przy budowaniu trójkąta z trzech danych boków a, b, c. Odcięliśmy najpierw na dowolnej prostej jeden bok i otrzymaliśmy w ten sposób dwa wierzchołki A, B, trójkąta. Aby znaleźć trzeci wierzchołek, rozumujemy tak: Ten wierzchołek ma być odległy o odcinek b od punktu A, a o odcinek c od punktu B. Miejscem geometrycznem wszystkich punktów, które są odległe od punktu A o odcinek b, jest koło M_1, miejscem zaś geometrycznem wszystkich punktów, odległych od punktu B o długość odcinka c jest koło M_2. Wierzchołek C musi więc leżeć równocześnie na M_1 i M_2, a więc tam, gdzie się te dwa miejsca geometryczne przecinają. Otrzymujemy zatem dwa rozwiązania zadania, C i C'. Łącząc te punkty z A i B mamy żądany trójkąt w położeniu ABC

lub $A B C'$ (symetrycznie). Taki sposób rozwiązywania zadań jest właśnie metodą miejsc geometrycznych.

Rozważmy jeszcze jeden, nieco trudniejszy przykład:

Zbudować trójkąt, znając dwa boki i wysokość do jednego z nich poprowadzoną: a, b, h_a.

Analiza. Wierzchołki B i C dostaniemy odrazu, jako końce odcinka a. Dla trzeciego wierzchołka A jednem miejscem geometrycznem M_1 jest linia równoległa do BC w odstępie h_a, drugiem M_2 koło o promieniu b zakreślone z punktu C jako środka. Punkt A musi więc leżeć w miejscu, gdzie się te dwie linie M_1 i M_2 przecinają. Spostrzegamy jednakże, że M_1 i M_2 mają jeszcze drugi punkt przecięcia A', spełniający również warunki zadania. Otrzymujemy więc dwa rozwiązania.

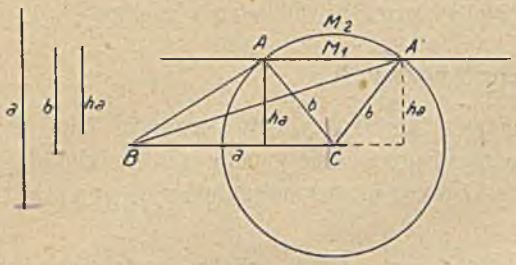


Fig. 105.

Teraz łatwo przeprowadzić konstrukcyę. Dowodu tu nie trzeba osobno przeprowadzać. Determinacyę przeprowadziliśmy już częściowo. Dodajmy jeszcze, że h_a nie może być większe od b, albowiem koło M_2 nie przecięłoby wtedy linii M_1. Gdyby $h_a = b$, koło byłoby styczne do M_1 i mielibyśmy tylko jedno rozwiązanie. Wreszcie jeżeli $h_a < b$ mamy dwa różne rozwiązania. Trójkąt nie jest więc ściśle wyznaczony zapomocą tych trzech kawałków.

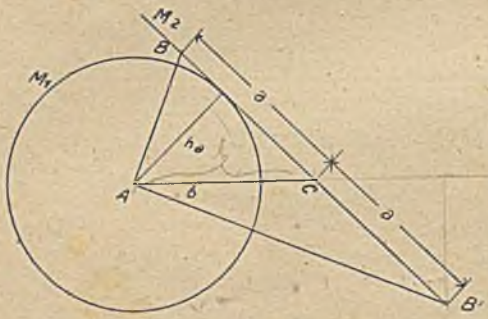


Fig. 106.

To samo zadanie możnaby także rozwiązać inaczej, zaczynając konstrukcyę od boku b. Figura 106. objaśnia postępowanie. Szukamy miejsc geometrycznych dla spodka wysokości h_a, która musi wychodzić z punktu A. Jednem miejscem M_1 jest koło o promieniu h_a, a drugiem M_2 prosta wychodząca z C w odstępie h_a od punktu A, t. j. styczna do koła z punktu C. Odcinając na tej stycznej od punktu C w jedną lub drugą stronę bok a otrzymamy trzeci wierzchołek trójkąta w punkcie B lub B'.

§ 45. Metoda figur pomocniczych.

Drugą taką metodą ogólną jest metoda figur pomocniczych. Zamiast budować odrazu żądaną figurę, budujemy najpierw inną, dającą się łatwo

otrzymać wprost z podanych kawałków, n. p. jakąś część żądanej figury. Tę prostszą figurę nazywamy figurą pomocniczą. Z niej dopiero przez dodanie pewnych części lub przez odrzucenie dostajemy figurę żądaną. Wyjaśnimy to znowu na przykładach.

Zbudować trójkąt równoramienny, znając jedno ramię r i kąt α, leżący przy podstawie. Rysując jakikolwiek trójkąt równoramienny i wykreślając jego wysokość, widzimy odrazu, że najłatwiej będzie najpierw narysować część tego trójkąta, mianowicie trójkąt prostokątny o znanej przeciwprostokątni r i kącie ostrym α.

Fig. 107.

To zaś najłatwiej zrobić budując na r półkole i kreśląc cięciwę pod kątem α. Otrzymany w ten sposób trójkąt prostokątny uzupełniamy symetrycznym trójkątem do trójkąta równoramiennego ABC (najłatwiej przedłużyć bok BD o taki sam odcinek poza D). Por. fig. 108.

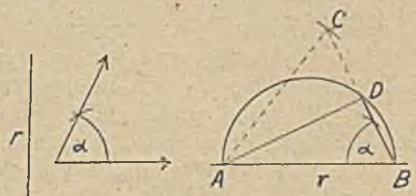


Fig. 108.

Rozważmy jeszcze jeden nieco trudniejszy przykład:

Wykreślić trójkąt, znając sumę dwóch boków s, trzeci bok c i kąt przy tym trzecim boku leżący α.

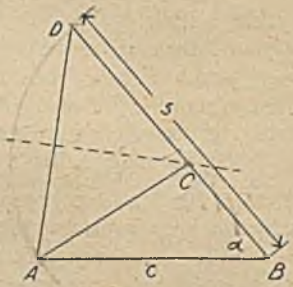


Fig. 109.

Analiza. Ponieważ samego żądanego trójkąta nie możemy odrazu z tych kawałków utworzyć, budujemy trójkąt pomocniczy z boków s, c i kąta α między nimi zawartego w znany sposób. Bok s trzeba jednak złamać i górną część obrócić tak, aby koniec D padł na punkt A. Chodzi tylko o to, *w którym punkcie* ten bok złamać. Otóż ten szukany punkt C musi leżeć tak, aby $CD = AC$, a więc musi leżeć na symetralnej boku AD w miejscu, gdzie ona przecina bok BD.

Otrzymujemy więc następującą konstrukcyę:

Budujemy trójkąt ABD z części s, c i α, kreślimy symetralną boku DA, a jej punkt przecięcia z bokiem s łączymy z A.

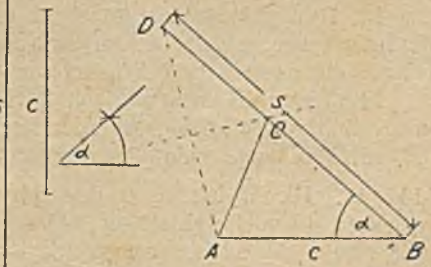


Fig. 110.

Że ta konstrukcya jest dobra, wiemy już z analizy. Gdyby jednak chodziło o dowód, to zauważmy, że $AB = c$, $\sphericalangle B = \alpha$, a $AC + BC = AC + DC = s$ zgodnie z warunkami zadania.

Determinacya: Zadanie to jest zawsze możliwe, skoro tylko $s > c$, o czem zresztą wiemy z ogólnego twierdzenia o sumie dwóch boków w trójkącie. W przeciwnym razie symetralna boku AD nie trafiłaby boku BD między punktami B i D. (Wykreśl odpowiednią figurę!)

W dalszym ciągu poznamy jeszcze dwie inne metody ogólne rozwiązywania zadań konstrukcyjnych.

Ćwiczenia VI.*)

§ 41. 1. Jakiemi konstrukcyami są sposoby kreślenia kół w § 31 przy pomocy twierdzeń o kątach obwodowych?

2. Jaką konstrukcyą jest kreślenie linii równoległych przy pomocy t. zw. trójkąta (§ 17).

3. Z końców AB odcinka o długości a widać dwa punkty niedostępne C i D pod kątami α, α', β, β'. Znaleźć konstrukcyjnie odległość tych miejsc C i D.

§ 42. 4. Wykreślić przy pomocy cyrkla kilka stycznych w danych punktach na obwodzie koła, nie przedłużając promieni poza obwód.

5. Wykreślić przez punkt poza prostą linię równoległą przenosząc kąty naprzemianległe (przy pomocy cyrkla).

6. Wykonać przesunięcie równoległe dowolnego odcinka przy pomocy cyrkla i lineału.

7. Dowolny pęk promieni przenieść do innego punktu przy pomocy cyrkla i linii.

8. Dwa zwierciadła płaskie przecinają się pod kątem 60^0; między niemi leży punkt P. Wykreślić obrazy tego punktu w obydwu zwierciadłach a te obrazy znowu odbić w obydwu zwierciadłach i t. d. Czy konstrukcya skończy się? Jaki kąt muszą tworzyć zwierciadła, aby otrzymać 4, 6, 8, 9, 12, 60 obrazów?

9. To samo zadanie wykonać dla odcinka leżącego między zwierciadłami.

§ 43. 10. Na danej prostej p znaleźć punkt odległy od danego punktu P, leżącego poza prostą, o daną odległość d (determinacya!).

11. Na danej prostej znaleźć punkt równo oddalony od dwóch danych punktów A i B, nie leżących na tej prostej.

12. Z punktu P poza prostą leżącego poprowadzić promień pod podanym kątem α.

13. Dwa punkty A i B leżą z tej samej strony linii prostej p. Znaleźć najkrótszą drogę promienia, który wychodzi z A, dotyka prostej p i wraca do B. (Uwaga: dla dowodu użyć symetrycznego obrazu punktu A w prostej p.)

14. Wykreślić symetralną kąta, którego wierzchołek jest niedostępny (przy pomocy linii równoległych, lub równoległego przesunięcia kąta).

15. Przedłużyć linię prostą poza przeszkodę (zapomocą linii równoległej).

§ 44—45. 16. Wykreślić trójkąt prostokątny znając: *a*) przeciwprostokątnię i wysokość do niej wykreśloną; *b*) rzuty obu przyprostokątni na przeciwprostokątnię (szuka się miejsc geometrycznych trzeciego wierzchołka).

---

*) W zbiorze zadań J. Kranza, wyd. II. r. 1905, przepisanym dla szkół średnich, znajdują się przykłady do metody miejsc geometrycznych na str. 71—75, a przykłady do metody figur pomocniczych na str. 75—81.

17. Wykreślić trójkąt równoramienny znając jego ramię i wysokość (szuka się miejsc geometrycznych dwóch wierzchołków podstawy).

18. Wykreślić trójkąt znając a, w_b i w_c, t. j. bok i wysokości należące do dwóch innych boków.

19. Wykreślić trójkąt znając jeden bok, kąt przy nim leżący i promień koła opisanego.

20. Wykreślić do danego koła styczną równoległą do jakiejś prostej.

21. Na stycznej do koła znaleźć punkt, z którego widać koło pod danym kątem (patrz zadania poprzednie).

22. Wykreślić trójkąt znając jeden bok, kąt przy nim leżący i promień koła wpisanego (patrz zad. 19, 20).

23. Opierając się na twierdzeniu z § 34. wykreślić punkty, z których widać dany odcinek pod danym kątem.

24. Wykreślić punkt, z którego widać dwa dane odcinki, leżące dowolnie, pod dwoma danymi kątami (patrz zadanie poprzednie).

25. Wykreślić koło dotykające dwóch prostych równoległych i przechodzące przez jeden punkt leżący między nimi (przesunięcie).

26. Wykreślić koło o znanym promieniu, dotykające zewnętrznie drugiego koła i przechodzące przez dany punkt P (szukać miejsc geometrycznych dla środka tego koła stycznego!)

27. Wykreślić koło o znanym promieniu, dotykające zewnętrznie dwóch danych kół (szukać miejsc geometrycznych dla środka żądanego koła).

28. Wykreślić koło o danym promieniu, dotykające ramion dowolnego kąta (miejscami geometrycznemi środka są równoległe do ramion w odstępie równym promieniowi).

29. Znaleźć punkt, z którego dane koło widać pod danym kątem (patrz zadanie poprzednie).

30. Z jakiej odległości widzielibyśmy księżyc pod kątem 30^0 (promień księżyca obrać na rysunku 1 *cm*, prawdziwa jego długość jest 60.6374.100000 *cm*). Rozwiązać konstrukcyjnie.

31. Koło k_1 leży zewnątrz koła k_2 a $r_1 > r_2$. Zakreślić koło współśrodkowe z k_1 promieniem $r_1 - r_2$ i poprowadzić do niego styczne ze środka koła k_2. Wykazać, że styczne koła k_1 równoległe do stycznych koła wewnętrznego są zarazem stycznemi koła k_2.

32. Tę samą konstrukcyę wykonać z kołem współśrodkowem o promieniu $r_1 + r_2$.

33. Na podstawie poprzednich zadań znaleźć cztery styczne wspólne dwom kołom mimośrodkowym (koła pomocnicze mają promienie $r_1 - r_2$, $r_1 + r_2$).

34. Skonstruować cień i półcień kuli mniejszej oświeconej kulą większą w przekroju. (Trzeba wykreślić styczne wspólne obydwu kołom, patrz zadania 31, 32, 33.)

35. Wykreślić trójkąt równoboczny znając jego wysokość.

36. Wykreślić trójkąt prostokątny znając jeden kąt ostry i rzut boku przy nim leżącego na przeciwprostokątnię (figura pomocnicza!).

37. Wykreślić trójkąt równoramienny znając wysokość i jeden kąt, n. p. przy podstawie.

38. Wykreślić trójkąt znając wysokość nakreśloną na jeden bok i dwa kąty przy tym boku leżące.

39. Wykreślić trójkąt znając sumę dwóch boków i kąty jednemu z nich przyległe (por. str. 75).

40. Wykreślić trójkąt znając różnicę r dwóch boków, bok trzeci c i kąt γ naprzeciw tego boku leżący. (Trójkąt pomocniczy składa się z r i kąta $90 + \frac{\gamma}{2}$, leżącego naprzeciw c. Przeprowadź analizę!)

41. Wykreślić trójkąt znając obwód u i dwa kąty α, β. (Trójkąt pomocniczy składa się z u, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$. Przeprowadź analizę!)

Rozdział VII.

Cztery linie proste. Czworoboki.

§ 46. Podział czworoboków.

Widzieliśmy, że trzy linie proste na płaszczyźnie mogą mieć cztery rozmaite położenia względem siebie. O wiele większą różnorodność położeń przedstawiają cztery proste. (Wymień i wykreśl wszystkie możliwe typowe położenia!) Z pomiędzy tych utworów tylko niektóre przedstawiają dla nas szczególny interes.

* I tak zajmiemy się najpierw najogólniejszym przypadkiem, t. j. czterema prostemi, z których żadne dwie nie są równoległe, ani żadne trzy nie schodzą się w jednym punkcie.

Taki utwór geometryczny nazywamy czworobokiem zupełnym. Ma on sześć wierzchołków. Linie, łączące wierzchołki, które leżą na różnych bokach, nazywamy przekątniami. Czworobok zupełny ma trzy przekątnie (kreskowane linie!). W geometryi elementarnej zajmujemy się tylko czworobokiem niezupełnym, to znaczy albo częścią $ABDF$, albo też częścią $AEDC$ z opuszczeniem odcinków FD i BD. Wyłączamy zaś z naszych rozważań czworoboki takie, jak $FEDBC$, w których boki przeciwległe przecinają się ze sobą.

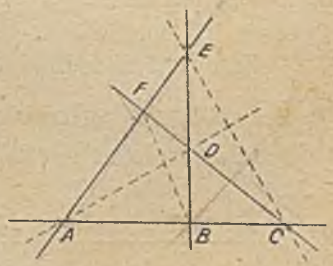


Fig. 111.

Utworem geometrycznym wzajemnym do czworoboku zupełnego jest czworokąt zupełny (lub czworopunkt). Jestto utwór geometryczny składający się z czterech punktów i wszystkich linii prostych, łączących po dwa z tych punktów. Ma on więc sześć boków i trzy t. zw. punkty przekątnie, to znaczy punkty przecięcia się przeciwległych boków (EFG) (fig. na str. 80.). Z takiego czworokąta zupełnego rozważa się w geometryi elementarnej tylko czworokąt niezupełny, zamknięty bokami a, b, c, d. W geometryi elementarnej nie robimy żadnej różnicy między czworobokiem, a czworokątem. Jeden i drugi ma cztery boki, cztery wierzchołki (kąty) i dwie przekątnie. *

---

*) Ustępy oznaczone gwiazdkami są przeznaczone tylko dla szkół realnych.

Utwór geometryczny złożony z czterech odcinków zamykających część płaszczyzny (ale tylko jedną część) nazywamy czworobokiem lub czworokątem. Prostą łączącą przeciwległe wierzchołki nazywamy przekątnią.

W każdym czworokącie suma kątów wewnętrznych wynosi 360°, ponieważ każdy można rozłożyć zapomocą przekątni na dwa trójkąty (po 180° suma kątów każdego trójkąta).

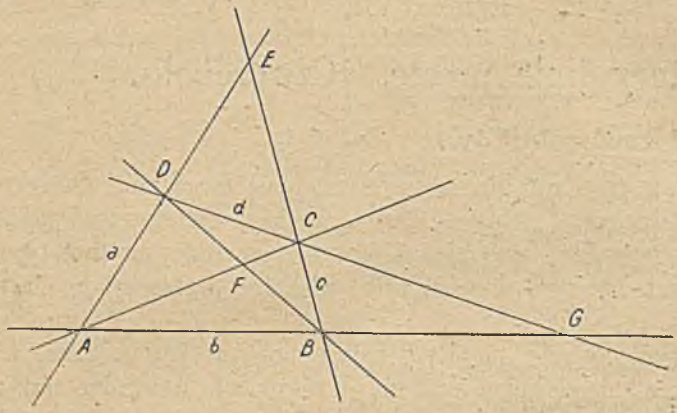


Fig. 112.

Stosownie do wzajemnego położenia czterech prostych ograniczających czworobok rozróżniamy trzy rodzaje czworoboków:

1. Jeżeli obydwie pary boków są liniami równoległemi, czworobok nazywa się równoległobokiem.

2. Jeżeli tylko jedna para boków jest równoległa, czworobok nazywa się trapezem.

3. Jeżeli żadna para boków nie jest równoległa, czworobok nazywa się trapezoidem.

Każdy z tych rodzajów podzielimy jeszcze na pewne gatunki.

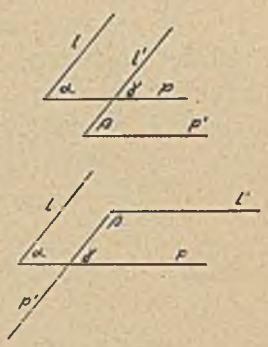
§ 47. Równoległoboki.

Równoległobok powstaje, jeżeli dwie proste równoległe: $c // d$ przetniemy drugą parą prostych równoległych: $a // b$. Odległość boków równoległych (n. p. c, d) nazywamy wysokością równoległoboku (należącą do podstawy c lub d). Opierając się na własnościach dwóch linii równoległych przeciętych trzecią spostrzegamy, że: sąsiednie kąty równoległoboku spełniają się do 180° (jako kąty jednostronne). Wobec tego: przeciwległe kąty równoległoboku są równe, albowiem kątowi α i kątowi β brakuje tyle-samo do 180°, mianowicie różnią się o kąt δ od 180°; tak samo $\gamma = \delta$, jako uzupełnienia do 180° tego samego kąta α.

Fig. 113.

Twierdzenie to można odwrócić: Jeżeli w jakimś czworoboku kąty przeciwległe są równe, to czworobok jest równoległobokiem (to i boki przeciwległe są równoległe). Dowód: Jeżeli $\alpha = \beta$ i $\gamma = \delta$ to $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, a więc muszą wynosić po 180^0. Jeżeli zaś kąty jednostronne wynoszą po 180^0, to linie przecięte są równoległe: $c // d$. Taksamo wykaże się o bokach a i b.

Równość kątów równoległoboku jest więc jego własnością charakterystyczną. To znaczy: warunkiem koniecznym a zarazem wystarczającym, aby jakiś czworokąt był równoległobokiem, jest równość obydwu par kątów przeciwległych. Kąty przeciwległe równoległoboku mają ramiona parami równoległe. Nasuwa się pytanie, czy zawsze kąty o ramionach parami równoległych są sobie równe? Otóż jeżeli ramiona takich kątów odpowiednio przedłużymy do przecięcia się z drugą parą ramion, to albo otrzymamy równoległobok, albo jedną z figur 114.



114.

W figurze pierwszej, tak jak w równoległoboku, jest prawe ramię równoległe do prawego, lewe do lewego. Kąt $\alpha = \gamma$ jako kąty odpowiednie, $\beta = \gamma$ z tej samej przyczyny, więc $\alpha = \beta$.

W figurze drugiej jest lewe ramię równoległe do prawego: $l // p'$, a prawe do lewego: $p // l'$. Kąt $\alpha = \gamma$, ale $\gamma + \beta = 180^0$, więc i $\alpha + \beta = 180^0$. Otóż:

$$\alpha + \beta = 180^0.$$

Kąty, których ramiona są zgodnie równoległe, są równe, kąty zaś, których ramiona są niezgodnie równoległe, spełniają się do 180^0.

Jeżeli mamy dwa kąty α i β o ramionach zgodnie prostopadłych i obrócimy jeden z kątów, n. p. α około jego wierzchołka o 90^0 (konstukcya!), to otrzymamy kąt o ramionach zgodnie równoległych, a więc równy kątowi β. Kąt ten musiał więc i przed obrotem być równy kątowi β, ponieważ przy obrocie wielkość kąta nie ulega zmianie. Stąd często używane twierdzenie: Kąty, których ramiona są zgodnie prostopadłe, są równe. Zupełnie tak samo można dowieść, że: Kąty, których ramiona są niezgodnie prostopadłe, spełniają się do 180^0.

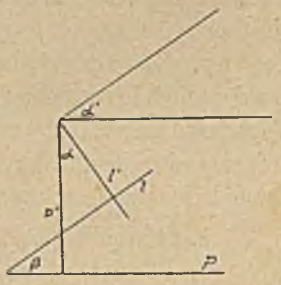


Fig. 115.

Uwaga: Żadne z tych twierdzeń nie da się odwrócić.

Podobny związek, jaki istnieje między kątami równoległoboku, istnieje także między bokami. Mianowicie przekątnia dzieli każdy równoległobok na

dwa przystające trójkąty. (Udowodnij!) A więc także: boki przeciwległe równoległoboku są równe.

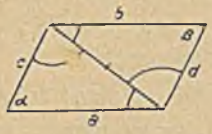


Fig. 116.

$a = b$, $c = d$. Jestto także własność charakterystyczna dla równoległoboku (udowodnij! [IV]).

Własność tę wyrażamy także twierdzeniem: Odcinki prostych równoległych odcięte drugą parą prostych równoległych są sobie równe. (Mniej poprawnie wypowiada się nieraz to twierdzenie tak: równoległe między równoległemi są sobie równe.) Podobnie charakterystyczną własnością równoległoboku jest: dwa bok przeciwległe są równe i równoległe, stąd już bo... wynika równość i równoległość drugiej pary boków (udowodnij!). W zastosowaniu do ruchu postępowego możemy ostatnie twierdzenie także tak wypowiedzieć: przy ruchu postępowym odcinek zakreśla albo linię prostą, albo równoległobok.

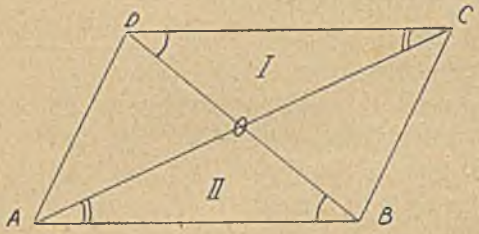


Fig. 117.

Czwartą własnością charakterystyczną równoległoboków jest: przekątnie równoległoboku połowią się.

Z przystawania trójkątów I. i II. (według drugiego przypadku przystawania) wynika istotnie, że $DO = OB$ i $AO = OC$. Udowodnij odwrócenie tego twierdzenia!

Podział równoległoboków. Jeżeli w równoległoboku jeden kąt jest prosty, to i wszystkie inne muszą być proste (dlaczego?). Taki równoległobok nazywa się prostokątnym. Jeżeli jeden kąt jest ostry, to i przeciwległy jest ostry, a sąsiednie rozwarte. Równoległobok taki nazywa się ukośnokątny. Inny podział można przeprowadzić ze względu na boki: Jeżeli dwa boki sąsiednie są sobie równe, to i pozostałe dwa są im równe; taki równoległobok nazywa się równoboczny. Jeżeli dwa sąsiednie boki są nierówne, równoległobok nazywa się różnoboczny. Mamy więc cztery możliwe kombinacye tych własności:

1. Równoległobok prostokątny i równoboczny nazywa się kwadratem.
2. Równoległobok ukośnokątny i równoboczny nazywa się rombem.
3. Równoległobok prostokątny i różnoboczny nazywa się prostokątem.
4. Równoległobok ukośnokątny i różnoboczny nazywa się romboidem.

Łatwo spostrzedz, że kwadrat ma cztery osie symetryi, prostokąt i romb dwie, a romboid niema żadnej.

Te cztery gatunki równoległoboków można także odróżnić według własności przekątni. I tak: w równoległobokach prostokątnych przekątnie nietylko się połowią, ale są równe; w równoległobokach zaś równobocznych przekątnie są prostopadłe do siebie. Odwrotnie: Jeżeli w równoległoboku przekątnie są równe, równoległobok jest prostokątny; jeżeli są prostopadłe, równoległobok jest równoboczny. (Dowody tych twierdzeń wynikają z przystawania odpowiednio dobranych trójkątów.)

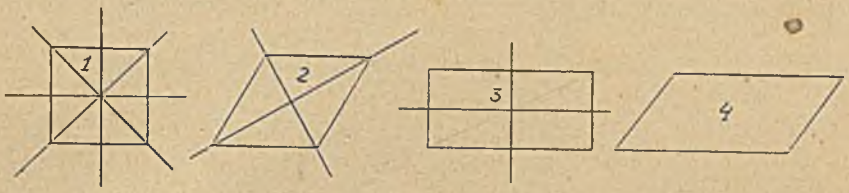


Fig. 118.

§ 48. Zastosowanie twierdzeń o równoległobokach do trójkątów.

Przy użyciu równoległoboków możemy wykazać, że trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Twierdzimy więc, że linie CD, BF i AE przecinają się w jednym punkcie. Dla dowodu wykreślmy przez trzy wierzchołki trójkąta linie równoległe do jego boków. W tym większym trójkącie linie CD, BF, AE, są symetralnemi boków, a więc muszą się przeciąć w jednym punkcie. (Istotnie linia CD, jako prostopadła do AB musi być prostopadłą i do drugiej linii równoległej, t. j. do ML; że ją trafia w środku, to wynika stąd, że $MC = AB$ jako przeciwległe boki równoległoboku, a także $CL = AB$, więc $MC = LC = \frac{1}{2} ML$. Tak samo dowodzi się o linii AE i BF.)

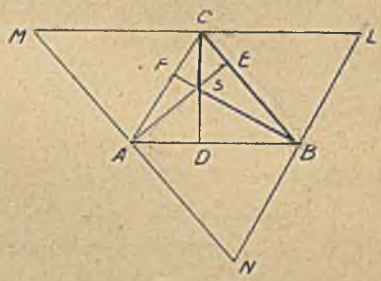


Fig. 119.

Czasem trzeba wysokości przedłużyć poza wierzchołek, lub poza ich spodek, aby znaleźć punkt przecięcia.

Trójkąt ABC wraz z wykreślonemi wysokościami ma tę własność, że jeżeli jeden z punktów A, B, C, S opuścimy, a z trzech innych utworzymy trójkąt, to punkt opuszczony jest właśnie punktem przecięcia się wysokości tego trójkąta. N. p. gdybyśmy opuścili punkt A, to trójkąt SBC ma jako wysokości linie ASE, CFA, BDA, schodzące się w punkcie A.

Punkt przecięcia się wysokości jest trzecim osobliwym punktem trójkąta. Punkt ten leży zwykle gdzieindziej, aniżeli środek koła wpisanego i środek koła opisanego.

Widzieliśmy w poprzedniej figurze, że prosta AB łącząca środki boków MN i NL trójkąta MNL była równoległa do podstawy ML i równa

połowie tej podstawy. Zachodzi pytanie, czy każdy trójkąt taką własność posiada?

Poprowadźmy w dowolnym trójkącie ze środka boku AC linię $DE \parallel AB$. Jeżeli poprowadzimy linię pomocniczą $EF \parallel AC$, to otrzymamy dwa trójkąty, CDE i EFB przystające według II. Albowiem $EF = AD$ jako boki przeciwległe równoległoboku zaś $AD = DC$, więc $EF = DC$, a odpowiednie kąty są równe (dlaczego?). Z przystawania wynika $CE = BE$, to znaczy: linia DE połowi także bok CB. Z przystawania wynika także $DE = FB$; ponieważ jednak z drugiej strony $DE = AF$, przeto $AF = BF = \frac{1}{2} AB$, więc $DE = \frac{1}{2} AB$. Słowami: Linia wykreślona ze środka jednego boku trójkąta równolegle do drugiego połowi bok trzeci i równa się połowie boku równoległego.

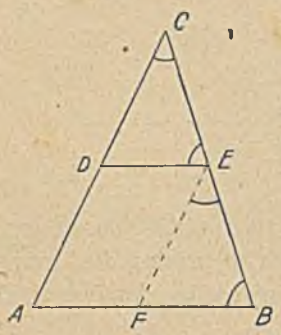


Fig 120.

Odwrotnie: Linia łącząca środki dwóch boków trójkąta jest równoległa do trzeciego i równa się jego połowie (dowód niewprost).

Opierając się na tem, zbadamy czwarty osobliwy punkt trójkąta: środek ciężkości. Jestto punkt, w którym się przecinają linie łączące wierzchołki trójkąta ze środkami boków przeciwległych, t. zw. linie dośrodkowe. (Punkt ten odgrywa ważną rolę w mechanice.)

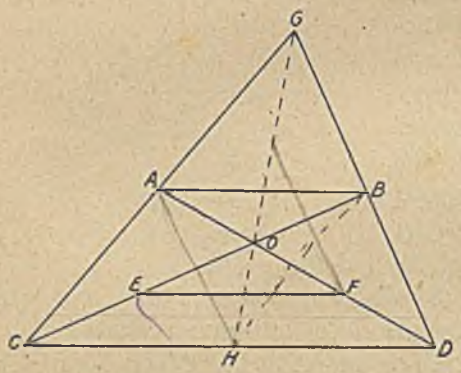


Fig. 121.

Założenie: $AC = AG$
$GB = BD$
$CH = DH$

Kreślimy linie pomocnicze: AB i FE łączącą środki odcinków CO i OD

$AB \parallel CD$ i $AB = \frac{1}{2} CD$ } według poprzedniego twierdzenia
$EF \parallel CD$ i $EF = \frac{1}{2} CD$

Stąd wynika: $EF \parallel AB$ i $EF = AB$.

Figura $EFBA$ jest więc równoległobokiem. Przekątnie połowią się, więc $FO = OA$, $EO = OB$. Ponieważ także $EO = CE$ to $EO = CE = BO$ zatem $OB = \frac{1}{3} CB$.

Tak samo ponieważ $OF = 1\ D$ więc $OF = FD = AO$ czyli $AO = \frac{1}{3} AD$.

Taką samą własność dowiedlibyśmy, biorąc pod uwagę AD i GH. Byłoby $HO' = \frac{1}{3} GH$ i $AO' = \frac{1}{3} AD$. A więc $AO' = AO$, a to znaczy,

że punkt przecięcia się wszystkich trzech dośrodkowych jest wspólny. Wykazaliśmy w ten sposób istnienie środka ciężkości. Okazało się przytem jednak także, że środek ciężkości leży na dośrodkowej w $^1/_3$ części odległości środka boku od przeciwległego wierzchołka.

§ 49. Warunki wyznaczające równoległoboki. Konstrukcye.

Ponieważ każdy czworokąt można zapomocą przekątni rozdzielić na dwa trójkąty, przeto do wyznaczenia czworokąta trzeba — zdawałoby się — sześć warunków: jednakże w tych dwóch trójkątach jest zawsze jeden bok wspólny, wystarczy więc zawsze pięć warunków; a więc i przystawanie czworokątów będzie zapewnione, jeżeli sprawdzimy równość pięciu kawałków odpowiednio dobranych i następujących po sobie w tym samym porządku. (Nie wystarczy więc, jeżeli dwa czworoboki mają, n. p. wszystkie cztery boki parami równe!)

Dla równoległoboków wystarczają trzy warunki, ponieważ składają się z dwóch przystających trójkątów. (Dwa warunki są zawarte w słowie: równoległobok; pozostają więc trzy). Konstrukcyę wykonujemy najczęściej metodą figur pomocniczych: budujemy jeden trójkąt i uzupełniamy go trójkątem przystającym.

Jeżeli dodamy, że równoległobok ma być prostokątny lub równoboczny, dorzucamy przezto jeszcze jeden warunek, trzeba więc podać jeszcze tylko dwa warunki. Jeżeli wreszcie równoległobok ma być równocześnie i prostokątny i równoboczny, wystarczy podać jeszcze tylko jeden warunek. A więc:

1. kwadrat można zbudować znając jeden bok,
2. prostokąt „ „ „ dwa boki,
3. romb „ „ „ jeden bok i jeden kąt,
4. romboid „ „ „ dwa boki i kąt.

Zamiast tych typowych, najprostszych danych, mogą być podane także inne części, ale zawsze w odpowiedniej liczbie. N. p. dla kwadratu: jedna przekątnia; dla prostokąta: bok i przekątnia, bok i jego kąt z przekątnią; kąt między przekątniami zawarty i jedna przekątnia i t. p.; dla rombu: bok i przekątnia, kąt ostry i przekątnia, dwie przekątnie i t. p.; dla romboidu: dwa boki i przekątnia, dwie przekątnie i kąt między niemi i t. p.

Zbadać związek tych rozmaitych konstrukcyi z przypadkami przystawania trójkątów!

§ 50. Trapez.

Trapezem nazwaliśmy czworobok, w którym dwa boki są równoległe, dwa inne nie. Tu kąty leżące przy tym samym boku nierównoległym (do żadnego) spełniają się także, jak w równoległoboku do 180°, ale kąty prze-

ciwległe już nie są równe. Boki także mogą być dwa a nawet trzy równe, ale cztery nie. Jeżeli boki nierównoległe są równe, trapez nazywa się równoramienny (symetrya!).

Bardzo ważną linią jest prosta, łącząca środki boków nierównoległych, czyli: linia środkowa trapezu. Ma ona własności podobne, jak linia łącząca środki dwóch boków trójkąta; mianowicie: Linia środkowa trapezu jest: 1. równoległa do boków równoległych i jest: 2. ich średnią arytmetyczną (t. j. połową sumy).

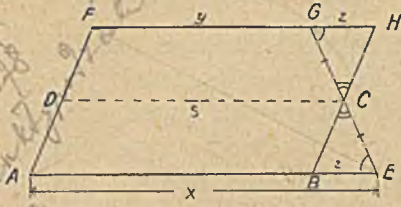


Fig. 122.

Dowód: 1. Przez środek boku GE przeprowadźmy linię $HB \parallel FA$ i przedłużmy FG do przecięcia się z tą linią. Figura $ABHF$ jest równoległobokiem, więc $HB = FA$. Ale z przystawania trójkątów CBE i GHC (według II) wynika, że $BC = HC$, że więc i bok HB jest przepołowiony. Ponieważ zaś całe $FA = HB$ to i połowy są równe, czyli: $DA = BC$. Stąd wynika, że figura $DABC$ jest równoległobokiem (bo nietylko $DA = BC$, ale $DA \parallel BC$) a więc linia środkowa DC jest równoległa do AE, a więc i do FH.

Twierdzenie to jest właściwie odwróceniem twierdzenia o liniach równoległych z § 27.

$$2.\ \left.\begin{array}{l} s = x - z \\ s = y + z \end{array}\right\} \text{ stąd } 2s = x + y \text{ czyli } s = \frac{x+y}{2}$$

W trójkącie było $s = \frac{x}{2}$, ponieważ trójkąt można uważać za graniczny przypadek trapezu, którego bok górny y maleje do zera: możnaby więc napisać dla trójkąta $s = \frac{x+o}{2}$.

Do zbudowania trapezu potrzebne są cztery kawałki; piątym warunkiem jest bowiem równoległość jednej pary boków. N. p. wystarczą części a, b, α, γ lub a, b, c, d. Używa się zwykle metody figur pomocniczych, mianowicie buduje się najpierw trójkąt ABE, którego bok $BE \parallel DC$ a później uzupełnia się go równoległobokiem $BECD$.

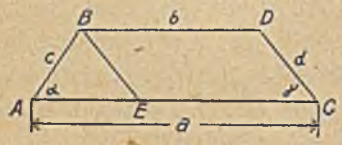


Fig. 123.

Dla trapezu równoramiennego wystarczą trzy warunki.

§ 51. Trapezoidy. Deltoid.

Trapezoidem nazwaliśmy czworobok, w którym żadna para boków nie jest równoległa. Do konstrukcyi trapezoidu potrzeba więc już wszystkich pięciu warunków, o których wspominaliśmy już niejednokrotnie.

Z pomiędzy trapezoidów na uwagę zasługuje: deltoid. Jestto czworobok, w którym po dwa boki sąsiednie są równe, a przeciwległe nierówne. Przekątnie deltoidu są prostopadłe, a jedna z nich jest przepołowiona.

Dowód: Ponieważ $a = b$, to punkt A leży na symetralnej przekątni $B\,C$. Ponieważ $c = d$, to punkt D leży także na symetralnej przekątni $B\,C$. Prosta, wyznaczona przez punkty A i D jest więc symetralną przekątni $B\,C$.

Stąd także wynika, że deltoid jest figurą symetryczną, posiada bowiem jedną oś symetryi.

Do konstrukcyi deltoidu wystarczą trzy warunki, ponieważ dwa warunki są zawarte w równościach: $a = b$, $c = d$.

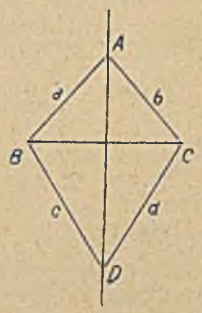


Fig. 124.

§ 52. Czworoboki wpisane w koło.

W każdy trójkąt da się wpisać koło i na każdym można opisać koło. Czworoboki już nie wszystkie mają tę własność. N. p. w prostokąt nie da się wpisać koło, a na rombie nie da się opisać koło.

Zbadajmy więc najpierw, jaką szczególną właściwość musi posiadać czworokąt, aby się na nim dało opisać koło. W tym celu rozważmy własności jakiegokolwiek czworokąta wpisanego w koło, n. p. trapezoidu. Dowolne cztery punkty na obwodzie koła połączmy po kolei cięciwami. Wierzchołki przeciwległe połączmy ze środkiem koła.

$\alpha = \frac{\gamma}{2}$ jako kąt obwodowy wspierający się na tymsamym łuku $D\,C\,B$.

$\beta = \frac{\delta}{2}$ Tak samo więc i ich sumy są równe:

$$\alpha + \beta = \frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{360^0}{2} = 180^0.$$

Fig. 125.

Ponieważ zaś suma wszystkich kątów czworokąta $A\,B\,C\,D$ wynosi 360^0, przeto i $\varepsilon + \zeta = 180^0$, czyli: $\alpha + \beta = \varepsilon + \zeta$. Słowami: W każdym czworokącie w koło wpisanym sumy kątów przeciwległych są sobie równe, mianowicie wynoszą po 180^0.

Nie wiemy jeszcze, czy ta własność jest charakterystyczna, to znaczy, czy odwrotnie: na każdym czworokącie, w którym kąty przeciwległe spełniają się do 180^0, da się opisać koło.

Udowodnimy to najszybciej niewprost (fig. 126): Gdyby $\sphericalangle C + \sphericalangle A = 180^0$ i $\sphericalangle D + \sphericalangle B = 180^0$, a mimoto czwarty wierzchołek A nie leżał na kole, (trzy wierzchołki zawsze można umieścić na obwodzie koła), to jakiś inny

punkt A' boku DA leżałby na kole. Wtedy jednak według poprzedniego twierdzenia musiałoby być $\alpha + \beta' = 180^0$, a że także $\alpha + \beta = 180^0$, więc mielibyśmy: $\beta' = \beta$, a to niemożliwe, bo β' jest kątem zewnętrznym trójkąta $BA'A$. Tak samo nie może leżeć A wewnątrz koła, musi więc leżeć na samem kole. Otóż na całym czworokącie da się opisać koło.

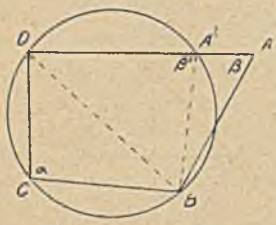


Fig. 126.

(Spełnianie się kątów przeciwległych jest własnością charakterystyczną dla czworokątów w koło wpisanych.)

Z pomiędzy równoległoboków tylko na prostokącie i kwadracie da się koło opisać, z pomiędzy trapezów tylko na trapezie równoramiennym.

Do konstrukcyi czworokątów, o których wiemy, że się dadzą wpisać w koło, wystarczą cztery warunki: piątym jest równość $\alpha + \beta = \varepsilon + \zeta$.

§ 53. Czworoboki opisane na kole.

Aby wykryć własność odróżniającą czworoboki opisane na kole od innych czworoboków, opiszemy na dowolnem kole czworobok. Wykreślamy w tym celu styczne w czterech dowolnych punktach koła.

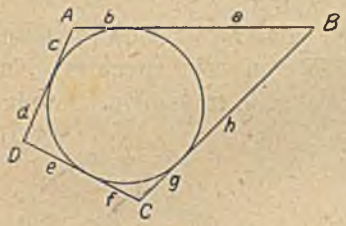


Fig. 127.

Odcinki stycznych z punktu poza kołem do punktów styczności są równe. Otóż

$$\left.\begin{array}{l} a = h \\ f = g \\ e = d \\ \quad = c \end{array}\right\} \text{stąd } a + b + c + f = h + g + d + c$$

czyli $AB + CD = CB + AD$.

(Otóż w każdym czworokącie opisanym na kole sumy boków przeciwległych są równe.) Łatwo wykazać, że warunek ten jest nietylko konieczny, ale i wystarczający. Innemi słowami: (Jeżeli w jakimś czworokącie sumy boków przeciwległych są równe, w czworokąt ten da się wpisać koło.)

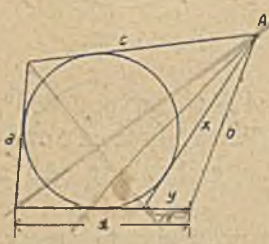


Fig. 128.

Dowód niewprost: Weźmy czworokąt, w którym $a + b = c + d$.

Gdyby koło wpisane dotykało tylko trzech boków a, d, c, a czwarty leżał poza kołem, to z punktu A poprowadzilibyśmy styczną x. Wtedy według poprzedniego twierdzenia mielibyśmy: $a + x = c + d - y$. Ale zamiast $c + d$ można podstawić $a + b$, więc $a + x = a + b - y$, czyli po odjęciu po obu stronach odcinka a otrzymamy: $x = b - y$.

Byłby więc jeden bok trójkąta równy różnicy dwóch innych, a to niemożliwe. Do takiego samego błędnego wniosku doszlibyśmy przypuszczając,

że bok b jest sieczną koła. Pozostaje więc jedyna możliwość: bok b jest także styczny do koła, a więc w ten czworokąt da się wpisać koło.

Z pomiędzy równoległoboków tylko w romb i w kwadrat da się wpisać koło; z pomiędzy trapezoidów w każdy deltoid i w trapezoidy mające równe sumy boków przeciwległych; tak samo w trapezy, tylko niektóre.

Do konstrukcyi czworoboków, o których wiemy, że się dadzą opisać na kole, wystarczają cztery warunki; piątym jest równość $a + b = c + d$.

Ćwiczenia VII.

§ 46. 1. Wykreślić wszystkie możliwe typowe położenia czterech prostych względem siebie.

2. Ile wynosi suma kątów zewnętrznych w czworokącie (niezupełnym) powstałych przez przedłużenie czterech boków (każdego poza jeden wierzchołek).

§ 47—49. 3. Jaki związek zachodzi między dwoma kątami, których jedna para ramion jest równoległa a druga prostopadła?

4. Wykazać, że czworobok, w którym dwa boki przeciwległe są równe i równoległe, jest równoległobokiem.

5. Wykazać, że prosta łącząca środki przeciwległych boków rownoległoboku jest równoległa do drugiej pary boków.

6. Wykazać, że przekątnie są osiami symetryi kwadratu.

7. Wykazać, że linie łączące środki boków prostokąta są jego osiami symetryi.

8. Wykazać, że równoległobok, w którym przekątnie są prostopadłe, jest równoboczny.

9. Wykazać, że równoległobok, w którym przekątnie są równe, jest prostokątem.

10. Wykazać, że każdy odcinek łączący dwa przeciwległe boki równoległoboku a przechodzący przez punkt przecięcia przekątni, jest przepołowiony. (Symetrya środkowa!)

11. Wykazać, że punkty połowiące boki dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku (dla dowodu wykreślić przekątnie czworokąta).

12. Wykazać, że trójkąt MNL na Fig. 119 składa się z czterech trójkątów przystających do ABC. Jakie stąd ogólne twierdzenie?

13. Wykreślić punkt przecięcia się wysokości w dowolnym trójkącie ostrokątnym, prostokątnym, rozwartokątnym. Co spostrzeżemy?

14. Udowodnić, że dwusieczne kątów każdego równoległoboku zamykają prostokąt.

15. Wykreślić środek ciężkości dowolnego trójkąta.

16. W dowolnym trójkącie rozwartokątnym wykreślić cztery punkty osobliwe.

17. Wykazać, że w trójkącie równobocznym wszystkie cztery osobliwe punkty nakrywają się.

18. Przepołowić bok trójkąta, którego wierzchołki są niedostępne (przy pomocy linii równoległej!).

19. Udowodnić prawdziwość twierdzenia: Jeżeli wierzchołki trójkąta są od pewnej prostej dowolnej odległe a odcinki x_1, x_2, x_3, to odległość środka ciężkości

trójkąta od tej prostej jest średnią arytmetyczną tych trzech odległości, t. j. $r = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ (patrz str. 48, str. 86 i fig. 129).

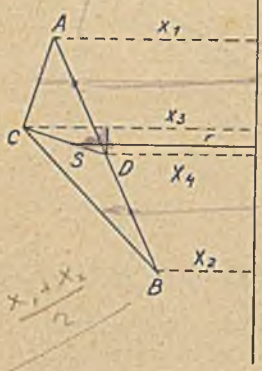


Fig. 129.

20. Zbudować kwadrat znając: *a*) jeden bok, *b*) przekątnię, *c*) obwód.

21. Zbudować prostokąt znając: *a*) dwa boki, *b*) bok i przekątnię, *c*) bok i jego kąt z przekątnią, *d*) przekątnię i kąt między przekątniami zawarty.

22. Na danym prostokącie opisać koło.

23. Zbudować romb znając: *a*) jeden bok i jeden kąt, *b*) bok i przekątnię, *c*) dwie przekątnie, *d*) kąt ostry i przekątnię.

24. Wpisać koło w podany romb.

25. Zbudować romboid znając: *a*) dwa boki i jeden kąt, *b*) dwa boki i przekątnię, *c*) dwie przekątnie i kąt między niemi zawarty.

26. Podać sposób wykreślenia linii równoległych przy pomocy równoległoboku.

27. Z punktu *P* leżącego na polu kąta poprowadzić linię prostą w kierunku wierzchołka — jeżeli wierzchołek jest niedostępny. (Objaśnienie: Punkt *P* uważa się za punkt przecięcia się trzech wysokości trójkąta. Prowadzi się z *P* prostopadle do ramion kąta, łączy się ich punkty przecięcia z ramionami nieprostopadłymi i prowadzi się z *P* trzecią wysokość.)

§ 50. 28. Znaleźć konstrukcyjnie średnią arytmetyczną dwóch odcinków: *a*) bez kreślenia linii równoległych; *b*) przy pomocy trzech linii równoległych.

29. Zbudować trapez znając: *a*) dwa boki równoległe i dwa kąty leżące przy jednym z nich, *b*) cztery boki, *c*) trzy boki i przekątnię, *d*) trzy boki i wysokość.

30. Jak długich sznurów trzeba użyć do zawieszenia t. zw. trapezu do gimnastyki, jeżeli sam trapez ma 80 *cm* długości, wysokość sali wynosi 7 *m*, a punkty przytwierdzenia sznurów są od siebie o 2 *m* odległe. Rozwiązać zadanie konstrukcyą geometryczną w zmniejszonej podziałce.

31. Narysować przekrój koryta rzeki uregulowanej, znając szerokość koryta u dołu (6 *m*), głębokość koryta (3 *m*) i nachylenie ścian bocznych do poziomu ($\alpha = 60^0$).

§ 51. 32. Wykreślić trapezoid znając: *a*) cztery boki i jeden kąt, *b*) cztery boki i jedną przekątnię. Jakie inne dane wyznaczają trapezoid?

33. Wykreślić deltoid znając: *a*) dwie przekątnie i jeden bok, *b*) dwa boki nierówne i kąt zawarty między bokami równymi.

§ 52. 34. Znaleźć punkt równo oddalony od czterech danych punktów. Kiedy to zadanie jest wykonalne?

§ 53. 35. Znaleźć punkt równo oddalony od czterech danych prostych. Kiedy to zadanie jest wykonalne?

36. W czworoboku znamy trzy boki i jeden kąt i wiemy, że da się wpisać w koło. Zbudować ten czworokąt i opisać na nim koło.

37. W czworoboku znamy dwa boki i dwa kąty przy jednym z nich leżące i wiemy, że się da opisać na kole. Zbudować ten czworokąt i wpisać koło.

Rozdział VIII.

Wieloboki.

§ 54. Opis wieloboków. Kąty.

Rozważając wzajemne położenie większej liczby prostych spostrzegamy naturalnie jeszcze większą różnorodność, aniżeli przy czterech liniach prostych. *Część płaszczyzny zamkniętą kilkoma liniami prostemi* nazywamy *wielobokiem lub wielokątem.*

Rozróżniamy dwa zasadnicze typy wielokątów: *wypukłe i wklęsłe.* Wielobok nazywa się wypukły, jeżeli cały leży po jednej stronie *każdego* ze swych boków, ściślej: każdej prostej ograniczającej go. Tak n. p. wielobok I jest wypukły, wielobok zaś II wklęsły, ponieważ wprawdzie leży po jednej stronie boków *a*, *b*, *e*, ale nie leży cały po jednej stronie boku *d* lub *e*.

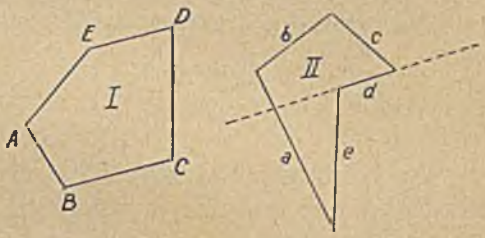


Fig. 130.

Z pomiędzy tych wieloboków wklęsłych ciekawe są t. zw. wieloboki gwieździste: są to wieloboki, w których także przeciwległe boki przecinają się ze sobą, n. p. pięciobok *ABCDE* na fig. 131.

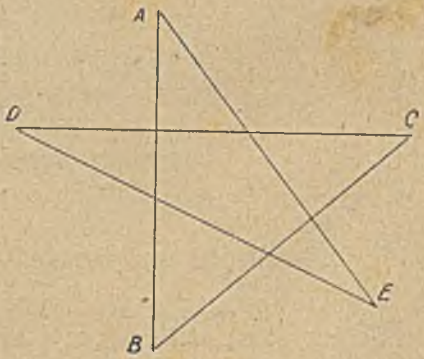


Fig. 131.

W dalszym ciągu zajmiemy się wyłącznie wielobokami *wypukłymi.* Żaden kąt wieloboku wypukłego nie może przekraczać 180° (dlaczego?).

Sumę kątów każdego wieloboku wypukłego łatwo obliczyć, rozkładając go zapomocą przekątni wychodzących z jednego wierzchołka na trójkąty. N. p. z siedmioboku powstanie pięć takich trójkątów, więc suma kątów wynosi $5 \cdot 2\ R = 10\ R$.

(Ile przekątni można poprowadzić z jednego wierzchołka n-boku? Na ile trójkątów rozpadnie się wskutek tego n-bok? Ile przekątni można poprowadzić z wszystkich wierzchołków?)

Sumę kątów zewnętrznych każdego wieloboku obliczymy zapomocą obrotu. Wyobraźmy sobie, że prostą AX obróciliśmy o kąt α i bez obrotu przesunęliśmy od A do punktu B, następnie tu obracamy naszą prostą o $\sphericalangle \beta$, i przesuwamy do punktu C i t. d. Jasnem jest, że wróciwszy do punktu A, wykonaliśmy jeden pełny obrót. Stąd wniosek:

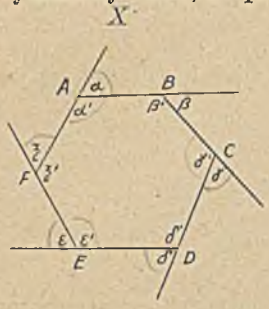


Fig. 132.

W każdym wielokącie suma kątów zewnętrznych (po jednemu z każdego wierzchołka) *wynosi* 360^0 (4 R).

Stąd bez pomocy przekątni możemy obliczyć sumę kątów wewnętrznych. Jeżeli ich jest n, to dodając kąty wewnętrzne do zewnętrznych, otrzymamy

$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' + \ldots = n.\ 2\ R$, ponieważ tworzą n par kątów przyległych.

Z tego jednak $4\,R$ odpada na kąty zewnętrzne i zostaje:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots = n\,.\,2\,R - 4\,R = (n-2)\,.\,2\,R.$$

Słowami: *aby znaleźć sumę kątów wewnętrznych dowolnego wielokąta wypukłego, trzeba wziąć tyle razy po 2 R, ile jest wierzchołków i odjąć 4 R.*

Do konstrukcyi wielokątów, a więc i do sprawdzenia przystawania potrzeba większej liczby części składowych.

Mianowicie: Dla pięciokąta trzeba $3 + 2 + 2 = 7$ części, dla sześciokąta: $3 + 2 + 2 + 2 = 9$ części, dla n kąta $2\,(n-2) + 1 = 2\,n - 3$ części, albowiem: Po rozłożeniu wielokąta na trójkąty zapomocą przekątni widzimy, że do wyznaczenia pierwszego trójkąta potrzeba trzech części. Do każdego dalszego wystarczą dwie, trzecią bowiem może być n. p. bok poprzedniego trójkąta. Trójkątów jest: dla n boku $n - 2$, stąd otrzymana poprzednio liczba: $2\,n - 3$ *części.*

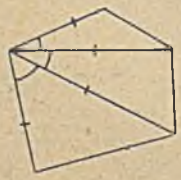


Fig. 133.

§ 55. Wieloboki umiarowe.

Wielobok, mający wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe nazywa sie *umiarowy*, n. p. trójkąt równoboczny, kwadrat. Kąt wieloboku umiarowego łatwo obliczyć znając sumę wszystkich kątów. Wieloboki umiarowe są figurami symetrycznemi. Widzieliśmy, że trójkąt równoboczny miał trzy osie symetryi, kwadrat cztery; spodziewamy się, że pięciokąt umiarowy będzie miał pięć osi symetryi, sześciokąt 6 i t. d. — Że

tak jest istotnie, wykażemy n. p. dla pięciokąta umiarowego. Poprowadźmy symetralną któregokolwiek kąta, n. p. $\sphericalangle C$ i połączmy punkty A i B: $ACX \cong BCX$ (I) więc linia CX jest symetralną odcinka AB. Punkty A i B leżą więc symetrycznie.

W figurze $ABDE$ kąty przy boku AB są równe, jako reszty pozostałe po odjęciu równych kątów α i β od równych kątów A i B. Także boki BE i AD są równe, zatem ta figura jest trapezem równoramiennym; symetralna boku równoległego jest osią symetryi całej figury. Razem więc: część $CBEZX$ jest symetryczna względem $CADZX$.

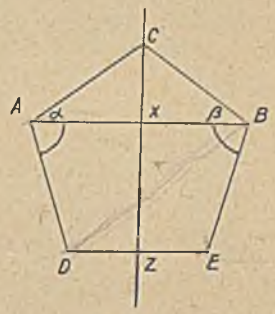


Fig. 135.

Podobnie wykazuje sie o każdym wielokącie. Ogólnie więc: wielobok ma tyle osi symetryi, ile boków (lub wierzchołków).

Uwaga: na tej symetryi polega zastosowanie wielokątów umiarowych do ornamentacyi (mozaiki, parkety, witraże).

Każdy wielokąt umiarowy da się wpisać w koło i opisać na kole, t. z. posiada punkt równo oddalony od wszystkich wierzchołków i równo oddalony od wszystkich boków. Co więcej: obydwa te punkty nakrywają się.

Dowód: Wykreślmy symetralną XX któregokolwiek boku wielokąta umiarowego, n. p. boku AB. Przez punkty ABC przeprowadźmy koło. Ponieważ środek koła leży na symetralnej każdej cięciwy, a więc i linia XX przechodzi przez środek koła. Każda zaś linia prosta, przechodząca przez środek koła jest jego osią symetryi. Zwróćmy teraz uwagę na czwarty wierzchołek wielokąta: ponieważ XX jest osią symetryi całego wielokąta, to punkt D leży symetrycznie do C, a więc także na temsamem kole, które łączy CAB. Widzimy więc, że koło łączące trzy wierzchołki wielokąta umiarowego przechodzi także przez czwarty. Stosując tosamo rozumowanie do punktów A, B, D i F, a później do dalszych wierzchołków, dochodzimy do wniosku, że wszystkie wierzchołki wielokąta umiarowego leżą na temsamem kole. Aby środek tego koła znaleźć, wystarczy wykreślić linie symetralne dwóch boków. Wszystkie inne symetralne muszą przejść przez tensam punkt (dlaczego?). Podobne rozumowanie, zastosowane do symetralnej kąta wykazuje, że w każdy umiarowy wielobok da się wpisać koło. Mianowicie: Koło dotykające trzech boków w punktach A, B, C, musi mieć względem prostej YY (symetralnej kąta) symetrycznie punkt styczności D

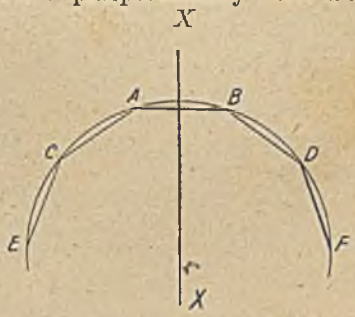


Fig. 135.

z prostą PD, symetryczną do QA i t. d. Jeżeli liczba boków jest nieparzysta, to symetralna kąta jest zarazem symetralną boku przeciwległego. Wtedy naturalnie punkt przecięcia się symetralnych boków i symetralnych kątów jest tensam. Jeżeli liczba boków jest parzysta, to wskutek symetryi linie symetralne połowią się (co zresztą łatwo wykazać przy pomocy przystawania trójkątów [II]). Ich punkt przecięcia jest więc równo oddalony od wszystkich boków (bo odcinki symetralnych boków są właśnie „odległościami") musi więc leżeć na symetralnych wszystkich kątów.

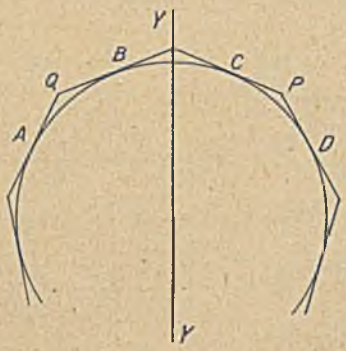


Fig. 136.

Ten wspólny punkt nazywamy krótko środkiem wielokąta. (Łatwo okazać z rozważania symetryi, że jestto zarazem środek ciężkości wielokąta. Oprzeć się na mechanicznem określeniu środka ciężkości!).

Jeżeli połączymy środek wielokąta z wierzchołkami, to kąt pełny w środku rozpadnie się na tyle równych części, ile wielobok ma boków. Przez to i koło opisane (lub wpisane) rozpadnie się na tylesamo równych części. Podział kąta pełnego *(lub koła)* — i wykreślenie wieloboka umiarowego, są to więc zadania równoważne. I tak trójkąt równoboczny potrafimy zbudować, więc potrafimy koło podzielić na *trzy równe części.* Kwadrat daje podział koła na *cztery równe części.* Poźniej poznamy sposób budowania (przy pomocy cyrkla i lineału a bez kątomierza) pięciokąta i dziesięciokąta umiarowego, nauczymy się więc zarazem koło dzielić na pięć i dziesięć równych części. Sześciokąt umiarowy pozwala podzielić koło na sześć równych części i to w sposób o wiele prostszy, aniżeli przy pomocy połowienia trzeciej części obwodu, otrzymanej zapomocą trójkąta równobocznego. Ponieważ bowiem $\alpha = 60^0$ to i na kąty β i γ zostaje po 60^0, trójkąt AOB jest więc równoboczny. Zatem: bok sześciokąta umiarowego równa się promieniowi koła opisanego. Aby więc w dane koło wpisać sześciokąt, wystarczy odciąć sześć razy promień (jako cięciwę) na obwodzie koła.

Fig. 137.

Podział koła na siedm części nie da się już uskutecznić przy pomocy linii i cyrkla; kątomierzem natomiast można tę konstrukcyę wykonać. Wrócimy poźniej do tych zadań przy nauce o obliczaniu obwodów i powierzchni.

Z symetryą wielokątów umiarowych wiąże się także szczególne zachowanie się ich przy obrotach.

Każdy wielokąt umiarowy da się przez pewne obroty, o kąt mniejszy od 360° sprowadzić do nakrycia z pierwotnem położeniem. I tak trójkąt równoboczny wystarczy obrócić około środka o 120°, aby nastąpiło dokładne nakrycie (punkt A padnie na B, B na C, a C na A). Po trzech takich obrotach wrócimy dokładnie do pierwotnego położenia wierzchołków. Podobnie kwadrat może wykonać obrót o 90°, a nie poznamy, że zmienił położenie. Po czterech obrotach wraca do pierwotnego położenia. Dla pięciokąta umiarowego mamy pięć takich obrotów po 72° i t. d. W ogólności każdy obrót sprowadzający dwa wierzchołki do nakrycia sprawia nakrycie się całej figury. Własność ta odróżnia wielokąty umiarowe od nieumiarowych. Żaden wielobok nieumiarowy nie ma tej własności, choćby nawet był figurą symetryczną. N. p. prostokąt, posiadający dwie osie symetryi można tak obrócić, że A padnie na B, C na D a mimoto inne części nie nakrywają się. Dopiero obrót o 180° sprowadza prostokąt do nakrycia z pierwotnem położeniem.

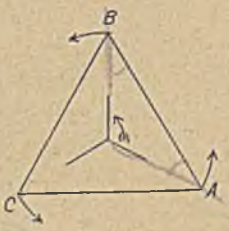


Fig. 138.

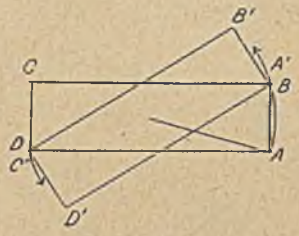


Fig. 139.

§ 56. Aproxymacya obwodu koła.

Jeżeli w koło wpiszemy wielobok umiarowy, a następnie każdy łuk przepołowimy i wpiszemy nowy wielokąt o podwójnej liczbie boków i postępujemy w ten sposób corazto dalej, spostrzegamy, że kształt tego wielokąta zbliża się corazto więcej do kształtu koła. Cięciwy coraz trudniej odróżnić od łuków a kąty obwodowe zbliżają się do 180°, tak, że coraz więcej zbliżamy się do jednostajnej, ciągłej zmiany kierunku, charakterystycznej dla koła i wielu innych linii krzywych. Mówimy więc: koło można przybliżać (aproxymować) corazto dokładniej zapomocą wieloboków umiarowych wpisanych (a taksamo opisanych). Z tego korzysta się przy obliczaniu długości obwodu i łuku koła, czem w osobnym ustępie będziemy się zajmowali.

Zdawaćby się mogło, że można koło aproxymować także zapomocą linii schodkowej, to znaczy wielokąta nieumiarowego (wklęsłego), którego co drugi wierzchołek leży na obwodzie, a którego boki są równoległe do dwóch średnich prostopadłych. Na oko takie przybliżanie się do koła może się nawet wydać usprawiedliwionem, ponieważ biorąc wierzchołki odpowiednio gęsto, nie odróżnilibyśmy tej linii od koła. Istotnie powierzchnię koła można wyczerpać takim wielokątem, ale obwodu wielokąta nie można uważać za przybliżony obwód koła. Kąty tutaj nie dążą do wspólnej granicy 180°; zmiana kierunku — jednostajna dla koła — tutaj odbywa się skokami po 90°! Gdyby taka aproxymacya była dozwolona, moglibyśmy odrazu z tej figury obliczyć obwód

koła: Mianowicie długość tych schodków równa się podwójnej średnicy CD, a wysokość podwójnej średnicy AB. Całkowita ich długość wynosi więc $2 . 2 r + 2 . 2 r = 8 r$ i to nawet w granicy, jeżeli schodki zagęszczają się w nieskończoność. Tymczasem na obwód koła otrzymuje się wartość mniejszą jak $7 r$ (mianowicie $6{\cdot}28318 . r$ patrz § 80).

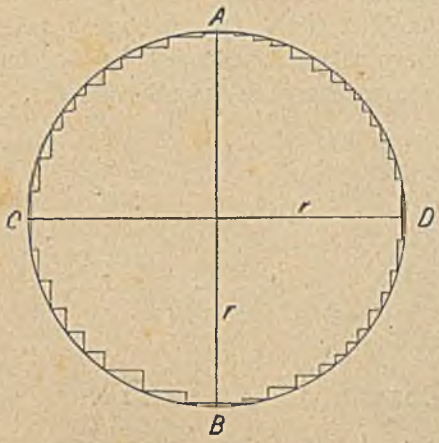


Fig. 140.

Ćwiczenia VIII.

§ 54—55. 1. Wymienić i wykreślić wszystkie możliwe typowe położenia pięciu linii prostych na płaszczyźnie.

2. Wykazać, że każdy wielobok gwieździsty jest wklęsły.

3. Obrawszy dowolnie 7 punktów na kole połączyć najpierw sąsiednie, potem co drugi kolejno, potem co trzeci i t. d. Ile rozmaitych wielokątów w ten sposób otrzymamy? Zrób tosamo z 6-kątem, 8-kątem!

4. Wykazać, że każda linia łamana wypukła jest krótsza od każdej innej linii łamanej łączącej jej skrajne punkty, a leżącej całkowicie po stronie wypukłości.

5. Ile wynosi jeden kąt 5-kąta, 7-kąta, 8-kąta, 9-kąta, 10-kąta umiarowego?

6. Ile części potrzeba do konstrukcyi nieumiarowego 6-kąta? Obierz te części dowolnie i zbuduj 6-kąt.

7. Czy dwa wielokąty mające wszystkie boki równe muszą być przystające?

8. Jakie pomiary należy wykonać, aby zrobić plan pola w postaci 8-kąta nieumiarowego?

9. Jakimi wielokątami umiarowymi możnaby zapełnić całą płaszczyznę bez luk i bez nakrywania się podwójnego? (Zbadaj kąty w punktach węzłowych!)

10. Jakie miejsca pozostaną wolne, jeżeli na płaszczyźnie poukładamy obok siebie kilka szeregów ośmiokątów umiarowych?

11. Wykreśliwszy przy pomocy kątomierza pięciobok umiarowy, opisać koło i wpisać koło.

12. Podzielić obwód koła: *a*) na 12 równych części, *b*) na 8, 16 równych części.

13. W ośmiokąt umiarowy wpisać koło.

14. Wykazać, że dwa kwadraty obrócone względem siebe o 45^0, a mające wspólny środek mają 8-kąt umiarowy, jako część wspólną (konstrukcya!).

15. Wykazać, że dwa trójkąty równoboczne obrócone o 60^0 mają jako część wspólną 6-kąt umiarowy. Zbadać symetryę tej figury!

16. Podzieliwszy koło na sześć równych części, przedłużyć promienie przechodzące przez punkty podziału o ich długość: z punktów końcowych zakreślić koła styczne zewnętrznie. Wykazać, że: *a*) te koła stykają się ze sobą, *b*) że ich środki są wierzchołkami sześcioboku umiarowego.

17. Czy romb ma przy obrotach tesame własności, co wielokąty umiarowe? Uzasadnij!

18. Zbudować z podanego boku: *a*) 6-kąt umiarowy, *b*) 8-kąt umiarowy.

19. Zbudować mając podany promień koła opisanego: *a*) 3-kąt równoboczny, *b*) 6-kąt umiarowy, *c*) 8-kąt umiarowy.

§ 56. 20. Wykreśliwszy koło o promieniu 1 *dm* przybliżać jego obwód zapomocą 6-boku, 12-boku, 24-boku i t. d. opisanego i wpisanego. Każdym razem zmierzyć obwód wieloboku opisanego i wpisanego. W jakich granicach zawiera się obwód koła?

Rozdział IX.

Proporcyonalność odcinków. Podobieństwo figur.

§ 57. Stosunek odcinków.

Mówiąc o mierzeniu odcinków (str. 10) podaliśmy już sposób znalezienia stosunku dwóch odcinków. Trzeba było jeden odcinek mierzyć drugim a pozostałą resztę dzielić na części drobniejsze i wykonywać mierzenie tą częścią mniejszą. Trudno było jednak z góry przewidzieć, na jakie części należy resztę podzielić.

Sposób systematyczny polega na t. zw. mierzeniu łańcuchowem, które jest geometrycznem odzwierciadleniem znanego z algebry dzielenia łańcuchowego używanego dla znalezienia największej wspólnej miary dwóch liczb (sposób Euklidesa).

Aby zmierzyć odcinek AB odcinkiem CD, odcinamy najpierw CD na AB. Pozostałą resztę EB odcinamy na CD, ile razy się da (n. p. na fig. 141 dwa razy) do punktu F. Resztę FD odcinamy na reszcie EB (w naszym przykładzie trzy razy), do punktu G. Resztę GB odcinamy na reszcie FD (w naszym przykładzie pięć razy) i t. d. Jeżeli mierzenie się skończy, to odcinek GB, którym mierzyliśmy ostatni raz, jest wspólną miarą obydwu odcinków AB i CD. Mieści się bowiem w naszym przykładzie pięć razy w FD.

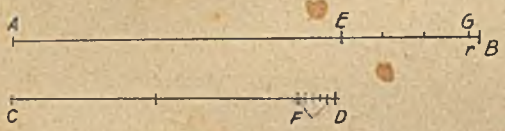


Fig. 141.

$$3.5 + 1 = 16 \text{ razy w } EB$$
$$2.16 + 5 = 37 \text{ razy w } CD \text{ a}$$
$$37 + 16 = 53 \text{ razy w } AB.$$

Liczby 53 i 37 są liczbami wymiarowemi odcinków AB i CD (przy użyciu odcinka GB jako jednostki), a stosunek tych liczb wymiarowych: 53 : 37, daje wykładnik stosunku odcinków: $AB : CD = {}^{53}/_{37}$.

Jeżeli odcinki są współmierne, mierzenie łańcuchowe musi się skończyć, prowadzi więc zawsze do znalezienia żądanego stosunku. Wykładnik stosunku jest wtedy liczbą całą lub ułamkową, t. j liczbą wymierną.

Istnieją jednak (w geometryi idealnej) także odcinki niewspółmierne, a więc nie posiadające żadnej (nawet najdrobniejszej) wspólnej miary. Takimi odcinkami są n. p. bok i przekątnia tegosamego kwadratu, jakto później zobaczymy.

Łatwiej to spostrzeżemy dla boku dziesięciokąta umiarowego i promienia koła opisanego.

Narysujmy jeden wycinek takiego dziesięciokąta. Kąt środkowy odpowiedni wynosi 36^0, a więc kąty przy podstawie wynoszą razem 144^0; na jeden wypada 72^0. Poprowadźmy symetralną BC_1 kąta B. Trójkąt BC_1C jest równoramienny, a także trójkąt BAC_1, jak to wynika z obliczenia kąta C_1. Stąd: bok $CC_1 = C_1B = AB$. Odcięliśmy w ten sposób bok AB na AC. Teraz resztę odetnijmy na AB znowu w tensam sposób, t. j. prowadząc symetralną C_1C_2 kąta C_1. Linia C_2B jest równa AC_1, powstała więc przez odcięcie reszty AC_1 na boku AB. Teraz resztę AC_2 odcinamy na AC_1 przy pomocy tejsamej konstrukcyi od punktu C_1 do punktu C_3; pozostałą resztę AC_3 odcinamy od C_2 do C_4 i t. d. Ponieważ symetralna kąta trafia zawsze przeciwległe boki pomiędzy wierzchołkami leżącymi na nim, a nigdy nie trafi któregoś z tych wierzchołków, przeto nigdy nie wyczerpiemy całego odcinka AC ani AB przy tem mierzeniu łańcuchowem. Odcinki AB i AC są więc niewspółmierne.

Fig. 142.

Mimoto stosunek takich odcinków można obliczyć, będzie on liczbą niewymierną. Gdybyśmy bowiem odrzucili małą resztę pozostającą przy mierzeniu, otrzymalibyśmy stosunek wymierny, n. p. $\frac{l}{q}$; gdybyśmy zaś uzupełnili ostatnią resztę, tak aby się dała zmierzyć, otrzymalibyśmy $\frac{l+1}{q}$. W ten sposób zamykamy nasz stosunek pomiędzy dwie liczby, różniące sie o $\frac{1}{q}$. Gdybyśmy podział poprowadzili dalej, otrzymalibyśmy drobniejszą resztę, mieściłaby się ona więcej razy w obydwu odcinkach, zamknęlibyśmy więc znowu nasz stosunek pomiędzy dwoma liczbami $\frac{l'}{q'}$, i $\frac{l'+1}{q'}$, różniącemi się o $\frac{1}{q'}$, a więc o liczbę mniejszą od $\frac{1}{q}$ (bo q' większe). Wartość stosunku możemy więc ujmować w granice corazto bliższe, zapomocą dwóch szeregów liczb wymiernych:

$$\frac{l}{q}, \frac{l'}{q'}, \frac{l''}{q''}, \ldots \text{ i } \frac{l+1}{q}, \frac{l'+1}{q'}, \frac{l''+1}{q''}, \ldots$$

Wspólną granicą tych obydwu zbieżnych szeregów liczb nazywamy — jak wiadomo z algebry — liczbą niewymierną.

Stąd wniosek: Jeżeli dwa odcinki są niewspółmierne, ich stosunek jest liczbą niewymierną.

Tak n. p. w naszym przykładzie na fig. 142 można zamknąć stosunek AC do AB między następującymi szeregami liczb, 2, 1·7, 1·62, 1·619, 1·6181, 1·61804, a 1, 1·6, 1·61, 1·618, 1·6180, 1·61803 zbliżającymi się do liczby niewymiernej $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (por. str. 137).

* § 58. Stosunek podziału odcinka.

Jeżeli jakiś odcinek podzielimy dowolnym punktem na dwie części, to stosunek dwóch powstałych odcinków nazywamy stosunkiem podziału odcinka.

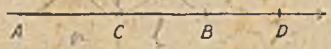


Fig. 143.

N. p. $\frac{AC}{BC}$ jest stosunkiem podziału odcinka AB. Podział ten nazywamy wewnętrznym. Jeżeli poza odcinkiem AB obierzemy punkt D i utworzymy stosunek $\frac{AD}{BD}$, otrzymujemy stosunek podziału zewnętrznego.

Jeżeli zwracamy uwagę na kierunek odcinków, to stosunek $\frac{AC}{BC}$ ma wartość ujemną, albowiem odcinek AC mierzymy na prawo a BC na lewo. Jeżeli więc jeden kierunek obierzemy za dodatni, n. p. od A ku C, to odcinek AC uważamy za dodatni (jego liczba wymiarowa jest dodatnia) BC za ujemny. Ich stosunek jest więc liczbą ujemną. Stosunek podziału zewnętrznego: $\frac{AD}{BD}$ ma zawsze wartość dodatnią (dlaczego?).

(Kiedy stosunek podziału wewnętrznego dąży do 0, —1, do nieskończoności? Kiedy stosunek podziału zewnętrznego dąży do zera, do nieskończoności?)

Stosunek tych dwóch stosunków nazywamy: stosunkiem podziału podwójnego czterech punktów i używamy skrócenia:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD).$$

Jeżeli stosunek pierwszy równa się drugiemu co do wartości bezwzględnej, a tylko znakiem się różni, podział odcinka AB nazywa się harmoniczny, w każdym innym razie: anharmoniczny.

Przy podziale harmonicznym musi więc być $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$, czyli krótko: $(ABCD) = -1$.

Wtedy AB jest taksamo podzielony punktem C wewnętrznie, jak punktem D zewnętrznie. N. p. jeżeli BC jest trzecią częścią AC, to i BD musi być trzecią częścią AD. Jeżeli punkty C, D dzielą harmonicznie odcinek AB, to także odwrotnie punkty A, B przedzielają harmonicznie od-

cinek CD. Albowiem z równości $\frac{AC}{BC} = \frac{-AD}{BD}$ wynika także $\frac{-CA}{-CB} =$
$= -\frac{-DA}{-DB}$, czyli mnożąc przez $-CB$ a dzieląc przez $-DA$: $\frac{CA}{DA} =$
$= -\frac{CB}{DB}$, a to znaczymy $(CDAB) = -1$.

Takie cztery punkty na prostej nazywają się harmonicznie sprzężone.

Stosunki podziału podwójnego odgrywają ważną rolę przy badaniu perspektywicznych szeregów punktów i perspektywicznych pęków promieni. *

§ 59. Proporcyonalność odcinków.

Podobnie jak w algebrze, tak i w geometryi ważną rolę odgrywają proporcye. Jeżeli mianowicie dwa odcinki mają takisam stosunek, jak dwa inne, nazywamy je proporcyonalnymi i piszemy:

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$

Najważniejszym przykładem takich odcinków proporcyonalnych są kawałki odcięte na dowolnym pęku promieni zapomocą dwóch linii równoległych.

Zbadajmy najpierw dwa promienie przecięte dwoma liniami równoległemi. Zajmijmy się najpierw przypadkiem, kiedy odcinki a i b są współmierne. Odcinając wspólną miarę k na każdym z nich możemy podzielić a na równe części, n. p. na m równych części, a taksamo b tymsamym odcinkiem k na p równych części.

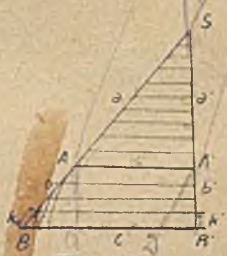


Fig. 144.

Więc: $\left.\begin{array}{l} a = m \,.\, k \\ b = p \,.\, k \end{array}\right\}$ ich stosunek $a : b = \frac{m}{p}$.

Jeżeli przez punkty podziału poprowadzimy szereg linii równoległych do BB', to wiemy, że także bok SB' rozpadnie się na tyleśamo równych — ale już innych od k — części k'. (por. str. 48, § 27).

a więc: $\left.\begin{array}{l} a' = m \,.\, k' \\ b' = p \,.\, k' \end{array}\right\}$ stąd $a' : b' = \frac{m}{p}$.

Otrzymaliśmy więc tęsamą wartość dla stosunku $a' : b'$, co i dla $a : b$, zatem:

$$a : b = a' : b'$$ słowami:

Dwie proste równoległe odcinają na każdej parze promieni odcinki proporcyonalne.

Jeżeli odcinki a i b są niewspółmierne, to dzielimy odcinek b na wiele drobnych części k. Wtedy k mieści się w b n. p. m razy, a w a mieści się n. p. p razy i zostaje reszta r, mniejsza od k. Więc

$$a = p\,k + r$$
$$b = m\,k$$

zatem $\frac{a}{b} = \frac{p}{m} + \frac{r}{m\,k}$.

a więc: $\frac{a}{b} > \frac{p}{m}$

(Jeżeli resztę opuścimy, otrzymamy na przybliżoną — przez niedomiar — wartość stosunku $a : b = \frac{p}{m}$). Jeżeli zaś resztę uzupełnimy, aby wynosiła k przez dodanie części r', mniejszej od k, to:

$$a = (p + 1)\,k - r'$$
$$b = m\,k$$

zatem $\frac{a}{b} = \frac{p+1}{m} - \frac{r'}{m\,k}$

więc $\frac{a}{b} < \frac{p+1}{m}$ „

(Opuszczając teraz część drobną r' otrzymamy na przybliżoną wartość stosunku — przez nadmiar —

$$a : b = \frac{p+1}{m}).$$

Zupełnie tesame nierówności otrzymamy dla stosunku $a' : b'$ według poprzedniego twierdzenia.

Więc $\frac{p}{m} < \frac{a}{b} < \frac{p+1}{m}$, i $\frac{p}{m} < \frac{a'}{b'} < \frac{p+1}{m}$.

Różnica tych wartości przybliżonych wynosi $\frac{1}{m}$, jest więc bardzo mała, jeżelibyśmy b podzielili na bardzo drobne części. Różnica pomiędzy $\frac{a}{b}$ a $\frac{a'}{b'}$ musi być jeszcze mniejsza od $\frac{1}{m}$, czyli dąży do zera z wzrostem m (wykaż!).

Liczby niewymierne, dla których różnica kolejnych wartości przybliżonych dąży do zera, nazywają się równe, więc $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ czyli

$$\underline{a : b = a' : b'} \qquad (1)$$

Z tej proporcyi można wyprowadzić inne, posługując się znanemi twierdzeniami z algebry. Mianowicie: Z proporcyi $a : b = a' : b'$ wynikają także proporcye:

$$(a + b) : a = (a' + b') : a'$$
$$(a + b) : b = (a' + b') : b'$$

czyli

$$SB : SA = SB' : SA' \qquad (2)$$

$$SB : AB = SB' : A'B' \qquad (3)$$

Pierwszą z tych proporcyi wyrażamy słowami: *odległości (od wierzchołka pęku) punktów przecięcia jednego promienia z prostemi równoległemi są proporcyonalne do odpowiednich odległości na drugim promieniu.*

Ale także *odcinki c i c' prostych równoległych mają tensam stosunek* $SB : SA$.

Aby to wykazać, uważamy B' za wierzchołek pęku i z A' prowadzimy $A'D$ równoległą do SB. Wtedy według proporcyi (3) otrzymamy:

$$B'B : B'D = B'S : B'A' \text{ czyli}$$

$$c : c' = SB' : SA' \qquad (4)$$

Twierdzenia te nie ulegają zmianie, jeżeli proste równoległe leżą po przeciwnych stronach wierzchołka S.

Wypowiedzieć te twierdzenia, uważając figurę SBB' za trójkąt!

Na twierdzeniu zawartem w proporcyi (4) polega użycie t. zw. cyrkla proporcyonalnego, służącego do pomniejszania wszystkich odcinków jakiegoś rysunku w stałym stosunku. Są to dwa ramiona ruchome około punktu O i dające się przesunąć tak, że OA' ma żądany stosunek do OA. Wtedy przy każdej rozwartości ramion końce $A'B'$ zawierają odcinek, pozostający do AB w stałym, żądanym stosunku.

Fig. 145.

Twierdzenia te można odwrócić w następujący sposób:

Jeżeli dwie proste odcinają na dwóch promieniach odcinki proporcyonalne, to te proste są równoległe. (Dowód niewprost.) Jest to nowy sposób sprawdzenia równoległości linii (nowe kryteryum, jak się nieraz wyrażamy).

Przeniesienie tych twierdzeń na pęki promieni złożone z dowolnej liczby prostych i przecięte dwoma liniami równoległemi nie sprawia żadnych trudności. (Przeprowadź dowód).

Fig. 146.

* Na liniach równoległych otrzymamy wtedy dwa perspektywiczne szeregi punktów, mające tę własność, że odpowiednie odcinki są proporcyonalne. Takie szeregi punktów nazywają się podobne. $a : a' = b : b' = c : c' = \ldots$ Ważne jest odwrócenie tego ostatniego twierdzenia. Mianowicie: *Jeżeli na dwóch prostych równoległych*

leżą podobne szeregi punktów, to proste łączące odpowiadające sobie punkty przecinają się wszystkie w jednym punkcie S; jeżeli szeregi punktów są przystające, proste są równoległe.

Dowód: Jeżeli a i a' są równe, to i wszystkie inne odpowiednie odcinki są parami równe, wtedy zaś proste łączące końce tych odcinków są równoległe (dlaczego?). Jeżeli a i a' nie są równe, to proste SX i SY przecinają się w punkcie S. Chodzi o to, czy także każda inna prosta, n. p. SZ, łącząca punkty odpowiednie, przechodzi przez S? Otóż gdyby ta prosta przecięła prostą SY w jakimś innym punkcie P, to stosunek $b : b'$ miałby inną wartość aniżeli $a : a'$. Albowiem $a : a' = SB : SB'$, a $b : b'$ byłoby $= PB : P'B$. Te stosunki nie mogą być równe, bo jeżeli dzielną SB i dzielnik SB (poprzednik i następnik) o tę samą wielkość SP zmniejszymy, iloraz (stosunek) zmieni swą wartość (chyba gdyby dzielna równała się dzielnikowi — a przecież SB nie równa się SB'). Punkt P nie może więc leżeć w innem miejscu, jak w S. *

§ 60. Zastosowanie twierdzeń o promieniach przeciętych liniami równoległemi.

Przy pomocy poznanych twierdzeń o odcinkach proporcyonalnych można wykonać wiele ważnych konstrukcyi: *a*) Dany odcinek podzielić w żądanym stosunku. N. p. AB chcemy podzielić w stosunku $2 : 5$. Kreśli się z końca odcinka drugą prostą Ax dowolnie nachyloną do AB. Na tej prostej odcina się $2 + 5 = 7$ równych — ale jakichbądź — kawałków. Łączymy D z B a z punktu C prowadzimy równoległą CE do DB, to $AE : EB = AC : CD$ czyli: $AE : EB = 2 : 5$.

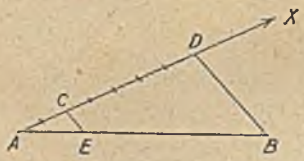


Fig 147.

b) Do trzech danych odcinków a, b, c znaleźć czwarty proporcyonalny x. Zadanie to nazywamy graficznem rozwiązaniem proporcyi. Figura 148 wyjaśnia postępowanie prowadzące do znalezienia żądanego odcinka x.

$$a : b = c : x.$$

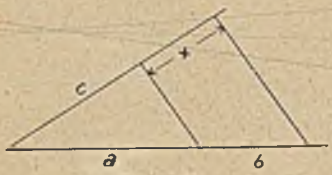


Fig. 148.

Fig. 149.

* *c*) Wykreślić linię prostą z danego punktu P, zdążającą do niedostępnego punktu przecięcia się dwóch prostych x, y. Prowadzimy przez P

dowolną prostą p, przecinającą obydwa ramiona x, y. Kreślimy jakąkolwiek prostą q, równoległą do p i dzielimy AB w tymsamym stosunku, w jakim P dzieli MN. Prosta z łącząca obydwa punkty podziału zdąża do niedostępnego punktu przecięcia się prostych x i y. Uzasadnić tę konstrukcyę! *

Przy działaniach odcinkami omówiliśmy mnożenie odcinka przez liczbę. Obecnie możemy określić mnożenie odcinka przez odcinek, czyli graficzne mnożenie. Rozwiążmy graficznie proporcyę $1 : a = b : x$

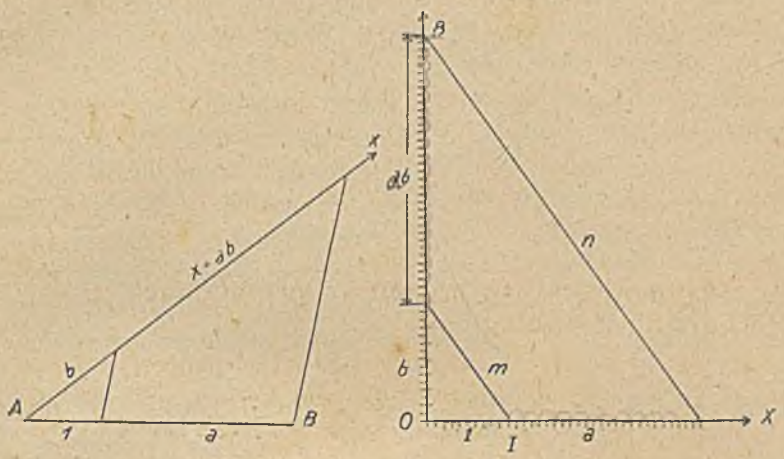


Fig. 150.

Otrzymamy odcinek: $x = ab$. Gdybyśmy używali papieru „milimetrowego", wygodniej byłoby obrać proste AB i AX prostopadłe. Wtedy wprost odczytalibyśmy z podziałki, ile wynosi iloczyn ab.

Postępowania tego można użyć z korzyścią, jeżeli mamy n. p. pomnożyć liczby wymiarowe dwóch odcinków jeszcze nie zmierzonych: bierzemy je w cyrkiel i odcinamy na ramionach kąta XOB, jeden od punktu O, drugi od punktu I i prowadzimy linie $m \parallel n$. Trzeba wykonać tylko jedno mierzenie. Tymczasem w zwykłym sposobie wykonywania tego zadania trzeba wykonać dwa mierzenia i jedno (skrócone) mnożenie.

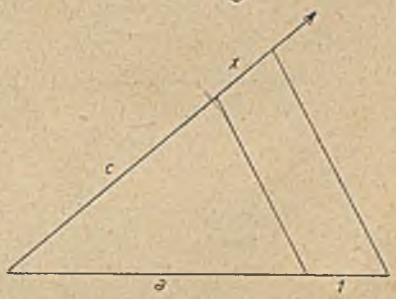


Fig. 151.

Mnożenie odcinków — według tej konstrukcyi — posiada prawo przemienności, łączności, rozdzielności i monotonii (sprawdzić!).

Dzielenie odcinków określamy jako odwrócenie tego mnożenia. Więc n. p. znacząc $a.b$ literą c, określamy dzielenie, jako rozwiązanie proporcyi $1 : a = x : c$, stąd: $a : 1 = c : x$.

Z figury 151. widzimy, jak należy wykonać konstrukcyę, aby znaleźć iloraz $x = \frac{c}{a}$, czyli wykonać graficznie dzielenie.

§ 61. Podobieństwo figur.

Proporcyonalność odcinków jest cechą charakterystyczną figur podobnych. W życiu potocznem używamy słowa „podobny“, aby wyrazić, że dwa przedmioty mają tensam kształt. W geometryi staramy się dokładniej rozważyć, na czem polega ta wspólność kształtów. N. p. figury I. i II. nazwiemy w życiu potocznem podobnemi. Jedna jest — jak widzimy — pomniejszeniem drugiej; wymiary figury II. są skróconymi wymiarami figury I., ale wszystkie wymiary są skrócone w tymsamym stosunku, kąty zaś pozostały niezmienione. Opierając się na tem spostrzeżeniu budujemy następujące określenie:

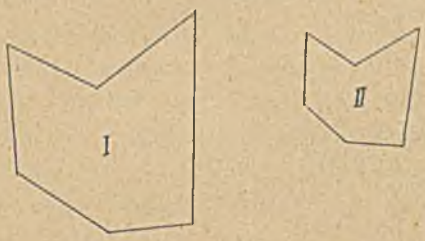


Fig. 152.

Figury nazywają się podobne, jeżeli wszystkie odpowiednie odcinki obu figur są proporcyonalne, a wszystkie kąty równe.

Tę stałą wartość stosunku dwóch odpowiednich odcinków w dwóch figurach podobnych nazywamy wielkością zmniejszenia (powiększenia) lub krótko zmniejszeniem (powiększeniem).

Znakiem wyrażającym podobieństwo jest $\sim$ (por. str. 36). Tak n. p. dwa koła są zawsze podobne, bo w jakim stosunku jest jedna para promieni dwóch kół, w takimsamym są wszystkie inne pary promieni, wszystkie cięciwy, sieczne i t. d.

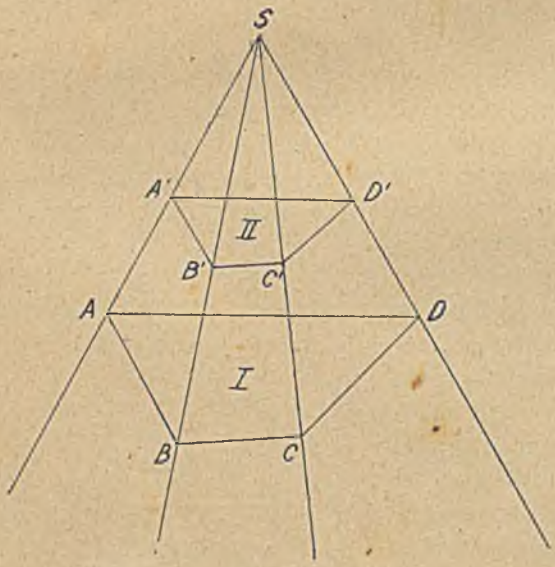


Fig. 153.

Jeżeli przez wierzchołki jakiejkolwiek figury poprowadzimy pęk promieni, to łatwo otrzymać figurę podobną. Trzeba tylko z dowolnego punktu

jednego promienia poprowadzić linię równoległą $A'B'$ do odpowiedniego boku figury I, z punktu B' równoległą do BC i t. d. . . ., aż się figura II. zamknie. Istotnie kąty figur I. i II. są równe, jako kąty o ramionach zgodnie równoległych. Boki są proporcyonalne; wykazujemy to łańcuchem proporcyi:

$$AB : A'B' = SB : SB' = BC : B'C' = SC : SC' = DC : D'C' = SD : : SD' = AD : A'D',$$

z którego wynika: $AB : A'B' = BC : B'C' = DC : D'C' = AD : A'D$

To dowodzi zarazem, że figura II. musi się zamknąć (w przeciwnym razie stosunki $AB : A'B'$ i $AD : A''D'$ nie byłyby równe temusamemu stosunkowi: $SA : SA'$) na co trzeba uważać przy konstrukcyi na rysunku. Kąty są równe, boki proporcyonalne, więc I $\sim$ II. Taksamo możnaby figurę II rysować na przedłużeniu promieni poza wierzchołek S.

Opierając się na podobieństwie figur umieszczonych w pęku S możemy wykazać, że: dwie *figury podobne zawsze dadzą się tak ustawić, że odpowiednie odcinki są równoległe, a proste łączące odpowiadające sobie punkty przecinają się w jednym punkcie* (tworzą jeden pęk promieni).

Dowód: Mając figurę II $\sim$ I, wykreślamy w pęku S figurę III, mającą jeden bok $b = a$ i równoległy do boku c i podobną do I. Będzie więc ona także podobna do II. Ale co więcej: figura III $\cong$ II, ponieważ ma kąty równe, a boki zmniejszone w stosunku $\frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1$, to znaczy równe.

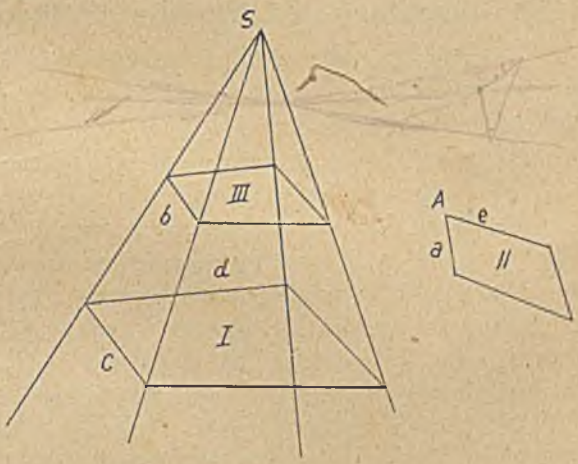


Fig. 154.

Jeżeli zaś II $\cong$ III, to można przez ruchy (jakie?) sprowadzić II do nakrycia z III, a więc w położenie, o którem mówiliśmy w twierdzeniu.

Uwaga: Wystarczy obrót około punktu A taki, aby było $a \parallel c$, $d \parallel e$. Wykazać, że wtedy proste łączące odpowiednie punkty schodzą się w jednym punkcie!

Położenie takie dwóch figur podobnych nazywamy położeniem podobnem, a wierzchołek pęku S środkiem podobieństwa i to zewnętrznym, jeżeli obydwie figury podobne leżą po tejsamej stronie S,

a wewnętrznym, jeżeli figury podobne leżą po przeciwnych stronach punktu S.

Porównaj zachowanie się dwóch figur przystających ustawionych równolegle!

Tak n. p. dwa koła mają zawsze położenia podobne. Aby znaleźć środek podobieństwa zewnętrzny, wykreśla się dowolne dwa promienie równoległe i linię środkową. Linia łącząca końce promieni równoległych przecina się z linią środkową w środku podobieństwa. Środek wewnętrzny znajduje się, kreśląc dwa promienie równoległe, ale zwrócone w strony przeciwne. (Udowodnij!) Ponieważ i styczne wspólne schodzą się w tych punktach S_z i S_w, przeto wynika stąd prosta konstrukcya wspólnych stycznych dwóch kół. (Porównaj ćwiczenia 31, 32, 33 na str. 77.)

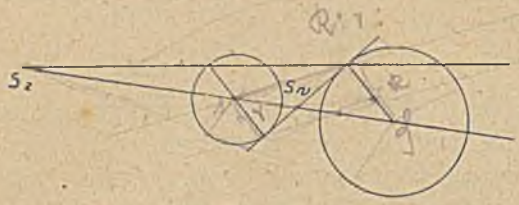


Fig. 155.

§ 62. Znamiona podobieństwa trójkątów

Podobnie jak dla zbadania przystawania dwóch figur nie trzeba było porównywać wszystkich boków i kątów, tak i przy badaniu podobieństwa wystarczy porównanie niektórych tylko części składowych.

Dotychczas podaliśmy dwa określenia podobieństwa, równoważne ze sobą:

a) Boki mają być proporcyonalne a kąty równe lub

b) figury dają się tak ustawić, że wszystkie boki odpowiednie są równoległe, a proste łączące punkty odpowiednie tworzą jeden pęk.

Określenia te podają zupełnie wystarczające znamiona podobieństwa, ale aż „nadto wystarczające“, to znaczy: wystarczy wiedzieć o wiele mniej o dwóch figurach, aby być pewnym, że są podobne. Wybierzemy te warunki, które są niezbędnie konieczne a zarazem wystarczające.

Jakikolwiek problem naukowy uważamy dopiero wtedy za gruntownie zbadany, jeżeli zdołamy podać warunki wystarczające (t. j. nie za mało) i konieczne (t. j. nie za wiele).

Okażemy więc, że do zbadania podobieństwa dwóch trójkątów wystarczą i są konieczne następujące warunki:

(I') *Dwa trójkąty mające jeden kąt równy, a dwa boki zamykające go proporcyonalne, są podobne* ($\gamma = \gamma'$; $a : a' = b : b'$).

(II') *Dwa trójkąty mające dwie pary kątów równe, są podobne* ($\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$).

(III') *Dwa trójkąty mające dwa boki proporcyonalne, a kąt leżący naprzeciwko większego boku równy, są podobne* ($a : a' = b : b'$; $\alpha = \alpha'$ przyczem $a > b$).

(IV') *Dwa trójkąty mające trzy boki proporcyonalne są podobne.*

$$(a : a' = b : b';$$
$$a' = c : c')$$

Są więc cztery przypadki podobieństwa, zupełnie podobne do czterech przypadków przystawania, tylko „równość boków“ zastępujemy „proporcyonalnością boków“.

Każdy przypadek podobieństwa zawiera tylko dwa warunki (w przystawaniu mieliśmy trzy). Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że w trójkącie równość kątów pociąga za sobą proporcyonalność boków (II') i odwrotnie: proporcyonalność boków pociąga za sobą równość kątów. Przy przystawaniu nie mieliśmy takiej wzajemności. Dowodzi to, że sama wielkość boków nie zależy od kątów, tylko stosunki boków są zależne od kątów, są funkcyami kątów. Znając kąty, potrafimy obliczyć stosunki boków (a nie same boki). Natomiast z równości boków wynika już równość kątów, więc kąty są funkcyami samych boków; znając boki trójkata, można obliczyć kąty. Wszystkie te obliczenia wchodzą już w zakres trygonometryi. Tam też bada się dokładnie właściwości tych funkcyi. (Dla czworokątów już równość kątów nie sprawia proporcyonalności boków, n. p. prostokąt a kwadrat!) Dowody przypadków podobieństwa przeprowadzimy tylko dla (II') i (IV'). Inne przeprowadza się w takisam sposób. Zacznijmy od przypadku (II'), w którym $\alpha = \alpha'$ i $\beta = \beta'$. Przedewszystkiem musi być $\gamma = \gamma'$, jako reszty do 180^0.

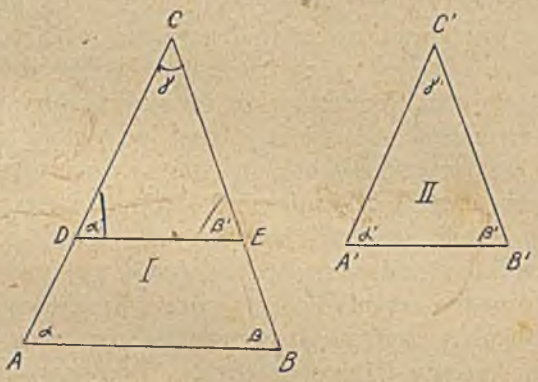


Fig. 156.

Chcemy jeszcze wykazać proporcyonalność boków. Odetnijmy w tym celu trójkąt $A'B'C'$ od wierzchołka C. To można uczynić, ponieważ $\gamma = \gamma'$. Linia DE będzie równoległa do AB, bo $\alpha' = \alpha$, a to są kąty odpowiednie utworzone przez dwie linie, przecięte trzecią. Z równoległości linii wynikają proporcye:

$$CA : CD = CB : CE = AB : DE \text{ czyli}$$
$$CA : C'A' = CB : C'B' = AB : A'B'.$$

Więc trójkąty I i II mają kąty parami równe, boki parami proporcyonalne, są zatem podobne: I $\sim$ II.

Dla dowiedzenia (IV') przypadku, opieramy się na założeniu:

$$AC : A'C' = AB : A'B' = BC : B'C'$$

Odcinamy $CD = A'C'$ (fig. 156) i prowadzimy linię: $DE \parallel AB$, to trójkąt $CDE \sim ABC$, bo ma dwa kąty równe ($\sphericalangle D = \sphericalangle A$ i $\sphericalangle E = \sphericalangle B$). Pytanie, czy trójkąt CDE zastępuje trójkąt $A'B'C'$, t. j. czy jest do niego przystający?

Otóż: $AC : CD = BC : CE$ czyli $AC : A'C' = BC : CE$ stąd $CE = \frac{BC \cdot A'C'}{AC}$. W założeniu zaś mieliśmy: $AC : A'C' = BC : B'C'$ stąd $B'C' = \frac{BC \cdot A'C'}{AC}$, a więc CE ma tęsamą wartość, co $B'C'$. Taksamo wykazuje się, że $DE = A'B'$, więc trójkąt CDE jest przystający do $A'B'C'$. Jeżeli więc $CDE \backsim ABC$, to i $A'B'C'$ musi być podobny do ABC.

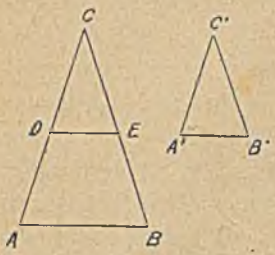


Fig. 157.

Dla sprawdzenia podobieństwa czworoboków, pięcioboków, . . . wieloboków, trzeba porównać więcej części, ale zawsze o jedną mniej, aniżeli do przystawania. Figury bowiem podobne stają się przystające, jeżeli jeden bok obydwu figur zrówna się (z zachowaniem kształtu całej figury).

Konstrukcya trójkąta podobnego do danego trójkąta jest bardzo prosta: wystarczy przenieść dwa kąty (II'). Jeszcze prościej można to zrobić odcinając przy pomocy linii równoległej od trójkąta część górną. Konstrukcya ta jest nieoznaczona: trójkątów podobnych istnieje bowiem nieskończenie wiele różnych pod względem wielkości. Jeżeli jednak dany jest jeszcze jeden bok, lub stosunek zmniejszenia (zwiększenia), konstrukcya jest oznaczona. Ponieważ do budowania figur podobnych potrzeba mniej części, aniżeli do figur przystających, przeto zadania konstrukcyjne ułatwiamy sobie często w ten sposób, że rysujemy najpierw figurę podobną do żądanej figury a później powiększamy ją lub pomniejszamy odpowiednio do pozostałego warunku zadania. Ten sposób postępowania nazywamy: **metodą figur podobnych.** Wyjaśnimy tę metodę na przykładzie:

Zbudować trójkąt, znając jego obwód i dwa kąty u, α, β. Rysujemy trójkąt podobny do żądanego, mianowicie trójkąt mający tesame kąty α i β, a zresztą dowolny ABC. Rozwijamy jego obwód, obracając boki AC i CB tak, aby były przedłużeniami boku AB. Łącząc C z P i M otrzymujemy trójkąt. Obwód jednak ma mieć długość $PX = u$, powiększamy więc trójkąt PCM przedłużając PC i kreśląc $XC' \parallel MC$. Od punktu C' kreślimy teraz trójkąt $A'B'C'$ podobny do ABC i w podobnem położeniu ($CA' \parallel CA$, $CB' \parallel CB$). Jego obwodem jest istotnie PX (bo jeżeli było $PA = AC$, to wskutek podobieństwa musi być $PA' = A'C'$, a taksamo $BX' = B'C'$) a kąty są niezmienione: α i β (por. zad. 41, str. 78).

Fig. 158.

Na podobieństwie trójkątów polega osobny przyrząd do rysowania figur podobnych (do pomniejszania i powiększania figur), zwany pantografem.

Przyrząd ten składa się z czterech prętów tworzących równoległobok: $ABCO$. W jednym punkcie S przytwierdza się przyrząd stale do płaszczyzny rysunku Ramiona równoległoboku są ruchome w przegubach, około punktów A, O, B, C,

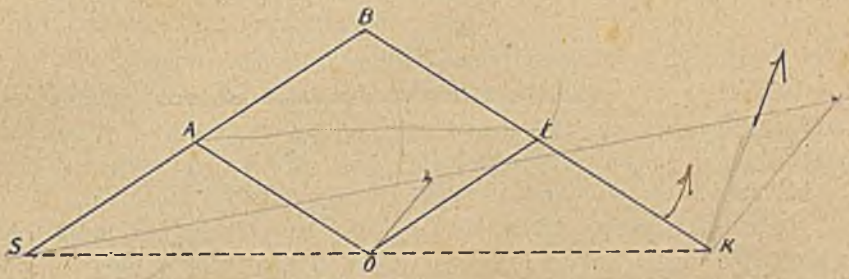


Fig. 159.

a prócz tego cały przyrząd można obracać około punktu S. Jeżeli kolec K, umieszczony odpowiednio na ramieniu BC, posuwamy po jakiejś figurze, to ołówek umieszczony w punkcie O zakreśla figurę podobną, pomniejszoną. Jeżeli pomieniamy role punktów O i K, otrzymamy figurę powiększoną. Stosunek powiększenia lub pomniejszenia wynosi $SA : SB$.

Dowód: Obrawszy punkt S stosownie do żądanego pomniejszenia figury, obieramy punkt K tak, aby $SA : AO = SB : BK$. Wtedy trójkąty SOA i SKB są podobne (1'), ponieważ także $\sphericalangle SAO = \sphericalangle SBK$. Z podobieństwa wynika, że $\sphericalangle OSA = \sphericalangle KSB$, a więc ramiona SO i SK nakrywają się, zatem punkty S, O i K leżą na tejsamej linii prostej. Przytem $SO : SK = SA : SB$. Tosamo można udowodnić w każdem innem położeniu. Jakkolwiek więc obrócilibyśmy pręty AB, AO, BC i OC, zawsze punkty O' i K' będą leżały na tejsamej linii prostej, co i S, a stosunek $SO' : SK'$ pozostaje równy stosunkowi $SA : SB$. Figury zakreślone punktami O i K są więc podobne i podobnie położone (por. str. 107).

§ 63. Zastosowanie podobieństwa trójkątów do trójkąta prostokątnego.

W dowolnym trójkącie prostokątnym poprowadźmy prostopadłą z wierzchołka kąta prostego do przeciwprostokątni. Powstają dwa trójkąty podobne do siebie i do całego trójkąta. Albowiem: $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$ jako kąty proste a $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \delta$ jako kąty, których ramiona są zgodnie prostopadłe: więc I $\sim$ II.

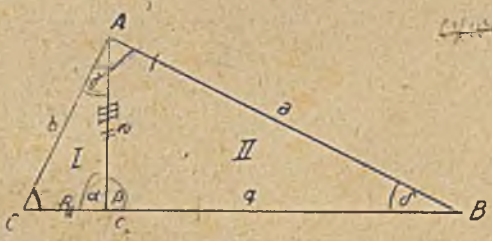


Fig. 160.

Następnie: $\sphericalangle C = \sphericalangle C$, a $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle A$, więc I $\sim$ III. Stąd już wynika także: II $\sim$ III.

Z podobieństwa trójkątów wynika proporcyonalność boków odpowiadających sobie (boki odpowiadające sobie leżą naprzeciw odpowiadających sobie, to znaczy równych kątów). Otrzymujemy więc następujące proporcye:

(1) $p : w = w : q$ wynika z podobieństwa trójkątów I i II.
(2) $p : b = b : c$ wynika z podobieństwa trójkątów I i III.
(3) $q : a = a : c$ wynika z podobieństwa trójkątów II i III.

Proporcye te można wypowiedzieć w następujący sposób:

W trójkącie prostokątnym wysokość należaca do przeciwprostokątni jest średnią geometryczną proporcyonalną pomiedzy obydwoma odcinkami przeciwprostokątni a każda przyprostokątnia jest średnią geometryczną pomiedzy swoim rzutem na przeciwprostokątnię a całą przeciwprostokątnią.

Ponieważ każdy kąt wspierający się na półkolu jest prosty, możemy twierdzenie nasze zastosować do koła: Prostopadła z obwodu koła do średnicy jest średnią geometryczną między obydwoma odcinkami średnicy, a każda cięciwa jest średnią geometryczną między średnicą a rzutem swoim na średnicę, przechodzącą przez jej punkt początkowy.

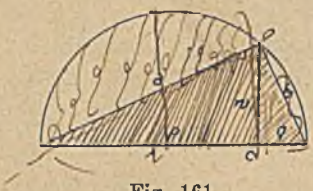


Fig. 161.

Twierdzenie to prowadzi do łatwej konstrukcyi średniej geometrycznej dwóch danych odcinków a, b. Budujemy mianowicie półkole na odcinku $a + b$ i wykreślamy prostopadłą do średnicy w punkcie wspólnym odcinkom a i b. Można także użyć cięciwy, wtedy jednak na większym odcinku trzeba odciąć mniejszy i półkole zakreślić na większym odcinku.

Z rozwiązania proporcyi: $a : x = x : 1$, wynika

$$x = \sqrt{a}$$

a więc:

Wykreślenie średniej geometrycznej dwóch liczb daje nam zarazem sposób graficzny otrzymania drugiego pierwiastka z każdej liczby.

Z proporcyi (2) i (3) wyprowadzimy jeszcze jeden bardzo ważny wniosek. Ponieważ iloczyn wyrazów średnich równa się iloczynowi wyrazów skrajnych, przeto z (2) i (3) wynika:

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= p\,c \\ a^2 &= q\,c \end{aligned}\right\} \text{razem } a^2 + b^2 = (p + q) \cdot c$$

Ale $p + q = c$, więc:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Słowami: *Suma kwadratów* (liczb wymiarowych) *obydwu przyprostokątni równa się kwadratowi* (liczby wymiarowej) *przeciwprostokątni.*

Twierdzenie to, zwane twierdzeniem Pitagorasa, odgrywa w geometryi nadzwyczajnie ważną rolę. Do twierdzenia tego powrócimy jeszcze przy obliczaniu powierzchni i objętości.

§ 64. Średnia harmoniczna.

W algebrze rozważa się obok średniej arytmetycznej i geometrycznej także średnią harmoniczną dwóch liczb.

Średnia arytmetyczna wynika z równania:

$$a - s = s - b; \text{ stąd } s = \frac{a+b}{2}.$$

Średnia geometryczna wynika z równania:

$$a : s = s : b; \text{ stąd } s = \sqrt{ab}.$$

Średnia zaś harmoniczna wynika z proporcyi $a:(a-s) = b:(s-b)$ i jak łatwo obliczyć ma wartość: $s = \frac{2ab}{a+b}$.

Znamy już sposób konstrukcyjny znalezienia średniej arytmetycznej (por. twierdzenia o trapezie i ćwiczenie 28, str. 90) i średniej geometrycznej.

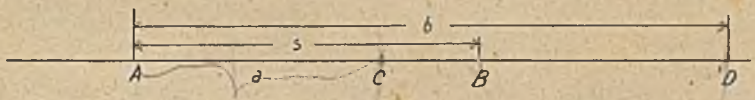


Fig. 162.

Średnią harmoniczną otrzymamy z harmonicznego podziału odcinka (por. § 58, str. 100). Jeżeli bowiem

$$(ABCD) = -1 \text{ czyli}$$

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1, \text{ to}$$

$AC:BC = -AD:BD$ ale $BC = -CB$, więc $AC:-CB = -AD:BD$.

Mnożąc obie strony przez -1: $AC:CB = +AD:BD$.
Z figury zaś widzimy, że wtedy $a:(s-a) = b:(b-s)$, czyli zmieniając znaki w 2. i 4. wyrazie $a:(a-s) = b:(s-b)$.

Otóż w podziale harmonicznym odcinek podzielony jest średnią harmoniczną między odcinkiem mniejszym a większym. Taksamo można wykazać, że odcinek CD jest średnią harmoniczną między BD i AD.

Aby więc znaleźć średnią harmoniczną, trzeba umieć do trzech punktów dowolnych znaleźć czwarty harmoniczny. Użyjemy do tego półkola, mianowicie:

Udowodnimy, że biegun i biegunowa koła (por. str. 65) przedzielają harmonicznie średnicę. Z dowolnego punktu A poza kołem poprowadźmy styczną AX, to A jest biegunem a prosta BX prostopadła do średnicy jego biegunową. Ponieważ promień OX jest prostopadły do

stycznej; to trójkąt AOX jest prostokątny, możemy więc do niego zastosować twierdzenie o średniej geometrycznej. Otrzymamy proporcyę:

$OB : r = r : OA$ czyli $r : OB = OA : r$. Stosując do tej proporcyi twierdzenie o sumie i różnicy jej wyrazów otrzymamy:

$$(r - OB) : (r + OB) = (OA - r) : (OA + r)$$
$$CB : BD = AC : AD.$$

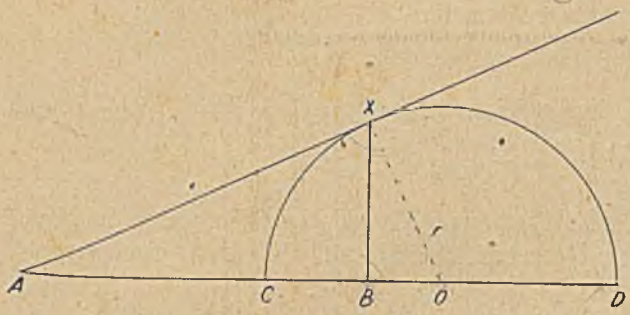


Fig. 163.

Zmieniając kierunek trzech odcinków otrzymamy:

$CB : -DB = -CA : -DA$ a zmieniając znaki 2 i 4 wyrazu $CB : DB = -CA : DA$.

To zaś dowodzi, że $(CDAB) = -1$.

Aby więc znaleźć punkt B, harmonicznie sprzężony z punktami A, C, D, a przedzielający wewnętrznie punkty C i D, kreślimy koło na CD, z punktu A prowadzimy styczną do koła a z punktu styczności X cięciwę prostopadłą do średnicy CD.

Stąd następująca konstrukcya średniej harmonicznej:

Na większym odcinku $AD = b$, odcinamy mniejszy $AC = a$. Kreślimy punkt B harmonicznie sprzężony z A, C, D leżący między C i D, to odcinek AB jest średnią harmoniczną między odcinkami a i b.

Jak można znaleźć punkt harmonicznie sprzężony z B, C, D, leżący zewnątrz odcinka CD? *

* § 65. Zastosowanie podobieństwa trójkątów do koła.

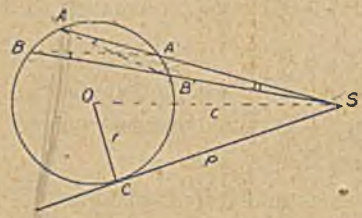


Fig. 164.

Poprowadźmy z dowolnego punktu S poza kołem pęk promieni i zwróćmy uwagę na odcinki każdego promienia zawarte między wierzchołkiem pęku a obwodem koła, n. p. SA, SA', SB, SB' i t. d. Trójkąty SAB' i $SA'B$ są podobne, ponieważ mają po dwa kąty równe ($\sphericalangle A = \sphericalangle B$, $\sphericalangle S = \sphericalangle S$), więc boki leżące naprzeciw równych kątów są proporcyonalne. Otóż:

$$SA : SB = SB' : SA',$$

lub $SA \,.\, SA' = SB \,.\, SB'$. Słowami:

W pęku promieni przecinającym koło iloczyn odcinków każdego promienia zawartych między wierzchołkiem pęku a obwodem koła ma stałą wartość.

Aby tę stałą wartość łatwo obliczyć, zsuwamy punkty A i A' coraz bliżej: skoro się te punkty nakryją, sieczna zamienia się na styczną SC, a iloczyn dwóch różnych odcinków zamieni się na iloczyn dwóch równych odcinków: $SC.SC$ czyli SC^2. Otóż: *Stała wartość tego iloczynu równa się drugiej potędze odcinka stycznej z punktu S.* Dlatego ten iłoczyn nazywamy: *potęgą koła ze względu na punkt S.*

Z figury widzimy, że wartość tej potęgi wynosi $p^2 = c^2 - r^2$ i jest liczbą dodatnią (według twierdzenia Pitagorasa). Gdyby wierzchołek pęku S leżał wewnątrz koła, to taksamo dowodzi się, że

$$SA.SA' = SB.SB' = -SC^2.$$

Fig. 165.

(znak: — pochodzi stąd, że $SC' = -SC$). SC nie jest teraz odcinkiem stycznej, ale połową cięciwy prostopadłej do linii łączącej S ze środkiem koła. (Cięciwa ta jest przepołowiona punktem S.) Potęga koła ze względu na ten punkt S wynosi $p^2 = -(r^2 - c^2)$ czyli $p^2 = c^2 - r^2$, oblicza się więc tymsamym wzorem, ale wartość otrzymuje się ujemną, ponieważ $c < r$. Jeżeli wreszcie punkt S leży na kole, to $c = r$, więc potęga: $p^2 = 0$, jest więc równa zeru. *

§ 66. Dziesięciokąt umiarowy. Podział złoty.

Przy pomocy twierdzeń o podobieństwie trójkątów możemy rozwiązać zadanie, któreśmy pominęli w nauce o wielokątach umiarowych, dotyczące podziału koła na 5 i 10 równych części (por. str. 94 z § 55). Weźmy pod uwagę dziesięciokąt umiarowy wpisany w koło o promieniu r; bok jego nazwijmy b i zbadajmy, w jakim związku jest ten bok z promieniem. Łącząc końce AB jednego boku ze środkiem otrzymamy trójkąt o kątach 36°, 72°, 72°. Połowiąc $\sphericalangle B$ wyliczamy łatwo, że $\sphericalangle C = 72°$, a więc $AB = BC$, ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny (trójkąt ten rozważaliśmy także na str. 99). Trójkąty ABC i AOB są podobne (ponieważ ich kąty przypodstawne wynoszą po 72°). Z podobieństwa wynika proporcya:

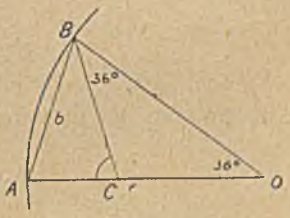


Fig. 166.

$$AO : AB = AB : AC$$
$$r : b = b : (r - CO) \quad \text{Ale } CO = BC = AB = b \text{ więc}$$
$$r : b = b : (r - b). \qquad (1)$$

Bok dziesięciokąta umiarowego jest średnią geometryczną pomiędzy całym promieniem koła opisanego, a resztą pozostałą po odcięciu tego boku na promieniu.

Zwróćmy uwagę na podział odcinka AO punktem C. Ponieważ $AB = CO$, to proporcyę naszą możemy także napisać w postaci: $AO : CO = CO : AC$.

Cały odcinek tak się ma do większego, jak większy do mniejszego.

Taki podział nazywamy podziałem złotym.

Aby odcinek podzielić według podziału złotego, trzebaby więc zakreślić tym odcinkiem koło, wpisać dziesięciokąt umiarowy i odciąć jego bok na danym odcinku. Przy pomocy kątomierza łatwo to uczynić. Zobaczymy jednak, że wystarczy użycie cyrkla i linii (konstrukcya „platońska“).

Nazwa „podział złoty“ tem się tłumaczy, że taki podział najwięcej odpowiada upodobaniom człowieka, chociażby sobie nie zdawał sprawy, jakie jest prawo tego podziału. Budowle prostokątne greckie mają n. p. długość i szerokość odpowiadające podziałowi złotemu; krzyże, skrzynie, książki, bilety najpospoliciej są tak robione, że odcinki przynajmniej w przybliżeniu odpowiadają złotemu podziałowi. Dopatrywano się nawet podobnej proporcyonalności w budowie ciała ludzkiego.

Aby konstrukcyjnie rozwiązać zadanie złotego podziału lub — co na jedno wyjdzie — wpisać dziesięciokąt umiarowy w koło, oprzemy się na proporcyi (1). Zamiast r napiszemy a, zamiast szukanego b literę x, więc

$$a : x = x : (a - x).$$

Obliczamy najpierw x z tego równania. Iloczyn wyrazów średnich równa się iloczynowi wyrazów skrajnych:

$$x^2 = a^2 - xa \quad \text{czyli}$$
$$x^2 + ax = a^2.$$

Aby uzupełnić pierwszą stronę do kwadratu, dodajemy po obu stronach $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, to:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Ale trójmian po pierwszej stronie powstał z wykonania działania:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{więc}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{stąd}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad \text{czyli}$$

$$x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}.$$

Znak pierwiastka może być także: —, wtedy jednak wartość bezwzględna x byłaby większa jak a; wartość ta jest dla naszego zadania nieprzydatna.

Tę wielkość trzeba teraz wykreślić. Trudność sprawia $\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Powołując się jednak na twierdzenie Pitagorasa widzimy, że jestto przeciwprostokątnia trójkąta prostokątnego, w którym przyprostokątnie wynoszą: a i $\frac{a}{2}$. Budujemy więc taki trójkąt prostokątny. Od tego $\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ mamy odjąć $\frac{a}{2}$, to pozostały odcinek jest żądanem x. W ten sposób znaleźliśmy bok dziesięciokąta umiarowego wpisanego w koło o promieniu a. Złoty podział uzyskamy odcinając znalezione x na odcinku a. Stąd więc wynika następująca konstrukcya:

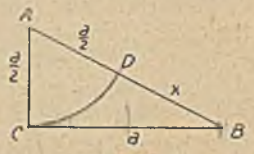


Fig. 167.

Na końcu odcinka a wykreślamy prostopadłą i odmierzamy na niej $\frac{a}{2}$. *Łączymy A z B i przenosimy AC na bok AB do punktu D. Reszta pozostała jest szukanym bokiem dziesięciokąta* a zarazem większym odcinkiem złotego podziału odcinka a. Tasama konstrukcya służy więc równocześnie do podziału koła na 10 równych części. Podział na 5 równych części już z tego wynika: należy podzielić koło na 10 części i co drugi punkt podziału opuścić.

Metoda rozwiązania tego zadania polegała na tem, że dla wielkości szukanej obliczyliśmy najpierw algebraicznie pewien wzór, a dopiero potem wykreśliliśmy wielkości w tym wzorze zawarte. Postępowanie takie nazywa się: metodą analizy algebraicznej. Jestto już czwarta ogólna metoda rozwiązywania zadań konstrukcyjnych. Będziemy jej jeszcze używali w rozdziale następnym.

Ćwiczenia IX.*)

§ 57. 1. Zmierzyć dowolny odcinek drugim mniejszym, używając mierzenia łańcuchowego.

2. Zmierzyć stosunek boku trójkąta równobocznego do wysokości.

3. Stosunek odcinków: 129 *mm* i 55 *mm* znaleźć drogą geometryczną i arytmetyczną i porównać wyniki!

4. Wykazać, że stosunek promienia koła do boku dziesięciokąta umiarowego można przybliżać zapomocą wyrazów szeregu:

$$^2/_1,\ ^3/_2,\ ^5/_3,\ ^8/_5,\ ^{13}/_8,\ ^{21}/_{13},\ ^{34}/_{21},\ ^{55}/_{34} \text{ i t. d.}$$

Jakie jest prawo tego szeregu?

* § 58. 5. Obierając na danym odcinku dowolny punkt, zbadać stosunek podziału wewnętrznego (mierzeniem łańcuchowem).

---

*) Przykłady do metody figur podobnych znajdują się w zbiorze zadań Kranza str. 81, do metody analizy algebraicznej str. 85.

* 6. Obierając poza danym odcinkiem na tejsamej linii prostej dowolny punkt, zbadać stosunek podziału zewnętrznego.

* 7. Jakie rozmaite wartości może przybierać stosunek podziału wewnętrznego? Przedstawić graficznie wartości tego stosunku.

* 8. Jakie rozmaite wartości może przybierać stosunek podziału zewnętrznego? Przedstawić graficznie zbiór tych wartości.

* 9. Obierając dowolnie cztery punkty na linii prostej, zbadać stosunek podziału podwójnego.

* 10. Jeżeli $(ABCD) = k$, obliczyć: $(BACD)$, $(DCBA)$ i inne wartości powstające przez zmianę uporządkowania liter w symbolu $(ABCD)$.

* 11. Tosamo zadanie wykonać dla $(ABCD) = -1$.

§ 59—60. 12. Udowodnić, że dwie proste, odcinające na dwóch promieniach pęku odcinki proporcyonalne, muszą być równoległe (niewprost!).

13. Jak długie muszą być ramiona cyrkla proporcyonalnego, jeżeli chcemy uzyskać pomniejszenie 1 : 5 (długość całego ramienia AA' niech wynosi n. p. 1 *dm* por. str. 103, fig. 145). AO = $\frac{25}{3}$ cm, OA' = $\frac{5}{3}$ cm

14. Wykazać, że podobne szeregi punktów mają dla każdej czwórki odpowiednich punktów tensam stosunek podziału podwójnego.

15. Podzielić dany odcinek w stosunku 11 : 8.

16. Rozwiązać graficznie proporcyę:

a) $3 : 7 = 5 : x$ i porównać z rozwiązaniem algebraicznem.

b) $2\frac{1}{2} : x = 7\frac{1}{4} : 3\frac{1}{2}$ i algebraicznie.

c) $2 \cdot 7 : 3 \cdot 4 = x : 5 \cdot 3$.

* 17. Wykreślić linię prostą, zdążającą od danego punktu do niedostępnego punktu przecięcia się dwóch danych prostych. Jakie inne podobne konstrukcye poznaliśmy dawniej?

18. Wykonać graficznie mnożenie $1 \cdot 73 \,.\, 0 \cdot 45$.

19. Wykonać graficznie dzielenie $1\,56 : 1 \cdot 37$.

§ 61—62. 20. Wykreślić dwa dowolne koła współśrodkowe i obliczyć zmniejszenie koła wewnętrznego.

21. Wykazać, że wszystkie wieloboki umiarowe o równej liczbie boków są podobne.

22. Odciąwszy od trójkąta równobocznego trójkąt zapomocą linii równoległej do jednego z boków, zmierzyć zmniejszenie boków powstałej figury podobnej.

23. Obrawszy dowolny nieregularny ośmiokąt, narysować figurę podobną przy pomocy pęku promieni: *a*) po tejsamej stronie wierzchołka pęku, *b*) po przeciwnej stronie wierzchołka.

24. Wykreślić do danego trójkąta trójkąt podobny, zmniejszony w stosunku: *a*) 1 : 3, *b*) 2 : 5.

25. Do danego czworoboku wykreślić czworokąt podobny i w podobnem położeniu, zmniejszony w stosunku 2 : 3 tak, aby środek podobieństwa był: *a*) wewnętrzny, *b*) zewnętrzny. Jakie rozmaite położenia może mieć zewnętrzny środek podobieństwa? Czy może leżeć wewnątrz czworokąta?

26. Dwie jakiekolwiek figury podobne nie leżące równolegle sprowadzić do położenia podobnego: *a*) przesunięciem i obrotem, *b*) samym obrotem.

27. Dla dwóch czworokątów podobnych leżących równolegle znaleźć środek podobieństwa.

28. Znaleźć wewnętrzny i zewnętrzny środek podobieństwa dwóch kół.

29. Wykreślić cztery styczne wspólne dwom kołom.

30. Znaleźć cień i półcień kuli większej oświetlonej kulą mniejszą i odwrotnie (w przekroju).

31. Ile warunków muszą spełniać dwa trójkąty prostokątne, aby były podobne? Ile warunków muszą spełniać dwa pięciokąty, aby były podobne?

32. Udowodnić: *a*) pierwszy przypadek podobieństwa trójkątów, *b*) trzeci przypadek podobieństwa.

33. Wykazać, że w dwóch trójkątach podobnych stosunek odpowiednich wysokości równa się stosunkowi boków.

34. Wykazać, że dwa trójkąty, których boki są wzajemnie parami prostopadłe, są podobne.

35. Udowodnić twierdzenie o środku ciężkości trójkąta (str. 84) przy pomocy podobieństwa trójkątów AOB i COD (linii FE nie trzeba wykreślać!).

36. Wykreślić trójkąt prostokątny znając przeciwprostokątnię i stosunek obu przyprostokątnych n. p. 4 : 7 (kreśli się trójkąt podobny, o bokach n. p. 4 *cm* i 7 *cm* i powiększa się go lub pomniejsza).

37. [illegible] wysokość drzewa zapomocą laski o znanej długości mierząc cień drzewa i cień laski.

38. Wykreślić trójkąt znając dwa kąty i *a*) promień koła opisanego, *b*) promień koła wpisanego (metodą figur podobnych).

39. Wykreślić trójkąt równoboczny znając sumę boku i wysokości.

40. W podany trójkąt wpisać kwadrat, spoczywający podstawą na jednym boku. (Rysuje się najpierw kwadrat większy, wystający z trójkąta i łączy się wystający wierzchołek kwadratu z przeciwległym wierzchołkiem trójkąta linią AX; następnie pomniejsza się go tak, aby wierzchołek leżał na boku trójkąta a zarazem na linii AX).

§ 63. 41. Wykreślić średnią geometryczną dwóch danych odcinków.

42. Znaleźć graficznie: $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{28}$.

43. Wykreślić odcinki $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, przy pomocy twierdzenia Pitagorasa znając a i b.

44. Wykreślić odcinek $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ znając a, b, c, d.

* § 64. 45. Znaleźć średnią harmoniczną: *a*) dwóch odcinków, *b*) dwóch liczb.

* 46. Wykonać podział harmoniczny dowolnego odcinka.

* § 65. 47. Jakie jest miejsce geometryczne punktów mających równą potęgę ze względu na jedno koło.

* 48. Obliczyć potęgę punktu: *a*) leżącego poza kołem o promieniu 8 *cm* w odległości 3 *cm* od obwodu, *b*) leżącego zewnątrz koła o promieniu 6 *cm* w odległości 2 *cm* od obwodu.

§ 66. 49. W dowolne koło wpisać umiarowy dziesięciobok, nie używając kątomierza.

50. Obwód koła podzielić: *a*) na 5 równych części, *b*) na 20 równych części bez pomocy kątomierza.

51. Na dowolnym odcinku wykonać złoty podział.

52. Wykreślić prostokąt, którego boki tworzą złoty podział (są odcinkiem większym i mniejszym złotego podziału).

53. Obliczyć bok dziesięciokąta umiarowego znając promień koła opisanego (n. p. $r = 10$ *cm*).

54. Wykreślić bez pomocy kątomierza kąt: *a*) 72°, *b*) 36°, *c*) 18°.

Rozdział X.

Powierzchnia figur płaskich.

§ 67. Ogólne uwagi o mierzeniu powierzchni (pola).

Nauczyliśmy się już mierzyć odcinki i kąty. W geometryi zarówno idealnej, jak i praktycznej, potrzeba często zmierzyć powierzchnię (pole) ograniczoną jakąś linią łamaną lub krzywą. Wprowadzamy w ten sposób do geometryi nowe wielkości, które trzeba umieć przedewszystkiem porównywać. Otóż za równe uważamy pola figur przystających lub takich, które można rozłożyć na części parami przystające. Jasnem jest teraz, kiedy nazwiemy jedną powierzchnię 2, 3, 4 razy większą od drugiej. Najpospoliciej staramy się obydwie figury złożyć z samych kwadratów o bokach wynoszących 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm*, 1 *mm*. Nazywamy je metrem kwadratowym: 1 m^2, decymetrem kwadratowym 1 dm^2, i t. d. Łatwo zauważyć, że kwadrat o boku 1 *m* da się rozdzielić na sto przystających kwadratów o bokach 1 *dm*, 10.000 kwadratów o bokach 1 *cm*, 100^3 kwadratów o boku 1 *mm*. A więc:

$$1\,m^2 = 100\,dm^2;\ 1\,dm^2 = 100\,cm^2;\ 1\,cm^2 = 100\,mm^2;$$

zamiennikiem wyższych miar powierzchni na niższe jest liczba 100.

Za jednostkę do mierzenia pola obraliśmy więc kwadrat, którego bok ma jednostkę długości.

Zmierzyć jakąś powierzchnię znaczy zbadać, na ile takich kwadratów da się powierzchnia rozłożyć, czyli zbadać, ile razy przyjęta jednostka miernicza mieści się w danej powierzchni. W tym celu rozdzielamy daną powierzchnię na same kwadraty jednostkowe i liczymy je. Gdyby pozostały jakieś kawałki powierzchni, dzielimy je na mniejsze kwadraty. Liczba (wymierna lub niewymierna) otrzymana w ten sposób nazywa się liczbą wymiarową pola. Rozszerzając określenie powierzchni równych powiemy ogólniej: Dwie powierzchnie nazywają się równe, jeżeli ich liczby wymiarowe są równe.

W praktyce uskuteczniamy mierzenie pola w ten sposób, że daną figurę rysujemy (najczęściej w pomniejszonej skali) na papierze milimetrowym i liczymy kwadraciki. Powinno się osobno zliczyć kwadraty zawarte całe wewnątrz figury: przypuśćmy, że jest ich *n*. Potem osobno liczymy

kwadraty przecięte przez obwód powierzchni. Jeżeli ich jest n', to liczba wymiarowa P powierzchni zawiera się między n a $n+n'$.

$$n < P < n + n'.$$

Gdybyśmy zrobili siatkę kwadracików o bokach $^1/_{10}$ *mm*, otrzymalibyśmy dla P jeszcze ciaśniejsze granice.

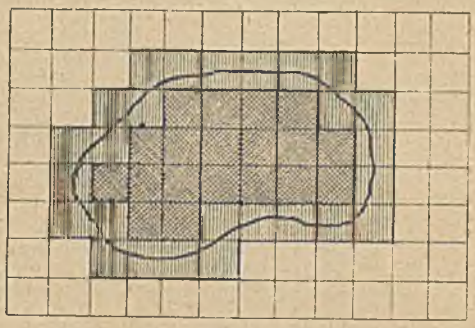


Fig. 168.

Granice, do jakich dążą liczby n i $n+n'$ przy podziale danego pola na corazto drobniejsze kwadraciki, nazywamy *miarą wewnętrzną i miarą zewnętrzną* powierzchni. Jeżeli obydwie miary dążą do jednej, wspólnej granicy, to powierzchnia nazywa się mierzalną. Istnieją jednakże powierzchnie o tak poplątanem ograniczeniu, że ich miara zewnętrzna jest stale większa od miary wewnętrznej.

Drugi praktyczny sposób mierzenia powierzchni można oprzeć na ważeniu. Wycina się żądaną figurę z materyału o jednostajnej grubości (n. p. z kartonu) i waży się ją dokładnie. Następnie wycina się 1 cm^2 z tegosamego materyału i znowu się waży. Stosunek obydwu ciężarów jest zarazem liczbą wymiarową powierzchni. Istnieją także osobne mechanizmy do przybliżonego mierzenia powierzchni narysowanej na papierze, zwane planimetrami.

W miernictwie praktycznem, gdzie chodzi o możliwie dokładne a szybkie zmierzenie pola parcel nieregularnych narysowanych na planie, używa się prawie wyłącznie planimetrów.

Jeżeli mamy do czynienia z figurami regularnemi, potrafimy obliczyć wielkość powierzchni ściśle (t. j. z dowolnem przybliżeniem).

Zaczniemy od najprostszych figur.

§ 68. Powierzchnia prostokąta.

Jeżeli boki prostokąta zawierają całkowite liczby centymetrów (lub milimetrów i t. p.) bez reszty, to celem obliczenia powierzchni dzielimy cały prostokąt na same przystające kwadraty zapomocą dwóch systemów linii równoległych do boków. Z figury 169 widzimy, że tych kwadratów jest tyle, ile wynosi iloczyn liczb wymiarowych obydwu boków n. p. na fig. 169 mamy siedem warstw po pięć centymetrów kwadratowych, zatem

$$P = 7 \,.\, 5 = 35 \; cm^2.$$

Ogólnie: $$P = a \,.\, b.$$

Podobnie obliczalibyśmy powierzchnię, gdyby boki zawierały całkowite liczby jakiejś części jednego centymetra.

Gdyby boki były niewspółmierne z 1 *cm* (a więc i z 1 *mm* i z jego częściami), dzielilibyśmy prostokąt na corazto drobniejsze kwadraty i otrzymalibyśmy liczbę wymiarową powierzchni szeregiem kolejnych przybliżeń z dowolnem przybliżeniem. N. p. na fig. 170. niech $a = 4{\cdot}821\ldots cm$ a $b = 3{\cdot}756\ldots cm$, to powierzchnia $ABCD$ jest zawarta między powierzchniami $A\,4\,C'\,3$ a $A\,5\,C''\,4$, więc jej liczba wymiarowa zawiera się między 4.3 a 5.4.

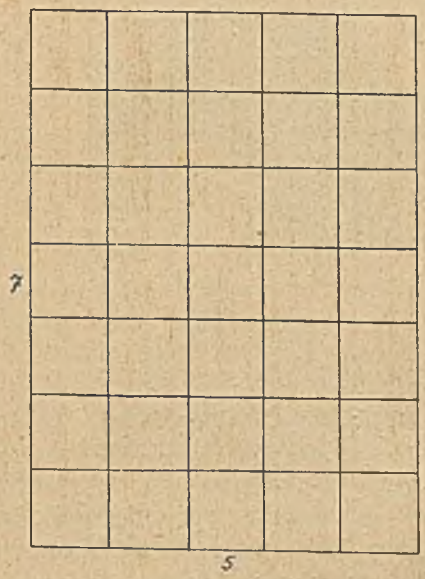


Fig. 169.

$$4.3 < P < 5.4.$$

Uskuteczniając podział subtelniejszy na milimetry kwadratowe, spostrzegamy znowu, że

$$3{\cdot}7\,.\,4{\cdot}8 < P < 3{\cdot}8\,.\,4.9.$$

W dalszym ciągu otrzymamy:

$$3{\cdot}75\,.\,4{\cdot}82 < P < 3{\cdot}76\,.\,4{\cdot}83$$

i t. d.

Ponieważ zaś iloczyny 3.4, 3·7 . 4·8, 3·75 . 4·82 i t. d. dążą do granicy $a.b$, zarówno jak i iloczyny 5 . 4, 3·8 . 4·9, 3·76 . 4·83 i t. d., przeto liczba wymiarowa powierzchni dąży także do tej granicy:

$$P = a\,.\,b.$$

Otrzymujemy więc wzór zupełnie takisam, jak dla boków współmiernych z 1 *cm*. Stąd ogólne prawo:

Powierzchnia prostokąta równa się iloczynowi liczb wymiarowych obydwu boków, lub krótko: podstawie pomnożonej przez wysokość.

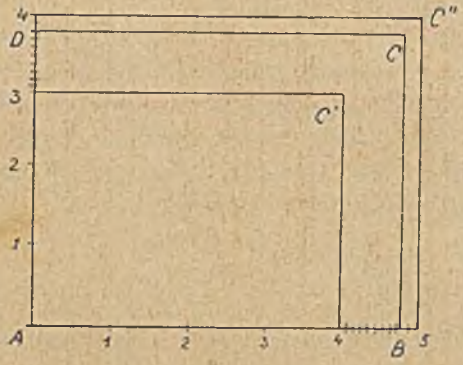


Fig. 170.

(Jeżeli liczby wymiarowe boków są niewymierne, używa się w praktyce mnożenia skróconego.)

Tego prawa możnaby użyć jako graficznego sposobu mnożenia liczb. Trzebaby do danych liczb dobrać odcinki, zbudować z nich prostokąt i podzieliwszy go na centymetrowe (lub milimetrowe) kratki policzyć je. Sposób ten jest jednak nadto zawikłany, aby go z korzyścią można użyć; jestto zresztą właściwie powrócenie do dodawania.

O wiele praktyczniejszym był sposób podany na str. 105.

Ponieważ kwadrat jest szczególnym przypadkiem prostokąta, mianowicie takim prostokątem, w którym $a = b$ (boki są równe), przeto wzór na powierzchnię kwadratu o boku a jest:

$$P = a^2.$$

Stąd też pochodzi nazwa drugiej potęgi.

Na podstawie wzorów na powierzchnię prostokąta i kwadratu można geometrycznie wyjaśnić znane prawa algebry:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,ab + b^2, \text{ i } (a + b)\,.\,(a - b) = a^2 - b^2.$$

(Porównaj figury.)

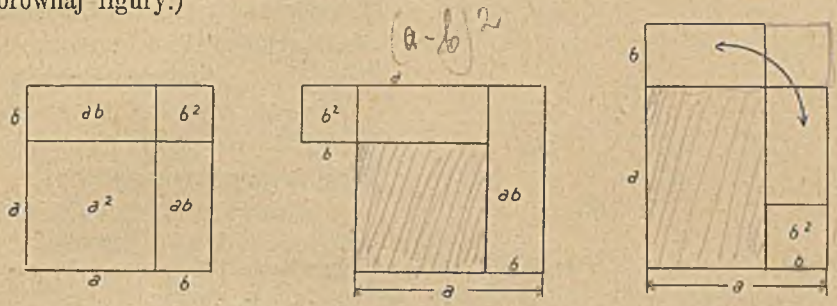


Fig. 171.

Wzór $P = a\,.\,b$ poucza nas także, że:

Powierzchnia prostokąta jest funkcyą obydwu boków.

Często mamy do czynienia z zadaniem odwrotnem: wiedząc jaka ma być powierzchnia prostokąta, obliczyć jego długość (podstawę) lub szerokość (wysokość). Aby to obliczyć, trzeba tylko odwrócić działanie, prowadzące do obliczenia powierzchni.

I tak z wzoru $P = ab$, wynika $a = \frac{P}{b}$ lub $b = \frac{P}{a}$; Z wzoru $P = a^2$ wynika $a = \sqrt{P}$. Wypowiedz słowami!

Kwadratura prostokąta. Kwadraturą jakiejkolwiek figury nazywamy zadanie następujące:

Znaleźć kwadrat, mający powierzchnię tak wielką, jak dana figura. Dla prostokąta zadanie to rozwiążemy tak: Oznaczmy bok nieznanego kwadratu literą x, a boki prostokąta a i b, to musi być:

$$a\,.\,b = x^2 \text{ lub w formie proporcyi}$$

$$(1) \qquad a : x = x : b.$$

Algebraicznie obliczamy bok kwadratu jako: $x = \sqrt{ab}$. Aby tosamo zadanie rozwiązać konstrukcyjnie (konstrukcyą platońską), oprzemy się na proporcyi (1). Widzimy z niej, że bok szukanego kwadratu jest średnią geometryczną między bokami prostokąta. Tę średnią geometryczną znajdujemy

przy pomocy znanej konstrukcyi (por. str. 112) i budujemy na niej kwadrat. Otóż: kwadraturę prostokąta można wykonać przy pomocy linii i cyrkla. (Użyliśmy tu metody analizy algebraicznej por. str. 117.)

§ 69. Powierzchnia równoległoboku.

Posiadając tak prosty sposób obliczenia powierzchni prostokąta, staramy się każdą inną figurę zamienić na prostokąt o równej powierzchni. Najłatwiej możemy to zrobić z każdym równoległobokiem. N. p.: $ABCD$. Przedłużamy bok CD i z punktów A, B rysujemy linie prostopadłe do boku CD. Ponieważ trójkąty I i II są przystające, to prostokąt $ABEF$ ma powierzchnię równą z badanym równoległobokiem.

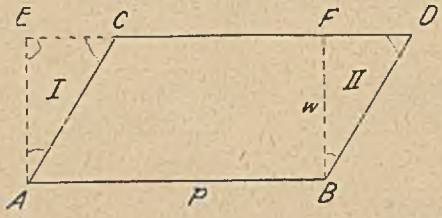


Fig. 172.

Gdyby bok AC był tak nachylony, że punkt F padłby poza odcinek CD, to dowód zmienia się o tyle, że trzeba do prostokąta i do równoległoboku najpierw dodać a potem odjąć pewien trójkąt pomocniczy. (Wykreśl odpowiednią figurę i przeprowadź dowód.) Przy takim dowodzie opieramy się na oczywistem twierdzeniu, że części pozostałe z dwóch równych figur po odjęciu równych części są także równe. Jestto tak zwany „pewnik“ *De Zolt'a*, nie zasługuje jednak na nazwę pewnika, ponieważ da się udowodnić przy pomocy naszych pewników *I—VIII.*

Ponieważ zaś powierzchnia tego prostokąta wynosi: $p \cdot w$, przeto i dla równoległoboku:

$$P = p \cdot w.$$

Powierzchnia każdego równoległoboku równa się iloczynowi liczb wymiarowych podstawy i wysokości lub krótko: podstawie pomnożonej przez wysokość. Stąd wniosek: Równoległoboki, mające równe podstawy i równe wysokości, mają i powierzchnie równe, jakkolwiek kształt mogą mieć odmienny.

§ 70. Powierzchnia trójkąta.

Znając powierzchnię równoległoboku możemy obliczyć powierzchnię każdego trójkąta. Wiadomo bowiem, że każdy trójkąt można uważać za połowę równoległoboku, który otrzymamy, prowadząc z dwóch wierzchołków linie równoległe do przeciwległych boków.

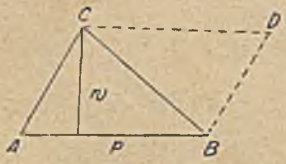


Fig. 173.

Powierzchnia trójkąta równa się połowie powierzchni tego równoległoboku, więc:

$$P = \frac{p \cdot w}{2}$$

gdzie p jest podstawą nietylko równoległoboku, ale i trójkąta a taksamo w wysokością. Wzór ten można napisać w kilku postaciach zupełnie równoważnych:

$$P = \frac{1}{2}\, pw = \frac{p}{2} \cdot w = p \cdot \frac{w}{2}$$

Powierzchnię trójkąta oblicza się, mnożąc podstawę przez pół wysokości.

(Uwaga: opuszczamy zwykle przy wysłowieniu dodatek: liczba wymiarowa).

Stąd wniosek: Trójkąty o równych podstawach i wysokościach są równe co do powierzchni. Jeżeli dwa trójkąty mają równą powierzchnię, a podstawa jednego jest mniejsza, to wysokość musi być w tymsamym stosunku większa i odwrotnie.

§ 71. Powierzchnia trapezu.

Trapez możemy zmienić albo na trójkąt, albo na równoległobok, równoważny z nim co do powierzchni.

Zamieńmy na trójkąt. W tym celu polowimy jeden z boków nierównoległych n. p. CB i prowadzimy prostą DE aż do przecięcia się z przedłużeniem boku AB. Ponieważ $I \cong II$, przeto powierzchnia trapezu równa się powierzchni trójkąta ADF, więc:

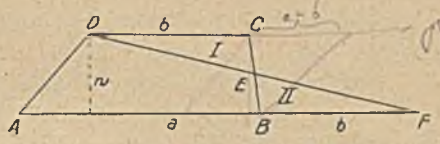


Fig. 174.

(1) $$P = \frac{a+b}{2} \cdot w.$$

Powierzchnia trapezu równa się połowie sumy boków równoległych pomnożonej przez wysokość. Ale

$$\frac{a+b}{2}$$

równa się linii środkowej trapezu, można więc także obliczyć powierzchnię trapezu mnożąc linię środkową przez wysokość. (Wyprowadź tosamo, zamieniając trapez na równoległobok!)

Jeżeli bok b posuwając się po liniach AD i BC zmniejsza się równocześnie, to ostatecznie otrzymujemy trójkąt, gdy $b = o$. Wtedy wzór (1) przechodzi na

$$P = \frac{a}{2} \cdot w$$

otrzymujemy więc z powierzchni trapezu wzór na powierzchnię trójkąta.

§ 72. Powierzchnia wielokąta.

Celem obliczenia powierzchni jakiegokolwiek wielokąta rozkładamy go na trójkąty i trapezy. Jeżeli wielokąt jest umiarowy, to możemy go

rozbić na same przystające — a więc równe co do powierzchni — trójkąty o równych podstawach i wysokościach. Podstawą jest bok wielokąta, a wysokością promień koła wpisanego, zatem powierzchnia każdego trójkąta wynosi: $b \cdot \frac{r_w}{2}$.

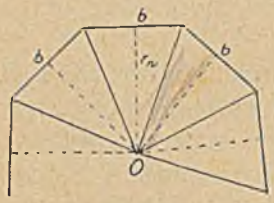


Fig. 175.

Jeżeli boków jest n, to powierzchnia całego wielokąta wynosi:

$P = n \cdot b \cdot \frac{r_w}{2}$. Ale $n \cdot b = U$, daje obwód wielokąta. Stąd wzór:

$$P = U \cdot \frac{r_w}{2}$$

Powierzchnia wielokąta umiarowego równa się obwodowi wielokąta pomnożonemu przez połowę promienia koła wpisanego w ten wielokąt.

Bok wielokąta umiarowego zależy od promienia, nie można więc b obierać dowolnie r i b! $b = \varphi(r)$

Wieloboki nieumiarowe mamy często podane w ten sposób, że znane są odległości jego wierzchołków od dwóch stałych prostych, prostopadłych do siebie OX i OY. (Zdarza się to zwłaszcza w miernictwie.) Te odległości nazywamy współrzędnemi wierzchołków. Wtedy rozbijamy wielokąt wraz z częścią pod nim leżącą (zacieniowaną) za pomocą linii prostopadłych do linii OX na trapezy, których pola łatwo obliczymy. Następnie od sumy trapezów niezacieniowanych odejmujemy sumę trapezów zacieniowanych.

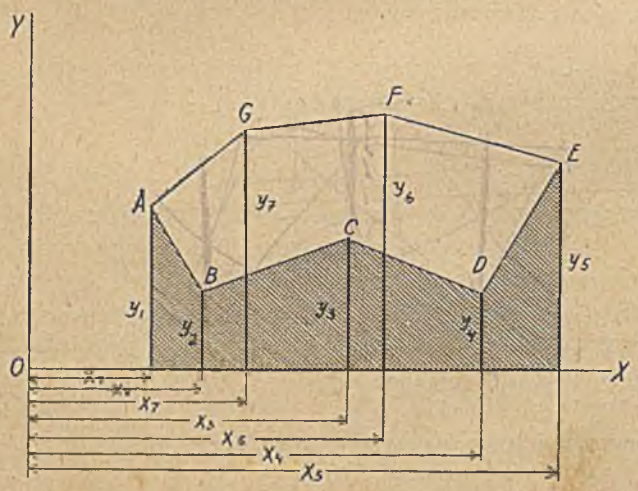


Fig. 176.

N. p.: Jeżeli punkt A ma odległości x_1, y_1, od linii OX i OY, punkt $B \ldots x_2, y_2$, $C \ldots x_3, y_3$ i t. d., to trapezy niezacieniowane mają powierzchnię:

$$\frac{y_1 + y_7}{2}(x_7 - x_1) + \frac{y_7 + y_6}{2}(x_6 - x_7) + \frac{y_6 + y_5}{2} \cdot (x_5 - x_6);$$

trapezy zaś zacieniowane:

$$\frac{y_1+y_2}{2}(x_2-x_1)+\frac{y_2+y_3}{2}(x_3-x_2)+\frac{y_3+y_4}{2}(x_4-x_3)+$$
$$+\frac{y_4+y_5}{2}(x_5-x_4).$$

Współrzędne notujemy zwykle obok punktu w nawiasie: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, przyczem zawsze najpierw piszemy odległość od osi pionowej.

§ 73. Zamiana i podział figur.

Na podstawie twierdzeń o obliczaniu powierzchni możemy wykonywać konstrukcyjnie zamianę figur na inne, o równej powierzchni i podział figur. Widzieliśmy już, że każdy prostokąt można zamienić na kwadrat. Obecnie możemy każdy równoległobok zamienić na inny równoległobok o tejsamej podstawie i wysokości, o dowolnych kątach.

N. p.: Równoległobok $ABCD$ zamienia się na $ABEF$ przesuwając górny bok po tej samej linii o kawałek CE. Można więc każdy równoległobok zamienić na prostokąt (n. p. $ABGH$), a więc i na kwadrat, ponieważ prostokąt potrafimy zamienić na równoważny z nim kwadrat. (Widzimy, że przy danej podstawie i wysokości długość pozostałych boków równoległoboku zależy od wielkości kąta α. Gdy α maleje, boki wzrastają nieograniczenie; taksamo gdy α wzrasta powyżej 90^0).

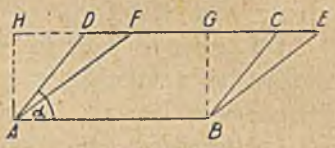


Fig. 177.

Aby trójkąt zamienić na inny, o równej podstawie i wysokości, prowadzimy przez wierzchołek linię równoległą do podstawy. Na tej linii musi leżeć wierzchołek każdego nowego trójkąta.

Można w ten sposób otrzymać trójkąt prostokątny, równoramienny, rozwartokątny.

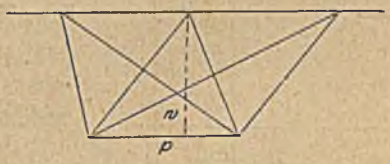


Fig. 178.

Jeżeli chcemy zamienić trójkąt na równoległobok o równej podstawie, musimy jego wysokość skrócić o połowę (dlaczego?) i odwrotnie. Można więc i trójkąt zamienić na prostokąt a co zatem idzie: na kwadrat, czyli wykonać kwadraturę trójkąta (przy pomocy linii i cyrkla).

Aby wielokąt n. p. $ABCDE$ na fig. 179 zamienić na trójkąt, odcinamy najpierw jeden trójkąt i zamieniamy go na inny, taki, aby jeden jego bok był przedłużeniem boku pozostałego wielokąta.

Otrzymamy wielokąt o mniejszej liczbie boków i postępujemy z nim taksamo dalej. Otrzymamy ostatecznie jeden trójkąt (ABN na naszej figurze). Stąd już łatwo przejść do kwadratury wielokąta.

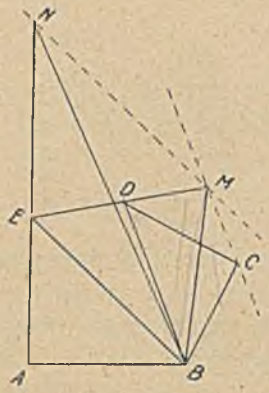


Fig. 179.

Powróćmy do trójkąta. Jeżeli chcemy trójkąt zamienić na inny, o równej powierzchni, ale o krótszej podstawie, to trzeba odpowiednio przedłużyć wysokość. Konstrukcyjnie postępujemy podobnie, jak przy zamianie wielokąta na trójkąt. Odcinamy mianowicie część trójkąta i zamieniamy ją na trójkąt, którego bok jest przedłużeniem boku pozostałej części trójkąta.

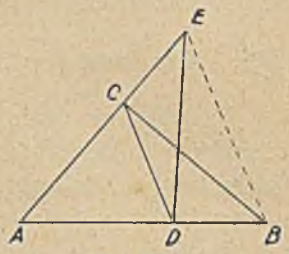


Fig. 180.

N. p. ABC zamienia się na trójkąt o podstawie AD odcinając trójkąt DBC i zamieniając go na taki trójkąt CED, któryby tworzył jeden trójkąt z częścią ADC.

W praktyce większe zastosowanie ma podział figur na części równe lub pozostające w pewnym stosunku, z góry podanym. (Postępowania tego używa się przy podziałach gruntów w celu parcelacyi lub w celach spadkowych.)

Aby trójkąt podzielić liniami wychodzącemi z jednego wierzchołka na części równe, trzeba tylko podstawę podzielić na odpowiednią liczbę równych części i punkty podziału połączyć z wierzchołkiem. Podstawy tych trójkątów są równe, a wysokość jest wspólna (ponieważ wierzchołek jest wspólny a podstawy leżą na tej samej linii prostej), przeto i powierzchnie tych trójkątów są równe. Każdy więc jest żądaną częścią całego trójkąta.

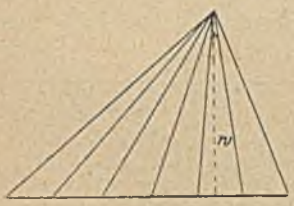


Fig. 181.

Gdybyśmy mieli trójkąt podzielić n. p. w stosunku 5 : 3, to dzielimy podstawę w tym stosunku (na ośm równych części, to trzeci punkt podziału daje żądany podział) i łączymy punkt podziału z wierzchołkiem.

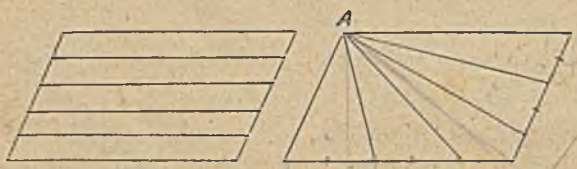


Fig. 182.

Równoległobok można odrazu podzielić na kilka równych części (lub w żądanym stosunku):

albo liniami równoległemi do boku, albo liniami wychodzącemi z jednego wierzchołka.

Z figury 182. widzimy dokładnie, jak należy w tym przypadku postępować.

Trapez znowu łatwo jest podzielić liniami łączącemi boki równoległe. W tym celu dzielimy obydwa boki równolegle na tylesamo równych części i łączymy przeciwległe punkty podziału. (Podział trapezu zapomocą linii równoległej do boków równoległych jest już zadaniem trudniejszem.)

Dowolny czworokąt możemy podzielić na równe części w ten sposób, że dzielimy przekątnię na równe części i punkty podziału łączymy z przeciwległymi wierzchołkami. Powstaną nieregularne czworokąty n. p. $ACBD$ i t. d. Na podstawie tych najprostszych podziałów można wykonywać także podziały trudniejsze. Wykonamy także jeden przykład zawilszy: Podzielić równoległobok na trzy równe części liniami wychodzącemi z jednego punktu S, leżącego na boku.

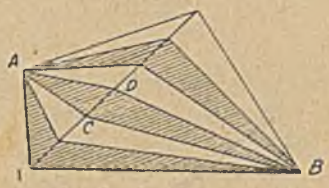


Fig. 183.

Wykonujemy najpierw podział zapomocą linii prostych, wychodzących z sąsiedniego wierzchołka A. Trójkąt I zamieniamy na czworokąt, używając linii $AR \parallel SE$, trójkąt III na trójkąt DST, o podstawie DS, przy pomocy linii $AT \parallel SF$. Wtedy już pozostała część $RSCT$ musi być równa pozostałej trzeciej części równoległoboku t. j. części II.

Fig. 184.

§ 74. Powierzchnie figur podobnych.

Znając powierzchnię jakiejś figury, można obliczyć powierzchnię każdej figury podobnej, jeżeli tylko znamy stosunek zmniejszenia lub powiększenia. Powierzchnie figur podobnych pozostają bowiem w pewnym prostym stosunku.

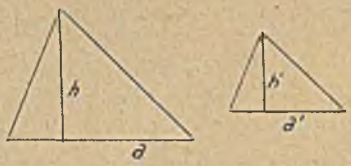


Fig. 185.

Weźmy pod uwagę dwa trójkąty podobne:

Z podobieństwa wynika proporcya:

$$a : a' = h : h' \qquad (1)$$

Powierzchnie tych trójkątów wynoszą:

$$P = \frac{a\,h}{2}; \quad P' = \frac{a'\,h'}{2}$$

Ich stosunek jest więc: $P : P' = a h : a' h'$. Ale $h = \frac{a h'}{a'}$, jak to wynika z proporcyi (1), więc $P : P' = \frac{a^2 h'}{a'} : a' h'$ lub po uproszczeniu przez h' i rozszerzeniu przez a': $P : P' = a^2 : a'^2$.

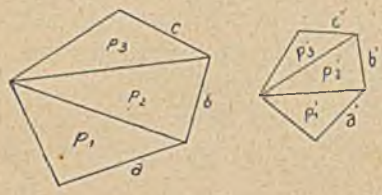


Fig. 186.

Powierzchnie trójkątów podobnych mają się do siebie, jak kwadraty odpowiednich boków. Ponieważ zaś $a : a' = s$ jest stosunkiem zmniejszenia, więc, $a^2 : a'^2 = s^2$, stąd $P : P' = s^2$, czyli:

$$P = s^2 P'$$

słowami:

Jeżeli boki trójkąta powiększą się s-krotnie, to powierzchnia wzrośnie s^2 razy, t. j. w stosunku kwadratowym.

Tosamo odnosi się do wszystkich figur podobnych, ponieważ możemy je rozdzielić na trójkąty parami podobne.

N. p. fig. 186: Jeżeli $a : a' = b : b' = c : c' = s$, to

$$p_1 = s^2 p_1'$$
$$p_2 = s^2 p_2'$$
$$p_3 = s^2 p_3'$$
$$(p_1 + p_2 + p_3) = s^2 (p_1' + p_2' + p_3')$$

czyli całe

$$P = s^2 P'.$$

Aby więc *otrzymać powierzchnię figury podobnej, trzeba powierzchnię danej figury pomnożyć przez zmniejszenie (lub zwiększenie) podniesione do kwadratu.*

Jeżeli n. p. jakiś rysunek pomniejszę w stosunku 1 : 6, to powierzchnia zmniejszy się 36 razy. Na mapie z podziałką 1 : 75.000, długości są 75.000-ną częścią prawdziwych długości, ale powierzchnie są zmniejszone w stosunku 75.000^2 t. j. 5.625,000.000 razy.

§ 75. Twierdzenie Pitagorasa (w formie geometrycznej).

Do dowodu twierdzenia Pitagorasa używaliśmy dotychczas proporcyi; możemy je jednak udowodnić drogą czysto geometryczną. c^2 możemy sobie przedstawić jako kwadrat zbudowany z przeciwprostokątni, a a^2 i b^2 jako kwadraty zbudowane na obu przyprostokątniach. Przedstawiliśmy to na fig. 187. Chcemy wykazać, że $I + II = III$. Dla dowodu tworzymy rzut boku AC na AB i przedłużamy linię rzucającą do punktu F. Kwadrat III rozpadł się na dwa prostokąty: I' i II'. Wykażemy, że $I' = I$ a $II' = II$. Aby porównać kwadrat I z prostokątem I', łączymy C z D i E z B. Otrzymane trójkąty są przystające, ($AC = AE$, $AD = AB$, $a \sphericalangle CAD =$

$\sphericalangle EAB$, ponieważ powstają przez dodanie tegosamego kąta x do 90^0). Powierzchnie tych trójkątów są więc równe. Ale EAB jest połową kwadratu I, ponieważ ma z nim wspólną podstawę EA i równą wysokość (dlaczego?). Taksamo CAD jest połową prostokąta I'. Jeżeli zaś połowy jakichś figur mają równe powierzchnie, to całe figury muszą mieć równe powierzchnie, zatem $I = I'$.

Taksamo wykazuje się, że $II = II'$, więc $I + II = I' + II'$ czyli

$$I + II = III.$$

Twierdzenie Pitagorasa możemy zatem wypowiedzieć także w następującej, geometrycznej szacie:

Kwadrat zbudowany na przeciwprostokątni równa się sumie kwadratów, zbudowanych na obu przyprostokątniach.

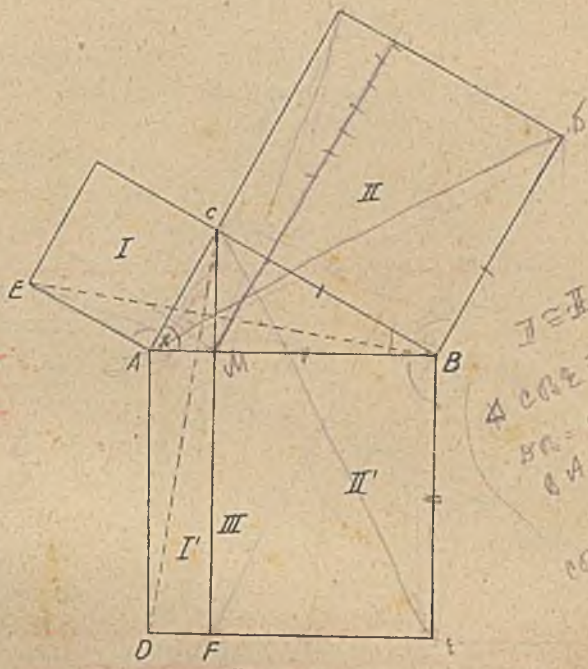


Fig. 187.

Twierdzenie to znane już było w Egipcie. W Indyach podawano bardzo ciekawe sposoby dowodzenia. N. p. matematyk indyjski Bramagupta (w VII. wieku po n. Chr.) używał figury przedstawionej na rycinie 188, z której widać, że

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{więc} \qquad c^2 = a^2 + b^2.$$

Jeszcze łatwiej można spostrzedz twierdzenie Pitagorasa na fig. 189, gdzie wprost przez przesunięcie trójkątów zacieniowanych w miejsca I i II

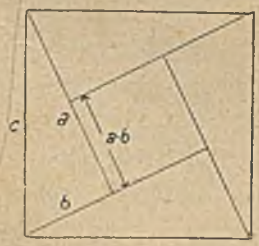


Fig. 188.

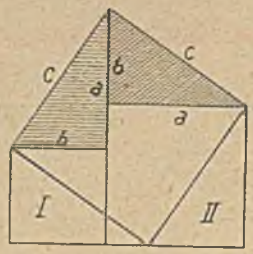


Fig. 189.

zamienia się wielki kwadrat o boku c na dwa kwadraty o bokach b i a. (Przeprowadź dowód, że trójkąty zacieniowane są przystające do trójkątów I i II.)

Twierdzenie Pitagorasa odnosi się nietylko do kwadratów ale wogóle do wszelkich figur podobnych zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego.

Wiemy bowiem, że dla figur podobnych (p. fig. 190):

$$P_1 : P_3 = a^2 : c^2 \quad \Big| \quad P_1 c^2 = P_3 a^2$$
$$P_2 : P_3 = b^2 : c^2 \quad \Big| \quad P_2 c^2 = P_3 b^2$$

Stąd:

$$P_1 c^2 + P_2 c^2 = P_3 (a^2 + b^2).$$

Ale $a^2 + b^2 = c^2$, więc $P_1 c^2 + P_2 c^2 = P_3 c^2$; lub upraszając przez c^2, otrzymamy: $P_1 + P_2 = P_3$ słowami:

Suma powierzchni jakichkolwiek figur podobnych zbudowanych na przyprostokątniach równa się powierzchni figury podobnej zbudowanej na przeciwprostokątni.

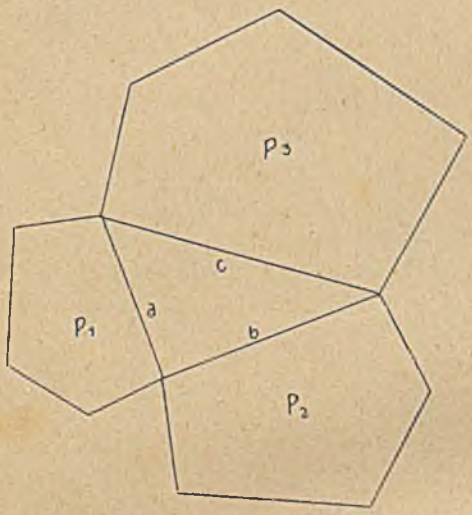


Fig. 190.

§ 76. Twierdzenie Carnota.

Twierdzenie Pitagorasa odnosi się do trójkątów prostokątnych. Dla trójkątów ukośnokątnych wyprowadzimy podobne twierdzenie, obejmujące w sobie twierdzenie Pitagorasa, jako przypadek szczególny. Na bokach dowolnego trójkąta ostrokątnego budujemy kwadraty, wykreślamy trzy wysokości i przedłużamy je aż do przecięcia się z przeciwległymi bokami kwadratów. W ten sposób rozłożymy kwadraty na prostokąty parami równe:

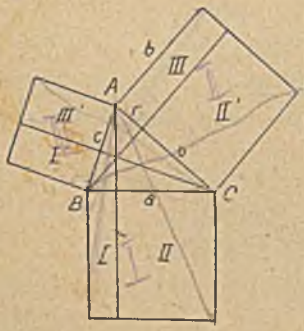


Fig. 191.

$I = I'$, $II = II'$ i $III = III'$. (Dowód równości tych prostokątów przeprowadza się taksamo, jak przy dowodzie twierdzenia Pitagorasa.)

Więc: $I + II = I' + II'$ czyli:

$$a^2 = b^2 + c^2 - III - III'.$$

Ale $III = III'$, więc $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, III$.

Prostokąt III jest utworzony z boku b i z odcinka r, który jest rzutem boku c na bok b. Więc:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,br. \qquad (1)$$

$b r = a^2 - c^2 + br$

Kwadrat na boku trójkąta ostrokątnego równa się sumie kwadratów na dwóch innych bokach, pomniejszonej o prostokąt, utworzony z jednego z tych boków i z rzutu nań drugiego boku.

Jeżeli tosamo rozważanie przeprowadzimy dla trójkąta *rozwartokątnego*, otrzymamy:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,br. \qquad (2)$$

(Figura jest wtedy nieco zawilsza, ponieważ punkt przecięcia się trzech wysokości leży wtedy poza polem trójkąta. Narysuj!)

Jeżeliby trójkąt był prostokątny, to rzut boku c na bok b jest jednym punktem A, więc $r = o$, i otrzymujemy z wzoru (1) lub (2) twierdzanie Pitagorasa: $a^2 = b^2 + c^2$.

To dowodzi zarazem, że twierdzenie Pitagorasa jest charakterystyczną własnością trójkątów prostokątnych.

Twierdzenie to pospolicie nazywają twierdzeniem Carnota (żył w XVIII. wieku), jakkolwiek już znanem było w starożytności.

Twierdzenie to można wyprowadzić rachunkiem, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych, powstałych przez poprowadzenie jednej wysokości:

$$\left.\begin{array}{l} h^2 = a^2 - (b - r)^2 \\ h^2 = c^2 - r^2 \end{array}\right\} a^2 - (b - r)^2 = c^2 - r^2$$

stąd:

$$a^2 - b^2 + 2\,br = c^2$$

$$\underline{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,br.}$$

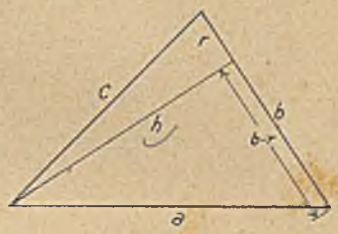


Fig. 192.

§ 77. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenia Pitagorasa używa się przedewszystkiem do obliczenia jednego boku trójkąta prostokątnego przy pomocy znanych dwóch innych boków. Z wzoru bowiem $a^2 + b^2 = c^2$ otrzymujemy:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

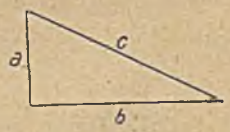


Fig. 193.

Uwaga: Nie należy sądzić, aby $\sqrt{c^2 - b^2}$ wynosił $c - b$, albowiem $(c - b)^2 = c^2 - 2\,bc + b^2$, a nie $c^2 - b^2$! Tasama uwaga odnosi się do innych pierwiastków! Trzeba najpierw obliczyć $c^2 - b^2$ i t. d. a potem obliczyć drugi pierwiastek!

Twierdzeniem Pitagorasa posługujemy się także, aby obliczyć przekątnię prostokąta lub kwadratu: N. p. dla prostokąta otrzymujemy

$$p = \sqrt{a^2 + b^2}$$

a stąd odwrotnie można obliczyć jeden bok, znając drugi bok i przekątnię.

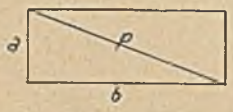


Fig. 194.

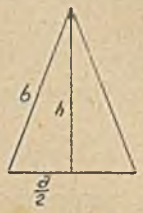


Fig. 195.

Wysokość trójkąta równoramiennego jako funkcya jego boków wyraża się również przy pomocy twierdzenia Pitagorasa:

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Ponieważ zaś każdy wielokąt umiarowy można rozdzielić na same trójkąty równoramienne, przeto posiadamy także sposób obliczenia promienia koła wpisanego (lub opisanego) przy pomocy boku i promienia koła opisanego (wpisanego).

Wysokość i powierzchnię trójkąta równobocznego można obliczyć, znając jego bok.

Fig. 196.

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$ stąd

(1) $$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$ a więc

powierzchnia: $$P = \frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$$ czyli

(2) $$P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$ $a = \frac{4P}{\sqrt{3}}$

Widzimy więc, że powierzchnia trójkąta równobocznego jest funkcyą tylko jednej zmiennej, mianowicie jest funkcyą długości boku.

Wyraź odwrotnie długość boku w zależności od wielkości powierzchni!

Wyraź powierzchnię trójkąta równobocznego jako funkcyę wysokości!

Wzory (1) i (2) zasługują na uwagę, ponieważ używa się ich często w planimetryi i stereometryi przy obliczaniu powierzchni figur, złożonych z trójkątów równobocznych (n. p. sześciokąt umiarowy).

* § 78. Wzór Herona.

Także powierzchnię trójkąta różnobocznego można obliczyć, znając trzy boki trójkąta. Obliczmy najpierw wysokość (fig. 197):

$$w = \sqrt{c^2 - r^2} = \sqrt{(c + r)(c - r)}.$$

Odcinek r można obliczyć przy pomocy twierdzenia Carnota, albowiem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2br$$

stąd

$$r = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

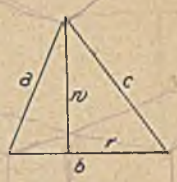


Fig. 197.

Podstawiając tę wartość we wzór na w otrzymamy:

$$w = \sqrt{\left(c + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)\left(c - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)}.$$

Sprowadzamy wyrażenia znajdujące się pod pierwiastkiem do wspólnego mianownika

$$w = \sqrt{\frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\,(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2}}$$

Zbierając wyrazy w nawiasach i wyciągając pierwiastek z mianownika, otrzymujemy:

$$w = \frac{1}{2b}\sqrt{[(b+c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b-c)^2]}.$$

Rozbijamy różnice kwadratów na sumy i różnice:

$$w = \frac{1}{2b}\sqrt{(b + c + a)\,(b + c - a)\,(a + b - c)\,(a - b + c)}.$$

Powierzchnia trójkąta:

$$P = \frac{b}{2}.w = \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{2b}\sqrt{(a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)}.$$

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)\,(-a + b + c)\,(a + b - c)\,(a - b + c)}.$$

Dla skrócenia oznaczamy obwód trójkąta znakiem: $2s$.

$a + b + c = 2s$ Odejmując po obu stronach $2a$, lub $2b$, lub $2c$ otrzymujemy:

$$-a + b + c = 2s - 2a = 2(s - a)$$
$$a - b + c = 2s - 2b = 2(s - b)$$
$$a + b - c = 2s - 2c = 2(s - c).$$

Wprowadzając te skrócenia pod pierwiastek otrzymamy:

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{16s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$ czyli ostatecznie:

$$P = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$ *(s jest połową obwodu).*

Wyraziliśmy więc powierzchnię trójkąta, jako funkcyę trzech boków.

Uwaga: Otrzymany symetryczny wzór na powierzchnię trójkąta zawdzięczamy Heronowi z Aleksandryi (I. wieku po n. Chr.).

Na podstawie tego wzoru można obliczyć promień koła wpisanego w trójkąt, jeżeli znamy trzy boki trójkąta. W tym celu prowadzimy ze środka koła wpisanego linie prostopadłe do trzech boków trójkąta i łączymy środek koła z wierzchołkami. Powierzchnia trójkąta rozpadła się na trzy części; obliczając każdą z nich osobno, otrzymujemy:

$$P = a.\frac{r}{2} + b.\frac{r}{2} + c.\frac{r}{2}$$ czyli biorąc r za nawias: $$P = \frac{a+b+c}{2}.r.$$

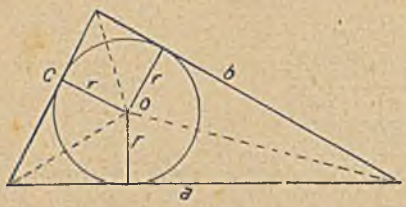


Fig. 198.

Ale $a+b+c = 2s$

więc: $P = s.r$, zatem

$$r = \frac{P}{s}$$ czyli:

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}.$$

Wyprowadzając s pod pierwiastek otrzymujemy

$$r = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}$$ czyli

ostatecznie: $$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Wzór ten tem tylko różni się od wzoru Herona, że s jest w mianowniku, zamiast w liczniku. *

§ 79. Obliczenie boków (i powierzchni) wielokątów umiarowych wpisanych w koło. Podział koła.

Nauczyliśmy się wykonywać podział koła konstrukcyjnie, obecnie zrobimy tosamo ścisłym rachunkiem. Trzeba w tym celu obliczyć boki wieloboków umiarowych wpisanych w koło w zależności od promienia koła.

Fig. 199.

Mając dany promień r, szukamy boku b, wielokąta wpisanego.

Dla *trójkąta równobocznego* w koło wpisanego punkt O jest zarazem środkiem ciężkości (wskutek symetryi), więc $OA = r$, $OB = \frac{r}{2}$ czyli

$$h = \frac{3r}{2}.$$

Ale także $h = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ (p. str. 134) więc: $\frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{3r}{2}$. Stąd $b = \frac{3r}{\sqrt{3}}$

lub $b = \frac{3\sqrt{3}r}{3}$, $b = \frac{3r\sqrt{3}}{3}$

a więc $$b = r.\sqrt{3}.$$ $r\sqrt{3}$

W kwadracie wpisanym w koło przekątnia jest średnicą, więc

$$4r^2 = b^2 + b^2 = 2b^2$$
$$b^2 = 2r^2 \quad \text{czyli}$$
$$b = r.\sqrt{2}.$$

Dla sześciokąta umiarowego w koło wpisanego mamy, jak wiadomo:

$$b = r.$$

Z kwadratu można przejść do ośmiokąta prowadząc dwie średnice prostopadłe do boków i łącząc ich punkty końcowe z wierzchołkami kwadratu. Z figury 200. widzimy, że

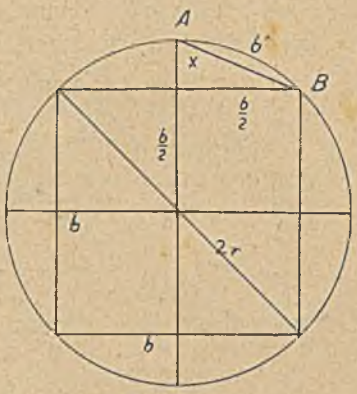


Fig. 200.

$$b' = \sqrt{x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}. \quad \text{Ale}$$

$$x = r - \frac{b}{2} = r - \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

(bo b jest bokiem kwadratu), więc:

$$b' = \sqrt{r^2 - r^2\sqrt{2} + \frac{r^2.2}{4} + \frac{r^2.2}{4}}$$

$$b' = \sqrt{r^2 - r^2\sqrt{2} + r^2} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}}.$$ Wyciągając drugi pierwiastek z r^2 otrzymamy: $b' = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$

Podobnie z sześciokąta umiarowego można obliczyć bok dwunastokąta umiarowego wpisanego w koło. Otrzymamy:

$$b' = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$ (Udowodnij!)

Z tych przykładów widzimy, że znając bok n boku umiarowego, możemy obliczyć bok $2n$ boku, $4n$ boku i t. d. Otóż wychodząc z trójkąta i kwadratu możemy obliczyć boki wielokątów umiarowych, których liczba boków wynosi: 4, 8...2^n, tudzież 3, 3.2, 3.2^2, 3.2^3...3.2^n.

Pominęliśmy pięciobok i dziesięciobok umiarowy. Otóż już przy złotym podziale mieliśmy (p. str. 116):

$$b = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2}. \quad \text{Stąd}$$

$$b = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} \quad \text{czyli}$$

$$\text{(i)} \qquad b = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

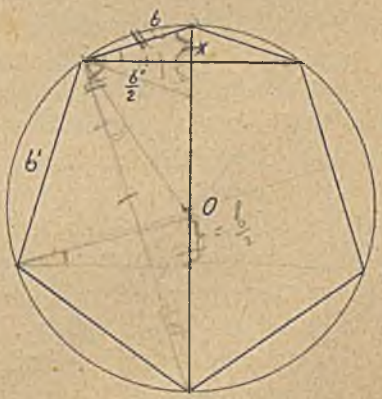


Fig. 201.

Stąd możemy przejść do boku pięciokąta umiarowego rachun-

kiem nieco zawilszym. Mianowicie stosując twierdzenie o średniej geometrycznej (str. 112) do boku dziesięciokąta umiarowego, otrzymamy:

$$x : b = b : 2r \quad \text{stąd}$$

$$x = \frac{b^2}{2r} \quad \text{czyli biorąc } b \text{ z wzoru (1):}$$

$$x = \frac{r^2}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1) : 2r$$

$$x = \frac{r}{8}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{r}{4}(3 - \sqrt{5}).$$

Przy pomocy tego odcinka obliczymy połowę boku pięciokąta umiarowego:

$$\frac{b'}{2} = \sqrt{b^2 - x^2}.$$

Podstawiając tu wartości za b i x otrzymamy:

$$\frac{b'}{2} = \sqrt{\frac{r^2}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1) - \frac{r^2}{16}(9 - 6\sqrt{5} + 5)}.$$

Przed pierwiastek wyciągamy $\sqrt{\frac{r^2}{16}} = \frac{r}{4}$ a więc

$$\frac{b'}{2} = \frac{r}{4}\sqrt{4(6 - 2\sqrt{5}) - (14 - 6\sqrt{5})} = \frac{r}{4}\sqrt{24 - 8\sqrt{5} - 14 + 6\sqrt{5}}$$

$$b' = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Uwaga: Łatwo sprawdzić rachunkiem, że

$$b'^2 = b^2 + r^2. \qquad \text{(Wypowiedz słowami!)}$$

Jeżeli potrafimy obliczyć bok *5-boku*, to stąd już można znaleźć bok każdego wieloboku, którego liczba boków wynosi: 5.2, 5.2^2, $5.2^3 \ldots 5.2^n$.

Wzory te przydają się często przy obliczaniu powierzchni i obwodów wielokątów umiarowych.

Widzimy, że wzory wyrażające związek między bokami wielokątów umiarowych a promieniami kół opisanych składają się co najwyżej z drugich pierwiastków — trzeci pierwiastek nie występuje nigdzie. Możemy więc te boki konstrukcyjnie wynaleźć przy pomocy linii i cyrkla (ponieważ potrafimy każdy drugi pierwiastek zbudować konstrukcyjnie). Odnosi się to do wielokątów, których liczba boków wynosi: 2^n, 3.2^n, 5.2^n, *a także* $3.5.2^n$ (n dowolna liczba całkowita dodatnia lub zero). Gauss (w roku 1801) wykazał, że także bok 17-kąta, 257-kąta i t. p., da się wyrazić jako funkcya promienia koła przy pomocy samych drugich pierwiastków, da się więc skonstruować przy pomocy cyrkla i linii. Natomiast boki 7-, 9-, 11-, 13-kąta nie dadzą się w ten sposób obliczyć.

Do obliczenia boków innych wielokątów posiadamy sposoby trygonometryczne.

Ciekawem jest, że 1^0 nie da się skonstruować przy pomocy linii i cyrkla; jestto bowiem podział koła na 360 części, liczba zaś $360 = 9.5.2^2$, a widzie-

liśmy, że już na dziewięć części nie da się koło konstrukcyjnie podzielić. Porównując boki wielokątów z promieniem koła opisanego widzimy, że

$$b_3 > r,\ b_4 > r,\ b_5 > r,\ b_6 = r,\ b_8 < r,\ b_{10} < r.$$

(b_3 = bok trójkąta równobocznego, b_4 = bok kwadratu, b_5 = bok pięciokąta i t. d.) Słowami: boki są najpierw większe od promienia, dla sześciokąta bok jest równy promieniowi, dla dalszych zaś wielokątów corazto mniejszy w porównaniu z promieniem. Wielkość tego boku dąży do granicy zero, jeżeli liczba boków wzrasta nieograniczenie.

§ 80. Obwód koła.

Dotychczas obliczaliśmy tylko długości odcinków prostych. Jeżeli chcemy zbadać długość obwodu koła, a więc linii krzywej, musimy używać zupełnie odmiennych sposobów.

W geometryi praktycznej łatwo wykonać mierzenie długości także linii krzywych (używa się nitki, lub toczy się kółko o znanym obwodzie po danej linii krzywej), w geometryi idealnej jednakowoż ścisłe obliczenie długości linii krzywych sprawia wogóle poważne trudności. To obliczanie nazywamy: rektyfikacyą linii krzywej t. j. wyprostowaniem.

Linię kołową uważamy za granicę, do jakiej dążą obwody wielokątów wpisanych o corazto większej liczbie boków, a których kąty zbliżają się coraz bardziej do 180°. Najlepiej użyć wieloboków umiarowych (por. str. 95, § 56).

Aby to obliczenie wykonać, zauważmy przedewszystkiem, że koła są figurami podobnemi, więc ich obwody mają się do siebie, jak średnice. Jeżeli więc U_1, U_2 oznaczają obwody dwóch różnych kół, to:

$$U_1 : U_2 = 2r_1 : 2r_2 \quad \text{czyli}$$
$$U_1 : 2r_1 = U_2 : 2r_2.$$

Taksamo dla każdego innego koła otrzymamy tęsamą wartość stosunku: $U : 2r$. Stąd wniosek:

Stosunek obwodu koła do średnicy jest dla każdego koła stałą liczbą. Największą trudność przy obliczeniu obwodu koła sprawia właśnie obliczenie tej liczby stałej. Wpiszmy w koło i opiszmy na kole sześciokąt umiarowy, to długość obwodu koła jest większa od obwodu sześciokąta wpisanego a mniejsza od obwodu sześciokąta opisanego (por. ćw. 4, str. 96). Ponieważ zaś obwód sześciokąta wpisanego wynosi $6r$, a sześciokąta opisanego — jak łatwo obliczyć — $\frac{12r}{\sqrt{3}}$, przeto

$$6r < U < \frac{12r}{\sqrt{3}}$$ a dzieląc całą nierówność

przez $2r$: $$3 < \frac{U}{2r} < \frac{6}{\sqrt{3}}.$$

Liczba $\frac{U}{2r}$ zawiera się więc w granicach 3 i 3·464 . . . Biorąc teraz *12-bok* wpisany i opisany otrzymamy granice jeszcze bliższe, ponieważ obwód

12-boku mniej się różni od obwodu koła, aniżeli obwód 6-boku. Po wykonaniu rachunku otrzymamy:

$$3{\cdot}106\ldots < \frac{U}{2r} < 3{\cdot}215\ldots$$

Gdybyśmy jeszcze kilka razy powtórzyli te mozolne rachunki dla 24-kąta, 48-kąta i t. d. otrzymalibyśmy:

$$3{\cdot}14159 < \frac{U}{2r} < 3{\cdot}14160.$$

Możemy więc napisać

$$\frac{U}{2r} = 3{\cdot}14159\ldots$$

popełniając błąd przez niedomiar (jaki?).

Wartość tego stosunku obliczono z wielką dokładnością, do kilkuset miejsc dziesiętnych i udowodniono, że jest liczbą niewymierną (ułamkiem nieperyodycznym). Liczbę tę oznaczamy literą grecką π i nazywamy ją ludolfiną, na cześć matematyka Ludolfa van Ceulen (XVI. wiek), który ją obliczył z dokładnością 35 miejsc.

Należałoby ją jednak raczej nazywać liczbą Archimedesa, ponieważ Archimedes pierwszy podał jej sposób obliczenia, któregośmy tu właśnie użyli. Przeprowadzając pięć razy rachunek, któryśmy tu zaznaczyli, otrzymał Archimedes dla liczby π granice:

$$3\,{}^{1}/_{7} < \pi < 3\,{}^{10}/_{71}, \text{ a więc } \pi = 3{\cdot}142\ldots$$

Już przed Archimedesem zwrócono uwagę, że stosunek obwodu do średnicy jest liczbą stałą dla każdego koła. W biblii (stary testament) podana jest liczba 3 jako stosunek obwodu do średnicy. W wiekach średnich, kiedy prace Archimedesa poszły w zapomnienie, sądzono, że

$$\pi = \sqrt{10} = 3{\cdot}162\ldots$$

Dopiero w czasach nowożytnych przedsięwzięto na nowo rachunki wykonane przez Archimedesa. Z tychto czasów pochodzi obliczenie Ludolfa.

W nowszych czasach wykryto inne, szybsze sposoby obliczenia tej liczby i udowodniono, że π jest nietylko liczbą niewymierną, ale nie da się także przedstawić zapomocą pierwiastków (jest liczbą przestępną), nie da się więc skonstruować przy pomocy linii i cyrkla. Jestto zdobycz drugiej połowy XIX. wieku.

Doszliśmy więc do następującego wniosku:

Stosunek obwodu koła do średnicy jest liczbą stałą, zwaną ludolfiną, która jest liczbą niewymierną, przestępną i wynosi

$$\pi = 3{\cdot}14159265358979323846\ldots$$

Wobec tego *obwód koła oblicza się, mnożąc średnicę przez ludolfinę:*

$$U = 2r\pi. \qquad (1)$$

Obwód koła jest więc funkcyą jednej zmiennej, mianowicie promienia; liczba π jest liczbą stałą.

Stąd już łatwo obliczyć łuk należący do jakiegokolwiek kąta środkowego. Łuk jest mianowicie taką częścią obwodu, jaką częścią 360 stopni jest kąt środkowy:

$$l : 2r\pi = \alpha : 360^0 \qquad \text{stąd}$$

$$l = \frac{2r\pi\alpha}{360^0} \qquad \text{czyli:}$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^0}. \qquad (2)$$

Łuk jest więc funkcyą dwóch zmiennych: promienia i kąta.

Widzimy więc, że łuk w prosty sposób zależy od kąta. Na tem polega nowy sposób mierzenia kątów. Mianowicie: aby zmierzyć jakiś kąt, zakreślamy około jego wierzchołka koło o promieniu równym jednostce długości: $r = 1$ i badamy, jaki łuk leży między ramionami tego kąta.

Jeżeli kąt $\alpha = 360^0$, to łuk wynosi wtedy 2π (cały obwód), jeżeli $\alpha = 180^0$, to odpowiedni łuk koła o promieniu równym jednostce jest π; jeżeli kąt jest prosty, łuk wynosi $\frac{\pi}{2}$ i t. d. Otóż długość tego łuku przyjmujemy za nową t. zw. łukową miarę kąta. Będziemy więc mówili n. p. kąt wynosi $\frac{\pi}{6}$, to znaczy jest szóstą częścią kąta półpełnego, a więc w dawnej mierze wynosi 30^0. Ogólnie do zamiany dawnej miary na nową i odwrotnie służy wzór (2) i jego odwrócenie:

$$\alpha = \frac{180\,l}{r\pi}.$$

§ 81. Powierzchnia koła. Kwadratura koła.

Aby z obwodu koła przejść do powierzchni, uważamy koło za granicę wielokąta umiarowego o corazto większej liczbie boków. Użyjemy więc wzoru dla wielokąta umiarowego:

$P = U.\frac{r}{2}$, a podstawiając za U wartość $2r\pi$ otrzymamy $P = 2r\pi.\frac{r}{2}$

czyli: $$P = r^2\pi. \qquad (3)$$

Powierzchnia koła jest funkcyą jednej zmiennej, mianowicie promienia.

Ścisły dowód należałoby przeprowadzić tak: Powierzchnia każdego wielokąta umiarowego opisanego jest większa od $r^2\pi$, ale zbliża się dowolnie do tej wartości. Gdyby więc było $P > r^2\pi$, to możnaby znaleźć taki wielokąt opisany, że jego powierzchnia F byłaby wprawdzie większa od $r^2\pi$ ale mniejsza od P. Powierzchnia wielokąta opisanego nie może być jednak mniejsza od powierzchni koła zawartego wewnątrz niego. Więc nie może być $P > r^2\pi$. Tak samo wykazuje się, że nie może być $P < r^2\pi$.

Z tym wzorem wiąże się sławne zagadnienie o kwadraturze koła. Widzieliśmy, że każdy wielokąt można zamienić na kwadrat o równej po-

wierzchni konstrukcyjnie, używając tylko linii i cyrkla. Dla koła łatwo to zadanie wykonać rachunkiem. Żądamy mianowicie, aby

$$r^2\pi = x^2 \quad \text{stąd} \quad x = \sqrt{r^2\pi} \quad \text{czyli:} \quad x = r\sqrt{\pi}.$$

Gdybyśmy potrafili otrzymać konstrukcyjnie π, to i $\sqrt{\pi}$ możnaby zbudować geometrycznie i iloczyn $r.\sqrt{\pi}$. Ale właśnie wspomnieliśmy w poprzednim ustępie, że π nie da się otrzymać przy pomocy linii i cyrkla. Stąd wniosek:

Wykonanie kwadratury koła przy pomocy jedynie linii i cyrkla jest niemożliwe.

Natomiast przy pomocy innych przyrządów pomocniczych można wykonać kwadraturę koła ściśle. W przybliżeniu można wykonać kwadraturę linią i cyrklem, posiadamy nawet bardzo wiele ciekawych sposobów, dających dosyć znaczne przybliżenie. Konstrukcye te pochodzą z czasów, kiedy nie wiedziano jeszcze o tem, że zadanie to jest niemożliwe i usiłowano je rozwiązać ściśle. Zwłaszcza w średnich wiekach kwadratura koła była ulubionem zadaniem uczonych.

Bardzo rozpowszechniona jest przybliżona kwadratura, podana przez Polaka Kochańskiego (1685 roku). Prowadzi się średnicę AB i styczną w punkcie B. Ze środka koła prowadzimy pod $\sphericalangle 30^0$ linię OC. Od punktu C odcinamy na stycznej trzy promienie do punktu E, to linia AE przedstawia w przybliżeniu długość półkola $r\pi$. Łatwo obliczyć, że

$$AE = 3{\cdot}14153\ldots r$$

(zamiast: $3{\cdot}14159\ldots r$).

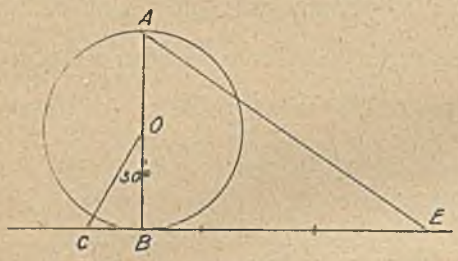


Fig. 202.

Jeżeli na odcinku AE zbudujemy prostokąt o wysokości r, to jego powierzchnia wynosi z wielkiem (jakiem?) przybliżeniem $r^2\pi$, równa się więc powierzchni koła. Zamieniając ten prostokąt w znany sposób na kwadrat otrzymamy przybliżoną kwadraturę koła.

Umiejąc obliczać powierzchnię całego koła, łatwo obliczyć powierzchnię wycinka koła, t. j. części koła zawartej między łukiem i dwoma promieniami. Wycinki koła należące do równych łuków są przystające, mają więc równe powierzchnie. A więc do łuku 2, 3, 4 . . . razy większego, należy wycinek o powierzchni 2, 3, 4 . . . razy większej: Wynika stąd, że wycinek jest taką częścią powierzchni koła, jaką częścią obwodu jest łuk.

$$W : r^2\pi = l : 2r\pi$$

Stąd $$W = \frac{r^2\pi \,.\, l}{2r\pi} \quad \text{czyli:} \quad W = l \,.\, \frac{r}{2}.$$

Powierzchnię wycinka koła oblicza się tak, jak powierzchnię trójkąta, którego podstawą jest łuk, a wysokością promień koła.

Powierzchnię odcinka koła (t. j. części koła zawartej między łukiem i odpowiednią cięciwą) otrzymuje się jako różnicę lub sumę wycinka koła i odpowiedniego trójkąta (por. fig. 203):

$$ABC = W - T$$
$$ADB = W' + T.$$

Powierzchnię pierścienia kołowego otrzymujemy jako różnicę między powierzchniami dwóch kół współśrodkowych.

$$P = r_1^2 \pi - r_2^2 \pi = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2)\pi.$$

Wycinek pierścienia kołowego obliczamy jako różnicę wycinków dwóch kół:

$$W = l_1 \frac{r_1}{2} - l_2 . \frac{r_2}{2}.$$

Wzór ten wyraża powierzchnię wycinka pierścienia jako funkcyę czterech zmiennych. Prostszy wzór otrzymamy jednak wychodząc z proporcyi:

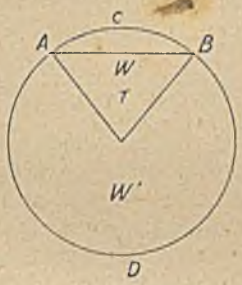


Fig. 203.

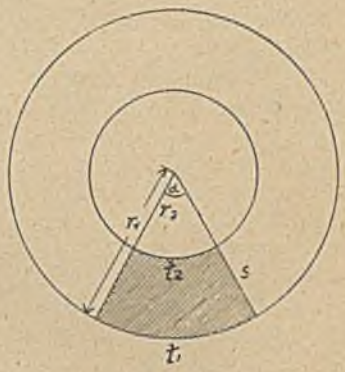


Fig. 204.

$$W_1 : r_1^2 \pi = \alpha : 360^0 \quad \Big| \quad W_1 = \frac{r_1^2 \pi \alpha}{360^0}$$
$$W_2 : r_2^2 \pi = \alpha : 360^0 \quad \Big| \quad W_2 = \frac{r_1^2 \pi \alpha}{360^0}$$

Stąd
$$W = W_1 - W_2 = (r_1^2 - r_2^2) \frac{\pi \alpha}{360^0}$$
$$W = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \frac{\pi \alpha}{360^0}$$
$$W = (r_1 - r_2) \left(\frac{r_1 \pi \alpha}{360^0} + \frac{r_2 \pi \alpha}{360^0} \right)$$
$$= (r_1 - r_2) \left(\frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} \right)$$

Ale $r_1 - r_2$ jest szerokością pierścienia, więc

$$W = s . \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Powierzchnię wycinka pierścienia kołowego oblicza się tak, jak powierzchnię trapezu.

Widzimy zarazem, że powierzchnia wycinka pierścienia kołowego jest funkcyą trzech zmiennych.

Ćwiczenia X.[1])

§ 67. 1. Narysować na papierze milimétrowym dowolną figurę, ograniczoną linią krzywą i zbadać, w jakich granicach zawiera się liczba wymiarowa tej powierzchni.

§ 68. 2. Boki prostokąta wynoszą $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{24}$; podać kolejne przybliżenia powierzchni tego prostokąta i granicę, do której one dążą.

3. Wyjaśnić geometrycznie równości: $(a - b) . c = ac - bc$, $(a + b) . (c + d) = ac + bc + ad + bd$.

4. Jeden cal wynosi 2·54 *cm*, ile cm^2 wynosi cal kwadratowy?

5. Obliczyć bok kwadratu mającego powierzchnię tak wielką, jak prostokąt o bokach $b = 37{\cdot}2$ *cm*, $c = 45{\cdot}8$ *cm*; wykonać także konstrukcyjnie.

6. Wykazać, że każdy kwadrat ma większą powierzchnię, aniżeli prostokąt o tym samym obwodzie (uwaga: jeżeli bok kwadrata oznaczymy a, to boki prostokąta będą $a + x$ i $a - x$).

7. Ile wynosi bok kwadratu mającego dwa razy tak wielką powierzchnię, jak kwadrat o boku $a = 10$ *cm*?

8. Historyk grecki Tucydydes sądził, że wyspa mająca dwa razy większy obwód, ma także dwa razy większą powierzchnię. Wykazać błędność tego twierdzenia, przyjmując kwadratowy kształt wyspy.

9. Wykazać rysunkiem, że kwadrat zbudowany na przekątni innego kwadratu ma powierzchnię dwa razy większą od pierwotnego kwadratu.

10. Jak długie musi być pole prostokątne o szerokości 5 *m*, aby zawierało 1 *ha*?

§ 69. 11. Dowolny równoległobok zamienić na równy mu prostokąt.

12. Dowolny równoległobok zamienić na romb o równej powierzchni.

13. Obliczyć powierzchnię rombu znając jego przekątnie $d_1 = 20$ *cm*, $d_2 = 30$ *cm*.

14. Wykonać kwadraturę dowolnego równoległoboku geometrycznie i algebraicznie.

§ 70—71. 15. Wykazać, że dwie przekątnie dzielą równoległobok na cztery równe trójkąty.

16. Wyprowadzić wzór na powierzchnię trapezu dzieląc go przekątnią na dwa trójkąty.

17. Dowolny trójkąt zamienić na trójkąt równoramienny o równej podstawie i równej wysokości.

18. Wykazać, że trójkąt równoramienny ma najmniejszy obwód z pośród wszystkich trójkątów o równej podstawie i równej wysokości. (Dla dowodu poprowadzić linię równoległą do podstawy i wykreślić figurę symetryczną względem tej osi).

19. Obliczyć pole wielokątne znając współrzędne wierzchołków: A (1 *m*, 3 *m*) B ($1\frac{1}{2}$ *m*, 1 *m*) C (2 *m*, 2 *m*) D (4 *m*, 1 *m*) E (5 *m*, 4 *m*) F ($3\frac{1}{2}$ *m*, 5 *m*) G (1·8 *m*, 4·5 *m*).

§ 72—73. 20. Dowolny trójkąt zamienić na trójkąt prostokątny o tejsamej podstawie i wysokości.

21. Zamienić trójkąt na inny o dłuższej podstawie ale o równej powierzchni.

---

[1]) Inne przykłady obliczania powierzchni znajdują się w zbiorze zadań Kranza na str. 89 i t. d.

22. Ile wynosi wysokość trójkąta, którego podstawa wynosi 3 *dm*, a powierzchnia 39 *dm*?

23. Dowolny wielokąt nieumiarowy zamienić na kwadrat rysunkiem.

24. Podzielić dowolny trójkąt na trzy równe części liniami wychodzącemi z jednego wierzchołka.

25. Wykazać, że linie łączące środek ciężkości trójkąta z jego wierzchołkami dzielą trójkąt na trzy równe części.

26. Dowolny równoległobok podzielić na siedem równych części zapomocą linii wychodzących z jednego wierzchołka.

27. Dowolny trójkąt podzielić na dwie równe części zapomocą linii równoległej do podstawy (metodą analizy algebraicznej).

§ 74. 28. Ile razy powiększy się powierzchnia jakiegokolwiek wielokąta, jeżeli zamienimy go na figurę podobną o trzy razy większym obwodzie?

29. Jak się przedstawi 1 km^2 na mapie narysowanej w podziałce 1 : 25.000?

30. Jak wielki obszar można zmieścić na mapie kwadratowej o boku 3 *dm*, jeżeli używamy podziałki 1 : 200.000?

§ 75. 31. Mając dane dwa różne kwadraty wykreślić trzeci kwadrat, mający powierzchnię taką, jak obydwa dane kwadraty razem.

32. Tosamo zadanie wykonać dla: *a*) trójkątów równobocznych, *b*) sześciokątów umiarowych, *c*) kół, *d*) dowolnych wielokątów nieumiarowych ale podobnych do siebie.

§ 76. 33. Opierając się na § 76. wykazać, że trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest prostokątny. Egipcyanie używali takiego trójkąta do wytyczania kąta prostego. Używali sznura zamkniętego, opatrzonego 12 guzami w równych odstępach. Zginając go w punkcie trzecim i siódmym otrzymywali trójkąt prostokątny.

§ 77. 34. Obliczyć: *a*) przeciwprostokątnię trójkąta prostokątnego znając obydwie przyprostokątnie: $a = 12$, $b = 15$ *cm*, *b*) powierzchnię trójkąta prostokątnego znając przeciwprostokątnię $c = 4$ *dm* 41 *mm* i jedną przyprostokątnię 3 *dm* 15 *mm*.

35. Obliczyć powierzchnię kwadratu znając jego przekątnię, $d = 21$ *cm*.

36. Egipcyanie obliczali powierzchnię trójkąta równoramiennego mnożąc podstawę przez połowę boku. Jaki błąd popełniali przytem? N. p. podstawa $a = 8$ *cm*, bok $b = 36$ *cm*.

37. Obliczyć ramię trójkąta równoramiennego znając podstawę i wysokość ($a = 0{\cdot}75$ *cm*, $w = 2{\cdot}49$ *cm*).

38. W trapezie równoramiennym znane są boki równoległe $a = 16{\cdot}4$, $b = 9{\cdot}6$ i ramię $c = 5{\cdot}8$. Obliczyć powierzchnię.

39. Obliczyć powierzchnię trójkąta równobocznego o boku $a = 20$ *cm*.

40. Ile wynosi bok trójkąta równobocznego, którego powierzchnia wynosi 1 m^2.

41. W kole o promieniu 8 *cm* wykreślono cięciwę o długości 5·4 *cm*. Ile wynosi odległość tej cięciwy od środka?

42. Obliczyć powierzchnię rombu znając jeden bok i przekątnię.

43. Obliczyć powierzchnię sześciokąta umiarowego znając jeden bok.

* § 78. 44. Obliczyć powierzchnię trójkąta znając jego boki: $a = 10$ *cm*, $b = 17$ *cm*, $c = 21$ *cm*.

* 45. Obliczyć promień koła wpisanego w trójkąt, którego boki wynoszą 13 *cm*, 14 *cm*, 15 *cm*.

§ 79. 46. Obliczyć powierzchnię trójkąta równobocznego: *a*) wpisanego w koło o promieniu 15 *cm*, *b*) opisanego na kole o tymsamym promieniu.

47. Wykazać, że powierzchnia sześciokąta umiarowego wpisanego w koło jest średnią geometryczną między powierzchnią trójkąta wpisanego, a trójkąta opisanego na tem kole.

48. Obliczyć powierzchnię kwadratu wpisanego w koło o promieniu $r = 48$ *cm* i kwadratu opisanego na tem kole. Zbadać stosunek obydwu powierzchni.

49. Wykonać takiesamo obliczenie, jak w zadaniu poprzedniem, dla sześciokąta umiarowego.

50. Obliczyć powierzchnię ośmiokąta umiarowego wpisanego w koło o promieniu $r = 18$ *mm*.

51. Obliczyć powierzchnię ośmiokąta umiarowego znając jego bok.

52. Wyprowadzić wzór podający związek boku szesnastokąta umiarowego z promieniem koła wpisanego.

53. Tosamo zadanie wykonać dla 24-kąta umiarowego.

54. Obliczyć powierzchnię dziesięciokąta umiarowego wpisanego w koło o promieniu $r = 2{\cdot}8$ *dm*.

55. Jaki jest wykładnik stosunku odcinków podziału złotego?

56. Obliczyć powierzchnię pięciokąta umiarowego znając promień koła opisanego $r = 0{\cdot}12$ *cm*.

§ 80—81. 57. Obliczyć obwód koła, którego promień wynosi 2·25 *dm*.

58. Obwód pnia okrągłego wynosi 2·5 *m*; jaka jest średnica przekroju?

59. Wiedząc, że obwód ziemi wynosi 40.000 *km*, obliczyć promień ziemi.

60. Ile razy obróci się koło (o promieniu 1·2 *m*) lokomotywy na drodze ze Lwowa do Krakowa (342 *km*)?

61. Srednicę półkoła przepołowić i na każdej połowie zakreślić nowe półkole do wnętrza; wykazać, że obwód większego półkoła równa się sumie obwodów obydwu mniejszych. Przeprowadzić podobną konstrukcyę w mniejszych półkołach, potem w dalszych i t. d. i porównać sumę ich długości z pierwotnem półkołem.

62. Wykazać, że jeżeli obwody dwóch kół współśrodkowych różnią się o 1 *dm*, to ich odstęp będzie jednakowy bez względu na wielkość tych kół (n. p. obwód pomarańczy a obwód ziemi).

63. Obliczyć łuk koła o promieniu $r = 9$ *cm* należący do kąta środkowego: *a*) 50^0, *b*) $42^0\ 15'$, *c*) $138^0\ 20'$.

64. Ile wynosi w mierze łukowej kąt: 10^0, 25^0, 2^0, $38^0\ 20'$?

65. Do jakiego kąta środkowego należy łuk równy promieniowi? ile wynosi w mierze stopniowej kąt, który w mierze łukowej $= 1$.

66. Obliczyć powierzchnię koła o promieniu 2 *dm* 3 *cm* 5 *mm*.

67. Wykonać rachunkiem i przybliżonym rysunkiem kwadraturę koła o promieniu $r = 2$ *cm*.

68. Jak wielki jest promień koła pokrywającego powierzchnię 1 km^2?

69. Ile razy powiększy się powierzchnia koła, jeżeli promień wzrośnie pięć razy (porównaj zadanie 8)?

70. Jaką powierzchnię ma koło, którego obwód wynosi 48 *cm*? Porównaj tę powierzchnię z powierzchnią kwadratu, sześciokąta umiarowego, ośmiokąta umiarowego i t. d. o tym samym obwodzie! Jaki stąd wniosek? (Problem Didony.)

71. Z kwadratu o boku 56 *cm* wycięto 49 kół równych (o promieniu 4 *cm*); obliczyć pozostałą powierzchnię.

72. Na bokach trójkąta prostokątnego wykreślono półkola dwa mniejsze na zewnątrz, większe od wnętrza. Wykazać, że powierzchnia dwu powstałych księżyców równa się powierzchni trójkąta, nie zawiera więc liczby π. — Są to t. zw. księżyce Hipokratesa.

73. Obliczyć wycinek koła o promieniu $r = 3{\cdot}8$ *cm* należący od kąta środkowego: *a*) 40^0, *b*) $22^0\ 30'$, *c*) 250^0.

74. Przedstawić zapomocą wycinków tego samego koła liczby ludności w poszczególnych krajach Monarchii. (Uwaga: kąty środkowe mają pozostawać do siebie w takim stosunku, jak liczby ludności.)

75. Z koła o promieniu 2 *dm* wycięto wycinek o powierzchni 1 dm^2; jaki łuk i jaki kąt środkowy należą do tego wycinka?

76. Obliczyć powierzchnię odcinka należącego do kąta środkowego: *a*) 90^0, *b*) 60^0, *c*) 72^0 znając promień koła $r = 18$ *cm*.

77. Wykazać, że powierzchnia pierścienia kołowego równa się powierzchni koła, którego promieniem jest odcinek stycznej do koła wewnętrznego zawarty między punktem styczności a kołem większem.

78. W jakim odstępie od danego koła należy poprowadzić drugie koło współśrodkowe, aby powierzchnia pierścienia równała się powierzchni koła wewnętrznego.

79. Podzielić powierzchnię koła na trzy równe części za pomocą kół współśrodkowych.

80. Obliczyć powierzchnię wycinka pierścienia kołowego znając $r = 22$ *cm*, $r_1 = 32$ *cm*, $\alpha = 15^0$.

81. Albrecht Dürer (znakomity malarz niemiecki z XVI. wieku) podaje kwadraturę koła biorąc $^5/_4$ średnicy za przekątnię kwadratu równego kołu. Jaki błąd popełnia się przytem (n. p. $r = 10$ *cm*).

82. Jak długą musiałaby być większa wskazówka zegarka, aby jej koniec zakreślał 1 *m* na sekundę? ile *mm* w jednej sekundzie zakreśla wskazówka 2 *cm* długa?

Część II.

Stereometrya.

Rozdział I.

Pewniki stereometryczne.

§ 82. Uzupełnienie systemu pewników.

Utwory geometryczne, którymiśmy się dotychczas zajmowali, leżały wszystkie na jednej płaszczyźnie: obracaliśmy się w sferze dwóch wymiarów. Badając własności tych utworów nie posługiwaliśmy się przestrzenią trójwymiarową — z wyjątkiem badania związku figur symetrycznych — nie posługiwaliśmy się nigdy kilkoma płaszczyznami. Jeżeli jednak geometrya ma być nauką o postaci wyidealizowanych tworów świata zewnętrznego, które są przecież trójwymiarowe, to powinniśmy obecnie porzucić ciaśniejszy horyzont utworów dwuwymiarowych i badać *utwory przestrzenne*, zużytkowując naturalnie wiadomości nabyte w planimetryi. Co więcej: także głębsze zrozumienie planimetryi wymaga pewnych wiadomości ze stereometryi. Utwory planimetryczne są tylko przekrojami utworów stereometrycznych.

Stereometrya opiera się na tychsamych pewnikach, co i planimetrya a oprócz tego przybywają trzy nowe pewniki służące do odróżnienia płaszczyzn od wszelkich innych możliwych powierzchni (krzywych).

Pewniki te, podobnie jak i planimetryczne, są twierdzeniami wziętemi z zewnętrznego doświadczenia i wyidealizowanemi. Co w świecie zewnętrznym spostrzegamy w przybliżeniu, niedoskonale, to ujmujemy w twierdzenia ścisłe i umawiamy się, że będziemy te własności przypisywali naszym idealnym utworom geometrycznym dokładnie.

I tak w planimetryi mieliśmy ośm takich pewników I.—VIII. str. 5. Do badania przestrzeni trójwymiarowej potrzebne są jeszcze następujące pewniki:

IX. Przez trzy punkty nie leżące na jednej linii prostej przechodzi (jest wyznaczona) **tylko jedna płaszczyzna.**

X. Prosta mająca z płaszczyzną dwa punkty wspólne ma z nią wszystkie punkty wspólne (czyli leży cała na tej płaszczyźnie).

XI. Jeżeli dwie płaszczyzny mają jeden punkt wspólny, to muszą mieć całą linię prostą (krawędź) **wspólną.**

§ 83. Bezpośrednie wnioski z pewników.

Pewnik IX. jest wyrazem znanego spostrzeżenia, że n. p. na trzech kołkach zawsze można rozpiąć jedną „płaszczyznę“ z płótna, a każda inna „płaszczyzna“ rozpięta na tychsamych kołkach pokrywa sie dokładnie z pierwszą. Bez względu na to, czy trzy punkty leżą blizko, czy dalej, otrzymujemy tylko jedną płaszczyznę. (W geometryi praktycznej trzy punkty nadto blizkie nie wyznaczają płaszczyzny, podobnie jak dwa punkty blizkie nie wyznaczają prostej w geometryi praktycznej.)

Ponieważ *do wyznaczenia płaszczyzny wystarczą* trzy punkty nie leżące na jednej linii prostej, to tem bardziej wystarczy jedna linia *prosta i punkt poza nią leżący.* W konstrukcyach geometrycznych często robimy z tego użytek. (N. p. wykreślenie płaszczyzny przechodzącej przez wierzchołek stożka i przez średnicę podstawy!)

Taksamo łatwo wywnioskować, że *przez dwie proste przecinające się lub przez dwie proste równoległe jest wyznaczona jedna płaszczyzna.* (Wykaż to opierając się na pewnikach IX. i X.!) Twierdzenie to ma wielkie zastosowanie w praktyce (n. p. przy pokrywaniu płaskich dachów przesuwamy płaszczyznę przez krokwie równoległe lub przecinające się).

Opierając się na tem i na pewniku X. możemy utworzyć płaszczyznę ruchem linii prostej. Jeżeli mianowicie prosta posuwa się po ramionach kąta lub po dwóch liniach równoległych tak, aby zawsze przecinała obydwie proste, to zakreśla płaszczyznę.

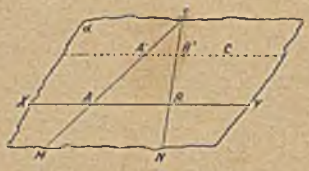


Fig. 205.

Dowód: Wykreślmy płaszczyznę α wyznaczoną przez proste SM i SN. Prosta XY mająca z nią dwa punkty A i B wspólne musi cała leżeć na tej płaszczyźnie (według pewnika X.). Taksamo w każdem innem położeniu. Jakikolwiek punkt C płaszczyzny α wybierzemy, znajdzie się zawsze takie położenie prostej XY, równoległe do pierwotnego położenia, w którem ona przechodzi przez ten punkt. Ruchem prostej XY po prostych SM i SN możemy więc wyczerpać całą płaszczyznę α.

Jakim jeszcze ruchem linii prostej można otrzymać płaszczyznę?

Każdą powierzchnię powstającą przez ruch linii prostej nazywamy powierzchnią prostoliniową. (Poźniej poznamy także krzywe powierzchnie prostoliniowe, n. p. powierzchnia walca lub stożka.) Prosta XY zakreślająca swym ruchem płaszczyznę nazywa się tworzącą, a utwór, po którym ta

prosta się ślizga (SMN) nazywamy kierownicą powierzchni. Wykazaliśmy więc, że płaszczyzna jest powierzchnią prostoliniową. Każda powierzchnia prostoliniowa musi być nieograniczona, ponieważ zawiera całą linię prostą — w rozmaitych położeniach — a już sama linia prosta jest nieograniczoną. We wszystkich rozumowaniach będziemy więc pojmowali płaszczyznę jako powierzchnię nieograniczoną, na rysunku jednak przedstawiamy zawsze tylko skończony kawałek płaszczyzny.

Pewnik X. służy do odróżnienia płaszczyzny od innych powierzchni. (Na tem polega próba stolarska.)

Należy jednak zauważyć, że linia prosta może w nieskończenie wielu położeniach przylegać całkowicie do powierzchni, a mimoto powierzchnia nie jest płaską, n. p. walec. Właściwością płaszczyzny jest to, że prosta przylega do niej w każdem miejscu i w każdym kierunku, czego niema ani walec, ani stożek, ani żadna inna powierzchnia prostoliniowa. Są nawet takie powierzchnie krzywe, na których dadzą się w każdym punkcie wykreślić dwie linie proste w różnych kierunkach przylegające zupełnie (por. § 118).

Pewnik XI. poucza, że jeżeli się dwie płaszczyzny wogóle przecinają, to przecinają się wzdłuż całej linii prostej zwanej krawędzią tych płaszczyzn.

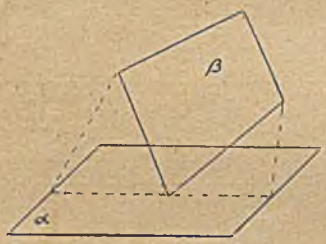


Fig. 206.

Uwaga: Mogłoby się zdawać, że ten pewnik nie zgadza się z rzeczywistością. N. p. na fig. 206 dwie płaszczyzny α i β mają tylko jeden punkt wspólny. Jednakowoż trzeba pamiętać, że są tu narysowane tylko części płaszczyzn, a pewnik odnosi się do nieograniczonej płaszczyzny. Gdybyśmy płaszczyznę β odpowiednio rozszerzyli, otrzymalibyśmy krawędź przecięcia się.

Dwie płaszczyzny przecinające się tworzą figurę odpowiadającą kątowi w planimetryi, zwaną kątem dwuściennym. Nazwa pochodzi stąd, że płaszczyzny nazywamy także ścianami. W planimetryi każdy kąt posiada dwa ramiona i wierzchołek. Tutaj odpowiadają temu dwie ściany kąta α i β i krawędź AB. Literami oznacza się kąt dwuścienny zwykle:

$$\sphericalangle(\alpha\beta)$$

lub rzadziej: $\sphericalangle C(AB)E$, t. j. tak, aby litery oznaczające krawędź były w środku. Kąt płaski jest tylko przekrojem kąta dwuściennego.

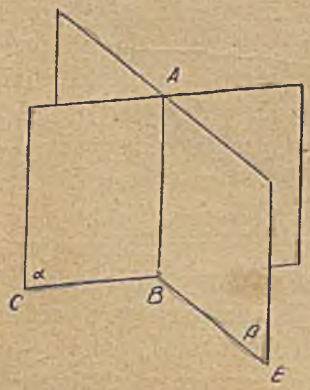


Fig. 207.

Uwaga: Dla wyrazistości rysujemy linie zasłonięte kropkowane, lub cieńszą kreską, jeżeli sobie

ściany wyobrażamy przeźroczyste lub opuszczamy je zupełnie, jeżeli sobie ściany wyobrażamy z materyału nieprzeźroczystego.

Na tej figurze łatwo spostrzedz, że dwie linie proste prostopadłe do tej samej trzeciej w przestrzeni nie muszą być równoległe, owszem mogą się przecinać, jak n. p. proste CB i EB, prostopadłe do AB. Wtedy jednak leżą one na dwóch różnych płaszczyznach zawierających prostą AB. Widać stąd, że niektóre twierdzenia planimetryi nie dadzą się przenieść do stereometryi bez żadnych zastrzeżeń. Toteż spotkamy się w stereometryi nieraz z dowodzeniem twierdzeń poznanych już w planimetryi.

Jestto ogólne prawo logiki, że twierdzenia odnoszące się do ciaśniejszego zakresu pojęć muszą uledz zmianie, jeżeli je chcemy przenieść do obszerniejszego zakresu.

§ 84. Pęk płaszczyzn i pęk przestrzenny.

Podobnie jak w planimetryi mieliśmy do czynienia z pękami prostych, tak w stereometryi ważnym utworem jest pęk płaszczyzn. Jestto *zbiór płaszczyzn przecinających się wzdłuż jednej linii prostej*, czyli wychodzących z jednej prostej. Tę prostą nazywamy osią pęku. Jeżeli taki pęk przetniemy jakąkolwiek płaszczyzną przecinającą krawędź tylko w jednym punkcie, otrzymamy na tej płaszczyźnie pęk promieni rzucony przez ten pęk płaszczyzn. Jeżeli zaś pęk płaszczyzn przetniemy jedną linią prostą nie trafiającą krawędzi, powstanie na tej prostej szereg punktów rzucony przez pęk płaszczyzn. Wykreśl pęk płaszczyzn przecięty płaszczyzną i linią prostą! Jaki utwór otrzymamy, jeżeli przetniemy pęk płaszczyzn płaszczyzną równoległą do osi? Zbiór wszystkich płaszczyzn schodzących się w jednej krawędzi wypełnia całą przestrzeń.

Utworem geometrycznym ogólniejszym od pęku płaszczyzn, obszerniejszym, jest *zbiór linii prostych i płaszczyzn przecinających się w jednym punkcie, zwany* pękiem przestrzennym. Punkt ten nazywa się wierzchołkiem pęku.

Pęk przestrzenny złożony z wszystkich linii przechodzących przez jeden punkt można nazwać zarówno przestrzennym pękiem prostych, jak i przestrzennym pękiem płaszczyzn. Zawiera on bowiem nietylko wszystkie linie proste przechodzące przez jeden punkt, ale także każdą płaszczyznę przechodzącą przez ten punkt: każdą bowiem płaszczyznę można zbudować z samych linii prostych przechodzących przez jeden punkt (płaski pęk promieni).

Jeżeli pęk przestrzenny przetniemy płaszczyzną nie przechodzącą przez wierzchołek pęku, otrzymamy na tej płaszczyźnie rozrzucony zbiór punktów i prostych, zwany systemem płaskim. Jeżeli wierzchołek pęku oddala się od systemu płaskiego, promienie dążą do położenia równoległego.

Słowo: perspektywiczny ma tosamo znaczenie, co w planimetryi. A więc n. p. dwa pęki płaszczyzn nazywają się perspektywiczne, jeżeli rzucają

tensam szereg punktów lub tensam płaski pęk promieni. Dwa systemy płaskie nazywają się perspektywiczne, jeżeli są rzucone przez tensam pęk przestrzenny. Podobnie dla innych utworów.

Pęki te mają ważne zastosowanie w rysunku perspektywicznym, którym się zajmiemy w następnym rozdziale. Także w optyce, w akustyce i innych działach fizyki rozważa się pęki promieni i utwory przez nie rzucone.

Cwiczenia I.

§ 83. 1. Trzy punkty wyznaczają jedną płaszczyznę; wykazać, że wzajemnie trzy płaszczyzny wyznaczają jeden punkt. Czy zawsze?

2. Wykazać przy pomocy pewnika IX. i X., że dwie przecinające się proste wyznaczają jedną płaszczyznę.

3. Przez ruch postępowy prostej nie w kierunku jej długości powstaje zawsze płaszczyzna; czy przez ruch obrotowy prostej zawsze powstaje płaszczyzna?

4. Podać przykłady powierzchni prostoliniowych płaskich i krzywych.

5. Wykazać, że przekrój płaski kąta dwuściennego jest kątem płaskim; czy zawsze?

6. Dwa punkty wyznaczają linię prostą; co wyznaczają dwie płaszczyzny?

§ 84. 7. Mając podany na dowolnej płaszczyźnie pęk promieni i punkt S nad płaszczyzną, wykreślić pęk płaszczyzn rzucający te promienie a przechodzący przez S.

8. Mając podany szereg punktów i punkt T poza tą prostą leżący wykreślić pęk płaszczyzn, rzucający te punkty, a przechodzący przez punkt T. Narysować oś tego pęku!

9. Mając podany pęk płaszczyzn przeciąć go: *a*) płaszczyzną przecinającą oś w jednym punkcie, *b*) prostą nie przecinającą krawędzi.

10. Mając na płaszczyźnie podany wielokąt wykreślić jakikolwiek pęk przestrzenny rzucający boki i wierzchołki tego wielokąta. Narysować drugi pęk perspektywiczny do pierwszego.

11. Jakikolwiek pęk przestrzenny przeciąć płaszczyzną. Co zauważymy, jeżeli odsuwamy płaszczyznę coraz dalej od wierzchołka pęku.

12. W latarni projekcyjnej wstawiono w bieg promieni płaszczyznę przeźroczystą z narysowanym kwadratem. Narysować cień, jaki powstanie: *a*) na płaszczyźnie równoległej do niej, *b*) na płaszczyźnie nachylonej.

13. Narysować pęk promieni wychodzących od krawędzi i naroży kostki, a zbiegających się w oku. Jeżeli się oko oddala, do jakiego położenia dążą promienie?

Rozdział II.

O rysunku perspektywicznym.

§ 85. O perspektywie środkowej (malarskiej).

Zanim przystąpimy do badania części składowych brył i samych brył, musimy się zastanowić nad pewną niedogodnością rysunku. Wspominaliśmy już w planimetryi, że rysunek jest dla nas tylko środkiem pomocniczym, jest niedoskonałem urzeczywistnieniem utworów geometryi idealnej. Zawsze jednak na tym rysunku można było z pewnem przybliżeniem sprawdzać dokładność konstrukcyi i obliczeń, a nawet wykonywać obliczenia. W stereometryi na pierwszy rzut oka odpadają te wszystkie dogodności. Utwór przestrzenny nie da się narysować na płaszczyźnie nawet w przybliżeniu.

To, co rysujemy, jest tylko obrazem płaskim wywołującym w naszem

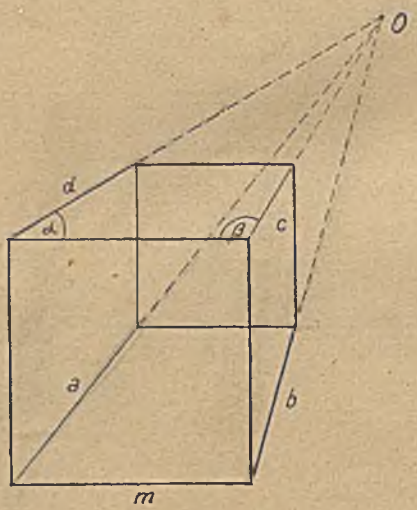


Fig. 208.

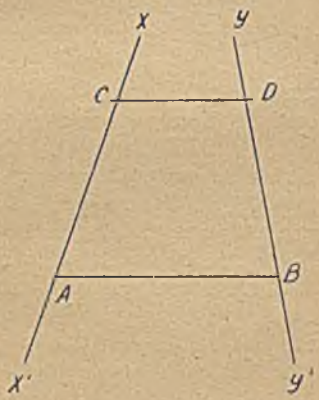


Fig. 209.

oku obraz takisam — lub przynajmniej zbliżony do tego, który powstaje, gdy patrzymy wprost na utwór przestrzenny. N. p. na fig. 208 narysowaliśmy kostkę tak, jak się ona naszemu oku przedstawia. Ściana tylna jako dalsza wydaje się mniejszą od przedniej. Linie *a*, *b*, *c*, *d*, które są w rzeczywistości równoległe, zdają się zbiegać ku pewnemu punktowi *O*, o czem nas codziennie doświadczenie poucza. Jestto t. zw. „punkt oczny“.

Uwaga: Obrazy linii równoległych biegnących od naszego oka muszą się zbiegać na takim rysunku, ponieważ kąt widzenia przedmiotu bliższego jest zawsze większy, aniżeli kąt widzenia przedmiotu dalszego. A więc odstęp dwóch linii równoległych, który jest wszędzie równy, wyda się nam większym w miejscu AB, aniżeli w miejscu dalszem CD (por. fig. 209). Jeżeli więc rysunek ma sprawiać wrażenie rzeczywistości, to musimy odrazu narysować odcinek CD mniejszy jak AB. Stąd wynika, że linie równoległe xx' i yy' będą się na rysunku przedstawiały jako zbieżne.

Linie poziome, równoległe do linii łączącej nasze oczy, pozostają w rysunku perspektywicznym równoległemi, zarówno jak i linie pionowe.

Kąty proste w naturze występują na rysunku bądźto jako ostre, bądźto jako rozwarte, a odcinki a, b, c, d, które powinny być wszystkie równe odcinkowi m, są wszystkie krótsze i to w rozmaitym stosunku.

Jakkolwiek taki rysunek sprawia w naszem oku złudzenie kostki (najlepsze złudzenie otrzymamy wtedy, jeżeli umieścimy nasze oko nad punktem O w niewielkiej odległości od płaszczyzny rysunku) i jakkolwiek dla malarstwa ma pierwszorzędne znaczenie, jednakowoż nie nadaje się zupełnie do celów

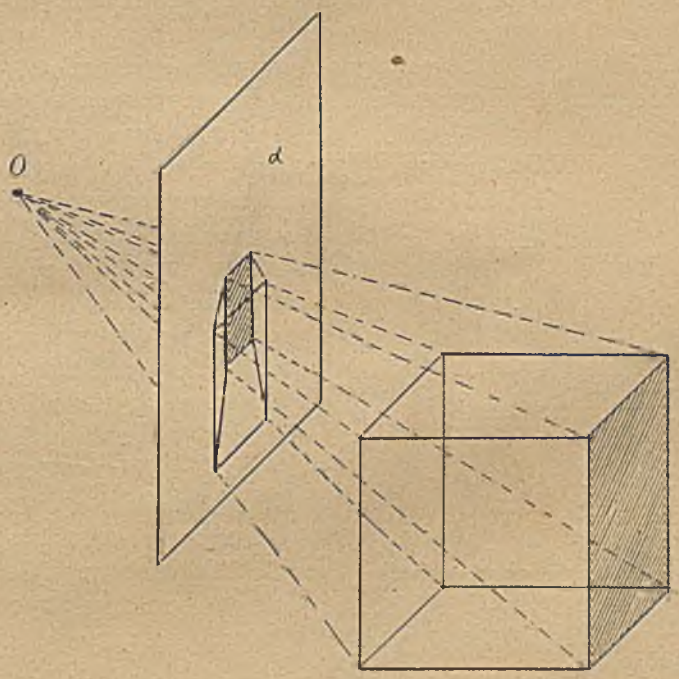


Fig. 210.

geometryi, techniki i przemysłu. Na figurze takiej nie można uskuteczniać żadnych pomiarów, jeżeli się nie posiada głębszych wiadomości z geometryi rzutowej, a i wtedy obliczenia są bardzo mozolne.

Rysunek taki nazywa się perspektywą środkową lub malarską. Przykładami takiej perspektywy są zdjęcia fotograficzne i każdy dobry obraz. Aby obraz perspektywiczny otrzymać, łączymy oko O z wszystkimi punktami danego przedmiotu (por. fig. 210) i ten pęk promieni przecinamy płaszczyzną prostopadłą do kierunku widzenia t. zw. płaszczyzną obrazową. Na tej płaszczyźnie powstanie płaski obraz przedmiotu przestrzennego. Podobny obraz powstaje, jeżeli przedmiot umieszczony przed płaszczyzną obrazową rzuca na nią cień. Cień ten jest także perspektywicznym obrazem przedmiotu, jednakowoż występuje na nim tylko kontur (zarys).

Kierunkiem widzenia nazywamy oś stożka utworzonego przez wszystkie promienie łączące oko ze skrajnymi widzialnymi punktami.

§ 86. Perspektywa równoległa.

Wyobraźmy sobie, że oko znajduje się tak daleko od przedmiotu, że promienie łączące z nim oko można uważać za wiązkę promieni równoległych. Jeżeli tę wiązkę promieni przetniemy płaszczyzną (t. zw. płaszczyzną obrazową), otrzymamy na niej obraz zwany perspektywą równoległą.

Rozróżniamy dwa rodzaje perspektywy równoległej zależnie od tego, czy promienie rzucające są prostopadłe do płaszczyzny obrazowej, czy też nachylone. Obraz powstający przez rzut prostopadły nazywa się perspektywą równoległą prostopadłą, rzut zaś ukośny tworzy perspektywę równoległą ukośną.

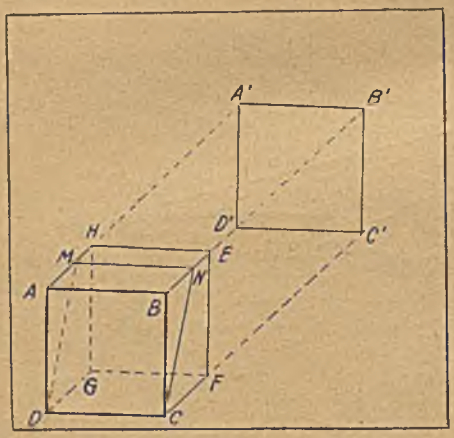


Fig. 211.

Obydwa te sposoby rysowania przedmiotów najłatwiej zrozumieć przy pomocy rysunku kostki (sześcianu). Zbadajmy najpierw rzut prostopadły. — Ustawmy kostkę jedną ścianą równolegle do płaszczyzny obrazowej, to z wielkiej odległości zobaczymy tylko przednią ścianę; obraz ściany tylnej i ścian bocznych nakryją się z obrazem ściany przedniej i z obwodem tego obrazu.

Obraz $A'B'C'D'$ nie zasługuje jednak na nazwę perspektywy w pierwotnem znaczeniu tego słowa. Słowo to bowiem pochodzi od słowa łacińskiego: „perspicio“ = przeglądam, a z rysunku tego nie mamy żadnego przeglądu całej bryły. Może to być obraz kostki, ale równie dobrze może to być obraz klina $ABCDMN$, lub kwadratu $ABCD$ i t. p.

Aby na rysunku wystąpiły także ściany boczne kostki, trzeba ją ustawić inaczej, sztuczniej; trzeba jedno naroże zwrócić ku nam. Wtedy wystąpią już na obrazie wszystkie ściany kostki odrębnie (tylne kreskujemy). Proste BA, BC, BE prostopadłe do siebie w rzeczywistości tworzą na rysunku kąty rozwarte α, β i γ i doznają pewnych skróceń zależnych od kątów (α, β i γ) a różnych dla każdej z tych linii (por. fig. 212).

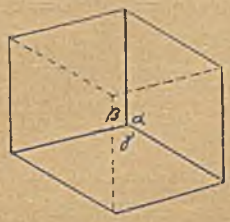


Fig. 212.

Konstrukcya jest wtedy tylko łatwa, jeżeli kostkę umieścimy symetrycznie przed płaszczyzną rysunku tak, aby nachylenie wszystkich krawędzi do płaszczyzny obrazowej było jednakowe (po 45°). Wtedy kąty $\alpha\,\beta\,\gamma$ będą wynosiły po 120°, a wszystkie krawędzie doznają tego samego skrócenia. Obrazem kostki będzie sześciokąt umiarowy z wykreślonemi przekątniami (por. fig. 213).

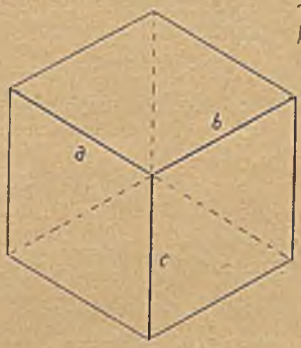


Fig. 213.

Takie obrazy nazywamy już perspektywą równoległą (prostopadłą) i bywają one używane w technice. Dla nas jednakowoż ważniejsze są rzuty ukośne. Jeżeli promienie rzucające są nachylone do płaszczyzny obrazowej, to linie a, b, c mogą tworzyć zupełnie dowolne kąty, a ich zmniejszenia mogą mieć również wartość dowolną. Niektóre odcinki mogą nawet doznać powiększenia, n. p. odcinki prostopadłe do kierunku promieni wystąpią na ukośnej płaszczyźnie obrazowej w powiększeniu. Wszystko zależy tylko od tego, pod jakim kątem padają promienie. Kostkę możemy teraz nawet ustawić jedną ścianą równolegle do płaszczyzny obrazowej a wystąpią na rysunku i dna i ściany boczne. Skróceń (lub przedłużeń) nie trzeba obliczać osobno, tylko z góry obiera się pewne zmniejszenie i według tego sporządza się rysunek. Dlatego też w dalszym ciągu będziemy używali wyłącznie perspektywy równoległej ukośnej. Ustawmy kostkę tak, aby jedna ściana była równoległa do płaszczyzny rysunku, a dno poziome (wyobraźmy sobie, że płaszczyzna rysunku jest pionowa, n. p. tablica). Jeżeli na tę kostkę patrzymy z wielkiej odległości (ukośnie z boku), to oko nie odczuwa różnicy zbieżności promieni pochodzących od ściany tylnej a ściany przedniej kostki na fig. 214. Wtedy widzimy i tylną i przednią ścianę w równej wielkości, a wobec tego linie a, b, c, d muszą być na rysunku równoległe. Wogóle *przy rzucie ukośnym obrazami*

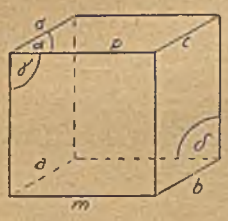


Fig. 214.

linii równoległych są zawsze linie równoległe — co bardzo upraszcza konstrukcyę w porównaniu z perspektywą środkową. Natomiast kąty proste kostki leżące przy liniach biegnących ku nam, ulegną zniekształceniu i to tem większemu, im bardziej z boku patrzymy. Dobiera się zwykle takie stanowisko, aby kąt prosty zamienił się na $\alpha = 30^0$, 60^0 lub 45^0, wtedy bowiem konstrukcya łatwiejsza (n. p. na fig. 214 jest $\alpha = 30^0$). Kąty leżące w płaszczyznach równoległych do nas rysujemy niezmienione, a więc $\gamma = 90^0$, $\delta = 90^0$ i t. p. Długość linii a, b, c, d rysuje się albo równą długości m — a więc w naturalnej wielkości — albo też skracamy te linie w pewnym stałym stosunku, jednakowym dla wszystkich linii równoległych do a. N. p. na fig. 214 skrócenie s czyli stosunek $a : m$ wynosi $^1/_2$.

Na fig. 215 narysowaliśmy tęsamą kostkę dla:

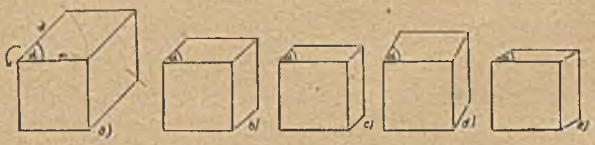
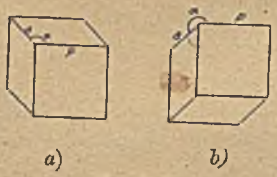


Fig. 215.

a) $\alpha = 45^0$, $s = 1$,
b) $\alpha = 45^0$, $s = {}^1/_2$,
c) $\alpha = 45^0$, $s = {}^1/_3$,
d) $\alpha = 60^0$, $s = {}^1/_2$,
e) $\alpha = 30^0$, $s = {}^1/_3$.

Możnaby podobnie odchylić odcinek a na lewo od odcinka p (jeżeli patrzymy na kostkę z prawej strony) lub nawet w dół od p (jeżeli patrzymy na kostkę z dołu).

N. p. na fig. 216 *a*) $\alpha = 135^0$, $s = {}^1/_2$, *b*) $\alpha = 225^0$, $s = {}^1/_2$.



a) *b*)

Fig. 216.

Zamiast skrócenia może nastąpić także wydłużenie, jeżeli odcinki n. p. leżą prostopadle do promieni rzucających.

Zbierając te spostrzeżenia razem powiemy:

Aby jakiś przedmiot przedstawić w *perspektywie równoległej ukośnej, rysujemy wszystkie równe odcinki i kąty leżące w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny obrazowej jako równe. Odcinki prostopadłe do płaszczyzny obrazowej rysujemy pod pewnym kątem* α *dowolnym, ale równym dla tych wszystkich odcinków i z pewnem zmniejszeniem* s (*lub powiększeniem*) — w porównaniu z równymi odcinkami leżącymi na płaszczyznych równoległych do płaszczyzny obrazowej — *dowolnem, ale jednakowem dla wszystkich tych odcinków.*

Do narysowania kostki, deski, belki prostokątnej wystarczą te objaśnienia zupełnie. Jeżeli jednak na przedmiocie, którego obraz perspektywiczny mamy narysować, występują także linie ukośne, to z góry nie wiemy, ani jakiemu zniekształceniu ulegną ich kąty nachylenia, ani w jakim stosunku należy je pomniejszyć. Jednakże łatwo te linie powiązać z liniami prostopadłemi i równoległemi do płaszczyzny obrazowej. Wyjaśnimy to na przykładach.

1. Chcemy narysować ośmiościan umiarowy o długości 4 *cm*, używając kąta $\alpha = 60^0$ (zamiast 90^0) i zmniejszenia $s = {}^1/_3$. Wiemy, że w ośmiościanie umiarowym naroża leżą na końcach trzech osi równych i prostopadłych do siebie (układ równoosiowy w krystalografii). Ustawiamy ośmiościan tak, aby był jednem narożem zwrócony do płaszczyzny obrazowej.

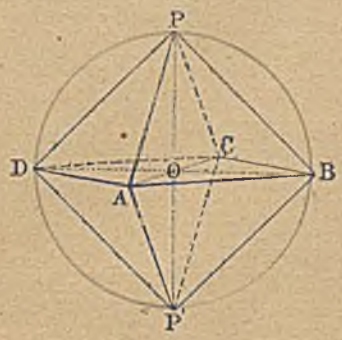


Fig. 217.

Osie DB i PP' rysujemy prostopadle do siebie i w naturalnej wielkości, oś zaś AC nachyloną do DB pod kątem $\alpha = 60^0$ i trzy razy pomniejszoną. Łącząc punkty P i P' z punktami $ABCD$ otrzymamy żądany obraz ośmiościanu.

2. Narysować gwiazdę, której podstawę tworzą dwa trójkąty równoboczne o bokach po 3·4 *cm* obrócone względem siebie o 60^0 około środka trójkąta, a której wysokość wynosi 1 *cm*. Potrafimy łatwo przedstawić w perspektywie równoległej prostokąt, przeto opisujemy na danej podstawie prostokąt (możliwie najmniejszy) i rysujemy go w perspektywie.

Obierzmy n. p. $\alpha = 45^0$, $s = {}^1/_2$. Wierzchołki A, B przenosimy w niezmienionej odległości od punktów X, X', Y, Y'. Wierzchołki boczne trzeba

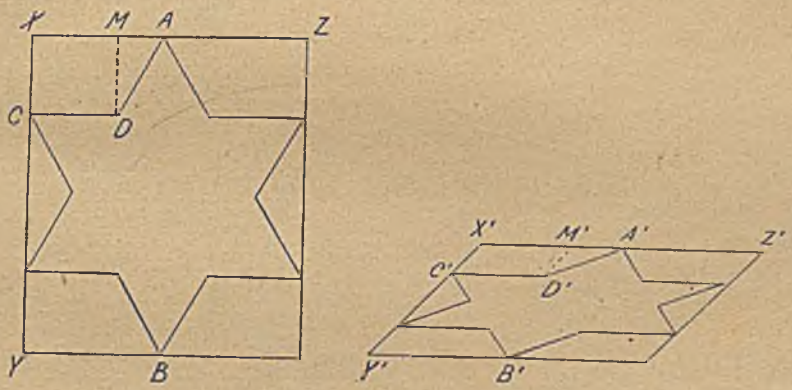


Fig. 218.

już przenieść w połowie odległości od X i Y. Więc n. p. $X'C' = {}^1/_2\, XC$.

Trudność sprawia tylko przeniesienie wierzchołków nie leżących na obwodzie prostokąta. Otóż punkt D ma odległości DC i DM od sąsiednich boków prostokąta. Odległość DC czyli MX przenosimy bez zmiany, odległość zaś DM czyli XC trzeba zmniejszyć o połowę. Otrzymamy w ten sposób punkty M' i C'. Prowadząc z nich linie równoległe do $X'Y'$ i $X'Z'$ otrzymamy punkt D'. (W jaki sposób możnaby łatwiej otrzymać punkt D'?)

W podobny sposób przenosimy dalsze wierzchołki. Kreśląc w punktach $A' B' C' D'$ . . . linie prostopadłe do $Y' B'$ i odcinając na nich prawdziwą wysokość (1 *cm*) otrzymamy także górne dno gwiazdy. Na fig. 219 przedstawiliśmy rysunek wykończony z wypuszczeniem krawędzi zakrytych. Odległości $D M$ i $D C$ punktu D od dwóch linii (osi) prostopadłych $X Z$ i $X Y$ nazywamy współrzędnemi prostokątnemi punktu D; odległości ukośne $D' M'$ i $D' C'$ punktu D' od dwóch linii (osi) ukośnych $X' Z'$ i $X' Y'$ nazywamy współrzędnemi ukośnemi. Otóż metoda, jakiejśmy tu użyli, polegała na przeniesieniu współrzędnych każdego punktu z układu prostokątnego do układu ukośnokątnego. Aby sobie ułatwić pomniejszanie odległości, odcina się już odrazu na osiach $X Y$ i $X Z$ jakąś podziałkę n. p. centymetrową; na osi $X' Y'$ odcina się podziałkę zmniejszoną a na osi $X' Z'$ podziałkę taką samą, jak na osiach $X Z$ i $X Y$. Używa się tego zwłaszcza przy bardzo skomplikowanych rysunkach (n. p. budynki, mosty).

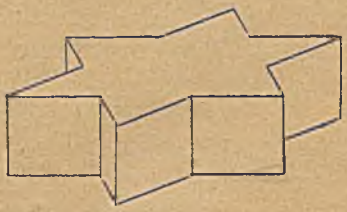


Fig. 219.

* Powróćmy do rzutu ukośnego kostki. Jeżeli kostkę ustawimy także ukośnie, to trzy krawędzie a, b, c prostopadłe do siebie, wystąpią na rysunku jako proste nachylone pod pewnymi dowolnymi kątami, i każda z nich będzie pomniejszona, w ogólności każda w innym stosunku. Z końców tych odcinków kreślimy linie równoległe do a, b, c i równe a, b, c a z ich punktów przecięcia się $H K L$ znowu linie równoległe do osi i w ten sposób uzupełniamy całkowity obraz kostki. Przedłużenia krawędzi a, b, c tworzą układ trzech osi $O X$, $O Y$, $O Z$ prostopadłych w naturze, a na rysunku nachylonych. Na każdej z tych osi odcinamy podziałkę, n. p. centymetrową (p. fig. 221), to na rysunku podziałka na każdej osi będzie inna, ale dowolna. $O M = 1$ *cm*, $O N$ już jest mniejsze od 1 *cm*, ale przedstawia obraz 1 *cm*, taksamo $O P$. Mając taką podziałkę na trzech osiach możemy już każdy przedmiot narysować, jeżeli tylko znamy prawdziwe odległości jego punktów od płaszczyzn $X O Y$, $X O Z$ i $Y O Z$. Te odległości nazywamy przestrzennemi współrzędnemi punktu. N. p. wiedząc, że jakiś punkt jest w rzeczywistości odległy o 2 *cm* od płaszczyzny $Y O X$, o 3 *cm* od płaszczyzny $Z O Y$

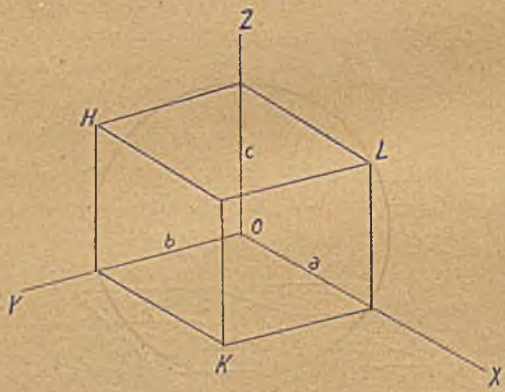


Fig. 220.

i o 4 *cm* od płaszczyzny ZOX, znajdziemy jego obraz odcinając na osiach OZ, OX, OY odpowiednio dwie, trzy i cztery jednostki podziałki i kreśląc następnie $DE \parallel OY$ i równe OF, a z punktu E linię $AE \parallel OZ$ i równą OB. Koniec A tej linii jest obrazem żądanego punktu. Moglibyśmy także z innej strony dostać się do tego samego punktu, n. p. kreśląc $BC \parallel OX$ i równe OD a z punktu C prostą $CA \parallel OY$ i równą OF i t. p.

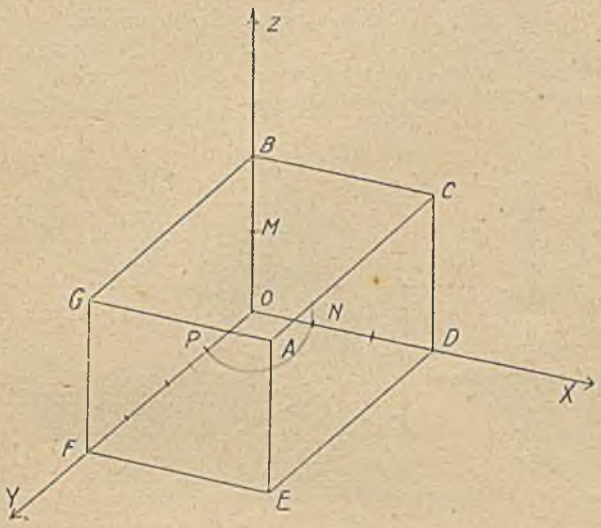


Fig. 221.

Kreśląc w ten sposób współrzędne punktów jakiejś bryły, możemy otrzymać całkowity jej obraz.

W dalszym ciągu będziemy używali wyłącznie takiego położenia przedmiotu, aby osie OZ i OX były prostopadłe do siebie. Wtedy na tych osiach odcina się prawdziwą, niezmienioną podziałkę, a tylko na osi OY podziałka jest zmniejszoną. *

Tego sposobu przedstawiania będziemy używali we wszystkich naszych rysunkach. Jakkolwiek na takim rysunku utwory geometryczne występują zniekształcone, jednakowoż wiemy już teraz, jak wielkie jest to zniekształcenie. Z figury takiej można już odczytać wymiary. N. p. belka prostokątna przedstawiona na fig. 222 w perspektywie równoległej: $\alpha = 45^0$, $s = {}^1/_3$, w pomniejszeniu 1 : 10 ma grubość i szerokość 1 *dm* (10.1 *cm*) a długość 6 *dm*, ponieważ stosunek skrócenia perspektywicznego wynosi $^1/_3$ a na rysunku długość jej wynosi 2 *cm* (2 *cm*.3.10 = 6 *dm*).

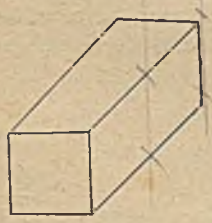


Fig. 222.

Dlatego do celów technicznych używa się prawie wyłącznie perspektywy równoległej ukośnej z zachowaniem prostopadłości dwóch osi i ze skróceniem tylko w jednym kierunku.

Uwaga: Żaden rysunek perspektywiczny nie wyznacza jeszcze w zupełności wielkości i kształtu przedmiotu. Łatwo bowiem sprawdzić, że różne przedmioty wstawione w tensam pęk promieni, mogą mieć jednakowe rzuty i to zarówno w perspektywie środkowej, jak i równoległej.

N. p. kula K i stożek ścięty S mają ten sam obraz perspektywiczny (fig. 223).

Tak samo kula K i walec W na fig. 224 mają zupełnie jednakowy obraz w perspektywie równoległej. Aby mieć dokładne wyobrażenie o rozmiarach i postaci bryły, trzeba podać dwa rzuty, na dwie rozmaite płaszczyzny nachylone do siebie, zapomocą dwóch odmiennych pęków promieni (obrazy stereoskopowe w optyce). N. p. gdybyśmy do fig. 224 — dodali jeszcze

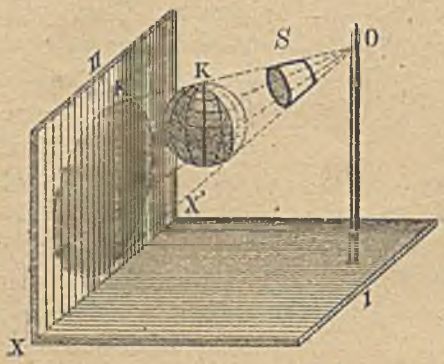


Fig. 223.

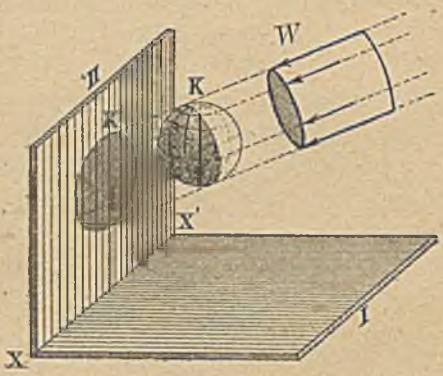


Fig. 224.

rzut prostopadły na płaszczyznę poziomą, spostrzeglibyśmy tam, że W jest ograniczony dwoma kołami i powierzchnią boczną, podczas kiedy kula K przedstawi się jako koło. Takie badanie postaci i wielkości ciał przy pomocy dwóch rzutów stanowi osobny dział geometryi, zwany „geometryą wykreślną“. Metodę tę omówimy później osobno, kiedy poznamy twierdzenia o rzutach.

Najpospoliciej wystarcza jednak zamiast drugiego rzutu jakieś proste dodatkowe określenie. N. p. z rysunku gwiazdy na fig. 219 nie wiemy jeszcze, czy wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy, czy też nachylone ku nam, ale znacznie dłuższe. Jeżeli jednak dodamy do opisu tej gwiazdy, że krawędzie boczne są w naturze prostopadłe, to już wszystko z tej figury odczytać możemy. Gdybyśmy zamiast tego podali jeszcze drugi rzut, n. p. widok gwiazdy z boku, to widzielibyśmy na tym rysunku, czy krawędzie boczne są pochylone czy też prostopadłe.

§ 87. Ukośny rzut koła. Elipsa.

W wielu konstrukcyach będzie nam potrzebny ukośny rzut koła (n. p. przy rysowaniu w perspektywie walca, stożka, kuli).

Pomyślmy koło leżące poziomo, a płaszczyznę rysunku (obrazową) pionowo. Średnica AB przedstawi się na rysunku w prawdziwej wielkości: $A'B' = AB$, średnica zaś $CD \perp AB$ przedstawi się jako odcinek $C'D'$ nachylony do $A'B'$ pod kątem α i zmniejszony odpowiednio. Na naszym rysunku użyliśmy $\alpha = 45^0$ i $s = {}^1/_2$.

Aby znaleźć inne punkty, prowadzimy dowolną cięciwę równoległą do CD n. p. 12, odcinamy jej odległość od środka w niezmienionej wielkości $O'P' = OP$ i skracamy odcinki $P1$ i $P2$ do $^1/_2$ długości, a następnie przenosimy je na linię $1'2'$ równoległą do $C'D'$.

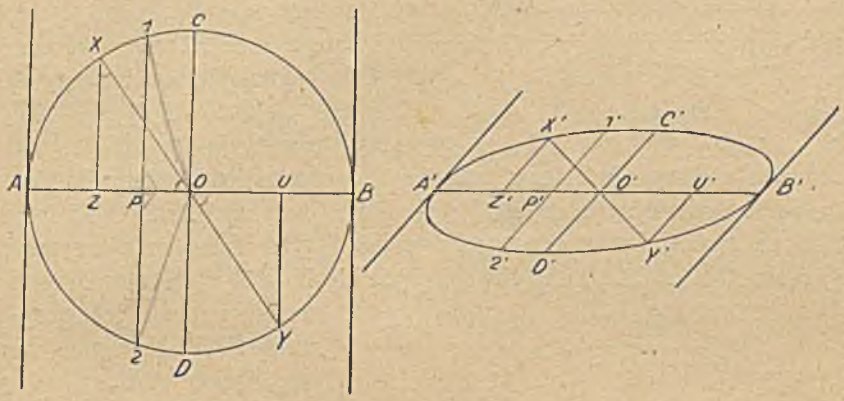


Fig. 225.

Jeżeli w ten sposób narysujemy dowolnie wiele cięciw w perspektywie i końce ich połączymy jedną nieprzerwaną linią, otrzymamy jako obraz koła linię krzywą, podobną do spłaszczonego koła. Linia ta nazywa się elipsą. Elipsa jestto zatem ukośny rzut koła.

Elipsę można także otrzymać z prostopadłego rzutu koła, jednakowoż koło musi być wtedy nachylone do płaszczyzny obrazowej.

Podobnie jak w kole cięciwa przechodząca przez O jest przepołowiona w tym punkcie, tak i w elipsie każda cięciwa przechodząca przez O' jest przepołowiona punktem O'. Aby to wykazać, weźmy pod uwagę dowolną cięciwą n. p. $X'Y'$ przechodzącą przez O'. Jest ona obrazem średnicy XY, którą znajdziemy prowadząc $X'Z'$ i $U'Y'$ równolegle do $C'D'$ i odcinając w kole OZ i OU równe OZ' i OU'. Prostopadłe ZX i UY do prostej AB wyznaczą na kole końce odpowiedniej średnicy. Ponieważ $XZ = UY$. (II przypadek przystawania) to i ich połowy są równe, t. j. $X'Z' = U'Y'$. Wobec tego $X'Z'O' \cong U'Y'O'$ (II), a więc $X'O' = O'Y'$. Więc istotnie dowolna cięciwa $X'Y'$ przechodząca przez O' jest w tym punkcie przepołowiona.

Z tego powodu punkt O' nazywa się środkiem elipsy a każda cięciwa przechodząca przez środek, nazywa się średnicą elipsy. Średnice takie, jak $A'B'$ i $D'C'$, które są obrazami prostopadłych średnic koła, zwą się średnicami sprzężonemi. Średnice sprzężone mają tę własność, że jedna połowi cięciwy równo-

ległe do drugiej. N. p. $A'B'$ połowi nietylko średnicę $C'D'$ ale i każdą cięciwę do niej równoległą — jakto wynika z samej konstrukcyi.

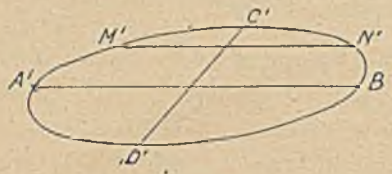


Fig. 226.

Odwrotnie $C'D'$ połowi nietylko średnicę $A'B'$, ale także wszystkie cięciwy do niej równoległe, n. p. cięciwę $M'N'$ dlatego, że $M'N'$ jest obrazem cięciwy koła równoległej do średnicy AB; w kole zaś cięciwa $CD \perp AB$ połowi wszystkie równoległe do AB cięciwy a w rzucie te cięciwy nie ulegają zmianie. Tosamo możemy wykazać o każdej innej parze średnic sprzężonych. Stąd łatwo otrzymać konstrukcyjnie średnice sprzężone i środek elipsy, jeżeli tylko sama linia krzywa jest narysowana. Kreśli się kilka równoległych cięciw $c'\,c''\,c'''$ w dowolnym kierunku i środki ich łączy się linią MN. Następnie kreśli się cięciwy d, d'... równoległe do MN, to linia PR łącząca ich środki jest średnicą sprzężoną z MN, a punkt O środkiem elipsy.

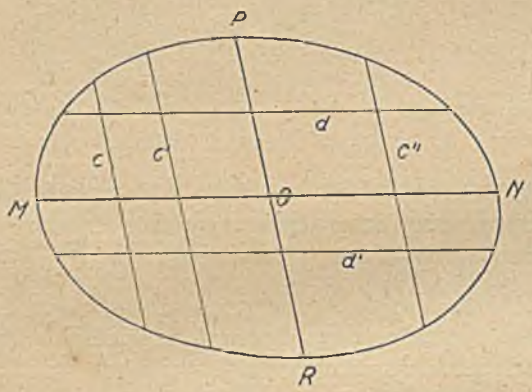


Fig. 227.

Liniom prostym mającym z kołem tylko jeden punkt wspólny, a więc stycznym do koła, odpowiadają w rzucie proste mające tylko jeden punkt wspólny z elipsą, a więc linie styczne do elipsy. N. p. stycznym do koła w punktach A i B na fig. 225 — które są równoległe do CD — odpowiadają proste poprowadzone przez punkty A' i B' równoległe do $C'D'$, które muszą być stycznemi do elipsy. Stąd wynika łatwa konstrukcya stycznej w dowolnym punkcie elipsy. Trzeba przez ten punkt S wykreślić średnicę SL, znaleźć średnicę sprzężoną do niej: KH (jako linię połowiącą cięciwy równoległe do SL) i wykreślić przez punkt S linię równoległą do KH. Jest ona styczną do elipsy.

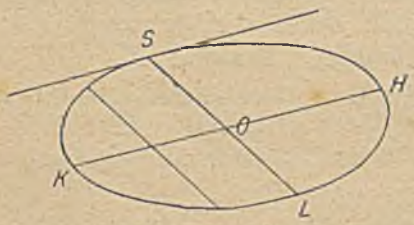


Fig. 228.

Do wyznaczenia koła wystarcza jedna średnica, do wyznaczenia zaś elipsy potrzeba dwóch średnic sprzężonych. Aby *zbudować elipsę należącą do danych*

średnic sprzężonych $A'B'$ i $C'D'$, uważamy ją za rzut koła o średnicy $A'B'$. Zakreślamy koło na średnicy $A'B'$ i rysujemy średnicę $CD \perp A'B'$, to $C'D'$ jest obrazem średnicy CD. Połączmy C z C', to tę linię CC' możemy uważać za promień, rzucający punkt C na płaszczyznę $A'D'B'C'$ prostopadłą do linii CD. Inne promienie, rzucające inne punkty obwodu koła, muszą być równoległe do CC'. Aby więc znaleźć obraz cięciwy 12, prowadzimy z punktów 1 i 2 promienie równoległe do CC' a przez punkt E linię równoległą do $C'D'$, która jest obrazem cięciwy 12. Punkty przecięcia się tej cięciwy z ukośnymi promieniami 11', 22' są już punktami elipsy. W ten sposób można szybko otrzymać dowolnie wiele punktów elipsy.

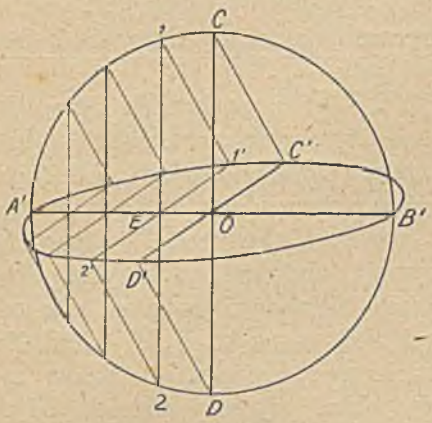


Fig. 229.

Pomiędzy średnicami sprzężonemi znajduje się jedna para średnic sprzężonych prostopadłych. Aby to wykazać, opiszmy na kole kwadrat $ABCD$. Na elipsie odpowiada temu kwadratowi równoległobok $A'B'C'D'$ opisany na elipsie. Jeżeli kwadrat $ABCD$ obrócimy w położenie $MNOP$, to na elipsie otrzymamy równoległobok $M'N'O'P'$. Kąt A' zamienił się z ostrego na rozwarty: M'. Musiało więc istnieć takie pośrednie położenie kwadratu, któremu odpowiadał równoległobok o kącie prostym, t. j.

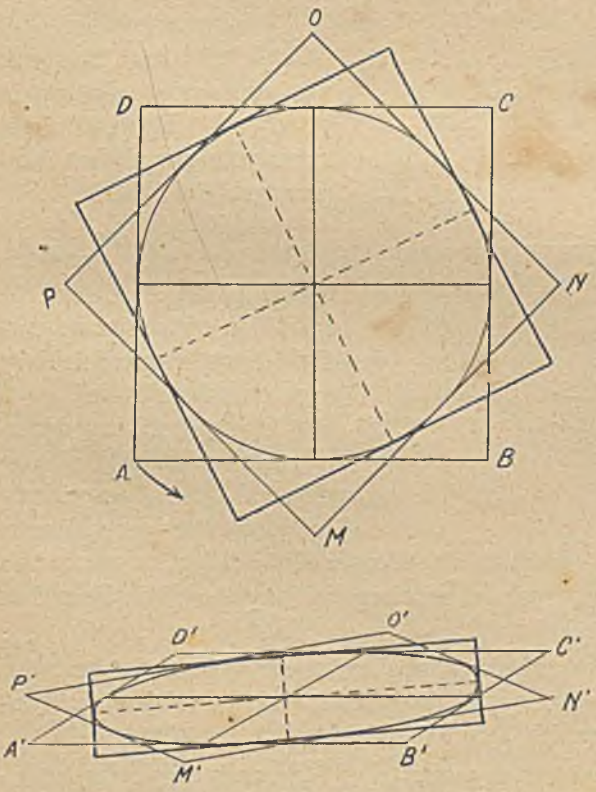


Fig. 230.

prostokąt. Osie symetryi tego prostokąta są średnicami sprzężonemi (bo odpowiadają prostopadłym średnicom koła) prostopadłymi do siebie. Takie *prostopadłe średnice sprzężone nazywamy osiami głównemi elipsy.*

Dzielą one elipsę na cztery symetryczne ćwiartki, są osiami symetryi elipsy.

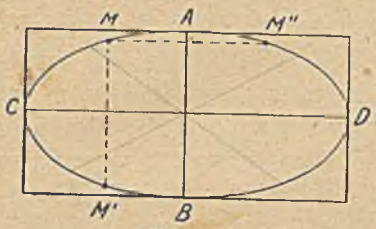


Fig. 231.

N. p. jeżeli z punktu dowolnego M poprowadzimy cięciwę równoległą do AB, to jest ona przepołowiona linią CD (jako średnicą sprzężoną do AB) i jest prostopadła do CD, a więc punkt M' elipsy leży symetrycznie względem M. Tosamo rozumowanie można przeprowadzić dla osi symetryi AB, o punktach M i M''. Na tej symetryi polega konstrukcya osi głównych elipsy. Ze środka zakreślamy koło promieniem dowolnym, ale takim, aby koło przecięło elipsę w czterech punktach. Przepołówmy kąty zawarte między OA i OB, OA i OD.

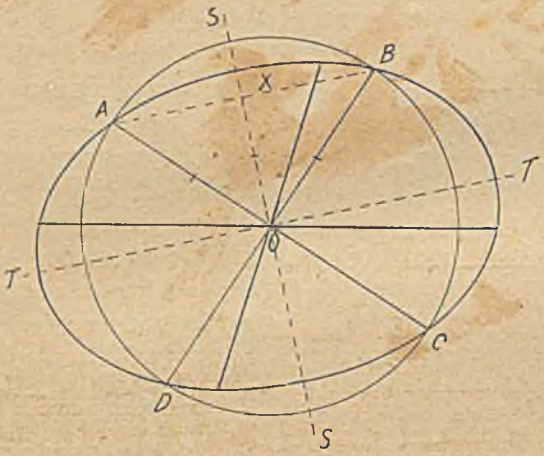


Fig. 232.

Ponieważ odcinki OA, OB, OC, OD są równe jako promienie koła, przeto punkty A, B, C, D leżą symetrycznie względem dwusiecznych SS i TT.

($AX = BX$, i $AB \perp SS$, jakto wynika z $AOX \cong BOX$). Linie SS i TT są więc osiami symetryi elipsy, ich odcinki są więc osiami głównemi.

Elipsę dostajemy odrazu zoryentowaną według osi głównych, jeżeli przyjmiemy w rysunku perspektywicznym $\alpha = 90^0$, a zmniejszenie dowolne, ale różne od $s = 1$ (n. p. rzut koła prostopadłego do płaszczyzny rysunku ukośnie od góry lub ukośnie z dołu — bez zbaczania na prawo lub lewo).

Konstrukcya elipsy, której osie główne są znane, polega więc na tem, aby wszystkie cięciwy koła prostopadłe do jednej średnicy zmniejszyć w tymsamym stosunku zachowując ich kąty ze średnicą.

Stosunek zmniejszenia musi wynosić tyle, ile stosunek osi głównej mniejszej do osi większej, ponieważ oś wielka jest średnicą zachowaną w prawdzi-

wej wielkości a tylko oś mała jest średnicą zmniejszoną. Najwygodniej wykonuje się konstrukcyę przy pomocy dwóch kół współśrodkowych o średnicach równych osiom elipsy. Aby zmniejszyć połowę cięciwy PR, łączymy P ze środkiem koła. — Trzeba na prostej PR znaleźć taki punkt X, aby $XR : PR = CO : BO$ czyli $= HO : PO$. Z podobieństwa trójkątów wiadomo, że wystarczy poprowadzić linię $HX \parallel OR$. Wtedy rzeczywiście XR jest taką częścią PR, jaką częścią wielkiej osi jest oś mała. Punkt X jest już punktem elipsy. W ten sposób można otrzymać dowolnie wiele punktów elipsy pomniejszając odcinki MN, QS i t. d.

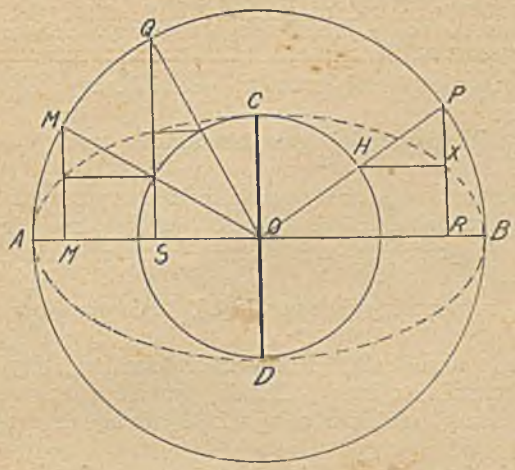


Fig. 233.

Inne własności elipsy poznamy w dalszym ciągu nauki. Przy pomocy ukośnego rzutu koła łatwo już narysować w perspektywie równoległej bryły takie, jak: walec, stożek, kulę i t. p.

Ćwiczenia II.

§ 85. 1. Wykreślić w perspektywie środkowej kostkę tak, aby punkt oczny O leżał: *a*) u góry na lewo od rysunku, *b*) u dołu na lewo, *c*) u dołu na prawo.

Uwaga: Krawędzie prostopadłe do płaszczyzny obrazowej można skracać dowolnie; przezto tylko zmienia się wzniesienie oka nad płaszczyzną rysunku.

2. Kiedy obrazem linii prostej będzie punkt w perspektywie środkowej? Kiedy obrazem kwadratu będzie linia prosta?

§ 86. 3. Do kartonu przyklejono dziewięć kostek po trzy w jednym rzędzie pionowym i poziomym; oko znajduje się naprzeciw kostki środkowej. Wykreślić obrazy wszystkich kostek.

4. Kiedy ukośny rzut odcinka jest mniejszy od niego, kiedy równy, kiedy większy?

5. Z której strony trzeba patrzeć na kwadrat leżący poziomo, aby się przedstawiał: *a*) jako prostokąt, *b*) jako jedna linia prosta, *c*) jako równoległobok.

6. Wykreślić w perspektywie równoległej belkę prostokątną o przekroju kwadratowym, której długość jest dwanaście razy większa od szerokości, używając kąta $\alpha = 45^0$ i skrócenia $s = {}^1/_3$.

7. Wykreślić stół, szafę w perspektywie: $\alpha = 30^0$ $s = {}^1/_2$, wykonawszy potrzebne mierzenia.

8. Wykreślić w pomniejszeniu w perspektywie równoległej skrzynię, której długość $a = 1{\cdot}5$ *m*, szerokość $b = 0{\cdot}7$ *m*, a wysokość $c = 0{\cdot}4$ *m*, jeżeli ściany są zrobione z materyału o grubości $0{\cdot}03$ *m*.

9. Narysować w perspektywie $\alpha = 60^0$, $s = 1/2$ bryłę powstałą z kostki przez odcięcie wszystkich naroży zapomocą płaszczyzn, przechodzących przez środki każdych trzech schodzących się krawędzi.

10. Narysować ośmiościan i odciąć jego naroża płaszczyznami równoległemi do osi w odstępach wynoszących $1/8$ długości osi od wierzchołków.

11. Narysować w perspektywie równoległej dom z dachem ukośnym, którego wysokość wynosi $1/5$ wysokości całego domu.

12. Narysować w perspektywie równoległej ostrosłup sześcioboczny ścięty płaszczyzną równoległą do podstawy.

13. Narysować w perspektywie równoległej graniastosłup i przeciąć go płaszczyzną ukośną.

Uwaga: Rysuje się najpierw rzut prostopadły graniastosłupa na płaszczyznę równoległą do krawędzi. Z tego rzutu odmierza się długość odciętych krawędzi.

14. Narysować w perspektywie równoległej ośmioboczną wieżyczkę zakończoną ostrosłupem.

15. Narysować pięć schodów w perspektywie równoległej. Linie niewidoczne opuścić!

16. Narysować w perspektywie równoległej sześcio-czworościan t. j. bryłę powstającą z sześcianu przez umieszczenie na każdej ścianie ostrosłupa czworobocznego, mającego za podstawę ścianę sześcianu a wysokość równą czwartej części krawędzi sześcianu.

17. Narysować sześcian i wpisać weń czworościan i ośmiościan.

Uwaga: Krawędzie czworościanu są przekątniami ścian sześcianu, a naroża ośmiościanu leżą w środkach ścian sześcianu.

18. Wpisać w sześcian dwa czworościany przenikające się; linie niewidoczne opuścić (por. poprzednie zadanie).

§ 87. 19. Narysować dowolne koło w rzucie ukośnym używając zniekształceń:

a) $\alpha = 45^0$, $s = 1$, *b)* $\alpha = 30^0$, $s = 1/3$, *c)* $\alpha = 90^0$, $s = 1/2$.

20. Mając podaną elipsę znaleźć jej środek konstrukcyjnie.

21. Mając podaną elipsę wykreślić kilka stycznych.

22. Zbudować elipsę znając jedną parę średnic sprzężonych.

23. Mając podaną elipsę znaleźć osie główne.

24. Zbudować elipsę znając jej osie główne.

25. Narysować walec kołowy w perspektywie równoległej.

26. Narysować stożek kołowy w perspektywie równoległej.

27. Narysować w perspektywie równoległej rurę walcową.

28. Narysować w perspektywie równoległej szklankę okrągłą, u góry rozszerzoną.

29. Narysować w perspektywie kulę z równikiem, zwrotnikami i kołami podbiegunowemi.

30. Narysować kulę z kilkoma południkami w perspektywie równoległej.

31. Narysować w perspektywie równoległej warstwę kuli, ograniczoną dwoma płaszczyznami równoległemi.

Rozdział III.

Położenie linii prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Proste i płaszczyzny równoległe.

§ 88. Dwie linie proste.

Na płaszczyźnie dwie proste nie nakrywające się mogą mieć względem siebie dwojakie położenie — jak to widzieliśmy w planimetryi: albo dwie linie proste przecinają się, albo są równoległe.

Jeżeli jednak linie proste leżą na rozmaitych płaszczyznach, przybywa jeszcze trzecia możliwość. Na przykład krawędzie a i b kostki przedstawionej

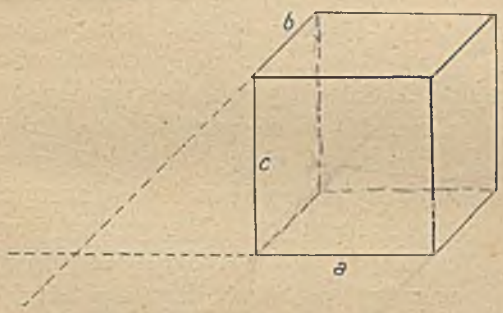


Fig. 234.

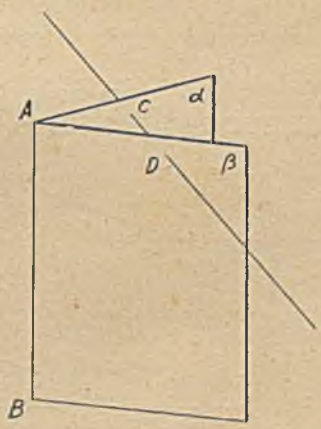


Fig. 235.

na fig. 234 nie przecinają się w rzeczywistości, choćbyśmy je dowolnie daleko przedłużyli.

(Na rysunku te linie mają jeden punkt wspólny, ponieważ rysunek jest płaski, więc dwie linie proste muszą się na nim przecinać, o ile nie są równoległe.)

Równoległemi tych linii również nie nazwiemy, ponieważ są w jednych miejscach bliższe, w innych dalsze od siebie. Podobne położenie ma krawędź AB kąta dwuściennego (fig. 235) względem prostej łączącej dowolne punkty C i D na płaszczyznach α i β. Przykładów takich można podać bardzo wiele przy rozpatrywaniu rozmaitych brył. (Podaj przykłady z sali szkolnej!)

Dwie takie linie proste, które ani są równoległe, ani się przecinają, nazywamy prostemi wichrowatemi. Proste wichrowate nie wyznaczają płaszczyzny, niema bowiem takiej płaszczyzny, któraby zawierała te obydwie proste. Każda płaszczyzna zawierająca jedną z nich przecina drugą prostą tylko w jednym punkcie, n. p. płaszczyzna zawierająca prostą YY' na fig. 236 przecina prostą XX' w jednym punkcie A.

Posuwajmy się po dwóch takich liniach równocześnie od punktów X i Y lub X' i Y' to odległość zmniejsza się coraz bardziej, ale tylko do pewnej granicy. Najbliższe są punkty A i C, stąd zaś począwszy odległość znowu wzrasta nieograniczenie. Na kostce na fig. 234 tą najkrótszą odległością jest odcinek c. Istnieje więc pewna najkrótsza odległość dwóch prostych wichrowatych, istnieją na nich miejsca najbliższe. Sposób znalezienia tej odległości poznamy później.

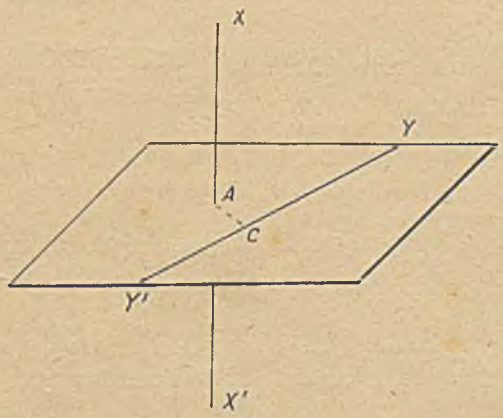


Fig. 236.

Proste wichrowate nie zamykają żadnego kąta. Jednakowoż ich odchylenie od położenia równoległego może być rozmaite. Tak n. p. skłonni jesteśmy powiedzieć, że linie b i a na kostce na fig. 234 są odchylone o 90^0 od położenia równoległego. Dlategoto wprowadzamy nowe pojęcie: kąta prostych wichrowatych. Przesuwamy jedną z nich n. p. a równolegle do pierwotnego położenia tak, aby się przecięła z drugą b, lub z dowolnego punktu prostej b prowadzimy linię a' równoległą do a. Wtedy powstaje kąt w zwykłem znaczeniu, kąt α. Otóż ten kąt nazywamy kątem dwóch prostych wichrowatych. Jestto kąt, utworzony przez jedną z nich i przez linię równoległą do drugiej, poprowadzoną przez dowolny punkt pierwszej.

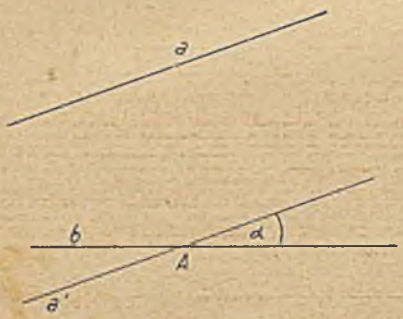


Fig. 237.

Mogłaby zachodzić wątpliwość, czy nie otrzymamy rozmaitych, różnych od siebie kątów α, jeżeli poprowadzimy linie równoległe do a przez rozmaite punkty prostej b. Wykażemy jednakże w następnym ustępie ściśle, że te wszystkie kąty są równe (por. str. 173).

§ 89. Linia prosta i płaszczyzna.

Pewnik X poucza nas, że linia prosta mająca z płaszczyzną dwa punkty wspólne musi cała leżeć na tej płaszczyźnie. Jeżeli więc prosta nie leży na płaszczyźnie, to może mieć z nią jeden punkt wspólny. Mówimy wtedy, że prosta przecina płaszczyznę w punkcie, który się nazywa spodkiem prostej.

Taka linia prosta przecinająca płaszczyznę może być do niej więcej lub mniej nachylona. Jak się mierzy to nachylenie, poznamy w dalszym ciągu.

Wreszcie linia prosta może nie mieć z płaszczyzną żadnego punktu wspólnego. Udowodnimy, że takie położenie jest możliwe. W tym celu na dowolnej płaszczyźnie obieramy jakąś prostą a i przez punkt P poza nią leżący prowadzimy linię $b//a$, co zawsze jest możliwe według pewnika planimetrycznego. Ta prosta b nie może przeciąć płaszczyzny α. Dla dowodu przesuńmy płaszczyznę przez proste a i b. To się da zrobić, ponieważ te proste są równoległe (por. str. 150). Gdyby prosta b przecinała płaszczyznę α, to chyba tylko w tych miejscach, gdzie się przecinają płaszczyzny α i β (bo cała prosta b leży na płaszczyźnie β), a więc w jakimś punkcie wspólnej krawędzi a. To jest jednakże niemożliwe, ponieważ właśnie wykreśliliśmy $b//a$. Prosta b nie przecina więc zupełnie płaszczyzny α. Taką prostą, która nie przecina płaszczyzny, chociażbyśmy ją dowolnie przedłużali, nazywamy prostą równoległą do płaszczyzny. Przeprowadziliśmy więc dowód istnienia prostej równoległej. *Każda prosta równoległa choćby do jednej linii leżącej na płaszczyźnie, jest już równoległa do całej płaszczyzny.*

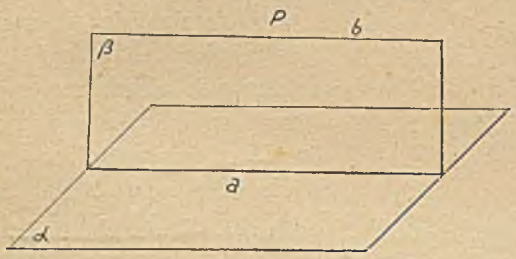


Fig. 238.

Prosta ta posiada rzeczywiście niektóre charakterystyczne cechy równoległych prostych. I tak każdy jej punkt jest równo oddalony od płaszczyzny a, co udowodnimy później, mówiąc o odległości punktu od płaszczyzny. Natomiast pewnik planimetryczny odnoszący się do dwóch prostych nie stosuje się już do prostej i płaszczyzny. Widzieliśmy bowiem, że przez punkt poza prostą można do niej poprowadzić tylko jedną linię równoległą. Tymczasem przez punkt leżący poza płaszczyzną można poprowadzić bardzo wiele linii prostych równoległych do płaszczyzny.

Twierdzenie to daje nam sposób poznania, czy prosta jest równoległa do płaszczyzny, a zarazem sposób konstrukcyi takiej prostej.

Nie należy sądzić, aby prosta równoległa do płaszczyzny była równoległą do wszystkich prostych, leżących na tej płaszczyźnie: jest ona względem niektórych prostych wichrowata a względem innych równoległa. Łatwo wykazać, że *prosta równoległa do płaszczyzny jest tylko do tych prostych leżących na płaszczyźnie równoległa, które leżą z nią na tejsamej drugiej płaszczyźnie.* N. p. prosta $b \parallel \alpha$, to, aby znaleźć na płaszczyźnie α jakąś prostą równoległą do b, prowadzimy dowolną płaszczyznę β przez prostą b. Krawędź a' musi być równoległa do b (dlaczego?). Taksamo krawędź a'' płaszczyzn α i γ jest równoległa do b i t. d. Względem innych prostych leżących na płaszczyźnie α, n. p. względem AB i AC, jest prosta b wichrowatą.

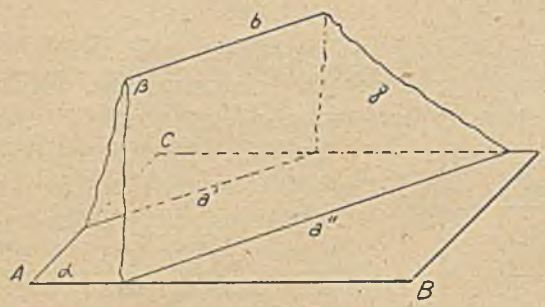


Fig. 239.

Opierając się na tych twierdzeniach o prostej równoległej do płaszczyzny, możemy uogólnić ważne twierdzenie z planimetryi o prostych równoległych. Widzieliśmy mianowicie, że *dwie linie proste równoległe do tejsamej trzeciej są także do siebie równoległe*, jeżeli wszystkie trzy leżą na jednej płaszczyźnie. Pytanie, czy tosamo dotyczy prostych równoległych w przestrzeni (zwracaliśmy już uwagę n. p. na str. 152, że nie wszystkie twierdzenia planimetryi można bez zmiany przenosić do stereometryi). Użyjemy dowodu niewprost.

Założenie jest: $a \parallel c$ i $b \parallel c$. Połączmy płaszczyznami α i β proste b, c i a, c. Ponieważ $a \parallel c$, to a musi być równoległe do całej płaszczyzny α, zawierającej prostą c. Ponieważ $b \parallel c$, to b musi być równoległe do płaszczyzny β, zawierającej prostą c. Twierdzimy, że także $a \parallel b$. Otóż gdyby prosta a nie była równoległa do b, to moglibyśmy znaleźć inną prostą a' równoległą do b, przechodzącą przez dowolny punkt X prostej a i leżącą na płaszczyźnie β. Ta prosta a' musiałaby być równoległa do α (ponieważ b leży na płaszczyźnie α). Wobec tego prosta a' byłaby równoległa także do c, bo c leży z nią na jednej płaszczyźnie β, a zarazem na płaszczyźnie α, równoległej do a'.

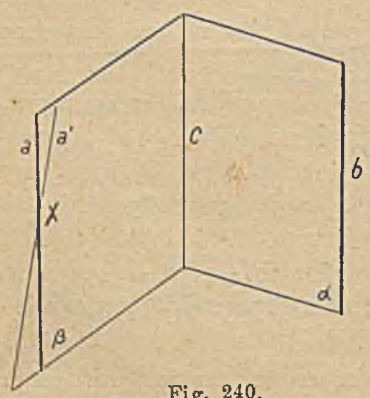


Fig. 240.

Przez punkt X przechodziłyby więc dwie linie proste a i a', leżące na jednej

płaszczyźnie i równoległe do tej samej prostej c, a to jest niemożliwe, sprzeciwia się bowiem planimetrycznemu pewnikowi o liniach równoległych. Prosta a' musi się więc nakryć z prostą a, a więc już $a \parallel b$, zgodnie z naszem twierdzeniem. — Stąd wniosek:

Dwie proste równoległe do tejsamej trzeciej są i do siebie równoległe, chociażby wszystkie trzy proste nie leżały na jednej płaszczyźnie.

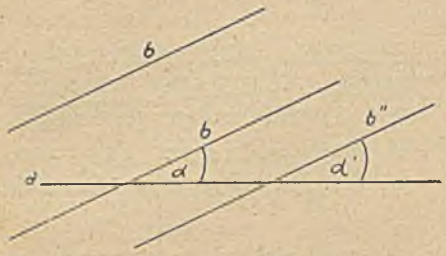


Fig. 241.

* Twierdzenie to możemy zaraz zastosować do okazania, że wielkość kąta dwóch prostych wichrowatych nie zależy od tego, w którem miejscu jednej prostej poprowadzimy linię równoległą do drugiej. Jeżeli bowiem $b' \parallel b$ i $b'' \parallel b$, to musi być także $b' \parallel b''$. Te dwie proste równoległe są przecięte trzecią a, więc kąty odpowiednie są sobie równe:

$$\alpha = \alpha'. \quad *$$

§ 90. Dwie płaszczyzny.

Dwie płaszczyzny mające trzy lub więcej punktów wspólnych, nie leżących na jednej linii prostej, nakrywają się zupełnie — według pewnika X.

Dwie płaszczyzny mające dwa punkty wspólne mają wspólną całą linię prostą (krawędź) łączącą te dwa punkty. Taksamo, jeżeli dwie płaszczyzny mają jeden punkt wspólny, muszą mieć już całą krawędź wspólną — według pewnika XI.

Mogą istnieć także płaszczyzny, nie mające żadnego punktu wspólnego. Przeprowadzimy dowód istnienia takich płaszczyzn. Przez punkt X leżący poza płaszczyzną poprowadźmy dwie proste a i b, równoległe do płaszczyzny (dowód istnienia takich prostych przeprowadziliśmy już w ustępie poprzednim).

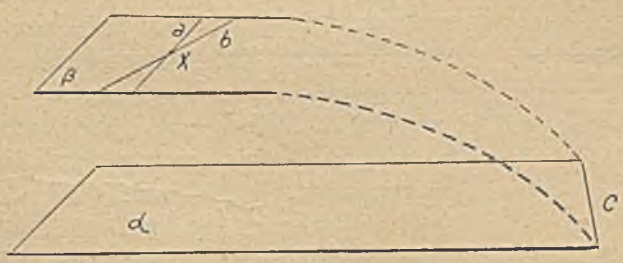


Fig. 242.

Twierdzimy, że płaszczyzna przesunięta przez te dwie proste nie ma żadnego punktu wspólnego z płaszczyzną α. Gdyby bowiem płaszczyzny α i β przecinały się wzdłuż jakiejś krawędzi c (leżącej gdzieś daleko — na rysunku zaznaczyliśmy to przez zagięcie górnej płaszczy-

zny), to ponieważ $a \parallel \alpha$, musiałaby ta prosta a być także równoległą do c. Taksamo ponieważ $b \parallel \alpha$, to $b \parallel c$ według twierdzenia na str. 172. Przez punkt X przechodziłyby więc dwie proste a i b leżące na tejsamej płaszczyźnie i równoległe do c, a to jest niemożliwe.

A więc płaszczyzny α i β nie mogą mieć krawędzi wspólnej, nie mogą się więc wogóle przeciąć.

Takie dwie płaszczyzny nie mające żadnego punktu wspólnego (chociażbyśmy je dowolnie przedłużali), nazywamy płaszczyznami równoległemi. Z naszego dowodu wynika następująca konstrukcya płaszczyzn równoległych: *Płaszczyzna przesunięta przez dwie proste przecinające się ze sobą, a równoległe do drugiej płaszczyzny, jest sama równoległa do tej drugiej płaszczyzny.*

Uwaga: Dwie proste równoległe do tej samej płaszczyzny nie muszą być do siebie równoległe!

Ponieważ dwie płaszczyzny równoległe nie mają żadnego punktu wspólnego, to oczywistem jest, że jeżeli je przetniemy trzecią płaszczyzną, por. fig. 243, to powstałe krawędzie nie mogą mieć także nic wspólnego. Krawędzie te nie są wichrowate, bo leżą na jednej płaszczyźnie (przecinającej tamte dwie), pozostaje więc tylko jedna możliwość, że te krawędzie są równoległe.

Wniosek ten wypowiadamy w następujący sposób:

Dwie płaszczyzny równoległe przecięte trzecią tworzą z nią krawędzie równoległe.

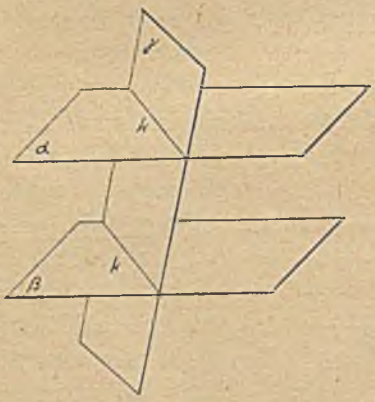


Fig. 243.

Powstały tu kąty dwuścienne odpowiednie, naprzemianległe i jednostronne. Kątami tymi zajmiemy się później.

W planimetryi musieliśmy przyjąć za pewnik, że przez punkt poza linią prostą da się do niej tylko jedna linia równoległa poprowadzić. W stereometryi możemy już udowodnić, że *przez punkt poza płaszczyzną da się poprowadzić tylko jedna płaszczyzna równoległa do niej.* Oprzemy się właśnie na poprzedniem twierdzeniu.

Gdyby przez punkt P (fig. 244) przechodziły dwie płaszczyzny β i γ równoległe do α, to przecinając te trzy płaszczyzny czwartą δ, przechodzącą przez P, otrzymalibyśmy na niej krawędzie a i a'.

Na podstawie twierdzenia o dwóch płaszczyznach równoległych przeciętych trzecią wnioskujemy, że $a \parallel k$ i $a' \parallel k$. Przez punkt P przechodziłyby więc na płaszczyźnie δ dwie proste równoległe do k, a to jest niemożliwe.

Zatem płaszczyzny β i γ muszą się nakryć, więc istnieje tylko jedna płaszczyzna równoległa do α przechodząca przez punkt *P*.

Stąd bezpośredni wniosek: *dwie płaszczyzny równoległe do tej samej trzeciej są do siebie równoległe.*

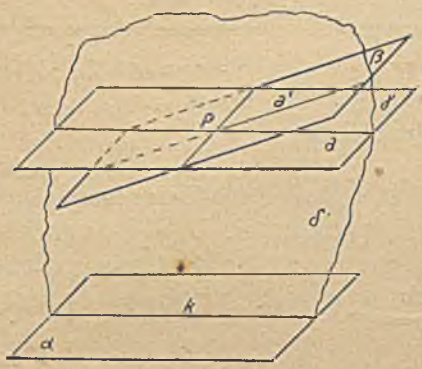


Fig. 244.

Można także teraz wykazać, że proste poprowadzone z jakiegoś punktu równoległe do danej płaszczyzny leżą wszystkie na jednej płaszczyźnie i to na płaszczyźnie równoległej do α. (Udowodnij!)

Dwie płaszczyzny równoległe do siebie *odcinają na wszystkich prostych równoległych przecinających je równe kawałki.* (Udowodnij przesuwając płaszczyznę przez każdą parę prostych równoległych!). Także odwrócenie tego twierdzenia jest prawdziwe. Równoległość dwóch płaszczyzn można także sprawdzić przy pomocy dwóch kątów.

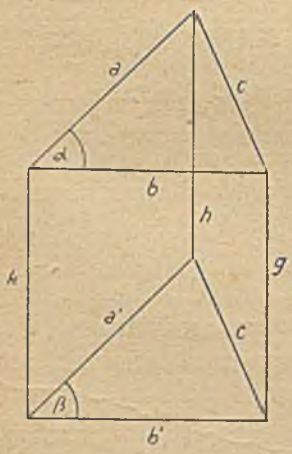


Fig. 245.

W planimetryi widzieliśmy, że kąty, których ramiona są zgodnie równoległe, są równe. Twierdzenie to można przenieść także do stereometryi:

Kąty, których ramiona są zgodnie równoległe, są równe, chociażby leżały na różnych płaszczyznach a ich płaszczyzny są równoległe.

Dowód: Założenie jest: $a \parallel a'$ i $b \parallel b'$. Odcinamy $a = a'$ i $b = b'$ i łączymy końce tych odcinków liniami c, c', k, h, g. Figura $k\,a'\,h\,a$ jest równoległobokiem, ponieważ jedna para boków jest równa i równoległa. A więc $k = h$ i $k \parallel h$.

Taksamo $k\,b'\,g\,b$ jest równoległobokiem, więc $k = g$ i $k \parallel g$. Z tych związków wynika $h = g$ i $h \parallel g$ a więc i figura $h\,c'\,g\,c$ jest równoległobokiem.

Więc $c = c'$. Z równości $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ wynika przystawanie trójkątów $a\,b\,c = a'\,b'\,c'$ (IV). A więc:

$$\sphericalangle a = \sphericalangle \beta.$$

Aby wykazać równoległość płaszczyzn α i β, zauważmy, że $b \parallel b'$ a więc $b \parallel \beta$, taksamo $a \parallel a'$ pociąga za sobą $a \parallel \beta$. Proste a i b są równoległe do

płaszczyzny β, a więc i cała płaszczyzna α wyznaczona przez te proste jest równoległa do β:

$$\alpha \parallel \beta.$$

Jeżeli więc sprawdzimy, że dwie płaszczyzny zawierają dwa kąty o ramionach parami równoległych, to te płaszczyzny są równoległe.

Łatwo wykazać, że *kąty o ramionach niezgodnie równoległych spełniają się do 180°.*

§ 91. Ruch postępowy w przestrzeni.

Poznanie prostych i płaszczyzn równoległych umożliwia zrozumienie ruchu postępowego utworów geometrycznych w przestrzeni. Jeżeli wszystkie punkty jakiegoś utworu geometrycznego zakreślają równe i równoległe odcinki, to ruch ten nazywamy ruchem postępowym, podobnie jak w planimetryi.

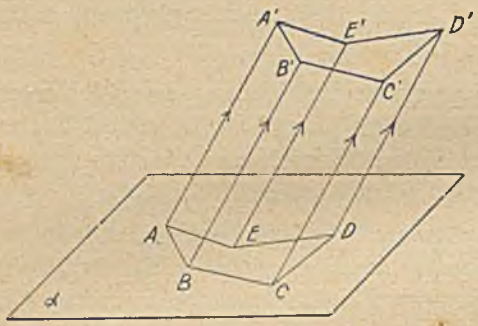


Fig. 246.

Aby wykonać taki ruch, obierzmy n. p. na płaszczyźnie α dowolny wielokąt $ABCDE$. Z jego wierzchołków poprowadźmy proste równoległe do siebie w dowolnym kierunku i na każdej odetnijmy równy kawałek $AA' = BB' = CC' = DD' = EE'$. Łącząc punkty $A'B'C'D'E'$ otrzymamy wielokąt w nowem położeniu. Jest on przystający do pierwotnego położenia, ponieważ boki są równe jako przeciwległe boki równoległoboku a kąty są równe, ponieważ mają ramiona parami zgodnie równoległe.

Przy takim ruchu nie zmienia się więc ani wzajemne położenie ani wielkość poszczególnych części utworu geometrycznego.

Ruch ten geometryczny ma więc wszystkie własności ruchu fizycznego, jaki spotykamy w życiu codziennem i w mechanice ciał sztywnych. Gdybyśmy taksamo postąpili z bryłą, to wszystkie kąty i odcinki pozostaną niezmienione, a więc i cała bryła nie ulegnie zmianie ani co do kształtu, ani co do wielkości.

Dla ścisłości należałoby wykazać, że przy tym ruchu linia prosta pozostanie prostą, nie dozna żadnego wygięcia a taksamo płaszczyzna pozostanie płaszczyzną. Wykazuje się to przez sprawdzenie, że trzy dowolne punkty leżące na jednej linii prostej przed ruchem, leżą także po wykonaniu ruchu na jednej linii prostej (Udowodnij!) a cztery punkty leżące na jednej płaszczyźnie przed wykonaniem ruchu, leżą także po wykonaniu ruchu na jednej płaszczyźnie.

N. p. $ABCD$ leżą na jednej płaszczyźnie α. Po ruchu otrzymamy punkty $A'B'C'D'$. Z nich trzy zawsze muszą leżeć na jednej płaszczyźnie: $C'A'B'$. Pytanie tylko, czy D' leży na tejsamej płaszczyźnie? Otóż płaszczyzna $C'A'B'$ jest równoległa do α, ponieważ zawiera dwie przecinające się proste $A'C'$ i $A'B'$ równoległe do α. Połączmy A z D i A' z D'. Ponieważ $AA' \# DD'$ to i $AD \# A'D'$, więc prosta $A'D'$ jest także równoległą do płaszczyzny α, musi zatem leżeć w tejsamej płaszczyźnie, co $A'B'$ i $A'C'$.

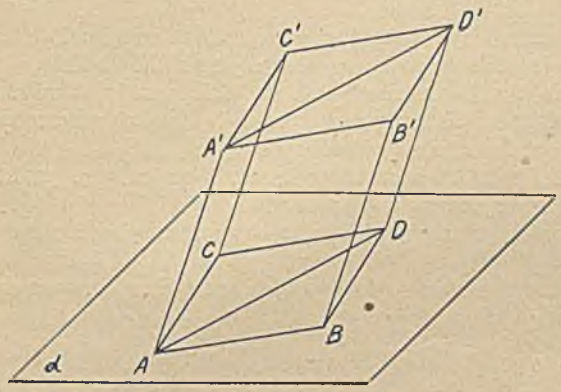


Fig. 247.

Ćwiczenia III.

§ 88. 1. Narysować ostrosłup trójboczny (czworościan) i wymienić krawędzie wichrowate.

2. Narysować belkę, której przekrój jest sześciokątem umiarowym i wymienić krawędzie wichrowate. Jakie kąty tworzą one ze sobą? Jaka jest ich najkrótsza odległość?

§ 89—90. 3. Narysować przez punkt leżący poza płaszczyzną kilka prostych równoległych do niej. Co jest miejscem geometrycznem tych prostych?

4. Mając daną prostą a równoległą do płaszczyzny i punkt X na płaszczyźnie, wykreślić prostą równoległą do a i leżącą na danej płaszczyźnie.

5. Jak się można przekonać przy pomocy kątomierza, czy prosta w przestrzeni leżąca jest równoległa do danej płaszczyzny?

6. Wykazać, że jeżeli dwie płaszczyzny są równoległe, to każda prosta leżąca na jednej płaszczyźnie jest równoległa do drugiej.

7. Wykazać, że płaszczyzna przecinająca jedną z dwóch płaszczyzn równoległych przecina i drugą.

8. Udowodnić, że dwie płaszczyzny równoległe odcinają równe kawałki na wszystkich prostych równoległych do siebie.

9. Udowodnić odwrócenie twierdzenia z poprzedniego zadania!

10. Udowodnić, że kąty, których ramiona są niezgodnie równoległe, spełniają się do 180^0, chociażby leżały na różnych płaszczyznach.

11. Jeżeli kąt dwuścienny przetniemy dwoma płaszczyznami równoległemi do siebie, a przecinającemi krawędź, to kąty przekroju będą równe. Udowodnić!

§ 91. 12. Dowolny sześciokąt przesunąć równolegle w przestrzeni o 4 *cm* pod kątem 45^0 od płaszczyzny tego sześciokąta.

13. Kostkę przesunąć równolegle w kierunku prostej łączącej dwa przeciwległe naroża.

14. Wykazać, że trzy punkty leżące na jednej linii prostej po wykonaniu ruchu postępowego leżą także na jednej linii prostej.

15. Wiedząc, że krawędzie kostki są po cztery równolegle do siebie, a wszystkie kąty na ścianach leżące wynoszą po 90°, wykazać, że przeciwległe ściany są równoległe.

16. Kostka wykonała dwa ruchy postępowe w różnych kierunkach. Czy można ten ruch zastąpić jednym ruchem postępowym? Wykonaj konstrukcyę!

17. Prosta równoległa do dwóch przecinających się płaszczyzn jest równoległa do ich krawędzi. (Udowodnij!) (Przesuwa się przez tę prostą płaszczyznę równoległą do jednej z płaszczyzn przecinających się.)

* 18. Mając dane dwie proste wichrowate wykazać, że z każdego punktu można poprowadzić prostą, przecinającą te dwie proste.

* 19. Przez jedną z dwóch prostych wichrowatych przesunąć płaszczyznę równoległą do drugiej.

* 20. Czy istnieje płaszczyzna równoległa do dwóch prostych wichrowatych?

Rozdział IV.

Proste i płaszczyzny prostopadłe.

§ 92. Prosta prostopadła do płaszczyzny.

Dotychczas omówiliśmy dokładniej tylko równoległe położenie prostych i płaszczyzn. Przejdziemy obecnie do prostych i płaszczyzn przecinających się. Z pośród rozmaitych możliwych położeń prostej względem płaszczyzny i płaszczyzny względem płaszczyzny najważniejsze jest dla nas położenie prostopadłe.

Zajmijmy się najpierw prostą prostopadłą. Biorąc pod uwagę jakąkolwiek prostą przecinającą płaszczyznę ukośnie spostrzeżemy, że ona z rozmaitych stron ma rozmaite nachylenie do płaszczyzny. Z jednemi liniami prostemi leżącemi na płaszczyźnie tworzy kąty ostre, z innemi rozwarte a z jedną kąt prosty (z linią CD). Tak jednak nie każda linia się zachowuje. Wykażemy, że w każdym punkcie płaszczyzny istnieje jedna linia, która z każdą linią leżącą na płaszczyźnie tworzy takisam kąt, mianowicie kąt prosty. Linia ta jest prostopadła do wszystkich bez wyjątku linii leżących na płaszczyźnie i nazywa się dlatego linią prostopadłą do całej płaszczyzny i na odwrót płaszczyzna nazywa się prostopadłą do tej linii.

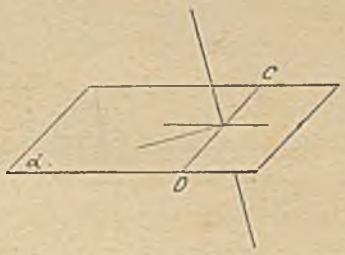


Fig. 248.

Przeprowadzimy dowód istnienia takiej linii a zarazem uzyskamy sposób przekonania się o prostopadłości linii i sposób konstrukcyi linii prostopadłej do płaszczyzny.

Weźmy na dowolnej płaszczyźnie α dwie proste a i b przecinające się i obierzmy linię c, prostopadłą do obydwu:

$$AO \perp OC,\ AO \perp OB.$$

Wykażemy, że ta linia jest prostopadła do wszystkich innych linii leżących na płaszczyźnie α.

N. p. chcemy wykazać, że AO jest także prostopadła do OD. Połączmy dowolne punkty B i C prostych a, b. Linia BC przetnie prostą OD w punkcie D.

Dla dowodu przedłużamy odcinek AO o takisam kawałek OA' pod płaszczyznę α. Łącząc punkty A i A' z punktami B, C i D otrzymamy dwa trjókąty równoramienne $AA'B$ i $AA'C$ (dlaczego równoramienne?), więc $AB = A'B$ i $AC = A'C$. Trójkąty ABC i $A'BC$ są więc przystające (IV) a z przystawania wynika, że także odpowiednie odcinki są równe, więc $AD = A'D$ (gdybyśmy obrócili dolny trójkąt około BC tak, aby A' padł na A, to AD nakryje się z $A'D$). W takim razie trójkąt $AA'D$ jest także równoramienny. Prosta OD łącząca jego wierzchołek ze środkiem podstawy jest prostopadła do podstawy; więc $AO \perp OD$. Taksamo można udowodnić o każdej innej prostej przechodzącej przez punkt O, a leżącej na płaszczyźnie α, że AO jest do niej prostopadła.

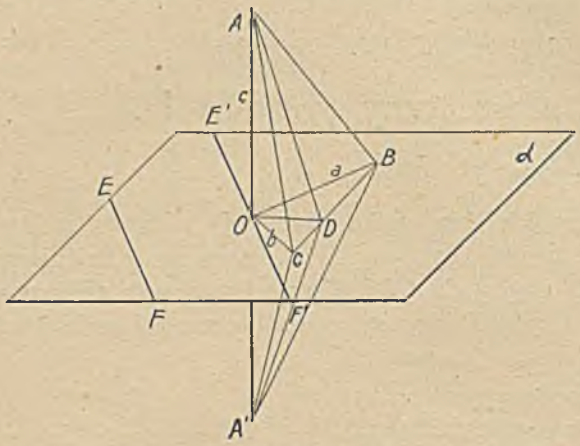


Fig. 249.

Ale także z prostemi wichrowatemi względem AO tworzy AO kąt prosty. N. p. kąt z linią EF znajdziemy, kreśląc przez punkt O linię $E'F' \parallel EF$, ta zaś tworzy już z AO kąt prosty, jak każda linia przez O przechodząca.

Doszliśmy więc do następującego wniosku:

~~Linia~~ prosta prostopadła do dwóch przecinających się prostych jest prostopadła do całej płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.

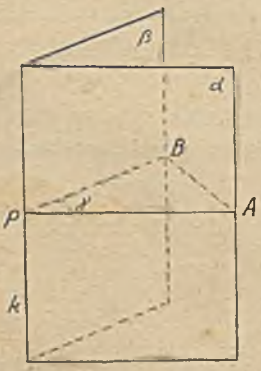


Fig. 250.

Uwaga: Mogłaby zachodzić wątpliwość, czy istnieje wogóle linia prosta, prostopadła do dwóch przecinających się prostych. Łatwo jednakowoż taką prostą skonstruować. Weźmy dowolny kąt dwuścienny i w jednym punkcie P jego krawędzi poprowadźmy linię $PA \perp k$ w płaszczyźnie α i $PB \perp k$ w płaszczyźnie β.

Krawędź k jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych, leżących na płaszczyźnie γ, wyznaczonej przez proste PA i PB.

Z każdego punktu, czy to na płaszczyźnie czy poza płaszczyzną, da się poprowadzić tylko jedna prosta prostopadła, a taksamo z każdego punktu, czy to na prostej, czy to poza prostą, da się do niej tylko jedna płaszczyzna prostopadła poprowadzić (dowody niewprost)!

Długość prostej prostopadłej z punktu poza płaszczyzną od tego punktu do płaszczyzny nazywamy **odległością punktu** od płaszczyzny. Jestto **najkrótszy** ze wszystkich odcinków, jakimi można połączyć P z płaszczyzną. Każdy bowiem inny odcinek jest większy, jako przeciwprostokątnia trójkąta, w którym $P'P$ jest przyprostokątnią.

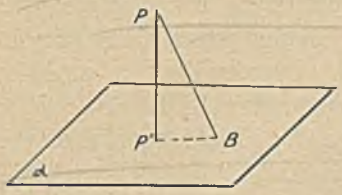


Fig. 251.

Spodek P' **tej linii prostopadłej nazywamy rzutem** (prostopadłym) **punktu** P **na płaszczyznę** α, a samą prostą PP' **prostą rzucającą**. Jeżeli mówimy „rzut“ bez żadnego dodatku, mamy na myśli rzut prostopadły; jeżeli nam chodzi o rzut ukośny, zaznaczamy to wyraźnie.

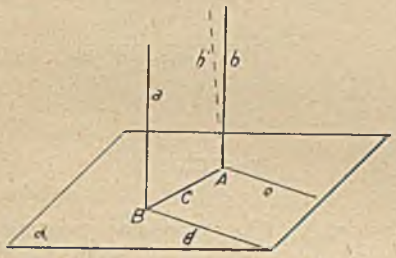


Fig. 252.

Rzutem jakiejkolwiek figury nazywamy zbiór rzutów wszystkich jej punktów, czyli miejsce geometryczne rzutów wszystkich punktów danej figury.

Dwie linie proste, prostopadłe do tejsamej płaszczyzny, są do siebie równoległe. Dowód niewprost: Założenie jest:

$$a \perp \alpha \text{ i } b \perp \alpha.$$

Gdyby prosta b nie była równoległa do a, to istnieć musi jedna równoległa do a, n. p. b', przechodząca przez punkt A. Ponieważ zaś $a \perp c$, to i prosta b' musiałaby być prostopadła do c (jako prosta równoległa do a). Poprowadźmy na płaszczyźnie α proste d i e równoległe do siebie, a przechodzące przez punkty A i B. $\sphericalangle(ad) = \sphericalangle(b'e)$, ponieważ ich ramiona są zgodnie równoległe. Ponieważ $\sphericalangle(ad) = 90^0$ to i $\sphericalangle(b'e)$ musi być prosty, więc $b' \perp e$. Mieliśmy zaś $b' \perp c$, więc prosta b' byłaby prostopadła do całej płaszczyzny α (ponieważ jest prostopadła do dwóch linii prostych leżących na tej płaszczyźnie). Jednakowoż przez punkt A może przechodzić tylko jedna prosta prostopadła do płaszczyzny α, a tą jest według założenia b. Prosta b' musi się więc nakrywać z b, a więc już b jest równoległa do a.

Można także wykazać, że *dwie płaszczyzny prostopadłe do tejsamej prostej, są do siebie równoległe* (por. fig. 253).

Założenie: $x \perp \alpha$, $x \perp \beta$.

Przesuwamy przez prostą x dwie dowolne płaszczyzny. Ponieważ $a' \parallel a$ jako krawędzie dwóch płaszczyzn przeciętych trzecią, to $a' \parallel \alpha$. Taksamo ponieważ $b' \parallel b$, to $b' \parallel \alpha$. Jeżeli zaś dwie proste przecinające się a' i b' są równoległe do α, to i cała płaszczyzna β musi być równoległa do płaszczyzny α.

Twierdzenie o prostych prostopadłych do tejsamej płaszczyzny zastosujemy do określenia odległości prostej równoległej od płaszczyzny i odległości dwóch płaszczyzn równoległych.

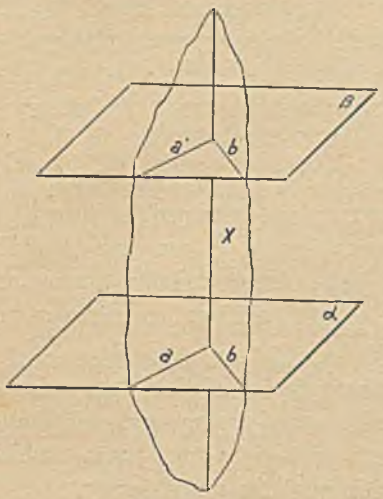


Fig. 253.

Weźmy dowolną prostą równoległą do płaszczyzny α. Poprowadźmy z punktów tej prostej linie prostopadłe do α.

Wszystkie te odcinki są równoległe. Odcinki AB i $A'B'$, BC i $B'C'$ są także równoległe (dlaczego?), więc figury $ABB'A'$, $BCC'B'$ są równoległobokami. Wobec

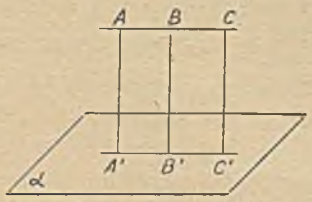


Fig. 254.

tego $AA' = BB' = CC'$, to znaczy: każdy punkt prostej równoległej do płaszczyzny jest od niej równo oddalony. Odległością prostej równoległej od płaszczyzny nazywamy odległość dowolnego jej punktu. W podobny sposób określamy odległość dwóch płaszczyzn równoległych. Poprowadźmy z punktów jednej płaszczyzny szereg linii prostopadłych do drugiej, to te wszystkie linie są równoległe, a więc muszą być równe (por. str. 177, ćw. 8).

Ten równy odcinek prostej prostopadłej z jednej płaszczyzny równoległej do drugiej nazywamy odległością płaszczyzn równoległych.

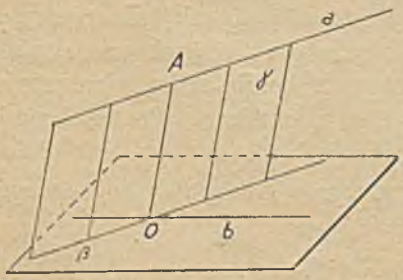


Fig. 255.

* Możemy teraz także zbadać najkrótszą odległość dwóch prostych wichrowatych a i b. Przez jedną z nich, n. p. przez b, przesuwamy płaszczyznę β równoległą do prostej a. Odległość prostej a od płaszczyzny β jest najkrótszą odległością prostych wichrowatych, ponieważ prosta a, jako prosta, równoległa do płaszczyzny β, nie zbliża się do niej nigdy więcej, a więc nie zbliża się także do prostej b.

Aby znaleźć, w którem miejscu są proste a i b najbliższe, wykreślamy ze wszystkich punktów prostej a proste prostopadłe płaszczyzny β. One

utworzą razem jedną płaszczyznę, która przetnie prostą b w jakimś punkcie O. Prosta OA prostopadła do płaszczyzny β łączy najbliższe punkty prostych wichrowatych a i b. Płaszczyzna γ nazywa się prostopadłą do płaszczyzny β. Takiemi płaszczyznami zajmiemy się dokładniej w następnym ustępie. *

§ 93. Płaszczyzny prostopadłe do siebie.

Jeżeli z wszystkich punktów linii prostej leżącej ponad płaszczyzną poprowadzimy linie prostopadłe do płaszczyzny, to one utworzą jedną płaszczyznę. Są bowiem do siebie równoległe i wychodzą z punktów jednej prostej, leżą więc w płaszczyźnie wyznaczonej przez tę prostą i przez którąkolwiek prostą prostopadłą.

Płaszczyzna taka, zawierająca nieskończenie wiele prostych prostopadłych do drugiej płaszczyzny, nazywa się płaszczyzną do niej prostopadłą. Łatwo wywnioskować, że jeżeli płaszczyzna α jest prostopadła do β, to i odwrotnie: płaszczyzna β jest prostopadła do α (wystarczy poprowadzić na drugiej płaszczyźnie szereg linii prostych prostopadłych do wspólnej krawędzi). Wystarczy jednak, jeżeli płaszczyzna zawiera jedną prostą prostopadłą. Twierdzimy więc, że:

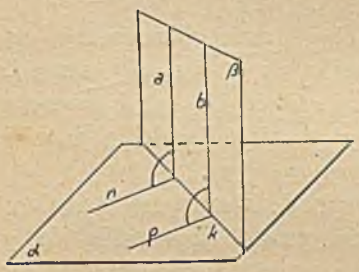


Fig. 256.

Jeżeli $a \perp \alpha$, to także każda prosta równoległa do a i leżąca w płaszczyźnie β jest prostopadła do α.

N. p. prosta $b \parallel a$ musi być prostopadła do k; aby jednak wykazać, że $b \perp \alpha$, trzeba znaleźć jeszcze drugą prostą leżącą na płaszczyźnie α, do której prosta b byłaby prostopadłą. Poprowadźmyż $n \parallel p$, to kąty $\sphericalangle (a\,n)$ i $\sphericalangle (b\,p)$ są równe, ponieważ mają ramiona zgodnie równoległe. $\sphericalangle (a\,n) = 90^0$ a więc i $\sphericalangle (b\,p)$ musi być prosty, a stąd wynika: $b \perp p$. Prosta b, jako linia prostopadła do dwóch linii k i p leżących na płaszczyźnie α, jest prostopadła do całej płaszczyzny α. Tosamo można wykazać o każdej innej prostej równoległej do a i leżącej na płaszczyźnie β. Płaszczyzna β jest więc istotnie prostopadła do α, jako zbiór nieskończenie wielu prostych prostopadłych. Otóż *cechą charakterystyczną płaszczyzny prostopadłej jest:*

Jestto płaszczyzna przesunięta przez jedną prostą prostopadłą do drugiej płaszczyzny. (Użycie pionu w budownictwie!).

Krawędź przecięcia się płaszczyzn prostopadłych zawiera rzuty wszystkich punktów i prostych, leżących na jednej płaszczyźnie.

Tak n. p. (por. fig. 257) jeżeli $\beta \perp \alpha$, to rzuty wszystkich punktów prostej a leżą na prostej k. Prosta k jest więc rzutem prostej a. Ponieważ k, jako linia prosta, jest wyznaczona zapomocą dwóch swoich punktów, przeto do wyzna-

czenia rzutu linii prostej wystarczy podać rzuty dwóch jej punktów (jednym z nich może być punkt przebicia prostej z płaszczyzną).

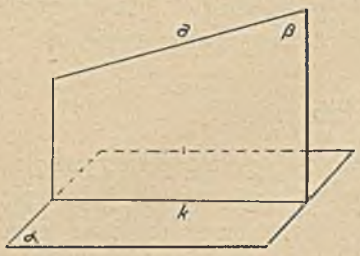


Fig. 257.

Płaszczyzna β, prostopadła z prostej *a* do płaszczyzny α, nazywa się płaszczyzną rzucającą.

(Jeżeli jakaś linia leży już na płaszczyźnie α, to jest ona swoim własnym rzutem.)

Z prostej poza płaszczyzną da się do niej tylko jedna płaszczyzna prostopadła poprowadzić, ale z punktu poza płaszczyzną można poprowadzić nieograniczenie wiele płaszczyzn prostopadłych. Widzimy stąd, że dwie płaszczyzny prostopadłe do tejsamej trzeciej nie muszą być do siebie równoległe (por. fig. 258).

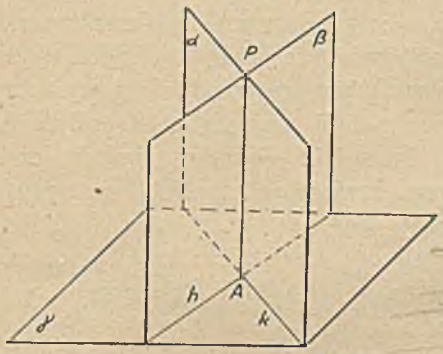


Fig. 258.

Natomiast mają one inną własność:

Jeżeli dwie płaszczyzny są prostopadłe do tejsamej trzeciej, a nie są równoległe, to ich krawędź musi być prostopadła do tej trzeciej płaszczyzny.

Dowód: Płaszczyzna α zawiera wszystkie proste prostopadłe do γ z punktów na α leżących, a więc i prostopadłą z punktu *P* na płaszczyźnie α leżącego. Taksamo płaszczyzna β zawiera wszystkie proste prostopadłe do γ z punktów na β leżących, a więc i prostopadłą z punktu *P*, który jest wspólny płaszczyznom α i β. Ponieważ zaś z punktu *P* istnieje tylko jedna prostopadła do γ, więc musi nią być linia *PA* wspólna płaszczyznom α i β, czyli krawędź płaszczyzn α i β.

Rozdział V.

Proste i płaszczyzny nachylone.

§ 94. Prosta nachylona do płaszczyzny.

Widzieliśmy, że prosta nachylona do płaszczyzny tworzy z każdej strony inny kąt. Z pomiędzy tych kątów jest jeden *najmniejszy*, mianowicie *kąt, jaki prosta tworzy ze swoim rzutem na tę płaszczyznę.* Aby się przekonać, że kąt β jest mniejszy od wszystkich innych kątów prostej AB z płaszczyzną, porównajmy go z dowolnym innym kątem, n. p. z kątem γ. W tym celu odcinamy $BC = BA'$ i łączymy C z A i A'. Trójkąt AAC' jest prostokątny, więc $AA' < AC$. Biorąc pod uwagę trójkąty ABC i ABA' widzimy, że mają po dwa boki równe a trzecie nierówne, więc naprzeciw mniejszego boku musi leżeć mniejszy kąt:

$$\beta < \gamma.$$

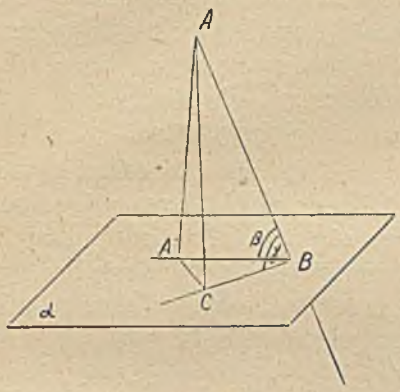


Fig. 259.

Taksamo każdy inny kąt jest większy od β.

Uwaga: Gdyby płaszczyzna α była pozioma, a prosta AB ciałem ciężkiem, to przy spadaniu wykonałaby właśnie obrót β w płaszczyźnie rzucającej.

Kąt, jaki prosta tworzy ze swoim rzutem, nazywamy kątem nachylenia prostej do płaszczyzny lub krótko: kątem prostej z płaszczyzną.

* Pomiędzy prostemi leżącemi na płaszczyźnie α jedna jest prostopadła do pochyłej PC, mianowicie ta, która jest prostopadła do jej rzutu. Aby wykazać prawdziwość tego twierdzenia wychodzimy z założenia: $AB \perp CE$. Odcinamy $AC = BC$ i łączymy E z A, B i P z A, B. Trójkąty PEB i PEA są przystające, (bo $PE = PE$, $EB = EA$, $\sphericalangle PEB =$

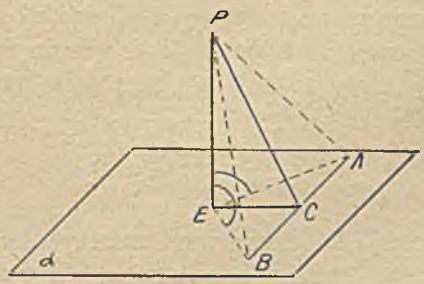


Fig. 260.

$= \sphericalangle PEA$ jako kąty proste). Więc $PA = PB$. Trójkąt PAB jest równoramienny, a więc linia PC łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy jest do niej prostopadła. Odwrócenie tego twierdzenia jest również prawdziwe: Jeżeli prosta leżąca na płaszczyźnie α jest prostopadła do pochyłej, to jest prostopadła także do jej rzutu. Udowodnij! *

Widocznem jest, że proste równoległe do siebie mają do każdej płaszczyzny przecinającej je jednakowe nachylenie (wynika z podobieństwa trójkątów).

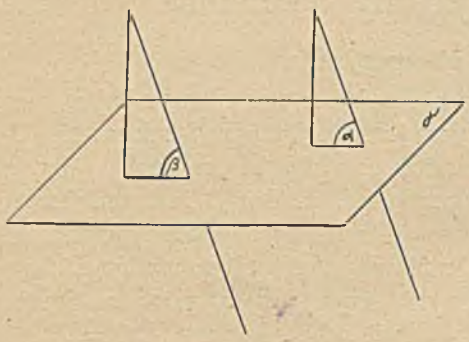


Fig. 261.

Płaszczyzny rzucające dwie proste równoległe są także do siebie równoległe, ponieważ jedna zawiera dwie proste przecinające się, a równoległe do drugiej płaszczyzny.

Stąd wynika, że rzuty prostych równoległych są także równoległe: są to bowiem krawędzie przecięcia się dwóch płaszczyzn równoległych α i β, trzecią płaszczyzną γ.

Twierdzenie to odnosi się nietylko do rzutów prostopadłych, ale i do rzutów ukośnych. Dlategoto w perspektywie równoległej proste, równoległe wrzeczywistości, muszą być także w obrazie perspektywicznym równoległe.

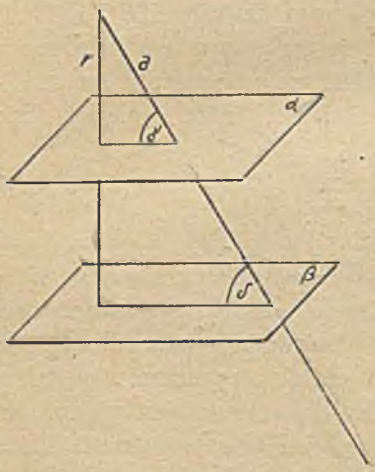


Fig. 262.

Płaszczyzny równoległe do siebie tworzą równe kąty z każdą przecinającą je prostą. Dla dowiedzenia tego prowadzi się z dowolnego punktu prostej a linię r prostopadłą do jednej, a więc i do drugiej płaszczyzny. Przesuwamy przez a i r płaszczyznę, to powstaną na niej kąty γ i δ, które są kątami nachylenia prostej a do płaszczyzn α i β. Kąty te zaś są równe, jako kąty odpowiednie.

§ 95. Twierdzenia o rzutach.

Przy pomocy kątów nachylenia prostej do płaszczyzny możemy teraz zbadać, od czego zależy wielkość rzutu każdego odcinka. W tym celu poprowadźmy z dowolnego punktu leżącego poza płaszczyzną α pęk

$\frac{4R}{109}$

promieni. Wiemy już (por. str. 181), że odcinek promienia prostopadłego jest najkrótszy. Z pośród innych odcinków pochyłych te wszystkie są równe, których rzuty są równe. Trójkąty SOA, SOB, SOC, ... są bowiem wtedy przystające (II).

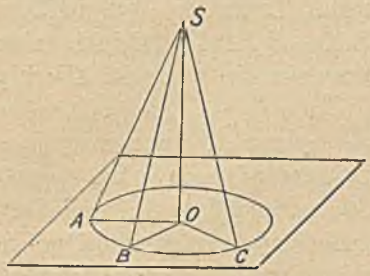


Fig. 263.

Odwrotnie: Jeżeli odcinki prostych pochyłych wychodzących z tegosamego punktu są równe, to i ich rzuty są równe. Wynika to z przystawania tychsamych trójkątów, według (III) przypadku. Ponieważ te rzuty wychodzą wszystkie z jednego punktu O, przeto ich końce leżą na obwodzie koła. Możemy więc także powiedzieć: Miejscem geometrycznem punktów leżących na jednej płaszczyźnie, a równo oddalonych od stałego punktu S poza płaszczyzną, jest koło, którego środkiem jest rzut tego punktu S.

Wszystkie te równe pochyłe są także równo nachylone do płaszczyzny, jak to wynika z udowodnionego już przystawania trójkątów na fig. 263.

Łatwo wykazać, że im dłuższy jest odcinek pochyłej z punktu S wychodzącej, tem większy jego rzut a tem mniejszy jego kąt nachylenia. W granicy, jeżeli odcinek dąży do wielkości nieskończenie wielkiej, to i długość rzutu dąży do nieskończoności, a kąt nachylenia dąży do zera, czyli: pochyła dąży do położenia równoległego. Z drugiej strony, jeżeli odcinek pochyły maleje, to i jego rzut maleje, a kąt nachylenia dąży do 90°. Jeżeli odcinek jest prostopadły (najkrótszy) to rzut jego staje się jednym punktem, więc długość rzutu wynosi zero. Widzimy stąd, że długość rzutu jest zależna od długości odcinka i od kąta nachylenia, czyli:

Długość rzutu jest funkcyą długości odcinka i jego kąta nachylenia.

Zawsze jednakże rzut jest nie większy od odcinka (dlaczego?). Odnosi się to nietylko do odcinka mającego jeden punkt wspólny z płaszczyzną, ale także do każdego innego odcinka. Weźmy bowiem odcinek a leżący nad płaszczyzną α i utwórzmy jego rzut r (prowadząc z jego końców prostopadłe do α i łącząc ich spodki). Z punktu B' poprowadźmy prostą a' równoległą do a na płaszczyźnie rzucającej, to $a = a'$, jako przeciwległe boki równoległoboku. Zamiast porównywać odcinek a z r, możemy więc porównywać a' z r. Widzimy odrazu, że $a' > r$, a więc i $a > r$.

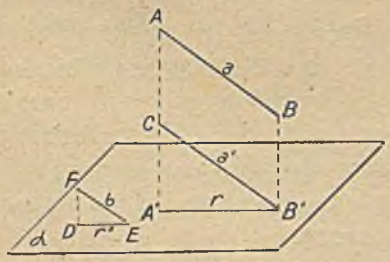


Fig. 264.

Tylko w położeniu granicznem, równoległem, rzut równa się odcinkowi. (Udowodnij!).

Stosunek długości odcinka do długości rzutu zależy już tylko od kąta nachylenia. Jeżeli się odcinek powiększy, a kąt nachylenia zostanie tensam, to rzut powiększa się w tymsamym stosunku. Łatwo to wywnioskować z podobieństwa trójkątów DEF i $A'B'C'$ na fig. 264. Odcinki jednakowo nachylone doznają więc jednakowego pomniejszenia w rzucie. Zbierając te wnioski razem powiemy:

Rzut równa się odcinkowi, jeżeli odcinek jest równoległy do płaszczyzny rzutów, jest mniejszy od odcinka, jeżeli odcinek jest nachylony, a maleje do zera, gdy odcinek dąży do położenia prostopadłego. Twierdzenie to dotyczy rzutów prostopadłych. Przy rzutach ukośnych rzut może być większy od odcinka, może być nawet nieskończenie wielki dla skończonego odcinka (kiedy?). Jednakże i tu odcinki jednakowo nachylone doznają takiegosamego zniekształcenia (powiększenia lub pomniejszenia).

Zbadawszy w ten sposób zniekształcenie, jakiemu ulegają odcinki, zajmiemy się teraz zniekształceniem kątów. Zmiana, jakiej ulega kąt przy rzucie nie jest już tak prosta: Rzut (prostopadły) kąta może być równy, mniejszy, ale może być także większy od kąta. N. p. z fig. 265. widzimy, że kąt α doznał w rzucie zmniejszenia, a kąt rozwarty β powiększenia (ramię wspólne przyjęliśmy tu widocznie nachylone do płaszczyzny rzutów).

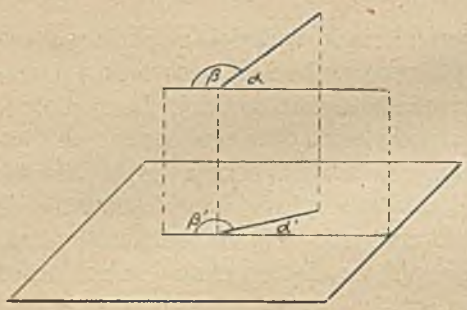


Fig. 265.

Jasnem jest natomiast, że: kąty, leżące w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny rzutów, nie ulegają zmianie przez utworzenie rzutu, t. j. są równe swoim rzutom. (Udowodnij!)

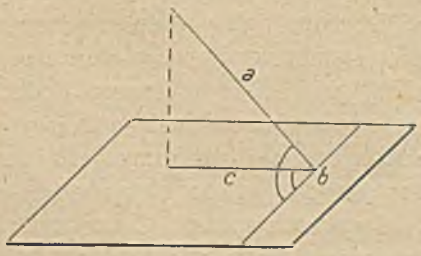


Fig. 266.

* Ciekawem jest, że kąt prosty, którego jedno ramię jest równoległe do płaszczyzny rzutów, przedstawia się w rzucie również jako kąt prosty.

Dowód: Jeżeli $a \perp b$, to także rzut tej prostej $c \perp b$ (por. str. 185); więc kąt prosty $\sphericalangle (ab)$, którego jedno ramię leży na płaszczyźnie rzutów, pozostaje w rzucie kątem prostym: $\sphericalangle (bc) = 90^0$.

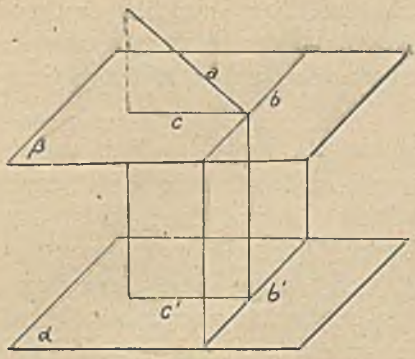


Fig. 267.

Jeżeli ramię b nie leży na płaszczyźnie rzutów, tylko jest do niej równoległe, to poprowadzimy najpierw przez b płaszczyznę: $\beta \parallel \alpha$ i tworzymy najpierw rzut kąta $\sphericalangle (a\,b)$ na płaszczyznę β. Wiemy już, że ten rzut będzie kątem prostym:

$$\sphericalangle (b\,c) = 90^0.$$

Teraz dopiero rzucamy ten kąt na płaszczyznę α, wiemy zaś, że kąty leżące na płaszczyźnie równoległej są równe swoim rzutom, więc także $\sphericalangle (b'\,c') = \sphericalangle (b\,c) = 90^0$. *

§ 96. Dwie płaszczyzny nachylone do siebie

Podobnie, jak kąt nachylenia prostej do płaszczyzny mierzyliśmy kątem leżącym w płaszczyźnie prostopadłej, poprowadzonej z tej prostej do płaszczyzny, tak i kąt nachylenia dwóch płaszczyzn mierzymy kątem, leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do obydwu płaszczyzn. Wiemy już, że płaszczyzna prostopadła do dwóch przecinających się płaszczyzn jest także prostopadła do ich krawędzi (por. str. 184).

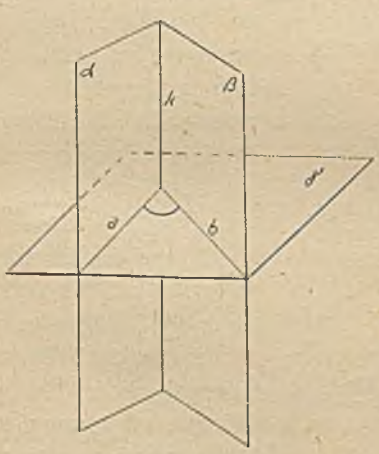


Fig. 268.

Aby więc zmierzyć kąt nachylenia płaszczyzn α i β, wystarczy poprowadzić płaszczyznę γ prostopadłą do krawędzi k (t. zw. przekrój normalny kąta dwuściennego). Płaszczyzna γ przecina α i β wzdłuż krawędzi a i b, które są prostopadłe do k (jak i każda inna prosta, leżąca na płaszczyźnie $\gamma \perp k$). Możemy więc znaleźć kąt nachylenia dwóch płaszczyzn, t. j. wielkość kąta dwuściennego w następujący sposób:

Prowadzimy przez jakikolwiek punkt krawędzi proste prostopadłe do niej, a leżące w płaszczyznach α i β. Kąt między temi prostemi zawarty jest kątem nachylenia płaszczyzn α i β. Łatwo wykazać, że wielkość tego kąta nie zależy od tego, w którem miejscu poprowadzimy przekrój γ (por. ćw. 11, str. 177).

Jeżeli kąt nachylenia dwóch płaszczyzn $\sphericalangle (a\,b)$, wynosi 90^0, to płaszczyzny są prostopadłe. Wtedy bowiem $a \perp b$ a wykreśli-

liśmy $a \perp k$, więc $a \perp \beta$; płaszczyzna zaś α zawierająca jedną linię a prostopadłą do płaszczyzny β musi być sama prostopadła do płaszczyzny β (por. str. 183). Gdyby płaszczyzny były równoległe, to $a \parallel b$, więc kąt nachylenia wynosi 0^0.

Kąty dwuścienne mają własności podobne do kątów płaskich w planimetryi — albowiem kąty płaskie są tylko przekrojami kątów dwuściennych. I tak kąty dwuścienne wierzchołkowe są równe; kąty dwuścienne przyległe spełniają się do 180^0. (Udowodnij zapomocą przekroju normalnego!) Jeżeli dwie płaszczyzny równoległe przetniemy trzecią, to powstałe kąty dwuścienne odpowiednie są równe, naprzemianległe równe a jednostronne spełniają się do 180^0. (Udowadnia się przez poprowadzenie przekroju normalnego). Podobnie twierdzenia o kątach, których ramiona są parami równoległe, lub parami prostopadłe, można przenieść na kąty dwuścienne.

Mówiąc o prostej nachylonej badaliśmy zmniejszenie odcinka takiej prostej przy rzucie. Jeżeli chcemy tosamo rozumowanie przeprowadzić dla płaszczyzn nachylonych, to musimy się zająć częścią płaszczyzny, a więc powierzchnią. Wykażemy, że *powierzchnie leżące na płaszczyznach jednakowo nachylonych zmniejszają się przy rzucie w tymsamym stosunku.*

Weźmy jakąkolwiek powierzchnię P leżącą na płaszczyźnie α nachylonej do płaszczyzny β i utwórzmy jej rzut P'. Poprowadźmy linię AB prostopadle do krawędzi k i odetnijmy na niej szerokość CD powierzchni P. Tosamo zróbmy na płaszczyźnie β, w rzucie. Powierzchnie P i P' możemy rozłożyć na paski równoległe do krawędzi k, zbliżone do trapezów. Boki równoległe tych pasków pozostaną w rzucie niezmienione co do długości a tylko ich szerokość zmieni się w stosunku $C'D' : CD = s$, więc cała powierzchnia zmieni się w tym stosunku:

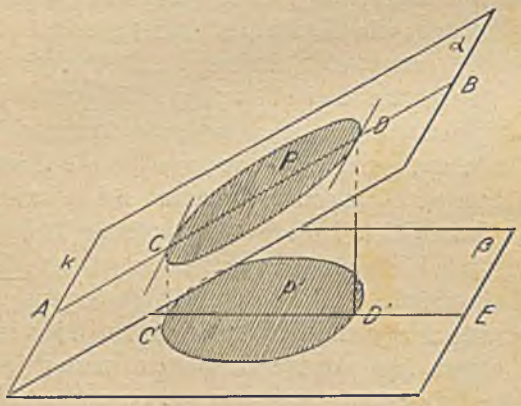


Fig. 269.

$$P' : P = s.$$

Ponieważ — jak widzieliśmy na str. 188 — ten stosunek $C'D' : CD$ zależy tylko od kąta nachylenia, przeto wszystkie powierzchnie leżące na pła-

szczyźnie α, lub na innej płaszczyźnie, ale taksamo nachylonej do β, doznają zmniejszenia w tymsamym stosunku s.

Kiedy zmniejszenia nie będzie? Kiedy powierzchnia rzutu maleje do zera?

Ćwiczenia IV. i V.

§ 92. 1. Wykazać, że z punktu na linii prostej da się poprowadzić tylko jedna płaszczyzna prostopadła do niej (niewprost!).

2. Wykazać, że wszystkie linie proste prostopadłe do danej prostej, a przechodzące przez jeden jej punkt, tworzą płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.

3. Wykazać, że z punktu nad płaszczyzną da się tylko jedna linia prostopadła do płaszczyzny poprowadzić.

4. Wykazać, że z punktu poza prostą da się do niej tylko jedna płaszczyzna prostopadła poprowadzić.

5. Udowodnić, że miejscem geometrycznem wszystkich punktów równo oddalonych od dwóch końców odcinka, jest płaszczyzna prostopadła, przechodząca przez środek odcinka. Jestto płaszczyzna symetralna.

6. Znaleźć miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od trzech wierzchołków trójkąta.

§ 93. 7. Udowodnić, że płaszczyzna prostopadła do prostej jest także prostopadła do każdej płaszczyzny zawierającej tę prostą.

8. Dwie płaszczyzny prostopadłe do siebie są także prostopadłe do trzeciej płaszczyzny. Wykazać, że ich krawędzie tworzą układ trzech osi prostopadłych do siebie.

9. Wykazać, że jeżeli jakaś prosta i jakaś płaszczyzna są prostopadłe do tejsamej płaszczyzny, to są do siebie równoległe.

10. Wykazać, że miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od ramion kąta płaskiego jest płaszczyzna symetralna tego kąta (t. j. płaszczyzna zawierająca linię dwusieczną tego kąta i prostopadła do jego płaszczyzny).

11. Znaleźć miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od trzech boków trójkąta (patrz poprzednie zadanie).

§ 94—96. 12. Wykazać, że im dłuższy jest odcinek pochyłej z punktu poza płaszczyzną, tem większy jego rzut.

13. Punkt leżący ponad płaszczyzną połączyć z punktami na obwodzie dowolnego koła, leżącego na tej płaszczyźnie. Który z tych odcinków jest najkrótszy? (Wykonać rysunek w perspektywie!)

14. Wykazać, iż stosunek podziału odcinka nie zmienia się ani przy rzucie prostopadłym, ani przy rzucie ukośnym

15. Wykazać, że kąty równe leżące na płaszczyznach równoległych i mające jedną parę ramion równoległą a drugą zwróconą w tę samą stronę, mają i drugą parę ramion równoległą.

16. Wykazać, że kąty dwuścienne: *a*) odpowiednie są sobie równe, *b*) naprzemianległe są sobie równe, *c*) jednostronne spełniają się do 180^0.

17. Jaką własność mają punkty płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego?

18. Wykazać, że w rzucie koła rzut każdej średnicy jest przepołowiony rzutem środka koła. Kiedy ten rzut będzie kołem, a kiedy linią prostą?

19. Rzut odcinka a ma długość $a' = 4\ cm$, a proste rzucające jego końce:

$b = 7$ *cm*, $b' = 9$ *cm*. Obliczyć długość odcinka a. Jak daleko trzeba ten odcinek przedłużyć, aby się przeciął z płaszczyzną rzutów?

20. Trójkąt ma podstawę 5 *cm*, a wysokość 6 *cm*. Obliczyć rzut tego trójkąta na płaszczyznę nachyloną do jego płaszczyzny pod kątem: *a*) 45^0, *b*) 60^0 a równoległą do podstawy trójkąta.

21. Obliczyć powierzchnię elipsy powstałej z rzutu koła o promieniu $r = 6$ *cm* nachylonego tak, że odcinki prostopadłe do krawędzi skracają się w stosunku 1 : 3.

22. Obliczyć powierzchnię elipsy powstałej z rzutu koła leżącego na płaszczyźnie nachylonej pod kątem 45^0 do płaszczyzny rzutów, znając promień koła $r = 15$ *cm*.

Rozdział VI.

Ruch obrotowy. Przystawanie.

§ 97. Ruch obrotowy.

Jeżeli jakiś punkt zakreśla koło w płaszczyźnie prostopadłej do pewnej prostej a o środku w spodku tej prostej, to mówimy, że ten punkt wykonuje ruch obrotowy około osi a.

Podobnie dowolny utwór geometryczny wykonuje ruch obrotowy, jeżeli jego wszystkie punkty zakreślają łuki kół leżące w płaszczyznach prostopadłych do osi przyczem te łuki należą do równych kątów środkowych. Wielkość obrotu mierzymy właśnie tym kątem środkowym. Można więc powiedzieć: Kątem obrotu nazywamy kąt, jaki zakreśla prosta poprowadzona prostopadle do osi z dowolnego punktu utworu geometrycznego, wykonującego obrót. Jeżeli cała przestrzeń wykonuje ruch obrotowy, to tylko punkty leżące na osi są nieruchome. Inne punkty zataczają łuki tem większe, im dalej leżą od osi obrotu — natomiast kąty zakreślone przez wszystkie linie prostopadłe do osi są równe (prędkość kątowa!).

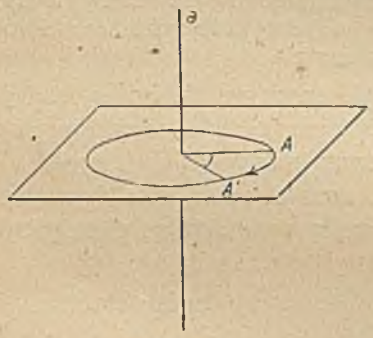


Fig. 270.

Podobnie jak w planimetryi, należałoby i tutaj wykazać, że ta geometryczna konstrukcya posiada właściwości ruchu obrotowego ciał sztywnych, a więc:

Linia prosta po obrocie nie wygnie się, ale pozostanie linią prostą; płaszczyzna pozostanie płaszczyzną, wielkość zaś odcinków ani kątów nie ulegnie zmianie. Stąd już wynika przystawanie wszystkich wielokątów wchodzących w skład utworu geometrycznego i równość wszystkich kątów nachyleń, słowem: przystawanie nowego utworu geometrycznego do dawnego. To zaś jest zasadniczą właściwością ruchu ciał sztywnych.

Wykażemy n. p., że linia prosta przecinająca oś pod dowolnym kątem, pozostanie po obrocie o kąt φ linią prostą. To znaczy, że trzy punkty ABC, leżące przed obrotem na linii prostej, będą i po obrocie leżały na jednej linii prostej.

Otóż założeniem jest $\alpha \perp a$ i $\beta \perp \alpha$, tudzież $\sphericalangle CMC' = \sphericalangle BNB' = \varphi$. Gdyby punkt C' nie leżał na prostej AB', to ta prosta miałaby z kołem α jakiś inny punkt wspólny X. Płaszczyzny α i β, jako prostopadłe do tejsamej prostej, są do siebie równoległe, więc i linie MC i MX muszą być równoległe do linii NB i NB', powieważ leżą na tychsamych płaszczyznach, wyznaczonych przez proste a i AB, a i AB'. Wobec tego $\sphericalangle XMC = \sphericalangle B'NB = \varphi$. Ramię MX tego kąta musi się więc nakryć z ramieniem MC', bo i $\sphericalangle CMC' = \varphi$, a jedno ramię MC mają wspólne. Widzimy więc, że punkt C' musi leżeć także na prostej AB'.

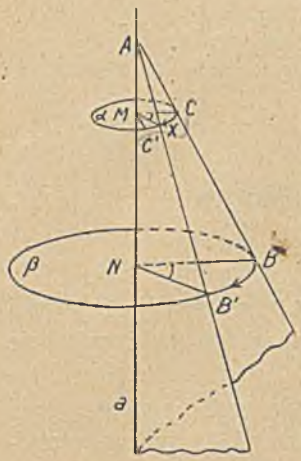


Fig. 271.

Z przystawania trójkątów ANB' i ANB wynika równość odcinków i równość kąta nachylenia prostej AB do płaszczyzny β.

Podobnie można udowodnić o prostej wichrowatej względem osi, że po obrocie pozostaje prostą, i że jej odcinki i kąty nachylenia pozostają niezmienione.

Pominiemy tu również dowód, że cztery punkty leżące przed obrotem na jednej płaszczyźnie, leżą i po obrocie na jednej płaszczyźnie.

Często używa się w geometryi obrotu płaszczyzny około osi a leżącej na tej płaszczyźnie. Wtedy płaszczyzna przebiega po kolei wszystkie płaszczyzny pęku płaszczyzn należącego do krawędzi a. Wielkość obrotu jest zarazem miarą kąta dwuściennego, utworzonego przez dwie skrajne płaszczyzny (por. str. 189).

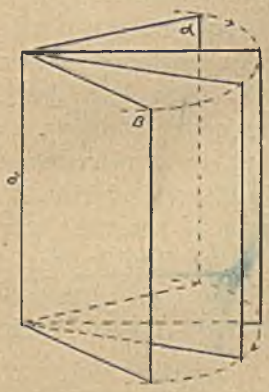


Fig. 272.

Stosując tu ogólne prawo ruchu obrotowego powiemy:

Wszystkie utwory geometryczne leżące na płaszczyźnie α nie zmieniają ani wielkości, ani kształtu, skoro całą płaszczyznę obrócimy do innego położenia β. Obrót taki stosujemy zwłaszcza często w geometryi wykreślnej, którą się w następnym rozdziale pokrótce zajmiemy.

Jeżeli jakiś utwór geometryczny wykonuje równocześnie ruch postępowy i obrotowy, to znaczy obraca się koło pewnej osi, a równocześnie posuwa się wzdłuż pewnej linii prostej, to ruch taki nazywamy r u c h e m ś r u b o w y m. W szczególnym przypadku, jeżeli ruch postępowy odbywa się w kierunku prostopadłym do osi ruchu obrotowego, to taki ruch śrubowy nazywamy t o c z e n i e m s i ę. W ogólnym ruchu śrubowym każdy punkt zakreśla linię krzywą przestrzenną, zwaną l i n i ą ś r u b o w ą, znaną nam dobrze z mechaniki życia codziennego. Linią tą zajmiemy się dokładniej później, przy nauce o walcu. Przy toczeniu

się każdy punkt zakreśla linię krzywą płaską, mianowicie cykloidę (por. w planimetryi str. 25).

§ 98. Przystawanie utworów przestrzennych.

Utwory geometryczne nazywają się *przystające, jeżeli mają równe parami wszystkie odcinki i wszystkie kąty w tymsamym porządku* (i to nie tylko kąty płaskie, ale i kąty dwuścienne i kąty nachylenia prostych do płaszczyzn). Z własności ruchu wiemy, że utwory przystające do danego utworu można otrzymać przez ruch postępowy lub obrotowy. Nasuwa się pytanie, czy własność ta jest charakterystyczna dla utworów przestrzennych, t. j. czy utwór przestrzenny przystający do drugiego utworu, a leżący w dowolnem innem miejscu płaszczyzny i ustawiony dowolnie (a więc niekoniecznie równolegle), można otrzymać z tego drugiego utworu przez ruch lub też prościej: czy dwa utwory przystające można zawsze sprowadzić do nakrycia przez ruch.

Dla utworów płaskich udowodniliśmy już to w planimetryi (por. str. 45—46). Aby wykazać prawdziwość tego twierdzenia także dla utworów przestrzennych, weźmy cztery punkty $SABC$ nie leżące na jednej płaszczyźnie i połączmy liniami prostemi punkty A, B, C ze sobą i z punktem S. Weźmy w innem miejscu przestrzeni utwór geometryczny przystający do $SABC$, t. j, mający kąty i odcinki równe i następujące po sobie w tymsamym porządku. Tensam

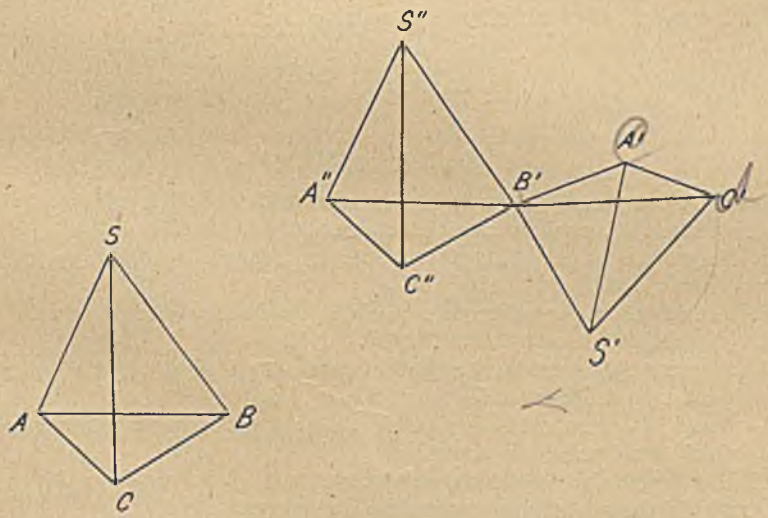


Fig. 273.

porządek ocenia się w następujący sposób: Patrząc od punktu S na płaszczyznę ABC widzimy, że punkty A, B, C następują po sobie w kierunku ruchu wskazówki zegaru. Z punktu S' powinny się punkty $A'B'C'$ przedstawiać w tymsamym porządku, co łatwo możemy sprawdzić w naszej figurze (linia $B'C'$ jest

przednią!). Aby $S'A'B'C'$ sprowadzić do nakrycia z $SABC$, trzeba wykonać najpierw taki obrót, aby odpowiednie odcinki były równoległe, a więc aby $A''B'$ było równoległe od AB, $S''A'' \parallel SA$ i t. d.

Możemy to uzyskać łatwo zapomocą dwóch obrotów: najpierw obracamy $S'A'B'C'$ około osi przechodzącej przez B' tak, aby $A'B'$ nakryło się z $A''B'$, później zaś wykonujemy drugi obrót, około osi $A''B'$ tak, aby $A'S'$ padło na $A''S''$.

Teraz wystarczy równoległe przesunięcie o odcinek SS'', aby obydwa utwory przystające sprowadzić do nakrycia.

Uwaga: Dwa obroty około dwóch osi przechodzących przez punkt B można zastąpić jednym obrotem około osi przez tensam punkt przechodzącej. Aby znaleźć tę oś obrotu, trzeba wykreślić płaszczyzny symetralne odcinków $A'A''$ i $S'S''$. Krawędź tych dwóch płaszczyzn będzie żądaną osią obrotu, jest ona bowiem miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od A' i A'', a zarazem od punktów S' i S'', oś obrotu musi zaś tę własność posiadać. Widzimy więc, że, aby dwa przystające utwory sprowadzić do nakrycia, wystarczy jeden ruch obrotowy i jeden ruch postępowy; te dwa ruchy można znowu zastąpić jednym ruchem śrubowym.

Ponieważ każdy przestrzenny utwór geometryczny można rozłożyć na takie utwory, jak $SABC$, złożone z czterech punktów nie leżących na jednej płaszczyźnie, przeto o wszystkich utworach możemy powiedzieć, że *dwa przystające utwory dadzą się sprowadzić do nakrycia przez ruch obrotowy i postępowy.*

Stąd wynika nowe określenie przystawania:

Utwory geometryczne, które można otrzymać z danego utworu przez ruchy postępowe lub obrotowe, nazywamy utworami przystającymi do siebie i do pierwotnego utworu.

Ćwiczenia VI.

§ 97—98. 1. Narysować w perspektywie równoległej odcinek równoległy do osi obrotu i wykonać na rysunku obrót o 60^0, o 90^0, o 180^0.

2. Narysować w perspektywie równoległej odcinek przecinający oś obrotu i wykonać obrót o 45^0, 90^0, 180^0, 270^0.

3. Narysować w perspektywie równoległej odcinek wichrowaty względem osi obrotu i wykonać obrót o 30^0, 90^0, 180^0.

4. W płaszczyźnie zawierającej oś obrotu leży trójkąt ABC; wykonać na rysunku obrót tego trójkąta o 60^0.

5. Punkt A' przez obrót sprowadzić do nakrycia z innym dowolnym punktem A. Gdzie musi leżeć oś obrotu?

6. Dwa przystające utwory geometryczne mają jeden punkt wspólny. Jakie obroty trzeba wykonać, aby je sprowadzić do nakrycia?

7. Wykazać, że odcinek AB prostej wichrowatej względem osi po obrocie ma tęsamą wielkość. (Dla dowodu trzeba utworzyć rzut obydwu odcinków na płaszczyznę prostopadłą do osi obrotu a zawierającą punkty B i B').

8. Wykazać, że jeżeli dwa utwory przestrzenne przystające mają trzy punkty odpowiednie wspólne, to muszą się nakrywać. (Udowodnić to najpierw dla utworu $SABC$ na fig. 273, kreśląc z punktu S prostopadłą po płaszczyzny ABC.)

Rozdział VII.

Metoda geometryi wykreślnej.

§ 99. O dwóch płaszczyznach rzutów.

Ponieważ sporządzanie modeli przestrzennych jest bardzo uciążliwe a nieraz i bardzo kosztowne, przeto przy rozmaitych zagadnieniach geometrycznych i technicznych posługujemy się rysunkiem płaskim. Zasady takiego rysunku omówiliśmy już poglądowo w II. rozdziale. Najwięcej używanym sposobem przedstawienia utworów przestrzennych jest wykreślanie rzutów prostopadłych. Takimi rzutami prostopadłymi są n. p. kontury przedmiotów, plany budynków, przekroje maszyn, mostów, mapy niewielkich obszarów ziemi. W architekturze, inżynieryi a nawet w rozmaitych rzemiosłach posługujemy się rzutami przedmiotów.

Rzutem jakiegokolwiek utworu nazwaliśmy (str. 181) miejsce geometryczne rzutów wszystkich punktów tej figury. Już przy najprostszych utworach geometrycznych nie wystarczy podanie rzutu na jedną płaszczyznę. Utwórzmy n. p. rzut walca prostego na płaszczyznę H prostopadłą do jego osi, zwaną płaszczyzną poziomą. Ponieważ podstawa walca jest równoległa do tej płaszczyzny, otrzymamy w rzucie koło, równe podstawie walca (przystające do niej; dlaczego?). Ten rzut nazywa się rzutem poziomym (widok z góry!). Z tego jednego rzutu nie mamy jeszcze wyobrażenia, jak wygląda cała bryła. Takisam rzut ma walec krótki i długi, koło równoległe do płaszczyzny H, lub elipsa nachylona odpowiednio.

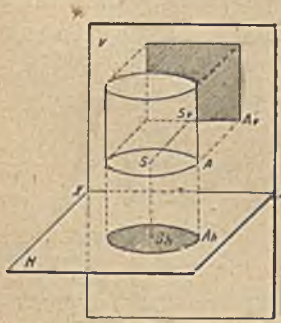


Fig. 274.

Rzut na jedną płaszczyznę nie wyznacza jeszcze wielkości ani położenia utworu geometrycznego.

Aby uzyskać znajomość części brakujących do poznania walca, wystarczy podać jeszcze drugi rzut na dowolną płaszczyznę nierównoległą do H Używamy zawsze płaszczyzny prostopadłej do H i nazywamy ją płaszczyzną pionową V, a powstający rzut rzutem pionowym (widok z przodu). Na

tej płaszczyźnie otrzymamy prostokąt tak szeroki, jak podstawa walca, a tak wysoki, jak walec. Ten rzut sam nie wystarczyłby także do poznania i zbudowania walca, ponieważ takisam rzut posiada n. p. każdy prostopadłościan o tejsamej podstawie. Jednakowoż obydwa rzuty razem wyznaczają w zupełności utwór geometryczny, z którego pochodzą. Ścisły dowód tego twierdzenia podamy w następnym ustępie. Rysunek taki, jak na fig. 274, sprawia pewne złudzenie rzeczywistości, jest jednakże niepraktyczny, ponieważ koło przedstawia się na nim jako elipsa i wogóle wszystkie figury, leżące na płaszczyźnie poziomej H, przedstawiają się na rysunku zniekształcone. Aby tej niedogodności uniknąć, obracamy płaszczyznę poziomą H około krawędzi XX o kąt 90^0 ku dołowi tak, że płaszczyzna H przyjmie również położenie pionowe. Płaszczyzny H i V tworzą teraz jedną płaszczyznę. Ten obrót nazywamy: sprowadzeniem obydwu rzutów do jednej płaszczyzny rysunku. Teraz rzut pionowy i poziomy przedstawi się nam w naturalnej wielkości. Prostą XX, która jest śladem pozostałym po krawędzi dwóch płaszczyzn rzutów, nazywamy osią rzutów. Takie przedstawienie utworów geometrycznych i przedmiotów świata zewnętrznego najlepiej się nadaje do wykonywania pomiarów i jest najłatwiejsze do wykonania konstrukcyjnego.

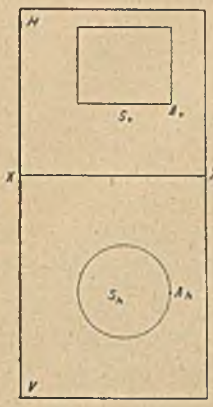


Fig. 275.

§ 100. Rzuty punktu.

Wykreślmy rzut poziomy i pionowy dowolnego punktu A. Oznaczamy je zwykle literami A_h (rzut poziomy) i A_v (rzut pionowy). Jakie położenie względem siebie mają te rzuty po sprowadzeniu ich do jednej płaszczyzny rysunku?

Przesuńmy płaszczyznę γ przez proste AA_v i AA_h. Płaszczyzna ta jest prostopadła do H i V, ponieważ zawiera linie AA_h i AA_v, prostopadłe do H i V. Wobec tego ta płaszczyzna musi być prostopadła do krawędzi H i V, t. j. do osi rzutów. Jeżeli zaś $XX \perp \gamma$, to $XX \perp OA_v$ i $XX \perp OA_h$. Po obrocie linie OA_v i OA_h pozostaną prostopadłe do XX (bo przez obrót kąt dwóch linii prostych nie ulega zmianie), utworzą więc jedną linię prostą, bo przez punkt O da się poprowadzić na jednej pła-

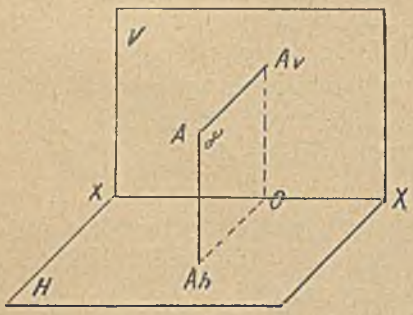


Fig. 276.

szczyźnie tylko jedna prostopadła do XX. Stąd wynika zasadnicze prawo geometryi wykreślnej:

Rzut poziomy i pionowy dowolnego punktu leżą na jednej linii prostopadłej do osi rzutów — po sprowadzeniu rzutów do jednej płaszczyzny rysunku.

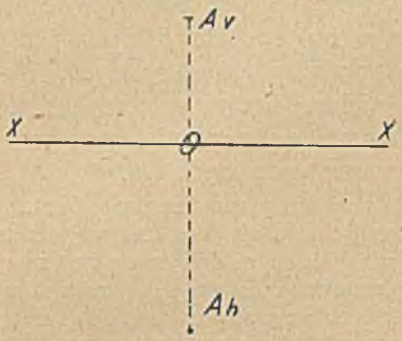


Fig. 276 a.

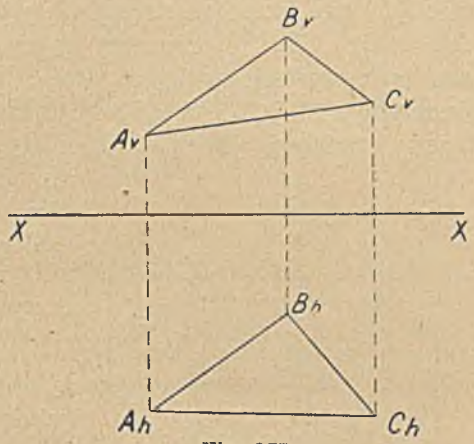


Fig. 277.

Zastosujmy to n. p. do rzutów dowolnego trójkąta. Jeżeli obierzemy dowolnie rzut poziomy A_h, B_h, C_h, to rzut pionowy nie jest już zupełnie dowolny: Rzuty pionowe punktów A, B, C muszą leżeć na liniach prostopadłych do osi XX, poprowadzonych z punktów A_h, B_h, C_h. W których punktach tych linii leżą A_v, B_v, C_v, to już zależy od położenia pierwotnego trójkąta ABC. Taksamo, jeżeli się przypatrzymy rzutom walca na fig. 275, spostrzeżemy, że rzuty każdego punktu leżą na tejsamej linii prostopadłej do XX. Wracając do fig. 276 widzimy, że *odległość rzutu poziomego od osi rzutów równa się odległości punktu A od płaszczyzny pionowej, a odległość rzutu pionowego od osi rzutów równa się odległości punktu A od płaszczyzny poziomej*, albowiem $A_h O = AA_v$ i $A_v O = AA_h$.

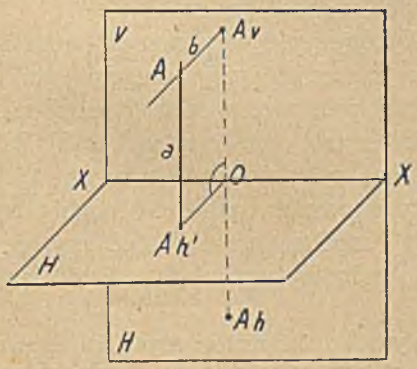
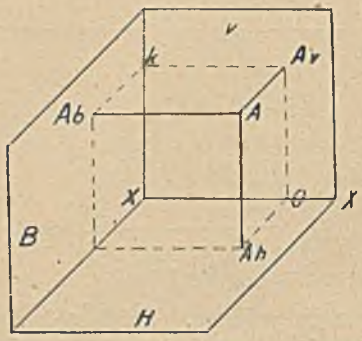


Fig. 278.

* Opierając się na tem, możemy teraz wykazać, że do wyznaczenia punktu wystarczy znać jego rzuty na dwie płaszczyzny prostopadłe. Obierzmy w tym celu na dowolnej linii prostopadłej do osi rzutów dwa punkty A_h i A_v i uważajmy je za rzuty jakiegoś punktu. Aby ten punkt znaleźć, obracamy płaszczyznę H około osi XX o 90^0 w górę, to prosta OA_h przyjmie położenie OA'_h.

W punktach A'_h i A_v prowadzimy linie a i b prostopadłe do płaszczyzn H i V. Twierdzimy, że te dwie proste przetną się w jednym punkcie A. Istotnie linie te leżą w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do osi XX, a zawierającej proste OA_v i OA'_h (dlaczego?) a nie są równoległe do siebie (bo już $A'_h O \parallel b$, więc inna linia przechodząca przez A'_h nie może być już równoległa do b). Linie te przecinają się więc w jednym punkcie A, którego rzutami są rzeczywiście punkty A_v i A'_h, lub po sprowadzeniu rzutów do jednej płaszczyzny: A_v i A_h. Jeżeli więc znamy dwa rzuty punktu, to i ten punkt możemy wynaleźć. Tosamo odnosi się do utworów geometrycznych, złożonych z większej liczby punktów. Ogólnie więc: dwa rzuty wystarczają do wyznaczenia każdego utworu geometrycznego. *



Uwaga: Przy zagadnieniach bardziej skomplikowanych podaje się czasem jeszcze trzeci rzut na płaszczyznę boczną, t. j. na płaszczyznę pionową B, prostopadłą do V. Taki rzut nazywamy rzutem bocznym (widok z boku!). Tę płaszczyznę obraca się o 90^0 około krawędzi k tak, aby i ją sprowadzić do tejsamej płaszczyzny V.

Jednakowoż konstrukcyę tego rzutu bocznego można już wykonać przy pomocy rzutu poziomego i pionowego: odstęp punktu A_b od osi XX wynosi $A_v O$, a odstęp od krawędzi k równa się odcinkowi OA_h. *Znajomość rzutu bocznego nie jest więc konieczna do wyznaczenia utworu geometrycznego.*

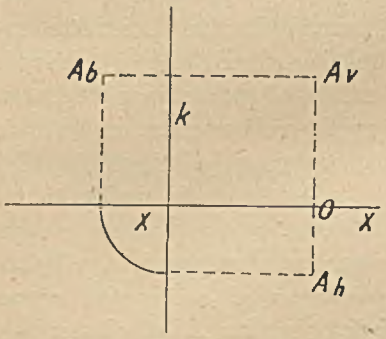


Fig. 279.

Takie trzy płaszczyzny prostopadłe do siebie tworzą układ trzech płaszczyzn współrzędnych a odcinki AA_h, AA_v i AA_b nazywamy współrzędnemi punktu A.

Wykonywanie konstrukcyi i rozwiązywanie zagadnień przy pomocy dwóch rzutów jest przedmiotem osobnej gałęzi matematyki, zwanej *geometryą wykreślną*. Dla nas w dalszym ciągu nauki będzie potrzebne tylko twierdzenie na str. 199, pouczające, jak są ze sobą związane rzuty tegosamego punktu. Moglibyśmy wprawdzie rozsunąć płaszczyzny H i V i zupełnie osobno badać rzut pionowy i poziomy, przez to jednakowoż utrudnilibyśmy sobie znacznie konstrukcyę.

Uwaga: Do kreślenia linii równoległych do osi rzutów używa się lineału opatrzonego poprzeczną deszczułką, przytwierdzoną prostopadle do lineału, t. zw. przykładnicy. Do kreślenia linii prostopadłych do osi rzutów — a tych na więcej potrzeba — używa się trójkąta z drzewa z jednym kątem prostym. (Są to konstrukcye mechaniczne — a nie czysto geometryczne, platońskie.

Cwiczenia VII.

§ 99—100. 1. Narysuj jakiekolwiek pudełko w rzucie pionowym i poziomym.

2. Narysować w rzucie pionowym i poziomym: *a*) kostkę, *b*) rurę walcową, *c*) sprzęty domowe.

3. Trójkąt leżący na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny poziomej narysować w rzutach.

4. Gdzie leżą: *a*) rzuty punktów znajdujących się na płaszczyźnie poziomej, *b*) rzuty punktów znajdujących się na płaszczyźnie pionowej, *c*) rzuty punktów znajdujących się na osi rzutów.

5. Przedstawić na jednej płaszczyźnie rzuty koła leżącego na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny pionowej.

6. Jak poznamy z rzutów dwóch linii prostych, czy te linie są wichrowate, czy równoległe, czy się przecinają?

7. Mając podane rzuty belki prostokątnej, narysować ją w perspektywie równoległej.

8. Mając podane rzuty stożka, narysować go w perspektywie równoległej.

9. Narysować: *a*) przekrój swego mieszkania, *b*) rzut wszystkich sprzętów znajdujących się w pokoju na płaszczyznę poziomą i pionową (plan i przekrój podłużny pokoju).

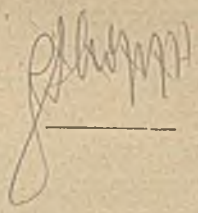
10. Kiedy rzut linii prostej będzie równoległy do osi rzutów, a kiedy prostopadły? Kiedy jeden rzut linii prostej będzie punktem?

11. Narysować w trzech rzutach walec, stożek, ostrosłup.

12. Narysować w trzech rzutach dzban z uchem.

13. Czworokąt leży na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny pionowej. Wykreślić jego rzuty. (Najpierw wykreślić krawędź tej płaszczyzny!)

14. Gdzie leżą rzuty punktów znajdujących się: *a*) poza płaszczyzną pionową, ale nad poziomą, *b*) pod płaszczyzną poziomą, ale przed pionową, *c*) pod płaszczyzną poziomą i poza płaszczyzną pionową?



Rozdział VIII.

O kątach bryłowych.

§ 101. Określenie kątów bryłowych.

W planimetryi po zbadaniu wzajemnego położenia dwóch prostych omawia się utwory geometryczne powstające z trzech linii prostych. W stereometryi zastępujemy linie proste płaszczyznami. Położenie dwóch płaszczyzn omówiliśmy już w § 90. Trzy płaszczyzny mogą mieć względem siebie następujące położenia:

a) trzy płaszczyzny są równoległe do siebie;

b) dwie płaszczyzny równoległe są przecięte trzecią płaszczyzną;

c) trzy płaszczyzny mają całą krawędź wspólną;

d) trzy płaszczyzny przecinają się wzdłuż trzech krawędzi równoległych i

e) trzy płaszczyzny przecinają się wzdłuż trzech krawędzi nierównoległych.

Przypadki *a*, *b*, *c*, *d* omówiliśmy już w poprzednich ustępach. Nowym jest dla nas przypadek *e*.

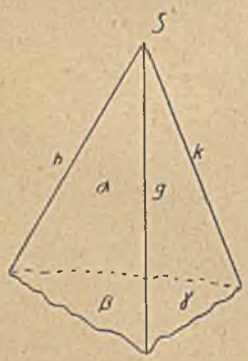


Fig. 280.

Łatwo wykazać, że trzy płaszczyzny przecinające się wzdłuż trzech krawędzi nierównoległych mają jeden punkt wspólny: jestto punkt, w którym się przecinają trzy krawędzie. Jeżeli z tych płaszczyzn narysujemy tylko części zawarte między krawędziami, otrzymamy utwór geometryczny, przedstawiony na fig. 280. Ten nowy utwór, odpowiadający trójkątowi w planimetryi, nazywamy narożem trójściennem lub kątem bryłowym trójściennym.

Jestto więc układ trzech płaszczyzn przesuniętych przez trzy proste przecinające się w jednym punkcie *S*.

Takie naroże zawiera trzy kąty płaskie: $\sphericalangle(hg)$, $\sphericalangle(kg)$ i $\sphericalangle(hk)$ i trzy kąty dwuścienne: $\sphericalangle(\beta\gamma)$, $\sphericalangle(\alpha\gamma)$ i $\sphericalangle(\alpha\beta)$.

Punkt *S* nazywa się wierzchołkiem kąta bryłowego. Mamy tu więc sześć części składowych, sześć „kawałków“, jak się nieraz wyrażamy, po-

dobnie jak w trójkącie. Badanie kątów bryłowych trójściennych jest niejako rozszerzeniem badań przeprowadzonych na trójkącie w planimetryi. Nawet brzmienie wielu twierdzeń pozostaje tosamo, jeżeli słowo „bok“ zastąpimy słowem „kąt płaski“, a słowo „kąt“ słowem „kąt dwuścienny“. Trójkąt jest bowiem tylko przekrojem kąta bryłowego.

Jeżeli więcej płaszczyzn przecina się w jednym punkcie, ale tylko po dwie wzdłuż jednej krawędzi, naroże nazywa się wielościenne. Jeżeli wszystkie kąty płaskie są równe i wszystkie kąty dwuścienne między sobą, to naroże nazywa się umiarowe.

§ 102. Przystawanie kątów bryłowych. Naroże biegunowe.

Dwa naroża nazywają się przystające, jeżeli ich kąty płaskie i kąty dwuścienne są parami równe w tymsamym porządku. Widzieliśmy już w § 98, że takie utwory można sprowadzić do nakrycia przez wykonanie odpowiedniego ruchu. Aby się przekonać, czy dwa naroża są przystające, wystarczy zbadać równość trzech części odpowiednio dobranych, podobnie jak dla trójkątów.

Mamy *sześć przypadków przystawania* kątów bryłowych trójściennych, mianowicie: Dwa naroża trójścienne są przystające, jeżeli mają: 1. trzy kąty płaskie równe; 2. trzy kąty dwuścienne równe; 3. dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny między nimi zawarty równe; 4. dwa kąty dwuścienne i kąt płaski między nimi zawarty równe; 5. dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny, leżący naprzeciw większego z nich równe; 6. dwa kąty dwuścienne i kąt płaski leżący naprzeciw większego z nich równe.

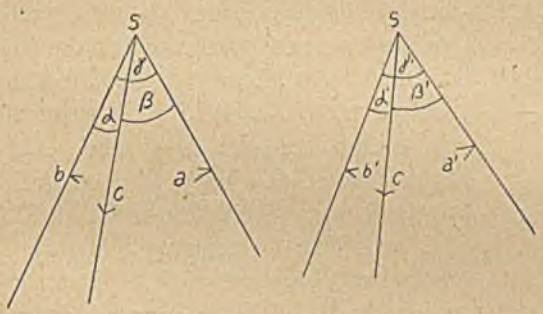


Fig. 281.

Nie będziemy tu szczegółowo udowadniali tych sześciu przypadków, a tylko wykażemy, jak się do nich dochodzi drogą konstrukcyjną. Weźmy n. p. pierwszy przypadek przystawania. Mamy podane trzy kąty płaskie α, β i γ. Rysujemy je jeden obok drugiego z tegosamego wierzchołka S na jednej płaszczyźnie. Odcinamy $SX = SX'$ i obra-

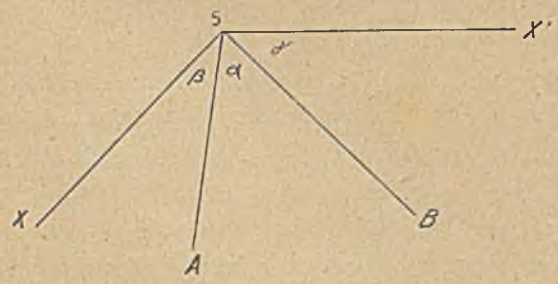


Fig. 282.

camy płaszczyzny kątów β i γ około osi SA i SB tak długo, aż się zejdą punkty X i X'. . Wtedy i całe proste SX i SX' muszą się nakryć i otrzymamy jeden ściśle oznaczony kąt bryłowy. Wszystkie inne kąty bryłowe zbudowane z takichsamych kątów płaskich wymagają takichsamych obrotów przy konstrukcyi, mają więc jednakowe kąty dwuścienne, czyli są przystające. Podobnie dochodzimy do przypadków 3 i 5.

Z tej konstrukcyi wysnuwamy ważny wniosek:

W narożu trójściennem suma dwóch katów płaskich musi być większa od trzeciego. W przeciwnym bowiem razie przy obrocie ściany β i γ albo nie zeszłyby się wcale, albo przecięłyby się dopiero na płaszczyźnie α, a więc nie utworzyłyby kąta bryłowego. (Jakie twierdzenie odpowiada temu twierdzeniu w planimetryi?)

Dla dowodu innych przypadków przystawania używa się pomocniczego kąta bryłowego, któryby był niejako dopełnieniem danego naroża. Z dowolnego punktu S' na polu kąta bryłowego S prowadzimy trzy linie prostopadłe do jego ścian i przez te trzy linie przesuwamy płaszczyzny $S'A$, $S'B$, $S'C$. Płaszczyzny te są prostopadłe do ścian naroża S (dlaczego?). W ten sposób powstaje nowe naroże S', które nazywamy narożem biegunowem względem S. Naroża S i S' przecinają się wzdłuż krawędzi AE, AG, BE, BF, CF, CG. Kąty a, b, c, które powstały przy krawędziach SA, SB, SC są kątami dwuściennymi naroża S. Albowiem: Płaszczyzna $S'A$ jest prostopadła do β i do γ, a zatem i do ich krawędzi SA, a wobec tego $SA \perp EA$ i $SA \perp GA$, więc kąt a jest miarą kąta dwuściennego leżącego przy krawędzi SA. Taksamo $\sphericalangle b$ i $\sphericalangle c$. Biorąc pod uwagę płaski czworokąt $S'EAG$, w którym $\sphericalangle E = 90^0$ i $\sphericalangle G = 90^0$ widzimy, że:

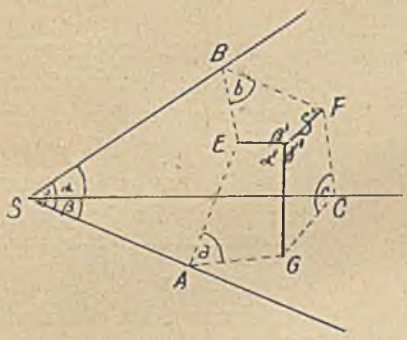


Fig. 283.

$$a + \alpha' = 180^0. \qquad (1)$$

Taksamo $b + \beta'$ i $c + \gamma'$ spełniają się do 180^0. A więc: *Dwuścienne kąty naroża spełniają się do 180^0 z płaskimi kątami naroża biegunowego.*

Podobnie z czworokąta $SACG$ wynika, że $\beta + b' = 180^0$ gdzie b' jest kątem dwuściennym naroża S'.

Taksamo $\alpha + a' = 180^0$, $\gamma + c' = 180^0$, więc:

Kąty płaskie naroża spełniają się do 180^0 z kątami dwuściennymi naroża biegunowego.

Twierdzenia te możemy zastosować do konstrukcyi naroża trójściennego w drugim przypadku przystawania. Mamy podane kąty dwuścienne a, b, c. Z wzorów (1) otrzymamy:

$$\alpha' = 180^0 - a$$
$$\beta' = 180^0 - b$$
$$\gamma' = 180^0 - c.$$

Z kątów α', β', γ' budujemy naroże według pierwszego przypadku, a następnie z dowolnego punktu prowadzimy trzy linie prostopadłe do jego ścian, to one wyznaczą kąt bryłowy, w którym kąty dwuścienne będą miały żądane wielkości: a, b, c. Podobnie postępujemy w 4 i 6 przypadku.

§ 103. O sumie kątów w narożu.

W trójkącie suma kątów wynosi 180^0. W narożu trójściennem nie mamy już takiej prostej równości, zachodzą natomiast pewne nierówności tak dla kątów płaskich, jak i dla kątów dwuściennych. I tak wykażemy, że:

W każdym kącie bryłowym trójściennym suma kątów płaskich jest mniejsza od 4 R (t. j. od 360⁰).

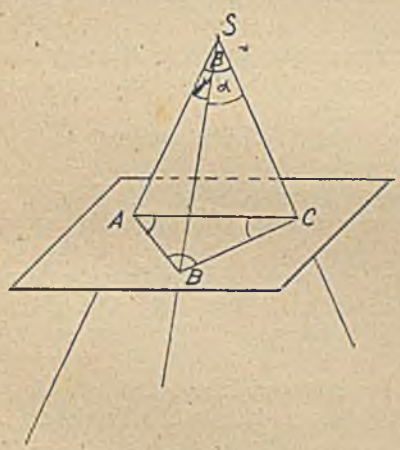


Fig. 284.

Dla dowodu przecinamy naroże płaszczyzną nie przechodzącą przez wierzchołek a przecinającą wszystkie krawędzie. Otrzymaliśmy cztery trójkąty, w których suma kątów wynosi $4.2R = 8R$. Od tej sumy trzeba jednak odjąć sumę kątów trójkąta ABC, a więc zostanie $6R$. Od tego trzeba jeszcze odjąć po dwa kąty leżące przy wierzchołkach A, B i C. Ponieważ w każdem narożu trójściennem suma dwóch kątów płaskich jest większa od trzeciego, przeto suma kątów, które mamy jeszcze odjąć, jest większa od $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C$, czyli większa od $2R$. Jeżeli zaś od $6R$ odejmiemy coś więcej jak $2R$, zostanie liczba mniejsza od $4R$. Więc:

$$\alpha + \beta + \gamma < 4R.$$

Twierdzenie to odnosi się nietylko do naroża trójściennego, ale także do każdego naroża wielościennego.

Inna nierówność zachodzi dla kątów dwuściennych mianowicie:

W każdym kącie bryłowym trójściennym suma kątów dwuściennych jest większa od 2 R ale mniejsza od 6 R. Dla dowodu używamy naroża biegunowego. Widzieliśmy, że $a + \alpha' = 180^0$, $b + \beta' = 180^0$ i $c + \gamma' = 180^0$ a więc $a + b + c + \alpha' + \beta' + \gamma' = 6R$. (2)

Stąd odrazu widać, że suma samych kątów dwuściennych a, b i c jest mniejsza od $6R$. Ponieważ zaś $\alpha' + \beta' + \gamma' < 4R$, jako suma kątów płaskich w narożu trójściennem, to odejmując od lewej strony równania (2) liczbę $\alpha' + \beta' + \gamma'$ mniejszą od $4R$, otrzymamy resztę większą od $2R$, więc

$$2R < a + b + c < 6R.$$

Dla naroża wielościennego otrzymujemy na sumę kątów dwuściennych granice inne, mianowicie, jeżeli liczba ścian wynosi n, to:

$$2R(n-2) < S < 2R.n.$$ Udowodnij!

Celem zmierzenia wielkości kąta bryłowego zakreśla się z jego wierzchołka kulę o promieniu równym jednostce długości i oblicza się powierzchnię krzywą, jaką odcinają ściany kąta bryłowego. Wielkość tej powierzchni uważa się za miarę kąta bryłowego. Jestto uogólnienie łukowej miary kąta. Obliczenie wielkości powierzchni wyciętej na kuli przez kąt bryłowy sprawia znaczniejsze trudności. W trygonometryi sferycznej bada się tę sprawę dokładniej.

Ćwiczenia VIII.

§ 101. 1. Wykazać, że jeżeli trzy płaszczyzny przecinają się w krawędziach nierównoległych, to te krawędzie nie mogą być wichrowate, tylko przecinają się i to w jednym punkcie.

§ 102. 2. Jak należy wykonać konstrukcyę naroża trójściennego, znając: *a*) dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny między nimi zawarty; *b*) dwa kąty płaskie i kąt dwuścienny leżący naprzeciw większego kąta płaskiego.

3. Narysować naroże trójścienne, którego kąty płaskie wynoszą po 90^0 i jego naroże biegunowe w perspektywie równoległej.

4. Kąty dwuścienne naroża trójściennego wynoszą: $a = 90^0$, $b = 60^0$, $c = 120^0$. Jak należy wykonać konstrukcyę tego naroża przy pomocy naroża biegunowego?

5. Jak wykonamy konstrukcyę naroża trójściennego, mając podane: *a*) dwa kąty dwuścienne i kąt płaski, między nimi zawarty; *b*) dwa kąty dwuścienne i kąt płaski, leżący naprzeciw większego kąta dwuściennego? (Użyć naroża biegunowego!)

6. Wykazać, że w narożu trójściennem naprzeciw większego kąta płaskiego leży większy kąt dwuścienny (dla dowodu odciąć mniejszy kąt płaski od większego).

§ 103. 7. Wykazać, że w narożu czworościennem suma kątów płaskich wynosi mniej, aniżeli $4R$.

8. Wykazać, że w narożu pięciościennem suma kątów dwuściennych jest większa od $6R$ a mniejsza od $10R$.

9. Wykazać, że naroże S na fig. 283 jest biegunowe do naroża S'.

Rozdział IX.

Symetrya.

§ 104. Naroża trójścienne symetryczne względem siebie.

Mówiąc o przystawaniu naroży trójściennych zastrzegliśmy wyraźnie, że równe części w obydwu narożach mają następować po sobie w tymsamym porządku. W planimetryi zastrzeżenie to nie było potrzebne, w stereometryi zaś jest, jak to zobaczymy, konieczne. Weźmy pod uwagę dwa naroża trójścienne mające wszystkie kawałki równe, ale następujące po sobie w przeciwnym porządku (to znaczy: patrząc od S na punkty A, B, C kolejno musimy zwracać się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówki zegarowej, od S' zaś widzimy, że punkty A' B' C' następują po sobie w porządku odwrotnym).

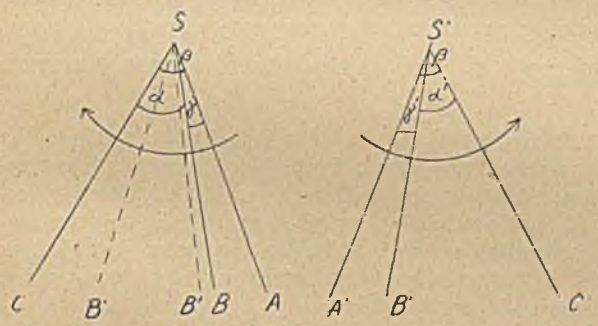


Fig. 285.

Oprócz tego niech kąty α, β, γ będą wszystkie różne między sobą. Te naroża nie dadzą się sprowadzić do nakrycia żadnym ruchem. (Sprawdzić na modelu!) Gdyby nawet ściana $S'A'C'$ nakryła ścianę SAC, to krawędź SB' będzie leżała albo za płaszczyzną SAC, albo przed płaszczyzną ale po lewej stronie krawędzi SB. Utworów $SABC$ i $S'A'B'C'$ nie możemy więc nazwać przystającymi ponieważ nie posiadają zasadniczej własności figur przystających: nie dadzą się sprowadzić do nakrycia przez ruch mimo, że mają wszystkie części równe. Figury te posiadają natomiast inną niemniej ważną własność. Dadzą się one ustawić tak, że jedno naroże jest zwierciadłowem odbiciem drugiego. Ściślej: Naroża te dadzą się tak ustawić, że punkty jednego są symetryczne względem odpowiednich punktów drugiego. Aby to udowodnić, oprzemy sie na określeniu symetrycznego położenia. O dwóch punktach A i A' w przestrzeni mówimy, że leżą *symetrycznie, jeżeli*

są jednakowo oddalone od jednej płaszczyzny, leżą po przeciwnych stronach tej płaszczyzny, ale na tejsamej linii prostopadłej do płaszczyzny. Tę płaszczyznę nazywamy płaszczyzną symetryi punktów A i A' lub płaszczyzną symetralną.

Wykonajmy taką konstrukcyę dla czterech punktów $S\,A\,B\,C$ naroża S i połączmy S' z $A'\,B'\,C'$. Otrzymaliśmy w ten sposób naroże $S'\,A'\,B'\,C'$ mające wszystkie kawałki równe odpowiednim kawałkom figury $S\,A\,B\,C$, ale w odwrotnym porządku. (N. p. $S\,A = S'\,A'$, bo trapezy $S\,A\,X\,Y$ i $S'\,A'\,X\,Y$ są przystające, taksamo $S\,B = S'\,B'$, $A\,B = A'\,B'$, więc $\sphericalangle\,\gamma = \sphericalangle\,\gamma'$). Otrzymane w ten sposób naroże nazywa się narożem symetrycznem względem pierwotnego i leży w położeniu symetrycznem. Każde inne naroże symetryczne do $S\,A\,B\,C$ jest już przystające do $S'\,A'\,B'\,C'$, da się więc sprowadzić do nakrycia z $S'\,A'\,B'\,C'$. Stąd wniosek:

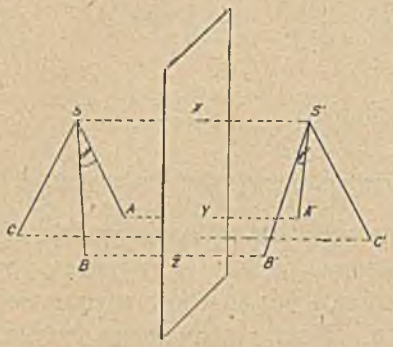


Fig. 286.

Naroża trójścienne mające wszystkie kawałki równe, ale następujące po sobie w odwrotnym porządku, są utworami symetrycznymi względem siebie.

Określenie to stosujemy do wszystkich utworów przestrzennych wogóle.

Utwory symetryczne w planimetryi, t. j. leżące na jednej płaszczyźnie można było sprowadzić do nakrycia, trzeba było jednak wyjąć jeden utwór z płaszczyzny dwuwymiarowej i wykonać obrót w trójwymiarowej przestrzeni. Utwory przestrzenne symetryczne względem siebie trzebaby wyjąć z przestrzeni trójwymiarowej i obrócić w przestrzeni czworowymiarowej. Konstrukcya taka jest jednak niemożliwa w naszej geometryi trójwymiarowej, dlatego utwory przestrzenne symetryczne nie dadzą się sprowadzić do nakrycia.

Podaj kilka przykładów utworów symetrycznych względem siebie z życia codziennego!

§ 105. Utwory symetryczne. (Inne rodzaje symetryi.)

Utwory geometryczne dające się rozłożyć zapomocą jakiejś płaszczyzny (przekroju) *na dwie części symetryczne względem siebie, nazywamy utworami symetrycznymi.*

N. p. kostka jest utworem symetrycznym, posiada bowiem płaszczyzny symetryi i to aż dziewięć takich płaszczyzn. Są to trzy płaszczyzny przechodzące przez środki krawędzi i sześć płaszczyzn przechodzących przez przekątnie przeciwległych ścian (fig. 287 a).

Taką symetryę posiadają postacie zupełne kryształów należących do pierwszego układu krystalograficznego (równoosiowego). Postacie drugiego układu krystalograficznego (jednotrójosiowego) posiadają siedem płaszczyzn symetryi, n. p. słup sześcioboczny (fig. 287 *b*). W trzecim układzie, jednodwuosiowym, mamy pięć płaszczyzn symetryi, w czwartym różnoosiowym trzy, w piątym, jednokośnym jedną, a w szóstym trójskośnym niema żadnej płaszczyzny symetryi (por. fig. 287 *c*, *d*, *e*, *f*).

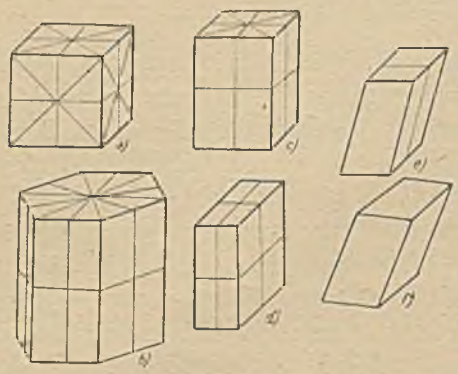


Fig. 287.

Figury takie, jak postacie szóstego układu krystalograficznego, są więc utworami niesymetrycznymi (asymetrycznymi).

Oprócz symetryi względem płaszczyzny mamy jeszcze dwa rodzaje symetryi: symetryę względem punktu i symetryę względem prostej (osi).

Jeżeli wszystkie punkty jakiejś figury połączymy z jednym punktem *O* i na przedłużeniach tych linii odetniemy odpowiednie odcinki równe, otrzymamy figury symetryczne względem punktu, zwanego środkiem symetryi.

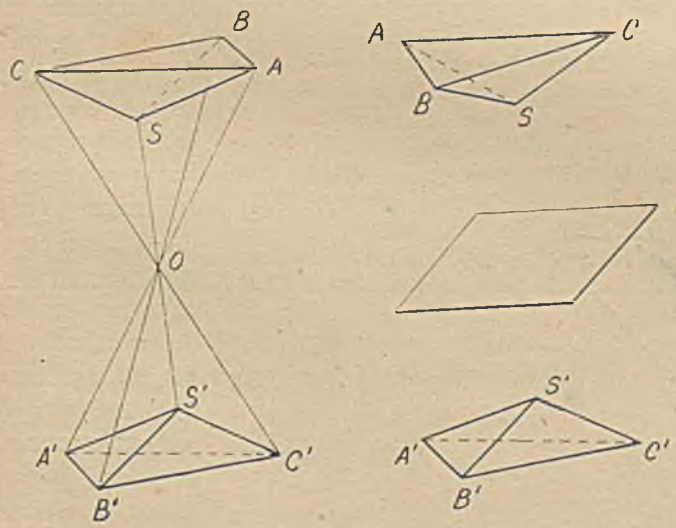


Fig. 288.

Takie figury mają wszystkie odcinki i kąty równe, ale w odwrotnym porządku, są więc figurami symetrycznemi także w dawnem znaczeniu, to znaczy względem płaszczyzny. Aby je sprowadzić do położenia symetrycznego, wystarczy obrócić górną figurę o 180° dokoła pewnej osi przechodzącej przez środek *O*. Płaszczyzną symetryi jest płaszczyzna przechodząca przez *O* a prostopadła do osi obrotu.

Prostym przykładem takich utworów środkowo-symetrycznych jest jakiekolwiek naroże wraz z narożem wierzchołkowem, t. j. takiem narożem, które powstaje przez przedłużenie krawędzi poza wierzchołek.

Podobnie określamy symetryę względem linii prostej, zwanej osią symetryi. Jeżeli ze wszystkich punktów jakiejś figury poprowadzimy linie prostopadłe do osi XX i na ich przedłużeniach odetniemy równe odcinki odpowiednie, otrzymamy figurę symetryczną względem osi XX. Figury takie, jakto łatwo wykazać, mają wszystkie części składkowe równe w tym samym porządku, są więc przystające. Aby je sprowadzić do nakrycia, wystarczy wykonać obrót o 180° koło osi symetryi. (Punkt S na figurze 289 leży przed płaszczyzną rysunku, a punkt S' za nią; punkty ABC obraliśmy w płaszczyźnie rysunku.)

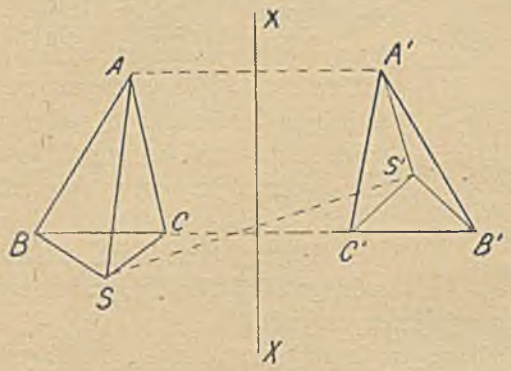


Fig. 289.

Oprócz takich osi symetryi używa się często także osi symetryi wyższego rzędu. Weźmy n. p. trójkąt równoboczny i oś prostopadłą do jego płaszczyzny w środku trójkąta. Istnieją tu trzy obroty po 120° sprowadzające ten trójkąt do nakrycia ze sobą. Taką oś nazywamy osią symetryi trzeciego rzędu. — Kwadrat posiada oś symetryi czwartego rzędu. W kwadracie ta oś jest także osią symetryi w pierwotnem znaczeniu, bo obrót połowy kwadratu o 180° sprowadza ją do nakrycia z drugą połową, tymczasem oś trzeciego rzędu trójkąta równobocznego nie posiada tej własności, nie jest więc osią symetryi w znaczeniu pierwotnem.

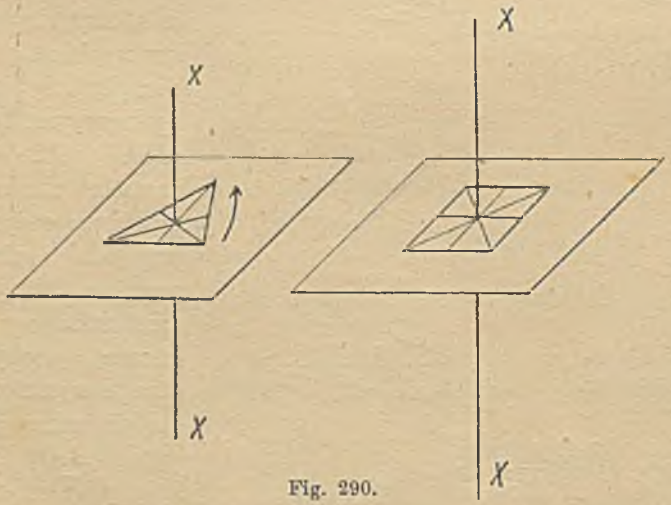


Fig. 290.

Kostka posiada trzy gatunki osi symetryi. Mamy trzy osie czwartego rzędu (fig. 291 *a*). Następnie są cztery osie trzeciego rzędu (fig. 291 *b*), bo koło osi *A B* można wykonać trzy obroty sprowadzające kostkę do nakrycia z pierwotnem położeniem: najpierw taki obrót, w którym punkt *D* padnie na *C*, później taki, w którym *D* przez *C* padnie na *E*, wreszcie pełny obrót, przy którym *D* przeszedłszy punkty *C* i *E*, wróci do dawnego położenia. Wreszcie istnieje sześć osi drugiego rzędu: są to proste łączące środki przeciwległych krawędzi. Z tych trzynastu osi jest tylko dziewięć właściwych osi symetryi (w pierwotnem znaczeniu), mianowicie osie na fig. 291*a* i 291*c*. Jestto ogólne prawo, że z pomiędzy osi wyższego rzędu tylko te są właściwemi osiami symetryi, których rząd jest parzysty (drugi, czwarty i t. d.). Za osie krystalograficzne przyjmuje się z reguły osie najwyższych rzędów (n. p. w kostce osie narysowane na fig. 291 *a*).

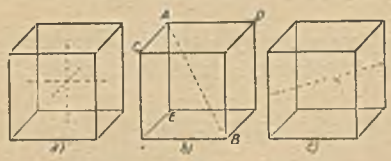


Fig. 291.

Przy pomocy osi symetryi można wywnioskować, ile jest rozmaitych obrotów sprowadzających daną figurę do nakrycia z pierwotnem jej położeniem. Tak n. p. obroty kostki około każdej osi czwartego rzędu dają po trzy nowe położenia nakrywające się z pierwotnem położeniem, a że takich osi mamy trzy, więc otrzymujemy dziewięć różnych położeń. Obroty około osi trzeciego rzędu dają po dwa nowe położenia, a że takich osi jest cztery, więc otrzymamy osiem nowych położeń. Wreszcie obroty koło osi drugiego rzędu dają zawsze tylko jedno nowe położenie, ponieważ zaś takich osi jest sześć, będzie więc jeszcze sześć nowych położeń. Razem mamy $9 + 8 + 6 = 23$ nowych położeń, a doliczając jedno pierwotne położenie, otrzymamy 24 obrotów sprowadzających kostkę do nakrycia ze sobą.

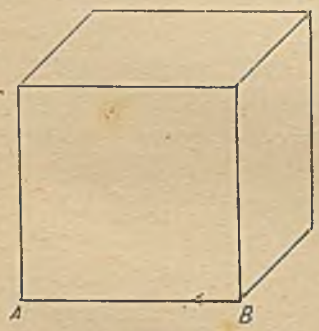


Fig. 292.

Łatwo sprawdzić, że te wszystkie położenia są różne i że niema ich więcej. Możemy bowiem ustawić kostkę tak, że każda z jej dwunastu krawędzi będzie miała położenie *A B* i to jeszcze w dwóch kierunkach: od *A* ku *B* lub w kierunku przeciwnym. Razem więc mamy istotnie 24 położeń, w których kostka zajmuje tosamo miejsce w przestrzeni.

Ćwiczenia IX.

§ 104—105. 1. Wykreślić w perspektywie równoległej utwór symetryczny do danej kostki.

2. Wykazać, że kąt dwuścienny jest utworem symetrycznym.

3. Wykreślić w perspektywie równoległej wszystkie płaszczyzny symetryi: *a*) ośmiościanu umiarowego; *b*) czworościanu wpisanego w kostkę.

4. Wykreślić płaszczyzny symetryi ostrosłupów podwójnych, należących do II, III, IV układu krystalograficznego.

5. Do dowolnego prostopadłościanu wykreślić utwór środkowo-symetryczny.

6. Do dowolnego ostrosłupa wykreślić utwór osiowo-symetryczny.

7. Jeżeli jakiś utwór posiada dwie prostopadłe płaszczyzny symetryi, to ich krawędź jest osią symetryi. (Udowodnij!)

8. Wykazać, że figura posiadająca jedną płaszczyznę symetryi i jedną prostopadłą do niej oś symetryi, posiada także środek symetryi, mianowicie: spodek tej prostopadłej.

9. Wykreślić wszystkie osie symetryi: *a*) ośmiościanu umiarowego; *b*) dowolnego prostopadłościanu.

10. Jakie elementy symetryi posiada: *a*) walec prosty; *b*) stożek prosty; *c*) kula?

11. Dwie figury są symetryczne do tejsamej trzeciej względem dwóch różnych płaszczyzn. Jaki ruch należy wykonać, aby je sprowadzić do nakrycia.

12. Wykazać przy pomocy symetryi, że punkty połowiące krawędzie czworościanu umiarowego są wierzchołkami ośmiościanu umiarowego.

13. Jakie elementy symetryi posiada kostka, której *a*) jedna ściana jest czarna a inne białe; *b*) dwie ściany czarne a inne białe?

14. Jakie elementy symetryi posiada ośmiościan, którego jedno naroże ścięto płaszczyzną, odcinającą równe kawałki czterech krawędzi schodzących się w tem narożu?

Rozdział X.

Graniastosłupy i walce.

§ 106. Podział brył.

Część przestrzeni zamkniętą ze wszystkich stron nazywamy bryłą a zbiór powierzchni ograniczających tę część przestrzeni nazywamy powierzchnią bryły. Jeżeli wszystkie powierzchnie ograniczające są płaskie, bryła nazywa się bryłą graniastą lub wielościanem; jeżeli chociaż jedna powierzchnia jest krzywa, bryła nazywa się okrągłą.

Z pomiędzy wielkiej różnorodności brył spotykanych w świecie zewnętrznym wybierzemy tylko takie, które powstają przez pewne proste ruchy, lub też takie, które posiadają pewne szczególne własności pod względem symetryi. I tak z ruchu postępowego figur płaskich otrzymamy graniastosłupy i walce, z ruchu linii prostej przytwierdzonej stale w jednym punkcie otrzymamy ostrosłupy i stożki, a wreszcie z ruchu obrotowego kulę i całą klasę brył obrotowych.

Z pomiędzy brył symetrycznych będziemy się zajmowali tylko bryłami ograniczonemi samymi umiarowymi wielokątami, zwanemi wielościanami umiarowymi.

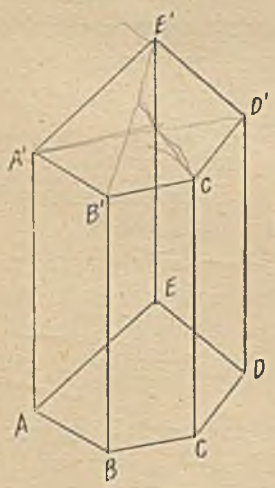


Fig. 293.

§ 107. Graniastosłupy.

Jeżeli jakikolwiek wielokąt wykonuje ruch postępowy wzdłuż linii prostej nie leżącej na jego płaszczyźnie, to jego powierzchnia zakreśla bryłę zwaną graniastosłupem. N. p. jeżeli wielokąt $ABCDE$ przejdzie ruchem postępowym w położenie równoległe $A'B'C'D'E'$, to, jak wiadomo, wszystkie jego punkty zakreślą odcinki równoległe i równe.

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \ldots$$

Graniastosłup jest więc ograniczony dwoma przystającemi i równoległemi dnami czyli podstawami i tyloma równoległobokami, ile dno ma boków. Te równoległoboki nazywają się ścianami bocznemi a ich zbiór tworzy pobocznicę. Prosto-

padłą odległość den nazywamy **wysokością** graniastosłupa. Przekrój prostopadły do wysokości nazywa się **przekrojem normalnym**.

Krawędzie AA', BB', CC'.... nazywają się krawędziami bocznemi, a boki podstaw krawędziami podstawowemi.

Jeżeli kierunek ruchu jest prostopadły do płaszczyzny wielokąta, to wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy, można więc każdą z nich uważać za wysokość. Wtedy także i ściany boczne są prostopadłe do podstawy (dlaczego?) a **graniastosłup nazywa się prosty**. Jeżeli krawędzie boczne są nachylone do podstawy, graniastosłup nazywa się pochyły (ukośny). Jeżeli w graniastosłupie prostym podstawa jest wielokątem umiarowym, graniastosłup nazywa się **umiarowy** (nie jest on jednak wielościanem umiarowym! [por. § 106.]) Według liczby ścian bocznych rozróżniamy graniastosłupy trójboczne, czworoboczne i t. d. Prosta łącząca dwa naroża przeciwległe, t. j. naroża nie mające wspólnej ściany, nazywa się **przekątnią** graniastosłupa. Płaszczyznę łączącą dwie przeciwległe krawędzie równoległe nazywamy płaszczyzną przekątną.

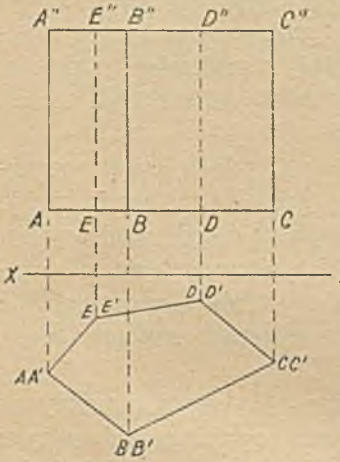


Fig. 294.

Aby *graniastosłup prosty przedstawić w rzutach* prostopadłych, najwygodniej ustawić go tak, aby dno było równoległe do płaszczyzny poziomej. Wtedy na płaszczyźnie pionowej (widok z przodu) otrzymamy prostokąt, a na płaszczyźnie poziomej (widok z góry!) jeden wielokąt, ponieważ górne dno zakrywa dno dolne: wielokąt ten będzie przystający do dna graniastosłupa.

Krawędzie niewidzialne zaznacza się na rysunku liniami kropkowanemi. Wierzchołki wielokąta muszą leżeć na przedłużeniach odpowiednich krawędzi bocznych (dlaczego?).

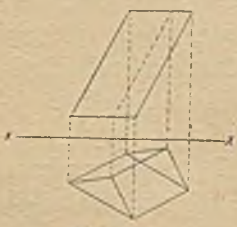


Fig. 295.

Jeżeli graniastosłup **pochyły** ustawimy dnem równolegle do postawy, to rzutem pionowym będzie równoległobok ukośnokątny, a na płaszczyźnie poziomej wystąpią obydwa dna jako wielokąty przystające i ustawione równolegle.

Można jednakże i graniastosłup pochyły tak ustawić, że górne dno zakryje dolne. Wtedy musi być przekrój normalny równoległy do płaszczyzny poziomej a dna nachylone.

Na szczególniejszą uwagę zasługują graniastosłupy, których podstawa jest równoległobokiem. Wtedy wszystkie ściany są równoległobokami i są parami do siebie równoległe (udowodnij!). Dlatego *graniastosłup, którego*

podstawa jest równoległobokiem, nazywamy równoległościanem. Każdą ścianę równoległościanu możemy uważać za podstawę. (Udowodnij!) *Równoległościan prosty o podstawie prostokątnej nazywa się prostopadłościanem.* W takim równoległościanie są po trzy ściany schodzące się w jednem narożu prostopadłe. Mianowicie: z określenia prostopadłościanu wynika, że $b \perp \gamma$, więc musi być i $\alpha \perp \gamma$ i $\beta \perp \gamma$ jako płaszczyzny przesunięte przez prostą prostopadłą. Ale także $\alpha \perp \beta$, bo α zawiera prostą c, która jest prostopadła do b i do a, a więc $c \perp \beta$ a wtedy i $\alpha \perp \beta$.

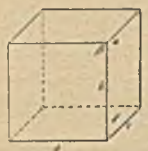


Fig. 296.

Uwaga: Takie bryły spotykamy bardzo często, jako dzieła rąk ludzkich: deski, belki, cegły, wogóle materyały budulcowe, skrzynie, izby i t. p., ponieważ ich mechaniczne wykonywanie jest najłatwiejsze. W przyrodzie bryły takie występują bardzo rzadko (części składowe niektórych kryształów).

Prostopadłościan, którego podstawy i ściany boczne są kwadratami, nazywa się sześcianem lub kostką. Jestto bryła najwięcej symetryczna ze wszystkich graniatosłupów.

W prostopadłościanie występują tylko trzy gatunki krawędzi, po cztery są bowiem zawsze równe. Znając ich wielkość możemy łatwo obliczyć przekątnię prostopadłościanu.

Fig. 297.

Z figury 297 widzimy, że

$$p^2 = a^2 + c^2 \quad \text{a} \quad d^2 = b^2 + p^2 \text{ więc}$$
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ Stąd wniosek:}$$

Kwadrat przekątni prostopadłościanu równa się sumie kwadratów trzech krawędzi schodzących się w jednem narożu.

§ 108. Powierzchnia graniastosłupa. (Siatka.)

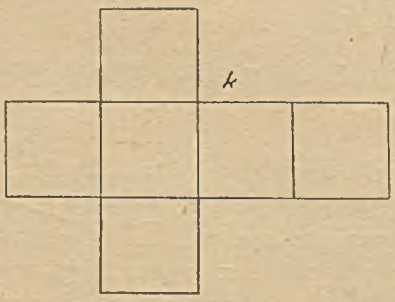


Fig. 298.

Celem obliczenia powierzchni jakiejkolwiek bryły lub też celem sporządzenia jej modelu przestrzennego używa się siatki tej bryły. Aby otrzymać siatkę bryły, trzeba jej *powierzchnię rozwinąć* na jedną płaszczyznę, to znaczy ułożyć na jednej płaszczyźnie wszystkie powierzchnie ograniczające tak, aby każda następna miała z poprzednią jedną krawędź wspólną. I tak n. p. rozwinięta powierzchnia kostki przedstawi się jako figura płaska, złożona z sześciu kwadratów, z których cztery leżą w jednym rzędzie, a dwa przylegają do nich z boku. Ponieważ powierzchnia jednego

kwadratu wynosi k^2, przeto na powierzchnię całego sześcianu otrzymujemy wzór:

$$P = 6\,k^2$$

Graniastosłup prosty rozwijamy, układając obok siebie prostokątne ściany boczne o równej wysokości. Otrzymamy w ten sposób jeden prostokąt, którego podstawa równa się obwodowi dna a wysokość wynosi tylesamo, co wysokość graniastosłupa. Dna dotykają tego prostokąta wzdłuż jednego ze swych boków. Jeżeli powierzchnię pobocznicy oznaczymy literą M, to z figury odczytujemy następujący *wzór na powierzchnię graniastosłupa* prostego:

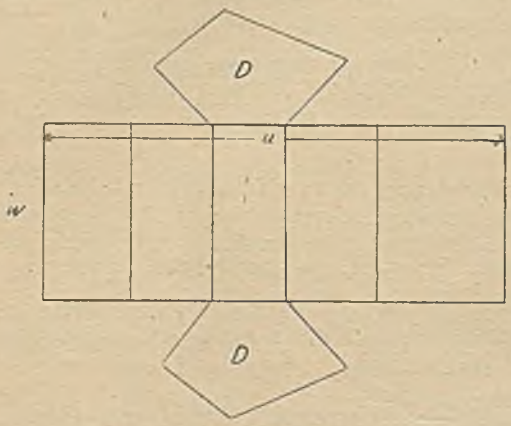


Fig. 299.

$$P = 2\,D + M \qquad (1)$$

Powierzchnię pobocznicy możemy przedstawić wzorem:

$$M = u.w \qquad (2)$$

gdzie u oznacza obwód podstawy. Do tegosamego wyniku można dojść bez siatki, z rozważania samej bryły. Zadanie to łatwo wykonać konstrukcyjnie, jeżeli są podane rzuty graniastosłupa, n. p. z fig. 294. Boki wielokąta $ABCDE$ trzeba odciąć po kolei na jednej linii prostej i zbudować na nich prostokąt o wysokości AA'. Do tego prostokąta dorysowuje się dna.

Jeżeli graniastosłup prosty jest ustawiony inaczej, n. p. nachylony względem płaszczyzny poziomej, wtedy konstrukcya jest trudniejsza. Trzeba najpierw wykonać obrót do położenia prostopadłego, do czego są potrzebne głębsze wiadomości z geometryi wykreślnej.

Jeżeli rozwiniemy graniastosłup pochyły, to wzór

$$P = 2\,D + M$$

pozostaje, ale pobocznica nie przedstawi się już jako jeden prostokąt, nawet nie jako jeden równoległobok. Wzoru (2) nie można więc używać dla graniastosłupa pochyłego.

* Aby rozwinąć graniastosłup pochyły, ustawiamy go tak, aby krawędzie boczne były prostopadłe do płaszczyzny poziomej, a dna aby były prostopadłe do płaszczyzny pionowej. Rzuty graniastosłupa w takiem położeniu przedstawiliśmy na fig. 300 *a*. Dno nie występuje teraz w prawdziwej wielkości, natomiast przekrój normalny $A'B'C'D'E'$ jest przystający do rzutu $A''B''C''D''E''$ (dlaczego?).

Obwód tego przekroju rozwijamy na dowolnej linii RR'. Od punktów

$$E''_1.\ A''_1,\ B''_1 \ldots$$

odcinamy do góry i na dół odpowiednie części krawędzi bocznych, wzięte z rzutu pionowego, w którym te odcinki występują w prawdziwej wielkości. Rozwinięta pobocznica przedstawia się jako pas, którego podstawą jest linia łamana wznosząca się i opadająca kolejno nakształt fali. Powierzchnię tego pasa obliczymy, mnożąc podstawę k każdego równoległoboku przez wysokości $E''_1 A''_2$, $A''_1 B''_1 \ldots$ tworzące razem obwód przekroju normalnego. Trudniej jest natomiast otrzymać z tego rzutu a) prawdziwą wielkość dna.

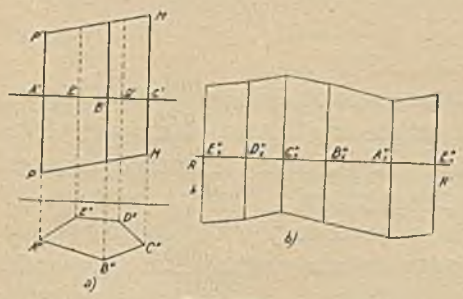


Fig. 300.

Trzeba wykonać obrót płaszczyzny PM (t. zw. kład płaszczyzny PM na płaszczyznę poziomą). Do tegosamego wyniku dochodzimy odrazu bez używania rzutów. Trzeba odciąć od graniastosłupa pochyłego zapomocą przekroju normalnego część górną i przesunąć ją na dół tak, aby dno $P'M'$ nakryło się z dnem PM. W ten sposób otrzymuje się graniastosłup prosty, mający tęsamą pobocznicę (ale inne dna). Obliczając tę pobocznicę według wzoru (1) otrzymamy

$$M = k . U$$

gdzie k oznacza krawędź boczną, a U obwód przekroju normalnego. *

Rozwinięcie graniastosłupa prostego można także wykonać na podstawie rysunku perspektywicznego. N. p. na fig. 301 mamy przedstawiony graniastosłup prosty trójboczny w perspektywie równoległej; zniekształcenie obrano $\alpha = 45^0$, $s = 1$ (por. rozdział II. str. 158). Ujmujemy podstawę w równoległobok o kącie $\alpha = 45^0$. Ten równoległobok jest obrazem prostokąta o bokach $C'Y' = CY$ i $C'X' = CX$ (ponieważ stosunek zmniejszenia boków wynosił 1). Na bokach tego prostokąta odcinamy $Y'A' = YA$ i $B'X' = BX$ i otrzymujemy trójkąt $A'B'C'$ w prawdziwej wielkości.

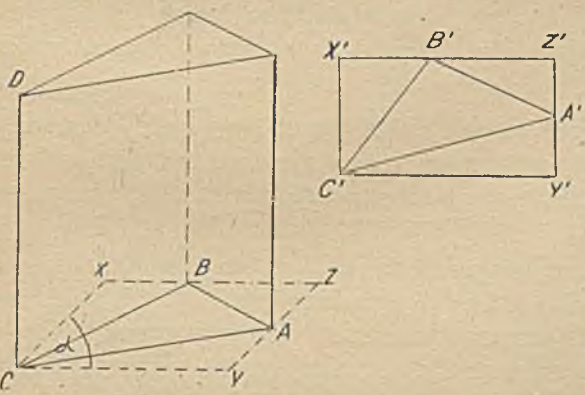


Fig. 301.

Rozwijając obwód tego trójkąta i rysując prostokąt o wysokości CD, otrzymamy rozwiniętą pobocznicę narysowanego graniastosłupa.

Dla graniastosłupa pochyłego konstrukcya jest trudniejszą, a nawet nieoznaczona, dopóki nie znamy prawdziwego kąta nachylenia krawędzi bocznych. Z rysunku perspektywicznego nie potrafimy tego nachylenia odczytać.

§ 109. Walec.

Jeżeli koło wykonuje ruch postępowy wzdłuż linii prostej nie leżącej na jego płaszczyźnie, powstaje bryła zwana walcem kołowym. Przez ruch postępowy elipsy powstaje walec eliptyczny, wogóle przez ruch postępowy jakiejkolwiek linii krzywej powstaje odpowiedni walec (słup). Mówiąc „walec“ bez żadnego dodatku mamy na myśli walec kołowy. Z tego sposobu powstania wynika, że dna walca kołowego są kołami przystającemi a pobocznica składa się z samych linii prostych równoległych. Ta pobocznica jest jednakże powierzchnią krzywą, bo linia prosta mająca z nią dwa punkty wspólne nie zawsze na niej leży. N. p. sieczna koła przy równoległem przesuwaniu koła zawsze pozostaje sieczną, przecina więc pobocznicę w każdem położeniu tylko w dwóch punktach. Ta powierzchnia krzywa nazywa się powierzchnią walcową. Prostopadłą odległość den od siebie nazywamy wysokością walca. Linię prostą leżącą całkowicie na powierzchni walca nazywamy bokiem walca, n. p. AA'. Linia prosta łącząca środki obydwu podstaw nazywa się osią walca. (Udowodnij, że oś jest równoległa do boku i równa się bokowi!) Jeżeli bok jest prostopadły do podstawy, to i oś jest prostopadła do podstawy, a walec nazywa się prosty; w przeciwnym razie walec jest pochyły.

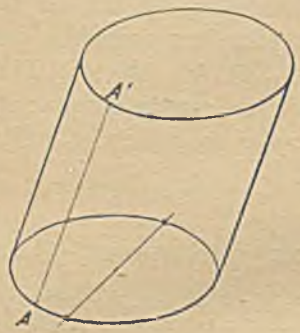


Fig. 302.

Pobocznicę walca można otrzymać także przez inny ruch. Posuwamy prostą AA' wzdłuż obwodu koła zawsze równolegle do pierwotnego położenia. Wtedy koło nazywa się kierownicą powierzchni, a linia prosta AA' tworzącą walca.

Walec jest więc powierzchnią prostoliniową (por. str. 150). (Zastosuj ten sposób otrzymywania także do pobocznicy graniastosłupa!) Jeżeli walec jest prosty, to możemy go także otrzymać przez ruch obrotowy prostokąta około jednego z boków. Dlatego walec prosty nazywamy także walcem obrotowym.

Jeżeli walec przetniemy jakąkolwiek płaszczyzną zawierającą oś walca, otrzymamy równoległobok i to ukośnokątny lub prostokątny. W walcu prostym każdy przekrój osiowy jest prostokątem, w walcu zaś pochyłym tylko jeden przekrój, mianowicie przekrój prostopadły do płaszczyzny zawierającej

nietylko oś, ale i rzut osi. Na fig. 303 jestto przekrój $ABCD$, prostopadły do płaszczyzny zawierającej OR i OO'. Walec prosty, którego przekrój osiowy jest kwadratem, nazywa się równoboczny. W takim walcu bok równa się średnicy podstawy:

$$b = 2r.$$

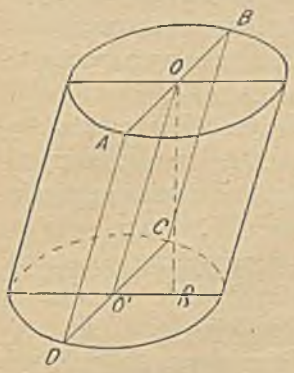


Fig. 303.

Przekrój walca równoległy do podstawy jest kołem. (Dlaczego?)

W przyrodzie występuje walec często: pnie drzew, źdźbła, niektóre kości i t. p. Także w dziełach rąk ludzkich spotykamy się często z tą bryłą: rury, koła i osie maszyn, druty, naczynia, kolumny, sklepienia i t. p.

Aby walec prosty przedstawić w rzutach, ustawiamy go dnem równolegle do płaszczyzny poziomej. Na płaszczyźnie pionowej otrzymamy prostokąt a na płaszczyźnie poziomej jedno koło. Walec pochyły ustawiony dnem równolegle do poziomej płaszczyzny przedstawi się w rzucie pionowym jako równoległobok pochyły, a w rzucie poziomym wystąpią obydwa dna jako koła połączone wspólnemi stycznemi zewnętrznemi.

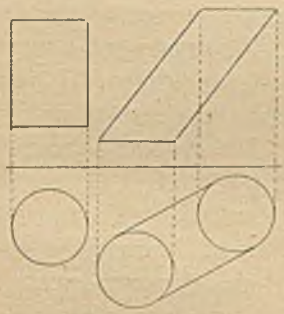


Fig. 304.

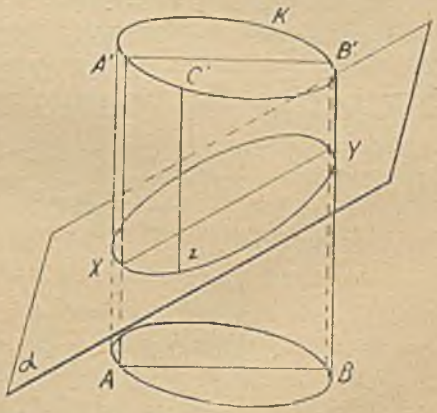


Fig. 305.

Aby walec prosty przedstawić w perspektywie równoległej zauważmy, że ukośny rzut koła jest elipsą. Dno przedstawi się więc jako elipsa. W skrajnych punktach tej elipsy (które wystają w ogólności poza średnicę równoległą do płaszczyzny obrazowej!) kreślimy dwie linie prostopadłe do średnicy AB równoległej do płaszczyzny obrazowej. Na tych liniach odcinamy boki walca w prawdziwej wielkości. Górne dno jest elipsą przystającą do dolnej. (Użyliśmy tu zniekształceń $\alpha = 45^0$, $s = \frac{1}{2}$.) Podobnie postępujemy z walcem pochyłym. Każdy ukośny

rzut koła na płaszczyznę nierównoległą jest — jak to widzieliśmy — elipsą. Stąd ważny wniosek o przekrojach walca przecinających oś w jednym punkcie a nierównoległych do podstawy. Przetnijmy walec płaszczyzną α ukośną względem podstawy. Linię otrzymaną na przekroju możemy uważać za ukośny rzut koła K zapomocą promieni $A' X$, $B' Y$, $C' Z$, ... ukośnych względem płaszczyzny α, a równoległych do siebie.

Linia $X Y$ jest więc elipsą, zatem: *Przekrój walca płaszczyzną nachyloną do osi i do podstawy jest elipsą.* Im więcej odchylamy płaszczyznę przekroju od płaszczyzny dna, tem bardziej wydłuża się elipsa przekroju. W ten sposób można z walca kołowego otrzymać walec eliptyczny pochyły, zapomocą dwóch przekrojów równoległych do siebie, a nachylonych do dna.

Jeżeli walec kołowy jest pochyły, to przekroje równoległe do dna są kołami, przekroje zaś nachylone do dna elipsami. Pomiędzy tymi przekrojami jeden jest prostopadły do krawędzi bocznych. Nazywamy go podobnie jak w graniastosłupie przekrojem normalnym. Otóż przekrój normalny walca pochyłego jest elipsą. Zapomocą dwóch przekrojów normalnych możemy więc otrzymać z walca kołowego pochyłego walec eliptyczny prosty.

Z rozważania walców eliptycznych można wykazać, że każdy rzut elipsy jest znowu elipsą, nie otrzymujemy więc nowego gatunku linii krzywych przez tworzenie rzutu elipsy.

Zbadaliśmy już przekroje osiowe i przekroje przecinające oś. Pozostały jeszcze do omówienia płaszczyzny równoległe do osi. Płaszczyzny takie mogą mieć trojakie położenie względem powierzchni walcowej, podobnie jak linia prosta względem koła. Płaszczyzna równoległa do osi a zawierająca sieczną $D C$ podstawy przecina powierzchnię walcową wzdłuż dwóch tworzących. Możnaby ją nazwać płaszczyzną sieczną. Płaszczyzna równoległa do osi, a zawierająca linię $T A$ styczną do podstawy, *dotyka powierzchni walcowej wzdłuż całej tworzącej* $A A'$ należącej do punktu A. Taka płaszczyzna nazywa się płaszczyzną styczną walca. Wreszcie płaszczyzna równoległa do osi a zawierająca linię leżącą poza kołem O nie przecina zupełnie powierzchni walcowej. Każda linia prosta leżąca w płaszczyźnie stycznej, a nierównoległa do linii styczności $A A'$ ma z powierzchnią walcową tylko jeden punkt wspólny, jest więc linią styczną do walca. Z każdego punktu poza walcem można poprowadzić dwie płaszczy-

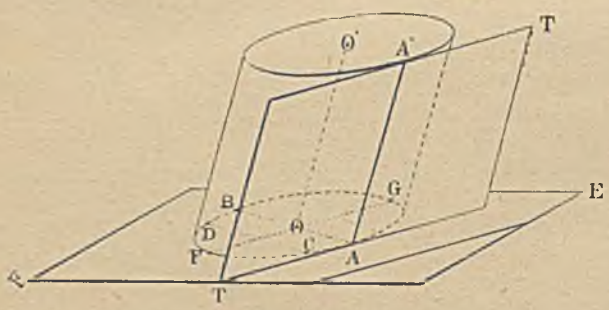


Fig. 306.

zny styczne do powierzchni walcowej; ich krawędź musi być równoległa do osi. (Udowodnij!) Jeżeli wszystkie ściany boczne jakiegoś graniastosłupa są płaszczyznami stycznemi walca, a dna są opisane na dnach walca, graniastosłup nazywa się opisany na walcu. Jeżeli wszystkie ściany boczne graniastosłupa są płaszczyznami siecznemi walca, a dna są wpisane w dna walca, graniastosłup jest wpisany w walec. Pobocznicę walca możemy uważać za granicę, do jakiej dążą pobocznice graniastosłupów wpisanych lub opisanych o corazto większej liczbie ścian bocznych, podobnie jak obwód koła badaliśmy przy pomocy wielokątów wpisanych lub opisanych. Posiadamy jednakże prostsze sposoby obliczenia wielkości tej powierzchni krzywej.

§ 110. Rozwijanie walca. Powierzchnia walca.

Celem obliczenia powierzchni graniastosłupa tworzyliśmy jego siatkę przez rozwinięcie pobocznicy. Pobocznica walca jest powierzchnią krzywą prostoliniową. Zachodzi pytanie, czy ta powierzchnia jest rozwijalną, to znaczy, czy można tę pobocznicę rozciętą n. p. wzdłuż jednej tworzącej, rozwinąć na płaszczyznę tak, aby nie powstało żadne zmarszczenie ani rozciągnięcie, zmieniające wielkość tej powierzchni słowem: aby *nie doznały zmiany ani długości linii znajdujących się na powierzchni ani kąty.* Otóż rozwinięcie takie jest możliwe, ponieważ wszystkie boki walca są równoległe. Istnieje taki skończony ruch, n. p. toczenie walca po płaszczyźnie, że wszystkie boki poukładają się znowu jako linie równoległe a ani długości, ani kąty nie zostaną zmienione.

Jeżeli walec jest prosty, to z takiego rozwinięcia otrzymamy prostokąt, ponieważ boki, jako linie prostopadłe do podstawy, pozostaną i po rozwinięciu prostopadłe do jej obwodu (rozwiniętego). Podstawą tego prostokąta jest obwód dna, a wysokością bok walca. Stąd obliczymy całą powierzchnię:

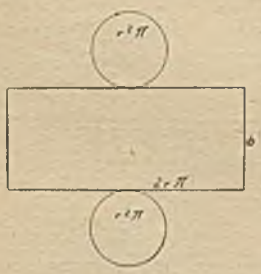


Fig. 307.

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi \,.\, b$$

lub wyłączając $2r\pi$ przed nawias:

$$P = 2r\pi(r + b).$$

Jeżeli walec jest równoboczny, to $b = 2r$ więc

$$P = 2r\pi \,.\, 3r$$

czyli:

$$P = 6r^2\pi.$$

Wzory te odnoszą się tylko do walców prostych.

* Jeżeli walec kołowy jest pochyły, to rozwinięcie jest zagadnieniem trudniejszem. Ustawiając taki walec dogodnie, t. j. tak, aby jego były boki prostopadłe do płaszczyzny poziomej a dno prostopadłe do płaszczyzny pionowej,

otrzymamy elipsę jako rzut podstawy. Elipsa ta jest przystająca do przekroju normalnego $A\,B$. Rozwinięcie obwodu tej elipsy jest już zagadnieniem wkraczającem w zakres matematyki wyższej. W przybliżeniu możemy wykonać konstrukcyę, biorąc małe kawałki obwodu elipsy po kolei w cyrkiel i odcinając je na jednej linii prostej $R\,R'$. Następnie w odpowiednich punktach odmierzamy kawałki krawędzi bocznych do góry i na dół. (Porównaj rozwinięcie graniastosłupa pochyłego.) Otrzymamy w ten sposób pas zamknięty liniami krzywemi falistemi, które nazywamy: sinusoidami. Z liniami temi spotkamy się w nauce trygonometryi.

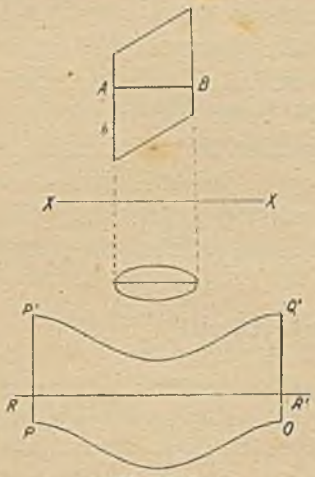


Fig. 308.

Pas taki można zamienić na prostokąt, przenosząc część jego leżącą nad osią $R\,R'$ na dół tak, aby $P'\,Q'$ nakryło $P\,Q$. Prostokąt ten ma wysokość równą bokowi walca pochyłego a podstawa jego jest rozwiniętym obwodem elipsy $A\,B$. Jestto więc zarazem rozwinięcie walca prostego eliptycznego. *

Przy rozwijaniu pobocznicy walca jego tworzące pozostały liniami prostemi. Istnieją jednakowoż także inne linie leżące na walcu, które po rozwinięciu przedstawią się jako proste. I tak przedewszystkiem każdy przekrój normalny do osi (koło w walcu prostym, elipsa w walcu pochyłym) przedstawi się w rozwiniętej pobocznicy, jako linia prosta. Aby znaleźć inne linie przedstawiające się po rozwinięciu jako linie proste, narysujmy na rozwiniętej pobocznicy jakąkolwiek linię prostą ukośnie względem podstawy prostokąta. Ona przecina wszystkie tworzące pod tymsamym kątem, a więc i po zwinięciu pobocznicy te kąty nie ulegną zmianie. Otrzymamy na walcu linię *krzywą, która wznosi się przecinając wszystkie tworzące pod tymsamym kątem.* Taką linię nazywamy *linią śrubową.*

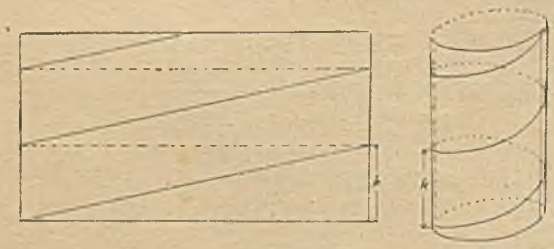


Fig. 309.

Jeżeli poprowadzimy kilka takich linii równoległych na pobocznicy, ale zaczniemy drugą w tej wysokości, w której się kończy pierwsza linia, otrzymamy po zwinięciu kilka *skrętów śruby.* Wysokość k jednego skrętu nazywa się krokiem śruby.

Długość linii śrubowej łatwo obliczymy przy pomocy twierdzenia Pitagorasa znając obwód walca i krok śruby. Linii tej używa się często w mechanice teoretycznej i stosowanej (por. ruch śrubowy str. 194).

Ćwiczenia X [1]).

§ 107. 1. Wykazać, że wielokąt zakreśla graniastosłup, jeżeli trzy wierzchołki wielokąta posuwają się po trzech liniach prostych równoległych.

2. Wykazać, że graniastosłup wieloboczny można podzielić na same graniastosłupy trójboczne zapomocą przekrojów poprowadzonych przez przeciwległe krawędzie boczne.

3. Wykreślić w rzutach graniastosłup umiarowy o podstawie sześciobocznej, znając krawędź podstawy $a = 1$ *cm* i wysokość $b = 5$ *cm*. Tensam rysunek wykonać w perspektywie równoległej.

4. Wykreślić w rzutach graniastosłup pochyły, którego podstawą jest sześciokąt umiarowy o boku $a = 1$ *cm*, a krawędź boczna $b = 6$ *cm* jest nachylona do podstawy pod kątem 60^0. Tensam graniastosłup wykreślić w perspektywie.

5. Mając dany dowolny graniastosłup pięcioboczny w rzutach, wykreślić go w perspektywie równoległej (ukośnej).

6. Narysować w rzutach graniastosłup ośmioboczny umiarowy ustawiony dnem równolegle do płaszczyzny pionowej.

7. Wykazać, że cztery przekątnie równoległościanu przecinają się w jednym punkcie.

8. Obliczyć przekątnię sześcianu znając jedną krawędź.

9. Pokój ma długość 7 *m*, szerokość 4 *m* a wysokość 5 *m*. Obliczyć odległość dwóch najdalszych kątów bryłowych.

10. Jakie obroty może wykonywać prostopadłościan, aby zajął zawsze tosamo miejsce w przestrzeni?

11. Jakie płaszczyzny, osie i środki symetryi posiada: *a*) równoległościan prosty i prostokątny; *b*) równoległościan prosty ukośnokątny; *c*) równoległościan pochyły o podstawie prostokątnej.

12. Ile wynosi suma kątów płaskich w graniastosłupie 4-bocznym, 5-bocznym, *n*-bocznym?

13. Ile wynosi suma kątów dwuściennych leżących przy krawędziach bocznych w graniastosłupie 4-. 5-. . . *n*-bocznym?

§ 108. 14. Wykonać z kartonu model graniastosłupa opisanego w zadaniu 3) w powiększeniu dwukrotnem (pod względem długości krawędzi).

* 15. Wykonać z kartonu model graniastosłupa opisanego w zadaniu 4) w powiększeniu dwukrotnem (pod względem długości krawędzi).

16. Wykonać rozwinięcie dowolnego graniastosłupa prostego danego zapomocą rzutów.

* 17. Wykonać rozwinięcie dowolnego sześciobocznego graniastosłupa pochyłego danego w rzutach, przyczem przekrój normalny jest równoległy do płaszczyzny poziomej, a dno prostopadłe do płaszczyzny pionowej.

18. Mając podany graniastosłup prosty w rzutach, przeciąć go płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny pionowej.

Przerysować ten graniastosłup wraz z przekrojem w perspektywie równoległej.

---

[1]) Przykłady na obliczanie powierzchni graniastosłupów i walców znajdują się w zbiorze zadań Kranza str. 94 i 98.

* 19. Wykonać rozwinięcie pobocznicy graniastosłupa z poprzedniego zadania wraz z przekrojem.

20. Mając narysowany dowolny graniastosłup pięcioboczny w perspektywie równoległej, wykonać jego rozwinięcie.

21. Obliczyć powierzchnię kostki, której przekątnia wynosi 12 *cm*.

22. Obliczyć powierzchnię prostopadłościanu, znając trzy krawędzie schodzące się w jednem narożu.

23. Ile razy powiększy się powierzchnia kostki, jeżeli się krawędź powiększy dwa, trzy, cztery razy?

24. Obliczyć powierzchnię graniastosłupa umiarowego sześciobocznego, znając promień podstawy i wysokość.

25. Obliczyć powierzchnię graniastosłupa umiarowego: *a*) trójbocznego; *b*) czworobocznego; *c*) pięciobocznego; *d*) ośmiobocznego, znając wysokość i promień koła opisanego na podstawie n. p. $w = 10\ cm$, $r = 2\ cm$.

26. Obliczyć powierzchnię bryły powstałej z sześcianu przez odcięcie ośmiu naroży zapomocą płaszczyzn odcinających czwartą część każdej krawędzi. Narysuj tę bryłę w rzutach i w perspektywie!

27. Obliczyć powierzchnię graniastosłupa umiarowego: *a*) sześciobocznego; *b*) ośmiobocznego; jeżeli wszystkie krawędzie i boczne i podstawowe są równe (n. p. $k = 2\ cm$). Narysować te bryły w rzutach i perspektywie!

§ 109. 28. Wykazać, że powierzchnia walcowa jest utworem dwuwymiarowym, t. j. że można się po niej posuwać od każdego punktu tylko w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach.

29. Narysować w rzutach i w perspektywie walec prosty, znając promień podstawy $r = 2\ cm$ i bok $b = 6\ cm$.

30. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej walec kołowy, którego promień podstawy $r = 2\ cm$ a bok wynosi $b = 8\ cm$ i jest nachylony do podstawy pod kątem 75^0.

31. W walcu opisanym w poprzedniem zadaniu wykreślić przecięcie osiowe zawierające rzut osi.

32. Mając dany dowolny walec prosty w rzutach, narysować go w perspektywie równoległej.

33. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej walec prosty przecięty płaszczyzną do płaszczyzny pionowej a nachyloną do poziomej. W jakiej płaszczyźnie leży oś wielka elipsy przekroju, a w jakiej oś mała?

34. Mając walec podany w rzutach, znaleźć taki przekrój ukośny, aby oś wielka elipsy przekroju była dwa razy większa od osi małej. Narysować ten przekrój w prawdziwej wielkości.

35. Koło oświecone promieniami równoległymi, a prostopadłymi do jego płaszczyzny, rzuca cień na płaszczyznę nachyloną pod kątem 60^0 do promieni światła. Narysować to w perspektywie a osobno cień w prawdziwej wielkości.

36. Do dowolnego walca narysowanego w perspektywie równoległej a spoczywającego na płaszczyźnie poprowadzić płaszczyznę styczną wzdłuż tworzącej AA'. Trzeba najpierw znaleźć styczną do elipsy przedstawiającej dno walca. Por. fig. 306.

37. Z punktu poza walcem poprowadzić dwie płaszczyzny styczne do niego (w perspektywie równoległej).

38. Jakie płaszczyzny, osie i środki symetryi posiada: *a*) walec prosty; *b*) walec pochyły?

39. Wykonać rozwinięcie dowolnego walca prostego danego: *a*) w rzutach; *b*) w perspektywie równoległej o znanem zniekształceniu.

40. Wyciąć z kartonu siatkę walca prostego o promieniu $r = 4$ *cm* a o wysokości $b = 6$ *cm* i skleić model.

41. Sporządzić model walca równobocznego o wysokości 5 *cm*.

* 42. Walec pochyły dany zapomocą rzutów (por. fig. 308) rozwinąć na płaszczyźnie przybliżoną konstrukcyą. Wykonać model!

43. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej rurę walcową o średnicy wewnętrznej 1 *cm*, a o grubości 3 *mm*. Długość rury 7 *cm*.

44. Obliczyć powierzchnię walca równobocznego o wysokości 6 *cm*.

45. Obliczyć powierzchnię walca prostego, którego bok wynosi 3 *cm* a promień podstawy 1 *cm*.

46. Wykazać, że prostokąt zakreśla pobocznicę walca o takiejsamej powierzchni bez względu na to, czy się obraca koło dłuższego, czy koło krótszego boku.

47. Obliczyć powierzchnię rury walcowej opisanej w zadaniu 43.

48. Obliczyć wysokość walca równobocznego, którego powierzchnia $P = 1 m^2$.

49. Obliczyć powierzchnię walca prostego wpisanego w graniastosłup umiarowy sześcioboczny, znając bok sześciokąta ($a = 12$ *mm*) i wysokość graniastosłupa $w = 1$ *dm*. Rysunek!

50. Obliczyć powierzchnię walca, opisanego na prostopadłościanie o krawędziach $a = 3$ *cm*; $b = 4$ *cm*; $c = 5$ *cm*. Rysunek!

51. W jakim stosunku powiększy się powierzchnia walca prostego, jeżeli promień i wysokość powiększymy pięciokrotnie?

52. Wycięto część walca zapomocą dwóch przecięć osiowych tworzących kąt 60^0. Obliczyć powierzchnię bryły wyciętej, znając promień walca $r = 2$ *cm* i wysokość $b = 5$ *cm*. Narysuj w rzutach i w perspektywie!

53. Ile dm^2 blachy trzeba użyć na zrobienie koryta ogranicznego połową pobocznicy walca i dwoma półkolami. Długość 4 *m*, głębokość 3·2 *dm*. Narysować tę bryłę w położeniu poziomem w pomniejszeniu 1 : 40.

54. Na walcu, którego promień $r = 3$ *cm*, a wysokość $w = 8$ *cm*, znajduje się 16 skrętów śruby. Obliczyć długość linii śrubowej!

55. Długość linii śrubowej tworzącej jeden skręt wynosi 24 *dm*, a wysokość walca 15 *dm*. Ile wynosi jego powierzchnia?

Rozdział XI.

Ostrosłupy i stożki.

§ 111. Ostrosłupy.

Dowolny punkt S leżący nad płaszczyzną wielokąta $ABCDE$ połączmy z punktem A i obracajmy prostą SA około punktu S tak, aby się ślizgała po obwodzie wielokąta. Powstanie przestrzeń zamknięta, a więc bryła, zwana ostrosłupem. Wielokąt $ABCDE$ nazywa się podstawą, punkt S wierzchołkiem, a trójkąty SAB, SBC . . . ścianami bocznemi; ich zbiór nazywamy pobocznicą. Ostrosłup jestto więc bryła, ograniczona jednym wielokątem i tyloma ścianami bocznemi schodzącemi się w jednym punkcie, ile dno ma boków. Można także prościej opisać ostrosłup. Jestto bryła, która powstanie, jeżeli jakiekolwiek naroże przetniemy płaszczyzną przechodzącą przez wszystkie krawędzie.

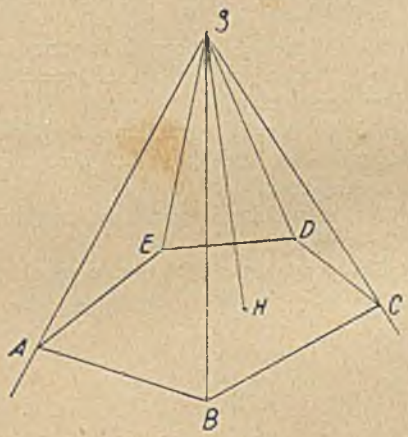


Fig. 310.

Prostą SA, której ruch zakreślił pobocznicę, nazywamy tworzącą, a wielokąt $ABCDE$ kierownicą tej powierzchni. Odcinki tworzących zawarte między wierzchołkiem a podstawą nazywamy krawędziami bocznemi lub bokami ostrosłupa. Boki dna nazywamy krawędziami podstawowemi. Odległość wierzchołka od podstawy nazywamy wysokością ostrosłupa SH. Trzeba wyraźnie odróżniać wysokość ostrosłupa od wysokości ścian bocznych!

Według liczby ścian bocznych rozróżniamy ostrosłupy trójboczne, czworoboczne i t. d. Ostrosłup trójboczny nazywamy także często czworościanem. Mniej ścian nie może mieć żadna bryła graniasta (wielościan). W każdym

czworościanie istnieje punkt równo oddalony od wszystkich wierzchołków i punkt równo oddalony od wszystkich ścian. (Udowadnia się przy pomocy płaszczyzn symetryi krawędzi i kątów dwuściennych.) Podobnie jak w planimetryi przy rozważaniu wielokątów rozkłada się je na trójkąty, tak w stereometryi rozkłada się często wielościany na same czworościany. Każdą ścianę czworościanu możemy uważać za podstawę ostrosłupa. Jeżeli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są równe, to ich rzuty na podstawę są równe, więc punkty A, B, C, D, E leżą wtedy na obwodzie koła, którego środkiem jest spodek wysokości (rzut punktu S) a promieniem odległość jego od któregokolwiek wierzchołka podstawy. Taki ostrosłup, którego krawędzie boczne są równe, nazywamy prostym.

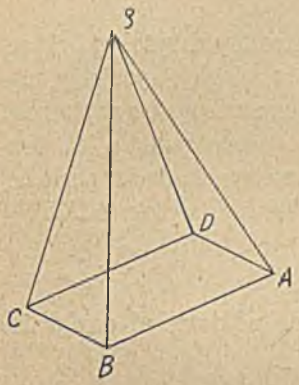


Fig. 311.

Uwaga: Określenie to nie zgadza się z tem, co pospolicie uważamy za ostrosłup prosty. N. p. ostrosłup o podstawie rombowej, którego wierzchołek leży prostopadle nad środkiem podstawy nazwiemy w potocznem życiu prostym, bo nie pochyla się w żadną stronę. Jednakowoż według naszego określenia nie jest prostym, bo $SA > SB$, a więc krawędzie boczne nie są równe.

Dnem ostrosłupa prostego może być tylko taki wielokąt, na którym da się opisać kolo. Jeżeli w ostrosłupie prostym dno jest wielokątem umiarowym, ostrosłup nazywamy umiarowym. Jeżeli dno jest trójkątem równobocznym, a przytem krawędzie boczne są równe krawędziom podstawy, to wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi. Z tego wynika, że i wszystkie naroża są przystające (por. str. 203). Bryłę taką zaliczamy do wielościanów umiarowych i nazywamy czworościanem umiarowym. Inny wielościan umiarowy otrzymamy z ostrosłupa umiarowego czworościennego, którego krawędź podstawy równa się krawędzi bocznej. Dwa takie ostrosłupy złączone podstawami, a których wierzchołki leżą po przeciwnych stronach podstawy, tworzą ośmiościan umiarowy. Wszystkie jego ściany są trójkątami równobocznymi a wszystkie naroża są przystające, można bowiem każde złożyć z dwóch parami przystających naroży trojściennych (o kątach płaskich $\alpha = 60$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 90^0$).

Fig. 312.

Ostrosłupy występują w naturze często, jako postacie kryształów. Rzadziej spotykamy je jako dzieła rąk ludzkich (niektóre dachy, ostrza i t. p.). Natomiast bardzo często mamy do czynienia z ostrosłupami przy wykonywaniu rysunków, w nauce o perspektywie, o cieniach. Jeżeli bowiem jakikolwiek pęk promieni przetniemy płaszczyzną, powstaje ostrosłup, którego wierzchołkiem jest wierzchołek pęku.

Aby ostrosłup przedstawić w rzutach, ustawiamy go tak, aby dno było równoległe do płaszczyzny poziomej. W rzucie pionowym (widok z przodu) otrzymamy trójkąt z kilkoma liniami poprowadzonemi od wierzchołka do podstawy; w rzucie poziomym (widok z góry!) przedstawi się ostrosłup jako wielokąt przystający do dna, w którym pewien punkt leżący na jego polu jest połączony z wszystkimi wierzchołkami. Jeżeli ostrosłup jest prosty, punkt ten jest środkiem koła opisanego.

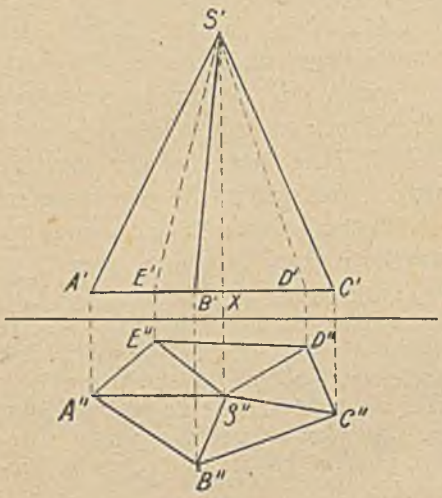


Fig. 313.

Aby ostrosłup narysować w perspektywie równoległej, rysujemy najpierw dno w znany sposób; w punkcie, który jest obrazem punktu S'', kreślimy linię prostopadłą do osi poziomej i odcinamy na niej wysokość XS'.

§ 112. Powierzchnia ostrosłupa. Siatka.

Aby obliczyć powierzchnię ostrosłupa, trzeba do powierzchni dna dodać powierzchnię pobocznicy.

$$P = D + M.$$

Jeżeli ostrosłup jest umiarowy $n =$ boczny, to ściany boczne są przystającymi trójkątami (dlaczego?), a więc powierzchnia pobocznicy wynosi:

$$M = \frac{n a h}{2}$$

gdzie a oznacza krawędź podstawy, a h wysokość ściany bocznej. Dla ostrosłupów nieumiarowych trzeba każdą ścianę boczną osobno obliczać.

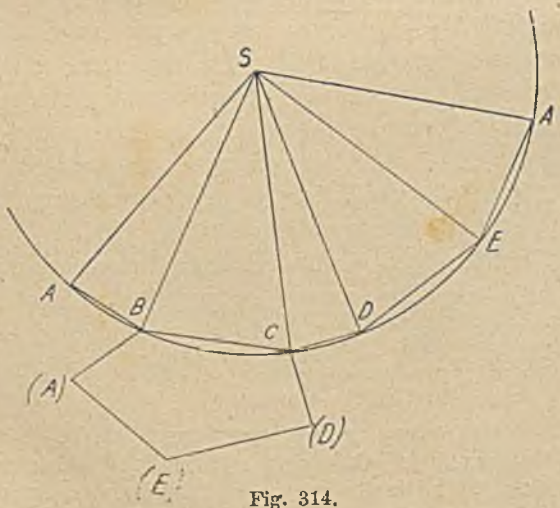


Fig. 314.

Rozwinięcie ostrosłupa prostego podanego w rzutach jest trudniejsze, ponieważ krawędzie boczne nie występują w prawdziwej wielkości ani w rzucie pionowym, ani w rzucie poziomym. Trzeba obrócić cały ostrosłup tak, aby jedna krawędź boczna była równoległa do

płaszczyzny pionowej. Na fig. 313 obraliśmy już takie położenie, że krawędź SA jest równoległa do płaszczyzny pionowej, więc $S'A'$ jest prawdziwą długością krawędzi ($S'C'$ już nie!). Ponieważ i wszystkie inne krawędzie boczne mają tęsamą wielkość, rozwinięcie pobocznicy da się już wykonać. Zakreślamy promieniem $S'A'$ koło i odcinamy po kolei cięciwy $AB = A''B''$, $BC = B''C''$, $CD = C''D''$ i t. d.; ich końce łączymy z punktem S. Przy jednym z boków, n. p. przy BC rysujemy wielokąt

$$(A)BC(D)(E) \simeq A''B''C''D''E''.$$

Jeżeli ostrosłup jest pochyły, rozwinięcie jest już trudniejsze.

§ 113. Ostrosłup ścięty. Podobieństwo brył.

Z przekrojów ostrosłupa najważniejszy jest dla nas przekrój równoległy do podstawy. Poprowadźmy płaszczyznę: $k \parallel K$. Krawędzie przekroju są równoległe do krawędzi podstawy; wskutek tego odpowiednie kąty wielokątów K i k są równe:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \sphericalangle B = \sphericalangle B', \sphericalangle C = \sphericalangle C' \ldots$$

Boki wielokątów K i k są proporcyonalne, albowiem

$$AB : A'B' = SB : SB' = BC : B'C'$$

a więc $AB : A'B' = BC : B'C'$.

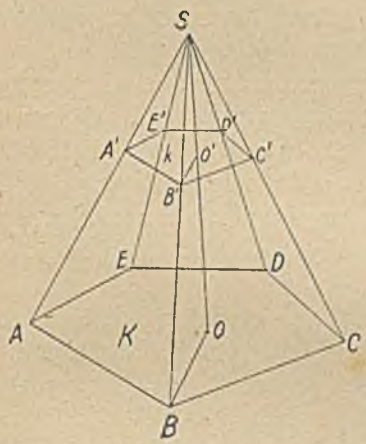


Fig. 315.

Stąd wniosek: Przekrój ostrosłupa płaszczyzną równoległą do podstawy jest wielokątem podobnym do podstawy.

Powierzchnie figur podobnych mają się do siebie, jak kwadraty odpowiednich boków, więc

$$K : k = AB^2 : A'B'^2.$$

Ale $AB : A'B' = SB : S'B' = SO : SO'$ więc

$$K : k = SO^2 : SO'^2$$ słowami:

Powierzchnie podstawy i przekroju równoległego tak się mają do siebie, jak kwadraty ich odległości od wierzchołka.

Twierdzenie to odnosi się do dowolnego pęku promieni przeciętego dwoma równoległemi płaszczyznami. Stosując to twierdzenie n. p. do optyki widzimy, że, jeżeli pęk promieni światła pada na dwie płaszczyzny równoległe, to źródło światła oświetla z odległości 3, 4, 5 razy większej powierzchnię 9, 16, 25 razy większą. Wobec tego natężenie światła słabnie w stosunku do kwadratu odległości.

Bryłę powstałą z ostrosłupa przez odcięcie mniejszego ostrosłupa zapomocą płaszczyzny równoległej do dna nazywamy ostrosłupem ściętym. Jest on ograniczony dwoma równoległemi i podobnemi do siebie dnami i tyloma

trapezami (ścianami bocznemi), ile dno ma boków. Więc powierzchnia ostrosłupa ściętego wynosi:

$$P = D + d + M.$$

Co nazwiemy wysokością ostrosłupa ściętego? Co nazwiemy wysokością ściany bocznej? Jakie bryły z życia codziennego są ostrosłupami ściętymi?

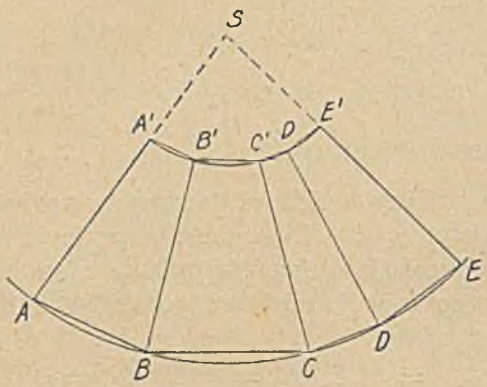


Fig. 316.

Rozwinięcie ostrosłupa ściętego najłatwiej wykonać, uzupełniając go do zwykłego ostrosłupa. Fig. 316 wyjaśnia dostatecznie konstrukcyę, potrzebną do rozwinięcia pobocznicy ostrosłupa ściętego.

Opierając się na podobieństwie figur K i k (fig. 315) możemy teraz rozszerzyć pojęcie figur podobnych także na utwory przestrzenne. Dwie bryły nazywamy podobnemi, jeżeli dadzą się ustawić w jednym pęku promieni tak, aby wszystkie płaszczyzny tych brył były parami równoległe, a odpowiednie naroża aby leżały na tychsamych promieniach.

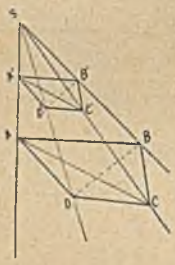


Fig. 317.

Wierzchołek pęku S nazywa się środkiem podobieństwa zewnętrznym lub wewnętrznym według tego, czy obydwie bryły leżą po tejsamej stronie punktu S, czy też po przeciwnych stronach. W takich bryłach wszystkie odcinki są parami proporcyonalne, a wszystkie odpowiednie kąty równe.

Możemy więc uważać jedną bryłę za pomniejszenie (lub powiększenie) drugiej, z zachowaniem kształtów. Wykażemy to dla dowolnego czworościanu, z czworościanów bowiem można złożyć każdą inną bryłę graniastą (a bryły okrągłe możemy uważać za granice, do jakich dążą bryły graniaste). Otóż wykazaliśmy już, że $AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$, ponieważ płaszczyzny trójkątów ABC i $A'B'C'$ są równoległe. Taksamo $AC : A'C' = DC : D'C' = AD : A'D'$, a wreszcie $AD : A'D' = DB : D'B'$, a więc wszystkie krawędzie obydwu czworościanów są proporcyonalne. Krawędzie te są równoległe, więc wszystkie kąty płaskie są równe, a stąd już wynika równość kątów dwuściennych i przystawanie kątów bryłowych trójściennych.

Można udowodnić, że także odwrotnie: jeżeli dwie bryły mają wszystkie krawędzie proporcyonalne a kąty równe i jeżeli odpowiednie części następują po sobie w tymsamym porządku w obydwu bryłach, to bryły te dadzą się wstawić w tensam pęk promieni tak, że odpowiednie ściany będą równoległe.

Otóż proporcyonalność odcinków i równość kątów są charakterystyczną cechą brył podobnych. Można więc także przy pomocy tej własności określić podobieństwo utworów przestrzennych.

§ 114. Stożek.

Podobnie, jak ostrosłup powstał przez ruch linii prostej przytwierdzonej w jednym punkcie po obwodzie wielokąta, tak stożek powstaje przez ruch linii prostej przytwierdzonej w jednym punkcie po obwodzie dowolnej linii krzywej. Ta linia prosta nazywa się tworzącą stożka, a linia krzywa, po której się ślizga tworząca, nazywa się kierownicą stożka. Jeżeli kierownica jest kołem, stożek nazywa się kołowy. Kierownicę nazywamy także podstawą stożka, a stały punkt S wierzchołkiem. Stożek kołowy jest więc ograniczony jedną powierzchnią płaską, mianowicie kołem i pobocznicą, która jest powierzchnią krzywą, ale prostoliniową. Taka powierzchnia krzywa nazywa się powierzchnią stożkową. Odcinek tworzącej zawarty między wierzchołkiem a podstawą nazywa się bokiem stożka. Prostopadła odległość wierzchołka S od podstawy nazywa się wysokością, a prosta łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy osią stożka.

Fig. 318.

Jeżeli boki stożka są wszystkie równe, stożek nazywa się prosty, w przeciwnym razie pochyły. W stożku prostym wierzchołek leży na linii prostopadłej do podstawy wykreślonej w jej środku; oś jest więc w nim zarazem wysokością. Każdy przekrój stożka płaszczyzną przechodzącą przez oś jest trójkątem. Jeżeli stożek jest prosty, przecięcie osiowe jest trójkątem równoramiennym. (Czy w stożku pochyłym jest jakie przecięcie osiowe trójkątem równoramiennym?) Jeżeli prócz tego bok równa się średnicy podstawy:

$$b = 2r$$

to przecięcie osiowe jest trójkątem równobocznym, a stożek nazywa się stożkiem równobocznym.

(Przez jaki ruch obrotowy można otrzymać stożek prosty?)

Aby stożek przedstawić w rzutach, ustawiamy go równolegle do płaszczyzny poziomej i otrzymujemy fig. 319 *a*) lub *b*) dla stożka prostego i pochyłego. Przedstawienie stożka w perspektywie równoległej nie sprawia żadnej trudności, skoro potrafimy narysować dno w perspektywie.

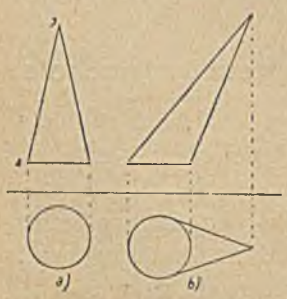


Fig. 319.

§ 115. Powierzchnia stożka. Siatka.

Aby obliczyć powierzchnię stożka, postępujemy taksamo, jak z walcem, korzystając z tego, że pobocznica stożka jest także powierzchnią rozwijalną. Rozwinięcie to wykonujemy mechanicznie, tocząc stożek po płaszczyźnie tak, aby punkt S pozostał nieruchomy. Na modelu można także wykonać rozwinięcie, przecinając pobocznicę wzdłuż tworzącej.

Dla stożka prostego możemy łatwo wykonać to rozwinięcie konstrukcyjnie. Ponieważ boki stożka prostego są równe i wychodzą także w rozwiniętej pobocznicy z jednego punktu S, przeto ich końce leżą na obwodzie koła o promieniu $SA = b$ (b = bok). Otrzymamy więc wycinek koła, którego łuk równa się obwodowi podstawy stożka. Na pobocznicę stożka otrzymujemy więc wzór:

Fig. 320.

$$M = 2r\pi \cdot \frac{b}{2} = r\pi b.$$

Cała powierzchnia wynosi:

$$P = r^2\pi + r\pi b = r\pi(r + b).$$

Jeżeli stożek jest równoboczny, to $b = 2r$, więc

$$P = r\pi . 3r \quad \text{czyli:} \quad P = 3r^2\pi.$$

Konstrukcyę tę łatwo wykonać, jeżeli podane są rzuty stożka, bo w rzucie pionowym występuje bok SA w prawdziwej wielkości. Wszystko to dotyczy stożka prostego. Dla stożka pochyłego zadanie to jest o wiele trudniejsze.

Z góry można przewidzieć, że przy toczeniu się stożka pochyłego około punktu S podstawa zakreśli linię krzywą, składającą się z falistych wzniesień i obniżeń. Najpierw bowiem będzie się stykał z płaszczyzną bok najdłuższy, więc odpowiedni punkt rozwiniętej pobocznicy będzie leżał najdalej od punktu S. Później styka się z płaszczyzną bok corazto krótszy, wreszcie najkrótszy bok zaznaczy miejsce, w którem linia rozwiniętej podstawy najbardziej się zbliży do S. Stąd począwszy znowu się oddalamy od S i t. d.

§ 116. Przekroje stożka przechodzące przez wierzchołek i przekroje równoległe do podstawy.

Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek stożka albo wcale nie przecina jego pobocznicy (poza S), albo ma z nią całą tworzącą wspólną i nazywa się płaszczyzną styczną, albo przecina pobocznicę wzdłuż dwóch tworzących. Z każdego punktu poza stożkiem można do niego poprowadzić dwie płaszczyzny styczne: ich krawędź przecięcia się musi przechodzić przez wierzchołek stożka, albowiem dwie linie tworzące, wzdłuż których

te płaszczyzny dotykają stożka, przechodzą przez wierzchołek. Konstrukcyę płaszczyzny stycznej do stożka narysowanego w perspektywie równoległej w punkcie A wyjaśnia fig. 321. Kiedy ostrosłup nazwiemy opisanym na stożku, a kiedy wpisanym w stożek?

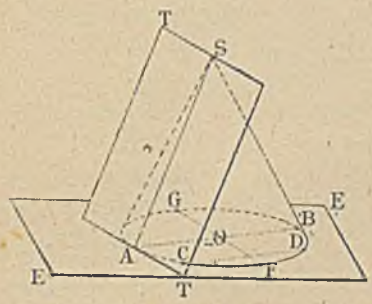


Fig. 321.

Zbadajmy teraz przekroje równoległe do dna. Wykażemy przedewszystkiem, że taki przekrój jest kołem. Otóż z trójkątów SAO i SCO (na fig. 322) widzimy, że

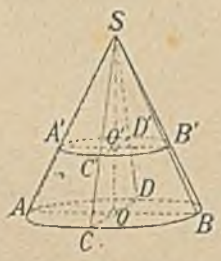


Fig. 322.

$$\left.\begin{array}{l} AO : A'O' = SO : SO' \\ CO : C'O' = SO : SO' \end{array}\right\}$$ z tych dwóch proporcyi wynika trzecia:

$AO : A'O' = CO : C'O'$. Ale $AO = CO$ jako promienie koła, więc musi być także $A'O' = C'O'$. Taksamo wszystkie inne punkty przekroju są równo oddalone od punktu O', a więc ten przekrój jest kołem.

Łatwo teraz wykazać, podobnie jak dla ostrosłupa, że powierzchnie obydwu kół tak się mają do siebie, jak kwadraty ich odległości od wierzchołka (udowodnij!).

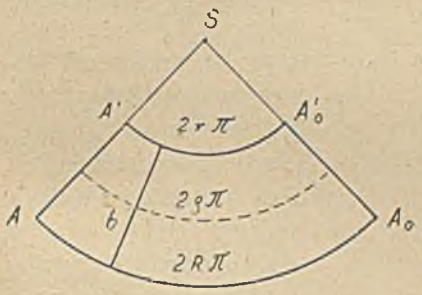


Fig. 323.

Bryłę pozostałą po odcięciu górnego stożka nazywamy stożkiem ściętym. Jest on ograniczony dwoma równoległemi kołami i pobocznicą krzywą, która jest częścią powierzchni stożkowej. Więc:

$$P = D + d + M.$$

Jeżeli stożek prosty, pobocznicę tę łatwo rozwinąć. Rozwijamy najpierw pobocznicę całego stożka SAA_0 i odcinamy od niej pobocznicę stożka odciętego $SA'A'_0$. Figura pozostała jest wycinkiem pierścienia kołowego, czyli trapezem kołowym. Jego bokami równoległymi są obwody den a szerokością bok stożka ściętego. Zatem:

$$M = \frac{2R\pi + 2r\pi}{2} b = (R + r)\pi b.$$

Wprowadzając w ten wzór zamiast $\frac{R+r}{2}$ promień ρ przekroju średniego, otrzymamy ważny wzór:

$$M = 2\rho\pi b.$$

Pobocznica stożka ściętego prostego równa się obwodowi przekroju średniego pomnożonemu przez bok.

Wzór na obliczenie całej powierzchni stożka ściętego prostego jest:

$$P = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)\pi b$$

lub wyciągając π za nawias:

$$P = [R^2 + r^2 + (R + r)\, b]\, \pi.$$

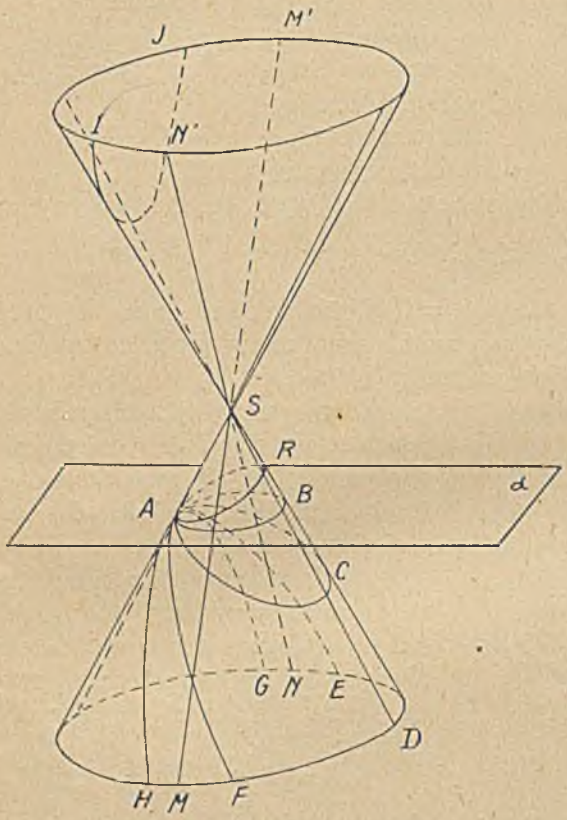


Fig. 324.

§ 117. Ukośne przekroje stożka.

Dla dokładniejszego rozpatrzenia istoty przekrojów stożka weźmy pod uwagę stożek podwójny, powstający przez przedłużenie pobocznicy stożka poza wierzchołek. (Stożki te są symetryczne względem wierzchołka.) Narysujmy najpierw przekrój kołowy AB równoległy do podstawy. Jeżeli płaszczyznę pochylamy ku dołowi (obracając koło p. A) to przekrój wydłuża się, koło AB spłaszcza się i otrzymujemy elipsy AC, AD... coraz bardziej wydłużone. Że to są istotnie elipsy, tesame, które poznaliśmy przy przekrojach walca, udowodnimy później. Jeżeli płaszczyznę α obrócimy tak, aby była równoległa do tworzącej SD, to linia przekroju EAF nie zamknie się nigdzie, chociażbyśmy powierzchnię stożka dowolnie przedłużyli. Tworzącej SD ta płaszczyzna nigdy nie przetnie, a tworzące sąsiednie do SD przetnie bardzo daleko. Linia ta nazywa się parabolą. Jeżeli płaszczyznę przekroju obracamy jeszcze dalej, to ona przetnie także i górną część powierzchni stożkowej. Przekrojem będzie więc linia, złożona z dwóch gałęzi. Gałęzie te rozciągają się także nieograniczenie i nie zamykają się nigdzie, ponieważ płaszczyzna przekroju jest teraz równoległa już do dwóch linii tworzących (n. p. na figurze naszej płaszczyzna

przekroju $HAG \ldots IJ$ jest równoległa do tworzących SM i SN). Inne tworzące przecina ta płaszczyzna w odległościach coraz to większych. Linia ta nazywa się hyperbolą. Przy dalszym obrocie otrzymujemy nowe hyperbole; wreszcie płaszczyzna będzie się stykała ze stożkiem wzdłuż tworzącej SA. Stąd począwszy otrzymujemy znowu elipsy $AR \ldots$, aż po wykonaniu obrotu o 180^0 wrócimy znowu do położenia AB.

Wszystkie te linie: koło, elipsę, hyperbolę i parabolę obejmujemy wspólną nazwą: przekroje stożka. Na naszej figurze wszystkie te linie występują w perspektywie. Ich kształt prawdziwy omówimy przy innej sposobności.

* Ponieważ powierzchnię stożkową można uważać za pęk promieni wychodzących z S a przechodzących przez obwód koła, przeto przekroje stożka są rzutami środkowymi koła AB na rozmaite płaszczyzny, nachylone pod różnymi kątami do kierunków promieni rzucających. Widzimy więc, że rzutem koła może być koło, elipsa, hyperbola lub parabole. W perspektywie malarskiej może więc koło występować w takich rozmaitych postaciach; cieniem koła może być elipsa, parabola lub gałąź hyperboli. (Jaki musi być kierunek światła, aby te linie otrzymać?) Każdą elipsę, hyperbolę lub parabolę można także odwrotnie uważać za przekrój odpowiednio dobranego stożka kołowego. Wszystkie te linie są więc ze sobą „spokrewnione" jak się w geometryi rzutowej wyrażamy: przez rzut można jedną linię otrzymać z drugiej. Takie geometryczne pokrewieństwo linii nazywamy związkiem projektywicznym (rzutowym) lub kollineacyą (jednokreślnością). (Proicio = rzucam, collineo = ustawiam na jednej linii).

Otóż wszystkie przekroje stożka są w kollineacyi z kołem (są jednokreślne z kołem). *

Ponieważ linia prosta przecina koło najwyżej w dwóch punktach, to i w rzucie będzie przecinała w dwóch punktach nową linię, na którą się zamieni koło. Linie mające z linią prostą dwa punkty wspólne nazywamy liniami drugiego stopnia. Otóż wszystkie przekroje stożka są liniami drugiego stopnia. Według tego określenia linia prosta jest linią pierwszego stopnia.

Udowodniono, że niema innych linii drugiego stopnia, oprócz kół, elips, parabol i hyperbol. Określenie to wiąże się z algebrą. Wykazuje się mianowicie w algebrze, że obrazem geometrycznym każdego równania pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych jest linia prosta, obrazami zaś równań drugiego stopnia są właśnie przecięcia stożka. Podobnie badano linie wyższych stopni. Badania te stanowią przedmiot osobnego działu geometryi: geometryi analitycznej.

Przekrojami stożka zajmowano się już w starożytności bez pomocy metod geometryi analitycznej. Najwięcej badań w tym kierunku zawdzięczamy Apolloniuszowi z Pergi (żył między rokiem 250 a 200 przed n. Chr. w Aleksandryi a później w Pergamon). Obok Euklidesa i Archimedesa uważają historycy Apolloniusza za największego matematyka starożytności.

Ćwiczenia XI.[1])

§ 111. 1. Kiedy kształt ostrosłupa zbliża się do graniastosłupa?

2. Wykazać, że wysokość ściany bocznej w ostrosłupie prostym jest zawsze większa od wysokości ostrosłupa.

3. Obliczyć wysokość ściany bocznej ostrosłupa prostego umiarowego, znając wysokość ostrosłupa i promień koła wpisanego w podstawę.

4. Wykazać, że w każdym czworościanie, nawet nieumiarowym, istnieje punkt równo oddalony od wszystkich ścian i punkt równo oddalony od wszystkich naroży.

5. Wykazać, że ostrosłup, którego podstawa jest wielokątem umiarowym a wierzchołek leży na prostopadłej przechodzącej przez środek koła, jest prosty.

6. Wykazać, że w czworościanie umiarowym o krawędzi a punkt przecięcia się czterech wysokości jest równo oddalony od wszystkich ścian (odległość ta wynosi $AO = \frac{a\sqrt{6}}{4}$) i równo oddalony od wszystkich naroży.

Uwaga: Dla dowodu poprowadzić płaszczyznę, zawierającą jedną krawędź a przechodzącą przez środek przeciwległej krawędzi.

7. Wykazać, że z przekątni ścian sześcianu można utworzyć dwa czworościany umiarowe. Rysunek!

8. Wykazać, że środki ścian sześcianu są wierzchołkami ośmiościanu umiarowego. (Dla dowodu poprowadzić przekrój $ABCD$ i wykazać, że jest kwadratem [por. fig. 325]).

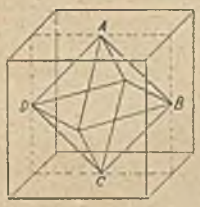


Fig. 325.

9. Obliczyć wysokość ośmiościanu umiarowego, znając jego krawędź $k = 12$ *dm* (użyj fig. 325).

10. Obliczyć powierzchnię: *a*) czworościanu umiarowego, *b*) ośmiościanu umiarowego, znając krawędź $k = 5$ *cm*.

11. Obliczyć powierzchnię: *a*) czworościanu umiarowego, *b*) ośmiościanu umiarowego wpisanego w kostkę o boku $a = 1$ *dm*.

12. Narysować siatkę ośmiościanu i czworościanu umiarowego na kartonie i wykonać modele przestrzenne tych brył, n. p. $k = 4$ *cm*.

* 13. Wykazać, że przeciwległe (wichrowate!) krawędzie czworościanu umiarowego tworzą kąt 90^0.

14. Wykreślić w rzutach ostrosłup umiarowy sześcioboczny, znając krawędź podstawy $k = 1{\cdot}5$ *cm* i wysokość $w = 5$ *cm*. Tęsamą bryłę przedstawić w perspektywie równoległej.

15. Wykreślić w rzutach ostrosłup pochyły, którego podstawą jest sześciokąt umiarowy o boku $a = 2$ *cm*, a linia łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy jest do niej nachylona pod kątem 75^0 i wynosi 8 *cm*. Tensam ostrosłup narysować w perspektywie równoległej.

16. Mając dany dowolny ostrosłup pięcioboczny w rzutach narysować go w perspektywie.

17. Ostrosłupy opisane w zadaniach 13 i 14 ustawić dnem równolegle do płaszczyzny pionowej i wykreślić ich rzuty!

---

[1]) Przykłady na obliczanie powierzchni ostrosłupów i stożków znajdują się w zbiorze zadań Kranza na str. 101 i 106.

18. Jakie obroty może wykonywać umiarowy ostrosłup: *a*) czworoboczny, *b*) sześcioboczny, aby zajął zawsze tosamo miejsce w przestrzeni?

19. Ile wynosi suma kątów płaskich w ostrosłupie 3-bocznym, 4-bocznym, 5-bocznym, *n*-bocznym.

§ 112. 20. Wykonać rozwinięcie dowolnego ostrosłupa danego w rzutach, a tak ustawionego, aby jedna krawędź boczna była równoległa do płaszczyzny pionowej.

21. Zrobić z kartonu model: *a*) ostrosłupa umiarowego sześciobocznego, *b*) dowolnego ostrosłupa prostego, *c*) ostrosłupa przedstawionego na fig. 311.

22. Mając podany dowolny ostrosłup prosty w rzutach, przeciąć go płaszczyzną równoległą do podstawy i przerysować tę figurę w perspektywie.

23. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa umiarowego sześciobocznego, znając krawędź podstawy i krawędź boczną ($a = 2$ *cm*, $b = 6$ *cm*).

24. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa umiarowego sześciobocznego, znając wysokość i krawędź podstawy ($w = 6$ *cm*, $a = 1{\cdot}5$ *cm*).

Ile razy powiększy się powierzchnia ostrosłupa, jeżeli w i a powiększą się równocześnie 3 razy, 4 razy, 5 razy?

25. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa umiarowego: *a*) trójbocznego, *b*) czworobocznego, *c*) pięciobocznego, *d*) ośmiobocznego, znając wysokość i promień koła opisanego na podstawie (n. p. $w = 2{\cdot}4$ *cm*, $r_0 = 1$ *cm*).

26. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa prostego, którego podstawa jest trójkątem równobocznym, a krawędzie boczne są do siebie prostopadłe.

§ 113. 27. Ostrosłup prosty ścięty narysowany w rzutach rozwinąć (jedną krawędź boczną obrać równoległe do płaszczyzny pionowej).

28. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa ściętego prostego, jeżeli dno dolne jest kwadratem o boku $a = 5$ *cm*, dno górne kwadratem o boku $a = 3$ *cm*, a wysokość bryły $w = 4$ *cm*.

29. Obliczyć powierzchnię ostrosłupa ściętego powstałego przez przecięcie ostrosłupa umiarowego sześciobocznego w połowie wysokości. Dane: krawędź podstawy $a = 3{\cdot}6$ *cm*, krawędź boczna $b = 14{\cdot}4$ *cm*.

30. Wykazać, że *a*) wszystkie sześciany są do siebie podobne,
b) wszystkie czworościany są do siebie podobne,
c) wszystkie ośmiościany są do siebie podobne.

Ustawić te bryły w położenie podobne i znaleźć środek podobieństwa zewnętrzny lub wewnętrzny.

31. Ilu świec normalnych trzeba użyć, aby z odległości 4 *m* oświetlały ścianę tak silnie, jak pięć świec z odległości 5 *dm*?

32. Przez mały otwór oświetlają promienie przestrzeń 8 dm^2 z odległości 6 *dm*. Jak daleko należy odsunąć ten otwór, aby oświetlić przestrzeń 20 m^2?

§ 114—116. 33. Wykazać, że powierzchnia stożka jest utworem dwuwymiarowym.

34. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej stożek prosty, znając promień podstawy i bok ($r = 2$ *cm*, $b = 6$ *cm*).

35. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej stożek pochyły, którego promień podstawy $r = 1{\cdot}5$ *cm* a oś wynosi $a = 7$ *cm* i jest nachylona do podstawy pod kątem 60^0.

36. W stożku z poprzedniego zadania wykreślić przecięcie osiowe zawierające rzut osi i przecięcie osiowe prostopadłe do tego przekroju.

37. Mając podany dowolny stożek w rzutach, narysować go w perspektywie równoległej i odwrotnie.

38. Wykazać, że wszystkie stożki równoboczne są bryłami podobnemi. Ustawić je odpowiednio i znaleźć środek podobieństwa.

39. Narysować w rzutach i w perspektywie równoległej stożek ścięty.

40. Do dowolnego stożka narysowanego w perspektywie równoległej wykreślić płaszczyznę styczną z dowolnego punktu leżącego na stożku. (Trzeba najpierw znaleźć linię styczną do elipsy przedstawiającej dno; por. fig. 321.)

41. Z punktu poza stożkiem poprowadzić do niego dwie płaszczyzny styczne (w perspektywie równoległej).

42. Jakie płaszczyzny i osie symetryi posiada stożek?

43. Dowolny stożek prosty podany w rzutach rozwinąć na płaszczyźnie i zrobić model stożka z kartonu.

44. Zbudować z kartonu stożek równoboczny o boku $b = 8$ *cm*.

45. Narysować w perspektywie równoległej lejek złożony ze stożka ściętego i rurki w formie walca, znając rzuty tej bryły.

46. Obliczyć powierzchnię stożka równobocznego o wysokości $w = 0{\cdot}72$ *dm*.

47. Obliczyć powierzchnię stożka prostego, którego obwód podstawy wynosi $u = 62$ *m* a wysokość 15 *m*.

48. Jakie rozmiary ma stożek równoboczny, którego powierzchnia wynosi 1 m^2?

49. Trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątnia wynosi 8·4 *cm* a jedna przyprostokątnia 5·4 *cm*, zakreślił powierzchnię obrotem około przeciwprostokątni. Obliczyć wielkość tej powierzchni. Rysunek.

50. Obliczyć powierzchnię stożka prostego: *a*) wpisanego w ostrosłup umiarowy sześcioboczny, znając bok sześciokąta i wysokość ostrosłupa $b = 3{\cdot}6$ *cm*, $w = 2{\cdot}7$ *cm*, *b*) opisanego na tym ostrosłupie.

51. W walcu równobocznym o promieniu $r = 3$ *cm* wydrążono stożek sięgający aż do dna. Obliczyć powierzchnię tej bryły.

52. Ze stożka prostego wycięto część zapomocą dwóch przecięć osiowych, tworzących kąt 90°. Obliczyć powierzchnię bryły wyciętej, znając promień podstawy $r = 2$ *cm* i wysokość $w = 5$ *cm*.

53. Obliczyć powierzchnię, jaką zakreśla trapez równoramienny obracający się: *a*) koło swej osi symetryi, *b*) koło jednego z boków równoległych, znając boki równoległe trapezu $a = 6$ *cm*, $b = 4$ *cm* i wysokość $w = 3$ *cm*.

54. Obliczyć powierzchnię lejka, w którym obwód górnego koła wynosi 2 *dm*, dolnego 5 *cm*, długość całkowita 1 *dm*, a długość samej rurki 6 *cm*.

55. Stożek ścięty dany w rzutach rozwinąć i sporządzić model tej bryły.

56. Kopiec w formie stożka mamy pokryć darnią. Jakie pomiary trzeba wykonać, aby obliczyć, ile potrzeba m^2 darni. Obierz dowolnie liczby wymiarowe.

57. Znamy odległości wierzchołków trójkąta od pewnej osi leżącej na tejsamej płaszczyźnie: $x_1 = 4$ *cm*, $x_2 = 6$ *cm*, $x_3 = 3$ *cm*. Rzuty dwóch boków na tę oś wynoszą $y_1 = 2$ *cm*, $y_2 = 1$ *cm*. Obliczyć powierzchnię bryły powstającej przez obrót trójkąta dokoła tej osi.

§ 117. 58. Stożek prosty podwójny przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Obracać ten przekrój koło osi poziomej prostopadłej do płaszczyzny rysunku, a przechodzącej przez oś stożka. Jakie przekroje kolejno otrzymamy? Narysować w rzutach!

59. Stożek prosty przeciąć płaszczyzną prostopadłą do boku. Wykazać, że otrzymamy elipsę, parabolę lub hyperbolę, zależnie od tego, czy kąt u wierzchołka przecięcia osiowego jest ostry, prosty, czy też rozwarty. (Zadaniem tem zajmował się uczeń Platona, Menechmos już w IV. wieku przed n. Chr.)

Rozdział XII.

Powierzchnie i bryły obrotowe.

§ 118. Powierzchnie obrotowe prostoliniowe.

Powierzchnię zakreśloną przez obrót dowolnej linii prostej lub krzywej dokoła osi nazywamy powierzchnią obrotową. Najprostsze są powierzchnie obrotowe powstające przez obrót linii prostej, to znaczy powierzchnie obrotowe prostoliniowe. Weźmy najpierw pod uwagę linię prostą leżącą w tejsamej płaszczyźnie, co oś. Przez obrót odcinka takiej prostej może powstać: *a*) pobocznica walca prostego, jeżeli prosta jest równoległa do osi obrotu; *b*) pobocznica stożka prostego, jeżeli odcinek przecina oś; *c*) pobocznica stożka ściętego, jeżeli przedłużenie odcinka przecina oś; *d*) koło, jeżeli odcinek przecina prostopadle oś lub wreszcie: *e*) pierścień kołowy, jeżeli odcinek jest prostopadły do osi, ale jej nie przecina. Widzimy więc, że wiele powierzchni poznanych już w dotychczasowej nauce występuje tutaj z jednej, wspólnej zasady powstawania. Pobocznice walców pochyłych i stożków pochyłych nie należą już do brył obrotowych.

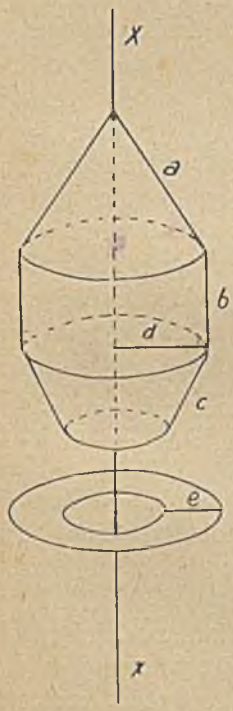


Fig. 326.

Nową bryłę obrotową otrzymamy biorąc pod uwagę linię prostą wichrowatą względem osi. Model takiej powierzchni otrzymamy, biorąc dwa przystające koła (n. p. z drutu lub z deski), umieszczone na wspólnej osi prostopadłej, dające się przesuwać po tej osi i obracać koło niej. Łączymy ich obwody kilkunastoma liniami równoległemi n. p. nitkami. Wszystkie te nitki leżą na pobocznicy walca obrotowego (t. j. prostego). Jeżeli jednak skręcimy jedno koło względem drugiego o pewien kąt, to linie *a*, *b*, *c*, *d* pozostaną prostemi, ponieważ nitki są napięte, ale będą wichrowate względem osi. Wszystkie te linie będą jednak w równej odległości od osi i będą tworzyły równe kąty z pod-

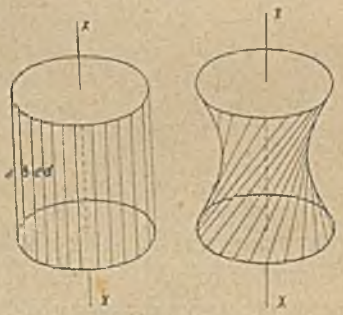


Fig. 327.

stawą: będą więc one tylko różnemi położeniami tejsamej prostej wichrowatej przy obrocie dokoła osi. Spostrzeżemy, że zarys powstałej powierzchni jest teraz hyperbolą. Powierzchnia taka nazywa się hyperboloidą obrotową (o jednej powłoce), może bowiem powstać także przez obrót hyperboli leżącej w tejsamej płaszczyźnie, co oś. Wskutek symetryi tej powierzchni zawiera ona także drugą gromadę prostych, pochylonych w przeciwną stronę o tensam kąt. Powierzchnia ta mimo to jest nierozwijalna.

§ 119. Kula.

Przejdźmy do powierzchni obrotowych powstających przez obrót linii krzywych, a więc przedewszystkiem koła.

Powierzchnię obrotową powstającą przez obrót półkola dokoła średnicy nazywamy powierzchnią kulistą, a przestrzeń zamkniętą przez tę powierzchnię nazywamy kulą. (Czasem używamy słowa kula także na oznaczenie samej powierzchni.) Ponieważ każdy punkt półkola jest równo oddalony od środka O, przeto i przy obrocie te odległości nie doznają zmiany. Stąd widzimy, że *każdy punkt powierzchni kuli jest równo oddalony od stałego punktu, zwanego środkiem kuli.* Tę stałą odległość nazywamy promieniem kuli. Każda linia prosta, przechodząca przez środek kuli przecina jej powierzchnię w dwóch punktach (dlaczego?); odcinek zawarty między tymi punktami nazywamy średnicą kuli; długość jej jest widocznie dwa razy większa od promienia. Łatwo wykazać, że każda powierzchnia mająca tę własność, że każdy jej punkt jest równo oddalony od stałego punktu O, jest powierzchnią kuli, t. j., że można wyczerpać wszystkie jej punkty przez obrót półkola. Własność ta jest więc charakterystyczna dla kuli, może więc służyć do definicyi kuli.

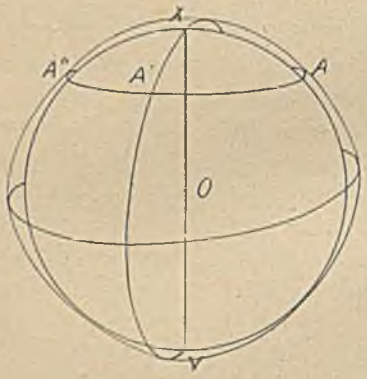


Fig. 328.

Koło $XA'Y$ tworzące swoim obrotem kulę nazywamy południkiem kuli. Jestto więc przekrój kuli zawierający oś obrotu. Drogę, jaką zakreśla przy obrocie każdy punkt południka, n. p. punkt A', nazywany równoleżnikiem kuli. Jestto koło, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi obrotu. Punkty, w których oś przebija kulę, nazywamy biegunami. Możemy więc powiedzieć, że południk jest kołem przechodzącem przez obydwa bieguny. Równoleżnik, którego płaszczyzna przechodzi przez środek kuli, nazywa się równikiem. Wszystkie te nazwy pochodzą z geografii matematycznej. Osią kuli może być każda prosta przechodząca przez środek, ponieważ każdy przekrój przechodzący przez środek jest kołem (dlaczego?). Inne powierzchnie obrotowe nie mają tej własności. Ale nietylko

taki przekrój kuli jest kołem. Wykażemy, że *każdy płaski przekrój kuli jest kołem.* Nie mamy więc tu takiej różnorodności, jak dla walca lub stożka! Dla dowodu poprowadźmy ze środka kuli linię prostopadłą do płaszczyzny przekroju $OS \perp \alpha$. Ponieważ tę linię możemy uważać za oś obrotu, to wszystkie punkty powierzchni kuli leżące na płaszczyźnie α prostopadłej do osi należą do jednego równoleżnika, tworzą więc koło. Można zresztą dojść do tegosamego wniosku, nie powołując się na ruch obrotowy. Połączmy dowolne punkty A i A' przekroju ze spodkiem S prostopadłej. Trójkąty SOA i SOA' są przystające według (III) przypadku przystawania, bo $AO = A'O$ jako promienie kuli, $SO = SO$, a $\sphericalangle OSA = \sphericalangle OSA' = 90^0$. Z przystawania wynika: $SA = SA'$, a więc wszystkie punkty przekroju są równo oddalone od stałego punktu S, to znaczy tworzą one koło.

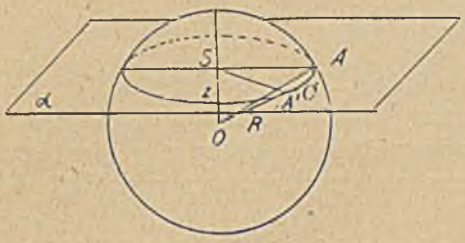


Fig. 329.

Promień tego przekroju obliczymy przy pomocy twierdzenia Pitagorasa, znając promień kuli R i odległość przekroju od środka kuli z:

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

Widzimy stąd, że wielkość przekroju zależy od oddalenia jego płaszczyzny od środka kuli. Największy jest przekrój, jeżeli jego płaszczyzna przechodzi przez środek kuli, bo wtedy $z = O$, $r = R$. Przekrój taki nazywamy kołem wielkiem. Inne przekroje nazywamy kołami małemi. Jeżeli przekrój oddala się od środka kuli, promień jego maleje, wreszcie, jeżeli jego odległość od środka kuli będzie równa promieniowi: $z = R$, to $r = O$, więc przekrój zmaleje do jednego punktu. Płaszczyzna ma wtedy z kulą tylko jeden punkt wspólny i nazywa się płaszczyzną styczną.

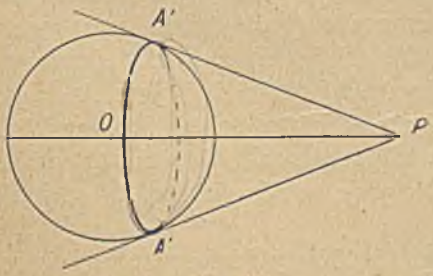


Fig. 330.

W każdym punkcie kuli istnieje tylko jedna płaszczyzna styczna. (Dlaczego?) Z punktu poza kulą można jednakowoż poprowadzić nieskończenie wiele płaszczyzn stycznych: ich krawędzie utworzą cały stożek styczny do kuli. Stożek ten można otrzymać w prostszy sposób: Weźmy na płaszczyźnie półkole i poprowadźmy styczną z punktu P leżącego na przedłużeniu średnicy. Jeżeli całą figurę obrócimy koło osi OP, to półkole zakreśli kulę, a styczna PA zakreśli stożek prosty,

którego podstawą jest koło małe kuli. Stożek ten zawiera wszystkie linie styczne do powierzchni kuli, jakie się dadzą z punktu P poprowadzić. (Każdą linię styczną możemy uważać za krawędź dwóch sąsiednich płaszczyzn stycznych.) Z tego sposobu powstania stożka stycznego wynika, że *odcinki wszystkich stycznych poprowadzonych z jednego punktu P do kuli mierzone od punktu P do kuli są równe.*

Jeżeli punkt P oddala się od kuli, koło AA' powiększa się, a stożek zbliża się coraz więcej do postaci walca. Styczne dotykające kuli w punktach koła wielkiego tworzą powierzchnię walcową styczną, są więc wszystkie równoległe. Stożki i walce styczne mają zastosowanie przy szukaniu cieni kuli (zaćmienia) i rzutów kuli.

Kiedy cień kuli będzie kołem, elipsą, parabolą? Jaka jest granica cienia i światła na kuli oświetlonej?

Wielościan, którego wszystkie ściany są płaszczyznami stycznemi kuli, nazywa się opisany na kuli. Jeżeli zaś naroża wielościanu leżą na powierzchni kuli, wielościan nazywa się wpisany w kulę. Czy każdy graniastosłup da się opisać na kuli? (wpisać w kulę?). Walec i stożek nazywają się wpisane w kulę, jeżeli ich podstawy są kołami (wielkiemi lub małemi) kuli a wierzchołek leży na kuli. Walec i stożek są opisane na kuli, jeżeli ich dna są płaszczyznami stycznemi, a pobocznica walcem lub stożkiem stycznym.

Części objętości i powierzchni kuli odcięte przekrojem płaskim mają osobne nazwy. I tak części, na jakie się rozpada powierzchnia kuli przez poprowadzenie płaskiego przekroju nazywamy czaszami kuli, a odpowiednie części objętości kuli nazywamy odcinkami kuli.

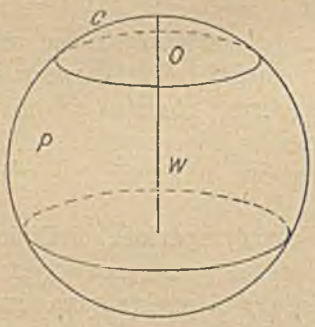


Fig. 331.

Część powierzchni kuli, zawartą między dwoma przekrojami równoległymi nazywamy pasem sferycznym, a odpowiednią część objętości warstwą kuli. Co nazwiemy wysokością odcinka? (warstwy?) Z odcinków kuli można utworzyć rozmaite gatunki soczewek: dwuwypukła składa się z dwóch odcinków o tejsamej podstawie, dwuwklęsła powstaje z walca po wycięciu dwóch odcinków kuli, podobnie inne rodzaje soczewek. Wszystko to są także bryły i powierzchnie obrotowe powstałe przez obrót łuków i odcinków prostych.

Rozważ wzajemnie położenie dwóch kul! Kiedy ich wspólną częścią jest soczewka dwuwypukła?

* Jedno koło wielkie dzieli powierzchnię kuli na dwie półkule. Dwa koła wielkie przecinają się zawsze w dwóch punktach A, A_1 biegunowo prze-

ciwległych (końce średnicy) i dzielą powierzchnię kuli na cztery części, zwane dwukątami sferycznymi. Biorąc trzecie koło wielkie nie przechodzące przez punkt A, a więc nie przechodzące także przez A_1 otrzymamy osiem części, z których każdą nazywamy trójkątem sferycznym n. p. ACB.

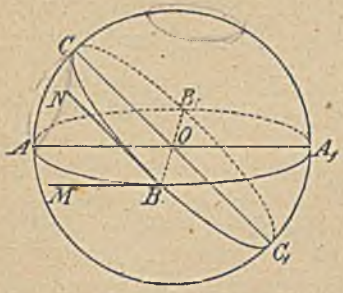


Fig. 332.

Można także z małych kół tworzyć trójkąty, jednakowoż takie figury mniej są dla nas ważne. Podobnie, jak na płaszczyźnie badaliśmy przedewszystkiem trójkąty ograniczone liniami prostemi, tak na kuli należy przedewszystkiem omówić trójkąty ograniczone łukami kół wielkich.

Łuki kół wielkich mają nawet w geometryi na kuli, w t. zw. geometryi sferycznej, podobne własności, jak linie proste w geometryi na płaszczyźnie t. j. w planimetryi. Między dwoma punktami na płaszczyźnie da się poprowadzić tylko jedna linia prosta; podobnie między dwoma punktami na kuli da się poprowadzić tylko jedno koło wielkie, jeżeli tylko te punkty nie są biegunowo przeciwległe. Dalej: linia prosta jest na płaszczyźnie najkrótszą drogą łączącą dwa punkty; na kuli jest łuk koła wielkiego najkrótszą drogą (po powierzchni) łączącą dwa punkty kuli. (Dlaczego?) Nitka wyprężona między dwoma punktami powierzchni kuli dotyka jej wzdłuż łuku koła wielkiego. (Jeżeli n. p. chcemy znaleźć najkrótszą drogę z Warszawy do Tokio, nie należy jej szukać wzdłuż równoleżnika, ale wzdłuż koła wielkiego.) Z tej przyczyny nazywamy ten łuk koła wielkiego odległością sferyczną. Badanie trójkątów sferycznych i wogóle figur leżących na powierzchni kuli jest dla nas kwestyą bardzo ważną, ponieważ ziemia jest kulą i pozorne sklepienie niebios również uważamy za kulę. Wszelkie obliczenia i pomiary geograficzne lub astronomiczne muszą się opierać na geometryi sferycznej.

Łącząc wierzchołki trójkąta sferycznego ACB ze środkiem kuli, otrzymujemy kąt bryłowy trójścienny $OACB$. Jest on ściśle związany z trójkątem sferycznym: *Boki trójkąta sferycznego są łukami należącymi do kątów płaskich naroża*, jako do kątów środkowych. Wyrażamy je zwykle w stopniach. *Kąty trójkąta sferycznego* (są to kąty zawarte między liniami stycznemi do kół ograniczających ten trójkąt) *są znowu równe kątom dwuściennym naroża.* Albowiem:

$$NB \perp OB \text{ i leży na płaszczyźnie } BOC$$
$$MB \perp OB \text{ i leży na płaszczyźnie } AOB$$

a więc $\sphericalangle MBN$ jest miarą kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny AOB i COB.

Badanie trójkąta sferycznego jest więc zarazem badaniem naroża trójściennego i naodwrót:

Prawa poznane dla naroża trójściennego można przenieść bez zmiany do trójkąta sferycznego. Tak n. p. przypadki przystawania kątów bryłowych trójściennych podają zarazem przypadki przystawania trójkątów sferycznych. (Wymień!) Ze związku z narożem trójściennym wynika także bardzo ważne prawo:

Suma kątów trójkąta sferycznego musi być zawsze większa od 180° a mniejsza od 540°. (Dlaczego?) Nadmiar ten:

$$A + B + C - 180^0$$

nazywamy przepełnieniem sferycznem i znaczymy literą e. W trójkącie sferycznym może się znajdować jeden, dwa a nawet trzy kąty proste (jeżeli trzy płaszczyzny odpowiedniego kąta bryłowego są parami prostopadłe do siebie). Trójkąt sferyczny zawierający jeden przynajmniej kąt prosty nazywa się prostokątnym. Narysuj!

Jeżeli w wierzchołku naroża trójściennego t. j. w środku kuli wykreślimy naroże biegunowe do niego, otrzymamy na powierzchni kuli trójkąt sferyczny biegunowy do pierwotnego trójkąta. Jego boki wyrażone w mierze kątowej, spełniają się do 180° z kątami pierwotnego trójkąta a kąty spełniają się do 180° z bokami pierwotnego trójkąta. (Dlaczego?)

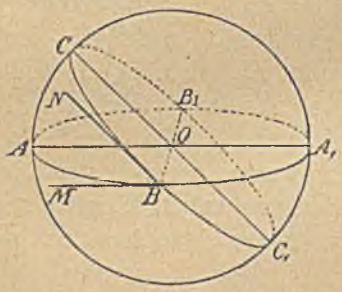


Fig. 333.

Jaki trójkąt sferyczny powstanie, jeżeli krawędzie odpowiedniego naroża trójściennego przedłużymy poza wierzchołek naroża aż do przecięcia się z kulą? Czy przystaje do pierwotnego trójkąta? Nazywamy go trójkątem sferycznym przeciwległym. Dwa trójkąty sferyczne zajmujące razem połowę kuli nazywamy trójkątami przyległymi. N. p. do trójkąta $A\,B\,C$ przyległym jest trójkąt o bokach $A\,B_1\,A_1\,B$, $A\,C$, $B\,C$ a przeciwległym $B_1\,A_1\,C_1$. *

§ 120. Inne powierzchnie obrotowe.

Z innych powierzchni obrotowych zasługują na uwagę:

1. Elipsoida obrotowa t. j. powierzchnia zakreślona obrotem elipsy około jednej osi głównej; kształt taki ma w przybliżeniu ziemia.

2. Hyperboloida obrotowa, o której wspominaliśmy już przy powierzchniach obrotowych prostoliniowych. Inny rodzaj hyperboloidy otrzymamy, obracając hyperbolę koło osi symetryi przechodzącej przez obydwie gałęzie; wtedy powstaje hyperboloida o dwóch powłokach.

3. Paraboloida obrotowa, powstająca przez obrót paraboli dokoła jej osi symetryi.

Powierzchni takiej używa się w optyce, jako zwierciadła wklęsłego do reflektorów.

4. Obręcz kołowa, powstająca przez obrót koła dokoła osi leżącej w jego płaszczyźnie, ale nie przecinającej koła.

Powierzchniami temi zajmowano się już w starożytności. Archimedes, któremu zawdzięczamy obliczenie obwodu i powierzchni koła, badał i te powierzchnie a wyniki badań przekazał nam w dziele p. t.: „O konoidach i sferoidach". Także obliczenie powierzchni i objętości kuli zawdzięczamy Archimedesowi.

W budownictwie i w przemyśle używa się wielu powierzchni obrotowych o liniach południkowych (tworzących) bardziej skomplikowanych. Tak n. p. kopuły, wyroby tokarskie, garncarskie są najczęściej powierzchniami obrotowemi. Wskutek tak wielkiego rozpowszechnienia ważnem zadaniem jest obliczenie powierzchni i objętości brył obrotowych.

§ 121. Powierzchnia kuli i jej części.

Rozwinięcie powierzchni kuli na płaszczyźnie jest niemożliwe. Powierzchnia kuli nie da się przenieść na płaszczyznę bez zniekształcenia długości i kątów ani w sposób mechaniczny, ani matematyczny.

Jestto rzecz wielkiej doniosłości dla geografii. Wynika stąd bowiem, że żadna karta geograficzna nie jest wiernym obrazem kuli ziemskiej. Jedynie globus mógłby być wiernem pomniejszeniem kuli ziemskiej, jednakże w praktyce także globus sporządza się przez naklejanie płaskich kawałków w postaci soczewek ograniczonych łukami kół lub sinusoid. Można zrobić taką mapę, na której wszystkie kąty występują w prawdziwej wielkości, wtedy jednak powierzchnie i odcinki doznają silnych zniekształceń (n. p. rzut Merkatora). Można także przedstawić części ziemi z zachowaniem równości powierzchni; wtedy jednak kąty albo długości odcinków będą zmienione. (N. p. rzuty Lamberta równopowierzchniowe.)

Wobec tego przy obliczaniu powierzchni kuli nie możemy się posługiwać siatką tej powierzchni, ale musimy użyć rozważań przybliżonych, granicznych.

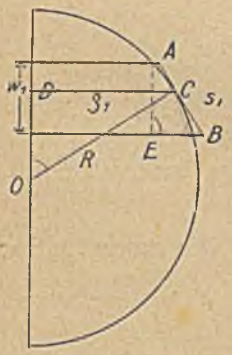


Fig. 334.

Opisujemy na kuli szereg pobocznic stożków ściętych dotykających kuli wzdłuż swego przekroju średniego. Oznaczamy bok jednego takiego stożka ściętego literą s_1, promień przekroju średniego ρ_1 a rzut boku na oś literą w_1. Wyprowadziliśmy już wzór na obliczenie pobocznicy takiego stożka (por. str. 234).

$$p_1 = 2\pi\rho_1 s_1.$$

Ale iloczyn $\rho_1 . s_1$ można zastąpić iloczynem $R . w_1$, ponieważ $\rho_1 : R = w_1 : s_1$, jak to wynika z podobieństwa trójkątów AEB i OCD; więc

$$p_1 = 2\pi R w_1.$$

Jeżeli opiszemy na kuli bardzo wiele takich pasów bardzo wązkich, to one w granicy pokryją całą kulę. Powierzchnię kuli możemy więc uważać

za granicę, do jakiej dąży suma powierzchni tych pasków, jeżeli ich szerokość maleje nieograniczenie. Obliczmy sumę powierzchni kilku takich pasków:

$$p_1 = 2\pi R w_1$$
$$p_2 = 2\pi R w_2$$
$$p_3 = 2\pi R w_3$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$p_n = 2\pi R w_n$$

Stąd: $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n = 2\pi R (w_1 + w_2 + w_3 + \ldots w_n)$.

Jeżeli wyczerpiemy całą powierzchnię kuli, to odcinki w_1, w_2, w_3, ... w_n pokryją całą oś kuli: ich suma równa się więc średnicy. Zatem:

$P = 2\pi R . 2 R$, czyli ostatecznie

$$P = 4 R^2 \pi \qquad (1)$$

Powierzchnia kuli jest więc cztery razy większa od powierzchni koła wielkiego. Gdybyśmy z tych pobocznic stożka dodali tylko część, mianowicie tylko te, które pokrywają część powierzchni kuli od bieguna do wysokości w_c, otrzymalibyśmy powierzchnię czaszy:

$$P = 2 R \pi . w_c \qquad (2)$$

Powierzchnię czaszy obliczamy, mnożąc obwód koła wielkiego przez wysokość czaszy.

Narysuj walec mający pobocznicę tak wielką, jak czasza kuli na fig. 335!

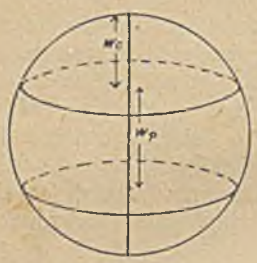


Fig. 335.

Tosamo rozumowanie odnosi się do powierzchni pasa sferycznego:

$$P = 2 R \pi . w_p.$$

Jeżeli na kuli opiszemy walec równoboczny, to jego pobocznica wynosi $2 R \pi . 2 R = 4 R^2 \pi$, równa się więc powierzchni kuli. (Odkrycie to zrobił Archimedes; dlategoto na jego nagrobku wyryto figurę, przedstawiającą walec równoboczny opisany na kuli. Metodę użytą do obliczenia powierzchni kuli, nazywamy metodą wyczerpywania.)

* Powierzchnię dwukąta sferycznego, którego łuki tworzą kąt α, obliczymy z oczywistej proporcyi:

$$P : 4 R^2 \pi = \alpha : 360^0 \quad \text{stąd}$$

$$P = R^2 \pi \frac{\alpha}{90^0}$$

Dla trójkąta sferycznego ABC wyprowadzimy wzór, opierając

się na dwukątach. I tak trójkąty ABC i BCA_1 tworzą razem dwukąt o powierzchni:

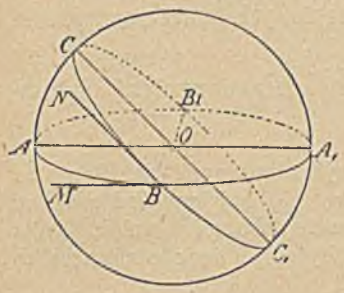


Fig. 336.

$$ABC + BCA_1 = R^2\pi \cdot \frac{\sphericalangle A}{90^0}$$

Taksamo trójkąty ABC i ABC_1

$$ABC + ABC_1 = R^2\pi \cdot \frac{\sphericalangle C}{90^0}$$

Wreszcie, aby uzupełnić półkulę przednią, potrzeba nam jeszcze powierzchni trójkąta BA_1C_1. Powierzchnia ta równa się powierzchni trójkąta ACB_1 (dlaczego?), przeto $ABC + BA_1C_1 = ABC + ACB_1$ a te tworzą razem dwukąt, więc

$$ABC + BA_1C_1 = R^2\pi \cdot \frac{\sphericalangle B}{90^0}$$

Dodając powierzchnie tych trzech par trójkątów otrzymamy:

$$2ABC + (ABC + BCA_1 + BA_1C_1 + ABC_1) = \frac{\sphericalangle A + B + C}{90^0} \cdot R^2\pi$$

Ale ABC jest żądaną powierzchnią P trójkąta, suma zaś zawarta w nawiasie daje powierzchnię półkuli, t. j.

$$\frac{4R^2\pi}{2} \quad \text{Więc}$$

$$2 \cdot P + 2R^2\pi = R^2\pi \cdot \frac{\sphericalangle A + B + C}{90^0}$$ Upraszczając przez 2 otrzymamy:

$$P = R^2\pi \cdot \frac{\sphericalangle A + B + C}{180^0} - R^2\pi \text{ czyli}$$

$$P = R^2\pi \cdot \frac{\sphericalangle A + B + C - 180^0}{180^0}$$

Wyrażenie zawarte w liczniku jestto przepełnienie sferyczne: e.

Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$P = \frac{R^2\pi \cdot e}{180^0}$$

Z tego wzoru widzimy, że powierzchnia trójkąta sferycznego zależy od sumy kątów.

W trójkątach płaskich nie spotkaliśmy takiej zależności w geometryi euklidesowej, natomiast w geometryach nieuklidesowych powierzchnia trójkąta płaskiego zależy także od sumy jego kątów (por. planimetrya str. 39).

Powierzchnia trójkąta sferycznego jest miarą odpowiedniego kąta bryłowego trójściennego, jeżeli tylko promień kuli wynosi jednostkę długości. W podobny sposób można zmierzyć wielkość kątów bryłowych wielościennych. *

§ 122. Reguła Guldina do obliczania powierzchni obrotowych.

Posiadamy metodę obliczania powierzchni brył obrotowych wspólną dla wszystkich rodzajów takich powierzchni. Zastanówmy się najpierw nad znanymi nam już wzorami na obliczanie pobocznicy walca, stożka i stożka ściętego. Widzieliśmy n. p., że pobocznica stożka ściętego wynosi

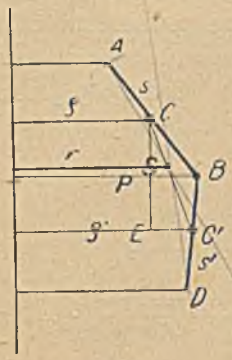


Fig. 337.

$$M = 2\,\rho\,\pi\,s.$$

Ponieważ punkt C możemy uważać za środek ciężkości odcinka $A\,B$ obłożonego jednostajnie masą, przeto wzór nasz możemy także wypowiedzieć w następującej formie:

Powierzchnia obrotowa, powstająca przez obrót odcinka leżącego w tejsamej płaszczyźnie, co oś obrotu, równa się długości s tego odcinka, pomnożonej przez drogę $2\,\rho\,\pi$ zakreśloną przez środek ciężkości tego odcinka.

Taksamo można wysłowić wzory na pobocznicę walca i stożka. (Wykaż!)

Jeżeli teraz weźmiemy linię łamaną, złożoną z dwóch odcinków, to przez obrót otrzymamy pobocznicę dwóch stożków ściętych. Cała powierzchnia obrotowa ma więc wielkość:

$$P = 2\,\rho\,\pi\,s + 2\,\rho'\,\pi\,s' = 2\,\pi\,(\rho\,s + \rho'\,s') \qquad (1)$$

Środek ciężkości całej linii łamanej $A\,B\,D$ leży w odległości średniej między ρ i ρ' od osi obrotu. Średnią tę odległość tworzymy według następującego wzoru:

$$r = \frac{\rho\,s + \rho'\,s'}{s + s'}$$

Albowiem: Jeżeli masa jest rozmieszczona jednostajnie, to znaczy na każdy centymetr długości przypada tylesamo gramów n. p. m gramów, to odcinek o długości s ma masę $m\,.\,s$ a odcinek s' masę $m\,.\,s'$. Środek ciężkości S musi leżeć na linii łączącej C i C' i to bliżej większej masy i to tyle razy bliżej, ile razy ta masa jest większa.

Stąd wynika proporcya:

$$C\,S : C'\,S = m\,s' : m\,s$$

czyli po uproszczeniu przez m

$$C\,S : C'\,S = s' : s.$$

Z tej proporcyi wynika także prawdziwość proporcyi:

$$CS : (CS + C'S) = s' : (s' + s) \quad \text{czyli}$$
$$CS : C'C = s' : (s + s').$$

Ale z trójkąta CEC' widzimy, że

$$CS : C'C = PS : EC' = (r - \rho) : (\rho' - \rho).$$

Więc $(r - \rho) : (\rho' - \rho) = s' : (s + s')$. Stąd łatwo obliczymy:

$$r = \frac{\rho s + \rho' s'}{s + s'}$$

Gdyby się linia łamana składała z większej liczby odcinków, to odległość środka ciężkości tej linii od osi obrotu wynosiłaby:

$$r = \frac{\rho s + \rho' s' + \rho'' s'' + \ldots}{s + s' + s'' + \ldots}$$

Wprowadzając znalezioną wartość r we wzór (1) otrzymamy, ponieważ:

$$\rho s + \rho' s' = r(s + s'), \text{ wzór}$$
$$P = 2 r \pi (s + s').$$

Trzeba więc pomnożyć całkowitą długość linii południkowej $s + s'$ przez drogę $2r\pi$ zakreśloną przez środek ciężkości przy obrocie. Ilekolwiek odcinków weźmiemy, zawsze otrzymamy na powierzchnię wzór:

$$P = 2 r \pi . l$$

gdzie r oznacza odległość środka ciężkości linii południkowej od osi, a l całkowitą długość tej linii.

Tosamo rozumowanie możemy zastosować do linii krzywej obracającej się dokoła osi. Trzeba ją podzielić na drobne kawałki, w przybliżeniu proste i zastosować poprzednie rozumowanie. Postępując ściślej, trzebaby w tę linię wpisać linię łamaną o wielkiej liczbie boków lub opisać taką linię i badać, do jakiej granicy dąży powierzchnia obrotowa zakreślona przez taką linię łamaną. Wtedy jednakże obliczenie środka ciężkości linii południkowej sprawia znaczniejsze trudności.

Wzór ten nazywamy regułą Guldina (XVII. wiek), jakkolwiek już u Pappusa z Aleksandryi (około 300 lat po n. Chr.) znajdujemy tęsamą metodę.

W praktyce, jeżeli linia południkowa (profil) jest bardzo skomplikowana, n. p. przy kopułach bizantyńskich, nie szuka się środka ciężkości całej linii, tylko rozdziela się powierzchnię na paski w przybliżeniu stożkowe lub walcowe i oblicza się powierzchnię każdego pasa osobno.

Gdybyśmy chcieli zastosować regułę Guldina do kuli, musielibyśmy znać środek ciężkości połowy okręgu koła. Posiadamy jednakże wzór na powierzchnię kuli obliczony inną drogą; możemy więc odwrotnie wykryć, gdzie leży środek ciężkości linii południkowej. Ponieważ jej długość

$$l = \frac{2 R \pi}{2} = R \pi$$

przeto według reguły Guldina powierzchnia kuli wynosi:

$$P = 2\,r\,\pi\,.\,R\,\pi \quad \text{ale także}$$

$$P = 4\,R^2\,\pi \quad \text{stąd}$$

$$2\,r\,R\,\pi^2 = 4\,R^2\,\pi \quad \text{czyli}$$

$$r = \frac{2\,R}{\pi}$$

Taka jest odległość środka ciężkości obwodu półkola do osi obrotu.

Wyprowadzić na powierzchnię obręczy kołowej wzór:

$$P = 4\,R\,r\,\pi^2$$

gdzie r oznacza promień koła obracanego a R odległość jego środka od osi obrotu!

* § 123. Charakterystyczne własności przecięć stożkowych.

Przy pomocy kul wpisanych w stożek i w walec można zbadać dokładniej własności elipsy, hyperboli i paraboli.

Zajmijmy się najpierw elipsą pojmowaną jako ukośny rzut koła t. j. przekrój walca. Weźmy walec prosty przecięty płaszczyzną $A\,A'$ nachyloną do kierownicy. Otrzymamy elipsę $A'\,P\,A$. Poprowadźmy przecięcie osiowe $D\,E\,E'\,D$ prostopadłe do tego przekroju; ono przetnie płaszczyznę $A\,A'$ wzdłuż prostej $A\,A'$. Wpiszmy w górną i dolną część powierzchni walcowej kule dotykające płaszczyzny $A\,A'$. Kule te stykają się z walcem wzdłuż kół $D\,C\,E$ i $D'\,C'\,E'$ a z płaszczyzną $A\,A'$ w punktach F i F'. Zbadajmy, jaką własność ma każdy punkt przekroju n. p. P leżący na tworzącej $C\,C'$. Połączmy P z punktami F i F' to widzimy, że:

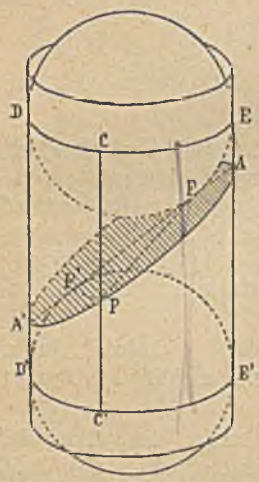


Fig. 338.

$P\,F = P\,C$ jako odcinki stycznych poprowadzonych do kuli z tegosamego punktu P (na rysunku perspektywicznym linia $P\,F$ wydaje się o wiele krótszą od $P\,C$). Taksamo $P\,F' = P\,C'$.

Dodając te dwie równości do siebie otrzymamy:

$$P\,F + P\,F' = C\,C' \quad \text{lub}$$

$$P\,F + P\,F' = D\,D',$$

ponieważ $C\,C' = D\,D'$ jako boki walca prostego. A więc:

Suma odległości dowolnego punktu elipsy przekroju od stałych punktów F i F' równa się stałej długości $D\,D'$.

Punkty F i F' nazywamy ogniskami elipsy, a proste $P\,F$ i $P\,F'$ łączące dowolny punkt elipsy z ogniskami nazywamy promieniami wodzącymi. Łatwo wykazać, że stała długość $D\,D'$ jest równa osi wielkiej $A\,A'$ tej elipsy.

Istotnie $DD' = DA' + A'D' = A'F + A'F'$ jako odcinki stycznych.

Ale także $DD' = EE' = AE + AE' = AF + AF'$. Stąd wniosek:

$$A'F + A'F' = AF + AF'. \qquad (1)$$

Ale z figury odczytujemy, że $A'F = A'F' + FF'$ i

$AF' = AF + FF'$ czyli podstawiając te wartości w (1) otrzymamy po zredukowaniu: $A'F' = AF$.

Wobec tego $DD' = A'F + AF = AA'$.

Widzimy stąd, że *w każdej elipsie suma promieni wodzących jest stała dla wszystkich punktów, mianowicie równa się osi wielkiej.*

Żaden inny punkt oprócz punktów leżących na obwodzie elipsy nie ma tej własności. Istotnie, gdyby n. p. Q miał tę własność, to łącząc punkt R, w którym promień wodzący QF' przecina elipsę z drugiem ogniskiem, otrzymalibyśmy $RF + RF' = AA'$.

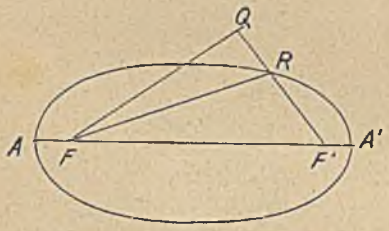


Fig. 339.

Droga FQF' jest dłuższa od drogi FRF' (dlaczego?) więc suma $QF' + QF$ nie może być równa osi AA'. Otóż Q nie może leżeć poza elipsą. Taksamo nie może leżeć wewnątrz elipsy, a więc musi leżeć na obwodzie.

Udowodniona własność jest więc dla elipsy charakterystyczna. Możemy jej użyć do definicyi elipsy. Możemy na tej własności oprzeć nowy sposób konstrukcyi elipsy. Obieramy w tym celu ogniska i na tejsamej prostej dwa punkty AA' w równych odległościach poza odcinkiem FF', jako końce osi wielkiej. Na FF' obieramy dowolny punkt X i łukami AX i $A'X$ zakreślamy koła z punktów F i F'.

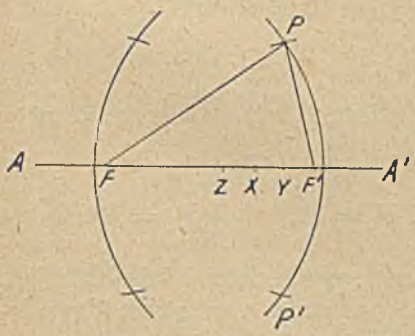


Fig. 340.

Koła te przecinają się w dwóch punktach P i P' leżących na elipsie. Taksamo koła zakreślone promieniami $A'X$ i AX z punktów F i F'. Biorąc dalsze punkty Y, Z i kreśląc odpowiednie koła, otrzymamy coraz więcej punktów elipsy. Wystarczy kreślić niewielkie łuki kół. Otrzymane punkty łączymy jedną nieprzerwaną linią krzywą (przy pomocy przyrządu rysunkowego zwanego krzywką) i otrzymujemy w ten sposób elipsę. Elipsę można także wykreślić, używając nitki

związanej o długości $2 . AF'$ i szpilek wbitych w punktach F i F'. (Wytłumacz tę konstrukcyę!)

Zupełnie takąsamą drogą udowodniamy, że przekrój stożka prostego nachylony do kierownicy a nierównoległy do żadnej tworzącej jest elipsą t. j., że suma promieni wodzących dla każdego punktu równa się stałej wielkości. (Por. fig. 340 a.)

Przechodząc do hyperboli musimy zbudować stożek prosty podwójny. Prowadzimy przekrój $J_1 J_2$ i wpisujemy odpowiednie kule. Obierając dowolny punkt P przekroju, spostrzeżemy znowu, że

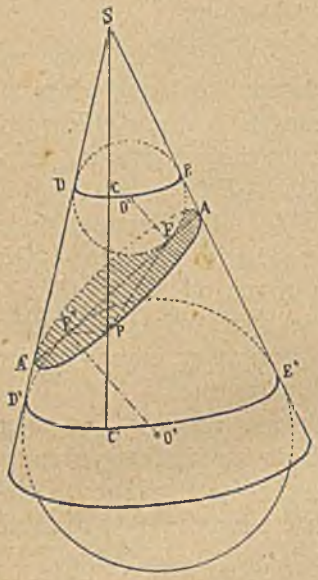


Fig. 340 a.

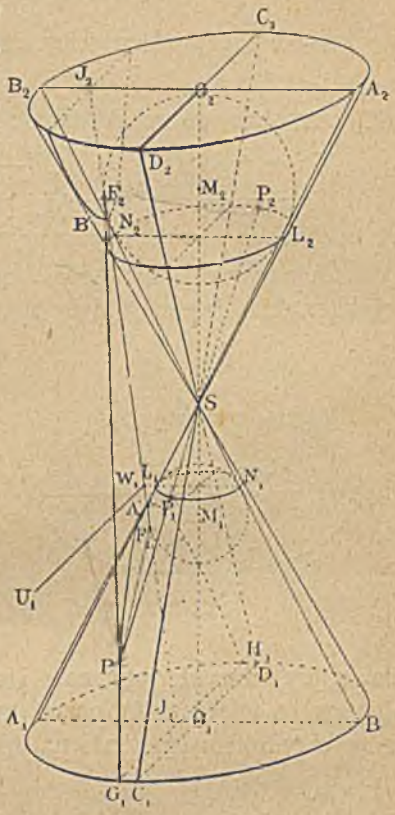


Fig. 341.

$$\left.\begin{array}{l} PF_2 = PP_2 \\ PF_1 = PP_1 \end{array}\right\} \text{ więc } PF_2 - PF_1 = PP_2 - PP_1 = P_1 P_2.$$

Dla każdego punktu hyperboli różnica jego odległości od dwóch stałych punktów F_1 i F_2 jest stała. Punkty F_1 i F_2 nazywamy ogniskami hyperboli, a odcinki PF_1 i PF_2 promieniami wodzącymi.

Łatwo wywnioskować, podobnie jak dla elipsy, że ta stała długość $P_1 P_2$ równa się linii $A' B'$, zwanej osią hyperboli. Stąd wniosek:

Hyperbola ma tę własność, że *różnica promieni wodzących dla wszystkich jej punktów ma stałą wielkość, a mianowicie równa się osi hyperboli.*

Własność ta jest charakterystyczna dla hyperboli, żaden bowiem punkt poza nią leżący nie może mieć tej własności. (Udowodnij!) Możemy więc powiedzieć, że hyperbola jest miejscem geometrycznem punktów, których różnica odległości od dwóch stałych punktów równa się stałemu odcinkowi. Na takiem określeniu hyperboli polega jej konstrukcya:

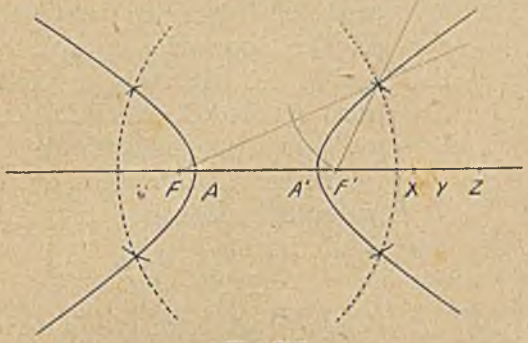


Fig. 342.

Obiera się dwa ogniska $F F'$ a między niemi w równej odległości końce osi AA'. Kreśląc promieniami $A X$, $A' X$, $A Y$, $A' Y$,... łuki kół z ognisk F i F' otrzymujemy dowolnie wiele punktów hyperboli. W ten sposób dla badania własności hyperboli nie trzeba się już odtąd uciekać do przestrzeni, do stożków i kul: całe badanie sprowadza się do planimetrycznych konstrukcyi.

Pozostaje jeszcze do zbadania trzeci gatunek przekrojów stożka: parabola. Przecinamy stożek prosty płaszczyzną równoległą do jednej tworzącej n. p. do $S B$, to otrzymamy parabolę $G A' H$. Wykreślamy płaszczyznę $S A B$ prostopadłą do płaszczyzny przekroju. Jej krawędzią przecięcia z płaszczyzną przekroju jest linia $W A' J$ równoległa do $S B$.

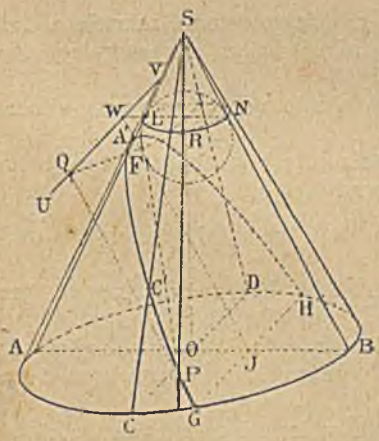


Fig. 343.

Kula wpisana w górną część stożka dotyka pobocznicę stożka wzdłuż koła $L R N$ a płaszczyznę przekroju w punkcie F. (W dolną część nie da się teraz kula wpisać, bo dwusieczna kąta $A A' J$ jest równoległa do osi stożka.)

Przedłużmy płaszczyznę koła $L R N$ aż do przecięcia się z płaszczyzną przekroju wzdłuż linii $U V$. Krawędź ta jest prostopadła do linii $W N$, ponieważ obydwie płaszczyzny $L N$ i $W J$ są prostopadłe do płaszczyzny $S B A$. Obierzmy dowolny punkt przekroju P, wykreślmy tworzącą $S P$ i poprowadźmy $P Q \perp U W$.

Łącząc P z F widzimy, że $P F = P R$ jako odcinki stycznych do kuli. Ale $P R = P Q$, jak to wynika z podobieństwa trójkątów $P R Q$ i $R N S$, z których $R N S$ jest równoramienny. (Dlaczego?) Otóż i

$$P F = P Q.$$

Każdy punkt paraboli jest równo oddalony od stałego punktu F zwanego ogniskiem i od stałej prostej U V zwanej kierownicą paraboli. Prosta WJ nazywa się osią paraboli. Jestto własność charakterystyczna paraboli. Na niej opiera się konstrukcya dowolnie wielu punktów paraboli. Obiera się prostopadle do OX kierownicę k, a na osi ognisko F. (Parabola ma tylko jedno ognisko.) Kreśli się dowolnie wiele linii prostopadłych do osi i promieniem OA zakreśla się z ogniska łuk przecinający prostą AP. Wtedy istotnie

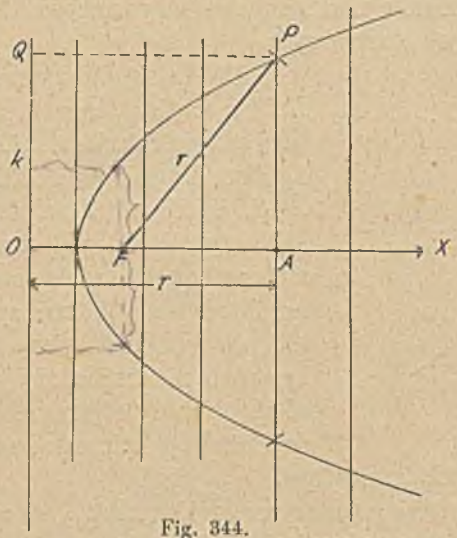


Fig. 344.

$$PF = PQ.$$

Robiąc taką konstrukcyę dla każdej prostej otrzymamy więcej punktów paraboli.

W ten sposób badanie paraboli sprowadziliśmy także do zagadnienia planimetrycznego. Podobne rozważania można przeprowadzić dla stożka pochyłego. *

Ćwiczenia XII.

§ 118. 1. Z jakich części składa się powierzchnia obrotowa zakreślona przez obrót sześciokąta umiarowego koło: *a*) symetralnej boku, *b*) symetralnej kąta. Narysuj w perspektywie i w rzutach te bryły!

2. Narysuj w perspektywie hyperboloidę obrotową z obydwoma gromadami prostych tworzących.

3. Z jakich części składa się powierzchnia obrotowa zakreślona obrotem rombu koło osi równoległej do jego osi symetryi?

§ 119. 4. Wykazać, że dwa koła wielkie na kuli muszą się przeciąć w dwóch punktach.

5. Co jest miejscem geometrycznem środków kul przechodzących przez trzy dane punkty?

6. Wykazać, że przez cztery punkty nie leżące na jednej płaszczyźnie jest wyznaczona tylko jedna kula (opisana na czworościanie utworzonym z tych punktów).

7. Jakie jest miejsce geometryczne środków kul dotykających dwóch płaszczyzn: *a*) równoległych; *b*) przecinających się.

8. Jak znajdziemy kulę o danym promieniu i zawierającą dane koło?

9. Wykazać, że płaszczyzna styczna do kuli jest prostopadła do promienia przechodzącego przez punkt styczności.

10. Punkt świecący jest o 2 *m* odległy od środka kuli o promieniu $R = 3$ *dm*. Jak wielkie jest koło odgraniczające cień od światła?

11. W odległości 3 *m* od środka kuli o promieniu 1 *dm* znajduje się punkt świecący. Jak wielki cień rzuca kula na ścianę odległą o 5 *m* od punktu świecącego?

12. Znaleźć środek podobieństwa wewnętrzny i zewnętrzny dwóch kul.

13. Jak wysoko trzeba się wznieść nad kulę o promieniu 7000 *km*, aby zobaczyć cały jej równoleżnik o promieniu 100 *km*?

14. W jakiej odległości od środka należy przeciąć kulę o promieniu $R = 6$ *dm*, aby powierzchnia przekroju była o połowę mniejsza od powierzchni koła wielkiego?

15. Wykazać, że wszystkie linie styczne do kuli równoległe do jakiejś prostej leżą na pobocznicy walca, dotykającej kuli wzdłuż koła prostopadłego do tej prostej.

16. Które ostrosłupy dadzą się wpisać w kulę, a które dadzą się na niej opisać?

17. Na kuli opisano stożek ścięty o promieniach: $r_1 = 30$ *cm*, $r_2 = 10$ *cm*. Ile wynosi promień kuli? (Wykazać, że średnica kuli jest średnicą geometryczną między średnicami podstaw stożka ściętego!)

18. Obliczyć promień kuli: *a*) wpisanej; *b*) opisanej na *a*) czworościanie umiarowym, znając jego krawędź; *b*) na ośmiościanie, znając jego krawędź.

19. Znając promienie podstaw warstwy kuli i jej grubość, obliczyć promień kuli.

20. Znając grubość $2g = 6$ *mm* soczewki dwuwypukłej i obwód $2\rho\pi = 15$ *cm*, obliczyć promień kuli (promień krzywizny).

21. Kiedy dwie kule mają wspólną płaszczyznę styczną?

22. Gdzie leżą wszystkie punkty przestrzeni, z których widać odcinek 8 *cm* pod kątem 90°?

* 23. Znaleźć na kuli wszystkie punkty mające daną odległość sferyczną od jednego punktu kuli.

* 24. Znając boki i kąty trójkąta sferycznego, obliczyć boki i kąty ośmiu trójkątów utworzonych na kuli przez tesame trzy koła.

§ 121. 25. Obliczyć powierzchnię kuli ziemskiej, znając obwód koła wielkiego $U = 40.000$ *km*.

27. Jak wielki jest promień kuli, której powierzchnia wynosi 1 m^2?

26. Jak wielkiej mapy trzeba użyć, aby przedstawić kulę ziemską na pobocznicy walca opisanego na kuli w podziałce 1 : 20,000.000?

28. Jaka część powierzchni ziemi zmieści się na mapie o długości 4 *dm* a szerokości 2·5 *dm* w podziałce 1 : 100.000?

29. Obliczyć powierzchnię czaszy należącej do kuli o promieniu $R = 12$ *dm*, jeżeli promień podstawy czaszy $r = 8$ *dm*.

30. W jakiej odległości od środka należy przeciąć kulę, aby powierzchnia czaszy była czwartą częścią całej kuli?

31. Jak wysoko trzeba się wznieść nad kulę, aby zobaczyć $\frac{1}{3}$ część jej powierzchni (promień kuli $R = 6778$ *km*).

32. W jakim stosunku pozostaje powierzchnia półkuli do powierzchni stożka równobocznego o tejsamej podstawie?

33. Wyprowadzić wzór na powierzchnię czaszy, znając jej wysokość i promień podstawy.

34. Obliczyć powierzchnię soczewki dwuwypukłej utworzonej z odcinków równych kul, znając jej grubość $2g = 3$ *mm* i obwód $u = 10$ *cm*.

35. Znamy promienie dwóch kul i odległość ich środków. Obliczyć, jaką część powierzchni mniejszej kuli oświetla większa kula (n. p. promień ziemi

$r_1 = 6378$ *km*, promień słońca $r_2 = 693.345$ *km*, odległość środków $c = 146{,}200.000$ *km*. (Wynik: 50·235% całej powierzchni ziemi.)

36. Obliczyć powierzchnię kuli wpisanej w stożek prosty, znając jego promień $r = 5$ *cm* i wysokość $w = 8$ *cm*.

* 37. Jaką część kuli wycina kąt bryłowy trójścienny, którego wierzchołek leży w środku kuli, a kąty dwuścienne wynoszą *a*) 136°, 74°, 62°; *b*) 108° 30′, 36′, 97° 51′.

* § 123. 38. Opierając się na określeniu elipsy zapomocą sumy promieni wodzących wykazać, że elipsa posiada dwie osie symetryi.

* 39. Wykazać, że odległość ogniska elipsy od końca małej osi równa się osi wielkiej.

* 40. Znając oś małą i wielką elipsy, obliczyć odległość ogniska od środka. (Patrz poprzednie zadanie!)

* 41. Jak można znaleźć konstrukcyjnie oś małą, znając tylko ognisko i oś wielką elipsy? Jak znaleźć konstrukcyjnie ogniska, znając osie?

* 42. Zakreślić z ogniska koło promieniem równym osi wielkiej; wykazać, że każdy punkt elipsy jest równo oddalony od obwodu tego koła i od drugiego ogniska!

* 43. Przeprowadzić dla stożka dowód, że przekrój przechodzący przez wszystkie tworzące, a nie równoległy do kierownicy jest elipsą.

* 44. Wykreślić hyperbolę, znając jej ogniska i oś.

* 45. Wykazać, że hyperbola posiada dwie osie symetryi!

* 46. Wykreślić koło z ogniska hyperboli promieniem równym osi. Wykazać, że każdy punkt hyperboli jest równo oddalony od tego koła i od drugiego ogniska.

* 47. Wykreślić parabolę, znając jej kierownicę i ognisko.

* 48. Wykazać, że parabola posiada jedną oś symetryi.

* 49. Wykazać, że odcinek prostopadłej do osi paraboli wykreślonej w ognisku jest dwa razy dłuższy od odległości ogniska od kierownicy.

Obliczanie powierzchni

Rozdział XIII.

Wielościany umiarowe.

§ 124. Naroża umiarowe.

Wielościan nazywa się umiarowy, jeżeli jest ograniczony przystającymi wielokątami umiarowymi i przystającemi narożami umiarowemi. (Trzeba odróżnić te wielościany od graniastosłupów i ostrosłupów umiarowych, w których tylko niektóre ściany są wielokątami umiarowymi.) Ponieważ suma kątów płaskich w każdem narożu musi wynosić mniej aniżeli 360^0, z góry więc można przewidzieć, że może istnieć tylko kilka gatunków naroży umiarowych. Jeżeli bryła ma być ograniczona samymi trójkątami równobocznymi, to kąty płaskie naroża wynoszą po 60^0. Z takich kątów da się utworzyć naroże 1) trójścienne, 2) czworościenne i 3) pięciościenne. Sześciu kątów po 60^0 nie może już naroże zawierać, bo mielibyśmy sumę kątów płaskich równą 360^0. Z kwadratów można utworzyć naroże umiarowe, jeżeli weźmiemy 4) trzy kąty po 90^0; czterech kątów po 90^0 nie można już użyć. Wreszcie 5) z pięciokątów umiarowych można znowu utworzyć jedno naroże trójścienne umiarowe. Z sześciokątów, ani z innych wielokątów umiarowych nie można już utworzyć naroża. Mamy więc tylko pięć możliwych gatunków wielościanów umiarowych. Udowodnimy, że z każdego gatunku istnieje tylko jedna bryła — wszystkie zaś inne są podobne do nich.

§ 125. Twierdzenie Eulera.

Do dowodu twierdzenia o wielościanach umiarowych potrzebne nam będzie pewne twierdzenie, odnoszące się do wszystkich wielościanów wypukłych bez wyjątku, umiarowych i nieumiarowych. Istnieje mianowicie bardzo prosty związek między liczbą ścian, naroży i krawędzi, wspólny dla wszystkich takich wielościanów. Zacznijmy od specyalnego przykładu. Policzmy naroża, ściany i krawędzie kostki. Liczba ścian $S = 6$, liczba naroży $N = 8$, a liczba krawędzi $K = 12$, jest więc o dwa mniejsza od liczby ścian i naroży razem.

$$S + N = K + 2. \qquad (1)$$

Zetnijmy jedno naroże kostki płaszczyzną, to ta nowa bryła ma o jedną ścianę więcej, więc teraz

$S' = S + 1$, naroże ubyło jedno, a przybyły trzy nowe, więc $N' = N - 1 + 3$; krawędzie przybyły trzy, więc $K' = K + 3$.

Spostrzegamy, że i teraz $S' + N' = K' + 2$

bo $S' + N' = S + 1 + N - 1 + 3 = S + N + 3 = K + 5$ według (1)

a także: $K' + 2 = K + 3 + 2 = K + 5$.

Jakkolwiek obcinalibyśmy naroża, zawsze dojdziemy do tegosamego związku (1).

(Spróbuj to samo obliczyć dla graniastosłupa sześciobocznego!)

Taksamo jeżeli zetniemy jedną krawędź całą, otrzymamy wzór (1).

Przez odcinanie naroży i krawędzi możemy z kostki wyciąć dowolny wielościan wypukły, a więc w każdym wielościanie wypukłym zachodzi związek (1).

Liczba ścian powiększona o liczbę naroży jest o dwa większa od liczby krawędzi w każdym wielościanie wypukłym.

Jestto twierdzenie Eulera (1707—1783).

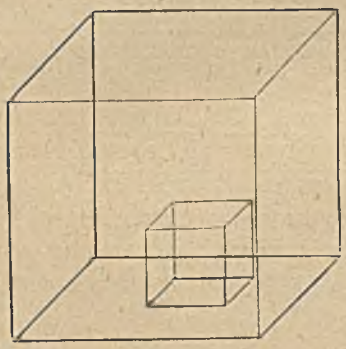


Fig. 345.

Łatwo się przekonać, że do wielościanów wklęsłych twierdzenie to się nie odnosi. N. p. wytnijmy z kostki ze środka kostkę mniejszą, ale tak, aby jedno jej dno dotykało górnego dna większej kostki. Liczba ścian jest teraz $S = 6 + 5 = 11$; liczba naroży

$$N = 8 + 8 = 16;$$

razem $S + N = 27$. Liczba krawędzi wynosi

$$K = 12 + 12 = 24$$

a więc jest o trzy mniejsza od $S + N$.

§ 126. Dowód istnienia pięciu wielościanów umiarowych.

Wielościan umiarowy jest ograniczony samymi *m-kątami* umiarowymi i narożami *p-ściennemi*. Zliczmy wszystkie krawędzie bryły umiarowej w dwa sposoby: Każda ściana ma m boków, a liczba ścian jest S, przeto wszystkich krawędzi byłoby oddzielnie $S.m$. Na bryle jednakowoż każda krawędź jest

wspólna dwom ścianom, więc prawdziwa liczba krawędzi jest dwa razy mniejsza

$$K = \frac{S \cdot m}{2} \quad \text{a stąd} \quad S = \frac{2K}{m}. \tag{2}$$

Każde naroże ma p krawędzi, a liczba naroży jest N, przeto wszystkich krawędzi oddzielnie byłoby $N \cdot p$.

Znowu jednak każda krawędź wspólna jest dwom narożom, więc liczba krawędzi bryły jest

$$K = \frac{N \cdot p}{2} \quad \text{a stąd} \quad N = \frac{2K}{p}. \tag{3}$$

Podstawiając znalezione wartości we wzór (1) Eulera, dostaniemy:

$$\frac{2K}{m} + \frac{2K}{p} = K + 2 \quad \text{czyli}$$

$$2Kp + 2Km = Kmp + 2mp \quad \text{a stąd}$$

$$K = \frac{2mp}{2p + 2m - mp}. \tag{4}$$

Jeżeli podamy m, t. j. jakimi wielokątami ma być wielościan ograniczony i p, t. j. jakie mają być naroża, otrzymamy na K jedną, ściśle oznaczoną wartość. Wtedy z wzorów (2), (3) obliczymy także, ile będzie ścian i naroży.

Podstawimy najpierw najmniejsze możliwe wartości, t. j. $m = 3$ (trójkąty), $p = 3$ (naroża trójścienne), to otrzymamy $K = 6$, $S = 4$, $N = 4$.

Dla $m = 3$ (trójkąty), $p = 4$ (naroża czworościenne), otrzymamy $K = 12$, $S = 8$, $N = 6$.

Dla $m = 3$ (trójkąty), $p = 5$ (naroża pięciościenne), otrzymamy $K = 30$, $S = 20$, $N = 12$.

Dla $m = 3$, $p = 6$, otrzymalibyśmy $K = \frac{2 \cdot 3 \cdot 6}{2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 - 18} = \frac{36}{0} = \infty$ a więc taka bryła nie istnieje, jakto zresztą z góry przewidzieliśmy w § 124. Biorąc teraz dalsze wartości na m, otrzymamy jeszcze dwie możliwości:

Dla $m = 4$, $p = 3$, jest $K = 12$, $S = 6$, $N = 8$, wreszcie

dla $m = 5$, $p = 3$, jest $K = 30$, $S = 12$, $N = 20$.

Otrzymane liczby wraz z nazwami brył umieszczamy dla przejrzystości w tabelce:

m	p	K	N	S	nazwa
3	3	6	4	4	czworościan
3	4	12	6	8	ośmiościan
3	5	30	12	20	dwudziestościan
4	3	12	8	6	sześcian
5	3	30	20	12	dwunastościan

Więcej możliwości niema, jakto łatwo sprawdzić prostym rachunkiem. Pozostaje jeszcze tylko wykazać, że każda z tych brył rzeczywiście istnieje, zbudować każdą z nich.

Otóż wykazaliśmy już dawniej istnienie czworościanu, ośmiościanu i sześcianu. Nowe są dla nas tylko dwudziestościan i dwunastościan.

Dwudziestościan budujemy, biorąc dwa ostrosłupy pięcioboczne umiarowe, których krawędź podstawy równa się krawędzi bocznej i ustawiając je dnami równolegle, a wierzchołkami w strony przeciwne. Skręcamy jeden z nich względem drugiego o 36° i zbliżywszy odpowiednio, łączymy każdy wierzchołek dna z dwoma sąsiednimi wierzchołkami drugiego dna. Odległość pięciokątów wynosi

$$\eta = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - (r - \rho)^2}$$

(por. fig. 346) gdzie a oznacza bok dwudziestościanu, a r i ρ promienie koła wpisanego i opisanego na pięciokącie umiarowym o boku a.

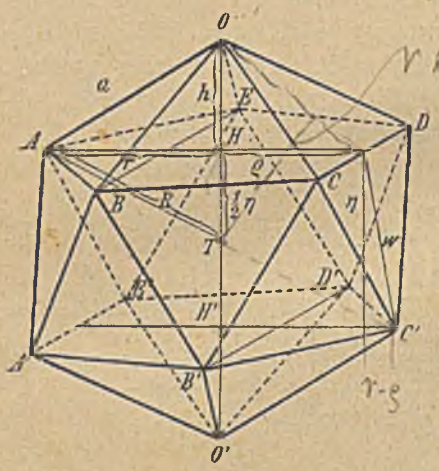


Fig. 346.

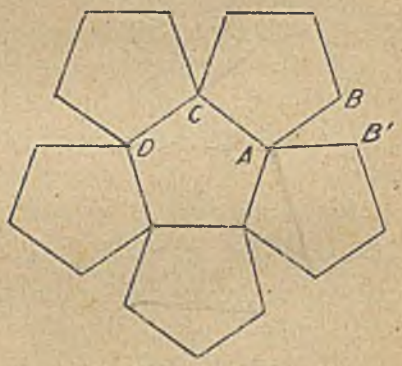


Fig. 347.

Dwunastościan umiarowy pięciokątowy można także w podobny sposób zbudować. Prościej jednak będzie użyć siatki. Obieramy dowolny pięciokąt umiarowy i na jego bokach budujemy nowe pięciokąty umiarowe i obracamy je tak długo dokoła boków AC, CD i t. d., aż ich krawędzie n. p. AB i AB' padną na tęsamą linię prostą. Otrzymamy połowę powierzchni dwunastościanu. Sporządzając drugą takąsamą powierzchnię otwartą, umieszczamy ją nad pierwszą, skręcamy o 36° i nakrywamy pierwszą powierzchnię. Obydwie części zamkną zupełnie pewną część przestrzeni. W ten

sposób otrzymuje się dwunastościan, przedstawiony na fig. 348 w perspektywie równoległej (wraz z wpisanym sześcianem).

Można udowodnić, że środki ścian dwudziestościanu są wierzchołkami dwunastościanu i odwrotnie. Między temi bryłami zachodzi więc podobny związek, jak między sześcianem a ośmiościanem. (Wykaż ten związek rysunkiem!)

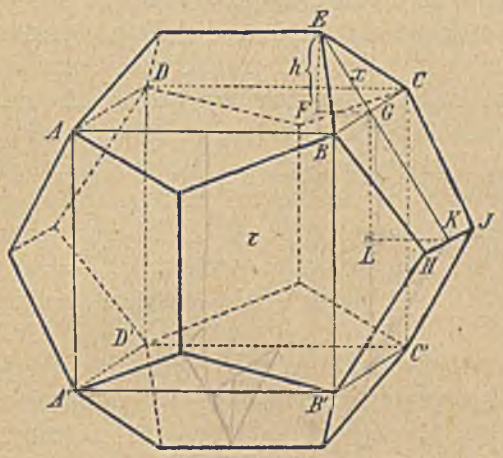


Fig. 348.

Poznanie i konstrukcya pięciu brył umiarowych były główną zasługą szkoły pytagorejczyków, do której należał także Platon (429—348 przed n. Chr.). Według nauki Platona atomy ognia, powietrza, wody i ziemi składają się z czworościanów, ośmiościanów, dwudziestościanów i sześcianów. Dlatego bryły umiarowe do dzisiejszego dnia nazywamy także **bryłami platońskiemi**.

* § 127. Kula wpisana i opisana na wielościanach umiarowych.

W każdym wielościanie umiarowym istnieje jeden punkt O równo oddalony od wszystkich ścian i równo oddalony od wszystkich naroży, zwany środkiem wielościanu. Jest on środkiem kuli wpisanej i środkiem kuli opisanej. Dla dowodu wykreślmy trzy następujące po sobie ściany (dla ogólności weźmy ściany pięciokątne). Poprowadźmy płaszczyznę α, symetralną krawędzi AB t. j. płaszczyznę prostopadłą do AB w środku S tej krawędzi. Płaszczyzna ta jest także prostopadła do ścian schodzących się w tej krawędzi i przecina je wzdłuż linii SM i SN prostopadłych do AB. Kąt NSM jest więc miarą kąta dwuściennego utworzonego przez te ściany. Proste SM i SN, jako symetralne boku pięciokąta, przechodzą przez środki M i N tych pięciokątów umiarowych. Proste MO i NO prostopadłe do ścian w ich środkach wykreślone muszą leżeć w płaszczyźnie α (dlaczego?), nie są więc wichrowate; nie są one także równoległe, jako linie prostopadłe do ramion kąta rozwartego NSM, więc muszą się przeciąć

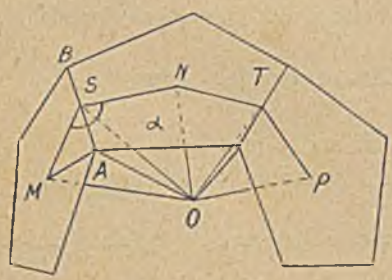


Fig. 149.

w jednym punkcie O. Twierdzimy, że ten punkt O jest środkiem wielościanu. Dla dowodu połączmy ten punkt O z punktem S. Trójkąty MSO i NSO są przystające ($SO = SO$, $\sphericalangle M = \sphericalangle N = 90^0$, a $MS = NS$ jako promienie kół wpisanych w przystające pięciokąty umiarowe). Z przystawania wynika: $MO = NO$, a więc punkt O jest równo oddalony od obydwu ścian. Tosamo można wykazać dla każdej pary ścian sąsiednich. (Z przystawania wynika także, że $\sphericalangle MSO = \sphericalangle NSO$, a więc, że linia OS połowi kąt MSN, który jest miarą kąta dwuściennego.) Zachodzi jeszcze pytanie, czy linie prostopadłe w środkach innych ścian, n. p. w punkcie P, przejdą przez tensam punkt O. Przypuśćmy, że ta prostopadła przecina linię NO w innym punkcie O'. Trójkąty SNO i TNO' są przystające (bo $NS = NT$, $\sphericalangle N = \sphericalangle N = 90^0$, $\sphericalangle OSN = \sphericalangle OTN$ jako połowy przystających kątów dwuściennych). Z przystawania wynika: $NO = NO'$, więc punkt O' pada w punkt O. Otóż punkt O jest środkiem kuli wpisanej.

Stąd już wynika, że ten punkt jest także równo oddalony od wszystkich naroży. Jeżeli go bowiem połączymy z narożami jednego pięciokąta i utworzymy rzuty tych linii na płaszczyznę pięciokąta, to te rzuty są równe, jako promienie koła opisanego na pięciokącie. Jeżeli zaś rzuty są równe, to i same pochyłe są równe, więc punkt O jest równo oddalony od wierzchołków każdego pięciokąta. Punkt O jest więc także środkiem kuli opisanej. *

Ćwiczenia XIII.

§ 125. 1. Sprawdzić, że wzór $S + N = K + 2$ pozostaje prawdziwy, jeżeli zetniemy całą krawędź wielościanu wypukłego.

2. Belkę prostokątną przenika nawskroś mniejsza belka, czy dla tej bryły $S + N = K + 2$?

§ 126. 3. Ile krawędzi ma bryła wypukła, posiadająca 10 ścian i 16 naroży?

4. Oblicz wysokość ostrosłupów pięciobocznych, z których się buduje dwudziestościan.

5. Obliczyć powierzchnię dwudziestościanu, znając jego krawędź.

6. Sporządzić model dwunastościanu.

7. Obliczyć powierzchnię dwunastościanu, znając jego bok.

8. Obliczyć powierzchnię sześcianu wpisanego w dwunastościan na fig. 348.

9. Obliczyć powierzchnię daszka wznoszącego się nad każdą ścianą sześcianu na fig. 348.

10. Jakie płaszczyzny, osie, środki symetryi ma: *a*) dwunastościan, *b*) dwudziestościan?

11. Jakie obroty sprowadzają do nakrycia z samym sobą: *a*) dwudziestościan, *b*) dwunastościan. (Jest 60 takich obrotów.)

* § 127. 12. Obliczyć promień kuli wpisanej w dwunastościan i opisanej na dwunastościanie (fig. 348).

* 13. Obliczyć promień kuli wpisanej w dwudziestościan i opisanej na dwudziestościanie.

* 14. Obliczyć stosunek powierzchni kuli do powierzchni opisanego i wpisanego: *a*) czworościanu, *b*) sześcianu, *c*) ośmiościanu.

15. Sporządzić siatkę i model dwudziestościanu (siatka składa się z 20 trójkątów równobocznych).

16. Mając narysowany w perspektywie dwudziestościan lub dwunastościan, znaleźć rysunkiem środek kuli wpisanej i opisanej.

Rozdział XIV.

Obliczanie objętości brył.

§ 128. Przybliżone pomiary objętości.

Poznaliśmy już sposoby mierzenia długości, kątów i powierzchni. Zadaniem równie ważnem jest mierzenie pojemności, czyli objętości brył, t. j. wielkości przestrzeni zajmowanej przez bryły. (N. p. wielkość budynku, pojemność kotłów, naczyń, zbiorników, objętość wykopanej lub usypanej ziemi przy robotach ziemnych, wydajność prądu wody i t. p.) W ścisłym związku z objętością ciał jest ich ciężar. Wiemy mianowicie, że ciężar jednego centymetra sześciennego jakiegokolwiek ciała nazywa się jego ciężarem gatunkowym (jeżeli ciało jest niejednorodne, używa się przeciętnego ciężaru gatunkowego). Jeżeli znamy ten ciężar gatunkowy i wiemy, ile cm^3 jakieś ciało zawiera, t. j. jaką posiada objętość, potrafimy obliczyć ciężar ciała nie ważąc go zupełnie (n. p. ciężar ścian budynku, ciężar mostu, konstrukcyi żelaznej, ciężar ropy w zbiornikach i t. p.). Wartość rozmaitych materyałów ocenia się najczęściej według ciężaru; wynika stąd wielkie ekonomiczne znaczenie tego nowego pojęcia. (Kiedy wartość materyału ocenia się według wielkości powierzchni lub według długości?)

Wprowadziliśmy objętość jako nową wielkość. Trzeba przedewszystkiem nauczyć się porównywać te wielkości. Otóż za równe uważamy objętości brył przystających i takich, które się dadzą złożyć z brył parami przystających.

Jako jednostkę do mierzenia objętości trzeba obrać jakąś bryłę, której wymiary w rozmaitych kierunkach wynoszą jednostkę długości, a więc 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm*. Możnaby więc obrać n. p. kulę; ale kulami nie można wypełnić przestrzeni bez luk, dlatego też używamy bryły graniastej i to najbardziej symetrycznej, najprostszej. Taką bryłą jest sześcian.

Za jednostkę objętości obieramy więc sześcian, którego krawędź wynosi 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm*, 1 *mm* i t. d. Taki sześcian nazywamy metrem sześciennym (lub kubicznym), decymetrem sześciennym, centymetrem sześciennym i t. d. i oznaczamy znakami: 1 m^3, 1 dm^3, 1 cm^3, 1 mm^3.

Zmierzyć objętość jakiejś bryły, znaczy: zbadać, ile razy w danej bryle mieści się jednostka objętości. Rozszerzając określenie równości objętości powiemy: Objętości brył uważamy za równe, jeżeli ich liczby wymiarowe są równe. Dla niektórych brył można wykonać pomiar objętości wprost, t. j. można bryłę rozłożyć (na rysunku lub w myśli) na same kostki o bokach 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm*. Trzeba w tym celu poprowadzić odpowiedni system przekrojów płaskich. Należą tu przedewszystkiem bryły prostokątne, t. j. prostopadłościany. Objętości innych prostych brył, jak ostrosłupów, walców, graniastosłupów i t. d. poznanych w dotychczasowej nauce, można znaleźć rachunkiem, ze znanych wymiarów poszczególnych długości występujących w tych bryłach.

Przeważnie jednak bryły występujące w świecie zewnętrznym są nieprawidłowe, nie można więc ich objętości zmierzyć przy pomocy jakiegoś prawa matematycznego, wzoru. Używamy wtedy sposobów przybliżonych, z których najwięcej rozpowszechnione są: ważenie i zanurzanie w płynach.

Metody ważenia używa się dla ciał, mających wszędzie jednostajną gęstość, t. j. dla ciał jednorodnych. Trzeba tylko znać ciężar 1 cm^3 tego ciała, t. j. ciężar gatunkowy: *s*. Wiedząc, ile gramów waży całe ciało, a ile gramów 1 cm^3 tego ciała, otrzymamy liczbę centymetrów sześciennych, dzieląc ciężar całkowity przez ciężar gatunkowy. Oznaczając ciężar całego ciała literą Q, a liczbę centymetrów sześciennych, czyli liczbę wymiarową objętości literą V, otrzymamy więc:

$$V = \frac{Q}{s}$$

(Dlaczego tą drogą nie można otrzymać ścisłych wyników, t. j. dowolnego przybliżenia?)

Drugiej metody: zanurzania w płynie możemy już użyć dla każdego ciała, bez względu na to, czy jest jednorodne, czy też nie. Jeżeli jakieś ciało zanurzymy w jakimkolwiek płynie, płyn podniesie się w naczyniu o tyle, ile wynosi objętość zanurzonego ciała. Naczynia obieramy w takiej postaci, aby łatwo można obliczyć objętość każdej części naczynia. Najczęściej używa się naczyń w formie walca opatrzonych już podziałką na centymetry sześcienne. Podziałkę taką sporządza się zwykle nie rachunkiem, ale doświadczalnie (naczynia kalibrowane!). Odczytując stan poziomu cieczy przed wrzuceniem badanego ciała i po wrzuceniu, otrzymujemy jego objętość jako różnicę obydwu odczytań.

Dla brył prawidłowych poznanych w dotychczasowej nauce wyprowadzimy ścisłe sposoby obliczania objętości.

§ 129. Objętość graniastosłupa i walca.

Najłatwiej jest obliczyć objętość prostopadłościanu, podobnie jak w planimetryi powierzchnię prostokąta. Weźmy najpierw pod uwagę taki prostopadłościan, którego krawędzie zawierają całkowite liczby jednostek długości n. p. centymetrów, bez reszty. N. p. $a = 4\,cm$, $b = 3\,cm$, $c = 5\,cm$. Prowadząc trzy systemy przekrojów płaskich równoległych do ścian prostopadłościanu, w odstępach 1 cm, rozdzielimy całą bryłę na same kostki o krawędzi 1 cm, to znaczy na same centymetry sześcienne. Liczba tych cm^3 wynosi:

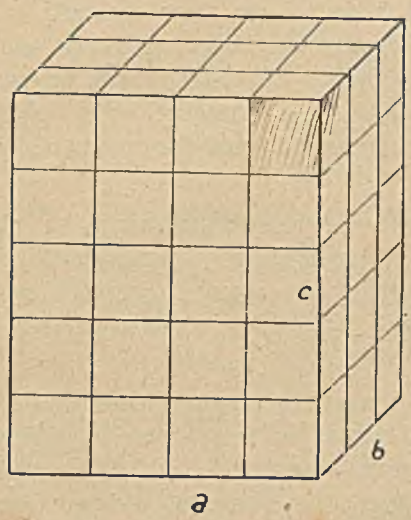


Fig. 350.

$$V = a \,.\, b \,.\, c \qquad (1)$$

albowiem na podstawie można ich umieścić $a \,.\, b$, a takich warstw jest w bryle: c. (N. p. na fig. 350 na podstawie jest $3 \,.\, 4 = 12$ cm^3 a takich warstw jest pięć, więc wszystkich centymetrów sześciennych jest $3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 60\,cm^3$.)

Stąd wniosek:

Objętość prostopadłościanu obliczamy, mnożąc przez siebie liczby wymiarowe trzech krawędzi schodzących się w jednem narożu.

Dla sześcianu $a = b = c$, więc objętość:

$$V = a^3 \qquad (2)$$

(Wykaż, że zamiennikiem miar objętości jest liczba 1000!)

Wzór (1) można przedstawić także w innej postaci: Iloczyn $a \,.\, b$ daje powierzchnię podstawy D, a c jest wysokością prostopadłościanu, więc:

$$V = D \,.\, w. \qquad (3)$$

Liczba wymiarowa objętości prostopadłościanu równa się liczbie wymiarowej podstawy pomnożonej przez liczbę wymiarową wysokości. Króciej wyrażamy to zwykle tak:

Objętość prostopadłościanu równa się podstawie pomnożonej przez wysokość.

Jeżeliby krawędzie nie zawierały całkowitych liczb centymetrów, próbujemy je wymierzyć milimetrem, $\frac{1}{10}$ mm, . . . i objętość obliczamy w tensam

sposób. Gdyby zaś krawędzie były niewspółmierne z jednostką długości, to prostopadłościan nie dałby się już rozłożyć na kostki mające jednostkę długości. Mimoto wzór na obliczenie objętości pozostaje tensam. Aby to wykazać, trzeba przeprowadzić podobne rozumowanie, jak w planimetryi przy obliczaniu powierzchni prostokąta (por. str. 122). Gdyby n. p. $a = 5{\cdot}270\ldots$ *cm*, $b = 3{\cdot}182\ldots$ *cm*, $c = 4{\cdot}695\ldots$ *cm*, to widocznie szukana liczba wymiarowa objętości zawiera się kolejno między iloczynami:

$$5 \,.\, 3 \,.\, 4 \text{ a } 6 \,.\, 4 \,.\, 5$$

$$5{\cdot}2 \,.\, 3{\cdot}1 \,.\, 4{\cdot}6 \text{ a } 5{\cdot}3 \,.\, 3{\cdot}2 \,.\, 4{\cdot}7$$

$$5{\cdot}27 \,.\, 3{\cdot}18 \,.\, 4{\cdot}69 \text{ a } 5{\cdot}28 \,.\, 3{\cdot}19 \,.\, 4{\cdot}70$$

albowiem prostopadłościan o krawędziach a, b, c zawiera się cały wewnątrz prostopadłościanu o krawędziach 6, 4, 5, a mieści w sobie cały prostopadłościan o krawędziach 5, 3, 4. Podobnie możemy go zacieśniać dalej. (Wykonaj odpowiedni rysunek!)

Ponieważ liczba V zawiera się stale między dwoma iloczynami, zdążającymi do tejsamej granicy $a \,.\, b \,.\, c$, przeto musi być

$$V = a \,.\, b \,.\, c.$$

Wszystkie inne proste graniastosłupy i walce można już sprowadzić do obliczenia objętości prostopadłościanu. Widzieliśmy bowiem w planimetryi, że każdą powierzchnię można zamienić na prostokąt o równej powierzchni. Każdy więc słup prosty można zamienić na słup o podstawie prostokątnej, równej co do powierzchni, t. j. na prostopadłościan, o tejsamej wysokości. Objętość tego prostopadłościanu równa się objętości pierwotnej bryły. Ponieważ bowiem podstawa zawiera tylesamo centymetrów kwadratowych (lub jego części), można więc na niej ustawić tylesamo sześcianów o boku 1 *cm*, co w pierwotnej bryle. Ponieważ zaś wysokość została niezmieniona, to i liczba tych warstw pozostaje tasama. Otóż:

Objętość każdego prostego graniastosłupa i walca równa się liczbie wymiarowej podstawy pomnożonej przez liczbę wymiarową wysokości.

$$V = D \,.\, w. \qquad (3)$$

(Jednostki użyte do mierzenia podstawy i wysokości muszą być takiesame!)

Stąd otrzymujemy dla *walca*:

$$V = r^2 \pi \,.\, w. \qquad (4)$$

Dla *walca równobocznego* $w = 2\,r$, więc:

$$V = 2\,r^3 \pi. \qquad (5)$$

(Jak się mają do siebie objętości dwóch walców równobocznych? dwóch walców podobnych?)

Na podstawie wzoru (3) można wykonywać podobne zamiany i podziały graniastosłupów, jakie się wykonuje w planimetryi na wielokątach.

Pozostają jeszcze do obliczenia objętości słupów pochyłych.

Okażemy, że tensam sposób obliczenia odnosi się także do graniastosłupów i walców pochyłych.

Mianowicie udowodnimy, że:

Objętość słupa pochyłego równa się objętości słupa prostego mającego równą podstawę i równą wysokość.

Poglądowo można okazać to twierdzenie w ten sposób, że graniastosłup prosty rozcinamy zapomocą przekrojów równoległych do dna na jak najcieńsze płytki. Zostawiając dno nieruchome, przesuwamy poziomo wszystkie inne płytki, każdą o tensam odcinek względem poprzedniej. (Por. fig. 351 w przekroju!)

Fig. 351.

Otrzymamy w ten sposób bryłę zbliżoną do graniastosłupa pochyłego o tejsamej podstawie. Wysokość nie zmieniła się przytem, bo jest sumą grubości wszystkich płytek. Objętość również pozostała niezmieniona, jako suma objętości wszystkich płytek. (Zrób tosamo ze stosem monet, papierków!)

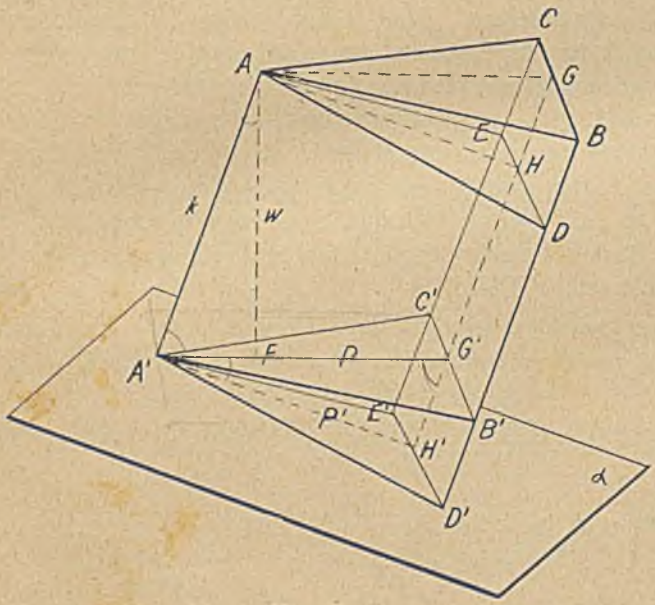


Fig. 352.

Ściśle udowodnimy to opierając się własności rzutów (str. 190). Weźmy dowolny słup pochyły $ABCA'B'C'$. Poprowadźmy przekrój normalny (t. j. prostopadły do krawędzi) AED. Słup pochyły możemy zamienić na prosty, przesuwając bryłę $ADBCE$ na dół równolegle o odcinek AA'. Otrzymaliśmy słup prosty o tejsamej objętości, składa się bowiem z części przystających do odpowiednich części słupa $ABC\ A'B'C'$. (Udowodnij przystawanie!) Objętość słupa prostego a więc i pochyłego wynosi:

$$V = AED \,.\, AA' \text{ lub krócej:}$$
$$V = P' \,.\, k.$$

Otóż, aby obliczyć objętość słupa pochyłego, trzebaby znać powierzchnię przekroju normalnego P' i krawędź. Zwykle jednak znamy tylko powierzchnię dna P.

Wykażemy jednakże, że

$$P' \,.\, k = P \text{ w}.$$

Otóż dno P' można uważać za prostopadły rzut dna P na płaszczyznę α. Poprowadźmy wysokość w słupa pochyłego i przeprowadźmy płaszczyznę zawierającą k i w. Ona przecina słup pochyły wzdłuż krawędzi GG', a prosty wzdłuż krawędzi HH'. Dna tych słupów przecina płaszczyzna wzdłuż $A'G'$ i $A'H'$. Widzieliśmy (str. 190), że powierzchnia P' zmniejsza się przez rzut w tymsamym stosunku, w jakim się skraca odcinek $A'G'$ prostopadły do krawędzi płaszczyzn P i α.

Otóż:

$$P : P' = A'G' : A'H'.$$

Ale z podobieństwa trójkątów $A'H'G'$ i AFA' wynika, że

$$A'G' : A'H' = k : w, \text{ więc}$$
$$P : P' = k : w$$
$$P' \,.\, k = P \,.\, \text{w}.$$

Otrzymujemy więc na objętość słupa pochyłego wzór:

$$V = P \,.\, w\,.$$

zupełnie takisam, jak dla słupów prostych.

Możemy więc wypowiedzieć zupełnie ogólne prawo: *Objętość każdego graniastosłupa i walca, pochyłego i prostego, oblicza się, mnożąc podstawę przez wysokość* (a ściślej: liczbę wymiarową podstawy przez liczbę wymiarową wysokości).

§ 130. Objętość ostrosłupa i stożka. Twierdzenie Cavalieriego.

Aby wyprowadzić wzory na obliczenie objętości stożków i ostrosłupów, musimy się najpierw nauczyć porównywać rozmaite ostrosłupy pod względem objętości. W planimetryi porównanie trójkątów i wielokątów nie sprawiało trudności, ponieważ zawsze można było zamienić z dwóch wielokątów o równej powierzchni jeden na drugi. Ostrosłupy nawet trójboczne, o równych podstawach i wysokościach, nie zawsze dają się złożyć z przystających parami części. Dlatego do porównania objętości ostrosłupów musimy używać rozważań zupełnie odmiennej natury, podobnych do poglądowego dowodu na równość

graniastosłupów prostych i pochyłych (st. 268). Oprzemy się na twierdzeniu ogólnem, odnoszącem się do wszystkich gatunków brył:

Jeżeli dwie bryły, których podstawy leżą na tejsamej płaszczyźnie, przecięte płaszczyznami równoległemi do podstawy mają w każdej wysokości równe (wzajemnie) *przekroje, to ich objętości są równe.*

Uwaga: Prawo to podał matematyk włoski Cavalieri w XVII. wieku. Pozostawał on pod wpływem wielkiego astronoma i fizyka Galileusza i astronoma Kepplera, który używał podobnych rozważań przy obliczaniu objętości beczek rozmaitych kształtów.

Bryły takie muszą mieć naturalnie także równe wysokości, bo w przeciwnym razie istniałyby takie przekroje jednej (wyższej) bryły, którym w drugiej odpowiadałby przekrój $= O$, a więc nierówny.

Ścisły dowód twierdzenia Cavalieriego dla brył dowolnych kształtów jest trudny. Poglądowo natomiast można to twierdzenie łatwo pojąć. Możemy sobie bowiem wyobrazić obydwie bryły rozcięte na bardzo wiele cienkich płytek, równoległych do podstawy, o równej grubości. Ponieważ według założenia także podstawy każdej pary płytek są równe, przeto ich objętości możemy uważać z wielkiem przybliżeniem za równe. Wobec tego będą równe także objętości całych brył, składających się z takiejsamej liczby płytek parami równych. Dla ostrosłupów i stożków udowodnimy ściśle prawdziwość tego twierdzenia.

Weźmy pod uwagę *dwa ostrosłupy o równych podstawach i równych wysokościach:*

$$D = D', w = w'.$$

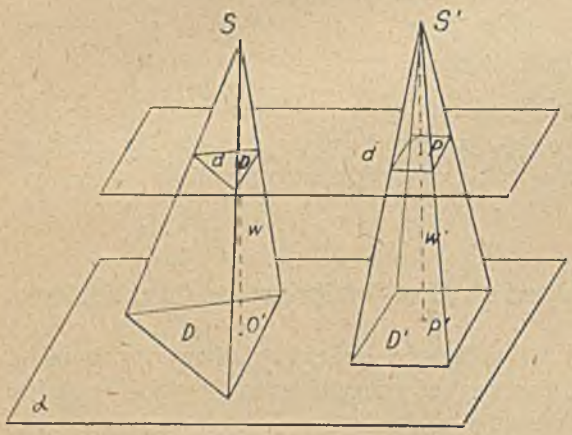


Fig. 353.

Ustawiamy je na jednej płaszczyźnie α i przecinamy płaszczyzną równoległą do podstawy. Przekroje tych ostrosłupów są równe, albowiem według znanego twierdzenia:

$$D : d = S O'^2 : S O^2$$
$$D' : d' = S P'^2 : S P^2.$$

Ale:

$$S O = S P$$
$$\text{i } S O' = S P'$$

więc $D : d = D' : d'$.

Ponieważ zaś:

$$D = D', \text{ to i } d = d'.$$

Ostrosłupy takie spełniają więc warunki twierdzenia Cavalieriego.

Udowodnimy, że *objętości takich ostrosłupów są równe.* Wykażemy to najpierw dla ostrosłupów trójbocznych. Umieszczamy obydwa ostrosłupy

(o równych dnach i wysokościach) na tejsamej płaszczyźnie i prowadzimy kilka płaszczyzn równoległych do podstawy w równych odstępach. Każdą płytkę uzupełniamy do graniastosłupa, mającego podstawę dolną równą dolnej podstawie płytki a krawędzie boczne równe odcinkowi jednej krawędzi bocznej n. p. MA ($M'A'$ w drugim ostrosłupie). W ten sposób otrzymujemy bryłę schodkowatą, B_1, zawierającą cały ostrosłup V, a więc jej objętość.

$$B_1 > V.$$

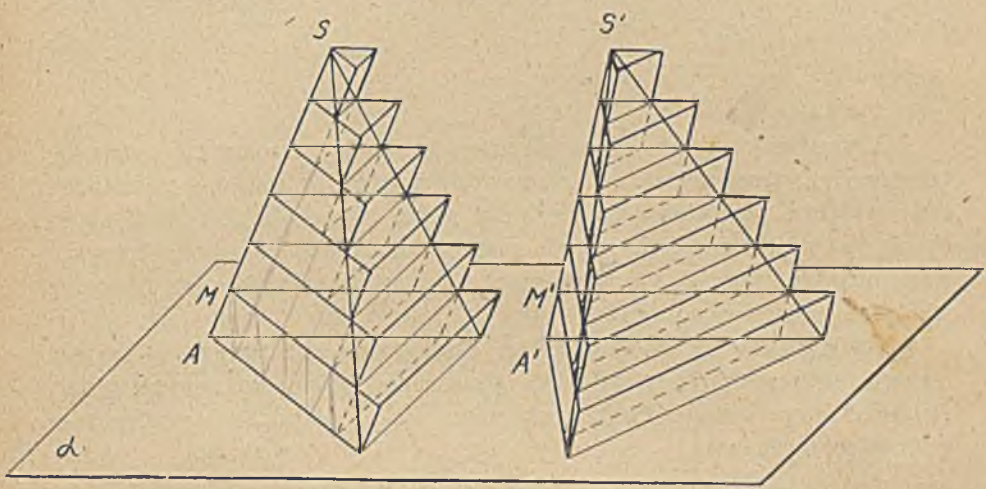


Fig. 354.

Następnie wpisujemy w ostrosłup płytki graniastosłupowe o takiejsamej krawędzi bocznej, ale mające za dno górną podstawę odpowiedniej płytki ostrosłupa. Powstaje w ten sposób bryła C_1, zawarta cała wewnątrz ostrosłupa, a więc jej objętość:

$$C_1 < V.$$

Otóż:

$$C_1 < V < B_1.$$

Różnicę objętości B_1 i C_1 otrzymamy, zsuwając na dół wszystkie schodki wystające. Zapełnią one całą dolną płytę graniastosłupową. Widzimy stąd, że różnica objętości bryły opisanej i wpisanej równa się dolnemu graniastosłupowi. Jeżeli poprowadzimy więcej przekrojów, to zamkniemy V w granice ciaśniejsze:

$$C_2 < V < B_2.$$

Prowadząc bardzo wiele przekrojów w bardzo małych odstępach, otrzymamy bardzo cienkie płytki. Objętości tych płytek dążą więc do zera (nawet objętość dolnej, największej płytki). Objętość pierwszego ostrosłupa zawiera się między dwoma wielkościami, których różnica dąży do zera, jest więc równa wspólnej granicy, do jakiej dążą te obydwie zmienne wielkości.

Jeżeli przeprowadzimy tosamo rozumowanie dla drugiego ostrosłupa, otrzymamy w podobny sposób bryły B'_1 i C'_1. Przedewszystkiem widzimy, że $B'_1 = B_1$ i $C'_1 = C_1$, ponieważ bryły B_1 i B'_1 składają się z równej liczby równych graniastosłupów. (Graniastosłupy te są równe, bo mają równe podstawy i wysokości.) Taksamo C'_1 i C_1. Taksamo bryły B'_2 i C'_2, złożone z większej liczby płytek, są równe odpowiednim bryłom B_2 i C_2, utworzonym dla pierwszego ostrosłupa. Otóż objętość V_1 drugiego ostrosłupa zawiera się stale między temisamemi wielkościami zmiennemi, co i V pierwszego ostrosłupa, a więc także V_1 równa się granicy V, do jakiej dążą te wielkości.

A więc ostatecznie:

$$V_1 = V.$$

Wykazaliśmy w ten sposób równość ostrosłupów trójbocznych o równych podstawach i wysokościach. Ostrosłupy wieloboczne o równych podstawach i wysokościach rozkładamy zapomocą płaszczyzn przechodzących przez wierzchołek na trójboczne, o równych podstawach. Objętości tych składowych ostrosłupów są równe, a więc i objętości całych ostrosłupów, jako sumy równych wielkości, muszą być równe.

Stożki można porównać wprost z ostrosłupem trójbocznym, wykonując odpowiednie przekroje i wykreślając odpowiednie walce, wpisane i opisane (w ogólności pochyłe). Otrzymujemy więc — jako wynik tych rozważań — następujące prawo:

Ostrosłupy i stożki o równych dnach i wysokościach mają równe objętości. Jeżeli więc zdołamy obliczyć objętość jakiegoś jednego gatunku ostrosłupów o dowolnie wielkiej podstawie i dowolnie wielkiej wysokości, to na podstawie udowodnionego prawa obliczymy objętość każdego innego ostrosłupa lub stożka.

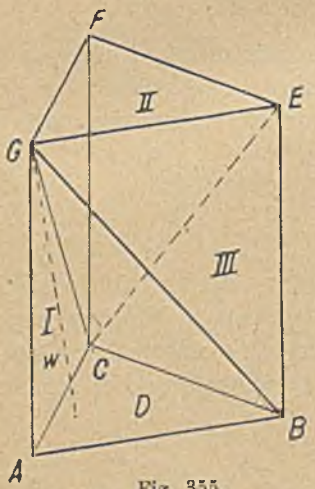


Fig. 355.

Najprościej będzie nawiązać do znanych już objętości graniastosłupów, wychodząc od dowolnego ostrosłupa trójbocznego $ABCG$. Przesuńmy jego podstawę ruchem postępowym o odcinek AG wzdłuż tej krawędzi. Otrzymamy graniastosłup trójboczny $ABDGEF$ o równej podstawie D i równej wysokości w.

Wykażemy, że objętość ostrosłupa trójbocznego równa się trzeciej części objętości tego graniastosłupa.

Poprowadźmy dla dowodu jeszcze przekrój GEC (zrób to na modelu!). Otrzymamy trzy ostrosłupy

$$I = ABCG,\ II = GEFC \text{ i } III = EBCG.$$

Ostrosłupy I i II mają przystające dna $ABC \cong GEF$ i tęsamą wysokość (bo odległość punktu C od górnego dna jest takasama jak odległość punktu G od dolnego dna, jako odległość dwóch płaszczyzn równoległych). Objętości tych ostrosłupów są więc równe:

$$I = II.$$

Porównajmy teraz ostrosłupy II i III, uważając G za ich wspólny wierzchołek, a trójkąty CEF i CEB za ich dna. Ich podstawy są równe, bo $CEF \cong CEB$, a wysokość mają także tęsamą (odległość punktu G od ściany $CBEF$). Więc także $II = III$.

Wszystkie trzy ostrosłupy mają więc równą objętość, zatem objętość każdego z nich równa się trzeciej części objętości graniastosłupa. Ponieważ zaś objętość graniastosłupa wynosi $D \cdot w$, więc objętość ostrosłupa $ABCG$ wynosi:

$$V = \frac{D \cdot w}{3} \text{ (wyrazić słowami!)}$$

Objętość każdego innego ostrosłupa otrzymamy, porównując go z ostrosłupem trójbocznym. Jeżeli bowiem jakikolwiek ostrosłup wieloboczny ma dno D, a wysokość w, to dobieramy ostrosłup trójboczny V' mający taksamo wielkie dno i równą wysokość: $D' = D$, $w' = w$. Wtedy i $V' = V$. Objętość trójbocznego ostrosłupa wynosi według udowodnionego wzoru:

$$V' = \frac{D' \cdot w'}{3}$$

więc i

$$V = \frac{D' w'}{3}$$

ale za D' i w' możemy podstawić równe wielkości D i w i otrzymamy:

$$V = \frac{D w}{3} = D \cdot \frac{w}{3} \qquad (6)$$

Objętość każdego ostrosłupa oblicza się, mnożąc podstawę przez trzecią część wysokości.

Stosując ten wzór do stożka otrzymamy:

$$V = r^2 \pi \cdot \frac{w}{3} \qquad (7)$$

Jeżeli stożek jest równoboczny, to jego bok wynosi $2r$,

więc: $$w = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$$

więc: $$V = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3} \qquad (8)$$

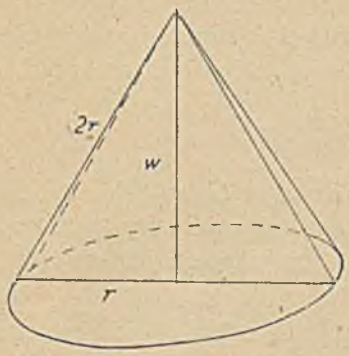


Fig. 356.

Z tego wzoru widzimy, że objętości dwóch stożków równobocznych mają się do siebie tak, jak trzecie potęgi promieni. Prawo to dotyczy wszystkich brył podobnych do siebie.

Obliczenie objętości ostrosłupów może posłużyć do obliczenia objętości dowolnego wielościanu, ponieważ każdy wielościan można rozłożyć na ostrosłupy (podobnie jak w planimetryi każdy wielokąt oblicza się przy pomocy trójkątów).

§ 131. Objętość ostrosłupa i stożka ściętego.

W ostrosłupie ściętym mamy podane zwykle dna D, d i wysokość w. Chcemy obliczyć objętość przy pomocy tych wielkości.

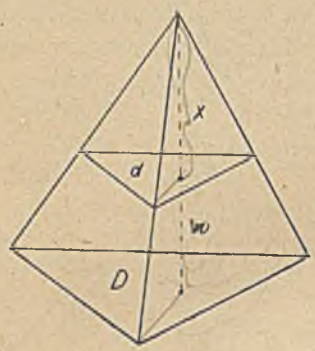


Fig. 357.

Objętość ostrosłupa ściętego jest różnicą objętości całego ostrosłupa i ostrosłupa odciętego, o wysokości nieznanej x.

Więc:

$$V = D \cdot \frac{w+x}{3} - d \cdot \frac{x}{3}.$$

Biorąc $\frac{1}{3}$ przed nawias otrzymamy:

$$V = \tfrac{1}{3}\,[Dw + (D-d)\,x] \qquad (a).$$

Aby obliczyć x, oprzemy się na znanem twierdzeniu o przekrojach ostrosłupa (str. 229).

$$D : d = (w+x)^2 : x^2$$

czyli po spierwiastkowaniu całej proporcyi:

$$\sqrt{D} : \sqrt{d} = (w+x) : x$$

Zastosujmy do tej proporcyi twierdzenie o różnicy wyrazów, to:

$$(\sqrt{D} - \sqrt{d}) : \sqrt{d} = w : x$$

a stąd:

$$x = \frac{w\sqrt{d}}{\sqrt{D} - \sqrt{d}}.$$

Wprowadzając tę wartość we wzór (a) otrzymamy:

$$V = \tfrac{1}{3}\left[D\,w + \frac{(D-d)\,w\sqrt{d}}{\sqrt{D} - \sqrt{d}}\right].$$

Ale

$$D - d = (\sqrt{D} + \sqrt{d}) \cdot (\sqrt{D} - \sqrt{d}),$$

więc:

$$V = \tfrac{1}{3}\left[D\,w + (\sqrt{D} + \sqrt{d})\sqrt{d}\,.\,w\right],$$

czyli ostatecznie:

$$V = (D + d + \sqrt{D\,.\,d})\frac{w}{3}. \qquad (9)$$

Objętość ostrosłupa ściętego równa się sumie den i średniej geometrycznej obu den, pomnożonej przez trzecią część wysokości.

Uwalniając ten wzór od nawiasów, otrzymamy formę łatwiejszą do wysłowienia:

$$V = D\,.\,\frac{w}{3} + d\,.\,\frac{w}{3} + \sqrt{D\,.\,d}\,.\,\frac{w}{3},$$

to znaczy:

Objętość ostrosłupa ściętego równa się objętości trzech ostrosłupów zupełnych o równej mu wysokości, a mających za podstawy: wielkie dno, małe dno i średnią geometryczną obydwu den.

Stosując wzór (9) do stożka ściętego, otrzymamy:

$$V = (R^2\pi + r^2\pi + \sqrt{R^2\pi\,.\,r^2\pi})\,\frac{w}{3}$$

$$V = (R^2\pi + r^2\pi + R\,.\,r\,.\,\pi)\,\frac{w}{3}$$

lub:

$$V = (R^2 + r^2 + R\,r)\,\frac{\pi w}{3}. \qquad (10)$$

§ 132. Objętość wielościanów umiarowych i kuli.

Objętość niektórych wielościanów umiarowych potrafimy już obliczyć, mianowicie sześcianu, czworościanu, który jest ostrosłupem trójbocznym i ośmiościanu, który się składa z dwóch ostrosłupów czworobocznych. Objętość pozostałych dwóch brył obliczymy wzorem wspólnym dla wszystkich umiarowych wielościanów. Wiemy, że każdy wielościan umiarowy posiada środek. Łącząc ten punkt z narożami i przesuwając odpowiednie płaszczyzny, otrzymamy tyle przystających ostrosłupów, ile bryła ma ścian, n. p. n. Ponieważ objętości wszystkich tych ostrosłupów są równe, wynoszą n. p. V_o, to objętość całej bryły:

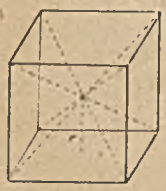


Fig. 358.

$$V = n\,.\,V_o\,.$$

Ale $V_o = F\,.\,\frac{r}{3}$, gdzie F oznacza powierzchnię jednej ściany, a r promień kuli wpisanej w bryłę, który jest zarazem wysokością każdego ostrosłupa.

Więc: $$V = n \,.\, F \,.\, \frac{r}{3}.$$

Ale $n \,.\, F = P$, jestto bowiem powierzchnia całej bryły. Otrzymujemy więc:

$$V = P \,.\, \frac{r}{3} \qquad (11).$$

Objętość wielościanu umiarowego oblicza się, mnożąc jego powierzchnię przez trzecią część promienia kuli wpisanej. (Podobne prawo mieliśmy w planimetryi dla wielokątów umiarowych!)

Uwaga: Wzoru (11) można użyć do obliczenia objętości dowolnego wielościanu, opisanego na kuli.

W podobny sposób dochodzimy do wzoru na objętość kuli. Podzielmy powierzchnię kuli na bardzo drobne czworokąty sferyczne, prowadząc n. p. system równoleżników i południków. Wierzchołki każdego takiego czworokąta połączmy ze środkiem kuli, to kula rozpadnie się na bryły bardzo zbliżone do ostrosłupów czworobocznych, których wysokość równa się promieniowi kuli a podstawą jest czworokąt płaski, łączący wierzchołki czworokąta sferycznego.

Objętości tych ostrosłupów wynoszą:

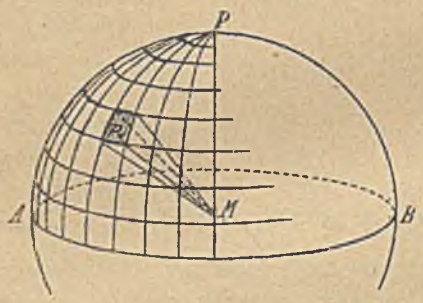


Fig. 359.

$$v_1 = p_1 \frac{R}{3}$$

$$v_2 = p_2 \cdot \frac{R}{3}$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$v_n = p_n \cdot \frac{R}{3}.$$

Jeżeli podział poprowadzimy odpowiednio daleko, to suma tych ostrosłupów różni się dowolnie mało od objętości kuli, a suma ich podstaw taksamo dąży do powierzchni kuli. Więc dodając obliczone wartości otrzymujemy:

$$V = (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) \frac{R}{3}$$

$$V = P \,.\, \frac{R}{3}, \text{ ale } P \text{ kuli wynosi } 4\, R^2 \pi$$

więc:

$$V = \tfrac{4}{3} R^3 \pi. \qquad (12)$$

Z tego wzoru widzimy, że objętości dwóch różnych kul mają się do siebie jak trzecie potęgi promieni, zgodnie z ogólnem prawem, że *jeżeli wymiary*

bryły wzrastają, to powierzchnie rosną w stosunku drugich potęg tych wymiarów, a objętości w stosunku trzecich potęg. (Sprawdzić dla innych poznanych brył!)

Do tegosamego wyniku możemy dojść opierając się na twierdzeniu Cavalieriego.

Wśród brył o znanej objętości szukamy takiej, któraby miała wszystkie przekroje równe odpowiednim przekrojom kuli. Przekrój kuli, poprowadzony w odległości x od środka ma powierzchnię:

$$\rho^2 \pi = R^2 \pi - x^2 \pi.$$

Wzór ten naprowadza nas na to, że przekroje szukanej bryły będą pierścieniami kołowymi o większym promieniu stałym, R a mniejszym zmiennym, mianowicie równym odległości przekroju kuli od środka.

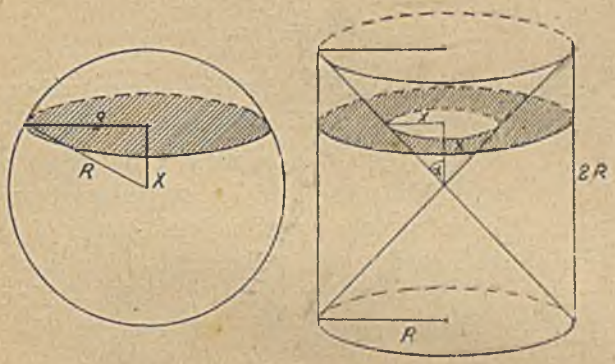


Fig. 360.

Bryłą taką jest walec równoboczny z wydrążeniami stożkowemi, sięgającemi do środka walca. Promień tego walca ma być równy promieniowi kuli. Ponieważ $\sphericalangle \alpha = 45$, to istotnie promień mniejszego koła przekroju równa się odległości tego przekroju od środka.

Ponieważ wszystkie przekroje tego wydrążonego walca są równe odpowiednim przekrojom kuli, więc według twierdzenia Cavalieriego objętość kuli równa się objętości walca pomniejszonego o podwójną objętość wgłębienia stożkowatego:

$$V_k = V_w - 2\, V_s\,.$$

Stąd:

$$V_k = 2\, R^3 \pi - 2\,.\, R^2 \pi.\, \frac{R}{3} = \frac{6\, R^3 \pi - 2\, R^3 \pi,}{3}$$

więc otrzymujemy wzór:

$$V_k = \tfrac{4}{3}\, R^3 \pi$$

tensam, któryśmy poprzednio wyprowadzili inną drogą.

§ 133. Objętości części kuli.

Tosamo rozumowanie, które pozwoliło obliczyć objętość kuli, prowadzi także do obliczenia objętości wycinka kuli (t. j. bryły powstającej przez obrót wycinka koła około dwusiecznej kąta środkowego). Dzieląc czaszę ograniczającą wycinek na drobne czworokąty, otrzymujemy jako sumę ostrosłupów:

$$V = (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\frac{R}{3}.$$

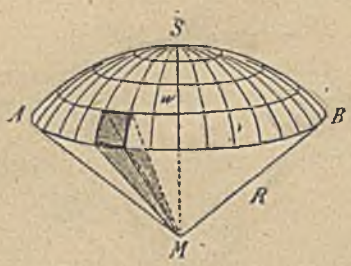


Fig. 361.

W granicy suma tych powierzchni p_1, $p_2, \ldots p_n$ nie zapełnia całej kuli, ale tylko powierzchnię czaszy, więc:

$$V_w = P_{cz} \cdot \frac{R}{3}$$

ale $P_{cz} = 2\,R\,\pi \,.\, w$ więc:

$$V_w = \frac{2\,R^2\,\pi\,w}{3}. \qquad (13)$$

Objętość wycinka oblicza się tak, jak objętość stożka, którego podstawa równa się czaszy ograniczającej wycinek, a wysokość równa się promieniowi kuli.

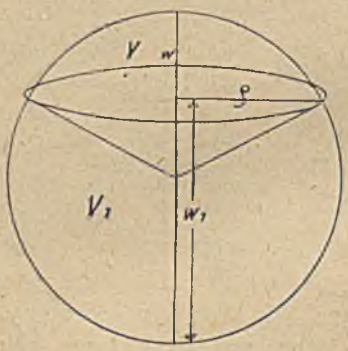


Fig. 362.

Objętość odcinka kuli można obliczyć jako różnicę między objętością odpowiedniego wycinka i stożka, jeżeli chodzi o odcinek mniejszy od półkuli, lub też jako sumę wycinka i stożka (por. fig. 362). Obliczmy najpierw objętość mniejszego odcinka, V.

$$V = 2\,R\,\pi\,w \,.\, \frac{R}{3} - \rho^2\,\pi \,.\, \frac{R - w}{3}.$$

Ale ρ jest średnią geometryczną między obydwoma odcinkami średnicy. (Por. planimetrya § 63.)

więc: $$\rho^2 = w\,(2\,R - w) \qquad (a)$$

więc: $$V = \frac{2\,R^2\,\pi\,w}{3} - \frac{\pi\,w}{3}(R - w)(2\,R - w)$$

skąd po wykonaniu prostych działań otrzymamy:

$$V = \pi\,w^2\left(R - \frac{w}{3}\right). \qquad (14)$$

Takisam wzór otrzymamy dla większego odcinka (tylko zamiast w, trzeba użyć wysokości w_1).

Wzór ten można sprowadzić do innej formy, łatwiejszej do zapamiętania. Wyrazimy objętość odcinka zapomocą wielkości ρ i w, które możemy

wprost zmierzyć na odcinku, nie uzupełniając go do kuli. Mianowicie z wzoru (a) otrzymujemy:

$$R = \frac{\rho^2 + w^2}{2w},$$

a podstawiając tę wartość we wzór (14), otrzymamy po uporządkowaniu:

$$V = \frac{\rho^2 \pi . w}{2} + \frac{4}{3}\left(\frac{w}{2}\right)^3 \pi. \qquad (14a)$$

Słowami: *Objętość odcinka kuli równa się połowie objętości walca opisanego na tym odcinku, powiększonej o objętość kuli wpisanej w ten*

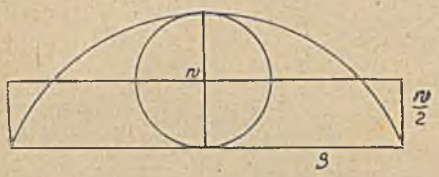


Fig. 363.

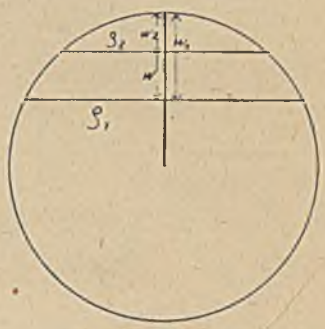


Fig. 364.

odcinek. Na fig. 363 są te bryły przedstawione w przekroju (w rzucie pionowym).

Objętość warstwy kuli można obliczyć jako różnicę objętości dwóch odcinków kuli. Używając wzoru (14 a) na obliczenie objętości odcinków o wysokościach w_1 i w_2 otrzymamy:

$$V = \frac{\rho_1^2 \pi w_1}{2} + \frac{4}{3}\left(\frac{w_1}{2}\right)^3 \pi - \frac{\rho_2^2 \pi w_2}{2} - \frac{4}{3}\left(\frac{w_2}{2}\right)^3 \pi.$$

Wzór ten także można przekształcić na formę wygodną do zapamiętania, a zawierającą te tylko wielkości, które się dadzą bezpośrednio zmierzyć na samej warstwie, t. j. ρ_1, ρ_2 i w. (Por. fig. 364.)

Zamiast w_1 i w_2 podstawiamy we wzorze na objętość wartości:

$$w_1 = w + w_2$$
$$w_2 = w_1 - w.$$

to: $$V = \frac{\rho_1^2 \pi w}{2} + \frac{\rho_1^2 \pi w_2}{2} + \frac{w_1^3 \pi}{6} - \frac{\rho_2^2 \pi w_1}{2} + \frac{\rho_2^2 \pi w}{2} - \frac{w_2^3 \pi}{6}.$$

$$V = \frac{\rho_1^2 \pi w}{2} + \frac{\rho_2^2 \pi w}{2} + \frac{\pi}{6}(3\rho_1^2 w_2 - 3\rho_2^2 w_1 + w_1^3 - w_2^3).$$

Ale: $$\rho_1^2 w_2 + \rho_2^2 w_1 = w_1 w_2^2 - w_1^2 w_2$$

jak to wynika z równości:

$$\left.\begin{array}{l}\rho_1^2 = w_1(2R - w_1) \\ \rho_2^2 = w_2(2R - w_2)\end{array}\right| \begin{array}{l} . w_2 \\ . w_1 \end{array}$$ odejmujemy dolne równanie:

$$\rho_1^2 w_2 - \rho_2^2 w_1 = - w_1^2 w_2 + w_2^2 w_1 .$$

Uwzględniając ten związek, otrzymujemy:

$$V = \frac{\rho_1^2 \pi w}{2} + \frac{\rho_2^2 \pi w}{2} + \frac{\pi}{6}(w_1 - w_2)^3$$

ale $w_1 - w_2 = w$

$$V = \frac{\rho_1^2 \pi w}{2} + \frac{\rho_2^2 \pi w}{2} + \frac{\pi}{6} w^3$$

lub ostatecznie:

$$V = \frac{\rho_1^2 \pi w}{2} + \frac{\rho_2^2 \pi w}{2} + \frac{4}{3}\left(\frac{w}{2}\right)^3 \pi. \qquad (15)$$

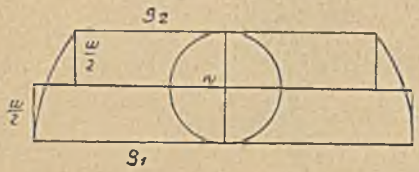


Fig. 365.

Objętośc warstwy kulistej oblicza się, dodając do połowy objętości walca opisanego na tej warstwie, połowę objętości walca wpisanego i objętość kuli wpisanej.

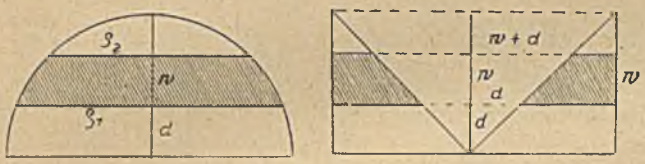


Fig. 366.

Na fig. 365 są przedstawione te bryły w przekroju (w rzucie pionowym).

Do tychsamych wzorów na objętość warstwy i odcinka można dojść, używając twierdzenia Cavalieriego. N. p. objętość warstwy równa się objętości pierścienia bryły, której używaliśmy przy obliczaniu objętości kuli. (Por. fig. 366.) Wykonaj ten rachunek!

§ 134. Reguła Guldina do obliczania objętości brył obrotowych.

Przy obliczaniu powierzchni brył obrotowych wyprowadziliśmy ogólne prawo $P = l \,.\, 2 r \pi$, gdzie r oznaczało odległość środka ciężkości linii obracającej się od osi obrotu a l całkowitą długość tej linii.

Zupełnie podobne prawo odnosi się do objętości brył obrotowych. Udowodnimy mianowicie:

Jeżeli jakakolwiek część płaszczyzny wiruje koło osi nie przecinającej jej ograniczenia, to objętość tej bryły obrotowej równa się powierzchni figury obracającej się, pomnożonej przez drogę zakreśloną przez środek ciężkości tej powierzchni.

Prawdopodobność tego twierdzenia wykażemy najłatwiej, biorąc pod uwagę obręcz powstającą przez obrót koła koło osi leżącej w jego płaszczyźnie, a nie przecinającej go. Gdybyśmy taką obręcz wyprostowali, otrzymalibyśmy walec mający za podstawę koło tworzące. Przy tem wyginaniu musiałyby doznać wewnętrzne części powierzchni pierścienia rozciągnięcia a zewnętrzne zgniecenia. Wysokość tego walca musi być krótsza od zewnętrznego równoleżnika, a dłuższa od wewnętrznego. Wydaje się więc bardzo prawdopodobnem, że wysokość walca będzie równa średniemu równoleżnikowi, przechodzącemu przez środek ciężkości S, koła tworzącego. Nazywając promień tego równoleżnika (t. j. odległość środka ciężkości od osi obrotu) literą r, otrzymamy na objętość tego walca (a więc i obręczy) wzór:

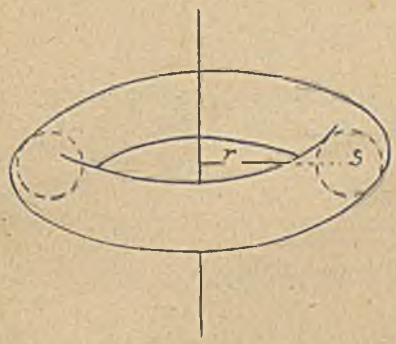


Fig. 367.

$$V = P \cdot 2 r \pi$$

zgodnie z twierdzeniem Guldina. Podobnie ma się rzecz z każdą powierzchnią płaską obracającą się.

Scisły dowód przeprowadzimy dla trójkąta. Inne wielokąty można bowiem złożyć z trójkątów a powierzchnie ograniczone liniami krzywemi możemy aproxymować zapomocą wielokątów.

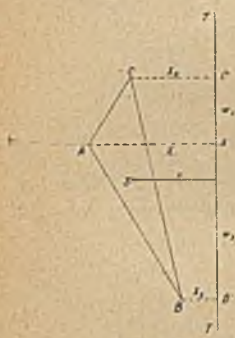


Fig. 368.

Weźmy więc pod uwagę trójkąt ABC i rozważmy bryłę, jaka powstaje przez obrót tego trójkąta koło osi TT. Oznaczmy odległości wierchrzołków od osi literami x_1, x_2, x_3 a odległość środka ciężkości S od osi obrotu literą r. Łatwo wykazać, że

$$r = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

(Por. planimetrya ćwiczenia VII, 19.)

Objętość bryły obrotowej zakreślonej przez obrót tego trójkąta składa się z dwóch stożków ściętych o bokach AC i AB, od których jednak trzeba odjąć wewnętrzny stożek ścięty o boku BC. Więc:

$$V = \frac{w_2 \pi}{3}\left(x_1^2 + x_3^2 + x_1 x_3\right) + \frac{w_3 \pi}{3}\left(x_2^2 + x_1^2 + x_1 x_2\right) -$$
$$- \frac{w_2 + w_3}{3}\pi\left(x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3\right).$$

Zbierając osobno wyrazy zawierające w_2, a osobno w_3, otrzymujemy:

$$V = \frac{\pi}{3} w_2 \left(x_1{}^2 + x_1 x_3 - x_2{}^2 - x_2 x_3\right) + \frac{\pi}{3} w_3 \left(x_1{}^2 + x_1 x_2 - x_3{}^2 - x_2 x_3\right).$$

Wyłączmy przed nawias:

$$x_1 - x_2 \text{ i } x_1 - x_3.$$

$$V = \frac{\pi}{3} w_2 (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{\pi}{3} w_3 (x_1 - x_3)(x_1 + x_2 + x_3).$$

$$V = \pi \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \left[w_2 (x_1 - x_2) + w_3 (x_1 - x_3) \right].$$

Ale wyrażenie zawarte w nawiasie przedstawia podwójną powierzchnię trójkąta, otrzymaną jako różnicę pomiędzy trapezami $ABB'A'$ i $AA'CC'$, a trapezem $BB'CC'$ (oblicz!)

Więc:

$$V = \pi \,.\, r \,.\, 2P$$

czyli:

$$V = P \,.\, 2r\pi \tag{16}$$

a to jest prawo Guldina.

Biorąc teraz dowolny wielokąt, rozkładamy go na trójkąty. Oznaczmy odległości środków ciężkości od osi literami r_1, r_2, r_3 . . . a powierzchnie tych trójkątów f_1, f_2, f_3 . . . otrzymamy:

$$V = f_1 \,.\, 2r_1\pi + f_2 \,.\, 2r_2\pi + f_3 \,.\, 2r_3\pi + \ldots$$

$$V = 2\pi (r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_3 f_3 +).$$

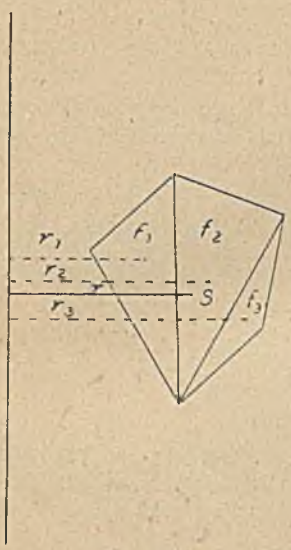


Fig. 369.

Odległość środka ciężkości całego wielokąta od osi obrotu obliczamy, tworząc średnią (arytmetyczną) według wzoru:

$$r = \frac{r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_3 f_3 + \ldots}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots} = \frac{r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_3 f_3 + \ldots}{P}$$

(Udowadnia się podobnie, jak przy powierzchniach obrotowych.) Postawiając licznik tego wyrażenia we wzór na V otrzymamy:

$$V = 2\pi \,.\, rP.$$

a więc taksamo, jak dla trójkąta.

Dla powierzchni ograniczonej linią krzywą udowadnia się przez szereg kolejnych przybliżeń zapomocą wielokątów! Twierdzenie pozostaje prawdziwe i w granicy.

Do użycia wzoru Guldina trzeba znać środek ciężkości obracającej się powierzchni. Jeżeli ograniczenie powierzchni jest linią skomplikowaną, rozkłada się ją na małe trójkąty i oblicza się każdą część objętości osobno.

Jeżeli znamy wzór na obliczenie jakiejś bryły obrotowej znaleziony inną drogą, możemy znaleźć położenie środka ciężkości figury tworzącej. Wiemy n. p., że dla kuli:

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi.$$

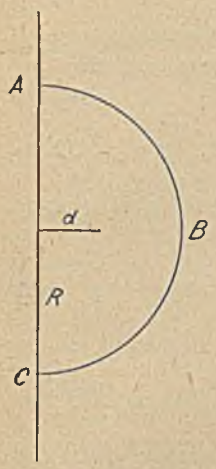


Fig. 370.

Stąd można obliczyć środek ciężkości powierzchni półkola, tworzącego swoim obrotem kulę. Oznaczmy literą d odległość środka ciężkości od osi obrotu (leży on na symętralnej łuku ABC), to według reguły Guldina objętość kuli wynosi:

$$V = P \,.\, 2\, d\, \pi = \frac{R^2 \pi}{2}\, 2\, d\, \pi = \pi^2 R^2 d.$$

A więc:

$$\frac{4}{3} R^3 \pi = \pi^2 R^2 d,$$

skąd wynika:

$$d = \frac{4 R^3 \pi}{3 \pi^2 R^2} = \frac{4 R}{3 \pi}.$$

Obliczenie objętości innych brył, zamkniętych powierzchniami krzywemi, da się w wielu wypadkach wykonać przez rozważania graniczne lub też przy pomocy rachunków wyższych (rachunek całkowy), to jednak przekracza już zakres elementarnej geometryi.

Ćwiczenia XIV.

§ 128. 1. Ciało waży 25 *kg*. Ile wynosi jego objętość, jeżeli ciężar gatunkowy wynosi $c = 8$?

2. Przez wrzucenie jakiegoś ciała do napełnionego naczynia wylało się $^1/_2$ *l* wody. Jak wielką objętość ma to ciało?

§ 129. 3. Narysować w perspektywie równoległej równoległościan prosty o podstawie rombowej i zamienić go na prostopadłościan.

4. Narysować w perspektywie równoległej graniastosłup pochyły czworoboczny i zamienić go na graniastosłup prosty.

5. Graniastosłup prosty o podstawie sześciobocznej zamienić na prostopadłościan w rzutach i w perspektywie.

6. Obliczyć objętość sześcianu znając: *a*) powierzchnię jednej ściany $p = 144$ cm^2, *b*) przekątnię sześcianu $d = 8$ *cm*, *c*) przekątnię ściany bocznej $q = 12$ *cm*.

7. Obliczyć ciężar żelaznej skrzyni sześciennej, której długość wynosi 0·5 *m*, a grubość ścian 1 *cm*. Ciężar gatunkowy żelaza $c = 7{\cdot}3$.

8. Znaleźć krawędź kostki mającej dwa razy większą objętość od kostki o znanej objętości, n. p. $V = 50\, dm^3$ (problem delijski: podwojenie ołtarza sześciennego). Zadanie to nie da się wykonać przy pomocy jedynie cyrkla i lineału!

9. Jak długa jest kostka ołowiana, ważąca 1 *kg* (ciężar gatunkowy ołowiu $c = 11{\cdot}37$).

10. Ile waży cegła, mająca rozmiary 29 *cm*, 14 *cm*, 6·5 *cm*, jeżeli jej ciężar gatunkowy $c = 1{\cdot}8$.

11. Ile ważą schody kamienne prowadzące do wysokości 12 *m*, z których każdy ma rozmiary 1·5 *m*, 2 *dm* a 1 *dm* wysokości a ciężar gatunkowy kamienia $c = 2{\cdot}5$?

12. Obliczyć objętość graniastosłupa prostego o wysokości 6 *dm*, jeżeli jego podstawa jest: *a*) trójkątem równobocznym, *b*) pięciokątem umiarowym, *c*) sześciokątem umiarowym, *d*) ośmiokątem umiarowym o boku $a = 1$ *dm*.

13. Znając powierzchnię graniastosłupa umiarowego 3-, 5-, 6-bocznego obliczyć jego objętość.

14. Obliczyć objętość walca prostego, znając obwód podstawy $U = 628$ *cm* i wysokość.

15. Ile wody na sekundę przepływa przez rurę o przekroju kołowym, którego średnica wynosi 2 *dm*, jeżeli prędkość ruchu wody jest 1·5 *m* na sekundę. Ile hektolitrów dziennie może ta rura dostarczyć?

16. Grubość drutu żelaznego wynosi 3 *mm*. Ile metrów tego druta otrzymamy z 1 *kg* (ciężar gatunkowy $c = 7{\cdot}3$).

17. Kilogram drutu o ciężarze gatunkowym $c = 11$ zawiera 80 *m* tego drutu. Ile wynosi promień przekroju?

18. Obliczyć ciężar rury żelaznej (c. g. $= 7{\cdot}3$) znając jej grubość: 2 *cm*, przekrój wewnętrzny $r = 15$ *cm* i długość 6 *m*.

19. Jak szerokie jest naczynie w formie walca zawierające 1 *l*, jeżeli *a*) wysokość równa się średnicy podstawy, *b*) wysokość równa się podwójnej średnicy podstawy.

20. Srebrny drut 30 *cm* długi o grubości 1 *mm* powleczono warstwą złotą grubości 0·3 *mm*. O ile zmniejszy się grubość tego druta, jeżeli go wyciągniemy do długości 1 *m*?

21. Naczynie walcowe do mierzenia ilości opadów atmosferycznych ma średnicę 25 *cm*. Podczas deszczu podniosła się woda o 86 *mm*. Ile hektolitrów wody spadło na przestrzeni 1 km^2? 1 cm^2?

22. Do naczynia w formie walca o średnicy 8 *cm* wrzucono kostkę sześcienną; woda podniosła się o 15 *mm*. Ile wynosi objętość kostki? Ile wynosi jej krawędź?

23. Obliczyć ciśnienie słupka rtęci o wysokości 76 *cm* na 1 cm^2 podstawy, znając ciężar gatunkowy rtęci $= 13{\cdot}59$. 1,03284 kg

24. Walec pływa po wodzie zanurzony do połowy. Obliczyć jego ciężar gatunkowy (prawo hydrostatyczne Archimedesa!).

25. Obliczyć objętość walca: *a*) opisanego, *b*) wpisanego w graniastosłup umiarowy sześcioboczny, którego krawędź podstawy $a = 2$ *cm*, a wysokość $b = 24$ *cm*.

26. Obliczyć objętość graniastosłupa pochyłego o podstawie kwadratowej, znając krawędź podstawy $a = 2$ *cm*, krawędź boczną $b = 36$ *cm* i nachylenie jej do podstawy $\alpha = 60^0$.

§ 130. 27. Wykazać, że słup kręcony, którego przekrojem równoległym do podstawy jest w każdem miejscu koło większe z dwoma kołami mniejszemi stykającemi się zewnętrznie, równa się objętości trzech walców.

28. Obliczyć objętość: *a*) czworościanu umiarowego, *b*) ośmiościanu umiarowego, znając krawędź.

29. Obliczyć objętość ostrosłupa sześciobocznego umiarowego, znając krawędź podstawy i krawędź boczną ($a = 4$ *cm*, $b = 10$ *cm*).

30. Obliczyć objętość ostrosłupa powstającego przez odcięcie jednego naroża sześcianu o boku $a = 5$ *cm* płaszczyzną, przechodzącą przez środki trzech krawędzi tego naroża. Jaką częścią objętości całego sześcianu jest ten ostrosłup?

31. Znając obwód podstawy stożka i bok obliczyć jego objętość n. p. $u = 12{\cdot}56$ *cm*, $b = 16$ *cm*.

32. Obliczyć objętość stożka równobocznego, którego wysokość $w = 10$ *cm*.

33. Obliczyć objętość stożka, znając wysokość 3 *cm* i sumę wysokości i promienia podstawy $s = 8$ *cm*.

34. Promień podstawy stożka prostego wynosi $r = 5$ *cm* a kąt u wierzchołka przecięcia osiowego jest prosty; obliczyć objętość stożka.

35. Wysokość pyramidy Cheopsa wynosi 137·2 *m*, a kwadratowa podstawa ma 227·5 *m* długości. Obliczyć jej objętość.

36. Obliczyć objętość bryły obrotowej powstającej przez obrót sześciokąta umiarowego koło symetralnej kąta. Bok sześcioboku $a = 13{\cdot}7$ *m*.

§ 131. 37. Przeciąć dowolny ostrosłup w połowie wysokości i obliczyć stosunek objętości obydwu części.

38. Podstawą prostego ostrosłupa ściętego jest kwadrat o boku $a = 3{\cdot}2$ *cm*, bok górnego dna $a = 1$ *cm* a krawędź boczna $b = 2$ *cm*. Obliczyć objętość tej bryły.

39. Obliczyć objętość basenu w formie stożka ściętego, znając obwód dna: $b = 80$ *m* i głębokość: $g = 2$ *m*.

40. Obliczyć objętość okrągłego kloca, znając promień większego dna $R = 2$ *dm*, promień mniejszego dna $r = 1{\cdot}2$ *dm* i długość kloca $b = 6$ *m*. Jaki błąd popełnimy, obliczając objętość wzorem $V = Q.b$, jeżeli Q oznacza średni przekrój?

41. Wysokość komina fabrycznego wynosi 30 *m*. U dołu szerokość komina wynosi 3·6 *m*, a grubość ścian 5 *dm*, u góry szerokość 2 *m* a grubość ścian 3 *dm*. Ile m^3 cegieł użyto na zbudowanie tego komina? Jaki jest jego ciężar, jeżeli c. g. cegły wynosi 1·8?

§ 132. 42. Obliczyć objętość *a*) czworościanu, *b*) ośmiościanu, znając promień kuli wpisanej $r = 3$ *cm*.

43. Znając powierzchnię ścian dowolnego czworościanu nieumiarowego opisanego na kuli i jego objętość obliczyć promień kuli.

44. Obliczyć objętość kuli ziemskiej ($R = 6378$ *km*).

45. Obliczyć pojemność kotła walcowego zakończonego dwoma półkulami, znając promień walca $r = 0{\cdot}8$ *m* i jego długość $w = 9$ *m*.

46. Obliczyć stosunek objętości kuli opisanej na czworościanie umiarowym do objętości czworościanu i do objętości kuli wpisanej.

47. Wykonać poprzednie zadanie dla ośmiościanu umiarowego.

48. Obliczyć objętość czarki półkulistej, znając promień kuli wewnętrznej $R = 6$ *cm*, i grubość ścian czarki $g = 2$ *mm*.

49. Kulę o znanej objętości $V = 1$ m^3 powleczono warstwą taką, że nowa kula ma dwa razy większą objętość. Jaka jest grubość tej warstwy?

50. Porównać objętość kuli z objętością innych brył o równej powierzchni, n. p. z walcem równobocznym, z sześcianem, ze stożkiem równobocznym i t. p. Jaki stąd wniosek wyprowadzimy?

51. Z kuli o promieniu 1 *dm* zrobiono 100 mniejszych równych kul. Ile wynosi promień takiej jednej kuli? Czy powierzchnia wszystkich tych kul razem równa się powierzchni kuli?

52. Znając objętość $V = 30$ dm^3 kuli, obliczyć promień kuli podwojonej.

§ 133. 53. Obliczyć objętość wycinka kuli, jeżeli przecięcie osiowe jest wycinkiem koła, należącym do kąta 60^0. Znany jest promień kuli $R = 6$ *cm*.

54. Obliczyć objętość symetrycznej soczewki dwuwypukłej, znając jej grubość $g = 4$ *mm* i obwód $u = 20$ *cm*.

55. Kula z drzewa pływa po wodzie tak, że $\frac{2}{5}$ pionowej średnicy wynurza się z wody. Obliczyć ciężar gatunkowy tego drzewa.

56. Obliczyć objętość soczewki dwuwklęsłej utworzonej z walca o promieniu $r = 3$ *cm* o wysokości 5 *mm* przez wycięcie dwóch odcinków o wysokości 1 *mm*.

57. Znając średni przekrój warstwy kuli $P = 40$ cm^2 i wysokość $w = 2$ *cm*, obliczyć jej objętość. Wypowiedzieć otrzymany wzór.

§ 134. 58. Obliczyć objętość obręczy powstałej przez obrót kwadratu o boku 1 *cm* koło osi równoległej do jego boku a odległej o 4 *dm* od boku.

59. Obręcz kołowa ma w przekroju grubość 2 *cm* a zewnętrzny obwód całej obręczy wynosi 2 *m*. Obliczyć jej ciężar, jeżeli c. g. $c = 0{\cdot}6$.

60. Obliczyć objętość beczki powstałej przez obrót łuku koła o promieniu $r = 12$ *dm* należącego do kąta środkowego 60^0 koło osi oddalonej o 1 *dm* od środka ciężkości powierzchni obracającej się.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

Spis rzeczy.

Wstęp.

strona

1. Przedmiot i cel geometryi . . . 1
2. Historyczny rozwój geometryi . . 2
3. Pewniki geometryczne 4

Część I. Planimetrya.

Rozdział I. O linii prostej.

4. Nieograniczoność linii prostej . . 7
5. Odcinki 8
6. Wektory 11
7. Szeregi punktów 11
Ćwiczenia I. 12

Rozdział II. O dwóch liniach prostych. Kąty.

8. Proste nakrywające się 14
9. Proste równoległe 14
10. Proste przecinające się. Kąty . . 15
11. Kąty przyległe i wierzchołkowe . 19
12. Pęki promieni 20
13. Koło 21
Ćwiczenia II. 25

Rozdział III. Trzy linie proste. Trójkąty.

14. Położenie trzech linii prostych . . 27
15. Trzy linie proste równoległe . . 27
16. O trójkątach 28
17. Dwie proste równoległe przecięte trzecią 30
18. O kątach w trójkącie 33
Ćwiczenia III. 35

Rozdział IV. Przystawanie i ruch.

19. Przystawanie trójkątów 36
20. Pierwszy przypadek przystawania . 36
21. Drugi przypadek przystawania . . 38
22. Zastosowania I. i II. przypadku. przystawania 39
23. Trzeci przypadek przystawania . 40
24. Czwarty przypadek przystawania i znaczenie przystawania w geometryi 41
25. Ruch postępowy i obrotowy . . . 43
26. Odległość punktu od prostej. Proste pochyłe 47
27. Odległość dwóch prostych równoległych 48

strona

28. Zastosowanie twierdzeń o przystawaniu do koła. Prosta i koło . . 49
29. Pęk promieni i koło. Odległość punktu od koła 50
30. O kątach środkowych 51
31. O kątach obwodowych 52
32. Kąt między styczną a cięciwą . . 54
Ćwiczenia IV. 55

Rozdział V. Symetrya.

33. Twierdzenia o trójkątach równoramiennych 57
34. Utwory symetryczne 58
35. Symetralna odcinka 59
36. Symetralna kąta 62
37. Ogólniejsze rodzaje symetryi . . 63
38. Zastosowanie symetryi do koła . . 64
39. Koło opisane na trójkącie . . . 65
40. Koło wpisane w trójkąt 66
Ćwiczenia V. 66

Rozdział VI. Zadania konstrukcyjne.

41. Ogólne uwagi o zadaniach konstrukcyjnych 68
42. Zasadnicze zadania konstrukcyjne 69
43. Systematyczny sposób rozwiązywania zadań konstrukcyjnych . . . 71
44. Metoda miejsc geometrycznych . . 73
45. Metoda figur pomocniczych . . . 74
Ćwiczenia VI 76

Rozdział VII. Cztery linie proste Czworoboki.

46. Podział czworoboków 79
47. Równoległoboki 80
48. Zastosowanie twierdzeń o równoległobokach do trójkątów . . . 83
49. Warunki wyznaczające równoległoboki. Konstrukcye 85
50. Trapez 85
51. Trapezoidy. Deltoid 86
52. Czworoboki wpisane w koło . . . 87
53. Czworoboki opisane na kole . . . 88
Ćwiczenia VII. 89

Rozdział VIII. Wieloboki.

54. Opis wieloboków. Kąty 91
55. Wieloboki umiarowe 92
56. Aproxymacya obwodu koła . . . 95
Ćwiczenia VIII. 96

strona

Rozdział IX. Proporcyonalność odcinków. Podobieństwo figur.

57. Stosunek odcinków 98
*58. Stosunek podziału odcinka . . . 100
59. Proporcyonalność odcinków . . . 101
60. Zastosowanie twierdzeń o promieniach przeciętych liniami równoległemi 104
61. Podobieństwo figur 106
62. Znamiona podobieństwa trójkątów 108
63. Zastosowanie podobieństwa trójkątów do trójkąta prostokątnego . 111
*64. Średnia harmoniczna 113
*65. Zastosowanie podobieństwa trójkątów do koła 114
66. Dziesięciokąt umiarowy. Podział złoty 115
Ćwiczenia IX. 117

Rozdział X. Powierzchnia figur płaskich.

67. Ogólne uwagi o mierzeniu powierzchni 120
68. Powierzchnia prostokąta 121
69. Powierzchnia równoległoboku . . 124
70. Powierzchnia trójkąta 124
71. Powierzchnia trapezu 125
72. Powierzchnia wielokąta 125
73. Zamiana i podział figur 127
74. Powierzchnie figur podobnych . . 129
75. Twierdzenie Pitagorasa (w formie geometrycznej) 130
76. Twierdzenie Carnota 132
77. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa 133
78. Wzór Herona 134
79. Obliczenie boków wiel. kątów umiarowych wpisanych w koło. Podział koła 136
80. Obwód koła 139
81. Powierzchnia koła. Kwadratura koła 141
Ćwiczenia X. 144

Część II. Stereometrya.

Rozdział I. Pewniki stereometryczne.

82. Uzupełnienie systemu pewników . 149
83. Bezpośrednie wnioski z pewników . 150
84. Pęk płaszczyzn i pęk przestrzenny 152
Ćwiczenia I. 153

Rozdział II. O rysunku perspektywicznym.

85. O perspektywie środkowej (malarskiej) 154
86. Perspektywa równoległa 156
87. Ukośny rzut koła. Elipsa. . . . 162
Ćwiczenia II. 167

Rozdział III. Położenie linii prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Proste i płaszczyzny równoległe.

88. Dwie linie proste 169
89. Linia prosta i płaszczyzna . . . 171

str ona

90. Dwie płaszczyzny 173
91. Ruch postępowy w przestrzeni . . 176
Ćwiczenia III. 177

Rozdział IV. Proste i płaszczyzny prostopadłe.

92. Prosta prostopadła do płaszczyzny 179
93. Płaszczyzny prostopadłe do siebie 183

Rozdział V. Proste i płaszczyzny nachylone.

94. Prosta nachylona do płaszczyzny . 185
95. Twierdzenia o rzutach 186
96. Dwie płaszczyzny nachylone do siebie 189
Ćwiczenia IV. 191

Rozdział VI. Ruch obrotowy. Przystawanie.

97. Ruch obrotowy 193
98. Przystawanie utworów przestrzennych 195
Ćwiczenia V. i VI. 196

Rozdział VII. Metoda geometryi wykreślnej.

99. O dwóch płaszczyznach rzutów . 197
100. Rzuty punktu 198
Ćwiczenia VII. 201

Rozdział VIII. O kątach bryłowych.

101. Określenie kątów bryłowych . . 202
102. Przystawanie kątów bryłowych. Naroże biegunowe 203
103. O sumie kątów w narożu . . . 205
Ćwiczenia VIII. 206

Rozdział IX. Symetrya.

104. Naroża trójścienne symetryczne względem siebie 207
105. Utwory symetryczne. Inne rodzaje symetryi 208
Ćwiczenia IX. 211

Rozdział X. Graniastosłupy i walce.

106. Podział brył 213
107. Graniastosłupy 213
108. Powierzchnia graniastosłupa. Siatka 215
109. Walec 218
110. Rozwijanie walca. Powierzchnia walca 221
Ćwiczenia X. 223

Rozdział XI. Ostrosłupy i stożki.

111. Ostrosłupy 226
112. Powierzchnia ostrosłupa. Siatka . 228
113. Ostrosłup ścięty. Podobieństwo brył 229
114. Stożek 231
115. Powierzchnia stożka. Siatka . . 232
116. Przekroje stożka przechodzące przez wierzchołek i równoległe do podstawy 233
117. Ukośne przekroje stożka 234
Ćwiczenia XI. 236

strona

Rozdział XII. Powierzchnie i bryły obrotowe.

118. Powierzchnie obrotowe 239
119. Kula 240
120. Inne powierzchnie obrotowe . . . 244
121. Powierzchnia kuli i jej części . . 245
122. Reguła Guldina do obliczania powierzchni obrotowych 248
*123. Charakterystyczne własności przecięć stożkowych 250
Ćwiczenia XII. 254

Rozdział XIII. Wielościany umiarowe.

124. Naroża umiarowe 257
125. Twierdzenie Eulera 257
126. Dowód istnienia pięciu wielościanów umiarowych 258

strona

*127. Kula wpisana i opisana na wielościanach umiarowych 261
Ćwiczenia XIII. 262

Rozdział XIV. Obliczanie objętości brył.

128. Przybliżone pomiary objętości . . 264
129. Objętość graniastosłupa i walca . 266
130. Objętość ostrosłupa i stożka. Twierdzenie Cavalieriego 269
131. Objętość ostrosłupa i stożka ściętego 274
132. Objętość wielościanów umiarowych i kuli 275
133. Objętości części kuli 278
134. Reguła Guldina do obliczania objętości brył obrotowych 280
Ćwiczenia XIV. 283

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA Gliwice

BG Politechniki Śląskiej w Gliwicach
nr inw.: 102 - 122741
Dyr.1 122741