Dr ANTONI ŁOMNICKI

POCZĄTKI
GEOMETRJI ANALITYCZNEJ

LWÓW - WARSZAWA
KSIĄŻNICA POLSKA TOWARZYSTWA NAUCZYCIELI SZKÓŁ WYŻSZYCH
1921

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
w Gliwicach

122740

Z PIERWSZEJ ZWIĄZKOWEJ DRUKARNI WE LWOWIE, UL. LINDEGO 4.

D 903108

WSTĘP

§ 1. Zadanie geometrji analitycznej.

Z graficznego przedstawienia funkcyj wiadomo, że rozmaite równania między dwoma zmiennemi można przedstawić geometrycznie, jako pewne linje, leżące na płaszczyźnie. W ten sposób uzyskujemy ścisły związek między algebrą (ogólniej: analizą) a geometrją. Wyrażenia (algebraiczne lub przestępne), zawierające dwie zmienne, możemy badać, analizować, przy pomocy ich obrazów geometrycznych i wykrywać w ten sposób zawiłe nieraz związki matematyczne. Przykładem tego postępowania: graficzne rozwiązywanie równań. Z drugiej strony zobaczymy, że każdą linję płaską zbudowaną według jakiegoś znanego prawa można zastąpić wyrażeniem, zawierającem dwie zmienne. W ten sposób zamiast badać utwór geometryczny przy pomocy niedokładnego rysunku lub niepewnej wyobraźni geometrycznej, badamy go przy pomocy ścisłego rachunku, ścisłego rozbioru (analizy) matematycznego (n. p. badanie własności hyperboli). Obydwa te zadania stanowią przedmiot geometrji analitycznej płaskiej. Badanie wyrażeń, zawierających trzy zmienne, odpowiada badaniu linij krzywych i powierzchni przestrzennych (n. p. linja śrubowa, powierzchnia kuli, hyperboloida i t. p.) i jest przedmiotem geometrji analitycznej przestrzennej, trójwymiarowej.

Zanim jednak przystąpimy do tych badań utworów geometrycznych dwu- i trójwymiarowych, musimy się najpierw zorjentować w ciaśniejszym świecie: geometrji jednowymiarowej, t. j. zająć się utworami geometrycznemi leżącemi na jednej linji prostej.

Część I

Rozdział I*)

Geometrja analityczna jednowymiarowa

§ 2. Analityczne przedstawianie utworów geometrycznych jednowymiarowych.

Punktem wyjścia dla wszystkich dalszych rozważań jest znane z arytmetyki przedstawienie zbioru wszystkich liczb rzeczywistych zapomocą wszystkich punktów jednej linji prostej, zwanej w arytmetyce *osią liczbową*.

Aby uzyskać takie geometryczne uzmysłowienie liczb, obieramy na dowolnej prostej $-X \ldots +X$ jakiś punkt O (fig. 1) i ustalamy kierunek dodatni, np. od $-X$ ku $+X$. Ponadto obieramy jakiś dowolny odcinek, np. OA, za jednostkę długości. Chcąc teraz przedstawić geometrycznie dowolną liczbę dodatnią x, wynajdujemy taki odcinek MN, który zawiera x jednostek długości, czyli innemi słowami: którego stosunek do OA byłby równy liczbie x. Wiemy z geometrji elementarnej — na podstawie pewnika ciągłości linji prostej —, że taki odcinek MN zawsze istnieje, bez względu na to, czy x jest liczbą całkowitą, ułamkową czy też niewymierną. (Jakie konstrukcje planimetryczne są potrzebne, aby znaleźć odcinek MN, gdy x jest liczbą całkowitą różną od 1? jakie, gdy x jest ułamkiem? jakie, gdy x jest liczbą niewymierną drugiego stopnia czystą, t. j. drugim pierwiastkiem? jak się postępuje, gdy x jest jakąś wyższą niewymiernością?). Od punktu O, obranego za początek, odmierzamy odcinek OP równy znalezionemu MN w kierunku ku $+X$, ponieważ x jest liczbą dodatnią. Jeżeli zaś x jest liczbą ujemną, to oznaczając sym-

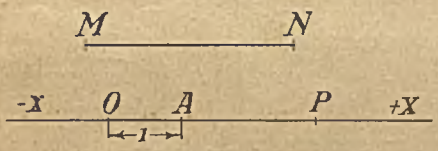


Fig. 1.

*) Rozdział I. można pominąć, jeżeli tok nauki trzeba przyśpieszać.

bolem x jej wartość bezwzględną, odnajdujemy taki odcinek, którego liczba wymiarowa wynosi x i odmierzamy go od O w kierunku ku $-X$. Koniec P tego odcinka jest obrazem geometrycznym liczby x. W ten sposób każdej liczbie rzeczywistej odpowiada jakiś jeden oznaczony punkt linji prostej, każdej liczbie inny.

Odwrotnie, chcąc punkty linji prostej zastąpić liczbami, aby można potem zastąpić badania geometryczne arytmetycznemi, posługujemy się temi samemi środkami. Aby więc znaleźć liczbę rzeczywistą odpowiadającą dowolnemu punktowi P linji prostej, ustalamy na niej pewien kierunek jako dodatni, np. od $-X$ ku $+X$ na fig. 1., obieramy początek O i jednostkę mierniczą $\overline{OA}$. Badamy następnie stosunek odcinka $\overline{OP}$ do $\overline{OA}$ (np. zapomocą znanego z elementarnej planimetrji łańcuchowego mierzenia metodą *Euklidesa*) i wykładnik tego stosunku, opatrujemy znakiem + lub —, zależnie od tego czy P leży po dodatniej, czy też po ujemnej stronie początku O. Otrzymana w ten sposób liczba rzeczywista x jest arytmetycznym odpowiednikiem punktu P. (Kiedy ta liczba wypadnie wymierna, a kiedy niewymierna?). Samemu punktowi O odpowiada liczba $x=0$.

W ten sposób każdej liczbie rzeczywistej odpowiada jeden punkt prostej i odwrotnie, każdemu punktowi prostej odpowiada jedna liczba rzeczywista. Wyrażamy się, że ustaliliśmy w ten sposób doskonałą czyli wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między zbiorem punktów linji prostej a zbiorem liczb rzeczywistych.

Liczbę x, dodatnią lub ujemną, odpowiadającą w ten sposób punktowi P, nazywamy jego **odciętą**. Linję $-X+X$ nazywamy **osią odciętych** a punkt O **początkiem układu współrzędnych.** Nieraz mówi się krótko: odcięta punktu jest to jego odległość od początku układu opatrzona odpowiednim znakiem; wtedy jednak słowu „odległość“ przypisujemy znaczenie arytmetyczne, a mianowicie znaczenie liczby wymiarowej odcinka $\overline{OP}$. Jeżeli bierzemy pod uwagę kilka punktów, to dla odróżnienia odciętych dajemy u dołu litery x znaczki np. x_1, x_2, x_3..... lub u góry kreski np. x', x'', x''', x^{IV}..... (czyta się: x-jeden, x-dwa, x-trzy itd.).

Takie zastępowanie punktów linji prostej liczbami pozwala nam wykonywać rachunkowo rozmaite zagadnienia, dotyczące utworów geometrycznych, leżących na jednej linji prostej, a więc rozmaitych zbiorów odcinków, szeregów punktów itp. W pewnych gałęziach matematyki, np. w geometrji rzutowej i w teorji mnogości, badania te odgrywają bardzo ważną rolę. Dla nas będą w dalszym ciągu potrzebne tylko niektóre najprostsze prawa tej jednowymiarowej geometrji analitycznej; poznamy je w następnym ustępie.

§ 3. Wielkość odcinka.

Zajmiemy się najpierw odcinkami. Nauczymy się zastępować liczbami nietylko punkty ale i całe odcinki. Przedewszystkiem zwróćmy uwagę na to, że w geometrji analitycznej trzeba zawsze bardzo skrupulatnie odróżniać odcinek $\overline{AB}$ od odcinka $\overline{BA}$. Jeżeli odcinkowi $\overline{AB}$ odpowiada jakaś liczba a, to odcinkowi $\overline{BA}$ będzie odpowiadała liczba $-a$ o znaku przeciwnym. W innych działach geometrji odróżnianie to nie ma zwykle wielkiego znaczenia, np. w trygonometrji i w planimetrji obojętnem jest, czy mówimy o boku $\overline{AB}$ trójkąta ABC, czy też o boku $\overline{BA}$; tutaj jednak, gdzie inne punkty odpowiadają liczbom dodatnim a inne ujemnym, zaniedbanie znaku może doprowadzić do rażących błędów i nieporozumień. Systematyczne odróżnianie znaków rozmaitych wielkości geometrycznych stanowi jedną z najpoważniejszych trudności geometrji analitycznej ale też nadaje jej badaniom charakter o wiele ogólniejszy od zwykłych rozważań elementarnej geometrji.

W dowodzeniach geometrji analitycznej korzystamy przedewszystkiem z znanych z elementarnej planimetrji praw dodawania i odejmowania odcinków. Z pomiędzy tych praw ważnem jest zwłaszcza następujące proste twierdzenie o trzech dowolnych punktach linji prostej:

Jeżeli trzy punkty A, B, C linji prostej następują po sobie w **dowolnym** *porządku, to uwzględniając znaki odcinków mamy zawsze*

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0 \qquad (1)$$

(Udowodnij, przyjmując punkt C raz poza odcinkiem $\overline{AB}$, drugi raz wewnątrz $\overline{AB}$, biorąc punkt A raz po prawej, drugi raz po lewej stronie punktu B itp.).

Opierając się na tem twierdzeniu potrafimy już każdy odcinek zastąpić jedną liczbą, zwaną wielkością odcinka, jeżeli tylko znamy odcięte punktów końcowych. Weźmy najpierw pod uwagę odcinki, mające początek w początku układu t. j. w O (fig. 2). Liczba x_1, odcięta punktu A, przedstawia nietylko punkt A, ale zarazem długość odcinka $\overline{OA}$ i jego kierunek, może więc służyć do arytmetycznego zastąpienia tego odcinka. Tę dodatnią lub ujemną liczbę nazywamy już nie długością, ale wielkością odcinka $\overline{OA}$ i oznaczamy ją symbolem OA (bez kreski u góry), więc $OA=x_1$.

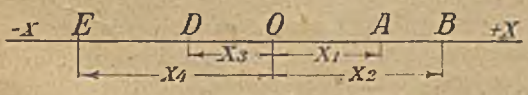


Fig. 2.

(Symbol $\overline{OA}$ oznacza więc sam odcinek, a OA jego arytmetyczny odpowiednik). Podobnie liczba x_3, odcięta punktu D, przedstawia wielkość odcinka OD, x_2 odcinka $\overline{OB}$ itd. Chcąc teraz znaleźć wielkość dowolnego odcinka AB, mającego początek już nie w O, ale w dowolnym innym punkcie, a koniec w B, stosujemy do 3 punktów A, B, O twierdzenie (1). Trzeba więc tylko we wzorze (1) zastąpić literę C literą O. Przenieśmy następnie odcinki $\overline{BO}$ i $\overline{OA}$ na drugą stronę równania (1), to otrzymamy:

$$\overline{AB} = -\overline{BO} - \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Jeżeli ta równość zachodzi dla odcinków, to musi też zachodzić dla liczb, które są arytmetycznemi odpowiednikami odcinków, t. j. musi być też:

$$AB = OB - OA$$

Ponieważ zaś $OB = x_2$, $OA = x_1$, przeto:

$$AB = x_2 - x_1 \qquad (2)$$

Wielkość odcinka leżącego na osi otrzymamy, odejmując od odciętej punktu końcowego odciętą punktu początkowego.

Twierdzenie to sprawdza się ogólnie, przy dowolnem położeniu punktów A, B ograniczających odcinek. Tak np. wielkość odcinka $\overline{DA}$ na fig. 2 wynosi $x_1 - x_3$ a nie, jakby się mogło z figury zdawać $x_1 + x_3$, albowiem x_3 jest liczbą ujemną. Podobnie $AE = x_4 - x_1$ a nie $x_4 + x_1$, jest bowiem liczbą ujemną (kierunek od $+X$ ku $-X$) o bezwzględnej wartości równej sumie bezwzględnych wartości liczb x_4 i x_1, t. j. sumie $-x_4 + x_1$ (bo x_4 jest ujemne); zmieniając zaś znak tej liczby dodatniej otrzymamy ostatecznie $x_4 - x_1$. Podobnie możnaby dojść do wzoru (2) wprost z figury także dla innych położeń punktów końcowych odcinka, np. dla odcinka DE, BA itp. Jednakże dowód, opierający się na twierdzeniu (1) jest najprostszy, obejmuje bowiem odrazu wszystkie możliwe przypadki szczegółowe. Wzór (2) mieści w sobie też wielkości odcinków, mających początek w O, wtedy bowiem $x_1 = 0$ i mamy np. $OB = x_2 - 0 = x_2$.

Ten prosty wzór (2) może nam posłużyć za pierwszy charakterystyczny przykład wyników geometrji analitycznej, która ujmuje w jedną zwięzłą formułę rozmaite, na pozór zupełnie różne od siebie przypadki szczegółowe. W dalszym toku nauki spotkamy więcej takich przykładów.

Spostrzegamy tu również ciekawy fakt, że oglądanie się na figurę geometryczną przy badaniach geometrji analitycznej nietylko nie ułatwia rozumowania, ale przeciwnie, utrudnia je nieraz, rozdrabniając je niepotrzebnie na szereg przypadków szczegółowych. Istotną bowiem metodą geometrji analitycznej jest rachunek a nie spostrzeganie geometryczne.

§ 4. Podział odcinka.

Mając dany odcinek $\overline{AB}$ weźmy dowolny punkt C między punktami A i B. Powstaną dwa nowe odcinki, a stosunek ich wielkości: $\frac{AC}{CB} = s$ nazywamy *stosunkiem podziału wewnętrznego odcinka* AB. Znając odcięte x_1, x_2, x_3 punktów A, B, C możemy łatwo obliczyć wykładnik tego stosunku. Podstawiając za AC i CB wartości według wzoru (2), otrzymamy:

$$\frac{AC}{CB} = s = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} \qquad (3)$$

Jeżelibyśmy punkt C obrali poza odcinkiem $\overline{AB}$, to nie można już mówić o podziale tego odcinka w zwykłem znaczeniu. Mimoto jednak można obliczyć stosunek $\frac{AC}{CB} = s$ według tego samego wzoru (3). Stosunek ten nazywamy wtedy *stosunkiem podziału zewnętrznego odcinka* AB. Te dwa odrębne geometrycznie przypadki zawierają się w jednym wzorze, a tylko tem się różnią, że przy podziale wewnętrznym wartość s wypada dodatnia, a przy zewnętrznym ujemna (dlaczego?).

Stosunek s może przybierać wszelkie możliwe rzeczywiste wartości, zależnie od położenia punktu podziału C. Dyskusję tę można przeprowadzić wprost na wzorze (3), zmieniając x_3 przy stałych x_1 i x_2, można jednak także badać tę zmienność geometrycznie, rozważając rozmaite możliwe położenia punktu C względem punktów A i B.

I tak, jeżeli punkt C leży między A i B, ale bardzo blisko A, to AC jest bliskie zera więc i s dąży do zera przy zbliżaniu się C do A. Gdy C posuwa się między A i B ku punktowi B, to s przybiera coraz większe wartości, dążąc do nieskończoności, gdy C dąży do B — wtedy bowiem mianownik ułamka $\frac{AC}{CB}$ dąży do zera a licznik do skończonej liczby AB. Gdy C przekroczy B, s jest również liczbą bardzo wielką co do bezwzględnej wartości ale znak ma: —. Gdy się C oddala od B w nieskończoność, s dąży do liczby: —1. Gdy C wychodzi z odcinka $\overline{AB}$ poza punkt A, stosunek s ma początkowo wartość ujemną mało się różniącą od zera a następnie dąży do —1.

Z wzoru (3) możemy wyrazić odciętą punktu podziału C jako funkcję zmiennej s. Pisząc x zamiast x_3 otrzymamy

$$x - x_1 = s\,(x_2 - x), \text{ a stąd:}$$

$$x = \frac{x_1 + s x_2}{1 + s} \qquad (4)$$

(Wykazać przy pomocy tego wzoru, że x dąży do nieskończoności, gdy s dąży do -1, x dąży do x_1, gdy s dąży do zera, x dąży do x_2, gdy s dąży do nieskończoności!).

Wzór ten pozwala wykonywać rachunkiem podział odcinka AB w dowolnym stosunku s, jeżeli tylko znamy odcięte x_1 i x_2 punktów A i B.

Przykład. Obliczyć położenie punktu, który dzieli odcinek $\overline{AB}$ w stosunku $s=3:7$, jeżeli A ma odciętą $x_1=4$, a B odciętą $x_2=12$. Z wzoru (4) otrzymujemy jako odciętą punktu podziału:

$$x=\frac{4+\frac{3}{7}\cdot 12}{1+\frac{3}{7}}=6\cdot 4.$$

Uwaga. Z wzoru (3) i (4) widzimy, że do wyznaczenia każdego punktu P na linji prostej można też użyć innego sposobu, aniżeli odciętej i jednostki mierniczej. Wystarczy podać dwa punkty stałe n. p. A i B i podać liczbę s, wyrażającą, w jakim stosunku dzieli P odcinek AB. Wtedy również — podobnie jak przy użyciu odciętych — odpowiada każdemu punktowi prostej jedna liczba s i każdej liczbie s jeden punkt (z wyjątkiem $s=-1$). Każdą taką liczbę, wystarczającą do jednoznacznego wyznaczenia punktu, nazywamy współrzędną tego punktu. A więc za współrzędną można uważać zarówno odciętą punktu, jak i liczbę s t. j. wykładnik stosunku, w jakim ten punkt dzieli dowolnie obrany, stały odcinek, a dadzą się obmyśleć i inne rodzaje współrzędnych.

Weźmy teraz pod uwagę cztery punkty A, B, C, D na prostej, to odcinek $\overline{AB}$ jest inaczej podzielony punktem C, a inaczej punktem D. Mamy więc teraz dwa stosunki: $\frac{AC}{CB}$ i $\frac{AD}{DB}$.

Stosunek tych dwóch stosunków nazywamy *stosunkiem podziału podwójnego* i oznaczamy osobnym symbolem:

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=(ABCD)=k. \qquad (5)$$

Używając wzoru (2) lub (3) możemy tu wszystko wyrazić zapomocą samych odciętych i otrzymamy:

$$(ABCD)=k=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}:\frac{x_4-x_1}{x_2-x_4} \qquad (6)$$

Najważniejszy jest przypadek, gdy stosunek podziału odcinka $\overline{AB}$ punktem C ma tę samą wartość bezwzględną, co stosunek podziału punktem D, a różni się tylko znakiem (jeżeli więc C leży wewnątrz odcinka $\overline{AB}$, to D leży poza $\overline{AB}$ i odwrotnie). Wtedy iloraz tych stosunków, czyli stosunek podziału podwójnego ma wartość -1, a więc

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=(ABCD)=-1 \qquad (7)$$

i nazywa się *stosunkiem harmonicznym*. W przeciwstawieniu do tej nazwy nazywamy ogólny stosunek podziału podwójnego także *stosunkiem anharmonicznym*.

Porządek liter w symbolu $(ABCD)$ nie jest obojętny, zmieniając bowiem ten porządek możemy otrzymać zupełnie inne wartości k (zob. ćwiczenie 13).

Przy pomocy tych wzorów możemy też odwrotnie obliczyć do 3 danych punktów o odciętych x_1, x_2, x_3 taki czwarty, któryby z niemi tworzył z góry podamy stosunek podziału podwójnego k. (Wyprowadź ten wzór!). Jeżeli przytem ten podział ma być harmoniczny, to ten czwarty punkt nazywamy harmonicznie sprzężonym z tamtemi trzema. (Jakie geometryczne konstrukcje czwartego punktu harmonicznego znane są z elementarnej planimetrji?).

Wiadomo, jak ważną rolę odgrywają zwykłe stosunki przy badaniu figur podobnych: równość stosunków wszystkich odpowiednich odcinków dwóch figur jest cechą charakterystyczną ich podobieństwa. Podobną rolę grają stosunki podziału podwójnego przy badaniu figur, z których jedna jest rzutem drugiej — i to rzutem równoległym lub środkowym. Badania te należą już jednak do osobnego działu geometrji, zwanego *geometrją rzutową lub syntetyczną*; okazuje się tam, że równość stosunków anharmonicznych jest właśnie cechą charakterystyczną rzutowego pokrewieństwa figur.

Ćwiczenia I

§ 2. 1. Obrawszy na osi X dowolnie jednostkę, znaleźć bez użycia podziałki, przy pomocy odpowiednich konstrukcyj geometrycznych, położenia punktów o odciętych:

$$a)\ 2,\ -3,\ \tfrac{5}{3},\ -1\tfrac{3}{4};\quad b)\ \sqrt{2},\ -2\sqrt{3},\ 3+\sqrt{5},\ 2-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

2. Obrawszy na osi X kilka punktów a następnie dowolny odcinek jako jednostkę, zbadać odcięte tych punktów mierzeniem łańcuchowem w przybliżeniu.

3. Dwa punkty poruszają się z punktów $x_1=0$, $x_2=224$ według praw:

$$a)\ x_1=2t,\ x_2=4t;\quad b)\ x_1=3t,\ x_2=-5t^2.$$

W którym punkcie się spotkają? dla jakiego t?

§ 3. 4. Udowodnić, że $AB+BC+CA=0$, gdy punkty A, B, C leżą na jednej prostej w rozmaitych uporządkowaniach.

5. Obierając na osi x-ów punkty A, B, C, D o odciętych -4, -1, $+2$, $+5$ obliczyć wielkość odcinków AB, DB, AC, CA, BD, DA.

6. Udowodnić, że dla czterech punktów linji prostej zachodzi zawsze równość $AB.CD+AC.DB+AD.BC=0$ bez względu na rozmieszczenie tych punktów.

7*a*) Dwa szeregi punktów A, B, C,... i A_1, B_1, C_1,... na linji prostej tworzą *inwolucję*, jeżeli $SA.SA_1=SB.SB_1=SC.SC_1=\ldots$ równa się liczbie stałej c; S nazywa się środkiem inwolucji. Podać dwa takie szeregi, aby liczba c była dodatnia i dwa takie, aby stała c była ujemna. Czy zawsze istnieją punkty podwójne, t. j. takie, aby $SP.SP=c$?

7*b*) Punkty A, B mają odcięte $x_1=2$, $x_2=5$ a punkty A_1 i B_1 odcięte $x_3=-1$ i $x_4=3$. Gdzie leży środek inwolucji? Jaką wartość ma c? Obliczyć odcięte punktów podwójnych!

§ 4. 8*a*) Punkty A, B mają odcięte $x_1=2$, $x_2=6$. Obliczyć w jakim stosunku dzielą ten odcinek punkty o odciętych $\frac{1}{2}$, 3, 5, -2, 8.

8*b*) Wykonać poprzednie zadanie dla odcinka CD, znając odcięte -5 i $+4$ punktów C i D.

9. Przedstawić przy pomocy wykresu zmienność stosunku podziału odcinka, gdy punkt podziału posuwa się pomiędzy i poza punktami, ograniczającemi odcinek AB

Wskazówka: za oś x-ów obrać prostą, na której leży AB, punkt A za początek układu a oś y-ów prostopadle do AB.

10. Obliczyć odcięte punktów, dzielących odcinek zawarty między $x_1=2$ a $x_2=8$ w stosunku: $s=1$, $\frac{1}{2}$, 2, -3, $-\frac{2}{3}$.

11. Obliczyć stosunek podziału podwójnego punktów o odciętych:

a) 1, 2, 3, 4; *b*) -2, 0, 4, 8

12. Obliczyć stosunek podziału podwójnego czterech punktów o odciętych 0, 4, 3, 5 i zbadać, jakie wartości otrzymamy, gdy zmienimy porządek punktów.

13. Wykazać, że przez zmianę porządku liter w symbolu $(ABCD)=k$ można otrzymać k, $\frac{1}{k}$, $-k$, $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k-1}{k}$, $\frac{k}{k-1}$.

14*a*) Jak należy dobrać punkt D, aby był harmonicznie sprzężony z punktami o odciętych $x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=8$. Wzór ogólny!

14*b*) Jak dobrać punkt E, aby z punktami $x_1=-2$, $x_2=5$, $x_3=10$ tworzył stosunek podziału podwójnego $k=3$. Wzór ogólny!

15. Udowodnić, że odcięte czterech punktów harmonicznie sprzężonych spełniają:

a) proporcję harmoniczną $\dfrac{(x_3-x_1)-(x_2-x_1)}{x_3-x_1}=\dfrac{(x_2-x_1)-(x_4-x_1)}{x_4-x_1}$

b) związek $\dfrac{1}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x_3-x_1}+\dfrac{1}{x_4-x_1}\right)$.

Wypowiedzieć te twierdzenia, podstawiwszy za różnice odciętych odpowiednie odcinki!

Część II

Geometrja analityczna płaska

Rozdział II

Współrzędne na płaszczyźnie. Obrazy geometryczne równań. Równania linij

§ 5. Współrzędne prostokątne.

Aby ująć utwory geometryczne płaskie w zależności liczbowe, zastępujemy podobnie jak w geometrji analitycznej jednowymiarowej każdy punkt pewnemi liczbami. Do tego celu najprościej jest użyć dwóch prostych prostopadłych XX_1, YY_1 (Fig. 3). Każdy punkt utworu geometrycznego, leżącego na płaszczyźnie tych prostych XX_1 i YY_1, badamy nie oddzielnie, sam dla siebie, ale w odniesieniu do tych prostych. Jedną prostą: XX_1 nazywamy osią odciętych lub osią X-ów, drugą: YY_1 osią rzędnych lub osią Y-ów, obydwie zaś razem nazywamy osiami współrzędnych, a ich punkt przecięcia: O początkiem układu współrzędnych.

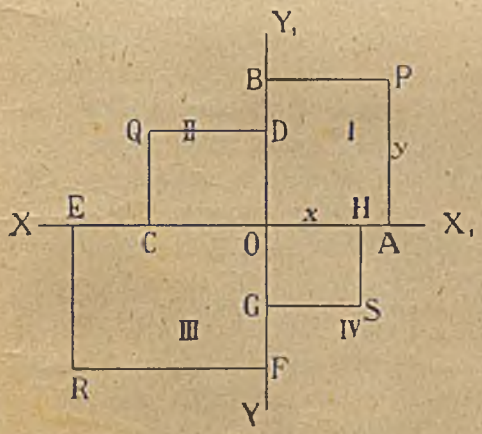


Fig. 3.

Obieramy jakiś dowolny odcinek za jednostkę mierniczą. Liczbę wymiarową odstępu punktu P od osi Y-ów, t. j. odcinka BP lub równego mu odcinka $\overline{OA}$ nazywamy odciętą punktu P i oznaczamy ją literą x (lub x_1, x_2, x', x'', ... ξ_1, ξ_2, ... i t. p.).

Liczbę wymiarową odstępu punktu P od osi X-ów, t. j. odcinka AP (lub równego mu odcinka OB) nazywamy rzędną punktu P i oznaczamy ją literą y (lub $y_1, y_2, y', y'', \ldots \eta_1, \eta_2 \ldots$). Także same odcinki BP i AP nazywamy odciętą i rzędną punktu P.

Obydwie liczby, odcięta i rzędna, mają wspólną nazwę: współrzędne punktu P. Do każdego punktu płaszczyzny należą więc dwie liczby: odcięta i rzędna. Notujemy zwykle te liczby w nawiasach: $P\ (x_1\ y_1)$; przytem zawsze pierwsza liczba oznacza odciętą a druga rzędną. N. p. M (4, 3) znaczy, że punkt M jest oddalony od osi Y-ów o 4 jednostki miernicze (n. p. o 4 *cm*, 4 *mm*, 4 *m*) a o 3 takie same jednostki od osi X-ów w kierunku dodatnim.

Przy takim sposobie oznaczania położenia punktów mamy jeszcze wątpliwość, w której ćwiartce płaszczyzny leży dany punkt. Aby tę wątpliwość usunąć, obieramy na osiach stale pewien kierunek jako dodatni. I tak na osi X-ów uważajmy za dodatni np. kierunek od X ku X_1 (fig. 3), a kierunek przeciwny za ujemny. Wtedy na osi Y-ów jako dodatni obieramy kierunek od Y ku Y_1 t. j. kierunek, jaki przyjąłby dodatni kierunek osi X-ów po obrocie o 90° *w stronę przeciwną ruchowi wskazówek zegara*; taki kierunek obrotu nazywamy dodatnim. Gdybyśmy na osi X-ów obrali jako dodatni kierunek od X_1 ku X, na lewo, to za dodatni kierunek osi Y-ów należałoby obrać od Y_1 ku Y. (Dlaczego?). Przy takiem odróżnieniu współrzędne są liczbami względnemi, dodatniemi lub ujemnemi, zależnie od kierunku.

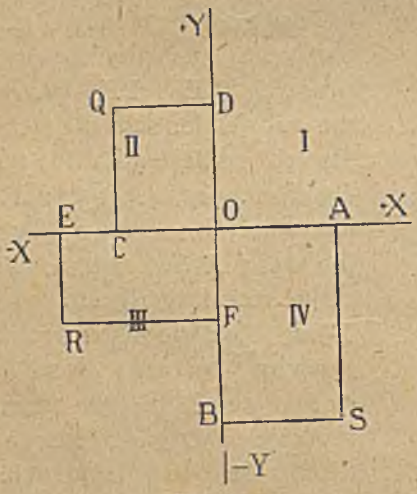


Fig. 4.

N. p. punkt Q na fig. 4 ma odciętą ujemną, bo odcinek OC ma kierunek przeciwny do kierunku XX, któryśmy obrali za dodatni, a rzędną ma dodatnią. Punkt R ma odciętą i rzędną ujemną, punkt S ma dodatnią odciętą a ujemną rzędną. Widzimy więc, że w pierwszej ćwiartce obie współrzędne wszystkich punktów są dodatnie, w drugiej odcięte są ujemne, a rzędne dodatnie, w trzeciej obydwie współrzędne są ujemne, a w czwartej odcięte dodatnie, rzędne ujemne.

W ten sposób usunęliśmy wątpliwość co do położenia punktu: Do każdej pary (liczb) współrzędnych należy tylko je-

den punkt. N. p. aby znaleźć położenie punktu $S(3, -5)$ odcinamy na osi X-ów 3 jednostki od O w kierunku dodatnim do A, a na osi Y-ów 5 jednostek od O w kierunku ujemnym do B; prowadzimy od A i B linje równoległe do osi, to ich punkt przecięcia S ma żądane współrzędne. Łatwiej jednak wykonać tę konstrukcję, odcinając na osi X-ów 3 jednostki od O do A, kreśląc na końcu tego odcinka prostopadłą w kierunku ujemnym i odmierzając na niej 5 jednostek od osi X-ów. Przy użyciu papieru milimetrowego nie trzeba nawet tej konstrukcji, tylko odlicza się jednostki wprost na kratce.

Zauważmy, że podobnie jak w geometrji jednowymiarowej współrzędne mogą być liczbami całkowitemi, ułamkowemi lub niewymiernemi. Ten ostatni przypadek zachodzi np. wtedy, gdy dany punkt na osi wyznacza z początkiem układu odcinek niewspółmierny z obraną jednostką. Mając znaleźć punkt o danych współrzędnych niewymiernych, opieramy się na pewniku ciągłości linji prostej, który orzeka, że każdy przekrój linji prostej, trafia w jakiś jej punkt, a nie może trafić w lukę. Liczba niewymierna definiuje zaś jakiś przekrój ogółu liczb a więc i ogółu punktów linji prostej. Istnieją więc na obu osiach punkty odpowiadające dowolnym niewymiernym współrzędnym a wykreślając w tych punktach prostopadłe do osi, otrzymujemy na płaszczyźnie żądany punkt.

Wszystkie punkty osi X-ów mają rzędną równą zeru: $y=0$, wszystkie zaś punkty osi Y-ów mają odciętą równą zeru: $x=0$. Początek układu ma współrzędne: $x=0$, $y=0$.

W ten sposób do każdego punktu płaszczyzny należy ściśle określona para liczb rzeczywistych i odwrotnie: do każdej pary liczb rzeczywistych należy jeden ściśle określony punkt płaszczyzny. (Odpowiedniość taka nazywa się wzajemnie jednoznaczna lub doskonała).

Uwaga. Można także w inny sposób powiązać punkty płaszczyzny z liczbami. W algebrze używa się punktów płaszczyzny do przedstawienia zbioru liczb zespolonych: każdemu punktowi odpowiada wtedy jedna liczba, ale jest to liczba zespolona, składająca się z dwóch części, rzeczywistej i urojonej. W geometrji analitycznej potrzeba do wyznaczenia punktu dwóch liczb, ale obydwie są rzeczywiste. Urojonym i zespolonym liczbom nie odpowiadają w geometrji analitycznej żadne punkty płaszczyzny.

Pomysł użycia współrzędnych do badań geometrycznych jest stosunkowo niedawny. Przypisują go filozofowi francuskiemu Descartes'owi (czytaj: Dekart: spolszczone nazwisko Kartezjusz) z XVII wieku. Jednakże już przed Descartes'em używał układu współrzędnych matematyk francuski Fermat a i u greckich matematyków z epoki aleksandryjskiej n. p. u Appolloniusza spotykamy zaczątki tych myśli. Użycie współrzędnych nie ogranicza się do geometrji. W miernictwie używano już od najdawniejszych czasów osi współrzędnych do wyznaczenia położenia parcel i punktów na niewielkich obszarach (plany ka-

tastralne!) W geografji długość i szerokość geograficzna są także współrzędnemi i to krzywolinjowemi: są to bowiem odległości łukowe (wyrażone w stopniach) danego punktu od dwóch kół prostopadłych: równika i początkowego południka. Największe zaś rozpowszechnienie znalazł układ współrzędnych we wszelkich wykresach czyli grafikonach, np. stan temperatury, ciśnienia atmosferycznego, wzrost ludności, wahanie się poziomu wody w zbiornikach, graficzne rozkłady jazdy kolejowej i t. p.

§ 6. Linje jako obrazy równań. Wykresy.

Używając metody omówionej w poprzednim ustępie, zdołamy zastąpić liczbami każdy punkt płaszczyzny. Gdybyśmy chcieli podać położenie jakiejś linji prostej, wystarczy podać dwa jej punkty zapomocą współrzędnych. Utwory takie, jak trójkąt, czworokąt, potrafimy także wyznaczyć, podając współrzędne ich wierzchołków. Jeżeli jednak chcemy ująć w zależności liczbowe wszystkie punkty jakiegoś utworu geometrycznego płaskiego, np. linji krzywej, musielibyśmy podać nieskończenie wiele par warunków: dla każdego punktu dwa warunki postaci $x=a$, $y=b$.

Na pierwszy rzut oka wydaje się to niemożliwem; jednakże wiemy, że każde równanie o dwóch niewiadomych przedstawia nieskończenie wiele par liczb. N. p. równanie:

(a) $$4y=x^2$$

pozwala obliczyć dla każdego x odpowiednie y, podaje y jako funkcję zmiennej y.

Uważajmy każdą parę wartości (x, y) za współrzędne punktu, to równanie *(a)* przedstawia utwór geometryczny, zawierający nieskończenie wiele punktów. Obliczamy wartości y dla kilku wartości x i zestawiamy je w tabelkę:

x	y
5	$6\frac{1}{4}$
4	4
3	$2\frac{1}{4}$
2	1
1	$\frac{1}{4}$
0	0
-1	$+\frac{1}{4}$
-2	$+1$
-3	$+2\frac{1}{4}$
-4	$+4$
-5	$+6\frac{1}{4}$
.	.
.	.
.	.

Na podstawie tej tabelki wykreślamy punkty, mające podane współrzędne. Biorąc w tabelce wartości odpowiednio gęsto, otrzymujemy wystarczającą liczbę punktów, by je można (np. zapomocą krzywki) połączyć jedną, nieprzerwaną linją krzywą, na której leżą też punkty mające współrzędne pośrednie, nie wypisane w tabelce. Ta linja krzywa (fig. 5; za jednostkę obrano 5 *mm*) jest *obrazem geometrycznym* równania *(a)*; zawiera ona istotnie nieskończenie wiele punktów. (Tę specjalną linję krzywą nazywamy parabolą).

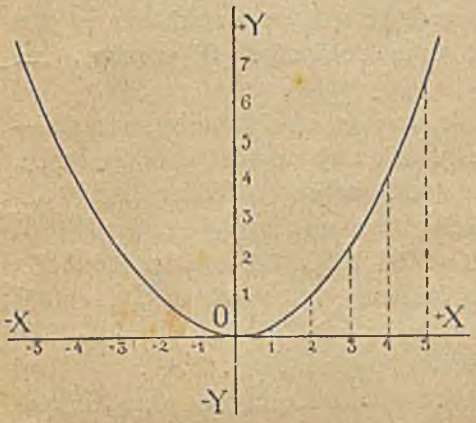


Fig. 5.

Wiele podobnych przykładów znamy z graficznych przedstawień funkcyj, np. znane z nauki trygonometrji obrazy równań $y=\sin x$ i $y=\operatorname{tg} x$, zwane sinusoidą i tangensoidą, logarytmika o równaniu $y=\log_{10} x$, obrazy funkcji linjowej, ułamkowej, kwadratowej itp. Nie należy jednak sądzić, że każde równanie posiada obraz geometryczny. Istnieją także takie równania o dwóch zmiennych, w których żadnej rzeczywistej wartości zmiennej x nie odpowiada rzeczywista wartość zmiennej y, ani też odwrotnie; takiem jest np. dosyć proste równanie $x^2+y^2+4=0$. Takich równań nie można naturalnie badać metodami geometrji analitycznej. Natomiast każde równanie posiadające rzeczywiste pary rozwiązań przedstawia jakiś utwór geometryczny, może więc służyć do definicji tego utworu.

Badana linja występuje wtedy jako *miejsce geometryczne* punktów, których współrzędne spełniają dane równanie.

Wszystkie własności figury geometrycznej muszą wynikać z własności tego równania, całe zatem badanie przesuwa się w ten sposób z dziedziny geometrycznej do rachunkowej, czyli analitycznej. W myśl tego moglibyśmy odrazu postępować drogą czysto rachunkową, a więc badać po kolei rozmaite równania począwszy od najłatwiejszych, wynajdywać ich obrazy geometryczne i badać ich własności. Należałoby zacząć od algebraicznych równań pierwszego stopnia o 2 niewiadomych, potem badać równania 2-go stopnia, 3-go itd. a następnie przejść do równań przestępnych. Widocznem jest jednak, że w ten sposób nie możnaby nigdy wyczerpać wszyst-

kich możliwych utworów geometrycznych a co gorsze, moglibyśmy pominąć wiele linij bardzo ważnych w badaniach czysto geometrycznych lub w zastosowaniach geometrji. Dlatego też będziemy w dalszym ciągu postępowali drogą odwrotną. Wyjdziemy od rozmaitych znanych utworów geometrycznych i będziemy się starali znaleźć odpowiadające im równania.

Zanim przejdziemy do tych zagadnień, podamy jeszcze kilka wskazówek, któremi się należy kierować przy sporządzaniu wykresów — nie zajmując się jednak tutaj dokładniej tą sprawą, jako znaną z nauki algebry.

Mając gotową tabelkę wartości x i y należy przedewszystkiem odpowiednio obrać jednostkę tj. tak, aby dostosować wynikające z tabelki rozmiary rysunku do miejsca, jakiem rozporządzamy przy wykonywaniu tego rysunku. Jeżeli więc np. mamy obliczone dla $x=100, 200, 300\ldots$ wartości $y=800, 1000, 1400$, to najdogodniej będzie obrać jednostkę np. około $0{\cdot}01\ cm$; przeciwnie zaś, jeżeli nam chodzi o wartości x i y bliskie zera, np. $x=0{\cdot}02, 0{\cdot}04, -0{\cdot}02, -0{\cdot}04$, to praktyczniej będzie obrać jednostkę większą, np. $2\ dm$.

W zastosowaniach praktycznych obiera się często inne jednostki na osi x-ów a inne na osi y-ów; wtedy obraz geometryczny nie przedstawia już badanej funkcji, tylko inną funkcję, będącą jednak w bliskiem pokrewieństwie z badaną. Tak np. chcąc mieć wykres funkcji $y=x^4$ w granicach od $x=0$ do $x=4$, otrzymalibyśmy dla $x=1, 2, 3, 4$, wartości $y=1, 16, 81, 256$. Praktyczniej jest wtedy wziąć na osi y-ów jednostkę np. 20 razy mniejszą aniżeli na osi x-ów, ale wtedy otrzymamy obraz innej funkcji, związanej jednak z funkcją $y=x^4$ w bardzo prosty sposób, a mianowicie $20y=x^4$ (por. np. fig. 57). Wogóle zmiana jednostki na jednej osi wywołuje odwrotnie proporcjonalną zmianę odpowiedniej współrzędnej w równaniu: a więc obranie jednostki m razy mniejszej na osi y-ów ma ten skutek, że w równaniu trzeba zamiast y wprowadzić wartość m razy większą t. j. my i podobnie dla osi x-ów.

Często również praktycznie jest zacząć rysunek na osi y-ów nie od wartości $y=0$, ale odrazu od wartości znacznie większej. Tak np. chcąc przedstawić $y=50+2x$ w granicach od $x=-3$ do $x=+3$, otrzymalibyśmy obraz tego równania bardzo wysoko. Praktyczniej jest więc zacząć rysunek od $y=50$ i tam przenieść oś x-ów. Takie przesunięcie skali wywołuje również odpowiednią zmianę w równaniu, a mianowicie podniesienie osi x-ów do poziomu b wywołuje zmniejszenie wszystkich y-ów o b jednostek (zob. rozdział V. § 16., gdzie omówiono dokładniej przesunięcia osi). Takich przesunięć skali używa

się bardzo często w wykresach fizycznych, lekarskich, statystycznych. Np. przy wykresie przebiegu gorączki praktycznie jest wyjść nie od temperatury $y=0^0C$, ale np. od $y=37^0C$, a w każdym razie co najmniej od 35^0C.

Zauważmy również, że nie musimy zawsze odciętych nazywać literą x, a rzędnych literą y: owszem, dogodniej jest czasem użyć innych oznaczeń, np. p i v przy badaniu związku ciśnienia z objętością, s i t przy badaniu drogi i czasu itp.

Niektóre ogólniejsze uwagi o badaniu własności linij krzywych przy pomocy ich równań podajemy w osobnym rozdziale (Rozdział VII. Ogólne uwagi o dyskusji równań linij krzywych) a specjalne, najprostsze typy równań przedyskutujemy dokładniej w dalszym toku nauki. Dokładne badanie obrazów geometrycznych najogólniejszych równań wymaga już metod rachunku różniczkowego i całkowego lub ogólnej teorji mnogości, przekracza więc zakres matematyki elementarnej.

§ 7. Wyprowadzanie równań z geometrycznych własności linij. Równania miejsc geometrycznych.

Wiedząc o tem, że równanie o dwóch zmiennych przedstawia najczęściej jakąś linję, staramy się odwrotnie: **każdą** linję ująć w równanie o dwóch zmiennych i zastąpić badanie geometryczne rachunkiem algebraicznym. Drogę prowadzącą do tego celu poznamy najpierw na przykładach.

Przykład 1. Znaleźć równanie, któreby przedstawiało wszystkie punkty linji kołowej o promieniu 5 *cm*, jeżeli środek koła leży w początku układu, (fig. 6). Wykreślając współrzędne x, y jakiegokolwiek punktu P na obwodzie koła widzimy, stosując twierdzenie Pitagorasa, że:

$$x^2+y^2=25.$$

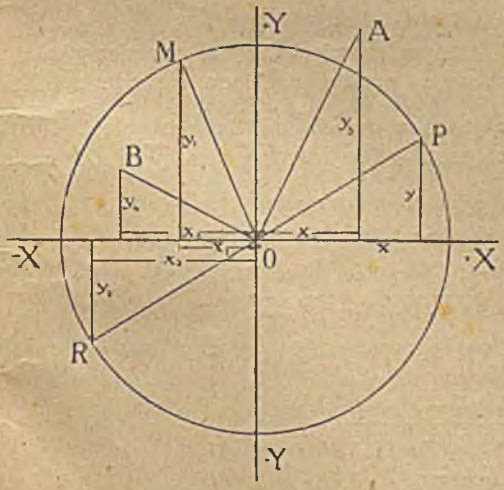


Fig. 6 (w skali 1 : 2).

Równaniu temu czynią zadość także współrzędne x_1, y_1 punktu M, na obwodzie koła, bo także $OM=5$, punktu R, i wogóle współrzędne wszystkich punktów obwodu koła. Natomiast równania tego nie spełniają współrzędne żadnego punktu, leżącego poza obwodem koła; n. p. dla punktu A jest:

$$OA>5, \text{ więc}$$
$$x_3^2+y_3^2>5.$$

dla punktu B zaś jest:

$$OB<5, \text{ więc}$$
$$x_1^2+y_1^2<5.$$

Pierwiastki równania:

$$x^2+y^2=25$$

przedstawiają więc wszystkie punkty linji kołowej, a nie przedstawiają żadnego innego punktu. Dlatego równanie to nazywamy: r ó w n a n i e m k o ł a. Jakie są rzędne punktów na kole, których odcięte wynoszą 1, 2, 3, 4, 5? W jakich punktach trafia koło prosta równoległa do osi X-ów w odstępie 3·5?

Geometryczne badanie koła możemy zastąpić algebraicznem badaniem tego równania.

Przykład 2. M u s z l a N i k o m e d e s a. Linja ta powstaje, jeżeli pęk promieni (fig. 7) przetniemy dowolną prostą $\overset{-}{X}\overset{+}{X}$, odległą od wierzchołka pęku

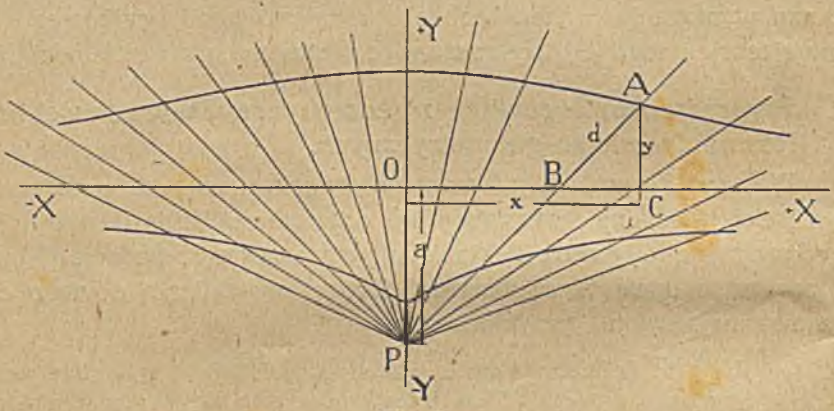


Fig. 7.

o odcinek a, n. p. $a=2$ *cm* i na każdym promieniu pęku odetniemy równy odcinek, n. p. $d=1{\cdot}5$ *cm* w obie strony od punktu przecięcia się z prostą $\overset{-}{X}\overset{+}{X}$. W ten sposób otrzymamy linję złożoną z dwóch oddzielnych gałęzi. Prostą $\overset{-}{X}\overset{+}{X}$ obierzmy za oś X-ów, a prostopadły do niej promień pęku OP za oś $\overset{-}{Y}\overset{+}{Y}$-ów. Wykreślmy współrzędne x, y dowolnego punktu A.

Z podobieństwa trójkątów: $OPB \sim ABC$ wynika proporcja:

$$a:(x-BC)=y:BC$$

czyli: $a:(x-\sqrt{d^2-y^2})=y:\sqrt{d^2-y^2}$

Po uporządkowaniu i uwolnieniu od pierwiastka otrzymamy jako równanie muszli Nikomedesa:

$$(a+y)^2(d^2-y^2)=x^2y^2$$

N. p. dla $a=2$, $d=1{\cdot}5$ równanie to przybiera formę:

$$(2+y)^2(1{\cdot}5^2-y^2)=x^2y^2.$$

Jest to równanie 4-go stopnia. Spełniają go wszystkie punkty tej linji i tylko te punkty.

Przykład 3. Cisoida. Dane jest koło o promieniu ρ i styczna BT (fig. 8) na końcu średnicy OB. Z punktu O wykreślamy pęk siecznych i na każdej z nich odcinamy od punktu O odcinek zawarty między obwodem koła a stałą styczną BT. Końce tych odcinków utworzą linję krzywą, zwaną cisoidą. Aby znaleźć jej równanie, wychodzimy z warunku:

$$OD = AC.$$

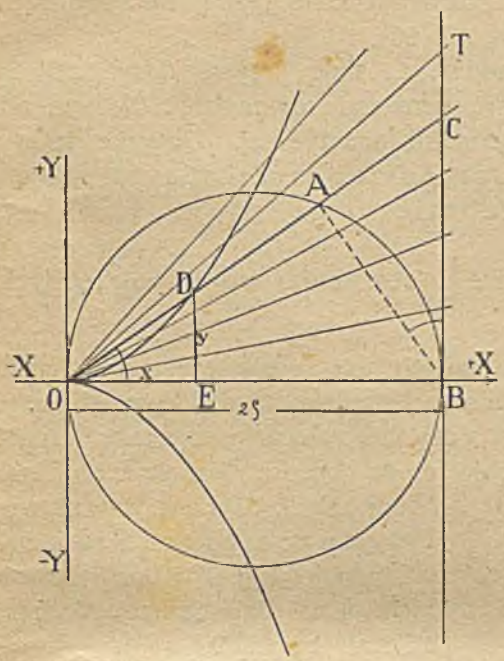


Fig. 8.

Za oś X-ów obieramy prostą OB, a za oś Y-ów prostopadłą do niej prostą OY.

Odcinek OD łatwo wyrazić zapomocą współrzędnych:

$$OD^2 = x^2 + y^2.$$

Wielkość odcinka AC obliczamy z proporcji:

$$y : OD = AC : BC \text{ czyli}$$

$$y : AC = AC : BC$$

stąd $AC^2 = BC \cdot y$

BC otrzymamy z proporcji:

$$y : x = BC : 2\rho$$

więc $$BC = \frac{2\rho y}{x}$$

zatem $AC^2 = \frac{2\rho y^2}{x}$. Związek $AC = OD$ daje więc równanie:

$$x^2 + y^2 = \frac{2\rho y^2}{x} \text{ czyli}$$

$$\underline{y^2(2\rho - x) = x^3.}$$

Równanie cisoidy jest równaniem stopnia trzeciego.

Przykłady te prowadzą nas do następującego określenia: *równaniem linji krzywej nazywamy równanie o dwóch zmiennych, któremu czynią zadość współrzędne wszystkich punktów linji, a którego nie spełniają żadne inne punkty.*

Linje występowały w naszych przykładach jako miejsca geometryczne punktów, spełniających jakiś warunek. Np. koło występowało jako miejsce geometryczne punktów oddalonych o stały odcinek $r = 5$ od stałego punktu O; muszla Nikomedesa była miejscem g. punktów, odcinających na każdym promieniu pęku po dwa równe odcinki liczone od stałej prostej itd. Stąd już widać, jaka jest ogólna metoda ujmowania miejsc geometrycznych w równania o dwóch zmiennych:

BIBLIOTEKA ŚLĄSKA GLIWICE

warunek, definiujący żądane miejsce geometryczne, należy najpierw przedstawić jako równanie, zachodzące pomiędzy wielkościami odcinków a następnie trzeba te odcinki wyrazić zapomocą współrzędnych (por. ćwiczenia II. Nr. 14, 15, 16).

Widzimy z tych przykładów, że linje krzywe dosyć zawiłej budowy możemy zastąpić dosyć prostemi równaniami. Na tem też polega doniosłość metody geometrji analitycznej. Zawiłe fakty geometryczne chcemy zastępować możliwie najprostszemi rozważaniami algebraicznemi.

§ 8. Współrzędne biegunowe i równania we współrzędnych biegunowych*).

Obok układu osi prostopadłych używa się częstokroć także innych sposobów do wyznaczenia położenia punktu. Używa się n. p. osi ukośnych, tworzących kąt ostry lub rozwarty, a wtedy współrzędnemi są odcinki linij równoległych do obu osi. O wiele ważniejsze jest jednak użycie t. z. współrzędnych biegunowych. Obieramy (fig. 9) jedną tylko oś OZ a na niej kierunek dodatni i stały punkt O.

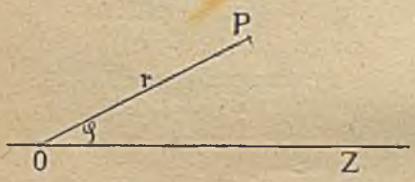


Fig. 9.

Oś OZ nazywamy osią biegunową, a punkt O biegunem. Położenie punktu P wyznaczamy przez podanie:

a) jego odległości r od bieguna, zawsze dodatniej, zwanej promieniem wodzącym i

b) kąta φ, liczonego w kierunku dodatnim (t. j. przeciwnym do ruchu wskazówek zegara), jaki promień wodzący tworzy z dodatnim kierunkiem osi biegunowej. Kąt φ przybiera wszelkie wartości od O do 360^0 a nawet poza 360^0.

Liczby r i φ nazywamy współrzędnemi biegunowemi punktu P, wystarczają bowiem do jednoznacznego wyznaczenia położenia punktu na płaszczyźnie. (Odwrotnie jednak do jednego punktu należy wiele par wartości r i φ, a mianowicie obok pewnego φ, także $\varphi \pm n.360^0$, gdzie n jest liczbą całkowitą).

Współrzędnych takich używa się w miernictwie, a zwłaszcza w astronomji (n. p. odległość sferyczna i azymut, zboczenie i kąt godzinny; przy ruchu planet za biegun O obieramy słońce).

*) Przy skróconym toku nauki można ten ustęp pominąć.

Od współrzędnych prostokątnych łatwo jest przejść do współrzędnych biegunowych i odwrotnie. Jeżeli punkt P (fig. 10) ma współrzędne biegunowe (r, φ), to współrzędne prostokątne (x, y) otrzymamy z wzorów:

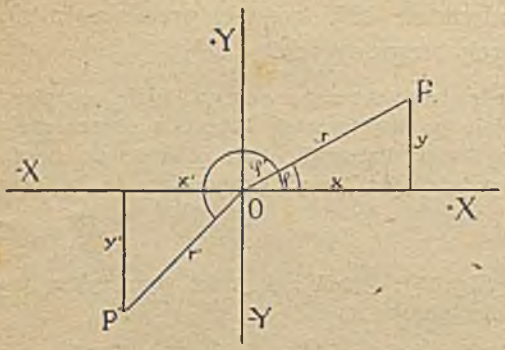


Fig. 10.

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi \qquad (8)$$

bez względu na to, jaki jest kąt φ (prawo rzutów w trygonometrji!).

Odwrotnie, jeżeli znamy (x, y), obliczamy r, podnosząc obydwa równania (1) do kwadratu i dodając:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Kąt zaś φ otrzymamy z równania:

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

N. p. 1. Znamy równanie koła we współrzędnych prostokątnych:

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Podstawiając za x i y wartość z wzorów (8), otrzymamy tę samą linję, wyrażoną zapomocą współrzędnych biegunowych:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 25 \text{ czyli:}$$
$$r^2 = 25, \text{ a stąd } r = 5.$$

2. Równanie cisoidy we współrzędnych prostokątnych jest:

$$y^2(2a - x) = x^3.$$

We współrzędnych biegunowych równanie to przyjmie postać:

$$r^2\sin^2\varphi(2a - r\cos\varphi) = r^3\cos^3\varphi$$

czyli po uporządkowaniu:

$$r = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Równanie, zachodzące między r i φ, przedstawia pewną linję którą otrzymamy, obliczając do każdej wartości φ odpowiednie r i wykreślając odpowiednie punkty P (r, φ), jeżeli tylko istnieją rzeczywiste pary wartości spełniających równanie.

Wykreśl w ten sposób obraz geometryczny równania:

$$r = \frac{\pi}{2\pi - \varphi}$$ (φ wyrażone w mierze łukowej!).

Badanie wielu linij krzywych jest łatwiejsze przy pomocy współrzędnych biegunowych, aniżeli przy pomocy współrzędnych prostokątnych. Już bowiem samo równanie linji krzywej przedstawia się nieraz prościej we współrzędnych biegunowych.

Przykład 1. Równanie spiralnej Archimedesa. Linję tę zakreśla punkt, poruszający się jednostajnie po linji prostej, która się obraca równocześnie jednostajnie (ze stałą prędkością kątową) około jednego ze swych punktów. Przesunięcie r wzdłuż prostej jest więc proporcjonalne do kąta obrotu, zatem:

$$r = k \cdot \varphi$$

jeżeli punkt wyruszył z punktu O (fig, 11); jeżeli zaś punkt wyruszył z położenia B, w odległości d od środka obrotu, to

$$r = d + k \cdot \varphi.$$

Są to biegunowe równania spiralnej Archimedesa.

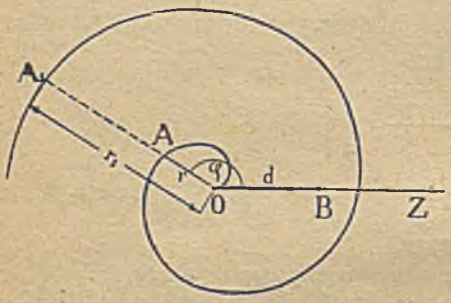


Fig. 11.

Gdybyśmy to samo równanie chcieli wyrazić we współrzędnych prostokątnych, otrzymalibyśmy bardzo zawiły związek:

$$\sqrt{x^2+y^2} = d + k \cdot arc\,tg\frac{y}{x}$$

przyczem $arc\,tg\frac{y}{x}$ oznacza łuk (kąt), którego tangens ma wartość: $\frac{y}{x}$.

Przykład 2. Równanie biegunowe elipsy. Definicja elipsy: jest to miejsce geometryczne punktów, których suma odległości od dwóch stałych punktów ma stałą wartość:

$$r + r_1 = 2a \qquad (a)$$

Stałe punkty F_1 i F_2 (fig. 12.) nazywamy ogniskami; ich odległość oznaczamy znakiem: $2e$. Obieramy prostą F_2F_1 za oś biegunową, a jedno z ognisk n. p. F_2 za biegun O. Współrzędnemi biegunowemi dowolnego punktu są r i φ. Chcemy zamienić równanie (a) na związek między r i φ. W tym celu wyrażamy r_1 jako funkcję zmiennych r i φ, stosując twierdzenie Carnota do trójkąta OPF_1:

$$r_1^2 = r^2 + 4e^2 - 4er\cos\varphi.$$

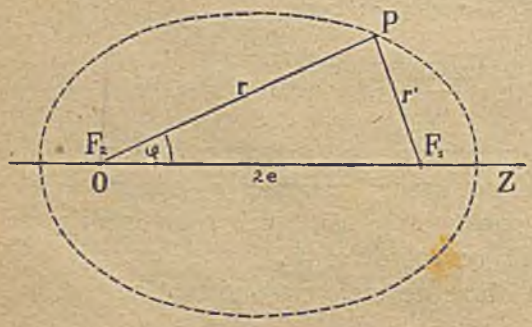


Fig. 12.

Podstawiając tę wartość w równaniu (a) otrzymamy:

$$(r-2a)^2 = r^2 + 4e^2 - 4er\cos\varphi$$

a stąd po uporządkowaniu:

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a - e\cos\varphi}.$$

Dla skrócenia oznaczamy $\frac{a^2-e^2}{a}$ literą p, a $\frac{e}{a}$ literą ε, to równanie przyjmie postać:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Jest to biegunowe równanie elipsy; p i ε są liczbami stałemi dla jednej elipsy, a r i φ są zmiennemi.

Kładąc $\varphi = 90^0$ sprawdzamy, że p oznacza odcinek prostopadłej, wykreślonej w ognisku F_2 elipsy, do prostej F_2F_1.

Do tej samej formy można sprowadzić biegunowe równanie hyperboli, gdzie $r_1 - r_2 = 2a$. Wykaż!

Przykład 3. Ślimak Paskala. Z dowolnego punktu obwodu koła prowadzimy pęk siecznych i na każdej z nich odcinamy od obwodu koła w obydwie strony ten sam stały odcinek b (postępujemy tu z kołem podobnie, jak z linją prostą XX przy tworzeniu muszli Nikomedesa).

$-\quad +$

(N. p. $b = 1$ *cm*, a średnica: $a = 4$ *cm* na figurze 13). Końce tych odcinków tworzą linję krzywą, zwaną ślimakiem Paskala.

Uwaga: Jeżeli stały odcinek b równa się średnicy koła, otrzymamy linję krzywą, złożoną tylko z jednej pętlicy, zwaną: kardioidą (καρδία = serce).

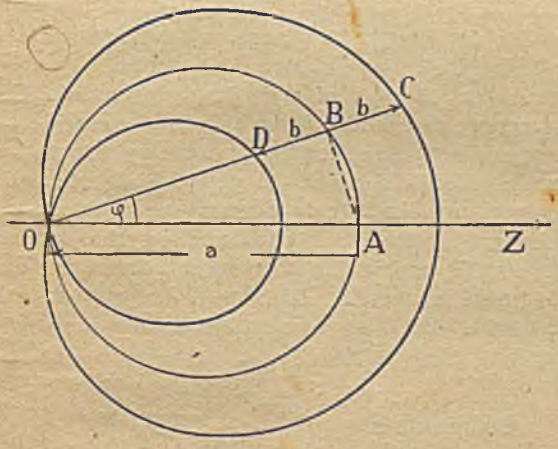


Fig. 13.

Dla każdego punktu tej linji krzywej zachodzi związek:

$$r = OB \pm b.$$

Ale $OB = a\cdot\cos\varphi$, jak to odczytujemy z trójkąta prostokątnego OAB, więc

$$r = a\cos\varphi \pm b. \quad (b)$$

Równanie to przedstawia całą linję krzywą we współrzędnych biegunowych. a, b są wielkościami stałemi, r i φ zmiennemi. Wykazać, że we współrzędnych prostokątnych równanie to przyjmie postać:

$$(x^2+y^2-ax)^2 = b^2(x^2+y^2).$$

Wyprowadzić równanie cardioidy z równania (b)!

Przykład 4. Rozeta czworolistna. Definicja: odcinek o stałej długości: $2a$ (fig. 14) ślizga się swemi końcami po dwóch prostopadłych; z punktu przecięcia się O tych prostopadłych prowadzimy prostopadłą do ru-

chomego odcinka w każdem położeniu. Rozeta jest miejscem geometrycznem spodków tych prostopadłych. Z figury 14 widzimy, że

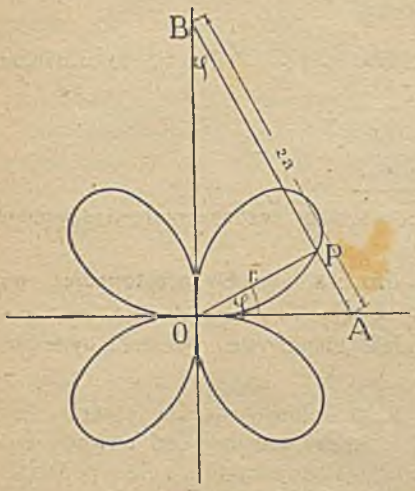


Fig. 14.

$$r = OA \cdot \cos\varphi.$$

Ale $OA = AB \sin\varphi = 2a \sin\varphi$ więc

$$r = 2a \sin\varphi \cos\varphi \text{ czyli:}$$

$$r = a \sin 2\varphi.$$

Jest to biegunowe równanie rozety.

Zamień to równanie na równanie we współrzędnych prostokątnych!

Z tych przykładów, zarówno jak z przykładów § 7. widzimy, że przy tworzeniu równania jakiejkolwiek linji, dadzą się odróżnić następujące kroki:

a) obrać dowolny punkt tej linji;

b) warunek, jaki ma spełniać każdy punkt tej linji wyrazić równaniem zachodzącem między samemi wielkościami odcinków lub odcinków i kątów;

c) obrać odpowiednio układ współrzędnych;

d) dany warunek wyrazić zapomocą współrzędnych i uporządkować otrzymane równanie.

Uwaga. Użycie jakichkolwiek współrzędnych polega na powleczeniu całej płaszczyzny podwójną siatką linij. N. p. współrzędne prostokątne powstają z siatki prostych równoległych do osi X-ów i prostych równoległych do osi Y-ów. Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi jedna linja z pierwszej gromady i jedna z drugiej. Zamiast podawać współrzędne punktu, wystarczy podać, która linja z każdej gromady przechodzi przez ten punkt. Podobnie przy użyciu współrzędnych biegunowych powlekamy całą płaszczyznę pękiem prostych, przechodzących przez biegun i gromadą kół współśrodkowych o środku w biegunie. Możnaby także użyć siatki złożonej z samych linij krzywych dla płaszczyzny, ma to jednak podrzędne znaczenie. Natomiast dla powierzchni kuli używa się zawsze takiej siatki krzywolinjowej: południków i równoleżników.

Ćwiczenia II

§ 5. 1. Wykreślić wielokąt, którego kolejne wierzchołki mają współrzędne:
$A(0,2)$, $B(6,4)$, $C(8,-3)$, $D(-2,-5)$, $E(-7,-2)$, $F(-4,3)$.

2. Wyrazić jako różnice odciętych odcinki, których punkty końcowe są:

a) $A(-4,0)\ldots.$ $B(3,0)$
b) $A_1(1,0)\ldots.$ $B_1(-3,0)$
c) $A_2(-2,0)\ldots.$ $B_2(-6,0)$ Narysuj!

3. Wyrazić jako różnice rzędnych odcinki, których punkty końcowe mają współrzędne:

a) $A(0,-4)$.... $B(0,6)$

b) $A_1(0,3)$.... $B_1(0,-5)$.

4. Gdzie leżą wszystkie punkty, mające rzędną *a)* 4, *b)* -3? Gdzie leżą punkty, mające odciętą *c)* 2, *d)* -5, *e)* 0?

5. Gdzie leżą punkty, *a)* dla których $x=y$? *b)* dla których $x+y=0$?

§ 6. 6. Wykreślić obrazy geometryczne funkcyj:

a) $5x-4y=8$ *b)* $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$

c) $2y-3x+6=0$.

7. Wykreślić obrazy geometryczne funkcyj:

a) $x^2+y^2=36$ *b)* $x^2+y^2-4x=0$ $(x-2)^2+y^2=4$

c) $x^2+y^2-6x+8y=24$.

8. Wykreślić obrazy geometryczne funkcyj:

a) $x^2=8y$, *b)* $y^2=-\frac{x}{4}$

c) $x-3=2(y+1)^2$.

9. Wykreślić obrazy geometryczne funkcyj:

a) $x^2-y^2=16$ *b)* $9x^2+36y^2=324$

c) $xy=12$ *d)* $y^2=2x+x^2$.

10. Wykreślić obrazy geometryczne funkcyj algebraicznych:

a) $y=\frac{x}{x-3}$ (hyperbola)

b) $y=x^3$ (parabola 3-go stopnia)

c) $y^2=x^3$ (parabola Neil'a)

d) $x^2y=1$ (hyperbola kubiczna)

e) $y=(x-1)(x-3)(x-6)$ (parabola 3-go stopnia)

f) $y=\frac{x+2}{(x-1)(x-3)}$

g) $y^2(2-x)-x^2(2+x)=0$ (liść Descartes'a)

h) $y^2=x(x+1)(x-3)$

i) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ (asteroida)

k) $(x^2+y^2)^2-9(x^2-y^2)=0$ (lemniskata)
(rozwiązać że względu na y^2!)

11. Wykreślić obrazy geometryczne funkcyj przestępnych:

a) $y=10^x$ i $y=e^x$ ($e=2{\cdot}71828...$ jest zasadą logarytmów naturalnych)

b) $y=\log_{10}x$

c) $y=\frac{\sin x}{x}$

d) $2y=e^x+e^{-x}$ (linja łańcuchowa), ($e=2{\cdot}71828....$).

12. Przedstawić graficznie równanie zasadnicze gazów doskonałych $p.v=c$, obierając za c jakąkolwiek stałą liczbę dodatnią.

§ 7. 13. Wyprowadzić równanie koła, którego promień wynosi 6 *cm*, a które się styka z osiami współrzędnych.

14. Wyprowadzić równanie miejsca geometrycznego punktów równo oddalonych od stałego punktu (zwanego ogniskiem) i od stałej prostej (zwanej kierownicą), znając odległość $p=10$ tego punktu od prostej. Linja ta nazywa się parabolą.

Wskazówka: obrać kierownicę za oś y-ów.

15. Znaleźć równanie miejsca geometrycznego punktów, których
   a) suma odległości od punktów (3, 0), (—3, 0) wynosi 8,
   b) różnica odległości od punktów (5, 0), (—5, 0) wynosi 8.

16. Znaleźć równanie linji, mającej tę własność, że iloczyn odległości każdego jej punktu od dwóch stałych punktów (—4, 0), (4, 0) ma stałą wartość 36. (Krzywa Cassini'ego).

§ 8. 17. Narysować punkty, których współrzędne biegunowe są: $(3, 30^0)$, $(4, 220^0)$, $(1, 310^0)$, $(5, 140^0)$.

18. Znaleźć współrzędne prostokątne punktów, których współrzędne biegunowe są: $(1, 60^0)$, $(4^1/_2, 160^0)$, $(2, 225^0)$, $(5, 300^0)$.

19. Obliczyć współrzędne biegunowe punktów, których współrzędne prostokątne są: (4, 7), (—3, 6), (2, —5), (—3, —4).

20. Gdzie leżą wszystkie punkty, *a)* których $\varphi=30^0$? a gdzie punkty, *b)* których $r=2$?

21. Wyrazić we współrzędnych biegunowych równania:
   a) $y^2=6x+9$ (parabola)
   b) $y^2(2-x)-x^2(2+x)=0$ (liść Descartes'a)
   c) $(x^2+y^2)^2-2px(x^2+y^2)-p^2y^2=0$ (kardioida).

22. Wyrazić we współrzędnych prostokątnych równania:
   a) $r\cdot\cos\varphi=2$ (linja prosta)
   b) $r=\frac{4}{1-\cos\varphi}$ (parabola)
   c) $r=\frac{4}{1-0{\cdot}5\cos\varphi}$ (elipsa)
   d) $r=a\cos 2\varphi$ narysuj!

23. Wyprowadzić we współrzędnych biegunowych równanie linji Cassini'ego t. j. linji, której każdy punkt ma tę własność, że iloczyn jego odległości od 2 stałych punktów ma stałą wartość: c^2.

(Wynik: $r^4-2a^2r^2\cos 2\varphi=c^4-a^4$, przyczem $2a$ jest odległością stałych punktów, jeżeli biegun obrano w środku między stałemi punktami).

Rozdział III

Planimetryczne zastosowania układu współrzędnych

§ 9. Odcinki.

Aby badać własności zawilszych utworów geometrycznych, musimy — jak w każdej nauce — postępować od utworów prostszych do bardziej złożonych. Dotychczas omówiliśmy dokładnie tylko położenie punktów; obecnie przejdziemy do badania odcinków. — Zwrócimy uwagę na następujące zagadnienia: *a)* znaleźć rzuty odcinka na osie; *b)* znaleźć długość odcinka; *c)* kierunek odcinka; *d)* podział odcinka w danym stosunku; znamy zaś tylko współrzędne końcowych punktów odcinka.

Odcinek pojmujemy zawsze jako wielkość kierunkową, opatrzoną pewnym znakiem, natomiast **odległość** dwóch punktów uważamy **zawsze** za wielkość **dodatnią**, równą wartości bezwzględnej liczby wymiarowej odcinka (długość odcinka!)

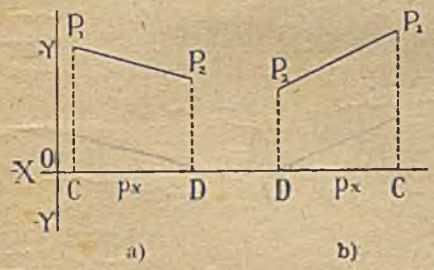


Fig. 15.

1. Końce odcinka P_1P_2 (fig. 15 i 16) mają współrzędne: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Chcemy obliczyć rzuty tego odcinka na osie współrzędnych.

Jeżeli C jest rzutem punktu P_1 a D rzutem punktu P_2 na oś X, to rzutem odcinka P_1P_2 jest odcinek $\overline{CD}$ (a nie odcinek $\overline{DC}$!). Rzut p_x odcinka P_1P_2 na oś X-ów wynosi zawsze:

$$p_x = x_2 - x_1 \qquad (9_1)$$

bez względu na to, czy punkt P_1 leży bliżej osi Y-ów (fig. 15 a), czy też dalej (fig. 15 b), czy z tej samej strony osi Y-ów, co punkt P_2,

czy też z przeciwnej (fig. 16 c, d). W każdym bowiem przypadku: $CD=OD-OC$ a OC i OD są odciętemi punktu P_1 i P_2.

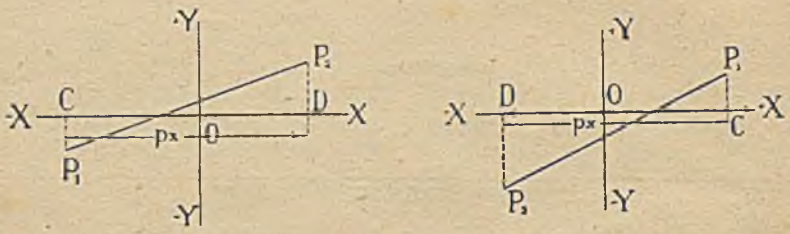


Fig. 16.

N. p. w przypadku zaznaczonym na fig. 16 c), mamy:

$$CD=p_x=CO+OD=-OC+OD=-x_1+x_2$$

w przypadku na fig. 15 b):

$$CD=-DC=-(OC-OD)=-(x_1-x_2)=x_2-x_1.$$

Otóż: *rzut odcinka na oś X-ów oblicza się, odejmując od odciętej punktu końcowego odciętą punktu początkowego* (punktem początkowym odcinka jest ten punkt, który się wymawia lub wypisuje najpierw, a nie ten, który odczytujemy z figury jako n. p. wysunięty dalej na lewo).

Zupełnie podobny sposób rozumowania dla rzutu na oś Y-ów prowadzi do wniosku:

Rzut dowolnego odcinka na oś Y-ów oblicza się, odejmując od rzędnej punktu końcowego rzędną punktu początkowego:

$$p_y=y_2-y_1 \qquad (9_2)$$

Te prawa rzutów stosują się nie tylko do osi X-ów i Y-ów, ale także do każdej prostej równoległej do nich, ponieważ rzuty na proste równoległe są zawsze równe.

Długość odcinka (odległość dwóch punktów).

Aby znaleźć długość odcinka P_1P_2, znając współrzędne jego punktów końcowych: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, prowadzimy przez P_1 i P_2 (fig. 17) proste równoległe do osi X-ów i Y-ów. Odcinki P_1A i AP_2 są równe rzutom odcinka P_1P_2 na osie, więc:

$$P_1A=x_2-x_1$$
$$AP_2=y_2-y_1$$

bez względu na to, jak są położone punkty P_1 i P_2. Wobec tego z trójkąta prostokątnego P_1AP_2 otrzymujemy:

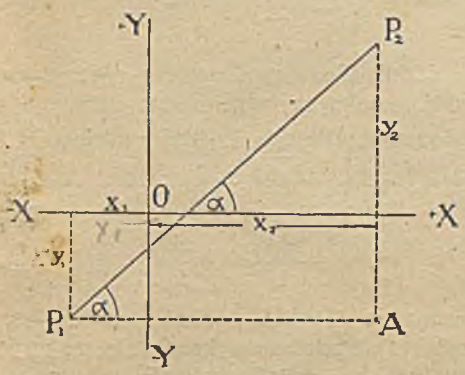


Fig. 17.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

lub zmieniając znaki wyrażeń zawartych w nawiasach, co nie wpływa na znak drugiej potęgi:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \quad (10)$$

Drugi pierwiastek ma wprawdzie znak + lub —, jednakże w geometrji analitycznej odległość uważa się zawsze za liczbę dodatnią; obieramy więc znak + dla pierwiastka.

Uwaga. Jeżeli punkty P_1 i P_2 leżą na osi n. p. X-ów, to odcinkowi P_1P_2 może odpowiadać liczba odjemna, jednakże za odległość punktów P_1 i P_2 uważamy i teraz wartość bezwzględną tej liczby.

§ 10. Kierunek odcinka. Spadek linji.

Znając współrzędne punktów końcowych odcinka, możemy wyznaczyć także jego kierunek n. p. zapomocą kąta, jaki ten odcinek tworzy z dodatnim kierunkiem osi X-ów. Zauważmy przedewszystkiem, że odcinek tworzy taki sam kąt z każdą prostą równoległą do osi X-ów. Z trójkąta P_1AP_2 (fig. 17) odczytujemy: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{AP_2}{P_1A}$ (licznik i mianownik muszą mieć te same znaki, bo tangens kąta ostrego jest dodatni; dlatego bierzemy stosunek $\frac{AP_2}{P_1A}$ a nie $\frac{AP_2}{AP_1}$!). Stąd:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (11)$$

Wzór ten jest nieprzydatny, gdy $x_2=x_1$. Gdyby przytem także licznik był zerem, t. j. gdyby było także $y_2=y_1$, mielibyśmy nie odcinek, tylko jeden punkt, więc o kierunku odcinka nie można wtedy mówić. Gdyby zaś y_2 było różne od y_1, a $x_2=x_1$, to punkty P_1 i P_2 leżałyby na prostej prostopadłej do osi x-ów, a więc kąt byłby $\alpha=90^\circ$, zatem tangens nieskończenie wielki.

Uwaga. Gdyby odcinek $\overline{P_1P_2}$ tworzył kąt rozwarty z dodatnim kierunkiem osi X-ów (por. fig. 18), to z trójkąta P_1AP_2 otrzymamy:

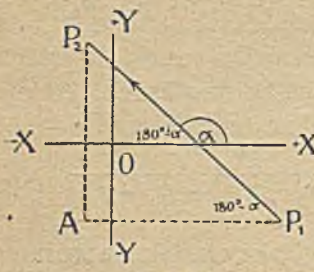


Fig. 18.

$$\operatorname{tg}(180^0-\alpha)=\frac{AP_2}{AP_1}$$

(Tu licznik i mianownik muszą mieć jednakowe znaki, ponieważ tangens kąta ostrego ma wartość dodatnią. Dlatego wzięliśmy odcinki AP_2 i AP_1, a nie AP_2 i P_1A).

Wobec tego:

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{AP_2}{AP_1}=+\frac{AP_2}{P_1A}$$

a podstawiając za $AP_2=y_2-y_1$, za $P_1A=x_2-x_1$ otrzymamy także i w tym przypadku wzór (11). Podobnie wykazuje się, że wzór (11) utrzymuje się także dla kątów wypukłych, t. j. jeżeli punkt P_1 leży wyżej od punktu P_2, ma większą rzędną od rzędnej punktu P_2. Narysuj odpowiednią figurę i udowodnij!

Wzór (11) możemy wypowiedzieć tak:

Tangens kąta, jaki tworzy dowolny odcinek z dodatnim kierunkiem osi X-ów, otrzymujemy, dzieląc zmianę (t. j. przyrost lub ubytek), jakiej dozna rzędna przy posunięciu się od początku odcinka do jego końca przez równoczesną zmianę odciętej.

Oznaczając różnicę x_2-x_1 znakiem Δx (differentia = różnica), a różnicę y_2-y_1 znakiem Δy, możemy wzór (11) przedstawić w formie:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=a \qquad (11_1)$$

Wartość tego stosunku: a nazywamy także współczynnikiem kierunkowym linji P_1P_2.

Stosunek przyrostu (lub ubytku, t. j. odjemnego przyrostu) rzędnej do przyrostu (ubytku) odciętej odgrywa ważną rolę w geometrji naukowej i praktycznej. I tak, aby określić **spadek** drogi lub jakiejkolwiek pochyłości, podajemy, jaki przyrost wysokości (rzędnej) przypada na pewien przyrost długości (odciętej). N. p. jeżeli droga wznosi się o $3\,m$ na $100\,m$ poziomej długości, to spadek drogi wynosi $\frac{3}{100}=3\%$.

Otóż z wzoru (11) wynika, że *spadek jakiejkolwiek linji prostej równa się tangensowi kąta nachylenia.*

Jeżeli linja jest prosta, to spadek w każdem jej miejscu jest równy, bo $\operatorname{tg}\alpha$ ma dla każdego odcinka tej prostej jednakową wartość. Jeżeli jednak badana linja jest krzywą, to spadek jest w każdem miejscu inny. Możemy podać na razie tylko przeciętny spadek wzdłuż jakiegoś łuku tej krzywej. Tak n. p. na fig. 19 punkt

ruchomy na linji krzywej L wznosi się początkowo szybciej, aniżeli na odcinku AB, w pewnym punkcie C jednakowo, a potem znowu powolniej. Za przeciętny spadek wzdłuż łuku AB możemy przyjąć spadek wzdłuż odcinka AB, a więc:

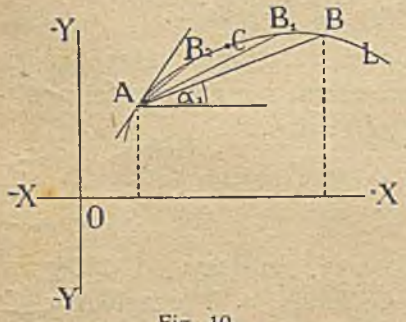


Fig. 19.

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Im bliżej punktu A obierzemy punkt B, np. B_1, B_2, tem mniej różni się przeciętny spadek wzdłuż łuku linji krzywej od prawdziwego spadku w punkcie A. Prawdziwy spadek w punkcie A otrzymamy, jeżeli sieczna AB stanie się styczną.

Otóż *prawdziwy spadek (współczynnik kierunkowy) linji krzywej nie jest w każdym punkcie jednakowy a równa się spadkowi stycznej, należącej do tego punktu,* t. j. tangensowi kąta, jaki tworzy styczna z dodatnim kierunkiem osi X-ów.

Uwaga. Podobne rozważania przeprowadza się w mechanice dla prędkości przeciętnej i prawdziwej w ruchu zmiennym.

Przykład. Zbadać, jaki spadek ma linja krzywa, przedstawiona równaniem:

$$y=\frac{x^2}{4}$$

w punkcie $x=2$, $y=1$. (Obraz tej krzywej rysowaliśmy na str. 13 fig. 5). Od punktu (2, 1) posuwamy się tak, aby odcięta x wzrosła o 1; obliczamy odpowiednie y, tworzymy różnice $x_2-x_1=\Delta x$, $y_2-y_1=\Delta y$ i stosunek $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ i notujemy te wartości w tabelce. Potem posuwamy się od punktu (2, 1) mniej, n. p. tak, aby x wzrosło tylko o $^1/_2$ i znowu obliczamy spadek przeciętny $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ i t. d. Otrzymamy następujące wartości:

x	y	Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
2	1			
3	2·25	1	1·25	1·25
2·5	1·5625	0·5	0·5625	1·125
2·1	1·1025	0·1	0·1025	1·025
2·01	1·010025	0·01	0·010025	1·0025
2·001	1·00100025	0·001	0·00100025	1·00025
$2+\Delta x$	$1+\Delta x+\frac{\Delta x^2}{4}$	Δx	$\Delta x+\frac{(\Delta x)^2}{4}$	$1+\frac{\Delta x}{4}$

Z tej tabelki widzimy, że przeciętny spadek wzdłuż linji $y=\frac{x^2}{4}$ dąży od wartości 1, gdy punkt ruchomy zbliża się do punktu (2, 1). To znaczy: tangens kąta, jaki tworzy sieczna, wychodząca z punktu (2, 1), dąży do 1, gdy sieczna dąży do położenia stycznej, więc sam kąt dąży do 45^0.

W ten sposób można badać stopień wzrastania każdej funkcji, bez względu na to, czy znamy jej obraz geometryczny, czy też posiadamy tylko liczbową zależność zmiennych x i y.

§ 11. Kąt dwóch linij prostych.

Kątem linji L_1 z linją L_2 nazywamy mniejszy od 180^0 kąt, liczony od linji L_2 ku L_1 w kierunku dodatnim, t. j. przeciwnym do ruchu wskazówki zegara. A więc n. p. na fig. 20 a. kątem, jaki tworzy linja L_1 z L_2 jest $\sphericalangle ACB=\varphi$. Z fig. 20 a. widzimy, że:

$$\varphi=\alpha_1-\alpha_2$$

jako kąt wewnętrzny w trójkącie ABC, jeżeli $\alpha_1>\alpha_2$; jeżeli zaś $\alpha_1<\alpha_2$, to (por. fig. 20 b):

$$\varphi=\alpha_1+180^0-\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2+180^0$$

jako kąt zewnętrzny.

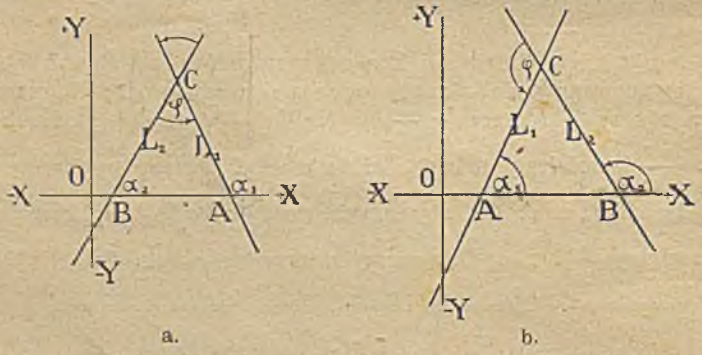


Fig. 20.

Jeżeli znamy współczynniki kierunkowe (spadki) obydwu linij L_1 i L_2, t. j.

$$a_1=\operatorname{tg}\alpha_1 \text{ i } a_2=\operatorname{tg}\alpha_2,$$

to łatwo obliczyć $\operatorname{tg}\varphi$ zapomocą znanego z trygonometrji wzoru:

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha_2}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}$$

więc:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a_1-a_2}{1+a_1a_2} \tag{12}$$

Wzór ten nie zmieni się, jeżeli $\alpha_1<\alpha_2$, bo wtedy $\operatorname{tg}\varphi=$ $=\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2+180^0)$. Ponieważ zaś perjodem funkcji tangens jest 180^0, przeto i teraz:

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)$$

a po rozwinięciu otrzymamy znowuż wzór (12).

Trzeba wyraźnie odróżniać kąt linji L_1 z prostą L_2 od kąta prostej L_2 z prostą L_1. Ten drugi kąt jest przyległy do φ, a ponieważ $\operatorname{tg}(180^0-\varphi)=-\operatorname{tg}\varphi$, zmieni się znak we wzorze (12). Otrzymamy więc w tym przypadku w liczniku a_2-a_1.

Z wzoru (12) odczytujemy, że jeżeli $a_1=a_2$ (mianownik nie może być wtedy zerem, bo wynosi $1+a_1{}^2$), t. j. $\alpha_1=\alpha_2$, to $\operatorname{tg}\varphi=0$, a więc i $\varphi=0^0$. Proste L_1 i L_2 są wtedy równoległe. Odwrotnie: jeżeli proste L_1 i L_2 są równoległe, to $\alpha_1=\alpha_2$, jako kąty odpowiednie, a więc musi być $a_1=a_2$. Stąd wniosek:

Warunkiem dostatecznym i koniecznym równoległości dwóch linij prostych jest równość ich współczynników kierunkowych:

$$a_1=a_2 \tag{13}$$

Jeżeli mianownik we wzorze (12) dąży do zera (licznik nie może wtedy dążyć do zera! dlaczego?), to $\operatorname{tg}\varphi$ dąży do ∞, a więc kąt φ dąży do 90^0. Proste L_1 i L_2 stają się więc prostopadłe, gdy mianownik stanie się zerem. Odwrotnie: jeżeli prosta L_1 jest prostopadłą do L_2, to $\varphi=90^0$, $\operatorname{tg}\varphi$ nieskończenie wielkie, a więc mianownik we wzorze (12) musi być zerem (o ile równocześnie licznik nie staje się nieskończonością):

$$1+a_1a_2=0$$

Stąd

$$a_1=-\frac{1}{a_2} \tag{14}$$

Otóż: *warunkiem prostopadłości dwóch prostych jest, aby współczynnik kierunkowy jednej z nich był odwrotnością ze znakiem przeciwnym współczynnika kierunkowego drugiej.*

Wzór (14) zawodzi, gdy $a_2=0$. Wtedy jednak L_2 jest równoległa do osi x-ów, a więc prostopadła do niej prosta L_1 jest prostopadła do osi x-ów, a jej spadek jest nieskończenie wielki. W tym przypadku należy pojmować wzór (14) jako wzór graniczny: $a_1=\lim\limits_{a_2\to 0}\left(-\frac{1}{a_2}\right)$.

Przykład 1. Pod jakim kątem przecina prosta, łącząca punkty: (—2, —1), (3, 5), prostą łączącą punkty: (—1, 4), (5, —1)? Obliczamy współczynniki kierunkowe obydwu prostych:

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{5+1}{3+2} = \frac{6}{5}$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-1-4}{5+1} = -\frac{5}{6}.$$

Ponieważ $a_1 = -\frac{1}{a_2}$, przeto $\varphi = 90^0$, więc proste są prostopadłe.

Przykład 2. Wierzchołki trójkąta mają współrzędne: A (5, 6), B (9, 0), C (—2, —4).

Obliczyć kąt wewnętrzny u wierzchołka A.

Obliczamy spadek linij AB i AC:

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-4-6}{-2-5} = \frac{10}{7}.$$

Więc $$\operatorname{tg} A = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{10}{7}}{1 - \frac{30}{14}} = \frac{41}{16} = 2{\cdot}5625.$$

Do tej wartości znajdujemy w tablicach trygonometrycznych:

$$\sphericalangle A = 68^0 41'.$$

Zbadać przy pomocy figury, czy to jest naprawdę kąt wewnętrzny!

§ 12. Podział odcinka.

Znając współrzędne $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ punktów końcowych odcinka, znaleźć współrzędne punktu, połowiącego ten odcinek: $P(x, y)$.

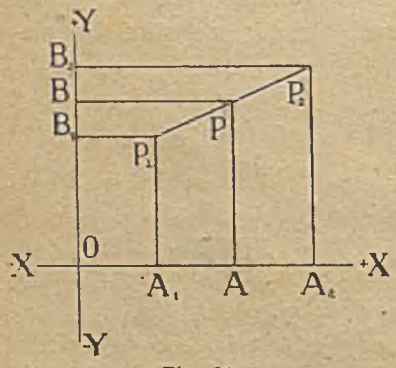


Fig. 21.

Tworząc rzuty odcinka $\overline{P_1P_2}$ na oś X-ów i oś Y-ów (fig. 21) widzimy (wynika to z własności trapezu), że

$$A_1A = AA_2 \quad \text{i} \quad B_1B = BB_2$$

czyli:

$$x - x_1 = x_2 - x \quad \text{i} \quad y - y_1 = y_2 - y$$

stąd

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (15)$$

Słowami: *współrzędne punktu, połowiącego odcinek, są średniemi arytmetycznemi współrzędnych punktów końcowych.*

W taki sam sposób otrzymamy współrzędne punktu, dzielącego odcinek w dowolnym stosunku: $m:p=s$.

Tworzymy rzuty odcinka $\overline{P_1P_2}$ (fig. 22) na osie współrzędnych, to z nauki o proporcjonalności wiadomo, że, jeżeli:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=s,$$

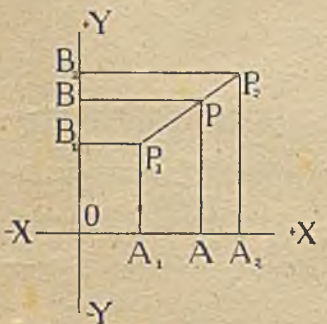


Fig. 22.

to także:

$$\frac{A_1A}{AA_2}=s \quad \text{i} \quad \frac{B_1B}{BB_2}=s$$

czyli:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=s, \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y}=s \tag{a}$$

Stąd łatwo obliczyć:

$$x=\frac{x_1+sx_2}{1+s}, \qquad y=\frac{y_1+sy_2}{1+s} \tag{16}$$

Wzory te są uogólnieniem poznanych w geometrji jednowymiarowej wzorów (3) i (4).

Wzory te pozwalają obliczyć współrzędne punktu podziału dla wszelkich wartości s z wyjątkiem $s=-1$. Widzimy zaś, że gdy s dąży do -1, to zarówno x jak i y dążą do nieskończoności.

Uwaga. Jeżeli stosunek podziału s jest liczbą ujemną, podział jest zewnętrzny, to znaczy punkt P leży na przedłużeniu odcinka P_1P_2 poza P_1 lub poza P_2 i odwrotnie: jeżeli P leży poza $\overline{P_1P_2}$, to stosunek s jest liczbą ujemną.

Jeżeli jakiś odcinek o końcach $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ podzielimy dwoma punktami $P_3(x_3, y_3)$ i $P_4(x_4, y_4)$ w stosunkach s i t, to **stosunek podziału podwójnego** k tego odcinka łatwo wyrazić zapomocą współrzędnych. Z równań (a) wynika, że:

$$k=\frac{s}{t}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}:\frac{x_4-x_1}{x_2-x_4}=(P_1P_2P_3P_4) \tag{17}$$

Podobnie wyraża się k zapomocą rzędnych.

Jeżeli podział jest harmoniczny, t. j. $k=-1$, to odcięte i rzędne spełniają następujące równania:

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3}:\frac{x_4-x_1}{x_2-x_4}=-1, \qquad \frac{y_3-y_1}{y_2-y_3}:\frac{y_4-y_1}{y_2-y_4}=-1.$$

Przykład 1. Wierzchołki trójkąta są A (—1, 3), B (5, —5), C (1, 5). Obliczyć położenie środka ciężkości pola trójkąta.

Środki boków mają według wzorów (15) współrzędne:

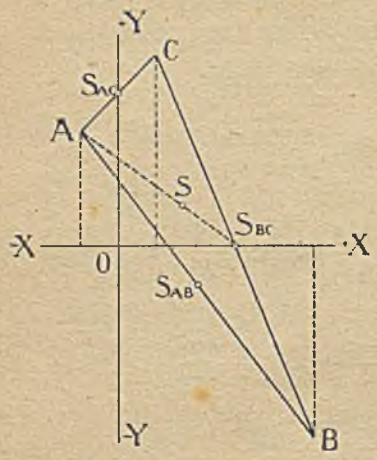


Fig. 23.

$$S_{AB}\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3-5}{2}\right) \text{ czyli } S_{AB}(2, -1)$$

$$S_{AC}\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \quad , \quad S_{AC}(0, 4)$$

$$S_{BC}\left(\frac{5+1}{2}, \frac{-5+5}{2}\right) \quad , \quad S_{BC}(3, 0).$$

Wiedząc, że środek ciężkości dzieli linję środkową AS_{BC} w stosunku $s=2:1$, otrzymamy jego współrzędne z wzorów (16):

$$x=\frac{x_1+2x_2}{1+2}=\frac{-1+6}{3}=\frac{5}{3}$$

$$y=\frac{y_1+2y_2}{1+2}=\frac{3+0}{3}=1.$$

Jako zastosowanie wzorów (15) i (16) wyprowadzimy ogólny wzór na współrzędne środka ciężkości trójkąta, w którym znamy położenie trzech wierzchołków $A(x_1y_1)$ $B(x_2y_2)$ $C(x_3y_3)$.

Środek boku BC ma współrzędne:

$$S_{BC}\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

Odcinek AS_{BC} dzielimy w stosunku $s=2:1$, otrzymamy więc:

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y_1=\frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Współrzędne środka ciężkości trójkąta są średniemi arytmetycznemi współrzędnych trzech jego wierzchołków.

Uwaga. Środek ciężkości masy rozmieszczonej jednostajnie na całem polu trójkąta jest zarazem środkiem ciężkości trzech r ó w n y c h mas umieszczonych w wierzchołkach trójkąta. Jaki wzór otrzymalibyśmy, gdyby te trzy masy nie były równe, np. m_1, m_2, m_3? Na podstawie znalezionego wzoru okazać, że środek ciężkości masy rozmieszczonej jednostajnie tylko na obwodzie trójkąta o bokach a, b, c ma współrzędne $x=\frac{a\cdot x_a+b\cdot x_b+c\cdot x_c}{a+b+c}$ i odpowiednio dla y, przyczem x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c są współrzędnemi środków ciężkości boków a, b, c.

§ 13. Pole trójkąta i wielokąta.

Znając współrzędne trzech wierzchołków: $A(x_1 y_1)$ $B(x_2 y_2)$ $C(x_3 y_3)$ trójkąta, możemy obliczyć jego pole. Prowadzimy przez najniższy wierzchołek (t. j. wierzchołek, mający najmniejszą rzędną) prostą równoległą do osi X-ów, a z pozostałych wierzchołków proste prostopadłe do niej.

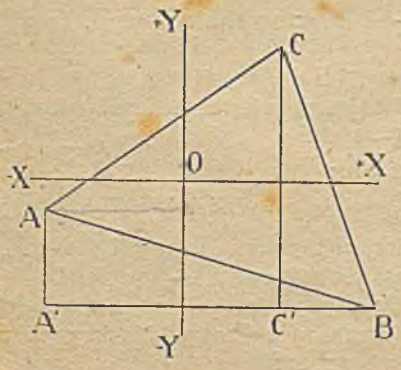


Fig. 24.

Pole trójkąta, jak widać z figury, wynosi: $p = AA'C'C + CC'B - AA'B$. Pole trapezu równa się połowie sumy boków równoległych pomnożonej przez wysokość. Jego boki są równe rzutom boków trójkąta na osie, więc:

$$AA'C'C = \frac{A'A + C'C}{2} \cdot A'C' = \frac{(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)}{2} \cdot (x_3 - x_1)$$

$$CC'B = \frac{C'C}{2} \cdot C'B = \frac{y_3 - y_2}{2} \cdot (x_2 - x_3)$$

$$AA'B = \frac{A'A}{2} \cdot A'B = \frac{y_1 - y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1)$$

Podstawiając te wartości w p, otrzymamy po uporządkowaniu i zredukowaniu:

$$2p = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \text{ czyli:}$$

$$2p = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \qquad (18)$$

Prawa strona tego wzoru składa się z trzech wyrażeń, zbudowanych zupełnie podobnie. Napisawszy pierwsze $x_1 y_2 - x_2 y_1$ otrzymamy następne, zmieniając znaczki 1, 2, 3 cyklicznie, t. j. zamiast znaczka 1 piszemy 2, zamiast 2.....3, a zamiast 3 znowu 1, według schematu: $\nearrow^{1}\searrow$ $3 \leftarrow 2$

Wzór ten utrzymuje się dla wszelkich położeń trójkąta.

Z tego wzoru otrzymujemy na pole trójkąta wartość dodatnią lub ujemną, zależnie od tego, czy punkty A, B, C następują po sobie w kierunku dodatnim, t. j. przeciwnym do ruchu wskazówki zegara, czy też w kierunku zgodnym (ujemnym). Gdyby wypadło $p = o$, punkty A, B, C leżałyby na jednej linji prostej.

Odróżnienie znaków nie ma znaczenia, dokąd mamy do czynienia z jednym trójkątem. Jeżeli jednak figura składa się z kilku trójkątów, trzeba dobrze uważać, które pole należy pojmować jako dodatnie, a które jako ujemne.

Jak się uprości wzór (18), gdy jeden wierzchołek, n. p. (x_1y_1) leży w początku układu?

Przykład. Obliczyć pole czworokąta, którego wierzchołki mają współrzędne: A (0, —5), B (7, 0), C (4, 6), D (—4, 3).

Gdybyśmy obliczali to pole według wzoru:

$$p = ABC + ADC$$

otrzymalibyśmy różnicę pól obu trójkątów, ponieważ trójkąt ABC jest obiegany w kierunku dodatnim a ADC w kierunku ujemnym. Musimy więc użyć wzoru:

$$2p = 2(ABC + ACD)$$

w którym obydwa trójkąty są obiegane w kierunku dodatnim. Podstawiając wartości według wzoru (18) otrzymamy:

$$2p = [0.0 - (-5).7] + (7.6 - 0.4) +$$
$$+ [4.(-5) - 6.0] + [0.6 - (-5).4] +$$
$$+ [4.3 - 6(-4)] + [(-4)(-5) - 0.3]$$
$$2p = 133$$
$$p = 66\tfrac{1}{2}.$$

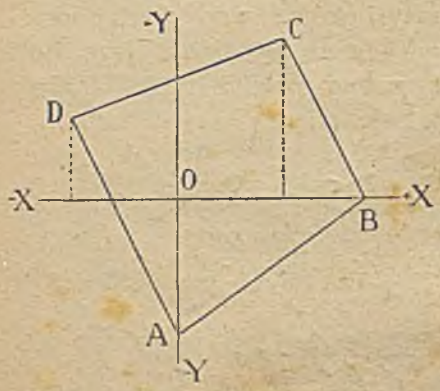


Fig. 25.

Postępując podobnie z wielokątem, którego wierzchołki mają n. p. współrzędne:

$$(x_1y_1)\,(x_2y_2)\,(x_3y_3)\,(x_4y_4)\,(x_5y_5),$$

otrzymamy na pole wielokąta wzór:

$$2p = (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_5 - x_5y_4) +$$
$$+ (x_5y_1 - x_1y_5)$$

zbudowany według tejsamej zasady: cyklicznej przemiany znaczków. Pole to może mieć także wartość dodatnią lub ujemną.

Najłatwiej dochodzi się do tego wzoru, łącząc wszystkie wierzchołki wielokąta z początkiem układu i tworząc sumę algebraiczną wszystkich pól trójkątów, mających jeden wierzchołek w początku układu. Wyobrażamy sobie przytem pole zakreślone promieniem wychodzącym z początku układu, którego koniec obiega wielokąt. Pola nie należące do wnętrza wielokąta odpadają przy tym rachunku,

będą bowiem raz obiegane w kierunku dodatnim, drugi raz w kierunku ujemnym.

Jeżeli boki wielokąta krzyżują się z sobą, to pola obliczane według tego wzoru mogą się częściowo a nawet zupełnie znosić (n. p. w czworokącie skrzyżowanym, złożonym z dwóch przystających trójkątów). Natomiast w wielokątach gwiaździstych liczą się przytem czasem części pola podwójnie, potrójnie itd., np. gdy początek układu leży w środku wielokąta gwiaździstego.

Ćwiczenia III

§ 9. 1. Znaleźć rzuty na oś X-ów i Y-ów odcinków:

$A\,(-3, -4)\ldots.\ B\,(6, 2)$; $C\,(2, -5)\ldots.\ D\,(-4, 1)$;

$E\,(2, 7)\ldots\ldots.\ F\,(-5, 3)$; $G\,(4, 4)\ldots\ldots.\ H\,(8, -1)$

Narysuj!

2. Wykazać, że suma rzutów trzech boków trójkąta na jakąkolwiek oś równa się zeru.

3. Wykazać, że suma rzutów wszystkich boków dowolnego wielokąta zamkniętego na oś równa się zeru, a rzut jednego boku równa się sumie rzutów pozostałych boków ze znakiem przeciwnym.

4. Wyprowadzić wzór na odległość dowolnego punktu $M(x, y)$ od początku układu.

5. Obliczyć odległość punktów $(-4, 5)\ldots.(3, -6)$; $(2, 5)\ldots.(x, y)$.

6. Obliczyć boki trójkąta, którego wierzchołki mają współrzędne $A\,(-3, -5)$, $B\,(2, 3)$, $C\,(-1, 8)$.

7. Obliczyć boki i przekątnie czworokąta, znając jego wierzchołki $A\,(0, 0)$, $B\,(4, 0)$, $C\,(0, 6)$, $D\,(-1, 2)$.

8. Jakie równanie muszą spełniać współrzędne wszystkich punktów (x, y) leżących w odległości 4 od początku układu?

9. Jakie równanie muszą spełniać współrzędne wszystkich punktów, które są oddalone o 3 jednostki od punktu $(2, 5)$? Co jest miejscem geometrycznem tych punktów?

10. Jakie równanie muszą spełniać współrzędne wszystkich punktów równo oddalonych od dwóch stałych punktów $A\,(2, 4)$, $B\,(5, 1)$? Co jest miejscem geometrycznem tych punktów?

11. Jakie równania muszą spełniać współrzędne punktu, równo oddalonego od trzech danych punktów $A\,(-2, 3)$, $B\,(4, 2)$, $C\,(1, -4)$?

12. Znaleźć środek i promień koła opisanego na trójkącie $A\,(0, 0)$, $B\,(4, 6)$, $C\,(+1, 8)$.

13. Obliczyć odległość punktów, znając ich współrzędne biegunowe, n. p. $A\,(4, 36^0)$ $B\,(8, 52^0)$. Zastosować twierdzenie Carnota!

14. Znaleźć równanie, jakie muszą spełniać współrzędne punktów, których suma odległości od punktów $F_1\,(-4, 0)$ i $F_2\,(+4, 0)$ wynosi 10.

15. Znaleźć równanie miejsca geometrycznego punktów, których odległości od punktów $(-4, 0)$, $(+4, 0)$ mają stałą sumę kwadratów: $d_1^2 + d_2^2 = 50$.

16. Odległości punktu ruchomego od punktów $(2, 0)$ $(-2, 0)$ mają stały stosunek $\frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{5}$. Jakie jest równanie drogi punktu ruchomego?

§ 10. 17. Obliczyć kąt nachylenia prostej, przechodzącej przez początek układu i przez punkt: *a)* (4, 3), *b)* (—2, 3); *c)* (2, —5) względem dodatniego kierunku osi x.

18. Pod jakim kątem wznosi się linja prosta, przechodząca przez punkty $(-4, -1)$, $(2, 3)$?

19. Zbadać, czy punkty A (0, 2), B (—2, —1), C (6, 1), D (8, 2) leżą na jednej linji prostej, obliczając spadki odcinków AB i AC.

20. Jaki warunek muszą spełniać współrzędne punktu $P(x, y)$, jeżeli ten punkt leży na prostej, wyznaczonej przez dwa punkty $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$? Udowodnij przy pomocy spadku!

21. Znaleźć spadek linji krzywej:

$$y = 5x^2 - 4x$$

w punkcie, którego odcięta $x = 1$. Zestawić tabelarycznie przeciętne wartości spadku!

22. Znaleźć współczynnik kierunkowy krzywej:

$$8y = x^3 + 1$$

w punktach $x = 1$, $x = 3$, $x = 0$, $x = -2$.

§ 11. 23. Jaki kąt tworzy odcinek (—2, —13)...(3, 2) z odcinkiem (1, 3)... (4, 2)?

24. Rozwiązać trójkąt A (1, —2), B (3, 2), C (—3, 0); obliczyć boki i kąty.

25. Jaki kąt tworzą proste, których spadki są 24% i —40%?

26. Jaki kąt tworzą proste, z których jedna przechodzi przez punkty (—2, —5), (3, —10) a druga przez punkty $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (5, —3).

27. Jaki współczynnik kierunkowy ma linja równoległa do prostej, łączącej punkty A (—8, 0) B (1, 6)?

28. Jaki współczynnik kierunkowy ma linja prostopadła do odcinka (3, 1)...(6, 5)? Jaki kąt tworzy ta prostopadła z osią X-ów?

29. Wykazać, że punkty (1, 2), (3, —2), (—1, —3), (—3, 1) są wierzchołkami równoległoboku.

30. Wykazać przy pomocy współczynników kierunkowych, że punkty, połowiące 4 boki dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku.

31. Zmierzono długość $s = 5$ *cm* pewnego odcinka, wychodzącego z punktu $A(x_1 y_1)$ i jego kąt z osią X-ów; obliczyć współrzędne punktu końcowego (n. p. $x_1 = 1$, $y_1 = 6$, $\operatorname{tg} \alpha = 3$).

32. W wielokącie otwartym znamy współrzędne punktu początkowego A (0, 0), długości boków: $s_1 = 10$ *m*, $s_2 = 8$, $s_3 = 12$ *m*, $s_4 = 15$ *m* i ich współczynniki kierunkowe: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = -3$, (odcinek s_3 tworzy z dodatnim kierunkiem osi X-ów kąt wypukły większy od 270°!), $x_4 = 2$.

Obliczyć: *a)* współrzędne ostatniego wierzchołka;

b) kąt, jaki tworzy z osią X-ów prosta, zamykająca wielokąt;

c) odległość początku wielokąta od końca. (Zdjęcie polygonalne w miernictwie).

§ 12. 33. Znaleźć współrzędne punktu, dzielącego odcinek (2, —3), (—1, 5)

a) w stosunku 2 : 3,

b) w stosunku $-\frac{2}{5}$.

34. W jakim stosunku dzieli punkt (1, 0) odcinek (2, 0)...(6, 0)?

35. Obliczyć długości linij środkowych trójkąta: A (—2, 0), B (1, 1), C (0, 4).

36. Wykazać analitycznie, że linja, łącząca środki dwóch boków trójkąta, jest do trzeciego boku równoległa i równa się jego połowie. N. p. A (—2, —1), B (2, 0), C (0, 3).

37. Na prostej, łączącej punkty A (0, 3) i B (4, 0) leżą dwa punkty C i D, których odcięte są: $x_3 = 1$, $x_4 = 6$. Obliczyć stosunek podziału podwójnego tych czterech punktów.

38. Wykazać, że wartość stosunku podziału podwójnego nie zmieni się, jeżeli pomieniamy dwie pary punktów,

t. j. n. p. $(ABCD) = (CDAB)$.

39. Do trzech punktów A (—1, 4), B (4, —1), C (0, 3) znaleźć czwarty D harmonicznie sprzężony t. j. taki, aby $(ABCD) = -1$.

40. Do trzech danych punktów, leżących na jednej linji prostej, n. p. (—3, 0), (1, 0), (5, 0), dobrać czwarty tak, aby stosunek podziału podwójnego miał z góry oznaczoną wartość, n. p. $k = -\frac{1}{2}$.

41. Odcinek A (3, —6), B (10, 18) podzielono na 5 równych części; znaleźć współrzędne punktów podziału.

42. Odcinek A (—2, 1), B (1, 3) przedłużono o potrójną jego długość poza B; znaleźć współrzędne punktu końcowego.

43. W punktach A (4, 3), B (6, 1) zaczepiają siły $P_1 = 6$ *kg*, $P_2 = 10$ *kg*, działające równolegle. Znaleźć punkt zaczepienia ich wypadkowej!

§ 13. 44. Obliczyć pole trójkąta: *a)* (0, 0), (6, 2), (1, 8) (wzór ogólny!)

b) (3, —2), (—4, 1), (—8, 5);

c) (3, 0), (0, 2), (4, 5);

d) (5·4, —3·7), (—4·6, 2·8), (—5·2, —3·2).

45. Wykazać, że pole trójkąta:

(0, —4), (2, 2), (—1, —7) wynosi zero (t. j., że punkty te leżą na jednej linji prostej).

46. Wyrazić wzór na pole trójkąta we współrzędnych biegunowych; (zastosuj to n. p. do $r_1 = 3$, $r_2 = 6$, $r_3 = 5$, $\varphi_1 = 10^0$, $\varphi_2 = 35^0$, $\varphi_3 = 60^0$).

47. Obliczyć pole wielokąta, którego wierzchołki mają współrzędne prostokątne:

(—2, —1), (0, 1), (3, 7), (2, 8), (—3, 1).

48. Obliczyć pole czworokąta skrzyżowanego A (3, 0), B (0, 3) C (10, 3), D (6, 5) najpierw wzorem ogólnym a następnie z figury bez uwzględniania znaku.

49. Wierzchołki czworokąta są A (x_1y_1), B (x_2y_2), C (x_3y_3), D (x_4y_4); wykazać, że odcinki, łączące środki boków przeciwległych, mają wspólny środek.

(Punkt S jest środkiem ciężkości ukkładu czterech punktów o masach równych).

50. Wierzchołki czworokąta są: (—4, 0), (1, —3), (5, 1), (0, 6); obliczyć jego środek ciężkości, jeżeli masa jest rozmieszczona jednostajnie na całem polu czworokąta.

Wskazówka. Znaleźć środki ciężkości dwóch trójkątów składowych: środek ciężkości całego czworokąta dzieli ich odległość w stosunku odwrotnym do wielkości pól (mas) tych trójkątów.

Rozdział IV

O linji prostej

§ 14. Równanie linji prostej.

Równaniem linji prostej nazwiemy — stosownie do ogólnego określenia „równania linji“ — takie równanie, któremu czynią zadość współrzędne wszystkich punktów, leżących na tej linji, a którego nie spełnia żaden inny punkt (leżący poza prostą).

1. Proste równoległe do osi.

Weźmy jakąkolwiek linję prostą (Fig. 26) L, równoległą do osi X-ów, n. p. w odstępie b. Każdy punkt tej prostej ma rzędną b, bez względu na to, jaką wartość ma odcięta. Dla wszystkich punktów tej prostej zachodzi więc równanie:

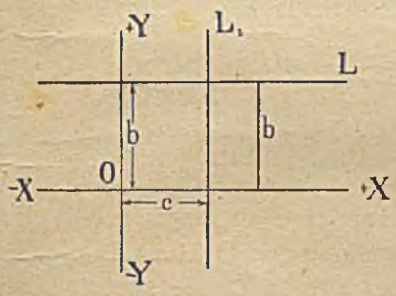


Fig. 26.

$$y = b \tag{19}$$

Żaden punkt, leżący poza prostą (pod nią lub nad nią), nie spełnia tego równania, ponieważ ma rzędną większą lub mniejszą od b. Równanie (19) jest więc równaniem prostej równoległej do osi X-ów. Gdyby odstęp b był: $b=o$, to otrzymalibyśmy samą oś x-ów. Otóż równaniem osi x-ów jest:

$$y = o \tag{20}$$

Podobnie wywnioskuje się, że równanie prostej równoległej do osi y-ów w odstępie n. p. c, jest:

$$x = c \tag{21}$$

a równanie samej osi y-ów jest

$$x = o. \tag{22}$$

2. Proste przechodzące przez początek układu.

Weźmy pod uwagę dowolną prostą, przechodzącą przez początek układu. Do wyznaczenia takiej prostej wystarczy znać kąt α, jaki ona tworzy z dodatnim kierunkiem osi x-ów. Chcemy znaleźć związek, zachodzący między współrzędnemi x i y każdego punktu tej prostej. Widzimy z figury 27, że dla każdego punktu prostej L rzędna ma wartość

$$y = x . \operatorname{tg} \alpha \qquad (\alpha)$$

bez względu na to, czy ten punkt leży nad osią x-ów, czy też pod nią, po prawej, czy lewej stronie osi y-ów.

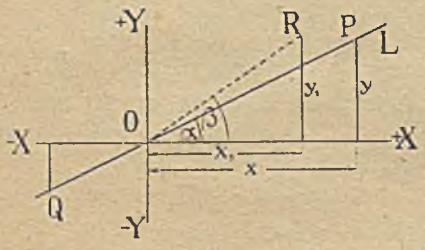


Fig. 27.

Chodzi jeszcze o punkt O; jego współrzędne $x=o$ i $y=o$ spełniają także równanie (α). Otóż każdy punkt prostej spełnia to równanie. Zachodzi jeszcze pytanie, czy jakiś punkt leżący poza prostą nie spełnia tego samego równania. Weźmy dowolny punkt R o współrzędnych x_1, y_1 poza prostą.

Gdyby te współrzędne spełniały równanie (α), mielibyśmy:

$$y_1 = x_1 . \operatorname{tg} \alpha.$$

Ale z figury odczytujemy:

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \beta.$$

Z tych dwóch równań wynikałoby $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$ czyli $\alpha = \beta$, a to jest niemożliwe, ponieważ dla punktów leżących poza prostą jest albo $\beta > \alpha$ albo $\beta < \alpha$. Otóż żaden punkt leżący poza prostą L, nie spełnia równania (α).

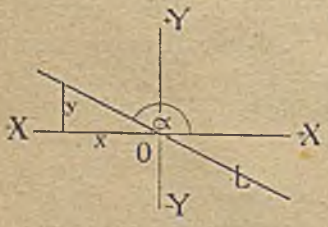


Fig. 28.

Stąd wynika: równaniem linji prostej, przechodzącej przez początek układu jest:

$$y = x . \operatorname{tg} \alpha.$$

Gdyby kąt α był rozwarty (fig. 28) to przy dodatniem y odcięta x jest ujemna, a przy dodatniej odciętej x rzędna jest ujemna. Stosunek $\frac{y}{x}$ jest więc wtedy stale ujemny, przedstawia zatem tangens kąta rozwartego: α.

Otóż i w tym przypadku równanie linji prostej jest

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ czyli}$$

$$y = x.\operatorname{tg}\alpha.$$

Dla skrócenia oznaczamy $\operatorname{tg}\alpha$ jedną literą: a i to a nazywamy współczynnikiem kierunkowym tej linji prostej lub jej spadkiem (por. § 10).

Wtedy równanie prostej przyjmuje postać:

$$y = ax \tag{23}$$

Z tej formy zrozumiemy, dlaczego $a = \operatorname{tg}\alpha$ nazywamy „współczynnikiem" kierunkowym.

Z całej dyskusji wyprowadzamy następujący wniosek:

Równanie każdej linji prostej, przechodzącej przez początek układu, z wyjątkiem osi y, ma równanie:

$$y = ax$$

gdzie a oznacza tangens kąta, jaki tworzy ta prosta z dodatnim kierunkiem osi x-ów.

Współczynnik a może przybierać wszelkie wartości rzeczywiste: jeżeli a jest liczbą dodatnią, prosta tworzy z osią x-w kąt ostry, jeżeli a jest liczbą ujemną, prosta tworzy z osią x-ów kąt rozwarty; jeżeli $a = o$, otrzymujemy samą oś x-ów t. j. $y = o$. Jeżeli $a = \infty$, to równanie $y = \infty . x$ jest nieprzydatne; wtedy jednakże kąt α wynosi 90^0, prosta nakrywa się więc z osią y-ów. Równaniem osi y-ów jest, jak wiemy:

$$x = 0$$

równanie to zaś nie da się pociągnąć pod formę $y = ax$ (chyba pod formę $x = \frac{y}{a}$ dla $a = \infty$).

Równanie $y = ax$ możemy także wypowiedzieć tak: rzędna każdego punktu linji prostej, przechodzącej przez początek układu, jest proporcjonalna do odciętej tego punktu. To proporcjonalne wznoszenie się, względnie opadanie, jest charakterystyczną własnością linji prostej. Stąd wynika naodwrót: każda wielkość, wzrastająca proporcjonalnie do drugiej, przedstawia się graficznie jako linja prosta.

Przykłady: a) Znaleźć równanie prostej, połowiącej kąt między dodatniemi kierunkami osi. Dla takiej prostej kąt nachylenia $\alpha = 45^0$, a więc współczynnik kierunkowy: $a = \operatorname{tg}\alpha = 1$.

Równaniem jej jest więc:

$$y = x.$$

b) Znaleźć równanie prostej, przechodzącej przez początek układu, znając jej spadek: 3%. Jak wiemy, spadek równa się tangensowi kąta, jaki ta prosta tworzy z poziomem (z osią x-ów). Więc:

$$a = \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{100}.$$

Równanie żądanej prostej jest więc:

$$y = \frac{3}{100}x.$$

Posiadając to równanie, możemy łatwo wykreślić żądaną prostą, nie obliczając nawet jej kąta nachylenia. Wiemy, że przechodzi przez początek układu O (0, 0); aby znaleźć drugi punkt, przez który ta prosta przechodzi, podstawmy za x dowolną wartość n. p. $x = 10$, to $y = 0{\cdot}3$. Punkt A (10, 0·3) spełnia równanie prostej, a więc leży na prostej. Mając dwa punkty, możemy już tę prostą wykreślić.

c) Jaki kąt tworzy z osiami prosta, której równanie jest

$$y = -\frac{3}{5}x\,?$$

$$\operatorname{tg}\alpha = a = -\frac{3}{5}, \text{ więc: } \operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = +\frac{3}{5}.$$

W tablicach trygonometrycznych znajdujemy do tej wartości kąt:

$$180^0 - \alpha = 30^0\,57'\,50'' \text{ więc: } \alpha = 149^0\,2'\,10''.$$

Do wykreślenia tej prostej najłatwiej jest obliczyć współrzędne jednego punktu n. p. $x = -5$, to $y = +3$.

d) Podać równanie prostej, przechodzącej przez początek układu i przez punkt A (4, 12).

Nie znamy współczynnika kierunkowego a; natomiast wiemy, że współrzędne: (4, 12) punktu A spełniają równanie

$$y = ax$$

a więc: $12 = 4a$

a ztąd: $a = 3$.

Równaniem żądanej prostej jest:

$$y = 3x.$$

3. Prosta w położeniu dowolnem.

Aby wyznaczyć prostą, nie przechodzącą przez początek układu, wystarczy znać kąt jej α z dodatnim kierunkiem osi x-ów i odcinek b na osi y-ów. Porównując tę prostą L (Fig. 29) z równoległą do niej L', przechodzącą przez początek układu, widzimy, że rzędne wszystkich jej punktów powstają przez dodanie odcinka b do rzędnych prostej L' (gdyby b było liczbą ujemną, rzędne prostej L' zmniejszyłyby się przez to „dodanie", prosta L leżałaby pod prostą L').

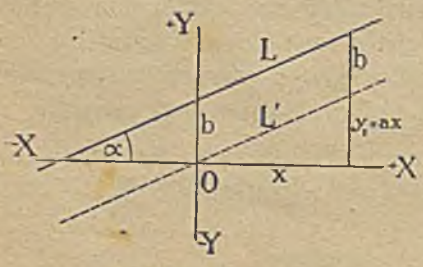


Fig. 29.

Dla punktów prostej L' rzędna:

$$y_1 = ax$$

a więc dla każdego punktu prostej L:

$$y = ax + b. \qquad (24)$$

Żaden punkt, leżący poza prostą L, nie może spełniać tego równania, bo w takim razie, zniżając ten punkt o odcinek b, otrzymalibyśmy punkt leżący poza prostą L', który musiałby spełniać równanie: $y = ax$. Widzieliśmy zaś przy dyskusji równania $y = ax$, że to jest niemożliwe.

Otóż równanie linji prostej w dowolnem położeniu ma postać: $y = ax + b$. Nie zawierają się w tej formie jedynie linje równoległe do osi y-ów. Równanie to nazywamy: kierunkowem równaniem linji prostej dla odróżnienia od innych postaci, do jakich można sprowadzić równanie linji prostej.

W równaniu tem a i b są liczbami stałemi dla jednej prostej, mogą zaś mieć różne wartości dla różnych prostych.

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, kąt prostej z osią x-ów jest ostry, jeżeli a jest liczbą ujemną, kąt prostej z osią x-ów jest rozwarty; jeżeli b jest liczbą dodatnią, prosta przecina oś y-ów nad początkiem układu, jeżeli b jest liczbą ujemną, prosta przecina oś y-ów pod początkiem układu, jeżeli zaś $b = 0$, prosta przechodzi przez początek układu.

Prosta dzieli całą płaszczyznę na dwie części: w części płaszczyzny, leżącej nad prostą — o ile nie jest równoległą do osi y-ów — są rzędne większe od $y = ax + b$, więc wielomian $y - ax - b$ jest dodatni dla współrzędnych wszystkich punktów tej części płaszczyzny; w części płaszczyzny, leżącej pod prostą, wielomian $y - ax - b$ ma wartość ujemną, a wreszcie na samej prostej wielomian ten ma wartość zero. O ile prosta jest równoległa do osi y-ów, t. j. ma równanie $x = c$, to dwumian $x - c$ jest dodatni dla wszystkich punktów płaszczyzny leżących z prawej strony tej prostej, a ujemny z lewej, a więc także nastąpił podział płaszczyzny na dwa obszary scharakteryzowane odmiennemi znakami.

Równanie linji prostej jest równaniem pierwszego stopnia w obydwu zmiennych x i y. Nasuwa się pytanie, czy każde równanie pierwszego stopnia o dwóch zmiennych przedstawia linję prostą.

Ogólne takie równanie ma postać:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (25)$$

gdzie A, B, C są liczbami stałemi, a x i y zmiennemi. Jeżeli współczynnik B nie jest zerem, to dzieląc całe równanie przez B otrzymamy:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Znacząc iloraz $-\frac{A}{B}$ jedną literą a, a iloraz $-\frac{C}{B}$ literą b, otrzymamy:

$$y=ax+b$$

a więc równanie jakiejś linji prostej.

Jeżeli $B=0$, ale $A\neq 0$, to

$$Ax+C=0 \text{ czyli, } x=-\frac{C}{A} \text{ lub } x=c$$

a to jest równanie linji prostej, równoległej do osi y-ów. Nie może zaś być równocześnie $A=0$ i $B=0$, chyba żeby i $C=0$, a wtedy nie mamy równania, tylko identyczność $0=0$.

Otóż: *każde równanie pierwszego stopnia o dwóch zmiennych przedstawia jakąś linję prostą.*

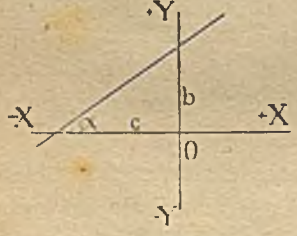


Fig. 30.

Zamiast podawać kąt i odcinek na osi y-ów, wygodniej jest podać odcinki na obu osiach, n. p. b na osi y-ów, a c na osi x-ów, o ile tylko prosta nie jest równoległa do którejś osi, ani nie przechodzi przez początek układu. Ponieważ zawsze $\frac{b}{-c}=\operatorname{tg}\alpha$ (por. fig. 30 i zbadaj także dla innych położeń linji prostej!), przeto zamiast równania:

$$y=ax+b$$

otrzymamy: $y=-\frac{b}{c}x+b$, czyli:

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{c}=1. \qquad (26)$$

Tę formę równania linji prostej nazywamy równaniem odcinkowem lub symetrycznem.

Z formy tej odrazu odczytujemy, jakie odcinki tworzy prosta na osiach. Gdyby b dążyło do nieskończoności, to $\frac{y}{b}$ dąży do zera i zostaje równanie $\frac{x}{c}=1$, czyli $x=c$; podobnie dla c dążącego do nieskończoności otrzymamy $y=b$.

Z formy ogólnej lub kierunkowej przechodzi się do odcinkowej, przenosząc wyrazy zmienne na pierwszą stronę równania, wyraz wolny na drugą i dzieląc obie strony przez wyraz wolny. Aby to przekształcenie było dozwolone, musi być wyraz wolny różny od zera, t. j. prosta nie może przechodzić przez początek układu: takiej prostej nie można przedstawić w formie odcinkowej.

Przykład 1. Znaleźć obraz geometryczny równania:

$$3y+5x-12=0.$$

Ponieważ równanie jest 1-go stopnia w x i y, przeto równanie to przedstawia linję prostą. Aby ją wykreślić, wystarczy znać dwa punkty, na niej leżące. N. p. podstawiamy $x=1$, to z równania obliczymy $y=2\frac{1}{3}$, a dla $x=2$ jest $y=\frac{2}{3}$. Mamy więc punkty prostej A $(1, 2\frac{1}{3})$, B $(2, \frac{2}{3})$. (Por. fig. 31).

Najwygodniej jest jednak znaleźć punkty, w których ta prosta przecina osie współrzędnych. I tak: aby znaleźć punkt, w którym prosta przecina oś x-ów, trzeba podstawić $y=0$, albowiem dla wszystkich punktów osi x-ów rzędna ma wartość zero; aby znaleźć punkt, w którym prosta przecina oś y-ów, trzeba podstawić $x=0$, bo dla wszystkich punktów osi y-ów odcięta ma wartość zero.

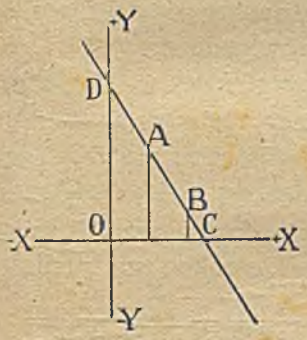


Fig. 31.

Stosując to do naszego równania, otrzymamy: $C(2\frac{2}{5}, 0)$, $D(0, 4)$; prosta L łączy te dwa punkty.

Przykład 2. Znaleźć równanie i spadek prostej, która przecina oś x-ów w odległości 5 na prawo od początku układu, a oś y-ów w odległości 2 na dół od początku układu.

Więc: $c=5$, $b=-2$.

Używając równania odcinkowego, otrzymamy:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1.$$

Aby otrzymać spadek, t. j. współczynnik kierunkowy, sprowadzamy to równanie do formy kierunkowej, t. j. wyrażamy y jako funkcję x:

$$y=\frac{2}{5}x-2.$$

Spadek wynosi $\frac{2}{5}$, czyli 40%.

Prócz omówionych form równania linji prostej używa się też niekiedy takiej formy, w której występuje odległość p prostej od

początku układu (fig. 32) i kąt γ utworzony przez p z dodatnim kierunkiem osi x-ów. Aby teraz otrzymać równanie zachodzące między współrzędnemi (x, y) dowolnego punktu P linji prostej l, tworzymy rzuty odcinków x i y czyli odcinków $\overline{OC}$ i CP na oś k. Rzuty te pokrywają właśnie cały odcinek p. Ponieważ zaś wielkości tych rzutów są:

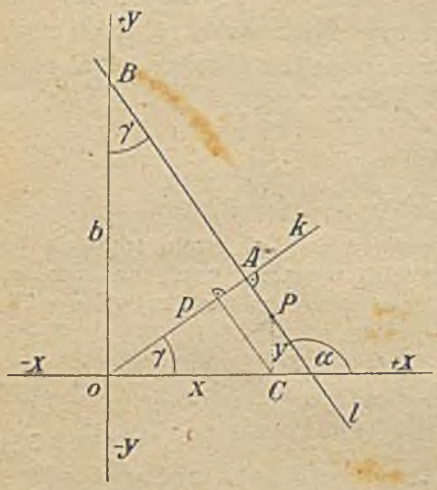


Fig. 32.

$$x\cos\gamma \text{ i } y\sin\gamma, \text{ przeto}$$

$$x\cos\gamma + y\sin\gamma = p \text{ lub}$$

$$x\cos\gamma + y\sin\gamma - p = 0 \quad (27)$$

Biorąc punkt poza prostą l i tworząc rzuty na prostą k (prostopadłą do l) otrzymamy sumę rzutów większą lub mniejszą od p. Równanie (27) spełniają więc wszystkie punkty prostej l, a nie spełniają go żadne inne punkty, jest to więc równanie prostej l. Tę formę (27) nazywamy *normalnem równaniem prostej*.

Forma ta jest przydatna zwłaszcza wtedy, gdy nam chodzi o odległość prostej od jakiegokolwiek punktu (niekoniecznie O).

Równanie kierunkowe można sprowadzić do tej formy, mnożąc $y-ax-b=0$ przez $\sin\gamma$. Trzeba jednak poprzednio wyrazić $\sin\gamma$ zapomocą wielkości występujących w równaniu kierunkowem; ponieważ $k \perp l$, to $\operatorname{tg}\gamma = -\frac{1}{a}$, a zatem $\sin\gamma = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}} = \frac{1}{\mp\sqrt{1+a^2}}$.

Dzieląc więc całe równanie $y-ax-b=0$ przez $\mp\sqrt{1+a^2}$ otrzymamy:

$$\frac{y}{\mp\sqrt{1+a^2}} + \frac{-a}{\mp\sqrt{1+a^2}}x - \frac{b}{\mp\sqrt{1+a^2}} = 0, \text{ czyli}$$

$$y\sin\gamma + x\cos\gamma - b\sin\gamma = 0.$$

Ale $b\sin\gamma = p$ jako rzut odcinka b na prostą k, więc ostatecznie otrzymujemy formę normalną:

$$x\cos\gamma + y\sin\gamma - p = 0.$$

Co się tyczy znaku przy $\sqrt{1+a^2}$, to trzeba go tak dobrać, aby p było liczbą dodatnią. Jeżeli więc $b > 0$, to bierzemy znak $+$, jeżeli $b < 0$, to znak $-$.

Chcąc przejść do formy normalnej z formy ogólnej lub odcinkowej, zamieniamy ją najpierw na kierunkową. Forma normalna i ogólna mieszczą w sobie wszystkie możliwe położenia linji prostej — podczas gdy z formy kierunkowej i odcinkowej uchylają się pewne przypadki (które?).

§ 15. Zagadnienia o linji prostej.

Do wyznaczenia linji prostej potrzebne są zawsze dwa warunki. Najprostsze warunki są: dwa punkty dane lub dany jeden punkt i kąt, jaki prosta tworzy z osią x-ów. Ponieważ te warunki wystarczają do konstrukcyjnego otrzymania linji prostej, przeto muszą także wystarczyć do ujęcia tej linji w równanie.

Zacznijmy od zagadnienia:

1. *Dane są współrzędne jednego punktu* $A(x_1 y_1)$ *i kąt:* α *prostej z dodatnim kierunkiem osi x-ów; znaleźć jej równanie.*

Równanie to musi mieć postać:

$$y = ax + b \qquad (a)$$

o ile tylko kąt α nie jest prosty.

W tem równaniu trzeba znać stałe: a i b. Stałą $a = \operatorname{tg}\alpha$ znamy. Stałej b wprawdzie nie znamy, ale posiadamy jeszcze jeden warunek, z którego będzie można obliczyć wartość tej stałej. Mianowicie: prosta ma przechodzić przez punkt $A(x_1 y_1)$, a więc liczby $x_1 y_1$ (znane) muszą spełniać równanie (a), t. j.:

$$y_1 = ax_1 + b$$

stąd:

$$b = y_1 - ax_1.$$

Podstawiając tę wartość w równanie (a), otrzymamy:

$$y - y_1 = a(x - x_1) \qquad (28)$$

(a, y_1, x_1 znane liczby stałe; x, y zmienne).

Równania tego używamy także do wyznaczenia prostej, przechodzącej przez jeden znany punkt i tworzącej znany kąt: φ z dowolną prostą: $y = a_1 x + b_1$ (nie koniecznie z osią x-ów).

Z wzoru na kąt dwóch linij prostych:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a - a_1}{1 + aa_1}$$

w którym znamy φ i a_1, obliczymy potrzebne a.

Prościej przedstawia się zagadnienie, jeżeli szukana prosta jest równoległa lub prostopadła do innej znanej prostej: $y=a_1x+b_1$. Wtedy współczynnik kierunkowy a szukanej prostej jest równy a_1 lub $-\frac{1}{a_1}$.

2. *Znaleźć równanie linji prostej, przechodzącej przez dwa znane punkty:* $A(x_1y_1)$, $B(x_2y_2)$.

Ponieważ znamy jeden punkt tej linji prostej, to jej równanie ma według (28) postać:

$$y-y_1=a(x-x_1) \qquad (b)$$

Aby wyznaczyć stałą a, zauważmy, że współczynnik kierunkowy odcinka, łączącego punkty $(x_1y_1)\ldots.(x_2y_2)$, ma wartość (por. wzór 11):

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

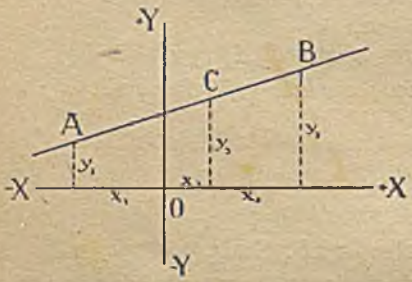


Fig. 33.

Równanie (b) przyjmuje więc postać: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

czyli: $$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (29)$$

Gdy $y_2=y_1$ lub $x_2=x_1$, dogodniej jest rozważać ten wzór uwolniony od mianowników.

Taką formę ma równanie prostej, przechodzącej przez 2 znane punkty. Tu x_1, x_2, y_1, y_2 są liczbami stałemi, znanemi, a x i y zmiennemi.

Z tego równania możemy wyprowadzić kryterjum, służące do zbadania, czy trzy punkty, których współrzędne znamy, leżą na jednej linji prostej. Otóż, jeżeli punkt $C(x_3, y_3)$ ma leżeć na prostej, łączącej punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, to liczby x_3y_3 muszą spełniać równanie prostej: (29), a więc musi być:

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} \qquad (30)$$

Słowami: aby 3 punkty leżały na jednej linji prostej, to różnice ich rzędnych muszą być proporcjonalne do różnic odpowiednich odciętych. Do tego wniosku można także dojść wprost, żądając, aby spadki AC i BC były równe. Wykaż

Przykłady: a) Podstawa trójkąta leży na prostej o równaniu:

$$\frac{y}{2}+\frac{x}{3}=1,$$

a wierzchołek leży w punkcie A $(3, 4\frac{1}{2})$. Jakie jest równanie wysokości tego trójkąta?

Wysokość przechodzi przez A $(3, 4\frac{1}{2})$, więc równanie jej ma według (28) formę:

$$y-4\tfrac{1}{2}=a(x-3).$$

Linja ta ma być prostopadła do linji

$\frac{y}{2}+\frac{x}{3}=1$ t. j. do $y=-\frac{2}{3}x+2$, więc według (14) $a=+\frac{3}{2}$.

Otrzymamy więc: $y-4\frac{1}{2}=\frac{3}{2}(x-3)$

czyli:

$$y=\tfrac{3}{2}x.$$

b) Wierzchołki trójkąta są: A (5, 1), B (2, 3), C (2, —1); obliczyć równania boków.

Używając wzoru (29) otrzymamy:

dla boku AB.... $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$;

dla boku AC.... $y=+\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$;

dla boku zaś BC otrzymamy $\frac{y-3}{-4}=\frac{x-2}{0}$;

wzór (29) jest więc w tym przypadku nieprzydatny. Natomiast używając tego wzoru w postaci uwolnionej od mianowników otrzymamy $0.(y-3)=-4(x-2)$ czyli $0=x-2$.

Równanie boku BC jest więc:

$$x=2.$$

3. *Znaleźć punkt przecięcia się prostych, znając ich równania:*

$$y=ax+b$$

$$y=a_1x+b_1 \qquad (c)$$

i przeprowadzić ogólną dyskusję.

Punkt przecięcia leży na obydwu linjach, jego współrzędne muszą więc spełniać równania obydwu linij. Wartości x i y, spełniające równocześnie obydwa równania, znajdujemy, rozwiązując układ równań (c). Ponieważ, jak wiadomo z algebry, układ ten posiada w ogólności tylko jedną parę rozwiązań $x=x_1$, $y=y_1$, przeto znajdujemy z tych równań jedyny punkt przecięcia się 2 prostych.

Rozumowanie to dotyczy nietylko linij prostych, ale wogóle wszelkich linij, których równania są znane. Wartości x i y, spełniające równocześnie dwa jakiekolwiek równania, przedstawiają w tłómaczeniu geometrycznem: punkty wspólne linjom, które są obrazami tych równań t. j. ich punkty przecięcia.

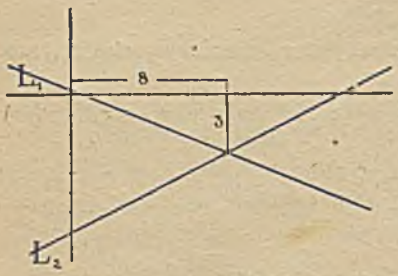


Fig. 34.

Przykłady: a) Punkt przecięcia się linij prostych (fig. 34):

$$(L_1) \ldots . 2x+5y=1$$
$$(L_2) \ldots . x-2y=14$$

znajdujemy, rozwiązując ten układ równań którąkolwiek ze znanych metod. Otrzymamy:

$$x=8;\ y=-3.$$

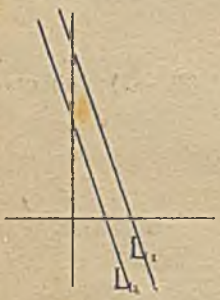


Fig. 35.

b) Chcemy znaleźć punkt przecięcia się linij (fig. 35):

$$(L_1) \ldots . y=-3x+9.$$
$$(L_2) \ldots . y=-3x+5.$$

Równania te nie dadzą się rozwiązać, prowadzą do sprzeczności (n. p. używając metody porównania, otrzymalibyśmy po lewej stronie $+9$, a po prawej $+5$). Niema takich (skończonych) wartości x i y, któreby spełniały równocześnie obydwa równania. Jasnym staje się ten fakt, jeżeli zauważymy, że linje te są równoległe, mają bowiem równe współczynniki kierunkowe: -3.

c) Obliczyć punkt przecięcia się prostych (fig. 36):

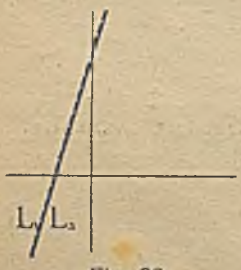


Fig. 36.

$$y+\frac{x}{2-\sqrt{5}}=3$$

$$y-(2+\sqrt{5})x=3.$$

Próbując rozwiązać układ tych równań, spostrzeżemy, że zmienne odpadną zupełnie. Równania te spełniają się więc dla wszelkich możliwych wartości x (a tak samo i y); są one zależne od siebie, jedno jest tylko inną formą drugiego (wystarczy w pierwszem równaniu współczynnik przy x pomnożyć i podzielić przez $2+\sqrt{5}$, aby otrzymać tę samą formę). Obrazem geometrycznym obydwu równań jest tylko jedna prosta, dlatego też otrzymaliśmy nieskończenie wiele punktów przecięcia.

Te trzy przypadki rozwiązywania układu dwóch równań pierwszego stopnia o 2 zmiennych i ich geometryczne interpretacje wyczerpują już wszystkie możliwe przypadki.

Aby tego dowieść, należy przeprowadzić dyskusję w liczbach ogólnych. Najlepiej się do tego nadaje ogólna forma równania, jako

obejmująca w sobie wszystkie możliwe położenia prostej, nie wyłączając prostych prostopadłych do osi x-ów. Weźmy pod uwagę dwa takie równania:

$$Ax+By+C=0$$
$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

i, aby nie rozdrabniać dyskusji, załóżmy, że wszystkie współczynniki przy zmiennych są różne od zera. (Gdyby którykolwiek współczynnik był zerem, dyskusja doznałaby specjalnego w każdym takim przypadku uproszczenia). Współrzędne punktu przecięcia się badanych prostych muszą spełniać obydwa równania.

Obliczając x i y którąkolwiek z znanych metod algebraicznych, otrzymamy:

$$x=\frac{C_1B-CB_1}{AB_1-A_1B},\quad y=\frac{A_1C-AC_1}{AB_1-A_1B}$$

przyczem spostrzegamy, że mianowniki obu wyrażeń są równe.

Rozróżniamy cztery przypadki:

I. *Mianownik jest różny od zera.* Wtedy na x i y otrzymujemy oznaczone, skończone wartości, istnieje więc *jeden punkt przecięcia.*

II. *Mianownik jest zerem, ale liczniki są różne od zera.* Wtedy na x i y nie otrzymamy skończonych wartości. Z równości $AB_1-A_1B=0$ wynika wtedy $\frac{-A}{B}=\frac{-A_1}{B_1}$ (dzielenie jest dozwolone, bo według założenia współczynniki są różne od zera) a to są właśnie spadki badanych prostych. Równość spadków dowodzi, że proste są w tym przypadku *równoległe.*

III. *Mianownik jest zerem i obydwa liczniki są zerami.* $AB_1-A_1B=0$, $C_1B-CB_1=0$, $A_1C-AC_1=0$. Z tych równań wynika: $A:B:C=A_1:B_1:C_1$, t. j. współczynniki są w obydwu równaniach proporcjonalne. Wtedy obydwa równania przedstawiają *tę samą linję prostą,* bo równanie

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$ jest identyczne z $$y=-\frac{A_1}{B_1}x-\frac{C_1}{B_1}$$

wskutek równości stosunków $\frac{A}{B}$ i $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{C}{B}$ i $\frac{C_1}{B_1}$.

IV. *Mianownik jest zerem i tylko jeden licznik jest zerem,* np. obok $AB_1-A_1B=0$ jest także $C_1B-CB_1=0$, ale $A_1C-AC_1\neq 0$. Obliczając z drugiej równości $C_1=\frac{CB_1}{B}$ i wstawiając w nierówność $A_1C-AC_1\neq 0$, otrzymamy $A_1C-\frac{ACB_1}{B}\neq 0$ a więc byłoby też

$C(A_1B-AB_1)\neq 0$ a to niemożliwe, bo wyrażenie w nawiasie jest zerem. Przypadek ten nie może się więc zdarzyć przy naszych założeniach. Może on zachodzić tylko wtedy, gdy $B=B_1=0$, wtedy bowiem nie można obliczyć ani $C_1=\frac{CB_1}{B}$ ani $C=\frac{C_1B}{B_1}$ i nie dojdzie się do sprzeczności z równaniem $AB_1-A_1B=0$. Geometryczne znaczenie tego przypadku wynika wprost z danych równań; podstawiając w nie $B=B_1=0$ otrzymamy $Ax+C=0$ i $A_1x+C_1=0$, a to są dwie proste równoległe do osi y-ów. Do podobnego wniosku dochodzimy, gdy pierwszy licznik nie jest zerem a drugi jest zerem.

Pomijamy tu inne specjalne przypadki, wykluczone przez założenie uczynione na wstępie o współczynnikach równania, można je jednak z łatwością zbadać w każdym przypadku. Wynikiem całej tej dyskusji jest znany już z planimetrji fakt, że dwie proste na płaszczyźnie albo nie mają żadnego punktu przecięcia i są równoległe, albo mają jeden punkt przecięcia, albo nakrywają się zupełnie.

Aby otrzymać punkt przecięcia się dwóch linij prostych, rozwiązywaliśmy ich równania. Odwrotnie: jeżeli narysujemy obrazy geometryczne dwóch równań i odczytamy z figury współrzędne ich punktów przecięcia, otrzymamy rozwiązanie tego układu równań drogą czysto geometryczną. Metodę tę nazywamy graficznem rozwiązywaniem równań.

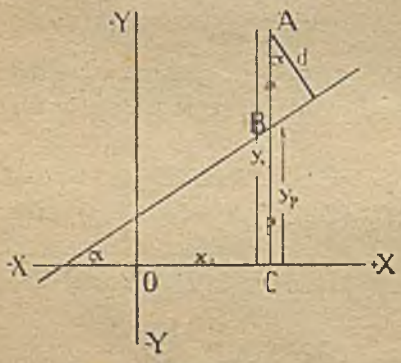


Fig. 37.

4. *Obliczyć odległość znanego punktu: $A(x_1y_1)$ od znanej prostej: $y=ax+b$.*

Zadanie to sprowadzamy do rozwiązanego już poprzednio zagadnienia: znalezienia odległości dwóch punktów, punktu $A(x_1y_1)$ (fig. 37) od punktu, w którym prostopadła d przecina daną prostą. Niech (x_2y_2) będą współrzędnemi tego drugiego punktu. Spełniają więc one równanie $y=ax+b$ i równanie prostej przechodzącej przez $A(x_1y_1)$ a prostopadłej do danej prostej, t. j. równanie

$$y-y_1=\frac{-1}{a}(x-x_1).$$

Z tych dwóch równań otrzymamy

$$x_2=\frac{ay_1+x_1-ab}{1+a^2},\quad y_2=\frac{a^2y_1+ax_1+b}{1+a^2}.$$

Odległość punktu (x_2, y_2) od (x_1, y_1) obliczymy według wzoru (10) i otrzymamy po uporządkowaniu

$$d=\sqrt{\frac{a^2(-y_1+ax_1+b)^2+(y_1-ax_1-b)^2}{(1+a^2)^2}}$$

W pierwszym nawiasie można zmienić znak, a następnie wyłączamy w liczniku $(y_1-ax_1-b)^2$ i upraszczamy przez $1+a^2$. Wyciągając drugi pierwiastek otrzymamy

$$\pm\frac{y_1-ax_1-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Ponieważ zaś d ma mieć wartość dodatnią, należy wziąć z tego wyrażenia wartość bezwzględną, co zaznaczamy ujmując dane wyrażenia w nawiasy pionowe. A więc:

$$d=\left|\pm\frac{y_1-ax_1-b}{\sqrt{1+a^2}}\right| \tag{31}$$

Z góry można się nawet z geometrycznego położenia zorjentować, kiedy należy w nawiasie wziąć znak $+$, a kiedy $-$, aby odrazu otrzymać wynik dodatni. I tak, jeżeli A leży nad prostą (ma rzędną większą od rzędnej odpowiedniego punktu prostej), to wielomian y_1-ax_1-b jest dodatni (por. str. 46); znak ułamka należy więc obrać $+$. Jeżeli A leży pod prostą, wielomian y_1-ax_1-b wypada ujemny; znak należy wtedy obrać $-$.

W ten sposób na odległość otrzymamy zawsze wartość dodatnią. Cały nasz dowód da się przeprowadzić naturalnie tylko wtedy, gdy a nie jest zerem ani nieskończonością, t. j. gdy dana prosta nie jest prostopadła ani do osi y-ów ani do osi x-ów. Wtedy jednak odrazu wyraża się odległość wzorem

$$d=|x_1-c| \quad \text{lub} \quad d=|y_1-b|$$

jako rzut odcinka d na oś.

Dla łatwiejszego zapamiętania wzoru (31) zauważmy, że licznik przedstawia lewą stronę kierunkowego równania prostej, sprowadzonego do zera. Wyrażenie to jednak nie jest zerem, bo punkt $(x_1 y_1)$ nie leży na prostej, więc nie spełnia jej równania.

Uwaga. Używając *normalnej* formy równania linji prostej wyprowadza się bardzo łatwo wzór na odległość punktu A od prostej; trzeba tylko przez A przesunąć prostą równoległą do danej. Okazuje się, że wtedy $d=|x_1\cos\gamma+y_1\sin\gamma-p|$. Wykaż!

Przykład: Znając równania dwóch linij prostych:

$$(L_1)\ldots\ldots y=\tfrac{3}{4}x+5$$

$$(L_2)\ldots\ldots y=-\tfrac{1,5}{8}x+2$$

znaleźć równania symetralnych kąta, utworzonego przez te linje.

Każdy punkt $P\ (x, y)$ symetralnej jest równo oddalony od obydwu prostych (L_1) i (L_2), więc musi spełniać warunek:

$$\pm\frac{y-\frac{3}{4}x-5}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}=\pm\frac{y+\frac{15}{8}x-2}{\sqrt{1+\left(\frac{15}{8}\right)^2}}. \qquad (d)$$

Wiemy, że są możliwe dwie symetralne (por. fig. 38). Co do znaku, to wszystkie punkty symetralnej S_1S_1' leżą albo powyżej odpowiednich punktów (t. j. punktów należących do tej samej odciętej) obydwu prostych L_1 i L_2 albo poniżej obydwu tych prostych. Dla tej symetralnej należy więc obrać znaki zgodne po obu stronach.

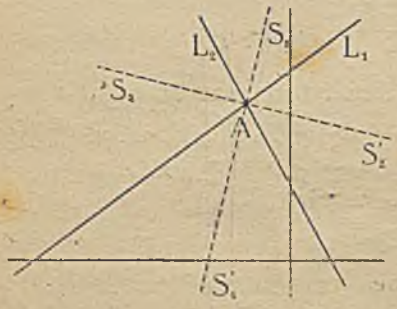


Fig. 38.

Otrzymamy więc po uporządkowaniu jako równanie symetralnej

$$(S_1S_1')\ldots\ldots y=\frac{9}{2}x+\frac{65}{7}.$$

Punkty symetralnej S_2S_2' leżą powyżej jednej prostej, a poniżej drugiej i to w obydwu częściach S_2A i AS_2'; w równaniu *(d)* należy więc obrać po obydwu stronach znaki przeciwne. Otrzymamy stąd po uporządkowaniu:

$$(S_2S_2')\ldots\ldots y=-\frac{2}{9}x+\frac{35}{9}.$$

Z równań obydwu symetralnych widzimy, że są do siebie prostopadłe.

5. *Trzy proste, przecinające się w jednym punkcie.* Wiele ważnych twierdzeń geometrycznych polega na udowodnieniu, że trzy proste przecinają się w jednym punkcie (n. p. dowód istnienia środka koła wpisanego i opisanego na trójkącie, środka ciężkości i t. p.). Analitycznie można postępować w takich zagadnieniach w następujący sposób:

Znajdujemy punkt przecięcia się dwóch prostych, rozwiązując ich równania i podstawiamy współrzędne tego punktu w trzecie równanie; jeżeli one spełniają także trzecie równanie, to i trzecia prosta przechodzi przez ten sam punkt.

Zbadaj to n. p. dla prostych:

$$y-x+1=0,\quad y+\frac{2}{3}x-6=0,\quad y-\frac{16}{11}x+\frac{32}{11}=0!$$

Można jednak wyprowadzić pewne proste kryterjum, pozwalające nieraz poznać wprost z formy równań, czy trzy proste prze-

cinają się w jednym punkcie. Wykażemy mianowicie, że *każda prosta, przechodząca przez punkt przecięcia się prostych:*

$$\begin{aligned}(L_1)\ldots.\ y-ax-b=0\\(L_2)\ldots.\ y-a_1x-b_1=0\end{aligned}\qquad (e)$$

da się przedstawić równaniem:

$$k_1(y-ax-b)+k_2(y-a_1x-b_1)=0 \qquad (32)$$

gdzie k_1 i k_2 są liczbami niezależnemi od x, y, innemi dla każdej prostej i odwrotnie: *każda prosta przedstawiająca się równaniem tej formy przechodzi przez punkt przecięcia się prostych* (e).

Dowód: równanie to przedstawia jakąś linję prostą, ponieważ jest pierwszego stopnia w x i y; prosta ta przechodzi przez punkt przecięcia się linij L_1 i L_2, ponieważ ten punkt spełnia obydwa równania (e) (sprawia więc, że lewa strona równania (32) jest zerem).

Naodwrót: każdą prostą przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych L_1 i L_2 można przedstawić w formie (32). Jeżeli ona ma przechodzić n. p. jeszcze przez drugi punkt dany $B\ (x_1, y_1)$ poza prostemi (e), to podstawiając x_1, y_1 w równanie (32), w którem znamy a, b, a_1, b_1, otrzymamy jakąś określoną wartość na stosunek $k_1 : k_2$ a więc i same k_1 i k_2 można będzie odpowiednio dobrać. Jeżeli proste L_1 i L_2 są równoległe, to prosta przedstawiona równaniem (32) jest też do nich równoległa. Wykaż! Odwrotnie: każdą prostą równoległą do L_1 i L_2, gdy $L_1 \parallel L_2$, można przedstawić w tej formie (32). Wykaż!

Otóż: *warunkiem dostatecznym i koniecznym, aby się trzy proste przecinały w jednym punkcie lub były równoległe, jest, aby równanie jednej z nich dało się przedstawić w formie (32) zapomocą równań dwóch pozostałych prostych.*

Forma równania może być przytem dowolna: ogólna, odcinkowa i t. p.

N. p. *a)* $\begin{aligned}y-x+1&=0\\y-3x+6&=0\\2y-4x+7&=0\end{aligned}$ Widzimy, że trzecie równanie da się przedstawić jako suma pierwszego i drugiego:

$$2y-4x+7=(y-3x+6)+(y-x+1)=0.$$

Biorąc $k_1=k_2=1$ widzimy, że równanie to ma żądaną formę (32), a więc trzy dane proste przecinają się w jednym punkcie.

b) Boki trójkąta mają równania:

$$\begin{aligned}(AB)\ldots.\ y&=x\\(BC)\ldots.\ y&=\frac{8}{3}x-8\\(AC)\ldots.\ y&=\frac{2}{3}x+2.\end{aligned}$$

Wykazać, że wysokości przecinają się w jednym punkcie. Wysokości, jako proste prostopadłe do boków i przechodzące przez wierzchołki mają — jak to łatwo obliczyć — równania:

$$w_c \ldots\ldots y + x - \tfrac{3}{3}\tfrac{1}{3} = 0$$
$$w_a \ldots\ldots y + \tfrac{3}{8}x - \tfrac{3}{4}\tfrac{3}{4} = 0$$
$$w_b \ldots\ldots y + \tfrac{3}{2}x - 12 = 0.$$

Chcemy zbadać, czy

$$y + x - \tfrac{3}{3}\tfrac{1}{3} = 0$$

da się przedstawić w formie

$$k_1(y + \tfrac{3}{8}x - \tfrac{3}{4}\tfrac{3}{4}) + k_2(y + \tfrac{3}{2}x - 12) = 0 \qquad (b)$$

Porównując współczynniki przy x i y w tych obu równaniach otrzymamy

$$k_1 + k_2 = 1$$
$$\tfrac{3}{8}k_1 + \tfrac{3}{2}k_2 = 1$$

a stąd obliczymy: $k_1 = \tfrac{4}{9}$, $k_2 = \tfrac{5}{9}$.

Podstawiając te wartości w równanie *(b)*, otrzymamy:

$$\tfrac{4}{9}(y + \tfrac{3}{8}x - \tfrac{3}{4}\tfrac{3}{4}) + \tfrac{5}{9}(y + \tfrac{3}{2}x - 12) = 0$$

czyli

$$y + x - \tfrac{3}{3}\tfrac{1}{3} = 0.$$

Widocznie więc równanie prostej w_c da się przedstawić w formie (32), zatem te trzy proste przecinają się w jednym punkcie. Gdyby się trzy dane proste nie przecinały w jednym punkcie, otrzymalibyśmy w ten sposób jakieś inne równanie, zamiast $y + x - \tfrac{3}{3}\tfrac{1}{3} = 0$.

Przeprowadź to samo rozumowanie dla symetralnych boków tego trójkąta!

Równanie (32) można też przedstawić w postaci:

$$y - ax - b - s(y - a_1x - b_1) = 0$$

kładąc $k_2 : k_1 = -s$.

Przedstawia ono cały pęk prostych, przechodzących przez punkt przecięcia się prostych $(L_1) \ldots\ldots y - ax - b = 0$ i $(L_2) \ldots\ldots y - a_1x - b_1 = 0$, jeżeli się zmienia s. Do każdej wartości s należy jakaś inna prosta tego pęku, a wierzchołkiem jego jest punkt przecięcia się prostych L_1 i L_2. W tej formie mieszczą się wszystkie proste pęku. Same proste L_1 i L_2 otrzymujemy dla $s = 0$ i dla $\frac{1}{s} = 0$.

Ćwiczenia IV

§ 14. 1. Podać równanie linji prostej, przechodzącej przez początek układu, znając:

a) kąt $\alpha = 30^0$ z osią X-ów

b) kąt $\beta = 72^0$ z osią Y-ów

c) spadek: 0·5%

d) drugi punkt $A\,(4, 9)$, przez który ta prosta przechodzi.

2. Wykreślić proste:

$$y=2x,\ y=-\frac{6}{11}x,\ y=\frac{1}{4}x$$

i obliczyć ich kąty z osią X-ów i Y-ów.

3. *a)* Punkt porusza się jednostajnie z prędkością $c=4$ *cm*/sek; przedstawić graficznie drogi, przebyte w dowolnym czasie.

b) Przedstawić graficznie wartości pól wszystkich trójkątów o podstawie 1 *cm*.

4. Przez które ćwiartki płaszczyzny przebiegają proste:

$$2y-3x=5,\ y+4x=7,\ y-3x=-5,\ 6y+x=-1.$$

Rozstrzygnąć bez rysunku!

4 *a)* Podać równanie prostej, odcinającej na osi Y-ów trzy jednostki dodatnie a tworzącej z osią X-ów kąt 45^0.

4 *b)* Podać równanie prostej, odcinającej na osi X-ów $c=-4$ a tworzącej z osią Y-ów kąt 30^0.

4 *c)* Podać równanie prostej, odcinającej na osiach:

$$b=+4\quad c=-3.$$

5. Wykreślić proste:

$$x-y=1,\ 2x+3y=6,\ 10x-3y=15.$$

Jakie kąty tworzą te proste z osią X-ów?

6. Wykreślić proste:

$$4x+5y=20,\ y=-\frac{3}{4}x+8,\ \frac{y}{3}+\frac{x}{7}=1.$$

Jakie odcinki tworzą te proste na osiach?

7. Przedstawić graficznie długość pręta, który ma w temperaturze $0^0\,C$ długość 1000 *mm*, przy wszelkich temperaturach, znając współczynnik rozszerzalności materjału $\lambda=\frac{1}{600}$ i związek między długością l_t w temperaturze t, a długością l_0 w temperaturze 0:

$$l_t=l_0\,(1+\lambda t).$$

Część figury od $0^0\,C$ do $100^0\,C$ przedstawić osobno w powiększeniu.

8. Wykreślając na osi X-ów czas w jednostkach: 1 godz. . . . . 5 *mm*, a na osi Y-ów drogę w jednostkach 1 *km* . . . . 1 *mm*, znaleźć równanie, wyrażające związek drogi z czasem dla pociągu, który wyrusza o godz. 6-tej z odległości 0 *km*, a przybywa o godz. 8·15 do stacji odległej o 60 *km*.

Wykonaj inne podobne zagadnienia na podstawie rozkładu jazdy!

9. Jaki zbiór prostych otrzymamy, gdy w równaniu

$$y=ax+b$$

zmienia się tylko liczba b? Jaki zbiór otrzymamy, gdy zmienia się tylko a?

§ 15. 10. Znaleźć równania prostych przechodzących przez punkt $A(-2, 3)$ i

a) tworzących z osią X-ów kąty: $\alpha = 36^0$, $\alpha_1 = 114^0$,

b) równoległych do prostych $y = 5x - 7$, $2y + 4x = 11$,

c) prostopadłych do prostych $y = \frac{2}{3}x$, $y - x = 4$, $\frac{y}{4} + \frac{x}{9} = 1$.

11. Znaleźć równanie prostej, przechodzącej przez punkt $A(5, -1)$ i nachylonej pod kątem 45^0 do prostej $y = -3x + 2$

12. Jaki kąt tworzą ze sobą proste

$$y = 4x - 5 \text{ i } y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}?$$

13. Wykazać, że proste: $\left.\begin{matrix} Ax + By + C = 0; \\ Ax + By + D = 0 \end{matrix}\right\}$ są równoległe.

a proste $\left.\begin{matrix} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay + D = 0 \end{matrix}\right\}$ są prostopadłe do siebie.

14. Znaleźć równanie prostej, łączącej punkty:

a) $A(5;3)$ ..... $B(-3, -2)$

b) $A_1(-4, 0)$ ..... $B_1(2, -6)$

c) $C(3, -7)$ ..... $D(3, +5)$

d) $C_1(\frac{4}{9}, 5)$ ..... $D_1(-\frac{7}{8}, 5)$.

15. Wierzchołki trójkąta mają współrzędne:

$$A(5, 0),\ B(-1, 4),\ C(-3, -5).$$

Jakie są równania boków? Jakie kąty tworzą boki ze sobą?

16. Zbadać, czy leżą na jednej linji prostej punkty:

a) $A(0, -5)$, $B(3, -2)$ $C(3, 4)$

b) $A(0, -5)$, $B(4, 7)$ $C(3, 4)$.

17. Znając wierzchołki trójkąta:

$$A(5, 1) \quad B(-3, -1) \quad C(7, -3)$$

znaleźć równania:

a) symetralnych boków,

b) wysokości.

18. Znaleźć punkty przecięcia się par prostych:

a) $x - 2y = 5$, $3y + x = 20$

b) $x + 3y = 0$, $x - 2 = 0$

c) $5x - 8y = 10$, $y = \frac{3}{4}x$

d) $2x - 5y = 4$, $10y - 4x + 7 = 0$

e) $y = \frac{3}{2}x - 2$, $2y + 4 = 3x$.

19. Znaleźć boki, kąty i pole trójkąta, którego boki mają równania:

$$2y+5x=-4;\quad y=\frac{7}{4}x-2;\quad x-3y+11=0.$$

Uwaga: oblicz najpierw wierzchołki!

20. Aby znaleźć niedostępny punkt przecięcia się dwóch linij prostych, zmierzono współrzędne dwóch punktów jednej prostej:

$$A(1,6),\quad B(3,7)$$

i współrzędne dwóch punktów drugiej:

$$C(1,-1),\quad D(2,-\frac{3}{2}).$$

Obliczyć współrzędne niedostępnego punktu przecięcia się.

21. Przez wierzchołki trójkąta: $A(-2,3)$ $B(0,-2)$, $C(4,5)$ poprowadzić równolegle do boków przeciwległych; obliczyć równania tych równoległych, wierzchołki i pole nowego trójkąta. Ile razy to pole jest większe od pola pierwotnego trójkąta?

22. Wykazać, że symetralne boków trójkąta:

$$A(0,1),\quad B(5,0),\quad C(-3,-3)$$

przecinają się w jednym punkcie.

23. Wykazać, że wysokości trójkąta:

$$y=5x-8,\quad 2x+y+1=0,\quad 3y-4x=0$$

przecinają się w jednym punkcie.

Przeprowadź ten rachunek także w liczbach ogólnych, przyjmując jeden bok trójkąta za oś x-ów:

$$y=0,\quad y=ax+b,\quad y=a_1x+b_1!$$

24. Wykazać, że linje środkowe trójkąta:

$$A(7,11),\quad B(-3,-9)\quad C(5,-1)$$

przecinają się w jednym punkcie. Wykonaj ten rachunek także w liczbach ogólnych, obierając bok AB na osi x-ów a jego środek za początek układu.

25. Wykazać, że proste:

$$y=2x+4,\quad y=-\frac{2}{3}x+5,\quad y=2x-1,\quad y=-\frac{2}{3}x-3$$

tworzą równoległobok. Obliczyć jego boki i kąty.

26. Wykazać, że proste:

$$y=3x+7,\quad y=-\frac{1}{3}x+4,\quad y=3x-2,\quad y=-\frac{1}{3}x-2$$

tworzą prostokąt; obliczyć jego pole.

27. Jaki kąt tworzą przekątnie czworokąta:

$$A(5,1),\quad B(0,3),\quad D(-3,4),\quad E(-1,-5).$$

28. Podaj dowolnie równania czterech prostych tworzących trapez. Oblicz jego pole.

29. Jakie warunki muszą spełniać współrzędne:

$$(x_1y_1)\ (x_2y_2)\ (x_3y_3)\ (x_4y_4)$$

czterech punktów, aby były wierzchołkami kwadratu?

30. Wykazać, że w trójkącie:

$$A(0,0)\ B(4,0),\ C(1,3)$$

środek koła opisanego, środek wysokości i środek ciężkości leżą na jednej linji prostej (prosta Eulera).

31. Wykazać twierdzenie z poprzedniego ćwiczenia ogólnie, obierając jeden bok trójkąta wzdłuż osi X-ów, a jeden wierzchołek w początku układu.

32. Znaleźć odległość punktu od prostej z następujących danych:

a) $P(0,0)\ldots\ldots 7x-24y+50=0$

b) $P(3,-5)\ldots. 7x+5y=13$

c) $P(2,4)\ldots\ldots 8x-15y+10=0.$

33. Wierzchołki trójkąta są:

$$A(1,4)\ B(-3,-5),\ C(6,-4).$$

Obliczyć wysokość w_a i bok $a=BC$. Obliczyć pole w dwa sposoby!

34. Obliczyć przy pomocy podstawy i wysokości pole równoległoboku:

$$y=2x+3,\ y=2x-1,\ y=-3x+6,\ y=-3x+1.$$

35. Znaleźć miejsce geometryczne punktów oddalonych o: $d=5$ od prostej

$$3x-4y=12.$$

36. Znaleźć równania symetralnych kątów, utworzonych przez proste:

$$x\sqrt{3}+y=7,\ 4x-3y=5.$$

37. Wykazać, że symetralne trzech kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie. N. p.

$$A(-3,2)\ B(4,0)\ C(0,-1)$$

38. Wykazać, że symetralna kąta wewnętrznego trójkąta i dwie symetralne kątów zewnętrznych, leżących przy innych wierzchołkach, przecinają się w jednym punkcie; n. p.

$$A(0,0)\ B(6,0)\ C(2,5).$$

39. Zbadać, czy proste:

$$2x-3y-5=0,\ 3x-2y+7=0,\ x+6y+41=0$$

przecinają się w jednym punkcie.

40. Wykazać analitycznie, że prosta, łącząca środki boków równoległych trapezu, przechodzi przez punkt przecięcia się przekątni i przez punkt przecięcia się boków nierównoległych (przedłużonych!). Obrać wierzchołki trapezu dogodnie (n. p. tak, aby dwa z nich leżały na osi X-ów):

$$A(0,0)\ B(8,0)\ C(2,3)\ D5,3).$$

Uwaga: na tem polega połowienie odcinka bez użycia koła, natomiast przy użyciu jednej pary linij równoległych.

41. Z pęku:

$$(3x-5y+15)-s(3x-y-12)=0$$

wybrać 4 dowolne linje proste i obliczyć stosunek podziału podwójnego 4 punktów, w których ten pęk przecina *a)* oś x-ów i oś y-ów; *b)* dowolną inną prostą.

42. Jeżeli w czworokącie zupełnym L_1, L_2, L_3, L_4 (Fig. 39) poprowadzimy trzy przekątnie P_1, P_2, P_3 i punkt przecięcia się dwóch przekątni połączymy z wierzchołkiem, n. p. B z A linją M, to cztery promienie:

$$L_1 \quad L_2 \quad P_3 \text{ i } M$$

przecinają każdą prostą w punktach harmonicznie sprzężonych.

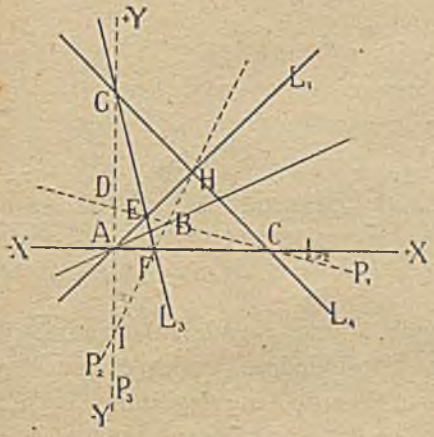


Fig. 39.

Udowodnij to n. p. znając równania czterech prostych:

$$L_1 \ldots . y - x = 0$$
$$L_2 \ldots . \quad y = 0$$
$$L_3 \ldots . 4x + y - 2 = 0$$
$$L_4 \ldots . x + y - 2 = 0$$

dla punktów $ECDB$ lub dla odpowiednich punktów, leżących na prostej L_4.

Uwaga: Na tem polega konstrukcja punktu harmonicznie sprzężonego z trzema danemi punktami bez pomocy cyrkla.

Taką czwórkę promieni, która na każdej prostej wyznacza harmoniczną czwórkę punktów, nazywamy *harmoniczną czwórką promieni*.

43. Wykaż, że środki 3 przekątni czworokąta zupełnego leżą na jednej linji prostej, używając fig. 39 i linij danych z ćwiczenia poprzedniego.

44. Wykaż, że prosta, łącząca środki boków równoległych trapezu, jest harmonicznie podzielona przez punkt przecięcia się przekątni, punkt przecięcia się boków nierównoległych i przez środki boków równoległych. N. p.

$$A(0,0),\ B(4,0),\ C(1,3),\ D(2,3).$$

Rozdział V

Zmiana osi współrzędnych. Przesunięcie i obrót

§ 16. Przesunięcie osi.

Badanie własności linij krzywych i inne zagadnienia geometrji analitycznej ułatwiamy sobie przez odpowiednie umieszczenie osi współrzędnych. Tak n. p. mając badać koło, najwygodniej będzie umieścić początek w środku koła; w tym celu przesuwamy osie X-ów i Y-ów równolegle o odpowiednie odcinki. Podobnie ma się rzecz z elipsą, hyperbolą i innemi linjami, posiadającemi środek symetrji.

Przez takie przesunięcie współrzędne wszystkich punktów ulegną zmianie. Jeżeli bowiem cały układ osi przesuniemy o odcinek l wzdłuż osi X-ów, a odcinek m wzdłuż osi Y-ów, to, jak widzimy z fig. 40, nowe współrzędne x', y' będą mniejsze o odcinki l, m od dawnych, a więc:

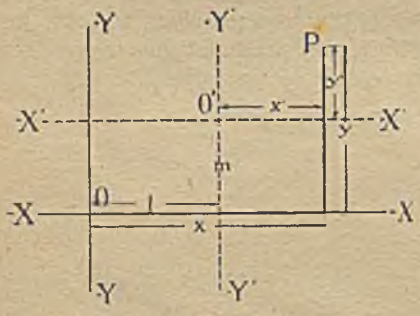


Fig. 40.

$$\begin{aligned} x' &= x - l \\ y' &= y - m \end{aligned} \qquad (A)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} x &= x' + l \\ y &= y' + m \end{aligned} \qquad (33)$$

Jeżeli odcinki l, m są ujemne, to oczywiście nowe współrzędne będą co do bezwzględnej wartości większe (sprawdzić na odpowiedniej figurze!), ale wzory (A) i (33) pozostaną niezmienione.

Jeżeli więc chcemy jakiekolwiek równanie wyrazić w nowych współrzędnych, musimy za dawne współrzędne podstawić wartości z wzorów (33). W ten sposób wykonuje się przesunięcie punktu O wraz z osiami do dowolnego innego punktu płaszczyzny O' o znanych współrzędnych (l, m).

Przykład 1. Przesunąć osie tak, aby prosta: $y=-\frac{3}{4}x+5$ przechodziła przez początek układu. W tym celu wystarczy przesunąć cały układ wzdłuż osi Y-ów o odcinek $+5$; wzdłuż osi X-ów nie trzeba wykonywać żadnego przesunięcia. Trzeba więc za x i y podstawić wartości:

$$x=x'$$
$$y=y'+5.$$

Otrzymamy: $y'+5=-{}^3/_4x'+5$ czyli

$$y'=-{}^3/_4x'$$

a ta prosta przechodzi przez początek nowego układu osi.

Przez przesunięcie układu uzyskujemy nietylko dogodniejsze położenie badanych linij, ale równocześnie upraszczamy równania tych linij. Nie znając nawet geometrycznej postaci jakiejś linji, możemy znaleźć takie przesunięcie, że jej równanie przyjmie prostszą postać.

Przykład 1. Równanie pewnej linji jest:

$$(a)\qquad 4x^2+4y^2-20x-24y-3=0.$$

Chcemy to równanie zamienić na prostsze. Wykonajmy przesunięcie:

$$x=x'+l$$
$$y=y'+m.$$

Na razie nie znamy wielkości tego przesunięcia.

Podstawiając te wartości za x i y otrzymamy:

$$(b)\qquad 4x'^2+4y'^2+(8l-20)x'+(8m-24)y'+(4m^2+4l^2-20l-24m-3)=0.$$

Przez odpowiednie dobranie przesunięcia l, m możemy to równanie uprościć. Widzimy jednak, że nie można usunąć ani x'^2, ani y'^2, bo współczynniki są liczbami stałemi, niezależnemi od przesunięcia. Natomiast możemy sprawić, że odpadną wyrazy x' i y', obierając l i m tak, aby współczynniki przy x' i y' były zerami, t. j.

$$\left.\begin{aligned}8l-20&=0\\8m-24&=0\end{aligned}\right\}\ \text{stąd}\ \underline{l=\tfrac{5}{2},\ m=3}$$

Podstawiając te wartości w równanie (b) otrzymamy:

$$4x'^2+4y'^2-64=0$$

czyli: $\underline{x'^2+y'^2=16.}$

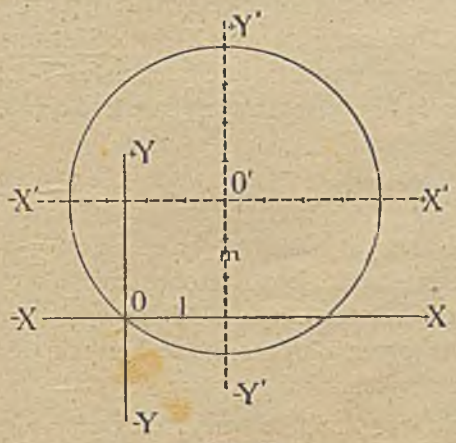


Fig. 41.

Taką prostą formę ma równanie (a) przy użyciu nowych osi, przesuniętych do punktu $O'(\frac{5}{2}, 3)$.

Fig. 41 przedstawia obraz geometryczny równania (a) przy użyciu zarówno pierwotnych osi XY, jak i nowych osi $X'Y'$. Widzimy, że względem nowych osi figura ta jest symetryczna, co nie miało miejsca przy użyciu pierwotnych osi.

Uwaga. Podobnie można uzyskać, że odpadnie jeden wyraz pierwszego stopnia i wyraz wolny. Wykonaj takie przesunięcie!

Przykład 2. Uprościć przez przesunięcie osi równanie:

$$y^2 - 12x - 6y + 36 = 0 \qquad (c)$$

Wykonując przesunięcie: $\begin{cases} x = x' + l \\ y = y' + m \end{cases}$

otrzymamy: $y'^2 + y'(2m - 6) - 12x' + (m^2 - 6m - 12l + 36) = 0.$

Widzimy, że nie można usunąć pierwszej potęgi x', ponieważ jej współczynnik nie zawiera dowolnych liczb l i m. Można natomiast usunąć y' i wyraz wolny, kładąc:

$$2m - 6 = 0$$

$$m^2 - 6m - 12l + 36 = 0.$$

Musi więc być: $\underline{m = 3}$

$\underline{l = {}^9/_4}$

Przesunięcie: $\begin{cases} x = x' + {}^9/_4 \\ y = y' + 3 \end{cases}$ sprawi, że równanie (c) przyjmie postać:

$$y'^2 - 12x' = 0 \text{ lub}$$

$$y'^2 = 12x'$$

Ta forma równania linji (c) nadaje się bardzo dobrze zarówno do dyskusji, jak i do graficznego przedstawienia.

Wykonaj graficzne przedstawienie i narysuj obydwa układy osi!

Równania (A) można także pojmować inaczej. Możemy uważać osie za nieruchome, a wszystkie punkty płaszczyzny, razem z figurami, znajdującemi się na niej, przesunięte równolegle o odcinki l i m w kierunku przeciwnym. Niech l i m będą liczbami dodatniemi, to jasnem jest, że wtedy odcięta każdego punktu zmniejszy się o l, a rzędna o m.

Równania (A) określają więc także ruch postępowy całej płaszczyzny o odcinek l w kierunku osi X-ów od strony dodatniej ku ujemnej, a o odcinek m w kierunku ujemnej osi Y-ów; x' i y' są wtedy współrzędnemi nowej figury w dawnym układzie, można więc pisać x, y zamiast x' y'.

§ 17. Obrót osi współrzędnych.

Podobne usługi, jak przesunięcie, oddaje także obrót osi około początku układu. N. p. mając podaną elipsę, leżącą ukośnie względem osi X-ów i Y-ów, możemy sprawić przez obrót osi, że kierunki osi głównych elipsy będą zgodne z kierunkami osi współrzędnych.

Przez obrót osi ulegają zmianie współrzędne wszystkich punktów z wyjątkiem początku układu. Obróćmy osie o kąt δ, to współrzędne

x, y punktu P zamienią się na x', y' (fig. 42). Chcemy znaleźć związek między (x, y) a (x', y'). Połączmy P z początkiem układu, to:

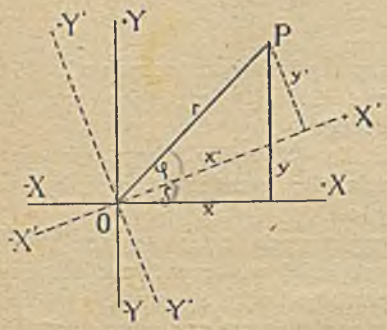


Fig. 42.

$$x' = r \cos \varphi$$
$$y' = r \sin \varphi$$

Dawne współrzędne są:

$$x = r \cos (\varphi + \delta)$$
$$y = r \sin (\varphi + \delta) \text{ czyli}$$
$$x = r \cos \varphi \cos \delta - r \sin \varphi \sin \delta$$
$$y = r \sin \varphi \cos \delta + r \cos \varphi \sin \delta$$

Podstawiając tu za $r \sin \varphi$ i $r \cos \varphi$ wartości y' i x', otrzymamy:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \delta - y' \sin \delta \\ y &= x' \sin \delta + y' \cos \delta \end{aligned} \qquad (34)$$

Takie wartości trzeba więc podstawić za x i y, aby jakiekolwiek równanie przedstawić w nowych współrzędnych. Wyraź z tych równań odwrotnie x' i y' zapomocą x i y!

Wykonaj obrót o $\delta = 45^0$ dla równań: $x^2 + y^2 = 25$, $4x^2 + 9y^2 = 36$. O ile zmienią się formy tych równań?

Obrotu używamy podobnie, jak przesunięcia, do uproszczenia równań linij krzywych. Ponieważ jednak w obrocie jest tylko jedna liczba dowolna δ, przeto możemy żądać spełnienia tylko jakiegoś jednego warunku.

Przykład. Zapomocą obrotu uprościć równanie:

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8 \qquad (1)$$

Z góry nie wiemy jeszcze, jaki jest kąt obrotu; podstawiamy więc za x i y ogólne wartości z równań (34).

Otrzymamy po uporządkowaniu:

$$x'^2 (3 + 2 \sin \delta \cos \delta) + 2x'y' (\cos^2 \delta - \sin^2 \delta) + y'^2 (3 - 2 \sin \delta \cos \delta) = 8$$

lub

$$x'^2 (3 + \sin 2\delta) + 2x'y' \cos 2\delta + y'^2 (3 - \sin 2\delta) = 8.$$

Nie można żądać, aby odpadł wyraz x'^2, bo $3 + \sin 2\delta$ nie może być zerem (sinus jest zawarte w granicach $-1 \ldots +1$), tak samo nie można żądać, aby odpadł wyraz y'^2. Pozostaje więc tylko jedna możliwość: żądamy aby odpadł iloczyn $x'y'$, t. j. aby

$$\cos 2\delta = 0$$

stąd

$$2\delta = 90^0$$

więc

$$\delta = 45^0.$$

W ten sposób znamy już kąt obrotu.

Wykonując obrót o kąt $\delta = 45^0$ otrzymamy więc

$$x'^2(3+\sin 2.45^0)+y'^2(3-\sin 2.45^0)=8$$

czyli:

$$4x'^2+2y'^2=8$$

lub

$$2x'^2+y'^2=4 \qquad (2)$$

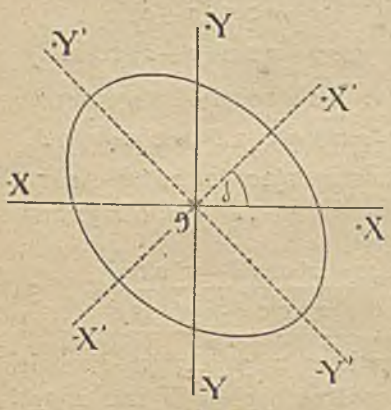


Fig. 43.

Przy użyciu osi obróconych o kąt 45^0, równanie linji (1) ma więc prostszą postać: (2).

Na fig. 43 mamy obraz graficzny równania (1); zaznaczone są obydwa układy osi.

Przy nowych osiach symetrja tej linji jest lepiej widoczna, aniżeli przy dawnych. Dyskusja i konstrukcja tej linji są więc dogodniejsze przy użyciu nowych osi $X'X'$, $Y'Y'$.

$- \quad + \quad - \quad +$

Równania obrotu osi można także inaczej pojmować. Możemy uważać osie za nieruchome, a wszystkie punkty płaszczyzny za obrócone o kąt δ w kierunku przeciwnym. Punkty te przyjmą więc inne położenie względem osi współrzędnych, ich współrzędne będą miały inne wartości zawarte w równaniach (34), (przyczem kreski przy x i y należy opuścić).

Równania (34) określają więc zarazem ruch obrotowy całej płaszczyzny o kąt δ około początku układu w kierunku ujemnym (zgodnym z ruchem wskazówek zegaru).

Obok ruchu postępowego i obrotowego używa się w geometrji analitycznej wielu innych przekształceń. Bardzo prostem i często używanem przekształceniem jest odbicie symetryczne w osi X-ów (lub w osi Y-ów). Odcięte zostawiamy niezmienione, a rzędnym dajemy wartości przeciwne:

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

Wskutek tego przekształcenia zamieni się sama figura na figurę symetryczną do niej względem osi X-ów. Podobnie uskutecznia się odbicie w osi Y-ów. Przekształcenie to można także uważać za zmianę kierunku osi, przy niezmienionej figurze.

Jednem z ważniejszych jest przekształcenie podobne, polegające na zmniejszeniu rzędnych i odciętych w tym samym stosunku. Równania, określające to przekształcenie, są:

$$x' = ax$$

$$y' = ay$$

Figury zamieniają się przez to przekształcenie na figury podobne (n. p. zmniejszona podziałka).

Jeżeli rzędne zmniejszymy w innym stosunku, aniżeli odcięte:

$$x' = ax$$
$$y' = by$$

otrzymujemy figury już nie podobne, ale „pokrewne“ (affinizm). Przez to przekształcenie n. p. koło zamienia się na elipsę.

Jeżeli znowu x, y zastąpimy wartościami:

$$x' = \frac{ax+by+c}{dx+ey+f} \qquad y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{dx+ey+f}$$

otrzymamy inny rodzaj pokrewieństwa: figury, z których jedna jest rzutem (środkowym w ogólności) drugiej. Takie dwie figury nazywamy jednokreślnemi lub projektywicznemi względem siebie.

Ćwiczenia V

§ 16. 1. *a)* Wyprowadzić wzory na przesunięcie równoległe osi w kierunku ujemnym wzdłuż osi X-ów, a dodatnim wzdłuż osi Y-ów. Figura!

b) Wyprowadzić wzory na przesunięcie, obierając punkt P w trzeciej ćwiartce. Figura!

2. Wykazać, że przy ruchu postępowym ani długości, ani kąty nie ulegają zmianie.

Wskazówka: podstaw nowe współrzędne we wzory na odległość dwóch punktów i na współczynnik kierunkowy odcinka.

3. Wierzchołki trójkąta mają współrzędne: $A(3,2)$, $B(2,-1)$, $C(8,11)$. Jakie będą współrzędne tych wierzchołków, gdy przesuniemy początek układu do punktu B, a jakie gdy do punktu C?

4. Przesunąć osie tak, aby wierzchołek pęku promieni

$$(y-2x+2)-s(y-3)=0$$

leżał w początku układu. Jakie wtedy jest równanie pęku promieni?

5. Przez przesunięcie układu uprościć równania:

a) $x^2+y^2-6x-4y=12$ Narysuj w nowych osiach!
b) $4x^2+y^2-12x+2y-2=0$ „ „ „
c) $y^2-8y-6x+28=0$ „ „ „
d) $x^2-y^2+6x+4y=-1$ „ „ „

§ 17. 6. Wyprowadzić równania obrotu dla $\varepsilon = 45^0$.

7. Wykazać analitycznie, że przy ruchu obrotowym nie zmieniają się odległości punktów od początku układu, ani kąty zawarte między dwoma linjami prostemi, łączącemi początek układu z dowolnemi punktami płaszczyzny.

Wskazówka: podstaw we wzory na odległość i spadek prostej wartości z równań obrotu.

8. Wierzchołki trójkąta mają współrzędne $A(-2, 3)$, $B(1, -3)$, $C(3,0)$. Obrócić osie o 225^0 i obliczyć współrzędne punktów A, B, C w nowym układzie.

9. Obrócić osie tak, aby bok $A(3, 7)$, $B(4, 8)$ trójkąta ABC był równoległy do osi X-ów. Jakie będą nowe współrzędne punktów A, B?

10. Przez obrót układu uprościć równania:

a) $11x^2+24xy+4y^2=20$

b) $3x^2+2xy+3y^2=8$ Narysuj!

11. Przez obrót i przesunięcie uprościć równania:

a) $2x^2-6y^2+xy-5x+11y=3$

b) $9x^2+16y^2-24xy-166x-112y+724=0$

12. Przez obrót zamienić równanie

$$xy=18$$

na takie, w którem nie ma wyrazu $x'y'$. Narysuj!

Rozdział VI

Koło

§ 18. Ogólne równanie koła.

W rozdziale IV. badaliśmy linje proste, a zarazem równania pierwszego stopnia. Przejdziemy obecnie do linij krzywych, które najczęściej spotykamy w geometrji, a więc przedewszystkiem do koła. Znając promień koła r i położenie środka, t. j. jego współrzędne: $S\ (p,\ q)$, wyprowadzimy równanie koła (fig. 44). Obierzmy dowolny punkt $A\ (x,\ y)$ na obwodzie koła. Jego odległość od środka wynosi r:

$$SA = r$$

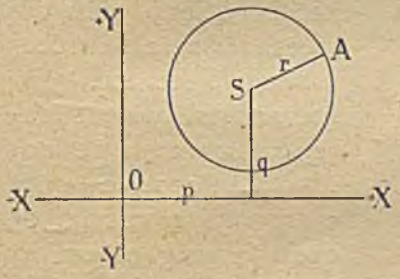


Fig. 44.

Wyrażając tę odległość analitycznie, otrzymamy [według wzoru (10)]:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2} = r$$

czyli:

$$(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2 \quad (35)$$

Równaniu temu muszą czynić zadość współrzędne wszystkich punktów, leżących na obwodzie koła, ponieważ wszystkie mają równą odległość od środka. Jeżeli punkt leży wewnątrz koła, to jego odległość od środka jest mniejsza od promienia, więc dla tych punktów jest:

$$(x-p)^2+(y-p)^2 < r^2$$

Podobnie dla punktów, leżących zewnątrz koła jest:

$$(x-p)^2+(y-q)^2 > r^2.$$

Widzimy więc, że żaden punkt, leżący poza kołem, nie spełnia równania (35). *Równanie to jest więc równaniem koła o środku: $S\ (p,\ q)$, a promieniu r. Równanie koła jest równaniem drugiego stopnia w x i y.*

Gdybyśmy osie przesunęli równolegle do środka koła, to współrzędne środka w nowym układzie osi byłyby: $p=0$ i $q=0$; równanie koła przedstawia się wtedy w prostszej postaci:

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (35\,a)$$

Równanie (35) nazywamy o g ó l n e m r ó w n a n i e m koła, a (35 a) ś r o d k o w e m r ó w n a n i e m koła.

Dyskusja. Aby zbadać analitycznie własności jakiejkolwiek linji krzywej, przedstawiamy ją równaniem w jak najprostszem położeniu i dyskutujemy algebraicznie to równanie. Dla koła najlepiej obrać takie położenie, aby środek leżał w początku układu. Wtedy równanie koła jest:

$$x^2+y^2=r^2$$

Rozwiązując to równanie ze względu na y lub ze względu na x, otrzymamy:

$$y=+\sqrt{r^2-x^2} \text{ lub } x=+\sqrt{r^2-y^2}$$

Z tych równań odczytujemy: do każdego x należą dwie wartości y równe co do bezwzględnej wartości, a różne co do znaku (fig. 45). To znaczy: do każdej odciętej należą dwie rzędne równe, ale zwrócone w strony przeciwne.— Linja badana jest więc s y m e t r y c z n a w z g l ę d e m o s i X-ó w. Podobnie wynika z drugiego równania: s y m e t r j a w z g l ę d e m o s i Y-ó w.

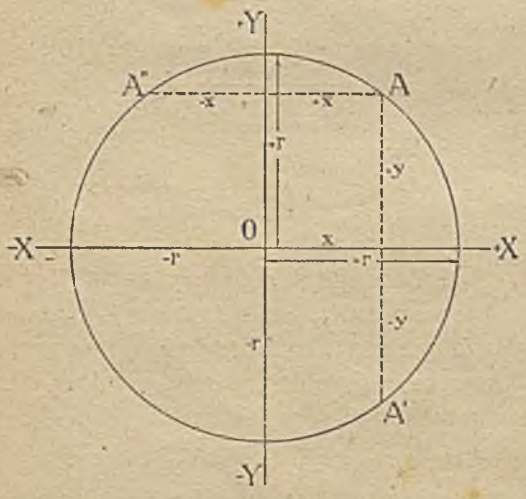


Fig. 45.

Rzeczywiste y otrzymamy tylko dla $x^2 \leq r^2$, t. j. dla

$$-r \leq x \leq +r.$$

To znaczy: w kierunku osi X-ów linja krzywa jest ograniczona, sięga tylko od $-r$ do $+r$. Tak samo w kierunku osi Y-ów.

Aby znaleźć miejsca, w których ta krzywa przecina oś X-ów, trzeba podstawić $y=0$; otrzymamy $x=\pm r$. Tak samo otrzymamy odcinki na osi Y-ów, kładąc $x=0$; wtedy $y=\pm r$.

Inne wnioski geometryczne, jakie można wyprowadzić z równania linji krzywej, poznamy później.

Zbadajmy jeszcze czem się odróżnia równanie koła od innych równań drugiego stopnia. Rozwijając równanie (35) otrzymamy:

$$x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0.$$

Równanie to charakteryzuje się tem, że:

1. brak wyrazu $x.y$;

2. współczynniki przy x^2 i y^2 są równe (tu są one $=1$, jednakże mogą być dowolne, ponieważ obraz geometryczny równania nie zmieni się, jeżeli wszystkie jego wyrazy pomnożymy przez jakąkolwiek stałą liczbę).

Pytanie, czy każde równanie drugiego stopnia formy:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad (36)$$

(t. j. bez iloczynu xy i o równych współczynnikach przy x^2 i y^2) przedstawia koło? Aby to rozstrzygnąć, uzupełnijmy dwumiany x^2+ax i y^2+by do kwadratów zupełnych. W tym celu trzeba dodać do obu stron równania $\frac{a^2}{4}$ i $\frac{b^2}{4}$. Wtedy otrzymamy:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c \qquad (1)$$

a) Równanie to przedstawia istotnie koło, o środku: $S\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ a promieniu:

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c},$$ o ile tylko wyrażenie, znajdujące się pod pierwiastkiem, ma wartość dodatnią.

b) Jeżeli $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=0$, to otrzymujemy

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=0.$$

Suma zaś kwadratów liczb rzeczywistych może być tylko wtedy zerem, jeżeli obydwie liczby są zerami. Więc tylko liczby:

$$x=-\frac{a}{2},\ y=-\frac{b}{2}$$

spełniają równanie (1), jeżeli wyrażenie

$$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=0.$$

Wtedy całe równanie przedstawia tylko jeden punkt rzeczywisty (moglibyśmy powiedzieć: koło o promieniu zero).

c) Jeżeli $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$ jest liczbą ujemną, otrzymujemy na promień wartość urojoną. Wtedy żaden punkt rzeczywisty nie spełnia równania (1), równanie (36) nie ma więc w tym wypadku żadnego obrazu geometrycznego (koło o promieniu urojonym).

N. p. $x^2+y^2+6x+8y+10=0$ przedstawia koło (por. przykład 1)

$x^2+y^2+6x+8y+25=0$ przedstawia tylko jeden punkt: $S(-3, -4)$

$x^2+y^2+6x+8y+30=0$ nie przedstawia żadnych punktów rzeczywistych.

Przykłady. 1. Jaką linję krzywą przedstawia równanie:

$$4x^2+4y^2-12x-16y-11=0?$$

Ponieważ brak wyrazu $x.y$ a współczynniki przy x^2 i y^2 są jednakowe, równanie to może przedstawiać koło. Czy to będzie istotnie koło, to zależy od wartości, jaką otrzymamy na r.

Uwalniając dane równanie od współczynnika 4, otrzymamy

$$x^2+y^2-3x-4y-\frac{11}{4}=0$$

Uzupełnijmy dwumiany x^2-3x i y^2-4y do kwadratów, to otrzymamy po zredukowaniu:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-2)^2=9.$$

Równanie to przedstawia istotnie koło o środku: $S\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ a o promieniu: $r=3$.

2. Znaleźć równanie koła, przechodzącego przez trzy punkty:

$$A(-2, -1)\ B(3, 4)\ C(6, -5)$$

Równanie to ma mieć postać:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0.$$

Ponieważ punkty A, B, C mają leżeć na tem kole, to ich współrzędne muszą spełniać to równanie. Otrzymujemy więc:

$$4+1-2a-b+c=0$$

$$9+16+3a+4b+c=0$$

$$36+25+6a-5b+c=0$$

Z tych trzech warunków obliczamy z łatwością:

$$a=-6,\ b=2,\ c=-15.$$

Równanie żądanego koła przedstawia się w postaci:

$$x^2+y^2-6x+2y-15=0$$

Uzupełniając dwumiany do kwadratów, otrzymamy:

$$(x-3)^2+(y+1)^2=5^2.$$

Koło można także przedstawić zapomocą dwóch równań, używając trzeciej, pośredniej zmiennej, zapomocą której wyrażamy oso-

bno x i osobno y. Mając podane koło n. p. w formie środkowej, oznaczmy literą t kąt, jaki tworzy dowolny promień z osią X-ów. Widzimy z fig. 46, że dla każdego punktu koła zachodzą związki:

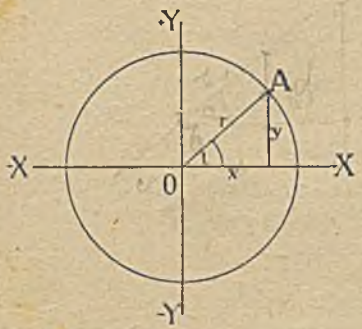


Fig. 46.

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \qquad (a)$$

Równania te razem przedstawiają koło. Taki sposób wyrażania równania linji krzywej nazywamy parametrowem przedstawieniem krzywej; zmienną pomocniczą t nazywamy parametrem. Jeżeli t przebiega wszystkie wartości od 0^0 do 360^0 (lub w mierze łukowej od 0 do 2π), to x i y przebiegają współrzędne wszystkich punktów koła.

Rugując z tych równań zmienną t (n. p. podnosimy te równania do kwadratu i dodajemy), otrzymamy zwyczajną postać równania: $x^2+y^2=r^2$.

Uwaga. Równania (a) można pojmować kinematycznie: punkt porusza się wzdłuż osi X-ów według prawa: $x=r\cos t$ (ruch perjodyczny, drgający), a wzdłuż osi Y-ów według prawa: $y=r\sin t$ (ruch perjodyczny, drgający). Ruch wypadkowy odbywa się po kole o promieniu r. W mechanice też najczęściej używa się parametrowego przedstawienia linij krzywych.

Przedstaw parametrowo ogólną formę równania koła! Okazać, że linję prostą można przedstawić w parametrowej postaci:

$$x = c + c_1 t$$
$$y = b + b_1 t.$$

§ 19. Koło i linja prosta. Styczna. Dwa koła.

Aby rozważyć wzajemne położenie koła i prostej na płaszczyźnie badamy równocześnie równania koła i prostej:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= r^2 \\ y &= ax+b \end{aligned} \qquad (b)$$

Interesują nas przedewszystkiem punkty przecięcia się tych linij, t. j. punkty wspólne tym linjom. Wyrażając się algebraicznie: są to takie pary współrzędnych x, y, które spełniają obydwa równania (b), to znaczy rozwiązania tego układu równań. Rugując n. p. y otrzymamy:

$$x^2+\frac{2ab}{1+a^2}x=\frac{r^2-b^2}{1+a^2} \qquad (c)$$

x_2, y_2 spełniają równanie (1). Zatem na wyznaczenie punktu styczności otrzymujemy jeden warunek:

$$x_2x_1 + y_2y_1 = r^2 \qquad (2)$$

w którym x_2, y_2, r, są liczbami znanemi.

Drugi warunek, jaki musi spełniać punkt styczności, jest: punkt ten leży na kole. Więc:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \qquad (3)$$

Obliczając z równań (2) i (3) niewiadome x_1, y_1 otrzymamy szukane punkty styczności (dwie pary wartości x_1, y_1!).

Podstawiając te wartości w równanie (1), otrzymamy równania dwóch stycznych do koła z punktu $P(x_2, y_2)$.

Zagadnienie to można także rozwiązać, powołując się na znane z planimetrji konstrukcyjne rozwiązanie. Punkty styczności otrzymujemy jako punkty przecięcia się koła (fig. 48):

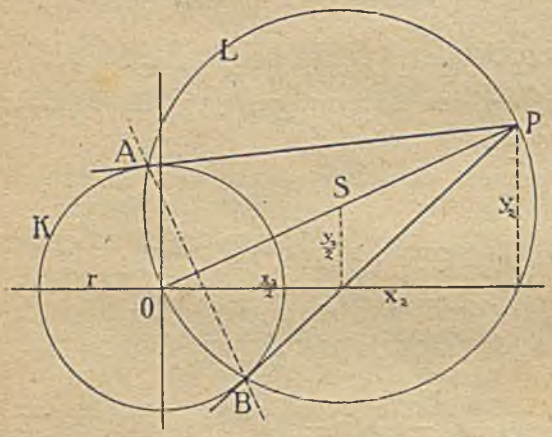


Fig. 48.

$$K \ldots . x^2 + y^2 = r^2$$

z kołem L, o środku:

$$S\left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right)$$

a o promieniu:

$$OS = \sqrt{\frac{x_2^2 + y_2^2}{4}}$$

a więc koła:

$$L \ldots . \left(x - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_2}{2}\right)^2 = \frac{x_2^2 + y_2^2}{4}$$

Porządkując równanie L i odejmując od niego równanie K, otrzymamy równanie pierwszego stopnia (r. linji prostej):

$$xx_2 + yy_2 = r^2.$$

Zamiast badać punkty przecięcia się dwóch kół K i L, możemy więc badać punkty przecięcia się koła z prostą:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$xx_2 + yy_2 = r^2.$$

Punkty styczności leżą na kole i na tej prostej. Prostą, łączącą punkty styczności A i B, nazywamy cięciwą styczności lub *biegunową punktu P*, z którego wykreślono styczne. Wypro-

wadziliśmy więc przy tej sposobności równanie biegunowej punktu $P(x_2, y_2)$:

$$xx_2 + yy_2 = r^2 \tag{40}$$

Widzimy stąd, że równanie biegunowej ma zupełnie tę samą formę, co równanie stycznej. Istotnie styczna jest tylko specjalnym przypadkiem biegunowej: jeżeli punkt $P(x_2, y_2)$ zbliża się do koła, to cięciwa styczności zbliża się do stycznej (narysuj kilka położeń!); jeżeli wreszcie punkt P padnie na obwód koła, to P będzie punktem styczności, więc:

$$x_2 = x_1$$

$$y_2 = y_1$$

i równanie biegunowej stanie się równaniem stycznej. Jeżeli koło jest podane w formie ogólnej, to równanie biegunowej jest:

$$(x-p)(x_2-p) + (y-q)(y_2-q) = r^2 \tag{41}$$

przyczem x_2, y_2 oznaczają współrzędne dowolnego punktu P, leżącego nie koniecznie na kole.

Przykład 1. Znaleźć równania stycznych z punktu $P(14, 2)$ do koła: $x^2 + y^2 = 100$.

Pierwszy sposób. Równanie stycznej ma postać:

$$xx_1 + yy_1 = 100$$

Ponieważ P leży na stycznej, przeto:

$$14x_1 + 2y_1 = 100$$

Jest to jedno równanie na wynalezienie niewiadomych $x_1 y_1$; drugiem równaniem jest:

$$x_1^2 + y_1^2 = 100$$

ponieważ punkt styczności leży na kole.

Rozwiązując te dwa równania, otrzymamy współrzędne punktów styczności:

$$x_1 = 6, \quad y_1 = 8$$

$$x'_1 = 8, \quad y'_1 = -6$$

Równania stycznych są więc:

$$\begin{cases} 6x + 8y = 100 \\ 8x - 6y = 100 \end{cases}$$

Drugi sposób. Punkty styczności leżą na kole i na cięciwie styczności, t. j. biegunowej punktu P. Spełniają więc równania:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 100 \\ 14x + 2y &= 100 \end{aligned}\right\}$$

Rozwiązując ten układ równań dochodzimy do tego samego wyniku co poprzednio.

Przykład 2. Znaleźć wspólne styczne kół: $x^2+y^2=25$ i $(x-10)^2+y^2=64$.

Szukajmy najpierw punktu styczności x_1y_1 stycznej do pierwszego koła, t. j. stycznej $xx_1+yy_1=25$.

Ponieważ jej odległość od środka drugiego koła S (10,0) ma być równa promieniowi tego drugiego koła t. j. 8, przeto stosując wzór na odległość punktu od prostej (wzór 31) otrzymamy

$$d=\left|\frac{10x_1+0\cdot y_1-25}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\right|=8$$

Ale $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=5$, ponieważ (x_1, y_1) leży na kole, więc zostanie

$$10x_1-25=\pm 5\cdot 8$$

a stąd

$$x_1=-\tfrac{3}{2} \quad \text{lub} \quad +6{\cdot}5.$$

Druga wartość jest nieprzydatna, ponieważ w pierwszem kole nie odpowiada jej żaden rzeczywisty punkt. Natomiast dla pierwszej wartości otrzymamy $y_1=\pm\frac{\sqrt{91}}{2}$.

Wobec tego równania dwóch wspólnych stycznych są:

$$-\tfrac{3}{2}x\pm\frac{\sqrt{91}}{2}y=25$$

Można też otrzymać te wspólne styczne inną drogą, przy pomocy środka podobieństwa dwóch kół (por. ćwiczenia VI. zad. 32 i 33).

Dwa koła. Aby zbadać położenie dwóch kół:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \tag{1}$$

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \tag{2}$$

szukamy przedewszystkiem ich punktów przecięcia. Odejmując drugie równanie od pierwszego, otrzymamy:

$$(a-a_1)x+(b-b_1)y+(c-c_1)=0 \tag{3}$$

Jest to równanie pierwszego stopnia, a więc równanie jakiejś linji prostej. Zamiast badać równania (1) i (2), możemy teraz badać (1) i (3) lub (2) i (3), t. j. przecinanie się koła z prostą. Zależnie od tego, czy ta prosta przecina koło, styka się z niem lub go nie przecina, koła (1) i (2) przecinają się w dwóch punktach, stykają się lub nie mają żadnego punktu wspólnego.

Prosta (3) jest linją potęgową dwóch kół, t. j. linją, której każdy punkt ma równe potęgi ze względu na obydwa koła. Wykazujemy to, używając formy $(x-p)^2+(y-q)^2-r^2=0$. Okazuje się (narysuj odpowiednią figurę!), że, gdy punkt x, y leży poza kołem, w odległości d od środka, to:

$$d^2-r^2=(x-p)^2+(y-q)^2-r^2=s^2,$$

gdzie s oznacza odcinek stycznej z punktu poza kołem. Kwadrat tego odcinka jest zaś — jak wiadomo — potęgą punktu $P(x, y)$ ze względu na koło.

Podobnie, gdy punkt P leży wewnątrz koła, $d^2-r^2=-c^2$, gdzie c oznacza połowę cięciwy prostopadłej do prostej łączącej P z środkiem koła; liczba $-c^2$ nazywa się potęgą punktu P ze względu na koło.

W obydwu przypadkach lewa strona równania koła sprowadzonego do zera — nazwijmy ją krótko K_1 — przedstawia potęgę punktu (x, y) ze względu na koło.

Jeżeli mamy drugie koło $K_2=0$, a potęgi mają być równe dla obu kół, to musi być $K_1=K_2$, czyli punkt (x, y) musi spełniać równanie

$$P_1=K_1-K_2=0$$

a to jest właśnie nasze równanie (3).

Biorąc pod uwagę jeszcze trzecie koło o równaniu $K_3=0$, możemy utworzyć jeszcze dwie linje potęgowe:

$$P_2=K_1-K_3=0$$
$$P_3=K_3-K_2=0$$

Z formy tych trzech równań widać, że pierwsze jest sumą dwóch pozostałych:

$$P_1=P_2+P_3=0$$

a to dowodzi, że te 3 proste przecinają się w jednym punkcie (por. § 15 wzór 32 dla $k_1=k_2=1$). Dowiedliśmy więc także, że: *linje potęgowe trzech kół przecinają się w jednym punkcie, zwanym środkiem potęgowym trzech kół* — o ile nie są równoległe lub nie nakrywają się.

Jeżeli ten punkt leży zewnątrz trzech kół, to odcinki stycznych wykreślonych z tego punktu do 3 kół są równe. Możemy więc z tego punktu jako środka zakreślić koło, które przetnie trzy dane koła pod kątem prostym. Takie koło prostopadłe do kilku innych kół nazywamy kołem ortogonalnem.

Na co zamienia się koło ortogonalne, gdy trzy linje potęgowe są równoległe? Ile kół ortogonalnych istnieje, jeżeli 3 linje potęgowe nakrywają się?

Ćwiczenia VI

§ 18. 1. Znaleźć środki i promienie kół:

a) $(x-3)^2+(y+5)^2=64$;
b) $x^2+y^2+4x-12y+31=0$;
c) $x^2+y^2-3x+5y=\frac{1}{2}$;
d) $x^2+y^2-10x=0$.

2. Jakie są obrazy geometryczne równań:

$$x^2+y^2-14x+2y+34=0$$
$$x^2+y^2-14x+2y+50=0$$
$$x^2+y^2-14x+2y+66=0.$$

3. Zbadać, które z punktów: $A(2, 11)$, $B(-7, 1)$, $C(5, 8)$, $D(-1, 4)$ leżą wewnątrz, a które zewnątrz koła: $x^2+y^2-8x+6y-75=0$, nie rysując koła.

4. Wykazać, że w czworokącie wpisanym w koło suma iloczynów boków przeciwległych równa się iloczynowi przekątni, na przykładzie: $x^2+y^2=100$. Obrać na tem kole dowolnie 4 punkty.

5. Wyprowadzić wierzchołkowe równanie koła o promieniu r, t. j. jeżeli koło dotyka w początku układu *a)* osi Y-ów, *b)* osi X-ów.

6. W jakim punkcie trafia koło $x^2+y^2=49$ promień nachylony do osi X-ów pod kątem, którego:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}\ ?$$

7. Znaleźć równanie koła, którego środek leży w punkcie przecięcia się prostych $y+4x+1=0$ i $2x-y+5=0$, a które przechodzi przez punkt $A(2, -3)$.

8. Podać równanie koła, którego środek leży w punkcie $S(5, 8)$, a które dotyka prostej $2x-5y=20$.

9. Przez trzy punkty o współrzędnych $A(20\,m, 10\,m)$, $B(-10\,m, 30\,m)$, $C(-30\,m, -40\,m)$ wytyczyć koło; obliczyć położenie środka i promień.

10. Podać równanie koła, przechodzącego przez punkty:

a) (0, 2), (—1, 3), (5, 0);
b) (8, 1), (3, 6), (12, 9);
c) (2, —1), (4, 3), (—2, —1).

11. Podać równanie koła opisanego na trójkącie:

$$y+2=x,\ y=5x+26,\ 3y+2x=44.$$

12. Znaleźć równanie koła wpisanego w trójkąt:

$$5x+12y-2=0,\ 4x+3y+5=0,\ 3x-4y-15=0.$$

13. Podać równanie koła, które się styka z kołem $x^2+y^2-4y=0$, a którego środek leży w punkcie (4, —1) (dwa przypadki: styczność zewnętrzna i wewnętrzna).

14. Jaką drogę zakreśla punkt pobudzony wzdłuż osi X-ów do ruchu, określonego prawem $s_1=3\cos t$ a wzdłuż osi y-ów $s_2=3\sin t$?

15. Jaką wartość musi mieć b, aby prosta

$$y=2x+b$$

była styczną do koła $x^2+y^2=9$? Dla jakich wartości b prosta nie przecina koła?

16. Jaką wartość musi mieć r, aby prosta $y=2x+3$ była styczną do koła $x^2+y^2=r^2$?

17. Podać równanie stycznej do koła

$$x^2+y^2=25$$

w punkcie $A(-3, 4)$.

18. Znaleźć równanie stycznej do koła $x^2+y^2=16$, jeżeli jej współczynnik kierunkowy: $a=3$.

19. Koło: $x^2+y^2=36$ przecięto prostą $y=-x\sqrt{11}+6.\sqrt{11}$; znaleźć środek odciętego łuku i styczną przez ten środek przechodzącą.

20. Wykazać analitycznie, że styczna jest prostopadła do promienia, przechodzącego przez punkt styczności.

21. Wykazać analitycznie, że styczna równoległa do cięciwy połowi łuk, należący do tej cięciwy. (Prosta, łącząca punkt styczności ze środkiem koła, połowi odp. kąt środkowy).

22. Znaleźć styczne z punktu: (7, 1) do koła $x^2+y^2=25$.

23. Znaleźć styczne do koła: $x^2+y^2-4x+6y+8=0$, mające współczynnik kierunkowy: $a=2$.

24. Pod jakim kątem przecina prosta:

$$4x+3y=12, \text{ koło } x^2+y^2-6x-4y=0?$$

(Kątem linji krzywej z linją prostą nazywamy kąt, utworzony przez styczną w badanym punkcie).

25. *a)* Pod jakim kątem przecinają się koła:

$$x^2+y^2=4, \quad (x-5)^2+y^2=16$$

b) Znaleźć styczną w punkcie, gdzie się stykają koła:

$$x^2+y^2-2y=0$$
$$x^2+y^2-6x-10y+18=0?$$

26. Pod jakim kątem widać koło:

$$x^2+y^2=289$$

z punktu A (7, 23).

27. Wyprowadzić równanie koła, przechodzącego przez punkty (3, 4)(—3, 4) i dotykającego prostej $5y-12x=65$. (Konstrukcja!).

28. Zbudować równanie koła, dotykającego osi x-ów i dwóch kół (zewnętrznie):

$$x^2+y^2=1$$
$$(x-5)^2+y^2=4.$$

29. Zbudować równanie koła, dotykającego zewnętrznie trzech kół:

$$(x-3)^2+y^2=1$$
$$(x-1)^2+y^2=4$$
$$(x+3)^2+(y+3)^2=16.$$

30. Jeżeli biegun P (6, 5) koła $x^2+y^2=9$ posuwa się po prostej $2y-x-4=0$, wykazać, że jego biegunowa obraca się około pewnego punktu.

Wskazówka: obrać kilka położeń bieguna, znaleźć równanie biegunowej dla każdego położenia bieguna i wykazać, że te proste przecinają się w jednym punkcie.

31. Wykazać, że prosta, przechodząca przez środek koła i biegun, jest harmonicznie podzielona punktami przecięcia się z kołem, z biegunową i biegunem.

[N. p. Koło: $x^2+y^2=16$, biegun P (7, 0)].

32. W kołach $x^2+y^2=25$ i $(x-8)^2+y^2=4$ wykreślić dwa promienie równoległe o współczynniku kierunkowym $\frac{4}{3}$; końce ich połączyć i znaleźć punkt przecięcia się tej linji z prostą łączącą środki (zewnętrzny środek podobieństwa). Zrób to samo dla promieni prostopadłych do osi x-ów.

33. Na podstawie poprzedniego zadania znaleźć wspólne styczne zewnętrzne kół: $x^2+y^2=25$ i $(x-8)^2+y^2=4$.

34. Wykazać, że punkty przecięcia się stycznych prostopadłych do siebie spełniają równanie koła współśrodkowego z danem kołem. Obrać koło $x^2+y^2=r^2$.

35. Wykazać, że koło, przechodzące przez środki trzech boków dowolnego trójkąta, przechodzi także przez spodki trzech wysokości: (n. p. A (3, 1), B (9, 5), C (5, 7). (Koło Feuerbacha).

36. Wykazać, że jeżeli z dowolnego punktu P koła opisanego na trójkącie poprowadzimy prostopadłe do trzech boków, to ich spodki leżą na jednej prostej. (Prosta Simsona). Wierzchołki trójkąta obrać: A (—6, 0), B (6, 0), C (4, 5).

Rozdział VII

Ogólne uwagi o dyskusji równań linij krzywych

§ 20. Dyskusja równań linij krzywych.

Nie uciekając się do graficznego przedstawiania równania, możemy już wiele wyczytać z samego równania.

Tak n. p. podstawiając $x=0$ w równanie badanej linji otrzymamy odcinki, jakie ta linja tworzy na osi y-ów, a podobnie podstawienie $y=0$ prowadzi do obliczenia odcinków na osi x-ów.

Stopień linji krzywej. Badając ogólniej punkty przecięcia się linji krzywej z dowolną prostą: $y=ax+b$ (lub $x=c$), otrzymamy w ogólności tyle punktów przecięcia, ile wynosi stopień równania, (niektóre z tych współrzędnych mogą wypaść urojone, mogą być także jednakowe). Jeżeli prosta przecina linję krzywą najwyżej w n punktach, linję tę nazywamy linją n-tego stopnia. Stopień linji krzywej równa się więc stopniowi jej równania (wiadomo zaś, że stopniem równania nazywamy najwyższą sumę wykładników przy zmiennych x i y zawartych w jednym wyrazie).

N. p. koło $x^2+y^2=r^2$ jest linją 2-go stopnia; podobnie linje przedstawione równaniami: $y^2=8x$, $xy=16$ i t. p. Natomiast obrazy geometryczne równań $y=x^3$, $x^2(5-y)=10$ i t. p. są linjami 3-go stopnia.

Symetrja względem osi. Jeżeli jakaś linja jest symetryczna względem osi x-ów, to do każdego jej punktu nad osią x-ów znajdziemy odpowiedni punkt pod osią, w równej odległości od osi, leżący również na tej linji krzywej. Jeżeli zatem $P(x_1, y_1)$ spełnia równanie badanej linji, to i punkt $P(x_1, -y_1)$ musi spełniać jej równanie: równanie nie zmieni się więc zupełnie lub zmieni się na równoważne, jeżeli za y podstawimy: $-y$. Jest to warunek nietylko konieczny, ale i wystarczający. Podobnie ocenia się symetrję względem osi y-ów. Równanie przedstawia linję symetryczną względem osi y-ów, jeżeli się nie zmienia przy zastąpieniu zmiennej x wartością przeciwną: $-x$.

N. p. *a)* $x^2+y^2=r^2$ przedstawia linję symetryczną względem osi, bo nie zmienia się, gdy za x podstawimy $-x$; albowiem:

$$(-x)^2+y^2=x^2+y^2, \text{ i } x^2+(-y)^2=x^2+y^2.$$

b) Linja przedstawiona równaniem $y^2=8x$ jest symetryczna względem osi x-ów, bo $(-y)^2=y^2$ a nie jest symetryczną względem osi y-ów, bo po podstawieniu $-x$ za x zamienia się na $y^2=-8x$.

c) Linja przedstawiona równaniem $y+5x=6$ nie jest symetryczna ani względem osi x-ów, ani względem osi y-ów, bo zmienia się przy podstawieniach $-x$, lub $-y$ za x lub y na: $-y+5x=6$ lub $y-5x=6$, a te równania przedstawiają już zupełnie inne linje, ponieważ nie są równoważne z pierwotnem równaniem.

Symetrja względem początku układu. Punkty A i A' (Fig. 49) nazywają się symetryczne względem punktu O, jeżeli leżą na tej samej prostej, przechodzącej przez O, po przeciwnych stronach punktu O, ale w równych odległościach. Jeżeli współrzędne jednego punktu są: (x_1, y_1), to współrzędne drugiego punktu muszą być: $(-x_1, -y_1)$. Figura, której wszystkie punkty są parami symetryczne względem punktu O, jest cała symetryczna względem O. Jeżeli więc (x_1, y_1) spełniają równanie badanej linji, to i $(-x_1, -y_1)$ muszą spełniać jej równanie. Warunek ten jest zarazem wystarczający. A więc: równanie przedstawia linję symetryczną względem początku układu, jeżeli się to równanie nie zmienia przez równoczesne podstawienie: $-x$, $-y$ za x, y.

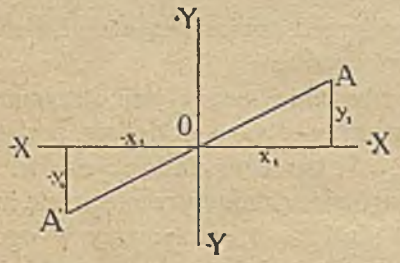


Fig. 49.

N. p. *a)* $x^2+y^2=r^2$ po podstawieniu $-x$, $-y$ za x, y przechodzi na: $(-x)^2+(-y)^2=r^2$, czyli: $x^2+y^2=r^2$, a więc nie zmienia się. Linja przedstawiona tem równaniem jest symetryczna względem punktu O.

b) $y=5x$. Przez podstawienie $-x$, $-y$ otrzymamy $-y=5.(-x)$, a to równanie jest równoważne z $y=5x$, a więc ta linja jest symetryczna względem początku układu.

c) $y^2=8x$. Podstawienie $-x$, $-y$ daje: $y^2=-8x$, linja ta nie jest więc symetryczna względem punktu O.

Aby wykryć inne osie symetrji oprócz osi współrzędnych i inne środki symetrji, oprócz początku układu, trzeba wykonywać odpowiednie obroty i przesunięcia.

N. p. $x^2+y^2-8x-4y-5=0$.

Dla tej krzywej ani oś x-ów, ani oś y-ów nie jest osią symetrji (wykaż!). Jeżeli jednak przesuniemy osie o $+4$ i $+2$, otrzymamy równanie $x^2+y^2=25$,

w którem osie współrzędnych są już osiami symetrji. Widocznie więc w dawnej figurze proste $x=4$ i $y=2$ były osiami symetrji. Narysuj!

Granice rozciągania się linij krzywych. Granice, między jakiemi zawiera się linja krzywa, otrzymujemy, obliczając, dla których wartości x przestaje być y liczbą rzeczywistą i odwrotnie: dla których y przestaje być x liczbą rzeczywistą.

N. p. *a)* Zbadajmy pod tym względem linję określoną równaniem:

$$x^2+4y^2=36.$$

Stąd: $x=\pm\sqrt{36-4y^2}$, $\quad y=\pm\frac{\sqrt{36-x^2}}{2}$.

Widzimy z tych równań, że x jest rzeczywiste tylko dla tych wszystkich y, które są zawarte w granicach $-3.....+3$; dla innych y otrzymujemy urojone x. Wzdłuż osi x-ów sięga więc badana linja od -3 do $+3$; poza proste $x=+3$ i $x=-3$ nie rozciąga się zupełnie. Podobnie w kierunku osi y-ów linja sięga od -6 do $+6$, a poza prostemi $y=-6$ i $y=+6$ niema już punktów tej linji.

b) $y=4x-7$; dla każdej wartości x otrzymujemy rzeczywiste y i odwrotnie. Linja ta jest więc nieograniczona zarówno w kierunku osi x-ów jak i w kierunku osi x-ów.

c) $9y^2=(x+3)(x-1)(x-2)$. Zbadajmy tylko rozciąganie się tej linji w kierunku osi x-ów. Widzimy, że y będzie urojone, jeżeli $x\leqq-3$, bo wtedy wszystkie czynniki pod pierwiastkiem:

$$y=\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{(x+3)(x-1)(x-2)}$$

są ujemne. Rzeczywiste wartości y otrzymamy, gdy $-3\leqq x\leqq+1$, wtedy bowiem pierwszy czynnik jest dodatni, a dwa pozostałe ujemne. Pod pier-

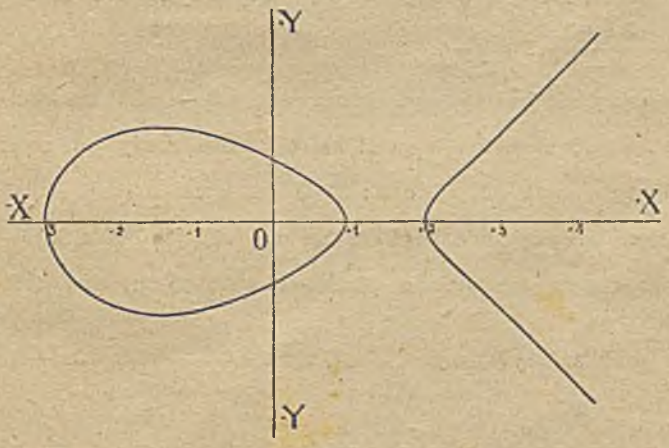


Fig. 50.

wiastkiem mamy więc w tym wypadku liczbę dodatnią. Jeżeli $1<x<2$, to ostatni czynnik jest ujemny, a dwa początkowe dodatnie, znowu więc y jest

liczbą urojoną. Wreszcie dla wszelkich $x \geq 2$ jest y rzeczywiste. Badana linja zaczyna się więc od $x=-3$ i sięga do $x=+1$; potem mamy przerwę od $x=+1$ aż do $x=+2$ a odtąd ciągnie się już krzywa nieograniczenie. Obrazem jej jest fig. 50; widzimy, że linja ta składa się z dwóch oddzielnych gałęzi. Zbadaj odcinki tej linji na osi y-ów! Zbadaj jej symetrję!

Punkty nieskończonościowe. Dla postaci linij krzywej ważnem jest bardzo zbadanie, czy istnieją takie skończone wartości a zmiennej x, że, gdy x dąży do a, to y dąży do nieskończoności lub takie y, dla których x dąży do nieskończoności. Te wartości nazywamy punktami nieskończonościowemi funkcji, wyrażającej y w zależności od x lub x w zależności od y.

N. p. *a)* $y=\frac{3x+2}{x-4}$. Widzimy z tego równania, że y jest skończone dla wszelkich skończonych x, z wyjątkiem wartości $x=4$; gdy x dąży do 4, y dąży do $\pm\infty$. Rozwiązując znowu dane równanie według zmiennej x, otrzymamy: $x=\frac{2+4y}{y-3}$. Stąd znowu widzimy, że x jest skończone dla wszelkich skończonych wartości y, z wyjątkiem $y=3$; gdy zaś y dąży do 3, x dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$.

Przy dokładniejszej dyskusji należy także zbadać, w jaki sposób wzrasta y z wzrostem x i odwrotnie; wzrastanie to należy śledzić aż do nieograniczonego wzrostu zmiennej niezależnej.

Przykłady: a) $y^2=9x$ czyli $y=\pm 3\sqrt{x}$. Jeżeli x jest ≥ 0 i wzrasta, to zarówno $+3\sqrt{x}$ jak i $-3\sqrt{x}$ wzrastają co do wartości bezwzględnej. Gdy x dąży do nieskończoności, to i y dąży do nieskończoności. Otóż z wzrostem x linja ta coraz bardziej się oddala od osi x-ów w górę i w dół.

b) $y=\frac{3x+2}{x-4}=3+\frac{14}{x-4}$.

Posuwajmy się po osi x-ów począwszy od wielkich wartości ujemnych. Dla takich wartości ułamek $\frac{14}{x-4}$ jest bardzo mało różny od zera, a więc y różni się bardzo mało od wartości: 3. Z wzrostem x (t. j. gdy x przybiera coraz mniejsze bezwzględnie wartości ujemne) maleje y. Dla $x=-\frac{2}{3}$ przechodzi y przez zero, a następnie przybiera wartości ujemne coraz większe (bezwzględnie).

Gdy x zbliża się (rosnąc) do $+4$, ułamek $\frac{14}{x-4}$ dąży do $-\infty$, a więc i y dąży do $-\infty$.

Gdy x ma wartość cokolwiek większą od 4, ułamek $\frac{14}{x-4}$ ma bardzo wielką wartość dodatnią. Gdy więc x dąży do $+4$ malejąc, y dąży do $+\infty$.

Gdy x wzrasta przez $+4$ coraz dalej, ułamek $\frac{14}{x-4}$ maleje; gdy x dąży do $+\infty$, y dąży do $+3$.

Na podstawie tej dyskusji wykreślamy obraz danego równania, składający się z dwóch gałęzi nieskończonych (fig. 51).

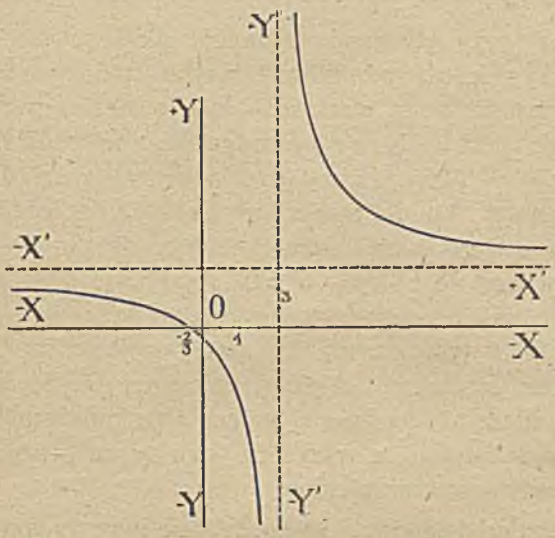


Fig. 51.

Przesuwając osie o odcinki $+4$ i $+3$, otrzymamy równanie $x'y' = 14$; linja ta jest symetryczna względem nowego początku układu. W pierwotnem położeniu osi linja ta jest widocznie symetryczna względem punktu przecięcia się prostych $x = 4$ i $y = 3$, równoległych do osi.

c) Badając podobnie przebieg linji krzywej:

$$y = x(x+3)(x+4)$$

sprawdzamy, że dla wielkich x ujemnych y ma wielkie wartości ujemne. Dla $x = -4$, jest $y = 0$. Stąd począwszy y jest dodatnie aż do $x = -3$, gdzie znowu $y = 0$; poza $x = -3$ jest y ujemne (dlaczego?) aż do $x = 0$, gdzie poraz trzeci $y = 0$. Stąd począwszy wzrasta y nieograniczenie z wzrostem x. Narysuj obraz geometryczny tego równania!

Obszary. Każda linja jest miejscem geometrycznem punktów, spełniających jakieś równanie (algebraiczne lub przestępne), o dwóch zmiennych x, y. Sprowadźmy wszystkie wyrazy tego równania na pierwszą stronę i nazwijmy to wyrażenie, tę funkcję dwóch zmiennych: $f(x, y)$. Otóż miejscem geometrycznem punktów $P(x, y)$, dla których

$$f(x, y) = 0$$

jest w ogólności jakaś linja. Jeśli zaś weźmiemy pod uwagę inne punkty płaszczyzny i podstawimy ich współrzędne x, y w to równanie, otrzymamy już nie zero, ale jakąś liczbę dodatnią lub ujemną. Dla tych innych punktów płaszczyzny będzie więc:

$$f(x, y) > 0 \text{ lub } f(x, y) < 0.$$

Okazuje się, że wszystkie punkty, dla których $f(x, y)$ jest dodatnie najczęściej nie są dowolnie porozrzucane po płaszczyźnie, nie leżą też na jednej lub kilku linjach, ale wypełniają zwykle całe zwarte części płaszczyzny. Podobnie zachowują się punkty, dla których $f(x, y)$ jest liczbą ujemną. Te części płaszczyzny, w których lewa strona

równania krzywej ma stały znak, nazywamy obszarami. Przy dyskusji równania linji dobrze jest zwrócić uwagę także na te obszary i wyróżnić, które obszary są dodatnie a które ujemne dla danego równania $f(x, y)=0$.

Tak np. widzieliśmy przy dyskusji równania linji prostej: $y-ax-b=0$, że dla wszystkich punktów leżących nad prostą trójmian $y-ax-b$ miał wartość $+$, a wartość $-$ dla punktów pod prostą. Otrzymaliśmy więc dwa obszary odgraniczone prostą. Podobnie przy kole $x^2+y^2=r^2$ otrzymaliśmy dwa obszary: wnętrze koła było obszarem ujemnym, bo dla wszystkich punktów leżących wewnątrz koła jest $x^2+y^2-r^2<0$, a zewnątrz koła leży obszar dodatni, scharakteryzowany tem, że $x^2+y^2-r^2>0$. Analizując w podobny sposób np. równanie linji przedstawionej na fig. 50 dochodzimy z łatwością do wniosku, że w tym przypadku mamy trzy obszary: wnętrze owalu jest obszarem ujemnym, część płaszczyzny sięgająca od obwodu owalu na zewnątrz aż do drugiej gałęzi (nieskończonej) linji krzywej jest obszarem dodatnim, a wszystkie punkty na prawo od drugiej gałęzi tworzą znowu obszar ujemny.

Równanie linji krzywej przedstawionej na fig. 51 daje inny podział na obszary, gdy to równanie badamy w postaci $y-\frac{3x+2}{x-4}=0$, a inny, gdy obie strony pomnożymy przez mianownik. Prostszy jest podział w tym drugim przypadku: część płaszczyzny leżąca między obydwoma gałęziami krzywej jest wtedy obszarem ujemnym a reszta płaszczyzny, na zewnątrz obu gałęzi, tworzy dwa obszary dodatnie (które z pewnych względów uważa się za jeden obszar złączony niejako w nieskończoności). Gdybyśmy jednak przeprowadzili dyskusję równania w postaci $y-\frac{3x+2}{x-4}=0$, otrzymalibyśmy cztery obszary: znak zmieniałby się także przy przejściu przez linję $x=4$ (prostopadłą do osi x-ów). Wtedy obszar na lewo u dołu byłby ujemny, obszar między lewą gałęzią krzywej a prostą $x=4$ dodatni, między $x=4$ a prawą gałęzią ujemny, a poza prawą gałęzią znowu dodatni. Wogóle znak może się zmieniać tylko przy przejściu przez linję krzywą i przez miejsca nieciągłości funkcji $f(x, y)$.

Badanie obszarów oddaje podobne usługi przy dyskusjach *nierówności*, jak badanie samych linij krzywych przy dyskusjach *równań*. (Odpowiedz np. przy pomocy fig. 51 na pytanie: dla jakich x, y jest iloczyn $x.y<14$, przy pomocy koła: które liczby mają sumę kwadratów mniejszą od 100?).

Streszczając badania, przeprowadzone w tym rozdziale, powiemy:

Przy dyskusji równania linji krzywej zwracamy uwagę na następujące momenty:

1. Punkty przecięcia się linij z osiami współrzędnych;
2. Stopień linji;
3. Symetrję względem osi i względem punktu;
4. Dla których y jest x urojone, a dla których rzeczywiste i podobnie dla y?
5. Dla których wartości x dąży y do nieskończoności i podobnie dla y?
6. Jakim zmianom ulega rzędna, gdy x zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$?
7. Na jakie obszary dzieli linja płaszczyznę?

Inne szczegóły dyskusji, jak np. badanie najniższych i najwyższych punktów krzywej i t. p. wymagają już zaznajomienia się z rachunkiem różniczkowym.

Ćwiczenia VII

Przeprowadzić dyskusję równania i wykreślić krzywą;

1. $y=\frac{1}{4}x^2$
2. $x^2+9y^2=36$
3. $4x^2-9y^2=9$
4. $y=\frac{x}{x-5}$
5. $y^2=x^3$
6. $y=\frac{1}{10}x(x+5)(x-4)$
7. $16y^2=(x+1)^2(x-3)$
8. $y=\frac{(x+3)(x-2)}{(x+1)(x-5)}$
9. $p.v=8$
10. $s=5t^2$
11. $x^2y=36$
12. $y^2(3-x)=x^3$
13. $y^2(4-x)=x^2(4+x)$
14. Wykazać, że dla linji krzywej $x^2-9y^2=9$ przy nieograniczonem wzrastaniu x, dąży $\frac{y}{x}$ do $\frac{1}{3}$.

Rozdział VIII

Parabola

§ 21. Równanie paraboli.

Znamy już miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od stałego punktu (koło) i punktów równo oddalonych od stałej prostej (prosta równoległa). Znamy także miejsca geometryczne punktów równo oddalonych od dwóch stałych punktów (symetralna odcinka) i punktów równo oddalonych od dwóch stałych prostych (symetralna kąta). Zbadajmy teraz z kolei miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od stałego punktu i od stałej prostej.

Linję taką nazywamy parabolą.

Na tej definicji polega konstrukcja dowolnej ilości punktów paraboli. Wykreśla się szereg prostych równoległych do kierownicy, począwszy od prostej, połowiącej odległość ogniska od kierownicy. Biorąc w cyrkiel po kolei odstęp każdej z tych równoległych od kierownicy zakreśla się zawsze z ogniska po dwa łuki aż do przecięcia z odpowiednią prostą równoległą. Każdy z tych punktów przecięcia jest punktem paraboli, ponieważ jego odległość od ogniska jest równa odległości od kierownicy.

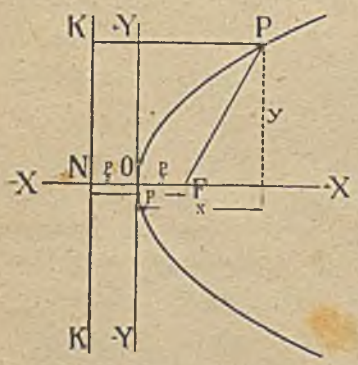


Fig. 52.

Chcąc z definicji paraboli przejść do jej równania we współrzędnych prostokątnych, obierzmy za oś x-ów prostą prostopadłą do kierownicy, przechodzącą przez ognisko, a za oś y-ów prostą prostopadłą do osi x-ów, przechodzącą przez środek odcinka $\overline{NF}$. Stały odcinek $\overline{NF}$ oznaczmy literą p. Ponieważ ognisko

obraliśmy po prawej stronie kierownicy (p dodatnie), to dla każdego punktu paraboli mamy:

$$PF=KP \qquad \text{(a)}$$

(w przeciwnym razie mielibyśmy $PF=-KP$, bo PF musi być liczbą dodatnią).

Warunek ten wyrażamy zapomocą współrzędnych:

$$KP=\frac{p}{2}+x$$

$$PF=\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}$$

Otóż warunek (a) przedstawia się w postaci:

$$\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2} \qquad \text{(b)}$$

czyli

$$y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

a stąd po uporządkowaniu:

$$y^2=2px \qquad (42)$$

Jest to *równanie paraboli, gdy ognisko leży na osi x-ów* po prawej stronie kierownicy. Tu x, y przedstawiają współrzędne dowolnego punktu paraboli, a p jest liczbą stałą dla jednej paraboli, ale inną dla każdej paraboli.

Uwaga. Nasuwa się wątpliwość, czy nie wprowadziliśmy w równanie $y^2=2px$ jakich punktów, nie należących do paraboli, przez podniesienie równania (b) do kwadratu. Otóż wprowadziliśmy obok wartości, spełniających równanie $x+\frac{p}{2}=+\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}$ także wartości: $x+\frac{p}{2}=-\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}$. Ponieważ jednak przy dodatniem p musi być i x dodatnie (aby $y^2=2px$ wypadło dodatnie), a więc i $x+\frac{p}{2}$ będzie dodatnie, przeto żadne rzeczywiste liczby x, y nie spełniają tego drugiego równania. Równanie $y^2=2px$ przedstawia więc tylko punkty paraboli.

Dyskusja. Równanie paraboli:

$$y^2=2px$$

jest równaniem drugiego stopnia, a więc linja prosta może przecinać parabolę najwyżej w dwóch punktach. Parabola jest więc linją krzywą drugiego stopnia.

Dla $x=0$ jest $y=0$ i odwrotnie, parabola ma więc z osiami współrzędnych tylko jeden punkt wspólny, mianowicie początek

układu O (0, 0). Punkt ten nazywamy wierzchołkiem paraboli, a tę postać równania: równaniem wierzchołkowem. Parabola jest linją symetryczną względem osi x-ów, ponieważ równanie jej nie ulega zmianie, gdy za (x, y) podstawimy $(x, -y)$. Linję tę, prostopadłą z ogniska do kierownicy, nazywamy osią paraboli.

Parabola nie jest symetryczna ani względem osi y-ów, ani względem początku układu.

Jeżeli p jest liczbą dodatnią (ognisko po prawej stronie kierownicy), to y jest rzeczywiste dla wszelkich dodatnich x, a urojone dla wszelkich ujemnych x, bo $y = \pm\sqrt{2px}$. Parabola leży wtedy cała po prawej stronie osi y-ów.

Jeżeli p jest liczbą ujemną (ognisko po lewej stronie kierownicy), to y jest rzeczywiste dla ujemnych x, a urojone dla dodatnich. Wtedy cała parabola leży po lewej stronie osi y-ów.

Rzędna y dąży do ∞ tylko wtedy, gdy x dąży do ∞; parabola jest więc linją nieograniczoną, otwartą, rozciągającą się do nieskończoności. Jeżeli x wzrasta od 0 do ∞ (lub do $-\infty$ przy ujemnem p), to y wzrasta stale od 0 do ∞ nad osią x-ów i od 0 do $-\infty$ pod osią.

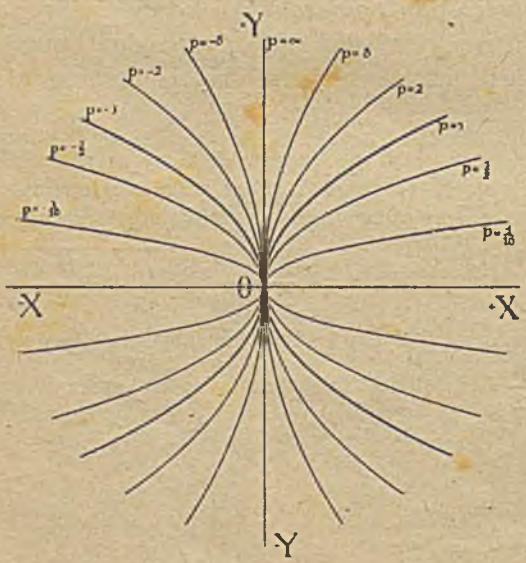


Fig. 53.

Na podstawie tej dyskusji z góry już orjentujemy się, jaki będzie graficzny obraz równania: $y^2 = 2px$.

Przedstawmy na jednym rysunku (fig. 53) parabole dla różnych wartości p. N. p. dla $p=2$, t. j. dla $y^2 = 4x$ otrzymujemy obraz oznaczony napisem $p = 2$. Gdy p zmniejsza się, parabola spłaszcza się coraz bardziej (y należące do każdego x maleje), wreszcie, gdy p dąży do zera, obydwa ramiona paraboli dążą do nakrycia się z osią x-ów. Jeżeli p wzrasta, para-

bola wyprostowuje się, a gdy p dąży do ∞, parabola dąży do nakrycia się z osią y-ów, bo wtedy

$$\lim_{p\to\infty} x = \lim_{p\to\infty} \frac{y}{2p} = 0.$$

Jeżeli p jest ujemne, n. p. $p=-2$, otrzymujemy parabolę $y^2=-4x$, symetryczną do $y^2=4x$. Przy wzrastaniu i maleniu stałej p otrzymujemy parabole podobne, jak po dodatniej stronie osi x-ów.

Widzimy więc, że kształt paraboli zależy od jednej tylko stałej wielkości, podobnie jak rozmiary koła od promienia r. Stałą p, od której zależy kształt paraboli, nazywamy **parametrem paraboli**. Stała p ma jeszcze jedno proste znaczenie geometryczne.

Zbadajmy rzędną paraboli, należącą do ogniska. Ponieważ odcięta ogniska wynosi $x=\frac{p}{2}$, przeto $y=\pm\sqrt{2p.\frac{p}{2}}=\pm p$. Parametr paraboli równa się więc rzędnej wykreślonej w ognisku. Podwójny parametr: $2p$ daje długość cięciwy, przechodzącej przez ognisko.

W podobny sposób można wyprowadzić równanie paraboli, której oś przypada w kierunku osi y-ów a więc i ognisko leży na osi y-ów. Mając jednak już gotowe równanie paraboli zorjentowanej w kierunku osi x-ów, wystarczy obrócić osie (fig. 54) o kąt $\delta=-90^0$, aby dodatni kierunek osi y-ów był osią paraboli.

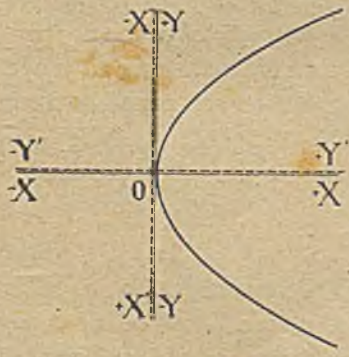


Fig. 54.

Trzeba więc w równaniu paraboli:

$$y^2=2px$$

podstawić za x i y wartości, wynikające z równań obrotu:

$$x=x'\cos(-90^0)-y'\sin(-90^0)$$

$$y=x'\sin(-90^0)+y'\cos(-90^0)$$

czyli

$$x=0+y'$$

$$y=-x'+0$$

Otrzymamy w nowych osiach:

$$x'^2=2py'$$

Mieniając teraz nowe osie z dawnemi, opuszczamy kreski przy x i y i otrzymujemy

$$x^2=2py \qquad (43)$$

Równanie to przedstawia parabolę zwróconą rozwartością do góry lub na dół, zależnie od tego, czy p jest liczbą dodatnią, czy też odjemną.

Jeżeli $p=\frac{1}{2}$, otrzymujemy z wzoru (43):

$$y=x^2$$

a więc parabola jest graficznym obrazem drugiej potęgi. Podobnie parabola $y^2=x$ czyli $y=\pm\sqrt{x}$, otrzymana z wzoru (42) przy $p=\frac{1}{2}$ jest graficznym obrazem drugiego pierwiastka.

Wyprowadziliśmy równania paraboli, gdy jej osią była oś x-ów lub oś y-ów. Jednakże parabola nie zawsze jest położona tak dogodnie; w innych położeniach równanie paraboli nie ma już tak prostej postaci.

Jeżeli przesuniemy osie współrzędnych o odcinki l i m, to równania $y^2=2px$ i $x^2=2py$ przyjmą po uporządkowaniu wyrazów formę:

$$\begin{array}{l} ay^2+by+cx+d=0 \\ \text{lub} \quad ax^2+by+cx+d=0 \end{array} \qquad (44)$$

Cechą charakterystyczną tych równań drugiego stopnia jest:

1. *brak wyrazu xy*, 2. *z wyrazów drugiego stopnia występuje tylko kwadrat jednej zmiennej.*

W takiej postaci przedstawi się więc *równanie każdej paraboli o osi równoległej do osi x-ów lub y-ów.*

Odwrotnie: *każde takie równanie drugiego stopnia formy (44) przedstawia parabolę, jeżeli tylko w niem występują obydwie zmienne.* Wtedy bowiem można zapomocą równań przesunięcia usunąć z tych równań *by* i *d* lub *cx* i *d* i otrzymać po podzieleniu przez *a* formę (42) lub (43), przedstawiającą niewątpliwie parabolę. Jeżeliby zaś w pierwszem równaniu brakło zmiennej x, t. j. gdyby było $c=0$, otrzymalibyśmy

$$ay^2+by+d=0 \qquad (b)$$

Rozwiązując to równanie według y, otrzymamy albo *a)* dwie stałe liczby rzeczywiste: $y_1=\alpha$, $y_2=\beta$, t. j. dwie proste równoległe do osi x-ów, albo *b)* jedną podwójną wartość $y=\alpha$, t. j. jedną prostą równoległą do osi x-ów, albo *c)* dwie urojone wartości y, wtedy równanie *(b)* nie przedstawia żadnego miejsca geometrycznego.

Podobnie rozumujemy, gdy w drugiem z równań (44) brak wyrazu *by*.

Przykład: Zbadać, jaką linję przedstawia równanie:

$$3x^2-4y-6x+23=0 \qquad (1)$$

Wykonujemy przesunięcie:

$$x=x'+l$$
$$y=y'+m$$

którego wielkości na razie nie znamy. Podstawiając te wartości w (1) i porządkując, otrzymujemy:

$$3x'^2+x'(6l-6)-4y'+3l^2-6l-4m+23=0$$

Dobieramy l i m tak, aby współczynnik przy x' i wyraz wolny były zerami, t. j., aby

$$6l-6=0$$
$$3l^2-6l-4m+23=0$$

Stąd otrzymamy:

$$l=1,\quad m=5$$

Wtedy równanie zamieni się na: $3x'^2-4y'=0$, czyli

$$x'^2=\frac{4}{3}y'$$

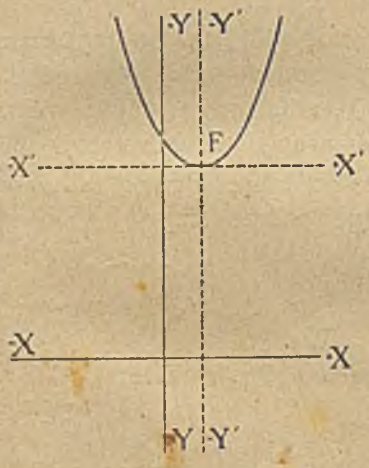


Fig. 55.

To jest parabola, której osią jest nowa oś y-ów, a której ognisko leży w odległości: $p=\frac{2}{3}$ od początku układu.

Wracając do dawnych osi mamy parabolę, której wierzchołek leży w punkcie (1, 5) (fig. 55), zwróconą rozwartością do góry.

Z formy równań (44) widać, że do wyznaczenia paraboli o osi równoległej do jednej z osi współrzędnych potrzeba trzech punktów, albowiem w każdem z tych równań po podzieleniu przez a pozostaną tylko 3 stałe liczby nieoznaczone.

Podstawiając za (x, y) trzy pary danych wartości otrzymamy więc na wyznaczenie trzech nieznanych współczynników 3 równania pierwszego stopnia o 3 niewiadomych.

Równanie paraboli może występować nietylko w formie (44); jeżeli jej oś nie jest równoległa do żadnej z osi współrzędnych, to w równaniu paraboli mogą występować wyrażenia x^2, y^2 i xy.

Jednakowoż wszystkie wyrazy drugiego stopnia muszą tworzyć kwadrat zupełny:

$$(ax+by)^2+cx+dy+e=0. \qquad (45)$$

Dowód. Jeżeli równanie ma formę (45), to wykonując obrót (według wzorów 34)), otrzymamy

$$[a(x'\cos\delta - y'\sin\delta) + b(x'\sin\delta + y'\cos\delta)]^2 +$$
$$+ c(x'\cos\delta - y'\sin\delta) + d(x'\sin\delta + y'\cos\delta) + e = 0$$

lub

$$[x'(a\cos\delta + b\sin\delta) + y'(-a\sin\delta + b\cos\delta)]^2 +$$
$$+ x'(c\cos\delta + d\sin\delta) + y'(-c\sin\delta + d\cos\delta) + e = 0.$$

Dobierając δ tak, aby współczynnik przy x' lub przy y' w nawiasie graniastym odpadł, otrzymamy wyrażenie zawierające z wyrazów drugiego stopnia w x' i y' tylko jeden kwadrat. Np. z żądania, aby odpadł współczynnik $a\cos\delta + b\sin\delta$ przy x' otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{a}{b}.$$

(Jaki warunek na kąt obrotu otrzymamy, żądając, aby odpadł współczynnik przy y'?).

Biorąc taki kąt δ otrzymamy po uporządkowaniu równanie formy: $a'y^2 + b'y' + c'x' + e = 0$, t. j. formy (44).

Odwrotnie, jeżeli równanie ma formę (44), to po wykonaniu dowolnego obrotu możemy otrzymać albo znowu formę (44), gdy kąt obrotu jest całkowitą wielokrotnością 90^0, albo formę (45), ponieważ x lub y zastępujemy przy obrocie dwumianem według wzorów (34).

Parabolę, podobnie jak i koło, można także wyrazić zapomocą dwóch równań, używając trzeciej zmiennej pośredniej.

Kładąc:

$$x = at$$
$$y = bt^2$$

otrzymamy istotnie po wyrugowaniu zmiennej t równanie:

$$y = b\frac{x^2}{a^2} \quad \text{czyli}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{b}y$$

Kładąc $\frac{a^2}{b} = 2p$ otrzymujemy formę: $x^2 = 2py$, a więc parabolę.

Takiego przedstawienia paraboli używa się n. p. w fizyce. Równania:

$$\left.\begin{aligned} x &= ct \\ y &= \frac{gt^2}{2} \end{aligned}\right|$$

określają drogę punktu przy rzucie poziomym, t. j. parabolę.

Jest to parametrowe przedstawienie równania paraboli (parametr równania: t ma inne znaczenie, aniżeli parametr paraboli: p!).

§ 22. Parabola i prosta.

Aby zbadać wzajemne położenie linji prostej i paraboli, weźmy pod uwagę ich równania:

$$y^2=2px$$

$$y=ax+b$$ (lub $x=c$, jeżeli prosta jest równoległa do osi y-ów).

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi x-ów, t. j. a nie jest zerem, to na obliczenie punktów przecięcia się prostej z parabolą otrzymujemy układ dwóch równań, z których jedno jest stopnia drugiego a drugie pierwszego. Otrzymamy więc zawsze dwie pary rozwiązań:

albo *a)* rzeczywiste i różne (x_1, y_1) i (x_2, y_2); prosta jest sieczną paraboli;

albo *b)* rzeczywiste i równe (x_1, y_1) i (x_2, y_2); prosta jest styczną paraboli;

lub wreszcie *c)* urojone (x_1, y_1) i (x_2, y_2); prosta nie przecina paraboli.

Jeżeli prosta jest równoległa do osi x-ów, t. j. $a=0$, otrzymujemy układ równań:

$$\left.\begin{aligned} y^2&=2px \\ y&=b \end{aligned}\right\}$$

który ma tylko jedną parę rozwiązań:

$$y=b$$

$$x=\frac{b^2}{2p}$$

Otóż prosta równoległa do osi paraboli przecina ją tylko w jednym punkcie (a nie jest styczną, ponieważ nie jest granicznem położeniem siecznej).

Używając rozumowania zupełnie podobnego jak dla koła [por. str. 76, wzór (37)] można wykazać, że styczna do paraboli przy danym spadku a ma równanie:

$$y=ax+\frac{p}{2a}$$ dla formy $y^2=2px$, a

$$y=ax-\frac{pa^2}{2}$$ dla formy $x^2=2py$.

Przecinanie się linji prostej z parabolą jest najczęściej używanym graficznym sposobem rozwiązywania równań drugiego stopnia o jednej niewiadomej:

$$x^2+ax+b=0 \qquad (1)$$

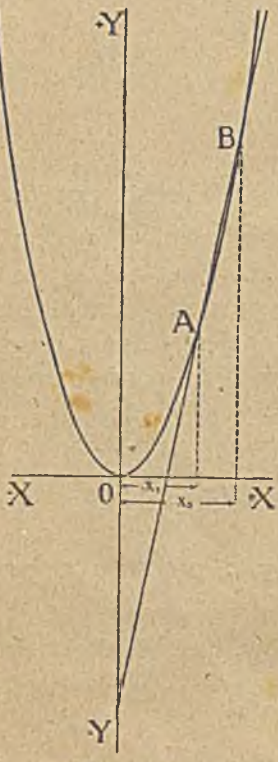


Fig. 56.

W tym celu wykreślą się parabolę $y=x^2+ax+b$ i bada się jej punkty przecięcia z osią x-ów, t. j. z prostą $y=0$.

Prościej jednak przedstawi się graficzne rozwiązanie takiego równania, gdy będziemy je uważali za wynik eliminacji zmiennej y z równań:

$$\begin{cases} y+ax+b=0 \\ y=x^2 \end{cases}$$

Pierwsze równanie przedstawia linję prostą, inną dla każdego równania (1), a drugie najprostszą parabolę, jednakową dla każdego równania 2-go stopnia: (1).

Rysujemy parabolę: $y=x^2$ możliwie najdokładniej na papierze milimetrowym, przykładamy do niej prostą (lineał) $y=ax+b=0$ i odczytujemy odcięte x_1, x_2 punktów, w których ta prosta przecina parabolę. Odcięte te są pierwiastkami równania $x^2+ax+b=0$. Tę stałą parabolę nazywamy szablonem dla równania 2-go stopnia.

Przykład. Rozwiązać graficznie równanie:

$$x^2-5x+6=0.$$

Mając wykreśloną (fig. 56) stałą parabolę $y=x^2$ (t. zw. szablon), rysujemy prostą $y-5x+6=0$. Do wykreślenia jej używamy — jak zwykle — punktów przecięcia z osiami, t. j. $(0,-6)$, $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$.

Odcięte x_1 i x_2 punktów A i B, w których ta prosta przecina parabolę, są pierwiastkami równania $x^2-5x+6=0$.

Wynoszą one $x_1=2$, $x_2=3$.

Dogodność tego sposobu polega na tem, że do rozwiązania wszystkich równań drugiego stopnia wystarczy jeden rysunek, jedna parabola narysowana stale. Rachunki uboczne sprowadzają się tylko do wykonania dzielenia $\frac{b}{a}$ (n. p. w naszym przykładzie 6:5).

Podobne znaczenie, jak parabola $y=x^2$ dla równań 2-go stopnia, ma linja krzywa określona równaniem: $y=x^3$ dla równań trzeciego stopnia.

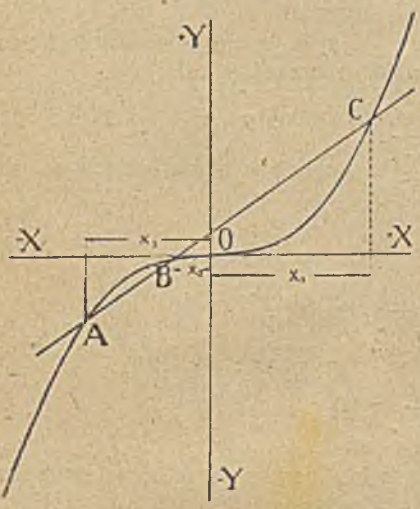


Fig. 57.

Linja ta nazywa się parabolą trzeciego stopnia. Wykażemy, że każde równanie 3-go stopnia można rozwiązać graficznie przy pomocy stałej paraboli: $y=x^3$ i zmiennej prostej $y+px+q=0$.

Dowód. Ogólne równanie 3-go stopnia

$$z^3+az^2+bz+c=0 \qquad (a)$$

można przez podstawienie:

$$z=x-\frac{a}{3}$$

sprowadzić do formy:

$$x^3+px+q=0 \qquad (b)$$

w której brak drugiej potęgi niewiadomej.

To ostatnie równanie można jednak uważać za wynik wyrugowania zmiennej y z równań:

$$y=x^3$$

$$y+px+q=0$$

Geometrycznie znaczy to: znaleźć punkty przecięcia się linji krzywej $y=x^3$ z linją prostą $y+px+q=0$; odcięte x_1, x_2, x_3 tych punktów są pierwiastkami równania (b). Pierwiastki równania (a) otrzymamy stąd z łatwością, używając wzoru $z=x-\frac{a}{3}$.

Na fig. 57 wzięliśmy dla dogodniejszego rysunku $20y=x^3$ i prostą $20y+px+q=0$.

§ 23. Parabola i koło.

Aby obliczyć punkty przecięcia się paraboli z kołem, musimy rozwiązać układ dwóch równań drugiego stopnia o dwóch niewiadomych. W najprostszem położeniu paraboli mamy:

$$x^2=2py$$

$$(x-p')^2+(y-q)^2=r^2.$$

Podstawiając z pierwszego równania $y=\frac{x^2}{2p}$ w drugie równanie, otrzymamy równanie 4-go stopnia na wyznaczenie x, a więc cztery wartości x. Z $y=\frac{x^2}{2p}$ otrzymamy wtedy także 4 wartości y.

Koło przecina więc parabolę w ogólności w 4-ch punktach.

Uwaga. Dwa, trzy lub nawet cztery z tych punktów mogą się nakrywać; otrzymujemy wtedy koło styczne do paraboli.

Odwrotnie: każdy problem 4-go stopnia, t. j. każde równanie 4-go stopnia, można rozwiązać graficznie przy pomocy paraboli i koła.

Przykład. Obliczyć punkty przecięcia się paraboli $y=x^2$ z kołem o środku $S\left(\frac{a}{8}, \frac{7}{8}\right)$ a promieniu $r=\sqrt{\left(\frac{a}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2}$; przytem a niech oznacza cosinus jakiegoś znanego kąta np. cos 24^0.

Równanie tego koła jest:

$$\left(x-\frac{a}{8}\right)^2+\left(y-\frac{7}{8}\right)^2=\frac{a^2}{64}+\frac{49}{64}$$

Podstawiając tu $y=x^2$ i porządkując, otrzymamy:

$$4x^4-3x^2-ax=0 \qquad (b)$$

Jednym pierwiastkiem tego równania jest $x=0$, a więc i $y=0$.

Otóż: jednym punktem przecięcia się koła z parabolą jest początek układu. Inne punkty przecięcia otrzymamy z równania:

$$4x^3-3x-a=0 \qquad (c)$$

Jest to równanie trzeciego stopnia, znane z trygonometrji, jako równanie podziału kąta na trzy równe części (por. Trygonometrja str. 89). Ponieważ tego równania nie potrafimy rozwiązać algebraicznie przy pomocy równań 2-go stopnia, uciekamy się do graficznego rozwiązania.

Rysujemy parabolę $y=x^2$ i koło o środku $S\left(\frac{a}{8}, \frac{7}{8}\right)$ a o promieniu równym odległości tego środka od początku układu $r=\sqrt{\left(\frac{a}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2}$. Odcięte punktów przecięcia się tego koła z parabolą są pierwiastkami równania (b) a zarazem i równania (c). Np. na naszej figurze (fig. 58): $a=\cos 24^0=0{\cdot}91355$, wobec czego: $S\left(0{\cdot}11419, \frac{7}{8}\right)$. Za jednostkę obraliśmy 2 *cm*.

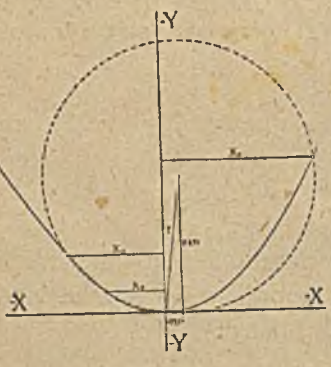


Fig. 58.

Wszystkie konstrukcje, potrzebne do rozwiązania tego zagadnienia, dadzą się wykonać przy pomocy lineału i cyrkla przez skończoną liczbę działań, z wyjątkiem konstrukcji paraboli $y=x^2$, do której trzeba nieskończenie wiele razy używać lineału i cyrkla. Zadanie to nie jest więc rozwiązalne konstrukcyjnie w znaczeniu platońskiem (por. Planimetrja. Tom I, str. 93).

Metodę, którąśmy tu podali, wykrył Descartes. W ten sposób można rozwiązać graficznie każde równanie 4-go stopnia.

§ 24. Dwie parabole.

Równania dwóch dowolnych parabol przedstawiają układ 4-go stopnia. Rozwiązując taki układ, otrzymujemy cztery pary wartości x i y; dwie parabole przecinają się więc w ogólności w czterech punktach.

Przykład. Znaleźć punkty przecięcia się parabol (fig. 59):

$$x^2 = ay$$

$$y^2 = 2ax$$

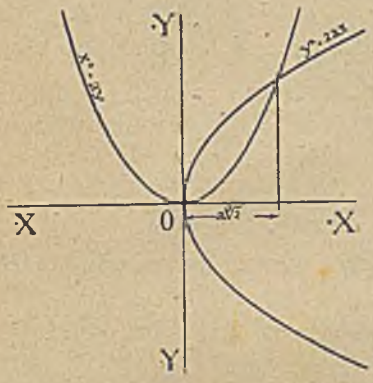


Fig. 59.

Rugując zmienną y otrzymamy:

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax \quad \text{czyli:} \quad x^4 = 2a^3x$$

Jeden pierwiastek tego równania jest $x=0$; odpowiednie y także jest zerem. Otóż jeden punkt przecięcia się danych parabol leży w początku układu. Dzieląc to równanie przez x, otrzymamy: $x^3 = 2a^3$. Rzeczywisty pierwiastek tego równania wynosi: $x = a\sqrt[3]{2}$. Odpowiednie y wynosi:

$$\frac{x^2}{a} = \frac{a^2\sqrt[3]{2^2}}{a} = a\sqrt[3]{4}.$$

Zadanie to jest graficznem rozwiązaniem problemu podwojenia kostki. Znając krawędź a kostki, chcemy znaleźć rysunkiem krawędź kostki, mającej podwójną objętość:

$$x^3 = 2a^3.$$

Widzimy, że do znalezienia tej krawędzi wystarczy narysować dwie parabole o parametrach $\frac{a}{2}$ i a, zwrócone w kierunku osi x-ów i osi y-ów. Odcięta punktu przecięcia się tych parabol da żądaną krawędź kostki. Zadanie to jednak nie da się rozwiązać skończoną liczbą konstrukcyj przy użyciu tylko lineału i cyrkla.

Sposób rozwiązania problemu podwojenia kostki zapomocą dwóch parabol podał matematyk grecki Menechmos w III-cim wieku przed narodz. Chrystusa. Descartes używał do tego celu paraboli:

$$x^2 = ay \text{ i koła } \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$$

Omówione zagadnienie pozwala graficznie wyciągnąć trzeci pierwiastek z liczby 2; trzeba tylko obrać $a=1$, t. j. parabole $x^2 = y$ i $y^2 = 2x$. W podobny sposób możemy wyciągnąć graficznie trzeci pierwiastek z dowolnej liczby m. Trzeba w tym celu użyć parabol $x^2 = y$ i $y^2 = mx$.

§ 25. Styczna do paraboli.

Równanie linji stycznej do koła łatwo było wyprowadzić, opierając się na znanej własności stycznych koła. Tutaj jednakże nie

znamy żadnej takiej własności charakterystycznej. Użyjemy więc metody ogólnej, dającej się zastosować do każdej dowolnej linji krzywej.

Styczną jakiejkolwiek linji krzywej nazywamy prostą, do której dąży sieczna, gdy jej punkty przecięcia się z linją krzywą zbliżają się do siebie nieograniczenie.

Chcemy znaleźć styczną do paraboli: $y^2=2px$ w punkcie $A(x_1, y_1)$.

Równanie prostej, przechodzącej przez jeden znany punkt, jest:

$$y-y_1=a(x-x_1)$$

Do wyznaczenia tego równania brak tylko współczynnika kierunkowego: a, t. j. spadku paraboli w punkcie (x_1, y_1).

Współczynnik kierunkowy siecznej jest, jak wiadomo (por. str. 28 wzór 11_1)

$$a=\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

przyczem x_2, y_2 są współrzędnemi drugiego punktu przecięcia się B (fig. 60).

Gdy punkt B zbliża się do A, to sieczna dąży do stycznej, a równocześnie różnice Δy i Δx dążą do zera.

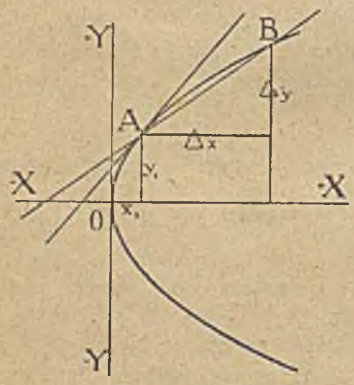


Fig. 60.

Stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ t. j. współczynnik kierunkowy siecznej, dąży mimo to do pewnej oznaczonej wartości, mianowicie do współczynnika kierunkowego stycznej.

Używając na oznaczenie granicy znanego znaku: *lim*, napiszemy:

$$a=\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\substack{\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (46)$$

Granicę stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nazywamy pochodną funkcji $y=f(x)$ według zmiennej x i oznaczamy ją krótko symbolem:

$$y'=f'(x)$$

lub mniej odpowiednio symbolem:

$$\frac{dy}{dx}.$$

Aby więc znaleźć współczynnik kierunkowy stycznej do linji krzywej, określonej równaniem: $y=f(x)$, trzeba obliczyć pochodną tej funkcji i podstawić w niej za x i y współrzędne punktu styczności x_1, y_1.

Stosując to ogólne prawo do paraboli, staramy się najpierw obliczyć współczynnik kierunkowy siecznej, t. j. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Punkty A i B leżą na paraboli, więc ich współrzędne: (x_1, y_1) i $(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y)$ spełniają równania:

$$y_1^2=2px_1$$
$$(y_1+\Delta y)^2=2p(x_1+\Delta x).$$

Odejmując pierwsze równanie od drugiego, otrzymamy:

$$2y_1\Delta y+\Delta y^2=2p\Delta x.$$

Dzieląc przez Δx i wyłączając $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ przed nawias, otrzymujemy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}(2y_1+\Delta y)=2p \text{ a stąd}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p}{2y_1+\Delta y}.$$

Aby stąd otrzymać współczynnik kierunkowy stycznej, badamy, do jakiej granicy dąży to wyrażenie, gdy Δx a i więc i Δy dążą do zera.

Widzimy, że wtedy:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p}{2y_1} \text{ czyli } y'=a=\frac{p}{y_1}.$$

Widzimy więc, że w każdym punkcie paraboli współczynnik kierunkowy ma inną wartość. Zerem jest tylko dla $y_1=\infty$; dla $x_1=\frac{p}{2}$, jest $y_1=p$ więc $a=\frac{p}{p}=1$, t. j. $\alpha=45^0$; dla $y_1=0$ jest $a=\infty$, więc $\alpha=90^0$. Styczna jest więc prostopadła do osi x-ów w wierzchołku paraboli, nad ogniskiem tworzy kąt 45^0 a dąży do położenia równoległego do osi, gdy punkt styczności oddala się od osi x-ów.

Równanie stycznej do paraboli ma więc postać:

$$y-y_1=\frac{p}{y_1}(x-x_1)$$
$$yy_1-y_1^2=px-px_1$$

Podstawiając za y_1^2 wartość $2px_1$ z równania paraboli, otrzymamy po uporządkowaniu:

$$yy_1=p(x+x_1) \qquad (47)$$

Równanie stycznej do paraboli otrzymujemy więc — podobnie jak dla koła — z równania jej, rozbijając y^2 na $y.y_1$ a $2x$ na $x+x_1$.

Gdyby parabola była dana we formie: $x^2=2py$, to równanie stycznej byłoby:

$$xx_1=p(y+y_1).$$

Uwaga. Do tych wzorów można też dojść obliczając spadek a stycznej (z wzorów na str. 99 u dołu) i uwzględniając warunek $y_1{}^2=2px_1$ lub $x_1{}^2=2py_1$.

Przykład. Znaleźć równania stycznych z punktu $P(3, 4)$ do paraboli: $y^2=4x$ i równanie cięciwy styczności. Punkty styczności muszą spełniać równanie paraboli:

$$y_1{}^2=4x_1 \tag{1}$$

i równanie stycznej:

$$yy_1=2(x+x_1)$$

Znamy jeden punkt $P(3,4)$ leżący na stycznej, więc drugi warunek możemy przedstawić w formie:

$$4y_1=2(3+x_1) \tag{2}$$

Rozwiązując układ równań (1) i (2) otrzymujemy:

$$x_1=9 \quad y_1=6$$

$$x_1=1 \quad y_1=2$$

Znając punkty styczności, możemy już odrazu napisać równania stycznych według wzoru (47),

$$\left.\begin{aligned} 2y&=2(x+1)\\ 6y&=2(x+9)\end{aligned}\right| \quad \text{lub} \quad \begin{aligned} y&=x+1\\ y&=\frac{1}{3}x+3\end{aligned}$$

Równanie cięciwy styczności jest:

$$\frac{x-1}{9-1}=\frac{y-2}{6-2}$$

czyli

$$2y=x+3.$$

Równanie to można przedstawić w formie:

$$4y=2(x+3)$$

t. j.

$$\underline{yy_2=p(x+x_2)}$$

Możnaby to prawo udowodnić ogólnie dla dowolnej paraboli i dowolnego punktu $P(x_2, y_2)$.

Równanie cięciwy styczności (biegunowej), należącej do punktu $P(x_2, y_2)$ ma więc taką samą formę, jak równanie stycznej. Styczna jest tylko specjalnym przypadkiem biegunowej, podobnie jak dla koła.

Można też okazać, że biegunowa jest miejscem geometrycznem czwartego punktu harmonicznie sprzężonego z biegunem $P(x_2\ y_2)$ i z dwoma punktami, w których przecina parabolę dowolna prosta wychodząca z $P(x_2, y_2)$, (podobnie jak w kole; por. Ćwiczenia VI Nr. 31).

Prostą prostopadłą do stycznej, a przechodzącą przez punkt styczności, nazywamy **normalną** linji krzywej. (N. p. w kole promień). Znając równanie stycznej, przechodzącej przez punkt paraboli $P(x_1, y_1)$:

$$y = \frac{p}{y_1}(x + x_1) \qquad (1)$$

łatwo znajdziemy równanie normalnej w tym punkcie. Jako prosta, przechodząca przez jeden znany punkt, ma ona równanie:

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Jej współczynnik kierunkowy otrzymujemy z współczynnika kierunkowego stycznej

$$a = -\frac{y_1}{p}$$

więc równaniem normalnej jest:

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{p}(x - x_1) \qquad (2)$$

Rzut odcinka stycznej, zawartego między osią x-ów a punktem styczności, na oś x-ów nazywamy **podstyczną**: $\overline{AB}$ na fig. 61, a rzut odcinka normalnej na oś x-ów: **podnormalną**: $\overline{BC}$.

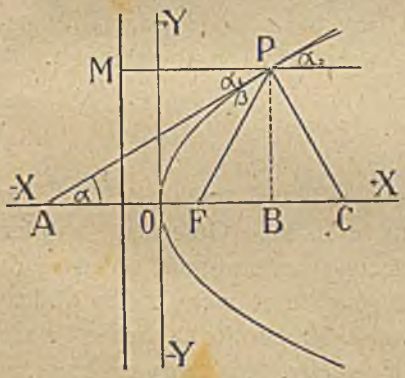


Fig. 61

Wielkość podstycznej otrzymamy z wzoru:

$$AB = AO + OB$$

gdzie $OB = x_1$ a AO jest odcinkiem stycznej na osi x-ów; otrzymamy go kładąc $y = 0$ w równaniu stycznej (1). Wtedy $x = -x_1$. Więc $AO = +x_1$.

Podstyczna ma więc długość $2x_1$. (Na tem można oprzeć konstrukcję stycznej do paraboli w danym punkcie P).

Podobnie obliczymy **podnormalną**:

$$BC = OC - OB.$$

OC, jako odcinek normalnej na osi x-ów otrzymamy, kładąc $y = 0$ w równaniu (2). Wtedy $x = p + x_1$, więc:

$$BC = p + x_1 - x_1 = p.$$

Długość podnormalnej paraboli jest więc stała dla każdego punktu paraboli, a mianowicie równa się parametrowi.

Z temi rozważaniami wiąże się pewna ważna własność stycznej.

Weźmy pod uwagę trójkąt PAF. Z definicji paraboli wynika, że $PF=PM=x_1+\frac{p}{2}$. Bok $AF=AO+OF=x_1+\frac{p}{2}$, bo widzieliśmy, że $AO=x_1$. Zatem:

$$PF=AF$$

a to znaczy, że trójkąt PAF jest równoramienny.

Kąty α i β są więc równe. Ponieważ jednak $\alpha=\alpha_1$, jako kąty naprzemianległe, przeto

$$\underline{\beta=\alpha_1} \text{ a także } \underline{\beta=\alpha_2}.$$

Styczna paraboli połowi kąt, zawarty między promieniem wodzącym PF, a prostą PM, równoległą do osi.

Na podstawie tego twierdzenia można wykreślić przy pomocy cyrkla i linji styczną w każdym punkcie paraboli. Własność tę możemy także interpretować optycznie. Każdy promień, padający równolegle do osi pod kątem α_2, odbiwszy się pod równym kątem ($\beta=\alpha_2$) od paraboli, przechodzi po odbiciu przez ognisko i odwrotnie: promienie, wychodzące z ogniska, odbiwszy się od paraboli według praw optyki, biegną równolegle do osi (reflektory!). Ten fakt tłómaczy także nazwę: „ognisko“, albowiem w tym punkcie schodzą się także promienie c i e p l n e równoległe do osi zwierciadła parabolicznego.

§ 26. Pole odcinków paraboli.

Znając równanie paraboli możemy obliczyć pole odcinka zamkniętego łukiem paraboli i dowolną cięciwą. Obierzmy najpierw (fig. 62) cięciwę prostopadłą do osi x-ów, należącą do punktu $A(x_1, y_1)$. Aby obliczyć pole, łączymy wierzchołek O paraboli z końcami A, B cięciwy. Pole tego trójkąta wynosi: $\frac{2y_1 x_1}{2}$ czyli $p_1=x_1 y_1$. Połowimy boki tego trójkąta punktami E, F i przez te punkty wykreślamy odcinki równoległe do osi: $\overline{EC}$ i $\overline{FD}$. Punkty C i D łączymy z sąsiedniemi punktami O, A i O, B na paraboli. Pola trójkątów COA i DOB trzeba doliczyć do $p_1=OAB$. Aby obliczyć te pola, uważajmy odcinki $\overline{CE}$ i $\overline{DF}$ za podstawy czterech trójkątów CEA, CEO, DFO,

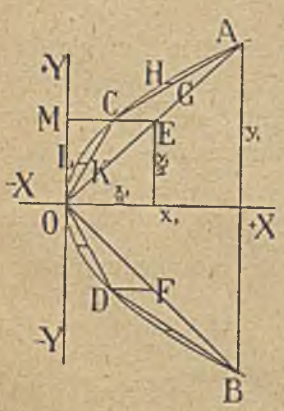


Fig. 62.

DFB; suma ich wysokości wynosi $2y_1$, a $CE=DF=\frac{x_1}{4}$, bo równa się $EM-CM$, t. j. $\frac{x_1}{2}-CM$, a CM jako odcięta punktu leżącego na paraboli w wysokości $\frac{y_1}{2}$, wynosi:

$$x=\frac{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2}{2p}=\frac{y_1^2}{8p}=\frac{2px_1}{8p}=\frac{x_1}{4}.$$

Pola trójkątów COA i DOB wynoszą więc razem:

$$p_2=\frac{2y_1\cdot\frac{x_1}{4}}{2}=\frac{x_1y_1}{4}.$$

Połowiąc boki CA, CO, DO, DB i kreśląc znowu linje równoległe do osi, otrzymamy cztery nowe trójkąty, których pole wynosi:

$$p_3=\frac{x_1y_1}{16}.$$

Trzeba tylko wykazać, że każdy z odcinków HG, LK i t. d. wynosi $\frac{x_1}{16}$.

Wynika to z ogólnego prawa, że odcinek poprowadzony ze środka jakiejkolwiek cięciwy: $(x_2\ y_2)\ldots(x_3,\ y_3)$ równolegle do osi paraboli ma długość:

$$d=\frac{(y_3-y_2)^2}{8p}$$ Wykaż!

Ponieważ zaś y_3-y_2 jest w tym wypadku $\frac{y_1}{2}$, przeto

$$d=\frac{y_1^2}{4.8p}=\frac{2px_1}{4.8p}=\frac{x_1}{16}.$$

Gdy tak coraz dalej postępujemy, wyczerpujemy pole paraboli coraz dokładniej. Pole odcinka paraboli jest granicą, do jakiej dąży suma tych wszystkich trójkątów przy nieograniczonym podziale. Otóż:

$$P=x_1y_1+\frac{x_1y_1}{4}+\frac{x_1y_1}{16}+\ldots\ldots=x_1y_1\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots\ldots\right).$$

W nawiasie mamy szereg geometryczny nieskończony, którego ilorazem jest $\frac{1}{4}$. Suma tego szeregu dąży do granicy $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$.

Zatem:

$$P=\frac{4}{3}x_1y_1 \qquad (48)$$

Pole odcinka paraboli równa się więc $\frac{4}{3}$ iloczynu współrzędnych końcowego punktu łuku (lub geometrycznie: równa się $\frac{4}{3}$ pola trójkąta, mającego za podstawę cięciwę AB a za wierzchołek: wierzchołek paraboli).

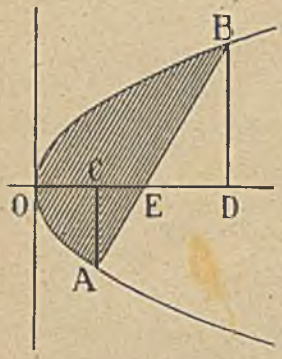


Fig. 63.

Ten sposób obliczenia pola paraboli zawdzięczamy Archimedesowi.

Przy pomocy wzoru (48) można także obliczyć pole odcinka zamkniętego dowolną cięciwą ukośną względem osi x-ów.

N. p. na fig. 63

$OAB = OAC + ODB + AEC - EDB$ (wzór ogólny por. ćwicz. 48).

Zagadnienie obliczenia pola odcinka paraboli można także rozwiązać metodą ogólniejszą, przydatną dla wszelkich linji krzywych, a mianowicie przy pomocy *rachunku całkowego*, co jednak już przekracza zakres matematyki elementarnej.

Ćwiczenia VIII

§ 21. 1. Wyprowadzić równanie paraboli, obierając ognisko na dodatniej części osi y-ów.

2. Wykazać, że gdy różnica odciętych dwóch punktów paraboli dąży do zera, to i różnica rzędnych dąży do zera. Własność tę nazywamy ciągłością linji.

Wskazówka: wyprowadź dla punktów paraboli $x^2 = 2py$ wzór

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) \cdot \frac{x_1 + x_2}{2p}$$

3. Wykreślić parabole:
   a) $y^2 = 4x$
   b) $y^2 = -8x$
   c) $x^2 = 3y$
   d) $x^2 = -6y$.

4. Zbadać i wykreślić linje, których równania są:
   a) $y^2 - 6y - 10x - 31 = 0$
   b) $y + x^2 + 4x + 4 = 0$.
   c) $3x^2 + 9x - 9y + \frac{69}{4} = 0$

5. *a)* Osią paraboli jest oś x-ów; podać jej równanie wierzchołkowe, wiedząc, że przechodzi przez punkt $A(5, 8)$.
   b) Osią paraboli jest oś y-ów; podać jej równanie wierzchołkowe, wiedząc, że przechodzi przez punkt $A(3, -5)$.

6. Oś paraboli jest równoległa do osi x-ów; parabola przechodzi przez punkty $A(0, 3)$, $B(1, -1)$, $C(4, 6)$. Podać jej równanie.

7. Znaleźć równanie paraboli przechodzącej przez punkty $A(1, \frac{29}{3})$, $B(-4, \frac{35}{2})$, $C(-1, 10)$, jeżeli jej oś jest równoległa do osi y-ów.

8. Rozpiętość (cięciwa) łuku parabolicznego wynosi 40 m a wysokość 12 m. Jakie wysokości odpowiadają punktom poziomu odległym o 5, 10, 15, 20 m. od końców łuku?

9. Ciało rzucono poziomo z prędkością $c=200\ m/sek$; przyśpieszenie siły ciężkości ziemi wynosi $g=10\ m/sek^2$. Podać równanie paraboli rzutu.

10. Z otworu przy dnie pewnego naczynia wytryska strumień wody; zmierzono współrzędne jednego punktu paraboli wypływu: $x=2\ dm$, $y=-0{\cdot}5\ dm$. (Początek układu współrzędnych w otworze, oś x-ów pozioma a przyśpieszenie ziemskie $g=100\ dm/sek^2$). Jaka jest prędkość wypływu? Jak wysoko sięga ciecz ponad otwór?

11. Jaką linję określają równania:

$$x=0{\cdot}5\,t$$
$$y=t-0{\cdot}1\,t^2$$

12. Dwa wierzchołki trójkąta równobocznego leżą na paraboli $y^2=12x$ a trzeci

a) w wierzchołku

b) w ognisku.

Obliczyć bok tego trójkąta.

§ 22. 13. W których punktach przecinają parabolę $y^2=4x$ proste

$$y=2x+\frac{1}{2}$$
$$y=2x+\frac{1}{3}$$
$$y=2x+\frac{2}{3}$$

13 *a*. W których punktach górna gałąź paraboli $y^2=2px$ przebiega powyżej prostej $y=x$ a w których poniżej?

14. Rozwiązać graficznie równania:

$$x^2-6x-16=0$$
$$x^2-6{\cdot}7x+9{\cdot}9=0$$
$$x^2-3{\cdot}793x+2{\cdot}285=0$$

15. Wykazać, że styczna do paraboli $x^2=2py$ mająca współczynnik kierunkowy a jest: $y=ax-\frac{pa^2}{2}$.

16. Rozwiązać graficznie równanie:

$$z^3+6z^2-z-39=0$$

używając stałej paraboli $y=x^3$ i prostej.

17. Jakie jest miejsce geometryczne środków cięciw równoległych do siebie w dowolnej paraboli?

§ 23. 18. Znaleźć punkty, w których parabolę $y^2=2x$ przecinają koła: $x^2+y^2=80$; $(x-10)^2+y^2=100$.

19. Jak należy obrać p, q i r, aby punkty przecięcia się paraboli $y=x^2$ z kołem $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ były rozwiązaniem równania 4-go stopnia.

$$x^4+ax^2+bx+c=0.$$

20. Na podstawie poprzedniego ćwiczenia rozwiązać graficznie równanie

$$x^4-14x^2+10x+24=0.$$

§ 24. 21. Znaleźć punkty przecięcia się parabol, mających wspólną kierownicę; ogniska są oddalone od kierownicy o p_1 i p_2 jednostek, a pierwsza ma wierzchołek w początku układu.

22. Ognisko jednej paraboli $y^2=2px$ leży na kierownicy drugiej, a ognisko drugiej w wierzchołku pierwszej. Obliczyć współrzędne punktów przecięcia, znając parametr pierwszej.

23. Naczynie napełnione wodą do $8\,m$ spoczywa na podstawie wzniesionej o $1{\cdot}5\,m$; w połowie wysokości i u dna naczynia znajdują się otwory. W którem miejscu przecinają się obydwie parabole wypływu? W którem miejscu trafiają obydwie parabole poziom? (Prędkość wypływu: $c=\sqrt{2gh}$; $g=10\ m/sek^2$).

24. Naczynie z wodą ma dwa otwory w głębokościach h i $h+d$ metrów pod powierzchnią. W którem miejscu przecinają się promienie wypływu? Jaki punkt otrzymamy, gdy różnica d dąży do zera?

25. *a)* Znaleźć graficznie $\sqrt[3]{5}$.

b) Podwoić graficznie kostkę o krawędzi $1\,m$.

26. Wykazać, że zapomocą parabol $y^2=bx$ i $x^2=ay$ można znaleźć graficznie dwie średnie geometryczne pomiędzy liczbami a i b (t. j. dwa wyrazy szeregu geometrycznego).

§ 25. 27. Wykazać, że współczynnik kierunkowy siecznej paraboli $y^2=2px$ można przedstawić w formie:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2p}{y_1+y_2}$$

Z tej formy przejść do spadku stycznej i do jej równania.

Wskazówka: od $y_1^2=2px_1$ odjąć $y_2^2=2px_2$, podzielić obie strony przez y_1+y_2 i t. d.

28. Wyprowadzić równanie stycznej do paraboli:

$$x^2=2py$$

metodą, używaną w ćwiczeniu 27.

29. Wykazać na liczbach ogólnych, że biegunową punktu $P(x_2, y_2)$ ze względu na parabolę $x^2=2py$ jest

$$xx_2=p(y+y_2).$$

30. Z równań normalnych do paraboli $y^2=2px$ w punktach sąsiednich (x_1, y_1) i $(x_1+\Delta x,\ y_1+\Delta y)$ obliczyć współrzędne punktu przecięcia się tych normalnych. Wykazać, że, gdy Δx i Δy dążą do zera, ten punkt przecięcia się dąży do skończonej granicy:

$$x=p+3x_1$$

$$y=\frac{-y_1^3}{p^2}$$

Punkt ten nazywa się **środkiem krzywizny** dla danego punktu paraboli.

31. Jaki jest spadek paraboli $x^2=8y$ w punkcie, którego odcięta $x=10$? Wyprowadzić równanie stycznej w tym punkcie!

32. W punktach (x_1, y_1), (x_2, y_2) paraboli poprowadzono styczne; obliczyć ich punkt przecięcia się. Gdzie leży ten punkt, gdy styczne są prostopadłe do siebie? N. p. $y^2=4x$.

33. *a)* Pod jakim kątem należy wyrzucić pocisk, aby osiągnął dalekość 3 *km*, a wysokość 250 *m*?

b) Pod jakim kątem należy wystrzelić z działa (prędkość $c=350$ *m/sek*), aby trafić twierdzę oddaloną o 2500 *m* a wzniesioną o 300 *m*? ($g=10$ *m/sek*^{2})

34. Znaleźć styczną wspólną parabolom

$$y^2=6x \text{ i } x^2=48y$$

35. Pod jakim kątem przecina prosta $x+y=0$ parabolę $x^2=6y$?

36. Wykazać, że prostopadłe z ogniska paraboli $y^2=2px$ na styczne trafiają wszystkie styczne w punktach, leżących na osi y-ów.

37. Wyprowadzić równanie stycznej równoległej do prostej $y=5x+40$, dla paraboli $y^2=\frac{4}{9}x$.

38. Tor kolejowy zakreśla łuk paraboli $y^2=150x$; obok toru biegnie droga prosta: $y=5x+40$. Który punkt drogi jest najbliższy toru kolejowego?

39. Pod jakim kątem widzimy parabolę $y^2=6x$ z punktu $A(2, 4)$?

40. W których miejscach ma parabola:

$$y=-x^2-3x+2$$

kierunek poziomy (współczynnik kierunkowy $=0$).

41. Pod jakim kątem przecinają się linje krzywe:

$$x^2+y^2=25 \qquad y^2=\frac{16}{3}x.$$

42. Obliczyć kąt przecięcia się paraboli $y^2=2px$ z prostą $y=ax$, przechodzącą przez wierzchołek paraboli w punkcie, który nie jest wierzchołkiem. Kiedy ten kąt ma największą wartość (maximum)?

§ 26. 43. Obliczyć pole odcinka paraboli $y^2=8x$, utworzonego przez sieczną: $y=\frac{1}{2}x$. Wyprowadź ogólny wzór!

44. Jak daleko od wierzchołka paraboli $y^2=10x$ należy poprowadzić cięciwę prostopadłą do osi x-ów, aby odciąć pole 40?

45. Jakie pole odcina prosta $y=x+\frac{9}{2}$ z paraboli $y^2=24x$?

46. Z punktu $(-6,0)$ poprowadzono styczne do paraboli $y^2=6x$. Jakie pole tworzą te styczne z łukiem paraboli?

47. Jak wielkie jest pole zamknięte łukami paraboli i koła:

$$y^2=2x; \quad (x-1)^2+y^2=9.$$

48. Wykazać, że cięciwa, łącząca dwa dowolne punkty $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$ paraboli $y^2=2px$ zamyka z łukiem paraboli pole:

$$P=\frac{(y_1-y_2)^3}{12p}.$$

Rozdział IX

Elipsa

§ 27. Równanie elipsy. Dyskusja.

Elipsą nazywamy miejsce geometryczne punktów na płaszczyźnie, których suma odległości od dwóch stale obranych punktów jest wielkością stałą (dodatnią):

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{1}$$

Te stałe punkty F_1, F_2 nazywamy ogniskami elipsy. Na tem określeniu polega znana konstrukcja punktów elipsy przy pomocy łuków kół zakreślonych z ognisk (por. Tom I. str. 297). Obieramy za oś X-ów (Fig. 64) prostą, łączącą F_1 z F_2 a oś Y-ów w połowie między F_1 a F_2; odległość F_1 F_2 nazywamy $2e$.

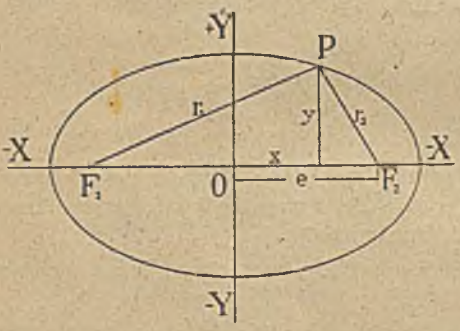


Fig. 64.

Współrzędne punktów F_1 i F_2 są: $F_1\ (-e, o)$, $F_2\ (e, o)$.

Współrzędne dowolnego punktu elipsy muszą spełniać warunek (1). Wyraźmy ten warunek przy pomocy współrzędnych:

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a.$$

To już jest równanie elipsy; można je jednak sprowadzić do dogodniejszej postaci, przenosząc jeden pierwiastek na drugą stronę i uwalniając (dwa razy) od pierwiastków. Otrzymamy wtedy:

$$x^2(a^2-e^2)+a^2y^2=a^2(a^2-e^2)$$

lub

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1.$$

Dla skrócenia oznaczamy a^2-e^2 literą b^2; bierzemy b^2 a nie b, aby zaznaczyć, że a^2-e^2 jest liczbą dodatnią. Wynika to stąd, że

$$2a>2e \text{ bo } r_1+r_2>2e$$

jako suma 2 boków trójkąta o podstawie $2e$, więc $a>e$.

Wtedy równanie elipsy przyjmie symetryczną postać:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{49}$$

Równanie to przedstawia wszystkie punkty elipsy, a nie przedstawia żadnych innych punktów, bo dla punktów leżących poza obwodem elipsy jest:

$$r_1+r_2 \gtrless a$$

a ta nierówność utrzymuje się przy wszystkich dalszych przeróbkach.

Uwaga. Przez podnoszenie do kwadratu nie wprowadziliśmy żadnych nowych punktów. Wykonując bowiem tesame przekształcenia w odwrotnym porządku, doszlibyśmy do warunków:

$$\pm r_1 \pm r_2 = 2a.$$

Znaki : — i — są wykluczone, ponieważ $2a$ jest zawsze liczbą dodatnią; znaki zaś + — lub — + są wykluczone, ponieważ różnica dwóch boków trójkąta nie może być większa od trzeciego, a tymczasem mielibyśmy: $r_1 - r_2 = 2a$, a więc $r_1 - r_2 > 2e$. Pozostaje więc jedna tylko możliwość: $r_1 + r_2 = 2a$, charakteryzująca wyłącznie punkty elipsy.

Dyskusja. Dla dyskusji wygodnie jest używać obok postaci (49) równania elipsy, także równania rozwiązanego według x lub y

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$
$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \tag{a}$$

Elipsa jest linją krzywą drugiego stopnia, podobnie jak koło i parabola. Osie współrzędnych przecina elipsa w punktach $x=0$, $y=\pm b$ i $y=0$, $x=\pm a$. Punkty $(0, \pm b)$ i $(\pm a, 0)$ nazywamy wierzchołkami elipsy. Odcinki a i b na osiach współrzędnych są związane z odległością ognisk $2e$. Przy wyprowadzaniu równania podstawiliśmy bowiem: $a^2-e^2=b^2$ więc:

$$e^2+b^2=a^2. \tag{50}$$

Geometrycznie możemy wypowiedzieć ten związek tak: odcinek a jest przeciwprostokątnią trójkąta, którego przyprostokątniami są b i e.

Na tem polega konstrukcja (Fig. 65) ogniska F_2, jeżeli znamy punkty A i B, lub konstrukcja punktu A, gdy znamy F_2 i B. Odcinek F_2C prostej prostopadłej do osi X-ów w ognisku nazywamy parametrem: p, podobnie jak dla paraboli. Odcinek ten obliczamy z równania elipsy, kładąc $x=e$; otrzymamy:

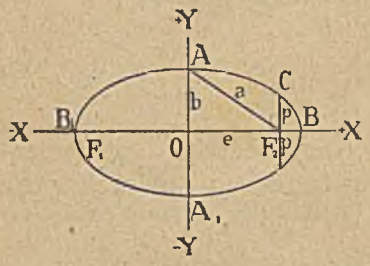


Fig. 65.

$$y=\pm\frac{b^2}{a} \text{ więc}$$

$$p=\frac{b^2}{a}. \qquad (51)$$

Związek ten można przedstawić w postaci proporcji:

$$a:b=b:p$$

Słowami: *odcinek b jest średnią geometryczną między odcinkiem a a parametrem p.*

Z równania (49) odczytujemy, że elipsa jest symetryczna względem osi X-ów, względem osi Y-ów, tudzież względem początku układu. Odcinki AA_1 i BB_1 tych osi symetrji nazywamy osiami głównemi elipsy, mianowicie oś $BB_1=2a$, na której leżą ogniska, osią wielką, a oś $AA_1=2b$ osią małą. Środek symetrji O nazywamy środkiem elipsy; z symetrji środkowej wynika, że każda cięciwa, przechodząca przez środek elipsy, jest tym punktem przepołowiona. Dlatego wszystkie takie cięciwy nazywamy średnicami elipsy.

Równania (a) wskazują, że elipsa rozciąga się w kierunku osi X-ów od $-a$ do $+a$, a w kierunku osi Y-ów od $-b$ do $+b$. Poza temi przedziałami otrzymujemy na y lub na x wartości urojone. Ponieważ x nie staje się nieskończone (rzeczywiste) dla żadnej wartości y, ani y dla żadnej wartości x, przeto wszystkie punkty elipsy leżą w skończoności. Gdy x wzrasta od 0 do a, y maleje od b do 0 w pierwszej ćwiartce. Podobnie w dalszych ćwiartkach.

Kształt i rozmiary elipsy zależą od dwóch stałych wielkości: a i b. *Jeżeli $a=b$, równanie elipsy przechodzi na równanie koła;* koło jest więc także gatunkiem elipsy. Gdy a jest coraz większe w porównaniu z b, elipsa spłaszcza się coraz bardziej.

Inne formy równania elipsy. Równanie (49) nazywamy środkowem równaniem elipsy. Przy innych położeniach osi współ-

rzędnych otrzymamy inne formy równania. I tak jeżeli ogniska leżą na osi Y-ów, równanie elipsy przyjmuje postać:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

(wykaż, wykonując obrót!). Z równania poznajemy odrazu to położenie elipsy po tem, że $b^2<a^2$, t. j. mianownik wyrazu x^2 jest mniejszy od mianownika wyrazu y^2.

Gdyby środek elipsy nie leżał w początku układu, ale gdyby osie główne pozostały równoległe do osi współrzędnych, równanie elipsy miałoby postać:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1.$$

Po uporządkowaniu równanie to zamieni się na równanie postaci:

$$b^2x^2+a^2y^2+cx+dy+e=0 \qquad (52)$$

Cechą charakterystyczną równania elipsy w tem położeniu (osie równoległe od osi współrzędnych) jest:

1) jest to równanie drugiego stopnia bez wyrazu $x.y$;

2) x^2 i y^2 mają współczynniki różne, ale o jednakowym znaku.

Gdybyśmy obrócili osie o kąt różny od $\pm 90^0$, wystąpiłby także wyraz $x.y$. Wykaż! Odwrotnie: jeżeli w równaniu drugiego stopnia występuje wyraz $x.y$, staramy się go usunąć przez obrót osi. Wtedy dopiero zwracamy uwagę na wyrazy drugiego stopnia i zdołamy już odróżnić, kiedy to równanie przedstawia parabolę a kiedy elipsę. (Powtórz te znamiona!). Gdybyśmy po wykonaniu obrotu otrzymali równanie:

$$b^2x^2+a^2y^2=0,$$

to równanie to przedstawiałoby tylko jeden punkt rzeczywisty $x=0$, $y=0$ (dlaczego?). Gdybyśmy otrzymali po drugiej stronie liczbę ujemną:

$$b^2x^2+a^2y^2=-c^2$$

to tylko urojone wartości x, y, mogłyby spełniać to równanie. Takie równanie nie ma więc żadnego obrazu geometrycznego.

Parametrowe przedstawienie równania elipsy. Dla koła znamy parametrowe przedstawienie:

$$x=a\cos t$$
$$y=a\sin t.$$

Stąd otrzymamy parametrowe przedstawienie elipsy o osiach $2a$ i $2b$, zmniejszając rzędne w stosunku $\frac{b}{a}$.

Dowód. Zakreślmy (Fig. 66) koło promieniem a, o środku w środku elipsy. Wykreślmy rzędną koła: y i elipsy: y, należącą do tej samej odciętej x.

Z równania koła i elipsy otrzymamy przy tej samej odciętej x różne rzędne:

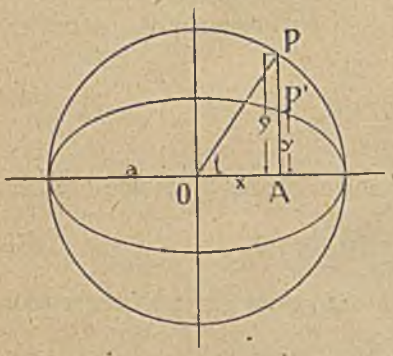


Fig. 66.

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Stąd: $y = \frac{b}{a}y.$

Aby więc z rzędnej koła otrzymać rzędną elipsy, mnożymy ją przez $\frac{b}{a}$

$$y = a \sin t \frac{b}{a} = b \sin t$$

Odcięta pozostaje niezmieniona. Parametrowe przedstawienie równania elipsy jest więc:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned}\right\}$$

przyczem t oznacza kąt, utworzony przez promień koła o promieniu a, należący do odciętej x.

Opierając się na prawie:

$$y = \frac{b}{a}y$$

możemy wyrazić pole elipsy zapomocą odcinków osi a i b. Zmniejszając pole koła: $a^2\pi$ w stosunku $\frac{b}{a}$ w kierunku rzędnych, otrzymamy pole elipsy:

$$\underline{P = ab\,\pi.}$$

Elipsa nie jest więc figurą podobną do koła; natomiast jest ona w powinowactwie czyli w affinizmie z kołem (por. § 17 uwagi końcowe). Z tych rozważań widzimy, w jakim związku pozostaje elipsa z kołem. Aby zbadać jej związek z drugą linją krzywą poznaną w poprzednich ustępach

t. j. z parabolą, użyjemy już nie środkowego równania elipsy, ale wyprowadzimy jej równanie wierzchołkowe.

Wierzchołkowe równanie elipsy. Z równania (49) lub

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

otrzymamy równanie wierzchołkowe, przesuwając oś Y-ów o odcinek a. (Fig. 67).

Więc:

$$x=x'-a$$
$$y=y'.$$

Otrzymamy:

$$b^2(x'-a)^2+a^2y'^2=a^2b^2$$

a stąd (opuszczając znaczki przy nowych współrzędnych): $y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2$.

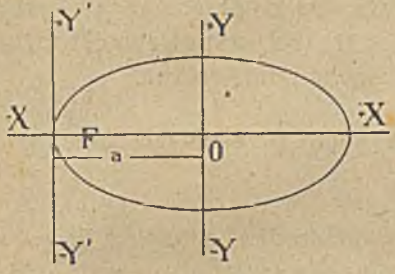


Fig. 67.

Ale wiemy, że $\frac{b^2}{a}=p$, więc:

$$y^2=2px-\frac{p}{a}x^2.$$

Z tej formy równania elipsy widzimy, że gdy a dąży do ∞, t. j. gdy środek oddala się do ∞, wyraz $\frac{p}{a}x^2$ dąży do zera: w granicy więc elipsa zamienia się na parabolę: $y^2=2px$. Parabolę można więc uważać za graniczny przypadek elipsy.

Równanie wierzchołkowe paraboli i elipsy możemy wypowiedzieć w następujący sposób:

Dla każdego punktu paraboli kwadrat zbudowany z rzędnej r ó w n a s i ę prostokątowi utworzonemu z podwójnego parametru i z odciętej (dorównuję po grecku: p a r a b a l l o; stąd nazwa). Dla elipsy trzeba z prostokąta $2p.x$ o p u ś c i ć pewną część: $\frac{p}{a}x^2$, aby otrzymać kwadrat rzędnej (opuszczam w jęz. greckim: e l l e j p o). Przekonamy się później, że dla hyperboli kwadrat rzędnej p r z e w y ż s z a prostokąt $2p.x$ (przewyższam w jęz. greckim: h y p e r b a l l o). Rozważania takie przeprowadzał już A p o l l o n i u s z (III wiek przed n. Chr.) a związki między odciętemi i rzędnemi nazywał nie równaniami, ale s y m p t o m a t a m i (t. j. cechami charakterystycznemi).

§ 28. Inne definicje elipsy.

Pokrewieństwo między elipsą a parabolą zdradza się nietylko w formie równania. Można podać taką definicję elipsy, z której to pokrewieństwo wynika odrazu.

Udowodnimy, że miejscem geometrycznem punktów, których odległość od stałego punktu ogniska i od stałej prostej (kierownicy) są w stałym stosunku: ε, jest elipsa, jeżeli $|\varepsilon|<1$ (a parabola jeżeli $\varepsilon=\pm 1$).

Otóż (Fig. 68):

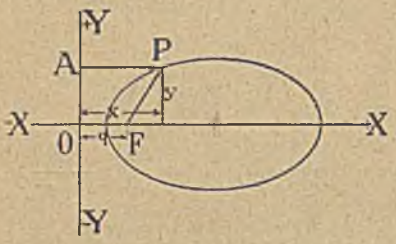


Fig. 68.

$$\frac{FP}{AP}=\varepsilon.$$

Wyrażając ten warunek zapomocą współrzędnych, otrzymamy po podniesieniu do kwadratu:

$$(1-\varepsilon^2)x^2+y^2-2qx+q^2=0.$$

Równanie to przedstawia elipsę, gdy $|\varepsilon|<1$, bo współczynniki przy x^2 i y^2 są dodatnie, różne.

Wykazać, że $q=\frac{a^2}{e}-e$, $\varepsilon=\frac{e}{a}$. (Wykonaj przesunięcie takie, aby $2qx$ odpadło!).

Oznaczając odległość kierownicy od środka elipsy, t. j. $q+e$ literą d, możemy wyrazić tę odległość zapomocą następującej proporcji:

$$d:a=a:e.$$

Na podstawie tej proporcji ciągłej otrzymujemy konstrukcyjnie kierownicę. Elipsa posiada dwie kierownice, to samo bowiem rozumowanie dotyczy także drugiego ogniska. Liczbę ε nazywamy *mimośrodem liczbowym* elipsy a e *mimośrodem linjowym*.

Można także określić elipsę jako miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od obwodu stałego koła (kierowniczego) i od stałego punktu wewnątrz tego koła.

Promień koła nazwijmy $2a$, a odległość stałego punktu od środka koła $2e$. Początek układu przyjmijmy (Fig. 69) w środku koła, to z warunku:

$$PA=PF$$

otrzymamy:

$$2a-\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2e-x)^2+y^2}$$

czyli po uporządkowaniu:

$$b^2x^2+a^2y^2-2exb^2=b^4.$$

To zaś jest równanie elipsy. (Przesunąć układ osi tak, aby początek układu był w środku elipsy!).

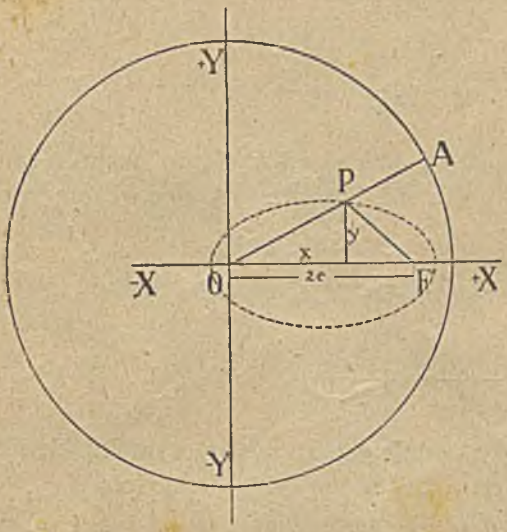


Fig. 69.

Do ułatwienia konstrukcji elipsy przydatne jest bardzo jeszcze inne określenie elipsy:

Jeżeli odcinek o stałej długości (n. p. $a+b$) ślizga się swemi końcami po osiach X-ów i Y-ów, to dowolny punkt, leżący na tym odcinku, zakreśla elipsę, a środek odcinka koło. Wykazać to, opierając się na podobieństwie trójkątów!

Wiadomo wreszcie z nauki stereometrji, że elipsę można też określić jako przekrój stożka kołowego lub walca płaszczyzną nachyloną do jego podstawy, a przecinającą wszystkie tworzące.

§ 29. Elipsa i linja prosta.

Położenie prostej względem elipsy oceniamy, rozwiązując układ równań:

$$\text{(a)} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y=cx+d$$

Układ ten ma albo: *a)* dwie pary rozwiązań rzeczywistych, różnych; wtedy prosta przecina elipsę w dwóch punktach i jest sieczną, albo *b)* dwie pary rozwiązań równych, wtedy prosta jest styczną elipsy, albo *c)* dwie pary rozwiązań urojonych, wtedy cała prosta leży poza elipsą.

Pomiędzy prostemi, przecinającemi elipsę, zasługują na uwagę proste, łączące środki cięciw równoległych. Udowodnimy mianowicie, że *linja, łącząca środki wszystkich cięciw równoległych do siebie, jest linją prostą, przechodzącą przez środek elipsy, czyli średnicą.*

Dowód. Rozwiązując układ równań (ą), otrzymamy:

$$x_1 = \frac{-cda^2 + ab\sqrt{b^2 - d^2 + c^2a^2}}{b^2 + c^2a^2}$$

(b)

$$y_1 = \frac{db^2 + abc\sqrt{b^2 - d^2 - c^2a^2}}{b^2 + c^2a^2}$$

ą x_2 i y_2 różnią się tylko znakiem pierwiastka. Są to współrzędne punktów końcowych cięciwy $y = cx + d$. Środek tej cięciwy ma więc współrzędne:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-cda}{b^2 + a^2c^2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{db^2}{b^2 + a^2c^2}.$$

Dla każdej innej cięciwy równoległej (o współczynniku kierunkowym *c)* otrzymamy wartości, różniące się tylko wartością *d.*

Rugując z tych równań *d* otrzymamy związek między *x* i *y*, zachodzący dla środków wszystkich cięciw równoległych o kierunku: *c.* Otrzymujemy w ten sposób:

$$y = -\frac{b^2}{ca^2}x. \qquad \text{(c)}$$

Jest to prosta, przechodząca przez początek układu, a więc średnica elipsy.

Wykazaliśmy więc, że średnica *AB* (fig. 70) połowi wszystkie cięciwy równoległe do *CD.* Można wykazać, że także odwrotnie:

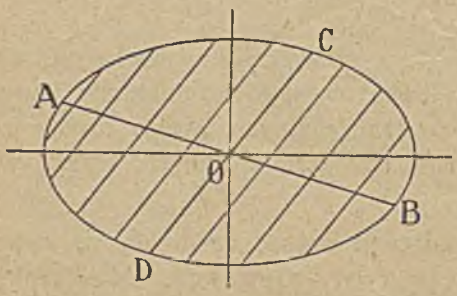


Fig. 70.

Średnica CD, mająca kierunek cięciw przepołowionych linją AB, połowi sama cięciwy równoległe do AB.

Dowód: równanie średnicy *CD* jest:

$$y = cx.$$

Cięciwy równoległe do *AB* mają równania:

$$y = -\frac{b^2}{ca^2}x + d'. \qquad \text{(d)}$$

Oznaczmy $-\frac{b^2}{ca^2}$ literą c'. Według wzoru (c) średnica, połowiąca cięciwy (d), ma równanie:

$$y=-\frac{b^2}{c'a^2}x \text{ czyli } y=-\frac{b^2}{-\frac{b^2}{ca^2}\cdot a^2}\cdot x \tag{53}$$

a stąd:

$$y=cx.$$

Otóż linją, połowiącą cięciwy równoległe do AB, jest istotnie średnica CD.

Średnice AB i CD tak ze sobą związane, że jedna z nich połowi wszystkie cięciwy równoległe do drugiej, nazywamy: średnicami sprzężonemi.

Równania średnic sprzężonych są:

$$y=cx \qquad y=-\frac{b^2}{ca^2}x.$$

Czy osie główne są średnicami sprzężonemi?

§ 30. Styczna do elipsy.

Na podstawie równań *(b)* z poprzedniego ustępu można wyprowadzić równanie stycznej, jeżeli mamy dany jej spadek. Ponieważ wtedy obydwa punkty przecięcia (x_1y_1) i (x_2y_2) muszą się nakryć, więc wyrażenie znajdujące się pod pierwiastkiem (wyróżnik!) musi być zerem, tj.

$$b^2-d^2+c^2a^2=0, \text{ a stąd}$$

$$d=\pm\sqrt{c^2a^2+b^2}.$$

Wobec tego równanie stycznej do elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ o spadku c jest:

$$y=cx\pm\sqrt{c^2a^2+b^2}.$$

Jeżeli jednak nie znamy spadku stycznej, tylko punkt styczności, to do wyprowadzenia równania stycznej można użyć tej samej ogólnej metody, którejśmy używali dla paraboli.

Weźmy środkowe równanie elipsy:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Chcemy znaleźć równanie stycznej w punkcie $P(x_1, y_1)$. Równanie jej musi mieć postać:

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

Brak nam tylko współczynnika kierunkowego.

Widzieliśmy, że dla każdej linji krzywej współczynnik kierunkowy równa się pochodnej y według x t. j.:

$$m = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

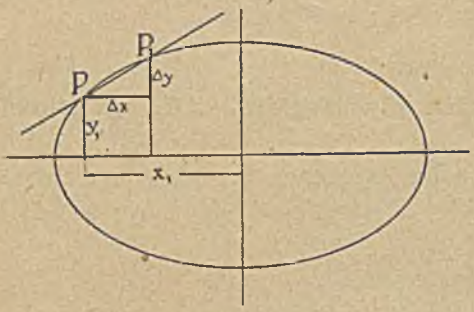


Fig. 71.

Trzeba więc obiiczyć wartość pochodnej w punkcie (x_1, y_1). Iloraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest współczynnikiem kierunkowym siecznej, łączącej punkty:

$P(x_1, y_1)$ i $P_1(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$.

Punkty te leżą na elipsie, (Fig. 71) muszą więc spełniać jej równanie:

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \qquad (2)$$

$$b^2 (x_1 + \Delta x)^2 + a^2 (y_1 + \Delta y)^2 = a^2 b^2.$$

Przy pomocy tych równań możemy obliczyć $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Odejmując pierwsze równanie od drugiego, otrzymujemy:

$$\Delta y . (2a^2 y_1 + a^2 \Delta y) = -\Delta x (2b^2 x_1 + b^2 \Delta x).$$

Stąd:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{b^2 (2x_1 + \Delta x)}{a^2 (2y_1 + \Delta y)}.$$

Jeżeli punkt P_1 zbliża się do P, to zarówno Δy, jak i Δx dążą do zera; ich iloraz jednak dąży do skończonej wartości:

$$-\frac{b^2 . 2x_1}{a^2 . 2y_1}.$$

Więc:

$$m = y' = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Równanie stycznej w punkcie (x_1, y_1) jest zatem:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1).$$

Porządkując to równanie, otrzymamy:

$$b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2.$$

Druga strona równa się jednak wartości $a^2 b^2$ według równania (2), więc ostatecznie:

$$b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2 \qquad (54)$$

Równanie stycznej do elipsy w punkcie (x_1, y_1) *otrzymujemy więc z równania elipsy, rozbijając* x^2 *i* y^2 *na iloczyny* xx_1 *i* yy_1, *podobnie jak dla koła i paraboli.*

Wykazać, że styczna jest równoległa do średnicy sprzężonej z średnicą, przechodzącą przez punkt styczności (t. j. ze średnicą $y = \frac{y_1}{x_1} x$).

Styczne elipsy mają własności podobne, jak styczne paraboli. Poprowadźmy w dowolnym punkcie elipsy styczną i promienie wodzące. Równania promieni wodzących (Fig. 72), jako prostych przechodzących przez punkty:

(x_1, y_1) i $(\pm e, O)$ są:

$$(r_1) \ldots y = \frac{y_1}{x_1 + e}(x + e)$$

$$(r_2) \ldots y = \frac{y_1}{x_1 - e}(x - e).$$

Równanie stycznej jest:

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) + y_1.$$

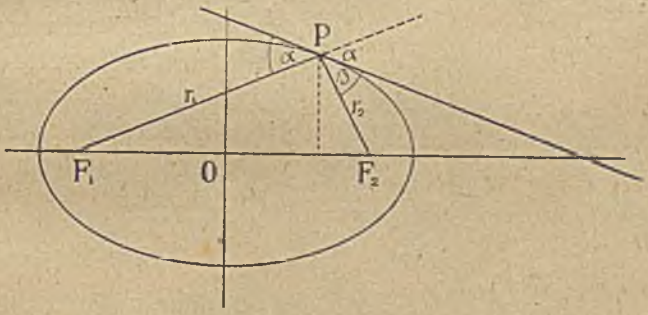


Fig. 72.

Obliczmy kąty, jakie styczna tworzy z promieniami wodzącemi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{y_1}{x_1 + e} + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}}{1 - \frac{b^2 x_1 y_1}{a^2 y_1 (x_1 + e)}} = \frac{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 + b^2 x_1 e}{a^2 x_1 y_1 + a^2 y_1 e - b^2 x_1 y_1} = \frac{a^2 b^2 + b^2 x_1 e}{e^2 x_1 y_1 + a^2 y_1 e}$$

Otóż

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2 (a^2 + e x_1)}{e y_1 (a^2 + e x_1)} = \frac{b^2}{e y_1}.$$

Podobnie obliczymy:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b^2}{ey_1}.$$

Stąd wynika: $\alpha=\beta.$

Ponieważ $\alpha=\alpha'$, to:

$$\beta=\alpha'.$$

Styczna elipsy połowi kąt, zawarty między jednym promieniem wodzącym, a przedłużeniem drugiego promienia.

Własność ta służy do konstrukcyi stycznej w dowolnym punkcie elipsy.

Prawo to $\alpha=\beta$ można także wypowiedzieć tak: promień, wychodzący z ogniska F_1, odbiwszy się od elipsy według praw optyki (t. j. pod równym kątem), przechodzi przez drugie ognisko. (Na tem polega użycie zwierciadeł eliptycznych, budowa sal akustycznych i t. p.). Na tej własnośei linji stycznej można także oprzeć konstrukcję stycznej z punktu poza elipsą:

Analiza. Jeżeli linja PA jest styczną, to połowi kąt $\sphericalangle F_2PH$ (Fig. 73). Przedłużając r_1 o odcinek r_2, otrzymamy trójkąt równoramienny PHF_2. Styczna PA jest symetralną podstawy tego trójkąta. Punkt H możemy więc łatwo znaleźć konstrukcyjnie. Jest to punkt przecięcia się koła o promieniu:

$$r_1+r_2=2a,$$

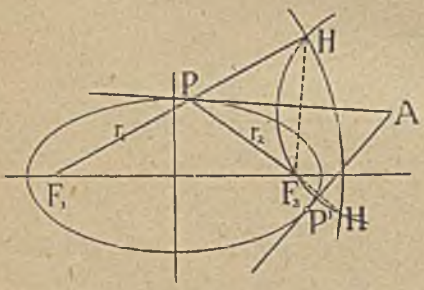


Fig 73.

a o środku w F_1, z kołem o promieniu AF_2 o środku w danym punkcie A, (bo punkt A, jako punkt symetralnej odcinka F_2H, jest równo oddalony od F_2 i H). Znalazłszy w ten sposób punkt H, kreślimy symetralną odcinka F_2H, to ona jest żądaną styczną AP. Przy tej konstrukcji otrzymujemy także drugi punkt H' przecięcia się kół (F_1) i (A). Symetralna odcinka F_2H' jest drugą styczną z punktu A do elipsy.

Wykonaj to samo zadanie rachunkiem! Wyprowadź równanie biegunowej punktu A!

Ćwiczenia IX

§ 27—28. 1. Wykreślić elipsy:

a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

c) $x^2+4y^2=4$

d) $36x^2+9y^2=324$. Obliczyć ich pola.

2. Zbadać i wykreślić linje, których równania są:

a) $9x^2+4y^2-36x-24y+36=0$

b) $4x^2+y^2+24x+32=0$

c) $16x^2+25y^2+32x-200y+16=0$. Obliczyć ich pola.

3. Jaką drogę zakreśla punkt, pobudzony do dwóch ruchów drgających, określonych równaniami:

a) $\begin{cases} x=2\sin(90^0-t) \\ y=3\sin t. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x=a\cos 2\pi\dfrac{t}{T} \\ y=b\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}+p\right) \end{cases}$

4. Wykazać, że ognisko i kierownica dzielą harmonicznie oś wielką.

5. Utworzono rzut prostopadły koła o promieniu 5 *cm* na płaszczyznę, nachyloną pod kątem 30^0 do płaszczyzny koła. Obliczyć osie, ogniskową i pole elipsy rzutowej.

6. Obliczyć rzędne elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ w punktach:

$$x=0{\cdot}4\,a,\quad 0{\cdot}8\,a,\quad \frac{a}{4},\quad e,\quad \frac{2}{3}a.$$

7. Znając oś elipsy $2a=16$ *cm* i punkt $A(3, 2)$ na jej obwodzie, podać środkowe równanie elipsy.

8. Wykreślić elipsę, znając jej oś wielką $a=6$ *cm*, i stosunek $\varepsilon=\frac{e}{a}=\frac{2}{3}$. Jakie jest równanie tej elipsy?

9. Dla których punktów elipsy jest jeden promień wodzący dwa razy większy od drugiego? Czy w każdej elipsie istnieją takie punkty?

10. Przez ile punktów jest wyznaczona elipsa, której osie są równoległe do osi współrzędnych?

11. W elipsę $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ wpisać *a)* kwadrat: obliczyć bok tego kwadratu, *b)* prostokąt o przekątni 10.

§ 29. 12. Obliczyć punkty przecięcia się elipsy z prostą:

a) $4x^2+9y^2=36$ $\quad y=\frac{1}{3}x$

b) $y^2=3{\cdot}6x-0{\cdot}36x^2$ $\quad y=0{\cdot}6x$.

13. Znaleźć styczną do elipsy $9x^2+16y^2=576$ równoległą do prostej $y=x$.

14. Wyprowadzić równania promieni wodzących i zbadać, w którym punktach elipsy są one do siebie prostopadłe.

15. W jakich punktach przecina elipsę:

$$x^2+4y^2=4$$

koło $x^2+y^2=\frac{9}{4}$.

16. W jakich punktach przecina elipsę:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

parabola: $y^2=2px$.

Jak się upraszczają wzory, gdy elipsa i parabola mają wspólne ognisko?

17. Znaleźć odcięte punktów przecięcia się elipsy $b^2x^2+a^2y^2=a^2b$ z kołem $(x-c)^2+y^2=r^2$. Dla jakiej wartości r wszystkie cztery punkt przecięcia leżą w wierzchołku, gdy koło styka się z elipsą w wierzchołku

§ 30. 18. Znaleźć styczną do elipsy:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

w punkcie, którego odcięta wynosi: $x_1=2$, 2·5, $e=\sqrt{7}$ a rzędna jest dodatnia

19. Pod jakim kątem przecina elipsę: $9x^2+16y^2=144$ prosta $y=x-1$ w punkcie o dodatnich współrzędnych

20. Pod jakim kątem przecinają się elipsy:

$$x^2+4y=4$$
$$4x^2+y^2=4.$$

21. Wykazać, że styczna do koła opisanego na elipsie i styczna d elipsy, należąca do tej samej odciętej, przecinają się na osi X-ów. (Konstrukcj stycznej do elipsy!).

22. Wykazać, że styczne elipsy: $4x^2+6y^2=36$ prostopadłe do siebi przecinają się na obwodzie koła: $x^2+y^2=15$.

23. Wykazać, że spodki prostych prostopadłych z ogniska elipsy

$$9x^2+25y^2=225$$

na styczne, leżą na kole $x^2+y^2=25$.

24. Wyprowadzić równania stycznych z punktn $(-3, -2)$ do elips $12x^2+5y^2=30$. (Konstrukcja!).

25. Pod jakim kątem widać elipsę:

$x^2+4y^2=4$ z punktu (5, 3)? Konstrukcja!

26. Wykazać, że biegunowa każdego punktu, leżącego na kierownic przechodzi przez ognisko. (Odległość kierownicy od środka: $d=\frac{a^2}{e}$).

27. Obliczyć styczną, normalną, podsteczną i podnormalną elipsy:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \text{ w punkcie } x_1=4.$$

28. Wykazać, że iloczyn odcinków prostopadłych, poprowadzonych z ogni na dowolną styczną elipsy, wynosi: b^2.

29. Wykazać, że styczne na końcach dowolnej średnicy $y=cx$ elips $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ są do siebie równoległe.

30. Obliczyć pole równoległoboku, utworzonego przez styczne wykreślon na końcach dwóch średnic sprzężonych. N. p. dla elipsy: $25x^2+16y^2=40$ Ogólnie!

Rozdział X

Hyperbola

§ 31. Równanie hyperboli.

Hyperbolą nazywamy miejsce geometryczne punktów na płaszczyźnie, których różnica odległości od dwóch stale obranych punktów jest wielkością stałą:

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \qquad (1)$$

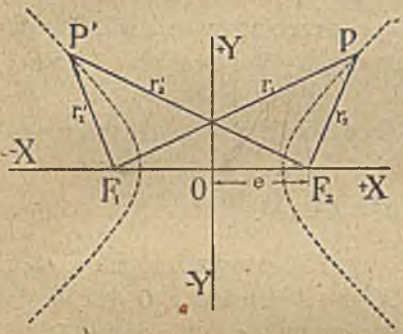


Fig. 74.

Znak: + odnosi się do punktów (fig. 74), leżących bliżej F_2, a znak: — do punktów leżących bliżej F_1. Punkty stałe F_1 i F_2 nazywamy ogniskami hyperboli. Na tem określeniu polega konstrukcja hyperboli (por. Tom. I. str. 298). Aby z tego warunku (1) wyprowadzić równanie hyperboli, postępujemy zupełnie podobnie, jak przy elipsie. Odległość ognisk znaczymy: $2e$, to warunek (1) przedstawi się w postaci:

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Uwalniając to równanie od pierwiastków (dwukrotnie) i porządkując, otrzymamy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-e^2} = 1.$$

Ponieważ różnica dwóch boków trójkąta jest zawsze mniejsza od trzeciego boku, przeto $r_1 - r_2 = 2a < 2e$: czyli $a < e$, a więc i $a^2 < e^2$. Wobec tego $a^2 - e^2$ jest liczbą ujemną, możemy więc dla skrócenia oznaczyć:

$$a^2 - e^2 = -b^2.$$

Wtedy równanie hyperboli przyjmie postać:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{55}$$

lub: $$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

Jest to równanie drugiego stopnia, podobnie jak równanie koła, paraboli i elipsy.

Dyskusja. Rozwiązując równanie hyperboli według zmiennej x lub y otrzymujemy:

(a)
$$\left|\begin{array}{l} y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \\ x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2} \end{array}\right.$$

Dla $x=0$ jest y urojone; hyperbola nie przecina więc osi Y-ów.

Dla $y=0$ jest $x=\pm a$; hyperbola przecina więc oś X-ów w punktach $(-a, 0)$ i $(a, 0)$ zwanych wierzchołkami hyperboli.

Liczba b, wchodząca w równanie hyperboli, jest związana z odcinkami a i e zapomocą równania:

$$a^2-e^2=-b^2 \text{ czyli } a^2+b^2=e^2. \tag{56}$$

Możemy to przedstawić graficznie (fig. 75), prowadząc na końcu odcinka a linję prostopadłą do osi X-ów i kreśląc z 0 łuk koła o promieniu e. Odcinek AB tej prostopadłej przedstawia wielkość b. Odcinek p cięciwy prostopadłej do osi X-ów w ognisku nazywamy parametrem hyperboli. Długość tego odcinka otrzymamy, obliczając rzędną dla $x=\pm e$. Wtedy $y=\pm\frac{b^2}{a}$,

więc $p=\frac{b^2}{a}$.

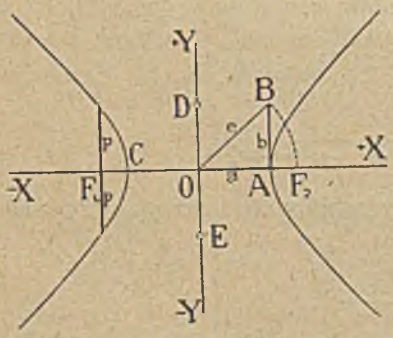


Fig. 75.

Wypowiedz to w formie proporcji!

Z równania (55) odczytujemy, że hyperbola jest symetryczna zarówno względem osi X-ów, jak i względem osi Y-ów, a także względem początku układu 0.

Odcinki AC i DE tych osi symetrji: $AC=2a$ i $DE=2b$ nazywamy: AC osią główną, a DE osią poboczną, a ich punkt przecięcia: środkiem hyperboli. Odcinek DE nie jest jednak średnicą ani cięciwą hyperboli!

Równanie (55) nazywamy równaniem środkowem hyperboli. Z wzorów (a) widzimy, że y jest rzeczywiste dla wszelkich $x>a$ lub $x<-a$. Dla wartości x zawartych w przedziale $x=-a\ldots+a$, y jest urojone. Natomiast x jest rzeczywiste dla wszelkich wartości y. Stąd wniosek:

Hyperbola rozciąga się w kierunku osi X-ów w nieskończoność od punktów: $(-a, 0)$ na lewo i od $(+a, 0)$ na prawo, a między prostemi $x=-a$ i $x=+a$ niema żadnych punktów hyperboli. W kierunku osi Y-ów rozciąga się hyperbola w obydwu kierunkach w nieskończoność.

Hyperbola składa się z dwóch gałęzi. Gdy x dąży do nieskończoności, y także dąży do nieskończoności i odwrotnie. Mimoto stosunek $\frac{y}{x}$ dąży do skończonej, ściśle określonej granicy, gdy x dąży do ∞. Wynika to z równania

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

czyli:

$$\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

Gdy x dąży do ∞, to $-\frac{a^2}{x^2}$ dąży do zera, całe więc wyrażenie dąży do granicy:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}.$$

Znak + odnosi się do górnej części hyperboli, — do dolnej. Taką samą granicę otrzymamy, gdy x dąży do: $-\infty$.

Postać hyperboli zależy od dwóch stałych wielkości: a i b. Jeżeli $a=b$, równanie hyperboli ma postać (po uproszczeniu przez a^2)

$$x^2-y^2=a^2. \tag{57}$$

Jest to najmniej skomplikowana hyperbola, zwana hyperbolą równoboczną; jej rozmiary zależą tylko od jednej stałej liczby podobnie, jak rozmiary koła.

Gdyby ogniska hyperboli leżały na osi Y-ów, równanie jej miałoby postać

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

przyczem $2b$ jest osią główną, a $2a$ poboczną.

Wykaż, używając obrotu o 90°!

Gdyby środek hyperboli nie leżał w początku układu, ale gdyby osie pozostały równoległe do osi współrzędnych, otrzymalibyśmy równanie:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

przyczem p i q oznaczają współrzędne środka hyperboli. Wynika to z równoległego przesunięcia osi. Po rozwinięciu tego równania otrzymamy równanie postaci:

$$b^2x^2 - a^2y^2 + cx + dy + e = 0.$$

Cechą charakterystyczną równania hyperboli, odniesionej do osi równoległych do osi głównych, jest:

1) brak wyrazu xy,

2) x^2 i y^2 mają współczynniki różne od zera i o różnych znakach.

Gdybyśmy oprócz przesunięcia osi jeszcze je obrócili, wystąpiłby wyraz xy. Odwrotnie: jeżeli w równaniu występuje wyraz $x.y$, usuwamy go przez odpowiednio dobrany obrót. Wtedy dopiero potrafimy łatwo poznać, jaką linję przedstawia równanie.

Gdybyśmy po obrocie i przesunięciu otrzymali:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = A$$

to równanie przedstawiałoby hyperbolę, jeżeli A jest liczbą dodatnią lub ujemną. Jeżeli zaś $A = 0$, otrzymujemy:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0$$

czyli: $$(bx + ay)\ (bx - ay) = 0.$$

Równanie to spełnia się dla

$$y = +\frac{bx}{a} \text{ i } y = -\frac{bx}{a}.$$

Są to dwie proste, przechodzące przez początek układu.

Wykazać, że równanie wierzchołkowe hyperboli (wierzchołek prawy, tj. punkt $(+a, 0)$ obieramy za początek układu) ma postać:

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Uwaga. Z tego równania wynika, że parabola jest granicznym przypadkiem hyperboli. Jeżeli bowiem a dąży do ∞, to równanie — a więc i postać hyperboli — dąży do równania (postaci) paraboli. Wtedy druga gałąź hyperboli odsuwa się coraz dalej.

Z równania tego także łatwo wytłómaczyć nazwę hyperboli (por. str. 119).

Hyperbolę można — podobnie jak elipsę — określić zapomocą ogniska i kierownicy, jako miejsce geometryczne punktów, których stosunek odległości od ogniska i od kierownicy jest liczbą stałą: $|\varepsilon| > 1$ (por. str. 120).

Można także otrzymać hyperbolę, używając stałego koła i stałego punktu zewnątrz koła. Wtedy hyperbola jest miejscem geometrycznem punktów równo oddalonych od tego punktu i od tego koła (por. str. 121).

§ 32. Hyperbola i prosta.

Z rozważania układu równań:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = cx + d \end{cases}$$

z których pierwsze przedstawiają hyperbolę, a drugie linję prostą, wynika, że prosta przecina hyperbolę albo w dwóch różnych punktach, albo jej dotyka w jednym punkcie (liczonym podwójnie!) albo nie przecina jej wcale. Zależy to od tego, czy rozwiązania układu są obydwa rzeczywiste i różne, czy też są rzeczywiste równe, czy wreszcie urojone.

Zbadajmy dokładniej proste, przechodzące przez początek układu, t. j.

$$y = cx.$$

Rozwiązując układ równań

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad y = cx,$$

otrzymamy:

$$x_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2c^2}}$$

$$y_{1,2} = \pm \frac{cab}{\sqrt{b^2 - a^2c^2}}$$

jako punkty przecięcia się prostej $y=cx$ z hyperbolą. Liczby te są rzeczywiste, dokąd: $b^2>a^2c^2$. Jeżeli $b^2<a^2c^2$ wartości $x_{1,2}$ i $y_{1,2}$ są urojone. Jeżeli $b^2=a^2c^2$ czyli, jeżeli współczynnik kierunkowy prostej $y=cx$ ma wartość: $c=\pm\frac{b}{a}$, to punkty przecięcia (x_1, y_1) i (x_2, y_2) również nie istnieją. Jeżeli jednak c dąży do $\frac{b}{a}$ lub $-\frac{b}{a}$, to współrzędne (x_1, y_1), (x_2, y_2) dążą do nieskończoności.

Otóż proste:

$$y=\pm\frac{b}{a}x \tag{58}$$

nie przecinają wprawdzie hyperboli ale hyperbola zbliża się do nich tembardziej, im większe jest x (możnaby się wyrazić: przecinają ją w nieskończoności). Widzieliśmy bowiem, że dla punktów hyperboli (x, y) stosunek $\frac{y}{x}$ dąży z wzrostem x do $\pm\frac{b}{a}$, więc y dąży do $\pm\frac{b}{a}x$, t. j. do wartości, jaką ma rzędna y punktu, leżącego na prostej $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Taka prosta nazywa się asymptotą linji krzywej. Hyperbola posiada więc dwie asymptoty:

$$y=+\frac{b}{a}x \quad \text{i} \quad y=-\frac{b}{a}x.$$

Linje te są pomocne przy wykreślaniu hyperboli: hyperbola nie przekracza tych linij nigdzie, a zbliża się do nich coraz bardziej z wzrostem x. Aby otrzymać konstrukcyjnie asymptoty, wykreślamy w wierzchołkach hyperboli (fig. 76) proste prostopadłe do osi X-ów i odcinamy na nich odcinki b, do punktów C i D. Łącząc C i D ze środkiem O, otrzymamy asymptoty. Wtedy bowiem

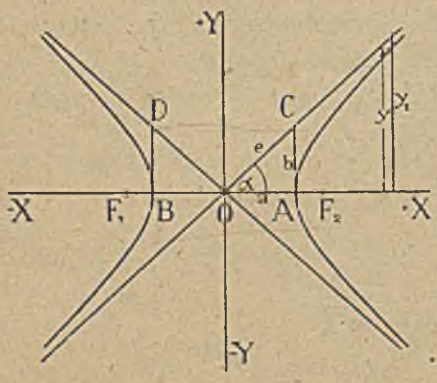


Fig. 76.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$$

więc równanie prostej OC jest

$$y=\frac{b}{a}x$$

Każda prosta równoległa do asymptoty przecina hyperbolę tylko w jednym punkcie (za drugi punkt przecięcia należałoby uważać punkt $x = \infty$, $y = \infty$).

§ 33. Styczna do hyperboli.

Równanie linji stycznej do hyperboli, danej równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wyprowadza się zupełnie tak samo, jak dla elipsy. Otrzymamy:

$$b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = a^2 b^2 \qquad (59)$$

przyczem x_1, y_1 oznaczają współrzędne punktu styczności. Równanie to powstaje z równania hyperboli przez zastąpienie kwadratów x^2 i y^2 iloczynami xx_1 i yy_1.

Przedstawiając to równanie w formie kierunkowej, otrzymamy:

$$y = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}x - \frac{b^2}{y_1}.$$

Jeżeli punkt styczności oddala się w nieskończoność, to $\frac{x_1}{y_1}$ dąży do $\pm\frac{a}{b}$, ułamek $-\frac{b^2}{y_1}$ dąży do zera, całe równanie dąży więc do

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

a to jest równanie asymptoty. Widzimy więc, że asymptotę można tu*) uważać za graniczne położenie stycznej; mówi się niekiedy, że jest ona styczną, której punkt styczności leży w nieskończoności.

Styczna do hyperboli w każdym punkcie połowi kąt, zawarty między promieniami wodzącemi tego punktu. Dowód przeprowadza się tak samo, jak dla elipsy (por. str. 125—6).

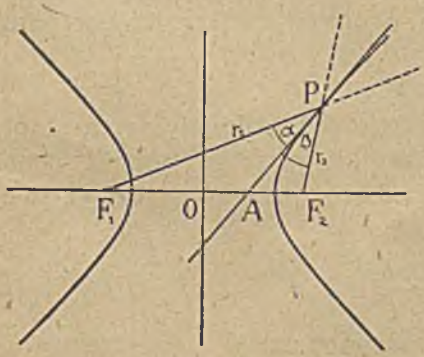


Fig. 77.

Na tej własności opiera się konstrukcja stycznej do hyperboli w dowolnym jej punkcie $P(x_1, y_1)$ (fig. 77). Prawo to także można wypowiedzieć, jako prawo odbicia promieni wychodzących z ogniska. Wypowiedz!

Na podstawie tego twierdzenia można także podać konstrukcję stycznych z punktu A, leżącego poza hyperbolą.

*) Istnieją jednak takie linje krzywe, których asymptota nie jest granicznem położeniem stycznej.

Analiza: na promieniu wodzącym F_1P (fig. 78) odcinamy F_2P do punktu H, to $FH=r_1-r_2=2a$. Styczna PA musi być symetralną odcinka F_2H. Punkt H leży na kole o środku w F_1 a promieniu $2a$ i na kole o środku A a promieniu AF_2. Znalazłszy w ten sposób punkt H, kreślimy symetralną PA odcinka HF_2, to ona jest styczną do hyperboli, wychodzącą z punktu A. — Przy tej konstrukcji otrzymujemy także drugi punkt H' i drugą styczną $P'A$.

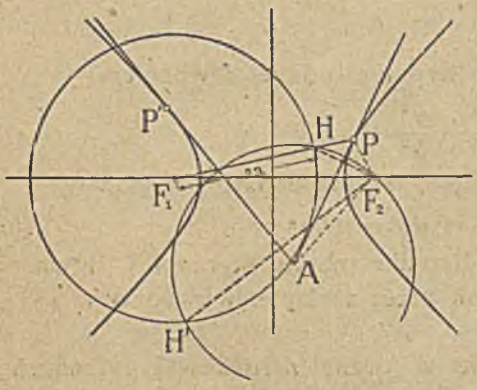


Fig. 78.

Zadanie to można także rozwiązać rachunkiem.

Najprościej jest użyć równania biegunowej punktu P' t. j. równania:

$$b^2xx_2+a^2yy_2=a^2b^2.$$

Wykazać, że to równanie przedstawia istotnie cięciwę, łączącą punkty styczności dwóch stycznych, wykreślonych z punktu poza hyperbolą!

§ 34. Zastosowanie hyperboli do badania funkcyj.

Graficznym obrazem każdej funkcji całkowitej pierwszego stopnia:

$$y=ax+b$$

jest linja prosta. Badanie graficzne ogólnej funkcji całkowitej drugiego stopnia:

$$y=ax^2+bx+c$$

opiera się na badaniu paraboli. Funkcje całkowite wyższych stopni wymagają do graficznego badania parabol wyższego stopnia. Natomiast do badania ogólnej funkcji ułamkowej jednej zmiennej pierwszego stopnia t. j.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (1)$$

wystarcza hyperbola i to **hyperbola równoboczna.**

Dowód: Uwalniając od mianownika, otrzymujemy:

$$cxy+dy-ax-b=0$$

Przez równoległe przesunięcie osi możemy to równanie sprowadzić do postaci:

$$xy = A \tag{60}$$

Obróćmy następnie układ współrzędnych o 45^0, to trzeba podstawić:

$$x = x' \cos 45^0 - y' \sin 45^0$$
$$y = x' \sin 45^0 + y' \cos 45^0$$

Ponieważ $\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, przeto równania obrotu mają postać:

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

Podstawiając te wartości w równanie (60), otrzymamy:

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = A \text{ czyli}$$

$$x'^2 - y'^2 = 2A.$$

Równanie to przedstawia hyperbolę równoboczną, której półoś ma długość $\sqrt{2}A$.

Otóż obrazem funkcji ułamkowej (1) jest hyperbola równoboczna. Asymptoty hyperboli równobocznej tworzą z osiami współrzędnych kąt 45^0 (ponieważ bowiem $a = b$, to $y = \pm x$ jest równaniem asymptot hyperboli równobocznej).

Gdybyśmy więc napowrót wykonali obrót o -45^0, otrzymalibyśmy tę hyperbolę odniesioną do asymptot, jako do osi współrzędnych.

Równanie $xy = A$ przedstawia zatem hyperbolę równoboczną, odniesioną do asymptot, jako do osi współrzędnych, a równanie; $cxy + dy - ax - b = 0$ przedstawia tę samą hyperbolę, przesuniętą równolegle względem pierwotnego położenia.

Przykład. Znaleźć graficzny obraz funkcji ułamkowej:

$$y = \frac{3x + 9}{2x + 6}$$

Uwalniając od mianownika otrzymamy:

$$xy - 3y - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0$$

Przesuńmy układ tak, aby odpadły wyrazy $-3y$ i $-\frac{3}{2}x$.

Kładąc:
$$\begin{cases} x = x' + l \\ y = y' + m \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$x'y' + x'(m - \tfrac{3}{2}) + y'(l - 3) + lm - 3m - \tfrac{3}{2}l - \tfrac{9}{2} = 0$$

Obieramy: $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ l = 3 \end{cases}$

to równanie przejdzie na

$$x'y' = 9$$

Osią tej hyperboli jest $2a = 2.\sqrt{2A}$, więc $a = \sqrt{2.9} = 3\sqrt{2}$. Odległość ogniska od środka wynosi $e = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{36} = 6$. Środek jej jest przesunięty względem początku układu O o odcinki 3, $\frac{3}{2}$. Możemy więc tę hyperbolę wykreślić.

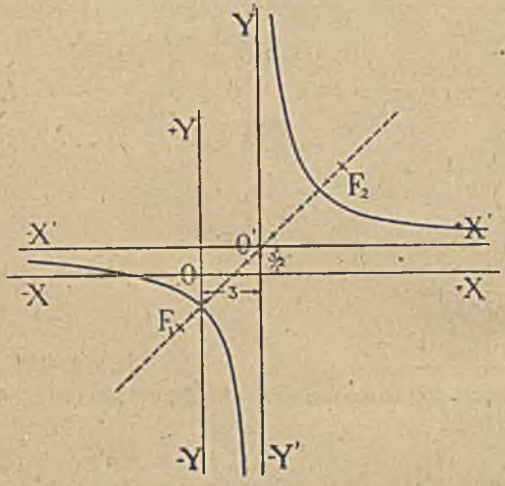


Fig. 79.

Z figury 79 widzimy, że, gdy x dąży do 3, y dąży do nieskończoności. Linja $x = 3$, t. j. $(Y'Y')$ jest $+\ -$ asymptotą. Podobnie, gdy y dąży do $\frac{3}{2}$, x dąży do ∞. Linja $y = \frac{3}{2}$, t. j. $(X'X')$, $+\ -$ jest drugą asymptotą. Z tej figury widzimy także, że do każdej wartości x należy tylko jedna wartość y i odwrotnie, z wyjątkiem wartości $x = 3$ i $y = \frac{3}{2}$. (Por. także przykład b. na str. 88).

Funkcja $\frac{ax+b}{cx+d}$ jest najogólniejszym takim związkiem między x i y, przy którym jednej wartości x odpowiada jedna wartość y i odwrotnie.

(N. p. związek $y = ax^2 + bx + c$ daje wprawdzie do każdej wartości x jedną wartość y, ale odwrotnie: do każdej wartości y należą dwie różne wartości x),

Ćwiczenia X

§ 31. 1. Narysować hyperbole:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

b) $x^2 - 4y^2 = 4$

c) $x^2 - y^2 = 25$

2. Sprowadzić do najprostszej postaci i wykreślić obrazy następujących równań:

a) $4x^2 - 25y^2 - 16x - 50y = 109$

b) $x^2 - 9y^2 + 7x + 9y + 10 = 0$

c) $5x^2 - 4y^2 + 10x - 16y = 0$

3. Podać wierzchołkowe równanie hyperboli, znając jej półosie $a=5$, $b=3$.

4. Zbudować równanie środkowe hyperboli, znając:

a) oś $2a=12$ i punkt $P(8, 3)$ na jej obwodzie;

b) oś $2b=6$ i punkt $A(4, 5)$ na jej obwodzie;

c) parametr $p=2\frac{1}{2}$ i odległość ognisk $2e=26$;

d) odległości ogniska F_2 od obu wierzchołków hyperboli $c=2m$ $d=10\,m$.

5. Dla których punktów hyperboli

a) rzędna równa się odciętej?

b) rzędna jest dwa razy większa od odciętej?

c) jeden promień wodzący jest dwa razy większy od drugiego?

§ 32. 6. Znaleźć punkty przecięcia się hyperboli

$$5x^2-3y^2=15$$

z prostemi:

$$y=\tfrac{3}{4}x,\quad y=\tfrac{5}{3},\quad y=2x$$

7. Obliczyć współrzędne punktów przecięcia się linij:

a) $9x^2-16y^2=144$, $y=\frac{3}{4}x-9$;

b) $x^2-4y^2=4$ $\qquad y=\frac{1}{2}x-1$;

c) $x^2+y^2=16$ $\qquad x^2-y^2=9$.

8. Znaleźć miejsce geometryczne środków wszystkich równoległych cięciw hyperboli o współczynniku kierunkowym c (odp. $y=\frac{b^2}{ca^2}x$)

9. Wyrazić różnicę między rzędną asymptoty, a rzędną hyperboli $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dla tej samej odciętej wzorem:

$$d=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

i wykazać, że ta różnica dąży do zera z wzrostem x.

10. Znając równania asymptot: $y=\pm\frac{5}{3}x$ i odległość ognisk $2e=2.\sqrt{306}$, zbudować równanie hyperboli.

11. Obliczyć odległość ogniska od asymptoty hyperboli w liczbach ogólnych.

12. Wyprowadzić równania promieni wodzących; obliczyć kąt utworzony przez nie. Kiedy ten kąt jest prosty?

13. Pod jakim kątem widać odległość obu ognisk hyperboli: $16x^2-9y^2=144$ z punktu hyperboli, którego rzędną jest $y_1=8$.

14. W których punktach hyperboli $11x^2-5y^2=55$ promienie wodzące są do siebie prostopadłe?

§ 33. 15. Znaleźć równanie stycznej do hyperboli:

a) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ w punkcie $x_1=2\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{3}{4}$

b) $x^2-y^2=1$ „ $x_1=1\frac{1}{4}$, $y_1=\frac{3}{4}$

16. Znaleźć równania stycznych do hyperboli

$$9x^2-25y^2=225 \text{ z punktu } (-1, 3)$$

17. Znaleźć równania stycznych do hyperboli

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

które się przecinają w początku układu.

18. Wykazać, że styczne na końcu cięciwy prostopadłej do osi X-ów, a przechodzącej przez ognisko, przecinają się na kierownicy (odległość kierownicy od środka $d=\frac{a^2}{e}$).

19. Znaleźć styczne do hyperboli $x^2-y^2=1$, znając ich współczynnik kierunkowy $\operatorname{tg}\alpha=2$.

20. Wykazać, że miejscem geometrycznem spodków linij prostopadłych z ogniska hyperboli na styczne jest koło: $x^2+y^2=a^2$.

21. Z których punktów widać hyperbolę:

$$4x^2-9y^2=36$$

pod kątem prostym? Rozwiąż to zagadnienie w liczbach ogólnych!

22. Znaleźć miejsce geometryczne środków kół, które stykają się zewnętrznie z kołem o promieniu $r=3$ o środku w początku układu i przechodzą przez jeden stały punkt poza kołem (n. p. $P(4, 0)$).

23. Wykazać, że elipsa i hyperbola o wspólnych ogniskach przecinają się zawsze pod kątem prostym.

Wskazówka: użyć równań $(a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2)$ i podobnie dla hyperboli.

24. Wykazać, że odcinek stycznej do hyperboli, zawarty między asymptotami, jest przepołowiony punktem styczności.

§ 34. 25. Równanie hperboli

$$(2x-y)(x+y)=4$$

sprowadzić do osi głównych jako osi współrzędnych.

26. Zbadać graficznie funkcje:

a) $y=\frac{3x+1}{x-4}$ (za jednostkę obrać 1 *cm*)

b) $y=-\frac{200}{x-10}$ („ „ „ 1 *mm*)

c) $y=\frac{x-2}{3x-1}$ („ „ „ 1 *cm*)

27. Wykazać, że problem podwojenia kostki można wykonać przy pomocy paraboli i hyperboli równobocznej (por. str. 103).

28. W równaniu:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad a=1,\ b=2,\ d=3$$

zmieniać c i wykreślić obrazy dla kilku wartości $c=2$, 1·6, 1·5, 1·4, 1, 0·1 i t. d.

Do jakiej linji dąży hyperbola, gdy c dąży do zera? do jakiej, gdy c dąży do $\frac{a}{b}$?

Rozdział XI

Ogólny rozbiór równania drugiego stopnia o dwóch zmiennych

§ 35. Rozbiór równania drugiego stopnia.

Ogólną postacią równania drugiego stopnia o dwóch zmiennych jest:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (61)$$

Aby to było istotnie równanie drugiego stopnia, musi być przynajmniej jeden z współczynników A, B, C różny od zera.

W poprzednich rozdziałach poznaliśmy cały szereg utworów geometrycznych, wyrażających się równaniami drugiego stopnia. Te utwory można ugrupować w następujące trzy zasadnicze typy:

a) **Typ eliptyczny**, do którego należą *elipsa, koło, punkt.* Równanie każdego utworu należącego do tego typu da się przez obrót sprowadzić do formy (por. § 27):

$$b^2x^2+a^2y^2+cx+dy+e=0 \qquad (b^2\neq 0 \text{ i } a^2\neq 0)$$

b) **Typ hyperboliczny**, do którego należy *hyperbola i pary przecinających się prostych.* Równania utworów należących do tego typu dadzą się sprowadzić do formy (por. § 31):

$$b^2x^2-a^2y^2+cx+dy+e=0 \qquad (b^2\neq 0,\ a^2\neq 0)$$

c) **Typ paraboliczny**, do którego należą *parabola, dwie proste równoległe lub nakrywające się.* Równania figur należących do tego typu dadzą się sprowadzić do jednej z form (por. § 21):

$$ay^2+by+cx+d=0$$

lub

$$ax^2+by+cx+d=0 \qquad (a\neq 0)$$

Wszystkie te utwory można objąć wspólną nazwą, charakteryzującą zarazem ich wspólny sposób powstawania: są to ***przekroje stożka.*** Wiadomo bowiem z nauki stereometrji, że przecinając stożek kołowy płaszczyznami w rozmaitych położeniach, otrzymujemy jako linje przecięcia z pobocznicą stożka: koło, elipsę, hyperbolę, parabolę, dwie proste przecinające się, nakrywające się (gdy płaszczyzna jest

styczna), równoległe (gdy mamy do czynienia z walcem, który jest graniczną formą stożka) lub punkt (gdy płaszczyzna przechodzi przez wierzchołek stożka a nie ma żadnego punktu wspólnego z kierownicą). Możemy więc ująć wynik badań przeprowadzonych w poprzednich rozdziałach w następujące twierdzenie:

Każdy przekrój stożka wyraża się analitycznie równaniem drugiego stopnia o dwóch zmiennych, jeżeli używamy układu współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie przekroju.

Chcielibyśmy obecnie zbadać odwrotnie: czy każde równanie drugiego stopnia przedstawia tylko jakiś przekrój stożka, czy też mogą występować także inne utwory geometryczne jako obrazy takiego równania, czy wreszcie istnieją równania drugiego stopnia nie mające żadnego obrazu geometrycznego.

Otóż co do ostatniego pytania, to wykazaliśmy już przy dyskusji poszczególnych linij, że równanie charakterystyczne dla typu *eliptycznego* może nie posiadać obrazu geometrycznego (mówi się czasem, że przedstawia wtedy „koło urojone" lub „elipsę urojoną") a podobnie ma się rzecz także w typie *parabolicznym* (t. zw. „dwie proste urojone"); typ *hyperboliczny* ma zawsze obraz rzeczywisty.

Chodzi więc tylko o to, czy każde równanie 2-go stopnia o dwóch zmiennych da się sprowadzić do jednego z typów *a), b), c),* wymienionych na wstępie. By na to pytanie odpowiedzieć, postarajmy się najpierw przez obrót osi usunąć wyraz Bxy.

Wykonać obrót, to znaczy podstawić za x i y wyrażenia

$$x = x' \cos\delta - y' \sin\delta$$
$$y = x' \sin\delta + y' \cos\delta$$

według wzorów (34). Wstawiając te wyrażenia w równanie (61) otrzymamy po uporządkowaniu:

$$(A\cos^2\delta + B\sin\delta\cos\delta + C\sin^2\delta)x'^2 +$$
$$+(-A\sin 2\delta + B\cos 2\delta + C\sin 2\delta)x'y' +$$
$$+(A\sin^2\delta - B\sin\delta\cos\delta + C\cos^2\delta)y'^2 +$$
$$+(D\cos\delta + E\sin\delta)x' + (-D\sin\delta + E\cos\delta)y' + F = 0.$$

Jak widzimy, wyraz wolny F nie doznał przytem zmiany.

Wyraz $x'.y'$ odpadnie, gdy kąt δ dobierzemy tak, aby

$$-A\sin 2\delta + B\cos 2\delta + C\sin 2\delta = 0$$

czyli $$(C-A)\sin 2\delta = -B\cos 2\delta$$ a stąd

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{B}{A-C} \qquad (62)$$

Kąt 2δ da się z tego warunku wyznaczyć zawsze (i to w dwa sposoby, a mianowicie jeżeli $2\delta = \alpha$ spełnia to równanie, to także kąt

$180^0+\alpha$ czyni zadość temu warunkowi), bo funkcja tangens może przybierać każdą rzeczywistą wartość, z wyjątkiem przypadku, gdy równocześnie $B=0$ i $A-C=0$. Wiemy jednak, że w tym przypadku równanie (61) przedstawia koło (por. § 18), a więc równanie odrazu — bez wykonywania obrotu — zaliczymy do typu eliptycznego. We wszystkich innych przypadkach otrzymamy po obrocie równanie postaci:

$$A'x'^2+B'y'^2+C'x'+D'y'+F=0 \qquad (63)$$

W tem równaniu, odniesionem już do nowych osi, trzeba zwrócić uwagę na wyrazy drugiego stopnia. Rozróżnimy przytem następujące możliwości:

1. Jeżeli żaden z współczynników A' i B' nie jest zerem, to albo obydwa mają *znaki jednakowe*, i wtedy mamy typ *eliptyczny*, albo obydwa mają *znaki różne* i wtedy mamy typ *hyperboliczny*.

2. Jeżeli *jeden* z współczynników A' lub B' *jest zerem*, to otrzymujemy typ *paraboliczny*.

3. Równocześnie nie mogą być A' i B' obydwa zerami, bo z (63) pozostałoby równanie pierwszego stopnia

$$C'x'+D'y'+F=0.$$

Wiemy zaś, że obrót nie zmienia stopnia równania; jeżeli więc pierwotne równanie (61) było istotnie stopnia drugiego, to i po obrocie musiało zatrzymać przynajmniej jeden wyraz drugiego stopnia (wynika to z tego, że równania obrotu są przekształceniami pierwszego stopnia w zmiennych x', y', czyli linjowemi).

Zestawiając te wyniki z wynikami, otrzymanemi w poprzednich rozdziałach przy dyskusji poszczególnych typów, możemy powiedzieć:

Po wykonaniu obrotu otrzymamy z każdego równania 2-go stopnia o 2 zmiennych równanie formy:

$$A'x^2+B'y^2+C'x+D'y+F=0.$$

To równanie przedstawia:

1. Parabolę, jeżeli brak wyrazu $A'x^2$ lub $B'y^2$. Parabola ta degeneruje się do jednej lub do dwóch linij prostych równoległych, jeżeli prócz x^2 brak także x lub, jeżeli oprócz y^2 brak także y. Proste te mogą się także stać urojone.

2. Elipsę, jeżeli A' i B' mają ten sam znak; gdy $A'=B'$, elipsa zamienia się na koło. Elipsa degeneruje się do punktu, jeżeli po przesunięciu osi do środka otrzymamy:

$$A'x'^2+B'y'^2=0.$$

Jeżeli zaś prawa strona jest liczbą ujemną, równanie nie ma rzeczywistego obrazu geometrycznego.

3. Hyperbolę, jeżeli A' i B' mają znaki przeciwne; hyperbola degeneruje się do dwóch przecinających się linij prostych, jeżeli po przesunięciu układu do środka otrzymamy:

$$A'x'^2 - B'y'^2 = 0.$$

Stąd wynika następujący ogólny wniosek:

Każde równanie 2-go stopnia o 2 zmiennych przedstawia albo jakiś przekrój stożka, albo nie ma wcale obrazu geometrycznego (przedstawia utwór „urojony drugiego stopnia").

Współczynniki A', B', C', D' równania (63) można także wyrazić wprost zapomocą współczynników A, B, C, D, E, F pierwotnego równania (61). Trzebaby w tym celu funkcje $\sin\delta$ i $\cos\delta$ wyrazić najpierw przy pomocy wzorów trygonometrycznych zapomocą $\operatorname{tg} 2\delta$ czyli $\frac{B}{A-C}$ i wstawić te wartości we wzory

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\delta + B\sin\delta\cos\delta + C\sin^2\delta \\ B' &= A\sin^2\delta - B\sin\delta\cos\delta + C\cos^2\delta \\ C' &= D\cos\delta + E\sin\delta \\ D' &= -D\sin\delta + E\cos\delta. \end{aligned}$$

Dla współczynników A' i B' rachunek upraszcza się o tyle, że nie trzeba obliczać samych *sin δ* i *cos δ*, wystarczą *sin 2δ* i *cos 2δ*.

Utwórzmy bowiem sumę i różnicę tych współczynników, to

$$\begin{aligned} A' + B' &= A + C \\ A' - B' &= (A-C)\cos 2\delta + B\sin 2\delta. \end{aligned}$$

Wstawiając tu następnie:

$$\sin 2\delta = \frac{\operatorname{tg} 2\delta}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\delta}} = \frac{B}{\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

i

$$\cos 2\delta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\delta}} = \frac{A-C}{\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

otrzymamy ostatecznie na A' i B' wzory:

$$\left.\begin{aligned} 2A' &= A + C \pm \sqrt{(A-C)^2+B^2} \\ 2B' &= A + C \mp \sqrt{(A-C)^2+B^2} \end{aligned}\right\} \quad (63\,a)$$

Znaki bierze się w obu wzorach górne lub w obu dolne zależnie od tego, jakie znaki mają $\sin 2\delta$ i B (jeżeli $\sin 2\delta$ i B mają znaki zgodne, bierze się znaki górne, jeżeli przeciwne, dolne).

Z tych wzorów obliczamy też:

$$A'B' = -\tfrac{1}{4}(B^2 - 4AC) \quad (63\,b)$$

Zawilsze wzory otrzymalibyśmy na współczynniki C' i D'.

§ 36. Środek i osie symetrji.

Sprowadziwszy równanie (61) do formy (63) możemy już z łatwością wykryć *osie symetrji* badanego utworu geometrycznego. Wystarczy w tym celu wykonać takie przesunięcie, aby odpadły wyrazy pierwszego stopnia, t. j. $C'x'$ i $D'y'$. Jeżeli ani A' ani B' nie jest zerem, to po tem przesunięciu nowy początek układu jest zarazem *środkiem symetrji*. Środek można jednak wykryć także wprost z pierwotnego równania (61).

Wiemy już (por. § 20), że koniecznym i dostatecznym warunkiem na to, aby początek układu współrzędnych był środkiem symetrji, jest, aby równanie danej linji nie zmieniało swej postaci, gdy za (x, y) podstawimy $(-x, -y)$. Równanie (61) czyniłoby zadość temu warunkowi wtedy, gdyby odpadły wyrazy Dx i Ey. Spróbujmy to odrazu uzyskać przez przesunięcie:

$$x=x'+l, \quad y=y'+m.$$

Podstawiając te wyrażenia w (61) otrzymamy po uporządkowaniu:

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2Al+Bm+D)x'+(Bl+2Cm+E)y'+$$
$$+(Al^2+Blm+Cm^2+Dl+Em+F)=0.$$

Wyrazy pierwszego stopnia odpadną, jeżeli dobierzemy przesunięcie (l, m) tak, aby:

$$2Al+Bm+D=0$$
$$Bl+2Cm+E=0.$$

Z tych 2 równań otrzymamy:

$$l=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC}, \qquad m=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC} \tag{64}$$

Wielkości tych przesunięć są współrzędnemi początku nowego układu, a więc zarazem *współrzędnemi środka symetrji* w dawnym układzie. Wyrażenia te mają wspólny mianownik.

Widzimy z wzoru (64), że środek istnieje tylko wtedy, gdy mianownik nie jest zerem, tj. gdy $B^2-4AC\neq 0$. Gdyby zaś było $B^2-4AC=0$, to wyrazy drugiego stopnia $Ax^2+Bxy+Cy^2$ w pierwotnem równaniu (61) tworzyłyby — jak wiadomo z algebry — kwadrat zupełny, $(x\sqrt{A}\pm y\sqrt{C})^2$. Równanie (61) przedstawiałoby wtedy parabolę (por. § 21) a więc istotnie krzywą bez środka.

Nie wykonując nawet każdym razem przesunięcia *możemy wprost z wartości współczynników danego równania (61) wywnioskować, czy*

ono przedstawia linję ze środkiem, czy też bez środka; zależy to od tego, czy wyrażenie B^2-4AC jest różne od zera, czy też równe zeru. Współrzędne (l, m) środka oblicza się wprost z równań (64).

Używając związku (63 b) $A'.B'=-\frac{1}{4}(B^2-4AC)$, o którym powyżej wspomnieliśmy, widzimy, że dla $B^2-4AC<0$ jest iloczyn $A'B'$ liczbą dodatnią, t. j. A' i B' mają ten sam znak. Równanie (63) należy więc do typu *eliptycznego*. Jeżeli zaś $B^2-4AC<0$, to tak samo wywnioskujemy, że równanie (63) przedstawia typ *hyperboliczny*. Możemy zatem wszystkie 3 typy równań 2-go stopnia odróżnić odrazu zapomocą wyrażenia B^2-4AC.

Widzimy więc, że wprost z równania (61) można odczytać, jaki typ to równanie przedstawia, a następnie przez obrót (określony równaniem (62)) i przesunięcie (określone równaniami (64), o ile środek istnieje), można je zanalizować zupełnie dokładnie. W przykładach liczbowych praktyczniej jest najpierw wykonać przesunięcie do środka w typach *a)* i *b)* a potem obrót, w typie zaś *c)* najpierw wykonuje się obrót a później odpowiednie przesunięcie.

Uwaga. Uwzględniając warunek $B^2-4AC=0$ otrzymamy dla typu parabolicznego z wzoru na $\operatorname{tg} 2\delta$ samo $\operatorname{tg}\delta=\pm\frac{2C}{B}$ a stąd łatwo już obliczyć $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, a więc i współczynniki C' i D' wyrażą się teraz prościej (oblicz je!), z współczynników zaś A' i B' jeden jest zerem a drugi wynosi $A+C$ (wykaż!)

Ogólne równanie drugiego stopnia zawiera 6 współczynników stałych, przez jeden jednak, np. A, można całe równanie podzielić; wtedy pozostaje 5 stałych dowolnych. Stąd wynika, że do wyznaczenia ogólnej linji krzywej drugiego stopnia pod względem kształtu i położenia potrzeba pięciu warunków (np. 5 punktów).

Dalsze badania geometrji analitycznej dotyczą z jednej strony linij krzywych wyższych stopni, z drugiej zaś utworów przestrzennych, jak kula, elipsoida i t. p.

Ćwiczenia XI

1. Wykonując odpowiedni obrót zbadać, do jakich typów należą równania:
   a) $2x^2-4xy+7y^2=10$,
   b) $x^2+3xy-2y^2=0$,
   c) $4x^2+4xy-y^2=9$.

2. Do jakiego typu należą równania 2-go stopnia, zawierające z wyrazów drugiego stopnia tylko iloczyn obu zmiennych i kwadrat jednej z nich?

3. Okazać, że $Ax^2+Bxy+Cy^2=0$ przedstawia punkt (0, 0), dwie proste przechodzące przez początek układu, lub jedną taką prostą, zależnie od tego, czy należy do typu eliptycznego, hyperbolicznego czy też parabolicznego.

4. Wykazać, że iloczyn równań dwóch prostych nierównoległych należy zawsze do typu hyperbolicznego, a równoległych do typu parabolicznego.

5. Okazać, że styczna do krzywej wyrażonej ogólnem równaniem (61) ma współczynnik kierunkowy $a=-\dfrac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}$.

6. Wykazać, że osie krzywej w typie eliptycznym i hyperbolicznym wyrażają się wzorami

$$a=\sqrt{\frac{-2F'}{A+C\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}}};\quad b=\sqrt{\frac{-2F'}{A+C\mp\sqrt{B^2+(A-C)^2}}}$$

jeżeli F' oznacza wyraz wolny po dokonaniu przesunięcia osi do środka symetrji.

7. Wykazać, że gdy x dąży do nieskończoności, to stosunek $\dfrac{y}{x}$ w ogólnem równaniu 2-go stopnia dąży albo do dwóch wartości rzeczywistych różnych (typ hyperboliczny), albo równych (typ paraboliczny) albo zespolonych (typ eliptyczny). Co można powiedzieć na podstawie tego o kierunkach asymptot?

Zbadać obrazy geometryczne następujących równań:

8. $17x^2+18xy-7y^2-56x+88y-228=0$.
9. $421x^2-882xy+1261y^2=5800$.
10. $3y^2+10xy-8x^2-62y+60x-88=0$.
11. $5x^2-6xy+5y^2+2x-14y+14=0$.
12. $x^2+2xy+y^2+2x-6y-19=0$.
13. $5x^2+24xy-5y^2-4x+58y-85=0$.
14. $x^2+6xy+9y^2-4x-12y+5=0$.
15. $37x^2-32xy+13y^2+170x-110y+208=0$.
16. $x^2+10xy+25y^2-x-5y-12=0$.
17. $9x^2-12xy+4y^2+6x-4y+1=0$.
18. $34x^2-24xy+41y^2-208x+294y+649=0$.
19. $144x^2+120xy+25y^2-390x+886y-1031=0$.

Część III

Rozdział XII

Wstępne pojęcia z geometrji analitycznej przestrzennej

§ 37. Współrzędne prostokątne w przestrzeni.

Do wyznaczenia położenia punktu na płaszczyźnie używaliśmy dwóch prostopadłych do siebie osi współrzędnych. W przestrzeni dwie osie nie wystarczają: trzeba użyć trzech prostopadłych do siebie *osi współrzędnych* XX, YY, ZZ (fig. 80).

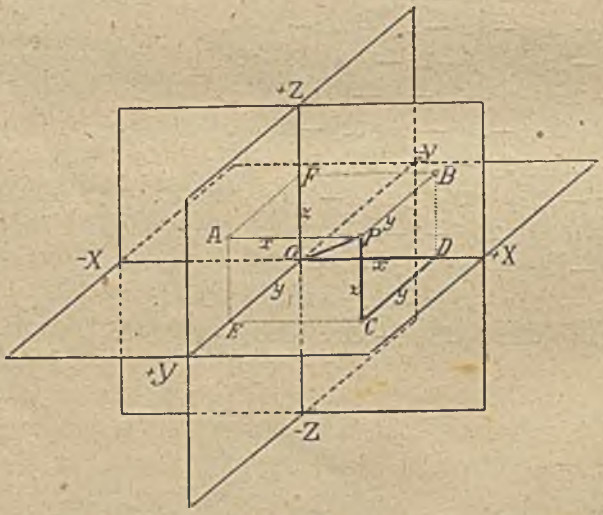


Fig. 80.

Przesuwając przez każdą parę tych osi płaszczyznę, otrzymujemy układ trzech płaszczyzn parami do siebie prostopadłych, które nazywamy *płaszczyznami współrzędnych;* są to płaszczyzny XY, XZ, YZ zwane w geometrji wykreślnej płaszczyzną poziomą, pionową i boczną.

Punkt przecięcia się O trzech osi a zarazem trzech płaszczyzn współrzędnych jest *początkiem układu* współrzędnych prostokątnych. Cała przestrzeń rozpada się na 8 nieskończonych części, leżących wewnątrz ośmiu kątów bryłowych trójściennych o wspólnym wierzchołku O. Aby dowolny punkt P przestrzeni zastąpić liczbami, wykreślamy z tego punktu trzy prostopadłe PA, PB, PC, do płaszczyzn współrzędnych. Trzy liczby wymiarowe tych trzech odcinków, opatrzone odpowiedniemi znakami, nazywamy współrzędnemi punktu P. Co do znaków, to podobnie, jak w geometrji płaskiej, trzeba obrać na każdej osi jakiś kierunek jako dodatni, aby odróżnić od siebie punkty, leżące w różnych ósemkach przestrzeni ale w tych samych odległościach od płaszczyzn współrzędnych.

Jeżeli osie są umieszczone tak, jak na fig. 80, to na osi x-ów uważamy za kierunek dodatni kierunek od lewej ręki ku prawej, na osi y-ów od tyłu ku przodowi a na osi z od dołu do góry. Taki układ trzech kierunków dodatnich nazywamy *układem lewej ręki*, albowiem takie kierunki mają względem siebie trzy rozchylone palce lewej ręki (fig. 80 a). Gdybyśmy zaś zmienili kierunek dodatni jednej osi, np. gdybyśmy dodatni kierunek osi y-ów obrali od przodu ku tyłowi, zmieniłby się nasz układ na układ prawej ręki.

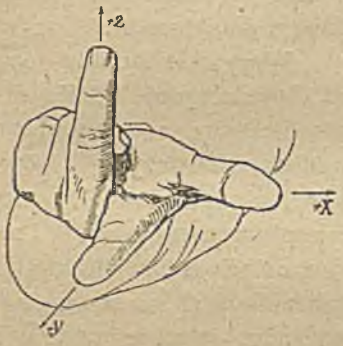


Fig. 80 a.

Wobec takiej umowy co do znaków, współrzędnemi punktu P są wielkości odcinków $AP=x$, $BP=y$, $CP=z$ (a nie np. PA, PB, PC!), przyczem x, y, z mogą być liczbami dodatniemi, ujemnemi lub zerami. Liczbę x nazywamy *odciętą* punktu P, y *rzędną* a z nie ma ustalonej nazwy (moglibyśmy ją nazwać np. wysokością punktu P). Aby zanotować, że P ma współrzędne x, y, z, piszemy je obok P w nawiasie: $P(x, y, z)$ podobnie, jak w analityce płaskiej, w ustalonym porządku, t. j. pierwsza liczba oznacza zawsze odciętą, druga rzędną a trzecia z.

Współrzędne punktu P uzyskaliśmy, wykreślając z P proste prostopadłe do płaszczyzn współrzędnych. Takie same odcinki możemy też otrzymać wykreślając z punktu P trzy płaszczyzny PD, PE, PF prostopadłe do osi współrzędnych. Otrzymamy wtedy wprost na osiach odpowiednie odcinki: $OD=AP=x$, $OE=BP=y$, $OF=CP=z$. Odcinki te są *rzutami promienia* OP (łączącego dany punkt P z po-

czątkiem układu) *na osie*. Płaszczyznami rzucającemi promień *OP* np. na oś x-ów są: płaszczyzna *YZ* i *PD*. Najkrótszą zaś drogą do znalezienia współrzędnych dowolnego punktu *P* jest wykreślenie jednej linji łamanej *PCDO*, którą otrzymujemy rysując $PC \perp XY$ a z punktu przebicia *C* prostą $CD \perp OX$; wtedy $OD=x$, $DC=y$, $CP=z$. Tak też najłatwiej znaleźć punkt, jeżeli mamy podane jego współrzędne. Np. punkt *A* (4, 3, 5) znajdujemy odcinając na osi x-ów 4 jednostki do punktu *B* (fig. 81), w tym punkcie wykreślamy prostopadłą *BC* do osi x-ów i na niej odcinamy 3 jednostki do punktu *C* a wreszcie w tym punkcie wykreślamy prostopadłą do płaszczyzny *XY* i na niej odcinamy 5 jednostek w kierunku dodatnim, to koniec tego odcinka jest żądanym punktem *A*.

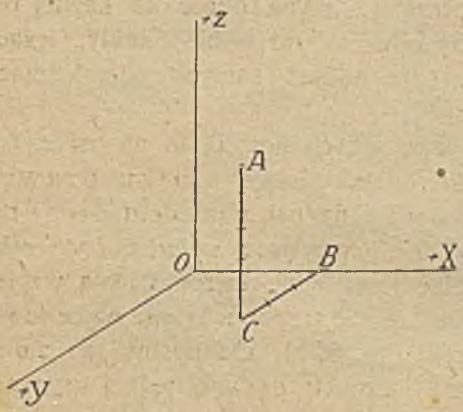


Fig. 81.

Wszystkie punkty leżące na płaszczyźnie *XY* mają współrzędną $z=0$, podobnie punkty płaszczyzny *YZ* są scharakteryzowane warunkiem $x=0$, a punkty płaszczyzny *ZY* warunkiem $z=0$. Punkty leżące na osi x-ów mają równocześnie $y=0$ i $z=0$ a podobnie punkty na dwóch pozostałych osiach są scharakteryzowane zawsze dwoma warunkami. Początek układu *O* ma $x=y=z=0$.

Każdy punkt płaszczyzny zastąpiliśmy zatem jakąś jedną t r ó j k ą liczb rzeczywistych i w ten sposób wszelkie geometryczne badania punktów w przestrzeni sprowadziliśmy do badań rachunkowych. Odwrotnie: każdej trójce liczb rzeczywistych odpowiada jeden punkt w przestrzeni trójwymiarowej, jak to wynika z konstrukcji punktu o danych współrzędnych.

Powiązawszy w ten sposób punkty z liczbami możemy już stosować do utworów przestrzennych te same metody badania analitycznego, których używaliśmy na płaszczyźnie.

§ 38. Odcinki.

Znając współrzędne dwóch punktów końcowych odcinka: $P_1(x_1 y_1 z_1)$ i $P_2(x_2 y_2 z_2)$ potrafimy podobnie jak w geometrji płaskiej obliczyć jego rzuty na osie, długość i wyznaczyć jego kierunek w przestrzeni.

a) Rzuty odcinka na osie współrzędnych. Rzut odcinka na dowolną oś otrzymuje się w stereometrji wykreślając przez końce tego odcinka płaszczyzny prostopadłe do tej osi. Aby więc znaleźć rzut odcinka $\overline{P_1P_2}$ na oś x-ów, wykreślamy dwie płaszczyzny P_1A i P_2B prostopadłe do OX. Punkty przebicia A, B tych płaszczyzn z osią x-ów wyznaczają końce rzutu. Z figury (fig. 82) widocznem jest, że wielkość AB tego rzutu z uwzględnieniem znaku jest

$$p_x = x_2 - x_1.$$

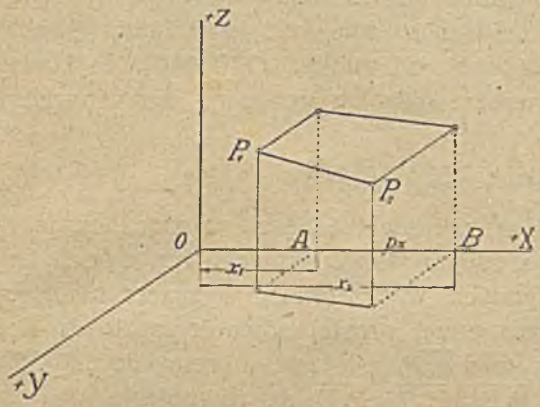


Fig. 82.

Podobne wzory otrzymujemy, rzucając odcinek $\overline{P_1P_2}$ na oś y-ów i z-ów. Na rzuty odcinka na osie współrzędnych mamy więc wzory zupełnie podobne do wzorów (9) z analityki płaskiej:

$$\begin{aligned} p_x &= x_2 - x_1 \\ p_y &= y_2 - y_1 \\ p_z &= z_2 - z_1 \end{aligned} \qquad (65)$$

b) Długość odcinka.

Wykreślmy z punktu P_1 trzy płaszczyzny równoległe do płaszczyzn współrzędnych a tak samo z punktu P_2 (fig. 83). Powstanie prostopadłościan, w którym P_1P_2 jest przekątnią a krawędzie są równe rzutom odcinka $\overline{P_1P_2}$ na osie. Odcinki bowiem prostych równoległych zawarte między płaszczyznami równoległemi są równe, a gdybyśmy przedłużyli płaszczyzny P_1A i P_2B aż do przecięcia się z osią x-ów, otrzymalibyśmy właśnie rzut odcinka $\overline{P_1P_2}$ na oś x-ów i podobnie dla innych osi. Przekątnia prostopadłościanu równa się jednak

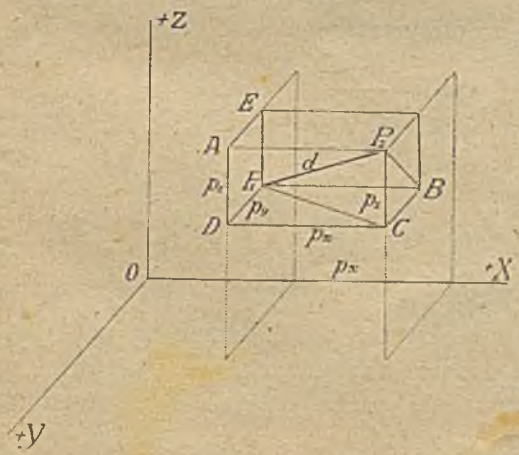


Fig. 83.

sumie kwadratów trzech krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku, a więc

$$d^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2 \tag{a}$$

a podstawiając tu wartości z wzorów (65), otrzymujemy *na odległość dwóch punktów wzór:*

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{66}$$

który jest widocznem uogólnieniem odpowiedniego wzoru (10) z analityki płaskiej. Jeżeli nam chodzi o odległość dowolnego punktu $P(x, y, z)$ *od początku układu* tj. od punktu O (0, 0, 0), to kładąc zero zamiast x_2, y_2, z_2 w wzorze (66) otrzymujemy jako specjalny przypadek wzór prostszy:

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{66$_1$}$$

c) Kierunek odcinka. Kierunek odcinka będzie wyznaczony, jeżeli poznamy jego kąty α, β, γ z osiami współrzędnych. Kąt dwóch linij prostych, chociażby wichrowatych, w przestrzeni wyznacza się, prowadząc z dowolnego punktu jednej prostej równoległą do drugiej. Aby więc wyznaczyć kąty odcinka P_1P_2 z osiami, możemy użyć fig. 83, w której właśnie proste P_1B, P_1D, P_1E są równoległe do osi współrzędnych.

Odcinek P_1P_2 tworzy więc takie same kąty z osiami, jak z temi trzema odcinkami, te zaś możemy łatwo obliczyć wprost z figury. I tak z trójkąta prostokątnego P_1P_2B wynika:

$$\cos \sphericalangle P_2P_1B=\frac{P_1B}{P_1P_2}$$

lub oznaczając ten kąt literą α, otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned} &\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d}\\ \text{Podobnie okazuje się, że: }&\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{d}\\ &\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{d}\end{aligned}\right| \tag{67}$$

przyczem d należy obliczyć według wzoru (66).

Do tych samych wzorów można też dojść odrazu na podstawie znanego z trygonometrji twierdzenia: rzut odcinka na oś równa się długości tego odcinka, pomnożonej przez cosinus kąta zawartego między tym odcinkiem a osią.

Te trzy cosinusy nazywamy d o s t a w a m i k i e r u n k o w e m i prostej P_1P_2.

Uwaga. W tych wzorach zaciera się już analogja z wzorem (11) z geometrji analitycznej płaskiej. Gdybyśmy jednak utworzyli ilorazy dostaw kierunkowych, otrzymalibyśmy wzory $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ i $\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}=\frac{z_2-z_1}{x_2-x_1}$ podobnie jak na płaszczyźnie.

Na wyznaczenie kierunku odcinka — wogóle linji prostej — otrzymaliśmy tu trzy wzory, tymczasem zaś już dwa kąty wystarczą do ustalenia kierunku prostej (jakie kąty?). Widocznie więc te wzory są od siebie zależne. Istotnie podnosząc obie strony trzech równań (67) do kwadratu i dodając je stronami otrzymamy:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}{d^2}$$

a ponieważ licznik równa się d^2, otrzymujemy

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \qquad (68)$$

Widzimy więc, że między trzema dostawami kierunkowemi dowolnej linji prostej zachodzi zawsze związek (68), z którego można obliczyć jeden kąt znając dwa. Tak więc wystarczyłoby podać tylko dwa równania z wzorów (67), wypisujemy je jednak trzy ze względów symetrji.

Uwaga. W analityce płaskiej dowolna prosta tworzy z osiami współrzędnych dwa kąty: α i $\beta=90^0-\alpha$. Wobec tego $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Widzimy więc, że związek (68) należy uważać za uogólnienie trygonometrycznej formy twierdzenia Pitagorasa na płaszczyźnie.

§ 39. Kąt dwóch kierunków. Warunek prostopadłości.

Mając podane w przestrzeni dwa kierunki, np. dwie proste tworzące z osiami współrzędnych kąty $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$, chcemy obliczyć kąt φ tych dwóch prostych ze sobą. W tym celu wykreślamy z początku układu (fig. 84) dwie proste OP_1 i OP_2 równoległe do tych kierunków, to kąt φ zawarty między OP_1 a OP_2 jest zarazem kątem między danemi kierunkami $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$. Obierzmy na każdej z tych prostych dowolny punkt: $P_1(x_1y_1z_1)$ na pierwszej a $P_2(x_2y_2z_2)$ na drugiej.

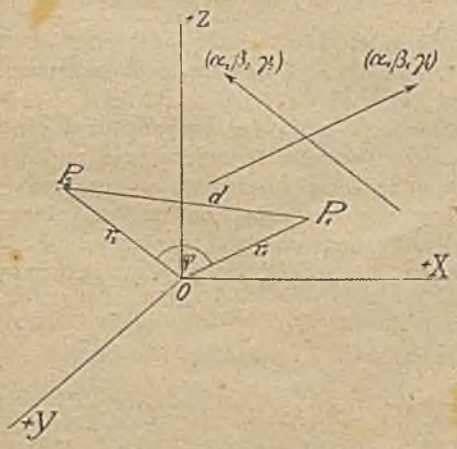


Fig. 84.

Z trójkąta OP_1P_2 obliczamy według twierdzenia Carnota:

$$d^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\varphi \qquad \text{a stąd}$$

$$\cos\varphi=\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}.$$

Odległości r_1, r_2, d obliczamy według wzorów (66) i (66_1), a więc

$$\cos\varphi=\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}{2r_1r_2}.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy stąd:

$$\cos\varphi=\frac{x_1}{r_1}\cdot\frac{x_2}{r_2}+\frac{y_1}{r_1}\cdot\frac{y_2}{r_2}+\frac{z_1}{r_1}\cdot\frac{z_2}{r_2}.$$

Ale x_1, jako rzut odcinka OP na oś x-ów, ma wartość $x_1=r_1\cos\alpha_1$ i podobnie $x_2=r_2\cos\alpha_2$, $y_1=r_1\cos\beta_1$, $y_2=r_2\cos\beta_2$ itd., a więc

$$\frac{x_1}{r_1}=\cos\alpha_1,\ \frac{x_2}{r_2}=\cos\alpha_2,\ \frac{y_1}{r_1}=\cos\beta_1,\ \frac{y_2}{r_2}=\cos\beta_2,\ \frac{z_1}{r_1}=\cos\gamma_1,\ \frac{z_2}{r_2}=\cos\gamma_2.$$

Podstawiając to w wyrażenie otrzymane na $\cos\varphi$, mamy ostatecznie:

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2 \qquad (69)$$

Kąt między dwoma kierunkami mamy tu wyrażony zapomocą kątów, jakie te kierunki tworzą z osiami współrzędnych.

Jeżeli dane dwa kierunki są prostopadłe, to $\varphi=90^0$, $\cos\varphi=0$ a więc wtedy:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0 \qquad (70)$$

Odwrotnie, jeżeli się ten warunek spełnia, to $\cos\varphi=0$, $\varphi=90^0$ i kierunki są prostopadłe. Wzór (70) podaje więc *warunek prostopadłości* dwóch linij prostych w przestrzeni.

Uwaga. Postępując podobnie, jak w geometrji analitycznej płaskiej, możnaby też wyprowadzić na podział odcinka w dowolnym stosunku wzory będące prostem uogólnieniem wzorów (4), (15) i (16). Na pole trójkąta otrzymuje się już inny wzór (por. ćwiczenia XII. zad. 24 *a*), przypominający raczej wzór (a) na str. 152, który wyraża długość odcinka zapomocą jego rzutów na osie. Chcąc mieć natomiast właściwe uogólnienie poznanego w analityce płaskiej wzoru (18) na pole trójkąta, trzebaby się zająć obliczeniem objętości najprostszego utworu trójwymiarowego, t. j. czworościanu, znając współrzędne jego wierzchołków. Wzór ten wymaga już jednak dosyć skomplikowanych rachunków.

§ 40. Równania powierzchni i linij.

Umiejąc już zastępować liczbami punkty przestrzeni trójwymiarowej, możemy badać analitycznie utwory geometryczne złożone

z punktów a więc rozmaite powierzchnie płaskie i krzywe, tudzież linje płaskie i przestrzenne (np. linję śrubową).

Badanie utworów geometrycznych dwuwymiarowych było najściślej związane z badaniem równań o dwóch zmiennych i to bądź w formie wyraźnej (t. j. rozwiązanej ze względu na jedną zmienną) $y=f(x)$ (np. $y=ax+b$, $y=x^2$ itp.), bądź też w formie uwikłanej (nie rozwiązanej) $F(x, y)=0$ (np. $x^2+y^2-r^2=0$). Zupełnie podobnie badanie utworów przestrzeni trójwymiarowej będzie polegało na badaniu równań o trzech zmiennych x, y, z w postaci funkcyj wyraźnych $z=f(x, y)$ lub też uwikłanych $F(x, y, z)=0$. Weźmy np. równanie w postaci wyraźnej

$$z=f(x, y) \tag{71}$$

Taki symbol znaczy, że każdej parze wartości x, y odpowiada jakaś określona wartość zmiennej z. Tłómacząc to geometrycznie powiemy: każdemu punktowi o współrzędnych (x, y) na płaszczyźnie XY odpowiada pewna współrzędna (wysokość) z. Wykreślamy więc w każdym punkcie płaszczyzny XY prostopadły do niej odcinek z obliczony z wzoru (71). Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest regularną, ciągłą, to końce tych odcinków utworzą jedną nieprzerwaną *powierzchnię* w ogólności krzywą. Na fig. 85 przedstawiono część takiej powierzchni, wznoszącą się nad częścią $ABCD$ płaszczyzny XY.

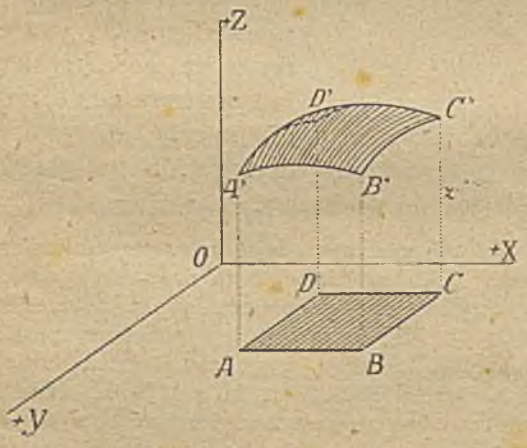


Fig. 85.

Mając podane równanie w formie niewyraźnej, np. $(z-5)^2-x^2-y^2=0$ staramy się je rozwiązać według zmiennej z. Tu np. otrzymamy $z=5\pm\sqrt{x^2+y^2}$ a więc do każdej pary wartości x, y należą dwie wartości zmiennej z, czyli dwa punkty $P_1(x, y, z_1)$ i $P_2(x, y, z_2)$. Zbiór tych wszystkich punktów utworzy (por. fig. 86) pewną powierzchnię, w naszym przypadku np. pobocznicę stożka o wierzchołku leżącym na osi Z w wysokości $+5$, którego osią jest oś Z a kąt u wierzchołka przecięcia osiowego jest prosty.

Analizując w ten sposób rozmaite równania o trzech zmiennych, badamy równocześnie rozmaite powierzchnie.

Jeżeli w równaniu występują tylko dwie zmienne, np. x i y, to równanie takie $f(x, y)=0$ pojmowane w przestrzeni nie przedstawia bynajmniej linji krzywej płaskiej, ale także powierzchnię. Np. równanie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ nie przedstawia w przestrzeni jednej elipsy, ale cały *walec* o podstawie eliptycznej. Równanie to bowiem zachodzi zupełnie niezależnie od wartości z, tj. w każdej wysokości z nad płaszczyzną XY współrzędne x i y są związane tem samem równaniem. Otrzymujemy więc powierzchnię, której każdy przekrój równoległy do płaszczyzny XY (w każdej wysokości) jest elipsą przystającą do podstawy.

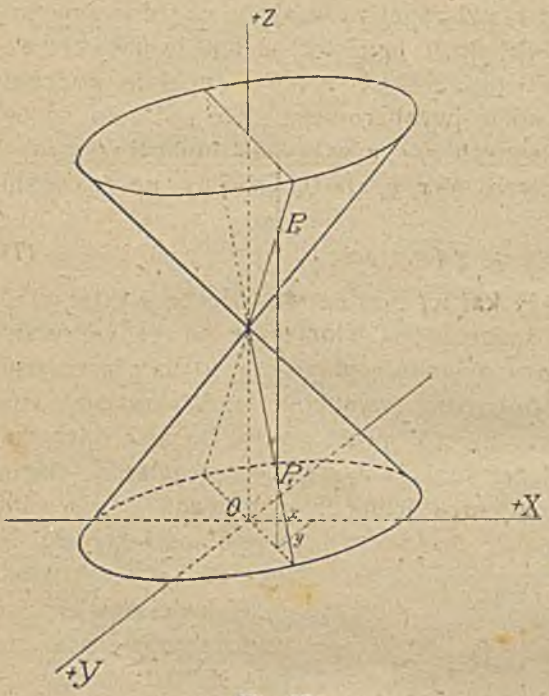


Fig. 86.

Uwaga. Do tego samego wniosku można też dojść innem rozumowaniem. Weźmy jakąkolwiek parę wartości $x_1 y_1$, spełniających to równanie o dwóch zmiennych i wyznaczmy na płaszczyźnie XY odpowiedni punkt. Wykreślmy w tym punkcie prostą prostopadłą do XY, to jakikolwiek punkt tej prostej $P(x_1 y_1 z)$ obierzemy, jego współrzędne spełniają nasze równanie: albowiem x_1 i y_1 spełniają równanie a z nie trzeba podstawiać, bo z wcale nie wchodzi w równanie. Cała ta prosta leży więc na powierzchni. Powierzchnia składa się więc z samych linij prostych równoległych do siebie, jest więc jakimś walcem.

Odwrotnie, mając podaną geometryczną definicję jakiejkolwiek powierzchni, możemy tę definicję wyrazić jako jakiś związek między współrzędnemi (x, y, z) punktów tej powierzchni i otrzymamy równanie zachodzące między trzema zmiennemi x, y, z. Jeżeli wszystkie punkty powierzchni spełniają to równanie, a żaden punkt leżący poza powierzchnią nie spełnia go, to równanie nazywa się: *równaniem powierzchni.*

Przykład 1. Podać równania płaszczyzn współrzędnych i płaszczyzn równoległych do nich w odstępach c.

Dla wszystkich punktów płaszczyzny XY współrzędna z wynosi zero a warunek ten nie spełnia się dla żadnych innych punktów, a więc równaniem płaszczyzny XY jest $z=0$. Podobnie $y=0$ jest równaniem płaszczyzny XZ, a $x=0$ płaszczyzny YZ.

Każdy punkt płaszczyzny równoległej do XY w odstępie c ma współrzędną z równą c, a żaden inny punkt przestrzeni nie ma tej własności. Równaniem tej płaszczyzny jest więc $z=c$. Podobnie $y=c$ i $x=c$ są równaniami płaszczyzn równoległych do XZ i YZ w odstępie c.

Przykład 2. Znaleźć równanie powierzchni kuli, mającej środek w początku układu a promień r.

Odległość każdego punktu $P(x, y, z)$ powierzchni kuli od punktu $O(0, 0, 0)$ musi być równa stałej liczbie r. Z wzoru (66_1) otrzymamy więc warunek $d=r$, czyli $d^2=r^2$ w postaci:

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \tag{72}$$

Dla każdego punktu $P_1(x_1y_1z_1)$ wewnątrz kuli jest $d<r$, więc $x_1^2+y_1^2+z_1^2<r^2$, a zatem warunek (72) nie spełnia się. Tak samo nie spełnia się ten warunek dla żadnego punktu $P_2(x_2y_2z_2)$ leżącego zewnątrz kuli, bo wtedy znowu $d<r$. Warunek (72) spełnia się więc tylko dla wszystkich punktów kuli, jest to więc *równanie kuli.*

Łatwo okazać, że gdy środek kuli leży już nie w początku układu, ale w dowolnym innym punkcie $S(p, q, s)$, to równanie kuli o promieniu r przyjmuje postać

$$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-s)^2=r^2 \tag{72$_1$}$$

Równania te są oczywistemi uogólnieniami równań koła, znanych z geometrji płaskiej.

Przykład 3. Znaleźć równanie powierzchni śrubowej, tj. powierzchni powstającej przez ruch nieskończonej linji prostej, która się obraca około jednego ze swych punktów a równocześnie wznosi się jednostajnie wzdłuż prostej prostopadłej do niej a przechodzącej przez punkt obrotu (wzdłuż takiej powierzchni są np. ułożone schody kręcone). Niech np. wzniesieniu o jednostkę długości odpowiada zawsze obrót o 10^0 w tę samą stronę. Obierzmy za oś x-ów początkowe położenie linji prostej a za oś z linję wzdłuż której ma się ta prosta posuwać. Weźmy pod uwagę ruchomą prostą w chwili, gdy się wzniosła o z jednostek (fig. 87). Jej kąt obrotu wynosi —

w myśl warunków naszego zadania — $\vartheta = 10z$. Każdy punkt tej linji prostej przy każdem jej położeniu należy do powierzchni śrubowej. Weźmyż współrzędne x, y, z dowolnego punktu P tej prostej SP i utwórzmy jej rzut na płaszczyznę XY, to ten rzut tworzy też kąt ϑ z osią x-ów, wobec czego: $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \vartheta$ a wstawiając za ϑ wartość $10z$ otrzymujemy związek:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} 10z$$

który już jest równaniem naszej powierzchni śrubowej. Ogólniej, gdyby krok ruchu śrubowego wynosił k, t. j. gdyby wzniesieniu o k jednostek odpowiadał obrót o 360°, to wzniesieniu o z jednostek odpowiadałby obrót o kąt $\vartheta = \frac{360^0}{k} . z$ i otrzymalibyśmy

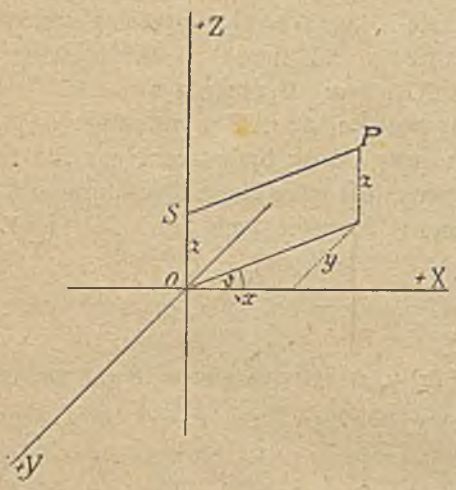


Fig. 87.*)

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{360^0}{k} z\right)$$

jako ogólne równanie powierzchni śrubowej o kroku k. (W naszym przykładzie krok wynosił 36 jednostek). Oś z nazywa się osią tej powierzchni.

Omówiwszy analityczne traktowanie powierzchni, przejdźmy do badania linij. Otóż linje proste lub krzywe wystąpią w analityce przestrzennej jako przecięcia się dwóch powierzchni ze sobą, podobnie jak w analityce płaskiej występowały punkty jako przecięcia się dwóch linij. Linje są to więc zbiory takich punktów, które leżą równocześnie na dwóch powierzchniach, a więc zbiory punktów, których współrzędne spełniają już nie jedno ale *równocześnie dwa równania* o trzech zmiennych:

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad g(x, y, z) = 0.$$

Tak np. do wyznaczenia koła w przestrzeni trójwymiarowej nie wystarczy jedno równanie, ale trzeba podać równanie kuli i płaszczyzny przecinającej tę kulę, lub równanie walca kołowego i płaszczyzny prostopadłej do jego osi itp. Dopiero te dwa równania razem wzięte pozwalają wyznaczyć współrzędne (x, y, z) punktów leżących na kole.

*) Kąt ϑ i odcinek SP narysowano mylnie! Mają one leżeć przed płaszczyzną XZ.

Do wyznaczenia linji śrubowej, znanej z zastosowań w mechanice, trzeba podać równanie powierzchni śrubowej i równanie walca kołowego o tej samej osi. Linja przecięcia się tych dwóch powierzchni jest linją śrubową, a współrzędne każdego jej punktu muszą spełniać obydwa te równania.

Widzimy stąd, że linje krzywe w przestrzeni bada się tu nie oddzielnie, same dla siebie, ale w związku z powierzchniami, na których te linje leżą. Chcąc się od tego związku uwolnić, możnaby ujmować linje w przedstawienia parametrowe (por. str. 167 i 75). W każdym razie w analityce przestrzennej wysuwa się na pierwszy plan badanie powierzchni, bo do ich przedstawienia wystarcza zawsze jedno równanie.

§ 41. Badanie powierzchni za pomocą przekrojów płaskich.

Do zorjentowania się w postaci i rozmiarach powierzchni krzywej, określonej jakiemkolwiek równaniem o trzech zmiennych, bardzo dobrze się nadaje metoda przekrojów płaskich. Zbadawszy szereg równoległych przekrojów można bowiem sporządzić model przestrzenny powierzchni. W ten sposób można także uzyskać warstwicowy plan powierzchni, tworząc rzuty tych wszystkich przekrojów na jedną odpowiednio dobraną płaszczyznę. Chcąc jeszcze dokładniej zbadać powierzchnię, badamy przekroje równoległe także w innych kierunkach, najdogodniej zaś w kierunku trzech płaszczyzn współrzędnych. Rachunkowo otrzymuje się równania tych płaskich przekrojów równoległych do płaszczyzn współrzędnych w bardzo prosty sposób. Omówimy tę metodę odrazu na przykładzie.

Chcemy zbadać powierzchnię, której równanie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

jest bezpośredniem uogólnieniem równania elipsy (por. wzór (49)). Aby otrzymać jej przekrój z płaszczyzną XY, zauważmy, że dla wszystkich punktów leżących na tej płaszczyźnie musi być (wzniesienie) $z=0$.

Kładąc $z=0$ w badanem równaniu, otrzymujemy warunek

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

który muszą spełniać wszystkie punkty badanej powierzchni, leżące na jednej płaszczyźnie. To zaś jest równanie elipsy o półosiach a i b. Rozumując zupełnie tak samo w odniesieniu do płaszczyzn XZ i YZ

otrzymamy elipsy o półosiach a, c i b, c. Te trzy przekroje główne mamy przedstawione na fig. 88. Nie wiemy jednak jeszcze, jak się wygina badana powierzchnia krzywa w częściach zawartych między temi przekrojami. Zbadajmy w tym celu system przekrojów płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XY. Przekrój z płaszczyzną odległą od XY o odcinek k otrzymamy, kładąc w pierwotnem równaniu $z=k$ (jest to bowiem równanie tej płaszczyzny równoległej). Wtedy między x i y zachodzi związek $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}=1$, czyli

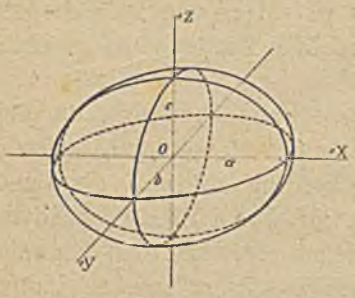


Fig. 88.

po przeniesieniu wyrazów stałych na drugą stronę i po uporządkowaniu:

$$\frac{x^2}{a^2\frac{c^2-k^2}{c^2}}+\frac{y^2}{b^2\frac{c^2-k^2}{c^2}}=1$$

a to przedstawia na płaszczyźnie $z=k$ elipsę o półosiach $\frac{a}{c}\sqrt{c^2-k^2}$ i $\frac{b}{c}\sqrt{c^2-k^2}$. Zmieniając wysokość k przekroju, otrzymamy szereg równoległych elips. Są one mniejsze od przekroju głównego, leżącego na płaszczyźnie XY i są rzeczywiste, dokąd wysokość k zawiera się w granicach $-c<k<+c$; dla $k=\pm c$ zamieniają się te elipsy na punkty a poza temi granicami nie ma już (rzeczywistych) punktów przekroju. Widzimy więc, że cała badana powierzchnia zawiera się między dwoma płaszczyznami równoległemi do płaszczyzny XY w odstępach $+c$ i $-c$. Podobnie okazuje się, że przekroje równoległe do płaszczyzny YZ są elipsami malejącemi aż do punktu w miarę oddalania się od tej płaszczyzny aż do odległości $x=+a$ i $x=-a$, poza któremi już nie ma punktów tej powierzchni. Podobnie ma się rzecz z przekrojami równoległemi do płaszczyzny XZ.

Ta powierzchnia nazywa się *elipsoidą trójosiową*. $2a$, $2b$, $2c$ są jej osiami głównemi a końce tych osi wierzchołkami. Jeżeli dwie osie główne są równe, odpowiednie przekroje są kołami a elipsoida nazywa się obrotową. Gdyby trzy osie były równe, $a=b=c$, elipsoida zamieniłaby się na kulę. W zupełnie podobny sposób można badać powierzchnie, których równania są uogólnieniami równania hyperboli lub paraboli.

Zbadaj przekroje powierzchni śrubowej! (Na płaszczyznach równoległych do osi powierzchni śrubowej otrzymuje się znane z trygonometrji: tangensoidy, a więc linie przestępne).

Jeżeli powierzchnia jest niedogodnie umieszczona w układzie współrzędnych, możemy użyć przesunięć układu i obrotów, podobnie jak w geometrji płaskiej. Uzyskuje się przez to nie tylko dogodniejsze położenie powierzchni, ale zarazem prostszą formę jej równania. Wzory przesunięcia są łatwemi ugólnieniami znanych z analityki płaskiej równań przesunięcia (33) (wykaż!). Natomiast równania obrotu przedstawiają się znacznie trudniej (por. ćwicz. 31). Badanie płaszczyzn symetrji, osi symetrji i środka symetrji przeprowadza się również w taki sam sposób, jak na płaszczyźnie.

§ 42. Równanie płaszczyzny.

W analityce płaskiej rozpoczyna się badania od linji prostej. Utworem odpowiadającym linji prostej jest w przestrzeni trójwymiarowej płaszczyzna. Znamy już równania płaszczyzn równoległych do płaszczyzn współrzędnych. Mając wyprowadzić równanie płaszczyzny dowolnie położonej, np. płaszczyzny ABC na fig. 89, wykreślamy z początku układu prostą OS prostopadłą do niej. Kąty tej prostopadłej z osiami współrzędnych nazwijmy α, β, γ. Dowolny punkt $P(x, y, z)$ płaszczyzny łączymy ze spodkiem S prostopadłej, to zawsze jest $PS \perp OS$. Warunek ten spełnia się dla wszystkich punktów P naszej płaszczyzny a nie spełnia się dla żadnego innego punktu, nadaje się więc do zbudowania równania płaszczyzny. (Płaszczyznę bowiem możemy określić jako miejsce geometryczne punktów leżących na prostych prostopadłych do jednej prostej w jednym jej punkcie). Chcąc ten warunek prostopadłości wyrazić równaniem, zachodzącem między współrzędnemi x, y, z, musimy jeszcze znaleźć kąty odcinka PS

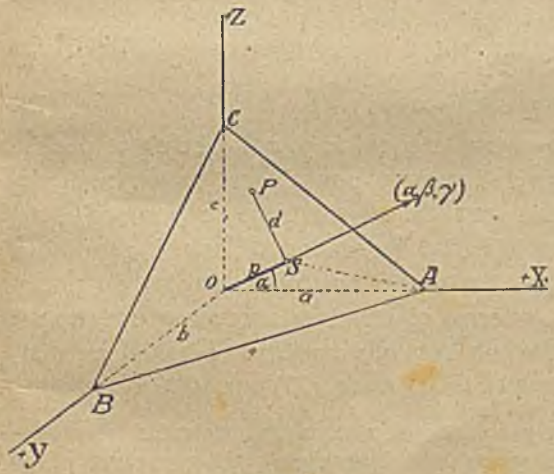


Fig. 89.

z osiami współrzędnych. Jeden koniec: P tego odcinka ma współrzędne x, y, z a drugi: S współrzędne $x_1 = p\cos\alpha$, $y_1 = p\cos\beta$, $z_1 = p\cos\gamma$, wiemy bowiem, że współrzędne są r z u t a m i promienia $\overline{OS}$ na osie współrzędnych a długość tego promienia oznaczamy literą p. Z wzorów (67) otrzymamy teraz na kąty $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ kierunku PS— oznaczając długość odcinka $\overline{PS}$ literą d — wyrażenia

$$\cos\alpha_1 = \frac{x - p\cos\alpha}{d}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{y - p\cos\beta}{d}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{z - p\cos\gamma}{d}.$$

Teraz dopiero możemy zastosować warunek prostopadłości dwóch kierunków $(\alpha\beta\gamma)$ i $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, wyrażony równaniem (70)

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0 \qquad \text{czyli}$$

$$\cos\alpha \cdot \frac{x - p\cos\alpha}{d} + \cos\beta \cdot \frac{y - p\cos\beta}{d} + \cos\gamma \cdot \frac{z - p\cos\gamma}{d} = 0.$$

Stąd

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 1.$$

Ale wiemy, że trzy dostawy kierunkowe każdego kierunku spełniają związek (68):

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

a więc otrzymujemy ostatecznie

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (73)$$

Taki związek spełniają współrzędne x, y, z k a ż d e g o punktu płaszczyzny a nie spełnia go żaden inny punkt, jest to więc *równanie płaszczyzny*. Płaszczyzna jest tu wyznaczona zapomocą swej odległości p (zawsze dodatniej!) od początku układu i zapomocą trzech kątów α, β, γ, jakie prosta n o r m a l n a (prostopadła) do płaszczyzny tworzy z osiami. Taka forma równania płaszczyzny nazywa się *formą normalną*; odpowiada ona znanej z analityki płaskiej normalnej formie równania linji prostej (por. wzór (27) str. 48).

Uwaga. Łatwo okazać przy pomocy elementarnych rozważań stereometrycznych, że kąty α, β, γ są zarazem kątami dwuściennemi płaszczyzny badanej z płaszczyznami współrzędnemi: YZ, XZ i XY.

Ta forma równania płaszczyzny nadaje się bardzo dobrze do dyskusji, zawiera bowiem w sobie wszystkie możliwe położenia płaszczyzny. Tak np. płaszczyznę przechodzącą przez początek układu otrzymujemy kładąc $p = 0$, t. j. odległość od początku układu równą

zeru. Płaszczyznę równoległą do osi z otrzymamy, gdy kierunek normalnej będzie prostopadły do osi z, a więc $\gamma=90^0$, $\cos\gamma=0$ i zostanie $x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$. Podobnie płaszczyzny równoległe do innych osi charakteryzują się tem, że jedna zmienna w równaniu odpada. Jeżeli płaszczyzna jest równoległa do dwóch osi, a więc równoległa do jednej z płaszczyzn współrzędnych, to dwa z kątów są proste i zostaje równanie o jednej zmiennej. Jeżeli płaszczyzna zawiera którąś oś, np. oś z, to $\gamma=90^0$, $\cos\gamma=0$ i $p=0$ i zostaje $x\cos\alpha+y\cos\beta=0$ i podobnie dla innych osi.

Z formy normalnej odrazu odczytujemy, że dwie płaszczyzny są do siebie równoległe, jeżeli współczynniki przy x, y i z są równe. Widzimy również, że ta forma równania będzie się nadawała do rozwiązywania zagadnień o odległościach dowolnych punktów od płaszczyzny (np. przy obliczaniu wysokości brył, przy szukaniu płaszczyzny symetrji kąta dwuściennego). Pod względem rachunkowym forma ta jednak nie jest najprostszą: zawiera ona niepotrzebnie aż 4 stałe α, β, γ, p, podczas gdy do wyznaczenia płaszczyzny wystarczają 3 warunki, jak wiadomo ze stereometrji. Pochodzi to stąd, że te 4 stałe występujące w równaniu normalnem nie są zupełnie dowolne, ale trzy z nich są związane jednym, znanym warunkiem: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Ponadto te stałe występują jako funkcje dosyć skomplikowane, a mianowicie jako funkcje trygonometryczne.

Formę normalną można sprowadzić do innej, prostszej i przejrzystszej, ale nie obejmującej już wszystkich możliwych położeń płaszczyzny. Weźmy pod uwagę płaszczyznę, która nie przechodzi przez początek układu i nie jest równoległą do żadnej osi; taka płaszczyzna odcina na trzech osiach pewne (skończone) odcinki a, b, c (zob. fig. 89). Łącząc punkt A z punktem S widzimy, że p jest rzutem odcinka $\overline{OA}$ na oś OS, a zatem $p=a\cos\alpha$ a stąd: $\cos\alpha=\frac{p}{a}$; podobnie $\cos\beta=\frac{p}{b}$ i $\cos\gamma=\frac{p}{c}$, wobec czego równanie normalne (72) przechodzi po podzieleniu przez p na:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (74)$$

Jest to *odcinkowa forma równania płaszczyzny* — która jest, jak widzimy, uogólnieniem odcinkowej formy równania linji prostej na płaszczyźnie (26). W tem równaniu mamy uwidocznione odcinki utworzone przez płaszczyznę na osiach współrzędnych, co ma wielkie znaczenie w niektórych zastosowaniach analityki (np. w krystalografji).

Forma ta nie jest ogólna, nie zawiera bowiem równań płaszczyzn, przechodzących przez początek układu. Płaszczyzny równoległe do osi można uważać za graniczne położenia płaszczyzn przecinających osie, gdy odpowiedni odcinek dąży do nieskończoności; odpowiadają im graniczne przypadki równania (74), gdy jeden lub dwa mianowniki dążą do nieskończoności: wtedy odpada odpowiedni wyraz z równania (74). Tak np. płaszczyzna równoległa do osi x ma równanie $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Zarówno forma (73) jak i (74) są równaniami *pierwszego stopnia* o trzech zmiennych, dadzą się więc podciągnąć pod ogólną formę:

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (75)$$

Zachodzi pytanie, czy odwrotnie: każde równanie pierwszego stopnia o trzech (najwyżej) zmiennych przedstawia jakąś płaszczyznę, czy też mieści w sobie jeszcze inne utwory geometryczne. Aby to rozstrzygnąć, starajmy się takie ogólne równanie sprowadzić do jednej z poznanych poprzednio form. Jeżeli wyraz wolny D nie jest zerem, to dzieląc całe równanie przez $-D$, możemy to równanie sprowadzić do formy odcinkowej lub do granicznych przypadków formy odcinkowej, o ile prócz tego któryś z współczynników A, B, C jest zerem. Chcąc jednak odrazu rozstrzygnąć całą sprawę ogólnie, bez żadnych wyjątków i przypadków granicznych, zwrócimy się do formy normalnej. Chcemy więc równanie (75) przekształcić na równoważne (tj. spełniane przez te same wartości x, y, z) ale takie, aby współczynniki przy x, y, z były dostawami kierunkowemi. Te nowe, szukane współczynniki A', B', C', musiałyby więc spełniać warunek (68), t. j.

$$A'^2+B'^2+C'^2=1.$$

Otóż możemy to uzyskać, dzieląc całe równanie przez liczbę stałą: $k=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Dzielenie to jest zawsze dozwolone, bo k jest różne od zera; tylko wtedy mogłoby być zerem, gdyby równocześnie $A=B=C=0$ a wtedy równanie (75) nie zawierałoby wcale współrzędnych x, y, z. Otrzymamy

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.z+$$

$$+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Dodając do siebie kwadraty współczynników przy x, y, z, otrzymamy istotnie 1, albowiem $\frac{A^2+B^2+C^2}{A^2+B^2+C^2}=1$. Te nowe współczynniki

przedstawiają więc cosinusy kątów α, β, γ jakiegoś jednego kierunku, możemy więc napisać:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Wyraz wolny ma tu przedstawiać $-p$, a więc musi być liczbą ujemną, ponieważ p jako o d l e g ł o ś ć jest liczbą zasadniczo dodatnią. Wobec tego obieramy znak pierwiastka — pozostawiony dotychczas dowolnie — dodatni, jeżeli D jest liczbą ujemną, a ujemny, gdy D jest liczbą dodatnią. Wtedy możemy napisać zamiast całego wolnego wyrazu $-p$ i otrzymujemy jako równanie r ó w n o w a ż n e z ogólnem równaniem (75) formę normalną

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

która niewątpliwie przedstawia płaszczyznę. To dowodzi, że ***każde równanie pierwszego stopnia, zawierające najwyżej trzy zmienne x, y, z, przedstawia płaszczyznę.***

§ 43. Równania linji prostej w przestrzeni.

Już w § 40 zwróciliśmy uwagę na to, że linje występują w geometrji przestrzennej jako przecięcia się dwóch powierzchni z sobą, wobec czego do wyznaczenia dowolnej linji w przestrzeni trzeba użyć *dwóch równań*. Do wyznaczenia linji prostej l wystarczy podać równania d w ó c h p ł a s z c z y z n (nie równoległych i nie nakrywających się z sobą), np.

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0\\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0\end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

Zwykle jednak wyraża się z tych równań dwie zmienne jako funkcje trzeciej, np. y i z zapomocą x. W tym celu eliminujemy np. metodą równych współczynników najpierw zmienną z (mnożymy pierwsze równanie przez C_1 a drugie przez $-C$ i dodajemy), to otrzymamy:

$$(AC_1-A_1C)x+(BC_1-B_1C)y+(DC_1-D_1C)=0$$

a stąd — oznaczając krótko ilorazy wyrażeń zawartych w nawiasach literami m i b — otrzymamy

$$y=mx+b.$$

Podobnie eliminując y otrzymamy $z=nx+c$, a więc linję prostą l określamy prostszemi równaniami:

$$\left.\begin{aligned} y&=mx+b\\ z&=nx+c\end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Uwaga. Gdyby ta eliminacja okazała się niemożliwą, n. p. gdyby współczynnik $BC_1 - B_1C$ przy y był zerem, trzebaby użyć innych wyrażeń, n. p. z i x wyrazić zapomocą y i t. p.

Tu także występuje linja prosta jako przecięcie dwóch płaszczyzn, ale już położonych dogodniej, aniżeli przy użyciu równań (76). Równanie $y=mx+b$ przedstawia płaszczyznę prostopadłą do XY, a $z=nx+c$ pł. prostopadłą do XZ (por. fig. 90). Te same równania przedstawiają zarazem równania rzutów prostej l na płaszczyznach XY i XZ. Z równań (77) widzimy dopiero jasno, że do wyznaczenia linji prostej w przestrzeni potrzeba czterech warunków: albowiem 4 stałe występują w równaniach linji prostej. (Z pierwotnej formy (76) moglibyśmy sądzić, że potrzeba 8 a najmniej 6 warunków!). Te liczby stałe mają tutaj proste znaczenie geometryczne: b jest odcinkiem rzutu poziomego prostej na osi y-ów, a c odcinkiem rzutu pionowego na osi z; stałe m i n przedstawiają spadki tych prostych rzuconych, a mianowicie $m=\operatorname{tg}\delta$, $n=\operatorname{tg}\varepsilon$ (zob. fig. 90).

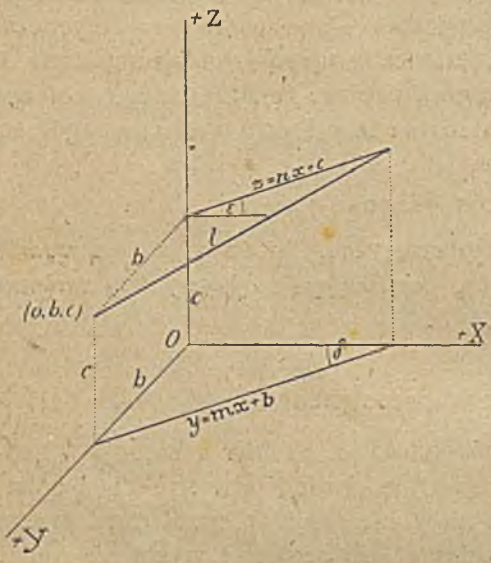


Fig. 90.

Zbadajmy jeszcze równanie linji prostej znając jeden jej punkt $P(x_1, y_1, z_1)$ i kierunek, t. j. jej kąty α, β, γ z osiami (fig. 91). Wyrażmy współrzędne x, y, z dowolnego punktu tej prostej za pomocą tych znanych wielkości. Nazwijmy literą t wielkość odcinka PA (z uwzględnieniem znaku). Rzuty

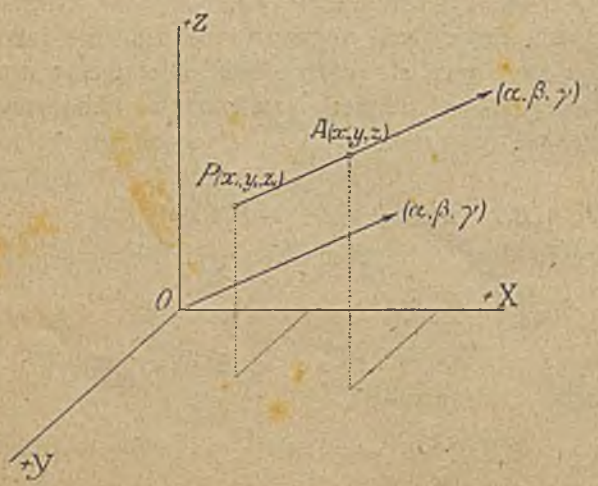


Fig. 91.

tego odcinka na osie potrafimy obliczyć (por. § 38 *c*), a mianowicie:

$$x - x_1 = t \cos \alpha$$
$$y - y_1 = t \cos \beta$$
$$z - z_1 = t \cos \gamma$$

a stąd otrzymujemy już żądane równania

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma} \tag{78}$$

Można jednak także zostawić zmienną t i wyrazić x, y, z w następujący sposób:

$$x = x_1 + t \cos \alpha$$
$$y = y_1 + t \cos \beta \tag{79}$$
$$z = z_1 + t \cos \gamma$$

Mamy tu linję prostą wyrażoną za pomocą *trzech równań*, zawierających jednak prócz zmiennych x, y, z jeszcze czwartą, zbyteczną zmienną t. Takie przedstawienie jest mimo to czasem dogodniejsze. Zmienną pomocniczą t nazywamy *parametrem*, a formę (79) równań linji prostej nazywamy *parametrowem przedstawieniem linji prostej*. Ogólnie można każdą linję krzywą przedstawić parametrowo, za pomocą 3 równań, wyrażających trzy współrzędne każdego punktu jako funkcje czwartej zmiennej pomocniczej, co lepiej się nadaje do dyskusji, aniżeli użycie dwóch równań, z których każde zawiera 3 zmienne.

Z wzoru (78) łatwo już można przejść do równania prostej, wyznaczonej przez dwa punkty w przestrzeni (por. ćwicz. XII zad. 44).

§ 44. Zakończenie. — Wskazówki do dalszego kształcenia się.

Opierając się na wyprowadzonych w poprzednich ustępach równaniach płaszczyzny i linji prostej, można już rozwiązywać analitycznie rozmaite zagadnienia stereometryczne, dotyczące wzajemnego położenia punktów, prostych i płaszczyzn, podobnie jak postępowaliśmy w geometrji analitycznej płaskiej.

Dalsze zadania geometrji analitycznej polegają przedewszystkiem na zbadaniu utworów drugiego stopnia, t. j. wyrażających się równaniami 2-go stopnia o 3 zmiennych (jak np. kula, elipsoida, stożek itp).

Następnie bada się powierzchnie i linje wyższych stopni, metody badania stają się jednak coraz trudniejsze i wymagają obszernych wiadomości z rachunku różniczkowego i z innych działów matematyki wyższej.

Metoda geometrji analitycznej pozwala nawet wykroczyć poza zakres utworów geometrycznych trójwymiarowych a więc wyobra-

żalnych. Związki, zachodzące pomiędzy czterema zmiennemi x, y, z, u wyrażamy często także zapomocą słów, zaczerpniętych z geometrji analitycznej. Tak np. mówi się, że każda czwórka wartości $P(x_1\ y_1\ z_1\ u_1)$ przedstawia punkt przestrzeni czworowymiarowej; mówimy że równanie $x^2+y^2+z^2+u^2=25$ przedstawia kulę czterowymiarową o promieniu 5 itp. Takie używanie terminów geometrycznych dla utworów niewyobrażalnych zdobywa sobie w dzisiejszej nauce, nawet w fizyce, coraz rozleglejsze prawo obywatelstwa. To też geometrja analityczna musi również podążać w tym kierunku i uogólniać swe metody badania i twierdzenia także na niewyobrażalne przestrzenie wielowymiarowe, pozwalając w ten sposób nieraz wyrażać bardzo zawiłe związki liczbowe w krótkich słowach. Wszystkie te rozległe badania nie mogą już jednak wchodzić w zakres nauki w szkołach średnich.

Kto pragnie gruntowniej zaznajomić się z geometrją analityczną, może korzystać z wielu obszerniejszych dzieł, z których kilka wymieniamy poniżej.

W języku polskim, prócz jednego podręcznika przeznaczonego dla szkół średnich, p. t. **Jan Zydler.** *Zarys geometrji analitycznej na płaszczyźnie.* (Warszawa, 1913; zawiera obfity zbiór zadań wraz z rozwiązaniami), posiadamy kilka obszerniejszych, starszych podręczników, jak: **W. Zajączkowski.** *Geometrja analityczna.* (Warszawa, 1884) lub **A. Sągajło.** *Zasady geometrji analitycznej.* (Paryż, 1877), nie nadających się jednak do początkowych studjów. Polecenia godnym jest natomiast przekład zwięzłego podręcznika niemieckiego: **F. Schur.** *Podręcznik geometrji analitycznej* (przełożył T. Łopuszański. Warszawa, 1901). Obszerne rozdziały poświęca g. analitycznej podręcznik: **P. Dziwiński.** *Wykłady matematyki* (2 tomy. Lwów 1902—1908).

Z pośród podręczników w obcych językach pisanych odznacza się najprzystępniejszym wykładem angielski podręcznik: **N. C. Riggs.** *Analytic geometry.* (New York, 1910). Z książek niemieckich najprzystępniejsze są: **H. Ganter u. F. Rudio.** *Die Elemente der analytischen Geometrie.* (2 tomy. Lipsk 1908—1910) i **O. Dziobek.** *Lehrbuch der analytischen Geometrie.* (2 tomy. Braunschweig, 1902). Z książek francuskich najbardziej jest rozpowszechniona: **Briot-Bouquet.** *Leçons de géométrie analytique.* (17 wydanie. Paryż, 1900), odznaczająca się bogactwem treści i piękną metodą wykładu. Z dzieł obszerniejszych najważniejsze są: **B. Niewengłowski.** *Cours de géométrie analytique.* (3 tomy. Paryż, 1894) i tłómaczona na kilka języków angielska 4 tomowa geometrja analityczna G. Salmon'a, np. **G. Salmon-Fiedler.** *Analytische Geometrie.*

Prócz tego istnieją liczne zbiory zadań, jak np. F. Gräfe. *Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie.* (4 tomiki. Lipsk 1885—1890). Wiele wskazówek do dalszych studjów znaleźć można w „*Poradniku dla samouków*". (Tom I. Warszawa 1915, str. 142—155).

Ćwiczenia XII

Uwaga. Wszystkie figury należy wykonywać w perspektywie równoległej (aksonometrycznie).

§ 37. 1. Wykreślić punkty o współrzędnych $A(2, 4, 3)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(3, -2, 4)$, $D(1, -1, -1)$, $E(-2, -2, -2)$, $F(4, 2, 0)$, $G(0, 3, 0)$.

2. Jakie współrzędne mają rzuty punktu $P(4, 3, 5)$ na płaszczyzny współrzędnych, a jakie na osie? Rysunek!

3. Do punktu $A(5, 2, 4)$ znaleźć punkty leżące symetrycznie względem płaszczyzn współrzędnych, osi współrzędnych i początku układu. Wypowiedzieć prawa ogólne!

4. Jakie kąty z osiami współrzędnych zawiera promień, łączący początek układu z punktem $P(1, 1, 1)$? Obliczyć długość tego promienia!

5. Gdzie leżą wszystkie punkty, dla których *a)* $z=3$, *b)* $y=2$, *c)* $x=-4$?

6. Gdzie leżą wszystkie punkty, dla których *a)* $x=2$, $z=3$; *b)* $x=4$, $y=-2$; *c)* $y=5$, $z=-3$?

7. Znaleźć miejsca geometryczne punktów, spełniających następujące warunki: *a)* $x=y$; *b)* $x=y$, $y=z$; *c)* $x^2+y^2=4$, $z=0$; *d)* $9x^2+4y^2=36$, $z=2$; *e)* $y^2=6x$, $z=-3$.

§ 38. 8. Znając końce odcinka $A(1, 3, 5)$ i $B(4, 6, 2)$ znaleźć jego rzuty na osie i jego długość.

9. Obliczyć krawędzie czworościanu o wierzchołkach $A(0, 0, 0)$, $B(10, 0, 0)$, $C(4, 6, 0)$, $D(5, 2, 6)$.

10. Jaki warunek spełniają współrzędne wszystkich punktów równo oddalonych od $A(1, 2, 3)$ i $B(4, 1, 5)$? Co jest miejscem geometrycznem tych punktów?

11. Znaleźć punkt równo oddalony od czterech punktów: $A(0, 0, 0)$, $B(6, -2, 0)$, $C(8, 3, 0)$, $D(3, 0, 5)$; jest to środek kuli opisanej na czworościanie.

12. Jaki warunek spełniają współrzędne wszystkich punktów oddalonych o $r=5$ od $O(0, 0, 0)$. Co jest miejscem geometrycznem tych punktów?

13. Jaki warunek muszą spełniać współrzędne wszystkich punktów kuli o promieniu 3 a o środku $S(5, 4, 6)$?

14. Obliczyć, jakie kąty tworzy z osiami współrzędnych odcinek, łączący $O(0, 0, 0)$ z $A(8, 6, 10)$.

15. Jakie dostawy kierunkowe mają osie współrzędnych?

16. $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$; obliczyć trzeci kąt (dwie wartości!).

17. Okazać, że $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

18. Znaleźć kierunek prostej, łączącej punkty $A(-1, 3, 2)$, $B(4, -2, 5)$.

19. Okazać, że, jeżeli prosta tworzy równe kąty z osiami, to $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

20. Na kuli o promieniu 1, której środkiem jest początek układu, znaleźć 8 punktów, których trzy współrzędne mają jednakowe wartości bezwzględne. Obliczyć kierunki tych promieni!

§ 39. 21. Obliczyć kąt dwóch prostych, których dostawy kierunkowe są proporcjonalne do liczb (2, 3, 1) i (1, —1, 4).

22. Obliczyć kąt dwóch prostych łączących punkty $A(0, 0, 0)$, $B(4, 2, 5)$ i $C(-1, 0, 6)$, $D(5, 3, 0)$.

23*a*. Osiami głównemi ośmiościanu umiarowego są osie współrzędnych. Odcinki na wszystkich osiach wynoszą po 1. Obliczyć kąt utworzony przez dwie wichrowate krawędzie.

23*b*. Wierzchołki czworościanu nieumiarowego są $A(-2, 0, 0)$ $B(2, 0, 0)$ $C(0, 2, 3)$, $D(0, -2, 3)$. Obliczyć kąt prostych wichrowatych AB i CD.

24*a*. Opierając się na twierdzeniu, że rzut pola na dowolną płaszczyznę otrzymuje się mnożąc jego wielkość przez cosinus kąta nachylenia do tej płaszczyzny, wykazać, że między rzutami p_x, p_y, p_z pola trójkąta p na płaszczyzny współrzędnych zachodzi związek $p^2=p_x^2+p_y^2+p_z^2$. Rysunek!

Wskazówka: Kąt nachylenia dwóch płaszczyzn równa się kątowi, jaki tworzą ze sobą normalne tych płaszczyzn.

24*b*. Na podstawie wzoru z poprzedniego ćwiczenia obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(2, 5, 6)$, $B(4, 2, 8)$, $C(6, 4, 5)$.

25. Podstawa czworościanu leży na płaszczyźnie XY, a wierzchołki mają współrzędne $A(x_1, y_1, 0)$, $B(x_2, y_2, 0)$, $C(x_3, y_3, 0)$ $D(x_4, y_4, z_4)$. Obliczyć jego objętość.

§ 40—41. 26. Znaleźć równanie powierzchni powstającej przez obrót około osi x-ów

a) prostej $y=kx$,

b) paraboli $y^2=2px$,

c) elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

27. Znaleźć równanie powierzchni, której każdy punkt ma stałą sumę odległości $2a$ od dwóch stałych punktów:

$$F_1(e, 0),\ F_2(-e, 0).$$

28. Znaleźć równanie powierzchni utworzonej z obwodów kół o promieniu r, których środki leżą na stałem kole $x^2+y^2=r^2$ o tym samym promieniu, a których płaszczyzny są równoległe do płaszczyzny YZ.

29. Zbadać obrazy geometryczne w przestrzeni trójwymiarowej równań:

a) $y^2+z^2=4$; *b)* $2x-3y=6$; *c)* $x^2=8z$; *d)* $x^2-z^2=9$.

30. Zbadać obrazy geometryczne równań (metodą przekrojów):

a) $x^2+y^2-4z^2=16$,

b) $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=z$,

c) $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{5}=z$,

d) $z=6xy$.

31. Obrócić układ współrzędnych około początku układu, wykreślić współrzędne dowolnego punktu P w obu układach i obliczyć rzuty promienia

OP na nowe osie, znając kąty $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ nowych osi z pierwotnemi. Obliczyć też rzut linji łamanej $OAPB$ (fig. 81) na nowe osie. Porównując rzuty otrzymane w te dwa sposoby otrzyma się równania obrotu osi współrzędnych w przestrzeni.

§ 42. 32. Płaszczyzna odcina na osiach odcinki a, b, c. Przez dowolny punkt P płaszczyzny wykreślić na niej prostą $CD \| XY$ i jej rzut na XY. Z rzutu P' punktu P wykreślić proste $P'A$ i $P'B$ równoległe do osi X i Y. Przy pomocy trójkątów podobnych wyprowadzić odcinkowe równanie płaszczyzny.

33. Podać równanie płaszczyzny odległej o 5 od początku układu a nachylonej do XY pod kątem $\gamma = 60^0$ a do YZ pod kątem $\alpha = 45^0$.

34. Podać równania śladów płaszczyzny $2x - 3y + z = 6$ na płaszczyznach współrzędnych i odcinki na osiach.

35. Ślady płaszczyzny mają równania $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, $\frac{x}{5} + \frac{z}{4} = 1$.

Podać równanie tej płaszczyzny.

36. Podać równanie płaszczyzny:

a) równoległej do osi X a odcinającej na osiach Y i Z 10 i 8;

b) odcinającej na osiach X, Y, Z odpowiednio -4, 2, 7;

c) podać równania ścian ośmiościanu umiarowego o krawędzi k i ich nachylenia do płaszczyzn współrzędnych, jeżeli osie krystalograficzne są osiami współrzędnych.

37. Obliczyć kąty nachylenia płaszczyzny $5x + 8y - 10z = 20$ do płaszczyzn współrzędnych i odległość jej od początku układu.

38. Podać równanie płaszczyzny, przechodzącej przez 3 punkty P_1 (0, 5, 4), P_2 (1, 3, 6), P_3 (5, 0, 2).

39. Obliczyć kąt zawarty między prostemi prostopadłemi do płaszczyzn $2x - y + 3z = 1$ i $x + 3y - 5z = 4$. Jest to zarazem kąt dwuścienny tych płaszczyzn. Wzór ogólny!

40. Zbadać odległość punktu P(2, 3, 5) od płaszczyzny $3x - 2y + 6z - 14 = 0$ przesuwając przez P płaszczyznę do niej równoległą i badając różnicę odległości obu płaszczyzn od początku układu; użyć formy normalnej!

41. Znaleźć punkt przecięcia się trzech płaszczyzn: $x - y + 2z = 5$, $2x - 3y + z = 4$, $x - 2y - z = 2$.

§ 43. 42. Wykreślić prostą: $\begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ x + y + \frac{1}{3}z = 7 \end{cases}$ i jej rzuty na płaszczyzny współrzędnych.

43. Prosta przechodzi przez punkt A(2, 4, 6) i tworzy z osią X kąt 45^0 a z osią Z kąt 60^0. Podać jej równanie i współrzędne śladów.

44. Znaleźć równanie prostej łączącej punkty A(0, 5, 3), B(4, 0, 2) (wzór ogólny!) i znaleźć jej kąty z osiami.

45. Zbadać, czy przecinają się pary prostych:

a) $\begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = z + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3z - 5 \\ y = 2z - 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2z + 5 \\ y = 4z + 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5z + 3 \\ y = 2z - 6 \end{cases}$

podać ogólny warunek przecinania się dwóch prostych.

46. Czy prosta $\begin{cases} y=2x+1 \\ z=x+3 \end{cases}$ leży na płaszczyźnie $2x-3y+4z-9=0$? t. j. czy wszystkie jej punkty spełniają równanie płaszczyzny? Podać warunki ogólne!

47. Obliczyć kąty prostej $\begin{cases} x=z-2 \\ y=4x+3 \end{cases}$ z osiami współrzędnych, obierając na niej dowolne dwa punkty.

48. Obliczyć kąt dwóch prostych $\begin{cases} x=5z+3 \\ y=2z-4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3z-1 \\ y=4z \end{cases}$ obierając na każdej z nich po dwa dowolne punkty (por. ćwiczenie 47 i wzór 69).

49. Obliczyć kąt nachylenia prostej $\begin{cases} x=3z-2 \\ y=7x+4 \end{cases}$ do płaszczyzny $2x-4y+z-8=0$ jako dopełnienie kąta prostej z normalną do płaszczyzny i znaleźć punkt przebicia (por. ćwiczenie poprzednie).

50. Obliczyć odległość punktu $A(2, 1, 5)$ od prostej $\begin{cases} x=2z-4 \\ y=8z+10 \end{cases}$ znajdując punkt przebicia tej prostej z płaszczyzną przechodzącą przez A a prostopadłą do tej prostej.

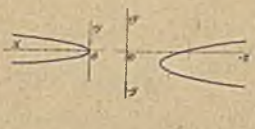
Rozwiązania zadań

Ćwiczenia I 3 *a)* $x=74\frac{2}{3}$, $t=37\frac{1}{3}$, 3 *b)* $x=19{\cdot}2$, $t=6{\cdot}4$ lub $x=-21$, $t=-7$. 5. $AB=3$, $DB=-6$, $AC=6$, $CA=-6$, $BD=6$, $DA=-9$. 6. Wyrazić wszystkie odcinki jako różnice odciętych i wykonać zaznaczone działania. 7 *a)* Jeżeli c jest liczbą dodatnią, to zawsze istnieją dwa punkty podwójne, leżące symetrycznie względem środka inwolucji. 7 *b)* $x=2\frac{3}{7}$, $c=\frac{48}{49}$, $OP=\frac{17+4\sqrt{3}}{7}$, $OP'=\frac{17-4\sqrt{3}}{7}$. 8 *a)* $-\frac{3}{11}$, $\frac{1}{3}$, 3, $-\frac{1}{2}$, -3. 8 *b)* $\frac{11}{7}$, 8, -10, $\frac{1}{2}$, $-\frac{19}{4}$. 9. Wykres ma postać hyperboli równobocznej o asymptotach $x=AB$, $y=-1$. 10. $x=5$, 4, $4\frac{1}{2}$, 11, -10. 11 *a)* $\frac{4}{3}$. 11 *b)* $1\frac{1}{3}$. 12. $-\frac{3}{5}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{3}{8}$. 14 *a)* $x_4=3{\cdot}8$; $x_4=\frac{x_1(x_2-x_3)-x_2(x_3-x_1)}{(x_2-x_3)-(x_3-x_1)}$ 14 *b)* $x_4=-30$; $x_4=\frac{x_2(x_3-x_1)+kx_1(x_2-x_3)}{x_3-x_1+k(x_2-x_3)}$.

Ćwiczenia II 5 *a)* Na prostej równoległej do osi x-ów w odstępie $+4$. *b)* Na prostej równoległej do osi x-ów w odstępie -3. *c) d)* Na prostych równoległych do osi y-ów w odstępach 2, -5. *e)* Na osi y-ów. 5 *a)* Na dwusiecznej kąta, jaki tworzy dodatnia część osi y-ów z dodatnią częścią osi x-ów. 5 *b)* Na dwusiecznej kąta, jaki tworzy ujemna część osi x-ów z dodatnią częścią osi y-ów. 6 *a)* Prosta odcinająca na osi x-ów $1\frac{3}{5}$ a na osi y-ów -2. 6 *b)* Prosta odcinająca na osi x-ów 5 a na osi y-ów 3. 6 *c)* Prosta odcinająca na osi x-ów 2 a na osi y-ów -3. 7 *a)* Koło o promieniu 6, o środku w punkcie $O(0, 0)$. 7 *b)* Koło o promieniu 2, o środku

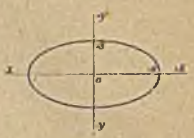
w punkcie $S(2, 0)$. *7 c)* Koło o promieniu 7, o środku w punkcie $S(3, -4)$.

8 *a)*

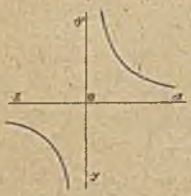


8 *b)* 8 *c)*

9 *a)*

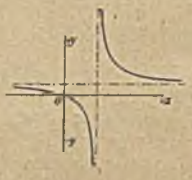


9 *b)*



9 *c)*

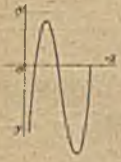
9 *d)*



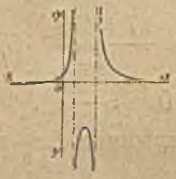
10 *a)* 10 *b)*

10 *c)*

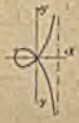
10 *d)*



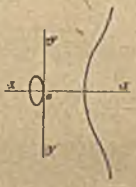
10 *e)*



10 *f)*



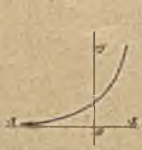
10 *g)*



10 *h)*

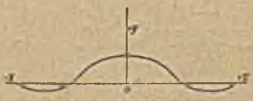
10 *i)*

10 *k)*



11 *a)*

11 *b)*



11 *c)*

11 *d)*

12 *a)* Por. ćwiczenie 9 *c)*. 13. $(x-6)^2+(y-6)^2=36$. 14. $y^2=20(x-5)$. 15 *a)* $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. 15 *b)* $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 16. $(x^2+y^2)^2+32(y^2-x^2)=1040$. 18. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-4{\cdot}229, +1{\cdot}539)$, $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{3})$ 19. $(\sqrt{65}, 60^0 15')$ $(\sqrt{45}, 116^0 34')$, $(\sqrt{29}, 291^0 48')$, $(5{,}233^0 5')$. 20 *a)* Na prostej przechodzącej przez początek układu i nachylonej do osi pod kątem 30^0. 20 *b)* Na kole o promieniu 2, o środku w biegunie.

21 *a)* $r=\frac{3}{1-\cos\varphi}$. 21 *b)* $r=-\frac{2\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$. 21 *c)* $r=2p\cos^2\frac{\varphi}{2}$ 22 *a)* $x=2$. *b)* $y^2=8x+16$. *c)* $3x^2+4y^2-16x+64=0$. *d)* $(x^2+y^2)^3=a(y^2-x^2)^2$.

Ćwiczenia III 1. $p_x=9,\ -6,\ -7,\ 4.\ p_y=5,\ 6,\ -4,\ -5$. 4. $d=\sqrt{x^2+y^2}$. 5. $\sqrt{170}$; $\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}$. 6. $\sqrt{89}$, $\sqrt{34}$, $\sqrt{173}$. 7. $AB=4$, $BC=\sqrt{52}$, $CD=\sqrt{17}$, $DA=\sqrt{5}$; $AC=6$, $BD=\sqrt{29}$. 8. $x^2+y^2=16$. 9. $(x-2)^2+(y-5)^2=9$; koło. 10. $x-y=1$; prosta. 11. $4x-2y=7$, $3x-7y=2$. 12. $S(\frac{1}{2}, 4)$, $r=\frac{1}{2}\sqrt{65}$. 13. $AB=4{\cdot}413\ldots$ 14. $9x^2+25y^2=225$; elipsa. 15. $x^2+y^2=9$. 16. $(x-\frac{17}{4})^2+y^2=(\frac{15}{4})^2$. 17 *a)* 36°52′, *b)* 123°42′, *c)* 111°48′. 18. 33°41′. 19. A, B, C leżą na jednej linji prostej a D ponad nią. 20. $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 21. $a=6$. 22. $\frac{3}{8}$, $\frac{27}{8}$, 0, $\frac{3}{2}$. Ogólnie $a=\frac{3x^2}{8}$. 23. $\varphi=90^0$. 24. $\sqrt{32}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{40}$; 71°34′, 18°26′, 90°. 25. $\varphi=35^0 18'$. 26. $\varphi=0^0$. Proste są równoległe. 27. $\frac{8}{3}$. 28. $a=-\frac{3}{4}$, $a=143^0 8'$. 29. $a_1=a_3=\frac{1}{4}$, $a_2=a_4=-2$. 31. $x=x_1+s\cos\alpha=5{\cdot}74\ldots$, $y=y_1+s\sin\alpha=7{\cdot}58\ldots$ 32 *a)* $x_4=19{\cdot}514\ldots$, $y_4=16{\cdot}864\ldots$ *b)* $\alpha=40^0 50'$. *c)* $s=25{\cdot}792\ldots$ 33 *a)* $(\frac{4}{5}, -\frac{1}{5})$, *b)* $(4, -\frac{25}{3})$. 34. $s=-\frac{1}{5}$. 35. $\frac{5}{2}\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\frac{5}{2}\sqrt{2}$. 36. Np. odcinek DE łączący środki boków AC i BC ma spadek $\frac{1}{4}$ a długość $\frac{1}{2}\sqrt{17}$, bok zaś AB ma też spadek $\frac{1}{4}$ a długość $\sqrt{17}$. 37. $-\frac{1}{5}$. 39. $D(-\frac{8}{3}, \frac{17}{3})$. 40. $(\frac{1}{5}, 0)$. 41. $(4\frac{2}{5}, -1\frac{1}{5})$, $(5\frac{4}{5}, 3\frac{3}{5})$, $(7\frac{1}{5}, 8\frac{2}{5})$, $(8\frac{3}{5}, 13\frac{1}{5})$. 42. (10, 9). 43. $(5\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4})$. 44 *a)* 23, *b)* −8, *c)* $-8\frac{1}{2}$, *d)* 31·95. 46. $2p=r_1r_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)+r_2r_3\sin(\alpha_3-\alpha_2)+r_3r_1\sin(\alpha_1-\alpha_3)$; $p=4{\cdot}397\ldots$. 47. 18. 48. $p=-2$, $P=12\frac{2}{5}$. 49. $S\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}, \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)$. 50. $S\left(\frac{116}{249}, \frac{284}{249}\right)$.

Ćwiczenia IV 1 *a)* $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$; *b)* $y=x\sqrt{1-\frac{3}{5}\sqrt{5}}=0{\cdot}325x$; *c)* $y=0{\cdot}005x$; *d)* $y=\frac{3}{4}x$. 2. $\alpha=63^0 26'$, $151^0 23'$, $14^0 2'$, $\beta=90^0-\alpha$. 3 *a)* $y=4x$ (x ilość sekund, y ilość centymetrów; *b)* $y=\frac{x}{2}$ (x wysokość w *cm*, y pole). 4. (I, II, III), (II, I, IV), (III, IV, I), (II, III, IV). 4 *a)* $y=x+3$; *b)* $y=\sqrt{3}(x+4)$; *c)* $4x-3y+12=0$. 5. 45°, 146°19′, 73°18′. 6. 5, 4; $10\frac{2}{3}$, 8; 7, 3. 7. Za jednostki obrać 200 *mm* i 200° *C*. 8. $y=6x-180$ (jednostka na osi x-ów przedstawia 12 minut, a na osi y-ów 1 *km*).

9. Zbiór prostych równoległych o spadku a; pęk prostych o wierzchołku na osi y-ów w odstępie b od początku układu. **10** ***a)*** $y=0{\cdot}72654x+4{\cdot}45308$, $y=-2{\cdot}24604x-1{\cdot}49208$; ***b)*** $y=5x+13$, $y=-2x-1$; ***c)*** $3x+2y=0$, $y+x=1$, $9x-4y+30=0$. **11.** $x+2y=3$. **12.** $42^\circ 26'$. **13.** $a_1=a_2=-\frac{A}{B}$; $a_3=-\frac{A}{B}$, $a_4=+\frac{B}{A}$. **14** ***a)*** $8y-5x+1=0$; ***b)*** $y=-x-4$; ***c)*** $x=3$; ***d)*** $y=5$. **15.** $y=-\frac{3}{8}x+\frac{10}{3}$, $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=\frac{5}{8}x-\frac{25}{8}$; $65^\circ 42'$, $68^\circ 50'$, $45^\circ 28'$. **16** ***a)*** Nie. ***b)*** Tak. **17** ***a)*** $y=5x-8$, $y=\frac{1}{2}x-4$, $y=-4x+4$; ***b)*** $y=5x-24$, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=-4x+25$. **18** ***a)*** $(11,3)$; ***b)*** $(2,-\frac{3}{3})$; ***c)*** $(-10,-\frac{15}{2})$. ***d)*** Proste są równoległe. ***e)*** Proste nakrywają się. **19.** $\sqrt{29}$, $\sqrt{65}$, $\sqrt{40}$, $41^\circ 49'$, $86^\circ 38'$, $51^\circ 63'$, $p=17$. **20.** $(-6,\frac{5}{2})$ **21.** $y=\frac{1}{4}x+\frac{13}{2}$, $y=\frac{1}{3}x-2$, $y=-\frac{5}{2}x+15$; $C'(-6,-4)$, $B'(2,10)$, $A'(6,0)$; $p'=68=4p$. **22.** $S\left(\frac{79}{46},-\frac{157}{46}\right)$. **23.** $S\left(-\frac{179}{55},\frac{21}{110}\right)$; $S\left(\frac{b_1-b}{a-a_1},\frac{a_1b-ab_1}{aa_1(a-a_1)}\right)$. **24.** $S(3,\frac{1}{3})$; $S\left(\frac{x_2}{3},\frac{y_2}{3}\right)$, jeżeli (x_2, y_2) są współrzędnemi punktu C. **25.** $3\sqrt{5}$, $\frac{5}{8}\sqrt{13}$; $82^\circ 52'$, $97^\circ 8'$. **26.** $p=16\frac{1}{3}$. **27.** $76^\circ 34'$. **28.** Najdogodniej obrać jeden z boków równoległych na osi x-ów. **29.** Trzy warunki wynikają z równości boków a czwarty z ich prostopadłości. **30.** Środki $S_o(2,1)$, $S_w(1,1)$, $S_c(\frac{15}{9},1)$ leżą na prostej $y=1$. **31.** $S_o\left(\frac{x_1}{2},\frac{1}{2}\left[y_2-\frac{x_2}{y_2}(x_1-x_2)\right]\right)$, $S_w\left(x_2,-\frac{x_2}{y_2}(x_2-x_1)\right)$, $S_c\left(\frac{x_1+x_2}{3},\frac{y_2}{3}\right)$. Pole trójkąta $S_o\,S_w\,S_c$ jest równe zeru, więc te 3 punkty leżą na prostej. **32** ***a)*** $d=2$; ***b)*** $d=\frac{17}{\sqrt{74}}$; ***c)*** $d=2$. **33.** $w_c=\frac{77}{\sqrt{82}}$, $a=\sqrt{82}$, $p=\frac{77}{2}$. **34.** $p=4$. **35.** $3x-4y=37$, $3x-4y=-13$. **36.** $y-x(8+5\sqrt{3})+45=0$, $11y+x(5\sqrt{3}-8)-25=0$. **37.** $s_a\ldots\ldots$ $\frac{7y+2x-8}{\sqrt{53}}=\frac{y+x+1}{\sqrt{2}}$, $s_c\ldots\ldots\frac{4y-x+4}{\sqrt{17}}=\frac{y+z+1}{\sqrt{2}}$, $s_a+s_c=s_b=0$. **38.** $S\left(\frac{6(2+\sqrt{29})}{6+\sqrt{29}-\sqrt{41}},\frac{30}{6+\sqrt{29}-\sqrt{41}}\right)$, jeżeli bierzemy w kącie A symetralną kąta wewnętrznego a w B i C zewnętrznych. **39.** $P(-\frac{35}{5},-\frac{51}{15})$. **40.** Punkty: $(\frac{40}{11},\frac{24}{11})$ i $(\frac{16}{5},\frac{24}{5})$ spełniają równanie. prostej $y=-6x+24$. **41.** Biorąc np. $\frac{1}{s_1}=0$, $s_2=0$, $s_3=\frac{8}{5}$, $s_4=-2$ otrzymamy zawsze $k=-\frac{4}{3}$. **43.** $S_1(\frac{6}{5},\frac{1}{5})$, $S_2(\frac{8}{4},\frac{1}{2})$, $S_3(0,1)$ a pole trójkąta o tych

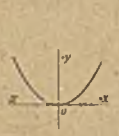
wierzchołkach ma wartość $p=0$. 44. Oznaczając badane punkty kolejno E, F, G, H, otrzymamy $(EFGH)=\frac{\frac{3}{5}\sqrt{37}}{\frac{1}{10}\sqrt{37}}:\frac{\frac{3}{5}\sqrt{37}}{-\frac{1}{6}\sqrt{37}}=-1$.

Ćwiczenia V 3. $A(1, 3)$, $B(0, 0)$, $C(6, 12)$; $A(-5, -9)$, $B(-6, -12)$, $C(0, 0)$. 4. $(y'-2x')-sy'=0$. 5 *a)* $x'^2+y'^2=25$; koło; *b)* $4x'^2+y'^2=12$; elipsa; *c)* $y'^2=6x'$, parabola; *d)* $x'^2-y'^2=4$; hyperbola 6. $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$. 8. $A\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, $(B\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $C\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. 9. $A(5\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $B(6\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. 10 *a)* $x'^2-\frac{y'^2}{4}=1$. Hyperbola. $\operatorname{tg} 2\delta=\frac{24}{7}$, $\sin\delta=\frac{3}{5}$, $\cos\delta=\frac{4}{5}$; 10 *b)* $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{4}=1$. $\delta=45^0$, elipsa. 11 *a)* $\left(x'+\frac{4+\sqrt{65}}{7}y'\right)\cdot\left(x'-\frac{4+\sqrt{65}}{7}y'\right)=0$, dwie proste przechodzące przez punkt $P(1, 1)$ w dawnym układzie; $\operatorname{tg} 2\delta=\frac{1}{8}$; 11 *b)* $y''^2=8x''$. Parabola mająca wierzchołek w punkcie $P(\frac{31}{8}, \frac{1}{5})$, $\operatorname{tg} 2\delta=\frac{24}{7}$. 12. $x'^2-y'^2=36$, hyperbola.

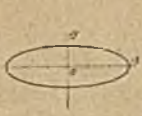
Ćwiczenia VI 1 *a)* $S(3, -5)$, $r=8$; *b)* $S(-2, 6)$, $r=3$; *c)* $S(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$, $r=3$; *d)* $S(5, 0)$, $r=5$. 2 *a)* Obrazem pierwszego równania jest koło $S(7, -1)$, $r=4$, drugiego punkt $S(7, -1)$ a trzeciego równania nie spełnia żadna rzeczywista para (x, y). 3. A, B, C leżą zewnątrz koła a D wewnątrz. 4. Np. dla punktów $A(0, 10)$, $B(6, 8)$, $C(8, -6)$, $D(-6, -8)$ jest $AB.DC+BC.AD=160\sqrt{5}$ i $AC.BD=160\sqrt{5}$. 5 *a)* $x^2+y^2\mp 2rxy=0$; 5 *b)* $x^2+y^2\mp 2rx=0$. 6. $A\left(\frac{35}{\sqrt{34}}, \frac{21}{\sqrt{34}}\right)$, $B\left(-\frac{35}{\sqrt{34}}, -\frac{21}{\sqrt{34}}\right)$. 7. $(x+1)^2+(y-3)^2=45$. 8. $(x-5)^2+(y-8)^2=\frac{2500}{29}$. 9. $(x+13)^2+(y+7)^2=1378$, $S(-13, -7)$, $r=\sqrt{1378}$. 10 *a)* $(x-\frac{11}{2})^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{290}{4}$. 10 *b)* $(x-8)^2+(y-6)^2=25$. 10 *c)* $x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{65}{4}$. 11. $(x+2)^2+(y-3)^2=13^2$. 12. $(x-\frac{2}{3}\frac{8}{5})^2+(y+\frac{3}{5})^2=(\frac{2}{3}\frac{4}{5})^2$. 13. $(x-4)^2+(y+1)^2=9$, $(x-4)^2+(y+1)^2=49$. 14. $x^2+y^2=9$. 15. $b=\pm 3\sqrt{5}$; dla $b>3\sqrt{5}$ i $b<-3\sqrt{5}$ prosta nie przecina koła. 16. $r=\frac{3}{\sqrt{5}}$. 17. $4y-3x=25$. 18. $y=3x\pm 4\sqrt{10}$. 19. $S(\sqrt{33}, \sqrt{3})$, $y=-x\sqrt{11}+12\sqrt{3}$. 21. Obrać dogodnie jeden koniec cięciwy, np. w punkcie $A(r, 0)$ a drugi dowolnie $B(x_2, y_2)$. Styczna równoległa do AB ma spadek $\frac{y_2}{x_2-r}$, a promień styczności $\frac{r-x_2}{y_2}$. Stąd otrzyma się $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{y_2}{x_2}$.

22. $3x+4y=25$, $4x-3y=25$. 23. $y=2x-2$, $y=2x-12$. 24. $\varphi=54^{\circ}47'$. 25 *a)* $78^{\circ}55'30''$. 25 *b)* $3x+4y=9$. 26. $\alpha=90^{\circ}$. 27. $x^2+y^2=25$, $x^2+(y-\frac{3^0}{8})^2=(\frac{2^5}{8})^2$. 28. $(x+5-4\sqrt{3})^2+(y\mp 36\pm 20\sqrt{3})^2=(36-20\sqrt{3})^2$. Dwa koła! 29. $(x-(2+\sqrt{7}))^2+(y+\frac{3}{2})^2=(2\sqrt{7}-\frac{3}{2})^2$. 30. $B(-\frac{9}{4}, \frac{3}{2})$. 31. $x_1=-4$, $x_2=+4$, $x_3=\frac{1}{7}^6$, $x_4=7$, $(x_1\,x_2\,x_3\,x_4)=-1$. 32. $S(\frac{4^0}{3}, 0)$. 33. $3x\pm\sqrt{55}y=40$. 34. $x^2+y^2=2r^2$. Wskazówka: Obliczając z równań dwóch stycznych $xx_1+yy_1=r^2$ i $xx_2+yy_2=r^2$ x i y tworzymy x^2+y^2 i uwzględniamy warunek prostopadłości $x_1x_2=-y_1y_2$. Można też odrazu używać wzoru (37). 35. $(x-\frac{7^0}{1^4})^2+(y-\frac{6^7}{1^4})^2=\frac{3^2}{9}\frac{2^5}{8}$. Spodki wysokości $W_a(\frac{2^0}{5}, \frac{3^3}{5})$, $W_b(\frac{2^4}{5}, \frac{3^2}{5})$, $W_c(\frac{2^3}{1^3}, \frac{4^9}{1^3})$ spełniają równanie tego koła, przechodzącego przez środki 3 boków. 36. Obierając x_1y_1 dowolnie na kole opisanem $x^2+y^2-y=36$, otrzymamy S_a S_b S_c. Stosując warunek, aby te 3 punkty leżały na jednej prostej, dojdziemy do równania $x_1^2+y_1^2-y_1=36$, które się spełnia na pewno.

Ćwiczenia VII

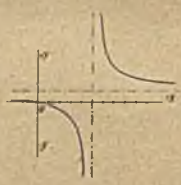


1.

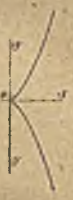


2.

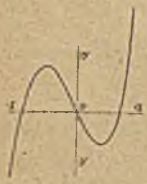
3.



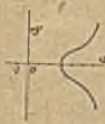
4.



5.

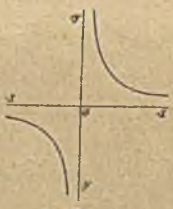


6.



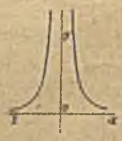
7.

8.

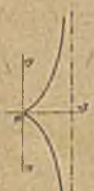


9.

10.



11.



12.

13.

14. $\frac{y}{x}=\frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$ a więc $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{1}{3}$.

Ćwiczenia VIII 1. Z warunku $\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=y+\frac{p}{2}$ otrzymamy $x^2=2py$. **4** *a)* $y'^2=10x'$; przesunięcie $(-4, 3)$; *b)* $x'^2=-y'$; przesunięcie $(-2, 0)$; *c)* $x'^2=3y'$; przesunięcie $(-\frac{3}{2}, \frac{8}{9})$. **5** *a)* $y^2=\frac{6}{5}x$; *b)* $x^2=-\frac{3}{5}y$. **6.** $19y^2-84x-59y+6=0$. **7.** $(x-5)^2=6(y-4)$. **8.** $4\frac{3}{4}m$, $9m$, $11\frac{1}{4}m$, $12m$. **9.** $y=-\frac{x^2}{8000}$. **10.** $20\,dm/sek$, $w=2\,dm$. **11.** $2x^2+5y-10x=0$. **12** *a)* $b=24\sqrt{3}$. **12** *b)* $b_1=24+12\sqrt{3}$, $b_2=24-12\sqrt{3}$. **13.** Pierwsza w punkcie $A(\frac{1}{4}, 1)$, druga w punktach $B_1\left(\frac{3+\sqrt{8}}{6}, \frac{4+\sqrt{8}}{3}\right)$ i $B_2\left(\frac{3-\sqrt{8}}{6}, \frac{4-\sqrt{8}}{3}\right)$, trzecia wcale nie przecina paraboli. **13** *a)* Do $x=2p$ parabola biegnie powyżej prostej, a od tego miejsca poniżej, **14.** 8, 2; 4·5, 2·2; 3·041, 0·751. **16.** $z=2{\cdot}28562\ldots\ldots$ **17.** Prosta $y=\frac{p}{a}$ równoległa do osi x-ów. **18.** $A(8, 4)$, $B(8, -4)$; $A_1(0, 0)$, $B_1(18, 6)$, $C_1(18, -6)$. **19.** $p=-\frac{b}{2}$, $q=\frac{1-a}{2}$, $r=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(1-a)^2-4c}$. **20.** $S(-5, 1\frac{5}{8})$, $r=\frac{1}{4}\sqrt{229}$, $x_1=-1{\cdot}029\ldots$, $x_2=-3{\cdot}877\ldots\ldots$ **21.** $A\left(\frac{p_2}{2}, \sqrt{p_1p_2}\right)$, $B\left(\frac{p_2}{2}, -\sqrt{p_1p_2}\right)$. **22.** $A\left(\frac{p}{12}, \frac{p}{\sqrt{6}}\right)$, $B\left(\frac{p}{12}, -\frac{p}{\sqrt{6}}\right)$. **23.** Wskazówka: oś x-ów przyjąć w poziomie a oś y-ów na linji pionowej łączącej otwory. Odp. $P(\sqrt{8}, 0{\cdot}5)$, $x_1=\sqrt{10}$, $x_2=\sqrt{12}$. **24.** $x=2\sqrt{h(h+d)}$, $y=-(2h+d)$; $x_0=2h$, $y_0=-2h$. Oś x-ów przyjąć na powierzchni cieczy a oś y-ów w linji pionowej łączącej otwory. **25** *a)* $x=1{\cdot}71$; *b)* $x=1{\cdot}442\ldots$ **26.** Napisać równania parabol w formie proporcyj ciągłych. **28.** $xx_1=p(y+y_1)$. **29.** Obliczyć współrzędne punktu styczności i utworzyć równanie prostej, przechodzącej przez te 2 punkty. **30.** Wskazówka. Dla punktu przecięcia się normalnych otrzymamy $x=x_1+\Delta x+y_1\frac{\Delta x}{\Delta y}+p$. Gdy Δx dąży do zera, to $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dąży do $\frac{p}{y_1}$, a więc $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ do $\frac{y_1}{p}$, a zatem x dąży do $x_1+\frac{y_1^2}{p}+p$. Uwzględniając $y_1^2=2px_1$ otrzymamy żądaną wartość x. **31.** $a=\frac{5}{2}$; $5x-2y=25$. **32.** $x=\frac{y_1x_2-y_2x_1}{y_2-y_1}$, $y=\frac{p(x_2-x_1)}{y_2-y_1}$; dla stycznych prostopadłych $P\left(-\frac{p}{2}, px_1-\frac{p^2}{2}\right)$, a ten punkt leży na kierownicy dla wszelkich (x_1y_1) (x_2y_2). **33** *a)* $\alpha=18^{\circ}26'$;

obrać początek układu w wierzchołku paraboli rzutu. **33 *b)*** $\alpha_1 = 12^0 50'$, $\alpha_2 = 84^0 2'$. Wskazówka: równania paraboli rzutu są $x = ct\cos\alpha$, $y = ct\sin\alpha - \frac{g}{2}t^2$; stąd należy obliczyć α, znając x, y, c, g. **34.** $x+2y+6=0$. **35.** W punkcie $O(0,0)$ pod kątem 135^0 a w punkcie $A(-6, 6)$ pod kątem $18^0 26'$. **36.** Współrzędne punktu przecięcia są $P\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$, a więc P leży zawsze na osi y-ów. **37.** $y = 5x + \frac{1}{4\frac{1}{5}}$. **38.** $P(\frac{8}{5}, 15)$. **39.** $\alpha = 150^0 15' 20''$. **40.** $x = -\frac{3}{2}$. **41.** Styczne w punkcie przecięcia $A(3, 4)$ są prostopadłe. **42.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{2+a^2}$ ma największą wartość, gdy $a = \sqrt{2}$. **43.** $P = \frac{x_1 y_1}{6} = 85\frac{1}{3}$. **44.** $x_1 = \sqrt[3]{90}$. **45.** $P = 12$. **46.** $P = 24$. **47.** $P = \frac{1}{3}x_1 y_1 + \frac{\pi a^0}{40} = 8{\cdot}535$. **48.** Jeżeli punkty $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ leżą po tej samej stronie osi x-ów, należy od większego odcinka odjąć mniejszy i trapez. W przeciwnym wypadku wystąpią 2 trójkąty o znakach przeciwnych.

Ćwiczenia IX **1 *a)*** $p = 12\pi = 37{\cdot}68$; ***b)*** $10\pi = 31{\cdot}4$; ***c)*** $2\pi = 6{\cdot}28$; ***d)*** $18\pi = 56{\cdot}52$ **2 *a)*** Elipsa mająca osie równoległe do osi współrzędnych, a środek w punkcie $S(2, 3)$; $p = 6\pi = 18{\cdot}84$. **2 *b)*** Jak w poprzedniem zadaniu; $S(-3, 0)$; $p = 2\pi = 6{\cdot}28$. **2 *c)*** Jak w poprzedniem zadaniu; $S(-1, 4)$; $p = 20\pi = 62{\cdot}8$. **3 *a)*** Elipsę $9x^2 + 4y^2 = 36$. **3 *b)*** Oznaczając $\sin 2\pi p = c$, otrzymamy $b^2x^2 + a^2y^2 - 2abcxy = a^2b^2(1-c^2)$. Jest to elipsa, której oś wielka tworzy z osią x-ów taki kąt δ, że $\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2abc}{a^2-b^2}$. **4.** Trzeba okazać, że $\frac{AF}{FB} : \frac{AK}{KB} = -1$, gdzie A, B oznaczają końce osi wielkiej, F ognisko a K punkt kierownicy, leżący na osi x-ów. **5.** $a = 5$, $b = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $e = \frac{5}{2}$, $p = 67{\cdot}98$. **6.** $\sqrt{0{\cdot}84}\,b$, $0{\cdot}6\,b$, $\frac{\sqrt{15}\,b}{4}$, $\frac{b^2}{a}$, $\frac{b}{3}\sqrt{3}$. **7.** $4x^2 + 55y^2 = 256$. **8.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$; ogólnie $x^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = a^2$. **9.** $x = \frac{a^2}{3e}$, $y = \pm\frac{b}{3e}\sqrt{9e^2 - a^2}$. Warunek: $9e^2 > a^2$. **10.** Przez 4 punkty. **11 *a)*** $s = \frac{12}{\sqrt{13}}$. **11 *b)*** Współrzędne wierzchołka prostokąta są $A\left(\frac{9}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{44}{5}}\right)$. **12 *a)*** $(\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$, $(-\frac{8}{5}, -\frac{8}{5})$; **12 *b)*** $(0, 0)$, $(5, 3)$. **13.** $y = x + 10$. **14.** $x = \pm\frac{a}{e}\sqrt{e^2 - b^2}$, $y = \pm\frac{b^2}{e}$. **15.** $x = \pm\sqrt{\frac{20}{13}}$, $y = \pm\sqrt{\frac{7}{13}}$.

16. $x=\frac{a}{b^2}(-ap\pm\sqrt{a^2p^2+b^4}$, $y=\pm\sqrt{\frac{2pa}{b^2}(-ap\pm\sqrt{a^2p^2+b^4})}$;

$x=\frac{a}{b^2}(-2ae\pm(2a^2+b^2))$, $y=\pm\frac{2}{b}\sqrt{ae(-2ae\pm(2a^2+b^2))}$.

17. $x=\frac{a^2c\pm a\sqrt{a^2c^2-(a^2-b^2)(b^2+c^2-r^2)}}{a^2-b^2}$; kładąc tu $r=a-c$ i żądając, aby wyrażenie pod pierwiastkiem było zerem, otrzymamy $c=\frac{e^2}{a}$ a stąd $r=\frac{b^2}{a}$. 18. $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}x+2\sqrt{3}$, $y=-\frac{\sqrt{39}}{13}\left(\frac{5x}{4}-8\right)$, $y=-\frac{x\sqrt{7}}{4}+4$.

19. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{7-2\sqrt{6}}{25}$, $\varphi=4^0 50'$. 20. $\alpha=61^0 52'$. 21. Wskazówka. Z równań stycznych do koła i elipsy w punkcie o odciętej x_1 wyeliminować x. 22. Wskazówka. Użyć równań stycznych o danym spadku (str. 99). Przeniósłszy na jedną stronę wyrazy zawierające x, y podnieść obie strony do kwadratu i dodać stronami. 23. Por. wskazówkę do poprzedniego zadania. 24. $2x+13y=-32$, $y-2x=4$. 25. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{57}}{29}$, $\varphi=27^0 31'$. 26. Kładąc $y=0$ w równaniu biegunowej, należącej do punktu $\left(\frac{a^2}{e}, y_2\right)$ otrzymamy $x=e$. 27. $s=3{\cdot}29$, $n=3{\cdot}51$, $p_s=\frac{9}{11}$, $p_n=\frac{9}{25}$. 29. Ich spadki są $a_1=a_2=-\frac{b^2}{a^2c}$. 30. $P=1600$; ogólnie $P=4ab$. Wskazówka: najprościej jest obliczyć jedną ćwiartkę tego równoległoboku wzorem $d_1 . d_2 . \sin\varphi$.

Ćwiczenia X 2 *a)* $\left(\frac{x-2}{5}\right)^2-\left(\frac{y+1}{2}\right)^2=1$. 2 *b)* $(x+3y+2)(x-3y+5)=0$; dwie linje proste. 2 *c)* $\frac{5}{11}(x+1)^2-\frac{4}{11}(y+2)^2=-1$; ogniska leżą na osi y-ów. 3. $y^2=\frac{18x}{5}+\frac{9x^2}{25}$. 4 *a)* $\frac{x^2}{36}-\frac{7y^2}{81}=1$. 4 *b)* $\frac{17x^2}{72}-\frac{y^2}{9}=1$. 4 *c)* $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$. 4 *d)* $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$. 5 *a)* $x=\frac{\pm ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$. 5 *b)* $x=\frac{\pm ab}{\sqrt{b^2-4a^2}}$. 5 *c)* $P\left(\frac{3a^2}{e}, \pm\frac{b}{e}\sqrt{9a^2-e^2}\right)$; punkty te są rzeczywiste dla $9a^2>e^2$. 6. $\pm\sqrt{\frac{240}{53}}$, $\pm\frac{3}{4}\sqrt{\frac{240}{53}}$; $x=y=\infty$; urojone wartości. 7 *a)* $(5, \frac{3}{4})$, $(4, 0)$; 7 *b)* $(2, 0)$; 7 *c)* $\pm\frac{5}{2}\sqrt{2}$, $\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$. 10. $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{225}=1$. 11. $d=\pm b$. 12. $y=\frac{y_1}{x_1+e}(x+e)$, $y=\frac{y_1}{x_1-e}(x-e)$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2ey_1}{x_1^2+y_1^2-e^2}$;

$\varphi=90^0$, gdy $x_1^2+y_1^2=e^2$. 13. $43^0 36'$. 14. $x=\pm\frac{3}{4}\sqrt{15}$, $y=\pm\frac{1}{4}$. 15 *a)* $5x-6y=8$. 15 *b)* $5x-3y=4$. 16. $y-x=4$, $3x+4y=9$. 17. $y=\pm\frac{b}{a}x$ tj. asymptoty; jeżeli styczna ma przechodzić przez początek układu, to wyraz wolny w równaniu stycznej musi być zerem. 18. Punkt przecięcia: $P\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$. 19. $y=2x\pm\sqrt{3}$. 20. Obliczyć współrzędne punktu przecięcia się stycznej z normalną i utworzyć sumę ich kwadratów. 21. Z punktów leżących na kole $x^2+y^2=5$; ogólnie $x^2+y^2=a^2-b^2$. Wskazówka: użyć równań stycznych w formie $y=cx+\sqrt{c^2a^2-b^2}$; przenieść niewiadome na pierwszą stronę, podnieść do kwadratu i pomnożywszy przez c^2 dodać stronami. 22. Hyperbola o środku w punkcie (2, 0) a o osiach $2a=3$, $2b=\sqrt{7}$. 23. Spadki stycznych w punktach przecięcia są $c_1=\frac{a_1 b}{ab_1}$, $c_2=-\frac{ab_1}{a_1 b}$. 24. Współrzędne punktów przecięcia stycznej z asymptotami są: $x=\frac{a^2 b}{bx_1\mp ay_1}$, $y=\frac{ab^2}{bx_1\mp ay_1}$ a ich średniemi arytmetycznemi są: x_1, y_1. 25. $\operatorname{tg} 2\delta=\frac{1}{3}$; $\frac{x^2(1+\sqrt{10})}{8}-\frac{y^2(\sqrt{10}-1)}{8}=1$. 26 *a)* Hyperbola równoboczna o środku $S(4, 3)$, $a=\sqrt{26}$. 26 *b)* $S(0, 10)$, $a=20$; oś główna tworzy z osią x-ów kąt 135^0. 26 *c)* $S(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $a=\sqrt{\frac{10}{9}}$; oś główna tworzy z osią x-ów kąt 135^0. 27. Użyć paraboli $y^2=2ax$ i hyperboli $xy=a^2$. 28. Otrzymamy szereg hyperbol równobocznych o coraz większych osiach, przesuniętych coraz dalej na lewo do góry. Dla $c>\frac{3}{2}$ oś tworzy kąt 45^0 z osią x-ów, dla $c<\frac{3}{2}$ kąt 135^0, dla $c=\frac{3}{2}$ równanie przedstawia jedną prostą $y=\frac{3}{2}$. Gdy c dąży do zera, hyperbola dąży do prostej $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$; gdy c dąży do $\frac{ad}{b}$, hyperbola dąży do prostej $y=\frac{b}{d}$.

Ćwiczenia XI 1 *a)* Typ eliptyczny. 1 *b)* Typ hyperboliczny (dwie proste). 1 *c)* Typ paraboliczny. 2. $B^2-4AC=B^2>0$ a więc typ hyperboliczny. 3. Podzieliwszy równanie przez x^2 rozłożyć na czynniki. 4. Tworząc iloczyn $(ax+by+c)(a_1x+b_1y+c_1)=0$ obliczy się $B^2-4AC=(a_1b-ab_1)^2>0$, o ile nie jest $a:a_1=b:b_1$; wtedy zaś $B^2-4AC=0$. 5. Zastosować tę samą metodę, której się używa dla elipsy (por. str. 124). 6. Wykonać najpierw przesunięcie do środka symetrji a następnie zastosować wzory (63 *a*). 7. Wystarczy badać współczynniki A, B, C,

podzieliwszy równanie przez x^2 — dalsze bowiem wyrazy dążą do zera, gdy x wzrasta nieograniczenie. 8. Hyperbola o środku $S(-1, 5)$ o osiach $a^2=2$, $b^2=1$; $\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\delta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$. 9. Elipsa o środku w początku układu. Po obrocie równanie: $\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{25}=1$. 10. Dwie proste $3y-2x+4=0$, $y+4x-22=0$. 11. Niema obrazu geometrycznego. $\frac{1}{4}x'^2+y'^2=-1$. 12. Parabola $y'^2=-2\sqrt{2}x'$. 13. Hyperbola. Odniesiona do osi symetrji ma równanie $x'^2-y'^2=-4$. 14. Niema obrazu geometrycznego (dwie proste równoległe urojone) $x+3y-2+i=0$, $x+3y-2-i=0$. 15. Elipsa. $9x'^2+y'^2=9$. 16. Dwie proste równoległe: $(x+5y-4)(x+5y+3)=0$. 17. Jedna prosta: $(3x-2y+1)^2=0$. 18. Punkt: $S(2, -3)$. Równanie uproszczone: $2x'^2+y'^2=0$. 19. Parabola. $y'^2=6x'$.

Ćwiczenia XII 2. $P_{xy}(4, 3, 0)$, $P_{xz}(4, 0, 5)$, $P_{yz}(0, 3, 5)$; $P_x(4, 0, 0)$, $P_y(0, 3, 0)$, $P_z(0, 0, 5)$. 3. Punkty leżące symetrycznie względem płaszczyzny współrzędnej różnią się znakiem jednej współrzędnej, względem osi — dwóch a względem początku układu znakiem trzech współrzędnych. 4. $\alpha=\beta=\gamma=54^0 45'$; $d=\sqrt{3}$. 5 *a)* Na pł. równoległej do XY w odstępie 3. *b)* Na pł. równoległej do XZ w odstępie 2. *c)* Na pł. równoległej do YZ w odstępie -4. 6 *a)* Na prostej prostopadłej do XZ w punkcie (2, 0, 3). *b)* Na prostej prostopadłej do XY w punkcie (4, -2, 0). *c)* Na prostej prostopadłej do YZ w punkcie (0, 5, -3). 7 *a)* Płaszczyzna symetralna płaszczyzn ZX i ZY; *b)* prosta przechodząca przez początek układu, jednakowo nachylona do trzech osi; *c)* koło na pł. XY; *d)* elipsa na pł. równoległej do XY w odstępie 2; *e)* parabola na pł. równoległej do XY w odstępie -3. 8. $p_x=3$, $p_y=3$, $p_z=-3$, $d=3\sqrt{3}$. 9. $AB=10$, $AC=\sqrt{52}$, $BC=6\sqrt{2}$, $AD=BD=\sqrt{65}$, $CD=\sqrt{53}$. 10. $3x-y+2z=14$; płaszczyzna symetralna tego odcinka. 11. $S(\frac{133}{34}, \frac{54}{34}, \frac{179}{170})$. 12. $x^2+y^2+z^2=25$; kula. 13. $(x-5)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=9$. 14. $\alpha=55^0 33'$, $\beta=64^0 54'$, $\gamma=45^0$. 15. (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). 16. $\gamma_1=36^0 56'$, $\gamma_2=143^0 4'$. 17. We wzorze (68) wyrazić dostawy zapomocą wstaw. 18. $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{59}}$, $\cos\beta=\frac{-5}{\sqrt{59}}$, $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{59}}$. 19. Użyć wzoru (68)!. 20. $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ a inne punkty różnią się tylko znakami współrzędnych; $\cos\alpha_1=\cos\beta_1=\cos\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 21. $\varphi=79^0 6' 34''$. 22. $\varphi=90^0$. 23 *a)* $\varphi=45^0$ lub 135^0. 23 *b)* $\varphi=90^0$.

24 a) We wzorze (68) podstawić za dostawy wartości z wzorów $p_x=p\cos\alpha$, $p_y=p\cos\beta$, $p_z=p\cos\gamma$. **24 b)** $p=\frac{15}{2}$. **25.** $V=[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_1)+(x_3y_1-x_1y_3)]\frac{z_1}{6}$. **26 a)** $z^2+y^2=k^2x^2$; stożek; **b)** $y^2+z^2=2px$ paraboloida obrotowa; **c)** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$; elipsoida obrotowa. **27.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{a^2-e^2}=1$; elipsoida obrotowa. **28.** Wskazówka: jeżeli środek koła ruchomego leży w punkcie (x, y_1) koła nieruchomego, to spełniają się równania $x^2+y_1^2=r^2$ i $z^2+(y_1-y)^2=r^2$ dla każdego punktu $P(x, y, z)$ na kole ruchomem. Eliminując y_1 otrzymamy żądane równanie $(y^2+z^2-x^2)^2-4y^2(r^2-x^2)=0$. **29 a)** Walec, którego kierownicą jest koło na płaszczyźnie YZ. **29 b)** Płaszczyzna prostopadła do XY wzdłuż prostej $2x-3y=6$. **29 c)** Walec paraboliczny o tworzących prostopadłych do XZ. **29 d)** Walec hyperboliczny prostopadły do płaszczyzny XZ. **30 a)** Powierzchnia powstająca przez obrót hyperboli $\left(\frac{y}{4}\right)^2-\left(\frac{z}{2}\right)^2=1$ około osi Z. **30 b)** Powierzchnia zwana paraboloidą eliptyczną; przekroje równoległe do XY są elipsami coraz większemi a przekroje równoległe do XZ i YZ są parabolami. **30 c)** Powierzchnia mająca postać siodła, zwana paraboloidą hyperboliczną. Przekroje równoległe do YZ są parabolami przystającemi do $y^2=-10z$. **30 d)** Ta sama powierzchnia, co w poprzedniem ćwiczeniu, tylko inaczej umieszczona; każdy przekrój równoległy do XY jest hyperbolą równoboczną.

31. $x'=x\cos\alpha_1+y\cos\alpha_2+z\cos\alpha_3$
$y'=x\cos\beta_1+y\cos\beta_2+z\cos\beta_3$
$z'=x\cos\gamma_1+y\cos\gamma_2+z\cos\gamma_3$.

32. Wskazówka: współrzędna z wystąpi jako przecięcie się płaszczyzny rzucającej daną prostą z płaszczyzną XZ lub YZ. **33.** $x\sqrt{2}+y+z-10=0$. **34.** $2x-4y=6$, $2x+z=6$, $-4y+z=6$. $(3, -\frac{3}{2}, 6)$. **35.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$. **36 a)** $\frac{y}{10}+\frac{z}{8}=1$. **36 b)** $\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{7}=1$. **36 c)** $x+y+z=\frac{k}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$; inne ściany otrzymuje się zmieniając znaki. **37.** $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{189}}$, $\cos\beta=\frac{8}{\sqrt{189}}$, $\cos\gamma=\frac{10}{\sqrt{189}}$, $p=\frac{20}{\sqrt{189}}$. **38.** Wskazówka: podstawiając te współrzędne w ogólne równanie płaszczyzny $Ax+By+Cz+D=0$ otrzymamy 3 równania na

wyznaczenie trzech stosunków współczynników A, B, C, D. $14x+12y+5z=80$. 39. $\varphi=136^0 17' 10''$, $\cos\varphi=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$. 40. $d=4\frac{2}{3}$; ogólnie $d=|x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p|$. 41. $P(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. 42. $x=-\frac{6}{5}z+6$, $y=\frac{2}{5}z+1$, $x=-3y+9$. 43. $\begin{cases} y=z-2 \\ y=\frac{x}{\sqrt{2}}+4-\sqrt{2} \end{cases}$ $S_{XY}(2-6\sqrt{2}, -2, 0)$, $S_{YZ}(0, 4-\sqrt{2}, 6-\sqrt{2})$. 44. $\frac{x}{4}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z-3}{-1}$; ogólnie $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$; $\alpha=51^0 53' 16''$, $\beta=140^0 29' 23''$, $\gamma=98^0 52' 35''$. 45 *a)* $P(22, 14, 9)$. 45 *b)* Nie przecinają się; ogólny warunek, aby się dwie proste w przestrzeni przecinały: $\frac{c-b}{m-n}=\frac{c_1-b_1}{m_1-n_1}$, jeżeli równania prostych są $\begin{cases} y=mx+b \\ z=nx+c \end{cases}$ $\begin{cases} y=m_1x+b_1 \\ z=n_1x=c_1. \end{cases}$ 46. Tak. Ogólne warunki dla prostej $\begin{cases} y=mx+b \\ z=nx+c \end{cases}$ i płaszczyzny $Ax+By+Cz+D=0$ są $A+Bm+Cn=0$ i $Bb+Cc+D=0$. 47. $\alpha=75^0 17'$, $\beta=28^0 16'$, $\gamma=67^0 36'$. 48. $\varphi=30^0 45' 30''$. 49. $\delta=52^0 18'$, $P(-\frac{10}{11}, -\frac{26}{11}, \frac{4}{11})$. 50. Wskazówka: równaniem tej płaszczyzny jest $(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\cos\beta+(z-z_1)\cos\gamma=0$, gdzie α, β, γ są kątami danej prostej z osiami. $P(-\frac{386}{69}, \frac{250}{69}, -\frac{55}{69})$; $d=\frac{1}{69}\sqrt{467337}=9{\cdot}907$.

SPIS RZECZY

Wstęp

1. Zadanie geometrji analitycznej.

Część I. Geometrja analityczna jednowymiarowa

Rozdział I.

Str.

2. Analityczne przedstawianie utworów geometrycznych jednowymiarowych 1
3. Wielkość odcinka 3
4. Podział odcinka 5

Część II. Geometrja analityczna płaska

Rozdział II. Współrzędne na płaszczyźnie. Obrazy geometryczne równań. Równania linij

5. Współrzędne prostokątne . . 9
6. Linje jako obrazy równań. Wykresy 12
7. Wyprowadzanie równań z geometrycznych własności linij. Równania miejsc geometrycznych 15
8. Współrzędne biegunowe i równania we współrzędnych biegunowych 18

Rozdział III. Planimetryczne zastosowania układu współrzędnych

9. Odcinki 25
10. Kierunek odcinka. Spadek linji 27

Str.

11. Kąt dwóch linij prostych . . 30
12. Podział odcinka 32
13. Pole trójkąta i wielokąta . . 35

Rozdział IV. O linji prostej

14. Równanie linji prostej . . . 41
15. Zagadnienia o linji prostej . 49

Rozdział V. Zmiana osi współrzędnych. Przesunięcie i obrót

16. Przesunięcie osi 64
17. Obrót osi współrzędnych . . 66

Rozdział VI. Koło

18. Ogólne równanie koła . . . 71
19. Koło i linja prosta. Styczna. Dwa koła 75

Rozdział VII. Ogólne uwagi o dyskusji równań linij krzywych

20. Dyskusja równań linij krzywych 85

Rozdział VIII. Parabola

21. Równanie paraboli 92
22. Parabola i prosta 99
23. Parabola i koło 101
24. Dwie parabole 103
25. Styczna do paraboli 103
26. Pole odcinków paraboli . . . 108

Rozdział IX. Elipsa Str.
27. Równanie elipsy. Dyskusja . 114
28. Inne definicje elipsy 119
29. Elipsa i linja prosta 121
30. Styczna do elipsy 123

Rozdział X. Hyperbola
31. Równanie hyperboli 129
32. Hyperbola i prosta 133
33. Styczna do hyperboli 135
34. Zastosowanie hyperboli do badania funkcyj 136

Rozdział XI. Ogólny rozbiór równania drugiego stopnia o dwóch zmiennych
35. Rozbiór równania drugiego stopnia 141
36. Środek i osie symetrji . . . 145

Część III. Wstępne pojęcia z geometrji analitycznej przestrzennej

Rozdział XII.
37. Współrzędne prostokątne w przestrzeni . . . . . Str. 148
38. Odcinki 150
39. Kąt dwóch kierunków. Warunek prostopadłości 153
40. Równania powierzchni i linij . 154
41. Badanie powierzchni za pomocą przekrojów płaskich . 159
42. Równanie płaszczyzny . . . 161
43. Równania linji prostej w przestrzeni 165
44. Zakończenie. — Wskazówki do dalszego kształcenia się . . 167

Rozwiązania zadań 173

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

BG Politechniki Śląskiej w Gliwicach
nr inw.: 102 - 122740
Dyr.1 122740