Dr ANTONI HOBORSKI
PROFESOR ZWYCZAJNY AKADEMJI GÓRNICZEJ W KRAKOWIE

WYŻSZA MATEMATYKA

(Z LICZNYMI PRZYKŁADAMI I RYCINAMI)

W DWÓCH CZĘŚCIACH

CZĘŚĆ PIERWSZA

WYDANO Z ZAPOMOGI ZWROTNEJ MINISTERSTWA W. R. I O. P.

KRAKÓW
NAKŁADEM AUTORA
1923

Każdy egzemplarz zaopatrzony jest w numer porządkowy i podpis autora.

Nr. 2199

PROF. DR. A. HOBORSKI

Kraków — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem J. Filipowskiego.

PRZEDMOWA.

Pisząc podręcznik „Wyższej Matematyki“, zdawałem sobie sprawę z wielkości zadania, jakiego się podjąłem, gdyż popularyzować rachunek różniczkowy i całkowy jest przedsięwzięciem bardzo trudnem.

Autor bowiem każdego podręcznika naukowego powinien przed rozpoczęciem swej pracy określić możliwie najdokładniej tę grupę ludzi, dla której go pisze; to określenie ma być dla autora drogowskazem we wyborze i treści podręcznika i metody popularyzatorskiej, nadto — co również nie jest łatwem — pozwoli mu oznaczyć zasób tych wiadomości, które przyjmuje za znane czytelnikowi.

Otóż, pisząc podręcznik, który dziś oddaję na usługi społeczeństwa naszego, postanowiłem go przeznaczyć dla studentów akademickich szkół technicznych i studentów przyrodoznawstwa Ta grupa czytelników, choć tak różnorodna, bo obejmująca i przyszłego inżyniera i botanika, chemika, fizyka itd., itd., ma jednak tę wspólną cechę, że, posługując się matematyką, robi z niej narzędzie badań naukowych, nie uważając jej za cel ostateczny. Stąd pochodzi określenie zakresu treści podręcznika, który podawać winien rzeczy przedewszystkiem klasyczne, choć może niejednokrotnie nieogólnie postawione, ale najzupełniej wystarczające dla stosującego dziś matematykę do różnych gałęzi wiedzy. Dlatego niejedno zagadnienie, choć piękne i nęcące, choć ogólniejsze od zagadnienia klasycznego i dlatego prostsze dla zawodowego matematyka, zostało nieuwzględnione. Jest to punkt widzenia — rzec można — utylitarny, ale nakazany względami rozumnymi — nie wszystkie bowiem partje matematyki znajdują zastosowanie w zagadnieniach przyrodoznawstwa lub techniki.

Oczywiście możnaby słusznie zarzucić, że trudno przewidzieć rozwój nauk, stosujących matematykę, wobec czego może się zdarzyć, że znajomość gałęzi matematyki, dziś jeszcze nieprzydatnej do naukowego ujęcia życia praktycznego lub zagadnień przyrodniczych, stanie się jutro konieczną; czyż więc czytelnik mego podręcznika będzie przygotowanym na tyle, by mógł uzupełnić swe wiadomości matematyczne, gdyby się tego potrzeba okazała? To pytanie pozostaje w ścisłym związku z drugą kwestją. przezemnie wyżej poruszoną, t. j. ze sprawą metody wykładu. Otóż wykład winien być jasny, przystępny i ścisły. Jasność i przystępność wykładu są to jednak wymagalniki tak często nieuchwytne, tak nieokreślone, że w ich rozbiór wdawać się nie mogę. Zresztą, co dla jednego czytelnika będzie jasnem i przystępnem, może być dla drugiego ciemnem, zawiłem i trudnem; oprócz dyspozycji umysłowych czytelnika wchodzić tu będzie w grę, także stopień przygotowania, z jakiem przystępuje do czytania podręcznika, o czem zresztą słów kilka poniżej.

Tymczasem ścisłość wykładu nie podlega takiej dowolności poglądów, jak jasność i przystępność, w tej materji mamy już wcale dobre kryterja tak, iż sąd o tem, czy podręcznik jest ścisły lub nie, może wypaść jednakowy u wszystkich matematyków zawodowych. Ale właśnie w tym punkcie różnią się poglądy matematyków zawodowych i tych, którzy matematykę stosują. Postulat ścisłości nietylko bowiem dotyczy sposobu wysłowienia definicji i twierdzeń i sposobu dowodzenia, lecz także powoduje zwiększenie materjału pomocniczego, a więc wymaga pomocniczych określeń, wielu lemmatów bez wartości dla zastosowań, wysłowienia aksjomatów, redukcji intuicji w dowodach do minimum itd. Jednem słowem, postulat ścisłości ma wpływ na *objętość* podręcznika. Tymczasem sfery inżynierów stale matematykom powtarzają, że inżynier nie może dużo czasu poświęcić matematyce i dlatego woli czytać książeczki wydawnictwa Göschen, niż podręcznik Kowalewskiego lub Rothego.

Oczywiście tkwi tu pewnego rodzaju nieporozumienie. Przecież każde twierdzenie matematyczne ma postać zdania: z P wynika Q. Nieścisłość najpospolitsza małych podręczników polega na tem, że założenie P jest albo zupełnie pominięte albo niekompletnie podane, wskutek czego podręcznik podaje inne twierdzenie: z p wynika Q, co jest zwykle nieprawdą. Że nieścisłe podręczniki zawierają nieprawdziwe sądy, (!) z tego sobie niewielu zdaje sprawę. Poza tem mogą być i określenia nieścisłe, niby-dowody itd. Czy można tedy na nieściśle skonstruowanych pojęciach i fałszywych twierdzeniach zbudować jakąś poprawną teorję? Wszak na kruchych fundamentach stanąć musi budynek, walący się za podmuchem słusznej krytyki!

Drugim powodem nieporozumienia są popularne poglądy na stosowanie matematyki. Niektórzy sądzą, że rzecz zasadza się na tem, by dane eksperymentalnie ująć we wzory matematyczne. Tymczasem wzór sam dla siebie jest nieokreślonym, gdyż setki wzorów mogą być w zgodzie z wynikami doświadczeń. Nie we „wzorach“ więc tkwi sedno zastosowania matematyki. Charakterystyczną cechą jest forma dedukcji t. zn. do teorji jakiejś można dopiero wtedy stosować matematykę, gdy znaleziono dla teorji przesłanki (hypotezy, aksjomaty), dające się ująć matematycznie. Typowych przykładów dostarcza nam w tym kierunku fizyka (t. zw. matematyczna), która stoi najwyżej z pomiędzy nauk, stosujących matematykę.

O tem właściwem zadaniu stosowania matematyki nie wolno zapominać. I tego nie może nauczyć podręcznik matematyki, jeżeli nie wykazuje niemal ciągle, jak to z P wynika Q. Otóż tego podręcznik nieścisły nigdy nie zdoła nauczyć.

Oto główne powody, dla których wolałem być ściślejszym we wykładzie od wielu podobnych podręczników zagranicznych.

Stąd też konieczność ograniczenia się do materjału klasycznego i niezbyt obszernego. Jeszcze jedna sprawa, która i w recenzjach lat ubiegłych była poruszana i jest częstokroć omawiana, a dotyczy przykładów, ilustrujących teorję. Stosujący matematykę domagają się, by przykłady dobierać z fizyki (termodynamiki, mechaniki), elektrotechniki, teorji wytrzymałości materjałów itd., itd.

Żądania tego rodzaju tylko w pewnej mierze są słuszne. Wszak każda z tych nauk spoczywa na pewnych zasadach, których znajomość nie jest ogólną. Autor nieco ostrożny nie może więc takich zagadnień wprowadzać bez odpowiednich wstępów i dlatego często woli z nich rezygnować. Nadto przykłady mają za cel wyjaśnienie rzeczy teoretycznych, a nie łatwych; jeżeli więc użyjemy przykładu, wymagającego znacznego przygotowania, to cel właściwy nie będzie osiągnięty przez autora. Miara więc pewna w tym kierunku jest konieczną.

Trzecią, bardzo ważną rzeczą, którą autor podręcznika ciągle mieć powinien przed oczyma, to stopień przygotowania, który przypisuje czytelnikowi. Tkwi tu trudność nie lada. Czas świeżo powowojenny nie zezwala na wielki optymizm w tym kierunku, a sprawę pogarsza brak powszechnie u nas znanego dobrego podręcznika matematyki elementarnej, na który mógłbym się powołać bez wszelkich zastrzeżeń [1]). Stąd się wziął w moim podręczniku „Wstęp".

Pragnąłbym jeszcze wyjaśnić pewne szczegóły związane z powstaniem niniejszego podręcznika.

Podręcznik powstał z wykładów, które p. t. Wyższa matematyka corocznie wygłaszam w Akademji Górniczej i które w podręczniku zostały rozszerzone i uzupełnione. Stąd też nazwa podręcznika, która niejednego matematyka gotowa razić.

Obok Wyższej Matematyki program naukowy Akademji Górniczej zawiera algebrę, trygonometrję i geometrję analityczną, jako przedmioty osobnych wykładów i na nich niejeden brak w przygotowaniu przedakademickiem zostaje usunięty. Właśnie „Wstęp" w niniejszym podręczniku jest echem tych elementarnych wykładów i szczerych usiłowań, by wykład wyższej matematyki uprzystępnić. „Wstęp" stanie się zbędnym z chwilą ukazania się drukowanych wykładów algebry, trygonometrji i geometrji analitycznej.

Metoda wykładu użyta w obecnym podręczniku jest podobną do tej, którą posługiwałem się, pisząc wraz z Kolegą Prof. Dr A. Wilkiem dziś już wyczerpane: „Zasadnicze pojęcia rachunku różniczkowego i całkowego". Metoda ta, będąca moim pomysłem, stara się wytworzyć w umyśle czytelnika przez odpowiednio dobrane, a proste przykłady intuicyjne pojęcie matematyczne i wykazać potrzebę i użyteczność tego pojęcia, potem dopiero podaje określenie ścisłe. Przykładów liczy podręcznik ilość bardzo poważną.

Brak u nas zbioru zadań matematycznych, przeznaczonego dla szkół technicznych. Sądziłem początkowo, że zbiór taki będzie mógł powstać w niedługim czasie po ukazaniu się niniejszego podręcznika. Dziś tego złudzenia nie posiadam — warunki materjalne wydawnictwa są dla osób prywatnych tak trudne, że nie można dziś oznaczyć terminu takiej publikacji. Byłaby to praca zbiorowa; chemicy, fizycy i inżynierowie wraz z matematykiem powinni być współautorami — początek jest już zrobiony, ale końca nie widać! Dlatego część pierwszą od § 1 do § 50 zaopatruję w skromny zbiór zadań, które były w Akademji przerabiane na osobnych godzinach

---

[1]) Do geometrji posiada nasza literatura kilka podręczników dobrych, jak: Hadamarda, Enriquesa-Amaldiego, Wojtowicza i Łomnickiego.

ćwiczeń; od § 50 tekst zaopatruję we większą ilość przykładów i w temata do ćwiczeń.

Jakimkolwiek będzie zbiór zadań, który za lat kilka się ukaże, to dwóch luk w moim podręczniku nie zdoła usunąć. Uważny czytelnik spostrzeże bowiem, że pominąłem teorję wyznaczników i nowoczesną teorję liczb niewymiernych. Pierwszą zawierać ma wykład Algebry; drugą, własną, oryginalną mam gotową w rękopisie i wnet ją opublikuję pod tytułem: *Nowa teorja liczb niewymiernych*. [Teorję wyznaczników, znajdzie czytelnik wyłożoną w książce prof. Zaremby p. t. Teorja wyznaczników i równań linjowych (wydanej przez Krakowskie Kółko matematyczne)].

Wobec tego, że podręcznik niniejszy zawiera rzeczy klasyczne, uważam się za zwolnionego od cytowania źródeł. Z tego bynajmniej nie wynika, by nie można się było dopatrzyć samodzielnego ujęcia niejednego, mniej lub więcej ważnego szczegółu (określenia całki nieokreślonej str. 247, nierówność $c \neq 0$ w tw. ze str. 254 itd.).

O ile chodzi o przykłady praktyczne, to prócz kilku, które sam wyszukałem, czerpałem je z całego szeregu podręczników:

Schlömilch, Übungsbuch zum Studien der höheren Analysis;

Nernst-Schönflies. Einführung in die mahtematische Behandlung der Naturwissenschaften;

Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften u. der Technik;

Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik;

Perry, Höhere Mathematik für Ingenieure (w tłóm. niemieckiem); Egerer, Ingenieur-Mathematik;

Bouasse, Cours de mathématiques générales;

Townsend and Goodenough, Essentials of Calculus.

O ile książkę Mangoldta należy zalecić, o tyle trzeba przestrzec przed książką Perry'ego; ostatnia bowiem, przeładowana przykładami praktycznemi, ma stron 450, a po jej przeczytaniu bardzo wątpię, czy czytelnik będzie znał główne zasady matematyki wyższej.

Nie mogę pominąć tego, że pewne uwagi natury logicznej i pojęcie agregatu nieskończenie małych (§ 10), tak bardzo upraszczające dowody § 11—14, zawdzięczam prof. Sleszyńskiemu, zaś pomysł do rozwiązania zagadnienia o ruchu jednostajnym (str. 155) nasunął mi jeden wykład prof. Zaremby, który owe zagadnienie rozwiązał zupełnie odmiennie.

Jak czytać niniejszy podręcznik? zapyta czytelnik początkujący. Trudno dać wskazówki szczegółowe — jedynie mogę dać rady ogólne: należy czytać skrupulatnie uwagi intuicyjne, definicje, twierdzenia i krótsze dowody[1]) (dłuższe dowody należy odłożyć do powtórnego czytania). Przyznam, że czytanie książki nie jest łatwem, gdyż ze względów oszczędnościowych nie mogłem sobie pozwolić na druk, który był ozdobą rozpraw przedwojennych. Wzory umieszczam w tekście, skąd wynikły nielada trudności natury technicznej. Że drukowano książkę oszczędnie, to dziś zaleta bardzo ważna!

Jeszcze jedna uwaga pod adresem Czytelnika: jeżeliby Czytelnik pragnął rozszerzyć swoje wiadomości w dowolnym kierunku, wtedy powinien zaczerpnąć informacji w Poradniku dla samouków (Tom I: Matematyka); tam znajdzie i wskazówki potrzebne i spis książek.

Zamykając przedmowę pragnę wyrazić serdeczne podziękowanie tym wszystkim, którzy mi wydanie książki ułatwili, względnie wspomagali radą i współpracą. A więc przedewszystkiem dziękuję jak najgoręcej Wydziałowi Nauki i jego Naczelnikowi P. Dr Stanisławowi Michalskiemu za udzielenie zwrotnej subwencji, która całkowity koszt wydawnictwa pokryła.

Rysunki dla podręcznika wykonali moi Uczniowie pp. Stanisław i Zbigniew Gołąbowie; korektę przeprowadzał p. Stanisław Gołąb. Obu wyrażam szczere podziękowanie za trud i pracę.

Dyrekcji Drukarni U. J. dziękuję, że uwzględniała z taką gotowością wszelkie moje specjalne życzenia.

Miło mi również wyrazić uznanie p. Welanykowi za wykonanie klisz do rysunków, zawartych w tekście podręcznika.

Prof. Dr. A. Hoborski.

---

[1]) Czytelnik, nieobeznany z wyższą matematyką, powinien przed czytaniem książki usunąć błędy według załączonego „Sprostowania".

WSTĘP.

A. Uwagi ogólne.

W niniejszym podręczniku będzie się czytelnik zajmował określeniami pojęć, twierdzeniami (matematycznemi) i dowodami twierdzeń. Określenie pojęcia czyli definicja ma, jako zadanie, wprowadzenie nowego przedmiotu w krąg rozważań i zarazem wyjaśnia nową nazwę. Odpowiadając np. na pytanie, co to jest parabola, definiujemy ją, określamy ją, używając przytem słów nam dobrze znanych i zarazem konstruujemy nowy przedmiot rozważań matematycznych. Równocześnie wyjaśniamy nazwę paraboli, z czem łączy się uproszczenie, na tem polegające, że zamiast długo mówić: „krzywa płaska, której każdy punkt leży w równej odległości od punktu stałego F i prostej l (przyczem punkt F nie leży na prostej l)" wolno użyć skracającego rzecz terminu „parabola". Definicja więc w takich przypadkach wprowadza pewną umowę.

Oprócz określeń podaje niniejsza książka twierdzenia, których dowodzi. Każdemu twierdzeniu matematycznemu można nadać postać zdania warunkowego: (1) *jeżeli jest* p, *to jest* q, co także wyrażamy we formie: *z* p *wynika* q; p zowie się założeniem, q wnioskiem twierdzenia.

Odnośnie do słuszności założenia p i wniosku q możemy odróżnić cztery ewentualności: (a) p prawdziwe, q prawdziwe; (b) p prawdziwe, q nieprawdziwe; (c) p nieprawdziwe, q prawdziwe; (d) p nieprawdziwe, q nieprawdziwe.

Otóż zdanie warunkowe (1) uważamy za prawdziwe tylko w każdej z trzech ewentualności (a), (c), (d), za nieprawdziwe jedynie w przypadku (b). Częstokroć wyraża się to w następujący sposób: z prawdy wynika tylko prawda, z fałszu wynika prawda lub fałsz.

Celem więc udowodnienia tw. 1 należy wykazać słuszność wniosku *q*, skoro się przyjmie słuszność założenia *p*.

Załóżmy, że udowodniliśmy twierdzenie: (1) jeżeli jest *p*, to jest *q*. Utwórzmy następujące twierdzenie (2): *jeżeli jest Nie — q, to jest Nie — p*. Przytem przez *Nie — p*, *Nie — q* rozumiemy zaprzeczenia *p*, względnie *q*. Otóż zwracamy uwagę czytelnika na to, że, ilekroć razy się przekonał o prawdziwości tw. (1), to wtedy nie jest obowiązanym osobno udowodnić tw. (2), gdyż wtedy tw. (2) jest również słusznem. Nie potrzeba wtedy dla tw. (2) osobnego dowodu matematycznego, wystarcza się powołać na zasady logiki formalnej.

Tw. 2 nazywamy twierdzeniem otrzymanem przez kontrapozycję z tw. 1. Nie trudno zauważyć, że tw. 1 otrzymuje się z tw. 2 także przez kontrapozycję (zob np. str. 151 i 152).

Obok tw. 1 rozważmy jeszcze twierdzenie: (3) *jeżeli jest q, to jest p;* ono zowie się odwrotnem względem tw. 1. Jeżeli tw. 1 jest słusznem, to tw. 3 może być słusznem lub niesłusznem; jeżeli więc jesteśmy pewni słuszności tw. 1, to mimo to powinniśmy przeprowadzić z osobna dowód, jeżeli pragniemy się upewnić o słuszności tw. 3. Widzimy tedy, że stosunek twierdzeń (1) i (2) jest odmiennym od stosunku twierdzeń (1) i (3).

Liczne przykłady na powyższe okoliczności znajdzie czytelnik w dalszym ciągu w podręczniku. Wróćmy jeszcze do tw. 1, o którem założymy, że jest słusznem; wtedy tw. 2, jak wiemy, jest także słusznem, a ono daje się wyrazić także w sposób następujący: *q* koniecznie zachodzi, gdy *p* jest prawdą czyli *q* jest warunkiem *koniecznym* dla *p*. Tw. 1 wyraża się właśnie w tej formie: *q jest warunkiem koniecznym dla p*. Tw. 1 można jeszcze inaczej interpretować, a mianowicie: aby *q* było prawdą, *wystarcza*, by *p* było prawdą. Dlatego tw. 1 wyrażamy też pod postacią: *p jest warunkiem wystarczającym dla q*.

Jeżeli prawdziwe są oba tw. 1 i 3, to *p* nazwiemy warun runkiem koniecznym (tw. 3) i wystarczającym (tw. 1) dla *q*. Jeżeli więc czytelnik znajdzie w dalszym ciągu twierdzenie: *warunkiem koniecznym i wystarczającym dla q jest p*, to powinien wiedzieć o tem, że w ten (krótki) sposób wysłowiono *dwa* twierdzenia: *tw. 1 (p jest warunkiem wystarczającym dla q)* i *tw. 3 (p jest warunkiem koniecznym dla q)*, z których każde z osobna należy udowodnić.

Jak powiedzieliśmy, twierdzenie matematyczne należy udowodnić, jeżeli je pragniemy uważać za słuszne. Dowód twierdzenia opiera się na założeniu twierdzenia, na twierdzeniach poprzednio już udowodnionych i na aksjomatach [1]), przyczem należy wykazać, że jest dozwolonem powoływanie się na twierdzenia, poprzednio poznane t. zn. należy wykazać, że słusznemi są założenia twierdzeń, na które się właśnie powołujemy.

Specjalną formą dowodu jest dowód t. zw. niewprost lub „per reductionem ad absurdum".

Aby tę postać dowodu wyjaśnić, załóżmy, że mamy udowodnić tw. (1). Otóż dowód niewprost polega na tem, że wykazujemy, iż zbiór twierdzeń: „(a) słuszne są twierdzenia i aksjomaty poprzednio poznane, (b) słusznem jest zaprzeczenie tw. (1)" tworzą zbiór zdań zawierających sprzeczność. A, że tylko z fałszu może wynikać fałsz, więc widocznem, że zdanie (b) jest niesłusznem, przeto prawdą jest, że z p wynika q.

Jak utworzyć zdanie b? Jak zaprzeczyć zdaniu, że twierdzenie (1) jest słusznem?

Otóż początkującemu matematykowi, częstokroć sprawia trudność zaprzeczenie zdania.

Podamy kilka uwag, rzecz tę ułatwiających. W tym celu przypomnimy, że zdania można podzielić na twierdzące i przeczące. Zdaniami twierdzącemi są np. zdania: (z_1) każda liczba całkowita podzielna przez liczbę 100, jest też podzielna przez liczbę 50; (z_2) niektóre liczby całkowite, podzielne przez liczbę 50 są podzielne przez 100. Przeczącemi zaś zdaniami są np. zdania: (z_3) żaden trójkąt równoboczny nie jest prostokątnym; (z_4) niektóre książki naukowe nie są treści matematycznej. Jeszcze jedną klasyfikację zdań podamy; oto zdania (z_1) i (z_3) mają kształt zdań: każde (żadne) S są (nie są) P; są to t. zw. zdania ogólne; zaś zdania (z_2) i (z_4) mają postać zdań: niektóre S są (nie są) P; są to t. zw. zdania szczegółowe. Łącząc obie zasady klasyfikacyjne w jedną zasadę, odróżnimy cztery zdania: ogólnie-twierdzące (z_1), ogólnie-przeczące (z_3), szczegółowo-twierdzące (z_2), szczegółowo-przeczące (z_4). Otóż niech czytelnik stwierdzi przykładami, że:

I) zaprzeczeniem zdania ogólnie-twierdzącego jest zdanie szczegółowo-przeczące;

---

[1]) Każda nauka przyjmuje pewne zdania t. zw. aksjomaty bez dowodu za prawdziwe.

II) zaprzeczeniem zdania ogólnie-przeczącego jest zdanie szczegółowo-twierdzące;

III) zaprzeczeniem zdania szczegółowo twierdzącego jest zdanie ogólnie-przeczące;

IV) zaprzeczeniem zdania szczegółowo-przeczącego jest zdanie ogólnie-twierdzące.

Te cztery zasady pozwolą zorjentować się czytelnikowi we wielu przypadkach dowodzenia niewprost[1]).

Jeszcze zajmiemy się zaprzeczeniem układu dwu zdań. Niech będą dane dwa zdania: (z_5) p jest prawdą *i* q jest prawdą; (z_6) p jest prawdą *albo* q jest prawdą.

Utwórzmy zaprzeczenia zdań z_5 i z_6. Zaprzeczenie zdania z_5 powinno wyrażać, że i p i q równocześnie nie mogą być słusznemi, co najmniej jedno z nich nie jest prawdą. Widzimy tedy, że zaprzeczeniem zdania z_5 jest zdanie: albo nie jest p prawdą albo nie jest q prawdą; zaprzeczenie zdania z_5 ma więc postać zdania z_6.

Utwórzmy z kolei zaprzeczenie zdania z_6; otóż zdanie z_6 wyraża, że z obu p, q conajmniej jedno jest prawdą, przeto zaprzeczenie będzie orzekało, że żadne z nich nie jest prawdą czyli oba są niesłuszne. Widoczne tedy, że zaprzeczeniem zdania z_6 jest zdanie: nie jest p prawdą ani nie jest q prawdą. Abstrahując od odnośnej reguły językowej, która zamiast spójnika *i* przy przeczeniu poleca używać spójnika *ani*, możemy powiedzieć, że zaprzeczenie zdania z_6 jest postaci zdania z_5.

Stąd już będzie zrozumiałem dla czytelnika, że dla zdania potrójnego: „każda z trzech liczb a, b, c jest zerem“ otrzymuje się zaprzeczenie we formie zdania: „albo liczba a jest różną od zera albo liczba b jest różną od zera albo liczba c jest różną od zera“; nie jest zaś niem zdanie: „i liczba a jest różną od zera i liczba b jest różną od zera i liczba c jest różną od zera“, jak to częstokroć błędnie przypuszcza początkujący.

Dołączymy jeszcze jedną uwagę.

Częstokroć będziemy rozważali zbiory liczb, czy figur geometrycznych, czy innych przedmiotów. Co to jest zbiór, nie będziemy określali, uważać będziemy to pojęcie za znane czytelnikowi, ale musimy zwrócić jego uwagę na to, że pojęcie to będzie dla nas szerszem od pojęcia codziennego. Mówić będziemy także o zbiorach

---

[1]) Przykład zaprzeczenia zdania podaliśmy w przypisku na str. 147.

jednostkowych i pustych. Zbiór nazwiemy jednostkowym, jeżeli zawiera tylko jeden przedmiot, jeden element. Weźmy np. pod uwagę zbiór liczb x, spełniających równanie $x^2 - 2x + 1 = 0$; zbiór taki jest jednostkowym, gdyż jedyna liczba 1 czyni zadość owemu równaniu.

Zbiór może być również pustym t. zn. może nie zawierać żadnego elementu. Abyśmy bowiem mogli rozważać zbiór, musimy znać ogólną własność jego elementów, przyczem ta własność ma być tak określoną, że dla każdego przedmiotu prawdziwem jest jedno i tylko jedno z dwóch zdań: (a) ów przedmiot należy do zbioru, (b) ów przedmiot nie należy do zbioru. To zaś nie przesądza, czy wogóle do zbioru jaki przedmiot należy. Weźmy np. pod uwagę zbiór trójkątów prostokątnych i zarazem równobocznych. Ze stanowiska formalnej logiki zbiór taki jest poprawnie określonym; geometrja zaś poucza nas, że zbiór taki jest pustym.

Pojęcia zbiorów jednostkowych jak i pustych znacznie upraszczają wysłowienie twierdzeń i jako wygodne będą przez nas używane.

Zbiór może być skończonym lub nieskończonym. Jeżeli ze zbioru można wybrać każdą ilość elementów, to zowiemy go nieskończonym, w przeciwnym razie zowie się skończonym zbiorem (zob. § 28).

B. Z analizy elementarnej.

Najprostsze liczby, które najpierw poznajemy, są to liczby całkowite 1, 2, 3,... czyli t. zw. liczby naturalne. Ich własności służą za podstawę do t. zw. indukcji zupełnej czyli matematycznej, na którą często wypadnie się powołać.

Wyobraźmy sobie, że mamy udowodnić następujące twierdzenie: *jeżeli n oznacza liczbę naturalną, to $\cos(180^\circ n) = (-1)^n$.* Możemy to udowodnić dla $n = 1, 2, 3$, aż do tak dalekiej liczby n, jak daleko chcemy; ale to nic znaczy, że temsamem twierdzenie udowodniliśmy dla *każdej* naturalnej liczby n; trzeba więc inaczej postępować, samo sprawdzanie prawdziwości twierdzenia dla tej lub owej liczby naturalnej n nie wystarcza. Ale wystarczy nam, gdy dwa następujące twierdzenia pomocnicze wykażemy: *A) twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$; B) jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej (p), podstawionej za (n), to jest prawdziwem też, gdy za (n) podstawimy liczbę $(p + 1)$.*

Poczucie nasze, nasza intuicja mówi nam, że, gdy to wykażemy, to twierdzenie jest słusznem dla *każdej* liczby naturalnej (n). Skoro bowiem na mocy (A) tw. jest prawdziwe dla $n=1$, to jest na mocy (B) prawdziwe dla $n=2$, przeto znów na mocy (B) jest prawdziwem dla $n=3, 4, \ldots$ itd.

W naszym przypadku dla $n=1$ mamy rzeczywiście $\cos 180^0 = -1 = (-1)^1$. Przypuśćmy, że jest $\cos(180^0 p) = (-1)^p$. Ale $\cos[(p+1)180^0] = \cos(180^0 p + 180^0) = \cos(180^0 p) \cdot \cos 180^0 = (-1)^p \cdot (-1) = (-1)^{p+1}$, bo $\sin 180^0 = 0$; więc tw. B udowodnione. Mówi się wtedy, że tw. udowodniliśmy na mocy zasady indukcji zupełnej lub matematycznej, którą ogólnie wysłowimy w sposób następujący: *niech będzie dane twierdzenie, w którego wysłowieniu zachodzi litera n, mogąca przyjmować dowolne wartości naturalne, nie mniejsze od liczby naturalnej k* (w powyższym przykładzie było $k=1$). *Twierdzenie takie należy uważać za prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geqq k$, jeżeli*[1]) *się udowodni następujące dwa twierdzenia*[2]) *pomocnicze:*

(A) twierdzenie jest słusznem, gdy $n=k$;

(B) jeżeli twierdzenie jest słusznem, gdy $n=p \geqq k$, (gdzie p oznacza dowolną pozatem liczbę naturalną), to twierdzenie jest słusznem, gdy jest $n=p+1$.

Przykład 1. Twierdzimy: *jeżeli $A>0$, $n \geqq 2$ i n naturalną liczbą, to jest $(1+A)^n > 1+nA$.* Na mocy zasady indukcji zupełnej możemy uważać twierdzenie za prawdziwe, skoro tylko wykażemy: (a) że twierdzenie jest słuszne dla $n=2$ i (b) gdy wykażemy, że twierdzenie jest słuszne dla $n=p+1$, jeżeli jest słusznem dla $n=p \geqq 2$.

Odnośnie do (a). Dla $n=2$ mamy $(1+A)^2 = 1+2A+A^2 > 1+2A$, gdyż jest $A^2>0$.

Odnośnie do (b). Przypuśćmy, że jest $p \geqq 2$ i że jest $(1+A)^p > 1+pA$. Otóż jest $(1+A)^{p+1} = (1+A)^p \cdot (1+A) > (1+pA)(1+A) = 1+pA+A+pA^2 = 1+(p+1)A+pA^2 > 1+(p+1)A$.

2. Dla ćwiczenia niech czytelnik wykaże: a) $\sin(180^0 n)=0$; b) $\sin[(2n+1)90^0] = (-1)^n$; c) jest $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, gdy $n \geqq 2$; d) wyprowadzić wzór na

---

[1]) $n \geqq k$ czytamy: n większe lub równe k, a więc *nie* mniejsze od k.

[2]) Zob. Zaremba, Zarys pierwszych zasad teorji liczb całkowitych.

n-ty wyraz postępu arytmetycznego (geometrycznego); e) udowodnić dwumian Newtona [1]: $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + \ldots + \binom{n}{n} b^n$, gdzie $\binom{n}{i}$ jest t. zw. symbolem Newtona o wartości $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}$. $\left[\text{A więc } \binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10\right]$.

Uwaga 1. Równość $\cos(180^0.n) = (-1)^n$ jest słuszną także dla liczb n całkowitych ujemnych i gdy $n = 0$.

Uwaga 2. Znak $m \leqslant m'$ znaczy, że m jest mniejsze *lub* równe m'. Możnaby to więc czytać także tak: m *nie* jest większe od m'. Częstokroć piszemy $h \neq g$ t. zn. h *nie* równa się g.

Jeżeli do liczb naturalnych dołączymy liczbę zero (0), to otrzymamy zbiór liczb całkowitych bezwzględnych. Jest to jeszcze zbyt ciasny zakres liczb, by mógł wystarczyć choćby do elementarnych zagadnień. Elementarna analiza rozszerza też pojęcie liczby, dołączając liczby ułamkowe [2]), potem niewymierne. co wszystko razem stanowi zakres liczb bezwzględnych. I ten zakres arytmetyce nie wystarcza; uzupełnia się ich zbiór liczbami ujemnemi, uważając liczby dodatnie za równe odpowiednio dobranym liczbom bezwzględnym. W ten sposób otrzymuje się zakres liczb rzeczywistych, który *niemal* do wszystkich zagadnień *elementarnych* wystarcza.

Liczby rzeczywiste mają szereg własności, które należy podkreślić. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie dwu liczb rzeczywistych daje zawsze liczbę rzeczywistą — działania te są więc stale wykonalne. Co do dzielenia, to należy podnieść z naciskiem, że *dzielenie również jest wykonalne, ale tylko wtedy, gdy dzielnik jest różnym od zera. Dzielenie przez zero nie daje żadnego ilorazu*; przez niektóre podręczniki starszej daty wprowadzana „nieskończoność", jako iloraz dzielenia liczby różnej od zera przez zero, nie ma żadnego sensu i może tylko prowadzić do błędów. Dlatego *należy się wystrzegać dzielenia przez zero!* Ilekroć więc razy ma czytelnik wykonać dzielenie, niech zbada dokładnie, czy dzielnik nie jest zerem;

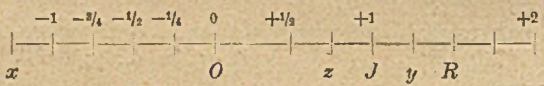
---

[1]) Izak Newton, wielki matematyk i fizyk angielski, ur. 1643, um. 1727, jest jednym z dwóch głównych twórców wyższej analizy; w r. 1687 wydał podstawowe dla niej dzieło p. t. Philosophiae naturalis principia mathematica. Drugim twórcą jest Gotfryd Wilhelm Leibniz (ur. 1646, um. 1716), matematyk i filozof niemiecki, który główne pojęcia wyższej analizy ogłosił drukiem w r. 1684.

[2]) Ułamki wraz z liczbami całemi tworzą zbiór liczb wymiernych.

tylko w przypadku, gdy dzielnik jest różny od zera, wolno dzielenie wykonać.

Między liczbami rzeczywistemi, a punktami osi liczbowej zachodzi ścisły związek. Weźmy pod uwagę prostą i na niej dwa różne punkty O, J. Nazwijmy kierunek od punktu O do punktu J kierunkiem tej prostej. Weźmy dowolny punkt A na prostej; wymierzmy odcinek OA przy odcinku OJ, jako jednostce; niech się mierzy liczbą a. Gdy punkt A schodzi się z punktem O, to $a = 0$, w każdym innym przypadku jest $a \neq 0$. Niech będzie $a \neq 0$; otóż punkt A uważamy za obraz liczby dodatniej $(+a)$ lub liczby ujemnej $(-a)$ zależnie od tego, czy kierunek od punktu O do punktu A jest zgodny z kierunkiem prostej, czy też nie. Tedy np. punkt J jest obrazem liczby $(+1)$. [Rys. I]. Punkt O uważamy za obraz liczby zero. Przez tę umowę istnieje odwzorowanie liczb na prostej; każdemu punktowi prostej odpowiada jedna liczba rzeczywista i każda liczba rzeczywista ma jeden punkt prostej, jako obraz.



Rys. I.

Takie obrazowanie liczb na prostej (osi) liczbowej ułatwia w wysokim stopniu rozumowanie abstrakcyjne (zob. str. 60).

Damy na to proste przykłady. Oto wszystkie liczby x mniejsze od liczby y mają obrazy (na rys. I), leżące po lewej stronie obrazu liczby y. Liczby zaś z o własności $-1 < z < 2$ mają obrazy, leżące na prawo od obrazu liczby (-1) i zarazem na lewo od obrazu liczby 2. Czytelnik, choć niewprawny, z łatwością już stwierdzi, że liczby u o własności $u > 1$, $u < 0$ niema, gdyż jej obrazu znaleźć nie może.

Widzieliśmy, że zbiór liczb rzeczywistych zawiera liczbę zero, liczby dodatnie $(+a)$ i liczby ujemne $(-a)$, przyczem a oznacza liczbę bezwzględną, różną od zera.

Liczbę a nazwiemy bezwzględną wartością liczby rzeczywistej $(+a)$ lub $(-a)$ i oznaczamy ją znakiem $|+a|$, $|-a|$ tak, iż jest $a = |+a| = |-a|$; nadto $|0| = 0$, $|a| = a$; przeto np. $|+3| = 3$, $|7| = 7$, $|-2| = 2$.

Bezwzględna wartość liczb rzeczywistych ma następujące własności, na które będziemy się częstokroć powoływali.

Tw. I. Bezwzględna wartość sumy liczb rzeczywistych nie jest większą od sumy bezwzględnych wartości składników czyli jest $|a+b+c+\ldots+l| \leqq |a|+|b|+|c|+\ldots+|l|$.

Tw. II. Jeżeli a, b oznaczają liczby rzeczywiste, to jest $|a-b| \geqq |a|-|b|$.

Tw. III. Bezwzględna wartość iloczynu czynników jest równą iloczynowi bezwzględnych wartości czynników t. zn. $|a \,.\, b \,.\, \ldots \,.\, l| = |a| \,.\, |b| \,.\, \ldots \,.\, |l|$.

Tw. IV. Jeżeli a, b oznaczają liczby rzeczywiste i jeżeli $b \neq 0$, *to* $|a:b| = |a|:|b|$.

Tw. V. Jeżeli a oznacza liczbę bezwzględną i jeżeli liczba rzeczywista r spełnia nierówność $|r| \leqq a$, *to stąd wynika, że jest* $-a \leqq r \leqq a$; *i naodwrót, gdy jest* $-a \leqq r \leqq a$, *to jest także* $|r| \leqq a$.

Jeżeli się zwrócimy do omówionego poprzednio geometrycznego obrazu liczb rzeczywistych na osi liczbowej (rys. I) i jeżeli punkt R jest obrazem liczby r, to bezwzględna wartość $|r|$ jest długością odcinka OR.

Tw. V staje się wprost widocznem, gdy je zinterpretujemy na osi liczbowej.

Uw. Jeżeli w tw. V zamiast nierówności $|r| \leqq a$ podstawimy nierówność $|r| < a$ i zarazem zamiast nierówności $-a \leqq r \leqq a$ podstawimy nierówność $-a < r < a$, to otrzymamy nowe twierdzenie, również słuszne.

W zakresie liczb rzeczywistych nie każde pierwiastkowanie jest wykonalnem, nie ma bowiem liczby rzeczywistej $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-1}$ itd. Znak $\sqrt{a}$ oznacza tylko wtedy liczbę rzeczywistą, gdy a przedstawia liczbę nieujemną t. zn. $a \geqq 0$. Rozpatrzmy to bliżej. Rozważmy w tym celu równość (1) $x^2 = a$, przyczem a oznacza liczbę daną, x liczbę szukaną. Jeżeli przypuścimy, że istnieje liczba rzeczywista x, spełniająca równość (1), to jej kwadrat x^2 nie jest liczbą ujemną; aby więc równość (1) była możliwą, to jest *koniecznem*, by było $a \geqq 0$. To jest warunek konieczny, by istniała liczba rzeczywista x, spełniająca równanie (1); arytmetyka uczy, że jest także *warunkiem wystarczającym* i mianowicie: gdy jest $a = 0$, to tylko liczba zero, podstawiona za x, spełnia równość (1); jeżeli jest $a > 0$, to dwie liczby rzeczywiste spełniają równość (1), jedna jest dodatnią, druga ujemną, bezwzględne ich wartości są sobie równe;

[np. równość $x^2 = 16$ spełniona jest przez liczby $+4$, -4]. Otóż znakiem $\sqrt{a}$ oznaczamy tę liczbę *nieujemną*, która spełnia równość (1). Jest więc $\sqrt{16} = 4$, a nie $\sqrt{16} = \pm 4$, $\sqrt{0} = 0$,...; znak tedy $\sqrt{a}$, gdy jest $a \geqslant 0$, przedstawia *jedną* liczbą, a nie dwie! Równość (1), gdy $a > 0$ spełniają więc liczby $\sqrt{a}$ (lub $+\sqrt{a}$) i $(-\sqrt{a})$. Tego rodzaju określenie znaku $\sqrt{a}$ jest nadzwyczaj wygodnem, oczywiście pociąga za sobą pewne konsekwencje.

Niech b oznacza dowolną liczbę rzeczywistą i utwórzmy liczbę $\sqrt{b^2}$; jest to liczba *nieujemna*, spełniająca równość (2) $y^2 = b^2$. Zauważmy, że równość (2) spełniają liczby b i $(-b)$, gdyż jest $b^2 = b^2$ i $(-b)^2 = [(-1)b]^2 = (-1)^2 . b^2 = b^2$; zauważmy jeszcze, że równości (2) czyni także zadość liczba bezwzględna $|b|$, gdyż jest $|b|^2 = |b| . |b| = |b^2| = b^2$, bo $b^2 \geqslant 0$; oczywiście liczba $|b|$ jest równą tej z liczb b i $(-b)$, która jest nieujemną. Otóż znak $\sqrt{b^2}$ ma właśnie oznaczać tę liczbę *nieujemną*, która spełnia równość (2), a więc jest $\sqrt{b^2} = |b|$; jest to właśnie następstwo powyższej umowy o znaku $\sqrt{a}$. Słusznem jest więc twierdzenie:

Tw. VI. Jeżeli b oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, to jest $\sqrt{b^2} = |b|$.

Uwaga. Nie jest przeto $\sqrt{(-3)^2} = -3$, ale jest $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$; o tem należy pamiętać, by uniknąć błędu.

Powyższa umowa o znaku $\sqrt{a}$ wprowadza pewne uproszczenie przez to, że znak $\sqrt{a}$ oznacza jedną, a nie dwie różne liczby. Zakres liczb rzeczywistych, jak powiedzieliśmy, wystarcza do wielkiej ilości zagadnień, aż nadto wystarcza, gdy chodzi o liczebne rozwiązywanie zagadnień, gdy są więc dane liczby i dla nich mamy znaleźć rozwiązanie zagadnienia; wtedy bowiem wyniki podajemy zwykle w ułamkach dziesiętnych, o których zaraz słów kilka; oczywiście dość będzie mówić o ułamkach dziesiętnych bezwzględnych (a nie dodatnich i ujemnych).

Mówi się częstokroć o ułamkach dziesiętnych skończonych i nieskończonych. Przez pierwsze z nich rozumiemy ułamki zwyczajne, których mianownik jest potęgą liczby 10 o wykładniku naturalnym, a więc ułamki $\frac{387}{10^2}, \frac{5}{10^3}, \frac{17}{10^4}, \frac{78}{10}$ są ułamkami dziesiętnymi skończonymi; jest to tylko sposób pisania, gdy je piszemy pod postacią 3·87 (albo 3.87) 0·005, 0·0017, 7·8. Ułamek dziesiętny skończony jest tedy szczególnym przypadkiem ułamka zwyczajnego. Przez ułamek dziesiętny nieskończony rozumiemy nie kończące się następstwo (ciąg, zob. § 20) ułamków dziesiętnych skończonych tak dobranych, że następujący ułamek dziesiętny różni się od poprzedzającego go w owym ciągu jedynie tem, że do poprzedzającego ułamka dzies. została dopisana cyfra (najniższa) dziesiętna przy zachowaniu wszystkich cyfr z poprzedzającego ułamka dzies. Np. niech pierwszym wyrazem ciągu będzie ułamek 1·5, drugim 1·50, trzecim 1·502, czwartym 1·5020, itd., przyczem cyfry 02 mają się stale powtarzać.

Do takiego ułamka dzies. nieskończonego doprowadza nas elementarne zagadnienie zamiany ułamka zwyczajnego na dziesiętny. Istnieją bowiem ułamki zwyczajne, których na ułamek dziesiętny (skończony) nie można zamienić.

Dla ułamka $\frac{1487}{990}$ nie można znaleźć ułamka dzies., jemu równego. Wobec tego można znaleźć na każdą ilość miejsc dziesiętnych przybliżenie dziesiętne przez niedomiar i przybliżenie dziesiętne przez nadmiar[1]). Przybliżenia dzies. przez niedomiar kolejno na jedno, dwa, trzy, cztery, pięć..... miejsc dziesiętnych podaje ciąg:

(I) 1·5, 1·50, 1·502, 1·5020, 1·50202,.....

zaś ciąg:

(II) 1·6, 1·51, 1·503, 1·5021, 1·50203,.....

daje przybliżenia dzies. przez nadmiar. I właśnie ciąg (I) jest poprzednio podanym ułamkiem dzies. nieskończonym i do tego okresowym (perjodycznym). Na razie ciąg (I) ma znaczenie tylko wyżej podane t. zn. jest ciągiem kolejnych przybliżeń dzies. przez niedomiar dla ułamka $\frac{1487}{990}$. Ciąg taki będzie miał jeszcze pewne własności, które są przedstawione w Rozdz. III (str. 62 i 72). Jeżelibyśmy szukali ciągów przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar i nadmiar dla liczby $\sqrt{3}$, to zauważylibyśmy, że nie posiada żaden

[1]) Dwa ułamki dziesiętne α, γ nazywamy przybliżeniami dziesiętnemi na *tę samą ilość miejsc dziesiętnych* dla liczby β, pierwszą α przez niedomiar, drugą przez nadmiar, jeżeli jest $\alpha < \beta < \gamma$ i gdy one, jak to czytelnik wie z elementarnej arytmetyki, różnią się między sobą tem, że ułamek γ ma najniższą cyfrę o jednostkę większą od najniższej cyfry ułamka α (zob. powyżej ciągi I i II).

z nich grupy cyfr powtarzających się; ciągiem pierwszym będzie ciąg:

(III) 1·7, 1·73, 1·732, 1·7320, 1·73205,.....

drugim, zawierającym przybliżenia przez nadmiar, będzie ciąg:

(IV) 1·8, 1·74, 1·733, 1·7321, 1·73206,.....

W tej materji niestety we wielu podręcznikach elementarnych panuje chaos (zob. także § 79).

Wzory matematyczne, z którymi czytelnik się będzie spotykał w niniejszym podręczniku będą niemal wyłącznie albo równościami albo nierównościami. Zajmiemy się najpierw pierwszemi, a specjalnie równaniami.

W elementarnej algebrze rozważa się równania t. zw. algebraiczne stopnia 1-go i 2-go o jednej i więcej niewiadomych, równania niewymierne, jak i równania goniometryczne. Przejdziemy je pokrótce.

Weźmy pod uwagę układ dwu równań jednoczesnych o dwu niewiadomych x, y stopnia 1 go t. j. równania (3) $ax + by = c$, $dx + fy = g$, gdzie a, b, c, d, f, g oznaczają dane liczby; szukamy liczb x, y, któreby spełniały równocześnie oba równania (3). Załóżmy na chwilę, że takie liczby x, y istnieją. Pomnóżmy pierwsze z równań (3) przez f, drugie przez b i odejmijmy je od siebie, a otrzymamy równość (4) $(af - db)x = cf - gb$, skąd postaramy się obliczyć liczbę x; jeżeli jest różnica $af - db \neq 0$, to możemy przez nią podzielić i wtedy otrzymamy (5) $x = \frac{cf - gb}{af - db}$. Podobnie pomnóżmy pierwsze z równań (3) przez d, drugie przez a i odejmijmy je od siebie, to otrzymamy: (6) $(af - db)y = ag - cd$, skąd przy założeniu, że jest $af - db \neq 0$, mamy (7) $y = \frac{ag - cd}{af - db}$. Widzimy tedy, że, jeżeli liczby x, y, spełniające równania (3), istnieją i jeżeli jest $af - db \neq 0$, to liczby x, y wyznacza się ze wzorów (5) i (7). Czytelnik niech sprawdzi przez podstawienie tych liczb w równania (3), że rzeczywiście spełniają[1]) równania (3). Wzory (5) i (7) napiszemy jeszcze w inny sposób. Różnicę $af - db$ napiszemy pod postacią schematu: $\begin{vmatrix} a, & b \\ d, & f \end{vmatrix}$, który nazywamy wyznaczni-

[1]) Zbiór par x, y, spełniających równania (3), jest więc jednostkowym.

kiem rzędu 2-go i który ma właśnie ową różnicę przedstawiać. Wtedy jest $x = \begin{vmatrix} c, & b \\ g, & f \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a, & b \\ d, & f \end{vmatrix}$, $y = \begin{vmatrix} a, & c \\ d, & g \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a, & b \\ d, & f \end{vmatrix}$.

W tej postaci łatwiej zapamiętać wzory (5) i (7), trzeba tylko dobrze się przypatrzyć temu, jak z wyznacznika, który jest w dzielniku, tworzy się wyznacznik dzielnej, tak dla liczby x, jak dla liczby y. Wyznacznik, jak już z powyższego widzimy, jest to *wygodna* postać notowania wielomianów specjalnego, a często powtarzającego się kształtu.

Inaczej się rzecz przedstawia, gdy jest $af - db = 0$, wtedy równań (4) ani (6) nie wolno dzielić przez różnicę $af - db = 0$! Jeżeli przynajmniej jedna z różnic $cf - gb$, $ag - cd$ nie jest równą zeru, to albo równość (4) albo równość (6) zawiera sprzeczność czyli w tym przypadku równania (3) nie mogą być spełnione[1]) przez żadne liczby x, y [np. $3x + 4y = 7$, $6x + 8y = 15$].

Rzecz inna, gdy $af - db = 0$, $cf - gb = 0$, $ag - cd = 0$, wtedy równości (4) i (6) mają postać $0.x = 0$, $0.y = 0$ i wprawdzie nie pozwolą wyznaczyć liczb x, y, ale też nie zawierają sprzeczności i przeto nie wykazują, że równania (3) nie posiadają wcale rozwiązań na niewiadome x, y. Zajmiemy się tym przypadkiem, ale przy założeniu, że z czterech liczb a, b, d, f, będących współczynnikami niewiadomych, *conajmniej jedna* nie jest równa zeru np. niech na pewne będzie $a \neq 0$. Wtedy równość $af - db = 0$ daje $f = \frac{db}{a}$, zaś równość $ag - cd = 0$ daje $g = \frac{cd}{a}$; połóżmy dla krótkości $\frac{d}{a} = \lambda$ czyli $d = \lambda a$, wtedy $f = b\lambda$, $g = c\lambda$. Wobec tego drugie z równań (3) przyjmie postać $\lambda(ax + by) = \lambda c$, co wykazuje, że drugie z równań będzie już spełnione, gdy niem będzie pierwsze z nich, wobec czego dość rozwiązać pierwsze z nich. Pierwsze zaś można spełnić w nieskończenie wiele sposobów; dość bowiem obrać dowolnie wartość na niewiadomą y i potem przyjąć $x = \frac{c - by}{a}$. Jeżeli więc jest $af - db = 0$, $cf - gb = 0$, $ag - cd = 0$ i jeżeli jest $a \neq 0$, to wszystkie liczby x, y, spełniające równania (3), otrzymamy, obierając dowolnie liczbę y, a potem obliczając liczbę x

---

[1]) Zbiór rozwiązań równań (3) wtedy jest pustym.

z równości $x = \frac{c - by}{a}$, co wykazuje, że jest nieskończenie wiele par liczb (x, y), spełniających równania (3), kiedy w przypadku $af - db \neq 0$ istniała tylko jedna taka para.

Przejdźmy teraz do równania stopnia 2go: (8) $x^2 + px + q = 0$, gdzie p, q są liczbami rzeczywistemi danemi. Otóż elementarna algebra podaje następujące twierdzenie: *gdy jest $p^2 - 4q > 0$, to równanie (8) posiada dwa rozwiązania rzeczywiste, od siebie różne; gdy jest $p^2 - 4q = 0$, to równanie (8) posiada jedno rozwiązanie i ono jest rzeczywiste; gdy wreszcie jest $p^2 - 4q < 0$, to równanie (8) nie posiada żadnego rozwiązania rzeczywistego.* Z tego powodu, że wyrażenie $p^2 - 4q$ służy za podstawę do wyróżnienia trzech przypadków, nazywamy wyrażenie $p^2 - 4q$ wyróżnikiem równania (8). Gdy ten wyróżnik jest nieujemnym, to rozwiązania podaje wzór $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Powyższe tw. pozwoli nam rozwiązać dalsze zagadnienie, a mianowicie trójman $x^2 + px + q$ rozłożyć na iloczyn dwu czynników stopnia 1go względem x t. zn. znaleźć liczby rzeczywiste α, β takie, że dla *każdej* wartości rzeczywistej x jest $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$ Jeżeli to zagadnienie ma rozwiązanie, to wtedy równanie (8) ma postać $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$, a że iloczyn jest zerem, gdy przynajmniej jeden z czynników jest zerem, więc widzimy, że α, β mają być rozwiązaniami rzeczywistemi równania (8). Jeżeli więc $p^2 - 4q < 0$, to takich liczb rzeczywistych α, β niema. Załóżmy, że jest $p^2 - 4q \geqq 0$, wtedy równanie (8) ma rozwiązania rzeczywiste. Weźmy więc pod uwagę iloczyn: $\left[x - \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\right] \cdot \left[x - \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\right]$. Otóż ten iloczyn daje $\left[x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right] \cdot \left[x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right] = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = x^2 + px + q$. Temsamem zadanie rozwiązaliśmy.

Żeby więc trójmian stopnia 2go $x^2 + px + q$ rozłożyć na czynniki stopnia 1go o współczynnikach rzeczywistych, trzeba rozwiązać pomocnicze równanie (8); jeżeli ono ma rozwiązania rzeczywiste α, β (gdzie może być $\alpha = \beta$), to $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$.

Stąd wyciągamy następujące wnioski: 1) gdy jest $\alpha < \beta$, to trójmian $x^2 + px + q$ przyjmuje wartość dodatnią, gdy jest $x < \alpha$

lub $x > \beta$, a wartość ujemną, gdy $\alpha < x < \beta$; 2) gdy $\alpha = \beta$, to trójmian $x^2 + px + q$ ma postać $(x - \alpha)^2$ i przyjmuje wartość dodatnią, gdy $x \neq \alpha$; 3) gdy $p^2 - 4q < 0$, to $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(p^2 - 4q)$ a więc jest sumą dwu składników $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$, $-\frac{1}{4}(p^2 - 4q)$, z których pierwszy jest liczbą nieujemną, drugi liczbą dodatnią; przeto trójmian przyjmuje wartość dodatnią dla każdej liczby x.

Rozwiążmy obecnie następujące zagadnienie: znaleźć głębokość szybu, gdy po 4 sekundach słychać uderzenie kamienia o dno szybu, skoro kamień wrzucono do szybu z początkową prędkością równą zeru. Głębokość szybu niech wynosi s metrów; kamień — co przyjmujemy — będzie spadał ruchem opisanym na str. 2 (przykład 4); przyspieszenie ziemskie przyjmijmy okrągło 10 (dokładniej 9·81); niech t sekund kamień spada, zaś τ sekund niech trwa ruch fal głosowych od dna do otworu szybu, to $t + \tau = 4$; jeżeli prędkość fal głosowych wynosi wynosi 333 (m na sek.), to $s = \frac{1}{2} . 10 . t^2$, $s = 333\,\tau = 333\,(4 - t)$, stąd $5t^2 = 1332 - 333t$ czyli $t^2 + 66{\cdot}6t - 266{\cdot}4 = 0$. Otrzymaliśmy więc równanie stopnia 2-go, które ma dwa pierwiastki, jeden dodatni, drugi ujemny, ostatni nie ma żadnego znaczenia dla rozważanego zagadnienia. Jest więc $t = -33{\cdot}3 + \sqrt{33{\cdot}3^2 + 266{\cdot}4} = 3{\cdot}78$, $s = 333(4 - t) = 333 . 0{\cdot}22 = 73{\cdot}26$, a więc głębokość szybu wynosi okrągło 73 m.

Z równań niealgebraicznych rozważmy jedynie równanie goniometryczne $\sin x = 0$. Otóż ono ma nieskończenie wiele rozwiązań, zawartych w ogólnym wzorze: $x = 180^0\,n$, gdzie n oznacza dowolną liczbę całkowitą, ujemną, dodatnią lub zero, co łatwo stwierdzić na mocy zasady indukcji zupełnej (zob. wyżej). Że innych rozwiązań to równanie nie ma, wynika bezpośrednio ze znanych czytelnikowi własności funkcji $\sin x$.

Przejdźmy teraz do nierówności, które napiszemy pod postacią $a < b$. Udowodnimy następujące twierdzenia, które mówią o przekształceniach nierówności.

Tw. VII. Jeżeli jest $a < b$, zaś c dowolną liczbą rzeczywistą, to jest też $a + c < b + c$. Rzeczywiście jest $(b + c) - (a + c) = b - a > 0$. a więc $b + c > a + c$, skąd wynika, że jest $a + c < b + c$.

Tw. VIII. Jeżeli jest $a < b$, *to jest też* $a - b < 0$ (i $0 < b - a$). To wynika z tw. VII, gdy położymy $c = -b$.

Tw. IX. Jeżeli jest $a < b$ *i jeżeli jest* $c > 0$, *to jest też* $ac < bc$; *jeżeli jest* $a < b$ *i jeżeli jest* $c \geqslant 0$, *to jest* $ac \leqslant bc$. Skoro jest $a < b$, to jest $b - a > 0$, gdy nadto jest $c > 0$, to iloczyn $(b - a)c$, jako iloczyn dwu liczb dodatnich jest też liczbą dodatnią, a więc jest $(b - a)c > 0$ czyli jest $bc - ac > 0$, skąd $ac < bc$. Jeżeli zaś $a < b$, $c \geqslant 0$, to $(b - a)c \geqslant 0$, a więc $bc - ac \geqslant 0$ czyli $ac \leqslant bc$.

Tw. X. Jeżeli jest $a < b$, $c > 0$, *to jest* $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$. To twierdzenie łatwo udowodnić niewprost na mocy tw. IX.

Tw. XI. Jeżeli jest $a < b$, *zaś* c *oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, to jest* $c - a > c - b$. Jakoż jest $(c - a) - (c - b) = c - a - c + b = b - a > 0$, co dowodzi twierdzenia.

Tw. XII. Jeżeli jest $0 < a < b$, $c > 0$, *to jest* $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$. Rzeczywiście mamy $\frac{c}{a} - \frac{c}{b} = \frac{c(b - a)}{ab}$; ale jest $c > 0$, $b - a > 0$, $a > 0$, $b > 0$, więc jest $\frac{c(b - a)}{ab} > 0$, o co nam chodziło pośrednio. Zwracamy uwagę czytelnika na powyższe twierdzenia, bo początkujący częstokroć pomijają założenia, wskutek czego mogą dojść do błędnych wyników.

Tw. XIII. Jeżeli jest $0 < a < b$, *to jest też* $a^2 < b^2$.

Dotychczasowe rozważania z elementarnej analizy uzupełnimy jeszcze jedną uwagą.

Częstokroć będziemy zmuszeni napisać sumę n składników, gdzie $n \geqslant 2$; sumę tę możemy napisać we formie $a + b + c + \ldots + l$, przyczem kropki mają zastępować niewypisane składniki, których ilość zależy od liczby n. Taki sposób pisania jest jednak niepraktycznym, bo ani z niego nie widać bezpośrednio ilości składników sumy ani też niewiadomo, który składnik jest 4-tym, 5 tym,..... z kolei. Dlatego wszystkie składniki sumy oznaczymy jedną literą np. a, którą opatrzymy numerem u dołu tak, iż składnikiem pierwszym będzie a_1, składnikiem drugim a_2,.... dziesiątym a_{10},.... n-tym a_n. Znak tej sumy będzie więc $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Zamiast tak długiego sposobu pisania użyjemy sposobu krótszego: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, gdzie grecka litera Σ nazywa się znakiem sumowym. Numer i składnika a_i ma przybierać wszystkie wartości naturalne od liczby 1 do liczby n. Jest więc $\sum_{i=3}^{4} b_i = b_3 + b_4$, $\sum_{i=5}^{8} c_i = c_5 + c_6 + c_7 + c_8$. Przez znak $\sum_{i=m}^{n} a_i$, gdzie $m < n$, przytem m, n oznaczają liczby całe, rozumiemy sumę, w której składnikami są liczby a_i, przyczem numer (wskaźnik) i przyjmuje kolejno wszystkie wartości całkowite od liczby m do liczby n. Jeżeli $m < n$, to przez znak $\sum_{i=n}^{m} a_i$ rozumiemy to samo, co przez sumę $\sum_{i=m}^{n} a_i$; wreszcie przez znak $\sum_{i=m}^{m} a_i$ rozumiemy jedną liczbę a_m.

C) *Z geometrji elementarnej.*

Pojęcie stosunku dwu odcinków, dwu kątów, dwu pól itd., opiera się na pojęciu mierzenia. Przez stosunek bowiem dwu np. kątów np. kąta A do kąta B rozumiemy liczbę mierząca kąt A, gdy kąt B przyjmiemy za jednostkę mierzenia Dla wielu rodzajów wielkości powszechna umowa określiła stałe jednostki i załóżmy, że jednostką konwencjonalną mierzenia kątów jest kąt C. Otóż elementarna teorja stosunków dowodzi, że stosunek $\frac{A}{B}$ równa się ilorazowi dzielenia stosunku $\frac{A}{C}$ przez stosunek $\frac{B}{C}$. Podobne twierdzenie jest ważne dla stosunku odcinków, pól, objętości. Jeżeli np. A, B, C oznaczają pola np. A pole 15 cm², B pole 30 cm², zaś C pole 1 cm², to stosunek $\frac{A}{B}$ otrzymamy na podstawie cytowanego twierdzenia $\frac{A}{B} = \frac{A}{C} : \frac{B}{C} = 15:30 = \frac{1}{2}$. Otóż pojęcie stosunku pozwala mierzyć wektory na jednej osi. Przez wektor rozumieć będziemy odcinek, który ma kierunek określony.

Wektor $\overrightarrow{AB}$ znaczy, że odcinek AB skierowano od A do B; A jest punktem początkowym, B punktem końcowym wektora. Na wektorach wykonywamy działania, jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie. Wyjaśnimy dwa pierwsze działania.

Niech będą dane dwa wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ o wspólnym punkcie początkowym; albo oba leżą na jednej prostej albo tak nie jest.

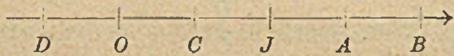
1) Gdy oba leżą na jednej prostej, to weźmy na niej odcinek $AC = OB$, przyczem punkt C ma być tak obrany, by wektor $\overrightarrow{AC}$ był jednako skierowany, jak wektor $\overrightarrow{OB}$ (powiadamy wtedy, że wektory

$\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są sobie równe). Wektor $\overrightarrow{OC}$ nazywa się sumą wektorów $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$.

2) Gdy wektory $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nie leżą na jednej prostej, rysujemy równoległobok na bokach OA, OB, którego czwarty wierzchołek oznaczmy przez C; otóż wektor $\overrightarrow{OC}$ nazywamy sumą wektorów $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

W obu przypadkach możemy przyjąć znakowanie $\overrightarrow{OC} = \overline{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}$. Podobnie można określić dodawanie większej ilości wektorów. (Gdy wektory nie mają wspólnego punktu początkowego, to dla znalezienia ich sumy przenosi się je do wspólnego punktu początkowego). Aby określić różnicę $\overline{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}$, wyszukajmy wektor $\overrightarrow{OB'}$ w następujący sposób: na prostej OB obierzmy punkt B' tak, by punkt O był środkiem odcinka BB'. Przez różnicę $\overline{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}$ rozumiemy sumę $\overline{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'}}$. Radzimy czytelnikowi wykonać odnośne rysunki.

Najprostszym jest przypadek, gdy dane wektory leża wszystkie na jednej prostej, której nadajemy kierunek czyli na jednej



Rys. II.

osi. Niech więc będą dane na osi punkty O, J, różne od siebie (rys. II); niech oś będzie skierowaną od punktu O do punktu J. Za jednostkę miary przyjmiemy odcinek OJ. Weźmy na tej osi wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, o kierunkach od A do B, wzgl. od C do D. Miarą wektora $\overrightarrow{AB}$ na rozważanej osi nazywamy liczbę, której bezwzględna wartość równa się stosunkowi $\frac{AB}{OJ}$, zaś znakiem jej jest znak dodatni lub ujemny zależnie od tego, czy kierunki wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OJ}$ są zgodne, czy niezgodne. Stąd miara wektora $\overrightarrow{AB}$ według rys. II jest liczbą dodatnią, zaś miara wektora $\overrightarrow{CD}$ jest liczbą ujemną. Miarę wektora $\overrightarrow{AB}$ oznaczymy symbolem $m(\overrightarrow{AB})$.

Przytoczymy twierdzenie Chales'a[1]), na które będziemy się często powoływali. Niech będzie danych n punktów na osi $A_1, A_2, \ldots A_n$, przyczem jest $n \geqslant 2$.

---

[1]) Czytaj: Szala.

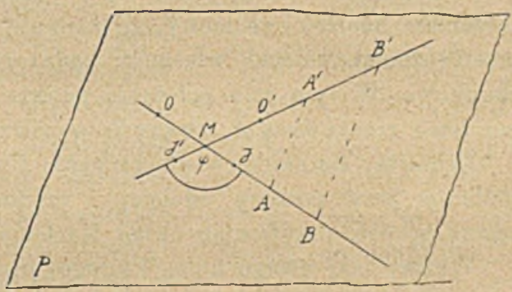
Otóż z łatwością widać, że jest:

$$m(\overline{A_1A_2}) + m(\overline{A_2A_3}) + \ldots + m(\overline{A_{n-1}A_n}) + m(\overline{A_nA_1}) = 0,$$

co można przy pomocy znaku sumowego także w następujący sposób napisać:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n-1} m(\overline{A_\varkappa A_{\varkappa+1}}) + m(\overline{A_nA_1}) = 0.$$

Jeszcze jedno podamy o wektorach twierdzenie, które często będzie używane. Niech na płaszczyźnie P leżą dwie osie OJ, $O'J'$, przyczem odcinki OJ, $O'J'$ mają być sobie równe. Niech φ oznacza kąt między osiami, co niżej określamy. Na osi $O'J'$ weźmy wektor $\overline{A'B'}$ i rzutujmy go prostopadle na oś OJ, przez co otrzymamy wektor $\overline{AB}$ na osi OJ. Otóż między miarami $m(\overline{AB})$, $m(\overline{A'B'})$ istnieje następujący związek: $m(\overline{AB}) = m(\overline{A'B'}) \,.\, \cos\varphi$; jest to twierdzenie o rzucie wektora.



Rys. IIIa.

Kąt między osiami określa się elementarnie w sposób następujący: na płaszczyźnie P obu osi OJ, $O'J'$ obierzmy jeden kierunek obrotów za dodatni (rys. IIIb); obróćmy jedną z osi w stałym kierunku (bez cofania) tak, by się nakryła z drugą i była z drugą zgodnie skierowaną; niech kąt, o który należało wykonać ten obrót, wynosi φ^0, wtedy miarą tego kąta nazwiemy liczbę $+\varphi$ lub $-\varphi$, zależnie od tego, czy obrót odbywał się w kierunku, przyjętym za dodatni, czy też w kierunku przeciwnym.

Rys. IIIb.

Przez tę definicję miara kąta między osiami nie jest określoną jednowartościowo, ale w nieskończenie wiele sposobów można tę miarę obrać, jednakowoż, gdy się jedną zna, to wszystkie dadzą się przez nią wyrazić. Niech bowiem jedną będzie (rys. IIIb) liczba φ, to drugą będzie też liczba $(-\varphi)$, trzecią $\varphi_1 = 360 - \varphi$, czwartą $-\varphi_1 = \varphi - 360$, piątą $\varphi_2 = 360 + \varphi$, szóstą $-\varphi_2 = -\varphi - 360$ itd., każdy bowiem z tych kątów mógł być zatoczonym w kierunku dodatnim obrotów lub temuż przeciwnym. Wszystkie miary będą zawarte we wzorze: $\pm\varphi + 360 . m$, gdzie m oznacza dowolną liczbę całą, dodatnią, ujemną lub zero. (Czytelnik udowodni to na mocy zasady indukcji). Ale jest $\cos(\pm\varphi + 360 m) = \cos(\pm\varphi) = \cos\varphi$; wszystkie tedy miary kątów między osiami, choć ich nieskończenie wiele, mają tę samą dostawę (ten sam cosinus).

D) Z geometrji analitycznej.

Sama nazwa wskazuje na to, że geometrja analityczna jest połączeniem analizy i geometrji, że zajmuje się figurami (utworami) geometrycznemi, których własności bada przy pomocy analizy t. j. rachunkowo. W tym celu położenie punktu wyznacza się przy pomocy liczb rzeczywistych, zwanych współrzędnemi.

Zajmijmy się najpierw płaszczyzną. Punkty jej, jak wiadomo, określamy przy pomocy odciętej i rzędnej, które wyznaczamy w znany sposób, przyjmując układ Kartezjusza [1]) osi prostokątnych.

Weźmy pod uwagę koło, którego środek S ma współrzędne (α, β), zaś promień wynosi ϱ; otóż wiadomo, że odległość punktu $M(x, y)$ koła [rozważanego, jako linja, a nie jako pole] od środka S wynosi ϱ, a że odległość punktów $M(x, y)$, $S(\alpha, \beta)$ wynosi $\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$, więc dla *wszystkich* punktów $M(x, y)$ koła będzie $\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \varrho$, skąd (1) $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2$. Otóż mówimy, że równanie (1) jest równaniem koła.

Zapytajmy ogólnie, co znaczy, że równanie $R(x, y) = 0$ jest równaniem pewnej figury płaskiej F?.

Otóż równanie $R(x, y) = 0$ jest równaniem figury płaskiej F znaczy, że: a) *każdy* punkt figury F ma współrzędne (x, y), spełniające równanie $R(x, y) = 0$; b) każdy punkt o współrzędnych (rzeczywistych) (x, y), spełniających równanie $R(x, y) = 0$, leży właśnie na figurze F.

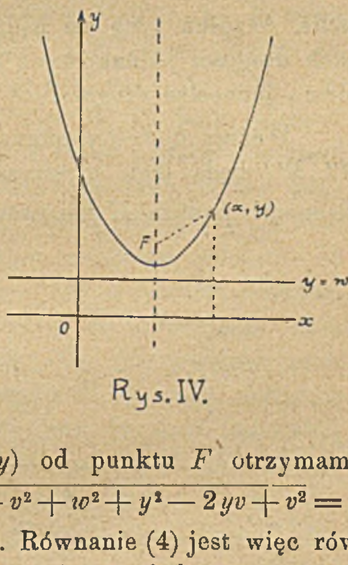
Na tem określeniu się opierając, szukamy równania prostej, elipsy, hyperboli, paraboli itd.

Dla przykładu wyszukajmy równanie paraboli, które określiliśmy na str. IX. Niech prosta stała (l) będzie prostopadłą do osi y

---

[1]) René Descartes (Cartesius), matematyk francuski, ur. 1596, um. 1650.

i niech ma równanie $y = w$, gdzie w oznacza liczbę daną (rys. IV). Prosta l zowie się kierownicą paraboli. Punkt stały F, zwany ogniskiem paraboli niech ma współrzędne (u, v), zaś dowolny (bieżący) punkt paraboli niech ma współrzędne (x, y). Odległość tych dwóch punktów wynosi $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$, zaś odległość punktu (x, y) od kierownicy wynosi $|y-w|$. Ma więc być $|y-w| = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$, skąd przez podniesienie do drugiej potęgi i redukcję otrzymamy: $2(v-w)y = x^2 - 2xu + u^2 + v^2 - w^2, \ldots (3)$. Ponieważ punkt F nie leży na prostej l więc $v \neq w$, przeto $v - w \neq 0$ i wolno równość (3) podzielić przez liczbę $2(v-w)$; otrzymujemy $y = ax^2 + bx + c \ldots (4)$, gdzie położyliśmy $a = \frac{1}{2(v-w)}$, $b = \frac{-u}{v-w}$, $c = \frac{u^2+v^2-w^2}{2(v-w)}$. Jak widać, oś symetrji paraboli czyli krótko oś paraboli jest prostopadłą do osi x. Uzyskaliśmy więc wynik na razie następujący: jeżeli punkt (x, y) leży na rozważanej paraboli, to liczby x, y spełniają równanie (4). Ale i na odwrót: gdy liczby rzeczywiste x, y spełniają równanie (4), to punkt (x, y) leży na rozważanej paraboli. Jest bowiem $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2} = \sqrt{x^2 - 2xu + u^2 + (y-v)^2}$, ale $2y(v-w) = x^2 - 2ux + u^2 + v^2 - w^2$, więc $x^2 - 2ux + u^2 = 2y(v-w) - v^2 + w^2$ i na odległość punktu (x, y) od punktu F otrzymamy



Rys. IV.

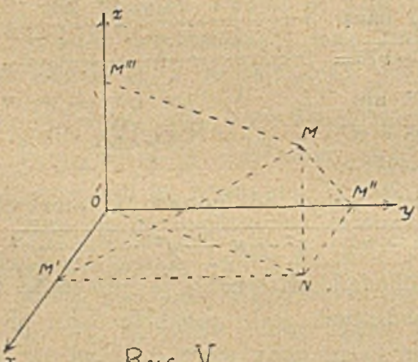
$$\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2} = \sqrt{2y(v-w) - v^2 + w^2 + y^2 - 2yv + v^2} =$$
$= \sqrt{(y-w)^2} = |y-w|$, o co chodziło. Równanie (4) jest więc równaniem paraboli. Że ono przedstawia stale parabolę o osi prostopadłej do osi x, gdy $a \neq 0$, tem zajmujemy się w § 71 na str. 412.

Prosta albo jest prostopadłą do osi x i wtedy ma równanie $x = c$, gdzie c oznacza daną liczbę (równanie to krępuje tylko odciętą x, nie zawiera rzędnej y t. zn. y wolno dowolnie obrać, punkty więc o współrzędnych (c, y) leżą wszystkie na rozważanej prostej przy dowolnym wyborze liczby rzeczywistej y); albo prosta jest nieprostopadłą do osi x i wtedy $y = ax + b$ jest jej równaniem; jest to prosta nachylona do osi x pod kątem α takim, iż $\operatorname{tg} \alpha = a$, przechodząca przez punkt o współrzędnych $(0, b)$. Obie *proste mają więc równanie $Ax+By+C=0$, gdzie A, B, C są to dowolne liczby dane, rzeczywiste, byle liczby A, B nie były równocześnie zerem* (gdy $A=1$, $B=0$, $C=-c$, to mamy prostą $x=c$; gdy zaś $A=a$, $B=-1$, $C=b$, to otrzymamy prostą $y=ax+b$).

Przejdźmy teraz do kilku uwag o przestrzennej geometrji analitycznej.

Punkt w przestrzeni określają trzy współrzędne (x, y, z) w sposób następujący: weźmy dowolną płaszczyznę P, na której obieramy punkt O, przezeń prowadzimy prostopadłą (l) do płaszczyzny P, następnie prostej (l) nadajemy kierunek; prostą (l) z obranym jej kierunkiem nazwiemy osią z; na płaszczyźnie P obieramy dwie osie x i y przez punkt O i do siebie prostopadłe. Otrzymaliśmy w ten sposób trzy osie, z których każde dwie są do siebie prostopadłe. Wzdłuż tych osi będziemy mierzyli wektory przy jednostkach długości jednakowych t. zn. jednostka długości na osi x jest równą jednostce długości na osi y itd.

Weźmy dowolny punkt M w przestrzeni, niech punkty M', M'', M''' będą jego prostopadłymi rzutami na osie x, y, z. Współrzędnemi punktu M nazywamy liczby $m(\overrightarrow{OM'})$, $m(\overrightarrow{OM''})$, $m(\overrightarrow{OM'''})$, z których pierwszą oznaczymy przez x, drugą przez y, trzecią przez z (rys. V). W ten sposób określone współrzędne mają następujące własności: *każdy* punkt w przestrzeni ma jednoznacznie określoną trójkę liczb rzeczywistych x, y, z, jako współrzędne; do *każdej* trójki liczb rzeczywistych x, y, z istnieje jeden i tylko jeden punkt w przestrzeni o współrzędnych danych x, y, z.



Rys. V.

Weźmy pod uwagę wszystkie punkty, dla których jest stale $z=0$; jak widać, będą to punkty, których rzut M''' schodzi się z punktem O; takie punkty M leżą na płaszczyźnie (x, y) t. zn. na płaszczyźnie przez osie x, y. Równanie $z=0$ jest więc równaniem płaszczyzny (x, y); podobnie równanie $x=0$ jest równaniem płaszczyzny (y, z), zaś równanie $y = 0$ jest równaniem płaszczyzny (x, z). Możemy to twierdzić, o ile wpierw rozszerzymy pojęcie równania figur (utworów) na równania figur przestrzennych, nie ograniczając się jedynie do figur płaskich.

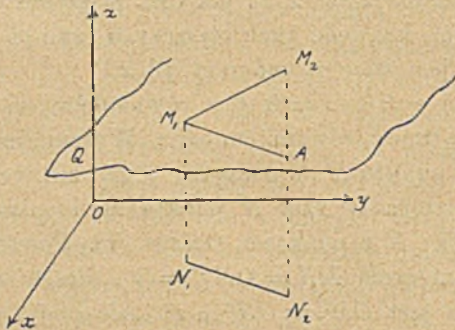
Weźmy teraz pod uwagę wszystkie punkty M, dla których jest równocześnie $y = 0$, $z = 0$; będą to więc punkty, leżące i na płaszczyźnie $y = 0$ t. j. na płaszczyznie (x, z), jak i na płaszczyźnie (x, y), a więc będzie to wspólna krawędź tych płaszczyzn czyli oś x. Układ równań $y = 0$, $z = 0$ jest więc równaniem osi x.

Podobnie układ równań $z = 0$, $x = 0$ jest równaniem osi y, zaś układ równań $x = 0$, $y = 0$ jest równaniem osi z. Wyszukajmy odległość OM czyli odległość puuktu M od początku współrzędnych. W tym celu wyznaczmy prostopadły rzut N punktu M na płaszczyznę (x, y) i połączmy punkt N z punktem O (rys. V). Powstał trójkąt prostokątny OMN, przyczem $MN = OM''' = |z|$. Przeto na mocy twierdzenia Pytagorasa jest $OM^2 = ON^2 + z^2$. Ale punkt N ma te same rzuty M', M'' na osie x, y, co punkt M, tedy punkt N ma na płaszczyźnie (x, y) współrzędne x, y [jako punkt przestrzeni ma współrzędne $x, y, 0$]. Przeto jest $ON^2 = x^2 + y^2$. Mamy więc $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Ten wzór pozostaje prawdziwym, jak się czytelnik przekona, gdy punkt M ma takie specjalne położenie, iż figura OMN nie będzie trójkątem, ale odcinkiem lub nawet punktem.

Weźmy pod uwagę wszystkie punkty M, które mają stałą odległość od punktu O, wynoszącą $r\,(r > 0)$; dla punktów tych będzie $OM = r$ i przeto współrzędne punktów M spełniają równanie $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; ale rozważane punkty leżą na kuli (uważanej za powierzchnię, a nie za bryłę). Równanie $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ jest równaniem kuli o środku w początku współrzędnych i o promieniu r. Zwracamy uwagę czytelnika na analogję do równania koła środkowego.

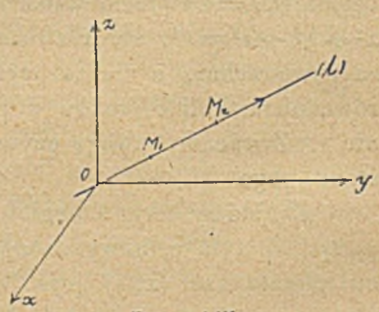
Znajdźmy teraz odległość dwu punktów $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. W tym celu wyznaczymy rzuty N_1, N_2 punktów M_1, M_2 na płaszczyznę (x, y) [rys. VI]. Przez punkt M_1 poprowadźmy płaszczyznę Q równoległą do płaszczyzny (x, y), ona przetnie prostą M_2N_2 w punkcie A. Odcinki M_1A i N_1N_2 są do siebie równoległe, bo są przecięciami płaszczyzn równoległych Q i (x, y) z płaszczyzną trzecią $M_1M_2N_2N_1$. Skoro jest odcinek N_1N_2 prostopadłym do prostej M_2N_2, więc będzie nim także odcinek M_1A. Nadto jest $M_1A = N_1N_2$. Z trójkąta prostokątnego AM_1M_2 otrzymujemy

$M_1M_2^2 = M_1A^2 + M_2A^2 = N_1N_2^2 + M_2A^2$. Ale odległość N_1N_2 łatwo wyznaczyć, gdyż punkt N_1 ma na płaszczyźnie (x, y) współrzędne (x_1, y_1), zaś punkt N_2 współrzędne (x_2, y_2). Będzie tedy $N_1N_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Byj wyznaczyć długość M_2A, rzutujmy punkty M_1, M_2, A na oś z, niech rzutami będą punkty M_1''', M_2''', A'''; ale zauważmy, że punkt A leży z punktem M_1 na płaszczyźnie Q, równoległej do płaszczyzny (x, y), a więc prostopadłej do osi z, przeto punkty A''', M_1''' schodzą się. Do punktów O, M_1''', M_2''' stosujmy tw. Chaslesa (zob. ustęp C): będzie $m(\overrightarrow{OM_1'''}) + m(\overrightarrow{M_1'''M_2'''}) + m(\overrightarrow{M_2'''O}) = 0$ czyli $z_1 + m(\overrightarrow{M_1'''M_2'''}) - z_2 = 0$, skąd $m(\overrightarrow{M_1'''M_2'''}) = z_2 - z_1$, a że odcinki $M_1'''M_2'''$, M_2A są sobie równe, więc $M_2A = |z_2 - z_1|$. Wobec tego $M_1M_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$, co daje dla odległości $M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, jako uogólnienie wzoru na odległość dwu punktów na płaszczyźnie.



Rys. VI.

Zajmiemy się teraz prostą w przestrzeni. W tym celu poprowadźmy najpierw prostą przez początek współrzędnych i skierujmy ją, przyjmując którykolwiek z dwu jej kierunków za jej kierunek — innemi słowy przez początek w półrzędnych prowadzimy oś (l) (rys. VII). Przez oś x i oś l poprowadźmy płaszczyznę (π) i niech α oznacza jeden z kątów między osiami x i l. Kąt α nazwiemy kątem nachylenia osi l do osi x; kąt ten nie jest jednoznacznie przez to określony, takich kątów jest nieskończenie wiele, jak to wiemy, ale wszystkie mają tę samą dostawę (cosinus). Podobnie określi się miarę kąta nachylenia osi l do osi y, wreszcie kąt nachylenia osi l do osi z. Oznaczmy pierwszy przez α, drugi przez β, trzeci przez γ. Między temi



Rys. VII.

kątami istnieje związek, który wyprowadzimy. W tym celu obierzmy na osi wektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ o długości 1, a zgodnie skierowany z osią l; jeżeli punkty M_1, M_2 mają współrzędne $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, to rzuty wektora $\overrightarrow{M_1M_2}$ na osie x, y, z mają miary $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, przeto na mocy twierdzenia o rzucie wektora (str. XXVII) będzie $x_2 - x_1 = 1 . \cos\alpha$, $y_2 - y_1 = \cos\beta$, $z_2 - z_1 = \cos\gamma$; podnosząc te równości do kwadratu i dodając, otrzymujemy: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$, ale lewa strona tej równości daje kwadrat długości odcinka M_1M_2 t. j. liczbę 1, więc otrzymujemy bardzo ważny związek: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Załóżmy teraz, że mamy daną w przestrzeni oś (l'), nie przechodzącą przez początek współrzędnych; dla niej określamy miary kątów między osią (l') i osią x, wzgl. y czy też z, obierając do pomocy oś l, przechodzącą przez początek współrzędnych, równoległą do osi l' i z nią zgodnie skierowaną; za miary kątów nachylenia osi l' do osi x, y, z przyjmujemy odpowiednio miary kątów nachylenia osi l do osi x, y, z. Liczby $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, które otrzymamy, nazywamy *dostawami kierunkowemi* osi (l').

Wyprowadzimy teraz równanie prostej.

Niech będzie dana prosta w przestrzeni, skierujmy ją, a otrzymamy oś, którą dla krótkości oznaczmy przez l; na osi obierzmy dwa punkty, jeden stały $M_0(x_0, y_0, z_0)$, a drugi dowolny $M(x, y, z)$. Rzuty wektora $\overrightarrow{M_0M}$ na osie x, y, z mają miary $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$; jeżeli miarę wektora $\overrightarrow{M_0M}$ na osi l oznaczymy przez ϱ, dostawy kierunkowe osi l przez $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, to na mocy twierdzenia o rzucie wektora otrzymujemy: $x - x_0 = \varrho\cos\alpha$, $y - y_0 = \varrho\cos\beta$, $z - z_0 = \varrho\cos\gamma$, skąd wynika, że

$$(1) \qquad x = x_0 + \varrho\cos\alpha, \quad y = y_0 + \varrho\cos\beta, \quad z = z_0 + \varrho\cos\gamma.$$

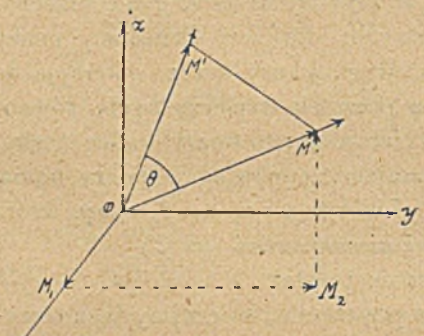
Nadając liczbie ϱ dowolne wartości rzeczywiste, otrzymamy każdy punkt prostej. Układ (1) jest więc równaniem prostej, przyczem ϱ zmienia się wzdłuż prostej, zaś $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ są stałe i dają dostawy kierunkowe rozważanej prostej.

W przypadku szczególnym, gdy prosta przechodzi przez początek współrzędnych, to można przyjąć $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ i wtedy równanie prostej przyjmie postać:

$$(2) \qquad x = \varrho\cos\alpha, \quad y = \varrho\cos\beta, \quad z = \varrho\cos\gamma.$$

Weźmy dwie osie (l), (l') w przestrzeni; one mogą być wichrowate (skośne) względem siebie; niech $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ będą dostawami dla l'.

Aby określić miarę kąta między osiami l i l', z punktu O kreślimy oś l_1 równolegle do osi l i z nią zgodnie skierowaną i oś l'_1 równolegle do osi l' i z nią zgodnie skierowaną; przez kąt między osiami l i l' rozumiemy dowolny z kątów między osiami l_1 i l'_1. Na osi l_1 obierzmy wektor $\overrightarrow{OM}$, mierzący się liczbą $+1$. Niech współrzędne punktu M wynoszą x, y, z, określające się z równań (2) przy wartości $\varrho = +1$. Weźmy punkty $M_1(\cos\alpha, 0,0)$, $M_2(\cos\alpha, \cos\beta, 0)$ i wektory $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M}$; sumą tych wektorów jest wektor $\overrightarrow{OM}$ [1]). Przeto rzut wektora $\overrightarrow{OM}$ na oś (l'_1) równać się będzie sumie rzutów wektorów $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M}$ na oś (l'_1).



Rys. VIII.

Ale rzut wektora $\overrightarrow{OM_1}$ na oś (l'_1) mierzy się liczbą $\cos\alpha . \cos\alpha'$, rzut wektora $\overrightarrow{M_1M_2}$ na oś (l'_1) mierzy się liczbą $\cos\beta . \cos\beta'$, wreszcie rzut wektora $\overrightarrow{M_2M}$ na oś (l'_1) mierzy się liczbą $\cos\gamma . \cos\gamma'$; wynika to ze wzoru na rzut wektora. Podobnie rzut wektora $\overrightarrow{OM}$ na oś (l'_1) mierzy się liczbą $1 . \cos\Theta = \cos\Theta$, gdy Θ oznacza dowolny z kątów między osiami (l_1, l'_1); będzie tedy:

(3) $$\cos\Theta = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'.$$

Jest to właśnie wzór, dający dostawę kąta między dwiema osiami. Jeżeli osie są do siebie prostopadłe, to $\cos\Theta = 0$ czyli

(4) $$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0.$$

Jako szczególny przypadek wzoru (3) otrzymamy poznaną poprzednio równość, której czynią zadość dostawy jednej osi, a mianowicie, gdy przyjmiemy, że osie l i l' są identyczne.

Wyprowadzimy teraz równanie płaszczyzny.

Niech będzie dana dowolna płaszczyzna π. Z początku współ-

---

[1]) Gdy dane wektory $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}, \ldots$, $\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$, to wektor $\overrightarrow{OM_n}$ jest właśnie sumą wektorów danych (albo wypadkowym). Czytelnik z łatwością wykaże, że, jeżeli dana jest dowolna oś (l), to rzut wektora $\overrightarrow{OM_n}$ na oś (l) jest równą sumie rzutów wektorów $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}, \ldots$, $\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$ na oś (l) czyli rzut $(\overrightarrow{OM_n}) =$ rzut $(\overrightarrow{OM_1}) +$ rzut $(\overrightarrow{M_1M_2}) + \ldots +$ rzut $(\overrightarrow{M_{n-1}M_n})$, co powyżej stosujemy.

rzędnych wykreślmy prostopadłą l do płaszczyzny π i skierujmy ją — niech $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ będą dostawami kierunkowemi osi l; punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ niech będzie punktem przebicia osi l i płaszczyzny π. Punkt M_0 leży na osi (l), której równanie ma postać (2); dla punktu M_0 niech będzie $m(\overrightarrow{OM_0}) = \varrho_0$; mamy więc

$$(5) \qquad x_0 = \varrho_0 \cos\alpha, \quad y_0 = \varrho_0 \cos\beta, \quad z_0 = \varrho_0 \cos\gamma.$$

Niech $M(x, y, z)$ oznacza dowolny punkt płaszczyzny π, różny od punktu M_0; przez punkty M_0, M poprowadźmy oś, której dostawy niech będą $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$. Wobec tego współrzędne punktu M spełniają równanie:

$$x = x_0 + \varrho\cos\alpha', \quad y = y_0 + \varrho\cos\beta', \quad z = z_0 + \varrho\cos\gamma$$

czyli (6) $x = \varrho_0\cos\alpha + \varrho\cos\alpha'$, $y = \varrho_0\cos\beta + \varrho\cos\beta'$, $z = \varrho_0\cos\gamma + \varrho\cos\gamma'$. Ale osie M_0M i OM_0 są do siebie prostopadłe, więc spełniony będzie związek (4). Równania (6) mnożymy przez $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i dodajemy je, uwzględniając równość (4); otrzymamy:

$$(7) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \varrho_0,$$

bo jest też $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Równaniu (7) czynią zadość współrzędne dowolnego punktu płaszczyznego, byle różnego od punktu M_0. Ale i punkt M_0 nie stanowi wyjątku, bo, wstawiając liczby x_0, y_0, z_0 zamiast liczb x, y, z, otrzymujemy $x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma = \varrho_0\cos^2\alpha + \varrho_0\cos^2\beta + \varrho_0\cos^2\gamma = \varrho_0$ na mocy równań (5). Współrzędne x, y, z *wszystkich* tedy punktów płaszczyzny π spełniają równanie (7). Naodwrót każdy punkt M, którego współrzędne x, y, z spełniają równanie (7) i są rzeczywiste, leży na płaszczyźnie przechodzącej przez punkt (x_0, y_0, z_0), określony równościami (5) i prostopadłej do prostej (2).

Rzeczywiście współrzędne x_0, y_0, z_0 punktu M_0, dane przez równości (5) spełniają równanie (7). Weźmy punkt $M(x, y, z)$ różny od punktu M_0; przez punkty M_0 i M poprowadźmy prostą, którą skierujmy i niech $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ oznaczają dostawy tej osi; skoro punkt M leży na tej osi, więc, oznaczając $m(\overrightarrow{M_0M}) = \varrho$, otrzymamy $x = x_0 + \varrho\cos\alpha'$, $y = y_0 + \varrho\cos\beta'$, $z = z_0 + \varrho\cos\gamma'$, przyczem jest $\varrho \neq 0$, bo punkty M_0 i M są od siebie różne. Podstawmy te współrzędne w równanie (7), a otrzymamy:

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma + \varrho(\cos\alpha'\cos\alpha + \cos\beta'\cos\beta + \cos\gamma'\cos\gamma) = \varrho_0,$$

a że jest $x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma = \varrho_0$ i $\varrho \neq 0$, więc

$$\cos\alpha' \cos\alpha + \cos\beta' \cos\beta + \cos\gamma \cos\gamma = 0$$

czyli prosta M_0M jest prostopadłą do prostej (2); tymczasem wiemy, że każda prosta prostopadła do prostej (2) i przechodząca przez punkt (x_0, y_0, z_0) leży na płaszczyźnie π. Tem samem twierdzenie udowodnione.

W szczególności $x = a$ jest równaniem płaszczyzny, prostopadłej do osi x i przechodzącej przez punkt $(a,0,0)$.

Równanie $x + y = 0$ jest równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez oś z i przez prostą narysowaną na płaszczyźnie (x, y), która, jako utwór płaski, ma równanie $x + y = 0$. Jeżeli bowiem punkt $(x_0, y_0, 0)$ ma współrzędne spełniające równanie $x + y = 0$, to punkt (x_0, y_0, z) przy *każdej* wartości z ma współrzędne, spełniające równanie $x + y = 0$, które współrzędnej z nie zawiera, więc ej współrzędnej *nie krępuje* i zezwala na dowolny jej wybór.

Sprostowanie ważniejszych omyłek druku i uzupełnienia.

Str. 2, w tabelce *zamiast* test *ma być* jest.

„ 5, w. 2 z góry *zamiast* wartości *ma być* wartości ze zbioru X.

„ 6, we w. 7 z dołu *należy dodać*: Mamy tu przykład funkcji, określonej przy pomocy dwóch wzorów.

„ 22, w. 10 z góry *zamiast* $\underset{x\to}{\mathrm{gr}}$ *ma być* $\underset{x\to c}{\mathrm{gr}}$.

„ 26, w. 16 z góry *zamiast* punkt odciętej *ma być* punkt o odciętej.

„ 29, w. 11 z góry *zamiast* na więcej *ma być* c na więcej.

„ 31, w. 10 z góry *zamiast* $\left|\cos\frac{xc+}{2}\right|$ *ma być* $\left|\cos\frac{x+c}{2}\right|$.

„ 36, w. 8 z góry *zamiast* $0 > |x-c| < \delta_1'$ *ma być* $0 < |x-c| < \delta_1'$.

„ 53, w. 9 z dołu *zamiast* $0 < |y-y| < \delta_1$ *ma być* $0 < |y-y_0| < \delta_1$.

„ 54, w. 7 z dołu *zamiast* $fx_0, y_0)$ *ma być* $f(x_0, y_0)$.

„ 57, w. 1 z dołu *zamiast* w_{2m+1} *ma być* w_{2m-1}.

„ 70, w. 6 z dołu *zamiast* Równość *ma byc* (Równość.

„ 74, w. 2 z dołu *zamiast* $\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n$ *ma być* $\frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$.

„ 75, w. 9 z góry *po słowie* przykład 9) *dodać* i tw. 19 ze str. 93, w którem należy położyć $x=\frac{1}{2}$, $\alpha_n=\frac{2n^2-3n+2}{n^2-2n+1}$ $(n \geqslant 2)$).

„ 82, w. 1 z góry *zamiast* $w_n - w_m| < 1$ *ma być* $|w_n - w_m| < 1$.

„ 87, w. 7 z dołu *zamiast* $a^{w_n} \leqslant a^c$, $a^{w_n} \leqslant a^c$ *ma być* $a^{w_n} \leqslant a^c$, $a^{w_m} \leqslant a^c$.

„ 87, w. 6 z dołu *zamiast* $\wedge a^c$ *ma być* $< a^c$.

„ 87, w. 6 z dołu *zamiast* $a^{\overline{N}}$ *ma być* $a^{\frac{1}{N}}$.

„ 87, w. 5 z dołu *zamiast* $a^{w_m} - a^{w_n}|$ *ma być* $|a^{w_m} - a^{w_n}|$.

„ 88, w. 9 z góry *zamiast* $\lim_{n\to\infty}(a^{w})$ *ma być* $\lim_{n\to\infty}(a^{w_n})$.

„ 88, w. 9 z dołu *zamiast* $1\lim w_n$ *ma być* $\lim w_n$.

Str. 89, w. 2 z góry *ma opiewać* $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a^{w_n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(a^{v_n})} = 1$, skąd $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{w_n}) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}(a^{v_n})$.

„ 92, w. 9 z dołu *zamiast* $(1+\varepsilon)^{m-}$ *ma być* $(1+\varepsilon)^{m-1}$.

„ 93, w. 16 z dołu *zamiast* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{g}\right)$ *ma być* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{g}\right)$.

„ 93, w. 13 z dołu *zamiast* $\lim\limits_{\to\infty} g^x$ *ma być* $\lim\limits_{n\to\infty} g^x$.

„ 95, w. 7 z góry *zamiast* $2 < e < 3$ *ma być* $2 < e \leqslant 3$.

„ 95, w. 11 z góry *zamiast* równania A) *ma być* równania (A)).

„ 96, w. 19 z dołu *zamiast* $e^{\nu_9} \neq 0$ *ma byc* $e^{\nu_0} \neq 0$.

„ 98, w. 4 z góry *zamiast* $b < e^{\frac{l+1}{10n}}$ *ma być* $b < e^{\frac{l+1}{10^n}}$.

„ 98, w. 8 z góry *zamiast* $e^{\frac{l_n+1}{10}}$ *ma być* $e^{\frac{l_n+1}{10^n}}$

„ 98, w. 9 z dołu *zamiast* $< e^{\frac{ln+1}{10^n}}$ *ma być* $< e^{\frac{l_n+1}{10^n}}$.

„ 101, w. 10 z góry *zamiast* 05 *ma być* 0·5.

„ 107, w. 5 z góry *zamiast* $\left(1-\frac{1}{\nu_2}\right)^{-w_2}$ *ma być* $\left(1-\frac{1}{\nu_2}\right)^{-\nu_2}$.

„ 109, w. 2 z dołu *zamiast* $e^y - 1|$ *ma być* $|e^y - 1|$.

„ 111, w. 1 z góry *zamiast* porównywanie *ma być* porównywania.

„ 111, w. 11 z góry *pod słowem* lim *umieścić znak* $x \to 0$.

„ 113, w. 9 z dołu *zamiast* $x = e$ *ma być* $x = c$.

„ 120. Dowód w § 29a, że warunek istnienia granicy funkcji jest wystarczającym, można przeprowadzić krócej, niż to uczyniono na str. 120—122.

Rzeczywiście: załóżmy, że ów warunek jest spełniony; obierzmy ciąg (1): $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ taki iż $x_i \neq x_0$ dla $i = 1, 2, \ldots$; nadto niech $x_i \to x_0$, wreszcie liczby x_i mają być takie, że liczby $f(x_i)$ są określone. Utwórzmy ciąg (2): $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \ldots$, o którym wykażemy, że ma granicę. Na mocy założenia do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jest $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$, jeżeli jest (3): $0 < |x_m - x_0| < \delta$, $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Ale $x_i \to x_0$, gdy $i \to \infty$, więc do liczby $\delta > 0$, dopieroco określonej, istnieje liczba naturalna N taka, że jest $|x_i - x_0| < \delta$, gdy jest $i \geqslant N$. Że jest zarazem $0 < |x_i - x_0|$, to wynika z definicji ciągu (1). A więc wybór (4) $m \geqslant N$, $n \geqslant N$ powoduje (3) i tem samem nierówność: (5) $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$. Do każdej tedy liczby $\varepsilon>0$ istnieje liczba naturalna N taka, że nierówności (4) pociągają za sobą nierówność (5), co na mocy tw. Cauchyego ze str. 81 zapewnia, że ciąg (2) ma granicę, którą oznaczmy przez g. Weźmy liczbę x dowolnie, byle było $0<|x-x_0|<\delta$. Otóż $g-f(x)=g-f(x_n)+$ $+f(x_n)-f(x)$, skąd jest $|g-f(x)|\leqslant|g-f(x_n)|+|f(x_n)-$ $-f(x)|$. Ponieważ $f(x_i)\to g$, więc do liczby $\varepsilon>0$ istnieje liczba naturalna N_1 taka, że jest $|g-f(x_i)|<\varepsilon$, gdy jest $i\geqslant N_1$. Niech n oznacza liczbę naturalną taką, iż jest $n\geqslant N_1$, $n\geqslant N$, tedy też $0<|x_n-x_0|<\delta$, więc będzie $|f(x_n)-f(x)|<\varepsilon$ na mocy założenia, że powyżej cytowany warunek istnienia granicy funkcji jest spełniony. Będzie też $|g-f(x_n)|<\varepsilon$. Wobec tego $|g-f(x)|<2\varepsilon$, gdy jest $0<|x-x_0|<\delta$, to zaś dowodzi, że funkcja $f(x)$ ma granicę g, gdy $x\to x_0$.

Str. 124, w. 11 z góry *zamiast* 3) $f_1(x).f(x)$ *ma być* 3) $f_1(x).f_2(x)$.

„ 130, w. 17 z góry *zamiast* $a_n\leqslant b_n$ *ma być* $a_n<b_n$.

„ 135, w. 5 z góry *zamiast* $c_1=b$ i $n=1$ *ma być* $c_1=\dfrac{a+b}{2}$ i $n=2$.

„ 135, w. 7 z dołu *zamiast* $\omega\leqslant\varepsilon'$ *ma być* $\omega_2\leqslant\varepsilon'$.

„ 136, w. 6 z góry *zamiast* $n\to\infty$ *ma być* $m\to\infty$.

„ 141, w. 5 z góry *ma brzmieć* a górny kres jej wartości jest zarazem maximum.

„ 141, w. 6 z dołu *zamiast* Odwrotnie w punkcie $O(0,0)$ *ma być* Odwrotnie w sąsiedztwie prawem punktu $O(0,0)$.

„ 144, we w. 7 z góry *brak zdania* Temsamem zagadnienie rozwiązaliśmy w przypadku prostej, współczynnik kierunkowy prostej jest dla prostej „pochodną“.

„ 148, w. 15 z dołu *zamiast* $f(x_0)+h$ *ma być* $f(x_0+h)$.

„ 151, w. 15 z góry *zamiast* $f(c+h$ *ma być* $f(c+h)$.

„ 154, w. 12 z dołu *zamiast* (x^{p+1}) *ma być* $(x^{p+1})'$.

„ 154, w. 7 z dołu *zamiast* dwuzmianu *ma być* dwumianu.

„ 154, w. 4 z dołu *zamiast* x_n *ma być* x^n.

„ 159, w. 3 z dołu *zamiast* $(f(t)'$ *ma być* $(f(t))'$.

„ 160, w. 5 z dołu *zamiast* pochodną $(-v')$ nazwano *ma być* pochodną, podzieloną przez v, a więc wielkość $\left(-\dfrac{v'}{v}\right)$ nazwano.

Str. 164, w. 1 z dołu *zamiast* e^k *ma być* e^h.

„ 171, w. 11 z dołu *zamiast* $\varphi(f(x)$ i równą *ma być* $\varphi(f(x))$ i jest równą.

„ 180, w. 3 z góry *zamiast* $\frac{y=e^x}{\sin x}$ *ma być* $z=\ln y$.

„ 181, w. 8 z dołu *zamiast* Odcięta *ma być* Odciętą.

„ 181, w. 7 z dołu *zamiast* przydana *ma być* przydaną.

„ 181, w. 6 z dołu *zamiast* przydanej *ma być* przy danej.

„ 190, w. 2 z góry *zamiast* $P(x_0, y_0)$ *ma być* $P(0, y_0)$.

„ 203, w. 16 z góry *po znaku* $f^{(m+p+1)}(x_0)$ *umieścić przecinek.*

„ 204, w. 13 z góry *zamiast* $\frac{d^3y}{dx}$ *ma być* $\frac{d^3y}{dx^3}$.

„ 207. w. 5 z dołu *zamiast* po 2, wzgl. 3) *ma być* po 3, 5, wzgl. 2).

„ 217, w. 10 z dołu *zamiast* $-\frac{\pi}{2} \leqq x < \frac{\pi}{2}$ *ma być* $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

„ 225, w. 9 z góry *zamiast* dostatnią *ma być* dodatnią.

„ 257, w. 5 z góry *zamiast* $\frac{dx}{dt}$ *ma być* $\frac{dx}{dt}$.

„ 262, w. 8 z dołu *zamiast* $(c'''=c\ \ c')$, *ma być* $(c'''=c-c')$,

„ 280, w. 10 z dołu *zamiast* $\frac{(4-x}{x^2+1)^2}$ *ma być* $\frac{4-x}{(x^2+1)^2}$.

„ 284, w. 1 z dołu *zamiast* $[(x-\lambda_x)^2+\mu_x^2]$ *ma być* $[(x-\lambda_x)^2+\mu_x^2]^{l_x}$.

„ 286, w. 5 z góry *zamiast* $A_{i, mi-1}$, *ma być* A_{i, m_i-1}.

„ 288, w. 9 z dołu *zamiast* $(x-\alpha_1)^{m_1-p+}$ *ma być* $(x-\alpha_1)^{m_1-p+1}$.

„ 291, w. 8 z góry *ma opiewać* $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$, skąd $dx=$

$=2\cos^2\frac{x}{2}\,dt$.

„ 291, wiersze 12, 13, 14 z góry *mają opiewać* $dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}$.

Mamy więc:

$$I=\int W\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

„ 294, w. 15 z dołu *zamiast* $\mp(Eu+F)(u^2\mp u\sqrt{2}+1)^2$ *ma być* $+(Eu+F)(u^2+u\sqrt{2}+1)^2$.

„ 301, w. 12 z góry *zamiast* d_1, d_3, *ma być* d_1, d_2.

„ 302, w. 1 z góry *zamiast* $\left(\frac{k^2y_0^2}{2pn^2}. \frac{ky_0}{n}\right)$ *ma być* $\left(\frac{k^2y_0^2}{2pn^2}, \frac{ky_0}{n}\right)$.

Str. 309, w. 8 z dołu *zamiast* $\overline{x_1 x_3}$ punk *ma być* $\overline{x_1 x_2}$ punkt.

„ 310, w. 13 z dołu *zamiast* sposobu rozkładu R *ma być* wyboru rozkładów $R_\varkappa$.

„ 315, w. 8 z dołu *po* N *dać przecinek.*

„ 317, w. 15 z dołu *zamiast* $|S_n - S_n|$ *ma być* $|S_n - S''_n|$.

„ 317, w. 3 z dołu *zamiast* $a > b$ *ma być* $a < b$.

„ 321, w. 8 z góry zamiast $\int_b^a f(x)dx$ ma być $\int_a^b f(x)dx$.

„ 346, w. 1 z dołu *zamiast* należy *ma być* zależy.

„ 355, w. 11 z góry *zamiast* dów, *ma być* dach.

„ 356, w. 15 z góry *zamiast* $\sqrt{1 \quad x}$ *ma być* $\sqrt{1-x}$.

„ 366, w. 8 z góry *zamiast* $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} . \frac{d^2y}{dx^2}$ *ma być* $\frac{2}{\sqrt{\pi}} . e^{-x^2} . \frac{d^2y}{dx^2}$.

„ 374, w. 8 z góry *zamiast* R^3 *ma być* R^2.

„ 379, w. 17 z dołu *zamiast* $\left(1 \quad \frac{x^2}{a^2}\right)$ *ma być* $\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$.

„ 390, w. 17 z góry *zamiast* łuku c *ma być* cięciwy c.

„ 396, w. 8 z dołu *zamiast* $f''(x_0)f'(x_0+h)$ *ma być* $f'(x_0)f'(x+h)$.

„ 406, w. 3 z dołu *zamiast* $\frac{1}{2}(x_{\varkappa-1} - x_\varkappa)$ *ma być* $\frac{1}{2}(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})$.

„ 407, w. 5 z dołu *zamiast* $\int_{x_{\varkappa+1}}^{x_\varkappa} f(x)\,dx$ *ma być* $\int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} f(x)\,dx$.

„ 410, w. 1 z dołu *zamiast* $\ldots \geqslant \frac{1}{10}$, *ma być* $\ldots \leqslant \frac{1}{10}$.

„ 417, w. 11 z dołu *zamiast* $\leqslant h(M_2 - m)$; *ma być* $\leqslant h(M_2 - m_2)$.

„ 419, w. 4 z dołu *zamiast* $|\Phi(h)| = \frac{1}{90} M_4 h^5$ *ma być* $|\Phi(h)| \leqslant \leqslant \frac{1}{90} M_4 h^5$.

„ 422, w. 7 z góry *zamiast* punku *ma być* punktu.

„ 435, w. 14 z góry *zamiast* $e - e^{-t}$ *ma być* $e^t - e^{-t}$.

„ 437, w. 7 z góry *zamiast* $\geqslant \varphi_2 - \sin\varphi_1$ *ma być* $\geqslant \varphi_2 - \sin\varphi_2$.

„ 438, w. 1 z dołu *zamiast* $(-\cos\varphi)$ *ma być* $(1 - \cos\varphi)$.

„ 442, w. 13 z góry *zamiast* $\sqrt{(a+c)^2 (b+d)^2}$ *ma być* $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$.

„ 447, w. 10 z dołu *zamiast* $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^x$ *ma być* $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0}$.

„ 453, w. 8 z góry *zamiast* ocs *ma być* cos.

„ 464, w. 17 z dołu *zamiast* (str.) *ma być* (str. 218).

„ 464, w. 17 z dołu *zamiast* $f(x)$ *ma być* $f'(x)$.

Str. 464, w. 15 z dołu *zam.* funkcja $f'(x)$ jest *ma być* funkcja $f(x)$ jest
„ 464, w. 14 z dołu *zam.* $f'(x) < f'(\xi_0) = 0$ *ma być* $f(x) < f(z_0) = 0$.
„ 476, w. 15 z góry *zamiast* $\frac{1}{\alpha x^\nu}$ *ma być* $\frac{1}{\alpha x''}$.
„ 478, w. 5 z góry *po wzorze* e^{x^2} *dodać* o ile $x \neq 0$.
„ 479, w. 9 z góry *słowa* $\lambda = 0$ albo *należy skreślić.*

TREŚĆ CZĘŚCI PIERWSZEJ.

Rozdział I. Pojęcie funkcji.

§ 1. Intuicyjne pojęcie funkcji.

Przykład 1. Załóżmy, że na termometrze (T) jest oznaczona i skala Celsjusza i skala Réaumura. Gdy temperatura np. powietrza wynosi y stopni w skali Celsjusza i x stopni w skali Réaumura, to wiemy, że istnieje ścisły związek między liczbami (x) i (y). Wyprowadzimy ten związek. Rtęć termometru (T) niech sięga do miejsca M; odcinek od miejsca O, w którem naznaczono 0 stopni do miejsca M wynosi y^0C i zarazem x^0R. Jeżeli N jest punktem na podziałce, przy którym oznaczono liczbę 100 dla skali Celsjusza, 80 dla skali Réaumura i jeżeli odcinek ON wynosi $l\,cm$, to jeden stopień C wynosi $\frac{l}{100}\,cm$, jeden stopień R ma długość $\frac{l}{80}\,cm$; tedy odcinek OM, który ma x^0R, ma długość $\frac{l}{80}.x\,cm$ i zarazem $\frac{l}{100}.y\,cm$, bo wynosi y^0C. Jest więc

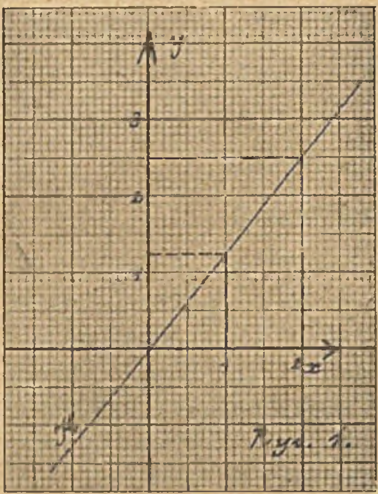
$$(\mathrm{I})\qquad \frac{l}{80}.x = \frac{l}{100}.y,\ \text{skąd otrzymujemy}\ y = \frac{100}{80}x = \frac{5}{4}x.$$

Nadając liczbie x dowolne wartości, otrzymujemy odpowiednie, ściśle określone wartości na y. Np. gdy $x = 8$, to $y = 10$.

Gdy liczbie x możemy, podobnie jak w tym przykładzie, nadawać dowolne wartości, wówczas nazywamy ją zmienną niezależną, a y zmienną zależną albo funkcją zmiennej niezależnej x. Oznaczamy to symbolem: $y = f(x)$.

Każda funkcja, o ile jest dość prosta, ma swój obraz geometryczny (wykres, diagram, grafikon). Tak też funkcja (I) w prostokątnym układzie współrzędnych będzie mieć diagram (zob. rys. 1). Taki rysunek dobrze wykonany na papierze milimetrowym pozwoli nam odczytać zamianę stopni R na stopnie C i odwrotnie, bez wykonywania rachunku oznaczonego wzorem (I).

Wzdłuż prostej K na rysunku 1 zachodzi związek między współrzędnemi x, y:



$$y = \frac{5}{4} x.$$

Zastanówmy się, jak zmienia się tu rzędna, jeśli przyrosty odciętej będą jednakowe. Np.:

gdy	$x = 8$	$x = 9$
to jest	$y = 10$	$x = \frac{45}{4}$

Zatem, gdy odciętą powiększyliśmy o 1, to przyrost rzędnej wynosił $\frac{5}{4}$. Podobnie:

$x = 80$	$x = 81$
$y = 100$	$y = \frac{405}{4}$

więc i tu wzrostowi odciętej o 1 odpowiada przyrost rzędnej o $\frac{5}{4}$.

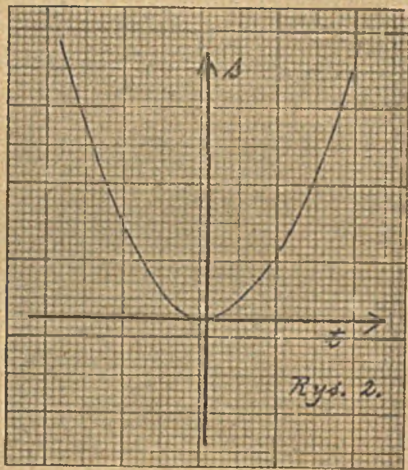
Przykład 2. Weźmy pod uwagę funkcję $y = 4x^2\pi$. Jest to równość, podająca zależność miary y powierzchni kuli od długości promienia x. Diagramem takiej funkcji jest łuk paraboli. Zbadajmy teraz, jak poprzednio, o ile zmieni się rzędna, jeśli weźmiemy równe zmiany odciętej. Otóż:

gdy $x = 5$	$x = 6$
to jest $y = 100\pi$	$y = 144\pi$
gdy $x = 10$	$x = 11$
to jest $y = 400\pi$	$y = 484\pi$

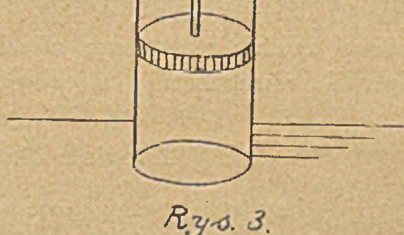
Gdy x wzrośnie od 5 do 6, a więc o 1, to y wzrośnie o 44 π. Natomiast, gdy x wzrasta od 10 do 11, a więc znów o 1, to y wzrasta o 84 π.

Przyrost rzędnej jest tu nierównomierny, w przeciwstawieniu do przykładu 1, gdzie przyrost był stały. W przykładzie 1 przyrostowi odciętej o 1 odpowiadał w każdem miejscu stały przyrost rzędnej o $^5/_4$; w drugim zaś przykładzie przyrostowi odciętej o 1 odpowiada wzrost rzędnej raz o 44 π, dalej zaś o 84 π.

Przykład 3. Weźmy pod uwagę wolny spadek ciała w próżni z pewnej wysokości. Pod wpływem stale działającej siły przyciągania ziemi ciało spada na ziemię ruchem jednostajnie przyspieszonym. Jeśli przebyta przez to ciało droga wynosi s centymetrów, a czas, potrzebny do jej przebycia, liczony od chwili wypuszczenia ciała, wynosi t sekund, to $s = \frac{g}{2} t^2$, gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie, stałe dla pewnego miejsca na powierzchni ziemi. Widzimy stąd, że przebyta przez ciało droga jest zależna od czasu czyli jest funkcją czasu, co można oznaczyć: $s = f(t)$. Rysując obraz geom. tej funkcji, przyjmiemy, że zmienna t, jako zmienna niezależna, może otrzymywać wartości tak dodatnie, jak i ujemne, a przez s będziemy rozumieli liczbę, obliczoną z równości $s = \frac{g}{2} t^2$; wykres funkcji s przedstawi się wtedy jako parabola, której wierzchołek będzie leżał w początku układu (rys. 2).

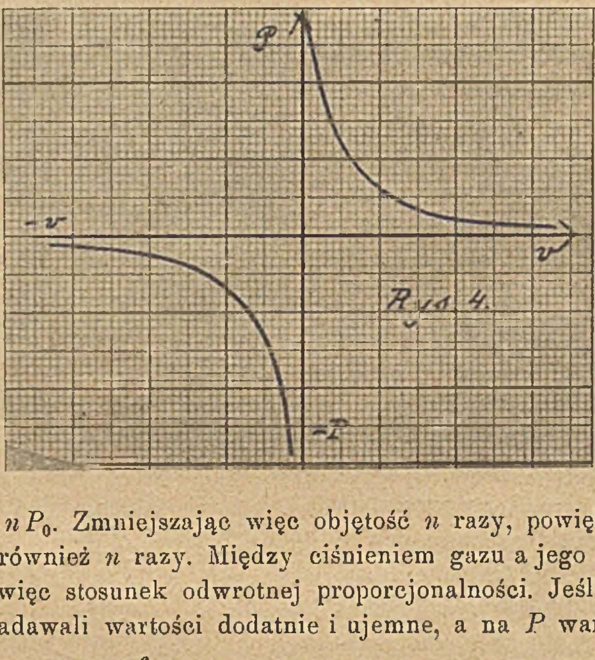


Przykład 4. Wyobraźmy sobie w naczyniu walcowatem o gładkich ścianach, pod szczelnym tłokiem pewną ilość gazu doskonałego, na który ciśnie tłok, obciążony ciężarem (rys. 3). Gaz zajmuje pewną objętość v, którą mierzymy w cm^3, i wywiera na tłok oraz ściany naczynia pewne ciśnienie P, które mierzymy w Kg na 1 cm^2 powierzchni naczynia. Jeśli, przy zachowaniu jednakowej temperatury, nadamy gazowi przy zwiększonym ucisku na tłok mniejszą objętość, to ciśnienie P się zwiększy. Dokładniej: jeśli doświadczenie przeprowadzimy izotermicznie, to okaże się, że iloczyn $P . v = c$, gdzie c jest liczbą stałą dla pewnej danej ilości



Rys. 3.

gazu i danej temperatury. Stąd mamy: $P = \frac{c}{v}$. Widzimy więc, że ciśnienie jest zależne od objętości gazu; możemy też napisać: $P = f(v)$. Niech dla danej objętości v_0 ciśnienie wynosi P_0, przeto: $P_0 . v_0 = c$. Jeśli objętość (zachowując tę samą ilość gazu i tę samą temperaturę) zmniejszymy n razy czyli nowa objętość $v = \frac{v_0}{n}$, to ciśnienie $P = c : \frac{v_0}{n} = \frac{cn}{v_0}$. Ponieważ zaś $\frac{c}{v_0} = P_0$, można więc napi-

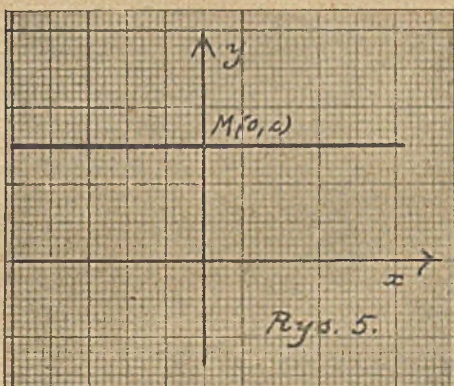


sać: $P = nP_0$. Zmniejszając więc objętość n razy, powiększyliśmy ciśnienie również n razy. Między ciśnieniem gazu a jego objętością zachodzi więc stosunek odwrotnej proporcjonalności. Jeśli na v będziemy nadawali wartości dodatnie i ujemne, a na P wartości według równości $P = \frac{c}{v}$, to wykresem tej funkcji, dla której v będziemy uważali za zmienną niezależną, a P za jej funkcję, będzie hiperbola równoboczna, leżąca w I i III ćwiartce (rys. 4).

§ 2. Ścisłe określenie funkcji.

Weźmy pod uwagę dowolny zbiór liczb rzeczywistych, byle niepusty; oznaczmy go literą X. Niech litera x przedstawia jakąkolwiek liczbę tego zbioru; będziemy ją nazywali zmienną niezależną. Załóżmy, że do każdej liczby x ze zbioru X należy pewna liczba rzeczywista, zupełnie określona, którą oznaczmy znakiem $f(x)$; x może przyjmować rozmaite wartości, ale każdej liczbie x ma odpowiadać pewna liczba rzeczywista $f(x)$. Symbol $f(x)$ nazywamy funkcją jednowartościową rzeczywistą zmiennej rzeczywistej x — krótko: funkcją zmiennej niezależnej x, określoną dla liczb zbioru X. Jeżeli w pewnem zagadnieniu zachodzi potrzeba podstawienia za x pewnej specjalnej liczby ze zbioru X, np. liczby a, to powiadamy, że zmienna x przyjmuje wartość a lub: zmiennej x nadajemy wartość a — i wtedy $f(a)$ oznacza wartość, która jest skojarzona z liczbą a. Np. jeśli we wzorze $s = \frac{1}{2}gt^2$ zmienna t przyjmuje wartość 1, to do tej wartości jest przydana wartość $f(1) = \frac{1}{2}g$.

Przykład 1. Oznaczmy przez R zbiór wszystkich liczb rzeczywistych; niech c oznacza jedną zupełnie określoną liczbę rzeczywistą. Liczbę c przydajmy każdej liczbie ze zbioru R. Jeśli więc x oznacza dowolną liczbę zbioru R, to będzie $f(x) = c$ dla wszystkich liczb x zbioru R. Powiemy, że funkcja $f(x)$ ma wartość stałą (constans) c — dla wszystkich liczb x zbioru R, wartość niezmienną dla jakiegokolwiek x. Obraz geom. takiej funkcji przedstawia rys. 5. Odróżnimy tu dwa przypadki:



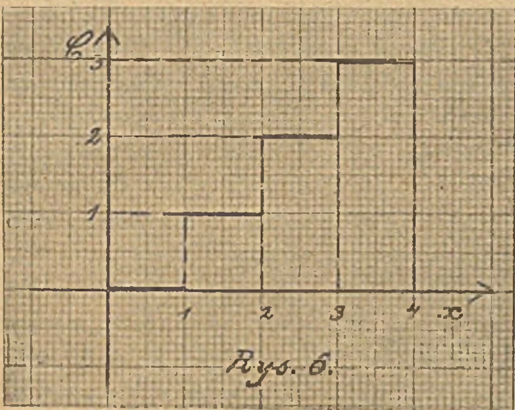
Rys. 5.

1) $c = 0$ czyli $y = 0$; wtedy obrazem geom. funkcji jest oś x;

2) $c \neq 0$; obrazem geom jest prosta równoległa do osi x, przecinająca oś y w punkcie $M(0, c)$.

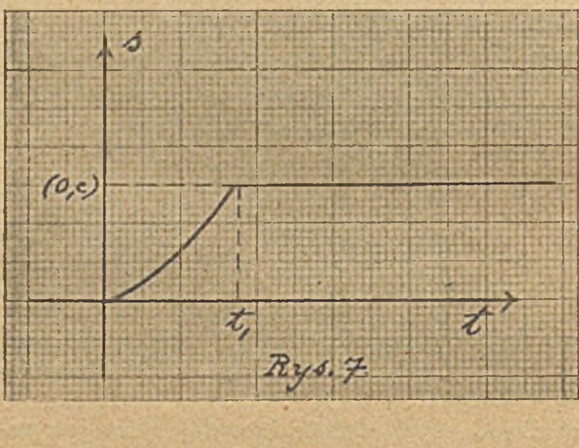
Przykład 2. Niech zbiór liczb Z zawiera same liczby rzeczywiste, większe od 0 i liczbę 0. Każda więc liczba x takiego zbioru ma własność: $x \geqq 0$ i albo równa się liczbie całkowitej albo jest zawartą między dwiema całkowitemi, po sobie następującemi. Np. gdy $x = \sqrt{3}$, to: $1 < \sqrt{3} < 2$. W ogólności $c \leqq x < c + 1$, gdzie c oznacza liczbę całkowitą. Gdy liczba cała c spełnia ostatnią nierówność, to nazwiemy ją największą liczbą całkowitą, zawartą w liczbie x i oznaczymy znakiem $C(x)$. Liczba $C(x)$ jest oczywiście zależną od x czyli $C = f(x)$. Rys. 6 przedstawia jej wykres (tylko w ćwiartce I, gdyż przyjęliśmy, że zbiór Z składa się z liczb $x \geqslant 0$). Gdy $0 \leqslant x < 1$, to stale $C = 0$; ale gdy $x = 1$, to $C = 1$. Gdy $1 < x < 2$, to stale $C = 1$; gdy $x = 2$, to $C = 2$. Gdy $2 < x < 3$, to $C = 2$ i t. d.

Ścisły rysunek obrazu tej funkcji nie da się nakreślić, gdyż punkty o współrzędnych (1,0), (2,1), (3,2) i t. d., będące prawemi końcami odcinków tej linji schodkowej, do obrazu funkcji nie należą.



Rys. 6.

Przykład 3. Weźmy pod uwagę spadek ciała na ziemię. Według wzoru $s = \frac{1}{2} g t^2$, wykres tej funkcji jest łukiem paraboli, dopóki ciało jest w ruchu; po zetknięciu się ciała z ziemią, ruch ustaje, a przebieżona droga nie zmienia się (jest stałą, constans), mimo dalszego upływania czasu. (Rys. 7). Niech czas spadania wynosi t_1 sekund, poczem $s = c$ (constans) mimo dalszego wzrostu zmiennej niezależnej t.



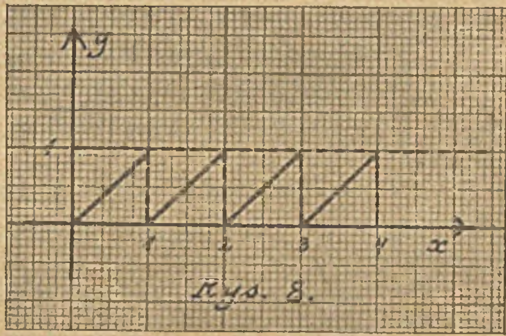
Rys. 7

Przykład 4. Przy założeniu podobnem, jak w przykładzie 2, niech będzie $y = x - C(x)$, gdzie $x \geqslant 0$; wtedy też $y \geqslant 0$, więc wykres tej funkcji będzie cały się mieścił w I ćwiartce;

gdy:	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
to:	$y = 0$	$y = x$	$y = 0$	$y = x - 1$	$y = x - 2$
bo	$C(x) = 0$	$C(x) = 0$	$C(x) = 1$	$C(x) = 1$	$C(x) = 2$

Proste: $y=x$, $y=x-1$, $y=x-2$ itd., są wszystkie nachylone do osi x pod kątem 45^0 (rys. 8).

Podobnie, jak w przykładzie 2 mamy tu funkcję nieciągłą dla $x=1, 2, 3\ldots$ itd. Punkty (1,1), (2,1), (3,1)... nie należą do wykresu funkcji.


Rys. 8.

Przykład 5. **Wielomiany całkowite i równania algebraiczne.** Wyrażenie np.: $3x^2-5x+7$ nazywać będziemy funkcją całkowitą wymierną zmiennej niezależnej (x) stopnia 2-go. Wyrażenie takie, jak $x.\sqrt{3}-4$ będzie takąż funkcją stopnia 1-go itd.; ogólnie: $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots\ldots+a_mx^m$, gdzie m jest liczbą naturalną (t. zn. całkowitą, dodatnią), jest wielomianem całkowitym stopnia m-go czyli funkcją całkowitą wymierną stopnia m-go.

$a_0, a_1, a_2, a_3\ldots$ są współczynnikami tej funkcji, niezależnemi od zmiennej x, a_0 jej wyrazem wolnym. m jest stopniem funkcji. Warunek $a_m \neq 0$ jest konieczny, aby funkcję można nazwać funkcją m-go stopnia. Inne współczynniki mogą być równe zeru, np. $20x^5-8$ jest funkcją całkowitą wymierną 5-go stopnia, a współczynniki przy zmiennej x w stopniu 4, 3, 2, 1 są równe zeru. Funkcję tę (wielomian całkowity) stopnia m-go co do x oznaczmy symbolem $W_m(x)$, t. zn. jest:

$$W_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_mx^m.$$

Funkcja ta jest określona dla każdej wartości rzeczywistej na zmienną x. Funkcja $W_m(x)$, przyrównana do zera tworzy **równanie algebraiczne** stopnia m-go, którego symbol jest:

$$W_m(x)=0.$$

Wartości, które musi przyjąć x, ażeby równanie było spełnione, nazywamy pierwiastkami równania albo rozwiązaniami równania. Weźmy równanie stopnia 1-go: $a_0+a_1x=0$. Obliczmy pierwiastek, zakładając, że $a_1 \neq 0$. (Założenie to jest konieczne, aby można było dzielić przez a_1!). Stąd kolejno:

$a_1 x = -a_0$, $x = -\frac{a_0}{a_1}$. A więc: jeżeli jest $a_0 + a_1 x = 0$, $a_1 \neq 0$ to jest $x = -\frac{a_0}{a_1}$; a ponieważ $a_0 + a_1\left(-\frac{a_0}{a_1}\right) = 0$, przeto:

Równanie stopnia pierwszego ma jeden jedyny pierwiastek.

Udowodnimy teraz twierdzenie:

Równanie algebraiczne stopnia m-go ma co najwyżej m pierwiastków ($m \geqq 1$).

Na podstawie zasady indukcji matematycznej (zupełnej) udowodnimy to twierdzenie, jeśli zdołamy udowodnić następujące dwa twierdzenia pomocnicze:

1) Równanie algebr. stopnia 1-go ma co najwyżej 1 pierwiastek.

2) Jeżeli równanie algebr. stopnia p-go (gdy $p \geqq 1$) ma co najwyżej p pierwiastków, to równanie algebr. stopnia $(p+1)$-go ma co najwyżej $(p+1)$ pierwiastków.

Twierdzenie 1) udowodniliśmy już poprzednio, uważamy je więc za prawdziwe.

Dowód na prawdziwość twierdzenia 2):

Ogólna postać równania stopnia $(p+1)$-go jest:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} = 0, \tag{I}$$

przyczem $a_{p+1} \neq 0$. Co do istnienia pierwiastków tego równania zachodzi jedna z dwu ewentualności:

a) albo równanie to nie ma żadnego pierwiastka

b) albo ma przynajmniej jeden pierwiastek.

Jeśli przypadek (a) jest prawdziwy, to twierdzenie 2) jest prawdziwe (bo wyrażenie: „co najwyżej $p+1$" nie wyklucza zera). — W drugim przypadku (b) zakładamy, że równanie (I) ma jeden pierwiastek, który oznaczmy przez γ. Wówczas liczba γ spełnia to równanie; więc jest:

$$a_0 + a_1 \gamma + a_2 \gamma^2 + \ldots\ldots + a_p \gamma^p + a_{p+1} \gamma^{p+1} = 0. \tag{II}$$

Odejmując tę równość od równania (I) i wyłączając każdy spółczynnik a_i przed nawias, otrzymamy:

$$\begin{aligned} a_1 (x-\gamma) + a_2 (x^2 - \gamma^2) + \ldots\ldots + a_p (x^p - \gamma^p) + \\ + a_{p+1} (x^{p+1} - \gamma^{p+1}) = 0. \end{aligned} \tag{III}$$

Z każdego nawiasu równania (III) wyłączamy czynnik $x-\gamma$, albowiem jest — jak wiadomo z algebry:

$$x - y = x - y$$
$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + yx + y^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^p - y^p = (x - y)(x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + xy^{p-2} + y^{p-1})$$
$$x^{p+1} - y^{p+1} = (x - y)(x^p + x^{p-1}y + x^{p-2}y^2 + \ldots\ldots + xy^{p-1} + y^p).$$

Równanie (III) przybierze zatem formę: (IV)

$$a_1(x - y) + a_2(x - y)(x + y) + a_3(x - y)(x^2 + xy + y^2) +$$
$$+ a_4(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \ldots + a_p(x - y)(x^{p-1} +$$
$$+ x^{p-2}y + \ldots xy^{p-2} + y^{p-1}) + a_{p+1}(x - y)(x^p + x^{p-1}y + \ldots\ldots +$$
$$+ xy^{p-1} + y^p) = 0.$$

Z wyrazów lewej strony równania (IV) wyłączmy przed nawias wspólny czynnik $x - y$; otrzymujemy: (V)

$$(x - y)[a_1 + a_2(x + y) + a_3(x^2 + xy + y^2) + \ldots\ldots + a_p(x^{p-1} +$$
$$+ x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots\ldots + xy^{p-2} + y^{p-1}) + a_{p+1}(x^p + x^{p-1}y +$$
$$+ x^{p-2}y^2 + \ldots\ldots + xy^{p-1} + y^p)] = 0.$$

Nawias graniasty w tem równaniu zamyka wielomian całkowity stopnia p-go, bo $a_{p+1} \neq 0$. Ponieważ lewa strona jest iloczynem równym zeru na mocy tego równania, więc albo $x - y = 0$ albo wielomian stopnia p-go w nawiasie graniastym jest równy zeru. W pierwszym przypadku mamy równanie $x - y = 0$ stopnia 1-go o jednym pierwiastku y według poprzednio przeprowadzonego dowodu, w drugim zaś otrzymujemy równanie stopnia p-go, które w myśl naszego założenia (2) ma co najwyżej p pierwiastków. Zatem równanie V ma co najwyżej $p + 1$ pierwiastków. Ponieważ zaś każdy pierwiastek równania (I) jest zarazem pierwiastkiem równania (V) więc:

Równanie (I) stopnia $(p + 1)$-go ma co najwyżej $p + 1$ pierwiastków, co było do udowodnienia. Okazaliśmy więc i twierdzenie 2).

Tem samem udowodniliśmy także twierdzenie główne.

To twierdzenie pozwoli nam udowodnić następujące: jeżeli funkcja całkowita i wymierna zmiennej x: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ $\ldots + a_nx^n$ jest zerem dla $(n + 1)$ różnych wartości na zmienną x, to wszystkie jej współczynniki są zerami: $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ i przeto przyjmuje ta funkcja wartość zero dla wszystkich wartości na zmienną x.

Gdyby bowiem było $a_n \neq 0$, to według dopiero co udowodnionego twierdzenia równanie $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$ miałoby co najwyżej n pierwiastków, wbrew założeniu. Jest więc $a_n = 0$; niech więc będzie $a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_{k+1} = 0$, zaś $a_k \neq 0$, gdzie jest $1 \leqq k < n$. Tedy równanie $a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k = 0$ ma według założenia $n + 1 > k$ pierwiastków, co jest niemożliwe. Widzimy tedy, że być musi $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Stąd wynika natychmiast dalsze twierdzenie: jeżeli dwie funkcje całkowite i wymierne zmiennej x: $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $\varphi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$ (gdzie $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$) są sobie równe dla nieskończenie wielu wartości na zmienną x, to 1) są obie tego samego stopnia $m = n$, 2) współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x są sobie równe: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$, wskutek czego obie funkcje są sobie równe dla *każdej wartości* zmiennej x.

Rzeczywiście różnica $f(x) - \varphi(x)$ będzie znów funkcją całkowitą i wymierną zmiennej x i będzie równą zeru dla nieskończenie wielu wartości na zmienną x, więc według poprzedniego wszystkie współczynniki różnicy $f(x) - \varphi(x)$ są zerem, a do tego potrzeba i wystarcza, by było $m = n$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

Z tego wynika (przez kontrapozycję), że dwa wielomiany całkowite zmiennej x różnych stopni mogą być sobie równe jedynie dla skończonej ilości wartości na x. Geometrycznie znaczy to, że krzywe, przedstawiające owe funkcje, mają skończoną ilość wspólnych punktów.

Weźmy teraz funkcję całkowitą wymierną stopnia m-go kształtu:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m, \text{ gdzie } a_m \neq 0.$$

Jak wynika z poprzedniego dowodu, y przybrać może wartość 0 dla najwyżej m liczb, podstawionych za x. Liczbami temi są w tym przypadku, gdy jest n. p.: $y = x^2 - 5x + 6$ (funkcja całkow. wymierna stopnia 2-go) liczby 2 i 3, które spełniają równanie: $x^2 - 5x + 6 = 0$. Obrazem geom. tej funkcji jest parabola (rys. 9), przecinająca oś x w punktach $x = 2$ i $x = 3$.

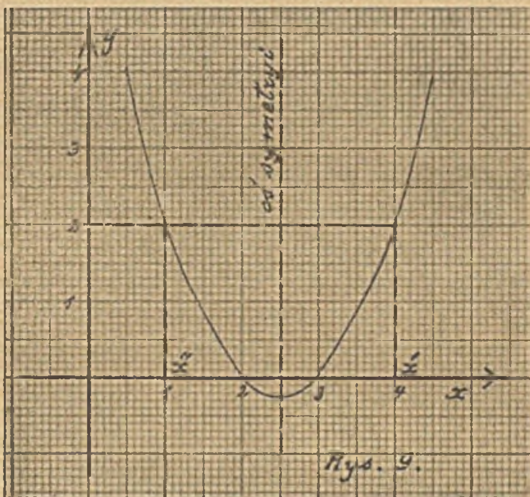
$x =$	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
$y =$	6	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	2	6

Z wykresu widać, że tylko dla wartości na x, zawartych między liczbami 2 a 3, y ma wartość ujemną. Symetryczna budowa paraboli jest geometrycznym obrazem faktu, że dla wartości x' i x'' na x takich, że jest $x' - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} - x''$, funkcja y przybiera równe wartości.

Przykład 6. Weźmy funkcję ułamkową wymierną kształtu:

$$y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}, \text{ ogólnie: } y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n}.$$

Mianownik jest funkcją całkowitą wymierną stopnia n-go, licznik zaś m-go stopnia. Istnieje zatem co najwyżej n takich liczb, które, podstawione w mianowniku za literę x, nadadzą mu wartość 0. Wówczas będzie y symbolem nieoznaczonym $\frac{a}{0}$; takich liczb nie możemy zatem podstawiać za zmienną x, jeśli y ma mieć wartość rzeczywistą i określoną.



W przypadku szczegółowym $y = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$ liczbami, których za x podstawiać nie wolno, są pierwiastki równania:

$x^2 - 4 = 0$, mianowicie $+2$ i -2. Podstawione w powyższej funkcji dadzą one: $y_1 = \frac{20}{0}$, $y_2 = \frac{0}{0}$. Dla $x = \pm 2$ jest więc ta funkcja nieokreśloną. Zatem:

Funkcja wymierna (ułamkowa) jest określona dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej x, z wykluczeniem tych, dla których mianownik jest zerem, a tych jest co najwyżej n, jeśli n jest stopniem dzielnika.

U w a g a I. Jeśli $y = \frac{x + 2}{x^2 - 4}$, to iloraz ten można uprościć: $\frac{x+2}{x^2 - 4} = \frac{x + 2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$, ale tylko, o ile zmienna x ma wartość inną, aniżeli ± 2. Podstawiwszy bowiem $x = +2$, otrzymujemy $\frac{4}{0} = \frac{1}{0}$, a przy $x = -2$ mamy $\frac{0}{0} = -\frac{1}{4}$, a więc w obu przypadkach symbole nieoznaczone, w drugim tylko po stronie lewej, w pierwszym po obu stronach równości. Równość $\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}$ jest więc prawdziwą dla wszystkich wartości zmiennej x z wykluczeniem dwu wartości $x=\pm 2$.

Uwaga II. Z tego faktu, że niektóre funkcje możemy ilustrować wykresem, powstały wyrażenia pochodzenia geometrycznego; mówimy o wartości funkcji w „punkcie" $x=c$ zamiast o wartości funkcji, gdy zmiennej x nadamy wartość c.

§ 3. Zmienne i stałe.

Rozróżniamy w analizie matematycznej wielkości stałe i zmienne. Przez zmienną rozumiemy literę lub jakikolwiek inny znak, przedstawiający dowolną liczbę pewnego zbioru liczbowego niepustego. Oznaczamy zmienne zwykle literami: x, y, z, t, u, v etc.

Przez stałą rozumiemy literę lub jakikolwiek inny znak, który oznacza jedną jedyną liczbę, zupełnie określoną, np.: $3, 5, \pi$ etc. W każdem zagadnieniu dokładnie powinno być podane, które symbole uważamy za stałe, a które za zmienne.

§ 4. Funkcja dwu lub więcej zmiennych.

Dotychczas zajmowaliśmy się jedynie funkcjami jednej zmiennej $y=f(x)$. Obecnie przechodzimy do funkcji dwu zmiennych. Tak, jak przy funkcji jednej zmiennej, do każdej liczby x_0 pewnego niepustego zbioru należała pewna ściśle określona liczba y_0, których zbiór określa funkcję zmiennej (x), tak też przy funkcji dwu zmiennych do każdej pary rzeczywistych liczb (x_0, y_0) dowolnie przez nas dobranych będzie należeć pewna trzecia ściśle określona liczba $z_0=f(x_0, y_0)$, których zbiór określa funkcję $f(x, y)$ dwu zmiennych niezależnych (x, y).

Funkcja (y) jednej zmiennej (x) oznaczała nam w dość prostych przypadkach geometrycznie jakąś linję na płaszczyźnie (x, y); zapytajmy więc, co oznaczać nam będzie geometrycznie funkcja (z) dwu zmiennych (x, y).

Jak wiadomo z geometrji analitycznej, para liczb (x, y) wyznacza na płaszczyźnie jednoznacznie pewien punkt i odwrotnie każdemu punktowi na płaszczyźnie odpowiada pewna para liczb t. zw. współrzędnych punktu. Otóż bierzemy pod uwagę pewien niepusty zbiór par liczb (x, y); geometrycznie zbiór ten wyznaczy nam zbiór pewnych punktów na płaszczyźnie np. pewien obszar (Ob). Każdy punkt (x, y) tego obszaru (Ob), leżącego na płaszczyźnie (x, y) wyznacza parę liczb (x, y), dla której funkcja $f(x, y)$ niech będzie określona. Do każdej zatem pary liczb (x_0, y_0) z obszaru (Ob) należy pewna ściśle określona trzecia liczba z_0 t. zn. każdemu punktowi obszaru (Ob) przypisujemy pewien punkt w ściśle określonej wysokości i w ten sposób dostaniemy nowy zbiór punktów (Z), które utworzą powierzchnię w dość prostych przypadkach. Geometycznym obrazem funkcji dwu zmiennych może być tedy powierzchnia, a w szczególnym przypadku płaszczyzna, gdy jest $z = ax + by + c$, gdzie a, b, c są stałemi.

Weźmy pod uwagę np. płaszczyznę (π), określoną równaniem: (1) $z = 2x + 5y - 7$ i przedstawmy ją przy pomocy jej śladów na płaszczyznach (x, y) i (x, z).

Ślad poziomy t. zn. π_h znajdziemy jako krawędź przecięcia się płaszczyzny π z płaszczyzną (x, y); jak wiemy, równanie $z = 0$ daje właśnie płaszczyznę poziomą (x, y). Równanie śladu poziomego będzie więc prostą

$$0 = 2x + 5y - 7, \quad z = 0.$$

Aby tę prostą na płaszczyźnie (x, y) wyrysować, obierzemy dwa punkty na tej prostej leżące, co zawiera oto tabelka:

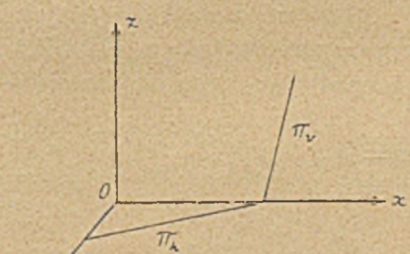
x	y
1	1
-4	3

Krawędź przecięcia się płaszczyzny π z płaszczyzną (x, y) będzie biegła przez punkty $(1, 1)$ i $(-4, 3)$ na płaszczyźnie (x, y).

Podobnie znajdziemy ślad pionowy π_v, określony równaniami: $z = 2x - 7, y = 0$; dość nam znaleźć jeszcze jeden punkt na rzutni pionowej (x, z):

x	z
3	-1

(zob. rys. 10).

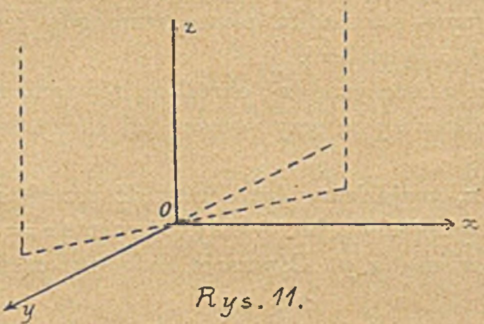


Rys. 10.

Definicja ścisła: Funkcję rzeczywistą dwu zmiennych rzeczywistych (x, y) określa zbiór liczb rzeczywistych, który w następujący sposób definiujemy: Weźmy niepusty zbiór par rzeczywistych liczb (x, y); każdej takiej parze przydajemy pewną rzeczywistą trzecią liczbę (z), zależną od doboru liczb (x, y).

Zmienną (z) nazywamy funkcją dwu zmiennych x, y, co w piśmie znaczymy znakiem $z = f(x, y)$.

Uwaga. Jeśli weźmiemy pod uwagę powierzchnię określoną równaniem $z = \frac{1}{x+y}$, to nie możemy tu na x i y nadawać takich liczb, dla których zachodziłaby równość $x + y = 0$; znaczyłoby to geometrycznie, że powierzchnia określona równaniem $z = \frac{1}{x+y}$ nie przecina się z płaszczyzną $x + y = 0$; ta płaszczyzna przechodzi przez oś (z) i ma jako ślad poziomy dwusieczną kątów między osiami (x, y), przechodzącą przez II i IV kwadrant płaszczyzny (x, y) (rys. 11).



Rys. 11.

Funkcja dwu zmiennych sprowadza się do funkcji jednej zmiennej, gdy obie zmienne x, y będą funkcjami jednej zmiennej. Kładąc np. $x = 2t$, $y = 3t - 8$ w związku $z = 2x + 5y - 7$, otrzymujemy $z = 19t - 47$, jako funkcję jednej zmiennej t. Geometrycznie znaczy to, że na płaszczyźnie $z = 2x + 5y - 7$ wybieramy linję (prostą), której rzut na płaszczyźnie (x, y) ma równanie $x = 2t$, $y = 3t - 8$.

Gdy we funkcji $z = f(x, y)$ przyjmiemy $x = x_0$, to otrzymamy krzywą przecięcia się powierzchni $z = f(x, y)$ z płaszczyzną $x = x_0$ prostopadłą do osi x i równanie tej krzywej przybierze postać:

$$\left\{\begin{array}{l} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{array}\right\}$$ spółrzędna (z) będzie wzdłuż krzywej funkcją jednej tylko spółrzędnej (y), będzie bowiem wzdłuż krzywej $z = f(x_0, y)$, przyczem x_0 oznacza stałą.

Możemy iść dalej i mówić o funkcji trzech i większej ilości zmiennych niezależnych. Niech (n) oznacza liczbę naturalną i weźmy pod uwagę niepusty zbiór (n) liczb $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tak, iż elementami zbioru będą nie pojedyncze liczby, ale elementem będzie zbiór (n) liczb. Otóż do każdego zbioru (n) liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ przydajemy liczbę rzeczywistą y; ten zbiór liczb (y) określi funkcję rzeczywistą (y) zmiennych rzeczywistych ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) czyli

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Będziemy stale mówili krótko: funkcja zmiennych ($x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Rozdział II. Granica funkcji i ciągłość.

§ 5. Intuicyjne pojęcie granicy funkcji jednej zmiennej.

Przykład 1. Niech y będzie funkcją zmiennej x, określoną wzorem: $y = \frac{x-2}{x^2-4}$. Funkcja ta jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x, z wyłączeniem tych, dla których dzielnik jest równy zeru, co zachodzi w przypadku, gdy $x = \pm 2$.

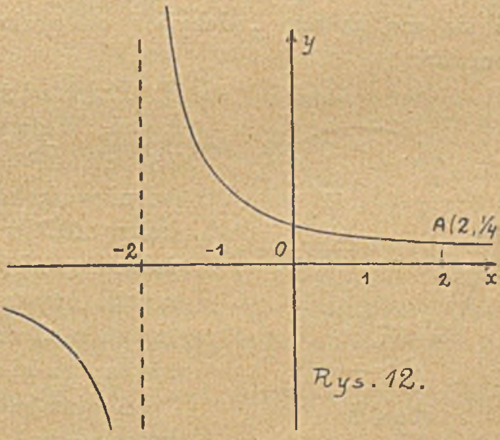
Dla tych wartości na x wzór $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ zawodzi, t. zn. nie pozwala określić wartości na y czyli nie pozwala nam skojarzyć żadnej liczby określonej z liczbami $x = \pm 2$. Aby więc wyrysować obraz geometryczny funkcji:

$y = \frac{x-2}{x^2-4}$ (I), musimy zastrzedz się, że $x \neq \pm 2$. Wówczas możemy iloraz po stronie prawej uprościć i będzie:

$y = \frac{1}{x+2}$ (II).

Obraz geom. tej funkcji przedstawia rys. 12.

Aby krzywa z rys. 12 była również obrazem geom. funkcji (I), trzebaby wyłączyć z niej punkt A o odciętej $x = 2$, w myśl zastrzeżenia. Rysunkowo postulat ten spełnić się nie da. [Punkt A ma współrzędne $(2, \frac{1}{4})$].



Rys. 12.

Streszczając się, powiemy:

W punkcie $x = 2$ funkcja (I) nie ma żadnej wartości oznaczonej; punkt $A(2, \frac{1}{4})$ nie należy zatem do wykresu tej funkcji.

Natomiast należy on do obrazu geom. funkcji (II). Rozważając wartości funkcji (I) w sąsiedztwie punktu $x = 2$, tak z prawej, jak i z lewej strony, spostrzeżemy, że wartości te dla punktów osi x po prawej stronie są mniejsze, po lewej większe od liczby $\frac{1}{4}$ i zbliżają się coraz bardziej do tej wartości, im bliżej punktu $x = 2$ pomyślimy rozważane punkty. Mając na myśli wartości bezwzględne, powiemy, że im bliższe zera jest $|2 - x|$, tem bardziej zbliża się wartość funkcji do liczby $^1/_4$.

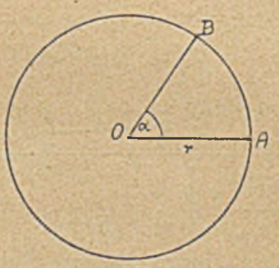
Liczbę $^1/_4$ nazwiemy przeto **granicą** funkcji $y = \frac{x-2}{x^2-4}$ dla x zbliżającego się do liczby 2.

Graficznie wyrażamy to w sposób następujący:

gdy $x \to 2$	i czytamy: Gdy x dąży do wartości 2, to
to $\frac{x-2}{x^2-4} \to \frac{1}{4}$	funkcja $\frac{x-2}{x^2-4}$ dąży do wartości $\frac{1}{4}$.

Innemi słowy: im mniejsze weźmiemy $|2 - x| > 0$, (gdyż ma być $x \neq 2$), tem mniej różni się od zera wartość $\left|\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{1}{4}\right|$. Naodwrót, chcąc otrzymać ostatnią różnicę mniejszą od liczby np. $\frac{1}{1{,}000.000}$, mamy tylko dobrać odpowiednio małą różnicę $|2 - x| > 0$ czyli mamy skrępować swobodę wyboru punktu x i nie pozwolić się mu zbytnio „odchylić“ od liczby 2 na „lewo“ czy na „prawo“.

Przykład 2. **Radjan, jako miara kąta.** Weźmy w kole dowolnem (rys. 13) łuk $\overset{\frown}{AB} = r$, t. j. łuk równy promieniowi koła i przyjmijmy kąt środkowy AOB, należący do tego łuku, za jednostkę mierzenia kątów, zamiast jednostki, używanej w praktyce i zwanej stopniem. Jednostkę tak określoną nazwijmy **radjanem**.



Rys. 13.

Radjan jest to więc kąt środkowy, na którym leży łuk koła, równy promieniowi.

Trzeba będzie okazać, że radjan nie zależy od wielkości promienia koła. Oznaczmy przez l długość dowolnego łuku $\overset{\frown}{AB}$, a przez α wielkość kąta AOB w stopniach. Ponieważ łuki są wprost proporcjonalne do odpowiednich kątów środkowych, więc z faktów, że:

łukowi l odpowiada kąt α

i obwodowi $2r\pi$ „ „ 360^0, wnioskujemy, że jest:

$\frac{l}{2r\pi}=\frac{\alpha}{360}$ czyli $l=\frac{2r\pi\alpha}{360}=\frac{r\pi\alpha}{180}$. A że przyjęliśmy $l=r$, tedy jest z ostatniej równości: $r=\frac{r\pi\alpha}{180}$ czyli $1=\frac{\pi\alpha}{180}$; w tej zaś równości nie zachodzi liczba r, w czem właśnie ujawnia się niezależność radjanu od długości promienia koła; stąd otrzymujemy: $\alpha=\frac{180}{\pi}$... (I) czyli 1 radjan jest to kąt mający $\frac{180}{\pi}$ stopni t. j. w przybliżeniu do 1″ kąt $57^0\ 17'\ 44''$.

Jaka liczba będzie mierzyła kąt prosty przy jednostce 1 Radjana? Szukaną liczbę oznaczmy przez x. Kątowi 90^0 odpowiada łuk $l=\frac{2r\pi}{4}=\frac{r\pi}{2}$. Ponieważ kątowi 1 rad. odpowiada łuk r

i „ x „ „ „ $\frac{r\pi}{2}$,

przeto:

$$1:x=r:\frac{r\pi}{2}, \text{ skąd } x=\frac{\pi}{2}.$$

Kąt prosty ma więc $\frac{\pi}{2}$ radjanów.

Przeto możemy ułożyć następującą tabelkę:

Stopni	Radjanów
90	$\pi/_2$
180	π
270	$^3/_2\pi$
360	2π

Jeśli jednostką kąta jest stopień, to liczba mierząca łuk koła $l=\frac{r\pi\alpha}{180}$ (II), gdzie α jest liczbą mierzącą kąt środkowy w stopniach, a r liczbą mierzącą promień koła przy jednostce tej samej, przy której wymierzono łuk (l).

Jeżeli kąt α^0 wynosi zarazem Θ radjanów, to znajdziemy związek między liczbami α i Θ w sposób następujący: ponieważ kąt α^0 wynosi Θ radjanów, zaś kąt 90^0 ma $\frac{\pi}{2}$ rad., więc na mocy znanej własności stosunku dwóch kątów będzie: $\alpha:90=\Theta:\frac{\pi}{2}$ czyli:

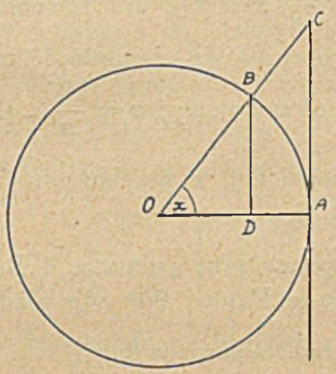
(III) $$\Theta=\frac{\alpha\pi}{180}.$$

Wstawiwszy wartość, otrzymaną na Θ w równanie (II), widzimy, że jest:

(IV) $$l = r\Theta,$$

jako długość łuku, jeśli kąt środkowy łuku mierzymy w radjanach.

Po takiem przygotowaniu weźmy pod uwagę następującą figurę, w której kąt środkowy AOB ma być kątem dodatnim z I ćwiartki. (rys. 14). Niech x mierzy kąt AOB w radjanach. Zakładamy, że:



Rys. 14.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ czyli: kąt x jest ostrym;

$0A = 1 = 0B$ czyli promień koła równa się jednostce długości; więc $\overline{0D} = \cos x$, $\overline{BD} = \sin x$, $\widehat{AB} = x$, $AC = \operatorname{tg} x$.

(U w a g a. Jeśli długość mierzymy tu, biorąc za jednostką promień koła, to jednostką powierzchni będzie kwadrat o boku równym promieniowi).

Z rysunku widać, że powierzchnie: trójkąta 0BD < wycinka koła A0B < trójkąta A0C.

Pow. trójkąta 0BD $= \frac{\overline{0D}\,.\,\overline{BD}}{2} = \frac{1}{2}\sin x \cos x$

Pow. wycinka koła A0B $= \frac{\widehat{AB}\,.\,\overline{0A}}{2} = \frac{x\,.\,1}{2} = \frac{x}{2}$

Pow. trójkąta A0C $= \frac{\overline{A0}\,.\,\overline{AC}}{2} = \frac{1\,.\operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$

Podstawiając te wielkości w powyższą nierówność, otrzymamy: $\frac{1}{2}\sin x \cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, a po pomnożeniu przez 2:

(1) $$\sin x \cos x < x < \operatorname{tg} x.$$

Weźmy pierwszą część tej nierówności, t. j.: $\sin x \cos x < x$. Podzielmy ją przez liczbę $\cos^2 x$, która jest dodatnią, więc znak nierówności się nie zmieni po podzieleniu. Otrzymamy:

$\frac{\sin x}{\cos x} < \frac{x}{\cos^2 x}$ czyli: $\operatorname{tg} x < \frac{x}{\cos^2 x}$. Ostatnią nierówność podzielmy jeszcze przez liczbę x (dodatnią). Będzie:

(2) $$\frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Z drugiej części nierówności (1) mamy: $x < \operatorname{tg} x$. Dzielimy obie strony przez liczbę x, przeto $1 < \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. Połączmy tę nierówność z nierównością (2).

Otrzymujemy:

$$1 < \frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{3}$$

Nierówność (3) została wyprowadzona przy założeniu, że $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ale okażemy, że wzór ten jest prawdziwy także dla ujemnej wartości x, takiej, że jest $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Kładziemy więc $x = -y$, gdzie już $y > 0$. Wtedy mamy:

$$-\frac{\pi}{2} < -y < 0 \ldots\ldots (4)$$

Stąd $-\frac{\pi}{2} < -y$; dodajmy po obu stronach wyrażenie: $y + \frac{\pi}{2}$, t. j. $y + \frac{\pi}{2} = y + \frac{\pi}{2}$; po zesumowaniu mamy $y < \frac{\pi}{2} \ldots\ldots (a)$.

Podobnież do nierówności $-y < 0$ (zob. nierówność (4)) dodajmy

równość: $y = y$,

a otrzymujemy $0 < y \ldots\ldots$ (b). Połączywszy wyniki (*a*) i (*b*), otrzymamy:

$$0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

Dla takich liczb y wolno napisać nierówność (3), zamieniając literę x na y: $1 < \frac{\operatorname{tg} y}{y} < \frac{1}{\cos^2 y}$. A że $y = -x$, więc: $1 < \frac{\operatorname{tg}(-x)}{-x} < \frac{1}{\cos^2(-x)}$. Wiemy, że $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, a $\cos(-x) = \cos x$, więc: $1 < \frac{+\operatorname{tg} x}{+x} < \frac{1}{\cos^2 x}$, podobnie, jak wzór (3).

Widzimy więc, że wzór (3) jest ważny tak dla dodatnich, jak i dla ujemnych wartości na x, byle było albo $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, albo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ czyli $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

Weźmy pod uwagę teraz funkcję [ze wzoru (3)]: $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; x może tu przybierać wszelkie wartości rzeczywiste z wyjątkiem zera, oraz nieparzystych wielokrotności liczby $\frac{\pi}{2}$. (Albowiem $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{2}$, ogólnie: $\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}.(2n-1)\right]$ nie przedstawiają określonej liczby, gdy n oznacza liczbę całą).

Jeśli x zbliża się do wartości 0, to $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ zbliża się do wartości 1. O tem wnioskujemy ze wzoru (3), bo wartość funkcji $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ zawarta jest między 1 a wartością funkcji $\frac{1}{\cos^2 x}$, która to funkcja również zbliża się do 1, jeśli x dąży do zera, albowiem $\cos 0 = 1$. (Rozważania te mają tylko charakter intuicyjny; ścisłe rozumowanie będzie możliwe po rozdziale o funkcjach ciągłych).

To, co powiedzieliśmy w przedostatniem zdaniu, wynika z łatwością ze wzoru (3); przez odjęcie od wszystkich wyrazów po jednostce otrzymamy:

$$0 < \frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1 < \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \;\ldots\ldots\ldots\; (5).$$

$$\text{A że: } \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x, \text{ więc:}$$

$$0 < \frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1 < \operatorname{tg}^2 x \;\ldots\ldots\; (6).$$

Z tego widać jasno, że im bliższe zera będzie x, tem mniejszą będzie wartość $\operatorname{tg}^2 x$, oraz tem bliższe wartości 1 będzie $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Wartość bezwzględna różnicy $\left|\frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1\right|$ zbliża się wtedy do zera.

Możemy tak dobrać $|x|$, ażeby ta różnica była mniejszą od każdej, dowolnie wybranej liczby ε, większej od zera (n. p. $\varepsilon = 0{\cdot}000001$). Im mniejsze przyjmiemy ε, tem bardziej należy zmniejszyć obszar swobody liczby x, która wtedy co do bezwzględnej swej wartości musi być mniejsza od pewnej liczby δ zależnej od liczby ε, co piszemy: $|x| < \delta$.

Tu $\delta > 0$. Ale musi być $x \neq 0$, więc też $0 < |x|$.

Tę liczbę δ możemy dlatego nazwać „swobodą punktu x"; δ zależy oczywiście od dowolnie przyjętej wartości $\varepsilon > 0$. Powiemy więc, streszczając ostatnie wyniki: Do każdej liczby $\varepsilon > 0$, dowolnie naprzód wybranej, istnieje pewna liczba $\delta > 0$, taka, że, gdy się przyjmie dowolne (x), byle spełniające nierówność $0 < |x| < \delta$, to będzie $\left|\frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1\right| < \varepsilon$. Innemi słowy: Nierówność: $0 < |x| < \delta$ pociąga za sobą nierówność $\left|\frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1\right| < \varepsilon$.

Piszemy to także (mniej ściśle, lecz obrazowo):

gdy	$x \to 0,$	i czytamy: gdy x dąży do zera,
to	$\frac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$	to $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ dąży do jedności.

Tę liczbę 1 nazwiemy granicą funkcji $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ dla zmiennej x, dążącej do zera, co zapiszemy także w ten sposób:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \text{ albo } \operatorname{gr.}_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

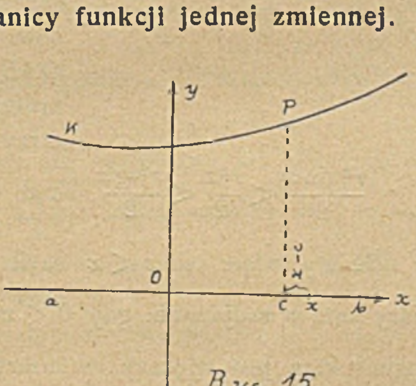
Wykazaliśmy tedy, że funkcja $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ma granicę 1, gdy $x \to 0$.

Symbol lim jest skróceniem łacińskiego słowa „limes", oznaczającego granicę.

§ 6. Ścisłe określenie granicy funkcji jednej zmiennej.

Przykłady 1 i 2 możemy uogólnić następująco:

Dana jest pewna funkcja $f(x)$, określona dla wszystkich wartości na zmienną x, które spełniają warunek: $a \leqslant x \leqslant b$, z wyłączeniem może wartości $x = c$, gdzie $a < c < b$. Objaśni to rysunek 15.

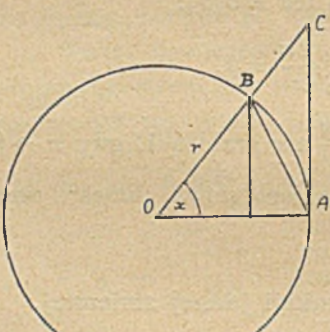


Rys. 15.

Krzywa (K) niech będzie obrazem geom. funkcji $f(x)$; do obrazu tego może nie należeć punkt P, mający odciętą $x = c$. Funkcja $f(x)$ jest określona dla wszystkich x, leżących między punktami a i b, z wyjątkiem może punktu c. Może się zdarzyć, że istnieje pewna liczba A, która ma własność następującą:

Do każdej liczby $\varepsilon > 0$, naprzód wybranej, istnieje liczba $\delta > 0$, (zależna od ε) taka, że, skoro tylko liczba x spełnia warunek: $0 < |x - c| < \delta$, to wtedy bezwzględna wartość różnicy $|f(x) - A|$ jest mniejsza od ε. — Jeżeli liczba A tę własność posiada, to nazwiemy ją granicą funkcji $f(x)$ dla zmiennej x, dążącej do liczby c. Znakiem $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ lub $\underset{x \to c}{\text{gr.}} f(x)$ oznaczać będziemy właśnie granicę funkcji $f(x)$ dla zmiennej x, dążącej do liczby c; przeto: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ lub $\underset{x \to c}{\text{gr.}} f(x) = A$. (W przykładzie 1 było: $A = \frac{1}{4}$, $c = 2$; w przykładzie II: $A = 1$, $c = 0$).

W pierwszej części ścisłej definicji granicy funkcji niema mowy o „zdążaniu" czy „zbliżaniu się" funkcji $f(x)$ do liczby A. Wyrażenia takie nie są wprawdzie wiernem odbiciem faktów, określonych w definicji ścisłej, mimo to będziemy ich używali, bo są wygodne dla intuicji; a jeżeli, posługując się niemi, będziemy stale pamiętali o definicji ścisłej, to nie dojdziemy do żadnych fałszywych wniosków.



Rys. 16.

Przykład 3. Zachowując oznaczenia przykładu 2, możemy przy nierówności $0 < x < \frac{\pi}{2}$, napisać: (rysunek 16).

pow. trójk. $OAB <$ pow. wyc. koł. $OAB <$ pow. trójk. OAC. Jeżeli promień koła mierzy się liczbą r, to otrzymujemy stąd:

$$\frac{r^2 \sin x}{2} < \frac{r^2 x}{2} < \frac{r^2 \operatorname{tg} x}{2}, \text{ skąd wynika: } \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Mamy więc: $\sin x < x$ czyli sinus kąta jest mniejszy od miary kąta w radjanach, gdy $0 < x < \frac{\pi}{2}$, a nadto $x < \operatorname{tg} x$ czyli tangens kąta jest większy od miary kąta w radjanach.

Z nierówności $\sin x < x$ wynika po podzieleniu obu stron przez x:

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \ldots\ldots (1).$$

Założyliśmy, że jest $0 < x < \frac{\pi}{2}$, więc $\cos x > 0$, tedy wolno przez $\cos x$ nierówność: $x < \frac{\sin x}{\cos x}$ pomnożyć, a przez x podzielić; otrzymamy kolejno: $x \cos x < \sin x$,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} \ldots (2).$$

Łącząc nierówności (1) i (2), otrzymujemy:

$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \ldots\ldots$ (I) dla liczb x o własności: $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Niech będzie $0 < x < \frac{\pi}{2}$ i $y < 0$ i połóżmy $y = -x$, wtedy $x = -y$; nadto będzie $-\frac{\pi}{2} < y < 0$. Zobaczmy, czy nierówność (I) będzie prawdziwa, gdy w niej zamiast litery x napiszemy literę y. Ponieważ jest: $-y = x$ i ponieważ $0 < x < \frac{\pi}{2}$, więc wolno w nierówności (I) zamiast x napisać $(-y)$. Mamy więc:

$\cos(-y) < \frac{\sin(-y)}{-y} < 1$. Ale wiadomo, że $\cos(-y) = \cos y$, $\sin(-y) = -\sin y$; więc otrzymujemy: $\cos y < \frac{-\sin y}{-y} < 1$ czyli:

$\cos y < \frac{\sin y}{y} < 1 \ldots\ldots$ (II), więc nierówność (I) jest prawdziwa także dla ujemnych wartości kąta x. Zmienna x może zatem być zawarta między $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$, z wykluczeniem liczby $x = 0$, i widoczne, że funkcja $z = \frac{\sin x}{x}$ jest określona dla każdej wartości na x, różnej od zera.

Wyprowadzoną nierówność (I), prawdziwą tak dla dodatnich jak i ujemnych wartości na x, zawartych między $+\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$, z wyjątkiem zera, odejmijmy od równości $1 = 1 = 1$. (Znaki nierówności zmienią się na przeciwne).

Od $1 = 1 = 1$ odejmujemy nierówność:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \text{ tedy}$$

$$1 - \cos x > 1 - \frac{\sin x}{x} > 0 \text{ czyli } 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \ldots (\mathrm{III}).$$

Z geometrji wiadomo, że $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, zatem $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, a $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$. Wyniknie zatem ze wzoru (III):

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2} \ldots\ldots (IV).$$

Niech $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Wiemy z poprzednich rozważań, że $\sin x < x$, równie słusznie zatem będzie $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ (bo za x mogą być podstawione liczby mierzące dowolne kąty ostre, a takim jest też kąt, mierzony liczbą $\frac{x}{2}$) — z czego wynika też, że $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$, (podnieść obie strony do kwadratu wolno, bo są dodatnie) oraz: $2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$. Nierówność (IV) możemy zatem napisać tak: $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$, z czego otrzymujemy równie prawdziwą nierówność: $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} \ldots\ldots$ (V), wyprowadzoną dla liczb x, spełniających związek $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Ale tak, jak to zrobiliśmy poprzednio, można wykazać, że nierówność (V) jest ważną tak dla dodatnich, jak i ujemnych wartości na x, byle było $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ czyli $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

Według nierówności (V) jest: $1 - \frac{\sin x}{x} > 0$. Liczba dodatnia jest równa swej bezwzględnej wartości; możemy zatem nierówność (V) napisać we formie:

$$0 < \left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \frac{x^2}{2} \ldots\ldots (VI).$$

Z tego można odczytać rzecz następującą: Jeśli za $\frac{\sin x}{x}$ podstawimy liczbę 1, to popełnimy błąd bezwzględnie mniejszy od liczby $\frac{x^2}{2}$. Ponadto, gdy wybierzemy liczbę $\varepsilon > 0$ dowolnie i potem (x) tak, by było $0 < \frac{x^2}{2} < \varepsilon$ czyli $0 < x^2 < 2\varepsilon$, to po wyciągnięciu pierwiastka kwadratowego z obu (dodatnich) stron nierówności otrzymamy: $\sqrt{x^2} < \sqrt{2\varepsilon}$.

Ale $\sqrt{x^2} = |x|$; zatem $0 < |x| < \sqrt{2\varepsilon}$. Ale było też: $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$.

Oznaczmy więc przez δ mniejszą z liczb $\sqrt{2\varepsilon}, \frac{\pi}{2}$, gdy są nierówne, gdyby zaś były równe, to niech δ oznacza ich wspólną wartość. Wtedy nierówności $0 < |x| < \sqrt{2\varepsilon}$, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, można zastąpić jedną nierównością: $0 < |x| < \delta$, przyczem zapiszemy, że $\delta = \operatorname{Min}\left(\sqrt{2\varepsilon}, \frac{\pi}{2}\right)$, gdzie Min jest skróceniem słowa minimum t. j. najmniejsze. Do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje więc liczba $\delta > 0$, o której mówi definicja granicy funkcji, t. zn.: gdy $0 < |x| < \delta$, to $\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon$. Możemy zatem uważać liczbę 1 za granicę funkcji $z = \frac{\sin x}{x}$, gdy $x \to 0$. Jest więc:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Rzecz tę (zwłaszcza przy pomocy nierówności (I)) niech czytelnik zilustruje na figurze.

Nie każda funkcja musi posiadać granicę w rozważanym punkcie $x = c$ czyli liczba A, o której mówi definicja granicy, nie musi istnieć dla każdej funkcji. Jeśli jednak funkcja $f(x)$ ma granicę dla $x \to c$, to tylko jedną. Gdyby bowiem dwie liczby A i A' były granicami funkcji $f(x)$ dla zmiennej $x \to c$, to mielibyśmy równocześnie dla każdej liczby $\varepsilon > 0$:

gdy (1) $0 < |x - c| < \delta$, to (2) $|f(x) - A| < \varepsilon$ i zarazem

gdy (3) $0 < |x - c| < \delta'$, to (4) $|f(x) - A'| < \varepsilon$.

Gdy $\delta'' = \operatorname{Min.}(\delta, \delta')$ i gdy $0 < |x - c| < \delta''$, to zachodzą równocześnie nierówności (2) i (4). Ale jest $A - A' = A - f(x) + f(x) - A'$, więc

$$|A - A'| = |A - f(x) + f(x) - A'| \leqq |A - f(x)| + |f(x) - A'| < 2\varepsilon.$$

Jeżeliby było $A \neq A'$, to $|A - A'| > 0$ i przeto $\varepsilon > \frac{|A - A'|}{2}$, więc liczba ε nie byłaby dowolną, bo nie wolnoby jej obrać tak: $\varepsilon \leqq \frac{|A - A'|}{2}$. Jest więc $A = A'$, o co chodziło. Zatem symbol:

$\lim_{x \to c} f(x)$ albo nie oznacza żadnej liczby albo oznacza jedną liczbę czyli jest jednoznacznie określony. Gdyby się więc okazało, że jakaś funkcja $f(x)$ ma granice A i A' dla $x \to c$, to można wnioskować stąd na pewne, że $A = A'$. Powiemy krótko: *Funkcja ma w każdym punkcie co najwyżej jedną granicę.*

Funkcje mogą mieć najróżnorodniejsze określenia i nie istnieje ogólna metoda obliczania granicy. Musimy niemal dla każdej funkcji granicę obliczyć w sposób indywidualny, właściwy tylko danej funkcji lub co najwyżej funkcjom tego samego typu. Istnieje jednak pewna, dość wielka klasa funkcji, dla której wyznaczenie granicy jest dość łatwe. Tą właśnie klasą zajmiemy się obecnie. Inną klasą funkcji zajmiemy się znacznie później (§ 50).

§ 7. Ciągłość funkcji jednej zmiennej.

Weźmy jeszcze raz pod uwagę funkcję $y = \frac{\sin x}{x}$. Widoczne, że dla $x = 0$ równość ta funkcji y nie określa i że z jej obrazu geometrycznego należałoby niejako „wymazać" punkt o odciętej $x = 0$. Aby jednak można było dla tej funkcji otrzymać krzywą, nie przerwaną w punkcie $x = 0$ czyli ciągłą, trzeba przyjąć:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\sin x}{x} \text{ dla } x \neq 0 \\ \text{nadto} \quad y &= 1 \text{ dla } x = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

t. zn. trzeba przyjąć, że funkcja y w punkcie $x = 0$ przybiera wartość równą swej granicy. Ponieważ obraz geometryczny takiej funkcji nie ma już przerw czyli jest ciągły, przeto i funkcję taką nazwiemy „ciągłą". Gdybyśmy jednak napisali:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\sin x}{x} \text{ dla } x \neq 0 \\ y &= 10 \quad \text{„} \quad x = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

to taka funkcja, chociaż w każdym punkcie określona, byłaby nieciągłą, gdyż wartość jej w punkcie $x = 0$ jest różną od jej granicy dla $x \to 0$.

Te rozważania nasuwają już same przez się następującą definicję funkcji ciągłej dla $x = c$:

Jeśli funkcja $f(x)$ jest określona dla $x = c$, gdzie $a < c < b$, i gdy funkcja $f(x)$ ma granicę dla $x \to c$ i równą wartości $f(c)$ tej funkcji w punkcie c, wtedy nazwiemy taką funkcję „ciągłą w punkcie c", co wyrazimy symbolem:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{gdy} & x \to c, \\ \text{to} & f(x) \to f(c), \end{array}\right\}$$

przyczem $f(c)$ oznacza właśnie wartość tej funkcji w punkcie c.

Własność funkcji ciągłej w punkcie c możemy intuicyjnie tak określić:

Gdy weźmiemy wartość na x nie daleko od punktu (c) na lewo lub na prawo, to, jeśli różnica $|x - c|$ będzie dość małą, to różnica wartości funkcji w punkcie c i w punkcie x, który obraliśmy w bliskości punktu c, będzie co do bezwzględnej wartości tak małą. jak nam się podoba.

W przykładzie zaś (II) w punkcie $c = 0$ ma funkcja $f(x) = y$ wartość 10, a tuż obok wartość, „zbliżoną do 1"; różnicy między temi wartościami nie można dowolnie zmniejszać, bo zawsze będzie ona większą od 9; funkcja taka będzie zatem nieciągłą w punkcie $x = 0$.

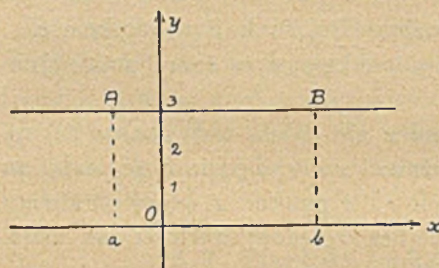
Ciągłość funkcji w punkcie c charakteryzuje fakt, że różnicę $|f(x) - f(c)|$ można zrobić dowolnie małą. Jeżeli uwzględnimy określenie granicy, to zauważymy, że ciągłość funkcji $f(x)$ można określić w ten sposób:

Funkcja $f(x)$ jest ciągłą dla wartości $x = c$ jeśli: 1) jej wartość w punkcie $x = c$ jest określoną [czyli jeśli symbol $f(c)$ oznacza liczbę] i 2) do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że, gdy jest $|x - c| < \delta$, to jest $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Nie trzeba tu dodawać warunku, że ma być $0 < |x - c| < \delta$, bo dla $x = c$ jest $|f(x) - f(c)| = |f(c) - f(c)| = 0 < \varepsilon$.

(Uwaga: Gdy rozważaliśmy granice funkcji, to nie miała dla nas znaczenia wartość funkcji w punkcie $x = c$, natomiast przy omawianiu ciągłości funkcji, istnienie tej wartości i sama wartość mają znaczenie zasadnicze. Gdy przyjmiemy $z = \frac{\sin x}{x}$ dla $x \neq 0$ i $z = 1$, czy też $z = 10$ dla $x = 0$, czy nawet pozostawimy (z) nieokreślone dla $x = 0$, to granica dla $x \to 0$ dla każdej z tych funkcji (z) będzie ta sama i równa liczbie 1. Funkcja (z) będzie jednakowoż ciągłą tylko wtedy, gdy dla $x = 0$ przyjmiemy $z = 1$).

Nawiązując do poprzedniego paragrafu widzimy, że, ponieważ funkcje ciągłe mają granice, równe wartości funkcji w danym punkcie, więc sposób wyznaczania tych granic będzie dla wszystkich funkcji ciągłych podobny i dość łatwy.

Większość funkcyj elementarnych są to funkcje ciągłe.



Rys. 17.

Przykłady. I) Weźmy pod uwagę zmienną niezależną x, spełniającą warunek $a \leqslant x \leqslant b$, gdzie jest $a < b$. Każdą liczbę x, czyniącą zadość temu związkowi, skojarzmy z pewną liczbą, zawsze jedną i tą samą, np. 3. Napiszemy to tak: dla $a \leqslant x \leqslant b$ niech będzie $y = 3$.

Obrazem geom. tej funkcji będzie (rys. 17) odcinek $\overline{AB}$, równoległy do osi x, w odległości 3 od niej. Funkcja ta ma wartość $= 3$ w każdym punkcie; jest to t. zw. funkcja stała ($=$ constans). Ogólnie:

Dla $a \leqslant x \leqslant b$ niech będzie $y = c$, gdzie c oznacza pewną liczbę rzeczywistą. W każdym dowolnie obranym punkcie d między a i b funkcja ta jest ciągłą, bo różnica każdych dwóch jej wartości równa jest zeru.

II) *Ciągłość funkcji kwadratowej.*

Funkcja stopnia 2-go kształtu: $y = w_0 + w_1 x + w_2 x^2$, gdzie w_0, w_1, w_2 oznaczają stałe i $w_2 \neq 0$, daje w każdym przypadku jako obraz geometr. parabolę o osi prostopadłej do osi x; parabola może przybierać wobec osi x jedno z sześciu różnych położeń, podanych na rysunku 18.

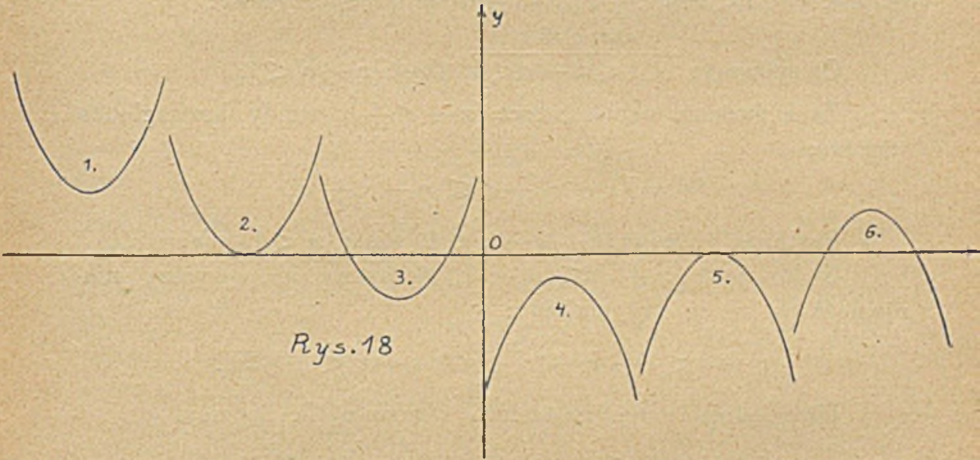
W położeniu 1 i 4 krzywa nie przecina osi x; równanie $w_0 + w_1 x + w_2 x^2 = 0$ nie posiada pierwiastków rzeczywistych; w 2 i 5 ma to równanie po jednym pierwiastku, w położeniu zaś 3 i 6 ma po dwa pierwiastki, przyczem funkcja, przedstawiona obrazem geom. 1, 2, 3, posiada pewne minimum, w przypadkach 4, 5, 6 zaś pewne maximum.

Odnośnie do ciągłości funkcyj całkowitych wymiernych stopnia m-go ($m \geqslant 1$) istnieje następujące twierdzenie:

Wielomian całkowity stopnia m-go względem zmiennej niezależnej x, gdzie m jest liczbą naturalną, jest funkcją ciągłą zmiennej niezależnej dla każdej wartości tej zmiennej.

Twierdzenie to udowodnimy dla $m = 2$ czyli dla wielomianu stopnia 2-go. Jaki jest warunek ciągłości takiej funkcji w punkcie dowolnym c?

Ogólna postać takiej funkcji jest: $f(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2$, gdzie $w_2 \neq 0$, a jeśli x przybiera wartość c, to $f(c) = w_0 + w_1 c + w_2 c^2$. Jeśli $f(x)$ ma być ciągłą w punkcie c, to do każdej liczby, $\varepsilon > 0$ ma istnieć taka liczba $\delta > 0$, że, o ile x nie odchyla się od c na więcej, niż δ czyli o ile $|x - c| < \delta$, to $|f(x) - f(c)|$ jest mniejsze od dowolnie naprzód przyjętej liczby ε.



Rys. 18

Obliczmy tedy różnicę $f(x) - f(c)$. Będzie:

$$f(x) - f(c) = w_1 (x - c) + w_2 (x^2 - c^2)$$

czyli:

$$f(x) - f(c) = w_1 (x - c) + w_2 (x + c)(x - c).$$

Wspólny czynnik $(x - c)$ wyciągnijmy przed nawias:

$$f(x) - f(c) = (x - c)\,[w_1 + w_2 (x + c)].$$

Weźmy teraz bezwzględne wartości obu stron tej równości. Na mocy (zresztą nieodwracalnego) twierdzenia wiemy, że, jeśli dwie liczby są sobie równe, to ich bezwzględne wartości są także równe sobie; będzie tedy:

$$|f(x) - f(c)| = |(x - c)\,\{w_1 + w_2 (x + c)\}|.$$

Po prawej stronie uwzględnijmy twierdzenie: bezwzględna wartość iloczynu równa się iloczynowi bezwzględnych wartości czynników. Otrzymamy więc:

$$|f(x) - f(c)| = |x - c| . |w_1 + w_2 (x + c)|.$$

Bezwzględna wartość sumy dwóch liczb jest mniejsza lub równa sumie bezwzględnych wartości obu składników. Zatem:

$$|f(x) - f(c)| \leqq |x - c| . \{|w_1| + |w_2 (x + c)|\},$$

albo:

$$\text{(I)} \qquad |f(x) - f(c)| \leqq |x - c| . \{|w_1| + |w_2| . |x + c|\}.$$

Załóżmy, że x nie odchyla się zbytnio od (c), ściślej, załóżmy, że jest: $c - 1 < x < c + 1$; od tego odejmijmy równość:

$$c = c = c$$

Otrzymamy: $-1 < x - c < 1$, skąd $|x - c| < 1$.

Za x możemy napisać: $x = (x - c) + c$, wtedy bezwzględna wartość:

$$|x| = |(x - c) + c| \leqq |x - c| + |c|.$$

Ponieważ (jak wyżej) $|x - c| < 1$, więc: $|x| < 1 + |c|$.

Nadto jest: $|x + c| \leqq |x| + |c|$, wstawmy tu powyższą nierówność na $|x|$, to otrzymujemy:

$$|x + c| < 1 + |c| + |c| \text{ czyli } |x + c| < 1 + 2|c|.$$

Uwzględnijmy ten związek w równaniu (I). Będzie:

$$|f(x) - f(c)| \leqq |x - c| . \{|w_1| + |w_2| . (1 + 2|c|)\} =$$
$$= |x - c| . \{|w_1| + |w_2| + 2|c| . |w_2|\}$$

Możemy znaleźć takie x, by prawa strona była mniejsza od naprzód danej liczby $\varepsilon > 0$. Wartość, ujęta w nawias $\{\ \}$ nie jest zerem i jest liczbą dodatnią, gdyż jest to suma liczb nieujemnych, której jeden składnik, mianowicie $|w_2|$ jest większy od zera na mocy założenia. Zatem, jeśli przyjmiemy:

$$|x - c| . \{|w_1| + |w_2| + 2|c| . |w_2|\} < \varepsilon,$$

to przez wyraz w nawiasie $\{\ \}$ wolno obie strony podzielić, zachowując znak nierówności. Będzie więc:

$$|x - c| < \frac{\varepsilon}{|w_1| + |w_2| . (1 + 2|c|)}.$$

Oznaczmy przez δ mniejszą z liczb 1, $\frac{\varepsilon}{|w_1| + |w_2| . (1 + 2|c|)}$, to obie nierówności:

$$|x - c| < 1, \quad |x - c| < \frac{\varepsilon}{|w_1| + |w_2| . (1 + 2|c|)}$$

można zastąpić jedną: $|x - c| < \delta$.

Gdy więc $|x - c| < \delta$, to wtedy $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Jest więc funkcja $f(x)$ ciągłą w punkcie c.

W podobny sposób udowodni czytelnik ogólne twierdzenie.

III) Zbadajmy ciągłość funkcji $y = \sin x$ dla $x = c$. Weźmy bezwzgl. wartość różnicy: $\sin x - \sin c$. Z trygonometrji wiemy, iż:

$$\left|\sin x - \sin c\right| = 2\left|\sin\frac{x - c}{2}\right| . \left|\cos\frac{x\; c +}{2}\right|.$$

Ponieważ $\left|\cos\frac{x + c}{2}\right| \leqslant 1$, więc będzie:

(I) $$\left|\sin x - \sin c\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x - c}{2}\right|.$$

Udowodniliśmy poprzednio, że $\sin y < y$, jeżeli $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Załóżmy, że y może mieć wartości ujemne; niech $z = -y$, to $z > 0$. Gdy $-\frac{\pi}{2} < y < 0$, to $0 < z < \frac{\pi}{2}$. Wówczas będzie $\sin z < z$ czyli:

$$\sin(-y) < (-y), \text{ albo } -\sin y < (-y).$$

Ale $-\sin y > 0$, $-y > 0$, więc: $-\sin y = |-\sin y| = |\sin y| . |-1| = |\sin y|$, oraz: $-y = |-y| = |y| . |-1| = |y|$; tedy: $|\sin y| < |y|$.

Wynika stąd ogólnie, że, jeśli $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ i gdy $y \neq 0$, to:

$$|\sin y| < |y|.$$

Gdy zaś y może przyjąć wartość $y = 0$, to będzie:

$$|\sin y| \leqslant |y| \ldots\ldots \text{(II)},$$

gdyż $\sin 0 = 0$.

Niech więc będzie $\left|\frac{x - c}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$ czyli $\frac{|x - c|}{2} < \frac{\pi}{2}$, to pomnożywszy obie strony przez 2, otrzymamy:

$$|x - c| < \pi.$$

Na mocy nierówności (II) będzie tedy $\left|\sin\frac{x-c}{2}\right| \leqslant \left|\frac{x-c}{2}\right|$.

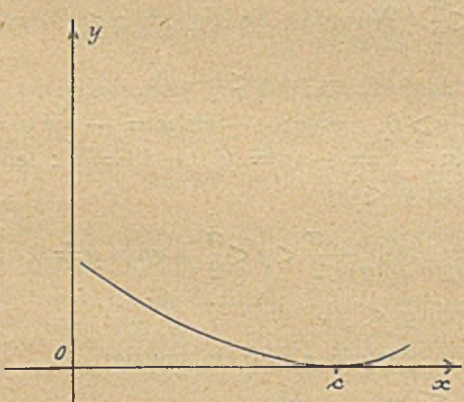
Nierówność (I) możemy zatem rozszerzyć:

$$|\sin x - \sin c| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-c}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-c}{2}\right| \leqslant 2\frac{|x-c|}{2} = |x-c|$$

czyli $|\sin x - \sin c| \leqslant |x-c|$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą i przyjmijmy, że $|x-c| < \varepsilon$, wtedy będzie: $|\sin x - \sin c| \leqslant |x-c| < \varepsilon$. Ale mamy mieć $|x-c| < \pi$ i zarazem $|x-c| < \varepsilon$, niech będzie więc $\delta = \mathrm{Min}(\varepsilon, \pi)$, wtedy dość przyjąć, $|x-c| < \delta$. *Funkcja $y = \sin x$ jest zatem ciągłą dla każdej wartości zmiennej x.* Podobnie znajdzie czytelnik, że *funkcja $y = \cos x$ jest w każdym punkcie ciągłą.* Natomiast funkcje $\mathrm{tg}\, x$ i $\mathrm{ctg}\, x$ nie zawsze są ciągłe, gdyż $tg\,\frac{\pi}{2}$ ani $ctg\,0$ nie oznaczają żadnych liczb.

§ 8. »Nieskończenie mała«.

Termin: „nieskończenie mała" ma za sobą długą już tradycję zwyczajową, dlatego go zmieniać nie będziemy. Nie mniej jest to termin źle dobrany do odnośnego pojęcia. Należałoby raczej użyć nazwy: „nieskończenie malejąca", aby zaznaczyć, że mamy do czynienia z wielkością zmienną.



Rys. 19.

Pojęcie funkcji nieskończenie małej tak określimy: Funkcja $f(x)$ dla $x = c$ jest nieskończenie małą, jeżeli ta funkcja dla $x \to c$ ma granicę zero.

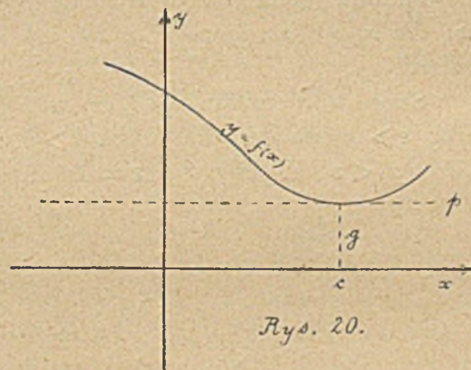
Jej obraz geom. może być, jak na rys. 19.

Tedy dla $x \to c$ ma być: $f(x) \to 0$.

Funkcję tę badamy nie w samym punkcie c, lecz w sąsiedztwie tego punktu, podobnie, jak się to działo przy rozważaniach o granicach funkcji. Nieskończenie małą jest bowiem funkcja o granicy 0.

Załóżmy, że $f(x) \to g$, gdy $x \to c$. Twierdzimy: *Jeżeli funkcja $f(x)$ dla $x \to c$ ma granicę g, to różnica $f(x) - g$ jest nieskończenie* *małą dla* $x = c$; i na odwrót: *gdy różnica* $f(x) - g$ *jest nieskończenie małą dla* $x = c$, *to* $f(x) \to g$, *gdy* $x \to c$. Do każdej bowiem liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, iż, gdy tylko jest $0 < |x - c| < \delta$, to wtedy jest $|f(x) - g| < \varepsilon$, czyli $f(x) - g \to 0$, gdy $x \to c$. Rzecz odwrotna jest podobnie widoczną.

Na obrazie geometr. jest to twierdzenie widoczne i przedstawiać się może mniej więcej tak, jak na rys. 20. Chcąc zmierzyć $|f(x) - g|$, przesuwamy oś x do wysokości g. Wtedy widzimy, że w sąsiedztwie punktu c jest $f(x) - g$ nieskończenie małą.



Rys. 20.

§ 9. Funkcja skończona.

Weźmy pod uwagę funkcję $y = \frac{1}{x}$, której obraz geom. utworzy hyperbolę (rys. 21). W punkcie $x = 0$ funkcja ta nie ma wartości określonej. Przy zbliżaniu się do punktu $x = 0$ nie można powiedzieć, że wartość funkcji nie przekroczy jakiejś dowolnie wielkiej liczby, np. 1,000.000, owszem będzie $\frac{1}{x} > 1{,}000.000$, gdy liczba x będzie dość małą. Mówimy wtedy, że funkcja nie jest skończona w otoczeniu punktu $x = 0$.

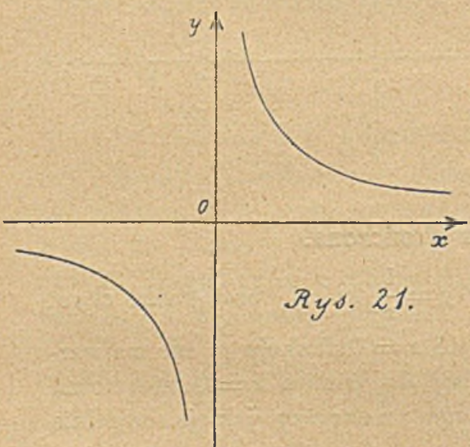
Jeśli natomiast weźmiemy pod uwagę funkcję, której wykres przedstawia np. rys. 22, to widzimy, że funkcja ta jest w punkcie 0 skończoną, bo wartości tej funkcji nie przekraczają pewnej określonej wartości w sąsiedztwie punktu $x = 0$. Innym przykładem funkcji nieskończonej jest funkcja $y = tg\, x$ w otoczeniu punktu $x = \frac{\pi}{2}$.

Ścisłe określenie funkcji skończonej jest następujące: Funkcja $f(x)$ jest skończona w sąsiedztwie punktu $x = c$, jeżeli istnieje taka liczba $M > 0$, oraz taka liczba $\delta > 0$, że, gdy jest $0 < |x - c| < \delta$, to jest $|f(x)| < M$.

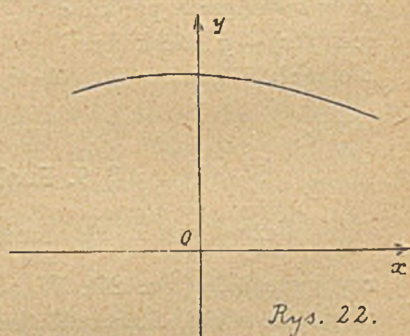
Zauważmy nadto, że ma być $0 < |x - c|$ t. zn. $x \neq c$; nie obchodzi nas więc fakt, czy funkcja jest określoną dla $x = c$, czy też nie.

Łatwo wywnioskować, że, jeżeli funkcja $f(x)$ dla $x = c$ jest ciągłą, to jest i skończoną w sąsiedztwie punktu c (ale nie odwrotnie!). Udowodnimy ogólniejsze twierdzenie (nieodwracalne): *Jeżeli funkcja $f(x)$ dla $x \to c$ ma granicę g, to jest skończoną w sąsiedztwie tego punktu.*

Skoro bowiem funkcja $f(x)$ ma granicę g. przeto do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że, gdy $0 < |x - c| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$. Wybierzmy $\varepsilon = 1$; zatem $|f(x) - g| < 1$. Ale jest:



Rys. 21.



Rys. 22.

$f(x) = f(x) - g + g$. Weźmy bezwzględne wartości i postąpmy jak następuje: $|f(x)| = |[f(x) - g] + g| \leqq |f(x) - g| + |g|$. A ponieważ jest $|f(x) - g| < \varepsilon = 1$, więc $|f(x)| < 1 + |g|$ lub $|f(x)| < M$, gdzie $M = 1 + |g|$. Widzimy więc, że, jeśli przyjmiemy $0 < |x - c| < \delta$. to $|f(x)| < M$ czyli funkcja $f(x)$ w sąsiedztwie punktu c jest skończoną. W szczególnym przypadku funkcja $f(x)$ ciągła dla $x = c$ będzie skończoną w sąsiedztwie punktu (c).

§ 10. Agregat n funkcji nieskończenie małych.

Weźmy pod uwagę pewną ilość. np. n fukcji, z których każda jest dla $x = c$ nieskończenie małą. Niech: $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x), \ldots, f_n(x)$ będzie ciągiem takich funkcji. Oprócz tego wyobraźmy sobie zbiór n funkcji: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x) \ldots\ldots, \varphi_n(x)$, z których każda przedstawia pewną funkcję, skończoną w sąsiedztwie punktu $x = c$. Utwórzmy sumę iloczynów odpowiednich funkcji $f(x)$ i $\varphi(x)$:

$$f_1(x) \cdot \varphi_1(x) + f_2(x) \cdot \varphi_2(x) + \ldots + f_n(x) \cdot \varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot \varphi_i(x).$$

Taką sumę nazywać będziemy agregatem n funkcji nieskończenie małych. Skoro np. x^2, x^3 są nieskończenie małe dla $x = 0$, to $3x^2 + 5x^3$ będzie takim agregatem. Współczynniki 3, 5, odpowiadają tu funkcjom skończonym $\varphi(x)$. Jako stałe są funkcjami ciągłemi, a więc także funkcjami skończonemi. Dwumian $3x^2 + 5x^3$ nazwiemy więc agregatem 2 funkcji nieskończenie małych dla $x = 0$. Aby utworzyć agregat, muszą być dane przynajmniej 2 funkcje nieskończenie małe. Udowodnimy teraz następujące twierdzenie: *Agregat n funkcji nieskończenie małych dla $x = c$ jest sam funkcją nieskończenie małą dla $x = c$.*

Że tak jest, o tem wnioskować możemy już na podstawie intuicji. Agregat bowiem jest sumą iloczynów, z których każdy zawiera jeden czynnik nieskończenie mały dla $x = c$, drugi z czynników zaś jest funkcją skończoną. Skoro więc każde $f(x)$ zdąża do 0, to $f(x) \cdot \varphi(x) \to 0$, ponieważ $\varphi(x)$ jest skończone. Zatem i suma n takich iloczynów czyli agregat jest funkcją nieskończenie małą (czyli dąży do 0) dla $x = c$.

Ścisły dowód przeprowadzamy w następujący sposób: Dany jest agregat: $\Phi(x) = f_1(x) \cdot \varphi_1(x) + f_2(x) \cdot \varphi_2(x) + \ldots + f_n(x) \cdot \varphi_n(x)$.

Z pomiędzy zawartych w tym agregacie funkcji nieskończenie małych wybierzmy jedną: $f_i(x)$, gdzie $i = 1, 2, 3 \ldots n$. Funkcja ta jest nieskończenie małą, to znaczy: do każdej liczby $\varepsilon' > 0$ istnieje liczba $\delta_i > 0$ i taka, że, gdy $0 < |x - c| < \delta_i$, to $|f_i(x)| < \varepsilon'$. Przy liczbie δ daliśmy wskaźnik „i" u dołu, aby zaznaczyć, że δ nie musi być jednakowe dla wszystkich funkcji $f_i(x)$, zawartych w agregacie, lecz odnosi się tylko do funkcji $f_i(x)$. Dla innych $f(x)$ mogą być liczby δ większe lub mniejsze od δ_i, aby każda $|f(x)|$ była mniejsza od ε'. Jeśli jednak z pomiędzy tych liczb: $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots\ldots \delta_i \ldots\ldots \delta_n$ wybierzemy najmniejszą (minimum), to będzie ona wspólną dla wszystkich funkcji $f_i(x)$. Tę najmniejszą liczbę δ piszemy bez wskaźnika: $\delta = \text{Min}\,(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_i, \ldots, \delta_n)$.

Gdyby zaś przypadkiem liczby $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n$ równały się sobie, to liczba δ niech będzie ich wspólną wartością. Będzie $\delta > 0$.

Gdy więc weźmiemy $0 < |x - c| < \delta$, wtedy będzie równocześnie $|f_1(x)| < \varepsilon'$, $|f_2(x)| < \varepsilon', \ldots, |f_n(x)| < \varepsilon'$, (bo wybraliśmy $|x - c|$ mniejsze od najmniejszej z liczb δ_i) czyli będzie:

$$|f_i(x)| < \varepsilon' \text{ dla } i = 1, 2 \ldots n.$$

Z funkcją $f_i(x)$ tworzy w naszym agregacie iloczyn funkcja skończona $\varphi_i(x)$. Funkcja ta jest skończona w sąsiedztwie punktu $x = c$, t. zn.: Istnieją pewne liczby dodatnie M_i i δ'_i takie, że, gdy przyjmiemy $0 > |x - c| < \delta'_i$, to wartość funkcji $|\varphi_i(x)|$ jest mniejszą od liczby M_i, przyczem $M_i > 0$, $\delta'_i > 0$; z nierówności więc $0 < |x - c| < \delta'_i$ wynika $|\varphi_i(x)| < M_i$.

Dla każdej funkcji $\varphi_i(x)$ z agregatu liczby M i δ' mogą być inne; dlatego, biorąc funkcję $\varphi_i(x)$, daliśmy odnośnym liczbom M_i i δ'_i u dołu wskaźniki „i“. Funkcje: $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x)$ mają każda dla siebie swoje $M_1, M_2, \ldots, M_n$ oraz $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \ldots \delta'_n$; wspólne jednak dla wszystkich tych funkcji będą: najmniejsze δ' i największe M. Te napiszemy bez wskaźników i będzie:

$$\delta' = Min\,(\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \ldots, \delta'_i, \ldots \delta'_n); \text{ przeto } \delta' > 0;$$
$$M = Max\,(M_1, M_2, M_3, \ldots, M_i, \ldots M_n), \text{ także } M > 0;$$

gdy więc $0 < |x - c| < \delta'$, to będzie $|\varphi_i(x)| < M$ dla $i = 1, 2, \ldots n$.

Aby więc bezwzgl. wartości wszystkich funkcji $|f_i(x)|$ były mniejsze od ε', musimy przyjąć $0 < |x - c| < \delta$; chcąc zaś mieć wszystkie $|\varphi_i(x)| < M$, trzeba przyjąć $0 < |x - c| < \delta'$. Gdy więc przyjmiemy $\delta'' = Min\,(\delta, \delta')$, gdzie $\delta'' > 0$, i jeżeli weźmiemy $0 < |x - c| < \delta''$, to wtedy napewne będzie: $|f_i(x)| < \varepsilon'$ i równocześnie $|\varphi_i(x)| < M$ dla $i = 1, 2, \ldots n$.

Wróćmy do naszego agregatu $\Phi(x)$ i obliczmy po obu stronach wartości bezwzględne:

$$|\Phi(x)| \leqq |f_1(x)| \cdot |\varphi_1(x)| + |f_2(x)| \cdot |\varphi_2(x)| + \ldots + |f_n(x)| \cdot |\varphi_n(x)|.$$

Zamiast każdej wartości $|f_i(x)|$ podstawmy ε', a zamiast każdej wartości $|\varphi_i(x)|$ podstawmy M. Podstawiamy wartości w obu przypadkach większe, zwiększamy przeto wartość prawej strony, znak więc $\leqq$ musimy zastąpić pojedynczym znakiem $<$. Będzie:

$$|\Phi(x)| < \varepsilon' M + \varepsilon' M + \ldots\ldots + \varepsilon' M.$$

Takich iloczynów $\varepsilon' M$, równych sobie, będzie po prawej stronie n. Zatem: $|\Phi(x)| < n\varepsilon' M$.

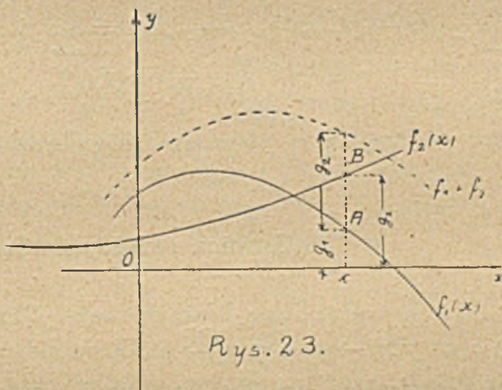
Liczbę ε' przyjęliśmy na razie dowolnie; otóż przyjmijmy teraz dowolnie $\varepsilon > 0$ i dla niej określmy liczbą ε' tak, aby było $n\varepsilon' M = \varepsilon$, co wyznaczy nam $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{nM}$. Jest więc: $|\Phi(x)| < \varepsilon$, o ile $0 < |x - c| < \delta''$.

Agregat $\Phi(x)$ jest więc funkcją nieskończenie małą dla $x = c$, co było do udowodnienia.

§ 11. Suma funkcji i jej granica.

Weźmy pod uwagę funkcje: $f_1(x)$ i $f_2(x)$. Gdy $x \to c$, niech $f_1(x)$ ma granicę g_1 czyli $f_1(x) \to g_1$, a $f_2(x)$ niech ma granicę g_2 czyli $f_2(x) \to g_2$.

Na obrazie geom. (rys. 23) niech krzywe $f_1(x)$ i $f_2(x)$ przedstawiają funkcje $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$. W punkcie $x = c$ odpowiednie rzędne przedstawiają granice funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$, równe g_1 i g_2, przyczem pamiętać trzeba, że punkty A B mogą nie należeć do wykresu krzywych f_1, f_2.



Rys. 23.

Jeżeli chcemy otrzymać granicę sumy $f_1(x) + f_2(x)$, wystarczy dodać długość odcinka g_2 do długości odcinka g_1. Zatem widać intuicyjnie, że, jeśli $f_1(x) \to g_1$, a $f_2(x) \to g_2$, to $f_1(x) + f_2(x) \to g_1 + g_2$.

Możemy to napisać w sposób następujący:

$$\lim_{x \to c} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \to c} f_1(x) + \lim_{x \to c} f_2(x).$$

Powiemy krótko: granica sumy funkcji równa się sumie granic. Będziemy zatem mieli do udowodnienia nast. ogólne twierdzenie: *Jeśli każda z funkcji* $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_n(x)$ *dla* $x \to c$ *ma granicę odpowiednio równą liczbom* $g_1, g_2 \ldots g_n$, *to funkcja* $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ *dla* $x \to c$ *ma granicę i jest nią liczba* $g_1 + g_2 + \ldots + g_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$.

Dla dowodu bierzemy funkcję:

$$\Phi(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - (g_1 + g_2 + \dots + g_n) =$$
$$= 1 . [f_1(x) - g_1] + 1 . [f_2(x) - g_2] + \dots + 1 . [f_n(x) - g_n],$$

przy czem skorzystaliśmy z prawa kojarzenia składników, a przed nawiasami daliśmy jedynki, które mają zastąpić miejsca funkcji skończonych agregatu. Otrzymaliśmy w ten sposób po stronie prawej agregat, w którym każdy nawias [ ] zawiera funkcję niesk. małą dla $x = c$. Wiemy, że cały taki agregat jest też funkcją nieskończenie małą dla $x = c$, przeto

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \to g_1 + g_2 + \dots + g_n \text{ dla } x \to c.$$

Możemy więc napisać:

$$\lim_{x \to c} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] = \lim_{x \to c} f_1(x) + \lim_{x \to c} f_2(x) + \dots +$$
$$+ \lim_{x \to c} f_n(x),$$

co wyraża dopieroco udowodnione twierdzenie.

§ 12. Granica różnicy dwóch funkcji.

Niech będą dane dwie funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ takie, że, gdy $x \to c$, to $f(x) \to g$, a $\varphi(x) \to g'$. Twierdzimy, że:

Granica różnicy dwóch funkcji równa się różnicy ich granic pod warunkiem, że tak odjemna jak i odjemnik mają granice. Zapiszemy to tak: $f(x) - \varphi(x) \to g - g'$.

Dla dowodu utworzymy następującą funkcję $\Phi(x)$: $\Phi(x) = [f(x) - \varphi(x)] - (g - g')$.

Korzystając z prawa kojarzenia składników napiszemy: $\Phi(x) = [f(x) - g] - [\varphi(x) - g']$, co możemy również napisać we formie: $\Phi(x) = 1 . [f(x) - g] + [\varphi(x) - g'] . (-1)$. Według założenia są wyrazy w nawiasach [ ] funkcjami nieskończenie małemi dla $x = c$, przeto $\Phi(x)$ jest agregatem funkcji niesk. małych, a jako taki, jest funkcją niesk. małą. Innemi słowy $\Phi(x)$ ma granicę zero, przeto funkcja $f(x) - \varphi(x)$ ma granicę $g - g'$. Możemy to napisać też we formie: $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} \varphi(x)$.

§ 13. Granica iloczynu funkcji.

Niech będą dane dwie funkcje: $f(x)$ i $\varphi(x)$, które dla $x \to c$ mają granice: $f(x) \to g$, $\varphi(x) \to g'$. Jeśli utworzymy iloczyn tych funkcji, to przewidzieć łatwo, że $f(x).\varphi(x) \to g.g'$.

Mamy więc do udowodnienia twierdzenie następujące: *Jeśli dwie funkcje dla $x \to c$ mają granice, to iloczyn tych funkcji dla $x \to c$ ma granicę, a jest nią iloczyn granic funkcji, będących czynnikami iloczynu.*

Udowodnimy to twierdzenie znowu zapomocą pewnego agregatu. Niech $\Phi(x)$ oznacza nam iloczyn funkcji $f(x)$ i $\varphi(x)$, pomniejszony o iloczyn ich granic i zarazem przekształćmy go w sposób następujący:

$$\Phi(x) = f(x).\varphi(x) - gg' = [f(x).\varphi(x) - f(x).g'] + [f(x).g' - gg']$$

czyli: $\Phi(x) = f(x).[\varphi(x) - g'] + g'[f(x) - g]$. Funkcja ta jest agregatem, bo funkcja $f(x)$ ma granicę g, więc według udowodnionego w § 9 twierdzenia, jest skończoną, wyrazy zaś zawarte w nawiasach [ ] są funkcjami nieskończenie małemi. Zatem $\Phi(x)$ jest również funkcją nieskończenie małą dla $x = c$, przeto: $f(x).\varphi(x) \to gg'$ albo:

$$\lim_{x \to c} [f(x).\varphi(x)] = \lim_{x \to c} f(x).\lim_{x \to c} \varphi(x).$$

Na tej podstawie łatwo udowodnić dla przykładu, że $\frac{\sin x}{x} \to 1$ dla $x \to 0$. Wiemy z poprzednich rozważań, że: $\frac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$, gdy $x \to 0$ i na tem się oprzemy. Otóż:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}.\cos x}{x} = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.\cos x; \text{ więc } \frac{\sin x}{x} = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.\cos x;$$

wolno bowiem dzielić przez $\cos x$, gdyż jest $\cos x \neq 0$ w sąsiedztwie punktu $x = 0$.

Dla $x \to 0$ jest $\frac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$. Ponieważ $\cos x$ jest funkcją ciągłą, więc $\cos x \to \cos 0 = 1$. Zatem $\frac{\sin x}{x} \to 1.1$ czyli: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, co otrzymaliśmy też na innej drodze.

Oczywiście łatwo wypowiedzieć i udowodnić twierdzenie dla przypadku n czynników.

§ 14. Granica ilorazu funkcji.

Zanim przystąpimy do wyprowadzenia wzoru, określającego granicę ilorazu funkcji, udowodnimy pomocnicze twierdzenie następujące:

Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ *dla* $x \rightarrow c$ *ma granicę* $g' \neq 0$, *to można znaleźć takie sąsiedztwo punktu* $x = c$, *iż jest w niem* $|\varphi(x)| > \frac{|g'|}{2}$.

Zakładamy, że: $\varphi(x) \rightarrow g'$, gdy $x \rightarrow c$ i że $g' \neq 0$. Znaczy to, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że, gdy $0 < |x - c| < \delta$, to $|\varphi(x) - g'| < \varepsilon$. Stąd wynika, że $-\varepsilon < \varphi(x) - g' < +\varepsilon$. Dodajmy do tej nierówności równość: $g' = g' = g'$, a otrzymamy: $g' - \varepsilon < \varphi(x) < g' + \varepsilon \ldots$ (I).

Zachodzić tu mogą dwie ewentualności. Albo g' jest liczbą dodatnią czyli $g' > 0$ albo ujemną ($g' < 0$). Weźmy pod uwagę pierwszy przypadek: Jeśli $g' > 0$, to również $\frac{g'}{2} > 0$. Ponieważ $\varepsilon > 0$ można dowolnie obrać, więc niech będzie $\varepsilon = \frac{g'}{2}$. Nierówność (I) przybierze wtedy postać: $g' - \frac{g'}{2} < \varphi(x) < g' + \frac{g'}{2}$, czyli:

$$\text{(II)} \qquad \frac{g'}{2} < \varphi(x) < \frac{3g'}{2}.$$

Stąd widać, że $\varphi(x)$ nie tylko nie jest zerem, ale nawet nie może przyjąć wartości poniżej $\frac{g'}{2}$, gdyż jest od tej liczby większe. Ponieważ zaś liczba dodatnia jest równą swej bezwzględnej wartości, więc obok $\varphi(x) > \frac{g'}{2}$ możemy napisać: (III) $|\varphi(x)| > \frac{|g'|}{2}$.

W drugim przypadku t. zn., jeśli liczba g' jest ujemną czyli $g' < 0$, jest również $\frac{g'}{2} < 0$. Ale wtedy $-g'$, oraz $-\frac{g'}{2}$ są liczbami dodatniemi, wolno więc przyjąć $\varepsilon = -\frac{g'}{2}$. Wstawmy tę wartość w nierówność (I), to $g' - \left(-\frac{g'}{2}\right) < \varphi(x) < g' + \left(-\frac{g'}{2}\right)$ czyli

$$\frac{3g'}{2} < \varphi(x) < \frac{g'}{2}.$$

Odrzućmy pierwszą stronę tej nierówności i weźmy: $\varphi(x) < \frac{g'}{2}$.

Ale $\frac{g'}{2}$ jest liczbą ujemną, zaś $\varphi(x)$ jest mniejsze od liczby ujemnej $\frac{g'}{2}$ czyli również ujemne, tedy bezwzględna wartość $\varphi(x)$ nie może spaść poniżej $\left|\frac{g'}{2}\right|$, wiemy bowiem, że z dwóch liczb ujemnych ta ma bezwzględną wartość większą, która jest mniejszą. Zatem jest $\left|\varphi(x)\right| > \left|\frac{g'}{2}\right| = \left|\frac{g'}{2}\right|$.

Doszliśmy przeto do wyniku takiego samego, jak pod (III). Powiemy więc: *Jeśli* $\varphi(x) \to g' \neq 0$ *dla* $x \to c$, *to istnieje liczba* $\delta_0 > 0$ *taka, iż dla wszystkich liczb* x, *spełniających nierówność* $0 < |x - c| < \delta_0$, *jest* $|\varphi(x)| > \left|\frac{g'}{2}\right|$.

Skoro tak jest, to w sąsiedztwie punktu c funkcja $\varphi(x)$ nie jest zerem. Tego rezultatu użyjemy w następującym wywodzie.

Na podstawie dotychczas przeprowadzonych działań na funkcjach można stwierdzić, że w ogólności działaniom na funkcjach odpowiadają te same działania na granicach. Zobaczmy, czy to ma zastosowanie przy dzieleniu. Według tej zasady mielibyśmy:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to \frac{g}{g'}, \text{ jeśli dla } x \to c \text{ jest} \begin{cases} f(x) \to g \\ \varphi(x) \to g' \end{cases}.$$

Nasuwa się tu jednak wątpliwość, czy $\frac{g}{g'}$ nie jest symbolem nieoznaczonym, t. j. czy g' nie jest zerem. Przypadek ten musimy oczywiście wykluczyć z góry i założyć w tym celu, że $g' \neq 0$. Drugą wątpliwością byłoby, czy dzielnik $\varphi(x)$ nie jest zerem w sąsiedztwie punktu $x = c$, gdyż wówczas iloraz $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ byłby nieokreślonym. Tę wątpliwość jednak usuwa dopieroco udowodnione twierdzenie pomocnicze. które orzeka, że, gdy $\varphi(x) \to g'$ dla $x \to c$ i gdy $g' \neq 0$, to założenie, że $\varphi(x) \neq 0$ jest już zbyteczne, o ile chodzi o sąsiedztwo punktu c.

Twierdzimy więc: *Gdy dla* $x \to c$ *funkcja* $f(x) \to g, \varphi(x) \to g'$, *gdzie* $g' \neq 0$, *wtedy istnieje sąsiedztwo punktu* c, *w którym funkcja* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *jest określoną i dla* $x \to c$ *ma granicę równą ilorazowi* $\frac{g}{g'}$.

Pierwszą część tego twierdzenia t. j. że istnieje sąsiedztwo punktu c, w którem iloraz $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest funkcją określoną, udowodniliśmy już, wykazawszy, że przy powyższych założeniach istnieje sąsiedztwo punktu c, w którem jest $\varphi(x) \neq 0$.

Drugą zaś część udowodnimy jak następuje: Zbadajmy, czy funkcja $\Phi(x)$ jest nieskończenie małą, jeśli położymy:

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{g}{g'}. \text{ Otóż stąd } \Phi(x) = \frac{f(x) \cdot g' - g \cdot \varphi(x)}{\varphi(x) \cdot g'}.$$

Prawa strona nie ulegnie zmianie, jeśli dodamy w dzielnej: $-gg' + gg'$. Będzie: $\Phi(x) = \frac{g'[f(x) - g] - g[\varphi(x) - g']}{\varphi(x) \cdot g'}$ czyli

$$\Phi(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \Big[f(x) - g\Big] + \frac{-g}{\varphi(x) \cdot g'} \Big[\varphi(x) - g'\Big].$$

Wyrazy w nawiasach [ ] są według założenia funkcjami nieskończenie małemi dla $x = c$. Należy jeszcze sprawdzić, czy współczynniki przy tych nawiasach są funkcjami skończonemi.

1) Otóż wykazaliśmy, że istnieje sąsiedztwo punktu (c), w którem jest $|\varphi(x)| > \frac{|g'|}{2}$. Przez tę nierówność podzielmy równość $1 = 1$ przy odwróceniu znaku nierówności. Otrzymamy:

$$\frac{1}{|\varphi(x)|} < \frac{2}{|g'|} \quad \text{czyli} \quad \left|\frac{1}{\varphi(x)}\right| < \frac{2}{|g'|} = M.$$

Zatem funkcja $\frac{1}{\varphi(x)}$ jest skończona w sąsiedztwie punktu $x = c$.

2) Dla współczynnika drugiego otrzymujemy: $\left|\frac{-g}{\varphi(x) \cdot g'}\right| =$ $= \frac{|g|}{|\varphi(x)| \cdot |g'|} = \frac{1}{|\varphi(x)|} \cdot \frac{|g|}{|g'|}$. Wyprowadzoną pod 1) nierówność $\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right| < \frac{2}{|g'|}$ pomnóżmy po obu stronach przez równość $\frac{|g|}{|g'|} = \frac{|g|}{|g'|}$. Otrzymamy (uważając na znak!): $\frac{1}{|\varphi(x)|} \cdot \frac{|g|}{|g'|} \leqq \frac{2|g|}{g'^2} = M'$.

[Uwaga: Ponieważ $|g|\geqslant 0$, więc w ostatniej nierówności mamy podwójny znak $\leqslant$.]

Także i ten współczynnik jest więc funkcją skończoną w sąsiedztwie punktu c. Zatem wyrażenie $\Phi(x)$ jest agregatem funkcji nieskończenie małych, więc: $\frac{f(x)}{\varphi(x)}\rightarrow\frac{g}{g'}$, co było do udowodnienia.

§ 15. Przykłady. — (Rząd nieskończenie małych).

1. Niech będzie dana funkcja $y=\frac{1}{x+2}$. Wyszukajmy granicę tej funkcji dla $x\rightarrow 2$. Ponieważ funkcja $x+2$ jest ciągłą, więc ma granicę i jest nią wartość funkcji. Zatem: $x+2\rightarrow 4\neq 0$, przeto $\frac{1}{x+2}\rightarrow\frac{1}{4}$ (zob. str. 15).

2. Udowodniliśmy dawniej, że $\frac{\operatorname{tg}x}{x}\rightarrow 1$, gdy $x\rightarrow 0$.

Na tej podstawie wykazaliśmy w § 13, że funkcja $\frac{\sin x}{x}$ ma granicę i równą liczbie 1 dla $x\rightarrow 0$. Naodwrót, wiedząc, że (I) $\frac{\sin x}{x}\rightarrow 1$ dla $x\rightarrow 0$, udowodnimy, że funkcja $\frac{\operatorname{tg}x}{x}$ dla $x\rightarrow 0$ ma granicę i też równą liczbie 1. Jest bowiem $\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$; według założenia jest $\frac{\sin x}{x}\rightarrow 1$; nadto $\cos x\rightarrow 1\neq 0$, więc funkcja $\frac{1}{\cos x}$ ma granicę i równą liczbie $\frac{1}{1}=1$; przeto: (II) $\frac{\operatorname{tg}x}{x}\rightarrow 1.1=$ $=1$ dla $x\rightarrow 0$.

Oparłszy się na twierdzeniu (I) udowodniliśmy prawdziwość twierdzenia (II), na podstawie zaś (II) wyprowadziliśmy (I) w § 13; twierdzenia takie, jak (I) i (II) nazywamy *równoważnemi.*

3. Niech będzie $\Phi(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$. Obliczmy granicę tej funkcji, gdy $x\rightarrow 0$. Twierdzenia o granicy ilorazu stosować bezpośrednio tu nie możemy, bo dzielnik ma granicę 0. Pomnóżmy zatem dzielną i dzielnik prawej strony przez sumę $1+\cos x$. Mamy $\Phi(x)=$ $=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$. A, że $\frac{\sin x}{x}\rightarrow 1$,

więc i $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 1$ nadto, $\frac{1}{1+\cos x} \to \frac{1}{2}$, gdy $x \to 0$. Zatem $\Phi(x) \to \frac{1}{2}$

Nie popełni się więc wielkiego błędu, pisząc $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, jeśli x jest dość bliskie zera; stąd otrzymujemy, że również możemy bez wielkiego błędu dla liczb x dość bliskich zera napisać równość: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$. Górny kraniec błędu, przez to popełnionego, można z łatwością wyrachować na mocy poprzednich rachunków, dotyczących granicy funkcji $\frac{\sin x}{x}$ dla $x \to 0$. Mamy bowiem $\frac{1-\cos x}{x^2} -$

$$-\tfrac{1}{2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 - 1\right], \text{ więc}$$

$$\left|\frac{1-\cos x}{x^2} - \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 - 1\right| = \tfrac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)\left(1 - \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right).$$

Otóż, gdy $0 < \left|\frac{x}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$ czyli, gdy $0 < |x| < \pi$, to na mocy przykładu 3 z § 6 (str. 24. wzór VI) mamy:

$$\left|1 - \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right| < \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = \frac{x^2}{8}; \text{ ponieważ } \cos \frac{x}{2} < \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} < 1 \text{ i } \cos \frac{x}{2} > 0,$$

więc

$$1 < 1 + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} < 2, \text{ przeto: } \left|\frac{1-\cos x}{x^2} - \tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x^2}{8} = \frac{x^2}{8}, \text{ o ile } 0 <$$

$< |x| < \pi$. Nadto widać, że można dokładniej napisać: $0 < \frac{1}{2} - \frac{1-\cos x}{x^2} < \frac{x^2}{8}$. Przyjmując więc dla liczby x, spełniającej nierówność $0 < |x| < \pi$ liczbę $\frac{1}{2}$ za wartość funkcji $\frac{1-\cos x}{x^2}$, popełniamy błąd (b) taki, że $|b| < \frac{x^2}{8}$. Dostajemy nadto, co bardziej interesujące, że jest: $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$, gdy jest $0 < |x| < \pi$.

4. Wykazaliśmy, że $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$, gdy $x \to 0$. Obliczmy obecnie granicę podobnej funkcji: $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x^2} . x$. Otóż, gdy $x \to 0$, to: $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$, a $x \to 0$, przeto $\frac{1-\cos x}{x} \to \frac{1}{2} . 0 = 0$. Iloraz więc dwu nieskończ. małych: $1 - \cos x$ i x jest niesk. małą, gdyż $\frac{1-\cos x}{x} \to 0$.

Weźmy teraz obie omówione funkcje pod uwagę:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}, \frac{1-\cos x}{x}; \text{ pierwsza} \to \tfrac{1}{2} \text{ druga } \to 0, \text{ gdy } x \to 0.$$

Funkcje te są ilorazami nieskończenie małych dla $x = 0$. Funkcja $(1 - \cos x)$ jest nieskończ. małą; jest bowiem funkcją ciągłą, która dla $x \to 0$ ma granicę, równą zerowej wartości funkcji w punkcie $x = 0$. Widzimy więc, że iloraz dwóch funkcji nieskończenie małych ma w pierwszym przypadku granicę równą $\frac{1}{2}$, w drugim 0. Zachodzi więc jakiś stosunek między funkcjami nieskończenie małemi, który na razie możemy określić tak, że w pierwszym przypadku funkcje nieskończenie małe dzielnej i dzielnika są „równo silne“ lub możemy powiedzieć, że obie funkcje „jednakowo szybko“ zdążają do zera, bo ich iloraz ma granicę $\frac{1}{2}$. W drugim funkcja nieskończenie mała dzielnej jest niejako silniejszą, „szybciej“ dąży do zera, niż dzielnik, bo granica ich ilorazu równa się zeru. Weźmy jeszcze pod uwagę podobną funkcję:

$$\frac{1-\cos x}{x^3} = \frac{1-\cos x}{x^2} . \frac{1}{x}. \text{ Otóż } \frac{1-\cos x}{x^2} \to \tfrac{1}{2} \text{ dla } x \to 0,$$

kiedy funkcja $\frac{1}{x}$ rośnie nieograniczenie co do bezwzględnej wartości. Iloczyn zatem będzie co do bezwzględnej wartości rósł nieograniczenie. Bezwzględna wartość ilorazu dwóch nieskończenie małych

$\frac{1 - \cos x}{x^3}$ rośnie tu nieograniczenie dla $x \to 0$. W tym przypadku możnaby powiedzieć, że dzielnik jest nieskończenie małą „silniejszą“ niejako od dzielnej; funkcja x^3 „szybciej“ zdąża do zera, niż funkcja $1 - \cos x$.

Zbierzmy jeszcze raz te 3 przypadki i określmy je w ten sam, nieścisły, ale obrazowy sposób: Mamy dwie funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$, niesk małe dla $x = c$. Tworzymy ich iloraz i otrzymujemy w pierwszym przypadku, że $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 0$, gdy $x \to c$. Znaczy to, że funkcja $f(x)$ szybciej zdąża do zera, niż dzielnik $\varphi(x)$. W drugim przypadku otrzymujemy: $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to a$, przyczem a jest liczbą różną od zera; powiadamy, że dzielna i dzielnik są równie silnemi zerami, równie szybko dążą do zera. Wreszcie, jeśli otrzymamy, że: $\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right|$ rośnie nieograniczenie, gdy $x \to c$, to mówić będziemy, że funkcja $f(x)$ powolniej dąży do 0, a $\varphi(x)$ szybciej.

Weźmy inny przykład, a mianowicie funkcje: x^m i x^n, gdzie m i n są liczbami naturalnemi, np.: 2, 3..; niech $x \to 0$. Tworzymy iloraz takich funkcji, np.: $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$. Dla $x = 0$ są tak dzielna, jak i dzielnik nieskończenie małemi funkcjami, jednak iloraz rośnie nieograniczenie co do bezwzględnej wartości; dzielnik (x^3) szybciej dąży do 0, niż dzielna (x^2). Wszak, gdy za x podstawimy jakikolwiek ułamek, np. $\frac{1}{2}$, to $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, zaś $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. Widocznem jest, że $\frac{1}{8}$ jest bliższe zera, niż $\frac{1}{4}$. Podobnie $(\frac{1}{2})^2$ bliższem jest zera, niż $(\frac{1}{2})^1$. To też, gdy utworzymy iloraz $\frac{x^2}{x^1} = x$, to dla $x \to 0$ wartość tego ilorazu również $\to 0$; dzielna więc szybciej dąży do zera, niż dzielnik. Wreszcie, jeśli utworzymy iloraz $\frac{x^2}{x^2} = 1$, to otrzymujemy iloraz dwóch funkcji nieskończenie małych, równy liczbie różnej od zera. Podobnie: $\frac{3x^2}{5x^2} = \frac{3}{5}$. Tu dzielna i dzielnik są równie silne.

Te obrazowe, nieścisłe pojęcia „siły“ i „szybkości zbliżania się do zera“ zastąpmy teraz pojęciem naukowem. Powiemy: Jeżeli funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ dla $x = c$ są nieskończenie małemi, to jeżeli: 1) iloraz

$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dla $x \to c$ ma granicę 0, $\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to 0\right)$, wtedy funkcja $f(x)$ nazywa się niesk. małą rzędu wyższego, niż $\varphi(x)$, funkcja zaś $\varphi(x)$ niesk. małą rzędu niższego, niż $f(x)$. 2) Jeśli iloraz $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \to g \neq 0$, to funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ nazywamy nieskończenie małemi tych samych rzędów. 3) Jeśli $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ nie ma żadnej granicy ani bezwzględnie nie rośnie nieograniczenie, to rzędów tych funkcji porównywać ze sobą nie będziemy.

Definicja ta nie określa jeszcze rzędów bezwzględnie, tylko definjuje względne, wzajemne stosunki rzędów. Oto dalsze określenie: Funkcję $x - c$ nazywamy nieskończenie małą rzędu 1-go dla $x = c$. Jeśli funkcja $f(x) \to 0$ dla $x \to c$ i jeżeli ma tę własność, że istnieje liczba $m > 0$ taka, iż $\frac{f(x)}{(x-c)^m} \to a \neq 0$, gdy $x \to c$, to powiadamy, że funkcja $f(x)$ jest nieskończenie małą rzędu m-go dla $x = c$. Łatwo okazać, że rząd ten jest jednoznacznie określony. Według tej definicji nazwiemy funkcję x^5 nieskończenie małą rzędu 5-go dla $x = 0$, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ nieskończenie małą rzędu $\frac{1}{3}$ i t. d.

Przykład. Na kole K o promieniu r weźmy punkt A; niech As oznacza styczną do koła w punkcie A; niech ACB oznacza średnicę, gdzie C jest środkiem koła, B jest punktem koła. Na stycznej As weźmy punkt D, różny od punktu A; łącznica punktów BD przetnie koło w punkcie E. Uważajmy AD za nieskończenie małą rzędu 1-go. Niech F oznacza rzut punktu E na styczną As. Wykażemy, że (a) cięciwa AE jest nieskończenie małą rzędu 1-go; (b) odległość EF punktu E koła od stycznej jest nieskończenie małą rzędu 2-go; (c) takąż jest też odcinek DE; (d) różnica $AD - AE$ jest nieskończenie małą rzędu 3-go; (e) różnica $DE - EF$ jest nieskończenie małą rzędu 4-go.

Na innem miejscu (w § 86 przykł. II o rozwinięciach funkcji na szereg Taylora) wykazujemy, że różnica między łukiem AE i cięciwą AE jest nieskończenie małą rzędu 3-go.

Dowód tw. (a). Jeżeli α radjanów ma kąt ostry trójkąta ABE o wierzchołku B, to równym on jest kątowi przy A w trójkącie ADE i kątowi przy E w trójkącie DEF. Z trójkąta ADE, prostokątnego przy E otrzymujemy $AE = AD \cdot \cos\alpha$, skąd $\frac{AE}{AD} = \cos\alpha$ i zarazem

$\lim \frac{AE}{AD} = 1$, gdyż $AD = 2r\,\mathrm{tg}\,\alpha$, więc $AD \to 0$ pociąga za sobą, że również $\alpha \to 0$; (dowód nie wprost tego szczegółu pomijamy).

Dowód tw. (b). Z trójkąta AEF, prostokątnego przy F, otrzymujemy $EF = AE.\sin\alpha$, a ponieważ z trójkąta ABE, prostokątnego przy E, wynika, że jest $AE = 2r\sin\alpha$, więc będzie $EF = 2r\sin^2\alpha$; stąd otrzymujemy $\frac{EF}{AD^2} = \frac{2r\sin^2\alpha}{4r^2\,\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{2r}$, więc $\lim \frac{EF}{AD^2} = \frac{1}{2r}$, co jest z twierdzeniem (b) zgodne.

Dowód tw. (c). Jest $DE = AD.\sin\alpha$, skąd $\frac{DE}{AD^2} = \frac{\sin\alpha}{AD} =$ $= \frac{\sin\alpha}{2r\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2r}$, przeto $\lim \frac{DE}{AD^2} = \frac{1}{2r}$.

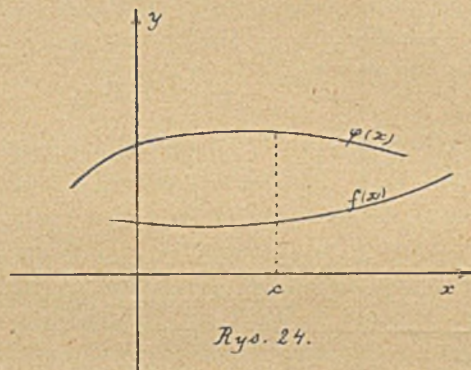
Dowód tw. (d). Skoro $AD = 2r\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $AE = 2r\sin\alpha$, przeto $AD - AE = 2r\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) = 2r\sin\alpha . \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}$. Stąd $\frac{AD - AE}{AD^3}$ $= \frac{1}{4r^2} . \frac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} . \cos^2\alpha = \frac{1}{4r^2} . \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2} . \left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 . \cos^2\alpha$, wskutek tego $\lim \frac{AD - AE}{AD^3} = \frac{1}{4r^2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{8r^2}$, co dowodzi tw. (d).

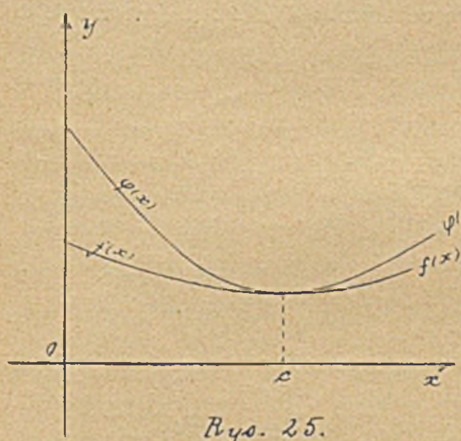
Dowód tw. (e). Jest $DE = AD.\sin\alpha = 2r . \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$, $EF = AE.$ $\sin\alpha = 2r\sin^2\alpha$, tedy $DE - EF = 2r\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) = 2r\sin^2\alpha .$ $\frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}$, skąd: $\frac{DE - EF}{AD^4} = \frac{1}{8r^3} . \frac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} . \cos^3\alpha = \frac{1}{8r^3} . \frac{1 - \cos\alpha}{\alpha^2} .$ $\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 . \cos^3\alpha$, przeto: $\lim \frac{DE - EF}{AD^4} = \frac{1}{8r^3} . \frac{1}{2} = \frac{1}{16r^3}$, co jest zgodne z twierdzeniem (e).

Oczywiście można było powyższe twierdzenia udowodnić na drodze elementarniejszej, bez pomocy trygonometrji, mianowicie przez rozważanie trójkątów podobnych.

§ 16. Twierdzenie o trzech funkcjach.

Zanim przystąpimy do wyprowadzenia pewnego twierdzenia, które, aby ułatwić porozumienie, określimy nazwą: „twierdzenia o trzech funkcjach", musimy sformułować następujące pomocnicze twierdzenie: Załóżmy, że dwie funkcje: $f(x)$ i $\varphi(x)$ w sąsiedztwie punktu c spełniają nierówność: $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. Obrazy geometr. takich dwóch funkcji przedstawiają rys. 24 i 25. Jeżeli zaś dla $x \to c$ założymy, że $\varphi(x) \to 0$, to rzecz się zmieni o tyle, że narysowawszy naprzód obraz funkcji $\varphi(x)$ (rys. 26), widzimy, że krzywa, będąca obrazem geometr. funkcji $f(x)$, musi się mieścić cała w zakreskowanej części rysunku, np. jak krzywa, oznaczona linją przerywaną na rys. 26. Widocznem jest także z rysunku, że, skoro funkcja $\varphi(x)$ w punkcie $x \to c$ ma granicę zero, to i funkcja $f(x)$ w punkcie $x \to c$ ma granicę i równą zeru. Możemy więc już na podstawie wykresu funkcji $f(x)$ i $\varphi(x)$ sformułować owo pomocnicze twierdzenie w następujący sposób:





Jeżeli funkcje: $f(x)$ i $\varphi(x)$ mają następujące własności: 1) istnieje sąsiedztwo punktu c, w którem obie są określone i spełniają tamże nierówność:

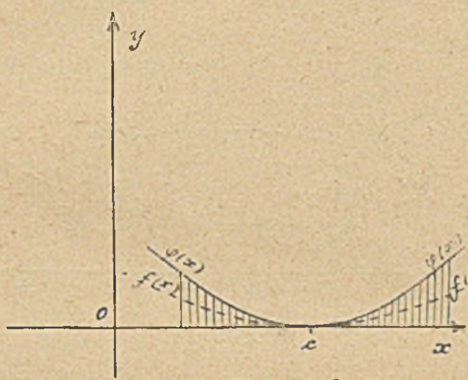
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$$

(w punkcie $x = c$ mogą być nieokreślone lub być określonemi, ale mogą nie spełniać tej nierówności); 2) funkcja $\varphi(x)$ jest nieskończenie małą dla $x = c$, to z tego wynika, że funkcja $f(x)$ jest także nieskończenie małą dla $x = c$.

Oto dowód: Skoro $\varphi(x) \to 0$, gdy $x \to c$, to do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że z nierówności $0 < |x - c| < \delta$ wynika nierówność $|\varphi(x)| < \varepsilon$ czyli nierówność $-\varepsilon < \varphi(x) < \varepsilon$. Stąd i z założenia 1) wynika, że jest $0 \leqslant f(x) < \varepsilon$ czyli $|f(x)| < \varepsilon$, gdy jest $0 < |x - c| < \delta$. Innemi słowy $f(x) \to 0$, gdy $x \to c$. Temsamem twierdzenie pomocnicze udowodnione.

Niech będą teraz dane trzy funkcje: $F(x)$, $\Phi(x)$ i $\Psi(x)$ o własnościach następujących: 1) istnieje sąsiedztwo punktu c, w którem wszystkie trzy są określone i spełniają nierówność: $F(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant \Psi(x)$; 2) funkcje $F(x)$ i $\Psi(x)$ mają równe granice, gdy $x \to c$, czyli:

$$\lim_{x \to c} F(x) = \lim_{x \to c} \Psi(x).$$

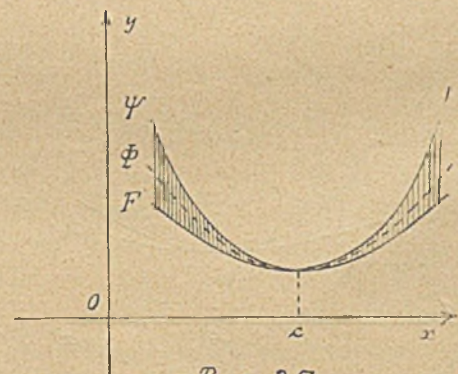


Rys. 26.

Twierdzimy, że wtedy funkcja $\Phi(x)$ ma też granicę dla $x \to c$ i tę samą, co funkcje $F(x)$ i $\Psi(x)$.

Twierdzenie to nazwiemy krótko twierdzeniem o trzech funkcjach.

Jeśli wykreślimy obraz geometryczny funkcji $F(x)$ i $\Psi(x)$ (rys. 27), bacząc, aby krzywa Ψ, odpowiadająca funkcji $\Psi(x)$ nie była w sąsiedztwie punktu c, niżej od krzywej F, odpowiadającej funkcji $F(x)$, to widzimy, że obraz geom. funkcji $\Phi(x)$ musi leżeć w zakreskowanej części rysunku i zbliżać się nieograniczenie do punktu, odpowiadającego wspólnej granicy funkcji $F(x)$ i $\Psi(x)$ dla $x \to c$.



Rys. 27.

Dowód twierdzenia o trzech funkcjach: Mamy z założenia: $F(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant \Psi(x)$ i odejmijmy po wszystkich 3-ch stronach równość: $F(x) = F(x) = F(x)$, otrzymamy: $0 \leqslant \Phi(x) - F(x) \leqslant \Psi(x) - F(x)$. Ponieważ $\Psi(x) \to g$, $F(x) \to g$, gdy $x \to c$, przyczem $g = \lim_{x \to c} F(x) = \lim_{x \to c} \Psi(x)$, więc $\Psi(x) - F(x) \to g - g = 0$; przeto na mocy pomocniczego twierdzenia będzie też: $\Phi(x) - F(x) \to 0$. Ale można napisać: $\Phi(x) = F(x) + [\Phi(x) - F(x)]$; a że: $F(x) \to g$, $\Phi(x) - F(x) \to 0$, więc funkcja $\Phi(x)$ ma granicę i równą liczbie $g + 0 = g$. Tem samem twierdzenie jest udowodnione.

§ 17. Wnioski dla funkcyj ciągłych jednej zmiennej.

Weźmy pod uwagę dwie funkcje: $f(x)$ i $\varphi(x)$, o których załóżmy, że są dla $x=c$ obie ciągłe. Twierdzimy: *Jeśli funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ dla $x=c$ są ciągłe, to funkcja $f(x)+\varphi(x)$ jest również ciągłą w tym punkcie.*

Dla dowodu tego twierdzenia powiemy: Według założenia funkcja $f(x)$ jest ciągłą w punkcie $x=c$, a więc $f(x)\to f(c)$, gdzie $f(c)$ jest liczbą określoną. Również $\varphi(x)\to\varphi(c)$. Na podstawie twierdzenia o granicy sumy funkcji wiemy, że funkcja $f(x)+\varphi(x)$ ma granicę $f(c)+\varphi(c)$, a to jest jej wartością dla $x=c$. Zatem ta funkcja jest ciągłą w punkcie $x=c$.

Podobnie można sformułować twierdzenie ogólne dla n funkcji, gdzie $n\geqslant 2$. Również: *Jeśli funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są ciągłe w punkcie $x=c$, to funkcja $f(x)-\varphi(x)$ jest także ciągłą dla $x=c$.*

Dla iloczynu funkcji mamy podobne twierdzenie: *Jeśli funkcje: $f(x)$ i $\varphi(x)$ są ciągłe w punkcie $x=c$, to funkcja $f(x).\varphi(x)$ jest również ciągłą dla $x=c$.* Łatwo uogólnić to twierdzenie dla iloczynu n czynników ciągłych.

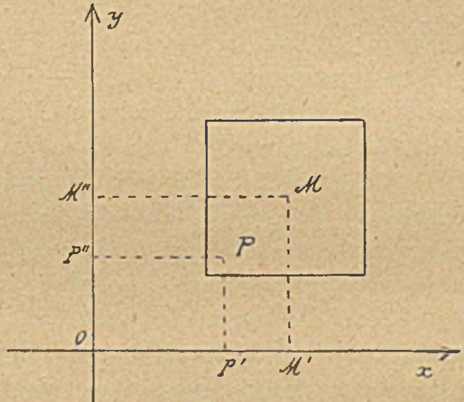
Dla ciągłości ilorazu 2-ch funkcji nie wystarcza jednak założenie ciągłości obu funkcji: konieczne są jeszcze pewne dalsze zastrzeżenia, których znaczenie łatwo na podstawie poprzednich rozważań da się wytłumaczyć. Twierdzimy: *Jeśli funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są ciągłe dla $x=c$ i jeśli $\varphi(c)\neq 0$,* (czyli wartość funkcji $\varphi(x)$ dla $x=c$ jest różna od zera), *to można znaleźć sąsiedztwo punktu c, dla którego funkcja $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest określona, nadto ten iloraz jest funkcją ciągłą dla $x=c$.* — Wtedy bowiem wolno stosować twierdzenie o granicy ilorazu dwóch funkcji. Otóż, ponieważ $f(x)\to f(c)$ i $\varphi(x)\to\varphi(c)$, gdy $x=c$ i $\varphi(c)\neq 0$, to istnieje sąsiedztwo punktu c, w którem iloraz $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest określony; ten iloraz ma też określoną wartość $\frac{f(c)}{\varphi(c)}$ dla $x=c$ i nadto $\frac{f(x)}{\varphi(x)}\to\frac{f(c)}{\varphi(c)}$, ale $\frac{f(c)}{\varphi(c)}$ jest wartością funkcji $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dla $x=c$, przeto funkcja $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest ciągłą dla $x=c$.

§ 18. Określenie granicy funkcji dwu zmiennych.

Intuicyjnie da się określić granica funkcji dwu zmiennych analogicznie do granicy funkcji jednej zmiennej. I w ścisłem określeniu granicy funkcji dwu zmiennych spotkamy analogje z określeniem granicy funkcji jednej zmiennej.

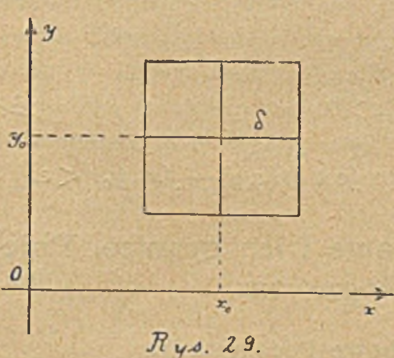
Weźmy pod uwagę funkcję $z = f(x, y)$ i punkt (x_0, y_0). Przy rozważaniu granicy funkcji jednej zmiennej mogliśmy dojść do danego punktu na prostej z „dwu stron", z dwu przeciwnych kierunków; tymczasem w naszem obecnem rozumowaniu musimy to uwzględnić, że można dojść do rozważanego punktu (x_0, y_0) na płaszczyźnie z nieskończenie wielu stron; stąd wynikać też będzie pewna trudność. Przy badaniu granicy funkcji jednej zmiennej w punkcie x_0 braliśmy pod uwagę sąsiedztwo punktu x_0, t. zn. przedział $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ czyli ogół liczb x o własności $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ z wykluczeniem punktu x_0 i badaliśmy wartości funkcji dla tych liczb x $(\delta > 0)$; przy badaniu granicy funkcji dwu zmiennych należy przyjąć dla punktu (x_0, y_0) pewne otoczenie, w którem to otoczeniu funkcja $f(x, y)$ musi być określona, w samym zaś punkcie (x_0, y_0) funkcja może nie posiadać wcale określonej wartości. Za otoczenie punktu (x_0, y_0) przyjmujemy kwadrat na płaszczyźnie (x, y) o bokach równoległych do osi x-ów i y-ów, a o środku w punkcie (x_0, y_0). Liczbę (g) nazwiemy granicą funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0), jeżeli wartości funkcji $f(x, y)$ tembardziej będą bliższe liczby (g), im punkt (x, y) będzie bliższy punktu (x_0, y_0) czyli im liczba x będzie bliższą liczby x_0, liczba y liczby y_0. Jeżeli tedy znajdziemy dla punktu (x_0, y_0) takie otoczenie (kwadrat o bokach równoległych do osi x i y, a o środku w punkcie (x_0, y_0)), iż dla wszystkich punktów (x, y) tego otoczenia bezwzględną wartość różnicy $|f(x, y) - g|$ można uczynić mniejszą od dowolnie małej dodatniej liczby ε, wówczas (g) nazwiemy granicą funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0). Chodzi o to, aby znaleźć warunki konieczne i dostateczne, jakie powinny spełniać liczby x i y, aby punkt (x, y) leżał w kwadracie, który określa otoczenie punktu (x_0, y_0).

W tym celu rozważmy kwadrat o bokach równoległych do osi układu i długości $2a$, jako otoczenie punktn $M(x_0, y_0)$ (rys. 28). Jest $a > 0$. Rzutując punkt $M(x_0, y_0)$ na oś x-ów i dowolny punkt $P(x, y)$, leżący na polu kwadratu, także na oś x-ów, otrzymamy na osi x odcinek $P'M'$ i widzimy wprost z rysunku, że warunkiem koniecznym, aby dowolny punktu $P(x, y)$ leżał wewnątrz rozważanego kwadratu jest, aby było $P'M' < a$ czyli, by było $|x - x_0| < a$. Aby otrzymać jednak warunek konieczny i wystarczający musi być nadto $P''M'' < a$ czyli $|y - y_0| < a$, gdzie P'', M'' oznaczają rzuty punków P, M na oś y. Te dwa związki $|x - x_0| < a$ i $|y - y| < a$ są warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby punkt (x, y) leżał wewnątrz powyższego kwadratu, będącego otoczeniem punktu (x_0, y_0). Gdybyśmy chcieli objąć także punkty leżące na obwodzie kwadratu, musielibyśmy napisać $|x - x_0| \leqslant a$, oraz $|y - y_0| \leqslant a$. Ponieważ przy rozważaniu granicy w ogólnym przypadku wartość funkcji w punkcie (x_0, y_0) może być (jak już powiedzieliśmy) nieokreśloną, więc należy punkt (x_0, y_0) wykluczyć i w tym celu zakładamy, że nie może równocześnie być $x = x_0$ i $y = y_0$.



Rys. 28.

Ścisła definicja granicy funkcji jednej zmiennej orzeka: funkcja $f(x)$ ma granicę (g) w punkcie $x = c$, jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, iż, gdy tylko jest $0 < |x - c| < \delta$, to jest też $|f(x) - g| < \varepsilon$.



Rys. 29.

W przypadku funkcji dwu zmiennych możnaby sądzić, że ma być (1) $0 < |x - x_0| < \delta$ i zarazem (2) $0 < |y - y| < \delta$, tymczasem jednoczesność warunków (1) i (2) wyklucza wszystkie punkty na odcinku od punktu $(x_0, y_0 - \delta)$ do punktu $(x_0, y_0 + \delta)$ i na odcinku od punktu $(x_0 - \delta, y_0)$ do puktu $(x_0 + \delta, y_0)$, a więc na krzyżu nakreślonym w rys. 29, kiedy należy wykluczyć jedynie punkt (x_0, y_0). Aby więc objąć wszystkie punkty otoczenia pùnktu (x_0, y_0), należałoby tak przyjąć: Liczba (g) jest granicą funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0), jeżeli: 1) dla $0 < |x - x_0| < \delta$ i $0 < |y - y_0| < \delta$ jest $|f(x, y) - g| < \varepsilon$, 2) dla $x = x_0$ i $0 < |y - y_0| < \delta$ jest $|f(x, y) - g| < < \varepsilon$, 3) dla $0 < |x - x_0| < \delta$ i dla $y = y_0$ jest $|f(x, y) - g| < \varepsilon$; zamiast jednak wypisywania tylu nierówności i równości, określimy granicę krócej w ten sposób: Liczbę (g) nazwiemy granicą funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0), jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że nierówności $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, pociągają za sobą nierówność $|f(x, y) - g| < \varepsilon$, zaznaczamy jednak, że nie może być równocześnie $x = x_0$ i $y = y_0$; [gdyż mówimy tylko o otoczeniu punktu (x_0, y_0), a nie o punkcie (x_0, y_0)].

Do granicy funkcji dwu zmiennych odnoszą się te same twierdzenia, co do granicy funkcji jednej zmiennej, a więc: *1) jeżeli funkcja $f(x, y)$ w danym punkcie ma granicę, to tylko jedną; 2) granica sumy funkcji równa się sumie granic i t. d.*

Podobnie też nie posiada analiza ogólnej metody obliczania granic, ale wyodrębnimy pewną klasę funkcji, dla których łatwo oznaczyć granicę; są to funkcje ciągłe, zastanowimy się więc obecnie nad ciągłością funkcji dwu zmiennych.

§ 19. Ciągłość funkcji dwu zmiennych.

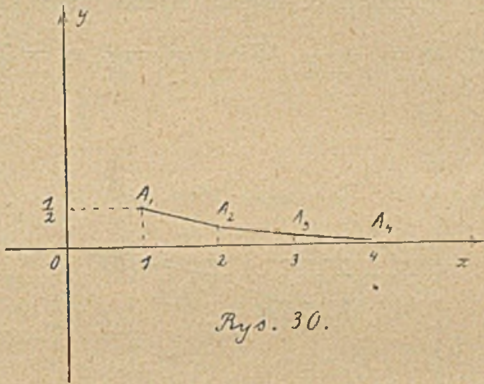
Niech $z = f(x, y)$ będzie daną funkcją dwu zmienych; powiadamy, że jest ona w punkcie $M(x_0, y_0)$ ciągłą, jeżeli 1) $f(x_0, y_0)$ oznacza pewną liczbę czyli funkcja $f(x, y)$ jest w punkcie M określoną i 2) jeżeli wartość funkcji $f(x, y)$, tem mniej się różni od wartości $f(x_0, y_0)$, im bardziej punkt $A(x, y)$ zbliża się do punktu $M(x_0, y_0)$. *Ścisła definicja*: Funkcję $f(x, y)$ zwiemy ciągłą w punkcie (x_0, y_0), jeżeli do każdej liczby $\varepsilon > 0$, istnieje taka liczba $\delta > 0$, że, gdy tylko jest $|x - x_0| < \delta$ i $|y - y_0| < \delta$ [przyczem może być równocześnie $x = x_0$ i $y = y_0$], to jest $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Rozdział III. Ciągi liczbowe i ich granice. Pojęcie potęgi i logarytmu.

§ 20. Ciągi liczbowe i ich granice.

Weźmy zbiór wszystkich liczb naturalnych 1, 2, 3... Każdej liczbie tego zbioru przydajmy określoną liczbę; będzie więc określoną funkcja zmiennej n, mogącej przyjmować jedynie wartości równe liczbom naturalnym; a ogół jej wartości utworzy t. zw. ciąg liczbowy o wyrazach $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$, które dla każdej liczby n są więc określone.

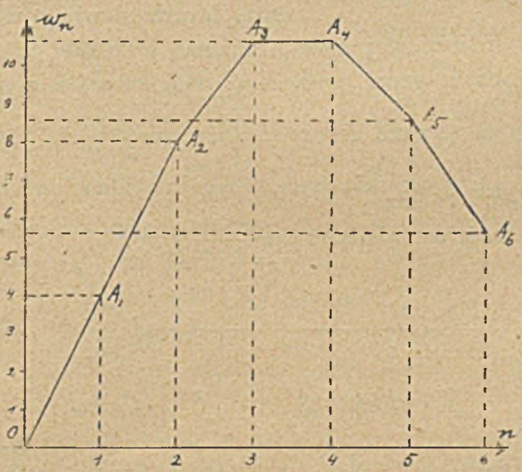
Przykład 1. Weźmy ciąg: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, (\frac{1}{2})^n, \ldots$ Jego wyraz ogólny $w_n = (\frac{1}{2})^n$ jest funkcją zmiennej o wartości naturalnej n czyli $w_n = f(n)$. Obraz geometryczny tej funkcji daje rys. 30. Punkty $A_1, A_2 \ldots$ na rys. 30 są właśnie obrazami geom. odpowiednich wyrazów tego ciągu. Połączywszy je linją łamaną, spostrzeżemy,



Rys. 30.

że wartości coraz to dalszych wyrazów zbliżają się coraz bardziej do zera; jeśli tylko dobierzemy dość wysoki numer N wyrazu, to bezwzględna wartość tego wyrazu będzie się różnić od zera o mniej, niż o dowolnie małą dodatnią liczbę ε czyli: $|w_n| < \varepsilon$, jeżeli $n \geqslant N$.

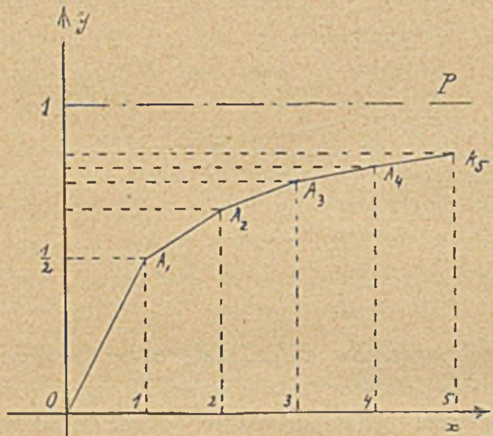
Przykład 2. Niech $w_n = \frac{4^n}{n!}$, przyczem przez symbol $n!$ rozumiemy iloczyn: 1. 2. 3. 4.... n czyli $w_n = \frac{4^n}{1.2.3 \ldots n}$. Obliczmy kilka początkowych wyrazów tego ciągu. Otrzymamy: $w_1 = 4$, $w_2 = \frac{16}{2} = 8$, $w_3 = \frac{64}{6} = 10\frac{2}{3}$, $w_4 = \frac{256}{24} = 10\frac{2}{3}$, $w_5 = 8\frac{8}{15}$, $w_6 = 5\frac{31}{45}$



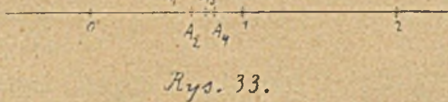
Rys. 31.

i t. d. Wartość wyrazów zrazu rośnie, ale już $w_3 = w_4$, poczem wyrazy maleją tak, że linja łamana (rys. 31), łącząca obrazy geom poszczególnych wyrazów, zbliża się coraz bardziej do osi n; możemy więc napisać: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{4^n}{n!} = 0$ t. j. granica ciągu tego równa się zeru.

Przykład 3. Niech będzie ciąg, którego ogólnym wyrazem jest: $w_n = \frac{n}{n+1}$. Wtedy $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = \frac{2}{3}$, $w_3 = \frac{3}{4}$ i t. d. Widzimy, że wyrazy wzrastają, lecz w sposób ograniczony tak, że żaden, choćby bardzo daleki wyraz nie przekroczy jednostki. Na obrazie geometr. (rys. 32) tego ciągu (postępu) punkty A_1, A_2, A_3,... odpowiadające wyrazom w_1, w_2, w_3..., zbliżają się coraz bardziej do prostej P, równoległej do osi x w odległości 1. Wyrazy ciągu możemy jeszcze i w inny sposób uzmysłowić, a mianowicie: niech punkty osi liczbowej będą obrazami wyrazów ciągu. W naszym przykładzie obrazy geom. poszczególnych wyrazów ciągu $w_n = \frac{n}{n+1}$ na osi będą zagęszczać się w pobliżu punktu A, będącego obrazem liczby 1, ale wszystkie będą leżały po lewej stronie tego punktu, (rys. 33); możemy napisać: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

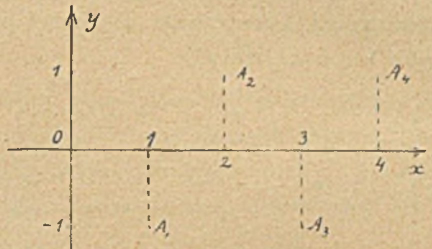


Rys. 32.



Rys. 33.

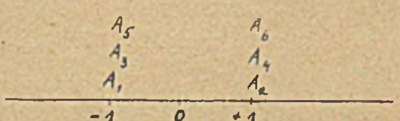
Przykład 4. Wyobraźmy sobie ciąg: $(-1), (+1), (-1), (+1)$.... Jego wyraz ogólny możemy określić wzorem: $w_n = (-1)^n$. Widzimy, że wyrazy tego ciągu nie zbliżają się do żadnej liczby; ciąg ten nie ma żadnej granicy. Jego obraz geom. w odniesieniu do osi współrzędnych (rys. 34), czy też na osi liczbowej (rys. 35) daje o tym fakcie należyte pojęcie. W obrazie geometr. z rys. 34 nie można znaleźć takiej prostej, do którejby się zbliżały punkty A_1, A_2, A_3... nieograniczenie, na osi liczbowej zaś (rys. 35) punkty A_1, A_3, A_5... odpowiadające wyrazom ciągu o wskaźnikach nieparzystych zlewają się w jeden punkt, podobnie jak punkty A_2, A_4, A_6..., będące obrazami wyrazów ciągu o wskaźnikach parzystych.



Rys. 34.

Mamy tu więc przykład ciągu nieskończonego, ograniczonego u dołu i u góry (bo żaden wyraz choćby bardzo daleki, nie przekracza liczby $+1$ ani nie spadnie poniżej liczby -1), ale nie mającego granicy.

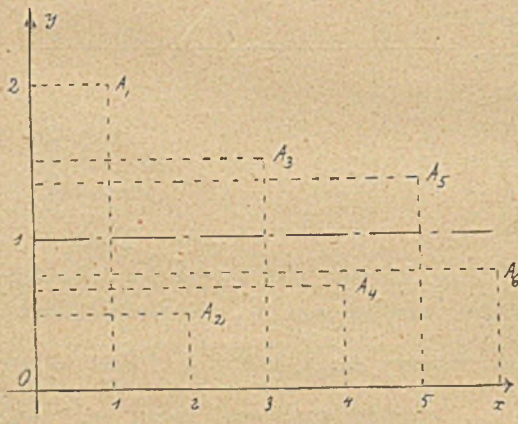
Przykład 5. Weźmy ciąg, którego n-ty wyraz jest odwrotnością n-tego wyrazu postępu, omówionego w przykładzie 3 czyli $w_n = \frac{n+1}{n}$. Pierwsze jego wyrazy są: $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$... Jest to więc ciąg malejący, gdyż $w_n > w_{n+1}$, ale wartość poszczególnych, choćby bardzo dalekich wyrazów, nie spada nigdy poniżej liczby 1. Jeśli wyrysujemy jego wykres w odniesieniu do osi spółrzędnych, to łamana, łącząca punkty, będące obrazami poszczególnych wyrazów, będzie nieograniczenie zbliżać się od góry do prostej, równoległej do osi x w odległości 1. Jest to więc ciąg ograniczony u dołu i mający granicę 1. Na osi liczbowej rzecz przedstawi się tak: Jeśli punkt A_n będzie obrazem n-go wyrazu tego ciągu, a punkt B obrazem jego granicy t. j. liczby 1, to odległość $\overline{A_nB}$ można uczynić tak małą, jak nam się podoba; należy tylko dobrać odpowiednio wysoki numer wyrazu o obrazie A_n.



Rys. 35.

Przykład 6. Niech w ciągu $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$ wyrazy o wskaźnikach parzystych będą określone wyrażeniem: $w_{2m} = \frac{m}{m+1}$, a wyrazy nieparzyste niech charakteryzuje wyrażenie: $w_{2m+1} =$

$=\frac{m+1}{m}$. Pierwsze wyrazy tego ciągu będą następujące: 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$... i t. d. Na obrazie geometrycznym (rys. 36) będą punkty, odpowiadające poszczególnym wyrazom, leżały naprzemian powyżej i poniżej prostej, równoległej do osi x i w odległości 1 od niej narysowanej, tak jednak, iż do tej prostej będą się nieograniczenie z obu stron zbliżały.



Rys. 36.

Przy przedstawiewieniu ciągu na osi liczbowej punkty, odpowiadające wyrazom o wskaźnikach parzystych będą leżały na lewo, inne zaś na prawo od punktu B, odpowiadającego liczbie 1, i do tego punktu będą się nieograniczenie zbliżać. Liczba 1 jest więc granicą tego ciągu liczbowego.

Przykład 7. Ciąg, którego n-ty wyraz jest: $w_n = 10^n$, a początkowe wyrazy są: 10, 100, 1000, 10000, 100000....... nie jest ograniczony u góry. Wyrazy jego rosną w sposób nieograniczony i wartość ich nie zbliża się do żadnej liczby. Ten ciąg nie posiada granicy. Zasadniczą cechą ciągów, które obecnie rozważamy, jest to, że są nie skończone. Otóż ciąg jest nieskończonym t. zn. dla k a ż d e j liczby naturalnej (n) określona jest wartość $f(n)$. Liczba (n) wyrazu w_n czy $f(n)$ nazywa się numerem lub wskaźnikiem wyrazu.

Ciąg jest określony, jeżeli funkcja $f(x)$ jest określona dla każdej liczby naturalnej (n). Otóż takiej funkcji nie można określić przez wyliczenie wyrazów w_1, w_2, w_3,..., ale muszą być dane ogólne wzory na wyrazy, jak widzieliśmy to w przykładach, w których albo jeden wzór albo też dwa wzory (przykł. 6) pozwalają obliczyć każdy wyraz ciągu. Takich wzorów może być więcej.

Przykład 8. Dotychczasowe przykłady były takie, że można było obliczyć wyraz w_n, nie znając wyrazów poprzednich: w_1, w_2,... w_{n-1}. Weźmy jednak pod uwagę ciąg, określony w sposób następpujący: niech będzie $w_1 = \sqrt{2}$, nadto niech będzie $w_{n+1} = \sqrt{2+w_n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Wzór jest tu tego rodzaju, że obliczyć w_{10} nie możemy, nie znalazłszy $w_2, w_3, \ldots w_9$. Czy ciąg taki ma granicę, to zdołamy później rozstrzygnąć.

Na podstawie przerobionych dotychczas przykładów możemy już przystąpić do ścisłego określenia ciągu czyli postępu liczbowego oraz jego granicy.

Przez postęp liczbowy lub ciąg liczbowy rozumiemy zbiór wartości, które funkcja $f(x)$ przyjmuje dla wszystkich naturalnych wartości na zmienną x. Mamy więc określone liczby: $f(1)$, $f(2)$, $f(3) \ldots\ldots f(n) \ldots\ldots$; są to t. zw. wyrazy ciągu, oznaczane zwykle przez: $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$

Powiemy, że ten ciąg ma granicę g, jeśli: 1) liczba g jest niezależna od liczby n, 2) do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje takie miejsce N w ciągu, że dla wszystkich liczb naturalnych n, spełniających warunek $n \geqq N$, jest: $|w_n - g| < \varepsilon$. Piszemy to krótko: $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = g$ albo: gdy $n \to \infty$, to $w_n \to g$.

Nie każdy ciąg ma granicę, ale jeśli ją ma, to tylko jedną. Dowód podobny do dowodu z teorji granic funkcji (zob. § 6). Poznamy kilka szczególnych typów ciągów.

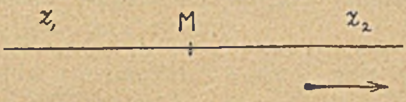
Niech będzie dany postęp (ciąg): $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$, którego wyrazy spełniają nierówność: $w_1 < w_2 < w_3 \ldots$, ogólnie: $w_n < w_{n+1}$ dla każdej naturalnej liczby n Ciąg taki zowiemy r o s n ą c y m. Jeżeli ciąg posiada cechę: $w_n \leqq w_{n+1}$ dla każdej naturalnej liczby n, to nazywamy go n i e m a l e j ą c y m; np. 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3. 4, 4, 5... Ciąg może rosnąć w sposób ograniczony (jak w przykł. 3) lub nieograniczenie (przykład 7). W pierwszym przypadku istnieje pewna liczba A, niezależna od wskaźnika (n) i taka, że żadne wyrazy ciągu jej nie przekraczają (w przykładzie 3 liczba 1). Powiemy więc: Jeśli istnieje dla danego ciągu liczba A, niezależna od liczby n i taka, iż dla wszystkich liczb n jest $w_n \leqq A$, wtedy ciąg nazywamy o g r a n i c z o n y m u g ó r y.

Jeśli dalej dla każdej liczby naturalnej n wyrazy ciągu spełniają nierówność: $w_n > w_{n+1}$, to ciąg nazywamy m a l e j ą c y m.

Jeżeli zaś ciąg spełnia związek: $w_n \geqq w_{n+1}$ dla każdego wskaźnika n, to nazywamy go n i e r o s n ą c y m.

Jeżeli istnieje liczba A, niezależna od liczby n i taka, że dla wszystkich liczb n zachodzi nierówność $w_n \geqslant A$, wtedy ciąg nazywa się ograniczonym u dołu.

Wiemy ze wstępu, że każdą liczbę rzeczywistą możemy przedstawić jako punkt na osi liczbowej. Wyobraźmy sobie, że taką oś liczbową przedzielimy w pewnym punkcie M (rys. 37) Wtedy punkty tej osi utworzą dwa zbiory: Z_1 i Z_2 o następujących własnościach: 1) oba zbiory zawierają nieskończenie wiele punktów i każdy punkt osi należy do jednego z nich;



Rys. 37.

2) Każdy punkt zbioru Z_1 leży na „lewo" od każdego punktu zbioru Z_2; 3) Punkt separacyjny M ma tę własność, że wszystkie punkty tej osi na lewo od punktu M należą do zbioru Z_1, a wszystkie punkty na prawo od M należą do zbioru Z_2. Sam zaś punkt M należy albo do zbioru Z_1 i wtedy jest ostatnim punktem tego zbioru, albo należy do zbioru Z_2 i wtedy jest pierwszym punktem tego zbioru. Punkt M „uskutecznił podział punktów osi na wymienione zbiory".

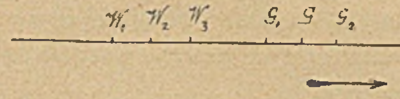
Arytmetyczna interpretacja tej kwestji będzie następująca: Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych podzielmy na dwa zbiory: Z_1 i Z_2 o następujących własnościach: 1) oba zbiory mają być nieskończonemi i każda liczba rzeczywista ma należeć do jednego z nich; 2) każda liczba zbioru Z_1 ma być mniejszą od każdej liczby zbioru Z_2. Wtedy istnieje liczba separacyjna (rozdzielcza) m taka, że każda liczba rzeczywista, mniejsza od liczby m, należy do zbioru Z_1, a każda liczba rzeczywista większa od liczby m należy do zbioru Z_2. Sama zaś liczba m należy albo do zbioru Z_1 i wtedy jest największą z tych liczb albo należy do zbioru Z_2 i wtedy jest najmniejszą liczbą tego zbioru. Liczba m uskuteczniła przekrój liczb rzeczywistych na wymienione zbiory Z_1 i Z_2.

Na tej podstawie, ale drogą geometryczną [1]) przeprowadzimy dowód następującego twierdzenia: *Ciąg (postęp) niemalejący, a ograniczony u góry, ma granicę.*

Weźmy oś liczbową i oznaczmy na niej punkty W_1, W_2, W_3..., będące obrazami wyrazów w_1, w_2, w_3 ... ciągu liczbowego, ograni-

[1]) Czytelnik z łatwością zarytmetyzuje ów dowód. Używamy słów: „na lewo" i „na prawo", zakładając, że oś liczbowa narysowana jest poziomo i skierowana od strony lewej ku prawej.

czonego u góry i niemalejącego (rys. 37a). Podzielmy punkty osi na dwa zbiory punktów tak, aby do zbioru Z_1 należały wszystkie punkty W_1, W_2, W_3, ..., W_n.. i wszystkie punkty, leżące na lewo od któregokolwiek z nich, a do zbioru Z_2 wszystkie punkty, leżące na prawo od wszystkich punktów W_1, W_2, W_3.... W_n... Zbiory Z_1 i Z_2 mają własności następujące:



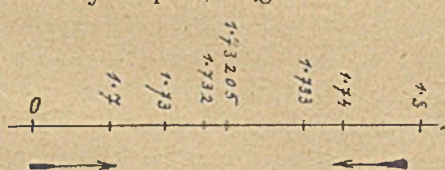
Rys. 37a.

1) zbiór Z_1 jest nieskończony, bo do niego należą przecież wszystkie punkty osi leżące na lewo od punktu W_1. 2) Zbiór Z_2 jest też nieskończony; skoro bowiem ciąg jest ograniczonym u góry, tedy istnieje liczba a taka, że jest $w_n \leqq a$ dla $n = 1, 2, 3$... Niech A będzie obrazem liczby a. Otóż wszystkie punkty osi na prawo od A należą do Z_2. 3) Każdy punkt osi należy do zbioru Z_1 albo do zbioru Z_2. Każdy bowiem punkt M albo leży na prawo od każdego z punktów W_1, W_2, ..., ... albo tak nie jest; to ostatnie znaczy, że albo jest jednym z punktów W_1, W_2,... (a więc należy do zbioru Z_1) albo leży na lewo od jednego z nich (a więc także należy do Z_1). 4) Każdy punkt zbioru Z_1 leży na lewo od każdego puktu zbioru Z_2. Tę rzecz czytelnik sam z łatwością okaże. Z tego wynika, że podział punktów osi na zbiory Z_1, Z_2 uskutecznił punkt separacyjny, który oznaczymy przez G i niech on będzie obrazem liczby g. Niech $\varepsilon > 0$ oznacza dowolną liczbę i oznaczmy na osi przez G_1 obraz geometr. liczby $g - \varepsilon$, a przez G_2 obraz liczby $g + \varepsilon$. Punkt G_2 leży na prawo od punktu separacyjnego G, zatem też na prawo od wszystkich punktów W_1, W_2, W_3.... W_n... Stąd wniosek, że $w_n < g + \varepsilon$... (a) dla $n = 1, 2, 3$,... czyli: liczba $(g + \varepsilon)$ jest większa od wszystkich wyrazów ciągu. Punkt G_1, będący obrazem liczby $g - \varepsilon$, może się schodzić z którymś z punktów W_n, albo leży od pewnego z nich na lewo czyli $g - \varepsilon \leqq w_p$. Weźmy pod uwagę wszystkie wyrazy w_n, które mają numer nie mniejszy od p; gdy $n \geqq p$, to $w_p \leqq w_n$, więc tem bardziej: $g - \varepsilon \leqq w_n$ dla $n \geqq p$. Połączmy ostatnią nierówność z nierównością (a) w jedną: dla $n \geqq p$ jest $g - \varepsilon \leqq w_n < g + \varepsilon$; odejmijmy po każdej stronie: $g = g = g$. Otrzymamy tedy $-\varepsilon \leqq w_n - g < \varepsilon$, z czego wnosimy, że jest: $|w_n - g| \leqq \varepsilon$ dla $n \geqq p$. Niech będzie dana naprzód liczba $\varepsilon' > 0$ i obierzmy $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$, to $\varepsilon > 0$; więc $|w_n - g| \leqq \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'$, przeto

będzie prawdziwą nierówność: $|w_n - g| < \varepsilon'$ dla $n \geqslant p$. Do każdej więc liczby $\varepsilon' > 0$ istnieje takie miejsce p w ciągu, że wszystkie wyrazy w_n od tego miejsca począwszy w górę, różnią się od liczby g co do bezwzględnej wartości o mniej, niż ε'. Zatem ciąg niemalejący, a ograniczony u góry, ma granicę. Podobnie dowodzi się twierdzenia: *Ciąg liczbowy nierosnący, a ograniczony u dołu, ma granicę.*

Przykład. Weźmy liczbę $\sqrt{3}$, o której wiadomo, że jest niewymierną, a więc nie równa się żadnemu ułamkowi dziesiętnemu. Są jednak ułamki dziesiętne, których wartość dąży do $\sqrt{3}$ i tak nawet piszemy w praktycznych rachunkach: $\sqrt{3} = 1·73205$, chociaż liczba 1·73205 jest tylko przybliżeniem przez niedomiar liczby $\sqrt{3}$, gdyż $1·73205^2 < 3$. Przybliżenia takie do 1, 2, 3... miejsc dziesiętnych, utworzą nam następujący ciąg: 1·7, 1·73, 1·732, 1·7320, 1·73205.... Ciąg ten będzie nieskończony. Każdy wyraz następny jest większy lub równy poprzedniemu; równość w tym przykładzie zachodzi np. między wyrazami trzecim i czwartym. Ciąg taki jest więc niemalejącym. Każdy następny jego wyraz powstaje z poprzedniego przez dopisanie jeszcze jednej cyfry dziesiętnej; jest to też ciąg ograniczony u góry, ponieważ każdy, choćby bardzo daleki jego wyraz, jest miejszy od liczby 1·8; ten ciąg, ma więc granicę.

Weźmy teraz pod uwagę ciąg, którego wyrazy będą przybliżeniami przez nadmiar liczby $\sqrt{3}$. Otrzymamy go z poprzedniego, powiększając kolejno ostatnią cyfrę każdego wyrazu o 1. Będzie to więc ciąg: 1·8, 1·74, 1·733, 1·7321, 1·73206..., jak widać ciąg nierosnący, ograniczony u dołu, gdyż żaden wyraz nie jest mniejszy od liczby n. p. 1; ciąg ten ma zatem granicę.



Rys. 38.

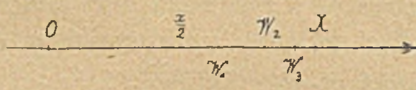
Oznaczmy teraz granicę pierwszego ciągu przez g, drugiego zaś przez γ i zbadajmy stosunek granic g i γ. Jeśli uzmysłowimy to sobie na osi liczbowej, to otrzymamy wykres, przedstawiony na rys. 38. Obrazy geometryczne ciągu pierwszego następują po sobie na osi w kierunku od lewej ku prawej; obrazy zaś wyrazów drugiego postępu od prawej ku lewej stronie osi. Możemy intuicyjnie przeczuć, że oba ciągi będą miały wspólną granicę i nią będzie liczba $\sqrt{3}$, Jeśli oznaczymy przez w_n n-ty wyraz pierwszego ciągu, a n-ty wyraz drugiego przez v_n, to wyraz v_n otrzymamy z wyrazu w_n przez powiększenie ostatniej cyfry o 1, czyli: $v_n = w_n + \frac{1}{10^n}$. Według założenia ma v_n granicę γ, $w_n \rightarrow g$ i jeśli n rośnie nieograniczenie, to $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$, zatem: $\gamma = g + 0$, czyli $\gamma = g$. Dla uzasadnienia tego wyniku odwołać się należy na twierdzenie, które, dla uproszczenia wysłowienia się połączymy z dalszem: *Jeśli dwa ciągi w_n i v_n mają granicę g, względnie g', to nowy ciąg o wyrazie $w_n \pm v_n$ ma granicę $g \pm g'$, a zarazem ciąg $w_n . v_n$ ma granicę $g . g'$.* Dowód tych twierdzeń będzie później podany. W naszym przykładzie $g = \gamma = \sqrt{3}$, jak poniżej okażemy.

Między własnościami funkcji, mających granice, a własnościami ciągów, które mają granice, zachodzą, jak widzimy ścisłe analogje. Twierdzeniu o trzech funkcjach odpowiadać będzie *twierdzenie o trzech ciągach: Jeśli mamy trzy ciągi liczbowe, których n-te wyrazy są następujące: w_n, u_n, v_n, jeśli $w_n \leqq u_n \leqq v_n$ dla każdej liczby $n = 1, 2, 3 \ldots$ i jeśli nadto ciągi o wyrazach w_n wzgl. v_n mają wspólną granicę g, to drugi ciąg o wyrazie u_n ma granicę i równą wspólnej wartości granic ciągów pierwszego i trzeciego (czyli $u_n \rightarrow g$).* Aby zastosować to twiedzenie do naszego przypadku, weźmy ciąg $u_n = \sqrt{3}$, t. j. ciąg: $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3} \ldots$, który ma granicę $\sqrt{3}$. Nadto mamy: $1{\cdot}7 < \sqrt{3} < 1{\cdot}8$, $1{\cdot}73 < \sqrt{3} < 1{\cdot}74$, $1{\cdot}732 < \sqrt{3} < 1{\cdot}733, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ogólnie: $w_n < \sqrt{3} < v_n$; więc, skoro $w_n \rightarrow g$ i $v_n \rightarrow g$, to i ciąg $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3} \ldots \rightarrow g$ Ponieważ jednak wiemy, że ciąg ten ma granicę $\sqrt{3}$, wniosek stąd oczywisty, że $g = \sqrt{3}$.

O wszystkich liczbach niewymiernych większych od zera, możemy zupełnie podobnie twierdzić: *Każda liczba niewymierna, większa od zera jest granicą ciągu swych kolejnych przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar i zarazem granicą ciągu swych kolejnych przybliżeń dziesiętnych przez nadmiar.*

To twierdzenie daje się uogólnić w następujący sposób: *Do każdej liczby niewymiernej x można znaleźć w nieskończenie wiele sposobów ciągi liczbowe, których wszystkie wyrazy są liczbami wymiernemi i które mają liczbę x za granicę.*

Zamiast dowodu arytmetycznego zdamy sobie sprawę z tego twierdzenia geometrycznie. Przedstawimy wyrazy ciągu na osi liczbowej (rys. 39), na której punkty W_1, W_2, W_3, X, oznaczają odpowiednie liczby: w_1, w_2, w_3, x. Niech będzie najpierw $x > 0$, dlatego punkt X umieściliśmy na prawo od punktu 0. Wyszukujemy teraz środek odcinka $\overline{OX}$, który to punkt środkowy wyobraża nam liczbę $\frac{x}{2}$. Między $\frac{x}{2}$ a x jest nieskończenie wiele liczb wymiernych; wybieramy jedną z nich i oznaczamy ją przez w_1; jej obraz, to punkt W_1. Odcinek W_1X znowu dzielimy na połowy i w połowie bliższej punktowi X, obieramy punkt W_2, będący obrazem liczby wymiernej w_2 i t. d. W ten sposób dochodzimy do ciągu o wyrazach wymiernych, coraz bliższych liczbie x; otrzymamy ciąg rosnący o granicy x.



Rys. 39.

Ale możemy postąpić inaczej. Na prawo od punktu X obrać punkt A i na odcinku XA wybrać punkt W_1', będący obrazem liczby wymiernej w_1'. Następnie przepołówmy odcinek XW_1' punktem M_1 i na odcinku XM_1 wybierzmy punkt W_2', będący obrazem liczby wymiernej w_2'; niech M_2 będzie środkiem odcinka XW_2' i wybierzmy punkt W_3' na odcinku XM_2 i będący obrazem liczby wymiernej w_3' i t. d. Ciąg w_1', w_2', w_3'.... jest ciągiem malejącym liczb wymiernych o granicy x. Ale można było wziąć ciąg o granicy x i wyrazach wymiernych ani rosnący ani malejący, bo dość rozważać ciąg w_1, w_2, w_3, w_1', w_2', w_4, w_5, w_3', w_4', w_5', w_6, w_7, w_8... i t. d. Jak z tego widać, prawdą jest, że można te ciągi wybierać w nieskończenie wiele sposobów.

To, cośmy obecnie powiedzieli, odnosi się nietylko do liczb niewymiernych dodatnich ale i do ujemnych, weźmy bowiem pod uwagę liczbę niewymierną x ujemną, t. zn. niech będzie $x < 0$. Natenczas kładąc $y = -x$, otrzymujemy, że jest $y > 0$ i liczbą niewymierną. Do liczby y można znaleźć więc ciąg, którego wszystkie wyrazy są liczbami wymiernemi i który ma granicę y; niech to będzie ciąg: w_1, w_2, w_3..., $w_n \to y$. Pomnóżmy n-ty wyraz tego ciągu przez n-ty wyraz ciągu, którego wszystkie wyrazy są jednakowe i równe liczbie (-1). Otrzymamy ciąg: $-w_1$, $-w_2$, $-w_3$, ... : będzie $-w_n \to -y$; a że $-y = x$, więc twierdzenie zostało wyjaśnione i dla liczb niewymiernych ujemnych.

Okażemy, że, jeżeli $u_n \to g$, $v_n \to \gamma$ dla $n \to \infty$, to ciąg $u_n + v_n$ ma granicę i równą liczbie $g + \gamma$. Skoro bowiem $u_n \to g$, to do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N_1 taka, że dla wskaźników $n \geqslant N_1$ jest $|u_n - g| < \varepsilon$; podobnie istnieć będzie liczba naturalna N_2 taka, że dla wskaźników $n \geqslant N_2$ jest $|v_n - \gamma| < \varepsilon$. Jeżeli więc położymy $N = \text{Max}\,(N_1, N_2)$ i $n \geqslant N$, to $|u_n + v_n - -(g + \gamma)| = |(u_n - g) + (v_n - g)| \leqslant |u_n - g| + |v_n - \gamma| < 2\varepsilon$. Otóż do liczby naprzód danej $\varepsilon' > 0$ wybieramy $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$; będzie $\varepsilon > 0$ i wtedy: $|u_n + v_n - (g + \gamma)| < \varepsilon'$ dla $n \geqslant N$ czyli ciąg o wyrazie $u_n + v_n$ ma granicę i jest nią liczba $g + \gamma$.

Podobnie dowodzi się twierdzenia dla różnicy $u_n - v_n$.

Dla dowodu analogicznego twierdzenia o iloczynie $(u_n . v_n)$ trzeba wprzód udowodnić twierdzenie pomocnicze: *jeżeli ciąg* u_1, u_2, $u_3, \ldots$ *ma granicę, to jest ograniczony u góry i u dołu.*

Rzeczywiście: skoro $u_n \to g$, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, a więc np. dla liczby $\varepsilon = 1$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wskaźników $n \geqslant N$ jest $|u_n - g| < 1$, skąd $-1 < u_n - g < 1$, co daje $g - 1 < u_n < g + 1$ dla $n \geqslant N$. Otóż niech $a = \text{Min}\,(u_1, u_2, \ldots u_{N-1}, g - 1)$; $b = \text{Max}\,(u_1, u_2, \ldots u_{N-1}, g + 1)$, wtedy $a \leqslant u_n \leqslant b$ dla każdego wskaźnika n. To zarazem wykazuje, że ciąg jest ograniczony u góry i u dołu.

Niech dalej $c = \text{Max}\,(|a|, |b|)$, więc $|a| \leqslant c$, $|b| \leqslant c$, skąd wynika, że $-c \leqslant a \leqslant c$, $-c \leqslant b \leqslant c$, więc będzie $-c \leqslant a \leqslant u_n \leqslant b \leqslant c$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ przeto $-c \leqslant u_n \leqslant c$, co daje $|u_n| \leqslant c$ dla $n = = 1, 2, 3 \ldots$

Niech teraz $u_n \to g$, $v_n \to \gamma$ dla $n \to \infty$. Dla iloczynu $u_n . v_n$ tworzymy wyrażenie $u_n v_n - g\gamma = u_n v_n - g v_n + g v_n - g\gamma = (u_n - g)\, v_n + g(v_n - \gamma)$; ponieważ ciąg v_n ma granicę, więc istnieje liczba $c > 0$ taka, że jest $|v_n| \leqslant c$ dla każdego wskaźnika n. Będzie tedy: $|u_n v_n - g\gamma| \leqslant |u_n - g| . |v_n| + |g| . |v_n - \gamma| \leqslant |u_n - g|\, c + |g| . |v_n - \gamma|$ Resztę dowodu czytelnik z łatwością sam dopełni. Zajmiemy się twierdzeniem o ciągu, którego n-ty wyraz jest ilorazem n-tych wyrazów dwóch ciągów. Weźmy pod uwagę dwa ciągi: 1) u_1, u_2, u_3, $u_4, \ldots u_n \to g$, oraz: 2) w_1, w_2, w_3, $w_4, \ldots w_n \to g'$ i utwórzmy z wyrazów pierwszego i drugiego ciągu nowy ciąg: 3) $\frac{u_1}{w_1}, \frac{u_2}{w_2}, \frac{u_3}{w_3}, \ldots\ldots$

Zanim odpowiemy na pytanie, czy taki ciąg ma granicę i jaką, musimy zastrzec się, aby żaden z dzielników nie był zerem. Zakładamy więc, że wszystkie liczby $w_n \neq 0$. Ale i to jeszcze nie wystarcza. Jeśli bowiem weźmiemy, jako szczególny przypadek następujące dwa ciągi: 1') $1, 1, 1, 1 \ldots \to 1$, 2') $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \to 0$, to, tworząc w powyższy sposób ciąg 3) otrzymamy ciąg: 3') $1, 2, 3, 4 \ldots$ który nie ma granicy. Otóż granicą drugiego ciągu było zero. Aby módz twierdzić, że ciąg (3) ma granicę, założymy ponadto, że $g' \neq 0$, i to założenie okaże się wystarczającem.

Jeżeli dane są dwa ciągi: 1) $u_1, u_2, u_3 \ldots$ *oraz* 2) $v_1, v_2, v_3 \ldots$ *i jeśli oba mają granice* 1) g, 2) g', *nadto, jeśli żaden z wyrazów ciągu* 2) *nie jest równym zeru i jeśli* $g' \neq 0$, *to natenczas ciąg trzeci* $\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_3}{v_3}, \ldots$ *jest określony i ma granicę, równą ilorazowi granic* $\frac{g}{g'}$.
Dowód analogiczny, jak w przypadku funkcji (§ 14).

§ 21. Liczba e (zasada logarytmów naturalnych).

Bardzo ważnym dla analizy matematycznej jest ciąg, którego n-ty wyraz jest: $w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Obliczmy kilka pierwszych wyrazów tego ciągu:

$$w_1 = 2,\ w_2 = \tfrac{9}{4},\ w_3 = \tfrac{64}{27} = 2\tfrac{10}{27},\ w_4 = \tfrac{625}{256} = 2\tfrac{113}{256} \ldots\ldots$$

Ponieważ $\frac{10}{27} > \frac{1}{4}$, a $\frac{113}{256} > \frac{10}{27}$, więc możemy już z pierwszych wyrazów przypuszczać, że to jest ciąg rosnący. Udowodnimy to dla wszystkich jego wyrazów, a zarazem wykażemy, że rośnie on w sposób ograniczony, że zatem ma granicę. Granica ta jest liczbą niewymierną jak okażemy; oznaczamy ją literą e; jej przybliżeniem dziesiętnem na 7 miejsc przez niedomiar jest: 2·7182818. Liczba e została przyjętą za zasadę logarytmów, które nazywamy naturalnymi; liczba e, jako zasada logarytmów naturalnych ma w analizie wielkie znaczenie.

Mamy więc udowodnić, że ciąg: $w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$: 1) jest ograniczonym u góry, 2) jest rosnącym.

Ad 1. Ten ciąg jest ograniczonym u góry, t. zn. istnieje liczba M, niezależna od wskaźnika n i taka, że żaden wyraz danego ciągu jej przekroczyć nie może. Mamy więc wykazać istnienie tej liczby M.

Dowód. Otóż na mocy wzoru dwumiennego Newtona jest:

$$w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}.$$

Wyraz w_n jest sumą $(n+1)$ składników. Obliczmy je; otóż składnik I-szy równa się liczbie 1; składnik II-gi równa się liczbie $n.\frac{1}{n}=1$; składnik III-ci równa się $\frac{n.(n-1)}{2}.\frac{1}{n^2}=\frac{\frac{n.(n-1)}{n^2}}{2}=$ $=\frac{1-\frac{1}{n}}{2}$; skład. IV-ty równa się $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{1}{n^3}=\frac{\frac{n-1}{n}.\frac{n-2}{n}}{6}=$ $=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{6}$ i t. d.

Składnik III-ci zmieńmy w ten sposób, że zamiast ułamka $\frac{1-\frac{1}{n}}{2}$ weźmiemy ułamek $\frac{1}{2}$ czyli opuszczamy w liczniku liczbę $-\frac{1}{n}$, zwiększając tem samem wartość ułamka. Podobnie w składniku IV-tym zamiast ułamka $\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{2.3}$ napiszemy $\frac{1.1}{2.3}$, a w dalszym ciągu $\frac{1.1}{2.2}$ czyli $\frac{1}{2^2}$, przez co również wartość składnika IV-go zwiększyliśmy. Napiszemy więc teraz:

$$\text{(I)} \qquad w_n < 1+1+\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Począwszy od składnika drugiego mamy tu sumę postępu geometrycznego o ilości wyrazów równej n. Pierwszym wyrazem tego postępu jest liczba 1, ilorazem liczba $\frac{1}{2}$. Obliczmy jego sumę przy pomocy wzoru: $S=w_1.\frac{q^m-1}{q-1}$, przyczem $w_1=1$, $q=\frac{1}{2}$, $m=n$. oraz wstawmy tę wartość we wzór (I); tedy:

$$w_n < 1+\frac{(\frac{1}{2})^n-1}{-\frac{1}{2}}=1+\frac{-(\frac{1}{2})^n+1}{\frac{1}{2}}<1+2, \text{ bo } 1-(\tfrac{1}{2})^n<1;$$

jest więc $w_n<3$. Wyraz n-ty ciągu jest mniejszy od liczby 3, jest więc ciąg ograniczonym u góry, co mieliśmy wykazać.

Ad 2. Aby wykazać, że ciąg jest rosnącym, należy udowodnić, że jest $w_n < w_{n+1}$ dla każdego wskaźnika n. Intuicja nie daje nam w tym względzie stanowczej odpowiedzi, gdyż wprawdzie wykładnik potęgowy wzrasta stale o jednostkę, ale zasada potęgowa równocześnie maleje, bo jest przecież dla liczb naturalnych n stale $1+\frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1}$.

Dla dowodu, że ciąg jest rosnącym rozwińmy wyrazy w_n, w_{n+1} na sumy według wzoru dwumiennego. Otóż jest: $w_n = 1 + {}$ $+ \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{\varkappa}\cdot\frac{1}{n^\varkappa} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$; $w_{n+1} = 1 +$ $\binom{n+1}{1}\cdot\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \binom{n+1}{\varkappa}\cdot\frac{1}{(n+1)^\varkappa} + \ldots +$ $\binom{n+1}{n}\frac{1}{(n+1)^n} + \binom{n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

Wyraz w_n jest więc sumą o $(n+1)$ składnikach, kiedy wyraz w_{n+1} ma ich $(n+2)$. Porównajmy ze sobą składniki obu sum. Otóż pierwsze składniki (1, 1) są sobie równe, podobnie i drugie, bo $\binom{n}{1}\frac{1}{n} = 1$, $\binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} = 1$. Trzeci składnik sumy w_n jest mniejszym od trzeciego składnika sumy w_{n+1}, gdyż jest $\binom{n}{2}\cdot\frac{2}{n^2} =$

$$\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{1}{n^2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2},\ \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1-\frac{1}{n+1}}{2},\ \text{ale } \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1},$$

więc $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$, przeto też $\frac{1-\frac{1}{n}}{2} < \frac{1-\frac{1}{n+1}}{2}$.

Składnik $(\varkappa+1)$-szy sumy w_n jest również mniejszy od $(\varkappa+1)$-go składnika sumy w_{n+1}, gdyż jest:

$$\binom{n}{\varkappa}\cdot\frac{1}{n^\varkappa} = \frac{n(n-1)\ldots[n-(\varkappa-1)]}{1.2.3\ldots\varkappa}\cdot\frac{1}{n^\varkappa} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{\varkappa-1}{n}\right)}{\varkappa!},$$

$$\binom{n+1}{\varkappa}\cdot\frac{1}{(n+1)^\varkappa} = \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{\varkappa-1}{n+1}\right)}{\varkappa!},\ \text{ale}$$

$$1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{n+1},\ 1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{n+1},\ldots 1-\frac{\varkappa-1}{n} < 1-\frac{\varkappa-1}{n+1},$$

przyczem różnice te są liczbami dodatniemi, skoro jest $1 \leqq \varkappa \leqq n$.

Każdy więc składnik sumy w_n od 3-go do $(n+1)$-go jest mniejszym od odpowiedniego składnika sumy w_{n+1}; ponadto suma

w_{n+1} ma jeszcze $(n+2)$-gi składnik: $\binom{n+1}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$, który jest liczbą większą od zera. Stąd wniosek, że jest $w_n < w_{n+1}$ czyli rozważany ciąg jest rosnącym.

Skoro jest nadto ograniczony u góry, więc tem samem udowodniliśmy, że ma granicę, którą oznaczamy literą (e), co możemy zapisać we formie: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Na podstawie dotychczasowych rozumowań nie możemy jednak nic powiedzieć o liczbie e ponad to, że $2 < e \leqslant 3$, gdyż udowodniliśmy, że $2 < w_n < 3$ dla $n = 2, 3 \ldots$ Osobny dowód będzie musiał wykazać, że liczba e jest niewymierną; dowód ten znajduje się w § 86. Zajmiemy się teraz innym przykładem ciągu, podobnym do ostatniego. Niech będzie ciąg o n-tym wyrazie:

$$v_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}, \text{ gdzie } n \geqslant 2 \text{ czyli } v_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n.$$

Wyszukajmy kilka pierwszych wyrazów tego ciągu. Za v_1 możemy przyjąć dowolną liczbę, np. $v_1 = 5$. Dla $n = 1$ wzór na wyraz v_n dałby bowiem $v_1 = \frac{1}{0}$ i dlatego osobno przyjęliśmy $v_1 = 5$. Przyjmujemy zatem we wzorze na wyraz v_n, że jest $n \geqslant 2$. Jest:

$$v_2 = 2^2 = 4, \quad v_3 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^3 = \tfrac{27}{8} = 3\tfrac{3}{8}, \quad v_4 = \left(\tfrac{4}{3}\right)^4 = \tfrac{256}{81} = 3\tfrac{13}{81} \text{ i t. d.}$$

Przewidzieć łatwo, że jest to ciąg malejący. Aby znaleźć jego granicę, przekształćmy n-ty wyraz w sposób następujący:

$$v_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{(n-1)+1} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^1.$$

Rozłożyliśmy więc wyraz v_n na 2 czynniki: pierwszym jest $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$, który odpowiada wyrazowi w_{n-1} ciągu poprzednio rozważanego. Jeśli przyjmiemy, jak poprzednio, że liczba n rośnie nieograniczenie, to liczba $n-1$ też rośnie nieograniczenie, zatem $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to e$. Drugi czynnik $\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \to 1$, gdy liczba

$n-1$ rośnie nieograniczenie. Ich iloczyn zatem ma granicę równą iloczynowi ich granic czyli równą liczbie $e.1=e$. Innemi słowy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=e \text{ czyli } \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e.$$

§ 22. Dalsze przykłady ciągów.

Przykład 1. Obieramy liczbę dowolną a, taką jednak, by bezwzględna jej wartość $|a|<1$. Można więc za a przyjąć jakikolwiek ułamek (właściwy) n. p. $1/2$, $-3/4$, $-1/5$, $1/5$ i t. d. Weźmy teraz ciąg o wyrazie ogólnym $w_n=a^n$. Twierdzimy: *Ciąg, którego n-tym wyrazem jest $w_n=a^n$, gdzie a jest dowolną liczbą, byle bezwzględna wartość $|a|<1$, ma granicę, a granicą tą jest zero.*

Dowód: Z założeniem $|a|<1$ zgodne są dwie ewentualności: albo jest 1) $a=0$, 2) albo $a\neq 0$. W pierwszym przypadku, jeżeli $a=0$, to $w_n=0^n=0$, ciąg ten składa się więc z wyrazów, które są wszystkie zerami; granicą takiego ciągu jest również 0. jak to przewiduje twierdzenie[1]). W przypadku drugim, jeśli $a\neq 0$, to i $|a|\neq 0$; zatem iloraz $\frac{1}{|a|}$ wolno utworzyć; nazwijmy go b. Więc $b=\frac{1}{|a|}$. Równość $1=1$ podzielmy przez nierówność: $|a|<1$. Otrzymamy: $\frac{1}{|a|}>1$. A ponieważ $\frac{1}{|a|}=b$, przeto $b>1$. Aby otrzymać b, trzeba więc do liczby 1 dodać pewną liczbę większą od 0, czyli dodatnią. Nazwijmy ją A. Zatem $b=1+A$, gdzie $A>0$. Wiadomo nam ze wstępu, że $(1+A)^n\geqslant 1+nA$. Równość zachodzi tylko w przypadku, gdy $n=1$). Przeto $b^n\geqslant 1+nA$. Weźmy znów równość $1=1$ i podzielmy ją przez wyprowadzoną właśnie nierówność: $b^n\geqslant 1+nA$, gdzie $A>0$ i $nA>0$. Otrzymamy tedy: $\frac{1}{b^n}\leqslant\frac{1}{1+nA}$, a ponieważ iloraz $\frac{1}{1+nA}$ jest mniejszy od $\frac{1}{nA}$ więc: $\frac{1}{b^n}\leqslant\frac{1}{1+nA}<$ $<\frac{1}{nA}$. Z założenia $|w_n|=|a^n|$ na podstawie twierdzenia, że

[1]) Czytelnik łatwo wykaże twierdzenie następujące: jeżeli ciąg ma wszystkie wyrazy jednakiej wartości ($w_1=w_2=w_3=\ldots$), to posiada granicę, którą jest wspólna wartość wyrazów.

bezwzgl. wartość potęgi równa się potędze bezwzględnej wartości zasady, wynika że $|w_n| = |a|^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$. Wyprowadzoną więc powyżej nierówność możemy napisać, dopisując po lewej stronie zero: $0 \leqslant \frac{1}{b^n} \leqslant \frac{1}{1+nA} < \frac{1}{nA}$ czyli $0 \leqslant |w_n| < \frac{1}{nA}$, przyczem środkowy wyraz $\frac{1}{1+nA}$ pominęliśmy, jako zbędny. Stąd wynika dalej: $0 \leqslant$ $\leqslant |w_n| < \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{n}$. Gdy $n \to \infty$, to $\frac{1}{n} \to 0$, więc także $\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{n} \to 0$. Stosujemy teraz twierdzenie o trzech ciągach. W powyższym wzorze pierwszy ciąg ma wszystkie wyrazy równe 0, zatem i granicę 0, trzeci ciąg $\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{n} \to 0$, z czego wynika, że także ciąg drugi $|w_n|$ ma granicę 0 czyli stąd: $w_n \to 0$, co było do udowodnienia.

Przykład 2. Jeżeli $w_n = a^n$ i jeżeli jest $|a| > 1$, to ciąg w_n nie ma granicy. Skoro bowiem $|a| > 1$, to, kładąc $b = \frac{1}{|a|}$, otrzymujemy $0 < b < 1$, tedy według poprzedniego przykładu $b^n \to 0$ czyli $\frac{1}{|a|^n} = \frac{1}{|a^n|} = \frac{1}{|w_n|} \to 0$, skąd wynika, że $|w_n|$ rośnie nieograniczenie. Tymczasem wykazaliśmy poprzednio, że, jeżeli ciąg (w_n) ma granicę, to istnieje liczba A, niezależna od wskaźnika i taka, że jest $|w_n| \leqslant A$. Stąd wynika, że rozważany ciąg nie może mieć granicy.

Przykład 3. Niech a oznacza dowolną liczbę i weźmy pod uwagę ciąg $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Okażemy, że ten ciąg ma granicę zero. Otóż albo jest $a = 0$ albo jest $a \neq 0$. Gdy jest $a = 0$, wtedy $w_n = 0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = 0$ i tem samem twierdzenie udowodnione. Niech teraz będzie $a \neq 0$ i połóżmy $b = |a|$; będzie $b > 0$. Otóż $|w_n| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{b^n}{n!}$. Skoro jest $b > 0$, oznaczmy przez (c) największą liczbę całą zawartą w liczbie b (zob. str. 5) czyli liczbę całą (c) o własności $c \leqslant b < c+1$. Jest więc $c \geqslant 0$. Gdy jest $c = 0$, to $b < 1$ i wtedy $|w_n| < b^n$ dla $n \geqslant 2$ i możemy napisać $0 < |w_n| < b^n$ i stosować twierdzenie o 3 ciągach, gdyż pierwszy ciąg mą granicę zero, trzeci na podstawie przykładu 1 ma też granicę zero, więc $|w_n| \to 0$ i przeto $w_n \to 0$, o co chodziło.

Niech teraz będzie $c \geqslant 1$. Tedy, biorąc $n > c$, mamy:

$$|w_n| = \frac{b^n}{n!} = \frac{b}{1} \cdot \frac{b}{2} \cdots \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c+1} \cdot \frac{b}{c+2} \cdots \frac{b}{n} < \frac{b^c}{c!} \cdot \left(\frac{b}{c+1}\right)^{n-c};$$

zamiast czynników $\frac{b}{c+2}, \frac{b}{c+3}, \dots \frac{b}{n}$ położyliśmy liczbę $\frac{b}{c+1}$ większą od nich. Jest więc $|w_n| < \frac{b^c}{c!} \cdot \frac{(c+1)^c}{b^c} \cdot \left(\frac{b}{c+1}\right)^n = \frac{(c+1)^c}{c!} \cdot \left(\frac{b}{c+1}\right)^n$, co napiszemy w postaci: $0 < |w_n| < \frac{(c+1)^c}{c!} \cdot \left(\frac{b}{c+1}\right)^n$. Ale jest $0 < \frac{b}{c+1} < 1$, tedy $\left(\frac{b}{c+1}\right)^n \to 0$, więc też $\frac{(c+1)^c}{c!} \left(\frac{b}{c+1}\right)^n \to \frac{(c+1)^c}{c!} \cdot 0 = 0$ i. stosując znów twierdzenie o 3 ciągach, otrzymujemy, że $|w_n| \to 0$ skąd wynika, że $w_n \to 0$, jak twierdziliśmy.

Przykład 4. Weźmy pod uwagę ciąg ułamków dzies., napisanych przy pomocy kropki dziesiętnej, przyczem niech wyraz (w_{n+1}) otrzymuje się z wyrazu (w_n) przez dopisanie dalszej (jednej) cyfry dziesiętnej przy zachowaniu wszystkich cyfr wyrazu (w_n). Jako przykład weźmy ciąg (1) 1·7, 1·73, 1·732, 1·7320, 1·73205,... albo ciąg: (2) 1·8, 1·86, 1·864, 1·8642, 1·86420, 1·864208, 1·8642086.... Wyrazy ciągu (1) są przybliżeniami dziesiętnemi przez niedomiar liczby $\sqrt{3}$, w drugim mamy grupę cyfr (86420) powtarzających się.

Ogólnie mówimy o ciągu, mającym następującą własność: (3) $w_{n+1} = w_n + \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}}$, gdzie c_{n+1} oznacza jedną z liczb 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zaś w_1 oznacza ułamek dzies. jednomiejscowy. Taki ciąg zowie się w arytmetyce elementarnej (zob. wstęp) ułamkiem dziesiętnym nieskończonym (perjodycznym lub nie). Wskutek związku (3) jest to ciąg niemalejący. Okażemy, że jest ograniczonym u góry. Mamy bowiem $w_2 = w_1 + \frac{c_2}{10^2}$, $w_3 = w_2 + \frac{c_3}{10^3} = w_1 + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} \dots$ przy pomocy indukcji zupełnej wykaże czytelnik, że jest: $w_n = w_1 + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \dots + \frac{c_n}{10^n}$. Tedy jest: $w_n \leqslant w_1 + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots +$

$$+ \frac{9}{10^n} = w_1 + \frac{9}{10^2}\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-2}}\right] = w_1 + \frac{9}{10^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{(\frac{1}{10})^{n-1} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = w_1 + \frac{9}{10^2} \cdot \tfrac{10}{9}\left[1 - (\tfrac{1}{10})^{n-1}\right] = w_1 + \tfrac{1}{10}\left[1 - (\tfrac{1}{10})^{n-1}\right] <$$

$$< w_1 + \tfrac{1}{10}.$$

Jest więc: $w_n < w_1 + \frac{1}{10}$. Ciąg nasz jest tedy ograniczonym u góry, a skoro jest też niemalejącym, więc ma granicę, którą oznaczmy literą g. Naśladując dopiero co przeprowadzone rozumowanie, wykaże czytelnik, że jest $w_n \leqslant g < w_n + \frac{1}{10^n}$, co orzeka, że dany ciąg jest ciągiem kolejnych dziesiętnych przybliżeń liczby g przez niedomiar.

Przykład 5. Niech $y = f(x)$ oznacza funkcję określoną dla $x = x_0$ i sąsiedztwa tego punktu i niech będzie ciągłą w punkcie x_0. Utwórzmy dwa ciągi: jeden (1) $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ z liczb, w których funkcja jest określoną i nadto taki, że $x_n \to x_0$, gdy $n \to \infty$. Drugim ciągiem niech będzie: (2) $f(x_1), f(x_2), f(x_3) \ldots$. Okażemy, że z powodu ciągłości funkcji drugi ciąg ma granicę i jest nią liczba $f(x_0)$. Z powodu ciągłości funkcji do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że, gdy $|x - x_0| < \delta$ wtedy $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Otóż, ponieważ $x_n \to x_0$, więc do liczby $\delta > 0$ istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla $n \geqslant n_0$ jest $|x_n - x_0| < \delta$; wtedy $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Jest więc $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$, co właśnie dowodzi, że ciąg (2) ma granicę i jest nią liczba $f(x_0)$.

Przy pomocy funkcji ciągłej potrafimy więc utworzyć ciągi mające granice.

Przykład 6. Rozważymy ogólniejszy przypadek. Niech będzie daną funkcja $f(x)$, określona w przedziale $(a - \delta, a + \delta)$, gdzie $\delta > 0$, prócz może w punkcie $x = a$, w którym może być nieokreśloną; jednakowoż ma mieć granicę, (którą oznaczymy literą A), gdy $x \to a$. Jest więc $f(x) \to A$, gdy $x \to a$. Obierzmy teraz ciąg liczb (1) $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o własnościach: żadna z tych liczb nie równa się liczbie (a) czyli $x_i \neq a$ dla każdej naturalnej wartości na (i). Nadto liczby ciągu (1) mają leżeć w przedziale $(a - \delta, a + \delta)$ czyli dla każdej wartości naturalnej na (i) jest $a - \delta \leqslant x_i \leqslant a + \delta$; nadto ma być $x_n \to a$, gdy $n \to \infty$. Przy pomocy ciągu (1) i danej funkcji utwórzmy ciąg: (2) $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$. Jest to ciąg zupełnie określonych liczb. Otóż twierdzimy, że ciąg (2) ma granicę i jest nią liczba A. Dowód jest bardzo podobny do dowodu, który daliśmy w przykł. 5 i dlatego zostawiamy go czytelnikowi do przeprowadzenia. Podamy jeszcze przykład szczególny. Weźmy funkcję $y = \frac{\sin x}{x}$, która jest określoną, o ile $x \neq 0$, ale nadto (§ 6) jest $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Weźmy tedy ciąg liczb o wyrazach $x_n = \dfrac{1}{n}$; to $x_n \neq 0$, nadto $x_n \to 0$. Przeto ciąg o wyrazach $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = n \sin \dfrac{1}{n}$, a więc ciąg: $\sin 1$, $2 \sin (\frac{1}{2})$, $3 \sin (\frac{1}{3})$, ..., ma granicę i jest nią liczba 1.

Jeżeli tedy $x_n \neq 0$, nadto $x_n \to 0$, to $\dfrac{\sin x_n}{x_n} \to 1$, gdy $n \to \infty$. Czytelnik może przy pomocy tablic trygonometrycznych przekonać się, że $n \sin \left(\dfrac{1}{n}\right) \to 1$, gdy $n \to \infty$. Jednakowoż należy pamiętać, że kąt, mierzący się liczbą $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ przy radjanie, jako jednostce, należy wymierzyć w stopniach, o ile użyjemy zwykłych tablic trygonometrycznych.

Przykład 7. Rozpatrzmy ciąg: $w_n = \sqrt[n]{n}$ i zbadajmy, czy ma granicę. Zauważmy, że jest $w_n \geqslant 1$, przyczem równość zachodzi jedynie dla wartości $n = 1$. Połóżmy więc: $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$; jest więc $\alpha_n \geqslant 0$; zbadajmy, czy zmienna α_n dąży do granicy. Otóż z ostatniej równości wynika: $n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + \binom{n}{1} \alpha_n + \binom{n}{2} \alpha_n^2 + \ldots + \binom{n}{n} \alpha_n^n$. Przyjmijmy $n \geqslant 3$, tedy $\alpha_n > 0$ i po stronie prawej ostatniej równości mamy co najmniej cztery składniki (bo jest $n + 1 \geqslant 4$), a każdy z nich dodatni; zatrzymując więc tylko pierwsze trzy, zmniejszymy stronę prawą t. zn. $n > 1 + n\alpha_n + \dfrac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2$ czyli $\dfrac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 + n\alpha_n + (1 - n) < 0$.

Rozłóżmy stronę lewą na czynniki stopnia 1-go względem zmiennej α_n; w tym celu rozwiążmy równanie: $\dfrac{n(n-1)}{2} x^2 + nx + (1 - n) = 0$, które ma rzeczywiste pierwiastki: $x_{1,2} = -\dfrac{1}{n-1} \pm \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\dfrac{2n^2 - 3n + 2}{(n-1)^2}}$; wobec tego jest $\dfrac{n(n-1)}{2} \alpha_n + n\alpha_n + (1 - n) = \dfrac{n(n-1)}{2} (\alpha_n - x_1)(\alpha_n - x_2)$. Jest więc $\dfrac{n(n-1)}{2} (\alpha_n - x_1)(\alpha_n - x_2) < 0$.

Jeżeli $x_1 < x_2$, to otrzymujemy tedy $x_1 < \alpha_n < x_2$ czyli $-\frac{1}{n-1}$ $-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2n^2-3n+1}{n^2-2n+1}} < \alpha_n < -\frac{1}{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2n^2-3n+2}{n^2-2n+1}}$; oczywiście możemy dokładniejszą nierówność napisać: $0 < \alpha_n < -\frac{1}{n-1}$ $+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{2n^2-3n+2}{n^2-2n+1}}$ dla liczb $n \geqslant 3$.

Weźmy pod uwagę trzy ciągi a) jeden o wyrazach $w_n^{(1)} = 0$ dla liczb $n = 1, 2, \ldots$; b) drugi $w_n^{(2)} = \alpha_n$ dla liczb $n = 1, 2, \ldots$; c) trzeci $w_1^{(3)} = 0$, $w_2^{(3)} = 0$, $w_n^{(3)} = -\frac{1}{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\frac{2n^2-3n+2}{n^2-2n+1}}$ dla wartości $n = 3, 4, \ldots$. Ciąg pierwszy ma granicę równą zeru, trzeci ma też granicę 0 (bo $0 + 0 \cdot \sqrt{2}$) (zob. przykład 9), więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach (§ 20) powiemy, że $\alpha_n \to 0$, gdy $n \to \infty$.

Wykazaliśmy tedy, że $\sqrt[n]{n} \to 1$, gdy $n \to \infty$.

Gdyby chodziło tylko o istnienie granicy, a nie o jej wartość, to wystarczyłoby wykazać, że ciąg (w_n) jest malejącym od trzeciego wyrazu; ponieważ jest ograniczonym u dołu ($w_n \geqslant 1$), więc posiada granicę.

Przykład 8. Obliczmy granicę ciągu $w_n = \sqrt[n]{a}$; ze względu na wartości $n = 2, 4, \ldots$, należy założyć $a \geqslant 0$. Gdy jest $a = 0$, to $w_n = 0$ i granicą będzie zero. Niech będzie $a > 0$. Tedy jest albo $0 < a < 1$. albo $a = 1$ albo $a > 1$. Gdy jest $a = 1$, to jest $w_n = 1$ i granicą ciągu jest liczba jeden.

Załóżmy $a > 1$, wtedy $w_n > 1$. więc połóżmy $w_n = 1 + \alpha_n$; wskutek tego będzie $\alpha_n > 0$. Jest więc $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$ i przeto jest $a = (1 + \alpha_n)^n$. Ale znamy (ze wstępu) twierdzenie następujące: gdy jest $d > 0$ i gdy n oznacza liczbę naturalną, to $(1+d)^n \geqslant 1+nd$. Będzie tedy $a = (1+\alpha_n)^n \geqslant 1 + n\,\alpha_n$. skąd wynika, że jest $\alpha_n \leqslant$ $\leqslant \frac{a-1}{n}$. Mamy więc $0 < \alpha_n \leqslant \frac{a-1}{n}$. Ponieważ jest $\frac{a-1}{n} \to 0$, gdy $n \to \infty$, więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\left(\S\,20;\ w_n^{(1)} = 0,\ w_n^{(2)} = \alpha_n;\ w_n^{(3)} = \frac{a-1}{n}\right)$ wynika. że $\alpha_n \to 0$, gdy $n \to \infty$. Przeto $w_n \to 1$. gdy $n \to \infty$. Załóżmy, że jest $0 < a < 1$ i połóżmy

$b = \frac{1}{a}$, to $b > 1$; stąd $a = \frac{1}{b}$ i przeto $w_n = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$. Ale $\sqrt[n]{b} \to 1$, jak dopiero wykazaliśmy (gdyż $b > 1$), więc $w_n \to \frac{1}{1} = 1$. Udowodniliśmy więc twierdzenie: *jeżeli jest $a > 0$, (przyczem liczba a nie zależy od liczby n), to ciąg o n-tym wyrazie $w_n = \sqrt[n]{a}$ ma granicę i jest nią liczba 1.*

Przykład 9. Niech będzie $w_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{n^2 - 2n + 1}$ dla $n = 2, 3, \ldots$, zaś $w_1 = 1$. Otóż jest $w_n = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \to \frac{2}{1} = 2$, gdy $n \to \infty$.

Przykład 10. Weźmy dowolne koło o promieniu r i wpiszmy weń po kolei kwadrat, ośmiobok umiarowy, szesnastobok umiarowy, wielobok umiarowy o 2^n bokach; przez w_n oznaczmy długość obwodu wieloboku umiarowego o 2^{n+1} bokach, wpisanego w to koło.

Na podstawie twierdzenia, że suma dwu boków trójkąta jest większą od boku trzeciego wykaże się łatwo, że ciąg rozważany jest rosnącym; a ponieważ długość obwodu każdego wieloboku wpisanego jest mniejszą od obwodu kwadratu opisanego na kole, więc ciąg jest też ograniczonym u góry.

Wobec tego ciąg ma granicę, znaną z elementarnej geometrji, bo jest to długość obwodu koła.

Weźmy teraz dwa koła, jedno o promieniu r, drugie o promieniu R, w oba wpiszmy wielobok umiarowy o 2^{n+1} bokach; bok pierwszego wieloboku oznaczmy przez a_n, drugiego przez A_n. Weźmy ciągi $w_n = 2^{n+1} . a_n$, $W_n = 2^{n+1} . A_n$, których wyrazy dają długości obwodów rozważanych wieloboków.

Z podobieństwa pewnych trójkątów wykaże czytelnik, że jest $\frac{a_n}{A_n} = \frac{r}{R}$, więc $\frac{w_n}{W_n} = \frac{r}{R}$, skąd $\frac{w_n}{r} = \frac{W_n}{R}$; jeżeli ω, Ω oznaczać będą obwody obu kół, a więc granice $\lim w_n = \omega$, $\lim W_n = \Omega$ dla $n \to \infty$, to otrzymujemy $\frac{\omega}{r} = \frac{\Omega}{R}$ t. zn. stosunek obwodu koła do promienia jest we wszystkich kołach jednakowy; stosunek ten jest podwójną ludolfiną 2π. Tedy $\pi = \frac{\omega}{2r} = \frac{\lim w_n}{2r}$, co może uchodzić za określenie liczby π.

§ 23. Twierdzenie Cauchy'ego o ciągach.

Wykazaliśmy poprzednio, że, skoro ciąg ma granicę, to jest ograniczony u dołu i u góry. Twierdzenia tego jednak odwrócić nie można, gdyż zdanie: „Jeśli ciąg jest ograniczonym u dołu i u góry, to ma granicę" — jest fałszywe. Możemy bowiem podać ciąg np.: $-1, +1, -1, +1, -1, +1\ldots$, który jest ograniczonym u dołu i u góry, a jednak granicy nie posiada.

Potrzebne nam już było twierdzenie: *jeżeli $u_n \to g$ i jeżeli jest $u_n < a$, gdzie a oznacza liczbę niezależną od wskaźnika n, to będzie* $\lim w_n \leqslant a$ *czyli* $g \leqslant a$. Łatwym będzie dowód nie wprost. Zaprzeczmy temu, że $g \leqslant a$ t. zn. przypuśćmy, że jest $a < g$, a dojdziemy do sprzeczności ze założeniem. Otóż $w_n \to g$, tedy do każdej liczby $\varepsilon > 0$, (a za taką wolno przyjąć $\varepsilon = g - a$) istnieje liczba naturalna N taka, że dla $n \geqslant N$ jest $|w_n - g| < g - a$ czyli $-(g-a) < w_n - g < g - a$. Dodając po trzech stronach liczbę g, otrzymamy $a < w_n < 2g - a$ dla $n \geqslant N$, kiedy założyliśmy, że jest $w_n \leqslant a$. Widoczna sprzeczność jest wynikiem założenia $a < g$. Przeto jest $g \leqslant a$. Podobnie, gdy $u_n > a$, to $\lim u_n \geqslant a$.

Dla późniejszych wywodów potrzeba nam będzie jeszcze pojęcia ciągu wybranego z danego ciągu. Niech: $w_1, w_2, w_3, \ldots$ oznacza dany ciąg; utwórzmy nowy ciąg: $w_1, w_3, w_5, \ldots$ złożony z wyrazów danego ciągu o wskaźnikach nieparzystych albo ciąg w_1, $w_{10}, w_{10^2}, w_{10^3},\ldots$ t. zn. ciąg o wyrazach dawnego ciągu z numerami 10^x, gdzie $x = 0, 1, 2,\ldots$ Takie ciągi nazwiemy wybranemi z danego ciągu; wybrany ciąg ma tę własność, że i w nim wskaźniki rosną nieograniczenie, tylko nie przechodzą przez wszystkie liczby naturalne.

Napiszmy ogólną postać ciągu wybranego; pierwszym wyrazem będzie w_a, drugim w_b, gdzie $a < b$, trzecim w_c, gdzie $b < c$ itd. Jednakowoż taki sposób oznaczania wyrazów nie jest dogodnym, gdyż nie pozwala wypisać wyrazu np. 10-tego lub setnego itd. Wygodniej więc wypisać ciąg wybrany w tej formie: $w_{i_1}, w_{i_2}, w_{i_3},\ldots$ gdzie liczby naturalne $i_1, i_2, i_3,\ldots$ spełniają warunek $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ Wtedy setnym wyrazem będzie $w_{i_{100}}$, gdzie $i_{100} \geqslant 100$. Wyrazem

n-tym będzie liczba w_{i_n}, ona jest zarazem wyrazem danego ciągu, tylko w nim miała numer i_n, kiedy obecnie zajmuje n-te miejsce. Załóżmy, że mamy dany ciąg $w_1, w_2, w_3, \ldots$ o granicy g. Wprost widoczne, że każdy z niego wybrany ciąg ma granicę i równą liczbie g.

Załóżmy teraz, że dany ciąg $w_1, w_2, w_3, \ldots$ nie ma granicy; czy można z niego wybrać ciąg, któryby miał granicę Łatwo dać przykład, że tak nie jest np. żaden ciąg wybrany z ciągu $1, 2, 3, 4, \ldots$ nie ma granicy. Ale np. z ciągu $1, -1, +1, -1, \ldots$ można wybrać ciąg mający granicę np. ciąg wyrazów o wskaźnikach nieparzystych ma granicę 1, zaś ciąg wyrazów o wskaźnikach parzystych ma granicę (-1).

Okażemy następujące interesujące twierdzenie: *z danego ciągu $w_1, w_2, w_3, \ldots$ ograniczonego u góry i u dołu można wybrać ciąg, mający granicę.*

Wobec tego, cośmy powyżej powiedzieli, wystarcza zająć się przypadkiem, kiedy dany ciąg nie ma granicy. Skoro jest ograniczonym u góry i u dołu, więc istnieją liczby a, b niezależne od liczby (n) i takie, że jest dla każdej liczby naturalnej (n): $a \leqslant w_n \leqslant b$. Otóż zbiór wszystkich liczb podzielmy na dwa zbiory Z_1 i Z_2 w ten sposób: do zbioru Z_2 zaliczymy liczbę rzeczywistą r, gdy się w ciągu danym znajdzie tylko skończona ilość wyrazów większych od liczby r (przyczem ta ilość może być równą zeru). Każda liczba nie należąca do zbioru Z_2 ma należeć do zbioru Z_1. To przeczące określenie zbioru Z_1 zamieńmy na twierdzące: liczba r należy do zbioru Z_1, gdy istnieje wybrany ciąg $w_{i_1}, w_{i_2}, w_{i_3}, \ldots$ taki, że $r \leqslant w_{i_k}$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ Zbiory te mają następujące własności. 1) Zbiór Z_1 jest nieskończony, bo do niego należy liczba (a) i każda liczba od niej mniejsza. 2) I zbiór Z_2 jest nieskończony, bo do niego należy każda liczba większa od liczby b. 3) Jeżeli liczba r' należy do zbioru Z_1, to każda liczba mniejsza od liczby r' należy też do zbioru Z_1; jeżeli liczba r'' należy do zbioru Z_2, to każda liczba większa od liczby r'' należy także do zbioru Z_2. Stąd wynika: 4) każda liczba r_1 zbioru Z_1 jest mniejszą od każdej liczby r_2 zbioru Z_2. Udowodnimy to nie wprost, a więc zaprzeczymy, że jest $r_1 < r_2$ czyli przypuścimy na chwilę, że jest $r_2 \leqslant r_1$. Otóż nie może być $r_2 = r_1$, bo zbiory Z_1 i Z_2 były tak określone, że nie mają żadnej liczby wspólnej. Gdyby zaś było $r_2 < r_1$, toby liczba r_2, jako mniejsza od liczby r_1, należącej do zbioru Z_1, należała na mocy własności 3) też do zbioru Z_1, a nie zbioru Z_2 wbrew założeniu. Przypuszczenie więc $r_2 \leqslant r_1$ daje sprzeczność, jest więc $r_1 < r_2$.

Wskutek własności 1), 2) i 4) istnieje liczba separacyjna g taka, że każda liczba od niej mniejsza należy do zbioru Z_1, a każda większa od liczby g należy do zbioru Z_2.

Wykażemy, że można z danego ciągu wybrać ciąg o granicy g. W tym celu weźmy dwa nowe ciągi: jeden o wyrazie ogólnym $a_n = g - \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, drugi o wyrazie ogólnym $b_n = g + \frac{1}{n}$. Oba ciągi mają granicę g; pierwszy ma tę własność, że każdy jego wyraz, jako mniejszy od liczby g, należy do zbioru Z_1, drugi ma wyrazy wszystkie większe od liczby g, a więc należące do zbioru Z_2. Otóż liczba $a_1 = g - 1$ należy do zbioru Z_1, stąd, jak wiemy, wynika, że istnieje nieskończenie wiele wyrazów danego ciągu nie mniejszych od liczby (a_1); z pomiędzy nich wybieramy pierwszy, który zarazem jest nie większy od liczby $b_1 = g + 1$; będzie to wyraz w_{j_1}.

Skoro $a_2 = g - \frac{1}{2}$ należy do zbioru Z_1, to istnieje znów nieskończenie wiele wyrazów nie mniejszych od liczby a_2; z pomiędzy nich wybieramy pierwszy w_{j_2}, ale taki, aby było $j_2 > j_1$ i by liczba w_{j_2} była nie większa od liczby b_2, co można uczynić, gdyż liczba b_2 należy do zbioru Z_2, więc tylko skończona ilość wyrazów danego ciągu przewyższy liczbę b_2. W ten sposób postępujemy dalej i wyznaczymy wybrany ciąg: (I) $w_{j_1}, w_{j_2}, w_{j_3}, \ldots$, gdzie jest $j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ i ponadto $a_n = g - \frac{1}{n} \leqslant w_{j_n} \leqslant g + \frac{1}{n} = b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Na podstawie twierdzenia o trzech ciągach wynika rzecz następująca: skoro $a_n \to g$, $b_n \to g$, tedy też $w_{j_n} \to g$.

Tem samem twierdzenie wykazaliśmy.

Niech czytelnik dla lepszego zrozumienia tego dowodu, przerobi *go* na przykładzie liczebnym np. na ciągach: 1) $1, -1, +1, -1, \ldots$; 2) $1, 0, 1 + \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots$; 3) $1, 2, 3, 1 + \frac{1}{1}, 2 + \frac{1}{1}, 3 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}, \ldots, 1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}, \ldots$

Przykłady są tak proste, że wprost można znaleźć żądane ciągi wybrane; jeden z nich otrzyma się przerabiając powyższy dowód.

Należy sobie uprzytomnić, że niema ogólnej metody obliczania granic ciągów, podobnie, jak niema ogólnej metody obliczania granic funkcji. Dla każdego niemal ciągu trzeba znaleźć metodę indywidualną. Często jednak nie chodzi nam tyle o obliczenie granicy ciągu, ile raczej o stwierdzenie, czy dany ciąg ma granicę, czy nie. W tym celu należy podać warunki, jakim mają czynić zadość wyrazy ciągu, ażeby można wnioskować, że ciąg ma granicę. Twierdzenie, które podaje takie właśnie warunki konieczne i wystarczające istnienia granicy ciągu, nosi nazwę twierdzenia Cauchy'ego (matematyka franc. z pierwszej połowy 19 wieku).

Do tego twierdzenia dojdziemy przez następujące geometryczne rozważania: Wyobraźmy sobie ciąg liczbowy, któremu odpowiada ciąg punktów na osi liczbowej; ciąg liczbowy niech ma granicę. Wskutek tego wszystkie punkty, będące obrazami wyrazów postępu zmieszczą się na odcinku skończonym, zagęszczając się w okolicy jednego punktu, który jest obrazem granicy ciągu. Jeśli na lewo i na prawo od niego odłożymy odcinki o długości dowolnie małej $\varepsilon > 0$, to od pewnego miejsca obrazy wszystkich wyrazów tego ciągu leżeć będą na odłożonych odcinkach, między punktami, odpowiadającemi liczbom $g + \varepsilon$ i $g - \varepsilon$. Od tego samego miejsca w ciągu odległość obrazów dwóch dowolnych jego wyrazów musi więc być mniejsza od 2ε czyli, jeśli ciąg ma granicę g, to musi istnieć takie miejsce N w tym ciągu, że różnica między jakimikolwiek dwoma jego wyrazami będzie co do bezwzględnej wartości mniejszą od liczby, dowolnie naprzód wybranej $2\varepsilon > 0$. Jest to więc warunek konieczny, ale też i wystarczający dla istnienia granicy ciągu, jak wykażemy osobnym dowodem.

Jeżeli $m \geqq N$ i $n \geqq N$, to od miejsca N wszystkie wyrazy będą się różniły od siebie o mniej niż 2ε, dokładniej: bezwzględna wartość: $|w_m - w_n| < 2\varepsilon$. Zamiast 2ε możemy napisać ε, ponieważ mogliśmy byli odłożyć odcinek na osi liczbowej sięgający od punktu, będącego obrazem liczby $g - \frac{\varepsilon}{2}$ do punktu, będącego obrazem liczby $g + \frac{\varepsilon}{2}$. Jako szczególny przykład weźmy ciąg: $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,.... który ma granicę zero. Trzeba tylko obrać numer wyrazu odpowiednio wielki, aby dwa dowolne wyrazy miały różnicę mniejszą od jakiejkolwiek dowolnie obranej liczby ε, większej od zera.

Twierdzenie Cauchy'ego: *Warunek konieczny i wystarczający, aby ciąg liczbowy: $w_1, w_2, w_3 \ldots$ miał granicę, polega na tem, aby do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istniało miejsce N takie, że, gdy tylko numery m i n spełniają związki: $m \geqq N$, $n \geqq N$, to jest $|w_m - w_n| < \varepsilon$.*

Przykład. Ciąg $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \ldots$ jest ograniczony u góry, rosnący i ma granicę 1. Im dalszy wyraz, tem mniejszą jest różnica $1 - w_n$, n. p. $1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$, $1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ i t. d. Różnica ta zatem dąży do 0, przeto wyraz n-ty danego ciągu dąży do 1. Jest bowiem $w_n = \frac{n}{n+1}$, tedy $1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Przyjmijmy $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. Obierzmy liczbę naturalną N tak, by było $\frac{1}{N+1} < \frac{1}{1000}$, wtedy $N > 999$ a p. $N = 1000$. Weźmy $|w_m - w_n|$, przyczem $m > n \geqq N = 1000$. Otóż $w_m - w_n = \frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{m-n}{(m+1)(n+1)}$ i jest $|w_m - w_n| = \frac{m-n}{(m+1)(n+1)} < \frac{m}{(m+1)(n+1)} < \frac{1}{n+1} \leqq \frac{1}{N+1} = \frac{1}{1001} < \varepsilon = \frac{1}{1000}$. Wszystkie wyrazy od tysiącznego począwszy mają tę własność, że różnica dwóch jakichkolwiek ma bezwzględną wartość mniejszą od liczby 0·001.

Czytelnik z łatwością wyznaczy liczbę N w zależności od dowolnej liczby $\varepsilon > 0$.

Dowód twierdzenia Cauchy'ego. Warunek jest koniecznym. Gdy bowiem $w_n \to g$, to do każdej liczby $\varepsilon' > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich wskaźników $n \geqq N$ jest $|w_n - g| < \varepsilon'$; jeżeli także m oznacza wskaźnik i jeżeli $m \geqq N$, to także $|w_m - g| < \varepsilon'$; stąd $|w_m - w_n| = |w_m - g + g - w_n| \leqq |w_m - g| + |g - w_n| < 2\varepsilon'$. Do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ obierzmy $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ i dla tej liczby ε' wyznaczmy liczbę N. Będzie więc $|w_m - w_n| < \varepsilon$, skoro tylko $m \geqq N$, $n \geqq N$, co stanowi właśnie warunek Cauchy'ego. Warunek Cauchy'ego jest także wystarczającym. Plan dowodu będzie następujący: 1) wykażemy, że z warunku Cauchy'ego wynika, iż ciąg jest ograniczonym i u góry i u dołu; 2) tedy będzie można z ciągu „wybrać“ ciąg, który ma granicę — niech tą granicą będzie liczba g; 3) biorąc znów pod uwagę warunek Cauchy'ego wykażemy, że dany ciąg $w_1, w_2, w_3 \ldots$ ma właśnie granicę g.

Ad 1.) Skoro warunek Cauchy'ego jest słuszny dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, więc także i dla liczby $\varepsilon = 1$; otrzymamy tedy

$|w_n - w_m| < 1$ dla $n \geqslant N$, $m \geqslant N$. Połóżmy $m = N$; tedy $|w_n - w_N| < 1$, skąd wynika, że $-1 < w_n - w_N < 1$, a więc także: $w_N - 1 < w_n < w_N + 1$ dla $n \geqslant N$. Wprowadźmy liczby a, b tak określone: $a = Min\,(w_1, w_2, \ldots, w_{N-1}, w_N - 1)$, $b = Max\,(w_1, w_2, \ldots, w_{N-1}, w_N + 1)$; wtedy $a \leqslant w_n \leqslant b$ dla wszystkich liczb naturalnych (n). Innemi słowy: skoro ciąg spełnia warunek Cauchy'ego, to jest ograniczonym u góry i u dołu.

Ad 2). Wiemy już, że z takiego ciągu można wybrać ciąg, mający granicę. Niech będzie to ciąg $w_{m_1}, w_{m_2}, w_{m_3}, \ldots$, gdzie liczby $m_1, m_2, m_3 \ldots$ są naturalne i nadto $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$. Granicę tego ciągu oznaczmy przez g. Przeto do każdej liczby $\varepsilon' > 0$ można znaleźć liczbę naturalną k_0 taką, że jest $|w_{m_k} - g| < \varepsilon'$, skoro $k \geqslant k_0$.

Ad 3). Zwróćmy się do warunku Cauchy'ego: do liczby $\varepsilon' > 0$, o której dopiero co była mowa, wyznaczmy liczbę naturalną N' taką, że $|w_n - w_m| < \varepsilon'$, skoro $m \geqslant N'$, $n \geqslant N'$. Czy wolno podstawić $m = m_{k_0}$? Zależy to od tego, czy $m_{k_0} \geqslant N'$. Ale liczby m_k rosną nieograniczenie, tedy znajdzie się liczba $k_1 \geqslant k_0$ i taka, że już $m_{k_1} \geqslant N'$. Będzie więc $|w_{m_{k_1}} - g| < \varepsilon'$ i zarazem $|w_n - w_{m_{k_1}}| < \varepsilon'$ dla $n \geqslant N'$. Ale jest $w_n - g = w_n - w_{m_{k_1}} + w_{m_{k_1}} - g$, więc $|w_n - g| = |w_n - w_{m_{k_1}} + w_{m_{k_1}} - g| \leqslant |w_n - w_{m_{k_1}}| + |w_{m_{k_1}} - g| < 2\varepsilon'$, jeżeli $n \geqslant N'$. Jest więc $|w_n - g| < 2\varepsilon'$ dla $n \geqslant N'$. Do naprzód i dowolnie wybranej liczby $\varepsilon > 0$ wybierzmy $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ i dla liczby $\varepsilon' > 0$ wyznaczmy liczbę N'; wtedy będzie $|w_n - g| < \varepsilon$ dla $n \geqslant N'$, co wykazuje, że ciąg ma granicę g. Z warunku Cauchy'ego wynika więc, że ciąg ma granicę.

Twierdzenie Cauchy'ego daje nam możność stwierdzenia, czy ciąg dany ma granicę, czy też nie. Nie chcemy przez to powiedzieć, że w każdym szczególnym przypadku zdołamy pokonać wszystkie trudności analityczne, właśnie związane ze stosowaniem tego twierdzenia, w wielu jednak przypadkach rzecz daje się przeprowadzić do końca. W każdym razie jest to twierdzenie użyteczne, bo odkrywa związek między wyrazami ciągu, który ma granicę, związek charakterystyczny dla takiego ciągu.

§ 24. Pojęcie potęgi.

Z arytmetyki elementarnej znane jest następujące określenie potęgi. Jeżeli a oznacza dowolną liczbę, n liczbę całą bezwzględną, to przez a^n — co czytamy: n-ta potęga liczby a — rozumiemy liczbę, zdefinjowaną przez następujące równości: $a^0 = 1$, przyczem ma być $a \neq 0$; $a^1 = a$ dla każdej liczby a; dla $n \geqq 2$ $a^n = \underset{1}{\underbrace{a}} . \underset{2}{\underbrace{a}} . \underset{3}{\underbrace{a}} \ldots . \underset{n}{\underbrace{a}}$. Z definicji tych wynika następujących pięć zasadniczych twierdzeń o potęgowaniu, ważnych na razie tylko dla wykładników całkowitych i bezwzględnych:

I: $$a^x . a^y = a^{x+y}.$$

II: $$a^x . b^x = (ab)^x.$$

III: $$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \text{ gdy } a \neq 0.$$

IV: $$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, \text{ gdy } b \neq 0.$$

V: $$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Dla tw. III należy założyć, że jest $x \geqq y$.

Ponadto warunkiem ważności tych pięciu praw jest to, by po żadnej stronie nie dobierać takich wartości a, b, x, y, iżby nie występował symbol 0^0, pozbawiony znaczenia.

Zakres liczb, mogących występować jako wykładniki potęgowe, rozszerza arytmetyka następnie i na liczby ujemne, a więc tem samem na wszystkie liczby całe, dodając do poprzednich definicji określenie: $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, przyczem n jest liczbą naturalną, nadto $a \neq 0$. W dalszym ciągu rozwoju nauki i ten zakres wszystkich liczb całkowitych dla wykładników okazał się zbyt szczupłym; arytmetyka elementarna określa także potęgę o wykładniku ułamkowym, przyjmując definicje: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ i $a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$ przy założeniu że $a > 0$, m jest liczbą całkowitą bezwzględną, n liczną naturalną. Do zakresu liczb, mogących występować w roli wykładników potęgowych, zalicza więc arytmetyka elementarna wszystkie liczby wymierne i wykazuje następnie, że wymienione powyżej twierdzenia I—V są prawdziwe także w tym rozszerzonym zakresie potęg, t. j. dla wszystkich wymiernych wykładników. Na tem jednak poprzestaje się w nauce arytmetyki elementarnej.

Obecnie zajmiemy się i tym przypadkiem potęgowania, gdy wykładnik będzie liczbą niewymierną, t. j. określimy potęgę a^x, gdzie $a > 0$, x jest liczbą niewymierną.

Wiemy z poprzedniego (§ 20), że każda liczba niewymierna dodatnia jest granicą ciągu swych kolejnych przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar lub przez nadmiar, że ogólniej: do każdej liczby niewymiernej istnieje nieskończenie wiele ciągów liczb wymiernych, z których każdy będzie miał tę liczbę niewymierną jako granicę.

Weźmy pod uwagę ciąg przybliżeń dziesiętnych liczby $\sqrt{3}$ przez niedomiar względnie przez nadmiar.

Pierwszy z ciągów ma wyrazy pierwsze następujące: 1·7, 1·73, 1·732, 1·7320, 1·73205....; pierwsze pięć wyrazów drugiego ciągu są: 1·8, 1·74, 1·733, 1·7321, 1·73206,....; oba ciągi mają granicę niewymierną $\sqrt{3}$, kiedy każdy wyraz ciągu jest ułamkiem dziesiętnym, a więc liczbą wymierną.

Weźmy teraz pod uwagę ciąg potęg o zasadzie a ($a > 0$) i o wykładnikach, będących wyrazami jednego z dopiero co rozważanych ciągów, a więc ciągi:

$$a^{1\cdot 7},\ a^{1\cdot 73},\ a^{1\cdot 732},\ a^{1\cdot 7320},\ a^{1\cdot 73205},\ldots\ldots\ldots;$$
$$a^{1\cdot 8},\ a^{1\cdot 74},\ a^{1\cdot 733},\ a^{1\cdot 7321},\ a^{1\cdot 73206}\ldots\ldots\ldots;$$

należy sobie uprzytomnić, że jest np. $a^{1\cdot 73205} = a^{\frac{173205}{100000}} = \sqrt[100000]{a^{173205}}$. Zobaczymy w obecnym paragrafie, że pierwszy z ostatnio rozważanych ciągów potęg liczby a ma granicę, którą oznaczmy literą g. Zachodzi pytanie, czy także ciąg:

$a^{1\cdot 8}$, $a^{1\cdot 74}$, $a^{1\cdot 733}$, $a^{1\cdot 7321}$....., jak i każdy ciąg: a^{w_1}, a^{w_2}, a^{w_3}, a^{w_4}..... ma tę samą granicę g, gdy w_n oznaczają liczby wymierne o granicy $\sqrt{3}$. Jeśli to zdołamy udowodnić, to powiemy, że przez $a^{\sqrt{3}}$ będziemy rozumieli wspólną granicę g powyższych ciągów czyli $a^{\sqrt{3}} = g$. W ogólności: Przez a^{β}, gdzie β jest liczbą niewymierną będziemy rozumieli granicę ciągu: a^{w_1}, a^{w_2}, a^{w_3}, a^{w_4}.... a^{w_n} ..., gdzie w_1, w_2,... są liczbami wymiernemi, zdążającemi do granicy β czyli $\beta = \lim\limits_{n \to \infty} w_n$; będzie więc: $a^{\beta} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{w_n}$ albo $a^{\lim w_n} = \lim (a^{w_n})$.

Zadaniem naszem będzie więc obecnie: 1) podać definicję potęg o wykładnikach niewymiernych na podstawie pewnych pomocniczych twierdzeń; 2) udowodnić, że poznane zasadnicze twierdzenia I—V o potęgowaniu pozostają prawdziwemi dla wykładników dowolnych rzeczywistych. Dla przeprowadzenia tego zadania przytoczymy szereg twierdzeń, oznaczonych cyframi arabskiemi od 1 do 22.

1. Jeżeli $a > 1$, $w > 0$ i w oznacza liczbę wymierną to $a^w > 1$.

Udowodnimy to twierdzenie w sposób następujący. Przyjmiemy naprzód, że w oznacza liczbę naturalną, następnie, że jest ułamkiem $\frac{m}{n} > 0$. W pierwszym przypadku rozróżnimy jeszcze podprzypadki: a) $w = 1$, b) $w > 1$. W podprzypadku (a) jest $a^w = a^1 = a > 1$, co zgadza się z twierdzeniem (1). W podprzypadku (b) jest: $a^w = \overset{1}{a} . \overset{2}{a} . \overset{3}{a} \ldots\ldots \overset{w}{a}$. Napiszemy w razy nierówność z założenia:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a > 1 \\ (2) & a > 1 \\ (3) & a > 1 \\ \ldots & \ldots \\ (w) & a > 1 \end{array}\right|$$

Utwórzmy następnie iloczyny z obu stron tych nierówności. Będzie więc $a . a \ldots . a > 1 . 1 .. 1 = 1$ czyli $a^w > 1$,

zgodnie z twierdzeniem (1). Można to było też udowodnić na mocy zasady indukcji zupełnej. Jeśli $w = \frac{m}{n}$, to twierdzimy, że $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} > 1$, gdy $m > 0$.

Dowodzimy tego niewprost, zakładając, że jest: $\sqrt[n]{a^m} \leqq 1$. Podnosimy obustronnie do potęgi n i otrzymujemy: $a^m \leqq 1^n = 1$, co jest niemożliwe, gdyż, jeśli m jest liczbą naturalną, to dopiero co wykazaliśmy, że jest $a^m > 1$. Zatem tw. (1) jest udowodnione.

2. Jeżeli $a > 0$, w liczbą dowolną, byle wymierną, to $a^w > 0$.

Twierdzenie to udowodni czytelnik, opierając się na elementach arytmetyki i rozważając po kolei potęgi a^0, a^n, a^{-n}, $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{-\frac{m}{n}}$, gdzie m, n oznaczają liczby naturalne.

3. Jeżeli $a > 1$, $w > w'$ i obie liczby w, w' wymierne, to $a^w > w^{w'}$.

Dowód: Skoro $w > w'$, to $w - w' > 0$, nadto ta różnica jest liczbą wymierną; zatem na podstawie tw. (1) jest $a^{w-w'} > 1$. Na mocy tw. (2) wolno pomnożyć tę nierówność przez równość $a^{w'} = a^{w'}$. Otrzymamy tedy: $a^{w-w'+w'} > 1 . a^{w'}$ czyli $a^w > a^{w'}$, co było do udowodnienia.

4. Jeżeli $0 < a < 1$, $w > w'$ i w, w' liczby wymierne, to $a^w < a^{w'}$.

Twierdzenie to jest uzupełnieniem tw. (3).

Skoro jest $0 < a < 1$, to wolno utworzyć iloraz $b = \frac{1}{a}$ i nadto będzie $b > 1$, więc na mocy założenia i tw. 3 będzie $b^w > b^{w'}$ czyli

$\frac{1}{a^w} > \frac{1}{a^{w'}}$. Na mocy tw. 2 wolno tę nierówność pomnożyć przez iloczyn $a^w . a^{w'}$ i wtedy otrzymamy $a^{w'} > a^w$, o co właśnie chodzi.

5. *Jeżeli $a > 0$ i jeżeli $u_1, u_2, u_3 ...$ oznacza ciąg liczb wymiernych o granicy 0, to ciąg: $a^{u_1}, a^{u_2}, a^{u_3} ...$ ma granicą 1 czyli: $a^{u_n} \to 1$.*

Dowód. Rozróżnimy trzy przypadki: 1) $a > 1$, 2) $a = 1$, 3) $0 < a < 1$. W przypadku $a = 1$ jest twierdzenie widocznem. Niech więc będzie $a > 1$. Skoro $u_n \to 0$, tedy do każdej liczby naturalnej N istnieje liczba naturalna n_0 taka, iż dla $n \geqslant n_0$ jest $|u_n| < \frac{1}{N}$, skąd $-\frac{1}{N} < u_n < \frac{1}{N}$; przeto na mocy tw. 3, jest $a^{-\frac{1}{N}} < a^{u_n} < a^{\frac{1}{N}}$, a stąd dalej $a^{-\frac{1}{N}} - 1 < a^{u_n} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1$. Na mocy tw. 1 jest $a^{\frac{1}{N}} > 1$. Ale wiadomo, że $a - 1 = \left(a^{\frac{1}{N}} - 1\right)\left(a^{\frac{N-1}{N}} + a^{\frac{N-2}{N}} + ... + a^{\frac{1}{N}} + 1\right)$, stąd $0 < a^{\frac{1}{N}} - 1 = \frac{a-1}{a^{\frac{N-1}{N}} + a^{\frac{N-2}{N}} + ... + a^{\frac{1}{N}} + 1}$, bo dzielnik jest różny od zera, ba nawet według tw. 1 jest $a^{\frac{N-1}{N}} + a^{\frac{N-2}{N}} + ... + a^{\frac{1}{N}} + 1 > N$. Tedy $0 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < \frac{a-1}{N}$. Ponadto widzimy, że $1 - a^{-\frac{1}{N}} = 1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{N}}} = \frac{a^{\frac{1}{N}} - 1}{a^{\frac{1}{N}}} < \frac{a-1}{N}$; jest bowiem także $a^{\frac{1}{N}} > 1$. Przeto stąd $-\frac{a-1}{N} < a^{-\frac{1}{N}} - 1$. Mamy więc $-\frac{a-1}{N} < a^{u_n} - 1 < \frac{a-1}{N}$ dla $n \geqslant n_0$ czyli $|a^{u_n} - 1| < \frac{a-1}{N}$.

Do dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ wyznaczymy liczbę naturalną N tak, iż $\frac{a-1}{N} < \varepsilon$, do tej liczby N znajdzie się powyższa liczba n_0 i wtedy $|a^{u_n} - 1| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$, co dowodzi twierdzenia. W przypadku trzecim niech czytelnik weźmie liczbę $b = \frac{1}{a}$, wtedy $b^{u_n} \to 1$, zaś $a^{u_n} = \frac{1}{b^{u_n}} \to 1$ (zob. ostatnie tw. § 20).

Wyciągniemy stąd zasadniczy wniosek, rozważając następujący przykład: Ciąg ułamków $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ma granicę 0, tworzymy ciąg potęg: $a^{\frac{1}{1}}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{1}{4}} \ldots a^{\frac{1}{n}} \ldots$ czyli ciąg $a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a} \ldots \sqrt[n]{a} \ldots$ Otóż jeśli $a > 0$, to właśnie na mocy tw. (5), ciąg ostatni ma granicę 1 czyli: n-ty pierwiastek z liczby dodatniej dąży do jedności, gdy liczba n rośnie nieograniczenie: jest tedy $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, gdy $a > 0$, co zresztą otrzymaliśmy już w § 22 (str. 15).

6. *Jeżeli $a > 0$ i liczby $w_1, w_2, w_3 \ldots$ tworzą ciąg nieskończony liczb wymiernych, mających granicę, to ciąg potęg: $a^{w_1}, a^{w_2}, a^{w_3} \ldots$ ma również granicę czyli istnieje $\lim\limits_{n \to \infty} a^{w_n}$.*

Twierdzenie to ma dla nas zasadnicze znaczenie.

Dowód. Na mocy założenia i tw. Cauchy'ego (§ 23) do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n_0 taka, że jest $|w_m - w_n| < \varepsilon$, gdy jest $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$. Otóż niech N oznacza liczbę naturalną i przyjmijmy $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Będzie tedy $|w_m - w_n| < \frac{1}{N}$ dla $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$, skąd $-\frac{1}{N} < w_m - w_n < \frac{1}{N}$.

Załóżmy, że jest $a > 1$. Aby okazać, że ciąg $a^{w_1}, a^{w_2}, a^{w_3}, \ldots$ ma granicę, wykażemy, że wspomniany warunek Cauchy'ego jest spełniony.

W tym celu tworzymy wyrażenie: $|a^{w_m} - a^{w_n}|$; ono będzie albo równe różnicy $a^{w_m} - a^{w_n}$ albo różnicy $a^{w_n} - a^{w_m}$ zależnie od tego, czy $w_m \geqslant w_n$ czy też $w_m < w_n$. W pierwszym przypadku mamy $|a^{w_m} - a^{w_n}| = a^{w_n}[a^{w_m - w_n} - 1] < a^{w_n} . [a^{\frac{1}{N}} - 1]$ dla $m \geqslant n_0$, $n \geqslant n_0$. W 2 przyp. jest $|a^{w_m} - a^{w_n}| = a^{w_m}[a^{w_n - w_m} - 1] < a^{w_m}[a^{\frac{1}{N}} - 1]$ dla $m \geqslant n_0$ $n \geqslant n_0$. Ale ciąg (w_n) ma granicę, więc jest ograniczony u góry czyli istnieje liczba wymierna (c) taka, że jest $w_n \leqslant c$, więc też $a^{w_n} \leqslant a^c$, $a^{w_m} \leqslant a^c$. Przeto mamy w obu przypadkach: $|a^{w_m} - a^{w_n}| < a^c . [a^{\frac{1}{N}} - 1]$; z dowodu tw. 5 widzimy, że: $a^{\frac{1}{N}} - 1 < \frac{a-1}{N}$, więc

$$|a^{w_m} - a^{w_n}| < a^c . \frac{a-1}{N} \text{ dla } m \geqslant n_0,\ n > n_0.$$

Otóż do naprzód wybranej liczby $\varepsilon' > 0$ określimy liczbę naturalną N tak, iż $a^c . \frac{a-1}{N} < \varepsilon'$, przez co stwierdzamy, że warunek Cauchy'ego jest spełniony i tem samem twierdzenie jest udowodnione. Gdy $a = 1$, twierdzenie 6 jest widoczne.

Nim wykażemy twierdzenie w przypadku $0 < a < 1$, udowodnimy, że w przypadku $a > 1$ jest $\lim a^{w_n} > 0$.

Skoro ciąg (w_n) ma granicę, to jest też ograniczony u dołu t. zn. istnieje liczba wymierna d taka, że jest $w_n \geqq d$, przeto na podstawie tw. 3 i 2 jest $a^{w_n} \geqq a^d > 0$, stąd $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{w_n}) \geqq a^d$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{w_n}) > 0$.

Załóżmy teraz, że $0 < a < 1$ i połóżmy $b = \frac{1}{a}$, to jest $b > 1$, $a = \frac{1}{b}$ i przeto $a^{w_n} = \frac{1}{b^{w_n}}$, ale istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} (b^{w_n})$, jak dopieroco wykazaliśmy i nadto $\lim\limits_{n\to\infty} (b^{w_n}) > 0$. Przeto istnieje też $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{w_n})$. Twierdzenie 6 jest więc w całości udowodnione.

7. *Jeżeli $a > 0$ i ciąg liczb wymiernych $w_1, w_2, w_3, \ldots$ ma granicę, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{w_n}) > 0$.*

Dowód. W dowodzie tw. 6 zawiera się dowód obecnego twierdzenia w przypadku $a > 1$. W przypadku $a = 1$ mamy $a^{w_n} = 1^{w_n} = 1 > 0$, a więc twierdzenie jest prawdziwe. W przypadku $0 < a < 1$ kładziemy $b = \frac{1}{a}$, skąd otrzymujemy $a = \frac{1}{b}$ i przeto $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{w_n}) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (b^{w_n})}$; a ponieważ iloraz dwóch liczb dodatnich jest liczbą dodatnią, więc też jest $\lim\limits_{n\to\infty} (a^{w_n}) > 0$. Twierdzenie 7 jest uzupełnieniem tw. 6.

8. *Jeżeli $a > 0$ i jeżeli dane są dwa ciągi: (α) $w_1, w_2, w_3 \ldots$; (β) $v_1, v_2, v_3 \ldots$ o wyrazach wymiernych i wspólnej granicy czyli $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, to ciągi potęg: (γ) $a^{w_1}, a^{w_2}, a^{w_3} \ldots$; (δ) $a^{v_1}, a^{v_2}, a^{v_3} \ldots$ mają też wspólną granicę.*

Dowód. Że ciągi ostatnie mają granice, to wiemy z tw. 6; aby wykazać, że mają wspólną granicę, utworzymy ciąg nowy o wyrazach: $u_1 = w_1 - v_1$; $u_2 = w_2 - v_2$; $u_3 = w_3 - v_3 \ldots$. Z założenia $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ wynika, że jest $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n - \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. Stąd na mocy tw. (5) możemy napisać, że: $a^{w_n - v_n} \to 1$, gdy $n \to \infty$, zaś na mocy tw. (6) i (7) i twierdzenia o granicy ilorazu mamy $a^{w_n - v_n} = \frac{a^{w_n}}{a^{v_n}} \to \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a^{w_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{v_n}}$, ale także jest $a^{w_n - v_n} \to 1$; ponienieważ żaden ciąg nie może mieć dwóch różnych granic, przeto: $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a^{w_n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(a^{w_n})} = 1$, skąd $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{w_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{w_n})$.

9. Jeżeli $a > 0$ i ciąg $w_1, w_2, w_3 \ldots$ jest ciągiem liczb wymiernych o granicy g, przyczem g oznacza liczbę wymierną, to jest $\lim\limits_{n\to\infty} a^{w_n} = a^g$ czyli $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{w_n}) = a^{\lim (w_n)}$.

Twierdzenie to jest uzupełnieniem tw. (6).

Dowód. Obok ciągu $w_n \to g$ utwórzmy nowy ciąg $v_n = g$, którego wyrazy są wymierne. Jest $v_n \to g$, przeto na mocy tw. 8 jest $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{w_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{v_n})$.

Ale jest $a^{v_n} = a^g$; taki ciąg, złożony z wyrazów sobie równych, ma granicę równą wspólnej wartości wyrazów czyli jest $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{v_n}) = a^g$; tem samem twierdzenie udowodnione.

Określenie. Po tem przygotowaniu możemy określić potęgę a^β liczby a (gdzie jest $a > 0$) o wykładniku β niewymiernym. W tym celu bierzemy pod uwagę ciąg liczb wymiernych: (1) $w_1, w_2, w_3 \ldots$ o granicy β i przy pomocy niego tworzymy nowy ciąg t. j. ciąg potęg: (2) $a^{w_1}, a^{w_2}, a^{w_3} \ldots$ Jak wiadomo z tw. 6 ciąg (2) ma granicę; na mocy tw. 8 wiemy, że, gdy weźmiemy obok ciągu (1) inny ciąg liczb wymiernych: (3) $v_1, v_2, v_3 \ldots$ też o granicy β, to ciąg potęg: (4) $a^{v_1}, a^{v_2}, a^{v_3} \ldots$ ma tę samą granicę, co ciąg (2). Otóż przez a^β, gdzie $a > 0$, zaś β jest liczbą niewymierną, rozumieć będziemy granicę ciągu (2). Wskutek tego, że ciąg (4) ma tę samą granicę, co ciąg (2), widzimy, że wartość potęgi a^β od tego, czy obierzemy ciąg (1), czy ciąg (3) nie zależy i przeto jest jednoznacznie określona, zależy bowiem tylko od liczb (a) i (β).

Skoro n. p. $\sqrt{3}$ jest granicą ciągu swych kolejnych przybliżeń dziesiętnych przez niedomiar: 1·7, 1·73, 1·732, 1·7320, 1·73205 ..., to symbol $a^{\sqrt{3}}$ (dla $a > 0$) oznacza granicę ciągu potęg: $a^{1\cdot7}, a^{1\cdot73}, a^{1\cdot732}, a^{1\cdot7320}, a^{1\cdot73205} \ldots$, a na mocy tw. 6 jesteśmy pewni, że ostatni ciąg ma granicę. Tw. 8 zapewnia nam, że otrzymamy tę samą granicę, gdy zamiast ostatniego ciągu rozważać będziemy ciąg potęg liczby a, przyczem wykładniki tworzą np. ciąg przybliżeń dzies. przez nadmiar liczby $\sqrt{3}$.

Definicja potęgi liczby a ($a > 0$) o wykładniku niewymiernym pozwala nam odtąd rozważać potęgi a^x, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą i zarazem $a > 0$.

Dalsze twierdzenia będą orzekały o prawdziwości pięciu zasadniczych twierdzeń I—V o potęgowaniu dla wykładników, obecnie już dowolnie wybranych z pomiędzy liczb rzeczywistych.

10. Jeżeli $a > 0$ i jeśli x, y są liczbami rzeczywistemi (wymiernemi lub niewymiernemi), to jest $a^x . a^y = a^{x+y}$. (Uogólnienie tw. I).

Dowód. Jeśli liczby x i y są rzeczywiste, to mogą zachodzić następujące ewentualności, ujęte w tabelce obok się znajdującej.

	x	y
1)	wym.	wym.
2)	niew.	wym.
3)	wym	niew.
4)	niew.	niew.

W pierwszym przypadku uważamy twierdzenie za słuszne, bo założenia pokrywają się z założeniami tw. I. Przypadki 2) i 3) mogą być uważane za jeden na mocy kommutatywnej własności mnożenia. Mamy zatem do rozważenia tylko dwa przypadki, np. 3) i 4). Zajmiemy się tylko przypadkiem 3), w którym jest x liczbą wymierną, y liczbą niewymierną. Utwórzmy więc ciąg liczb wymiernych, którego granicą będzie niewymierna liczba y: y_1, y_2 $y_3, \ldots$; $y_n \to y$. Wtedy według definicji potęgi o wykładniku niewymiernym będziemy uważać liczbę a^y za granicę ciągu: a^{y_1}, a^{y_2}, $a^{y_3} \ldots$ $a^{y_n} \ldots$ czyli $a^y = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{y_n})$. Będzie tedy: $a^x . a^y = a^x . \lim\limits_{n\to\infty}(a^{y_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{x_n}) . \lim\limits_{n\to\infty}(a^{y_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{x_n} . a^{y_n})$, jeżeli stale $x_n = x$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Ponieważ obraliśmy y_n jako liczbę wymierną, można więc do ostatniego wyrażenia zastosować tw. I: $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{x_n} . a^{y_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{x_n + y_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{x+y_n})$. Ponieważ $y_n \to y$, więc i $x + y_n \to x + y$, nadto $x + y$ jako suma liczby wymiernej (x) i niewymiernej (y) jest liczbą niewymierną, kiedy $x + y_n$ są liczbami wymiernemi, więc na mocy definicji jest: $a^{x+y_n} \to a^{x+y}$ czyli $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{x+y_n}) = a^{x+y}$; przeto $a^x . a^y = a^{x+y}$ i tem samem tw. 10 udowodniliśmy w przypadku 3). Pomijamy dowód tego tw. w przypadku 4), jako bardzo podobny.

Z tw. I wynika, że $a^x . a^{-x} = 1$ dla $a > 0$ i dowolnej liczby rzeczywistej x. Stąd wynika, że $a^x \neq 0$ i że $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

11. Jeżeli $a > 0$ i x oznacza liczbę rzeczywistą, to $a^x > 0$. (Uogólnia tw. 2).

Dowód. Zachodzą dwie ewentualności: albo jest 1) x liczbą wymierną albo 2) x jest liczbą niewymierną. Pierwszy przypadek pokrywa się z założeniem tw. 2; należy więc udowodnić tw. 11 tylko w przypadku drugim.

Do liczby niewymiernej x wyznaczyć możemy ciąg liczb wymiernych, mający granicę x: $x_1, x_2, x_3, \ldots; x_n \to x$. Wtedy $a^x = \lim_{n\to\infty}(a^{x_n})$. Ale według tw. 7 jest $\lim_{n\to\infty}(a^{x_n}) > 0$, więc jest $a^x > 0$.

12. Jeżeli $a > 0$, i jeżeli x, y oznaczają liczby rzeczywiste, to $a^x : a^y = a^{x-y}$ (uogólnienie tw. III).

Dowód. Na mocy tw. (11) $a^y \neq 0$, więc iloraz $\frac{a^x}{a^y}$ jest określony. Aby udowodnić twierdzenie, dość wykazać, że liczba a^{x-y}, pomnożona przez dzielnik, równa się dzielnej, t. zn. ma być $a^{x-y} . a^y = a^x$. Rzeczywiście jest na podstawie tw. 10: $a^{x-y} . a^y = a^{x-y+y} = a^x$; zatem tw. 12 jest prawdziwe.

13. Jeżeli $a > 0$, $b > 0$ i jeżeli x jest liczbą rzeczywistą, to $a^x . b^x = (ab)^x$ (uogólnienie tw. II) *i* $a^x : b^x = (a:b)^x$ (uogóln. tw. IV).

Dowód. Co do x zachodzą dwie ewentualności: albo 1) x jest liczbą wymierną albo 2) niewymierną. W przypadku 1) tw. 13 pokrywa się z twierdzeniem II; zajmiemy się więc tylko przypadkiem 2). Otóż x, jako liczba niewymierna, jest granicą ciągu liczb wymiernych: $x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots; x_n \to x$. Przez a^x i b^x rozumiemy więc granice ciągów: (α) $a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \ldots; a^{x_n} \to a^x$; ($\beta$) $b^{x_1}, b^{x_2}, b^{x_3}, \ldots; b^{x_n} \to b^x$; podobnie i $(ab)^x = \lim_{n\to\infty} [(a.b)^{x_n}]$ ..(γ); przeto będzie $a^x . b^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} . \lim_{n\to\infty} b^{x_n}$. Ponieważ iloczyn granic jest równy granicy iloczynu, więc: $a^x . b^x = \lim_{n\to\infty}(a^{x_n} . b^{x_n})$. Ponieważ liczby x_n dla każdej naturalnej liczby n są wymierne, więc jest na zasadzie tw. II: $a^x . b^x = \lim_{n\to\infty}[(ab)^{x_n}]$.....($\delta$). Z równości ($\gamma$) i ($\delta$) wynika wprost, że $a^x . b^x = (ab)^x$. Stąd też wynika dalej, że $(a:b)^x . b^x = [(a:b) . b]^x = a^x$, przeto jest też $a^x : b^x = (a:b)^x$.

14. Jeżeli $a > 1$, x liczbą rzeczywistą i $x > 0$, to $a^x > 1$. (Uogólnienie tw. 1).

Dowód. Gdy x oznacza liczbę wymierną, tw. 14 jest identyczne z tw. 1, a więc prawdziwe. Niech x będzie liczbą niewymierną i większą od zera. Możemy dobrać wtedy ciąg rosnący liczb wymiernych o granicy x; prócz może kilku będą te liczby dodatnie; skreślając ujemne, jeżeli takie są, otrzymamy ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$ rosnący liczb wymiernych i dodatnich o granicy x. Będzie tedy $x_n > x_1$ dla $n = 2, 3, \ldots$; więc na mocy tw. 3 jest $a^{x_n} > a^{x_1}$ więc też $\lim_{n\to\infty}(a^{x_n}) \geqq a^{x_1}$ czyli $a^x \geqq a^{x_1}$; ale na mocy tw. 1 jest $a^{x_1} > 1$, więc też jest $a^x > 1$.

15. Jeżeli $a > 1$, x i y liczby rzeczywiste i $x > y$, to $a^x > a^y$. (Uogólnienie tw. 3).

Dowód podobny do dowodu tw. 3 pomijamy; z łatwością zdoła też czytelnik odwrócić to twierdzenie w ten sposób: *Gdy $a > 1$ i gdy $a^x > a^y$, to jest $x > y$;* najprostszym będzie dowód niewprost.

16. Jeżeli $0 < a < 1$ i $x > y$, to $a^x < a^y$. (Uogólnienie tw. 4).

17. Jezeli $a > b > 0$ i $x > 0$, to $a^x > b^x$.

Dowód bardzo prosty na podstawie tw. (14): skoro bowiem $a > b > 0$, to $\frac{a}{b} > 1$, więc na mocy tw. 14 jest: $\left(\frac{a}{b}\right)^x > 1$, skąd $\frac{a^x}{b^x} > 1$, a w następstwie: $a^x > b^x$, co było do udowodnienia. Dowód tw. 16 pomijamy, jako zbyt łatwy.

18. Dany niech będzie nieskończony ciąg liczb: $a_1, a_2, a_3 \ldots$, którego każdy wyraz jest większy od zera i którego granicą jest liczba 1; wtedy ciąg: $a_1^x, a_2^x, a_3^x \ldots$ ma granicę równą liczbie 1.

Dowód. Gdy $x = 0$, to $a_n^x = 1$ i twierdzenie jest wprost widoczne.

Załóżmy, że jest $x > 0$ i oznaczmy przez m największą liczbę całą zawartą w liczbie x, a więc $0 \leqslant m \leqslant x < m + 1$. Skoro $a_n \to 1$, tedy do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla $n \geqslant n_0$ jest $|a_n - 1| < \varepsilon$, co daje $1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Założymy (co wolno), że $\varepsilon < 1$, wtedy jest $1 - \varepsilon > 0$. Na mocy tw. 17 jest $(1 - \varepsilon)^x < a_n^x < (1 + \varepsilon)^x$. Ale $1 + \varepsilon > 1$, nadto $m + 1 > x$, więc na mocy tw. 15 jest $(1 + \varepsilon)^{m+1} > (1 + \varepsilon)^x$. Jest $1 - \varepsilon < 1$, $x < m + 1$, więc na mocy tw. 16 jest $(1 - \varepsilon)^{m+1} < (1 - \varepsilon)^x$. Przeto mamy: $(1 - \varepsilon)^{m+1} < a_n^x < (1 + \varepsilon)^{m+1}$; stąd przez odjęcie liczby 1 otrzymujemy: $(1 - \varepsilon)^{m+1} - 1 < a_n^x - 1 < (1 + \varepsilon)^{m+1} - 1$. Ale $(1+\varepsilon)^{m+1} - 1^{m+1} = \varepsilon\,[(1 + \varepsilon)^m + (1 + \varepsilon)^{m-1} + \ldots + (1 + \varepsilon) + 1] < \varepsilon\,[2^m + 2^{m-1} + \ldots + 2 + 1] = \varepsilon . \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} < \varepsilon . 2^{m+1}$, bo $1 + \varepsilon < 2$. Podobnie: $1 - (1 - \varepsilon)^{m+1} = \varepsilon\,[1 + (1 - \varepsilon) + (1 - \varepsilon)^2 + \ldots + (1 - \varepsilon)^m] < \varepsilon\,(m + 1) < \varepsilon . 2^{m+1}$, bo $2^{m+1} > m + 1$ dla $m = 0, 1, 2, \ldots$, jak się łatwo przekonać indukcją zupełną. Skoro jest: $\varepsilon . 2^{m+1} > 1 - (1 - \varepsilon)^{m+1}$, to stąd $-\varepsilon . 2^{m+1} < (1 - \varepsilon)^{m+1} - 1$. Przeto jest $-\varepsilon . 2^{m+1} < a_n^x - 1 < \varepsilon . 2^{m+1}$ czyli $|a_n^x - 1| < 2^{m+1} . \varepsilon$. Do każdej liczby $\varepsilon' > 0$ dobierzemy liczbę ε tak, iż $0 < \varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon'}{2^{m+1}}$, $\varepsilon < 1$ i dla niej przeprowadzimy powyższe rozumowanie; otrzymamy tedy: $|a_n^x - 1| < \varepsilon'$ dla $n \geqslant n_0$, co dowodzi naszego twierdzenia. Niech teraz będzie $x < 0$. Otóż jest $\alpha_n^x \cdot \alpha_n^{-x} = 1$, skąd wynika, że $\alpha_n^x = \frac{1}{\alpha_n^{-x}}$; ale jest $-x > 0$, przeto $\alpha_n^{-x} \to 1$, więc $\frac{1}{\alpha_n^{-x}} \to 1$ czyli $\alpha_n^x \to 1$.

19. (Uogólnienie tw. 18): Jeśli nieskończony ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$ jest ciągiem liczb większych od zera i ma granicę $g > 0$, to ciąg: $\alpha_1^x, \alpha_2^x, \alpha_3^x \ldots \alpha_n^x \ldots$ ma granicę i jest nią liczba g^x.

Dowód. Każdy wyraz nieskończonego ciągu: (A): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ podzielmy przez odpowiedni wyraz ciągu: (B): $g, g, g, \ldots$ który ma granicę g. Otrzymamy w ten sposób nowy ciąg: (C) $\frac{\alpha_1}{g}, \frac{\alpha_2}{g}, \frac{\alpha_3}{g} \ldots$ o granicy: $\frac{g}{g} = 1$, gdyż $g > 0$, a więc granica ilorazu równa się ilorazowi granic. Utwórzmy jeszcze inny ciąg przez podniesienie każdego wyrazu ciągu (C) do potęgi x. Otrzymamy ciąg (D): $\left(\frac{\alpha_1}{g}\right)^x, \left(\frac{\alpha_2}{g}\right)^x, \left(\frac{\alpha_3}{g}\right)^x \ldots$, który właśnie według tw. 18 ma granicę 1. Na mocy tw. 13. jest $\left(\frac{\alpha_n}{g}\right)^x = \frac{\alpha_n^x}{g^x}$, przeto: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n}{g}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n^x}{g^x}\right)$ i ta granica równa się 1 czyli: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n^x}{g^x}\right) = 1$. Ale możemy napisać: $\alpha_n^x = \frac{\alpha_n^x}{g^x} \cdot g^x$. Ponieważ $\frac{\alpha_n^x}{g^x} \to 1$, zaś ciąg o jednakich wyrazach g^x ma granicę g^x, więc ciąg α_n^x ma granicę i jest: $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n^x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha_n^x}{g^x}\right) \cdot \lim\limits_{\to\infty} g^x = 1 \cdot g^x = g^x$, co było do udowodnienia.

20. Jeżeli $a > 0$ i $\xi_n \to 0$ dla $n \to \infty$, to ciąg: $a^{\xi_1}, a^{\xi_2}, a^{\xi_3} \ldots$ ma granicę 1.

Nie zakładając, że ξ_n są liczbami wymiernemi, mamy tem samem uogólnienie twierdzenia 5.

Dowód pomijany, bo jest niemal identycznym z dowodem twierdzenia 5.

21. Jeżeli $a > 0$ i jeżeli ciąg $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n \ldots$ ma granicę g, to ciąg $a^{\xi_1}, a^{\xi_2}, a^{\xi_3} \ldots a^{\xi_n} \ldots$ ma granicę $a^g \ldots$

Jest to uogólnienie tw. 9go, gdyż nie zakładamy, że ξ_n i g są liczbami wymiernemi.

Dowód. Skoro $\xi_n \to g$, to $\xi_n - g \to 0$. Weźmy ciąg: $a^{\xi_1 - g}, a^{\xi_2 - g}$,

$a^{\xi_3-\varrho}, \ldots, a^{\xi_n-\varrho}, \ldots$ Według tw. 20 ciąg ten ma granicę 1, albowiem wykładniki tworzą ciąg o granicy 0. Na podstawie zaś tw. 12 jest: $a^{\xi_n-\varrho} = \frac{a^{\xi_n}}{a^{\varrho}}$, przyczem a^{ϱ} według tw. 11 nie jest zerem. Oprócz ciągów: 1) $\frac{a^{\xi_1}}{a^{\varrho}}, \frac{a^{\xi_2}}{a^{\varrho}}, \frac{a^{\xi}}{a^{\varrho}} \ldots$ o granicy 1 i ciągu 2) $a^{\varrho}, a^{\varrho}, a^{\varrho} \ldots a^{\varrho}$ o granicy a^{ϱ} utwórzmy jeszcze trzeci ciąg: 3) $\frac{a^{\xi_1}}{a^{\varrho}}.a^{\varrho}, \frac{a^{\xi_2}}{a^{\varrho}}.a^{\varrho}, \frac{a^{\xi_3}}{a^{\varrho}}.a^{\varrho}, \ldots$ czyli ciąg 4) $a^{\xi_1}, a^{\xi_2}, a^{\xi_3} \ldots$ Skoro ciągi 1) i 2) mają granice, więc i ciąg 3), a zatem i 4) ma granicę i równą iloczynowi granic ciągów 1) i 2), t. j. ma granicę $1 . a^{\varrho} = a^{\varrho}$, c. b. d. u.

22. *Jeśli* $a > 0$ *i* x, y *oznaczają dowolne liczby rzeczywiste, to* $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$. (*Zob. tw. V dla wykładników wymiernych*).

Dowód. Co do wykładników x i y mogą zachodzić następujące przypadki, ujęte w tabelce, obok się znajdującej.

x	y
1) wym.	wym.
2) wym.	niew.
3) niew.	wym.
4) niew.	niew.

Przypadek 1) jako identyczny z założeniami tw. V pomijamy, zajmiemy się natomiast przypadkiem 2), w którym jest x liczbą wymierną, y liczbą niewymierną. Ten przypadek da się rozłożyć na dwa przypadki: a) $x \neq 0$, b) $x = 0$. W przypadku b) mamy: $(a^0)^y = 1^y = 1 = a^{0 \cdot y}$, a więc tw. 22 jest dla $x = 0$ prawdziwe. Dla udowodnienia tw. w podprzypadku a) utwórzmy ciąg liczb wymiernych: $y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots, y_n \ldots$, którego granicą jest liczba niewymierna y. Wtedy jest: $(a^x)^y = \lim\limits_{n \to \infty} [(a^x)^{y_n}] = \lim\limits_{n \to \infty} (a^{xy_n})$, ponieważ liczby (x) i (y_n) są wymierne i tem samem wolno stosować tw. V. Weźmy teraz pod uwagę ciąg: $xy_1, xy_2, xy_3 \ldots$, on ma granicę $x.y$. Na podstawie tw. 21 mamy: $a^{xy_n} \to a^{xy}$. Zatem: $\lim\limits_{n \to \infty} (a^{xy_n}) = a^{xy}$. Przeto $(a^x)^y = a^{xy}$ w podprzypadku a).

W przypadku 3) trzeba utworzyć ciąg liczb wymiernych $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o granicy x. Wtedy $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} (a^{x_n})$. Otóż stąd na mocy tw. 19 ciąg (1) $(a^{x_1})^y, (a^{x_2})^y, (a^{x_3})^y, \ldots$ ma granicę $(a^x)^y$. Ale ciąg (1) wskutek tego, że liczby (x_n) i (y) są liczbami wymieremi można napisać też w postaci: (2) $a^{x_1 y}, a^{x_2 y}, a^{x_3 y}, \ldots$

Skoro $x_n \to x$, więc $x_n y \to xy$, przeto na mocy tw. 21 ciąg (2) ma granicę a^{xy}. Ponieważ ciąg nie może mieć dwóch różnych granic, więc $(a^x)^y = a^{xy}$.

W przypadku 4) tworzymy ciąg liczb wymiernych $y_1, y_2,$

$y_2, \ldots$ o granicy y. Wtedy $(a^x)^y = \lim [(a^x)^{y_n}]$. Ale dopiero co dla liczby x niewymiernej i dla liczby y_n wymiernej wykazaliśmy, że jest $(a^x)^{y_n} = a^{xy_n}$, tedy jest $(a^x)^y = \lim\limits_{n \to \infty} (a^{xy_n})$. Skoro $y_n \to y$, więc $xy_n \to xy$ i przeto na mocy tw. 21 będzie $\lim (a^{xy_n}) = a^{xy}$. Jest więc: $(a^x)^y = a^{xy}$.

§ 25. Pojęcie logarytmu.

Weźmy pod uwagę liczbę e (§ 21); jak nam już wiadomo $2 < e < 3$. Potęga e^x dla każdej liczby rzeczywistej x jest określoną na mocy rozważań poprzedniego paragrafu.

Niech b oznacza dowolną liczbę rzeczywistą i rozważmy równanie (t. zw. wykładnicze): $e^x = b \ldots$ (A). Przy danej liczbie b szukamy liczby x. (t. zw. pierwiastka równania A) spełniającej równanie A. Jak przy każdem równaniu, należy i tu postawić sobie trzy pytania: 1) Czy istnieją pierwiastki tego równania? 2) (Jeśli istnieją), ile jest pierwiastków? 3) W jaki sposób znaleźć te pierwiastki czyli jaką jest metoda rozwiązania równania?

Co do pytania pierwszego zauważyć musimy, że w naszem równaniu można tak dobrać b, że równanie to nie będzie posiadało pierwiastka rzeczywistego. Wiemy bowiem, że jest $e^x > 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x; gdy więc obierzemy $b \leqq 0$, to wtedy równanie (A) nie będzie miało pierwiastka rzeczywistego. Warunek $b > 0$ jest więc warunkiem koniecznym istnienia pierwiastka. — Pozostaje tedy rozstrzygnąć pytanie, czy istnieje pierwiastek równania (A) dla $b > 0$ czyli zbadać, czy warunek $b > 0$ jest zarazem warunkiem wystarczającym istnienia pierwiastka równania (A). W tym celu wykażemy naprzód prawdziwość twierdzenia: *Równanie (A) ma co najwyżej jeden pierwiastek.*

Dowodzimy niewprost, zakładając, że jest więcej pierwiastków; niech x', x'' będą tymi pierwiastkami, przyczem $x' \neq x''$. Wtedy byłoby: $e^{x'} = b$, $e^{x''} = b$; nadto, skoro jest $x' \neq x''$, to możemy założyć, że oznaczenia tak dobrano, że $x' < x''$. Z własności potęg wynika wtedy, że $e^{x'} < e^{x''}$. (bo $e > 1$); ale stąd wynikałoby $b < b$, co jest absurdem. Jeśli więc równanie (A) posiada rozwiązanie, to tylko jedno!

Udowodnimy teraz twierdzenie: *Równanie (A) posiada zawsze i tylko jedno rozwiązanie, gdy $b > 0$.*

Wobec poprzedniego twierdzenia, wystarcza nam teraz wykazać, że równanie (A) posiada rozwiązanie, gdy jest $b > 0$.

Dowód. Skoro $b > 0$, więc albo: 1) $0 < b < 1$ albo: 2) $b = 1$ albo: 3) $b > 1$. W przypadku drugim, gdy $b = 1$, równanie (A) ma postać: $e^x = 1$, to zaś równanie będzie spełnione, gdy $x = 0$, co wynika wprost z definicji potęgi. Przeto w przypadku drugim jest twierdzenie prawdziwem.

Przypadek 1) sprowadzimy do przypadku 3) w sposób następujący. Przypuśćmy chwilowo, żeśmy już zdolali udowodnić, iż równanie (A) ma pierwiastek, jeśli $b > 1$ i rozważmy równanie $e^x = \beta$ (B), gdzie $0 < \beta < 1$. Wtedy $\frac{1}{\beta} > 1$. Gdy teraz weźmiemy równanie pomocnicze: $e^y = \frac{1}{\beta}$.... (C), to na mocy naszego chwilowego założenia, ponieważ jest $\frac{1}{\beta} > 1$, równanie C posiada jeden pierwiastek, który oznaczmy przez y_0. Pomnóżmy obie strony równania (C) przez β, a otrzymamy: $\beta . e^{y_0} = 1$; podzielmy je przez $e^{y_0} \neq 0$, a otrzymamy: $\beta = \frac{1}{e^{y_0}} = e^{-y_0}$, co przy zestawieniu z równaniem (B) dowodzi, że równanie (B) ma pierwiastek $x = -y_0$. Wykazaliśmy więc twierdzenie: *jeśli istnieje pierwiastek równania* (A), *o ile jest* $b > 1$, *to równanie* (A) *ma też pierwiastek*, *gdy jest* $0 < < b < 1$. Sprowadziliśmy więc przypadek 1) do przypadka 3) t. zn. wykażemy, że równanie (A) ma napewne pierwiastek w przypadku 1), gdy ono ma pierwiastek w przypadku 3). Wobec tego dość zająć się dowodem istnienia pierwiastka równania (A) w przypadku 3).

Wprzód jednak zajmiemy się pewnym przykładem, na którym zilustrujemy sposób dowodzenia.

Weźmy równanie $e^x = 7$.... (a), wtedy znajdziemy (przy pomocy tablic logarytmów naturalnych), że $x = 1{\cdot}94591015$... (jest to liczba niewymierna). Weźmy pod uwagę ciąg ułamków dziesiętnych jednocyfrowych (nieujemych): 0·0, 0·1, 0·2, 0·3,..... 1·8, 1·9, 2·0, 2·1...(b) i utwórzmy przy jego pomocy i liczby e ciąg potęg $e^{\frac{0}{10}}$, $e^{\frac{1}{10}}$, $e^{\frac{2}{10}}$, $e^{\frac{3}{10}}$..... $e^{\frac{18}{10}}$, $e^{\frac{19}{10}}$, $e^{\frac{20}{10}}$..... (c). Pierwszy wyraz ciągu (c) jest równy liczbie 1, bo $e^0 = 1$. Ciąg (c) jest rosnącym w sposób nieograniczony (jak to później się wykaże). Liczba 7 nie jest równą żadnemu wyrazowi tego ciągu, bo wtedy byłby pierwiastek x równania (a) liczbą wymierną. Natomiast znajdziemy że: $e^{\frac{19}{10}} < 7 < e^{\frac{20}{10}}$. Podobnie utworzymy przy pomocy ciągu ułamków dziesiętnych dwu-miejscowych nowy ciąg potęg: $e^{\frac{0}{100}}$, $e^{\frac{1}{100}}$, $e^{\frac{2}{100}}$......$e^{\frac{193}{100}}$, $e^{\frac{194}{100}}$, $e^{\frac{195}{100}}$.... (d) i znajdziemy, że: $e^{\frac{194}{100}} < 7 < e^{\frac{195}{100}}$. Postępując dalej w ten sam sposób, otrzymamy nieskończony ciąg nierówności, w których będą występowały we wykładnikach ułamki dziesiętne jedno-, dwu...., n-miejscowe. Ułamki występujące, jako wykładniki po lewej stronie tych nierówności utworzą ciąg: $\frac{19}{10}$, $\frac{194}{100}$, $\frac{1945}{1000}$, $\frac{19459}{10000}$..... (c'), który w tym przykładzie jest ułamkiem dziesiętnym nieskończonym i jako taki jest niemalejącym i ograniczonym u góry, ma więc granicę, którą oznaczmy literą α. Do tej samej granicy dążą wykładniki ułamkowe prawych stron nierówności. Zatem tak lewe jak i prawe strony tych nierówności mają granicę wspólną e^{α}, a więc na mocy twierdzenia o trzech ciągach jest $7 = e^{\alpha}$. Równanie $e^x = 7$ ma więc pierwiastek, który jest granicą ciągu (c'). Na tym przykładzie można poznać plan dowodu, który mamy przeprowadzić ogólnie t. j. mamy wykazać, że równanie $e^x = b$ (A) w przypadku, gdy $b > 1$, ma pierwiastek.

Albo równanie (A) ma pierwiastek wymierny albo takiego pierwiastka nie posiada. Jeżeli równanie (A) ma pierwiastek wymierny, to tw. udowodnione. Przejdźmy więc do drugiego przypadku. Wykażemy właśnie, że, jeżeli równanie (A) nie posiada wymiernego pierwiastka, to posiada pierwiastek niewymierny[1]). Załóżmy przeto, że równanie (A) nie posiada pierwiastka wymiernego, t. zn., że dla każdej wymiernej liczby (w) jest $e^w \neq b$. Weźmy pod uwagę ciąg wszystkich nieujemnych ułamków dziesiętnych (n)-miejscowych: $\frac{0}{10^n}, \frac{1}{10^n}, \frac{2}{10^n}, \dots\dots, \frac{l}{10^n}, \frac{l+1}{10^n}, \frac{l+2}{10^n}, \dots$(f) i utwórzmy dalszy ciąg (ciąg potęg liczby e): $e^{\frac{0}{10^n}}, e^{\frac{1}{10^n}}, e^{\frac{2}{10^n}}, \dots, e^{\frac{l}{10^n}}, e^{\frac{l+1}{10^n}}, \dots$(g) Ciąg ten ma pierwszy wyraz równy 1 i jest rosnącym nieograniczenie, jak wykażemy w rozdziale IV. Liczba $b > 1$ jest więc albo równa jednemu z wyrazów ciągu (g) albo jest zawarta między dwoma wyrazami, bezpośrednio po sobie następującemi. W pierw-

---

[1]) To nie jest *a priori* widoczne: np. równanie $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 5$ nie ma pierwiastka wymiernego, bo nie ma wcale pierwiastka.

szym przypadku byłoby $b = e^{\frac{l}{10^n}}$, przeto pierwiastek x równania (A) równałby się $x = \frac{l}{10^n}$ czyli byłby wymiernym, co jest niemożliwem wobec założenia, że równanie (A) nie ma wymiernego pierwiastka. Pozostaje więc tylko przypadek: $e^{\frac{l}{10^n}} < b < e^{\frac{l+1}{10^n}}$. Zauważmy, że będziemy liczbę naturalną (n) zmieniali, liczba (l) zaś będzie zależną od liczby (n) i dlatego nadamy jej wskaźnik (n) Przeto ostatnią nierówność należy napisać we formie: $e^{\frac{l_n}{10^n}} < b < e^{\frac{l_n+1}{10^n}}$ ...... (h). Dla każdej liczby naturalnej n da się napisać nierówność (h). Weźmy teraz pod uwagę ciągi wykładników po lewej stronie nierówności (h): $\frac{l_1}{10}, \frac{l_2}{10^2}, \frac{l_3}{10^3}$ .... (i). Wykażemy, że właśnie ten ciąg ma granicę, która jest pierwiastkiem równania (A).

Nierówność (h) jest prawdziwą dla $n = 1, 2, \ldots$ Prawdą jest zatem także i wtedy, gdy w niej zamiast liczby (n) napiszemy liczbę ($n+1$), przeto mamy: $e^{\frac{l_{n+1}}{10^{n+1}}} < b < e^{\frac{l_{n+1}+1}{10^{n+1}}}$ (j). Z nierówności (h) i (j) odczytać łatwo: $e^{\frac{l_n}{10^n}} < b < e^{\frac{l_{n+1}+1}{10^{n+1}}}$, stąd $e^{\frac{l_n}{10^n}} < e^{\frac{l_{n+1}+1}{10^{n+1}}}$. Ponieważ jest $e > 1$, więc na mocy odwrócenia tw. 15 § 24 otrzymujemy: $\frac{l_n}{10^n} < \frac{l_{n+1}+1}{10^{n+1}}$. Pomnóżmy tę nierówność obustronnie przez liczbę 10^{n+1}, a otrzymamy: $10 . l_n < l_{n+1} + 1$ ...... (k). Ponieważ (l_n) i (l_{n+1}) są to liczby całkowite, przeto, zmniejszając stronę prawą nierówności (k) o 1, otrzymamy liczbę albo już równą lewej stronie albo jeszcze od niej większą; jest zatem $10 . l_n \leqq l_{n+1}$ .... (l). Podobnie wyprowadzimy z nierówności (h) i (j): $e^{\frac{l_{n+1}}{10^{n+1}}} < b < e^{\frac{l_n+1}{10^n}}$, skąd znów wynika $\frac{l_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{l_n+1}{10^n}$, a pomnożywszy to obustronnie przez liczbę 10^{n+1}, otrzymamy: $l_{n+1} < 10(l_n + 1) = 10 l_n + 10$. Od strony prawej ostatniej nierówności odejmiemy znów liczbę 1 i otrzymamy: $l_{n+1} \leqq 10 . l_n + 9$...... ($m$). Nierówności ($l$) i ($m$) połączymy w jedną: $10 l_n \leqq l_{n+1} \leqq 10 l_n + 9$ ...... (n). Z tego widać, że można napisać: $l_{n+1} = 10 l_n + c_{n+1}$...... ($o$), gdzie c_{n+1} na podstawie nierówności (n) oznacza jednocyfrową liczbę całkowitą, a więc jedną z liczb 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Równość (o) po-

dzielmy obustronnie przez liczbę 10^{n+1}, a otrzymamy: $\frac{l_{n+1}}{10^{n+1}} =$
$= \frac{10\, l_n + c_{n+1}}{10^{n+1}} = \frac{l_n}{10^n} + \frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} \ldots\ldots (p)$. Znaczy to, że, jeżeli wyrazy ciągu (i) napiszemy w postaci ułamków dziesiętnych z kropką dziesiętną, to według równości (p) wyraz $(n+1)$ szy tego ciągu powstaje z wyrazu n-tego przez dopisanie dalszej cyfry dziesiętnej (c_{n+1}) przy zachowaniu cyfr dziesiętnych i całkowitych bez zmiany, a znajdujących się we wyrazie n-tym. Przeto ciąg (i) jest t. zw. ułamkiem dziesiętnym nieskończonym, a więc niemalejącym ciągiem i ograniczonym u góry (zob. przykład 4 § 22), ma więc granicę, którą oznaczmy przez a: $\frac{l_n}{10^n} \to a$, gdy $n \to \infty$.

Jest także $\frac{l_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \to a$, gdy $n \to \infty$, bo $\frac{1}{10^n} \to 0$. Zastosujmy teraz do nierówności (h) tw. o trzech ciągach: Lewa jej strona $e^{\frac{l_n}{10^n}}$ w myśl ostatniego wyniku i tw. 21 § 24 ma granicę e^a; wyraz środkowy $b \to b$, jako ciag o stałych wyrazach; prawa strona zaś jest równa: $e^{\frac{l_n+1}{10^n}}$, zatem $e^{\frac{l_n+1}{10^n}} \to e^a$. Na mocy więc twierdzenia o trzech ciągach wynika z nierówności (h), że ciąg $b, b, b, \ldots$ ma granicę b i równocześnie granicę: e^a, przeto jest $b = e^a$, bo ciąg dwóch różnych granic mieć nie może. Udowodniliśmy w ten sposób, że równanie (A) posiada pierwiastek (a), gdy jest $b > 1$; będzie on w rozważanym przypadku liczbą niewymierną.

Na podstawie poprzednich rozumowań wynika też, że równanie (A) ma jeden i tylko jeden pierwiastek dla każdej liczby $b > 0$. Ten jedyny pierwiastek nosi nazwę logarytmu naturalnego liczby b.

Przez znak log. nat. b lub $ln\, b$ rozumiemy logarym naturalny liczby b; przeto jest: $x =$ log. nat. b lub: $x = ln\, b$, gdy jest $e^x = b$. Symbol $ln\, b$ jest dokładnie jednowartościowy, gdy $b > 0$; dla $b \leqq 0$ jest bez znaczenia.

Tem samem udowodniliśmy istnienie logarytmu naturalnego każdej liczby większej od zera.

Powiemy zatem: *Każda liczba dodatnia posiada logarytm naturalny i tylko jeden.*

Wyprowadzimy kilka własności logarytmów.

Niech będzie: $x = ln\, b$, $y = ln\, c$, gdzie $b > 0$, $c > 0$; twierdzimy, że $ln\,(bc)$ jest liczbą rzeczywistą i jest: (I) $ln\,(b\,.c) = ln\,b + ln\,c$ czyli krótko i ogólnie: *logarytm iloczynu liczb dodatnich równa się sumie logarytmów tychże liczb.*

Dowód: Jeśli $x = ln\,b$, to $b = e^x$, podobnie: $y = ln\,c$ daje $c = e^y$; te dwie równości pomnóżmy stronami, a otrzymamy $bc = e^{x+y}$ (na podstawie własności potęg), a ponieważ logarytm jest wykładnikiem potęgowym, więc $x + y = ln\,(bc)$ czyli $ln\,(bc) = ln\,b + ln\,c$. Podobnie dowodzi się twierdzenia (II): *Gdy jest* $b > 0$ *i* $c > 0$, *to* $ln\left(\frac{b}{c}\right)$ *jest liczbą rzeczywistą i jest:* $ln\left(\frac{b}{c}\right) = ln\,b - ln\,c$.

(III) *Gdy jest* $b > 0$, c *liczbą dowolną, to* $ln(b^c)$ *jest liczbą rzeczywistą i jest* $ln\,(b^c) = c\,ln\,b$.

Powyższe twierdzenia formułuje się zwykle zbyt krótko i nieściśle, przez co błąd nie jest wykluczony (zob. uwagę do przykładu 2 w § 54).

Nie rozważamy osobno logarytmu pierwiastka, gdyż pierwiastek przez definicję da się zamienić na potęgę; jest więc log. nat. $(\sqrt[c]{b}) = ln\,(b^{\frac{1}{c}}) = \frac{1}{c}\,ln\,b$, gdy $b > 0$, $c \neq 0$.

Przez użycie logarytmów do działań rachunkowych zamienić możemy, jak widać z twierdzeń I—III, działania arytmetyczne stopnia 2-go czyli mnożenie i dzielenie na działania stopnia 1-go, t. j. na dodawanie, względnie odejmowanie logarytmów, zaś potęgowanie i pierwiastkowanie, które zowiemy działaniami 3 go stopnia, sprowadzają się do mnożenia, wzgl. dzielenia czyli do działań 2-go stopnia na logarytmach. Na tej ważnej własności logarytmów, polegającej na obniżeniu stopnia działania o jednostkę, zasadza się szerokie zastosowanie logarytmów do rachunków arytmetycznych.

Chwilą wynalezienia logarytmów i wprowadzenia ich do matematyki jest początek 17-go stulecia; dokonali tego Neper i Briggs. Przedtem już jednak starano się obniżać stopień działań przez zastosowanie pewnych wzorów trygonometrycznych, n. p. wzoru: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, który zamienia iloczyn funkcji goniometrycznych na sumę funkcji kątów. Użycie tego wzoru objaśnimy na przykładzie.

Mamy obliczyć iloczyn $a = 25{\cdot}882 \times 1723{\cdot}26$. Otóż będzie $a = 2 \times 25{\cdot}882 \times 861{\cdot}63$. Ale $\sin x$ lub $\cos y$ nie mogą przewyższyć jednostki, tedy obliczmy $\frac{a}{10^2 . 10^3} = 2 \times 0{\cdot}25882 \times 0{\cdot}86163$. Przy pomocy tablic trygonometrycznych znajdujemy kąty tak, aby było $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0{\cdot}25882$, $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0{\cdot}86163$ i pokaże się, że jest $\frac{\alpha+\beta}{2} = 15^0$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = 30^0 30'$, stąd otrzymujemy przez dodanie $\alpha =$ $= 45^0 30'$, zaś przez odjęcie $\beta = -15^0 30'$. Tedy według powyższego wzoru trygonometrycznego jest: $\frac{a}{10^5} = \sin 45^0 30' + \sin(-15^0 30') =$ $= \sin 45^0 30' - \sin 15^0 30'$, co według tablic Kranza daje $\frac{a}{10^5} = 0{\cdot}71325 -$ $- 0{\cdot}26724 = 0{\cdot}44601$, skąd $a = 44601$. Czytelnik przez bezpośrednie mnożenie wykaże błąd, jaki popełniliśmy tą metodą rachunkową (błąd jest mniejszy od 0·5). Aby tę metodę można było stosować, trzeba posiadać dobre tablice trygonometryczne. Dotychczas omawiane logarytmy naturalne (o zasadzie (e) służą przeważnie do teoretycznych rozważań; znaczenie praktyczne posiadają natomiast logarytmy Briggsowskie czyli zwyczajne, których zasadą jest liczba 10 i które są pierwiastkami równań kształtu: $10^x = b \ldots (1)$.

Dowodzimy istnienia logarytmów zwyczajnych liczb (b) większych od zera w sposób następujący: załóżmy, że równanie (1) ma rozwiązanie (x). Na podstawie poprzednio udowodnionego twierdzenia wiemy, że równanie: $e^y = 10 \ldots (2)$ posiada jednoznacznie określony pierwiastek, który oznaczmy przez μ; jest więc: $e^\mu = 10$, a więc $\mu = ln\, 10$. Podniósłszy obie strony równości $e^\mu = 10$ do potęgi x, otrzymujemy: (3) $(e^\mu)^x = 10^x$ czyli $e^{\mu x} = b$. Jeżeli więc równanie (1) ma pierwiastek (x), to ten pierwiastek (x) spełnia równanie (3).

Obok tego rozważmy równanie: $e^z = b \ldots$ (3 bis). Ponieważ $b > 0$, więc równanie (3 bis) ma jednoznacznie określony pierwiastek (z). Z równań (3) i (3 bis) otrzymujemy, że $b = e^{\mu x} = e^z$, skąd wynika, że jest: $\mu x = z$; a że liczba μ, jako $ln\, 10$, jest większą od zera, więc jest: (4) $x = \frac{z}{\mu}$. Jeżeli więc równanie (1) ma pierwiastek (x), to on spełnia równanie (4), gdzie z oznacza pierwiastek równania (3 bis), napewne istniejący. Mamy udowodnić istnienie rozwiązania równania (1), wobec tego trzeba teraz naodwrót wykazać, że liczba (x) obliczona według wzoru (4), spełnia rzeczywiście równanie (1). Otóż na mocy znanych własności potęg i na mocy równań poprzednich mamy: $10^x = 10^{\frac{z}{\mu}} = (e^\mu)^{\frac{z}{\mu}} = e^{\mu \cdot \frac{z}{\mu}} = e^z = b$. Udowodniliśmy więc, że, o ile $b > 0$, to równanie (1) ma pierwiastek i jest nim liczba $x = \frac{z}{\mu} = \frac{ln\, b}{ln\, 10}$. Liczbę x, spełniającą równanie (1), nazywamy logarytmem zwyczajnym liczby b i oznaczamy ją symbolem $\log_{10} b$ lub $\log b$.

Wyszukajmy teraz związek, zachodzący między logarytmem naturalnym, a zwyczajnym tej samej liczby; związek ten da nam sposób zamiany logarytmu naturalnego danej liczby na logarytm o zasadzie 10 i naodwrót. Wprawdzie ten związek już tkwi w ostatnich wzorach, ale wyprowadzimy go wprost.

Niech będzie (5) $x = ln\, b$ i zarazem (6) $y = \log_{10} b$. Wtedy jest $b = e^x$ i $b = 10^y$, więc też $e^x = 10^y \ldots$ (7).

Biorąc logarytm naturalny obu stron równości (7), uzyskujemy równość: $x = y\, ln\, 10$ czyli $ln\, b = ln\, 10 . \log_{10} b \ldots\ldots$ (I), skąd też: $\frac{ln\, b}{ln\, 10} = \log_{10} b \ldots\ldots$ (II). Czytamy stąd: *Logarytm zwyczajny danej liczby dodatniej równy jest ilorazowi dzielenia logarytmu naturalnego tej liczby przez logarytm naturalny liczby 10.*

Równość II piszemy najczęściej we formie: $\log b = \frac{1}{ln\, 10} . ln\, b \ldots$ $\ldots$ (III), przyczem $\frac{1}{ln\, 10}$ jest oczywiście współczynnikiem stałym dla wszystkich liczb b. Wzór (I) pozwala odwrotnie obliczyć logarytm naturalny liczby, gdy dany jest jej logarytm zwyczajny.

Istnieje kilka metod obliczania logarytmów zwyczajnych liczb danych. Podamy obecnie jedną z nich bez ścisłego zresztą dowodu słuszności rozumowań; jest ona o tyle interesująca, że wymaga jedynie łatwych stosunkowo działań, jak mnożenie, dzielenie i potęgowanie; jest to elementarna metoda (zresztą zob. § 86, IV).

Wyjaśnimy tę metodę na przykładzie. Niech zadaniem naszem będzie obliczenie logarytmu zwyczajnego liczby 7. Z definicji logarytmu $x = \log 7$ wynika, że $10^x = 7 \ldots$ (8), przyczem musi być $0 < x < 1$, bo już $10^1 = 10 > 7$, wobec tego liczbę x kładziemy równą liczbie $\frac{1}{y}$, przy czem już $y > 1$. Podstawiamy $\frac{1}{y}$ za x w równaniu (8) i otrzymujemy $10^{\frac{1}{y}} = 7$, podnosimy tę równość obustronnie do potęgi y, co daje: $(10^{\frac{1}{y}})^y = 7^y$ czyli: $7^y = 10\ldots.(9)$. Pytamy teraz, między jakiemi liczbami całkowitemi zawarta jest liczba y. Otóż jest $7^1 = 7 < 10$, ale $7^2 = 49 > 10$; zatem $1 < y < 2$. Napiszemy więc, że $y = 1 + \frac{1}{z}$, gdzie $\frac{1}{z}$ jest liczbą większą od zera, a mniejszą od 1, przeto $z > 1$. Wartość $1 + \frac{1}{z}$ wstawiamy zamiast y w równanie (9). Otrzymujemy: $7^{1+\frac{1}{z}} = 10$ czyli $7 . 7^{\frac{1}{z}} = 10$. Dzielimy obie strony przez liczbę 7, a uzyskamy równość: $7^{\frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$ i podnosimy ją następnie do potęgi (z). Mamy więc: $\left(\frac{10}{7}\right)^z = 7\ldots\ldots..(10)$. Jest $\frac{10}{7} > 1$, zatem funkcja $\left(\frac{10}{7}\right)^z$ jest rosnącą (tw. 15 str. 92). Podstawiamy więc coraz to większe wartości całkowite dodatnie na z i szukamy takich dwóch, któreby zawierały między sobą liczbę (z), spełniającą równanie (10). Znajdziemy łatwo, że $5 < z < 6$. Możemy więc znów liczbę z przedstawić, jako sumę liczby 5 i liczby $\frac{1}{u}$, gdzie $u > 1$ czyli $z = 5 + \frac{1}{u}$; Wartość tę wstawiamy w równanie (10) i postępujemy dalej podobnie, jak poprzednio i tem dłużej, im dokładniej chcemy obliczyć przybliżenie liczby szukanej $x = \log 7$.

Przypuśćmy, że poprzestaniemy na przyjęciu wartości $z = 5$, pomijając ułamek $\frac{1}{u}$. Błąd, jaki przez to pominięcie popełniamy, pozwoli nam liczbę x obliczyć tylko w przybliżeniu.

Mamy więc kolejno: $z = 5$ (przez niedomiar, bo $z = 5 + \frac{1}{u}$ i $5 < z < 6$); dalej $y = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ (przez nadmiar); $x = \frac{1}{y} = \frac{5}{6} = 0{\cdot}83\ldots$ (przez niedomiar) i tem samem wyszukaliśmy przybliżenie liczby $\log 7$. Jaki jest stopień przybliżenia, tego ostatni rachunek nie podaje. Przeprowadźmy go jeszcze raz, ale dokładniej. Jest $z = 5 + a$, gdzie $0 < a < 1$; stąd $y = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{5+a} = \frac{6+a}{5+a}$. $x = \frac{1}{y} = \frac{5+a}{6+a}$. Dopiero co obliczona liczba x jest d o k ł a d n ą wartością szukanej liczby log 7. W poprzednim rachunku otrzymaliśmy $x=\frac{5}{6}$, jest to wartość przybliżona z błędem B wynoszącym: $B=$ $=\frac{5+a}{6+a}-\frac{5}{6}=\frac{30+6a-5(6+a)}{6(6+a)}=\frac{a}{36+6a}$. Jest więc z powodu $0<a<1$ też: $0<B<\frac{a}{36}<\frac{1}{36}$. Ponieważ $\log 7=\frac{5}{6}+B$, więc $\frac{5}{6}<\log 7<\frac{5}{6}+\frac{1}{36}=\frac{31}{36}<0{\cdot}862$ czyli $0{\cdot}83<\log 7<0{\cdot}862$. Z tej nierówności widoczne, że obliczyliśmy dokładnie tylko pierwszą cyfrę dziesiętną. Dokładniej wynosi $\log 7=0{\cdot}8450980$. W każdym razie przybliżenie uzyskaliśmy dość dobre w stosunku do krótkości czasu, użytego na rachunek.

Zajmowaliśmy się dotychczas tylko logarytmami o zasadach e i 10. Można jednak przyjąć za zasadę logarytmów jakąkolwiek inną liczbę, byle dodatnią i różną od 1. Jeśli bowiem liczba a ma być zasadą logarytmów, to musi spełniać warunki: $a>0$, $a\neq 1$ i wtedy łatwo udowodnić istnienie logarytmu liczby b ($b>0$) przy zasadzie a. Gdyby bowiem było $a=1$, to równanie $a^x=b$ czyli $1^x=b$ spełniałaby każda liczba, podstawiona za x, gdy $b=1$ i żadna, gdy $b\neq 1$.

Przez znak $\log_a b$ rozumieć będziemy logarytm liczby b o zasadzie (a). Sposób zamiany logarytmów o dowolnej zasadzie a (gdy $a>0$, $a\neq 1$) na logarytm naturalny łatwo znaleźć. Wychodzimy z równania: $a^x=b$, które po obu stronach zlogarytmujemy w myśl twierdzenia, że logarytmy liczb dodatnich są jednoznacznie określone, a więc logarytmy dodatnich liczb równych są między sobą równe; otrzymamy tedy: $ln(a^x)=ln\,b$ czyli $x\,ln\,a=ln\,b$ czyli $\log_a b\,.\,ln\,a=$ $=ln\,b$: ten związek pozwala nam zamienić logarytm naturalny liczby b na logarytm liczby b o zasadzie (a) i odwrotnie. Istnienie takich logarytmów wykaże czytelnik, wzorując się na dowodzie istnienia logarytmów zwyczajnych.

Rozdział IV. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.

§ 26. Funkcja wykładnicza.

Weźmy pod uwagę funkcję $y=e^x$. Jak wiemy z § 24, jest określoną dla każdej liczby rzeczywistej x i nadto jest $e^x>0$. Przeto obraz geometryczny funkcji $y=e^x$, naryso any w układzie prostokątnym (x, y) leży całkowicie w pierwszej i drugiej ćwiartce płaszczyzny (x, y).

Poznamy kilka własności funkcji $y = e^x$. 1) Ponieważ jest $e > 2$, więc na mocy § 24 otrzymujemy $e^{x'} > e^{x''}$, gdy jest $x' > x''$ czyli funkcja wykładnicza e^x jest funkcją rosnącą. Z tego też wynika, że odwrotnie, gdy jest $e^{x'} > e^{x''}$, to jest też $x' > x''$, jak zresztą łatwo wykazać dowodem niewprost. Jeżeli zaś jest $e^{x'} = e^{x''}$, to jest też $x' = x''$. 2) Nim podamy dalsze własności funkcji e^x, zajmiemy się liczbą e. Jak wiadomo, jest $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Rozważmy teraz ciąg $\left(1 + \frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n}$, gdzie $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ jest dowolnym ciągiem liczb rzecz. dodatnich, rosnącym nieograniczenie $\frac{1}{\nu_n} \to 0$. Np. rozważmy ciąg: $\left(1 + \frac{1}{3{\cdot}5}\right)^{3\cdot5}, \left(1 + \frac{1}{4{\cdot}5}\right)^{4\cdot5}, \left(1 + \frac{1}{5{\cdot}5}\right)^{5\cdot5}, \ldots$; w tym przykładzie jest $\nu_n = n + \frac{5}{10} + 2$. Zbadajmy, czy taki ciąg ma granicę i jaką.

W tym celu oznaczmy przez m_n największą liczbę całkowitą, zawartą w liczbie ν_n; będzie więc $0 \leqslant m_n \leqslant \nu_n < m_n + 1$. Ponieważ $\frac{1}{\nu_n} \to 0$ i ponieważ jest $\frac{1}{\nu_n} > \frac{1}{m_n + 1}$, więc $\frac{1}{m_n + 1} \to 0$, przeto istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla $n \geqslant n_0$ jest $m_n > 0$; można wtedy z nierówności $m_n \leqslant \nu_n < m_n + 1$ wyprowadzić nierówność: $\frac{1}{m_n + 1} < \frac{1}{\nu_n} \leqslant \frac{1}{m_n}$, skąd wynika, że $1 + \frac{1}{m_n + 1} < 1 + \frac{1}{\nu_n} \leqslant 1 + \frac{1}{m_n}$. Na podstawie tw. 17 § 24 mamy dalej: $\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{\nu_n} < \left(1 + \frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n} \leqslant$ $\leqslant \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{\nu_n}$; na podstawie zaś tw. 15 § 24 mamy: $\left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{\nu_n} <$ $< \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1}$; $\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{\nu_n}$; przeto otrzymujemy: $\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} < \left(1 + \frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n} < \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1}$ czyli

$$(1) \quad \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n + 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{m_n + 1}} < \left(1 + \frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n} < \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n}\right).$$

Rozważmy dwa ciągi pomocnicze: $u_n = \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n + 1}$, $w_n = \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n}$ dla $n \geqslant n_0$. Ciągi te nie muszą uchodzić za wybrane z ciągu $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, bo niektóre z wyrazów ciągu u_n lub w_n mogą się powtarzać. Np. niech będzie $v_1 = 1 + \frac{1}{10}$, $v_2 = 1 + \frac{2}{10}$, $v_3 = 1 + \frac{3}{10}, \dots v_n = 1 + \frac{n}{10}$. Wtedy $m_1 = m_2 = \dots m_9 = 1$, $m_{10} = m_{11} = \dots m_{19} = 2$ itd. Mimo to możemy twierdzić, że ciąg (u_n) ma granicę e. Rzeczywiście: skoro $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, więc do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wskaźników $n \geqslant N$ jest: $\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$. Otóż niech będzie $n_1 \geqslant n_0$ i $m_{n_1} \geqslant N$, co jest możliwe, gdyż liczby (m_n) rosną nieograniczenie. Wtedy dla $n \geqslant n_1$ będzie też $m_n \geqslant N$; wskutek tego jest $\left|\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n + 1} - e\right| < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_1$, co dowodzi, że $u_n \to e$.

Podobnie wykaże się, że też $w_n \to e$. Na mocy twierdzenia o trzech ciągach wyniknie z nierówności (1), że $\left(1 + \frac{1}{v_n}\right)^{v_n} \to e$ dla $n \to \infty$. Jest bowiem $1 + \frac{1}{m_n} \to 1$, $1 + \frac{1}{m_n + 1} \to 1$.

Udowodniliśmy tedy twierdzenie: *jeżeli ciąg liczb dodatnich $v_1, v_2, v_3 \dots$ rośnie nieograniczenie, to $\left(1 + \frac{1}{v_n}\right)^{v_n} \to e$.*

Utwórzmy teraz ciąg $\left(1 - \frac{1}{v_n}\right)^{-v_n}$ i zbadajmy, czy i jaką ma granicę, gdy liczby v_n są dodatnie i ze wskaźnikiem n rosną nieograniczenie. Otóż jest $\left(1 - \frac{1}{v_n}\right)^{-v_n} = \left(\frac{v_n - 1}{v_n}\right)^{-v_n} = \left(\frac{v_n}{v_n - 1}\right)^{v_n}$; tedy dla poprawności trzeba się zastrzedz, że jest stale $v_n > 1$, bo zasada potęgi ma być większą od zera, tylko bowiem takie potęgi rozważaliśmy o dowolnym wykładniku rzeczywistym. Zrobiwszy to założenie mamy:

$$\left(1 - \frac{1}{v_n}\right)^{-v_n} = \left(\frac{v_n}{v_n - 1}\right)^{v_n} = \left(\frac{v_n - 1 + 1}{v_n - 1}\right)^{v_n} = \left(1 + \frac{1}{v_n - 1}\right)^{v_n} =$$

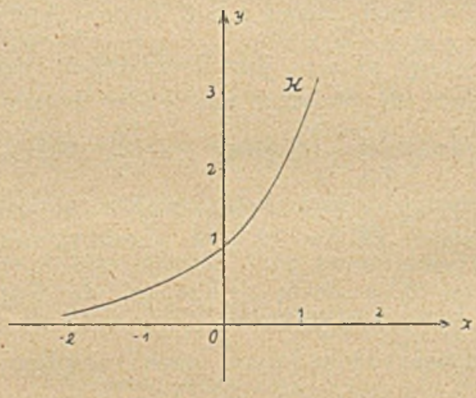
$= \left(1+\frac{1}{\nu_n - 1}\right)^{\nu_n - 1} \cdot \left(1+\frac{1}{\nu_n - 1}\right)$. Otóż $\left(1+\frac{1}{\nu_n - 1}\right)^{\nu_n - 1} \to e$, jak dopieroco wykazaliśmy, zaś $1+\frac{1}{\nu_n - 1} \to 1$. Wykazaliśmy więc twierdzenie: *Jeżeli ciąg* $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ *jest ciągiem liczb większych od jedności, rosnących nieograniczenie, to ciąg* $\left(1-\frac{1}{\nu_1}\right)^{-\nu_1}$, $\left(1-\frac{1}{\nu_2}\right)^{-\nu_2}, \ldots$ *ma granicę e.*

3) Udowodnimy teraz następujące twierdzenie: *jeżeli x jest dowolną liczbą rzeczywistą, to ciąg* (2) $\left(1+\frac{x}{1}\right)^1, \left(1+\frac{x}{2}\right)^2, \left(1+\frac{x}{3}\right)^3, \ldots$ *ma granicę i równą liczbie e^x.*

Dowód. Rozróżnimy trzy przypadki: albo $x > 0$ albo $x = 0$ albo $x < 0$. Gdy $x = 0$, to ciąg (2) ma wszystkie wyrazy równe liczbie 1, a więc ciąg ma granicę i równą liczbie 1 i rzeczywiście jest $e^0 = 1$ czyli w tym przypadku jest twierdzenie prawdziwem. W przypadku pierwszym t. zn., kiedy mamy $x > 0$, iloraz $\frac{n}{x}$, który oznaczmy przez ν_n, będzie większy od zera, jako iloraz dwóch liczb dodatnich. Wyraz n ty ciągu (2) możemy napisać w postaci: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\nu_n}\right)^{x\nu_n} = \left[\left(1+\frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n}\right]^x$, gdzie $\nu_n = \frac{n}{x}$. Wartość w nawiasie [ ] jest n-tym wyrazem ciągu, który według poprzedniego ma granicę e. Na podstawie zaś tw. 19 § 24 wnosimy, uważając wartość $\left[\left(1+\frac{1}{\nu_n}\right)^{\nu_n}\right]^x$ za a_n^x, a liczbę (e) za (g), że ciąg: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ma granicę e^x. Podobnie udowodnimy nasze twierdzenie w przypadku $x < 0$. Zauważmy, że tak samo, jak to uczyniliśmy w § 21, moglibyśmy wykazać, że ciąg (2) dla $x > 0$ jest rosnącym i wtedyby się okazało, że jest $e^x > \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, gdzie $x > 0$. Znane nam ze wstępu następujące twierdzenie: Jeżeli $a \geqslant 0$ i n liczbą naturalną, to $(1+a)^n \geqslant 1+na$. Stosując to twierdzenie, otrzymujemy: $e^x > \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+\frac{x}{n}.n = 1+x$ czyli $e^x > 1+x$. Dla liczb $x > 0$ mamy tedy nierówność (3) $e^x > 1+x$, z której wyciągniemy zaraz wniosek.

4) Wiemy, że funkcja e^x jest rosnącą; chodzi nam o to, czy rośnie nieograniczenie ze wzrostem zmiennej x czy też nie. Na to da odpowiedź ostatnia nierówność. Jeżeli chcemy, by liczba e^x była większą np. od miljona $l = 10^6$, to dość przyjąć $x = 10^6$, bo według nierówności (3) mamy $e^{1,000.000} > 1 + 1,000.000 > 1,000.000$. Aby więc liczba e^x była większą od naprzód danej dodatniej liczby (a), dość położyć $x = a$, gdyż według nierówności (3) mamy: $e^a > 1 + a > a$. To właśnie wyraża, że funkcja e^x rośnie nieograniczenie ze wzrostem zmiennej (x).

Założmy odwrotnie, że liczba x jest ujemną; wykażemy, że bezwzględną wartość $|x|$ można uczynić tak wielką, iż liczba e^x, będąc dodatnią, będzie tak bliską zera, jak chcemy. Skoro bowiem $x < 0$ położmy $x = -y$, to $y = |x|$; będzie $e^x = e^{-y} = \frac{1}{e^y}$; otóż e^y można, jak wiemy, uczynić dowolnie wielką liczbą, tedy $\frac{1}{e^y}$ można uczynić liczbą dowolnie bliską zera. Te dane pozwalają nam wyrobić sobie obraz zmienności funkcji, oczywiście nie wystarczający do wykresu, który podajemy obok, odkładamy bowiem na później usprawiedliwienie wielu szczegółów rysunkowych. W każdym razie krzywa, będąca obrazem funkcji $y = e^x$ zbliża się nieograniczenie do ujemnej półosi x; oś x jest asymptotą krzywej (rys. 40).



Rys. 40.

Ponadto krzywa tak jest zakrzywioną, że odciętym, wzrastającym o jednostkę ($x = 0, 1, 2, 3, \ldots$) odpowiadają rzędne wzrastające (e) razy. Krzywa więc dość stromo się wznosi, gdy przechodzimy kolejno wartości $x = 1, 2, 3, \ldots$.

5) Wykażemy teraz, że funkcja wykładnicza e^x jest ciągłą w każdym punkcie $x = c$. W tym celu bierzemy pod uwagę wyrażenie $|e^x - e^c| = e^c |e^{x-c} - 1|$. Otóż okażemy, że $e^{x-c} \to 1$, gdy $x \to c$.

Wobec tego udowodnimy następujące twierdzenie: *jeżeli* $x \to 0$, *to* $e^x \to 1$ *czyli funkcja* $(e^x - 1)$ *jest nieskończenie małą dla* $x = 0$.

Dowód. Albo jest $x > 0$ albo $x < 0$, gdyż winno być $x \neq 0$, skoro obliczamy granicę dla $x \to 0$. Gdy $x > 0$, to, korzystając z twierdzenia pod 3), rozważamy zamiast $(e^x - 1)$ różnicę $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1$. Na mocy znanego twierdzenia, że $a^n - b^n = (a-b)[a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}]$, kładąc $a = 1 + \frac{x}{n}$, $b = 1$, otrzymujemy:

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1 = \frac{x}{n}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} + \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-2} + \dots + \left(1+\frac{x}{n}\right) + 1\right]$$

dla $n \geqslant 2$.

Ponieważ jest $x > 0$, więc $1 + \frac{x}{n} > 1$, tedy na mocy tw. 15 § 24 mamy $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-2} < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \dots\dots\dots$ $\left(1+\frac{x}{n}\right)^1 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $1 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$; tedy wstawiając w nawiasie [...] zamiast każdego wyrazu wyraz $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, powiększymy sumę, ale suma (n) składników jednakowych jest równa iloczynowi składnika przez liczbę n; przeto:

$$0 < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1 < \frac{x}{n} \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \cdot n = x \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \text{ dla } n \geqslant 2.$$

Przy stałej liczbie $x > 0$ przejdźmy do granicy, zwiększając liczbę (n) nieograniczenie. Na mocy § 23 i rozumowań pod 3), otrzymujemy: $0 \leqslant e^x - 1 \leqslant x \cdot e^x$.

Ostatnia nierówność została wyprowadzona dla liczb $x > 0$, ale widocznie jest ważną i dla liczby $x = 0$. Jest więc: (4) $0 \leqslant e^x - 1 \leqslant x \cdot e^x$ dla $x \geqslant 0$, co możemy napisać też w postaci: (4 bis) $|e^x - 1| \leqslant |x| \cdot e^{|x|}$, gdyż jest $x = |x|$. Załóżmy teraz, że jest $x < 0$ i połóżmy $x = -y$, wtedy jest $y > 0$. Mamy wtedy

$$|e^x - 1| = |e^{-y} - 1| = \left|\frac{1}{e^y} - 1\right| = \frac{|1 - e^y|}{e^y} = \frac{|e^y - 1|}{e^y}.$$

Ponieważ jest $y > 0$, więc na mocy związku (4 bis) otrzymujemy $\frac{|e^y - 1|}{e^y} \leqslant |y|$. Przeto jest: $|e^x - 1| \leqslant |y| = |x|$. Dla $x < 0$ mamy tedy $|e^x - 1| \leqslant |x|$.

Ale jest $|x| \leqslant |x| . e^{|x|}$, bo $e^{|x|} > e^0 = 1$. Widzimy stąd, że nierówność (4 bis) jest prawdziwą i dla ujemnych liczb (x). Nierówność (4 bis) jest więc ważną dla wszystkich liczb rzeczywistych (x). Załóżmy, że $|x| \leqslant 1$, wtedy $e^{|x|} \leqslant e$ i nierówność (4 bis) przyjmie postać: (5) $|e^x - 1| \leqslant |x| . e$ dla $|x| \leqslant 1$. Obierzmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$, a liczbę $\delta > 0$ tak, aby było $\delta\, e \leqslant \varepsilon$ i zarazem $\delta \leqslant 1$. Gdy przyjmiemy $|x| < \delta$, to $|e^x - 1| \leqslant |x| . e < \delta e \leqslant \varepsilon$ czyli będzie $|e^x - 1| < \varepsilon$. To wykazuje, że $e^x \to 1 = e^0$, gdy $x \to 0$, a więc zarazem, że funkcja (e^x) jest ciągłą dla liczby $x = 0$. Teraz wykażemy, że funkcja (e^x) jest ciągłą w każdym punkcie (c). Otóż zauważmy, że jest:

(6) $|e^x - e^c| = e^c . |e^{x-c} - 1| = e^c . |e^{x-c} - 1| \leqslant e^c . |x - c| . e$, gdy skorzystamy z nierówności (5) przy założeniu, że $|x - c| \leqslant 1$. Biorąc dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, obierzmy liczbę δ tak, aby spełniała związki $0 < \delta \leqslant 1$, $\delta e^{c+1} < \varepsilon$. Następnie biorąc liczbę x dowolnie byle było $|x - c| < \delta$, otrzymujemy z nierówności (6); $|e^x - e^c| \leqslant$ $\leqslant |x - c| . e^{c+1} < \delta e^{c+1} \leqslant \varepsilon$, co wykazuje, że funkcja (e^x) jest ciągłą dla $x = c$.

6) Ze względu na późniejsze wywody zbadamy granicę bardzo specjalnego wyrażenia $\frac{e^x - 1}{x}$ dla $x \to 0$. Udowodnimy następujące twierdzenie: *jeżeli* $x \to 0$, *to funkcja* $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$.

Dowód. Załóżmy najpierw $x > 0$, wtedy z nierówności (3) otrzymujemy: $\frac{e^x - 1}{x} > 1$ stąd (7) $\frac{e^x - 1}{x} - 1 > 0$. Nierówność (4) dla liczb $x > 0$ daje: (8) $0 \leqslant \frac{e^x - 1}{x} \leqslant e^x$, stąd i z nierówności (7) i (4) mamy: $0 < \frac{e^x - 1}{x} - 1 \leqslant e^x - 1 \leqslant x e^x$, co też dla $x > 0$ napiszemy pod postacią: (9) $0 < \left|\frac{e^x - 1}{x} - 1\right| \leqslant |x| . e^{|x|}$. Załóżmy teraz, że jest $x < 0$ i połóżmy $x = -y$, więc jest $y > 0$. Przeto nierówności (7) i (8) możemy napisać, zastępując liczbę x liczbą y, pod postacią: (10) $1 < \frac{e^y - 1}{y} \leqslant e^y$. Otóż mamy: $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{-y} - 1}{-y} = \frac{1 - e^{-y}}{y} = \frac{e^y - 1}{y e^y}$.
Dzieląc nierówność (10) przez liczbę e^y (dodatnią), otrzymujemy: $e^{-y} < \frac{e^y - 1}{y e^y} = \frac{e^x - 1}{x} \leqslant 1$ czyli $e^x < \frac{e^x - 1}{x} \leqslant 1$, skąd $e^x - 1 <$

$<\dfrac{e^x-1}{x}-1\leqslant 0$, więc na mocy reguł porównywanie ze sobą liczb niedodatnich (mniejsza posiada bezwzględną wartość większą!) otrzymuje się: $\left|\dfrac{e^x-1}{x}-1\right|<|e^x-1|\leqslant|x|.e^{|x|}$. A więc i dla ujemnych liczb (x) jest nierówność (9) prawdziwą. Dokończenie rozumowania jest identyczne z poprzedniem pod 5).

7) Obok funkcji wykładniczej e^x można rozważać funkcję a^x, gdzie jest a liczbą dodatnią. Jednakowoż z łatwością możemy tę funkcję wyrazić przy pomocy poprzedniej. Oznaczmy bowiem przez b liczbę $ln a$, to jest $a=e^b$ i przeto $a^x=e^{bx}=e^{xlna}$ i tem samem sprawa badania uproszczona.

Uwaga. Że jest $\lim\dfrac{e^x-1}{x}=1$, możemy wykazać w inny jeszcze sposób. Niech N oznacza liczbę naturalną, co najmniej równą liczbie 2 i o własności $0<|x|\leqslant N$. Otóż jest:

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}=1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}x+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}x^2+\ldots\ldots+$$

$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}x^{n-1},\text{ stąd }\left|\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-1}{x}-1\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|x|}{2!}+\frac{|x^2|}{3!}+\ldots+\frac{|x|^{n-1}}{n!}.$$ Załóżmy, że $n\geqslant N+1$. Otóż $\dfrac{|x|}{2!}+$

$$+\frac{|x|^2}{3!}+\ldots+\frac{|x|^{n-1}}{n!}=\frac{|x|}{2!}+\frac{|x|^2}{3!}+\ldots+\frac{|x|^{N-1}}{N!}+\frac{|x|^N}{(N+1)!}+\ldots+$$

$$+\frac{|x|^{n-1}}{n!}=\frac{|x|}{2!}+\frac{|x|^2}{3!}+\ldots+\frac{|x|^{N-1}}{N!}\left[1+\frac{|x|}{N+1}+\frac{|x|^2}{(N+1)(N+2)}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{|x|^{n-N}}{(N+1)\ldots n}\right]\leqslant\frac{|x|}{2!}+\ldots+\frac{|x|^{N-1}}{N!}\left[1+\frac{|x|}{N+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{|x|^2}{(N+1)^2}+\ldots+\frac{|x|^{n-N}}{(N+1)^{n-N}}\right]=\frac{|x|}{2!}+\frac{|x|^2}{3!}+\ldots+\frac{|x|^{N-1}}{N!}.$$

$$\frac{1-\left|\frac{x}{N+1}\right|^{n-N+1}}{1-\left|\frac{x}{N+1}\right|}<\frac{|x|}{2!}+\ldots+\frac{|x|^{N-1}}{N!}\cdot\frac{1}{1-\frac{|x|}{N+1}}.$$

Mamy więc: $0 \leqslant \left| \dfrac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{x} - 1 \right| \leqslant \dfrac{|x|}{2!} + \dfrac{|x|^2}{3!} + \ldots + \dfrac{|x|^{N-1}}{N!} \cdot$

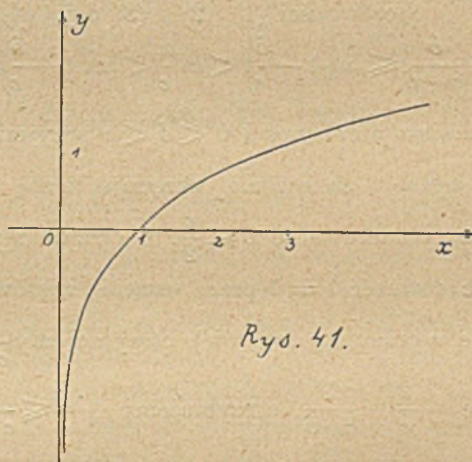
$\cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{|x|}{N+1}}$. Biorąc granicę dla $n \to \infty$, otrzymujemy stąd $0 \leqslant$

$\leqslant \left| \dfrac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leqslant \dfrac{|x|}{2!} + \dfrac{|x|^2}{3!} + \ldots + \dfrac{|x|^{N-1}}{N!} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{|x|}{N+1}}$. Weźmy pod uwagę trzy funkcje, określone w sąsiedztwie punktu $x=0$ w sposób następujący: $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = \left| \dfrac{e^x - 1}{x} - 1 \right|$, $f_3(x) = \dfrac{|x|}{2!} +$ $+ \dfrac{|x|^2}{3!} + \ldots + \dfrac{|x|^{N-1}}{N!} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{|x|}{N+1}}$. Jest $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f_3(x) = 0$ przeto istnieje $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x)$ i jest $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = 0$ (zob. § 16) czyli jest: $\lim\limits_{x \to 0} \left| \dfrac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0$, przeto też istnieje $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 0$, skąd wynika, że (tw. § 8), że $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

§ 27. Funkcja logarytmiczna.

Funkcją logarytmiczną nazywamy (zwykle) funkcję $y = ln\,x$. Ona jest określoną jedynie dla $x > 0$; nadto jest $ln\,1 = 0$, $ln\,x < 0$ dla liczb x o własności $0 < x < 1$, zaś $ln\,x > 0$ dla liczb $x > 1$, jak zaraz wykażemy. Funkcja ta jest bowiem rosnącą; załóżmy, że liczby rzeczywiste x', x'' spełniają związek $x' > x'' > 0$. Połóżmy $y' = ln\,x'$, $y'' = ln\,x''$; stąd $e^{y'} = x'$, $e^{y''} = x''$; skoro jest $x' > x''$, więc $e^{y'} > e^{y''}$, przeto $y' > y''$, co mieliśmy wykazać. Skoro więc $ln\,1 = 0$, tedy $ln\,x < ln\,1 = 0$, gdy jest $0 < x < 1$; gdy zaś $x > 1$, to będzie $ln\,x >$ $> ln\,1 = 0$. Z równości $y = ln\,x$ otrzymujemy $e^y = x$; gdy więc liczba x, będąc dodatnią, rośnie nieograniczenie, to też zmienna y rośnie nieograniczenie. Gdyby bowiem tak nie było, gdyby więc zmienna y rosła w sposób ograniczony czyli gdyby istniała liczba a taka, że jest $y \leqslant a$, to mielibyśmy $x = e^y \leqslant e^a$ wbrew założeniu, że zmienna x może być dowolnie wielką. Widzimy tedy, że funkcja $ln\,x$ rośnie nieograniczenie ze wzrostem zmiennej x. Niech będzie $x_0 > 0$ i niech $y_0 = lnx_0$; obok tego weźmy pod uwagę punkty $x = 2x_0, 4x_0, 8x_0, \ldots, 2^n x_0, \ldots$ to $y = lnx_0 + ln2$, $lnx_0 + 2ln2$, $lnx_0 + 3ln2, \ldots$ $lnx_0 + nln2 \ldots$ czyli wartość logarytmu wzrasta powolniej niż zmienna niezależna, gdy liczba n jest dość wielką.

Załóżmy, że zmienna x, będąc dodatnią, zbliża się do wartości $x = 0$. Wtedy $y = lnx$ jest ujemne i maleje, wykażemy, że maleje nieograniczenie t. zn. gdy a jest dowolną liczbą ujemną, to istnieje liczba $x > 0$ i taka, że jest $lnx < a$. Gdyby bowiem tak nie było, to istniałaby liczba (a) taka, że dla wszystkich liczb $x > 0$ byłoby $a \leqslant lnx$ skąd $e^a \leqslant x$, kiedy zmienną (x) możemy dobrać tak bliską zera, jak się nam podoba, a więc i mniejszą od liczby (e^a). Stąd można wywnioskować, jak wygląda wykres funkcji $y = lnx$. Oczywiście niejeden szczegół rysunku trzeba później usprawiedliwić (rys. 41). Oś y będzie asymptotą krzywej, która w punkcie $(1,0)$ przecina oś x i leży całkowicie w pierwszej i czwartej ćwiartce.



Rys. 41.

Aby wykazać, że funkcja lnx jest funcją ciągłą w każdym punkcie $x = c$, gdzie $c > 0$, weźmy różnicę $lnx - lnc = ln\frac{x}{c}$. Otóż połóżmy $|x - c| < \delta$, skąd kolejno wynika $-\delta < x - c < \delta$, $c - \delta < x < c + \delta$, $1 - \frac{\delta}{c} < \frac{x}{c} < 1 + \frac{\delta}{c}$, przyczem niech będzie $\delta < c$, aby było $1 - \frac{\delta}{c} > 0$.

Tedy z własności, że funkcja lnx jest funkcją rosnącą, wynika, iż (1) $ln\left(1 - \frac{\delta}{c}\right) < ln\frac{x}{c} < ln\left(1 + \frac{\delta}{c}\right)$. Aby tę nierówność módz dalej wyzyskać, znajdziemy nierówności dla wyrażeń $ln(1-x)$ i $ln(1+x)$, gdzie jest $x > 0$.

Otóż nierówność (3) § 26 opiewa: $e^u \geqslant 1 + u$ dla $u \geqslant 0$.

Położmy $x \geqslant 0$ i $y = ln(1+x)$, to $e^y = 1 + x$, rzyczem jest $y \geqslant 0$, przeto wolno przyjąć $u = y$. Mamy więc $e^y \geqslant 1 + y$ czyli $1 + x \geqslant 1 + ln(1+x)$, skąd (2) $0 \leqslant ln(1+x) \leqslant x$ dla $x \geqslant 0$.

Załóżmy, że $0 \leqslant x < 1$ i połóżmy $y = ln(1-x)$, skąd $e^y = 1 - x$, przyczem jest $y \leqslant 0$, więc wolno przyjąć $u = -y$. Mamy więc $e^{-y} \geqslant 1 - y$ czyli $\frac{1}{1-x} \geqslant 1 - ln(1-x)$, skąd wynika, że $ln(1-x) \geqslant 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$. Otrzymaliśmy tedy (3) $ln(1-x) \geqslant$ $\geqslant -\frac{x}{1-x}$ dla $0 \leqslant x < 1$.

Nierówności (1), (2) i (3) dają (4):

$$-\frac{\delta}{c-\delta} \leqslant ln\left(1-\frac{\delta}{c}\right) < ln\frac{x}{c} < ln\left(1+\frac{\delta}{c}\right) \leqslant \frac{\delta}{c},\text{ gdyż jest } 0 < \frac{\delta}{c} < 1.$$

Zamiast nierówności $0 < \delta < c$ przyjmijmy nierówność $0 < \delta \leqslant \frac{c}{2}$, co wolno i co bardziej skrępuje liczbę δ. Od równości $c = c$ odejmijmy nierówność $\delta \leqslant \frac{c}{2}$, to otrzymamy $c - \delta \geqslant c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$; dzieląc równość $1 = 1$ przez ostatnią nierówność (co wolno, bo wszystkie wyrazy są dodatnie), otrzymujemy $\frac{1}{c-\delta} \leqslant \frac{2}{c}$; dodając obustronnie $-\frac{2}{c} - \frac{1}{c-\delta}$, otrzymujemy $-\frac{2}{c} \leqslant \frac{-1}{c-\delta}$, a mnożąc przez dodatnią liczbę δ, uzyskujemy ostatecznie nierówność $-\frac{2\delta}{c} \leqslant -\frac{\delta}{c-\delta}$.

Wskutek tego związek (4) daje:

$$-\frac{2\delta}{c} \leqslant -\frac{\delta}{c-\delta} \leqslant ln\left(1-\frac{\delta}{c}\right) < ln\frac{x}{c} < ln\left(1+\frac{\delta}{c}\right) \leqslant \frac{\delta}{c} < \frac{2\delta}{c},$$

z czego wnioskujemy, że $-\frac{2\delta}{c} < ln\frac{x}{c} < \frac{2\delta}{c}$ albo, że $|lnx - lnc|$ $< \frac{2\delta}{c}$. Do danej liczby $\varepsilon > 0$ obierzemy teraz liczbę δ tak, aby spełniała nierówności $0 < \delta \leqslant \frac{c}{2}$, $\delta < \frac{\varepsilon c}{2}$. Wtedy, biorąc liczbę x dowolnie, byle było $|x - c| < \delta$, otrzymamy $|lnx - lnc| < \frac{2\delta}{c} <$ $< \frac{2}{c} \cdot \frac{\varepsilon c}{2} = \varepsilon$, a to właśnie wykazuje, że funkcja lnx jest ciągłą.

Przy innej sposobności jeszcze raz wykażemy, że funkcja lnx jest ciągłą, będzie to wniosek z ogólnego twierdzenia, a więc przedstawiającego znaczny interes naukowy. Wtedy poznamy też dalsze własności funkcji lnx (§ 41). Oprócz funkcji lnx można rozważać ogólniejszą funkcję $y = \log_a x$, gdzie a, jako zasada logarytmów, jest liczbą większą od zera i różną od jedności. Z łatwością sprowadzimy ją jednak do poprzednio rozważanej funkcji. Wiemy bowiem z § 25, że $\log_a x = \frac{lnx}{lna}$, przeto jest $y = \frac{lnx}{lna}$, przez co badanie funkcji logarytmicznej ogólnej redukuje się do badania funkcji lnx, czynnik bowiem $\frac{1}{lna}$ jest wielkością stałą.

Rozdział V. Krańce i kresy zbiorów liczbowych.

§ 28. Zbiory liczbowe i ich krańce (zob. Wstęp, ustęp A).

Wiadomo nam ze Wstępu, że tak samo, jak mówimy o zbiorze przedmiotów, zbiorze stołów, sprzętów dowolnych, czy też ludzi, możemy mówić o zbiorze liczb, które nazywać będziemy elementami zbioru. Mówimy o zbiorze liczb naturalnych lub zbiorze ułamków albo o zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych od 1 do 10 i t. d. Zbiór liczbowy ma pewne określenie t. zn. dany jest warunek, który ma spełniać liczba na to, aby należała do zbioru.

Warunek ten może być tego rodzaju, że nie istnieje żadna liczba, którąby go mogła spełniać. N. p. weźmy pod uwagę zbiór (Z) liczb x spełniających równocześnie dwa warunki $x < 0$ i $x > 2$; takich liczb nie ma. Otóż wygodnie jest mówić, że zbiór (Z) jest pustym zamiast mówić, że nie ma takiej a takiej liczby albo że warunek na elementy zbioru (Z) zawiera sprzeczność ze stanowiska matematyki.

Zbiorem niepustym nazwiemy zbiór, który zawiera przynajmniej jeden element.

Zbiór może być skończony albo nieskończony.

Zbiór Z_1 liczb rzeczywistych (x) o warunku $x^2 = 1$ jest skończony, bo zawiera tylko dwie liczby $(+1)$ i (-1).

Zbiór pusty też uważamy za skończony, zawiera zero elementów.

Zbiór (Z_2) liczb (x) spełniających równanie $\sin x = 0$ jest nieskończonym, bo zawiera wszystkie liczby, będące wielokrotnościami liczby π, a więc liczby 0, $+\pi$, $-\pi$, $+2\pi$, -2π, $+3\pi$, -3π,...

Nieskończonym jest też zbiór (Z_3) liczb x spełniających warunek $|x| \leqq 1$.

Takim jest także zbiór (Z_4) wszystkich liczb wymiernych, a więc całych i ułamkowych.

Weźmy jeszcze pod uwagę zbiór (Z_5) liczb jednocyfrowych (w układzie dziesiątkowym), a więc liczby 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Zbiór Z_5 jest skończonym.

Zbiór (Z_5), podobnie jak każdy inny zbiór skończony i niepusty, posiada pewną liczbę najmniejszą (tu 0) oraz największą (tu 9). Najmniejszą liczbę danego zbioru nazywamy minimum zbioru, największą zaś maximum zbioru.

Każdy zbiór skończony i niepusty posiada maximum i minimum.

Napiszmy teraz kilka zbiorów liczbowych nieskończonych:

(I) zb. wszystkich l. całych: ... —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3....

(II) zb. wszystkich l. naturalnych: 1, 2, 3, 4.............

(III) zb. wszystkich l. całych ujemnych: —1, —2, —3, —4...

(IV) zbiór wszystkich liczb x, spełniających nierówność: $0 \leqq x \leqq 1$.

Zbiory I—IV są nieskończone; zbiór (I) nie posiada ani maximum ani minimum; zbiór (II) posiada min. ($= 1$), a nie ma maximum; zbiór (III) ma maximum (-1), nie ma zaś minimum; wreszcie zbiór (IV) posiada tak maximum (1), jak i minimum (0).

O zbiorach nieskończonych nie możemy przeto ogólnie powiedzieć, czy mają lub nie mają liczb największej względnie najmniejszej.

Zarazem z tych rozważań widać, że jedne zbiory liczbowe są ograniczone u góry lub u dołu, albo i u góry i u dołu. Zdefiniujemy te własności zbiorów w sposób następujący: 1) Zbiór (Z) liczb nazywamy ograniczonym u góry, jeśli istnieje taka liczba a, iż żadna liczba zbioru Z jej nie przekracza. Wtedy liczbę a nazywamy górnym krańcem zbioru Z. 2) Zbiór Z liczb jest ograniczonym u dołu, jeśli istnieje liczba b taka, iż żadna liczba zbioru Z nie jest mniejszą od liczby b, którą nazywamy dolnym krańcem zbioru Z.

Z definicji tych wynika, że, *jeżeli zbiór Z ma górny kraniec lub dolny, to ma nieskończenie wiele krańców górnych, wzgl. dolnych.* Krańce nie są więc określone jednoznacznie. N. p. zbiór skończony (Z_5) posiada górny kraniec 9, ale także *każda* liczba większa od 9 będzie jego górnym krańcem w myśl definicji 1). Podobnie dolnym krańcem tegoż zbioru będzie zarówno liczba 0, jak i *każda* liczba ujemna.

Jeżeli zbiór posiada maximum, to ma także górny kraniec, jest więc ograniczonym u góry, ale nie naodwrót; zbiór może być ograniczonym u góry, a nie mieć maximum. Weźmy n. p. pod uwagę zbiór (Z_6) liczb (x) spełniających nierówność $-1 < x < 1$. Zbiór (Z_6) jest ograniczonym u góry, za górny kraniec można przyjąć liczbę 1, mimo to nie posiada maximum; w zbiorze tym do każdej liczby zbioru znajdziemy od niej większą; niech bowiem liczba a należy do zbioru (Z_6), więc $0 < a < 1$ i przeto $1 - a > 0$; powiadamy, że liczba $b = a + \frac{1-a}{2}$ też należy do zbioru (Z_6); jest bowiem $b = \frac{a+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$; nadto jest $b > a$. Zbiór (Z_6) jest również ograniczonym u dołu i także nie posiada minimum.

§ 29. Górny i dolny kres.

Górny i dolny kraniec zbioru liczbowego były liczbami niejednoznacznie określonemi.

Załóżmy, że zbiór (Z) jest ograniczonym u góry — ma więc górny kraniec, ma przeto nieskończenie wiele górnych krańców. Z pomiędzy nich wybierzmy ten, który przez swoje własności będzie już jednoznacznie określony. A mianowicie z pomiędzy nich wybierzmy najmniejszy i nazwijmy go górnym kresem. W przypadku zbioru Z_6 z § 28 górnym krańcem będzie każda liczba niemniejsza od liczby 1, a więc liczba 1 i każda od niej większa. Otóż najmniejszą z nich jest liczba 1 i ta będzie górnym kresem zbioru (Z_6). Określimy górny kres w sposób następujący: liczba G jest górnym kresem niepustego zbioru liczbowego (X) t. zn.: 1) każda liczba x zbioru X spełnia warunek $x \leqslant G$; 2) do każdej liczby G_1, mniejszej od liczby G istnieje (choćby jedna) liczba x' zbioru X taka, że $G_1 < x'$. Własność (1) wyraża, że liczba G jest górnym krańcem zbioru, własność (2), że jest najmniejszym z górnych krańców zbioru.

Górny kres jest już liczbą jednoznacznie określoną przez swe własności czyli: *jeżeli zbiór X posiada górny kres, to tylko jeden.*

Udowodnimy to twierdzenie dowodem niewprost. Przypuśćmy więc, że oprócz liczby G jest także liczba Γ górnym kresem zbioru X i że jest $G \neq \Gamma$, a więc np. $\Gamma < G$. Na mocy własności 2) istnieje liczba x' w zbiorze X, która jest większą od liczby Γ, mniejszej od górnego kresu G; jest więc $\Gamma < x'$ co według własności 1) orzeka, że Γ nie jest górnym kresem zbioru X, a więc sprzeczność widoczna i twierdzenie tem samem udowodnione.

Udowodnimy następujące twierdzenie: *jeżeli zbiór liczbowy X jest ograniczonym u góry, to posiada górny kres.*

Dowód. Wszystkie liczby rzeczywiste podzielmy na dwa zbiory (Z_1) i (Z_2). Do zbioru (Z_2) zaliczmy każdą liczbę rzeczywistą, która jest większą od wszystkich liczb zbioru X; do zbioru (Z_1) zaliczmy każdą liczbę rzeczywistą, która do zbioru (Z_2) nie należy. Tem samem zbiór (Z_1) określony jest negatywnie; możemy go zdefiniować także w ten sposób: do zbioru (Z_1) należy każda liczba rzeczywista, która albo należy do zbioru X albo jest mniejszą choćby od jednego elementu zbioru X.

Zbiory (Z_1) i (Z_2) mają następujące własności: 1) Zbiór Z_1 jest nieskończony; jeżeli bowiem liczba x_0 należy do zbioru X, to ona, jak i każda od niej mniejsza należy do zbioru (Z_1). 2) Zbiór Z_2 jest też nieskończonym. Jeżeli bowiem a jest jednym z górnych krańców zbioru X (a górny kraniec istnieje, bo, według założenia, zbiór X jest ograniczonym u góry), to każda liczba większa od liczby a będzie większą od wszystkich liczb zbioru X i tem samem należy do zbioru Z_2. 3) Jeżeli liczba r_1 należy do zbioru (Z_1), to każda od niej mniejsza należy też do zbioru (Z_1); jeżeli zaś liczba (r_2) należy do zbioru (Z_2), to każda od niej większa należy także do zbioru Z_2. Z tego wynika zaraz własność: 4) każda liczba zbioru Z_1 jest mniejszą od każdej liczby zbioru (Z_2). Wskutek własności 1), 2) i 4) istnieje liczba separacyjna (m) taka, że każda od niej mniejsza należy do zbioru (Z_1), zaś każda od niej większa należy do zbioru (Z_2), liczba zaś m albo należy do zbioru (Z_1) albo do zbioru (Z_2). Rozważmy oba przypadki po kolei. Niech liczba (m) należy do zbioru Z_1, a więc istnieje liczba (x') w zbiorze X taka, że jest $m \leqq x'$. Otóż nie może być $m < x'$, bo wtedy powstałaby następująca sprzeczność: liczba x', jako należąca do zbioru X, należałaby też do zbioru (Z_1), ale, skoro $m < x'$ czyli liczba x' jest większą od liczby separacyjnej (m), to musiałaby należeć do zbioru (Z_2). Liczba (x') należałaby więc równocześnie do obu zbiorów kiedy oba zbiory tak określiliśmy, że nie mają elementu wspólnego. Jest więc $m = x'$, a inne elementy zbioru X są mniejsze od liczby (m), liczba (m) jest więc maximum zbioru X i tem samem jest górnym kresem zbioru X, co jest widoczne.

Załóżmy teraz, że liczba (m) należy do zbioru (Z_2), przeto jest większą od wszystkich liczb zbioru (X). Weźmy liczbę (m') dowolnie, byle mniejszą od liczby separacyjnej (m); liczba (m') należeć będzie do zbioru (Z_1), przeto istnieć będzie liczba (x') w zbiorze (X) taka, że jest $m' \leqq x'$. Otóż twierdzimy, że znajdzie się liczba x'' w zbiorze X także taka, iż będzie $m' < x''$; gdyby bowiem takiej nie było, to liczba (m') byłaby największą w zbiorze (X) i zarazem liczbą separacyjną i należącą do zbioru (Z_1) wbrew założeniu, że liczba separacyjna należy do zbioru (Z_2). Istnieje przeto liczba x'' w zbiorze X taka, że jest $m' < x''$. Z tego widzimy, że i w tym przypadku liczba (m) posiada obie własności górnego kresu.

Podobnie określimy dolny kres zbioru liczbowego, jako największy z dolnych krańców danego zbioru. A mianowicie:

I) Liczba b zowie się dolnym krańcem zbioru liczbowego, jeżeli każda liczba x tego zbioru spełnia nierówność $b \leqq x$. Dolny kraniec nie jest jednoznacznie określony t. zn. nie jedna, ale nieskończenie wiele liczb otrzymać może nazwę dolnego krańca danego zbioru.

II) Z pomiędzy dolnych krańców zbioru wybierzemy największy i nazwiemy go dolnym kresem zbioru. Jest to liczba g, która ma następujące dwie własności: 1) każda liczba x zbioru spełnia warunek $g \leqq x$; 2) do każdej liczby g', większej od liczby g, istnieje co najmniej jedna liczba x' zbioru taka, że jest $x' < g'$. Pierwsza własność wyraża, że liczba g jest dolnym krańcem zbioru, druga, że jest największym z dolnych krańców zbioru.

Czytelnik z łatwością udowodni, że *każdy zbiór ma co najwyżej jeden dolny kres czyli dolny kres jest jednoznacznie określony.*

Jeżeli zbiór ma minimum, to ono jest zarazem dolnym kresem zbioru; (jest to twierdzenie nieodwracalne).

III) Podobnież czytelnik udowodni następujące twierdzenie: *każdy zbiór liczbowy, ograniczony u dołu, posiada dolny kres.*

Czytelnik dobrze zrozumie dowód, jeżeli szczegóły dowodu przerobi na przykładzie np. zbioru (Z_6). Dla tego zbioru niech czytelnik określi zbiory (Z_1) i (Z_2) z dowodu i wyznaczy ich liczbę separacyjną itd.

Tw. Jeżeli zbiór liczbowy X *ma dolny kres* d *i górny kres* G, *to jest* $d \leqslant G$. Dowód, jako zbyt łatwy, pomijamy.

Tw. Jeżeli zbiór niepusty X_1 *jest częścią zbioru* X *i jeżeli oba mają górne (dolne) kresy* G *wzgl.* G_1 (d *wzgl.* d_1), *to jest* $G_1 \leqslant G$ $(d \leqslant d_1)$. Dowód niewprost zostawiamy czytelnikowi; przyczem dodajemy, że zbiór X_1 jest częścią zbioru X, jeżeli każdy element zbioru X_1 należy też do zbioru X.

§ 29 a. Warunek istnienia granicy funkcji.

Okażemy następujące twierdzenie: *warunek konieczny i wystarczający na to, by funkcja* $f(x)$ *miała granicę dla* $x \to c$ *polega na tem, by do każdej liczby dodatniej* ε *istniała liczba dodatnia* δ *taka, że dla wszystkich liczb* x', x'' *spełniających nierówności* $0 < |x' - c| < \delta$, $0 < |x'' - c| < \delta$ *sprawdzała się nierówność* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Warunek ten jest koniecznym t. zn. jeżeli funkcja $f(x)$ ma granicę dla $x \to c$, to warunek ten jest spełniony. Rzeczywiście, niech $g = \lim\limits_{x \to c} f(x)$, tedy do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że, gdy $0 < |x' - c| < \delta$, $0 < |x'' - c| < \delta$, to także $|f(x') - g| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'') - g| < \frac{\varepsilon}{2}$, stąd $|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - g) + (g - f(x''))| \leqslant |f(x') - g| + |g - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, co było do wykazania.

Warunek powyższy jest zarazem wystarczającym t. zn., jeżeli on jest spełnionym, to funkcja $f(x)$ ma granicę dla $x \to c$. Dowód tej części jest dłuższym i wymaga większej ilości twierdzeń, poprzednio poznanych.

Zastosujmy założenie dla $\varepsilon = 1$; istnieje tedy liczba $\delta_0 > 0$ i taka, że nierówności $0 < |x' - c| < \delta_0$, $0 < |x'' - c| < \delta_0$ pociągają za sobą nierówność $|f(x') - f(x'')| < 1$. Otóż ostatnia nierówność daje: $-1 < f(x') - f(x'') < 1$, skąd wynika, że (I) $f(x'') - 1 < f(x') < f(x'') + 1$. Otóż liczbę x'' obierzmy niezmienną, zaś liczbę x' uważajmy za dowolną, byle było $0 < |x' - c| < \delta_0$. Nierówność (I) wyraża wtedy, że funkcja $f(x)$ przyjmuje [o ile jest $0 < |x - c| < \delta_0$] wartości, tworzące zbiór ograniczony u góry i u dołu.

Jeżeli więc na zmienną x przyjmiemy dowolną wartość, byle $0 < |x - c| < \delta \leqslant \delta_0$, to wartości $f(x)$ tworzą zbiór zależny od liczby δ, ale ograniczony u góry i u dołu. Taki zbiór ma więc górny kres G_δ i dolny kres d_δ. Te kresy zależą od wyboru liczby δ i dlatego użyliśmy znaków G_δ i d_δ, a nie znaków G i d.

Jeżeli jest $0 < \delta' < \delta'' \leqslant \delta_0$, to liczby x, spełniające nierówność $0 < |x - c| < \delta'$ tworzą zbiór, będący częścią zbioru liczb x, spełniających nierówność $0 < |x - c| < \delta''$.

Jeżeli więc $0 < \delta' < \delta'' \leqslant \delta_0$, to będzie: $d_{\delta''} \leqslant d_{\delta'} \leqslant G_{\delta'} \leqslant G_{\delta''}$; tedy $d_{\delta''} \leqslant G_{\delta'}$, $d_{\delta'} \leqslant G_{\delta''}$; stale jest więc górny kres nie mniejszym od dowolnego dolnego kresu dla naszych warunków. Dla każdej liczby δ o warunku $0 < \delta \leqslant \delta_0$ wyznaczymy górny kres G_δ. I jest $G_\delta \geqslant d_{\delta_0}$; przeto zbiór liczb G_δ jest ograniczonym u dołu, ma więc ten zbiór dolny kres, który oznaczymy literą Γ (będzie to więc dolny kres górnych kresów). Podobnie dla każdej liczby δ o własności $0 < \delta \leqslant \delta_0$ określiliśmy dolny kres d_δ. I jest $d_\delta \leqslant G_{\delta_0}$; przeto zbiór liczb d_δ jest ograniczozym u góry, posiada więc górny kres, który oznaczymy literą Δ (jest to więc górny kres dolnych kresów).

Okażemy, że jest $\Delta = \Gamma$; udowodnimy to niewprost. Albo jest $\Delta = \Gamma$ albo $\Delta < \Gamma$ albo $\Gamma < \Delta$. Ostatnie dwie ewentualności prowadzą do sprzeczności, jak to zaraz wykażemy. Załóżmy bowiem, że jest $\Gamma < \Delta$; tedy z pojęcia dolnego kresu wynika, że istnieje liczba δ' dodatnia, nie większa od δ_0 i taka, że $\Gamma \leqslant G_{\delta'} < \Delta$. (§ 29). Skoro $G_{\delta'} < \Delta$, tedy istnieje liczba δ'' dodatnia, nie większa od liczby δ_0 i taka, że $G_{\delta'} < d_{\delta''} \leqslant \Delta$; byłoby więc $G_{\delta'} < d_{\delta''}$, co, jak wiemy, być nie może. Nierówność $\Gamma < \Delta$ należy więc odrzucić.

Ale także nierówność $\Delta < \Gamma$ odrzucimy na podstawie założenia o funkcji $f(x)$.

Załóżmy bowiem, że jest $\Delta < \Gamma$. Tedy $d_\delta \leqslant \Delta < \Gamma \leqslant G_\delta$ dla każdej liczby $\delta > 0$, $\delta \leqslant \delta_0$. Przeto $G_\delta - d_\delta \geqslant \Gamma - \Delta > 0$. Otóż właśnie wykażemy, że różnicę $G_\delta - d_\delta$ przez odpowiedni wybór liczby δ można uczynić dowolnie małą, a więc też mniejszą od stałej różnicy $\Gamma - \Delta$!

Rzeczywiście, do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ (którą można przyjąć nie większą od liczby δ_0) i taka, że nierówności $0 < |x' - c| < \delta$, $0 < |x'' - c| < \delta$ pociągają za sobą nierówność: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, skąd (II) $-\varepsilon < f(x') - f(x'') < +\varepsilon$.

Dla tej liczby δ utwórzmy kresy G_δ i d_δ. Weźmy dowolną liczbę dodatnią η; tedy $d_\delta < d_\delta + \eta$, $G_\delta - \eta < G_\delta$. Z określenia górnego i dolnego kresu wynika, że znajdą się liczby x_1 i x_2 o własności $0 < |x_1 - c| < \delta$, $0 < |x_2 - c| < \delta$ i zarazem takie, że $d_\delta \leqslant f(x_1) < d_\delta + \eta$, $G_\delta - \eta < f(x_2) \leqslant G_\delta$. Od ostatniej nierówności odejmijmy nierówność $d_\delta + \eta > f(x_1) \geqslant d_\delta$, a otrzymamy: $G_\delta - d_\delta - 2\eta < f(x_2) - f(x_1) \leqslant G_\delta - d_\delta$.......(III). Nierówności II (kładąc x_1, x_2 zamiast x', x'') i III zestawmy w następującą:

$$G_\delta - d_\delta - 2\eta < f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon, \text{ co daje } G_\delta - d_\delta < 2\eta + \varepsilon \ldots (\mathrm{IV}).$$

Ta ostatnia nierówność jest prawdziwą dla każdej liczby $\eta > 0$. Otóż być musi $G_\delta - d_\delta \leqslant \varepsilon$. Gdyby było $G_\delta - d_\delta > \varepsilon$, to możnaby dobrać $\eta > 0$ i tak, by jeszcze było $G_\delta - d_\delta > 2\eta + \varepsilon$, co jest jednak niezgodne z nierównością (IV). Jest więc $0 \leqslant G_\delta - d_\delta \leqslant \varepsilon$. Ponieważ ma być $G_\delta - d_\delta \geqslant \Gamma - \Delta$, więc $\varepsilon \geqslant \Gamma - \Delta$, przeto liczba ε nie jest dowolną wbrew widoczności. Nie może więc być $\Delta < \Gamma$. Jest więc $\Delta = \Gamma$. Wykażemy, że właśnie wspólna wartość liczb Δ, Γ jest granicą funkcji $f(x)$ dla $x \to c$.

W tym celu weźmy dodatnią liczbę ε, pozatem dowolnie; będzie $\Delta - \varepsilon < \Delta = \Gamma < \Gamma + \varepsilon$. Na mocy własności dolnego i górnego kresu istnieć będą liczby dodatnie δ_1, δ_2 takie, że: $\Delta - \varepsilon < d_{\delta_1} \leqslant \Delta = \Gamma \leqslant G_{\delta_2} < \Gamma + \varepsilon$; oznaczmy przez $\delta = \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$, to $\delta > 0$; nadto $d_{\delta_1} \leqslant d_\delta \leqslant G_\delta \leqslant G_{\delta_1}$; więc będzie $\Delta - \varepsilon < d_\delta \leqslant G_\delta < \Gamma + \varepsilon$; o ile więc teraz będzie $0 < |x - c| < \delta$, to wartość $f(x)$ da się zamknąć w nierówność $d_\delta \leqslant f(x) \leqslant G_\delta$; mamy więc ostatecznie: $\Delta - \varepsilon < f(x) < \Gamma + \varepsilon$, gdy $0 < |x - c| < \delta$. Jeżeli przez g oznaczymy wspólną wartość liczb Γ, Δ, to $g - \varepsilon < f(x) < g + \varepsilon$, skąd $-\varepsilon < f(x) - g < +\varepsilon$ i przeto także $|f(x) - g| < \varepsilon$, gdy tylko jest $0 < |x - c| < \delta$. A to właśnie wykazuje, że funkcja $f(x)$ ma granicę i równą liczbie $g = \Gamma = \Delta$.

Twierdzenie o warunku koniecznym i wystarczającym istnienia granicy funkcji $f(x)$ w punkcie $x = c$, odgrywa wtedy rolę, gdy nie chodzi nam o wartość granicy, ale jedynie o sam fakt istnienia granicy.

Uwaga. Pojęcie granicy z § 6 można uogólnić w ten sposób, że się mówi o granicy lewostronnej punktu $x \to c$, względnie prawostronnej tegoż punktu. Staje się to koniecznem w teorji całek niewłaściwych (§ 77) i tam będą te pojęcia podane.

Wtedy też powyższe twierdzenie o warunku koniecznym i wystarczającym istnienia granicy przyjmie dwie postacie zależnie od tego, czy się będzie odnosiło do granicy lewostronnej, czy też do granicy prawostronnej.

Rozdział VI. Funkcje ciągłe w całym przedziale.

§ 30. Określenie funkcji ciągłej w całym przedziale.

Zajmować się będziemy funkcjami jednej zmiennej niezależnej. W dotychczasowym przebiegu naszych rozważań określiliśmy naprzód pojęcie funkcji; następnie, omówiwszy pojęcie granicy funkcji, zajęliśmy się tylko funkcjami, mającemi granicę. W dalszym ciągu zacieśniliśmy zakres omawianych funkcji jedynie na funkcje ciągłe. Obecnie zajmiemy się omówieniem ciągłości funkcji i kilkoma własnościami funkcji ciągłych w danym przedziale.

Używaliśmy już poprzednio wyrażenia: „przedział", nie podając definicji tego pojęcia. Pochodzenie tej nazwy jest geometryczne; przez „przedział (a, b)", rozumiemy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x o własności $a \leqq x \leqq b$ przyczem jest $a < b$. Liczby, tworzące ten przedział, możemy podzielić na dwa zbiory: pierwszy zawierać będzie tylko liczby (a) i (b) t. zw. liczbę początkową i końcową przedziału, drugi zawierać będzie wszystkie liczby większe od liczby a i zarazem mniejsze od liczby b t. zw. liczby wewnętrzne przedziału (a, b) albo położone między liczbami a i b. Określimy teraz ciągłość funkcji w całym przedziale (a, b) w sposób następujący:

Funkcja $f(x)$ jest ciągłą w całym przedziale (a, b), jeśli: 1) w punkcie początkowym (a) jest ciągłą z prawej strony tego punktu czyli: do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, iż dla wszystkich liczb x przedziału (a, b) i spełniających nierówność $0 \leqq x - a < \delta$, jest $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$; 2) jest ciągłą w każdym punkcie między liczbami a i b, w znaczeniu już nam znanem z § 7; 3) w punkcie końcowym b jest ciągłą z lewej strony tego punktu, t. zn. do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że, gdy jest $0 \leqq b - x < \delta$ i liczba x należy do przedziału (a, b), to $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$. Czyli krócej: funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), jeżeli w każdym punkcie x_0 tego przedziału ma własność następującą: do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich liczb x, należących do przedziału

(a, b). i spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$ prawdziwą jest nierówność $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Uw. 1. Liczba δ może zależeć od wyboru liczby ε i liczby x_0.

2. Mówić będziemy o funkcji ciągłej w przedziale w znaczeniu funkcji ciągłej w całym przedziale.

3. Czytelnik z łatwością spostrzeże, że zastrzeżenie o liczbach „należących do przedziału (a, b)" w definicji czyni poprzednie odróżnienie trzech przypadków zbędnem.

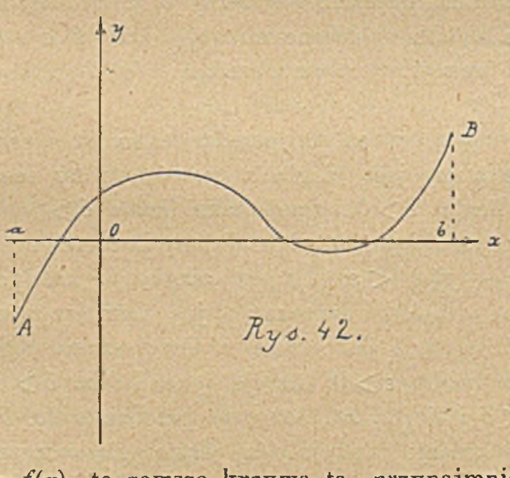
Na mocy tej definicji wynikają z § 17 (str. 51) następujące twierdzenia: *jeżeli funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są ciągłe w całym przedziale (a, b), to funkcje* 1) $f_1(x) + f_2(x)$, 2) $f_1(x) - f_2(x)$, 3) $f_1(x) . f(x)$ *są również ciągłe w całym przedziale.*

Dowód tych twierdzeń, jako zbyt łatwy, pomijamy.

W dalszym ciągu poznamy kilka funkcji ciągłych w przedziale (a, b), w szczególności widocznem jest następujące twierdzenie: *jeżeli funkcja $f(x)$ jest stałą w przedziale (a, b), to jest ciągłą w całym przedziale (a, b).*

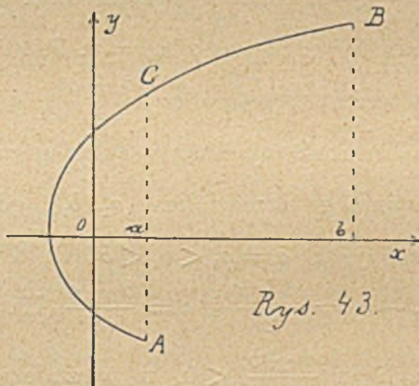
§ 31. Własności funkcji ciągłych w przedziale.

I) Weźmy jednowartościową funkcję $y = f(x)$, której obrazem geom. niech będzie krzywa AB z rys. 42 i załóżmy o niej, że jest ciągłą w całym przedziale (a, b), a w punktach: początkowym i końcowym tego przedziału przybiera wartości, różniące się między sobą znakiem, np. niech będzie $f(a) < 0$, zaś $f(b) > 0$. Wobec takiego założenia widocznem jest z rysunku, że, w jakikolwiek sposób narysowalibyśmy ciągłą krzywą $y = f(x)$, to zawsze krzywa ta, przynajmniej raz, przetnie oś odciętych (na rys. 42 przecina ją trzy razy). Inaczej mówiąc, funkcja $y = f(x)$ w przedziale (a, b) przynajmniej raz przyjmuje wartość 0.



Rys. 42.

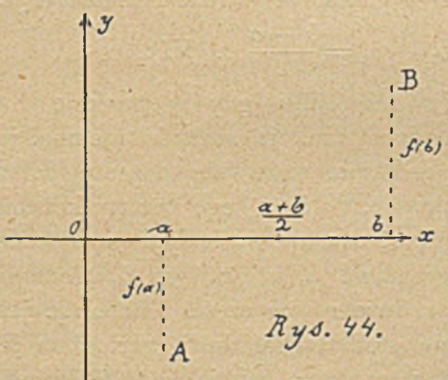
Gdybyśmy bowiem chcieli połączyć punkty A i B krzywą ciągłą, nie przecinającą osi x w przedziale (a, b), jak to uwidacznia rys. 43, to musielibyśmy narysować wykres funkcji, niespełniającej wszystkich warunków założenia, gdyż będzie w punkcie (a) dwuwartościową: wartościom takiej funkcji w punkcie a odpowiada zarówno odcinek $\overline{aA}$, jak i $\overline{aC}$.



Rys. 43.

Warunek założenia, iż wartości funkcji w punktach a i b mają przeciwne znaki, możemy wyrazić w ten sposób, że iloczyn $f(a).f(b)$ jest ujemny; albowiem jedynie iloczyn dwóch liczb różnoznakowych jest mniejszy od zera.

Teraz możemy sformułować wynik naszych rozważań w następującem twierdzeniu: *Jeśli $y = f(x)$ jest funkcją ciągłą w całym przedziale (a, b) i jeśli jest $f(a).f(b) < 0$, to istnieje przynajmniej jeden punkt x_0, który ma własności następujące:* 1) $a < x_0 < b$ *(czyli punkt x_0 leży wewnątrz przedziału (a, b));* 2) $f(x_0) = 0$.



Rys. 44.

Dowód. Weźmy pod uwagę przedział (a, b), przyczem $a < b$, który to przedział przedstawiony jest na rys. 44, jako odcinek $\overline{ab}$ na osi x. Niech $y = f(x)$ będzie funkcją ciągłą w całym tym przedziale i niech w punkcie (a) przybiera wartość $f(a) < 0$, w punkcie (b) zaś wartość $f(b) > 0$.

Mamy udowodnić, że istnieje przynajmniej jeden punkt x_0 przedziału (a, b) taki, że jest $f(x_0) = 0$. W tym celu weźmy pod uwagę środek odcinka ab czyli punkt o współrzędnych $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ i wartość funkcji w tym punkcie. Mogą tu zachodzić 3 ewentualności: albo jest: 1) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ albo 2) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ albo 3) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. Jeśli zachodzi przypadek 2), to, przyjmując $x_0 = \frac{a+b}{2}$, widzimy bezpośrednio, że twierdzenie jest tem samem prawdziwe, bo jest $f(x_0) = 0$. Jeżeli jednak zachodzi przypadek 1), to weźmy przedział $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, w którego lewym końcu funkcja ma wartość ujemną, w prawym zaś dodatnią. Dla krótkości nazwijmy go przedziałem (a_1, b_1), gdzie $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$. Wówczas jest: $a = a_1 < b_1 < b$ (I). Utwórzmy różnicę $b_1 - a_1$; jest: $b_1 - a_1 = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$ (II). Jeśli zaś zachodzi przypadek 3) czyli $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, to weźmiemy pod uwagę odcinek prawy, który znów nazwiemy przedziałem (a_1, b_1), przyczem $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$. Wtedy zachodzi nierówność: $a < a_1 < b_1 = b$, (III) oraz jest $b_1 - a_1 = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$ (IV).

Z nierówności (I) i (III) wynika, że w każdym razie jest $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b \ldots$ (V), oraz $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} \ldots$ (VI).

Znaczy to, iż zarówno w przypadku, gdy w punkcie środkowym przedziału (a, b) ma dana funkcja wartość ujemną, jak i wtedy, gdy wartość ta jest dodatnia, to zawsze możemy dobrać odcinek, będący połową odcinka ab, taki, że jego punkty końcowe są a_1 i b_1, przyczem $a_1 \geqslant a$, $b_1 \leqslant b$, nadto w lewym jego końcu a_1 ma funkcja $f(x)$ wartość ujemną, a w prawym b_1 dodatnią. Ten odcinek dzielimy znów na dwie równe części i badamy, jaką wartość ma funkcja w punkcie środkowym. Jeśli wartość ta jest zerem, to, wziąwszy ten punkt za punkt x_0, mielibyśmy twierdzenie udowodnione; jeśli zaś funkcja ma w tym punkcie wartość dodatnią względnie ujemną, to bierzemy znów odcinek lewy wzgl. prawy i postępując tak samo, jak przedtem z całym przedziałem (a, b), znajdziemy punkty, odpowiadające liczbom a_2 i b_2, które spełniają związki: (VII) $a_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant b_1$; (VIII) $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}$; nadto $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$.

Z odcinkiem a_2, b_2 postępujemy znów tak samo, t. j. jeśli w punkcie, połowiącym ten odcinek, funkcja nie przybiera wartości równej 0, to tworzymy liczby a_3 i b_3, takie, iż jest:

(IX) $$a_2 \leqslant a_3 < b_3 \leqslant b_2, \text{ oraz } b_3 - a_3 = \frac{b - a}{2^3},$$

(X) $$f(a_3) < 0,\ f(b_3) > 0 \text{ i t. d.}$$

Proceder ten prowadzimy tak długo, dopóki nie znajdziemy punktu, w którym fnnkcja staje się zerem i wówczas twierdzenie jest udowodnione. Może się jednak zdarzyć, że tym sposobem na taki punkt nie natrafimy. Wówczas otrzymane w toku tego postępowania punkty $a, a_1, a_2, a_3 \ldots$ (XI) utworzą nieskończony ciąg niemalejący, gdyż jest $a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \ldots\ldots$ Każda z tych liczb jest nadto mniejszą od liczby b, zatem ciąg (XI) ma granicę, którą oznaczmy przez g. Podobnie liczby $b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \ldots\ldots$ utworzą nieskończony ciąg: $b, b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots$ (XII) nierosnący i ograniczony u dołu; ciąg (XII) ma więc granicę, którą oznaczymy przez g'. Z równości (VI, VIII, X) możemy wnioskować, że jest $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \ldots$ (XIII), co zresztą należy wykazać metodą indukcji zupełnej. Gdy n rośnie nieograniczenie, to $\frac{b - a}{2^n} \to 0$, a więc także $(b_n - a_n) \to 0 \ldots$ (XIV). Utwórzmy ciąg, którego każdy wyraz będzie różnicą $b_n - a_n$ odpowiednich wyrazów ciągu (XII i XI); granicą jego będzie różnica granic tych postępów czyli będzie $(b_n - a_n) \to g' - g \ldots$ (XV). Ale poprzednio [(XIV)] wykazaliśmy, że $(b_n - a_n) \to 0$, ponieważ zaś jeden i ten sam ciąg nie może mieć dwóch granic różnych, wynika stąd, iż $g' - g = 0$ czyli $g' = g$. Punkt g leżący w przedziale (a, b), jest zatem wspólną granicą ciągów XI i XII. Do tego punktu zbliżają się z „lewej“ strony punkty a_n, w których funkcja $f(x)$ ma wartość ujemną, z „prawej“ zaś strony punkty b_n, w których ta funkcja jest dodatnią. Zatem w samym punkcie g musi być wartość funkcji równa liczbie 0. Gdyby bowiem było $f(g) > 0$, to z ciągłości funkcji $f(x)$ w punkcie g wynikałoby, że można zamknąć liczbę g w przedział $(g - \delta,\ g + \delta)$ taki, że w przedziale tym jest $f(x) > 0$; nie może więc w nim leżeć żadna z liczb a_n i przeto g nie może być

być granicą liczb (a_n). Podobne rozumowanie przeprowadzi czytelnik przy założeniu $f(g) < 0$. Oba więc założenia prowadzą do sprzeczności. Jest więc $f(g) = 0$. Kładąc $x_0 = g$, mamy $f(x_0) = 0$. Tem samem wykazaliśmy nasze twierdzenie, gdyż zarazem widoczne, że jest $x_0 \neq a$. $x_0 \neq b$. Gdyby było $f(a) > 0$, zaś $f(b) < 0$, postępowalibyśmy zupełnie podobnie, względnie moglibyśmy wziąć pod uwagę funkcję $\varphi(x) = -f(x)$ i do niej stosować dopieroco udowodnione twierdzenie.

II) Przy pomocy tego twierdzenia udowodnimy inne, ogólniejsze, które opiewa:

Jeżeli jednowartościowa funkcja $y = f(x)$ jest ciągłą w całym przedziale (a, b) i w punktach (a) i (b) przyjmuje wartości różne czyli jeśli $f(a) \neq f(b)$, to wtedy funkcja ta musi przyjąć w tym przedziale każdą wartość pośrednią między wartościami $f(a)$ i $f(b)$ przynajmniej raz.

(Celem geometrycznego uzmysłowienia sobie tego twierdzenia, weźmy pod uwagę jakąkolwiek funkcję, ciągłą w przedziale (a, b), która niech w punkcie a przyjmuje wartość $f(a) = 3$, w punkcie b zaś: $f(b) = 7$. Jeżeli, wyrysowawszy obraz geom. tej funkcji, poprowadzimy następnie prostą np. $y = 4$ (tu $3 < 4 < 7$), to prosta ta przynajmniej raz przetnie krzywą, będącą obrazem geometrycznym funkcji).

Dowód. O funkcji $y = f(x)$ zakładamy, że jest to funkcja jednowartościowa, ciągła w całym przedziale (a, b), oraz przyjmujemy, że $f(a) \neq f(b)$. Udowodnimy powyższe twierdzenie, jeśli zdołamy wykazać, że istnieje liczba x_0 wewnątrz przedziału (a, b) taka, iż jest $f(x_0) = l$, gdzie l jest liczbą dowolnie wybraną, byle zawartą między liczbami $f(a)$ i $f(b)$, a więc większą od mniejszej z liczb $f(a)$ i $f(b)$ i zarazem mniejszą od większej z nich czyli $l >$ min. $[f(a), f(b)]$, oraz $l <$ max. $[f(a), f(b)]$.

Dla dowodu utwórzmy nową funkcję $\varphi(x)$ taką, iż $\varphi(x) = f(x) - l$ czyli nowa funkcja jest różnicą funkcji danej $f(x)$ i stałej l. Funkcja $\varphi(x)$ będzie również jednowartościową i ciągłą w przedziale (a, b). Weźmy jej wartość w punktach końcowych tego przedziału. Będzie: $\varphi(a) = f(a) - l$, $\varphi(b) = f(b) - l$.

Z założenia wynika, że jedna z liczb $\varphi(a)$ i $\varphi(b)$ musi być ujemna, a druga dodatnia czyli ich iloczyn: $\varphi(a) . \varphi(b) < 0$. Funkcja $\varphi(x)$ spełnia zatem założenie, któreśmy uczynili dla poprzednio udowodnionego twierdzenia, możemy więc to tw. do funkcji $\varphi(x)$

stosować, wobec czego istnieje przynajmniej jedna liczba x_0 taka. iż jest $a < x_0 < b$, oraz $\varphi(x_0) = 0$; ale jest $\varphi(x_0) = f(x_0) - l$; jest więc: $f(x_0) - l = 0$ czyli: $f(x_0) = l$. *c. b. d. u.* — Dokładniej więc możemy dopieroco udowodnione tw. tak sformułować:

Jeśli założymy, że 1) funkcja $y = f(x)$ jest jednowartościową i ciągłą w całym przedziale (a, b); 2) $f(a) \neq f(b)$, 3) liczba l spełnia nierówność:

$$min\,[f(a), f(b)] < l < max\,[f(a), f(b)];$$

wtedy istnieje przynajmniej jeden punkt x_0, dla którego prawdziwe są związki: $a < x_0 < b$, oraz: $f(x_0) = l$.

Uwaga. Założenie $f(a) \neq f(b)$ jest konieczne, gdyż inaczej nie istniałaby liczba l i twierdzenie stałoby się iluzorycznem.

Zastosujmy poznane twierdzenie do funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Wartości funkcji w punktach końcowych przedziału są (-1). wzgl. $(+1)$, a więc różne względem siebie, nadto funkcja $y = \sin x$ jest jednowartościową i ciągłą w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Można więc powyżej udowodnione twierdzenie do niej stosować. Jakąkolwiek zatem weźmiemy wartość na y, między liczbami (-1) i $(+1)$, to zawsze należeć do niej będzie pewna liczba x taka, że $\sin x = y$ czyli traktując rzecz geometrycznie, prosta prostopadła do osi (y), wykreślona w odległości mniej niż 1 od początku współrzędnych przetnie krzywą $y = \sin x$ przynajmniej raz; albo inaczej: równanie $\sin x = y$, skoro jest $-1 < y < +1$, posiada na pewne pierwiastek na x w przedziale od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$. Ażeby udowodnić, że tylko jeden pierwiastek na x istnieje, trzeba tylko wykazać, że funkcja ta jest rosnącą w tym przedziale, co będziemy mogli później z łatwością uczynić. (zob. § 48, B).

III) *Załóżmy, że funkcja $y = f(x)$ jest ciągłą w całym przedziale (a, b) i oznaczmy przez Z zbiór wszystkich wartości, przyjmowanych przez funkcję $f(x)$ w przedziale (a, b). Wykażemy, że zbiór (Z) jest ograniczonym u góry i u dołu.*

[Weźmy np. funkcję $y = \frac{1}{x}$, ona jest ciągłą w przedziale $(0, 1)$ prócz w punkcie $x = 0$. Jej wartości, które przyjmuje w przedziale od 0 do 1 (z pominięciem $x = 0$), nie tworzą zbioru ograniczonego u góry. Owszem funkcja $\frac{1}{x}$ może przyjąć każdą wartość dodatnią, gdy liczba x, będąc dodatnią, będzie dość bliską zera.]

Udowodnimy nasze twierdzenie niewprost. Załóżmy więc chwilowo, że zbiór (Z) nie jest ograniczonym u góry i podzielmy przedział (a, b) na dwie części $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$. Przynajmniej w jednym z nich wartości funkcji $f(x)$ tworzyć muszą zbiór nieograniczony u góry. Gdyby bowiem tak nie było, to stąd wynikałoby, że w całym przedziale (a, b) jest zbiór (Z) ograniczonym u góry wbrew chwilowemu założeniu. Oznaczmy przez (a_1, b_1) ten z dwóch przedziałów $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, w którym zbiór wartości funkcji $f(x)$ jest nieograniczonym u góry [1]). Będzie więc albo $a = a_1 < b_1 = \frac{a+b}{2} < b$ albo $a < a_1 = \frac{a+b}{2} < b_1 = b$ czyli w każdym razie będzie $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b$ i nadto $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Z przedziałem (a_1, b_1) postąpimy dalej tak samo. Otrzymamy nieskończony ciąg przedziałów (a, b), (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \ldots . (a_n, b_n) \ldots .$; w każdym z nich zbiór wartości funkcji $f(x)$ jest nieograniczonym u góry. Jest $a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots . \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots . \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b$. Jak pod I (§ 31), wykazuje się, że istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i że są sobie równe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Wspólną ich wartość oznaczmy literą x_0. Jest $a \leqslant x_0 \leqslant b$. W punkcie x_0 jest funkcja $f(x)$ ciągłą, tedy do każdej liczby $\varepsilon > 0$, a więc też do liczby $\varepsilon = 1$ istnieje liczba, $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich liczb x, należących do przedziału (a, b) i spełniających nierówność $|x - x_0| < \delta$ jest też $|f(x) - f(x_0)| < 1$ skąd $-1 < f(x) - f(x_0) < 1$, przeto także $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$, co dowodzi, że np. w przedziale $\left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right)$ jest fuukcja $f(x)$ ograniczoną u góry (i u dołu). Ale $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$, gdy $n \to \infty$, nadto jest $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$. Istnieje więc liczba naturalna N taka, iż $x_0 - a_N < \frac{\delta}{2}$, $b_N - x_0 < \frac{\delta}{2}$, co wykazuje, że przedział

[1]) Gdyby w obu przedziałach był zbiór Z nieograniczonym u góry, to wybieramy np. „lewy" t. zn. przedział $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$.

(a_N, b_N) jest częścią przedziału $\left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right)$. I sprzeczność widoczna, bo w całym przedziale $\left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right)$ wartości funkcji $f(x)$ mają tworzyć zbiór ograniczony u góry (i u dołu), zaś w przedziale (a_N, b_N), który jest częścią poprzedniego, ma być ów zbiór nieograniczonym u góry!

Chwilowe założenie było więc niesłuszne. Zbiór (Z) jest więc ograniczonym u góry. Podobnie udowodni czytelnik, że zbiór (Z) jest też ograniczonym u dołu.

Twierdzenie tedy w całości udowodnione.

Oznaczmy więc przez M górny kres (str. 117), przez m dolny kres liczb zbioru Z. Przeto, gdy jest $a \leqslant x \leqslant b$, jest też $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Liczbę $\omega = M - m$ zowie się oscylacją funkcji. Jest $\omega \geqslant 0$.

Gdy jest $\omega = 0$, to jest $M = m = f(x)$ i funkcja jest w przedziale (a, b) stałą.

IV) Zapytajmy dalej, czy istnieje w przedziale (a, b) punkt x' taki, iż $f(x') = M$ i punkt x'' taki, że $f(x'') = m$. Gdyby tak było, to funkcja przyjmowałaby swój górny kres, jako wartość, podobnie i dolny kres. Górny kres M byłby wtedy maximum wartości funkcji $f(x)$, dolny kres m byłby minimum wartości, które funkcja $f(x)$ przybiera w przedziale (a, b). Liczby M i m należałyby też do zbioru (Z), o którym mowa pod III).

Gdy funkcja nie jest ciągłą w całym przedziale, to tak być nie musi. Weźmy bowiem przedział $(0, 1)$ i funkcję $y = x - C(x)$ z § 2 (przykład 4). Górnym kresem wartości y jest liczba 1, ale nie jest maximum, nie istnieje bowiem liczba x przedziału $(0, 1)$ taka, by było $x - C(x) = 1$; [a więc to równanie nie ma pierwiastka w przedziale $(0, 1)$].

Wykażemy twierdzenie następujące: *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w całym przedziale (a, b), to przyjmuje górny kres swych wartości jako wartość i podobnie dolny kres swych wartości jako jedną ze swych wartości.*

Dowód przeprowadzimy, jak pod I i III. Oznaczmy przez M górny kres wartości, jakie funkcja przyjmuje w przedziale (a, b). Podzielmy ten przedział na dwie połowy: $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$. Oznaczmy przez M' górny kres wartości, które funkcja przyjmuje w pierwszej połowie. przez M'' górny kres wartości. które funkcja przyjmuje w drugiej połowie. Nie może być: $M' > M$ ani też $M'' > M$, jak łatwo widać; nie może być także: $M' < M$ i zarazem $M'' < M$. Musi więc być albo $M' = M$ albo $M'' = M$ albo jedno i drugie. Oznaczmy przez (a_1, b_1) pierwszą połowę przedziału, jeżeli $M' = M$, gdyby zaś tak nie było. to musiałoby być $M'' = M$ i wtedy przez (a_1, b_1) oznaczmy drugą połowę przedziału. Będzie tedy $a \leqslant \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b$ i zarazem $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Postępujemy w ten sposób dalej. Otrzymamy nieskończony ciąg przedziałów (a, b), (a_1, b_1), $a_2, b_2), \ldots (a_n, b_n) \ldots$; w każdym z nich górny kres wartości. które funkcja przyjmuje, wynosi M. Znów się wykazuje, że $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim b_n$ i oznaczając przez x_0 wspólną wartość tych granic, mamy $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$. Otóż nie może być $f(x_0) > M$, bo M jest górnym kresem wartości funkcji. Jest więc $f(x_0) \leqslant M$. Wykażemy, że jest właśnie $f(x_0) = M$. Dla dowodu niewprost przypuśćmy, że tak nie jest, a więc, że jest $f(x_0) < M$; w takim razie istnieje liczba M_0 (i to nieskończenie wiele takich) o własności $f(x_0) < M_0 < M$. Ponieważ w punkcie x_0 jest funkcja ciągłą, tedy do każdej liczby $\varepsilon > 0$, a więc np. do liczby $\varepsilon = M_0 - f(x_0)$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdej liczby x, należącej do przedziału (a, b) i spełniającej nierówność $|x - x_0| < \delta$, będzie: $|f(x) - f(x_0)| < M_0 - f(x_0)$, skąd $-(M_0 - f(x_0)) < f(x) - f(x_0) < M_0 - f(x_0)$; dodając zaś $f(x_0)$, otrzymujemy $-M_0 + 2f(x_0) < f(x) < M_0$. Jest więc $f(x) < M_0 < M$ tem bardziej w przedziale $\left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right)$, przeto w tym przedziale górny kres wartości funkcji jest co najwyżej równy M_0. Jednakowoż jest $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$, tedy istnieje liczba naturalna N taka, że przedział (a_N, b_N) jest już częścią przedziału $\left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right)$. Stąd sprzeczność widoczna; w przedziale $\left(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}\right)$ górny kres wartości funkcji jest mniejszy od M. zaś w przedziale (a_N, b_N), a więc w części tamtego przedziału górny kres jest równy liczbie M. Nie może tedy być $f(x_0) < M$. Jest więc $f(x_0) = M$. Podobnie się dowodzi, że istnieje liczba x_1 w przedziale (a, b) taka, iż jest $f(x_1) = m$.

Z rezultatu powyższego na podstawie rozważań pod II, wynika wniosek następujący: *jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w całym prze-*

dziale (a, b) *i jeżeli* M *oznacza jej maximum,* m *jej minimum w przedziale* (a, b) *i jeżeli* $m \neq M$, *to funkcja* $f(x)$ *przynajmniej raz przyjmuje w przedziale* (a, b) *każdą wartość* l *o własności* $m < l < M$. Funkcja $f(x)$ przyjmuje więc każdą wartość przedziału liczbowego (m, M).

Zajmiemy się w dalszym ciągu dokładniej własnościami maximum M, minimum m i oscylacji $\omega = M - m$, które określimy jako funkcje zmiennej x. Niech będzie dana funkcja $y = f(x)$ w przedziale (a, b) i ciągła w tym przedziale. Niech x oznacza liczbę o własności $a < x \leqq b$ i niech $M(x)$, $m(x)$ oznaczają maximum wzgl. minimum funkcji $f(x)$ w przedziale (a, x), zaś $\omega(x) = M(x) - m(x)$. W ten sposób otrzymuje się trzy funkcje określone w przedziale (a, b), po wyłączeniu punktu $x = a$; dlatego też dołączamy, że jest $M(a) = m(a) = f(a)$, $\omega(a) = M(a) - m(a) = 0$. Uzyskaliśmy więc trzy funkcje określone obecnie w całym przedziale (a, b).

Przykład. Rozważmy funkcję $\cos x$ i przedział $(0, 2\pi)$. Widoczne, że jest: 1) $M(o) = m(o) = 1$, $\omega(o) = 0$; 2) jest $M(x) = 1$, o ile $0 \leqq x \leqq 2\pi$; 3) jest $m(x) = \cos x$, o ile jest $0 \leqq x \leqq \pi$; 4) jest $m(x) = -1$, gdy jest $\pi \leqq x \leqq 2\pi$. Wykres funkcji $M(x)$, $m(x)$, $\omega(x)$ zostawiamy czytelnikowi, jak i określenie tych funkcji dla funkcji $\sin x$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Udowodnimy następujące twierdzenie: *funkcja* $M(x)$ *jest funkcją niemalejącą, zaś funkcja* $m(x)$ *nierosnącą w przedziale* (a, b). Niech będą x', x'' dwiema liczbami o własności $a \leqq x' < x'' \leqq b$. Porównajmy liczbę $M(x')$ z największą wartością M, jaką funkcją $f(x)$ przyjmuje tylko w przedziale (x', x''). Albo jest $M(x') \leqq M$ albo jest $M(x') > M$. Gdy jest $M(x') < M$, to będzie $M(x'') = M > M(x')$.; gdy jest $M(x') = M$, to $M(x'') = M(x')$. Jeżeli jest wreszcie $M(x') > M$, to $M(x'') = M(x')$. W każdym więc razie jest $M(x') \leqq M(x'')$. Podobnie jest $m(x') \geqq m(x'')$, skąd wynika, że jest $\omega(x') \leqq \omega(x'')$.

Udowodnimy w dalszym ciągu, że: *jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest ciągłą w całym przedziale* (a, b), *to dla niej utworzone funkcje* $M(x)$, $m(x)$, $\omega(x)$ *są także ciągłemi funkcjami w całym przedziale* (a, b).

Dowód. Załóżmy, że x_0 jest liczbą przedziału (a, b); wobec tego może być albo $x_0 = a$ albo $a < x_0 < b$ albo $x_0 = b$. Dowód przeprowadzimy w drugim przypadku, zostawiając czytelnikowi pozostałe dwa przypadki, jako łatwiejsze do załatwienia.

Niech więc będzie $a < x_0 < b$ i $\varepsilon > 0$. zresztą dowolną liczbą. Tedy istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jest $a \leqq x_0 - \delta$, $x_0 + \delta \leqq b$ i gdy jest $|x - x_0| < \delta$, to jest $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Weźmy przedział (x_1, x_2), gdzie jest $x_1 = x_0 - \frac{\delta}{2}$; $x_2 = x_0 + \frac{\delta}{2}$ i niech ξ oznacza dowolną liczbę tego przedziału. Będzie $|f(\xi) - f(x_0)| < \varepsilon$. $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$, skąd $f(\xi) < f(x_0) + \varepsilon$, $f(x_0) < f(x_1) + \varepsilon$, przeto $f(\xi) < f(x_1) + 2\varepsilon$. Tedy $M(x_2) < f(x_1) + 2\varepsilon$. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że jest: $M(x_1) \leqq M(x_0) \leqq M(x_2)$, $M(x_1) \leqq M(\xi) \leqq M(x_2)$, więc $|M(\xi) - M(x_0)| \leqq M(x_2) - M(x_1)$, skąd wynika, że tem bardziej będzie $|M(\xi) - M(x_0)| < f(x_1) + 2\varepsilon - M(x_1)$; ale jest $f(x_1) \leqq M(x_1)$, więc $f(x_1) - M(x_1) \leqq 0$, przeto $|M(\xi) - M(x_0)| < 2\varepsilon$. Do liczby $\varepsilon' > 0$ dobierzmy liczbę $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$, do liczby ε dobierzmy liczbę $\delta > 0$, jak to uczyniono powyżej; wtedy dla każdej liczby ξ o własności $|\xi - x_0| < \frac{\delta}{2}$ będzie $|M(\xi) - M(x_0)| < \varepsilon'$. Tem samem udowodniliśmy jedną część twierdzenia.

Podobnie wykaże czytelnik, że funkcja $m(x)$ też jest funkcją ciągłą w przedziale (a, b), zaś funkcja $\omega(x) = M(x) - m(x)$, jako różnica dwóch funkcji ciągłych, też jest funkcją ciągłą w całym przedziale (§ 30, str. 124).

V) Weźmy pod uwagę funkcję $f(x)$ ciągłą w całym przedziale (a, b). Jeżeli przedział (a_1, b_1) nie wychodzi poza przedział (a, b) t. zn. jeżeli jest $a \leqq a_1 < b_1 \leqq b$ czyli jeżeli — jak mówić będziemy — przedział (a_1, b_1) jest wyciętym z przedziału (a, b), to funkcja $f(x)$ jest także ciągłą w przedziale (a_1, b_1). Podzielmy przedział (a, b) na (n) części (równych lub nie) przez wstawienie punktów $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{n-1}$, gdzie $a < c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_{n-1} < b$; przez to przedział (a, b) rozpadnie się na (n) częściowych przedziałów (a, c_1), $(c_1, c_2), \ldots (c_{n-1}, b)$. W każdym z nich funkcja $f(x)$ jest ciągłą, więc w każdym z nich ma pewne maximum i pewne minimum i pewną oscylację. Niech $M_1, m_1, \omega_1 = M_1 - m_1$; M_2, m_2, ω_2; ......; M_n, m_n, ω_n oznaczają maximum, minimum, wzgl. oscylację funkcji $f(x)$ w pierwszym, drugim,.. n-tym przedziale częściowym.

Udowodnimy następujące twierdzenie: *do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją liczba naturalna (n) i liczby $c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$ o własności $a < c_1 <$*

$< c_2 < \ldots < c_{n-1} < b$ *i takie, że w każdym z przedziałów częściowych* (a, c_1) $(c_1, c_2), \ldots, (c_{n-1}\, b)$ *oscylacja funkcji* $f(x)$ *jest mniejszą od liczby* ε.

Dowód. Obierzmy liczbę $\varepsilon' > 0$, zresztą dowolnie. Albo jest stale $\omega(x) \leqslant \varepsilon'$, gdy jest $a \leqslant x \leqslant b$ albo tak nie jest. W pierwszym przypadku kładziemy $c_1 = b$ i $n = 1$. W drugim przypadku istnieje liczba x_0 przedziału (a, b) taka, że jest $\omega(x_0) > \varepsilon'$. Ponieważ jest $\omega(a) = 0 < \varepsilon' < \omega(x_0)$ i $\omega(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale (a, b), więc na mocy tw. ustępu II obecnego paragrafu wynika, że istnieje co najmniej jeden punkt (x_1) przedziału (a, x_0), dla którego jest $\omega(x_1) = \varepsilon'$; ale takich liczb x_1, może być więcej, nawet nieskończenie wiele.

Oznaczmy przez (Z_1) zbiór wszystkich takich liczb (x_1); każda liczba tego zbioru jest mniejszą od liczby x_0; zbiór Z_1 jest więc ograniczonym u góry, ma przeto górny kres, który oznaczymy przez c_1; wykażemy, że jest $\omega(c_1) = \varepsilon'$. Gdy górny kres c_1 należy do zbioru Z_1, to ostatnia równość jest widoczną i nie wymaga dowodu. Załóżmy tedy, że liczba c_1 nie należy do zbioru Z_1, a dojdziemy natychmiast do sprzeczności. Skoro bowiem c_1 nie należy do zbioru Z_1, tedy $\omega(c_1) \neq \varepsilon'$ i ponieważ $c_1 > x_1$, więc z uwagi, że funkcja $\omega(x)$ jest niemalejącą, będzie $\varepsilon' < \omega(c_1)$. Jest więc $\omega(x_1) = \varepsilon' < \omega(c_1)$, gdzie x_1 oznacza pewną liczbę wybraną ze zbioru (Z_1). Wobec ciągłości funkcji $\omega(x)$ istnieć będzie liczba x_2 taka, że jest $x_1 < x_2 < c_1$ i $\omega(x_2) = \eta$, gdzie $\omega(x_1) < \eta < \omega(c_1)$. Skoro $\omega(x_1) = \varepsilon' < \omega(x_2)$, tedy dla wszystkich liczb x_1' ze zbioru Z_1 jest $x_1' < x_2 < c_1$ i wskutek tego liczba c_1 nie jest górnym kresem liczb zbioru Z_1, bo i liczba x_2, mniejsza od c_1, jeszcze jest górnym krańcem zbioru Z_1; doszliśmy tedy do sprzeczności. Liczba c_1 należeć więc musi do zbioru Z_1 i przeto jest $\omega(c_1) = \varepsilon'$, zaś $\omega(x) > \varepsilon'$, gdy jest $x > c_1$. Przedział (a, c_1) nazwijmy pierwszym i oscylację $\omega(c_1)$ oznaczmy przez ω_1 i będzie $\omega_1 = \varepsilon'$. Skoro jest $c_1 < b$, postępujemy z przedziałem (c_1, b) tak, jak postąpiliśmy z przedziałem (a, b). Wyznaczymy punkt c_2 taki, że jest $c_1 < c_2 \leqslant b$ i jeżeli $c_2 = b$, to oscylacja ω_2 w przedziale (c_1, c_2) spełnia związek $\omega \leqslant \varepsilon'$, jeżeli zaś jest $c_2 < b$, to $\omega_2 = \varepsilon'$, zaś oscylacja w przedziale (c_1, c), gdzie $c > c_2$, jest już większą od liczby ε'. W ten sposób postępujemy dalej i albo znajdzie się liczba naturalna n taka, że oscylacje w przedziałach $(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots (c_{n-2}, c_{n-1}), (c_{n-1}, b)$ są niewiększe od liczby ε' albo ciąg liczb $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots$ jest nieskończonym i wtedy oscylacja w każdym z przedziałów $(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots$ jest równą liczbie ε'. Wykażemy, że druga ewentualność prowadzi do sprzeczności i musi odpaść, jako niemożliwa.

Założmy więc, że ciąg liczb $c_1, c_2, c_3, \ldots$ jest nieskończonym. Otóż jest $a < c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_m < \ldots < b$. Ciąg nieskończony liczb c_i jest więc rosnącym i ograniczonym u góry, ma przeto granicę, którą oznaczymy przez $x_0 = \lim_{n \to \infty} c_n$. Jest tedy $x_0 \leqslant b$. W punkcie x_0 jest funkcja $f(x)$ ciągłą, tedy do liczby $\frac{\varepsilon'}{2} > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich liczb x, należących do przedziału (a, b) i spełniających nierówność $|x - x_0| < \delta$ jest $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon'}{2}$, skąd $f(x_0) - \frac{\varepsilon'}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon'}{2}$. Weźmy przedział $(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0)$ pod uwagę; niech m_0, M_0, ω_0, oznaczają maximum i minimum, wzgl. oscylację funkcji w tym przedziale, to będzie $f(x_0) - \frac{\varepsilon'}{2} <$ $< m_0 < f(x_0) + \frac{\varepsilon'}{2}$, $f(x_0) - \frac{\varepsilon'}{2} < M_0 < f(x_0) + \frac{\varepsilon'}{2}$, gdyż maximum i minimum są to wartości funkcji według IV). Wykonajmy odejmowanie następujące: od nierówności: $f(x_0) - \frac{\varepsilon'}{2} < M_0 < f(x_0) + \frac{\varepsilon'}{2}$ odejmijmy nierówność $f(x_0) + \frac{\varepsilon'}{2} > m_0 > f(x_0) - \frac{\varepsilon'}{2}$, a otrzymamy $-\varepsilon' < \omega_0 =$ $= M_0 - m_0 < \varepsilon'$; ponieważ zawsze $\omega_0 \geqslant 0$, więc też $0 \leqslant \omega_0 < \varepsilon'$.

Jest $c_n \to x_0$ i $c_n < x_0$. Istnieje tedy liczba naturalna N taka, że $x_0 - \frac{\delta}{2} \leqslant c_N < c_{N+1} < x_0$ czyli przedział (c_N, c_{N+1}) jest częścią przedziału $(x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0)$. W przedziale (c_N, c_{N+1}) oscylacja jest równą liczbie ε', zaś w przedziale (c_N, x_0) jest oscylacja mniejszą od liczby ε'.

Doszliśmy tedy do rezultatu sprzecznego: w przedziale (c_N, x_0) jest oscylacja ω_0 mniejszą od liczby ε', zaś w przedziale (c_N, c_{N+1}), który jest częścią tamtego, jest oscylacja równą liczbie ε', to zaś jest niemożliwe, gdyż $c_N < c_{N+1} < x_0$, a oscylacja jest funkcją niemalejącą.

Założenie więc, że ciąg liczb c_1 c_2 $c_3 \ldots$ jest nieskończonym prowadzi do sprzeczności. Tem samem twierdzenie udowodniliśmy, bo dość położyć $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Uogólnimy zaraz to twierdzenie. A mianowicie twierdzimy: *jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), to do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że oscylacja funkcji $f(x)$ w każdym przedziale, wyciętym z przedziału (a, b) o długości mniejszej od liczby δ, jest mniejszą od liczby ε.*

Długością przedziału (a', b') jest liczba $b' - a'$: ma więc być $b' - a' < \delta$.

Otóż według poprzedniego można podzielić przedział (a, b) na taką ilość przedziałów częściowych (a, c_1), (c_1, c_2), ..., (c_{n-1}, b), iż w każdym z nich oscylacja funkcji wynosi mniej niż $\frac{\varepsilon}{2}$, gdzie liczba ε jest dodatnią i naprzód dowolnie wybraną. Oznaczmy przez δ minimum długości częściowych przedziałów czyli $\delta = \text{Min}\,(c_1 - a, c_2 - c_1, c_3 - c_2, \ldots, b - c_{n-1})$. Jest $\delta > 0$. Weźmy pod uwagę dowolny przedział (a', b'), wycięty z przedziału (a, b) i o długości mniejszej od liczby δ. Wtedy albo oba jego końce (a'), (b'), a więc i przedział ...m leży w jednym z przedziałów

$$\text{(I)} \qquad (a, c_1),\ (c_1, c_2), \ldots, (c_{n-1}, b);$$

albo jeden z końców (a') leży w jednym z przedziałów, drugi koniec (b') w następującym przedziale. W pierwszym przypadku, ponieważ przedział (a', b') jest częścią jednego z przedziałów (I), więc oscylacja w przedziale (a', b') będzie też mniejszą od liczby $\frac{\varepsilon}{2}$, a więc mniejszą od liczby ε.

Rozważmy drugi przypadek. Niech będzie: $c_i < a' < c_{i+1} < b' < c_{i+2}$ czyli przedział (a', b') jest wyciętym z przedziału (c_i, c_{i+2}). Obliczmy górny kraniec oscylacji w przedziale (c_i, c_{i+2}).

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

	dla przedziału			
	(c_i, c_{i+1})	(c_{i+1}, c_{i+2})	(c_i, c_{i+2})	(a', b')
Maximum	M	M'	M''	M_0
Minimum	m	m'	m''	m_0
oscylacja	ω	ω'	ω''	ω_0

Otóż jest $\omega = M - m$, $\omega' = M' - m'$, $\omega'' = M'' - m''$, $\omega_0 = M_0 - m_0$. Nadto $M'' = \text{Max}\,(M, M')$, $m'' = \text{Min}\,(m, m')$.

Możliwe są więc następujące cztery przypadki: 1) Max (M, M')

$= M$, Min $(m, m') = m$, więc $m'' = m \leqslant m' \leqslant M' \leqslant M = M''$ i przeto $\omega'' = \omega$.

2) Max $(M, M') = M$, Min $(m, m') = m'$, więc $m'' = m' < m$, oraz $M' < M = M''$. Albo jest $m \leqslant M'$ albo $M' < m$. Mamy więc albo (2, 1) $m'' = m' < m \leqslant M' < M = M''$ albo (2, 2) $m'' = m' \leqslant M' < < m \leqslant M = M''$. W przypadku (2, 1) mamy: $\omega'' = M'' - m'' = M - - m' = M - M' + M' - m' \leqslant M - m + M' - m' = \omega + \omega'$. Przypadek (2, 2) jest niemożliwy, bo funkcja $f(x)$ nie przyjmowałaby wartości, między liczbami (M') i (m) położonych, kiedy według ustępu II musi przyjąć w przedziale (c_i, c_{i+2}) każdą wartość zawartą między liczbami (m') i (M).

3) Max $(M, M') = M'$, Min $(m, m') = m$. Jest więc $m'' = m \leqslant \leqslant m'$, $M \leqslant M' = M''$. Albo $m' \leqslant M$ albo $M < m'$. Tedy mamy albo (3, 1) $m'' = m \leqslant m' \leqslant M \leqslant M' = M''$ albo (3, 2) $m'' = m \leqslant M < m' \leqslant \leqslant M' = M''$. Ale znów przypadek (3, 2) jest niemożliwy. Zostaje do zbadania przypadek (3, 1), który daje $\omega'' = M'' - m'' = M' - - m = M' - m' + m' - m \leqslant M' - m' + M - m$ czyli $\omega'' \leqslant \omega + \omega'$.

4) Max $(M, M') = M'$, Min $(m, m') = m'$, wtedy $M'' = M'$, $m'' = m'$ i będzie $\omega'' = \omega'$.

W każdym z czterech przypadków jest $\omega'' \leqslant \omega + \omega'$. Skoro więc jest $\omega < \frac{\varepsilon}{2}$, $\omega' < \frac{\varepsilon}{2}$, tedy $\omega'' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ponieważ przedział (a', b') jest wyciętym z przedziału (c_i, c_{i+2}), więc $\omega_0 \leqslant \omega'' < \varepsilon$. Do liczby $\varepsilon > 0$ określiliśmy więc liczbę $\delta > 0$ tak, iż twierdzenie jest spełnione.

VI) Jednostajna ciągłość funkcji. Zwróćmy się do określenia ciągłości funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) (§ 31). Osobną uwagą zaznaczyliśmy, że wchodząca w definicję liczba δ zależeć m o ż e od liczby ε i od rozważanego punktu x_0. Zdamy sobie z tego sprawę najpierw geometrycznie. Weźmy pod uwagę funkcję $y = \frac{1}{x}$, określoną dla liczb $x > 0$. Jej obrazem jest gałąź hiperboli t. zw. równobocznej w pierwszej ćwiartce (rys. 44 a). Jeżeli badamy ciągłość tej funkcji w punkcie x_0, to do wybranej wartości na ε otrzymamy liczbę δ, mierzącą odcinek $\overline{AB}$, natomiast w punkcie x_0' do takiej samej wartości na ε musimy wziąć δ znacznie mniejsze. — I rachunkiem, który pomijamy, łatwo to sprawdzić.

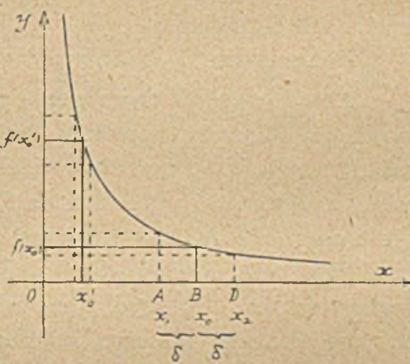
Istnieją jednak funkcje, dla których liczbę δ można obrać tak, że zależy wyłącznie od liczby ε i jest więc jednakową dla wszytkich punktów (x_0) danego przedziału (a, b), jeśli tylko nie zmieniamy wartości liczby ε. Taką funkcję nazwiemy „jednostajnie ciągłą" w przedziale i powiemy:

Funkcja jest *w danym przedziale jednostajnie ciągłą*, jeżeli można dobrać liczbę δ, o której jest mowa w definicji ciągłości funkcji (§ 31) tak, iż zależy jedynie od przyjętej liczby ε, a nie od punktów przedziału [1]).

Twierdzenie. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), to jest w tym przedziale jednostajnie ciągłą.

Dla przykładu rozważymy funkcję $y = \sin x$ w dowolnym przedziale (a, b). Jest ciągłą w każdym punkcie tego przedziału. Niech będzie $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Jest więc $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, gdy $|x - x_0| < \delta$ i gdy dobierzemy odpowiednią liczbę $\delta > 0$. Ale jest:

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right| \ldots\ldots (\mathrm{I})$$



Rys. 44 a.

Liczba $\left|\cos \frac{x + x_0}{2}\right|$ jest zawsze mniejszą lub równą liczbie 1; gdy więc napiszemy liczbę 1 zamiast tego wyrażenia, to wartość prawej strony równości I zwiększy się lub pozostanie ta sama; jest więc: $|\sin x - \sin x_0| \leqslant$

$$\leqslant 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \ldots\ldots (\mathrm{II})$$

Wiemy z § 6, że jest $\frac{\sin x}{x} < 1$ i $\frac{\sin x}{x} > \cos x$, jeżeli $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Dla takich wartości na zmienną x jest wyrażenie $\cos x$ oraz $\frac{\sin x}{x}$ dodatniem, wolno więc napisać $\cos x < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$, stąd zaś mamy po pomnożeniu strony drugiej i trzeciej przez liczbę $|x|$: $|\sin x| < |x|$

---

[1]) Zwracamy uwagę czytelnika na to, że, kiedy określonem jest zdanie „funkcja $f(x)$ jest ciągłą w punkcie x_0". to bez sensu jest zdanie: „funkcja $f(x)$ jest *jednostajnie* ciągłą w punkcie x_0". Według powyższego funkcja może być jednostajnie ciągłą jedynie *w przedziale*.

Jeżeli przyjmiemy, że liczba x może być zerem, to będzie trzeba napisać: $|\sin x| \leqslant |x|$ $\left(\text{o ile } |x| < \frac{\pi}{2}\right)$. Na mocy ostatniej nierówności możemy nierówność (II) rozszerzyć:

$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0| \ldots$ (III), o ile $\left|\frac{x-x_0}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$. Aby więc otrzymać $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, wystarczy przyjąć $|x - x_0| < \varepsilon$. Ale również ma być $\left|\frac{x-x_0}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$, czyli: $|x - x_0| < \pi$. Zatem, gdy obierzemy liczbę δ równą mniejszej z liczb (π, ε), to, jeśli zajdzie nierówność: $|x - x_0| < \delta$, to również będzie: $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$.

Otóż liczbę δ określiliśmy jako: $\delta = \min(\pi, \varepsilon)$; jest więc niezależną od liczby x_0.

Funkcja $\sin x$ jest zatem jednostajnie ciągłą w przedziale (a, b).

Aby udowodnić twierdzenie o jednostajnej ciągłości poprzednio wyrażone, obierzmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$, następnie w myśl rozważań ustępu V) wyznaczmy liczbę $\delta > 0$ tak, iż w każdym przedziale wyciętym z przedziału (a, b) i o długości mniejszej od liczby δ jest oscylacja funkcji mniejszą od liczby ε.

Następnie weźmy dwa punkty (x_0) i (x) przedziału (a, b) o własności $|x - x_0| < \delta$. Przedział *od* liczby (x_0) *do* liczby (x) ma więc długość mniejszą od liczby δ. Niech M, m, ω oznaczają maximum, minimum i oscylację funkcji $f(x)$ w tym przedziale, to $\omega < \varepsilon$. Weźmy pod uwagę różnicę $f(x) - f(x_0)$: jeżeli w niej za $f(x)$ podstawimy M, za $f(x_0)$ podstawimy m, to różnicy nie zmniejszymy. Jest więc $f(x) - f(x_0) \leqslant M - m$; jeżeli zaś w tej różnicy postąpimy odwrotnie, to ją albo pomniejszymy albo nie zmienimy czyli $f(x) - f(x_0) \geqslant m - M = -(M - m)$ czyli mamy $-(M-m) \leqslant$ $\leqslant f(x) - f(x_0) \leqslant M - m$, skąd wynika, że jest $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \omega <$ $< \varepsilon$ czyli w każdym punkcie x_0 przedziału (a, b) do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ niezależna od liczby x_0 o szukanej zresztą własności. Twierdzenie więc udowodnione.

Poznaliśmy w ten sposób szereg własności funkcji ciągłych w całym przedziale (a, b), które to własności dadzą się ująć w następujące twierdzenia:

1) *Jeśli funkcja ciągła w całym przedziale przyjmuje dwie*

wartości różne między sobą, to musi przyjąć także wszystkie wartości pośrednie między temi dwiema.

2) *Funkcja taka jest ograniczoną u dołu i u góry w przedziale.*

3) *Dolny kres jej wartości w przedziale jest zarazem minimum, a ich górny kres zaś maximum funkcji ciągłej w danym przedziale.*

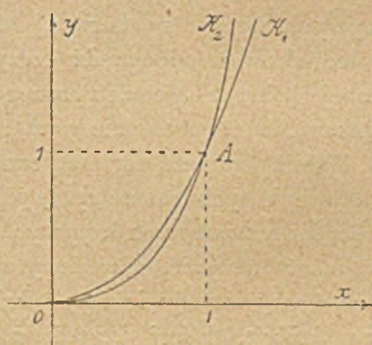
4) *Przedział, w którym dana funkcja jest ciągłą można podzielić na skończoną ilość części takich, że oscylacja funkcji w każdej z nich jest mniejszą od dowolnie małej, naprzód danej liczby* $\varepsilon > 0$ (*zob. uogólnianie tej własności w ustępie V*).

5) *Funkcja taka jest jednostajnie ciągłą w przedziale* (a, b).

Rozdział VII. Pochodne i różniczkowanie funkcji.

§ 32. Intuicyjne pojęcie pochodnej.

I). *Przykład 1.* Rozważmy dwie funkcje: 1) $y = x^2$ i 2) $y = x^3$; ich obrazy geometryczne przedstawią się w pierwszej ćwiartce jako dwie krzywe: K_1 dla pierwszej funkcji i K_2 dla drugiej (rys. 45). Łatwo przekonać się, podstawiając odpowiednie wartości, że punkty o współrzędnych (0,0) i (1,1) należeć będą do obydwu krzywych. Jest również widocznem, że punkty krzywej K_2 będą leżały poniżej punktów krzywej K_1 dla wartości na x między 0 i 1, zaś powyżej punktów krzywej K_1 dla wartości na x większych od 1.

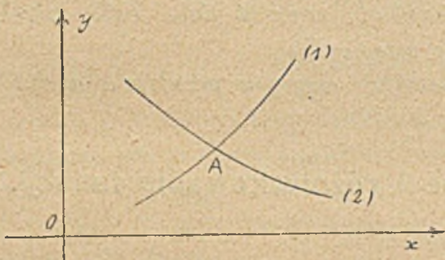


Rys. 45.

Rzut oka na rys. 45 wystarcza do spostrzeżenia, że w punkcie A (1,1) krzywa K_2 wznosi się bardziej stromo, niż K_1. Odwrotnie w punkcie O (0,0) krzywa K_1 idzie w górę bardziej stromo, niż K_2. Nasuwa się pytanie: czego wyrazem jest ta większa lub mniejsza „stromość" krzywej i jak porównywać i mierzyć to „wznoszenie się" krzywej i jego „stromość"?

Przykład 2. Niech krzywe (1) i (2) na rys. 46 będą obrazami geometrycznemi pewnych funkcyj i niech przecinają się w punkcie A. O krzywej (1) powiemy, że w punkcie A „wznosi się", o krzywej (2) mówimy, iż w tymże punkcie „opada". Nowe tu szczegóły, wymagające wyjaśnienia: „wznoszenie się" i „opadanie" krzywej w danym punkcie!

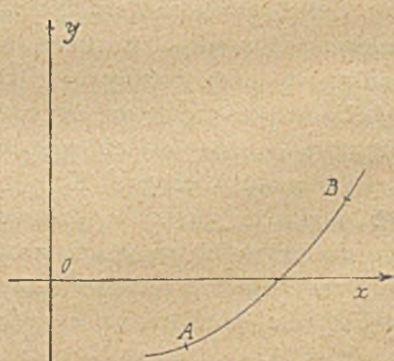
Przykład 3. Krzywa, przechodząca przez punkty A i B (rys. 47), będąca obrazem geometrycznym pewnej funkcji, wznosi się stale od strony lewej ku prawej, lecz w punkcie B wznosi się bardziej stromo, niż w punkcie A. —



Rys. 46.

Rozważane w powyższych trzech przykładach geometryczne obrazy funkcji pozwalają nam na pierwszy rzut oka odpowiedzieć na pytania takie, jak: do jakiego typu należy dana krzywa, czy w danym punkcie wznosi się, czy opada, czy wznosi się bardziej stromo, niż w innym punkcie, która z dwóch krzywych wznosi się bardziej stromo? i t. p.

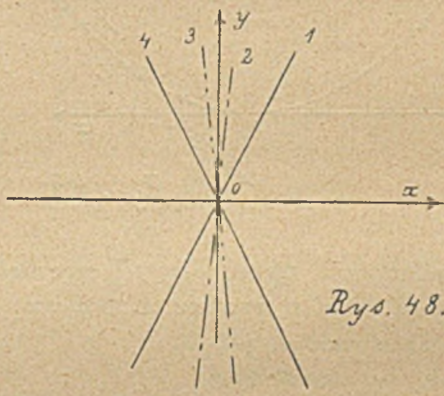
Jednakowoż odpowiedź, przy pomocy obrazu geometrycznego uzyskana, nam wcale nie wystarcza. Musimy znaleźć arytmetyczne wysłowienie tych geometrycznych własności rozważanych krzywych; aby zaś to uczynić, *pragniemy utworzyć przy pomocy danej funkcji nową funkcję, której wartość pozwalałaby nam odpowiedzieć na powyższe pytania;* czyli, jeśli mamy funkcję $y = f(x)$, to z niej wyprowadzimy nową funkcję, której wartość w danym punkcie będzie nas informowała o wznoszeniu się lub opadaniu, wzroście szybszym lub wolniejszym funkcji $y = f(x)$ w danym punkcie. Jednem słowem ta nowa funkcja ma być **miarą zmienności** funkcji danej. Taką funkcję utworzymy i nazywać ją będziemy pochodną (sc. funkcją). Wykażemy później, o ile ona rzeczywiście spełnia nadzieje w niej pokładane (§ 48 i 49).



Rys. 47.

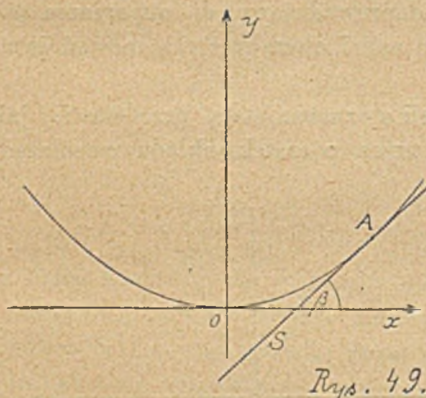
Pojęcie pochodnej wprowadzili do matematyki niemal równocześnie, niezależnie od siebie, dwaj uczeni w 17 wieku. Newton i Leibniz. Ostatni doszedł do pojęcia pochodnej na drodze czysto matematycznej, rozważając zagadnienia o stycznych do krzywej, Newtona zaś do tych samych pojęć doprowadziły badania z zakresu mechachaniki o prędkości ruchu zmiennego. — Dwa zatem problemy: 1) kreślenie stycznych do krzywej, oraz 2) obliczanie prędkości ruchu — związane są z pojęciem pochodnej. Drugiem zagadnieniem zajmiemy się w § 34. Podamy teraz wywody, które są związane z pierwszem zagadnieniem, one doprowadzą nas do utworzenia pochodnej; wywody te będą miały nadal charakter rozumowań intuicyjnych.

II). Równanie $y=ax$, jeżeli a oznacza stałą, przedstawia, jak wiadomo, prostą, przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Weźmy dwa przypadki szczególne, gdy $y=2x$ [prosta (1)] i $y=10x$ [prosta (2) na rys. 48]. Obie proste przechodzą przez początek układu i leżą w ćwiartkach I i III. Obie też wznoszą się, jeśli idziemy od lewej ku prawej stronie. Jednak prosta (2), której współczynnik przy zmiennej x jest 10, wznosi się bardziej stromo, niż prosta (1) o współczynniku przy zmiennej x, równym 2.



Rys. 48.

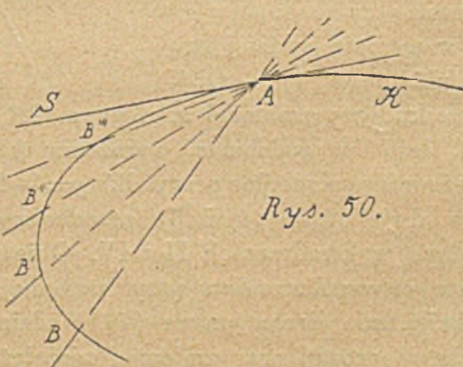
Jeśli w podobnem wyrażeniu $y=ax$ przyjmiemy $a<0$ i weźmiemy szczególne przypadki $y=-2x$ i $y=-10x$, otrzymamy znów dwie proste (4) i (3), przechodzące przez początek układu i leżące w kwadrantach II i IV. Obie opadają w punkcie 0, ale prosta o współczynniku przy zmiennej x, równym -10 opada szybciej, niż druga prosta (4). Widzimy więc, że współczynnik równania prostej przy zmiennej niezależnej daje nam możność zadecydowania, czy dana prosta opada, czy się wznosi, oraz pozwala porównywać ze sobą pod tym względem dwie dane proste. Ten współczynnik zowiemy, jak wiadomo z geometrji analitycznej, współczynnikiem kierunkowym prostej. Widzimy też, że znak dodatni współczynnika a wskazuje na wznoszenie się, ujemny zaś na opadanie prostej. Natomiast wyraz wolny równania prostej ma tu rolę podrzędną, gdyż proste: $y = 2x$, tudzież $y = 2x - 1$, będą wznosić się jednakowo stromo. Wiadomo, że współczynnik kierunrunkowy prostej równa się liczbie $\operatorname{tg}\alpha$, przyczem α oznacza kąt nachylenia prostej do osi x, kąt α ma być różny od liczb $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ i t. d. $\left(\text{różny od nieparzystych wielokrotności liczby } \frac{\pi}{2}\right)$.



Rys. 49.

Weźmy teraz pod uwagę funkcję kwadratową $y = x^2$, której obrazem geometrycznym jest parabola. Jeśli chcemy zbadać szybkość wzrostu (stromość wznoszenia się) tej krzywej (rys. 49) w punkcie np. A, to intuicja nasuwa nam sposób rozwiązania tego zadania przez wykreślenie stycznej do paraboli w punkcie A. Domyślamy się, że współczynnik kierunkowy tej stycznej będzie ową szukaną miarą funkcji danej w punkcie A. Obliczmy tedy $\operatorname{tg}\beta$. (rys. 49).

Zastanówmy się jednak nad określeniem stycznej do krzywej w danym punkcie. Weźmy pod uwagę dowolną krzywą K (rys. 50). Przez punkt A, leżący na niej, da się poprowadzić nieskończenie wiele prostych siecznych względem krzywej K. Jedna z nich przetnie krzywą jeszcze w punkcie B. Niech teraz punkt B zbliża się po łuku krzywej K nieograniczenie do punktu A. Wówczas sieczna AB będzie wykonywała obrót naokoło punktu stałego A,

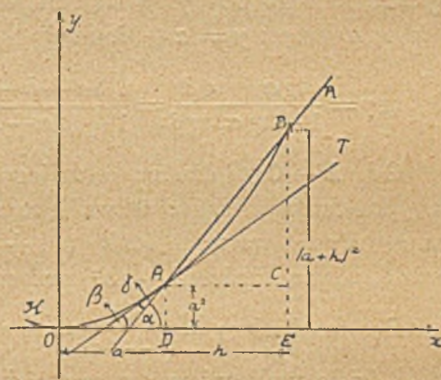


Rys. 50.

zbliżając się do pewnego położenia granicznego, do prostej S, którą właśnie nazwiemy styczną. Wobec tego styczną do danej krzywej K w punkcie A określamy w następujący sposób:

Przez dany punkt A i dowolny punkt B na krzywej K, byle różny od punktu A, prowadzimy sieczną i założymy, że punkt B nieograniczenie zbliża się do punktu A po łuku krzywej. Wtedy *może się zdarzyć*, że sieczna AB, obracając się naokoło punktu A, zbliża się nieograniczenie do pewnej prostej S, przechodzącej przez punkt A, którą nazwiemy właśnie styczną do krzywej K w punkcie A. Styczna jest zatem *granicznem położeniem siecznej*, gdy drugi punkt przecięcia się siecznej z krzywą zbliża się po łuku krzywej nieograniczenie do punktu pierwszego.

Wróćmy do stycznej S w rysunku 49; ona jest nachyloną do osi x pod kątem β, przeto tangens tego kąta jest współczynnikiem kierunkowym stycznej S i zarazem będzie miarą szybkości wznoszenia się paraboli $y = x^2$ w punkcie A (a więc także miarą wzrastania funkcji $y = x^2$). Przystąpimy zatem do obliczenia tego współczynnika kierunkowego.



Rys. 51.

Niech krzywa K na rys. 51 będzie obrazem geometrycznym funkcji $y = x^2$. Wówczas, gdy za x podstawimy wartość a, będzie odcinek AD przedstawiał wartość funkcji $y = x^2$ w punkcie A czyli $AD = a^2$; odcinek zaś BE będzie przedstawiał wartość funkcji y dla $x = a + h$, gdzie h jest dowolnie przyjętą wielkością zmienną, wyobrażającą przyrost odciętej. Nadto $h \neq 0$. Poprowadziwszy z punktu A prostą AC, równoległą do osi x, czytamy z rysunku: współczynnik kierunkowy siecznej AB czyli $\operatorname{tg}\alpha$, (gdzie α jest kątem nachylenia siecznej do osi x) z trójkąta prostokątnego ABC obliczy się w sposób następujący: $\operatorname{tg}\alpha = BC : AC$ czyli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$, skąd $\operatorname{tg}\alpha = 2a + h$.

Jeżeli od siecznej AB dochodzimy w sposób wyżej opisany do stycznej w punkcie A, to zmienia się tylko wielkość h, zaś wielkość a jest stałą. Wówczas tgα, jako funkcja zmiennej niezależnej h, jest funkcją liniową (stopnia pierwszego), a zatem funkcją ciągłą zmiennej h; jej granica dla $h \to 0$ będzie więc równą wartości funkcji w punkcie $h = 0$; zatem: $\operatorname{tg}\alpha = 2a + h \to 2a$, gdy $h \to 0$.

Weźmy więc prostą T przez punkt A o takim kącie β nachylenia, że $\operatorname{tg}\beta = 2a$. Powiadamy, że ta prosta jest granicznem położeniem siecznej AB.

Oznaczmy bowiem przez γ kąt, zawarty między sieczną AB a prostą T. Widać z rysunku, że $\alpha = \beta + \gamma$ (jako kąt zewnętrzny trójkąta, którego β i γ są kątami wewnętrznymi, nieprzyległymi do kąta α) więc: $\gamma = \alpha - \beta$. Stąd:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta} = \frac{2a + h - 2a}{1 + (2a + h) . 2a} = \frac{h}{1 + 4a^2 + 2ah}.$$

Gdy $h \to 0$, to dzielna ostatniego ilorazu dąży do zera, a dzielnik, jako funkcja ciągła ze względu na zmienną h, ma dla $h \to 0$ granicę równą wartości funkcji $1 + 4a^2 + 2ah$, gdy $h = 0$ czyli wartość, równą liczbie $1 + 4a^2$, przyczem $1 + 4a^2 \neq 0$.

Przeto: $\lim\limits_{h \to 0} \operatorname{tg}\gamma = \frac{0}{1 + 4a^2} = 0$, a więc także $\gamma \to 0$, gdy $h \to 0$, jak to ściśle wykazujemy w przypisku[1]).

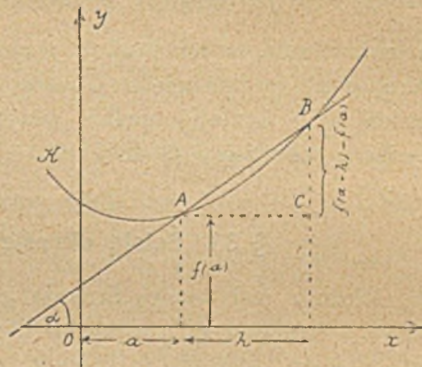
---

[1]) Zauważmy, że dla liczby h o własności $h < 0$, jak łatwo stwierdzi czytelnik, powstaje tak trójkąt, że jest $\beta = \alpha + \gamma$. Zachowując związek $\alpha = \beta + \gamma$ dla obu przypadków ($h > 0$ i $h < 0$), mamy $\gamma > 0$ lub $\gamma < 0$, w każdym razie $0 < |\gamma|$. W przypadku $h > 0$, ponieważ α jest kątem ostrym, więc także i γ będzie kątem ostrym: w drugim zaś przypadku jest β kątem ostrym, co daje, że $|\gamma|$ jest kątem ostrym; mamy więc $0 < |\gamma| < \frac{\pi}{2}$ w obu przypadkach.

Dla każdej liczby h, dość bliskiej zera, choć od niej różnej, jest γ funkcją określoną zmiennej h. Mamy wykazać, że $\gamma \to 0$, gdy $h \to 0$, skoro wiemy, że $\operatorname{tg}\gamma \to 0$, gdy $h \to 0$ i że $0 < |\gamma| < \frac{\pi}{2}$. Twierdzimy więc, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jest $|\gamma| < \varepsilon$, skoro jest $0 < |h| < \delta$. Udowodnimy to niewprost, przyjmując, że zaprzeczenie twierdzenia jest prawdą, przyczem zaprzeczenia należy dokonać w myśl „Wstępu“, a więc sądom ogólnym czy szczegółowym zaprzecza się przez odpowiednie sądy szczegółowe, czy ogólne. Zatem

Zatem prosta T jest rzeczywiście styczną do krzywej K.

Weźmy teraz funkcję $y = f(x)$ i krzywą, będącą jej obrazem geometrycznym (rys. 52). Na tej krzywej K obierzmy punkt $A[a, f(a)]$ i kreślimy przez ten punkt sieczną, która krzywą przecina jeszcze w punkcie $B[a+h,\ f(a+h)]$, przyczem będzie $h \neq 0$. Szukamy teraz współczynnika kierunkowego stycznej do krzywej K w punkcie A.



Rys. 52.

Z trójkąta ABC mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Aby więc obliczyć $\operatorname{tg} \alpha$, trzeba przyrost funkcji podzielić przez przyrost zmiennej niezależnej. Otóż punkt B ma zbliżać się nieograniczenie do punktu A po krzywej, co arytmetycznie znaczy, że przyrost h dąży do zera;

---

dla sądu:	zaprzeczenie ma postać:
do *każdej* liczby $\varepsilon > 0$	*istnieje* liczba $\varepsilon_0 > 0$ taka,
istnieje taka liczba $\delta > 0$,	że dla *każdej* liczby $\delta > 0$
iż dla *wszystkich* liczb h o własności	*istnieje* liczba h o własności
$0 < \lvert h \rvert < \delta$	$0 < \lvert h \rvert < \delta$
jest *stale* $\lvert \gamma \rvert < \varepsilon$	iż do tych liczb h należące liczby γ spełniają nierówność $\lvert \gamma \rvert \geqq \varepsilon_0$.

Zajmijmy się zaprzeczeniem i połóżmy $\delta = \frac{1}{n}$, gdzie n oznacza dowolną liczbę naturalną. Jak mówi zaprzeczenie, dla każdej liczby $\delta > 0$, a więc i wtedy, gdy położymy właśnie $\delta = \frac{1}{n}$, istnieje liczba h (którą oznaczymy przez h_n) o własności $0 < \lvert h_n \rvert < \frac{1}{n}$. Do tych liczb h_n należące wartości γ oznaczymy przez γ_n; otóż ma być $\lvert \gamma_n \rvert \geqq \varepsilon_0$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Ponieważ $0 < \lvert \gamma \rvert < \frac{\pi}{2}$, więc też $0 < \lvert \gamma_n \rvert < \frac{\pi}{2}$, przeto $0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{2}$. Stąd widoczne, że kąty $\lvert \gamma_n \rvert$ i ε_0 leżą w pierwszej ćwiartce, w której funkcja $\operatorname{tg} x$ jest funkcją rosnącą; skoro więc $\lvert \gamma_n \rvert \geqq \varepsilon_0$, tedy $\operatorname{tg} \lvert \gamma_n \rvert \geqq \operatorname{tg} \varepsilon_0$, a że $\operatorname{tg} \lvert \gamma_n \rvert = \lvert \operatorname{tg} \gamma_n \rvert$, przeto jest $\lvert \operatorname{tg} \gamma_n \rvert \geqq \operatorname{tg} \varepsilon_0$, ale $\operatorname{tg} \gamma \to 0$, więc też $\operatorname{tg} \gamma_n \to 0$ i tu właśnie sprzeczność, bo ma być $\lvert \operatorname{tg} \gamma_n \rvert \geqq \operatorname{tg} \varepsilon_0$, a nie dowolnie bliskiem zera. A więc zaprzeczenie twierdzenia jest fałszem i tem samem twierdzenie udowodnione.

współczynnikiem kierunkowym stycznej będzie granica funkcji $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, gdy $h \to 0$. jeżeli ta granica istnieje. Doprowadzeni więc jesteśmy do wyrażenia: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. poszukując miary zmienności funkcji $f(x)$ w punkcie a czyli pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie a. Trzeba będzie później zbadać, czy ta granica (o ile istnieje) spełnia wszystkie postulaty, jakie odnośnie do niej postawiliśmy (§ 48 i 49).

§ 33 Ścisłe określenie pochodnej.

Weźmy pod uwagę funkcję $y = f(x)$. Chcąc znaleźć jej pochodną w punkcie x_0, tworzymy iloraz różnicowy:

$$(1) \qquad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

oznaczając przez h liczbę dowolną, byle różną od zera. Iloraz ten uważamy za funkcję wielkości h, która uchodzi za zmienną, wielkość x_0 zaś za stałą. Może się zdarzyć, że funkcja (1) ma granicę, gdy $h \to 0$. Granica ta nazywa się pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. Oznaczymy na razie pochodną symbolem $(f(x_0))'$ i napiszemy:

$$(f(x_0))' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+h-f(x_0)}{h}.$$

Weźmy teraz funkcję $f(x)$. o której założymy, że w każdym punkcie x_0 z pewnego niepustego zbioru Z ma pochodną. Z wartością na x_0 jest więc skojarzona określona wartość pochodnej czyli: pochodna jest znów funkcją x, określoną w punktach x_0 zbioru Z, a więc w punktach, w których istnieje granica $(f(x_0))'$. Geometrycznym wyrazem tego jest fakt, iż w każdym takim punkcie współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej jest określony i zależny jest od wartości x. Zatem: Do każdej takiej wartości x należy pewna wartość pochodnej funkcji $f(x)$. Z każdą więc wartością zmiennej x z pewnego zbioru Z wartości na x jest skojarzona liczba, będąca wartością pochodnej funkcji $f(x)$ w tym punkcie. W ten sposób jest określona nowa funkcja zmiennej niezależnej x, zwana funkcją pochodną czyli krótko: pochodną, którą oznaczamy znakiem $(f(x))'$:

$$(f(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

przyczem *po* wyszukaniu granicy uważamy wielkość x za zmienną.

§ 34. Różniczkowanie funkcji.

Obliczanie pochodnej nazywamy różniczkowaniem funkcji, czem się obecnie zajmiemy, odkładając do § 45 wyjaśnienie tej nowej dla nas nazwy.

Przykład 1. Niech będzie $y = x$ i obliczmy pochodną tej fuukcji czyli zróżniczkujmy tę funkcję. Otóż jest: $\frac{x+h-x}{h} = 1$; skoro iloraz ma wartość stałą, równą liczbie 1, więc granica będzie: $(x)' = 1$ co mogliśmy przewidzieć.

Przykład 2. Weźmy funkcję: $y = \lambda x + \mu$, gdzie λ i μ są to jakiekolwiek liczby niezależne od zmiennej x. Obliczamy jej pochodną:

$$(y)' = \lim_{h \to 0} \frac{\lambda(x+h) + \mu - \lambda x - \mu}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\lambda h}{h} = \lambda.$$

Pochodna jest więc równą liczbę λ, która jest zarazem współczynnikiem kierunkowym prostej, będącej obrazem geometrycznym funkcji $y = \lambda x + \mu$. Na podstawie intuicyjnych naszych rozważań o pochodnej można to było przewidzieć.

Przykład 3. Weźmy funkcję t. zw. stałą, $y = c$. Gdy $c \neq 0$ geometrycznie przedstawia równanie $y = c$ prostą, równoległą do osi x, której współczynnik kierunkowy jest zatem równy 0.

Gdy $c = 0$, to $y = 0$ jest równaniem osi x, którą uważamy za nachyloną pod kątem 0 do siebie. A priori widać, że współczynnik kierunkowy, równy zeru, będzie zarazem wartością pochodnej funkcji $y = c$. I rzeczywiście jest:

$$(y)' = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h}, \text{ ale: } \frac{c-c}{h} = \frac{0}{h} = 0 \to 0.$$

Pochodna funkcji stałej w przedziale (a, b) jest równą zeru w każdym wewnętrznym punkcie przedziału.

Przykład 4. Obliczmy pochodną funkcji $y = x^2$. Jest:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

Ale $2x + h$ jest funkcją stopnia 1^{go} co do h i, jako taka, jest ciągłą, więc granica jej, gdy $h \to 0$, jest równą wartości samejże funkcji dla $h = 0$. Przeto $(x^2)' = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$.

Dla krótkości wyrażenia się nazwiemy iloraz $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ilorazem różnicowym. Chcąc obliczyć pochodną funkcji, tworzymy właśnie przy jej pomocy iloraz różnicowy.

Przykład 5. Obliczmy jeszcze pochodną funkcji $y=x^3$. Otóż:

$$\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=3x^2+3xh+h^2.$$

Gdy $h \to 0$, to funkcja ta będzie mieć granicę, równą wartości funkcji dla $h=0$. Wstawiwszy w powyższy trójmian $h=0$, mamy wartość jego równą $3x^2$. Zatem:

$$(x^3)'=3x^2.$$

Streszczając wyniki zagadnień z przykładów: 1), 4), 5), mamy:

$(x)'=1$	W podobny sposób znaleźlibyśmy też:
$(x^2)'=2x$	$(x^4)'=4x^3$.
$(x^3)'=3x^2$	Dochodzimy tedy empirycznie do ogólnego wzoru:

$$(x^n)'=n\,.\,x^{n-1},\ \text{gdzie}\ n=1,\ 2,\ 3\ldots\ldots$$

Zanim udowodnimy prawdziwość tego wzoru metodą indukcji matematycznej, udowodnić trzeba trzy twierdzenia o pochodnej sumy i różnicy, oraz iloczynu funkcji.

W tym celu weźmy dwie funkcje: $f(x)$ i $\varphi(x)$, co do których zakładamy, że obie mają pochodną w punkcie x. Utwórzmy nową funkcję, będącą sumą funkcji danych czyli $f(x)+\varphi(x)$ i zbadajmy, czy ta ostatnia funkcja ma pochodną. Tworzymy więc iloraz różnicowy:

$$\frac{f(x+h)+\varphi(x+h)-f(x)-\varphi(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

przyczem zmieniliśmy tylko porządek składników w dzielnej i rozdzieliliśmy iloraz na dwa ilorazy, otrzymując sumę dwóch ilorazów o tym samym dzielniku h. Ale każdy z nich jest zarazem ilorazem różnicowym, więc, gdy $h \to 0$, to pierwszy składnik: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to$ $\to (f(x))'$, drugi zaś: $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \to (\varphi(x))'$; przeto ich suma na mocy § 11 (str. 37): $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \to (f(x))'+$ $+(\varphi(x))'$, gdy $h \to 0$. Dochodzimy więc do wzoru, obejmującego też pochodną różnicy funkcji, co się w ten sam sposób wyprowadza: $(f(x) \pm \varphi(x))'=(f(x))' \pm (f(x))'$. Czytamy to:

Pochodna sumy (wzgl. różnicy) dwóch funkcji równa się sumie (wzgl. różnicy) pochodnych składników, o ile te ostatnie pochodne istnieją.

Przystąpimy obecnie do udowodnienia następującego twierdzenia:

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma pochodną dla $x = c$, to jest w tym punkcie ciągłą.

Jest to twierdzenie nieodwracalne; nie słusznem jest bowiem, że, jeśli funkcja jest ciągłą w danym punkcie, to ma w tym punkcie pochodną. Ciągłość funkcji nie decyduje więc o istnieniu pochodnej; (znamy przykłady funkcji ciągłych, które pochodnej nie mają; pierwszy taki przykład podał Weierstrass).

Aby więc powyższe twierdzenie udowodnić, weźmy funkcję $f(x)$ i załóżmy o niej, że ma pochodną dla $x = c$, którą oznaczymy przez m. Zakładamy więc, iż istnieje pochodna i że jest:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = m.$$

Innemi słowy m jest granicą ilorazu różnicowego $\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$, a więc do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich wartości na h, czyniących zadość nierówności $0 < |h| < \delta$, jest prawdziwą nierówność:

$$\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - m \right| < \varepsilon.$$

Skoro $|h| > 0$, więc wolno ostatnią nierówność pomnożyć obustronnie przez $|h|$. Otrzymamy:

$$|h| \cdot \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - m \right| < \varepsilon \cdot |h|.$$

Ponieważ iloczyn bezwzględnych wartości dwu liczb równa się bezwzględnej wartości iloczynu tych liczb, więc, stosując to twierdzenie po lewej stronie ostatniej nierówności, będziemy mieli:

$$\left| h \cdot \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - mh \right| < \varepsilon\, |h| \text{ czyli: } |f(c+h) - f(c) - mh| < \varepsilon \cdot |h| \ldots \text{(I)}.$$

Ale możemy napisać: $f(c+h) - f(c) = [f(c+h) - f(c) - mh] + mh$, skąd: $|f(c+h) - f(c)| = |[f(c+h) - f(c) - mh] + mh|$.

Po prawej stronie ostatniej równości stosujemy twierdzenie, że bezwzględna wartość sumy dwóch składników nie przekracza sumy bezwzględnych wartości owych składników; zatem:

$$|f(c+h) - f(c)| = |[f(c+h) - f(c) - mh] + mh| \leqq |f(c+h) - f(c) - mh| + |mh|.$$

Ale po prawej stronie uwzględnimy nierówność (I); otrzymamy więc:

$|f(c+h)-f(c)|<\varepsilon|h|+|mh|=\varepsilon|h|+|m|.|h|=|h|.(\varepsilon+|m|)$ czyli:

$|f(c+h)-f(c)|<|h|.(\varepsilon+|m|)\ldots$(II), o ile $0<|h|<\delta$.

Niech będzie dana naprzód inna liczba: $\varepsilon'>0$. Ponieważ liczba $\varepsilon>0$, zresztą dowolna, więc obierzemy liczbę $\varepsilon=1$, to istnieje liczba $\delta>0$ taka, iż dla $0<|h|<\delta$, będzie na mocy (II):

$$|f(c+h)-f(c)|<|h|(1+|m|)\ldots\text{(III)}.$$

Otóż wyznaczymy liczbę δ' tak, że: (IV)... $\delta'(1+|m|)=\varepsilon'$, skąd $\delta'=\frac{\varepsilon'}{1+|m|}$, więc $\delta'>0$. Obierzmy teraz $\delta''=\min(\delta,\delta')$, to $\delta''>0$ i weźmy liczbę h taką, że $0<|h|<\delta''$, to wtedy (III) i (IV) dadzą:

$$|f(c+h)-f(c)|<|h|.(1+|m|)<\delta''(1+|m|)\leqslant\delta'.(1+|m|)=\varepsilon'.$$

Do każdej więc liczby $\varepsilon'>0$ istnieje dodatnia liczba δ'' taka, że $|f(c+h)-f(c)|<\varepsilon'$, skóro tylko $0<|h|<\delta''$. Ale wartość $h=0$ nie jest wykluczoną, bo $|f(c)-f(c)|=0<\varepsilon'$.

Jeśli więc $0\leqslant|h|<\delta''$, to jest $|f(c+h)-f(c)|<\varepsilon'$.

Wykazaliśmy zatem rzecz następującą: Jeśli tylko wybierzemy liczbę $|h|$ odpowiednio małą, to wartość funkcji w punkcie $(c+h)$ od wartości tejże funkcji w punkcie c będzie się różniła bezwzględnie mniej, niż o dowolnie daną liczbę dodatnią ε'. Zatem funkcja ta w punkcie c jest ciągłą.

Z tego twierdzenia przez kontrapozycję możemy wywnioskować: *Jeżeli funkcja nie jest ciągłą w punkcie (c), to w tym punkcie nie ma pochodnej.*

Przykłady funkcji nieciągłej były już przez nas rozważane. Weźmy jeden z nich, a mianowicie funkcję $y=C(x)$ (zob. § 2 str. 5), która jest nieciągłą w punktach, odpowiadających liczbom naturalnym i której obraz geometryczny ma postać schodków (rys. 6). Nieciągłą będzie zatem ta funkcja np. dla $x=2$. Spróbujmy obliczyć jej pochodną; w tym celu utwórzmy iloraz:

$\frac{C(2+h)-C(2)}{h}$, przyczem liczba h jest dość mała. Jeśli $0<h<1$, to $C(2+h)=2$, $C(2)=2$ (zob. rys. 53); wtedy też iloraz: $\frac{2-2}{h}=\frac{0}{h}=0$.

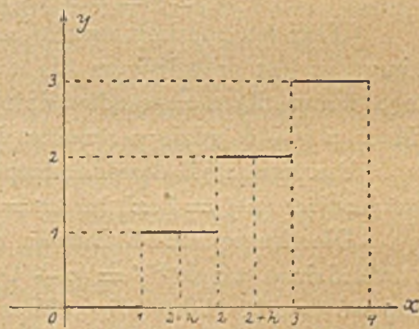
Gdy jednak będzie $-1<h<0$, to iloraz ten ma wartość $\frac{1-2}{h}=\frac{-1}{h}$ i rośnie co do bezwzględnej wartości nieograniczenie, gdy $h \to 0$. Zatem funkcja ta nie ma pochodnej w punkcie $x=2$.

Utwórzmy teraz z funkcji $f(x)$ i $\varphi(x)$ iloczyn i obliczmy pochodną funkcji $f(x).\varphi(x)$. W ilorazie różnicowym:
$\dfrac{f(x+h).\varphi(x+h)-f(x):\varphi(x)}{h}$ rozszerzmy dzielną przez dodanie i odjęcie wyrażenia: $f(x).\varphi(x+h)$, wobec czego będzie:

$$\frac{f(x+h).\varphi(x+h)-f(x).\varphi(x+h)+f(x).\varphi(x+h)-f(x).\varphi(x)}{h}=$$

$$=\varphi(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \ldots\ldots (\mathrm{I}).$$

Weźmy teraz granicę tego wyrażenia, gdy $h \to 0$. Ponieważ według założenia funkcja $\varphi(x)$ ma pochodną w punkcie x, przeto w tym punkcie jest ciągłą; więc $\varphi(x+h)$ ma granicę równą wartości funkcji $\varphi(x+h)$ dla $h=0$; przeto $\varphi(x+h) \to \varphi(x)$ [1], a $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \to (f(x))'$; ponieważ nadto granica iloczynu jest równa iloczynowi granic



Rys. 53.

czynników (§ 13, str. 39), więc pierwszy składnik: $\varphi(x+h)$. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \to \varphi(x).(f(x))'$.

Podobnie dla drugiego składnika: ponieważ $f(x) \to f(x)$ dla $h \to 0$, a $\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \to (\varphi(x))'$, będzie $f(x).\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \to$ $\to f(x).(\varphi(x))'$. Granicą zaś całego wyrażenia (I) według twierdzenia, że granica sumy równa się sumie granic składników (§ 11, str. 37), będzie:

$$f(x).(\varphi(x))'+\varphi(x).(f(x))'.$$

Mamy więc wyprowadzony wzór następujący:

$(f(x).\varphi(x))'=f(x).(\varphi(x))'+\varphi(x).(f(x))'$, co czytamy:

Pochodna iloczynu dwóch funkcji równa się iloczynowi pierwszego czynnika przez pochodną drugiego, powiększonemu o iloczyn

---

[1]) Zresztą zob. § 39 o granicy funkcji złożonych.

drugiego czynnika przez pochodną pierwszego, o ile oba czynniki mają pochodne.

Czytelnik z łatwością znajdzie pochodną iloczynu (n) funkcji, gdzie ilość $n > 2$.

Uwaga. Niech będzie danym iloczyn $a . f(x)$ z liczby stałej a i funkcji $f(x)$, która ma pochodną w punkcie x. Tedy pochodna $(af(x))' = (a)' . f(x) + a . f'(x)$; ale pochodna $(a)' = 0$, więc $(af(x))' = = af'(x)$.

Przystąpimy obecnie do udowodnienia metodą indukcji zupełnej wzoru wyprowadzonego poprzednio drogą empiryczną:

$$(x^n)' = n . x^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wzór ten musimy uważać za prawdziwy, jeżeli: 1) udowodnimy, że jest prawdziwym dla $n = 1$, 2) zakładając prawdziwość tego wzoru dla $n = p$, udowodnimy, iż jest on prawdziwym także dla $n = p + 1$, gdzie p oznacza dowolną liczbę naturalną.

Pierwszą część dowodu przeprowadziliśmy już w przykładzie 1, otrzymując: $(x^1)' = 1 . x^{1-1} = x^0 = 1$.

Dla drugiej części dowodu zakładamy, że jest: $(x^p)' = p . x^{p-1}$ i twierdzimy, że: $(x^{p+1})' = (p + 1) . x^p$. Otóż zamiast $(x^{p+1})'$ możemy napisać $(x . x^p)'$. Mamy więc obliczyć pochodną iloczynu, stosujemy przeto wyprowadzony ostatnio wzór: $(x . x^p)' = x . (x^p)' + x^p . (x)' = = x . px^{p-1} + x^p . 1$, przyczem zamiast $(x^p)'$ napisaliśmy $p . x^{p-1}$ na podstawie założenia. To zaś dalej daje: $p . x^p + x^p = (p + 1) . x^p$. Zatem: $(x^{p+1})' = (p + 1) . x^p$. Jeżeli więc założymy, że $(x^p)' = p . x^{p-1}$, to prawdziwą jest równość $(x^{p+1}) = (p + 1)x^p$. Tem samem więc udowodniliśmy metodą indukcji zupełnej wzór: $(x^n)' = n . x^{n-1}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ (Dla $n = 1$ i $x = 0$ należy 0^0 zastąpić przez liczbę 1).

Twierdzenie to można udowodnić także inną drogą, nie uciekając się do metody indukcji zupełnej bezpośrednio, lecz używając dwumianu Newtona (udowodnionego jednakowoż zapomocą indukcji). Obliczamy więc pochodną funkcji $y = x^n$ w sposób następujący; jest:

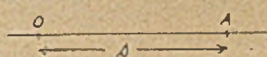
$$\frac{(x + h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} . h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n - x^n}{h} =$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} . h + \ldots + \binom{n}{n} . h^{n-1}.$$

Otrzymaliśmy wielomian stopnia ($n-1$)-go zmiennej h, przyczem pierwszy wyraz tego wielomianu, jako niezawierający zmiennej h, jest t. zw. wyrazem wolnym tego wielomianu. Wielomian całkowity jest funkcją ciągłą, więc jego granica dla $h \to 0$ (o którą właśnie nam chodzi, gdyż obliczamy pochodną), równa się wartości funkcji w punkcie $h = 0$. Gdy zaś podstawimy w tym wielomianie $h = 0$, to wszystkie wyrazy, z wyjątkiem pierwszego, w którym h nie występuje, będą równe zeru. Wielomian ten więc dla $h = 0$ ma wartość wolnego wyrazu: $\binom{n}{1} x^{n-1} = n . x^{n-1}$ i to jest właśnie szukana pochodna funkcji $y = x^n$. Mamy zatem wzór: $(x^n)' = n . x^{n-1}$, co poprzednio wykazaliśmy.

Przykład 6. To, co dotychczas powiedzieliśmy o pochodnej, wywodziło się z zagadnienia kreślenia stycznych do krzywej.

Zajmiemy się obecnie pochodną, jako pojęciem związanem z zagadnieniem prędkości ruchu. Aby rzecz uprościć nie będziemy mówili o ruchu ciała, którego ruch opisuje się w sposób dość zawiły, ale zajmować nas będzie ruch punktu po osi t. zn. po prostej, na której oznaczono kierunek. Na osi obierzmy punkt O (rys. 54), od którego liczyć będziemy na osi odległość s, jako dodatnią względnie ujemną, zależnie od tego, czy wektor $\overrightarrow{OA}$ jest zgodnie skierowany z osią lub niezgodnie. Dla wyznaczenia liczby s trzeba jeszcze przyjąć pewną jednostkę długości. Podobnie dla mierzenia czasu należy przyjąć pewną jednostkę i chwilę, od której liczymy czas, najpospoliciej zdarzeniom w przyszłości względem chwili początkowej przypisuje się czas dodatni, zdarzeniom zaś z przeszłości względem chwili początkowej przypisuje się czas ujemny.



Rys. 54.

Jeżeli t oznacza miarę czasu, s odległość punktu na osi w chwili t, to będzie $s = f(t)$, przyczem funkcja $f(t)$ jest określoną w pewnym przedziale (a, b). Jeżeli znamy funkcję $f(t)$, to znamy przez to położenie punktu dla każdej chwili t z przedziału (a, b) i tem samem znamy ruch punktu. Dlatego związek $s = f(t)$ zowie się równaniem ruchu.

Zajmijmy się najpierw ruchem jednostajnym po osi. Weźmy pod uwagę cztery chwile t_1, t_2, t_3, t_4 i niech A_1, A_2, A_3, A_4 będą położeniami rozważanego punktu na osi w tych chwilach. Załóżmy, że czas $t_2 - t_1$, który upłynął od chwili t_1 do chwili t_2, jest równy czasowi $t_4 - t_3$; zarazem weźmy pod uwagę wektory $\overrightarrow{A_1A_2}$ i $\overrightarrow{A_3A_4}$.

Jeżeli jest $\overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4}$, ilekroć razy $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$. to ruch nazwiemy jednostajnym.

Znajdziemy funkcję $f(t)$ dla ruchu jednostajnego. W tym celu do punktów O, A_1, A_2 jak i do punktów O, A_3, A_4 zastosujmy tw. Chasles'a (zob. Wstęp). Będzie: $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} = 0$, $\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4O} = 0$ czyli $f(t_1) + \overrightarrow{A_1A_2} - f(t_2) = 0$, $f(t_3) + \overrightarrow{A_3A_4} - f(t_4) = 0$, skąd $\overline{A_1A_2} = f(t_2) - f(t_1)$, $\overrightarrow{A_3A_4} = f(t_4) - f(t_3)$. Mamy więc: (1) $f(t_2) - f(t_1) = f(t_4) - f(t_3)$, ilekroć razy jest: (2) $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$. Otrzymaliśmy więc następujące zagadnienie analityczne: znaleźć funkcję $f(t)$, określoną dla wszystkich liczb rzeczywistych t i spełniającą związek (1) dla każdej czwórki liczb rzeczywistych t_1, t_2, t_3, t_4, spełniającej warunek (2). Zacieśnimy to zagadnienie w ten sposób, że dodamy jeszcze jeden warunek, który ma funkcja $f(t)$ spełniać, a mianowicie żądamy, by była ciągłą dla wartości $t = 0$. Warunek ten ze stanowiska mechaniki jest naturalnym, a analitycznie rozwiązanie bardzo ułatwi. Połóżmy $\varphi(t) = f(t) - f(o)$, tedy jest: (3) $\varphi(o) = 0$, nadto $f(t) = \varphi(t) + f(o)$. Wstawiając to wyrażenie w równanie (1), otrzymujemy znów równanie tej samej postaci: (4) $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \varphi(t_4) - \varphi(t_3)$. Podamy kilka własności funkcji $\varphi(t)$. I) Według założenia funkcja $f(t)$ jest ciągłą dla wartości $t = 0$, przeto też funkcja $\varphi(t)$ jest ciągłą dla wartości $t = 0$. II) Kładziemy we wzorze (2) wartości $t_2 = t'' - t'$, $t_1 = 0$, $t_4 = t''$, $t_3 = t'$, gdzie t', t'' oznaczają dwie dowolne liczby rzeczywiste, wtedy równość (2) jest spełnioną, więc związek (4) daje: (5) $\varphi(t'' - t') = \varphi(t'') - \varphi(t')$. Stąd $\varphi(t'') = \varphi(t'' - t') + \varphi(t')$; kładąc $t'' - t' = t'''$, mamy $t'' = t' + t'''$ i zarazem $\varphi(t' + t''') = \varphi(t''') + \varphi(t')$. Jest więc: (6) $\varphi(t' + t'') = \varphi(t') + \varphi(t'')$. Kładąc liczbę $(-t'')$ zamiast liczby t'', otrzymujemy ze związku (6): $\varphi(t' - t'') = \varphi(t') + \varphi(-t'')$, co porównane z równością (5) daje nową własność (7) $\varphi(-t'') = -\varphi(t'')$. III) Wykażemy, że funkcja $\varphi(t)$ i tem samem także funkcja $f(t)$ jest funkcją ciągłą dla każdej wartości (t_0). Na mocy (5) jest $\varphi(t - t_0) = \varphi(t) - \varphi(t_0)$; otóż z powodu przyjętej ciągłości funkcji $f(t)$, a więc i funkcji $\varphi(t)$ dla $t = 0$ otrzymujemy rzecz następującą: do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż jest $|\varphi(t - t_0)| < \varepsilon$, gdy jest $|t - t_0| < \delta$, więc też $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon$, co dowodzi, że funkcja $\varphi(t)$ jest ciągłą dla wartości $t = t_0$. IV) Wykażemy dalszą własność: jeżeli liczby a, b, c są rzeczywiste i mają własność (8) $a = bc$, to jest też (9)

$\varphi(a)=b\varphi(c)$. Udowodnimy tę własność najpierw przy pomocy indukcji zupełnej w przypadku, gdy b oznacza liczbę naturalną. Dla $b=1$ związki (8) i (9) dają $a=c$, $\varphi(a)=\varphi(c)$, co jest słuszne. Załóżmy, że związek (8) pociąga za sobą związek (9) dla dowolnej liczby c, gdy tylko b oznacza liczbę naturalną p. Niech będzie $b=p+1$, a więc niech będzie $a=(p+1)c=pc+c$, tedy $\varphi(a)=\varphi(pc+c)=$ $=\varphi(pc)+\varphi(c)$, co wynika z równości (6); na mocy założenia jest $\varphi(pc)=p\varphi(c)$, więc $\varphi(a)=p\varphi(c)+\varphi(c)=(p+1)\varphi(c)$. Tem samem wykazaliśmy rozważaną własność w przypadku, gdy b oznacza liczbę naturalną. Niech teraz będzie $b=0$, to związki (8) i (9) przyjmują postać $a=0$, $\varphi(a)=0.\varphi(o)$, a więc są słuszne, bo jest $\varphi(o)=0$. Niech b oznacza liczbę ujemną całkowitą $b=-p$, gdzie p jest liczbą naturalną, to związek (9) będzie spełniony, bo $\varphi(a)=$ $=\varphi(bc)=\varphi(-pc)=-\varphi(pc)=-p\varphi(c)=b\varphi(c)$, dość bowiem wskazać na równość (7) i na to, że omawiana własność jest prawdziwą dla liczb naturalnych b. Niech obecnie b oznacza ułamek nieujemny $\frac{m}{n}$, gdzie $m\geqslant 0$, $n\geqslant 1$, m, n są całkowite. Wtedy związek (8) ma postać $a=\frac{m}{n}.c$, skąd $na=mc$, więc $\varphi(na)=\varphi(mc)$, przeto też wobec powyższego $n\varphi(a)=m\varphi(c)$, a że $n\geqslant 1$, więc $\varphi(a)=\frac{m}{n}\varphi(c)=b\varphi(c)$. Gdy $b=-\frac{m}{n}$, to $a=-\frac{m}{n}c$, tedy $\varphi(a)=$ $=\varphi\left(-\frac{m}{n}c\right)=-\varphi\left(\frac{m}{n}c\right)=-\frac{m}{n}\varphi(c)=b.\varphi(c)$. Tem samem udowodniliśmy, że związek (8) pociąga za sobą związek (9), o ile tylko b oznacza liczbę wymierną. Załóżmy wreszcie, że b oznacza liczbe niewymierną. Jak wiadomo (str. 63) istnieje ciąg nieskończony liczb wymiernych $b_i (i=1, 2,\ldots)$ i takich że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$. Połóżmy $a_n=b_n.c$, tedy istnieje (str. 65) granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=bc=a$. Skoro zaś b_n oznacza liczbę wymierną, to $\varphi(a_n)=b_n.\varphi(c)$. Ponieważ $a_n\to a$ i ponieważ funkcja $\varphi(t)$ na mocy III jest ciągłą dla każdej wartości t, przeto także dla $t=a$, więc (str. 73, przykład 5) jest $\varphi(a_n)\to\varphi(a)$. Ale $b_n.\varphi(c)\to b.\varphi(c)$, więc też $\varphi(a_n)\to b.\varphi(c)$, a że ciąg dwóch różnych granic mieć nie może, więc $\varphi(a)=b.\varphi(c)$. Tem samem własność IV całkowicie udowodniona.

Połóżmy w związku (8) $a=t$, $b=t$, $c=1$, to związek (8) będzie spełnionym, przeto też będzie prawdziwym związek (9), który przyjmuje postać $\varphi(t) = t \cdot \varphi(1)$. Ponieważ $f(t) = \varphi(t) + f(o)$, więc: (10) $f(t) = t \cdot \varphi(1) + f(o)$.

Wynik dotychczasowy jest następujący: jeżeli istnieje funkcja $f(t)$, rozwiązująca podane zagadnienie, to jest postaci (10). Z łatwością jednak widać, że ona przy dowolnych wartościach $\varphi(1)$, $f(o)$ rzeczywiście spełnia wszelkie warunki. Jest bowiem funkcją ciągłą, nadto niech będzie spełniony związek (2) i niech $\varphi(1)$, $f(o)$ oznaczają dowolne liczby rzeczywiste, tedy $(t_2 - t_1)\,\varphi(1) = (t_4 - t_3)\,\varphi(1)$ i do tego właśnie redukuje się związek (1) dla funkcji (10).

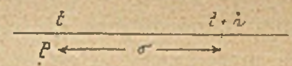
Widzimy tedy, że równanie ruchu jednostajnego ma postać (11) $s = vt + s_0$, gdzie położyliśmy $v = \varphi(1)$, $s_0 = f(o)$. Gdy $v = 0$, to $s = s_0$, co odpowiada spoczynkowi, który według powyższego należy uważać za szczególny przypadek ruchu jednostajnego. Z równości (11) otrzymujemy $f(t+1) - f(t) = v$; liczbę v nazywamy miarą prędkości ruchu, jej wartość bezwzględna $|v|$ mierzy drogę przebytą przez punkt w jednostce czasu; miara prędkości jest dodatnią, gdy ruch odbywa się w kierunku osi, jest ujemną dla przeciwnego kierunku ruchu; prędkość jest zerem dla spoczynku punktu. Jeżeli A_1 wzgl. A_2 oznaczają położenia punktu na osi w chwilach $t_1 = t$, $t_2 = t + 1$, to wektor $\overline{A_1A_2}$ mierzy się liczbą v; wektor $\overline{A_1A_2}$ zowie się prędkością ruchu. Z równości (11) otrzymujemy $\frac{ds}{dt} = v$, co odpowiada intuicyjnemu poglądowi, że miarą zmienności ruchu jest prędkość. [Zwykle prędkość ruchu jednostajnego określa się jako drogę przebytą w jednostce czasu lub przypadającą na jednostkę czasu].

Jak teraz określić prędkość ruchu, dowolnego, a więc i niejednostajnego? Podstawą do określenia nie może być droga przebyta w jednostce czasu, gdyż droga taka może być różnej długości, zależnie od chwili, zaczynającej jednostkę czasu. Np. weźmy pod uwagę spadek wolny ciała w próżni (str. 2, przykład 3), wtedy jest $s = \frac{1}{2} gt^2$; otóż droga, przebyta w jednostce czasu od chwili t do chwili $(t + 1)$ wynosi $\frac{1}{2} g(t+1)^2 - \frac{1}{2} gt^2 = gt + \frac{1}{2} g$, a więc zależy od chwili t.

Otóż z równości (11) mamy dla ruchu jednostajnego $s - s_0 = vt$, skąd $v = \frac{s - s_0}{t}$ t. zn. miarę prędkości otrzymuje się, dzieląc

$s - s_0$ przez ilość jednostek czasu potrzebnych do przebycia drogi długości $s - s_0$. To nam nasuwa następujące intuicyjne rozważania dla dowolnego ruchu, dla którego niech będzie $s = f(t)$ równaniem ruchu; niech funkcja $f(t)$ będzie określoną w przedziale (a, b) i niech będzie $a < t < b$.

W czasie od t do $t + h$ przebył punkt pewną drogę σ (rys. 55). Będzie tedy $\sigma = f(t + h) - f(t)$; ten ruch zastąpimy przez fikcyjny ruch jednostajny w ciągu czasu od t do $t + h$, a tak dobrany, że na początku (t) i końcu $(t + h)$ rozważanego okresu czasu punkt poruszający zajmuje to samo położenie, co przy ruchu rzeczywistym. Wtedy $\frac{\sigma}{h} = \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$ będzie miarą prędkości fikcyjnego ruchu jednostajnego. Im mniejszym jest przedział h czasu $(h \neq 0)$, tem „podobniejszym" jest ruch rzeczywisty do fikcyjnego ruchu jednostajnego. To nam wyjaśnia poniekąd, dlaczego miarą prędkości ruchu (albo krócej prędkością ruchu) w chwili t nazywamy granicę $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sigma}{h}$, o ile ta granica istnieje. Prędkość v będzie więc miarą zmienności drogi względnie oddalenia s. Jest więc $v = (f(t))'$.



Rys. 55.

Prędkość ruchu zmiennego w pewnym punkcie możemy też uprzystępnić w sposób następujący: Ruch zmienny zachodzi, jeśli na poruszające się „ciało" (punkt materjalny) działa stale jakaś siła. Wyobraźmy sobie, że siła ta przestaje działać w punkcie A. Na mocy bezwładności ciało poruszać się będzie dalej ruchem jednostajnym po prostej, i to z prędkością taką, jaką była prędkość ruchu zmiennego w punkcie A. A więc prędkość w punkcie A będzie to prędkość, z jaką „ciało" poruszałoby się dalej ruchem jednostajnym, gdyby siła nagle przestała działać na to ciało właśnie w punkcie A.

Zmienność prędkości mierzy nam przyspieszenie. Jeśli prędkość jest stale ta sama, jak przy ruchu jednostajnym, wówczas przyspieszenie równa się zeru, podobnie, jaką była wartość pochodnej dla funkcji stałej. Przyspieszenie jest bowiem pochodną prędkości czyli pochodną pochodnej czasu. Jeśli wyraziliśmy prędkość symbolem: $v = (f(t))'$, to symbol przyspieszenia będzie: $\gamma = (v)' = (f(t))''$, co znaczy: *przyspieszenie jest pochodną drugiego rzędu funkcji s względem czasu przy założeniu, że ta pochodna istnieje.*

Może się również zdarzyć przypadek, że przyspieszenie nie będzie stałem dla pewnego ruchu, lecz, że będzie się zmieniało w miarę upływania czasu. Będzie więc można utworzyć miarę zmienności przyspieszenia czyli t. zw. przyspieszenie drugiego rzędu, będące dalszą jeszcze pochodną czasu itd.

Przykład 7. Do mierzenia długości używa się przyrządów, których zasadniczą częścią jest podziałka, zrobiona na pręcie zwykle metalowym. Pręt ten pod wpływem temperatury wydłuża się lub skraca, wskutek czego odległość dwóch punktów nie jest zgodna z liczbą odczytaną na podziałce. Doświadczenie wykazuje, że, jeżeli podziałka została wykonaną w temperaturze 0^0 i dla tej temperatury wykazuje prawdziwe odległości, to w temperaturze t^0 C długość 1 cm podziałki będzie równą liczbie $l = 1 + at + bt^2$, gdzie a i b oznaczają stałe, zależne od materjału, z jakiego zrobiony pręt.

Miarą zmiany długości pręta będzie pochodna długości l względem temperatury: $l' = a + 2bt$; ta miara zależy od temperatury. Miara l' nosi nazwę współczynnika rozszerzalności cieplnej.

Jeżeli więc odległość dwóch punktów odczytamy na podziałce jako l_0 cm, to w rzeczywistości odległość jest większą (dla $t > 0$), a mianowicie wynosi $l_0(1 + at + bt^2)$ cm, bo każdy odcinek 1 cm w temperaturze 0^0 ma w temperaturze t^0 C długość $1 + at + bt^2$ cm.

Przykład 8. Jeżeli pewną ilość gazu umieścimy pod tłokiem (zob. str. 3) w stałej temperaturze, to objętość gazu można uważać za funkcję ciśnienia $v = f(p)$. Dla dotąd znanych gazów maleje objętość v, gdy zwiększa się jego ciśnienie. Pochodna (o ile istnieje) v' będzie miarą zmiany objętości przy zmianie ciśnienia, pochodna podaje, jak szybko *maleje* objętość, gdy zwiększa się ciśnienie gazu. Dla pewnych gazów jest $v = \frac{c}{p}$, gdzie c oznacza stałą dodatnią. W tym przypadku jest $v' = -\frac{c}{p^2}$, jest więc liczbą ujemną. Otóż ujemnie wziętą pochodną $(-v')$ nazwano (we fizyce) współczynnikiem ściśliwości gazu (ciała).

§ 35. Pochodna funkcji trygonometrycznych: sin$x$ i cos$x$.

Obliczmy pochodną funkcji $y = \sin x$. W tym celu utwórzmy iloraz różnicowy:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h},$$

przyczem jest $h \neq 0$.

Podzielmy dzielną i dzielnik przez liczbę 2. Otrzymamy po stronie prawej: $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$. Jeśli $h\to 0$, to pierwszy czynnik ma granicę 1 na podstawie udowodnionego (str. 25) poprzednio twierdzenia[1]); jak wiadomo $\cos x$ jest funkcją ciągłą, więc $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\to\cos x$, gdy $h\to 0$[1]). Zatem $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\to\cos x$; więc: $(\sin x)'=\cos x$... (I).

W podobny sposób obliczymy pochodną funkcji $y=\cos x$. Tworzymy iloraz różnicowy: $\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$, gdzie $h\neq 0$.

Na podstawie wzoru goniometrycznego, dotyczącego różnicy cosinusów dwóch kątów, przekształcamy dzielną powyższego ilorazu, poczem dzielimy dzielną i dzielnik przez liczbę 2; otrzymujemy:

$$\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\frac{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Jeśli założymy, że $h\to 0$, to iloraz $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$, a $\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\to\sin x$[1]). Iloczyn tych dwóch funkcji dąży zatem do wartości $-\sin x$ dla $h\to 0$ czyli: $(\cos x)'=-\sin x$... (II).

Udowodniliśmy zatem twierdzenie: *Funkcje* $\sin x$ i $\cos x$ *mają w każdym punkcie* x *pochodną określoną przez wzory* I i II.

§ 36. Pochodna ilorazu dwóch funkcji.

Weźmy pod uwagę funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ i załóżmy o nich, że mają w punkcie $x=c$ pochodne $f'(c)$ i $\varphi'(c)$. Utwórzmy teraz iloraz

---

[1]) Zresztą zob. § 39 o funkcjach złożonych (str. 172).

tych funkcji $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ i obliczmy jego pochodną dla $x = c$. Aby iloraz ten był dla $x = c$ określony, musimy założyć ponadto: $\varphi(c) \neq 0$. Przyjąwszy to założenie, możemy sformułować następujące twierdzenie: *Jeżeli funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ mają w punkcie $x = c$ określone pochodne i jeżeli $\varphi(c) \neq 0$, to funkcja: $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest ciągłą w punkcie c i w punkcie $x = c$ ma pochodną, równą wyrażeniu:*

$$\frac{\varphi(c) \,.\, f'(c) - f(c) \,.\, \varphi'(c)}{\varphi^2(c)}.$$

Dowód. Że funkcja $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ w punkcie $x = c$ i jego sąsiedztwie jest określoną, wnioskujemy w sposób następujący: Ponieważ istnieją (według założenia) pochodne $f'(c)$ i $\varphi'(c)$, więc funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są w punkcie $x = c$ ciągłe, nadto funkcja $\varphi(x)$ przyjmuje w punkcie c wartość $\varphi(c)$, według założenia, różną od zera. Zatem na mocy tw. ze str. 51 wynika, że iloraz $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest funkcją określoną i ciągłą w punkcie c. W ten sposób udowodniliśmy pierwszą część twierdzenia. Chodzi teraz o znalezienie wartości pochodnej ilorazu $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dla $x = c$. Tworzymy w myśl określenia pochodnej iloraz różnicowy:

$$\frac{\frac{f(c+h)}{\varphi(c+h)} - \frac{f(c)}{\varphi(c)}}{h} = \frac{f(c+h) \,.\, \varphi(c) - \varphi(c+h) \,.\, f(c)}{h \,.\, \varphi(c+h) \,.\, \varphi(c)}.$$

W dzielnej dodajmy i odejmijmy wyrażenie $f(c) \,.\, \varphi(c)$ i wyłączmy przed nawias czynnik $\varphi(c)$, względnie czynnik $f(c)$. Będzie

$$\frac{\varphi(c)[f(c+h) - f(c)] - f(c)[\varphi(c+h) - \varphi(c)]}{h \,.\, \varphi(c+h) \,.\, \varphi(c)} =$$

$$= \frac{\varphi(c) \,.\, \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f(c) \,.\, \frac{\varphi(c+h) - \varphi(c)}{h}}{\varphi(c+h) \,.\, \varphi(c)}.$$

Szukana pochodna będzie granicą tego ilorazu dla $h \to 0$. Otóż dzielna jest różnicą dwóch funkcji. Odjemna $\varphi(c) . \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \to$

$\to \varphi(c) . f'(c)$, zaś odjemnik: $f(c) . \frac{\varphi(c+h) - \varphi(c)}{h} \to f(c) . \varphi'(c)$, gdy $h \to 0$.

Tedy dzielna ma granicę, równą różnicy granic t. j. równą liczbie $\varphi(c) . f'(c) - f(c) . \varphi'(c)$. Obliczmy teraz granicę dzielnika. Skoro według założenia funkcja $\varphi(x)$ ma pochodną w punkcie $x=c$, tedy jest ciągłą dla $x = c$, wskutek czego, gdy $h \to 0$, to funkcja[1]): $\varphi(c+h) \to \varphi(c+0) = \varphi(c)$. Dzielnik zatem: $\varphi(c+h) . \varphi(c) \to \varphi(c) . \varphi(c) = \varphi^2(c)$, co jest według założenia różne od zera; wobec tego granica ilorazu równa się ilorazowi granic dzielnej i dzielnika. Otrzymujemy więc wyrażenie:

$$\frac{\varphi(c) . f'(c) - f(c) . \varphi'(c)}{(\varphi(c))^2},$$

jako pochodną ilorazu funkcji $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ w punkcie $x = c$.

§ 37. Pochodna funkcji goniometrycznych tg$x$ i ctg$x$.

Na podstawie wyprowadzonego wzoru na pochodną ilorazu dwóch funkcji obliczyć możemy łatwo pochodną funkcji $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, zakładając, że $\cos x \neq 0$; mamy:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x . (\sin x)' - \sin x . (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x . \cos x - \sin x . (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Tedy $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ w punktach x, dla których jest $\cos x \neq 0$.

Możemy też wyliczyć pochodną funkcji tg$x$, nie oglądając się na wzór z § 36, a więc wychodząc wprost z definicji pochodnej; otóż jest:

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \frac{1}{h} . \left(\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$\frac{1}{h} . \frac{\sin(x+h) . \cos x - \cos(x+h) . \sin x}{\cos(x+h) . \cos x} = \frac{\sin h}{h} . \frac{1}{\cos(x+h) \cos x}.$$

---

[1]) Zobacz także § 39 o funkcjach złożonych (str. 172).

Otóż, gdy $h \to 0$, to pierwszy czynnik $\frac{\sin h}{h} \to 1$, drugi zaś $\frac{1}{\cos(x+h)\cos x} \to \frac{1}{\cos^2 x}$, jeżeli $\cos x \neq 0$; iloczyn owych czynników ma zatem granicę, równą iloczynowi $1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, jako pochodną funkcji $\operatorname{tg} x$.

Podobnie znajdziemy pochodną funkcji $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, a mianowicie: $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$. Tedy: $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ w punktach x, dla których jest $\sin x \neq 0$.

Widzimy tedy, że funkcja $\operatorname{tg} x$ ma określoną pochodną dla wszystkich liczb x, dla których jest $\cos x \neq 0$, zaś funkcja $\operatorname{ctg} x$ ma pochodną, o ile jest $\sin x \neq 0$.

Otóż jest $\cos x = 0$ jedynie, gdy liczba x równa się nieparzystej wielokrotności liczby $\frac{\pi}{2}$ t. zn. $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, gdzie n oznacza liczbę całkowitą; zaś $\sin x = 0$ daje $x = n\pi$ czyli x jest wielokrotnością liczby π.

Wobec tego udowodniliśmy następujące twierdzenie: *funkcja* $\operatorname{tg} x$ *ma pochodną dla każdej wartości x, różnej od nieparzystych wielokrotności liczby $\frac{\pi}{2}$ i równą:*

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

funkcja $\operatorname{ctg} x$ *ma pochodną dla każdej wartości x, różnej od dowolnych wielokrotności liczby π i równą:*

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

§ 38. Pochodna funkcji wykładniczej.

Weźmy pod uwagę funkcję wykładniczą $y = e^x$ i obliczmy jej pochodną. W tym celu utwórzmy iloraz $\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$.

W § 26 wykazaliśmy, że $\frac{e^h - 1}{h} \to 1$, gdy $h \to 0$; ponieważ zmienna x jest niezależną od zmiennej h, a więc wobec tej ostatniej stałą. przeto dla $h \to 0$ jest $e^x \to e^x$.

Stąd wynika, że: $\frac{e^{x+h} - e^x}{h} \to e^x \,.\, 1 = e^x$. Otrzymaliśmy, że *funkcja wykładnicza ma w każdym punkcie pochodną i równą e^x czyli równą jej samej.* Jest więc

$$(e^x)' = e^x.$$

Funkcja e^x, jak widzimy, ma bardzo specjalną własność, że jej pochodna równa się jej samej. Można się zapytać: czy tylko ona ma tę własność? czy tylko ona spełnia warunek: $(y)' = y$? Wysłowimy dokładniej to zagadnienie: znaleźć wszystkie funkcje y zmiennej x, ciągłe w przedziale (a, b), mające pochodną y' wewnątrz przedziału i taką, iż jest (1) $y' = y$ wewnątrz przedziału (a, b). Oznaczmy przez (Z) zbiór takich funkcji; nie jest pustym, bo do niego należy funkcja e^x. Wyznaczenie zbioru Z wykona czytelnik po przeczytaniu ostatniego rozdziału z łatwością, równanie (1) jest bowiem t. zw. równaniem różniczkowem i do tego bardzo prostego kształtu. Określimy ów zbiór Z obecnie w sposób niemetodyczny.

Ponieważ jest $e^x > 0$, więc funkcja $z = \frac{y}{e^x}$ jest określoną w przedziale (a, b) i nadto mieć będzie pochodną wewnątrz przedziału; jest: $z' = \frac{e^x y' - ye^x}{e^{2x}} = \frac{e^x y - ye^x}{e^{2x}} = 0$. Widzimy tedy, że funkcja z, ciągła w przedziale (a, b), ma wewnątrz przedziału pochodną równą zeru. Na mocy jednego twierdzenia z § 48 (ustęp A) wynika, że funkcja z jest stałą w całym przedziale (a, b); oznaczając tę stałą przez c, otrzymujemy $z = c$, skąd (2) $y = ce^x$. I na odwrót $(ce^x)' = ce^x$. Każda więc funkcja y zbioru Z jest kształtu (2), przyczem c oznacza stałą, którą można dowolnie obrać, wobec czego zbiór (Z) zawiera nieskończenie wiele funkcji.

Weźmy teraz funkcję wykładniczą ogólniejszą $y = a^x$, gdzie jest $a > 0$ i wielkością stałą. Jak wiemy z § 26 jest też $y = e^{x \ln a}$. Następny rozdział pozwoli nam bezpośrednio znaleźć pochodną takiej funkcji; obecnie wyliczymy ją, wychodząc z definicji pochodnej. Jest:

$$\frac{e^{(x+h)\ln a} - e^{x \ln a}}{h} = e^{x \ln a} \cdot \frac{e^{h \ln a} - 1}{h} = \ln a \,.\, e^{x \ln a} \cdot \frac{e^{h \ln a} - 1}{h \ln a} \,.$$

Otóż $\frac{e^{h\,lna}-1}{h\,lna}\to 1$, gdy $h\to 0$ (jak to zresztą zobaczymy w następnym paragrafie). Tedy $(a^x)'=e^{x\,lna}\,.\,lna=a^x\,.\,lna$.

Uw. Pochodna funkcji logarytmicznej będzie podana w następnym rozdziale.

Rozdział VIII. Funkcje: złożone i odwrotne. Funkcje kołowe.

§ 39. Funkcja złożona (funkcja funkcji).

Dotąd poznaliśmy kilka funkcji t. zw. elementarnych czyli prostych, jak funkcje wymierne całkowite, wymierne, trygonometryczne ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$), funkcja wykładnicza e^x, logarytmiczna $ln\,x$. Obecnie zajmiemy się funkcjami, których postać nie jest tak prostą.

Funkcje, które teraz poznamy, będą to funkcje t. zw. złożone.

A) *Przykłady:* I. Przyrząd zwany termografem, składa się w zasadzie z płytki zrobionej z materjału, łatwo rozszerzającego się pod wpływem ciepła; jeden koniec płytki umieszczony jest nieruchomo, drugi zaś połączony systemem dźwigni z przyrządem piszącym. Zależnie od temperatury, zmieniającej się w pewnych granicach, zmienia czuła płytka swą długość, a zależnie od tej zmiany długości wychyla się wskazówka przyrządu piszącego o pewien kąt od pierwotnego położenia. Długość l płytki jest więc funkcją temperatury t; wielkość zaś kąta α, przez wskazówkę zakreślonego, jest funkcją długości l czyli jest: $l=f(t)$, $\alpha=\varphi\,l)$. Możemy więc określić zależność kąta α wprost od temperatury t i napisać, że jest: $\alpha=\varphi[f(t)]$. Kąt α nazwiemy funkcją funkcji zmiennej (t) lub funkcją złożoną zmiennej t.

II. Weźmy pod uwagę funkcję: $z=\sqrt{y-2}\ldots(\alpha)$. Jest rzeczą oczywistą, że tylko dla liczb $y\geqslant 2$ funkcja ta będzie określoną czyli: aby była funkcja (z) określoną, należy wartość na zmienną y wybrać ze zbioru Y liczb rzeczywistych, nie mniejszych od liczby 2. Niech teraz będzie $y=\sin x\ldots$ (β) i weźmy funkcję złożoną: $z=\sqrt{\sin x-2}\ldots(\gamma)$. Ponieważ wielkość $\sin x$ nie może być równą ani większą od liczby 2, przeto funkcja (γ) w żadnym punkcie x nie jest określoną, mimo że funkcje (α) i (β) są określone. Przykład ten zmusza nas więc do pewnej ostrożności, gdy mówić chcemy o funkcji złożonej.

B) *Ścisłe określenie*. Niech będzie funkcja $y = f(x) \dots (1)$ określona, jeśli liczba x należy do pewnego niepustego zbioru liczbowego X. Wtedy wartości y tworzą nowy niepusty zbiór Y_0. Weźmy pod uwagę drugą funkcję: $z = \varphi(y) \dots (2)$, określoną, gdy zmienna y przyjmie jakąkolwiek wartość z pewnego niepustego zbioru liczbowego Y. Określimy teraz nową funkcję zmiennej x, oznaczoną dla liczb zbioru X w sposób następujący: Dla dowolnej wartości x_0 ze zbioru X określamy najpierw wartość na y_0 przy pomocy równości (1) i dla tej wartości y_0 określamy wartość z_0 według równości (2), następnie liczbie x_0 przydajemy liczbę z_0 przez co określamy funkcją zmiennej x dla wszystkich wartości x zbioru X. Aby to jednak było możliwem, potrzeba i zarazem wystarcza, aby każda liczba y_0 zbioru Y_0 należała także do zbioru Y. W ten sposób określoną funkcję z zmiennej x nazywamy funkcją złożoną lub funkcją funkcji zmiennej x i aby wskazać przy pomocy jakich dwóch funkcji została określoną, oznaczymy ją symbolem $z = \varphi(f(x)) \dots (3)$. Właśnie w poprzednim przykładzie II nie był spełniony warunek, że zbiór Y_0 jest częścią zbioru Y.

Dla przykładu rozważmy jeszcze funkcję złożoną $z = ln\left(\frac{e^x - 1}{\sin x}\right)$ i zbadajmy zbiór X_1 liczbowych wartości na (x), dla których ta funkcja (z) jest określoną. Połóżmy $z = ln y$, $y = \frac{e^x - 1}{\sin x}$. Otóż funkcja y jest określoną dla wszelkich wartości zmiennej (x) z wykluczeniem tylko tych, dla których dzielnik staje się zerem; wiemy, że $\sin x = 0$, gdy jest $x = n\pi$, przyczem n oznacza dowolną liczbę całą. Jeżeli przez X oznaczymy zbiór wartości x, dla których funkcja y jest określoną, to zbiór X obejmuje wszystkie liczby rzeczywiste z wykluczeniem wielokrotności liczby π: $n\pi$ czyli liczby x zbioru X spełniać mają warunek $x \neq n\pi$. Aby funkcja $z = ln y$ była określona, potrzeba i wystarcza, by było $y > 0$. Ale, gdy liczbę x wybierzemy ze zbioru X dowolnie, to nie musi być $\frac{e^x - 1}{\sin x} > 0$; aby więc ten warunek był spełniony, trzeba ze zbioru X wybrać nie wszystkie liczby x, ale tylko część zbioru X czyli (jak mówimy) podzbiór X_1, który teraz wyznaczymy.

Owóż jest $\frac{e^x-1}{\sin x}>0$, gdy jest 1) $e^x-1>0$ i zarazem $\sin x>0$ albo 2) $e^x-1<0$ i zarazem $\sin x<0$. W przypadku 1) jest $e^x>1$, co na mocy własności funkcji wykładniczej daje $x>0$. Co do funkcji $\sin x$, to wiemy, że ma okres (perjod) 2π, tedy wystarcza zbadać funkcję $\sin x$ dla wartości x od 0 do 2π; otóż, gdy jest $0<x<\pi$, to jest $\sin x>0$, więc także, gdy jest $2\varkappa\pi<x<\pi+2\varkappa\pi$ czyli gdy $2\varkappa\pi<x<(2\varkappa+1)\pi$, gdzie $\varkappa$ oznacza dowolną liczbę całą dodatnią, ujemną lub zero; a że ma być też $x>0$, więc otrzymuje się warunek $2\varkappa+1>0$, co będzie prawdą dla $\varkappa=0, 1, 2, \ldots$, i to wystarcza. Wolno zatem na zmienną x nadawać wartości spełniające związek $2\varkappa\pi<x<(2\varkappa+1)\pi$ dla wartości $\varkappa=0, 1, 2\ldots$

Przejdźmy teraz do przypadku 2), a więc niech będzie $e^x-1<0$ i zarazem $\sin x<0$. Otóż $e^x<1$ daje $x<0$. Związek $\sin x<0$ daje $\pi<x<2\pi$ albo ogólniej $\pi+2j\pi<x<2\pi+2j\pi$ czyli $(2j+1)\pi<x<(2j+2)\pi$, gdzie j oznacza liczbę całą; zarazem ma być $x<0$, tedy $(2j+1)\pi<0$ czyli $2j+1<0$, co jest prawdą dla $j=-1, -2, -3, \ldots$ i to wystarcza.

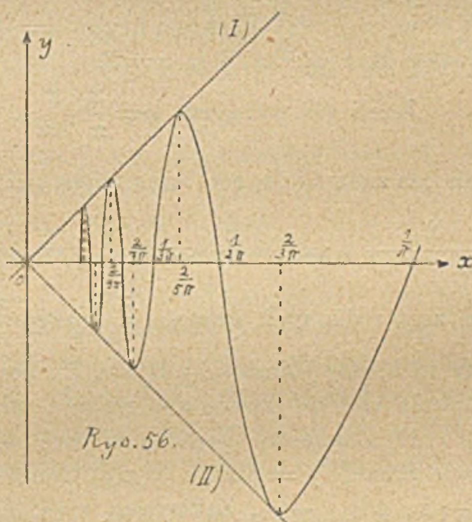
Ostatecznie otrzymujemy, że zbiór (X_1) liczb x, dla których określona jest funkcja $z=ln\left(\frac{e^x-1}{\sin x}\right)$, składa się z liczb dodatnich x spełniających związek $2\varkappa\pi<x<(2\varkappa+1)\pi$ dla $\varkappa=0, 1, 2, \ldots$ i z liczb ujemnych x, spełniających związek $(2j+1)\pi<x<(2j+2)\pi$ dla $j=-1, -2, -3\ldots$

W podobny sposób niech czytelnik zbada funkcje złożone

1) $z=\sqrt{1-lnx}$, 2) $z=ln(lnx)$, 3) $z=ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

C) Zajmiemy się teraz sprawą następującą: jeżeli $x\to x_0$, niech $f(x)\to y_0$; jeżeli $y\to y_0$, niech $\varphi(y)\to z_0$; czy na podstawie tych założeń można twierdzić, że dla $x\to x_0$ jest $\varphi(f(x))\to z_0$. Innemi słowy zajmiemy się granicą funkcji złożonej. Na przykładzie, który zaraz podamy, wykażemy, że to twierdzenie jest nie słuszne, że potrzeba dalszych założeń.

Przykład. Niech będzie dla liczb $x\neq 0$ określona funkcja $y=x\sin\frac{1}{x}$. Nakreślimy obraz tej funkcji. Ponieważ jest $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$, więc $|y|\leqslant|x|$, co wykazuje, że się obraz mieści w polu między dwusiecznemi kątów, zamkniętych przez osie układu, przyczem na tem polu leży oś x. Poza to pole krzywa nie wychodzi. Nadto, jeżeli zamiast (x) położymy $(-x)$, to wartość funkcji będzie ta sama, bo $(-x) \cdot \sin\left(\frac{1}{-x}\right) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; innemi słowy oś rzędnych jest osią symetrji krzywej i wskutek tego wystarczy zbadać krzywą dla dodatnich wartości na zmienną (x). Zbadajmy punkty, w których krzywa przecina oś x; będą to punkty, których odcięte x spełniają równanie $y = 0$ czyli $x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$, a że jest $x > 0$, więc otrzymujemy $\sin\frac{1}{x} = 0$, przeto jest $\frac{1}{x} = n\pi$, gdzie n oznacza liczbę naturalną. Jest więc $x = \frac{1}{n\pi}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$. W tych punktach przecina krzywa oś x i, jak widać, punkty te zagęszczają się ku punktowi $x = 0$. Wykazaliśmy, że jest $|y| \leqslant |x|$, a że jest $x > 0$, więc $|y| \leqslant x$ czyli $-x \leqslant y \leqslant x$. Wyszukajmy punkty krzywej, które leżą na dwusiecznej (I) $y = x$. Otóż mamy mieć $x \sin\frac{1}{x} = x$, skąd z powodu nierówności $x > 0$ otrzymujemy $\sin\frac{1}{x} = 1$ czyli $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$ co daje $x = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \ldots$; dla tych odciętych punkty krzywej leżą na dwusiecznej (I). Kładąc $x \sin\frac{1}{x} = -x$, otrzymujemy $\sin\frac{1}{x} = -1$, skąd $\frac{1}{x} = +\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$ czyli $x = \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots$; dla tych odciętych punkty leżą na dwusiecznej (II), (rys. 56). Widoczne, że, gdy $x \to 0$, będzie $y \to 0$.



Rys. 56.

Niech będzie daną druga funkcja, określona w ten sposób: gdy jest $y \neq 0$ ma być $z = \frac{\sin y}{y}$, zaś dla $y = 0$ niech będzie $z = 2$. Wiemy już (§ 5), że przez to jest określoną funkcja (z) zmiennej (y) dla każdej wartości tej zmiennej. Ponadto, gdy $y \to 0$, to $z \to 1$. Te dwie funkcje pozwalają określić funkcję złożoną, funkcję (z) zmiennej (x), mającą oznaczoną wartość dla wszystkich wartości x, byle było $x \neq 0$. Jednakowoż zaraz wykażemy, że, gdy $x \to 0$, to funkcja złożona z nie dąży do granicy 1, bo nie dąży do żadnej granicy.

Rzeczywiście, niech będzie $x = \frac{1}{n\pi}$, gdzie n oznacza liczbę naturalną; wtedy jest $y = \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi) = 0$ i przeto będzie $z = 2$. W dowolnej więc bliskości liczby $x = 0$ (trzeba tylko obrać liczbę n dostatecznie wielką) jest $z = 2$.

Jeżeli zaś położymy $x = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \ldots$ czyli $x = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, gdzie n oznacza znów liczbę naturalną, to jest $y = \frac{2}{(4n+1)\pi} \cdot \sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, więc dla $n \to \infty$ dąży wartość y do zera, będąc stale różną od zera i dla tych wartości y funkcja $\frac{\sin y}{y}$ przyjmuje wartości coraz to bliższe jedności (zob. str. 73, przykład 6). Widzimy tedy, że funkcja złożona (z) nie ma granicy, gdy $x \to 0$.

D) Zbadajmy więc tę sprawę dokładnie. Niech będą dane dwie funkcje $y = f(x)$, $z = \varphi(y)$. Niech $y \to y_0$, gdy $x \to x_0$ i niech $z \to z_0$, gdy $y \to y_0$. Zakładamy więc: 1) funkcja $f(x)$ jest określona dla wszystkich wartości x pewnego sąsiedztwa punktu x_0 czyli zakładamy, że istnieje liczba $\delta_1 > 0$ taka, iż funkcja $f(x)$ jest określoną dla wszystkich liczb (x) spełniających nierówność $0 < |x - x_0| < \delta_1$; zbiór tych liczb x oznaczmy przez $X(\delta_1)$. Dla tych wartości x przyjmuje funkcja $f(x)$ wartości, które tworzą zbiór $Y(\delta_1)$. W punkcie x_0 może być funkcja $f(x)$ nieokreśloną. 2) Zakładamy dalej, że funkcja $\varphi(y)$ jest określoną dla wszystkich wartości y pewnego sąsiedztwa punktu y_0 czyli zakładamy, że istnieje liczba $\delta_2 > 0$ taka, iż dla wszystkich liczb y, spełniających związek $0 < |y - y_0| < \delta_2$, jest funkcja $\varphi(y)$ określoną.

Liczby y, spełniające nierówność $0 < |y - y_0| < \delta_2$ niech tworzą zbiór $H(\delta_2)$. W punkcie y_0 funkcja $\varphi(y)$ może być nieokreśloną.

Wobec tego, że badać mamy granicę funkcji złożonej $\varphi(f(x))$ dla $x \to x_0$ i wobec przykładu pod C), powinniśmy dalsze poczynić założenia i takie, żeby a) funkcja złożona $\varphi(f(x))$ była określoną w pewnem sąsiedztwie punktu x_0 i b) żeby istniała granica $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(f(x))$ i c) żeby ta granica była równą liczbie z_0.

Wykażemy, że w tym celu wystarczy założyć, że istnieje taka liczba $\delta_1 > 0$, iż zbiór $Y(\delta_1)$ nie zawiera liczby y_0. Innemi słowy dowodzimy następującego twierdzenia: *jeżeli dane funkcje $y = f(x)$, $z = \varphi(y)$ mają tę własność, że $f(x) \to y_0$, gdy $x \to x_0$ i $\varphi(y) \to z_0$, gdy $y \to y_0$ i jeżeli istnieje liczba dodatnia δ_1 taka, że dla liczb x, spełniających nierówność $0 < |x - x_0| < \delta_1$, jest $f(x) \neq y_0$, to istnieje liczba dodatnia δ_0 taka, że dla liczb x o własności $0 < |x - x_0| < \delta_0$ jest określoną funkcja złożona $\varphi(f(x))$, istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(f(x))$ i jest równą liczbie z_0.*

Dowód. Skoro $\varphi(y) \to z_0$, gdy $y \to y_0$, więc istnieje liczba $\delta_2 > 0$ taka, że dla liczby y ze zbioru $H(\delta_2)$ jest funkcja $\varphi(y)$ określoną; ponieważ $f(x) \to y_0$, gdy $x \to x_0$, więc do liczby $\delta_2 > 0$ można dobrać liczbę δ_0 taką, że jest $0 < \delta_0 \leqslant \delta_1$ i że dla liczb x ze zbioru $X(\delta_0)$ jest $|f(x) - y_0| < \delta_2$, co na mocy założenia, że jest $f(x) \neq y_0$ dla liczb x ze zbioru $X(\delta_1)$, można przepisać w dokładniejszej postaci $0 < |f(x) - y_0| < \delta_2$, a więc liczby $f(x)$ należą do zbioru $H(\delta_2)$, gdy liczba x należy do zbioru $X(\delta_0)$. Tem samem wykazaliśmy, że funkcja $\varphi(f(x))$ jest określoną dla liczb x ze zbioru $X(\delta_0)$. Wykażemy jeszcze, że istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(f(x))$ i równą liczbie z_0. Skoro bowiem: $f(x) \to y_0$, gdy $x \to x_0$ i $\varphi(y) \to z_0$, gdy $y \to y_0$, tedy do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jest $|\varphi(y) - z_0| < \varepsilon$, skoro jest $0 < |y - y_0| < \delta$ i do każdej liczby $\varepsilon' > 0$ istnieje liczba δ' o własności $0 < \delta' \leqslant \delta_0$ i taka, że jest $|f(x) - y_0| < \varepsilon'$ gdy jest $0 < |x - x_0| < \delta'$. Na mocy założenia jest $0 < |f(x) - y_0|$, a więc jest $0 < |f(x) - y_0| < \varepsilon'$. Otóż obierzmy $\varepsilon' = \delta$, co wolno; więc mamy:

$$|\varphi(y) - z_0| < \varepsilon, \; 0 < |y - y_0| < \delta, \; 0 < |f(x) - y_0| < \delta, \; 0 < |x - x_0| < \delta'.$$

Tedy wolno przyjąć $y = f(x)$ i jest $|\varphi(f(x)) - z_0| < \varepsilon$, gdy jest $0 < |x - x_0| < \delta'$, o co chodziło.

Twierdzenie, dopiero co udowodnione, podaje warunki wystarczające na to, by zachodził wniosek twierdzenia, możliwe są też inne warunki wystarczające.

Otóż z dowodu ostatniego twierdzenia widoczna rzecz następująca: gdy opuścimy założenie, że istnieje liczba dodatnia δ_1 taka, iż dla liczb x zbioru $X(\delta_1)$ jest $f(x) \neq y_0$, a więc jeżeli w dowolnej „bliskości" liczby x_0 istnieją liczby $\bar{x}$ takie, że jest $f(\bar{x}) = y_0$, to funkcja złożona $\varphi(f(x))$ będzie określoną w pewnem sąsiedztwie punktu x_0 tylko, gdy funkcja $\varphi(y)$ jest określoną w punkcie y_0. Aby jeszcze $\varphi(f(x)) \to z_0$, gdy $x \to x_0$, dość założyć, że $\varphi(y_0) = z_0$ t. zn. funkcja $\varphi(y)$ dąży do granicy $\varphi(y_0)$, równej wartości funkcji, co równoważne założeniu, że funkcja $\varphi(y)$ jest ciągłą w punkcie y_0.

Możemy wobec tych wyjaśnień uważać następujące twierdzenie za prawdziwe: *jeżeli $f(x) \to y_0$, gdy $x \to x_0$, zaś funkcja $\varphi(y)$ jest ciągłą w punkcie y_0, to istnieje liczba dodatnia δ_0 taka, że funkcja złożona $\varphi(f(x))$ jest określoną, o ile jest $0 < |x - x_0| < \delta_0$, nadto istnieje granica* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(f(x))$ *i równa liczbie* $\varphi(y_0)$.

Załóżmy wreszcie, że funkcja $f(x)$ w punkcie x_0 jest ciągłą i niech $y_0 = f(x_0)$; następnie przypuśćmy, że funkcja $\varphi(y)$ w punkcie y_0 jest również ciągłą. Wtedy istnieje takie sąsiedztwo punktu x_0, że w tym sąsiedztwie i w samym punkcie x_0 funkcja złożona $\varphi(f(x))$ jest określoną. Ponadto do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że, gdy jest $|y - y_0| < \delta$, to jest $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. Do liczby $\delta > 0$ istnieje w dalszym ciągu liczba δ' taka, że dla liczb $|x - x_0| < \delta'$ jest $|f(x) - f(x_0)| < \delta$ czyli $|f(x) - y_0| < \delta$. Tedy wolno przyjąć $f(x) = y$ i dla $|x - x_0| < \delta'$ mamy $|\varphi(f(x)) - \varphi(y_0)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon$, co wykazuje, że funkcja złożona $\varphi(f(x))$ jest funkcją ciągłą w punkcie x_0. Własność tę zwykle wypowiada się krótko (acz nieściśle): *funkcja ciągła funkcji ciągłej jest również funkcją ciągłą.*

Uwaga. Czytelnik dobrze uczyni, jeżeli obecnie ponownie odczyta rozumowanie dotyczące pochodnej iloczynu funkcji (§ 32), funkcji $\sin x$ i $\cos x$ (§ 33) i ilorazu dwóch funkcji (§ 34).

E) Zajmiemy się obecnie pochodną funkcji złożonej. Udowodnimy twierdzenie: *jeżeli funkcja $f(x)$ ma pochodną $f'(x_0)$ w punkcie x_0 i jeżeli funkcja $\varphi(y)$ ma pochodną $\varphi'(y_0)$ w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $\varphi(f(x))$ ma pochodną w punkcie x_0 i równą iloczy-*

nowi $\varphi'(y_0) \cdot f'(x_0)$ *czyli równą iloczynowi* $\varphi'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. Jest więc $(\varphi(f(x)))' = \varphi'(f(x)) \cdot f'(x)$ dla wartości $x = x_0$.

Dowód. Ponieważ istnieją pochodne $f'(x_0)$ i $\varphi'(y_0)$, więc funkcja $f(x)$ jest ciągłą w punkcie x_0, zaś funkcja $\varphi(y)$ jest ciągłą w punkcie $y = y_0$; a ponieważ $y_0 = f(x_0)$, więc na podstawie rozważań pod (D) istnieje sąsiedztwo punktu x_0 takie, że dla jego punktów i dla punktu (x_0) jest funkcja złożona $\varphi(f(x))$ określoną i ciągłą w punkcie x_0. Utwórzmy iloraz różnicowy:

$$\frac{\varphi[f(x_0+h)] - \varphi[f(x_0)]}{h},$$

gdzie h oznacza liczbę różną od zera i dość małą, by funkcja złożona $\varphi[f(x_0+h)]$ miała określoną wartość. Oznaczmy przez $Z(\delta)$ zbiór wszystkich liczb rzeczywistych h o własności $0 < |h| < \delta$. Zbadajmy równość (I): $f(x_0+h) = f(x_0)$; dla jakich liczb h zachodzi? Oczywiście możliwe są dwa przypadki: 1) albo istnieje liczba dodatnia δ taka, że dla żadnej liczby h ze zbioru $Z(\delta)$ nie jest słuszną równość (I) albo 2) takiej liczby δ nie ma.

W przypadku 1) jest więc dla wszystkich liczb h zbioru $Z(\delta)$ stale $f(x_0+h) \neq f(x_0)$, wolno więc napisać: (II)...

$$\frac{\varphi[f(x_0+h)] - \varphi[f(x_0)]}{h} = \frac{\varphi[f(x_0+h)] - \varphi[f(x_0)]}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Mamy obliczyć granicę iloczynu po stronie prawej, gdy $h \to 0$. Otóż drugi czynnik na mocy założenia ma granicę, równą pochodnej $f'(x_0)$; obliczmy jeszcze granicę pierwszego czynnika strony prawej równości (II), gdy $h \to 0$. W tym celu wprowadźmy w tok rozumowania pomocniczą funkcję $\psi(y)$, określoną wzorem: $\psi(y) = \dfrac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0}$; jest określoną dla punktów y ze sąsiedztwa punktu y_0; na mocy założenia widocznie $\psi(y) \to \varphi'(y_0)$, gdy $y \to y_0$. Czynnik pierwszy prawej strony wzoru II ma właśnie postać $\psi[f(x_0+h)]$, a więc jest funkcją złożoną zmiennej h. Zauważmy, że funkcja $f(x)$ ma pochodną $f'(x_0)$, a więc jest funkcją ciągłą w punkcie x_0, zaś dwumian (x_0+h), jest funkcją ciągłą zmiennej h w punkcie $h = 0$, więc na mocy rozważań pod D) jest funkcja $f(x_0+h)$ funkcją ciągłą zmiennej h w punkcie $h = 0$, przeto $f(x_0+h) \to f(x_0) = y_0$, gdy $h \to 0$, nadto $\psi(y) \to \varphi'(y_0)$, gdy $y \to y_0$; ponieważ $f(x_0+h) \neq y_0$ dla wszystkich liczb h zbioru $Z(\delta)$, tedy, stosując pierwsze z twierdzeń pod D), otrzymujemy, że istnieje granica $\lim\limits_{h\to 0}\psi[f(x_0+h)]$ i równa liczbie $\varphi'(y_0)=\varphi'[f(x_0)]$. Czynnik pierwszy strony prawej związku II ma więc granicę. Wobec twierdzenia o granicy iloczynu funkcji (str. 39) jesteśmy pewni, że istnieje granica strony prawej, a więc też i lewej strony wzoru II, co wykazuje, że w przypadku 1) funkcja złożona $\varphi[f(x)]$ ma pochodną w punkcie x_0 i równą:

$$\text{(III)} \qquad (\varphi[f(x)])'_{x=x_0}=\varphi'[f(x_0)]\cdot f'(x_0).$$

przyczem po lewej stronie związku III napisano u dołu równość $x=x_0$ na znak, że pochodna po lewej stronie ma być obliczona w punkcie $x=x_0$.

Przejdźmy do przypadku 2); wykażemy, że związek III nadal jest prawdziwym.

W przypadku 2-gim zbiór $Z(\delta)$ dla każdej liczby dodatniej δ (może nie zbyt wielkiej) zawiera liczby h, dla których jest $f(x_0+h)=f(x_0)$. Zbiór $Z(\delta)$ rozłóżmy tedy na dwa zbiory: do zbioru $Z'(\delta)$ zaliczmy każdą liczbę h zbioru $Z(\delta)$, dla której jest $f(x_0+h)=f(x_0)$; do zbioru $Z''(\delta)$ zaliczmy zaś każdą liczbę h zbioru $Z(\delta)$, dla której jest $f(x_0+h)\neq f(x_0)$. Otóż wszystkie elementy zbiorów $Z'(\delta)$ i $Z''(\delta)$ dadzą wszystkie elementy zbioru $Z(\delta)$, co symbolicznie wyrazimy w sposób następujący: $Z(\delta)=Z'(\delta)+$ $+Z''(\delta)$. W przypadku 1) istniała liczba dodatnia δ taka, iż zbiór $Z'(\delta)$ był pustym, obecnie nie jest pustym przy żadnej wartości dodatniej δ. Ale zbiór $Z''(\delta)$ może być pustym i dlatego należy odróżnić dwa podprzypadki: (2,1) albo istnieje dodatnia liczba δ_0 taka, że zbiór $Z''(\delta_0)$ jest pustym albo (2,2) takiej liczby δ_0 nie ma, a więc zbiór $Z''(\delta)$ przy żadnej wartości dodatniej δ nie jest pustym.

Zwróćmy się najpierw do przypadku (2,1). Z łatwością widać, że wtedy każdy zbiór $Z''(\delta)$ będzie pustym, gdy jest $0<\delta\leqq\delta_0$ i cały zbiór $Z(\delta)$ redukuje się do zbioru $Z'(\delta)$. A więc jest $f(x_0+$ $+h)=f(x_0)$, gdy jest $0<|h|<\delta_0$, co wyraża, że funkcja $f(x)$ jest stałą w pewnym przedziale. Mamy więc:

$$\frac{\varphi[f(x_0+h)]-\varphi[f(x_0)]}{h}=0, \text{ gdy jest } 0<|h|<\delta_0,$$

przeto też i granica:

$$(\varphi[f(x)])'_{x=x_0}=0$$

czyli strona lewa związku III jest zerem. Jest dalej $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$ $=0\to 0$ czyli $f'(x_0)=0$, zaś $\varphi'[f(x_0)]=\varphi'(y_0)$ oznacza według założenia określoną liczbę, więc prawa strona wzoru III wynosi: $\varphi'(y_0)\,.\,0=0$. Innemi słowy związek III jest słusznym w podprzypadku (2,1).

Zajmijmy się z kolei podprzypadkiem (2,2), w którym dla żadnej dodatniej wartości δ nie jest ani zbiór $Z'(\delta)$ ani zbiór $Z''(\delta)$ pustym. Czyli w dowolnej „bliskości“ punktu $h=0$ leżą i punkty zbioru $Z'(\delta)$ [dla których jest $f(x_0+h)=f(x_0)$] i punkty zbioru $Z''(\delta)$ [dla których jest $f(x_0+h)\neq f(x_0)$], gdzie δ oznacza pewną liczbę dodatnią.

Wykażemy, że $f'(x_0)=0$. Jest bowiem $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\to f'(x_0)$, gdy $h\to 0$; niech h_n oznacza nieskończony ciąg liczb ze zbioru $Z'(\delta)$ taki, że $\lim h_n=0$, gdy $n\to\infty$. Taki ciąg będzie istniał, jak łatwo niewprost wykazać. Otóż jest $\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\to f'(x_0)$ (zob. str. 73, przykład 6), ale jest $f(x_0+h_n)-f(x_0)=0$, dla $n=1, 2,\ldots$; przeto $\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\to 0$, gdy $n\to\infty$, a że ciąg dwóch różnych granic mieć nie może, więc jest $f'(x_0)=0$. Ponieważ dalej $\varphi'(y_0)=$ $=\varphi'[f(x_0)]$ jest liczbą określoną, więc prawa strona związku III ma wartość zero; pragniemy jeszcze wykazać, że też strona lewa przedstawia liczbę zero t. zn. chcemy wykazać, że w obecnym podprzypadku

$$\text{(IV)}\qquad \frac{\varphi[f(x_0+h)]-\varphi[f(x_0)]}{h}\to 0,\ \text{gdy } h\to 0.$$

Weźmy więc zbiór $Z(\delta)$ pod uwagę, przyczem liczba dodatnia δ ma być taką, że $f(x_0+h)$, $\varphi[f(x_0+h)]$ przedstawiają liczby określone dla wszystkich liczb h zbioru $Z(\delta)$; taka liczba δ istnieje. Albo liczba h ze zbioru $Z(\delta)$ należy do zbioru $Z'(\delta)$ albo do zbioru $Z''(\delta)$.

a) Niech liczba h należy do zbioru $Z'(\delta)$, wtedy jest $f(x_0+h)=$ $=f(x_0)$ i wskutek tego $\varphi[f(x_0+h)]=\varphi[f(x_0)]$, wobec czego:

$$\text{(V)}\qquad \frac{\varphi[f(x_0+h)]-\varphi[f(x_0)]}{h}=0 \text{ dla liczb } h \text{ ze zbioru } Z'(\delta).$$

b) Niech teraz liczba h należy do zbioru $Z''(\delta)$ t. zn. jest $f(x_0+h) \neq f(x_0)$; dla takich liczb h dozwolonem jest przekształcenie algebraiczne (II) i wobec tego znajdźmy górny kraniec obu czynników prawej strony wzoru II.

Odnośnie do pierwszego czynnika zauważmy, że jest:

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0} \to \varphi'(y_0), \text{ gdy } y \to y_0$$

t. zn. dla każdej liczby dodatniej ε, a więc też dla liczby $\varepsilon = 1$ istnieje liczba $\delta_1 > 0$ taka, że jest:

$$\left|\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0} - \varphi'(y_0)\right| < 1, \text{ gdy jest } 0 < |y-y_0| < \delta_1;$$

ponieważ jest:

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0} = \left[\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0} - \varphi'(y_0)\right] + \varphi'(y_0), \text{ więc też będzie:}$$

$$\text{(VI)} \quad \left|\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}\right| \leqslant \left|\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0} - \varphi'(y_0)\right| + |\varphi'(y_0)| < 1 + |\varphi'(y_0)|;$$

gdy jest $0 < |y-y_0| < \delta_1$. Wiemy dalej, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w punkcie x_0, przeto dla każdej liczby dodatniej ε, a więc i dla liczby $\varepsilon = \delta_1$ (dopieroco otrzymanej) istnieje liczba $\delta_2 > 0$ taka, że jest: $|f(x_0+h) - f(x_0)| < \delta_1$, gdy jest $0 < |h| < \delta_2$; ponieważ rozważamy obecnie nie wszystkie liczby h, ale tylko takie, które należą do zbioru $Z''(\delta)$, więc będzie:

$$\text{(VII)} \quad 0 < |f(x_0+h) - f(x_0)| < \delta_1, \text{ gdy jest } 0 < |h| < \delta_2$$

i gdy liczba h należy do zbioru $Z''(\delta_2)$. Ponieważ $y_0 = f(x_0)$, więc na mocy związku VII wolno przyjąć $y = f(x_0+h)$, gdy liczba h należy do zbioru $Z''(\delta_2)$ i zarazem wolno stosować nierówność (VI), a więc:

$$\text{(VIII)} \quad \left|\frac{\varphi[f(x_0+h)] - \varphi[f(x_0)]}{f(x_0+h) - f(x_0)}\right| < 1 + |\varphi'(y_0)|;$$

gdy liczba h należy do zbioru $Z''(\delta_2)$. Tem samem znaleźliśmy górny kraniec pierwszego czynnika prawej strony wzoru III.

Zauważmy z kolei, że jest $f'(x_0) = 0$, więc dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta_3 > 0$ taka, że jest

$$\text{(IX)} \quad \left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right| = \left|\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right| < \varepsilon,$$

gdy liczba h należy do zbioru $Z(\delta_3)$. Niech będzie $\delta_0 = \mathrm{Min}(\delta_2, \delta_3)$, to $\delta_0 > 0$.

Jeżeli więc liczba h należy do zbioru $Z''(\delta_0)$, to na mocy związków VIII i IX jest:

$$\left|\frac{\varphi[f(x_0+h)]-\varphi[f(x_0)]}{f(x_0+h)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| < \varepsilon[1+|\varphi'(y_0)|],$$

a więc ze względu na II mamy:

$$\text{(X)} \qquad \left|\frac{\varphi[f(x_0+h)]-\varphi[f(x_0)]}{h}\right| < \varepsilon[1+|\varphi'(y_0)|].$$

Obierzmy liczbę $\eta > 0$ dowolnie, dla niej wybierzmy liczbę ε tak, by było:

$$\text{(XI)} \qquad \varepsilon = \frac{\eta}{1+|\varphi'(y_0)|},$$

wtedy jest $\varepsilon > 0$ i do niej wyznaczymy liczbę $\delta_0 > 0$, jak to wyżej uczyniliśmy; dla wszystkich liczb h zbioru $Z''(\delta_0)$ będzie na mocy związku X i XI

$$\text{(XII)} \qquad \left|\frac{\varphi[f(x_0+h)]-\varphi[f(x_0)]}{h}\right| < \eta;$$

zaś dla liczb h ze zbioru $Z'(\delta)$, a więc i ze zbioru $Z'(\delta_0)$ zachodzić będzie równość V, przeto także nierówność XII, która tedy zachodzi dla wszystkich h ze zbiorów $Z'(\delta_0)$ i $Z''(\delta_0)$, a więc dla wszystkich liczb h ze zbioru $Z(\delta_0)$; dla każdej więc liczby $\eta > 0$ istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, że zachodzi nierówność XII, o ile jest $0 < |h| < \delta_0$. To zaś dowodzi związku IV, który mieliśmy jeszcze wykazać. Tem samem udowodniliśmy wzór III i w podprzypadku (2,2). Wskutek tego też twierdzenie należy uważać za udowodnione.

Rozpatrzmy jeszcze wzór III; pozwala on obliczyć pochodną funkcji $\varphi(y)$ względem zmiennej x, gdy y uważamy za funkcję zmiennej x, a nie za zmienną niezależną; pierwszy czynnik prawej strony jest wartością pochodnej $\varphi'(y)$ dla $y = y_0$, pochodnej więc $\varphi'(y)$, w której y należy uważać za zmienną niezależną. Później (§ 44) podamy mnemotechniczną regułą dla zapamiętania wzoru III, nadzwyczaj ważnego dla rachunku różniczkowego.

F) Dotąd tworzyliśmy funkcję złożoną przy pomocy dwóch funkcji; można jednak rzecz uogólnić i rozważać (n) funkcji:

$y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(y_1)$, $y_3 = f_3(y_2), \ldots, y_n = f_n(y_{n-1})$; utwórzmy funkcję złożoną, której symbol $f_n(f_{n-1}(\ldots.(f_2(f_1(x)))\ldots.))$ sam się tłómaczy. Nie będziemy szukali warunków określoności takiej funkcji, zostawiamy to czytelnikowi. Metodą indukcji wykaże także czytelnik, że pochodna takiej funkcji złożonej względem x równa się iloczynowi $f'_n(y_{n-1}) \cdot f'_{n-1}(y_{n-2}) \ldots f'_2(y_1) f'_1(x)$, o ile te pochodne istnieją.

G) *Przykład I.* Obliczmy dla przykładu pochodną funkcji $z = \sin(x^2)$. Czytelnik niech położy $z = \sin y$, $y = x^2$; będzie tedy $z' = \cos(x^2) \cdot 2x = 2x\cos(x^2)$.

Przykład II. Obliczmy pochodną funkcji logarytmicznej $y = ln x$. W tym celu utwórzmy iloraz różnicowy $\frac{ln(x+h) - ln x}{h}$ $= \frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$, gdzie jest $x > 0$, $x + h > 0$, $h \neq 0$. Aby obliczyć granicę ostatniego wyrażenia, zastosujemy twierdzenie o granicy funkcji złożonej (ustęp D).

Otóż udowodniliśmy w § 26, że funkcja $\frac{e^y - 1}{y} \to 1$, gdy $y \to 0$, przeto także funkcja $\frac{y}{e^y - 1} \to 1$, gdy $y \to 0$. Połóżmy $y = ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$, skąd $h = x\,(e^y - 1)$.

Jest $y \to 0$, gdy $h \to 0$, zaś wielkość x jest stałą. Ponieważ jest $y = 0$ czyli $ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = 0$ jedynie dla $h = 0$, więc wolno stosować twierdzenie o granicy funkcji złożonej. Mamy więc:

$$\frac{y}{e^y - 1} = \frac{ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{e^{ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)} - 1} = \frac{ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{1 + \frac{h}{x} - 1} = \frac{\frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \to 1, \text{ gdy } h \to 0,$$

a że jest $\frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{\frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x}$, więc widoczne, że jest: $\frac{1}{h} ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \to 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. Tem samem otrzymaliśmy pochodną funkcji logarytmicznej, a mianowicie:

$$(ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Równość tę otrzymamy w § 41 na innej drodze, ogólniejszej, a więc bardziej interesującej.

§ 40. Różniczkowanie funkcji (zob. § 32—38).

Przykład I. Gdy n oznacza liczbę naturalną, to pochodną funkcji x^n określa wzór $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Weźmy teraz pod uwagę funkcję x^α, gdzie α oznacza dowolną liczbę rzeczywistą i gdzie przeto będzie $x > 0$. Otóż, aby znaleźć pochodną funkcji x^α, połóżmy $e^y = x^\alpha$ i wyszukajmy liczbę y. Ponieważ jest $x^\alpha > 0$, tedy (§ 25) liczba y istnieje i jest jednoznacznie określoną. Biorąc logarytm naturalny ostatniej równości, otrzymujemy: $y = \alpha ln x$; będzie więc $x^\alpha = e^{\alpha ln x}$. Ostatni związek pozwoli nam znaleźć pochodną funkcji x^α na podstawie wzoru na pochodną funkcji złożonej (§ 39, E).

Ponieważ funkcja e^u ma pochodną względem (u), funkcja $\alpha ln x$ ma pochodną względem x, więc funkcja x^α ma pochodną względem x i będzie

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha ln x})' = e^{\alpha ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

czyli $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$; wzór więc dawniej udowodniony dla liczb naturalnych α okazał się prawdziwym dla każdej liczby rzeczywistej α przy założeniu, że jest $x > 0$.

Stąd więc $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dla $x > 0$.

Przykład II. Zróżniczkujmy funkcję złożoną $z = x^x$ dla $x > 0$. W tym celu kładziemy $x^x = e^y$ (1); ponieważ $x^x > 0$, więc liczba y, spełniająca równanie (1), będzie istniała. Logarytmując równanie (1) obustronnie, otrzymujemy $x ln x = y$ (2) i stąd: $y = x ln x$, co, wstawione w równość (1), daje: $x^x = e^{x ln x}$ (3). Biorąc pochodną mamy: $(x^x)' = (e^{x ln x})' = e^{x ln x} \cdot \left(ln x + \frac{1}{x} \cdot x\right) = x^x(ln x + 1)$; jest więc: $(x^x)' = x^x(ln x + 1)$.

Przykład III. Obliczmy pochodną funkcji a^x, gdy jest $a > 0$. Wykazaliśmy w § 26, że jest $a^x = e^{x ln a}$. Tedy $(a^x)' = (e^{x ln a})' = e^{x ln a} \cdot (x ln a)' = e^{x ln a} \cdot ln a = a^x ln a$. Jest przeto:

$$(a^x)' = a^x ln a.$$

Przykład IV. Obliczmy pochodną funkcji $z = ln\left(\frac{e^x-1}{\sin x}\right)$. Aby znaleźć jej pochodną, uczyni początkujący dobrze jeżeli położy $y = \frac{e^x-1}{\sin x}$ i napisze

$$\left[ln\left(\frac{e^x-1}{\sin x}\right)\right]' = \left(ln\, y\right)'_{y=\frac{e^x-1}{\sin x}} \cdot \left(\frac{e^x-1}{\sin x}\right)' \ldots\ldots (4),$$

przyczem znak $\left(ln\, y\right)'_{y=\frac{e^x-1}{\sin x}}$ oznacza, że należy znaleźć pochodną funkcji $ln\, y$ względem zmiennej y, a potem za literę y podstawić iloraz $\frac{e^x-1}{\sin x}$. Jeżeli tak uczynimy, to najpierw otrzymamy $\frac{1}{y}$, a po podstawieniu $\frac{\sin x}{e^x-1}$. Drugi czynnik prawej strony wzoru (4) otrzymamy, obliczając pochodną ilorazu, przeto:

$$\left(\frac{e^x-1}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x\,.\,(e^x-1)' - (e^x-1)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin x\,.\,e^x - (e^x-1)\cos x}{\sin^2 x}.$$

Ostatecznie mamy:

$$\left[ln\left(\frac{e^x-1}{\sin x}\right)\right]' = \frac{\sin x\,.\,e^x - (e^x-1)\cos x}{(e^x-1)\sin x} = \frac{e^x}{e^x-1} - \operatorname{ctg} x.$$

Niech czytelnik zbada, dla jakich wartości x jest funkcja i jej pochodna określoną.

§ 41. Funkcja odwrotna.

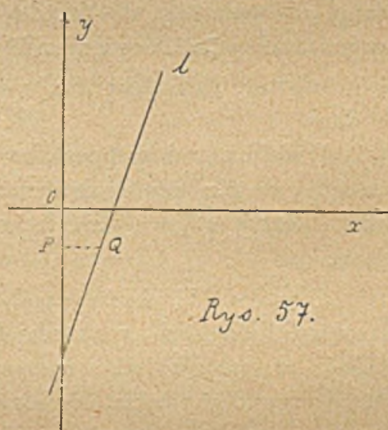
Niech będzie dana funkcja $y = f(x)$, określona dla wszystkich liczb x przedziału (a, b). Przy pomocy tej funkcji możemy określić „tysiące" innych. Możemy n. p. rozważać funkcje $z_1 = (f(x))^2$, $z_2 = (f(x))^3$, $z_3 = \sqrt{f(x)}$, $z_4 = \sin(f(x))$, $z_5 = \operatorname{tg}(f(x))$, $z_6 = \frac{1}{f(x)}$... itd. Czy wszystkie te funkcje złożone są określone dla wszystkich liczb x przedziału (a, b), to jest kwestją, która w każdym przypadku osobno musi być badaną.

W pewnych przypadkach funkcja $y = f(x)$ pozwala nam jeszcze określić nową funkcję, którą poznamy najpierw na przykładzie.

Przykład I. Weźmy funkcję $y = 3x - 2$; dla każdej liczby rzeczywistej x jest określona wartość liczby y; obrazem tej funkcji na płaszczyźnie (x, y) jest prosta (l). Każda prosta prostopadła do osi x, a leżąca w płaszczyźnie (x, y) przecina prostą (l) w jednym punkcie, co wyraża geometrycznie tę własność, że do każdej liczby (x) należy jedna wartość zmiennej (y) (rys. 57).

Spróbujmy teraz określić nową funkcję, a mianowicie do każdej liczby y przydajmy liczbę x otrzymaną z rys. 57 w sposób następujący: wyrysujmy punkt P na osi y o rzędnej równej wybranej liczbie y, przez punkt P narysujmy prostą prostopadłą do osi y; prosta ta niech przetnie prostą (l) w punkcie Q; odciętą punktu Q przydajmy właśnie do wybranej liczby y, jako wartość funkcji.

Otrzymujemy więc nową funkcją — że ona będzie określona, to widoczne stąd, że opisane konstrukcje są całkowicie możliwe i prowadzą do celu. Możemy też z łatwością podać wzór analityczny na tę funkcję. Skoro punkt Q ma odciętą x i rzędną y, i leży na prostej (l), to liczby (x, y) spełniają jej równanie, z którego wyliczamy $x = \frac{y+2}{3}$. Ta nowa funkcja zwie się odwrotną względem danej $y = 3x - 2$.



Rys. 57.

Przykład II. Weźmy pod uwagę funkcję $y = e^x$, której obrazem jest krzywa K na rys. 40. Chcąc określić funkcję odwrotną na drodze geometrycznej, jak w poprzednim przykładzie, obierzmy dowolnie na osi (y) punkt P i poprowadźmy przezeń prostą (p) prostopadłą do osi y. Otóż dla dowolnego punktu P prosta p może nie przecinać krzywej K. Musimy się więc zastrzec, że wybrana liczba y jest dodatnią. Odcięta x punktu przecięcia prostej p z krzywą K uważajmy za liczbę przydana do liczby y; będzie to więc liczba x spełniająca równanie $e^x = y$ przydanej wartości na zmienną y. Mamy więc znaleźć pierwiastek tego równania. Otóż z § 25 (str. 96) wiadomo, że taki pierwiastek istnieje i jest jednoznacznie określony, jeżeli $y > 0$; pierwiastek ten jest logarytmem naturalnym liczby y; tem samem funkcja logarytmiczna $ln\,y$ jest funkcją odwrotną do wykładniczej.

Przykład III. Weźmy funkcję $y=x^2$, którą przedstawia pewna parabola (rys. 49, str. 144). Określmy do tej funkcji funkcję odwrotną. W tym celu obieramy na osi y dowolnie punkt P o rzędnej y, przezeń kreślimy prostą (p), prostopadłą do osi y i wyznaczamy punkt przecięcia Q prostej p z parabolą. Czytelnik, przeprowadzając konstrukcję, z łatwością zobaczy, że, o ile jest $y \neq 0$, to albo nie otrzyma żadnego punktu Q albo dwa punkty Q. Konstrukcja bez dalszych zastrzeżeń nie pozwoli nam określić funkcji odwrotnej. Otrzymamy ją, gdy np. ograniczymy się do liczb $y \geqslant 0$ i do punktów Q leżących np. w pierwszej ćwiartce. Wtedy jest odcięta punktu Q nieujemną. Funkcja $x=\sqrt{y}$ jest właśnie odwrotną funkcją przy założeniu $y \geqslant 0$. Wtedy też jest związek $y=(\sqrt{y})^2$ spełniony dla każdej nieujemnej liczby (y). Gdybyśmy przyjmowali $y \geqslant 0$ i ograniczyli się do punktów Q, leżących w drugiej ćwiartce, to byłaby funkcja $x=-\sqrt{y}$ też funkcją odwrotną do danej.

Widzimy z dotychczasowych przykładów, że dla odwracania funkcji $y=f(x)$ posługujemy się — mówiąc geometrycznie — tym łukiem krzywej $y=f(x)$, który albo stale się wznosi albo stale opada.

Przykład IV. Weźmy pod uwagę funkcję $y=f(x)$, określoną dla wszystkich liczb x przedziału (a, b), gdzie $a<b$; załóżmy, że funkcja ta jest albo stale rosnącą albo stale malejącą w przedziale; wartości funkcji tworzą niepusty zbiór (Y). Określimy funkcję odwrotną w sposób następujący: niech liczba y_0 należy do zbioru (Y) i szukajmy pierwiastka x równania $f(x)=y_0$. Taki pierwiastek istnieje, bo liczba y_0 należy do zbioru (Y); istnieje tylko jeden pierwiastek, bo, gdy jest $x'<x''$, to jest $f(x')<f(x'')$ albo $f(x')>f(x'')$. Ten jedyny pierwiastek x_0, spełniający nierówność $a \leqslant x_0 \leqslant b$, przydajmy liczbie y_0; tem samem zdefiniowaliśmy nową funkcję $x=\varphi(y)$, określoną dla wszystkich liczb y zbioru (Y). Jest też $a \leqslant \varphi(y) \leqslant b$; przeto można utworzyć funkcję złożoną $f(\varphi(y))$. Otóż jest $f(x_0)=y_0$ i $x_0=\varphi(y_0)$, więc $f(\varphi(y_0))=y_0$ dla każdej liczby y_0 zbioru (Y).

Mamy więc $f(\varphi(y))=y$ dla każdej liczby y zbioru (Y). Zarazem jest $x_0=\varphi[f(x_0)]$, dla każdej liczby x_0 przedziału (a, b).

Jeżeli funkcja $y=f(x)$ jest rosnącą w przedziale (a, b), to funkcja odwrotna $x=\varphi(y)$ jest również rosnącą dla liczb zbioru (Y).

Jeżeli bowiem liczby y' i y'' należą do zbioru (Y), jeżeli jest $y' < y''$ i jeżeli jest $x' = \varphi(y')$, $x'' = \varphi(y'')$, to jest także $y' = f(x')$, $y'' = f(x'')$. Gdyby więc było $x' \geqslant x''$, toby ze założenia, że funkcja $f(x)$ jest rosnącą, wynikało, że $f(x') \geqslant f(x'')$ czyli $y' \geqslant y''$ wbrew założeniu. Jest więc $x' < x''$.

Podobnie wykazuje się, *że funkcja odwrotna do funkcji malejącej jest znów malejącą.*

Ściśle i ogólnie określa się funkcję odwrotną do danej w sposób następujący: niech $y = f(x)$ będzie funkcją określoną dla liczb x niepustego zbioru X, przyczem wartości $f(x)$ tej funkcji utworzą zbiór (Y); funkcją odwrotną do danej nazywamy *każdą* funkcję $\varphi(y)$ spełniającą następujące warunki: 1) funkcja $\varphi(y)$ jest określoną dla liczb (y), tworzących niepusty zbiór (Y_1), który jest częścią [1]) (podzbiorem) zbioru (Y); 2) wartości funkcji $\varphi(y)$ są liczbami zbioru X, wskutek tego można określić funkcję złożoną $f(\varphi(y))$; 3) dla każdej liczby (y) zbioru (Y_1) jest $y = f(\varphi(y))$.

Przypadek A. Niech $y = f(x)$ oznacza funkcję ciągłą i rosnącą w przedziale (a, b). Niech $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$; liczby α, β są minimum względnie maximum funkcji $f(x)$. Istnieje jedna i tylko jedna funkcja odwrotna $x = \varphi(y)$ określona w przedziale (α, β); ona będzie również rosnącą i ciągłą w przedziale (α, β).

Dowód. Na podstawie rozważań rozdziału VI wynika, że funkcja $f(x)$ przyjmuje wszystkie wartości od α do β; przyjmuje każdą raz, bo jest rosnącą.

Gdy więc $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, to równanie (1) $y = f(x)$ ma rozwiązanie na (x) i tylko jedno. To rozwiązanie spełnia związek $a \leqslant x \leqslant b$. Ten pierwiastek na (x) określa funkcję $\varphi(y)$ odwrotną do danej, jak łatwo skontrolować na mocy ogólnej definicji. Innej funkcji odwrotnej określonej w przedziale (α, β) nie ma, bo tylko jeden pierwiastek x równania (1) istnieje w przedziale (a, b). Okażemy, że funkcja odwrotna jest też rosnącą. Gdy jest $\alpha \leqslant y' < y'' \leqslant \beta$ i gdy $f(x') = y'$, $f(x'') = y''$, to być musi $x' < x''$; założenie bowiem $x' \geqslant x''$ powoduje nierówność $f(x') \geqslant f(x'')$ czyli $y' \geqslant y''$, co jest sprzeczne z nierównością $y' < y''$; jest więc też $x' < x''$ czyli funkcja odwrotna jest rosnącą.

---

[1]) Na str. 120 w ten sposób określiliśmy zbiór, jako część drugiego zbioru że nie jest wykluczoną identyczność obu zbiorów.

Twierdzimy dalej, że funkcja $\varphi(y)$ jest ciągłą w całym przedziale (α, β). Mamy więc wykazać rzecz następującą: do każdej liczby y_0 z przedziału (α, β) i każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich liczb y, należących do przedziału (α, β) i spełniających nierówność $|y - y_0| < \delta$ jest też $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. Otóż niech będzie $y_0 = f(x_0)$; albo jest $y_0 = \alpha$ albo jest $\alpha < y_0 < \beta$ albo jest $y_0 = \beta$.

Niech będzie $y_0 = \alpha$, to $x_0 = a$. Weźmy $\varepsilon > 0$ dowolnie, byle było $a + \varepsilon \leqq b$. Niech będzie $y_1 = f(a + \varepsilon)$. Połóżmy $\delta = y_1 - y_0 > 0$ (jest bowiem $y_1 > y_0$). Niech będzie y liczbą o własności $0 \leqq y - y_0 < \delta$ czyli $y_0 \leqq y < y_0 + (y_1 - y_0) = y_1$. Jest więc $y_0 \leqq y < y_1$. Ponieważ funkcja $\varphi(y)$ jest rosnącą, więc będzie $\varphi(y_0) \leqq \varphi(y) < \varphi(y_1) = a + \varepsilon = \varphi(y_0) + \varepsilon$, tedy $0 \leqq \varphi(y) - \varphi(y_0) < \varepsilon$ czyli $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, gdy tylko $0 \leqq y - y_0 < \delta$.

Ale liczba $\varepsilon > 0$, jak widać z powyższego nie może być zupełnie dowolną, gdyż ma być $a + \varepsilon \leqq b$ czyli $\varepsilon \leqq b - a$. Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$ zresztą dowolnie; gdy jest $\varepsilon \leqq b - a$, to dla niej przeprowadzamy powyższe rozumowanie; jeżeli zaś jest $\varepsilon > b - a$, to kładziemy $\varepsilon_1 = b - a$ i dla tej liczby przeprowadzamy powyższe rozumowanie, które doprowadzi nas do wyniku następującego: istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jest $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon_1 = b - a < \varepsilon$, o ile jest $|y - y_0| < \delta$.

Teraz możemy już ze słusznością twierdzić, że funkcja $\varphi(y)$ jest ciągłą w punkcie α z prawej strony (str. 123). Podobnie wykaże czytelnik, że funkcja $\varphi(y)$ jest też ciągłą w punkcie β z lewej strony. Dowód powyższy będzie łatwym do zrozumienia przy pomocy wykresu funkcji $f(x)$ ciągłej i rosnącej w przedziale (a, b), co zostawiamy czytelnikowi do przeprowadzenia.

Załóżmy teraz, że jest $\alpha < y_0 < \beta$; ponieważ funkcja $\varphi(y)$ jest też rosnącą, więc jest stąd $\varphi(\alpha) < \varphi(y_0) < \varphi(\beta)$ czyli $a < x_0 < b$, jeżeli położymy $x_0 = \varphi(y_0)$. Obierzmy liczbę $\varepsilon > 0$ dowolnie, byle było: $a \leqq x_0 - \varepsilon$, $x_0 + \varepsilon \leqq b$, a więc $\varepsilon \leqq \mathrm{Min}\,(x_0 - a, b - x_0)$. Niech będzie $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$; liczby y_1, y_2 są określone. Ponieważ funkcja $f(x)$ jest rosnącą w przedziale (a, b), więc $\alpha = f(a) \leqq y_1 < y_0 < y_2 \leqq \beta = f(b)$. Niech będzie $\delta = \mathrm{Min}\,[y_0 - y_1, y_2 - y_0]$; jest $\delta > 0$. Weźmy teraz liczbę y dowolnie, byle było $|y - y_0| < \delta$ t. zn. byle było $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$; ale $y_0 + \delta = y_0 + \mathrm{Min}\,[y_0 - y_1, y_2 - y_0] \leqq y_0 + (y_2 - y_0) = y_2$; podobnie $y_0 - \delta = y_0 - \mathrm{Min}\,[y_0 - y_1, y_2 - y_0] \geqq y_0 - (y_0 - y_1) = y_1$; a więc jest

$y_1 < y < y_2$, stąd wynika, że jest $\varphi(y_1) < \varphi(y) < \varphi(y_2)$, gdyż funkcja $\varphi(y)$ jest rosnącą w przedziale (α, β). Ale $\varphi(y_1) = x_0 - \varepsilon = \varphi(y_0) - \varepsilon$, $\varphi(y_2) = x_0 + \varepsilon = \varphi(y_0) + \varepsilon$, więc $\varphi(y_0) - \varepsilon < \varphi(y) < \varphi(y_0) + \varepsilon$, skąd $-\varepsilon < \varphi(y) - \varphi(y_0) < +\varepsilon$, co też daje $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$ pod warunkiem, jak widać z powyższego, że jest $|y - y_0| < \delta$. Gdybyśmy obrali liczbę $\varepsilon > \operatorname{Min}[x_0 - a, b - x_0]$, to postąpimy, jak wyżej. Wykazaliśmy więc, że funkcja $\varphi(y)$ jest ciągła w punkcie wewnętrznym przedziału (α, β).

Przypadek B. Jeżeli do założeń przypadku A dołożymy założenie, że funkcja $f(x)$ ma pochodną w przedziale (a', b') i stale różną od zera, przyczem jest $a < a' < b' < b$ i jeżeli $\alpha' = f(a')$, $\beta' = f(b')$, to wykażemy, że funkcja odwrotna ma pochodną w każdym punkcie przedziału (α', β'), a mianowicie jest: jeżeli $y_0 = f(x_0)$, gdzie $a' \leqq x_0 \leqq b'$, to $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Dowód jest dość prostym. Utwórzmy iloraz różnicowy $\frac{\varphi(y_0 + \varkappa) - \varphi(y_0)}{\varkappa}$, przyczem $\varkappa \neq 0$ i oznacza dość małą liczbę. Otóż mamy $y_0 = f(x_0)$, $y_0 + \varkappa = f(x_0 + h)$, tedy $\frac{\varphi(y_0 + \varkappa) - \varphi(y_0)}{\varkappa} =$

$$= \frac{x_0 + h - x_0}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}.$$

Połóżmy $\psi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Gdy $\varkappa \neq 0$, to także $h \neq 0$ i przeto $f(x_0 + h) \neq f(x_0)$ i wolno było poprzednio iloraz uprościć przez liczbę h. Nadto, gdy $\varkappa \to 0$, to z ciągłości funkcji $\varphi(y)$ wynika, że także $h \to 0$; gdy zaś $h \to 0$, to $\psi(h) \to f'(x_0)$. Uważajmy teraz funkcję $\psi(h)$ za funkcję złożoną zmiennej $\varkappa$. Skoro jest $h \neq 0$, gdy jest $\varkappa \neq 0$, więc na mocy § 39 D będzie $\psi(h) \to f'(x_0)$, gdy $\varkappa \to 0$. Ponieważ $f'(x_0) \neq 0$ według założenia, więc (str. 40) iloraz $\frac{\varphi(y_0 + \varkappa) - \varphi(y_0)}{\varkappa}$ ma granicę dla $\varkappa \to 0$ i tą granicą jest $\frac{1}{f'(x_0)}$. Jest więc

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Zastosujmy nasze ogólne rozważania do funkcji logarytmicznej $x = \ln y$; ona jest odwrotną funkcją funkcji $y = e^x$; ta zaś rzeczywiście spełnia wszystkie założenia przypadków *A* i *B* w każdym przedziale (a, b). Dla każdej liczby x jest $y > 0$; wiadomo (str. 95), że liczba y pozatem jest dowolną. Przeto funkcja $x = ln y$ jest ciągłą dla każdej wartości $y > 0$ i ma pochodną i jest

$$(ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

czyli mamy $(ln y)' = \frac{1}{y}$. Wynik ten otrzymaliśmy już poprzednio (§ 39, str. 178).

Przypadek C. Zupełnie podobnie uzasadni się twierdzenie następujące: *jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągłą i malejącą w przedziale (a, b) i jeżeli $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, wtedy istnieje jedna i tylko jedna funkcja odwrotna $x = \varphi(y)$, określona w przedziale (β, α)*; (jest bowiem $\beta < \alpha$). *Funkcja $\varphi(y)$ będzie również ciągłą i malejącą w przedziale (β, α).*

Przypadek D. Jeżeli do założeń przypadka C dołączymy dalsze, że w przedziale (a', b'), gdzie $a < a' < b' < b$, ma funkcja $f(x)$ określoną pochodną stale, różną od zera i jeżeli $\alpha' = f(a')$, $\beta' = f(b')$, to funkcja $\varphi(y)$ ma pochodną w przedziale (β', α'), przyczem jest:

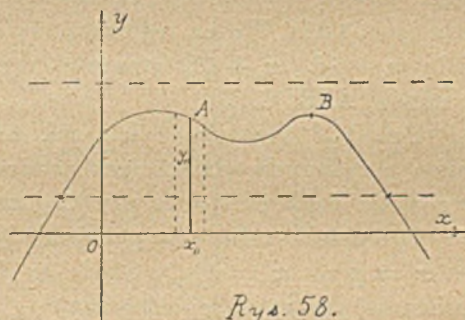
$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, *gdzie* $\beta' \leqslant y_0 \leqslant \alpha'$, $y_0 = f(x_0)$.

Przypadek E. Niech $y = f(x)$ oznacza dowolną funkcję, która w każdym punkcie przedziału (a, b) ma określoną pochodną. Niech będzie $a < x_0 < b$. Załóżmy, że pochodna $f'(x)$ jest ciągłą w punkcie x_0 i różną od zera. Niech będzie $y_0 = f(x_0)$. Otóż wykażemy, że istnieje liczba $\delta > 0$ i jedyna funkcja $x = \varphi(y)$ o następujących własnościach: 1) funkcja $\varphi(y)$ jest określoną i ciągłą w przedziale $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$; 2) jest $x_0 = \varphi(y_0)$; 3) funkcja $\varphi(y)$ jest odwrotną do danej; 4) gdy liczba (y) pozostaje w przedziale $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, to funkcja $\varphi(y)$ ma pochodną określoną wzorem: $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, gdzie jest $y = f(x)$. Aby to twierdzenie dobrze zrozumieć, rozważymy rzecz geometrycznie.

Weźmy pod uwagę jakąkolwiek funkcję, której obrazem geom. niech będzie krzywa przedstawiona na rys. 58. Jeśli tą funkcją jest $y = f(x)$, to mając daną liczbę y, możemy stąd albo nie otrzymać żadnej wartości na x albo też znaleźć kilka wartości na x takich, że $f(x) = y$. Otóż przy pomocy pewnych zastrzeżeń potrafimy znaleźć taki skrawek (łuk) krzywej $y = f(x)$, który pozwoli nam funkcję odwrotną jednoznacznie określić. Takiego skrawka jednak nie potrafimy znaleźć w sąsiedztwie pewnych punktów, jak n. p. w sąsiedztwie punktu B na krzywej z rys. 58, t. j. w t. zw. punktach górowania krzywej.

Weźmy pewną wartość na x, n. p. x_0, której niech odpowiada rzędna y_0 i na krzywej punkt $A(x_0, y_0)$. W sąsiedztwie tego punktu można wybrać skrawek krzywej, dla którego funkcja odwrotna $x = \varphi(y)$ da się jednoznacznie określić, jeśli tylko funkcja w sąsiedztwie punktu x_0 jest ciągłą, oraz, jeśli do krzywej w punkcie A da się wykreślić styczna, nierównoległa ani do osi x ani do osi y czyli jeśli istnieje pochodna $f'(x_0) \neq 0$; dokładniej wypowiada założenia twierdzenie.

Załóżmy więc, że krzywa w sąsiedztwie punktu A spełnia te warunki; wtedy da się z krzywej wyciąć łuk o punkcie wewnętrznym A, łuk wznoszący się lub opadający, wzdłuż którego można już funkcję odwrotną $\varphi(y)$ określić jednoznacznie. Wzdłuż tego łuku będzie: $y = f[\varphi(y)]$. Przypuszczając, że funkcja $\varphi(y)$ będzie miała pochodną, obliczmy jej pochodną ze względu na y w punkcie $y = y_0$; otóż z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy:



Rys. 58.

$$(y)' = \{f[\varphi(y)]\}' \text{ czyli } 1 = f'[\varphi(y)] \cdot \varphi'(y);$$

stąd, podstawiając za y wartość y_0, otrzymamy:

$$1 = f'[\varphi(y_0)] \cdot \varphi'(y_0), \text{ a że } \varphi(y_0) = x_0 \text{ więc } f'(x_0) \cdot \varphi'(y_0) = 1.$$

Podzieliwszy obie strony przez liczbę $f'(x_0)$, która według założenia nie jest zerem, otrzymamy:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ jak twierdzimy.}$$

Przy podanych założeniach pochodna funkcji odwrotnej równa się więc odwrotności pochodnej danej funkcji.

Po tych uwagach przejdźmy do dowodu twierdzenia.

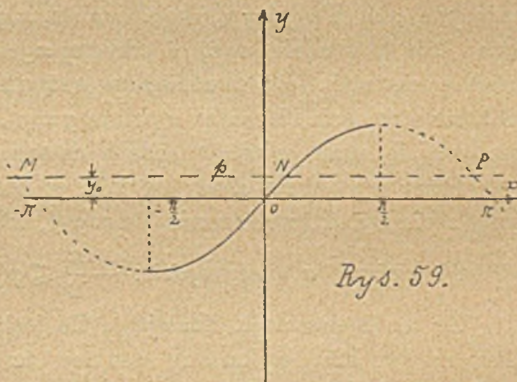
Skoro jest $f'(x_0) \neq 0$ i pochodna $f'(x)$ w punkcie (x_0) jest ciągłą więc istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, że wewnątrz przedziału $(x_0 - \delta_0,$

$x_0+\delta_0)$ funkcja $f(x)$ ma pochodną i tego samego znaku, co liczba $f'(x_0)$. Rzeczywiście do każdej liczby $\varepsilon>0$, a więc także do liczby $\varepsilon=|f'(x_0)|$ istnieje liczba δ_0 taka, że liczby przedziału $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ należą do przedziału (a, b) i że dla wszystkich liczb x, spełniających nierówność $|x-x_0|<\delta_0$ jest $|f'(x)-f'(x_0)|<|f'(x_0)|$, stąd $-|f'(x_0)|<f'(x)-f'(x_0)<|f'(x_0)|$, co znów daje $f'(x_0)-|f'(x_0)|<f'(x)<f'(x_0)+|f'(x_0)|$. Jeżeli jest $f'(x_0)>0$, to $|f'(x_0)|=f'(x_0)$ i otrzymujemy $0<f'(x)<2f'(x_0)$ czyli pochodna $f'(x)$ jest też dodatnią. Jeżeli zaś jest $f'(x_0)<0$, to $|f'(x_0)|=-f'(x_0)$ i otrzymamy $2f'(x_0)<f'(x)<0$; pochodna $f'(x)$ jest więc ujemną. Powiadamy teraz, że w przedziale $(x_0-\frac{1}{2}\delta_0, x_0+\frac{1}{2}\delta_0)$ funkcja jest nietylko ciągłą ale też albo stale rosnącą albo stale malejącą. Dowód tego znajdzie czytelnik nieco później, jako wniosek z twierdzenia średniej wartości. Przyjmiemy tę rzecz na razie bez dowodu (zob. § 48). Wobec tego możemy do funkcji $y=f(x)$ w przedziale $(x_0-\frac{1}{2}\delta_0, x_0+\frac{1}{2}\delta_0)$ stosować wyniki z obecnego paragrafu z ustępów A, B, C, D.

Pozostaje nam do wykazania, że tylko jedyna funkcja odwrotna o żądanych własnościach istnieje. Przypuśćmy, że istnieją dwie takie funkcje: jedna powyżej znaleziona $x=\varphi(y)$ i druga $x=\psi(y)$, obie określone w przedziale $(y_0-\delta, y_0+\delta)$, gdzie $\delta>0$. Jest $x_0=\varphi(y_0)$, $x_0=\psi(y_0)$. Skoro te funkcje mają być różne, to musi istnieć przynajmniej jeden punkt (y') taki, że $y_0-\delta\leqq y'\leqq y_0+\delta$ i że $x_1=\varphi(y')\neq x_2=\psi(y')$. Skąd $y'=f(x_1)$, $y'=f(x_2)$; ale liczby x_1, x_2 obie należą do przedziału $(x_0-\frac{1}{2}\delta_0, x_0+\frac{1}{2}\delta_0)$, w którym funkcja $f(x)$ jest stale rosnącą albo stale malejącą, więc nie może być $f(x_1)=f(x_2)$, gdy $x_1\neq x_2$. Tem samem dowód uzupełniony.

Uwagi. 1. Ponieważ jest $(e^x)'=e^x>0$, przeto określenie funkcji logarytmicznej i jej własności, podane w § 27 (str. 112) można było uzyskać przez stosowanie dopieroco poznanych twierdzeń do funkcji wykładniczej, której własności mieszczą się w § 26 (str. 104). Czytelnik dla ćwiczenia powinien odnośne rozumowania przeprowadzić. Zawsze metody ogólne w odróżnieniu od metod indywidualnych badania mają większą wartość naukową, bo nie obejmują jednego przypadku szczególnego, ale cały ich zbiór bardzo liczny albo nawet zbiór nieskończony przypadków. Dla początkującego zasady ogólne mają jeszcze tę korzyść, że nie obciążają tak jego pamięci, jak wielki zbiór rozumowań indywidualnych. Zobaczymy w § 91, że i rozważania obecnego paragrafu dadzą się uogólnić, a więc można je było pominąć, ale nie uczyniliśmy tego, bo § 91 wymaga znacznego przygotowania, przeto przesunięcie § 42 i 43 do rozdziału XV-go krępowałoby nas we wyborze przykładów, który jest tak ważnym czynnikiem w rozumieniu teorji matematycznych.

2. Załóżmy, że łuk AB krzywej $y = f(x)$ pozwolił określić funkcję odwrotną $x = \varphi(y)$, którą napiszemy w postaci $y_1 = \varphi(x_1)$. Zbadajmy wykres CD krzywej $y_1 = \varphi(x_1)$ w stosunku do łuku $y = f(x)$. Ponieważ funkcja $x = \varphi(y)$ jest odwrotną do funkcji $y = f(x)$, tedy jest $x_1 = y$, $y_1 = x$. Weźmy na płaszczyźnie wykresy AB i CD; punkty (x, y) na łuku AB i (x_1, y_1) czyli (y, x) na łuku CD, jak łatwo się czytelnik przekona, są symetrycznie położone względem dwusiecznej kąta prostego między osiami x, y, przechodzącej przez 1-wszą i 3-cią ćwiartkę płaszczyzny. Stąd prosty sposób konstruowania wykresu funkcji $y_1 = \varphi(x_1)$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$. Niech czytelnik zastosuje tę regułę do rysunków 40 (str. 108) i 41 (str. 113).



Rys. 59.

§ 42. Funkcje kołowe.

Tytułem przykładu określimy cztery nowe funkcje elementarne, jako odwrotne funkcji trygonometrycznych, zwane funkcjami kołowemi lub cyklometrycznemi.

I) Weźmy pod uwagę funkcję goniometryczną $y = \sin x$ i narysujmy jej wykres, oraz określmy dla niej funkcję odwrotną.

Wiemy, że $-1 \leqq \sin x \leqq +1$, zatem, jeśli ma istnieć funkcja odwrotna do $\sin x$, to na zmienną y nie można brać wartości dowolnych, lecz tylko takie, które spełniają nierówność: $-1 \leqq y \leqq 1$. Przypuśćmy więc, że liczba y_0 spełnia tę nierówność. Natenczas przy pomocy powyższego obrazu geometrycznego znajdziemy odpowiadającą tej liczbie y_0 wartość na x, jeśli wykreślimy przez punkt $P(x_0, y_0)$ prostą p. prostopadłą do osi y. Atoli spostrzeżemy, że prosta p o równaniu $y = y_0$ przetnie sinusojdę w nieskończenie wielu punktach; zatem funkcji odwrotnej, o którą nam chodzi, nie potrafilibyśmy jednoznacznie określić. Aby tę wieloznaczność usunąć, umówmy się, że będziemy brali pod uwagę tylko łuk sinusojdy, odpowiadający wartościom na zmienną x od $-\frac{\pi}{2}$ do $+\frac{\pi}{2}$ (na rys. 59 zakreślony pełną linją). Ten łuk krzywej jest zawarty w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i wzdłuż niego jest funkcja $y = \sin x$ rosnącą, a to jest właśnie, jak wiadomo z § 41, warunkiem wystarczającym, aby dla $y = y_0$ była odcięta x już jednoznacznie określoną; otóż ta właśnie wartość odciętej x jest zarazem bezwzględnie najmniejszą wartością z pomiędzy wszystkich, które są odciętemi punktów przecięcia sinusojdy z prostą $y = y_0$. Ten fakt geometryczny wypowie się analitycznie w sposób następujący:

Przez $\varphi(y)$ przy danej wartości y, będziemy rozumieli ten (jedyny) z pierwiastków równania $\sin x = y$, *który ma bezwzględną wartość najmniejszą, a wtedy będzie:* $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi(y) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Że ten pierwiastek istnieje, o ile jest: $-1 \leqslant y \leqslant 1$, wykazaliśmy na str. 129. wykażemy poniżej, że jest jedynym. Jeśli do danej wartości na zmienną y szukamy wartości na x, to znaczy w naszym przykładzie, iż szukamy kąta, którego wstawa (sinus) jest równa naprzód danej wartości y. Ponieważ zaś wyraz „kąt“ zwykliśmy zastępywać wyrazem „łuk“ (arcus), więc też określoną w powyższy sposób funkcję $\varphi(y)$, odwrotną do funkcji $\sin x$, nazywamy: „*arcus, którego sinus równa się y*“ i znaczymy symbolem: $x = \arcsin y$, przyczem zachodzą związki: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2}$ i $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Oczywiste są wobec tego następujące równości: $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ i t. d. Jest też $y = \sin(\arcsin y)$ dla każdej wartości y z przedziału $(-1,1)$, skoro $\arcsin y$ jest funkcją odwrotną do funkcji $\sin x$.

Funkcja $\arcsin x$, jakoteż funkcje odwrotne innych funkcji goniometrycznych, które w dalszym ciągu poznamy, noszą nazwę funkcji cyklometrycznych czyli kołowych.

Te rozważania intuicyjne uściślimy. Wiemy, że $y = \sin x$ jest funkcją perjodyczną, że $-1 \leqslant \sin x \leqslant +1$, że $\sin x$ jest funkcją ciągłą w każdym przedziale, że przeto przyjmuje każdą wartość od (-1) do $(+1)$. Równanie $y = \sin x$ przy danej wartości na y ma nieskończenie wiele pierwiastków na x, o ile tylko obierzemy $-1 \leqslant y \leqslant +1$. Ponieważ $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, więc w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ przyjmuje funkcją $\sin x$ każdą wartość przedziału $(-1, +1)$ co najmniej raz (str. 129). Aby udowodnić, że $\sin x$ jest funkcją rosnącą, moglibyśmy się powołać na § 48 (ustęp B), udowodnimy to jednak w sposób następujący: Załóżmy, że x_1, x_2 oznaczają dwie liczby o własności $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, wykażemy, że jest $\sin x_1 < \sin x_2$ czyli funkcja jest rosnącą w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Otóż $\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin\frac{x_2 - x_1}{2} \cos\frac{x_2 + x_1}{2}$ i wykażemy, że iloczyn strony prawej jest dodatni. W tym celu od nierówności $-\frac{\pi}{2} < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ odejmijmy nierówność $\frac{\pi}{2} > x_1 \geqslant -\frac{\pi}{2}$, a otrzymamy $-\pi < x_2 - x_1 \leqslant \pi$, skąd $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$, ale jest $x_1 < x_2$, więc dokładniej $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$, tedy $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$.

Dodajmy teraz do siebie następujące nierówności $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, otrzymamy $-\pi < x_1 + x_2 < \pi$, przeto $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$, skąd wynika, że $\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$. Jest tedy: $\sin x_2 - \sin x_1 > 0$ czyli $\sin x_2 > \sin x_1$.

Funkcja $\sin x$ jest więc rosnącą w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Równanie $y = \sin x$ dla danej liczby y z przedziału $(-1, +1)$ ma więc tylko jeden pierwiastek na niewiadomą x w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ten pierwiastek przydajemy liczbie y i w ten sposób określamy funkcję odwrotną do funkcji $\sin x$. Zwiemy ją $\operatorname{arc}\sin y$.

Zauważmy, że inne pierwiastki równania $y = \sin x$, leżą poza przedziałem $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, więc są co do bezwzględnej wartości większe od $\arcsin y$. Funkcja $\arcsin y$ jest określoną w przedziale $(-1, +1)$. Na mocy poprzedniego paragrafu w przedziale $(-1, +1)$ jest ona ciągłą. Ponieważ $(\sin x)' = \cos x \neq 0$, gdy jest $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, tedy, o ile jest $-1 < y < 1$, to funkcja $\arcsin y$ ma pochodną i jest $(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x}$. Skoro jednak $y = \sin x$, to stąd $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2}$. Ale, gdy $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, to $\cos x > 0$, więc $\cos x = \sqrt{1-y^2}$ i przeto

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \text{ o ile } -1 < y < +1.$$

Funkcja $\arcsin y$ ma więc pochodną określoną tylko *wewnątrz* przedziału $(-1, +1)$.

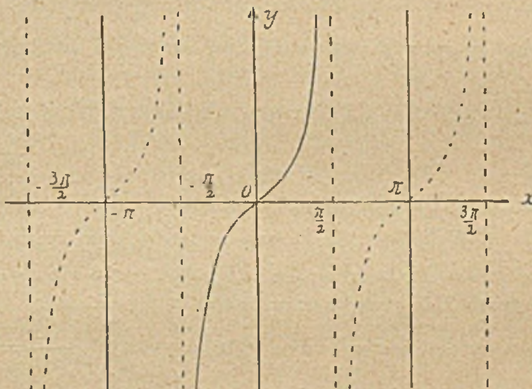
Rys. 60.

II) Weźmy teraz pod uwagę funkcję $y = \cos x$. Odpowiednią jej funkcję cyklometryczną określimy w sposób analogiczny, jak poprzednio dla $\sin x$. Oczywistem jest, że i tu musi zmienna y spełniać nierówność: $-1 \leqslant y \leqslant 1$, a dla każdej takiej wartości na y istnieje nieskończenie wiele wartości na x, spełniających związek $y = \cos x$. Wobec tego będziemy brali pod uwagę tylko pewne z nich, te, które są nieujemne i mają najmniejszą wartość bezwzględną, a więc spełniają nierówność: $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Znaczy to, że z consinusojdy uwzględniamy łuk od $x = 0$ do $x = \pi$, a więc w przedziale, w którym krzywa opada. Łuk wybrany oznaczono na rys. 60 linją pełną.

A więc najmniejszy nieujemny pierwiastek x równania $y = \cos x$ przy danej wartości y oznaczmy symbolem $x = \arccos y$; z określenia funkcji odwrotnej wynika związek: $y = \cos(\operatorname{arc}\cos y)$; jest też: $0 \leqslant \operatorname{arc}\cos y \leqslant \pi$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $\operatorname{arc}\cos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arc}\cos 1 = 0$, $\operatorname{arc}\cos(-1) = \pi$ i t. d.

Oczywiście z łatwością można i analitycznie badać równanie $y = \cos x$, co zostawiamy czytelnikowi.

III) Aby w podobny sposób określić funkcję cyklometryczną, odwrotną do funkcji $\operatorname{tg} x$, bierzemy pod uwagę tylko tę gałąź tangensojdy (rys. 61), której odpowiadają wartości na x, zawarte między liczbami $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ a $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$, z wykluczeniem samych krańców, dla których wogóle funkcja $\operatorname{tg} x$ jest nieokreśloną [1]).



Rys. 61.

Gałąź ta leży między dwiema prostemi, prostopadłemi do osi x, wykreślonemi w punktach $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ i $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$; proste te są asymptotami tangensojdy. Wykażemy poniżej, że funkcja $\operatorname{tg} x$ jest rzeczywiście rosnącą wewnątrz przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i przyjmuje raz

[1]) Niektóre starsze podręczniki podają, że np. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\infty$ $\operatorname{ctg} 0 = \infty$; tak te „równości", jak znaki $1 : 0 = \infty$, $(-1) : 0 = -\infty$ itd. nie mają dziś żadnego znaczenia. „Nieskończoność" dodatnia $(+\infty)$, czy ujemna $(-\infty)$ nie jest liczbą, a wykonywanie na niej działań może z łatwością doprowadzić do grubych błędów. Jeżeli zaś i dziś niekiedy pisze się, że $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = +\infty$, to związek taki oznacza skrót zdania: „gdy $x < \frac{\pi}{2}$ i $x \to \frac{\pi}{2}$, to $\operatorname{tg} x$, będąc dodatnie, rośnie nieograniczenie", a nie oznacza, że funkcja $\operatorname{tg} x$ przyjmuje „wartość" $+\infty$ dla $x = \frac{\pi}{2}$, gdyż funkcja $\operatorname{tg} x$ jest tak zdefiniowaną, że dla kąta $x = \frac{\pi}{2}$ żadnej wartości nie posiada.

każdą rzeczywistą liczbę, jako swą wartość wewnątrz przedziału. Znaczy to, że równanie $\operatorname{tg} x = y$ przy każdej wartości y ma dokładnie jeden pierwiastek x wewnątrz przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, jest to zarazem bezwzględnie najmniejszy z pierwiastków x, jakie to równanie posiada. I właśnie symbolem $\operatorname{arc tg} y$ (co należy czytać arcus, którego tangens jest y) oznaczamy ten jedyny pierwiastek x równania $\operatorname{tg} x = y$, leżący wewnątrz przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Jest więc $\operatorname{tg}(\operatorname{arc tg} y) = y$ dla wszelkiej wartości y, nadto jest $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc tg} y < \frac{\pi}{2}$. Funkcja $\operatorname{arc tg} y$ jest określoną dla *każdej* wartości rzeczywistej y[1]. Jest $0 = \operatorname{arc tg} 0$, $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc tg} 1$, $-\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc tg}(-1)$ itd.

---

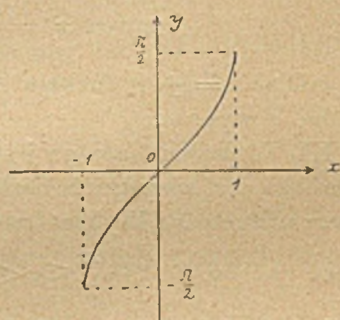
[1]) Wykażemy, że funkcja $\operatorname{tg} x$ *przyjmuje wewnątrz przedziału* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *każdą wartość rzeczywistą* y. Albo jest $y < 0$ albo $y = 0$ albo $y > 0$. Gdy jest $y = 0$, to dość przyjąć $x = 0$, aby wykazać, że tw. jest słuszne. Niech będzie $y > 0$, wtedy $\operatorname{tg} x = y$ daje $\operatorname{tg}^2 x = y^2$ czyli $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = y^2$, co daje $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. Ponieważ prawa strona ostatniej równości jest dodatnią i mniejszą od liczby 1, więc wiadomo, że istnieje liczba x_0 o własności $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, $\cos x_0 = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; stąd $\sin x_0 = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, przeto $\operatorname{tg} x_0 = y$, o co chodziło. Niech wreszcie będzie $y < 0$, wtedy znów $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, ale kąt x_0 obieramy tak, by było $-\frac{\pi}{2} < x_0 < 0$, $\cos x_0 = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; wtedy $\sin^2 x_0 = 1 - \cos^2 x_0 = \frac{y^2}{1+y^2}$, więc $\sin x_0 = \frac{\pm y}{\sqrt{1+y^2}}$. Ale być winno $\sin x_0 < 0$, przeto $\sin x_0 = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, gdyż $y < 0$. I znów $\operatorname{tg} x_0 = y$. Widzimy tedy, że zbiór wartości, przyjmowanych przez funkcję $\operatorname{tg} x$ wewnątrz przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ zawiera *wszystkie* liczby rzeczywiste.

Ponadto funkcja $\operatorname{tg} x$ jest rosnącą wewnątrz przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Niech bowiem będzie $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, skąd $0 < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$; zauważmy dalej, że jest $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2}$; otóż ostatnia dzielna jest dodatnia, bo $0 < x_2 - x_1 < \pi$; dzielnik jest liczbą dodatnią, więc $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 > 0$, o co chodziło. Funkcja $\operatorname{tg} x$ przyjmuje więc wewnątrz przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ każdą wartość rzeczywistą i tylko *raz*.

IV) Czwartą funkcją kołową, którą poznamy, jest $\operatorname{arc\,ctg} x$. Dla jej określenia z wykresu funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ czyli cotangensojdy, składającej się z nieskończonej ilości odrębnych gałęzi, wybieramy gałąź, leżącą między prostemi $x = 0$ (osią y) i $x = \pi$. Wewnątrz przedziału $(0, \pi)$ jest funkcja $\operatorname{ctg} x$ ciągłą, malejącą i przyjmuje raz każdą wartość rzeczywistą, jak to czytelnik z łatwością wykaże. Do *każdej* zatem liczby y istnieje jeden pierwiastek x równania $\operatorname{ctg} x = y$, leżący wewnątrz przedziału $(0, \pi)$; ten pierwiastek nazywamy $\operatorname{arc\,ctg} y$. Wskutek tego jest $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} y) = y$ dla każdej liczby rzeczywistej y; nadto $0 < \operatorname{arc\,ctg} y < \pi$; funkcja $\operatorname{arc\,ctg} x$ jest ciągłą, malejącą i określoną dla każdej rzeczywistej liczby x. Widoczne, że jest $\operatorname{arc\,ctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arc\,ctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arc\,ctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ itd.

§ 43. Wykresy i pochodne funkcji kołowych (cyklometrycznych).

I) Weźmy pod uwagę funkcję $y = \arcsin x$; według § 42 ma być $-1 \leqq x \leqq 1$ i wtedy jest $-\frac{\pi}{2} \leqq \arcsin x \leqq \frac{\pi}{2}$. Jest to funkcja rosnąca w przedziale $(-1, 1)$; jej wykres według końcowej uwagi (str. 189) § 41 otrzymamy, jako krzywą symetryczną do sinusojdy $y = \sin x$ względem prostej $y = x$ jako osi symetrji. Czytelnik otrzyma więc ten wykres krzywej $y = \arcsin x$, jeżeli wykres sinusojdy wykona na przeświecającym papierze, a następnie rysunek oglądnie z odwrotnej strony, zwróciwszy go do światła i odpowiednio zorjentowawszy osie (x, y) [1]).



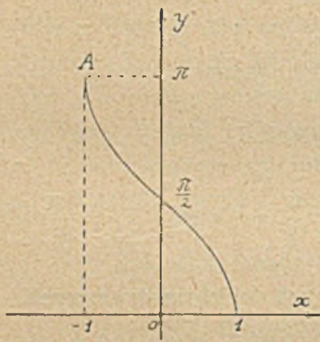
Rys. 62.

Wykres krzywej $y = \arcsin x$ podaje rys. 62. Pochodną $(\arcsin x)'$ obliczyliśmy już w § 42, a mianowicie jest

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ o ile jest } |x| < 1.$$

[1]) Jeżeli dla krzywej $y = \sin x$ oś x jest poziomą i skierowaną w prawo, a oś y jest pionową i skierowaną w górę, to przy oglądaniu rysunku z odwrotnej strony należy kartkę tak trzymać, by oś y stała się poziomą i w prawo była skierowaną, zaś oś x przyjęła położenie pionowe i była w górę skierowaną, co odpowiada regule symetrji punktów płaszczyzny (x, y) względem dwusiecznej $y = x$.

Ten wzór przestaje być ważnym dla $x=\pm 1$, to odpowiada temu faktowi, widocznemu na rysunku, że krzywa ma w punktach $x=\pm 1$ styczne prostopadłe do osi x, co nam wyjaśnia, że tamże funkcja nie ma pochodnej. Zauważmy, że pewne szczegóły rysunkowe będą później usprawiedliwione (zob. § 67).



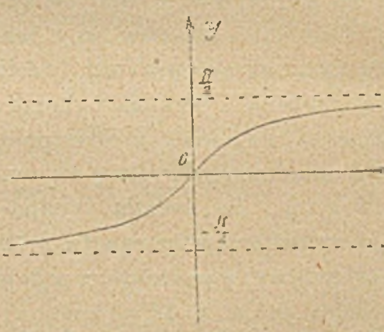
Rys. 63.

II) Wykres funkcji $y=\operatorname{arc}\cos x$ otrzymuje się z wykresu łuku cosinusojdy w przedziale $(0, \pi)$ według powyżej podanego prawa symetrji obu wykresów. Wykres krzywej $y=\operatorname{arc}\cos x$ podaje rys. 63. Obliczmy teraz pochodną tej funkcji, jak poprzednio. Ponieważ $(\cos y)'=-\sin y$, więc $y'=$ $=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sin y}$. Ale $\sin y=$ $\pm\sqrt{1-\cos^2 y}=\pm\sqrt{1-x^2}$, a że $0\leqslant y$ $\leqslant\pi$, więc $\sin y\geqslant 0$, tedy $\sin y=\sqrt{1-x^2}$. O ile więc $\sin y\neq 0$ czyli $|x|<1$, to jest

$$(\operatorname{arc}\cos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\ (|x|<1).$$

Dla $x=\pm 1$ funkcja $\operatorname{arc}\cos x$ nie ma pochodnej, co jest zgodne z wykresem.

III) Funkcja $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wykres zawiera rys. 64. Jest $-\frac{\pi}{2}<y<$ $<\frac{\pi}{2}$ czyli $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc}\operatorname{tg} x<\frac{\pi}{2}$. Wykres tej funkcji cyklometrycznej będzie więc krzywą nieograniczoną w kierunku osi x, a proste: $y=\frac{\pi}{2}$ i $y=-\frac{\pi}{2}$ będą



Rys. 64.

jej asymptotami. Pochodną tej funkcji możemy obliczyć w następujący sposób: Z wyrażenia: $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, wynika $x=\operatorname{tg}(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)$. Różniczkując obie strony tej równości w myśl twierdzenia o pochodnych funkcji złożonych, otrzymujemy: $1=\frac{1}{\cos^2 y}\cdot(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)'$

Stąd mamy: $(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \cos^2 y = \dfrac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
(Dzielenie przez $\cos^2 y$ jest dozwolone, bo $\cos^2 y \neq 0$, gdyż $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$).

IV) Wykres funkcji $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$, przyczem $0 < y < \pi$ czyli $0 < \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x < \pi$, przedstawia rys. 65. Pochodną obliczymy tak, jak dla funkcji poprzedniej.

Mamy: $x = \operatorname{ctg}(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)$, skąd, biorąc pochodną, mamy:

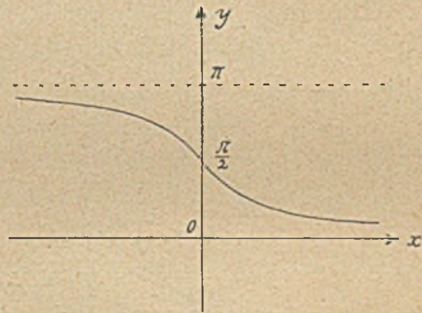
$$1 = -\frac{1}{\sin^2 y} \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)',$$

przeto:

$$(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} =$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{ctg}^2 y + 1} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

(Dzielenie przez $\sin^2 y$ jest dozwolone, bo $\sin^2 y \neq 0$, gdyż jest $0 < y < \pi$).



Rys. 65.

Wolno nam było szukać pochodnej pod III i IV w podany sposób tylko dlatego, że z ogólnego twierdzenia § 41 wynika, że funkcje te mają pochodne.

Rozdział IX. Pojęcie różniczki i rachunku różniczkowego; uzupełnienie poprzednich rozdziałów.

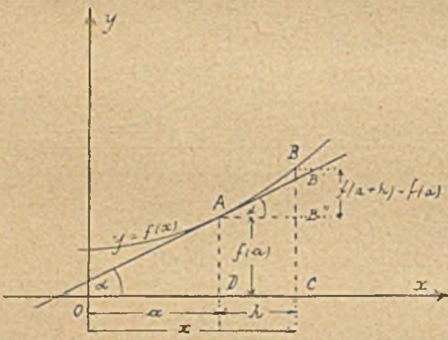
§ 44. Pojęcie różniczki.

Zamiast mówić: obliczyć pochodną funkcji mówimy: funkcję różniczkować. Etymologja słowa „różniczka" jest dowodem, że wyrażenie to ma, względnie miało szczególne znaczenie. Obecnie można śmiało powiedzieć, że w nowszej matematyce pojęcie różniczki stało się zbędnem i da się zastąpić pojęciem pochodnej; nie usuniemy go jednak w zupełności z naszych rozważań jedynie ze względów historycznych. Nie znaczy to, aby pojęcie różniczki nie było ścisłem: owszem, już Leibniz określił je ściśle; późniejsza matematyka jednak, zwłaszcza niemiecka, uczyniła zeń pojęcie wręcz niejasne;

jako takie, figuruje i w kilku polskich podręcznikach analizy wyższej w połowie wieku 19-go wydanych. Dopiero w ostatnich dziesiątkach lat ubiegłego wieku określono znów pojęcie różniczki ściśle, powracając do klasycznej definicji Leibniza.

Powiedzieliśmy w § 32, iż dwie drogi doprowadziły do utworzenia pojęcia pochodnej, a mianowicie: zagadnienie, dotyczące prędkości ruchu zmiennego (Newton) i zagadnienie określenia stycznych do krzywych (Leibniz).

Rozważmy jeszcze raz problem stycznej do krzywej; weźmy w tym celu jakąkolwiek krzywą $y = f(x)$, do której można wykreślić styczną nierównoległą do osi rzędnych czyli: niech funkcja $y = f(x)$ ma pochodną, np. w punkcie A o współrzędnych $(a, f(a))$ — (rys. 66). Jeżeli przez α oznaczymy kąt nachylenia stycznej do osi x w punkcie A, to $\operatorname{tg} \alpha = f'(a)$ jest wartością tej pochodnej. (Jest to zarazem znaczenie geometryczne pochodnej) Równanie stycznej, wykreślonej w punkcie A jest więc następujące: $Y - f(a) = f'(a)[x - a]$, gdzie Y oznacza rzędną bieżącego punktu stycznej o odciętej x.



Rys. 66.

Niech punkt D będzie rzutem punktu A na oś x i obierzmy na osi x dowolny punkt C w sąsiedztwie punktu D, np. na prawo i wykreślmy prostą BC, prostopadłą do osi x; niech B będzie punktem przecięcia tej prostej z krzywą. Przez punkt A wykreślamy prostą równoległą do osi x, która przetnie prostą BC w punkcie B''. Wyrysowana styczna niech przecina prostą BC w punkcie B'. Wyrachujemy miary algebraiczne wektorów $\overrightarrow{B''B}$ i $\overrightarrow{B''B'}$ na osi CB, skierowanej, jak oś y. Punkt B ma współrzędne: $(a+h, f(a+h))$. Dla trzech punktów C, B'', B mamy: $\overrightarrow{CB''} + \overrightarrow{B''B} + \overrightarrow{BC} = 0$ [1]), stąd: $\overrightarrow{B''B} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB''} = f(a+h) - f(a)$; $m(\overrightarrow{B''B})$ jest to przyrost funkcji $f(x)$ (rzędnej), gdy od punktu A przej-

[1]) Zob. tw. Chaslesa ze Wstępu. Dla skrócenia zamiast $m(\overrightarrow{AB})$ piszemy $\overrightarrow{AB}$.

dziemy do punktu B i mierzy się więc liczbą $f(a+h)-f(a)$. Podobnie $\overrightarrow{B''B'}$ daje przyrost rzędnej, ale wzdłuż stycznej i będzie $\overrightarrow{B''B'}=\overrightarrow{AB''}\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha=h\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha=h\,.\,f'(a)$. Liczbę h (którą możemy przyjąć dowolnie) nazwał Leibniz „różniczką zmiennej niezależnej“; (geometrycznie jest to dowolny przyrost odciętej) i oznaczył ją symbolem d_x, który obecnie piszemy we formie dx (pamiętając wszakże, że nie jest to iloczyn!); „d“ jest skróceniem słowa łac. differentiale = różniczka. Iloczyn $h\,.\,f'(a)$ nazwał Leibniz „różniczką funkcji“ i oznaczył $d_{f(x)}$ czyli $df(x)$. Mamy więc określenie: $df(x)=f'(x)\,.\,dx$, co wyraża, że przez różniczkę funkcji w punkcie x rozumiemy iloczyn mnożenia pochodnej tej funkcji w punkcie x przez różniczkę zmiennej niezależnej.

Geometrycznie — jak widzimy — oznacza różniczka funkcji w punkcie x przyrost rzędnej wzdłuż stycznej do krzywej w punkcie x (a nie wzdłuż krzywej).

Znajdziemy obecnie związek między *przyrostem funkcji a różniczką funkcji w danym punkcie.* Wiemy, że jest:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Do każdej więc liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $\delta>0$, że, gdy jest $0<|h|<\delta$, to:

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)\right|<\varepsilon.$$

Oznaczmy przez ϱ następującą różnicę:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)=\varrho\,\ldots\ldots(1).$$

Zatem $|\varrho|<\varepsilon$; gdy więc $h\to 0$, to $\lim\limits_{h\to 0}\varrho=0$.

Równość (1) pomnóżmy przez h: $\varrho h=f(a+h)-f(a)-hf'(a)$, skąd wynika, że jest: $f(a+h)-f(a)=h\,.\,f'(a)+\varrho h\,\ldots\ldots(2)$. Wzór ten właśnie orzeka, że przyrost funkcji w punkcie a [t. j. $f(a+h)-f(a)$] różni się od różniczki $h\,.\,f'(a)$ funkcji w punkcie a o wielkość ϱh, którą na rys. 66 przedstawia wektor $\overrightarrow{B'B}$.

Uważajmy wielkość h za funkcję h. Gdy $h\to 0$, to funkcja h jest niesk. małą I^{go} rzędu względem h; ponieważ jest: $\frac{\varrho h}{h}=\varrho$ i zarazem $\lim_{h \to 0} \varrho = 0$, więc w myśl definicji, podanej w § 15 możemy ϱh uważać za nieskończenie małą wyższego rzędu, niż pierwszy względem h. Zatem *przyrost rzędnej wzdłuż krzywej w punkcie a różni się od różniczki funkcji w punkcie a o nieskończenie małą rzędu wyższego, niż pierwszy względem różniczki zmiennej niezależnej.*

Ten *ścisły* rezultat można mniej dokładnie w następujący sposób wysłowić: różniczkę funkcji w punkcie $x = a$ wolno uważać za „pierwsze przybliżenie" przyrostu rzędnej w punkcie a wzdłuż krzywej. Bardzo nieściśle powiemy, że można liczbę ϱh pominąć wobec różniczki $hf'(a)$. Trzeba bowiem pamiętać, że, biorąc różniczkę funkcji za równą przyrostowi rzędnej, popełnia się pewien błąd! Niedocenianie tego błędu było właśnie powodem, że w starszych podręcznikach analizy odrzucano poprostu wielkość ϱh wobec wyrazu $hf'(a)$, twierdząc, że wielkość ta wobec różniczki funkcji jest tak małą, iż można ją pominąć. Na tem przeważnie polega nieścisłość rozumowań w podręcznikach analizy wyższej, wydanych w połowie XIX wieku. Nienaukowa metoda tych „pomijań" utrzymała się w matematyce tak długo jedynie dzięki temu, że niewątpliwie przemawia do wyobraźni i ułatwia intuicji poszukiwanie ścisłych dróg dla rozumowania, jednak ścisłych dowodów na niej oprzeć nie można.

Drugi błąd pewnych podręczników analizy wyższej polega na niejasnych, wprost fantastycznych i naukowo fałszywych określeniach różniczki dx, różniczki funkcji i nieskończenie małych.

Ze wzoru Leibniza: $dy = f'(x).dx$, wynika przy założeniu, że $dx \neq 0$, równość: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, którą wyrazimy słowami: *jeżeli różniczka zmiennej niezależnej nie jest zerem, to iloraz dzielenia różniczki funkcji w punkcie x przez różniczkę zmiennej niezależnej, równa się pochodnej tejże funkcji w punkcie x.* Odtąd więc będziemy mogli pochodną funkcji y zmiennej x oznaczać również symbolem $\frac{dy}{dx}$.

Uzyskaliśmy tedy nowy znak na pochodną funkcji, znak bowiem y', czy $f'(x)$, używany przez nas dotychczas należy uważać tylko za tymczasowy.

Dotychczasowe więc wzory różniczkowe zapiszą się obecnie w sposób następujący:

$$\frac{d(x^a)}{dx} = ax^{a-1}, \quad \frac{d(e^x)}{dx} = e^x, \quad \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x,$$

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x,\quad \frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},\quad \frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{d\,\mathrm{arc\,ctg}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{d[f_1(x) \pm f_2(x)]}{dx} = \frac{df_1(x)}{dx} \pm \frac{df_2(x)}{dx},\quad \frac{d(\varphi\psi)}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}\cdot\psi + \varphi\frac{d\psi}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\varphi}\right) = \frac{\varphi\frac{df}{dx} - f\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi^2}.$$

Wreszcie wzór o pochodnej funkcji złożonej $\varphi[f(x)]$, powstałej przy pomocy funkcji $z = \varphi(y)$, $y = f(x)$ [zob. str. 174] napiszemy w postaci

$$\frac{d\varphi[f(x)]}{dx} = \left(\frac{d\varphi(y)}{dy}\right)_{y=f(x)}\cdot\frac{df(x)}{dx};$$

po obu stronach należy podstawić $x = x_0$.

Otóż ten wzór łatwo zapamiętać, gdy napiszemy go (oczywiście, niedokładnie) w postaci $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$, co mogłoby wywołać złudzenie, jakoby wzoru tego nie trzeba było długo dowodzić, skoro po stronie prawej różniczka dy daje się uprościć; tymczasem wzór ten nie jest sam przez się zrozumiałym, gdyż po stronie prawej różniczka dy raz jest różniczką zmiennej niezależnej, drugi raz różniczką funkcji. I właśnie osobnym dowodem wykazaliśmy, że jest: $dz = \frac{dz}{dy}\cdot dy$, bez względu na to, czy y jest zmienną zależną, czy nie. Ponadto podkreślamy, że dogodne znakowanie nie może zastępować dowodu — może tylko ułatwić zapamiętanie wyniku.

§ 45. Pochodne wyższych rzędów; rachunek różniczkowy.

Weźmy pod uwagę funkcję $y = f(x)$, określoną w punkcie x_0 i jego sąsiedztwie, a więc istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f(x)$ oznacza określoną funkcję w przedziale $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ ma pochodną tak w punkcie x_0, jak i w każdym punkcie wewnętrznym przedziału $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$. Utwórzmy iloraz różnicowy:

$$(1)\qquad \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} \qquad (0<|h|<\delta)$$

i przypuśćmy, że ma granicę, gdy $h\to 0$; granicę tę nazywamy drugą pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 i oznaczymy (na razie) znakiem $f''(x_0)$. Utwórzmy iloraz różnicowy:

$$(2)\qquad \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h},$$

w którym najpierw obrano liczbę x tak, iż jest $x_0-\delta<x<x_0+\delta$, a potem wybrano liczbę h tak, iż jest $h\neq 0$, $x_0-\delta<x+h<x_0+\delta$; załóżmy, że iloraz (2) przy każdej stałej wartości x z wnętrza przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ma granicę, gdy $h\to 0$. Innemi słowy zakładamy, że funkcja $f(x)$ ma drugą pochodną w każdym punkcie wewnętrznym przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Przy jej pomocy określamy trzecią pochodną w punkcie x_0, jako granicę ilorazu różnicowego:

$$\frac{f''(x_0+h)-f''(x_0)}{h}, \text{ gdy } h\to 0.$$

W ten sposób postępujemy dalej, a więc załóżmy, że istnieje liczba $\delta>0$ taka, iż pochodna n-ta funkcji $f(x)$, [a którą to pochodną oznaczymy przez $f^{(n)}(x)$] jest określona wewnątrz przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ i załóżmy, że iloraz różnicowy:

$$(3)\qquad \frac{f^{(n)}(x_0+h)-f^{(n)}(x_0)}{h} \qquad (0<|h|<\delta)$$

ma granicę, gdy $h\to 0$; granicę tę nazywamy pochodną $(n+1)$-wszą funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. Metodą indukcji zupełnej można wykazać, że powyższa definicja określa pochodną każdego rzędu w punkcie x_0.

Uwaga 1. To, co dotąd nazywaliśmy pochodną funkcji, jest pochodną rzędu 1-go funkcji.

2. Podkreślamy, że dla istnienia $(n+1)$-wszej pochodnej *w punkcie* x_0 potrzeba istnienia n-tej pochodnej w punkcie x_0 i w pewnem jego sąsiedztwie. Będzie to rzeczą zrozumiałą, gdy czytelnik przypomni sobie definicję pochodnej (str. 148).

[3. Dodajmy dla przestrogi, że symbolu $f^{(n)}(x)$ nie należy poczytywać za symbol potęgi n-tej; aby takiemu fałszywemu pojmowaniu zapobiedz, ujmuje się wskaźnik n w nawias].

Tw. Jeżeli funkcja $f(x)$ ma pochodną $f^{(n+1)}(x_0)$ w punkcie x_0, to funkcja $f(x)$ i jej pochodne $f'(x)$, $f''(x),\ldots;$ $f^{(n)}(x)$ są wszystkie ciągłe w punkcie x_0.

Jest to uogólnienie twierdzenia ze str. 151 i przy pomocy niego dowodzimy obecnego na mocy zasady indukcji zupełnej.

Tw. Jeżeli m i n oznaczają liczby naturalne i jeżeli istnieje jedna z dwu następujących wielkości:

$f^{(m+n)}(x_0)$ *[t. j. pochodna $(m+n)$-go rzędu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0];*

$(f^{(m)}(x))^{(n)}_{x_0}$ *[t. j. pochodna rzędu n-go w punkcie x_0 z pochodnej $f^{(m)}(x)$], to druga z nich także oznacza określoną liczbę i jedna jest równa drugiej.*

Dowód prowadzimy przy pomocy zasady indukcji zupełnej. Mamy wykazać, że:

(1) $$f^{(m+n)}(x_0) = (f^{(m)}(x))^{(n)}_{x_0}.$$

Dla $n=1$ twierdzenie jest prawdziwe na mocy definicji pochodnej rzędu $(m+1)$-go w punkcie x_0. Przypuśćmy chwilowo, że tw. jest prawdziwe, gdy $n=p$, gdzie p oznacza liczbę naturalną. Przyjmijmy $n=p+1$ i niech jedna z wielkości (2): $f^{(m+p+1)}(x_0)$ $(f^{(m)}(x))^{(p+1)}_{x_0}$ oznacza określoną liczbę. Gdy pierwsza z nich jest określoną, to na mocy definicji jest $f^{(m+p+1)}(x_0) = (f^{(m+p)}(x))'_{x_0}$; strona prawa na mocy chwilowego przypuszczenia przekształci się we wyrażenie $((f^{(m)}(x))^{(p)}_{x})'_{x_0}$, a to znów na mocy definicji pochodnej jest równe wyrażeniu $(f^{(m)}(x))^{(p+1)}_{x_0}$, o co chodziło. Podobnie postąpi czytelnik, gdy wiemy z góry, że druga z wielkości (2) ma określone znaczenie.

Określimy teraz różniczkę rzędu 2-go itd. dla funkcji $f(x)$ w punkcie x_0. W tym celu zakładamy, że funkcja $f(x)$ ma pochodną 2-go rzędu w punkcie x_0, więc istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że pochodna $f'(x)$ jest określona, o ile jest $|x - x_0| < \delta$. W każdym takim punkcie x jest więc określona różniczka $f'(x).h$ [lub $f'(x)dx$], o ile tylko będzie h określoną funkcją zmiennej x. Otóż dla uproszczenia, które będzie zaraz widoczne, załóżmy, że h jest wielkością niezależną od zmiennej x. Wobec tego różniczka $f'(x).h$ ma określoną pochodną dla $x=x_0$. Otóż przez różniczkę funkcji $f(x)$ rzędu 2-go w punkcie x_0 rozumiemy różniczkę w punkcie x_0 różniczki funkcji $f(x)$ czyli:

$$(f'(x).h)'_{x=x_0}.h \text{ t. zn. } [f''(x_0).h + f'(x_0).(h)'_{x_0}]\,h,$$

ale ponieważ przyjęliśmy, że h nie zależy od zmiennej x, więc $h'=0$ i przez to wyrażenie drugiej różniczki (rzędu 2-go) przyjmuje prostą postać $f''(x_0).h^2$; oznaczamy tę różniczkę znakiem d^2y lub $d^2f(x)$; mamy więc $(d^2f(x))_{x_0} = f''(x_0).dx^2$; gdy $dx \neq 0$, to stąd

$\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right)_{x_0} = f''(x_0)$; dla dowolnego punktu x jest $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$ albo $\frac{d^2 y}{dx^2} = y''$ i tem samem uzyskaliśmy nowy znak na drugą pochodną funkcji $f(x)$. Otrzymaliśmy więc twierdzenie: *jeżeli różniczka* $dx \neq 0$, *to pochodna rzędu 2-go funkcji* $f(x)$ *w punkcie* x_0 *jest równą ilorazowi dzielenia różniczki rzędu 2-go w punkcie* x_0 *dla funkcji* $f(x)$ *przez drugą potęgę różniczki* dx.

Jeżeli założymy, że istnieje 3-cia pochodna $f'''(x_0)$, to istnieje druga różniczka w punkcie x_0 i jego otoczeniu. Przez różniczkę 3-go rzędu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 rozumiemy różniczkę w punkcie x_0 różniczki rzędu 2-go czyli $(d^3 f(x))_{x_0} = (f''(x) \cdot dx^2)'_{x_0} \cdot dx = f'''(x_0)\, dx^3$, bo $(dx)' = 0$. Stąd, gdy $dx \neq 0$, wynika dla dowolnego punktu x:

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = f'''(x) \text{ albo } \frac{d^3 y}{dx} = y'''.$$

Przez różniczkę $d^{n+1} f(x)$ rzędu $(n+1)$-go funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 rozumiemy różniczkę rzędu 1-go w punkcie x_0 różniczki $d^n f(x)$, określonej w punkcie x_0 i jego sąsiedztwie. A więc przez definicję mamy:

$$(3) \qquad (d^{n+1} f(x))_{x_0} = (d\,[d^n f(x)])_{x_0}.$$

Wykażemy następujące twierdzenie: *jeżeli funkcja* $f(x)$ *ma w punkcie* x_0 *określoną pochodną* $f^{(n)}(x_0)$ *rzędu n-go, to istnieje określona różniczka* $d^n f(x)$ *w pukcie* x_0 *i jest*

$$(4) \qquad (d^n f(x))_{x_0} = f^{(n)}(x_0) \cdot dx^n.$$

Dowód przeprowadzimy na mocy indukcji zupełnej. Jeżeli położymy $d^1 f(x) = d f(x)$, to wzór (4) okaże się prawdziwym. Przypuśćmy chwilowo, że wzór (4) jest słusznym, o ile $n = p$, gdzie p oznacza dowolną liczbę naturalną. Z określenia mamy

$$(d^{p+1} f(x))_{x_0} = (d\,[d^p f(x)])_{x_0} = \left\{\frac{d}{dx}[d^p f(x)]\right\}_{x_0} dx = \left[\frac{d}{dx}\left(f^{(p)}(x) dx^p\right)\right]_{x_0} dx$$

$= \left\{f^{(p+1)}(x_0)\, dx^p + p\, f^{(p)}(x) \cdot dx^{p-1} \frac{d}{dx}(dx)\right\}_{x_0} \cdot dx$, przyczem korzystaliśmy z tego, że wzór (4) jest słusznym dla $n = p$. Ponieważ przyjęliśmy dla prostoty, że różniczka dx nie zależy od zmiennej x, więc $\frac{d}{dx}(dx) = 0$, przeto jest $(d^{p+1} f(x))_{x_0} = f^{(p+1)}(x_0)\, dx^{p+1}$. Tem samem twierdzenie udowodnione. O ile $dx \neq 0$, to jest $\frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x)$; przez to uzyskaliśmy nowy symbol na pochodną rzędu n-go, uważając symbol $f^{(n)}(x)$ za tymczasowo tylko wprowadzony, jednakowoż tak wygodny, że będziemy go często i w dalszym ciągu używali.

Wobec tego równość (1) (str. 203) możemy przepisać we formie

$$\left(\frac{d^{m+n} f(x)}{dx^{m+n}}\right)_{x_0} = \left(\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^m f(x)}{dx^m}\right)\right)_{x_0}.$$

Na mocy tej równości czytelnik z łatwością udowodni też następujące twierdzenie: *jeżeli jedna z dwóch różniczek:*

$$(d^n(d^m f(x))_{x_0},\quad (d^{m+n} f(x))_{x_0}$$

jest określoną, to i druga z nich jest określoną i obie są sobie równe.

Uwaga. Czytelnik prawdopodobnie zauważył, że różniczki dy, $d^2y, \ldots$ określono jako funkcje dwóch zmiennych od siebie niezależnych: x i dx. Po rozważaniach § 89 stanie się jasnem, że definicję (3) można zastąpić przez równość $(d^{n+1} f(x))_{x_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x}[d^n f(x)]\right)_{x_0} dx$.

Obecnie zrozumiałem się staje, że obliczenie różniczki funkcji czyli różniczkowanie funkcji wymaga obliczenia pochodnej funkcji. Dlatego też często mówimy: zróżniczkować funkcję, zamiast mówić, że mamy obliczyć jej pochodną, jak to zaznaczyliśmy w § 34. Czytelnik teraz zrozumie należycie termin: rachunek różniczkowy, który znaczyć będzie dla nas to samo, co rachunek pochodnych.

Przykłady. Obliczmy n-te pochodne kilku funkcji; stawiamy sobie następujące zagadnienie: gdy dana funkcja $f(x)$, znaleźć funkcję dwóch zmiennych $\varphi(n, x)$ taką, iż jest $f^{(n)}(x) = \varphi(n, x)$ dla każdej wartości naturalnej n i dla każdej liczby x z pewnego zbioru liczbowego, dla którego pochodna $f^{(n)}(x)$ jest określona.

1) Niech będzie $y = e^x$, to $y' = e^x$, $y'' = e^x, \ldots$, zgadujemy, że jest $y^{(n)} = e^x$, jak z łatwością czytelnik stwierdzi na mocy zasady indukcji zupełnej.

2) Niech będzie $y = \sin x$, to $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$. Ale jest $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $-\sin x = \sin(x + \pi)$; tedy funkcja $-\cos x$ na mocy pierwszej równości będzie $= -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, to zaś

na mocy drugiej $=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$. Mamy tedy $y'=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y''=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $y'''=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$... Zgadujemy tedy, że jest $y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, co należy udowodnić indukcją zupełną i co też czytelnik z łatwością uczyni.

3) Czytelnik wykaże, że jest $\frac{d^n}{dx^n}(\cos x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ dla $n=1,2,\ldots$ i dowolnej wartości rzeczywistej x.

Pochodne rzędu n-go funkcji $(1+x)^\mu$, $ln(1+x)$ i $\operatorname{arctg} x$ podajemy w § 86.

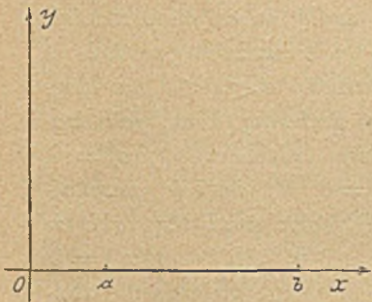
§ 46. Twierdzenie Rollego.

Zajmiemy się obecnie funkcjami ciągłemi w danym przedziale, mającemi nadto we wszystkich punktach wewnętrznych tego przedziału określoną pochodną; dla takich funkcji udowodnimy twierdzenie, wymienione w nagłówku. Zanim przystąpimy do ścisłego wywodu, rozważymy wpierw jego znaczenie geometryczne.

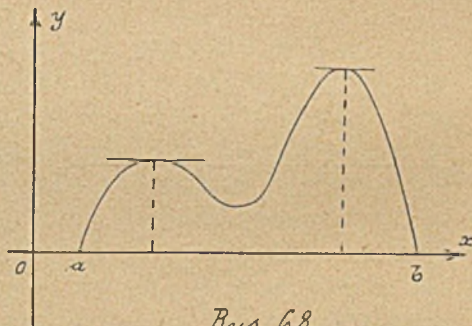
Weźmy pod uwagę funkcje ciągłe w przedziale (a, b) takie, że krzywe, będące ich obrazami geometrycznymi, przecinają oś x w punktach $x=a$ i $x=b$, oraz załóżmy, że w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału dadzą się do nich wykreślić styczne nierównoległe do osi rzędnych. Krzywych takich możemy znaleźć nieskończenie wiele [1]); możliwe są jednak tylko cztery zasadnicze ich postacie, przedstawione kolejno na rys. 67, 68, 69, 70. Jeśli pojęciem „krzywa" obejmiemy także linje proste, uważając ostatnie za szczególny przypadek krzywych, to na rys. 67, krzywa, będąca obrazem geometrycznym funkcji o podanych własnościach, nakrywa się z odcinkiem ab osi x; krzywa z rys. 68 nie schodzi poniżej osi x, następna z rys. 69 nie wychodzi ponad oś x; wreszcie krzywa

[1]) Połóżmy bowiem $y=\beta-\sqrt{\beta^2-ab+x(a+b)-x^2}$, gdy $\beta>0$, zaś $y=\beta+\sqrt{\beta^2-ab+x(a+b)-x^2}$, gdy $\beta<0$; wtedy każda z tych funkcji spełnia wszystkie założenia, gdy za β obierzemy dowolną stałą. Powyższe funkcje przedstawiają bowiem łuki kół, przechodzących przez punkty $(a,0)$, $(b,0)$ i środku w punkcie $\left(\frac{a+b}{2},\beta\right)$.

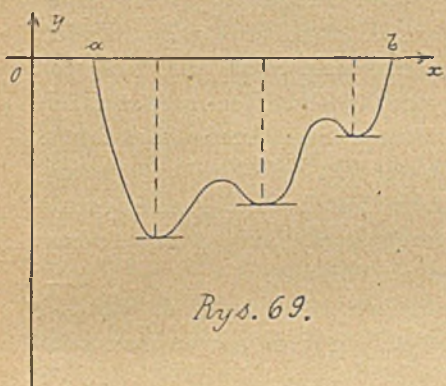
z rys. 70 łączy dwa poprzednie przypadki i biegnie po obu stronach osi odciętych. Już z obserwacji tych rysunków staje się widocznem, że przy założeniach, któreśmy o rozważonych tu funkcjach uczynili, musi istnieć we wszystkich przypadkach krzywych przynajmniej jeden punkt taki, w którym styczna do danej krzywej jest równoległą do osi x, i że ten punkt ma odciętą zawartą



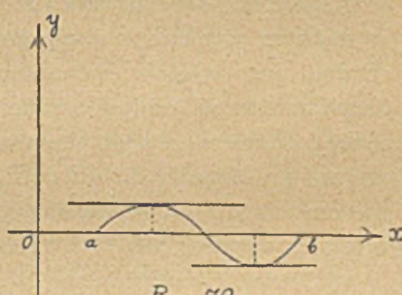
Rys. 67.



Rys. 68.



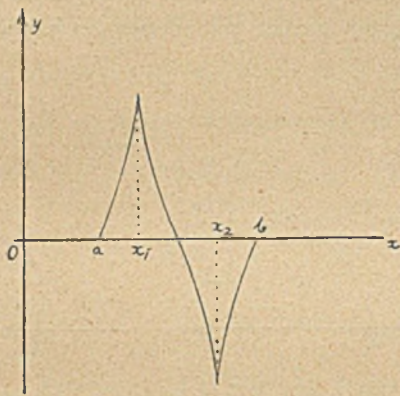
Rys. 69.



Rys. 70.

między liczbami (a) i (b). W przypadku pierwszym punktów takich jest nieskończenie wiele, bo funkcję przedstawia odcinek, zlewający się z osią x, w dalszych trzech przypadkach znajdzie się zawsze pewna ilość takich punktów (na rysunkach naszych po 2, wzgl. 3).

Zrobiliśmy założenie, wykluczające istnienie stycznej równoległej do osi rzędnych dla danej krzywej w przedziale (a, b); jeślibyśmy bowiem to założenie pominęli, to może się zdarzyć, iż taka krzywa nie będzie miała w tym przedziale stycznej równoległej do osi odciętych, o co nam właśnie chodzi. Rys. 71 przedstawia właśnie przykład takiej krzywej[1], która w punktach x_1 i x_2 posiada styczne równoległe do osi y, i nie można do niej wykreślić stycznej równoległej do osi x.



Rys 71.

Analitycznie sformułuje się te rozważania w następującem twierdzeniu: *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w całym przedziale (a, b) i w każdym punkcie x o własności $a < x < b$ ma określoną pochodną, oraz, jeśli zachodzą równości: $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, to istnieje przynajmniej jeden punkt x_0 taki, że jest $a < x_0 < b$ i $f'(x_0) = 0$.* Jest to t. zw. twierdzenie Rollego[2].

[Przed przystąpieniem do dowodu zauważymy jeszcze, że geometrycznym odpowiednikiem założenia, iż funkcja $f(x)$ ma mieć w każdym punkcie wewnętrznym przedziału (a, b) określoną pochodną, jest właśnie zastrzeżenie przy poprzednich rozważaniach uczynione, że w każdym punkcie wewnętrznym przedziału krzywa, będąca obrazem geometrycznym funkcji $f(x)$, ma określoną styczną, ale nie prostopadłą do osi x. Pochodna jest bowiem geometrycznie niczem innem, jak wartością tangensu kąta, jaki styczna tworzy z osią x; tangens zaś kąta prostego nie istnieje].

Dowód. Wykazaliśmy w § 31 (str. 131), że zbiór wartości funkcji, ciągłej w całym przedziale (a, b) posiada pewne maximum

---

[1]) Utwórzmy następującą funkcję: niech $x_1 = \frac{2a+b}{3}$, $x_2 = \frac{a+2b}{3}$. Otóż, gdy $a \leqslant x \leqslant x_1$, niech będzie $y = \arcsin \frac{3(x-a)}{b-a}$; gdy $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, niech będzie $y = \arccos \frac{6}{b-a}\left[x - \frac{a+b}{2}\right] - \frac{\pi}{2}$; wreszcie, gdy $x_2 \leqslant x \leqslant b$, niech $y = \arcsin \frac{3(x-b)}{b-a}$. W ten sposób określona funkcja nie ma pochodnej w punktach x_1 i x_2; obraz jej składa się z łuków krzywych, będących wykresami funkcji kołowych, jak to mniej więcej przedstawia rys. 71.

[2]) M. Rolle, francuski matematyk, ur. 1652, um. 1719.

(M) i minimum (m). Możliwe są tu dwa przypadki: albo I) $m = M$, albo II) $M > m$. I) W pierwszym przypadku funkcja jest stałą w całym przedziale (a, b) (zob. wykres na rys. 67); czyli jest $f(x) = M = m$ i $M = m = 0$, bo $f(a) = 0$; wtedy jest $f'(x) = 0$ w każdym wewnętrznym punkcie x przedziału (a, b). W tym przypadku zatem twierdzenie Rollego jest prawdziwe; za liczbę x_0, o której mowa w twierdzeniu, wolno przyjąć dowolną liczbę o własności $a < x_0 < b$.

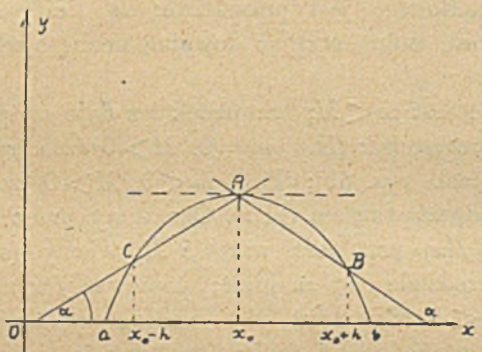
II) Załóżmy teraz, że jest $m < M$; przypadek ten daje się podzielić na następujące podprzypadki: (II,1) $m = 0$, $M > 0$ (zob. rys. 68); (II,2) $m < 0$, $M = 0$ (zob. rys. 69); (II,3) $m < 0$, $M > 0$ (zob. rys. 70). Zajmiemy się podprzypadkiem (II,1). Oznaczmy przez x_0 punkt, w którym funkcja $f(x)$ przybiera wartość M, wiemy (str. 131), że taki punkt w przedziale się znajdzie; ponieważ $f(x_0) = M > 0$ (α), więc $a < x_0 < b$ (β), gdyż jest według założenia: $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Przeto pochodna tej funkcji w punkcie x_0 według założenia istnieje, a jako taka jest granicą ilorazu różnicowego:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ldots\ldots (\delta), \text{ gdy } h \neq 0 \text{ i } h \to 0.$$

Skoro liczba $f(x_0)$ jest wartością maksymalną tej funkcji w przedziale (a, b), więc nie jest mniejszą od liczby $f(x_0 + h)$. Ogólnie więc możemy napisać: $f(x_0 + h) \leqq f(x_0) \ldots.$ (ε). Zatem dzielna $f(x_0 + h) - f(x_0)$ ilorazu (δ) jest stale liczbą niedodatnią; dzielnik zaś przy założeniu, że $h > 0$, jest liczbą dodatnią; iloraz (δ) jest przeto liczbą niedodatnią; gdy więc $h \to 0$, granica tego ilorazu może być tylko liczbą niedodatnią. A więc pochodna: $f'(x_0) \leqq 0 \ldots$ (ζ). Przypuśćmy teraz, że jest $h < 0$. Dzielna wyrażenia (δ) jest, jak poprzednio wyjaśniliśmy, ujemną lub równą 0, dzielnik zaś ujemny, zatem iloraz jest liczbą dodatnią lub zerem, więc i granica jego jest liczbą nieujemną czyli: $f'(x_0) \geqq 0 \ldots$ (η). Otrzymaliśmy w wyrażeniach (ζ) i (η) wyniki, które dadzą się pogodzić ze sobą tylko wtedy, gdy przyjmiemy $f'(x_0) = 0 \ldots$ (ϑ). W ten sposób wykazaliśmy prawdziwość tw. Rollego w podprzypadku (II,1). Dalszymi podprzypadkami (II,2) i (II,3), zajmować się nie będziemy, gdyż dla nich dowód jest zupełnie podobny.

Rozumowanie powyższe wyjaśnia nam rys. 72.

Niech krzywa rysunku 72 będzie wykresem funkcji $f(x)$, spełniającej założenie twierdzenia Rollego w przedziale (a, b) w podprzypadku (II.1). Wtedy istnieje punkt x_0, w którym pochodna równa się zeru. Weźmy punkt krzywej o odciętej $x_0 + h$, gdzie $h > 0$, to sieczna wykreślona przez punkt $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$ na krzywej i punkt $A(x_0, f(x_0))$ zamyka z dodatnim kierunkiem osi x kąt α rozwarty; tangens zaś kąta rozwartego jest ujemny i pozostanie takim, gdy punkt B będzie się po krzywej nieograniczenie zbliżał do A i sieczna obracać się będzie około punktu A; wtedy kąt $\alpha \to 180^\circ$, a $\operatorname{tg}\alpha \to 0$ przez wartości ujemne. Gdy zaś weźmiemy $h < 0$ i obierzemy punkt krzywej o odciętej $(x_0 + h)$, to sieczna AC utworzy z osią x kąt ostry $\alpha < \frac{\pi}{2}$; jeśli punkt C po krzywej nieograniczenie będzie się zbliżał do punktu A i sieczna obracać się będzie około punktu A, to kąt α będzie dążył do zera, a $\operatorname{tg}\alpha \to 0$ przez wartości dodatnie. W samym zaś punkcie A będzie rzeczywiście $\lim \operatorname{tg}\alpha = 0$ i $f'(x_0) = 0$.



Rys. 72.

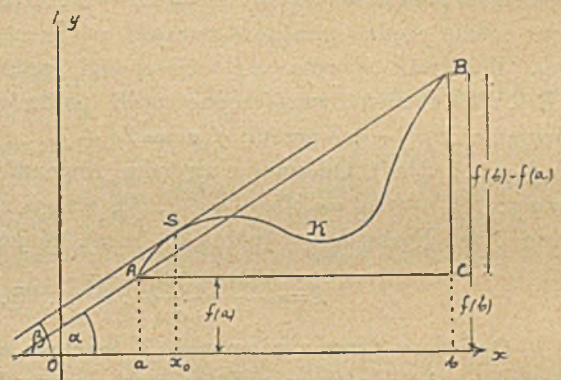
§ 47. Twierdzenie średniej wartości (zwane też twierdzeniem o przyrostach skończonych).

Przy pomocy twierdzenia Rollego udowodnimy teraz ogólniejsze twierdzenie, zwane jużto twierdzeniem średniej wartości, jużto twierdzeniem o przyrostach skończonych. Tak jedną jak i drugą nazwę zrozumie dobrze czytelnik po przeczytaniu niniejszego paragrafu.

Geometryczne znaczenie tego twierdzenia jest następujące:

Przypuśćmy, że krzywa K z rysunku 73 przedstawia obraz geometryczny funkcji $y = f(x)$, ciągłej w całym przedziale (a, b) i takiej, że w każdym punkcie wewnętrznym przedziału istnieje pochodna. Niech sieczna AB tej krzywej, łącząca jej punkty końcowe, tworzy z osią x kąt α. Według twierdzenia średniej wartości musi istnieć *wewnątrz* przedziału (a, b) przynajmniej jeden punkt x_0 taki, że wykreślona w punkcie $(x_0, f(x_0))$ styczna do krzywej, będzie równoległą do siecznej AB, a więc utworzy z osią odciętych kąt $\beta = \alpha$. Wtedy jest też oczywiście $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = f'(x_0)$. [Gdy jest $f(a) = f(b) = 0$, to otrzymamy znów fakt, zawarty w tw. Rollego].

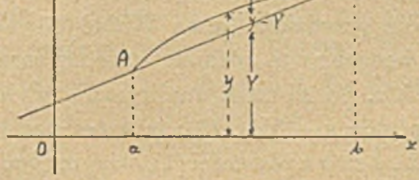
Wykreślmy (rys. 73) przez punkt A prostą, równoległą do osi x i weźmy pod uwagę powstały w ten sposób trójkąt prostokątny ABC. Boki jego są: przeciwprostokątnia AB, przyprostokątnie $AC = b - a$ i $BC = f(b) - f(a)$; naprzeciw ostatniej leży kąt, równy kątowi α. Na podstawie znanego twierdzenia z trygonometrji odczytujemy z figury:



Rys. 73.

$\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ czyli $f(b) - f(a) = (b - a) \operatorname{tg} \alpha$, skąd mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Rys. 74.

Ale jest $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = f'(x_0)$, zatem otrzymujemy równość:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

i to jest analitycznem wyrażeniem omawianego twierdzenia, które brzmi: *jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w całym przedziale (a, b), oraz ma w każdym punkcie wewnętrznym przedziału określoną pochodną, to istnieje przynajmniej jeden punkt x_0 taki, iż jest $a < x_0 < b$ i zarazem:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Heureza dowodu i dowód. Pragniemy udowodnić to twierdzedzenie przy pomocy tw. Rollego, które jednak odnosi się do funkcji, przybierających w punktach końcowych przedziału wartości równe zeru. W tym celu należy utworzyć taką funkcję przy pomocy danej funkcji. Niech więc będzie łuk $\widehat{AB}$ (rys. 74) obrazem geom. funkcji $y = f(x) \ldots (1)$. spełniającej założenie twierdzenia średniej wartości. Wykreślmy sieczną łuku $\widehat{AB}$ czyli prostą AB. Równanie jej będzie posiadało kształt: $Y = \lambda x + \mu \ldots (2)$, przyczem Y oznaczać będzie rzędne punktów siecznej, zaś y rzędne punktów krzywej. Ponieważ sieczna AB przechodzi przez punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$, przeto współrzędne tych punktów mają spełniać jej równanie (2); będzie przeto: $f(a) = \lambda a + \mu \ldots (3)$ i zarazem $f(b) = \lambda b + \mu \ldots$ (3 bis). Odejmując stronami równanie (3) od (3 bis), otrzymamy: $f(b) - f(a) = \lambda(b - a) \ldots (4)$, z tego zaś wynika po podzieleniu przez liczbę $b - a$ (różną od zera), że jest:

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \ldots\ldots (5).$$

Obliczmy teraz z równania (3) wartość na μ: $\mu = f(a) - \lambda a$ i wstawmy ją w równanie (2), a otrzymamy: $Y = \lambda x + f(a) - \lambda a$ czyli: $Y = f(a) + \lambda(x - a) \ldots\ldots (6)$. W równaniu (6) zastąpmy λ przez wartość, podaną w równości (5); będzie więc:

$$Y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \ldots . (7)$$

i to jest właśnie równaniem siecznej AB. Otóż przy pomocy równania krzywej $y = f(x)$ oraz siecznej AB utworzymy funkcję, do której można stosować tw. Rollego, t. j. taką, która dla wartości $x = a$ i $x = b$ staje się zerem i nadto ma pochodną wewnątrz przedziału (a, b). Taką funkcję znajdziemy, przypatrzywszy się uważnie ostatniemu rysunkowi; będzie ona zilustrowana różnicą rzędnych krzywej i siecznej w każdym punkcie przedziału (a, b). Widać bowiem z rysunku, że długość odcinka, będącego tą różnicą, staje się zerem w punktach końcowych przedziału, co również analitycznie wykażemy. Otóż utwórzmy funkcję: $\varphi(x) = y - Y \ldots . (8)$; stąd zaś, podstawiając za Y wartość z równości (7), a za y z równości (1), otrzymujemy:

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \ldots . (9).$$

Ze wzoru (9) widzimy, że funkcja $\varphi(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b); jest nią bowiem i stała $f(a)$ i funkcja linjowa $\lambda(x - a)$, więc nią będzie też funkcja, która jest sumą algebraiczną takich funkcji (str. 124). Funkcja $\varphi(x)$ ma także w każdym wewnętrznym punkcie przedziału (a, b) określoną pochodną, gdyż każdy ze składników prawej strony równości (9) spełnia ten warunek; nadto wykażemy, iż $\varphi(x)$ przybiera wartości zerowe w punktach (a) i (b). Gdy bowiem położymy wartość (a) zamiast zmiennej (x) w równości (9), to otrzymamy:

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \ldots (10)$$

i podobnie:

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0 \; (11).$$

Zatem jest: $\varphi(a) = 0 = \varphi(b) \ldots\ldots (12)$. Tem samem funkcja $\varphi(x)$ spełnia wszystkie założenia twierdzenia Rollego, można je więc do niej stosować. Istnieje zatem punkt x_0 taki, iż jest: $a < x_0 < b$, oraz pochodna: $\varphi'(x_0) = 0$. Wyrachujmy wartość pochodnej $\varphi'(x)$, różniczkując obie strony równości (9):

$$\varphi'(x) = f'(x) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} . 1 \text{ czyli:}$$

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ldots\ldots (13).$$

Kładąc liczbę x_0 za zmienną x, otrzymamy wartość tej pochodnej w punkcie x_0, która według tw. Rollego jest zerem. Jest więc:

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0, \text{ skąd otrzymujemy:}$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \ldots . (14) \text{ c. b. d. u.}$$

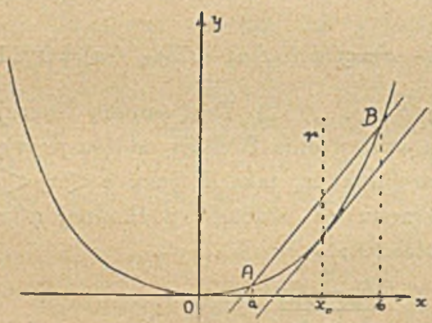
Przykłady. 1) Weźmy pod uwagę funkcję $y = x^2$, która w każdym przedziale jest ciągłą i ma pochodną, a więc spełnia założenia tw. średniej wartości. Możemy je więc do tej funkcji zastosować. Ze wzoru (14) otrzymamy dla niej:

$$2x_0 = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a, \text{ skąd } x_0 = \frac{a + b}{2}.$$

Punkt x_0, w którym można wykreślić styczną do paraboli $y = x^2$, równoległą do siecznej AB leży więc dla danej funkcji w środku odcinka $a\,b$, położonego na osi x. (Rys. 75).

Zgadza się to ze znaną własności paraboli, że, gdy narysujemy jakąkolwiek cięciwę paraboli i równoległą do niej styczną, to, łącząc punkt styczności ze środkiem cięciwy, otrzymamy prostą równoległą do osi paraboli (na rys. 75 prosta r łączy punkt styczności ze środkiem cięciwy AB).

2) Załóżmy[1]), że trójkąt ma boki a, b, c i kąty α, β, γ, odpowiednio im przeciwległe. Przez pomiar otrzymaliśmy $a = a_0$ cm, zaś kąty przyległe $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, tedy na mocy twierdzenia wstaw obliczamy bok: $b_0 = \frac{a_0 \sin \beta_0}{\sin(\beta_0 + \gamma_0)}$; po wykonaniu rachunków przekonywujemy się, że kąt γ błędnie wymierzyliśmy, że mianowicie kąt γ wynosi $\gamma_1 = \gamma_0 + h$, wskutek tego bok b nie wynosi b_0 cm, ale b_1 cm, gdzie jest: $b_1 = \frac{a_0 \sin \beta_0}{\sin(\beta_0 + \gamma_1)}$.



Rys. 75.

Oczywiście możnaby rachunek boku b na nowo przeprowadzić, postąpimy jednak inaczej, a mianowicie połóżmy $f(x) = \frac{a_0 \sin \beta_0}{\sin(\beta_0 + x)}$. Otóż $b_0 = f(\gamma_0)$, $b_1 = f(\gamma_1)$ i na mocy tw. średniej wartości jest $\frac{b_1 - b_0}{h} = \frac{f(\gamma_0 + h) - f(\gamma_0)}{h} = f'(x_0)$, gdzie x_0 oznacza liczbę, zawartą między liczbami γ_0 i $\gamma_0 + h$. Stąd poprawka, potrzebna do obliczenia boku b wynosi:

$$b_1 - b_0 = h f'(x_0) = h \cdot \frac{-a_0 \sin \beta_0 \cos(\beta_0 + x_0)}{\sin^2(\beta_0 + x_0)} =$$

$$= - \frac{a_0 h \sin \beta_0}{\sin(\beta_0 + x_0)} \cdot \operatorname{ctg}(\beta_0 + x_0).$$

Wprawdzie liczby x_0 nie znamy dokładnie, jednakowoż w pewnych przypadkach ostatnia równość pozwoli nam obliczyć dolny i górny kraniec poprawki. Np. niech będzie $a_0 = 1537{\cdot}229$ cm $\beta_0 = 33^0\, 25'\, 40''$, $\gamma_0 = 25^0\, 22'\, 15''$, błąd pomiaru kąta γ niech będzie dodatnim i niech wynosi $h = 10''$, co w radjanach daje $h = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{360} = 0{\cdot}000048481$. Otóż otrzymuje się $b_0 = 990{\cdot}0457$ cm. Ponieważ jest $\beta_0 + \gamma_0 = 58^0\, 47'\, 55''$, $\beta_0 + \gamma_1 = 58^0\, 48'\, 5''$ i ponie-

[1]) Według Mangoldta: Einführung in die höhere Mathematik. Tom II. 1921.

waż funkcja $\sin x$ wzrasta, zaś $\operatorname{ctg} x$ maleje, gdy kąt x, będąc ostrym, wzrasta, więc

$$-0{\cdot}029070 = -\frac{a_0 h \sin\beta_0 \operatorname{ctg}(\beta_0+x_0)}{\sin(\beta_0+\gamma_0)} < b_1 - b_0 <$$
$$-\frac{a_0 h \sin\beta_0}{\sin(\beta_0+\gamma_1)} \operatorname{ctg}(\beta_0+\gamma_1) = -0{\cdot}029066,$$

co daje ściśle na 4 miejsca dziesiętne $b_1 = 990{\cdot}0166$ cm.

§ 48. Wnioski z twierdzenia średniej wartości.

Z twierdzenia średniej wartości wysnujemy obecnie trzy ważne wnioski.

A) Weźmy pod uwagę funkcję $y = f(x)$, spełniającą w przedziale (a, b) założenia, któreśmy uczynili dla tw. średniej wartości. Wybierzmy dowolną liczbę x przedziału (a, b), przyczem niech będzie $a < x \leqslant b$; liczba x dzieli więc przedział (a, b) conajwyżej na dwie części. Jedna część to przedział (a, x). Ponieważ przedział (a, x) jest częścią przedziału (a, b), więc w każdym jego punkcie będzie funkcja $y = f(x)$ ciągłą i w każdym punkcie wewnętrznym przedziału (a, x) będzie miała pochodną czyli spełnia w zupełności założenia twierdzenia średniej wartości. Istnieje zatem taka liczba ξ przedziału (a, x), że jest:

$$a < \xi < x \text{ i } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi).$$

Do poprzednich założeń, uczynionych dla funkcji $y = f(x)$, dodajmy obecnie jeszcze jedno: niech funkcja ta ma tę własność, iż w każdym wewnętrznym punkcie przedziału (a, b) pochodna jej równa jest zeru. Zakładamy więc, że jest stale: $f'(x) = 0$, gdzie $a < x < b$. Natenczas będzie także $f'(\xi) = 0$ czyli: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$. Iloraz jest równy zeru, jeżeli jego dzielna jest zerem, (a dzielnik różny zera), jest więc: $f(x) - f(a) = 0$ czyli $f(x) = f(a)$. Znaczy to, że funkcja nie zmienia się ze wzrostem zmiennej x czyli jest stałą. Udowodniliśmy więc twierdzenie:

I. Jeżeli funkcja jest ciągłą w całym przedziale (a, b) *i ma w każdym wewnętrznym punkcie tego przedziału pochodną równą zeru, to funkcja ta w całym przedziale przyjmuje wartość stałą.*

Przypomnijmy sobie twierdzenie, które swego czasu wykazaliśmy, a mianowicie orzekające, że pochodna funkcji stałej w przedziale jest równą zeru (str. 149); obecnie udowodnione twierdzenie I możemy poniekąd uważać za odwrócenie cytowanego twierdzenia.

Zastosujmy tw. I do następującego przykładu. Weźmy pod uwagę dwie funkcje $y = \operatorname{arc\,sin} x$, $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Załóżmy, że jest $-1 < x < +1$. Otóż okaże się, że dla pochodnych mamy wzory: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $z' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; funkcje y, z mają więc równe pochodne. Funkcja $f(x) = y - z$ ma więc pochodną $f'(x) = y' - z' = 0$. Na mocy więc tw. I jest $f(x) =$ stałej w każdym przedziale (a, b) o własności $-1 < a < b < +1$, przyczem liczby a, b wolno pozatem dowolnie obrać. Jest więc

$$\operatorname{arc\,sin} x - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = C.$$

Połóżmy $x = 0$, aby obliczyć stałą C; a wolno położyć $x = 0$, bo możemy obrać liczby a, b tak, iż $a < 0 < b$ i tem samem liczba zero leży w przedziale (a, b). Dla $x = 0$ otrzymujemy $0 = C$; jest więc $\operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ w przedziale (a, b); ponieważ zaś liczby a, b są dowolnemi liczbami wewnątrz przedziału $(-1, +1)$, więc będzie:

$$\operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

dla wszystkich liczb x, spełniających nierówność $-1 < x < +1$.

Oczywiście ostatnią równość można również wykazać bardzo prostym sposobem, bo na drodze trygonometrycznej.

B) Załóżmy teraz, że funkcja $y = f(x)$, spełniająca założenia twierdzenia średniej wartości, ma wewnątrz przedziału (a, b) pochodną stale dodatnią czyli: $f'(x) > 0$, gdy $a < x < b$. W przedziale (a, b) wybierzmy dowolnie liczby x' i x'' takie, żeby było $x' < x''$. Punkty te możemy uważać za punkty końcowe przedziału (x', x''), wyciętego z przedziału (a, b). Do funkcji $f(x)$ w przedziale (x', x'') można więc stosować tw. średniej wartości; jest zatem:

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(\xi), \text{ gdzie } x' < \xi < x''.$$

Liczba ξ jest więc też liczbą, położoną *wewnątrz przedziału* (a, b), przeto według naszego założenia musi być pochodna w tym punkcie:

$$f'(\xi) > 0 \text{ czyli } \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} > 0.$$

Dzielnik lewej strony ostatniej nierówności jest dodatni, gdyż jest $x'' > x'$; ponieważ zaś iloraz jest większy od zera, więc dodatnią musi też być dzielna; zatem:

$$f(x'') - f(x') > 0 \text{ czyli } f(x'') > f(x').$$

Wnosimy stąd, że wartość funkcji wzrasta ze wzrostem zmiennej niezależnej, a taką funkcją nazywamy rosnącą w przedziale (a, b). Udowodniliśmy więc twierdzenie:

II. *Jeżeli funkcja jest ciągłą w całym przedziale $(a\, b)$ i ma pochodną dodatnią w każdym punkcie wewnętrznym przedziału, to jest w tym przedziale rosnącą.*

(Geometrycznie znaczy to rzecz następująca: gdy tangens kąta, jaki tworzy styczna do krzywej $y = f(x)$ z dodatnim kierunkiem osi x jest w przedziale (a, b) dodatni, to krzywa się wznosi w rozważanym przedziale).

Zastosujmy to tw. do funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; otóż $(\sin x)' = \cos x > 0$, gdy $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; przeto $y = \sin x$ jest w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcją rosnącą [1]). Podobnie dla $y = \operatorname{tg} x$ $y' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$, gdy $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Jest więc wewnątrz przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcja $\operatorname{tg} x$ rosnącą. [Z przedziału tego należy bowiem wyłączyć końce $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ i $\left(\frac{\pi}{2}\right)$].

C) Załóżmy teraz, że funkcja $y = f(x)$ ma pochodną ujemną w punktach wewnętrznych przedziału (a, b); inne założenia zaś pozostają bez zmiamy. Jest więc:

$$f'(x) < 0, \text{ gdy } a < x < b.$$

W sposób, opisany powyżej, wybieramy dowolnie punkty x' i x'' takie, że jest: $a \leqq x' < x'' \leqq b$. Będzie:

$$\frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} = f'(\xi),\ x' < \xi < x''.$$

---

[1]) Metodą elementarną udowodniliśmy to na str. 191.

Liczba ξ jest też punktem wewnętrznym przedziału (a, b); w myśl naszego założenia jest więc:

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}<0.$$

Ponieważ dzielnik ostatniego ilorazu jest dodatni, iloraz ujemny, więc dzielna jest ujemną czyli jest: $f(x'')-f(x')<0$ lub: $f(x'')<f(x')$. Punkt x'' leży na „prawo" od punktu x', w którym wartość funkcji jest większa. Krzywa $y=f(x)$ opada, funkcję $f(x)$ nazywamy malejącą w przedziale (a, b), co wysłowimy w twierdzeniu:

III. *Jeśli funkcja jest w całym przedziale (a, b) ciągłą i w każdym punkcie wewnętrznym ma pochodną ujemną, wtedy funkcja jest w przedziale (a, b) malejącą.*

Na twierdzenia: I, II, III będziemy się często powoływali. Nakoniec załóżmy o funkcji $y=f(x)$, że wewnątrz przedziału (a, b) ma pochodną stałą, równą liczbie c.

Rozważmy przedział (a, x), gdzie $a<x\leqq b$ i do funkcji $f(x)$ stosujmy twierdzenie średniej wartości:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi), \text{ gdzie } a<\xi<x.$$

Jest zatem punkt ξ także punktem wewnętrznym przedziału (a, b), więc według założenia $f'(\xi)=c$, przeto

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=c \text{ czyli } f(x)=f(a)+c(x-a),$$

o ile jest $a<x\leqq b$; ale i dla $x=a$ jest ostatnia równość słuszną. Widzimy tedy, że: *jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) i ma wewnątrz przedziału stałą pochodną, to jest funkcją linjową (wielomianem całkowitym stopnia 1-go) zmiennej x.*

Uwaga. Twierdzenia I, II i III zawierają odpowiedź na pytanie, czy pojęcie pochodnej daje rzeczywiście *miarę zmienności funkcji*, czy pozwala osądzić, że funkcja wzrasta lub maleje i t. d. W przyszłym paragrafie (zob. § 49, twierdzenia pomocnicze) będzie widocznem, że wartość pochodnej w jednym tylko punkcie skąpych udziela wiadomości o funkcji, kiedy założenia twierdzeń I, II, III, odnoszące się *do całego wnętrza przedziału* pozwalają na wnioski, pełniejsze w treść.

Przykład. Wykażemy następującą nierówność: jeżeli jest $x > 0$, to jest $x - \frac{x^2}{2} < ln(1+x) < x$. Drugą część tej nierówności wykazaliśmy już w § 27. Rozważmy funkcje: $F(x) = x - ln(1+x)$, $G(x) = ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Jeżeli a oznacza dowolną liczbę dodatnią, to widocznie obie funkcje $F(x)$, $G(x)$ są ciągłe w przedziale $(0, a)$. Jest $F(0) = G(0) = 0$. Obliczmy pochodne: $F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, $G'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$. Widzimy, że *wewnątrz* przedziału $(0, a)$ jest $F'(x) > 0$, $G'(x) > 0$. Przeto funkcje $F(x)$, $G(x)$ są funkcjami rosnącemi w przedziale $(0, a)$, a więc $F(x) > F(0)$, $G(x) > G(0)$ dla $0 < x \leqq a$ czyli $x - ln(1+x) > 0$, $ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$. Ponieważ liczba a jest dowolną, byle było $a > 0$, więc tem samem powyższą nierówność udowodniliśmy.

Zwróćmy jeszcze uwagę czytelnika na to, że w § 27 dowodziliśmy ciągłości funkcji logarytmicznej, tu się na tej własności już opieramy.

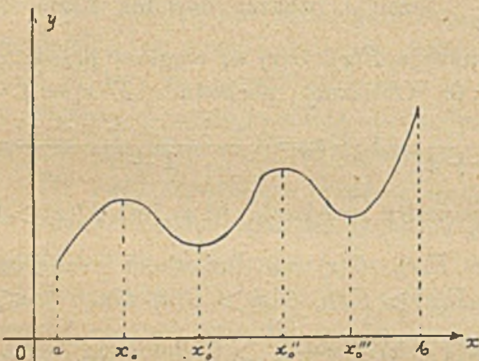
§ 49. Maximum i minimum lokalne.

A) Rozpatrzmy wykres krzywej o równaniu $y = f(x)$ w przedziale (a, b); o funkcji $f(x)$ zakładamy, że jest ciągłą w całym przedziale (a, b). Jak wiadomo z § 31 posiada maximum i minimum.

Obecnie zajmować nas będzie taka wartość x_0 na zmienną niezależną, że wartość funkcji w punkcie x_0 jest maximum, wzgl. minimum, ale tylko w stosunku do wartości, które funkcja przyjmuje w pewnem sąsiedztwie punktu x_0.

Wyjaśni to bliżej rys. 76. Niech krzywa tegoż rysunku będzie obrazem pewnej funkcji $y = f(x)$, ciągłej w przedziale (a, b). Najmniejszą wartość przyjmuje funkcja dla $x = a$, największą dla $x = b$. Ale te liczby nas obecnie nie będą zajmowały. Obchodzić nas będą wartości zmiennej niezależnej $x = x_0$, x_0', x_0'', x_0'''.

Liczba $f(x_0)$ nie jest ani najmniejszą ani największą z wartości, jakie funkcja $f(x)$ przyjmuje *w całym przedziale* (a, b), ale ma inną własność: oto istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że właśnie wartość $f(x_0)$ jest największą z wartości, jakie funkcja $f(x)$ przyjmuje dla liczb x z przedziału $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. To samo można orzec o wartości $f(x_0'')$. Nieco inaczej przedstawia się rzecz z wartością $f(x_0')$ lub $f(x_0''')$. Liczba $f(x_0')$ nie jest ani największa ani najmniejszą z wartości, jakie funkcja $f(x)$ przyjmuje *w całym przedziale* (a, b), ale ma własność następującą: istnieje liczba $\delta_1 > 0$ taka, że liczba $f(x_0')$ jest najmniejszą z wartości, jakie funkcja $f(x)$ przyjmuje w przedziale $(x_0' - \delta_1, x_0' + \delta_1)$. Podobnie się ma rzecz z wartością $f(x_0''')$.



Rys. 76.

Liczby x_0, x_0'' wzgl. x_0', x_0''' nazywamy punktami maximum lokalnego wzgl. minimum lokalnego danej funkcji.

Liczby $f(x_0)$, $f(x_0'')$ wzgl. $f(x_0')$, $f(x_0''')$ nazywać będziemy maximum lokalnem, względnie minimum lokalnem funkcji $y = f(x)$. Nasuwa się następujące zagadnienie: gdy dana funkcja $y = f(x)$, znaleźć jej punkty maximum lokalnego wzgl. minimum lokalnego. Aby to zagadnienie rozwiązać, będzie trzeba znaleźć warunki, którym mają czynić zadość punkty maximum wzgl. minimum lokalnego.

B) Wpierw sformułujemy trzy odnośne zagadnienia tytułem przykładów. Zagadnienia: 1) Dany odcinek (pręt) należy złamać w ten sposób, aby części pręta, wzięte za dwa sąsiednie boki prostokąta, dały prostokąt o polu największem z pól prostokątów, jakie można w ten sposób uzyskać.

Uważny czytelnik spostrzeże natychmiast, że to zagadnienie da się także w ten sposób wysłowić: z pomiędzy prostokątów o tym samym obwodzie wybrać ten, który ma największe pole.

Jeżeli x, y oznaczają długości części pręta, l długość pręta, to przy każdem złamaniu pręta ma być $x + y = l$ (1).

Mamy więc x, y tak obrać, by pole prostokąta było maximum. Otóż, jeżeli P oznacza miarę pola prostokąta, to $P = x \cdot y$. W tem wyrażeniu jest tylko jedna ze zmiennych x, y niezależną, bo x, y są związane równością (1) i przeto jedna przez drugą daje się wyrazić np. $y = l - x$. Tedy $P = x(l - x) = lx - x^2$. Pole prostokąta P jest więc funkcją zmiennej x; mamy obrać taką wartość na zmienną x, by pole P było maximum. Zagadnienie to można z łatwością rozwiązać sposobem elementarnym.

Jednym będzie sposób graficzny: na papierze rysujemy obraz geometryczny funkcji $P = lx - x^2$, co przedstawia parabolę (§ 71) i wyszukujemy maximum. Radzimy czytelnikowi przyjąć szczególną wartość na liczbę l (np. $l = 1$) i przeprowadzić rysunek na papierze milimetrowym.

Drugi sposób elementarny może być następujący: niech pole P staje się maximum dla $x = x_0$ czyli $lx_0 - x_0^2 > lx - x^2$, gdy $x \neq x_0$ i niech liczba x będzie dość bliską liczby x_0. Połóżmy więc $x = x_0 + h$, gdzie liczba h jest różną od zera i dość małą, zresztą dowolną, a więc można obrać liczbę h jako dodatnią lub ujemną, byle jej bezwzględna wartość nie była zbyt wielką. Ma więc być $lx_0 - x_0^2 > l(x_0 + h) - (x_0 + h)^2$, co daje: $h^2 + h(2x_0 - l) > 0$. Widoczne, że ta nierówność będzie spełniona na pewne, gdy $2x_0 - l = 0$, bo wtedy otrzymalibyśmy $h^2 > 0$. Ale czy to konieczne? Załóżmy więc, że jest $2x_0 - l \neq 0$, nadto poprzednią nierówność napiszemy w postaci $h[h + (2x_0 - l)] > 0$. Skoro jest $2x_0 - l \neq 0$, to jest albo $2x_0 - l > 0$ albo $2x_0 - l < 0$.

a) Niech będzie $2x_0 - l > 0$. Wtedy obierzemy na liczbę h wartość ujemną (jest więc $h < 0$) i nadto taką, że $h + (2x_0 - l) > 0$; tak obrać liczbę h można i wtedy jest $h[h + (2x_0 - l)] < 0$. Widzimy więc, że nie może być $2x_0 - l > 0$.

b) Niech będzie $2x_0 - l < 0$; wtedy obierzmy na liczbę h wartość dodatnią (jest więc $h > 0$), ale tak małą, żeby było $h + (2x_0 - l) < 0$; tak liczbę h można obrać i wtedy znów będzie $h[h + (2x_0 - l)] < 0$. Nie może więc być $2x_0 - l < 0$. Widzimy tedy, że przy założeniu $2x_0 - l \neq 0$ można obrać liczbę h w ten sposób, że nierówność $h^2 + h(2x_0 - l) > 0$ nie jest spełnioną. Jest więc koniecznie: $2x_0 - l = 0$, skąd $x_0 = \frac{l}{2}$ i przeto $y = l - x_0 = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}$ czyli prostokąt jest kwadratem. Rozumowanie nie jest kompletne. Założyliśmy bowiem, że *istnieje* maximum, a przecież zbiór miar powierzchniowych wszystkich prostokątów o wspólnym obwodzie, jest nieskończonym, wiemy zaś (str. 116), że takie zbiory mogą nie posiadać maximum. Wykażemy więc, że pole F prostokątne dla $x=\frac{l}{2}$ jest rzeczywiście maximum czyli że:

$$l\cdot\frac{l}{2}-\left(\frac{l}{2}\right)^2>lx-x^2,\ \text{gdy}\ x\neq\frac{l}{2}$$

i gdy bezwzględną wartość $\left|x-\frac{l}{2}\right|$ jest dość małą.

Otóż ostatnia nierówność daje $x^2-lx+\frac{l^2}{4}>0$ czyli $\left(x-\frac{l}{2}\right)^2>0$, a ta jest rzeczywiście spełnioną, gdy $x\neq\frac{l}{2}$, bo kwadrat liczby rzeczywistej, różnej od zera, jest dodatnią liczbą.

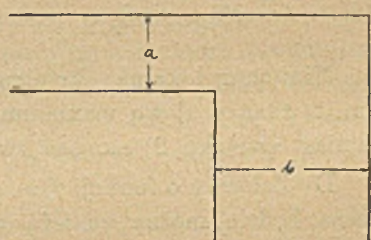
Widzimy tedy, że z pomiędzy prostokątów o tym samym obwodzie ma kwadrat największe pole.

2) Zagadnienie odwrotne do poprzedniego. Weźmy pod uwagę prostokąty, ale takie, żeby pola ich były jednakowe i z pomiędzy nich wybierzmy ten, który ma najmniejszy obwód.

Jeżeli zachowamy oznaczenia poprzedniego zagadnienia, to liczba $P=xy$ jest wielkością stałą i dodatnią; przeto jedną ze zmiennych x, y można przez drugą wyrazić np. $y=\frac{P}{x}$. Obwód prostokąta $2l$ będzie równy liczbie $2x+2y=2(x+y)$; tedy obwód będzie $2l=2\left(x+\frac{P}{x}\right)=2x+\frac{2P}{x}$. Mamy obrać liczbę x w ten sposób, by obwód był minimum.

I to zagadnienie można elementarnie rozwiązać, sposobami analogicznemi do tych, które czytelnik poznał poprzednio. Drugi sposób da nam nierówność postaci $h\left[h+\frac{x_0^2-P}{x_0}\right]>0$, a więc typu takiego, jak poprzednio. Znów więc otrzymamy, że być winno $x_0^2=P$; to zaś oznacza, że z pomiędzy prostokątów o wspólnej mierze pola ma kwadrat najmniejszy obwód. Inny sposób elementarny będzie następujący. Widzieliśmy, że szukany bok x i półobwód l spełniają równość $l=x+\frac{P}{x}$ czyli $x^2-lx+P=0$. Jeżeli więc zagadnienie ma być rozwiązalnem, to koniecznem jest by ostatnia równość, rozważana jako równanie stopnia drugiego na x miała rzeczywiste pierwiastki, do czego potrzeba znów, by wyróżnik równania był nieujemnym (zob. Wstęp) czyli ma być $\left(\frac{l}{2}\right)^2 - P \geqslant 0$, co daje $l^2 \geqslant 4P$; że zaś l nie może oznaczać liczby ujemnej, więc $l \geqslant 2\sqrt{P}$. Najmniejszą tedy wartością na l jest: $l = 2\sqrt{P}$ i wtedy z równania $x = \frac{l}{2} = \sqrt{P}$, zaś $y = \frac{P}{x} = \sqrt{P}$. Ponieważ wynik, otrzymany drugim i trzecim sposobem (rachunkowym) jest następujący: „jeżeli istnieje minimum, to bok x_0 obliczy się z równości $x_0^2 = P$", więc należy rozumowanie dopełnić dowodem, że kwadrat o boku x_0 ma rzeczywiście obwód najmniejszy czyli że jest $2x_0 + \frac{2P}{x_0} < 2x + \frac{2P}{x}$, o ile jest $x \neq x_0$. Rzeczywiście kładąc $P = x_0^2$ otrzymujemy stąd $(x - x_0)^2 > 0$, co jest prawdą, skoro $x \neq x_0$.

Można też, opierając się na tem, że zagadnienie 1) zostało rozwiązane, postąpić w sposób następujący: oznaczmy przez (Z_0) zbiór wszystkich prostokątów o stałej mierze P_0 pola, których zmienny obwód oznaczmy przez Ω. Przez (K_0) oznaczmy dalej kwadrat o polu P_0, jego obwód wynosi Ω_0. Otóż okażemy, że jest $\Omega_0 \leqslant \Omega$. Wybierzmy dowolny prostokąt ze zbioru (Z_0); ten prostokąt ma pole P_0 i obwód Ω'; zbudujmy kwadrat (K') o obwodzie Ω', jego pole niech wynosi P'. Na mocy zagadnienia 1) będzie tedy $P' \geqslant P_0$. Otóż zestawmy ze sobą kwadraty (K_0) i (K'); skoro dla nich jest $P' \geqslant P_0$, więc też ich obwody zostają w tym samym stosunku t. zn. jest $\Omega' \geqslant \Omega_0$, c. b. d. u.



Rys. 77.

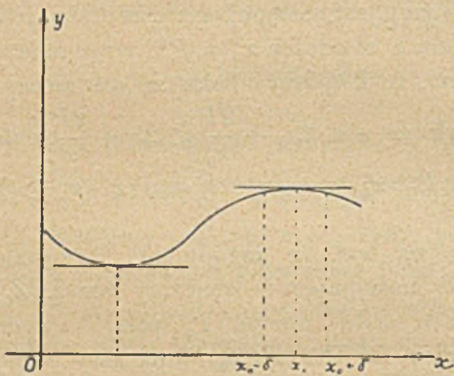
Zagadnienia te później rozwiążemy z łatwością na podstawie ogólnych twierdzeń, ogólnych metod, a nie indywidualnych.

3) Belka ma być przeniesiona w położeniu poziomem z korytarza (a) do korytarza (b) [rys. 77]. Znaleźć maksymalną, dopuszczalną długość belki, jeżeli szerokości korytarzy są dane i jeżeli korytarze spotykają się pod kątem prostym. Zbyt długa belka nie dałaby się bowiem przenieść z jednego korytarza do drugiego, jak to odrazu zgadujemy. Aby te i dalsze zagadnienia, o których będzie później mowa rozwiązać nie metodami indywidualnemi, ale na mocy twierdzeń ogólnych, podamy wpierw ściśle określenie

maximów i minimów lokalnych, które łącznie zowiemy też extremami funkcji.

C) *Definicja ścisła maximum i minimum lokalnego.*

Niech będzie daną funkcja $y = f(x)$ (rys. 78); ma w punkcie x_0 maximum lokalne t. zn. że istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich liczb x spełniających nierówność 1) $|x - x_0| < \delta$ spełnia się związek 2) $f(x_0) \geqslant f(x)$, przyczem równość pod 2) nie ma zachodzić stale w przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Znak równości bowiem zachodził będzie z pewnością dla punktu x_0, ale i w sąsiedztwie może zachodzić, lecz niestale, ponieważ pragniemy wykluczyć z rozważania funkcje stałe w przedziale.



Rys. 78.

Minimum lokalne określamy zupełnie podobnie, jak maximum, to znaczy słowo maximum należy zastąpić słowem minimum i zamiast związku 2) napisać związek $f(x_0) \leqslant f(x)$.

D) Załóżmy o funkcji $f(x)$, że ma pochodną w punkcie x_0, natenczas będzie można znaleźć warunek, który ma być spełniony przez liczbę x_0. Geometrycznie (rys. 78) warunek ten łatwo znaleźć; w punkcie bowiem x_0, w którym jest maximum lub minimum lokalne, jak widać z figury, styczna do krzywej ma być równoległą do osi x-ów, a więc pochodna będzie równą zeru czyli $f'(x_0) = 0$.

Otrzymujemy więc na drodze geometrycznej następujące twierdzenie: *jeżeli w punkcie x_0 funkcja przyjmuje maximum lub minimum lokalne i jeżeli ma pochodną w punkcie x_0, to pochodna tej funkcji w punkcie x_0 równa się zeru.* Równość $f'(x_0) = 0$ jest więc koniecznym warunkiem istnienia maximum lub minimum lokalnego w punkcie x_0, o ile rozważamy funkcje, mające pochodne czyli różniczkowalne, ale warunek ten nie jest wystarczającym, to znaczy: nie wolno twierdzić, aby pierwiastki równania $f'(x) = 0$ dawały punkty maximum lub minimum lokalnego. W celu przeprowadzenia dowodu ścisłego dla powyższego twierdzenia obliczmy w punkcie x_0 pochodną i zastanówmy się nad granicą:

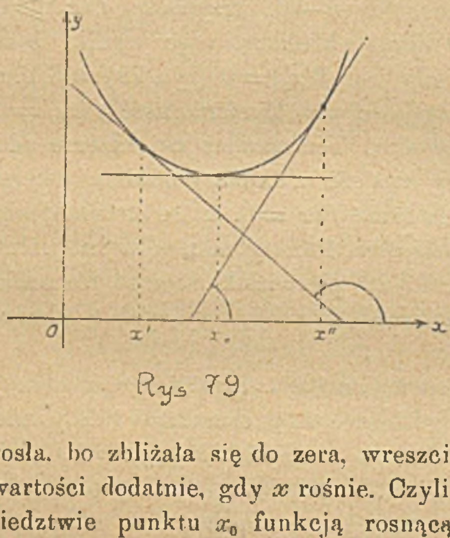
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Niech $f(x_0)$ będzie maximum lokalnem i weźmy np. (rys. 78) punkt x_0+h w sąsiedztwie na „prawo" od obrazu liczby x_0, a więc $h>0$, to wartość funkcji $f(x_0+h)$ będzie, niewiększą t. zn. mniejszą lub równą wartości $f(x_0)$, przeto $f(x_0+h)-f(x_0) \leqslant 0$, dzielnik h zaś jest dodatni, iloraz różnicowy zatem jest liczbą niedostatnią, wskutek tego granica jest też niedodatnią, pochodna więc jest $f'(x_0) \leqslant 0$.

Weźmy teraz $h<0$; dzielna powyższego ilorazu różnicowego jest nadal niedodatnią, a dzielnik $h<0$, zatem iloraz różnicowy jest niemniejszy od zera, a w granicy, gdy $h \to 0$, otrzymamy $f'(x_0) \geqslant 0$. Ponieważ pochodna jest liczbą określoną, więc wyniki będą tylko wtedy ze sobą zgodne, gdy jest $f'(x_0)=0$ (rys. 78), c b. d. u.

W przypadku minimum zachodzi podobnież równość $f'(x_0)=0$, jak czytelnik z łatwością udowodni. Tem samem twierdzenie udowodniliśmy. Jeżeli więc mamy znaleźć maxima i minima lokalne funkcji, to należy rozwiązać równanie $f'(x)=0$, które otrzymujemy, przyrównując pochodną $f'(x)$ do zera. Punkty maximów lub minimów lokalnych znajdą się więc między pierwiastkami tego równania. [Wszystkie przykłady dotyczyć będą funkcji, mających pochodne w punkcie extremów.]

Weźmy przykład już wspomniany t. j. rozważmy prostokąty o jednakowym obwodzie $2l$; gdy więc x, y oznaczają liczby mierzące dwa sąsiednie boki prostokąta, to ma być $2(x+y)=2l$, gdzie l jest liczbą stałą; stąd $y=l-x$. Z pomiędzy tych prostokątów mamy wybrać ten, który ma maksymalne pole. Otóż miara powierzchniowa prostokąta wynosi: $P=x.y=x(l-x)=xl-x^2$ i, chcąc znaleźć liczbę x, dla której funkcja P przyjmuje maximum lokalne, mamy wziąć pochodną funkcji i przyrównać ją do zera. Otóż jest $P'=l-2x$, poczem tworzy się równanie $l-2x=0$, które daje $x=\frac{l}{2}$. Ale nie wiemy dotąd, czy dla $x=\frac{l}{2}$ funkcja ma rzeczywiście maximum, czy minimum, czy może ani jedno ani drugie! Dalsze warunki są nam przeto potrzebne, które znajdziemy najpierw na drodze geometrycznej. Załóżmy więc, że $f(x_0)$ daje maximum lokalne i przypuśćmy, że istnieje druga pochodna $f''(x_0)$. Weźmy jakikolwiek punkt x w sąsiedztwie na „lewo“ od obrazu liczby x_0 i zbadajmy zmianę pochodnej pierwszej. Kąt ostry, który zawiera styczna w punkcie x do krzywej z osią x-ów, staje się mniejszy, gdy punkt x zbliża się do punktu x_0, a zatem tangens kąta też się zmniejsza; w punkcie x_0 kąt ów staje się zerem, więc i tangens tego kąta równa się zeru. Dla liczb $x > x_0$ ów kąt staje się rozwartym, a tangens tego kąta jest ujemnym; innemi słowy: gdy zmienna x wzrasta, to pochodna, będąc najpierw dodatnią, maleje do zera i staje się ujemną czyli pierwsza pochodna jest funkcją malejącą; pochodna więc tej pochodnej czyli druga pochodna w punkcie x_0 może mieć wartość ujemną lub zero, z wykluczeniem wartości dodatniej. Załóżmy teraz, że wartość $f(x_0)$ jest minimum lokalnem (rys. 79). Biorąc punkty $x < x_0$ i wykreślając styczne w tych punktach do krzywej, widzimy, że tworzą one kąt rozwarty z osią x czyli w tych punktach pochodna jest ujemną, ale zbliża się do zera, gdy punkt x zbliża się do punktu x_0; dla punktów $x > x_0$ tworzy styczna kąt ostry z osią x ów, tangens jego jest już dodatni, pochodna jest więc dodatnią; widzimy tedy, że pochodna pierwsza była ujemną, potem rosła, bo zbliżała się do zera, wreszcie dalej wzrastając, przyjmuje wartości dodatnie, gdy x rośnie. Czyli pierwsza pochodna jest w sąsiedztwie punktu x_0 funkcją rosnącą, więc druga pochodna jest w punkcie x_0 dodatnią lub zerem. W obu przypadkach druga pochodna mogłaby być zerem; wtedy trzeba sięgnąć do trzeciej pochodnej. Ograniczymy się jednak do przypadków, w których pierwsza i druga pochodna pozwolą dojść do decyzji.



Rys 79

Udowodnimy następujące dwa twierdzenia główne:

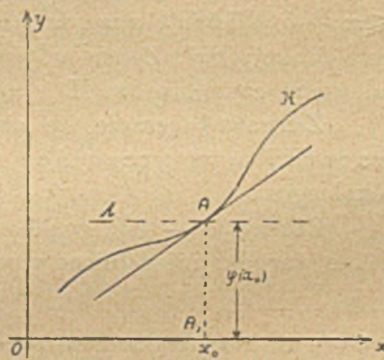
I) *Jeżeli* $f'(x_0) = 0$ *i* $f''(x_0) < 0$, *to w punkcie* x_0 *funkcja* $f(x)$ *osiąga maximum lokalne* (t. zn. wartość $f(x_0)$ jest maximum lokalnem).

II) *Jeżeli* $f'(x_0) = 0$ *i* $f''(x_0) > 0$, *to wartość* $f(x_0)$ *jest minimum lokalnem.*

Gdy zaś pierwsza i druga pochodna równe są zeru, to otrzymujemy przypadek wątpliwy; może być maximum lub minimum lub ani jedno ani drugie.

Żeby twierdzenia I i II udowodnić, zajmiemy się dwoma twierdzeniami pomocniczemi.

1) *Niech będzie dana funkcja $\varphi(x)$, o której założymy, że ma pochodną w punkcie x_0 i że jest $\varphi'(x_0) > 0$; wtedy istnieje sąsiedztwo punktu x_0 takie, że dla każdego punktu x tego sąsiedztwa, o ile jest $x < x_0$, jest też $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, a o ile jest $x > x_0$, jest $\varphi(x) > \varphi(x_0)$*, a więc funkcja $\varphi(x)$ w każdym punkcie x pewnego sąsiedztwa, na „lewo" od punktu x_0 przyjmuje wartości mniejsze od wartości $\varphi(x_0)$ a w każdym punkcie x na „prawo" większą od $\varphi(x_0)$ Geometrycznie znaczy to rzecz następującą. Niech krzywa K będzie obrazem funkcji $y = \varphi(x)$. Wykreślmy równoległą (l) do osi x w punkcie $A\,[x_0, \varphi(x_0)]$ (rys. 80), to na „lewo" od prostej AA_1 krzywa leży pod prostą (l), a na „prawo" od prostej AA_1 leży nad prostą (l) w obrębie pewnego sąsiedztwa punktu x_0.



Rys. 80

Dowód tego jest bardzo prosty. Weźmy bowiem pod uwagę pochodną $\varphi'(x_0)$, która równa się wyrażeniu:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

Według założenia jest $\varphi'(x_0)$ liczbą dodatnią; istnieje przeto taka liczba $\delta > 0$, iż, gdy jest $0 < |h| < \delta$, to będzie też $\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} > 0$, gdyż do wartości dodatniej może zmierzać tylko iloraz dodatni, gdy liczba $|h|$ jest dość małą, ale większą od zera. Jeśli więc jest $h > 0$, to być musi $\varphi(x_0 + h) > \varphi(x_0)$ czyli krzywa mieści się „ponad" linią (l). Gdy zaś weźmiemy liczbę h ujemną, to, ponieważ iloraz ma być dodatnim, więc być musi $\varphi(x_0) > \varphi(x_0 + h)$ czyli krzywa mieści się „pod" linją (l). Tem samem twierdzenie udowodnione.

2) *Niech pochodna* $\varphi'(x_0) < 0$, wtedy czytelnik z łatwością wykaże, że rzecz ma się odwrotnie, a mianowicie: *gdy jest $x < x_0$, to jest $\varphi(x) > \varphi(x_0)$, zaś gdy $x > x_0$, jest $\varphi(x) < \varphi(x_0)$, o ile nadto liczba x*

pozostaje w pewnem sąsiedztwie liczby x_0. Zastosujemy te dwa twierdzenia pomocnicze do dowodu twierdzeń głównych I i II[1]).

I) Załóżmy, że funkcja w punkcie x_0 spełnia warunki: $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$. Ponieważ druga pochodna jest pochodną pierwszej pochodnej, zatem, uwzględniwszy założenie drugiego twierdzenia pomocniczego, widzimy, że istnieje sąsiedztwo punktu x_0, określone liczbą $\delta>0$ i takie, że dla liczb x w tem sąsiedztwie na „lewo“ od x_0 t. zn. gdy jest $0<x_0-x\leqq\delta$, jest $f'(x)>f'(x_0)=0$, zaś dla liczb x o własności $0<x-x_0\leqq\delta$ jest $f'(x)<f'(x_0)=0$. Ponieważ więc dla liczb x, spełniających nierówność $x_0-\delta<x<x_0$ jest $f'(x)>0$ i dla wszystkich liczb x takich, że $x_0-\delta\leqq x\leqq x_0$, jest $f(x)$ funkcją ciągłą, więc w przedziale $(x_0-\delta, x_0)$ jest funkcja $f(x)$ funkcją rosnącą (§ 48) i przeto jest $f(x)<f(x_0)$, gdy jest $x_0-\delta\leqq x<x_0$. Ponieważ zaś dla liczb x, spełniających nierówność $x_0<x<x_0+\delta$ jest $f'(x)<0$, zaś dla liczb x takich, że $x_0\leqq x\leqq$ $\leqq x_0+\delta$, jest $f(x)$ funkcją ciągłą, więc w przedziale $(x_0, x_0+\delta)$ jest $f(x)$ funkcją malejącą, przeto jest $f(x_0)>f(x)$, gdy jest $x_0<x$ $\leqq x_0+\delta$. Widzimy więc, ża $f(x_0)$ jest rzeczywiście maximum lokalnem funkcji $f(x)$. Zatem udowodniliśmy tw. I. Zupełnie podobnie udowodni czytelnik tw. II.

Zauważmy jeszcze, że oba twierdzenia I i II dają jedynie w a r u n k i w y s t a r c z a j ą c e dla maximum względnie minimum lokalnego.

Znaczy to — jak wiadomo ze Wstępu — że mogą być poznane warunki niespełnione w punkcie, w którym funkcja jest naj-

[1]) Twierdzenia pomocnicze pozwalają nam obecnie dać odpowiedź na kwestję poruszoną w ostatnim ustępie § 32 (str. 148). Jedną część odpowiedzi daje nam § 48, który zawiera warunki wystarczające na wzrastanie, względnie malenie funkcji. Gdy jednak znamy znak pochodnej w *jednym* tylko punkcie, to nie wiele możemy powiedzieć o funkcji w sąsiedztwie tegoż punktu, jak to widać z brzmienia tw. pomocniczych. Na str. 141 i 142 poruszono jeszcze sprawę stromości dwu krzywych. Że pochodna tę rzecz rozwiązuje, widoczne z następującego rozważania. Niech krzywe $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ mają punkt wspólny $x=a$, więc $f(a)=\varphi(a)$, niech nadto istnieją pochodne $f'(a)=m$, $\varphi'(a)=\mu$, przyczem niech będzie $m<\mu$; tedy funkcja $F(x)=\varphi(x)-f(x)$ ma w punkcie $x=a$ pochodną: $F'(a)=\mu-m>0$, przeto na mocy pierwszego z twierdzeń pomocniczych jest $F(a-h)<F(a)<F(a+h)$, o ile jest $h>0$; ale $F(a)=0$, więc $\varphi(a-h)-f(a-h)<0<\varphi(a+h)-f(a+h)$; przeto jest $\varphi(a-h)<f(a-h)$ i zarazem $f(a+h)<\varphi(a+h)$, co właśnie wyraża, że w punkcie $x=a$ krzywa $y=\varphi(x)$ jest bardziej stromą, niż krzywa $y=f(x)$.

większością lub najmniejszością lokalną. Funkcja może nie posiadać pierwszej pochodnej, jak np. funkcja z rys. 71, którą określa przypisek 1 do str. 208. Dla $x = \frac{2a+b}{3}$ lub $x = \frac{a+2b}{3}$ owa funkcja ma maximum, względnie minimum lokalne i nie ma w tych punktach pochodnej. Jeżeli zaś funkcja ma pochodne, to może być pierwsza i druga zerem. Jeżeli i trzecia jest zerem, zaś czwarta różna od zera dla $x = x_0$, to $f(x_0)$ jest maximum lub minimum lokalnem. Można wykazać ogólniejsze twierdzenie: *jeżeli jest* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$, *zaś* $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$, *to* $f(x_0)$ *jest maximum (gdy* $f^{(2n)}(x_0) < 0$) *lub minimum lokalnem (gdy* $f^{(2n)}(x_0) > 0$).

Twierdzenia tego dowodzi się przy pomocy rozwinięcia Peany, o którem mowa w § 86. Dla przykładu niech czytelnik wyszuka extrema funkcji: $y = (x-1)^4$, $y = (x+1)^6$, $y = (x-2)^8$; wykresy tych funkcji zdoła czytelnik wykonać po przeczytaniu § 67.

Przykłady. Każdy z przykładów wpierw ubierzemy w geometryczną lub inną szatę, poczem określimy go analitycznie.

1) Z pomiędzy prostokątów o wspólnym obwodzie znaleźć prostokąt, którego pole jest największe. Obwód prostokąta będzie: $O = 2(x+y) = 2l$, gdzie l oznacza dodatnią liczbę stałą, zaś x, y długości dwóch boków sąsiednich prostokąta. Stąd $y = l - x$. Dla powierzchni P mamy tedy równość: $P = x \cdot y = x(l-x) = xl - x^2$. Aby zadanie rozwiązać w myśl poprzednio udowodnionego twierdzenia, trzeba znaleźć pierwszą i drugą pochodną funkcji P i wykazać, że są spełnione wszystkie założenia tw. I. Otóż jest $\frac{dP}{dx} = l - 2x$, $\frac{d^2P}{dx^2} = -2 < 0$. Przyrównując pierwszą pochodną do zera, otrzymujemy $l - 2x = 0$, skąd $x_0 = \frac{l}{2}$ i jest $x_0 > 0$; ponieważ dla tej wartości x_0 na x jest $P'' < 0$, więc otrzymana wartość x_0 daje rzeczywiście maximum lokalne i mianowicie jest Max $(P) = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \left(\frac{l}{2}\right)^2$, bo jest $y = l - x_0 = l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} = x_0$.

Udowodniliśmy więc następujące geometryczne twierdzenie: *z pomiędzy wszystkich prostokątów o stałym obwodzie kwadrat ma największe pole.* Analitycznie się wyrazi to twierdzenie w sposób następujący: *z pomiędzy iloczynów dwu liczb, których suma jest wiel-*

kością stałą i dodatnią, największym jest ten iloczyn, w którym oba czynniki są sobie równe.

Np. gdy suma dwu liczb ma być stale równą 10. to możemy wziąć rozmaite iloczyny tych liczb:

gdy $10 + 0 = 10$,	to iloczyn	0	iloczyn taki właśnie jest największym, gdy składniki owej stałej sumy są sobie równe.
„ $1 + 9 = 10$,	„ „	9	
„ $\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2} = 10$,	„ „	$\frac{19}{4}$	
„ $5 + 5 = 10$,	„ „	25	

itd., itd.

2) Weźmy pod uwagę prostokąty, mające stałą powierzchnię i wybierzmy z nich ten, który ma najmniejszy obwód.

Jest zatem: $P = x \cdot y = c$, gdzie c jest liczbą dodatnią. Żaden z czynników x, y nie może być zatem równym zeru. Mamy stąd $y = \frac{c}{x}$; dla obwodu otrzymujemy tedy wyrażenie: $O = 2\left(x + \frac{c}{x}\right) = 2x + \frac{2c}{x}$. Wyszukajmy obie pochodne: $O' = 2 - \frac{2c}{x^2}$, $O'' = \frac{4c}{x^3}$.

Przyrównajmy do zera pierwszą pochodną: $2 - \frac{2c}{x^2} = 0$, stąd $x^2 = c$ i przeto $x = \pm \sqrt{c}$; ale x ma oznaczać *długość* boku prostokąta, więc wartość ujemna dla niej odpada i geometryczne znaczenie ma tylko dodatnia wartość: $x = \sqrt{c}$. Jeżeli oznaczymy $x_0 = \sqrt{c}$, $y_0 = \frac{c}{x_0} = \sqrt{c} = x_0$, to otrzymaliśmy prostokąt, którego obydwa sąsiednie boki są sobie równe, jest to więc kwadrat.

Ponieważ $O'' = \frac{4c}{x_0^3} > 0$, więc możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie: *z pomiędzy wszystkich prostokątów, które mają stałą powierzchnię, najmniejszy obwód ma kwadrat o tejże powierzchni.* Analitycznie wyrazi się to twierdzenie w sposób następujący: *z pomiędzy sum dwu dodatnich liczb, których iloczyn jest liczbą stałą* (a więc większą od zera), *najmniejszą jest suma, której oba składniki są sobie równe.*

Ten zadziwiający związek między zagadnieniami 1) i 2) wytłómaczymy w sposób następujący. Obwód prostokątów O i ich pola P wynoszą: $O = 2(x + y)$, $P = xy$, jeżeli, jak poprzednio, przez x i y oznaczymy długości dwóch boków sąsiednich prostokąta. Stąd jest $y = \frac{P}{x}$, wobec tego $O = 2x + \frac{2P}{x}$, co daje $xO = 2x^2 + 2P$. Stąd otrzymujemy kolejno:

$$x\frac{dO}{dx} + O = 4x + 2\frac{dP}{dx},\ x\frac{d^2O}{dx^2} + 2\frac{dO}{dx} = 4 + 2\frac{d^2P}{dx^2}.$$

W obu zagadnieniach jest $\frac{dO}{dx} \doteq 0$, w pierwszem, bo obwód O ma być stałym, w drugiem, bo obwód O ma być extremum. Przeto jest w obu zadaniach w punkcie, w którym zachodzi extremum:

$$x\frac{d^2O}{dx^2} - 2\frac{d^2P}{dx^2} = 4,$$

a więc obwód O i pole P są związane w obu zagadnieniach związkiem

$$x\frac{d^2O}{dx^2} - 2\frac{d^2P}{dx^2} > 0,$$

stąd

$$x\frac{d^2O}{dx^2} > 2\frac{d^2P}{dx^2}.$$

W pierwszem zagadnieniu jest obwód prostokątów stały, więc $\frac{dO}{dx} = 0$, $\frac{d^2O}{dx^2} = 0$ i wtedy $2\frac{dP^2}{dx^2} < x\frac{d^2O}{dx^2} = 0$; w drugiem zaś jest pole P stałą wielkością, więc $P'' = 0$ i wtedy $x\frac{d^2O}{dx^2} > 0$, a że ma być $x > 0$, więc $\frac{d^2O}{dx^2} > 0$.

3) a). Z pomiędzy trójkątów o stałej podstawie i stałym obwodzie wybrać ten, który ma największe pole.

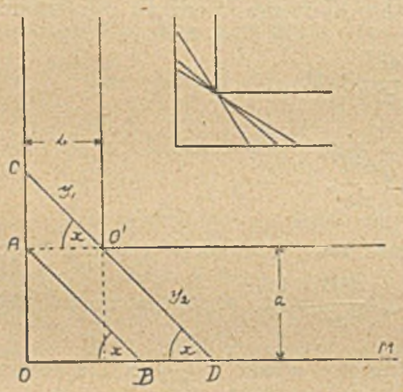
Poniekąd odwrotne zagadnienie będzie: b) Z pomiędzy trójkątów o tej samej podstawie i jednakowej powierzchni wybrać ten, który ma najmniejszy obwód.

Wskazówki dla zagadnienia (3a). Skoro obwód i podstawa mają wartość stałą, więc też suma dwu powstałych boków ma być stałą, przeto wierzchołki C', C'', C'''... trójkątów, a przeciwległe podstawie, leżą na pewnej elipsie. Zadanie przeto można także tak wyrazić: Niech będzie dana oś główna elipsy i jej ogniska F_1, F_2; z pomiędzy trójkątów, których dwa wierzchołki są w ogniskach, a trzeci na elipsie, należy wybrać ten, który ma największe pole.

W tej formie czytelnik natychmiast rozwiąże zagadnienie; szukanym trójkątem będzie trójkąt równoramienny.

Wskazówki dla zagadnienia 3b. Ponieważ podstawa trójkątów może być wspólna, jakoteż stałą jest ich powierzchnia, przeto wysokość trójkątów jest stałą, więc trzeci wierzchołek trójkątów leży na pewnej prostej równoległej do wspólnej podstawy. Z pomiędzy takich trójkątów mamy wybrać ten, który ma obwód najmniejszy. Okaże się znów, że trójkąt równoramienny rozwiązuje zagadnienie. Szczegółowe rachunki i rysunki do przykładów 3a i 3b zostawiamy czytelnikowi do wykonania.

4) Dwa korytarze, z których jeden ma szerokość a metrów, drugi b metrów, schodzą się pod kątem prostym. Ile wynosi maksymalna długość belki, którą można przenieść z jednego korytarza do drugiego w położeniu poziomem. Zagadnienie to o maximum lokalnem przekształcimy w zagadnienie o minimum lokalnem w sposób następujący: Załóżmy, że belkę przenosimy poziomo z jednego korytarza do drugiego i że w pewnej chwili, zajmując położenie AB, tworzy ze ścianą OM (rys. 81) kąt x. Pod tym kątem x zmieści się jednak belka o maksymalnej długości CD, przechodząca przez punkt O'. Długość CD zależy od zmiennej x. Przypuśćmy, że długość CD ma minimum dla kąta ostrego x_0 i niech minimum długości CD wynosi wtedy l_0 metrów. Gdyby więc belka była dłuższą od l_0 metrów, to pod kątem x_0 nie zmieściłaby się w kącie obu korytarzy i nie dałaby się przeto przetransportować z jednego korytarza do drugiego w położeniu poziomem. To minimum l_0 będzie tedy największą dopuszczalną długością belki. Mamy więc znaleźć minimum l_0 długości CD, rozpatrywanej, jako funkcja zmiennej x.



Rys. 81.

W tym celu oznaczmy przez y długość odcinka CD, podzielonego w punkcie narożnym O' na dwie części y_1 i y_2, przyczem niech będzie $CO' = y_1$, $DO' = y_2$; jest więc $y = y_1 + y_2$; zarazem widoczne, że $b = y_1 \cos x$, $a = y_2 \sin x$, stąd możemy wyrugować

y_1 i y_2, gdyż x jest kątem ostrym i przeto $0 < x < \frac{\pi}{2}$, więc $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$; otrzymamy tedy: $y = \frac{b}{\cos x} + \frac{a}{\sin x}$, skąd: $\frac{dy}{dx} = \frac{b \sin x}{\cos^2 x} - \frac{a}{\sin^2 x} \cos x$, zaś $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2b \sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{2a \cos^2 x}{\sin^3 x} + \frac{b}{\cos x} + \frac{a}{\sin x}$. W celu znalezienia minimum lokalnego funkcji y mamy: 1) pierwszą pochodną przyrównać do zera, przez co otrzymamy równanie na kąt x; niech x_0 oznacza pierwiastek tego równania, będący kątem ostrym. 2) Należy potem zbadać znak pochodnej drugiej dla wartości znalezionej x_0.

Otóż jest: $\frac{b \sin x}{\cos^2 x} = \frac{a \cos x}{\sin^2 x}$ ... (1); otrzymujemy tedy równanie goniometryczne, które mnożymy przez $\sin^2 x$, a dzielimy przez $b . \cos x$ (co wolno uczynić); tedy: $(\operatorname{tg} x)^3 = \frac{a}{b}$.

Jak wiadomo, równanie dwumienne stopnia 3-go o współczynnikach rzeczywistych ma 3 pierwiastki, z których jeden jest rzeczywisty, a dwa zespolone, sprzężone. Ponieważ nam się rozchodzi jedynie o wartości rzeczywiste, więc: $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. Jedyny kąt ostry x, spełniający to równanie oznaczmy przez x_0.

[Weźmy przypadek liczebny: $a = 5^m$; $b = 4^m$, tedy $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$, stąd łatwo znaleźć: $x_0 = 47^0 7'$. Minimum długości y jest zatem przy kącie $47^0 7'$].

By teraz wykazać, że kąt x_0 daje rzeczywiście minimum długości y, rozumujemy w ten sposób: wiadomo, że dla kąta ostrego funkcje sinus i cosinus przyjmują wartości dodatnie, przeto każdy wyraz sumy, równej pochodnej $\frac{d^2 y}{dx^2}$ jest dodatni, zatem druga pochodna ma wartość dodatnią, więc zachodzi minimum lokalne dla znalezionego kąta x_0.

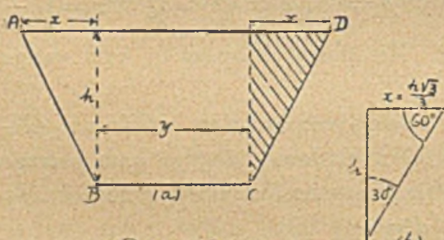
Wyrachujmy tę najmniejszą długość. Trzeba więc znaleźć $\cos x_0$, $\sin x_0$ dla kąta, dla którego jest: $\operatorname{tg} x_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; otóż jest: $\frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \frac{\sin x_0}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ (przyczem ujemny znak pierwiastka

$\sqrt{1-\sin^2 x_0}$ odpada, bo dostawa kąta ostrego jest dodatnią), następnie podnosimy obie strony do kwadratu: $\frac{\sin^2 x_0}{1-\sin^2 x_0} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$, stąd otrzymujemy $\sin x_0 = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}$; dalej obliczamy $\cos x_0 = \sqrt{1-\sin^2 x_0} = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}}$. Te wartości wstawiamy we wyrażenie na długość y i otrzymujemy: $\mathrm{Min}\,(y) = \sqrt{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^3}$. [Otóż gdy $a = 5^m$, $b = 4^m$, to $\mathrm{Min}\,(y) = 12{\cdot}69^m$].

Znak Min (y) oznaczać ma najmniejszą wartość długości y. Znaleźliśmy tem samem największą długość belki.

5) Niech będzie dane półkole o promieniu r i wpisany weń prostokąt tak, że dwa wierzchołki leżą na średnicy półkola, a dwa na półkolu. Z pomiędzy tych prostokątów wybrać ten, który ma pole największe. Rozwiązanie zostawimy czytelnikowi.

6) Przekrój poprzeczny koryta strumienia, poddanego regulacji, ma mieć kształt trapezu, równoramiennego o danej powierzchni i danej wysokości. Jak wybrać trapez, by zwilżone przez wodę ściany koryta były jak najmniejsze. Jest jasnem, że postulat minimum zwilżenia wyrazi się jako postulat minimum zwilżonych trzech boków trapezu. Przez y oznaczmy długość dolnej podstawy trapezu (rys. 82), przez $y+2x$ długość górnej podstawy trapezu. Jeśli h będzie oznaczało wysokość trapezu, to $AB = CD = \sqrt{h^2+x^2}$, zaś powierzchnia trapezu: $P = (2x+2y)\frac{h}{2} = (x+y)h$; ostatnia równość jest związkiem, który właśnie łączy zmienne x i y ze sobą, bo powierzchnia ma być stałą. Stąd otrzymujemy kolejno: $\frac{P}{h} = x + y$;



Rys. 82.

$y = \frac{P}{h} - x$; niech $S = AB + BC + CD = 2\sqrt{h^2 + x^2} + \frac{P}{h} - x$; za zmienną niezależną można więc przyjąć x i suma S od niej zależy; mamy więc znaleźć tę wartość x, dla której suma S jest minimum lokalnem. W tym celu obliczymy pochodne S' i S''. Otóż jest:

$$\frac{dS}{dx} = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(h^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - 1 = \frac{2x}{(h^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} - 1; \quad \frac{d^2S}{dx^2} =$$

$$\frac{(h^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 - 2x \cdot \frac{1}{2}(h^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{h^2 + x^2} = \frac{2(h^2 + x^2) - 2x^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

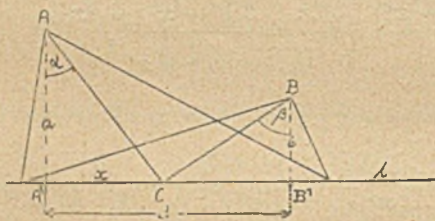
$= \frac{2h^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$ czyli, jakkolwiek wybralibyśmy liczbę rzeczywistą x (czy spełniającą warunek $\frac{dS}{dx} = 0$, czy nie) to zawsze jest $\frac{d^2S}{dx^2} > 0$

Kładąc $\frac{dS}{dx} = 0$, otrzymujemy $\frac{2x}{(h^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = 1$, skąd $2x = (h^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$.... (1). Jest to równanie t. zw. niewymierne. Niewymierność tę należy usunąć przez podniesienie do potęgi drugiej: $4x^2 = h^2 + x^2$, stąd: $x^2 = \frac{h^2}{3} = \frac{3h^2}{9}$ i $x = \pm \frac{h\sqrt{3}}{3}$. Zważmy, że jeżeli równanie (1) ma pierwiastki, to tylko dodatnie, bo prawa strona równania (1) jest dodatnią; przez podniesienie do potęgi drugiej mógł jednak przybyć pierwiastek, i rzeczywiście przybył pierwiastek ujemny, nadto z geometrycznego punktu widzenia wynika, iż pierwiastek ujemny nie ma znaczenia, i rzeczywiście jest: $x = \frac{h\sqrt{3}}{3}$, jak to stwierdzamy, podstawiając tę wartość w równanie (1). Ponieważ jest $\frac{d^2S}{dx^2} > 0$, tedy znaleziona wartość na liczbę x daje minimum lokalne.

Zapytajmy, jak można znaleźć konstrukcyjnie odcinek o długości $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.

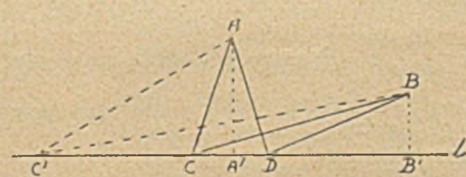
Weźmy pod uwagę zakreśloną część na rys. 82(a) (zob. rys. 82(b)). Równanie (1) daje $\sqrt{h^2 + x^2} = CD = 2x$ czyli przeciwprostokątnia CD równa się podwójnej przyprostokątnej $\frac{h\sqrt{3}}{3}$; tedy bok x leży naprzeciw kąta, mającego 30^0. Aby więc liczbę x znaleźć, trzeba narysować odcinek długości h; z jednego końca tegoż odcinka wykreślamy prostą pod kątem 30^0, a z drugiego końca pod kątem 90^0; te dwie proste przecinają się w punkcie D, przez co wyznaczy się wielkość x konstrukcyjnie.

7) Dana jest płaszczyzna, nadto na niej prosta l i dwa punkty A. B, znajdujące się po jednej stronie prostej (l), a nie leżące na jednej prostej prostopadłej do prostej l. Punkt A z punktem B (rys. 83) mamy połączyć zapomocą linji łamanej o jednym wierzchołku C, leżącym na prostej l; z pomiędzy tych linji łamanych mamy wybrać tę, która jest najkrótszą. Fizykalne znaczenie tego zadania jest następujące: l niech będzie prostą przenikania płaszczyzny rysunku z płaszczyzną, odbijającą światło. a prostopadłą do płaszczyzny rysunku; punkt A niech będzie źródłem światła, B punktem, do którego ma dojść promień po odbiciu. Droga promienia światła jest więc linją łamaną i (jak uczy fizyka) taką, że czas, potrzebny na przebycie przez światło drogi łamanej od A do B będzie minimum (prędkość światła wynosi w eterze 3.10^{10} w układzie cgs).



Rys. 83.

Jeżeli punkt C, t. j. wierzchołek linji łamanej na prostej l, odpowiadający minimum, istnieje, to musi leżeć z konieczności na odcinku $A'B'$, gdzie A' i B' oznaczają rzuty prostopadłe punktów A i B na prostą l. Załóżmy bowiem, że tak nie jest. Niech więc punkt C leży poza odcinkiem $A'B'$ np. na lewo od punktu A' (rys. 84) i weźmy punkt D symetrycznie położony do punktu C względem A' i niech punkt D leży między punktami A', B'. Otóż linja łamana ADB jest krótszą od linji ACB. Jest bowiem $AC = AD$, jako boki trójkąta równoramiennego, zaś $BC > BD$.



Rys. 84.

Gdy zaś punkt C' leży na lewo od punktu A', ale tak daleko, że jego symetryczny względem punktu A' nie leży między A' i B', to $AC'B > ADB$, gdyż $AC' > AC = AD$, $BC' > BD$. Tem samem punktu C, dającego minimum nie należy szukać na lewo od punktu A'. Identyczne rozumowanie wykaże, że punktu C nie należy też szukać na prawo od punktu B'. Punkt C, dający minimum — o ile istnieje — leży więc na odcinku $A'B'$.

Będziemy więc rozważali linję łamaną, której jedyny wierzchołek C leży na odcinku $A'B'$ (rys. 83). Kładziemy $A'C = x$, tedy $0 \leqslant x \leqslant d$, gdzie $d = A'B'$; niech $AA' = a$, $BB' = b$. Wobec tego długość linji łamanej s będzie: $s = AC + CB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$, stąd kolejno:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\left(a^2 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}} . 2x - \frac{1}{2}\left[b^2 + (d-x)^2\right]^{-\frac{1}{2}} . 2(d-x) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}, \text{ zaś}$$

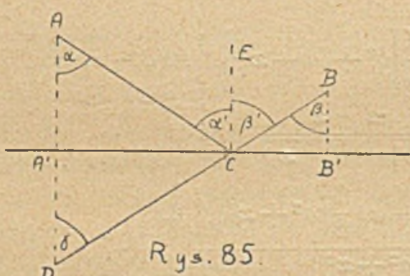
$$\frac{d^2s}{dx^2} = \frac{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x . \frac{1}{2}\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x}{a^2+x^2} +$$

$$+ \frac{\left[b^2+(d-x)^2\right]^{\frac{1}{2}} - (d-x) . \frac{1}{2}\left[b^2+(d-x)^2\right]^{-\frac{1}{2}} . 2(d-x)}{b^2+(d-x)^2} =$$

$$= \frac{a^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{\left[b^2+(d-x)^2\right]^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Przyrównujemy pierwszą pochodną do zera: $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ ... (1); kładąc w tem równaniu $x = 0$ mielibyśmy $0 = \frac{d}{\sqrt{b^2+d^2}} > 0$, przeto równanie (1) nie ma pierwiastka $x = 0$; zupełnie tak samo wykazać można, że równanie (1) nie ma pierwiastka $x = d$. Jeżeli więc równanie (1) ma dawać rozwiązanie zagadnienia, to musi być $0 < x < d$.

Jest $\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=0} < 0$, $\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=d} > 0$, a że pochodna $\frac{ds}{dx}$ jest funkcją ciągłą w przedziale $(0, d)$, więc istnieje conajmniej jedna wartość na x taka, że jest $\frac{ds}{dx} = 0$ (str. 125). Ponieważ jest $\frac{d^2s}{dx^2} > 0$, więc tylko jedna taka wartość istnieje. Chodzi o jej znalezienie. Podnosząc do kwadratu równanie (1) i biorąc odwrotności obu stron (co wolno!), otrzymujemy: $\frac{a^2+x^2}{x^2} = \frac{b^2+(d-x)^2}{(d-x)^2}$ czyli $\frac{a^2}{x^2}+1 = \frac{b^2}{(d-x)^2}+1$, skąd $\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{(d-x)^2}$, co daje $\frac{a}{x} = \pm\frac{b}{d-x}$; ponieważ ma być $0 < x < d$, więc $\frac{a}{x} = \frac{b}{d-x}$, skąd $x = \frac{ad}{a+b}$; co, podstawione w równanie (1), spełnia je w zupełności. Rozwiązanie to zinterpretujemy geometrycznie.



Rys. 85

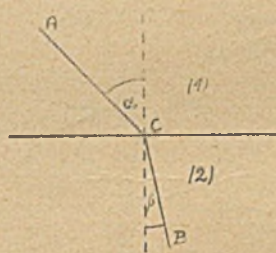
Szukany punkt C może leżeć, jak wiemy, tylko między punktami A', B' z wykluczeniem punktów A', B' czyli niemożliwym jest wypadek, kiedyby figura CAA' lub CBB' ściągnęła się do odcinka AA' lub BB'; oznaczmy, jak na rysunku 85, kąty α i β, natenczas będzie z trójkątów $AA'C$, CBB' widoczne, że $x = \sqrt{a^2+x^2} . \sin\alpha$, $d-x = \sqrt{b^2+(d-x)^2} . \sin\beta$; porównując ten ostatni wynik z równaniem (1), otrzymujemy: $\sin\alpha = \sin\beta$; ponieważ obydwa kąty α i β są ostrymi, a w I-ej ćwiartce sinus jest funkcją rosnącą, więc z ostatniej równości wynika, że jest $\alpha = \beta$. Widzimy tedy, że punkt szukany C ma takie położenie, że kąt $\alpha = \beta$.

Zajmijmy się teraz konstrukcją, służącą do wyznaczenia punktu C (rys. 85). Niech D oznacza punkt symetryczny do punktu A względem prostej l t. zn. $AD \perp l$, $DA' = AA'$; następnie punkt D łączymy z punktem C. W powstałym trójkącie ACD są kąty α i γ sobie równe, ponieważ jest $AC = CD$. W punkcie C narysujmy prostą $CE \perp l$. Jest więc $AD \parallel CE$, tedy $\alpha = \alpha'$, a że jest[1]) $\alpha' = \beta'$, $\alpha = \gamma$, więc $\gamma = \beta'$, z tego zaś wynika, że odcinki

[1]) Jest też $CE \parallel BB'$, więc $\beta = \beta'$; ale $\alpha' = \alpha = \beta = \beta'$, tedy $\alpha' = \beta'$, co w interpretacji fizykalnej obecnego zagadnienia znaczy, że kąt padania promienia świetlnego równa się kątowi odbicia.

DC, CB leżą na jednej prostej. Stąd widoczna konstrukcja punktu C. Do punktu A wynajduje się punkt symetryczny D i łączy się punkty D i B ze sobą; punkt C jest to przecięcie prostych l i DB.

8) Na płaszczyźnie dana jest prosta l i dwa punkty A i B po przeciwnych stronach prostej l, nie leżące na tej samej prostopadłej do prostej l. Od punktu A do punktu B porusza się punkt P po linji łamanej mającej jeden wierzchołek C na prostej l. Od A do C porusza się punkt P z prędkością v, w punkcie C zmienia punkt P swą prędkość na prędkość w i z nią porusza się od punktu C do punktu B; mamy znaleźć tak punkt C, żeby czas, w którym punkt P przebiegnie drogę $AC + CB$ był minimum (rys. 86). Zadanie to ma znaczenie fizyczne następujące: niechaj l będzie przecięciem płaszczyzny rysunku z płaszczyzną oddzielającą dwa ośrodki (1) i (2). Promień światła, wychodzący z punktu A, przechodząc z ośrodka (1) w ośrodek (2) np. optycznie gęstszy [t. zn. taki, iż prędkość rozchodzenia się światła w ośrodku (2) jest mniejszą, niż w ośrodku (1)] załamuje się ku prostopadłej padania. Istnieje dla tego zjawiska prawo eksperymentalnie stwierdzone przez Snelliusa, które opiewa: stosunek wstawy kąta padania α do wstawy kąta załamania β jest dla tej samej pary ośrodków (1) i (2) liczbą stałą, niezależną od kąta padania; (ten stosunek równa się stosunkowi prędkości światła w tych ośrodkach); ten stały stosunek: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v}{w} =$ constans zwiemy współczynnikiem załamania.

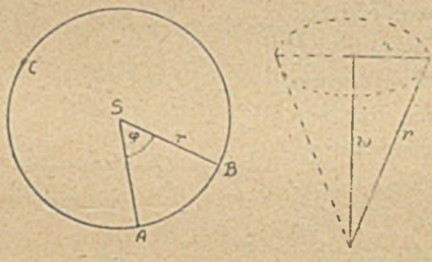


Rys. 86

Promień światła, wychodzący z punktu A, mający w ośrodku (1) prędkość v, w ośrodku (2) prędkość w, przebiega tedy drogę od A do B po linji łamanej w minimum czasu, jak się wykazuje rachunkiem, który czytelnik z łatwością przeprowadzi.

9) Z bibuły w kształcie koła zagiąć kąt środkowy φ tak, by przez to utworzony filtr (sączek) w kształcie stożka miał objętość największą. Przez zagięcie kolistej bibuły o kąt środkowy φ (radjanów) tak, że prosta SA zejdzie się z prostą SB (rys. 87), zostanie wycinek kołowy, który będzie pobocznicą stożka (sączka). Oczywiście ma być $0 < \varphi < 2\pi$.

Uwaga. Obwód O podstawy stożka równa się łukowi $ACB = 2r\pi - r\varphi$; z drugiej strony, gdy przez x oznaczymy promień podstawy stożka, to $O = 2x\pi$, więc $2x\pi = 2r\pi - r\varphi = r(2\pi - \varphi)$, stąd $x = r\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)$. Objętość stożka $V = \frac{1}{3} x^2 \pi \sqrt{r^2 - x^2}$, gdyż wysokość $w = \sqrt{r^2 - x^2}$; V jest więc funkcją zmiennej x, ale zmienna x jest funkcją zmiennej φ; przeto objętość V jest funkcją złożoną zmiennej φ i określoną, gdy $0 < \varphi < 2\pi$. Chcąc znaleźć wartość φ, dla której objętość V jest największą, obliczymy pierwszą pochodną $\frac{dV}{d\varphi}$, przyrównamy ją do zera i rozwiążemy w ten sposób otrzymane równanie. Nadto trzeba wykazać, że dla znalezionej wartości φ jest $\frac{d^2V}{d\varphi^2} < 0$. Wykonanie odnośnych rachunków zostawiamy czytelnikowi. Dla szukanego kąta φ otrzymuje się wzór $\varphi = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ — kąt ten jest niezależny od promienia r. Należy go przerachować w stopniach według wzoru podanego w § 5 (str. 17).



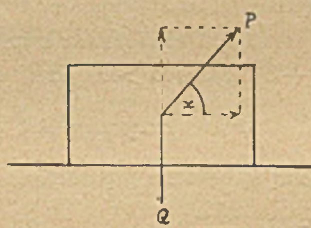
Rys. 87

10) Wiadomo z mechaniki technicznej, że wytrzymałość belki o przekroju prostokątnym i stałej długości jest proporcjonalną do iloczynu szerokości i kwadratu wysokości przekroju czyli $W = c \,.\, a \,.\, h^2$, gdzie W oznacza wytrzymałość, c dodatni czynnik proporcjonalności, a szerokość, h wysokość poprzecznego przekroju belki. Otóż niech będzie dany pień o przekroju kolistym i z niego należy wyciąć belkę o największej wytrzymałości.

Przekrój poprzeczny belki będzie prostokątem, wpisanym w kolisty przekrój pnia. Jeżeli więc szerokość przekroju prostokątnego wynosi x, zaś r promień kolistego przekroju pnia, to wysokość prostokąta będzie $\sqrt{4r^2 - x^2}$. Będzie więc $W = cx(4r^2 - x^2) = 4cr^2x - cx^3$. Czytelnik z łatwością wykaże, że Max (W) otrzymamy dla $x = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

11) Na płaszczyźnie poziomej spoczywa ciężar Q Kg, na który działamy siłą P pod kątem x względem poziomu, jak to wskazuje rys. 88; przyczem obieramy siłę P właśnie tak, by zniosła tarcie maksymalne, więc tem samem, o ile ciało spoczywa, każda nadwyżka nad siłę P wywołałaby ruch — gdyby zaś ciało było w ruchu, siła P, znosząc tarcie, utrzymywałaby ciało w ruchu jednostajnym. W ten sposób dobrana siła P zależy od kąta (x). Jak wybrać kąt (x), aby siła P co do wielkości była najmniejszą. (Współczynnik tarcia wynosi f)?

Rozwiązanie. Siłę P rozłóżmy na dwie składowe: siłę P' poziomą i siłę P'' pionową. Widoczne, że jest $P' = P\cos x$, $P'' = P\sin x$. Składowa pionowa P'' zmniejsza nacisk ciała na podstawę, który bez siły P był równy ciężarowi Q, obecnie ten nacisk na podstawę wynosi $Q - P'' = Q - P\sin x$. Powierzchnia zetknięcia ciała z podstawą jest siedliskiem tarcia, które wobec naszych założeń jest równe spółczynnikowi tarcia, pomnożonemu przez nacisk ciała na podstawę. Jest



Rys. 88.

więc tarcie maksymalne równe $f.(Q - P\sin x)$. Według założenia maksymalne tarcie pokonywa siła P oczywiście swą składową poziomą czyli jest $f.(Q - P\sin x) = P\cos x$, skąd otrzymamy

$$P = \frac{fQ}{\cos x + f.\sin x}.$$

Siła P zależy więc od kąta x; należy znaleźć minimum funkcji P. Resztę rachunku z łatwością czytelnik wykona w myśl naszych twierdzeń.

§ 50. Obliczanie niektórych granic (Symbole nieoznaczone).

Już raz powiedzieliśmy, że niema ogólnej metody obliczania granic funkcji, można jednak podać pewne klasy funkcji, dla których daje się określić metoda, rachunkowo dość prosta.

Dla wyjaśnienia weźmiemy przykład. Niech będzie dana funkcja $y = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ i obliczmy jej granicę dla $x \to 0$. Tak dzielna, jak dzielnik ilorazu y są funkcjami ciągłemi, jednakowoż nie stosują się rozważania § 14, gdyż dzielna i dzielnik są równe zeru dla $x=0$. Mówimy, że badana funkcja ma dla $x=0$ postać symbolu nieoznaczonego $\frac{0}{0}$. Po przekształceniu można granicę w rozważanym przykładzie znaleźć. Jest bowiem:

$$y=\frac{e^{2x}-1}{e^x \sin x}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{e^x}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}}\rightarrow\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 1}=2 \text{ (§ 26, ustęp 6 i § 39).}$$

Ale użyta tu metoda jest indywidualną, która do dowolnej innej funkcji nie ma już zastosowania. Metoda dość ogólna opierać się będzie na następującem twierdzeniu:

Tw. Jeżeli funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są określone w przedziale $(a-\delta, a+\delta)$, gdzie $\delta>0$, jeżeli $\varphi(a)=\psi(a)=0$ i jeżeli istnieją pochodne $\varphi'(a)$, $\psi'(a)$, przyczem jest $\psi'(a)\neq 0$, to funkcja $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ jest określoną w pewnem sąsiedztwie punktu a i ma granicę dla $x\rightarrow a$ i równą liczbie $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$.

Dowód. Skoro $\psi'(a)\neq 0$ i skoro $\frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h}\rightarrow\psi'(a)$, gdy $h\rightarrow 0$, to istnieje liczba $\delta_0>0$ taka, że jest $\left|\frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h}-\psi'(a)\right| < |\psi'(a)|$, gdy jest $0<|h|<\delta_0$. Stąd $\psi'(a)-|\psi'(a)|<\frac{\psi(a+h)}{h}< \psi'(a)+|\psi'(a)|$, gdyż $\psi(a)=0$. Ostatnia nierówność wykazuje, że $\frac{\psi(a+h)}{h}\neq 0$; dość bowiem rozważyć dwa przypadki zależne od tego, czy jest $\psi'(a)>0$, czy też $\psi'(a)<0$. Stąd wynika, że jest $\psi(x)\neq 0$, gdy jest $0<|x-a|<\delta_0$ i przeto iloraz $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ jest określony w pewnem sąsiedztwie punktu a.

Kładąc $x=a+h$, mamy $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}$, funkcja ta jest określona, gdy $0<|h|<\delta_0$. Ponieważ $\varphi(a)=\psi(a)=0$, więc wolno napisać $y=\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\psi(a+h)-\psi(a)}=\frac{\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}}{\frac{\psi(a+h)-\psi(a)}{h}}$, bo $h\neq 0$.

Stąd i na mocy § 14 i 39 widzimy, że, gdy $x \to a$, to $h \to 0$. $y \to \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$.

Przykłady. 1) Jeżeli $y = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$, to dla $x = 0$ założenia twierdzenia są spełnione. Otrzymujemy tedy $y \to \left(\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}\right)_{x=0} = \frac{2}{1} = 2$; tensam wynik otrzymaliśmy poprzednio na innej drodze.

2) Jeżeli $y = \frac{\sin x}{x}$, to dla $x \to 0$ wolno stosować twierdzenie i będzie $y \to \left(\frac{\cos x}{1}\right)_{x=0} = 1$; wartość tej granicy obliczyliśmy w § 6.

3) Jeżeli $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$, to czytelnik z łatwością się przekona, że dla $x \to 0$ mamy $y \to \left(\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1}\right)_{x=0} = 1$, co nam znane z § 5.

4) Niech będzie $y = \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ $(m \neq 0,\ n \neq 0)$ i obliczmy granicę funkcji y dla $x \to 1$. Czytelnik z łatwością się przekona, że założenia twierdzenia są spełnione, wskutek czego będzie: $y \to \left(\frac{n x^{n-1}}{m x^{m-1}}\right)_{x=1} = \frac{n}{m}$. Jeżeli n i m oznaczają liczby naturalne, to można było wynik przewidzieć, gdyż wtedy $y = \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)}{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1)} = \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1}{x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1}$, poczem wolno stosować rozważania § 7 i 14.

Może się zdarzyć, że iloraz $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ ma również postać symbolu nieoznaczonego $\frac{0}{0}$. W takim przypadku twierdzenie powyższe nie jest stosowalne np.: znaleźć granicę funkcji $y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$, gdy $x \to 0$. Tę granicę już znaleźliśmy w § 15. Aby podobny przypadek móc rozwiązać przy pomocy pojęcia pochodnej, uogólnimy najpierw twierdzenie średniej wartości (str. 210).

Tw. Jeżeli funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są ciągłe w całym przedziale (a, b), jeżeli mają określone pochodne pierwsze w każdym punkcie *wewnętrznym przedziału i jeżeli pochodne* $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ *nie są równocześnie zerem wewnątrz przedziału* (a, b) *i jeżeli* $\psi(a) \neq \psi(b)$, *to iloraz* $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}$ *jest liczbą określoną i istnieje liczba* ξ *o własnościach:*

$$a < \xi < b, \quad \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Dowód. Iloraz $I = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}$ jest liczbą określoną, bo według założenia jest $\psi(b) \neq \psi(a)$. Weźmy teraz pod uwagę funkcję: $f(x) = \varphi(b) - \varphi(x) - I[\psi(b) - \psi(x)]$. Ona jest ciągłą w całym przedziale (a, b), ma wewnątrz przedziału określoną pochodną i jest $f'(x) = -\varphi'(x) + I\psi'(x)$. Nadto widoczne, że $f(a) = \varphi(b) - \varphi(a) - I[\psi(b) - \psi(a)] = \varphi(b) - \varphi(a) - [\varphi(b) - \varphi(a)] = 0$, $f(b) = 0$. Wobec tego są spełnione warunki stosowalności twierdzenia Rollego (§ 46); istnieje przeto liczba ξ o własnościach $a < \xi < b$, $f'(\xi) = 0$, to zaś daje równość $\varphi'(\xi) = I\psi'(\xi)$; jest $\psi'(\xi) \neq 0$, gdyby bowiem było $\psi'(\xi) = 0$, to mielibyśmy też $\varphi'(\xi) = I\psi'(\xi) = 0$ i obie pochodne $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ byłyby równocześnie zerem w punkcie ξ wbrew założeniu. Skoro tedy jest $\psi'(\xi) \neq 0$, więc $I = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$, c. b. d. u.

Uwaga 1. Dopieroco udowodnione twierdzenie obejmuje twierdzenie średniej wartości (§ 47) jako przypadek szczególny, dość bowiem założyć $\psi(x) = x$, aby otrzymać właśnie twierdzenie średniej wartości.

2. Jeżeli założymy $\psi'(x) \neq 0$, gdy $x \neq a$ i $x \neq b$, to możemy opuścić założenie, że pochodne $\varphi'(x)$ i $\psi'(x)$ nie są równocześnie zerem wewnątrz przedziału (a, b).

Zastosujmy to twierdzenie do przykładu ostatnio podanego. Mamy $y = \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{\cos 0 - \cos x}{0-(-x^2)}$. Ponieważ założenia twierdzenia są spełnione, więc istnieje liczba ξ, zawarta między liczbą 0 i liczbą x, różną od zera, taka, iż $\frac{\cos 0 - \cos x}{0-(-x^2)} = \frac{-\sin\xi}{-2\xi} = \frac{\sin\xi}{2\xi}$. Zauważmy, że, skoro ma $x \to 0$, to wtedy także $\xi \to 0$. Ostatni iloraz przyjmuje dla $\xi = 0$ postać symbolu nieoznaczonego $\frac{0}{0}$. Otóż do ilorazu $\frac{\sin\xi}{2\xi}$ można już stosować poprzednie twierdzenie, wskutek czego się otrzymuje $y \to \frac{1}{2}$. Łącząc oba twierdzenia niniejszego paragrafu otrzymujemy nowe twierdzenie: *jeżeli funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są ciągłe w całym przedziale $(a-\delta, a+\delta)$, gdzie $\delta>0$, jeżeli mają określone pochodne, przyczem $\psi'(x)\neq 0$, gdy jest $x\neq a$, jeżeli $\varphi(a)=\psi(a)=\varphi'(a)=\psi'(a)=0$, jeżeli istnieją określone drugie pochodne $\varphi''(a)$, $\psi''(a)$, gdzie $\psi''(a)\neq 0$, to iloraz $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ jest określony w przedziale $(a-\delta, a+\delta)$, o ile liczba δ jest dość małą i $x\neq a$ i ma granicę dla $x\to a$, równą liczbie $\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}$.*

Dowód. Skoro $\psi'(a)=0$, $\psi''(a)\neq 0$, więc na mocy twierdzeń pomocniczych z § 49 (lub wywodu zawartego w dowodzie pierwszego twierdzenia niniejszego paragrafu) istnieje liczba $\delta_0>0$ i taka, że jest $\psi'(x)\neq\psi'(a)=0$, $\psi(x)\neq\psi(a)$, gdy $0<|x-a|<\delta_0$. Przeto na mocy Uwagi 2 można stosować drugie tw. niniejszego paragrafu do ilorazu $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Ten iloraz jest określonym, o ile jest $0<|x-a|<\delta_0$. Mamy: $y=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$, gdzie ξ oznacza liczbę zawartą między liczbami a i x. Stąd na mocy pierwszego twierdzenia niniejszego paragrafu mamy:

$$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}=\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)}.$$

Zastosujmy to twierdzenie do przykładu $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\operatorname{tg}x}{x^2}\right)$. Otóż $(x-\operatorname{tg}x)''=-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. Ponieważ założenia ostatniego twierdzenia są spełnione, więc:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\operatorname{tg}x}{x^2}\right)=\left(\frac{-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{2}\right)_{x=0}=0.$$

Widoczne, że można łatwo podać przykłady, które wymagają uogólnienia ostatniego twierdzenia np. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x}{x^3}\right)$; tu bowiem i druga pochodna dzielnej $(x-\sin x)$ i dzielnika x^3 dla $x=0$ staje się zerem.

Czytelnik może próbować uogólnienia dalszego.

Oprócz tego pragniemy zaznaczyć, że można badać granice funkcji, które występują pod postacią innych symbolów nieoznaczonych np. 0^0 i t. d. Należą tu przykłady: $\lim\limits_{x\to 0}(x^x)$, $\lim\limits_{x\to 0}(x\,ln\,x)$ i inne. Ale ogólne badania takich granic wychodzą poza ramy niniejszego podręcznika.

Rozdział X. Teorja całek nieokreślonych.

§ 51. Definicja całki nieokreślonej.

Dotychczas zajmowaliśmy się różniczkowaniem funkcji t. j. obliczeniem pochodnej z danej funkcji. Zwracamy zarazem uwagę na to, że 1) obliczaliśmy pochodną funkcji danej *w danym punkcie*, 2) daną była funkcja $F(x)$ w przedziale (a, b) i szukaliśmy *funkcji pochodnej* dla punktów wewnętrznych przedziału t. j. szukaliśmy funkcji $\varphi(x)$ takiej, że wewnątrz przedziału (a, b) jest

$$(1) \qquad \frac{dF(x)}{dx} = \varphi(x).$$

Przykłady. 1) Funkcja $y = \sqrt{x}$, określona i ciągła w przedziale $(0, a)$, gdzie a oznacza dowolną liczbę dodatnią, ma pochodną wewnątrz tego przedziału i mianowicie funkcja $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ jest (funkcją) pochodną, jest bowiem dla liczb x dodatnich:

$$\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2) Niech będzie $F(x) = \arcsin x$, to funkcja $F(x)$ jest określoną i ciągłą w przedziale $(-1, +1)$ i ma *wewnątrz* przedziału pochodną $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

I. Wysłowimy następujące zagadnienie: dla danej funkcji $F(x)$, ciągłej w *całym* przedziale (a, b) utworzyć funkcję $\varphi(x)$, określoną *wewnątrz* przedziału (a, b) i taką, żeby spełniała równość (1). Krótko i mniej dokładnie: dana funkcja pierwotna $F(x)$, znaleźć jej pochodną.

Zagadnienie to rozwiązaliśmy w przypadku funkcji elementarnych, (jak x^n, e^x, $ln\,x$, $\sin x, \ldots$, $\arcsin x \ldots$), funkcji [1]) będących

[1]) O tej kategorji funkcji moglibyśmy nie mówić, gdybyśmy wprowadzili pojęcie funkcji złożonej, utworzonej przy pomocy funkcji wielu zmiennych.

wynikiem czterech działań arytmetycznych na funkcjach elementarnych (np. $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}(x^2-1),\ldots$) i w przypadku funkcji złożonej.

II. Oczywiście nasuwa się zagadnienie odwrotne: niech będzie daną funkcja $\varphi(x)$, określona wewnątrz przedziału (a, b), znaleźć funkcję $F(x)$ ciągłą w całym przedziale (a, b) tak, iżby wewnątrz przedziału (a, b) spełniała równość (1). Krótko i nieściśle: jaka funkcja pierwotna $F(x)$ ma daną funkcję $\varphi(x)$, jako pochodną? Zajmiemy się obecnie tem zagadnieniem.

Jak przy każdem zagadnieniu, tak i tu nasuwają się pytania: 1) Czy zagadnienie takie posiada rozwiązanie? tudzież jakie są warunki konieczne i wystarczające istnienia rozwiązania? 2) Jeśli rozwiązanie istnieje, to ile może być rozwiązań? 3) Jak znaleźć rozwiązanie?

Odnośnie do naszego problemu odpowiemy na pierwsze pytanie w każdym poszczególnym przypadku z osobna; teraz możemy tylko orzec, na razie bez dowodu, że, *o ile funkcja $\varphi(x)$ jest ciągłą w całym przedziale (a, b), to żądana funkcja $F(x)$ istnieje* (zob. § 63); w pewnych jednak przypadkach będzie istnieć funkcja $F(x)$, mimo że funkcja $\varphi(x)$ jest nieciągłą w przedziale (a, b), jak to widzieliśmy powyżej na przykładach.

Zajmijmy się drugiem pytaniem, a mianowicie wyznaczmy ilość rozwiązań zagadnienia, zakładając, że zagadnienie ma rozwiązanie. Otóż równość (1) możemy uważać za równanie, w którem niewiadomą jest funkcja $F(x)$, a ponieważ ta funkcja występuje w związku z różniczkowaniem, nazwiemy równanie (1) równaniem różniczkowem. Załóżmy, że równanie to posiada conajmniej 2 rozwiązania i że właśnie funkcje $F_1(x)$ i $F_2(x)$ spełniają zagadnienie II w przedziale (a, b), przeto wewnątrz przedziału (a, b) jest

$$\frac{dF_1(x)}{dx}=\varphi(x), \text{ oraz } \frac{dF_2(x)}{dx}=\varphi(x).$$

Odejmijmy pierwszą równość od drugiej, a otrzymamy: $\frac{dF_2(x)}{dx}-\frac{dF_1(x)}{dx}=0$ a ponieważ różnica pochodnych równa się pochodnej różnicy, więc: $\frac{d(F_2(x)-F_1(x))}{dx}=0 \ldots (2)$.

Skoro obie funkcje $F_1(x)$, $F_2(x)$ są ciągłe w całym przedziale, to także ich różnica jest funkcją ciągłą w całym przedziale. Doszliśmy do wzoru (2), który jest niczem innem, jak szczególnym przypadkiem równania (1), t. j. gdy funkcja φ po prawej stronie równania jest zerem. Zadanie nasze sprowadziliśmy więc do rzeczy następującej: znaleźć funkcję ciągłą w całym przedziale (nazwijmy ją $\Phi(x)$, której pochodna wewnątrz przedziału równa się zeru.

Na mocy tw. I § 48 wynika, że $F_2(x) - F_1(x) = C$, gdzie C oznacza stałą w przedziale (a, b); stąd

(3) $$F_2(x) = F_1(x) + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą.

Znaczenie wzoru (3) jest następujące: jeżeli znamy pewne szczególne rozwiązanie zagadnienia II (n. p. $F_1(x)$), to otrzymamy *wszystkie* inne *rozwiązania* tego zagadnienia, jako sumę szczególnego rozwiązania i dowolnej stałej. Jeżeli więc istnieje jedno rozwiązanie zagadnienia II, to istnieje nieskończenie wiele rozwiązań, gdyż stałą C można wybrać w nieskończenie wiele sposobów. Każdą funkcję $F(x)$ ciągłą w całym przedziale (a, b), spełniającą równanie (1) wewnątrz przedziału (a, b), a więc posiadającą tę własność, iż jej pochodna wewnątrz przedziału równa się danej funkcji $\varphi(x)$, określonej wewnątrz przedziału (a, b), nazywamy *całką nieokreśloną* (nieoznaczoną) funkcji $\varphi(x)$ w przedziale (a, b) i oznaczamy ją symbolem, wprowadzonym przez Leibniza:

$$\int \varphi(x)\,dx,$$

gdzie symbol $\int$ jest skróceniem łać. słowa „summa", co usprawiedliwimy później. Oznaczeń przedziału (a, b) w symbolu tym nie podano.

Ponieważ, jak wykazaliśmy, funkcja $F(x) + C$ rozwiązuje zagadnienie II, jeśli je funkcja $F(x)$ rozwiązuje (przyczem C jest dowolną stałą), więc znak $\int \varphi(x)\,dx$ jest nieskończenie wielowartościowy, z powodu stałej C dowolnej, bliżej „nieoznaczonej", „nieokreślonej" i stąd właśnie nazwa całki nieokreślonej (lub całki nieoznaczonej).

Funkcję $\varphi(x)$ nazywamy funkcją podcałkową, x zaś zmienną całkowania.

Wiemy, że $\dfrac{d \sin x}{dx} = \cos x$ wewnątrz dowolnego przedziału (a, b), więc $\int \cos x\,dx$ przedstawia i funkcję $\sin x$ i funkcję $\sin x + 1$ lub $\sin x + \frac{1}{2}$, $\sin x - 5$ i t. d. w dowolnym przedziale (a, b).

Poznamy teraz kilka własności całek nieokreślonych.

We wzór całki: $\int \varphi(x)\,dx$ podstawmy wartość na $\varphi(x)$ z równania (1). Będzie: $\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx$, co też napiszemy pod postacią: $\int dF(x)$, a wartość tej całki obliczyliśmy, jako $F(x)+C$. Zatem jest: $\int dF(x) = F(x) + C$ w przedziale (a, b)... (4).

Zróżniczkujmy całkę: wiemy, że całka jest funkcją taką, iż jej pochodna wewnątrz przedziału równa się danej funkcji podcałkowej $\varphi(x)$. Będzie tedy wewnątrz przedziału (a, b):

$$\frac{d[\int \varphi(x)\,dx]}{dx} = \varphi(x).$$

Czytamy to krótko: pochodna z całki równa się funkcji podcałkowej. Inaczej: $d[\int \varphi(x)\,dx] = \varphi(x)\,dx$... (5).

Nieściśle, lecz ze względów mnemotechnicznych godne zapamiętania jest zdanie: Znaki różniczki i całki znoszą się w przypadku (5), zaś przy porządku (4) znaków różniczki d i całki $\int$ należy dodać stałą.

Przykład. Wiadomo, że spadek ciała w próżni odbywa się według prawa $s = \frac{1}{2}gt^2$, gdzie s oznacza odległość spadającego ciała od punktu wyjścia, g oznacza przyspieszenie ziemskie, zaś t mierzy czas liczony od chwili wyjścia (czyli początku ruchu). Ponieważ prędkość ruchu jest miarą zmiany odległości s w czasie, więc prędkość jest równa pochodnej $\frac{ds}{dt}$ i otrzymujemy $\frac{ds}{dt} = gt$. Załóżmy, że mamy ogólniejsze zagadnienie, że mianowicie prędkość $\frac{ds}{dt}$ jest daną funkcją $\varphi(t)$, ciągłą o ile jest $0 \leqslant t \leqslant t_0$, gdzie jest $t_0 > 0$ i że w chwili $t=0$ jest też $s=0$. Otóż równanie $\frac{ds}{dt} = \varphi(t)$ daje nam $s = \int \varphi(t)\,dt$. Jeżeli znamy taką funkcję $F(t)$ ciągłą w przedziale $(0, t_0)$, że wewnątrz tego przedziału ma pochodną o własności $\frac{dF}{dt} = \varphi(t)$, to będzie $\frac{d}{dt}(s - F(t)) = 0$ wewnątrz przedziału $(0, t_0)$; stąd i z ciągłości funkcji $s - F(t)$ wynika, że jest $s - F(t) = C$, gdzie C oznacza stałą, którą możemy stąd wyznaczyć, że dla $t = 0$ ma być $0 - F(0) = C$, co daje $C = -F(0)$. Jest więc $s = F(t) - F(0)$ jako równanie ruchu (str. 155). Jeżeli ruch jest perjodyczny np. drgający i jeżeli prędkość wynosi $\cos t$, to $\int \cos t\, dt = \sin t + C$ i wtedy $s = \sin t$. Jest to ruch drgający prosty, perjodyczny, a mianowicie co (2π) jednostek czasu ruch się powtarza.

§ 52. Wzory całkowe.

Odpowiedzieliśmy na dwa pierwsze pytania, któreśmy sobie postawili na początku poprzedniego paragrafu. Próbujmy odpowiedzieć na pytanie trzecie: jak znaleźć całkę danej funkcji? nieco później to pytanie wyrazimy ściśle, a obecnie stwierdzamy, że ogólnej metody szukania całek niema. Pomocne jednak w tem zadaniu są t. zw. wzory całkowe, które wynikają z odpowiednich wzorów różniczkowych.

Weźmy np. funkcję $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, gdzie n jest dowolną liczbą stałą, byle różną od (-1), a $x > 0$, gdy n nie jest liczbą naturalną; otóż jest:

$$\frac{d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\right)}{dx} = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n = x^n.$$

Z tego możemy wysnuć twierdzenie: *Jeżeli* $n \neq -1$, *to jest:* $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ *w przedziale* (a, b), *który ma dwie własności: 1) w przedziale* (a, b), *ma być funkcja* x^{n+1} *ciągłą, 2) wewnątrz przedziału* (a, b) *ma być funkcja* x^n *określoną.*

Z łatwością wyznaczymy stąd warunki dla liczb a i b. W tym celu należy odróżnić kilka przypadków co do liczby n, a mianowicie albo 1) $n > 0$ albo 2) $n = 0$ albo 3) $-1 < n < 0$ albo 4) $n < -1$.

Ad 1. Gdy n oznacza liczbę naturalną, to funkcje x^n, x^{n+1} są ciągłe dla dowolnych wartości x, wobec czego liczby a i b można obrać dowolnie. Gdy n oznacza ułamek nieskracalny $\frac{m}{p}$, to x^n będzie określone i dla liczb x ujemnych, gdy p jest liczbą nieparzystą i wtedy też funkcja x^{n+1} jest ciągłą; gdy więc p jest liczbą nieparzystą, to liczby a, b są dowolne, gdy zaś p oznacza liczbę parzystą, wtedy być musi $0 \leqq a < b$. Gdy wreszcie n oznacza liczbę niewymierną, to w obecnym, jak i każdym następnym przypadku być winno $0 < a < b$.

Ad 2. Gdy $n = 0$, to rozumiemy *stale* liczbę 1 przez x^0; liczby a, b są dowolne.

Ad 3. Liczba zero nie może leżeć wewnątrz przedziału (a, b), przeto jest albo $0 \leqq a < b$ albo $a < b \leqq 0$. Czy rzeczywiście może być $a < b \leqq 0$, o tem decyduje dalsze badanie, jak pod 1.

Ad 4. Liczba zero jest wyłączona z przedziału (a, b) czyli albo $0 < a < b$ albo $a < b < 0$. Czy i druga ewentualność jest możliwą, należy dalej badać, jak pod 1.

Na mocy powyższego możemy wyprowadzić następujące wzory, podstawiając różne wartości na n:

$$\left.\begin{aligned}&\int dx = x + C \quad (\text{dla } n = 0)\\ &\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \ (\text{dla } n = 1)\\ &\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C \, (\text{dla } n = 3)\end{aligned}\right| \quad \text{w dowolnym przedziale } (a, b).$$

itd.

Brak w tych wzorach całki dla $n = -1$ czyli całki $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x}$ dla dowolnego przedziału, nie zawierającego liczby $x = 0$.

Otóż, różniczkując funkcję $ln\,x$ dla $x > 0$, otrzymujemy: $\frac{d\,ln\,x}{dx} = \frac{1}{x}$,

więc będzie: $\int \frac{1}{x} . dx = \int \frac{dx}{x} = ln\,x + C$ w dowolnym przedziale (a, b), byle było $0 < a < b$.

Niech będzie $x < 0$ i weźmy pod uwagę funkcję $y = ln(-x)$, to jej pochodna znów będzie: $\frac{d\,ln(-x)}{dx} = \frac{1}{-x} . (-1) = \frac{1}{x}$; przeto będzie $\int \frac{dx}{x} = ln(-x) + C$ w przedziale (a, b), o ile jest $a < b < 0$; łącząc oba rezultaty, mamy: $\int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + C$ dla dowolnego przedziału (a, b), nie zawierającego liczby zero.

Dla funkcji e^x otrzymamy wzór całkowy:

$$\int e^x dx = e^x + C \text{ dla dowolnego przedziału } (a, b),$$

ponieważ jest $\frac{de^x}{dx} = e^x$ dla każdej wartości x.

Oto dalszych kilka wzorów różniczkowych (po lewej) i odpowiednich całkowych (po prawej stronie).

a) dla dowolnego przedziału (a, b):

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x; \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\frac{d(-\cos x)}{dx} = \sin x; \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + C = C - \cos x;$$

b) zaś dla dowolnego przedziału (a, b), nie zawierającego żadnej z liczb kształtu $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, gdzie n jest liczbą całą:

$$\frac{d(tg\, x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C;$$

c) dla dowolnego przedziału (a, b), nie zawierającego liczb kształtu $(n\pi)$, gdzie n jest liczbą całą:

$$\frac{d(-\mathrm{ctg}\, x)}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C = C - \mathrm{ctg}\, x.$$

Podobnie otrzymamy wzór całkowy, różniczkując funkcję $ln(x + \sqrt{1+x^2})$, jako funkcję złożoną [1]). Otóż jest:

$$\frac{d\, ln(x+\sqrt{1+x^2})}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} . 2x\right\} =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left\{1 + x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left\{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right\} =$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Zatem będzie dla dowolnego przedziału (a, b):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

---

[1]) Funkcja ta jest określona dla każdej (rzeczywistej) liczby x, gdyż $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$, więc $x + \sqrt{1+x^2} > x + |x| \geqslant 0$.

Z tych wzorów całkowych widać, że „obliczyć całkę“ znaczy dla nas: wyrazić ją przez dobrze nam znane funkcje elementarne lub złożone; czy można zadanie obliczenia całki inaczej pojmować, to na razie odpowiedź na to pytanie niemożliwa, jak i odpowiedź na pytanie, czy każdą całkę można wyrazić przez funkcje elementarne.

Znajomość tych i tym podobnych wzorów całkowych konieczną jest do rozwiązywania zadań, polegających na znalezieniu całki danej funkcji. Powiedzieliśmy już bowiem, że metody ogólnej, do tego celu prowadzącej, niema; jest tylko kilka metod raczej indywidualnych, które stosują się do poszczególnych przypadków. Kiedy i której z nich jednak użyć należy, o tem decydować może tylko pewna przez ćwiczenie nabyta wprawa, oraz intuicja. Metody te, z których kilka poznamy wkrótce, będą sformułowane, jako twierdzenia w kształcie pewnych równości; po lewej i po prawej stronie tych równości występować będą po jednej lub po więcej całek, z których, jak wiadomo, każda jest określona wieloznacznie wskutek możności dowolnego doboru stałych. Cóż więc znaczyć może taka równość?

Rozróżnimy kilka przypadków. Pierwszy przypadek niech będzie następujący; jeżeli A i B nie są symbolami jednoznacznemi, ale wieloznacznemi (liczb, funkcji...); co znaczyć może równość $A = B$? Przecież można z łatwością nadać symbolom A, B takie znaczenia A_0, B_0, iż będzie $A_0 \neq B_0$. Widoczną jest tu pewna trudność, której pominąć nam nie wolno.

Otóż taką równość będziemy pojmowali jedynie w sposób następujący: do każdego znaczenia A_0 symbolu A można dobrać takie znaczenie B_0 symbolu B, iż będzie $A_0 = B_0$ i naodwrót, do każdego znaczenia B_1 symbolu B można dobrać znaczenie A_1 symbolu A tak, iż jest $A_1 = B_1$. Tę własność symboli wieloznacznych A, B wyrażać będziemy krótko[1]) równością $A = B$.

Jako przykład niech czytelnik rozważy równość (1) w tw. I poniżej podanem.

Załóżmy, że symbole A, B_1, $B_2, \ldots, B_n$ są wieloznaczne i że mamy równość $A = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$ lub $A = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i$.

---

[1]) Tę równość można także wyrazić przy pomocy pojęcia zbioru, co pomijamy, jako równoważne z powyższą definicją.

Jakie znaczenie można nadać takiej równości? Dla nas ostatnia równość będzie wyrażała następujace dwie własności wieloznacznych symboli A, B_1, $B_2, \ldots, B_n$: a) do każdego układu znaczeń $B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, \ldots, B_n^{(0)}$ symboli $B_1, B_2, \ldots, B_n$ można dobrać takie znaczenie $A^{(0)}$ symbolu A, iż zachodzi równość $A^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} B_i^{(0)}$ i zarazem b) do każdego znaczenia $A^{(0)}$ symbolu A można dobrać tak układ znaczeń $B_1^{(0)}, B_2^{(0)}, \ldots, B_n^{(0)}$ symboli $B_1, B_2, \ldots, B_n$ iż jest $A^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} B_i^{(0)}$. Przykład na to w przypadku $n = 2$ znajdzie czytelnik w równości (1) tw. II. w dalszym ciągu podanego. Niech wreszcie A, B oznaczają symbole wieloznaczne. zaś C niech będzie symbolem jednoznacznym; otóż równość $A = B + C$ znaczyć będzie 1) do każdego znaczenia B_0 symbolu B można dobrać znaczenie A_0 symbolu A tak, iż jest $A_0 = B_0 + C$ i naodwrót 2) do każdego znaczenia A_0 symbolu A można dobrać znaczenie B_0 symbolu B tak, iż jest $A_0 = B_0 + C$. Przykład na to znajdzie czytelnik w równości (1) § 53.

Jeżeli symbolami wieloznacznymi, o których powyżej mowa, będą całki nieoznaczone, to w myśl powyższego równość znaczyć będzie, że do dowolnych wartości liczebnych na stałe, zawarte po lewej stronie równości można dobrać wartości liczebne na stałe prawej strony tak, iżby zachodziła równość w zwykłem znaczeniu tego wyrazu; i na odwrót: do dowolnych wartości liczebnych na stałe po prawej stronie możemy dobrać wartości liczebne na stałe lewej strony tak, aby zwykła równość zachodziła. Takie znaczenie będą miały równości całek nieokreślonych.

Oto pierwsze z tych twierdzeń:

I. *Jeżeli* $\int \varphi(x)\,dx$ *oznacza funkcję ciągłą w całym przedziale* (a, b) *i jeżeli* c *oznacza stałą, to całka* $\int c\,\varphi(x)\,dx$ *oznacza też funkcję ciągłą w całym przedziale* (a, b) *i jeżeli jest nadto* $c \neq 0$, *to jest:*

(1) $$\int c\,\varphi(x)\,dx = c \int \varphi(x)\,dx.$$

Dowód. Do funkcji $\varphi(x)$ istnieje według założenia funkcja $F(x)$ ciągła w całym przedziale (a, b) i taka, że jej pochodna wewnątrz przedziału (a, b) równa się funkcji $\varphi(x)$; zatem jest wewnątrz przedziału (a, b):

(2) $$\frac{dF(x)}{dx} = \varphi(x),$$ skąd wynika, że jest:

(3) $\int \varphi(x)\,dx = F(x) + C$ w całym przedziale (a, b),

przyczem C oznacza stałą dowolną. Równość (2) pomnóżmy obustronnie przez stałą c; to:

(4) $$c \cdot \frac{dF(x)}{dx} = c \cdot \varphi(x).$$

Obierzmy teraz funkcję $c \cdot F(x)$, która jest ciągłą w przedziale (a, b) i ma pochodną wewnątrz tego przedziału; zróżniczkujmy ją, to: $\frac{d(cF(x))}{dx} = c \cdot \frac{dF(x)}{dx}$. Ale prawa strona w myśl równości (2) równa się $c \cdot \varphi(x)$.

Istnieje więc całka $\int c\varphi(x)\,dx$ i jest:

(5) $$\int c\varphi(x)\,dx = cF(x) + C',$$

gdzie C' oznacza dowolną stałą.

Zbadajmy, czy może zachodzić równość (1). Na mocy (3) i (5) daje (1): $cF(x) + C' = c[F(x) + C]$.

Otóż gdy stała C po prawej stronie jest dana, to należy C' obrać $C' = cC$, aby zachodziła „zwykła" równość. Na odwrót, gdy stała C' dana, to należy obrać $C = \frac{C'}{c}$, co można uczynić, skoro $c \neq 0$. Jest więc równość (1) prawdziwą, gdy $c \neq 0$. Dla $c = 0$ równość (1) przestaje być prawdziwą, gdyż strona lewa oznacza wtedy dowolną stałą, kiedy strona prawa oznacza zero.

Możemy więc powiedzieć krótko: stały czynnik, różny od zera, można z pod całki wyprowadzić przed znak całki, ale można go też wprowadzić pod znak całki, jako czynnik.

Przykład. Dla zastosowania dopieroco udowodnionego tw. I obliczmy całkę funkcji: $3\cos x$ przy użyciu wzoru na całkę funkcji $\cos x$, podanego poprzednio: $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

Będzie więc w dowolnym przedziale (a, b): $\int 3\cos x\,dx = 3\int \cos x\,dx = 3(\sin x + C) = 3\sin x + C'$ gdzie $C' = 3C$.

II. *Twierdzenie. Jeżeli symbole* $\int \varphi_1(x)\,dx$ *i* $\int \varphi_2(x)\,dx$ *oznaczają* *funkcje ciągłe w przedziale* (a, b), *to symbol:* $\int [\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)]\, dx$ *oznacza również funkcję ciągłą w przedziale* (a, b) *i jest*

$$(1) \qquad \int [\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)]\, dx = \int \varphi_1(x)\, dx \pm \int \varphi_2(x)\, dx.$$

Dowód. Zdajmy sobie sprawę z treści twierdzenia. Otóż tw. II można także w sposób następujący wysłowić: jeżeli *istnieją* funkcje ciągłe w przedziale (a, b), które wewnątrz przedziału mają pochodne naprzód dane $\varphi_1(x)$, wzgl. $\varphi_2(x)$, to istnieją funkcje ciągłe w przedziale (a, b), które mają wewnątrz przedziału (a, b) pochodną $\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)$, ponadto tw. II podaje wzór na te funkcje. Zakładamy więc, że istnieją funkcje $F_1(x)$, $F_2(x)$ ciągłe w przedziale (a, b), które mają wewnatrz przedziału pochodne:

$$(2) \qquad \frac{d F_1(x)}{dx} = \varphi_1(x), \qquad \frac{d F_2(x)}{dx} = \varphi_2(x).$$

Wobec tego jest:

$$(3) \qquad \int \varphi_1(x)\, dx = F_1(x) + C_1, \qquad \int \varphi_2(x)\, dx = F_2(x) + C_2,$$

gdzie C_1, C_2 oznaczają stałe. Utwórzmy funkcję $\Phi(x) = F_1(x) \pm \pm F_2(x)$; ona jest ciągłą w przedziale (a, b), ma wewnątrz przedziału (a, b) pochodną i mianowicie:

$$(4) \qquad \frac{d\,\Phi(x)}{dx} = \frac{d F_1(x)}{dx} \pm \frac{d F_2(x)}{dx} = \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x).$$

Przeto żądana funkcja istnieje i wskutek tego całka $\int (\varphi_1(x) \pm \pm \varphi_2(x))\, dx$ oznacza funkcję w myśl definicji całek nieokreślonych; ponadto jest:

$$(5) \qquad \int [\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)]\, dx = \Phi(x) + C = F_1(x) \pm F_2(x) + C,$$

gdzie C oznacza stałą. Otóż równość (1) wobec równości (3) i (5) prowadzi do równości: $C = C_1 \pm C_2$, którą należy rozumieć w myśl naszych określeń w sposób następujący: gdy są dane liczby C_1, C_2, to rzeczywiście obrać można liczbę C tak, by było $C = C_1 \pm C_2$ i na odwrót, gdy dana liczba C, to można dobrać liczby C_1, C_2, by ostatnia równość była spełnioną.

Przykłady. 1) Na str. 159 omawialiśmy pojęcie prędkości prostoliniowego ruchu. Załóżmy, że punkt porusza się po osi x, prędkość jego będzie równą $\frac{dx}{dt}$, jeżeli t oznacza miarę czasu.

Znajdźmy równanie ruchu $x = f(t)$, jeżeli prędkość ruchu jest liczbą stałą, różną od zera, w pewnym przedziale (t_1, t_2) czasu. Jest więc $\frac{dx}{dt} = c$, stąd $x = \int c\,dt = c\int dt = ct + C$. Widzimy tedy, że otrzymaliśmy równanie ruchu jednostajnego.

2) Rzućmy kamień (punkt materjalny) o masie m gramów pionowo w górę. Jeżeli nie uwzględnimy oporu powietrza, obrotu ziemi i innych poza grawitacją okoliczności, to ruch będzie prostoliniowym. Skierujmy oś z pionowo w górę. Wtedy $\frac{dz}{dt}$ będzie prędkością ruchu, zaś $\frac{d^2z}{dt^2}$ przyspieszeniem ruchu. Iloczyn masy i przyspieszenia daje miarę wektora, którym przedstawi się siłę, działającą na punkt. Skoro kamień (punkt) wyrzucono z ręki, to *jedyną* siłą działającą podczas ruchu jest przyciąganie ziemskie i jeżeli g oznacza przyspieszenie ziemskie, to iloczyn $m.g$ mierzy wielkość wektora siły, ale siła jest skierowana odwrotnie niż oś z, więc wektor siły ma miarę $(-mg)$ na osi z.

Tedy: $m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg$, skąd $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$ czyli $\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = -g$.

Przeto stąd, całkując, mamy:

$$\frac{dz}{dt} = \int (-g)\,dt = -g\int dt = -gt + c,\ z = \int (-gt + c)\,dt =$$

$$= \int (-gt)\,dt + \int c\,dt = -g\int t\,dt + c\int dt = -\frac{gt^2}{2} + ct + cc'.$$

Tu założyliśmy, że jest $c \neq 0$. Gdyby zaś było $c = 0$, toby było $\int c\,dt = c_1$, gdzie stała c_1 jest dowolną. Otóż, gdy $c \neq 0$, to iloczyn cc' może mieć też dowolną stałą wartość. Jeżeli więc położymy

$$z = -\frac{gt^2}{2} + ct + c_1,$$

to obejmiemy tem samem oba przypadki co do stałej c.

W dalszych przykładach nie powtórzymy rozważania dopiero co podanego.

Otrzymaliśmy dla współrzędnej z i prędkości v ruchu wzory:

$$(1) \qquad z = -\frac{gt^2}{2} + ct + c_1, \qquad v = -gt + c,$$

gdzie c, c_1 oznaczają stałe. Załóżmy, że w chwili $t = 0$ punkt materjalny znajdował się w punkcie $z = 0$ i miał prędkość początkową v_0. Otóż równania (1) dają $0 = 0 + 0 + c_1$, $v_0 = 0 + c$ czyli $c = v_0$, $c_1 = 0$, więc dla rzutu pionowego w górę jest

$$v = v_0 - gt, \quad z = v_0 t - \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Aby określić najwyższy punkt, który osiąga kamień, trzeba rozwiązać zagadnienie na maximum lokalne funkcji z. Ma być tedy: $\frac{dz}{dt} = 0$, $\frac{d^2z}{dt^2} < 0$ dla szukanej chwili t_1, w której kamień dochodzi do punktu górowania. Skoro $v = \frac{dz}{dt}$, więc chwila t_1 charakteryzuje się tem, że jest $v = 0$, co jest fizykalnie zrozumiałe. Otóż $v = 0$ daje $t_1 = \frac{v_0}{g}$, skąd wysokość rzutu $w = (z)_{t_1} = \frac{v_0{}^2}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0{}^2}{g^2} = \frac{v_0{}^2}{2g}$. Stąd $v_0 = \sqrt{2gw}$, co podaje prędkość, z jaką należy kamień rzucić pionowo do góry, jeżeli ma osiągnąć wysokość w rzutu.

3) Niech osie x, y będą poziome, oś z pionowo do góry skierowaną. Z początku współrzędnych w chwili $t = 0$ wyrzucamy kamień (punkt materjalny) o masie m gramów z prędkością (początkową) v_0, której wektor leży w płaszczyźnie (x, z) i tworzy z osią x kąt α. Podczas ruchu działa na kamień jedynie siła przyciągania ziemskiego, nie uwzględniamy bowiem żadnych przeszkód ruchu ani innych okoliczności. Współrzędne x, y, z zmieniać się będą w czasie. Jak wiadomo, iloczyn masy i przyspieszenia daje miarę wektora siły. Rzutując wektor siły na osie x, y, z, otrzymamy, że: rzut siły w kierunku osi x jest równy zeru, rzut siły w kierunku osi y jest też zerem, rzut siły w kierunku osi z mierzy się liczbą $(-mg)$, bo oś z jest skierowana ku górze. Rzuty przyspieszenia na osie (jak uczy mechanika) są: $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, tedy mamy dla sił równości:

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg.$$

Dla oznaczenia współrzędnych x, y, z z równań (1) zauważmy, że dla $t = 0$ jest:

(2) $$(x)_{t=0} = (y)_{t=0} = (z)_{t=0} = 0;$$

nadto rzuty prędkości początkowej na osie x, y, z są odpowiednio równe liczbom

(3) $$v_0 \cos\alpha,\ 0,\ v_0 \sin\alpha.$$

Równości (1) całkowane dają

$$\frac{dx}{dt} = c_1,\ \frac{dy}{dt} = c_2,\ \frac{dz}{dt} = \int(-g)\,dt = -gt + c_3,$$

przyczem warunki (3) dają

$$c_1 = v_0 \cos\alpha,\ c_2 = 0,\ c_3 = v_0 \sin\alpha,$$

więc będzie

(4) $$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha,\ \frac{dy}{dt} = 0,\ \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt,$$

co znów całkowane daje:

$$x = v_0 t \cos\alpha + c';\ y = c'';\ z = v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 + c''',$$

gdzie c', c'', c''' oznaczają stałe, które możemy wyznaczyć przy pomocy równości (2); otrzymujemy tedy:

$$c' = 0,\quad c'' = 0,\quad c''' = 0.$$

Ostatecznie ruch punktu określą równania:

(5) $$x = v_0 t \cos\alpha,\quad y = 0,\quad z = v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Stąd widzimy, że stale jest $y = 0$ czyli kamień pozostaje w płaszczyźnie (x, z).

Obliczając z pierwszego z równań (5) liczbę t, jako równą

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

i wstawiając w trzecie, otrzymujemy:

(6) $$z = x\,tg\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha},$$

co na płaszczyźnie (x, z) przedstawia parabolę (§ 71). Kamień opisze więc przy rzucie ukośnym parabolę.

Obliczmy wysokość rzutu t. zn. maximum lokalne funkcji z. Otóż równość (6) daje

$$\frac{dz}{dx} = tg\,\alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2\alpha},\quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha} < 0.$$

Maximum będzie więc, gdy $x = \frac{v_0^2\cos^2\alpha\, tg\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$; wysokość rzutu będzie $w = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} \cdot tg\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} \cdot \frac{v_0^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$.

Z tego widać, że wysokość rzutu będzie tem większą przy stałej prędkości v_0, im większy będzie kąt α t. zn. im bardziej „stromo" w górę rzucimy kamieniem.

Parabola (6) przecina oś x w dwu punktach: w początku współrzędnych O i punkcie A, który wyznaczymy; długość OA nazywa się dalekością rzutu. Aby ją znaleźć trzeba obliczyć współrzędną x punktu A. Otóż dla punktu A ma być $z = 0$ czyli

$$x\,tg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0 \quad \text{t. j.} \quad x\left[tg\alpha - \frac{gx}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right] = 0,$$

co daje $x = 0$ (punkt O) i $x = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\, tg\alpha}{g} = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$ dla punktu A. Dalekość rzutu wynosi więc:

$$D = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g},$$

skąd widać, że otrzymamy Max (D) przy niezmiennej prędkości v_0, gdy $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ czyli $\alpha = 45^0$.

4) Rozważmy ciało sztywne, obracające się na około stałej osi (l). Podczas obrotu każdy punkt ciała, nie leżący na osi l opisuje łuk koła, którego środek leży na osi l, a którego płaszczyzna jest prostopadłą do osi l. Niech M oznacza pewien punkt ciała, nie leżący na osi l; niech O oznacza prostopadły rzut punktu M na oś l. Podczas obrotu prosta OM obróci się o pewien kąt α; jeżeli znamy wartość kąta α w każdej chwili t, to znamy obrót ciała. Przypuśćmy, że znamy kąt α we funkcji t: $\alpha = f(t)$. Miarą zmienności

kąta będzie pochodna $\frac{d\alpha}{dt}$, którą nazywamy prędkością kątową obrotu; pochodną drugą $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ nazywamy przyspieszeniem kątowem obrotu. Tak prędkość kątowa, jak i przyspieszenie kątowe są wspólne wszystkim punktom ciała, nie leżącym na osi obrotu.

Rozwiążmy następujące zagadnienie: określić obrót [t. zn. znaleźć funkcję $\alpha = f(t)$] w przypadku, gdy przyspieszenie kątowe jest wielkością stałą. Jest więc $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = c$, gdzie c oznacza stałą. Stąd $\frac{d\alpha}{dt} = \int c dt = c \int dt = ct + c_1$ w pewnym przedziale czasu (t_1, t_2).

Stąd dalej: $\alpha = \int (ct + c_1) dt = \int ct dt + \int c_1 dt = c\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$, gdzie c_1, c_2 są stałe. Taki obrót nazywamy jednostajnie przyspieszonym.

5) Obliczmy całkę $I = \int \cos^2 x dx$ w dowolnym przedziale (a, b). Aby móc stosować tw. II. w którem jest mowa o dwóch całkach. dobieramy jeszcze jedną całkę: $J = \int \sin^2 x . dx$.

Przyjmijmy na chwilę, że całki I, J przedstawiają funkcje ciągłe w przedziale (a, b) i że mają wewnątrz przedziału pochodne równe funkcjom podcałkowym. Oczywiście, chcąc całkowicie rozwiązać podane zagadnienie, będziemy musieli uwolnić się od tego chwilowego przypuszczenia.

Utwórzmy sumę całek I i J; tedy w myśl tw. II jest:

$$(1) \qquad I + J = \int (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int dx = x + C.$$

Znamy więc sumę całek I i J. Znajdziemy jeszcze wartość ich różnicy, co nam potem pozwoli obliczyć całkę I. Znów według tw. II będzie:

$$(2) \qquad I - J = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int \cos 2x \, dx.$$

Celem obliczenia ostatniej całki zróżniczkujmy funkcję $\sin 2x$, jako funkcję złożoną; jest: $\frac{d \sin 2x}{dx} = \cos 2x \,.\, 2 = 2 \cos 2x$. Zatem $\cos 2x = \frac{1}{2} \cdot \frac{d \sin 2x}{dx} = \frac{d(\frac{1}{2} \sin 2x)}{dx}$. Jest więc: $\int (\cos 2x) dx =$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+C'$, co podstawiamy w równość (2), a otrzymujemy:

$$(3)\qquad I-J=\tfrac{1}{2}\sin 2x+C'.$$

Dodając stronami równości (1) i (3), otrzymamy:

$$2I=x+\tfrac{1}{2}\sin 2x+C'', \text{ gdzie } C''=C+C'.$$

Stąd mamy:

$$I=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c, \text{ gdzie } c=\frac{C+C'}{2}.$$

Obliczyliśmy zatem całkę:

$$(4)\qquad \int(\cos^2 x)\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c.$$

Jeżeli więc całki $\int\cos^2 x\,dx$ i $\int\sin^2 x\,dx$ oznaczają funkcje ciągłe, to całka I oznacza tę, którą określa prawa strona równości (4). Dla przekonania się więc, że rzeczywiście $\int\cos^2 x\,dx$ przedstawia funkcję, zauważmy, że prawa strona równości (4) jest funkcją ciągłą w przedziale (a, b), nadto zróżniczkujmy prawą stronę równości (4); otóż jest $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos 2x\,.\,2=\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\frac{1}{2}\,.\,2\cos^2 x=\cos^2 x.$

Zatem równość (4) jest słuszną.

Obliczmy jeszcze całkę J. Odjąwszy równość (3) od równości (2), otrzymujemy: $2J=x-\frac{1}{2}\sin 2x+C'''$ $(C'''=C-C')$, skąd $J=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+c'$ $\left(c'=\frac{C'''}{2}\right)$. Czytelnik z łatwością się przekona, że całka J istnieje i że została dobrze obliczona.

Z twierdzenia II wynika ważna uwaga: jeżeli z czterech całek $\int\varphi_1\,dx$, $\int\varphi_2\,dx$, $\int(\varphi_1+\varphi_2)\,dx$, $\int(\varphi_1-\varphi_2)\,dx$, dwie dowolne przedstawiają funkcje ciągłe w przedziale (a, b), których pochodne wewnątrz przedziału istnieją i są równe funkcjom podcałkowym, to i pozostałe przedstawiają funkcje o tej samej własności.

§ 53. Metoda całkowania przez części.

Poznamy teraz metodę całkowania, zwaną całkowaniem przez części. Celem jej, jak każdej zresztą metody całkowania będzie: przez odpowiednie działanie rachunkowe sprowadzić pewną daną, a „trudną“ do obliczenia t. zn. nieznaną całkę, do postaci łatwiejszej“ do obliczenia czyli znanej. Niech będą dane funkcje φ i ψ. [Dla skrócenia opuszczamy znak zmiennej x, rozumiejąc jednak stale, że φ i ψ oznaczają to samo, co znaki $\varphi(x)$, względnie $\psi(x)$]. Zakładamy, że funkcje te są ciągłe w całym przedziale (a, b) i że mają wewnątrz tego przedziału pochodne.

Wtedy dla pochodnej iloczynu tych funkcji otrzymuje się wzór:

$$\frac{d(\varphi \cdot \psi)}{dx} = \varphi' \psi + \psi' \varphi.$$

Stąd wynika, że znak $\int (\varphi' \psi + \varphi \psi') dx$ przedstawia funkcję ciągłą w przedziale (a, b), która ma wewnątrz przedziału pochodną określoną i że jest:

$$\int (\varphi' \psi + \psi' \varphi) dx = \varphi \cdot \psi + C.$$

Załóżmy dalej, że jedna z całek $\int \varphi' \psi \, dx$, $\int \varphi \psi' dx$ oznacza funkcję ciągłą w przedziale (a, b), której pochodna wewnątrz przedziału równa się funkcji podcałkowej $\varphi' \cdot \psi$, wzgl. $\varphi \cdot \psi'$, to na mocy uwagi do twierdzenia II z § 52 druga z całek oznacza takąż funkcję i można całkę sumy rozłożyć w myśl tw. II § 52 na sumę całek, przeto jest

$$\int \varphi' \psi \, dx + \int \psi' \varphi \, dx = \varphi \psi + C,$$

skąd wynika, że jest:

$$\int \varphi \psi' dx = \varphi \psi + C - \int \varphi' \psi \, dx.$$

Gdybyśmy więc zdołali obliczyć w jakiś sposób całkę po prawej stronie ostatniej równości, znaleźlibyśmy, że całka ta oznacza sumę jakiejś funkcji i dowolnej stałej; tę stałą zredukowalibyśmy ze stałą C w nową stałą.

Możemy więc napisać w miejsce ostatniej równości, że jest:

$$(1) \qquad \int \varphi \psi' dx = \varphi \psi - \int \varphi' \psi \, dx$$

i to jest wzór, podający zasadę całkowania przez części. Może się bowiem zdarzyć, że dana całka jest „trudną" do obliczenia, ale po przedstawieniu jej w postaci całki $\int \varphi\psi' dx$ i po przekształceniu jej w myśl wzoru (1) otrzymamy całkę (po stronie prawej ostatniej równości), która jest nam znaną.

Wówczas możemy tę metodę z korzyścią stosować. Trzeba tylko odpowiednio rozłożyć funkcję podcałkową na iloczyn dwóch funkcji φ, ψ', z których druga ma być pochodną znanej funkcji.

Wysłowimy powyższe twierdzenie w sposób następujący: *Jeżeli funkcje φ i ψ są ciągłe w przedziale (a, b) i mają wewnątrz przedziału (a, b) określone pochodne i jeśli jedna z dwóch całek: $\int \varphi'\psi dx$ i $\int \varphi\psi' dx$ oznacza funkcję ciągłą w przedziale (a, b), to i druga oznacza takąż funkcję i jest w przedziale (a, b) prawdziwą równość (1).*

Przykłady.

1) Mamy obliczyć całkę $\int x \cos x\, dx$ czyli znaleźć funkcję ciągłą w przedziale (a, b), której pochodna wewnątrz przedziału jest funkcją $x \cos x$. W tym celu funkcję podcałkową rozkładamy na iloczyn dwu funkcji x i $\cos x$, z których pierwsza niech odpowiada funkcji φ, druga zaś pochodnej ψ' ze wzoru (1); wiemy, że $(\sin x)' = \cos x$; będzie:

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C$$

w dowolnym przedziale (a, b).

2) Podobnie obliczamy całkę $\int x \sin x\, dx$, uważając x za funkcję φ, zaś $\sin x$ za funkcję ψ', przeto $\psi = -\cos x$; będzie tedy:

$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = \sin x - x \cos x + C$$

w dowolnym przedziale (a, b).

Wynik sprawdzimy, różniczkując funkcję $\sin x - x \cos x + C$; otóż jest $\frac{d}{dx}(\sin x - x \cos x + C) = \cos x + x \sin x - \cos x = x \sin x$. Otrzymaliśmy więc przez różniczkowanie funkcję podcałkową, co znaczy, że całka była dobrze wyrachowaną. Stosując metodę całkowania przez części, obliczyć można kolejno w podobny sposób całki n. p. $\int \sin^2 x\,dx$, $\int x^2 \cos x\,dx$, $\int x^3 \sin x\,dx$, $\int x^3 \cos x\,dx$, ogólnie całki kształtu:

$$\int x^n \sin x\,dx \text{ i } \int x^n \cos x\,dx, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3\ldots$$

3) Obliczmy całkę $\int lnx\,dx$, kładąc $\varphi = lnx$, $\psi' = 1$ czyli $\psi = x$; będzie:

$$\int lnx\,dx = \int lnx \,.\, 1 \,.\, dx = x\,lnx - \int \frac{1}{x} \,.\, x\,dx = x\,lnx - \int dx =$$

$= x\,lnx - x + C$ w dowolnym przedziale (a, b), byle było $0 < a < b$.

§ 54. Zmiana zmiennej całkowania.

Przypuśćmy, iż mamy wyrachować całkę $\int \varphi(u)du$, i niech $F(u)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale (a, b) i taką, iż jej pochodna $(F(u))'$ jest równą funkcji podcałkowej $\varphi(u)$ wewnątrz przedziału (a, b). Jest zatem:

(1) $$\int \varphi(u)\,du = F(u) + C \text{ w przedziale } (a, b).$$

Może się zdarzyć, że całka ta jest „trudną" do obliczenia; załóżmy, że zmienną (u) uważamy za funkcję $f(x)$ zmiennej x czyli $u = f(x)$, a wtedy $F(u) = F(f(x))$ jest funkcją złożoną zmiennej x. O funkcji $u = f(x)$ załóżmy bowiem, że jest określoną i ciągłą dla wszystkich x, spełniających warunek: $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ i że wewnątrz przedziału (α, β) ma pochodną, nadto, że, gdy zmienna x znajduje się w przedziale (α, β) to zmienna (u) jest zawarta w przedziale (a, b). Przyjąwszy te założenia możemy, jak wiemy, na pewno twierdzić, że funkcja złożona $F[f(x)]$ jest określona i ciągłą dla wszystkich liczb x przedziału (α, β) i że ma pochodną, gdy jest $\alpha < x < \beta$, $a < f(x) < b$. I jest (zob. § 39) wtedy:

(2) $$\{F[f(x)]\}' = F'(f(x)) \,.\, f'(x).$$

Ale $F'(f(x)) = (F'(u))_{u=f(x)}$, który to znak ma oznaczać, że po obliczeniu pochodnej funkcji $F(u)$ względem zmiennej (u) należy podstawić $u = f(x)$. Ponieważ jest:

(3) $$\frac{d\,F(u)}{du} = \varphi(u) \text{ wewnątrz przedziału } (a, b),$$

więc będzie $(F'(u))_{u=f(x)} = \varphi(f(x))$, zatem równość (2) możemy napisać w postaci:

$$(4) \qquad \{F[f(x)]\}' = \varphi(f(x)) \, . \, f'(x).$$

Załóżmy, że istnieje przedział (α', β') o własnościach następujących: 1) $\alpha \leqslant \alpha' < \beta' \leqslant \beta$; 2) gdy jest $\alpha' < x < \beta'$, to jest także $a < f(x) < b$. Dla liczb x z przedziału (α', β') wynika z równości (4):

$$(5) \qquad \int \varphi[f(x)] \, . \, f'(x) \, dx = F[f(x)] + C'$$

i to jest wzór, będący podstawą metody zmiany zmiennej całkowania. Może się bowiem zdarzyć, że, jak powiedzieliśmy, całka $\int \varphi(u) du$ jest „trudną" do obliczenia, zaś właśnie całka $\int \varphi[f(x)] \, . \, f'(x) \, dx$ jest „łatwiejszą" do wyrachowania. Ale wzór (5) wykazuje, że tem samem znajdziemy $F[f(x)]$, a nie funkcję $F(u)$, o co właściwie chodziło. Musimy więc od zmiennej x powrócić do zmiennej (u). Załóżmy przeto, że w przedziale (α', β') funkcja $f(x)$ jest albo stale rosnącą albo stale malejącą i, że dla liczb x, spełniających nierówność $\alpha' \leqslant x \leqslant \beta'$ jest $a' \leqslant f(x) \leqslant b'$, gdzie $a \leqslant a' < b' \leqslant b$. Wtedy funkcja $u = f(x)$ wyznaczy funkcję odwrotną (§ 41) $x = \psi(u)$, określoną w przedziale (a', b'). Będzie więc $f(\psi(u)) = u$, wskutek czego $F[f(\psi(u))] = F(u)$, o co nam chodzi. Zróbmy tedy podstawienie $x = \psi(u)$ po obu stronach równości (5), a otrzymamy

$$\left\{ \int \varphi[f(x)] \, f'(x) \, dx \right\}_{x=\psi(u)} = F(u) + C'$$

i wstawiając wartość za funkcję $F(u)$ z równości (1) mamy:

$$(6) \qquad \left\{ \int \varphi[f(x)] \, . \, f'(x) \, dx \right\}_{x=\psi(u)} = \int \varphi(u) \, du + C''.$$

Ale zauważmy, że po stronie prawej całka wprowadza stałą, którą złączymy ze stałą C'', więc możemy napisać dla liczb u, spełniających związek $a' \leqslant u \leqslant b'$, że jest:

$$(7) \qquad . \int \varphi(u) \, du = \left\{ \int \varphi[f(x)] \, . \, f'(x) \, dx \right\}_{x=\psi(u)}.$$

Właśnie równanie to podaje sposób obliczenia całki przez zmianę zmiennej (u) całkowania na inną. Trzeba tylko odpowiednio dobrać podstawienie $u = f(x)$!

Funkcję podcałkową strony prawej łatwo zapamiętać, gdyż $u=f(x)$ daje $du=f'(x)dx$. Należy więc $u=f(x)$ podstawić pod całką (1).

Przykłady zastosowania metody zmiany zmiennej całkowania i poprzednich metod.

1) Obliczmy całkę:

$$\text{(A)} \qquad \int \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du,$$

przechodząc powyższe ogólne rozumowania na konkretnym przykładzie. Aby na pewne całka była funkcją określoną, musimy poddać zmienną u takiemu warunkowi, by funkcja podcałkowa była określoną i ciągłą; a więc ma być $-1<u\leqslant 1$; ponieważ rozważania mamy stosować do jakiegoś przedziału, tedy obierzmy liczbę a dowolnie blisko liczby (-1), byle $-1<a$; przedziałem, o którym mowa, będzie przedział $(a, 1)$.

Mamy więc znaleźć funkcję $F(u)$ ciągłą w przedziale $(a, 1)$ i taką, by wewnątrz przedziału $(a, 1)$ było:

$$\text{(B)} \qquad \frac{dF(u)}{du}=\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}.$$

Forma pierwiastka po prawej stronie tej równości naprowadza nas na pomysł użycia metody zmiany zmiennej całkowania przy zastosowaniu znanych z trygonometrji wzorów t. zw. połówkowych:

$$\text{(C)} \qquad \left|\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \text{ czyli } 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}, \\ \cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \text{ lub } 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}. \end{array}\right.$$

Zamiast więc szukać funkcji $F(u)$ szukamy funkcji $F(\cos x)$ czyli zmienną u zmieniamy na x, kładąc $u=\cos x$ i mamy:

$$\text{(D)} \qquad \left(\frac{dF(u)}{du}\right)_{u=\cos x}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Weźmy więc pochodną funkcji złożonej $F(\cos x)$:

$$[F(\cos x)]'=\left(\frac{dF(u)}{du}\right)_{u=\cos x}\cdot\frac{d(\cos x)}{dx}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot(-\sin x)=$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,.\sin x = -\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}\,.\sin x =$$

$$= -\sin x\sqrt{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2} = -\sin x\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| \ldots \text{(E)}.$$

Z warunków na liczbę u wynika, że jest: $-1 < u = \cos x \leqslant 1$, funkcję $u = \cos x$ mamy potem odwrócić, więc przyjmiemy na x tylko wartości, spełniające nierówność $0 \leqslant x < \pi$. Niech α oznacza liczbę o własnościach $0 < \alpha < \pi$ i $\cos\alpha = a$; tedy ma być $0 \leqslant x \leqslant \leqslant \alpha < \pi$ więc $0 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Ale, gdy kąt $\frac{x}{2}$ spełnia ostatnią nierówność, to funkcje $\sin\frac{x}{2}$ i $\cos\frac{x}{2}$ mogą być tylko nieujemne. Zatem przy naszych założeniach jest:

$$\text{(F)} \qquad \left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}.$$

Występujący w równości (E) czynnik $(-\sin x)$ napiszemy według znanego wzoru trygonometrycznego:

$$\text{(G)} \qquad -\sin x = -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Wyniki (F) i (G) zastosujmy do równości (E):

$$\text{(H)} \quad [F(\cos x)]' = -\sin x\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| = -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,.\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = -2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Stąd:

$$\int -2\sin^2\frac{x}{2}dx = F(\cos x) + C'$$

$$\text{(I)} \qquad \text{czyli: } -2\int\sin^2\frac{x}{2}dx = F(\cos x) + C'.$$

Do obliczenia całki (I) po lewej stronie musimy jeszcze raz zastosować metodę zmiany zmiennej i podstawić: $\frac{x}{2}=z$, czyli $x=2z$, poczem szukamy znów takiej funkcji $\Phi(x)=\Phi(2z)$ ciągłej w przedziale $(0, \alpha)$, aby jej pochodna wewnątrz przedziału była równą funkcji podcałkowej $\sin^2\frac{x}{2}$ czyli:

(K) $$\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \Phi(x) + C''.$$

Obliczmy pochodną:

(L) $$[\Phi(2z)]' = \left(\frac{d\,\Phi(x)}{dx}\right)_{x=2z} \cdot \frac{d(2z)}{dz} = \sin^2\frac{2z}{2} \, . \, 2 = 2\sin^2 z.$$

A więc: $\int 2\sin^2 z dz = \Phi(2z) + C'''$, czyli:

(M) $$2\int \sin^2 z\, dz = \Phi(2z) + C'''.$$

Całkę kształtu $\int \sin^2 z\, dz$ umiemy już obliczyć (§ 52), znaleźliśmy bowiem, że jest w dowolnym przedziale:

(N) $$\int \sin^2 z\, dz = \frac{z}{2} - \frac{1}{4}\sin 2z + C^{IV}.$$

Podstawiając tę wartość w równość (M), mamy:

$$2\left[\frac{1}{2}z - \frac{1}{4}\sin 2z + C^{IV}\right] = \Phi(2z) + C''';$$

stąd:

(O) $$z - \frac{1}{2}\sin 2z + c = \Phi(2z),$$

gdzie $c = 2C^{IV} - C'''$. Podstawmy teraz napowrót $\frac{x}{2}$ zamiast z; otrzymamy:

(P) $$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + c = \Phi(x),$$

a to jest wartością całki (K); możemy więc napisać:

$$\int \sin^2\frac{x}{2}\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + c',$$

oraz podstawiając tę wartość w równość (I), otrzymamy:

$$-2\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+c'\right)=F(\cos x)+C' \text{ czyli:}$$

$$-x+\sin x-2c'=F(\cos x)+C',$$

a po zredukowaniu stałych mamy dla przedziału $(0, \alpha)$:

$$\text{(R)} \qquad F(\cos x)=\sin x-x+c''.$$

Podstawiliśmy $\cos x = u$, wróćmy więc teraz do pierwotnej zmiennej u; otóż jest $0 \leqq x \leqq \alpha < \pi$, $-1 < a \leqq u \leqq 1$, więc jest $x = \arccos u$. Kładąc więc $x = \arccos u$, przyczem jest $a \leqq u \leqq 1$, po obu stronach równości (R), otrzymujemy:

$$\text{(S)} \qquad F[\cos(\arccos u)]=\sin(\arccos u)-\arccos u+c''.$$

Wiemy jednak, że $\cos(\arccos u) = u$, zatem:

$$\text{(T)} \qquad F(u)=\sin(\arccos u)-\arccos u+c''.$$

Znaleźliśmy więc szukaną funkcję $F(u)$, która spełnia równanie (B) wewnątrz przedziału $(a, 1)$, jest bowiem rzeczywiście

$$\frac{d\,[\sin(\arccos u)-\arccos u]}{du}=\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}; \text{ zatem:}$$

$$\int\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du=\sin(\arccos u)-\arccos u+c.$$

Obliczymy tę całką jeszcze raz, ale w nieco odmienny sposób, znów podstawiając $u = \cos x$:

$$\left(\int\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du\right)_{u=\cos x}=\int\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,.\,(\cos x)'dx=-$$

$$=-\int\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,.\sin x\,dx.$$

Dzielną i dzielnik w wyrażeniu $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ pomnóżmy przez $1-\cos x$; wolno to uczynić, gdy warunki poprzednie na u ścieśnimy w ten sposób, że ma być $-1 < u < 1$ (wyłączamy więc wartość $u = 1$), możemy przeto przyjąć $0 < x < \pi$, a wtedy $1-\cos x \neq 0$. Otrzymamy więc dla przedziału (α, β) na zmienną x, gdzie $0 < \alpha < \beta < \pi$:

$$\left(\int\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du\right)_{u=\cos x}=-\int\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}\,.\sin x\,dx.$$

Dzielna pierwszego czynnika funkcji podcałkowej: $\sqrt{(1-\cos x)^2} = |1-\cos x|$; ponieważ zaś w przedziale (α, β) stale jest $\cos x < 1$, więc będzie: $|1-\cos x| = 1-\cos x$.

Z tego samego powodu jest też tutaj $\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| = \sin x$. Zatem:

$$\left(\int \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du\right)_{u=\cos x} = -\int \frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin^2 x}}\,.\sin x\,dx =$$

$$= -\int \frac{1-\cos x}{\sin x}\sin x\,dx = -\int (1-\cos x)\,dx =$$

$$= \int (\cos x - 1)\,dx = \int \cos x\,dx - \int dx = \sin x + C' - x - C'' =$$

$$= \sin x - x + C, \text{ gdzie } C = C' - C''.$$

Podstawiliśmy $u = \cos x$, więc teraz podstawiamy napowrót $x = \arccos u$ i otrzymujemy:

$$\int \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du = \sin(\arccos u) - \arccos u + C,$$

podobnie, jak poprzednio. Ponieważ $\cos x = u$, więc $\sin(\arccos u) = \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \pm\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-u^2}$ (bo funkcja $\sin x$ w przedziale (α, β) przyjmuje wartości tylko dodatnie). Ostateczny wynik możemy zatem napisać:

$$\int \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du = \sqrt{1-u^2} - \arccos u + c \text{ znów dla przedziału } (a,\ 1).$$

2. Obliczmy całkę $\int \frac{dx}{\sin x}$ w przedziale (a, b), w którym jest stale $\sin x \neq 0$. Pomnóżmy dzielną i dzielnik przez $\sin x$; otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1-\cos^2 x}\,.\sin x\,dx.$$

Iloraz $\frac{1}{1-\cos^2 x}$ rozkładamy na sumę ilorazów:

$$\left(\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{1-\cos^2 x}$$

i podstawiamy tę wartość w poprzedni wzór. Otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1-\cos x}\right\}dx.$$

Stały czynnik $\frac{1}{2}$ wyjmujemy przed znak całkowania (§ 52) i całkę sumy rozkładamy na sumę całek:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-\sin x}{1+\cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx.$$

Ilorazy $\frac{-\sin x}{1+\cos x}$ i $\frac{\sin x}{1-\cos x}$ mają tę własność, że dzielna jest zarazem pochodną dzielnika; wiemy zaś, że, gdy jest $f(x) > 0$ i gdy istnieje pochodna $f'(x)$, to jest:

$$(ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},\ \text{stąd zaś:}$$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\,(f(x)) + C$. Gdy zaś jest $f(x) < 0$, to $[ln\,(-f(x)]' = \frac{1}{-f(x)} \cdot (-f'(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Tedy jest $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\,|f(x)| + C$.

Na tej podstawie mamy:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{1}{2} ln\,|1+\cos x| + \frac{1}{2} ln\,|1-\cos x| + C.$$

A ponieważ w rozważanym przedziale (a, b) jest $1+\cos x > 0$ i $1-\cos x > 0$, więc:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{1}{2} ln\,(1+\cos x) + \frac{1}{2} ln\,(1-\cos x) + C =$$

$$= \frac{1}{2} ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C = \frac{1}{2} ln \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2} ln \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) + C = ln \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + C = ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C\text{[1]}.$$

[1]) Z naciskiem zwracamy uwagę na przeróbkę ostatniego wiersza. Nieściśle sformułowanie twierdzeń w pewnych podręcznikach może doprowadzić do błędu. Równość $\log(a^2) = 2\log a$ jest jedynie wtedy prawdziwą, gdy $a > 0$. Dokładniej brzmi twierdzenie, o którem mowa, w sposób następujący: gdy $\log a$ jest liczbą (rzeczywistą), to $\log(a^2)$ oznacza również liczbę (rzeczywistą) i jest $\log(a^2) = 2\log a$. Pamiętać bowiem należy, że jest $a^2 > 0$, choć $a < 0$ i wtedy $\log(a^2) = 2\log|a|$.

3) Obliczmy całkę: $\int \operatorname{ctg} x\, dx$ dla przedziału, w którym stale jest $\sin x \neq 0$. Gdy napiszemy tę całkę w postaci: $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$, to spostrzegamy, że dzielna funkcji podcałkowej jest pochodną dzielnika. Postępujemy więc podobnie, jak w zadaniu poprzedniem według wzoru:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + C, \text{ otrzymujemy: } \int \operatorname{ctg} x\, dx = ln\,|\sin x| + C.$$

4) W ten sam sposób obliczymy:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} = -ln\,|\cos x| + C$$

dla przedziału (a, b), w którym jest stale $\cos x \neq 0$.

5) Całkę: $\int e^{-x} . x\, dx$ obliczymy metodą całkowania przez części przy zastosowaniu znanego wzoru, uważając czynnik e^{-x} za ψ', a x za φ; jest tedy $\psi = -e^{-x}$. Mamy więc:

$$\int e^{-x} . x\, dx = -x . e^{-x} - \int -e^{-x} . dx = -x e^{-x} +$$

$$+\int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c \text{ w każdym przedziale } (a, b).$$

6) Całkę $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ możemy obliczyć w dwa sposoby.

Z rachunku różniczkowego nam wiadomo, że

$$\frac{d(\operatorname{arc\,sin} u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \frac{d(\operatorname{arc\,cos} u)}{du} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Ponieważ funkcje $\operatorname{arc\,sin} u$ i $\operatorname{arc\,cos} u$ są ciągłe w przedziale $(-1, 1)$, więc dla tego przedziału jest:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sin} u + c, \text{ ponadto } \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= -\int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{arc\,cos} u + c'.$$

Otrzymujemy stąd:

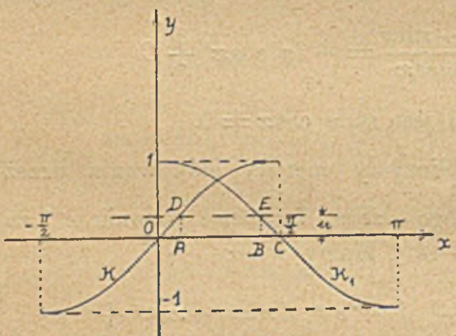
$\operatorname{arc\,sin} u + c = -\operatorname{arc\,cos} u + c'$ czyli $\operatorname{arc\,sin} u + \operatorname{arc\,cos} u = C \ldots$ (1), gdzie C oznacza stałą. Równość (1) jest prawdziwą dla każdej liczby (u), byle spełniającej nierówność $-1 \leqslant u \leqslant +1$. Aby wyznaczyć stałą C, kładziemy $u = 0$ w równości (1); otrzymujemy:

$\arcsin 0 + \arccos 0 = C$ czyli $0 + \frac{\pi}{2} = C$, stąd $C = \frac{\pi}{2}$. Mamy więc:

$$\arcsin u + \arccos u = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Związek (2) jest więc udowodniony dla wszystkich liczb (u) o własności $-1 \leqslant u \leqslant +1$.

Geometryczną interpretację wzoru (2) podaje rys. 89.



Rys. 89

Niech krzywa K przedstawia sinusojdę, a K_1 obraz funkcji $y = \cos x$, przyczem ograniczamy się do tych łuków, które służą do odwracania tych funkcji.

Wykreślmy prostą o równaniu $y = u$; ona przetnie sinusojdę w punkcie D, cosinusojdę zaś w punkcie E, gdy jest $-1 \leqslant u \leqslant +1$. Te punkty rzutujemy na oś x; rzuty A, B, odetną na osi x wektory $\overrightarrow{OA} = \arcsin u$ i $\overrightarrow{OB} = \arccos u$.

Ze wzoru (2) wynika, że $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{\pi}{2} = \overrightarrow{OC}$; ale jest $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$, więc wektor $\overrightarrow{BC}$ równy jest wektorowi $\overrightarrow{OA}$, zatem równość $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$ jest wynikiem geometrycznym równości (2). Wprowadzając do pomocy środek S odcinka OC, czytelnik z łatwością wykaże w dalszym ciągu, że punkty A, B są wzajemnie symetryczne względem punktu S.

7) Rozważając całkę $\int \frac{dx}{1 + x^2}$ znajdzie czytelnik, że suma $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$ ma wartość stałą.

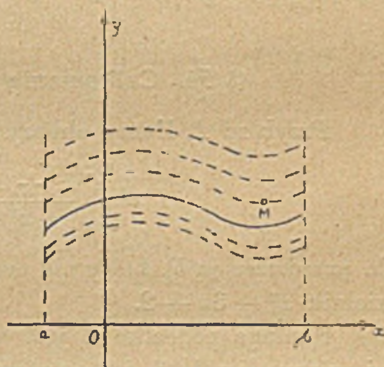
§ 55. Krzywe całkowe.

Weźmy pod uwagę całkę $\int \varphi(x)\,dx$ i załóżmy o niej, iż przedstawia funkcję ciągłą w przedziale (a, b). Niech funkcja $F(x)$

będzie ciągłą w przedziale (a, b) i niech ma tę własność, że jej pochodna wewnątrz przedziału istnieje i równa się funkcji podcałkowej $\varphi(x)$, określonej w przedziale (a, b). Wówczas jest:

$$\int \varphi(x)\, dx = F(x) + C.$$

Wiemy, że stałą C można obrać dowolnie, zatem całka $\int \varphi(x) dx$ oznacza nieskończenie wiele funkcyj. Weźmy jedną z nich, np. $y = F(x)$ i narysujmy jej wykres (oznaczony linją grubszą na rys. 90). Wówczas wykresy wszystkich innych funkcyj, równych całce $\int \varphi(x) dx$ przedstawią się jako krzywe, przystające do krzywej $y = F(x)$; wypełnią one pas, ograniczony prostemi o równaniach: $x = a$ $x = b$.



Rys. 90.

Każdą z tych krzywych możemy nazwać krzywą całkową. Mają one tę własność, że przez dany punkt wspomnianego pasa przechodzić musi jedna i tylko jedna krzywa całkowa. Niech będzie takim danym punktem punkt M o współrzędnych x_0, y_0, gdzie $a \leqslant x_0 \leqslant b$; jeżeli przezeń ma przechodzić krzywa całkowa, to współrzędne jego muszą spełniać równanie (1): $y = F(x) + C$, a więc ma być: $y_0 = F(x_0) + C$, skąd mamy: $C = y_0 - F(x_0)$ ... (2).

Jeśli w równanie (1) podstawimy właśnie wartość na C, obliczoną z równości (2), to otrzymamy (3): $y = F(x) + y_0 - F(x_0)$, jako równanie tej jedynej krzywej całkowej, która przechodzi przez punkt $M(x_0, y_0)$. Ponieważ $\frac{d(F(x) + C)}{dx} = \frac{d F(x)}{dx}$, więc wszystkie krzywe całkowe mają w punktach o tej samej odciętej x wewnątrz przedziału (a, b) styczne do siebie równoległe.

Dla przykładu niech będzie $y = \int x\, dx$. Wtedy jest $y = \frac{x^2}{2} + C$. Funkcja ta przedstawia geometrycznie parabolę, styczną do osi x, jeśli $C = 0$, a gdy na C przyjmujemy jakiekolwiek wartości rzeczywiste, to otrzymamy na obrazie geometrycznym szereg parabol, powstałych z przesunięcia pierwszej równolegle do osi y. Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi parabola. Skoro przez punkt (1, 2) ma przechodzić parabola, to stała C ma być tak dobraną, by współrzędne punktu (1, 2) spełniały równanie: $2 = \frac{1}{2} + C$, skąd mamy $C = \frac{3}{2}$. Równanie więc paraboli, przechodzącej przez punkt (1, 2) będzie $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$.

§ 56. Całkowanie funkcyj wymiernych.

Przykład I. Mamy obliczyć całkę:

$$I = \int \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^2 - 3x + 2} dx$$

dla przedziału (a, b), który nie zawiera punktów, obracających w zero dzielnik $x^2 - 3x + 2$.

Funkcja podcałkowa jest wymierną, przyczem stopień dzielnej, równy liczbie 3, jest wyższy od stopnia $(=2)$ dzielnika. Wykonajmy dzielenie, aż otrzymamy resztę stopnia niższego, niż stopień dzielnika. Będzie:

$$\begin{array}{l} (x^3 + 2x^2 + 4x + 8) : (x^2 - 3x + 2) = x + 5 \\ \underline{-x^3 + 3x^2 \pm 2x} \\ \quad\quad 5x^2 + 2x + 8 \\ \quad\quad \underline{-5x^2 + 15x \pm 10} \\ \quad\quad\quad\quad 17x - 2 \end{array}$$

Przeto $\frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^2 - 3x + 2} = x + 5 + \frac{17x - 2}{x^2 - 3x + 2}$.

Wskutek tego: $I = \int (x + 5)\, dx + \int \frac{17x - 2}{x^2 - 3x + 2} dx$; ponieważ pierwszą całkę z łatwością obliczymy, przeto zostaje do obliczenia całka funkcji wymiernej, przyczem już stopień dzielnej, równy 1, jest niższy od stopnia dzielnika. Ale widzimy, że $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$; otóż kształt funkcji $\frac{17x - 2}{(x - 1)(x - 2)}$ pozwala przypuszczać, że funkcja ta jest sumą dwu funkcji wymiernych, z których jedna ma dzielnik $(x - 1)$, druga ma dzielnik $(x - 2)$, nadto pierwsza niech ma dzielną A, druga ma dzielną B; A i B są nieznane i widocznie stałe wobec x, skoro stopnie dzielnych mają być niższe od stopni $(=1)$ dzielników. Mamy przeto znaleźć stałe A i B tak, aby było identycznie (t. zn. dla każdej *dopuszczalnej* wartości na x): $\frac{17x-2}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$, stąd po pomnożeniu obu stron przez iloczyn $(x-1)(x-2)$ otrzymamy: $17x-2=A(x-2)+B(x-1)=(A+B)x-(2A+B)$. Skoro dwa wielomiany całkowite mają być identyczne[1]), to otrzymamy dla $x=0$, że $-2=-(2A+B)$ i wtedy $17x=(A+B)x$, skąd $17=A+B$.

Oba równania na A i B dadzą: $A=-15$, $B=32$; więc $\int\frac{17x-2}{x^2-3x+2}dx=-15\int\frac{dx}{x-1}+32\int\frac{dx}{x-2}=-15\,ln\,|x-1|+$ $+32\,ln\,|x-2|+C.$

Obliczyliśmy zatem całkę I:

$$I=\frac{x^2}{2}+5x+ln.\left[\frac{(x-2)^{32}}{|x-1|^{15}}\right]+C,$$

gdzie C oznacza dowolną stałą.

Z tego przykładu widzimy, że zajmiemy się czemś nowem, gdy założymy, że stopień dzielnej funkcji wymiernej jest niższy od stopnia jej dzielnika.

Przykład II. Obliczmy całkę $I=\int\frac{dx}{x^4-1}$.

Aby rozłożyć dwumian x^4-1 na iloczyn czynników t. zw. pierwiastkowych, trzeba rozwiązać równanie $x^4-1=0$. Otóż widoczne, że liczby $x=\pm 1$ są pierwiastkami tego równania, przeto wielomian (x^4-1) jest podzielny przez iloczyn $(x+1)(x-1)=$ $=x^2-1$ i jest $(x^4-1):(x^2-1)=x^2+1$. Wskutek tego równanie $x^4-1=0$ przyjmie postać $(x^2-1)(x^2+1)=0$; ta postać daje dla dalszych pierwiastków równość $x^2+1=0$, skąd $x=\pm i$; mamy więc $x^4-1=(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$.

Możemy tedy napisać:

$$\text{(1)}\qquad \frac{1}{x^4-1}=\frac{A'}{x+i}+\frac{B'}{x-i}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1},$$

---

[1]) Równość $17x-2=(A+B)x-(2A+B)$ *nie* jest równaniem, ma bowiem być spełnioną dla wszystkich wartości x, może z wykluczeniem liczb $x=1$ i $x=2$.

gdzie A', B', C, D są stałe, które mamy znaleźć. Otóż możemy uniknąć liczb urojonych; mianowicie jest:

$$\frac{A'}{x+i}+\frac{B'}{x-i}=\frac{(A'+B')x+i(B'-A')}{x^2+1}.$$

Zamiast więc równości (1) szukamy rozkładu:

$$(2) \qquad \frac{1}{x^4-1}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1},$$

gdzie A, B, C, D oznaczają stałe, które mamy znaleźć.

Owóż równość (2) daje:

$$(3) \quad 1=(Ax+B)(x^2-1)+C(x^2+1)(x-1)+D(x^2+1)(x+1).$$

Ta równość ma zachodzić identycznie t. zn. dla każdej dopuszczalnej wartości na x. Prawa strona daje:

$$(A+C+D)x^3+(B-C+D)x^2+(C-A+D)x+D-B-C$$

i ponieważ ten wielomian ma być równy liczbie 1 (według wzoru (3)) dla każdej dopuszczalnej wartości na x, więc (§ 2, przykład 5):

$$(4) \quad A+C+D=0,\ B-C+D=0,\ C-A+D=0,\ D-B-C=1.$$

Zauważmy, że równość (2) nie zachodzi dla $x=1$, tedy i równość (3) nie musi być słuszną dla $x=1$, ale tak równość (2), jak i (3) są słuszne dla każdej wartości na x dostatecznie bliskiej liczby $x=1$; tymczasem obie strony równości (3) są wielomianami i jako takie, są funkcjami ciągłemi dla każdej wartości x, a wiec także dla $x=1$. Skoro tedy według równości (3) dla $x \neq 1$ jest lewa strona równa prawej, tedy też $\lim\limits_{x\to 1}$ (lewej strony) $=\lim\limits_{x\to 1}$ (prawej strony), bo granice te istnieją; ale, jak powiedzieliśmy, obie strony są funkcjami ciągłemi, więc granice łatwo wyrachować i otrzymamy, że równość (3) jest też prawdziwą dla $x=1$, a więc $x=1$ w niej podstawić *wolno*. Tego rozumowania nie można przenieść na równość (2), bo dla $x=1$ obie strony tracą określoną wartość.

Podobnie można wykazać, że równość (3) jest też słuszną dla $x=-1$, ($x=\pm i$); przeto równość (3) jest słuszną dla *każdej* wartości x bez wyjątku. Zamiast rozwiązać równania (4), postąpimy wpierw inaczej. Otóż równość (3) dla $x=1$ daje: $1=4D$ czyli $D=\frac{1}{4}$; dla $x=-1$ daje $1=-4C$ czyli $C=-\frac{1}{4}$, co uwzględnimy we wzorach (4). Pierwszy z nich daje $A=0$, drugi $B=-\frac{1}{2}$. Mamy przeto:

$$\frac{1}{x^4-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1},$$

przeto jest: $I=-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{4}ln|x+1|+\frac{1}{4}ln|x-1|+C$ w dowolnym przedziale (a,b), niezawierającym liczb $(+1)$, (-1).

Przykład III. Obliczmy całkę $I=\int\frac{2x^3+5x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)^2}dx$. Funkcję podcałkową będziemy mogli znów uważać za sumę dwu ilorazów, z których jeden ma dzielnik x^2, dzielną $Ax+B$ [stopnia niższego, niż stopień dzielnika], drugi ma dzielnik $(x^2+1)^2$, dzielną Cx^3+Dx^2+Ex+F, tedy

$$\frac{2x^3+5x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^2}.$$

Ale $\frac{Ax+B}{x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$; nadto wykonajmy dzielenie:

$$\begin{array}{l}
(Cx^3+Dx^2+Ex+F):(x^2+1)=Cx+D,\\
\underline{-Cx^3 \qquad \pm Cx} \\
\quad Dx^2+(E-C)x+F\\
\quad \underline{-Dx^2 \qquad\qquad \pm D}\\
\quad (E-C)x+(F-D)
\end{array}$$

więc $Cx^3+Dx^2+Ex+F=(Cx+D)(x^2+1)+[(E-C)x+F-D]$ przeto:

$$\frac{Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^2+1)^2}=\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{(E-C)x+F-D}{(x^2+1)^2}.$$

Widzimy więc, że mogliśmy wprost napisać:

$$\frac{2x^3+5x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma x+\delta}{(x^2+1)^2}+\frac{\varepsilon x+\eta}{x^2+1},$$

gdzie α, β, γ, δ, ε, η oznaczają stałe, które chcemy wyrachować tak, aby ta równość zachodziła dla każdej dopuszczalnej wartości na x. Stąd:

$$2x^3+5x^2+3x+1=\alpha(x^2+1)^2+\beta x(x^2+1)^2+(\gamma x+\delta)x^2+$$
$$+(\varepsilon x+\eta)x^2(x^2+1)=x^5[\beta+\varepsilon]+x^4[\alpha+\eta]+x^3[2\beta+\gamma+\varepsilon]+$$
$$+x^2[2\alpha+\delta+\eta]+x\,.\,\beta+\alpha.$$

Ponieważ ma zachodzić identyczność, więc współczynniki obu wielomianów muszą być jednakowe: $\beta+\varepsilon=0$, $\alpha+\eta=0$, $2=2\beta+\gamma+\varepsilon$, $5=2\alpha+\delta+\eta$, $\beta=3$, $\alpha=1$. Te zaś równania dają: $\alpha=1$, $\beta=3$, $\gamma=-1$, $\delta=4$, $\varepsilon=-3$, $\eta=-1$; mamy przeto:

$$\frac{2x^3+5x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}+\frac{4-x}{(x^2+1)^2}-\frac{3x+1}{x^2+1},$$

wobec czego:

$$I=\int\frac{dx}{x^2}+3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{4-x}{(x^2+1)^2}dx-\int\frac{3x+1}{x^2+1}dx.$$

Pierwsze dwie całki łatwo obliczyć:

$$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C', \quad \int\frac{dx}{x}=ln\,|x|+C''$$

Zostają do obliczenia całki trzecia i czwarta.

Weźmy pochodną $\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=((x^2+1)^{-1})'=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$; dlatego trzecią całkę napiszemy w postaci:

$$\int\frac{4-x}{(x^2+1)^2}dx=4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}.$$

Mamy więc obliczyć $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$. W tym celu całkowaniem przez części obliczamy ogólniejszą całkę:

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^m}=\int 1\cdot\frac{1}{(x^2+1)^m}dx=\frac{x}{(x^2+1)^m}+2m\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^{m+1}}=$$

$$=\frac{x}{(x^2+1)^m}+2m\int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{m+1}}dx=\frac{x}{(x^2+1)^m}+2m\int\frac{dx}{(x^2+1)^m}-$$

$$-2m\int\frac{dx}{(x^2+1)^{m+1}}, \text{ więc stąd:}$$

$$2m\int\frac{dx}{(x^2+1)^{m+1}}=\frac{x}{(x^2+1)^m}+(2m-1)\int\frac{dx}{(x^2+1)^m}.$$

Zastosujmy ten wzór dla $m=1$, a otrzymamy:

$$2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arc\,tg}x+C'''.$$

Pozostaje nam jeszcze do wyliczenia całka:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+1}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{3}{2}ln(x^2+1) + \operatorname{arc\,tg} x + C^{IV}.$$

Ostateczny więc wynik będzie:

$$= -\frac{1}{x} + 3\,ln\,|x| + \frac{2x}{x^2+1} + 2\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \frac{3}{2}ln\,(x^2+1) -$$

$$-\operatorname{arc\,tg} x + C = -\frac{1}{x} + 3ln\,|x| + \frac{4x+1}{2(x^2+1)} + \operatorname{arc\,tg} x - \frac{3}{2}ln\,(x^2+1) + C$$

w każdym przedziale (a, b), który nie zawiera liczby zero, a więc albo jest $a < b < 0$ albo $0 < a < b$.

Przejdziemy teraz do ogólnej teorji całkowania funkcyj wymiernych. Poprzednio zacytujemy (§ 2) następujące twierdzenie pomocnicze.

I) *Jeżeli* $W_1(x)$, $W_2(x)$ *oznaczają dwa wielomiany całkowite i jeżeli* $W_1(x) = W_2(x)$ *dla każdej wartości na* x *(czyli identycznie), to 1) oba wielomiany są jednakowego stopnia, 2) mają jednakowe spółczynniki przy tych samych potęgach zmiennej* x.

Zajmijmy się jeszcze równaniem algebraicznem $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ (3), stopnia n go: tedy jest $a_n \neq 0$. Algebra dowodzi następującego twierdzenia:

II) *każde równanie algebraiczne stopnia n-go ma n pierwiastków.* Pierwiastki te mogą być między sobą równe n. p. równanie $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ ma pierwiastki 1, 1, 1. II′) *Jeżeli pierwiastkami są liczby* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *to lewa strona równania jest* $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ czyli *lewa strona jest rozkładalna na czynniki stopnia pierwszego* kształtu: „zmienna minus pierwiastek". Np. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$. Te czynniki stopnia 1-go zowią się czynnikami pierwiastkowymi.

Aby twierdzenie (II′) udowodnić, przyjmiemy bez dowodu t. zw. zasadnicze twierdzenie algebry: *każde równanie algebraiczne ma co najmniej jeden pierwiastek.*

Wobec tego równanie (3) ma jakiś pierwiastek: oznaczmy go przez γ. Podzielmy lewą stronę równania (3) przez dwumian $(x-\gamma)$, otrzymamy:

$$\underbrace{(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) : (x-\gamma)}_{R} = \underbrace{a_n x^{n-1} + \ldots}_{I(x)}$$

będzie tedy iloraz $I(x)$ wielomianem stopnia $(n-1)$-go, bo $a_n \neq 0$; nadto reszta dzielenia R jest stopnia niższego od dzielnika, a więc jest stałą, niezależną od zmiennej x. Będzie tedy, ponieważ dzielna jest równą iloczynowi dzielnika i ilorazu, powiększonemu o resztę:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - \gamma) \, . \, I(x) + R.$$

Aby znaleźć stałą R można podstawić dowolną szczególną liczbę za x; otóż najwygodniej położyć $x = \gamma$; wtedy lewa strona jest zerem, bo liczba γ jest pierwiastkiem równania (3), więc $0 = R$ czyli mamy:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - \gamma) \, I(x),$$

gdzie $I(x)$ jest stopnia $(n-1)$-go. Gdy $n = 1$, to $I(x)$ jest stałą i nasze twierdzenie udowodniliśmy. Jeżeli $n > 1$, to znów $I(x) = 0$ jest równaniem algebraicznem i ma pierwiastek np. δ, tedy $I(x) = (x - \delta) \, I_1(x)$, gdzie już $I_1(x)$ jest stopnia $(n-2)$-go. Załóżmy, że twierdzenie II′ jest prawdziwe dla $n = p$, gdzie p jest dowolną liczbą naturalną i weźmy równanie:

$$a_{p+1} x^{p+1} + a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

gdzie $a_{p+1} \neq 0$; to równanie stopnia $(p+1)$-go ma conajmniej jeden pierwiastek, który oznaczymy przez (α_1), więc lewa strona (jako funkcja):

$$a_{p+1} x^{p+1} + a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha_1) \, I(x),$$

gdzie $I(x)$ jest wielomianem stopnia p-go, dla którego według założenia twierdzenie II′ jest prawdziwe. Jest więc $I(x) = a_{p+1} (x - \alpha_2) (x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_{p+1})$, bo współczynnikiem najwyższej potęgi zmiennej (x) we wielomianie $I(x)$ jest znów liczba a_{p+1}. Tedy $a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_{p+1} (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{p+1})$ czyli twierdzenie II′ prawdziwe dla $n = p + 1$. Zasada indukcji wykazuje tedy prawdziwość twierdzenia II′ w zupełności.

Jak powiedzieliśmy pierwiastek może się powtarzać; załóżmy więc, że $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\varkappa$, $\alpha_\varkappa \neq \alpha_{\varkappa+1}, \ldots, \alpha_\varkappa \neq \alpha_n$. Wtedy wielomian $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest podzielnym przez potęgę $(x - \alpha_1)^\varkappa$, a *nie* jest podzielnym przez potęgę $(x - \alpha_1)^{\varkappa+1}$. Pierwiastek α_1 nazwiemy wtedy $\varkappa$-krotnym pierwiastkiem równania. Np. równanie: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$, jak łatwo się przekonać, ma dwukrotny (lub podwójny) pierwiastek 1 i pojedynczy pierwiastek (-1).

Jeżeli chcemy rozłożyć trójmian $10x^2-3x-1$ na czynniki stopnia 1-go, to trzeba najpierw rozwiązać równanie $10x^2-3x-1=0$ czyli $x^2-\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}=0$, skąd $x=\frac{3}{20}\pm\sqrt{\frac{9}{400}+\frac{1}{10}}=\frac{3}{20}\pm\frac{7}{20}=$ $=\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$. Tedy na mocy twierdzenia II′ jest $10x^2-3x-1=$ $=10\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)$, jak to zresztą czytelnik mnożeniem potwierdzi.

Twierdzenia I, II i II′ są słuszne niezależnie od tego, czy współczynniki wielomianu całkowitego są rzeczywiste, czy zespolone. Obecnie założymy, że spółczynniki wielomianu całkowitego są rzeczywiste, a mianowicie:

III) *Jeżeli równanie algebraiczne n-go stopnia* $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=0$ *ma wszystkie spółczynniki rzeczywiste i jeżeli ma pierwiastek zespolony* $\alpha+\beta i$, *to ma także pierwiastek zespolony sprzężony* $\alpha-\beta i$ *i jeżeli pierwszy jest m-krotnym, to drugi także jest m-krotnym pierwiastkiem.*

Skoro liczba $\alpha+\beta i$ jest pierwiastkiem równania, tedy

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=(x-\alpha-\beta i)\,.\,I(x).$$

przyczem iloraz $I(x)$ ma spółczynniki zespolone; niech więc $I(x)=$ $=I_1(x)+iI_2(x)$, przyczem $I_1(x)$, $I_2(x)$ są wielomianami i mają już spółczynniki rzeczywiste. Jest więc $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=$ $=(x-\alpha-\beta i)[I_1(x)+iI_2(x)]=(x-\alpha)I_1(x)+\beta I_2(x)+i[(x-\alpha)I_2(x)-$ $-\beta I_1(x)]$.

Ponieważ lewa strona dla każdej rzeczywistej liczby x jest liczbą rzeczywistą, bo współczynniki $a_0, a_1,\ldots a_n$ są rzeczywiste, więc i prawa strona jest rzeczywistą, tedy dla każdej liczby rzeczywistej x jest $(x-\alpha)I_2(x)-\beta I_1(x)=0$, skąd $I_1(x)=\frac{x-\alpha}{\beta}\,.\,I_2(x)$, jest bowiem $\beta\neq 0$, skoro się zajmujemy zespolonym pierwiastkiem.

Tedy:

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0=(x-\alpha-\beta i)\left[\frac{x-\alpha}{\beta}I_2(x)+iI_2(x)\right]=$$

$$=(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)\,.\,\frac{1}{\beta}\,.\,I_2(x).$$

Wielomian $I_2(x)$ ma rzeczywiste współczynniki.

Ostatnia równość wykazuje, że także liczba $\alpha-\beta i$ jest pierwiastkiem. Jeżeli $I_2(x)=0$ ma znów liczbę $\alpha+\beta i$ jako pierwiastek, to znów liczba $\alpha - \beta i$ będzie pierwiastkiem. Ile razy tedy $\alpha + \beta i$ jest pierwiastkiem, tyle razy będzie liczba $(\alpha - \beta i)$ pierwiastkiem. Twierdzenie III udowodnione.

Zauważmy, że jest $(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i) = (x - \alpha)^2 + \beta^2$. Wskutek tego, jeżeli chcemy we wypadku wielomianu całkowitego o spółczynnikach rzeczywistych, poprzestać na najprostszych czynnikach, ale rzeczywistych, to rozłożymy go na czynniki stopnia 1-go i 2-go. Np. rozłóżmy wielomian $x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13$ na najprostsze czynniki o współczynnikach rzeczywistych.

W tym celu rozwiążmy pomocnicze równanie $x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13 = 0$; nie trudno stwierdzić, że liczby $(+1)$ i (-1) są pierwiastkami, więc wielomian $x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13$ jest podzielny przez iloczyn $(x+1)(x-1)$ czyli przez dwumian $x^2 - 1$, a mianowicie ilorazem tego dzielenia jest trójmian $x^2 - 4x + 13$. Będzie więc $x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13 = (x+1)(x-1)(x^2 - 4x + 13)$. Otóż czynnika $x^2 - 4x + 13$ nie można dalej rozłożyć na czynniki o współczynnikach rzeczywistych, gdyż równanie $x^2 - 4x + 13 = 0$ ma pierwiastki zespolone i sprzężone: $x = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$.

IV) *Wielomian całkowity względem x stopnia n-go o współczynnikach rzeczywistych da się rozłożyć na potęgi naturalne czynników stopnia 1-go i 2-go o współczynnikach rzeczywistych, przyczem te ostatnie już się nie dadzą rozłożyć na czynniki stopnia 1-go o współczynnikach rzeczywistych t. zn. jest:*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \dots$$
$$(x - \alpha_i)^{m_i} [(x - \lambda_1)^2 + \mu_1^2]^{l_1} . [(x - \lambda_2)^2 + \mu_2^2]^{l_2} \dots [(x - \lambda_\varkappa)^2 + \mu_\varkappa^2]^{l_\varkappa}, \dots \quad (1)$$

gdzie $a_n \neq 0$, $m_1 + m_2 + \dots + m_i + 2l_1 + 2l_2 + \dots + 2l_\varkappa = n$; liczby $\alpha_1 \dots \alpha_i$ są rzeczywistymi pierwiastkami odpowiednio $m_1, m_2, \dots, m_i$-krotnymi, liczby $\lambda_1 + i\mu_1$, $\lambda_2 + i\mu_2, \dots, \lambda_\varkappa + i\mu_\varkappa$ są zespolonymi pierwiastkami odpowiednio $l_1, l_2, \dots, l_\varkappa$-krotnymi równania:

$$(2) \qquad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Gdy to równanie posiada same rzeczywiste pierwiastki lub same zespolone, to oczywiście w drugim przypadku brak w rozkładzie (1) czynników $(x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \dots (x - \alpha_i)^{m_i}$, *zaś w pierwszym przypadku brak czynników:*

$$[(x - \lambda_1)^2 + \mu_1^2]^{l_1} . \dots [(x - \lambda_\varkappa)^2 + \mu_\varkappa^2]$$

Dowód tego tw. wobec poprzedniego będzie zupełnym, gdy tylko zajmiemy się pierwiastkami zespolonymi. Otóż twierdzenie III wykazuje, że, gdy równanie (2) ma m krotny pierwiastek $\lambda + i\mu$, to ma także m-krotny pierwiastek $\lambda - i\mu$, więc lewa strona równości (1) jest podzielna przez iloczyn $(x - \lambda - i\mu)^m . (x - \lambda + i\mu)^m = [(x - \lambda - i\mu)(x - \lambda + i\mu)]^m = [(x - \lambda)^2 + \mu^2]^m$, a to należało jeszcze wykazać.

Po tych twierdzeniach przejdźmy do całkowania funkcji wymiernej. Mamy znaleźć całkę $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx$ w przedziale (a, b), który nie zawiera żadnego pierwiastka równania $\varphi(x) = 0$. Funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ są wymierne i całkowite, nadto iloraz $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest nieskracalnym przez żaden wielomian conajmniej stopnia 1-go. Jeżeli stopień wielomianu $f(x)$ nie jest niższy od stopnia wielomianu $\varphi(x)$, to przez dzielenie wyznaczamy wielomiany $E(x)$ i $R(x)$ takie, że jest:

$$f(x) = \varphi(x) . E(x) + R(x). \tag{3}$$

przyczem stopień wielomianu $R(x)$ jest już niższy od stopnia wielomianu $\varphi(x)$. Będzie tedy:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{\varphi(x)},$$

skąd wynika, że jest:

$$\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = \int E(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{\varphi(x)} dx.$$

Pierwszą całkę prawej strony umiemy już znaleźć, wobec czego mamy znaleźć jeszcze drugą całkę prawej strony, która tem się różni przedewszystkiem od całki lewej strony, że dzielna funkcji podcałkowej jest stopnia niższego od stopnia dzielnika. Wykażemy, że wielomiany $R(x)$ i $\varphi(x)$ nie mają żadnego wspólnego czynnika conajmniej stopnia 1-go. Gdyby tak nie było, to byłoby: $\varphi(x) = \varphi_1(x) . \varphi_2(x)$, $R(x) = \varphi_1(x) . R_1(x)$, gdzie $\varphi_1(x)$ oznacza ten wspólny czynnik i wtedy równość (3) dałaby $f(x) = \varphi_1(x) [E(x) \varphi_2(x) + R_1(x)]$, więc wielomiany $f(x)$ i $\varphi(x)$ miałyby wspólny czynnik $\varphi_1(x)$ conajmniej stopnia 1-go wbrew założeniu. Tem samem twierdzenie wykazane.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

V) *Jeżeli* $\varphi(x)=(x-\alpha_1)^{m_1}.(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_i)^{m_i}.[(x-\lambda_1)^2+$ $+\mu_1^2]^{l_1}\ldots[(x-\lambda_\varkappa)^2+\mu_\varkappa^2]^{l_\varkappa}$, *przyczem* $m_1+m_2+\ldots+m_i+2l_1+2l_2+$ $+\ldots+2l_\varkappa=n$ *i jeżeli* $R(x)$ *oznacza wielomian całkowity stopnia conajwyżej* $(n-1)$*-go*[1]*, to istnieją stałe*[2]*) rzeczywiste* A_{1,m_1}, A_{1,m_1-1}, $A_{1,m_1-2},\ldots$, $A_{1,1}$; A_{2,m_2}, $A_{2,m_2-1},\ldots$, $A_{2,1}$;... A_{i,m_i}, $A_{i,m_i-1},\ldots$, $A_{i,1}$; B_{1,l_1}, C_{1,l_1}, B_{1,l_1-1}, $C_{1,l_1-1},\ldots\ldots$, $B_{1,1}$, $C_{1,1}$; B_{2,l_2}, $C_{2,l_2},\ldots\ldots$, $B_{2,1}$, $C_{2,1}$;...; $B_{\varkappa,l_\varkappa}$, $C_{\varkappa,l_\varkappa}$, $B_{\varkappa,l_\varkappa-1}$, $C_{\varkappa,l_\varkappa-1}\ldots$, $B_{\varkappa,1}$, $C_{\varkappa,1}$ *i takie, że jest:*

$$\frac{R(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_{1,m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{A_{1,m_1-1}}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}}+\ldots+\frac{A_{1,1}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{2,m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}}+$$
$$+\frac{A_{2,m_2-1}}{(x-\alpha_2)^{m_2-1}}+\ldots+\frac{A_{2,1}}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_{i,m_i}}{(x-\alpha_i)^{m_i}}+\ldots+\frac{A_{i,1}}{x-\alpha_i}+$$
$$+\frac{B_{1,l_1}.x+C_{1,l_1}}{[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1}}+\frac{B_{1,l_1-1}x+C_{1,l_1-1}}{[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1-1}}+\ldots+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2}+\ldots+$$
$$+\ldots+\frac{B_{\varkappa,l_\varkappa}.x+C_{\varkappa,l_\varkappa}}{[(x-\lambda_\varkappa)^2+\mu_\varkappa^2]^{l_\varkappa}}+\ldots+\frac{B_{\varkappa,1}x+C_{\varkappa,1}}{(x-\lambda_\varkappa)^2+\mu_\varkappa^2}=\sum_{j=1}^{i}\left(\sum_{p=1}^{m_j}\frac{A_{j,p}}{(x-\alpha_j)^p}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\varkappa}\left(\sum_{p=1}^{l_j}\frac{B_{j,p}.x+C_{j,p}}{[(x-\lambda_j)^2+\mu_j^2]^p}\right)\ldots(4).$$

Stałe $A_{j,p}$, $B_{j,p}$, $C_{j,p}$ *są wyznaczone przez równość (4) jednoznacznie*

Gdy funkcję $\dfrac{R(x)}{\varphi(x)}$ napisaliśmy w postaci (4), to mówić będziemy, że *rozłożyliśmy ją na ułamki częściowe.*

Dowód. Połóżmy $\varphi(x)=(x-\alpha_1)^{m_1}.\psi(x)$, to wielomian $\psi(x)$ nie będzie zawierał czynnika $x-\alpha_1$, więc $\psi(\alpha_1)\neq 0$. Obrawszy stałą A, utwórzmy różnicę:

$$\varrho=\frac{R(x)}{\varphi(x)}-\frac{A}{(x-\alpha_1)^{m_1}}=\frac{R(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}.\psi(x)}-\frac{A}{(x-\alpha_1)^{m_1}}=\frac{R(x)-A\psi(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}\psi(x)}$$

i wyznaczmy *stałą* A tak, by dzielna zawierała czynnik $(x-\alpha_1)$, który się z dzielnikiem uprości i przeto różnica ϱ będzie miała po skróceniu dzielnik $(x-\alpha_1)^{m_1-1}.\psi(x)$. Stałą A należy wybrać tak, by spełniała równość $R(\alpha_1)-A\psi(\alpha_1)=0$ czyli $A=\dfrac{R(\alpha_1)}{\psi(\alpha_1)}$, co oznacza liczbę określoną, bo $\psi(\alpha_1)\neq 0$ i A jest różne od zera, bo $R(\alpha_1)\neq 0$.

W ten sposób będzie:

---

[1]) O spółczynnikach rzeczywistych i nieskracalny z wielomianem $\varphi(x)$.

[2]) Stałe mają podwójne wskaźniki np. $A_{3,4}$ dla uniknięcia wielości różnych liter.

$$\frac{R(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{R_1(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}\,\psi(x)},$$

gdzie $R_1(x)$ oznacza wielomian całkowity, będący ilorazem dzielenia wielomianu $R(x)-\frac{R(\alpha_1)}{\psi(\alpha_1)}\,.\,\psi(x)$ przez dwumian $(x-\alpha_1)$; otóż wielomian $R(x)$ był conajwyżej stopnia $(n-1)$-go, tedy, jak widać. $R_1(x)$ jest conajwyżej stopnia $(n-2)$-go. Do ilorazu $\frac{R_1(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}\,\psi(x)}$, o ile $m_1>1$, stosujemy powyższą metodę ponownie; w ten sposób „odrywamy" kolejno od ilorazu $\frac{R(x)}{\varphi(x)}$ ułamki częściowe kształtu $\frac{A}{(x-\alpha_1)^{m_1}}, \frac{B}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}},\ldots$ Dojdziemy do ilorazu $\frac{R'(x)}{\psi(x)}$, wtedy odłączamy ułamki częściowe $\frac{A'}{(x-\alpha_2)^{m_2}},\ldots$ itd. itd. Dochodzimy w ten sposób do ilorazu: $\frac{S(x)}{\chi(x)}$, gdzie jest:

$$\chi(x)=[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1}.\,[(x-\lambda_2)^2+\mu_2^2]^{l_2}\ldots[(x-\lambda_\varkappa)^2+\mu_\varkappa^2]^{l_\varkappa},$$

zaś $S(x)$ oznacza wielomian całkowity o współczynnikach rzeczywistych conajwyżej stopnia $\nu=2l_1+2l_2+\ldots+2l_\varkappa-1$ i nieskracalny z dzielnikiem $\chi(x)$, co łatwo wykazać.

Połóżmy $\chi(x)=[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1}.\,\omega(x)$ i, oznaczając przez B, C stałe, utwórzmy różnicę:

$$\varrho_1=\frac{S(x)}{\chi(x)}-\frac{Bx+C}{[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1}}=\frac{S(x)-(Bx+C)\,\omega(x)}{[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1}\,\omega(x)};$$

wyznaczmy stałe B, C tak, by dzielna różnicy ϱ_1 była podzielną przez trójmian $(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2$. Na to potrzeba i wystarcza, by dzielna przyrównana do zera dawała równanie o pierwiastkach $\lambda_1+i\mu_1$, $\lambda_1-i\mu_1$ czyli ma być:

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}S(\lambda_1+i\mu_1)&=[B(\lambda_1+i\mu_1)+C]\,\omega(\lambda_1+i\mu_1)\\ S(\lambda_1-i\mu_1)&=[B(\lambda_1-i\mu_1)+C]\,\omega(\lambda_1-i\mu_1)\end{aligned}\right.$$

Z łatwością czytelnik się przekona, że równania (5) pozwalają wyznaczyć liczby B, C i że są rzeczywiste.

Wybrawszy w ten sposób stałe B, C, otrzymujemy:

$$\varrho_1=\frac{S_1(x)}{[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1-1}.\,\omega(x)},$$

gdzie $S_1(x)$ jest wielomianem całkowitym, będącym ilorazem dzielenia wielomianu $S(x)-(Bx+C)\omega(x)$ przez trójmian $(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2$. Wielomian $S_1(x)$ jest conajwyżej stopnia $(\nu-2)$-go, kiedy dzielnik różnicy ϱ_1 po skróceniu jest stopnia $(\nu-1)$-go. Będzie tedy:

$$\frac{S(x)}{\chi(x)}=\frac{Bx+C}{[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1}}+\frac{S_1(x)}{[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1-1}\cdot\omega(x)}.$$

Podobnie odłączamy w dalszym ciągu ułamek częściowy $\frac{B'x+C'}{[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1-1}}$ itd. itd. Proceder ten musi się skończyć, przy pomocy niego otrzymamy równość (4). Chodzi teraz o to, czy jakąś inną metodą nie możnaby otrzymać innego rozkładu. Według równości (4) jest:

$$\frac{R(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{(x-\alpha_1)^{m_1}}+\frac{R_1(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1-1}\psi(x)},$$

gdzie R_1 jest wielomianem całkowitym conajwyżej stopnia $(n-2)$-go I załóżmy, że jest także:

$$\frac{R(x)}{\varphi(x)}=\frac{B}{(x-\alpha_1)^p}+\frac{T(x)}{(x-\alpha_1)^{p-1}\psi(x)},$$

przyczem $T(x)$ oznacza wielomian całkowity stopnia conajwyżej $\nu'=p-2+m_2+\ldots+m_t+2l_1+\ldots+2l_x$. Wykażemy, że $m_1=p$, $A=B$, $R_1(x)=T(x)$ identycznie.

Albo $m_1>p$ albo $m_1=p$ albo $m_1<p$. Wystarcza zająć się przypadkiem pierwszym i drugim. Gdy $m_1>p$, to

$$A+\frac{R_1(x)}{\psi(x)}(x-\alpha_1)=B(x-\alpha_1)^{m_1-p}+\frac{T(x).(x-\alpha_1)^{m_1-p+1}}{\psi(x)}.$$

Kładąc $x=\alpha_1$, otrzymujemy $A=0$. Gdy $p>m_1$, to otrzymuje się $B=0$, kiedy jest $A\neq 0$, $B\neq 0$.

Nie może więc być ani $m_1>p$ ani $p>m_1$; jest $p=m_1$ i wtedy $A+\frac{R_1(x)}{\psi(x)}.(x-\alpha_1)=B+\frac{T(x).(x-\alpha_1)}{\psi(x)}$ i dla $x=\alpha_1$, otrzymujemy $A=B$, przeto też $R_1(x)=T(x)$ identycznie. Podobnie otrzyma czytelnik, że wszystkie $A_{i,p}$ są jednoznacznie określone. Niech będzie według (4)

$$\frac{R(x)}{\varphi(x)}=U(x)+\frac{Bx+C}{[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1}}+\frac{S_1(x)}{[(x-\lambda_1)^2+\mu_1^2]^{l_1-1}\cdot\omega(x)},$$

gdzie $U(x)$ daje sumę ułamków częściowych, odnoszących się do liczb $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$. Niech będzie też:

$$\frac{R(x)}{\varphi(x)} = U(x) + \frac{B'x + C'}{[(x-\lambda_1)^2 + \mu_1^2]^{r_1}} + \frac{T_1(x)}{[(x-\lambda_1)^2 + \mu_1^2]^{r_1-1} \cdot \omega(x)}.$$

Wykażemy, że jest $l_1 = r_1$, $B = B'$, $C = C'$, $S_1(x) = T_1(x)$. Udowodnimy to niewprost: albo jest $l_1 > r_1$ albo $l_1 = r_1$ albo $l_1 < r_1$. Gdy jest $l_1 > r_1$, to otrzymamy z powyższych równości:

$$Bx + C + \frac{S_1(x)}{\omega(x)}[(x-\lambda_1)^2 + \mu_1^2] = (B'x + C')\,[(x-\lambda_1)^2 + \mu_1^2]^{l_1-r_1} +$$
$$+ \frac{T_1(x)}{\omega(x)} \cdot [(x-\lambda_1)^2 + \mu_1^2]^{l_1-r_1+1},$$

skąd dla $x = \lambda_1 + i\mu_1$ i dla $x = \lambda_1 - i\mu_1$ otrzymujemy:

$$B(\lambda_1 + i\mu_1) + C = 0.\ B(\lambda_1 - i\mu_1) + C = 0,$$

te zaś równości dają $B = 0$, $C = 0$. Podobnie, gdy $r_1 > l_1$, otrzymuje się $B' = C' = 0$. Nie może więc być ani jedno ani drugie i jest $l_1 = r_1$ i wtedy mamy:

$$Bx + C + \frac{S_1(x)}{\omega(x)} \cdot [(x-\lambda_1)^2 + \mu_1^2] = B'x + C' + \frac{T_1(x)}{\omega(x)}[(x-\lambda_1)^2 + \mu_1^2]$$

i kładąc $x = \lambda_1 + i\mu_1$, następnie $x = \lambda_1 - i\mu_1$, otrzymujemy:

$$B(\lambda + i\mu_1) + C = B'(\lambda_1 + i\mu_1) + C';\ B(\lambda_1 - i\mu_1) + C = B'(\lambda_1 - i\mu_1) + C';$$

ostatnie zaś równości dają $B = B'$, $C = C'$ i wtedy też $S_1(x) = T_1(x)$. Tem samem udowodniliśmy twierdzenie w zupełności.

Zauważmy, że równość (4) ma zachodzić dla wszystkich wartości rzeczywistych x z wykluczeniem liczb $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$.

Z rozkładu (4) na ułamki częściowe widać, że mamy obliczyć całki typu:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^m}\,dx,\quad \int \frac{Bx + C}{[(x-\lambda)^2 + \mu^2]^l}\,dx.$$

O ile jest $m > 1$, to: $\int \frac{A}{(x-\alpha)^m}\,dx = A\int (x-\alpha)^{-m}\,dx =$ $A \cdot \frac{(x-\alpha)^{-m+1}}{-m+1} + C$; gdy zaś $m = 1$, to: $\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\ln|x-\alpha| + C$.

Gdy $l=1$, to $\int \frac{Bx+C}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx = \int \frac{B(x-\lambda)+C+B\lambda}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx =$ $\frac{B}{2}\int \frac{2(x-\lambda)}{(x-\lambda)^2+\mu^2}dx + (C+B\lambda)\int \frac{dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2} = \frac{B}{2}.\, ln[(x-\lambda)^2+\mu^2]$ $+\frac{C+B\lambda}{\mu}.\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\lambda}{\mu}+c$. Niech będzie $l>1$, to $\int \frac{Bx+C}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l}dx$

$$= \frac{B}{2(l-1)}\int \frac{2(l-1)(x-\lambda)}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l}dx + (C+B\lambda)\int \frac{dx}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l} =$$

$$= -\frac{B}{2(l-1)}[(x-\lambda)^2+\mu^2]^{1-l} + (C+B\lambda)\int \frac{dx}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l}.$$

Mamy tedy obliczyć ostatnią całkę. W tym celu rozpatrzmy całkę: $\int \frac{dx}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l}$ i stosujmy do niej metodę całkowania przez części:

$$\int \frac{dx}{[(x-\lambda]^2+\mu^2]^l} = \int 1\,.\,\frac{1}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l}dx = \int (x-\lambda)'\,.$$

$$\frac{1}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l}dx = \frac{x-\lambda}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l} + \int \frac{2l(x-\lambda)^2}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^{l+1}}dx =$$

$$= \frac{x-\lambda}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l} + 2l\int \frac{(x-\lambda)^2+\mu^2-\mu^2}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^{l+1}}dx = \frac{x-\lambda}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l} +$$

$+2lI_l - 2l\mu^2 I_{l+1}$, gdzie położyliśmy $I_n = \int \frac{dx}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^n}$.

Jest więc:

$$I_l = \frac{x-\lambda}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l} + 2lI_l - 2l\mu^2 I_{l+1},$$

skąd

$$2l\mu^2 I_{l+1} = \frac{x-\lambda}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^l} + (2l-1)I_l;$$

ten wzór pozwoli obniżać potęgę $(l+1)$ w dzielniku funkcji podcałkowej o jednostkę; zastosowany odpowiednią ilość razy sprowadzi całkę I_{l+1} do całki $I_1 = \mu \operatorname{arc\,tg}\frac{x-\lambda}{\mu} + c$.

Widzimy tedy z powyższego, że *całka funkcji wymiernej jest w ogólnym przypadku sumą funkcji wymiernej, funkcyj logarytmicznych kształtu* $ln\,|x-a|$ *i funkcyj kształtu* $\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\lambda}{\mu}$; w specjalnych przypadkach może brakować składników jednego lub dwóch rodzaji.

Przykład. Obliczmy całkę $I = \int W(\sin x, \cos x)\,dx$, gdzie $W(\xi, \eta)$ oznacza funkcję wymierną zmiennych (ξ, η) t. zn. iloraz dwóch wielomianów całkowitych względem ξ, η $\left(\text{np. } \frac{\xi^3 + \eta + 1}{\xi^1 + \eta^2 + \eta}\right)$.

Całkę I obliczymy przy pomocy zamiany zmiennych, kładąc[1] $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Stąd wyliczyć należy funkcje $\sin x$, $\cos x$ i różniczkę dx.

Otóż $\sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} = 2 \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} . \cos^2\frac{x}{2} = 2t . \cos^2\frac{x}{2}$; $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - 1 + \cos^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$; nadto $dt = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} . dx$, skąd $dx = \cos^2\frac{x}{2} . dt$.

Trzeba więc jeszcze obliczyć $\cos^2\frac{x}{2}$. Otóż:

$$t^2 = \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} - 1, \text{ skąd: } \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2};$$

przeto $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Mamy więc:

$$I = \int W\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2},$$

przez co otrzymamy całkę funkcji wymiernej zmiennej (t). Zadanie obliczenia całki I sprowadziliśmy więc do obliczenia całki funkcji wymiernej; po jej znalezieniu trzeba powrócić do zmiennej x i w tym celu postąpić według § 54.

§ 57. Całki dwumienne.

Weźmy pod uwagę całkę $\int x^m (a + bx^n)^p\,dx$, gdzie a, b oznaczają stałe, m, n, p liczby całe lub ułamki (dodatnie lub ujemne).

[1]) Podstawienie to może mieć wpływ na przedział, dla którego obliczamy całkę.

Takie całki nazywamy całkami dwumiennemi. W pewnych przypadkach można ich obliczenie sprowadzić do całek funkcyj wymiernych.

Rozpatrzmy najpierw pewne przykłady.

I) Gdy p oznacza liczbę całą, to otrzymujemy całkę łatwą do obliczenia. Niech będzie dana całka $I = \int x^{1/2}(3x^{1/5} - 1)^2\,dx$.

Wtedy, wykonując potęgowanie, otrzymujemy: $I = \int x^{1/2}[9x^{2/5} - 6x^{1/5} + 1]\,dx = 9\int x^{9/10}dx - 6\int x^{7/10}dx + \int x^{1/2}dx = \frac{90}{19}x^{19/10} - \frac{60}{17}x^{17/10} + \frac{2}{3}x^{3/2} + C.$

II) Niech będzie daną całka $I = \int x^{1/2}(3x^{1/5} - 1)^{-2}\,dx$. Aby tę całkę sprowadzić do całki funkcji wymiernej, połóżmy najpierw: $x = \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^{10}$, tedy $I = a\int \frac{t^{14}}{(t^2-1)^2}dt$, gdzie a oznacza współczynnik liczebny. Dla obliczenia tej całki zauważmy, że przez dzielenie otrzymujemy: $\frac{t^{14}}{(t^2-1)^2} = t^{10} + 2t^8 + 3t^6 + 4t^4 + 5t^2 + 6 + \frac{7t^2-6}{(t^2-1)^2}$.

Otóż trzeba funkcję wymierną $\frac{7t^2-6}{(t^2-1)^2} = \frac{7t^2-6}{(t+1)^2(t-1)^2}$ rozłożyć na ułamki częściowe; będzie więc: $\frac{7t^2-6}{(t^2-1)^2} = \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t-1)^2} + \frac{D}{t-1}$, gdzie A, B, C, D są stałemi, które wyznaczymy, mnożąc ostatnią równość przez dzielnik strony lewej: $7t^2 - 6 = A(t-1)^2 + B(t+1)(t-1)^2 + C(t+1)^2 + D(t+1)^2(t-1)$ i postępując, jak w § 56, otrzymujemy $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{13}{4}$, $C = \frac{1}{4}$, $D = \frac{13}{4}$. Tedy $I = \frac{t^{11}}{11} + \frac{2t^9}{9} + \frac{3t^7}{7} + \frac{4t^5}{5} + \frac{5t^3}{3} + 6t + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+1)^2} - \frac{13}{4}\int\frac{dt}{t+1} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t-1)^2} + \frac{13}{4}\int\frac{dt}{t-1} = \frac{t^{11}}{11} + \frac{2t^9}{9} + \frac{3t^7}{7} + \frac{4t^5}{5} + \frac{5t^3}{3} + 6t - \frac{1}{4(t+1)} - \frac{13}{4}\ln|t+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} + \frac{13}{4}\ln|t-1| + C.$

Dla przywrócenia zmiennej x trzeba położyć $t = \pm\sqrt{3}\,.\sqrt[10]{x}$, co zostawiamy czytelnikowi.

III) Niech p nie będzie liczbą całą, ale niech (m) i (n) będą tak dobrane, że liczba $\frac{m+1}{n}$ jest liczbą całą. Niech np. będzie daną całka: $J=\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Tu $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$ i jest $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ a więc liczbą całą. Najpierw kładziemy $x=t^{\frac{1}{2}}$, skąd $J=\int t^{\frac{3}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}.\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int t.(1+t)^{-\frac{1}{2}}dt$. W dalszym ciągu kładziemy $1+t=u^{-2}$, wtedy $J=\frac{1}{2}\int(u^{-2}-1).u.(-2).u^{-3}du=$ $=\int\frac{u^2-1}{u^4}du=\int\frac{du}{u^2}-\int\frac{du}{u^4}$. Całkowanie to, jak i powrót do zmiennej x z łatwością przeprowadzi czytelnik.

IV) Niech ani liczba p ani liczba $\frac{m+1}{n}$ nie będą całkowitemi, ale niech całą będzie liczba $\frac{m+1}{n}+p$. Niech np. będzie daną całka $K=\int x^2(1-x^4)^{1/4}dx$. Najpierw kładziemy $x=t^{1/4}$, wtedy $K=\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}dt=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{1}{4}}dt$. Następnie kładziemy $\frac{1-t}{t}=u^4$, skąd $t=\frac{1}{1+u^4}$ i przeto $K=-\int\frac{u^4}{(1+u^4)^2}du$. Aby tę całkę obliczyć stosownie do metody z § 56, rozłóżmy dwumian $1+u^4$ na czynniki. Otóż równanie $1+u^4=0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, a więc ma dwie pary pierwiastków zespolonych i sprzężonych[1]). Pierwsza para pierwiastków sprzężonych daje czynnik $u^2+\alpha u+\beta$; tedy dwumian (u^4+1) będzie podzielny przez trójmian $u^2+\alpha u+\beta$, przez który to warunek wyznaczymy rzeczywiste liczby α, β. Jest bowiem:

$$\begin{array}{l}
(u^4+1):(u^2+\alpha u+\beta)=u^2-\alpha u+(\alpha^2-\beta)\\
\underline{u^4 \pm \alpha u^3 \pm \beta u^2}\\
\quad -\alpha u^3-\beta u^2+1\\
\quad \underline{-\alpha u^3 \mp \alpha^2u^2 \mp \alpha\beta u}\\
\qquad (\alpha^2-\beta)u^2+\alpha\beta u+1\\
\qquad \underline{(\alpha^2-\beta)u^2 \pm \alpha(\alpha^2-\beta)u \pm \beta(\alpha^2-\beta)}\\
\qquad\qquad (2\alpha\beta-\alpha^3)u+1-\alpha^2\beta+\beta^2.
\end{array}$$

[1]) Liczby zespolone $\lambda+i\mu$, $\lambda-i\mu$ nazywają się liczbami zespolonemi, ze sobą sprzężonemi.

Skoro reszta ma być zerem dla dowolnej liczby (u), więc według § 2 (str. 10) będzie $2\alpha\beta-\alpha^3=0$, $1-\alpha^2\beta+\beta^2=0$. Nie może być $\alpha=0$, bo drugie równanie dałoby $1+\beta^2=0$, co być nie może, gdyż β ma oznaczać liczbę rzeczywistą. Jest więc $\alpha\neq0$, tedy pierwsze równanie $\alpha(2\beta-\alpha^2)=0$, daje $\beta=\frac{\alpha^2}{2}$, co wstawione w drugie daje: $\alpha^4=4$ czyli $\alpha^2=\pm 2$; ponieważ liczba α ma być rzeczywistą, więc $\alpha^2=2$, skąd $\alpha=\pm\sqrt{2}$, $\beta=\frac{\alpha^2}{2}=1$. Widzimy z dzielenia, że jest: $u^4+1=(u^2+u\sqrt{2}+1)(u^2-u\sqrt{2}+1)$. Wobec tego rozkład na ułamki częściowe będzie następujący:

$$\frac{u^4}{(u^4+1)^2}=\frac{u^4}{(u^2+u\sqrt{2}+1)^2(u^2-u\sqrt{2}+1)^2}=\frac{Au+B}{(u^2+u\sqrt{2}+1)^2}+$$
$$+\frac{Cu+D}{u^2+u\sqrt{2}+1}+\frac{Eu+F}{(u^2-u\sqrt{2}+1)^2}+\frac{Gu+H}{u^2-u\sqrt{2}+1},$$

gdzie A, B, C, D, E, F, G, H są stałemi, które należy wyznaczyć. Stąd otrzymujemy $u^4=(Au+B)(u^2-u\sqrt{2}+1)^2+(Cu+D)(u^2+$ $+u\sqrt{2}+1)(u^2-u\sqrt{2}+1)^2+(Eu+F)(u^2+u\sqrt{2}+1)^2+(Gu+H)$ $(u^2-u\sqrt{2}+1)(u^2+u\sqrt{2}+1)^2$; ponieważ obie strony mają być identycznie równe, tedy współczynniki obu stron będą jednakowe, co da nam ośm równań na stałe. Czytelnikowi pozostawiamy wyliczenie tych stałych i całkowanie (zob. § 56), poczem należy przywrócić zmienną x.

Zajmiemy się obecnie teorją obliczania całek dwumiennych. Jeżeli $I=\int x^m(a+bx^n)^p dx$ i jeżeli przynajmniej jedna ze stałych a, b, n, p jest zerem, to całka I jest całką potęgi zmiennej x, a więc łatwą do wyliczenia.

Rzeczywiście: 1) gdy $a=0$, otrzymujemy: $I=\int x^m.b^p x^{np}dx=$ $b^p.\frac{x^{m+np+1}}{m+np+1}+c$ (jeżeli $m+np+1\neq0$) lub $=b^p ln|x|+c$ (jeżeli $m+np=-1$). 2) Gdy $b=0$, to $I=\int x^m a^p dx$, co czytelnik natychmiast obliczy. 3) Gdy $n=0$, to $I=\int x^m(a+b)^p dx$, co również łatwo wyliczyć. 4) Gdy $p=0$, to $I=\int x^m dx$. W dalszym ciągu te przypadki wyłączamy. Poznamy metody obliczania całek dwumiennych, gdy przynajmniej jedna z liczb $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n}+p$ jest całkowitą.

A) Niech będzie p liczbą całą. Gdy jest $p>0$, to potęgę $(a+bx^n)^p$ rozwiniemy według wzoru dwumiennego Newtona i następnie obliczymy po kolei otrzymane całki potęg zmiennej x. Ten przypadek, jako bardzo prosty do załatwienia wyłączmy odtąd. Gdy tylko nie jest p liczbą całą dodatnią, to najpierw usuwamy wykładnik n, kładąc $bx^n=at$ czyli $x=\left(\frac{at}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, skąd $dx=\frac{1}{n}\left(\frac{at}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\frac{adt}{b}$, przeto $I=\int\left(\frac{at}{b}\right)^{\frac{m}{n}}a^p(1+t)^p.\frac{1}{n}\left(\frac{at}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\frac{adt}{b}=\frac{a^{\frac{m+1}{n}+p}}{nb^{\frac{m+1}{n}}}.\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(1+t)^p dt.$

Zajmiemy się odtąd całką dwumienną (nieco prostszej postaci)

$$J=\int t^{m'}(1+t)^p dt, \text{ gdzie } m'=\frac{m+1}{n}-1.$$

Dokończmy przypadek (A). Ewentualność $p=0$ wykluczyliśmy poprzednio. Niech p oznacza liczbę całą i ujemną i niech $p=-p'$, gdzie $p'>0$ i liczbą całą, więc p' liczbą naturalną. Jest więc $J=\int\frac{t^{m'}}{(1+t)^{p'}}dt$. Jeżeli m' jest liczbą całą, to J jest całką funkcji wymiernej, którą należy obliczyć sposobem podanym w § 56. Jeżeli zaś m' nie jest liczbą całą, to jest ułamkiem: $m'=\pm\frac{\mu'}{\mu}$, gdzie μ', μ oznaczają liczby naturalne. Kładziemy $t=u^\mu$. Wtedy otrzymujemy $J=\int\frac{u^{\pm\mu'}}{(1+u^\mu)^{p'}}\mu u^{\mu-1}du$, co widocznie jest całką funkcji wymiernej.

B) Niech p oznacza liczbę ułamkową, niecałkowitą, niech jednak $\frac{m+1}{n}$ oznacza liczbę całą, tedy $m'=\frac{m+1}{n}-1$ będzie też liczbą całą.

Mamy więc obliczyć całkę $J=\int t^{m'}(1+t)^p dt$, gdzie m' oznacza liczbę całą, zaś p ułamek: $p=\pm\frac{p'}{p''}$ i liczbę niecałą. Kładziemy $1+t=u^{p''}$, wtedy $dt=p''u^{p''-1}du$, $J=\int (u^{p''}-1)^{m'}u^{\pm p'}.p''u^{p''-1}du$ $=p''\int u^{\pm p'+p''-1}(u^{p''}-1)^{m'}du$, co jest całką funkcji wymiernej.

C) Niech wreszcie ani p ani $\frac{m+1}{n}$ nie oznacza liczby całej, ale niech $\frac{m+1}{n}+p$ będzie już liczbą całą. Będzie tedy też całkowitą liczbą: $m'+p$. Napiszmy tedy $J=\int t^{m'}(1+t)^p dt=\int t^{m'+p}\left(\frac{1+t}{t}\right)^p dt$. Skoro p nie jest liczbą całą, ale ułamkiem, niech będzie $p=\pm\frac{p'}{p''}$, gdzie już p'; p'' oznaczają liczby naturalne. Kładziemy $\frac{1+t}{t}=u^{p''}$, skąd $t=\frac{1}{u^{p''}-1}$, tedy $J=-\int \frac{u^{\pm p'}}{(u^{p''}-1)^{m'+p}}\cdot\frac{p''.u^{p''-1}}{(u^{p''}-1)^2}du$, co jest już całką funkcji wymiernej.

W każdym z powyższych przypadków należy przywrócić zmienną x po wyliczeniu całek, które podaliśmy. Pominęliśmy powyżej określenia przedziałów (a, b), dla których należy całkę obliczyć.

Czytelnik z łatwością dla ćwiczenia znajdzie następujące całki:

1) $\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x^m(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, gdzie m jest liczbą całą (parzystą lub nieparzystą).

2) $\int \frac{\sqrt[4]{\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-1\right)^5}}{x^2\sqrt{x}}dx$, 3) $\int \sqrt[5]{x^{10}-2x^{15}+x^{20}}\,dx$.

[Uwaga. Całki 2) i 3) trzeba najpierw sprowadzić do postaci całki dwumiennej; przykłady te podaliśmy jedynie dlatego w takiej postaci, by okazać, że na pierwszy rzut oka bez pewnej wprawy czytelnik nie będzie skłonny poczytywać całek 2) i 3) za całki dwumienne].

§ 58. Dalsze wzory całkowe.

A) Obliczymy całkę $I=\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, gdzie a, b, c są stałemi liczbami. Z łatwością można tę całkę sprowadzić do całki dwumiennej, przeprowadzimy jednak to całkowanie w inny sposób.

Mamy znaleźć funkcję $F(x)$ ciągłą w przedziale (α, β), która wewnątrz przedziału czyni zadość równości $\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, przyczem prawa strona tej równości ma być określoną w całym przedziale (α, β). Aby więc bliżej scharakteryzować przedział (α, β), będziemy musieli zbadać pierwiastki i znak trójmianu ax^2+bx+c. Otóż albo jest $a=0$ albo $a \neq 0$.

Niech będzie $a=0$, tedy $I = \int \frac{dx}{\sqrt{bx+c}}$, przyczem dość założyć $b \neq 0$, aby nie mieć zbyt prostego przypadku. Wtedy dla przedziału (α, β), dla którego $bx+c > 0$, widocznie jest:

$$I = \frac{2}{b}\sqrt{bx+c} + C.$$

Niech będzie $a \neq 0$. Wtedy jest $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Zakładamy, że spółczynniki a, b, c są rzeczywiste; wtedy (zob. Wstęp)

1) gdy wyróżnik równania $w = b^2 - 4ac > 0$, to pierwiastki x_1, x_2 są rzeczywiste i różne od siebie: $x_1 \neq x_2$;

2) gdy wyróżnik równania $w=0$, to $x_1 = x_2$ i wspólna ich wartość, którą oznaczymy przez x_0, jest rzeczywistą;

3) gdy wyróżnik $w < 0$, to pierwiastki x_1, x_2 są zespolone sprzężone, więc $x_1 = \lambda + i\mu$, $x_2 = \lambda - i\mu$, przyczem λ, μ oznaczają liczby rzeczywiste.

Zajmiemy się tymi przypadkami po kolei.

1) Aby wyrażenie $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$ miało wartość rzeczywistą, trzeba i wystarcza, by było $a(x-x_1)(x-x_2) > 0$; jeżeli jest $a > 0$, to musi być $x > x_1$ i zarazem $x > x_2$ albo $x < x_1$ i zarazem $x < x_2$.

Jeżeli jest $x_1 < x_2$, to liczby α, β mają więc być albo takie, że $\alpha < \beta < x_1$ albo takie, że $x_2 < \alpha < \beta$. Gdy zaś jest $a < 0$, to ma być $(x-x_1)(x-x_2) < 0$, więc gdy jest $x_1 < x_2$, to będzie $x_1 < \alpha < \beta < x_2$.

Dla obliczenia całki obieramy nową zmienna $t > 0$ i taką, że $\frac{a(x-x_1)}{x-x_2} = t^2$; stąd[1]) $x = \frac{ax_1 - t^2x_2}{a-t^2}$. Przeto będzie $I = \frac{2a}{|a|} \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|} \int \frac{dt}{|a-t^2|}$. Widoczne, że rzecz sprowadza się do całki

---

[1]) Jest $t^2 \neq a$, jak łatwo niewprost udowodnić.

$J = \int \frac{dt}{a - t^2}$. Otóż, gdy $a > 0$, to trzeba funkcję $\frac{1}{a - t^2}$ rozłożyć na ułamki częściowe: $\frac{1}{a - t^2} = \frac{A}{\sqrt{a} + t} + \frac{B}{\sqrt{a} - t}$; wyznaczenie stałych A, B i całkowanie, jak też przywrócenie zmiennej x, zostawiamy czytelnikowi.

Gdy zaś jest $a < 0$, to kładziemy $a = -a'$, gdzie $a' > 0$; tedy jest:

$$J = -\int \frac{dt}{a' + t^2} = -\frac{1}{a'} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{a'}}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{a'}} \int \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{a'}}\right)}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{a'}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{a'}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{\sqrt{a'}}\right) + C.$$

Obecnie należy przywrócić zmienną (x), co czytelnik przeprowadzi z łatwością.

2) Gdy $x_1 = x_2 = x_0$, to $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$; tedy być winno $a > 0$, aby wyrażenie $\sqrt{a(x - x_0)^2}$ miało wartość rzeczywistą dla liczb $x \neq x_0$. Nadto ma być albo $\alpha < \beta < x_0$ albo $x_0 < \alpha < \beta$. Mamy tedy: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a}\,|x - x_0|}$ i tem samem otrzymuje się całkę łatwą do obliczenia.

3) Gdy wyróżnik $w < 0$, to $ax^2 + bx + c = a(x - \lambda - i\mu)(x - \lambda + i\mu) = a[(x - \lambda)^2 + \mu^2]$. Stąd widocznem, że być musi $a > 0$.

Połóżmy $x - \lambda = t$, to $I = \int \frac{dt}{\sqrt{at^2 + a\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \mu^2}}$; całką tę znamy już, a mianowicie $I = \frac{1}{\sqrt{a}} ln[t + \sqrt{t^2 + \mu^2}] + C = \frac{1}{\sqrt{a}} ln[x - \lambda + \sqrt{(x - \lambda)^2 + \mu^2}] + C$. Zauważmy, że z identyczności $ax^2 + bx + c = a[(x - \lambda)^2 + \mu^2]$ wynika, iż $b = -2a\lambda$, skąd $\lambda = -\frac{b}{2a}$, więc $I = \frac{1}{\sqrt{a}} ln\left[x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}\right] + C$.

Weźmy teraz pod uwagę całkę:

$$I = \int W(x, \sqrt{bx + c})\,dx,$$

gdzie $W(\xi, \eta)$ oznacza funkcję wymierną zmiennych ξ, η. Jest $b \neq 0$. Kładziemy $bx+c=t^2$ i przekształcamy całkę I w całkę funkcji wymiernej zmiennej t:

$$I = \frac{2}{b} \int W\left(\frac{t^2-c}{b}, t\right) t\,dt.$$

Wreszcie rozważmy całkę:

$$J = \int W(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,$$

gdzie $W(\xi, \eta)$ oznacza funkcję wymierną zmiennych ξ i η, nadto jest $a \neq 0$. Całkę J można przekształcić w całkę funkcji wymiernej przez podstawienia w obecnym paragrafie poznane dla przypadku, kiedy $W(\xi, \eta) = \frac{1}{\eta}$. Podamy jeszcze jedno podstawienie, czasami wygodniejsze, bo niewymagające znajomości pierwiastków trójmianu ax^2+bx+c w przypadku, kiedy wyróżnik i liczba a są dodatnie. Otóż, oznaczając przez $w = b^2 - 4ac$ wyróżnik trójmianu, otrzymujemy:

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{a}\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{w}{4a} = \frac{u^2}{a} - \frac{w}{4a},$$

jeżeli położymy $u = ax + \frac{b}{2}$. Zajmujemy się przypadkiem $w > 0$, $a > 0$. Wprowadzamy nową zmienną t przez równość:

$$\frac{u^2}{a} - \frac{w}{4a} = \left(\frac{u}{\sqrt{a}} + t\right)^2,$$

skąd obliczamy t. Resztę rachunków zostawiamy czytelnikowi do wykonania.

Uwaga. Obliczenie całek znaczy nic innego, jak wyrażenie całki przez funkcje nam znane; ponieważ dotąd nam znanemi funkcjami są funkcje t. zw. elementarne, przeto łatwo podać przykład całki, która się nie da wyrazić przez elementarne funkcje; powiada się wtedy, że taka całka nie „daje się obliczyć". Taką jest całka:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}}.$$

W następnych rozdziałach poznamy nowe funkcje i ta właśnie znajomość nowych funkcyj pozwoli nam powiedzieć, że ostatnia całka „daje się obliczyć“. Jak zobaczymy, pojęcie granicy dostarczy nam potężnego środka dla określenia nowych funkcyj.

Rozdział XI. Teorja całek określonych.

§ 59. Przykłady pomiaru pól płaskich.

Zagadnienie, które doprowadzi nas do pojęcia całki określonej, jest następujące: daną jest funkcja ciągła w danym przedziale i nieujemna, której wykresem jest krzywa K. Dane są również dwie proste l_1 i l_2, prostopadłe do osi odciętych, wykreślone w dwóch punktach tego przedziału; mamy obliczyć pole, zawarte między prostemi l_1 i l_2, osią odciętych i krzywą K.

Jeżeli daną funkcją jest funkcja liniowa, np. $y = \frac{3}{4}x$, której wykres przedstawia rys. 1 i mamy obliczyć pole, zawarte między prostemi l_1, l_2, (wykreślonemi np. w punktach o współrzędnych (1,0) i (2,0)) osią x i prostą K, to zadanie takie nie przedstawia żadnych trudności, gdyż sprowadza się do obliczenia powierzchni pewnego trapezu.

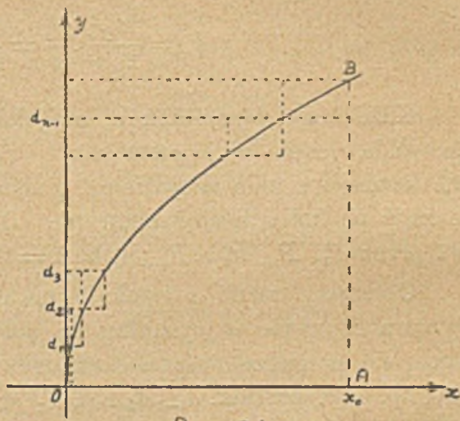
Powstaje jednak trudność natury nietylko rachunkowej, ale i zasadniczej, mianowicie, jak mierzyć pole, jeżeli rozważamy figury, których obwody nie są linją łamaną, ale choć w części swej linją krzywą.

Sprawę tą rozważymy w § 68, obecnie zaś zajmiemy stanowisko inne, przypuszczając, że czytelnik posiada intuicyjne pojęcie miary pola, wskutek czego zrozumie te rachunki, które w obecnym paragrafie przeprowadzimy.

Przykład I. Miara powierzchniowa odcinka paraboli (rys. 91). Mamy obliczyć liczbę N, mierzącą powierzchnię leżącą w pierwszej ćwiartce, ograniczoną łukiem paraboli $y^2 = 2px$ (gdzie $p > 0$), osią odciętych i prostą AB, wykreśloną w dowolnym punkcie $(x_0, 0)$, (gdzie $x_0 > 0$) prostopadle do osi x.

Zadanie to rozwiązał już w starożytności Archimedes (III-ci wiek przed Chr.) metodą zwaną metodą „wyczerpywania“ (ekshaustji), o której mówimy w § 79. Obecnie podamy inną metodę elementarną.

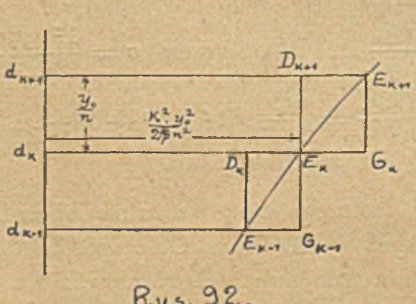
Szukaną powierzchnię obliczymy, jeśli znajdziemy pole, zawarte między łukiem paraboli $\widehat{OB}$, osią rzędnych i prostą CB równoległą do osi x i odejmiemy liczbę M, mierzącą to pole, od liczby, będącej miarą prostokąta $OABC$ i równej iloczynowi x_0, y_0, gdzie x_0, y_0 są współrzędnemi punktu B; nadto wiemy, że $y_0 = \sqrt{2px_0}$.



Rys. 91.

Celem obliczenia COB podzielmy odcinek OC na n równych części. Przez punkty podziału d_1, d_2, d_3,... d_{n-1} prowadzimy równoległe do osi x, które przetną łuk $\widehat{OB}$ paraboli w pewnych punktach. W punktach tych kreślimy prostopadłe do osi odciętych w sposób, uwidoczniony na rys. 91. Punkt d_1 ma współrzędne $\left(0, \frac{y_0}{n}\right)$; podobnie obliczymy współrzędne dalszych punktów podziału: $d_2 \left(0, \frac{2y_0}{n}\right)$; $d_3 \left(0, \frac{3y_0}{n}\right)$ i t. d.; ogólnie będzie jeden z tych punktów d_k miał współrzędne $\left(0, \frac{ky_0}{n}\right)$, gdzie $k = 1, 2, 3, \ldots n-1$.

Rys. 92 wyobraża nam w powiększeniu część rysunku poprzedniego w okolicy punktu podziału d_k. Punkty E_k, E_{k+1} i t. d. są punktami przecięcia się równoległych do osi x z łukiem paraboli. Punkt E_k ma rzędną taką samą, jak punkt d_k czyli $\frac{ky_0}{n}$. Jego odciętą obliczymy, wiedząc, że obie jego współrzędne spełniają równanie paraboli. Jest więc: $\left(\frac{ky_0}{n}\right)^2 = 2px$, skąd



Rys. 92.

mamy: $x=\frac{k^2y_0^2}{2pn^2}$. Zatem punkt E_k ma współrzędne: $E_k\left(\frac{k^2y_0^2}{2pn^2}, \frac{ky_0}{n}\right)$. Weźmy pod uwagę prostokąt $d_k\, d_{k+1}\, D_{k+1}\, E_k$; liczbą mierzącą jego powierzchnię będzie:

$$P_k=\frac{k^2y_0^2}{2pn^2}\cdot\frac{y_0}{n}=\frac{k^2y_0^3}{2pn^3}.$$

Każdemu z (n) odcinków, na jakie podzieliliśmy odcinek $\overline{OC}$, odpowiada jeden taki prostokąt — nazwijmy go wewnętrznym. Pole każdego z nich znajdziemy, podstawiając w powyższym wzorze za k po kolei liczby naturalne od 1 do $n-1$; oznaczymy te pola przez $P_1, P_2, P_3 \ldots. P_{n-1}$ (dla $k=0$ otrzymamy $P_0=0$).

Obierzmy nadto prostokąty takie, jak $d_k\, d_{k+1}\, E_{k+1}\, G_k$ czyli zewnętrzne; widać z rysunku, że pole R któregokolwiek z nich równa się powierzchni prostokąta wewnętrznego, nad nim położonego, np. pow. prostok. $d_{k-1}\, d_k\, E_k\, G_{k-1}=$ pow. prostok. $d_k\, d_{k+1}\, D_{k+1}\, E_k$, czyli $R_k=P_k$. Tylko ostatni (n-ty) prostokąt zewnętrzny nie będzie miał sobie równego między prostokątami wewnętrznymi. Powierzchnia jego jest: $R_n=\frac{x_0y_0}{n}$.

Szukana miara powierzchni OCB, którą oznaczyliśmy przez M, jak widać z rys. 91 i 92, jest większą od sumy wszystkich pól prostokątów wewnętrznych, a mniejszą od sumy wszystkich pól prostokątów zewnętrznych; jeżeli pierwszą sumę oznaczymy przez σ, to według tego, cośmy przed chwilą powiedzieli, będzie suma prostokątów zewnętrznych równa liczbie $\sigma+\frac{x_0y_0}{n}$.

Jest więc $\sigma<M<\sigma+\frac{x_0y_0}{n}$ ..... (I), przyczem $\sigma=\frac{1^2\cdot y_0^3}{2pn^3}+$ $+\frac{2^2\cdot y_0^3}{2pn^3}+\frac{3^2\cdot y_0^3}{2pn^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2\cdot y_0^3}{2pn^3}=\frac{y_0^3}{2pn^3}\cdot[1^2+2^2+3^2+\ldots+$ $(n-1)^2]$..... (II).

Równość (II) wykazuje, że potrzeba nam wzoru na obliczenie sumy kwadratów liczb naturalnych od 1 do m. Otóż sposób obliczenia owej sumy jest widoczny z następujących równości:

$$1^3=\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$
$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\,.\,1^2+3\,.\,1+1$$
$$3^3=(2+1)^3=2^3+3\,.\,2^2+3\,.\,2+1$$

$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3 \,.\, 3^2 + 3 \,.\, 3 + 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(m+1)^3 = \ldots\ldots = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$$

Dodając te równości, widzimy, że liczby $1^3, 2^3, \ldots m^3$ obustronnie się znoszą. Jest więc: $(m+1)^3 = 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+m^2)+$ $+3(1+2+3+\ldots+m)+(m+1)$ czyli $(m+1)^3 = 3(1^2+2^2+3^2$ $+\ldots+m^2)+\frac{3m(m+1)}{2}+(m+1)$, skąd: $3(1^2+2^2+3^2+\ldots+m^2) =$ $= (m+1)^3 - \frac{3m(m+1)}{2} - (m+1) = (m+1)\left[(m+1)^2 - \frac{3m}{2} - 1\right] =$ $= (m+1)\left[m^2+2m+1-\frac{3m}{2}-1\right] = \frac{(m+1).m.(2m+1)}{2}$, a stąd wynika widoczny wzór: $1^2+2^2+3^2+\ldots+m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

Zastosujmy właśnie ten wzór do sumy w nawiasie [ ] równości (II), kładąc $m = n - 1$. Otrzymamy:

$$\sigma = \frac{y_0^3}{2pn^3} \cdot \frac{n(n-1).(2n-1)}{6} = \frac{y_0^3}{12p} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} =$$

$$= \frac{y_0^3}{12p} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \ldots\ldots \text{(III)}.$$

Wstawiwszy tę wartość za σ w nierówność (I), otrzymamy:

$$\frac{y_0^3}{12p} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < M < \frac{y_0^3}{12p} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) + \frac{x_0 y_0}{n} \ldots \text{(IV)}.$$

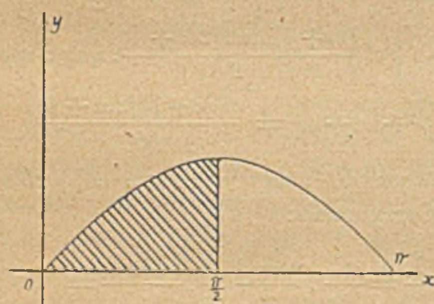
Ta nierówność zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$.

Załóżmy teraz, że zwiększamy ilość punktów podziału $d_1, d_2, d_3, \ldots d_{n-1}$ odcinka OC tak, że liczba n rośnie nieograniczenie. Wówczas strona lewa nierówności (IV) będzie mieć granicę, równą iloczynowi granic poszczególnych jej czynników czyli równą liczbie $\frac{y_0^3}{12p} \,.\, 1 \,.\, 2 = \frac{y_0^3}{6p}$; nadto strona prawa będzie posiadała granicę tę samą, gdyż jest: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_0 y_0}{n} = 0$, skąd wynika na mocy tw. o trzech ciągach, że jest: $\lim\limits_{n\to\infty} M = \frac{y_0^3}{6p}$, a ponieważ M nie zależy od zmiennej (n), więc $\lim\limits_{n\to\infty} M = M$, zatem $M = \frac{y_0^3}{6p} = \frac{2px_0 \cdot y_0}{6p} = \frac{1}{3} x_0 y_0$.

Liczbę M mamy odjąć od liczby $x_0 y_0$ mierzącej prostokąt $OABC$ (rys. 91), by otrzymać ostatecznie szukaną powierzchnię N, leżącą w pierwszej ćwiartce, zawartą między łukiem paraboli $\widehat{OB}$, osią odciętych i prostopadłą punktu B: $N = x_0 y_0 - \frac{1}{3} x_0 y_0 = \frac{2}{3} x_0 y_0$ ... (V).

Wyprowadziliśmy tem samem wzór Archimedesa na obliczenie t. zw. „powierzchni paraboli“.

Przykład II. Sinusojda. Rozważmy wykres funkcji $y = \sin x$ (rys. 93) i obliczmy pole, zawarte między łukiem sinusojdy w przedziale $(0, \pi)$ oraz osią odciętych. Ze względu na symetryczną budowę sinusojdy wystarczy obliczyć połowę tego pola, np. część zakreskowaną na rys. 93. W tym celu dzielimy odcinek $0, \frac{\pi}{2}$ na n równych części, z których każda mierzy się oczywiście liczbą $\frac{\pi}{2n}$; oznaczmy ją krótko przez h; więc $h = \frac{\pi}{2n}$, stąd $n \cdot h = \frac{\pi}{2}$.



Rys 93

W punktach podziału o odciętych h, $2h$ $3h$,... $(n-1)h$ wykreślamy prostopadłe do osi x i rysujemy szereg prostokątów zewnętrznych i wewnętrznych, podobnie, jak w przykładzie poprzednim. Każdy prostokąt wewnętrzny będzie miał za podstawę h, a za wysokość rzędną, należącą do lewego końca podstawy h; ilość tych prostokątów wynosi $(n-1)$. Pola tych prostokątów mierzyć się więc będą liczbami: $h \sin h$, $h \sin 2h$, $h \sin 3h$,....., $h \sin(n-1)h$. Każdy prostokąt zewnętrzny będzie równy jednemu z prostokątów wewnętrznych, z wyjątkiem ostatniego, który nie posiada odpowiednika wśród wewnętrznych prostokątów i mierzy się liczbą $h \sin \frac{\pi}{2}$.

Jeśli więc przez σ oznaczymy sumę pól prostokątów wewnętrznych, przez Σ zaś sumę pól prostokątów zewnętrznych, to będzie: $\Sigma = \sigma + h \sin \frac{\pi}{2} = \sigma + h$, bo $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Szukana miara powierzchni P jest zawarta między liczbami σ i Σ: $\sigma < P < \Sigma$ czyli jest: $\sigma < P < \sigma + h$, przyczem $\sigma = h\sin h + h\sin 2h + h\sin 3h + \ldots + h\sin(n-1)h = h[\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \ldots + \sin(n-1)h]$.

Prawą stronę tej równości pomnóżmy i podzielmy przez $2\sin\frac{h}{2}$; przez co jej wartość liczebna nie ulegnie zmianie; wolno to uczynić, gdyż jest $\sin h \neq 0$. Otrzymamy:

$$\sigma = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[2\sin h\sin\frac{h}{2} + 2\sin 2h\sin\frac{h}{2} + \ldots + 2\sin(n-1)h\sin\frac{h}{2}\right].$$

Do każdego wyrazu wielomianu w klamrze [ ] zastosujmy znany z trygonometrji wzór: $\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Kładąc $\frac{\alpha+\beta}{2} = h$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{h}{2}$, otrzymamy: $\alpha = \frac{3h}{2}$, $\beta = \frac{h}{2}$ i przeto: $2\sin h\sin\frac{h}{2} = \cos\frac{h}{2} - \cos\frac{3h}{2}$. Podobnie da się przedstawić drugi wyraz tego wielomianu: $2\sin 2h\sin\frac{h}{2} = \cos\frac{3h}{2} - \cos\frac{5h}{2}$, jeśli położymy $\frac{\alpha+\beta}{2} = 2h$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{h}{2}$. Tak samo obliczymy wyraz trzeci: $2\sin 3h\sin\frac{h}{2} = \cos\frac{5h}{2} - \cos\frac{7h}{2}$ i t. d., wreszcie wyraz ostatni t. j. $(n-1)$-szy: $2\sin(n-1)h\sin\frac{h}{2} = \cos\frac{2n-3}{2}h - \cos\frac{2n-1}{2}h$.

Podstawiając te wartości w powyższy wzór na σ, otrzymamy:

$$\sigma = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{3h}{2} + \cos\frac{3h}{2} - \cos\frac{5h}{2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \cos\frac{(2n-3)h}{2} - \cos\frac{(2n-1)h}{2}\right].$$

Z wyjątkiem pierwszego i ostatniego wyrazu wielomianu w klamrze wszystkie inne znoszą się wzajemnie; będzie więc:

$$\sigma = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{(2n-1)h}{2}\right].$$

skąd po ponownem zastosowaniu przytoczonego wzoru trygonometrycznego otrzymamy:

$$\sigma=\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\,2\sin\frac{nh}{2}\sin\frac{(n-1)h}{2}=h\,.\,\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\frac{(n-1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Ponieważ $nh=\frac{\pi}{2}$, więc $\frac{nh}{2}=\frac{\pi}{4}$ i zarazem: $\frac{(n-1)h}{2}=\frac{nh}{2}-\frac{h}{2}$ $=\frac{\pi}{4}-\frac{h}{2}$; jest więc:

$$\sigma=\frac{h\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Dzieląc dzielną i dzielnik przez $\frac{h}{2}$, otrzymujemy:

$$\sigma=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{h}{2}\right)}{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}.$$

Załóżmy, że ilość punktów podziału rośnie nieograniczenie ($n\rightarrow\infty$), tedy długość każdego odcinka h (zależna od liczby n) maleje do zera; skoro więc: $n\rightarrow\infty$, to $h=\frac{\pi}{2n}\rightarrow 0$. Wówczas granicą dzielnika $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ powyższego ilorazu (str. 73, przykład 6) jest liczba 1. dzielna zaś ma granicę: $2\,.\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=2\sin^2\frac{\pi}{4}=2\,.\frac{1}{2}=1$; zatem iloraz σ ma granicę 1 czyli $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma=1$.

Ponieważ jest $\Sigma=\sigma+h$, więc, gdy $h\rightarrow 0$ to

$$\lim_{n\to\infty}\Sigma=\lim_{n\to\infty}\sigma+\lim_{h\to 0}h=1+0=1.$$

Z nierówności: $\sigma<P<\Sigma$ możemy więc wnioskować na podstawie twierdzenia o trzech ciągach, że, gdy $n\rightarrow\infty$, to ciąg o wyrazach P ma granicę 1, ale liczba P nie zależy od zmiennej (n); jest więc $P=1$. Szukana powierzchnia, zawarta między łukiem sinusojdy od 0 do π a osią x, jest dwa razy większa od pola P, mierzy się więc liczbą 2.

Przykład III. Linja łańcuchowa. Łańcuch ciężki, a nierozciągliwy, zawieszony na swych dwóch końcach, pod wpływem siły ciężkości przyjmuje kształt krzywej, zwanej linją łańcuchową, o której dowodzi się w mechanice, że jej równanie ma postać:

$$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax}),$$

gdzie $a=\frac{q}{H}$, przyczem q oznacza ciężar łańcucha, przypadający na jednostkę długości, H zaś stałe poziome ciągnienie łańcucha. Pozostawiamy czytelnikowi wykreślenie krzywej na mocy wskazówek § 67 (zresztą zob. rys. 113, § 69).

Zadanie stawiamy sobie następujące: obliczyć pole zawarte między osią x, krzywą łańcuchową i prostopadłemi do osi x, nakreślonemi w punktach $(-b,0)$, $(+b,0)$, gdzie b oznacza dowolną liczbę dodatnią. Ponieważ oś y jest osią symetrji linji i rozważanego pola, więc obliczmy tylko połowę pola, leżącą po prawej stronie osi x, dokładniej: obliczmy pole, na którem leżą punkty (x,y) o własności $0\leqslant x\leqslant b$, $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})$.

Postępując, jak w poprzednich przykładach, dzielimy odcinek OM na n równych części, z których każda niech się mierzy liczbą h, przyczem przez M oznaczyliśmy punkt $(b,0)$. Wobec tego jest $h=\frac{b}{n}$; liczba h zależy więc od wyboru wartości n i należałoby pisać h_n zamiast h, nie czynimy tego jedynie dla uproszczenia rzeczy.

Następnie w punktach podziału kreślimy prostopadłe do osi x i budujemy prostokąty zewnętrzne i wewnętrzne względem rozważanego pola.

Oznaczmy przez σ sumę prostokątów wewnętrznych, z których każdy ma podstawę długości h, a wysokości równają się rzędnym w odpowiednich punktach $0, h, 2h, 3h, \ldots (n-1)h$. Suma σ zależna od liczby n, będzie złożona z n składników, bo tyle będzie prostokątów wewnętrznych. Obliczmy tę sumę:

$$\sigma = h\cdot\frac{1}{2a}\cdot(e^{0\cdot a}+e^{-0\cdot a})+h\cdot\frac{1}{2a}(e^{ah}+e^{-ah})+h\cdot\frac{1}{2a}\cdot(e^{2ah}+$$

$$+e^{-2ah})+\ldots+h\cdot\frac{1}{2a}(e^{(n-1)ah}+e^{-(n-1)ah})=$$

$$=\frac{h}{2a}(1+e^{ah}+e^{2ah}+e^{3ah}+\ldots+e^{(n-1)ah}+1+e^{-ah}+e^{-2ah}+\ldots+e^{-(n-1)ah}).$$

Uważamy wielomian w ostatnim nawiasie za sumę dwóch postępów geometrycznych, z których pierwszy ma iloraz e^{ah}, drugi zaś iloraz e^{-ah}, oba mają po (n) wyrazów, wyrazy pierwsze w obu są równe liczbie 1; otrzymamy tedy:

$$\sigma=\frac{h}{2a}\left[\frac{e^{nah}-1}{e^{ah}-1}+\frac{e^{-nah}-1}{e^{-ah}-1}\right].\ (\text{Jest bowiem } e^{ah}\neq 1,\ e^{-ah}\neq 1).$$

Ponieważ jest $\frac{b}{n}=h$, skąd $nh=b$, więc:

$$\sigma=\frac{h}{2a}\left\{\frac{e^{ab}-1}{e^{ah}-1}+\frac{e^{-ab}-1}{e^{-ah}-1}\right\}=\frac{1}{2a}\left\{h\frac{e^{ab}-1}{e^{ah}-1}+h\frac{e^{-ab}-1}{e^{-ah}-1}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2a}\left|\frac{\frac{h}{ah}\cdot\frac{e^{ab}-1}{1}}{\frac{e^{ah}-1}{ah}}-\frac{\frac{h}{ah}\cdot\frac{e^{-ab}-1}{1}}{\frac{e^{-ah}-1}{-ah}}\right|.$$

Ale udowodniliśmy, że, gdy $x\to 0$, to $\frac{e^x-1}{x}\to 1$, (str. 110), zatem, gdy $n\to\infty$, to $\frac{e^{ah}-1}{ah}\to 1$, oraz $\frac{e^{-ah}-1}{-ah}\to 1$ (str. 73, przykład 6).

Wartość więc sumy σ, gdy przyjmiemy, że ilość punktów podziału wzrasta nieograniczenie, przez co wielkość h maleje do zera, ma granicę równą granicy powyższego iloczynu dla $n\to\infty$; przeto

$$\lim_{h\to 0}\sigma=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a}\cdot\frac{e^{ab}-1}{1}+\frac{1}{a}\cdot\frac{1-e^{-ab}}{1}\right\}=\frac{1}{2a^2}(e^{ab}-e^{-ab}).$$

Suma Σ pól prostokątów zewnętrznych równa się sumie σ, powiększonej o pole jednego prostokąta, które jednak dla $n\to\infty$ ma granicę 0, zatem: $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\Sigma$.

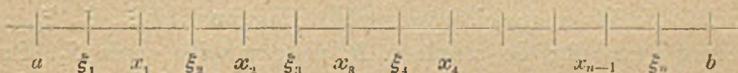
Szukana więc powierzchnia P, podobnie, jak w przykładach poprzednich, zawarta jest między wielkościami σ i Σ czyli $\sigma<P<\Sigma$, skąd wnioskujemy, że na mocy twierdzenia o trzech postępach, jest:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma = P = \lim_{n\to\infty} \Sigma = \frac{1}{2a^2}(e^{ab} - e^{-ab}).$$

Całe zaś pole, zawarte między linją łańcuchową, osią odciętych i prostopadłemi do osi x, nakreślonemi w punktach $(-b, 0)$ i $(+b, 0)$, wynosi $2P$ czyli mierzy się liczbą: $\frac{1}{a^2}(e^{ab} - e^{-ab})$.

§ 60. Definicja całki określonej.

Rachunek, jaki przeprowadziliśmy w powyższych przykładach, uogólnimy obecnie na wszystkie funkcje ciągłe w danym przedziale, starając się równocześnie przejść stopniowo od rozważań geometrycznych na teren rozumowań czysto analitycznych. Weźmy pod



Rys. 94.

uwagę funkcję: $y = f(x)$, określoną i ciągłą w przedziale (a, b). Niech odcinek $\overline{ab}$ na rys. 94 będzie obrazem geometrycznym tego przedziału; podzielmy go na n (równych lub nierównych) części, obierając na nim $(n-1)$ punktów podziału, oznaczonych przez x_1, x_2, x_3.... x_{n-1}. Punkty te rozmieszczamy dowolnie, byle liczby, odpowiadające im, spełniały nierówność: $a < x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_{n-1} < b$

W ten sposób odcinek $\overline{ab}$ rozpadł się na n t. zw. małych odcinków, których długości mierzyć się będą liczbami: $x_1 - a$; $x_2 - x_1$; $x_3 - x_2$;....; $x_{n-1} - x_{n-2}$; $b - x_{n-1}$. W każdym z tych małych odcinków obierzmy znów dowolnie punkt ξ, a mianowicie na odcinku $\overline{ax_1}$ punkt ξ_1, na następnym $\overline{x_1 x_2}$ punk ξ_2 i t. d. Ponieważ funkcja $y = f(x)$ jest w każdym punkcie od (a) do (b) określoną, więc jest określoną także w punktach ξ_1, ξ_2, ξ_3.... ξ_n zatem liczby: $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, $f(\xi_3)$,...., $f(\xi_n)$ są zupełnie określone. Punkty ξ_1, ξ_2,.... ξ_n nazywać będziemy punktami pośrednimi przy danym rozkładzie przedziału (a, b) na części.

Utwórzmy następnie iloczyn liczby, mierzącej długość odcinka $\overline{ax_1}$ i wartości funkcji w punkcie ξ_1. Jeżeli jest $f(\xi_1) > 0$. to geometrycznie oznaczać będzie taki iloczyn pole prostokąta, którego podstawa równa się odcinkowi $\overline{ax_1}$, a wysokość jest równa rzędnej $y_1 = f(\xi_1)$; podobnie utworzymy iloczyn liczby, mierzącej długość odcinka $\overline{x_1 x_2}$ i wartości funkcji w punkcie ξ_2 czyli iloczyn $(x_2 - x_1) \cdot f(\xi_2)$ i t. d. postępujemy wzdłuż całego przedziału (a, b). Te poszczególne iloczyny, dodane do siebie, utworzą sumę:

$$S_1 = (x_1 - a) \cdot f(\xi_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(\xi_2) + (x_3 - x_2) \cdot f(\xi_3) + \dots$$
$$+ (b - x_{n-1}) \cdot f(\xi_n).$$

Ze sposobu otrzymania tej sumy wynika, że jest ona zależna od następujących okoliczności: 1) od wybranej funkcji $y = f(x)$; 2) od wybranego przedziału (a, b); 3) od ilości (n) punktów podziału $x_1, x_2, x_3 \dots x_{n-1}$, oraz od sposobu ich rozmieszczenia w przedziale (a, b); 4) od wyboru pośrednich punktów $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$ w każdym z małych odcinków.

Sposób, przy pomocy którego dokonaliśmy tego rozkładu przedziału (a, b) na części, oraz wybraliśmy punkty $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_n$, oznaczmy literą R_1; do rozkładu R_1 należy więc suma S_1. Przez rozkład R_2 oznaczmy rozkład inny (np. o większej ilości punktów podziału odcinka (a, b)), do którego należy podobnie utworzona suma S_2. Obierzmy teraz nieskończony ciąg rozkładów: $R_1, R_2, R_3 \dots$, do którego należy odpowiedni ciąg nieskończony sum $S_1, S_2, S_3 \dots$

Udowodnimy, że, jeśli ilość punktów podziału odcinka (a, b) na części rośnie nieograniczenie, a długość każdej z tych części maleje do zera, to wtedy ciąg sum $S_1, S_2, S_3 \dots$ ma granicę, która zależy *tylko* od wybranej funkcji i przedziału (a, b), a *nie* zależy od sposobu rozkładu R. Weźmy jeden z rozkładów, np. rozkład R_k. Otóż określa się rozkład R_k w ten sposób, że przez wstawienie punktów podziału $x_1, x_2, x_3 \dots$ dzieli się przedział (a, b) na (n) małych przedziałów, ponadto wybiera się ciąg punktów pośrednich $\xi_1, \xi_2 \dots$ Oznaczmy przez Δ_k długość największego z małych odcinków tego rozkładu; jeśliby zaś były równe, to Δ_k niech będzie ich wspólną wartością. Gdy $\Delta_k \to 0$ dla $k \to \infty$, to $n \to \infty$. Otóż twierdzimy, że: *gdy $\Delta_k \to 0$, to suma S_k: 1) ma granicę, 2) niezależną od sposobu wyboru punktów podziału $x_1, x_2, x_3 \dots$ i punktów pośrednich $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$, jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest ciągłą w całym przedziale (a, b).*

Dowód. Jeżeli funkcja $y = f(x)$ jest w przedziale (a, b) ciągłą, to przyjmuje w tym przedziale wartość M największą i wartość m

najmniejszą (maximum i minimum), (str. 131), przyczem dla każdej liczby x przedziału (a, b) zachodzi związek $m \leqslant f(x) \leqslant M$..... (1)

Liczby ξ_1, ξ_2, ξ_3.... są również liczbami przedziału (a, b) związek (1) jest więc dla każdej z nich prawdziwy. Jest przeto: $m \leqslant f(\xi_1) \leqslant M$, $m \leqslant f(\xi_2) \leqslant M$, $m \leqslant f(\xi_3) \leqslant M$,..., $m \leqslant f(\xi_n) \leqslant M$... (2). Pierwszą z nierówności pod (2) pomnóżmy stronami przez liczbę $x_1 - a$, drugą przez liczbę $x_2 - x_1$, trzecią przez $x_3 - x_2$ i t. d., wreszcie ostatnią przez liczbę $b - x_{n-1}$, przyczem wszystkie te liczby są dodatnie, wolno więc nierówności (2) przez nie mnożyć, nie zmieniając kierunku znaków w nierównościach. Otrzymamy w ten sposób związki:

$$\left.\begin{array}{l} m(x_1 - a) \leqslant f(\xi_1)\,.\,(x_1 - a) \leqslant M(x_1 - a) \\ m(x_2 - x_1) \leqslant f(\xi_2)\,.\,(x_2 - x_1) \leqslant M(x_2 - x_1) \\ m(x_3 - x_2) \leqslant f(\xi_3)\,.\,(x_3 - x_2) \leqslant M(x_3 - x_2) \\ \dotfill \\ m(b - x_{n-1}) \leqslant f(\xi_n)\,.\,(b - x_{n-1}) \leqslant M(b - x_{n-1}) \end{array}\right| \ldots\ldots (3).$$

Nierówności (3), których ilość wynosi n, dodajmy do siebie stronami; strony środkowe zesumowane utworzą znaną nam sumę S; ze sumy stron lewych da się wyciągnąć przed nawias wspólny czynnik m, ze sumy zaś stron prawych M. Otrzymamy zatem, sumując nierówności (3) nierówność:

$$m[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})] \leqslant S \leqslant M[(x_1 - a) +$$
$$+ (x_2 - x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})] \ldots\ldots (4).$$

Klamry po lewej i prawej stronie nierówności (4) zawierają sumę wszystkich liczb, mierzących odcinki, na jakie cały przedział (a, b) został podzielony; suma ta jest więc równą liczbie, mierzącej cały odcinek (a, b) czyli liczbie $(b - a)$. Nierówność (4) przyjmuje przeto postać: $m(b - a) \leqslant S \leqslant M(b - a)$..... (5).

Widzimy z tej nierówności, że, jakkolwiek wybralibyśmy punkty podziału x_1, x_2, x_3.... i punkty pośrednie ξ_1, ξ_2...., to suma S zawarta będzie zawsze między liczbami $m(b - a)$ i $M(b - a)$ a więc zbiór liczb S jest ograniczony u dołu i u góry. Zwiększajmy teraz ilość punktów podziału odcinka (a, b) przez kolejne rozkłady. Jest oczywistem, że sposoby rozkładu odcinka (a, b) na części mogą być dwóch różnych typów: albo wszystkie punkty poprzedniego podziału pozostają nadal punktami podziału dla następnego rozkładu albo tak nie jest. Będziemy naprzód rozważali sumy S_k dla rozkładów pierwszego typu.

Niech R_1 oznacza rozkład odcinka (a, b) na pewną ilość części i pewien wybór punktów pośrednich. Obliczmy sumę S dla tego rozkładu. Tak otrzymaną sumę oznaczmy przez S_1. Następnie przyjmujemy pewien rozkład R_2, taki, że wszystkie punkty podziału z rozkładu R_1 pozostają nadal punktami podziału w rozkładzie R_2; a więc odcinki: $(a x_1)$, $(x_1 x_2)$, $(x_2 x_3)$....$(x_{n-1} b)$ z rozkładu R_1 rozpadają się tylko na mniejsze części. Dobierając znów nowe punkty pośrednie ξ_1, ξ_2..,. obliczmy sumę S dla rozkładu R_2 i oznaczmy ją literą S_2. Zachowując punkty podziału w rozkładzie R_2, tworzymy znów rozkład R_3; dawne odcinki dzielą się na jeszcze mniejsze; czynimy to stale, ale tak, że maksymalna długość tych odcinków Δ dąży do zera. Postępując w ten sposób coraz dalej, otrzymujemy nieskończony ciąg rozkładów R_1, R_2, R_3.... i nieskończony ciąg liczb: S_1, S_2, S_3...., przyczem zawsze punkty podziału w rozkładzie R_k pozostają punktami podziału w rozkładzie R_{k+1} i nadto liczba Δ_k dąży do zera, gdy $k \rightarrow \infty$. Plan dowodu będzie następujący: każdą liczbę S_k zamkniemy między dwie liczby σ i Σ z odpowiednimi wskaźnikami, a których znaczenie zaraz poniżej wyjaśnimy; będzie tedy:

$$\sigma_1 \leqslant S_1 \leqslant \Sigma_1, \; \sigma_2 \leqslant S_2 \leqslant \Sigma_2, \; \sigma_3 \leqslant S_3 \leqslant \Sigma_3, ..., \; \sigma_n \leqslant S_n \leqslant \Sigma_n .... \quad (6),$$

przyczem liczby σ_n i Σ_n będą tak określone, że nie zależą od wyboru punktów pośrednich w przeciwstawieniu do liczb S_n.

Udowodnimy następnie, że ciąg liczb σ_1, σ_2, σ_3,... oraz Σ_1, Σ_2, Σ_3.... mają granicę, i to wspólną, przeto i ciąg liczb S_n ma granicę i niezależną od wyboru punktów pośrednich. Weźmy pod uwagę n-ty wyraz ciągu rozkładów R_1, R_2,...,... czyli rozkład R_n. Jest to podział odcinka (a, b) na pewną ilość, powiedzmy p części. Oznaczmy przez z_1, z_2, z_3... z_{p-1} punkty tego podziału, a przez ζ_1, ζ_2, ζ_3... punkty pośrednie, wybrane odpowiednio zresztą dowolnie w każdym z małych przedziałów, na jakie rozpadł się cały przedział (a, b). Dla rozkładu R_n utwórzmy sumę:

$$S_n = f(\zeta_1)(z_1 - a) + f(\zeta_2) . (z_2 - z_1) + ... + f(\zeta_p) . (b - z_{p-1}) .... \quad (7).$$

Skoro funkcja $y = f(x)$ jest ciągłą w każdym z tych małych przedziałów, na jakie cały przedział (a, b) został podzielony, przeto w każdym z nich przyjmuje pewne maximum i pewne minimum. Oznaczmy przez M_1 i m_1 maximum, wzgl. minimum tej funkcji w pierwszym z małych przedziałów, t. j. w przedziale (a, z_1); przez

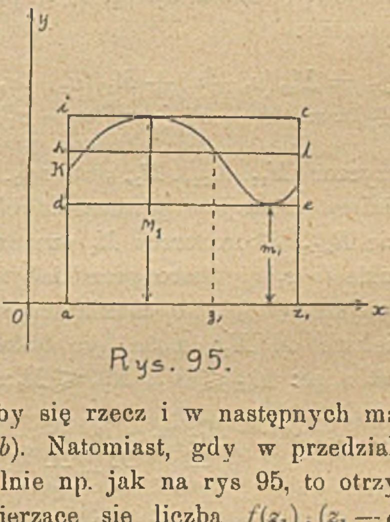
M_2 i m_2 rozumieć będziemy maximum, wzgl. minimum funkcji w przedziale drugim, t. j. (z_1, z_2) i t. d., wreszcie M_p i m_p oznaczać będą maximum wzgl. minimum funkcji $y = f(x)$ w p-tym czyli ostatnim małym przedziale. Utwórzmy przy tych oznaczeniach liczbę:

$$\Sigma_n = M_1(z_1 - a) + M_2(z_2 - z_1) + M_3(z_3 - z_2) + \ldots + M_p(b - z_{p-1}) \ldots \quad (8)$$

Liczbę Σ_n możemy uważać za szczególny przypadek liczby S_n; jeśli bowiem liczby pośrednie $\mathfrak{z}$ wybierzemy tak, iżby było: $f(\mathfrak{z}_1) = M_1$, $f(\mathfrak{z}_2) = M_2$, $f(\mathfrak{z}_3) = M_3$ i t. d., to suma S_n będzie z liczbą Σ_n identyczną. Podobnie za szczególny przypadek liczby S_n możemy uważać liczbę:

$$\sigma_n = m_1(z_1 - a) + m_2(z_2 - z_1) + \ldots + m_p(b - z_{p-1}) \ldots \quad (9).$$

Wracając do określeń, których użyliśmy w przykładach § 59, możemy określić Σ_n jako sumę pól prostokątów zewnętrznych, σ_n zaś za sumę pól prostokątów wewnętrznych, takich, jak to przedstawia rys. 95, o ile $f(x) \geqq 0$. Jeśli krzywa K przedstawia funkcję $y = f(x)$ w pierwszym małym przedziale odcinka (a, b), t. j. w przedziale (a, z_1), to pole prostokąta $aicz_1$ mierzy liczba $M_1(z_1 - a)$, t. j. pierwszy składnik sumy Σ_n, pole prostokąta zaś $adez_1$ mierzy się liczbą $m_1(z_1 - a)$ [pierwszym składnikiem sumy σ_n]; podobnie miałaby się rzecz i w następnych małych przedziałach przedziału (a, b). Natomiast, gdy w przedziale (a, z_1) wybierzemy liczbę $\mathfrak{z}_1$ dowolnie np. jak na rys 95, to otrzymamy pole prostokąta $ahlz_1$, mierzące się liczbą $f(\mathfrak{z}_1) . (z_1 - a)$ [pierwszym składnikiem sumy S_n] i będzie to przypadek ogólny w stosunku do dwóch poprzednich szczególnych przypadków. Jak dla rozkładu R_n otrzymaliśmy liczby S_n, Σ_n i σ_n, tak dla rozkładów R_1, R_2, R_3.... otrzymamy liczby:



Rys. 95.

$$S_1, S_2, S_3 \ldots\ldots; \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \ldots\ldots; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots\ldots$$

Naśladując rozumowanie, które od nierówności (2) doprowadziło do nierówności (3), uzasadnia się z łatwością nierówności (6); jest bowiem $m_i \leqq f(\mathfrak{z}_i) \leqq M_i$, gdy $i = 1, 2, \ldots p$.

Skoro liczby Σ_n i σ_n są tylko szczególnymi przypadkami sumy S_n, więc prawdziwe są dla nich następujące związki, zbudodowane na wzór nierówności (5):

$$m(b-a) \leqslant \Sigma_n \leqslant M(b-a);\ m(b-a) \leqslant \sigma_n \leqslant M(b-a) \dots\ (10).$$

Te wzory wykazują, że ciągi liczb σ_n i Σ_n są ograniczone i u góry i u dołu.

Przejdźmy teraz do rozkładu R_{n+1}; punkty podziału $z_1, z_2, z_3 \dots$ z rozkładu R_n pozostają nadal punktami podziału w rozkładzie R_{n+1}; prócz tego wstawiamy nowe punkty podziału u_1, u_2, $u_3 \dots$, tak, iż przedział (a, b) rozpadł się na większą ilość części, np. na q części, gdzie $q > p$. Obliczmy liczby S_{n+1}, Σ_{n+1} i σ_{n+1} dla rozkładu R_{n+1}. Jeśli np. pierwszy mały przedział (a, z_1) rozkładu R_n został przy nowym rozkładzie R_{n+1} podzielony np. na r części przez wstawienie punktów podziału u_1, u_2, u_{r-1}, przyczem $a < u_1 < u_2 < u_{r-1} < z_1$, to mamy:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_{n+1} &= M_{11}(u_1 - a) + M_{12}(u_2 - u_1) + \dots + M_{1r}(z_1 - u_{r-1}) + \dots \\ \sigma_{n+1} &= m_{11}(u_1 - a) + m_{12}(u_2 - u_1) + \dots + m_{1r}(z_1 - u_{r-1}) + \dots \end{aligned}\right\} (11),$$

przyczem M_{11}, $M_{12}, \dots M_{1r}$ oraz m_{11}, $m_{12}, \dots m_{1r}$ oznaczają maxima wzgl. minima funkcji w poszczególnych małych przedziałach w rozkładzie R_{n+1}. Skoro przez M_1 oznaczaliśmy maximum funkcji w przedziale (a, z_1) i skoro przedział ten został obecnie podzielony na mniejsze części, to maximum w każdej z nich nie może być większe od M_1; może być tylko mniejsze lub równe tej liczbie. Jest więc: $M_{11} \leqslant M_1$; $M_{12} \leqslant M_1; \dots$; $M_{1r} \leqslant M_1$. Przeto:

$$M_{11}(u_1 - a) + M_{12}(u_2 - u_1) + \dots + M_{1r}(z_1 - u_{r-1}) \leqslant M_1(u_1 - a) + M_1(u_2 - u_1) + \dots + M_1(z_1 - u_{r-1}) = M_1(z_1 - a).$$

Z tego zaś widoczne, że jest $\Sigma_{n+1} \leqslant \Sigma_n$ czyli, że ciąg liczb Σ_n jest ciągiem nierosnącym; stąd i na podstawie nierówności (10) wynika, że ma granicę (str. 62); oznaczmy ją przez Σ_0. Jest więc:

$$\lim_{n \to \infty} \Sigma_n = \Sigma_0 \dots\ (12).$$

Minima w przedziałach, na które rozpadł się przedział pierwszy (a, z_1) nie mogą być mniejsze od liczby m_1; jest więc $m_1 \leqslant m_{11}$; $m_1 \leqslant m_{12}; \dots; m_1 \leqslant m_{1r}$, przeto $m_1(z_1 - a) = m_1[(u_1 - a) + (u_2 - u_1) + \dots + (z_1 - u_{r-1})] \leqslant m_{11}(u_1 - a) + m_{12}(u_2 - u_1) + \dots + m_{1r}(z_1 - u_{r-1})$, przeto będzie $\sigma_n \leqslant \sigma_{n+1}$; ciąg liczb σ_n jest zatem niemalejącym[1]), oraz według (10) ograniczonym u góry. Granica więc tego ciągu istnieje; oznaczmy ją przez σ_0: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma_0$.... (13). Udowodnimy teraz, że obie granice Σ_0 i σ_0 są sobie równe.

Aby to wykazać, odejmijmy stronami równość (9) od równości (8). Po drobnem przekształceniu otrzymamy:

$$\Sigma_n - \sigma_n = (z_1 - a)(M_1 - m_1) + (z_2 - z_1)(M_2 - m_2) + \dots$$
$$+ (b - z_{p-1})(M_p - m_p) \dots \quad (14).$$

Różnicę $M_1 - m_1$ możemy według podanej poprzednio definicji (§ 31) uważać za oscylację funkcji $f(x)$ w przedziale (a, z_1), i oznaczymy ją przez ω_1. Podobnie jest $M_2 - m_2 = \omega_2$ oscylacją funkcji w przedziale (z_1, z_2) i t. d.

Równości (14) nadamy więc postać:

$$\Sigma_n - \sigma_n = (z_1 - a)\,\omega_1 + (z_2 - z_1)\,\omega_2 + (z_3 - z_2)\,\omega_3 + \dots$$
$$+ (b - z_{p-1})\,\omega_p \dots \quad (15).$$

Jak wiadomo, z ciągłości funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b) wynika (str. 137), że oscylacje ω_i można dowolnie zmniejszyć; w tym celu wystarczy wybrać odpowiednio drobne małe przedziały; ściślej: do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że, jeśli tylko długość maksymalna Δ_n małych przedziałów danego rozkładu jest mniejszą od liczby δ, to oscylacja funkcji w każdym małym przedziale rozkładu R_n spełnia nierówność $0 \leqslant \omega_i < \varepsilon$. Ponieważ $\Delta_n \to 0$, więc istnieje liczba naturalna N taka, że, o ile $n \geqslant N$, to jest $\Delta_n < \delta$. Wskutek tego każdy rozkład R_n, gdzie $n \geqslant N$ podzieli przedział (a, b) już na tak drobne przedziały, iż oscylacja ω_i w każdym z nich jest mniejsza od liczby ε. Wówczas prawa strona równości (15) zwiększy się, jeśli zamiast liczb ω_1, ω_2, ω_3,.... ω_p podstawimy wszędzie liczbę ε. Otrzymamy wtedy nierówność: $\Sigma_n - \sigma_n < \varepsilon(z_1 - a) + \varepsilon(z_2 - z_1) + \varepsilon(z_3 - z_2) + \dots + \varepsilon(b - z_{p-1})$ czyli $\Sigma_n - \sigma_n < \varepsilon \,.\, (b - a)$.... (16), o ile jest $n \geqslant N$.

Ponieważ liczbę ε można dowolnie małą obrać, byle było $\varepsilon > 0$, więc też iloczyn $\varepsilon(b - a)$ można uczynić dowolnie małym, a że

---

[1]) Wykazaliśmy zatem następującą własność sum σ_k, Σ_k (dla $k = n, n+1$): *jeżeli wszystkie punkty podziału, należące do rozkładu R_n przedziału (a, b) na małe przedziały są zarazem punktami podziału w rozkładzie R_{n+1}, to jest*: $\sigma_n \leqslant \sigma_{n+1}$, $\Sigma_{n+1} \leqslant \Sigma_n$.

jest $\Sigma_n - \sigma_n \geqslant 0$, więc $\Sigma_n - \sigma_n \to 0$, gdy $n \to \infty$. Ale równocześnie według równości (12) i (13) i § 20 różnica $\Sigma_n - \sigma_n$ ma granicę $\Sigma_0 - \sigma_0$; ponieważ zaś ciąg dwóch różnych granic mieć nie może, więc wnosimy, że jest $\Sigma_0 - \sigma_0 = 0$ czyli $\Sigma_0 = \sigma_0$... (17) c. b. d. u. [1]).

Liczby Σ_0 i σ_0 są granicami ciągów liczbowych $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_n$, oraz $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$, więc na podstawie nierówności (6), stosując twierdzenie o trzech ciągach, wnosimy stąd, że granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ istnieje i że jest $\sigma_0 = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \Sigma_0$.

Liczby σ_n, Σ_n nie zależą od wyboru punktów pośrednich $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, tedy ich granice σ_0, Σ_0 od niego nie zależą. Wykazaliśmy zatem, że, jeżeli ciąg rozkładów $R_1, R_2, R_3, \ldots$ jest pierwszego typu t. zn. jeżeli wszystkie punkty podziału z rozkładu R_n są także punktami podziału dla rozkładu R_{n+1} i jeżeli $\Delta_n \to 0$, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, niezależna od wyboru punktów pośrednich dla każdego z rozkładów.

Z tego bynajmniej nie wynika (bez osobnego dowodu), jeżeli $R_1, R_2, R_3, \ldots$ jest jednym ciągiem rozkładów typu pierwszego i jeżeli $\Delta_n \to 0$, zaś ciąg $R'_1, R'_2, R'_3, \ldots$ jest drugim ciągiem rozkładów też pierwszego typu i jeżeli [2]) $\Delta'_n \to 0$, gdy $n \to \infty$, aby oba ciągi rozkładów dawały *tę samą granicę* odpowiednio utworzonych sum S_n, S'_n.

Zamiast to zbadać, zajmiemy się sprawą ogólniejszą. Weźmiemy pod uwagę dwa nieskończone ciągi rozkładów: najpierw ciąg $R_1, R_2, R_3, \ldots$ jeden z dopieroco rozważanych, a więc ciąg pierwszego typu o własności $\Delta_n \to 0$, gdy $n \to \infty$. Nadto dla każdego rozkładu R_n tworzymy sumy σ_n, S_n, Σ_n, jak poprzednio. Wiemy, że jest $\sigma_n \leqslant S_n \leqslant \Sigma_n$.... (18) i że istnieje wspólna granica $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \Sigma_n$.

Obok tego bierzemy inny ciąg rozkładów: $R'_1, R'_2, R'_3, \ldots R'_n \ldots$ (19) albo pierwszego albo drugiego typu, ale taki, że $\Delta'_n \to 0$, jeżeli Δ'_n oznacza największą długość małych przedziałów, na jakie rozpadł się przedział (a, b) przy rozkładzie R'_n. Dla rozkładu R'_n tworzymy

---

[1]) Zauważmy, że w dowodzie równości $\lim\limits_{n\to\infty} (\Sigma_n - \sigma_n) = 0$ nie korzystaliśmy z tego, czy mamy pierwszy typ następstwa rozkładów, czy też drugi.

[2]) Ciąg Δ'_n ma określenie to samo w stosunku do ciągu R'_n, jakie ma ciąg Δ_n w stosunku do ciągu R_n.

znów sumy σ_n', S_n', Σ_n' i znów jest dla każdej liczby naturalnej n: $\sigma_n' \leqslant S_n' \leqslant \Sigma_n'$. Wykażemy, że istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'$ i równa granicy S.

W tym celu rozważmy rozkłady R_n i R_n' i utwórzmy rozkład R_n'' w ten sposób, że wszystkie punkty podziału z rozkładów R_n, R_n' stają się punktami rozkładu R_n'', poczem obierzmy dla rozkładu R_n'' punkty pośrednie. Oznaczmy przez σ_n'', S_n'', Σ_n'' odpowiednie sumy dla rozkładu R_n''. Zauważmy, że stosunek rozkładu R_n'' do każdego z rozkładów R_n i R_n' jest analogiczny do powyżej zbadanego stosunku rozkładu R_{n+1} do rozkładu R_n. Wobec tego jest według tw. ze str. 315 jest $\sigma_n \leqslant \sigma_n''$, $\Sigma_n'' \leqslant \Sigma_n$, $\sigma_n' \leqslant \sigma_n''$, $\Sigma_n'' \leqslant \Sigma_n'$, a, że jest $\sigma_n'' \leqslant S_n'' \leqslant \Sigma_n''$, więc jest $\sigma_n \leqslant \sigma_n'' \leqslant S_n'' \leqslant \Sigma_n'' \leqslant \Sigma_n$, $\sigma_n' \leqslant \sigma_n'' \leqslant S_n'' \leqslant \Sigma_n'' \leqslant \Sigma_n'$, skąd wynika też, że jest $\sigma_n \leqslant S_n'' \leqslant \Sigma_n$, $\sigma_n' \leqslant S_n'' \leqslant \Sigma_n'$ (20), obok czego jest też: $\sigma_n \leqslant S_n \leqslant \Sigma_n$, $\sigma_n' \leqslant S_n' \leqslant \Sigma_n'$ ... (21).

Weźmy teraz pod uwagę różnicę $S_n - S_n''$, którą przekształcimy w inną w sposób następujący: zamiast odjemnej S_n weźmy liczbę Σ_n (przez co różnicy *nie* zmniejszyliśmy), a zamiast odjemnika S_n'' weźmy σ_n (znów różnicy *nie* zmniejszamy), tedy jest: $S_n - S_n'' \leqslant \Sigma_n - \sigma_n$. Nie zwiększamy zaś różnicy, gdy zamiast liczb S_n, S_n'' bierzemy σ_n, Σ_n czyli $S_n - S_n'' \geqslant \sigma_n - \Sigma_n = -(\Sigma_n - \sigma_n)$. Jest więc: $-(\Sigma_n - \sigma_n) \leqslant S_n - S_n'' < \Sigma_n - \sigma_n$, co można powtórzyć we formie $|S_n - S_n''| \leqslant \Sigma_n - \sigma_n$. Podobnie będzie: $|S_n' - S_n''| \leqslant \Sigma_n' - \sigma_n'$. Stąd zauważymy, że jest: $0 \leqslant |S_n - S_n'| = |(S_n - S_n'') + (S_n'' - S_n')| \leqslant |S_n - S_n''| + |S_n'' - S_n'| \leqslant \Sigma_n - \sigma_n + \Sigma_n' - \sigma_n'$ .... (22).

Ponieważ $\Delta_n \to 0$, $\Delta_n' \to 0$, gdy $n \to \infty$, więc jest $\Sigma_n - \sigma_n \to 0$, $\Sigma_n' - \sigma_n' \to 0$, jak to poprzednio w przypisku do str. 316 zauważyliśmy, przeto też $\lim\limits_{n\to\infty}(\Sigma_n - \sigma_n + \Sigma_n' - \sigma_n') = 0$. Stąd i z nierówności (22) na mocy twierdzenia o trzech ciągach istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n - S_n'|$ i równa zeru, przeto także $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_n') = 0$. Ale jest: $S_n' = S_n - (S_n - S_n')$; ponieważ istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_n')$, więc (str. 63) istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'$ i jest $\lim S_n' = \lim S_n$, co mieliśmy wykazać.

Udowodniliśmy tedy następujące:

Tw. 1) Jeżeli jest $a > b$, 2) jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), 3) jeżeli przedział (a, b) podzielimy przy pomocy dowolnego ciągu rozkładów R_1, R_2, R_3,... R_n,.... na małe przedziały, *wstawiając między liczby a i b punkty podziału i przyjmując w każdym małym przedziale punkty pośrednie*; 4) *jeżeli dla rozkładu* R_n *liczby* $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ *są punktami podziału (przyczem* $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} < b$*), zaś* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ *oznaczają punkty pośrednie,* 5) *jeżeli:*

$$S_n = (x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + (x_3 - x_2)f(\xi_3) + \ldots$$
$$+ (b - x_{p-1})f(\xi_p) = \sum_{\varkappa=1}^{p}(x_\varkappa - x_{\varkappa-1})\cdot f(\xi_\varkappa) \quad (\textit{gdzie } a = x_0,\ b = x_p)$$

i 6) *jeżeli* $\Delta_n = \mathrm{Max}(x_1 - a,\ x_2 - x_1, \ldots,\ b - x_{p-1}) \to 0$, *gdy* $n \to \infty$, *to suma* S_n *ma granicę, gdy* $n \to \infty$ *i niezależną ani od wyboru punktów podziału ani od wyboru punktów pośrednich, a zależną jedynie od funkcji* $f(x)$ *i przedziału* (a, b).

Granicę sumy S_n nazywamy *całką określoną funkcji* $f(x)$ *od a do b* i oznaczamy znakiem[1])

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Jest więc $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Wobec tego można wysłowić następujące twierdzenie: *jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest ciągłą w przedziale* (a, b), *to ma całkę określoną od a do b t. zn. całka określona z funkcji* $f(x)$ *jest liczbą najzupełniej oznaczoną.*

Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją podcałkową, x jest zmienną całkowania, liczba a jest dolną granicą, zaś b górną granicą całki określonej; przedział (a, b) zowiemy przedziałem całkowania. Znaczenie geometryczne całki określonej wynika z rozważań intuicyjnych § 59, a mianowicie liczba, którą nazwaliśmy całką określoną funkcji $f(x)$ w granicach od a do b, jest w przypadku funkcji ciągłej i nieujemnej liczbą mierzącą pole ograniczone łukiem krzywej o równaniu $y = f(x)$, prostopadłemi do osi x-ów, wykreślonemi w punktach o współrzędnych $(a,0)$ i $(b,0)$, oraz odcinkiem osi odciętych od punktu $(a,0)$ do punktu $(b,0)$ (zresztą zob. § 59).

---

[1]) Znak całki określonej, wywodzący się z pierwszej litery słowa: summa jest tu widocznie usprawiedliwiony, zaś znak całki nieokreślonej wyjaśni § 64 związkiem między obiema całkami. Znak dx pod znakiem całki określonej opiera się na błędnem utożsamianiu różniczki dx i różnic $x_{i+1} - x_i$, dążących do zera.

Weźmy teraz pod uwagę dwie całki kształtu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ i $\int\limits_b^a f(x)\,dx$, przyczem niech będzie $a < b$; różnią się one tylko tem, że górna granica jednej z nich jest granicą dolną drugiej. Otóż umawiamy się, że drugą z nich będziemy uważali za ujemną wartość pierwszej czyli, że jest: $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$, gdy jest $a < b$. Wtedy jest $\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^a f(x)\,dx = 0$ bez względu na to, czy jest $a < b$, czy też $b < a$.

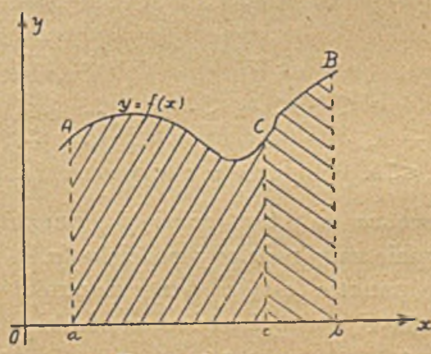
Weźmy wreszcie przypadek, kiedy obie granice całki są sobie równe czyli, kiedy $a = b$; wówczas przez całkę określoną, której granica górna równa się dolnej dla funkcji $f(x)$, kiedy wartość $f(a)$ jest określoną, rozumieć będziemy liczbę zero; jest więc:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Geometryczne znaczenie tych definicji jest oczywiste.

§ 61. Twierdzenie o rozkładzie całki określonej.

Wyobraźmy sobie przedział (a, b), w którym dana funkcja $f(x)$ jest ciągłą i obierzmy jakikolwiek punkt c tego przedziału, byle było $a < c < b$. Przedział (a, b) możemy wtedy uważać za złożony z dwu przedziałów (a, c) i (c, b).



Rys. 96.

Z rys. 96 widać, że powierzchnia zacieniowana, która mierzy się, jak już wiemy liczbą $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, może być uważaną za sumę pól $aACc$ i $cCBb$, mierzonych liczbami $\int\limits_a^c f(x)\,dx$, wzgl. $\int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Zatem jeśli liczba c spełnia warunek $a < c < b$, to wtedy jest:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Rozważania geometryczne doprowadzają nas więc do następującego ogólnego twierdzenia: *jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) i jeżeli c oznacza dowolną liczbę tego przedziału ($a \leqslant c \leqslant b$), to jest:*

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dowód. Równość (1) jest prawdziwą dla $a = c$, gdyż wtedy wyraża, że jest zgodnie z prawda $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. Podobnież jest słuszną równość (1), gdy jest $c = b$, wtedy bowiem ona daje $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Załóżmy teraz, że jest $a < c < b$. Z definicji całki określonej wynika, że całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest granicą sumy:

$$S_n = (x_1 - a) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \dots + (b - x_n) f(\xi_n),$$

gdy $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, $\Delta_n = \operatorname{Max}(x_1 - a,\ x_2 - x_1, \dots,\ b - x_{n-1}) \to 0$, nadto ma być: $a \leqslant \xi_1 \leqslant x_1$, $x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2, \dots\ x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant b$. Ponieważ w przypadku funkcji ciągłej granica $\lim_{n\to\infty} S_n$ od wyboru punktów podziału i punktów pośrednich nie zależy, więc wybierzmy rozkłady podziału (a, b) na małe przedziały stale takie, że punkt c jest jednym z punktów podziału, wobec czego możemy sumę S_n rozłożyć na dwa składniki ujęte dla uwidocznienia w klamry:

$$S_n = [(x_1 - a) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \dots + (c - x_{m-1}) f(\xi_m)] +$$
$$+ [(x_{m+1} - c) f(\xi_{m+1}) + (x_{m+2} - x_{m+1}) f(\xi_{m+2}) + \dots + (b - x_{n-1}) f(\xi_n)];$$

ponieważ ma być $\Delta_n \to 0$ i punkt c przy każdej wartości na n jest jednym z punktów podziału, tedy też $\Delta'_m = \operatorname{Max}(x_1 - a,\ x_2 - x_1, \dots,$

$c - x_{m-1}) \to 0$. Pierwszy więc składnik sumy S_n dąży do granicy $\int_a^c f(x)\,dx$. Podobnież dla drugiego składnika musi być $\Delta''_{n-m} = \mathrm{Max}(x_{m+1} - c, x_{m+2} - x_{m+1}, \ldots, b - x_{n-1}) \to 0$; przeto i drugi składnik sumy S_n ma granicę i równą całce $\int_c^b f(x)\,dx$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$, więc (§ 20) twierdzenie o granicy sumy daje nam tu bezpośrednio równość (1).

Uwaga. Odtąd z powodów natury typograficznej piszemy $\int_b^a f(x)\,dx$ zamiast $\int_a^b f(x)\,dx$.

Przy pomocy tego twierdzenia udowodnimy ogólniejsze, które nazwiemy t w i e r d z e n i e m o r o z k ł a d z i e c a ł k i o k r e ś l o n e j: *jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) i jeżeli α, β, γ oznaczają trzy liczby tego przedziału [t. zn. $a \leqslant \alpha \leqslant b$, $a \leqslant \beta \leqslant b$, $a \leqslant \gamma \leqslant b$], to jest* $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\alpha f(x)\,dx = 0 \ldots$ (2).

Dowód. Z powodu założeń trzy całki równości (2) oznaczają trzy określone liczby. Jeżeli jest $\alpha = \beta = \gamma$, to równość (2) jest słuszną, bo wyraża, że $0 + 0 + 0 = 0$. Załóżmy, że $\alpha = \beta \neq \gamma$, to równość (2) wyraża, że jest $0 + \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\alpha f(x)\,dx = 0$, co jest słuszne. Gdy $\alpha \neq \beta = \gamma$ lub $\beta \neq \alpha = \gamma$, czytelnik wykaże z łatwością, że związek (2) jest również słusznym.

Zostaje do zbadania przypadek, kiedy liczby α, β, γ są wszystkie od siebie różne czyli $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$, $\beta \neq \gamma$. Wtedy co do ich wzajemnego stosunku (następstwa) mogą zajść tylko następujące przypadki: 1) $\alpha < \beta < \gamma$, 2) $\alpha < \gamma < \beta$, 3) $\beta < \alpha < \gamma$, 4) $\beta < \gamma < \alpha$, 5) $\gamma < \alpha < \beta$, 6) $\gamma < \beta < \alpha$.

Zajmijmy się przypadkiem 1). Na mocy poprzedniego twierdzenia i równości (1) jest: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx$.

Dodając po obu stronach całkę: $\int_\gamma^\alpha f(x)\,dx$, otrzymujemy:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\alpha f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\alpha f(x)\,dx.$$

Ponieważ prawa strona jest zerem, więc widzimy, że równość (2) jest słuszną, kiedy jest $\alpha<\beta<\gamma$. Weźmy teraz pod uwagę założenie 2) t. zn. przyjmijmy, że jest $\alpha<\gamma<\beta$. Tedy na mocy dopieroco rozważanego przypadka pierwszego jest:

$$(3)\qquad \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx+\int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx+\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx=0.$$

Mnożąc tę równość przez liczbę (—1) i przemieniając granice całkowania górną na dolną i odwrotnie, otrzymamy kolejno: $-\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx-\int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx-\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx=0$ czyli $\int_{\gamma}^{\alpha} f(x)\,dx+$ $+\int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=0$ i tem samem wykazaliśmy równość (2).

Zupełnie podobnie udowodni czytelnik równość (2) w przypadkach 3—6. Równość (2) można dalej uogólnić do większej ilości składników rozkładu.

Tw. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ oznaczają n liczb tego przedziału i jeżeli $n \geqq 2$, to jest:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)\,dx+\ldots+\int_{\alpha_n}^{\alpha_1} f(x)\,dx=0$$

$$(4)\qquad \text{czyli } \sum_{\varkappa=1}^{n-1}\int_{\alpha_\varkappa}^{\alpha_{\varkappa+1}} f(x)\,dx+\int_{\alpha_n}^{\alpha_1} f(x)\,dx=0.$$

W przypadku $n=3$ dopieroco udowodniliśmy równość (4), w przypadku $n=2$ jest ona również prawdziwą. Równości (4) dowodzi się na mocy zasady indukcji zupełnej.

1⁰) Dla $n=2$, jak powiedzieliśmy, twierdzenie jest słuszne.

2⁰) Przypuśćmy, że jest słusznem, gdy $n=p$, gdzie p jest dowolną liczbą naturalną, nie mniejszą od liczby 2 — okażemy, że pozostaje równość (4) słuszną, gdy jest $n=p+1$.

Przypuściliśmy, że jest $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx+\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)\,dx+\ldots+$ $\int_{\alpha_{p-1}}^{\alpha_p} f(x)\,dx+\int_{\alpha_p}^{\alpha_1} f(x)\,dx=0 \ldots$ (5).

Ponieważ równość (4) jest słuszną dla $n=3$, więc

$$\int_{\alpha_p}^{\alpha_{p+1}} f(x)\,dx+\int_{\alpha_{p+1}}^{\alpha_1} f(x)\,dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_p} f(x)\,dx=0,$$

skąd wynika, że jest

$$\int_{\alpha_p}^{\alpha_{p+1}} f(x)\,dx+\int_{\alpha_{p+1}}^{\alpha_1} f(x)\,dx)=-\int_{\alpha_1}^{\alpha_p} f(x)dx=\int_{\alpha_p}^{\alpha_1} f(x)dx\ (6).$$

Zamiast całki $\int_{\alpha_p}^{\alpha_1} f(x)\,dx$ możemy więc w równość (5) wstawić sumę całek z równości (6), przez co otrzymujemy:

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_{p-1}}^{a_p} f(x)\,dx +$$
$$+ \int_{a_p}^{a_{p+1}} f(x)\,dx + \int_{a_{p+1}}^{a_1} f(x)\,dx = 0;$$

innemi słowy wykazaliśmy, że równość (4) jest słuszną, gdy jest $n = p + 1$.

Na mocy więc zasady indukcji zupełnej wynika, że twierdzenie jest słuszne dla każdej wartości naturalnej n, gdy $n \geqslant 2$.

§ 62. Twierdzenie średniej wartości dla całki określonej.

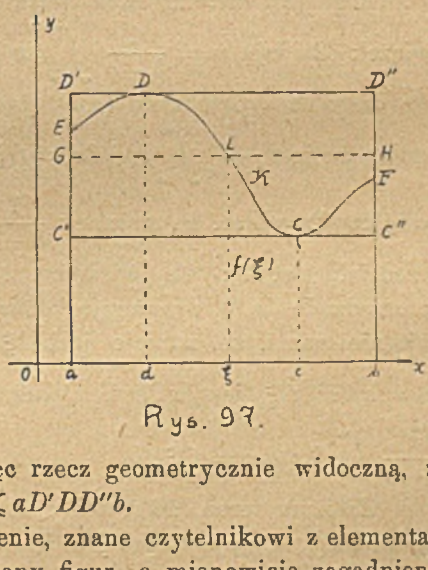
W § 60 udowodniliśmy, że suma S_n, służąca za podstawę definicji całki określonej: $S_n = (x_1 - a) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(\xi_n)$ spełnia nierówność $m(b-a) \leqslant S_n \leqslant M(b-a)$, gdzie M oznacza maximum, m minimum funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b). Stąd wynika też w granicy, że mamy:

$$(1) \qquad m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Podamy teraz geometryczną interpretację związku (1) w przypadku $f(x) \geqslant 0$.

Niech krzywa K rys. 97 będzie obrazem funkcji $f(x)$. Liczbę m przedstawia odcinek cC, liczbę M odcinek dD. Otóż liczba $m(b-a)$ mierzy pole prostokąta $aC'C''b$, którego podstawą jest odcinek $\overline{ab}$ o długości $b-a$, wysokością jest odcinek cC o długości m.

Podobnież liczba $M(b-a)$ mierzy pole prostokąta $aD'D''b$. Całka zaś $\int_a^b f(x)\,dx$ jest liczbą mierzącą pole ograniczone odcinkiem $\overline{ab}$ na osi x, prostopadłemi aE, bF i krzywą K o równaniu $y = f(x)$.



Rys. 97.

Związek (1) wyraża więc rzecz geometrycznie widoczną, że pola: $aC'CC''b \leqslant aEDKCFb \leqslant aD'DD''b$.

Rys. 97 nasuwa zagadnienie, znane czytelnikowi z elementarnej geometrji pod nazwą zamiany figur, a mianowicie zagadnienie zamiany pola $aEDKCFb$ na prostokąt o danej podstawie $\overline{ab}$. Mamy więc znaleźć wysokość takiego prostokąta t. zn. znaleźć taki punkt ξ przedziału (a, b), iżby rzędna $f(\xi)$ była właśnie miarą szukaną wysokości. Wtedy jest pole $aEDKCFb = aGLHb$ czyli $\int_a^b f(x)\,dx =$ $= (b-a)\,f(\xi)$, stąd $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$ (zob. § 64, przykł. IV).

Otrzymaliśmy tedy na drodze geometrycznych rozważań następujące twierdzenie, które nazwiemy **twierdzeniem średniej wartości dla całki określonej**: *jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), to istnieje w nim przynajmniej jedna liczba ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$ taka, że jest* $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(\xi)$, *przyczem jest $a < b$. Równość ta jest słuszną, gdy jest $b < a$ i wtedy jest $b \leqslant \xi \leqslant a$.*

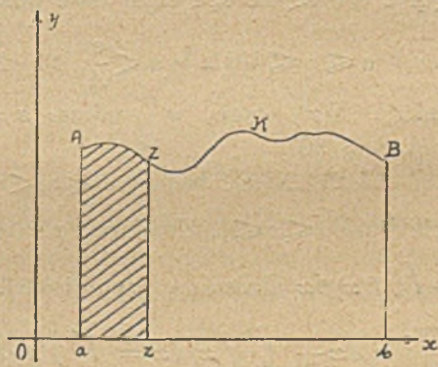
Dowód. Założmy $a < b$; wtedy $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant$ $\leqslant M(b-a)$, gdzie m i M oznaczają minimum wzgl. maximum funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b). Ponieważ $b-a > 0$, więc wolno ostatnią nierówność podzielić przez $(b-a)$, przez co otrzymamy (2) $m \leqslant \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$

Albo jest $m = M$ albo też $m < M$. Jeżeli jest $m = M$, to związek (2) daje $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = M$ czyli istnieje liczba ξ i to dowolna z przedziału (a, b), [bo funkcja jest stałą (zob. § 31)] i taka, że jest $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$. Gdy zaś jest $m < M$, to ze związku (2) widać, że stosunek $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ jest jedną z liczb przedziału (m, M); ale wiadomo z § 31, że funkcja $f(x)$ ciągła w przedziale (a, b), przyjmuje każdą wartość przedziału (m, M) conajmniej raz t. zn. istnieje liczba ξ o własności $a \leqslant \xi \leqslant b$ i taka, że wartość $f(\xi)$ jest właśnie równą liczbie $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ czyli $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$.

Założmy teraz, że jest $b < a$. Wobec tego, co właśnie udowodniliśmy, istnieje liczba ξ o własności $b \leqslant \xi \leqslant a$ i taka, że jest $\frac{1}{a-b} \cdot \int_b^a f(x)\,dx = f(\xi)$ czyli $\frac{1}{-(b-a)} \cdot \left(- \int_a^b f(x)\,dx\right) = f(\xi)$, skąd $\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$. Twierdzenie tedy z zupełności udowodnione. Zauważmy, że równość $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$ jest słuszną nawet w przypadku $a = b$, gdy przyjmiemy $\xi = a = b$. W następnym paragrafie wykażemy, że wolno przyjąć $a < \xi < b$ zamiast związku $a \leqslant \xi \leqslant b$, względnie $b < \xi < a$, gdy $a \neq b$.

§ 63. Całka określona, jako funkcja górnej granicy.

Weźmy pod uwagę funkcję $f(x)$ ciągłą w przedziale (a, b) i niech (z) oznacza liczbę tego przedziału: $a \leqslant z \leqslant b$. Utwórzmy całkę $\int_a^z f(x)\,dx$; na mocy poprzednich rozważań będzie to zupełnie określona liczba, zależna od wyboru liczby (z). Całka ta definiuje więc funkcję, określoną dla każdej wartości na zmienną z, spełniając nierówność $a \leqslant z \leqslant b$. Oznaczmy tę funkcję symbolem $F(z)$, to symbol ten oznacza liczbę, gdy jest $a \leqslant z \leqslant b$. Mamy więc $F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$. Jeżeli $f(x) \geqslant 0$ w przedziale (a, b), to interpretacja geometryczna funkcji $F(z)$ jest następującą (rys. 98): w punktach $x = a$, $x = z$, $x = b$ na osi x wykreślmy proste prostopadłe do niej, one przecinają krzywą K, będącą obrazem funkcji $y = f(x)$, w punktach A, Z, B. Otóż całka $\int_a^z f(x)\,dx$ czyli $F(z)$ przedstawia pole zacieniowane na rys. 98 t. j. pole $aAZz$, zmieniające swą wartość w zależność od położenia prostej zZ. Jak stąd widzimy, dostarcza nam całka określona środka definiowania nowych funkcji, i, jak zobaczymy, bardzo skomplikowanych. Okaże się później, że wszystkie dotąd poznane elementarne funkcje będą objęte jako szczególny przypadek. Jak widzimy, cała rzecz opiera się na pojęciu granicy, które pozwala nam zdefiniować całkę określoną. Załóżmy i w dalszym ciągu, że $a < b$.



Rys. 98.

Poznamy teraz dwie zasadnicze własności funkcji $F(z)$.

I) Okażemy, że *funkcja* $F(z)$ *jest ciągłą w przedziale* (a, b). W tym celu trzeba wykazać, że jest ciągłą w każdym punkcie z_0 przedziału (a, b); odróżnimy trzy przypadki: 1) $z_0 = a$, 2) $a < z_0 < b$, 3) $z_0 = b$.

Ad 1). Niech będzie $z \geqslant a$; na mocy § 62 istnieje liczba ζ o własności $a \leqslant \zeta \leqslant z$ taka, że jest $\int_a^z f(x)\,dx = (z-a) f(\zeta)$. Skoro funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), więc (§ 31) jest w przedziale (a, b) ograniczoną u góry i u dołu, istnieje przeto liczba $A > 0$ taka, że jest $|f(x)| \leqslant A$ w przedziale (a, b). Wobec tego $\left|\int_a^z f(x)\,dx\right| = |(z-a) f(\zeta)| \leqslant A|z-a|$.

Zauważmy dalej, że jest $F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$; przeto $|F(z) - F(a)| = \left|\int_a^z f(x)\,dx\right| \leqslant A|z-a|$. Obierzmy teraz dowolnie liczby $\varepsilon > 0$ i $\delta > 0$ i niech $|z-a| = z-a < \delta$ (jest bowiem $z \geqslant a$). Aby tedy było $|F(z) - F(a)| < \varepsilon$, dość obrać $|F(z) - F(a)| < A|z-a| < A\delta \leqslant \varepsilon$ czyli dość obrać $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$. Jeżeli więc obierzemy $a \leqslant z \leqslant b$ i $z - a < \frac{\varepsilon}{A}$, to $|F(z) - F(a)| < \varepsilon$. Jest przeto funkcja $F(z)$ ciągłą w punkcie $z = a$ po stronie prawej tego punktu (§ 30).

Ad 2). Niech będzie $a < z_0 < b$; weźmy liczbę z dowolnie, byle było $a \leqslant z \leqslant b$. Utwórzmy różnicę $F(z) - F(z_0) = \int_a^z f(x)dx - \int_a^{z_0} f(x)\,dx$ i stosujmy wyniki § 61. Będzie tedy: $F(z) - F(z_0) = \int_a^z f(x)\,dx + \int_{z_0}^a f(x)\,dx = \int_{z_0}^z f(x)\,dx$; stosując teraz twierdzenie z § 62, otrzymujemy, że istnieje liczba ζ taka, że jest $F(z) - F(z_0) = (z - z_0) f(\zeta)$, skąd $|F(z) - F(z_0)| \leqslant A|z - z_0|$. Jeżeli obierzemy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$, poczem liczbę δ tak, aby było $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$, to nierówność $|z - z_0| < \delta$ daje w następstwie nierówność $|F(z) - F(z_0)| \leqslant A|z - z_0| < A\delta = A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$ czyli $|F(z) - F(z_0)| < \varepsilon$. Widzimy tedy, że funkcja $F(z)$ jest ciągłą w każdym punkcie (z_0), położonym wewnątrz przedziału (a, b).

Ad 3). Niech wreszcie będzie $z_0 = b$. Otóż $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$. Niech będzie $z \leqslant b$ i weźmy różnicę $F(z) - F(b) = \int_a^z f(x)\,dx -$ $- \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^z f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_b^z f(x)\,dx = (z-b)\,f(\zeta)$, więc $|F(z) - F(b)| = |(z-b)\,f(\zeta)| \leqslant A\,|z-b| = A\,(b-z)$. Obierzmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ i następnie liczbę $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$, to $\delta > 0$. Niech $a \leqslant z \leqslant b$ i zarazem $b - z < \delta$, to stąd wynika, że jest $|F(z) - F(b)| \leqslant A\,(b-z) < A\delta = \varepsilon$. Jest przeto funkcja $F(z)$ ciągłą w punkcie $z = b$ po stronie lewej. Zbierając wyniki pod 1), 2) i 3), widzimy, że funkcja $F(z)$ jest ciągłą w całym przedziale (a, b).

II) Wykażemy, że *funkcja $F(z)$ ma w każdym punkcie z_0, położonym wewnątrz przedziału (a, b), pochodną i równą liczbie $f(z_0)$.*

Niech będzie $a < z_0 < b$ i weźmy liczbę $h \neq 0$ taką, że liczba $(z_0 + h)$ leży w przedziale (a, b) czyli, że jest $a \leqslant z_0 + h \leqslant b$. Tedy $F(z_0)$ jak $F(z_0 + h)$ są liczbami określonemi. Utwórzmy iloraz $\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h}$. Otóż na mocy twierdzeń § 61 i § 62 mamy:

$$\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = \frac{\int_a^{z_0+h} f(x)\,dx - \int_a^{z_0} f(x)\,dx}{h} =$$

$$= \frac{\int_a^{z_0+h} f(x)\,dx + \int_{z_0}^a f(x)\,dx}{h} = \frac{\int_{z_0}^{z_0+h} f(x)\,dx}{h} = \frac{(z_0 + h - z_0)\,f(\zeta)}{h} = f(\zeta),$$

gdzie liczba ζ albo spełnia nierówność $z_0 \leqslant \zeta \leqslant z_0 + h$ albo nierówność $z_0 + h \leqslant \zeta \leqslant z_0$, zależnie od tego, czy jest $h > 0$, czy też jest $h < 0$. W każdym razie, gdy $h \to 0$, to $\zeta \to z_0$; ponieważ funkcja $f(x)$ jest ciągłą w punkcie (z_0), więc, gdy $\zeta \to z_0$, to $f(\zeta) \to f(z_0)$ [zob. § 39]. Widzimy stąd, że iloraz różnicowy $\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h}$ ma granicę, gdy $h \to 0$ i równą liczbie $f(z_0)$. Ale granica ilorazu różnicowego jest właśnie pochodną funkcji $F(z)$ w punkcie $z = z_0$. Otrzymaliśmy tedy, że $F'(z_0) = f(z_0)$ czyli

$$\left(\frac{d\left(\int_a^z f(x)\,dx\right)}{dz}\right)_{z=z_0} = f(z_0), \text{ gdy } a < z_0 < b.$$

Teraz możemy odpowiedzieć na pytanie postawione w § 51 (str. 247) i słusznie twierdzić, że, jeżeli fnnkcja $\varphi(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), to istnieje funkcja $F(x)$ ciągła w przedziale (a, b), która wewnątrz tego przedziału ma pochodną równą funkcji $\varphi(x)$. Jest nią bowiem każda funkcja $C + \int_a^x \varphi(t)\,dt$, przyczem C jest stałą dowolną[1]). Jeżeli np. przedział (a, b) nie zawiera żadnej z czterech liczb $-\sqrt{2}$, -1, $+1$, $+\sqrt{2}$, to funkcja $C + \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-t^2)}}$ ma pochodną w punkcie x leżącym wewnątrz przedziału (a, b), i równą funkcji $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}}$. Istnieje przeto w przedziale (a, b) całka nieokreślona $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}}$, która jednak *nie daje się wyrazić przez funkcje elementarne w dotychczas poznane sposoby.*

Rozważania § 62 obecnie uzupełnimy następującem twierdzeniem: *jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), to istnieje liczba ξ taka, że jest $a < \xi < b$ i że*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(\xi).$$

W § 62 udowodniliśmy, że jest $a \leqslant \xi \leqslant b$, obecnie możemy wykazać dopieroco wysłowione twierdzenie, które jest dokładniejszem od twierdzenia z § 62.

Rzeczywiście połóżmy $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Funkcja $\varphi(x)$, jak wykazaliśmy, jest ciągłą w przedziale (a, b) i ma wewnątrz przedziału pochodną $\varphi'(x)$ równą funkcji $f(x)$, przeto można do funkcji $\varphi(x)$ stosować twierdzenie średniej wartości (str. 210); tedy istnieje liczba ξ taka, że jest $a < \xi < b$ i zarazem $\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(\xi)$; ale jest $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(\xi) = f(\xi)$, $\varphi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$; przeto twierdzenie jest prawdziwe.

§ 64. Obliczanie wartości całek określonych.

Niech $f(x)$ oznacza funkcję ciągłą w przedziale (a, b) i niech będzie $a \leqslant x \leqslant b$, tedy całka $\int_a^x f(t)\,dt$ jest funkcją o własno-

[1]) Wartość całki określonej nie zależy od zmiennej całkowania, ale od funkcji podcałkowej i granic całkowania; czy więc zmienną całkowania będzie

ściach, podanych w § 63. Załóżmy, że znamy skądś funkcję $\Phi(x)$, ciągłą w przedziale (a, b), która wewnątrz przedziału (a, b) ma pochodną równą funkcji $f(x)$; będzie to więc całka nieokreślona funkcji $f(x)$. Wiemy już, że taka funkcja istnieje i że jest ich nawet nieskończenie wiele. Utwórzmy różnicę: $\Psi(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \Phi(x)$. Funkcja $\Psi(x)$, jako różnica dwu funkcji ciągłych jest również funkcją ciągłą w przedziale (a, b); nadto wewnątrz przedziału (a, b) ma pochodną i jest $\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) - \frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x) - f(x) = 0$, ma więc pochodną stale równą zeru, przeto na mocy § 48 jest $\Psi(x) = C$, gdzie C oznacza stałą w przedziale (a, b). Jest więc $\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C$.

Aby wyznaczy stałą C połóżmy $x = a$; otrzymamy $\int_a^a f(t)\,dt = \Phi(a) + C$ czyli $0 = \Phi(a) + C$, skąd $C = -\Phi(a)$, przeto jest: $\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a)$, w szczególności dla $x = b$ otrzymujemy równość $\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a)$, która właśnie podaje sposób obliczania całki z lewej strony. Chcąc więc znaleźć wartość całki, należy znaleźć całkę nieokreśloną $\Phi(x)$ i obliczyć jej przyrost $\Phi(b) - \Phi(a)$. Tę różnicę pisze się zwykle dla skrócenia $\Big(\Phi(x)\Big)_a^b$. Możemy więc napisać

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big(\Phi(x)\Big)_a^b \text{ albo} = \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=b} - \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=a}.$$

Oczywiście taki wzór jest korzystny, jeżeli całkę nieokreśloną danej funkcji $f(x)$ umiemy wyrazić przez funkcje elementarne. Ostatnia równość podaje związek między całką określoną i nieokreśloną tejże samej funkcji $f(x)$.

Zarazem widzimy, że, jeżeli pochodna $\frac{d\Phi}{dx}$ jest ciągłą w ca-

---

t, czy x, to na wynik nie wpływa — jednakowoż użycie litery x na zmienną całkowania wobec tego, że górną granicą jest też x, mogłoby spowodować u początkującego trudności i dlatego użyliśmy powyżej litery t.

łym przedziale (a, b), to jest: $\int_a^b \frac{d\Phi}{dx}dx = \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Z tej równości często się korzysta przy praktycznych zastosowaniach.

Zajmiemy się obecnie przykładami, a mianowicie najpierw przykładami z § 59.

Przykład I. Obliczmy całkę $I = \int_0^{x_0} \sqrt{2px}\,dx$, gdzie p oznacza stałą dodatnią. Otóż całka nieokreślona $\int \sqrt{2px}\,dx = = \sqrt{2p}\int \sqrt{x}\,dx = \sqrt{2p}\,.\,\frac{2x^{3/2}}{3} + C$. Jest więc $I = \left(\sqrt{2p}\,.\,\frac{2x^{3/2}}{3}\right)_0^{x_0} = = \frac{2\sqrt{2p}\,.\,x_0^{3/2}}{3} - 0 = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,.\,x_0^{3/2}$; ale jeżeli położymy $y_0 = \sqrt{2px_0}$, to jest $I = \frac{2x_0 y_0}{3}$, zgodnie z równością V w § 59.

Przykład II. Obliczmy całkę $I = \int_0^\pi \sin x\,dx$; otóż jest $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, więc $I = \left(-\cos x\right)_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$, jak w § 59.

Przykład III. Obliczmy całkę $I = \int_{-b}^{+b} \frac{1}{2a}[e^{ax} + e^{-ax}]\,dx$. Otóż wyrachujmy najpierw całkę nieokreśloną $J = \int \frac{1}{2a}[e^{ax} + e^{-ax}]\,dx$; otrzymujemy: $J = \frac{1}{2a}\int e^{ax}\,dx + \frac{1}{2a}\int e^{-ax}\,dx = \frac{1}{2a^2}e^{ax} - \frac{1}{2a^2}e^{-ax} + C$. Stąd mamy: $I = \left[\frac{1}{2a^2}(e^{ax} - e^{-ax})\right]_{-b}^{+b} = \frac{1}{2a^2}(e^{ab} - e^{-ab}) - \frac{1}{2a^2}(e^{-ab} - e^{ab}) = = \frac{1}{a^2}(e^{ab} - e^{-ab})$, znów zgodnie z ówczesnym wynikiem.

Krótkie rachunki w porównaniu z § 59 mogą u czytelnika wywołać podziw, który w rzeczywistości uznamy za nieuzasadniony, gdy sobie przypomnimy długie rozważania § 60, 61, 62, 63. Podziw powinna budzić raczej ta okoliczność, że rachunki obecne oparte są na twierdzeniach o g ó l n y c h, kiedy rozważania § 59 wymagały dla każdego niemal przykładu metody indywidualnej, specjalnych twierdzeń pomocniczych. Przyjemność — rzec można — estetyczną dają właśnie rozumowania ogólne § 60—63.

Przykład IV. Załóżmy, że $a \neq b$ i że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b); iloczyn: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ nazwijmy średnią (albo przeciętną) wartością funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b). Na podstawie tego określenia z łatwością rozwiążemy następujące zagadnienie: prąd elektryczny przemienny ma natężenie i równe $i = i_0 \sin \alpha t$, gdzie i_0, α oznaczają stałe dodatnie, t oznacza miarę czasu. Okresem powtarzania się zjawiska jest liczba $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ jednostek czasu. Obliczmy średnie natężenie dla połowy okresu czasu, a więc obliczmy całkę $I = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} i_0 \sin \alpha t\,dt$. Ponieważ $\int i_0 \sin \alpha t\,dt = -\frac{i_0}{\alpha}\cos \alpha t + C$, więc $I = \frac{\alpha}{\pi}\left\{-\frac{i_0}{\alpha}\cos \pi + \frac{i_0}{\alpha}\right\} = \frac{2i_0}{\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{Max}(i)$, bo jest $i_0 = \operatorname{Max}(i)$.

Rozwiążmy jeszcze jedno zagadnienie: wiadomo, że środek ziemi opisuje elipsę, a w jednym ognisku elipsy znajduje się środek słońca. Odległość środków ziemi i słońca jest więc zmienna; obliczmy średnią odległość obu środków na drodze od punktu przysłonecznego do punktu odsłonecznego.

Równanie elipsy bierzemy w postaci $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; ognisko $(c, 0)$, gdzie $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, niech ma odległość ϱ od punktu (x, y), leżącego na elipsie. Jest więc $\varrho^2 = (x - c)^2 + y^2$, ale jest $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$, tedy $\varrho^2 = x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{c^2x^2}{a^2} - 2xc + a^2 = \left(\frac{cx}{a} - a\right)^2$, skąd $\varrho = \left|\frac{cx}{a} - a\right|$, ale dla punktów elipsy jest stale $a > \frac{cx}{a}$, jak łatwo udowodnić niewprost; tedy mamy: $\varrho = a - \frac{cx}{a}$. Półelipsę (od punktu odsłonecznego) opisuje środek ziemi, o ile jest $-a \leqq x \leqq a$. Tedy średnia odległość ziemi od słońca wynosi: $\varrho_0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a}\left(a - \frac{cx}{a}\right)dx$. Ale jest $\int\left(a - \frac{cx}{a}\right)dx = ax - \frac{cx^2}{2a} + C$, tedy $2a\varrho_0 = \left(ax - \frac{cx^2}{2a}\right)_{-a}^{+a} = 2a^2$, skąd $\varrho_0 = a$, jak wiadomo z elementarnej astronomji.

Przykład V. Obliczmy pracę, którą należy wykonać przy wyciągu węgla z szybu głębokiego na l metrów. Ciężar podnoszony składa się z ciężaru węgla i wagonu, wynoszącego łącznie Q *Kg* i z ciężaru liny, przyczem niech q *Kg* wynosi ciężar 1 metra bieżącego liny.

Przy podnoszeniu węgla skraca się lina i przeto maleje jej ciężar.

Dla uproszczenia wyobrazimy sobie ciężar węgla, wagonu i liny skoncentrowany w jednym punkcie M, który porusza się po linji prostej, pionowej, po osi z, skierowanej ku górze i której punkt zerowy umieścimy na dnie szybu. Gdyby siła była stałą, to praca równałaby się iloczynowi siły i drogi, a więc iloraz pracy przez drogę dawałby siłę; ponieważ siła jest zmienną, więc *pochodna* pracy względem drogi równa się sile (ciężarowi). Załóżmy, że punkt M jest odległy na z metrów od dna kopalni, tedy lina ma długość $l-z$ metrów, przeto jej ciężar wynosi $(l-z)q$; oznaczając przez L pracę, wykonaną przy podniesieniu wspomnianego ciężaru na wysokość z, widzimy, że L jest funkcją zmiennej z; jest więc:

$$\text{(1)} \qquad \frac{dL}{dz} = Q + (l-z)q.$$

Szukana praca będzie wartością funkcji $L(z)$ dla $z=l$ czyli równać się będzie liczbie $L(l)$. Na mocy rozważań obecnego paragrafu wynika z równości (1): $\int_0^l dL = \int_0^l [Q+(l-z)q]\,dz$, przeto: $L(l)-L(0) = Ql + q\cdot\frac{l^2}{2}$, ale $L(0)=0$, więc $L(l) = Ql + \frac{ql^2}{2}$. Praca $L(l)$ składa się tedy z dwu części. Jedna Ql to część *a priori* widoczna, druga jest pracą przy wyciąganiu liny (cały ciężar liny wynosił ql w chwili, gdy wagon z węglem spoczywał na dnie szybu).

Przykład VI. Drut sprężysty o przekroju poprzecznym q cm^2 i długości l cm ma jeden koniec silnie umocowany, a drugi zwisa wolno; na ten ostatni działa siła taka, iż drut wydłuży się o λ cm. Ile wynosi praca wykonana przy wydłużeniu? Otóż, przyjmując, że ważnem jest prawo Hooke'a, wiemy, że siła, przypadająca na 1 cm^2 przekroju jest proporcjonalna do miary wydłużenia; gdy drut, mający długość pierwotną l cm, wydłużył się o x cm, to miarą wydłużenia jest iloraz $\frac{x}{l}$ (jest to wydłużenie 1 cm pierwotnej długości). Siła, przypadająca na 1 cm^2 przekroju, będzie więc proporcjonalną do miary $\frac{x}{l}$; jeżeli współczynnik proporcjonalności oznaczymy przez E (t. zw. moduł Younga), to siła, przypadająca na 1 cm^2 przekroju, wynosi $E \cdot \frac{x}{l}$, zaś siła działająca na cały przekrój będzie $P = \frac{Eqx}{l}$, jeżeli tę siłę oznaczymy przez P. Oznaczmy przez L pracę wykonaną przy wydłużeniu drutu o x cm (t. zn. x cm ma wynosić przyrost długości drutu); jest więc L funkcją zmiennej x i jej pochodna $\frac{dL}{dx}$ daje właśnie siłę czyli $\frac{dL}{dx} = \frac{Eqx}{l}$. Praca, którą mamy obliczyć, to właśnie praca $L(\lambda)$. Otóż mamy:

$$\int_0^\lambda \frac{dL}{dx} dx = \int_0^\lambda dL = L(\lambda) - L(0) = \int_0^\lambda \frac{Eqx}{l} dx = \left(\frac{Eqx^2}{2l}\right)_0^\lambda = \frac{Eq\lambda^2}{2l};$$

ale $L(0) = 0$, więc $L(\lambda) = \frac{Eq\lambda^2}{2l}$. Iloraz $\frac{L(\lambda)}{\lambda}$ będzie średnią siłą, przy wydłużeniu działającą (zob. str. 331, przykład IV); otóż otrzymujemy, że średnia (albo przeciętna) siła przy wydłużeniu wynosi $\frac{Eq\lambda}{2l}$ czyli równa się sile, wytwarzającej wydłużenie $\frac{\lambda}{2}$.

[Chcielibyśmy zwrócić uwagę czytelnika na (częsty po podręcznikach fizyki i techniki) sposób rozumowania wysoce nieścisły, jakkolwiek może służyć *za drogę do poszukiwania ścisłych wywodów*. Mamy na myśli metodę „nieskończenie małych", którą powyższy przykład dobrze zilustruje. Równość $dL = \frac{Eqx}{l} dx$ interpretują owe podręczniki, jako wzór na „nieskończenie małą pracę" przy „nieskończenie małem wydłużeniu" dx; oczywiście, że różniczka to nie jest to samo, co nieskończenie mała, ponadto autorowie podręczników piszą o różniczce dL, zanim pracę L określili, jako funkcję zmiennej x; jest to jednak błędem, gdyż wiadomo, że różniczka $dL = \frac{dL}{dx} dx$, a pochodna $\frac{dL}{dx}$ wymaga, by L było określone, jako funkcja zmiennej x w pewnym przedziale.

Często autorowie przy posługiwaniu się „nieskończenie małemi" odrzucają pewne wyrazy, co usprawiedliwiają stereotypowem wyrażeniem, że „odrzucają nieskończenie małe wyższych rzędów“, lub „nieskończenie małe wobec liczb skończonych“. Tymczasem ta metoda pomijań jest nieścisłą i *może doprowadzić do błędów*, na co wskazał już O. Schlömilch w r. 1873 (w tomie I-wszym książki p. t. Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis). Powtórzymy przykłady Schlömilcha z nieznaczną modyfikacją.

Połóżmy $u_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}}-1\right)$, $v_n = n\left(\sqrt{1+\frac{a}{n}}-1\right)$, przyczem $n=1, 2, 3,\ldots$, zaś a oznacza liczbę stałą np. dodatnią. Ponieważ $u_n = u_n \cdot \frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} = \frac{a}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}$, $v_n = v_n \cdot \frac{\sqrt{n(n+a)}+n}{\sqrt{n(n+a)}+n} =$
$= \frac{na}{\sqrt{n(n+a)}+n} = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1}$, więc mamy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{2}a$.

To są rezultaty ścisłe i ścisłą metodą obliczone.

Jakież będą wyniki, gdy powiemy, że wskutek nieograniczenie rosnącej liczby n „wolno“ iloraz $\frac{a}{n}$ pominąć wobec liczby 1?

W przypadku ciągu u_n otrzyma się granicę 0 (wynik dobry), w przypadku zaś ciągu v_n znów granicę zero, co jest jednak rezultatem fałszywym. A więc ostrożnie z „nieskończenie małemi“!]

Poprawnie można postępować także w sposób taki: wydłużenie λ wyobraźmy sobie dokonane przy pomocy następstwa n kolejnych wydłużeń: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda$. Podczas wydłużenia λ_1 wykonaliśmy pracę zawartą między $0 . \lambda_1 = 0$ i $\frac{Eq\lambda_1}{l} . \lambda_1 =$
$= \frac{Eq\lambda_1^2}{l}$; przy wydłużeniu od długości $(l+\lambda_1)$ do długości $(l+\lambda_2)$ wykona się pracę zawartą między $\frac{Eq\lambda_1}{l}(\lambda_2-\lambda_1)$ i $\frac{Eq\lambda_2}{l}(\lambda_2-\lambda_1)$ i t. d. Całkowita praca przy wydłużeniu o λ cm będzie tedy zawartą między sumą

$$(1)\quad 0+\frac{Eq\lambda_1}{l}(\lambda_2-\lambda_1)+\frac{Eq\lambda_2}{l}(\lambda_3-\lambda_2)+\ldots+\frac{Eq\lambda_{n-1}}{l}(\lambda-\lambda_{n-1})$$

a sumą

$$(2)\quad \frac{Eq\lambda_1}{l}.(\lambda_1-0)+\frac{Eq\lambda_2}{l}(\lambda_2-\lambda_1)+\ldots+\frac{Eq\lambda}{l}(\lambda-\lambda_{n-1}).$$

Suma (1) odpowiada sumie σ z § 60, zaś suma (2) sumie Σ z § 60. Obie sumy mają wspólną granicę, gdy:

$$\text{Max}\,(\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2, \ldots, \lambda - \lambda_{n-1}) \rightarrow 0.$$

Granicą tą jest całka określona:

$$\int_0^\lambda \frac{Eqx}{l}\,dx$$

i jej równa się praca $L(\lambda)$, przy wydłużeniu wykonana.

To rozumowanie, apelujące bezpośrednio do definicji całki określonej, jest poprawnem, nie posługuje się „nieskończenie małemi“, intuicyjnie rzec można, że „naśladuje metodę tych, którzy uważają całkę określoną za „sumę nieskończenie wielu składników nieskończenie małych“.

Przykład VII. W basenie wodnym pływalni jedna ściana boczna niech będzie ściśle pionową i niech ma kształt prostokąta o długości l metrów i głębokości h metrów. Obliczyć całkowite ciśnienie wody na tę ścianę.

Wiadomo, że ciśnienie cieczy na dół na prostokąt poziomy π równa się ciężarowi słupa wody, sięgającego od swobodnej powierzchni wody do prostokąta π i o przekroju poprzecznym π; jeżeli tedy x wynosi wysokość pionowa wody nad π, to ten ciężar wynosi $x\pi$, jeżeli ciężar właściwy wody przyjmujemy $=1$, a π oznacza zarazem pole prostokąta π.

Ponieważ w przypadku równowagi cieczy ciśnienie zależy jedynie od głębokości, więc ciśnienie t. zw. jednostkowe we wszystkich kierunkach wynosi $\frac{x\pi}{\pi} = x$ t. zn. ciśnienie przypadające na 1 cm². Ciśnienie jednostkowe można też uważać za granicę $\text{Lim}\,(P:\pi)$, gdy pole π dąży do punktu, odległego o x cm od swobodnej powierzchni wody, przyczem P oznacza całkowite ciśnienie wody na pole płaskie π. Aby obliczyć żądane ciśnienie, postąpimy w sposób następujący: na wspomnianej ścianie basenu w głębokości x metrów od swobodnej powierzchni wody poprowadźmy prostą poziomą, która ścianę podzieli na dwa prostokąty, górny z nich oznaczmy przez π_x. Całkowite ciśnienie na część π_x oznaczmy przez $P(x)$; będzie więc $P(x)$ funkcją zmiennej x, określoną w przedziale $(0, h)$. Głębokość x powiększmy o liczbę δ (dość małą). Wtedy pole górnego prostokąta zwiększy się o przyrost $\pi_{x+\delta} - \pi_x = l\delta$, bo zwiększy się o prostokąt, mający długość ściany l i głębokość δ. Przyrost zaś całkowitego ciśnienia wyniesie: $P(x+\delta)-P(x)$; tedy granica ilorazu:

$$(1)\qquad \frac{P(x+\delta)-P(x)}{l\delta}=\frac{1}{l}\cdot\frac{P(x+\delta)-P(x)}{\delta}$$

będzie iloczynem liczby $\frac{1}{l}$ i pochodnej $\frac{dP}{dx}$ (o której się zakłada, że istnieje!). Z drugiej strony, będzie granica ilorazu (1) t. zw. ciśnienieniem jednostkowem wody w głębokości x i będzie przeto według powyższego wprost równa liczbie x. Jest więc:

$$(2)\qquad \frac{1}{l}\cdot\frac{dP}{dx}=x,$$

skąd: $\frac{dP}{dx}=lx$, co znów, całkowane od 0 do h (na całą głębokość wody), daje $\int_0^h\frac{dP}{dx}dx=\int_0^h lx\,dx$ czyli $P(h)-P(0)=\left(\frac{lx^2}{2}\right)_0^h=\frac{lh^2}{2}$.
Ale $P(0)=0$, więc $P(h)=\frac{lh^2}{2}$ i to jest właśnie szukanem ciśnieniem wody. Skoro liczby l i h podają długość i wysokość ściany w metrach, więc iloczyn $1000\,P(h)$ daje ciśnienie całkowite wody na rozważaną ścianę w kilogramach (Kg), przeto szukane ciśnienie wynosi $500\,.\,lh^2\ Kg$.

Przy pomocy metody „nieskończenie małych“ postępują w ten sposób: pole, które jest różnicą prostokątów $\pi_{x+\delta}$ i π_x, zowią nieskończenie wąskim paskiem — jego wielkość wynosi $(l\,dx)$, i to będzie różniczką ciśnienia całkowitego (czyli „nieskończenie małem ciśnieniem całkowitem“) t. zn. $dP=lx dx$. Równość ta jest identyczna z powyższą — następnie całkuje się, jak wyżej.

Zarzuty, które przeciwko tej metodzie wypowiedziano w poprzednim przykładzie, należałoby też obecnie powtórzyć.

Można to zagadnienie rozwiązać i drugą metodą, podaną w poprzednim przykładzie, co zostawiamy czytelnikowi do wykonania.

Przykład VIII. Gaz t. zw. doskonały, mający objętość v_0 cm^3 i prężność p_0 atmosfer na 1 cm^2, ściskamy izotermicznie (t. zn. przy zachowaniu stałej temperatury) aż będzie miał objętość v cm^3. Obliczmy pracę przy tem wykonaną. Załóżmy, że gaz znajduje się w naczyniu walcowym pod ruchomem tłokiem (zob. str. 3, rys. 3), który tak długo wciskamy aż gaz zajmie objętość v. Niech $a\,cm^2$ wynosi pole tłoka. Ciśnienie całkowite gazu na tłok wynosi więc $a.p$ atmosfer. Ponieważ objętość gazu równa się polu tłoka pomnożonemu przez odległość tłoka od dna naczynia, więc pierwotnie odległość tłoka od dna wynosi $\frac{v_0}{a}$ cm i wciskamy tłok tak długo, aż jego odległość od dna wynosi $\frac{v}{a}$ cm. Przy ściskaniu wykonał więc tłok drogę długości $\left(\frac{v_0}{a}-\frac{v}{a}\right)$ czyli $\frac{v_0-v}{a}$ cm. Tę drogę podzielmy na n części tak, iż gaz po kolei zajmuje objętość:

$$v_0 > v_1 > v_2 > \dots > v_{n-1} > v$$

i dla każdej z nich ma prężność $p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{n-1} < p$. Praca przy ściskaniu będzie tedy zawarta między sumą

$$(1)\quad \frac{p_0(v_0-v_1)}{a}+\frac{p_1(v_1-v_2)}{a}+\frac{p_2(v_2-v_3)}{a}+\dots+\frac{p_{n-1}(v_{n-1}-v)}{a}$$

a sumą

$$(2)\quad \frac{p_1(v_0-v_1)}{a}+\frac{p_2(v_1-v_2)}{a}+\frac{p_3(v_2-v_3)}{a}+\dots+\frac{p(v_{n-1}-v)}{a};$$

pierwsza suma (wzięta od prawej ręki ku lewej) to suma σ z § 60, zaś suma (2) to suma Σ z § 60. Ich granicą wspólną będzie całka $\int\limits_v^{v_0} p\,dv$. Tedy praca $L(v)$ wynosi

$$L(v)=\int\limits_v^{v_0} p\,dv.$$

Dla gazów doskonałych przy zmianach izotermicznych jest $pv=c$, gdzie c oznacza stałą dodatnią. Tedy $p=\frac{c}{v}$, wobec tego mamy $L(v)=\int\limits_v^{v_0}\frac{c\,dv}{v}=c\ln\left(\frac{v_0}{v}\right)$. Czytelnikowi zalecamy rozwiązać powyższe zagadnienie drugą metodą ścisłą, poznaną w poprzednich przykładach.

Przykład IX. Obliczmy granicę ciągu o wyrazie n-tym:

$$(1)\qquad w_n=\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\dots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n}\sqrt{\frac{\varkappa}{n}}.$$

Interesującem będzie, że granicą ciągu będzie całka określona; w rzeczywistości nie może nas to dziwić, bo całka określona jest *granicą* pewnej sumy. Otóż, jeżeli przyjmiemy $f(x)=\sqrt{x}$, to wyraz (1) możemy uważać za sumę, którą oznaczyliśmy w § 60 przez Σ_n, przyczem należy przyjąć $a=0$, $b=1$, $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{2}{n},\ldots,$ $x_{n-1}=\frac{n-1}{n}$. Skoro funkcja $\sqrt{x}$ jest ciągłą w przedziale $(0,1)$, więc granica sumy Σ_n istnieje i jest całką określoną:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right)_0^1=\frac{2}{3}. \text{ Przeto } \lim_{n\to\infty} w_n=\frac{2}{3}.$$

W podobny sposób oblicza się granice ciągów;

$$\text{a) } w'_n=\frac{1}{n}\left[ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+ln\left(\frac{n+2}{n}\right)+\ldots+ln\,2\right]=\frac{1}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} ln\left(\frac{n+\varkappa}{n}\right)$$

$$\text{albo } w'_n=\left\{\frac{1}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} ln(n+\varkappa)\right\}-ln(n);\ \text{b) } w''_n=\frac{1}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} e^{\frac{\varkappa}{n}};$$

$$\text{c) } w'''_n=\frac{1}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n}\cos\left(\frac{\varkappa}{n}\right);\ \text{mianowicie będzie } \operatorname{Lim}_{n\to\infty} w'_n=$$

$$\int_1^2 ln(1+x)\,dx,\ \operatorname{Lim}_{n\to\infty} w''_n=\int_0^1 e^x dx,\ \operatorname{Lim} w'''_n=\int_0^1 \cos x\,dx.$$

[*Uwaga.* Powyższe rozważania (§ 60—64) zajmują się pojęciem całki dla funkcyj ciągłych, można jednak zająć stanowisko ogólniejsze; mianowicie załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określoną w przedziale (a,b) i że zbiór wartości, jakie przyjmuje w przedziale (a,b), jest ograniczonym u góry i u dołu. Dla dowolnego podziału odcinka (a,b) na małe przedziały tworzymy sumy σ i Σ, biorąc w każdym małym przedziale (*nie* minimum, względnie maximum funkcji, które mogłyby nie istnieć, *ale*) dolny, wzgl. górny kres wartości funkcji w małym przedziale częściowym. Oznaczmy przez z zbiór liczb σ, przez Z zbiór liczb Σ; oba zbiory są ograniczone i u góry i u dołu, gdyż (zob. str. 311) znów jest $m(b-a)\leqq\sigma\leqq M(b-a)$, $m(b-a)\leqq\Sigma\leqq M(b-a)$, gdzie M, wzgl. m oznacza górny, wzgl. dolny kres wartości funkcji $f(x)$ w przedziale (a,b). Wobec tego zbiór z ma górny kres, zaś zbiór Z ma dolny kres, pierwszy oznaczymy przez l, drugi przez L. Wykażemy, że jest

$l \leqslant L$. W tym celu udowodnimy następujące twierdzenie: *jeżeli R' i R'' oznaczają dwa dowolne podziały odcinka (a, b) na małe przedziały i jeżeli σ', Σ', σ'', Σ'' oznaczają odpowiednie sumy, których sposób tworzenia wyżej określiliśmy, to jest $\sigma' \leqslant \Sigma''$ (a więc także $\sigma'' \leqslant \Sigma'$).*

Rozważmy bowiem podział R w ten sposób określony: każdy punkt podziału odcinka (a, b), należący conajmniej do jednego z podziałów R' i R'', niech należy do podziału R; niech σ i Σ oznaczają odpowiednie sumy. Na mocy przypisku do str. 315 jest $\sigma' \leqslant \sigma$, $\Sigma \leqslant \Sigma''$, gdyż stosunek podziału R do każdego z podziałów R', R'' jest identyczny ze stosunkiem rozkładu R_{n+1} do rozkładu R_n ze str. 314. Ale jest $\sigma \leqslant \Sigma$, tedy $\sigma' \leqslant \sigma \leqslant \Sigma \leqslant \Sigma''$, skąd $\sigma' \leqslant \Sigma''$.

Żadna więc liczba zbioru z nie jest większą od żadnej liczby zbioru Z (czyli one nie są „pomieszane“ ze sobą). Aby udowodnić, że jest $l \leqslant L$, przypuśćmy, że jest $L < l$, a dojdziemy zaraz do sprzeczności. Jeżeli $L < l$, to istnieje liczba α taka, że $L < \alpha < l$ $\left(\text{np. } \alpha = \frac{L+l}{2}\right)$. Skoro l jest górnym kresem liczb σ, więc na mocy określenia (str. 117) istnieje w zbiorze z liczba σ' taka, że $\alpha < \sigma' \leqslant l$; ponieważ L oznacza dolny kres liczb Σ, więc (str. 119) istnieje w zbiorze Z liczba Σ'' taka, że jest $L \leqslant \Sigma'' < \alpha$; przeto $L \leqslant \Sigma'' < \alpha < \sigma' \leqslant l$, skąd $\Sigma'' < \sigma'$, co jest niemożliwe. Wykazaliśmy więc, że jest $l \leqslant L$.

Jeżeli jest $l = L$, to wspólną wartość liczb l, L nazywamy całką określoną funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b), a funkcję $f(x)$ całkowalną w przedziale (a, b).

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), to jej całka dopieroco określona schodzi się najzupełniej z tą liczbą, którą w § 60 nazwaliśmy całką określoną funkcji $f(x)$ od a do b. Rzeczywiście, nawiązując do oznaczeń i rozważań § 60, mamy $\sigma_n \leqslant l \leqslant L \leqslant \Sigma_n$, a ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \lim\limits_{n \to \infty} \Sigma_n$, więc wspólna wartość tych granic równa się liczbom l i L, c. b. d. u.

Dopieroco podane uogólnienie pojęcia całki pozwala rozważać funkcje nieciągłe w przedziale (a, b), jednakowoż nieciągłość nie może być dowolną, jeżeli funkcja ma być całkowalną. Rzeczywiście rozważmy w przedziale $(0, 1)$ funkcję $f(x)$, w następujący sposób określoną: $f(x) = 0$, gdy x oznacza liczbę wymierną, $f(x) = 1$, gdy x jest liczbą niewymierną; widoczne, że dla każdego podziału odcinka (0, 1) na małe przedziały jest stale $\sigma = 0$, $\Sigma = 1$, tedy jest $l = 0$, $L = 1$ i funkcja nie jest całkowalną w przedziale (0, 1).

Ponieważ dla zastosowań, którym ma służyć nasz podręcznik, wystarczy pojęcie całki z § 60, więc nie będziemy szukali warunków koniecznych i wystarczających całkowalności funkcji $f(x)$ w przedziale (a, b).

To uogólnienie pojęcia całki, które obecnie podaliśmy, nazywają często całką Riemanna. (B. Riemann, matematyk niemiecki, ur. 1826, um. 1866)].

§ 65. Metody całkowania.

Sposób obliczenia całki określonej mieści się w twierdzeniu poprzedniego paragrafu, o czem jeszcze słów kilka dla wyjaśnienia. Powiedzieliśmy, że wzór, który daje wspomniane twierdzenie § 64, jest zwłaszcza wtedy wygodnym, gdy całkę nieokreśloną umiemy wyrazić przez funkcje elementarne. Weźmy np. całkę określoną $I = \int_1^2 \cos x\, dx$; ponieważ całka nieokreślona $\int \cos x\, dx = \sin x + C$, tedy wartość całki określonej jest $I = \left(\sin x\right)_1^2 = \sin 2 - \sin 1$. Zdajmy sobie sprawę z tego, żeśmy „liczebnie" wartości całki I nie wyrachowali; jednakowoż znamy własności funkcyj $\sin x$ i $\cos x$ i mając tablice trygonometryczne, możemy obliczyć wartość I. Aby to uczynić, zauważmy, że, jeżeli kąt ma α stopni i zarazem θ radjanów, to według § 5 jest $\alpha = \frac{180 . \theta}{\pi}$. Wskutek tego $I = \sin 2 - \sin 1 = \sin\left(\frac{360^0}{\pi}\right) - \sin\left(\frac{180^0}{\pi}\right)$. Otóż $\frac{180}{3{\cdot}15} < \frac{180}{\pi} < \frac{180}{3{\cdot}14}$ czyli $57^0 8' 34'' < \left(\frac{180}{\pi}\right)^0 < 57^0 19' 30''$, mnożąc tę nierówność przez liczbę 2 otrzymujemy $114^0 17' 8'' < \left(\frac{360}{\pi}\right)^0 < 114^0 39'$. Ponieważ funkcja sinus w drugiej ćwiartce maleje, więc jest: $\sin 114^0 39' - \sin 57^0 20' < I < \sin 114^0 17' - \sin 57^0 8'$; ale $\sin 114^0 17' = \sin(90^0 + 24^0 17') = \sin 90^0 \cos 24^0 17' + \cos 90^0 \sin 24^0 17' = \cos 24^0 17'$, $\sin 114^0 39' = \cos 24^0 39'$; tedy otrzymujemy: $\cos 24^0 39' - \sin 57^0 20' < I < \cos 24^0 17' - \sin 57^0 8'$, co według tablic trygonometrycznych daje

$0{\cdot}90888 - 0{\cdot}84183 < I < 0{\cdot}91152 - 0{\cdot}83993$ czyli $0{\cdot}06705 < I <$ $< 0{\cdot}07159$. Ten rachunek daje dwa przybliżenia liczby I.

Otóż zauważmy, że, gdyby czytelnik znał tak dokładnie własności np. funkcji $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(2-t^2)}}$, jak zna własności funkcyj trygonometrycznych i gdyby miał tablice wartości tej całki dla różnych wartości zmiennej (x), to nazwałby „łatwą" do obliczenia niejedną z tych całek, które dziś uważa za „trudne".

Po tej krótkiej uwadze przejdziemy do metod obliczania całek określonych.

Otóż częstokroć zachodzi potrzeba wyrażenia danej całki określonej przez inną czyli przekształcenia jednej w drugą; jeżeli druga będzie „łatwą" do obliczenia, to tem samem takie przekształcenie będzie metodą obliczenia całki.

Ogólnej metody obliczenia całki (w powyższem znaczeniu) nie ma, jednak pewne zasady, które poniżej wyłuszczymy, mogą przy wprawie i intuicji posłużyć do obliczenia wartości całki określonej.

Zasady te ujmiemy w pewne twierdzenia. Oto pierwsze z nich:

1) *Jeżeli całka* $\int_a^b f(x)\,dx$ *oznacza liczbę, a* (c) *jest dowolną stałą, to również całka* $\int_a^b cf(x)\,dx$ *przedstawia liczbę i jest:* $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \ldots$ (1).

Dowód. Symbol $\int_a^b cf(x)\,dx$), gdy jest $a < b$, przedstawia w myśl oznaczeń § 60 granicę sumy $S_n = (x_1 - a)\,cf(\xi_1) + (x_2 - x_1)\,cf(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1})\,cf(\xi_n) = c[(x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1})f(\xi_n)]$, gdy $\Delta_n = \mathrm{Max}[x_1 - a;\ x_2 - x_1; \ldots;\ b - x_{n-1}] \to 0$. Ale według założenia właśnie suma $(x_1 - a)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \ldots + (b - x_{n-1})f(\xi_n)$ ma granicę $\int_a^b f(x)\,dx$, gdy $\Delta_n \to 0$. Tedy na mocy znanego twierdzenia o granicy iloczynu będzie rzeczywiście granica $\int_a^b cf(x)\,dx$ istniała i będzie też $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

Jeżeli jest $b < a$, to na podstawie dopieroco przeprowadzonego dowodu jest $\int_b^a cf(x)\,dx = c\int_b^a f(x)\,dx$; mnożąc tę równość przez liczbę (-1) i stosując znaną definicję, otrzymamy $\int_a^b cf(x)\,dx =$

$-\int_b^a cf(x)\,dx = -c\int_b^a f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$. Dla $a=b$ jest ta równość widocznie słuszną.

Twierdzenie I wysławia się w sposób następujący: stałą c, będącą czynnikiem funkcji podcałkowej w całce określonej, można wyprowadzić przed znak całki i naodwrót można stały czynnik pod znak całki wprowadzić. Jednakże czytelnik zauważy z łatwością, że twierdzenie I więcej treści zawiera.

II) *Jeżeli całki* $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ *oznaczają liczby, to również całki* $\int_a^b [f(x)\pm\varphi(x)]\,dx$ *oznaczają liczby i jest:*

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

Dowód zechce przeprowadzić czytelnik w przypadkach $a<b$, $a=b$, $a>b$, wzorując się na dowodzie tw. I.

III) *Całkowanie przez części.* Niech $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ oznaczają funkcje, które w *całym* przedziale (a, b) mają ciągłe pochodne. Dla iloczynu tych funkcyj mamy równość $\frac{d(\varphi\,.\,\psi)}{dx} = \varphi\psi' + \varphi'\psi$, będzie więc ta pochodna również ciągłą w przedziale (a, b). Na mocy § 64 jest

$$\int_a^b [\varphi\psi' + \varphi'\psi]\,dx = \int_a^b \frac{d(\varphi\psi)}{dx}\,dx = \varphi(b)\,\psi(b) - \varphi(a)\,\psi(a) = \Big(\varphi\,.\,\psi\Big)_a^b \ldots (4).$$

A ponieważ każda z całek $\int_a^b \varphi\psi'\,dx$, $\int_a^b \varphi'\psi\,dx$ oznacza liczbę, więc całkę ze sumy po lewej stronie wolno „rozbić“ na sumę całek: $\int_a^b \varphi\psi'\,dx + \int_a^b \varphi'\psi\,dx = \Big(\varphi\psi\Big)_a^b$, skąd otrzymujemy:

$$\int_a^b \varphi\psi'\,dx = \Big(\varphi(x)\,.\,\psi(x)\Big)_a^b - \int_a^b \varphi'\psi\,dx \ldots (5).$$

Wzór ten jest streszczeniem metody całkowania przez części dla całek określonych. Używamy tej metody, gdy jakaś całka „trudna“ do obliczenia da się przedstawić we formie: $\int_a^b \varphi\psi'\,dx$

i gdy po jej przekształceniu w myśl wzoru (5) otrzymana całka $\int_a^b \varphi'\psi\,dx$ już takich trudności nie przedstawia.

Zarazem zwracamy uwagę czytelnika na widoczną różnicę między wzorem (5) a równością (1) str. 263, która to równość daje wzór na całkowanie przez części dla całki *nieokreślonej*.

Przykład. Wzór Wallisa. Obliczmy całkę:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx.$$

Całkując przez części otrzymujemy:

$$I_n = \left(\cos^{n-1}x \,.\, \sin x\right)_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}x \,.\, \sin^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}x\,dx - (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n,$$

co daje wzór zwrotny (rekurencyjny)

$$n\,I_n = (n-1)\,I_{n-2} \text{ czyli } I_n = \frac{n-1}{n} \,.\, I_{n-2} \dots (1).$$

Wzór ten pozwala obliczyć I_n, gdy znamy I_{n-2}. Widzimy tedy, że należy odróżnić dwa przypadki: n parzyste i n nieparzyste. Gdy bowiem n oznacza liczbę parzystą, to wzór (1), kilkakrotnie stosowany, wymagać będzie obliczenia całki $I_0 = \frac{\pi}{2}$, gdy zaś n jest liczbą nieparzystą, to ostatecznie trzeba będzie obliczyć $I_1 = 1$.

Załóżmy więc, że $n = 2p$, gdzie p oznacza liczbę naturalną; wzór (1) da nam:

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \,.\, I_{2p-2};\ I_{2p-2} = \frac{2p-3}{2p-2} \,.\, I_{2p-4}; \dots;\ I_2 = \frac{1}{2} \,.\, I_0 = \frac{1}{2} \,.\, \frac{\pi}{2};$$

te równości przez siebie wymnożone dają wzór:

$$I_{2p} = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \dots (2p-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \dots 2p} \,.\, \frac{\pi}{2} \dots (2).$$

Gdy $n = 2p + 1$ (gdzie $p = 0, 1, 2, \dots$), to wzór (1) daje:

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \,.\, I_{2p-1},\ I_{2p-1} = \frac{2p-2}{2p-1} \,.\, I_{2p-3}; \dots;\ I_3 = \frac{2}{3} \,.\, I_1 = \frac{2}{3},$$

skąd:

$$I_{2p+1} = \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \dots 2p}{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \dots (2p+1)} \dots (3).$$

Stąd wyprowadzimy interesujący wzór na granicę ciągu, który zaraz określimy.

Za pomocą rozważań w § 60 łatwo można wykazać następujące twierdzenie: *jeżeli funkcje* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ *są ciągłe w przedziale* (a, b), *jeżeli jest* $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x)$ *w przedziale* (a, b) *i jeżeli jest* $a < b$, *to jest*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_2(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_3(x)\,dx \quad \text{.... (4).}$$

Jeżeli bowiem przez $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, $S_n^{(3)}$ oznaczymy sumy rozważane w § 60, a obliczone kolejno dla funkcyj $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, to mieć będziemy $S_n^{(1)} \leqslant S_n^{(2)} \leqslant S_n^{(3)}$, skąd wynika wzór (4).

Otóż w przedziale $(0, \pi/2)$, jest $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, tedy będzie: $\cos^{2p+1} x \leqslant \cos^{2p} x \leqslant \cos^{2p-1} x$, więc stąd:

$$I_{2p+1} \leqslant I_{2p} \leqslant I_{2p-1};$$

wzory (2) i (3) dają tedy:

$$\frac{2.4.6...2p}{3.5.7....(2p+1)} \leqslant \frac{1.3.5....(2p-1)}{2.4.6....2p} \cdot \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{2.4....(2p-2)}{3.5....(2p-1)},$$

co podzielone przez czynnik liczby $\frac{\pi}{2}$ w środkowym wyrazie daje:

$$\frac{2.2.4.4....2p.2p}{1.3.3.5....(2p-1).(2p+1)} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2.2.4.4....(2p-2)(2p-2)}{1.3.3.5....(2p-3)(2p-1)} \cdot \frac{2p}{2p-1}. \tag{5}$$

Rozważmy nieskończony ciąg o wyrazie ogólnym:

$$u_p = \frac{2.2.4.4....(2p-2)(2p-2)}{1.3.3.5....(2p-3)(2p-1)} \quad (p \geqslant 1). \tag{6}$$

Będzie tedy $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{2.2}{1.3} = \frac{4}{3}$, $u_3 = \frac{2.2.4.4}{1.3.3.5} = \frac{64}{45}$ itd. Wykażemy, że ciąg ten ma granicę i równą liczbie $\frac{\pi}{2}$.

Otóż wzór (5) przyjmuje postać:

$$u_{p+1} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant u_p \cdot \frac{2p}{2p-1}. \tag{7}$$

Ponieważ jest $u_{p+1} \leqslant \frac{\pi}{2}$, więc ciąg rozważany jest ograniczonym u góry.

Weźmy pod uwagę stosunek:

$$\frac{u_{p+1}}{u_p}=\frac{2p\,.\,2p}{(2p-1)(2p+1)}=\frac{4p^2}{4p^2-1}>1 \text{ czyli } u_{p+1}>u_p.$$

Ciąg jest więc rosnącym i ograniczonym u góry, przeto ma granicę (str. 60), którą oznaczmy przez (g).

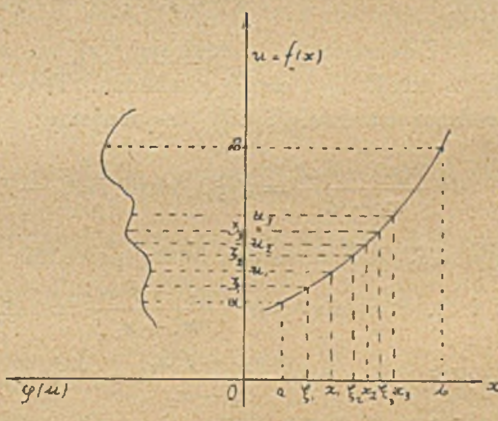
Ponieważ $u_p\,.\,\frac{2p}{2p-1}\to g\,.\,1$, więc na mocy tw. o trzech ciągach otrzymujemy ze związku (7), że jest $g=\frac{\pi}{2}$. Mamy więc:

$$(8)\qquad \frac{\pi}{2}=\lim\left[\frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,....\,2p\,.\,2p}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,....\,(2p-1)(2p+1)}\right],\ \text{gdy } p\to\infty.$$

Jest to właśnie *wzór Wallisa*.

IV) *Zmiana zmiennej całkowania.*

Przypuśćmy, iż mamy do obliczenia (trudną) całkę kształtu: $\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du$. Może się zdarzyć, iż, podstawiając za zmienną u funkcję innej zmienej np. x czyli kładąc $u=f(x)$, uzyskamy pewne ułatwienie dla sprawy całkowania. Załóżmy, że, gdy zmienna u przyjmuje wszelkie wartości przedziału (α,β), gdzie $\alpha<\beta$, to się zmienna x zmienia w granicach pewnego przedziału (a,b). *Otóż przypuścimy, że funkcja $f(x)$ w przedziale (a,b) jest stale rosnącą lub stale malejącą.* Przyczynę, dla której czynimy to założenie, poznamy wkrótce. Załóżmy, że funkcja $u=f(x)$ jest w przedziale (a,b) rosnącą i ma ciągłą pochodną w całym przedziale (a,b) i że $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Wzajemną zależność funkcji $\varphi(u)$ i $f(x)$ przedstawiamy na rys. 99. Dla uproszczenia przedstawiono tam równocześnie obrazy geometryczne obu funkcyj w ten sposób, że dodatnia półoś u (więc oś odciętych dla obrazu funkcji $\varphi(u)$) zlewa się z dodatnią półosią



Rys. 99

rzędnych $f(x)$, a oś rzędnych $\varphi(u)$ jest skierowana tak, jak ujemna półoś x; początek obu układów O jest wspólny.

Wiemy, że $\int_\alpha^\beta \varphi(u)du$ oznacza granicę, do jakiej zdąża suma S_n utworzona w sposób następujący: przedział (α, β) dzielimy punktami $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{n-1}$, gdzie $\alpha < u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_{n-1} < \beta$ na n części; w każdej z nich wybieramy dowolnie odpowiednio punkt pośredni $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$; wówczas jest:

$$S_n = \varphi(z_1)(u_1 - \alpha) + \varphi(z_2)(u_2 - u_1) + \ldots + \varphi(z_n)(\beta - u_{n-1}).$$

Poprowadźmy przez punkty $\alpha, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}, \beta$ proste prostopadłe do osi u. Każda z nich przetnie krzywą $u = f(x)$ w jednym tylko punkcie, jeżeli funkcja $f(x)$ jest w przedziale (a, b) stale rosnącą (jak na naszym rysunku) lub stale malejącą. Te punkty przecięcia mają odcięte $a, x_1, x_2, x_3 \ldots, b$ (na osi x-ów). Jest zatem: $\alpha = f(a)$, $u_1 = f(x_1)$, $u_2 = f(x_2), \ldots, \beta = f(b)$.

Sumę S_n możemy więc napisać w postaci

$$S_n = \varphi(z_1) \cdot [f(x_1) - f(a)] + \varphi(z_2) \cdot [f(x_2) - f(x_1)] + \ldots +$$
$$+ \varphi(z_n) \cdot [f(b) - f(x_{n-1})].$$

Założyliśmy, że funkcja $f(x)$ ma w k a ż d y m punkcie od a do b określoną i ciągłą pochodną. Tedy na podstawie twierdzenia średniej wartości (§ 47) otrzymujemy:

$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} = f'(\xi_1), \text{ skąd } f(x_1) - f(a) = f'(\xi_1)(x_1 - a),$$

gdzie (ξ_1) jest określoną liczbą pośrednią, położoną między liczbami a i x_1. Podobnie jest: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi_2)$, oraz $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi_2)(x_2 - x_1)$; $\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_3)$ itd.; wreszcie $\frac{f(b) - f(x_{n-1})}{b - x_{n-1}} = f'(\xi_n)$, skąd $f(b) - f(x_{n-1}) = f'(\xi_n)(b - x_{n-1})$.

Otrzymane na tej drodze wartości różnic wstawimy we wyrażeniu S_n zamiast nawiasów [ ], przez co uzyskujemy równość:

$$S_n = \varphi(z_1) \cdot f'(\xi_1) \cdot (x_1 - a) + \varphi(z_2) \cdot f'(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) + \ldots$$
$$+ \varphi(z_n) \cdot f'(\xi_n)(b - x_{n-1}).$$

Gdy $\delta_n = \mathrm{Max}[u_1 - \alpha;\ u_2 - u_1, \ldots, \beta - u_{n-1}] \to 0$, to granica lim S_n istnieje i jak udowodniliśmy w § 60, nie należy od wyboru punktów pośrednich $z_1, z_2, \ldots z_n$ w obrębie przedziałów małych. Wybierzmy zatem te punkty tak, aby liczbom $z_1, z_2, \ldots z_n$ odpowiadały właśnie liczby $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ jak to zresztą uwidacznia rys. 99. Będzie więc:

$$z_1 = f(\xi_1),\ z_2 = f(\xi_2), \ldots,\ z_n = f(\xi_n).$$

Że tak postąpić można, wynika stąd, iż funkcja $f(x)$ jest ciągłą i stale rosnącą lub stale malejącą. Uwzględniwszy te związki, napiszmy wreszcie sumę S_n w sposób następujący:

$$\begin{aligned} S_n = \varphi[f(\xi_1)]\cdot f'(\xi_1)\cdot(x_1 - a) + \varphi[f(\xi_2)]\cdot f'(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots \\ (1) \qquad + \varphi[f(\xi_n)]\cdot f'(\xi_n)\cdot(b - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Z teorji funkcyj odwrotnych (§ 41) wynika, że funkcję $u = f(x)$ można odwrócić i funkcją odwrotną będzie funkcja $x = \psi(u)$ rosnąca i ciągła w przedziale (α, β). I będzie $a = \psi(\alpha)$, $x_1 = \psi(u_1)$, $x_2 = \psi(u_2), \ldots$, $x_{n-1} = \psi(u_{n-1})$, $b = \psi(\beta)$. Z własności funkcyj ciągłych (§ 7) wynika, że, gdy $u_1 - \alpha \to 0$, to $\psi(u_1) - \psi(\alpha) \to 0$ czyli $x_1 - a \to 0$; podobnie, gdy $u_2 - u_1 \to 0$, to $\psi(u_2) - \psi(u_1) \to 0$ czyli $x_2 - x_1 \to 0 \ldots\ldots$, gdy $\beta - u_{n-1} \to 0$, to $\psi(\beta) - \psi(u_{n-1}) \to 0$ czyli $b - x_{n-1} \to 0$. Jeżeli więc $\delta_n \to 0$, to także

$$\Delta_n = \mathrm{Max}\,[x_1 - a,\ x_2 - x_1, \ldots\ b - x_{n-1}] \to 0.$$

Wskutek tego, gdy $\delta_n \to 0$, to, jak już zaznaczyliśmy $S_n \to \int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du$, ale też prawa strona wyrażenia (1) na sumę S_n ma granicę równą całce $\int_a^b \varphi(f(x))f'(x)\,dx$, skoro też $\Delta_n \to 0$. A że ciąg dwóch różnych granic mieć nie może, więc

$$(2) \qquad \int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du = \int_a^b \varphi(f(x))f'(x)\,dx,$$

przyczem $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$.

Podobnym byłby wywód, gdyby funkcja $u = f(x)$ była stale malejącą — radzimy czytelnikowi go przeprowadzić.

[Można się poniekąd od pewnych założeń co do funkcji $f(x)$ uwolnić, jednakowoż dowód w tak ogólnym przypadku pomijamy, jako wychodzący poza ramy tego podręcznika].

Równość (2) streszcza właśnie metodę zwaną metodą zmiany zmiennej całkowania. Kiedy jej użyć należy, względnie jaką funkcję $f(x)$ obrać wypada, nie podobna dać żadnych reguł, nabyte doświadczenie i intuicja jedynie mogą być drogowskazem. Używa się tej metody zwykle w jednym z dwu następujących przypadków:

a) całka po lewej w równości (2) jest „trudną“ do obliczenia, kiedy całka po prawej jest „łatwą“;

b) lub gdy pragniemy wykazać, że całka po lewej daje się przekształcić w całkę po prawej.

Zwracamy uwagę na to, jak się nowe granice całkowania obliczają. Dla wyjaśnienią podajemy poniżej kilka przykładów.

1) Całkę $\int_0^{1/2} \varphi(u)\,du$ przekształćmy za pomocą zmiany zmiennych $u = \sin x$; funkcja ta jest rosnącą w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Nowe granice będą się określały przy pomocy równości $x = \arcsin u$, a mianowicie $0 = \arcsin 0$, $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$. Tedy:

$$\int_0^{1/2} \varphi(u)\,du = \int_0^{\pi/6} \varphi(\sin x) \cdot \cos x\,dx.$$

$\left(\text{Np. } \varphi(u) = \frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$.

2) Całkę $\int_0^{\pi/4} \varphi(u)\,du$ obliczmy, kładąc $u = \operatorname{arctg} x$, stąd $x = \operatorname{tg} u$; wtedy $\int_0^{\pi/4} \varphi(u)\,du = \int_0^1 \varphi(\operatorname{arctg} x)\,\frac{dx}{1+x^2}$. $\left(\text{Np. } \varphi(u) = \frac{\sin^3 u}{\cos^5 u}\right)$.

3) Podobnie obliczy czytelnik:

$\int_2^3 \frac{(ln\,u)^n\,du}{u}$, gdy położy $x = ln\,u$ (granice nowe: $ln 2$, $ln 3$).

$\int_\alpha^\beta \frac{du}{e^u + e^{-u}}$, gdy położy $x = e^u$. (Nowe granice: e^α, e^β).

Dalsze przykłady pozna czytelnik w następnym paragrafie.

§ 66. Przykłady na obliczenie całek określonych.

I. Obliczmy całkę $I = \int_0^1 \frac{ln(1+u)}{1+u^2}\,du$; w tym celu położmy $u = \operatorname{tg} x$, przyczem niech będzie $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$, wtedy tę zmianę zmiennej uskutecznić można. Ponieważ jest $0 = \mathrm{tg}0$, $1 = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$, więc mamy $I = \int_0^{\pi/4} \frac{ln(1+\mathrm{tg}x)}{1+\mathrm{tg}^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\pi/4} ln(1+\mathrm{tg}x)\,dx$. Połóżmy $x = \frac{\pi}{4} - y$, to dla zmiennej (y) otrzymujemy granice dolną $\frac{\pi}{4}$, górną 0; przeto:

$$I = -\int_{\pi/4}^{0} ln\left[1+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right]dy = \int_0^{\pi/4} ln\left[1+\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\mathrm{tg}y}\right]dy =$$

$$= \int_0^{\pi/4} ln\left[1+\frac{1-\mathrm{tg}y}{1+\mathrm{tg}y}\right]dy = \int_0^{\pi/4} ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{tg}y}\right)dy =$$

$$= \int_0^{\pi/4} ln2\,.\,dy - \int_0^{\pi/4} ln(1+\mathrm{tg}\,y)dy.$$

Ale jest $\int_0^{\pi/4} ln2\,.\,dy = ln2 \int_0^{\pi/4} dy = \frac{\pi}{4} ln2$; ponadto jest $\int_0^{\pi/4} ln(1+\mathrm{tg}\,y)dy = \int_0^{\pi/4} ln(1+\mathrm{tg}\,x)\,dx = I$, gdyż granice całkowania w obu przypadkach są te same a wartość całki określonej nie zależy od litery, której użyliśmy na oznaczenie zmiennej całkowania. Mamy więc $I = \frac{\pi}{4} ln2 - I$ i stąd $2I = \frac{\pi}{4} ln2$ i ostatecznie $I = \frac{\pi}{8} ln2$. Widocznie, że zmiany zmiennej całkowania użyliśmy, by całkę przekształcić na różnicę dwu całek, a nie, by jedynie z danej wyprowadzić „łatwiejszą“ do obliczenia.

II. Obliczmy całkę $I = \int_{-1}^{+1} \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2+1}} du$. Rozłożymy tę całkę na dwie: $I = \int_{-1}^{0} \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2+1}} du + \int_0^1 \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2+1}} du$. W pierwszej $J = \int_{-1}^{0} \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2+1}} du$ połóżmy $u = -v$, tedy $J = -\int_1^0 \frac{v^2-1}{\sqrt{v^2+1}} dv = \int_0^1 \frac{v^2-1}{\sqrt{v^2+1}} dv$, będzie tedy: $I = \int_0^1 \frac{v^2-1}{\sqrt{v^2+1}} dv + \int_0^1 \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2+1}} du$; obie całki prawej strony są sobie równe, gdyż wartość całki określonej nie zależy od litery, którą przyjęto na oznaczenie zmiennej całkowania, tedy $I = 2\int_0^1 \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$. Geometryczna interpretacja ostatniego wyniku jest następująca: weźmy krzywą (K) o równaniu $y = \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2+1}}$; ponieważ $\frac{(-u)^2-1}{\sqrt{(-u)^2+1}} = \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2+1}}$, więc widzimy, że oś y jest osią symetrji tej krzywej; obierzmy punkty $A(-1,0)$, $B(1,0)$ i w nich wykreślmy proste l_1 i l_2 prostopadłe do osi (u); pole ograniczone odcinkiem AB, prostemi l_1, l_2 i krzywą K ma wartość $I = \int_{-1}^{+1} \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$; z powodu symetrji krzywej K względem osi y będzie część tego pola po jednej stronie osi (y) równą części tego pola po drugiej stronie osi (y) czyli $I = 2\int_0^1 \frac{u^2-1}{\sqrt{u^2+1}}\,du$, co otrzymaliśmy poprzednio analitycznie. Ponieważ wiemy, że obliczanie całki określonej przy pomocy całki nieokreślonej jest rachunkowo nie łatwem, przeto przekształcimy całkę I tak, aby rzecz sobie uprościć. Otóż napiszmy $\frac{I}{2} = \int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+1}} - \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$. Pierwszą całkę (którą można wprawdzie obliczyć przy pomocy całki dwumiennej) obliczymy jednakowoż przy pomocy całkowania przez części: $\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+1}} = \int_0^1 u \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,du$; ale $\frac{u}{\sqrt{u^2+1}} = (\sqrt{u^2+1})'$ tedy $\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+1}} = \left(u\sqrt{u^2+1}\right)_0^1 - \int_0^1 \sqrt{u^2+1}\,du = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{u^2+1}\,du$; ostatnią całkę przekształcimy jeszcze mnożąc jej funkcję podcałkową i dzieląc przez $\sqrt{u^2+1}$; będzie tedy $\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+1}} = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{u^2+1}{\sqrt{u^2+1}}\,du = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+1}} - \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$. Otrzymaliśmy tedy $\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+1}} = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+1}} - \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$. Otóż pierwsza całka strony prawej jest identyczną z całką lewej strony; przenosząc ją na lewą stronę, mamy: $2\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+1}} = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$, skąd $\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$; to wstawimy we wyrażenie na $\frac{I}{2}$; otóż będzie $\frac{I}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$ $- \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$, skąd $I = \sqrt{2} - 3\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$. Obliczenie całki I zredukowaliśmy tedy do obliczenia bardzo prostej całki, wiadomo bowiem, że całka nieokreślona: $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} =$ $= ln(u + \sqrt{u^2+1}) + C$, więc $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \left(ln(u+\sqrt{u^2+1})\right)_0^1 =$ $= ln(1+\sqrt{2}) - ln\,1 = ln(1+\sqrt{2})$. Ostatecznie otrzymujemy: $I =$ $= \sqrt{2} - 3ln(1+\sqrt{2})$.

III. Obliczmy całkę $I_n = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^n dx$, gdzie ($n$) oznacza liczbę całą i nieujemną. Przekształcamy tę całkę w sposób następujący: $I_n = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{n-2} . \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{n-2} . \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{n-2} .$ $\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{n-2} . \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{n-2} dx = \int_0^{\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{n-2} .$ $d(\operatorname{tg} x) - I_{n-2} = \left(\frac{(\operatorname{tg}.x)^{n-1}}{n-1}\right)_0^{\pi/4} - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$, przyczem zaważyć trzeba, że to przekształcenie jest dopuszczalnem, gdy $n \neq 1$. Gdy mamy $n = 1$, to $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{-\sin x}{\cos x} dx =$ $-\left((ln\,|\cos x|\right)_0^{\pi/4} = -ln\cos\frac{\pi}{4} = -ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Wzór $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$ redukuje obliczenie całki I_n do obliczenia całki I_{n-2}, a więc ostatecznie do całki I_0 lub I_1, zależnie od tego czy (n) oznacza liczbę parzystą lub nie.

Np. $I_5 = \frac{1}{4} - I_3$, $I_3 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} + ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, przeto $I_5 = \frac{1}{4} -$ $\frac{1}{2} - ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4} - ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, zaś $I_6 = \frac{1}{5} - I_4$, $I_4 = \frac{1}{3} - I_2$, $I_2 = \frac{1}{1}$ $- I_0 = 1 - \frac{\pi}{2}$, więc $I_6 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{2}$.

IV. Czytelnik obliczy z łatwością całkę $I = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sin u + \cos u}$, stosując do niej metodę, podaną przy końcu § 56. Na wynik otrzymuje się $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

V. Niech a oznacza liczbę rzeczywistą, ponadto niezależną od zmiennej x. Obliczmy całkę $I = \int_0^\pi \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1-2a\cos x + a^2}}$. Zbadajmy, czy funkcja podcałkowa jest określoną w przedziale $(0, \pi)$ t. zn. czy dzielnik $\sqrt{1-2a\cos x+a^2}$ ma wartości rzeczywiste i różne od zera, gdy $0 \leqq x \leqq \pi$. Otóż $1-2a\cos x + a^2 = (a-\cos x)^2 + 1 - \cos x^2 = (a-\cos x)^2 + \sin^2 x \geqq 0$; zerem będzie to wyrażenie tylko wtedy, gdy $\sin x = 0$ i równocześnie $a - \cos x = 0$. Otóż $\sin x = 0$, gdy $x = n\pi$, gdzie n jest liczbą całą i wtedy $\cos x = (-1)^n$ t. zn. $a = +1$ lub $a = -1$. Te dwie wartości należy zatem wyłączyć i wtedy funkcja podcałkowa jest określoną i ciągłą w przedziale $(0, \pi)$.

Ponadto widzimy, że $\frac{d}{dx}\sqrt{1-2a\cos x + a^2} = \frac{a \sin x}{\sqrt{1-2a\cos x + a^2}}$.

Mamy tedy do odróżnienia dwa przypadki: A) $a = 0$, B) $a \neq 0$.

A) Gdy $a = 0$, to $I = \int_0^\pi \sin x\, dx = \Big(-\cos x\Big)_0^\pi = 2$.

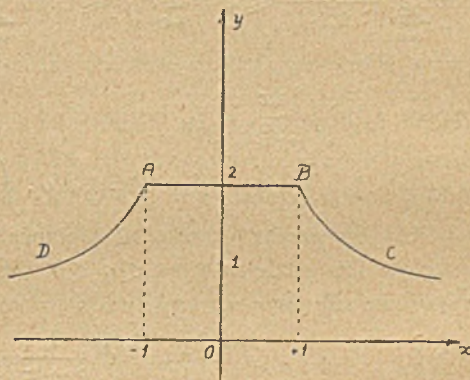
B) Niech $a \neq 0$, wtedy $I = \frac{1}{a}\int_0^\pi \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-2a\cos x + a^2}\right) dx =$

$$= \frac{1}{a}\left\{\sqrt{1-2a\cos x + a^2}\right\}_0^\pi = \frac{1}{a}\left\{\sqrt{1+2a+a^2} - \sqrt{1-2a+a^2}\right\} =$$

$= \frac{1}{a}\Big\{|1+a| - |1-a|\Big\}$, bo wiemy, że dla liczb rzeczywistych (a), jest $\sqrt{a^2} = |a|$. Aby obliczenie całki I dalej posunąć, trzeba odróżnić kilka podprzypadków, które ujmujemy poniżej w tabelkę.

$1+a$	$1-a$	$\lvert 1+a \rvert$	$\lvert 1-a \rvert$	I	warunek na liczbę a
1) $+$	$+$	$1+a$	$1-a$	$I = \frac{1}{a}\Big\{1+a-1+a\Big\} = 2$	$-1 < a < 1$
2) $+$	$-$	$1+a$	$a-1$	$I = \frac{1}{a}\Big\{1+a-a+1\Big\} = \frac{2}{a}$	$1 < a$
3) $-$	$+$	$-1-a$	$1-a$	$I = \frac{1}{a}\Big\{-1-a-1+a\Big\} = \frac{-2}{a}$	$a < -1$
4) $-$	$-$	niemożliwe, nonsens: $1 < a < -1$			

Nie trzeba rozważać przypadków, gdy $1+\alpha=0$ lub $1-\alpha=0$, bo wartości $\alpha=\pm 1$ wykluczyliśmy. Widzimy stąd, że wartość całki I zależy od wartości liczby α. Połóżmy tedy $\int_0^\pi \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}} = \Phi(\alpha)$, to $\Phi(\alpha)$ oznacza funkcję określoną, o ile jest $\alpha \neq \pm 1$. Wykres tej funkcji daje rys. 100 przyczem punkty A, B do krzywej $y=\Phi(\alpha)$ nie należą. Krzywa składa się z odcinka AB (bez punktów końcowych) i dwóch łuków dwóch hyperbol równobocznych Jak widzimy, pojęcie całki określonej pozwoliło nam zdefiniować funkcję o podanych wyżej własnościach. Niebawem w rozdziale o szeregach poznamy jeszcze jeden sposób definiowania funkcji. (Zob. jeszcze § 77).



Rys. 100.

VI. *Potencjał*. Wyobraźmy sobie oś i na niej w punkcie O punkt materjalny o masie M; niech a, b oznaczają liczby takie, że $0<a<b$; niech wektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, gdzie A, B oznaczają punkty osi, mierzą się odpowiednio liczbami a względnie b. Odcinek AB niech będzie pokryty masą o gęstości linjowej δ t. zn., że odcinek wycięty z AB o długości d ma masę δd (liczba δ jest stałą). Odcinek AB przyciąga punkt O i obliczmy to przyciąganie. W tym celu odcinek AB podzielmy na części punktami $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$, których odległości od punktu O wynoszą $x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}$. Weźmy pod uwagę odcinek X_i, X_{i+1}; on wywiera na punkt O przyciąganie P_{i+1}. Masa odcinka wynosi $\delta(x_{i+1}-x_i)$. Na mocy prawa Newtona siła P_{i+1} będzie zawarta między dwiema siłami: $\frac{CM\delta(x_{i+1}-x_i)}{x_i^2}$, $\frac{CM\delta(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}^2}$, gdzie C oznacza stałą grawitacyjną. Jest więc $\frac{CM\delta(x_{i+1}-x_i)}{x_{i+1}^2} \leqq P_{i+1} \leqq \frac{CM\delta(x_{i+1}-x_i)}{x_i^2}$. Pierwsza strona tej nierówności mierzy siłę, z jaką przyciągałaby masa odcinka $X_i X_{i+1}$, gdyby była skupiona w najdalszym punkcie odcinka, bo

w punkcie X_{i+1}, trzecia zaś strona nierówności podaje miarę przyciągania masy, równej masie odcinka $X_i X_{i+1}$, ale skupionej w punkcie najbliższym X_i. Sumując przyciąganie wszystkich odcinków, otrzymujemy przyciąganie P całego odcinka AB, a mianowicie:

$$CM\delta \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}^2} \leqslant P = \sum_{i=0}^{n-1} P_{i+1} \leqslant CM\delta \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{x_i^2}, \text{ jeżeli } x_0 = a,$$

$x_n = b$. Pierwsza i trzecia strona ostatniej nierówności mają wspólną granicę $CM\delta \int_a^b \frac{dx}{x^2}$, a że liczba P od sposobu podziału odcinka AB na części nie zależy, więc $P = CM\delta \cdot \int_a^b \frac{dx}{x^2} = CM\delta \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$.

Gdyby punkt o masie M nie leżał w punkie O, ale w punkcie o odciętej x, gdzie albo $x < a < b$ albo $a < b < x$, to otrzymalibyśmy na siłę przyciągania wzór

$$P(x) = CM\delta \left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x}\right).$$

Masę M przenieśmy wzdłuż osi od położenia $M_1(x_1)$ w położenie $M_2(x_2)$, gdzie $x_2 < x_1 < a$; wykonamy przy tem pracę L, która, jak łatwo się przekonać, będzie równą całce:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} P(x)\,dx = CM\delta \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{a-x} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b-x}\right] =$$

$$= CM\delta \Big| ln\,|b-x| - ln\,|a-x| \Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Połóżmy $U(x) = CM\delta\,[ln\,|b-x| - ln\,|a-x|]$; wtedy widoczne, że jest $L = U(x_2) - U(x_1)$. Funkcję $U(x)$ zowie się potencjałem przyciągania rozważanego odcinka AB. Zauważmy, że potencjał ma dwie własności: 1) praca wykonana równa się przyrostowi potencjału i 2) siła przyciągania $P(x)$, jak łatwo stwierdzić, jest równa $\frac{dU(x)}{dx}$ t. zn. pochodnej potencjału.

Rozdział XII. Zastosowanie rachunku nieskończonościowego do geometrji.

§ 67. Badanie kształtu krzywych.

Rachunek różniczkowy i całkowy (pod wspólną nazwą rachunku nieskończonościowego) stanowią wielki i ważny środek do rozwiązywania zagadnień geometrycznych. Wiadomo z geometrji elementarnej, że np. zagadnienie obliczenia pola koła, czy pola elipsy, wymaga każde *specjalnej* metody, kiedy właśnie analiza wyższa (t. j. rachunek nieskończonościowy) dają nam metodę *ogólną* na rozwiązanie tych i im podobnych zagadnień.

Postawimy sobie zagadnienie następujące: dana funkcja $y=f(x)$, znaleźć jej wykres. W tym celu trzeba będzie znaleźć pewne dane, które pozwalają nam wywnioskować o kształcie krzywej $y=f(x)$. Zajmiemy się kolejno szczegółami tego zagadnienia, rozwiązując części zagadnienia na kilku odpowiednio dobranych przykładów. Czytelnik powinien dla ćwiczenia wszystkie części zagadnienia rozwiązać na każdym z danych przykladów i porobić odnośne rysunki.

Zagadnienie powyżej sformułowane nazywać będziemy dla krótkości: zagadnieniem badania kształtu krzywych.

Zauważmy, że większość dotychczas przez nas podanych wykresów miała charakter tymczasowy, gdyż niejeden ważny szczegół rysunkowy nie był uzasadniony. Obecny paragraf pozwoli te luki zapełnić.

A) Niech będzie dana funkcja $f(x)$ ciągła w przedziale (a,b). Chcąc wyrysować krzywą $y=f(x)$, należy znaleźć kilka jej punktów, przyjmując pewne wartości x z przedziału (a,b). Oczywiście przedewszystkiem zbadamy, czy istnieją punkty przecięcia się krzywej z osiami x, y. Otóż punkt krzywej, leżący na osi x, ma rzędną $y=0$; mamy więc rozwiązać równanie $f(x)=0$ i odwrotnie każda liczba x_0 rzeczywista, spełniająca to równanie, a więc dla której jest $f(x_0)=0$, daje odciętą punktu przecięcia się osi x z krzywą $y=f(x)$, którą nazwiemy krzywą K.

Przykład I. Niech będzie $y=\sin x$, tedy krzywa K jest t. zw. sinusojdą. Kładąc $\sin x=0$, otrzymujemy na pierwiastki nieskończenie wiele liczb $x=n\pi$, gdzie n oznacza dowolną liczbę całkowitą. Krzywa przecina więc oś x w nieskończenie wielu punktach o stałym odstępie równym π, mianowicie w punktach $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(2\pi,0)$, $(3\pi,0)$.... $(-\pi,0)$, $(-2\pi,0)$, $(-3\pi,0)$....

Przykład. II. Niech będzie $y=e^x$, tedy krzywa K jest obrazem funkcji wykładniczej. Ponieważ (§ 26) jest stale $e^x>0$, przeto równanie $e^x=0$ nie ma pierwiastków, tem samem krzywa K nie przecina wcale osi x. Ponieważ jest $y=e^x>0$, więc krzywa K leży cała w I-wszej i II-giej ćwiartce płaszczyzny (nad osią x).

Aby znaleźć punkt, w którym krzywa K przecina oś y, trzeba położyć $x=0$, o ile to wolno t. zn. o ile liczba zero należy do przedziału (a, b). Jeżeli jest $a \leqslant 0 \leqslant b$, to punkt przecięcia krzywej K z osią y istnieje i ma współrzędne $(0, f(0))$.

Przykład III. Niech będzie $y=\frac{1}{x}$; krzywa K, będąca obrazem tej funkcji, jest hyperbolą równoboczną, której asymptotami są prostopadłe do siebie osie x, y. Krzywa ta nie przecina osi x, bo równanie $\frac{1}{x}=0$ nie ma pierwiastka, i nie przecina osi y, bo $\frac{1}{0}$ nie przedstawia żadnej liczby.

Uwaga. Często dana jest funkcja $y=f(x)$ w postaci znanego wyrażenia (np. funkcji złożonej); wtedy należy zbadać, dla jakich liczb x funkcja $f(x)$ jest określoną lub (nawet) ciągłą. Tem zagadnieniem zajmowaliśmy się na str. 167.

Dla ćwiczenia radzimy zbadać następujące przykłady:

1) $y=ln(x-\sqrt{1-x})$, 2) $y=\sqrt{1-(lnx)^2}$, 3) $y=\text{arc}\cos(ln[x-\sqrt{1-x}])$.

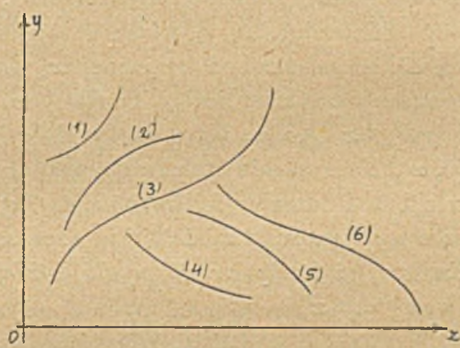
B) Z kolei zdajmy sobie sprawę z tego, czy krzywa się wznosi czy też opada. O tem znów decyduje fakt, czy funkcja rośnie czy też maleje ze wzrostem zmiennej x. Badanie takie jest dość trudne. O ile zaś założymy, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) i ma pochodną wewnątrz tego przedziału, to ze znaku pochodnej można wyciągnąć pewne wnioski w myśl twierdzeń § 48. A więc jeżeli jest pochodna $f'(x)>0$ wewnątrz przedziału (a, b), to funkcja $f(x)$ rośnie, krzywa się wznosi; gdy jest $f'(x)<0$ wewnątrz przedziału (a, b), to krzywa opada.

Przykład IV. Zbadajmy krzywą $y=\text{arc}\sin x$; jak wiemy z § 42 ma być $|x|\leqslant 1$. W przedziale $(-1,1)$ funkcja ta jest ciągłą; jak wiemy, jest $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, gdy $|x|<1$; jest więc pochodna dodatnią wewnątrz przedziału $(-1,1)$. Funkcja $\text{arc}\sin x$ jest więc rosnącą w przedziale $(-1,1)$.

Przykład V. Jeżeli przez x oznaczymy zredukowane ciśnienie powietrza na wysokości y metrów, przez x_0 ciśnienie powietrza przy powierzchni ziemi, to, jak uczy fizyka, jest $y=C\log\frac{x_0}{x}$, przyczem C

oznacza stałą i mianowicie, gdy y wynosi ilość metrów, zaś $\log\frac{x_0}{x}$ oznacza logarytm zwyczajny stosunku $\frac{x_0}{x}$, to $C = 18420$ przy 0°C. Jest $\frac{dy}{dx} = -\frac{C}{x} < 0$, tedy funkcja y jest malejącą w dowolnym przedziale (a, b), gdzie $0 < a < b$, jak to jest zresztą zrozumiałe intuicyjnie.

Nim przejdziemy do dalszej części rozważanego zagadnienia, zauważmy, że krzywa może się wznosić lub opadać w różny sposób, jak to uwydatnia rys. 101. Krzywe 1, 2, 3 na rys. 101 wznoszą się, każda w inny sposób, podobnie krzywe 4, 5, 6 opadają też w różne sposoby, które później zbadamy.



Rys. 101

C) Krzywa K może mieć tę własność, że zbadanie jej w jednym przedziale wystarcza, by ją zbadać dla każdej wartości zmiennej.

Przykład VI. Jak wiadomo z fizyki, bussola stycznych służy do mierzenia stałych, słabych prądów. Jeżeli przez x oznaczymy miarę kąta, o który wychyliła się igiełka magnetyczna bussoli, przez y natężenie prądu stałego, który to wychylenie wywołał, to jest $y = C \operatorname{tg} x$, gdzie C oznacza stałą.

Rozważmy krzywą o równaniu $y = C . \operatorname{tg} x$. Ponieważ jest $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$, więc dość zbadać rozważaną krzywą w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Przykład VII. Jeżeli słyszymy ton, to cząstki powietrza wykonują drganie proste, a mianowicie, gdy przez y oznaczymy wychylenie cząstki z położenia równowagi, liczone jako dodatnie w jedną stronę, jako ujemne w stronę przeciwną, to $y = y_0 \sin(at - \alpha)$, gdy y_0, a, α oznaczają stałe ($y_0 > 0$, $a > 0$), zaś t oznacza miarę czasu. Liczba y_0 nosi nazwę amplitudy drgania [jest $y_0 = \max(y)$]; α nazywa się fazą drgania. Drganie to objaśni rysunek na płaszczyźnie, odniesionej do osi y, t. Drganie cząstki jest ruchem perjodycznym, gdyż jest: $\sin\left[a\left(t+\frac{2\pi}{a}\right)-\alpha\right]=\sin[at-\alpha]$, dla każdej liczby t.

Kładąc $T=\frac{2\pi}{a}$, otrzymujemy stąd $a=\frac{2\pi}{T}$, $y=y_0\sin\left[\frac{2\pi t}{T}-\alpha\right]$. Liczba T podaje długość czasu, potrzebnego na jedno pełne drganie; liczbę $n=\frac{1}{T}$ nazywamy częstością drgania — gdyby bowiem $\frac{1}{T}$ było liczbą całą, to n oznaczałoby ilość całych drgań w jednostce czasu; T t. zw. okres drgania, jest okresem dla $\sin(at-\alpha)$.

Sformułujemy tę własność ogólnie: załóżmy, że istnieje liczbą ω, niezależna od zmiennej x, dodatnia i taka, że, gdy $f(x)$ oznacza określoną liczbę, to $f(x+\omega)$ oznacza też liczbę określoną i jest $f(x+\omega)=f(x)$; wtedy dość zbadać krzywą w przedziale $(0,\omega)$. Na zasadzie indukcji matematycznej udowodni bowiem czytelnik twierdzenie: *jeżeli funkcja $f(x)$ czyni zadość założeniu dopieroco wysłowionemu i jeżeli $f(x)$ oznacza liczbę określoną, to $f(x+n\omega)$ oznacza też liczbę określoną dla każdej liczby całej (n) i jest $f(x+n\omega)=f(x)$.*

Funkcję o takiej własności nazywamy perjodyczną (okresową, liczbę ω jej perjodem (okresem)

Funkcje $\sin x$, $\cos x$ mają okres 2π, funkcje $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\cos^2 x$ mają perjod π. Stąd wynikają uproszczenia przy badaniu kształtu krzywych $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\cos^2 x$.

Funkcja $f(x)$ może mieć własność następującą: jeżeli $f(x)$ oznacza liczbę określoną, to $f(-x)$ oznacza również liczbę określoną i jest $f(-x)=f(x)$. Powiadamy wtedy, że funkcja $f(x)$ jest „parzystą“ i że oś y jest osią symetrji krzywej, będącej obrazem takiej funkcji. Wtedy dość zbadać kształt krzywej dla wartości $x\geqslant 0$.

Przykład VIII. Niech będzie $y=\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$, gdzie k oznacza stałą o własności $0<k\leqslant 1$. Ponieważ jest $\sin(x+\pi)=-\sin x$, tedy dość zbadać tę krzywą w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; ale ponieważ jest też $\sin^2(-x)=\sin^2 x$, więc dość zbadać krzywą dla wartości $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

W przykładzie krzywej o równaniu $y=\sin x$ z powodu okresowości funkcji $\sin x$ dość zbadać kształt krzywej w przedziale

$(-\pi, \pi)$; nadto, ponieważ jest $\sin(-x) = -\sin x$, tedy można się ograniczyć do przedziału $(0, \pi)$; łuk α krzywej w przedziale $(0, \pi)$ trzeba obrócić o kąt 180^0 na około osi y i w ten sposób otrzymany łuk β obrócić jeszcze naokoło osi x o kąt 180^0, przez co otrzymamy już łuk sinusojdy dla przedziału $(-\pi, 0)$. Ale i badanie łuku α można jeszcze uprościć; skoro jest $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, więc $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, przeto dość zbadać łuk α w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i potem go obrócić o kąt 180^0 naokoło prostej l, prostopadłej do osi x, a przechodzącej przez punkt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Powyższe rozważania mają służyć za wzór uproszczeń, które w badaniu kształtu krzywych należy poczynić.

D) W § 32 widzieliśmy, że badanie kształtu krzywej ułatwia w wysokim stopniu znajomość stycznej do krzywej. Na krzywej $y = f(x)$ obierzmy tedy punkt $M(x_0, f(x_0))$, w którym istnieje określona pochodna $f'(x_0)$. Wiemy już, że, gdy istnieje pochodna $f'(x_0)$, to krzywa w punkcie M ma styczną *nie* prostopadłą do osi x, wskutek tego równanie tej stycznej będzie kształtu $Y = \lambda x + \mu$, gdzie (x, Y) są współrzędnemi bieżącego punktu stycznej, λ jest jej współczynnikiem kierunkowym, μ drugą stałą.

Otóż wiemy też z § 32, że współczynnik λ równa się właśnie pochodnej $f'(x_0)$; jest więc $Y = x \cdot f'(x_0) + \mu$. Aby wyznaczyć liczbę μ, trzeba wyzyskać i tę okoliczność, że styczna przechodzi przez punkt M, (który zowie się punktem styczności krzywej ze styczną); wskutek tego współrzędne punktu M spełniać muszą równanie stycznej, jest więc $f(x_0) = x_0 \cdot f'(x_0) + \mu$, skąd wynika $\mu = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$. Otrzymujemy tedy równanie stycznej $Y = x f'(x_0) + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$, co piszemy zwykle we formie więcej symetrycznej: $Y - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0)$. Dla uproszczenia pisma wprowadźmy jeszcze inne znakowanie, którego będziemy używali, gdy niema potrzeby uwydatnienia odciętej x_0, a mianowicie piszemy $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$, wtedy równanie stycznej przyjmie postać $Y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0)$. Znając x_0, y_0, y'_0 możemy narysować styczną do krzywej w punkcie M; jak wiemy, jest $\operatorname{tg}\alpha = y'_0$, gdzie α oznacza kąt nachylenia stycznej do osi x. Znalazłszy kąt α z ostatniej równości, trzeba poprowadzić prostą przez punkt M i nachyloną do osi x pod kątem α. Używamy tego sposobu, o ile nie otrzymamy dwóch punktów na stycznej, mających współrzędne całkowite lub ułamkowe lub niewymierne, wyznaczone przy pomocy łatwych konstrukcyj.

Przykład IX. Gdy $y = \cos^2 x$, to równanie stycznej w punkcie $M(x_0, \cos^2 x_0)$ będzie następujące $Y - \cos^2 x_0 = -2(x - x_0)\sin x_0 \cos x_0$. Weźmy przypadki $x_0 = 0$ lub $x_0 = \frac{\pi}{2}$, to równanie stycznej w pierwszym przypadku ma postać $Y = 1$, styczna jest równoległą do osi x; w drugim przykładzie jest $Y = 0$ czyli styczną jest oś x.

Znajomość stycznej pozwoli nam łuk krzywej w sąsiedztwie punktu M dokładniej narysować, gdyż styczna daje nam „kierunek" tego łuku w punkie M.

Przykład X. Niech będzie $y = e^x$. Weźmy punkt $M(x_0, e^{x_0})$ na krzywej; styczna tego punktu ma nachylenie α do osi x takie, że $\operatorname{tg}\alpha = y_0' = e^{x_0} > 0$. Weźmy pod uwagę trójkąt MNM', gdzie M' oznacza rzut punktu M na oś x, N punkt przecięcia stycznej z osią x. W tym trójkącie będzie $MM' = NM' . \operatorname{tg}\alpha$ czyli $e^{x_0} = NM' . e^{x_0}$ skąd wynika, że jest $NM' = 1$. Ta własność stycznej pozwala nam ją narysować w każdym punkcie krzywej, będącej obrazem funkcji $y = e^x$.

Wyprowadzimy jeszcze równanie normalnej do krzywej w punkcie $M(x_0, y_0)$. Otóż normalna w punkcie M jest to prosta, przechodząca przez badany punkt M i prostopadła do stycznej. Wiadoma nam z geometrji analitycznej rzecz następująca: jeżeli mamy dwie proste o równaniach: $(l)\ y = a_1 x + b_1$, $(m)\ y = a_2 x + b_2$, i gdy przynajmniej jedna z liczb a_1, a_2 jest różną od zera, to warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby prosta (l) była prostopadła do prostej (m) jest związek $a_1 . a_2 + 1 = 0$ (wtedy jest $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$). W pozostałych przypadkach równania prostych prostopadłych łatwo podać.

Oznaczmy przez η rzędną dowolnego punktu normalnej, to równanie normalnej będzie albo kształtu: $\eta = ax + b$ albo postaci $x = c$. Chodzi nam o wyliczenie spółczynników a i b, względnie c. W pierwszym przypadku znamy dwa warunki, które ma spełnić równanie normalnej; one pozwolą nam obliczyć liczby a i b a mianowicie warunki są następujące: 1) punkt $M(x_0, y_0)$ leży na normalnej, przeto współrzędne jego czynią zadość równaniu normalnej, wskutek czego będzie: $y_0 = ax_0 + b$, stąd: $b = y_0 - ax_0$: 2) wiemy z określenia, że normalna jest prostopadłą do stycznej, która ma współczynnik kierunkowy y'_0; więc, gdy $y'_0 \neq 0$, to będzie $ay'_0 + 1 = 0$; stąd $a = -\frac{1}{y'_0}$; wstawiając to w równanie normalnej, otrzymujemy, jako równanie normalnej:

$$\eta = ax + y_0 - ax_0 = y_0 + a(x - x_0) = y_0 - \frac{1}{y'_0}(x - x_0)$$

lub w postaci symetrycznej: $x - x_0 + y'_0(\eta - y_0) = 0$.... (1).

Gdy zaś $y'_0 = 0$, to styczna jest prostopadłą do osi y, więc normalna będzie prostopadłą do osi x-ów i jej równanie przyjmie postać $x = x_0$ czyli $x - x_0 = 0$; widzimy więc, że i w tym przypadku otrzymujemy równanie (1), w którem należy położyć $y'_0 = 0$. Widzimy tedy, że równanie normalnej do krzywej w punkcie $(x_0\, y_0)$ jest postaci (1).

Rozważmy dla przykładu linję łańcuchową (zob. str. 307), której równanie ma postać: $y = \frac{1}{2a}[e^{ax} + e^{-ax}]$, gdzie a oznacza stałą dodatnią. Stąd jest $y' = \frac{1}{2}[e^{ax} - e^{-ax}]$, wobec czego normalna do krzywej w punkcie $M(x, y)$ ma równanie $\xi - x + \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})(\eta - y) = 0$, gdzie ξ, η oznaczają współrzędne bieżącego punktu normalnej.

Jeżeli przez M_1 oznaczymy rzut punktu M na oś x, zaś przez N punkt przecięcia normalnej z osią x, to MM_1N tworzy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych MM_1, M_1N i przeciwprostokątnej MN. Aby wyznaczyć rzut przyprostokątnej MM_1, na normalną MN, stosujmy znane twierdzenie z planimetrji, które daje: $\overline{MM_1}^2 = \overline{MP}\,.\,\overline{MN}$, przyczem P oznacza rzut punktu M_1 na MN. Otóż $\overline{MN} = \sqrt{\overline{MM_1}^2 + \overline{M_1N}^2}$, więc

$$\overline{MP} = \frac{\overline{MM_1}^2}{\sqrt{\overline{MM_1}^2 + \overline{M_1N}^2}}.$$

Ale $\overline{MM_1} = y$; wyszukajmy jeszcze współrzędne punktu N; otóż w punkcie N będzie $\eta = 0$, więc z równania normalnej wynika: $\xi = x + \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})y$; stąd $\overline{M_1N} = |\xi - x| = \frac{1}{2}|e^{ax} - e^{-ax}|y$; przeto $\overline{MM_1}^2 + \overline{M_1N}^2 = y^2 + \frac{1}{4}(e^{ax} - e^{-ax})^2 y^2 = \frac{1}{4}y^2[4 + e^{2ax} - 2 + e^{-2ax}] = \frac{1}{4}y^2(e^{ax} + e^{-ax})^2 = y^4 a^2$, tedy otrzymujemy $\overline{MP} = \frac{y^2}{y^2 a} = \frac{1}{a}$ czyli rzut MP jest wielkością stałą, co stanowi interesującą własność krzywej łańcuchowej. Czytelnikowi radzimy zrobić odnośny rysunek.

Jak już poprzednio powiedzieliśmy łańcuch jednorodny, sprężysty, nierozciągliwy i wolno zwisający przyjmuje pod wpływem przyciągania ziemskiego właśnie kształt zwykłej linji łańcuchowej. Rozważmy teraz łańcuch niejednorodny, tak dodatkowo obciążony masą, iż, wolno zwisając, ma własność następującą: gdy weźmiemy dwa dowolne łuki AB, CD łańcucha, byle rzuty łuków na płaszczyznę poziomą były równej długości, wtedy ciężary łuków wraz z dodatkowem obciążeniem mają być jednakowe; powiemy, że łańcuch ma w rzucie poziomym stałe obciążenie. Otóż mechanika wykazuje, że łańcuch przyjmuje kształt paraboli. Przy innym rozkładzie mas układa się łańcuch w krzywą o równaniu $y = -a\,ln\left(\cos\frac{x}{a}\right)$ lub ogólniej $y = -a\,ln\left(\cos\frac{x}{b}\right)$, gdzie a i b oznaczają stałe dodatnie. Krzywe te odgrywają ważną rolę w teorji mostów i sklepień.

Krzywa $y = -a\,ln\left(\cos\frac{x}{b}\right)$ składa się z nieskończenie wielu gałęzi (t. j. części ze sobą niepołączonych), albowiem na zmienną x wolno przyjmować tylko takie wartości, iż jest $\cos\frac{x}{b} > 0$, co daje $\frac{(4n-1)\pi b}{2} < x < \frac{(4n+1)\pi b}{2}$, gdzie n oznacza dowolną liczbę całą.

E) Zbadajmy, czy krzywa nie ma punktów najwyższego lub najmniejszego wzniesienia lokalnego. Odpowiada to szukaniu punktów maximum względnie minimum lokalnego funkcji $f(x)$. Jeżeli założymy, że funkcja ma pochodną do drugiego rzędu włącznie, to możemy stosować twierdzenia poznane w § 49.

Przykład XI. Krzywa, będąca wykresem prawa błędu według Gaussa, o równaniu $y = ae^{-bx^2}$, gdzie a, b oznaczają stałe dodatnie, jest symetryczną względem osi y i na niej leży punkt najwyższego wzniesienia krzywej.

Przykład XII. Jeżeli t oznacza miarę czasu, x wychylenie punktu drgającego na osi, to ruch o równaniu $x = ae^{-bt}.\sin(\omega t)$, gdzie a, b, ω oznaczają stałe dodatnie, zowie się ruchem przytłumionym, okresowym. Krzywa, będąca obrazem ruchu, ma nieskończenie wiele maximów i minimum dla liczb $t_\varkappa = t_0 + \frac{\varkappa\pi}{\omega}$, gdzie t_0

oznacza jedną z liczb o własności $\operatorname{tg} \omega t_0 = \frac{\omega}{b}$, nadto $\varkappa$ jest dowolną liczbą całą. Dla tych chwil największe wychylenia w jedną lub drugą stronę wynoszą $x_\varkappa = a e^{-bt_\varkappa} \sin(\omega t_\varkappa) = a e^{-bt_\varkappa} \sin(\omega t_0 + \varkappa\pi) = a e^{-bt_\varkappa} \cdot \sin(\omega t_0) \cdot (-1)^\varkappa$. Stąd otrzymujemy: $x_{\varkappa-1} : x_\varkappa = - e^{\frac{b\pi}{\omega}}$; wzór ten wykazuje, że ruch jest zanikającym, tłumionym. Stąd $ln \left| \frac{x_{\varkappa-1}}{x_\varkappa} \right| = \frac{b\pi}{\omega}$; liczbę tę, która decyduje o stopniu zanikania ruchu, zowie się dekrementem logarytmicznym ruchu. Ruch ma perjod (okres), wynoszący $\frac{2\pi}{\omega}$. Według tego prawa waha wahadło w ośrodku, stawiającym mały opór.

F) *Wklęsłość i wypukłość krzywej.* Jak widzieliśmy na rys. 101 (str. 357) krzywa może wznosić się lub opadać w różny sposób, może się zwracać wklęsłością lub wypukłością do osi x. Znajomość takiego szczegółu ułatwi nam rysunek krzywej. Chodzi więc o znalezienie wyrażenia, którego wartość lub znak pozwoli rzecz rozstrzygnąć. Najpierw podamy definicję wypukłości, wzgl. wklęsłości krzywej w punkcie M względem osi x.

Obierzmy na krzywej o równaniu $y = f(x)$ punkt $M[x_0, y_0 = f(x_0)]$ i narysujmy w punkcie M styczną do krzywej. Krzywa będzie w punkcie M wklęsłą lub wypukłą względem osi x, jeżeli rzędna $y_0 \neq 0$ i jeżeli istnieje takie sąsiedztwo punktu M, że wszystkie punkty krzywej tego sąsiedztwa leżą tylko po jednej stronie stycznej. Który z dwu przypadków wklęsłości, czy wypukłości zachodzi, o tem decyduje różnica między rzędną punktu stycznej i rzędną punktu krzywej dla tej samej wartości odciętej x, różnej od liczby x_0. Należy zbadać, czy różnica $Y - y$ ma stały znak w sąsiedztwie punktu M. Musimy tu jeszcze uwzględnić następującą okoliczność: mogą zajść dwa przypadki: 1) albo sąsiedztwo punktu M leży nad osią x-ów czyli $y > 0$; 2) albo ono leży pod osią x-ów ($y < 0$).

W rys. 102 uwzględniono oba przypadki dla krzywej, która zwraca się wypukłością w punkcie M do osi x.

W przypadku 1) rzędna Y punktów stycznej jest mniejszą od rzędnej y punktów krzywej czyli różnica $d = Y - y < 0$; w przypadku 2) zaś jest $d = Y - y > 0$. Ale w obu przypadkach jest krzywa wypukłą w punkcie M względem osi x. Aby więc obydwa przypadki połączyć w jeden, pomnóżmy różnicę $d = Y - y$ przez rzędną y_0 punktu $M(x_0 y_0)$ czyli weźmy iloczyn: $I = y_0 (Y - y)$..... (1).

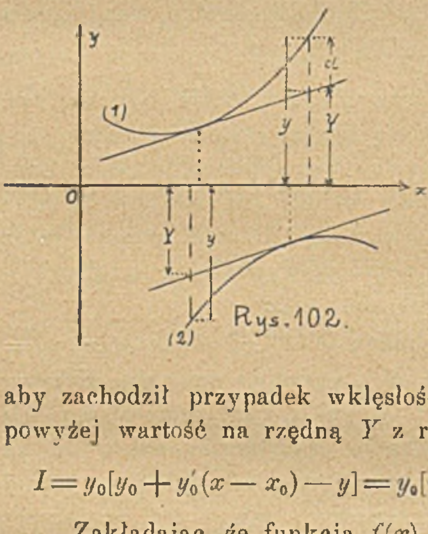
Ten iloczyn w obu przypadkach jest ujemnym, gdy krzywa zwraca się w punkcie M wypukłością do osi x.

Podobne rozważania trzeba powtórzyć dla krzywej w punkcie M wklęsłej względem osi x.

Powiemy wtedy: krzywa zwraca się w punkcie $M(x_0, y_0)$ do osi x wklęsłością swą lub wypukłością, gdy istnieje takie sąsiedztwo punktu M na krzywej, że dla wszystkich punktów sąsiedztwa (oczywiście z wyłączeniem punktu styczności M) w przypadku wklęsłości iloczyn

$$y_0 \cdot (Y - y) > 0.$$

zaś w przypadku wypukłości jest: $y_0 \cdot (Y - y) < 0$.



Rys. 102.

Zbadajmy teraz, jakim warunkom wystarczającym ma czynić zadość $f(x)$ z równania krzywej $y = f(x)$ w punkcie x_0, aby zachodził przypadek wklęsłości, wzgl. wypukłości. Wstawmy powyżej wartość na rzędną Y z równania stycznej; tedy:

$$I = y_0[y_0 + y_0'(x - x_0) - y] = y_0[-f(x) + f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)].$$

Zakładając, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b), że ma pochodną wewnątrz przedziału i że jest $a < x_0 < b$, zastosujmy do funkcji $-f(x)$ twierdzenie średniej wartości, które pozwoli napisać równość:

$$\frac{-f(x) + f(x_0)}{x - x_0} = -f'(x_1), \text{ skąd: } -f(x) + f(x_0) = -f'(x_1)(x - x_0),$$

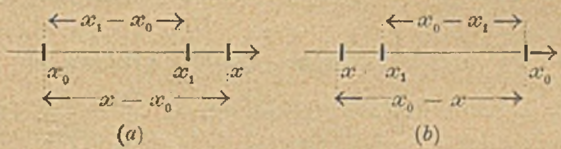
gdzie liczba x_1 jest zawartą między liczbami x i x_0; przeto: $I = y_0[f'(x_0)(x - x_0) - f'(x_1)(x - x_0)]$; czynnik $(x - x_0)$ wyjmiemy przed nawias i otrzymamy: $I = y_0 \cdot (x - x_0)[f'(x_0) - f'(x_1)]$.

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 i jego sąsiedztwie drugą pochodną, przeto do funkcji $-f'(x)$ wolno stosować twierdzenie średniej wartości. Tedy: $f'(x_0) - f'(x_1) = -f''(x_2)(x_1 - x_0)$, gdzie x_2 oznacza liczbę zawartą między liczbami x_0 i x_1. Stąd otrzymujemy: $I = -y_0(x - x_0)(x_1 - x_0) \cdot f''(x_2)$ czyli $I = -f(x_0)$ $(x - x_0)(x_1 - x_0) \cdot f''(x_2)$.... (2).

Przekształcimy to wyrażenie i w tym celu rozważmy dwa przypadki co do względnego położenia liczb x i x_0: albo jest $x > x_0$ albo jest $x < x_0$.

1) Niech będzie $x > x_0$ wówczas $x_0 < x_1 < x_0 + (x - x_0)$, tedy możemy napisać $x_1 = x_0 + (x - x_0)\vartheta$, gdzie ϑ jest odpowiednią liczbą zmniejszającą t. zn. $0 < \vartheta < 1$ (rys. 103a);

2) niech będzie $x < x_0$, wtedy jest $x < x_1 < x_0$ czyli $x_0 - (x_0 - x) < x_1 < x_0$ (rys. 103b) przeto od x_0 należy odjąć nie całą liczbę $(x_0 - x)$, ale jej część czyli będzie: $x_1 = x_0 - (x_0 - x)\vartheta$, gdzie znów $0 < \vartheta < 1$, stąd otrzymamy: $x_1 = x_0 + (x - x_0)\vartheta$, a więc



Rys. 103.

w obu przypadkach możemy napisać:

$$x_1 = x_0 + \vartheta(x - x_0), \text{ gdzie } 0 < \vartheta < 1;$$

stąd $x_1 - x_0 = \vartheta(x - x_0)$. Wstawiając to w równanie (2) otrzymamy:

$$I = -\vartheta f(x_0) \cdot f''(x_2) \cdot (x - x_0)^2.$$

O znaku wyrażenia I decyduje znak czynnika $-f(x_0) \cdot f''(x_2)$, bo $\vartheta(x - x_0)^2 > 0$, gdyż jest $x \neq x_0$. Otóż przyjmiemy oprócz dotychczasowych założeń, że druga pochodna $f''(x)$ jest w punkcie x_0 funkcją ciągłą i że $f''(x_0) \neq 0$. Wskutek tego istnieje takie sąsiedztwo punktu x_0, iż $f''(x)$ jest tego samego znaku, co $f''(x_0)$. Przy tem założeniu iloczyn I będzie tego samego znaku, co iloczyn: $I_0 = -f(x_0) \cdot f''(x_0)$ i zamiast badać znak wyrażenia I będziemy badali znak liczby I_0. Odróżnimy tedy dwa przypadki:

A) niech będzie $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, wówczas jest $I_0 < 0$, więc tem samem jest $I < 0$; krzywa $y = f(x)$ jest tedy wypukłą względem osi x w punkcie x_0, gdy jest $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ czyli $y_0 \cdot y_0'' > 0$.

B) Niech będzie $y_0 \cdot y_0'' < 0$, to będzie $I_0 > 0$ i także $I > 0$; krzywa jest więc wklęsłą względem osi x w punkcie $M(x_0\, y_0)$. Udowodniliśmy przeto następujące twierdzenie: *Jeżeli funkcja $y = f(x)$ w punkcie $x = x_0$ ma drugą pochodną ciągłą i jeżeli jest $y_0\, y_0'' < 0$*

$(y_0 y_0'' > 0)$, *to krzywa o równaniu* $y = f(x)$ *w punkcie* $x = x_0$ *zwraca się do osi* x *swą wklęsłością (wypukłością).*

Przykład XIII. W rachunku prawdopodobieństwa odgrywa wielką rolę całka $y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$; rozważmy krzywą o tem właśnie równaniu. Ponieważ jest stale $e^{-t^2} > 0$, więc równość $y = 0$ zachodzi jedynie dla $x = 0$. Gdy jest $x \neq 0$, to jest także $y \neq 0$ i mianowicie: gdy jest $x > 0$, to $y > 0$ a gdy $x < 0$, to $y < 0$. Otóż $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2}$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4x}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2}$. Stąd $yy'' = -\frac{8x}{\pi} e^{-x^2} \cdot \int_0^x e^{-t^2} dt$, przeto, gdy $x > 0$, to $yy'' < 0$; gdy $x < 0$, otrzymujemy także nierówność $yy'' < 0$. Krzywa zwraca się tedy wklęsłością do osi x, gdy $x \neq 0$.

Należałoby jeszcze zbadać kształt krzywej w sąsiedztwie punktu $x = 0$. Otóż dla $x = 0$ jest $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Dla lepszego określenia tej części krzywej, zdefiniujemy:

G) *Punkt przegięcia krzywej.* Nim go określimy, przeprowadźmy dla uporządkowania myśli następujące rozważania. Weźmy punkt M o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$, leżący na krzywej $y = f(x)$, przyczem krzywa ma określoną styczną s w punkcie M (*nie* prostopadłą do osi x). Albo istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że punkty $(x, f(x))$, gdy $0 < x - x_0 \leqq \delta$, leżą wszystkie po jednej stronie stycznej s albo tak nie jest; pierwszy przypadek (o ile $f(x_0) \neq 0$) dał nam impuls do określenia wklęsłości i wypukłości krzywej względem osi x. W drugim przypadku albo punkty krzywej leżą po jednej stronie stycznej, gdy $x < x_0$ i zarazem po drugiej stronie te punkty, dla których jest $x > x_0$ albo tak nie jest. Otóż właśnie pierwszy podprzypadek otrzyma swą nazwę obecnie: powiemy, że styczna *przenika* krzywą w punkcie M, a punkt M nazwiemy punktem przegięcia krzywej.

Aby analitycznie określić punkt przegięcia krzywej $y = f(x)$, utwórzmy różnicę $D(x) = Y - y$, gdzie Y oznacza rzędną punktu bieżącego stycznej, y rzędną punktu bieżącego krzywej, przyczem oba punkty mają tę samą odciętą. Zakładając, że funkcja $f(x)$ ma drugą ciągłą pochodną w punkcie x_0, otrzymamy, jak w poprzednim ustępie: $D(x) = -\vartheta f''(x_2)(x - x_0)^2$, gdzie $0 < \vartheta < 1$, zaś x_2 oznacza liczbę pośrednią między liczbami x_0 i x, przyczem $x \neq x_0$.

Otóż punkt $M(x_0, f(x_0))$ nazywamy punktem przegięcia, jeżeli istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, iż funkcja $D(x)$ dla liczb x o własności $0 < |x - x_0| < \delta_0$ nie jest zerem i ma dla liczb x o własności $x < x_0$ znak przeciwny niż dla liczb x o własności $x > x_0$. Jeżeli więc przyjmiemy dwie dowolne liczby x', x'', byle było: $x' < x_0$, $|x' - x_0| < \delta_0$, $x'' > x_0$, $|x'' - x_0| < \delta_0$, to ma być: $D(x') . D(x'') < 0$ czyli $\vartheta' . \vartheta'' f''(x_2') f''(x_2'') . (x' - x_0)^2 . (x'' - x_0)^2 < 0$, gdzie liczby ϑ', x_2' odpowiadają liczbie x', zaś liczby ϑ'', x_2'' liczbie x''. Ponieważ $0 < \vartheta'$, $0 < \vartheta''$ $(x' - x_0)^2 > 0$, $(x'' - x_0)^2 > 0$, więc $f''(x_2') . f''(x_2'') < 0$. Do tego zaś wystarczy, gdy co do funkcji $f''(x)$ można odróżnić dwa przypadki zestawione obok w tabelce. Według tw. ze str. 227, (które było pomocniczem w teorji extremów lokalnych) *wystarcza* założyć $f'''(x_0) \neq 0$, $f''(x_0) = 0$, by jeden z przypadków zawartych w tabelce był możliwy i wtedy punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej.

		$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$
$f''(x)$		dodat.	0	ujem.
		ujem.	0	dodat.

Udowodniliśmy zatem następujące twierdzenie: *jeżeli funkcja* $f(x)$ *ma w punkcie* x_0 *pochodną trzeciego rzędu i jeżeli jest* $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, *to krzywa o równaniu* $y = f(x)$ *ma w punkcie* $(x_0, f(x_0))$ *punkt przegięcia.*

Przykład XIV. Według prawa Snelliusa dla załamania światła jest stosunek $\frac{\sin x}{\sin y}$ wielkością stałą, gdy x oznacza (ostry) kąt padania promienia świetlnego, y kąt (ostry) załamania tegoż promienia. Jeżeli przez n oznaczymy stałą wartość stosunku (liczba n nosi nazwę współczynnika załamania), to otrzymamy $\frac{1}{n} \sin x = \sin y$, a ponieważ y oznacza ostry kąt, więc jest $y = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin x\right)$. Zbadajmy, czy krzywa o równaniu: $y = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin x\right)$ (gdzie x jest dowolną liczbą, byle funkcja y była określoną) ma punkty przegięcia. Otóż jest:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sqrt{n^2 - \sin^2 x}}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(1 - n^2) \sin x}{(n^2 - \sin^2 x)^{3/2}}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{(1 - n^2)(n^2 + 2\sin^2 x) \cos x}{(n^2 - \sin^2 x)^{5/2}}$$

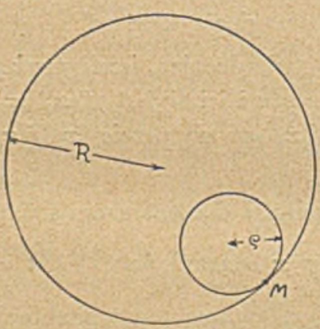
Stąd widać, że jest $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$, gdy $\sin x = 0$, $n^2 \neq 1$. Przy założeniu $n^2 \neq 1$ są oczywiście punkty $x = n\pi$ (n całkowite) punktami przegięcia krzywej, gdyż dla nich i ich otoczenia (dość małego) jest funkcja w każdym razie określoną.

Przykład XV. Między ciśnieniem p, objętością v i temperaturą bezwzględną T gazu zachodzi związek, noszący nazwę równania charakterystycznego Van der Waalsa[1]):

$$\left(p+\frac{a}{v^3}\right)(v-b)=RT,$$

gdzie a, b, R oznaczają stałe dodatnie, zależne od rodzaju gazu. Czytelnik z łatwością zbada kształt krzywej, przyczem dość przyjąć $v > b$; ponadto należy przyjąć iloczyn RT za stały. W zależności od wartości iloczynu RT otrzymuje się różne krzywe, wzdłuż których leżą punkty, odpowiadające różnym stanom gazu przy *stałej* temperaturze, dlatego też krzywe te noszą nazwę izoterm.

Przykład XVI. W odwzorowaniu kuli ziemskiej na płaszczyznę przy pomocy t. zw. karty Mercatora odgrywa wielką rolę funkcja: $y = a\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$, gdzie a oznacza stałą dodatnią. Czytelnik z łatwością wykaże, że dla $x = 2n\pi$ (n całkowite) krzywa ma punkty przegięcia.



Rys. 104.

Nasze dotychczasowe wiadomości o kształcie krzywej są niewystarczające, brak nam bowiem znajomości „stopnia zakrzywienia" krzywej (t. zn. krzywizny), do czego się teraz zwrócimy.

H) *Krzywizna krzywej.* a) Intuicyjne pojęcie krzywizny. Istnieje pewna szczególna krzywa, której zakrzywienie jest w każdym punkcie jednakowe, jest nią koło, które uważamy za jednakowo zakrzywione w każdym jego punkcie. Weźmy pod uwagę dwa koła wewnętrznie styczne w punkcie M. Koło (rys. 104) o promieniu R (większym), powiemy intuicyjnie, ma w punkcie M mniejsze zakrzywienie, niż koło o promieniu mniejszym ϱ, które jest

[1]) Jan van der Waals, holenderski fizyk, ur. 1837, um. 1923.

bardziej zakrzywione. Widzimy więc, że w przypadku koła, gdy promień wzrasta, to zakrzywienie jego maleje. Utwórzmy więc wyrażenie, które rośnie, gdy krzywizna rośnie: dość wziąć odwrotność promienia koła. I właśnie przez krzywiznę koła rozumieć będziemy odwrotność jego promienia. Gdy więc $R > \varrho > 0$, to $\frac{1}{R} < \frac{1}{\varrho}$; krzywizna koła o promieniu ϱ jest więc większa, niż krzywizna koła o promieniu R. Jak teraz określić krzywiznę dowolnej krzywej? Otóż postępujemy wtedy w sposób następujący: w sąsiedztwie punktu M, w którym badamy krzywiznę, bierzemy na krzywej trzy różne punkty: A_1, A_2, A_3. Przez te 3 punkty prowadzimy koło, o ile nie leżą na jednej prostej. Załóżmy następnie, że punkty A_1, A_2, A_3 zbliżają się nieograniczenie do punktu M i badajmy, co się stanie z nakreślonem kołem, czy ono zdąża i do jakiej granicy. Okaże się, że, jeżeli tylko pewne warunki są spełnione, to koło zdąża do granicznego położenia t. zw. koła krzywiznowego. Odwrotność promienia tego koła krzywiznowego zwiemy właśnie krzywizną krzywej w punkcie M. Koło krzywiznowe jest nieco „dokładniej dopasowane“ do krzywej w punkcie M, przeto nie zrobimy „wielkiego“ błędu, gdy w „niewielkiem“ sąsiedztwie punktu M zamiast łuku krzywej wyrysujemy łuk koła krzywiznowego. Wiadomo, że tak postępuje się przy rysunku elipsy itp.

W punkcie przegięcia wspomniany warunek nie jest spełniony. Nie istnieje też koło krzywiznowe, moglibyśmy nieściśle powiedzieć (jak dawniej mówiono), że promień krzywizny w punkcie przegięcia jest „nieskończenie wielkim“, a koło krzywiznowe „przeszło“ w styczną punktu M (a więc w prostą).

b) *Ścisłe rozważania.*

Udowodnimy *twierdzenie pomocnicze: jeżeli funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 drugą pochodną ciągłą i różną od zera, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, iż żadne trzy, różne od siebie punkty krzywej $y = f(x)$ o odciętych z przedziału $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nie leżą na jednej prostej.*

Innemi słowy istnieje takie sąsiedztwo punktu $M(x_0, f(x_0))$, że na skrawku krzywej od punktu $P(x_0 - \delta, f(x_0 - \delta))$ do punktu $S(x_0 + \delta, f(x_0 + \delta))$ żadne trzy, różne od siebie punkty krzywej nie leżą na jednej prostej, a więc można przez nie poprowadzić koło.

Dowód poprowadzimy niewprost[1]). A więc załóżmy, że, jak-

[1]) W sprawie zaprzeczenia zdania zob. Wstęp i przypisek str. 146.

kolwiek obralibyśmy liczbę $\delta > 0$, to można wybrać trzy liczby x_1, x_2, x_3 o własności $x_0 - \delta \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant x_0 + \delta$ i takie, że punkty $A_1[x_1, f(x_1)]$, $A_2[x_2, f(x_2)]$, $A_3[x_3, f(x_3)]$ leżą na jednej prostej, którą oznaczymy przez (l). Otóż prosta (l) nie może być prostopadłą do osi x, bo $x_1 < x_2 < x_3$. Przeto dla prostej (l) możemy przyjąć równanie $y = \lambda x + \mu$, przyczem stałe λ, μ wyznaczymy stad, że punkty A_1, A_2 na niej leżą, więc $f(x_1) = \lambda x_1 + \mu$, $f(x_2) = = \lambda x_2 + \mu$, skąd przez odjęcie otrzymujemy $f(x_2) - f(x_1) = \lambda(x_2 - x_1)$, co daje $\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, gdyż jest $x_2 - x_1 \neq 0$; nadto mamy $\mu = f(x_2) - \lambda x_2$. Równanie prostej (l) będzie więc miało postać $y - f(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$. Skoro ta prosta przechodzi jeszcze przez punkt A_3, więc jego współrzędne spełniają równanie prostej (l), tedy:

$$(1) \qquad f(x_3) - f(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_3 - x_2).$$

Skoro druga pochodna $f''(x)$ jest ciągłą w punkcie x_0 i różną od zera, to istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, że w punktach przedziału $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ funkcja $f(x)$ ma drugą pochodną i też różną od zera; przeto ma też pierwszą pochodną, więc w równaniu (1) wolno stosować twierdzenie średniej wartości, gdy obierzemy $\delta = \delta_0$. Otrzymujemy:

$$f'(\xi_2)(x_3 - x_2) = \frac{(x_2 - x_1) f'(\xi_1)}{x_2 - x_1}(x_3 - x_2) = f'(\xi_1)(x_3 - x_2),$$

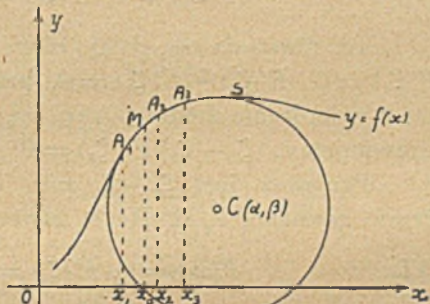
gdzie $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3$; a że $x_3 - x_2 \neq 0$, więc $f'(\xi_2) = f'(\xi_1)$, skąd $f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = 0$. Stosując twierdzenie średniej wartości jeszcze raz mamy: $f''(\xi_3) \cdot (\xi_2 - \xi_1) = 0$, gdzie $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$; stąd $f''(\xi_3) = 0$. Skoro zaś wybraliśmy $\delta = \delta_0$, to być musi $f''(x) \neq 0$ w przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ i tem samem punkty A_1, A_2, A_3 nie mogą leżeć na jednej prostej. Twierdzenie więc udowodnione.

Przez te trzy punkty A_1, A_2, A_3 (rys. 105) poprowadźmy koło K i zbadajmy, czy współrzędne jego środka i promień zdążają do określonych granic, gdy punkty A_1, A_2, A_3, pozostając na krzywej, zdążają nieograniczenie do punktu $M(x_0, f(x_0))$ w dowolny zresztą sposób. Oznaczmy przez C środek koła K, przez R długość jego promienia. Równanie koła tego będzie następujące: $(x - \alpha)^2 +$

$+(y-\beta)^2=R^2$, gdzie α, β są współrzędnemi środka C, zaś x, y są to współrzędne bieżącego punktu na kole. Niewiadomemi są dla nas α, β, R; mamy więc trzy niewiadome, ale i trzy równania, które otrzymamy, uwzględniając, że koło K przechodzi przez punkty: $A_1(x_1, f(x_1))$, $A_2(x_2, f(x_2))$, $A_3(x_3, f(x_3))$; przeto współrzędne tych punktów spełniają równanie koła K, jest więc: (I) $(x_1-\alpha)^2+$ $+(f(x_1)-\beta)^2-R^2=0$, (II) $(x_2-\alpha)^2+(f(x_2)-\beta)^2-R^2=0$, (III) $(x_3-\alpha)^2+(f(x_3)-\beta)^2-R^2=0$.

Z tych równań obliczymy niewiadome α, β, R, jako funkcje zmiennych x_1, x_2, x_3, następnie zbadamy, czy zdążają do określonych granic, gdy $x_1 \to x_0$, $x_2 \to x_0$, $x_3 \to x_0$. Jeżeli granice będą istniały, to będziemy je uważali za wielkości charakterystyczne dla krzywej w rozważanym punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Już z tego powodu, że punkty A_1, A_2, A_3 nie mogą leżeć na jednej prostej, a więc z powodów geometrycznych wynika, że równania I, II, III mają jedno i jedyne rozwiązanie na niewiadome α, β, R. Można to też wykazać i analitycznie. Odejmując od I równania II i III, otrzyma czytelnik dwa równania stopnia 1-go względem niewiadomych α, β; niewiadoma R w nich zachodzić nie będzie. Jeżeli z tych równań można wyrachować α, β, to równanie (I) da nam liczbę R. Otóż chodzi o to, czy można obliczyć niewiadome α, β z równań, które otrzymał czytelnik. Jak wiadomo ze Wstępu, trzeba zbadać t. zw. wyznacznik obu równań; będzie nim wyznacznik:



Rys. 105.

$$D=\begin{vmatrix} x_2-x_1, & f(x_2)-f(x_1) \\ x_3-x_2, & f(x_3)-f(x_2) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_2-x_1, & (x_2-x_1)f'(\xi_1) \\ x_3-x_2, & (x_3-x_2)f'(\xi_2) \end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_2)\,[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]$$

$=(x_2-x_1)(x_3-x_2)(\xi_2-\xi_1)f''(\xi_3)$. Z tego widoczna, że przy naszych założeniach jest $D \neq 0$. Wspomniane przeto równania dają jedną i jedyną parę liczb, jako rozwiązania na α, β.

Jednakowoż rachunki te wykonamy krócej i bardziej przejrzyście, skoro już wiemy, że rozwiązania istnieją. Nam bowiem głównie chodzi o granice wyrażeń α, β, R, gdy $x_1 \to x_0$, $x_2 \to x_0$, $x_3 \to x_0$.

Wprowadźmy więc pomocniczą funkcję:

$$\text{(IV)} \qquad F(x) = (x-\alpha)^2 + [f(x)-\beta]^2 - R^2,$$

w której α, β, R uważamy za stałe. Równania I, II, III przybiorą postać:

$$F(x_1) = 0, \; F(x_2) = 0, \; F(x_3) = 0.$$

Te równania są równoważne równaniom: $F(x_1) = 0$, $F(x_2) - F(x_1) = 0$, $F(x_3) - F(x_2) = 0$; te zaś na podstawie tw. średniej wartości (§ 47), które wolno stosować, przyjmą postać: $F(x_1) = 0$, $(x_2 - x_1) F'(\zeta_1) = 0$, $(x_3 - x_2) . F'(\zeta_2) = 0$, gdzie jest $x_1 < \zeta_1 < x_2 < \zeta_2 < x_3$; a że $x_2 - x_1 \neq 0$, $x_3 - x_2 \neq 0$, więc otrzymaliśmy, że równania I, II, III są równoważne równaniom:

$$\text{(V)} \qquad F(x_1) = 0, \; F'(\zeta_1) = 0, \; F'(\zeta_2) = 0.$$

Te równania są dalej równoważne równaniom: $F(x_1) = 0$, $F'(\zeta_1) = 0$, $F'(\zeta_2) - F'(\zeta_1) = 0$, przyczem do ostatniego stosujemy znów twierdzenie średniej wartości, co uczynić wolno, wobec czego otrzymujemy: $(\zeta_2 - \zeta_1) F''(\zeta_3) = 0$.

Ponieważ jest $\zeta_2 - \zeta_1 \neq 0$, więc otrzymujemy $F''(\zeta_3) = 0$. Przeto równania I, II, III są równoważne równaniom:

$$\text{(VI)} \qquad F(x_1) = 0, \; F'(\zeta_1) = 0, \; F''(\zeta_3) = 0,$$

gdzie $x_1 < \zeta_1 < x_2 < \zeta_2 < x_3$, $\zeta_1 < \zeta_3 < \zeta_2$. Otóż jest $F'(x) = 2(x-\alpha) + 2[f(x)-\beta] . f'(x)$. $F''(x) = 2 + 2[f(x) - \beta] f''(x) + 2 f'^2(x)$.

Stąd i z równań (VI) otrzymujemy układ:

$$\text{(VII,1)} \qquad (x_1 - \alpha)^2 + (f(x_1) - \beta) = R^2;$$

$$\text{(VII.2)} \qquad \zeta_1 - \alpha + [f(\zeta_1) - \beta] f'(\zeta_1) = 0;$$

$$\text{(VII,3)} \qquad 1 + [f(\zeta_3) - \beta] f''(\zeta_3) + f'^2(\zeta_3) = 0.$$

Niech czytelnik nie sądzi, że np. równanie (VII,3) zawiera tylko jedną niewiadomą β, a równanie (VII.2) tylko dwie niewiadome (α, β), gdyż liczby ζ_1, ζ_2 *zależą* od liczb α, β, R, więc też i liczba ζ_3 od nich zależy! W równaniu (VII,3) zachodzi więc β w sposób — jak powiemy — wyraźny i nadto zachodzą α, β, R w sposób — uwikłany — ukryty — za pośrednictwem liczby ζ_3, ale w sposób bliżej nam nie znany, wskutek czego układu VII nie użyliśmy do wykazania rozwiązalności układu I, II, III na α, β, R, ale wykazaliśmy to poprzednio na innej drodze.

Z równania (VII,3) otrzymujemy:

$$\text{(VIII)} \qquad \beta = f(\zeta_3) + \frac{1 + f'^2(\zeta_3)}{f''(\zeta_3)},$$

skoro jest $f''(\zeta_3) \neq 0$. Ta równość nie pozwoli nam *obliczyć* liczby β, bo ζ_3 zależy od α, β, R, *ale pozwoli nam obliczyć granicę* funkcji β, gdy $x_1 \to x_0$, $x_3 \to x_0$ (wtedy już $x_2 \to x_0$), a mianowicie $\beta \to f(x_0) + \dfrac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}$, gdyż wtedy $\zeta_3 \to x_0$ (zob. § 39).

Wyrażenie (VIII) wstawiamy w równość (VII,2) i otrzymujemy stąd:

$$\text{(IX)} \qquad \alpha = \zeta_1 + \left[f(\zeta_1) - f(\zeta_3) - \frac{1 + f'^2(\zeta_3)}{f''(\zeta_3)} \right] \cdot f'(\zeta_1).$$

Przeto widoczne, że

$$\alpha \to x_0 - \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0).$$

Wstawiając równości (VIII) i (IX) w równanie (VII,1), otrzymujemy:

$$R^2 = \left\{ x_1 - \zeta_1 - \left[f(\zeta_1) - f(\zeta_3) - \frac{1 + f'^2(\zeta_3)}{f''(\zeta_3)} \right] \cdot f'(\zeta_1) \right\}^2 +$$

$$\text{(X)} \qquad \left\{ f(x_1) - f(\zeta_3) - \frac{1 + f'^2(\zeta_3)}{f''(\zeta_3)} \right\}^2.$$

Stąd otrzymujemy w granicy:

$$R^2 \to \left\{ \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0) \right\}^2 + \left\{ \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)} \right\}^2 = \frac{(1 + f'^2(x_0))^3}{(f''(x_0))^2},$$

a że jest $R > 0$, więc

$$R \to \frac{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}{|f''(x_0)|}.$$

Wykazaliśmy tedy, że funkcje α, β, R mają granice, które znaczymy odpowiednio przez α_0, β_0, R_0, przyczem jest:

$$\alpha_0 = x_0 - \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)} f'(x_0), \qquad \beta_0 = f(x_0) + \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)},$$

$$\text{(XI)} \qquad R_0 = \frac{(1 + f'^2(x_0))^{3/2}}{|f''(x_0)|}.$$

Połóżmy dla skrócenia pisma: $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$, $y''_0 = f''(x_0)$, wtedy mamy: $\alpha_0 = x_0 - \frac{1+y_0'^2}{y''_0} \cdot y'_0$, $\quad \beta_0 = y_0 + \frac{1+y_0'^2}{y''_0}$, $R_0 = \frac{(1+y_0'^2)^{3/2}}{|y''_0|}$.

Zauważmy, że jest $R_0 \neq 0$.

[Ponieważ lewe strony równań (VII, 1, 2, 3), rozważane, jako funkcje zmiennych *niezależnych*: α, β, R, x_1, ζ_1, ζ_3 są funkcjami ciągłemi tych zmiennych, przeto w granicy mieć też będziemy:

$$(x_0-\alpha_0)^2 + (y_0-\beta_0)^2 = R^3, \; (x_0-\alpha_0) + (y_0-\beta_0)y'_0 = 0,$$
$$\text{(XII)} \qquad 1 + (y_0-\beta_0)\, y''_0 + y_0'^2 = 0.$$

Otóż równania (XII) otrzymuje się w ten sposób: weźmy funkcję $\Phi(x) = (x-\alpha_0)^2 + (f(x)-\beta_0)^2 - R_0^2$ i w niej uważajmy α_0, β_0, R_0 za stałe; wtedy równania (XII) przyjmują postać:

$$\text{(XIII)} \qquad \Phi(x_0) = 0, \quad \Phi'(x_0) = 0, \quad \Phi''(x_0) = 0].$$

Liczby α_0, β_0, R_0 są właśnie szukanemi granicami. Koło o środku w punkcie (α_0, β_0) i promieniu R_0 zowiemy kołem krzywiznowem krzywej $y = f(x)$ w punkcie $M(x_0, f\,x_0)$). Liczba $\frac{1}{R_0}$ zowie się *krzywizną* krzywej w punkcie M. Wzory (XI) podają nam, ile wynosi t. zw. promień krzywizny R_0 i współrzędne środka koła krzywiznowego. Wielkości α_0, β_0, R_0 są niezależne od wyboru punktów x_1, x_2, x_3, zależą jedynie od punktu x_0, są więc wielkościami charakterystycznemi dla punktu x_0 na krzywej $y = f(x)$. Równanie: $(X-\alpha_0)^2 + (Y-\beta_0)^2 = R_0^2$, jest równaniem koła krzywiznowego. Dla krzywizny otrzymujemy wzór $\frac{1}{R_0} = \frac{|y''_0|}{\sqrt{(1+y_0'^2)^3}}$.

Udowodniliśmy zatem następujące twierdzenie: *jeżeli funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 drugą pochodną ciągłą i różną od zera, to krzywa o równaniu $y = f(x)$ ma w punkcie $(x_0, f(x_0))$ określone koło krzywiznowe, którego promień i współrzędne środka podają wzory (XI).*

Jeżeli teraz w dalszym ciągu założymy, że funkcja $f(x)$ ma drugą pochodną ciągłą i różną od zera (nietylko w jednym punkcie, ale) w całym przedziale (a, b), to dla każdego punktu krzywej $y = f(x)$ w przedziale (a, b) istnieje określony środek krzywizny; te środki utworzą nam pewną linję, nową — jak się okaże — krzywą, zwaną rozwiniętą (ewolutą) danej krzywej $y = f(x)$.

[W szczególnym przypadku (np. dla koła) ewoluta może się redukować do punktu]. Krzywą daną nazywamy rozwijającą względem jej rozwiniętej.

Przykład XVII. Weźmy pod uwagę koło: $x^2+y^2=r^2$; powinniśmy otrzymać, że promień krzywizny jest stały i równy r. Rzeczywiście otrzymujemy: $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$; znak podwójny odpowiada dwom półkolom; aby oba półkola równocześnie badać, połóżmy $\varepsilon=\pm 1$, wtedy $y=\varepsilon\sqrt{r^2-x^2}$. Stąd otrzymujemy:

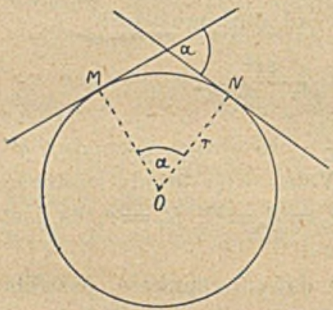
$$y'=\frac{-\varepsilon x}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad y''=-\frac{\varepsilon r^2}{(r^2-x^2)^{3/2}}.$$

Jeżeli więc założymy, że $x_0 \neq \pm r$, to druga pochodna y'' jest określoną, ciągłą i różną od zera. Wolno więc wtedy stosować wzory (XI). Z łatwością otrzymujemy $\alpha_0=\beta_0=0$, $R_0=r$, co jest zgodne z intuicyjnem pojęciem krzywizny.

Znajomość krzywizny krzywej w danym punkcie pozwala krzywą dokładniej narysować — znając bowiem krzywiznę, wiemy, którego miejsca t. zw. krzywki (t. j. liniału do rysowania krzywych) należy użyć, by krzywą narysować w sąsiedztwie rozważanego punktu; rzecz ta byłaby ułatwioną, gdyby krzywka była kalibrowana na promienie krzywizny lub na krzywizny — oczywiście zawsze można posłużyć się cyrklem i potem przez próbę wynaleźć odpowiednie miejsce krzywki [np. dla sinusojdy $y=\sin x$ jest $R_0=1$ dla $x_0=\frac{\pi}{2}$].

Inne określenia krzywizny. Krzywiznę można jeszcze w inny sposób określić. Poprzednie intuicyjne rozważania rozpoczęliśmy od koła, jako krzywej „stałego zakrzywienia“ (dodatniego!). Ale nasuwa się także myśl wziąć najpierw pod uwagę linję prostą, która nie ma „krzywizny“ („zakrzywienie stałe“. ale równe zeru!); prosta ma stały „kierunek“, nie „zakrzywia“ się w żadną stronę. Jako drugą krzywą weźmy znów koło i na niem dwa punkty M i N (rys. 106). Idąc po kole od punktu M do punktu N widzimy, że krzywa zmienia swój kierunek, co świadczy o jej zakrzywieniu; a ponieważ o kierunku krzywej decyduje styczna do niej, dlatego bierzemy styczne do koła w punktach M, N.

Długość łuku MN oznaczmy przez l. Weźmy kilka kół o różnych promieniach (o obwodach mniejszych od l) i na każdym odmierzmy łuk długości l. Na każdem z tych kół w punktach końcowych łuków o długości l wystawmy styczne do kół, ponadto oznaczmy kąt α między temi stycznemi, jak to zaznaczyliśmy na rys. 106; kąt ten mierzymy liczbą bezwzględną. Na kole bardziej zakrzywionem kąt α między temi stycznemi (dokładniej: kąt środkowy, odpowiadający łukowi l) będzie większy. Za miarę krzywizny w punkcie M przyjmiemy granicę stosunku: $\lim\limits_{l \to 0} \frac{\alpha}{l}$, o ile ta granica istnieje. Ponieważ α mierzy kąt w radjanach, więc $l = \alpha r$, przyczem r oznacza długość promienia koła; przeto $\lim\limits_{l \to 0} \frac{\alpha}{l} = \frac{1}{r}$.



Rys. 106.

Dla koła doszliśmy więc do tego samego wyniku, co przy pierwszej definicji krzywizny. Dla innych krzywych nie możemy jeszcze tej zgodności potwierdzić z powodu braku dostatecznego przygotowania — odnośne uzupełnienie zawiera § 69.

Przejdziemy teraz do *trzeciego* sposobu określenia krzywizny. Rozważmy znów najpierw prostą dowolną l; prostopadłe do niej są do siebie równoległe, nie przecinają się. Weźmy w dalszym ciągu koło i na niem punkty M, N (rys. 106); w nich wyrysujemy normalne do koła; jak wiadomo normalne przetną się w środku koła.

Weźmy z kolei dowolną krzywą K i na niej dwa punkty M, N, w których rysujemy normalne Mm i Nn. Załóżmy, że normalne przecinają się w punkcie P. Nie zmieniając punktu M, zbliżajmy punkt N nieograniczenie po krzywej K do punktu N. Wtedy punkt P może zmieniać na normalnej Mm położenie w zależności od wyboru punktu N. Otóż może się zdarzyć, że, gdy punkt N zbliża się nieograniczenie do punktu M po krzywej K, to punkt P stale istnieje i dąży do określonego położenia granicznego P_0 na normalnej Mm. Ten właśnie punkt P_0 nazwiemy środkiem krzywizny krzywej dla punktu M. (Dla koła punkt P_0 schodzi się widocznie ze środkiem koła; dla prostej ani punkt P ani punkt P_0 nie istnieją).

Możemy więc środek krzywizny krzywej $y = f(x)$ w punkcie M określić, jako graniczne położenie punktu przecięcia się normalnych do krzywej w punkcie M i w dowolnym punkcie N, gdy punkt N zbliża się nieograniczenie do punktu M po krzywej. Myśl tę niektóre podręczniki wyrażają w ten sposób, że środek krzywizny określają, jako przecięcie się normalnych narysowanych w dwu „nieskończenie bliskich" punktach krzywej. Otóż udowodnimy, że punkt P_0 (punkt przecięcia się „nieskończenie" bliskich normalnych) jest identyczny ze środkiem krzywizny, wyznaczonym według pierwszej definicji. Równanie normalnej w punkcie $M[x_0, y_0 = f(x_0)]$ jest następujące: $X - x_0 + y_0'(Y - y_0) = 0$, a że $y_0 = f(x_0)$, więc równanie normalnej przyjmie postać (XIV) $X - x_0 + f'(x_0) . (Y - f(x_0))$. Tu X i Y oznaczają współrzędne bieżącego punktu normalnej. Weźmy drugi punkt $N[x_1 . f(x_1)]$ na krzywej; normalna w tym punkcie ma równanie (XIV bis) $X - x_1 + f'(x_1)(Y - f(x_1)) = 0$.

Szukamy współrzędnych punktu P przecięcia się tych normalnych. Współrzędne tego punktu będą spełniały równania obu normalnych, przeto zadaniem naszem będzie rozwiązać układ dwu równań XIV i XIV bis na niewiadome X i Y, następnie znaleźć granice $\lim X$ i $\lim Y$, gdy punkt N zbliża się po krzywej nieograniczenie do punktu M czyli, gdy $x_1 \to x_0$. Wykażmy więc najpierw istnienie określonego punktu przecięcia P.

Otóż równania XIV i XIV bis są to dwa równania stopnia 1-go względem niewiadomych X, Y; aby więc punkt P istniał określony, to według Wstępu wyznacznik tych równań winien być różnym od zera. Otóż ten wyznacznik jest:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1, f'(x_0) \\ 1, f'(x_1) \end{vmatrix} = f'(x_1) - f'(x_0) = (x_1 - x_0) f''(\xi).$$

Załóżmy, że jest $f''(x_0) \neq 0$ i że pochodna $f''(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie x_0; wobec tego, gdy liczba x_1 jest dość bliską liczby x_0, to będzie $f''(\xi) \neq 0$, a że nadto jest $x_1 - x_0 \neq 0$, więc jest $\varDelta \neq 0$. Przeto równania XIV i XIV bis dają określone współrzędne X, Y punktu P. By je obliczyć i potem wykazać, że istnieją granice $\lim\limits_{x_1 \to x_0} X$, $\lim\limits_{x_1 \to x_0} Y$, postąpimy w sposób następujący. Wprowadzamy pomocniczą funkcję $\varPhi(x) = X - x + f'(x)[Y - f(x)]$, w której X, Y uważamy za stałe. Wobec tego równania XIV, XIV bis przyjmą postac $\varPhi(x_0) = 0$, $\varPhi(x_1) = 0$, te zaś równania są równoważne równaniom:

(XV) $\qquad \varPhi(x_0) = 0, \qquad \varPhi(x_1) - \varPhi(x_0) = 0.$

Ponieważ wolno stosować twierdzenie średniej wartości (§ 47) do funkcji $\Phi(x)$, więc drugie z równań XV przyjmie postać $(x_1 - x_0)\,\Phi'(\xi) = 0$, a że jest $x_1 - x_0 \neq 0$, więc otrzymujemy $\Phi'(\xi) = 0$. Równania XIV i XIV bis są więc równoważne równaniom:

$$\text{(XVI)} \qquad \Phi(x) = 0, \qquad \Phi'(\xi) = 0.$$

gdzie ξ oznacza liczbę zawartą między liczbami x_0 i x_1; równania XVI mają postać:

$$\text{(XVII)} \qquad \begin{aligned} X - x_0 + f'(x_0)\,[Y - f(x_0)] &= 0. \\ -1 + f''(\xi)\,[Y - f(\xi)] - f'^2(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ liczba ξ zależy od liczb X, Y, więc drugie z równań zawiera wyraźnie niewiadomą Y i w sposób uwikłany niewiadome X, Y, bo za pośrednictwem zmiennej ξ. Równania XVII nie mogą więc służyć do wyliczenia niewiadomych X, Y, ale za to bardzo dobrze się nadają do wykazania, że istnieją szukane granice i do wyliczenia tych granic.

Z drugiego bowiem równania XVII otrzymujemy:

$$Y = f(\xi) + \frac{1 + f'^2(\xi)}{f''(\xi)} \to f(x_0) + \frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)}, \text{ gdy } x_1 \to x_0.$$

Wstawiając to wyrażenie Y w pierwsze z równań XVII otrzymamy, że $X \to x_0 - \dfrac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)} \cdot f'(x_0)$. Tedy $X \to \alpha_0$, $Y \to \beta_0$ (zakładaliśmy, że $f''(x_0) \neq 0$).

Punkt P ma więc, jako graniczne swe położenie, środek krzywizny według pierwszego określenia. To zarazem wykazuje, że drugie określenie środka krzywizny nakrywa się z pierwszem, przyczem otrzymaliśmy ważne twierdzenie, że przy naszych założeniach *środek krzywizny dla punktu M leży na normalnej punktu M.*

Przykłady. 1. Wyszukajmy promień krzywizny *paraboli* $y = 2px^2$; wtedy: $R = \dfrac{1}{4p}(1 + 16p^2x^2)^{3/2}$; czytelnik z łatwością wykaże, że promień R posiada minimum dla $x = 0$ t. zn. we wierzchołku paraboli i Min $(R) = \dfrac{1}{4p}$, a więc równa się t. zw. parametrowi paraboli.

2. *Elipsa.* Przyjmując równanie elipsy w postaci $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

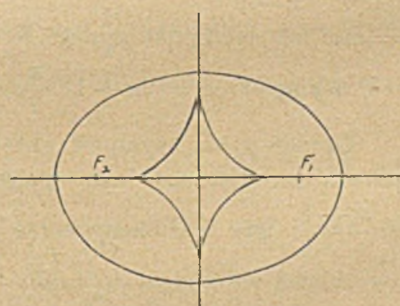
otrzymujemy stąd $y=\varepsilon b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, gdzie $\varepsilon=\pm 1$, co odpowiada dwom łukom elipsy. Zakładając $|x|\neq a$, otrzymujemy $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$, $y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$; stąd promień krzywizny $R=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}$.

Oznaczmy przez δ bezwzględną odległość środka elipsy od stycznej, w punkcie (x, y) narysowanej; ponieważ styczna ma równanie $b^2xX+a^2yY-a^2b^2=0$, tedy środek elipsy o współrzędnych $(0,0)$ ma od stycznej bezwzględną odległość $\delta=\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}}$ i wskutek tego $R=\frac{a^2b^2}{\delta^3}$; z tego widać z łatwością, że promień R ma we wierzchołkach elipsy extrema. Wyznaczmy teraz rozwiniętą (ewolutę) dla elipsy.

Otrzymujemy: $\alpha=x-\frac{1+y'^2}{y''}\cdot y'=\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3$, gdy wyrazimy y przez x. Podobnie $\beta=-\varepsilon\frac{a^2-b^2}{b}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}$. Aby znaleźć równanie, łączące α, β ze sobą, obliczamy wyrażenie:

$$(a\alpha)^{2/3}+(b\beta)^{2/3}=\frac{(a^2-b^2)^{2/3}}{a^2}x^2+(a^2-b^2)^{2/3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=(a^2-b^2)^{2/3}.$$

Otrzymaliśmy tedy równanie rozwiniętej: $(a\alpha)^{2/3}+(b\beta)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$. Jest to t. zw. asterojda, przedstawiona na rys. 107.



Rys. 107.

Jest to krzywa podobna do symbolu gwiazdy i stąd jej nazwa. Ma cztery ostrza. Zwróćmy jeszcze na to uwagę, że środki krzywizn dla punktów górnego $(y>0)$ łuku elipsy leżą właśnie na dolnej części $(\beta<0)$ rozwiniętej. Nadto łatwo stwierdzić, że styczna do rozwiniętej jest normalną do elipsy.

Oczywiście powyższe zagadnienie można o tyle odwrócić: do danej rozwiniętej szukać rozwijającej; znaczyć to będzie: gdy dana rozwinięta, to dane są jej styczne i mamy znaleźć krzywą, która te styczne przyjmuje za normalne czyli przecina styczne pod kątem prostym (gdyż przez kąt między krzywemi rozumie się kąt między ich stycznemi).

3. Dla linji łańcuchowej (str. 307) otrzyma czytelnik wzór $R = ay^2$, co daje łatwy sposób konstrukcji środka krzywizny, gdy dane są a, y i kierunek normalnej. Minimum promienia R otrzymamy dla $y = \frac{1}{a}$ t. j. dla najniższego punktu linji łańcuchowej.

Uwaga Dla uzupełnienia treści poprzednich rozdziałów powinien czytelnik zbadać kształt krzywych $y = e^x$, $y = lnx$, $y = \text{arc}\sin x$, $y = \text{arc}\cos x$, $y = \text{arc}\,\text{tg}\, x$, $y = \text{arc}\,\text{ctg}\, x$.

I) *Asymptoty.* Mogą istnieć proste, do których się krzywe nieograniczenie zbliżają, gdy punkt po krzywej oddala się w nieskończoność. Aby te proste, zwane asymptotami zbadać, musimy wprzód zająć się pewnemi własnościami funkcyj.

Niech funkcja $f(x)\left(\text{np. } \frac{1}{x-3}\right)$ nie będzie określoną dla $x = x_0$ $(x = 3)$ i niech ma tę własność, że bezwzględna jej wartość $|f(x)|$ rośnie nieograniczenie, gdy $x \rightarrow x_0$, t. zn. do *każdej* liczby A istnieje liczba $\delta > 0$, taka, że jest $|f(x)| > A$, gdy $0 < |x - x_0| < \delta$. Wtedy prostą $x = x_0$ nazywamy asymptotą krzywej $y = f(x)$. Np hyperbola $y = \frac{1}{x-3}$ ma asymptotę $x = 3$ (prostopadłą do osi x). Krzywa $y = lnx$ ma asymptotę $x = 0$. Krzywa $y = \text{tg} x$ ma nieskończenie wiele asymptot: $x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie n oznacza dowolną liczbę całą.

Oprócz tych asymptot określimy jeszcze inne. W tym celu wprowadzimy jeszcze jedno pojęcie granicy. Np. weźmy funkcję $y = \frac{x+1}{x-1}$; gdy weźmiemy coraz to większe wartości na liczbę x. to y zbliżać się będzie do liczby 1. Powiemy $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1$. Weźmy dowolną funkcję $f(x)$, określoną, gdy $x > a$. Liczbę g nazwiemy jej granicą. gdy $x \rightarrow +\infty$, gdy zachodzi rzecz następująca: do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $l \geqq a$ taka, że jest $|f(x) - g| < \varepsilon$. gdy jest $x \geqq l$ (t. zn. gdy x jest dość wielkie). Jest wtedy $g = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Podobnież określimy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, gdy więc $x \rightarrow -\infty$. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest określona, gdy $x < a'$ i niech do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba l' taka, iż jest $|f(x) - g'| < \varepsilon$, gdy jest $x \leqslant l'$; wtedy $g' = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Przykład. Niech $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$; wtedy $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} y$.

Otóż prostą (m): $y = ax + b$ zowiemy asymptotą krzywej $y = f(x)$, gdy odległość d punktu krzywej od prostej m ma granicę zero, gdy $x \to +\infty$ albo gdy $x \to -\infty$. Otóż odległość d liczona bezwzględnie będzie miała postać:

$$d = \frac{|f(x) - ax - b|}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Załóżmy, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą; jak wyznacza się liczby a i b dla niej? W tym celu zauważmy, że, jeżeli $d \to 0$, gdy $x \to +\infty$ lub gdy $x \to -\infty$, to wtedy także licznik $f(x) - ax - b \to 0$, skąd wynika, że $\dfrac{f(x)}{x} - a - \dfrac{b}{x} \to 0$, przeto też $\dfrac{f(x)}{x} - a \to 0$, stąd $\dfrac{f(x)}{x} \to a$, gdy $x \to +\infty$ lub gdy $x \to -\infty$. To nam pozwoli wyznaczyć współczynnik kierunkowy a dla asymptoty; ponieważ $f(x) - ax - b \to 0$, więc $f(x) - ax \to b$, co znów zezwala na wyznaczenie liczby b, gdy już znamy liczbę a. Że odwrotnie prosta o współczynnikach dopieroco wyznaczonych, jest rzeczywiście asymptotą, to czytelnik z łatwością wykaże.

Przykłady. 1. Gdy $y = e^x$, to stąd $\dfrac{y}{x} \to 0$, gdy $x \to -\infty$, więc $a = 0$; nadto $e^x - 0 . x = e^x \to 0$, gdy $x \to -\infty$, więc też $b = 0$. Asymptotą jest oś x.

2. Dla hyperboli $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, otrzymujemy $y = \varepsilon b \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$. Otóż weźmy albo $x > 0$ albo $x < 0$, więc $x = \varepsilon' |x| = \varepsilon' . \sqrt{x^2}$, gdzie $\varepsilon' = \pm 1$; więc $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\varepsilon b}{\varepsilon'} \sqrt{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{x^2}} \to \dfrac{\varepsilon b}{\varepsilon' a}$, gdy $|x| \to \infty$. Jest więc $\dfrac{\varepsilon b}{\varepsilon' a}$ współczynnikiem kierunkowym asymptoty. Wyraz wolny jest granicą wyrażenia $y - \dfrac{\varepsilon b}{\varepsilon' a} x = \varepsilon b \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1} - \dfrac{\varepsilon b x}{\varepsilon' a} =$

$$\varepsilon b \left[\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{x}{\varepsilon' a}\right] = \varepsilon b \left[\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{\varepsilon' |x|}{\varepsilon' a}\right] = \varepsilon b \left[\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{\sqrt{x^2}}{a}\right] =$$

$$=\varepsilon b\cdot\frac{\frac{x^2}{a^2}-1-\frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{-\varepsilon b}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}+\frac{x^2}{a^2}}\to 0,\ \text{gdy}\ |x|\to\infty.$$ Asymptotami są więc proste $y=\pm\frac{b}{a}x$.

3. Dla krzywej $y=\frac{\sin x}{x}$ otrzymuje się asymptotę $y=0$ czyli oś x.

4. Rozważmy krzywą $y=\frac{x^4+1}{x^2(x^2-1)}$; ona ma trzy asymptoty prostopadłe do osi x, a mianowicie prostą $x=0$ (czyli oś y) i proste $x=1$, $x=-1$; ponadto prosta $y=1$ jest też asymptotą. Rysunek tej krzywej jest bardzo interesujący i radzimy czytelnikowi tego rysunku dokonać według poprzednio poznanych metod.

Uwaga. Jako dalszy materjał do ćwiczeń podajemy następujące krzywe $y=\sqrt{x(x^2-1)}$, $y=-\sqrt{x(x^2-1)}$, $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$, $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (linja łańcuchowa dla $a=1$), $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $y=ln[x+\sqrt{x^2-1}]$, $y=ln[x+\sqrt{x^2+1}]$, $y=ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, $y=ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (cztery ostatnie funkcje są odwrotnemi względem przedostatnich funkcyj, co na wykresie czytelnik zauważy); $y=x\sin\frac{1}{x}$, $y=x^2\sin\frac{1}{x}$. Nadmieniamy, że w § 76 badamy jeszcze kształt pewnej krzywej.

§ 68. Obliczanie pól płaskich.

Zastanowimy się najpierw nad sprawą mierzenia pola płaskiego. Wyjaśnimy lepiej, o co chodzi, gdy kilka wierszy poświęcimy mierzeniu wogóle.

Jak wiadomo, mierzymy długości, pola, objętości, ciężary, siły, masy, pracę, natężenie prądu, naboje elektryczne, naboje magnetyczne, natężenie światła, t. zw. siły elektromotoryczne, ciepło itd.

Cóż to znaczy? Zdajmy sobie z tego sprawę. Otóż wybieramy pewne przedmioty (rzeczywiście istniejące lub przedmioty naszego myślenia) i tworzymy z nich zbiór, który oznaczmy przez Z. Np.

zbiór Z może to byc zbiór odcinków lub sił lub naboi elektrycznych. Elementy tego zbioru Z mierzymy, znaczy to, że elementom zbioru Z przydajemy liczby, przydawszy pewnemu z nich liczbę 1. Np. sile, która masie 1 gr nadaje przyspieszenie 1 (gdy długości mierzy się na centymetry, a czas na sekundy), przydajmy liczbę 1; aby nie powtarzać długiej definicji tej siły, której przydaliśmy liczbę 1 i która jest jednostką siły dla dalszego mierzenia, nazwano ją *dyną*. Po przyjęciu dyny trzeba wiedzieć, jakie liczby należy przypisywać innym siłom t. zn. trzeba znać definicję mierzenia sił. Tą definicją, mierzącą siły kinetycznie, jest t. zw. prawo Newtona. które orzeka, że siła jest proporcjonalną do masy i przyspieszenia. Jeżeli więc siła S, działając na masę m gramów, nadaje jej przyspieszenie γ (obliczone w ten sposób, że długości mierzymy na centymetry, a czas na sekundy), to sile S przypisujemy liczbę $m\gamma$. Mówimy dla skrócenia siła S wynosi $m\gamma$ dyn.

A więc dwie rzeczy należy ustalić przez umowę: 1°) wybór jednostki ze zbioru, 2°) sposób przydawania liczb przedmiotom zbioru.

Wróćmy do specjalnego zagadnienia mierzenia pól płaskich. Rozważmy zbiór Z pól płaskich, przyczem ograniczamy się tylko do takich pól, że istnieje prosta, względem której może być pole uważane za obszar normalny w myśl definicji z § 88. Oczywiście prostokąty (a więc i kwadraty), trójkąty, trapezy, pola koliste i wiele innych należą do zbioru Z. Z niego wybieramy pewien kwadrat K_0 i przydajemy mu liczbę 1. Jak mierzyć pola zbioru Z? Jakie im liczby przydawać?

Określenie miary pola ze zbioru Z będzie się składało z trzech części:

I) Najpierw określimy liczby mierzące pewne kwadraty. W kwadracie K_0 podzielmy każdy z boków na n równych części ($n \geqslant 2$) i przez punkty podziału poprowadźmy proste równoległe do boków kwadratu K_0, wskutek tego kwadrat K_0 rozpadnie się na n^2 małych kwadratów, przystających do siebie; każdemu z nich przydajemy liczbę $\frac{1}{n^2}$, jako jego miarę. Oznaczmy dowolny z małych kwadratów przez $K_0^{(n)}$.

II) Dla skrócenia mowy wprowadźmy następujące określenie: płaszczyznę π pokrywa sieć kwadratowa S_n ma znaczyć: na płaszczyźnie π poprowadzone są proste do siebie równoległe i do nich prostopadłe w ten sposób, że powstały oczka kwadratowe, wszystkie przystające do kwadratu $K_0^{(n)}$.

III) Obierzmy dowolne pole P ze zbioru Z, leżące na płaszczyźnie π. Pokryjmy płaszczyznę siecią kwadratową S_n (obierając $n=2, 3,\ldots$). Oznaczmy przez α_n sumę miar pól oczek wewnętrznych [1]) w stosunku do pola P, a przez β_n sumę miar pól oczek wewnętrznych i kresowych t. zn. takich, które tylko częściowo należą do rozważanego pola. Oznaczmy dalej przez ζ_1 zbiór liczb α_n dla $n=2, 3,\ldots.$, przez ζ_2 zbiór liczb β_n dla $n=2, 3,\ldots.$, gdy *kierunki boków oczek nie ulegają zmianie.* Gdyby dla pewnej liczby n nie było oczek wewnętrznych, to kładziemy wtedy $\alpha_n=0$. Każda liczba zbioru ζ_1 jest mniejszą od każdej liczby zbioru ζ_2, nadto zbiór ζ_1 jest ograniczonym u góry, zbiór ζ_2 ograniczonym u dołu; tedy (str. 117) istnieje górny kres p_1 liczb zbioru ζ_1 i dolny kres ζ_2 liczb zbioru ζ_2, przyczem będzie $p_1 \leqslant p_2$. Pomijamy dowód tych twierdzeń.

Jeżeli pole P jest takiem, że $p_1=p_2$ dla pewnego kierunku boków oczek sieci S_n, to pole P ma własność następującą: jeżeli zmienimy kierunek boków oczek sieci kwadratowych S_n i znów utworzymy zbiory ζ_1', ζ_2', górny kres p_1', dolny p_2', to się okaże, że jest $p_1'=p_2'=p_1=p_2$. Dowód tego twierdzenia również pomijamy.

Otóż wspólną wartość liczb p_1, p_2 (niezależną od wyboru kierunku jednego z boków oczek sieci kwadratowych), nazwiemy miarą powierzchniową pola P. a pole P nazywamy mierzalnem.

Wypowiemy teraz twierdzenie następujące: *wszystkie obszary płaskie normalne są mierzalne.* Aby to twierdzenie udowodnić, wystarczy wybrać specjalny kierunek boków oczek i wykazać, że suma miar oczek kresowych dąży do zera wraz z długością boków oczek. Dowód ten pominiemy, a czytelników, interesujących się tą sprawą odsyłamy do litografowanego kursu prof. Zaremby p. t.: Ogólne zasady analizy (część II), a wydanego przez Krakowskie Kółko matematyczno-fizyczne uczniów Uniwersytetu Jagiel.

W dalszym ciągu zajmiemy się obszarami normalnymi względem osi x, przytem mającemi ograniczenie złożone z części następujących: 1) odcinek (a, b) na osi x; 2) proste l_1, l_2 prostopadłe do osi x, wykreślone w punktach $(a, 0)$, względnie $(b, 0)$; 3) krzywa k

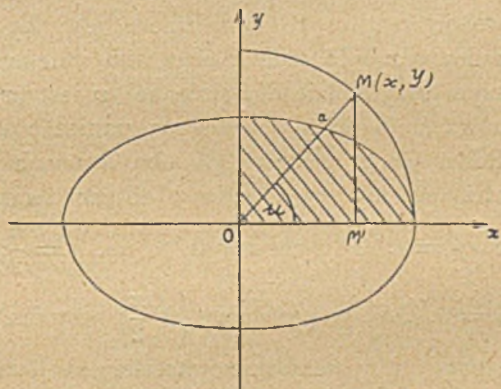
---

[1]) Oczko nazywamy wewnętrznem (w stosunku do pola P), jeżeli wszystkie jego punkty leżą wewnątrz pola P.

o równaniu $y = f(x)$, przyczem $f(x)$ oznacza funkcję ciągłą w przedziale (a, b).

Wtedy wykazuje się, że *miarą powierzchniową takiego pola jest właśnie całka określona* $\int_a^b f(x)\,dx$. Dowód tego twierdzenia pomijamy (zawarty jest bowiem w § 60 po pewnych uzupełnieniach). Wobec tego i § 59 zajmiemy się obecnie obliczeniem miary powierzchniowej jedynie dwu pól płaskich.

Obliczmy najpierw pole elipsy, danej przez równanie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a > b > 0$. Osie tej elipsy leżą na osiach układu; oś większa, długości $2a$ leży na osi x, zaś oś mniejsza, długości $2b$, na osi y (rys. 108).



Rys. 108

Ze względu na symetryczny kształt elipsy wystarczy nam obliczyć ćwierć jej powierzchni t. j. część leżącą w pierwszej ćwiartce płaszczyzny (x, y). Pole zacieniowane mierzyć się będzie liczbą: $\int_0^a y\,dx$, cała więc powierzchnia elipsy mierzyć się będzie liczbą P, spełniającą równość: $P = 4\int_0^a y\,dx$.

Zmienną y obliczymy z równania elipsy; otrzymujemy $\frac{y}{b} = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Znak podwójny $\pm$ jest wyrazem algebraicznym faktu, że przez każdy punkt $(x, 0)$, gdzie $-a < x < a$, da się wykreślić prostopadła do osi x przecinająca elipsę w dwu punktach: jeden leży w ćwiartce I lub II, drugi w III lub IV (wyjątek stanowią liczby $x = \pm a$). Zajmujemy się tylko częścią elipsy, położoną w ćwiartce I, wolno więc nam przyjąć: $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$; zatem $P = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx =$

$= 4b \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx$. Całkę tę wyrachujemy metodą zmiany zmiennej całkowania.

Kształt funkcji podcałkowej naprowadza nas na pomysł skorzystania ze wzoru goniometrycznego: $\sin u = \pm \sqrt{1 - \cos^2 u}$ i podstawienia: $\frac{x}{a} = \cos u$, skąd $x = a \cos u$. Geometryczna interpretacja tego podstawienia widoczna z rys. 108. Zakreśliwszy ze środka elipsy koło o promieniu, równym półosi większej (długości a), weźmy punkt bieżący $M(x, Y)$ na obwodzie tego koła; połączmy go promieniem a ze środkiem O i wykreślmy jego rzut M' na oś x ów. Bok OM', jak widoczne z trójkąta prostokątnego OMM', mierzy się właśnie liczbą $x = a \cos u$, gdy u mierzy ostry kąt, jaki tworzy promień OM z osią x.

Zastanówmy się jeszcze, czy wolno podstawić $x = a \cos u$ wobec reguły, że koniecznem jest, by funkcja podstawiona za zmienną x była stale rosnącą lub stale malejącą. Przedziałem w naszym przykładzie dla zmiennej x jest przedział $(0, a)$; wobec tego nowa funkcja ma wahać się w granicach od $a \cos u = 0$ do $a \cos u = a$. Równości te możemy po obu stronach podzielić przez liczbę a; otrzymujemy więc żądany obszar zmienności: od $\cos u = 0$ do $\cos u = 1$. Gdy $\cos u = 0$, to np. $u = \frac{\pi}{2}$; gdy zaś $\cos u = 1$, to np. $u = 0$. Otóż w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ jest funkcja $\cos u$ stale malejącą, i przyjmuje wszystkie wartości od liczby 0 do liczby 1, przeto podstawienie takie jest dozwolone. Będzie tedy:

$$P = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx = -4b \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1 - \cos^2 u}\,(a \sin u)\, du.$$

Wiemy, że jest $\sqrt{1 - \cos^2 u} = |\sin u|$. Ale w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ przyjmuje funkcja $\sin u$ wartości jedynie nieujemne, jest więc: $\sqrt{1 - \cos^2 u} = \sin u$. Wobec tego:

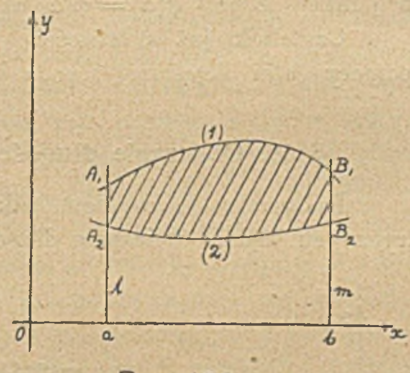
$$P = -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 u\, du = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\, du =$$

$$= 4ab \left[\left(\int \sin^2 u\, du \right)_{u=\pi/2} - \left(\int \sin^2 u\, du \right)_{u=0} \right].$$

Całkę nieokreśloną funkcji $\sin^2 x$ obliczyliśmy poprzednio (str. 261), a mianowicie: $\int \sin^2 u\,du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$, zatem:

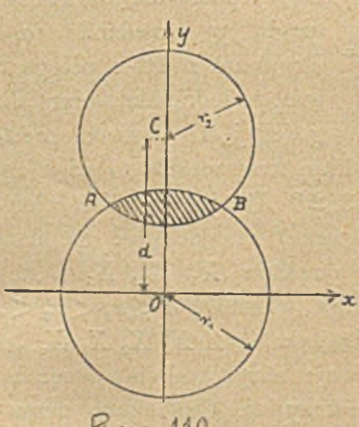
$$P = 4ab\left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin\pi + C - C\right] = ab\pi.$$

Wzór ten daje miarę powierzchniową elipsy. Gdy $a = b$ t. zn., gdy elipsa przechodzi w koło, otrzymujemy $a^2\pi$, jako miarę powierzchniową koła, zgodnie ze znanym wzorem elementarnym. Na zakończenie niniejszego paragrafu obliczymy pole płaskie, normalne względem osi x i więcej skomplikowane (rys. 109). A więc niech będą w przedziale (a, b) dwie funkcje ciągłe $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ o własności $0 \leqslant \psi(x) \leqslant \leqslant \varphi(x)$. Krzywa (1) o równaniu $y = \varphi(x)$ nie leży żadną swą częścią pod krzywą (2) o równaniu $y = \psi(x)$, jak to uwzględniono na rysunku. Pragniemy obliczyć pole normalne, na rysunku zakreskowane t. zn. ograniczone krzywemi (1) i (2) i prostemi (l) i (m) o równaniach $x = a$ wzgl. $x = b$. Pole to obejmuje punkty o współrzędnych x, y, spełniających warunki następujące $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant \leqslant \psi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x)$.



Rys. 109.

Widocznem, że szukane pole p jest różnicą dwu pól $P_1 - P_2$, gdzie P_1 oznacza pole ograniczone krzywą (1), prostemi (l), (m) i odcinkiem ab, zaś pole P_2 jest ograniczone krzywą (2), prostemi (l), (m) i odcinkiem ab.



Rys. 110.

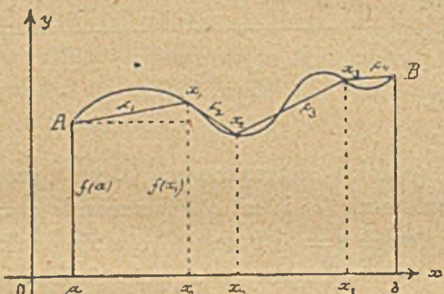
Stąd: $p = P_1 - P_2 = \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b [\varphi(x) - \psi(x)]\,dx.$

Jako przykład obliczymy pole wspólne dwom kołom, przecinającym się w dwu punktach (rys. 110). Niech jedno koło będzie środkowem o promieniu r_1 i równaniu $x^2+y^2=r_1^2$, drugie niech ma środek na dodatniej półosi y w odległości d od początku O i o promieniu r_2; tedy drugie koło ma równanie: $x^2+(y-d)^2=r_2^2$. Mamy obliczyć pole zacieniowane, które możemy nazwać soczewką. Ono jest normalnem względem osi x. W obecnym przypadku będzie $\varphi(x)=\sqrt{r_1^2-x^2}$, $\psi(x)=d-\sqrt{r_2^2-x^2}$. Jeżeli punkt B ma odciętą α, to granicami całkowania będą liczby $(-\alpha, \alpha)$, przyczem w punkcie B jest $\varphi(\alpha)=\psi(\alpha)$ czyli $\sqrt{r_1^2-\alpha^2}=d-\sqrt{r_2^2-\alpha^2}$.

Czytelnik już z łatwością obliczy zakreskowane pole przy pomocy całki określonej i poda warunek na liczbę d.

§ 69. Obliczanie długości łuku krzywej $y=f(x)$.

Dalszem zastosowaniem całki określonej do zagadnień geometrycznych będzie obliczanie długości łuku krzywej, której równanie $y=f(x)$. Przypuśćmy, że mamy obliczyć długość łuku krzywej (rys. 111) od punktu A do punktu B, przyczem ta krzywa jest obrazem geometrycznym funkcji $y=f(x)$, o której zakładamy, że jej pochodna jest funkcją ciągłą w przedziale (a, b). Trudność zadania polega na tem, że jednostką miary długości jest odcinek prostej i tym odcinkiem mamy wymierzyć linję krzywą. Co to więc znaczy mierzyć łuk krzywej (zob. str. 382)? Trzeba określić mierzenie łuków. Otóż postępujemy w sposób następujący: na danej krzywej obieramy dowolnie szereg punktów $X_1, X_2, X_3, \ldots X_{n-1}$, których odcięte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ mają własność $a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<b$; punkty te łączymy linją łamaną $A\,X_1\,X_2\,X_3\,X_{n-1}\,B$; jej wierzchołki leżą więc na krzywej; narysowaliśmy więc tem samem cięciwy $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ tej krzywej. Oznaczmy przez s sumę długości tych cięciw czyli $s=c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n=\sum_{i=1}^{n} c_i$.



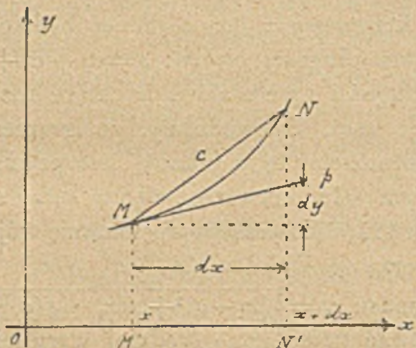
Rys. 111.

Suma s zależy nie tylko od obranej krzywej, od przedziału (a, b), w którym ją rozpatrujemy, ale i od ilości punktów $X_1, X_2, X_3, \ldots X_{n-1}$, oraz od sposobu ich rozmieszczenia t. zn. od wyboru liczb x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_{n-1}$. Przy założeniach, które uczyniliśmy dla rozpatrywanej funkcji $y = f(x)$ wykażemy, że, gdy $\delta = \mathrm{Max}(x_1 - a, x_2 - x_1 \ldots b - x_{n-1})$ dąży do zera, wówczas suma s długości cięciw $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ dąży do określonej granicy, którą właśnie nazywamy długością łuku AB krzywej $y = f(x)$.

Zatem przez długość łuku krzywej $y = f(x)$ rozumieć będziemy granicę, do której dąży suma długości cięciw: $s = c_1 + c_2 + + c_3 + \ldots + c_n$, gdy maximum długości przedziałów, na które rozpadł się przedział (a, b), dąży do zera. Udowodnimy, że granica sumy s istnieje przy naszych założeniach i że tą granicą jest pewna całka określona. Rozpatrzmy w tym celu pierwszą z cięciw sumy s, właśnie tę cięciwę przedstawia rys. 111, jako przeciwprostokątnię trójkąta, którego przyprostokątnie mierzą się liczbami $(x_1 - a)$, $|f(x_1) - f(a)|$. Tedy długość cięciwy c_1 wynosi: $c_1 = \sqrt{(x_1 - a)^2 + [f(x_1) - f(a)]^2}$. Do funkcji $f(x)$ możemy zastosować twierdzenie średniej wartości, ponieważ jest funkcją ciągłą w przedziale (a, b) i ma pochodną. Jest więc: $f(x_1) - f(a) = (x_1 - a) \cdot f'(\xi_1)$, gdzie ξ_1 jest liczbą pośrednią między liczbami a i x_1. Długość cięciwy c_1 napiszemy, uwzględniając ostatnią równość w postaci: $c_1 = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_1 - a)^2 [f'(\xi_1)]^2} = (x_1 - a)\sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2}$; jest bowiem $x_1 - a > 0$. Podobnie wyrazimy długość cięciwy c_2: $c_2 = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + [f'(\xi_2)]^2}$, oraz długość następnych cięciw, poczem ich suma s przybierze postać: $s = (x_1 - a)\sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2} + (x_2 - x_1)\sqrt{1 + [f'(\xi_2)]^2} + \ldots + (b - x_{n-1})\sqrt{1 + [f'(\xi_n)]^2}$. Niech teraz długość δ najdłuższego z przedziałów częściowych, na jakie podzieliliśmy odcinek (a, b) dąży do zera. Ponieważ pochodna funkcji $f(x)$ jest, według założenia, funkcją ciągłą w przedziale (a, b), więc i kwadrat jej jest funkcją ciągłą; zatem funkcją ciągłą będzie również wyrażenie: $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.

Wobec tego suma s posiada granicę, gdy $\delta \to 0$ (i przeto $n \to \infty$), niezależną od wyboru liczb ξ_i; granicą jest całka określona: $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$. Tem samem wykazaliśmy następujące twierdzenie: *jeżeli funkcja $f(x)$ ma pochodną ciągłą w przedziale (a, b), to krzywa $y = f(x)$ ma łuk w przedziale (a, b) określonej długości i długość łuku krzywej od punktu $(a, f(a))$ do punktu $(b, f(b))$ wyznacza wzór: $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$, przyczem $b \geqslant a$.*

Aby ułatwić zapamiętanie tego wzoru, obliczymy jeszcze raz w inny nieco sposób długość cięciwy. Rozważmy w tym celu na krzywej dwa punkty $M[x, f(x)]$, $N[x+dx, f(x+dx)]$, przyczem dx niech oznacza liczbę dodatnią, dość małą, by nietylko liczba x, ale i liczba $x+dx$ należała do przedziału (a, b) (rys. 112). Dla cięciwy $c = MN$ otrzymujemy: $c^2 = dx^2 + [f(x+dx) - f(x)]^2$. Otóż z § 44 wiadomo, że $f(x+dx) - f(x) = dy + \varrho dx$, przyczem $\varrho \to 0$, gdy $dx \to 0$. Jest więc $c^2 = dx^2 + dy^2 + 2\varrho dx dy + \varrho^2 dx^2$. Otóż właśnie pod całką w ostatnim wzorze na łuk l mamy wyrażenie



Rys. 112.

$$\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \sqrt{dx^2+dy^2};$$

jest ono tedy „przybliżeniem“ ~~łuku~~ cięciwy c; nie trudno zauważyć, że $MP = \sqrt{dx^2+dy^2}$; wskutek tego $c - MP = \sqrt{dx^2+dy^2+2\varrho dx dy+\varrho^2 dx^2} - \sqrt{dx^2+dy^2}$. Stąd

$$c - MP = \frac{2\varrho dx dy + \varrho^2 dx^2}{\sqrt{dx^2+dy^2+2\varrho dx dy+\varrho^2 dx^2}+\sqrt{dx^2+dy^2}} =$$

$$= \frac{2\varrho \cdot y' + \varrho^2 dx}{\sqrt{1+y'^2+2\varrho y'+\varrho^2}+\sqrt{1+y'^2}}, \text{ przeto } |c - MP| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[2|\varrho y'| + \varrho^2]dx}{\sqrt{1+y'^2}} < [2|\varrho y'| + \varrho^2]dx.$$

Jeżeli więc przyjmiemy równość $c = \sqrt{dx^2+dy^2}$, to popełniamy błąd[1]), którego górny kraniec dopieroco wyznaczyliśmy, mianowicie bezwzględny błąd jest mniejszy od liczby $[2|\varrho y'| + \varrho^2]dx$; ta liczba dąży do zera, gdy $dx \to 0$; można więc błąd uczynić dowolnie małym.

Jeżeli chcemy obliczyć długość łuku danej krzywej do pewnego tylko punktu o odciętej x z przedziału (a, b), to długość tego łuku (l) jest zależną od zmiennej x; oznaczmy tę długość przez $s(x)$; będziemy więc mieli: $s(x) = \int_a^x \sqrt{1+f'^2(t)}\,dt$.

---

[1]) Podkreślmy bowiem, że punkt o współrzędnych $(x+dx, y+dy)$ leży na *stycznej*, a nie na krzywej.

Z teorji całek określonych wynika, że funkcja $s(x)$ ma pochodną i równą wyrażeniu $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$; istnieje zatem także różniczka ds, jest $ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$. Widoczne, że, o ile jest $dx > 0$, to (zob. rys. 112) jest $MP = ds$; różniczka łuku krzywej ma więc bardzo proste znaczenie geometryczne.

Obliczmy granicę stosunku cięciwy do różniczki łuku, gdy $dx \to 0$. Otóż, gdy przyjmiemy $dx > 0$, to otrzymujemy: $\frac{c}{ds} =$

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + 2\varrho\, dx\, dy + \varrho^2 dx^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + 2\varrho y' + \varrho^2}}{\sqrt{1 + y'^2}} \to 1, \text{ gdy } dx \to 0.$$

Granicą jest więc liczba 1. We wielu rachunkach przybliżonych korzysta się z tej własności cięciwy.

Uwaga. Nieścisłe wywody podają najpierw różniczkę ds, a potem łuk $s(x)$, jako całkę — oczywiście jest to błąd tego samego rodzaju, co wytknięty na str. 333; aby bowiem utworzyć różniczkę $ds = \frac{ds}{dx} \cdot dx$, trzeba znać łuk $s(x)$, jako funkcję zmiennej x, a tego dokonuje tylko całka określona.

Przykłady. 1. Dla paraboli $x^2 = 2py$ otrzymujemy $y' = \frac{x}{p}$, tedy łuk liczony od punktu (0,0) do punktu (x,y), gdzie $x \geqslant 0$, wynosi $s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{t}{p}\right)^2}\, dt$. Całkowaniem przez części otrzymuje się kolejno:

$$s(x) = \int_0^x 1 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{t}{p}\right)^2} dt = \left(t\sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}}\right)_0^x - \int_0^x \frac{\left(\frac{t}{p}\right)^2}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}}} dt =$$

$$= x\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} - \int_0^x \frac{\left(\frac{t}{p}\right)^2 + 1 - 1}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}}} dt = x\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} - s(x) +$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}}} dt, \text{ skąd } 2s(x) = x\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} + \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}}}.$$

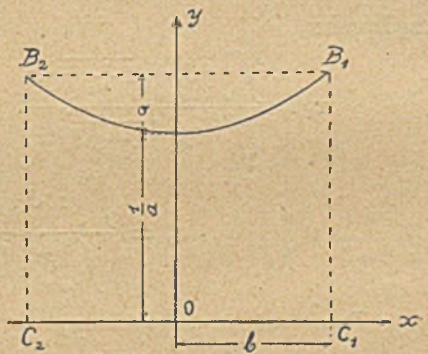
Ostatnią całkę przez podstawienie $t = pu$ czytelnik z łatwością obliczy. Będzie tedy $2s(x) = x\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} + pln\left(\frac{x}{p} + \sqrt{1+\left(\frac{x}{p}\right)^2}\right)$.

Weźmy teraz na paraboli dwa punkty, symetrycznie położone względem osi y, punkty $A\left(a, \frac{a^2}{2p}\right)$, $B\left(-a, \frac{a^2}{2p}\right)$, gdzie $a > 0$; to łuk AB równa się podwójnemu łukowi OA, przyczem O oznacza punkt $(0,0)$; tedy będzie: $\widehat{AB} = a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}} + pln\left(\frac{a}{p} + \sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}}\right)$. W § 86 pozna czytelnik metodę przybliżonego obliczenia łuku $\widehat{AB}$.

2) Dla linji łańcuchowej $y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$ otrzymuje się $1 + y'^2 = \frac{1}{4}(e^{ax} + e^{-ax})^2$, stąd łuk, liczony od najniższego punktu ($x = 0$) linji do punktu o nieujemnej odciętej x wynosi: $s(x) = = \frac{1}{2}\int_0^x (e^{ax} + e^{-ax})\,dx = \frac{1}{2a}(e^{ax} - e^{-ax})$; ale jest $y^2 - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4a^2}(e^{ax} - e^{-ax})^2$, skąd $\sqrt{y^2 - \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{2a}\left|e^{ax} - e^{-ax}\right| = \frac{1}{2a}(e^{ax} - e^{-ax})$; gdy $x \geqslant 0$, wtedy $e^{ax} \geqslant e^{-ax}$. Wobec tego $s(x) = \sqrt{y^2 - \frac{1}{a^2}}$. Ten wzór daje łatwy sposób skonstruowania odcinka długości $s(x)$. Niech bowiem M oznacza punkt (x, y) na linji łańcuchowej, M_1 niech będzie jego rzutem na oś x; z tego punktu jako środka zatoczmy koło K o promieniu $\frac{1}{a}$ i następnie z punktu M wykreślmy styczną (l) do koła K w stronę ujemnej półosi x; otóż, gdy $x > 0$, to punkt M będzie miał rzędną $y > \frac{1}{a}$ i przeto leży zewnątrz koła K, wobec czego z punktu M można wyrysować dwie styczne — wybraliśmy jedną (w „lewo“). Niech S oznacza punkt styczności prostej (l) z kołem K trójkąt MM_1S jest prostokątnym, przeto: $MS = \sqrt{MM_1^2 - M_1S^2} = \sqrt{y^2 - \frac{1}{a^2}}$, a więc odcinek MS daje łuk $s(x)$, gdy $x > 0$. Ale wykażemy natychmiast, że prosta (l) jest zarazem styczną do linji łańcuchowej. Rzeczywiście, zachowując oznaczenia str. 361, wiemy, że kierunek M_1P, jako prostopadły do normalnej, jest równoległy do stycznej, nadto $MP = \frac{1}{a}$, więc $M_1P = \sqrt{y^2 - \frac{1}{a^2}} = MS$; czwo-

robok MPM_1S ma przeciwległe boki parami równe $MP = M_1S$, $M_1P = MS$, a więc jest równoległobokiem, przeto MS jest styczną do linji łańcuchowej. Podaliśmy tedy łatwą konstrukcję stycznej i łuku $s(x)$.

Weźmy pod uwagę punkty B_1 i B_2 na linji łańcuchowej o odciętych $b, -b$ (gdzie $b > 0$); rzędna tych punktów ma wspólną wartość. Długość łuku B_1, B_2 wyrazimy przez odległość najniższego punktu linji łańcuchowej od prostej B_1, B_2 czyli przez t. zw. strzałkę σ (zob. rys. 113). Widoczne, że jest $\sigma + \frac{1}{a} = \frac{1}{2a}(e^{ab} + e^{-ab})$.



Rys. 113

Wskutek tego łuk $B_1B_2 =$

$$= 2\sqrt{\left[\frac{1}{2a}(e^{ab} + e^{-ab})\right]^2 - \frac{1}{a^2}} =$$

$$= 2\sqrt{\left(\sigma + \frac{1}{a}\right)^2 - \frac{1}{a^2}} =$$

$= 2\sqrt{\sigma\left(\sigma + \frac{2}{a}\right)}$. W ten sposób możemy długość liny, wolno zwisającej i symetrycznie utwierdzonej obliczyć, gdy wymierzy się strzałkę σ i odległość najniższego punktu liny od osi x, która jest kierownicą liny łańcuchowej.

(Obliczenie obwodu elipsy: zob. § 86, przykład V).

3) *Środek masy rozpostartej wzdłuż łuku.* Zakładając, że funkcja $f(x)$ ma pierwszą pochodnę ciągłą w przedziale (a, b), oznaczmy przez $\delta(x)$ funkcję ciągłą w przedziale (a, b). Wyobraźmy sobie wzdłuż łuku $y = f(x)$ rozpostartą masę o gęstości liniowej $\delta(x)$ [t. zn.: jeżeli przez m oznaczymy miarę masy na łuku MN długości s, to stosunek $m:s$ ma granicę, gdy punkt N zbliża się do punktu M i granicą jest wartość funkcji $\delta(x)$ dla odciętej punktu M]. Określimy środek masy rozpostartej na łuku AB, gdzie A i B oznaczają punkty o współrzędnych $(a, f(a))$ względnie $(b, f(b))$. Gdy w przestrzeni mamy danych kilka $(k \geqslant 2)$ punktów materjalnych o masach $m_1, m_2, \ldots m_k$, to ich środkiem masy jest punkt o współrzędnych:

$$x_0=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_kx_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}=\frac{\sum_{i=1}^{k}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{k}m_i},\quad y_0=\frac{\sum_{i=1}^{k}m_iy_i}{\sum_{i=1}^{k}m_i},\quad z_0=\frac{\sum_{i=1}^{k}m_iz_i}{\sum_{i=1}^{k}m_i},$$

przyczem (x_i, y_i, z_i) są współrzędnemi miejsca, które zajmuje punkt o masie m_i. Wobec tego nie będzie dziwnem, że przez środek omawianej masy będziemy rozumieli punkt (geometryczny) o współrzędnych:

$$x_0=\frac{\int_a^b x\,\delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx},\quad y=\frac{\int_a^b y\,\delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx},$$

$$z_0=\frac{\int_a^b z\,.\,\delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

Ponieważ w rozważanym przypadku jest $z=0$, więc też $z_0=0$. Całka $\int_a^b \delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ zowie się całkowitą masą, rozpostartą na łuku. Zajmować nas będą przypadki, w których gęstość $\delta(x)$ jest stałą, wtedy ostatnie wzory znacznie się uproszczą:

$$(1)\quad x_0=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx},\quad y_0=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx},\quad z_0=\frac{\int_a^b z\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

[Wzory te piszą zwykle prościej, kładąc $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$].

Wykażemy twierdzenie następujące: *jeżeli łuk AB ma oś symetrji, to środek masy rozpostartej jednostajnie (t. zn. $\delta(x)=$ stałej) na łuku AB leży na tej osi symetrji. Dowód* przeprowadzimy w przypadku łuku płaskiego, dotąd rozważanego. Niech tą osią symetrji będzie oś y, wtedy jest $f(-x)=f(x)$ i nadto $\frac{a+b}{2}=0$ czyli $a=-b$; wykażemy, że wzory (1) dają $x_0=0$; rzeczywiście mamy:

$$J=\int_a^b xf(x)\,dx=\int_{-b}^{b} xf(x)\,dx=\int_{-b}^{0} xf(x)\,dx+\int_0^b xf(x)\,dx;$$

w pierwszej całce połóżmy $x=-t$; będzie $\int_{-b}^{0} xf(x)\,dx=$ $\int_b^0 tf(-t)\,dt=-\int_0^b xf(-x)\,dx$; wobec tego $J=\int_0^b x[f(x)-$

$-f(-x)]\,dx=0$, bo $f(x)=f(-x)=0$, przeto też $x_0=0$. Załóżmy, że obliczamy środek masy półkola; ze względu na ostatnie twierdzenie umieścimy półkole tak, by osią symetrji była np. oś y, wtedy $x_0=0$ i pozostaje do obliczenia współrzędna y_0. Nie przeprowadzimy tego rachunku obecnie, gdyż całkowania czytelnik jeszcze nie zdoła wykonać (zob. § 77).

Wskażmy obliczenie środka masy rozpostartej jednostajnie na łuku paraboli $x^2=2py$ od punktu $A\left(-a, \frac{a^2}{2p}\right)$ do punktu $B\left(+a, \frac{a^2}{2p}\right)$, gdzie $a>0$. Osią symetrji jest oś y, więc $x_0=0$ i zostaje do obliczenia liczba y_0. Jedną całkę: $\int_{-a}^{+a}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ już obliczyliśmy na str. 392. Obliczmy tedy całkę $I=\int_{-a}^{a} y\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\,dx$ $=\frac{1}{2p}\int_{-a}^{+a} x^2\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\,dx=\frac{1}{p}\int_0^a x^2\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\,dx.$

Dla całkowania przez części napiszmy ostatnią całkę w postaci: $I=\frac{1}{p}\int_0^a x\,.\,\frac{d}{dx}\left[\frac{p^2}{3}\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)^{3/2}\right]dx$; poczem łatwa przeróbka i korzystanie ze wzorů na $s(x)$ ze str. 392 daje już bezpośrednio:

$$I=\frac{pa}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{p^2}\right)\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}}-\frac{p^2}{8}\ln\left(\frac{a}{p}+\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}}\right).$$

Stąd już czytelnik łatwo obliczy rzędną y_0.

Dodajmy jeszcze uwagę następującą: *gdy łuk ma dwie osie symetrji, to środek masy jednostajnie na nim rozpostartej leży w punkcie przecięcia się tych osi symetrji.* Wobec tego w przypadku elipsy (krzywej!) leży środek masy w środku geometrycznym elipsy.

4) *Moment bezwładności.* Jeżeli punkt o masie m znajduje się w odległości r od osi l (lub płaszczyzny P), to jego momentem bezwładności względem osi l (lub płaszczyzny P) zowie się iloczyn mr^2; moment bezwładności kilku punktów jest sumą momentów bezwładności poszczególnych punktów. Stąd zrozumiałem będzie określenie następujące: momentem bezwładności masy rozpostartej na łuku z gęstością $\delta(x)$ względem osi l nazywamy całkę:

$$(1)\qquad I=\int_a^b r^2\,\delta(x)\sqrt{1+y'^2}\,dx\left(=\int_a^b r^2\,\delta(x)\,ds\right),$$

przyczem dla łuku przyjmujemy oznaczenia i założenia z ostatniego ustępu.

Zajmiemy się następującym prostym przykładem.

Niech będzie dany kwadrat o wierzchołkach (0,0,0), (a,0,0), (0,a,0), (a,a,0): obliczmy moment bezwładności obwodu kwadratu względem osi z. Oczywiście skoro kwadrat leży na płaszczyźnie (x, y), to $r^2 = x^2 + y^2$. Czytelnik, (odróżniając boki kwadratu równoległe do osi x od boków równoległych do osi y) zauważy, że przy stałej gęstości jest:

$$I = \delta\left[\int_0^a x^2\,dx + \int_0^a (a^2+y^2)\,dy + \int_0^a (x^2+a^2)\,dx + \int_0^a y^2\,dy\right] =$$
$$= \delta\left[2a^3 + \frac{4}{3}a^3\right] = \frac{10}{3}a^3\delta.$$

Masa wynosi $4a\delta$; określmy liczbę k dodatnią tak, iż $4a\delta . k^2 = I$; nazwiemy liczbę k ramieniem bezwładności obwodu kwadratu względem osi z; otóż jest $k^2 = \frac{5a^2}{6}$.

Uwaga. Druga definicja krzywizny (zob. § 67, H). Weźmy pod uwagę krzywą $y = f(x)$, przyczem funkcja $f(x)$ ma drugą pochodną ciągłą w punkcie x_0 i różną od zera. Weźmy na krzywej dwa punkty $M(x_0, f(x_0))$, $N(x_0 + h, f(x_0 + h))$, gdzie jest $h \neq 0$. Styczne w punktach M i N tworzą kąt α, którego tangens oblicza się według znanych wzorów geometrji analitycznej. Skoro dla stycznych liczby $f'(x_0)$, $f'(x_0+h)$ dają współczynniki kierunkowe, więc $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{1 + f'(x_0) . f'(x_0+h)}$, co na mocy twierdzenia średniej wartości przyjmuje postać $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h . f''(\xi)}{1 + f'(x_0) f'(x_0+h)}$, gdzie ξ oznacza liczbę pośrednią między liczbami x_0 i $x_0 + h$. Jeżeli liczba h jest dość małą, to $f''(\xi) \neq 0$ na mocy założenia, że $f''(x_0) \neq 0$ i że druga pochodna jest ciągłą w punkcie x_0. Gdy jest $h \neq 0$ i dość małą liczbą, to będzie $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$. Wobec tego zamiast ilorazu $\left|\frac{\alpha}{l}\right|$, o którym mowa w drugiej definicji krzywizny wolno napisać $\left|\frac{\alpha}{l}\right| = \left|\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right| . \left|\frac{\operatorname{tg}\alpha}{l}\right|$. Jeżeli jest $h > 0$, to $l = \int_{x_0}^{x_0+h} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = h\sqrt{1 + f'^2(\eta)}$, gdzie η oznacza liczbę przedziału $(x_0, x_0 + h)$ (zob.

§ 62); jeżeli jest $h<0$, to $l=\int_{x_0+h}^{x_0}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=-h\sqrt{1+f'^2(\eta)}$; przeto w obu przypadkach jest $l=|h|\cdot\sqrt{1+f'^2(\eta)}$. Wobec tego mamy: $\frac{|\alpha|}{l}=\left|\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right|\cdot\frac{|h|\cdot|f''(\xi)|}{1+f'(x_0)\cdot f'(x_0+h)}\cdot\frac{1}{|h|\sqrt{1+f'^2(\eta)}}$. Otóż, gdy $h\to 0$, to $\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\to 1$, $\xi\to x_0$, $\eta\to x_0$ i przeto (§ 39) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|\alpha|}{l}=$ $=\frac{|f''(x_0)|}{[1+f'^2(x_0)]^{3/2}}=\frac{1}{R_0}$, gdzie R_0 oznacza promień krzywizny, obliczony według pierwszej definicji Oba więc określenia krzywizny dają ten sam promień R_0, są więc zgodne ze sobą.

§ 70. Obliczanie objętości brył obrotowych.

Niech będzie dana dowolna bryła i mamy obliczyć jej objętość. Widocznie powstaje tu zagadnienie podobne do tego, którem zajmowaliśmy się na str. 333. Dla określenia miary objętościowej należałoby postąpić zupełnie podobnie — a więc podzielić przestrzeń na małe sześciany — wybrać sześciany wewnętrzne i kresowe itd. itd. Nie będziemy się tem zajmowali, wystarczy nam, że to uczynić można i że w ten sposób dla pewnej kategorji brył, do których należą zwykle zachodzące w technice bryły, otrzymuje się określone liczby, jako miary objętościowe.

Otóż zajmiemy się obliczaniem tych miar dla brył obrotowych.

Zanim jednak omówimy problem obliczania objętości brył obrotowych przy pomocy rachunku całkowego, zastanowimy się nad sposobem powstawania tych brył. Weźmy w tym celu funkcję $f(x)$, ciągłą w przedziale (a, b), oraz załóżmy, że w tym przedziale spełnia warunek $f(x)\geqslant 0$. Niech krzywa $\widehat{AB}$ (rys. 73, str. 211) ma równanie $y=f(x)$. Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna tego rysunku obraca się wraz z krzywą $\widehat{AB}$ dookoła osi x o kąt 360^0. Wówczas każdy punkt tej krzywej zakreśla w przestrzeni koło, którego płaszczyzna jest do osi x prostopadłą; tak np. punkt S krzywej zakreśla koło, a długość tego promienia (S, x_0), równa się rzędnej punktu S; koło takie zowiemy równoleżnikowem; krzywa $\widehat{AB}$ przez swój obrót dookoła osi x opisze pewną powierzchnię, którą nazywamy powierzchnią obrotową. Przetnijmy tę powierzchnię płaszczyzną przechodzącą przez oś x, a otrzymamy jako przecięcie dwie krzywe przystające do krzywej $y=f(x)$; krzywe takie nazwiemy południkami powierzchni obrotowej. Łatwo zrozumieć, że powierzchnia obrotowa jest wyznaczona, jeśli daną jest w przestrzeni oś obrotu i południk.

W związku ze sposobem powstania powierzchni obrotowych nasuwają się zagadnienia:

1) Obliczyć miarę takiej powierzchni i 2) obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią obrotową oraz płaszczyznami dwóch kół równoleżnikowych czyli obliczyć objętość t. zw. bryły obrotowej. Drugiem właśnie zagadnieniem zajmiemy się obecnie i rozwiążemy je przy pomocy całki określonej. Przypuśćmy, że mamy obliczyć objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót krzywej $y=f(x)$ dookoła osi x, bryły ograniczonej powierzchnią obrotową i kołami równoleżnikowemi, których płaszczyzny przechodzą przez punkty: początkowy a i końcowy b przedziału (a, b) zmiennej x; w tym przedziale dana funkcja $y=f(x)$ ma być ciągłą i nieujemną. W tym celu dzielimy przedział (a, b) na dowolne, małe odcinki przez wstawienie punktów podziału: $a<x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<b$; przez każdy z tych punktów poprowadźmy płaszczyzny P_0. $P_1, \ldots$ P_{n-1}, P_n prostopadłe do osi x. Weźmy pod uwagę jeden z tych przedziałów częściowych np. przedział (x_{i-1}, x_i).

Przez M_i, wzgl. m_i oznaczamy maximum, wzgl. minimum funkcji $f(x)$ w przedziale (x_{i-1}, x_i); utwórzmy walec prosty, kołowy, którego podstawy leżą na płaszczyznach P_{i-1} i P_i, środki podstaw niech leżą na osi x, promienie podstaw niech równają się liczbie M_i; wobec tego wysokość walca wynosi $x_i - x_{i-1}$ (będzie to walec „zewnętrzny“). Czytelnikowi pozostawiamy wykonanie rysunku. Zupełnie analogicznie utworzymy walec „wewnętrzny“ którego podstawy będą kołami o promieniu m_i.

Walec zewnętrzny nie będzie mniejszym, zaś wewnętrzny nie będzie większym od części bryły obrotowej, wyciętej przez płaszczyzny P_{i-1}, P_i, której objętość oznaczmy v_i. A więc:

$$(x_i - x_{i-1})\, m_i^2 . \pi \leqslant v_i \leqslant (x_i - x_{i-1}) . M_i^2 . \pi$$

Tak się ma rzecz we wszystkich przedziałach częściowych otrzymamy w ten sposób n nierówności kształtu, jak ostatnia; ich strony środkowe zesumowane dadzą właśnie szukaną miarę objętości całej bryły V. Jest więc: $(x_1 - a) m_1^2 \pi + (x_2 - x_1) m_2^2 \pi + (x_3 - x_2) m_3^2 \pi + \ldots + (b - x_{n-1}) m_n^2 \pi \leqslant V \leqslant (x_1 - a) M_1^2 \pi + (x_2 - x_1) M_2^2 \pi + \ldots + (b - x_{n-1}) M_n^2 \pi$.

Niech długość najdłuższego z przedziałów częściowych dąży do zera. Wówczas, (zob. § 60) ponieważ funkcja $y = f(x)$ jest w przedziale (a, b) ciągłą, więc sumy po lewej i prawej stronie ostatniej nierówności dążą do granicy wspólnej, niezależnej od sposobu rozkładu odcinka (a, b) na przedziały częściowe. Zatem część środkowa V jest równą wspólnej wartości obu granic strony lewej i prawej. Będzie więc: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 . dx$, gdyż wspólną granicą strony lewej i prawej jest właśnie ostatnia całka określona. Zamiast liczyć objętość całej bryły należącej do przedziału (a, b) możemy obliczyć ją tylko do pewnego poprzecznego przekroju, dokonanego przez płaszczyznę prostopadłą do osi x w punkcie $(x, 0)$, gdzie jest $a \leqslant x \leqslant b$.

Wówczas będzie taka objętość funkcją zmiennej x, co wyrazi się w postaci funkcji $V(x) = \pi \int_a^x [f(t)]^2 dt$. Jeżeli będzie $a < x < b$, to można (§ 63) obliczyć pochodną: $\frac{dV}{dx} = \pi (f(x))^2$, skąd otrzymujemy wartość różniczki objętości: $dV(x) = \pi (f(x))^2 . dx$. Prawa strona tej równości jest objętością walca, którego wysokość wynosi dx, a podstawy mają promień równy rzędnej $f(x)$. Tem samem i wzór na objętość V staje się intuicyjnie zrozumiałym i łatwym do zapamiętania.

Przykłady.

1. Linja łańcuchowa $y = \frac{1}{2a} \left(e^{ax} + e^{-ax} \right)$ rozważana od $x = -b$ do $x = b$ (zob. rys. 113) przez obrót dookoła osi x wytwarza powierzchnię obrotową, która wraz z płaszczyznami $x = -b$ i $x = b$ ogranicza bryłę obrotową. Objętość tej bryły wynosi, jak łatwo się przekonać: $V = \int_{-b}^{+b} y^2 dx = \frac{\pi}{4a^3} \left\{ e^{2ab} - e^{-2ab} + 4ab \right\}$.

Czytelnikowi radzimy rozpatrzyć przypadek obrotu naokoło osi y.

2. Objętość kuli. Kulę możemy uważać za powierzchnię obro-

tową, powstałą przez obrót półkola $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ naokoło średnicy (osi x). Objętość będzie równa:

$$v = \pi \int_{-r}^{+r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3} r^3 \pi,$$

zgodnie ze znanym wzorem z elementarnej geometrji.

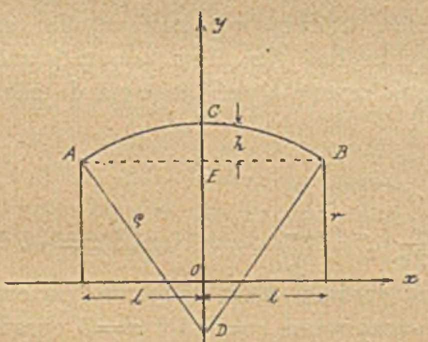
Podobnie czytelnik obliczy objętość stożka obrotowego i walca obrotowego.

3. Czytelnik z łatwością obliczy też objętość bryły, ograniczonej przez elipsojdę obrotową. Elipsojda:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

staje się obrotową, gdy albo $a^2 = b^2$ albo $a^2 = c^2$ albo $b^2 = c^2$. Niech będzie $b^2 = c^2$, wtedy mamy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$; można ją uważać za powstałą przez obrót elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, [leżącej na płaszczyźnie (x, y)], dookoła osi x. Objętość v będzie tedy: $V = \pi \int_{-a}^{a} y^2 dx = \frac{4}{3} ab^2\pi$.

Wzór ten przechodzi we wzór na objętość kuli, gdy $a = b$.



Rys 114

4. *Objętość beczki* (rys. 114). Przyjmijmy, że pobocznica beczki, której objętość mamy obliczyć, powstała wskutek obrotu łuku koła ACB o promieniu ϱ dookoła osi x. Oznaczamy przez $2l$ długość beczki, przez r promień obu den (t. j. tych kół równoleżnikowych, których płaszczyzny przechodzą przez punkty: początkowy A i końcowy B łuku), a przez h wzniesienie punktu C nad cięciwą AB. Łuk ABC jest tak umieszczony na rysunku, że oś y jest jego osią symetrji. Szukana objętość będzie: $V = \pi \int_{-l}^{+l} y^2 dx$. Aby obliczyć y^2, znajdziemy równanie

koła, do którego należy łuk $\widehat{ACB}$, a zatem wyszukamy położenie jego środka D. Punkt D ma odciętą równą zeru, gdyż leży na osi x, jako osi symetryji łuku. Rzędną punktu D oznaczmy przez β. Jest $\overline{DC} = \varrho$ i zarazem $\overline{OE} = r$, $\overline{OD} = \beta$. Otóż $\overline{OE} + \overline{EC} + \overline{CD} + \overline{DO} = 0$ (zob. tw. Chaslesa ze Wstępu) czyli $r + h - \varrho - \beta = 0$, skąd: $\beta = r + h - \varrho$. Równanie koła, do którego należy łuk AB, ma być postaci: $x^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$, gdzie x, y oznaczają współrzędne punktu bieżącego koła. Z ostatniego równania mamy $(y - \beta)^2 = \varrho^2 - x^2$, tedy $y - \beta = \pm\sqrt{\varrho^2 - x^2}$ i $y = \beta \pm \sqrt{\varrho^2 - x^2}$; ale ponieważ rozważany łuk $\widehat{ACB}$ leży nad osią x, więc będzie: $y = \beta + \sqrt{\varrho^2 - x^2}$. Wzór na objętość beczki przyjmie więc postać:

$$V = \pi \int_{-l}^{+l} [\beta^2 + 2\beta\sqrt{\varrho^2 - x^2} + \varrho^2 - x^2]\, dx =$$

$$= \pi[(\beta^2 + \varrho^2) \cdot \int_{-l}^{+l} dx + 2\beta \int_{-l}^{+l} \sqrt{\varrho^2 - x^2}\, dx - \int_{-l}^{+l} x^2 dx].$$

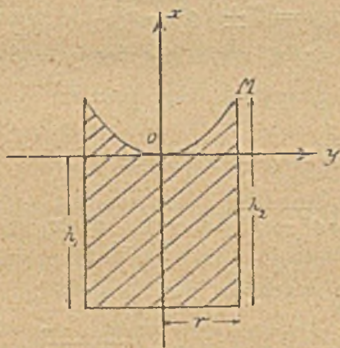
Po obliczeniu całek i uporządkowaniu wyrazów otrzymujemy:

$$V = \pi \left[2(\beta^2 + \varrho^2) \cdot l - \frac{2l^3}{3} + 2\beta\varrho^2 \arcsin\frac{l}{\varrho} + 2\beta l\sqrt{\varrho^2 - l^2} \right].$$

Jeśli łuk $\widehat{ACB}$ jest półkolem, otrzymamy wzór prosty: $V = \pi(2r^2 l + \frac{4}{3} l^3 + \pi r l^2)$, gdyż $h = \varrho = l$, $\beta = r$. Oba wzory pozwalają wprost obliczyć objętość beczki, gdy liczby r, h, ϱ, l są dane przez pomiar. Czytelnikowi radzimy łuk koła AB zastąpić przez łuk elipsy lub paraboli i obliczyć objętość beczki przy takiem założeniu.

5. *Objętość cieczy w naczyniu walcowem, obracającem się.*

Wyobraźmy sobie naczynie kształtu walca kołowego, zawierające do pewnego poziomu jakąkolwiek ciecz. Umieśćmy je centrycznie na wirownicy, obracającej się z pewną stałą prędkością kątową. Oś walca, identyczna z osią obrotu, ma być pionową. Wówczas na ciecz zawartą w naczyniu działać będzie prócz siły ciężkości także siła odśrodkowa i pod wpływem obu tych sił powierzchnia swobodna cieczy przestanie być płaską, natomiast przyjmie postać parabolojdy obrotowej t. zn. powierzchni powstałej przez obrót paraboli na około osi paraboli. Wierzchołek parabolojdy będzie leżał na osi walca (rys. 115). Zadaniem naszem będzie obliczyć objętość tej wirującej cieczy, gdy są dane: promień walca (dna naczynia) r, wzniesienie h_1 wierzchołka parabolojdy ponad dno naczynia i wzniesienie h_2 najwyższych punktów, do których sięga ciecz. Szukana objętość V będzie oczywiście różnicą objętości walca o promieniu podstawy r i wysokości h_2 oraz objętości wspomnianej parabolojdy obrotowej czyli: $V = r^2\pi h_2 - V_0$, gdzie V_0 oznacza objętość, zamkniętą przez parabolojdę i płaszczyznę, na której leżą punkty najwyższego wzniesienia się cieczy. Obecnie obliczymy liczbę V_0. Parabolojda ta, jak powiedzieliśmy, powstała przez obrót paraboli o równaniu $y^2 = 2px$ około osi x, jeśli układ współrzędnych przyjmiemy tak, jak wskazuje rys. 115. Wielkość stałą $2p$ wyliczymy, wiedząc, że współrzędne punktu $M(h_2 - h_1, r)$ muszą spełniać równanie paraboli. Zatem będzie: $r^2 = 2p(h_2 - h_1)$, skąd wynika $2p = \frac{r^2}{h_2 - h_1}$. Wstawiając tę wartość w równanie paraboli, otrzymujemy: $y^2 = \frac{r^2}{h_2 - h_1} . x$.



Rys. 115.

Objętość V_0 będzie w myśl ogólnego wzoru: $V_0 = \pi \int_0^{h_2 - h_1} y^2 dx =$

$$\pi \int_0^{h_2-h_1} \frac{r^2}{h_2 - h_1} x dx = \frac{r^2\pi}{h_2 - h_1} . \int_0^{h_2-h_1} x dx = = \frac{r^2\pi}{h_2 - h_1} \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^{h_2-h_1} =$$

$$= \frac{r^2\pi}{h_2 - h_1} \frac{(h_2 - h_1)^2}{2}, \text{ skąd } V_0 = \tfrac{1}{2} r^2\pi(h_2 - h_1).$$

Zatem objętość V cieczy zawartej w naczyniu będzie:

$$V = r^2\pi h_2 - \frac{1}{2} r^2\pi(h_2 - h_1) = r^2\pi . \frac{h_1 + h_2}{2}.$$

Widzimy więc, że objętość ta równa jest objętości walca o promieniu r, którego wysokością jest średnia arytmetyczna największego (h_2) i najmniejszego (h_1) wzniesienia cieczy w naczyniu ponad dno.

Sposób obliczania objętości bryły obrotowej w obecnym paragrafie przedstawiony można wyrazić (niedokładnie) przez powiedzenie, że rozcinamy bryłę na warstwy, płaszczyznami prostopadłemi do osi obrotu bryły.

Oczywiście objętości nietylko brył obrotowych tak dają się obliczyć. Możemy tego sposobu użyć i dla innych brył, o ile tylko znamy ogólne wzory na miary powierzchniowe płaskich przekrojów brył. Np. obliczmy objętość elipsojdy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, którą przecinajmy płaszczyznami prostopadłemi do osi z przez punkt $(0,0,z)$, gdzie $|z|\leqslant c$; o ile $|z|<c$, na przekrój otrzymuje się elipsę o półosiach: $a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$ dla $|z|=c$ elipsy ściągają się do punktu; na podstawie wzoru ze str. 387 miara powierzchniowa tego przekroju eliptycznego będzie $ab\pi\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$, wskutek czego objętość elipsojdy będzie:

$$V=\int_{-c}^{+c} ab\pi\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{3}abc\pi,$$

co jest uogólnieniem wzoru na objętość kuli. Nie będziemy tej metody uzasadniali, gdyż później wyniknie ona, jako wniosek z ogólniejszych rozważań.

§ 71. Przybliżone obliczanie pól.

Często powstaje zagadnienie następujące: znaleźć pole ograniczone osią odciętych, dwiema do niej prostopadłemi w punktach $(a,0)$ i $(b,0)$, oraz pewną krzywą, dla której jednak zależności funkcyjnej między zmiennemi (x) i (y) bądź to nie znamy wcale, bądź też jest ta zależność zbyt skomplikowaną, tak, że albo całka z niej nie wyraża się przez funkcje elementarne albo całka z niej daje również nieproste wyrażenie. Pierwszy przypadek zachodzi przy t. zw. indikatorach t. j. przyrządach, które notują ruch tłoka maszyny parowej; praca maszyny jest wtedy proporcjonalną do pola, które zakreśla indikator na papierze — chodzi tu więc o obliczenie pola, oczywiście w przybliżeniu.

Czytelnik powinien zdać sobie jasno sprawę z tego, że niemal wszystkie obliczenia liczebne wykonać należy przybliżenie! Dlatego poznanie metod rachunków przybliżonych jest tak ważne.

W obecnym paragrafie omówimy sposoby przybliżonego obliczenia pól płaskich, poczem zajmiemy się jeszcze innemi zagadnieniami.

Załóżmy, że mamy pole narysowane na papierze milimetrowym. Możemy dla jego obliczenia wyrachować ilość milimetrowych oczek wewnętrznych lub ilość milimetrowych oczek wewnętrznych i kresowych. [Fizykalna metoda polega na ważeniu: wycinamy pole możliwie najdokładniej i przy pomocy dokładnej wagi oznaczamy ciężar Q gramów papieru, zajętego polem, potem ważymy papier zajęty przez pole 1 cm² i niech waży on q gramów; wtedy iloraz $Q:q$ daje ilość centymetrów kwadratowych dla danego pola. Ile tu błędów zniekształca wynik, łatwo sobie zdać sprawę: źródła błędu tkwią bowiem w niedokładności wycinania, niejednorodności papieru, ważeniu i dzieleniu (bo dzielenie doprowadzamy do jednego lub dwóch miejsc dziesiętnych)].

Zajmiemy się obecnie metodami matematycznemi przybliżonego obliczenia pól płaskich; wprzód jednak określimy ściśle, co rozumieć będziemy przez *przybliżenie* szukanej liczby P, np. mierzącej dane pole. Przy pomocy jednej z metod, które poniżej poznamy, otrzymamy zamiast liczby P liczbę P', różną od liczby P. W rzadkich przypadkach będziemy mogli naprzód powiedzieć, że jest $P < P'$ lub $P' < P$ (zob. str. 103); najczęściej nie wiemy, która z ostatnich nierówności zachodzi; gdy jest $P' < P$, liczbę P' nazywamy przybliżeniem liczby P przez niedomiar; gdy zaś jest $P < P'$, to liczbę P' zowiemy przybliżeniem liczby P przez nadmiar; gdy zaś nie wiemy, czy jest $P' < P$ czy też $P < P'$, to P' nazywamy przybliżeniem liczby P. W każdym z przypadków nazywamy bezwzględną liczbę $|P - P'|$ (bezwzględnym) błędem; oczywiście błędu zwykle nie znamy i staramy się znaleźć liczbę dodatnią c taką, że $|P - P'| \leqq c$, wtedy liczbę c zowiemy górnym krańcem błędu, zaś liczbę P' przybliżeniem (przybliżeniem przez niedomiar, przybliżeniem przez nadmiar lub krótko przybliżeniem) z dokładnością c lub ze stopniem dokładności c. Np. liczba 3·14 jest przybliżeniem (przez niedomiar) liczby π z dokładnością 0·01, bo jest $|3{\cdot}14 - \pi| < 0{\cdot}01$. Często zdarza się, że liczba c jest naprzód daną t. zn. należy rachunki tak poprowadzić, aby wypadło przybliżenie P' z naprzód daną dokładnością. Liczba $100 \cdot \frac{|P - P'|}{|P|}$ nazywa się błędem procentowym; wtedy powiada się, że błąd wynosi a %; zwykle tej liczby nie znamy, tylko znamy liczbę b dodatnią taką, że jest $100 \cdot \frac{|P - P'|}{|P|} < b$ — wtedy mówimy, że błąd wynosi *mniej* niż b %.

Pragniemy tu nadmienić z naciskiem, że *każda liczba jest każdej innej przybliżeniem;* zatem wyrażenie, że liczba P' jest przybliżeniem liczby P znaczy coś określonego tylko wtedy, gdy znany jest górny kraniec błędu; gdy bowiem jest $|P - P'| \leqq c$, to stąd $-c \leqq P - P' \leqq c$, przeto $P' - c \leqq P \leqq P' + c$ czyli liczba nieznana P leży w przedziale $(P' - c, P' + c)$. Jeżeli zaś nie podano górnego krańca błędu, to przybliżenie jest bez żadnego dla nas znaczenia, tak samo niczego nie wyjaśnia; jak słowa, wielki, mały, drogi, tani, długi, krótki, piękny, brzydki, podobny, niepodobny itp. Tymczasem w potocznej mowie dyskusyj naukowych używa się powszechnie wyrażeń takich „a jest przybliżeniem liczby b“; znaczy to, że milcząco zakładamy, iż znanym jest wymagany w takich razach stopień dokładności i że przybliżenie a posiada ten właśnie stopień dokładności.

Stawiamy sobie zagadnienie następujące: na płaszczyźnie, odniesionej do prostokątnego układu (x, y) dane są dwie proste l_1, l_2 prostopadłe do osi x, przechodzące przez punkty $(a, 0)$, $(b, 0)$ i dana krzywa K o równaniu $y = f(x)$, przyczem $f(x)$ oznacza funkcję ciągłą w przedziale (a, b) o wartościach nieujemnych; dla pola P ograniczonego krzywą K, prostemi l_1, l_2 i osią x mamy podać metodę rachunkową przybliżenia i górnego krańca błędu.

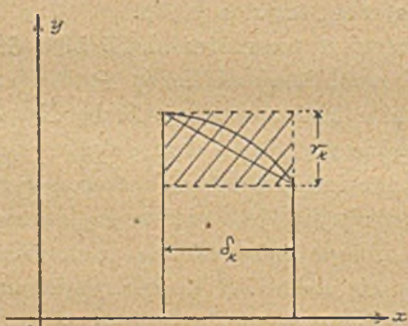
Jedna metoda już jest zawarta w rozważaniach §§ 59 i 60; liczby σ i Σ, tam podane, będą przybliżeniami liczby P, bo jest $\sigma \leqq P \leqq \Sigma$, nadto za górny kraniec można przyjąć liczbę $\Sigma - \sigma$.

Jednakowoż metody tej zwykle się nie używa, gdyż wyszukiwanie maximów i minimów funkcji w przedziałach częściowych może być łatwem wtedy, gdy funkcja $f(x)$ jest nierosnącą lub niemalejącą w przedziale (a, b), w innych przypadkach jest bardzo żmudne. Dlatego używa się innych metod, z których poznamy dwie: metodę trapezową i metodę Simpsona.

Metoda trapezowa przedstawia się w sposób następujący: przedział (a, b) dzielimy na n $(n \geqq 2)$ równych lub nierównych części, w punktach podziału wykreślamy prostopadłe do osi x, przez co dane pole rozkładamy na n pasków; podział ten można tak przeprowadzić, ażeby w każdym z tych pasków krzywa albo stale się wznosiła albo stale opadała, co niemal zawsze w zastosowaniach technicznych da się uskutecznić przez stosowne zagęszczanie punktów podziału i zwiększenie ilości n. (Ogólnie dla krzywej ciągłej tak być nie musi). Następnie pole każdego paska zastępujemy przez pole trapezu, którego wysokością jest długość przedziału częściowego, a długościami boków równoległych są wartości funkcji w punkcie początkowym i końcowym małego przedziału. Dodawszy do siebie pola wszystkich w ten sposób uzyskanych trapezów t_1, t_2, t_3,...., t_n, otrzymamy zamiast szukanej powierzchni P jej przybliżenie P', gdzie $P'=t_1+t_2+t_3+....+t_n$.

Gdy wszystkie małe przedziały są sobie równe, to wspólna wartość ich długości wynosi $\frac{b-a}{n}$; niech $y_0, y_1, y_2,..., y_\varkappa,... y_{n-1}, y_n$ oznaczają wartości funkcji w punktach a, $a+\frac{b-a}{n}$, $a+2.\frac{b-a}{n}$, ..., $a+\varkappa.\frac{b-a}{n}$,...., $a+(n-1)\frac{b-a}{n}$, b [a więc $y_0=f(a)$, $y_1=f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)$, $y_2=f\left(a+2.\frac{b-a}{n}\right)$.....], to otrzymamy $P'=\frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+....+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right]=\frac{b-a}{2n}[y_0+2(y_1+y_2+....+y_{n-1})+y_n]$.

Należy[1]) jeszcze wyznaczyć górny kraniec błędu, który przez to popełniamy czyli znaleźć górny kraniec wielkości $|P-P'|$. Na rys. 116 uwidoczniono jeden z takich przedziałów częściowych np. k-ty. Zrozumieć łatwo, że górnym krańcem błędu, jaki popełniamy, biorąc trapez $t_\varkappa$ zamiast $\varkappa$-go paska, jest pole zacieniowane na rysunku.



Rys. 116.

Można to wykazać ściśle. Jeśli bowiem k-ty pasek należy do przedziału $(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$, to pole paska wynosi $\int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa} f(x)dx$, zaś pole k-go trapezu wynosi $\frac{1}{2}(x_{\varkappa-1}-x_\varkappa)\cdot(y_{\varkappa-1}+y_\varkappa)$. Na mocy § 62 pole paska ma wartość $\delta_\varkappa f(\xi_\varkappa)$, gdzie $\delta_\varkappa=x_\varkappa-x_{\varkappa-1}$, zaś $\xi_\varkappa$ oznacza pewną liczbę o własności $x_{\varkappa-1}<\xi_\varkappa<x_\varkappa$.

---

[1]) Nie potrzebujemy dodawać, że założenie, iż jest $f(x)\geqslant 0$ w przedziale (a, b), można pominąć.

Wskutek tego $|\delta_\varkappa f(\xi_\varkappa)-\frac{1}{2}\delta_\varkappa(y_{\varkappa-1}+y_\varkappa)|$ będzie górnym krańcem błędu, popełnionego przez to, że zamiast pola paska bierzemy pole trapezu. Jeżeli $M_\varkappa, m_\varkappa$ oznaczają maximum, wzgl. minimum funkcji $f(x)$ w przedziale $(x_{\varkappa-1}, x_\varkappa)$, to $|2f(\xi_\varkappa)-(y_{\varkappa-1}+y_\varkappa)|\leqslant 2(M_\varkappa-m_\varkappa)$. Jeżeli więc przyjmiemy, że funkcja $f(x)$ jest w każdym przedziale częściowym stale niemalejącą lub stale nierosnącą, to jest albo $M_\varkappa=y_{\varkappa-1}$, $m_\varkappa=y_\varkappa$ albo $M_\varkappa=y_\varkappa$, $m_\varkappa=y_{\varkappa-1}$, ale w obu przypadkach jest $|M_\varkappa-m_\varkappa|=|y_\varkappa-y_{\varkappa-1}|$, co oznaczymy przez $r_\varkappa$. Przeto będzie $\delta_\varkappa . r_\varkappa$ górnym krańcem k-go błędu. Górny kraniec wszystkich błędów nie będzie większym od sumy górnych krańców poszczególnych błędów czyli $|P-P'|\leqslant\delta_1 r_1+\delta_2 r_2+\ldots+\delta_n r_n=\sum_{i=1}^{n}\delta_i r_i$. Gdyby podział na przedziały częściowe nie spełniał wspomnianego warunku, to mielibyśmy $|P-P'|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\delta_i(M_i-m_i)$. Ponieważ według założenia funkcja $f(x)$ jest ciągłą, więc, stosując do niej tw. ze str. 137 możemy do danej liczby dodatniej ε dobrać taki podział na przedziały częściowe, iż każda z oscylacyj M_i-m_i jest mniejszą od liczby ε; dla takiego podziału będzie tedy $|P-P'|<$ $<\varepsilon.\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\varepsilon(b-a)$; prawą stronę przez odpowiedni wybór liczby ε można uczynić równą każdej liczbie dodatniej. Wykazaliśmy więc tw. następujące: *jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale (a, b), to przybliżenie całki $\int_a^b f(x)\,dx$ można obliczyć powyżej podaną metodą trapezową z każdym stopniem dokładności.*

Wyliczymy jeszcze górny kraniec błędu w specjalnem założeniu, że funkcja $f(x)$ w całym przedziale (a, b) jest stale nieujemną (to założenie poniżej rozszerzymy), stale nierosnącą i że przedział (a, b) podzieliliśmy na przedziały częściowe równej długości. Wtedy jest $y_\varkappa\delta_\varkappa\leqslant\int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa}f(x)\,dx\leqslant y_{\varkappa-1}\delta_\varkappa$, przeto $y_\varkappa\delta_\varkappa-\frac{1}{2}\delta_\varkappa(y_{\varkappa-1}+y_\varkappa)$ $\leqslant\int_{x_{\varkappa+1}}^{x_\varkappa}f(x)\,dx-t_\varkappa\leqslant y_{\varkappa-1}\delta_\varkappa-\frac{1}{2}\delta_\varkappa(y_{\varkappa-1}+y_\varkappa)$; wobec tego mamy: $\left|\int_{x_{\varkappa-1}}^{x_\varkappa}f(x)\,dx-t_\varkappa\right|\leqslant\frac{\delta_\varkappa}{2}(y_{\varkappa-1}-y_\varkappa)$, a stąd $|P-P'|\leqslant\sum_{\varkappa=1}^{n}\frac{\delta_\varkappa}{2}(y_{\varkappa-1}-y_\varkappa)$; a że jest $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_n=\frac{b-a}{n}$, $\sum_{\varkappa=1}^{n}(y_{\varkappa-1}-y_\varkappa)=(y_0-y_1)+$ $+(y_1-y_2)+\ldots+(y_{n-1}-y_n)=y_0-y_n=f(a)-f(b)$, przeto mamy $|P-P'|\leqslant\frac{b-a}{2n}[f(a)-f(b)]$.

Gdyby zaś funkcja $f(x)$ była stale niemalejącą, to otrzymalibyśmy wzór analogiczny; oba łączy następujący:

$$(1) \qquad |P-P'| \leqslant \frac{b-a}{2n} \cdot |f(a)-f(b)|,$$

gdy funkcja $f(x)$ jest stale nierosnącą albo stale niemalejącą w przedziale (a, b), gdy przyjmuje wartości albo stale niedodatnie albo stale nieujemne i gdy przedział (a, b) podzielimy na n równych części. Górny kraniec błędu wypadł obecnie o połowę mniejszy, niż w przypadku ogólnym.

Jest jeszcze druga metoda również zwana trapezową; ona zakłada, że funkcja $f(x)$ ma określoną pochodną w całym przedziale (a, b), który dzieli się na parzystą $(2n)$ ilość części, poczem paski $(2\varkappa-1)$-wszy i $2\varkappa$ ty zastępuje się przez trapez o bokach następujących: oś x, prostopadłe do osi x w punktach $(x_{2\varkappa-2}, 0)$, $(x_{2\varkappa}, 0)$ i styczna do krzywej $y=f(x)$ w punkie $(x_{2\varkappa-1}, f(x_{2\varkappa-1}))$, przyczem oznaczyliśmy $x_0=a$, $x_{2n}=b$; miarą pola tego trapezu jest liczba $(x_{2\varkappa}-x_{2\varkappa-2})\,y_{2\varkappa-1}$, gdyż rzędna $y_{2\varkappa-1}$ mierzy łącznicę środków boków nierównoległych trapezu. Stąd już łatwo czytelnik obliczy liczbę P' i górny kraniec błędu.

Przykład. Pierwszą metodę trapezową zastosujmy do pola $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; ponieważ wartość tego pola wynosi $\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4}$, więc w ten sposób obliczymy przybliżenie liczby π. W tym celu odcinek (0,1) podzielimy na 16 równych części. Ponieważ funkcja podcałkowa jest malejącą i dodatnią w przedziale (0,1) i ponieważ jest $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{2}$, więc na mocy wzoru (1) za górny kraniec błędu można przyjąć liczbę $\frac{1}{2.16}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{64}$.

Rzędne zawiera następujące zestawienie:

$$y_0=1,\ y_1=\frac{256}{257},\ y_2=\frac{64}{65},\ y_3=\frac{256}{265},\ y_4=\frac{64}{68},\ y_5=\frac{256}{281},$$

$$y_6=\frac{64}{73},\ y_7=\frac{256}{305},\ y_8=\frac{64}{80},\ y_9=\frac{256}{337},\ y_{10}=\frac{64}{89},\ y_{11}=\frac{256}{377},$$

$$y_{12}=\frac{64}{100},\ y_{13}=\frac{256}{425},\ y_{14}=\frac{64}{113},\ y_{15}=\frac{256}{481},\ y_{16}=\frac{1}{2}.$$

Suma trapezów będzie:

$$P'=\frac{\delta(y_0+y_1)}{2}+\frac{\delta(y_1+y_2)}{2}+\dots+\frac{\delta(y_{15}+y_{16})}{2}=$$

$$=\frac{\delta}{2}\Big[y_0+y_{16}+2(y_1+y_2+\ldots+y_{15})\Big]=\frac{1}{32}\Big[\frac{3}{2}+2(y_1+y_3+\ldots+y_{15})$$

$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{14})\Big]=\frac{3}{64}+\frac{1}{16}\left(\frac{256}{257}+\ldots+\frac{256}{481}\right)+$$

$$+\frac{1}{16}\left(\frac{64}{65}+\ldots+\frac{64}{113}\right)=\frac{3}{64}+\frac{16}{257}+\ldots+\frac{16}{481}+\frac{4}{65}+\ldots+\frac{4}{113}.$$

Każdy z ułamków wyrachujemy na 4 miejsca dziesiętne np. $\frac{16}{257}=0{\cdot}0622\ldots$ opuszczamy zatem dalsze miejsca i przez to znów popełniamy błąd; otóż piąta cyfra jest 5, jak łatwo czytelnik wyrachuje; odrzucając piąte, szóste itd. miejsce dziesiętne, popełnimy błąd mniejszy od $\frac{6}{10^5}$. Poniżej wypisujemy składniki w ułamkach dziesiętnych cztero cyfrowych i obok górne krańce błędów (w stutysięcznych).

0·0468	8/10⁵ czyli 8 stt.	0·0332	7 stt.
0·0622	6 „	0·0615	4 „
0·0603	8 „	0·0588	3 „
0·0569	4 „	0·0547	10 „
0·0524	6 „	0·0500	0 „
0·0474	8 „	0·0449	5 „
0·0424	5 „	0·0400	0 „
0·0376	5 „	0·0353	10 „
	Razem	0·7844	89 stt.

Będzie tedy $0{\cdot}7844 < P' < 0{\cdot}7844 + 0{\cdot}00089 = 0{\cdot}78529$, zaś $\left|\frac{\pi}{4}-P'\right| \leqq \frac{1}{64}$, tedy $|\pi-4P'| \leqq \frac{1}{16} = 0{\cdot}0625$ czyli $-0{\cdot}0625 < \pi - 4P' < 0{\cdot}0625$; nadto $3{\cdot}1376 < 4P' < 3{\cdot}14116$; przez dodanie tych nierówności otrzymamy $3{\cdot}0751 < \pi < 3{\cdot}20366$, co wykazuje dokładność rachunku w potocznem znaczeniu dokładności. Czytelnik może zastosować tę metodę do następujących przykładów:

$$ln\,2=\int_1^2\frac{dx}{x},\quad ln\,10=\int_1^{10}\frac{dx}{x},\quad \frac{\pi}{6}=\text{arc sin}\,\frac{1}{2}=\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Jeszcze na jeden szczegół zwrócimy uwagę czytelnika.

Liczbę P', będącą sumą pól trapezów, obliczyliśmy na cztery miejsca dziesiętne.

Widoczne, że uwzględnienie większej ilości miejsc dziesiętnych byłoby bezużytecznem, gdyż nie pozwoli większej ilości cyfr liczby π dokładniej wyznaczyć. Pragnęlibyśmy czytelnika przestrzec przed nadmiernem zwiększaniem ilości miejsc dziesiętnych w rachunkach liczebnych; trzeba bowiem sobie zawsze zdać sprawę, do ilu miejsc dziesiętnych należy rachować. Jeżeli wiemy, że np. już pierwsza cyfra dziesiętna danej liczby jest niepewną, to obliczenie dla niej trzeciego, czwartego... miejsca dziesiętnego będzie często bezcelowem; początkujący nie zwykli o tem pamiętać.

Zastanówmy się dla przykładu nad zagadnieniem, które nas zajmuje: na ile części podzielić przedział $(0, 1)$, by metoda trapezowa zastosowana do całki $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ dała liczbę π dokładnie na jedno miejsce dziesiętne? Oznaczając przez n szukaną ilość części równych, na które dzielimy przedział $(0, 1)$, widzimy z łatwością, że w myśl wzoru (1) suma P_0 pól trapezów różni się od liczby $\frac{\pi}{4}$ o mniej niż suma pewnych n trójkątów, które czytelnik z łatwością wyrysuje: będzie $\left|\frac{\pi}{4} - P_0\right| \leqslant \frac{1}{4n}$ czyli $-\frac{1}{4n} \leqslant \frac{\pi}{4} - P_0 \leqslant \frac{1}{4n}$, a mnożąc ostatnią nierówność przez liczbę 4 otrzymujemy $-\frac{1}{n} < \pi - 4P_0 < \frac{1}{n}$, zaś dodając $4P_0$, otrzymujemy $4P_0 - \frac{1}{n} < \pi < 4P_0 + \frac{1}{n}$.

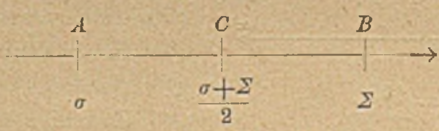
Mamy więc obrać liczbę n tak, aby liczby $4P_0 - \frac{1}{n}$, $4P_0 + \frac{1}{n}$ miały tę samą część całkowitą i to samo pierwsze miejsce dziesiętne. Połóżmy więc $4P_0 + \frac{1}{n} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \ldots$, $4P_0 - \frac{1}{n} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \frac{\beta_3}{10^3} + \ldots$, gdzie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ oznaczają liczby całe nieujemne, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \beta_1, \beta_2, \ldots$ liczby jednocyfrowe. Jest tedy $\frac{2}{n} = \left(4P_0 + \frac{1}{n}\right) - \left(4P_0 - \frac{1}{n}\right) = \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \ldots - \left(\frac{\beta_2}{10^2} + \frac{\beta_3}{10^3} + \ldots,\right)$; tej różnicy nie pomniejszymy, kładąc cyfrę 9 zamiast każdej cyfry α_i i cyfrę 0 zamiast każdej cyfry β_i $(i \geqslant 2)$. Jest więc $\frac{2}{n} \leqslant \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots \geqslant \frac{1}{10}$, skąd wynika, że być winno

$n \geqslant 20$. Jest to warunek konieczny, a nie wystarczający. Przecież nawet wartość $n=100$ może się okazać dla naszego zadania niewystarczającą, gdy druga cyfra dziesiętna iloczynu $4P_0$ jest zerem lub dziewiątką; wtedy bowiem pierwsze miejsce dziesiętne liczb $4P_0+\frac{1}{n}$, $4P_0-\frac{1}{n}$ będą się różniły o jednostkę. Widzimy stąd, że metoda trapezowa zastosowana do pola $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ nie daje dobrych przybliżeń bez długich rachunków.

Do przykładu tego możemy zastosować metodę, o której wspomnieliśmy wyżej, a mianowicie: dzielimy przedział $(0,1)$, jak poprzednio, na 16 równych części i, kreślimy t. zw. prostokąty zewnętrzne i wewnętrzne w sposób, jaki przedstawiliśmy w § 60; oznaczmy sumę pól prostokątów zewnętrznych przez Σ, a wewnętrznych przez σ; wówczas liczba $P=\frac{\pi}{4}$ zawiera się między liczbami Σ i σ czyli jest

$$\sigma<\frac{\pi}{4}<\Sigma, \text{ przyczem } \Sigma=\frac{1}{16}(y_0+y_1+\ldots+y_{15}),\ \sigma=\frac{1}{16}(y_1+\ldots+y_{16}).$$

Średnia arytmetyczna liczb Σ i σ, (która podobnie, jak liczba $\frac{\pi}{4}$, zawiera się między temi dwiema liczbami) będzie przybliżeniem pola $P=\frac{\pi}{4}$, przyczem popełniony błąd będzie mniejszy niż połowa długości odcinka $AB=\Sigma\sigma$, jeśli liczby Σ i σ przedstawimy, jako punkty na osi liczbowej (rys. 117), gdyż obraz liczby π będzie leżał albo na połowie AC albo na połowie CB; jest więc w każdym razie:



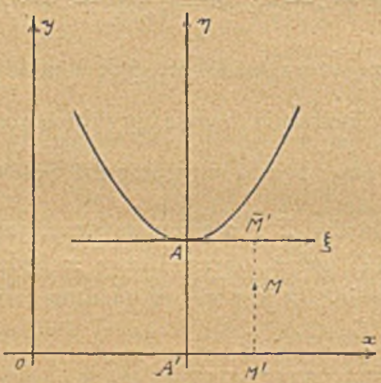
Rys. 117.

$$\left|\frac{\pi}{4}-\frac{\sigma+\Sigma}{2}\right| \leqslant \frac{\Sigma-\sigma}{2}=\frac{1}{32}(y_0-y_{16})=\frac{1}{64}.$$ Podstawiwszy wartości na σ, Σ, obliczone powyżej, otrzymujemy:

$$\frac{\Sigma+\sigma}{2}=\frac{1}{32}(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{15}+y_{16}),$$

a, że liczba $\frac{\Sigma+\sigma}{2}$ jest właśnie szukanem przybliżeniem liczby $\frac{\pi}{4}$;

wynik więc obecny jest z poprzednio otrzymanym identyczny. Zajmiemy się teraz metodą, która prowadzi do t. zw. formuły Simpsona. Zasada jej jest następująca: Mając do obliczenia w przybliżeniu pole płaskie, ograniczone krzywą ciągłą $y=f(x)$ w danym przedziale (a,b), w którym jest $f(x) \geqslant 0$, dzielimy ten przedział na dowolną, lecz parzystą ilość części i wykreślamy w punktach przedziału prostopadłe do osi x, które przecinają w odpowiednich punktach daną krzywą. Przez każde takie trzy sąsiednie punkty krzywej, o ile nie leżą na jednej prostej, da się wykreślić parabola o osi prostopadłej do osi x. Otóż zamiast obliczać powierzchnię daną, obliczamy pola, należące do wykreślonych w ten sposób parabol; innemi słowy: zastępujemy krzywą daną — szeregiem parabol, których łuki tem więcej zbliżać się będą do łuku krzywej $y=f(x)$, im mniejsze będą przedziały częściowe, na jakie odcinek (a,b) podzieliliśmy. Zanim przystąpimy do wyprowadzenia wzoru Simpsona, zajmijmy się naprzód bliżej równaniem paraboli, której oś jest prostopadłą do osi x. Taką parabolę przedstawia nam rys. 118. Wprowadźmy pomocniczy układ (ξ,η); osią ξ niech będzie styczną do paraboli w jej wierzchołku A, osią η niech będzie oś paraboli. Osie ξ i η niech właśnie tworzą układ współrzędnych, skierowanych zgodnie z osiami x wzgl. y; do nich odniesiona parabola będzie posiadała równanie: $\eta=2p\xi^2$... (1), gdzie $p \neq 0$.



Rys. 118.

Zadaniem naszem jest przedstawić tę samą parabolę w odniesieniu do osi współrzędnych x,y; w tym celu mamy znaleźć związek między współrzędnemi ξ i η, oraz x i y dla dowolnego punktu płaszczyzny. Obierzmy więc w tej płaszczyźnie dowolnie punkt $M(x,y)$, wzgl. $M(\xi,\eta)$ i oznaczmy przez M' jego rzut na osi x, przez $\bar{M}'$ zaś rzut na osi ξ. Współrzędne punktu A czyli początku układu (ξ,η) względem układu (x,y) oznaczmy przez α,β, a rzut punktu A na oś x przez A'. Wówczas jest $\overrightarrow{OA'}=\alpha$, $\overrightarrow{A'A}=\beta$, $\overrightarrow{OM'}=x$, $\overrightarrow{M'M}=y$, $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{A\bar{M}'}=\xi$, $\overrightarrow{\bar{M}'M}=\eta$.

Na podstawie twierdzenia Chasles'a (zob. Wstęp) możemy napisać: $\overline{OA'} + \overline{A'M'} + \overline{M'O} = 0$ czyli $\alpha + \xi + (-x) = 0$, skąd otrzymujemy: $\xi = x - \alpha$. Rzutując punkt M na osie y i η otrzymalibyśmy w ten sam sposób związek $\eta = y - \beta$.

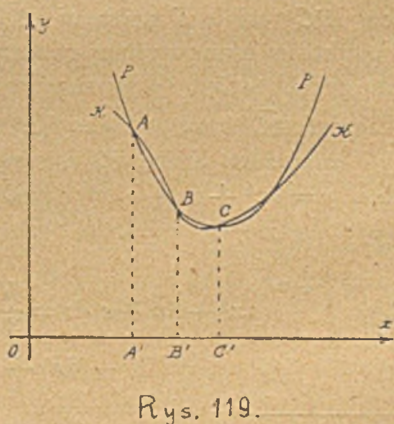
Takie właśnie związki zachodzą między współrzędnemi x, y, ξ, η dowolnego punktu M płaszczyzny, wyznaczonej przez osie obu układów współrzędnych; są one oczywiście ważne i dla wszystkich punktów paraboli. Zatem równanie (1) możemy napisać w postaci $y - \beta = 2p(x - \alpha)^2 \ldots (2)$, skąd po odpowiedniem przekształceniu otrzymujemy: $y = 2px^2 - 4p\alpha x + 2p\alpha^2 + \beta \ldots (3)$. Gdy jest $p > 0$ $(p < 0)$, to parabola mieści się całkowicie w ćwiartce I i II (III i IV) układu osi (ξ, η). Kładąc $2p = a$, $-4p\alpha = b$, $2p\alpha^2 + \beta = c$ (3 bis), otrzymujemy równanie (3) w postaci: $y = ax^2 + bx + c \ldots (4)$.

Naodwrót wykażemy, że równanie (4), gdzie $a \neq 0$, jest równaniem paraboli; rzeczywiście, mając dane liczby a, b, c, przyczem $a \neq 0$, wyznaczymy jednoznacznie na mocy równań (3 bis) liczby

p, α, β, mianowicie $p = \frac{a}{2}$, $\alpha = \frac{-b}{2a}$, $\beta = c - \frac{pb^2}{2a^2}$. Jeśli więc $a \neq 0$,

to równanie (4) przedstawia parabolę, której oś jest prostopadłą do osi odciętych. Jeśli $a > 0$, to parabola zwrócona jest rozwartością swoją zgodnie z osią y, gdy zaś jest $a < 0$, to rozwartość paraboli zwraca się w kierunku ujemnym pół-osi y.

Po takiem przygotowaniu weźmy pod uwagę funkcję $y = f(x)$, ciągłą w przedziale (a, b), przyczem jest stale $f(x) \geqslant 0$; rozważmy jej wykres K w okolicy punktu $A(x_0, f(x_0))$ (rys. 119), gdzie $a \leqslant x_0 < b$. Odłóżmy na osi x odcinki $A^1B^1 = B^1C^1 = h$, gdzie $h > 0$, zresztą dowolną na razie liczbą. Oczywiście ma być $x_0 + 2h \leqslant b$. Otrzymujemy punkty $A^1(x_0, 0)$, $B^1(x_0 + h, 0)$, $C^1(x_0 + 2h, 0)$. Punkty te są rzutami punktów A, B, C krzywej



Rys. 119.

wej K na oś x; położymy dla skrócenia $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0 + h)$, $y_2 = f(x_0 + 2h)$. Obierzmy liczbę h tak, żeby punkty A, B, C nie leżały na linji prostej, co jest możliwe we wypadkach krzywych, któremi technik się zajmuje (poza linją prostą).

Możnaby na to z łatwością znaleźć wystarczający warunek czysto analityczny, ale on zakładałby istnienie pochodnych, kiedy możliwym jest wypadek krzywej empirycznie danej, wykreślonej przez aparat piszący itp., a więc przypadek, kiedy wyrażenie $f(x)$ nie jest analitycznie dane. Przez punkty A, B, C poprowadźmy parabolę P o osi prostopadłej do osi x; okażemy, że ona jest jednoznacznie określoną. W tym celu trzeba udowodnić, że współczynniki a, b, c równania $y = ax^2 + bx + c$ dadzą się jednoznacznie oznaczyć i że $a \neq 0$.

Skoro punkty A, B, C leżą na paraboli P, więc jest:

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c,\quad y_1 = a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c,$$
$$y_2 = a(x_0 + 2h)^2 + b(x_0 + 2h) + c \ldots (4\text{ bis}).$$

Czytelnik z łatwością się przekonywa, że liczby a, b, c można stąd wyznaczyć, ponieważ jest $h \neq 0$. Nadto zważmy, że powinno wypaść $a \neq 0$. Otóż otrzymujemy: $a = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}$; warunek $y_0 - 2y_1 + y_2 = 0$ [1]) wyraża właśnie, że punkty A, B, C leżą na jednej linji prostej i że punkt B jest środkiem odcinka AC wbrew założeniu; jest więc rzeczywiście $a \neq 0$.

Obliczymy teraz pole ograniczone łukiem $\widehat{AC}$ paraboli, odcinkiem A^1C^1 osi x i prostemi AA^1 i CC^1, prostopadłemi do osi x, w punktach końcowych rozważanego przedziału A^1C^1. To pole będzie przybliżeniem pola zawartego między temi samemi prostemi, a łukiem $\widehat{AC}$ krzywej $y = f(x)$. Obliczmy więc to przybliżenie czyli znajdźmy liczbę P_0, mierzącą poprzednio określone pole paraboli $y = ax^2 + bx + c$ w przedziale $(x_0, x_0 + 2h)$. Jak wiadomo, pole to będzie się mierzyło liczbą:

$$P_0 = \int_{x_0}^{x_0+2h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{h}{3}[a(6x_0^2 + 12x_0h + 8h^2) + b(6x_0 + 6h) + 6c] \ldots (5).$$

---

[1]) Ten warunek przez dwukrotne stosowanie tw. średniej wartości daje $f''(\xi) = 0$. Jeżeli więc założymy, że jest $f''(x) \neq 0$ dla $a \leqslant x \leqslant b$, to żadne trzy punkty krzywej nie leżą na prostej.

Dość skomplikowany wieloman w klamrze przedstawimy w postaci znacznie prostszej zapomocą następującego rozumowania: Skoro punkty: $A(x_0, y_0)$, $B(x_0+h, y_1)$, $C(x_0+2h, y_2)$ leżą na paraboli, tedy współrzędne tych punktów spełniają równania (4 bis).

Do pierwszego z równań (4 bis) dodajmy stronami równanie drugie z nich po wymnożeniu przez liczbę 4, a wreszcie dodajmy równanie trzecie. Otrzymamy po odpowiedniem uporządkowaniu:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = a(6x_0^2 + 12x_0h + 8h^2) + b(6x_0 + 6b) + 6c \ldots (6)$$

Rzut oka na równania (5) i (6) wystarcza do spostrzeżenia, że prawa strona równania (6) jest identyczną z wielomianem ujętym w klamrę równości (5). Wobec tego otrzymujemy:

$$P_0 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \ldots (7).$$

Jeśli liczby x_0 i x_0+2h oznaczymy przez λ i μ, natenczas jest: $h = \frac{\mu - \lambda}{2} \ldots (8)$; wskutek tego wzór (7) przybierze postać:

$$P_0 = \frac{\mu - \lambda}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) \ldots (9).$$

Wzór ten, ścisły tylko dla omawianej paraboli, zastosujemy do krzywej $y = f(x)$, aby tą drogą uzyskać przybliżenie pola ograniczonego krzywą K i wiadomemi prostemi. W tym celu dzielimy przedział (a, b) na parzystą ilość np. $2n$ (n liczba naturalna) równych części, przyczem punkt $(a, 0)$ jest początkiem pierwszego, zaś punkt $(b, 0)$ jest końcem $(2n)$-tego przedziału częściowego.

Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{2n-1}$ będą punktami podziału przedziału (a, b) na części, przyczem niech będzie $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-1} < b = x_{2n}$; niech $y_i = f(x_i)$ dla $i = 0, 1, \ldots 2n$. Będą to rzędne punktów krzywej o odciętej x_i. Oznaczmy przez δ podwójną długość przedziałów częściowych, zatem będzie:

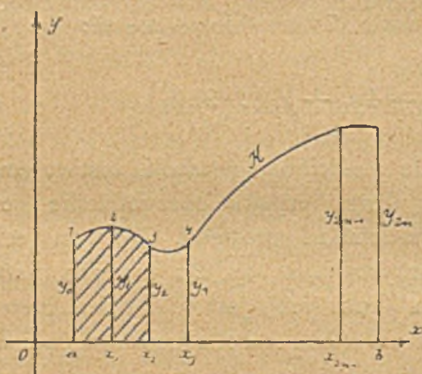
$$\delta = x_2 - a = x_4 - x_2 = \ldots = b - x_{2n-2} \ldots (10).$$

Weźmy pod uwagę trzy punkty (a, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2); będą to punkty 1, 2, 3 na krzywej K z rys. 120; przez nie przeprowadźmy parabolę, o osi prostopadłej do osi x. Pole ograniczone łukiem: $\widehat{123}$ tej paraboli, osią odciętych i prostemi prostopadłemi do osi x w punktach $(a,0)$, $(x_2,0)$, obliczone według wzoru (9) uważamy za przybliżenie pola zakreskowanego na rys. 120. Podobnie poprowadźmy parabole przez punkty 345 itd. Sumę pól parabolicznych pasków uważamy za przybliżenie P' pola $P=\int_a^b f(x)\,dx$.

Będzie więc:

$$P'=\frac{\delta}{6}\Big[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+(y_4+4y_5+y_6)+\dots+$$
$$+(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})\Big]=\frac{\delta}{6}\Big[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+y_5+\dots+y_{2n-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+y_6+\dots+y_{2n-2})\Big]\dots(11).$$

Jest to t. zw. *formuła Simpsona*, będąca arytmetycznym wyrazem omawianej metody. Ze względów mnemotechnicznych godzi



Rys. 120.

się zauważyć, że w wielomianie ujętym w klamrę występują: 1) suma rzędnych krzywej w punktach (a) i (b) t. j. w punkcie początkowym i końcowym przedziału (a,b); 2) poczwórnie wzięta suma rzędnych w punktach końcowych odcinków, oznaczonych numerami nieparzystymi; 3) podwójna suma rzędnych w punktach końcowych przedziałów o numerach parzystych.

Aby formuła Simpsona miała znaczenie określone, należy jeszcze obliczyć górny kraniec błędu, jaki popełniamy, kładąc liczbę P', zamiast liczby P. W tym celu, wracając do oznaczeń użytych we wzorze (9), rozważmy krzywą $y=f(x)$ w przedziale (λ,μ), oraz parabolę $y=ax^2+bx+c$, zbudowaną w sposób poprzednio opisany.

Pole, należące do krzywej K w przedziale (λ,μ) mierzy się całką $\int_\lambda^\mu f(x)\,dx$, którą podzielimy na dwie części $\int_\lambda^\nu f(x)\,dx+$

$+\int_{\nu}^{\mu} f(x)dx$, gdzie oznaczyliśmy $\nu=\frac{\lambda+\mu}{2}$. Pole zaś paraboli w tym przedziale równa się $\frac{\mu-\lambda}{6}(y_0+4y_1+y_2)$. Otóż oznaczmy przez $2h$ długość przedziału (λ, μ). Górny kraniec błędu, popełnionego przez to, że zamiast pierwszego podwójnego paska wzięliśmy drugi podwójny wynosi:

$$\left|\int_{\lambda}^{\mu} f(x)dx-\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)\right|=\left|\int_{\lambda}^{\nu} f(x)dx-\frac{h}{3}(y_0+2y_1)+\right.$$
$$\left.+\int_{\nu}^{\mu} f(x)dx-\frac{h}{3}(2y_1+y_2)\right|\leqslant\left|\int_{\lambda}^{\nu} f(x)dx-\frac{h}{3}(y_0+2y_1)\right|+$$
$$+\left|\int_{\nu}^{\mu} f(x)dx-\frac{h}{3}(2y_1+y_2)\right|.$$

Otóż do całek stosujemy tw. średniej wartości o całkach (§ 62); nadto niech M_1, m_1, wzgl. M_2, m_2 oznaczają maximum i minimum funkcji w pierwszym, wzgl. drugim pasku rozważanej pary pasków; tedy

$$-h(M_1-m_1)=hm_1-hM_1\leqslant\int_{\lambda}^{\nu} f(x)dx-\frac{h}{3}(y_0+2y_1)=$$
$$=h\,.\,f(\xi_1)-\frac{h}{3}(y_0+2y_1)\leqslant hM_1-\frac{h}{3}(m_1+2m_1)=hM_1-hm_1=$$
$$=h(M_1-m_1),\quad -h(M_2-m_2)\leqslant\int_{\nu}^{\mu} f(x)dx-\frac{h}{3}(2y_1+y_2)\leqslant h(M_2-m);$$

więc

$$\left|\int_{\lambda}^{\nu} f(x)dx-\frac{h}{3}(y_0+2y_1)\right|\leqslant h(M_1-m_1),$$
$$\left|\int_{\nu}^{\mu} f(x)dx-\frac{h}{3}(2y_1+y_2)\right|\leqslant h(M_2-m_2).$$

Jeżeli położymy $\omega_1=M_1-m_1$, $\omega_2=M_2-m_2$ (ω_1, ω_2 są oscylacjami funkcji w pierwszym, wzgl. drugim pasku), to otrzymamy:

$$\left|\int_{\lambda}^{\mu} f(x)dx-\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)\right|\leqslant h(\omega_1+\omega_2).$$

Aby teraz obliczyć górny kraniec błędu wzdłuż całego przedziału (a, b), to zważmy, że mamy:

$$\int_a^b f(x)dx-P'=\int_a^{x_2} f(x)dx-\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx-$$

$$-\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+\int_{x_{2n-2}}^{b} f(x)\,dx-\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}),$$

skąd, stosując twierdzenie o bezwzględnej wartości sumy i poprzednią nierówność, otrzymujemy:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-P'\right| \leqslant \left|\int_a^{x_2} f(x)\,dx-\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)\right|+\ldots$$
$$+\left|\int_{x_{2n-2}}^{b} f(x)\,dx-\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})\right| \leqslant$$
$$\leqslant h(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_{2n-1}+\omega_{2n}).$$

Wiadomo nam z § 31, że do każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje liczba $\delta_0>0$ taka, że, gdy jest $0<h<\delta_0$, to oscylacja funkcji $f(x)$ w każdym z przedziałów częściowych, przez nas rozważanych, jest mniejszą od liczby ε. Gdy więc liczbę n obierzemy dość wielką, to $h=\frac{b-a}{2n}<\delta_0$ i wtedy $\omega_1<\varepsilon$, $\omega_2<\varepsilon \ldots \omega_{2n}<\varepsilon$, przeto $\left|\int_a^b f(x)\,dx-P'\right|<2h\,.\,n\,.\,\varepsilon=\varepsilon(b-a)$. Otóż iloczyn $\varepsilon(b-a)$ można uczynić dowolnie małym, co wykazuje, że można znaleźć przybliżenie P' z takim stopniem dokładności, jak tylko tego pragniemy.

Obliczymy jeszcze górny kraniec błędu w inny sposób, zakładając, że funkcja podcałkowa $f(x)$ ma pochodną czwartą, w przedziale (a, b) ograniczoną; istnieje więc liczba dodatnia M_4 taka, że jest $|f^{\mathrm{IV}}(x)|\leqslant M_4$, gdy $a\leqslant x\leqslant b$. G. Peano w swej książce p. t. Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale (1887, str. 202 i nast.) podał górny kraniec błędu przy powyższem założeniu — uprościli odnośne rachunki Mangoldt i De la Vallée Poussin. Rozważmy więc różnicę:

$$R=\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx-\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_0+h)+f(x_0+2h)],$$

dla niej najpierw obliczymy górny kraniec. W tym celu wprowadźmy pomocniczą funkcję:

$$\Phi(u)=\int_{x_0+h-u}^{x_0+h+u} f(x)\,dx-\frac{u}{3}[f(x_0+h-u)+4f(x_0+h)+f(x_0+h+u)],$$

gdzie $0\leqslant u\leqslant h$; stąd widoczne, że jest $\Phi(h)=R$. Ponadto stwierdzamy, że jest: $\int_{x_0+h-u}^{x_0+h+u} f(x)dx=\int_{x_0+h-u}^{x_0+h} f(x)\,dx+\int_{x_0+h}^{x_0+h+u} f(x)\,dx=-\int_{x_0+h}^{x_0+h-u} f(x)\,dx+$

$+\int_{x_0+h}^{x_0+h+u} f(x)\,dx$; ta równość pozwoli nam łatwo wyznaczyć pochodną $\Phi'(u)$. Jest przeto:

$$\Phi'(u) = f(x_0+h-u) + f(x_0+h+u) - \tfrac{1}{3}[f(x_0+h-u) +$$
$$+ 4f(x_0+h) + f(x_0+h+u)] - \frac{u}{3}[-f'(x_0+h-u) + f'(x_0+h+u)],$$
$$\Phi''(u) = -f'(x_0+h-u) + f'(x_0+h+u) - \tfrac{2}{3}[-f'(x_0+h-u) +$$
$$+ f'(x_0+h+u)] - \frac{u}{3}[f''(x_0+h-u) + f''(x_0+h+u)];$$
$$\Phi'''(u) = f''(x_0+h-u) + f''(x_0+h+u) - \tfrac{2}{3}[f''(x_0+h-u) +$$
$$+ f''(x_0+h+u)] - \tfrac{1}{3}[f''(x_0+h-u) + f''(x_0+h+u)] -$$
$$- \frac{u}{3}[-f'''(x_0+h-u) + f'''(x_0+h+u)] =$$
$$- \frac{u}{3}[-f'''(x_0+h-u) + f'''(x_0+h+u)].$$

Stąd widać, że istnieje też czwarta pochodna $\Phi^{IV}(u)$, więc trzecia pochodna $\Phi'''(u)$ jest ciągłą (str. 151).

Ale na mocy tw. średniej wartości jest:

$f'''(x_0+h+u) = f'''(x_0+h) + uf^{IV}(u_1)$, gdzie u_1 jest liczbą pośrednią między liczbą zero, a liczbą u; podobnie $f'''(x_0+h-u) = f'''(x_0+h) - uf^{IV}(u_2)$; wskutek tego jest $\Phi'''(u) = -\frac{u^2}{3}[f^{IV}(u_1) + f^{IV}(u_2)]$; stąd $\Phi'''(u) \leqq \frac{2u^2}{3}.M_4$. Ale jest widocznie $\Phi(0)=0$, $\Phi'(0)=0$, $\Phi''(0)=0$. Stąd $\int_0^u \Phi'''(u)\,du = \Phi''(u) - \Phi''(0) = \Phi''(u)$, więc będzie, jak wykazujemy poniżej, prawdziwą nierówność: $|\Phi''(u)| \leqq \int_0^{|u|} |\Phi'''(u)|\,du = \tfrac{2}{3}M_4 \int_0^{|u|} u^2 du = \tfrac{2}{9}M_4 |u|^3$; podobnie jest $\Phi'(u) = \int_0^u \Phi''(u)\,du$, a stąd $|\Phi'(u)| \leqq \tfrac{2}{9}M_4 \cdot \frac{u^4}{4} = \tfrac{1}{18}M_4 u^4$, $|\Phi(u)| = \left|\int_0^u \Phi'(u)\,du\right| \leqq \tfrac{1}{90}M_4 |u|^5$. Wobec tego jest $R = |\Phi(h)| = \tfrac{1}{90}M_4 h^5$.

Teraz możemy obliczyć górny kraniec błędu dla formuły Simpsona. Jest bowiem $|P - P'| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})\right]\right| = \left|\left\{\int_a^{a+2h} f(x)\,dx -\right.\right.$

$$-\frac{h}{3}[y_0+4y_1+y_2]\Big\}+\Big\{\int_{a+2h}^{a+4h} f(x)dx-\frac{h}{3}[y_2+4y_3+y_4]\Big\}+\ldots$$
$$+\Big\{\int_{b-2h}^{b} f(x)dx-\frac{h}{3}[y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}]\Big\} \leqq \tfrac{1}{90}M_4 \,.\, h^5 \,.\, n=\tfrac{1}{90}M_4 \,.$$
$\frac{(b-a)^5}{2^5 \,.\, n^5} \,.\, n=\frac{(b-a)^5}{2880} \,.\, \frac{M_4}{n^4}$. Jest to rezultat identyczny z rezultatem Peany, a znaleziony sposobem Mangoldta — de la Valleé Poussina.

Wykażmy jeszcze tw. pomocnicze: *jeżeli* $\varphi(u)$ *jest funkcją ciągłą w przedziale* $(-\alpha, \alpha)$, *gdzie* $\alpha \neq 0$, *to jest* $\left|\int_0^\alpha \varphi(u)du\right| \leqq \leqq \int_0^{|\alpha|} |\varphi(u)| du$. *Dowód.* Skoro funkcja $\varphi(u)$ jest ciągłą w przedziale $(-\alpha, \alpha)$, to funkcja $|\varphi(u)|$ jest ciągłą w przedziale $(0, |\alpha|)$, jak czytelnik z łatwością wykaże; tedy całka $\int_0^{|\alpha|} |\varphi(u)| du$ jest określoną liczbą. Załóżmy, że jest $\alpha > 0$; przedział $(0, \alpha)$ podzielmy na n przedziałów częściowych, wstawiając liczby $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha$ i weźmy sumę $S=\varphi(\alpha_1)\,\alpha_1+\varphi(\alpha_2)\,(\alpha_2-\alpha_1)+\ldots+\varphi(\alpha)\,(\alpha-\alpha_{n-1})$, stąd $|S| \leqq |\varphi(\alpha_1)| \,.\, \alpha_1+|\varphi(\alpha_2)| \,.\, (\alpha_2-\alpha_1)+\ldots+|\varphi(\alpha)| \,.\, (\alpha-\alpha_{n-1})$; stosując rozważania § 60, widzimy, że tw. jest słuszne, o ile jest $\alpha > 0$. Niech będzie $\alpha < 0$ i położmy $\alpha=-\beta$, wtedy $\beta > 0$, to $\int_0^\alpha \varphi(u)du=\int_0^{-\beta} \varphi(u)du$; kładąc $u=-v$, mamy $\int_0^\alpha \varphi(u)du=-\int_0^\beta \varphi(-v)dv$, więc $\left|\int_0^\alpha \varphi(u)du\right|=\left|\int_0^\beta \varphi(-v)dv\right| \leqq \leqq \int_0^\beta |\varphi(-v)| dv$, na mocy dopieroco wykazanej nierówności. Ale $|\varphi(-v)|=|\varphi(u)|$, więc tw. udowodnione.

Podobnież i dla metody trapezowej przy założeniu, że funkcja $f(x)$ ma ciągłą drugą pochodną w przedziale (a, b), można podać górny kraniec błędu, obliczony odmiennie, niż podano na str. 407. Można bowiem dla zmiennej x wewnątrz przedziału (x_0, x_0+h) położyć $f(x)=f(x_0)+(x-x_0) \,.\, \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+(x-x_0)(x-x_0-h) \,.\, \frac{f''(\xi)}{2!}$, gdzie jest $x_0 < \xi < x_0+h$, co przyjmiemy bez dowodu.

Dzieląc przedział (a, b) na n równych części, otrzymamy stąd:
$$\left|\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2n}[y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n]\right| \leqq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \,.\, M_2,$$
gdzie M_2 oznacza maximum pochodnej $|f''(x)|$ w przedziale (a, b).

Zastosujmy ten wzór do przykładu przybliżonego obliczenia liczby π przy pomocy funkcji $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Otóż jest $f''(x)=$ $=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$, tedy jest $M_2 \leqslant 6$ w przedziale (0,1). Przeto będzie: $\left|\frac{\pi}{4}-P'\right| \leqslant \frac{1}{12.16^2}.6=\frac{1}{512}$ i stąd $\pi-4P' \leqslant \frac{1}{128} < 0\cdot0079$; wskutek tego otrzymamy $3\cdot1297 < \pi < 3\cdot1455$, skąd widać, że obliczenie nasze daje pierwsze miejsce dziesiętne, jako *pewne*.

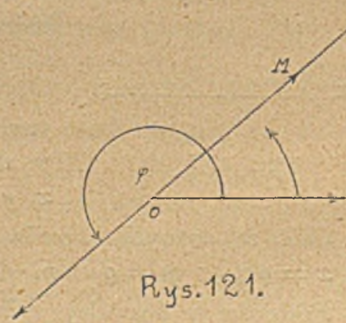
W ten sposób przedstawiają się dwie metody przybliżonego obliczania pól.

Obok tych posługuje się praktyka przyrządami do wyliczenia pola; są to t. zw. integrafy, planimetry etc., których skonstruowano już kilka systemów. Nie będziemy ich opisywali, gdyż wyjaśnienie matematycznych zasad konstrukcji przekracza zakres niniejszego podręcznika.

§ 72. Współrzędne biegunowe.

Dotąd posługiwaliśmy się dla wyznaczenia położenia punktu na płaszczyźnie układem osi Kartezjusza; przy ich pomocy i na mocy całego szeregu umów, każdy punkt płaszczyzny wyznaczał jednoznacznie dwie liczby (odciętą i rzędną) i na odwrót odcięta i rzędna wyznaczały jednoznacznie punkt na płaszczyźnie.

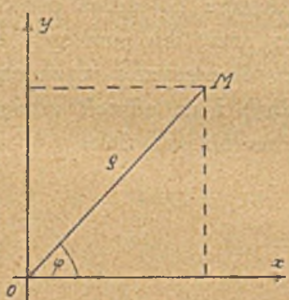
Poznamy inny układ współrzędnych t. zw. biegunowy; znów dwie liczby będą określały punkt na płaszczyźnie. jednakże sprawa jednoznaczności przedstawi się inaczej.



Rys. 121.

Weźmy pod uwagę dowolną płaszczyznę, na niej punkt O, zwany biegunem układu, przez który przeprowadzamy prostą skierowaną, zwaną osią biegunową. Obierzmy dalej na płaszczyźnie pewien kierunek obrotu, jako dodatni i jednostkę długości. Niech będzie na tej płaszczyźnie dany dowolny punkt M, byle różny od bieguna O; przez punkty O i M (rys. 121) prowadzimy prostą, której nadajemy kierunek, czynimy ją więc osią (a), na niej wymierzmy wektor $\overline{OM}$. Otóż w układzie biegunowym będzie punkt M miał następujące współrzędne: jedną będzie liczba mierząca wektor $\overline{OM}$, oznaczmy ją $\varrho = \overline{OM}$ (ona będzie dodatnią lub ujemną); drugą będzie kąt φ, jaki oś (a) zawiera z osią biegunową; kąt φ liczymy jako dodatni w kierunku dodatnim obrotów, jako ujemny w kierunku ujemnym obrotów. Dla punku O współrzędna $\varrho = 0$, kąt φ jest dowolny. Widzimy z powyższego, że do danych liczb ϱ i φ, jako współrzędnych biegunowych, należy jeden punkt płaszczyzny czyli współrzędne ϱ i φ określają jednoznacznie położenie punktu na płaszczyźnie, ale do danego punktu należy nieskończenie wiele liczb φ, a i liczba ϱ nie jest jednoznacznie określoną, gdyż prostą OM można dwojako skierować czyli punkt nie określa jednoznacznie swych współrzędnych biegunowych, w przeciwieństwie do współrzędnych Kartezjusza. Liczbę ϱ zwiemy promieniem wodzącym punktu, jest on określony jako liczba względna; liczbę φ zwiemy amplitudą punktu.

Znajdźmy teraz związek, jaki zachodzi między współrzędnemi prostokątnemi Kartezjuszowskiemi a biegunowemi tego samego punktu. Obierzmy na płaszczyźnie układ prostokątny i biegunowy tak, aby 1) początek układu prostokątnego był zarazem biegunem układu biegunowego, 2) oś x była osią biegunową; 3) dodatnie kierunki obrotów dla obu układów były identyczne. Niech w układzie biegunowym punkt M ma współrzędne ϱ, φ, zaś w układzie prostokątnym współrzędne x, y (rys. 122).



Rys. 122.

Otóż ze znanych wzorów o rzutach wektorów wynika, że jest: $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$.

Równości te pozwalają obliczyć współrzędne prostokątne (x, y), gdy znane są współrzędne biegunowe ϱ, φ. Rozwiążmy teraz zadanie odwrotne: z danych współrzędnych prostokątnych x, y punktu M obliczmy jego współrzędne biegunowe ϱ, φ. Zadanie nasze możemy inaczej tak wysłowić: zmienne ϱ, φ wyrazić przez zmienne x, y.

Otóż otrzymujemy najpierw z ostatnich równości przez podniesienie do drugiej potęgi i dodanie: $x^2+y^2=\varrho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=$ $=\varrho^2$, skąd: $\varrho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Gdy $x=0$, $y=0$, to $\varrho=0$. Gdy zaś $x^2+y^2\neq 0$, to dotychczasowe rozumowanie nie pozwoli nam zadecydować, czy liczba ϱ ma znak dodatni, czy też ujemny, jej znak zaś wpływa na wartości liczby φ.

Wybierzmy na liczbę ϱ wartość np. dodatnią, będzie więc $\varrho=\sqrt{x^2+y^2}$. Wskutek tego otrzymujemy:

$$(1)\qquad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Z tych równań mamy wyznaczyć kąt φ.

Podniósłszy do kwadratu te równości i dodawszy, otrzymujemy: (2) $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$, jak być winno, jeżeli kąt φ ma istnieć.

Aby wykazać, że rzeczywiście istnieje kąt φ, spełniający równania (1), udowodnimy następujące *twierdzenie pomocnicze*: *jeżeli u i v są dowolnemi liczbami rzeczywistemi, byle takiemi, że $u^2+v^2=1$, to istnieje taki kąt φ, że $\cos\varphi=v$, $\sin\varphi=u$, (nawet istnieje nieskończenie wiele takich kątów).*

Dowód: Według założenia u i v oznaczają dowolne liczby rzeczywiste, byle suma ich kwadratów równała się liczbie 1, skąd wynika, żo obydwie liczby u i v, nie są równocześnie zerami, więc co najwyżej jedna jest zerem. Możemy więc rozróżnić 3 przypadki:

$$1)\ v=0,\ u\neq 0;\quad 2)\ v\neq 0,\ u=0;\quad 3)\ v\neq 0,\ u\neq 0.$$

Rozważmy przypadek 1) t. zn. niech będzie: $v=0$, $u\neq 0$; ale jest $u^2+0=1$, więc $u=\pm 1$.

Przeto $\cos\varphi=0$, $\sin\varphi=\pm 1$, ale równość $\cos\varphi=0$ daje $\varphi=(2n+1)\pi/2$, gdzie n oznacza liczbę całą, a że ma być $\sin\varphi=\pm 1$, więc dość wziąć $\varphi=\frac{\pi}{2}$ albo $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, zależnie od tego, czy jest $u=+1$, czy też $u=-1$. W przypadku drugim jest: $u=0$, $v\neq 0$, więc: $v^2=1$, skąd $v=\pm 1$; jest więc $\sin\varphi=0$, co daje $\varphi=n\pi$, gdzie n oznacza liczbę całą, a, że $v=\cos\varphi=\pm 1$, więc dość obrać $\varphi=0$ albo $\varphi=\pi$, zależnie od tego, czy jest $v=+1$, czy też $v=-1$. Przejdźmy teraz do przypadku 3-go, w którym jest $v \neq 0$, $u \neq 0$. Liczba v jest więc albo dodatnią albo ujemną, napiszemy więc $v = |v| \varepsilon$, gdzie $\varepsilon = +1$, gdy liczba v jest dodatnią, gdy zaś liczba v jest ujemną, to $\varepsilon = -1$. Podobnie kładziemy $u = |u| . \eta$, przyczem jest $\eta = +1$, gdy liczba u jest dodatnią, gdy zaś liczba u jest ujemną, to $\eta = -1$. Mamy więc: $\cos\varphi = |v| \varepsilon$, $\sin\varphi = |u| \eta \ldots (A)$; dzieląc te równości stronami przez siebie (co wolno, bo obie strony są różne od zera), otrzymujemy: $\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{|u|}{|v|} . \frac{\eta}{\varepsilon}$; zamiast ułamka $\frac{\eta}{\varepsilon}$ napiszemy ułamek $\frac{\eta\varepsilon}{\varepsilon^2}$, ale $\varepsilon^2 = 1$, więc $\frac{\eta}{\varepsilon} = \eta\varepsilon$. Jest więc: (B) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{|u|}{|v|} . \eta\varepsilon$. Gdy więc liczby u i v są tego samego znaku, to $\eta\varepsilon = +1$, gdy zaś znaku przeciwnego, to $\eta\varepsilon = -1$.—. Mamy teraz znaleźć taki kąt φ_0, aby było: $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{|u|}{|v|} \eta\varepsilon$, nadto ograniczymy ten kąt φ_0 tak, iż $-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Kąt φ_0 będzie dodatnim, gdy $\varepsilon\eta > 0$, w przeciwnym razie będzie ujemnym. Taki kąt φ_0, jak wiemy z § 42, istnieje (a możemy go znaleźć przy pomocy tablic). Wszystkie zaś kąty φ, spełniające równanie (B) otrzymamy, gdy do wyszukanego kąta φ_0 dodamy dowolną wielokrotność okresu t. j. liczby π czyli $\varphi = \varphi_0 + n . \pi$, gdzie n oznacza liczbę całą, dodatnią, ujemną lub zero. Aby ją bliżej określić, zauważmy, że kąt φ ma przecież spełniać równanie (A). Otóż jest: $\cos(\varphi_0 + n\pi) = \cos\varphi_0 . \cos n\pi - \sin\varphi_0 \sin n\pi$; ale jest: $\cos n\pi = (-1)^n$, $\sin n\pi = 0$. Obliczmy jeszcze $\cos\varphi_0$, które jest liczbą dodatnią, bo $-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Otóż jest $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{|u|}{|v|} \varepsilon\eta = \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0}$; podnosząc do kwadratu, otrzymujemy: $\frac{\sin^2\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} = \frac{u^2}{v^2} = \frac{1 - \cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi_0}$. Stąd wynika: $\frac{1}{\cos^2\varphi_0} = \frac{u^2}{v^2} + 1 = \frac{u^2 + v^2}{v^2}$, ale $u^2 + v^2 = 1$; więc $\frac{1}{\cos^2\varphi_0} = \frac{1}{v^2}$, stąd $\cos^2\varphi_0 = v^2$, tedy $\cos\varphi_0 = \sqrt{v^2} = |v|$.

Wobec tego jest $\cos\varphi = \cos\varphi_0 \cos n\pi = (-1)^n . |v|$. Podobnież kolejno otrzymujemy: $\sin\varphi = \sin(\varphi_0 + n\pi) = \sin\varphi_0 . \cos n\pi + \cos\varphi_0 \sin n\pi = (-1)^n . \sin\varphi_0 = (-1)^n \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0} \cos\varphi_0 = (-1)^n \operatorname{tg}\varphi_0 . \cos\varphi_0 = (-1)^n \frac{|u|}{|v|} \varepsilon\eta . |v| = (-1)^n . |u| . \varepsilon\eta$.

Otrzymaliśmy więc: $\cos\varphi = (-1)^n |v|$, $\sin\varphi = (-1)^n |u| \varepsilon . \eta$.

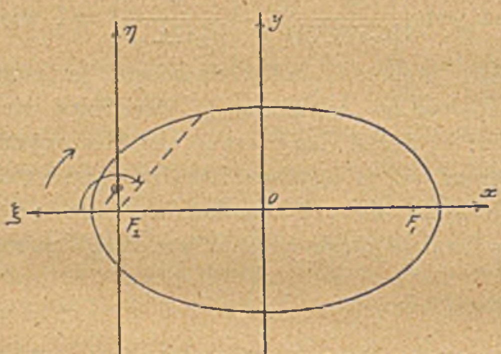
Aby więc równania (A) były spełnione, potrzeba i wystarcza, by było: $(-1)^n |v| = v = |v| \varepsilon$, $(-1)^n |u| \varepsilon\eta = u = |u| \eta$. Ponieważ jest $|u| \neq 0$, $|v| \neq 0$, więc wolno ostatnie równości uprościć, wskutek czego otrzymamy: $(-1)^n = \varepsilon$, $(-1)^n \varepsilon = 1$. Te dwa warunki sprowadzają się do jednego. Otóż liczbę całą n możemy zawsze wybrać tak, by było $(-1)^n = \varepsilon$; gdy $\varepsilon = +1$, to obierzemy $n = 0$, gdy zaś $\varepsilon = -1$, to obierzemy na liczbę n wartość $n = 1$.

Wtedy też jest $(-1)^n . \varepsilon = (-1)^{2n} = 1$.

Wykazaliśmy więc, że istnieje kąt φ, spełniający równania (A). Jeżeli teraz położymy $\varphi = \varphi_0 + 2m\pi$, gdzie m oznacza dowolną liczbę całą, to równania (A) będą również spełnione. Istnieje zatem nieskończenie wiele kątów φ, spełniających równanie (A), gdy jest $u^2 + v^2 = 1$. Wróćmy teraz do wzorów (1): $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; ponieważ jest $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1$, więc na mocy tw. pomocniczego, dopieroco udowodnionego, jesteśmy pewni, że istnieje kąt φ, spełniający równania (1). Doszliśmy więc do następujących wniosków: 1) Jeżeli dany jest punkt płaszczyzny przez swe współrzędne biegunowe, to jego współrzędne prostokątne są określone jednoznacznie. 2) Do danych współrzędnych prostokątnych rozważanego punktu istnieje nieskończenie wiele jego współrzędnych biegunowych.

§. 73. Równanie prostej, elipsy, hyperboli, paraboli i spiralnych w współrzędnych biegunowych.

I. *Równanie prostej.* Dany niech będzie prostokątny układ współrzędnych x, y; układ biegunowy obierzmy, jak w poprzednim paragrafie, wskutek tego będzie $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$. Dowolna prosta albo jest prostopadłą do osi x albo taką nie jest. W ostatnim przypadku jej równanie ma postać $y = ax + b$, gdzie a i b oznaczają stałe, nadto $a = \operatorname{tg}\alpha$, przyczem α oznacza kąt nachylenia prostej do osi x. Będzie stąd: $b = y - ax = \varrho\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha . \varrho\cos\varphi = \frac{\varrho}{\cos\alpha} . [\sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha] = \frac{\varrho}{\cos\alpha}\sin(\varphi - \alpha)$; wzdłuż rozważanej prostej mamy przeto $\varrho\sin[\varphi - \alpha] = b\cos\alpha$. W przypadku zaś, kiedy prosta jest prostopadłą do osi x, równanie jej ma postać $x = c$, gdzie c oznacza stałą. Będzie więc $\varrho\cos\varphi = c$, czemu można nadać postać $\varrho \sin\left[\varphi+\frac{\pi}{2}\right]=c$. W obu więc przypadkach mamy $\varrho . \sin(\varphi-\alpha)=\lambda$, gdzie α, λ oznaczają stałe, zaś ϱ, φ zmienne, współrzędne biegunowe bieżącego punktu. Stwierdzimy naodwrót, że równanie $\varrho \sin(\varphi-\alpha)=\gamma$, przy stałych wartościach α, γ jest równaniem prostej. W tym celu wystarczy jeszcze wykazać, że punkty o współrzędnych (rzeczywistych) ϱ, φ, spełniających równanie $\varrho \sin(\varphi-\alpha)=\lambda$ leżą na prostej. Rzeczywiście, otrzymujemy z ostatniej równości $\varrho[\sin\varphi\cos\alpha-\cos\varphi\sin\alpha]=\lambda$ czyli $y\cos\alpha-$ $-x\sin\alpha=\lambda$; ponieważ oba współczynniki przy zmiennych x, y nie mogą być równocześnie zerami, więc ostatnie równanie jest rzeczywiście równaniem prostej. *W układzie biegunowym jest więc równanie $\varrho \sin(\varphi-\alpha)=\lambda$ równaniem prostej, przyczem ϱ, φ oznaczają współrzędne punktu bieżącego prostej, α, λ zaś stałe.*



Rys. 123.

Czytelnik, rozważając przypadki 1) $\alpha=0$, $\lambda>0$, 2) $\alpha=0$, $\lambda=0$, 3) $\alpha=0$, $\lambda<0$, 4) $0<$ $<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\lambda>0$, itd., itd., niech zda sobie sprawę z położenia prostej w zależności od liczb α i λ. W przypadku np. 4) dla $\varphi=\frac{\pi}{2}$ otrzymujemy $\varrho=\frac{\lambda}{\cos\alpha}>0$, zaś dla $\varphi=\pi$ będzie $\varrho=\frac{\lambda}{\sin\alpha}>0$; dwa punkty prostej $A\left(\varrho>0, \frac{\pi}{2}\right)$ i $B(\varrho>0,\ \varphi=\pi)$ wyznaczą natychmiast położenie prostej w przypadku 4).

II. *Równanie elipsy.* Weźmy pod uwagę elipsę o równaniu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, gdzie $a>b$; jak wiadomo, jej ogniska $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ gdzie $c=\sqrt{a^2-b^2}$, leżą na osi x, symetrycznie względem początku współrzędnych. Za biegun układu weźmy jedno z ognisk, za oś biegunową weźmy oś x, ale skierujmy oś od ogniska ku kierownicy tego ogniska, które obraliśmy za biegun (rys. 123). Za biegun

B obieramy np. F_2, osią biegunową będzie oś x, ale skierowaną zgodnie z ujemną półosią x. Obrót przyjmiemy jako dodatni w kierunku strzałki, uwidocznionej na rys. 123. Wprowadźmy pomocniczy układ prostokątny (ξ, η) o początku w punkcie $B(F_2)$.

Oś ξ idzie wzdłuż osi x i skierowana zgodnie z ujemną osią x, oś η skierujmy zgodnie z osią y. Z łatwością widać, że, jeżeli punkt M ma współrzędne (x, y) i zarazem (ξ, η), to będzie $\xi = -x - c$, $\eta = y$, skąd $x = -\xi - c$, $y = \eta$. Dla punktów elipsy jest $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, więc dla tych punktów będzie $\frac{(\xi + c)^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$. Ponadto $\xi = \varrho\cos\varphi$, $\eta = \varrho\sin\varphi$, więc dla punktów elipsy będzie: $\frac{(\varrho\cos\varphi + c)^2}{a^2} + \frac{\varrho^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1$, skąd: $\varrho^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + 2b^2c\varrho\cos\varphi = a^2b^2 - b^2c^2 = b^2(a^2 - c^2) = b^4$. Otóż jest $a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi \neq 0$ dla każdego kąta φ, gdyż taka suma kwadratów mogłaby być zerem tylko wtedy, gdy $a\sin\varphi = 0$, $b\cos\varphi = 0$ czyli, gdy $\sin\varphi = 0$, $\cos\varphi = 0$, co być nie może, albowiem stale być musi $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

Wobec tego wolno powyższe równanie podzielić przez dwumian $a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi$ i w następstwie rozwiązać równanie na zmienną ϱ. Otrzymujemy:

$$\varrho = -\frac{b^2c\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} \pm \sqrt{\frac{b^4c^2\cos^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^2} + \frac{b^4}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Ale $\sqrt{c^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = \sqrt{(a^2 - b^2)\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} =$

$$= \sqrt{a^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \sqrt{a^2} = |a| = a, \text{ bo } a > 0.$$

Przeto $\varrho = \frac{-b^2c\cos\varphi \pm ab^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = \frac{b^2(-c\cos\varphi \pm a)}{a^2(1 - \cos^2\varphi) + b^2\cos^2\varphi} =$

$= \frac{b^2(-c\cos\varphi \pm a)}{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi} = \frac{b^2(-c\cos\varphi \pm a)}{a^2 - c^2 . \cos^2\varphi}$. Otrzymaliśmy więc dwa rozwiązania: jedno $\varrho = \frac{b^2(a - c\cos\varphi)}{a^2 - c^2\cos^2\varphi}$, drugie $\varrho = -\frac{b^2(a + c\cos\varphi)}{a^2 - c^2\cos^2\varphi}$. Otóż $c = \sqrt{a^2 - b^2} < \sqrt{a^2} = a$, tedy tembardziej $|c\cos\varphi| < a$, więc $a + c\cos\varphi > 0$ i $a - c\cos\varphi > 0$; wskutek tego wolno skracać powyższe ilorazy, otrzymane na promień ϱ. Otrzymujemy tedy: $\varrho = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi}$ albo $\varrho = -\frac{b^2}{a - c\cos\varphi}$. Kładąc [1]) $\frac{b^2}{a} = p$, $\frac{c}{a} = e$,

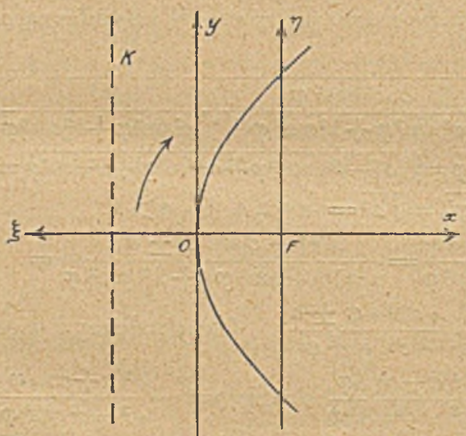
---

[1]) p zowie się parametrem elipsy, c mimośrodem linjowym, e mimośrodem liczbowym elipsy.

otrzymujemy $\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$ albo $\varrho = -\frac{p}{1 - e\cos\varphi}$. Otóż, przyjmując $\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$ i zmieniając kąt φ od liczby 0 do 2π, z łatwością się przekonywamy, że otrzymamy wszystkie punkty elipsy, obieganej w kierunku strzałki rys. 123. Kładąc $\varrho = -\frac{p}{1 - e\cos\varphi}$ i zmieniając kąt φ od liczby 0 do 2π, otrzymamy również wszystkie punkty elipsy, obieganej także w kierunku strzałki, tylko innym jest punkt początkowy obiegu, niż poprzednio.

Zauważmy jeszcze, że jest $0 < e < 1$. Zwykle pisze się równanie elipsy w układzie biegunowym pod postacią: $\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$. Liczba p nosi nazwę parametru elipsy; kładąc: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, otrzymujemy znaczenie geometryczne liczby p.

III. *Równanie paraboli.* Niech będzie daną parabola w układzie prostokątnym przez równanie $y^2 = 2px$ (rys. 124). Ognisko $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ przyjmiemy za biegun układu biegunowego, osią biegunową niech będzie oś x, ale skierowana przeciwnie, bo zgodnie z kierunkiem od ogniska ku kierownicy k; obrót dodatni przyjmiemy, jak na rys. 124. Dla pomocy wprowadźmy układ prostokątny ξ, η, jak na rysunku. Będzie więc $x = -\xi + \frac{p}{2} = -\varrho\cos\varphi + \frac{p}{2}$, $y = \eta = \varrho\sin\varphi$. Tedy dla



Rys. 124.

punktów paraboli będzie: $\varrho^2\sin^2\varphi = 2p\left(-\varrho\cos\varphi + \frac{p}{2}\right)$, stąd otrzymujemy $\varrho^2\sin^2\varphi + 2p\varrho\cos\varphi = p^2$.

Załóżmy, że jest $\sin\varphi \neq 0$, wtedy będzie $\varrho = -\frac{p\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \pm$

$\pm\sqrt{\frac{p^2\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi}+\frac{p^2}{\sin^2\varphi}}$ czyli $\varrho=\frac{-p\cos\varphi\pm p}{\sin^2\varphi}=\frac{-p\cos\varphi\pm p}{1-\cos^2\varphi}$.

Albo tedy $\varrho=\frac{p(1-\cos\varphi)}{1-\cos^2\varphi}$ albo $\varrho=-\frac{p(1+\cos\varphi)}{1-\cos^2\varphi}$. Ponieważ założyliśmy, że $\sin\varphi\neq 0$, a więc $\cos\varphi\neq 1$, więc po uproszczeniu będzie albo $\varrho=\frac{p}{1+\cos\varphi}$ albo $\varrho=-\frac{p}{1-\cos\varphi}$.

Załóżmy teraz $\sin\varphi=0$, tedy jest $\varphi=n\pi$, gdzie n oznacza liczbę całą. Jest wtedy $\cos(n\pi)=(-1)^n$ i równanie na promień ϱ przyjmie kształt $2p.\varrho.(-1)^n=p^2$, skąd $\varrho=(-1)^n.\frac{p}{2}$, co jak widać daje stale (dla *każdej* wartości całej n) wierzchołek paraboli; ten też punkt otrzymamy, kładąc $\varphi=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ we wzorze $\varrho=\frac{p}{1+\cos\varphi}$ lub kładąc $\varphi=\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ we wzorze $\varrho=-\frac{p}{1-\cos\varphi}$. Z łatwością w dalszym ciągu czytelnik się przekona, że równanie $\varrho=\frac{p}{1+\cos\varphi}$ daje wszystkie punkty paraboli, jak i równanie $\varrho=-\frac{p}{1-\cos\varphi}$.

Wygodniej będzie pisać równanie paraboli w postaci: $\varrho=\frac{p}{1+\cos\varphi}$. Porównywując je z równaniem elipsy, widzimy, że dość położyć $e=1$ w równaniu elipsy, by otrzymać równanie paraboli.

Uwaga 1. Naśladując powyższe rozumowanie, znajdzie czytelnik bez wielkiego trudu równanie hyperboli; będzie ono identycznem z równaniem elipsy, liczba e będzie jednakowoż dla hyperboli większa od jedności.

Równanie koła, elipsy, paraboli i hyperboli mają przeto w układzie biegunowym tę samą postać: $\varrho=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$; dla koła jest $e=0$, dla elipsy $0<e<1$, dla paraboli $e=1$, dla hyperboli $e>1$.

2. Czytelnik może dla ćwiczenia wyszukać równanie elipsy (hyperboli, paraboli) w współrzędnych biegunowych na innej drodze, wychodząc z definicji tych krzywych, jednakowoż droga ta jest dłuższą, bo dopuściliśmy wartości ujemne na promień wodzący ϱ.

IV. *Spiralna Archimedesa.* Przez spiralną Archimedesa rozumiemy miejsce geometryczne punktu M, poruszającego się ruchem jednostajnym po prostej (l), która obraca się w stałej płaszczyźnie około punktu O prostej l ze stałą prędkością kątową ω. Wyprowadzimy równanie spiralnej w układzie biegunowym. W tym celu biegun układu umieśćmy w punkcie O; za chwilę początkową $(t=0)$ przyjmiemy chwilę, kiedy punkt M znajdzie się w punkcie O; za oś biegunową przyjmiemy położenie prostej (l) w chwili początkowej $t=0$ i skierujemy ją zgodnie z kierunkiem ruchu punktu M na prostej l, przez co prędkość ruchu punktu M po prostej (l) ma wartość dodatnią. Obrót przyjmujemy jako dodatni w kierunku obrotu prostej (l), wskutek czego $\omega > 0$. Ponieważ prędkość kątowa obrotu jest stałą, więc współrzędna biegunowa φ, zwana amplitudą, dla punktu M będzie liniową funkcją czasu t. zn. będzie $\varphi = c_1 t + c_2$ (str. 260 przykład 4), przyczem c_1, c_2 są stałe i $c_1 = \frac{d\varphi}{dt}$, a więc c_1 jest prędkością kątową ω obrotu. Stała c_2 zależy od wyboru układu.

Ponieważ prosta l ma się schodzić z osią biegunową w chwili $t=0$, więc: dla $t=0$ ma być $\varphi=0$, co daje $c_2=0$; jest więc $\varphi=\omega . t$. Odległość punktu od początku układu czyli promień wodzący ϱ jest w kierunku ruchu dodatnim. Prędkość punktu wzdłuż prostej (l) jest stałą i równa się $\frac{d\varrho}{dt}$, tedy $\frac{d\varrho}{dt}=c$, przyczem c oznacza stałą; stąd $\varrho = ct + d$. Dla uproszczenia założyliśmy, że w chwili początkowej $t=0$ punkt znajduje się w biegunie układu, tedy dla $t=0$ jest $\varrho=0$, a więc i $d=0$ przeto jest (1) $\varrho=ct$. Z równania $\varphi=\omega t$ obliczmy czas t i wstawmy w równanie (1), to otrzymamy: $\varrho = c . \frac{\varphi}{\omega}$; połóżmy $\frac{c}{\omega}=a$ przeto: $\varrho=a\varphi$, gdzie $a>0$; jest to równanie spiralnej Archimedesa w najprostszej formie, z którego widzimy, że promień wodzący jest proporcjonalny do amplitudy φ. Czytelnik z łatwością wykona rysunek tej krzywej, przyjmując liczebną wartość na stałą a.

Zajmijmy się jeszcze ruchem punktu, którego torem jest właśnie spiralna Archimedesa. Niech punkt M leży na spiralnej w punkcie (ϱ, φ), gdzie $\varrho=ct$, $\varphi=\omega t$. Punkt M ma dwie składowe prędkości; jedną w kierunku promienia wodzącego $\frac{d\varrho}{dt}=c$; drugą [1])

---

[1]) O rozkładzie prędkości będzie mowa w następnym paragrafie.

w kierunku prostopadłym do promienia ϱ i mianowicie: ponieważ $\varrho\varphi$ wynosiłby łuk przy stałej liczbie ϱ, więc prędkość będzie wynosiła $\varrho\frac{d\varphi}{dt} = \varrho\omega$; narysujmy więc wektor $\overrightarrow{MN}$ na promieniu ϱ tak, iż $\overrightarrow{MN} = c$, niech wektor $\overrightarrow{MP}$ będzie prostopadłym do promienia ϱ i niech długość jego wynosi $\varrho\omega$, nadto niech P ma amplitudę większą (nie mniejszą) od liczby φ. Znajdźmy teraz wektor wypadkowy z wektorów $\overrightarrow{MN}$ i $\overrightarrow{MP}$, będzie to wektor prędkości wypadkowej. Ale wiadomo, że wektor prędkości wypadkowej ma kierunek stycznej do toru; temsamem podaliśmy konstrukcję stycznej do spiralnej Archimedesa; zawdzięczamy ją francuskiemu matematykowi Giles Personnier'owi, zwanemu zwykle Robervalem (1602 – 1675).

V. *Spiralna hiperboliczna.*

Gdy promień ϱ jest odwrotnie proporcjonalny do amplitudy φ otrzymamy krzywą, zwaną spiralną hiperboliczną, która więc będzie określona równaniem $\varrho = \frac{a}{\varphi}$, gdzie jest $a \neq 0$.

Biegun układu nie należy do krzywej, ale spiralna, okrążając go nieskończenie wiele razy, zbliża się do niego nieograniczenie.

VI. *Spiralna logarytmiczna.*

Spiralna logarytmiczna jest określona równaniem $\varrho = a . e^{b\varphi}$, gdzie a i b są to liczby stałe, różne od zera, e jest zasadą logarytmów naturalnych. Niech będzie $a > 0$, $b > 0$. Dla $\varphi = 0$, jest $\varrho = a$; gdy amplituda φ rośnie nieograniczenie, to promień ϱ rośnie też nieograniczenie; gdy [1]) zaś $\varphi \rightarrow -\infty$ to ϱ zdąża do zera; nadto zauważymy, że, gdy kąt φ rośnie według postępu arytmetycznego, to promień ϱ rośnie według postępu geometrycznego.

Załóżmy bowiem, że amplituda φ przyjmuje kolejno wartości φ_0, $\varphi_0 + \varphi_1$, $\varphi_0 + 2\varphi_1, \dots$ $\varphi_0 + n\varphi_1 \dots$; tym amplitudom odpowiadają następujące wartości na promień wodzący $ae^{b\varphi_0}$; $ae^{b\varphi_0 + b\varphi_1} = ae^{b\varphi_0} . e^{b\varphi_1}$; $ae^{b(\varphi_0 + 2\varphi_1)} = ae^{b\varphi_0} . e^{2b\varphi_1}, \dots$; widzimy tedy rzeczywiście, że, gdy amplituda przyrasta według wyrazów postępu arytmetycznego, to promień wodzący wzrasta według wyrazów postępu geometrycznego.

Jeżelibyśmy chcieli podać konstrukcję stycznej do tej spiralnej według metody Robervala, to należałoby określić ruch, dla którego torem będzie spiralna. W tym celu kładziemy $\varphi = t$,

---

[1]) Zob. str. 380.

$\varrho = ae^{bt}$; znów określimy dwie składowe prędkości i ich wektory, poczem już łatwo znaleźć wektor prędkości wypadkowej i kierunek stycznej i wtedy się okaże, że styczna tworzy z kierunkiem promienia wodzącego stały kąt, co można także tak wyrazić: spiralna logarytmiczna przecina proste, wychodzące z bieguna układu, pod stałym kątem.

§ 74. O krzywych, przedstawionych parametrycznie.

Dotychczas była mowa zwykle o krzywych postaci $y = f(x)$. Miały one tę własność, że prosta prostopadła do osi x trafiała krzywą $y = f(x)$ conajwyżej w jednym punkcie. Wskutek tego tak nieskomplikowana krzywa, jak koło (lub elipsa) *nie* dawała się przedstawić cała przy pomocy *jednej* funkcji. Widoczne, że takie określenie krzywej jest niewygodnem i obecnie rozpatrzymy inny sposób określenia krzywej t. zw. parametryczny sposób jej przedstawienia. By rzecz wyjaśnić, zwrócimy się do § 73, w którym rozważaliśmy krzywe o równaniu w układzie biegunowym postaci $\varrho = f(\varphi)$ t. zn. promień wodzący ϱ jest funkcją amplitudy φ. Jeżeli punkt P takiej krzywej ma współrzędne x, y w układzie prostokątnym o takiem położeniu, że jest $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, to współrzędne te będą dla punktów krzywej funkcjami amplitudy φ, będzie bowiem $x = f(\varphi)\,.\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\,.\sin\varphi$.

Będzie tedy krótko $x = F(\varphi)$, $y = G(\varphi)$, gdzie $F(\varphi)$, $G(\varphi)$ oznaczają funkcje amplitudy φ.

Kładąc $t = \varphi$, otrzymamy równanie krzywej w postaci (1) $x = F(t)$, $y = G(t)$. Zmienną t nazwiemy parametrem, a równania (1) równaniami parametrycznemi krzywej. Parametr (t) może mieć znaczenie geometryczne, może być amplitudą, może oznaczać inną wielkość geometryczną, może przedstawiać jakąś wielkość fizyczną (czas) itd.

Dla przykładu rozważmy kilka krzywych.

Przykład I. Równanie koła środkowego $x^2 + y^2 = r^2$ daje $\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$. Równanie naprowadza na pamięć związek trygonometryczny $\sin^2\tau + \cos^2\tau = 1$; połóżmy więc $\frac{x}{r} = \cos\tau$, $\frac{y}{r} = \sin\tau$, a otrzymamy równanie koła *całego* przedstawionego pod postacią $x = r\cos\tau$, $y = r\sin\tau$; przyjmując wartości na τ z przedziału $(0, 2\pi)$, otrzymamy każdy punkt rozważanego koła. Na mocy bowiem tw. pomocniczego ze str. 423 dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y, spełniających związek $x^2+y^2=r^2$, można dobrać kąt τ (i to nieskończenie wiele takich kątów) tak, iż jest $\cos\tau=x:r$ i zarazem $\sin\tau=y:r$; że jeden z nich będzie w przedziale $(0, 2\pi)$, to widoczne z dowodu tw. pomocniczego. Przeto związki $x=r\cos\tau$, $y=r\sin\tau$ zowiemy parametrycznemi równaniami koła środkowego o promieniu r. Parametr τ ma tu znaczenie geometryczne, które czytelnik z łatwością oznaczy.

Gdy koło ma środek w punkcie (α, β) i promień r, to jego równania parametryczne będą $x=\alpha+r\cos\tau$, $y=\beta+r\sin\tau$.

Weźmy pod uwagę punkt, poruszający się po kole środkowem o promieniu r ze stałą prędkością v; wskutek tego w t jednostkach czasu opisze punkt łuk $l=v.t$, a że $l=r\tau$, gdzie τ oznacza miarę kąta środkowego, więc $\tau=vt:r$, wskutek tego $x=r\cos\left(\frac{vt}{r}+a\right)$, $y=r\sin\left(\frac{vt}{r}+b\right)$; jeżeli przyjmiemy, że w chwili początkowej punkt zajmuje położenie $(r, 0)$, to można przyjąć $a=0$, $b=0$ i wtedy skończone równania ruchu są: $x=r\cos\left(\frac{vt}{r}\right)$, $y=r\sin\left(\frac{vt}{r}\right)$ (zob. str. 155). Z tego widać, że rzut (cień) punktu na oś x (czy oś y) wykonuje ruch drgający o amplitudzie r i okresie $T=2\pi r:v$. Prędkości składowe ruchu po kole są $\frac{dx}{dt}=-v\sin\left(\frac{vt}{r}\right)$, $\frac{dy}{dt}=v\cos\left(\frac{vt}{r}\right)$; stąd $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=v^2$ czyli otrzymaliśmy kwadrat prędkości wypadkowej, która ze założenia jest stałą. Zauważmy, że dla ruchu tego istnieje przyspieszenie różne od zera, prędkość ma wartość bezwzględną stałą, ale k i e r u n e k zmienny. Rzeczywiście dla składowych przyspieszeń otrzymujemy $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{v^2}{r}\cos\left(\frac{vt}{r}\right)$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{v^2}{r}\sin\left(\frac{vt}{r}\right)$; stąd wypadkowe (całkowite) przyspieszenie: $\gamma=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=$ $=\frac{v^2}{r}$; przyspieszenie to jest skierowane ku środkowi koła, a więc normalne do toru. Składowe przyspieszenie w kierunku stycznej do koła jest więc zerem. Wektor prędkości wypadkowej czyli wektor, przedstawiający prędkość wypadkowej; rysujemy na stycznej w kierunku ruchu, licząc od punktu styczności.

Przykład II. Postępując podobnie dla elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. kładziemy $x=a\cos u$, $y=b\sin u$; parametr u ma znaczenie geometryczne, wyjaśnione na rys. 108 (str. 385). Oznaczmy przez M dowolny punkt elipsy, byle nie leżący na osi x; jeżeli F_1, F_2 oznaczają ogniska elipsy, to MF_1F_2 jest trójkątem; wykażemy, że *normalna do elipsy w punkcie M połowi kąt trójkąta MF_1F_2 przy M.* Równanie normalnej ma postać $X-x+y'(Y-y)=0$; by obliczyć y', zauważmy, że jest $y=\varepsilon b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, gdzie $\varepsilon=\pm 1$, przyczem $\varepsilon=+1$, gdy jest $0\leqslant u\leqslant\pi$, zaś $\varepsilon=-1$, gdy $\pi\leqslant u\leqslant 2\pi$. Stąd mamy $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\varepsilon b}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=-\frac{\varepsilon b}{a^2}\cdot\frac{a\cos u}{|\sin u|}=-\frac{\varepsilon b}{a}\cdot\frac{\cos u}{|\sin u|}$.

Ale $\varepsilon\sin u>0$, więc $\sin u=\varepsilon|\sin u|$, przeto $y'=-\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos u}{\sin u}$; punkty $u=0$, $u=\pi$, $u=2\pi$ zostały powyżej wykluczone. Tedy równanie normalnej ma postać $a\sin u(X-a\cos u)-b\cos u(Y-b\sin u)=0$. Wyszukajmy punkt przecięcia normalnej z osią x, który to punkt oznaczmy przez D, a jego odciętą przez X_0; rzędna $Y=0$, więc $X_0=\frac{a^2-b^2}{a}\cos u$, gdy $\sin u\neq 0$, co przy naszych założeniach jest spełnione. Aby tedy wykazać, że prosta DM (normalna) połowi kąt przy M, dość wykazać, że 1) punkt D leży wewnątrz odcinka F_1F_2 i 2) że zachodzi proporcja $F_2D:DF_1=MF_2:MF_1$, jak to wiadomo z planimetrji. Otóż, jeżeli punkt F_2 ma odciętą $-\sqrt{a^2-b^2}$, punkt F_1 odciętą $+\sqrt{a^2-b^2}$, to $\overline{F_2D}=X_0+\sqrt{a^2-b^2}$, $\overline{DF_1}=\sqrt{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a}\cos u$. Wobec tego jest $\overline{F_2D}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}(\sqrt{a^2-b^2}\cos u+a)$
$\overline{DF_1}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}(a-\sqrt{a^2-b^2}\cos u)$; ponieważ wartość $u=\pi$ jest wykluczoną, więc (nie minimum, ale) dolny kres liczb $\overline{F_2D}$ będzie $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}(a-\sqrt{a^2-b^2})>0$, tedy stale $\overline{F_2D}>0$; podobnie dolny kres liczb $\overline{DF_1}$ jest równy $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}(a-\sqrt{a^2-b^2})>0$, więc stale $\overline{DF_1}>0$;

to wykazuje, że punkt D leży wewnątrz odcinka F_1F_2. Nadto $MF_1 =$ $= \sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2} = |a-\sqrt{a^2-b^2}\cos u| = a-\sqrt{a^2-b^2}\cos u$, $MF_2 = a+\sqrt{a^2-b^2}\cos u$. Stąd wynika, że rzeczywiście jest F_2D: $DF_1 = MF_2 : MF_1$ c. b. d. u.

Przykład III. Podobnie, jak koło, można też hyperbolę równoboczną przedstawić parametrycznie. Niech będzie dana hyperbola równoboczna: $x^2-y^2=a^2$. Połóżmy $x+y=au$, gdzie u oznacza pomocniczą zmienną. Będzie więc $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=au$ $(x-y)=a^2$, skąd $u\neq 0$, $x-y=\frac{a}{u}$; będzie tedy $x=\frac{1}{2}[x+y+$ $+(x-y)]=\frac{a}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)$, $y=\frac{1}{2}[x+y-(x-y)]=\frac{a}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)$.

Zauważmy, że liczba u nie jest stałego znaku; gdy $u>0$, to $x>0$, gdy zaś $u<0$, to także $x<0$ (zakłada się bowiem, że $a>0$). Połóżmy tedy $u=\varepsilon e^t$, gdzie $\varepsilon=\pm 1$ i $\varepsilon x>0$. Wtedy jest (1): $x=\frac{\varepsilon a}{2}(e^t+e^{-t})$, $y=\frac{\varepsilon a}{2}(e^t-e^{-t})$. Z łatwością stwierdzamy, że wtedy jest $x^2-y^2=a^2$, nadto do każdej pary liczb (x, y) o własności $x^2-y^2=a^2$ można dobrać liczbę $\varepsilon=\pm 1$ i liczbę t tak, iżby były równości (1) spełnione, a więc równości (1) dają parametryczne równania hyperboli. Funkcje $\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$, $\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$ otrzymały specjalną nazwę: pierwszą zowie się cosinusem (dostawą) hyperbolicznym, drugą sinusem (wstawą) hyperbolicznym, w znakach:

$$\operatorname{Cosh} t = \tfrac{1}{2}(e^t+e^{-t}), \quad \operatorname{Sinh} t = \tfrac{1}{2}(e^t-e^{-t}).$$

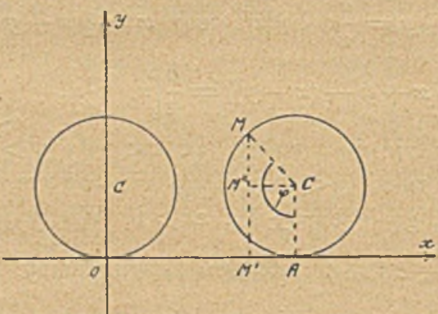
Stąd $\operatorname{Cosh}^2 t-\operatorname{Sinh}^2 t=1$. Dla pochodnych otrzymuje się:

$$\frac{d}{dt}[\operatorname{Cosh} t]=\operatorname{Sinh} t, \quad \frac{d}{dt}[\operatorname{Sinh} t]=\operatorname{Cosh} t.$$

Analogja więc funkcyj hyperbolicznych do funkcyj trygonometrycznych jest znaczną. Jest także $\operatorname{Cosh}(\alpha+\beta)=\operatorname{Cosh}\alpha\operatorname{Cosh}\beta$ $+\operatorname{Sinh}\alpha\operatorname{Sinh}\beta$; podobnie znajdzie czytelnik teorem dodawania dla funkcji $\operatorname{Sinh}(\alpha+\beta)$. Przez $\operatorname{Tgh} t$ rozumie się iloraz dzielenia $\operatorname{Sinh} t : \operatorname{Cosh} t$, $\operatorname{Ctgh} t = 1 : \operatorname{Tgh} t$. Radzimy czytelnikowi wykonać wykresy tych funkcji i określić dla nich funkcje odwrotne (zob. str. 382). (Parametryczne równania dowolnej hyperboli zob. w § 86).

Przykład IV. Rozważając na str. 259 parabolę, jako tor punktu przy rzucie skośnym, otrzymaliśmy parametryczne równanie paraboli (str. 259, wzory 5). Zauważmy, że równanie $y = f(x)$ można natychmiast napisać we formie parametrycznej $x = t$, $y = f(t)$; przeto krzywe, poprzednio rozważane są tylko szczególnym przypadkiem obecnych.

Przykład V. Cyklojda. Na płaszczyźnie (x, y) dane jest koło o promieniu R, którego środek C leży na dodatniej półosi y, przyczem koło to jest styczne do osi x (rys. 125). Niech to koło toczy się po osi x bez ślizgania w kierunku osi x. Zbadajmy tor punktu koła, który w położeniu początkowem był punktem styczności koła z osią x. Promień styczności początkowej zatacza kąt, który oznaczmy przez φ. Początkowy punkt styczności zajmie położenie M o współrzędnych (x, y). Jeżeli koło się toczy bez ślizgania, to droga OA równa się drodze punktu M po kole czyli $OA = R . \varphi$. Tedy jest $x = OA - M'A = R\varphi - R \sin \varphi$, $y = M'M = M'M'' + M''M = R - R \cos \varphi = R(1 - \cos \varphi)$. Krzywa, którą opisuje punkt M, zowie się cyklojdą; jej równanie parametryczne jest $x = R(\varphi - \sin \varphi)$, $y = R(1 - \cos \varphi)$.



Rys. 125.

Weźmy pod uwagę dwie wartości parametru φ_0, $\varphi_0 + 2\pi$; do pierwszej należy punkt cyklojdy o współrzędnych (x_0, y_0), do drugiej punkt o współrzędnych (x_1, y_1). Otóż jest $x_0 = R(\varphi_0 - \sin \varphi_0)$, $y_0 = R(1 - \cos \varphi_0)$; $x_1 = R[\varphi_0 + 2\pi - \sin(\varphi_0 + 2\pi)] = R[\varphi_0 + 2\pi - \sin \varphi_0] = x_0 + 2\pi R$, $y_1 = R[1 - \cos(\varphi_0 + 2\pi)] = R(1 - \cos \varphi_0) = y_0$. Widzimy tedy, że cyklojda składa się z łuków do siebie przystających, przesuniętych względem siebie o stałą długość $2\pi R$; łuki nazwiemy arkadami.

Czy możemy uważać rzędną y za funkcję odciętej x wzdłuż całej cyklojdy? Odpowiemy na to pytanie twierdząco. Wykażemy, że odcięta x jest funkcją rosnącą parametru φ t. zn. okażemy, że, jeżeli jest $\varphi_1 < \varphi_2$, to jest też $\varphi_1 - \sin \varphi_1 < \varphi_2 - \sin \varphi_2$.

Otóż zauważmy, że w § 6 wykazaliśmy, że jest $\left|\frac{\sin u}{u}\right| < 1$, gdy jest $0 < |u| < \frac{\pi}{2}$. Widoczne, że i dla $|u| = \frac{\pi}{2}$ jest $\left|\frac{\sin u}{u}\right| = \left|\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right| = \frac{2}{\pi} < 1$.

Załóżmy teraz, że jest $|u| > \frac{\pi}{2}$, to $\left|\frac{\sin u}{u}\right| < \left|\frac{2}{\pi} \sin u\right| \leqq \frac{2}{\pi} < 1$.

Jest więc stale $\left|\frac{\sin u}{u}\right| < 1$, o ile jest $0 < |u|$ bez dalszego ograniczenia.

Wykazawszy tę pomocniczą nierówność, załóżmy, że jest $\varphi_1 < \varphi_2$ i że jest (dla dowodu niewprost) $\varphi_1 - \sin\varphi_1 \geqq \varphi_2 - \sin\varphi_2$ czyli, że jest $\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \geqq \varphi_2 - \varphi_1$. Ponieważ jest $\varphi_2 - \varphi_1 > 0$, więc $\varphi_2 - \varphi_1 = |\varphi_2 - \varphi_1|$ i więc $\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 = |\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1|$; przeto mamy $|\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1| \geqq |\varphi_2 - \varphi_1|$ czyli $2\left|\sin\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right|$. $\left|\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right| \geqq |\varphi_2 - \varphi_1|$; ale jest $\left|\cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right| \leqq 1$, więc $2 . \left|\sin\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right| \geqq |\varphi_2 - \varphi_1|$ czyli $\left|\frac{\sin\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}\right| \geqq 1$ wbrew pomocniczej nierówności. Udowodniliśmy zatem, że funkcja $x = R(\varphi - \sin\varphi)$ jest rosnącą, skoro jest $R > 0$.

Funkcja x jest ciągłą funkcją parametru φ. Aby wykazać, że funkcja x przyjmuje każdą wartość rzeczywistą, wykażmy najpierw, że można dobrać φ tak, iż x każdą daną liczbę zdola przewyższyć i że tak można dobrać φ, iż x może się stać mniejszem od każdej danej liczby.

Otóż widocznie jest $\sin\varphi \leqq 1$, więc $R(\varphi - \sin\varphi) \geqq R(\varphi - 1)$ czyli $x \geqq R(\varphi - 1)$. Niech A oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, to można dobrać φ_0 tak, aby było $R(\varphi_0 - 1) > A$, bo dość wybrać $\varphi_0 > 1 + \frac{A}{R}$; wtedy $x = R(\varphi_0 - \sin\varphi_0) \geqq R(\varphi_0 - 1) > A$ czyli $x > A$ dla $\varphi = \varphi_0$. Z drugiej strony mamy też $R(\varphi - \sin\varphi) \leqq R(\varphi + 1)$, przeto do każdej liczby B można dobrać liczbę φ_0' tak, iż jest $R(\varphi_0' - \sin\varphi_0') < B$, dość bowiem obrać liczbę φ_0' tak, aby było $R(\varphi_0' + 1) < B$, wtedy jest:

$$R(\varphi_0' - \sin\varphi_0') \leqq R(\varphi_0' + 1) < B.$$

Otóż twierdzimy, że funkcja $x=R(\varphi-\sin\varphi)$ przyjmuje każdą wartość x_0. Aby to wykazać, kładziemy $A=x_0+1$, $B=x_0-1$ i wyznaczamy liczby φ_1 i φ_2 tak, by było $R(\varphi_1-\sin\varphi_1)<B=x_0-1$, $R(\varphi_2-\sin\varphi_2)>A=x_0+1$; wiemy, że tak liczby φ_1 i φ_2 dobrać można; ponieważ jest $A>B$, więc jest $R(\varphi_2-\sin\varphi_2)>A=x_0+1>B=x_0-1>R(\varphi_1-\sin\varphi_1)$, skąd wynika, że jest $R(\varphi_2-\sin\varphi_2)>R(\varphi_1-\sin\varphi_1)$, tedy być musi $\varphi_2>\varphi_1$, gdyż, jak wykazaliśmy, funkcja $R(\varphi-\sin\varphi)$ jest funkcją rosnącą. Połóżmy $x_1=R(\varphi_1-\sin\varphi_1)$, $x_2=R(\varphi_2-\sin\varphi_2)$; jest $x_1<B=x_0-1<x_0<x_0+1=A<x_2$. Weźmy pod uwagę przedział (φ_1,φ_2); w tym przedziale jest x funkcją ciągłą zmiennej φ, tedy na mocy § 31 przyjmuje każdą wartość pośrednią między wartościami x_1 i x_2, przyjętemi na krańcach przedziału (φ_1,φ_2); otóż taką wartością pośrednią jest liczba x_0, przeto istnieje liczba φ_0 taka, że jest $R(\varphi_0-\sin\varphi_0)=x_0$. c. b. d. u.

Wykazaliśmy więc, że funkcja $x=R(\varphi-\sin\varphi)$ przyjmuje każdą wartość rzeczywistą. Stąd i na podstawie § 41 wynika, że istnieje jedna i jedyna funkcja $\Phi(x)$, określona i ciągła dla każdej wartości na x, rosnąca i zarazem taka, że jest dla każdej liczby x prawdziwą równość $x=R[\Phi(x)-\sin\Phi(x)]$. Funkcja $\varphi=\Phi(x)$ jest odwrotną do funkcji $x=R(\varphi-\sin\varphi)$. Wzdłuż cyklojdy będziemy tedy mieli $y=R[1-\cos\Phi(x)]$; jest to właśnie szukane równanie cyklojdy w postaci $y=f(x)$.

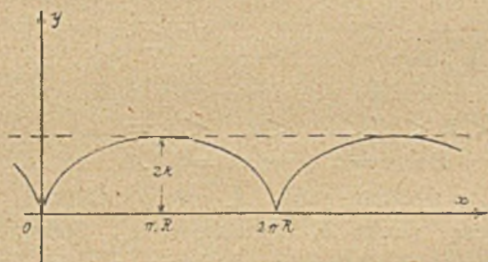
Obliczmy pochodne: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Na mocy § 39 będzie istnieć pochodna $\frac{dy}{dx}$ w każdym punkcie, w którym istnieją pochodne $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$ i w którym jest $\frac{dx}{d\varphi}\neq 0$. Otóż jest $\frac{dx}{d\varphi}=R(1-\cos\varphi)=y$. Jest więc $\frac{dx}{d\varphi}\neq 0$, gdy jest $y\neq 0$ czyli, gdy jest $\varphi\neq 2n\pi$ (n całkowita liczba). Wtedy $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=R\sin\varphi:R(1-\cos\varphi)=\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=$

$$=\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$ Obliczmy teraz pochodną $\frac{d^2y}{dx^2}$. Otóż jest

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dy}{dx}\right):\frac{dx}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right):R(1-\cos\varphi)=$$

$-\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{1}{2}:R(1-\cos\varphi)=-\frac{1}{4R\sin^4\frac{\varphi}{2}}$. Aby zbadać wypukłość względnie wklęsłość cyklojdy względem osi x, trzeba według rozważań § 67 zbadać znak iloczynu $y\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=R(1-\cos\varphi)\cdot\frac{-1}{4R\sin^4\frac{\varphi}{2}}=$

$=2R\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{-1}{4R\sin^4\frac{\varphi}{2}}=-\frac{1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$, ten iloczyn jest stale (o ile jest $\varphi\neq 2n\pi$) ujemną liczbą, przeto cyklojda zwraca się wklęsłością względem osi x. Rys. 126 przedstawia kilka arkad cyklojdy. Dla $\varphi=\pi$ mamy $y=2R$, co stanowi maximum wartości funkcji y; nadto $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi=\pi}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$.



Rys. 126.

Cyklojda ma specjalne własności: 1) jej rozwiniętą jest znów cyklojdą. 2) Umieśćmy cyklojdę w płaszczyznie pionowej tak, by zwracała się wklęsłością do góry i by styczna w najniższym jej punkcie była poziomą; wzdłuż cyklojdy utwórzmy szynę, po której ma spadać ciężki punkt; otóż, gdy z jakiegokolwiek bądź punktu cyklojdy (byle nie najniższego) spadał będzie punkt po tej szynie cykloidalnej, to najniższy punkt cyklojdy osiągnie w czasie niezależnym od wyboru punktu początkowego, byle prędkość początkowa była zerem. Mówimy, że cyklojda jest tautochroną, co odkrył Huyghens (1629—1695). 3) Jeżeli obierzemy dowolne punkty A i B byle w płaszczyźnie pionowej i jeżeli pragniemy, by punkt materjalny pod wpływem przyciągania ziemskiego z punktu wyższego A do niższego B spadł w czasie najkrótszym, to, jak wykazali Jan i Jakób Bernoulli, Newton, Leibniz i Tschirnhaus, punkt ma się poruszać po łuku cyklojdy, przechodzącej przez A, B: cyklojda jest więc także brachistochroną.

Uwaga. Gdyby punkt, którego tor śledzimy, leżał nie na kole, ale wewnątrz albo zewnątrz koła, toczącego się, to otrzymalibyśmy inne krzywe t. zw. skróconą, wzgl. wydłużoną cyklojdę. Jeżeliby koło toczyło się nie po prostej, ale po obwodzie stałego koła, będąc wewnętrznie wzgl. zewnętrznie stycznem do nieruchomego koła, to otrzymalibyśmy inne, również interesujące krzywe, zwane epicyklojdami, wzgl. hipocyklojdami. —

Załóżmy teraz, że $F(t)$, $G(t)$ mają pierwsze pochodne ciągłe w przedziale (t_0, T), gdzie $t_0 < T$. Oznaczmy przez (Z) zbiór punktów krzywej, dla których parametr t spełnia nierówność $t_0 \leqslant t \leqslant T$; załóżmy, że do każdego punktu zbioru (Z) należy jedna i jedyna wartość parametru (t) conajwyżej za jedynym wyjątkiem, kiedy $F(t_0) = F(T)$, $G(t_0) = G(T)$ t. zn. krzywa jest zamkniętą. Stawiamy sobie następujące zagadnienie: obliczyć długość łuku krzywej, utworzonej z punktów zbioru (Z). Krótko mówić będziemy, że mamy obliczyć łuk krzywej od punku $t = t_0$ do punktu $t = T$.

Widocznem, że mamy tu zagadnienie ogólniejsze od zagadnienia (§ 69) obliczenia łuku krzywej o równaniu $y = f(x)$. Aby obliczyć łuk, wpisujemy w krzywą linję łamaną, a więc o wierzchołkach leżących na krzywej. W tym celu przedział (t_0, T) dzielimy na przedziały częściowe przy pomocy $(n - 1)$ liczb. Niech będzie $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$.

Dla $t = t_i$ (gdzie $i = 0, 1, 2, \dots n$) otrzymamy na krzywej punkt A_i, przyczem punkt A_n jest identyczny z punktem końcowym B. Łącząc punkt A_i z punktem A_{i+1} otrzymamy cięciwę c_{i+1}. W ten sposób uzyskamy (n) cięciw: $c_1, c_2, \dots c_n$, których długość oznaczymy tymisamymi znakami, co jednak nie spowoduje dwuznaczności.

Długość linji łamanej $A_0 A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ oznaczmy przez σ; będzie więc $\sigma = c_1 + c_2 + \dots + c_n$. Następnie zagęszczamy nieograniczenie ilość punktów podziału, ale tak, że przytem maksymalna długość przedziałów częściowych dąży do zera; jeżeli się okaże, że suma σ dąży do granicy, niezależnej od sposobu wyboru liczb t_i, wówczas granicę sumy σ zwiemy łukiem krzywej od t_0 do T; granicą będzie przy naszych założeniach pewna całka określona. Obliczmy długość cięciwy c_1, która łączy punkty A_0 i A_1, przyczem punkt A_0 ma współrzędne: $x_0 = F(t_0)$, $y_0 = G(t_0)$, zaś punkt A_1 ma współrzędne $x_1 = F(t_1)$, $y_1 = G(t_1)$. Stąd:

$$c_1 = \sqrt{[F(t_1) - F(t_0)]^2 + [G(t_1) - G(t_0)]^2}.$$

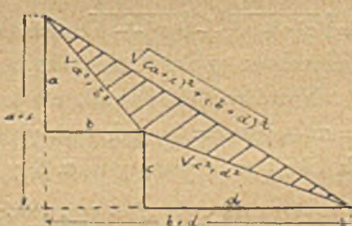
Ponieważ założyliśmy, że funkcje $F(t)$ i $G(t)$ mają w każdym punkcie przedziału (t_0, T) pochodną ciągłą, więc możemy stosować twierdzenie średniej wartości, które daje $F(t_1)-F(t_0)=(t_1-t_0)$, $F'(\tau_1)$, gdzie jest $t_0<\tau_1<t_1$; podobnie otrzymamy $G(t_1)-G(t_0)=$ $=G'(\sigma_1)(t_1-t_0)$, przyczem jest $t_0<\sigma_1<t_1$. Jest więc:

$$c_1=\sqrt{(t_1-t_0)^2F'^2(\tau_1)+(t_1-t_0)^2G'^2(\sigma_1)}=\sqrt{(t_1-t_0)^2[F'^2(\tau_1)+G'^2(\sigma_1)]}=$$
$$=\sqrt{(t_1-t_0)^2}\sqrt{F'^2(\tau_1)+G'^2(\sigma_1)}.$$

Otóż jest $\sqrt{(t_1-t_0)^2}=|t_1-t_0|$, ale ponieważ jest $t_1-t_0>0$, więc $|t_1-t_0|=t_1-t_0$. Jest przeto $c_1=(t_1-t_0)\sqrt{F'^2(\tau_1)+G'^2(\sigma_1)}$. Podobnie wyrażą się długości cięciw $c_2, c_3, \ldots c_n$; otrzymamy tedy: $\sigma=(t_1-t_0)\sqrt{F'^2(\tau_1)+G'^2(\sigma_1)}+(t_2-t_1)\sqrt{F'^2(\tau_2)+G'^2(\sigma_2)}+$ $+(t_3-t_2)\sqrt{F'^2(\tau_3)+G'^2(\sigma_3)}+\ldots+(t_n-t_{n-1})\sqrt{F'^2(\tau_n)+G'^2(\sigma_n)}$.
Zbadajmy teraz, czy suma σ dąży i do jakiej granicy, gdy maksymalna długość przedziałów częściowych dąży do zera. Aby granicą tej sumy była pewna całka określona, wystarczałoby, gdyby suma σ składała się z dodajników, z których każdy byłby iloczynem z długości przedziału częściowego i wartości pewnej funkcji ciągłej, wziętej w *jednym* jego punkcie pośrednim. We wypadku zaś sumy (σ) drugi czynnik składników t. j. $\sqrt{F'^2(\tau_i)+G'^2(\sigma_i)}$ $(i=1,2,\ldots n)$ zależy nie od jednego, ale od dwóch punktów pośrednich: τ_i, σ_i. Aby więc znaleźć granicę sumy σ, pozbędziemy się jednej ze zmiennych σ_i i τ_i.

Do tego posłuży nam następujące *pomocnicze twierdzenie: jeżeli a, b, c, d oznaczają cztery dowolne liczby rzeczywiste, to jest*

$$(1)\ldots\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\left|\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right|.$$



Rys. 127

Udowodnimy to twierdzenie geometrycznie i to w szczególnym przypadku, a mianowicie, gdy liczby a, b, c, d są dodatnie (rys. 127).

Weźmy w tym celu pod uwagę trójkąt prostokątny I o przyprostokątniach a, b, wskutek czego przeciwprostokątna wynosi $\sqrt{a^2+b^2}$; ponadto weźmy II trójkąt również prostokątny o przyprostokątniach c i d, a przeciwprostokątni $\sqrt{c^2+d^2}$, oba trójkąty umieśćmy tak, jak to wskazuje rys. 127. Wreszcie zwróćmy uwagę na trójkąt prostokątny o przyprostokątniach: $(a+c)$, $(b+d)$ i przeciwprostokątnej $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

Jeżeli przeciwprostokątnie powyższych trzech trójkątów utworzą trójkąt, jak na rysunku — (trójkąt zakreskowany), to z owego trójkąta na mocy twierdzenia, że arytmetyczna różnica dwóch boków trójkąta jest mniejszą od trzeciego, otrzymamy bezpośrednio nierówność:

$$(2)\qquad \sqrt{a^2+b^2} > \left|\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right|$$

po prawej stronie znajduje się znak bezwzględnej wartości, bo różnicę dwu boków trójkąta mamy obliczyć tak, aby reszta była albo zerem albo długością odcinka! Jeżeli zaś nie powstanie trójkąt, to tylko dlatego, że przeciwprostokątnia trójkąta II jest przedłużeniem przeciwprostokątnej trójkąta I i wtedy jest:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}, \text{ skąd}$$

$$(3)\qquad \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+c)^2(b+d)^2}-$$

$$-\sqrt{c^2+d^2}=\left|\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right|.$$

Przeto w każdym razie, łącząc oba wyniki (2) i (3), otrzymujemy nierówność (1).

Analitycznie dla wszelkich liczb rzeczywistych a, b, c, d wykaże czytelnik nierówność (1) z łatwością w sposób następujący: nierówność (1) równoważna jest nierówności

$$(4)\qquad -\sqrt{a^2+b^2}\leqq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}-\sqrt{c^2+d^2}\leqq\sqrt{a^2+b^2}.$$

Kładąc więc $u=\sqrt{c^2+d^2}-\sqrt{a^2+b^2}$, $v=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, $w=\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2}$, mamy wykazać też, że jest $u\leqq v\leqq w$, co czytelnik wykaże dowodem niewprost.

Nierówności (1) nadamy jeszcze inną postać; kładziemy w niej: $a=\alpha-\gamma$, $b=\beta-\delta$, $c=\gamma$, $d=\delta$, wtedy otrzymujemy dla wszelkich liczb rzeczywistych $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$(5)\qquad \left|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\right|\leqq\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2}.$$

Opierając się na tej nierówności, mamy:

$$\left|\sqrt{F'^2(\tau_1)+G'^2(\sigma_1)}-\sqrt{F'^2(\tau_1)+G'^2(\tau_1)}\right|\leqq$$

$$\leqq\sqrt{(F'(\tau_1)-F'(\tau_1))^2+(G'(\sigma_1)-G'(\tau_1))^2}=\left|G'(\sigma_1)-G'(\tau_1)\right|.$$

Ponieważ o pochodnych funkcji $F(t)$ i $G(t)$ założyliśmy, że są ciągłe w całym przedziale (t_0, T), więc, obierając dowolną liczbę

$\varepsilon > 0$, możemy przedział $(t_0\, T)$ podzielić na skończoną ilość takich części, żeby oscylacje funkcji $G'(t)$ w każdym z przedziałów częściowych były mniejsze od liczby ε. Wyobraźmy więc sobie, żeśmy już podzielili przedział (t_0, T) na takie części. Otóż punkty τ_i, σ_i należą do jednego i tego samego przedziału częściowego, przeto liczba $|G'(\tau_i) - G'(\sigma_i)|$ nie przewyższy oscylacji pochodnej $G'(t)$ w i-tym przedziale częściowym; więc $|G'(\tau_i) - G'(\sigma_i)| < \varepsilon$. Oznaczmy dla krótkości: $\sqrt{F'^2(\tau_i) + G'^2(\sigma_i)} - \sqrt{F'^2(\tau_i) + G'^2(\tau_i)} = R_i$; tedy jest $|R_i| < \varepsilon$, nadto $\sqrt{F'^2(\tau_i) + G'^2(\sigma_i)} = R_i + \sqrt{F'^2(\tau_i) + G'^2(\tau_i)}$. $(i=1,2,..n)$.
Będziemy przeto mieli:

$$\sigma = [(t_1 - t_0)\sqrt{F'^2(\tau_1) + G'^2(\tau_1)} + (t_2 - t_1)\sqrt{F'^2(\tau_2) + G'^2(\tau_2)} + \ldots +$$
$$+ (t_n - t_{n-1})\sqrt{F'^2(\tau_n) + G'^2(\tau_n)}] + [R_1(t_1 - t_0) + R_2(t_2 - t_1) + \ldots +$$
$$+ R_n(t_n - t_{n-1})].$$

Sumę σ rozłożyliśmy na dwa składniki ujęte w klamry. Załóżmy teraz, że maksymalna długość części, na które rozpadł się przedział (t_0, T), dąży do zera, wtedy granicą pierwszego składnika jest całka $\int_{t_0}^{T} \sqrt{F'^2(t) + G'^2(t)}\, dt$.

O składniku ujętym w drugą klamrę udowodnimy, że dąży do zera. Oznaczmy go przez Σ. Do niego stosujmy znane twierdzenie o bezwzględnej wartości sumy; więc będzie $|\Sigma| = |R_1(t_1 - t_0) + R_2(t_2 - t_1) + \ldots + R_n(t_n - t_{n-1})| \leqslant |R_1(t_1 - t_0)| + |R_2(t_2 - t_1)| + \ldots + |R_n(t_n - t_{n-1})|$.

Drugą część nierówności możemy napisać pod postacią: $|R_1|(t_1 - t_0) + |R_2|(t_2 - t_1) + \ldots + |R_n|(t_n - t_{n-1})$, gdyż różnice $(t_1 - t_0), \ldots, (t_n - t_{n-1})$ są wszystkie dodatnie.

Prawą stronę nierówności powiększymy, jeżeli w niej wstawimy liczbę ε zamiast liczb $|R_i|$, stąd: $|\Sigma| < \varepsilon(t_1 - t_0) + \varepsilon(t_2 - t_1) + \ldots + \varepsilon(t_n - t_{n-1}) = \varepsilon(t_n - t_0) = \varepsilon(T - t_0)$.

Ponieważ liczbę ε możemy obrać dowolnie małą, byle dodatnią, zaś liczba $(T - t_0)$ jest stałą, więc iloczyn $\varepsilon(T - t_0)$ dowolnie małym uczynić można. Przeto suma Σ ma granicę równą zeru.

Na mocy twierdzenia o granicy sumy (§ 20) suma σ, której granicę nazwaliśmy długością łuku l, będzie dążyć do liczby $l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{F'^2(t) + G'^2(t)}\, dt$, co możemy napisać, uwzględniając wzory

$F'(t) = \frac{dx}{dt}$, $G'(t) = \frac{dy}{dt}$ także w postaci: $l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Jestto wzór łatwy do zapamiętania, zwłaszcza, gdy zestawimy go ze wzorem na łuk ze str. 390. Zastosujmy ten wzór do przypadku, gdy dane jest równanie krzywej w układzie biegunowym $\varrho = f(\varphi)$. Ponieważ jest: $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, tedy współrzędne x i y są funkcjami zmiennej φ; stosujmy więc otrzymany wzór na łuk krzywej, zakładając, co wystarczy, że funkcja $f(\varphi)$ ma pochodną ciągłą w rozważanym przedziale (φ_0, φ). Tedy będzie:

$$l = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\,.d\varphi. \text{ Otóż jest } \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{d\varrho}{d\varphi}\cos\varphi - \varrho\sin\varphi\right]^2 + \left[\frac{d\varrho}{d\varphi}\sin\varphi + \varrho\cos\varphi\right]^2 =$$

$$= \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\cos^2\varphi - 2\varrho\frac{d\varrho}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi +$$

$$+ \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\sin^2\varphi + 2\varrho\frac{d\varrho}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \varrho^2\cos^2\varphi = \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \varrho^2;$$

stąd otrzymujemy wzór na długość łuku krzywej w układzie biegunowym $l = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \varrho^2}\, d\varphi$.

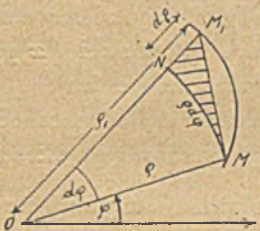
Następujące rozumowanie ułatwi nam zapamiętanie wzoru. Dla obliczenia łuku MM_1 w układzie biegunowym, obliczmy cięciwę $MM_1 = c$. Niech punkt M ma współrzędne (ϱ, φ), punkt M_1 współrzędne (ϱ_1, φ_1). Oznaczmy $\varphi_1 - \varphi = d\varphi$ i niech będzie $d\varphi > 0$. Z bieguna zatoczmy koło o promieniu ϱ i obliczmy łuk $MN = \varrho d\varphi$; cięciwa koła $MN = \varrho d\varphi + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon \to 0$, gdy $d\varphi \to 0$ (zob. str. 390). Z łatwością czytelnik obliczy, że kąt $\sphericalangle M_1NM = \frac{\pi}{2} + \frac{d\varphi}{2}$, więc kąt ten dąży do $\frac{\pi}{2}$, gdy $d\varphi \to 0$. Bok $M_1N = \varrho_1 - \varrho = d\varrho + \varepsilon_1 d\varphi$, gdzie $\varepsilon_1 \to 0$, gdy $d\varphi \to 0$ (str. 200). Uważając trójkąt, zakreskowany na rys. 128, a przerysowany w powiększeniu na rys. 129, za prostokątny w punkcie N, mielibyśmy: $c = \sqrt{(\varrho d\varphi)^2 + (d\varrho)^2} = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$; ściśle rozumując mamy, że $c^2 = (\varrho_1 - \varrho)^2 + 4\varrho\varrho_1 \sin^2\frac{d\varphi}{2}$; a, że $\varrho_1 - \varrho = d\varrho + \varepsilon_1 d\varphi$, przyczem $\varepsilon_1 \to 0$, gdy $d\varphi \to 0$, nadto

$\dfrac{\sin\dfrac{d\varphi}{2}}{\dfrac{d\varphi}{2}} = 1+\varepsilon_2$, przyczem $\varepsilon_2 \to 0$, gdy $d\varphi \to 0$, więc $c^2 = \left[\left(\dfrac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \right.$

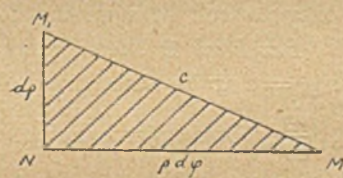
$\left. + \varrho^2 + \eta_0\right] d\varphi^2$, gdzie $\eta_0 \to 0$, gdy $d\varphi \to 0$.

Wróćmy do równania na długość łuku krzywej, które napiszemy w postaci:

(1) $$l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\, d\tau,$$



Rys. 128.



Rys. 129.

gdzie τ oznacza zmienną całkowania. Niech będzie $t_0 \leqslant t \leqslant T$ i połóżmy:

(2) $$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\, d\tau.$$

Temsamem zdefinjowaliśmy funkcję s zmiennej t, określoną w przedziale (t_0, T). Nazywać ją będziemy długością łuku krzywej od (t_0) do (t). Na podstawie poznanych własności całek określonych mamy pochodną:

(3) $$\frac{ds}{dt} = \left\{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\right\}_{\tau=t} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

stąd wynika dla różniczki równość:

(4) $$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Wzór ten jest postaci identycznej ze wzorem na str. 391). Obecnie równości (3) nadamy pewne znaczenie kinetyczne.

Wyobraźmy sobie, że punkt materjalny porusza się tak, że jego położenia w chwili t wyznaczone są przez równania $x = F(t)$, $y = G(t)$, przyczem funkcje $F(t)$, $G(t)$ mają pochodne ciągłe w przedziale (t_0, T) do drugiego rzędu włącznie. Rzuty punktu na osie x, y mają prędkości $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$; nazywamy je składowemi prędkościami ruchu. Prędkość (wypadkowa) ruchu będzie (wobec tego, że kierunki składowych są do siebie prostopadłe) równa liczbie $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ czyli równa liczbie $\frac{ds}{dt}$. Ale nie wystarcza znać wielkość prędkości — prędkość ma także pewien kierunek — jest wektorem, o punkcie początkowym w punkcie (x, y), w którym się w chwili t znajduje punkt poruszający się. Wykażemy niebawem, że wektor prędkości leży na stycznej do toru w punkcie (x, y) w przykładach przyjmiemy to tw. jednak za prawdziwe.

Przykład 1. Niech punkt materjalny porusza się po paraboli (1): $y^2 = 2px$ ze stałą prędkością v_0; określmy składowe prędkości $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$. Otóż różniczkując, jako funkcje złożone, otrzymujemy: $2y\frac{dy}{dt} = 2p\frac{dx}{dt}$; gdy więc $y \neq 0$, to $\frac{dy}{dt} = p \cdot y^{-1} \cdot \frac{dx}{dt}$, przeto

$$v_0 = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{p^2}{y^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \left|\frac{dx}{dt}\right| \frac{\sqrt{p^2 + y^2}}{|y|},$$

co daje:

$$(2) \qquad \left|\frac{dx}{dt}\right| = \frac{v_0 |y|}{\sqrt{p^2 + y^2}}, \quad \left|\frac{dy}{dt}\right| = \frac{p}{|y|} \cdot \frac{v_0 |y|}{\sqrt{p^2 + y^2}} = \frac{v_0 p}{\sqrt{p^2 + y^2}}.$$

Gdy $y = 0$, to $x = 0$; otóż oś y jest styczną do paraboli w punkcie $(0, 0)$, więc $\frac{dx}{dt} = 0$, $\left|\frac{dy}{dt}\right| = v_0$, co wykazuje, że równości (2) są słuszne i dla liczby $y = 0$.

Bez znajomości kierunku ruchu po paraboli nie można określić znaków prędkości składowych; ponadto trzeba znać położenie punktu na paraboli, jeżeli chcemy określić składowe prędkości.

Przykład 2. Na str. 258 wykazaliśmy, że torem rzutu ukośnego jest parabola:

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0{}^2 \cos^2 \alpha}, \quad y = 0.$$

Obliczmy prędkość ruchu po tej parabli, skoro wiadomo, że pozioma składowa prędkości $\left(\text{t. zn. } \frac{dx}{dt}\right)$ jest stałą liczbą i wynosi $v_0 \cos\alpha$. Z równania toru mamy: $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt}\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{v_0{}^2\cos^2\alpha}\frac{dx}{dt} =$ $= v_0 \sin\alpha - \frac{gx}{v_0\cos\alpha}$, przeto stąd: $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v_0^2\cos^2\alpha +$ $+ \left(v_0\sin\alpha - \frac{gx}{v_0\cos\alpha}\right)^2 = v_0^2 - 2gx\operatorname{tg}\alpha + \frac{g^2x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} = v_0^2 - 2gz$, przeto $\frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 - 2gz}$. W punkcie górowania jest $z = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$ według str. 260, wskutek czego tamże jest $\frac{ds}{dt} = |v_0\cos\alpha| = \frac{dx}{dt}$ czyli $\frac{dz}{dt} = 0$. Jest to rzeczą a priori widoczną.

Zajmiemy się równością (4) ze str. 445. Wykażemy mianowicie (zob. str. 198), że i obecnie różniczki dx, dy są przyrostami odciętej i rzędnej wzdłuż stycznej. W tym celu wyszukajmy równanie stycznej do krzywej w punkcie (x, y), jeżeli krzywa jest przedstawioną parametrycznie. Weźmy więc pod uwagę punkt (t_0) taki, że istnieją pochodne: $F'(t)$, $G'(t)$ w sąsiedztwie punktu t_0, ciągłe w punkcie t_0 i takie, że conajmniej jedna z pochodnych $F'(t_0)$, $G'(t_0)$ nie jest zerem.

Jeżeli $F'(t_0) \neq 0$, to na mocy tw. E ze str. 186 wynika, że istnieje sąsiedztwo punktu $x_0 = F(t_0)$ takie, że w tem sąsiedztwie istnieje funkcja odwrotna $t = \varphi(x)$, ciągła i różniczkowalna w punkcie x_0 i taka, że $t_0 = \varphi(x_0)$, $x = F(\varphi(x))$. Wobec tego w sąsiedztwie punktu x_0 jest: $y = G[\varphi(x)]$ i nadto jest (zob. str. 172):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = \left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_0} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x_0} = \left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_0} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dF}{dt}\right)_{t_0}}.$$

Wobec tego styczna będzie miała równanie:

$$[Y - G(t_0)]\, F'(t_0) = G'(t_0)\, [X - F(t_0)], \tag{1}$$

przyczem X, Y oznaczają współrzędne bieżącego punktu stycznej. Gdyby było $F'(t_0) = 0$, to musiałoby być $G'(t_0) \neq 0$ i wtedy wzięlibyśmy funkcję odwrotną do funkcji $y = G(t)$ i krzywą przedstawilibyśmy w postaci $x = f(y)$. Jednakowoż wypadłaby ta sama postać (1) dla równania stycznej, co poprzednio.

Obecnie czytelnik wykaże już z łatwością, że punkt o współrzędnych: $F(t_0) + (dx)_{t_0} = F(t_0) + F'(t_0)dt$, $G(t_0) + G'(t_0)dt$ przy dowolnej wartości różniczki dt leży rzeczywiście na stycznej (1). Skoro $(dx)_{t_0}$, $(dy)_{t_0}$ oznaczają przyrosty odciętej, względnie rzędnej wzdłuż stycznej, to liczba: $\sqrt{(dx)_{t_0}^2 + (dy)_{t_0}^2} = (ds)_{t_0}$ przedstawia długość wektora na stycznej, którego rzuty na osie x, y są właśnie równe różniczkom $(dx)_{t_0}$, $(dy)_{t_0}$, a, że rzut wektora na oś równa się iloczynowi długości wektora i dostawy kąta między kierunkiem wektora a kierunkiem osi, na którą wektor rzutowaliśmy, przeto na mocy tego (gdy tylko $dt \neq 0$) obliczymy natychmiast dostawy kątów, które kierunek wektora $(ds)_{t_0}$ zamyka z osią x, względnie y czyli dostawy kierunkowe wektora tego względem osi x i y, a mianowicie będą to ilorazy:

$$(2)\qquad \frac{(dx)_{t_0}}{(ds)_{t_0}} = \frac{F'(t_0)}{\sqrt{F'^2(t_0) + G'^2(t_0)}}, \qquad \frac{(dy)_{t_0}}{(ds)_{t_0}} = \frac{G'(t_0)}{\sqrt{F'^2(t_0) + G'^2(t_0)}}.$$

Na mocy powyższego liczby te mogą być też uważane za dostawy kierunkowe stycznej względem osi x i y. Ale na stycznej można odróżnić dwa kierunki, kiedy liczby (2) wyróżniają jeden — można go określić słowami np. jako styczną skierowaną w stronę wzrostu parametru t.

Obliczmy teraz dostawy kierunkowe normalnej do krzywej. Jeżeli je oznaczymy przez $\cos\alpha$, $\cos\beta$, to będzie [1]) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, nadto normalna jest prostopadłą do stycznej, więc:

$$\frac{F'(t_0)}{\sqrt{F'^2(t_0) + G'^2(t_0)}}\cos\alpha + \frac{G'(t_0)}{\sqrt{F'^2(t_0) + G'^2(t_0)}}\cos\beta = 0.$$

Widoczne, że można przyjąć:

$$\cos\alpha = \pm\frac{G'(t_0)}{\sqrt{F'^2(t_0) + G'^2(t_0)}}, \qquad \cos\beta = \mp\frac{F'(t_0)}{\sqrt{F'^2(t_0) + G'^2(t_0)}},$$

a spełnimy oba równania. Dwuznakowość odpowiada dwom skierowaniom, które można nadać normalnej.

Określmy jeszcze promień krzywizny w punkcie t_0 na krzywej. Rozważymy najpierw przypadek, kiedy $F'(t_0) \neq 0$, wtedy, jak wyżej, jest $t = \varphi(x)$, $y = G[\varphi(x)]$. Mamy tedy obliczyć drugą pochodną $\frac{d^2y}{dx^2}$. Otóż jest $\frac{dy}{dx} = \frac{dG}{dt} : \frac{dF}{dt}$, więc $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dG}{dt} : \frac{dF}{dt}\right] =$

[1]) Zob. Wstęp. Dostawy normalnej względem osi x, y, z będą $\cos\alpha$, $\cos\beta$, 0, gdy oś z jest prostopadłą do płaszczyzny x, y. Tedy $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{dG}{dt}:\frac{dF}{dt}\right]:\frac{dF}{dt}=\frac{F'(t)\,G''(t)-G'(t)\,F''(t)}{F'^2(t)}\cdot\frac{1}{F'(t)}=\frac{F'G''-G'F''}{F'^3}.$$

Aby promień krzywizny istniał, musieliśmy założyć, że $\frac{d^2y}{dx^2}\neq 0$ (str. 369), co obecnie daje założenie $F'G''-G'F''\neq 0$. Przy takiem założeniu mamy: $R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{[F'^2(t)+G'^2(t)]^{3/2}}{|F'(t)\,G''(t)-G'(t)\,F''(t)|}$.

Dla środka krzywizny otrzymuje się współrzędne:

$$\alpha=x-\frac{1+y'^2}{y''}\cdot y'=F(t)-\frac{F'^2(t)+G'^2(t)}{F'G''-G'F''}\cdot G';$$

$$\beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=G(t)+\frac{F'^2+G'^2}{F'G''-F''G'}\cdot F'.$$

Jeżeli t jest zmienne, to współrzędne rozwiniętej α, β będą wyrażone parametrycznie. Gdy $F'(t_0)=0$, to $G'(t_0)\neq 0$ i rezultat identyczny, jak to czytelnik łatwo wykaże.

Teraz wykażemy, że wektor prędkości leży na stycznej (zob. str. 446). Punkt początkowy wektora prędkości ma współrzędne $(F(t),\ G(t))$, rzuty wektora prędkości na osie x, y wynoszą $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, czyli $F'(t)$, $G'(t)$, więc punkt końcowy wektora ma współrzędne $(F(t)+F'(t),\ G(t)+G'(t))$. Z łatwością widać, że te współrzędne spełniają równanie (1) t. j. równanie stycznej. Przeto wektor prędkości rzeczywiście leży na stycznej w punkcie x, y.

Rozważmy jeszcze układ biegunowy. Z powyższych związków łatwo znaleźć równanie stycznej i normalnej, współrzędne środka krzywizny i promień krzywizny dla układu biegunowego, gdyż amplitudę φ należy uważać za parametr. Zostawiamy to czytelnikowi do przeprowadzenia. Obecnie zajmiemy się rozkładem prędkości ruchu w układzie biegunowym. Otóż otrzymaliśmy na str. 444 dla łuku wzór $\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2=\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2+\varrho^2$; jeżeli amplituda φ jest funkcją czasu t i ma pochodną, to $\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$, więc $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=$ $=\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2+\left(\varrho\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$, co świadczy, że wektor prędkości można uważać za wypadkowy z dwu, do siebie prostopadłych wektorów jeden: $\frac{d\varrho}{dt}$, leżący na promieniu wodzącym, drugi $\varrho\frac{d\varphi}{dt}$, do tamtego prostopadły.

Przy pomocy poznanych wzorów może czytelnik znaleźć długość łuku spiralnej Archimedesa i spiralnej hyperbolicznej.

Jako materjał do ćwiczeń mogą służyć następujące krzywe:

1) $x = (R + r)\cos\varphi - a\cos\left(\frac{(R+r)\varphi}{r}\right)$, $y = (R + r)\sin\varphi -$ $a\sin\left(\frac{(R+r)\varphi}{r}\right)$; jest to równanie parametryczne epicyklojdy; krzywą tę opisuje punkt odległy na a od środka koła o promieniu r, toczącego się zewnętrznie i bez ślizgania po stałem kole o promieniu R, a sztywnie złączony z kołem ruchomem. Gdy $a = r$, otrzymuje się zwykłą epicyklojdę. (Rozwinięta zwykłej epicyklojdy znów jest epicyklojdą zwykłą).

2) Gdy pod 1) położymy $R = r = a$ to otrzymamy kardjojdę, której równanie w układzie biegunowym ma prostą postać $\varrho = 2a(1 - \cos\varphi)$.

3) Jeżeli koło ruchome z pod 1) toczy się wewnętrznie po kole nieruchomem, to powstaje hypocyklojda o równaniu: $x = (R - r)\cos\varphi + a\cos\left(\frac{(R-r)\varphi}{r}\right)$, $y = (R-r)\sin\varphi - a\sin\left(\frac{(R-r)\varphi}{r}\right)$. Gdy $a = r$, to otrzymujemy zwykłą hypocyklojdę.

Bardzo interesujące są następujące szczególne przypadki hypocyklojdy: A) Gdy $R = 2r$, to $x = (r + a)\cos\varphi$, $y = (r - a)\sin\varphi$; gdy więc $r \neq a$, otrzymujemy elipsę, gdy zaś $r = a$ otrzymujemy średnicę koła stałego, leżącą na osi x; radzimy czytelnikowi zdać sobie dokładnie z tego sprawę; B) Gdy $R = 4r$, $a = r$, otrzymujemy $x = 4r\cos^3\varphi$, $y = 4r\sin^3\varphi$; krzywa ta należy do asteroid, które poznaliśmy na str. 379. Cyklojdy, hypocyklojdy i epicyklojdy odgrywają wielką rolę w teorji kół zębatych.

4) Od tych krzywych ogólniejsze są trochojdy, które powstają w sposób następujący: na płaszczyźnie (x, y) dany pręt, długości stałej a, ma jeden koniec umieszczony w początku O; do drugiego końca A przytwierdzony drugi pręt AB długości stałej b; pierwszy pręt ze stałą prędkością kątową (zob. str. 260) obraca się naokoło punktu O i zarazem drugi pręt obraca się ze stałą prędkością kątową naokoło punktu A; punkt B opisuje właśnie trochojdę. Jej równaniu można nadać postać: $x = a\cos(\omega_1 t) + b\cos(\omega_2 t)$, $y = a\sin(\omega_1 t) + b\sin(\omega_2 t)$.

5) Gdy z wierzchołka paraboli wykreślimy rzuty na styczne paraboli, to miejscem geometrycznym rzutów będzie krzywa zwana cissojdą, której równanie można napisać w postaci $\varrho = 2a \operatorname{tg}\varphi \sin\varphi$.

6) Rozwijającą koła jest krzywa: $x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$, $y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$.

Przykład. Krzywe Lissajous. Zajmiemy się krzywemi o równaniu: $x = a\cos(bt)$, $y = \alpha\cos(\beta t + \gamma)$, gdzie $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ są stałemi względem parametru t, przyczem $a.b.\alpha.\beta \neq 0$. Z równań widoczne, że dla każdej wartości t jest $|x| \leqq a$, $|y| \leqq \alpha$ czyli krzywa mieści się cała w pewnym prostokącie P, który czytelnik z łatwością wyrysuje. Krzywe te spotyka się w teorji ruchu drgającego pod nazwą *figur Lissajous.*

Połóżmy $b = \frac{2\pi}{T}$, $\beta = \frac{2\pi}{\tau}$, $\gamma = 2\pi\delta$, to ich równanie przyjmie postać: $x = a\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, $y = \alpha\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \delta\right)$. Z tych wzorów widoczne znaczenie liczb T i τ, mianowicie T jest perjodem funkcji x, zaś τ jest perjodem funkcji y. Mimo to, że współrzędne x, y są funkcjami perjodycznemi zmiennej t, punkty (x, y) nie muszą się perjodycznie powtarzać, o czem poniżej mówimy.

Zwróćmy jeszcze uwagę czytelnika na tę okoliczność, że krzywe Lissajous obejmują odcinek (odpowiadający ruchowi drgającemu prostemu), elipsę, koło itd. Odcinek otrzymamy w przypadku, gdy $T = \tau$ i gdy równocześnie 2δ jest liczbą całą; gdy tę ostatnią oznaczymy przez n, to $y = \alpha\cos\left[\frac{2\pi t}{T} + n\pi\right] = \alpha(-1)^n$. $\cos\frac{2\pi t}{T} = \frac{\alpha(-1)^n}{a}.x$ czyli $y = (-1)^n.\frac{\alpha}{a}.x$, co jest równaniem prostej, na której leży wspomniany odcinek. Jego długość wynosi $2\sqrt{a^2 + \alpha^2}$.

Załóżmy, że $T = \tau$, to $y = \alpha\left[\cos\frac{2\pi t}{T}\cos 2\pi\delta + \sin\frac{2\pi t}{T}\sin 2\pi\delta\right]$, ale $\cos\frac{2\pi t}{T} = \frac{x}{a}$, $\sin\frac{2\pi t}{T} = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$; tedy $\frac{y}{\alpha} - \frac{x}{a}\cos 2\pi\delta = \pm\sin 2\pi\delta . \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, co podniesione do kwadratu daje $\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{a\alpha}\cos 2\pi\delta = \sin^2 2\pi\delta$.

Na takiej linji leżą punkty (x, y) rozważanej krzywej w przypadku $T=\tau$. Równanie to przedstawia prostą, gdy $\sin 2\pi\delta = 0$, wtedy $\cos 2\pi\delta = \pm 1$. Gdy $\alpha = a$, $\cos 2\pi\delta = 0$ (a więc $\sin 2\pi\delta = \pm 1$), otrzymamy koło.

Jeżeli t uważać będziemy za miarę czasu, to równania krzywej będą równaniami ruchu drgającego. Zbadajmy, czy ruch może być perjodycznym (okresowym) t. zn. czy istnieje liczba $T_0 > 0$ o tej własności, że wszystkie punkty krzywej otrzymamy, gdy zmienna t pozostawać będzie w przedziale $(0, T_0)$ czyli punkty krzywej dla chwil t, $t+pT_0$ są identycznemi punktami płaszczyzny, gdy p oznacza dowolną liczbę całą, t dowolną chwilę. Liczbę T_0 (o ile istnieje) nazywamy perjodem (okresem), krzywą zaś perjodyczną (okresową), ruch okresowym (perjodycznym). Otóż udowodnimy następujące twierdzenie: *warunek konieczny i wystarczający, aby ruch drgający był okresowym, polega na tem, by stosunek liczb* $\frac{T}{\tau}$ *był wymiernym.*

Zauważmy naprzód, że możemy założyć, że jest $T > 0$ i zarazem $\tau > 0$. Gdyby bowiem było $T < 0$, to, ponieważ wiadomo, że jest zawsze $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$, więc $x = a\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = a\cos\left(\frac{2\pi t}{-T}\right)$ i liczbę $(-T)$ oznaczylibyśmy przez T; podobnie, gdyby było $\tau < 0$, to $y = \alpha\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + 2\pi\delta\right) = \alpha\cos\left(\frac{2\pi t}{-\tau} - 2\pi\delta\right)$.

Skoro więc wolno przyjąć $T > 0$, $\tau > 0$, to ich iloraz będzie też liczbą dodatnią.

Wykażemy, że podany warunek jest wystarczającym i niech będzie $\frac{T}{\tau} = \frac{m}{n}$, gdzie m, n oznaczają liczby naturalne. Stąd jest $m\tau = nT$. Oznaczmy przez $T_0 = m\tau = nT$ i wykażmy, że dla wartości t i $t + pT_0$ otrzymuje się ten sam punkt krzywej. Rzeczywiście jest: $\cos\frac{2\pi(t+pT_0)}{T} = \cos\frac{2\pi(t+pnT)}{T} = \cos\left[\frac{2\pi t}{T} + 2\pi np\right] = \cos\frac{2\pi t}{T}$; nadto $\cos\left[\frac{2\pi(t+pT_0)}{\tau} + 2\pi\delta\right] = \cos\left[\frac{2\pi t}{\tau} + 2\pi mp + 2\pi\delta\right] = \cos\left[\frac{2\pi t}{T} + 2\pi\delta\right]$.

Jeżeli więc do wartości t należy punkt (x, y), zaś do wartości $(t+pT_0)$ punkt (x', y'), to $x = x'$, $y = y'$. Wszystkie więc punkty krzywej wyczerpiemy, gdy zmienna t pozostawać będzie w przedziale $(0, T_0)$.

Wykażemy, że podany warunek jest koniecznym. Skoro ruch drgający ma być okresowym, to ma istnieć wspólny perjod dla odciętej i rzędnej (nie wystarcza, że równość $x=x'$, $y=y'$ dla *pewnej* wartości t zachodzi, bo figury Lissajous mogą być krzywemi przecinającemi się); oznaczmy więc przez T_0 wspólny perjod. Tedy ma być: $\cos\frac{2\pi t}{T} = \cos\frac{2\pi(t+T_0)}{T}$, $\cos\left[\frac{2\pi(t+T_0)}{\tau} + 2\pi\delta\right] = \cos\left[\frac{2\pi t}{\tau} + 2\pi\delta\right]$. Stąd na mocy znanego wzoru trygonometrycznego: $\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$ otrzymujemy $\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi T_0}{T}\right)\sin\frac{\pi T_0}{T} = 0$, $\sin\left[\frac{2\pi t}{\tau} + 2\pi\delta + \frac{\pi T_0}{\tau}\right].\sin\left[\frac{\pi T_0}{\tau}\right] = 0$; ale oba pierwsze czynniki stron lewych ostatnich równości nie mogą być równocześnie zerem dla *żadnej* wartości t, przeto jest: $\sin\frac{\pi T_0}{T} = 0$, $\sin\frac{\pi T_0}{\tau} = 0$, skąd wynika, że $\frac{\pi T_0}{T} = p\pi$, $\frac{\pi T_0}{\tau} = q\pi$, gdzie p, q oznaczają liczby całe. I jest $p \neq 0$, $q \neq 0$, bo $\pi > 0$, $T_0 \neq 0$, $T > 0$, $\tau > 0$; przeto $\frac{T}{\tau} = \frac{q}{p}$, ale iloraz $\frac{q}{p}$, jako iloraz dwu liczb całych jest ułamkiem. Tem samem twierdzenie udowodnione.

Zwrócimy jeszcze uwagę czytelnika na to, że ruch może być okresowym po krzywej niezamkniętej np. ruch drgający prosty jest okresowym, a trudno odcinek uważać za krzywą zamkniętą.

Wreszcie wspomnijmy o krzywych przestrzennych, które mogą być dane albo we formie $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$ albo w postaci parametrycznej $x=F(t)$, $y=G(t)$, $z=H(t)$. Przy odpowiednich założeniach istnieje określony łuk, którego długość wyznacza całka:

$$l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Zastosujmy ten wzór do linji $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ct$, (a, c stałe dodatnie) zwanej (zwyczajną) linją śrubową. Będzie:

$$l = \int_{t_0}^{T} \sqrt{a^2 + c^2}\, dt = \sqrt{a^2 + c^2}\,(T - t_0).$$

Równość ta jest zupełnie zrozumiałą, o ile się czytelnik zwróci do określenia linji śrubowej w § 87.

Weźmy liczby t_1 i t o własności $t_0 \leqslant t_1 \leqslant T$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$ i rozważmy funkcję: $s(t) = \int_{t_1}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$. Zbadajmy własności tej funkcji. Otóż 1) funkcja $s(t)$ jest określona i ciągła w przedziale (t_0, T); 2) ma pochodną $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} > 0$, więc jest rosnącą w przedziale $(t_0\ T)$; 3) $s(t_1) = 0$, nadto $s(t) < 0$, gdy $t < t_1$, zaś $s(t) > 0$, gdy $t > t_1$ i wtedy jest $s(t)$ jest długością łuku od punktu (t_1) do punktu t. Na mocy tw. E ze str. 186 wynika, że t można określić, jako funkcję zmiennej s w przedziale (s_0, S), jeżeli $s_0 = s(t_0)$, $S = s(T)$; oznaczmy tę funkcję $t = \varphi(s)$; wewnątrz przedziału $(s_0\ S)$, ona ma pochodną i mianowicie:

$$\varphi'(s) = \left(1 : \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\right)_{t=\varphi(s)}.$$

Wobec tego będzie $x = F(\varphi(s))$, $y = G(\varphi(s))$, $z = H(\varphi(s))$. Liczbę s nazwiemy (algebraiczną) miarą łuku, ona może służyć za współrzędną *punktu na krzywej*; punkt na krzywej będzie bowiem jednoznacznie określony, gdy znamy dla niego liczbę s.

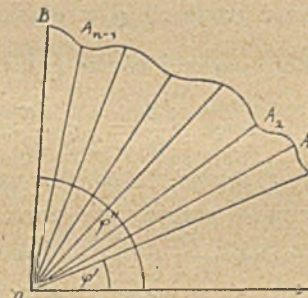
Dostawy kierunkowe stycznej do krzywej będą znów $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$.

§ 75. Pomiar pola płaskiego krzywej, danej w układzie biegunowym.

Rozważmy następujące zagadnienie. Mamy daną krzywą w układzie biegunowym, określoną równaniem $\varrho = f(\varphi)$, gdzie funkcja $f(\varphi)$ niech będzie ciągłą w przedziale (φ', φ''). Liczba φ' niech będzie amplitudą punktu A, φ'' amplitudą punktu B (rys. 130); nadto założymy, że $0 < \varphi'' - \varphi' \leqslant 2\pi$. Obliczmy pole zawarte między promieniami OA, OB i łukiem krzywej. Pokaże się, że będzie to pewna całka określona, rozpostarta na przedział (φ', φ'').

W tym celu przedział (φ', φ'') podzielmy na n części (rys. 130) przy pomocy $(n-1)$ promieni podziału należących do amplitud $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$. Rozważane pole rozpadnie się na n małych „wycinków“. Weźmy jeden z owych wycinków, odpowiadający łukowi AA_1, który w powiększeniu przedstawia rys. 131. przyczem punkt A_1 ma amplitudę φ_1. Z bieguna O jako środka zatoczmy dwa łuki kół. jeden o promieniu ϱ_1, drugi o promieniu ϱ_1', gdzie ϱ_1 oznacza maximum promieni wodzących punktów krzywej, których amplitudy leżą w przedziale (φ', φ_1). ϱ_1' ich minimum.

Widzimy z tego, że pole p_1 rozważanego sektora (wycinka) jest zawarte między polem wycinka kołowego o promieniu ϱ_1 i polem drugiego o promieniu ϱ_1'. Wszystkie te trzy wycinki odpowiadają temu samemu kątowi środkowemu $\varphi_1 - \varphi'$. Pole p_1 rozważanego wycinka możemy więc zamknąć w następującą nierówność: $\frac{1}{2}\varrho_1'^2(\varphi_1 - \varphi') \leqq p_1 \leqq \frac{1}{2}\varrho_1^2(\varphi_1 - \varphi')$.

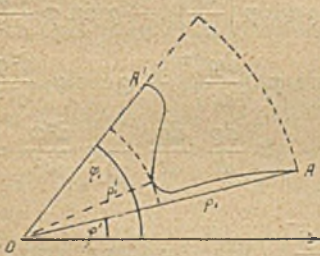


Rys. 130.

Podobne nierówności napiszemy dla dalszych wycinków:

$\frac{1}{2}\varrho_2'^2(\varphi_2 - \varphi_1) \leqq p_2 \leqq \frac{1}{2}\varrho_2^2(\varphi_2 - \varphi_1) \ldots\ldots \frac{1}{2}\varrho_n'^2(\varphi'' - \varphi_{n-1}) \leqq p_n \leqq \frac{1}{2}\varrho_n^2(\varphi'' - \varphi_{n-1})$; dodając te nierówności stronami, otrzymamy:

$$\frac{1}{2}\varrho_2'^2(\varphi_1 - \varphi') + \frac{1}{2}\varrho_2'^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + \frac{1}{2}\varrho_n'^2(\varphi'' - \varphi_{n-1}) \leqq$$
$$\leqq P \leqq \frac{1}{2}\varrho_1^2(\varphi_1 - \varphi') + \frac{1}{2}\varrho_2^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + \frac{1}{2}\varrho_n^2(\varphi'' - \varphi_{n-1}),$$



Rys. 131.

gdzie P oznacza miarę pola, które mamy obliczyć. Załóżmy, że maximum różnic: $\varphi_1 - \varphi'$, $\varphi_2 - \varphi_1$, $\varphi_3 - \varphi_2, \ldots,$ $\varphi'' - \varphi_{n-1}$ dąży do zera; ponieważ ϱ^2 oznacza funkcję ciągłą amplitudy φ, więc prawa i lewa strona ostatniej nierówności dąży do wspólnej granicy, będącej całką: $\int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{1}{2}\varrho^2 d\varphi$, a więc na mocy twierdzenia o ciągach (§ 20) będzie $P = \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{1}{2}\varrho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi'}^{\varphi''} \varrho^2 d\varphi$, co rozwiązuje zadanie.

Wzór ten łatwo zapamiętać, gdy zdamy sobie sprawę z każdej części dowodu.

Jeżeli jest $\varphi' \leqq \varphi \leqq \varphi''$, to pole p od promienia wodzącego φ' do φ jest funkcją amplitudy φ: $S(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\varphi'}^{\varphi} \varrho^2 d\varphi$, skąd $S(\varphi'') = P$.

Nadto, jak wynika z § 63, funkcja $S(\varphi)$ ma pochodną: $\frac{dS}{d\varphi}=\frac{1}{2}\varrho^2$, skąd różniczka $dS=\frac{1}{2}\varrho^2 d\varphi$; jej znaczenie geometryczne widoczne

Jeżeli założymy, że punkt materjalny porusza się po krzywej $\varrho=f(\varphi)$, przyczem φ jest funkcją czasu t, mającą pochodną, to promień wodzący ϱ w czasie od t_0 do chwili t zatacza pole, będące funkcją czasu i równe całce $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\varrho^2\frac{d\varphi}{dt}\,.\,dt$. Prędkość zmiany pola wynosi więc $\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\varrho^2\frac{d\varphi}{dt}$, jest to t. zw. prędkość sektorjalna.

Przykład. Rozważmy zagadnienie następujące: przypuśćmy, że po elipsie porusza się punkt materjalny o masie m, przyciągany przez masę M, umieszczoną w ognisku F_1, (rys. 123, str. 426); siła przyciągania niech wynosi $\frac{am}{\varrho^2}$, gdzie a jest stałą. Jest to prawo Newtonowskie przyciągania. Obliczmy dla tego ruchu prędkość sektorjalną. Jeżeli umieścimy osie ξ,η, jak na rysunku, to równania ruchu (zob. str. 257) będą: $m\frac{d^2\xi}{dt^2}=-\frac{am}{\varrho^2}\cos\varphi$, $m\frac{d^2\eta}{dt^2}=-\frac{am}{\varrho^2}\sin\varphi$, stąd $\frac{d^2\xi}{dt^2}\sin\varphi-\frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\varphi=0$; ale skoro $\xi=\varrho\cos\varphi$, $\eta=\varrho\sin\varphi$, to

stąd $\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{d^2\varrho}{dt^2}\cos\varphi-2\sin\varphi\frac{d\varrho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}-\varrho\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\varrho\sin\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}$,

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{d^2\varrho}{dt^2}\sin\varphi+2\cos\varphi\frac{d\varrho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}-\varrho\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\varrho\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Przeto jest: $\frac{d^2\xi}{dt^2}\sin\varphi-\frac{d^2\eta}{dt^2}\cos\varphi=-2\frac{d\varrho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}-\varrho\frac{d^2\varphi}{dt^2}=$

$=-\frac{2\varrho\frac{d\varrho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\varrho^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}}{\varrho}=-\frac{1}{\varrho}\frac{d}{dt}\left[\varrho^2\frac{d\varphi}{dt}\right]$, więc według powyższego jest $\frac{d}{dt}\left(\varrho^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=0$, skąd wynika drugie prawo Kepplera: $\frac{1}{2}\varrho^2\frac{d\varphi}{dt}=$ stałej.

§ 76. Równanie algebraiczne 3-go stopnia. Metody przybliżonego rozwiązywania równań.

Rozważymy najpierw przykład na to, jak badanie kształtu krzywej pozwala w łatwy sposób zdać sobie sprawę z ilości rzeczywistych pierwiastków równania. Uczynimy to w przypadku bardzo prostym, dla równania stopnia 3go. Gdy dane równanie $z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$, przyczem a_1, a_2, a_3 oznaczają liczby rzeczywiste, to można je napisać w postaci prostszej, mianowicie, kładąc $z = x - \frac{a_1}{3}$, otrzymujemy równanie (I) $x^3 + px + q = 0$, nie posiadające wyrazu x^2; taką postać równania stopnia 3go zowiemy normalnem równaniem stopnia 3go. Liczby p i q są rzeczywiste, a mianowicie jest: $p = a_2 - \frac{a_1^2}{3}$, $q = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3$. Znajdziemy ilości rzeczywistych pierwiastków równania (I) w przypadku, gdy $p \neq 0$ i $q \neq 0$. Ta ilość będzie zależną od wartości liczebnych współczynników p, q.

W tym celu rozważać będziemy krzywą K o równaniu (II) $y = x^3 + px + q$. Wskutek tego rzeczywiste pierwiastki równania (I) będą odciętemi punktów przecięcia się krzywej K z osią (x). Aby więc wyznaczyć ilość takich punktów, zbadamy kształt krzywej (II). Tworzymy tedy kolejno pochodne funkcji y. Jest $y' = 3x^2 + p = 3\left(x^2 + \frac{p}{3}\right)$, $y'' = 6x$, $y''' = 6$ zaś wszystkie pochodne wyższego rzędu są równe zeru identycznie. Zbadamy znak pierwszych dwóch pochodnych.

Odnośnie do wyrażenia $3\left(x^2 + \frac{p}{3}\right)$ trzeba odróżnić dwa przypadki; ponieważ liczba p nie może być zerem, więc może być albo dodatnią albo ujemną. A) Gdy jest $p > 0$, to jest stale $y' > 0$, więc krzywa K stale się wznosi; jeżeli więc istnieje punkt przecięcia się krzywej K z osią x, to tylko jeden. Równanie (II) możemy napisać we formie: $y = x^3\left(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\right)$.

Stąd widzimy, że, gdy tylko obierzemy liczbę x co do bezwzględnej wartości dość wielką, to o znaku wartości funkcji y decyduje znak potęgi x^3, gdyż będzie $1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3} > 0$; gdy więc liczba x jest dodatnią i dość wielką, to wartość y jest również dodatnia, gdy zaś liczba x jest ujemną i ma bezwzględną wartość dość wielką, to wartość y jest ujemną. Ponieważ nadto funkcja y jest ciągłą, więc na mocy znanej własności funkcji ciągłej (§ 31) krzywa K musi przeciąć oś x raz i tylko raz, bo krzywa K stale się wznosi. Gdy więc $p > 0$, to istnieje jeden i jedyny rzeczywisty pierwiastek równania (II). Rozważmy teraz przypadek B), kiedy jest $p < 0$. Połóżmy więc $\lambda = \sqrt{\frac{-p}{3}}$; jest więc λ liczbą rzeczywistą i dodatnią. Stąd $p = -3\lambda^2$. Będzie tedy $y' = 3(x^2 - \lambda^2) = 3(x + \lambda)(x - \lambda)$.

Z tego widzimy, że pochodna y' nie jest już stałego znaku i poniżej tabelka przedstawia znak pochodnej w zależności od wartości zmiennej x.

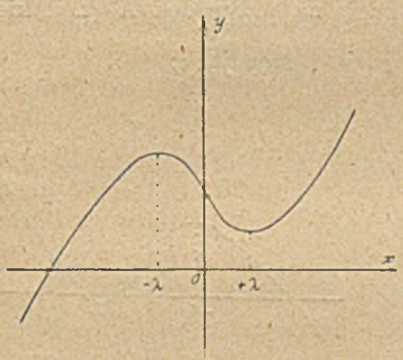
	$x < -\lambda$	$x = -\lambda$	$-\lambda < x < \lambda$	$x = \lambda$	$x > \lambda$
y'	+	0	—	0	+

Z wyrażenia na pochodną (y') widać, że w stosunku do liczb ($-\lambda$) i (λ) należy przeprowadzić dyskusję: 1) Niech będzie $x < -\lambda$, wówczas oba czynnika $c = x + \lambda$. $d = x - \lambda$ są ujemne, przeto ich iloczyn jest dodatni, więc jest $y' > 0$; krzywa K dla $x < -\lambda$ wznosi się. 2) Dla $x = -\lambda$ jest $y' = 0$ i zachodzi tu maximum, gdyż druga pochodna $y'' = 6x$ dla $x = -\lambda$ ma wartość ujemną. 3) Niech będzie $-\lambda < x < \lambda$, wówczas jest $c > 0$, zaś $d < 0$, stąd wynika, że jest $y' < 0$; więc w przedziaie $(-\lambda, \lambda)$ funkcja maleje, krzywa K opada. 4) Dla $x = \lambda$ jest $d = 0$ i zarazem $y' = 0$; zachodzi tu minumum, bo $(y'')_{x=\lambda} = 6\lambda > 0$. 5) Niech wreszcie będzie $x > \lambda$; wtedy jest $c > 0$ i równocześnie $d > 0$, przeto jest $y' > 0$, krzywa K się więc wznosi. W przedziale $(-\lambda, \lambda)$ funkcja y maleje, krzywa K opada, nadto rzędna punktu o odciętej $x = -\lambda$ jest większą od rzędnej punktu o odciętej $x = \lambda$. czyli $(y)_{x=-\lambda} > y_{x=\lambda}$. Mamy bowiem $y = x^3 + px + q$, przeto jest $(y)_{x=-\lambda} = -\lambda^3 + 3\lambda^3 + q = q + 2\lambda^3$, zaś $(y)_{x=\lambda} = \lambda^3 - 3\lambda^3 + q = q - 2\lambda^3$, a że jest $\lambda > 0$, więc też jest $q + 2\lambda^3 > q - 2\lambda^3$ czyli $(y)_{x=-\lambda} > (y)_{x=\lambda}$.

Aby zdać sobie sprawę z przebiegu krzywej K, a zwłaszcza, by zbadać, ile razy krzywa K przecina oś x, odróżnimy kilka przypadków, które zestawimy poniżej w tabelce; do tej tabelki odnoszą się rysunki 132—136, na mocy których można było wypełnić ostatnią kolumnę tabelki, podającą ilość rzeczywistych pierwiastków równania (I).

Przypadek	Znak wyrażenia $q+2\lambda^3 > q-2\lambda^3$		Ilość rzeczywistych pierwiastków równania (I)
(a)	+	+	jeden; ujemny, mniejszy od liczby $(-\lambda)$,
(b)	+	—	trzy; jeden mniejszy liczby $-\lambda$, drugi zawarty między liczbami $(-\lambda)$ i $(+\lambda)$, trzeci większy od liczby $(+\lambda)$.
(c)	—	—	jeden; dodatni, większy od liczby $(+\lambda)$,
(d)	0	—	jeden pierwiastek $(-\lambda)$ podwójny, drugi dodatni, większy od liczby $(+\lambda)$,
(e)	+	0	jeden pierwiastek ujemny mniejszy od liczby $(-\lambda)$, drugi, podwójny, równy liczbie $(+\lambda)$.

Przypadek (*a*). Przebieg krzywej K daje rysunek 132. Czytelnik na podstawie ogólnych zasad, przedstawionych w § 67 może zbadać wklęsłość i wypukłość krzywej względem osi (x) i punkty przegięcia.



Rys. 132.

Czytelnik wykaże zarazem, że równanie (I) posiada jeden rzeczywisty pierwiastek, on jest ujemny i mniejszy od liczby $(-\lambda)$.

Do przypadku (*b*) odnosi się rysunek 133, do przypadku (*c*), odnosi się rysunek 134.

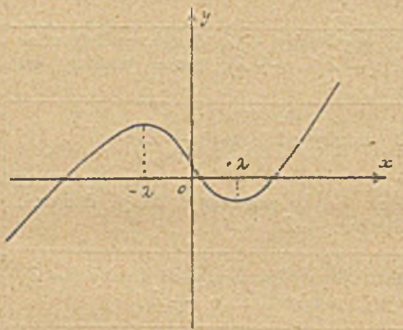
Przypadek (*d*). Jest $(y)_{x=-\lambda} = 0$, $(y')_{x=-\lambda} = 0$, więc oś x jest styczną do krzywej K w punkcie $(-\lambda, 0)$. Przeto liczba $(-\lambda)$ jest pierwiastkiem równania (I) i do tego podwójnym, gdyż $(y)_{x=-\lambda} = (y')_{x=-\lambda} = 0$ ale $(y'')_{x=-\lambda} \neq 0$.

Oprócz tego równanie (I) posiada jeszcze pierwiastek dodatni, większy od liczby $(+\lambda)$. Przypadek ten ilustruje rys. 135.

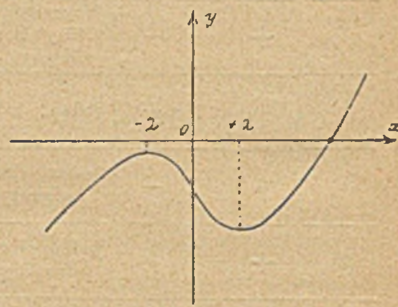
Do przypadka (*e*) odnosi się rys. 136.

Zestawmy ze sobą w pary przypadki (*a*) i (*c*), (*d*) i (*e*), to widzimy, że ilość rzeczywistych pierwiastków równania (I) zależy od znaku, względnie wartości iloczynu $(q + 2\lambda^3)(q - 2\lambda^3) =$

$= q^2 - 4\lambda^6 = q^2 - 4 \cdot \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = q^2 + 4 \cdot \frac{p^3}{27}$ lub, co na to samo wychodzi, zależy od czwartej części ostatniego wyrażenia t. j. od wyrażenia

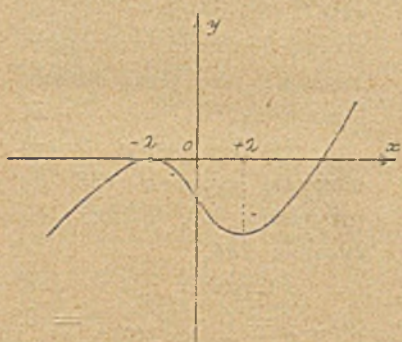


Rys. 133.

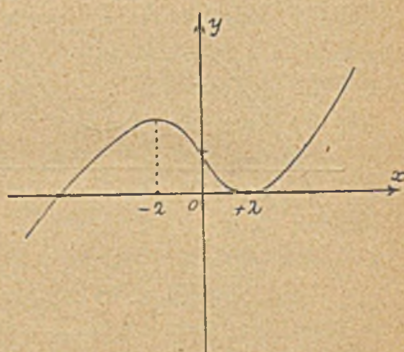


Rys. 134.

$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Zwracając zarazem uwagę na przypadek A (t. j. kiedy $p > 0$), otrzymujemy wynik na razie następujący:



Rys. 135.



Rys. 136.

(a) gdy $p \neq 0$ i $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, to równanie (I) ma jeden rzeczywisty pierwiastek;

(b) gdy $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, to równanie (I) ma trzy rzeczywiste pierwiastki;

(*c*) gdy $p \neq 0$ i $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, to równanie (I) ma jeden rzeczywisty pierwiastek podwójny, a jeden pojedynczy.

Zbadajmy przypadek, gdy $p=0$, wtedy krzywa K ma równanie $y=x^3+q$. Jest więc $y'=3x^2$, $y''=6x$, $y'''=6$. Tedy punkt $(0, q)$ jest punktem przegięcia i ponieważ $(y')_{x=0}=0$, więc styczna do krzywej K w punkcie przegięcia jest prostopadłą do osi rzędnych. Ponadto jest $y'>0$, o ile jest $x \neq 0$, więc krzywa się wznosi. Aby zbadać ilość pierwiastków równania (I), należy odróżnić trzy przypadki: $q>0$ albo $q=0$ albo $q<0$. Gdy jest $p=0$, $q>0$, to równanie (I) posiada jeden rzeczywisty pierwiastek (ujemny); wtedy też jest $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$.

Gdy jest $p=0$, $q=0$, to równanie (I) ma jeden potrójny pierwiastek (równy zeru); wtedy jest $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$.

Gdy wreszcie jest $p=0$, $q<0$, to jest $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ i, jak widoczne, równanie (I) posiada jeden rzeczywisty pierwiastek (dodatni). Wobec tego ostateczny rezultat będzie następujący:

(*a*) gdy $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, równanie (I) ma jeden rzeczywisty pierwiastek;

(*b*) gdy $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, równanie (I) ma trzy rzeczywiste pierwiastki;

(*c*) gdy $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, to równanie (I) ma jeden pierwiastek podwójny i jeden pojedynczy, gdy $q \neq 0$; gdy zaś $q=0$, to ma jeden pierwiastek potrójny.

Zauważmy, że ten sam rezultat otrzymuje się drogą czystej analizy algebraicznej bez rozważań geometrycznych i bez pomocy pojęcia pochodnych.

Dodamy, że przypadek *b* jest dlatego bardzo interesujący, że nie istnieje (i nie może istnieć) sposób algebraiczny (wyciąganie pierwiastków) na wyszukanie owych trzech rzeczywistych pierwiastków; rozwiązanie więc równania (I) nie daje się w tym przypadku sprowadzić do metod algebraicznych — nazwano też przypadek (*b*): przypadkiem nieprzywiedlnym (casus irreductibilis); w tym przypadku stosuje się zwykle metodę trygonometryczną do rozwiązania równania.

Tak tę metodę, jak i zasadniczy wzór Cardana[1]) znajdzie czytelnik w każdej teorji równań algebraicznych. Jeżeli jednak współczynniki p, q są ułamkami dziesiętnemi, to użycie metody Cardana staje się uciążliwem; powstaje konieczność użycia metod przybliżonego obliczenia pierwiastków, czem się obecnie zajmiemy. Znajomość metod badania kształtu krzywych pozwala niejedno równanie rozwiązać graficznie albo graficznie znaleźć dane, które na drodze analitycznej prowadzą do rozwiązania równania. Załóżmy, że mamy rozwiązać równanie $\operatorname{tg} x = x$ (jest to równanie przestępne). Możemy to uczynić na drodze graficznej. W tym celu na papierze milimetrowym rysujemy dwie krzywe $y = x$, $y = \operatorname{tg} x$ i odcięte punktów przecięcia się tych krzywych będą właśnie szukanemi pierwiastkami. Z łatwością zauważymy, że powyższe równanie ma nieskończenie wiele pierwiastków. Ogólna więc zasada graficznego rozwiązania równania będzie następującą: staramy się dane równanie przedstawić pod postacią $\varphi(x) = \psi(x)$, przyczem funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ należy tak dobrać, by rysunek krzywych $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ był możliwie najprostszym; rysujmy potem krzywe $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ i szukamy odciętych punktów wspólnych.

We wielu przypadkach metoda ta nie wystarcza, ale w każdym razie pozwoli nam ocenić przedział (a, b), który zawiera jeden z pierwiastków. Do obliczenia przybliżenia pierwiastka ma analiza kilka metod, z których najczęściej używa się metody Newtona i metody interpolacyjnej (zwanej też regula falsi).

Metoda interpolacyjna przedstawia się następująco: załóżmy, że dane równanie $f(x) = 0$ ma jeden i jedyny pierwiastek x_0 wewnątrz przedziału (a, b) czyli $a < x_0 < b$. Nadto funkcja $f(x)$ ma być ciągłą w przedziale (a, b), ponadto jest $f(a) \,.\, f(b) < 0$. Zamiast krzywej $y = f(x)$ weźmy sieczną, przechodzącą przez punkty $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$. Jej równanie jest następujące:

$$Y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ta sieczna przetnie oś x w punkcie x_1, leżącym wewnątrz przedziału (a, b); aby znaleźć x_1, należy położyć $Y = 0$; otrzymujemy

[1]) Hieronimo Cardano, włoski matematyk, ur. 1501—1576.

więc $x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$. Jeżeli jest $x_1 \neq x_0$, to jest albo $f(a)f(x_1) > 0$ albo $f(a) . f(x_1) < 0$. W pierwszym przypadku szukany pierwiastek x_0 leży w przedziale (x_1, b), w drugim przypadku leży w przedziale (a, x_1). Innemi słowy udało nam się zmniejszyć przedział, wewnątrz którego leży szukany pierwiastek x_0.

Przykład. Na podstawie rozważań obecnego paragrafu wynika, że równanie $x^3 - 2x - 5 = 0$ ma jeden rzeczywisty pierwiastek x_0; ponieważ $f(2) . f(3) < 0$, więc liczba x_0 leży wewnątrz przedziału $(2, 3)$. Dla liczby x_1 otrzymujemy $x_1 = 2\frac{1}{17}$; zamiast obliczyć $f\left(2\frac{1}{17}\right)$ obliczmy (co łatwiej) liczby $f\left(2\frac{1}{10}\right)$ i $f\left(2\frac{1}{20}\right)$. Otóż $f(2{\cdot}1) > 0$, $f(2{\cdot}05) < 0$; tedy liczba x_0 leży wewnątrz przedziału $(2{\cdot}05, 2{\cdot}1)$.

Metoda Newtona. Kiedy metoda interpolacyjna zastępuje krzywą przez sieczną, to metoda Newtona zastępuje krzywą przez styczną, narysowaną do krzywej albo w punkcie $(a, f(a))$ albo w punkcie $(b, f(b))$. Metodę można łatwo uzasadnić w przypadku, kiedy druga pochodna $f''(x)$ jest stałego znaku w przedziale (a, b), co zakładamy. Wszystkie wtedy możliwe przypadki zestawione są w tabelce obok. Styczną do krzywej $y = f(x)$ należy w tym z punktów $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$ wykreślić, w którym wartość funkcji i drugiej pochodnej mają znak *zgodny*. Jest rzeczą interesującą, że metoda interpolacyjna uzupełnia metodę Newtona w tem znaczeniu, że liczba, którą daje metoda Newtona i liczba x_1, obliczona metodą interpolacyjną, dają przedział węższy od przedziału (a, b), wewnątrz których leży szukany pierwiastek x_0. Udowodnimy następujące twierdzenie: *jeżeli funkcja $f(x)$ ma następujące własności: 1) ma określoną drugą pochodną w przedziale (a, b) i stałego znaku, 2) jest $f(a) . f(b) < 0$, to równanie $f(x) = 0$ ma jeden pierwiastek x_0 wewnątrz przedziału (a, b). Jeżeli następnie wyrysujemy styczną do krzywej $y = f(x)$ w tym z punktów $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, w którym wartość funkcji i wartość drugiej pochodnej mają znak zgodny, a przez x_2 oznaczymy odciętą punktu przecięcia się tej stycznej z osią x, zaś przez x_1 oznaczymy odciętą punktu przecięcia z osią x siecznej, łączącej punkty $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, to przedział (x_1, x_2) jest przedziałem wycię-*

$f(a)$	$f(b)$	$f''(x)$
+	−	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−

tym z przedziału (a, b) [i jest $a < x_1$, $a < x_2$, $x_1 < b$, $x_2 < b$] i wewnątrz niego leży liczba x_0.

Dla liczby x_2 otrzymujemy wzór:

$$x_2 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \text{ gdy } f(a) \,.\, f''(x) > 0;$$

$$x_2 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \text{ gdy } f(b) \,.\, f''(x) > 0.$$

Dowód. Że równanie $f(x) = 0$ ma pierwiastek, to wynika z następującej uwagi: skoro funkcja $f(x)$ ma drugą pochodną w przedziale (a, b), więc (str. 151) jej pierwsza pochodna jest ciągłą w przedziale (a, b) i tem samem funkcja $f(x)$ jest tamże ciągłą; skoro nadto $f(a) \,.\, f(b) < 0$, więc (str. 125) istnienie liczby x_0 jest widoczne. Zajmiemy się w dalszym ciągu jednym z czterech przypadków, podanych w tabelce, a mianowicie czwartym t. j. kiedy $f(a) < 0$, $f(b) > 0$; w innych przypadkach postępuje się analogicznie. Że tylko jedna liczba x_0 istnieje, wykażemy niewprost. Założmy, że istnieją takie dwie liczby x_0 i z_0 t. zn. $a < x_0 < b$, $a < z_0 < b$, $f(x_0) = 0$, $f(z_0) = 0$ i niech będzie $x_0 < z_0$. Na mocy twierdzenia Rollego istnieje liczba ξ_0 o własności $x_0 < \xi_0 < z_0$, $f'(\xi_0) = 0$. Ale jest $f''(x) < 0$ w przedziale (a, b), więc (str.   ) pochodna $f(x)$ jest funkcją malejącą, przeto jest $f'(x) < f'(\xi_0) = 0$, gdy $x > \xi_0$ czyli jest $f'(x) < 0$ w przedziale (ξ_0, b); wobec czego funkcja $f'(x)$ jest malejącą w przedziale (ξ_0, b) i będzie $f'(x) < f'(\xi_0) = 0$, gdy $x > z_0$, w szczególności $f(b) < 0$ wbrew założeniu. Doszliśmy tedy do sprzeczności, istnieje więc tylko jeden pierwiastek x_0. Wykażmy, że $f'(a) > 0$. Wykazaliśmy, że pochodna $f'(x)$ jest malejącą funkcją w przedziale (a, b), więc, gdyby było $f'(a) \leqslant 0$, toby było $f'(x) < 0$, gdy $x > a$ i przeto funkcja $f(x)$ byłaby malejącą w przedziale (a, b) i wskutek tego byłoby $f(b) < f(a) < 0$ wbrew założeniu. Jest więc $f'(a) > 0$.

Skoro $f(a) < 0$, $f''(x) < 0$, narysujmy styczną do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $[a, f(a)]$; jej równanie ma postać $Y - f(a) = f'(a)(x - a)$; punkt przecięcia się stycznej z osią x ma rzędną $Y = 0$, co daje właśnie $x_2 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. Skoro $f(a) < 0$, $f'(a) > 0$, więc $x_2 > a$. Wykażmy, że jest $x_2 < b$. W tym celu utwórzmy różnicę $b - x_2 = b - a + \frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{f(a) + (b - a) f'(a)}{f'(a)}$. Ale na mocy tw. średniej wartości jest $f(b)=f(a)+(b-a)f'(\xi)$, gdzie $a<\xi<b$; więc $f(a)+(b-a)f'(a)=f(a)+(b-a)f'(\xi)+(b-a)[f'(a)-f'(\xi)]=$ $=f(b)+(b-a)[f'(a)-f'(\xi)]$; ponieważ pochodna $f'(x)$ jest funkcją malejącą, więc $f'(a)-f'(\xi)>0$; więc $f(b)+(b-a)[f'(a)-f'(\xi)]>0$, co wykazuje, że $b>x_1$.

Wykażmy teraz, że $f(x_2)<0$, zaś $f(x_1)>0$. Otóż połóżmy $h_2=-\frac{f(a)}{f'(a)}$, tedy $x_2=a+h_2$ i, stosując tw. średniej wartości, mamy: $f(x_2)=f(a+h_2)=f(a)+h_2f'(\xi_2)$, gdzie $a<\xi_2<x_2$; przeto $f(x_2)=f(a)-\frac{f(a)}{f'(a)}f'(\xi_2)=\frac{f(a)}{f'(a)}\cdot[f'(a)-f'(\xi_2)]$. Otóż jest $f(a)<0$, $f'(a)>0$, $f'(a)>f'(\xi_2)$, bo pochodna jest funkcją malejącą, a więc $f(x_2)<0$.

Aby wykazać, że jest $f(x_1)>0$, rozważmy iloraz $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (gdy $a<x\leqq b$), który na mocy tw. średniej wartości równa się liczbie $f'(\eta)$, gdzie η jest liczbą jednoznacznie określoną, bo pochodna $f'(x)$ jest funkcją malejącą w przedziale (a, b).

Jest więc η określoną funkcją zmiennej x, gdy $a<x\leqq b$ (przyczem stale jest $a<\eta<x$). Wykażmy, że $\eta(x)$ jest funkcją rosnącą zmiennej x, gdy $a<x\leqq b$. Weźmy bowiem pochodną: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=\frac{(x-a)f'(x)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}$; ale tw. średniej wartości daje $f(x)-f(a)=(x-a)f'(\eta)$, gdzie $a<\eta<x$, więc na pochodną dostajemy wyrażenie $\frac{(x-a)[f'(x)-f'(\eta)]}{(x-a)^2}$, napewne ujemne, bo $f'(x)<f'(\eta)$.

Widzimy tedy, że, gdy zmienna x rośnie, to $f'(\eta(x))$ maleje, co dowodzi, że $\eta(x)$ jest funkcją rosnącą. Znaczenie geometryczne tego pomocniczego twierdzenia jest następujące: z punktu $(a, f(a))$ poprowadźmy sieczną do punktu $(x, f(x))$, gdzie $a<x\leqq b$; z rysunku widoczne, że nachylenie siecznej do osi x maleje, a przeto punkt styczności stycznej równoległej do siecznej [ma właśnie współrzędne η, $f(\eta)$ i] posuwa się ku punktowi $[b, f(b)]$, gdy liczba x zbliża się do liczby b (od strony „lewej“).

Teraz wykażemy, że jest $f(x_1)>0$. Otóż kładźmy $x_1=a+h_1$, gdzie $h_1=-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$. Tedy $f(x_1)=f(a+h_1)=f(a)+h_1f'(\xi_1)=$

$$=f(a)-\frac{f(a).(b-a)}{f(b)-f(a)}.f'(\xi_1)=\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)-(b-a)f'(\xi_1)];$$

otóż twierdzenie średniej wartości daje $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\eta)$, więc otrzymujemy: $f(x_1)=\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)[f'(\eta)-f'(\xi_1)]$, ale $x_1<b$, tedy $\eta(x_1)=\xi_1<\eta(b)=\eta$, więc $f'(\xi_1)>f'(\eta)$, wskutek tego $f'(\eta)-f'(\xi_1)<0$, a że też $f(a)<0$, więc $f(x_1)>0$ c. b. d. u. Podobnie należy postępować w reszcie przypadków.

Przykład 1. Weźmy znów równanie $x^3-2x-5=0$, które, jak z poprzedniego widoczne, ma jeden pierwiastek rzeczywisty, większy od liczby $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Jest $f''(x)=6x$ i niech będzie $a=2{\cdot}05$, $b=2{\cdot}1$; jest więc $f''(x)>0$, $f(2{\cdot}05)<0$, $f(2{\cdot}1)>0$; wobec tego jest $x_2=b-\frac{f(b)}{f'(b)}=2{\cdot}1-\frac{0{\cdot}061}{11{\cdot}23}<2{\cdot}1-0{\cdot}005=2{\cdot}095$, zaś $x_1=$ $=2{\cdot}05+\frac{0{\cdot}384875.0{\cdot}05}{0{\cdot}445875}$ i jest $x_1>2{\cdot}05+0{\cdot}04=2{\cdot}09$. Szukany pierwiastek znajduje się więc wewnątrz przedziału $(2{\cdot}09,\ 2{\cdot}095)$; biorąc $x_0=2{\cdot}09$ lub $x_0=2{\cdot}095$, popełniamy błąd b, w pierwszym przypadku dodatni, w drugim ujemny, w każdym razie jest $|b|<$ $<2{\cdot}095-2{\cdot}09=0{\cdot}005$; trzy cyfry $2{\cdot}09$ są dokładne!

Jak widać z powyższego, obie metody wymagają, aby dany przedział zawierał tylko jeden pierwiastek równania czyli by pierwiastek był odosobniony; do tego odosobnienia można się posłużyć metodą graficzną we wielu razach.

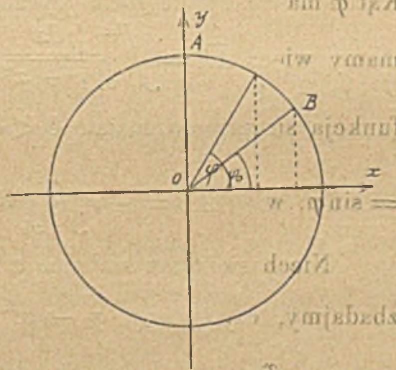
Przykład 2. Rozwiążmy równanie $x-\operatorname{tg}x=0$. Przez wykreślenie linij $y=x$, $y=\operatorname{tg}x$ stwierdzamy, że przedział $\left(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ zawiera tylko jeden pierwiastek równania, gdy n oznacza liczbę całą. Równanie to napiszemy w postaci $x\cos x-\sin x=0$; wyszukajmy pierwiastek w przedziale $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Kładąc $f(x)=x\cos x$ $-\sin x$, otrzymujemy $f(\pi)=-\pi$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$, $f''(x)=-[\sin x+$ $+x\cos x]$, więc $f''(x)>0$ w przedziale $\left(\pi,\ \pi+\frac{\pi}{2}\right)$. Czytelnik z łatwością otrzyma $x_1=\pi+\frac{\pi^2}{2(1+\pi)}$, $x_2=\frac{3\pi}{2}-\frac{2}{3\pi}$.

Dla ćwiczenia niech czytelnik rozwiąże równania: 1) $x=\sin x$, 2) $x-\varepsilon\sin x=1$, gdzie ε oznacza daną liczbę o własności $0<\varepsilon<1$.

Rozdział XIII. Całka niewłaściwa.

§ 77. Funkcja podcałkowa nieokreślona w jednym punkcie przedziału całkowania.

Przykład 1. Obliczenie długości obwodu koła (rys. 137). Jeżeli przez c oznaczymy długość ćwiartki obwodu koła, a przez l całą długość obwodu koła, natenczas będzie $l = 4c$.



Rys. 137.

Zdawałoby się na pierwszy rzut oka, że na podstawie wzoru z § 69. możemy napisać:

$$c = \int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

gdzie y jest rzędną bieżącego punktu koła. Zakładając środkowe położenie koła, mamy: $x^2 + y^2 = r^2$, a stąd $y^2 = r^2 - x^2$, co znów daje $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, ale. obierając ćwiartkę pierwszą, otrzymujemy $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Stąd $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-1/2}\left(-2x\right) = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, przeto byłoby

$$c = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx.$$

Ostatnia całka wykazuje jednak, iż powyższe rozumowanie nie jest poprawne; rozdział XI zawierał bowiem teorję całek funkcji *ciągłej* w całym przedziale całkowania, kiedy w obecnym przykładzie funkcja podcałkowa nietylko nie jest ciągłą, ale jest nieograniczoną w punkcie górnej granicy całki t. j. dla $x = r$. Całkę określoną z funkcji podcałkowej, która jest choćby w jednym punkcie przedziału całkowania nieokreśloną (w naszym przypadku nawet rośnie nieograniczenie) nazywa się całką niewłaściwą.

Symbol $\displaystyle\int_0^r \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$ jest dla nas dotąd bez znaczenia; określimy. jaką on będzie przedstawiał wartość.

Obliczmy więc długość części AB łuku (c), nie dochodząc do punktu o odciętej r, a więc dochodząc do punktu o odciętej α, gdzie $0 < a < r$ czyli obliczmy zaznaczony na rys. 137 łuk $\widehat{AB}$. Ponieważ wzdłuż łuku $\widehat{AB}$ funkcja podcałkowa jest już ciągłą, więc wolno napisać: $\widehat{AB} = \int_0^a \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$.

Użyjmy podstawienia $x = r\cos\varphi$, przyczem niech φ_0 oznacza kąt ostry taki, że $r\cos\varphi_0 = a$; nadto niech będzie $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Kąt φ ma znaczenie geometryczne, uwidocznione na rys. 137. Otrzymamy więc: $\widehat{AB} = \int_0^a \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\int_{\pi/2}^{\varphi_0} \frac{r^2 \sin\varphi d\varphi}{r|\sin\varphi|}$; ponieważ zaś funkcja $\sin\varphi$ w przedziale $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ jest dodatnią, zatem $|\sin\varphi| = \sin\varphi$; więc $\widehat{AB} = -r\int_{\pi/2}^{\varphi_0} d\varphi = r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$.

Niech się teraz zmienna a zbliża nieograniczenie do liczby (r); zbadajmy, czy wtedy $\varphi_0 \to 0$. Otóż jest $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, więc $\varphi = \arccos\frac{x}{r}$; na podstawie § 39 i 41, jak i § 7 wynika, że oczywiście kąt φ_0 zdąża do zera; przeto obliczona całka ma granicę, gdyż widoczne, że $r\left[\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right] \to r\frac{\pi}{2}$, gdy $\varphi_0 \to 0$.

W następstwie tego faktu symbolowi $\int_0^r \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, który nie miał dotąd żadnego znaczenia, możemy przez definicję nadać znaczenie następujące:

$$\int_0^r \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \lim_{a \to r} \int_0^a \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \text{ gdzie } 0 < a < r, \text{ a więc}$$

$$\int_0^r \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}r. \text{ Tedy } l = 4 \cdot \frac{\pi}{2}r = 2\pi r.$$

Przykład 2. Weźmy pod uwagę całkę $\int_0^1 \frac{dx}{x}$; ona jest niewłaściwą, gdyż funkcja podcałkowa $\frac{1}{x}$ dla dolnej granicy $x = 0$ niema żadnej określonej wartości. Żeby całce określonej $\int_0^1 \frac{dx}{x}$

móc nadać znaczenie, obliczmy całkę $\int_a^1 \frac{dx}{x}$, gdzie $0 < \alpha < 1$. Dla ostatniej całki funkcja podcałkowa jest funkcją ciągłą w przedziale $(\alpha, 1)$, więc: $\int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \left(ln x\right)_\alpha^1 = ln 1 - ln \alpha = - ln \alpha$.

Teraz załóżmy, że zmienna α zbliża się do zera; nasza całka $\int_\alpha^1 \frac{dx}{x}$ niema jednak granicy, gdyż $|ln \alpha|$ rośnie nieograniczenie. Zatem całka $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ nie oznacza żadnej liczby.

Teraz czytelnik z łatwością określi środek masy, rozpostartej jednostajnie a) na dowolnym łuku koła, b) w szczególności na ćwierci okręgu koła lub c) na półkolu. Całki bowiem nie sprawią mu żadnej trudności.

Po tych przykładach zajmiemy się ogólnem określeniem całki niewłaściwej. Weźmy pod uwagę całkę kształtu: $\int_a^b f(x)\,dx$, przyczem załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) z wyjątkiem jednego punktu x_0 przedziału, w którym funkcja $f(x)$ może być nieokreśloną. Co do liczby x_0 należy odróżnić trzy przypadki: albo $x_0 = a$ albo $a < x_0 < b$ albo $x_0 = b$.

1) Niech będzie $x_0 = a$. Wtedy weźmy całkę $\int_\alpha^b f(x)\,dx$, gdzie $a < \alpha < b$. Całka ta będzie miała znaczenie określone i jej wartość będzie funkcją zmiennej (α), którą to funkcję oznaczymy przez $F(\alpha)$ czyli $F(\alpha) = \int_\alpha^b f(x)\,dx$. Jeżeli się okaże, że funkcja $F(\alpha)$ ma granicę, gdy $\alpha \to a$, to właśnie tę granicę uważamy za wartość całki niewłaściwej $\int_a^b f(x)\,dx$ czyli $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\alpha \to a} F(\alpha)$

Granica ta określona jest w ten sposób: liczba g (będąca granicą) ma tę własność, iż do każdej liczby dodatniej ε istnieje liczba dodatnia $\delta > 0$ tak, iż z nierówności $0 < \alpha - a < \delta$ wynika nierówność $|F(\alpha) - g| < \varepsilon$. Granicę tę możemy nazwać prawostronnną.

2) Niech będzie $x_0 = b$. Wtedy weźmiemy całkę $\int_a^\beta f(x)\,dx$, gdzie jest $a < \beta < b$. Całka ta będzie zupełnie zrozumiałą; jej wartość będzie pewną funkcją $\Phi(\beta)$ zmiennej β czyli $\Phi(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx$. Jeżeli się okaże, że funkcja $\Phi(\beta)$ ma granicę γ, gdy

$\beta \to b$, to właśnie przez całkę niewłaściwą $\int_a^b f(x)dx$ rozumieć chcemy (przez definicję) granicę γ czyli $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)\,dx$. Granica γ jest określona następująco: liczba γ ma tę własność, iż do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że nierówność $0 < b - \beta < \delta$ pociąga za sobą nierówność: $|\Phi(\beta) - \gamma| < \varepsilon$. Granicę tę nazwiemy lewostronną. W obu przypadkach wyłączaliśmy punkt nieciągłości z przedziału całkowania!

3) Wreszcie załóżmy, że jest $a < x_0 < b$. Otóż przez całkę niewłaściwą $\int_a^b f(x)dx$ rozumieć będziemy liczbę s, jeżeli:

1) obie całki niewłaściwe $\int_a^{x_0} f(x)\,dx$, $\int_{x_0}^b f(x)\,dx$ oznaczają określone liczby w myśl wywodów dopieroco przedstawionych

i 2) jeżeli $s = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$. Jest więc:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to x_0} \int_a^\beta f(x)\,dx + \lim_{\alpha \to x_0} \int_\alpha^b f(x)\,dx,$$

gdzie jest: $a < \beta < x_0 < \alpha < b$.

Zauważmy, że w § 29a zajmowaliśmy się warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia granicy funkcji; wobec tego, że w obecnych naszych rozważaniach jest mowa o granicy lewostronnej, wzgl. prawostronnej, należy i odnośny warunek z § 29a odpowiednio przekształcić.

A mianowicie: 1) warunek konieczny i wystarczający, aby funkcja $\psi(x)$ miała w punkcie $x = x_0$ granicę lewostronną, polega na tem, aby do każdej dodatniej liczby ε istniała dodatnia liczba δ taka, że dla wszelkich liczb x', x'', spełniających warunek $x_0 - \delta < x' < x_0$, $x_0 - \delta < x'' < x_0$, zachodziła nierówność $|\psi(x') - \psi(x'')| < \varepsilon$.

2) Warunek konieczny i wystarczający, aby funkcja $\psi(x)$ posiadała granicę prawostronną w punkcie x_0, polega na tem, aby do każdej dodatniej liczby ε istniała dodatnia liczba δ taka, że dla wszelkich liczb x', x'', spełniających warunki $x_0 < x' < x_0 + \delta$, $x_0 < x'' < x_0 + \delta$, zachodziła nierówność $|\psi(x') - \psi(x'')| < \varepsilon$. Dowód obu twierdzeń pozostawiamy czytelnikowi.

Przykład 3. Niech będzie $a < x_0 < b$, $0 < m < 1$; zbadajmy całkę $I = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{|x-x_0|^m} dx$, przyczem $\varphi(x)$ oznacza funkcję ciągłą w całym przedziale (a,b). Widoczne, że należy zbadać dwie całki:

$$I_1 = \int_a^{x_0} \frac{\varphi(x)}{|x-x_0|^m} dx, \quad I_2 = \int_{x_0}^b \frac{\varphi(x)}{|x-x_0|^m} dx,$$

czyli całki $I_1 = \int_a^{x_0} \frac{\varphi(x)}{(x_0-x)^m} dx, \quad I_2 = \int_{x_0}^b \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^m} dx.$

Dla zbadania tych całek trzeba utworzyć funkcje:

$$\psi_1(x) = \int_a^x \frac{\varphi(x)}{(x_0-x)^m} dx, \quad \psi_2(x) = \int_x^b \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^m} dx$$

i rozstrzygnąć, czy istnieje granica lewostronna funkcji $\psi_1(x)$ i prawostronna funkcji $\psi_2(x)$ w punkcie x_0. Zbadajmy, czy warunek konieczny i wystarczający istnienia tych granic jest spełniony.

Weźmy $a < x' < x_0$, $a < x'' < x_0$ dla funkcji $\psi_1(x)$; otóż

$$\psi_1(x') - \psi_1(x'') = \int_a^{x'} \frac{\varphi(x)}{(x_0-x)^m} dx - \int_a^{x''} \frac{\varphi(x)}{(x_0-x)^m} dx =$$

$$= \int_a^{x'} \frac{\varphi(x)}{(x_0-x)^m} dx + \int_{x''}^{a} \frac{\varphi(x)}{(x_0-x)^m} dx = \int_{x''}^{x'} \frac{\varphi(x)}{(x_0-x)^m} dx.$$

Jeżeli $M = \mathrm{Max}\,|\varphi(x)|$ w przedziale (a,b), to $|\psi_1(x') - \psi_1(x'')| \leqslant M . \left| \int_{x''}^{x'} \frac{dx}{(x_0-x)^m} \right|$; ale $\int_{x''}^{x'} \frac{dx}{(x_0-x)^m} = \int_{x''}^{x'} (x_0-x)^{-m} dx = \left(- \frac{(x_0-x)^{1-m}}{1-m} \right)_{x''}^{x'} = \frac{1}{1-m} [(x_0-x'')^{1-m} - (x_0-x')^{1-m}]$.

Skoro obierzemy $0 < x_0 - x' < \delta$, $0 < x_0 - x'' < \delta$, to $\left| \int_{x''}^{x'} \frac{dx}{(x_0-x)^m} \right| < \frac{2\delta^{1-m}}{1-m}$, gdyż jest $1 > m > 0$. Obierzmy $\varepsilon > 0$ i następnie $\delta > 0$ tak, aby było $\delta < \left(\frac{\varepsilon(1-m)}{2} \right)^{\frac{1}{1-m}}$, to $|\psi_1(x') - \psi_1(x'')| < M . \varepsilon$. Stąd widzimy, że istnieje $\lim\limits_{x \to x_0} \psi_1(x)$.

Podobnie wykaże czytelnik, że istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \psi_2(x)$. Wskutek tego całka I ma określone znaczenie.

Przykład 4. Zbadajmy całkę $I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; jest to całka niewłaściwa, gdyż funkcja podcałkowa na obu końcach przedziału całkowania jest nieokreśloną. Wobec tego trzeba rozważyć całki $I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $I_2 = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; każda z nich ma funkcję podcałkową nieokreśloną już tylko w jednym końcu przedziału całkowania. Otóż $I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$. Używając oznaczeń przykładu 3, możemy położyć $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x_0 = -1$, $m = \frac{1}{2}$. Istnieje więc granica: $\lim\limits_{x \to -1} \int_{x}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. I wiemy, że $\int_{x}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin x$ dla $-1 < x < +1$; ponieważ funkcja $\arcsin x$ jest ciągłą w całym przedziale $(-1, +1)$, więc (jak wiadomo z § 7) będzie: $\lim\limits_{x \to -1} \int_{x}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$. Podobnie $\int_{0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \to \frac{\pi}{2}$, gdy $x \to 1$. Przeto $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.

Przykład 5. Rozpatrzmy całkę $I = \int_{0}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$; wartość tej całki zależy od wyboru wykładników a, b i oznaczymy ją przez $B(a, b)$. [Beta]. Jest to jedna z całek Eulera [1]), drugą funkcję, funkcję Gamma poznamy w drugiej części obecnego rozdziału (§ 78).

Jeżeli $a > 1$, to funkcja podcałkowa na dolnej granicy całkowania jest określona; dla $a = 1$ należy położyć liczbę 1 za wyrażenie x^0 w całym przedziale całkowania. Rozważmy przypadek $a < 1$ i rozpatrzmy całkę $\int_{0}^{1/2} \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}}\,dx$; aby móc stosować rozważania przykładu 3, wystarczy przyjąć $0 < 1 - a < 1$ czyli $0 < a < 1$.

Podobnie dla górnego krańca całkowania należy przeprowadzić zupełnie analogiczne rozważania: one doprowadzają nas do tego, że funkcja Beta jest określona, gdy jest $a > 0$ i $b > 0$.

Połóżmy w całce $1 - x = u$, to

$$B(a, b) = \int_{0}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = -\int_{1}^{0} (1-u)^{a-1} u^{b-1}\,du =$$

$$= \int_{0}^{1} u^{b-1}(1-u)^{a-1}\,du = B(b, a);$$

jest więc $B(a, b) = B(b, a)$; przestawienie liczb (a, b) nie wpływa na

[1]) Leonard Euler, matematyk niemiecki, ur. 1707, um. 1783.

zmianę wartości całki. Funkcja Beta jest więc symetryczną funkcją zmiennych a, b.

Przykład 6. Niech k oznacza liczbę o własności $0 < k < 1$ i rozważmy całkę $I_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$; całka ta nie da się wyrazić w sposób dotychczas poznany przez funkcje elementarne — jest to więc nowa funkcja — zwana całką eliptyczną (1go rodzaju). O ile jest $|x| < 1$, to funkcja $I_1(x)$ jest określoną. Na podstawie rozważań przykładu 3 czytelnik z łatwością wykaże, że $I_1(1)$, $I_1(-1)$ oznaczają też liczby określone. Kładąc $t = \sin u$, możemy otrzymać: $I_1(\sin\varphi) = \int_0^\varphi \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$; całkę tę oznaczymy przez $F(k, \varphi)$; φ nazywa się jej amplitudą, k jej modułem.

Całkę $I_2(x) = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ zowie się całką eliptyczną 2go rodzaju. Ona jest określona, gdy $|x| \leqq 1$. Kładąc $x = \sin u$, otrzymuje się: $I_2(\sin\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\sin^2 u\,du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$. Jeżeli położymy $E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,du$, to widoczne, że

$$I_2(\sin\varphi) = \frac{F(k, \varphi) - E(k, \varphi)}{k^2}.$$

Wreszcie całkę: $I_3(x) = \int_0^x \frac{dx}{(x^2-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ zowie się całką eliptyczną 3go rodzaju.

Nazwa tych całek pochodzi stąd, że się je otrzymuje przy obliczaniu łuku elipsy (hyperboli i lemniskaty), (zob. § 86). Podział ich na rodzaje, jak i oznaczenia $E(k, \varphi)$, $F(k, \varphi)$ pochodzą od francuskiego matematyka Legendre'a (ur. 1752, um. 1833).

Przykład 7. W § 66 obliczaliśmy całkę

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2a\cos x + a^2}}$$

przy założeniu, że $a \neq \pm 1$. Obecnie zbadamy przypadek, kiedy jest $a = +1$ lub $a = -1$. Dla $a = +1$ otrzymujemy $I = \int_0^\pi \frac{\sin x}{\sqrt{2(1-\cos x)}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$. Jest to całka niewłaściwa której funkcja podcałkowa jest nieokreśloną dla $x=0$. Niech będzie $0<\alpha<\pi$ i weźmy całkę

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\pi}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\pi}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx=\int_{\alpha}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=$$

$$=\left(2\sin\frac{x}{2}\right)_{\alpha}^{\pi}=2-2\sin\frac{\alpha}{2},$$

co ma granicę, równą liczbie 2, gdy $\alpha\to 0$. Widzimy tedy, że $I=2$ dla $\alpha=1$.

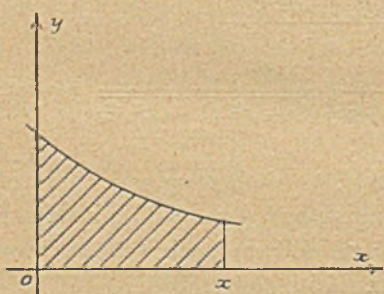
Podobnie wykaże czytelnik, że dla $\alpha=-1$ całka I ma również określone znaczenie i że jest $I=2$.

Tem samem nie należy punktów A, B na rys. 100 wykluczać.

§ 78. Nieskończone granice całkowania.

Drugi typ całek niewłaściwych będzie polegał na tem, że conajmniej jedna z granic całkowania jest „nieskończoną“.

Rozpatrzmy najpierw przykład. Obliczmy całkę $I=\int_0^x e^{-t}dt$.



Rys. 138.

Całka I będzie funkcją zmiennej x i jeżeli jest $x>0$, będzie miarą pewnego pola, które jest zakreskowane na rys. 138. Otóż jest $\int e^{-t}dt=-e^{-t}+$ stała, tedy

$$I=\int_0^x e^{-t}dt=\left(-e^{-t}\right)_0^x=1-e^{-x}.$$

Załóżmy teraz, że zmienna x rośnie nieograniczenie, co oznaczymy znakiem $x\to+\infty$. Czy całka I ma granicę w myśl określenia ze str. 380? W tym celu należy wykazać, że funkcja e^{-x} dla $x\to+\infty$ ma granicę i należy obliczyć tę granicę. Otóż zauważmy, że na mocy § 26 jest $e^x>1+x$ dla $x>0$. Jest więc $0<e^{-x}=\frac{1}{e^x}<\frac{1}{1+x}<\frac{1}{x}$ dla $x>0$, skąd wynika bezpośrednio, że $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$. (Ten szczegół niech uzupełni wywody przykładu 1 ze str. 381). Widzimy tedy, że $\lim\limits_{x\to+\infty} I = 1$. Otóż przez całkę $\int_0^\infty e^{-t}dt$ rozumieć będziemy granicę $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt$. Jest więc $\int_0^\infty e^{-t}dt = 1$.

Przyjmiemy następujące określenie: jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą dla każdej liczby x spełniającej związek $x \geqslant a$ i jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt$, to przez całkę $\int_a^\infty f(t)\,dt$ rozumiemy właśnie granicę $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt$ czyli $\int_a^\infty f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt$.

Zupełnie podobnie, jak w § 29a można udowodnić następujące twierdzenie: warunek konieczny i wystarczający, by funkcja $\varphi(x)$ miała granicę dla $x \to +\infty$, polega na tem, że do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba A o tej własności, iż dla wszystkich liczb x', x'' o własności $x' \geqslant A$, $x'' \geqslant A$ jest $|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon$.

Przykład 1. Udowodnimy następujące twierdzenie: jeżeli $a > 0$, jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągłą dla wszystkich $x \geqslant a$, jeżeli jest $|f(x)| \leqslant M$, gdzie M jest liczbą stałą i jeżeli ν oznacza stałą, większą od jedności, to całka niewłaściwa $\int_a^\infty \frac{f(t)}{t^\nu}\,dt$ ma określone znaczenie.

W tym celu obierzemy dowolnie x', x'', ale tak, by było $a \leqslant x' \leqslant x''$ i rozpatrzmy całkę $\int_{x'}^{x''} \frac{f(t)}{t^\nu}\,dt$. Otóż $\left|\int_{x'}^{x''} \frac{f(t)}{t^\nu}\,dt\right| \leqslant M\int_{x'}^{x''}\frac{dt}{t^\nu} =$
$= M\left\{\frac{1}{(\nu-1)x'^{\nu-1}} - \frac{1}{(\nu-1)x''^{\nu-1}}\right\} \leqslant \frac{M}{(\nu-1)x'^{\nu-1}}$. Do naprzód wybranej liczby $\varepsilon > 0$ wybierzmy liczbę $A > 0$ tak, by $\frac{M}{(\nu-1)A^{\nu-1}} < \varepsilon$ t. zn. $A > \left(\frac{M}{(\nu-1)\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$.

Gdy wtedy przyjmiemy $x' \geqslant A$, to $\left|\int_{x'}^{x''}\frac{f(t)}{t^\nu}\,dt\right| < \varepsilon$. Wobec tego całka $\int_a^\infty \frac{f(t)}{t^\nu}\,dt$ ma określone znaczenie i twierdzenie temsamem udowodnione.

Przykład 2. Rozważmy całkę $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$, gdzie s oznacza liczbę, niezależną od x. Okażemy, że funkcja Gamma dla $s > 0$ jest określoną. Jestto całka Eulera (zob. str. 472).

Otóż, gdy $s=1$ otrzymujemy całkę $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$, już nam znaną i jest $\Gamma(1)=1$. Jeżeli $s>1$, to całka $\Gamma(s)$ jest drugim typem całki niewłaściwej, gdy zaś $0<s<1$, to łączy w sobie oba typy, bo dla dolnej granicy całkowania jest funkcja podcałkowa nieokreśloną.

Niech więc będzie najpierw $s>1$. Niech m oznacza największą liczbę naturalną, zawartą w liczbie s t. zn. $m\leqslant s<m+1$. Otóż $m\geqslant 1$; na mocy § 26 jest $e^x>\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, o ile $x>0$ i o ile n oznacza liczbę naturalną n. Przeto $e^x>\left(1+\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}>a\,.\,x^{m+1}$, gdzie a oznacza pewną liczbę dodatnią, zależną od liczby m, łatwą do obliczenia.

Wobec tego: $e^{-x}\,.\,x^{s-1}=\frac{x^{s-1}}{e^x}<\frac{x^{s-1}}{ax^{m+1}}=\frac{1}{a\,.\,x^{(m+1-s)+1}}=\frac{1}{ax^{\nu}}$, gdzie $\nu=(m+1-s)+1>1$. Niech będą liczby x', x'' dowolnie (na razie) obrane, byle było $0<x'<x''$. Tedy

$$\left|\int_{x'}^{x''} e^{-x}x^{s-1}\,dx\right|<\int_{x'}^{x''}\frac{1}{ax^{\nu}}\,dx=\frac{1}{a}\left\{\frac{1}{(\nu-1)x'^{\nu-1}}-\frac{1}{(\nu-1)x''^{\nu-1}}\right\}<$$

$$<\frac{1}{a(\nu-1)x'^{\nu-1}}$$

i temsamem można uczynić dowolnie małem, o ile liczba x' jest dostatecznie wielką. To dowodzi, że całka $\int_0^x e^{-t}t^{s-1}\,dt$ ma granicę dla $x\to+\infty$ i przeto funkcja $\Gamma(s)$ ma określoną wartość, o ile jest $s>1$.

Niech będzie teraz $0<s<1$. Wtedy rozłóżmy całkę $\Gamma(s)$ na dwie całki $\Gamma(s)=\int_0^1 e^{-t}\,.\,t^{s-1}\,dt+\int_1^{\infty} e^{-t}\,.\,t^{s-1}\,dt$ i zbadajmy każdą z nich z osobna. Otóż pierwsza całka $I_1=\int_0^1 e^{-t}\,.\,t^{s-1}\,dt$ jest niewłaściwą, ponieważ jej funkcja podcałkowa na dolnej granicy całkowania jest nieokreśloną. Ale $e^{-t}\,.\,t^{s-1}=\frac{1}{e^t\,.\,t^{1-s}}$, zaś $\frac{1}{e^t}\leqslant 1$ dla liczb t z przedziału $(0, 1)$. Przeto stosując twierdzenie z przykładu 3 § 77, jesteśmy pewni, że całka I_1 ma określone znaczenie. Ponieważ dalej $e^t>1+t>t$ dla liczb $t>0$, więc $e^{-t}\,.\,t^{s-1}<\frac{1}{t^{2-s}}$, ale $2-s>1$, więc (zob. tw. z przykładu 1) i całka I_2 ma określone znaczenie. Temsamem wykazaliśmy, że funkcja $\Gamma(s)$ jest określoną dla liczb dodatnich s.

W przypadku, kiedy s oznacza liczbę naturalną, możemy z łatwością obliczyć wartość funkcji $\Gamma(s)$.

Niech n oznacza liczbę naturalną. Otóż $\int_0^x e^{-t}\,t^{n-1}\,dt = -e^{-x}.x^{n-1}+(n-1)\int_0^x e^{-t}.t^{n-2}dt$, co jest dozwolone, o ile $n>1$. Obie strony mają granice dla $x \to +\infty$, przeto $\Gamma(n)=(n-1).\Gamma(n-1)$. Dla $n=1$ jest $\Gamma(1)=1$. Gdy $n>2$, będzie $\Gamma(n-1)=(n-2).\Gamma(n-2)$ itd.... $\Gamma(2)=1.\Gamma(1)=1$. Mnożąc te równości otrzymujemy $\Gamma(n)=(n-1)!$ dla $n>1$. Jeżeli przyjmiemy, że $0!=1$, to ostatni wzór na całkę $\Gamma(n)$ pozostaje słusznym i dla liczby $n=1$. Mamy tedy $\Gamma(n)=(n-1)!$ dla dowolnych liczb naturalnych n.

Przykład 3. Obliczmy całkę $I=\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^3}$. Przez taką całkę będziemy rozumieli granicę $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^{-1}\frac{dx}{x^3}$, gdy $\alpha<-1$, o ile taka granica istnieje (zob. str. 380). Otóż $\int_\alpha^{-1}\frac{dx}{x^3}=\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)_\alpha^{-1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\alpha^2}$; otóż, gdy $\alpha\to-\infty$, to ostatnie wyrażenie ma granicę równą $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Wobec tego przez całkę $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^3}$ rozumiemy liczbę $-\frac{1}{2}$.

Czytelnik z łatwością teraz określi ogólnie całkę niewłaściwą $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

Przykład 4. Przez całkę niewłaściwą $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ będziemy rozumieli sumę całek niewłaściwych I_1+I_2, gdzie $I_1=\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx$, $I_2=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$, o ile obie całki I_1, I_2 mają określone znaczenie.

W tym celu zbadajmy, czy istnieją granice $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^0 e^{-x^2}dx$ i $\lim\limits_{\beta\to\infty}\int_0^\beta e^{-x^2}dx$. Otóż jest $\int_0^\beta e^{-x^2}dx=-\int_0^{-\beta} e^{-y^2}dy$, jeżeli położymy $x=-y$. Przeto $\int_0^\beta e^{-x^2}dx=\int_{-\beta}^0 e^{-y^2}dy$. Jeżeli więc okażemy, że lewa strona ostatniej równości ma granicę dla $\beta \to \infty$, to i prawa będzie ją posiadała czyli jeżeli całka I_2 ma znaczenie określone, to też całka I_1 ma określoną wartość i jest nadto $I_1 = I_2$.

Wobec tego wystarczy nam zająć się całką $\int_0^\beta e^{-x^2}dx$. Wiemy że $e^{x^2} > 1 + x^2$, więc $0 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$. Niech będzie $0 < x' < x''$ i na razie dowolne. Otóż będzie:

$$\left|\int_{x'}^{x''} e^{-x^2}dx\right| < \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{1+x^2} < \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} < \frac{1}{x'}.$$

Do liczby $\varepsilon > 0$, dowolnie zresztą obranej, obliczmy liczbę $A = \frac{1}{\varepsilon}$ i połóżmy $A \leqslant x'$. Wtedy $\left|\int_{x'}^{x''} e^{-x^2}dx\right| < \frac{1}{x'} \leqslant \frac{1}{A} = \varepsilon$, to zaś wykazuje, że istnieje granica $\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta e^{-x^2}dx$. Całka I_2 ma więc określoną wartość i przeto $I_1 = I_2$. Wobec tego $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Całkę strony prawej obliczymy w § 95.

Przykład 5. Fizyka określa ciało doskonale czarne (absorbujące), jako ciało absorbujące wszelkie promieniowanie, które na nie pada (zob. Witkowski, Zasady fizyki, tom II). Wskutek tego nie jest wykluczonem świecenie ciała czarnego, o ile się je ogrzeje. Ciało czarne w temperaturze bezwzględnej T wysyła energję według prawa Plancka:

$$I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{c_1 d\lambda}{(e^{c_2/\lambda T} - 1)\lambda^5} \quad (c_1, c_2 \text{ stałe dodatnie})$$

przez emisję promieni o długości fal od λ_1 do λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$. Cała energja wynosić będzie $I_0 = \int_0^\infty \frac{c_1 d\lambda}{(e^{c_2/\lambda T} - 1)\lambda^5}$. Całka ta jest niewłaściwą, mającą znaczenie, jak łatwo się przekonamy na podstawie § 86; gdy bowiem $x > 0$, to $e^x > 1 + \frac{x^5}{5!}$, więc $e^{c_2/\lambda T} - 1 > \frac{c_2^5}{\lambda^5 T^5 . 5!}$ wskutek czego $\frac{c_1}{(e^{c_2/\lambda T} - 1)\lambda^5} < \frac{5!T^5 c_1}{c_2^5}$ przeto całka $\int_\alpha^1 \ldots$ ma granicę, gdy $\alpha \to 0$, będąc dodatniem; że całka ma określone znaczenie także ze względu na górną granicę, to wynika już łatwo. Połóżmy $c_2/\lambda T = x$, to

$$\int_0^\infty \frac{c_1 d\lambda}{(e^{c_2/\lambda T}-1)\lambda^5} = \frac{c_1}{c_2^4} \cdot T^4 \cdot \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Otóż całka niewłaściwa prawej strony ma pewną wartość liczebną; więc $I_0 = a \cdot T^4$, gdzie a oznacza stałą. Ostatnia równość wyraża prawo Stefana o emisji ciała czarnego. Energja promienista jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury bezwzględnej ciała czarnego.

Zbadajmy, w jakim zakresie fal przy danej temperaturze T jest energja maximum. Należy więc znaleźć minimum mianownika $f(\lambda) = \lambda^5(e^{c_2/\lambda T} - 1)$ funkcji podcałkowej. Otrzymujemy $f'(\lambda) = \lambda^4\left[e^{c_2/\lambda T}\left(5 - \frac{c_2}{\lambda T}\right) - 5\right]$. Otóż $f'(\lambda) = 0$ daje $\lambda = 0$ albo $e^x(5 - x) = 5$, gdy $x = c_2/\lambda T$. Równanie to ma pierwiastek $x = 0$ (dla nas bez znaczenia) i pierwiastek między liczbami 4 i 5; przybliżenie pierwiastka można obliczyć według § 76. Oznaczmy ten pierwiastek przez x_0, to $\lambda T = c_2/x_0$, co daje maximum, bo $f''(\lambda) < 0$ dla znalezionej wartości na λ. Zarazem widać, że $\lambda = c_2/x_0 T$ czyli gdy temperatura T rośnie, to λ maleje czyli maximum energji przesuwa się ku fioletowemu końcowi widma.

Zadania do rozwiązania.

Do § 1–3.

Wykresy funkcji mają we wielu zagadnieniach znaczenie bardzo wielkie. Dają bowiem szybko pogląd na zależność wielkości jednej od drugiej, pozwalają często rozwiązać bardzo szybko zadania, których analityczne rozwiązanie jest dłuższe. Niech czytelnik wykona następujące wykresy:

1) Wykres objętości wody w zależności od temperatury:

$t = 0^0$ C, $v = 1{\cdot}013$ dm³	$t = 10^0$ C, $v = 1{\cdot}025$ dm³
$t = 2^0$ C, $v = 1{\cdot}003$ „	$t = 12^0$ C, $v = 1{\cdot}045$ „
$t = 4^0$ C, $v = 1{\cdot}000$ „	$t = 14^0$ C, $v = 1{\cdot}070$ „
$t = 6^0$ C, $v = 1{\cdot}003$ „	$t = 16^0$ C, $v = 1{\cdot}099$ „
$t = 8^0$ C, $v = 1{\cdot}011$ „	$t = 18^0$ C, $v = 1{\cdot}135$ „

$t = 20^0$ C, $v = 1{\cdot}174$ dm³.

Otrzymane punkty niech czytelnik tak połączy, by powstała ciągła krzywa, intuicyjnie uzasadniona.

2) Wykres średniej temperatury dziennej w przeciągu jednego roku.

3) Wykres kursu dolara w przeciągu 3 tygodni:

1. VI. 1923	54.500	13. VI. 1923	74·250
3. VI. „	55.850	14. VI. „	73.200
4. VI. „	54.500	17. VI. „	93.000
6. VI. „	57.600	18. VI. „	105.000
7. VI. „	56.930	20. VI. „	135.000
8. VI. „	58.500	21. VI. „	170.000
10. VI. „	67.500	22. VI. kurs oficjalny	80.000
11. VI. „	73.000	23. VI. „ „	100 000

25. VI. 1923 kurs oficjalny 100.000 Mk.

4) Wykres długości iskry elektrycznej w zależności od różnicy potencjału:

5 cm	17·3 woltów	10 cm	21·7 woltów
6 „	18·5 „	11 „	22·1 „
7 „	19·6 „	12 „	22·5 „
8 „	20·5 „	13 „	23·3 „
9 „	21·1 „		

5) Ruch dwóch pociągów określa następujący rozkład jazdy:

Czas	Odległość w km	Stacja	Czas
4^{08}	0	Toruń	14^{05}
4^{57} 5^{12}	30	Bygdoszcz	12^{35} 12^{20}
5^{52} 5^{58}	91	Terespol	11^{22} 11^{12}
6^{06} 6^{11}	102	Laskowice	10^{59} 10^{51}
6^{45} 6^{46}	137	Smętowo	10^{15} 9^{49}
7^{27} 8^{06}	178	Tczew	8^{46} 8^{24}
8^{45}	211	Gdańsk	7^{39}

Z dwóch liczb w kolumnie pierwszej i ostatniej, należących do jednej stacji, oznacza jedna czas przyjazdu, druga czas wyjazdu pociągu ze stacji. Niech czytelnik narysuje wykres na płaszczyźnie, na której odcięte oznaczają czas, rzędne odległości w km od Torunia. Na wykresie znajdziemy wtedy łatwo chwilę mijania się obu pociągów, jak i miejsce ich mijania się. Co oznacza mniej lub więcej strome nachylenie części wykresu względem osi odciętych?

6) Ruch obu wskazówek zegara zilustrować na wykresie (czas; kąt obrotu); z wykresu odczytać chwile, w których obie wskazówki się nakrywają.

7) Gdy $f(x)=x^4+15x^3-x-1$ obliczyć $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(x+h)$.

8) Gdy $f(x)=f(-x)$ funkcja zowie się parzystą, gdy zaś $f(-x)=-f(x)$, to funkcja zowie się nieparzystą. Zbadać, która z funkcyj jest parzystą, a która nieparzystą: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, x^4-5x^2+1, x^3-x.

9) Wykazać, że iloczyn dwóch funkcyj nieparzystych jest funkcją parzystą.

Do § 5—17.

10) Znaleźć granice $\lim\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)$, gdy $x \to \frac{\pi}{2}$; $\lim \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$, gdy $x \to 0$; $\lim\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right)$, gdy $x \to a$.

11) Znaleźć 1°, $1'$, $1''$ w radjanach.

12) Gdy $f(x)=x^3$, znaleźć $f(1)$, $f(1+1)$, $f(1{\cdot}1)$, $f(1{\cdot}01)$, $f(1{\cdot}001)$ i ilorazy różnicowe $\frac{f(2)-f(1)}{1}$, $\frac{f(1{\cdot}1)-f(1)}{0{\cdot}1}$, $\frac{f(1{\cdot}01)-f(1)}{0{\cdot}01}$, $\frac{f(1{\cdot}001)-f(1)}{0{\cdot}001}$.

13) Niech $y=x^2$, gdy x wymierne, zaś $y=-x^2$, gdy x niewymierne; wykazać, że y jest funkcją ciągłą w punkcie $x=0$.

14) Znaleźć $\sin 10'$ i porównać z ilością radjanów kąta $10'$.

15) Wykazać, że krzywa $xy=c$, gdzie $c>0$, jest w układzie prostokątnym hyperbolą o ogniskach $F_1(\sqrt{2c}, \sqrt{2c})$, $F_2(-\sqrt{2c}, -\sqrt{2c})$ i o długości osi rzeczywistej $2a=2\sqrt{2c}$.

16) Wykazać ciągłość funkcyj: $\cos x$, $\operatorname{tg} x\left[x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{ctg} x\,[x \neq n\pi]$.

17) Znaleźć punkty nieciągłości funkcyj: $\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$, $\frac{x+1}{x^2-1}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

18) Wykazać, że funkcja $y=\sqrt{x}$ jest ciągłą, gdy $x>0$.

19) Znaleźć $\lim\left(\frac{\sqrt{5+2x}-\sqrt{5-2x}}{x}\right)$, gdy $x\to 0$. $\left(\text{Odp. } \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

20) Wykazać, że $\lim\left(\frac{\sin nx}{x}\right)=n$, gdy $x\to 0$.

21) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)=0$.

Do § 20—25.

22) Gdy a oznacza liczbę stałą o własności $a\geqq -1$, znaleźć granicę ciągu a) $w_n=\sqrt{n+a}-\sqrt{n}$, b) $w_n=\sqrt{n(n+a)}-n$.

23) Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_\varkappa . n^\varkappa + a_{\varkappa-1}n^{\varkappa-1}+\ldots+a_1 n+a_0}{b_\iota n^\iota + b_{\iota-1}n^{\iota-1}+\ldots+b_1 n+b_0}$, gdzie $a_0,\ldots,$ $a_\varkappa$, $b_0,\ldots b_\iota$ oznaczają stałe liczby. Jaki ma być stosunek liczb całkowitych nieujemnych ι, $\varkappa$, by granica istniała? ($a_\varkappa\neq 0$, $b_\iota\neq 0$).

24) Niech $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$; podać wykres tej funkcji.

25) Znaleźć granicę ciągu $w_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$.

[Położyć $\frac{1}{\varkappa(\varkappa+1)}=\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\varkappa+1}$]

26) Niech $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$; znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Odp. Metodą indukcji zupełnej wykazuje się, że $0<a_n<2$; następnie tworzymy $a_{n+1}-a_n=\sqrt{2+a_n}-a_n=\frac{2+a_n-a_n^2}{\sqrt{2+a_n}+a_n}$; ponieważ $0<a_n<2$, więc trójmian $2+a_n-a_n^2>0$, tedy $a_{n+1}>a_n$; stąd istnieje $\lim a_n=g$, gdzie $g=\sqrt{2+g}$, co daje $g=2$.

27) Zbiornik gazu mający v cm³ objętości załączono do pompy pneumatycznej, której walec tłokowy ma v_0 cm³, wskutek czego przy każdym skoku tłoka gaz o pierwotnej objętości v cm³ zajmuje objętość $v+v_0$ cm³; znaleźć gęstość gazu d_n po n skokach. Znaleźć $\lim\limits_{n\to\infty}d_n$.

Do § 26—27.

28) Jeżeli lina, zwisająca pionowo, ma mieć jednakową wytrzymałość na ciągnienie w każdym przekroju poziomym, to powinien się przekrój liny od dołu ku górze zwiększać i mianowicie

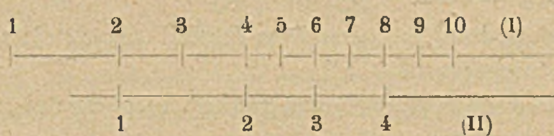
mechanika wykazuje, że $y = y_0 e^{ax}$, gdzie y oznacza wielkość przekroju liny w odległości x od dolnego końca liny; a oznacza współczynnik stały, zależny od materjału, z którego lina zrobiona; podać wykres funkcji y.

29) Kapitał K_0 złotych, dany na $p\%$, urasta po roku do wartości $K_1 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Gdyby oprocentowanie następowało nie po roku, ale po $\frac{1}{n}$ części roku, to urasta po roku do wartości $K_n = \\ = K_0\left(1 + \frac{p}{n \cdot 100}\right)^n$. Stąd $\lim_{n \to \infty} K_n = K_0 \cdot e^a$, gdzie $a = \frac{p}{100}$; mówi się, że wartość graniczna odpowiadałaby „ciągłemu" oprocentowaniu.

30) Do wykonywania takich działań, jak mnożenie, dzielenie, obliczenie drugiej lub trzeciej potęgi, drugiego lub trzeciego pierwiastka posługuje się fizyk, chemik, inżynier przyrządami, najczęściej t. zw. suwakiem logarytmicznym, którego zasadę właśnie wyjaśnimy.

Na dodatniej półosi liczbowej zaznaczmy punkt o odciętej $\log x$ przez x, a więc początek układu oznaczmy nie zerem, ale jedynką, bo $\log 1 = 0$; punkt o odciętej 1 oznaczmy liczbą 10; punkt o odciętej 0·477 przez 3 itd. Czytelnik to oznaczanie punktów łatwo przeprowadzi przy pomocy tablic logarytmicznych. Niech nadto czytelnik użyje dwóch skrawków papieru i na każdym z nich tę sztuczną podziałkę wykona, ale tak, by na pierwszym skrawku podziałka przypadała na dolnym brzegu, zaś na drugim skrawku na brzegu górnym.

Załóżmy, że mamy pomnożyć 2×4. W tym celu liczbę 1 ze skrawka II umieszczamy (zob. rys. poniżej) pod liczbą 2 ze skrawka I i odczytujemy liczbę skrawka I, stojącą nad liczbą 4 skrawka II; będzie to właśnie liczba 8.



Że w ten sposób dochodzimy do iloczynu, łatwo wykazać. Załóżmy, bowiem, że liczbę 1 skrawka II umieściliśmy pod liczbą x skrawka I i że nad liczbą y skrawka II leży na skrawku I liczba z; wykażemy, że $z = xy$. Rzeczywiście długość rzeczywista na skrawku (I) od punktu 1 do x wynosi tylko $\log x$, na skrawku II od 1 do y

tylko $\log y$, więc długość na skrawku I od 1 do z wynosi $\log x + \log y$ i zarazem $\log z$; więc $\log x + \log y = \log z$, stąd $z = xy$, co mieliśmy wykazać. Stąd czytelnik sam wyszuka regułę dla dzielenia, jakoteż sam wykona podziałkę dla obliczenia drugiego pierwiastka itd. W handlu są suwaki różnych firm niemieckich, niedawno ukazał się przyrząd we formie tarczy kolistej, wykonany przez jedną z firm wiedeńskich. Przy dzisiejszem zapotrzebowaniu odnośnych przyrządów w Polsce mamy nadzieję, że i u nas znajdzie się firma, któraby uczyniła ich import do naszego państwa zbędnym.

Do § 32—40.

31) Na mocy określenia pochodnej wyszukać pochodne funkcyj: a) $y = 3x^4 - 5x + 1$, b) $y = \frac{1}{x^2}$, c) $y = \sqrt{x}$.

32) Obliczyć pochodną iloczynu trzech funkcyj u, v, w.

33) Skoro $s = 5t - 7t^2$ jest równaniem ruchu prostoliniowego, znaleźć prędkość i przyspieszenie ruchu.

34) Jeżeli $f(x) = 3x - 4x^3$, obliczyć funkcję złożoną $f(\sin u)$.

35) Jeżeli $f(x) = 1 - x^2$, $\varphi(y) = 2 - \sqrt{y}$, obliczyć $f(f(x))$, $\varphi(\varphi(x))$, $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$.

36) Dane funkcje $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$, $\varphi(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$; obliczyć funkcje $f(\cos x)$, $\varphi(\cos x)$.

37) W naukach technicznych częstokroć wypada rozważać t. zw. *krzywe różniczkowe* t. j. krzywe $y = f'(x)$, gdzie $f'(x)$ oznacza pochodną funkcji $f(x)$. Narysować krzywe a) $y = \ln x$, $y = \frac{1}{x}$ na jednej płaszczyźnie; b) krzywe $y = x^2$, $y = 2x$; c) $y = x^3$, $y = 3x^2$; d) $y = \sin x$, $y = \cos x$.

38) Udowodnić, że pochodna funkcji parzystej (zob. zad. 8) jest funkcją nieparzystą.

39) Udowodnić, że pochodna funkcji nieparzystej (zob. zad. 8) jest funkcją parzystą.

40) Obliczyć pochodne funkcyj: $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = \sin x \cdot \cos x$, $y_3 = \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$, $y_4 = x^{(x^{\sqrt{x}})}$, $y_5 = (\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

41) Wykazać, że funkcja $y = Ce^x - x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 24x - 24$ spełnia równanie $y' - y = x^4$ przy każdej wartości na stałą C.

42) Znaleźć funkcję linjową $f(x)=ax+b$ z warunków, że $f(0)=1$, $f'(0)=2$.

Do § 41—43.

43) Dane funkcje $y_1=2\arcsin\sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}}$, $y_2=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha-x}}$, $y_3=\arcsin\frac{2\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)}}{\alpha-\beta}$. Dla jakich wartości są określone? Znaleźć ich pochodne, przyczem α, β są stałe.

44) Jeżeli y_0 oznacza jedno z rozwiązań y równania $\sin y=x$, gdzie x oznacza daną liczbę o własności $|x|\leqq 1$, to wszystkie rozwiązania będą $y=(-1)^p y_0+p\pi$, gdzie p oznacza dowolną liczbę całą. Udowodnić również, że $y=(-1)^p \arcsin x+p\pi$.

45) Wykazać: jeżeli y_0 oznacza jedno z rozwiązań y równania $\cos y=x$, gdzie x oznacza liczbę daną o własności $|x|\leqq 1$, to $y=\pm y_0+2p\pi$, gdzie p jest dowolną liczbą całą. Jest więc też $y=\pm \arccos x+2p\pi$.

46) Wykazać: jeżeli y_0 oznacza jedno z rozwiązań y równania $\mathrm{tg}\, y=x$, gdzie x oznacza dowolnie daną liczbę, to $y=y_0+p\pi$, gdzie p oznacza dowolną liczbę całą. Jest więc też $y=\mathrm{arctg}\, x+p\pi$.

47) Wykazać: jeżeli y_0 oznacza jedno z rozwiązań y równania $\mathrm{ctg}\, y=x$, gdzie x oznacza dowolnie daną liczbę, to $y=y_0+p\pi$, gdzie p oznacza dowolnie liczbę całą. Jest więc też $y=\mathrm{arcctg}\, x+p\pi$.

48) Na podstawie zad. 46 wykazać, że $\mathrm{arctg}\, x+\mathrm{arctg}\, y=$ $=\mathrm{arctg}\frac{x+y}{1-xy}+p\pi$, gdzie $p=0$ albo $+1$ albo -1.

49) Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)=1$.

Do § 44—50.

50) Dla spadku w próżni jest $s=\frac{1}{2}gt^2$ równaniem ruchu. Gdy jednak uwzględnimy opór powietrza, przyjmując, że opór jest proporcjonalny do kwadratu prędkości, to równanie ruchu przyjmuje postać: $s=\frac{k^2}{g}\,ln\left(\frac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2}\right)$, przyczem $\alpha=\frac{gt}{k}$; k zaś oznacza stałą.

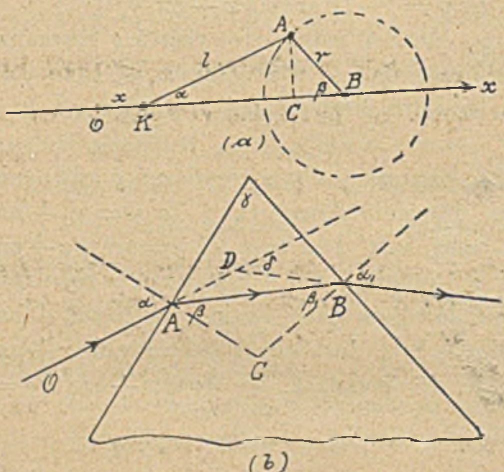
Znaleźć prędkość ruchu $\frac{ds}{dt}$, przyspieszenie $\frac{d^2s}{dt^2}$ i opór ruchu, jako $g-\frac{d^2s}{dt^2}$.

51) Dla rzutu pionowego w górę, gdy przyjmiemy opór powietrza, jak w zad. 50, jest

$$s = \frac{k^2}{g} \, ln \left[\frac{1}{k} \left(v_0 \sin \frac{gt}{k} + k \cos \frac{gt}{k} \right) \right].$$

Znaleźć prędkość $\frac{ds}{dt}$ i przyspieszenie $\frac{d^2 s}{dt^2}$ i określić opór ruchu.

52) *Ruch krzyżulca.* Na osi wału korbowego B obraca się korba AB długości r od lewej ręki ku prawej w górę. Punkt A jest połączony z punktem K drągiem korbowodu długości l. Punkt K może się poruszać tylko po osi x i jego położenie wyznacza odcięta x. Załóżmy, że $OB = l + r$, przeto, gdy A leży na osi x między O i B, to punkt K zajmuje położenie O i jedną taką chwilę przyjmijmy za początkową ($t = 0$). Punkt K zowie się krzyżulcem. (Np. punkt K może być końcem pręta, przymocowanego do tłoka maszyny parowej, w której walec tłokowy ma położenie poziome). Krzyżulec K przy obrocie korby będzie wykonywał ruch po osi x. Z figury widać, że $x + l \cos \alpha + r \cos \beta = OB = l + r$. Ruch korby będzie określony, gdy znamy np. β we funkcji czasu; przy obrocie jednostajnym będzie $\beta = a . t$, gdzie a oznacza stałą. W dowolnej chwili ruchu jest punkt A albo nad osią x albo pod osią x albo na osi x, z lewej lub prawej strony punktu B. Gdy punkt A leży nad osią x, to $\alpha > 0$, $\beta = 2\pi n + \beta_0$, jeżeli korba wykonała n obrotów i wtedy kąt β z rysunku jest kątem β_0; wzór wstaw zastosowany do trójkąta KAB daje $\sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \beta$; w urządzeniach praktycznych jest $\frac{r}{l} \leq \frac{1}{5}$, przeto kąt α waha się wewnątrz przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right)$. Czytelnik z łatwością wykaże, że ostatnia równość pozostaje słuszną



i w innych położeniach punktu A. Jest więc $\alpha = \arcsin\left(\frac{r}{l}\sin\beta\right)$, a więc określoną funkcją czasu. Stąd obliczymy prędkość $\frac{dx}{dt} =$

$= \frac{d}{dt}[l + r - l\cos\alpha - r\cos\beta] = l\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} + r\sin\beta\frac{d\beta}{dt}$. Ale mamy $\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} = \frac{r}{l}\cos\beta\frac{d\beta}{dt}$, więc $\frac{dx}{dt} = \left[\frac{l\sin\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{r\sin\beta}{l}\right)^2}}\cdot\frac{r}{l}\cos\beta - r\sin\beta\right]\frac{d\beta}{dt}$.

Po przeczytaniu § 86 zdoła czytelnik obliczyć przybliżenie dla wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\beta\right)^2}}$ i przez to uprości wyrażenie na prędkość.

Obliczywszy przyspieszenie $\frac{d^2x}{dt^2}$ i jego przybliżenie z łatwością będzie można podać siłę działającą na krzyżulec w kierunku osi x.

53) Obliczyć różnicę $R = f(x+dx) - f(x) - f'(x)dx$ dla funkcyj a) $f(x) = x$, b) $f(x) = x^2$, c) $f(x) = x^3$, d) $f(x) = \sin x$, e) $f(x) = e^x$, f) $f(x) = ln\, x$.

54) Tw. Rollego pozwala na wniosek następujący: przy założeniach tw. Rollego między dwoma pierwiastkami równania $f(x) = 0$ leży zawsze co najmniej jeden pierwiastek równania $f'(x) = 0$.

Niech czytelnik stwierdzi ten wniosek bezpośrednio na elementarnym przykładzie równania stopnia 2-go (np. $x^2 - 5x + 6 = 0$).

55) Znaleźć n-tą pochodną iloczynu dwóch funkcyj u. v.

56) Że równanie (Newtona) $x^3 - 2x - 5 = 0$ ma pierwiastek między liczbami 2 i 3 położony, to wynika stąd, że funkcja $f(x) = x^3 - 2x - 5$ jest ciągłą i że $f(2) = -1 < 0$. $f(3) = 16 > 0$ (zob. § 31).

57) Tw. średniej wartości zastosować do funkcji $f(x) = x^n$ dla liczb $a = 1$, $b = 2$; obliczyć liczbę x_0 i liczbę θ, gdy położymy $x_0 = a + \theta(b - a)$.

58) Jeżeli punkt materjalny o masie m porusza się po osi x, to iloczyn $m\frac{dx}{dt}$ zowie się ilością ruchu (albo pędem), $m\frac{d^2x}{dt^2}$ siłą (przyspieszającą); jest $m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)$, skąd $d\left(m\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}\cdot dt$, co daje różniczkę ilości ruchu; oznaczmy przez P siłę (przyspie-

szającą), przez $L(x)$ pracę wykonaną na drodze od x_0 do x, to jest $\frac{dL}{dx} = P$, skąd $dL = Pdx$. Funkcję $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ zowiemy energją kinetyczną punktu materjalnego; otóż $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2\right] = mv \cdot \frac{dv}{dt} = m\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = P \cdot \frac{dx}{dt}$, skąd $d(\frac{1}{2}mv^2) = P\frac{dx}{dt} \cdot dt = Pdx = dL$.

54) Zwrócimy uwagę na to, że w rachunkach na extrema funkcji można często użyć pewnego fortelu upraszczającego. Rozważmy zadanie: znaleźć extrema funkcji $y = \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$. W tym celu tworzymy pochodną: $y' = \frac{(1+x^2)^3 \cdot 2x - x^2 \cdot 3(1+x^2)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^6} = \frac{2x(1-2x^2)}{(1+x^2)^4}$. Równość $y' = 0$ daje $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Należy teraz zbadać drugą pochodną. Aby właśnie ten rachunek uprościć, napiszmy $y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, wtedy jest $y'' = \frac{\psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi^2(x)}$ i dla $x = x_1$, lub $x = x_2$ lub $x = x_3$ jest $\varphi(x) = 0$, więc $(y'')_{x_i} = \frac{\varphi'(x_i)}{\psi(x_i)}$, a ponieważ jest $\psi(x_i) = (1+x_i)^4 > 0$, więc dość zbadać znak liczby $\varphi'(x_i)$; otóż $\varphi(x) = 2x - 4x^3$, więc $\varphi'(x) = 2 - 12x^2 = 2(1-6x^2)$, skąd $\varphi'(0) = 2 > 0$, $\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 < 0$, $\varphi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$. Mamy więc maxima dla $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ i minimum dla $x = 0$. W ten sposób uprościliśmy żmudny rachunek pochodnej y''!

59) Dana krzywa K o równaniu $y = f(x)$, nie przechodząca przez punkt $A(x_0, y_0)$. Znaleźć na krzywej K punkt M tak, by odległość AM była extremum.

60) *Minimum odchylenia promieni świetlnych w pryzmacie.* Na pryzmat pada promień świetlny OA pod kątem α, załamuje się pod kątem β, trafia drugą ścianę pryzmatu pod kątem β_1 i wychodzi z pryzmatu pod kątem α_1, odchyliwszy się od pierwotnego kierunku o kąt δ. Jeżeli n oznacza współczynnik załamania materjału (z którego pryzmat zrobiony) w stosunku do powietrza, to według prawa Snelliusa[1]) jest $\sin\alpha : \sin\beta = n$, $\sin\alpha_1 : \sin\beta_1 = n$.

---

[1]) Willibrord Snellius, holenderski fizyk, ur. 1591, um. 1626.

Z trójkąta ABC wynika z łatwością, że jest $\gamma = \beta + \beta_1$, gdzie γ oznacza t. zw. rozwartość pryzmatu, naznaczoną w rys. b str. 486, wyobrażającym przecięcie główne pryzmatu. Nadto z trójkąta ABD wynika, że $\delta = \alpha - \beta + \alpha_1 - \beta_1$. Mamy znaleźć kąt α, dla którego kąt δ jest minimum. Niech czytelnik wykaże, że zmienną niezależną może być α, że istnieją pochodne $\frac{d\delta}{d\alpha}, \frac{d^2\delta}{d\alpha^2}$. Wtedy $\frac{d\delta}{d\alpha} = 1 - \frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{d\alpha_1}{d\alpha} - \frac{d\beta_1}{d\alpha}$, ale $\beta_1 = \gamma - \beta$, więc $\frac{d\beta_1}{d\alpha} = -\frac{d\beta}{d\alpha}$, tedy $\frac{d\delta}{d\alpha} = 1 + \frac{d\alpha_1}{d\alpha}$. Ale $\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1 = n\sin(\gamma - \beta)$, $\sin\beta = \frac{1}{n}\sin\alpha$, więc $\cos\alpha_1 . \frac{d\alpha_1}{d\alpha} = -n\cos(\gamma-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\cos\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{n}\cos\alpha$, więc $\cos\alpha_1$. $\frac{d\alpha_1}{d\alpha} = -\frac{\cos(\gamma-\beta)\cos\alpha}{\cos\beta}$. Wobec tego $\frac{d\delta}{d\alpha} = \frac{\cos\beta\cos\alpha_1 - \cos\beta_1\cos\alpha}{\cos\alpha_1\cos\beta}$.

Równość $\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$ daje $\cos\beta\cos\alpha_1 = \cos\beta_1\cos\alpha$; podniósłszy tę równość do kwadratu i rugując kąty α, α_1 przy pomocy równości Snelliusa, otrzymujemy $\beta = \beta_1$ co odpowiada symetrycznemu przechodzeniu promienia świetlnego; wtedy $\beta = \gamma/2$, $\sin\alpha = n\sin\gamma/2$, co pozwala wyznaczyć kąt padania α.

61) *Zagadnienie Thomsona*[1]) *o ekonomicznym przekroju*. Z centrali A, w której wytwarza się energję elektryczną, przesyła się tę energję po przewodniku do miejsca B. Oznaczmy przez l długość przewodnika z A do B i z powrotem do A, przez I natężenie prądu (stałego) w przewodniku, przez q przekrój poprzeczny przewodnika, ϱ opór właściwy, R całkowity opór przewodnika, przez E_1, E_2, E napięcie stracone wzdłuż przewodnika, użyteczne w B i całkowite w A, tedy jest $E = E_1 + E_2$; nadto wzdłuż przewodnika traci się energję elektryczną dzielności $E_1 I$ Wattów (gdy użyjemy jednostek technicznych do pomiarów) i mianowicie według prawa Joule'a powstaje (bezużyteczne) ciepło, wynoszące w sekundzie I^2R, gdzie $R = \varrho . \frac{l}{q}$; dzielność straconej energji wynosi tedy $D_1 = \varrho . \frac{lI^2}{q}$. Jeżeli więc rocznie T godzin jest czynną centrala, to roczna strata energji elektrycznej wynosi $U_1 = \varrho \frac{lI^2T}{1000\,q}$ kilowatt-godzin. Jeżeli

[1]) William Thomson (Lord Kelvin), angielski fizyk, ur. 1824, um. 1908.

ϱ, l, I. T są stałemi, to można U_1 zmniejszyć przez powiększenie przekroju q, to zaś pociąga za sobą zwiększenie kosztów nabycia grubego przewodnika. Ale jest właśnie cechą charakterystyczną nowoczesnych przedsiębiorstw technicznych, że uwzględnia się *rentowność* urządzeń! Jeżeli w centrali kosztuje 1 kilowattgodzina z złotych polskich, to strata roczna wynosi $S_1 = \frac{\varrho l I^2 T}{1000 q} . z$ złotych pol. Jeżeli k złotych pol. wynosi koszt 1 kg przewodnika i jeżeli δ wynosi ciężar właściwy materjału, z którego zrobiony przewodnik, to koszt przewodnika wynosi $\frac{\delta l q k}{1000}$ złotych, gdy l wyraża długość w metrach, q przekrój w milimetrach kwadratowych. Jeżeli p oznacza stopę oprocentowania jednorazowego wydatku na zakup przewodnika i na amortyzację, to roczny wydatek będzie $S_2 = \frac{\delta l q k p}{1000}$ złotych pol. Otóż *przekrój będzie ekonomicznym, gdy* $S_1 + S_2$ *będzie minimum.*

Jest $S_1 + S_2 = \frac{C_1}{q} + C_2 q$, gdzie C_1, C_2 oznaczają stałe. Czytelnik stwierdzi, że dla ekomicznego przekroju będzie $S_1 = S_2$.

Koniec części pierwszej.