

JAN CHOJCAN

przy współpracy Lucjana KARWANA
oraz Andrzeja Drygajły i Andrzeja Kolmera

ZBIÓR ZADAŃ Z TEORII OBWODÓW



Gliwice 2001

my/15
JAN CHOJCAN

przy współpracy Lucjana KARWANA

oraz Andrzeja Dygajły i Andrzeja Kolmera

ZBIÓR ZADAŃ Z TEORII OBWODÓW I

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Gliwice 2001

OPINIODAWCA
Doc. dr inż. Zofia Cichowska

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. Zygmunt Kleszczewski
REDAKTOR DZIAŁU — Doc. dr inż. Zdzisław Pogoda
SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Leśko

REDAKCJA
Mgr Anna Błażkiewicz

REDAKCJA TECHNICZNA
Alicja Nowacka



S.67072

PROJEKT GRAFICZNY OKŁADKI
Tomasz Lamorski

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

ISBN 83-88000-79-9

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

200/02

Spis treści

	str
Przedmowa do wydania VI	5
Przedmowa do wydania VII	5
Wykaz ważniejszych oznaczeń	7
Wykaz najczęściej używanych symboli graficznych	9
I. ZADANIA	11
1. OBWODY PROSTE LINIOWE	11
2. OBWODY ZŁOŻONE LINIOWE	25
3. OBWODY Z ELEMENTAMI NIELINIOWYMI	47
4. OBWODY Z WIELOBIEGUNNIKAMI I ŹRÓDŁAMI STEROWANYMI	59
5. INDUKCJA ELEKTROMAGNETYCZNA I OBWODY MAGNETYCZNE	71
6. ZADANIA RÓŻNE	77
II. ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI	94
1. OBWODY PROSTE LINIOWE	94
2. OBWODY ZŁOŻONE LINIOWE	121
3. OBWODY Z ELEMENTAMI NIELINIOWYMI	197
4. OBWODY Z WIELOBIEGUNNIKAMI I ŹRÓDŁAMI STEROWANYMI	251
5. INDUKCJA ELEKTROMAGNETYCZNA I OBWODY MAGNETYCZNE	290
6. ZADANIA RÓŻNE	309
ZAŁĄCZNIK. OPIS PROGRAMU ALINIES (opracowanie A. Kukielka)	363
DODATEK	367
LITERATURA	376

PRZEDMOWA DO WYDANIA VI

Skrypt przeznaczony jest dla studentów studiów dziennych (magisterskich i inżynierskich) i wieczorowych Wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki jako przewodnik ułatwiający rozwiązywanie zadań z zakresu **teorii obwodów i podstaw elektrotechniki**. Może być przydatny również dla studentów innych wydziałów pragnących opanować komputerowe metody analizy obwodów.

W pierwszej części skryptu podano w sześciu rozdziałach treść zadań. Zadania z rozwiązaniami zaznaczono pionową kreską na lewym marginesie przy numerze zadania. Druga część zawiera rozwiązania znacznej części zadań i odpowiedzi do pozostałych.

Wydanie VI jest, w porównaniu z wydaniem V, znacznie przeredagowaną i rozszerzoną wersją zbioru. Uwzględniono w nim możliwości przeredagowanego przez mgr inż. Andrzeja Kukielkę programu ALINIES (instrukcję programu umieszczono przed dodatkiem) oraz programów ALIOS1 i SPICE. Szczególnie wiele uwagi poświęcono możliwościom wykorzystania programu SPICE do rozwiązywania bardziej pracochłonnych zadań. Obok zaproponowanych w poprzednim wydaniu modeli zmiennych i zależnych od temperatury rezystorów zwrócono uwagę na analizę obwodów z elementami nieliniowymi sterowanymi napięciem lub prądem. Szczególnie wiele zmian i uzupełnień wprowadzono w rozdziałach drugim, trzecim i szóstym.

Serdecznie dziękujemy wszystkim dzięki którym powstał ten skrypt. Współpracownikom z Instytutu Elektroniki dziękujemy za uwagi i sugestie. Pani Marii Luderowej i Panu Doc. dr. inż. Zdzisławowi Pogodzie składamy wyrazy wdzięczności za szybkie i bezbłędne przygotowanie przeredagowanego skryptu. Pozostajemy dłużnikami Pani Doc. dr. inż. Zofii Cichowskiej za Jej wnikliwą i życzliwą recenzję.

Gliwice, sierpień 1996 r.

Autorzy

PRZEDMOWA DO WYDANIA VII

Obecne wydanie jest poprawioną, nową edytorsko wersją skryptu z wydania VI. Za przygotowanie tej wersji gorąco dziękujemy Panu doc. dr. inż. Zdzisławowi Pogodzie.

Gliwice, sierpień 2001 r.

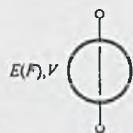
Autorzy

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

A	- macierz koincydencji prądów gałęziowych i węzłów
A	- macierz łańcuchowa czwornika
A	- wektor potencjału wektorowego
A_{ij}	- element macierzy łańcuchowej
A'	- macierz koincydencji prądów gałęzi łączących i gałęzi drzewa
B	- wektor indukcji magnetycznej
C	- pojemność kondensatora
C	- macierz łącząca prądowa (macierz incydencji prądów gałęziowych z prądami gałęzi łączących)
C_{ij}	- element macierzy łączącej prądowej
E	- siła elektromotoryczna
E	- wektor sił elektromotorycznych
F	- siła magnetomotoryczna (przepływ)
g	- liczba gałęzi w obwodzie
G	- przewodność
G	- macierz przewodności węzłowych, macierz przewodnościowa czwornika
G_i	- źródło prądowe sterowane napięciem lub nieliniowe źródło prądowe sterowane iloczynem napięć (w programie SPICE)
G_{ij}	- element macierzy przewodnościowej czwornika
H	- macierz hybrydowa czwornika
H	- wektor natężenia pola magnetycznego
H_i	- źródło napięciowe sterowane prądem (w programie SPICE)
H_{ij}	- element macierzy hybrydowej
H_{ri}	- nieliniowe źródło napięciowe sterowane iloczynem prądów (w programie SPICE)
i	- wektor gęstości prądu
I	- prąd, natężenie prądu, siła prądomotoryczna
I	- wektor prądów
I_b, I_t	- wektory prądów gałęzi łączących i gałęzi drzewa
J	- siła prądomotoryczna
J	- wektor sił prądomotorycznych
k	- współczynnik sprzężenia magnetycznego
k_I, k_P, k_U	- współczynnik wzmocnienia prądu, mocy, napięcia
$k_{II}, k_{IU}, k_{UI}, k_{UU}$	- współczynnik (parametr) źródła prądowego sterowanego prądem, prądowego sterowanego napięciem, napięciowego sterowanego prądem, napięciowego sterowanego napięciem
l	- liczba gałęzi w obwodzie
l	- (jako indeks) odnosi się do gałęzi łączących
L	- indukcyjność własna
M	- indukcyjność wzajemna
.MODEL	- deklaracja modelu elementu (w programie SPICE)
N	- obwód podstawowy, współczynnik emisji
N_1, N_2	- obwody dołączone
N_i	- obwód, element nieliniowy

O	- obwód
P	- moc
.PROBE	- wywołanie programu do przetwarzania wyników uzyskanych z programu SPICE oraz do sporządzania wykresów
r	- parametr
r, R	- opornik idealny
R, R_d	- macierz oporów, macierz diagonalna oporów gałęzi
R_m	- opór magnetyczny
R_N	- opornik nieliniowy
S	- pole przekroju
T	- współczynnik wrażliwości małoprzyrostowej względnej funkcji układowej T na zmianę parametru x_i układu
.SENS	- instrukcja zlecająca obliczanie współczynników wrażliwości (w programie SPICE)
.SUBCKT	- deklaracja podobwołu (w programie SPICE)
t	- odchyłka (w procentach)
t	- temperatura
t	- (jako indeks) odnosi się do gałęzi drzewa
t_R	- tolerancja oporów
T	- trójnik, czwórnik typu „T”, podukład (.SUBCT)
T	- funkcja układowa
U	- napięcie
U	- wektor napięć
U_l, U_i	- wektory napięć gałęzi łączących i gałęzi drzewa
V	- potencjał
V	- wektor potencjałów węzłowych
w	- liczba węzłów
X	- połączenie mostkowe czwornika, podobwołu
Y	- macierz admitancyjna (przewodnościowa) czwornika
Y_{ij}	- element macierzy admitancyjnej
z	- liczba zwojów
Z	- macierz impedancyjna (opornościowa) czwornika
Z_{ij}	- element macierzy impedancyjnej
α	- współczynnik przy metodzie iteracyjnej
α	- kąt
Δ	- wyznacznik główny
$\Delta_{ij}, \Delta_{(i+j)k}$	- dopełnienia algebraiczne wyznacznika głównego
δ	- odchyłka (w procentach)
η	- sprawność (w procentach)
μ	- przenikalność magnetyczna
Π	- czwórnik typu Π
Φ	- strumień magnetyczny
Ψ	- strumień magnetyczny skojarzony

WYKAZ NAJCZĘŚCIEJ UŻYWANYCH SYMBOLI GRAFICZNYCH



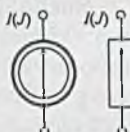
Rys. 1 - źródło napięcia stałego, siła elektromotoryczna (SEM E , V)
(siła magnetomotoryczna F)



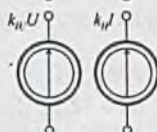
Rys. 1a - akumulator (ogniwo)



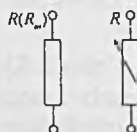
Rys. 2 - źródło napięciowe sterowane: napięciem U ($k_{UU}U$), prądem I ($k_{UI}I$); w programie SPICE oznaczane przez E_i oraz H_i mogą to być również źródła nieliniowe



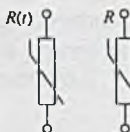
Rys. 3 - źródło prądu stałego, siła prądomotoryczna



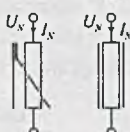
Rys. 4 - źródło prądowe sterowane: napięciem U ($k_{IU}U$), prądem ($k_{II}I$); w programie SPICE oznaczane przez G_i oraz F_i , mogą to być również źródła nieliniowe



Rys. 5 - opornik liniowy, rezystancja (opór magnetyczny), opornik regulowany



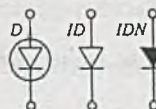
Rys. 6 - opór zależny od temperatury (termistor) z dodatnim (ujemnym) współczynnikiem temperaturowym



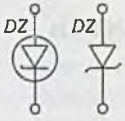
Rys. 7 - opór nieliniowy



Rys. 8 - opór nieliniowy (warystor)



Rys. 9 - dioda, dioda idealna (ID), idealna dioda „negatywna” (IDN)



Rys. 10 - dioda Zenera (DZ)



Rys. 11 - dioda tunelowa (DT)



Rys. 12 - jarzeniowy stabilizator napięcia (stabilivolt)



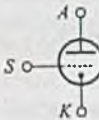
Rys. 13 - kondensator



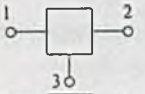
Rys. 14 - cewka



Rys. 15 - tranzystor bipolarny



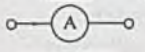
Rys. 16 - trioda



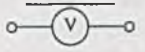
Rys. 17 - trójkąt



Rys. 18 - czterobiegownik (czwórnik)



Rys. 19 - amperomierz



Rys. 20 - woltomierz



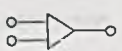
Rys. 21 - watomierz



Rys. 22 - numer węzła



Rys. 23 - numer gałęzi



Rys. 24 - idealny wzmacniacz operacyjny (idealne źródło napięciowe sterowane napięciem)

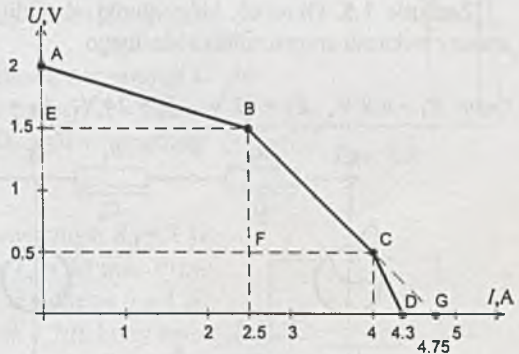
I. ZADANIA

Rozdział 1

OBWODY PROSTE LINIOWE

[Zadanie 1.1. Charakterystykę zewnętrzną wydajnika energii aproksymowaną trzema liniowymi odcinkami (rys. 1.1) należy przedstawić w postaci źródła napięciowego oraz prądowego dla trzech zakresów prądów pobieranych przez odbiornik, tzn.:

- 1) $0 \div 2.5 \text{ A}$,
- 2) $2.5 \div 4 \text{ A}$,
- 3) $4 \div 4.3 \text{ A}$.



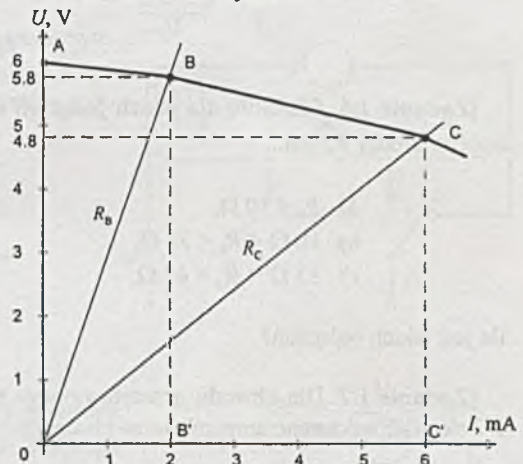
Rys. 1.1

[Zadanie 1.2. Na rys. 1.2 przedstawiono fragment charakterystyki zewnętrznej źródła energii elektrycznej. Określić graniczne wartości rezystancji obciążenia źródła, przy których pracuje ono na odcinkach AB i BC charakterystyki.

[Zadanie 1.3. Obliczyć wartość napięcia między punktami A i B w obwodzie przedstawionym na rys. 1.3,

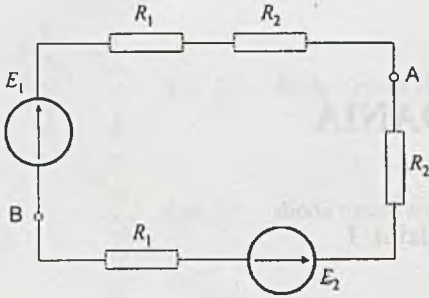
jeśli $E_1 = 20 \text{ V}$ i $E_2 = 40 \text{ V}$,
natomiast $R_1 = 125 \Omega$, a $R_2 = 75 \Omega$.

[Zadanie 1.4. Dwa dzielniki napięcia (rys. 1.4) są włączone równolegle do sieci o napięciu U . Obliczyć wartość różnicy potencjałów między punktami A i B obu dzielników.

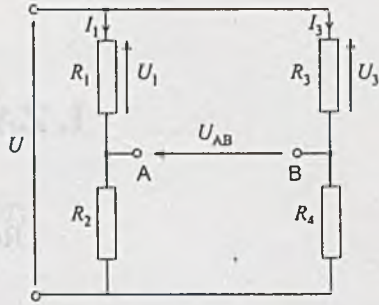


Rys. 1.2

Dane: napięcie sieci $U = 120 \text{ V}$ oraz $R_1 = 250 \Omega$, $R_2 = 750 \Omega$,
 $R_3 = R_4 = 500 \Omega$.



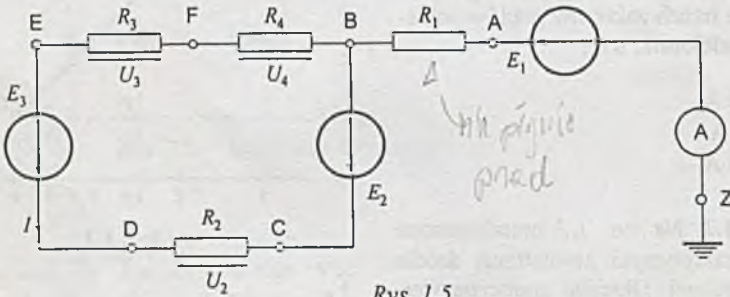
Rys. 1.3



Rys. 1.4

[Zadanie 1.5. Określić, który punkt obwodu elektrycznego z rys. 1.5 można uziemić bez zmiany wskazań amperomierza idealnego.

Dane: $E_1 = 4.8 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$, $E_3 = 24 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_4 = 2 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$.



Rys. 1.5

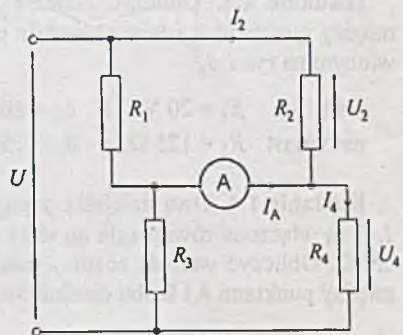
[Zadanie 1.6. Określić, dla jakich połączeń rezystorów o opornościach 10Ω , 33Ω , 47Ω , opór zastępczy R_z jest:

- $R_z < 10 \Omega$,
- $10 \Omega < R_z < 33 \Omega$,
- $33 \Omega < R_z < 47 \Omega$.

Ile jest takich połączeń?

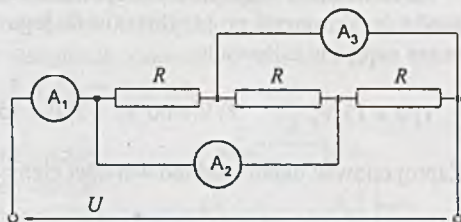
[Zadanie 1.7. Dla obwodu przedstawionego na rys. 1.7 określić wskazanie amperomierza idealnego.

Dane: $U = 120 \text{ V}$,
 $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$,
 $R_3 = 60 \Omega$, $R_4 = 40 \Omega$.



Rys. 1.7

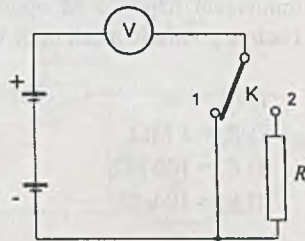
Zadanie 1.8. Obliczyć wskazania amperomierzy A_1 , A_2 i A_3 załączonych jak na rys. 1.8. Napięcie zasilania $U = 12 \text{ V}$, a wartość oporu każdego rezystora $R = 2 \text{ k}\Omega$.



Rys. 1.8

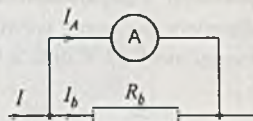
[Zadanie 1.9. Na rys. 1.9 przedstawiono schemat układu do wyznaczania oporu wewnętrznego woltomierza R_v . Określić wartość R_v , jeśli znane są wskazania przyrządu przy położeniu klucza K w pozycji 1 oraz 2.

Dane: wskazanie woltomierza przy położeniu klucza K w pozycji 1 wynosi $U_1 = 24 \text{ V}$, natomiast gdy klucz jest w pozycji 2, wskazanie woltomierza wynosi $U_2 = 10 \text{ V}$, $R = 200 \Omega$, opór wewnętrzny źródła jest pomijalnie mały.



Rys. 1.9

[Zadanie 1.10. Amperomierz o oporze wewnętrznym $R_A = 1 \Omega$ ma pełne wychylenie wskazówki przy prądzie $I_A = 30 \text{ mA}$. Przyrząd chcemy wykorzystać do pomiarów prądu w zakresie $0 \div 1 \text{ A}$. Obliczyć wartość oporu bocznikującego R_b (rys. 1.10), który należy w tym celu włączyć równolegle z amperomierzem.

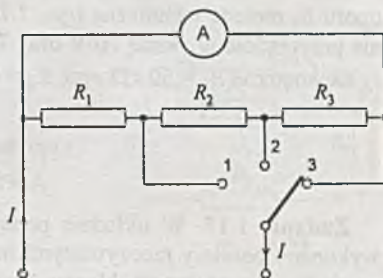


Rys. 1.10

Zadanie 1.11. Amperomierz o oporze wewnętrznym $R_A = 1 \Omega$ i zakresie pomiarowym $0 \div 6 \text{ mA}$ należy przystosować do pomiaru prądu I w trzech zakresach (rys. 1.11):

- 1) $0 \div 30 \text{ mA}$,
- 2) $0 \div 150 \text{ mA}$,
- 3) $0 \div 300 \text{ mA}$.

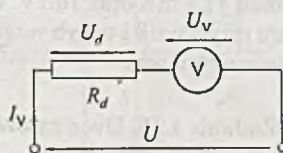
Obliczyć wartość oporów R_1 , R_2 i R_3 .



Rys. 1.11

[Zadanie 1.12. Woltomierz posiada zakres pomiarowy $0 \div 30 \text{ V}$ i opór wewnętrzny $R_v = 150 \text{ k}\Omega$. Przyrząd chcemy przystosować do pomiarów napięć w zakresie $0 \div 150 \text{ V}$.

Obliczyć wartość dodatkowego oporu R_d (rys. 1.12)



Rys. 1.12

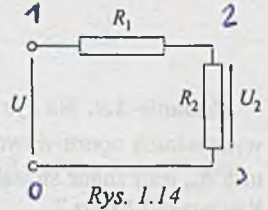
Zadanie 1.13. Woltomierz o oporze wewnętrznym $6 \text{ k}\Omega$ i maksymalnym wychyleniu wskazówki uzyskiwanym po przyłożeniu do jego zacisków napięcia 3 V należy przystosować do pomiaru napięć w zakresach:

- 1) $0 \div 15 \text{ V}$, 2) $0 \div 60 \text{ V}$, 3) $0 \div 150 \text{ V}$.

Zaproponować układ i dobrać wartości elementów.

[Zadanie 1.14. W układzie podanym na rys. 1.14 zmierzono woltomierzem napięcie na oporniku R_2 . Obliczyć wskazanie przyrządu i uchyb pomiaru, jeżeli opór wewnętrzny woltomierza wynosi:

- 1) $R_v \rightarrow \infty$,
2) $R_v = 1 \text{ M}\Omega$,
3) $R_v = 100 \text{ k}\Omega$,
4) $R_v = 10 \text{ k}\Omega$.

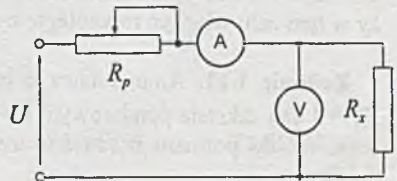


Rys. 1.14

Dane: napięcie zasilania $U = 24 \text{ V}$, a rezystancje dzielnika są równe $R_1 = 33 \Omega$ i $R_2 = 68 \Omega$.

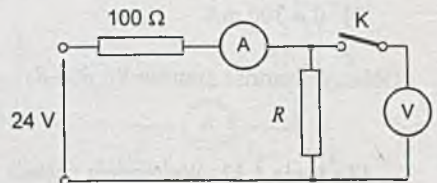
[Zadanie 1.15. Do dwóch szeregowo połączonych oporników przyłożono napięcie stałe 6 V . Woltomierz o oporze wewnętrznym $25 \text{ k}\Omega$ przyłączony do zacisków każdego z nich wskazał odpowiednio 1.33 V oraz 2.01 V . Podać wartości obu oporów.

[Zadanie 1.16. Określić uchyb względny pomiaru oporu R_x metodą techniczną (rys. 1.16), jeżeli wskazania przyrządów wynoszą 10 V oraz 7.8 mA , a ich opory wewnętrzne $R_v = 50 \text{ k}\Omega$ oraz $R_A = 0.2 \Omega$.



Rys. 1.16

Zadanie 1.17. W układzie podanym na rys. 1.17 wykonano pomiary rzeczywistymi miernikami. Amperomierz przy otwartym kluczu K wskazał 70.7 mA . Przy zamkniętym kluczu przyrządy wskazały odpowiednio 71.8 mA oraz 16.1 V . Podać poprawną wartość oporu rezystora R i uchyb względny przy określaniu go metodą techniczną.

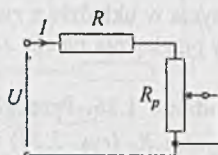


Rys. 1.17

[Zadanie 1.18. Dwie żarówki Z_1 oraz Z_2 należy załączyć na napięcie $U = 12 \text{ V}$. Dobrać oporniki dodatkowe R_1 i R_2 tak, by moc pobierana przez układ była jak najmniejsza, a żarówki pracowały w warunkach znamionowych: $U_{Z1} = 3.5 \text{ V}$, $I_{Z1} = 0.2 \text{ A}$ oraz $U_{Z2} = 6 \text{ V}$, $I_{Z2} = 0.1 \text{ A}$.

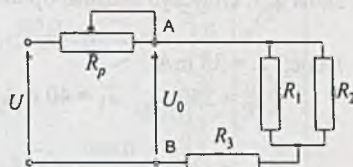
Zadanie 1.19. Obwody żarzenia trzech triod należy zasilić ze źródła napięcia stałego $U = 24 \text{ V}$. Należy więc zaprojektować taki układ z elementami dodatkowymi, by pobierał ze źródła jak najmniejszy prąd, a obwody żarzenia pracowały w warunkach znamionowych, tzn.: $U_1 = 6.3 \text{ V}$ i $I_1 = 185 \text{ mA}$, $U_2 = 4.2 \text{ V}$ i $I_2 = 300 \text{ mA}$ oraz $U_3 = 3.8 \text{ V}$ i $I_3 = 300 \text{ mA}$.

[Zadanie 1.20. W celu zabezpieczenia potencjometru przed przeciążeniem (rys. 1.20) należy odpowiednio dobrać oporność rezystora R ograniczającego prąd. Napięcie zasilania $U = 120 \text{ V}$, wartości znamionowe potencjometru to $R_p = 10 \text{ k}\Omega$ i $P_p = 0.5 \text{ W}$.



Rys. 1.20

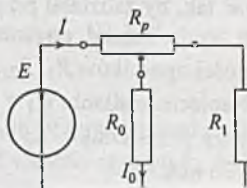
[Zadanie 1.21. W układzie przedstawionym na rys. 1.21 należy dobrać taki potencjometr R_p , aby uzyskać zakres regulacji napięcia U_0 w zakresie $12 \div 6 \text{ V}$.



Rys. 1.21

Dane: $U = 12 \text{ V}$, $R_1 = 200 \Omega$,
 $R_2 = 500 \Omega$, $R_3 = 300 \Omega$.

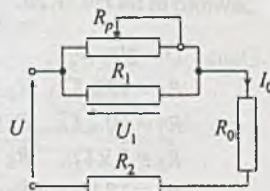
Zadanie 1.22. Obliczyć zakres zmian prądu I_0 przy zmianach położenia suwaka potencjometru (rys. 1.22) w całym zakresie. Podać też największą wartość prądu pobieranego ze źródła.



Rys. 1.22

Dane: $E = 60 \text{ V}$, $R_p = 2 \text{ k}\Omega$,
 $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$.

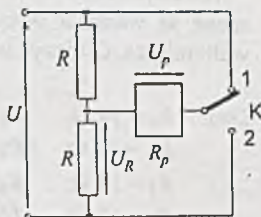
[Zadanie 1.23. W układzie podanym na rys. 1.23 dobrać opory R_1 i R_2 tak, aby uzyskać zakres regulacji prądu $I_0 = 25 \div 40 \text{ mA}$.



Rys. 1.23

[Zadanie 1.24. W układzie przedstawionym na rys. 1.24 napięcie zadziałania przekaźnika $U_z = 7 \text{ V}$. Należy dobrać wartości oporów R tak, aby w obydwu położeniach klucza K napięcie U_p na przekaźniku było większe od U_z .

Dane: $U = 24 \text{ V}$, opór uzwojenia przekaźnika $R_p = 320 \Omega$.



Rys. 1.24

Zadanie 1.25. Dane są do wyboru dwa przekaźniki o parametrach:

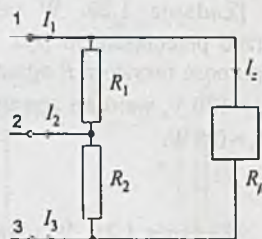
- 1) $U_{z1} = 7.3 \text{ V}$ i $R_{p1} = 90 \Omega$ oraz 2) $U_{z2} = 7.9 \text{ V}$ i $R_{p2} = 130 \Omega$

do użycia w układzie z rys. 1.24, przy czym napięcie zasilania $U = 24 \text{ V}$, natomiast $R = 120 \Omega$. Który przekaźnik należy zastosować?

Zadanie 1.26. Przekaźnik o prądzie zadziałania I_z oraz oporze uzwojenia R_p (rys. 1.26) ma służyć do kontroli prądu I_1 po przyłączeniu zacisków 1,3 do układu oraz prądu I_2 po przyłączeniu zacisków 2,3. Obliczyć wartość oporów R_1 i R_2 .

Dane: $I_z = 35 \text{ mA}$,

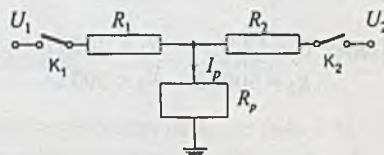
$$R_p = 250 \Omega, \quad I_1 = 40 \text{ mA}, \quad I_2 = 60 \text{ mA}.$$



Rys. 1.26

[Zadanie 1.27. Na rys. 1.27 przedstawiono fragment układu przekaźnikowego. Należy go zaprojektować tak, by zadziałał przy włączonym jednym kluczu, a nie działał po załączeniu obydwu. Dobrać wartości oporników R_1, R_2 .

Napięcie zasilania $U_1 = 16 \text{ V}$ i $U_2 = -12 \text{ V}$, a parametry przekaźnika: $R_p = 230 \Omega$, prąd zadziałania $I_p = 30 \text{ mA}$.



Rys. 1.27

Zadanie 1.28. Obliczyć prąd I_7 w układzie przedstawionym na rys. 1.28.

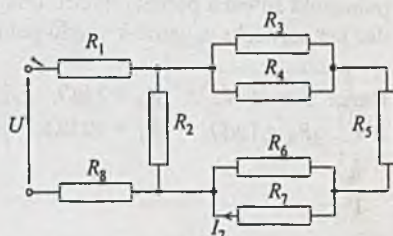
Dane: $U = 290 \text{ V}$,

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 15 \text{ k}\Omega,$$

$$R_3 = 10 \text{ k}\Omega, \quad R_4 = 10 \text{ k}\Omega,$$

$$R_5 = 5 \text{ k}\Omega, \quad R_6 = 12 \text{ k}\Omega,$$

$$R_7 = 18 \text{ k}\Omega, \quad R_8 = 9 \text{ k}\Omega.$$



Rys. 1.28

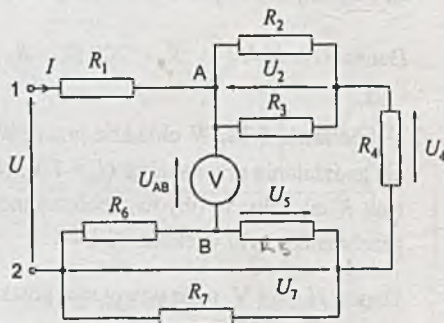
[Zadanie 1.29. W układzie podanym na rys. 1.29 znane są wartości wszystkich oporów i wskazania woltomierza. Obliczyć wartość napięcia zasilania U .

Dane: $R_1 = 14 \Omega, \quad R_2 = 20 \Omega,$

$$R_3 = 10 \Omega, \quad R_4 = 5 \Omega,$$

$$R_5 = 15 \Omega, \quad R_6 = 30 \Omega,$$

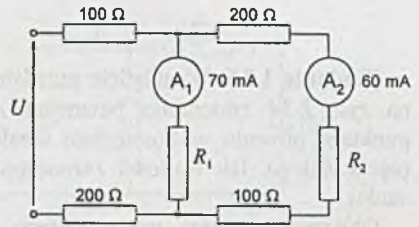
$$R_7 = 12 \Omega, \quad U_{AB} = 12.6 \text{ V}.$$



Rys. 1.29

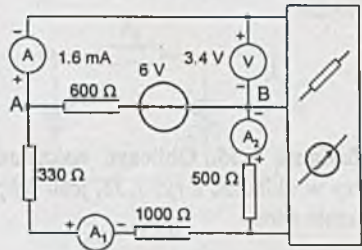
Zadanie 1.30. Korzystając ze wskazań idealnych amperomierzy określić wartości oporów R_1 oraz R_2 (rys. 1.30).

Dane: $U = 60 \text{ V}$, a wskazania amperomierzy i wartości pozostałych oporów podano na rysunku.



Rys. 1.30

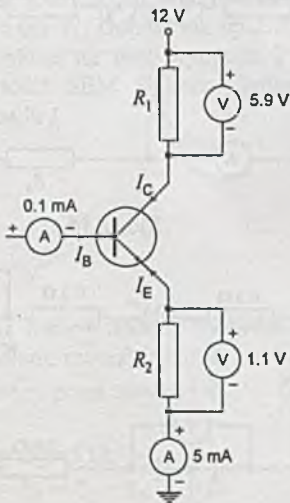
Zadanie 1.31. W układzie podanym na rys. 1.31 obliczyć wskazania idealnych amperomierzy A_1 oraz A_2 .



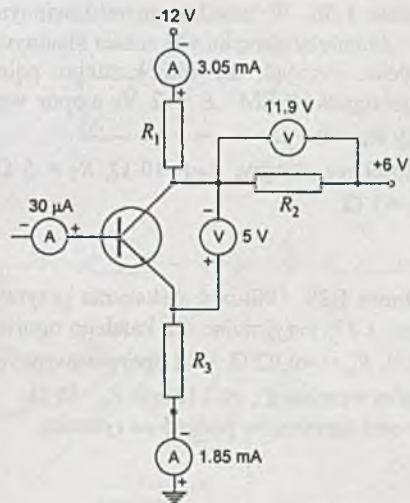
Rys. 1.31

Zadanie 1.32. Rys. 1.32 przedstawia fragment układu tranzystorowego. Na podstawie wskazań idealnych przyrządów obliczyć wartości oporów R_1 i R_2 .

Zadanie 1.33. W układzie elektronicznym (rys. 1.33) włączone są przyrządy prądu stałego. Przyjmując, że są idealne, a ich wskazania podane są na rysunku, określić wartości oporów R_1 , R_2 i R_3 .



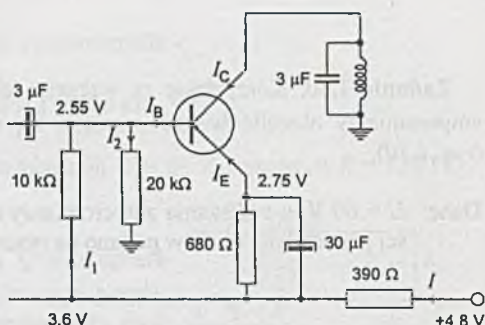
Rys. 1.32



Rys. 1.33

[Zadanie 1.34. W układzie przedstawionym na rys. 1.34 zmierzono potencjały w kilku punktach obwodu woltomierzem idealnym napięcia stałego. Ich wartości zaznaczono na rysunku.

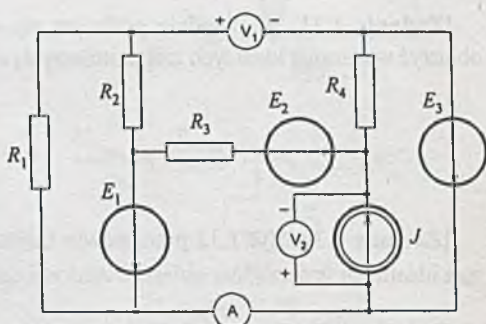
Obliczyć wartości prądu stałego elektrod tranzystora, tzn. I_B , I_C , I_E oraz prąd I źródła zasilającego.



Rys. 1.34

[Zadanie 1.35. Obliczyć wskazania woltomierzy w układzie z rys. 1.35, jeśli amperomierz wskazuje zero.

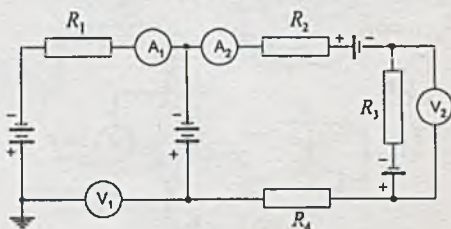
Dane: $E_1 = 12\text{ V}$, $E_2 = 6\text{ V}$,
 $E_3 = 36\text{ V}$, $J = 3\text{ mA}$,
 $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$,
 $R_3 = 100\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$.



Rys. 1.35

Zadanie 1.36. W układzie przedstawionym na rys. 1.36 należy określić wskazania idealnych przyrządów. Przyjąć, że dla każdego pojedynczego ogniwa SEM $E = 2\text{ V}$, a opór wewnętrzny $R_w = 0.1\ \Omega$.

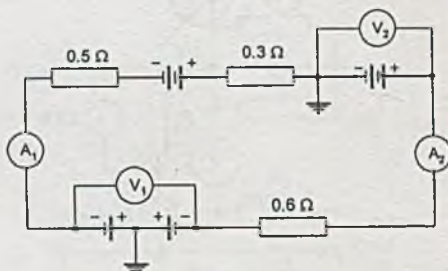
Wartości rezystorów: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$,
 $R_3 = R_4 = 1\ \Omega$.



Rys. 1.36

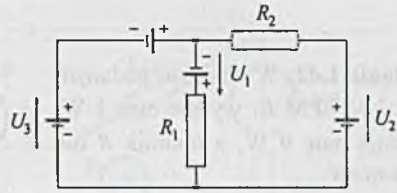
[Zadanie 1.37. Obliczyć wskazania przyrządów (rys. 1.37) przyjmując dla każdego ogniwa $E = 2.2\text{ V}$, $R_w = 0.02\ \Omega$, jeśli opory wewnętrzne przyrządów wynoszą $R_A = 0.1\ \Omega$ oraz $R_v = 30\ \Omega$.

Wartości rezystorów podano na rysunku.



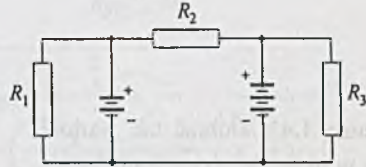
Rys. 1.37

[Zadanie 1.38. Obliczyć napięcia U_1 , U_2 i U_3 na ogniwach w układzie pokazanym na rys. 1.38, przyjmując dla każdego ogniwa $E = 2.2 \text{ V}$, $R_w = 0.02 \Omega$ oraz $R_1 = 0.5 \Omega$, $R_2 = 0.4 \Omega$.



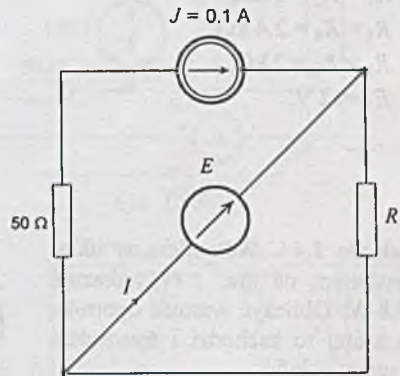
Rys. 1.38

[Zadanie 1.39. Sporządzić bilans mocy dla układu podanego na rys. 1.39 wiedząc, że w każdym ogniwie $E = 2.2 \text{ V}$ i $R_w = 0.02 \Omega$ oraz $R_1 = 25 \Omega$, $R_2 = 18 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$.



Rys. 1.39

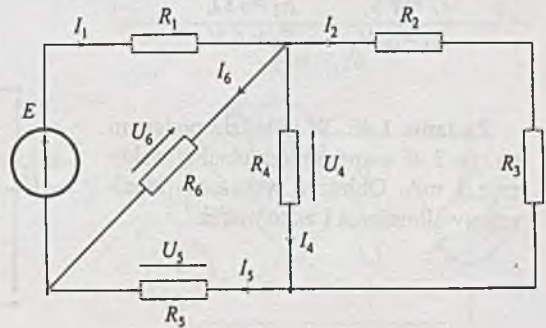
Zadanie 1.40. W układzie przedstawionym na rys. 1.40 źródło prądowe SPM J wydaje moc 0.1 W . Dobrać tak opór R , by moc wydzielona na nim wynosiła 2 W . Podać wartości SEM E oraz płynącego przez nią prądu I .



Rys. 1.40

[Zadanie 1.41. Wiedząc, że SEM E wydaje do obwodu moc P (rys. 1.41) obliczyć prąd I_4 płynący przez rezystor R_4 .

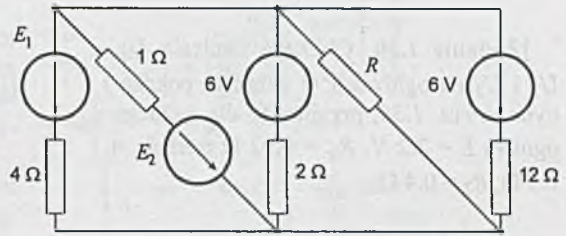
Dane: $R_1 = R_2 = 5 \Omega$,
 $R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 10 \Omega$,
 $P = 24.5 \text{ W}$.



Rys. 1.41

Zadanie 1.42. W układzie podanym na rys. 1.42 SEM E_1 wydaje moc 1 W, E_2 wydaje moc 9 W, a opornik R nie pobiera mocy.

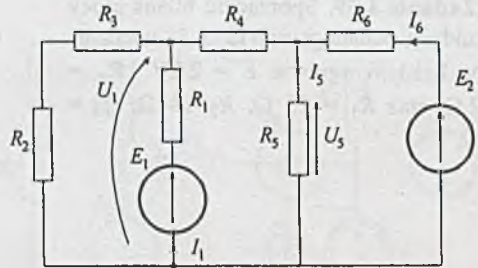
Obliczyć wartości SEM E_1 oraz SEM E_2 .



Rys. 1.42

[Zadanie 1.43. Dobrać tak wartość SEM E_2 w układzie z rys. 1.43, by nie wydawała i nie pobierała mocy.

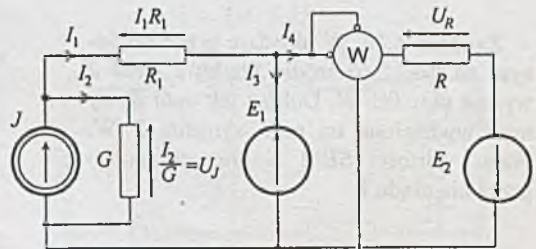
Dane: $R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$,
 $R_3 = R_4 = 2.4 \text{ k}\Omega$,
 $R_5 = R_6 = 2 \text{ k}\Omega$,
 $E_1 = 12 \text{ V}$.



Rys. 1.43

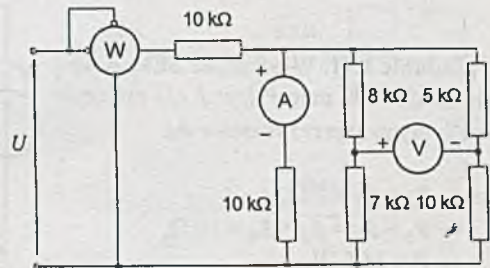
[Zadanie 1.44. Watomierz w układzie podanym na rys. 1.44 wskazuje moc 0.8 W. Obliczyć wartość opornika R , dla której to zachodzi i sporządzić bilans mocy układu.

Dane: $J = 3 \text{ A}$,
 $G = 1 \text{ S}$, $R_1 = 3 \Omega$,
 $E_1 = 2 \text{ V}$, $E_2 = 6 \text{ V}$.



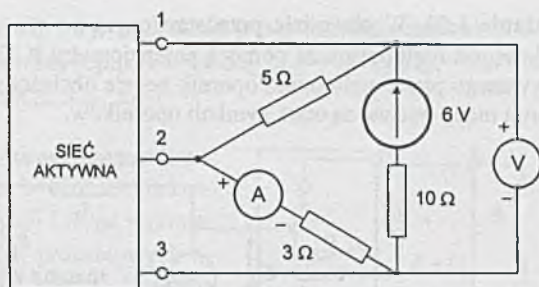
Rys. 1.44

Zadanie 1.45. W układzie podanym na rys. 1.45 amperomierz idealny wskazuje 3 mA. Obliczyć wskazania idealnego woltomierza i watomierza.



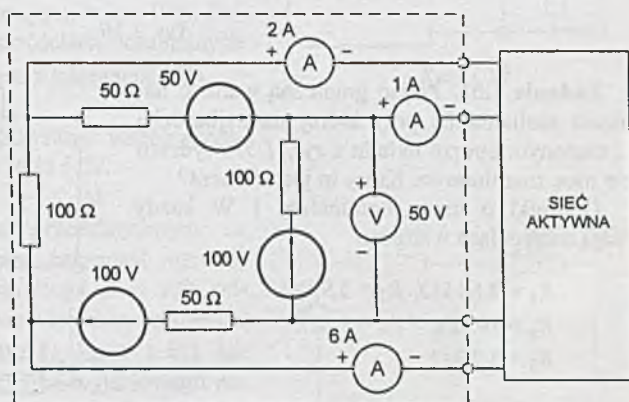
Rys. 1.45

Zadanie 1.46. Jaką moc pobiera trójnik 1-2-3 z sieci aktywnej (rys. 1.46), jeżeli znane są wskazania przyrządów idealnych? Przez amperomierz płynie prąd 0.5 A, a napięcie na woltomierzu jest równe 18 V.



Rys. 1.46

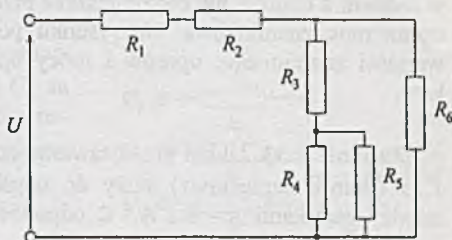
Zadanie 1.47. Obliczyć moc pobieraną z sieci aktywnej przez wyróżniony (zakreskowany) fragment obwodu (rys. 1.47). Na rysunku obok symboli przyrządów podane są ich wskazania.



Rys. 1.47

Zadanie 1.48. Podać górną wartość napięcia zasilania U , przy której moc tracona na oporze R_6 nie przekracza 0.5 W (rys. 1.48).

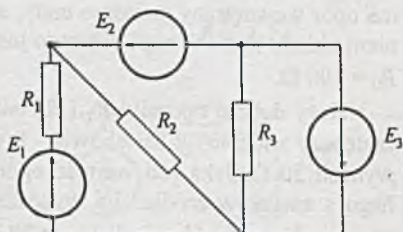
Dane: $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = R_3 = 3.3 \text{ k}\Omega$,
 $R_4 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_5 = R_6 = 6.8 \text{ k}\Omega$.



Rys. 1.48

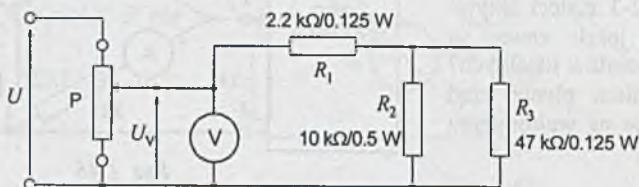
Zadanie 1.49. Określić, który opornik w układzie podanym na rys. 1.49 jest najbardziej obciążony (pobiera największą moc).

Dane: $E_1 = E_2 = 6 \text{ V}$, $E_3 = 12 \text{ V}$,
 $R_1 = R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 200 \Omega$.



Rys. 1.49

[Zadanie 1.50. W obwodzie przedstawionym na rys. 1.50 napięcie zasilające układ trzech oporników jest regulowane za pomocą potencjometru P. Obliczyć, przy jakiej wartości napięcia wskazywanego przez woltomierz opornik będzie obciążony mocą nominalną. Wartości nominalne oporu i mocy podane są obok symboli oporników.



Rys. 1.50

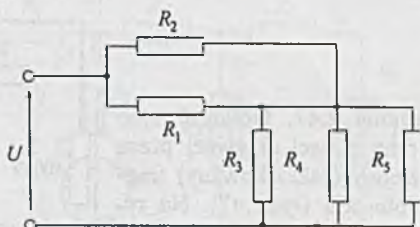
Zadanie 1.51. Podać graniczną wartość napięcia zasilania U , przy której na najbardziej obciążonym oporze układu z rys. 1.51 wydzieli się moc znamionowa. Który to jest element?

Oporniki o mocy nominalnej 1 W każdy mają następujące wartości:

$$R_1 = 0.68 \text{ k}\Omega, R_2 = 3.9 \text{ k}\Omega,$$

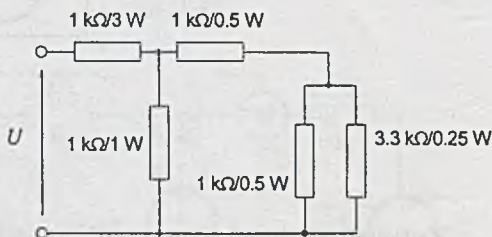
$$R_3 = 10 \text{ k}\Omega, R_4 = 1 \text{ k}\Omega,$$

$$R_5 = 3.3 \text{ k}\Omega.$$



Rys. 1.51

Zadanie 1.52. Obliczyć graniczną wartość napięcia zasilania U (rys. 1.52), przy której w żadnym z oporów nie będzie jeszcze przekroczona moc znamionowa. Na rysunku podano wartości znamionowe oporów i mocy oporników.

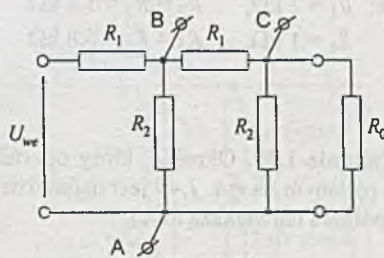


Rys. 1.52

[Zadanie 1.53. Układ przedstawiony na rys. 1.53 (tłumik napięciowy) służy do uzyskania między zaciskami A - B i A - C odpowiedniej części wartości napięcia wejściowego U_{we} .

Źródło napięciowe generujące napięcie U_{we} ma opór wewnętrzny znikomo mały, a obciążeniem układu tłumika napięciowego jest rezystor $R_0 = 100 \Omega$.

Należy dobrać oporniki R_1 i R_2 tak, by opór zastępczy widziany z zacisków A - B oraz A - C wynosił 50Ω . Jaka jest wartość oporu widzianego z zacisków źródła? Ile wynoszą wartości napięcia U_{BA} oraz U_{CA} , jeśli $U_{we} = 20 \text{ V}$?



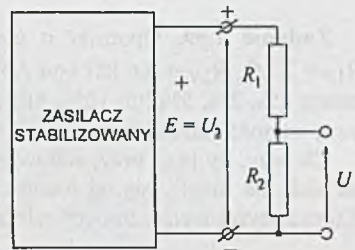
Rys. 1.53

Zadanie 1.54. Dla jakich wartości R_1 i R_2 , w układzie z poprzedniego zadania (1.53) przy $U_{we} = 20 \text{ V}$ i $R_0 = 100 \Omega$, napięcia dzielnika napięcia wynoszą: $U_{BA} = 10 \text{ V}$, $U_{CA} = 5 \text{ V}$? Jaka jest wówczas wartość oporów zastępczych R_{we} , R_{AB} , R_{AC} ?

[Zadanie 1.55. Napięcie na zaciskach wyjściowych zasilacza (rys. 1.55) jest stabilizowane bardzo dokładnie. Natomiast elementy dzielnika napięcia R_1 i R_2 są wykonane z tolerancją t_R %. Jakich odchyłek procentowych t_U (od wartości nominalnej) napięcia wyjściowego U można oczekiwać? Przeanalizować układ dla różnych wartości R_1 i R_2 , gdy wykonane są one z tolerancją $t_R = 0 \div 10\%$. Podać wartość t_U , gdy oporniki o wartościach nominalnych $R_{1N} = 2 \text{ k}\Omega$, $R_{2N} = 1 \text{ k}\Omega$ są wykonane z tolerancją 10%.

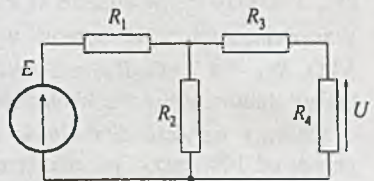
Uwaga

Zadanie to można rozwiązać wykorzystując współczynniki wrażliwości i tak zrobiono w zadaniu 6.52.



Rys. 1.55

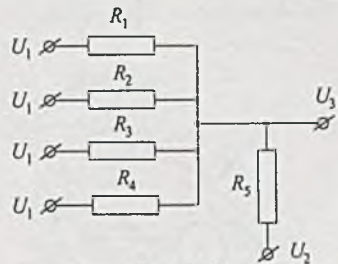
[Zadanie 1.56. W układzie przedstawionym na rys. 1.56 wartość SEM E jest stała, natomiast oporniki wskutek niedokładności wykonania mogą mieć 10% odchyłki oporu względem swych wartości znamionowych: $R_{1N} = 2 \text{ k}\Omega$, $R_{2N} = 1 \text{ k}\Omega$, $R_{3N} = 2 \text{ k}\Omega$, $R_{4N} = 1 \text{ k}\Omega$. Jak duża może być skutek tego odchyłka wyjściowego napięcia U względem wartości znamionowej? (Patrz też zadanie 6.54, gdzie do rozwiązania wykorzystano współczynniki wrażliwości).



Rys. 1.56

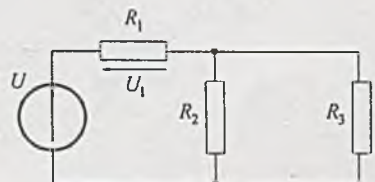
Zadanie 1.57. Sumator napięć jest wykonany z oporników o tolerancji 2% (rys. 1.57). Napięcia U_1 i U_2 są dokładnie stabilizowane. Podać największą odchyłkę napięcia wyjściowego sumatora U_3 (od wartości znamionowej) przy najniekorzystniejszym doborze oporników.

Dane: $U_1 = 12 \text{ V}$, $U_2 = -12 \text{ V}$,
 $R_{1N} = R_{2N} = R_{3N} = R_{4N} = 20 \text{ k}\Omega$,
 $R_{5N} = 10 \text{ k}\Omega$.



Rys. 1.57

[Zadanie 1.58. W układzie przedstawionym na rys. 1.58 napięcie zasilania U może odbiegać od swej wartości znamionowej o 2%. Oporniki zamontowane w układzie są wykonane z tolerancją 5%, a ich wartości nominalne wynoszą: $R_{1N} = R_{2N} = 2 \text{ k}\Omega$, $R_{3N} = 3 \text{ k}\Omega$.



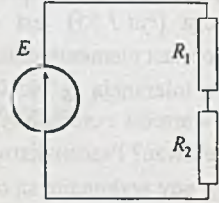
Rys. 1.58

Obliczyć największe odchyłki w górę napięcia U_1 i mocy P_1 na oporniku R_1 w stosunku do wartości znamionowych.

Rozwiązanie tego przykładu z wykorzystaniem wrażliwości przedstawione jest w zadaniu 6.53.

Zadanie 1.59. Oporniki o wartościach nominalnych oporu $R_{1N} = 2 \text{ k}\Omega$, $R_{2N} = 5.6 \text{ k}\Omega$ (rys. 1.59) mogą być wykonane z tolerancją 1%, 2%, 5% lub 10%. SEM E praktycznie nie odbiega od swej wartości znamionowej.

Chcemy, by przy przypadkowym doborze oporników napięcia na nich nie różniły się od wartości nominalnych więcej niż 3%. Która z wyżej wymienionych tolerancji oporów to zapewnia?



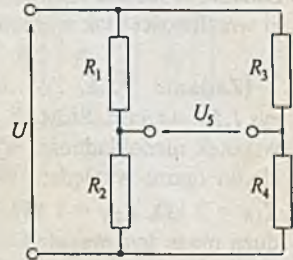
Rys. 1.59

Zadanie 1.60. Do seryjnej produkcji układów przedstawionych na rys. 1.60 używa się oporów wykonanych z pewną tolerancją wartości. Są do dyspozycji trzy grupy oporów o tolerancjach 1%, 2%, 5%, przy czym droższe są elementy o mniejszej tolerancji. Wartości znamionowe oporów wynoszą: $R_{1N} = 2 \text{ k}\Omega$, $R_{2N} = 3 \text{ k}\Omega$, $R_{3N} = 4.7 \text{ k}\Omega$, $R_{4N} = 2.4 \text{ k}\Omega$. Napięcie zasilania układu U będzie stabilizowane z dokładnością 1%.

Chcemy uzyskać dokładność napięcia wyjściowego U_5 nie gorszą od 10%, przy jak najniższym koszcie elementów. Jakich oporników (o jakich tolerancjach) należy użyć?

Uwaga

Rozwiązanie z wykorzystaniem wrażliwości przedstawiono w zadaniu 6.55.



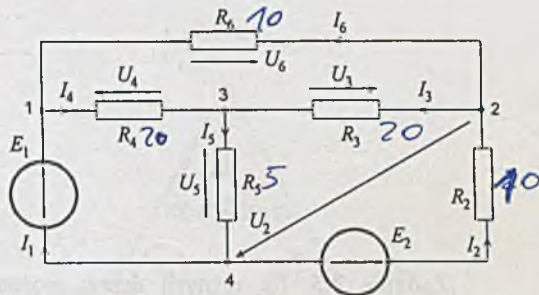
Rys. 1.60

Rozdział 2

OBWODY ZŁOŻONE LINIOWE

[Zadanie 2.1. Wykorzystując prawa Kirchhoffa obliczyć rozpyły prądów w obwodzie z rys. 2.1.

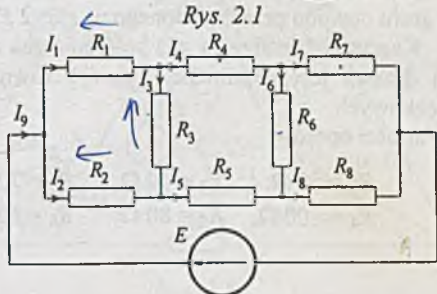
Dane: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$,
 $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$,
 $R_4 = 20 \Omega$, $R_5 = 5 \Omega$,
 $R_6 = 10 \Omega$.



Rys. 2.1

[Zadanie 2.2. Dla układu przedstawionego na rys. 2.2 wybrać drzewo obwodu i wykorzystać je do ułożenia równań Kirchhoffa. Obliczyć rozpyły prądów, przyjmując:

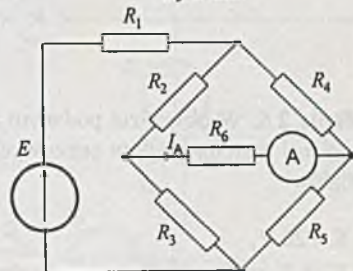
$E = 100 \text{ V}$,
 $R_1 = R_3 = R_5 = R_6 = R_7 = 100 \Omega$,
 $R_2 = R_4 = R_8 = 50 \Omega$.



Rys. 2.2

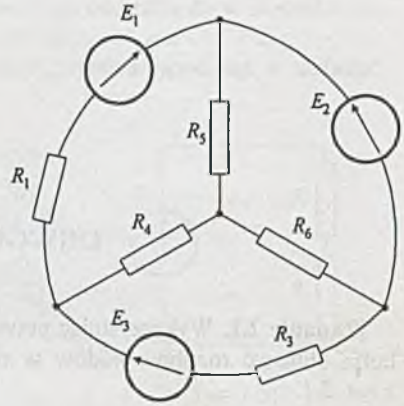
[Zadanie 2.3. Obliczyć wskazanie idealnego amperomierza I_A w obwodzie z rys. 2.3.

Dane: $E = 12 \text{ V}$, $R_1 = 100 \Omega$,
 $R_2 = R_3 = 200 \Omega$, $R_4 = 50 \Omega$,
 $R_5 = 180 \Omega$, $R_6 = 150 \Omega$.



Rys. 2.3

[Zadanie 2.4. Dla obwodu z rys.2.4 określić (po wybraniu drzewa) zależność między prądami gałęzi łączących i prądami drzewa oraz podać równania prądów oczkowych.



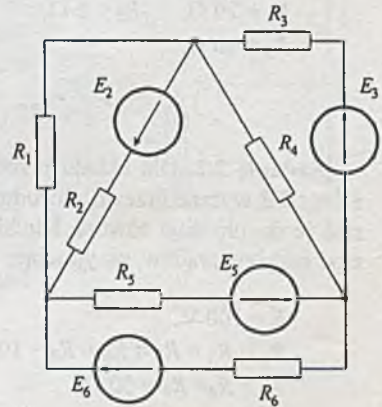
Rys. 2.4

[Zadanie 2.5. Ile różnych drzew można wybrać z grafu obwodu przedstawionego na rys. 2.5?

Korzystając z drzewa, dla którego suma oporów gałęzi drzewa jest najmniejsza, ułożyć równania prądów oczkowych.

Wartości oporów:

$$\begin{aligned} R_1 &= 50 \, \Omega, & R_2 &= 40 \, \Omega, & R_3 &= 70 \, \Omega, \\ R_4 &= 100 \, \Omega, & R_5 &= 80 \, \Omega, & R_6 &= 60 \, \Omega. \end{aligned}$$



Rys. 2.5

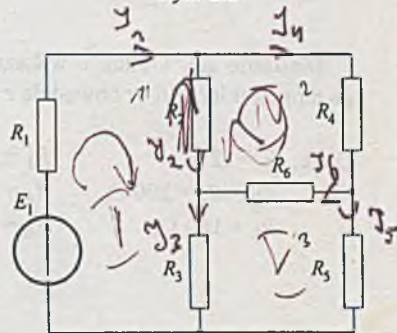
[Zadanie 2.6. W obwodzie podanym na rys. 2.6 wybrać drzewo i metodą prądów oczkowych obliczyć rozływ prądów.

Dane: $E = 20 \, \text{V}$,

$$R_1 = R_3 = R_4 = 10 \, \Omega,$$

$$R_2 = R_5 = 15 \, \Omega,$$

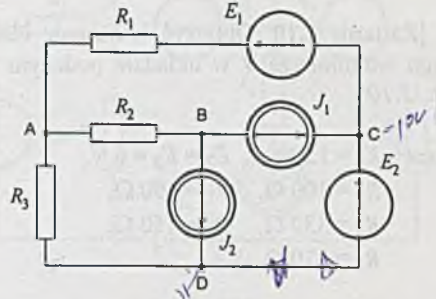
$$R_6 = 5 \, \Omega.$$



Rys. 2.6

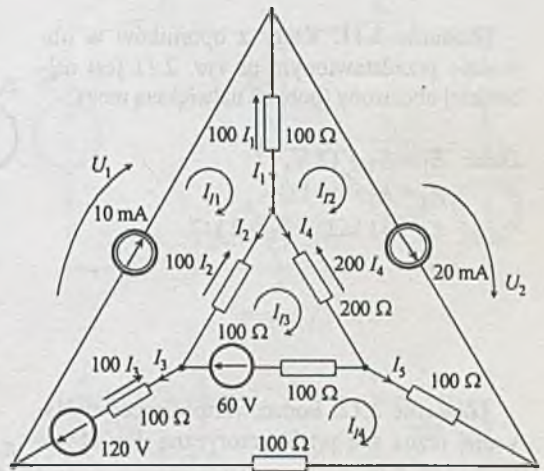
[Zadanie 2.7. Obliczyć moc wydawaną przez SEM E_2 do obwodu przedstawionego na rys. 2.7.

Dane: $E_1 = E_2 = 10 \text{ V}$,
 $J_1 = J_2 = 100 \text{ mA}$,
 $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$,
 $R_3 = 200 \Omega$.



Rys. 2.7

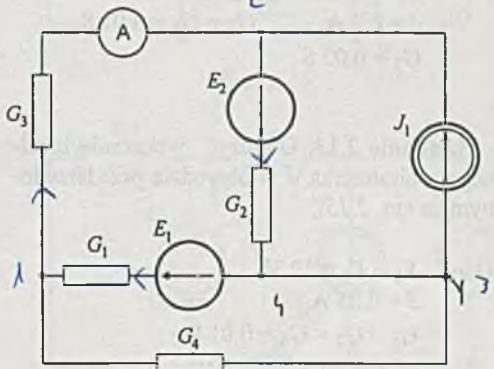
[Zadanie 2.8. Obliczyć moc wydawaną przez siły prądomotoryczne w układzie przedstawionym na rys. 2.8. Wartości elementów podane są na rysunku.



Rys. 2.8

[Zadanie 2.9. W obwodzie przedstawionym na rys. 2.9 obliczyć wskazanie idealnego amperomierza A.

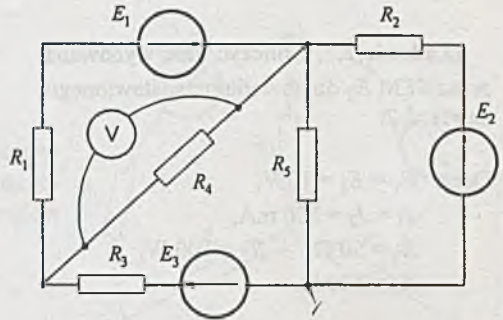
Dane: $E_1 = 20 \text{ V}$, $E_2 = 15 \text{ V}$,
 $J_1 = 1 \text{ mA}$,
 $G_1 = G_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ S}$,
 $G_3 = G_4 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ S}$.



Rys. 2.9

[Zadanie 2.10. Obliczyć wskazanie idealnego woltomierza V w układzie podanym na rys. 2.10.

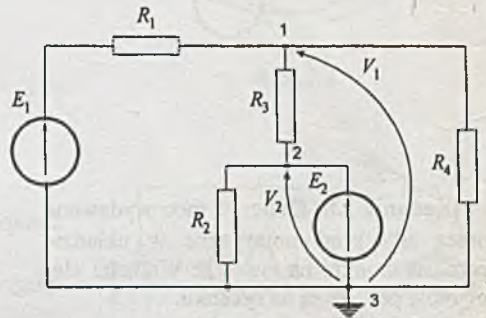
Dane: $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = E_3 = 6 \text{ V}$,
 $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 390 \Omega$,
 $R_3 = 330 \Omega$, $R_4 = 150 \Omega$,
 $R_5 = 120 \Omega$.



Rys. 2.10

[Zadanie 2.11. Który z oporników w obwodzie przedstawionym na rys. 2.11 jest najbardziej obciążony (pobiera największą moc)?

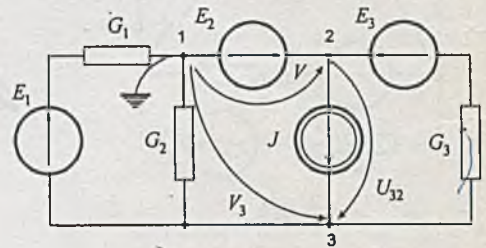
Dane: $E_1 = E_2 = 12 \text{ V}$,
 $R_1 = R_3 = 10 \text{ k}\Omega$,
 $R_2 = 33 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$.



Rys. 2.11

[Zadanie 2.12. Podać wartość mocy wydanej przez siłę prądomotoryczną J w obwodzie z rys. 2.12.

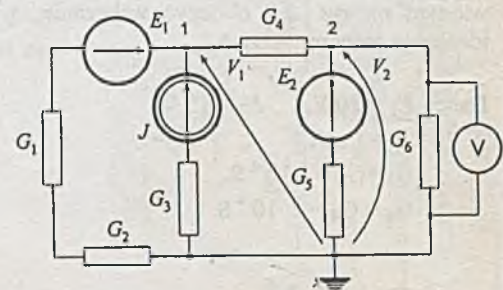
Dane: $E_1 = E_3 = 6 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$,
 $J = 0.2 \text{ A}$, $G_1 = G_3 = 0.01 \text{ S}$,
 $G_2 = 0.02 \text{ S}$.



Rys. 2.12

[Zadanie 2.13. Obliczyć wskazanie idealnego woltomierza V w obwodzie przedstawionym na rys. 2.13.

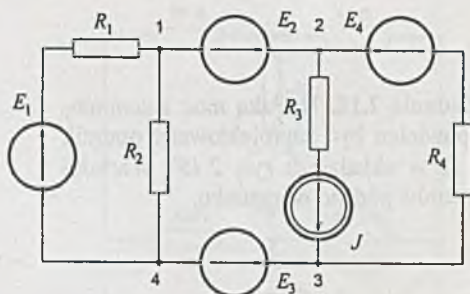
Dane: $E_1 = E_2 = 12 \text{ V}$,
 $J = 0.05 \text{ A}$,
 $G_1 = G_2 = G_5 = 0.01 \text{ S}$,
 $G_3 = 0.03 \text{ S}$,
 $G_4 = G_6 = 0.005 \text{ S}$.



Rys. 2.13

[Zadanie 2.14. Określić wartości napięć między węzłami obwodu z rys. 2.14. Numery węzłów zaznaczono na rysunku.

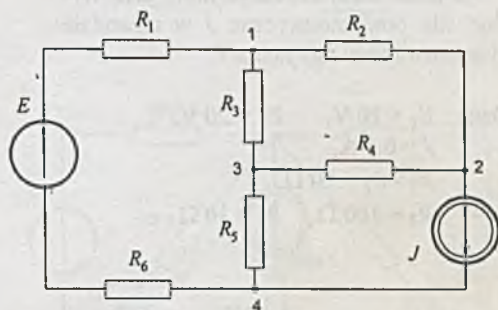
Dane: $E_1 = E_4 = 12 \text{ V}$,
 $E_2 = E_3 = 6 \text{ V}$,
 $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$,
 $R_3 = R_4 = 50 \Omega$,
 $J = 0.1 \text{ A}$.



Rys. 2.14

[Zadanie 2.15. Obliczyć moc P_E wydawaną przez siłę elektromotoryczną E w obwodzie z rys. 2.15.

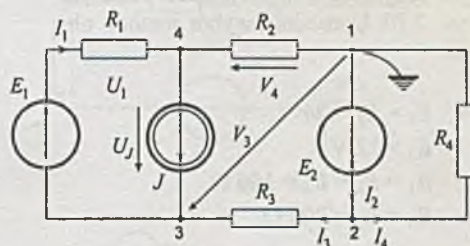
Dane: $E = 16 \text{ V}$, $J = 0.12 \text{ A}$,
 $R_1 = 390 \Omega$, $R_2 = 220 \Omega$,
 $R_3 = R_4 = 100 \Omega$,
 $R_5 = 330 \Omega$, $R_6 = 180 \Omega$.



Rys. 2.15

[Zadanie 2.16. Sporządzić bilans mocy dla obwodu przedstawionego na rys. 2.16. Przyjąć numerację węzłów jak na rysunku.

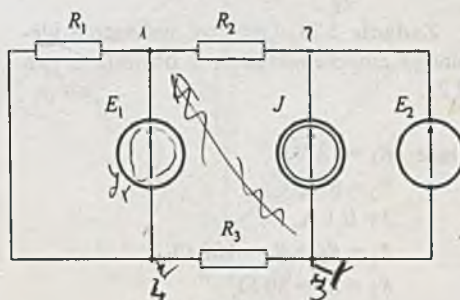
Dane: $E_1 = 6 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$,
 $J = 0.05 \text{ A}$,
 $R_1 = R_4 = 100 \Omega$,
 $R_2 = R_3 = 200 \Omega$.



Rys. 2.16

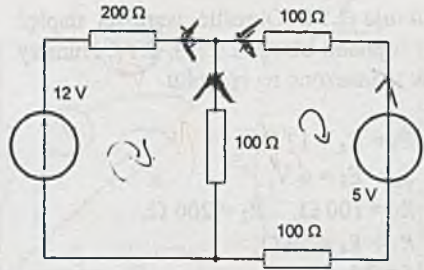
Zadanie 2.17. Sporządzić bilans mocy w obwodzie z rys. 2.17. Uzasadnić wybór metody obliczania rozplywu prądów i rozkładu napięć.

Dane: $E_1 = 24 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$,
 $J = 0.01 \text{ A}$,
 $R_1 = 680 \Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$,
 $R_3 = 1.5 \text{ k}\Omega$.



Rys. 2.17

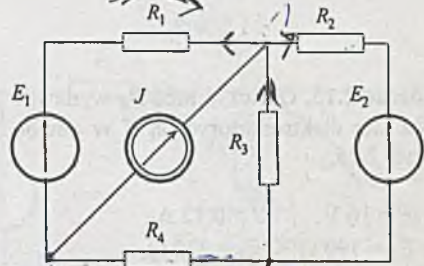
Zadanie 2.18. Na jaką moc znamionową powinien być zaprojektowany opornik $200\ \Omega$ w układzie z rys. 2.18? Wartości elementów podano na rysunku.



Rys. 2.18

Zadanie 2.19. Obliczyć moc, jaką wydaje siła prądomotoryczna J w obwodzie przedstawionym na rys. 2.19.

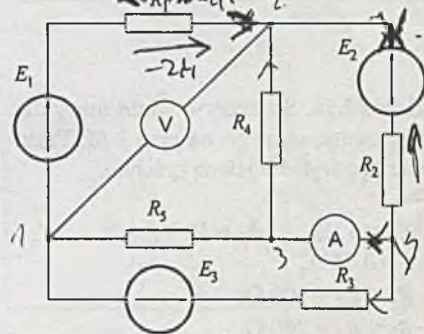
Dane: $E_1 = 10\text{ V}$, $E_2 = 20\text{ V}$,
 $J = 0.1\text{ A}$,
 $R_1 = R_2 = 20\ \Omega$,
 $R_3 = 100\ \Omega$, $R_4 = 30\ \Omega$.



Rys. 2.19

Zadanie 2.20. Obliczyć wskazania idealnych przyrządów w obwodzie podanym na rys. 2.20. Uzasadnić wybór metody obliczeń.

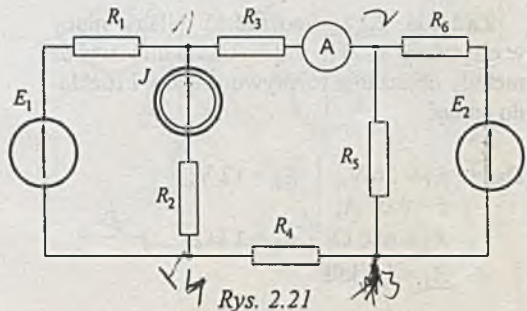
Dane: $E_1 = E_2 = 24\text{ V}$,
 $E_3 = 12\text{ V}$,
 $R_1 = R_2 = R_4 = 100\ \Omega$,
 $R_3 = R_5 = 200\ \Omega$.



Rys. 2.20

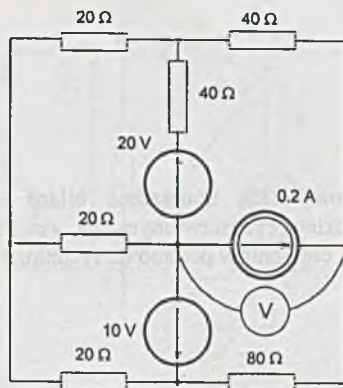
Zadanie 2.21. Obliczyć wskazanie idealnego amperomierza A z obvodu z rys. 2.21.

Dane: $E_1 = 12\text{ V}$,
 $E_2 = 6\text{ V}$,
 $J = 0.1\text{ A}$,
 $R_1 = R_2 = R_5 = 100\ \Omega$,
 $R_3 = R_4 = 50\ \Omega$,
 $R_6 = 200\ \Omega$.



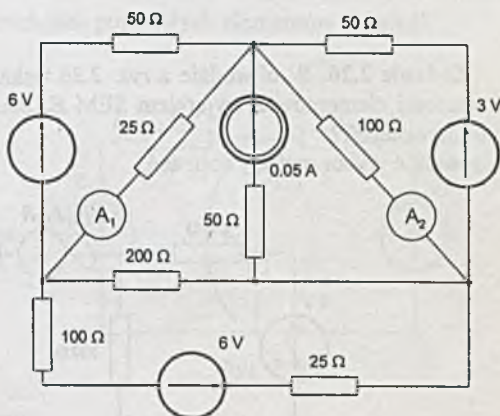
Rys. 2.21

Zadanie 2.22. Obliczyć wskazanie woltomierza w obwodzie z rys. 2.22.



Rys. 2.22

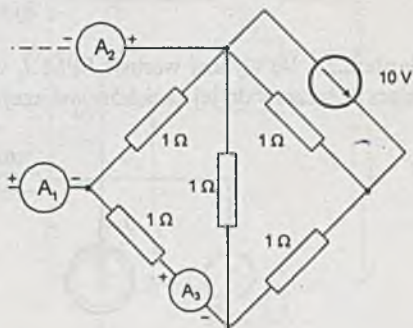
Zadanie 2.23. Podać wskazania przyrządów w obwodzie przedstawionym na rys. 2.23. Uzasadnić wybór metody obliczeń.



Rys. 2.23

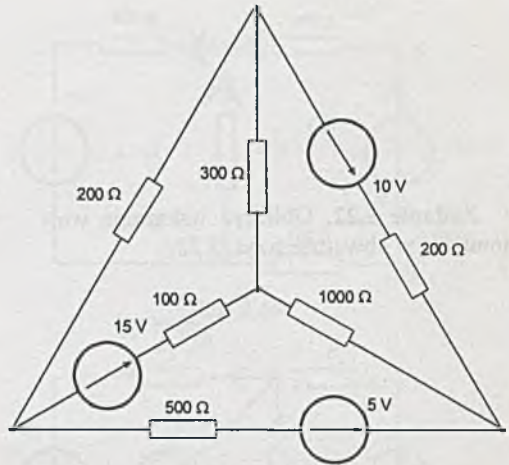
Zadanie 2.24. Rys. 2.24 przedstawia fragment obwodu (podobwód) połączony z siecią aktywną dwoma przewodami, do których wpięto idealne amperomierze A_1 i A_2 .

Jakie jest wskazanie amperomierza A_3 , jeśli wiadomo, że amperomierze A_1 oraz A_2 wskazują prądy 1 A?



Rys. 2.24

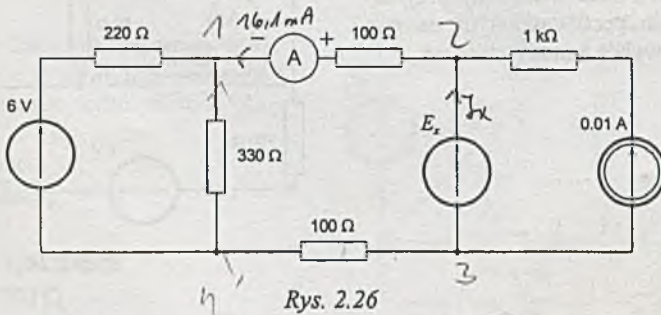
Zadanie 2.25. Sporządzić bilans mocy w obwodzie przedstawionym na rys. 2.25. Wartości elementów podano na rysunku.



Rys. 2.25

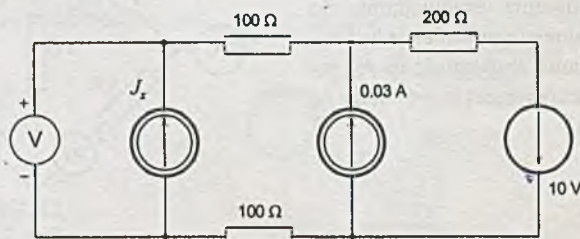
Zadanie 2.26. W obwodzie z rys. 2.26 wskazanie idealnego amperomierza wynosi 16.1 mA, a wartości elementów z wyjątkiem SEM E_x podano na rysunku. Jaka jest wartość siły elektromotorycznej E_x ?

Uzasadnić wybór metody obliczeń.



Rys. 2.26

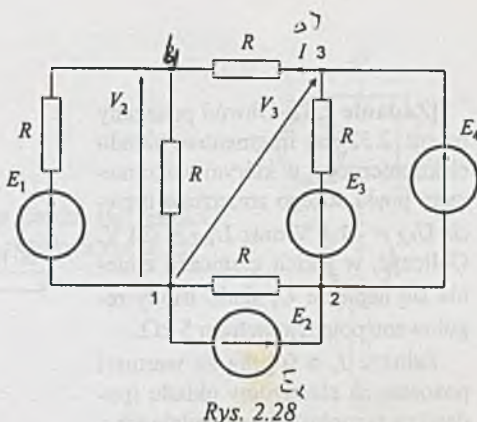
Zadanie 2.27. Ile wynosi wartość SPM J_x w obwodzie z rys. 2.27, jeśli wiadomo, że idealny woltomierz dołączony do jej zacisków wskazuje napięcie 44 V?



Rys. 2.27

[Zadanie 2.28. O ile należy zwiększyć wartość SEM E_2 w obwodzie podanym na rys. 2.28, aby wartość prądu I wzrosła o 20%?

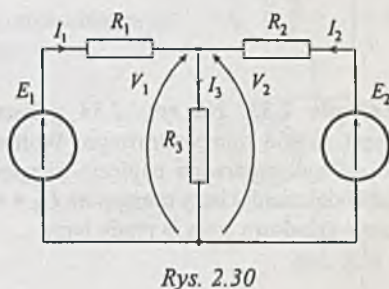
Dane: $E_1 = E_4 = 20 \text{ V}$,
 $E_2 = E_3 = 50 \text{ V}$,
 $R = 100 \Omega$.



Zadanie 2.29. Jaki będzie przyrost prądu I w układzie z poprzedniego zadania (2.28), jeśli SEM E_1 wzrośnie o 60% (przy nominalnych wartościach pozostałych elementów układu)?

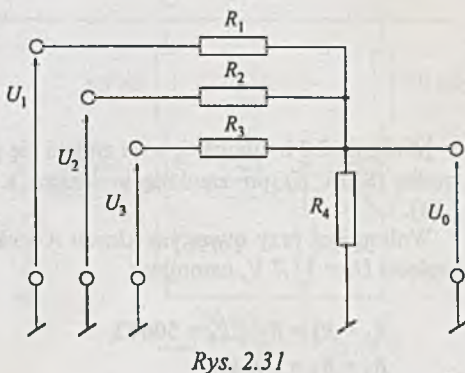
[Zadanie 2.30. Obliczyć, dla jakiej wartości SEM E_2 prąd I_3 w gałęzi z oporem R_3 wynosi zero (rys. 2.30). Określić ponadto zakres zmian wartości E_2 , przy którym $|\Delta I_3| \leq 1 \text{ mA}$.

Dane: $E_1 = 20 \text{ V}$,
 $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$,
 $R_3 = 500 \Omega$.



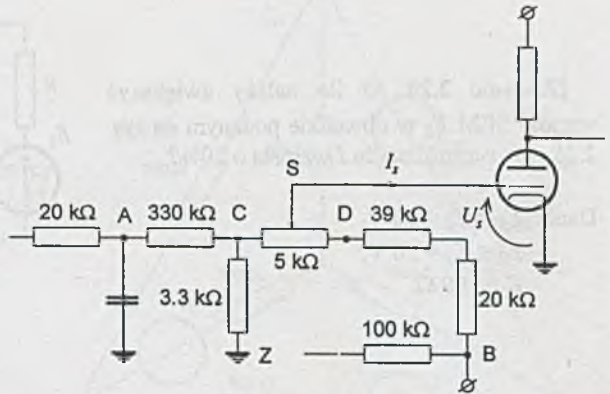
[Zadanie 2.31. Obliczyć wahania napięcia wyjściowego U_o w sumatorze (rys. 2.31), jeśli jedno z napięć wejściowych (U_2) waha się w granicach $\pm 10\%$ względem wartości znamionowej U_{2N} , a pozostałe napięcia wejściowe, tzn.: U_1 i U_3 , są stabilizowane, również wartości oporów są znamionowe.

Dane: $U_1 = -10 \text{ V}$, $U_{2N} = 15 \text{ V}$,
 $U_3 = 12 \text{ V}$,
 $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10 \text{ k}\Omega$,
 $R_4 = 20 \text{ k}\Omega$.



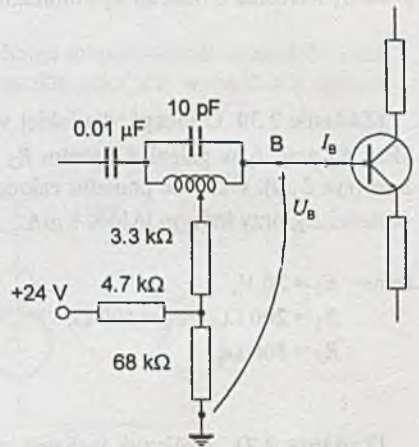
[Zadanie 2.32. Obwód pokazany na rys. 2.32 jest fragmentem układu elektronicznego, w którym woltomierzem prądu stałego zmierzono napięcia $U_{AZ} = -1.1 \text{ V}$ oraz $U_{BZ} = -24 \text{ V}$. Obliczyć, w jakich granicach zmienia się napięcie U_s siatki triody regulowane potencjometrem $5 \text{ k}\Omega$.

Założyć $I_s \approx 0$ oraz że wartości pozostałych elementów układu (podane na rysunku) nie zmieniają się.



Rys. 2.32

[Zadanie 2.33. Na rys. 2.33 pokazany jest fragment układu tranzystorowego. Woltomierzem prądu stałego zmierzono napięcie (względem potencjału odniesienia) bazy tranzystora $U_B = +18.6 \text{ V}$. Obliczyć składową stałą I_B prądu bazy.

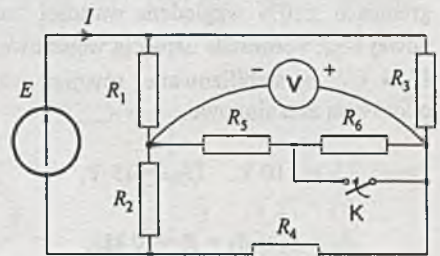


Rys. 2.33

[Zadanie 2.34. Obliczyć, o ile zmieni się prąd I źródła (SEM E) po zamknięciu klucza K (rys. 2.34).

Woltomierz przy otwartym kluczu K wskazuje napięcie $U_V = 11.7 \text{ V}$, natomiast:

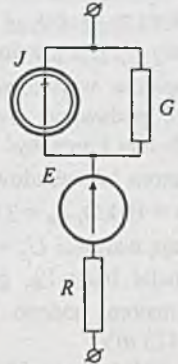
$$R_1 = R_4 = R_5 = R_6 = 500 \Omega, \\ R_2 = R_3 = 100 \Omega.$$



Rys. 2.34

Zadanie 2.35. Określić parametry zastępczego źródła (w postaci źródła napięciowego oraz prądowego) aktywnego dwójnika z rys. 2.35.

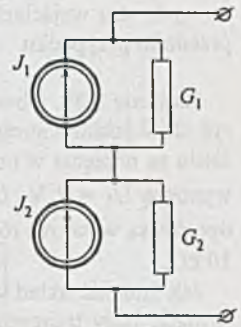
Dane: $J = 10 \text{ mA}$, $E = 12 \text{ V}$,
 $G = 0.001 \text{ S}$, $R = 200 \Omega$.



Rys. 2.35

Zadanie 2.36. Przedstawić dwójnik z rys. 2.36 w postaci równoważnego zastępczego źródła: a) napięciowego, b) prądowego.

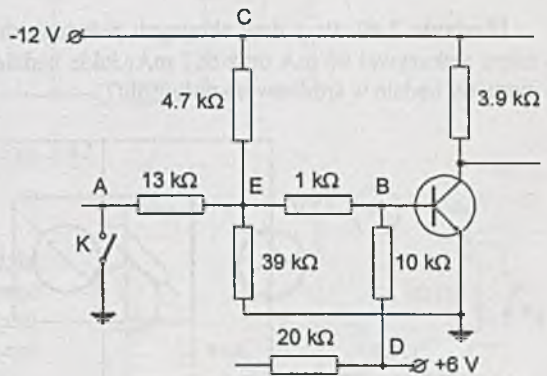
Dane: $J_1 = 10 \text{ mA}$, $J_2 = 30 \text{ mA}$,
 $G_1 = 0.02 \text{ S}$, $G_2 = 0.005 \text{ S}$.



Rys. 2.36

Zadanie 2.37. W obwodzie z rys. 2.37, który jest fragmentem złożonego układu elektronicznego, należy obliczyć wysteroowanie bazy B tranzystora przy otwartym i zamkniętym kluczu K.

Przy otwartym kluczu K potencjał punktu A jest równy -16 V , a wartości elementów podano na rysunku.



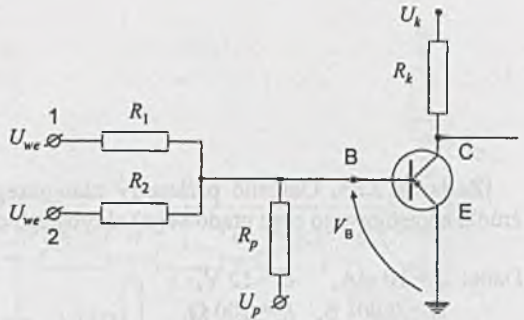
Rys. 2.37

Zadanie 2.38. W obwodzie przedstawionym na rys. 2.38 napięcie polaryzacji bazy U_p jest przyłożone na stałe, natomiast napięcia wejściowe U_{we} sumatora mogą być podawane równocześnie, pojedynczo lub oba mogą być równe zero. Układ sumatora jest zbudowany z oporników $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_p = 33 \text{ k}\Omega$, natomiast napięcia mają wartości $U_p = 6 \text{ V}$ i $U_{we} = -6 \text{ V}$. Potencjał bazy V_B , gdy na obydwa wejścia sumatora podano napięcie U_{we} , wynosi -425 mV .

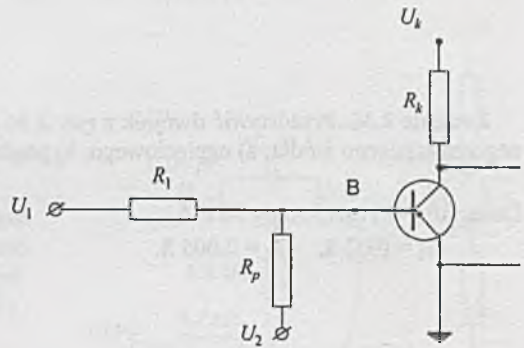
Należy zmodyfikować układ tak, by przy innym napięciu wejściowym $U_{we} = -12 \text{ V}$ prąd bazy (potencjał V_B) przy włączonych obu wejściach był taki jak w poprzednim przypadku.

Zadanie 2.39. Obwód przedstawiony na rys. 2.39 został zaprojektowany, przy założeniu że napięcia w obwodzie wejściowym wynoszą $U_1 = 2 \text{ V}$, $U_2 = -6 \text{ V}$. Wartości oporów są wówczas równe $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$.

Jak zmienić układ wejściowy, by występowanie bazy tranzystora było takie samo, gdy jedno z napięć (U_2) zmieni się na $U'_2 = -4 \text{ V}$?

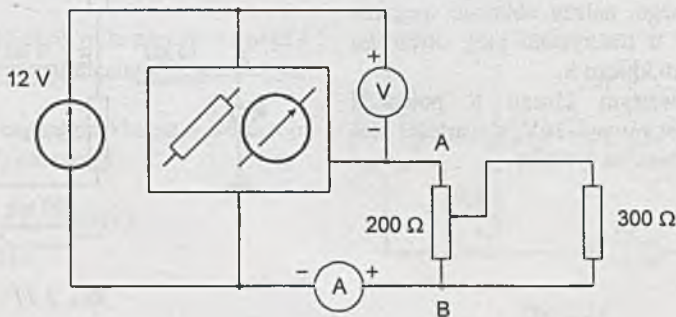


Rys. 2.38



Rys. 2.39

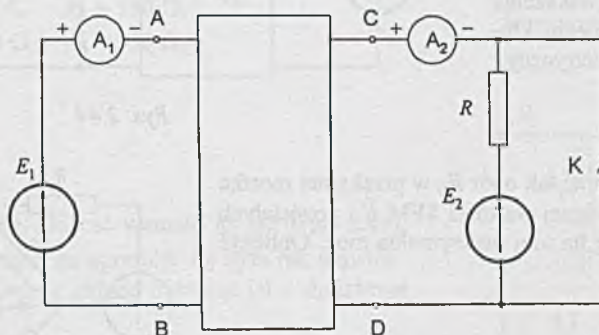
[Zadanie 2.40. Przy dwu skrajnych położeniach suwaka potencjometru (rys. 2.40) amperomierz wskazywał 46 mA oraz 667 mA . Jakie będzie wskazanie woltomierza, jeśli suwak potencjometru będzie w środkowym położeniu?



Rys. 2.40

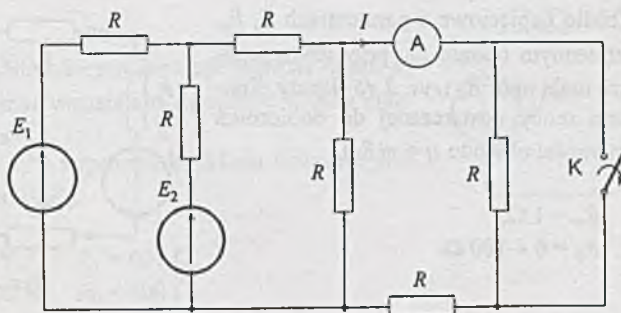
[Zadanie 2.41. Obliczyć wskazania idealnych amperomierzy A_1 i A_2 po otwarciu klucza K , jeśli wiadomo, że czwórnik ABCD jest pasywny i symetryczny (rys. 2.41), a przy zamkniętym kluczu K amperomierz A_1 wskazywał prąd 6 mA, natomiast A_2 prąd 2 mA.

Dane: $E_1 = 60 \text{ V}$, $E_2 = 35 \text{ V}$, $R = 5 \text{ k}\Omega$.



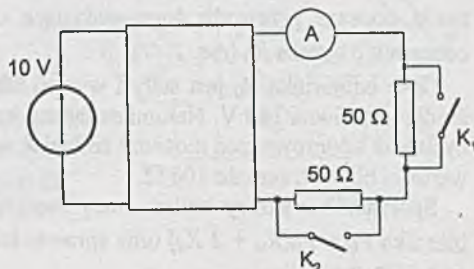
Rys. 2.41

[Zadanie 2.42. Przy zamkniętym kluczu K (rys. 2.42) amperomierz wskazuje prąd 1.76 mA. Obliczyć jego wskazanie po otwarciu klucza.



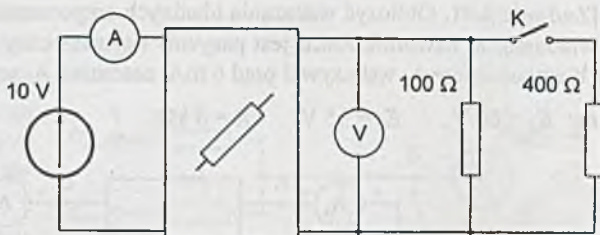
Rys. 2.42

Zadanie 2.43. Amperomierz w obwodzie przedstawionym na rys. 2.43 wskazuje przy otwartych kluczach 11 mA, a przy zamknięciu jednego z nich 12.1 mA. Jakie będzie jego wskazanie, gdy klucze K_1 i K_2 będą zamknięte?



Rys. 2.43

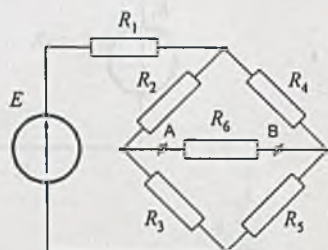
Zadanie 2.44. W układzie przedstawionym na rys. 2.44, przy otwartym kluczu K, przyrządy wskazywały 116.8 mA oraz 7.52 V. Podać wskazania przyrządów po zamknięciu klucza. Czwórnik jest symetryczny.



Rys. 2.44

[Zadanie 2.45. Dobrać tak opór R_6 w przekątnej mostka (rys. 2.45), by przy zadanej wartości SEM E i pozostałych oporów wydzielala się na nim maksymalna moc. Obliczyć jej wartość.

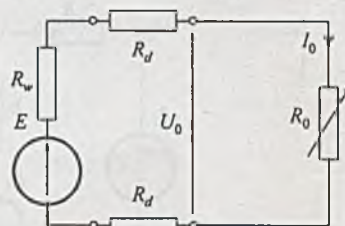
Dane: $E = 12 \text{ V}$,
 $R_1 = 0.2 \Omega$,
 $R_2 = R_5 = 0.5 \Omega$,
 $R_3 = R_4 = 0.4 \Omega$.



Rys. 2.45

[Zadanie 2.46. Źródło napięciowe o parametrach E , R_w zasila odbiornik o zmiennym oporze R_0 , przy czym przewody doprowadzające mają opór R_d (rys. 2.46) każdy. Sporządzić wykres zmian mocy dostarczanej do odbiornika $P_0 = P_0(R_0)$ oraz sprawności obwodu $\eta = \eta(R_0)$.

Dane: $E = 12 \text{ V}$, $R_w = 1 \Omega$,
 $R_d = 4.5 \Omega$, $R_0 = 0 + 100 \Omega$.

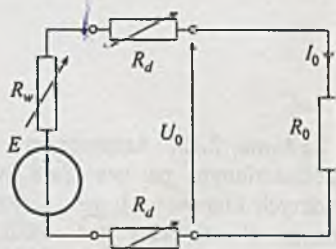


Rys. 2.46

[Zadanie 2.47. Źródło napięciowe o parametrach E , R_w zasila poprzez przewody doprowadzające o oporach R_d odbiornik o oporze R_0 (rys. 2.47).

Opór odbiornika R_0 jest stały i wynosi 10Ω , a SEM E źródła jest równa 120 V . Natomiast łączny opór wewnętrzny źródła i doprowadzeń możemy zmieniać w granicach od wartości bliskich zera do 100Ω .

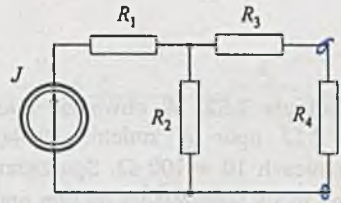
Sporządzić wykresy zmian mocy dostarczanej do odbiornika $P_0 = P_0(R_w + 2 R_d)$ oraz sprawności obwodu $\eta = \eta(R_w + 2 R_d)$.



Rys. 2.47

[Zadanie 2.48. W obwodzie przedstawionym na rys. 2.48 należy tak dobrać opornik R_4 , aby moc wydzielona na nim nie przekroczyła 2 W.

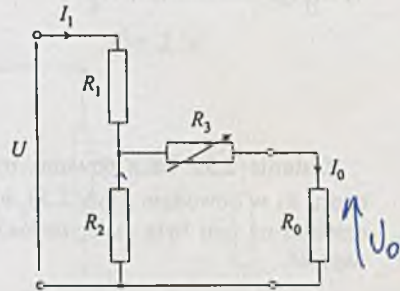
Dane: $J = 0.35 \text{ A}$, $R_1 = 100 \Omega$,
 $R_2 = 200 \Omega$, $R_3 = 330 \Omega$.



Rys. 2.48

[Zadanie 2.49. Dobrac wartość R_3 tak (rys. 2.49), by moc wydzielana na oporniku R_0 była jak największa. Podać sprawność układu traktując jako obciążenie opornik R_0 .

Dane: $U = 18 \text{ V}$, $R_1 = 200 \Omega$,
 $R_2 = 330 \Omega$, $R_0 = 600 \Omega$.

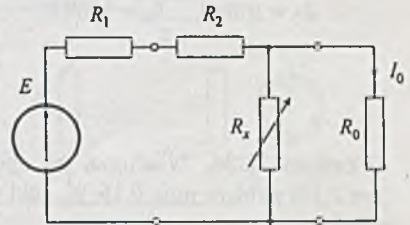


Rys. 2.49

[Zadanie 2.50. Jaka powinna być wartość oporu R_x (rys. 2.50), by moc wydzielana na oporze R_0 była maksymalna?

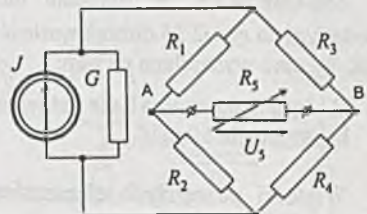
Obliczyć tę moc i sprawność układu traktując jako obciążenie opornik R_0 .

Dane: $E = 12 \text{ V}$, $R_1 = 600 \Omega$,
 $R_2 = 200 \Omega$, $R_0 = 600 \Omega$.



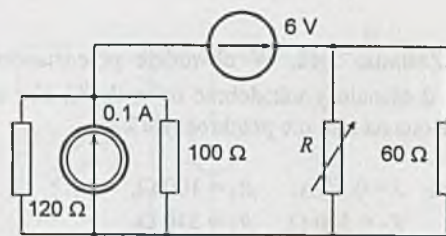
Rys. 2.50

[Zadanie 2.51. Obliczyć zakres zmian napięcia U_5 na przekątnej mostka z rys. 2.51, jeśli opór R_5 zmienia się w granicach $200 \div 500 \Omega$. Wartości pozostałych elementów: $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 400 \Omega$, $R_3 = R_4 = 300 \Omega$, $J = 15 \text{ mA}$, $G = 0.001 \text{ S}$.



Rys. 2.51

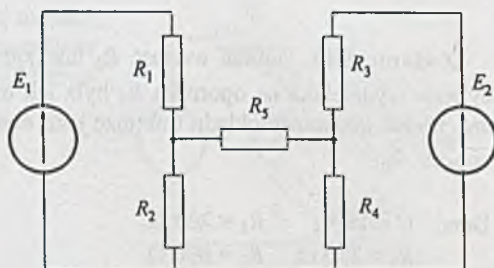
Zadanie 2.52. W obwodzie podanym na rys. 2.52 opór R zmienia swoją wartość w granicach $10 \div 100 \Omega$. Sporządzić wykres zmian mocy wydzielonej na tym oporze $P_R = f(R)$. Zinterpretować wartość R , przy której występuje maksimum mocy.



Rys. 2.52

Zadanie 2.53. Jaka powinna być wartość oporu R_5 w obwodzie z rys. 2.53, by moc wydzielana na nim była maksymalna? Podać jej wartość.

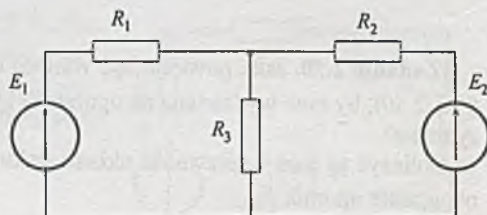
Dane: $E_1 = 30 \text{ V}$, $E_2 = 12 \text{ V}$,
 $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 300 \Omega$,
 $R_3 = 100 \Omega$, $R_4 = 1000 \Omega$.



Rys. 2.53

Zadanie 2.54. Wiadomo, że opornik R_3 (rys. 2.54) pobiera moc 0.16 W. Jaki jest jego opór?

Dane: $E_1 = 12 \text{ V}$, $E_2 = 4 \text{ V}$,
 $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$.



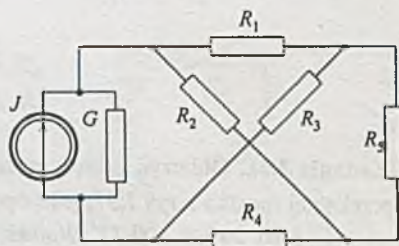
Rys. 2.54

Zadanie 2.55. W układzie mostkowym podanym na rys. 2.55 dobrać wartość oporu R_5 tak, by moc wydzielana na nim:

- była maksymalna (jaka jest jej wartość?),
- wynosiła 50 mW.

Wartości pozostałych elementów obwodu wynoszą:

$J = 3 \text{ A}$, $G = 0.05 \text{ S}$,
 $R_1 = R_2 = 100 \Omega$,
 $R_3 = 50 \Omega$, $R_4 = 30 \Omega$.

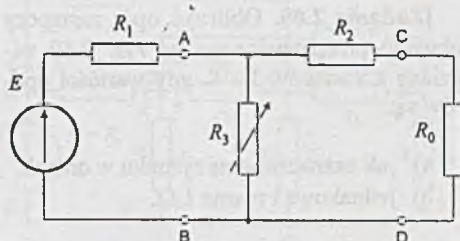


Rys. 2.55

Zadanie 2.56. Dobrać wartość R_3 tak (rys. 2.56), by moc:

- dostarczana do dwójnika pasywnego C - D była maksymalna,
- wydawana przez dwójnik aktywny A - B była maksymalna,
- wydawana przez SEM E była maksymalna.

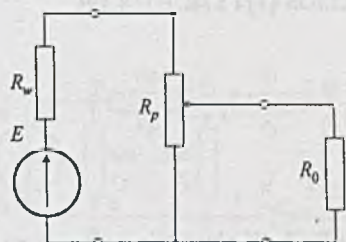
Dane: $R_1 = R_2 = 200 \, \Omega$, $R_0 = 600 \, \Omega$.



Rys. 2.56

Zadanie 2.57. Do źródła napięcia stałego (rys. 2.57) jest podłączony potencjometr o oporze R_p . Obciążeniem potencjometru jest opornik R_0 . Jaka może być maksymalna wartość mocy dostarczanej do opornika R_0 w tym układzie?

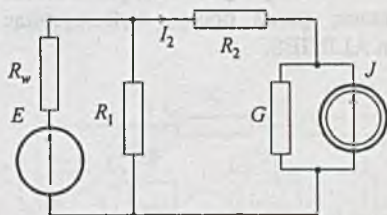
Dane: $E = 6 \, \text{V}$, $R_w = 2 \, \Omega$,
 $R_p = 1 \, \text{k}\Omega$, $R_0 = 30 \, \Omega$.



Rys. 2.57

Zadanie 2.58. Określić współczynniki wpływu obu źródeł na prąd I_2 w obwodzie podanym na rys. 2.58.

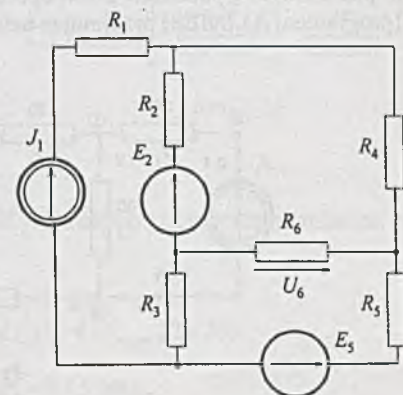
Dane: $R_w = 2 \, \Omega$, $R_1 = 330 \, \Omega$,
 $R_2 = 100 \, \Omega$, $G = 0.1 \, \text{S}$.



Rys. 2.58

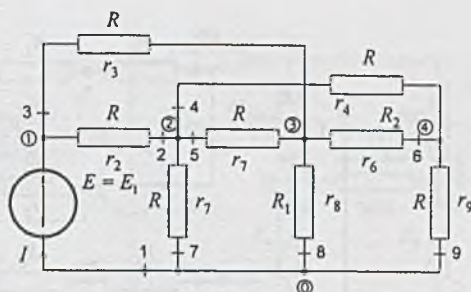
Zadanie 2.59. W obwodzie podanym na rys. 2.59 określić współczynniki wpływu poszczególnych źródeł na napięcie U_6 przekątnej mostka.

Dane: $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 100 \, \Omega$,
 $R_2 = R_6 = 200 \, \Omega$.



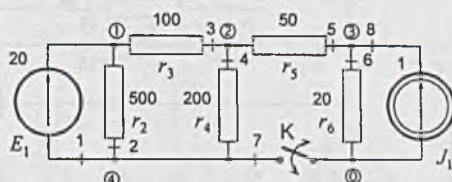
Rys. 2.59

[Zadanie 2.63. Określić, zmiana którego z oporników: R_1 czy R_2 (z wartości R na $2R$) spowoduje większą zmianę prądu I wydawanego przez SEM E (rys. 2.63).



Rys. 2.63

[Zadanie 2.64. Obliczyć potencjały węzłów 1, 2, 3 i 4 w obwodzie podanym na rys. 2.64, przy otwartym i zamkniętym kluczu K, wykorzystując program ALINIES.

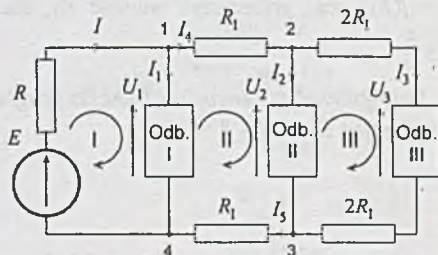


Rys. 2.64

[Zadanie 2.65. Obliczyć wartości prądów I_1 oraz I_3 pobieranych przez pierwszy i trzeci odbiornik oraz napięcie U_2 na drugim odbiorniku (rys. 2.65) programem ALINIES.

Dane:

Napięcie na odbiorniku pierwszym $U_1 = 245$ V i trzecim $U_3 = 160$ V oraz prąd pobierany przez odbiornik drugi $I_2 = 12.5$ A, ponadto $R_1 = 1 \Omega$, opór wewnętrzny źródła $R = 0.261 \Omega$, wartość SEM źródła $E = 260$ V.

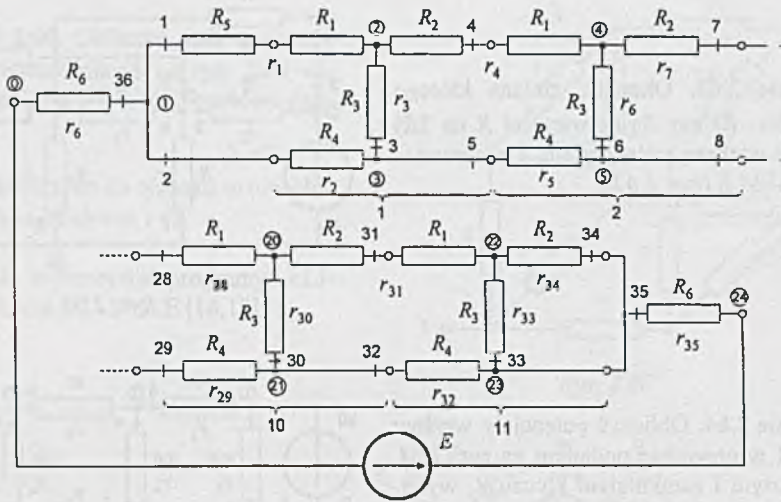


Rys. 2.65

[Zadanie 2.66. Obwód przedstawiony na rys. 2.66 jest statycznym modelem izolatora. Należy obliczyć i narysować rozkłady napięć na:

- kloszach izolatora (tj. potencjały węzłów 1, 3, 5, ..., 23),
- pnii izolatora (tj. różnice potencjałów węzłów 2 i 3, 4 i 5, ..., 22 i 23).

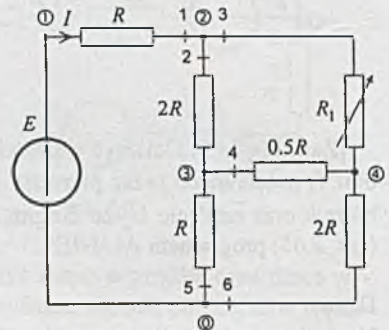
Dane: $R_1 = 1.05$ M Ω , $R_2 = 8.95$ M Ω , $R_3 = 0.85$ M Ω ,
 $R_4 = 21$ M Ω , $R_5 = 17$ M Ω , $R_6 = 1.2$ M Ω ,
 $E = 3$ kV.



Rys. 2.66

[Zadanie 2.67. W obwodzie podanym na rys. 2.67 należy wyznaczyć zależność prądu I źródła od wartości oporu R_1 . Ponadto należy sporządzić wykres funkcji $I = f(R_1)$ oraz wyznaczyć wartość R_1 , dla której $I = 0.3 \frac{E}{R}$.

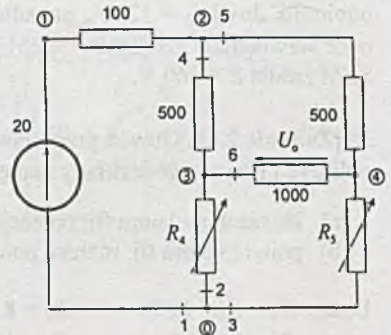
Przygotować odpowiednie dane do programu SPICE, przyjmując $E = 1 \text{ V}$ i $R = 1 \Omega$.



Rys. 2.67

[Zadanie 2.68. Dla mostka podanego na rys. 2.68 sporządzić wykres zmian napięcia U_0 na przekątnej przy zmianie wartości oporu R_4 w przedziale $50 \div 10000 \Omega$, jeśli wartość oporu R_5 nie różni się od R_4 o więcej niż 5%.

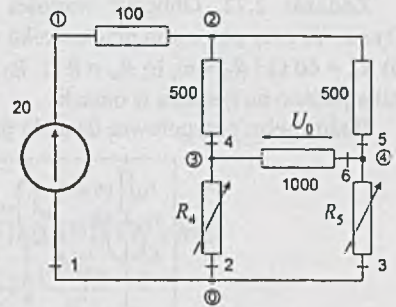
Do sporządzenia wykresów wykorzystać program SPICE (PROBE).



Rys. 2.68

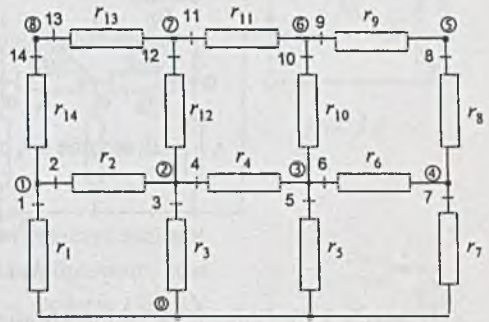
[Zadanie 2.69. Dla obwodu z rys. 2.69 sporządzić wykres zmian napięcia U_0 , jeśli wartość oporu R_4 zmienia się w przedziale $50 \div 1000 \Omega$, a opór R_5 nie różni się od R_4 o więcej niż 50Ω .

Wykorzystać program SPICE.



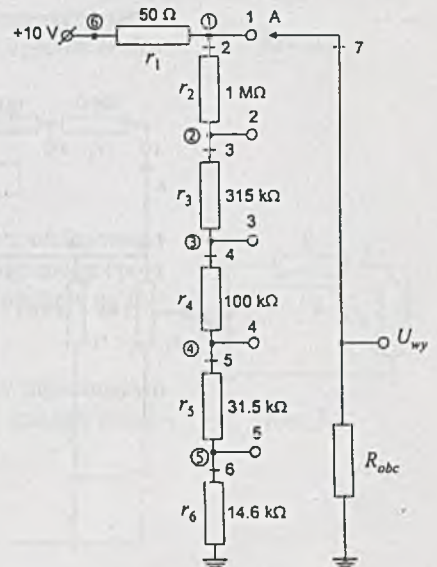
Rys. 2.69

[Zadanie 2.70. Określić, jak zmienia się opór wejściowy siatki oporowej (rys. 2.70), jeśli określamy go między węzłami 8 i 0, a następnie 7 i 0. Wszystkie opory w siatce mają wartość 1Ω .



Rys. 2.70

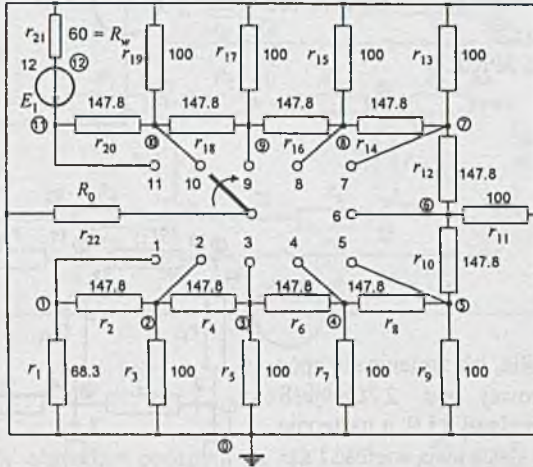
[Zadanie 2.71. W obwodzie z rys. 2.71 należy obliczyć wartość napięcia wyjściowego U_{wy} , gdy przełącznik A będzie w pozycji 1, 2, ... , 5, jeśli $R_{obc} = \infty$. Dla jakiej skończonej wartości oporu obciążenia R_{obc} błąd napięcia wyjściowego U_{wy} (w porównaniu z $R_{obc} = \infty$) będzie mniejszy od 1%?



Rys. 2.71

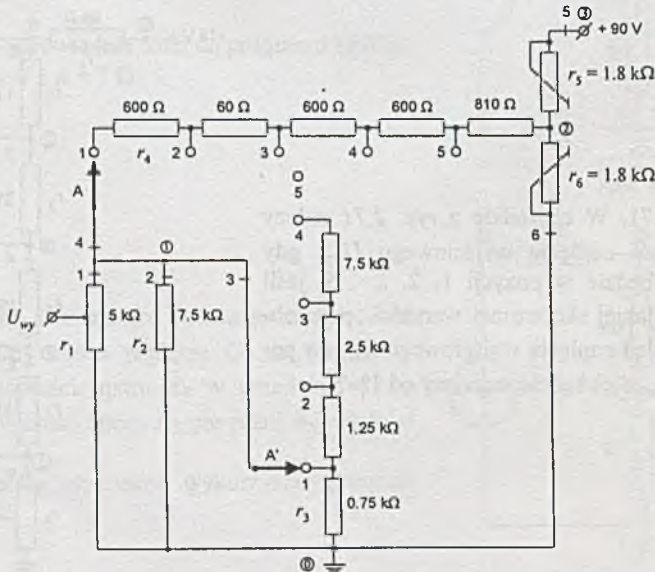
Zadanie 2.72. Obliczyć wartości napięć na oporniku R_0 oporowego dzielnika napięcia (rys. 2.72) przy położeniu przełącznika w pozycji 1, 2, ..., 11. Obliczenia przeprowadzić dla:
a) $R_w = 60 \Omega$ i $R_0 = \infty$, b) $R_w = 0 \Omega$, $R_0 = \infty$, c) $R_w = 60 \Omega$, $R_0 = 60 \Omega$. Wartości rezystorów dzielnika podano na rysunku w omach.

Wskazówka: przygotować dane do programów ALINIES, ALIOS i SPICE.



Rys. 2.72

[Zadanie 2.73. Obliczyć, w jakim zakresie może się zmieniać napięcie U_{wy} na potencjometrze $5 \text{ k}\Omega$ przy położeniu przełączników A i A' w pozycjach 1, 2, 3 i 4 (rys. 2.73).



Rys. 2.73

Rozdział 3

OBWODY Z ELEMENTAMI NIELINIOWYMI

[Zadanie 3.1. W obwodzie podanym na rys. 3.1 obliczyć prąd I oraz napięcia U_1 i U_N .

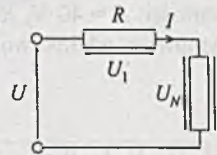
Dane:

$U = 200 \text{ V}$, $R = 42 \text{ k}\Omega$, a element nieliniowy dany jest zależnością

$$U_N = C \cdot I^B$$

gdzie: $C = 320$, $B = 0.2$, napięcie U_N w woltach, prąd I w amperach.

Zadanie rozwiązać analitycznie i wykreślić.

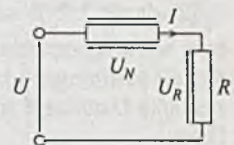


Rys. 3.1

[Zadanie 3.2. W obwodzie podanym na rys. 3.2 wyznaczyć napięcie U_R na elemencie liniowym, napięcie U_N na elemencie nieliniowym, prąd I oraz zakres jego zmian przy zmianie wartości napięcia zasilania $U_0 \pm 2 \text{ V}$ od wartości znamionowej.

Dane:

$U = 10 \text{ V}$, $R = 2 \Omega$, zależność $U_N = f(I)$ elementu nieliniowego można aproksymować odcinkami. Współrzędne początków i końców odcinków podano w tablicy 3.2.



Rys. 3.2

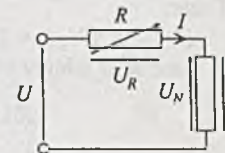
Tablica 3.2

$I, \text{ A}$	0	0.25	1	3
$U_N, \text{ V}$	0	5	8	9

[Zadanie 3.3. W obwodzie składającym się z elementu nieliniowego (neonówka) i opornika R (rys. 3.3) należy określić zakres zmian oporu R , dla którego przy stałej wartości napięcia zasilania U napięcie na elemencie nieliniowym U_N zmienia się od 77 do 83 V.

Dane:

napięcie zasilania $U = 100 \text{ V}$, element nieliniowy w interesującym nas zakresie pracy można aproksymować odcinkiem, którego współrzędne końców dane są w tablicy 3.3.



Rys. 3.3

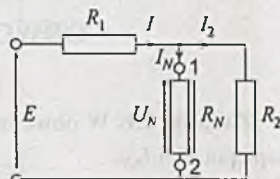
Tablica 3.3

$I, \text{ mA}$	5	35
$U_N, \text{ V}$	75	85

[Zadanie 3.4. W obwodzie podanym w zadaniu 3.1 należy określić wartość napięcia zasilania U , przy którym prąd $I = 3 \text{ mA}$.

Zadanie 3.5. Określić dopuszczalny zakres zmian oporu R w obwodzie podanym w zadaniu 3.3, jeżeli pozostawimy ten sam dopuszczalny zakres zmian napięcia na elemencie nieliniowym (jak w zad. 3.3.), ale przyjmiemy, że napięcie zasilania U zmienia się o $\pm 5 \text{ V}$.

[Zadanie 3.6. W obwodzie podanym na rys. 3.6 należy obliczyć rozpyły prądów. Obliczenia przeprowadzić dla następujących wartości: $E = 40 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 8 \text{ k}\Omega$, a element nieliniowy aproksymowany odcinkowo scharakteryzowany jest tablicą 3.6.



Rys. 3.6

Tablica 3.6

U_N, V	0	8	16	30
I_N, mA	0	1	3	6

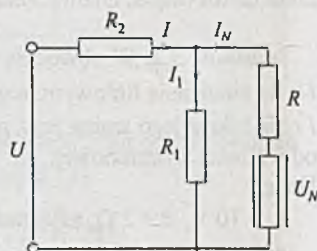
Tablica 3.7

U_N, V	0	10	20
I_N, mA	0	0.2	1.2

[Zadanie 3.7. W obwodzie podanym na rys. 3.7 należy dobrać wartość napięcia zasilania U tak, by napięcie U_N na elemencie nieliniowym było równe 15 V . Dla dobranego napięcia zasilania U obliczyć rozpyły prądów.

Dane:

$R_1 = 2R = 20 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, a element nieliniowy aproksymowany odcinkowo opisany jest tablicą 3.7.



Rys. 3.7

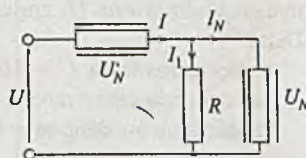
Zadanie 3.8. Obliczyć rozpyły prądów w obwodzie podanym na rys. 3.8.

Dane:

$U = 158.5 \text{ V}$, $R = 35 \text{ k}\Omega$, a elementy nieliniowe (identyczne) aproksymowane odcinkowo opisane są w tablicy 3.8.

Tablica 3.8

U_N, V	0	80	100
I_N, mA	0	1	5



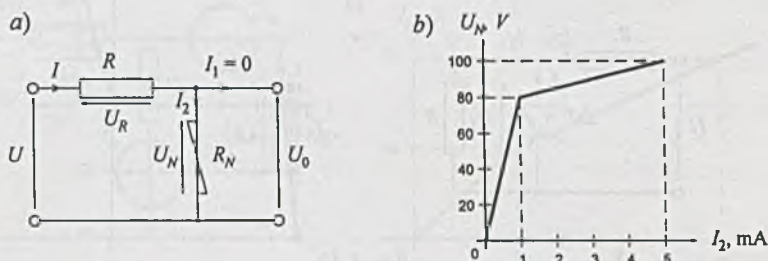
Rys. 3.8

Zadanie 3.9. Do stabilizacji napięcia U_0 w obwodzie podanym na rys. 3.9a użyto warystora. Jest to stabilizator nieobciążony ($I_1 = 0$).

Obliczyć:

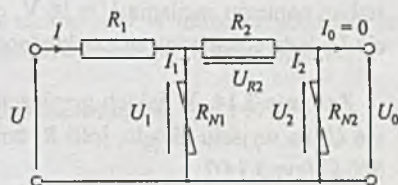
- wartość oporu R , jeżeli napięcie stabilizowane $U_0 = 90$ V,
- dopuszczalny zakres zmian napięcia zasilania, przy którym $U_0 = 90 \pm 5$ V.

Dane: napięcie zasilania $U = 200$ V, aproksymacja odcinkowa charakterystyki warystora podana jest na rys. 3.9b.

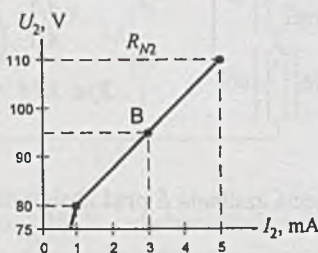


Rys. 3.9

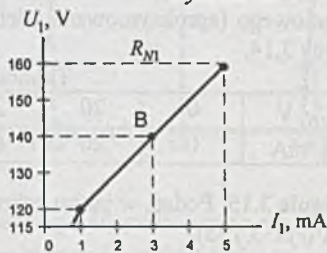
[Zadanie 3.10. W układzie stabilizacji napięcia U_0 na dwóch warystorach (rys. 3.10a) należy: 1) dobrać wartości oporów R_1 oraz R_2 tak, by przy napięciu zasilania $U = 200$ V napięcie stabilizatora $U_0 = 95$ V, 2) określić dopuszczalny zakres zmian napięcia zasilania U , przy którym $U_0 = 95 \pm 5$ V. Aproksymowane charakterystyki warystorów podano na rys. 3.10b i c.



Rys. 3.10a



Rys. 3.10b

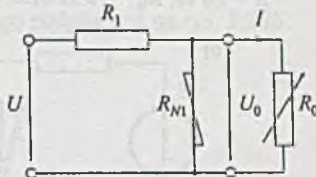


Rys. 3.10c

Zadanie 3.11. W układzie stabilizacji napięcia na elemencie nieliniowym (warystor) podanym na rys. 3.11 określić dopuszczalny zakres zmian oporu obciążenia R_0 , przy którym $U_0 = 140 \pm 5$ V. Jest to stabilizator obciążony ($I \neq 0$).

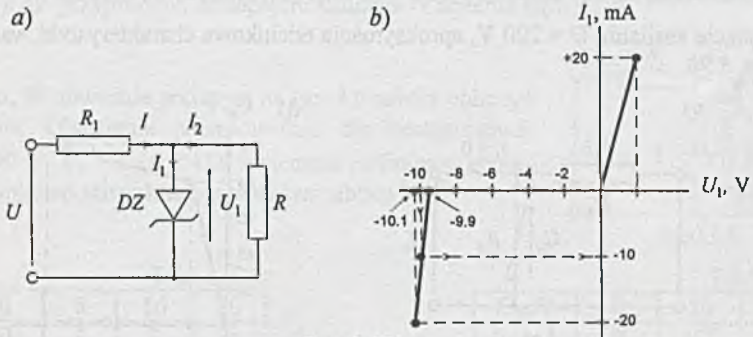
Dane:

$U = 200$ V, $R_1 = 12$ k Ω , charakterystyka warystora jest jak w zadaniu 3.10 (p. rys. 3.10c).



Rys. 3.11

Zadanie 3.12. Do stabilizacji prądu I_2 (rys. 3.12a) płynącego przez opornik obciążenia $R = 100 \Omega$ użyto diody Zenera o charakterystyce aproksymowanej odcinkami, jak podano na rys. 3.12b. Obliczyć wartość oporu R_1 i dopuszczalny zakres zmian napięcia zasilania $U \pm \Delta U$, jeśli prąd wyjściowy I_2 ma być stabilizowany na poziomie 100 mA z dokładnością ± 1 mA. Napięcie zasilania $U = 16$ V.



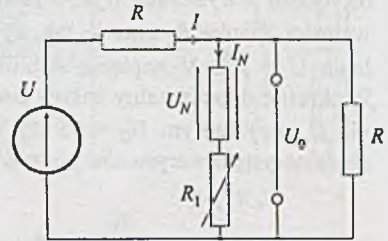
Rys. 3.12

Zadanie 3.13. Układ z zadania 3.12 użyto do stabilizacji napięcia U_1 . W jakim zakresie, przy stałym napięciu zasilania $U = 16$ V, może się zmieniać wartość oporu obciążenia R , żeby napięcie U_1 było stabilizowane z dokładnością ± 0.05 V ($U_1 = 10 \pm 0.05$ V)?

Zadanie 3.14. W jakich granicach zmienia się napięcie U_0 na wyjściu układu, jeśli R_1 zmienia się od 250 do 500 Ω (rys. 3.14)?

Dane:

$U = 100$ V, $R = 1$ k Ω oraz charakterystyka elementu nieliniowego (aproksymowana odcinkowo) w postaci tablicy 3.14.



Rys. 3.14

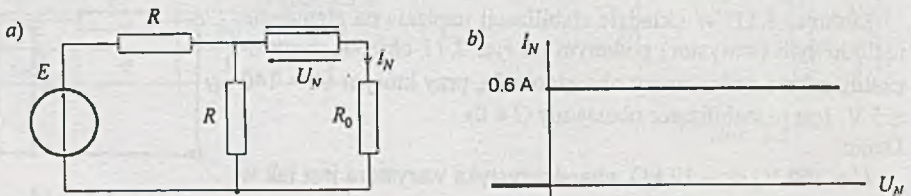
Tablica 3.14

U_N , V	0	20	20
I_N , mA	0	20	60

Zadanie 3.15. Podać, w jakim zakresie zmian napięcia zasilania E prąd obciążenia $I_N = \text{const} = 0.6$ A (rys. 3.15a).

Dane:

$R = 20 \Omega$, $R_0 = 15 \Omega$ oraz charakterystyka elementu nieliniowego przedstawiona na rys. 3.15b.



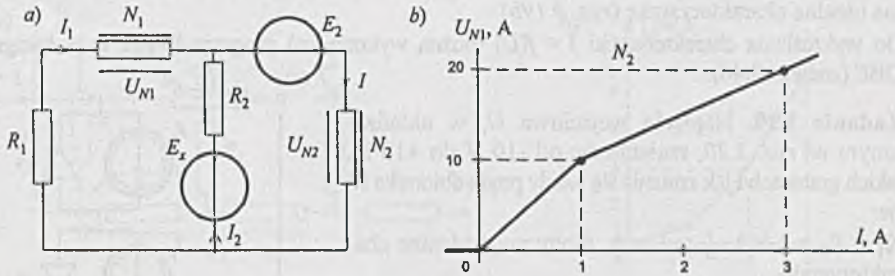
Rys. 3.15

Zadanie 3.16. Obliczyć wartość SEM E_x oraz moce tracone na elementach nieliniowych obwodu z rys. 3.16a, jeżeli moc tracona na oporze R_1 wynosi 20 W.

Dane:

$E_2 = 30$ V, $2R_1 = R_2 = 10 \Omega$, dodatnie kierunki prądów płynących przez elementy nieliniowe (identyczne) zaznaczono na rysunku, a zlinearyzowana charakterystyka elementu nieliniowego podana jest na rys. 3.16b.

Uwaga: $P_{N1} = U_{N1}I_1$, $P_{N2} = U_{N2}I$.

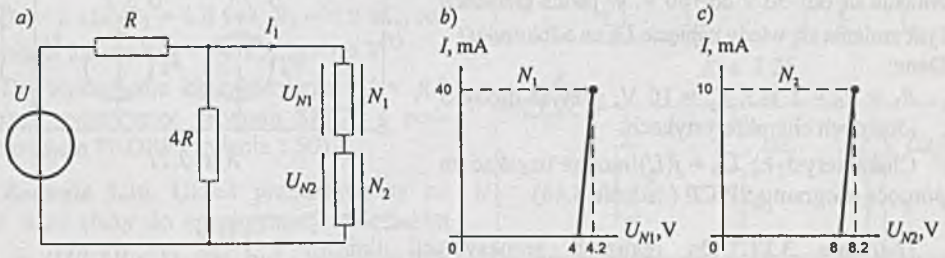


Rys. 3.16

Zadanie 3.17. Obliczyć największą wartość napięcia zasilania U w układzie podanym na rys. 3.17a, przy której moc tracona na każdym z elementów nieliniowych nie przekracza 250 mW.

Dane:

$R = 125 \Omega$, a charakterystyki elementów nieliniowych przedstawiono na rys. 3.17b i c.

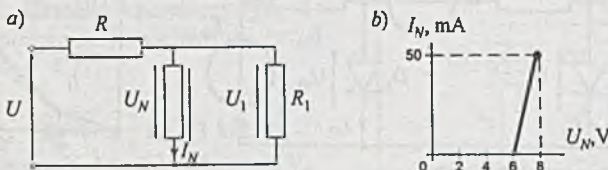


Rys. 3.17

Zadanie 3.18. W układzie stabilizacji napięcia wyjściowego U_1 podanym na rys. 3.18a określić dopuszczalny zakres zmian napięcia zasilania U , przy którym $U_1 = 7 \pm 0.5$ V.

Dane:

$R_1 = 100 \Omega$, $R = 140 \Omega$, a charakterystyka elementu nieliniowego podana jest na rys. 3.18b.



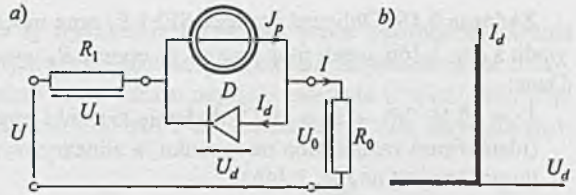
Rys. 3.18

[Zadanie 3.19. W obwodzie podanym na rys. 3.19a napięcie U zmienia się od 0 do 50 V. Obliczyć, jak i w jakim przedziale zmienia się prąd odbiornika I oraz jakie moce znamionowe powinny mieć oporniki R_1 i R_0 .

Dane:

$R_1 = R_0 = 500 \Omega$, $J_p = 10 \text{ mA}$, dioda ma idealną charakterystykę (rys. 3.19b).

Do wykreślenia charakterystyki $I = f(U)$ można wykorzystać program SPICE z podprogramem PROBE (zadanie 3.46).



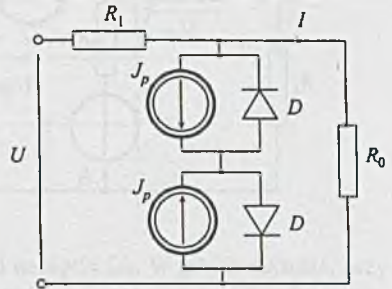
Rys. 3.19

Zadanie 3.20. Napięcie wejściowe U , w układzie podanym na rys. 3.20, zmienia się od -10 V do +10 V. W jakich granicach i jak zmienia się wtedy prąd odbiornika I ?

Dane:

$R_1 = R_0 = 1 \text{ k}\Omega$, $J_p = 1 \text{ mA}$, diody mają idealne charakterystyki.

Również i w tym przypadku do łatwego uzyskania charakterystyki $I = f(U)$ można wykorzystać program SPICE (zadanie 3.47).



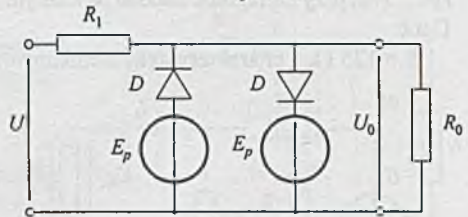
Rys. 3.20

[Zadanie 3.21. W układzie przekształtnika diodowego podanego na rys. 3.21 napięcie zasilania U zmienia się od -50 V do +50 V. W jakich granicach i jak zmienia się wtedy napięcie U_0 na odbiorniku?

Dane:

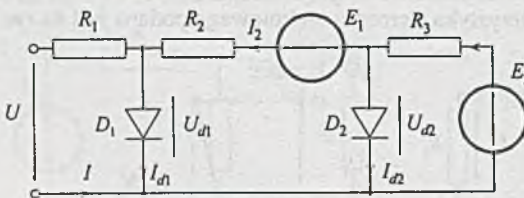
$R_1 = R_0 = 1 \text{ k}\Omega$, $E_p = 10 \text{ V}$, przyjąć diody o idealnych charakterystykach.

Charakterystykę $U_0 = f(U)$ można uzyskać za pomocą programu SPICE (zadanie 3.48).

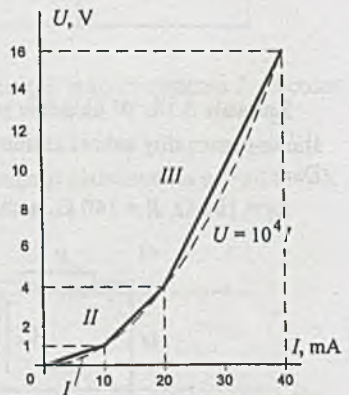


Rys. 3.21

[Zadanie 3.22. Do realizacji aproksymacji liniowo-odcinkowej zależności $U = 10^4 I^2$ użyto układu podanego na rys. 3.22a. Dobrać wartości oporów R_1, R_2, R_3 oraz SEM E_1, E_2 w tym układzie tak, by zależność napięcia U od prądu I była jak na rys. 3.22b. Przyjąć idealne charakterystyki diod.



Rys. 3.22a



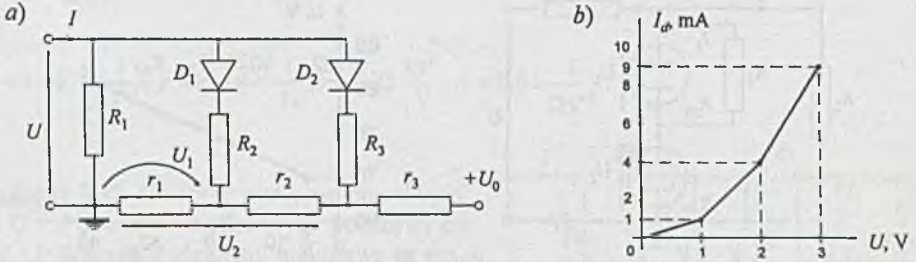
Rys. 3.22b

Zadanie 3.23. Dla obwodu podanego na rys. 3.22a sporządzić wykres zależności napięcia U od prądu I , jeśli $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 400 \Omega$ i $R_3 = 800 \Omega$, natomiast $E_1 = 3 \text{ V}$ i $E_2 = 8 \text{ V}$.

[Zadanie 3.24. W układzie realizującym aproksymację zależności $I = aU^2$ (rys. 3.24a) należy dobrać wartości oporników R_1 , R_2 i R_3 tak, by dla napięć $U = 0 \div 3 \text{ V}$ zależność $I = 10^{-3} U^2$ była aproksymowana jak na rys. 3.24b.

Dane:

$r_1 = r_2 = r = 0.25 \Omega$, $r_3 = 5 \Omega$, $U_0 = +6 \text{ V}$, diody o idealnych charakterystykach.



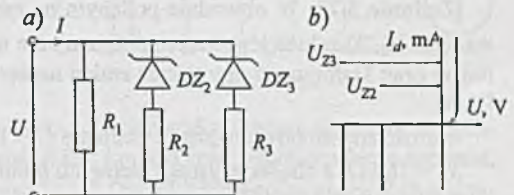
Rys. 3.24

Zadanie 3.25. Układ przedstawiony na rys. 3.25a służy do aproksymacji zależności $I = aU^b$ ($b > 1$). Obliczyć i wykreślić charakterystykę $U = f(I)$ podanego układu.

Dane:

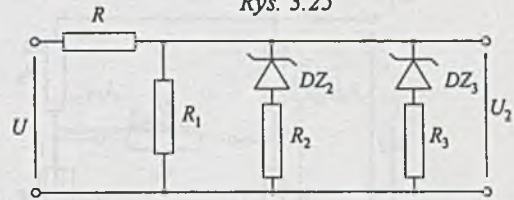
$R_1 = 8 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1.6 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 0.8 \text{ k}\Omega$, napięcia Zenera $U_{Z2} = -4 \text{ V}$, $U_{Z3} = -6 \text{ V}$.

Do wykreślenia charakterystyki $U = f(I)$ można wykorzystać program SPICE z podprogramem PROBE (zadanie 3.50).



Rys. 3.25

Zadanie 3.26. Układ przedstawiony na rys. 3.26 służy do aproksymacji zależności $U_2 = AU^B$ ($B < 1$). Obliczyć i wykreślić charakterystykę $U_2 = f(U)$ obwodu przyjmując: $R = R_1 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, diody Zenera identyczne z diodami z zadania 3.25.



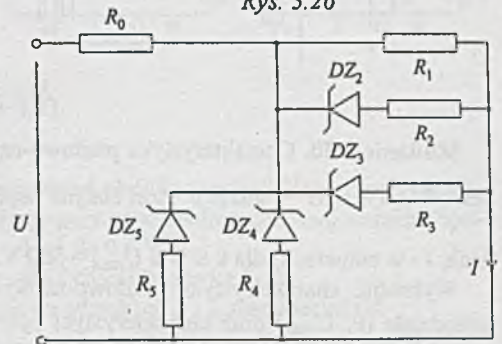
Rys. 3.26

Charakterystykę $U_2 = f(U)$ można uzyskać stosując program SPICE (zadanie 3.51).

Zadanie 3.27. Określić charakterystykę $I = f(U)$ układu aproksymacji odcinkowej przedstawionego na rys. 3.27.

Dane:

$R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 \text{ k}\Omega$,
napięcia Zenera: $U_{Z2} = -4 \text{ V}$, $U_{Z3} = -6 \text{ V}$,
 $U_{Z4} = -8 \text{ V}$, $U_{Z5} = -10 \text{ V}$.

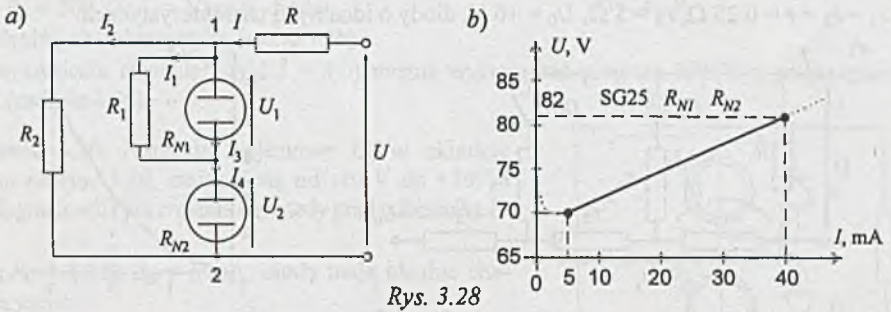


Rys. 3.27

[Zadanie 3.28. W układzie stabilizacji napięcia, zbudowanym na dwóch identycznych stabilizatorach napięcia SG25 (rys. 3.28a), należy dobrać wartość oporu R oraz określić zakres zmian napięć U_1 i U_2 , jeżeli napięcie zasilania $U = 180$ V jest stabilizowane z dokładnością ± 10 V.

Dane:

$R_1 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$, charakterystyka stabilizatora w dopuszczalnym do pracy przedziale podana jest na rys. 3.28b.

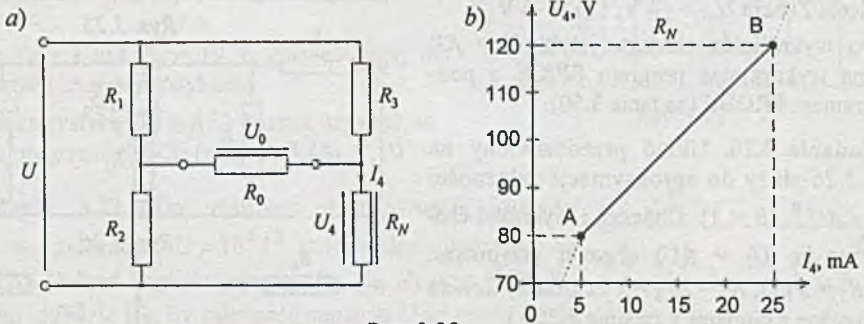


Rys. 3.28

[Zadanie 3.29. W obwodzie podanym na rys. 3.29a określić: 1) wielkość napięcia stabilizowanego U_0 , 2) zakres jego zmian przy zmianie napięcia zasilania U o ± 20 V od wartości znamionowej oraz 3) dopuszczalny zakres zmian napięcia zasilania.

Dane:

wartość znamionowa napięcia zasilania $U = 160$ V, $R_1 = 28 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_0 = 16 \text{ k}\Omega$, a charakterystyka elementu nieliniowego przedstawiona jest na rys. 3.29b.



Rys. 3.29

[Zadanie 3.30. Charakterystyka prądowo-napięciowa elementu nieliniowego opisana jest zależnością $I = a U^{\frac{1}{2}}$, gdzie a - jest stałym współczynnikiem równym $10^{-4} \frac{1}{\Omega \cdot \text{V}^{\frac{1}{2}}}$ (U - w woltach, I - w amperach) dla $0 \leq U \leq U_{\max} = 500$ V.

Wykreślić charakterystykę prądowo-napięciową elementu nieliniowego w dopuszczalnym przedziale $(0, U_{\max})$ oraz charakterystyki oporu statycznego R_{st} i dynamicznego R_d w funkcji napięcia i odczytać z nich wartości oporów R_{st} i R_d dla $U = 200$ V oraz $U = 400$ V.

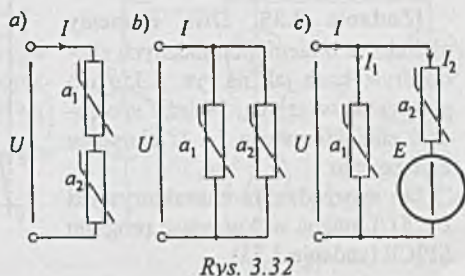
[Zadanie 3.31. Obliczyć i narysować zależność oporu statycznego R_{st} i dynamicznego R_d elementu nieliniowego od napięcia U na tym elemencie dla $5 \text{ V} \leq U \leq 5 \text{ V}$. Element nieliniowy opisany jest zależnością:

- 1) $I = I = aU^2 + bU$,
- 2) $U = cI |I|$,
- 3) $I = dU^2 |U|$
(U - w woltach, I - w amperach).

Dane:

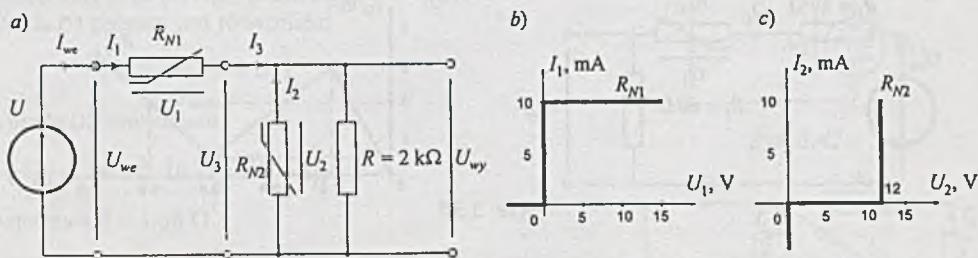
$$a = 1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\Omega V}, b = 2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\Omega}, c = 0.25 \frac{\Omega^2}{V}, d = 0.04 \frac{1}{\Omega V^2}.$$

Zadanie 3.32. Obliczyć zastępcze charakterystyki $U - I$ obwodów nieliniowych podanych na rys. 3.32. Wszystkie elementy nieliniowe są opisane zależnością $U = a |I|$. Dla obwodu z rys. 3.32c narysować charakterystykę dla $a_1 = a_2 = 1$ oraz $E = 2 \text{ V}$.



Rys. 3.32

[Zadanie 3.33. Wykazać, że przedstawiony na rys. 3.33a obwód z dwoma elementami nieliniowymi, których charakterystyki podane są na rys. 3.33b i c, jest tzw. ogranicznikiem napięcia, tzn. napięcie $U_{wy} = \text{const}$ dla $U_{we} \geq U_{we0}$. Ile wynosi U_{we0} ? Dla jakich wartości oporu R charakterystyka $U_{wy} = f(U_{we})$ nie ulegnie zmianie?



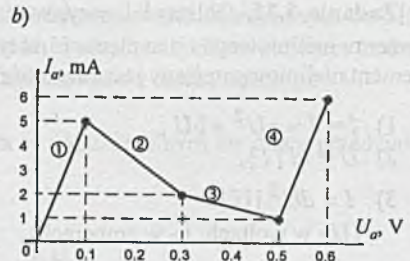
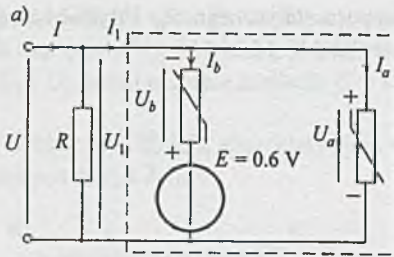
Rys. 3.33

Zadanie 3.34. Obwód (rys. 3.34a) z dwoma elementami nieliniowymi o identycznych niemonotonicznych charakterystykach (rys. 3.34b) stabilizuje przy odpowiednio dobranej wartości oporu R prąd I , gdy napięcie wejściowe U zmienia się od 0.1 do 0.5 V .

Należy dobrać właściwą wartość oporu R i sporządzić charakterystykę $I - U$.

Zauważmy, że elementy te mają ujemną oporność na odcinkach 2 i 3 charakterystyki.

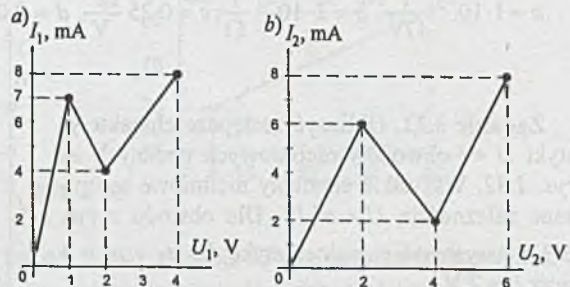
Uwaga. Charakterystykę $I = f(U)$ można też uzyskać, wykorzystując odpowiednie metody modelowania charakterystyk i stosując program SPICE, jak to uczyniono w zadaniu 3.52.



Rys. 3.34

[Zadanie 3.35. Dwa elementy nieliniowe o niemonotonicznych charakterystykach jak na rys. 3.35a i b połączono w szereg. Należy sporządzić charakterystykę $I - U$ elementu zastępczego.

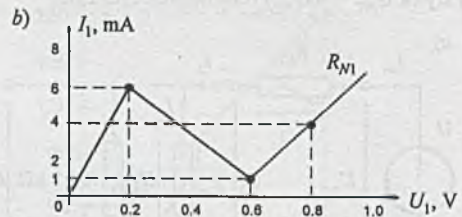
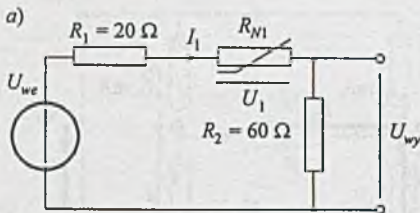
Do sporządzenia charakterystyki $I = f(U)$ można wykorzystać program SPICE (zadanie 3.53).



Rys. 3.35

Zadanie 3.36. Dla obwodu (rys. 3.36a) z elementem nieliniowym o niemonotonicznej charakterystyce (rys. 3.36b) należy znaleźć charakterystykę $U_{wy} = f(U_{we})$.

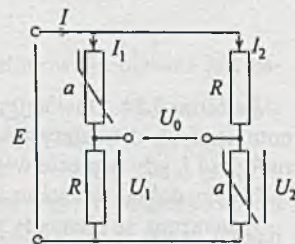
Do wykreślenia charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ można wykorzystać program SPICE (zadanie 3.53).



Rys. 3.36

[Zadanie 3.37. Obliczyć prąd I płynący w obwodzie z zadania 3.1 oraz napięcia U_N i U_1 stosując metodę iteracyjną Newtona.

[Zadanie 3.38. Obliczyć, dla jakiej wartości napięcia zasilania E_0 ($E > 0$) mostek z elementami nieliniowymi (rys. 3.38) będzie w równowadze ($U_0 = 0$). Oba elementy nieliniowe opisane są zależnością $U = aI^2$, gdzie U - w V, I - w mA, $a = 0.004$, a $R = 141.42 \Omega$. Jaki będzie znak napięcia U_0 dla $0 < E < E_0$?

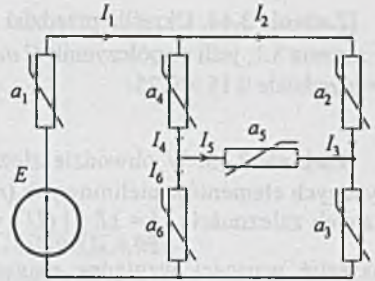


Rys. 3.38

[Zadanie 3.39. W obwodzie nieliniowym przedstawionym na rys. 3.39 wszystkie elementy nieliniowe określone są zależnością $U_i = a_i I_i | I_i |$ (U - w woltach, I - w amperach).

Należy obliczyć rozpyły prądów i napięcia na gałęziach obwodu.

Obliczenia przeprowadzić dla: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $a_5 = 4$, $a_6 = 3$ oraz $E = 10$ V.



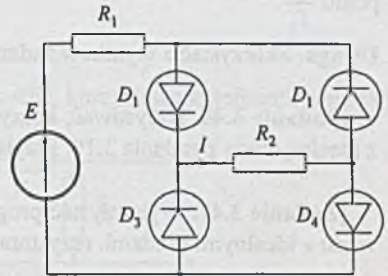
Rys. 3.39

Zadanie 3.40. Rozwiązać zadanie 3.1 metodą iteracyjną. Przyjąć wartość początkową prądu $I^{(0)} = 3$ mA oraz współczynnik $\alpha = 0.2$.

[Zadanie 3.41. W obwodzie nieliniowym prostownika dwupołkowego (rys. 3.41) z czterema identycznymi diodami opisanymi równaniem $I = 10^{-4}(e^{40U} - 1)$ (I - w A, U - w V) należy obliczyć prądy oraz moce tracone na diodach.

Dane:

$$E = 20 \text{ V}, R_1 = 2 \Omega, R_2 = 8 \Omega.$$



Rys. 3.41

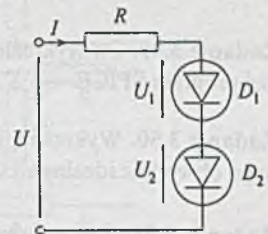
[Zadanie 3.42. Obliczyć największą wartość napięcia zasilania U , na jakie można załączyć obwód nieliniowy z rys. 3.42, jeśli wiadomo, że dopuszczalna moc tracona na diodzie D1 wynosi 0.5 W, natomiast największy dopuszczalny prąd płynący przez diodę D2 wynosi 3 A. Dioda D1 opisana jest równaniem

$$I = 10^{-2}(e^{40U_1} - 1),$$

a dioda D2 równaniem

$$I = 2 \cdot 10^{-2}(e^{40U_2} - 1),$$

natomiast $R = 1.58 \Omega$.

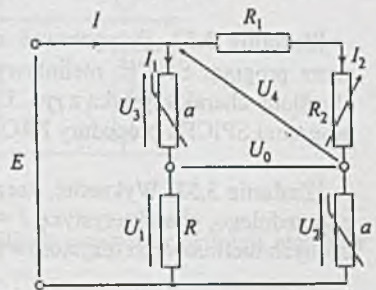


Rys. 3.42

[Zadanie 3.43. Dla jakiej wartości oporu R_2 (rys. 3.43) napięcie $U_0 = 0$?

Dane:

$E = 5$ V, $R = 141.42 \Omega$, $R_1 = 50 \Omega$, elementy nieliniowe opisane są zależnością $U = aI^2$ (U - w V, I - w mA), $a = 0.004$.



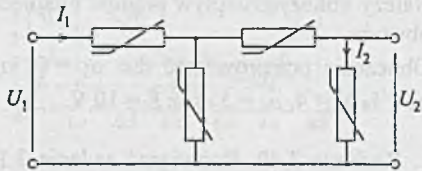
Rys. 3.43

Czy dla każdej wartości E ($E > 0$) można dobrać R_2 tak, by $U_0 = 0$?

[Zadanie 3.44. Określić przedział zmian napięcia U_N na elemencie nieliniowym w obwodzie z zadania 3.1, jeśli współczynnik C może się zmieniać w przedziale $300 \div 340$, a współczynnik B w przedziale $0.15 \div 0.25$.

[Zadanie 3.45. W obwodzie złożonym z identycznych elementów nieliniowych (rys. 3.45) opisywanych zależnością $U = 1I | I |$ (U - w V, I - w A) określić wartości względne napięcia $\frac{U_1}{U_2}$ oraz

prądu $\frac{I_1}{I_2}$.



Rys. 3.45

Uwaga: Skorzystać z wyników zadania 3.32.

[Zadanie 3.46. Narysować, korzystając z programu SPICE, charakterystykę $I = f(U)$ obwodu z idealną diodą z zadania 3.19. Przyjąć zakres zmian napięcia wejściowego U od 0 do 20V.

[Zadanie 3.47. Wykorzystać program SPICE do wykreślenia charakterystyki $I = f(U)$ dla obwodu z idealnymi diodami, rezystorami oraz SPM i SEM z zadania 3.20.

[Zadanie 3.48. Sporządzić charakterystykę $U_0 = f(U)$ przekształtnika diodowego z zadania 3.21. wykorzystując program SPICE.

[Zadanie 3.49. Do wykreślenia charakterystyki $U = f(I)$ przekształtnika z zadania 3.23 wykorzystać program SPICE.

[Zadanie 3.50. Wykreślić, korzystając z programu SPICE, charakterystykę $U = f(I)$ dla nieliniowego obwodu z idealnymi diodami Zenera przedstawionego w zadaniu 3.25.

[Zadanie 3.51. Przygotować dane do programu SPICE umożliwiające uzyskanie wykresu $U_2 = f(U)$ przekształtnika z diodami Zenera z zadania 3.26.

[Zadanie 3.52. Przygotować model podukładu aproksymującego, w sposób akceptowany przez program SPICE, nieliniowy rezystor z odcinkami ujemną opornością (dioda tunelowa) określony charakterystyką z rys. 3.34b. Wykorzystać ten podukład do wyznaczenia (przy pomocy programu SPICE i procedury PROBE) charakterystyki $I = f(U)$ dla obwodu z rys.3.34a.

[Zadanie 3.53. Wykreślić, korzystając z programu SPICE oraz modelu podukładu z zadania poprzedniego, charakterystykę $I = f(U)$ dla nieliniowego obwodu złożonego z szeregowo połączonych nieliniowych rezystorów z zadania 3.35.

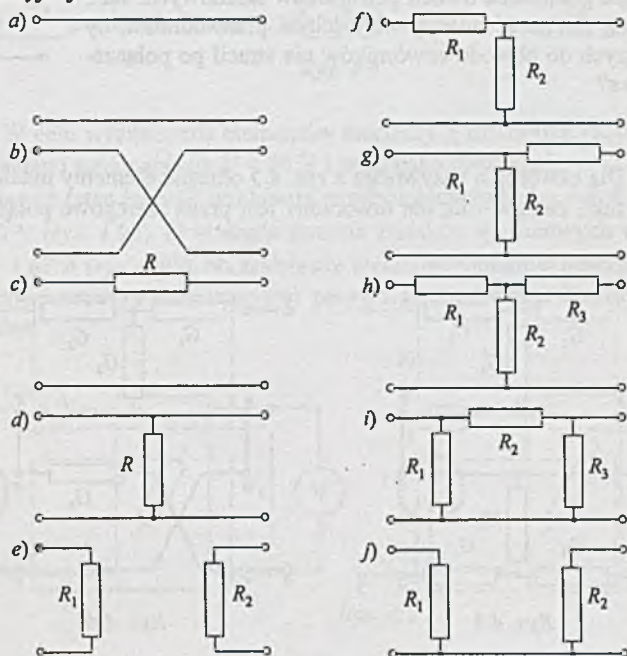
[Zadanie 3.54. Narysować, korzystając z programu SPICE oraz podukładu modelującego element nieliniowy wprowadzonego w zadaniach 3.52 i 3.53, charakterystykę $U_{wy} = f(U_{we})$ dla obwodu nieliniowego z zadania 3.36.

Rozdział 4

OBWODY Z WIELOBIEGUNNIKAMI I ŹRÓDŁAMI STEROWANYMI

4.1. Wielobiegunkniki pasywne

[Zadanie 4.1. Dla czwórników pasywnych z rys. 4.1 określić, korzystając z definicji, elementy macierzy admitancyjnej Y .

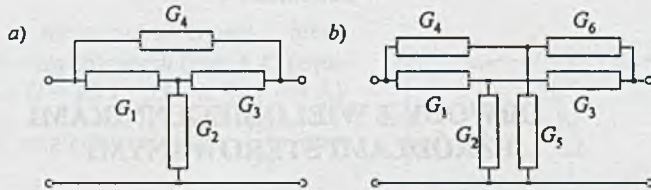


Rys. 4.1

[Zadanie 4.2. Dla czwórników pasywnych z rys. 4.1 określić, korzystając z definicji, elementy:

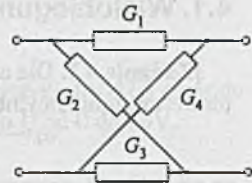
- macierzy impedancyjnej Z ,
- macierzy hybrydowej H oraz
- macierzy łańcuchowej A .

[Zadanie 4.3. Dla czwórników pasywnych z rys. 4.3a i b wyznaczyć: a) korzystając z definicji, b) przez redukcję układu niezależnych równań opisujących obwód, c) przez połączenie czwórników prostych z rys. 4.1, elementy macierzy admitancyjnej określonej i nieokreślonej.



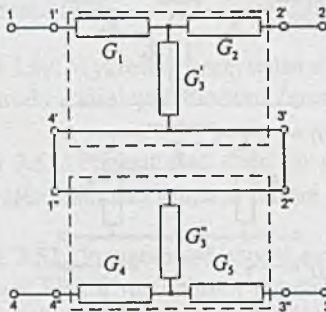
Rys. 4.3

[Zadanie 4.4. Określić elementy macierzy admitancyjnej czwórnika w kształcie X (połączenie mostkowe) z rys. 4.4, traktując ten czwórnik jako równoległe połączenie dwóch czwórników składowych. Jaka musi być spełniona zależność między wartościami przewodności, by każdy z wchodzących do obwodu czwórników nie stracił po połączeniu cech czwórnika?

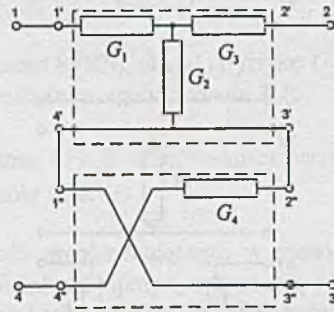


Rys. 4.4

[Zadanie 4.5. Dla czwórnika pasywnego z rys. 4.5 określić elementy macierzy admitancyjnej Y wykorzystując fakt, że czwórnik ten utworzony jest przez szeregowe połączenie czwórników w kształcie T.



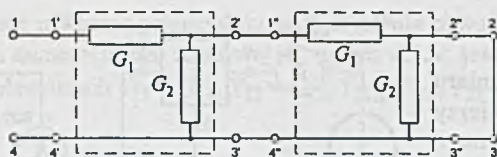
Rys. 4.5



Rys. 4.6

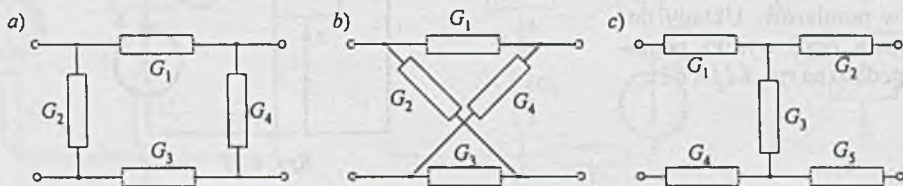
[Zadanie 4.6. Dla czwórnika pasywnego z rys. 4.6 określić elementy macierzy admitancyjnej Y korzystając z tego, że czwórnik ten jest szeregowo-równoległym połączeniem dwóch prostszych czwórników.

[Zadanie 4.7. Dla czwórnika pasywnego z rys. 4.7 określić elementy macierzy admitancyjnej Y korzystając z tego, że czwórnik ten jest kaskadowym połączeniem czwórników w kształcie „odwrócone” Γ .



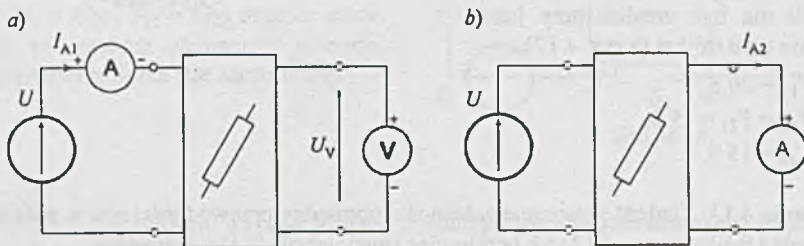
Rys. 4.7

[Zadanie 4.8. Dla obwodów pasywnych z rys. 4.8a) (czworobok), b) (połączenie mostkowe), c) (połączenie w kształcie H) określić elementy macierzy admitancyjnej Y traktując te obwody jako: a) czterobiegunniki, b) czwórnik.



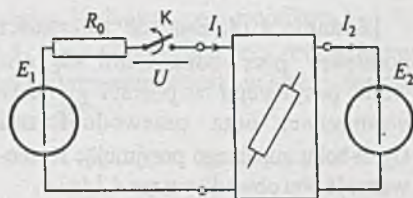
Rys. 4.8

[Zadanie 4.9. W celu wyznaczenia elementów macierzy Y czwórnik pasywnego na jego zaciski wejściowe podano stałe napięcie $U = 50$ V i wykonano dwa pomiary: a) w stanie rozwarcia zacisków wyjściowych (stan jałowy) wskazanie amperomierza było $I_{A1} = 6$ A, a wskazanie woltomierza $U_V = 20$ V (rys. 4.9a), b) w stanie zwarcia zacisków wyjściowych wskazanie amperomierza było $I_{A2} = 1.67$ A (rys. 4.9b). Na podstawie wyników pomiarów należy wyliczyć wartości liczbowe elementów macierzy admitancyjnej pasywnego czwórnik. Do obliczeń przyjąć, że przyrządy są idealne.



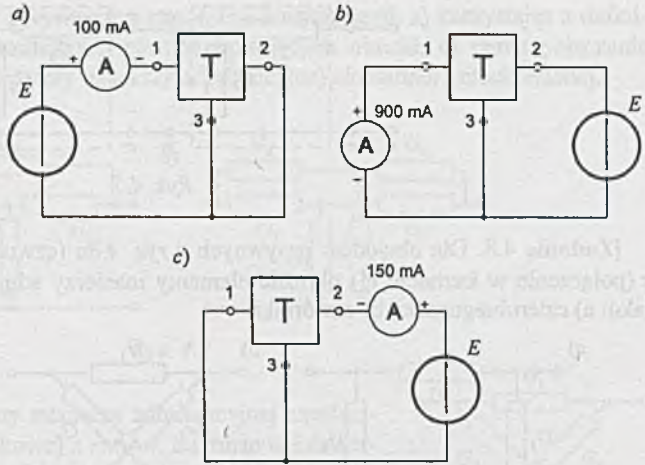
Rys. 4.9

[Zadanie 4.10. W obwodzie z rys. 4.10 prądy przy zamkniętym kluczu K były równe odpowiednio $I_1 = 6$ mA, $I_2 = 2$ mA. Obliczyć wartość napięcia U na zaciskach klucza po jego otwarciu, jeśli wiadomo, że $E_1 = 20$ V, $E_2 = 10$ V, $R_0 = 1$ k Ω , a występujący w obwodzie czwórnik jest czwornikiem pasywnym symetrycznym.



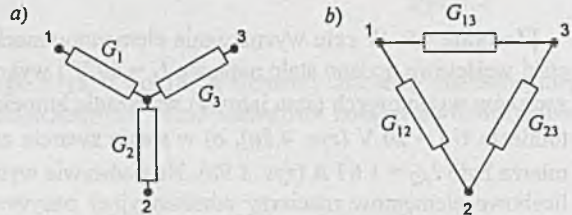
Rys. 4.10

[Zadanie 4.11. Do pomiaru wartości elementów macierzy admitancyjnej Y pasywnego trójkąta T spełniającego zasadę wzajemności użyto SEM $E = 3\text{ V}$ oraz amperomierza o oporze wewnętrznym $R_A = 10\ \Omega$. Obliczyć wartości elementów macierzy Y na podstawie wyników pomiarów. Układy pomiarowe oraz wyniki pomiarów podano na rys. 4.11a, b i c.



Rys. 4.11

[Zadanie 4.12. Dla danych wartości liczbowych elementów macierzy admitancyjnej Y pasywnego trójkąta należy przeprowadzić syntezę trójkąta typu „gwiazda” i typu „trójkąt”, tzn. należy obliczyć wartości przewodności G_1, G_2, G_3 , jeśli trójkąt ten ma być zrealizowany jako połączenie typu gwiazda (z rys. 4.12a) oraz należy obliczyć wartości przewodności G_{12}, G_{13}, G_{23} , jeśli ma być zrealizowany jako połączenie typu trójkąt (z rys. 4.12b).

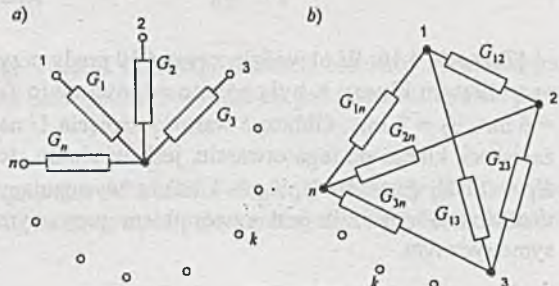


Rys. 4.12

Dane: $Y_{11} = 20\text{ S}$,
 $Y_{12} = Y_{21} = -5\text{ S}$,
 $Y_{22} = 15\text{ S}$.

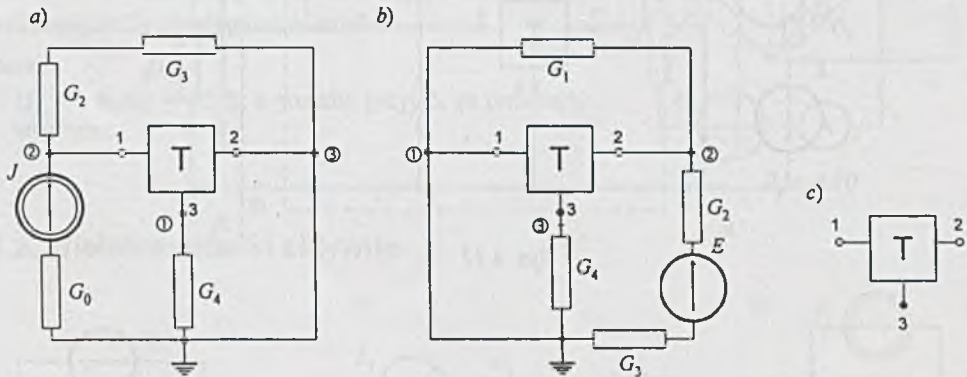
[Zadanie 4.13. Znaleźć wzajemne zależności pomiędzy przewodnościami w połączeniach typu gwiazda i trójkąt z rys. 4.12a i b przyjmując równoważność obu obwodów.

[Zadanie 4.14. Znaleźć zależności pomiędzy przewodnościami G_k obwodu pasywnego w postaci gwiazdy n -ramiennej oraz przewodnościami G_{ks} n -boku zupełnego przyjmując równoważność obu obwodów z rys. 4.14a i b.



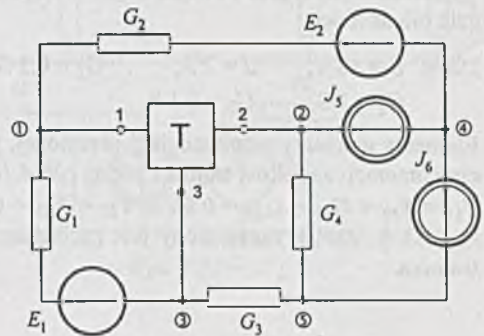
Rys. 4.14

[Zadanie 4.15. Napisać równania potencjałów węzłowych dla obwodów z rys. 4.15a i b, jeśli trójkąt T, przy przyjęciu numeracji jego zacisków jak na rys. 4.15c, jest opisany macierzą admittancyjną określoną Y o elementach $Y_{11} = G_{11}$, $Y_{12} = G_{12}$, $Y_{21} = G_{21}$, $Y_{22} = G_{22}$. Zacisk odniesienia trójkąta jest zaczerniony.



Rys. 4.15

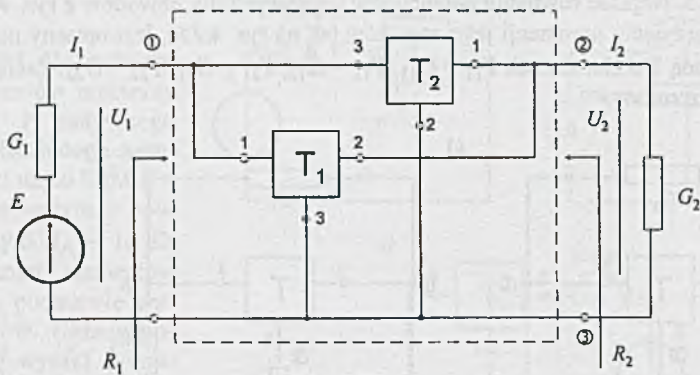
[Zadanie 4.16. Napisać równania potencjałów węzłowych dla obwodu z rys. 4.16 przyjmując za węzeł odniesienia obwodu: a) węzeł 3, b) węzeł 5. Przyjąć, że przy numeracji zacisków trójkąta T jak na rys. 4.16 $Y_{11} = G_{11}$, $Y_{12} = G_{12}$, $Y_{21} = G_{21}$, $Y_{22} = G_{22}$ oraz że znane są wartości pozostałych elementów obwodu. Zacisk odniesienia trójkąta jest zaczerniony.



Rys. 4.16

[Zadanie 4.17. Dla obwodu z rys. 4.17 należy obliczyć podstawowe charakterystyczne wielkości, tzn.: $k_U = \frac{U_2}{U_1}$, $k_I = \frac{I_2}{I_1}$, $R_1 = \frac{U_1}{I_1}$, $R_2 = \frac{U_2}{I_2}$.

Dane: $G_1 = 0.4$ S, $G_2 = 0$ oraz wartości elementów macierzy Y identycznych trójkątów T_1 i T_2 : $Y_{11} = G_{11} = 0.2$ S, $Y_{12} = Y_{21} = G_{12} = G_{21} = -0.05$ S, $Y_{22} = G_{22} = 0.1$ S przy przyjęciu numeracji zacisków trójkątów jak na rys. 4.17. Zaciski odniesienia trójkątów są zaczernione (patrz też zadanie 6.56.).

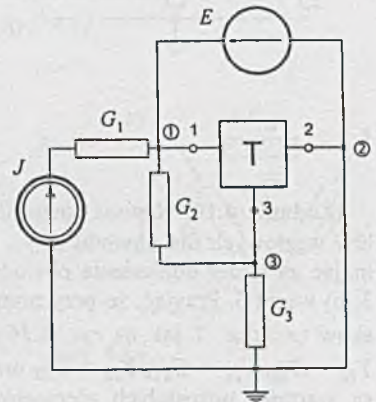


Rys. 4.17

[Zadanie 4.18. Dla obwodu z rys. 4.18 należy sporządzić bilans mocy.

Dane: $E = 10 \text{ V}$, $J = 2 \text{ A}$, $G_1 = 0.5 \text{ S}$,
 $G_2 = 1 \text{ S}$, $G_3 = 0.1 \text{ S}$.

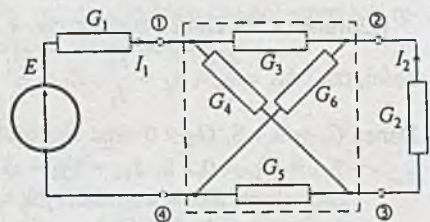
Elementy macierzy admitancyjnej określonej, przy przyjęciu numeracji zacisków trójnika jak na rys. 4.18, są równe:
 $Y_{11} = Y_{22} = G_{11} = G_{22} = 0.66 \text{ S}$, $Y_{12} = Y_{21} = G_{12} = G_{21} = -0.33 \text{ S}$. Zacisk zaczerpiony jest zaciskiem odniesienia trójnika.



Rys. 4.18

[Zadanie 4.19. Obliczyć moc pobieraną przez czterobiegunnik o strukturze mostkowej wydźrębniony na rys. 4.19 linią przerywaną.

Dane: $E = 16 \text{ V}$,
 $G_1 = 1 \text{ S}$, $G_2 = 0.5 \text{ S}$,
 $G_3 = 1 \text{ S}$, $G_4 = 0.4 \text{ S}$,
 $G_5 = 0.5 \text{ S}$, $G_6 = 0.25 \text{ S}$.

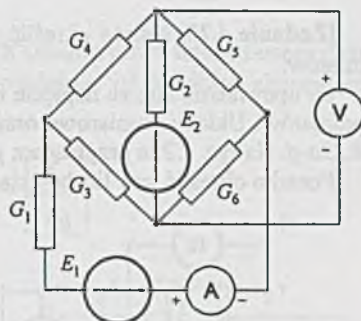


Rys. 4.19

[Zadanie 4.20. W obwodzie mostkowym z rys. 4.20 w wyniku zmiany napięcia źródłowego E_2 o 8 V wskazanie amperomierza zmieniło się o 0.5 A. Jak zmieni się wskazanie woltomierza przy zmianie napięcia E_1 o 24 V, jeśli napięcie E_2 nie ulegnie zmianie?

Dane:

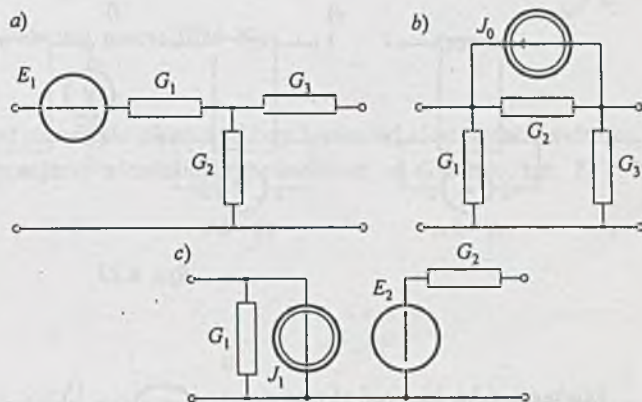
$G_1 = 1 \text{ S}$, $G_2 = 0.5 \text{ S}$, a ponadto przyjąć, że przyrządy są idealne.



Rys. 4.20

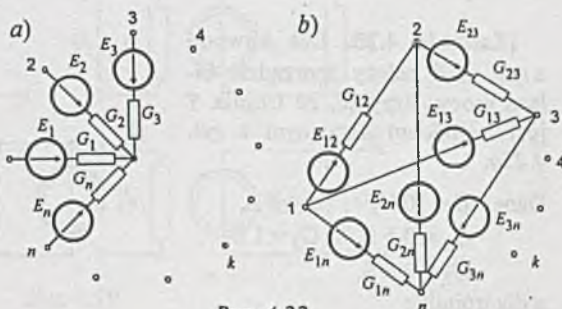
4.2. Wielobiegunkniki aktywne

[Zadanie 4.21. Dla czwórników aktywnych z rys. 4.21a, b, c należy określić, korzystając z definicji, elementy macierzy admitancyjnej Y oraz składowe wektora zastępczych sił prądomotorycznych I_z .



Rys. 4.21

[Zadanie 4.22. Należy wyprowadzić zależności, jakie zachodzą pomiędzy przewodnościami i siłami elektromotorycznymi E aktywnej gwiazdy n -ramiennej i aktywnego n -boku zupełnego, jeśli te aktywne obwody, tzn. gwiazda n -ramienna i n -biegunnik zupełny, są równoważne (rys. 4.22a i b).

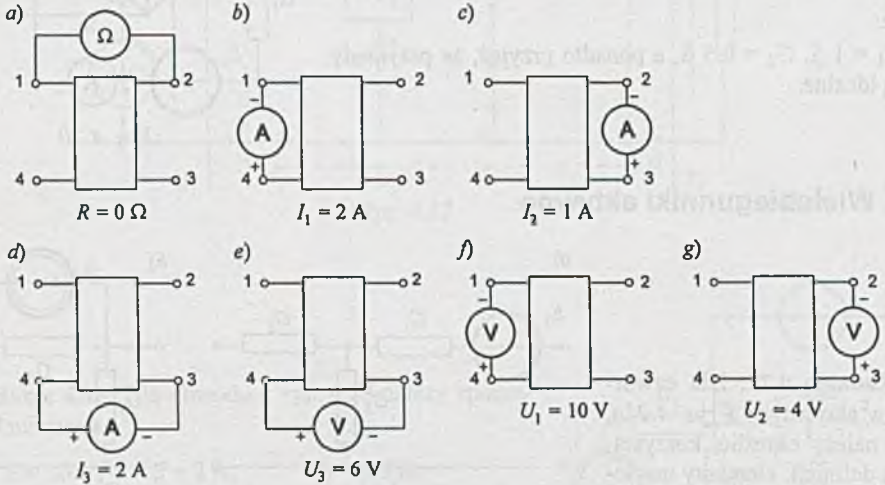


Rys. 4.22

[Zadanie 4.23. Należy określić parametry czwórnika aktywnego na podstawie wyników pomiarów.

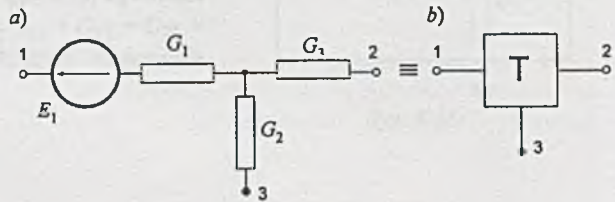
Po upewnieniu się, że napięcie między zaciskami 1 i 2 czwórnika jest równe 0, wykonano 7 pomiarów. Układy pomiarowe oraz wyniki pomiarów (przyrządami idealnymi) podano na rys. 4.23a-g. Na rys. 4.23a przyrządem pomiarowym jest omomierz.

Ponadto określić, czy liczba układów pomiarowych jest optymalna.



Rys. 4.23

[Zadanie 4.24. Napisać równania potencjałów węzłowych dla obwodu z rys. 4.15, jeśli trójkąt T jest trójkątem aktywnym z rys. 4.24.



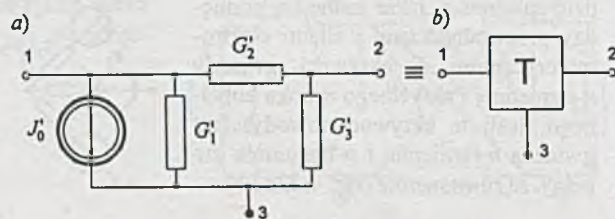
Rys. 4.24

[Zadanie 4.25. Dla obwodu z rys. 4.18 należy sporządzić bilans mocy. Przyjąć, że trójkąt T jest trójkątem aktywnym z rys. 4.25a.

Dane: $E = 10 \text{ V}$, $J = 2 \text{ A}$,
 $G_1 = 0.5 \text{ S}$, $G_2 = 1 \text{ S}$,
 $G_3 = 0.5 \text{ S}$,

a dla trójkąta:

$G'_1 = 0.5 \text{ S}$, G'_2
 $G'_3 = 2 \text{ S}$, $J'_0 = 1 \text{ A}$.



Rys. 4.25

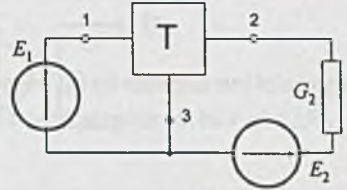
[Zadanie 4.26. Dla danych elementów macierzy Y i danych składowych wektora zastępczych sił prądomotorycznych I_z należy wybrać strukturę i odpowiadające jej wartości elementów czwórnika aktywnego.

Dane:

$$Y = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}; \quad I_z = \begin{bmatrix} I_{z1} \\ I_{z2} \end{bmatrix}$$

[Zadanie 4.27. Trójkąt T , przy przyjęciu numeracji jego zacisków jak na rys. 4.27, jest określony przez macierz admitycyjną Y o elementach $Y_{11} = G_{11} = 1.5 \text{ S}$, $Y_{12} = Y_{21} = G_{12} = G_{21} = -1 \text{ S}$, $Y_{22} = G_{22} = 3 \text{ S}$ oraz przez wektor zastępczych sił prądomotorycznych I_z o składowych $I_{z1} = I_0 = 1 \text{ A}$, $I_{z2} = -I_0 = -1 \text{ A}$.

Należy określić warunek wydajnikowej pracy SEM E_2 , jeśli $E_1 = 10 \text{ V}$.

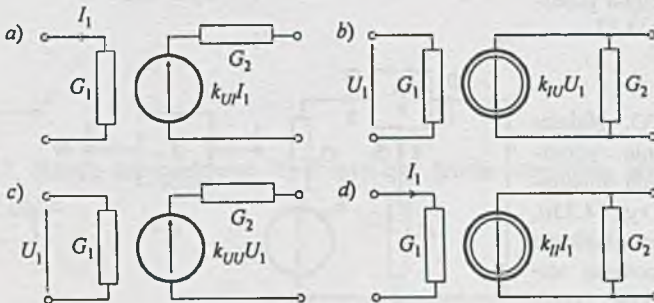


Rys. 4.27

[Zadanie 4.28. Czy możliwe jest określenie takiej struktury i wartości elementów czwórnika, dla których wszystkie elementy macierzy admitycyjnej określonej są dodatnio, tzn. $Y_{ij} > 0$ dla $i = 1,2, j = 1,2$?

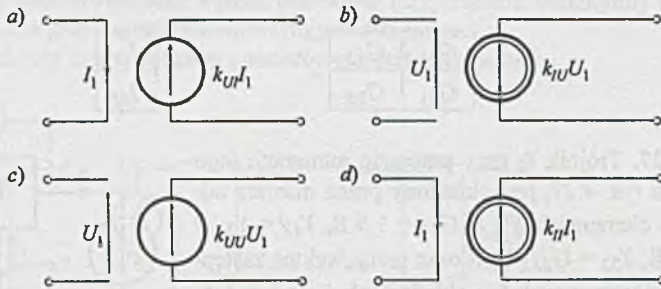
4.3. Źródła sterowane

[Zadanie 4.29. Dla nieidealnych źródeł sterowanych z rys. 4.29a-d należy określić, korzystając z definicji, elementy macierzy admitycyjnej Y .



Rys. 4.29

[Zadanie 4.30. Dla idealnych źródeł sterowanych z rys. 4.30a-d należy określić, korzystając z definicji, zależności określające elementy macierzy admitancyjnej Y .



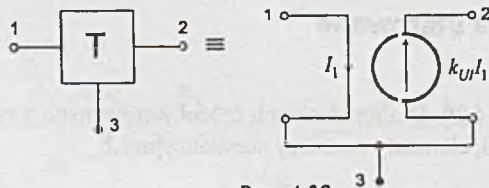
Rys. 4.30

[Zadanie 4.31. Należy zamodelować, wykorzystując źródła sterowane z zadania 4.30, równania czwórnika pasywnego w postaci:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

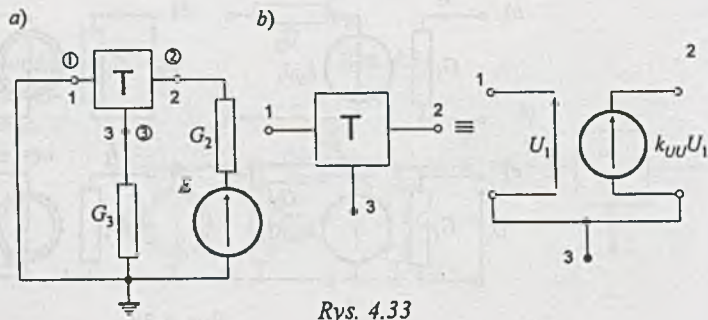
Czy dla wszystkich wartości elementów macierzy Y jest to możliwe?

[Zadanie 4.32. Dla obwodu z rys. 4.15 należy napisać równania potencjałów węzłowych. Przyjąć, że trójkąt T jest idealnym źródłem napięciowym sterowanym prądowo przedstawionym na rys. 4.32.



Rys. 4.32

[Zadanie 4.33. Należy napisać równania potencjałów węzłowych opisujących obwód z rys. 4.33a, jeśli trójkąt T jest idealnym źródłem napięciowym sterowanym napięciowo przedstawionym na rys. 4.33b.

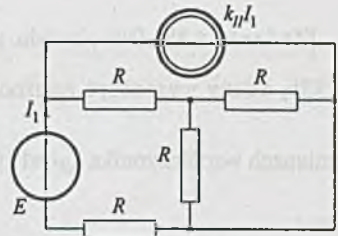


Rys. 4.33

[Zadanie 4.34. Dla obwodu z rys. 4.34 należy sporządzić bilans mocy. Dla jakiej wartości współczynnika k_{II} moc wydawana przez SEM E będzie równa 121 W?

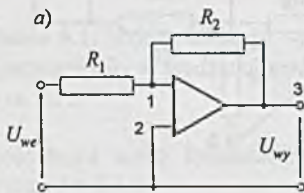
Dane:

$E = 11$ V, $R = 1 \Omega$, a nominalna wartość współczynnika $k_{II} = 2 \left[\frac{A}{A} \right]$.

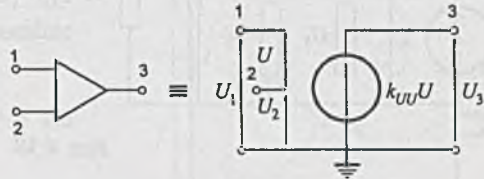


Rys. 4.34

[Zadanie 4.35. Należy określić zależność napięcia wyjściowego U_{wy} od napięcia wejściowego U_{we} , tzn.: $U_{wy} = f(U_{we})$, dla obwodu z rys. 4.35a z trójbiegunnikiem przedstawionym na rys. 4.35b.

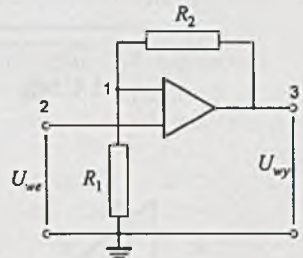


b)



Rys. 4.35

[Zadanie 4.36. Należy określić zależność $U_{wy} = f(U_{we})$ dla obwodu z rys. 4.36 z trójbiegunnikiem z rys. 4.35b.



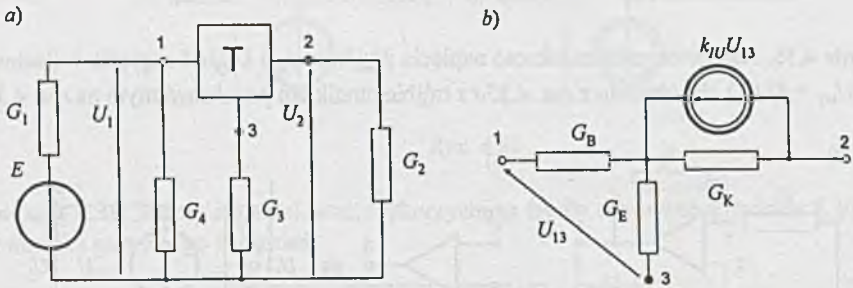
Rys. 4.36

[Zadanie 4.37. Należy zamodelować, wykorzystując źródła sterowane, rezystancję ujemną o wartości $R = -10 \Omega$.

[Zadanie 4.38. Dla obwodu z rys. 4.38a, z trójnikiem aktywnym przedstawionym na rys. 4.38b, należy wyznaczyć zależność $k_{IU} = \frac{U_2}{U_1} = f(k_{IU})$ oraz sporządzić wykres jej zmian przy zmianach współczynnika k_{IU} od 10 do 100 $\left[\frac{A}{V}\right]$.

Dane:

$$G_B = 0.1 \text{ S}, G_E = 0.05 \text{ S}, G_K = 0.2 \text{ S}, G_3 = 0.1 \text{ S}, G_4 = 0.05 \text{ S}, G_2 = 0.$$



Rys. 4.38

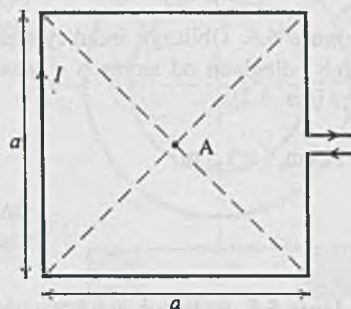
Rozdział 5

INDUKCJA ELEKTROMAGNETYCZNA I OBWODY MAGNETYCZNE

[Zadanie 5.1. Należy obliczyć wartość indukcji magnetycznej B_A w środku obwodu o kształcie jak na rys. 5.1.

Dane:

długość boku ramki kwadratowej $a = 5 \text{ cm}$
oraz prąd $I = 0.5 \text{ A}$.

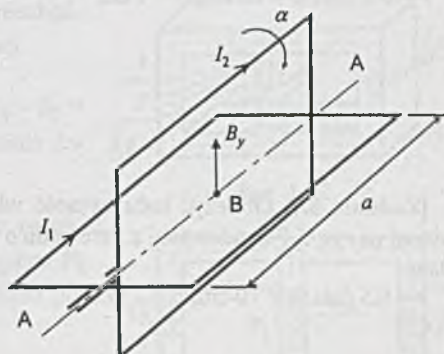


Rys. 5.1

Zadanie 5.2. Dane są dwie jednakowe kwadratowe ramki, jak na rys. 5.2, z których jedna (z prądem I_2) może się obracać wokół wspólnej osi A-A. Należy określić zmiany składowej B_y indukcji magnetycznej prostopadłej do ramki nieruchomej (z prądem I_1) w funkcji α : $B_y = f(\alpha)$ w punkcie B, leżącym na przecięciu przekątnych obu ramek.

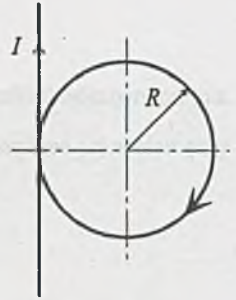
Dane:

$I_1 = 3.5 \text{ A}$, $I_2 = 4 \text{ A}$, $a = 20 \text{ cm}$.



Rys. 5.2

Zadanie 5.3. Bardzo długi prosty przewód, przez który przepływa prąd o natężeniu $I = 2 \text{ A}$, tworzy w pewnym miejscu zwoj kołowy o promieniu $R = 5 \text{ cm}$, leżący w płaszczyźnie przechodzącej przez przewód z prądem (rys. 5.3). Należy obliczyć wartość indukcji pola magnetycznego w środku zwoju.



Rys. 5.3

[Zadanie 5.4. Obliczyć indukcyjność własną odcinka przewodu prostoliniowego o promieniu R i długości l .

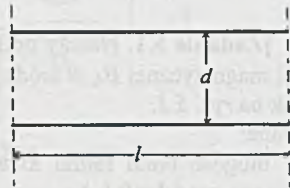
Dane:

$$l = 10 \text{ cm}, R = 1 \text{ mm}.$$

[Zadanie 5.5. Obliczyć indukcyjność wzajemną dwóch równoległych oddalonych od siebie o d odcinków przewodu prostoliniowego (rys. 5.5).

Dane:

$$d = 10 \text{ cm}, l = 1.5 \text{ m}.$$

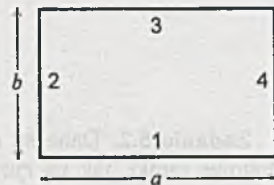


Rys. 5.5

[Zadanie 5.6. Obliczyć indukcyjność własną ramki prostokątnej, przedstawionej na rys. 5.6, o wymiarach $a \times b$ zbudowanej z przewodu o promieniu r .

Dane:

$$r = 0.5 \text{ mm}, a = 10 \text{ cm}, b = 7 \text{ cm}.$$

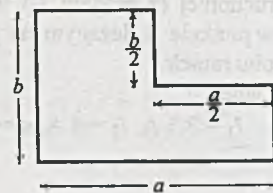


Rys. 5.6

[Zadanie 5.7. Obliczyć indukcyjność własną figury przedstawionej na rys. 5.7 zbudowanej z przewodu o promieniu r .

Dane:

$$r = 0.5 \text{ mm}, a = 10 \text{ cm}, b = 7 \text{ cm}.$$



Rys. 5.7

[Zadanie 5.8. Obliczyć indukcyjność wzajemną dwóch cewek przedstawionych na rys. 5.8 nawiniętych na rdzeń, w kształcie pierścienia o przekroju kołowym, o przenikalności magnetycznej względnej μ_w .

Dane:

$$R_1 = 3 \text{ cm}, R_2 = 4 \text{ cm}, \\ z_1 = 400, z_2 = 200, \mu_w = 800.$$

Zadanie 5.9. Określić, jaki błąd zostanie popełniony przy obliczaniu indukcyjności wzajemnej cewek z zadania 5.8, jeśli zostanie przyjęte założenie, że pole magnetyczne w rdzeniu jest równomierne.

Zadanie 5.10. Na pierścieniowy rdzeń przedstawiony na rys. 5.10 nawinięto cewkę o z zwojach. Należy obliczyć wartość natężenia prądu I wymuszającego w rdzeniu strumień magnetyczny ϕ .

Dane:

$$d_z = 5 \text{ cm}, d_w = 4 \text{ cm}, h = 1 \text{ cm}, z = 400, \\ \mu_w = 1000, \phi = 0.884 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

Zadanie 5.11. Obliczyć wartość energii pola magnetycznego wytwarzanego przez prąd o natężeniu I płynący w toroidzie o długości l , średnicy d i zwojach.

Dane:

$$I = 1.5 \text{ mA}, l = 10 \text{ cm}, d = 4 \text{ cm}, z = 1000.$$

[Zadanie 5.12. Obwód magnetyczny wykonany ze staliwa o danej charakterystyce magnesowania pokazany jest na rys. 5.12. Należy określić, jaki przepływ F jest niezbędny do uzyskania indukcji B_p w szczelinie powietrznej.

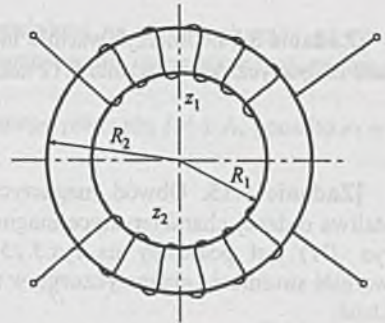
Dane:

$$l_1 = l_3 = 10 \text{ cm}, l_2 = 5.9 \text{ cm}, l_p = 1 \text{ mm}, S_1 = S_2 = S_3 = \\ = 1 \text{ cm}^2, B_p = 0.3 \text{ T}, \text{ charakterystyka magnesowania da-} \\ \text{na jest na rys. } DI \text{ w Dodatku.}$$

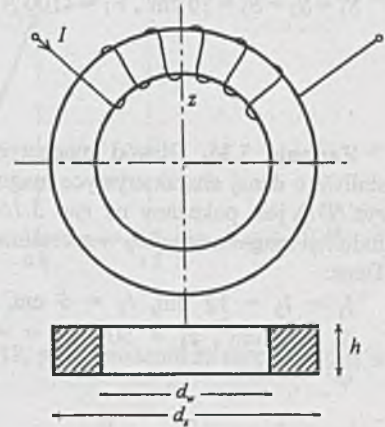
Zadanie 5.13. Obwód magnetyczny wykonany ze staliwa pokazany jest na rys. 5.13. Obliczyć, jaki przepływ F_2 potrzebny jest do uzyskania indukcji B_p w szczelinie powietrznej.

Dane:

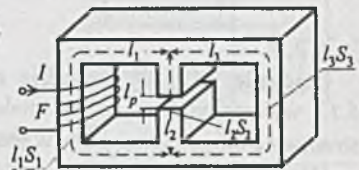
$$l_1 = 11.95 \text{ cm}, l_2 = 6 \text{ cm}, l_3 = 12 \text{ cm}, l_p = 0.5 \text{ mm}, \\ S_1 = S_3 = 0.5 \text{ cm}^2, S_2 = 1 \text{ cm}^2, F_3 = 1000 \text{ A}, \\ \text{charakterystyka magnesowania podana jest w Dodatku} \\ \text{(rys. } DI).$$



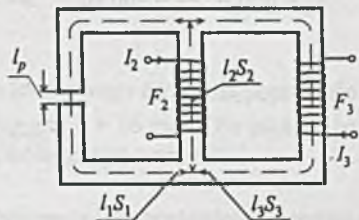
Rys. 5.8



Rys. 5.10



Rys. 5.12



Rys. 5.13

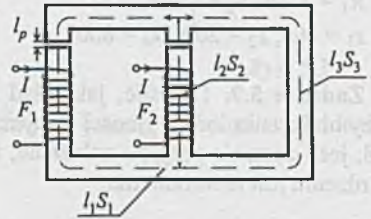
[Zadanie 5.14. Obliczyć wartość indukcji magnetycznej B_p w szczelinie powietrznej w obwodzie magnetycznym z zadania 5.12 zakładając, że przepływ F wynosi 258.4 A.

[Zadanie 5.15. Obwód magnetyczny wykonany ze staliwa o danej charakterystyce magnesowania (Dodatek rys. D1) jest pokazany na rys.5.15. Należy obliczyć wartość strumienia magnetycznego w trzeciej kolumnie.

Dane:

$$l_1 = l_3 = 10 \text{ cm}, l_2 = 6 \text{ cm}, l_p = 0.5 \text{ mm},$$

$$S_1 = S_2 = S_3 = 10 \text{ cm}^2, F_1 = 1100 \text{ A}, F_2 = 1000 \text{ A}.$$



Rys. 5.15

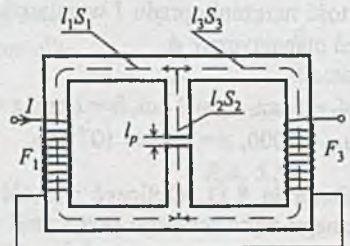
Zadanie 5.16. Obwód magnetyczny wykonany ze staliwa o danej charakterystyce magnesowania (Dodatek rys. D1) jest pokazany na rys. 5.16. Obliczyć wartość indukcji magnetycznej B_p w szczelinie powietrznej.

Dane:

$$l_1 = l_3 = 12 \text{ cm}, l_2 = 6 \text{ cm}, S_1 = S_3 = 1 \text{ cm}^2,$$

$$S_2 = 2 \text{ cm}^2, z_1 = 500, z_3 = 600, I = 0.5 \text{ A},$$

$$l_p = 0.5 \text{ mm}.$$



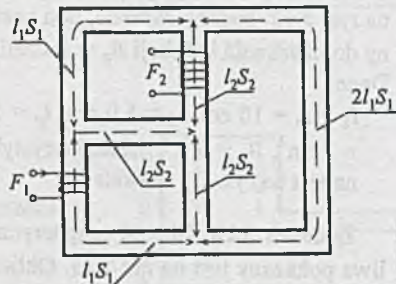
Rys. 5.16

[Zadanie 5.17. W obwodzie magnetycznym z rys. 5.17 wykonanym ze staliwa należy obliczyć wartość strumienia magnetycznego ϕ_2 w prawej kolumnie.

Dane:

$$l_1 = 20 \text{ cm}, l_2 = 10 \text{ cm}, S_1 = 2 \text{ cm}^2, S_2 = 1 \text{ cm}^2,$$

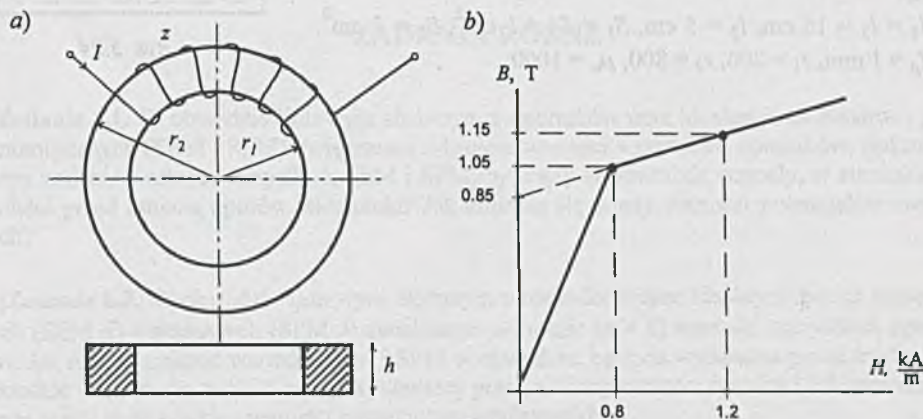
$$F_1 = 400 \text{ A}, F_2 = 200 \text{ A}.$$



Rys. 5.17

[Zadanie 5.18. Należy obliczyć indukcyjność cewki nawiniętej na rdzeń pokazany na rys. 5.18a o aproksymowanej odcinkowo charakterystyce magnesowania przedstawionej na rys. 5.18b.

Cewka posiada $z = 800$ zwojów, a natężenie prądu płynącego przez nią $I = 1$ A, ponadto $r_1 = 15$ cm, $r_2 = 17$ cm, $h = 1.5$ cm.



Rys. 5.18

Zadanie 5.19. Obliczyć indukcyjność cewki z zadania 5.18, przy założeniu że natężenie prądu płynącego przez nią wynosi 0.8 A.

[Zadanie 5.20. Obliczyć opór magnetyczny ferrytowego rdzenia kubkowego, którego przekrój podłużny pokazano na rys. 5.20.

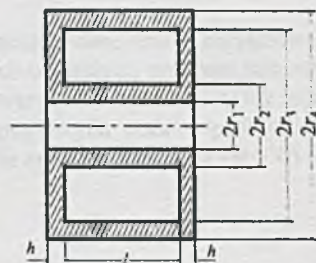
Dane:

$$r_1 = 3.1 \text{ mm}, r_2 = 8 \text{ mm}, r_3 = 18 \text{ mm}, r_4 = 23.5 \text{ mm},$$

$$l = 20 \text{ mm}, h = 6 \text{ mm}, \mu_w = 800.$$

[Zadanie 5.21. Kubek ferrytowy z zadania 5.20 posiada w kolumnie wewnętrznej szczelinę powietrzną o długości $l_p = 0.4$ mm.

Należy dobrać liczbę zwojów tak, aby jego indukcyjność L_0 wynosiła 1 H.



Rys. 5.20

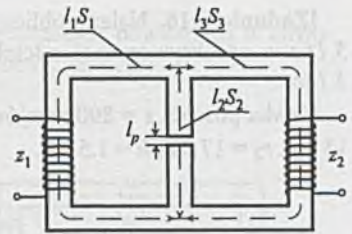
[Zadanie 5.22. W celu zwiększenia indukcyjności L kubka ferrytowego z zadania poprzedniego w kolumnę wewnętrzną wprowadzono rdzeń stojący o długości $l_r = 16$ mm. Dla jakiego położenia rdzenia indukcyjność kubka jest największa i jaka jest wówczas jej wartość?

[Zadanie 5.23. Obliczyć błąd, jaki jest popełniany przy obliczaniu indukcyjności L z zadania 5.22 w wyniku nieuwzględnienia przepływu strumienia przez szczelinę powietrzną.

[Zadanie 5.24. Na rdzeń pokazany na rys. 5.24, wykonany z materiału o względnej przenikalności μ_w , są nawinięte dwa uzwojenia o liczbach zwojów z_1 oraz z_2 . Obliczyć indukcyjności własne, indukcyjność wzajemną oraz współczynnik sprzężenia uzwojeń.

Dane:

$$l_1 = l_3 = 16 \text{ cm}, l_2 = 5 \text{ cm}, S_1 = S_3 = 1 \text{ cm}^2, S_2 = 2 \text{ cm}^2, \\ l_p = 1 \text{ mm}, z_1 = 200, z_2 = 300, \mu_w = 1000.$$



Rys. 5.24

Rozdział 6

ZADANIA RÓŻNE

Zadanie 6.1. W obwodzie liniowym złożonym z oporników oraz idealnych sił elektro- i prądomotorycznych (SEM i SPM) zwiększono n -krotnie wartości wszystkich oporników. Ilorotnie należy zmienić wartości wszystkich SEM i SPM, by prądy w obwodzie wzrosły, w stosunku do wartości przed zmianą oporów, m -krotnie? Jak zmieniają się wtedy wartości potencjałów węzłowych?

[Zadanie 6.2. W obwodzie liniowym złożonym z oporników oraz idealnych źródeł napięciowych (SEM E) i prądowych (SPM J) zwiększono n -krotnie ($n > 0$) wartości wszystkich oporników. Jak należy zmienić wartości SEM i SPM w obwodzie, by moc wydawana przez źródła była m -krotnie większa ($m > 0$) od mocy wydawanej przed zmianą wartości oporów? Jak zmieniają się wtedy prądy w obwodzie i wartości potencjałów węzłowych?

Zadanie 6.3. Jakich dodatkowych zmian należałoby dokonać w obwodzie z poprzedniego zadania, jeśli zawierałby on obok oporników, źródeł napięciowych i prądowych również liniowe wielobiegunniki aktywne określone przez wartości elementów macierzy admitancyjnej (przewodnościowej) i składowe wektorów zastępczych SPM?

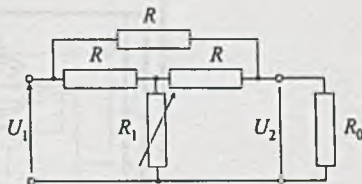
Zadanie 6.4. W obwodzie liniowym zawierającym oporniki, niesterowane źródła napięciowe i prądowe oraz źródła sterowane: napięciowe sterowane prądem lub napięciem, prądowe sterowane napięciem lub prądem zwiększono n -krotnie ($n > 0$) wartości wszystkich oporników. Jak należy zmienić wartości źródeł niesterowanych napięciowych i prądowych oraz współczynniki wpływu źródeł sterowanych, by moc wydawana przez źródła była m -krotnie większa ($m > 0$) od mocy wydawanej przed zmianą wartości oporników?

Zadanie 6.5. W jakim zakresie zmienia się wzmocnienie napięciowe $k_U = \frac{U_2}{U_1}$ przy zmianach wartości opornika R_1

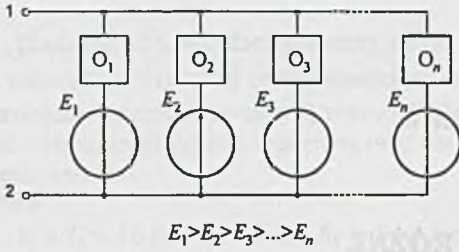
(rys. 6.5) od 0 do ∞ ? Dla jakiej wartości R_1 wzmocnienie osiąga wartość największą?

Dane:

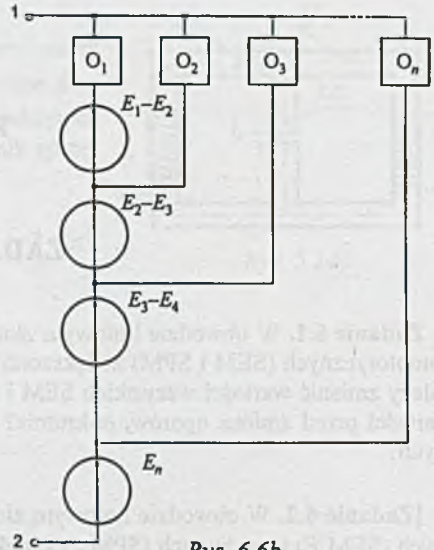
$$R = R_0 = 600 \, \Omega.$$



Rys. 6.5



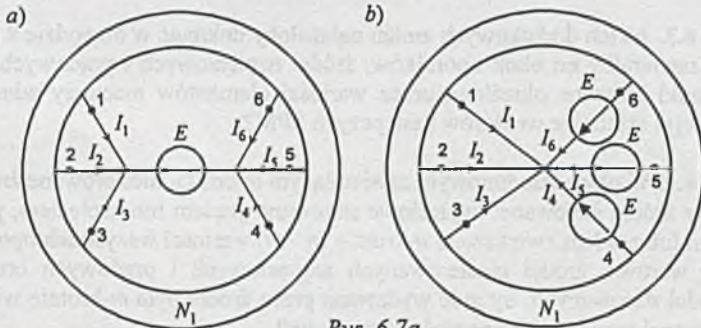
Rys. 6.6a



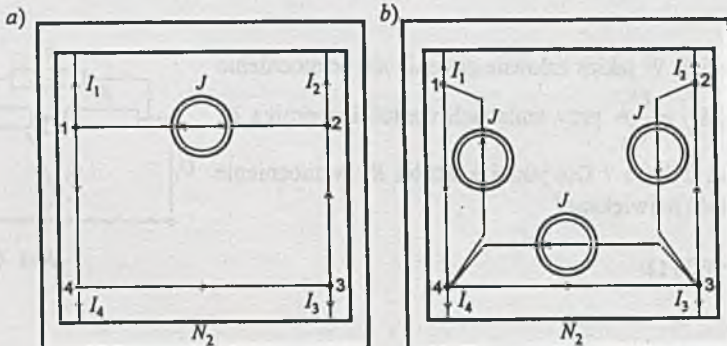
Rys. 6.6b

Zadanie 6.6. Wykazać, że dwa obwody przedstawione na rys. 6.6a i b są równoważne, a więc że możliwe jest zastosowanie jednej wieloodczepowej baterii zamiast n baterii. Na rysunkach tych przez O_i oznaczono i -te obciążenie pasywne.

Zadanie 6.7. Wykazać, że w obwodach a) i b) przedstawionych na rys. 6.7a, 6.7b, 6.7c i 6.7d tak samo oznaczone prądy w wyodrębnionych fragmentach wielobiegunników są równe.

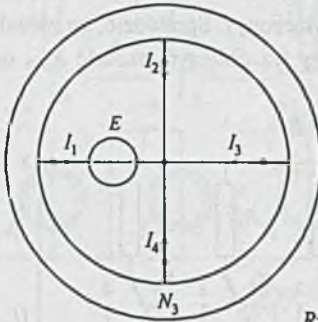


Rys. 6.7a

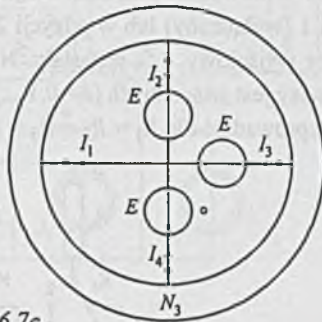


Rys. 6.7b

a)

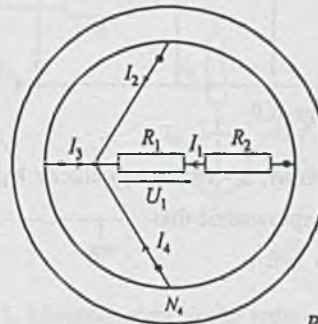


b)

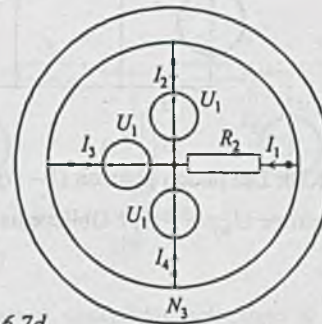


Rys. 6.7c

a)



b)



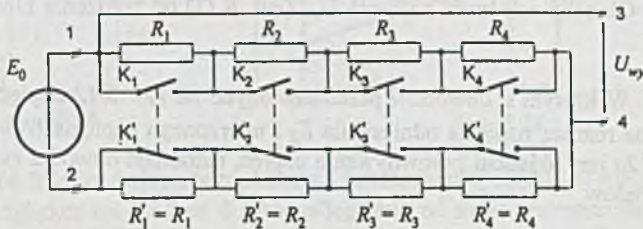
Rys. 6.7d

Zadanie 6.8. W obwodzie przedstawionym na rys. 6.8 klucze K_i oraz K'_i są sprzężone, tzn. gdy zamyka się klucz K_i , to klucz K'_i się otwiera i odwrotnie. Określić, jak zmienia się (w zależności od i) wartość względna $\frac{U_{wy}}{E_0}$ oraz $\frac{R_{3-4}}{R}$, gdy: a) i -ty (tylko) klucz K_i jest otwarty, b) klucze $1, \dots, i$ -ty są otwarte. Obliczyć też wartość $R_{3-4_{max}}$.

Obliczenia przeprowadzić dla:

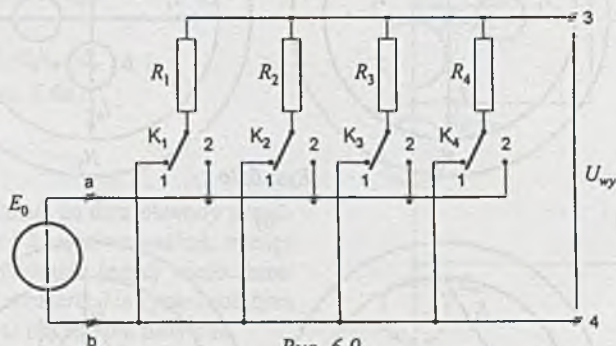
1° $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$,

2° $R_1 = R, R_2 = 2R, R_3 = 4R, R_4 = 8R$.



Rys. 6.8

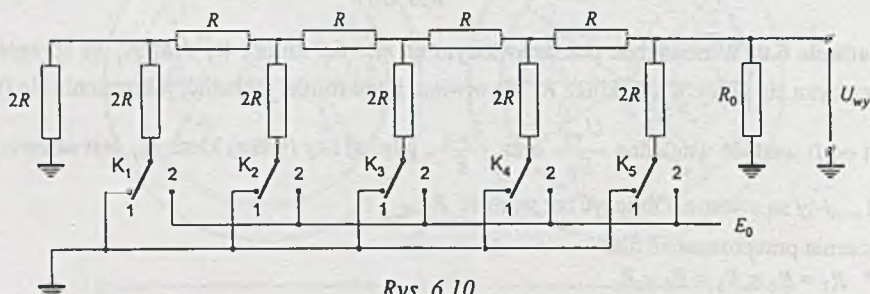
Zadanie 6.9. W obwodzie przedstawionym na rys. 6.9 klucz K_i ($i = 1, \dots, 4$) może się znajdować w pozycji 1 (wyłączony) lub w pozycji 2 (włączony). Sprawdzić, że niezależnie od położenia kluczy opór wyjściowy R_{3-4} jest stały. Należy też obliczyć wartość R_{3-4} oraz wartości U_{wy} i R_{a-b} , gdy i kluczy jest włączonych ($i = 0, 1, \dots, 4$). Obliczenia przeprowadzić dla $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$.



Rys. 6.9

[Zadanie 6.10. Dla jakich położenia (1 - wyłączony, 2 - włączony) kluczy K_1, \dots, K_5 (rys. 6.10) napięcie wyjściowe $U_{wy} = \frac{5}{6} E_0$? Obliczenia przeprowadzić dla:

- $R_0 = R$,
- $R_0 = \infty$.



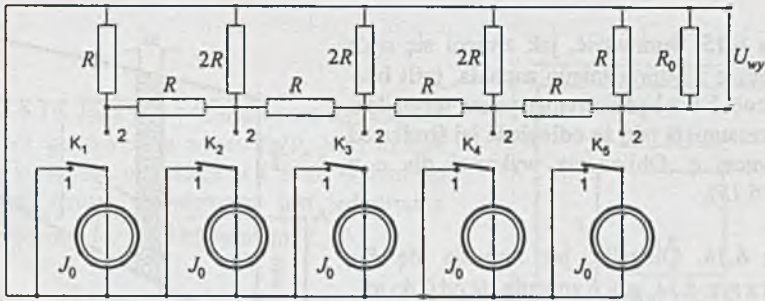
Rys. 6.10

Zadanie 6.11. Określić zależność napięcia U_{wy} (rys. 6.11) od położenia kluczy K_1, \dots, K_5 dla $R_0 = \infty$.

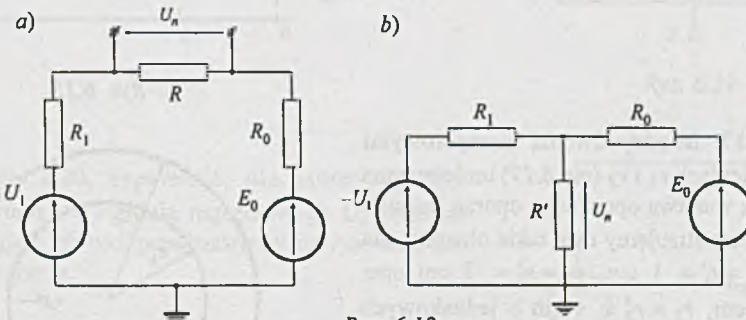
Zadanie 6.12. W którym z obwodów przedstawionych na rys. 6.12 napięcie nierównowagi U_n - spowodowane różnicą napięcia odniesienia E_0 i mierzonego napięcia U_1 - będzie większe? Obwód z rys. 6.12a jest układem porównywania napięć, natomiast obwód z rys. 6.12b układem porównywania prądów.

Dane:

$$R_1 = R_0 = 0.1R = 0.1R'$$

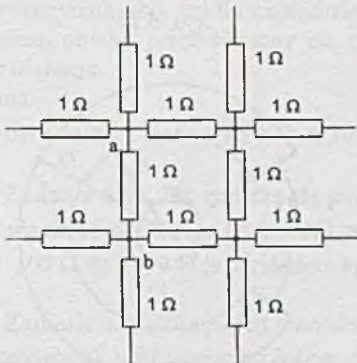


Rys. 6.11

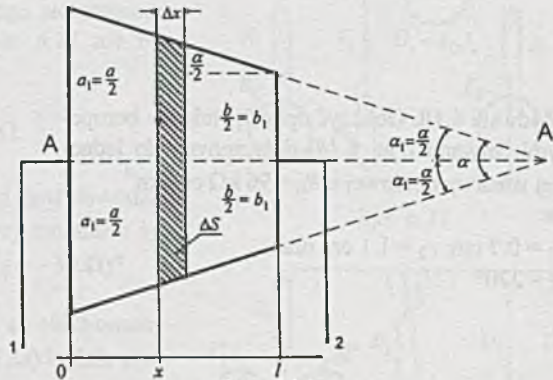


Rys. 6.12

[Zadanie 6.13. nieskończoną liczbę jednoomowych oporników połączono w ten sposób, że tworzą one nieskończoną sieć, której fragment przedstawia rys. 6.13. Jaką wartość ma równoważny opór między dwoma sąsiednimi węzłami a i b ?



Rys. 6.13

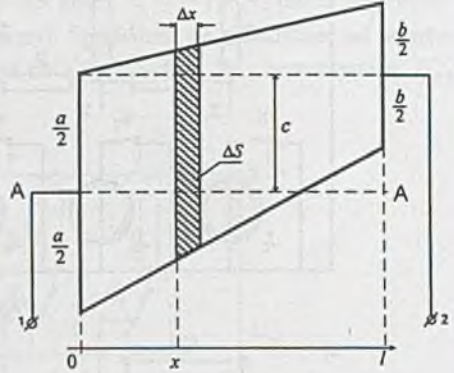


Rys. 6.14

[Zadanie 6.14. Między dwiema bezoporowymi listwami o długościach a i b ułożonymi równolegle i symetrycznie względem osi $A-A$ (rys. 6.14) w odległości l od siebie umieszczono jednorodną warstwę oporową o oporze jednostkowym R_0 . Obliczyć opór zastępczy widziany z zacisków 1-2. Obliczenia wykonać dla następujących danych: $a = 20$ cm, $b = 10$ cm, $l = 20$ cm oraz $R_0 = 1 \Omega \cdot \text{cm}^{-1}$.

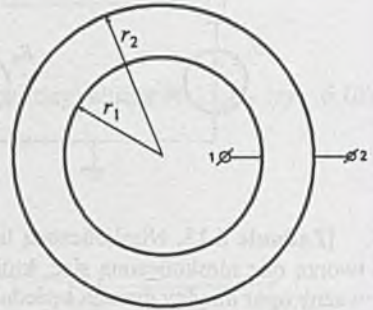
[Zadanie 6.15. Sprawdzić, jak zmieni się opór R_{12} w obwodzie z poprzedniego zadania, jeśli bezoporowa listwa b nie będzie symetryczna względem osi A-A, a przesunięta tak, że odległość jej środka od osi A-A wynosi c . Obliczenia wykonać dla $c = 10$ cm (rys. 6.15).

Zadanie 6.16. Określić, jak zmienia się R_{12} w obwodzie z rys. 6.14, gdy b zmienia się od 0 do ∞ .



Rys. 6.15

Zadanie 6.17. Między dwoma bezoporowymi kołami o promieniach r_1 i r_2 (rys. 6.17) umieszczona jest jednorodna warstwa oporowa o oporze jednostkowym R_0 . Przeanalizujemy dwa takie obwody, dla których: a) $r_1 = r_1' = 1$ cm, $r_2 = r_2' = 3$ cm oraz b) $r_1 = r_1' = 2$ cm, $r_2 = r_2'' = 4$ cm o jednakowych wartościach R_0 . W którym z nich opór R_{12} będzie większy?



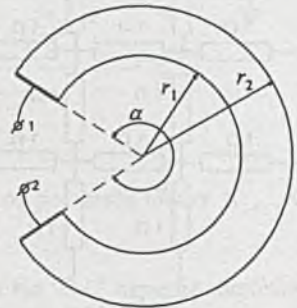
Rys. 6.17

[Zadanie 6.18. Obliczyć opór R_{12} między bezoporowymi listwami (rys. 6.18) dołączonymi do jednorodnej warstwy oporowej o $R_0 = 96$ k Ω ·cm·cm⁻¹.

Dane:

$$r_1 = 0.7 \text{ cm}, r_2 = 1.1 \text{ cm} \text{ oraz}$$

$$\alpha = 270^\circ.$$

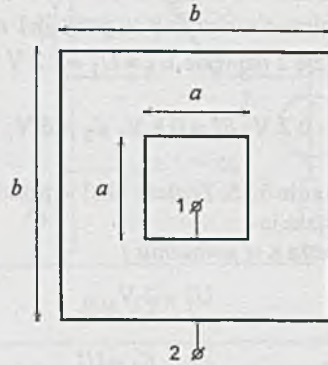


Rys. 6.18

[Zadanie 6.19. Jaka jest wartość oporu R_{12} między zaciskami 1-2 w obwodzie z rys. 6.19, jeśli można przyjąć, że kwadraty o bokach a i b są wykonane z bezoporowej listwy, a wewnątrz jest jednorodna warstwa oporowa o $R_0 = 100 \text{ k}\Omega \cdot \text{cm} \cdot \text{cm}^{-1}$?

Dane:

$$a = 2 \text{ cm}, b = 10 \text{ cm}.$$

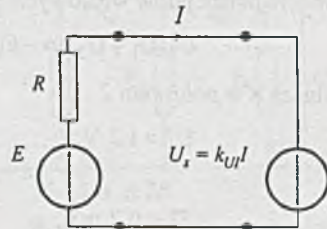


Rys. 6.19

Zadanie 6.20. Sprawdzić, dla jakiej wartości współczynnika k_{UI} źródła napięciowego U_s sterowanego prądem obwód przedstawiony na rys. 6.20 nie ma rozwiązania.

Dane:

$$E = 10 \text{ V}, R = 10 \Omega.$$

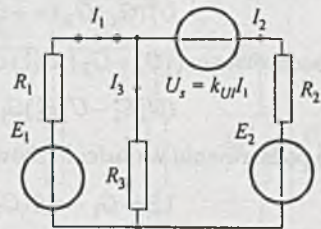


Rys. 6.20

Zadanie 6.21. Sprawdzić, dla jakiej wartości współczynnika k_{UI} źródła napięciowego sterowanego prądem obwód przedstawiony na rys. 6.21 nie ma rozwiązania.

Dane:

$$E_1 = E_2 = 10 \text{ V}, R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega.$$



Rys. 6.21

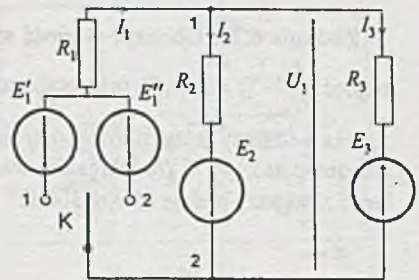
Zadanie 6.22. Jak zmienia się prąd I_3 w obwodzie z zadania poprzedniego (rys. 6.21) przy zmianach k_{UI} od -100Ω do $+100 \Omega$ (z wyjątkiem $k_{UI} = -30 \Omega$)?

Zadanie 6.23. Dla jakich wartości sił elektromotorycznych E'_1 i E'_2 napięcie U_1 (rys. 6.23) będzie równe 2 V, gdy klucz K będzie w położeniu 1 oraz 1.2 V, gdy klucz będzie w położeniu 2?

Dane:

$$R_1 = 2 \text{ k}\Omega, R_2 = 12 \text{ k}\Omega, R_3 = 4 \text{ k}\Omega,$$

$$E_2 = 6 \text{ V}, E_3 = 4 \text{ V}.$$



Rys. 6.23

[Zadanie 6.24. Czy w obwodzie z rys. 6.23 można dobrać wartości oporów R_1 i R_2 tak, by przy położeniu klucza K w pozycji 1 napięcie $U_1 = U_1' = 2 \text{ V}$, natomiast po przełączeniu klucza w pozycję 2 napięcie $U_1 = U_1'' = 1.2 \text{ V}$?

Dane:

$$E_1' = 0.2 \text{ V}, E_1'' = 0.8 \text{ V}, E_2 = 6 \text{ V}, E_3 = 4 \text{ V}, R_3 = 4 \text{ k}\Omega.$$

Zadanie 6.25. Znaleźć błąd w przedstawionym poniżej rozwiązaniu zadania 6.24:

Rozwiązanie

Dla klucza K w położeniu 1

$$U_1' = 2 \text{ V},$$

więc

$$I_3' = \frac{E_3 - U_1'}{R_3} = 0.5 \text{ mA},$$

a równanie potencjałów węzłowych, gdy węzeł 2 - węzłem odniesienia

$$U_1'(G_1 + G_2) = -E_1'G_1 - E_2G_2 + I_3'. \quad (1)$$

Dla klucza K w położeniu 2

$$U_1'' = 1.2 \text{ V},$$

więc

$$I_3'' = 0.7 \text{ mA},$$

a równanie potencjałów węzłowych

$$U_1''(G_1 + G_2) = -E_1''G_1 - E_2G_2 + I_3''. \quad (2)$$

Po podstawieniu $((G_1 + G_2))$ z (1) do (2) i uporządkowaniu otrzymamy:

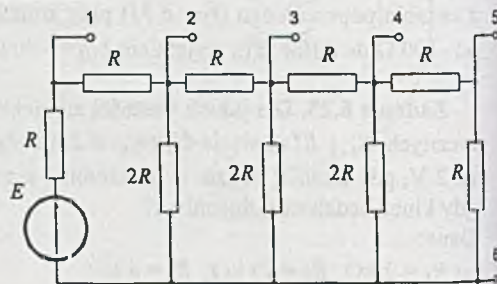
$$(U_1'E_1'' - U_1''E_1')G_1 + (U_1' - U_1'')E_2G_2 = U_1'I_3'' - U_1''I_3',$$

a po podstawieniu wartości liczbowych:

$$1.36 \cdot G_1 + 4.8 \cdot G_2 = 0.8 \cdot 10^{-3},$$

czyli istnieją oporniki R_1 i R_2 spełniające warunki zadania.

Zadanie 6.26. Obliczyć wartość stosunku napięć $\frac{U_i}{U_{i-1}}$ ($i = 2, \dots, 5$) oraz opór zastępczy źródła widziany z zacisków $j-6$ ($j = 1, \dots, 5$) dla obwodu z rys. 6.26. Dla jakiej wartości R opór zastępczy będzie równy 300Ω ?

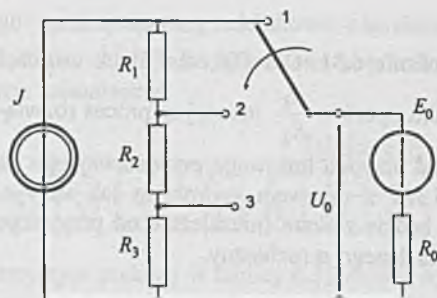


Rys. 6.26

Zadanie 6.27. Dla jakich wartości oporników R_1 , R_2 i R_3 (rys. 6.27) napięcie U_0 będzie równe (przy położeniu przełącznika w pozycji 1, 2 i 3) odpowiednio 15, 10 i 5 V? Jak zmienia się wtedy moc wydawana przez SPM J i pobierana przez odbiornik?

Dane:

$$J = 0.2 \text{ A}, E_0 = 10 \text{ V}, R_0 = 100 \Omega.$$

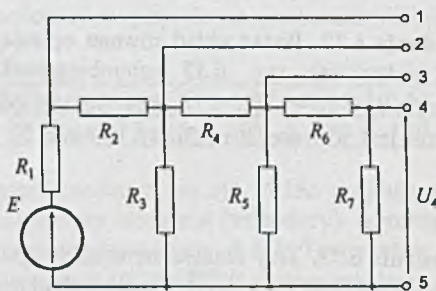


Rys. 6.27

Zadanie 6.28. Wyznaczyć, dla jakich wartości oporników R_1, \dots, R_7 w dzielniku oporowym (rys. 6.28) napięcia wyjściowe będą równe $U_1 = 20 \text{ V}$, $U_2 = 10 \text{ V}$, $U_3 = 5 \text{ V}$ i $U_4 = 2,5 \text{ V}$, a opór wyjściowy między zaciskami i -tym ($i = 1, 2, 3, 4$) a piątym będzie stały i równy $R_{i-5} = 60 \Omega$.

Dane:

$$E = 30 \text{ V}.$$

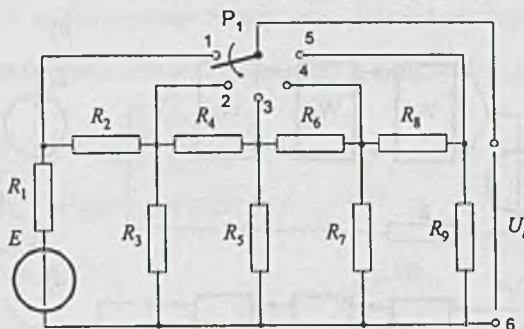


Rys. 6.28

Zadanie 6.29. Obliczyć, dla jakich wartości oporników R_1, \dots, R_9 i SEM E oporowego dzielnika napięcia (rys. 6.29) $U_1 = 10 \text{ V}$, $\frac{U_{i+1}}{U_i} = \frac{1}{5}$ ($i = 1, \dots, 4$) oraz $R_{j-6} = 60 \Omega$ ($j = 1, \dots, 5$). Napięcia U_1, \dots, U_5 wybierane są przełącznikiem P_1 .

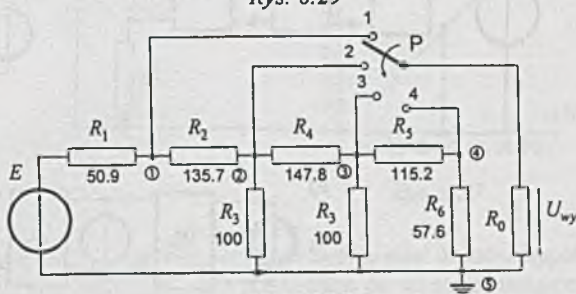
$$6.29) U_1 = 10 \text{ V}, \frac{U_{i+1}}{U_i} = \frac{1}{5} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

oraz $R_{j-6} = 60 \Omega$ ($j = 1, \dots, 5$). Napięcia U_1, \dots, U_5 wybierane są przełącznikiem P_1 .



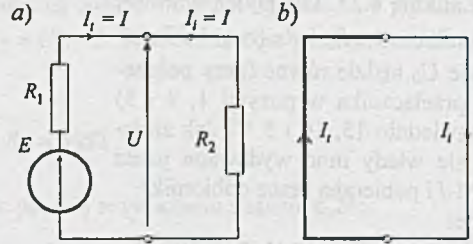
Rys. 6.29

Zadanie 6.30. Dla jakiej wartości napięcia SEM E napięcie $U_{wy} = U_1 = 12 \text{ V}$, dla $R_0 = \infty$ (rys. 6.30)? Jakie wtedy będą wartości napięć U_2 , U_3 i U_4 ? Jak zmieni się wartość napięcia $U_{wy} = U_1, \dots, U_4$, gdy $R_0 = 50 \Omega$? Wartości pozostałych oporów w Ω podane są na rysunku.



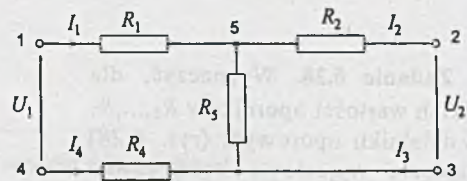
Rys. 6.30

Zadanie 6.31. Określić, dla jakich wartości stosunku oporów $\frac{R_1}{R_2}$ iteracyjny proces rozwiązywania obwodu liniowego przedstawionego na rys. 6.31a z drzewem wybranym jak na rys. 6.31b będzie zawsze (niezależnie od przyjętego $I^{(0)}$) dla danego α rozbieżny.



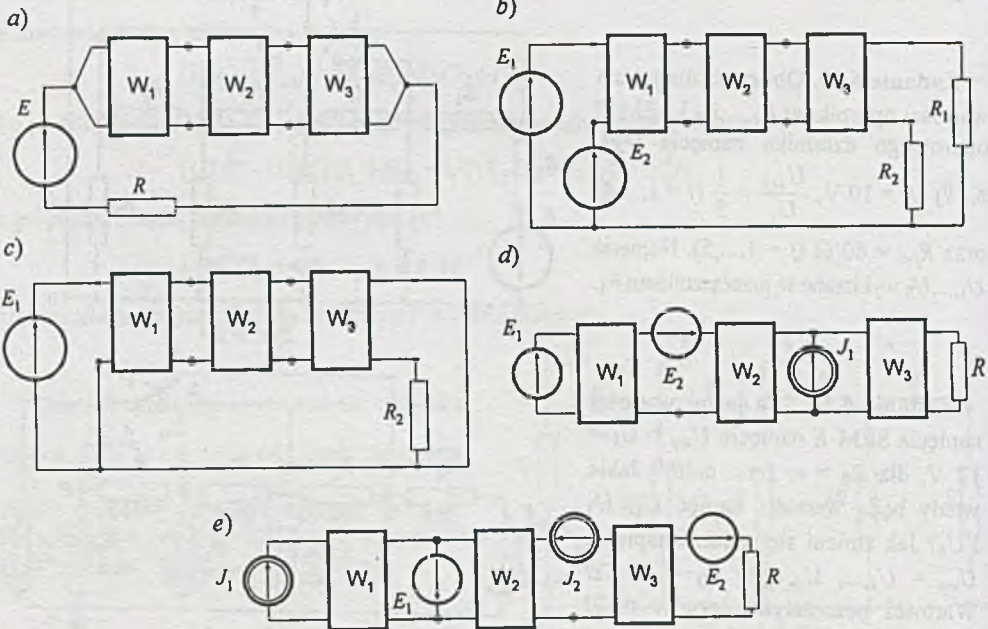
Rys. 6.31

Zadanie 6.32. Podać układ równań opisujących podany na rys. 6.32 czterobiegunnik, w którym $I_1 + I_4 = -(I_2 + I_3)$, gdy węzłem odniesienia jest: a) węzeł zewnętrzny, b) węzeł 5.



Rys. 6.32

Zadanie 6.33. Trzy identyczne czterobiegunniki W_1 , W_2 i W_3 połączone, jak podano na rys. 6.33a + e. Określić, w których z podanych układów czterobiegunniki są czwórnikami.



Rys. 6.33

Zadanie 6.34. Element nieliniowy, którego aproksymowaną odcinkowo charakterystykę podano w tablicy 6.34, należy opisać zależnością $U = a \cdot I^2$. Dla jakiej wartości współczynnika a (dla $U = 0 \div 11$ V) błąd średniokwadratowy będzie najmniejszy?

Tablica 6.34

$U, \text{ V}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$I, \text{ A}$	0	11	16	20	24	28	32	35	38	41	43	46

Zadanie 6.35. Element nieliniowy o charakterystyce podanej w tablicy 6.35 można aproksymować zależnościami: a) $I = 0.04(e^{aU} - 1)$, b) $I = b \cdot U^2$, c) $I = c(U - 0.1)^2$ (U w V, I w mA).

Dobrać wartości współczynników a , b i c tak, by błąd średniokwadratowy (dla $U = 0 \div 0.5$ V) był najmniejszy. Która z podanych wyżej zależności najlepiej aproksymuje element nieliniowy?

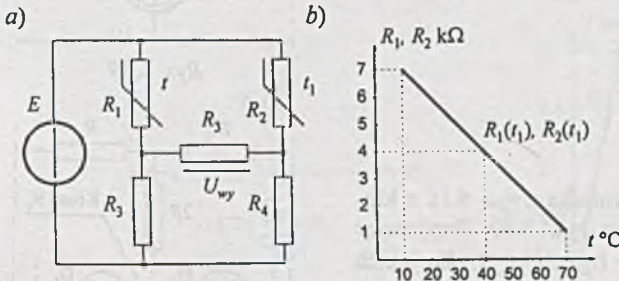
Tablica 6.35

$U, \text{ V}$	0	0.1	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$I, \text{ mA}$	0	0	5	10	25	40	65	95	130	170

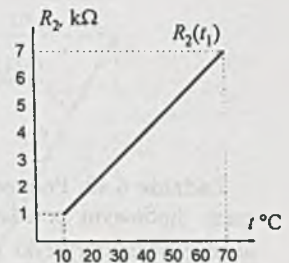
Zadanie 6.36. W obwodzie mostkowym przedstawionym na rys. 6.36a znajdują się dwa identyczne elementy, których opór zależy od temperatury otoczenia (termistory). Aproksymowaną liniowo zależność oporu elementu od temperatury podano na rys. 6.36b. Temperatura otoczenia elementu pierwszego ($R_1(t)$) może się zmieniać od 10° do 70° C , natomiast drugi ($R_2(t)$) element umieszczono w komorze o stałej temperaturze $t_1 = 40^\circ \text{ C}$. Wpływ temperatury otoczenia na zmianę oporu pozostałych rezystorów można pominąć. Należy sporządzić rodzinę charakterystyk zmian (względnych) napięcia na przekątnej mostka od temperatury t , czyli $\frac{U_{wy}}{E} = f(t)$, dla

następujących wartości $a \left(a = \frac{R_4}{R_2(t_1)} \right)$ i $b \left(b = \frac{R_3}{R_2(t_1)} \right)$:

$$1^\circ a = b = 1, \quad 2^\circ a = 5, b = 1, \quad 3^\circ a = 0.5, b = 10.$$



Rys. 6.36

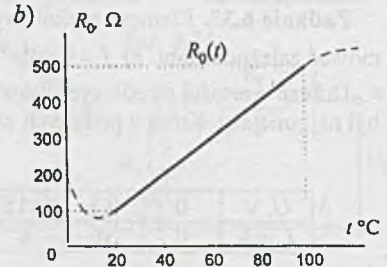
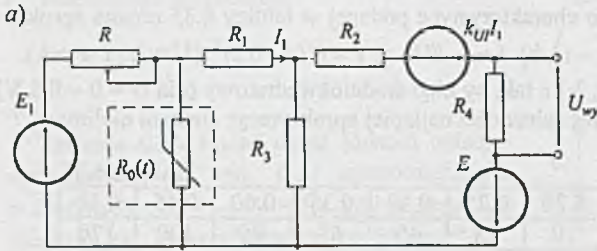


Rys. 6.37

Zadanie 6.37. Rozwiązać zadanie poprzednie, jeśli drugi termistor będzie miał dodatni współczynnik temperaturowy (rys. 6.37) i będzie umieszczony obok pierwszego (w tej samej temperaturze). Który układ będzie lepszy?

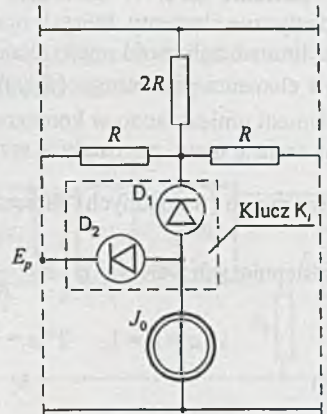
[Zadanie 6.38. W obwodzie przedstawionym na rys. 6.38a obwód wejściowy (E_1, R) zbocznikowany jest przez opornik $R_0(t)$ zależny od temperatury (termistor). Charakterystykę termistora (fragment) podano na rys. 6.38b. Należy dobrać wartość opornika R tak, by przy temperaturze $t = 100^\circ\text{C}$ napięcie $U_{wy} = 4\text{ V}$, oraz sporządzić (dla dobrego R) charakterystykę $U_{wy} = U_{wy}(t)$ dla $t = 20 \div 100^\circ\text{C}$.

Obliczenia przeprowadzić dla $R_1 = R_3 = 100\ \Omega$, $R_2 = R_4 = 1000\ \Omega$, $k_{UI} = 1000\ \Omega$, $E = 10\text{ V}$, $E_1 = -2\text{ V}$.



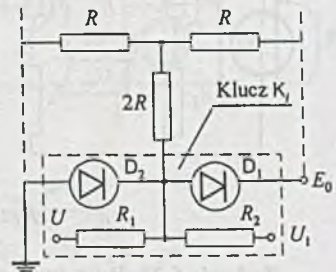
Rys. 6.38

Zadanie 6.39. Na rys. 6.39 podano fragment przetwornika (położenie klucza K_i - napięcie U_{wy}) z rys. 6.11 realizujący na diodach klucz K_i . Przyjmując idealne charakterystyki diod D_1 i D_2 obliczyć, dla jakich wartości napięcia E_p klucz K_i jest w stanie: a) - 1 (wyłączony), b) - 2 (załączony).



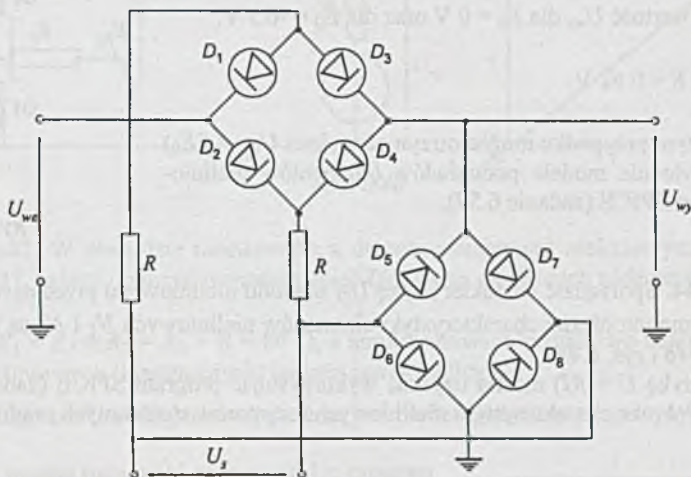
Rys. 6.39

Zadanie 6.40. Fragment przetwornika z rys. 6.10 z kluczem diodowym przedstawiono na rys. 6.40. Przyjmując idealne charakterystyki diod D_1 i D_2 , obliczyć, dla jakich wartości napięcia U_1 klucz K_i jest: a) załączony, b) wyłączony. Napięcie $U < 0$, a $R_1 = R_2 = R$.



Rys. 6.40

Zadanie 6.41. Dla jakich wartości napięcia U_s w układzie diodowym z rys. 6.41 napięcie $U_{wy} = U_{we}$? Założenia: diody $D_1 + D_8$ mają idealne charakterystyki.



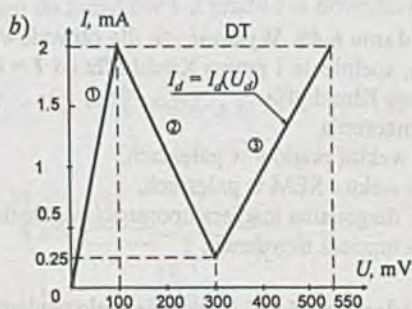
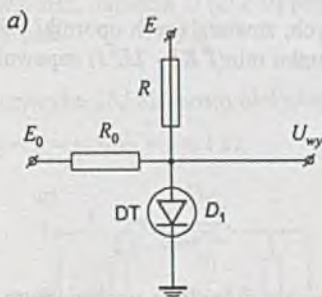
Rys. 6.41

Zadanie 6.42. W obwodzie z diodą tunelową (DT) przedstawionym na rys. 6.42a (niemonotoniczna charakterystyka diody DT przedstawiona jest na rys. 6.42b) określić wartość napięcia U_{wy} , jeśli napięcie wejściowe $E_0 = -3.8$ V.

Dane:

$$R_0 = R = 480 \, \Omega, E = 5 \text{ V}.$$

Charakterystykę $U_{wy} = f(E)$ można też uzyskać stosując odpowiednią metodę modelowania charakterystyki elementu nieliniowego, a następnie wykorzystując program SPICE (zadanie 6.58).



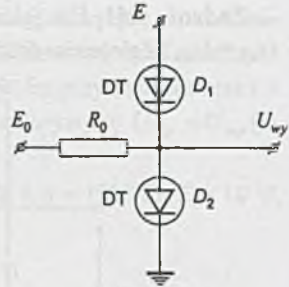
Rys. 6.42

Zadanie 6.43. W obwodzie zawierającym dwie identyczne diody tunelowe (rys. 6.43) o charakterystykach podanych na rys. 6.42b obliczyć wartość U_{wy} dla $E_0 = 0$ V oraz dla $E_0 = -0.3$ V.

Dane:

$$R_0 = 400 \, \Omega, E = 0.62 \, \text{V}.$$

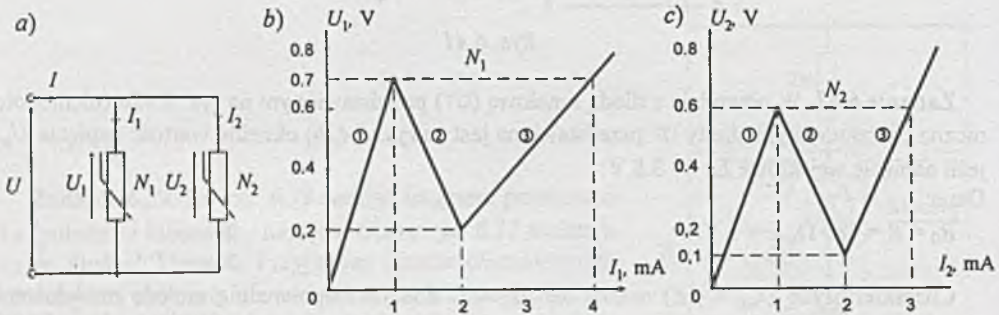
Również w tym przypadku można otrzymać wykres $U_{wy} = f(E_0)$ stosując odpowiednie modele podukładów (elementów nieliniowych) i program SPICE (zadanie 6.59).



Rys. 6.43

Zadanie 6.44. Sporządzić charakterystykę U - I obwodu nieliniowego przedstawionego na rys. 6.44a, jeśli niemonotoniczne charakterystyki elementów nieliniowych N_1 i N_2 są takie, jak pokazano na rys. 6.44b i rys. 6.44c.

Charakterystykę $U = f(I)$ można uzyskać wykorzystując program SPICE (zadanie 6.60) oraz modelując odcinkowo charakterystyki nieliniowych rezystorów sterowanych prądem.



Rys. 6.44

Zadanie 6.45. Wykazać, że dla obwodów liniowych, zawierających oporniki i źródła napięciowe, spełnienie I prawa Kirchhoffa ($A I = 0$) i warunku $\min(I^T R I - 2E^T I)$ zapewnia spełnienie II prawa Kirchhoffa.

Oznaczenia:

I - wektor prądów w gałęziach,

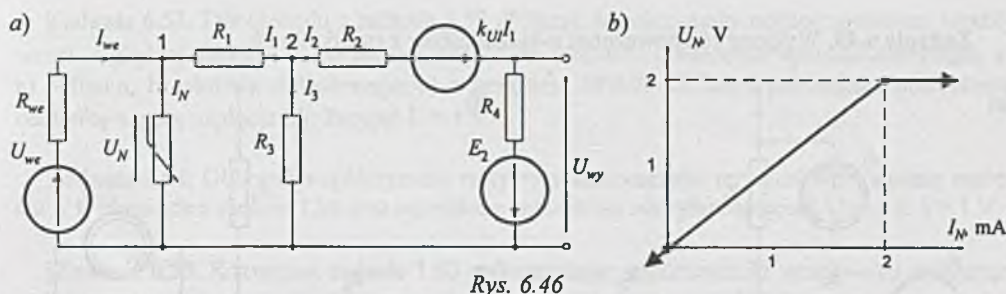
E - wektor SEM w gałęziach,

R - diagonalna macierz oporności w gałęziach,

A - macierz incydencji.

[Zadanie 6.46. W obwodzie z elementem nieliniowym i źródłem napięciowym sterowanym prądem (rys. 6.46a) obliczyć i narysować charakterystykę $U_{wy} = f(U_{we})$. Obliczenia przeprowadzić dla następujących danych:

$R_{we} = 250 \, \Omega$, $R_1 = R_2 = 100 \, \Omega$, $R_3 = R_4 = 1 \, \text{k}\Omega$, $E_2 = 10 \, \text{V}$, $k_{UI} = -1100 \, \Omega$, a charakterystyka elementu nieliniowego przedstawiona jest na rys. 6.46b.



Rys. 6.46

[Zadanie 6.47. W obwodzie mostkowym z dwoma elementami nieliniowymi, przedstawionym na rys. 6.47, należy obliczyć wartości napięć U_1 i U_2 na elementach nieliniowych.

Dane:

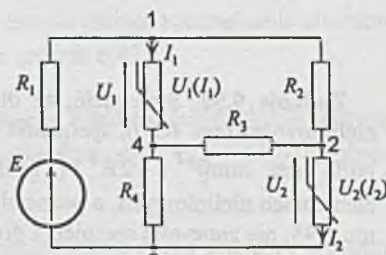
$E = 16$ V, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R = 80 \Omega$, a aproksymowana odcinkowo charakterystyka elementów nieliniowych (identycznych) podana jest w tabelicy 6.47.

Analiza „klasyczna”, analityczno-wykreślna, jest bardzo pożyteczna i precyzyjna, lecz bardzo pracochłonna.

Obwód ten można rozwiązać wykorzystując program SPICE (zadanie 6.61).

Tablica 6.47

I, A	0	0.04	0.05
U, V	0	1	8



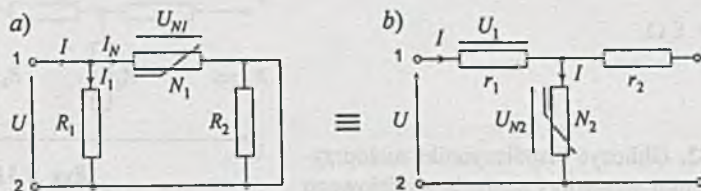
Rys. 6.47

Zadanie 6.48. Określić, dla jakiej charakterystyki $U-I$ elementu nieliniowego N_2 dwójniki pasywne z elementami nieliniowymi (rys. 6.48a i b) są równoważne dla $U \geq 0$ oraz $I \geq 0$, tzn. dla dowolnej wartości napięcia U ($U \geq 0$) przyłożonego do zacisków 1-2 prądy I w obwodach a) i b) będą identyczne.

Dane:

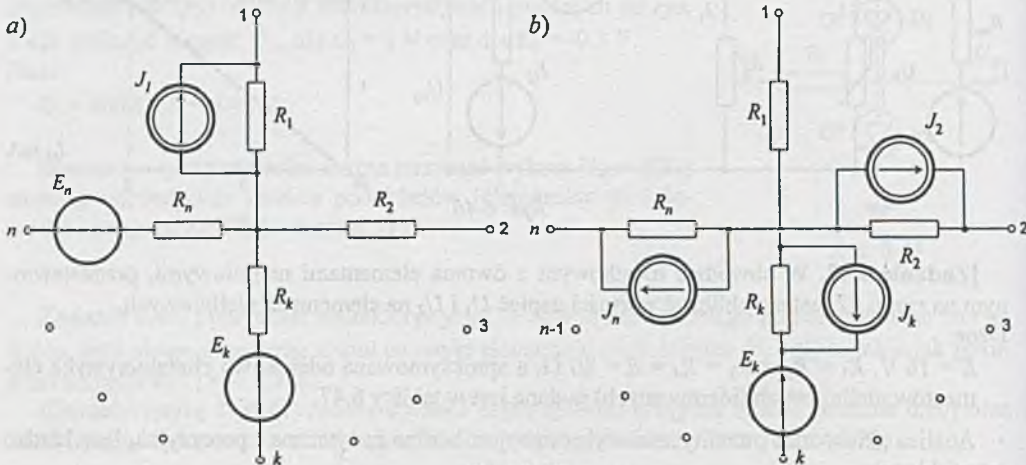
charakterystyka $U-I$ elementu nieliniowego $N_1 - U_{N1} = I_N^2 \cdot \text{sign}(I_N)$, (U_{N1} w V, I_N - w A),

$R_1 = R_2 = R = r_1 = r_2 = r = 1 \Omega$.



Rys. 6.48

Zadanie 6.49. Wykazać równoważność n -biegunników z rys. 6.49a i b.



Rys. 6.49

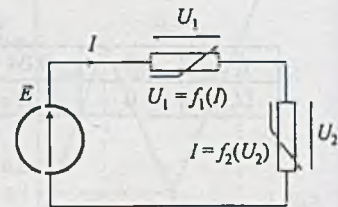
Zadanie 6.50. Sprawdzić, że dla obwodu z elementami nieliniowymi (rys. 6.50), spełnienie pierwszego prawa Kirchhoffa oraz $\min(V^T I - 2E^T I)$, gdzie V - wektor napięć na elementach nieliniowych, a pozostałe oznaczenia jak w zadaniu 6.45, nie zapewnia spełnienia drugiego prawa Kirchhoffa. Elementy nieliniowe opisane są równaniami:

$$U_1 = f_1(I) = aI^2 \text{sign}(I),$$

$$I = f_2(U_2) = bU_2^2 \text{sign}(U_2) \quad (U \text{ w V}, I \text{ w A}),$$

a

$$E = 18 \text{ V oraz } a = 1, b = 1.$$

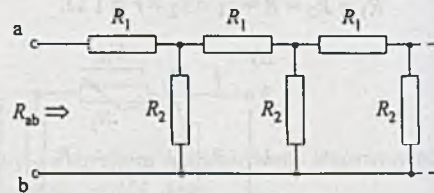


Rys. 6.50

Zadanie 6.51. Obliczyć wartość oporu zastępczego widzianego z zacisków a - b , nieskończonego układu drabinkowego (rys. 6.51).

Dane:

$$R_1 = 5 \Omega, R_2 = 8 \Omega.$$



Rys. 6.51

[Zadanie 6.52. Obliczyć współczynniki małoprzrostowej wrażliwości względnej napięcia wyjściowego U obwodu z zadania 1.55 na zmiany wartości rezystorów i wartości napięcia E na wyjściu zasilacza. Obliczyć również tolerancje napięcia U , gdy $t_{R1} = t_{R2} = 10\%$, $t_E = 0$, $R_{1N} = 2 \text{ k}\Omega$, $R_{2N} = 1 \text{ k}\Omega$, $E_N = 10 \text{ V}$, gdzie E - napięcie na wyjściu zasilacza stabilizowanego.

Zadanie 6.53. Dla obwodu z zadania 1.58 obliczyć współczynniki małoprzrostowej wrażliwości względnej napięcia U_1 na zmiany rezystorów i SEM U . Obliczenia wykonać korzystając z: a) definicji, b) obwodu dołączonego, c) z programu SPICE. Obliczyć największą procentową odchyłkę w górę napięcia U_1 . Przyjąć $U = 1$ V.

Zadanie 6.54. Obliczyć współczynniki wpływu zmian wartości rezystorów na zmianę napięcia U w obwodzie z zadania 1.56 oraz największe procentowe odchyłki napięcia U . Przyjąć $E = 1$ V.

[Zadanie 6.55. Rozwiązać zadanie 1.60 wykorzystując współczynniki wrażliwości małoprzrostowych napięcia U_5 na zmianę rezystorów i napięcia zasilania. Przyjąć $U = 1$ V.

[Zadanie 6.56. Obliczyć wartości współczynników wrażliwości małoprzrostowej napięcia U_2 , w obwodzie z zadania 4.17, na zmiany parametrów obwodu.

[Zadanie 6.57. Obliczyć współczynniki wrażliwości napięcia $U_2 = U_{wy}$ na zmiany parametrów obwodu z zadania 4.35.

[Zadanie 6.58. Przygotować dane do programu SPICE umożliwiające sporządzenie charakterystyki $U_{wy} = f(E_0)$ dla obwodu z elementem nieliniowym z zadania 6.42.

[Zadanie 6.59. Korzystając z modelu elementu nieliniowego z zadania poprzedniego przygotować dane do programu SPICE umożliwiające uzyskanie charakterystyki $U_{wy} = f(E_0)$ dla obwodu z zadania 6.43.

[Zadanie 6.60. Zaproponować model elementu nieliniowego sterowanego prądem i wykorzystać go do sporządzenia charakterystyki $U = f(I)$ dla obwodu nieliniowego z zadania 6.44.

[Zadanie 6.61. Wykorzystując modele elementów nieliniowych zaproponowane w zadaniach 3.52 i 6.60, obliczyć napięcia na elementach nieliniowych obwodu z zadania 6.47.

II. ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

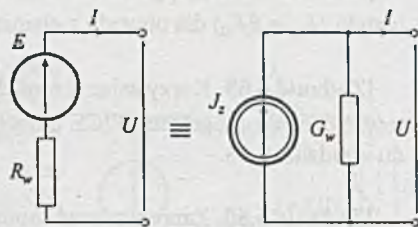
Rozdział 1

OBWODY PROSTE LINIOWE

Zadanie 1.1. Elektryczny wydajnik energii opisują dwa równoważne schematy zastępcze przedstawione na *rys. 1.1.1*, przy czym poszczególne parametry tych schematów związane są zależnościami $J_z = \frac{E}{R_w}$, $G_w = \frac{1}{R_w}$. Pierwszy schemat przedstawia źródło napięciowe (rzeczywiste), a drugi źródło prądowe.

Ad 1)

Punkt A przecięcia charakterystyki napięciowo-prądowej wydajnika z osią napięć określa wartość SEM $E_1 = 2 \text{ V}$. Opór wewnętrzny R_{w1} źródła napięciowego można obliczyć korzystając z prawa Ohma dla przyrządów napięcia i prądu na odcinku AB charakterystyki:



Rys. 1.1.1

$$R_{w1} = \frac{\Delta U_1}{\Delta I_1} = \frac{\alpha_U \cdot AE}{\alpha_I \cdot BE} = \frac{2 - 1.5}{2.5} = 0.2 \Omega,$$

gdzie α_U i α_I są współczynnikami skali.

Równoważne źródło prądowe jest określone przez

$$J_{z1} = \frac{E_1}{R_{w1}} = \frac{2}{0.2} = 10 \text{ A}$$

oraz

$$G_{w1} = \frac{1}{R_{w1}} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ S}.$$

Ad 2)

Przedłużenie odcinka BC przecina oś prądów w punkcie G, który wyznacza wartość SPM $J_{z2} = 4.75 \text{ A}$.

Przewodność wewnętrzna

$$G_{w2} = \frac{\Delta I_2}{\Delta U_2} = \frac{\alpha_I \cdot CF}{\alpha_U \cdot BF} = \frac{1.5}{1} = 1.5 \text{ S}.$$

Dla równoważnego źródła napięciowego

$$E_2 = \frac{J_{z2}}{G_{w2}} = \frac{4.75}{1.5} = 3.17 \text{ V},$$

$$R_{w2} = \frac{1}{G_{w2}} = \frac{1}{1.5} = 0.667 \Omega.$$

Ad 3)

$$J_{z3} = 4.3 \text{ A}, G_{w3} = 0.6 \text{ S lub } E_3 = 1.17 \text{ V}, R_{w3} = 1.67 \Omega.$$

Zadanie 1.2. Punkt A określa stan pracy źródła przy braku obciążenia. Źródło pracuje w punkcie B charakterystyki przy oporze obciążenia

$$R_B = \frac{\alpha_U \cdot BB'}{\alpha_I \cdot B'O} = \frac{5.8}{2 \cdot 10^{-3}} = 2900 \Omega.$$

Analogicznie

$$R_C = \frac{\alpha_U \cdot CC'}{\alpha_I \cdot C'O} = \frac{4.8}{6 \cdot 10^{-3}} = 800 \Omega.$$

Reasumując: przy zmianach oporu obciążenia od wartości nieskończenie wielkich do 2900Ω punkt pracy przemieszcza się na charakterystyce między punktami A i B; przy obciążeniu $2900 \Omega \div 800 \Omega$ punkt pracy znajduje się na odcinku BC.

Zadanie 1.3. Przyjmujemy kierunek prądu I , a następnie konsekwentnie strzałkujemy napięcia na oporach R_1 i R_2 (rys. 1.3.1).

Z prawa Ohma

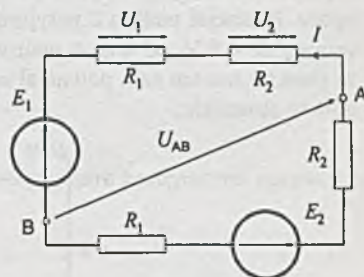
$$I = \frac{E_2 - E_1}{2R_1 + 2R_2} = \frac{40 - 20}{2 \cdot 125 + 2 \cdot 75} = 0.05 \text{ A},$$

więc

$$U_1 = R_1 I = 125 \cdot 0.05 = 6.25 \text{ V}$$

oraz

$$U_2 = R_2 I = 75 \cdot 0.05 = 3.75 \text{ V}.$$



Rys. 1.3.1

Strzałkując napięcie U_{AB} jak na rys. 1.3.1, obliczamy je korzystając z II prawa Kirchhoffa; wówczas

$$U_{AB} = E_1 + U_1 + U_2 = 20 + 6.25 + 3.75 = 30 \text{ V}.$$

Zadanie 1.4. Po zastrzałkowaniu prądów, a następnie napięć korzystamy z prawa Ohma; wówczas

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2}, \quad U_1 = R_1 I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_1$$

oraz

$$I_3 = \frac{U}{R_3 + R_4}, \quad U_3 = R_3 I_3 = \frac{U}{R_3 + R_4} R_3.$$

Z II prawa Kirchhoffa

$$U_{AB} = U_3 - U_1 = \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) U =$$

$$= \left(\frac{500}{500 + 500} - \frac{250}{250 + 750} \right) \cdot 120 = 30 \text{ V.}$$

Zadanie 1.5. Po określeniu wartości prądu

$$I = \frac{E_3 - E_2}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{24 - 12}{(2 + 1 + 2) \cdot 10^3} = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

obliczamy napięcia na poszczególnych oporach; wówczas

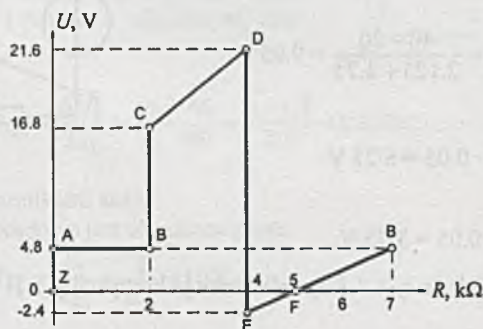
$$U_2 = R_2 I = 2 \cdot 10^3 \cdot 2.4 \cdot 10^{-3} = 4.8 \text{ V,}$$

$$U_3 = R_3 I = 10^3 \cdot 2.4 \cdot 10^{-3} = 2.4 \text{ V,}$$

$$U_4 = R_4 I = 2 \cdot 10^3 \cdot 2.4 \cdot 10^{-3} = 4.8 \text{ V.}$$

Napięcie na oporze R_1 jest równe zero, gdyż nie płynie przez ten opór prąd.

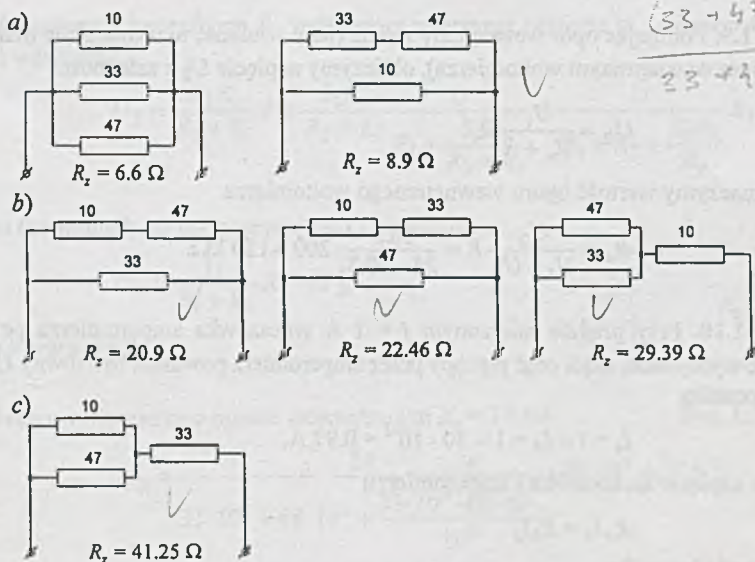
Sporządzamy wykres potencjału w obwodzie wzdłuż drogi ZABCDEFB (rys. 1.5.1). Na osi rzędnych odkładamy wartości potencjałów poszczególnych punktów, a na osi odciętych wartości oporu. Potencjał punktu Z przyjmujemy za zerowy. Na drodze ZA bez przyrostu oporu potencjał wzrasta do 4.8 V, od A do B opór wzrasta o 2 kΩ, ale potencjał jest stały, itd. Z wykresu wynika, że punkt F ma ten sam potencjał co punkt Z; można więc go uziemić bez zmiany rozprężu prądów w obwodzie.



Rys. 1.5.1

Zadanie 1.6.

- a) $R_z = 6.6 \Omega$ i $R_z = 8.9 \Omega$ (rys. 1.6.1a),
 b) w zależności od sposobu połączenia (rys. 1.6.1b)
 $R_z = 20.9 \Omega$ lub 22.46Ω lub 29.39Ω ,
 c) $R_z = 41.25 \Omega$ (rys. 1.6.1c).



Rys. 1.6.1

Zadanie 1.7. Zastępując równolegle połączone rezystory rezystorami zastępczymi upraszczamy obwód z rys. 1.7 do postaci pokazanej na rys. 1.7.1, gdzie

$$R_{z1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 25}{10 + 15} = 6 \Omega,$$

$$R_{z2} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{60 \cdot 40}{60 + 40} = 24 \Omega.$$

Stąd łatwo policzyć spadki napięć na rezystorach zastępczych

$$U_2 = \frac{U}{R_{z1} + R_{z2}} R_{z1} = \frac{120}{6 + 24} \cdot 6 = 24 \text{ V}$$

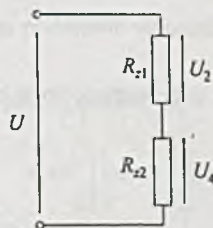
oraz

$$U_4 = U - U_2 = 120 - 24 = 96 \text{ V}.$$

Wracając do obwodu z rys. 1.7 liczymy prądy

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{24}{15} = 1.6 \text{ A},$$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{96}{40} = 2.4 \text{ A}.$$



Rys. 1.7.1

Prąd amperomierza idealnego I_A wyznaczamy korzystając z I prawa Kirchhoffa

$$I_A = I_4 - I_2 = 2.4 - 1.6 = 0.8 \text{ A.}$$

Zadanie 1.8. Prądy płynące przez amperomierze A_1 , A_2 i A_3 : $I_1 = 18 \text{ mA}$, $I_2 = I_3 = 12 \text{ mA}$.

Zadanie 1.9. Pomijając opór wewnętrzny źródła (jako wielkość nieskończenie małą w porównaniu z oporem wewnętrznym woltomierza), obliczymy napięcie U_2 z zależności

$$U_2 = \frac{U_1}{R_v + R} R_v,$$

a z niej wyznaczmy wartość oporu wewnętrznego woltomierza

$$R_v = \frac{U_2}{U_1 - U_2} R = \frac{10.3}{24 - 10.3} \cdot 200 = 150 \text{ k}\Omega.$$

Zadanie 1.10. Przy prądzie mierzonym $I = 1 \text{ A}$ wskazówka amperomierza powinna mieć maksymalne wychylenie, czyli prąd płynący przez amperomierz powinien być równy $I_A = 30 \text{ mA}$. Stąd prąd bocznika

$$I_b = I - I_A = 1 - 30 \cdot 10^{-3} = 0.97 \text{ A.}$$

Porównując napięcie na boczniku i amperomierzu

$$R_A I_A = R_b I_b$$

wyliczamy opór bocznika

$$R_b = \frac{R_A I_A}{I_b} = \frac{1 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{0.97} \approx 0.031 \Omega.$$

Zadanie 1.11. $R_1 = 0.200 \Omega$, $R_2 = R_3 = 0.025 \Omega$.

Zadanie 1.12. Wartość oporu R_d należy dobrać tak, aby przy napięciu mierzonym $U = 150 \text{ V}$ napięcie na woltomierzu U_v wynosiło 30 V (pełne wychylenie wskazówki).

Ponieważ napięcie U_d na dodatkowym oporze R_d jest równe

$$U_d = U - U_v = 150 - 30 = 120 \text{ V,}$$

a prąd I_v woltomierza

$$I_v = \frac{U_v}{R_v} = \frac{30}{150 \cdot 10^3} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ A,}$$

więc wartość dodatkowego oporu R_d , jaki należy dołączyć szeregowo z woltomierzem, wynosi

$$R_d = \frac{U_d}{I_v} = \frac{120}{0.2 \cdot 10^{-3}} = 600 \cdot 10^3 = 600 \text{ k}\Omega.$$

Zadanie 1.13. Oporniki włączone szeregowo z woltomierzem równe są odpowiednio: $24 \text{ k}\Omega$, $90 \text{ k}\Omega$, $180 \text{ k}\Omega$.

Zadanie 1.14. Napięcie na rezystorze R_2 w układzie z rys. 1.14 (bez dołączonego woltomierza) wynosi

$$U_2^* = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{24}{33 + 68} \cdot 68 = 16.15 \text{ V}.$$

Dołączając równolegle z opornikiem R_2 woltomierz mierzymy napięcie w zmienionym układzie z rys. 1.14.1 i wówczas

$$U_2 = \frac{R_2 R_v}{R_2 + R_v} I = \frac{R_2 R_v}{R_2 + R_v} \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_v}{R_2 + R_v}} = \frac{U}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_v}} R_2.$$

Ad 1)

Dla idealnego (ze względu na opór wewnętrzny) woltomierza

$$U_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 = U_2^*,$$

więc uchyb pomiaru $\delta = 0$.

Ad 2)

Dla dość dobrego woltomierza o oporze wewnętrznym $R_v = 1 \text{ M}\Omega$

$$U_2 = \frac{24}{33 \cdot 10^3 + 68 \cdot 10^3 + \frac{33 \cdot 10^3 \cdot 68 \cdot 10^3}{10^6}} \cdot 68 \cdot 10^3 = 15.8 \text{ V},$$

więc uchyb względny pomiaru spowodowany nieidealnością woltomierza wynosi

$$\delta = \frac{U_2 - U_2^*}{U_2^*} \cdot 100\% = \frac{15.8 - 16.15}{16.15} \cdot 100\% = -2.17\%.$$

Ad 3)

$$U_2 = 13.25 \text{ V}, \delta = -18 \%.$$

Ad 4)

$$U_2 = 5.04 \text{ V}, \delta = -68.8 \%.$$

Z obliczeń wynika, że uchyb (zawsze ujemny) będzie tym mniejszy, im większy jest, w porównaniu z oporami mierzonego układu, opór wewnętrzny woltomierza.

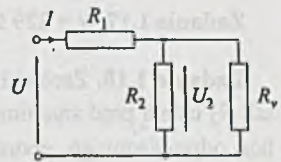
Zadanie 1.15. $33 \text{ k}\Omega$, $50 \text{ k}\Omega$.

Zadanie 1.16. Opór obliczony metodą poprawnie mierzonego napięcia na podstawie wskazań przyrządów wynosi

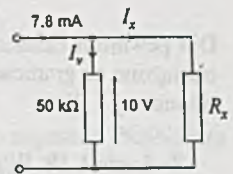
$$R_x = \frac{10}{7.8 \cdot 10^{-3}} = 1283 \Omega.$$

Uwzględnienie oporu wewnętrznego woltomierza (rys. 1.16.1) pozwala na określenie prądu woltomierza

$$I_v = \frac{10}{50 \cdot 10^3} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 0.2 \text{ mA}$$



Rys. 1.14.1



Rys. 1.16.1

i na wyznaczenie dokładnej wartości prądu I_x płynącego przez mierzony opór

$$I_x = 7.8 - 0.2 = 7.6 \text{ mA.}$$

Stąd poprawna wartość mierzonego oporu

$$R_x^* = \frac{10}{7.6 \cdot 10^{-3}} = 1316 \Omega,$$

a uchyb względny pomiaru wynikający z pominięcia wpływu rzeczywistego woltomierza wynosi

$$\delta = \frac{R_x - R_x^*}{R_x^*} \cdot 100\% = \frac{1283 - 1316}{1316} \cdot 100\% = -2.5\%.$$

Zadanie 1.17. $R = 229 \Omega$, $\delta = -1.97\%$.

Zadanie 1.18. Żarówki połączymy jak na rys. 1.18.1. Bocznik R_2 ustala prąd znamionowy żarówki Z_2 , natomiast przez dobór odpowiedniego opornika szeregowego R_1 można ustalić napięcia znamionowe żarówek.

Prąd płynący przez bocznik R_2

$$I_2 = I_{Z1} - I_{Z2} = 0.2 - 0.1 = 0.1 \text{ A,}$$

więc opór bocznika

$$R_2 = \frac{U_{Z2}}{I_2} = \frac{6}{0.1} = 60 \Omega.$$

Z II prawa Kirchhoffa napięcie U_1 na oporniku szeregowym R_1

$$U_1 = U - U_{Z1} - U_{Z2} = 12 - 3.5 - 6 = 2.5 \text{ V,}$$

zatem opór szeregowy

$$R_1 = \frac{U_1}{I_{Z1}} = \frac{2.5}{0.2} = 12.5 \Omega.$$

Straty mocy w opornikach

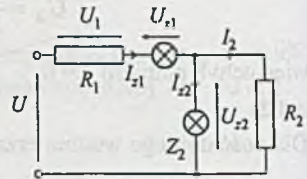
$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{2.5^2}{12.5} = 0.5 \text{ W}$$

oraz

$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = 0.1^2 \cdot 60 = 0.6 \text{ W.}$$

Dla pewności działania przyjmuje się, że oporniki w warunkach normalnej pracy powinny być obciążone w granicach 50% mocy znamionowej. Należy zatem użyć oporników o mocy znamionowej 1 W.

Zadanie 1.19. W szereg z obwodami żarzenia należy włączyć opornik 32.3Ω oraz dodatkowo równolegle do obwodu żarzenia pierwszej triody należy włączyć opornik 54.8Ω .



Rys. 1.18.1

Zadanie 1.20. Przyjmujemy, że przy normalnej pracy potencjometr można obciążyć 50% mocy dopuszczalnej P_p . Stąd obliczamy dopuszczalny prąd w obwodzie potencjometru

$$I_d = \sqrt{\frac{0.5 \cdot P_p}{R_p}} = \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{10^4}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

Jeżeli suwak znajdzie się w górnym położeniu, wówczas prąd I może osiągnąć co najwyżej wartość I_d , zatem wartość oporu ogranicznika R wynosi

$$R = \frac{U}{I_d} = \frac{120}{5 \cdot 10^{-3}} = 24 \cdot 10^3 \text{ } \Omega = 24 \text{ k}\Omega,$$

a moc wydzielona na nim

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{120^2}{24 \cdot 10^3} = 0.6 \text{ W.}$$

Dobieramy opornik R o wartościach znormalizowanych 24 k Ω /1 W.

Zadanie 1.21. Opór zastępczy widziany z zacisków AB wynosi

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{200 \cdot 500}{700} + 300 = 443 \text{ } \Omega.$$

Gdy suwak potencjometru znajdzie się w prawym skrajnym położeniu, wówczas wartość napięcia U_0 powinna spełniać nierówność

$$U_0 = \frac{U}{R_p + R_0} R_0 \leq 6 \text{ V.}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy nierówność

$$\frac{12}{R_p + 443} \cdot 443 \leq 6,$$

stąd

$$R_p \geq 443 \text{ } \Omega.$$

Przyjmujemy wartość znormalizowaną $R_p = 470 \text{ } \Omega$.

Maksymalny prąd I_m w popływie obwodzie, gdy suwak potencjometru znajdzie się w lewym skrajnym położeniu; wówczas

$$I_m = \frac{U}{R_0} = \frac{12}{443} = 27.1 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

Moc potencjometru liczona dla takiego prądu

$$P = I_m^2 R_p = (27.1 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 470 = 0.345 \text{ W.}$$

Moc znamionową potencjometru dobieramy z co najmniej dwukrotnym zapasem. Najbliższa wartość znormalizowana wynosi 1 W. Zatem dobieramy potencjometr 470 Ω /1 W.

Sprawdzenie

Przy zwartym potencjometrze

$$U_0 = U_{0\max} = 12 \text{ V.}$$

Przy włączeniu całego oporu potencjometru

$$U_0 = U_{0\min} = \frac{12}{470 + 443} \cdot 443 = 5.83 \text{ V} < 6 \text{ V.}$$

Zadanie 1.22. $I_0 = 18.75 \div 60 \text{ mA}$, $I_{\max} = 65 \text{ mA}$.

Zadanie 1.23. Przy zwartym potencjometrze prąd obciążenia

$$I_0 = \frac{U}{R_0 + R_2} \geq 0.04 \text{ A,}$$

czyli

$$\frac{24}{200 + R_2} \geq 0.04,$$

stąd

$$R_2 \leq 400 \Omega.$$

Dobieramy najbliższą wartość znormalizowaną $R_2 = 390 \Omega$; wtedy największa wartość prądu

$$I_{0\max} = \frac{24}{200 + 390} = 0.0407 \text{ A} = 40.7 \text{ mA,}$$

a moc tracona na oporze R_2

$$P_2 = I_{0\max}^2 R_2 = 0.0497^2 \cdot 390 = 0.648 \text{ W.}$$

Dobieramy opornik $390 \Omega/1 \text{ W}$.

Gdy suwak potencjometru znajdzie się w prawym skrajnym położeniu, wówczas

$$I_0 = \frac{U}{\frac{R_1 R_p}{R_1 + R_p} + R_0 + R_2} \leq 0.025 \text{ A,}$$

czyli

$$\frac{24}{\frac{R_1 \cdot 470}{R_1 + 470} + 200 + 390} \leq 0.025 \text{ A,}$$

stąd

$$R_1 \geq 1740 \Omega.$$

Przyjmujemy $R_1 = 1800 \Omega$; wtedy minimalna wartość prądu obciążenia

$$I_{0\min} = \frac{U}{\frac{R_1 R_p}{R_1 + R_p} + R_0 + R_2} = \frac{24}{\frac{1800 \cdot 470}{2270} + 200 + 390} \leq 0.0249 \text{ A}$$

oraz napięcia na rezystorze R_1

$$U_1 = U - (R_0 + R_2)I_{0 \min} = 24 - (200 + 390) \cdot 0.02449 = 9.3 \text{ V.}$$

więc moc tracona na tym rezystorze

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{9.3^2}{1800} = 0.048 \text{ W.}$$

Dobieramy opornik $1800 \Omega / 0.125 \text{ W}$.

Zadanie 1.24. Napięcie na uzwojeniu przekąznika

$$U_p = \frac{U}{\frac{RR_p}{R + R_p} + R} \cdot \frac{RR_p}{R + R_p} = \frac{UR_p}{2R_p + R}$$

Podstawiając wartości liczbowe i uwzględniając wymagania postawione projektantowi, otrzymamy warunek

$$U_p = \frac{24 \cdot 320}{2 \cdot 320 + R} > 7,$$

stąd

$$R < 457 \Omega.$$

Przyjmujemy wartość znormalizowaną $R = 430 \Omega$.

Wtedy

$$U_p = \frac{24 \cdot 320}{2 \cdot 320 + 430} = 7.18 \text{ V} > U_z,$$

a napięcie na drugim oporniku (klucz K w pozycji 1)

$$U_R = U - U_p = 24 - 7.18 = 16.82 \text{ V.}$$

Maksymalna moc P_R wydzielana na rezystorze R

$$P_R = \frac{U_R^2}{R} = \frac{16.82^2}{430} = 0.66 \text{ W.}$$

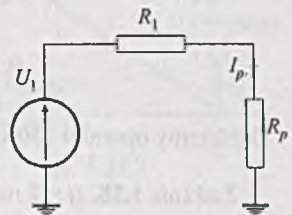
Dobieramy opornik $430 \Omega / 1 \text{ W}$.

Zadanie 1.25. Drugi przekąznik.

Zadanie 1.26. $R_1 = 584 \Omega$, $R_2 = 1166 \Omega$.

Zadanie 1.27. Po zamknięciu tylko klucza K_1 (rys. 1.27.1) prąd I_p płynący przez uzwojenie przekąznika (jego wartość) musi spełniać nierówność

$$I_p = \frac{U_1}{R_1 + R_p} > 30 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$



Rys. 1.27.1

Po podstawieniu danych

$$\frac{16}{R_1 + R_p} > 0.03 \text{ A.}$$

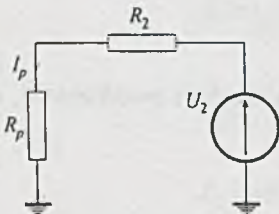
Prowadzi to do nierówności $R_1 < 303 \Omega$.

Po zamknięciu tylko klucza K_2 (rys. 1.27.2)

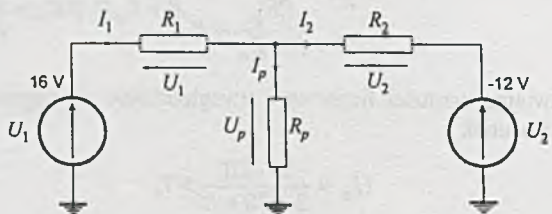
$$|I_p| = \frac{|U_2|}{R_1 + R_p} = \frac{12}{R_2 + 230} > 0.03 \text{ A,}$$

stąd

$$R_2 < 170 \Omega.$$



Rys. 1.27.2



Rys. 1.27.3

Jeśli obydwa klucze są zamknięte (rys. 1.27.3), wówczas $I_p = 0$, a więc $U_p = 0$ oraz $I_1 = I_2$, czyli

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{-U_2}{R_2},$$

zatem

$$\frac{16}{R_1} = \frac{12}{R_2},$$

więc

$$R_1 = \frac{4}{3} R_2.$$

Przyjmując $R_2 = 150 \Omega$, otrzymamy $R_1 = 200 \Omega$.

Moce tracone na opornikach

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{12^2}{150} = 0.96 \text{ W,}$$

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} = \frac{16^2}{200} = 1.28 \text{ W.}$$

Dobieramy oporniki $150 \Omega/2 \text{ W}$ oraz $200 \Omega/3 \text{ W}$.

Zadanie 1.28. $I_7 = 2 \text{ mA}$.

Zadanie 1.29. Opór zastępczy R_z układu, widziany z zacisków 1-2, jest równy

$$\begin{aligned} R_z &= R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_4 + \frac{(R_5 + R_6) R_7}{R_5 + R_6 + R_7} = \\ &= 14 + \frac{20 \cdot 10}{20 + 10} + 5 + \frac{(15 + 30) \cdot 12}{15 + 30 + 12} = 14 + 8.67 + 5 + 9.49 = 35.15 \, \Omega, \end{aligned}$$

więc prąd I płynący ze źródła określony jest zależnością

$$I = \frac{U}{R_z} = \frac{U}{35.15}.$$

Ponadto:

- napięcie U_2 na rezystorze R_z

$$U_2 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} I = \frac{U}{35.15} \cdot 6.67 = 0.19 \cdot U,$$

- napięcie U_4 na rezystorze R_4

$$U_4 = R_4 I = 5 \cdot \frac{U}{35.15} = 0.142 \cdot U,$$

- napięcie U_7 na rezystorze R_7

$$U_7 = \frac{(R_5 + R_6) R_7}{R_5 + R_6 + R_7} I = 9.48 \cdot \frac{U}{35.15} = 0.27 \cdot U,$$

- napięcie U_5 na rezystorze R_5

$$U_5 = \frac{R_5}{R_5 + R_6} U_7 = \frac{15}{15 + 30} \cdot 0.27 \cdot U = 0.09 \cdot U.$$

Z równania II prawa Kirchhoffa napięcie U_{AB} mierzone przez woltomierz jest równe sumie spadków napięć na rezystorach R_5 , R_4 i R_3

$$U_{AB} = U_5 + U_4 + U_3 = 0.09 U + 0.142 U + 0.19 U = 0.422 U$$

i jest równe 12.6 V, czyli

$$12.6 = 0.422 U,$$

a stąd napięcie zasilania

$$U = 29.9 \text{ V}.$$

Zadanie 1.30. $R_1 = 300 \, \Omega$, $R_2 = 50 \, \Omega$.

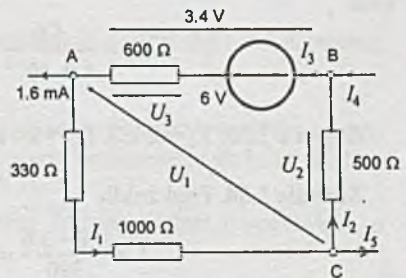
Zadanie 1.31. Układ można przedstawić jak na rys.

1.31.1; wówczas

$$U_3 = 6 - 3.4 = 2.6 \text{ V},$$

natomiast

$$I_3 = \frac{U_3}{680} = \frac{2.6}{680} = 3.82 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 3.82 \text{ mA}.$$



Rys. 1.31.1

Z równania I prawa Kirchhoffa dla węzła A

$$I_1 = 3.82 - 1.6 = 2.22 \text{ mA},$$

więc

$$U_1 = 1330 \cdot I_1 = 1330 \cdot 2.22 \cdot 10^{-3} = 2.96 \text{ V},$$

$$U_2 = 3.4 - 2.96 = 0.44 \text{ V},$$

natomiast

$$I_2 = \frac{U_2}{500} = \frac{0.44}{500} = 0.88 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 0.88 \text{ mA}.$$

Sprawdzenie poprawności obliczeń:

dla węzła B

$$I_4 = I_3 - I_2 = 3.82 - 0.88 = 2.94 \text{ mA},$$

dla węzła C

$$I_5 = I_1 - I_2 = 2.22 - 0.88 = 1.34 \text{ mA}.$$

Uogólnione I prawo Kirchhoffa dla prądów dopływających do układu podanego na rys. 1.31.1 w postaci

$$I_4 - I_5 - 1.6 = 2.94 - 1.34 - 1.6 = 0$$

jest spełnione przez obliczone wartości prądów.

Zadanie 1.32. Przy założeniu że przyrządy są idealne, opór R_2 jest określony przez wskazania przyrządów i wynosi

$$R_2 = \frac{1.1}{5 \cdot 10^{-3}} = 220 \Omega.$$

Z uogólnionego I prawa Kirchhoffa dla tranzystora

$$I_C = -I_B - I_E = -0.1 - (-5) = 4.9 \text{ mA},$$

więc

$$R_1 = \frac{5.9}{4.9 \cdot 10^{-3}} = 1204 \Omega.$$

Zadanie 1.33. $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 9.6 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 486 \Omega$.

Zadanie 1.34. Prąd źródła

$$I = \frac{4.8 - 3.6}{390} = 3.08 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 3.08 \text{ mA}.$$

Zauważmy, że dla prądu stałego kondensatory (idealne) w odpowiednich gałęziach układu można traktować jak przerwę, więc prąd emitera tranzystora

$$I_E = \frac{3.6 - 2.75}{680} = 1.25 \text{ mA},$$

natomiast prąd bazy

$$I_B = I_1 - I_2 = \frac{3.6 - 2.25}{10 \cdot 10^3} - \frac{2.55}{20 \cdot 10^3} = -23 \cdot 10^{-6} \text{ A} = -23 \mu\text{A},$$

a prąd kolektora

$$I_C = -I_B - I_E = 23 \cdot 10^{-6} - 1.25 \cdot 10^{-3} = -1.227 \cdot 10^{-3} \text{ A} = -1.227 \text{ mA}.$$

Idealną cewkę można dla prądu stałego traktować jak zwarcie.

Zadanie 1.35. Przy założeniu że przyrządy są idealne, układ można przedstawić jak na rys. 1.35.1.

Ponieważ $I_A = 0$, więc z I prawa Kirchhoffa $I_3 = 0$. Stąd

$$U_3 = 0$$

oraz

$$U_4 = R_4 J = 10 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 30 \text{ V}.$$

Zatem wskazanie woltomierza drugiego

$$U_{V_2} = E_3 - U_4 = 36 - 30 = 6 \text{ V}.$$

Dla pierwszego oczka (z lewej strony układu)

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} + \frac{12}{200 + 300} = 0.024 \text{ A},$$

stąd

$$U_2 = I_1 \cdot R_2 = 0.024 \cdot 300 = 7.2 \text{ V}.$$

Zatem woltomierz pierwszy wskazuje napięcie

$$U_{V_1} = U_4 - E_2 + U_3 + U_2 = 30 - 6 + 0 + 7.2 = 31.2 \text{ V}.$$

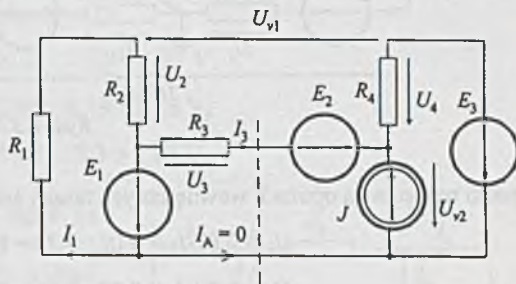
Zadanie 1.36. Wskazania amperomierzy wynoszą odpowiednio 0 oraz 0.54 A, natomiast wskazania woltomierzy są równe 0.11 V oraz 2.59 V.

Zadanie 1.37. W pierwszym rozsądnym przybliżeniu uwzględniamy opory wewnętrzne amperomierzy (porównywalne z oporami układu) i pomijamy opory woltomierzy (o kilka rzędów większe od oporów układu), uważając je za idealne (rys. 1.37.1).

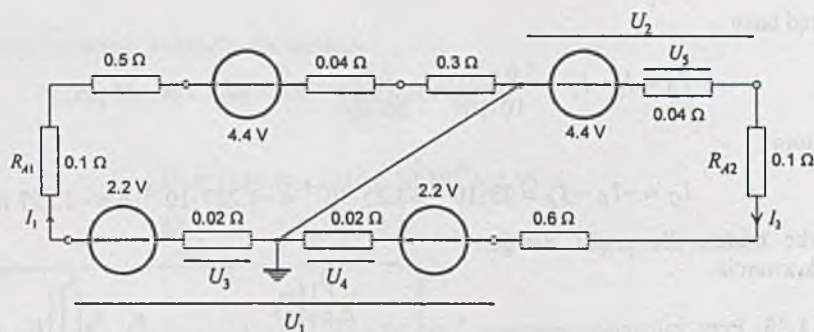
Prądy I_1 , I_2 nie zależą od siebie i wskazania amperomierzy liczymy wprost z uogólnionego prawa Ohma dla niezależnych oczek. Otrzymamy wówczas

$$I_1 = \frac{4.4 - 2.2}{0.04 + 0.3 + 0.02 + 0.1 + 0.5} = 2.29 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{4.4 + 2.2}{0.04 + 0.1 + 0.6 + 0.02} = 8.68 \text{ A}.$$



Rys. 1.35.1



Rys. 1.37.1

Spadki napięcia na oporach wewnętrznych trzech źródeł napięcia (ogniw) wynoszą

$$U_3 = 0.02 \cdot I_1 = 0.02 \cdot 4.78 = 0.096 \text{ V},$$

$$U_4 = 0.02 \cdot I_2 = 0.02 \cdot 8.68 = 0.174 \text{ V},$$

$$U_5 = 0.04 \cdot I_2 = 0.04 \cdot 8.68 = 0.348 \text{ V}.$$

Wskazania woltomierzy są równe odpowiednio wartościom napięć zaznaczonych na rys. 1.37.1 jako U_1 i U_2 . Tak więc

$$U_1 = 2.2 + 0.096 + 0.174 - 2.2 = 0.27 \text{ V},$$

$$U_2 = 4.4 - 0.348 = 4.052 \text{ V}.$$

Zadanie 1.38. Schemat obwodu równoważnego tematowemu podano na rys. 1.38.1. Dla przyjętego na rysunku zastrzałkowania prądów i napięć można ułożyć jedno równanie I prawa Kirchhoffa

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

oraz dwa (niezależne) równania II prawa Kirchhoffa

$$E - R_w I_3 + E - R_w I_3 + E - R_w I_1 - R_1 I_1 = 0,$$

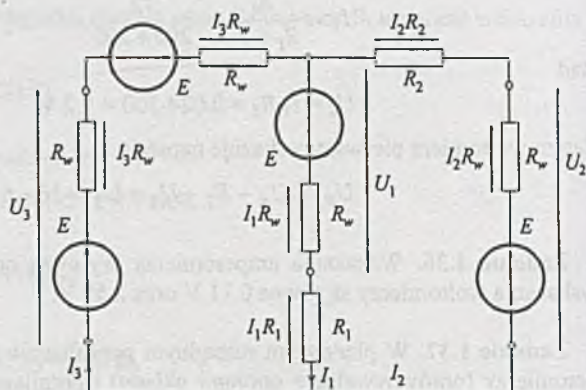
$$R_1 I_1 + R_w I_1 - E - R_2 I_2 - R_w I_2 - E = 0.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy układ równań

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0,$$

$$6.6 - 0.52 I_1 - 0.04 I_3 = 0,$$

$$0.52 I_1 - 0.42 I_2 - 4.4 = 0,$$



Rys. 1.38.1

(1)

(2)

(3)

po rozwiązaniu którego wyznaczmy wartości prądów gałęziowych

$$I_1 = 11.52 \text{ A}, I_2 = 3.78 \text{ A}$$

oraz

$$I_3 = 15.3 \text{ A}.$$

Napięcia na zaciskach ogniw są równe siłom elektromotorycznym pomniejszonym (lub powiększonym) o spadki napięć na oporach wewnętrznych, czyli

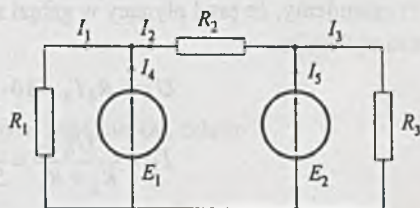
$$U_1 = E - R_w I_1 = 2.2 - 0.02 \cdot 11.52 = 1.97 \text{ V},$$

$$U_2 = E + R_w I_2 = 2.2 + 0.02 \cdot 3.78 = 2.28 \text{ V},$$

$$U_3 = E - R_w I_3 = 2.2 - 0.02 \cdot 15.3 = 1.89 \text{ V}.$$

Zadanie 1.39. Opory wewnętrzne baterii ogniw są pomijalne wobec oporów obciążenia; stąd obwód można w pierwszym przybliżeniu uprościć do postaci jak na rys. 1.39.1, gdzie $E_1 = 4.4 \text{ V}$, $E_2 = 6.6 \text{ V}$. Występowanie bezoporowych gałęzi (z SEM E_1 i E_2) znacznie upraszcza analizę obwodu.

Prądy w układzie są równe



Rys. 1.39.1

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{4.4}{25} = 0.176 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{E_2 - E_1}{R_2} = \frac{6.6 - 4.4}{18} = 0.122 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{E_2}{R_3} = \frac{6.6}{30} = 0.220 \text{ A},$$

$$I_4 = I_1 - I_2 = 0.176 - 0.122 = 0.054 \text{ A},$$

$$I_5 = I_2 + I_3 = 0.342 \text{ A}.$$

Moc wydawana przez obydwa źródła

$$P_w = E_1 \cdot I_4 + E_2 \cdot I_5 = 4.4 \cdot 0.054 + 6.6 \cdot 0.342 = 2.495 \text{ W}.$$

Moc pobierana przez opory

$$\begin{aligned} P_p &= I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 = \\ &= 0.176^2 \cdot 25 + 0.122^2 \cdot 18 + 0.22^2 \cdot 30 = 2.494 \text{ W}. \end{aligned}$$

Z dokładnością obliczeń $P_w \approx P_p$.

Do pełnej analizy, z uwzględnieniem oporów wewnętrznych ogniw baterii, można przystąpić po opanowaniu metod analizy obwodów złożonych.

Zadanie 1.40. $R = 8 \Omega$, $E = -4 \text{ V}$, $I = -0.6 \text{ A}$.

Zadanie 1.41. Obliczamy zastępczy opór widziany z zacisków SEM

$$R = R_1 + \frac{R_6 \left[R_5 + \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_4 + R_2 + R_3} \right]}{R_6 + R_5 + \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_4 + R_2 + R_3}} = 5 + \frac{10 \left[10 + \frac{10(5+10)}{10+5+10} \right]}{10+10 \frac{10(5+10)}{10+5+10}} = 11.15 \, \Omega$$

Moc wydawana przez SEM jest taka, jaka byłaby moc tracona na oporze zastępczym R , stąd prąd źródła I_1 jest równy

$$I_1 = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{24.5}{22.25}} = 1.482 \, \text{A}.$$

Prąd I_4 obliczymy tzw. metodą „współczynników rozplywu”, nazywaną też metodą „od końca”. Przyjmujemy, że prąd płynący w gałęzi z R_4 (który chcemy obliczyć) jest równy $I'_4 = 1 \, \text{A}$ i obliczamy kolejno

$$U'_4 = R_4 I'_4 = 10 \cdot 1 = 10 \, \text{V},$$

$$I'_2 = \frac{U'_4}{R_2 + R_3} = \frac{10}{5+10} = 0.667 \, \text{A},$$

$$I'_5 = I'_2 + I'_4 = 0.667 + 1 = 1.667 \, \text{A},$$

$$U'_5 = R_5 I'_5 = 10 \cdot 1.667 = 16.67 \, \text{V},$$

$$U'_6 = U'_5 + U'_4 = 16.67 + 10 = 26.67 \, \text{V},$$

$$I'_6 = \frac{U'_6}{R_6} = \frac{26.67}{10} = 2.667 \, \text{A},$$

$$I'_1 = I'_5 + I'_6 = 1.667 + 2.667 = 4.334 \, \text{A}.$$

Z zależności

$$I_1 = k I'_1$$

obliczamy współczynnik rozplywu

$$k = \frac{I_1}{I'_1} = \frac{1.482}{4.334} = 0.342.$$

Ponieważ obwód jest liniowy z jednym napięciowym źródłem zasilania, więc i rzeczywisty prąd w gałęzi czwartej jest k -krotnie mniejszy od założonego na początku obliczeń, zatem

$$I_4 = k \cdot I'_4 = 0.342 \cdot 1 = 0.342 \, \text{A}.$$

Zadanie 1.42. $E_1 = 2 \, \text{V}$, $E_2 = -3 \, \text{V}$.

Zadanie 1.43. Ponieważ $I_6 = 0$ ($U_5 = E_2$), można do obliczeń przyjąć, że występuje przerwa w gałęzi z oporem R_6 i wtedy prąd wydawany przez SEM E_1 wynosi

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{(R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}} = \frac{12}{2 + \frac{(2 + 2.4) \cdot (2.4 + 2)}{2 + 2.4 + 2.4 + 2}} = 2.86 \text{ mA},$$

natomiast napięcie na zaciskach gałęzi ze źródłem

$$U_1 = E_1 - R_1 \cdot I_1 = 12 - 6 \cdot 2.86 = 6.28 \text{ V}$$

oraz prąd I_5 płynący przez rezystor R_5 jest równy

$$I_5 = \frac{U_1}{R_4 + R_5} = \frac{6.28}{2.4 + 2} = 1.43 \text{ mA},$$

a napięcie U_5 na nim

$$U_5 = R_5 \cdot I_5 = 2 \cdot 1.43 = 2.86 \text{ V}.$$

Z warunków zadania ($I_6 = 0$) wynika, że SEM E_2 jest równa napięciu U_5 , zatem

$$E_2 = U_5 = 2.86 \text{ V}.$$

Zadanie 1.44. Moc P mierzona przez idealny watomierz jest równa iloczynowi napięcia na jego cewce napięciowej i prądu jego cewki prądowej, czyli

$$P = E_1 I_4,$$

stąd nieznan prąd I_4 jest równy

$$I_4 = \frac{P}{E_1} = \frac{0.8}{2} = 0.4 \text{ A}.$$

Z równania II prawa Kirchhoffa dla prawego oczka obwodu (przy założeniu że watomierz jest idealny, tzn. opór cewki napięciowej jest nieskończenie wielki - co odpowiada przerwie, oraz opór cewki prądowej jest równy zeru - co odpowiada zwarcu) napięcie U_R na nieznanym rezystorze R jest równe

$$U_R = E_1 + E_2 = 2 + 6 = 8 \text{ V},$$

więc

$$R = \frac{U_R}{I_4} = \frac{8}{0.4} = 20 \Omega.$$

Korzystając z równania II prawa Kirchhoffa dla lewego oczka obwodu

$$E_1 + I_1 R_1 - \frac{I_2}{G} = 0$$

oraz równania I prawa Kirchhoffa dla górnego lewego węzła

$$I_1 + I_2 - J = 0$$

obliczymy pozostałe prądy; i tak:

$$I_1 = \frac{\frac{J}{G} - E_1}{R_1 + \frac{1}{G}} = \frac{\frac{3}{1} - 2}{3 + 1} = 0.25 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{E_1 + R_1 J}{R_1 + \frac{1}{G}} = \frac{2 + 3 \cdot 3}{3 + 1} = 2.75 \text{ A}$$

oraz

$$I_3 = I_4 - I_1 = 0.4 - 0.25 = 0.15 \text{ A}.$$

Moce wydawane:

a) przez źródło prądowe

$$P_J = U_J I_1 = \frac{I_2}{G} I_1 = \frac{2.75}{1} \cdot 0.25 = 0.688 \text{ W};$$

b) przez siły elektromotoryczne

$$P_{E1} = E_1 I_3 = 2 \cdot 0.15 = 0.3 \text{ W},$$

$$P_{E2} = E_2 I_4 = 6 \cdot 0.4 = 2.4 \text{ W},$$

moc wydawana przez źródła

$$P_W = P_J + P_{E1} + P_{E2} = 0.688 + 0.3 + 2.4 = 3.388 \text{ W}.$$

Moc pobierana przez oporniki

$$P_p = I_1^2 \cdot R_1 + I_4^2 \cdot R = 0.25^2 \cdot 3 + 0.4^2 \cdot 20 = 3.388 \text{ W}.$$

Zadanie 1.45. 6 V oraz 0.7 W.

Zadanie 1.46. Do obliczenia mocy pobieranej przez trójkąt należy wyznaczyć wartości napięć U_1 , U_3 oraz prądów I_1 , I_3 (rys. 1.46.1).

Napięcie U_3 jest równe

$$U_3 = -0.5 \cdot 3 = -1.5 \text{ V},$$

natomiast

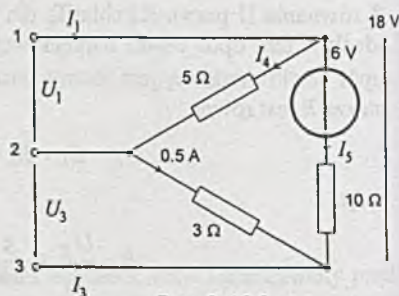
$$U_1 = U_3 + 18 = -1.5 + 18 = 16.5 \text{ V}$$

oraz prąd I_4 jest równy

$$I_4 = \frac{U_1}{5} = \frac{16.5}{5} = 3.3 \text{ A},$$

natomiast

$$I_5 = \frac{18 - 6}{10} = 1.2 \text{ A}.$$



Rys. 1.46.1

Poszukiwane prądy I_1 i I_3 wyznaczmy z odpowiednich równań I prawa Kirchhoffa

$$I_1 = I_4 + I_5 = 3.3 + 1.2 = 4.5 \text{ A},$$

$$I_3 = -0.5 - I_5 = -0.5 - 1.2 = -1.7 \text{ A}.$$

Moc pobierana przez trójkąt jest równa mocy wydawanej przez dwa zastępcze źródła napięciowe U_1 i U_3 wydające prądy I_1 i I_3 , więc

$$P = U_1 I_1 + U_3 I_3 = 16.5 \cdot 4.5 - 1.5 \cdot (-1.7) = 76.8 \text{ W}.$$

Zadanie 1.47. 750 W.

Zadanie 1.48. $U = 177.8 \text{ V}$.

Zadanie 1.49. Opornik R_1 (pobiera moc 1.44 W).

Zadanie 1.50. W dalszych obliczeniach wygodniej będzie zamiast mocy znamionowych używać pojęcia napięć nominalnych.

Przyjmując oznaczenia jak na rys. 1.50.1, obliczamy napięcia nominalne dla poszczególnych oporników; wówczas

$$U_{1N} = \sqrt{P_{1N} R_{1N}} = \sqrt{0.125 \cdot 2200} = 16.6 \text{ V},$$

$$U_{2N} = \sqrt{P_{2N} R_{2N}} = \sqrt{0.5 \cdot 10000} = 70.7 \text{ V},$$

$$U_{3N} = \sqrt{P_{3N} R_{3N}} = \sqrt{0.125 \cdot 47000} = 76.6 \text{ V}.$$

Określimy napięcia na opornikach jako (nie znane jeszcze) liniowe funkcje napięcia U_v . Zastępując rezystory R_2 i R_3 przez zastępczą rezystancję R_4 , otrzymamy

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10.47}{57} = 8.25 \text{ k}\Omega$$

Z prawa Ohma i I prawa Kirchhoffa

$$\frac{U_v}{R_1 + R_4} = \frac{U_2}{R_4},$$

więc

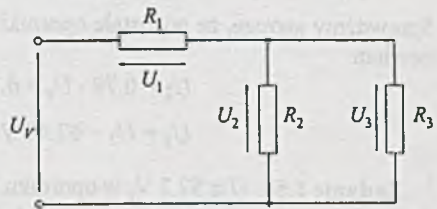
$$U_2 = \frac{R_4}{R_1 + R_4} U_v = \frac{8.25}{2.2 + 8.25} U_v = 0.79 U_v.$$

Oczywiście

$$U_3 = U_2 = 0.79 U_v,$$

natomiast

$$U_1 = U_v - U_2 = 0.21 U_v.$$



Rys. 1.50.1

Określimy teraz, na którym z oporników, przy wzroście napięcia zasilania U_v , napięcie osiągnie jako pierwsze nominalną wartość (ze względu na moc nominalną). W celu uczynienia analizy bardziej czytelnej wprowadźmy współczynniki

$$k_i = \frac{U_i}{U_{iN}}$$

określające stopień niedociążenia (lub przeciążenia) rezystorów. Jeżeli i -ty opornik jest niedociążony, to $k_i < 1$, jeśli obciążony mocą nominalną, to $k_i = 1$ i wreszcie, gdy obciążenie jest większe od znamionowego, to $k_i > 1$. Współczynniki te można więc uważać za pewną miarę obciążenia poszczególnych elementów. Dla analizowanego obwodu współczynniki te określone są zależnościami

$$k_1 = \frac{U_1}{U_{1N}} = \frac{0.21 \cdot U_v}{16.6} = 0.01265 \cdot U_v,$$

$$k_2 = \frac{U_2}{U_{2N}} = \frac{0.79 \cdot U_v}{70.7} = 0.0112 \cdot U_v,$$

$$k_3 = \frac{U_3}{U_{3N}} = \frac{0.79 \cdot U_v}{76.6} = 0.0103 \cdot U_v.$$

Największą wartość ma współczynnik k_1 , co oznacza, że opornik R_1 pierwszy osiągnie (przy wzroście U_v) moc nominalną. Wartość napięcia U_v , przy której to nastąpi, wyliczymy przyrównując k_1 do jedności; wówczas

$$1 = 0.01265 \cdot U_v,$$

a stąd

$$U_v = 79.05 \text{ V}.$$

Sprawdźmy jeszcze, że pozostałe oporniki są wówczas poniżej swego obciążenia znamionowego, bowiem

$$U_2 = 0.79 \cdot U_v = 0.79 \cdot 79.05 = 62.45 \text{ V} < 70.7 \text{ V},$$

$$U_3 = U_2 = 62.45 \text{ V} < 76.6 \text{ V}.$$

Zadanie 1.51. $U \cong 57.2 \text{ V}$, w oporniku R_4 .

Zadanie 1.52. $U = 81 \text{ V}$.

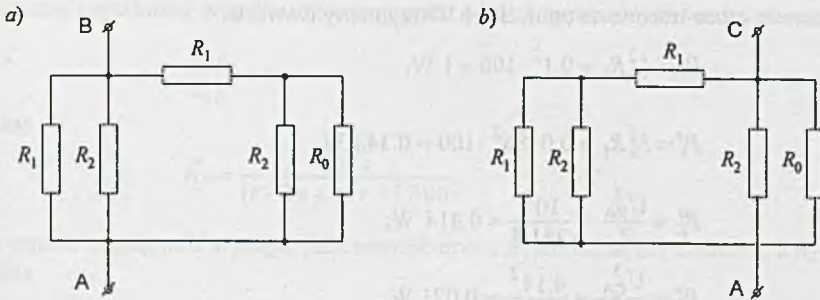
Zadanie 1.53. Z bardziej przejrzystych schematów (rys. 1.53.1) i z warunków zadania wynika wprost, że $R_1 = R_0 = 100 \Omega$.

Przy obliczaniu wartości drugiego opornika wygodniej będzie się posłużyć przewodnościami. Przewodność zastępcza widziana z zacisków AB (rys. 1.53.1a) jest określona równaniem

$$\frac{1}{100} + G_2 + \frac{\left(G_2 + \frac{1}{100}\right) \cdot \frac{1}{100}}{G_2 + \frac{2}{100}} = \frac{1}{50},$$

stąd

$$10000G_2^2 + 200G_2 - 1 = 0.$$



Rys. 1.53.1

Rozwiązując równanie kwadratowe, otrzymujemy jeden pierwiastek dodatni (pierwiastek ujemny odrzucamy)

$$G_2 = 414.2 \cdot 10^{-5} \text{ S},$$

a stąd

$$R_2 = 241.4 \Omega.$$

Opór wejściowy układu R_{we} widziany z zacisków źródła wynosi

$$R_{we} = R_1 + \frac{R_2 \left(R_1 + \frac{R_2 R_0}{R_2 + R_0} \right)}{R_2 + R_1 + \frac{R_2 R_0}{R_2 + R_0}} = 100 + \frac{241.4 \left(100 + \frac{241.4 \cdot 100}{241.4 + 100} \right)}{241.4 + 100 + \frac{241.4 \cdot 100}{241.4 + 100}} \approx 200 \Omega.$$

Napięcia na zaciskach wyjściowych wyznaczmy, korzystając ze schematu i oznaczeń przedstawionych na rys. 1.53.2; wówczas:

$$I_1 = \frac{U_{we}}{R_{we}} = \frac{20}{200} = 0.1 \text{ A},$$

więc

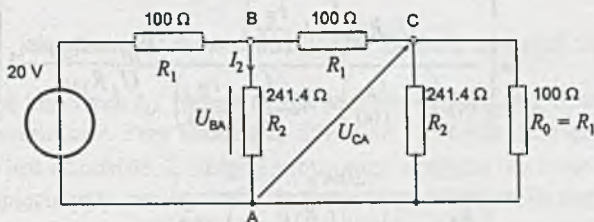
$$U_{BA} = 20 - 0.1 \cdot 100 = 10 \text{ V}$$

oraz

$$I_2 = \frac{10}{241.4} = 0.0414 = 0.0586 \text{ A},$$

więc

$$U_{CA} = U_{BA} - I_2 \cdot 100 = 10 - 0.0586 \cdot 100 = 4.14 \text{ V}.$$



Rys. 1.53.2

Obliczymy jeszcze moce tracone na opornikach. Otrzymamy wówczas

$$P_1' = I_1^2 R_1 = 0.1^2 \cdot 100 = 1 \text{ W},$$

$$P_1'' = I_3^2 R_1 = 0.0586^2 \cdot 100 = 0.343 \text{ W},$$

$$P_2' = \frac{U_{BA}^2}{R_2} = \frac{10^2}{241.4} = 0.414 \text{ W},$$

$$P_2'' = \frac{U_{CA}^2}{R_2} = \frac{4.14^2}{241.4} = 0.071 \text{ W},$$

$$P_0 = \frac{U_{CA}^2}{R_0} = \frac{4.14^2}{100} = 0.171 \text{ W}.$$

Zakładając, że oporniki winny być obciążone około 50% mocy znamionowej, należy je dobrać jako 100 Ω /2 W; 100 Ω /1 W; 241 Ω /1 W, 241 Ω /0.125 W oraz 100 Ω /0.5 W.

Zadanie 1.54. $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_{we} = 100 \Omega$, $R_{AB} = 25 \Omega$, $R_{AC} = 31.2 \Omega$.

Zadanie 1.55. Dla nominalnych wartości oporów nominalna wartość napięcia U_N na oporniku R_2

$$U_N = \frac{U_z R_{2N}}{R_{1N} + R_{2N}},$$

gdzie $U_z = E$ jest napięciem na zaciskach zasilacza.

Obliczmy górną wartość napięcia U przy przypadkowym doborze oporników. Łatwo zauważyć, że ma to miejsce wtedy, gdy wartość oporu R_1 ma odchyłkę ujemną, a R_2 dodatnią; wówczas

$$U_g = \frac{U_z R_{2N} \left(1 + \frac{t_R}{100}\right)}{R_{1N} \left(1 - \frac{t_R}{100}\right) + R_{2N} \left(1 + \frac{t_R}{100}\right)}.$$

Stąd górna odchyłka napięcia U wyrażona procentowo wynosi

$$\begin{aligned} i_U^* &= \frac{U_g - U_N}{U_N} \cdot 100 = \left[\frac{U_g}{U_N} - 1 \right] \cdot 100 = \\ &= \left[\frac{U_z R_{2N} \left(1 + \frac{t_R}{100}\right)}{R_{1N} \left(1 - \frac{t_R}{100}\right) + R_{2N} \left(1 + \frac{t_R}{100}\right)} \cdot \frac{R_{1N} + R_{2N}}{U_z R_{2N}} - 1 \right] \cdot 100 = \\ &= \frac{200 t_R}{\left(\frac{R_{2N}}{R_{1N}} - 1\right) t_R + \left(\frac{R_{2N}}{R_{1N}} + 1\right)} \cdot 100 \end{aligned}$$

Dla większej czytelności wzorów oznaczmy przez r iloraz nominalnych wartości rezystorów

$$\frac{R_{2N}}{R_{1N}} = r;$$

wówczas

$$t_U^* = \frac{200t_R}{(r-1)t_R + (r+1)100}.$$

Dolna wartość napięcia U wystąpi, jeśli wartość oporu R_1 ma odchyłkę dodatnią, a R_2 ujemną; wówczas

$$U_d = \frac{U_z R_{2N} \left(1 - \frac{t_R}{100}\right)}{R_{1N} \left(1 + \frac{t_R}{100}\right) + R_{2N} \left(1 - \frac{t_R}{100}\right)}.$$

Zatem odchyłka dolna napięcia U wyniesie (w procentach)

$$\begin{aligned} t_U^{**} &= \frac{U_d - U_N}{U_N} \cdot 100 = \left[\frac{U_d}{U_N} - 1 \right] \cdot 100 = \\ &= \left[\frac{U_z R_{2N} \left(1 - \frac{t_R}{100}\right)}{R_{1N} \left(1 + \frac{t_R}{100}\right) + R_{2N} \left(1 - \frac{t_R}{100}\right)} \cdot \frac{R_{1N} + R_{2N}}{U_z R_{2N}} - 1 \right] \cdot 100 = \\ &= \frac{-200t_R}{(1-r)t_R + (r+1)100}. \end{aligned}$$

Wartość bezwzględna t_U^* jest większa od t_U^{**} , gdy $r < 1$. Natomiast dla $r > 1$ jest odwrotnie. Zatem jako graniczną odchyłkę napięcia U przyjmujemy

$$t_U = \begin{cases} \frac{200t_R}{(r-1)t_R + (r+1)100} & \text{gdy } 0 < r < 1, \\ t_R & \text{gdy } r = 1, \\ \frac{-200t_R}{(r-1)t_R + (r+1)100} & \text{gdy } r > 1. \end{cases}$$

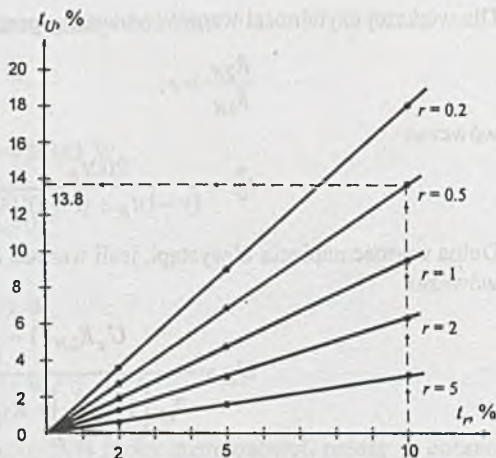
Traktując $r = \frac{R_{2N}}{R_{1N}}$ jako parametr można w zadanym zakresie tolerancji oporów $t_R = 0 - 10\%$

określić całą rodzinę krzywych t_U . Na rys. 1.55.1 przedstawiono pięć krzywych z tej rodziny dla pięciu wybranych wartości r . Przy ustalonym dowolnie r odchyłka napięcia rośnie wraz z odchyłką oporów, co jest oczywiste. Z drugiej strony przy ustalonej odchyłce oporów t_R następuje wzrost odchyłki napięcia przy zmniejszaniu się wartości parametru. Dla dużych wartości r , czyli $R_2 \gg R_1$, odchyłki napięcia są małe. Przy $r = 1$, czyli gdy $R_1 = R_2$, odchyłki procentowe napięcia są takie same jak odchyłki oporów.

Największe odchyłki t_U wystąpią przy $r \rightarrow 0$, czyli gdy $R_2 \ll R_1$. Dla tematowych danych, tzn. $R_{1N} = 2 \text{ k}\Omega$ i $R_{2N} = 1 \text{ k}\Omega$, parametr r jest równy

$$r = \frac{R_{2N}}{R_{1N}} = \frac{1}{2} = 0.5,$$

a więc przy 10% tolerancji oporów można z wykresu z rys. 1.55.1 odczytać tolerancję napięcia U . Jest ona równa 13.8%.



Rys. 1.55.1

Zadanie 1.56. Wartość znamionową napięcia U liczymy z prawa Ohma przyjmując znamionowe wartości rezystorów; otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned} U_N &= \frac{E}{R_{1N} + \frac{R_{2N}(R_{3N} + R_{4N})}{R_{2N} + R_{3N} + R_{4N}}} \cdot \frac{R_{2N}(R_{3N} + R_{4N})}{R_{2N} + R_{3N} + R_{4N}} \cdot \frac{1}{R_{3N} + R_{4N}} \cdot R_{4N} = \\ &= E \frac{R_{2N} R_{4N}}{R_{1N}(R_{2N} + R_{3N} + R_{4N}) + R_{2N}(R_{3N} + R_{4N})} = \\ &= E \frac{1 \cdot 1}{2(1 + 2 + 1) + 1(2 + 1)} = 0.0909 E. \end{aligned}$$

W celu określenia granicznego przypadku wykorzystamy wnioski z zadania poprzedniego (1.55). Zauważmy, że obwód z rys. 1.56 może być uznany za rozwinięcie układu z rys. 1.55, w którym dzielnik napięcia $R_1 R_2$ obciążono drugim dzielnikiem $R_3 R_4$.

Ponieważ $\frac{R_{2N}}{R_{1N}} = \frac{R_{4N}}{R_{3N}} = \frac{1}{2} < 1$, więc większa (co do wartości bezwzględnej) będzie odchyłka napięcia U w górę. Wystąpi to dla następujących wartości oporów

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{1N} \cdot 0.9 = 2 \cdot 0.9 = 1.8 \text{ k}\Omega, \\ R_2 &= R_{2N} \cdot 1.1 = 1 \cdot 1.1 = 1.1 \text{ k}\Omega, \\ R_3 &= R_{3N} \cdot 0.9 = 2 \cdot 0.9 = 1.8 \text{ k}\Omega, \\ R_4 &= R_{4N} \cdot 1.1 = 1 \cdot 1.1 = 1.1 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

Zatem górna wartość napięcia U określona jest zależnością

$$\begin{aligned} U_g &= E \frac{R_2 \cdot R_4}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)} = \\ &= E \frac{1.1 \cdot 1.1}{1.8 \cdot (1.1 + 1.8 + 1.1) + (1.8 + 1.1) \cdot 1.1} = 0.1165 E, \end{aligned}$$

a odchyłka napięcia wyrażona procentowo

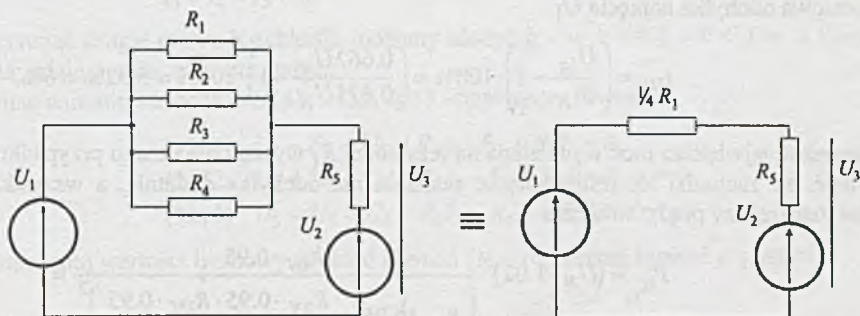
$$t_U = \left(\frac{U_g}{U_N} - 1 \right) 100\% = \left(\frac{0.1165}{0.0909} - 1 \right) 100\% = 28.2\%.$$

Zwróćmy uwagę, że przy niewielkiej rozbudowie układu z poprzedniego zadania tolerancja napięcia U jest prawie trzykrotnie większa od tolerancji oporów. Można jeszcze policzyć odchyłkę napięcia w dół od wartości znamionowej U_N (jej wartość bezwzględna powinna być mniejsza od 28.2% (sprawdzić)).

Zadanie 1.57. Łatwo zauważyć, że należy rozważyć przypadek, gdy napięcie U_1 jest podawane na wszystkie wejścia sumatora (rys. 1.57.1).

Wartość nominalna napięcia U_3

$$U_{3N} = U_2 + \frac{U_1 - U_2}{\frac{1}{4} R_{1N} + R_{5N}} R_{5N} = -12 + \frac{12 + 12}{5 + 10} \cdot 10 = 4 \text{ V}.$$



Rys. 1.57.1

Uwzględniając wnioski wynikające z zadania 1.55 zauważymy, że największa odchyłka napięcia U_3 od wartości nominalnej wystąpi, jeśli opory R_1, R_2, R_3, R_4 będą miały odchyłki dodatnie, a R_5 ujemną.

Wówczas

$$\begin{aligned} U_{3d} &= U_2 + \frac{U_1 - U_2}{\frac{1}{4} R_{1g} + R_{5d}} R_{5d} = \\ &= -12 + \frac{12 + 12}{\frac{1}{4} \cdot 20 \cdot 1.02 + 10 \cdot 0.98} \cdot 10 \cdot 0.98 = 3.79 \text{ V}. \end{aligned}$$

Stąd ujemna odchyłka napięcia U_3 wynosi

$$t_{U3} = \frac{U_{3d} - U_{3N}}{U_{3N}} \cdot 100\% = \frac{3.79 - 4}{4} \cdot 100\% = -5.25\%.$$

Zadanie 1.58. Policzmy najpierw wartość nominalną napięcia na oporniku R_1 oraz nominalną moc wydzielaną na tym oporniku

$$U_{1N} = U_N \frac{R_{1N}}{R_{1N} + \frac{R_{2N} R_{3N}}{R_{2N} + R_{3N}}} = U_N \frac{2}{2 + \frac{2 \cdot 3}{5}} = 0.625 U_N,$$

$$P_{1N} = \frac{U_{1N}^2}{R_{1N}} = \frac{(0.625 U_N)^2}{2} = 0.1953 U_N^2,$$

gdzie napięcie jest wyrażone w woltach, moc w miliwatach.

Największa wartość napięcia U_1 wystąpi, jeśli napięcie zasilania i opór R_1 mają odchyłkę dodatnią, a opory R_2 i R_3 odchyłkę ujemną (od swych wartości nominalnych), czyli

$$U_{1g} = U_N \cdot 1.02 \frac{R_{1N} \cdot 1.05}{R_{1N} \cdot 1.05 + \frac{R_{2N} \cdot 0.95 \cdot R_{3N} \cdot 0.95}{(R_{2N} + R_{3N}) \cdot 0.95}} = 0.662 U_N,$$

a procentowa odchyłka napięcia U_1

$$t_{U1} = \left(\frac{U_{1g}}{U_{1N}} - 1 \right) \cdot 100\% = \left(\frac{0.662 U_N}{0.625 U_N} - 1 \right) \cdot 100\% = 5.92\% \approx 6\%.$$

Natomiast największa moc wydzielana na rezystorze R_1 wystąpi dla innego przypadku. Można sprawdzić, że zachodzi to, jeśli napięcie zasilania ma odchyłkę dodatnią, a wszystkie opory ujemną (największy prąd); wówczas

$$\begin{aligned} P_{1g} &= (U_N \cdot 1.02)^2 \frac{R_{1N} \cdot 0.95}{\left[R_{1N} \cdot 0.95 + \frac{R_{2N} \cdot 0.95 \cdot R_{3N} \cdot 0.95}{R_{2N} \cdot 0.95 + R_{3N} \cdot 0.95} \right]^2} = \\ &= (U_N \cdot 1.02)^2 \frac{2 \cdot 0.95}{\left[2 \cdot 0.95 + \frac{2 \cdot 0.95 \cdot 3 \cdot 0.95}{2 \cdot 0.95 + 3 \cdot 0.95} \right]^2} = 0.2145 U_N^2. \end{aligned}$$

Wyrażając to w procentach mamy

$$t_{P1} = \frac{P_{1g} - P_{1N}}{P_{1N}} \cdot 100\% = \frac{0.2145 U_N^2 - 0.1955 U_N^2}{0.1955 U_N^2} \cdot 100\% = 9.7\%.$$

Zadanie 1.59. 1% lub 2%.

Zadanie 1.60. Należy użyć oporników o tolerancji 2%.

Rozdział 2

OBWODY ZŁOŻONE LINIOWE

Zadanie 2.1. Oznaczmy węzły obwodu kolejnymi cyframi 1, 2, 3 i 4, przez w liczbę węzłów, $w = 4$. Według pierwszego prawa Kirchhoffa napiszemy $w - 1 = 4 - 1 = 3$ równania. Dla węzłów 1, 2 i 3 równania te mają postać

$$I_1 - I_4 + I_6 = 0, \quad (1)$$

$$I_2 - I_3 - I_6 = 0, \quad (2)$$

$$I_3 + I_4 - I_5 = 0. \quad (3)$$

Wykorzystując drugie prawo Kirchhoffa możemy ułożyć $g - w + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ niezależne równania; gdzie g oznacza liczbę gałęzi.

Wybierając najmniejsze oczka - 3143, 2432, 3213 - napiszemy równania

$$(3143) \quad U_4 - E_1 + U_5 = R_4 I_4 - E_1 + R_5 I_5 = 0, \quad (4)$$

$$(2432) \quad U_2 + U_5 + U_3 = R_2 I_2 - E_2 + R_5 I_5 + R_3 I_3 = 0, \quad (5)$$

$$(3213) \quad U_3 - U_6 - U_4 = R_3 I_3 - R_6 I_6 - R_4 I_4 = 0. \quad (6)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych układ równań (1) ÷ (6) można zapisać w postaci

$$I_1 \qquad \qquad \qquad -I_4 \qquad \qquad \qquad +I_6 = 0 \quad (A1)$$

$$\qquad I_2 \quad -I_3 \qquad \qquad \qquad -I_6 = 0 \quad (B1)$$

$$\qquad \qquad I_3 \quad +I_4 \quad -I_5 = 0 \quad (C1)$$

$$\qquad \qquad \qquad 20I_4 \quad +5I_5 = 10 \quad (D1)$$

$$10I_2 \quad +20I_3 \qquad \qquad \qquad +5I_5 = 20 \quad (E1)$$

$$\qquad \qquad 20I_3 \quad +20I_4 \qquad \qquad \qquad -10I_6 = 0 \quad (F1)$$

Rozwiązanie znajdziemy **metodą eliminacji Gaussa** [15]. Kolejne etapy obliczeń są przedstawione w tablicy 2.1.1. W pierwszych sześciu wierszach zapisane są równania wyjściowe. W kolumnach odpowiadających niewiadomym prądom podano tylko współczynniki liczbowe przy tych prądach. Ostatnia kolumna oznaczona symbolem Σ będzie służyć do sprawdzenia poprawności obliczeń. Pierwsze elementy tej kolumny otrzymujemy przez zsumowanie elementów wierszy łącznie z wyrazami wolnymi.

Dalsze przekształcenia będą miały na celu otrzymanie układu równań (A1'), (B2'), (C3'), (D4'), (E5'), (F6') o macierzy trójkątnej, gdzie w każdym wierszu pierwszy niezerowy współczynnik wynosi 1. Ponieważ w równaniu (A1) przy niewiadomej I_1 jest współczynnik 1, mamy już pierwszy wiersz szukanego układu, który dla przejrzystości tablicy przepiszemy jeszcze raz jako (A1').

Tablica 2.1.1

Numer równania	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	Wyrazy wolne	Σ
A1	1			-1		1	0	1
B1		1	-1			-1	0	-1
C1			1	1	-1		0	1
D1				20	5		10	35
E1		10	20		5		20	55
F1			20	-20		-10	0	-10
A1'	1			-1		1	0	1
B2		1	-1			-1	0	-1
C2			1	1	-1		0	1
D2				20	5		10	35
E2		10	20		5		20	55
F2			20	-20		-10	0	-10
B2'		1	-1			-1	0	-1
C3			1	1	-1		0	1
D3				20	5		10	35
E3			30		5	10	20	65
F3			20	-20		-10	0	-10
C3'			1	1	-1		0	1
D4				20	5		10	35
E4				-30	35	10	20	35
F4				-40	20	-10	0	-30
D4'				1	0.25		0.5	1.75
E5					42.5	10	35	87.5
F5					30	-10	20	40
E5'					1	0.235	0.824	2.06
F6						-17.05	-4.705	-21.755
F6'						1	0.276	1.276
E5''					1		0.759	1.759
D4''				1			0.310	1.310
C3''			1				0.448	1.448
B2''		1					0.724	1.724
A1''	1						0.034	1.034

Gdyby w pierwszej kolumnie były niezerowe współczynniki poza pierwszym wierszem, zredukowalibyśmy je wykorzystując równanie (A1'), aby uzyskać układ już tylko pięciu równań z pięcioma niewiadomymi (bez I_1). W naszym przykładzie nie jest to konieczne. Wystarczy opuścić równanie (A1) i przepisać równania (B1), (C1), (D1), (E1), (F1) jako (B2), (C2), (D2), (E2), (F2) otrzymamy układ pięciu równań z pięcioma niewiadomymi.

Drugie równanie (B2') szukanego układu o macierzy trójkątnej otrzymujemy natychmiast przepisując równanie (B2).

Równanie (B2') wykorzystamy teraz do rugowania z układu (C2), (D2), (E2), (F2) niewiadomej I_2 . Ponieważ równania (C2), (D2), (F2) nie zawierają niewiadomej I_2 , przepisujemy je bez zmiany jako równania (C3), (D3), (F3). Natomiast do równania (E2) dodajemy równania (B2') pomnożone przez współczynnik -10 i otrzymujemy równanie (E3); przy czym na kolumnie Σ wykonujemy te same działania co na pozostałych. Sprawdzamy na bieżąco poprawność obliczeń. Suma współczynników równania (E3) otrzymanego po eliminacji I_2 daje $30 + 5 + 10 + 20 = 65$, czyli tyle, ile wynosi wartość elementu ostatniej kolumny. W ten sposób rugując równaniem (B2') niewiadomą I_2 otrzymaliśmy układ czterech równań (C3), (D3), (E3), (F3) z czterema niewiadomymi I_3, I_4, I_5, I_6 .

Ponieważ w równaniu (C3) przy kolejnej niewiadomej I_3 , jest współczynnik 1, więc możemy je traktować jedynie jako równanie (C3') układu o macierzy trójkątnej. Za pomocą równania (C3') będziemy w kolejnym etapie eliminować niewiadomą I_3 .

Ponieważ równanie (D3) nie zawiera niewiadomej I_3 , przepisujemy je bez zmiany jako (D4). Dodając do (E3) równanie (C3') pomnożone przez -30 otrzymujemy (E4), a dodając do (F3) równanie (C3') pomnożone przez -20 otrzymujemy (F4). Kontrolujemy na bieżąco, czy sumy współczynników w odpowiednich wierszach dają liczbę z ostatniej kolumny. Dzielimy równanie (D4) przez 20 (by współczynnik przy I_4 był równy 1) otrzymujemy (D4').

Kontynuując ten sposób postępowania dojdziemy do równania (F6'), kończąc tzw. **postępowanie proste**, polegające na obliczeniu elementów macierzy trójkątnej. Dalszy ciąg obliczeń, tzw. **postępowanie odwrotne**, pozwoli na kolejne wyznaczenie poszukiwanych wartości prądów.

Z równania (F6') mamy wprost $I_6 = 0.276$ A. Wstawiając ten wynik do równania (E5') otrzymujemy wartość prądu I_5

$$I_5 = 0.824 - 0.235 \cdot I_6 = 0.824 - 0.235 \cdot 0.276 = 0.759 \text{ A}$$

oraz równanie (E5'').

W celu kontroli obliczeń wykonujemy analogiczne działanie traktując jako wyraz wolny wartość ostatniej kolumny równania (E5'), a jako odpowiednik prądu I_6 współczynnik P_6 , którym jest wartość elementu ostatniej kolumny w równaniu (F6')

$$P_5 = 2.06 - 0.235 \cdot P_6 = 2.06 - 0.235 \cdot 1.276 = 1.759.$$

Suma współczynników równania (E5''): $1 + 0.759 = 1.759$ jest równa liczbie P_5 z ostatniej kolumny wyliczonej uprzednio, co dowodzi poprawności obliczeń w tym kroku.

Kontynuując postępowanie otrzymamy na podstawie (D4') równanie (D4''), z którego $I_4 = 0.310$ A, itd.

Szukany rozptyw prądów przyjmie więc następujące wartości

$$I_1 = 0.034 \text{ A,}$$

$$I_2 = 0.724 \text{ A,}$$

$$I_3 = 0.448 \text{ A,}$$

$$I_4 = 0.310 \text{ A,}$$

$$I_5 = 0.759 \text{ A,}$$

$$I_6 = 0.276 \text{ A.}$$

Zaletą wyżej opisanej metody jest systematyczność w postępowaniu i kontrolowanie na bieżąco poprawności obliczeń.

Opisane powyżej postępowanie można, wykorzystując zapis macierzowy układu równań, przedstawić w postaci równania wyjściowego (A) i końcowego (Z)

	1	2	3	4	5	6
A1	1			-1		1
B1		1	-1			-1
C1			1	1	-1	
D1				20	5	
E1		10	20		5	
F1			20	-20		-10

I_1	0
I_2	0
I_3	0
I_4	10
I_5	20
I_6	0

·
=
(A)

	1	2	3	4	5	6
F6'						1
E6''					1	
D3''				1		
C3''			1			
B2''		1				
A1''	1					

I_1	0.276
I_2	0.759
I_3	0.310
I_4	0.448
I_5	0.724
I_6	0.034

·
=
(Z)

Metoda Gaussa, w zmodyfikowanej nieco postaci, została wykorzystana w programach ALI-NIES [3] i ALIOS1 [1] analizy obwodów przy użyciu maszyny cyfrowej do rozwiązywania układów równań węzłowych.

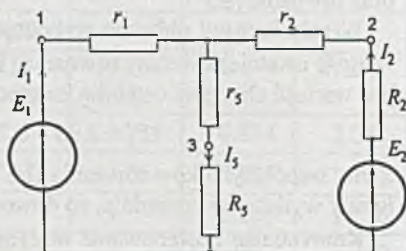
Uwaga

Przekształcając trójkąt 123 w gwiazdę otrzymamy prostszy obwód (rys. 2.1.1), w którym

$$r_1 = \frac{R_4 R_6}{R_3 + R_4 + R_6} = \frac{20 \cdot 10}{20 + 20 + 10} = \frac{200}{50} = 4 \Omega,$$

$$r_2 = \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_4 + R_6} = \frac{20 \cdot 10}{20 + 20 + 10} = \frac{200}{50} = 4 \Omega,$$

$$r_5 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_6} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20 + 10} = \frac{400}{50} = 8 \Omega.$$

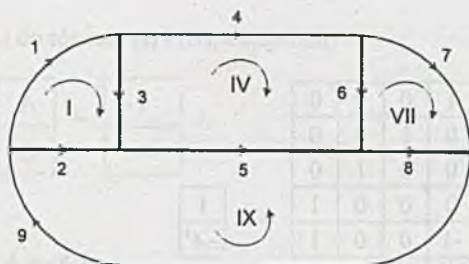


Rys. 2.1.1

W pierwszym etapie ułożymy trzy równania, z których wyliczymy łatwo prądy I_1 , I_2 , I_3 . Wracając następnie do obwodu z rys. 2.1 wyliczymy pozostałe prądy.

Zadanie 2.2. W zadaniu tym dojdziemy do równań Kirchhoffa nieco dłuższą drogą, lecz w sposób ścisły - dający się zalgorytmizować w oparciu o pojęcie drzewa.

Prześledzimy kolejne etapy rozwiązania w postaci macierzowej, a następnie przejdziemy z równań macierzowych do układu równań algebraicznych, by znaleźć konkretne wartości prądów. Na grafie obwodu (rys. 2.2.1) zaznaczamy strzałkami przyjęte uprzednio (rys. 2.2) kierunki prądów.



Rys. 2.2.1

Napięcia gałęzi są skierowane przeciwnie do kierunku prądów. Numery gałęzi odpowiadają numerom prądów.

W tak zorientowanym grafie wybieramy podgraf, który zawiera wszystkie węzły i nie tworzy pętli. Jest to drzewo grafu. Jedno z możliwych drzew zawierające gałęzie 2, 3, 5, 6, 8 zaznaczono na rys. 2.2.1 pogrubioną linią. Gałęzie nie wchodzące do drzewa są gałęziami łączącymi. Zbudujemy teraz macierz łączącą prądową C , pozwalającą wyrazić wszystkie prądy w obwodzie przez prądy gałęzi łączących. Macierz C można zbudować wybierając gałęzie w dowolny sposób. Wygodniej będzie - ze względu na późniejsze zastosowanie - wybrać najpierw gałęzie łączące porządkując je według rosnących numerów, a następnie gałęzie drzewa też uporządkowane. Dołączanie do drzewa każdej z gałęzi łączących generuje nowe oczko. Oczek jest więc tyle, ile gałęzi łączących - w naszym przykładzie $g - w + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$. Orientację oczka narzuca zwrot gałęzi łączącej. Celem ułatwienia przypisujemy oczku numer oznaczony cyfrą rzymską odpowiadający numerowi generującej go gałęzi łączącej. Element macierzy c_{ij} odpowiadający i -tej gałęzi i j -temu oczku równa się 1, jeśli i -ta gałąź należy do j -tego oczka i ma zgodną z nim orientację, a jeśli przeciwną, to - 1. Jeśli gałąź i nie należy do oczka j , to $c_{ij} = 0$.

Tak zbudowaną macierz C przedstawia tablica 2.2.1, do której, dla przejrzystości, wpisano tylko elementy różne od zera.

Tablica 2.2.1

		Numer oczka			
		I	IV	VII	IX
Numer gałęzi łączącej	1	1			
	4		1		
	7			1	
	9				1
Numer gałęzi drzewa	2	-1			1
	3	1	-1		
	5		-1		1
	6		1	-1	
	8			-1	1

więc

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -A' \end{bmatrix}$$

gdzie: 1 jest macierzą jednostkową,

$-A'$ pozostałą częścią macierzy łączącej prądowej C .

Oznaczmy układy prądów i napięć

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_7 \\ I_9 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{l1} \\ I_{l4} \\ I_{l7} \\ I_{l9} \\ I_{l2} \\ I_{l3} \\ I_{l5} \\ I_{l6} \\ I_{l8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l \\ I_t \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_4 \\ U_7 \\ U_9 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{l1} \\ U_{l4} \\ U_{l7} \\ U_{l9} \\ U_{l2} \\ U_{l3} \\ U_{l5} \\ U_{l6} \\ U_{l8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_l \\ U_t \end{bmatrix}$$

gdzie I_l , U_l oznaczają wektory prądów i napięć gałęzi łączących, a I_t , U_t wektory prądów i napięć gałęzi drzewa.

Wówczas równania I i II prawa Kirchhoffa można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} I &= CI_l & (I) \\ C^T U &= 0 & (II) \end{aligned}$$

gdzie C^T jest transponowaną macierzą C .

Ponieważ

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -A' \end{bmatrix}$$

więc

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & -A'^T \end{bmatrix}$$

Podstawiając te związki do równań (I) i (II), otrzymamy

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -A' \end{bmatrix} I_t$$

a stąd

$$I_t = -A' I_t \quad (I')$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 1 & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_t \\ U_t \end{bmatrix} = 0$$

więc

$$U_t = +A'^T U_t. \quad (II')$$

Po rozwiązaniu równań macierzowych (I') oraz (II') otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= -I_1 + I_9 \\ I_3 &= I_1 - I_4 \\ I_5 &= -I_4 + I_9 \\ I_6 &= I_4 - I_7 \\ I_8 &= -I_7 + I_9 \end{aligned} \right\} \quad (I'')$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_2 - U_3 \\ U_4 &= U_3 + U_5 - U_6 \\ U_7 &= U_6 + U_8 \\ U_9 &= -U_2 - U_5 - U_8 \end{aligned} \right\} \quad (II'')$$

albo

$$\left. \begin{aligned} R_1 I_1 &= R_2 I_2 - R_3 I_3 \\ R_4 I_4 &= R_3 I_3 + R_5 I_5 - R_6 I_6 \\ R_7 I_7 &= R_6 I_6 + R_8 I_8 \\ -E &= -R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_8 I_8 \end{aligned} \right\} \quad (II''')$$

Podstawiając równania (I'') do równań (II'''), otrzymamy układ czterech równań z czterema nieznanymi prądami gałęzi łączących. Uwzględniając wartości liczbowe i rozwiązując ten układ otrzymamy

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_1 = 0.380 \text{ A}, \\ I_{14} &= I_4 = 0.483 \text{ A}, \\ I_{17} &= I_7 = 0.380 \text{ A}, \\ I_{19} &= I_9 = 0.931 \text{ A}. \end{aligned}$$

Teraz już łatwo znajdziemy z (I'') prądy gałęzi drzewa

$$I_2 = 0.551 \text{ A},$$

$$I_3 = -0.103 \text{ A},$$

$$I_5 = 0.448 \text{ A},$$

$$I_6 = 0.103 \text{ A},$$

$$I_8 = 0.551 \text{ A}.$$

Należy wyraźnie zaznaczyć, że przedstawione w tym zadaniu dość długie postępowanie przytoczono dla ilustracji metody. W konkretnych przypadkach można utworzyć bezpośrednio macierz łączącą prądową C i za jej pomocą napisać wprost równania (I'') oraz (II'''). Można też ułożyć równania Kirchhoffa nie zastanawiając się nad wyborem drzewa, jak zrobiono to w zadaniu 2.1. Jednak przy obwodach bardziej rozbudowanych, a w szczególności nieplanarnych, oraz przy rozwiązywaniu zadań z wykorzystaniem komputera metodą prądów oczkowych wybór drzewa jest konieczny.

Zadanie 2.3. Do obliczenia prądu płynącego przez amperomierz wykorzystamy metodę prądów oczkowych. Obierzmy oczka niezależne i orientację wszystkich prądów oczkowych zgodną z obiegiem wskazówek zegara (rys. 2.3.1). Stąd już łatwo ułożyć trzy równania oczkowe:

$$(R_1 + R_2 + R_3)I_1 - R_2I_2 - R_3I_3 = E, \quad (\text{I})$$

$$-R_2I_1 + (R_2 + R_4 + R_6)I_2 - R_6I_3 = 0, \quad (\text{II})$$

$$-R_3I_1 - R_6I_2 + (R_3 + R_5 + R_6)I_3 = 0, \quad (\text{III})$$

które po podstawieniu danych mają postać:

$$500 \cdot I_1 - 200 \cdot I_2 - 200 \cdot I_3 = 12, \quad (\text{A1})$$

$$-200 \cdot I_1 + 400 \cdot I_2 - 150 \cdot I_3 = 0, \quad (\text{B1})$$

$$-200 \cdot I_1 - 150 \cdot I_2 + 530 \cdot I_3 = 0, \quad (\text{C1})$$

gdzie: $I_{11} = I_1$,

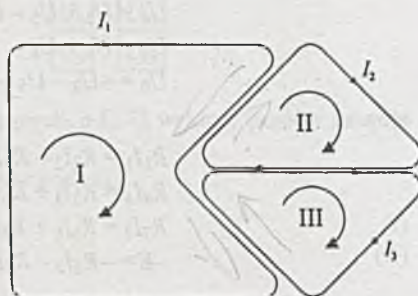
$I_{12} = I_2$,

$I_{13} = I_3$.

Do określenia prądu amperomierza wystarczy obliczyć prądy oczkowe I_2 oraz I_3 . Zastosujemy do ich wyznaczenia metodę Gaussa opisaną szczegółowo w zadaniu 2.1. Dodatkowo dla kontroli poprawności obliczeń znajdziemy prąd I_1 . Obliczenia przytoczone są w tabelicy 2.3.1.

Prąd w gałęzi z amperomierzem obliczymy przez złożenie dwóch prądów oczkowych

$$I_A = I_{12} - I_{13} = I_2 - I_3 = 0.03583 - 0.02898 = 0.00685 \text{ A} = 6.85 \text{ mA}.$$



Rys. 2.3.1

Tablica 2.3.1

Numer równania	I_1	I_2	I_3	Wyrazy wolne	Σ
1	2	3	4	5	6
A1	500	-200	-200	12	112
B1	-200	400	-150	0	50
C1	-200	-150	530	0	180
A1'	1	-0.4	-0.4	0.024	0.0224
B2		320	-230	4.8	94.8
C2		-230	450	4.8	224.8
B2'		1	-0.71875	0.015	0.29625
C3			284.6875	8.25	292.9375
C3'			1	0.02898	1.02898
B2''		1		0.03583	1.035829
A1''	1			0.04992	1.04992

Zadanie 2.4. Zadanie ilustruje metodę otrzymywania równań oczkowych z praw Kirchhoffa. Pokażemy dokładnie konstruowanie macierzowych równań Kirchhoffa, przekształcenia na nich w celu otrzymania równania prądów oczkowych w postaci macierzowej (5), a następnie przejście do układu równań algebraicznych (5''').

Na rys. 2.4.1 przedstawiono graf analizowanego obwodu, w którym przyjęto kierunki prądów, a następnie napięć. Grubszą linią zaznaczono wybrane drzewo.

Wektory prądów gałęzi łączących I_l , gałęzi drzewa I_t oraz wektor wszystkich prądów I można zapisać w postaci



Rys. 2.4.1

$$I_l = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}; \quad I_t = \begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{t4} \\ I_{t5} \\ I_{t6} \end{bmatrix}; \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l \\ I_t \end{bmatrix}$$

Analogicznie można zapisać wektory napięć. Gałęzie łączące 1, 2 i 3 wyznaczają jednoznacznie trzy niezależne oczka I, II, III. Orientacje oczek są zgodne z przyjętymi kierunkami odpowiadających im prądów łączących. Teraz możemy już zbudować macierz C przedstawioną w tablicy 2.4.1.

Tablica 2.4.1

Numer gałęzi	Numer oczka		
	I	II	III
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	1	0	1
5	1	1	0
6	0	-1	1

Uwzględniając, że

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -A' \end{bmatrix}$$

gdzie: I - macierz jednostkowa,

$$-A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -A'^T \end{bmatrix}$$

gdzie

$$-A'^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zapiszemy macierzowo prawa Kirchhoffa. Pierwsze prawo Kirchhoffa

$$I_t = -A'I_l \quad (1)$$

przyjmuje dla analizowanego obwodu postać

$$\begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (1')$$

Natomiast drugie prawo Kirchhoffa

$$U_l = A'^T U_t \quad (2)$$

zapiszemy w postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} \quad (2')$$

Wykorzystamy prawo Ohma:
- dla gałęzi łączących

$$U_l = R_l I_l - E_l \quad (3)$$

w postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (3')$$

oraz

- dla gałęzi drzewa

$$U_l = R_l I_l - E_l \quad (4)$$

w postaci

$$\begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_4 & 0 & 0 \\ 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4')$$

Podstawienie (3), (4), (1) do (2) daje równanie macierzowe w postaci

$$R_l I_l - E_l = A'^T R_l A' I_l - A'^T E_l$$

albo po prostych przekształceniach

$$(R_l - A'^T R_l A') I_l = E_l - A'^T E_l \quad (5)$$

Rozpisując (5), otrzymamy

$$\left(\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_4 & 0 & 0 \\ 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (5')$$

Stąd

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_4 + R_5 & R_5 & R_4 \\ R_5 & R_5 + R_6 & -R_6 \\ R_4 & -R_6 & R_3 + R_4 + R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (5'')$$

albo w postaci układu równań prądów oczkowych

$$\begin{aligned} (R_1 + R_4 + R_5)I_1 &+ R_5I_2 &+ R_4I_3 &= E_1 \\ R_5I_1 &+ (R_5 + R_6)I_2 &+ (-R_6)I_3 &= E_2 \\ R_4I_1 &+ (-R_6)I_2 &+ (R_3 + R_4 + R_6)I_3 &= E_3 \end{aligned} \quad (5''')$$

gdzie, jak już wspomniano

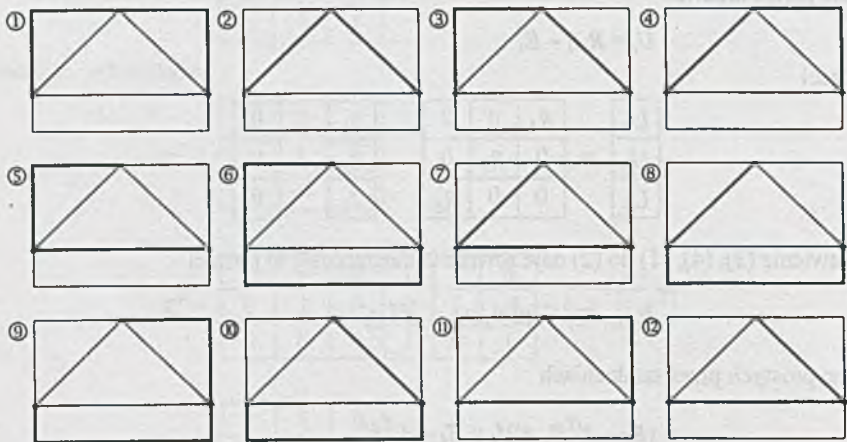
$$I_1 = I_{11},$$

$$I_2 = I_{12},$$

$$I_3 = I_{13}.$$

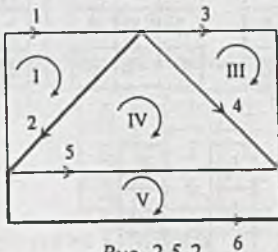
W konkretnych przykładach można po wybraniu drzewa, a następnie prądów oczkowych wprost napisać - uwzględniając znaki - układ równań (5'''). Przy nie rozbudowanych obwodach, a w szczególności przy obwodach planarnych, można do układu równań prądów oczkowych dojść jeszcze szybciej, nie zastanawiając się nad wyborem drzewa, np. jak w zadaniu 2.3.

Zadanie 2.5. Łatwo stwierdzić, że dla grafu zorientowanego można wybrać dwanaście różnych drzew (rys. 2.5.1). Najmniejszy opór gałęzi równy 100Ω ma drzewo oznaczone numerem osiem.



Rys. 2.5.1

Orientując wybrany graf (rys. 2.5.2) przez przyjęcie kierunków prądów wyznaczmy (w tablicy 2.5.1) elementy macierzy C .



Rys. 2.5.2

Tablica 2.5.1

	I	III	IV	V
1	1			
3		1		
4			1	
5				1
2	1	-1	-1	
6		-1	-1	-1

Stąd macierze

$$-A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } -A'^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Natomiast wektory prądów mają następującą postać

$$I_l = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{l1} \\ I_{l3} \\ I_{l4} \\ I_{l5} \end{bmatrix}, \quad I_t = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{t2} \\ I_{t6} \end{bmatrix}.$$

a macierze oporów są określone zależnościami

$$R_l = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix}, \quad R_t = \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_6 \end{bmatrix}.$$

Przy uwzględnianiu wartości składowych wektorów sił wymuszających pamiętamy, że SEM uwzględniamy ze znakiem plus, jeśli są zgodne z założonym kierunkiem prądu w danej gałęzi, i ze znakiem minus, jeśli są przeciwnie; więc

$$E_l = \begin{bmatrix} 0 \\ -E_3 \\ 0 \\ E_5 \end{bmatrix}, \quad E_t = \begin{bmatrix} E_2 \\ -E_6 \end{bmatrix}.$$

Rozpisując równanie macierzowe prądów oczkowych

$$(R_l + A'^T R_t A') I_l = E_l - A'^T E_t$$

otrzymamy

$$\left(\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_6 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -E_3 \\ 0 \\ E_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_2 \\ -E_6 \end{bmatrix}$$

i po wykonaniu działań na macierzach

$R_1 + R_2$	$-R_2$	$-R_2$	0
$-R_2$	$R_2 + R_3 + R_6$	$R_2 + R_6$	R_6
$-R_2$	$R_2 + R_6$	R_6	R_6
0	R_6	R_6	$R_5 + R_6$

 $\cdot \begin{matrix} I_1 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{matrix} = \begin{matrix} E_2 \\ -E_2 - E_3 + E_6 \\ -E_2 + E_6 \\ E_5 + E_6 \end{matrix}$

Z otrzymanego równania macierzowego wynika układ równań prądów oczkowych

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)I_1 - R_2I_3 - R_2I_4 &= E_2 \\ -R_2I_1 + (R_2 + R_3 + R_6)I_3 + (R_2 + R_6)I_4 &= -E_2 - E_3 + E_6 \\ -R_2I_1 + (R_2 + R_6)I_3 + (R_2 + R_4 + R_6)I_4 &= -E_2 + E_6 \\ R_6I_3 + R_6I_4 + (R_5 + R_6)I_5 &= E_5 + E_6 \end{aligned}$$

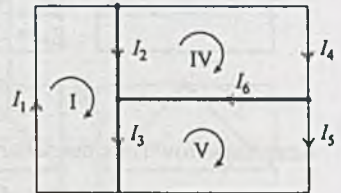
gdzie: $I_1 = I_{11}$, $I_3 = I_{13}$, $I_4 = I_{14}$ i $I_5 = I_{15}$.

Zadanie 2.6. Wykorzystajmy drzewo grafu z rys. 2.6.1. Dla tak dobranego drzewa wektory prądów mają postać

$$I_l = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{14} \\ I_{15} \end{bmatrix}; \quad I_t = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_6 \end{bmatrix}$$

a macierz łącząca

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Rys. 2.6.1

stąd

$$-A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad -A'^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Wartości elementów macierzy oporów są równe odpowiednio

$$R_l = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad R_t = \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix}$$

a składowe wektorów SEM są określone zależnościami

$$E_l = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad E_l = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Równanie prądów oczkowych

$$(R_l + A^{TT}R_lA')I_l = E_l - A^{TT}E_l$$

po wstawieniu powyższych zależności przyjmie postać

$$\left(\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a po wykonaniu działań na macierzach uprości się do postaci

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_6 & -R_6 \\ -R_3 & -R_6 & R_3 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

której odpowiada układ równań

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)I_1 - R_2I_4 - R_3I_5 = E \\ -R_2I_1 + (R_2 + R_4 + R_6)I_4 - R_6I_5 = 0 \\ -R_3I_1 - R_6I_4 + (R_3 + R_5 + R_6)I_5 = 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że identyczny układ równań prądów oczkowych otrzymamy (nie wykorzystując pojęcia drzewa), jeśli wybierzemy oczka minimalne (nie nakładające się na siebie).

Uwzględniając wartości liczbowe, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 35I_1 - 15I_4 - 10I_5 = 20 \\ -15I_1 + 30I_4 - 5I_5 = 0 \\ -10I_1 - 5I_4 + 30I_5 = 0 \end{cases}$$

i po rozwiązaniu otrzymujemy wartości prądów gałęzi łączących

$$I_{11} = I_1 = 0.9032 \text{ A,}$$

$$I_{14} = I_4 = 0.5161 \text{ A,}$$

$$I_{15} = I_5 = 0.3871 \text{ A.}$$

Stąd już łatwo otrzymamy wartości prądów gałęzi drzewa

$$I_{12} = I_2 = I_1 - I_4 = 0.3871 \text{ A,}$$

$$I_{13} = I_3 = I_1 - I_5 = 0.5161 \text{ A,}$$

$$I_{16} = I_6 = I_4 - I_5 = 0.1290 \text{ A.}$$

Sprawdźmy poprawność obliczeń. Układamy równanie II prawa Kirchhoffa dla minimalnych oczek i sprawdzamy dokładność ich spełnienia:

$$(I) \quad R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 - E = 10 \cdot 0.9032 + 15 \cdot 0.3871 + 10 \cdot 0.5161 - 20 = \\ = 9.032 + 5.8065 + 5.161 - 20 = 0.0005 \text{ V},$$

$$(IV) \quad R_4 I_4 + R_6 I_6 - R_2 I_2 = 10 \cdot 0.5161 + 5 \cdot 0.129 - 15 \cdot 0.3871 = \\ = 5.161 + 0.645 - 5.8065 = -0.0005 \text{ V},$$

$$(V) \quad R_5 I_5 - R_3 I_3 - R_6 I_6 = 15 \cdot 0.3871 - 10 \cdot 0.5161 - 5 \cdot 0.129 = \\ = 5.8065 - 5.161 - 0.645 = 0.0005 \text{ V}.$$

Z dokładnością obliczeń można przyjąć, że równania te są spełnione.

Zadanie 2.7. Zadanie to rozwiążemy trzema sposobami.

I sposób

W grafie obwodu (rys. 2.7.1) wybieramy gałęzie łączące, tak by zawierały siły prądomotoryczne. Ponieważ do obliczenia mocy potrzebna jest wartość prądu płynącego w gałęzi z E_2 , wygodnie jest ją też uwzględnić jako łączącą. Prądy oczkowe płyną więc w konturach zaznaczonych liniami przerywanymi.

Przy takim wyborze gałęzi łączących mamy natychmiast dwie wartości prądów gałęzi łączących

$$I_1 = I_{I1} = -J_1 = -0.1 \text{ A},$$

$$I_2 = I_{I2} = J_2 = 0.1 \text{ A}.$$

Z równania II prawa Kirchhoffa dla trzeciego oczka

$$(R_1 + R_3)I_{I3} + R_1 I_{I1} + R_3 I_{I2} = -E_1 - E_2.$$

Po uwzględnieniu wartości liczbowych

$$(50+200) \cdot I_{I3} - 50 \cdot 0.1 + 200 \cdot 0.1 = \\ = -10 - 10$$

mamy

$$I_{I3} = -0.140 \text{ A}.$$

Stąd moc wydawana przez SEM E_2 wynosi

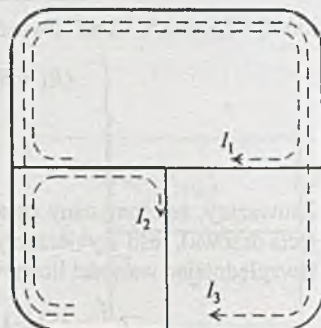
$$P = E_2(-I_{I3}) = 10 \cdot 0.140 = 1.4 \text{ W}.$$

II sposób

Przekształćmy analizowany obwód (przez przesunięcie gałęzi $E_1 R_1$) do postaci jak na rys. 2.7.2, w której siły prądomotoryczne oraz SEM E_2 znajdują się w gałęziach zewnętrznych. Obie-
ramy minimalne oczka i odpowiednie prądy oczkowe I_{I1} , I_{I2} , I_{I3} (rys. 2.7.2); wówczas

$$I_{I2} = -J_2 = -0.1 \text{ A},$$

$$I_{I3} = J_1 = 0.1 \text{ A},$$



Rys. 2.7.1

a z równania dla pierwszego oczka

$$(R_1 + R_3)I_{I1} - R_1I_2 - R_3I_3 = E_2 + E_1,$$

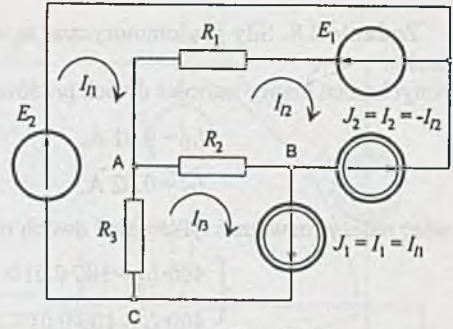
$$(200+50) \cdot I_{I1} + 50 \cdot 0.1 - 200 \cdot 0.1 = 10 + 10,$$

prąd oczka

$$I_{I1} = 0.14 \text{ A.}$$

Moc wydawana przez SEM E_2 podobnie jak poprzednio

$$P = E_2 I_{I1} = 10 \cdot 0.14 = 1.4 \text{ W.}$$



Rys. 2.7.2

III sposób

Zaznaczmy, nie znane na razie, napięcia U_1 i U_2 na siłach prądomotorycznych (rys. 2.7.3a). Obwód rozwiązujemy tak, jakby w miejscu sił prądomotorycznych znajdowały się siły elektromotoryczne U_1 i U_2 (rys. 2.7.3b). (W dalszych przykładach będziemy opuszczali przejście z postaci z rysunku a) do postaci z rysunku b)).

W schemacie na rys. 2.7.3b przyjmijmy minimalne oczka. Wówczas równania prądów oczkowych mają postać

$$(R_1 + R_2)I_{I1} - R_2I_{I2} = -E_1 - U_1,$$

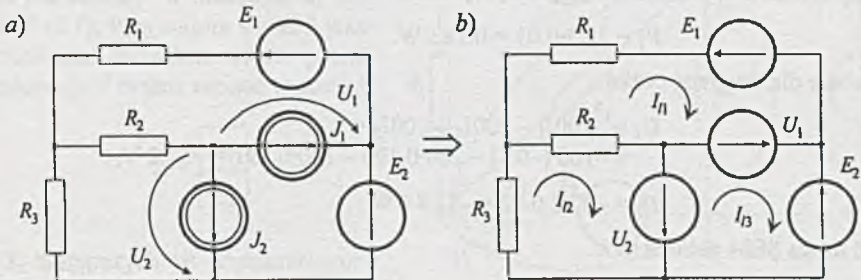
$$(R_2 + R_3)I_{I2} - R_2I_{I1} = U_2,$$

$$I_{I3} \cdot 0 = -U_2 + U_1 - E_2.$$

Oprócz prądów I_{I1} , I_{I2} , I_{I3} wprowadziliśmy na początku dwie dodatkowe niewiadome U_1 , U_2 . Uwzględniając schemat wyjściowy napiszemy dwa dodatkowe równania

$$I_{I1} - I_{I3} = J_1,$$

$$I_{I2} - I_{I3} = J_2.$$



Rys. 2.7.3

Z tych pięciu równań, po podstawieniu wartości liczbowych, otrzymamy

$$I_{I3} = -0.14 \text{ A,}$$

więc

$$P = E_2(-I_{I3}) = 1.4 \text{ W.}$$

Zadanie 2.8. Siły prądomotoryczne są w gałęziach zewnętrznych, obierzmy więc minimalne oczka.

Natychmiast mamy wartości dwóch prądów gałęzi łączących:

$$I_{I1} = 0.01 \text{ A},$$

$$I_{I2} = 0.02 \text{ A},$$

więc należy rozwiązać tylko układ dwóch równań o postaci

$$\begin{cases} 400 \cdot I_{I3} - 100 \cdot 0.01 - 200 \cdot 0.02 - 100 \cdot I_{I4} = 60 \\ 400 \cdot I_{I4} - 100 \cdot 0.01 - 100 \cdot 0.02 - 100 \cdot I_{I3} = 60, \end{cases}$$

stąd

$$I_{I3} = 0.215 \text{ A},$$

$$I_{I4} = 0.211 \text{ A}.$$

Szukane prądy gałęziowe

$$I_1 = I_{I1} - I_{I2} = 0.01 - 0.02 = -0.1 \text{ A},$$

$$I_2 = I_{I1} - I_{I3} = 0.01 - 0.215 = -0.205 \text{ A},$$

$$I_3 = I_{I1} - I_{I4} = 0.01 - 0.211 = -0.201 \text{ A},$$

$$I_4 = I_{I3} - I_{I2} = 0.215 - 0.02 = 0.195 \text{ A},$$

$$I_5 = I_{I4} - I_{I2} = 0.211 - 0.02 = 0.191 \text{ A}.$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa dla pierwszego oczka

$$\begin{aligned} U_1 &= 120 + 100I_3 + 100I_2 + 100I_1 = \\ &= 120 + 100 \cdot (-0.201 - 0.205 - 0.1) = 78.3 \text{ V}, \end{aligned}$$

więc pierwsza siła prądomotoryczna wydaje moc

$$P_1 = 78.3 \cdot 0.01 = 0.783 \text{ W}.$$

Podobnie dla drugiego oczka

$$\begin{aligned} U_2 &= -100I_1 - 200I_4 - 100I_5 = \\ &= -100 \cdot (-0.1) - 200 \cdot 0.195 - 100 \cdot 0.191 = -57.2 \text{ V}, \end{aligned}$$

$$P_2 = -57.2 \cdot 0.02 = -1.144 \text{ W},$$

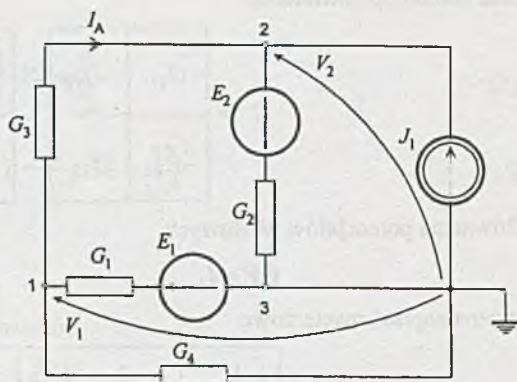
czyli druga SEM pobiera moc.

Uwaga

W poprzednich przykładach, przy wybieraniu nie nakładających się oczek, nie trzeba było się zastanawiać nad wyborem drzewa grafu. Można było jednak znaleźć drzewo odpowiadające tak przyjętym oczkom. W tym zadaniu, mimo że wybraliśmy cztery niezależne oczka, trudno pokazać odpowiednie drzewo. Oczywiście, z grafu obwodu można wybrać wiele innych drzew, na podstawie których można ułożyć cztery niezależne równania oczkowe opisujące obwód.

Zadanie 2.9. Do obliczenia prądu w gałęzi z amperomierzem wykorzystamy metodę potencjałów węzłowych. Oznaczmy kolejnymi cyframi węzły obwodu (rys. 2.9.1). Jako węzeł odniesienia przyjmujemy np. węzeł trzeci. Zakładamy, że jego potencjał $V_3 = 0$. Wówczas równania potencjałów dla węzła pierwszego i drugiego mają postać

$$\begin{cases} (G_1 + G_3 + G_4)V_1 - G_3V_2 = E_1G_1 \\ -V_1G_3 + (G_2 + G_3)V_2 = J_1 - E_2G_2 \end{cases}$$



Rys. 2.9.1

Po podstawieniu danych

$$\begin{cases} (5 + 2 + 2) \cdot 10^{-4} \cdot V_1 - 2 \cdot 10^{-4} \cdot V_2 = 20 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \\ -2 \cdot 10^{-4} \cdot V_1 + (5 + 2) \cdot 10^{-4} \cdot V_2 = 10^{-3} - 15 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

i rozwiązaniu układu równań otrzymamy wartości potencjałów węzłów 1 i 2

$$V_1 = 9.68 \text{ V i } V_2 = -6.52 \text{ V,}$$

a prąd amperomierza

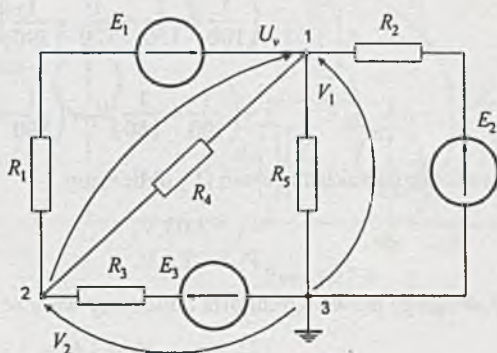
$$I_A = G_3(V_1 - V_2) = 2 \cdot 10^{-4} \cdot (9.68 + 6.52) = 3.24 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 3.24 \text{ mA.}$$

Zadanie 2.10. Zadanie rozwiążemy metodą potencjałów węzłowych. Zakładamy, że woltomierz jest idealny. W obwodzie są trzy węzły (rys. 2.10.1). Przyjmijmy węzeł 3 jako węzeł odniesienia. Wówczas wektor potencjałów węzłowych V można zapisać w postaci

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

a wektor I_z zastępczych sił prądomotorycznych węzłów

$$I_z = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \\ -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} \end{bmatrix}$$



Rys. 2.10.1

oraz macierz przewodności

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2}\right) & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right) \\ -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right) & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}\right) \end{bmatrix}$$

Równanie potencjałów węzłowych

$$GV = I_z$$

można napisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2}\right) & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right) \\ -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right) & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \\ -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} \end{bmatrix}$$

lub w postaci układu równań

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2}\right)V_1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 &= \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \\ -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right)V_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}\right)V_2 &= -\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} \end{aligned} \right\}$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{150} + \frac{1}{120} + \frac{1}{390}\right)V_1 - \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{150}\right)V_2 &= \frac{12}{100} + \frac{6}{390} \\ -\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{150}\right)V_1 + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{150} + \frac{1}{330}\right)V_2 &= -\frac{12}{100} + \frac{6}{330} \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

i rozwiązując układ równań (1') obliczymy

$$V_1 = 3.63 \text{ V},$$

$$V_2 = -2.1 \text{ V}.$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa obliczymy wartość napięcia, którą wskaże woltomierz

$$U_v = V_1 - V_2 = 3.63 + 2.1 = 5.73 \text{ V}.$$

Zadanie 2.11. Skorzystamy z metody potencjałów węzłowych. Jeśli przyjmiemy potencjał węzła 3 równy zero, wówczas bez liczenia mamy potencjał węzła 2

$$V_2 = E_2 = 12 \text{ V},$$

a z równania dla węzła 1

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_1 - \frac{1}{R_3}V_2 = \frac{E_1}{R_1} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{2 \cdot 10^3}\right)V_1 - \frac{1}{10^4} \cdot 12 = \frac{12}{10^4} \quad (1')$$

obliczamy

$$V_1 = 3.429 \text{ V.}$$

Moce pobierane przez oporniki wynoszą odpowiednio

$$P_1 = \frac{(E_1 - V_1)^2}{R_1} = \frac{(12 - 3.429)^2}{10^4} = 7.347 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 7.347 \text{ mW},$$

$$P_2 = \frac{V_2^2}{R_2} = \frac{12^2}{33 \cdot 10^3} = 4.364 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 4.364 \text{ mW},$$

$$P_3 = \frac{(V_2 - V_1)^2}{R_3} = \frac{(12 - 3.429)^2}{10^4} = 7.347 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 7.347 \text{ mW},$$

$$P_4 = \frac{V_1^2}{R_4} = \frac{3.429^2}{2 \cdot 10^3} = 5.879 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 5.879 \text{ mW}.$$

Najbardziej obciążone są więc oporniki R_1 i R_3 .

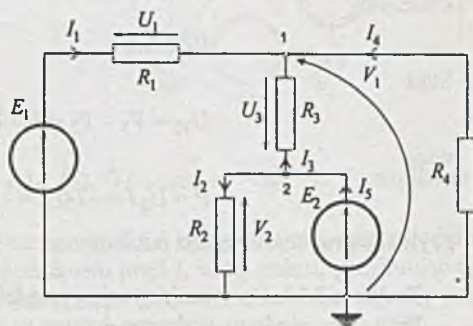
Sprawdźmy poprawność obliczeń sporządzając bilans mocy. W tym celu musimy najpierw policzyć prądy wymuszone przez siły elektromotoryczne (rys. 2.11.1).

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{E_1 - V_1}{R_1} = \frac{12 - 3.429}{10^4} = 0.8571 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 0.8571 \text{ mA}$$

$$I_5 = I_2 + I_3 = \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2 - V_1}{R_3} = \frac{12}{33 \cdot 10^3} + \frac{12 - 3.429}{10 \cdot 10^3} = 1.221 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 1.221 \text{ mA},$$

więc SEM E_1 wydaje moc

$$P_{E1} = E_1 I_1 = 12 \cdot 0.8571 \cdot 10^{-3} = 10.285 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 10.285 \text{ mW},$$



Rys. 2.11.1

natomiast SEM E_2

$$P_{E2} = P_2 I_5 = 12 \cdot 1.221 \cdot 10^{-3} = 14.652 \cdot 10^{-3} \text{ W} = 14.652 \text{ mW}.$$

Stąd moc wydawana

$$P_w = E_{E1} + P_{E2} = 10.285 + 14.652 = 24.937 \text{ mW},$$

a moc pobierana

$$P_p = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 7.347 + 4.364 + 7.347 + 5.879 = 24.937 \text{ mW},$$

a więc $P_w = P_p$.

Zadanie 2.12. Obliczenie wartości mocy wymaga określenia najpierw wartości napięcia U_{32} . Możemy w tym celu skorzystać np. z metody oczkowej lub węzłowej. W pierwszej metodzie ułożymy dwa równania przy odpowiednim wyborze drzewa, trzecie równanie jest trywialne $I_{I3} = J = 0.2 \text{ A}$ i po obliczeniu np. prądu w gałęzi G_2 łatwo znajdziemy U_{32} .

Metoda węzłowa w tym przykładzie prowadzi szybciej do wyniku. Przyjmując potencjał węzła 1 równy zero mamy

$$V_2 = E_2 = 12 \text{ V}.$$

Z równania dla węzła 3

$$(G_1 + G_2 + G_3)V_3 - G_3V_2 = -E_1G_1 + I - G_3E_3$$

po podstawieniu wartości liczbowych

$$(0.01 + 0.02 + 0.01) \cdot V_3 - 0.01 \cdot 12 = -0.01 \cdot 6 + 0.2 - 0.01 \cdot 6$$

obliczymy

$$V_3 = 5 \text{ V}.$$

Stąd

$$U_{32} = V_3 - V_2 = 5 - 12 = -7 \text{ V},$$

więc

$$P = U_2 J = -7 \cdot 0.2 = -1.4 \text{ W},$$

czyli siła prądomotoryczna pobiera moc.

Zadanie 2.13. Porównajmy najpierw efektywność zastosowania metody oczkowej i węzłowej.

Przy odpowiednim wyborze drzewa w metodzie oczkowej jeden prąd oczkowy $J = 0.05 \text{ A}$ otrzymamy bez liczenia. Ułożymy jeszcze dwa równania prądów oczkowych i po wyliczeniu np. prądu w gałęzi G_6 znajdziemy V_2 , a tym samym wskazanie woltomierza.

Metoda węzłowa wymaga ułożenia też dwóch równań, z tym że jedna z niewiadomych V_2 jest już rozwiązaniem zadania.

Skorzystamy z metody potencjałów węzłowych:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} + G_4 \right) V_1 - G_4 V_2 &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} E_1 + J \\ -G_4 V_1 + (G_4 + G_5 + G_6) V_2 &= G_5 E_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Uwaga

Przewodność gałęzi z siłą prądomotoryczną wynosi zero, niezależnie od wartości innych elementów tej gałęzi. Dlatego po lewej stronie pierwszego równania nie występuje przewodność G_3 . Po podstawieniu danych

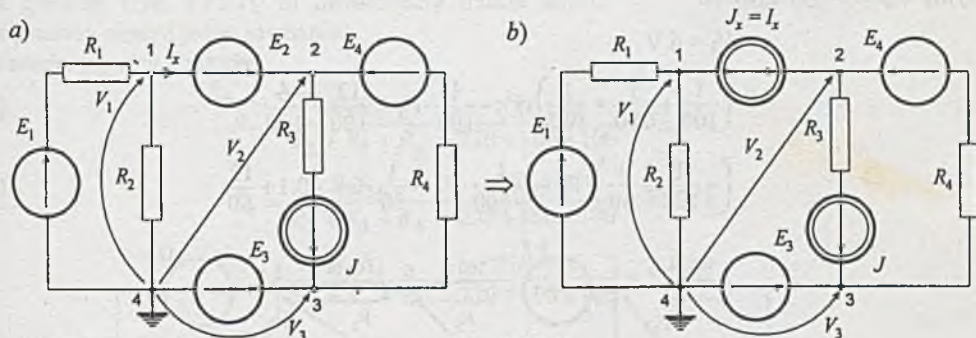
$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{0.01 \cdot 0.01}{0.01 + 0.01} + 0.005 \right) \cdot V_1 - 0.005 \cdot V_2 &= \frac{0.01 \cdot 0.01}{0.01 + 0.01} \cdot 12 + 0.005 \cdot 5 \\ - 0.005 \cdot V_1 + (0.005 + 0.01 + 0.005) \cdot V_2 &= 12 \cdot 0.01 \end{aligned} \right\}$$

obliczamy

$$V_2 = 10 \text{ V i jest to wskazanie woltomierza.}$$

Zadanie 2.14. Należy określić wartości potencjałów węzłowych, więc do ich obliczenia zastosujemy metodę węzłową.

Ponieważ $E_2 = E_3$, więc napięcia między węzłami 1 i 2 oraz 3 i 4 są jednakowe: wystarczy więc określić napięcie U_{14} i ze środkowego oczka $U_{23} = U_{14}$. Dalszy ciąg obliczeń przeprowadzimy dwoma sposobami.



Rys. 2.14.1

I sposób

Potencjał węzła 4 przyjmujemy za zerowy (rys. 2.14.1a). Wówczas $V_3 = E_3 = 6 \text{ V}$ i napiszemy równania dla węzłów 1 i 2.

Ponieważ gałąź 1 - 2 ma przewodność nieskończenie wielką i byłby kłopot z bezpośrednim uwzględnieniem jej w równaniach, wprowadźmy dodatkowo prąd I_x w tej gałęzi, przyjmując jej przewodność równą zero. Jest to równoznaczne z założeniem (tylko na czas obliczeń) siły prądomotorycznej $J_x = I_x$ (rys. 2.14.1b). (W dalszych przykładach będziemy pomijać przejście z rys. a) do b)). Równania dla węzłów 1 i 2 będą więc następujące

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_1 = \frac{E_1}{R_1} - J_x, \quad (1)$$

$$\frac{1}{R_4} V_2 - \frac{1}{R_4} V_3 = J_x - J + \frac{E_4}{R_4}. \quad (2)$$

W równaniach (1), (2) występują nieznane potencjały V_1 , V_2 oraz dodatkowo wprowadzony nieznany prąd $I = J_x$. Trzecie równanie otrzymamy uwzględniając, że

$$V_2 - V_1 = E_2. \quad (3)$$

Podstawiając dane liczbowe uzyskamy równania w postaci

$$\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200}\right)V_1 = \frac{12}{100} - J_x, \quad (1')$$

$$\frac{1}{50} \cdot V_2 - \frac{1}{50} \cdot 6 = J_x - 0.1 + \frac{12}{50}, \quad (2')$$

$$V_2 - V_1 = 6. \quad (3')$$

Stąd

$$V_1 = 7.43 \text{ V},$$

czyli szukane napięcia

$$U_{14} = U_{23} = V_1 = 7.43 \text{ V}.$$

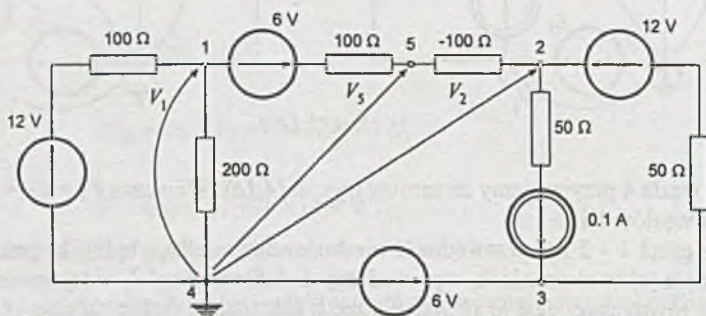
II sposób

W gałęzi bezoporowej wprowadzamy dwa opory, np. 100Ω oraz -100Ω , i wprowadzamy fikcyjny węzeł 5 (rys. 2.14.2).

$$V_3 = 6 \text{ V}$$

$$\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100}\right) \cdot V_1 - \frac{1}{100} \cdot V_5 = \frac{12}{100} - \frac{6}{100} \quad (1)$$

$$\left(-\frac{1}{100} + \frac{1}{50}\right) \cdot V_2 - \frac{1}{-100} \cdot V_5 - \frac{1}{50} \cdot 6 = -0.1 + \frac{12}{50} \quad (2)$$



Rys. 2.14.2

Dodając równanie (1) do równania (2) eliminujemy niepotrzebną niewiadomą V_5

$$\frac{5}{200} \cdot V_1 + \frac{1}{100} \cdot V_2 - \frac{6}{50} = \frac{6}{100} - 0.1 + \frac{12}{50}.$$

Dodatkowe równanie

$$V_2 - V_1 = 6$$

pozwala podobnie jak poprzednio obliczyć

$$V_1 = 7.43 \text{ V},$$

a stąd

$$U_{14} = U_{23} = V_1 = 7.43 \text{ V.}$$

Opisany wyżej sposób wykorzystany jest w programie ALINIES do analizy obwodów metodą potencjałów węzłowych z gałęziami bezoporowymi.

Zadanie 2.15. Spróbujmy porównać efektywność zastoso-

sowania - do znalezienia rozwiązania - metody węzłowej i oczkowej.

Wykorzystanie metody węzłowej wymaga ułożenia

w pierwszym etapie trzech równań, z których wyliczymy

potencjały węzłów 1 oraz 4. Stąd już łatwo policzyć prąd

gałęzi 1 - 4, a następnie moc wydawaną przez SEM

W metodzie oczkowej jeden prąd oczkowy $I_2 = I_{I2}$ jest

dany $I_{I2} = J = 0.12 \text{ A}$. Należy ułożyć jeszcze dwa równania,

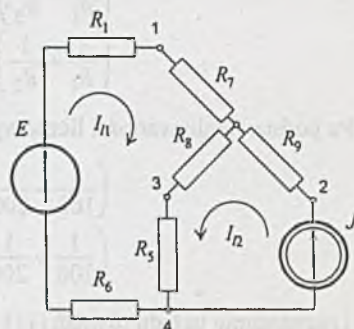
z których można wyliczyć prąd w gałęzi 1 - 4. Jeśli

w pierwszym etapie wykonamy transfigurację trójkąta 1-2-3

na gwiazdę (rys. 2.15.1), to likwidujemy trzecie oczko

i wystarczy ułożyć jedno równanie.

Wartości oporów gwiazdy



Rys. 2.15.1

$$R_7 = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{220 \cdot 100}{220 + 100 + 100} = 52.4 \Omega,$$

$$R_8 = \frac{R_3 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{100 \cdot 100}{220 + 100 + 100} = 23.8 \Omega,$$

$$R_9 = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{220 \cdot 100}{220 + 100 + 100} = 52.4 \Omega.$$

Układamy równanie pierwszego oczka

$$(R_1 + R_7 + R_8 + R_5 + R_6)I_1 + (R_8 + R_5)I_2 = E.$$

Podstawiając wartości liczbowe oraz $I_{I2} = I_2 = J = 0.12 \text{ A}$ mamy

$$(390 + 52.4 + 23.8 + 330 + 180) \cdot I_1 + (23.8 + 330) \cdot 0.12 = 16,$$

stąd

$$I_{I1} = I_1 = -0.0271 \text{ A} = -27.1 \text{ mA},$$

$$P_E = EI_1 = 16 (-0.0271) = -0.434 \text{ W}.$$

Siła elektromotoryczna E pobiera więc moc 0.434 W .

Zadanie 2.16. Zarówno przy metodzie oczkowej, jak i węzłowej należy ułożyć dwa równania. Zadanie rozwiążemy metodą węzłową.

$$\begin{aligned} V_2 = E_2 = 12, \\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) V_3 - \frac{1}{R_1} V_4 - \frac{1}{R_3} V_2 &= \frac{-E_1}{R_1} + J, \\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_4 - \frac{1}{R_1} V_3 &= \frac{E_1}{R_1} - J. \end{aligned}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} \right) \cdot V_3 - \frac{1}{100} \cdot V_4 - \frac{1}{200} \cdot 12 &= -\frac{6}{100} + 0.05, \\ \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} \right) \cdot V_4 - \frac{1}{100} \cdot V_3 &= \frac{6}{100} - 0.05 \end{aligned}$$

i rozwiązaniu układu równań (1) i (2) otrzymamy wartości pozostałych potencjałów

$$V_3 = 6.8 \text{ V},$$

$$V_4 = 5.2 \text{ V}.$$

Liczymy teraz prądy wydawane przez siły elektromotoryczne

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{-V_4 + V_3 + E_1}{R_1} = \frac{-5.2 + 6.8 + 6}{100} = 0.076 \text{ A},$$

$$I_2 = I_3 + I_4 + \frac{E_2 - V_3}{R_3} + \frac{E_2}{R_4} = \frac{12 - 6.8}{200} + \frac{12}{100} = 0.146 \text{ A}$$

oraz napięcie na siłę prądomotorycznej

$$U_J = V_3 - V_4 = 6.8 - 5.2 = 1.6 \text{ V}.$$

Stąd moc wydawana przez źródła

$$\begin{aligned} P_w &= P_{E1} + P_{E2} + P_J = E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_J J = \\ &= 6 \cdot 0.076 + 12 \cdot 0.146 + 0.05 \cdot 1.6 = 2.29 \text{ W}. \end{aligned}$$

Natomiast moc pobierana przez oporniki

$$\begin{aligned} P_p &= I_1^2 \cdot R_1 + \frac{V_4^2}{R_2} + \frac{(E_2 - V_3)^2}{R_3} + \frac{E_2^2}{R_4} \\ &= 0.076^2 \cdot 100 + \frac{5.2^2}{200} + \frac{(12 - 6.8)^2}{200} + \frac{12^2}{100} = 2.29 \text{ W}. \end{aligned}$$

Zadanie 2.18. $P = 0.72 \text{ W}$.

Zadanie 2.19. $P_J = 1.34 \text{ W}$.

Zadanie 2.20. 90 mA , 21.6 V .

Zadanie 2.21. $(A) = 75 \text{ mA}$.

Zadanie 2.22. $(V) = 17.5 \text{ V}$.

Zadanie 2.23. $I_1 = 107.7 \text{ mA}$, $I_2 = 22.84 \text{ mA}$.

Zadanie 2.24. $I_3 = -1.6 \text{ A}$.

Zadanie 2.26. $E_x = 8.95 \text{ V}$.

Zadanie 2.27. $J_x = 0.12 \text{ A}$.

Zadanie 2.28. W warunkach znamionowych ($E_2 = 10 \text{ V}$) prąd I można wyznaczyć korzystając z metody potencjałów węzłowych. Przyjmując, że węzeł 1 ma potencjał zero, uzyskamy

$$V_3 = E_2 + E_4 = 70 \text{ V}.$$

Z równania

$$\frac{3}{R}V_2 - \frac{1}{R}V_3 = \frac{E_1}{R}$$

otrzymamy

$$V_2 = \frac{E_1 + V_3}{3} = \frac{20 + 70}{3} = \frac{90}{3} = 30 \text{ V}.$$

Stąd prąd

$$I = \frac{V_3 - V_2}{R} = \frac{70 - 30}{100} = \frac{40}{100} = 0.4 \text{ A}.$$

Na pytanie, o ile powinna wzrosnąć wartość SEM E_2 , by prąd wzrósł do wartości

$$I^* = I + \Delta I = I + 0.2I,$$

odpowiemy korzystając z zasady superpozycji (rys. 2.28. I).

Przyrost prądu

$$\Delta I = 0.2 \cdot I = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08 \text{ A},$$

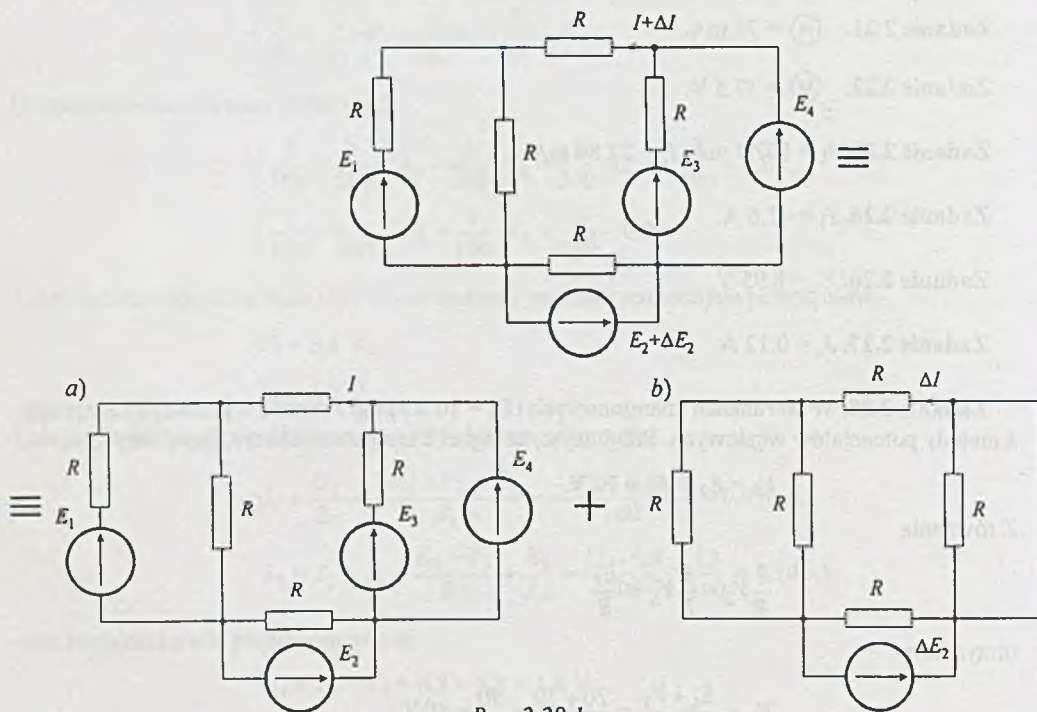
a z rysunku b) (rys. 2.28. I) wynika, że uzyskany zostanie, jeśli przyrost SEM E_2 będzie równy

$$\Delta E_2 = \left(R + \frac{R}{2} \right) \Delta I = 0.08 \cdot 150 = 12 \text{ V}.$$

Przyrost wartości SEM E_2 wyrażony w procentach jest równy

$$\frac{\Delta E_2}{E_2} \cdot 100\% = \frac{12}{50} \cdot 100\% = 24\%,$$

czyli przyrost wartości SEM E_2 o 24% powoduje przyrost prądu I o 20%.



Rys. 2.28.1

Zadanie 2.29.

$$\frac{\Delta I}{I} \cdot 100\% = -10\%.$$

Zadanie 2.30.

1. Obliczenie wartości znamionowej E_2

Z warunku $I_3 = 0$ wynika $I_1 = -I_2$ oraz $V_1 = V_2$, a stąd

$$R_1 I_1 = E_1 \quad \text{i} \quad R_2 I_2 = E_2.$$

Podstawiając wartości liczbowe

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{20}{200} = 0.1 \text{ A},$$

$$E_2 = -R_2 I_1 = -100 \cdot 0.1 = -10 \text{ V}.$$

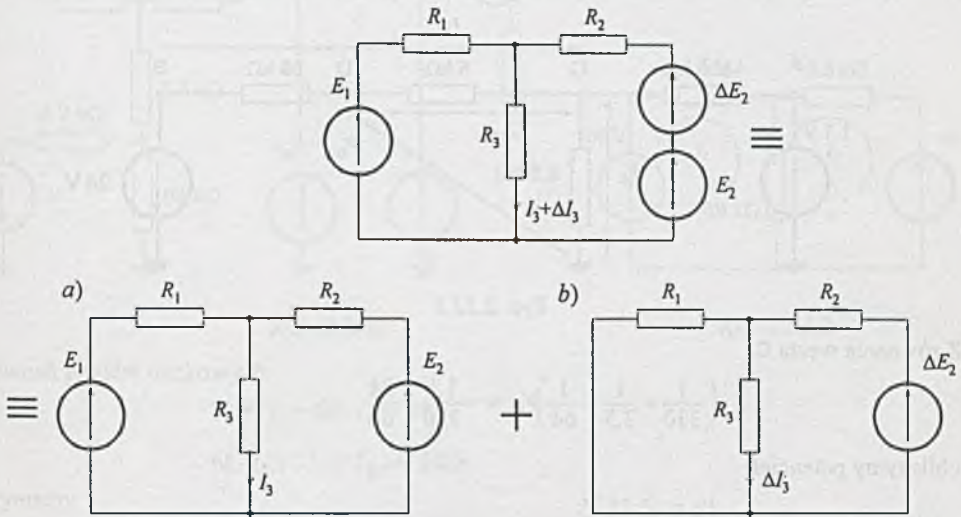
2. Określenie dopuszczalnych zmian wartości E_2

Skorzystamy z zasady superpozycji (rys. 2.30.1).

Przy zadanym dopuszczalnym module $|\Delta I_3|$ przyrostu prądu I_3 łatwo wyliczymy z rysunku a) moduł przyrostu SEM E_2 , który ten przyrost prądu powoduje

$$\begin{aligned} |\Delta E_2| &= R_3 \Delta I_3 + R_2 \left(\Delta I_3 + \frac{R_3 \Delta I_3}{R_1} \right) = \left(R_3 + R_2 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right) \Delta I_3 = \\ &= \left(500 + 100 + \frac{100 \cdot 500}{200} \right) \cdot 10^{-3} = 0.85 \text{ V}. \end{aligned}$$

A więc przy wartościach SEM $E_2 = -10 \pm 0.85 \text{ V}$ zmiany prądu I_3 nie przekraczają 1 mA.



Rys. 2.30.1

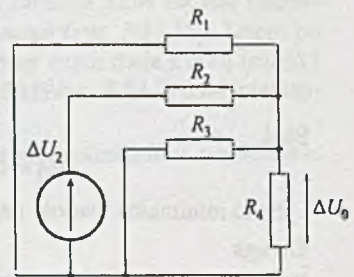
Zadanie 2.31. Dla wartości znamionowych elementów obliczymy napięcie U_0 metodą potencjałów węzłowych; otrzymamy

$$\left(\frac{3}{R} + \frac{2}{R_4} \right) U_0 = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{R},$$

a stąd

$$U_0 = \frac{(U_1 + U_2 + U_3) R_4}{3R_4 + R} = \frac{(-12 + 15 + 12) \cdot 20}{3 \cdot 20 + 10} = 4.86 \text{ V}.$$

Korzystając z zasady superpozycji można przyjąć, że przyrost napięcia U_0 jest spowodowany przyrostem napięcia U_2 przy przyrostach pozostałych sygnałów wejściowych równych zero (rys. 2.31.1).



Rys. 2.31.1

Zastosujemy jeszcze raz metodę potencjałów węzłowych dla układu z rys. 2.31.1

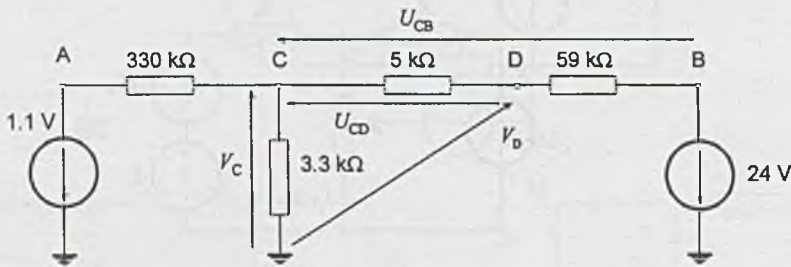
$$\Delta U_0 \left(\frac{3}{R} + \frac{1}{R_4} \right) = \frac{\Delta U_2}{R},$$

stąd przyrost napięcia wyjściowego

$$\Delta U_0 = \frac{\Delta U_2 R_4}{3R_4 + R} = \frac{1.5 \cdot 10}{3 \cdot 20 + 10} = 0.428 \text{ V},$$

co stanowi 8.8% przyrostu od wartości znamionowej.

Zadanie 2.32. Korzystając z zasady wyodrębniania i z faktu, że prąd I_s siatki triody można pominąć, rozważany obwód można uprościć do postaci przedstawionej na rys. 2.32.1.



Rys. 2.32.1

Z równania węzła C

$$\left(\frac{1}{330} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{64} \right) V_C = -\frac{1.1}{330} - \frac{24}{64}$$

obliczymy potencjał

$$V_C = -1.18 \text{ V}$$

i to jest maksymalna wartość napięcia U_s .

Ponieważ

$$V_B = -24 \text{ V},$$

więc

$$U_{CB} = V_C - V_B = -1.18 + 24 = 22.82 \text{ V},$$

$$U_{CD} = \frac{U_{CB}}{64} \cdot 5 = 1.78 \text{ V}.$$

Stąd

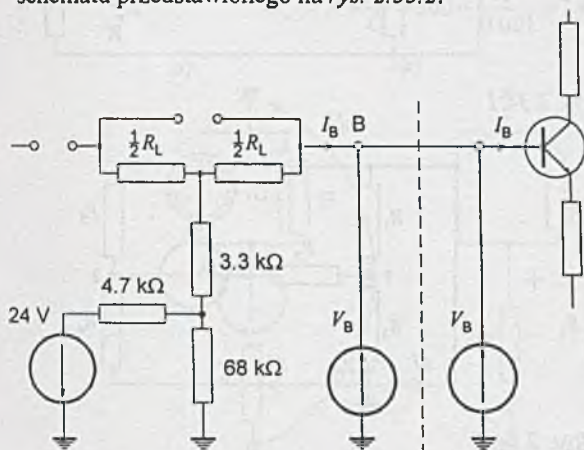
$$V_D = V_C - U_{CD} = -1.18 - 1.78 = -2.96 \text{ V}$$

i jest to minimalna wartość napięcia U_s zbieranego z potencjometru.

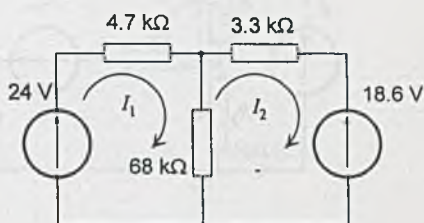
Uwaga

Pozostałą część obwodu można zastąpić stałymi SEM $E_1 = 1.1 \text{ V}$, $E_2 = 24 \text{ V}$, przy założeniu że nie zmieniają się parametry i napięcia w układzie, w przeciwnym razie należałoby pozostałą część obwodu zastąpić źródłami sterowanymi.

Zadanie 2.33. Zauważmy, że dla prądu stałego kondensatory stanowią przerwę, a cewka przedstawia sobą tylko opór czynny R_L (rys. 2.33.1). Włączmy dodatkowo (tylko na czas obliczeń) dwie SEM równe V_B , które nie zmieniają rozptywu prądów. Dalej założmy, że opór cewki R_L jest pomijalny w porównaniu z pozostałymi oporami układu i odetnijmy, korzystając z zasady wyodrębnienia, część obwodu na prawo od punktu B. Możemy wówczas obliczyć prąd I_B ze schematu przedstawionego na rys. 2.33.2.



Rys. 2.33.1



Rys. 2.33.2

Z równań prądów oczkowych

$$72.7 \cdot I_1 - 68 \cdot I_B = 24$$

$$-68 \cdot I_1 + 71.3 \cdot I_B = -18.6$$

otrzymamy

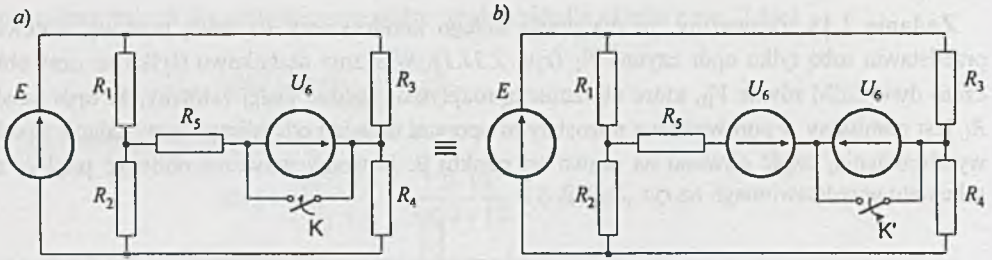
$$I_B = 0.494 \text{ mA.}$$

Zadanie 2.34. W celu rozwiązania zadania skorzystamy z zasady kompensacji i superpozycji. Napięcie na oporniku R_6 wynosi $U_6 = \frac{1}{2}U_v = 5.85 \text{ V}$. Korzystając z zasady kompensacji zastępujemy ten element SEM o wartości $U_6 = 5.85 \text{ V}$ (rys. 2.34.1a). Zwarcie SEM U_6 jest równoważne włączeniu do układu takiej samej SEM przeciwnie skierowanej (rys. 2.34.1b). Zatem po otwarciu klucza κ' na prąd źródła (SEM E) wpływają trzy SEM, przy czym dwie z nich (część I rys. 2.34.2) dają prąd I o wartości jak przed zmianą, a trzecia (część II rys. 2.34.2) daje interesujący nas przyrost prądu źródła ΔI .

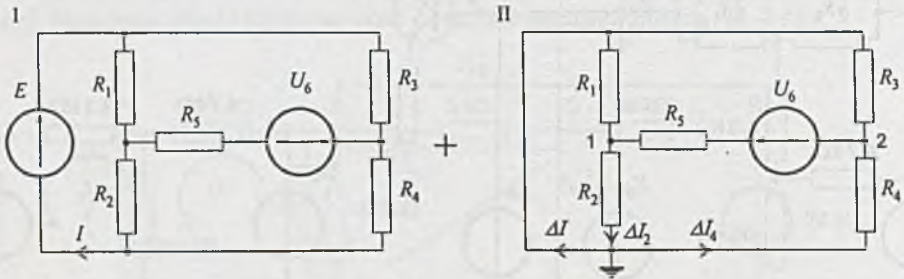
Do obliczenia wartości przyrostu prądu ΔI wykorzystamy metodę potencjałów węzłowych, otrzymamy wówczas układ równań:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) V_1 - \frac{1}{R_5} V_2 = \frac{U_6}{R_5},$$

$$-\frac{1}{R_5} V_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) V_2 = -\frac{U_6}{R_5}.$$



Rys. 2.34.1



Rys. 2.34.2

Podstawiając wartości liczbowe

$$\left(\frac{1}{500} + \frac{2}{100} + \frac{1}{500} \right) \cdot V_1 - \frac{1}{50} \cdot V_2 = \frac{5.85}{500}$$

$$-\frac{1}{500} \cdot V_1 + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{500} + \frac{1}{500} \right) \cdot V_2 = -\frac{5.85}{500}$$

i rozwiązując układ równań (1) (2) otrzymamy wartości potencjałów

$$V_1 = 0.732 \text{ V},$$

$$V_2 = -0.732 \text{ V},$$

a przyrosty prądów

$$\Delta I_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{0.732}{100} = 7.32 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 7.32 \text{ mA},$$

$$\Delta I_4 = \frac{V_2}{R_4} = \frac{-0.732}{500} = -1.46 \cdot 10^{-3} \text{ A} = -1.46 \text{ mA},$$

a więc zmiana prądu źródła

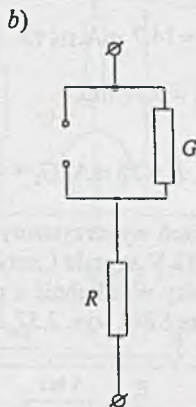
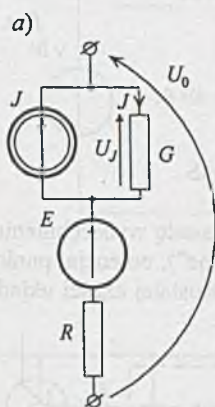
$$\Delta I = \Delta I_2 - \Delta I_4 = 7.32 - 1.46 = 5.86 \text{ mA}.$$

Zadanie 2.35. Korzystamy z twierdzenia Thévenina. Obliczamy najpierw napięcie U_0 na otwartych zaciskach dwójnika (rys. 2.35.1a)

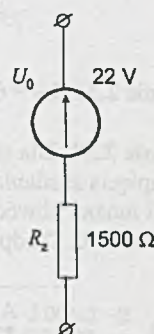
$$U_0 = E + U_J = E + J \frac{1}{G} = 12 + 10^{-2} \cdot \frac{1}{10^{-3}} = 12 + 10 = 22 \text{ V.}$$

Zastępczy opór (po zwarciu SEM i rozwarciu gałęzi z SPM) obliczymy z rys. 2.35.1b

$$R_z = R + \frac{1}{G} = 500 + \frac{1}{0.001} = 1500 \Omega.$$



Rys. 2.35.1



Rys. 2.35.2

Zatem dwójnikowi z rys. 2.35 jest równoważne źródło napięciowe podane na rys. 2.35.2.

Zastępcze źródło prądowe obliczymy korzystając z twierdzenia Nortona. Prąd zwarcia dwójnika I_z (rys. 2.35.3) obliczymy metodą prądów oczkowych

$$I_{11} = J = 0.01 \text{ A}, \quad (1)$$

$$\left(R + \frac{1}{G}\right) I_{12} - \frac{1}{G} I_{11} = E, \quad (2)$$

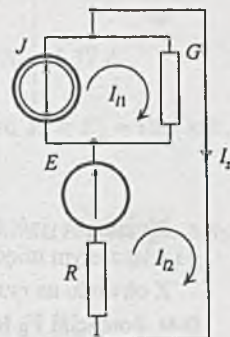
$$\left(500 + \frac{1}{0.001}\right) I_{12} - \frac{1}{0.001} \cdot 0.01 = 12, \quad (2')$$

stąd

$$I_{12} = 0.0147 \text{ A} = 14.7 \text{ mA},$$

więc

$$I_z = I_{12} = I_z = 14.7 \text{ mA}.$$



Rys. 2.35.3

Natomiast przewodność zastępcza (na podstawie rys. 2.35.1b) jest równa

$$G_z = \frac{G \frac{1}{R}}{G + \frac{1}{R}} = \frac{0.001 \cdot \frac{1}{500}}{0.001 + \frac{1}{500}} = 0.000666 = 0.67 \text{ mS},$$

czyli równoważne dla analizowanego dwójnika źródło prądowe ma parametry jak na rys. 2.35.4.

Sprawdźmy poprawność obliczeń. Ponieważ schematy zastępcze z rys. 2.35.2 i 2.35.4 są równoważne, powinny być spełnione zależności

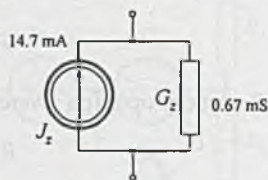
$$\frac{U_0}{R_z} = I_z,$$

$$\frac{1}{R_z} = G_z.$$

Tak jest istotnie, bowiem

$$\frac{22}{1500} \approx 0.0147 \text{ A} = 14.7 \text{ mA},$$

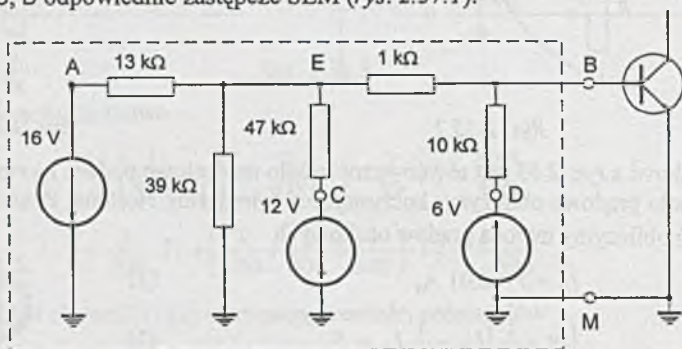
$$\frac{1}{1500} \approx 0.00067 \text{ S} = 0.67 \text{ mS}.$$



Rys. 2.35.4

Zadanie 2.36. $U_0 = 6.5 \text{ V}$, $R_z = 250 \Omega$, $I_z = 26 \text{ mA}$, $G_z = 4 \text{ mS}$.

Zadanie 2.37. Dla uproszczenia obliczeń wykorzystamy zasadę wyodrębnienia. Przy założeniu że napięcia zasilania układu $+6 \text{ V}$, -12 V są stałe („sztywne”), potencjał punktu A też się nie zmienia i można obwódysterowania bazy wyodrębnić z pozostałej części układu przyłączając do punktów A, C, D odpowiednie zastępcze SEM (rys. 2.37.1).



Rys. 2.37.1

Można przyjąć, że baza tranzystora jestysterowana zastępczym generatorem napięcia stałego włączonym między punkty B i M. Obliczmy parametry tego generatora.

Z obwodu na rys. 2.37.2 można wyznaczyć napięcie biegu jałowego U_0 na zaciskach dwójnika B-M. Potencjał V_E łatwo wyznaczyć z równania

$$\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{39} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{11} \right) \cdot V_E = -\frac{16}{18} - \frac{12}{4.7} + \frac{6}{11},$$

wówczas

$$V_E = -7.52 \text{ V},$$

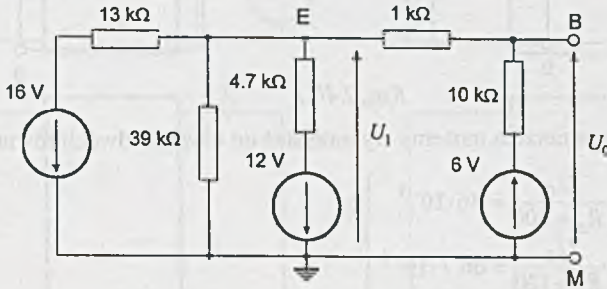
a zatem

$$U_0 = 6 + U_1 = 6 + \frac{V_E - 6}{11} \cdot 10 = 6 + \frac{-7.52 - 6}{11} \cdot 10 = -6.3 \text{ V}.$$

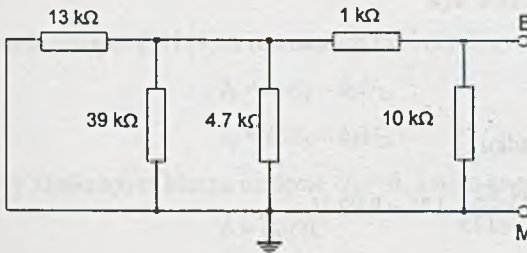
Opór zastępczy R_z dwójnika B - M wyznaczmy z rys. 2.37.3; wynosi on

$$R_z = 3.06 \text{ k}\Omega.$$

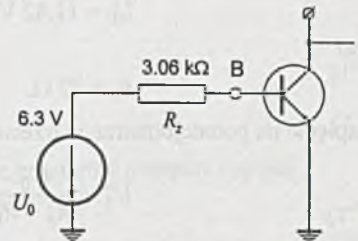
Zatem obwód wejściowy tranzystora może być sprowadzony do postaci pokazanej na rys. 2.37.4. Postępując podobnie, gdy klucz K jest zamknięty, otrzymamy $U_0 = -4.2 \text{ V}$, $R_z = 3.06 \text{ k}\Omega$ (sprawdzić!).



Rys. 2.37.2



Rys. 2.37.3



Rys. 2.37.4

Zadanie 2.38. Jedną z możliwości - w szereg z opornikami R_1 i R_2 włączyć $R'_1 = R'_2 = 10.8 \text{ k}\Omega$, a $P'_1 = P'_2 = 3.41 \text{ mW}$.

Zadanie 2.39. Jedną z możliwości - szeregowo z R_1 włączyć opornik 143Ω , równolegle z R_2 włączyć opornik $30 \text{ k}\Omega$.

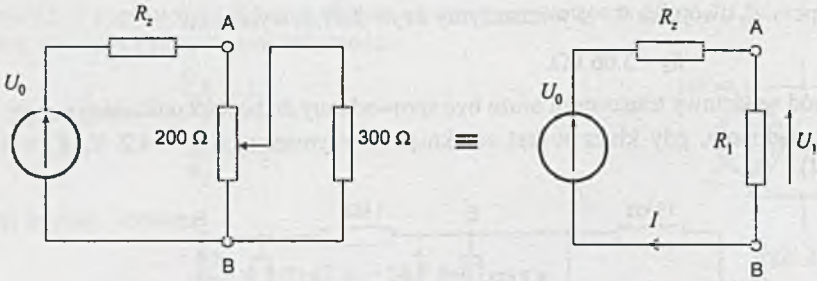
Wskazówka: skorzystać z twierdzenia Thévenina.

Zadanie 2.40. Korzystając z twierdzenia Thévenina można tematowy obwód przedstawić jak na rys. 2.40.1. Opór R_1 przy skrajnych położeniach suwaka wynosi

$$R'_1 = 200 \Omega \quad \text{oraz} \quad R''_1 = \frac{200 \cdot 300}{500} = 120 \Omega.$$

Natomiast, gdy suwak jest w położeniu środkowym (trzeci przypadek)

$$R''_1 = 100 + \frac{100 \cdot 300}{400} = 100 + 75 = 175 \Omega.$$



Rys. 2.40. I

Wyniki pomiarów amperomierzem możemy wykorzystać do ułożenia dwóch równań

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_0}{R_z + 200} &= 46 \cdot 10^{-3} \\ \frac{U_0}{R_z + 120} &= 66.7 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \right\}$$

z których obliczymy

$$U_0 = 11.82 \text{ V}$$

oraz

$$R_z = 57 \Omega.$$

Napięcie na potencjometrze w trzecim przypadku

$$U_1'' = \frac{U_0}{R_z + R_1} R_1'' = \frac{11.82}{57 + 175} \cdot 175 = 8.93 \text{ V}.$$

Stąd wskazanie woltomierza (rys. 2.40) wynosi

$$U_V = 12 - 8.93 = 3.07 \text{ V}.$$

Zadanie 2.41. Skorzystajmy najpierw z twierdzenia o kompensacji. Zastępujemy obwód po stronie wtórnej czwórnika SEM o wartości $U_2 = E_2 + RI_2$ (rys. 2.41.1a i b).

Z kolei, z zasady superpozycji (rys. 2.41.1c i d) mamy

$$I_1 = I_1' + I_1'' = k_1 E_1 - k_2 U_2, \quad (1)$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = k_3 E_1 - k_4 U_2, \quad (2)$$

gdzie k_i - stałe współczynniki o wymiarze przewodności.

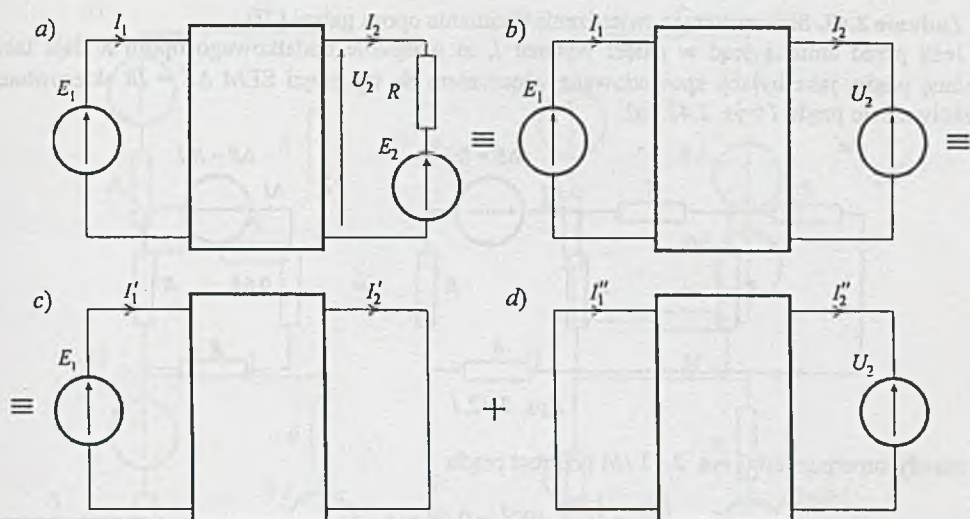
Współczynnik k_1 można interpretować jako przewodność wejściową czwórnika (rys. 2.41.1c oraz równanie (1)).

Podobnie (rys. 2.41.1d oraz równanie (2)) k_4 można interpretować jako przewodność wyjściową czwórnika. Ponieważ czwórnik jest symetryczny, to

$$k_1 = k_4. \quad (3)$$

Natomiast z zasady wzajemności wynika równość

$$k_2 = k_3. \quad (4)$$



Rys. 2.41.1

Uwzględniając (3) i (4) w równaniach (1) i (2) otrzymujemy

$$I_1 = k_1 E_1 - k_2 U_2, \quad (1')$$

$$I_2 = k_2 E_1 - k_1 U_2. \quad (2')$$

Przy zamkniętym kluczu napięcie $U_2 = 0$, a więc na podstawie pomiarów możemy napisać

$$6 = k_1 \cdot 60, \quad (1'')$$

$$2 = k_2 \cdot 60, \quad (2'')$$

stąd

$$k_1 = 0.1 \text{ mS} \quad \text{oraz} \quad k_2 = 0.033 \text{ mS}.$$

Zatem przy otwartym kluczu K równania czwórnikowe możemy zapisać w postaci układu równań

$$I_1 = 0.1 \cdot 60 - 0.033(35 + 5I_2), \quad (1''')$$

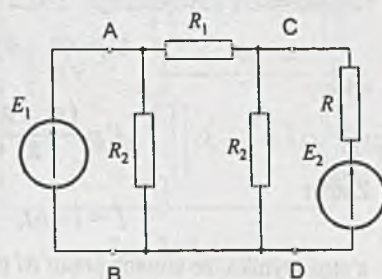
$$I_2 = 0.033 \cdot 60 - 0.1(35 + 5I_2), \quad (2''')$$

z którego wyliczymy wskazania przyrządów. Wskazania te wynoszą

$$I_1 = 5 \text{ mA} \quad \text{oraz} \quad I_2 = -1 \text{ mA}.$$

Uwaga

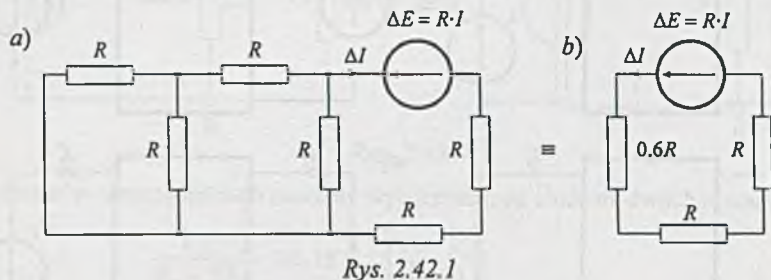
Inny sposób rozwiązania może polegać na zastąpieniu czwórnik ABCD prostym układem, np. czwornikiem symetrycznym kształtu Π (rys. 2.41.2), dla którego na podstawie pomiarów określić można wartości rezystorów R_1 i R_2 , a potem obliczyć wskazania amperomierzy.



Rys. 2.41.2

Zadanie 2.42. Skorzystamy z twierdzenia o zmianie oporu gałęzi [2].

Jeśli przed zmianą prąd w gałęzi wynosił I , to wtrącenie dodatkowego oporu R daje taką zmianę prądu, jaka byłaby spowodowana włączeniem do tej gałęzi SEM $\Delta E = IR$ skierowanej przeciwnie do prądu I (rys. 2.42.1a).



Rys. 2.42.1

Z zasady superpozycji (i rys. 2.42.1b) przyrost prądu

$$\Delta I = \frac{RI}{2.6R} = \frac{1.76}{2.6} \cdot 10^{-3} = 0.68 \text{ mA}.$$

Zatem amperomierz przy otwartym kluczu K wskaże prąd

$$I' = I - \Delta I = 1.76 - 0.68 = 1.08 \text{ mA}.$$

Uwaga 1

Do cytowanego wyżej twierdzenia można dojść korzystając z twierdzenia Thévenina i zasady superpozycji. Obwód z rys. 2.42 przed otwarciem klucza daje się uprościć do postaci jak na rys. 2.42.2.

Przy otwartym kluczu obowiązuje schemat pokazany na rys. 2.42.3.

Z zasady superpozycji mamy

$$I' = I' - \Delta I.$$

Pokażemy teraz, że składowa I' (rys. 2.42.3c) jest równa prądowi I (rys. 2.42.2) przed zmianą oporu gałęzi.

Z prawa Ohma

$$I' = \frac{U_0 + RI}{R_z + 2R}.$$

Natomiast dla obwodu z rys. 2.42.2 napięcie U_0 jest równe

$$U_0 = (R_z + R)I,$$

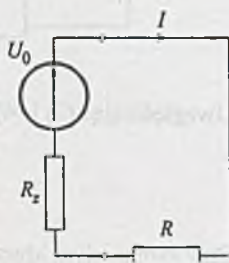
więc

$$I' = \frac{(R_z + R)I + RI}{R_z + 2R} = I.$$

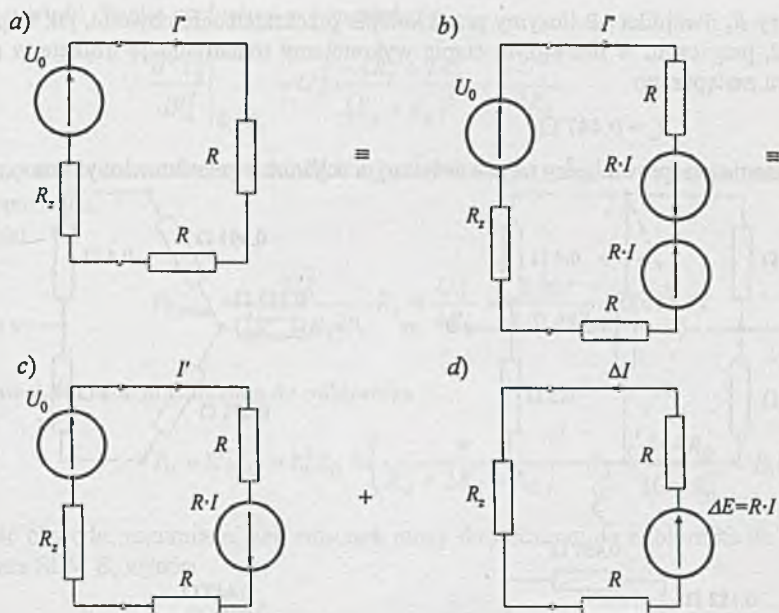
Zatem

$$I' = I - \Delta I,$$

a stąd wynika, że zmiana prądu ΔI pochodzi od SEM $\Delta E = I \cdot R$ włączonej przeciwnie do kierunku prądu I (rys. 2.42.3d).



Rys. 2.42.2



Rys. 2.42.3

Uwaga 2

Innym sposobem uzyskania rozwiązania może być skorzystanie wprost z twierdzenia Thévenina (sprawdzić!).

Zadanie 2.43. 13.5 mA.

Zadanie 2.44. 130.1 mA oraz 7.07 V.

Zadanie 2.45. Skorzystamy najpierw z twierdzenia Thévenina zastępując dwójnik AB źródłem napięciowym.

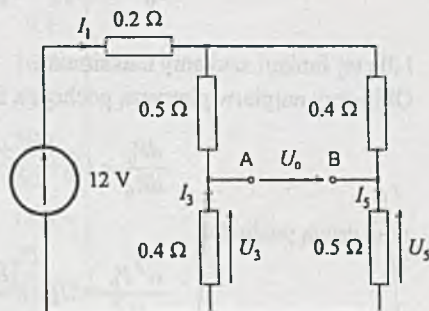
Wartość SEM U_0 tego źródła policzymy ze schematu obwodu pokazanego na rys. 2.45.1. Ponieważ

$$I_1 = \frac{12}{0.2 + \frac{1}{2} \cdot 0.9} = 18.46 \text{ A},$$

$$I_3 = I_5 = \frac{1}{2} I_1 = 9.23 \text{ A},$$

$$U_3 = 0.4 \cdot I_3 = 0.4 \cdot 9.23 = 3.69 \text{ V},$$

$$U_5 = 0.5 \cdot I_5 = 0.5 \cdot 9.23 = 4.61 \text{ V},$$



Rys. 2.45.1

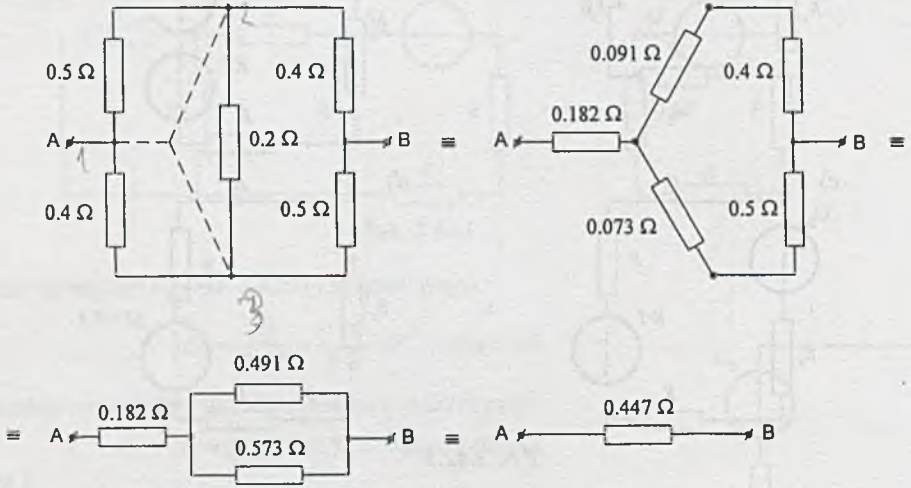
więc

$$U_0 = U_5 - U_3 = 4.61 - 3.69 = 0.92 \text{ V}.$$

Opór zastępczy R_z dwójnika AB liczymy przez kolejne przekształcenie obwodu, jak to pokazano na rys. 2.45.2, przy czym w pierwszym etapie wykonujemy transfigurację trójkąta w gwiazdę. Wartość oporu zastępczego

$$R_z = 0.447 \, \Omega.$$

Dalsze rozważania przeprowadzimy na równoważnym schemacie przedstawionym na rys. 2.45.3.



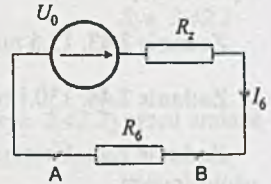
Rys. 2.45.2

Policzymy moc wydzieloną na oporniku R_6

$$P_6 = I_6^2 \cdot R_6 = \frac{U_0^2}{(R_z + R_6)^2} R_6.$$

Ponieważ mamy dobrać opór R_6 , potraktujemy R_6 jako zmienną, czyli

$$P_6 = P(R_6) = U_0^2 \frac{R_6}{(R_z + R_6)^2}$$



Rys. 2.45.3

i dla tej funkcji szukamy maksimum.

Obliczmy najpierw pierwszą pochodną funkcji mocy podług zmiennej R_6

$$\frac{dP_6}{dR_6} = U_0^2 \frac{(R_z + R_6)^2 - 2R_6(R_z + R_6)}{(R_z + R_6)^4} = U_0^2 \frac{R_z - R_6}{(R_z + R_6)^3}.$$

oraz drugą pochodną

$$\frac{d^2 P_6}{dR_6^2} = U_0^2 \frac{-(R_z + R_6)^3 - 3(R_z - R_6)(R_z + R_6)^2}{(R_z + R_6)^6} = U_0^2 \frac{-4R_z + 2R_6}{(R_z + R_6)^4}.$$

Warunek konieczny na istnienie ekstremum (zerowa wartość pierwszej pochodnej) jest spełniony, jeśli $R_6 = R_z$.

Policzmy wartość drugiej pochodnej w tym punkcie

$$\left. \frac{d^2 P_6}{dR_6^2} \right|_{R_6=R_z} = U_0^2 \frac{-4R_z + 2R_z}{(R_z + R_z)^4} = -\frac{U_0^2}{8R_z}.$$

Jest ona ujemna, a zatem dla wartości $R_6 = R_z = 0.447 \Omega$ jest osiągane maksimum mocy wydzielonej na oporze R_6 .

Wynosi ono

$$P_{6,\max} = \frac{U_0^2}{(R_z + R_z)^2} \cdot R_z = \frac{U_0^2}{4R_z} = \frac{0.92^2}{4 \cdot 0.447} = 0.475 \text{ W}.$$

Zadanie 2.46. Moc dostarczona do odbiornika

$$P_0 = U_0 I_0 = I_0^2 R_0 = \left(\frac{E}{R_w + 2R_d + R_0} \right)^2 \cdot R_0 = \frac{144 R_0}{10 + R_0^2} = P_0(R_0).$$

Sprawność obwodu, rozumiana jako stosunek mocy dostarczanej do odbiornika do mocy wydawanej przez SEM E , wynosi

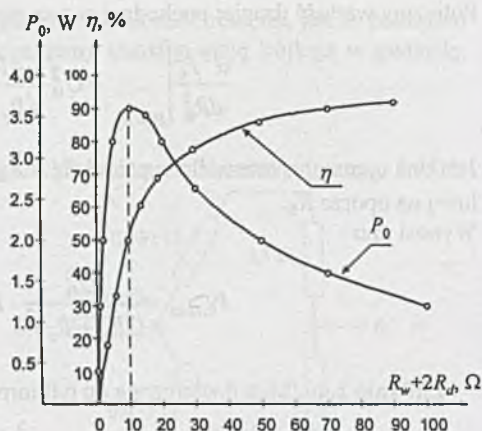
$$\begin{aligned} \eta &= \frac{U_0 I_0}{EI_0} \cdot 100\% = \frac{R_0}{R_w + 2R_d + R_0} \cdot 100\% = \\ &= \frac{R_0}{10 + R_0} \cdot 100\% = \eta(R_0), \%. \end{aligned}$$

Wartości P_0 i η dla różnych wartości R_0 z przedziału $0 \div 100 \Omega$ są podane w tablicy 2.46.1 oraz przedstawione graficznie na rys. 2.46.1.

Tablica 2.46.1

$R_6 \Omega$	P_0, W	$\eta, \%$
0	0	0
1	1.19	9.1
2	2	16.7
5	3.2	33.3
10	3.6	50
15	3.46	60
20	3.2	66.7
30	2.7	75
50	2	83.4
70	1.58	87.5
100	1.19	91

Zwróćmy uwagę, że maksimum mocy występuje dla wartości $R_0 = 10 \Omega$, tj. gdy $R_0 = R_w + 2R_d$ (porównaj z zadaniem 2.45.). Mamy wówczas dopasowanie odbiornika do pozostałej części obwodu. Równocześnie widać, że przy maksimum mocy odbiornika nie występuje maksymalna sprawność. Wynosi ona wtedy 50%. Przy praktycznych zagadnieniach przesyłu sygnałów chodzi zwykle o dostarczenie jak największej mocy sygnału do odbiornika. Dobiera się zatem opór odbiornika R_0 tak, aby uzyskać dopasowanie, rezygnując z uzyskania maksymalnej sprawności.



Rys. 2.46.1

Zadanie 2.47. Moc dostarczona do odbiornika wynosi

$$P_0 = U_0 I_0 = I_0^2 R_0 = \left(\frac{E}{R_w + 2R_d + R_0} \right)^2 R_0 = \frac{144000}{(R_w + 2R_d + 10)^2} = P_0(R_w + 2R_d),$$

natomiast sprawność układu

$$\eta = \frac{U_0 I_0}{E I_0} = \frac{U_0}{E} = \frac{R_0}{R_w + 2R_d + R_0} = \frac{10}{R_w + 2R_d + 10} = \eta(R_w + 2R_d)$$

Dla wybranych wartości $R_w + 2R_d$ z przedziału $[0, 100] \Omega$ obliczono moc odbiornika P_0 i sprawność układu (tablica 2.47.1). Graficzną interpretację tych zależności podano na rys. 2.47.1.

Tablica 2.47.1

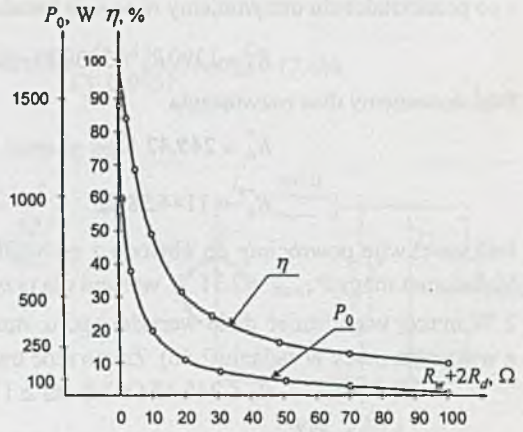
$R_w + 2R_d, \Omega$	P_0, W	$\eta, \%$
0	1440	100
2	1000	83.4
5	640	66.7
10	360	50
20	160	33.3
30	90	25
50	40	16.7
70	22.5	12.5
100	11.9	9.1

Z wykresu przedstawionego na rys. 2.47.1 wynika, że zarówno największą moc dostarczoną do odbiornika, jak i największą sprawność układu uzyskujemy dla przypadku granicznego, gdy $(R_w + 2R_d) \rightarrow 0$.

W praktycznych zagadnieniach przesyłu dużych mocy zależy nam na dużej sprawności układu. Należy wówczas dążyć, by opór wewnętrzny źródła i opór doprowadzeń były małe w stosunku do wartości odbiornika.

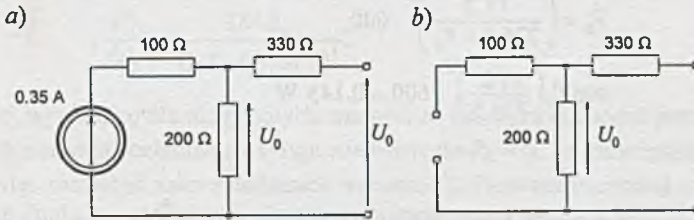
Zwróćmy jeszcze uwagę, że przy tak postawionym zagadnieniu dla wartości $R_w + 2R_d = R_0 = 10 \Omega$ sprawność układu wynosi 50%, ale moc dostarczana do odbiornika stanowi $\frac{1}{4}$ wartości maksymalnej.

Należy wyraźnie podkreślić, skąd wynika zasadnicza różnica przebiegów zależności P_0 i η w tym i poprzednim zadaniu (2.46), mimo że schematy zastępcze obwodów są podobne. W zadaniu 2.46 zakładaliśmy, że parametry źródła i linii przesyłowej są narzucone, a dobieraliśmy obciążenie. Natomiast w tym zadaniu opór obciążenia jest zadany, a może się zmieniać opór źródła i linii przesyłowej.



Rys. 2.47.1

Zadanie 2.48. Skorzystamy najpierw z twierdzenia Thévenina. Aktywny dwójnik przyłączony do zacisków opornika R_4 zastąpimy równoważnym generatorem napięciowym.



Rys. 2.48.1

Parametry tego generatora policzymy na podstawie rys. 2.48.1a i b. Łatwo sprawdzić, że

$$U_0 = 200 \cdot 0.35 = 70 \text{ V},$$

$$R_z = 330 + 200 = 530 \Omega.$$

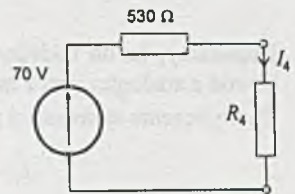
Rozważany obwód można teraz przedstawić w prostszej postaci jak na rys. 2.48.2.

Moc wydzielana na oporniku R_4 wynosi

$$P_4 = I_4^2 R_4 = \left(\frac{70}{530 + R_4} \right)^2 R_4.$$

Dla zadanej wartości granicznej 2 W mamy równanie

$$\left(\frac{70}{530 + R_4} \right)^2 R_4 = 2,$$



Rys. 2.48.2

a po przekształceniu otrzymujemy równanie kwadratowe w postaci

$$R_4^2 - 1390R_4 + 280900 = 0.$$

Stąd dostaniemy dwa rozwiązania

$$R_4^* = 245.42 \, \Omega,$$

$$R_4^{**} = 1144.58 \, \Omega.$$

Jeśli na chwilę powrócimy do obwodu z rys. 2.48.2, to łatwo zinterpretujemy oba rozwiązania. Maksimum mocy $P_{4\max} = 2.31 \, \text{W}$ wystąpi dla przypadku dopasowania, tj. $R_4 = 530 \, \Omega$. Dla mocy $2 \, \text{W}$ muszą więc istnieć dwie wartości oporu: mniejsza R_4^* i większa R_4^{**} od $530 \, \Omega$ (porównaj z wykresem mocy w zadaniu 2.46). Zatem moc tracona na oporniku R_4 nie przekroczy $2 \, \text{W}$, jeśli $R_4 \leq 245.42 \, \Omega$ lub $R_4 \geq 1144.58 \, \Omega$.

Zadanie 2.49. Korzystamy z zasady Thévenina i zastępujemy część obwodu równoważnym źródłem $U_0 = 11.2 \, \text{V}$, $R_z = 124.5 \, \Omega$ (rys. 2.49.1). Łatwiej teraz policzyć prąd

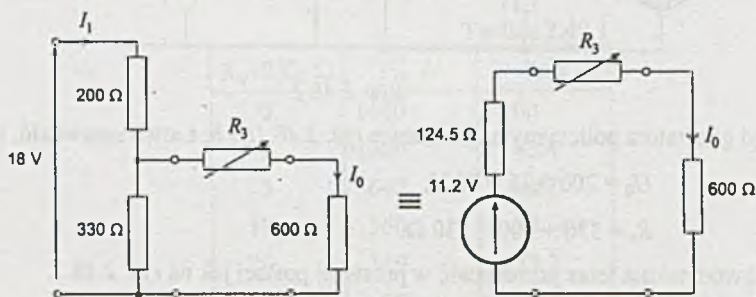
$$I_0 = \frac{11.2}{724.5 + R_3}$$

oraz moc traconą na oporze obciążenia

$$P_0 = \left(\frac{11.2}{724.5 + R_3} \right)^2 \cdot 600,$$

$$\sup P_0 \left(\frac{11.2}{724.5} \right)^2 \cdot 600 = 0.143 \, \text{W}$$

dla $R_3 = 0$.



Rys. 2.49.1

Zauważmy, że do takiego wniosku można dojść bez obliczeń, porównując tylko analizowany obwód z analogicznym z zadania 2.47.

Do wyliczenia sprawności potrzebna jest jeszcze wartość prądu I_1 (rys. 2.49), gdy $R_3 = 0$

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R_0}{R_2 + R_0}} = \frac{18}{200 + \frac{330 \cdot 600}{330 + 600}} = 0.0457 \, \text{A}.$$

Stąd sprawność układu

$$\eta = \frac{P_0}{P_1} \cdot 100\% = \frac{P_0}{UI_1} \cdot 100\% = \frac{0.143}{18 \cdot 0.0457} \cdot 100\% = 17.4\%.$$

Zadanie 2.50. Do obliczeń wykorzystamy metodę potencjałów węzłowych (rys. 2.50.1).

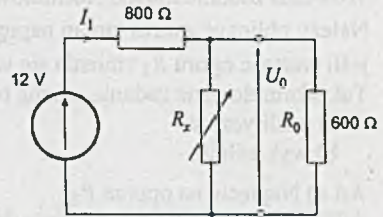
$$\left(\frac{1}{800} + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{600} \right) U_0 = \frac{12}{800},$$

a stąd

$$U_0 = \frac{12R_x}{2.33R_x + 800}.$$

Moc P_0 wydzielona na oporze obciążenia

$$P_0 = \frac{U_0^2}{R_0} = 144 \cdot \frac{R_x^2}{(2.33R_x + 800)^2 \cdot 600} = P_0(R_x).$$



Rys. 2.50.1

Zbadajmy pierwszą pochodną tej funkcji podług nieznanej wartości R_x ; otrzymamy

$$\frac{dP_0}{dR_x} = \frac{384R_x}{(2.33R_x + 800)^3}.$$

Z zależności tej wynika, że dla nieujemnych wartości R_x pierwsza pochodna jest nieujemna. Dla wartości $R_x = 0$ pierwsza pochodna się zeruje, ale wówczas $P_0 = 0$. To rozwiązanie nas nie interesuje. Należy więc rozważyć zakres dodatnich wartości R_x . Pierwsza pochodna jest wówczas dodatnia, a zatem funkcja jest rosnąca. Graniczna wartość mocy wystąpi więc dla nieskończenie dużej wartości oporu R_x i wyniesie ona

$$\lim_{R_x \rightarrow \infty} P_0 = \frac{144}{2.33^2 \cdot 600} = 0.0442 \text{ W}.$$

Do tego samego wniosku można dojść natychmiast, jeśli zwrócimy uwagę na strukturę obwodu z rys. 2.50. Ponieważ opór obciążenia R_0 jest stały, największa wartość mocy traconej na nim wystąpi, jeśli popłynie przezeń największy prąd, a to z kolei wystąpi, jeśli w bocznikującej gałęzi będzie przerwa.

Policzmy dla tego przypadku moc wydawaną przez SEM

$$P_1 = EI_1 = 12 \cdot \frac{12}{800 + 600} = 0.1029 \text{ W}.$$

Sprawność wynosi więc

$$\eta = \frac{P_0}{P_1} \cdot 100\% = \frac{0.0442}{0.1029} \cdot 100\% = 42.97\%.$$

Zadanie 2.51. Problem ten można łatwo rozwiązać korzystając z zasady Thévenina. Parametry zastępczego źródła widzianego z zacisków A-B są równe

$$U_0 = 0.577 \text{ V},$$

$$R_z = 290 \Omega.$$

Wówczas zadanie można sformułować w prostszej postaci:

Należy obliczyć zakres zmian napięcia U_5 w obwodzie z rys. 2.51.1, jeśli wartość oporu R_5 zmienia się w granicach $200 \div 500 \Omega$.

Tak sformułowane zadanie można rozwiązać:

- analitycznie,
- wykreslnie.

Ad a) Napięcie na oporze R_5

$$U_5 = \frac{U_0}{R_z + R_5} R_5$$

jest równe dla granicznych wartości oporu R_5

$$U_5' = \frac{0.577}{290 + 200} \cdot 200 = 0.2355 \text{ V, gdy } R_5' = 200 \Omega,$$

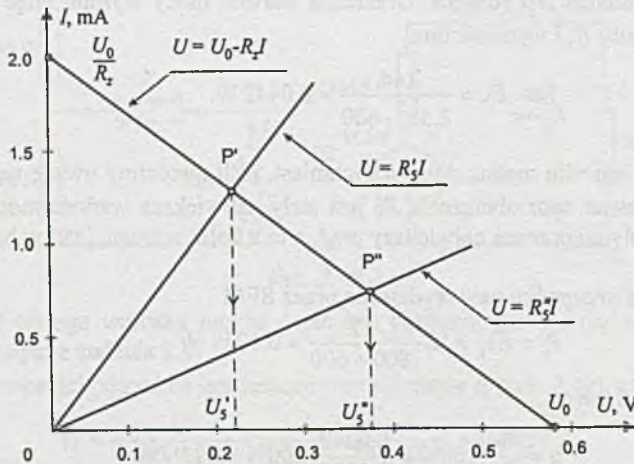
$$U_5'' = \frac{0.577}{290 + 500} \cdot 500 = 0.3652 \text{ V, gdy } R_5'' = 500 \Omega.$$

Ad b) Na rys. 2.51.2 przedstawiono charakterystykę źródła zastępczego, którą można zapisać równaniem

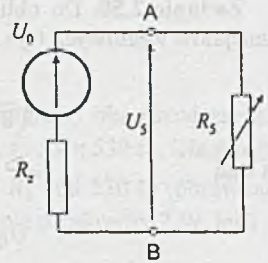
$$U = U_0 - R_z I,$$

oraz charakterystyki opornika R_5 dla granicznych wartości jego oporu R_5' i R_5'' .

Przecięcia charakterystyk wyznaczają punkty P' i P'' pracy obwodu. Ich rzuty na oś odciętych wyznaczają graniczne wartości napięć U_5' i U_5'' .



Rys. 2.51.2



Rys. 2.51.1

Zadanie 2.53. $R_5 = 211 \Omega$, a $P_5 = 59.8 \text{ mW}$.

Zadania 2.54. $R'_3 = 44.5 \Omega$, a $R''_3 = 100 \Omega$.

Zadanie 2.55.

a) $R_5 = 56.6 \Omega$, a $P_5 = 102 \text{ mW}$,

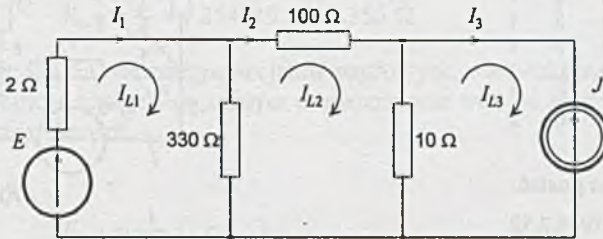
b) $R'_5 = 9.4 \Omega$, a $R''_5 = 337 \Omega$.

Zadanie 2.56. a) $R_3 = \infty$, b) $R_3 = 267 \Omega$, c) $R_3 = 0$.

Zadanie 2.57. 1.05 W .

Zadanie 2.58. Zadanie rozwiążemy metodą oczkową (rys. 2.58.1), przyjmując oznaczenia: $I_1 = I_{L1}$, $I_2 = I_{L2}$ oraz $I_3 = I_{L3}$; wówczas

$$\begin{cases} 332 \cdot I_1 - 330 \cdot I_2 = E \\ -330 \cdot I_1 + 440 \cdot I_2 - 10 \cdot I_3 = 0 \\ I_3 = -J \end{cases}$$



Rys. 2.58.1

Z tego układu wyznaczamy

$$I_2 = 0.008876 \cdot E - 0.08929 \cdot J,$$

a ogólnie możemy to zapisać w postaci

$$I_2 = k_1 E + k_2 J,$$

gdzie k_1 i k_2 są współczynnikami wpływu obu źródeł na prąd I_2 . Mają one następującą interpretację:

$$k_1 = 0.008876 \frac{\text{A}}{\text{V}} = 8.876 \frac{\text{mA}}{\text{V}}$$

- jeśli SEM E wzrośnie o 1 V (przy pozostałych parametrach obwodu nie zmienionych), to powoduje to wzrost prądu I_2 o 8.876 mA ,

$$k_2 = -0.008929 \frac{\text{A}}{\text{A}} = -89.29 \frac{\text{mA}}{\text{A}}$$

- jeśli SPM J wzrośnie o 1 A (przy pozostałych parametrach obwodu nie zmienionych), to powoduje to ubytek prądu I_2 o 89.25 mA .

Zadanie 2.59. $U_6 = k_1 \cdot J_1 + k_2 \cdot E_2 + k_5 \cdot E_5$, a $k_1 = 12.5 \frac{\text{A}}{\text{A}}$,
 $k_2 = 0.25 \frac{\text{V}}{\text{V}}$ oraz $k_5 = 0.38 \frac{\text{V}}{\text{V}}$.

Zadanie 2.60. Opór zastępczy $R_{1-8} = R_{1-0} = R_{ab}$ można obliczyć np. po dołączeniu między zaciski 1-0 SEM $E_1 = 1 \text{ V}$ (rys. 2.60.1) i obliczeniu prądu I źródła; wówczas

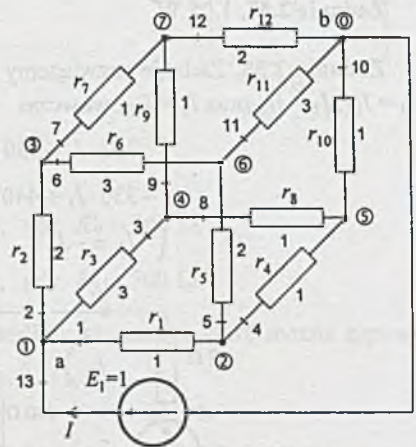
$$R_{1-8} = \frac{E}{I}.$$

Do obliczenia wartości prądu I można wykorzystać program ALINIES [3].

Ad a) Dla numeracji węzłów i gałęzi jak na rys. 2.60.1 dane wejściowe mają postać:

Zadanie 2.60a {dane do programu ALINIES}

E1	1	0	1
r1	1	2	1
r2	1	3	2
r3	1	4	3
r4	2	5	1
r5	2	6	2
r6	3	6	3
r7	3	7	1
r8	4	5	1
r9	4	7	1
r10	5	0	1
r11	6	0	3
r12	7	0	2
END			



Rys. 2.60.1

Wydruk wyników ma postać:

ALINIES 1996.2.12

Zadanie 2.60a

E1	1	0	1
r1	1	2	1
r2	1	3	2
r3	1	4	3
r4	2	5	1
r5	2	6	2
r6	3	6	3
r7	3	7	1
r8	4	5	1
r9	4	7	1
r10	5	0	1
r11	6	0	3
r12	7	0	2

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1 =	1.00000
V2 =	0.63858
V3 =	0.58782
V4 =	0.48832
V5 =	0.37563
V6 =	0.44162
V7 =	0.43046

ELEMENTY BIERNE

	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC TRACONA
	WP	WK	I	U	P
r1	1	2	0.36142	0.36142	0.13063
r2	1	3	0.20609	0.41218	0.08495
r3	1	4	0.17056	0.51168	0.08727
r4	2	5	0.26294	0.26294	0.06914
r5	2	6	0.09848	0.19695	0.01940
r6	3	6	0.04873	0.14619	0.00712
r7	3	7	0.15736	0.15736	0.02476
r8	4	5	0.11269	0.11269	0.01270
r9	4	7	0.05787	0.05787	0.00335
r10	5	0	0.37563	0.37563	0.14110
r11	6	0	0.14721	0.44162	0.06501
r12	7	0	0.21523	0.43046	0.09265

ELEMENTY AKTYWNE

	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC TRACONA
	WP	WK	I	U	P
E1	1	0	0.73807	1.00000	0.73807

Z otrzymanych wyników wybieramy wartość prądu źródła $I = 0.73807$ A, a

$$R_{1-8} = \frac{E}{I} = 1.354885 \Omega \approx 1.355 \Omega.$$

Program ALINIES oblicza wartości potencjałów węzłowych, wartości prądów płynących przez każdy element i wartość napięcia na każdym elemencie oraz wartość mocy pobieranej (lub wydawanej) przez każdy element.

Ad b)

$$R_{1-8} = \frac{1}{1.2} \Omega = \frac{5}{6} \Omega.$$

W tym przypadku R_{1-8} łatwo też obliczyć wprost, korzystając z symetrii obwodu, bowiem

$$\frac{1}{3}I + \frac{1}{6}I + \frac{1}{3}I = 1 \quad \text{więc} \quad I = \frac{5}{6} \text{ A} \quad \text{a} \quad R_{1-8} = \frac{5}{8} \Omega.$$

W programie ALIOS 1 [1] nie można zadeklarować idealnej bezoporowej SEM. Deklarujemy więc w szereg z jednostkową SEM $E_1 = E_{10} = 1$ V jej np. jednostkowy opór wewnętrzny $R_0 = 1 \Omega$.

Tekstowy zbiór danych charakteryzujących obwód i spełniających wymagania programu może mieć (dla danych a)) następującą postać:

zadanie nr 2.60

E10	1	0	1	1
RR1	1	2	1	
RR2	1	3	2	
RR3	1	4	3	
RR4	2	5	1	
RR5	2	6	2	
RR6	3	6	3	
RR7	3	7	1	
RR8	4	5	1	

RR9	4	7	1
R10	5	0	1
R11	6	0	3
R12	7	0	2
END			

Wynik obliczeń ma wówczas postać:

ALIOS 1996 - 9 - 29
zadanie nr 2.60

E10	1	0	1.000	1.000
RR3	1	2	1.000	0.000
RR2	1	3	2.000	0.000
RR3	1	4	3.000	0.000
RR4	2	5	1.000	0.000
RR5	2	6	2.000	0.000
RR6	3	6	3.000	0.000
RR7	3	7	1.000	0.000
RR8	4	5	1.000	0.000
RR9	4	7	1.000	0.000
R10	5	0	1.000	0.000
R11	6	0	3.000	0.000
R12	7	0	2.000	0.000

V0 =	0.0000
V1 =	0.5754
V2 =	0.3674
V3 =	0.3382
V4 =	0.2810
V5 =	0.2161
V6 =	0.2541
V7 =	0.2477

	WP	WK	I	U	P	PZ
E10	1	0	0.4246	0.4246	0.1803	0.4246
RR1	1	2	-0.2079	-0.2079	0.0432	0.0000
RR2	1	3	-0.1186	-0.2371	0.0281	0.0000
RR3	1	4	-0.0981	-0.2944	0.0289	0.0000
RR4	2	5	-0.1513	-0.1513	0.0229	0.0000
RR5	2	6	-0.0567	-0.1133	0.0064	0.0000
RR6	3	6	-0.0280	-0.0841	0.0024	0.0000
RR7	3	7	-0.0905	-0.0905	0.0082	0.0000
RR8	4	5	-0.0648	-0.0648	0.0042	0.0000
RR9	4	7	-0.0333	-0.0333	0.0011	0.0000
R10	5	0	-0.2161	-0.2161	0.0467	0.0000
R11	6	0	-0.0847	-0.2541	0.0215	0.0000
R12	7	0	-0.1238	-0.2477	0.0307	0.0000

Ponieważ w szereg z SEM $E_1 = E10$ i V włączony był opór wewnętrzny $R_0 = 1 \Omega$, wartość oporu zastępczego R_{1-8} wyznaczmy z zależności

$$I_E = \frac{E10}{R_{1-8} + R_0},$$

gdzie I_E prąd SEM $E10$, więc

$$R_{1-8} = \frac{E10}{I_E} - R_0 = \frac{1}{0.4246} - 1 = 1.355 \Omega.$$

Program SPICE [18, 19] dopuszcza deklarację bezoporowej SEM. Jeśli przyjmiemy numerację węzłów jak w danych do programów ALINIES i ALIOS1, to dane do obliczeń programem SPICE (dla $E = V$) mogą mieć następującą postać:

```

zadanie nr 2.60a {dane do programu SPICE}
V      1      0      1.0
r1     1      3      1.0
r2     1      3      2.0
r3     1      4      3.0
r4     2      5      1.0
r5     2      6      2.0
r6     3      6      3.0
r7     3      7      1.0
r8     4      5      1.0
r9     4      7      1.0
r10    5      0      1.0
r11    6      0      3.0
r12    7      0      2.0
.PRINT          dc      I(V)
.END

```

Wówczas wynik obliczeń jest w postaci

**** 10/06/96 16:18:02 ***** PSpice 5.2 (Jul) 1992) ***** ID# 0 *****

zadanie nr 2.60a {dane do programu SPICE}

**** CIRCUIT DESCRIPTION

```

*****
V      1      0      1.0
r1     1      2      1.0
r2     1      3      2.0
r3     1      4      3.0
r4     2      5      1.0
r5     2      6      2.0
r6     3      6      3.0
r7     3      7      1.0
r8     4      5      1.0
r9     4      7      1.0
r10    5      0      1.0
r11    6      0      3.0
r12    7      0      2.0
.PRINT          dc      I(V)
.END

```

**** 10/06/96 18:18:02 ***** PSpice 5.2 (Jul) 1992) ***** ID# 0 *****

zadanie nr 2.60

**** SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION TEMPERATURE = 27.000 DEG C

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	1.0000	(2)	.6386	(3)	.5878	(4)	.4883
(5)	.3756	(6)	.4416	(7)	.4305		

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

NAME	CURRENT
V	- 7.381E-01

TOTAL POWER DISSIPATION 7.38E-01 WATTS

JOB CONCLUDED
TOTAL JOB TIME 1.81

Znak „-” prądu płynącego przez SEM $E = V$ wynika z przyjętych w programie założeń (prąd płynie od węzła „+” do węzła „-”).

Ponieważ $I = 0.738$ A, więc $R_{1g} = 1.355 \Omega$.

Zadanie 2.61. Dane do programu ALINIES, jeśli numeracja węzłów i oznaczenia elementów są jak na rys. 2.61, można przedstawić w postaci:

Zadanie 2.61{dane do programu ALINIES}

E3	0	1	20
E5	0	2	10
E2	4	5	15
E4	3	6	20
r1	1	2	50
r2	1	4	50
r4	2	6	20
r5	3	5	75
r6	3	0	100
END			

Otrzymane wyniki mają postać:

ALINIES 1996.2.12

zadanie 2.61

E3	0	1	20
E5	0	2	10
E2	4	5	15
E4	3	6	20
r1	1	2	50
r2	1	4	50
r4	2	6	20
r5	3	5	75
r6	3	0	100

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1	=	-19.54849
V2	=	-9.07308
V3	=	20.25700
V4	=	15.91886

ELEMENTY BIERNE

	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC TRACONA
	WP	WK	I	U	P
r1	1	2	-0.20951	-10.47541	2.19468
r2	1	4	-0.70935	-35.46735	25.15866
r4	2	6	-0.46650	-9.33008	4.35252
r5	3	3	0.25784	19.33814	4.98618
r6	3	3	0.20257	20.25700	4.10346

ELEMENTY AKTYWNE

	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC WYDAWANA
	WP	WK	I	U	P
E3	0	1	0.91886	20.00000	18.37710
E5	0	2	0.25700	10.00000	2.56996
E2	4	5	0.70935	15.00000	10.64021
E4	3	6	0.46041	20.00000	9.20824

Pozostałe wykorzystywane w poprzednich zadaniach programy są do rozwiązania tego zadania mniej przydatne. Program ALIOS 1 wymaga uprzedniej modyfikacji dwóch gałęzi z bezopornymi SEM. Natomiast program SPICE nie jest przystosowany do przeprowadzania bilansu mocy w obwodzie.

Zadanie 2.62. Dane wejściowe do programu ALINIES - przy oznaczeniu węzłów i elementów jak na rys. 2.62 - mają postać:

Zadanie 2.62 {dane do programu ALINIES}

l1	4	2	0.1
E1	3	5	50
E2	6	0	20
r1	4	1	20
r2	1	2	100
r3	1	5	20
r4	2	0	150
r5	3	0	200
r6	3	0	300
r7	3	6	50
END			

Postać wyników:

ALINIES 1996.2.12
zadanie 2.62

l1	4	2	0.1
E1	3	5	50
E2	6	0	20
E4	4	1	20
r1	1	2	100
r2	1	5	20
r4	2	0	150
r5	3	0	200
r6	3	0	300
r7	3	6	50

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1	=	-27.56658
V2	=	-37.56658
V3	=	19.42559
V4	=	-22.55875
V5	=	-30.57441
V6	=	20.00000

ELEMENTY BIERNE

	WEZŁY		PRAD	NAPIECIE	MOC TRACONA
	WP	WK	I	U	P
r1	4		0.25039	5.00783	1.25392
r2	1	2	0.10000	10.00000	1.00000
r3	1	5	0.15039	3.00783	0.45235
r4	4	0	-0.15039	-22.55875	3.30265
r5	3	0	0.09713	19.42559	1.88677
r6	3	0	0.06475	19.42559	1.25784
r7	3	6	-0.01149	-0.57441	0.00660

ELEMENTY AKTYWNE

	WEZŁY		PRAD	NAPIECIE	MOC WYDAWANA
	WP	WK	I	U	P
E1	3	5	0.15039	50.00000	7.51958
E2	6	0	0.01149	20.00000	0.22977
l1	4	2	0.10000	15.00000	1.50078

Zadanie 2.63. Zmiana R_1 spowoduje większą zmianę prądu I . Do rozwiązania można wykorzystać program ALINIES, przyjmując np. $R = 1 \Omega$, $E_1 = 1 \text{ V}$.
Dane wejściowe dla trzech konfiguracji obwodu mają postać:

Zadanie 2.63a [$R_1 = r_8 = R_2 = r_6 = R$] (dane do programu ALINIES)

E1	1	0	1
r2	1	2	1
r3	1	3	1
r4	2	4	1
r5	2	3	1
r6	3	4	1
r7	2	0	1
r8	3	0	1
r9	4	0	1
END			

Zadanie 2.63b [$R_1 = r_8 = 2R$, $R_2 = r_6 = R$] (dane do programu ALINIES)

E1	1	0	1
r2	1	2	1
r3	1	3	1
r4	2	4	1
r5	2	3	1
r6	3	4	1
r7	2	0	1
r8	3	0	2
r9	4	0	1
END			

Zadanie 2.63c [$R_1 = r_8 = R$, $R_2 = r_6 = 2R$] (dane do programu ALINIES)

E1	1	0	1
r2	1	2	1
r3	1	3	1
r4	2	4	1
r5	2	3	1
r6	3	4	2
r7	2	0	1
r8	3	0	1
r9	4	0	1
END			

Z uzyskanych wyników wybrano wartość prądu I płynącego przez SEM E_1 , i tak:

$I = I(E_1) = 1.14286 \text{ A}$	- dla obwodu 2.63a,
$I' = I'(E_1) = 1.03390 \text{ A}$	- dla obwodu 2.63b (gdy $R_1 = r_8 = 2 \Omega$),
$I'' = I''(E_1) = 1.12963 \text{ A}$	- dla obwodu 2.63c (gdy $R_2 = r_6 = 2 \Omega$),

zatem zmiana R_1 spowoduje większą zmianę prądu I .

Zadanie 2.64. Przyjmując bardzo duży opór gałęzi 7, np. $100\text{ M}\Omega$, gdy klucz K jest otwarty oraz bardzo mały, np. $1 \cdot 10^{-8}\ \Omega$, gdy klucz K jest zamknięty, można przygotować dwa następujące zestawy danych wejściowych dla programu ALINIES:

Zadanie 2.64a (dane do programu ALINIES - klucz K otwarty)

E1	1	4	20
I1	3	0	1
r2	1	4	500
r3	1	2	100
r4	2	4	200
r5	2	3	50
r6	3	0	20
r7	4	0	1E8
END			

Zadanie 2.64b (dane do programu ALINIES - klucz K zamknięty)

E1	1	4	20
I1	3	0	1
r2	1	4	500
r3	1	2	100
r4	2	4	200
r5	2	3	50
r6	3	0	20
r7	4	0	1E-8
END			

Z otrzymanych pełnych wyników wybieramy tylko wartości potencjałów węzłowych. Gdy klucz K jest otwarty, to wartości potencjałów są równe:

$$V_1 = 26.667\text{ V},$$

$$V_2 = 20.000\text{ V},$$

$$V_3 = 20.000\text{ V},$$

$$V_4 = 6.666\text{ V}.$$

Przy zamkniętym kluczu K potencjały są równe:

$$V_1 = 20.000\text{ V},$$

$$V_2 = 16.585\text{ V},$$

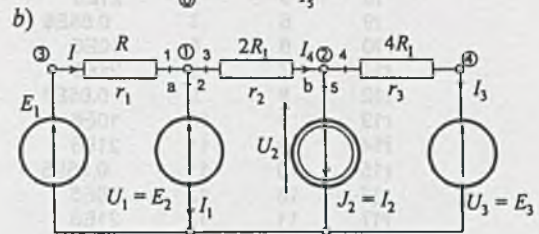
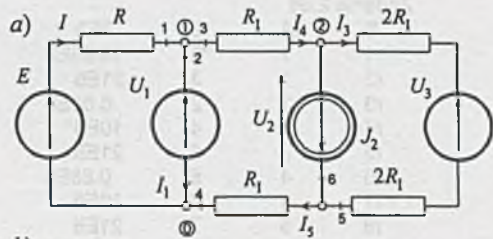
$$V_3 = 19.024\text{ V},$$

$$V_4 = 0.0\text{ V}.$$

Zadanie 2.65. Zastępując odbiorniki I i III przez SEM U_1 i U_3 oraz odbiornik II przez SPM J_2 (rys. 2.65.1a) oraz umieszczając R_1 w górnych gałęziach (rys. 2.65.1b), można napisać następujące dane wejściowe do programu ALINIES:

Zadanie 2.65

E1	3	0	260
E2	1	0	245
E3	4	0	160
I2	0	2	12.5
r1	3	1	0.261
r2	1	2	2
r3	2	4	4
END			



Rys. 2.65.1

Otrzymane wyniki mają postać:

ALINIES 1996.2.12

zadanie 2.65

E1	3	0	260
E2	1	0	245
E3	4	0	160
I2	0	2	12.5
r1	3	1	0.261
r2	1	2	2
r3	2	4	4

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1	=	245.00000
V2	=	200.00000
V3	=	260.00000
V4	=	160.00000

ELEMENTY BIERNE

	WEZŁY		PRAD	NAPIECIE	MOC TRACONA
	WP	WK	I	U	P
r1	3	1	57.47126	15.00000	862.06897
r2	1	2	22.50000	45.00000	1012.50000
r3	2	4	10.00000	40.00000	400.00000

ELEMENTY AKTYWNE

	WEZŁY		PRAD	NAPIECIE	MOC WYDAWANA
	WP	WK	I	U	P
E1	3	0	57.47126	260.00000	14942.52874
E2	1	0	-34.97126	245.00000	-8567.95977
E3	4	0	-10.00000	160.00000	-1600.00000
I2	0	2	12.50000	-200.00000	-2500.00000

Interesujące nas prądy i napięcia są równe:

$$I_1 = -I(E_2) = 34.97 \text{ A,}$$

$$I_3 = -I(E_3) = 10.00 \text{ A,}$$

$$U_2 = V_2 = -U(J_2) = 200.00 \text{ V.}$$

Zadanie 2.66. Dla numeracji gałęzi i węzłów jak na rys. 2.66 dane wejściowe do programu ALINIES mają postać:

Zadanie 2.66

E	24	0	3E3
r1	1	2	18.05E8
r2	1	3	21E6
r3	3	2	0.85E6
r4	2	4	10E6
r5	3	5	21E6
r6	4	5	0.85E6
r7	4	6	10E6
r8	5	7	21E6
r9	6	7	0.85E6
r10	6	8	10E6
r11	7	9	21E6
r12	8	9	0.85E6
r13	8	10	10E6
r14	9	11	21E6
r15	10	11	0.85E6
r16	16	12	10E6
r17	11	13	21E6
r18	12	13	0.85E6
r19	12	14	10E6
r20	13	15	21E6
r21	14	15	0.85E6
r22	14	16	10E6
r23	15	17	21E6
r24	16	17	0.85E6
r25	16	18	10E6
r26	17	19	21E6
r27	18	19	0.85E6
r28	18	20	10E6
r29	19	21	21E6
r30	20	21	0.85E6
r31	20	22	10E6
r32	21	23	21E6
r33	22	23	0.85E6
r34	22	23	8.96E6
r35	23	24	1.2E6
r36	0	1	1.2E6
END			

Postać wyników:

ALINIES 1996.2.24

Zadanie 2.66

E	24	0	3E3
r1	1	2	18.05E8
r2	1	3	21E6
r3	3	2	0.85E6
r4	2	4	10E6
r5	3	5	21E6
r6	4	5	0.85E6
r7	4	6	10E6

r8	5	7	21E6
r9	6	7	0.85E6
r10	6	8	10E6
r11	7	9	21E6
r12	8	9	0.85E6
r13	8	10	10E6
r14	9	11	21E6
r15	10	11	0.85E6
r16	16	12	10E6
r17	11	13	21E6
r18	12	13	0.85E6
r19	12	14	10E6
r20	13	15	21E6
r21	14	15	0.85E6
r22	14	16	10E6
r23	15	17	21E6
r24	16	17	0.85E6
r25	16	18	10E6
r26	17	19	21E6
r27	18	19	0.85E6
r28	18	20	10E6
r29	19	21	21E6
r30	20	21	0.85E6
r31	20	22	10E6
r32	21	23	21E6
r33	22	23	0.85E6
r34	22	23	8.96E6
r35	23	24	1.2E6
r36	0	1	1.2E6

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1	=	41.06589
V2	=	375.03822
V3	=	371.16392
V4	=	605.64443
V5	=	605.54399
V6	=	837.43227
V7	=	837.44263
V8	=	1069.09817
V9	=	1069.59733
V10	=	1294.89166
V11	=	1314.08411
V12	=	2057.07702
V13	=	2032.73720
V14	=	2150.55626
V15	=	2150.05365
V16	=	2249.94857
V17	=	2254.95267
V18	=	2483.34055
V19	=	2483.48260
V20	=	2715.06146
V21	=	2715.52180
V22	=	2941.36660
V23	=	2958.93411
V24	=	3000.00000

ELEMENTY BIERNE

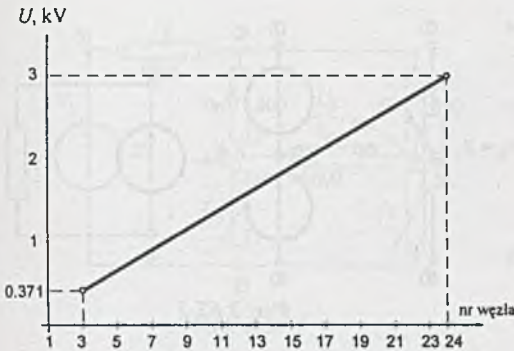
	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC TRACONA
	WP	WK	I	U	P
r1	1	2	- 0.00002	- 333.97233	0.00618
r2	1	3	- 0.00002	- 330.09803	0.00519
r3	3	2	- 0.00000	- 3.87430	0.00002
r4	2	4	- 0.00002	- 230.60621	0.00532
r5	3	5	- 0.00001	- 234.38007	0.00262
r6	4	5	0.00000	0.10044	0.00000
r7	4	6	- 0.00002	- 231.78784	0.00537
r8	5	7	- 0.00001	- 231.89864	0.00256
r9	6	7	- 0.00000	- 0.01036	0.00000
r10	6	8	- 0.00002	- 231.66591	0.00537
r11	7	9	- 0.00001	- 232.15470	0.00257
r12	8	9	- 0.00000	- 0.49916	0.00000
r13	8	10	- 0.00002	- 225.79349	0.00510
r14	9	11	- 0.00001	- 244.48678	0.00285
r15	10	11	- 0.00002	- 19.19245	0.00043
r16	16	12	0.00002	192.87154	0.00372
r17	11	13	- 0.00003	- 718.65310	0.02459
r18	12	13	0.00003	24.33982	0.00070
r19	12	14	- 0.00001	- 93.47924	0.00087
r20	13	15	- 0.00001	- 117.31645	0.00066
r21	14	15	0.00000	0.50261	0.00000
r22	14	16	- 0.00001	- 99.39230	0.00099
r23	15	17	- 0.00000	- 104.89902	0.00052
r24	16	17	- 0.00001	- 5.00411	0.00003
r25	16	18	- 0.00002	- 233.39199	0.00545
r26	17	19	- 0.00001	- 228.52992	0.00249
r27	18	19	- 0.00000	- 0.14204	0.00000
r28	18	20	- 0.00002	- 231.72090	0.00537
r29	19	21	- 0.00001	- 232.03920	0.00256
r30	20	21	- 0.00000	- 0.46034	0.00000
r31	20	22	- 0.00002	- 226.30514	0.00512
r32	21	23	- 0.00001	- 243.41231	0.00282
r33	22	23	- 0.00002	- 17.56751	0.00036
r34	22	23	- 0.00000	- 17.56751	0.00003
r35	23	24	- 0.00003	- 41.06589	0.00141
r36	0	1	- 0.00003	- 41.06580	0.00141

ELEMENTY AKTYWNE

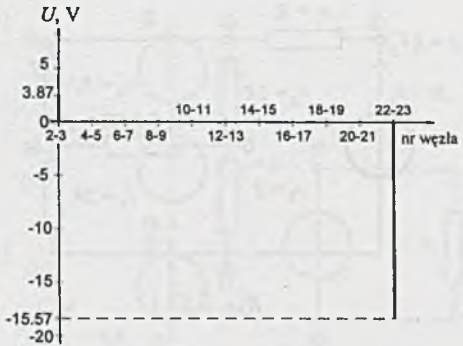
	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC WYDAWANA
	WP	WK	I	U	P
E	24	0	0.00003	3000.00000	0.10266

Otrzymane wyniki wykorzystano do sporządzenia wykresów:

- a) rozkładu napięcia na kłozach izolatora (rys. 2.66.1) oraz
- b) rozkładu napięcia na pniu izolatora (rys. 2.66.2).



Rys. 2.66.1



Rys. 2.66.2

Zadanie 2.67. Programy ALINIES i ALIOS1 nie są efektywne przy rozwiązywaniu tego typu zadań. Należałoby obliczyć wartość prądu I dla bardzo wielu różnych wartości rezystancji rezystora R_1 . Uzyskane wyniki można by wykorzystać do sporządzenia wykresu.

Program SPICE posiada możliwość zamodelowania liniowej zmiany wartości rezystancji rezystora R_1 i sporządzenia wykresu.

W celu wykorzystania programu SPICE do uzyskania wykresu zależności $I = f(R_1)$ należy uprzednio zamodelować zmianę (liniową) rezystora $R_1 = r6$. Wykorzystuje się do tego celu nieliniowe źródło napięciowe H_{r6} sterowane iloczynem prądów płynących przez źródła napięciowe V_{s1} i V_{ster} . Dla numeracji węzłów jak na rys. 2.67.1 model rezystora R_1 zmieniającego wartość wraz ze zmianą wartości napięcia sterującego V_{ster} (przy stałej równej 0 wartości V_{s2}) przedstawiono na rys. 2.67.2.

Jeśli przyjmiemy np. $R_7 = r_7 = 1\Omega$ i $\alpha = -1$, wówczas prąd

$$I(V_{ster}) = -\frac{V_{ster}}{1} \quad \text{oraz} \quad H_{r6} = \alpha I(V_{sz}) I(V_{ster}) = +I(H_{r6}) V_{ster}.$$

Zatem

$$R_1 = r_6 = \frac{H_{r6}}{I(H_{r6})} = V_{ster}.$$

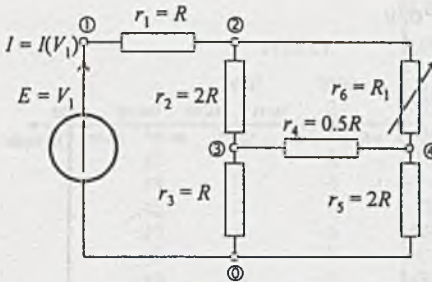
Przyjmujemy, że wartość R_1 zmienia się liniowo od 0.1Ω do 10Ω z krokiem 0.1Ω ; wówczas dane opisujące obwód i instrukcje sterujące mają postać:

zadanie nr 2.67

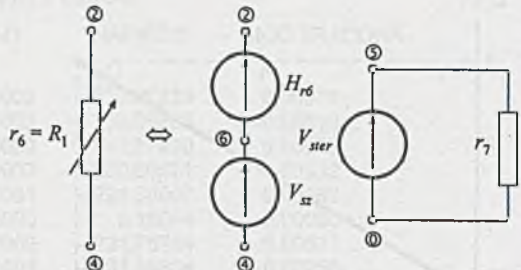
```

V1      1      0      1
r1      1      2      1
r2      2      3      2
r3      3      0      1
r4      3      4      0.5
r5      4      0      2
r7      5      0      1
Hr6     2      6      POLY(2)  VsZ  Vster  0      0      0      0      -1
VsZ     6      4      DC      0
Vster   5      0      DC      0
.DC     Vster  0.1      10      0.1
.PRINT          DC      I(V1)
.PROBE          V(2,4)  I(Hr6)          I(V1)
.END

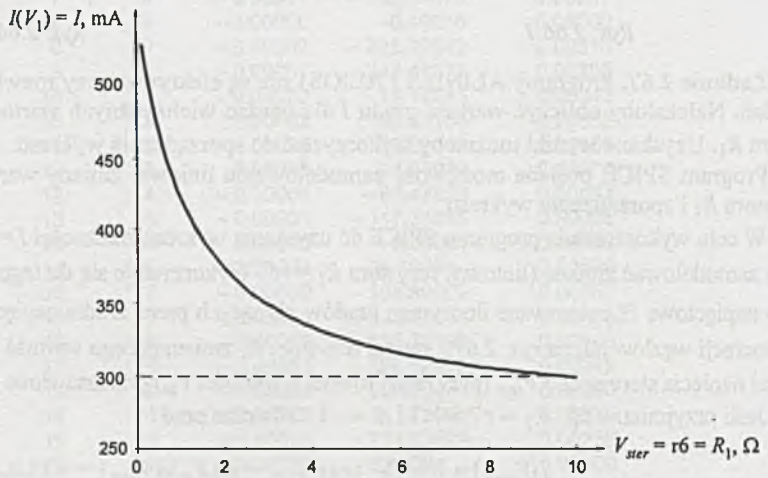
```

Rys. 2.67.1



Rys. 2.67.2



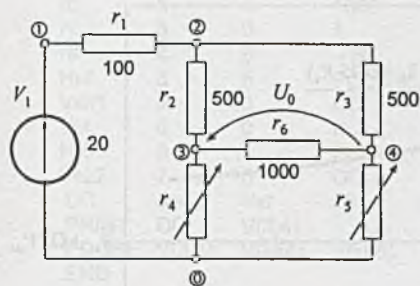
Rys. 2.67.3

Program graficzny PROBE umożliwia uzyskanie wykresu $I = I(V_1) = f(r_6) = f(R_1) = g(V_{ster})$ przedstawionego na rys. 2.67.3.

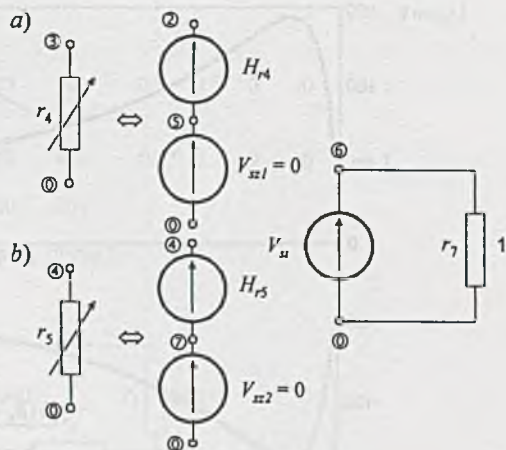
Zadanie 2.68. Dane do sporządzenia wykresu można uzyskać np. przez wielokrotną analizę obwodu z rys. 2.68 przy różnych wartościach oporów R_4 i R_5 . Jeśli do analizy zostałby wykorzystany program ALNIES, to konieczna byłaby zmusna analiza obwodu przy zmieniających się wartościach rezystancji rezystorów R_4 i R_5 . Z uzyskanych wyników rozwiązań można wykorzystać część do sporządzenia wykresu zmian napięcia U_0 w funkcji zmian rezystora R_4 dla krańcowych wartości rezystancji rezystora R_5 , tzn. $R_5 = 0.95R_4$ i $R_5 = 1.05R_4$.

Mniejszym nakładem czasu można uzyskać te charakterystyki wykorzystując program SPICE. Zmianę rezystora R_4 zamodelujemy jak w przykładzie 2.67 ($\alpha = -1$), a w modelu rezystora R_5 współczynnik α będzie równy -0.95 (przykład a), a następnie -1.05 (przykład b)).

Na rys. 2.68.1 przedstawiono analizowany obwód z przyjętą numeracją węzłów i oznaczeniami elementów, a na rys. 2.68.2 obwody symulujące zmieniające się rezystory $r_4 = R_4$ i $r_5 = R_5$.



Rys. 2.68.1



Rys. 2.68.2

Jeśli przyjmiemy dekadowy zakres zmian V_{st} (i rezystorów $r4$ i $r5$), to dane wejściowe mają postać:

zadanie nr 2.68a

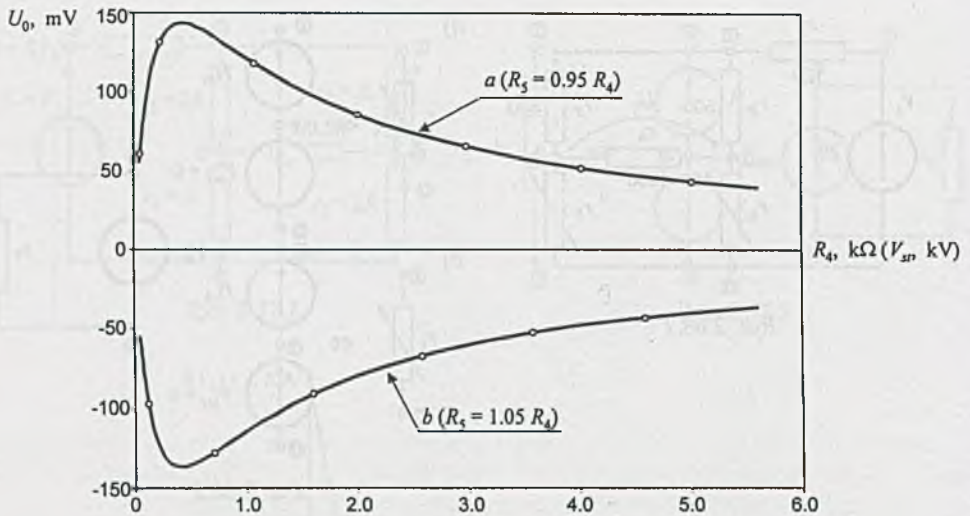
```

V1      1      0      20
r1      1      2      100
r2      2      3      500
r3      2      4      500
r6      3      4      1000
r7      6      0      1
Hr4     3      5      POLY(2)  Vs1  Vst  0  0  0  0  -1
Vs1     5      0      DC      0
Vst     6      0      DC      0
Hr5     4      7      POLY(2)  Vs2  Vst  0  0  0  0  -0.95
Vs2     7      0      DC      0
.DC     dec    Vst    50      5000  20
.PRINT  DC     V(3,4)
.PROBE  V(34)  V(Hr4)  V(Hr5)  I(Vs1)  I(Vs2)
.END

```

zadanie nr 2.68b

[illegible]



Rys. 2.68.3

Wykorzystując program graficzny PROBE uzyskamy wykres zależności $U_0 = V(3, 4)$ od zmian rezystorów $r4$ i $r5$ (a właściwie V_{st}) przedstawiony na rys. 2.68.3.

Zadanie 2.69. Jeśli zmodyfikujemy obwód z rys. 2.69 do postaci przedstawionej na rys. 2.69.1 i wykorzystamy modele zmiennych rezystorów $R_4 = r4$ i $r5 = r4$ z poprzednich przykładów oraz przyjmimy dekadowy zakres zmian $V_{st}(R_4)$, to dane do programu SPICE mogą mieć następującą postać:

zadanie nr 2.69a

```
V1      1      0      20
r1      1      2      100
r2      2      3      500
r3      2      4      500
r6      3      4      1000
r7      6      0      1
r8      4      8      50
Hr4     3      5      POLY(2) Vsz1 Vst 0 0 0 0 -1
Vsz1    5      0      DC      0
Vst     6      0      DC      0
Hr5     8      7      POLY(2) Vsz2 Vst 0 0 0 0 -1
Vsz2    7      0      DC      0
.DC     dec     Vst 50 1000 20
.PRINT  DC      V(3,4)
.PROBE  V(3,4)  V(Hr4) V(Hr5) I(Vsz1) I(Vsz2)
.END
```

zadanie nr 2.69b

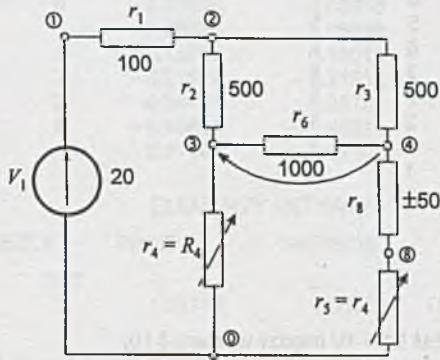
```
V1      1      0      20
r1      1      2      100
r2      2      3      500
r3      2      4      500
```



```

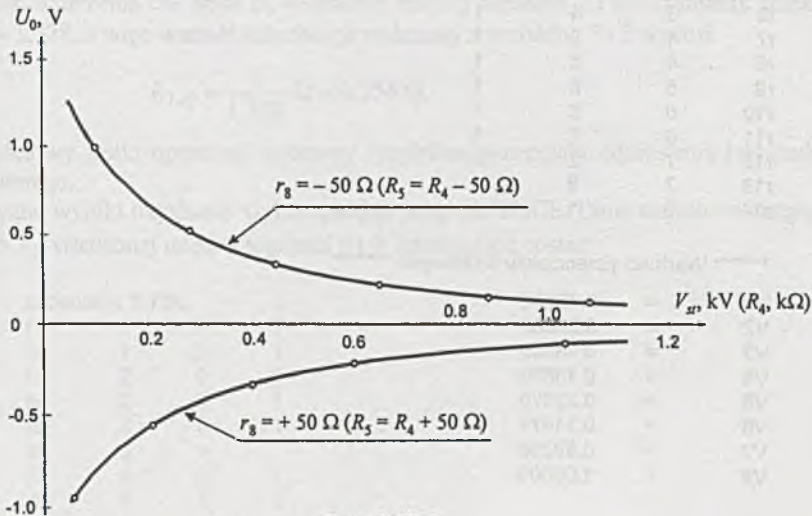
r6      3      4      1000
r7      6      0      1
r8      4      8      - 50
Hr4     3      5      POLY(2) Vs1  Vst  0  0  0  0  -1
Vs1     5      0      DC      0
Vst     6      0      DC      0
Hr5     8      7      POLY(2) Vs2  Vst  0  0  0  0  -1
Vs2     7      0      DC      0
.DC     dec    Vst     50      1000  20
.PRINT  DC     V(3,4)
.PROBE  V(3,4)  V(Hr4)  V(Hr5)  I(Vs1)  I(Vs2)
.END

```



Rys. 2.69.1

Wykres zależności $U_0 = V(3, 4)$ od zmian r_4 i r_5 (a właściwie V_{st}) uzyskany z programu graficznego PROBE przedstawia rys. 2.69.2.



Rys. 2.69.2

Zadanie 2.70. Podobnie jak w zadaniu 2.60 włączamy między węzłami 8 i 0 obwodu SEM $E = E_1 = 1 \text{ V}$. Dane wejściowe dla programu ALINIES mają wówczas postać

zadanie nr 2.70a {SEM E1 = 1V między węzłami 8 i 0}

E1	8	0	1
r1	1	0	1
r2	1	2	1
3	2	0	1
r4	2	3	1
r5	3	0	1
r6	3	4	1
r7	4	0	1
r8	4	5	1
r9	5	6	1
r10	6	3	1
r11	6	7	1
r12	7	2	1
r13	7	8	1
r14	8	1	1
END			

Wydruk wyników:

ALINIES 1996.2.17

zadanie 2.70a {SEM E1 = 1V między węzłami 8 i 0}

E1	8	0	1
r1	1	0	1
r2	1	2	1
r3	2	0	1
r4	2	3	1
r5	3	0	1
r6	3	4	1
r7	4	0	1
r8	4	5	1
r9	5	6	1
r10	6	3	1
r11	6	7	1
r12	7	2	1
r13	7	8	1
r14	8	1	1

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1	=	0.42895
V2	=	0.28685
V3	=	0.18459
V4	=	0.13679
V5	=	0.22576
V6	=	0.31474
V7	=	0.53386
V8	=	1.00000

ELEMENTY BIERNE

	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC TRACONA
	WP	WK	I	U	P
r1	1	0	0.42895	0.42895	0.18400
r2	1	2	0.14210	0.14210	0.02019
r3	2	0	0.28685	0.28685	0.08228
r4	2	3	0.10226	0.10226	0.01046
r5	3	0	0.18459	0.18459	0.03408
r6	3	4	0.04781	0.04781	0.00229
r7	4	0	0.13670	0.13670	0.01871
r8	4	5	-0.08898	-0.08898	0.00792
r9	5	6	-0.08898	-0.08898	0.00792
r10	6	3	0.13015	0.13015	0.01694
r11	6	7	-0.21912	-0.21912	0.04802
r12	7	2	0.24701	0.24701	0.06101
r13	7	8	-0.46614	-0.46614	0.21728
r14	8	1	0.57105	0.57105	0.32610

ELEMENTY AKTYWNE

	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC WYDAWANA
	WP	WK	I	U	P
E	8	0	1.03718	1.00000	1.03718

Prąd I płynący przez SEM $E_1 = 1$ V wynosi $I = I(E_1) = 1.037$ A, więc rezystancja widziana z zacisków 8 - 0 jest równa

$$R_{8-0} = \frac{E_1}{I} = \frac{1}{1.037} \Omega = 0.965 \Omega$$

Powtarzając obliczenia dla SEM E_1 włączonej między węzłami 7 i 0 otrzymamy wartość prądu $I = I(E_1) \approx 1.328$, a więc wartość rezystancji widzianej z zacisków 7 - 0 wynosi

$$R_{7-0} = \frac{1}{1.328} \Omega = 0.754 \Omega$$

Opór wejściowy siatki oporowej mierzony względem potencjału odniesienia jest mniejszy dla węzła siódmego.

Identyczne wyniki uzyskamy wykorzystując program SPICE. Dane wejściowe mogą mieć dla SEM $E_1 = V_1$, włączonej między węzłami 8 i 0, następującą postać:

zadanie nr 2.70a

r1	1	0	1
r2	1	2	1
r3	2	0	1
r4	2	3	1
r5	3	0	1
r6	3	4	
r7	4	0	1
r8	4	5	1
r9	5	6	1
r10	3	6	1


```

r11    6    7    1
r12    2    7    1
r13    7    8    1
r14    1    8    1
V1     8    0    1
.PRINT      DC    I(V1)
.END

```

Natomiast dla SEM V_1 , włączonej między węzły 7 i 0, dane mają postać:

```

zadanie nr 2.70b
r1      1    0    1
r2      1    2    1
r3      2    0    1
r4      2    3    1
r5      3    0    1
r6      3    4    1
r7      4    0    1
r8      4    5    1
r9      5    6    1
r10     3    6    1
r11     6    7    1
r12     2    7    1
r13     7    8    1
r14     1    8    1
V1      7    0    1
.PRINT      DC    I(V1)
.END

```

Zadanie to można też rozwiązać wykorzystując program ALIOS1.

Zadanie 2.71. Do obliczeń można wykorzystać program ALINIES. Dane wejściowe dla oznaczeń numerów węzłów i elementów jak na rys. 2.71 mają postać:

```

zadanie nr 2.71
E1      6    0    10
r1      6    1    50
r2      1    2    1E6
r3      2    3    31E3
r4      3    4    1E5
r5      4    5    31.5E3
r6      5    0    14.6E3
END

```

Wydruk wyników (części):

ALINIES 1996.2.17

```

zadanie nr 2.71
E1      6    0    10
r1      6    1    50
r2      1    2    1E6
r3      2    3    31E3
r4      3    4    1E5
r5      4    5    31.5E3
r6      5    0    14.6E3

```

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1 =	9.99966
V2 =	3.15573
V3 =	0.99990
V4 =	0.31550
V5 =	0.09992
V6 =	10.00000

Wartości napięć wyjściowych są równe:

$$\begin{aligned} U_{wy,1} &= V1 = 9.999 \text{ V}, \\ U_{wy,2} &= V2 = 3.156 \text{ V}, \\ U_{wy,3} &= V3 = 9.999\text{E-1} \text{ V}, \\ U_{wy,4} &= V4 = 3.156\text{E-1} \text{ V}, \\ U_{wy,5} &= V5 = 9.999\text{E-2} \text{ V}. \end{aligned}$$

Najniekorzystniej na wartość napięcia U_{wy} wpływa skończona wartość rezystancji R_{obc} , gdy przełącznik A jest w pozycji 1 (rys. 2.71.1); wówczas

$$\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{1461.1 \cdot E3} + \frac{1}{R'_{obc}} \right) V'_1 = \frac{10}{50},$$

stąd

$$R_{obc} \geq R'_{obc} = \frac{1}{\frac{10}{50} \cdot \frac{1}{V'_1} - \frac{1}{50} - \frac{1}{1461.1 \cdot E3}},$$

gdzie

$$V'_1 = 0.99 \cdot V_1 = 9.89 \text{ V},$$

więc

$$R_{obc} \geq 4.5545 \text{ k}\Omega.$$

Przygotować dane do rozwiązania tego zadania za pomocą programu ALIOS1.

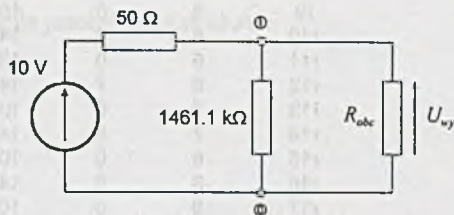
Zadanie 2.72. Jeśli przyjmiemy potencjał odniesienia jako potencjał węzła 0, to dla dwóch pierwszych przypadków a) i b) łatwo przygotować dane wejściowe do programu ALINIES:

Ad a)

Dla $R_w = 60 \Omega$, $R_0 = \infty$ oraz numeracji węzłów i oznaczeniu elementów jak na rys. 2.72 dane wejściowe mają postać:

zadanie nr 2.72a ($R_w = 60 \text{ Ohm}$)

E1	11	12	12
r1	1	0	68.3
r2	1	2	147.8
r3	2	0	100
r4	2	3	147.8
r5	3	0	100
r6	3	4	147.8
r7	4	0	100
r8	4	5	147.8



Rys. 2.71.1

r9	5	0	100
r10	5	6	147.8
r11	6	0	100
r12	6	7	147.8
r13	7	0	100
r14	7	8	147.8
r15	8	0	100
r16	8	9	147.8
r17	9	0	100
r18	9	10	147.8
r19	0	10	100
r20	10	11	147.8
r21	12	0	60
END			

Wydruk wyników (częściowy):

ALINIES 1996.2.17

zadanie nr 2.72a (Rw = 60 Ohm)

E1	11	12	12
r1	1	0	68.3
r2	1	2	147.8
r3	2	0	100
r4	2	3	147.8
r5	3	0	100
r6	3	4	147.8
r7	4	0	100
r8	4	5	147.8
r9	5	0	100
r10	5	6	147.8
r11	6	0	100
r12	6	7	147.8
r13	7	0	100
r14	7	8	147.8
r15	8	0	100
r16	8	9	147.8
r17	9	0	100
r18	9	10	147.8
r19	0	10	100
r20	10	11	147.8
r21	12	0	60
END			

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1	=	0.00009
V2	=	0.00030
V3	=	0.00094
V4	=	0.00297
V5	=	0.00940
V6	=	0.02973
V7	=	0.09400
V8	=	0.29719
V9	=	0.93963
V10	=	2.97083
V11	=	9.39293
V12	=	-2.60707

Stąd napięcia na rezystorze R_0 w zależności od położenia przełącznika są równe:

$$\begin{aligned}U_{0,1} &= V1 = 0.00009 \text{ V}, \\U_{0,2} &= V2 = 0.00030 \text{ V}, \\U_{0,3} &= V3 = 0.00094 \text{ V}, \\U_{0,4} &= V4 = 0.00297 \text{ V}, \\U_{0,5} &= V5 = 0.00940 \text{ V}, \\U_{0,6} &= V6 = 0.02973 \text{ V}, \\U_{0,7} &= V7 = 0.09400 \text{ V}, \\U_{0,8} &= V8 = 0.29719 \text{ V}, \\U_{0,9} &= V9 = 0.93963 \text{ V}, \\U_{0,10} &= V10 = 2.97083 \text{ V}, \\U_{0,11} &= V11 = 9.39293 \text{ V}.\end{aligned}$$

Ad b)

Dla $R_w = 0$ i $R_0 = \infty$ można zrezygnować z jednego węzła (12-go) lub też poprawić dane liczbowe dla przypadku a) wpisując $r_{21} = R_w = 0 \Omega$. Jeśli skorzystamy z pierwszej możliwości, to dane wejściowe mogą mieć następującą postać:

zadanie nr 2.72b ($R_w = 0$)

E1	1	2	12
r1	1	0	68.3
r2	1	2	147.8
r3	2	0	100
r4	2	3	147.8
r5	3	0	100
r6	3	4	147.8
r7	4	0	100
r8	4	5	147.8
r9	5	0	100
r10	5	6	147.8
r11	6	0	100
r12	6	7	147.8
r13	7	0	100
r14	7	8	147.8
r15	8	0	100
r16	8	9	147.8
r17	9	0	100
r18	9	10	147.8
r19	0	10	100
r20	10	11	147.8
END			

Wydruk wyników (fragment):

ALINIES 1996.2.17

zadanie nr 2.72b ($R_w = 0$)

E1	11	12	12
r1	1	0	68.3
r2	1	2	147.8
r3	2	0	100
r4	2	3	147.8

r5	3	0	100
r6	3	4	147.8
r7	4	0	100
r8	4	5	147.8
r9	5	0	100
r10	5	6	147.8
r11	6	0	100
r12	6	7	147.8
r13	7	0	100
r14	7	8	147.8
r15	8	0	100
r16	8	9	147.8
r17	9	0	100
r18	9	10	147.8
r19	0	10	100
r20	10	11	147.8

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1	=	0.00012
V2	=	0.00038
V3	=	0.00120
V4	=	0.00380
V5	=	0.01201
V6	=	0.03798
V7	=	0.12009
V8	=	0.37968
V9	=	1.20043
V10	=	3.79541
V11	=	12.00000

Poszukiwane napięcia:

$$\begin{aligned}
 U_{0,1} &= V1 = 0.00012 \text{ V} \\
 U_{0,2} &= V2 = 0.00038 \text{ V} \\
 U_{0,3} &= V3 = 0.00120 \text{ V} \\
 U_{0,4} &= V4 = 0.00380 \text{ V} \\
 U_{0,5} &= V5 = 0.01201 \text{ V} \\
 U_{0,6} &= V6 = 0.03798 \text{ V} \\
 U_{0,7} &= V7 = 0.12009 \text{ V} \\
 U_{0,8} &= V8 = 0.37968 \text{ V} \\
 U_{0,9} &= V9 = 1.20043 \text{ V} \\
 U_{0,10} &= V10 = 3.79541 \text{ V} \\
 U_{0,11} &= V11 = 12.00000 \text{ V.}
 \end{aligned}$$

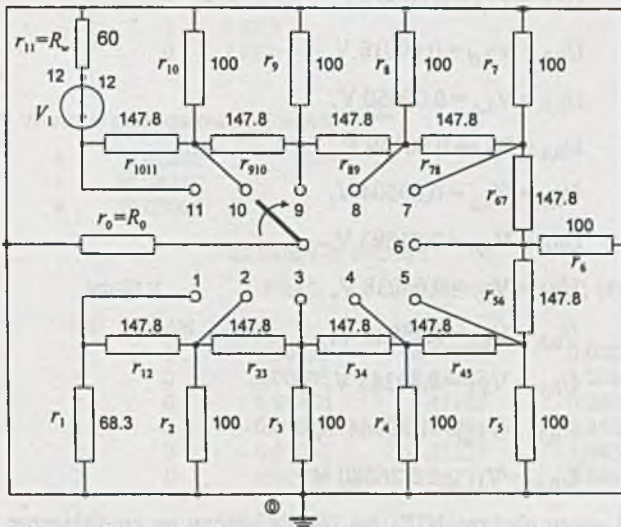
Oczywiście, zamiana SEM E_1 z oporem wewnętrznym $R_w = 60 \Omega$ na SEM idealną w istotny sposób zmieniła rozkład napięć na przełączniku.

Te dwa przypadki można też rozwiązać wykorzystując programy ALIOS1 i SPICE.

Jeśli ponumerujemy węzły i oznaczymy elementy jak na rys. 2.72.1, to dane wejściowe do programu SPICE (dla przypadku a)) mogą mieć następującą postać:

zadanie nr 2.72

r1	0	1	68.3
r2	0	2	100
r3	0	3	100
r4	0	4	100
r5	0	5	100
r6	0	6	100
r7	0	7	100
r8	0	8	100
r9	0	9	100
r10	0	10	100
r11	0	12	60
r12	1	2	147.8
r23	2	3	147.8
r34	3	4	147.8
r45	4	5	147.8
r56	5	6	147.8
r67	6	7	147.8
r78	7	8	147.8
r89	8	9	147.8
r910	9	10	147.8
r1011	10	11	147.8
V1	11	12	12
.END			



Rys. 2.72.1

Fragment wydruku wyników:

```
**** 09/10/94 15:23:28 *****PSpice 5.2 (Jul 1992) ***** ID# 0 *****
zadanie-nr 2.72
**** SMALL SIGNALBIAS SOLUTION TEMPERATURE = 27.000 DEG C
*****
  NODE VOLTAGE  NODE VOLTAGE  NODE VOLTAGE  NODE VOLTAGE
  ( 1)  94.02E-06 ( 2)  297.5E06   ( 3)  940.6E-06 ( 4)    0.0030
  ( 5)   0.0094   ( 6)   0.0297   ( 8)   0.0940   ( 8)   0.2972
  ( 9)   0.9396   (10)   2.9708   (11)   9.3929   (12)  -2.6071

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
  NAME      CURRENT
  V1        -4.345E-02
TOTAL POWER DISSIPATION 5.21E-01 WATS
JOB CONCLUDED
TOTAL JOB TIME 2.96
```

Ad c)

Wiecej nakładu pracy wymaga znalezienie rozwiązania, gdy opór obciążenia R_0 jest skończony równy $R_0 = 60 \Omega$. Przebieg przeprowadzić 11-krotną analizę obwodu z dołączonym oporem R_0 kolejno do zacisków 1, 2, ..., 11. Do rozwiązania wykorzystane zostaną: potencjał węzła 1-go (oznaczony przez $V_{1,c}$) obwodu 1-go, potencjał węzła 2-go (oznaczony przez $V_{2,d}$) obwodu 2-go itd. aż do potencjału węzła 11-go (oznaczonego przez $V_{11,m}$).

Wynik końcowy, uzyskany z obliczeń programem ALINIES, ma postać:

$$\begin{aligned}U_{0,1} &= V_{1,c} = 0.00005 \text{ V}, \\U_{0,2} &= V_{2,d} = 0.00016 \text{ V}, \\U_{0,3} &= V_{3,e} = 0.00050 \text{ V}, \\U_{0,4} &= V_{4,f} = 0.00159 \text{ V}, \\U_{0,5} &= V_{5,g} = 0.00504 \text{ V}, \\U_{0,6} &= V_{6,h} = 0.01593 \text{ V}, \\U_{0,7} &= V_{7,i} = 0.05038 \text{ V}, \\U_{0,8} &= V_{8,j} = 0.15930 \text{ V}, \\U_{0,9} &= V_{9,k} = 0.50385 \text{ V}, \\U_{0,10} &= V_{10,l} = 1.59944 \text{ V}, \\U_{0,11} &= V_{11,m} = 5.26880 \text{ V}.\end{aligned}$$

Skończona wartość oporu obciążenia R_0 ma istotny wpływ na zmniejszenie wartości napięcia wyjściowego U_0 oporowego dzielnika napięcia.

Zadanie 2.73. Określenie zakresu zmian napięcia U_{wy} przy różnych położeniach przełączników A i A' wymaga czterokrotnej analizy obwodu.

Dla położenia przełączników w pozycji 1 dane do programu ALINIES, przy numeracji węzłów i oznaczeniu elementów jak na rys. 2.73, mają postać:

zadanie nr 2.72a {przełączniki w pozycji 1}

E1	3	0	90
r1	1	0	5E3
r2	1	0	7.5E3
r3	1	0	750
r4	1	2	2670
r5	2	3	1.8E3
r6	2	0	1.8E3
END			

Przez $r3$ oznaczono rezystor o oporze $0.75 \text{ k}\Omega$, natomiast przez $r4$ szeregowe połączenia pięciu rezystorów między węzłami 1 i 2 o oporze 2670Ω .

Wyniki:

ALINIES 1996.2.18

zadanie nr 2.72a {przełączniki w pozycji 1}

E1	3	0	90
r1	1	0	5E3
r2	1	0	7.5E3
r3	1	0	750
r4	1	2	2670
r5	2	3	1.8E3
r6	2	0	1.8E3
END			

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1	=	6.47482
V2	=	35.28777
V3	=	90.00000

ELEMENTY BIERNE

	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC TRACONA
	WP	WK	I	U	P
r1	1	0	0.00129	6.47783	0.00838
r2	1	0	0.00086	6.47482	0.00559
r3	1	0	0.00863	6.47482	0.05590
r4	1	2	-0.01079	-28.81295	0.31093
r5	2	3	-0.03040	-54.71223	1.66302
r6	2	0	0.01960	35.28777	0.69179

ELEMENTY AKTYWNE

	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC WYDAWANA
	WP	WK	I	U	P
E1	3	0	0.03040	90.00000	2.73561

Napięcie wyjściowe U_{wy} może więc, przy położeniu przełączników w pozycji 1, zmieniać się, w zależności od położenia suwaka potencjometru, od 0 do $V_1 = 6.47482$ V, czyli

$$U_{wy,1} = 0 \div 6.47482 \text{ V.}$$

Dla położenia przełączników w pozycji 2 nie zmienia się struktura analizowanego obwodu, ale wartości oporów rezystorów r_3 i r_4 . Wartość r_3 wzrośnie do 2 k Ω , a r_4 zmaleje do 2070 Ω . Po analizie tak zmienionego obwodu otrzymamy zakres zmian napięcia $U_{wy,2}$.

Gdy przełącznik będzie w pozycji 3, wówczas $r_3 = 4.5$ k Ω i $r_4 = 1410$ Ω .

Zebrane wyniki końcowe obliczeń mają postać:

$$U_{wy,1} = 0 \div 6.47482 \text{ V,}$$

$$U_{wy,2} = 0 \div 12.94964 \text{ V,}$$

$$U_{wy,3} = 0 \div 17.19745 \text{ V,}$$

$$U_{wy,4} = 0 \div 22.92994 \text{ V.}$$

Do analizy obwodu (i wyznaczenia wartości V_1 dla różnych wartości r_3 i r_4) można wykorzystać programy ALIOS 1 i ALINIES.

Rozdział 3

OBWODY Z ELEMENTAMI NIELINIOWYMI

Zadanie 3.1.

1. Metoda analityczna

Z drugiego prawa Kirchhoffa napięcie zasilania U jest równe

$$U = U_1 + U_N \quad (1)$$

ale ponieważ napięcia na liniowym i nieliniowym elemencie są równe odpowiednio

$$U_1 = RI \quad \text{ i } \quad U_N = CI^B, \quad (2)$$

więc rozpisany wzór ma postać

$$U = RI + CI^B. \quad (3)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$200 = 42 \cdot 10^3 \cdot I + 320 \cdot I^{0.2}.$$

Dla ułatwienia obliczeń przyjmijmy, że prąd I będzie wyrażony w miliamperach, więc

$$200 = 10^{-3} \cdot 42 \cdot 10^3 \cdot I + 320 \cdot (10^{-3})^{0.2} \cdot I^{0.2},$$

a po uproszczeniu

$$200 = 42 \cdot I + 80.38 \cdot I^{0.2}. \quad (3')$$

Równanie (3') można przedstawić w postaci

$$200 = 42 \cdot e^{\ln I} + 80.38 \cdot e^{0.2 \ln I} \quad (3'')$$

i rozwiązać, rozkładając funkcję wykładniczą e^x (gdzie $x = 0.2 \cdot \ln I$ lub $x = \ln I$) w szereg potęgowy

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (4)$$

Pomijając rozważania dotyczące dokładności obliczeń [15], przyjmijmy, że trzy wyrazy szeregu wystarczą do przybliżonego obliczenia wartości prądu I , więc

$$200 = 42 \cdot \left[1 + \ln I + \frac{(\ln I)^2}{2!} \right] + 80.38 \cdot \left[1 + 0.2 \ln I + \frac{(0.2 \ln I)^2}{2!} \right] \quad (3''')$$

Po przekształceniach i podstawieniu otrzymamy równanie kwadratowe o postaci

$$y^2 + 2.57y - 3.43 = 0,$$

gdzie

$$y = \ln I.$$

Odrzucając wartość prądu nie spełniającą równania (3'), otrzymamy

$$I = 2.64 \text{ mA}.$$

Napięcie U_N na elemencie nieliniowym wynosi

$$U_N = 80.38 \cdot 2.64^{0.2} = 97.6 \text{ V},$$

a napięcie U_1 na oporniku R jest równe

$$U_1 = 42 \cdot 10^3 \cdot 2.64 \cdot 10^{-3} = 110.8 \text{ V}.$$

Suma obliczonych napięć U_1 i U_N nie jest równa napięciu zasilania

$$U_1 + U_N = 208.4 \text{ V} > U = 200 \text{ V},$$

ponieważ równanie (3'') jest dość zgrubnym przybliżeniem równania (3').

Uwzględnienie dalszych wyrazów rozkładu (4) zwiększa dokładność obliczenia prądu, którego dokładna wartość wynosi

$$I' = 2.469 \text{ mA},$$

a napięcie na elemencie nieliniowym jest równe

$$U'_N = 96.3 \text{ V}$$

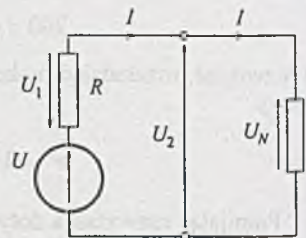
oraz napięcie na rezystorze

$$U'_1 = 103.7 \text{ V}.$$

Obliczenie zakresu zmian prądu, przy zmianie napięcia zasilania, wymaga trzykrotnego rozwiązania równania (3), co jest niezwykle pracochłonne, dlatego charakterystyki dane analitycznie wygodniej jest aproksymować odcinkami prostoliniowymi [17].

2. Metoda wykreslna

Przedstawiając tematowy obwód jako szeregowe połączenie dwóch dwójników - liniowego i nieliniowego (rys. 3.1.1) - można wyznaczyć prąd I , napięcia U_1 oraz U_N wykreslnie. W tym celu wykreślamy charakterystyki dwójnika nieliniowego $U_N = f(I)$ oraz dwójnika liniowego $U_2 = U - R \cdot I$ (rys. 3.1.2). Dla ułatwienia w tablicy 3.1.1 podano zależność $U_N = f(I)$.



Rys. 3.1.1

Tablica 3.1.1

I, mA	0.25	0.5	1	2	2.5	3	4
U_N, V	60.5	69.5	80.32	92	96	100	106

Do określenia charakterystyki dwójnika liniowego wystarczą dwa punkty, np.

$$(I = 0, U_2 = U) \text{ i } \left(U_2 = 0, I_2 = \frac{U}{R} = 4.76 \text{ mA} \right).$$

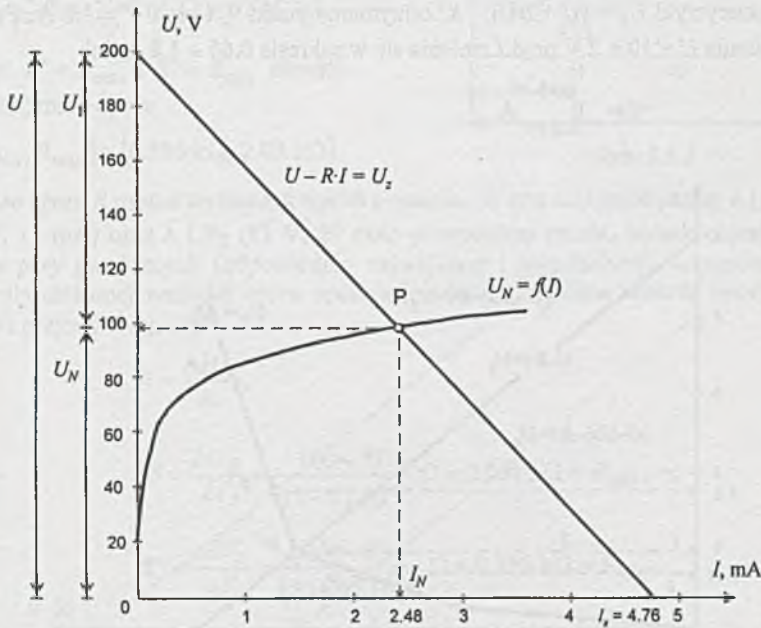
Punkt P przecięcia się charakterystyk jest rozwiązaniem, bowiem tylko dla tego punktu prądy płynące w obydwu dwójnikach są sobie równe. Z wykresu odczytujemy wartości prądu I oraz napięcie, i tak

$$I = 2.48 \text{ mA},$$

$$U_1 = 104 \text{ V},$$

$$U_N = 96 \text{ V}.$$

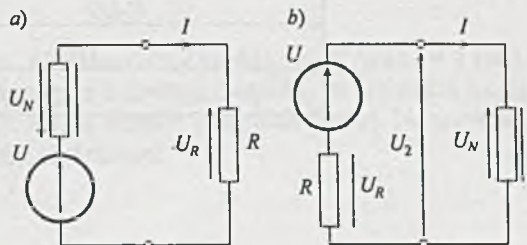
Wyniki te różnią się nieco od dokładnych wartości wyznaczonych analitycznie; jest to spowodowane błędem aproksymacji charakterystyki i skończoną dokładnością odczytu.



Rys. 3.1.2

Zadanie 3.2. W przypadku gdy element nieliniowy scharakteryzowany jest odcinkami prostoliniowymi, najprościej i najwygodniej jest rozwiązać obwód metodą wykreślną.

Tematowy obwód można przedstawić jako szeregowe połączenie dwójników z rys. 3.2.1a i b. Wygodniejszy do rozwiązania jest schemat pokazany na rys. 3.2.1b i nim się zajmujemy.



Rys. 3.2.1

Nanosząc na wykresie zależność $U_N = f(I)$ oraz charakterystykę napięciowo-prądową dwójnika liniowego otrzymamy w przecięciu punkt P - rozwiązanie obwodu (rys. 3.2.2). Rzutując punkt P na:

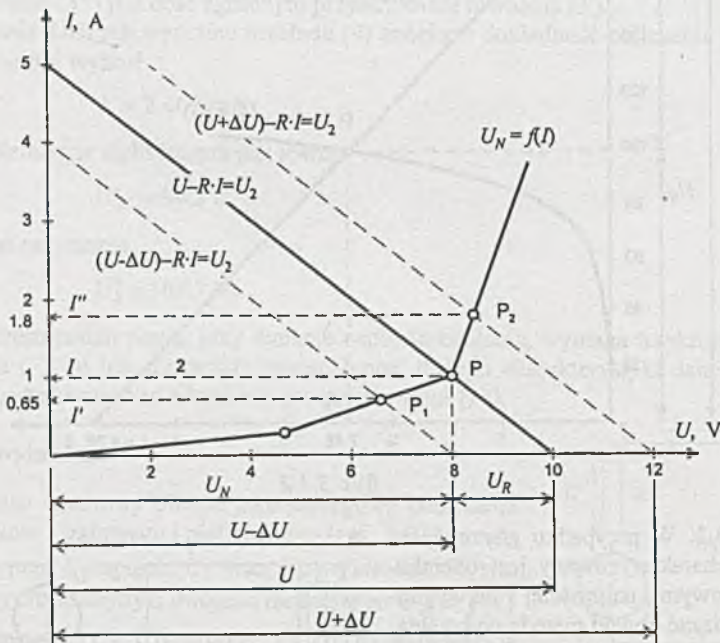
- oś prądu, otrzymamy wartość prądu $I = 1$ A,
- oś napięcia, otrzymamy $U_N = 8$ V, natomiast $U_R = U - U_N = 2$ V.

Zakres zmian prądu I przy zmianie napięcia zasilania o $\pm \Delta U = \pm 2$ V otrzymamy jako rozwiązanie obwodu złożonego z dwóch dwójników: nieliniowego (bez zmian) oraz liniowego, w którym napięcie zasilania U zastąpiono napięciem $U \pm \Delta U$, co odpowiada przesunięciu linii prostej $U_2 = U - RI$ o odcinek $\pm \Delta U$ na osi napięcia.

W przecięciu charakterystyki $U_2 = (U - \Delta U) - RI$ z charakterystyką elementu nieliniowego otrzymujemy punkt P_1 , a stąd prąd $I' = 0.65$ A.

Dla charakterystyki $U_2 = (U + \Delta U) - RI$ otrzymamy punkt P_2 i prąd $I'' = 1.8$ A. Przy zmianie napięcia zasilania $U = 10 \pm 2$ V prąd I zmienia się w zakresie $0.65 \div 1.8$ A, lub

$$I = 1 \begin{matrix} +0.8 \\ -0.35 \end{matrix} \text{ A.}$$



Rys. 3.2.2

Zadanie 3.3. Oznaczając przez P_1 i P_2 graniczne, dopuszczalne punkty pracy elementu nieliniowego (rys. 3.3.1) otrzymamy:

1) w punkcie P_1 $U'_N = 77$ V,

$I' = 11$ mA = 11 mA, stąd

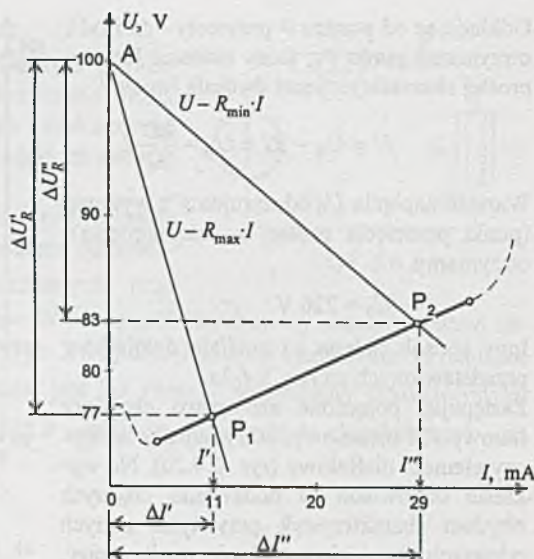
$$R' = \frac{U - U'_N}{I'} = \frac{23}{11} \cdot 10^3 \Omega = 2.091 \text{ k}\Omega,$$

2) w punkcie P_2 $U''_N = 83$ V, $I'' = 29$ mA, więc

$$R'' = \frac{U - U''_N}{I''} = \frac{17}{29} \cdot 10^3 \Omega = 0.586 \text{ k}\Omega.$$

Oznaczając $R' = R_{\max}$ i $R'' = R_{\min}$ określiliśmy zakres zmian oporu

$$R \in [R_{\min}, R_{\max}] = [0.586 \text{ k}\Omega, 2.09 \text{ k}\Omega].$$



Rys. 3.3.1

Zakres zmian oporu R można wyznaczyć wprost z rysunku. W tym celu przez punkty A (100 V, 0 mA) i P_1 (77 V, 11 mA) oraz A i P_2 (83 V, 29 mA) prowadzimy proste, będące charakterystykami dwójników przy granicznych (odpowiednio największej i najmniejszej) wartościach oporu R . Ponieważ dla ustalonej wartości oporu opornik jest liniowy, można wartość oporu wyznaczyć z zależności przyrostowej, czyli

$$R = \frac{\Delta U_R}{\Delta I},$$

a więc

$$R' = \frac{\Delta U'_R}{\Delta I'} = \frac{100 - 77}{(11 - 0) \cdot 10^{-3}} \Omega = 2.091 \text{ k}\Omega = R_{\max},$$

$$R'' = \frac{\Delta U''_R}{\Delta I''} = \frac{100 - 83}{(29 - 0) \cdot 10^{-3}} \Omega = 0.586 \text{ k}\Omega = R_{\min}.$$

Zadanie 3.4. Napięcie $U = U_0$ można obliczyć: 1) metodą wykreślną, 2) korzystając z charakterystyki elementu nieliniowego i drugiego prawa Kirchhoffa.

Ad 1)

Na charakterystyce elementu nieliniowego (rys. 3.4.1) nanosimy punkt pracy P (prąd $I = 3$ mA). Przez punkt P rysujemy prostą, będącą charakterystyką liniowego dwójnika, do przecięcia z osią napięcia. Ponieważ znana jest wartość oporu R , można określić nachylenia prostej. Na przykład, przyjmując przyrost prądu $\Delta I = 1$ mA, obliczamy z zależności

$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

odpowiadający mu przyrost napięcia $\Delta U = R \Delta I = 42$ V.

Odkładając od punktu P przyrosty $-\Delta I$ i ΔU , otrzymamy punkt P_1 , który również leży na prostej charakteryzującej dwójnik liniowy

$$U = U_0 - RI = U_0 - \frac{\Delta U}{\Delta I} I.$$

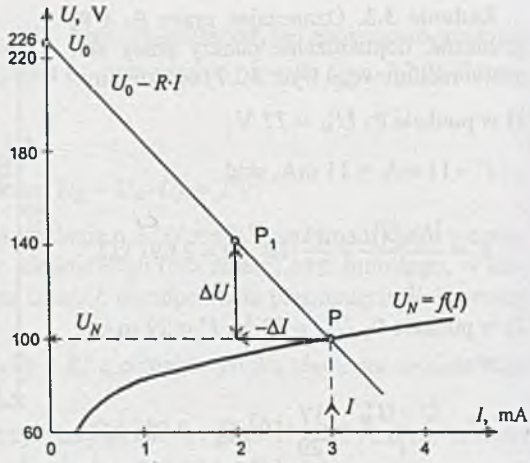
Wartość napięcia U_0 odczytujemy z wykresu (punkt przecięcia prostej z osią napięcia); otrzymamy

$$U_0 = 226 \text{ V}.$$

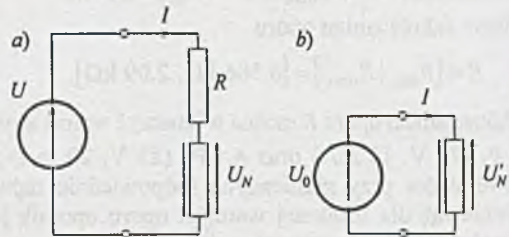
Inny sposób polega na analizie dwójników przedstawionych na rys. 3.4.2a.

Zastępując połączone szeregowo elementy liniowy R i nieliniowy, otrzymujemy zastępczy element nieliniowy (rys. 3.4.2b). Na wykresie odpowiada to dodawaniu rzędnych obydwu charakterystyk przy tych samych odciętych - napięcie jest równe sumie napięć, a prąd jest ten sam - co przedstawiono na rys. 3.4.3. Symbolicznie zaznaczono to napisem $U'_N = \varphi(I) = U = RI + U_N = f(I)$.

Z wykresu odczytujemy wartość $U'_N = U_0$ dla $I = 3 \text{ mA}$ oraz wartości napięć U_1 i U_N .



Rys. 3.4.1



Rys. 3.4.2

Ad 2)

Rzutując punkt pracy P' na oś napięcia otrzymamy wartość napięcia na elemencie nieliniowym

$$U_N = 100 \text{ V}.$$

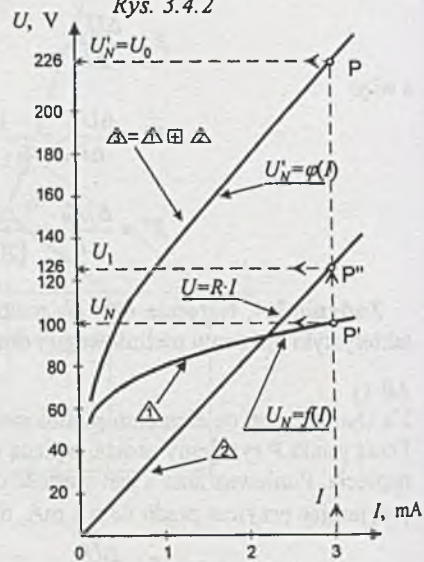
Z drugiego prawa Kirchhoffa

$$U_0 = U_N + RI = 100 + 42 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 226 \text{ V}.$$

Zadanie 3.5. $R_{\min} = 0.76 \text{ k}\Omega$, $R_{\max} = 1.64 \text{ k}\Omega$.

Zadanie 3.6. Prądy w obwodzie można wyznaczyć:

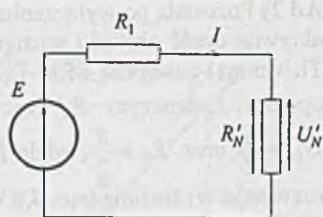
- 1) metodą wykreślną przez kolejne dodawanie charakterystyk,
- 2) metodą graficzną jak w zadaniu 3.2, po uprzednim wykorzystaniu zasady Thévenina.



Rys. 3.4.3

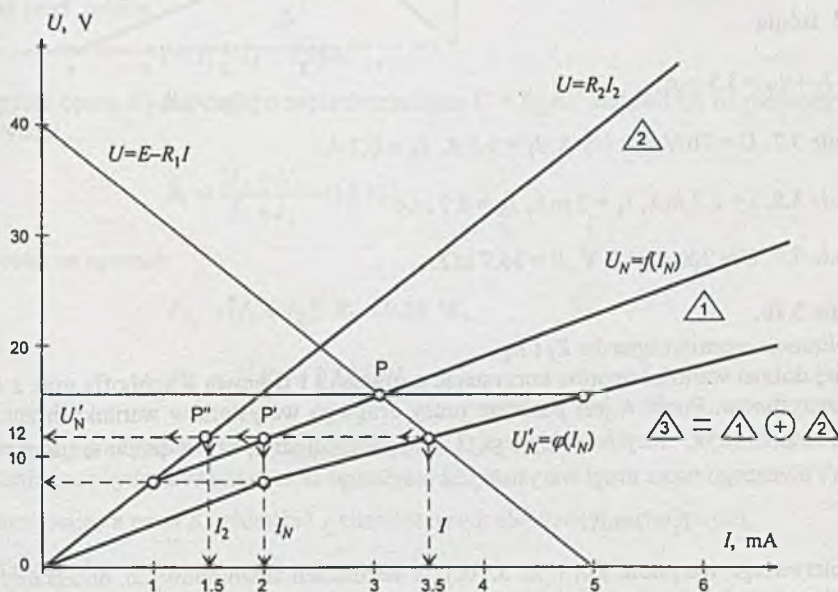
Ad 1) Metoda postępowania jest następująca:

Zastępujemy równolegle połączone opornik R_2 i element nieliniowy innym elementem nieliniowym. Otrzymamy prosty obwód złożony ze źródła, elementu liniowego i nieliniowego (rys. 3.6.1), który potrafimy rozwiązać (identycznie jak zadanie 3.1).



Rys. 3.6.1

Na wykresie z rys. 3.6.2 odpowiada to naniesieniu charakterystyki $U_N = f(I_N)$ oraz prostej $U = R_2 I_2$, dodaniu odpowiadających sobie odciętych przy takich samych rzędnych - prąd I jest sumą prądów I_N i I_2 , a napięcia są równe. W ten sposób uzyskujemy charakterystykę zastępczego elementu nieliniowego $U'_N = \varphi(I)$ (rys. 3.6.2). Symbolicznie zaznaczono to napisem $U'_N = \varphi(I) = f(I_N) \oplus R_2 I$. Dalsze postępowanie jest już znane - wykreślamy charakterystykę dwójnika liniowego $U = E - IR_1$. Rzutując punkt P - otrzymany z przecięcia charakterystyk - na oś prądu, otrzymamy wartość I równą 3.5 mA.



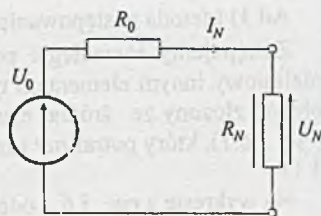
Rys. 3.6.2

Wartość napięcia na elemencie nieliniowym $U'_N = U_N$ - odczytana z wykresu - wynosi 12 V.

Wartości prądów otrzymamy po rzutowaniu punktów P' i P'' - leżących odpowiednio na charakterystyce elementu nieliniowego i liniowego - na oś prądu.

Z wykresu $I_N = 2$ mA, $I_2 = 1.5$ mA.

Ad 2) Pozostałą po wyłączeniu elementu nieliniowego, liniową aktywną część obwodu można zastąpić (korzystając z zasady Thévenina) zastępczą SEM U_0 i szeregowo połączonym z nią oporem zastępczym R_0 (rys. 3.6.3). Łatwo wykazać, że $U_0 = \frac{E}{2}$ oraz $R_0 = \frac{R}{2}$, gdzie $R = R_1 = R_2$. Obwód ten można rozwiązać wykreślnie (rys. 3.6.4).



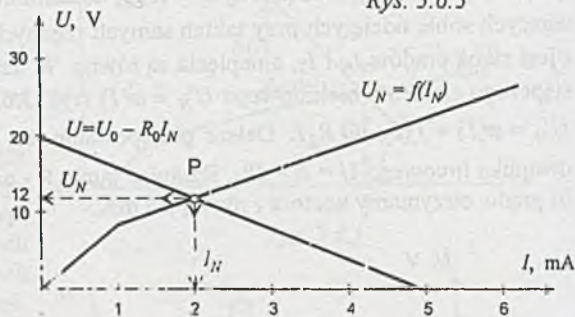
Rys. 3.6.3

Z wykresu: $I_N = 2$ mA, $U_N = 12$ V. Pozostałe wartości prądów obliczymy korzystając z prawa Ohma i I prawa Kirchhoffa dla obwodu z rys. 3.6, i tak prąd I_2 płynący przez opornik R_2

$$I_2 = \frac{U_N}{R_2} = \frac{12}{8 \cdot 10^3} \text{ A} = 1.5 \text{ mA}$$

oraz prąd źródła

$$I = I_2 + I_N = 3.5 \text{ mA}.$$



Rys. 3.6.4

Zadanie 3.7. $U = 76$ V, $I = 1.8$ A, $I_1 = 1.1$ A, $I_N = 0.7$ A.

Zadanie 3.8. $I = 2.7$ mA, $I_1 = 2$ mA, $I_N = 0.7$ mA.

Zadanie 3.9. $U = 200 \pm 41.7$ V, $R = 36.7$ k Ω .

Zadanie 3.10.

Ad 1. Obliczenie wartości oporów R_1 i R_2

Najprościej dobrać wartości oporów korzystając z równań I i II prawa Kirchhoffa oraz z charakterystyk warystorów. Punkt A jest punktem pracy drugiego warystora w warunkach znamionowych. Z charakterystyki warystora R_{N2} (rys. 3.10b) odczytujemy wartość prądu I_2 (przy napięciu $U_2 = 95$ V) płynącego przez drugi warystor; jest on równy

$$I_2 = 3 \text{ mA}.$$

Punkt B pierwszego warystora R_{N1} (rys. 3.10c), w warunkach znamionowych, dobieramy np. na środku liniowej części charakterystyki.

Z charakterystyki otrzymamy wartości napięcia U_1 i prąd I_1 pierwszego warystora

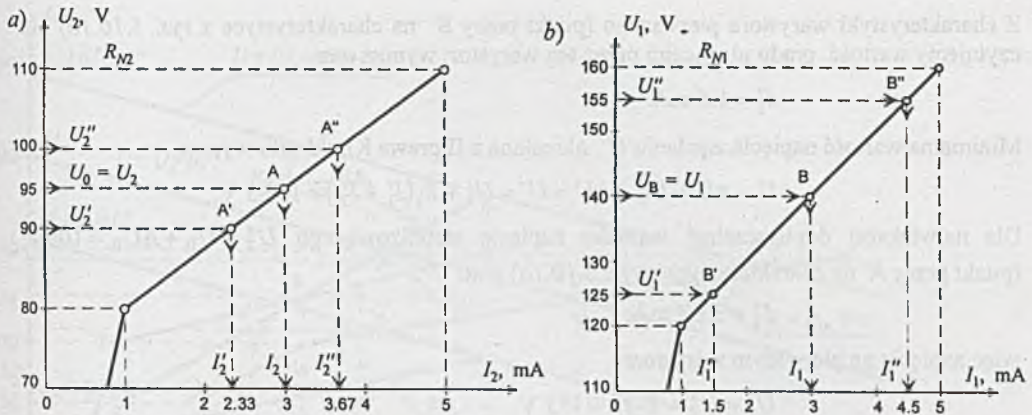
$$U_1 = 140 \text{ V}, I_1 = 3 \text{ mA}.$$

Z II prawa Kirchhoffa wyznaczmy napięcie na oporze R_2

$$U_{R2} = U_1 - U_2 = 45 \text{ V}$$

oraz wartość oporności

$$R_2 = \frac{U_{R2}}{I_2} = 15 \text{ k}\Omega.$$



Rys. 3.10.1

Ponieważ prąd źródła

$$I = I_1 + I_2 = 6 \text{ mA},$$

więc wartość oporu R_1 dławiącego napięcie zasilania $U = U_2$ do wartości U_1 na pierwszym warystorze wynosi

$$R_1 = \frac{U_z - U_1}{I_1 + I_2} = 10 \text{ k}\Omega.$$

Moc tracona na oporach:

$$P_{R_1} = (I_1 + I_2)^2 R_1 = 0.36 \text{ W},$$

$$P_{R_2} = I_1^2 R_2 = 0.135 \text{ W}.$$

Ad 2. Dopuszczalny zakres zmian napięcia zasilania $U \pm \Delta U$

Zakres zmian napięcia zasilania można obliczyć:

- korzystając z praw Kirchhoffa i z charakterystyk elementów nieliniowych,
- wykreślić.

Ad a) Dla najmniejszej dopuszczalnej wartości napięcia stabilizowanego

$$U'_2 = U_0 - \Delta U_0 = 90 \text{ V}$$

(punkt pracy A' na charakterystyce z rys. 3.10.1a) prąd płynący przez drugi warystor

$$I'_2 = 2.33 \text{ mA}.$$

Wówczas napięcie na warystorze pierwszym

$$U'_1 = U'_2 + R_2 I'_2 = 125 \text{ V}.$$

Z charakterystyki warystora pierwszego (punkt pracy B' na charakterystyce z rys. 3.10.1b) odczytujemy wartość prądu płynącego przez ten warystor; wynosi ona

$$I_1' = 1.5 \text{ mA.}$$

Minimalna wartość napięcia zasilania U' określona z II prawa Kirchhoffa wynosi

$$U - \Delta U = U_z - \Delta U = U' = U_1' + R_1(I_1' + I_2') = 163.3 \text{ V.}$$

Dla największej dopuszczalnej wartości napięcia stabilizowanego $U_2'' = U_0 + \Delta U_0 = 100 \text{ V}$ (punkt pracy A'' na charakterystyce z rys. 3.10.1a) prąd

$$I_2'' = 3.67 \text{ mA,}$$

więc napięcie na pierwszym warystorze

$$U_1'' = U_2'' + R_2 I_2'' = 155 \text{ V.}$$

Prąd płynący przez ten warystor (charakterystyka z rys. 3.10.1b, punkt B'')

$$I_1'' = 4.5 \text{ mA,}$$

a największa dopuszczalna wartość napięcia zasilania U'' jest równa

$$U'' = U_2 + \Delta U = U_1'' + R_1(I_1'' + I_2'') = 236.7 \text{ V.}$$

Reasumując: zakres zmian napięcia zasilania $U = 200 \div 36.7 \text{ V}$.

Największe moce tracone na oporach R_1 i R_2 wynoszą

$$P_{R_1 \max} = (I_1'' + I_2'')^2 R_1 = 0.67 \text{ W,}$$

$$P_{R_2 \max} = I_2''^2 R_2 = 0.2 \text{ W,}$$

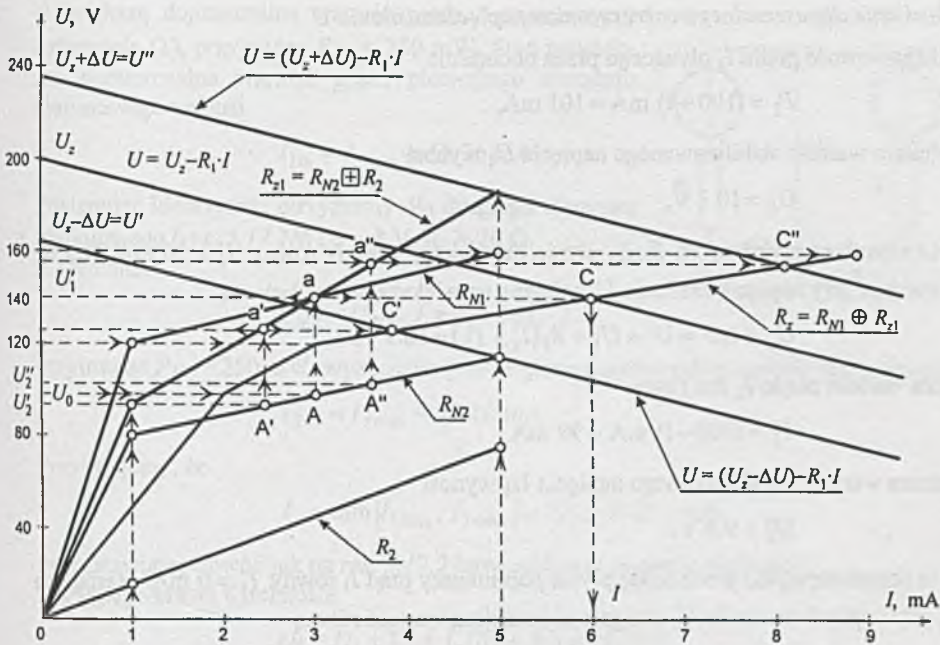
więc dobieramy rezystor R_1 na moc 1 W, a rezystor R_2 na moc 0.5 W.

Ad b) Wykreślne rozwiązanie przedstawiono na rys. 3.10.2. Dodając szeregowo charakterystyki elementu nieliniowego R_{N2} i oporu R_2 otrzymano charakterystykę zastępczego elementu ($R_{z1} = R_{N2} \oplus R_2$), którą dodano równolegle do charakterystyki elementu nieliniowego R_{N1} i otrzymano charakterystykę zastępczą ($R_z = R_{N1} \oplus R_{z1}$).

Otrzymany w wyniku obwód zastępczy (szeregowo połączenie dwójnika liniowego złożonego z liniowego oporu R_1 i SEM U_z oraz nieliniowego dwójnika danego charakterystyką R_z) rozwiązujemy wykreślnie. Dwójnik liniowy opisany jest zależnością $U = U_z - R_1 I$. Punkt C jest punktem pracy (w warunkach znamionowych) warystora pierwszego (punkt B na charakterystyce z rys. 3.10c) i całego układu, więc $U_1' = 140 \text{ V}$. Wartość R_1 określa nachylenie prostej przechodzącej przez punkty $U_z = 200 \text{ V}$ i punkt C.

Ten sam wynik (punkt C) otrzymamy po przerzutowaniu punktu pracy drugiego warystora (punktu A) przez charakterystykę R_{z1} i R_z (A - a - C).

Graniczne punkty pracy obwodu zastępczego C' i C'' otrzymamy po przerzutowaniu granicznych punktów pracy drugiego warystora A' i A'' przez charakterystyki R_{z1} i R_z (A' - a' - C', A'' - a'' - C''). Proste równoległe do prostej $U = U_z - R_1 I$ poprowadzone przez punkty C' i C'' odcinają na osi rzędnych graniczne dopuszczalne wartości napięcia zasilania.



Rys. 3.10.2

Z wykresu

$$U' = U_z - \Delta U = 163 \text{ V}$$

oraz

$$U'' = U_z + \Delta U = 237 \text{ V}.$$

Zadanie 3.11. $R_0 = 46.5 \div 132 \text{ k}\Omega$.

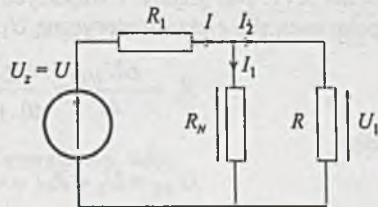
Zadanie 3.12. Układ można przedstawić jak na rys. 3.12.1.

1. Obliczenie wartości oporu R_1

Dla warunków znamionowych $U_1 = R I_2 = 10 \text{ V}$, więc z charakterystyki diody (rys. 3.12.b) prąd I_1 płynący przez diodę jest równy 10 mA.

Korzystając z prawa Ohma można wyznaczyć wartość oporu R_1

$$R_1 = \frac{U_z - U_1}{I_1 + I_2} = 54.55 \Omega.$$



Rys. 3.12.1

2. Określenie dopuszczalnego zakresu zmian napięcia zasilania U

Największa wartość prądu I_2 płynącego przez obciążenie

$$I_2' = (100 + 1) \text{ mA} = 101 \text{ mA},$$

więc największa wartość stabilizowanego napięcia U_1 wynosi

$$U_1' = 10.1 \text{ V},$$

wówczas (z charakterystyki) przez diodę płynie największy prąd I_1 równy $I_1' = 20 \text{ mA}$. Ma to miejsce wówczas, gdy napięcie zasilania U_z osiągnie największą wartość równą

$$U_z + \Delta U = U' = U_1' + R_1(I_1' + I_2') = 16.7 \text{ V}.$$

Najmniejsza wartość prądu I_2 jest równa

$$I_2'' = (100 - 1) \text{ mA} = 99 \text{ mA},$$

więc najniższa wartość stabilizowanego napięcia U_1 wynosi

$$U_1'' = 9.9 \text{ V},$$

wówczas (z charakterystyki) przez diodę płynie najmniejszy prąd I_1 równy $I_1'' = 0 \text{ mA}$. Nastąpi to wówczas, gdy napięcie zasilania U_z osiągnie najmniejszą wartość równą

$$U_z - \Delta U = U_1'' + R_1(I_1'' + I_2'') = 15.3 \text{ V},$$

czyli dla zapewnienia stabilizacji napięcia wyjściowego w zadanym zakresie napięcie wejściowe układu (zasilania) U_z musi się mieścić w przedziale:

$$U_z = 16 \pm 0.7 \text{ V} = 16 \text{ V} \pm 4.4\%.$$

Zadanie 3.13. $R = (94 \pm 107) \Omega$.

Zadanie 3.14. $U_0 = (30 \pm 35) \text{ V}$.

Zadanie 3.15. $E \geq 30 \text{ V}$.

Zadanie 3.16. $E_x = -40 \text{ V}$, $P_{N1} = 30 \text{ W}$, $P_{N2} = 2.5 \text{ W}$.

Zadanie 3.17. Dla prądów I większych od zera element nieliniowy N_1 można zastąpić szeregowo połączoną siłą elektromotoryczną $U_1 = 4 \text{ V}$ i opornikiem

$$R_1 = \frac{\Delta U_{N1}}{\Delta I} = \frac{4.2 - 4}{40 \cdot 10^{-3}} \Omega = 5 \Omega. \quad (\text{rys. 3.17.1a})$$

Napięcie

$$U_{N1} = U_1 + R_1 I = 4 + 5I,$$

a moc tracona na elemencie nieliniowym

$$P_{N1} = U_{N1} I = (4 + 5I)I.$$

(1)

Największą dopuszczalną wartość prądu I wyznaczmy z równania (1), przyjmując $P_{N1} = 250 \text{ mW}$. Stąd największa dopuszczalna wartość prądu pierwszego elementu nieliniowego wynosi

$$I_{1m} = I_{1\max} = 58.26 \text{ mA}.$$

Postępując identycznie otrzymamy dla drugiego elementu nieliniowego (rys. 3.17.1b) $U_2 = 8 \text{ V}$, $R_2 = 20 \Omega$. Z równania

$$P_{N2} = U_{N2} \cdot I = (8 + 20I) \cdot I,$$

przyjmując $P_{N2} = 250 \text{ mW}$, wyznaczmy największą dopuszczalną wartość prądu równą

$$I_{2m} = I_{2\max} = 29.10 \text{ mA}.$$

Przyjmujemy, że

$$I_m = \min\{I_{1\max}, I_{2\max}\} = I_{2\max} = 29.1 \text{ mA}. \quad (2)$$

Przedstawiając obwód jak na rys. 3.17.2 łatwo obliczyć napięcie zasilania U . Z drugiego prawa Kirchhoffa

$$U_3 = U_1 + U_2 + I_m(R_1 + R_2) = 12.73 \text{ V}.$$

Z prawa Ohma

$$I_3 = \frac{U_3}{4R} = 25.46 \text{ mA},$$

więc

$$U = U_3 + R(I_3 + I_m) = 19.55 \text{ V}.$$

Uwaga

Wniosek w postaci równania (2) można uzyskać z prostego rozumowania: zauważmy, że

$$P_{N1} = U_{N1}I_{1m} = 0.25 \text{ W},$$

$$P_{N2} = U_{N2}I_{2m} = 0.25 \text{ W}$$

oraz (z rys. 3.17b i c)

$$U_{N2} > U_{N1}$$

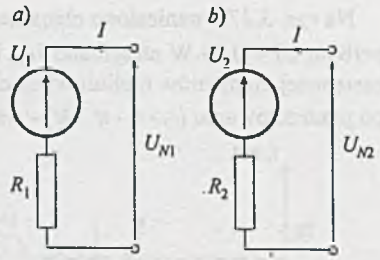
więc

$$I_{2\max} < I_{1\max}$$

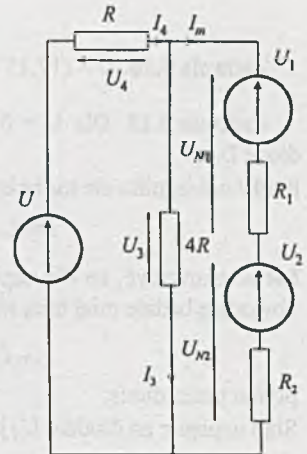
a ponieważ elementy nieliniowe N_1 i N_2 są połączone szeregowo, więc

$$I_m = I_{2\max} = 29.1 \text{ mA}.$$

Zadanie to można również rozwiązać metodą wykresną.

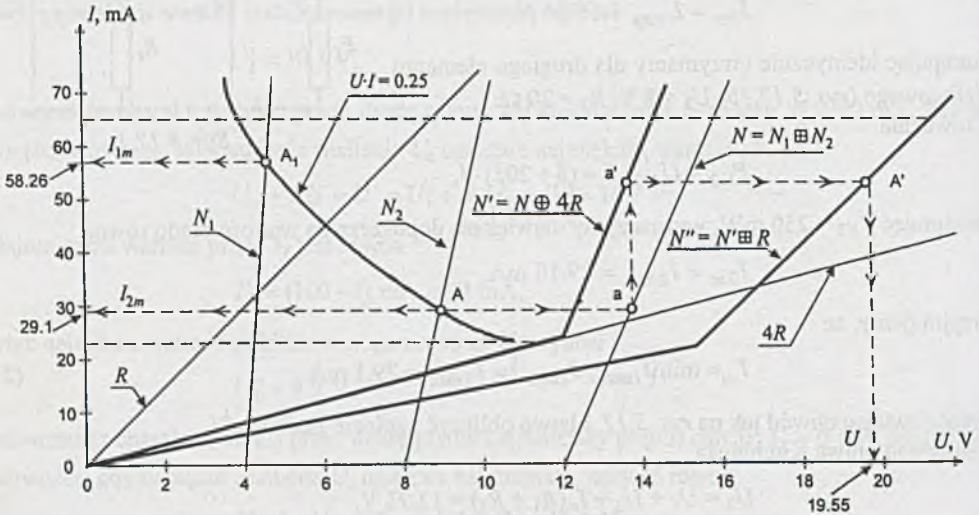


Rys. 3.17.1



Rys. 3.17.2

Na rys. 3.17.3 naniesiono charakterystyki elementów nieliniowych N_1 i N_2 . W przecięciu z hiperbolą $UI = 0.25$ W otrzymano I_{1m} i I_{2m} (A_1 , A). Po dodaniu (równoległym) do charakterystyki zastępczej elementów nieliniowych charakterystyk oporu $4R$ i (szeregowym) oporu R uzyskano - po przerzutowaniu ($A - a - a' - A'$) - wartość napięcia U odpowiadającą prądowi $I = I_{2m}$.



Rys. 3.17.3

Zadanie 3.18. $U = (17.15 \div 23.25)$ V.

Zadanie 3.19. Dla $U = 0$ prąd $I_p = J_p$ wymuszany przez siłę prądomotoryczną płynie przez diodę D.

Prąd I odbiornika nie może być większy od prądu I_p , ponieważ

$$I = I_p - I_d.$$

Łatwo zauważyć, że dla napięcia U z przedziału $0 \leq U \leq I_p(R_1 + R_0) = 10$ V prąd I płynący w obwodzie będzie miał taką wartość, że

$$I_p - I = I_d$$

płynie przez diodę.

Stąd napięcie na diodzie U_d jest równe

$$U_d = 0 \quad (I_d \geq 0 \text{ dla } U_d = 0).$$

Zatem z II prawa Kirchhoffa napięcie zasilania U jest równe

$$U = U_1 + U_0 = I(R_1 + R_0),$$

więc prąd I jest równy $I = \frac{U}{R_1 + R_0}$.

Dla większych (spoza przedziału) napięć zasilania U

$$U > (R_1 + R_0)I_p = 10 \text{ V},$$

czyli dla

$$U > U_1 + U_0,$$

otrzymamy $U_d < 0$.

Ale wówczas $I_d = 0$ i prąd $I = I_p$ niezależnie od wartości U .

Reasumując

$$I = \begin{cases} \frac{U}{R_1 + R_0} = U \cdot 10^{-3} \text{ A} & \text{dla } 0 \leq U \leq 10 \text{ V}, \\ I_p = J_p & \text{dla } U > 10 \text{ V}. \end{cases}$$

Ponieważ $I_m = I_p$, więc

$$P_{R_{1m}} = P_{R_{0m}} = R_1 I_p^2 = 50 \text{ mW}.$$

Dobieramy oporniki $500 \Omega / 0.125 \text{ W}$.

Zadanie 3.20.

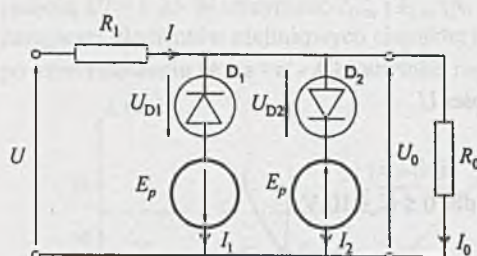
$$I = \begin{cases} 0 & \text{dla } |U| \leq 1 \text{ V}, \\ \frac{U}{2R_0} - \frac{I_p}{2} & \text{dla } 1 \text{ V} < U \leq 10 \text{ V}, \\ \frac{U}{2R_0} + \frac{I_p}{2} & \text{dla } -10 \text{ V} \leq U, -1 \text{ V}. \end{cases}$$

Zadanie 3.21.

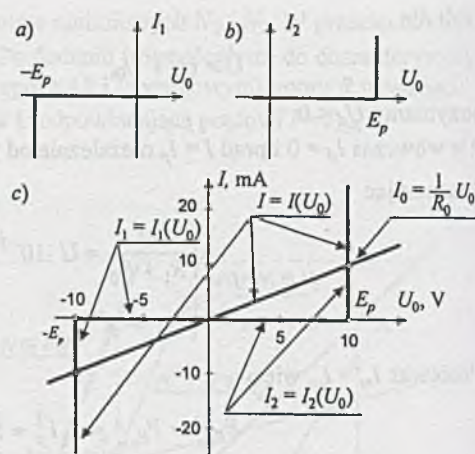
$$U_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}U & \text{dla } |U| \leq 20 \text{ V}, \\ E_p = 10 \text{ V} & \text{dla } 20 \text{ V} < U \leq 50 \text{ V}, \\ -E_p = -10 \text{ V} & \text{dla } -50 \text{ V} \leq U < -20 \text{ V}. \end{cases}$$

Zadanie to można również rozwiązać wykreślnie.

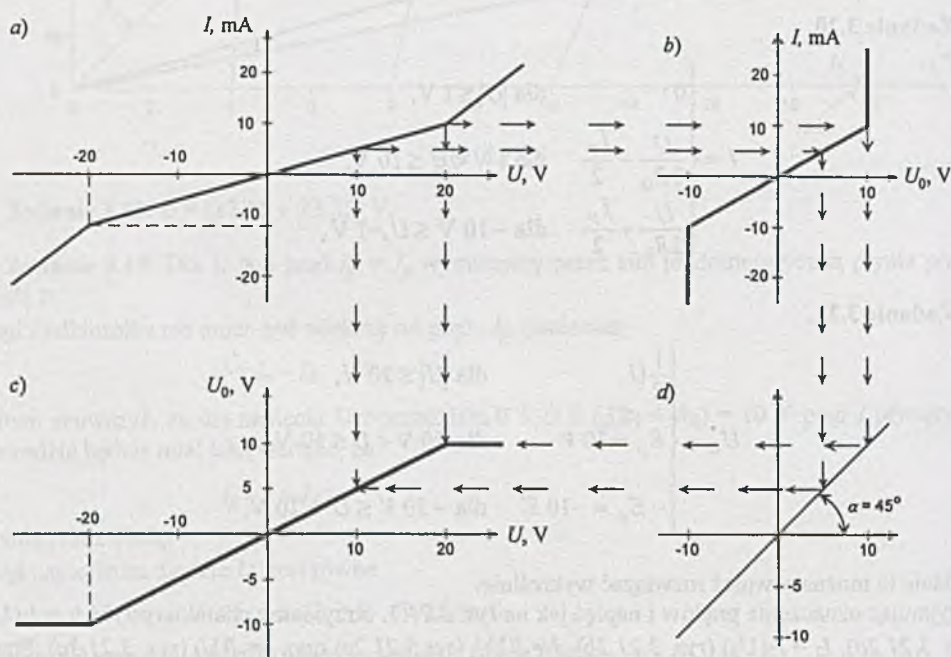
Przyjmując oznaczenia prądów i napięć jak na rys. 3.21.1, otrzymamy charakterystyki $I_1 = I_1(U_0)$ (rys. 3.21.2a), $I_2 = I_2(U_0)$ (rys. 3.21.2b), $I = I(U_0)$ (rys. 3.21.2c) oraz $I = I(U)$ (rys. 3.21.3a). Przez odpowiednie przerzutowanie przez charakterystykę $I = I(U_0)$ otrzymamy szukaną charakterystykę $U_0 = U_0(U)$ (rys. 3.21.3c).



Rys. 3.21.1



Rys. 3.21.2



Rys. 3.21.3

Zadanie 3.22. Przy braku napięcia U na wejściu i przy założeniu że $\frac{E_1}{R_2} < \frac{E_2}{R_3}$ ($I_3 > I_2$), w obwodzie płyną prądy I_3 i I_2 określone zależnościami

$$I_3 = \frac{E_2}{R_3},$$

$$I_2 = \frac{E_1}{R_2} = I_{d1},$$

więc prąd I_{d1} płynący przez diodę D_2

$$I_{d1} = I_3 - I_2 \geq 0.$$

Przy stopniowym zwiększaniu napięcia U , na wejściu popłynie prąd I

$$I = \frac{U}{R_1}. \quad (1)$$

Zależność (1) jest słuszna dla

$$U_{d1} = 0.$$

Napięcie na diodzie D_1 jest równe zero, gdy

$$I_2 \geq I.$$

Przypadek graniczny zachodzi dla $I_2 = I$, co odpowiada wartości napięcia

$$U = U_2 = E_1 \frac{R_1}{R_2}. \quad (2)$$

Dla napięć $U > U_2$ dioda D_1 nie przewodzi prądu ($U_{d1} < 0$) i prąd wyjściowy

$$I = \frac{U + E_1}{R_1 + R_2}, \quad (3)$$

czyli

$$U = (R_1 + R_2)I - E_1. \quad (4)$$

Zależności (3) i (4) są słuszne dla $U_{d1} = 0$ ($I_3 > I$). Przypadek graniczny zachodzi dla $I_3 = I$, co odpowiada wartości napięcia

$$U = U_3 = E_2 \frac{R_1 + R_2}{R_3} - E_1. \quad (5)$$

Dla napięć wejściowych $U > U_3$ diody D_1 i D_2 nie przewodzą prądów; wówczas prąd wejściowy I określony jest zależnością

$$I = \frac{U + E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

lub po przekształceniu, napięcie wejściowe

$$U = (R_1 + R_2 + R_3)I - (E_1 + E_2) \quad (6)$$

Reasumując, związek między napięciem wejściowym U i prądem I na wejściu układu jest następujący

$$U = \begin{cases} R_1 I & \text{dla } U \leq E_2 \frac{R_1}{R_2} = U_2, \\ (R_1 + R_2)I - E_1 & \text{dla } U_2 < U \leq E_2 \frac{R_1 + R_2}{R_3} - E_1 = U_3, \\ (R_1 + R_2 + R_3)I - (E_1 + E_2) & \text{dla } U > U_3. \end{cases}$$

Z warunków podanych w zadaniu

$$U_2 = 1 \text{ V}, \quad U_3 = 4 \text{ V}.$$

Dla przedziału I (na rys. 3.22.b)

$$R = R_1 = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{(1-0)}{(10-0) \cdot 10^{-3}} \Omega = 100 \Omega.$$

Dla przedziału II opór dynamiczny

$$R_{d_2} = R_1 + R_2 = \frac{U + E_1}{I} = \frac{\Delta U'}{\Delta I'} = \frac{(4-1)}{(20-10) \cdot 10^{-3}} \Omega = 300 \Omega.$$

Stąd

$$R_2 = R_{d_2} - R_1 = 200 \Omega.$$

Z równania (2)

$$E_1 = U_2 \frac{R_2}{R_1} = 1 \cdot 2 \text{ V} = 2 \text{ V}.$$

Opór dynamiczny w przedziale III

$$R_{d_3} = R_1 + R_2 + R_3 = \frac{\Delta U''}{\Delta I''} = \frac{(16-4)}{(40-20) \cdot 10^{-3}} \Omega = 600 \Omega,$$

więc

$$R_3 = R_{d_3} - R_1 - R_2 = 300 \Omega.$$

Z równania (5)

$$E_2 = (U_3 + E_1) \frac{R_3}{R_1 + R_2} = (4 + 2) \cdot 1 \text{ V} = 6 \text{ V}.$$

Krzywą odcinkową przedstawioną na rys. 3.22b otrzymamy, przyjmując $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$, $R_3 = 300 \Omega$ oraz $E_1 = 2 \text{ V}$ i $E_2 = 6 \text{ V}$.

Zadanie 3.23. Charakterystyka podana jest na rys. 3.23.1.

Zadanie 3.24. Przeprowadzimy obliczenia przybliżone. Przybliżenie będzie polegało na: 1) pominięciu wpływu prądów płynących przez diody D_1 i D_2 (w kierunku przewodzenia) na napięcie U_1 i U_2 , 2) pominięciu oporników r_1, r_2 przy obliczaniu oporów zastępczych (ponieważ $R_i \gg r_i$). Dla napięć

$$U < U_1 = \frac{U_0}{r_1 + r_2 + r_3} r_1 = 1 \text{ V}$$

prąd

$$I = \frac{U}{R_1}.$$

Z charakterystyki przedstawionej na rys. 3.24b dla $U = 1 \text{ V}$ jest $I = 1 \text{ mA}$, więc wartość rezystora R_1 wynosi

$$R_1 = \frac{U}{I} = \frac{1}{1 \cdot 10^{-3}} \Omega = 1 \text{ k}\Omega.$$

Dla $U_1 \leq U < U_2 = 2 \text{ V}$ dioda D_1 przewodzi więc

$$I = \frac{U}{R_{z1}},$$

gdzie

$$R_{z1} \cong \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{pomijamy } r_1 \ll R_2). \quad (1)$$

Dla $U = 2 \text{ V}$, prąd $I = 4 \text{ mA}$ (rys. 3.24b), a

$$R_{z1} = \frac{U}{I} = 0.5 \text{ k}\Omega. \quad (2)$$

Z zależności (1) i (2) wyznaczamy wartość kolejnego rezystora R_2 ; jest ona równa $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$.

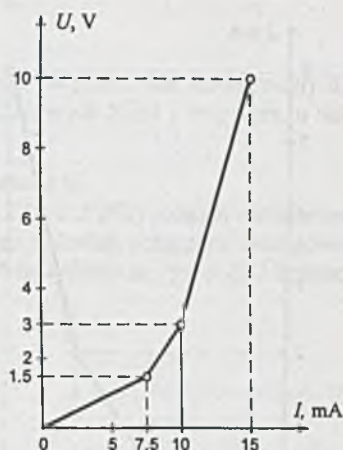
Dla napięć $U \geq U_2 = 2 \text{ V}$ przewodzą diody D_1 i D_2 , więc

$$R_z = \frac{R_{z1} \cdot R_3}{R_{z1} + R_3} = \frac{U}{I}.$$

Dla $U = 3 \text{ V}$ prąd $I = 9 \text{ mA}$, stąd

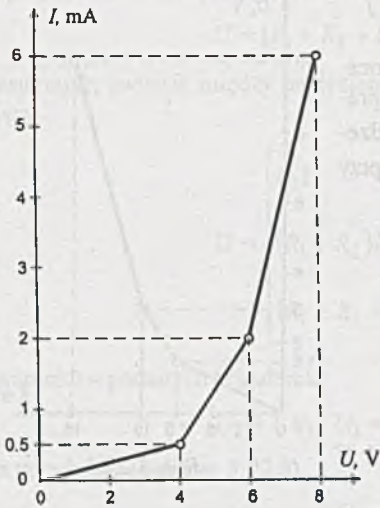
$$R_z = \frac{1}{3} \text{ k}\Omega,$$

$$R_3 = 1 \text{ k}\Omega.$$

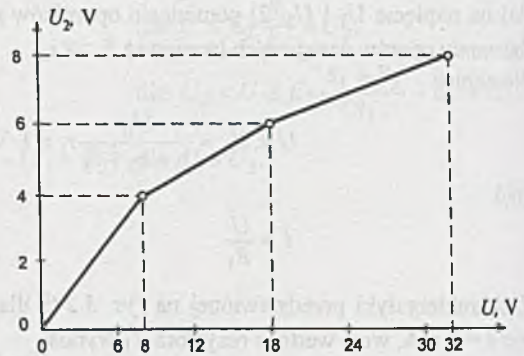


Rys. 3.23.1

Zadanie 3.25. Charakterystyka podana jest na rys. 3.25.1.



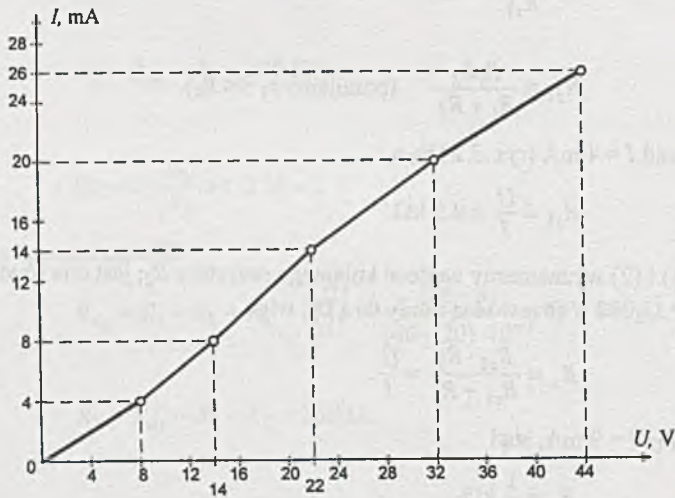
Rys. 3.25.1



Rys. 3.26.1

Zadanie 3.26. Charakterystyka podana jest na rys. 3.26.1.

Zadanie 3.27. Charakterystyka podana jest na rys. 3.27.1.



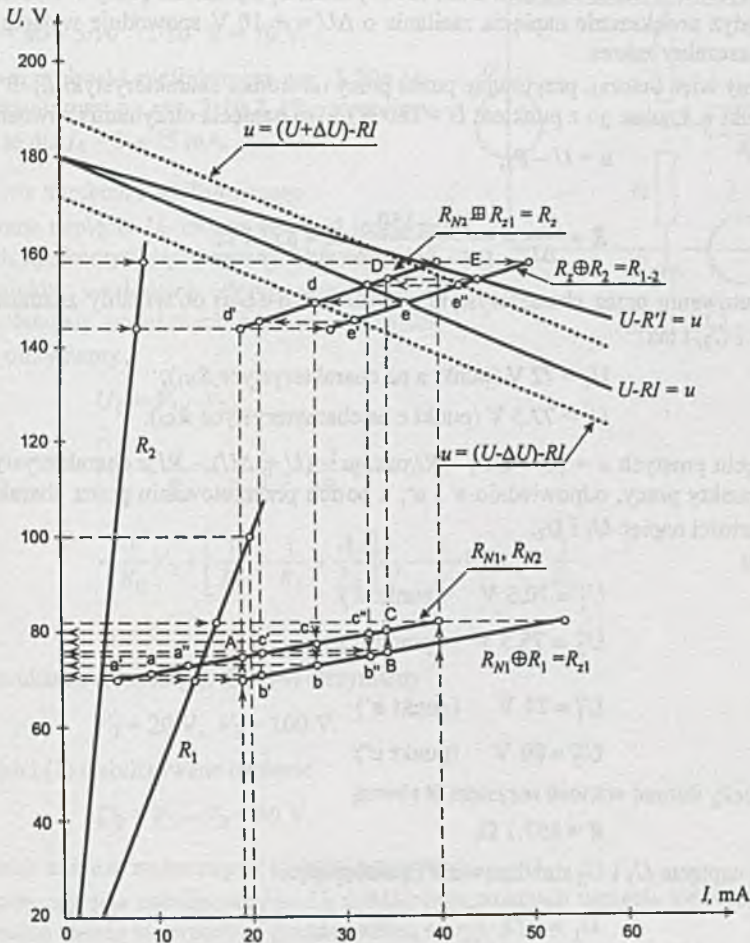
Rys. 3.27.1

Zadanie 3.28. Obliczenie można przeprowadzić korzystając z:

- metody wykreślnej,
- metody polegającej na zastąpieniu elementu nieliniowego (w przedziale linearyzacji) liniowym modelem złożonym z szeregowo połączonych liniowych SEM i rezystora, a następnie rozwiązaniu obwodu z elementami liniowymi.

Zadanie to rozwiążemy metodą a), natomiast zadanie 3.29 metodą b).

Metoda polega na zastąpieniu obwodu między zaciskami 1-2 (rys. 3.28a) jednym elementem nieliniowym i rozwiązaniu prostszego obwodu, w skład którego wchodzi połączone szeregowo element nieliniowy, element liniowy i siła elektromotoryczna. Prześledźmy na rys. 3.28.1 kolejne etapy rozwiązania:



Rys. 3.28.1

- 1) zastępujemy równoległe połączenie R_{N1} i R_1 elementem nieliniowym R_{z1} ($R_{N1} \oplus R_1 = R_{z1}$),
- 2) szeregowo połączone elementy nieliniowe R_{z1} i R_{N2} zastępujemy elementem nieliniowym R_z ($R_{N2} \boxplus R_{z1} = R_z$),
- 3) opornik R_2 i równoległe do niego połączony element nieliniowy R_z zastępujemy elementem nieliniowym R_{1-2} ($R_2 \oplus R_z = R_{1-2}$).

Załóżmy, że w warunkach znamionowych $U_1 = 75$ V (punkt A na charakterystyce stabilizatora), wówczas napięcie $U_2 = 80$ V (punkt C) i po przerzutowaniu przez charakterystyki (A-B-C-D-E) otrzymamy punkt pracy E układu stabilizującego. Prowadząc przez punkt pracy E i punkt $U = 180$ V na osi napięcia prostą (jej równanie $u = U - R'I$) można obliczyć wartość oporu R' . Z charakterystyki wynika, że punkt E nie może jednak być punktem pracy w warunkach znamionowych, gdyż zwiększenie napięcia zasilania o $\Delta U = +10$ V spowoduje wyjście punktu pracy poza dopuszczalny zakres.

Postąpmy więc inaczej, przyjmując punkt pracy na środku charakterystyki $R_z \oplus R_2 = R_{1-2}$. Będzie to punkt e. Łącząc go z punktem $U = 180$ V na osi napięcia otrzymamy równanie prostej

$$u = U - RI,$$

stąd

$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{180 - 150}{(35 - 0) \cdot 10^{-3}} \Omega = 857.1 \Omega.$$

Po przerzutowaniu przez charakterystyki punktu e (e-d-c-b-a) otrzymamy znamionowe wartości napięć U_1 i U_2 , i tak:

$$U_1 = 72 \text{ V (punkt a na charakterystyce } R_{N1}),$$

$$U_2 = 77.5 \text{ V (punkt c na charakterystyce } R_{N2}).$$

W przecięciu prostych $u = (U - \Delta U) - RI$ oraz $u = (U + \Delta U) - RI$ z charakterystyką R_{1-2} otrzymujemy punkty pracy, odpowiednio e' i e'', a po ich przerzutowaniu przez charakterystyki, graniczne wartości napięć U_1 i U_2 .

Z wykresu

$$U_1' = 70.5 \text{ V (punkt a')}$$

$$U_2' = 75.5 \text{ V (punkt c')}$$

oraz

$$U_1'' = 74 \text{ V (punkt a'')}$$

$$U_2'' = 80 \text{ V (punkt c'')}$$

Zatem należy dobrać wartość rezystora R równą

$$R = 857.1 \Omega,$$

wówczas napięcia U_1 i U_2 stabilizowane są następująco:

$$U_1 = 72 \begin{matrix} +2 \text{ V} \\ -1.5 \text{ V} \end{matrix}$$

$$U_2 = 77.5 \begin{matrix} +2.5 \text{ V} \\ -1.5 \text{ V} \end{matrix}.$$

Zadanie 3.29. Element nieliniowy, w zakresie prądów $I_4 = 5 \div 25$ mA, można zastąpić oporem dynamicznym R_4 i siłą elektromotoryczną E_4 (rys. 3.29.1), gdzie

$$R_4 = \frac{\Delta U_4}{\Delta I_4} = \frac{120 - 80}{(25 - 5) \cdot 10^{-3}} \Omega = 2 \text{ k}\Omega.$$

Dla $I_4 = 5$ mA

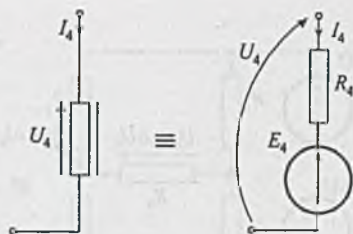
$$U_4 = E_4 + R_4 I_4 = 80 \text{ V}$$

(z charakterystyki - rys. 3.29b),

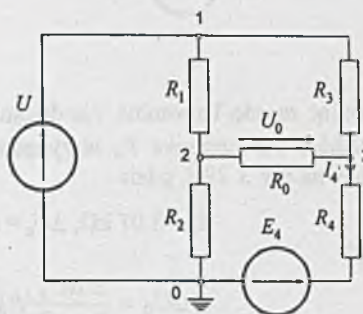
więc

$$E_4 = 80 - 5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V} = 70 \text{ V}.$$

Zastępujemy więc obwód nieliniowy z rys. 3.29a obwodem przedstawionym na rys. 3.29.2. Przypomnijmy, że słuszne jest to dla $I_4 = 5 \div 25$ mA.



Rys. 3.29.1



Rys. 3.29.2

1) Obliczenie napięcia stabilizowanego

Stabilizowane napięcie U_0 można obliczyć jedną ze znanych metod, np. korzystając z zasady Thévenina lub metodą potencjałów węzłowych. Przyjmując $V_0 = 0$ i oznaczając potencjały pozostałych węzłów odpowiednio V_1 , V_2 i V_3 otrzymamy

$$U_0 = V_3 - V_2, \quad (1)$$

$$\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_0} \right] V_2 - \frac{1}{R_3} V_1 = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{1}{R_0} V_2 + \left[\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right] V_3 - \frac{1}{R_3} V_1 = E_4 \frac{1}{R_4}, \quad (3)$$

$$V_1 = U. \quad (4)$$

Po rozwiązaniu układu równań (2), (3) i (4) otrzymamy

$$V_2 = 20 \text{ V}, \quad V_3 = 100 \text{ V}.$$

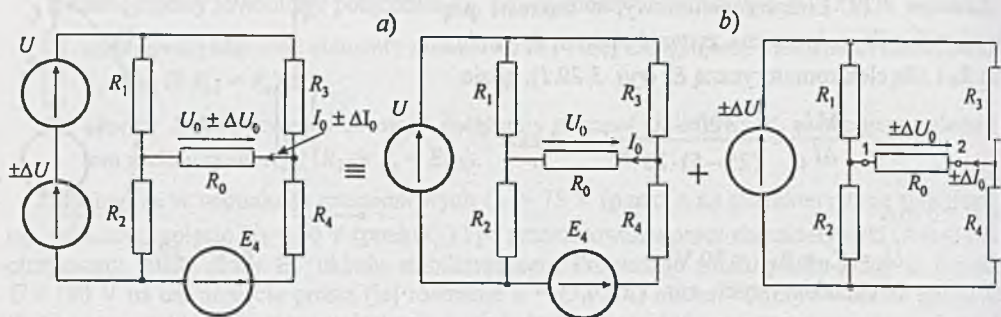
Więc z zależności (1) stabilizowane napięcie

$$U_0 = V_3 - V_2 = 80 \text{ V}.$$

2) Obliczenie zakresu zmian napięcia stabilizowanego

Zakres zmian napięcia stabilizowanego $U_0 \pm \Delta U_0$, przy zmianach napięcia zasilania $U \pm \Delta U$, obliczymy stosując zasadę superpozycji przedstawioną na rys. 3.29.3.

Obliczenie zmian napięcia stabilizowanego w obwodzie nieliniowym sprowadza się do obliczenia przyrostu napięcia $\pm \Delta U_0$ na oporniku R_0 obwodu liniowego zasilanego przyrostowym napięciem $\pm \Delta U$ (rys. 3.29.3b).



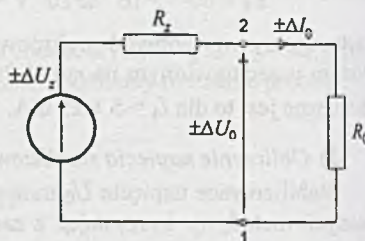
Rys. 3.29.3

Stosując zasadę Thévenina, dla dwójnika dołączonego do zacisków 1-2 opornika R_0 otrzymamy obwód przedstawiony na rys. 3.29.4, gdzie

$$R_z = 3.07 \text{ k}\Omega, \Delta U_z = 6.67 \text{ V}.$$

Stąd

$$\pm \Delta U_0 = \frac{\pm \Delta U_z}{R_z + R_0} R_0 = \pm 5.6 \text{ V}.$$



Rys. 3.29.4

3) Obliczenie dopuszczalnego zakresu zmian napięcia zasilania

Zakres zmian napięcia zasilania, przy którym element nieliniowy pracuje w dopuszczalnym linearyzowanym przedziale, można wyznaczyć zastępując obwód liniowy (po odłączeniu gałęzi 0-3 z rys. 3.29.2) oporem R_w i siłą elektromotoryczną E_w (rys. 3.29.5). Łatwo wyliczyć (sprawdzić!), że

$$R_w = \frac{R_3 \left(R_0 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)}{R_3 + R_0 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2}} = 2.569 \text{ k}\Omega$$

oraz

$$E_w = 0.866U. \quad (5)$$

Graniczne punkty pracy A i B elementu nieliniowego (rys. 3.29b) określają graniczne dopuszczalne wartości napięcia zasilania.

Dla punktu A

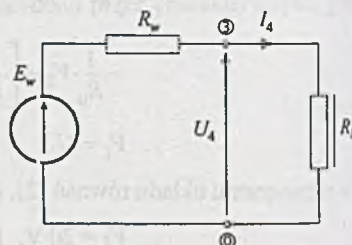
$$U'_4 = 80 \text{ V}, \quad I'_4 = 5 \text{ mA},$$

więc

$$E'_w = U'_4 + R_w I'_4 = 80 + 12.845 \text{ V} = 92.845 \text{ V}.$$

Uwzględniając zależność (5) otrzymamy minimalną dopuszczalną wartość napięcia zasilania

$$U' = \frac{92.845}{0.866} = 107.211 \text{ V}.$$



Rys. 3.29.5

Dla punktu B

$$U_4'' = 120 \text{ V}, \quad I_4'' = 25 \text{ mA},$$

więc

$$E_w'' = 184.225 \text{ V},$$

a maksymalna dopuszczalna wartość napięcia zasilania

$$U'' = 212.731 \text{ V}.$$

Zadanie 3.30. Charakterystyka prądowo-napięciowa elementu nieliniowego podana jest na rys. 3.30.1a.

Z definicji opór statyczny

$$R_{st} = \frac{U}{I} = \frac{U}{aU^{3/2}} = \frac{1}{aU^{1/2}}, \quad (1)$$

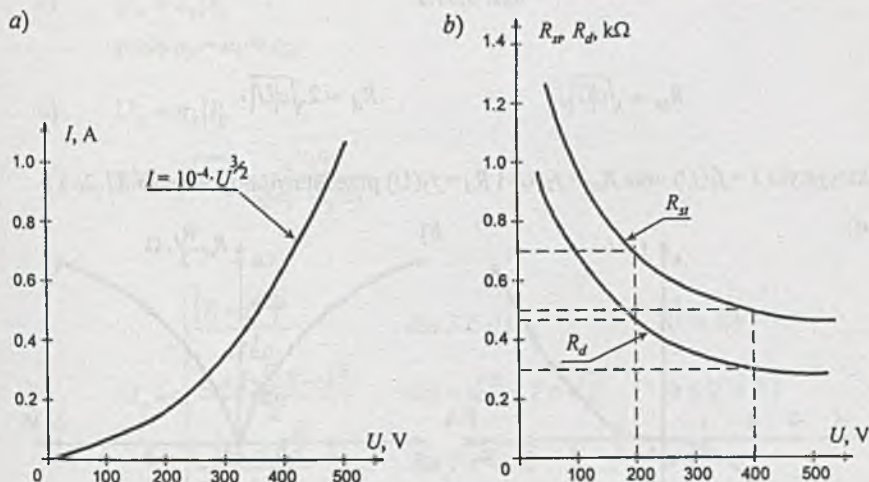
a charakterystyka $R_{st} = f_1(U)$ przedstawiona jest na rys. 3.30.1b.

Również z definicji obliczymy opór dynamiczny

$$R_d = \frac{dU}{dI} = \dots = \frac{2}{3aU^{1/2}} = \frac{2}{3} R_{st}, \quad (2)$$

a charakterystyka $R_d = f_2(U)$ przedstawiona jest na rys. 3.30.1b.

Z charakterystyk lub z zależności (1) i (2) łatwo można wyznaczyć wartości oporów, statycznego i dynamicznego, dla zadanych wartości napięć U i tak dla $U = 200 \text{ V}$ $R_{st} = 0.707 \text{ k}\Omega$, oraz $R_d = 0.471 \text{ k}\Omega$, natomiast dla $U = 400 \text{ V}$ $R_{st} = 0.5 \text{ k}\Omega$, a $R_d = 0.333 \text{ k}\Omega$.



Rys. 3.30.1

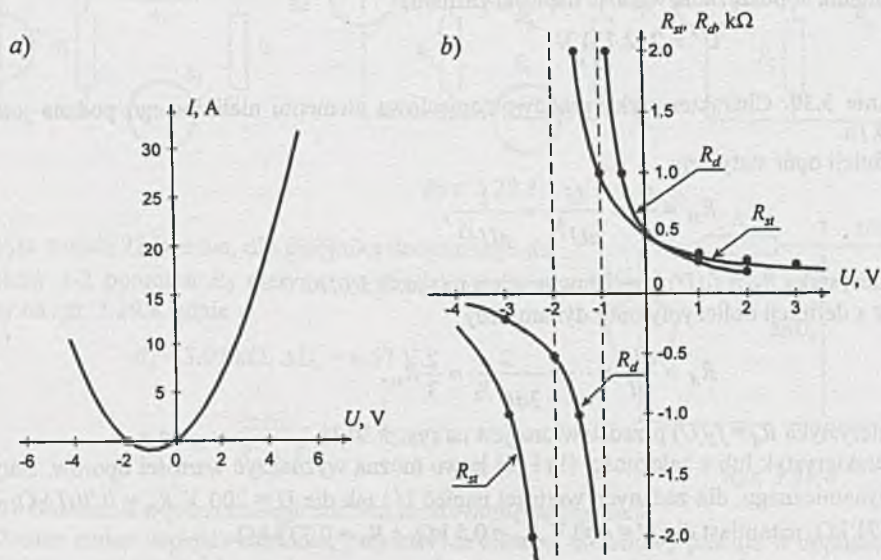
Zadanie 3.31.

Ad 1)

$$R_{st} = \frac{1}{aU + b},$$

$$R_d = \frac{1}{2aU + b}.$$

Charakterystyki $I = f_1(U)$ oraz $R_{st} = f_2(U)$ i $R_d = f_3(U)$ przedstawiono na rys. 3.31.1a i b.



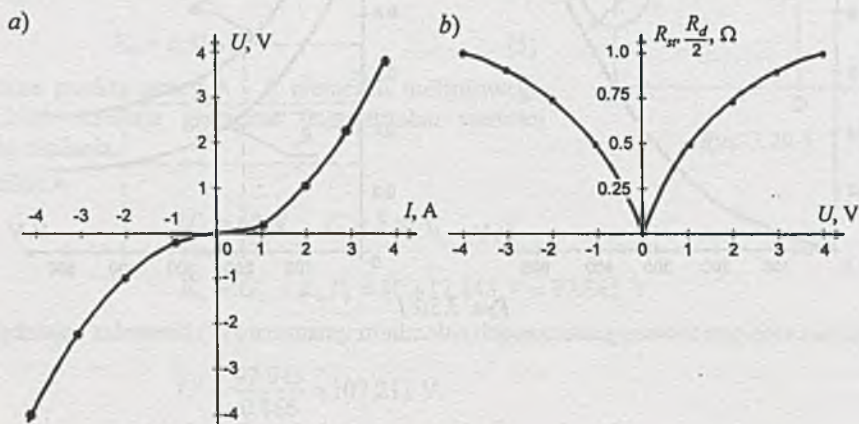
Rys. 3.31.1

Ad 2)

$$R_{st} = \sqrt{c|U|},$$

$$R_d = 2\sqrt{c|U|},$$

a charakterystyki $I = f_1(U)$ oraz $R_{st} = f_2(U)$ i $R_d = f_3(U)$ przedstawiono na rys. 3.31.2a i b.



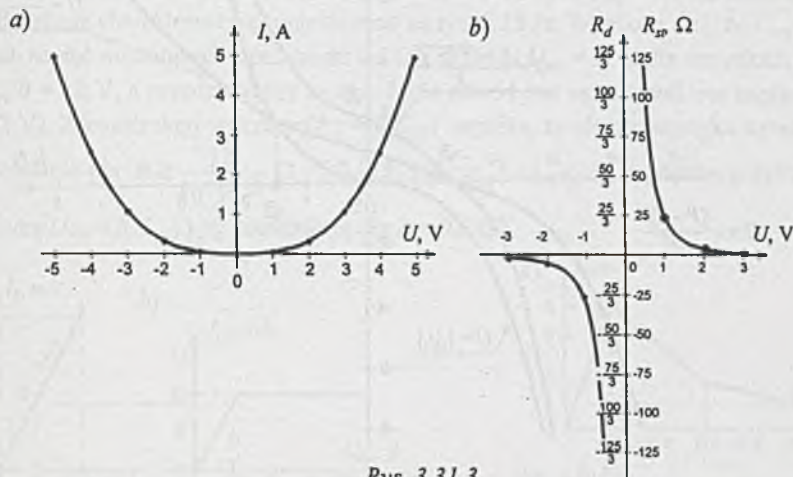
Rys. 3.31.2

Ad 3)

$$R_{st} = \frac{1}{d \cdot U \cdot |U|},$$

$$R_d = \frac{1}{3d \cdot U \cdot |U|},$$

a charakterystyki przedstawiono na rys. 3.31.3a i b.



Rys. 3.31.3

Zadanie 3.32.

a) $U_z = a_z |I|,$

gdzie $a_z = a_1 + a_2,$

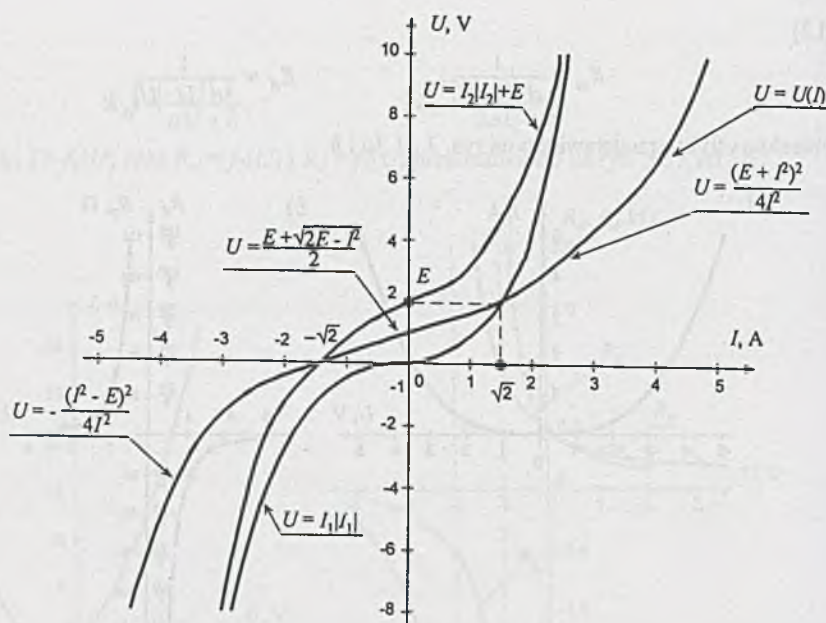
b) $U_z = a_z |I|,$

gdzie $\sqrt{a_z} = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}},$

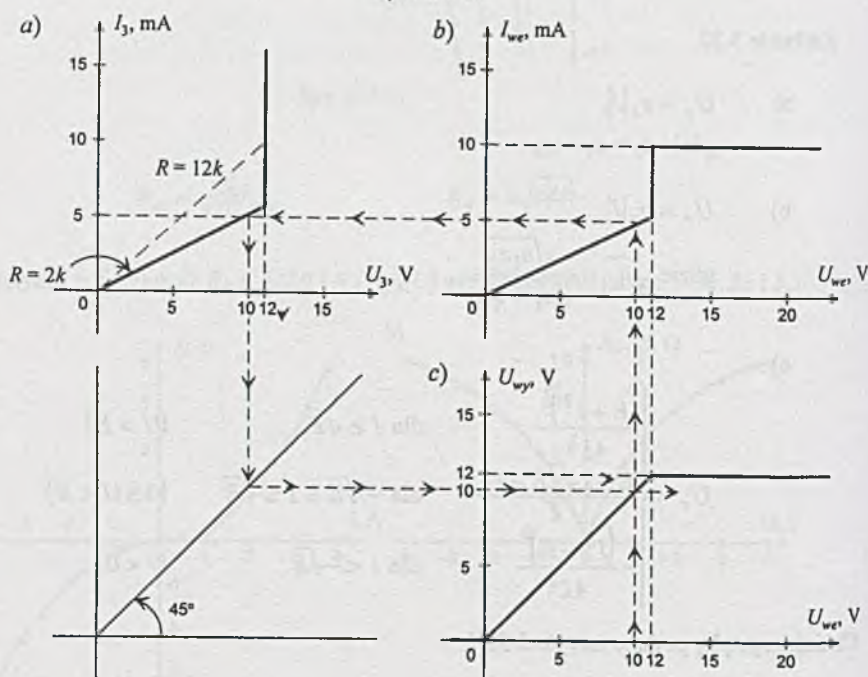
c)

$$U_z = \begin{cases} \frac{(E + I^2)^2}{4I^2} & \text{dla } I \geq \sqrt{E} & (U > E) \\ \frac{E + I\sqrt{2E} - I^2}{2} & \text{dla } -\sqrt{E} \leq I \leq \sqrt{E} & (0 \leq U < E) \\ -\frac{(I^2 - E)^2}{4I^2} & \text{dla } I < -\sqrt{E} & U < 0. \end{cases}$$

Charakterystykę podano na rys. 3.32.1.



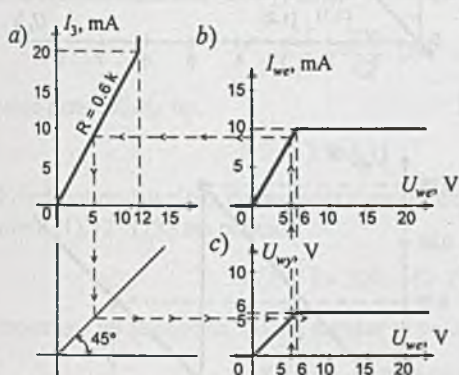
Rys. 3.32.1



Rys. 3.33.1

Zadanie 3.33. Konstrukcję graficzną charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ podano na rys. 3.33.1a, b i c.

Na rys. 3.33.1a podano charakterystykę zastępczą równolegle połączonych elementów: oporu R oraz drugiego elementu nieliniowego (diody Zenera). Szeregowe połączenie tej charakterystyki z pierwszym elementem nieliniowym daje charakterystykę zastępczą $I_{we} = f(U_{we})$ przedstawioną na rys. 3.33.1b. Graficzny sposób otrzymywania charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ zaznaczono strzałkami, a uzyskaną charakterystykę umieszczono na rys. 3.33.1c. Wynika z niej, że $U_{wy} = (U_{we})$ dla wszystkich napięć wejściowych z przedziału $0 \leq U_{we} \leq 12 \text{ V}$ i $U_{wy} = 12 \text{ V}$ dla wszystkich $U_{we} \geq 12 \text{ V}$, więc $U_{we} = 12 \text{ V}$, a przedstawiony na rys. 3.33a obwód jest ogranicznikiem napięcia U_{wy} (dla $U_{we} \geq 12 \text{ V}$). Z konstrukcji wykresu $U_{wy} = f(U_{we})$ wynika, że charakterystyka ogranicznika nie ulegnie zmianie dla $R \geq \frac{12}{10 \cdot 10^{-3}} \Omega = 1.2 \text{ k}\Omega$. Na rys. 3.33.2a, b i c podano przykładowo charakterystykę $U_{wy} = f(U_{we})$ i jej konstrukcję dla $R = 0.6 \text{ k}\Omega$.

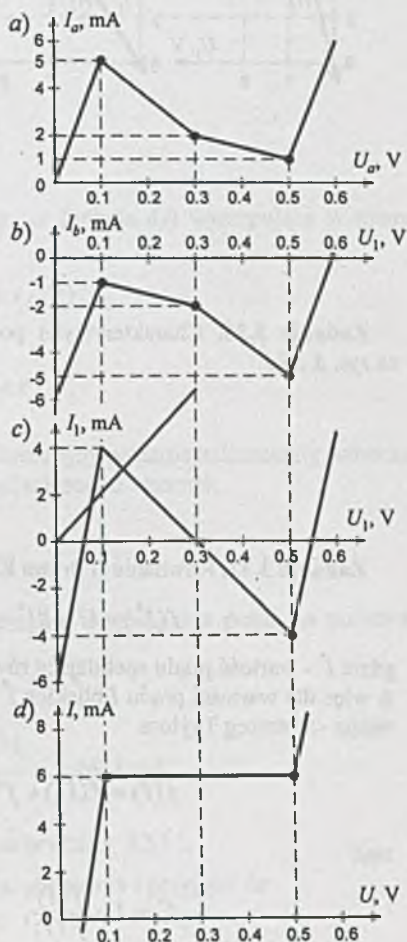


Rys. 3.33.2

Zadanie 3.34. $R = 50 \Omega$, a charakterystykę i sposób jej tworzenia podano na rys. 3.34.1.

Zadanie 3.35. W celu utworzenia charakterystyki elementu zastępczego łączymy każdy odcinek charakterystyki ($I_1 - U_1$) elementu pierwszego z wszystkimi odcinkami charakterystyki ($I_2 - U_2$) elementu drugiego. Np. rozpatrzmy odcinek 2 charakterystyki ($I_1 - U_1$) określony tylko dla $I_a \leq I_1 \leq I_b$. Aby połączyć go z odcinkiem 1 charakterystyki ($I_2 - U_2$), który jest określony dla $-\infty \leq I_2 \leq I_d$, należy najpierw wyznaczyć wspólny przedział (zakres prądów) dla obydwu odcinków charakterystyk. Ten wspólny przedział jest dla $I_a \leq I \leq I_d$.

Stosując metodę graficzną dla szeregowego połączenia elementów uzyskujemy odcinek (2,1), jak to pokazano na rys. 3.35.1c.

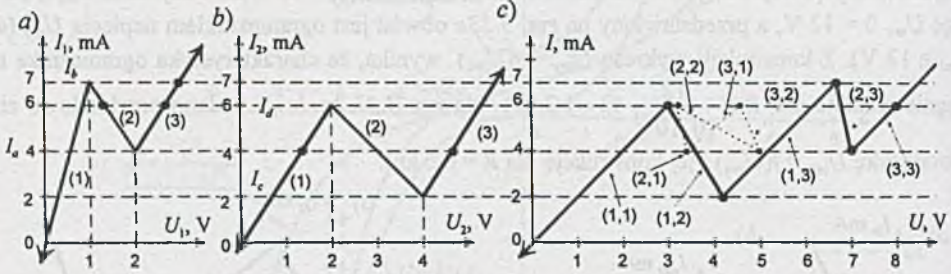


Rys. 3.34.1

Powtarzając ten sam sposób postępowania dla odcinka drugiego pierwszego elementu nieliniowego i dla odcinka drugiego drugiego elementu nieliniowego otrzymamy odcinek (2,2). Podobnie postępując uzyskamy pozostałe odcinki charakterystyki.

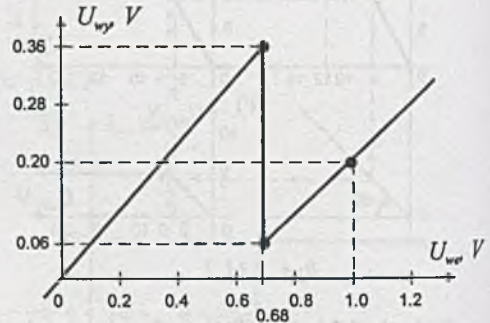
Ponieważ charakterystyki $(I_1 - U_1)$ oraz $(I_2 - U_2)$ mają po 3 odcinki, możliwych jest 9 kombinacji, czyli charakterystyka wypadkowa $(I - U)$ może składać się z 9 odcinków. Łatwo sprawdzić, że w rozpatrywanym przykładzie (rys. 3.35.1c) tak jest.

Kiedy charakterystyka $(I - U)$ będzie zawierała mniej niż 9 odcinków?



Rys. 3.35.1

Zadanie 3.36. Charakterystyka podana jest na rys. 3.36.1.



Rys. 3.36.1

Zadanie 3.37. Równanie II prawa Kirchhoffa dla obwodu z rys. 3.1 ma postać

$$f(I^*) = U - RI^* - CI^{*B} = 0, \quad (1)$$

gdzie I^* - wartość prądu spełniająca równanie (1).

A więc dla wartości prądu I bliskich I^* można rozłożyć funkcję $f(I)$ - jeśli jest ciągła i różniczkowalna - w szereg Taylora

$$f(I) = f(I^*) + f'(I)(I - I^*) + \frac{f''(I)}{2!}(I - I^*)^2 + \dots \approx f(I^*) + f'(I)(I - I^*),$$

stąd

$$I^* = I - \frac{f(I)}{f'(I)}, \quad (2)$$

Postać iteracyjna równania (2) przedstawiona jako zależność prądu w następnej iteracji od wyników iteracji poprzedniej

$$I^{(n+1)} = I^{(n)} - \frac{f(I^{(n)})}{f'(I^{(n)})} \quad (3)$$

pozwała, po przyjęciu przybliżenia początkowego $I^{(0)}$, wyznaczyć iteracyjnie wartość prądu równą (w przybliżeniu) I^* .

Przedstawiona powyżej metoda rozwiązywania równania nieliniowego opisującego obwód nieliniowy znana jest jako metoda Newtona [15].

Jaką wartość zerowego przybliżenia $I^{(0)}$, zapewniającą szybkie rozwiązanie, należy przyjąć? Najlepiej byłoby przyjąć wartość w otoczeniu rozwiązania, czyli $I^{(0)} \approx I^*$, ale nie znamy I^* , należy więc oszacować jego wartość.

Oczywiście prąd płynący w obwodzie z rys. 3.1 będzie mniejszy, niż byłby, gdyby z obwodu usunięto element nieliniowy, czyli

$$I^* < \frac{U}{R} = \frac{200}{42} \cdot 10^{-3} = 4.76 \text{ mA},$$

więc przyjmijmy np.

$$I^{(0)} = 3 \text{ mA}.$$

Przed przystąpieniem do rozwiązywania przypomnijmy, że funkcja $f(I)$ występująca w równaniach (1), (2) i (3) ma postać

$$f(I^{(n)}) = 200 - 42 \cdot I^{(n)} - 80.38 \cdot (I^{(n)})^{0.2},$$

natomiast jej pochodną można zapisać w postaci

$$f'(I^{(n)}) = -42 - 16.076 \cdot (I^{(n)})^{-0.8},$$

gdzie $I^{(n)}$ prąd w mA, ponadto przyjmijmy, że proces iteracyjny zostanie zakończony wówczas, gdy względny przyrost wartości prądu w kolejnych iteracjach spełni warunek

$$\left| \frac{I^{(n+1)} - I^{(n)}}{I^{(n)}} \right| \leq 0.0001.$$

Prześledźmy kolejne, prowadzące do rozwiązania, iteracyjne wyznaczanie prądu na podstawie zależności (3):

0 - iteracja: przyjmujemy $I^{(0)} = 3 \text{ mA}$,

1 - iteracja:

$$I^{(1)} = 3 - \frac{200 - 42 \cdot 3 - 80.38 \cdot 3^{0.2}}{-42 - 16.076 \cdot 3^{-0.8}} = 2.4631 \text{ mA},$$

wartości $I^{(n)}$ uzyskiwane w kolejnych iteracjach podano w tablicy 3.37.1.

Ponieważ $|I^{(4)} - I^{(3)}| = |2.4689 - 2.4689| \approx 0$, przerwano obliczenia i przyjęto, że

$$I^* \cong I^{(4)} \cong 2.469 \text{ mA}.$$

W tablicy 3.37.1 podano również wartości napięć $U_N^{(n)} = C \cdot I^{(n)B}$ oraz $U_1^{(n)} = R \cdot I^{(n)}$ w kolejnych krokach iteracji.

Sprawdzeniem dokładności obliczeń jest wartość $f(I^{(n)})$, która w rozpatrywanym przykładzie wynosi:

$$\begin{aligned} f(I^{(4)}) &= 200 - 42 \cdot 2.4689 - 80.38 \cdot (2.4689)^{0.2} = \\ &= 200 - 103.694 - 96.305 = 0.001 \text{ V} = 1 \text{ mV} \end{aligned}$$

i jest miarą niespełnienia przez obliczony prąd $I^{(4)}$ II prawa Kirchhoffa. Otrzymana dokładność wyniku jest wystarczająca. Należy bowiem pamiętać, że wartości liczbowe współczynników B i C dla konkretnego elementu nieliniowego są zazwyczaj określone ze znacznie mniejszą dokładnością.

Tablica 3.37.1

Nr iteracji	$I^{(n)}$ w mA	$f(I^{(n)})$ w V	$\frac{I^{(n)} - I^{(n-1)}}{I^{(n-1)}}$	$U_N^{(n)}$ w V	$U_1^{(n)}$ w V
0	3.0000	- 26.132	-	100.132	126.000
1	2.4631	+ 0.290	1.7896E-1	96.260	103.450
2	2.4651	+ 0.190	8.1198E-4	96.275	103.534
3	2.4689	+ 0.001	1.5415E-3	96.305	103.694
4	2.4689	+ 0.001	0.0	96.305	103.694

Właściwe oszacowanie przybliżenia początkowego ma istotny wpływ na liczbę iteracji, które należy wykonać, a nawet przy niekorzystnym dobraniu przybliżenia początkowego proces iteracyjny może być rozbieżny lub zbieżny do innego (jeśli takie istnieje) rozwiązania.

Dla np. $I^{(0)} = 0$ mA wynik końcowy uzyskano by po 6 iteracjach, jak to wynika z rezultatów przedstawionych w tablicy 3.37.2.

Tablica 3.37.2

Nr iteracji	$I^{(n)}$ w mA
0	0.0
1	2.2018
2	2.4669
3	2.4682
4	2.4687
5	2.4689
6	2.4689

Zadanie 3.38. $U_0 = E$, gdy $R_{st} = R$,
ale

$$R_{st} = \frac{U'}{I'} = aI' = R,$$

stąd

$$I' = \frac{R}{a} = I_1 = I_2,$$

więc

$$E_0 = RI' + aI'^2 = R \cdot \frac{R}{a} + a \cdot \left(\frac{R}{a}\right)^2 = 10 \text{ V.}$$

Dla napięć zasilania $0 < E < E_0$ napięcie na przekątnej mostka $U_0 > 0$, ponieważ przy równych prądach $I_1 = I_2 = 0.5 I$ dla $E < E_0$ napięcie U_1 na oporze R jest większe od napięcia U_2 na elemencie nieliniowym.

Zadanie 3.39. Do wyznaczenia rozpyływów użyta zostanie metoda iteracyjna, wykorzystująca pojęcie drzewa i gałęzi łączących [24].

Jeśli zostanie wybrane drzewo grafu obwodu jak na rys. 3.39.1, wówczas wektory prądów gałęzi łączących i prądów gałęzi drzewa mają następujące składowe

$$I_l = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad I_t = \begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix}$$

wówczas znaną [1] zależność między nimi

$$I_t = -A' \cdot I_l$$

można przedstawić w postaci

$$\begin{bmatrix} I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

Podobnie, jeśli rozpiszemy składowe wektorów napięć gałęzi łączących i gałęzi drzewa w postaci

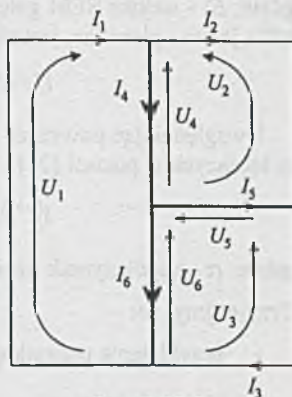
$$U_l = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad U_t = \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$

wówczas znany związek [1]

$$U_l = -A'^T \cdot U_t$$

można rozpisać w postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ +1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix}$$



Rys. 3.39.1

Oznaczmy związki między napięciami i prądami na gałęziach drzewa oraz prądami i napięciami na gałęziach łączących przez

$$U_l = f(I_l) = U_l(I_l)$$

oraz

$$I = f^{-1}(U_l + E_l) = I_l(U_l, E_l),$$

gdzie: E_l - wektor SEM gałęzi łączących (w tym przykładzie wektor o 3 składowych, z których tylko jedna - pierwsza, jest różna od zera),

$$U_l = f_l(I_l) = a_l I_l |I_l|.$$

Uwzględniając powyższe równania można zapisać iteracyjną postać zależności na prądy gałęzi łączących w postaci [24]

$$I_l^{(n+1)} = (1 - \alpha) I_l^{(n)} + \alpha I_l (A^T U_l (-A I_l^{(n)}) E_l),$$

gdzie: α - współczynnik uźbieźniania iteracji ($0 \leq \alpha \leq 1$).

Przyjmijmy, że:

- przybliżenie początkowe składowych wektora prądów gałęzi łączących jest równe

$$I_l^{(0)} = \begin{bmatrix} +1.0 \\ +1.0 \\ +1.0 \end{bmatrix}$$

- współczynnik uźbieźniania iteracji $\alpha = 0.3$,
- obliczenia zostaną zakończone, jeśli następna iteracja spowoduje przyrost prądów gałęzi łączących nie większy niż 0.001 wartości bezwzględnych uzyskanych w poprzedniej iteracji.

W tablicy 3.39.1 podano niektóre pośrednie wyniki obliczeń.

Tablica 3.39.1

Nr iteracji	$I_1^{(n)}$ w A	$I_2^{(n)}$ w A	$I_3^{(n)}$ w A
0	1.0000 E 0	1.0000 E 0	1.0000 E 0
1	1.3708 E 0	7.0000 E -1	7.0000 E -1
2	1.5670 E 0	6.0619 E -1	8.3857 E -1
3	1.6773 E 0	6.0920 E -1	9.3890 E -1
⋮			
10	1.8593 E 0	7.4605 E -1	1.0985 E -1
11	1.8637 E 0	7.5046 E -1	1.1030 E 0
12	1.8668 E 0	7.5356 E -1	1.1060 E 0
⋮			
17	1.8728 E 0	7.5957 E -1	1.1121 E 0
18	1.8732 E 0	7.5994 E -1	1.1124 E 0
19	1.8735 E 0	7.6019 E -1	1.1127 E 0

Jako sprawdzian dokładności (i poprawności) obliczeń może służyć dokładność spełnienia przez prądy gałęzi łączących (uzyskane po 19 iteracjach)

$$I_l^{(19)} = \begin{array}{|c|} \hline 1.8735E0 \\ \hline 7.6019E-1 \\ \hline 1.1127E0 \\ \hline \end{array}$$

oraz odpowiadające im prądy gałęzi drzewa

$$I_t^{(19)} = \begin{array}{|c|} \hline 1.1133E0 \\ \hline 3.5249E-1 \\ \hline 7.6079E0 \\ \hline \end{array}$$

równań drugiego prawa Kirchhoffa dla oczek I, II i III

$$\begin{array}{ll} \text{I} & U_1^{(19)} + U_6^{(19)} + U_4^{(19)} = 8.124E-7 \\ \text{II} & U_2^{(19)} - U_4^{(19)} - U_5^{(19)} = 5.057E-7 \\ \text{III} & U_3^{(19)} + U_5^{(19)} - U_6^{(19)} = -1.319E-7 \end{array}$$

Równania te spełnione są z wystarczającą dla większości praktycznych potrzeb dokładnością, można więc przyjąć, że rozwiązaniem jest prąd

$$I \approx I^{(19)}.$$

Zbieżność do rozwiązania i potrzebna do tego liczba iteracji zależne są dla danego obwodu od przybliżenia początkowego $I_l^{(0)}$ i od wartości współczynnika α .

W tablicy 3.39.2 podano przykładowo, jaka jest niezbędna liczba iteracji przy tym samym kryterium zakończenia obliczeń i tym samym współczynniku α dla kilku różnych wartości przybliżenia początkowego wektora prądów gałęzi łączących.

Tablica 3.39.2

Lp.	Przybliżenie początkowe			Liczba iteracji n	Dokładność spełnienia II prawa Kirchhoffa
	$I_1^{(0)}$	$I_2^{(0)}$	$I_3^{(0)}$		
1	1.0	1.0	1.0	19	1 E -6
2	10.0	10.0	10.0	27	1 E -9
3	0.1	0.1	0.1	24	1 E -7
4	- 1.0	- 1.0	- 1.0	24	1 E -8
5	- 10.0	- 10.0	- 10.0	28	1 E -9
6	- 0.1	- 0.1	- 0.1	23	1 E -8

Z kolei przy ustalonej wartości przybliżenia początkowego (punktu startowego) liczba iteracji zależna jest od wartości współczynnika α .

W tablicy 3.39.3 podano liczbę iteracji dla tej samej wartości przybliżenia początkowego (1.0, 1.0, 1.0), ale dla różnych wartości współczynnika α .

Tablica 3.39.3

Wartość współczynnika α	0.1	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.5
Liczba iteracji n	62	30	23	19	16	100	iteracja rozbieżna

Dane umieszczone w tablicy 3.39.3 wykorzystano do sporządzenia wykresu zależności liczby iteracji od współczynnika α , przedstawionego na rys. 3.39.2.

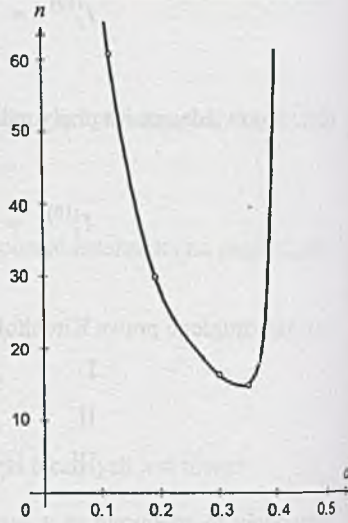
Warto prześledzić, w jaki sposób wartości prądów, obliczone w kolejnym cyklu iteracyjnym, dążą do rozwiązania. Pozwoli to na wyciągnięcie wniosków, umożliwiających zmniejszenie liczby iteracji.

Na rys. 3.39.3a i b przedstawiono, w jaki sposób wartości prądu $I_3^{(n)}$ dążą do rozwiązania przy różnych wartościach współczynników α . Z rys. 3.39.3a wynika, że dla współczynnika $\alpha = 0.1, 0.25$ i 0.35 wartość prądu $I_3^{(n)}$ zdąża do rozwiązania aperiodycznie, natomiast dla współczynnika $\alpha = 0.4$ (rys. 3.39.3b) przebieg prądu $I_3^{(n)}$ ma charakter drgań tłumionych.

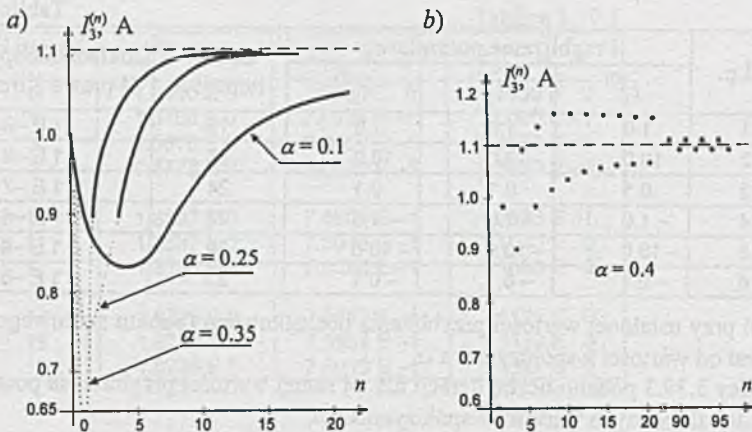
Z wykresów przedstawionych na rys. 3.39.3 wynika też, że prąd $I_3^{(n)}$ dla przypadków aperiodycznych stosunkowo szybko dochodzi do wartości bliskiej rozwiązania, a potem długo dochodzi asymptotycznie do rozwiązania. Zauważmy, że liczbę iteracji można by znacznie zmniejszyć, jeśli po dojściu $I_1^{(n)}$ do wartości bliskiej rozwiązaniu zwiększono by wartość współczynnika α i tak np.: dla $\alpha = 0.1$ i przybliżenia początkowego

$$I_1^{(0)T} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Jeśli po 10 iteracjach nastąpi zmiana współczynnika α na $\alpha = 0.3$, to proces zostanie zakończony po $n = 10 + 11 = 21$ iteracjach (przy $\alpha = 0.1$ $n = 62$).



Rys. 3.39.2



Rys. 3.39.3

Zadanie 3.40. Wyniki podano w tablicy 3.40.1.

Tablica 3.40.1

n	$I^{(n)}$	n	$I^{(n)}$
0	3.0000	15	2.4782
1	2.8756	16	2.4760
2	2.7800	17	2.4743
3	2.7068	18	2.4730
4	2.6507	19	2.4721
5	2.6078	20	2.4713
6	2.5749	21	2.4708
7	2.5498	22	2.4703
8	2.5307	23	2.4699
9	2.5159	24	2.4697
10	2.5048	25	2.4695
11	2.4963	26	2.4694
12	2.4897	27	2.4693
13	2.4849	28	2.4692
14	2.4811	29	2.4691

Zadanie 3.41. Przedstawiony na rys. 3.41 układ Graetza rozwiążemy w sposób przybliżony. Przybliżenie polega na pominięciu w analizie prądów wstecznych diod.

Obwód mostka dla dodatnich wartości napięcia zasilania ($E > 0$) można przedstawić jak na rys. 3.41.1.

Napięcie na pierwszej diodzie w kierunku przewodzenia jest określone zależnością

$$U_1 = \frac{\ln(10^4 \cdot I - 1)}{40}, \quad (1)$$

a równanie II prawa Kirchhoffa dla obwodu można zapisać w postaci

$$E - (R_1 + R_2)I - 2 \cdot \frac{\ln(10^4 I - 1)}{40} = 0. \quad (2)$$

Rozwiązując równanie (2) jedną z metod iteracyjnych, np. metodą Newtona, otrzymamy (tablica 3.41.1) przybliżoną wartość prądu diod $I \approx 1.951$ A; wówczas z równania (1) napięcie na pierwszej diodzie $U_1 = 0.245$ V.

Moc tracona na diodzie D_1

$$P_{D1} = U_1 I = 478 \text{ mW} = P_{D4}$$

jest równa mocy traconej na diodzie D_4 .

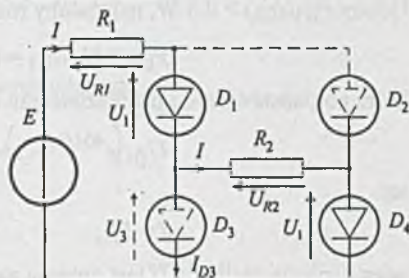
Jeśli uwzględnimy dodatkowo diody D_2 i D_3 , to

$$U_3 = E - R_1 I - U_1 \approx 15.853 \text{ V},$$

a prąd wsteczny trzeciej diody

$$I_{D3} \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ A},$$

czyli jest o 4 rzędy mniejszy od prądu I , może więc być w analizie pominięty.



Rys. 3.41.1

Tablica 3.41.1

n	$I^{(n)}$ w A
0	2.000
1	1.799
2	1.950
3	1.951
4	1.951

Moc tracona na diodzie D_3 (pracującej w kierunku zaporowym)

$$P_{D3} = U_3 I_{D3} = 1.6 \text{ mW} = P_{D2}$$

jest równa mocy traconej na drugiej diodzie.

Zadanie 3.42. $(I_{D2})_{\max} = 3 \text{ A}$,
ponieważ

$$P_{D1}(I_{D2}) = U_{D1} I_{D2} = \frac{\ln(100 \cdot I_{D2} - 1)}{40} = 0.426 < (P_{D1})_{\max},$$

więc $(I_{D1})_{\max} > (I_{D2})_{\max}$

$$I = I_{D2} = 3 \text{ A},$$

a

$$U = 1.58 \cdot I + \frac{\ln(50 \cdot I - 1)}{40} + \frac{\ln(100 \cdot I - 1)}{40} = 5 \text{ V}.$$

Gdyby $P_{D1}(I_{D2}) > 0.5 \text{ W}$, należałoby rozwiązać iteracyjnie, np. metodą Newtona, równanie

$$P_{D1} = U_{D1} I_{D1} = 0.5,$$

które po podstawieniu i przekształceniu można zapisać w postaci

$$U_{D1}(e^{40U_{D1}} - 1) - 50 = 0,$$

ale

$$I = I_{D1},$$

więc napięcie zasilania U jest opisane zależnością

$$U = R I_{D1} + \frac{\ln(50 \cdot I_{D1} - 1)}{40} + \frac{\ln(100 \cdot I_{D1} - 1)}{40}.$$

Zadanie 3.43. Dla $E = 5 \text{ V}$ prąd I_1 (obliczony np. metodą Newtona) równa się 21.85 mA , a napięcia $U_1 = 3.09 \text{ V}$ oraz $U_3 = 1.91 \text{ V}$. Z warunku równowagi mostka $U_2 = U_1$, więc $I_2 = 27.79 \text{ mA}$ oraz $U_4 = (R_1 + R_2) \cdot I_2 = U_3$, stąd $R_2 = 18.72 \Omega$.

Przedział zmian napięcia zasilania E , przy których przez zmianę oporu R_2 można uzyskać $U_0 = 0$, wyznacza się znajdując np. wartość E (przy $R_2 = 0$), dla której $U_0 = 0$. Otrzymamy wówczas układ równań

$$U_1 = R I_1 = a I_1^2 = U_2$$

$$U_4 = R_1 I_2 = a I_1^2 = U_3$$

oraz

$$E_{gr} = R I_1 + a I_1^2.$$

Po rozwiązaniu ($I_1 = 17.68 \text{ mA}$, $I_2 = 25 \text{ mA}$) $E_{gr} = 3.75 \text{ V}$, czyli dla $E \in (0, E_{gr})$ nie można dobrać oporu R_2 zapewniającego równowagę mostka.

Zadanie 3.44. Z tablicy wyników (tablica 3.44.1)

Tablica 3.44.1

B	C	U_N, V
0.2	320	96.3
0.15	300	117.7
0.15	340	<u>130.2</u>
0.25	300	<u>74.8</u>
0.25	340	78.8

otrzymujemy, że dla $B \in (0.15, 0.25)$ oraz $C \in (300, 340)$

$$U_N \in (74.8, 130.2) V.$$

Zadanie 3.45.

$$\frac{U_2}{U_1} = \text{const} = 0.128,$$

ponadto

$$\frac{I_2}{I_1} = \text{const} = 0.414.$$

Dla obwodu liniowego o tej samej strukturze i jednakowych oporach

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{5}$$

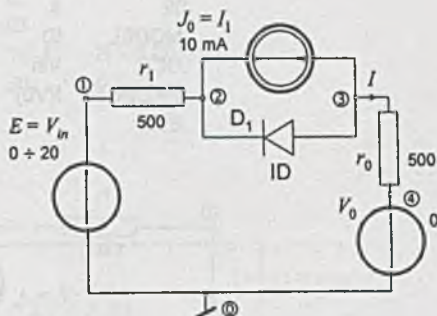
oraz

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{3}.$$

Zadanie 3.46. Element nieliniowy, jakim jest idealna dioda (ID), można zamodelować w programie SPICE jako diodę o małej wartości prądu nasycenia I_s , np. $I_s = 1 \text{ E-14 A}$, oraz małej wartości współczynnika emisji N , np. $N = 0.001$. Można więc przyjąć, że idealna dioda ma (w przybliżeniu) następujący model:

MODEL ID D $I_s = 1\text{E-14}$ $N = 0.001$

Tematowy obwód z rys. 3.19 można przedstawić wprowadzając odpowiednią numerację węzłów i nazewnictwo elementów jak na rys. 3.46.1. W obwodzie tym wprowadzono zerową SEM V_0 , ponieważ chcemy wyznaczyć prąd I .

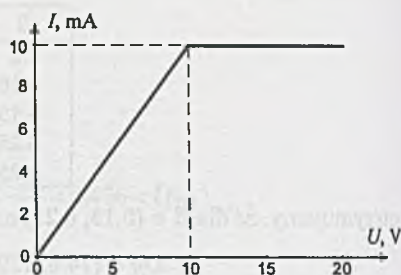


Rys. 3.46.1

Dla tak przyjętej numeracji węzłów i oznaczeń elementów dane wejściowe do programu SPICE mają postać:

zadanie 3.46

```
Vin      1      0      DC      0
r0       1      2      500
I1       2      3      10E-3
D1       3      2      ID
r0       3      4      500
V0       4      0      0
.MODEL   ID      D      Is = 1E-14 N = 0.001
.DC      Vin 0 20 0.1
.PROBE   I(V0)
.END
```



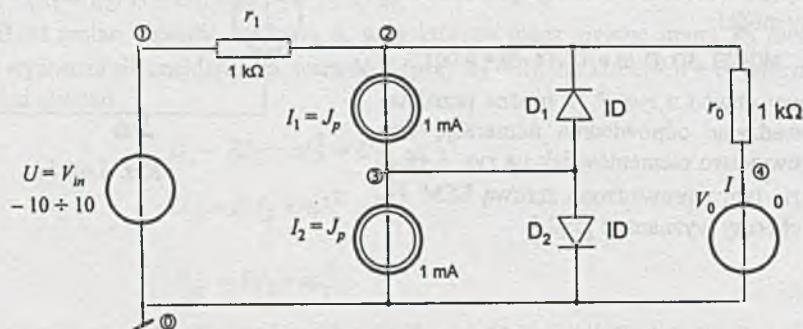
Rys. 3.46.2

Otrzymane wyniki można za pomocą programu PROBE przedstawić w postaci charakterystyki $I = f(U)$, pokazanej na rys. 3.46.2.

Zadanie 3.47. Dla numeracji węzłów i nazw elementów jak na rys. 3.47.1 dane wejściowe do programu SPICE mają postać:

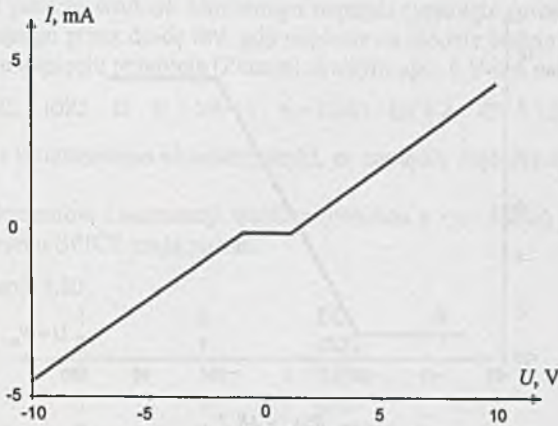
zadanie 3.47

```
Vin      1      0      DC      0
V0       4      0      0
I1       2      3      10E-3
I2       0      3      10E-3
r1       1      2      1E3
r0       2      4      1E3
D1       3      2      ID
D2       3      0      ID
.MODEL   ID      D      Is = 1E-14 N = 0.001
.DC      Vin -10 10 0.05
.PROBE   I(V0)
.END
```



Rys. 3.47.1

Otrzymana charakterystyka $I = f(U) = I(V_0)$ dla $V_{in} = U$ zmieniającego się od -10 V do 10 V przedstawiona jest na rys. 3.47.2.

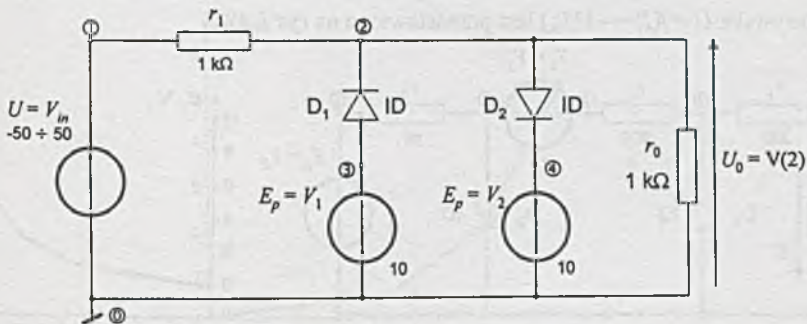


Rys. 3.47.2

Zadanie 3.48. Dla numeracji węzłów i oznaczeń elementów jak na rys. 3.48.1 dane wejściowe do programu SPICE mają postać:

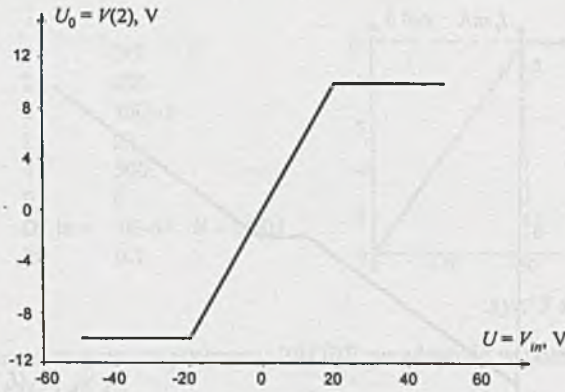
zadanie 3.48

```
Vin      1      0      DC      0
V1       0      3      10
V2       4      0      10
r1       1      2      1E3
r0       2      0      1E3
D1       3      2      ID
D2       2      4      ID
.MODEL   ID      D      Is = 1E-14  N = 0.001
.DC      Vin     -50     50      0.1
.PROBE   V(2)
.END
```



Rys. 3.48.1

Wynik analizy programem SPICE (i PROBE) w postaci charakterystyki $U_0 = f(U) = V(2)$ przedstawiono na rys. 3.48.2.



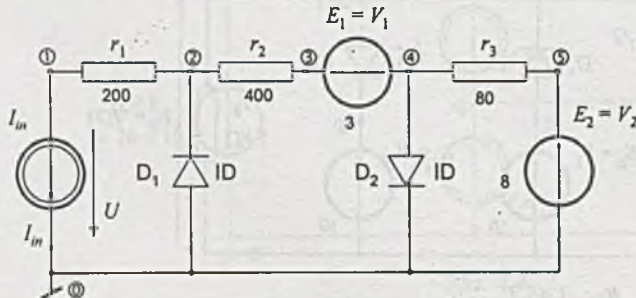
Rys. 3.48.2

Zadanie 3.49. W celu uzyskania charakterystyki $U = f(I)$ dla obwodu z rys. 3.22a (dla danych z zadania 3.23) dołączono na wejście układu SPM I_{in} o wartości narastającej od 0 do 15 mA, wówczas dla oznaczeń jak na rys. 3.49.1 dane wejściowe do programu SPICE mają postać:

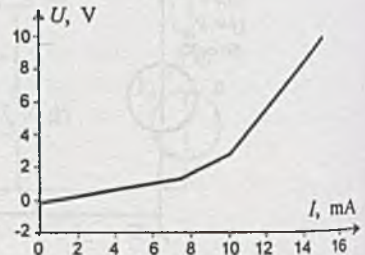
zadanie 3.49

```
lin      1      0      DC      0
V1       3      4      3
V2       5      0      8
r1       1      2      200
r2       2      3      400
r3       4      5      800
D1       2      0      ID
D2       4      0      ID
.MODEL   ID      D      Is = 1E-14      N = 0.001
.DC      lin 0 15E-3 5E-5
.PROBE   V(lin)
.END
```

Charakterystyka $U = f(I) = -V(I_{in})$ jest przedstawiona na rys. 3.49.2.



Rys. 3.49.1



Rys. 3.49.2

Zadanie 3.50. Przed przygotowaniem danych do programu SPICE należy zbudować model idealnej diody Zenera (IDZ). W tym celu do modelu diody idealnej (ID) (rozważanego w zadaniu 3.46) należy dodać jeszcze wartość wstecznego napięcia przebicia (przepięcia Zenera) BV oraz wartość prądu płynącego przez diodę IBV, gdy napięcie na diodzie będzie równe $-BV$. Model idealnej diody Zenera o napięciu przebicia (Zenera) równym np. -4 V jest następujący:

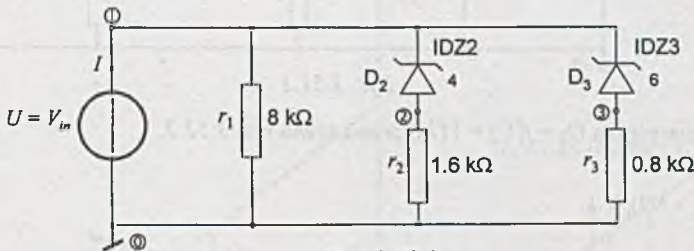
.MODEL IDZ2 D Is = 1E-14 N = 0.001 BV = 4 IBV = 1E-3

Przyjmijmy też, dla urozmaicenia charakterystyki, że napięcie wejściowe $U = V_{in}$ zmienia się od 0 do 8 V.

Dla oznaczeń elementów i numeracji węzłów (obwodu z rys. 3.25a) jak na rys. 3.50.1 dane wejściowe do programu SPICE mają postać:

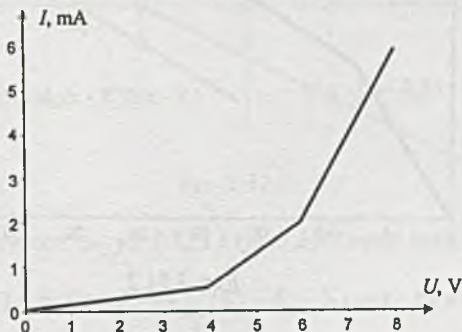
zadanie 3.50

```
Vin      1      0      DC      0
D2       2      1      IDZ2
D3       3      1      IDZ3
r1       1      0      8E3
r2       2      0      1.6E3
r3       3      0      0.8E3
.MODEL   IDZ2 D Is = 1E-14 N = 0.001 BV = 4 IBV = 1E-3
.MODEL   IDZ3 D Is = 1E-14 N = 0.001 BV = 6 IBV = 1E-3
.DC      Vin    0 8 0.05
.PROBE   I(Vin)
.END
```



Rys. 3.50.1

Otrzymaną charakterystykę $I = f(U) = -I(V_{in})$ przedstawiono na rys. 3.50.2.

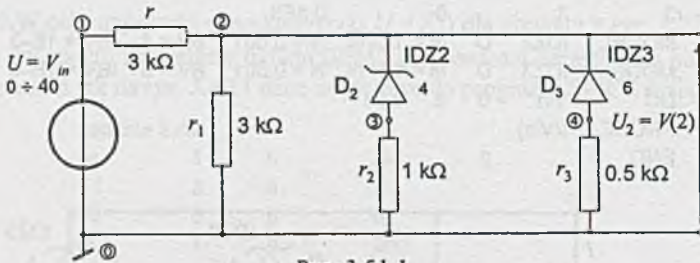


Rys. 3.50.2

Zadanie 3.51. Po wprowadzeniu numeracji i oznaczeń elementów (dla obwodu z rys. 3.26) jak na rys. 3.51.1 dane wejściowe do programu SPICE mają postać:

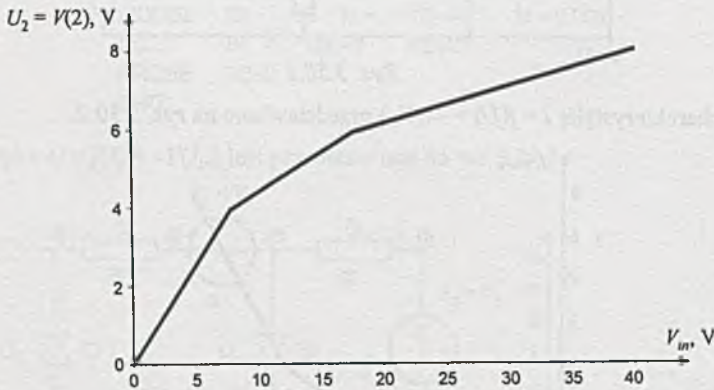
zadanie 3.51

```
Vin      1      0      DC      0
r        1      2      3E3
r1       2      0      3E3
r2       3      0      1E3
r3       4      0      0.5E3
D2       3      2      IDZ2
D3       4      2      IDZ3
.MODEL   IDZ2    D  Is = 1E-14 N = 0.001 BV = 4 IBV = 1E-3
.MODEL   IDZ3    D  Is = 1E-14 N = 0.001 BV = 6 IBV = 1E-3
.DC      Vin     0  40  0.05
.PROBE   V(2)
.END
```



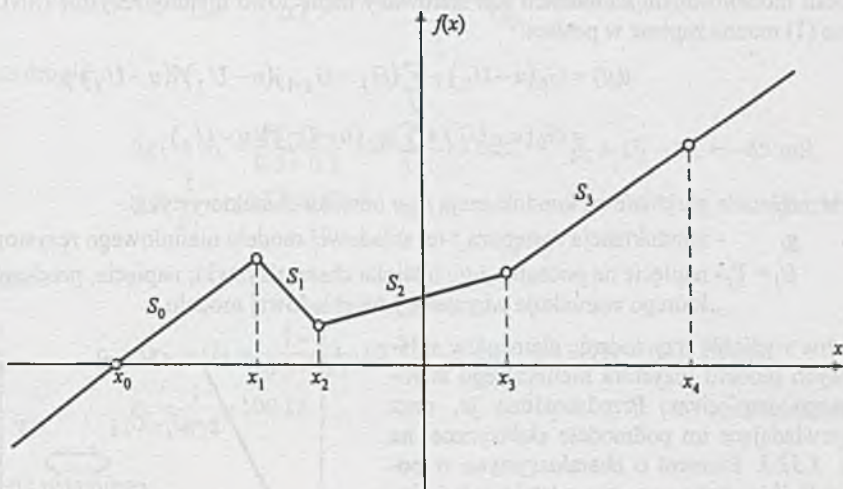
Rys. 3.51.1

Wynik (charakterystyka $U_2 = f(U) = V(2)$) przedstawia rys. 3.51.2.

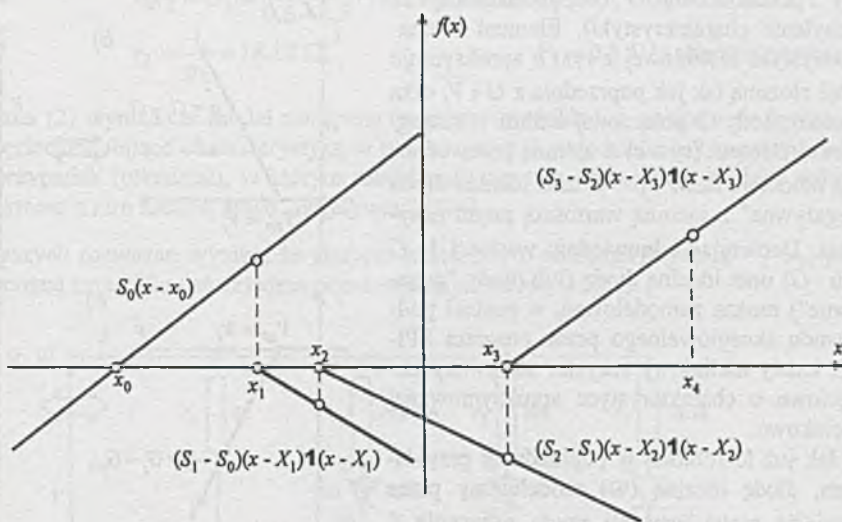


Rys. 3.51.2

Zadanie 3.52. Do budowy nieliniowego, aproksymowanego odcinkami, modelu rezystora akceptowanego przez program SPICE, można wykorzystać [25] zależność (1). Pozwala ona przedstawić nieliniową charakterystykę elementu (rys. 3.52.1) w postaci sumy charakterystyk (rys. 3.52.2).



Rys. 3.52.1



Rys. 3.52.2

Charakterystyka przedstawiona na rys. 3.52.1 i rys. 3.52.2 może być opisana równaniem:

$$f(x) = S_0(x - X_0) + \sum_j (S_j - S_{j-1})(x - X_j)1(x - X_j) \quad (1)$$

Metoda ta pozwala na zbudowanie modelu nieliniowego, ujemnego rezystora sterowanego prądowo lub napięciowo. Tworzenie modelu dla elementu sterowanego prądowo przedstawiono w zadaniu 6.58, natomiast element sterowany napięciowo analizowany jest w tym przykładzie.

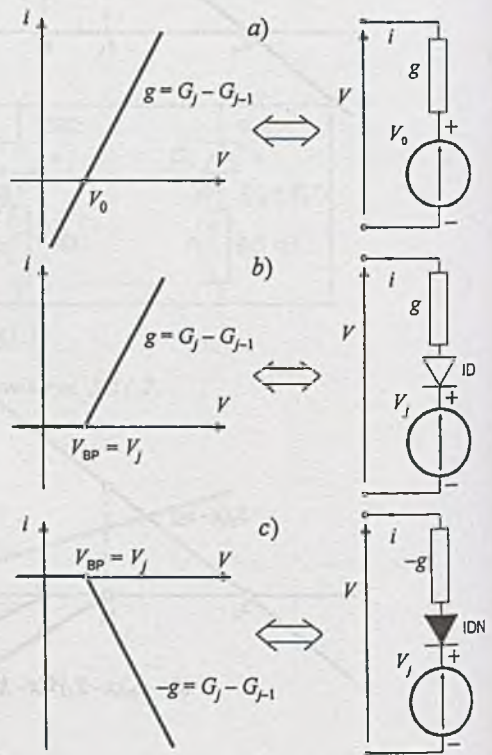
Jeśli modelowanym elementem jest sterowany napięciowo ujemny rezystor (SNUR), to równanie (1) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} i(u) &= G_0(u - U_0) + \sum_j (G_j - G_{j-1})(u - U_j) \mathbf{1}(u - U_j) = \\ &= G_0(u - U_0) + \sum_j g_j(u - U_j) \mathbf{1}(u - U_j) \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie: G_j - przyrostowa konduktancja j -go odcinka charakterystyki,
 g_j - konduktancja zastępcza j -tej składowej modelu nieliniowego rezystora,
 $U_j = V_j$ - napięcie na początku j -go odcinka charakterystyki; napięcie, przekroczenie którego warunkuje włączenie j -tej składowej modelu.

Można wyróżnić trzy rodzaje elementów składowych modelu rezystora nieliniowego sterowanego napięciem. Przedstawiono je, oraz odpowiadające im podmodele elektryczne, na rys. 3.52.3. Element o charakterystyce w postaci linii prostej z rys. *a* modeluje gałąź złożoną z SEM V_0 (odpowiadającej za przesunięcie) i przewodności G (odpowiedzialnej za nachylenie charakterystyki). Element o charakterystyce nieliniowej z rys. *b* aproksymuje gałąź złożoną tak jak poprzednia z G i V_j oraz idealnej diody ID połączonej z nimi w szereg. Ostatni element (rys. *c*) z ujemną przewodnością modeluje SEM V_j , $-G$ oraz idealna dioda "negatywna" z ujemną wartością prądu nasycenia. Dobierając odpowiednio wartości V_j , G (lub $-G$) oraz idealną diodę (lub diody "negatywne") można zamodelować, w postaci podobwołu akceptowalnego przez program SPICE, każdy nieliniowy rezystor sterowany napięciowo o charakterystyce aproksymowanej odcinkowo.

Jak już to robiono w poprzednich przykładach, diodę idealną (ID) modelujemy przez przyjęcie małej wartości prądu nasycenia I_s i małej wartości współczynnika emisji N . Dla idealnej diody ujemnej (IDN) trzeba przyjmować małą ujemną wartość prądu nasycenia I_s , oraz małą wartość współczynnika emisji N .



Rys. 3.52.3

Prześledzimy tworzenie części składowych podobwołu opisującego element o charakterystyce przedstawionej na rys. 3.34b. Na charakterystyce tej można wyróżnić cztery przedziały:

Dla przedziału pierwszego:

$$G_0 = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0.1} = 50 \text{ mS}, \quad r_0 = \frac{1}{G_0} = 20 \, \Omega, \quad V_0 = 0.$$

W przedziale drugim:

$$\begin{aligned} \Delta g_1 = G_1 &= \frac{2-5}{0.3-0.1} \cdot 10^{-3} = -15 \text{ mS}, & g_1 &= G_1 - G_0 = -65 \text{ mS}, \\ r_1 &= \frac{1}{g_1} = -15.386 \, \Omega, & V_1 &= 0.1 \text{ V (z charakterystyki)}. \end{aligned}$$

Przedział trzeci:

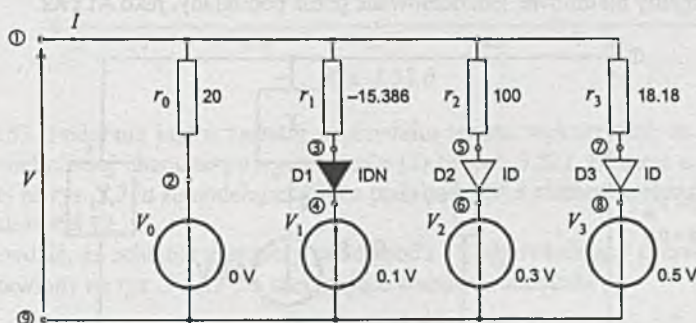
$$\begin{aligned} \Delta g_2 = G_2 &= \frac{1-2}{0.3-0.1} \cdot 10^{-3} = -5 \text{ mS}, & g_2 &= G_2 - G_1 = 10 \text{ mS}, \\ r_2 &= \frac{1}{g_2} = 100 \, \Omega, & V_2 &= 0.3 \text{ V (też z charakterystyki)}. \end{aligned}$$

Dla przedziału ostatniego:

$$\begin{aligned} \Delta g_3 = G_3 &= \frac{6-1}{0.6-0.5} \cdot 10^{-3} = 50 \text{ mS}, & g_3 &= G_3 - G_2 = 55 \text{ mS}, \\ r_3 &= \frac{1}{g_3} = 18.18 \, \Omega, & V_3 &= 0.5 \text{ V (z charakterystyki)}. \end{aligned}$$

Z równania (2) wynika, że model zastępczy (w postaci podukładu) uzyskuje się łącząc równolegle gałęzie modelujące charakterystykę w poszczególnych przedziałach. Na przypomnienie zasługuje przypadek (przedział), w którym modelujący rezystor jest ujemny. Należy wówczas włączyć w szereg z nim idealną diodę „negatywną” (IDN).

Z powyższych rozważań wynika, że element nieliniowy o charakterystyce $I_a = f(U_a)$ jak na rys. 3.34b można zamodelować układem przedstawionym na rys. 3.52.4.



Rys. 3.52.4

Obwód ten można przedstawić jako podukład (np. T1) opisany następująco:

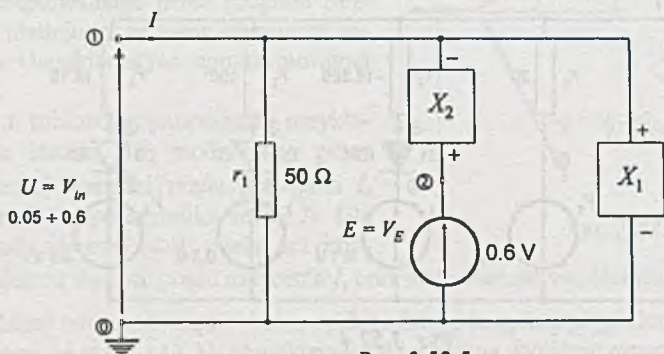
```
.SUBCKT T1 1 9
r0 1 2 20
V0 2 9 DC 0
r1 1 3 -15.385
D1 3 4 IDN
V1 4 9 0.1
r2 1 5 100
D2 5 6 ID
V2 6 9 0.3
r3 1 7 18.18
D3 7 8 ID
V3 8 9 0.5
.MODEL ID D Is = 1E-14 N = 0.001
.MODEL IDN D Is = -1E-14 N = 0.001
.ENDS
```

Dla sprawdzenia poprawności obliczeń parametrów podukładu można zdjąć jego charakterystykę. Dane potrzebne do uzyskania tej charakterystyki mogą mieć np. taką (jeśli podukład oznaczmy przez X1) postać:

```
X1 1 0 T1
Vin 1 0 DC 0
.DC Vin 0 0.6 0.005
.PROBE I(Vin)
.SUBCKT T1 1 9
.
.
.ENDS
.END
```

Jeśli zauważymy, że celem jest analiza obwodu z rys. 3.34a, to przydatność podobwodu T1 - ze względu na występowanie dwóch identycznych elementów - jest oczywista.

Tematowy obwód z rys. 3.34a można przedstawić w postaci jak na rys. 3.52.5. Na rysunku tym opisano elementy nieliniowe, zamodelowane przez podukłady, jako X1 i X2.



Rys. 3.52.5

Dane do programu SPICE mają postać:

zadanie 3.52

```

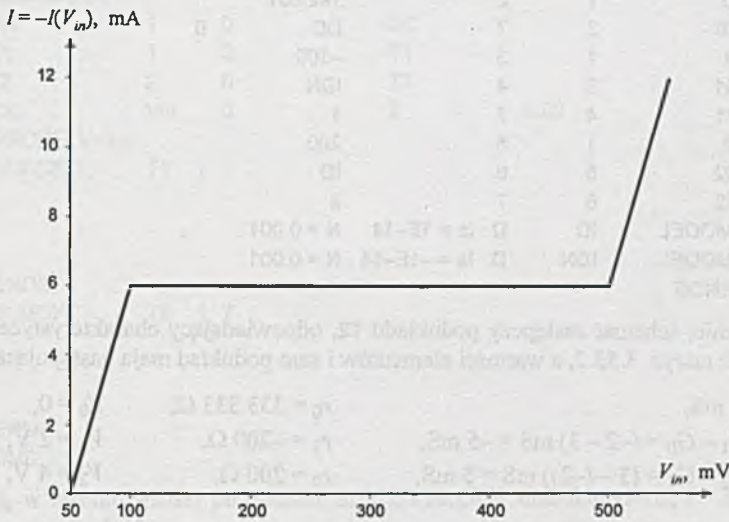
r1      1      0      50
X2      2      1      T1
X1      1      0      T1
VE      2      0      0.6
Vin     1      0      DC      0
.DC     Vin     0.05     0.6     0.005
.PROBE  I(Vin)
.SUBCKT T1 1 9

```

.ENDS

.END

Charakterystyka $I = f(U) = -I(V_{in})$ przedstawiona jest na rys. 3.52.6.

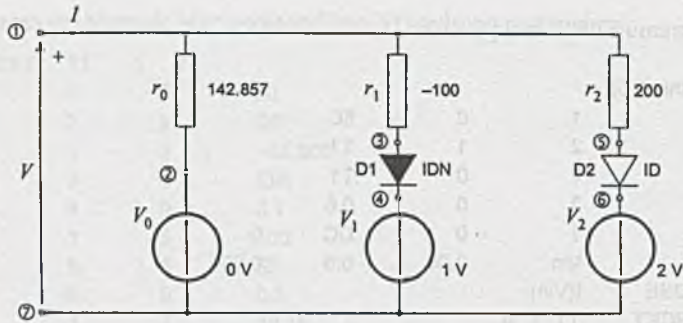


Rys. 3.52.6

Zadanie 3.53. Podobnie jak w zadaniu poprzednim można wykorzystać do zamodelowania elementów o nieliniowej charakterystyce równanie (2) (z zad. 3.52). Element o charakterystyce przedstawionej na rys. 3.35a zamodelujemy jako podobwód T1, a element o charakterystyce z rys. 3.35b jako podobwód T2.

Łatwo sprawdzić, że schemat zastępczy podobwołu T1, odpowiadający charakterystyce z rys. 3.35a, przedstawiony na rys. 3.53.1 ma następujące wartości elementów:

$$\begin{aligned}
 G_0 &= 7 \text{ mS}, & r_0 &= 142.857 \, \Omega, & V_0 &= 0, \\
 g_1 &= G_1 - G_2 = (-3 - 7) \text{ mS} = -10 \text{ mS}, & r_1 &= -100 \, \Omega, & V_1 &= 1 \text{ V}, \\
 g_2 &= G_2 - G_1 = 2 - (-3) \text{ mS} = 5 \text{ mS}, & r_2 &= 200 \, \Omega, & V_2 &= 2 \text{ V}.
 \end{aligned}$$



Rys. 3.53.1

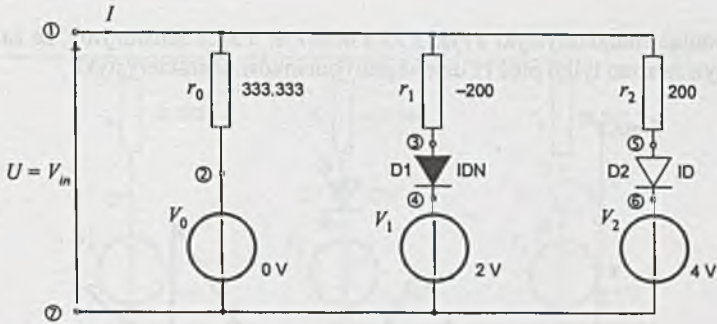
Podobwód T1, włączany między węzły 1 i 7, w którym występuje jedna idealna dioda ID i jedna idealna dioda „negatywna” IDN oraz trzy rezystory i trzy SEM, jest opisany w następujący sposób:

```
.SUBCKT      T1  1  7
r0           1    2          142.857
V0           2    7          DC          0
r1           1    3          -100
D1           3    4          IDN
V1           4    7          1
r2           1    5          200
D2           5    6          ID
V2           6    7          2
.MODEL       ID      D  Is = 1E-14  N = 0.001
.MODEL       IDN     D  Is = -1E-14  N = 0.001
.ENDS
```

Analogicznie, schemat zastępczy podukładu T2, odpowiadający charakterystyce z rys. 3.35b, ma postać jak na rys. 3.53.2, a wartości elementów i sam podukład mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 G_0 &= 3 \text{ mS}, & r_0 &= 333.333 \, \Omega, & V_0 &= 0, \\
 g_1 &= G_1 - G_0 = (-2 - 3) \text{ mS} = -5 \text{ mS}, & r_1 &= -200 \, \Omega, & V_1 &= 2 \text{ V}, \\
 g_2 &= G_2 - G_1 = (3 - (-2)) \text{ mS} = 5 \text{ mS}, & r_2 &= 200 \, \Omega, & V_2 &= 4 \text{ V},
 \end{aligned}$$

```
.SUBCKT      T2  1  7
r0           1    2          333.333
V0           2    7          DC          0
r1           1    3          -200
D2           3    4          IDN
V1           4    7          2
r2           1    5          200
D2           5    6          ID
V2           6    7          4
.MODEL       D       ID  Is = 1E-14  N = 0.001
.MODEL       IDN     D  Is = -1E-14  N = 0.001
.ENDS
```



Rys. 3.53.2

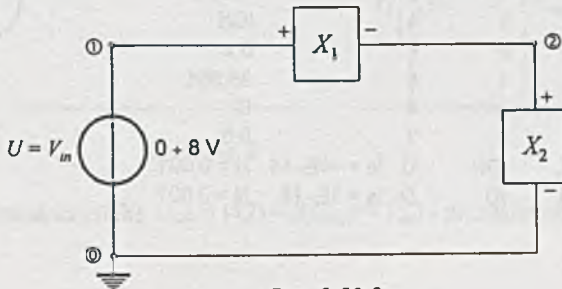
Tematowy obwód z zadania 3.35 można teraz przedstawić w postaci jak na rys. 3.53.3. Na rysunku tym podukłady T1 i T2 oznaczono odpowiednio przez X1 i X2.

Dla oznaczeń i numeracji węzłów jak na rys. 3.53.1, 3.53.2 i 3.53.3 dane wejściowe do programu SPICE mają postać:

zadanie 3.53

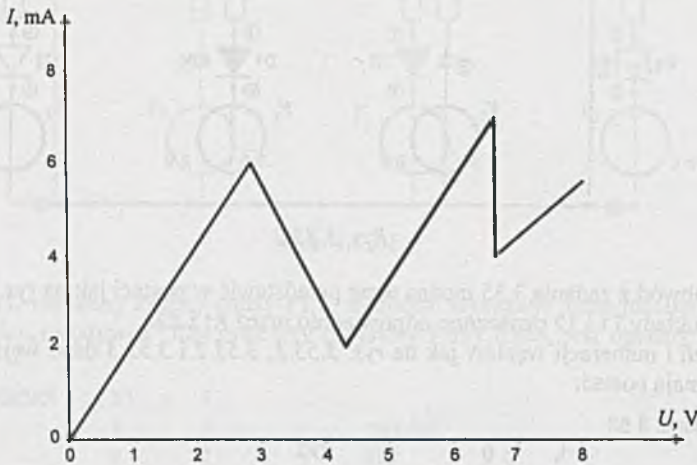
```
Vin      1      0      DC
X1       1      2      T1
X2       2      0      T2
.DC      Vin    0      8      0.02
.PROBE I(Vin)
.SUBCKT  T1    1  7
.
.
.ENDS
.SUBCKT  T2    1  7
.
.
.ENDS
.END
```

Otrzymaną w wyniku analizy programem SPICE i PROBE, charakterystykę $I = f(U) = -I(V_{in})$ przedstawiono na rys. 3.53.4.



Rys. 3.53.3

Porównując charakterystyki z rys. 3.53.4 oraz rys. 3.35.1 zauważymy, że za pomocą programu SPICE wyznaczono tylko pięć (z dziewięciu) odcinków charakterystyki.



Rys. 3.53.4

Zadanie 3.54. Analogicznie jak w dwóch poprzednich zadaniach wykorzystamy do zamodelowania nieliniowego elementu o charakterystyce przedstawionej na rys. 3.36b podukład z idealną diodą (ID) oraz idealną diodą „negatywną” (IDN). Parametry i opis tego podukładu (oznaczonego jako T1) są następujące:

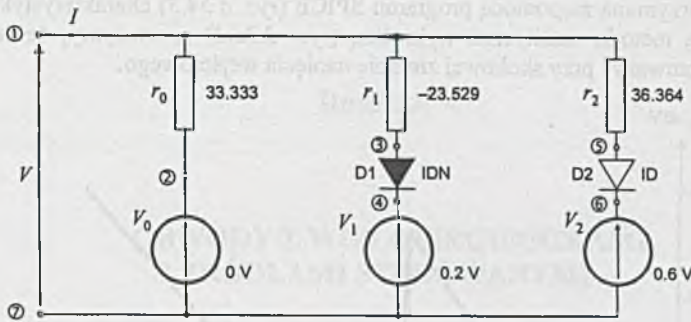
- parametry (przedstawione na rys. 3.54.1)

$$\begin{array}{llll}
 G_0 = 30 \text{ mS}, & r_0 = 33.333 \, \Omega, & V_0 = 0; & \\
 G_1 = -12.5 \text{ mS}, & g_1 = -42.5 \text{ mS}, & r_1 = -23.529 \, \Omega, & V_1 = 0.2 \text{ V}; \\
 G_2 = 15 \text{ mS}, & g_2 = 27.5 \text{ mS}, & r_2 = 36.364 \, \Omega, & V_2 = 0.6 \text{ V},
 \end{array}$$

- opis

```

.SUBCKT T1 1 7
r0 1 2 33.333
V0 2 7 0
r1 1 3 -23.529
D1 3 4 IDN
V1 4 7 0.2
r2 1 5 36.364
D2 5 6 ID
V2 6 7 0.6
.MODEL IDN D Is=-1E-14 N=0.001
.MODEL ID D Is=1E-14 N=0.001
.ENDS
    
```



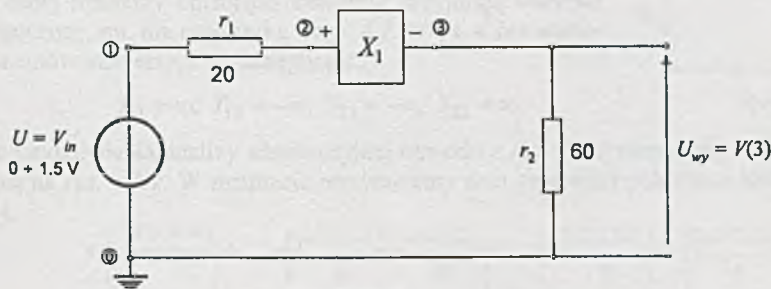
Rys. 3.54.1

Tematowy obwód z rys. 3.36a można opisać jak na rys. 3.54.2; wówczas dane wejściowe do programu SPICE mają postać:

zadanie 3.54

```

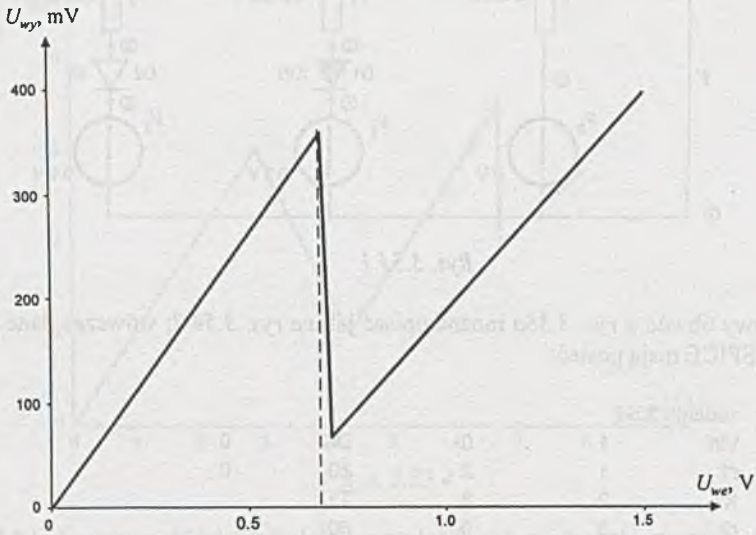
Vin      1      0      DC      0
r1       1      2      20      0
X1       2      3      T1
r2       3      0      60
.DC      Vin      0      1.5      0.02
.PROBE   V(3)
.SUBCKT  T1      1      7
.
.
.ENDS
.END
    
```



Rys. 3.54.2

Wynik analizy - charakterystykę $U_{wy} = V(2) = f(U_{we}) = V_{in}$ - przedstawia rys. 3.54.3.

Porównując otrzymaną za pomocą programu SPICE (rys. 3.54.3) charakterystykę z charakterystyką uzyskaną metodą analityczno-wykreslną (rys. 3.36.1) zauważymy, że niedokładność modelu daje się zauważyć przy skokowej zmianie napięcia wejściowego.



Rys. 3.54.3



Rozdział 4

OBWODY Z WIELOBIEGUNNIKAMI I ŹRÓDŁAMI STEROWANYMI

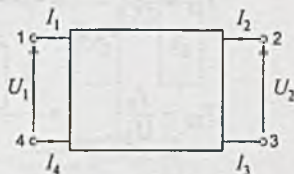
Wstęp

Czterobiegunnik $\hat{=}$ obwód, posiadający cztery wyróżnione zaciski, poprzez które może być połączony z innymi obwodami.

Czwórnik $\hat{=}$ czterobiegunnik połączony z innymi obwodami w ten sposób, że każdemu zaciskowi, przez który prąd wpływa do czterobiegunnika, odpowiada zacisk, przez który taki sam prąd wypływa.

Zazwyczaj zaciski czwórnika porządkujemy i oznaczamy jak na rys. 4.0.1, gdzie $I_4 = -I_1$, $I_3 = -I_2$.

Najczęściej stosowane w praktyce układy równań w postaci macierzowej dla czwórnika o schemacie ogólnym z rys. 4.0.1 oraz definicje elementów macierzy Y , Z , H , A zostały podane w tablicy D1 w dodatku na końcu skryptu.

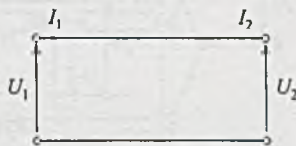


Rys. 4.0.1

Zadanie 4.1. Elementy macierzy admitancyjnej Y obliczone na podstawie definicji przedstawionych w tablicy D1 (dodatek) dla czwórników pasywnych z rys. 4.1 zostały podane w tablicy D2 (dodatek).

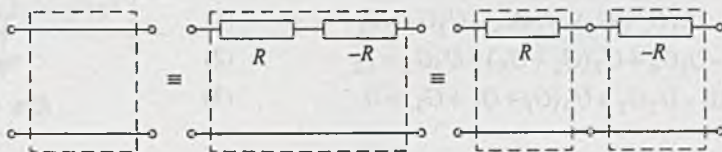
Skreślone pola w rubrykach tablicy D2 oznaczają, że elementy danej macierzy opisującej czwórnik przyjmują wartości nieograniczone, np. dla czwórnika z rys. 4.1.1 (rys. 4.1a) wartości elementów macierzy Y są następujące:

$$Y_{11} = \infty, Y_{12} = -\infty, Y_{21} = -\infty, Y_{22} = \infty.$$



Rys. 4.1.1

W celu umożliwienia analizy admitancyjnej obwodu z rys. 4.1.1 stosuje się modyfikację przedstawioną na rys. 4.1.2. W rezultacie otrzymujemy dwa czwórniki połączone kaskadowo (łańcuchowo).



Rys. 4.1.2

Zadanie 4.2. Elementy macierzy impedancyjnej Z , macierzy hybrydowej H i macierzy łączukowej A obliczone na podstawie definicji przedstawionych w tablicy D1 (dodatek) dla czwórników pasywnych z rys. 4.1 zostały podane w tablicy D2 (dodatek).

Zadanie 4.3. Określmy elementy macierzy admitancyjnej Y czwórnik w kształcie „T boczukowane” z rys. 4.3a, z definicji (a) z równań (b), oraz jako połączenie czwórnuków prostych (c).

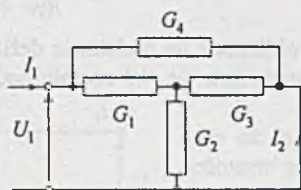
Ad a) Przyjmując oznaczenia z rys. 4.3.1 i 4.3.2, otrzymujemy:

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = G_4 + \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3},$$

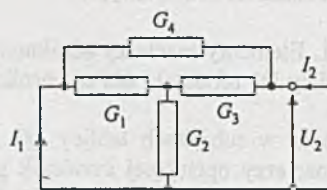
$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{-U_2 G_4 - U_2 \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} \frac{G_1}{G_1 + G_2}}{U_2} = -G_4 - \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{-U_1 G_4 - U_1 \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} \frac{G_3}{G_2 + G_3}}{U_1} = -G_4 - \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{U_2 \left[G_4 + \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} \right]}{U_2} = G_4 + \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}.$$



Rys. 4.3.1



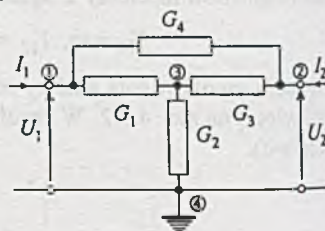
Rys. 4.3.2

Ad b) Przyjmujemy węzeł ④ za węzeł odniesienia (rys. 4.3.3); wówczas układ równań potencjałów węzłowych ma postać

$$U_1(G_1 + G_4) - U_2 G_4 - U_3 G_2 = I_1 \quad (1)$$

$$-U_1 G_4 + U_2(G_3 + G_4) - U_3 G_3 = I_2 \quad (2)$$

$$-U_1 G_1 - U_2 G_3 + U_3(G_1 + G_2 + G_3) = 0 \quad (3)$$



Rys. 4.3.3

Z równania (3) otrzymujemy

$$U_3 = U_1 \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} + U_2 \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (4)$$

Podstawiając zależność (4) do (1) i (2), otrzymujemy

$$U_1 \left(G_1 + G_4 - \frac{G_1^2}{G_1 + G_2 + G_3} \right) + U_2 \left(-G_4 - \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \right) = I_1$$

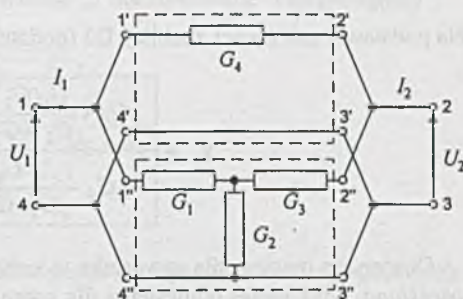
$$U_1 \left(-G_4 - \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \right) + U_2 \left(G_2 + G_4 - \frac{G_3^2}{G_1 + G_2 + G_3} \right) = I_2$$

Zapisując powyższy układ równań (po uporządkowaniu) w postaci macierzowej otrzymamy

$G_4 + \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}$	$-G_4 - \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$	\cdot	U_1	$=$	I_1
$-G_4 - \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$	$G_4 + \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}$		U_2	I_2	

Ad c) Jak wynika z rys. 4.3.4, czwórnik kształtu „T bocznikowane” możemy traktować jako równoległe połączenie czwórników prostych.

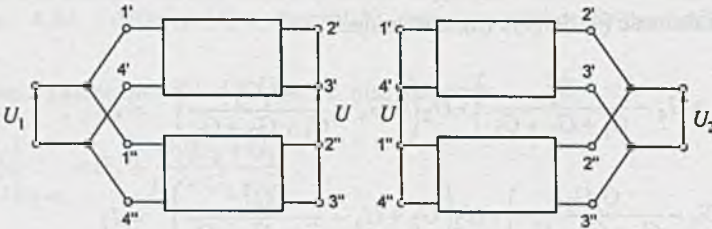
Elementy macierzy admitancyjnej równoległego połączenia czwórników określamy zgodnie z zależnościami podanymi w tablicy D3 (dodatek) jako sumę elementów macierzy czwórników składowych, *jeśli każdy wchodzący do obwodu złożonego czwórnik nie stracił po połączeniu cech czwórnik*, tj. zachowuje równość prądów obu par zacisków.



Rys. 4.3.4

Warunek ten jest spełniony, gdy napięcie U w obwodach z rys. 4.3.5 jest równe 0. Powyższa uwaga dotyczy powstawania w obwodzie dodatkowych oczek, których prądy zakłócają równość prądów obu par zacisków każdego czwórnik. Odnosi się ona także do połączenia szeregowego i szeregowo-równoległego.

Można zauważyć, że obwody z rys. 4.3.5 powstały w wyniku przzerwania wyżej wymienionych dodatkowych oczek w połączeniu równoległym czwórników. Stosując powyższe kryterium dla obwodu z rys. 4.3.4 stwierdzamy, że w takim połączeniu czwórniki składowe zachowują cechy czwórników.



Rys. 4.3.5

Zgodnie z wyrażeniami na elementy macierzy admitancyjnych czwórników składowych zawartymi w tablicy D2 (dodatek) mamy

$$\begin{aligned} Y_{11}'' &= G_4, & Y_{11}'' &= \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}, \\ Y_{12}' &= Y_{21}' = -G_4, & Y_{12}'' &= Y_{21}'' = -\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}, \\ Y_{22}' &= G_4, & Y_{22}'' &= \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}. \end{aligned}$$

Na podstawie zależności z tablicy D3 (dodatek) otrzymamy elementy macierzy Y w postaci

$$Y = \begin{bmatrix} G_4 + \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} & -G_4 - \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\ -G_4 - \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} & G_4 + \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} \end{bmatrix}$$

Otrzymana macierz dla czwórnika w kształcie „T bocznikowane” jest macierzą admitancyjną określoną, gdyż węzeł odniesienia dla potencjałów węzłowych jest jednym z węzłów wielobiegunnika.

Macierz Y jest macierzą admitancyjną nieokreśloną, jeśli węzeł odniesienia dla potencjałów węzłowych jest dowolnym węzłem znajdującym się poza wielobiegunnikiem.

Można stwierdzić, że nieokreślona macierz admitancyjna czwórnika ma wymiar 3×3 . W analizowanym obwodzie z rys. 4.3.4 zaciski 3 i 4 posiadają ten sam potencjał. Redukując je do jednego zacisku możemy rozpatrywać ten obwód jako trójnik.

Układ równań w postaci macierzowej, opisujących trójnik, przy założeniu dowolnego węzła odniesienia, ma następującą postać

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

Jest to układ równań zależnych, więc macierz admitancyjna nieokreślona posiada następującą właściwość

$$\sum_i Y_{ij} = 0 \text{ oraz } \sum_j Y_{ij} = 0.$$

Korzystając z tej właściwości, otrzymujemy brakujące elementy macierzy Y z elementów już wyznaczonych; i tak:

$$\begin{aligned} Y_{13} &= -(Y_{11} + Y_{12}) = -\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = Y_{31}, \\ Y_{23} &= -(Y_{21} + Y_{22}) = -\frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = Y_{32}, \\ Y_{33} &= -(Y_{31} + Y_{32}) = \frac{G_2(G_1 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} = -(Y_{31} + Y_{32}). \end{aligned}$$

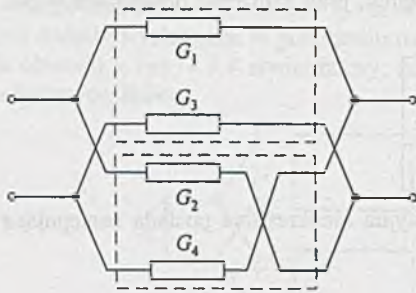
Przy określaniu elementów macierzy Y , dla czwórnika w kształcie „podwójne T” z rys. 4.3b, postępujemy podobnie jak przy analizie czwórnika w kształcie „T bocznikowane” i otrzymujemy

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} + \frac{G_4(G_5 + G_6)}{G_4 + G_5 + G_6}, \\ Y_{12} = Y_{21} &= -\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} - \frac{G_4 G_6}{G_4 + G_5 + G_6}, \\ Y_{22} &= \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} + \frac{G_6(G_4 + G_5)}{G_4 + G_5 + G_6}. \end{aligned}$$

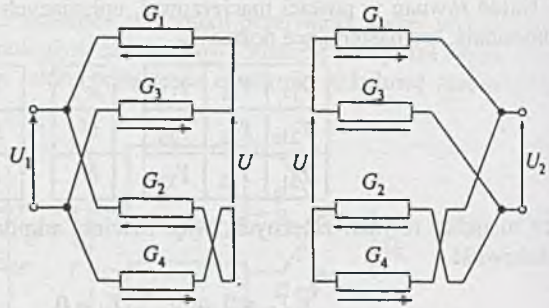
Zadanie 4.4. Obwód z rys. 4.4 można przedstawić w postaci połączenia równoległego dwóch czwórników jak na rys. 4.4.1.

Przypomnijmy, że czwórniki składowe w obwodzie z rys. 4.4.1 zachowują cechy czwórników, gdy napięcie U w obwodach z rys. 4.4.2 jest równe 0. Ma to miejsce, gdy spełnione są następujące warunki

$$\begin{aligned} \frac{U_1 G_1}{G_1 + G_3} &= \frac{U_1 G_2}{G_2 + G_4}, & \frac{U_2 G_1}{G_1 + G_3} &= \frac{U_2 G_4}{G_2 + G_4}, \\ \frac{U_1 G_3}{G_1 + G_3} &= \frac{U_1 G_4}{G_2 + G_4}, & \frac{U_2 G_3}{G_1 + G_3} &= \frac{U_2 G_2}{G_2 + G_4}. \end{aligned}$$



Rys. 4.4.1



Rys. 4.4.2

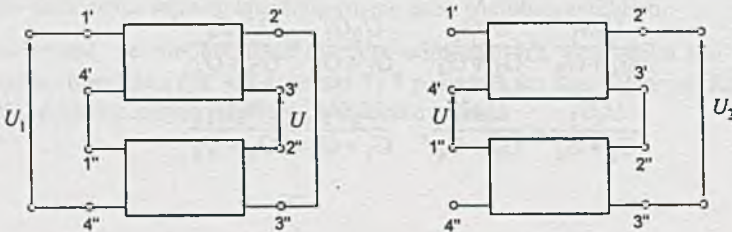
Z powyższych równań otrzymujemy dwie zależności, które muszą być równocześnie spełnione, tzn.:

$$\frac{G_1}{G_3} = \frac{G_2}{G_4} \quad \text{oraz} \quad \frac{G_1}{G_3} = \frac{G_4}{G_2}.$$

Wynika stąd, że obwód z rys. 4.4 możemy traktować jako równoległe połączenie czwórników składowych i do określenia elementów macierzy admitancyjnej możemy stosować zależności z tablicy D3 (dodatek) tylko wtedy, jeśli wszystkie wartości przewodności są jednakowe, czyli $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G$. Zatem elementy szukanej macierzy admitancyjnej posiadają następujące wartości

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{G}{2} + \frac{G}{2} = G, \\ Y_{12} &= Y_{21} = -\frac{G}{2} + \frac{G}{2} = 0, \\ Y_{22} &= \frac{G}{2} + \frac{G}{2} = G. \end{aligned}$$

Zadanie 4.5. Elementy macierzy impedancyjnej Z szeregowego połączenia czwórników określamy, zgodnie z zależnościami podanymi w tablicy D3 (dodatek), jako sumę elementów macierzy czwórników składowych, jeśli każdy wchodzący do obwodu złożonego czwórnik zachowuje równość prądów obu par zacisków. Warunek ten jest spełniony, gdy napięcie U w obwodach z rys. 4.5.1 jest równe 0.



Rys. 4.5.1

Dla obwodu z rys. 4.5 kryterium to jest spełnione. Elementy macierzy impedancyjnych czwórników składowych są następujące

$$\begin{aligned} Z'_{11} &= \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G'_3}, & Z''_{11} &= \frac{1}{G'_3} + \frac{1}{G_4}, \\ Z'_{12} &= Z'_{21} = \frac{1}{G'_3}, & Z''_{12} &= Z''_{21} = \frac{1}{G'_3}, \\ Z'_{22} &= \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G'_3}, & Z''_{22} &= \frac{1}{G'_3} + \frac{1}{G_5}. \end{aligned}$$

Zgodnie z zależnościami podanymi w tablicy D3 (dodatek)

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G'_3} + \frac{1}{G'_3} + \frac{1}{G_4} & \frac{1}{G'_3} + \frac{1}{G'_3} \\ \frac{1}{G'_3} + \frac{1}{G'_3} & \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G'_3} + \frac{1}{G'_3} + \frac{1}{G_5} \end{bmatrix}$$

Korzystając z zależności umożliwiających wyznaczenie elementów macierzy czwórnika określonego za pomocą macierzy Y , gdy znane są elementy macierzy Z , podanych w tablicy D4 (dodatek), otrzymujemy wyrażenia:

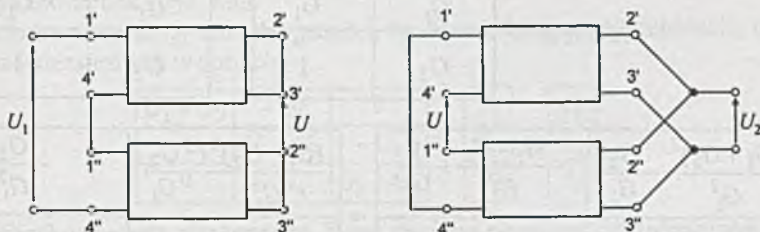
$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{G_1 G_4 (G_2 G_3 + G_2 G_5 + G_3 G_5)}{G}, \\ Y_{12} &= Y_{21} = \frac{G_1 G_2 G_4 G_5}{G}, \\ Y_{22} &= \frac{G_2 G_5 (G_1 G_3 + G_1 G_4 + G_3 G_4)}{G}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$G = G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_4 + G_1 G_2 G_5 + G_1 G_3 G_5 + G_1 G_4 G_5 + G_2 G_3 G_4 + G_2 G_4 G_5 + G_3 G_4 G_5,$$

$$\frac{1}{G_3} = \frac{1}{G'_3} + \frac{1}{G''_3}.$$

Zadanie 4.6. Elementy macierzy hybrydowej H szeregowo-równoległego połączenia czwórników określamy zgodnie z zależnościami podanymi w tablicy D3 (dodatek) jako sumę elementów macierzy czwórników składowych, jeśli każdy wchodzący do obwodu złożonego czwórnika zachowuje równość prądów obu par zacisków.



Rys. 4.6.1

Warunek ten jest spełniony, gdy napięcie U w obwodach z rys. 4.6.1 jest równe 0. Dla obwodu z rys. 4.6 kryterium to jest spełnione. Elementy macierzy hybrydowych czwórników wchodzących w skład danego obwodu są następujące

$$H'_{11} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2 + G_3}, \quad H''_{11} = \frac{1}{G_4},$$

$$H'_{12} = \frac{G_3}{G_2 + G_3}, \quad H''_{12} = -1,$$

$$H'_{21} = -\frac{G_3}{G_2 + G_3}, \quad H''_{21} = 1,$$

$$H'_{22} = \frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3}, \quad H''_{22} = 0.$$

Zgodnie z zależnościami z tablicy 3 (dodatek) macierz hybrydowa H ma postać

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2 + G_3} + \frac{1}{G_4} & \frac{G_3}{G_2 + G_3} - 1 \\ -\frac{G_3}{G_2 + G_3} + 1 & \frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3} \end{bmatrix}$$

Przekształcając macierz H w macierz Y według zależności z tablicy D4 (dodatek), otrzymujemy

$$Y_{11} = \frac{G_1 G_4 (G_2 + G_3)}{(G_2 + G_3)(G_1 + G_4) + G_1 G_4},$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{G_1 G_2 G_4}{(G_2 + G_3)(G_1 + G_4) + G_1 G_4},$$

$$Y_{22} = \frac{1}{G_2 + G_3} \left[G_2 G_3 + \frac{G_2^2 G_1 G_4}{(G_2 + G_3)(G_1 + G_4) + G_1 G_4} \right]$$

Zadanie 4.7. Dla dwóch czwórników połączonych kaskadowo zależności między elementami ich macierzy łańcuchowych i elementami macierzy zastępczej są takie, jak podano w tablicy D3 (dodatek). Elementy macierzy łańcuchowej A czwórnika w kształcie „odwrócone Γ ” zostały podane w tablicy D2 (dodatek). W związku z tym macierz A określona jest następująco:

$$A = A' A'' = \begin{bmatrix} \frac{G_1 + G_2}{G_1} & -\frac{1}{G_1} \\ G_2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{G_1 + G_2}{G_1} & -\frac{1}{G_1} \\ G_2 & -1 \end{bmatrix} =$$

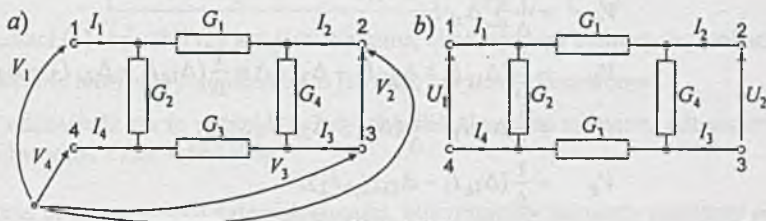
$$= \begin{bmatrix} \frac{(G_1 + G_2)^2}{G_1^2} - \frac{G_2}{G_1} & -\frac{G_1 + G_2}{G_1^2} + \frac{1}{G_1} \\ \frac{G_2(G_1 + G_2)}{G_1} - G_2 & -\frac{G_2}{G_1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(G_1 + G_2)^2}{G_1^2} - \frac{G_2}{G_1} & -\frac{G_2}{G_1^2} \\ \frac{G_2^2}{G_1} & 1 - \frac{G_2}{G_1} \end{bmatrix}$$

Po przekształceniu macierzy A w macierz Y według zależności z tablicy D4 (dodatek) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{G_1(G_2 - G_1)}{G_2}, \\ Y_{12} &= \frac{(G_1^2 + G_1G_2 + G_2^2)(G_2 - G_1) + G_2^3}{G_1G_2}, \\ Y_{21} &= \frac{G_1^2}{G_2}, \\ Y_{22} &= \frac{G_1G_2 - (G_1 + G_2)^2}{G_2}. \end{aligned}$$

Zadanie 4.8.

Ad a) Określmy elementy macierzy admitancyjnej Y obwodu z rys. 4.8a traktując go jako czterobiegunnik (rys. 4.8.1).



Rys. 4.8.1

Układ równań w postaci macierzowej, opisujących czterobiegunnik z rys. 4.8.1a, przy założeniu dowolnego węzła odniesienia znajdującego się poza czterobiegunnikiem, jest następujący

$G_1 + G_2$	$-G_1$	0	$-G_2$	V_1	I_1
$-G_1$	$G_1 + G_4$	$-G_4$	0	V_2	I_2
0	$-G_4$	$G_3 + G_4$	$-G_3$	V_3	I_3
$-G_2$	0	$-G_3$	$G_2 + G_3$	V_4	I_4

Jest to układ równań zależnych, a macierz admitancyjna Y jest macierzą nieokreśloną czterobiegunnika typu czworobok z rys. 4.8a.

Przyjmując jeden z zacisków czterobiegunnika, np. zacisk 4 na węzeł odniesienia, otrzymujemy układ równań niezależnych w postaci:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

W tym przypadku macierz admitancyjna Y jest macierzą określoną czterobiegunnika z rys. 4.8a (i rys. 4.8.1b).

Uwaga

Dla czterobiegunników nie obowiązują zależności podane w tablicy D3 (dodatek). W tablicy D5 (dodatek) przedstawiono sposób przeliczania elementów macierzy admitancyjnej Y na elementy macierzy impedancyjnej Z oraz odwrotnie - dla wielobiegunników o dowolnej liczbie zacisków.

Ad b) Obwód z rys. 4.8.1a możemy traktować jako czwórnik, gdy spełnione są następujące zależności

$$I_4 = -I_1 \quad \text{oraz} \quad I_3 = -I_2.$$

Równania opisujące obwód z rys. 4.8.1a jako czwórnik możemy utworzyć na podstawie równań czterobiegunnika (1) przyjmując, że

$$V_4 = 0, \quad U_1 = V_1, \quad U_2 = V_2 - V_3.$$

Korzystając z zależności z tablicy D5 (dodatek) i [7] otrzymamy:

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^n \Delta_{sk} I_s, \\ V_k &= \frac{1}{\Delta} (\Delta_{1k} I_1 + \Delta_{2k} I_2 + \Delta_{3k} I_3) = \frac{1}{\Delta} (\Delta_{1k} I_1 + \Delta_{2k} I_2 - \Delta_{3k} I_2) = \\ &= \frac{1}{\Delta} \Delta_{1k} I_1 - \frac{1}{\Delta} (\Delta_{3k} - \Delta_{2k}) I_2, \\ V_k &= \frac{1}{\Delta} (\Delta_{1k} I_1 - \Delta_{(3+2)k} I_2), \end{aligned}$$

gdzie:

- Δ – wyznacznik macierzy admitancyjnej określonej Y ,
- Δ_{sk} – dopełnienie algebraiczne elementu Y_{sk} tej macierzy, leżącego na przecięciu s -tego wiersza z k -tą kolumną,
- $\Delta_{(s+p)k}$ – dopełnienie algebraiczne, które otrzymujemy przez przeniesienie i dodanie elementów s -tego wiersza do elementów p -tego wiersza i skreślenie s -tego wiersza, następnie skreślenie k -tej kolumny i pomnożenie tak otrzymanego wyrażenia przez $(-1)^{s+k}$.

Stąd potencjały i napięcia obwodu określone są zależnościami

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_{11} I_1 - \Delta_{(3+2)1} I_2], \\ V_2 &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_{12} I_1 - \Delta_{(3+2)2} I_2], \\ V_3 &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_{13} I_1 - \Delta_{(3+2)3} I_2], \\ U_1 = V_1 &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_{11} I_1 - \Delta_{(3+2)1} I_2], \\ U_2 = V_2 - V_3 &= \frac{1}{\Delta} [(\Delta_{12} - \Delta_{13}) I_1 - (\Delta_{(3+2)2} - \Delta_{(3+2)3}) I_2]. \end{aligned}$$

Zatem skrócony zapis równań określających napięcia U_1 i U_2 w postaci macierzowej będzie następujący:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & -\frac{\Delta_{(3+2)1}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{1(3+2)}}{\Delta} & -\frac{\Delta_{(3+2)(2+3)}}{\Delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Korzystając z zależności przekształcenia macierzy impedancyjnej Z w macierz admitancyjną Y , zawartych w tablicy D4 (dodatek), otrzymujemy szukane elementy macierzy admitancyjnej analizowanego obwodu jako czwórnika. Układ równań admitancyjnych czwórnika z rys. 4.8.1b jest następujący

$$\begin{bmatrix} G_2 + \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_3} & -\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_3} \\ -\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_3} & G_4 + \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Przejście z postaci (1) w postać (2) jest jednoznaczne, choć wymaga żmudnych przekształceń.

Czy przekształcenie odwrotne jest możliwe, a jeśli tak, czy jest jednoznaczne?

Aby znaleźć odpowiedź na to pytanie, należy określić elementy macierzy admitancyjnych dla pozostałych obwodów z rys. 4.8b i 4.8c.

Ad a) Traktując te obwody jako czterobiegunniki, otrzymujemy elementy macierzy admitancyjnych z równań potencjałów węzłowych, podających zależności między $V_1, V_2, V_3, V_4, I_1, I_2, I_3, I_4$.

Ad b) Elementy macierzy admitancyjnej dla obwodu z rys. 4.8b jako czwórnika są następujące:

$$Y_{11} = \frac{(G_1 + G_2)(G_3 + G_4)}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4},$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{G_1 G_3 - G_2 G_4}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4},$$

$$Y_{22} = \frac{(G_1 + G_4)(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}.$$

Elementy macierzy admitancyjnej dla czwórnika z rys. 4.8c określone są zależnościami

$$Y_{11} = \frac{G_1 G_4 (G_2 G_3 + G_2 G_5 + G_3 G_5)}{G},$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{G_1 G_2 G_3 G_5}{G},$$

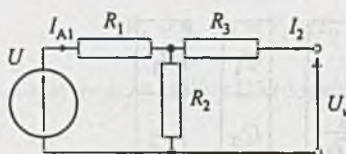
$$Y_{22} = \frac{G_2 G_5 (G_1 G_3 + G_1 G_4 + G_3 G_4)}{G},$$

gdzie:

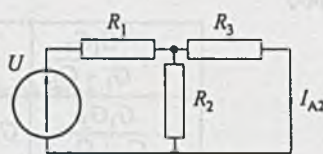
$$G = G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_4 + G_1 G_2 G_5 + G_1 G_3 G_5 + G_1 G_4 G_5 + \\ + G_2 G_3 G_4 + G_2 G_4 G_5 + G_3 G_4 G_5.$$

Zadanie 4.9. Obwody pasywne z rys. 4.9 traktujemy jako czworniki. Dowolny liniowy obwód pasywny możemy przedstawić równoważnie w postaci czwornika w kształcie T. Zatem obwody z rys. 4.9 mogą przyjąć postać jak na rys. 4.9.1 i 4.9.2.

Na podstawie wskazań amperomierza i woltomierza, przy pomiarach w stanie jałowym czwornika, wyznaczamy wartości R_2 i R_1 .



Rys. 4.9.1



Rys. 4.9.2

Oczywiście

$$R_2 = \frac{U_v}{I_{A1}} = \frac{20}{6} = 3.33 \, \Omega,$$

ale

$$I_{A1} = \frac{U}{R_1 + R_2},$$

stąd

$$R_1 = \frac{U}{I_{A1}} - R_2 = \left(\frac{50}{6} - 3.33 \right) \Omega = 5 \, \Omega.$$

Z II prawa Kirchhoffa dla obwodu z rys. 4.9.2

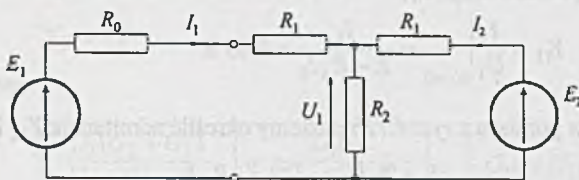
$$R_3 I_{A2} + R_1 \left(I_{A2} + I_{A2} \frac{R_3}{R_2} \right) = U,$$

stąd

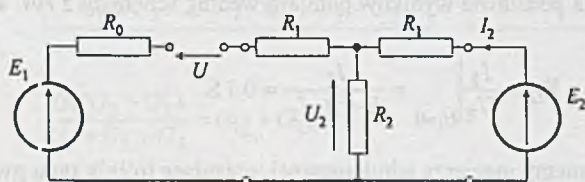
$$R_3 = \left(\frac{U}{I_{A2}} - R_1 \right) \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \left(\frac{50}{1.67} - 5 \right) \cdot \frac{3.33}{5 + 3.33} \Omega = 10 \, \Omega.$$

Korzystając z tak obliczonych wartości oporności czwornika w kształcie T ($R_1 = 5 \, \Omega$, $R_2 = 3.33 \, \Omega$, $R_3 = 10 \, \Omega$) możemy wyznaczyć na podstawie zależności podanych w tablicy D2 (dodatek) elementy dowolnej macierzy charakteryzującej czwornik.

Zadanie 4.10. Podobnie jak w zadaniu 4.9 obwód pasywny z rys. 4.10 możemy zastąpić czwórnikiem w kształcie T jak na rys. 4.10.1 i 4.10.2.



Rys. 4.10.1



Rys. 4.10.2

Korzystając z warunków zadania przy zamkniętym kluczu K możemy wyznaczyć R_1 i R_2 w następujący sposób

- z II prawa Kirchhoffa dla obwodu z rys. 4.10.1

$$E_1 - (R_0 + R_1)I_1 = E_2 - R_1I_2$$

otrzymamy $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$,

- ponadto napięcie U_1 na rezystorze R_2

$$U_1 = E_2 - R_1I_2 = 8 \text{ V},$$

ale też

$$U_1 = R_2(I_1 + I_2),$$

stąd $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$.

Po otwarciu klucza K napięcie U_2 na oporniku R_2 wynosi (rys. 4.10.2)

$$U_2 = E_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5 \text{ V},$$

więc napięcie na zaciskach klucza

$$U = E_1 - U_2 = 15 \text{ V}.$$

Odpowiedź: W analizowanym obwodzie wartość napięcia U na zaciskach klucza po jego otwarciu wynosi $U = 15 \text{ V}$.

Zadanie 4.11. Na podstawie pomiaru wykonanego według schematu przedstawionego na rys. 4.11a można wyznaczyć admitancję Y_{11}

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{I_1}{E - R_A I_1} = 0.05 \text{ S.}$$

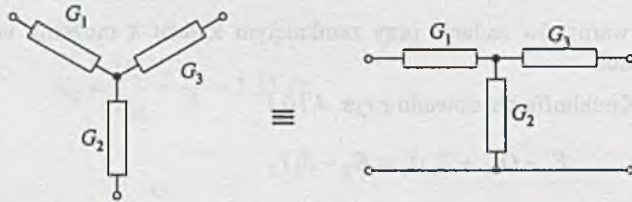
Korzystając z wyników pomiaru z rys. 4.11b możemy określić admitancje Y_{12} i Y_{21}

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{I_1 + Y_{11} U_1}{U_2} = \frac{I_1 + Y_{11} R_A I_1}{E} = -0.45 \text{ S.}$$

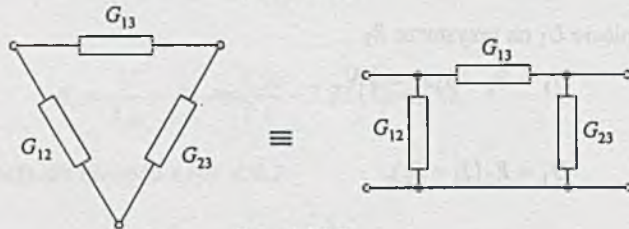
Na końcu wreszcie, na podstawie wyników pomiaru według schematu z rys. 4.11c, wyznaczamy admitancję Y_{22}

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{I_2}{E - R_A I_2} = 0.1 \text{ S.}$$

Zadanie 4.12. Elementy macierzy admitancyjnej, opisujące trójkąt typu gwiazda, są identyczne z elementami macierzy opisującymi czwórnik w kształcie T (rys. 4.12.1). Identyfikacyjny opis macierzowy posiadają również trójkąt kształtu trójkąt i czwórnik kształtu Π (rys. 4.12.2).



Rys. 4.12.1



Rys. 4.12.2

Zależności między elementami macierzy admitancyjnej Y a przewodnościami tworzącymi czwórnik w kształcie T i Π zostały podane w tablicy D2 (dodatek). Po ich przekształceniu otrzymamy

$$G_1 = \frac{Y_{11} Y_{22} - Y_{12}^2}{Y_{22} + Y_{12}} = 12.5 \text{ S, } G_{13} = -Y_{12} = 5 \text{ S,}$$

$$G_2 = -\frac{Y_{11} Y_{22} - Y_{12}^2}{Y_{12}} = 25 \text{ S, } G_{12} = Y_{11} - Y_{12} = 15 \text{ S,}$$

$$G_3 = -\frac{Y_{11} Y_{22} - Y_{12}^2}{Y_{12}} = 25 \text{ S, } G_{23} = Y_{22} - Y_{12} = 20 \text{ S.}$$

Zadanie 4.13. Zależności pomiędzy przewodnościami w obwodach typu gwiazda i trójkąt można znaleźć np. przez porównanie elementów macierzy admitancyjnych opisujących oba obwody

$$Y_Y = Y_\Delta$$

lub w postaci rozpisanej

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} & -\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\ \hline -\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} & \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline G_{12} + G_{13} & -G_{13} \\ \hline -G_{13} & G_{13} + G_{23} \\ \hline \end{array}$$

Stąd

$$\frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} = G_{12} + G_{13},$$

$$\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = G_{13},$$

$$\frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} = G_{13} + G_{23}.$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy

$$G_1 = \frac{G_{12}G_{13} + G_{12}G_{23} + G_{13}G_{23}}{G_{23}}, \quad G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$G_2 = \frac{G_{12}G_{13} + G_{12}G_{23} + G_{13}G_{23}}{G_{13}}, \quad G_{13} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$G_3 = \frac{G_{12}G_{13} + G_{12}G_{23} + G_{13}G_{23}}{G_{12}}, \quad G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

W ogólnym przypadku, gdy niewiele wiemy o elementach macierzy opisujących dwa równoważne obwody, porównujemy te obwody w stanie zwarcia i rozwarcia zacisków.

Zadanie 4.14. Obieramy węzeł n -ty gwiazdy n -ramiennej (rys. 4.14a) jako węzeł odniesienia i piszemy układ równań węzłowych dla węzłów 0, 1, 2, ... $n - 1$. Ponieważ gwiazda może być połączona z innymi obwodami tylko za pośrednictwem węzłów 1, 2, ..., n , a węzeł 0 jest węzłem wewnętrznym, to przyjmujemy, że do wszystkich węzłów, prócz węzła 0, doprowadzono prądy źródłowe $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}, I_n$, przy czym

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0.$$

Dla węzłów 1, 2, ..., n - 1 i n można napisać równania I prawa Kirchhoffa o następującej postaci

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1 U_1 - G_1 U_0 \\ &\vdots \\ I_k &= G_k U_k - G_k U_0 \\ &\vdots \\ I_{n-1} &= G_{n-1} U_{n-1} - G_{n-1} U_0 \\ I_n &= G_n \cdot 0 - G_n U_0, \end{aligned}$$

a po zsumowaniu

$$\sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^{n-1} G_i U_i - U_0 \sum_{i=1}^n G_i = 0,$$

skąd otrzymujemy wzór na potencjał U_0 wewnętrznego węzła 0, gdy węzłem odniesienia jest węzeł n-ty

$$U_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} G_i U_i}{\sum_{i=1}^n G_i}.$$

Podstawiając obliczoną wartość napięcia U_0 do k-tego równania, otrzymujemy

$$I_k = G_k U_k - G_k \frac{\sum_{i=1}^{n-1} G_i U_i}{\sum_{i=1}^n G_i}.$$

Rozpisując tę zależność, otrzymamy wzór

$$I_k = \left(\frac{G_k G_1}{\sum_{i=1}^n G_i} \right) U_1 + \dots + \left(G_k - \frac{G_k^2}{\sum_{i=1}^n G_i} \right) U_k + \dots + \left(-\frac{G_k G_{n-1}}{\sum_{i=1}^n G_i} \right) U_{n-1}.$$

Zatem

$$I_k = \sum_{s=1}^{n-1} G_{ks} U_s, \quad (1)$$

gdzie

$$G_{kk} = G_k - \frac{G_k^2}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad G_{ks} = -\frac{G_k G_s}{\sum_{i=1}^n G_i}. \quad (1')$$

Przy tych samych prądach źródłowych dopływających do poszczególnych węzłów, n -boku zupełnego, równanie I prawa Kirchhoffa dla k -tego węzła ma postać

$$I_k = U_k \sum_{i=1}^n G_{ki} - \sum_{i=1}^n G_{ki} U_i.$$

Rozpisując je, otrzymujemy zależność

$$I_k = (-G_{k1})U_1 + \dots + \left(\sum_{i=1}^n G_{ki} - G_{kk} \right) U_k + \dots + (-G_{k(n-1)})U_{n-1}.$$

Zatem

$$I_k = \sum_{s=1}^{n-1} G'_{ks} U_s, \quad (2)$$

gdzie

$$G'_{kk} = \sum_{i=1}^n G_{ki} \quad (i \neq k); \quad G'_{ks} = -G_{ks}. \quad (2')$$

Porównując wyrażenia (1') i (2'), otrzymujemy zależność między przewodnościami w gałęziach równoważnych pasywnych obwodów gwiazdy n -ramiennej i n -boku zupełnego. Przewodności n -boku zupełnego są określone przez przewodności gwiazdy n -ramiennej zależnością (3)

$$G_{ks} = \frac{G_k G_s}{\sum_{i=1}^n G_i}. \quad (3)$$

Zadanie 4.15. Rozważmy obwód z rys. 4.15a. Równania potencjałów węzłowych obwodu bez trójkąta (rys. 4.15.1a) mają postać:

$$\mathbf{Y}'\mathbf{V}' = \mathbf{I}',$$

a po rozpisaniu:

G_4	0
0	$\frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3}$

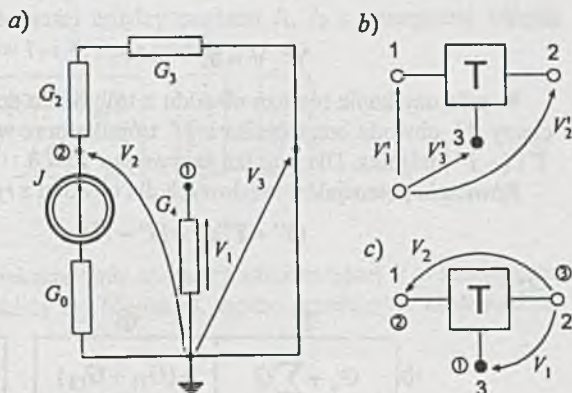
 \cdot

V_1	0
V_2	I

 $=$

0
I

Węzeł ③ jest węzłem odniesienia, czyli $V_3 = 0$.



Rys. 4.15.1

Równania potencjałów węzłowych dla trójkąta przedstawionego na rys. 4.15.1b, przy obraniu dowolnego węzła odniesienia poza trójkątem i przyjęciu numeracji zacisków jak na rysunku, są następujące

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline G_{11} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline G_{12} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{11} + G_{12}) \\ \hline \end{array} \\
 & \begin{array}{|c|} \hline G_{21} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline G_{22} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{21} + G_{22}) \\ \hline \end{array} \\
 & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{11} + G_{21}) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{12} + G_{22}) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \sum G \\ \hline \end{array}
 \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V'_1 \\ \hline V'_2 \\ \hline V'_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Ułożymy równania tego trójkąta (rys. 4.15.1b) uwzględniając przenumrowania jego zacisków zgodnie z numerami węzłów obwodu, do których zaciski te będą dołączone (rys. 4.15.1c), oraz doprowadzając jego macierz do wymiarów macierzy obwodu bez trójkąta; wówczas:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{1} \\
 & 1 & 2 & 3 \\
 \begin{array}{c} \textcircled{2} \ 1 \\ \textcircled{3} \ 2 \\ \textcircled{1} \ 3 \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline G_{11} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline G_{12} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{11} + G_{12}) \\ \hline \end{array} \\
 & \begin{array}{|c|} \hline G_{21} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline G_{22} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{21} + G_{22}) \\ \hline \end{array} \\
 & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{11} + G_{21}) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{12} + G_{22}) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \sum G \\ \hline \end{array}
 \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline V_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Ale $V_3 = 0$, więc powyższy układ równań redukuje się, po przekształceniu, do postaci:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \textcircled{1} & \textcircled{2} \\
 3 & 1
 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \textcircled{1} \ 3 \\ \textcircled{2} \ 1 \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \sum G \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{11} + G_{12}) \\ \hline \end{array} \\
 & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{11} + G_{21}) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline G_{11} \\ \hline \end{array}
 \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

czyli

$$Y'' \cdot V = 0.$$

W celu uzyskania równań obwodu z trójkątem dodajemy do siebie otrzymane elementy macierzy Y' obwodu bez trójkąta i Y'' trójkąta oraz wektory zastępczych sił prądomotorycznych I' i $(-I'')$ trójkąta. Dla trójkąta pasywnego $I'' = 0$.

Równania potencjałów węzłowych dla obwodu z rys. 4.15a mają następującą postać

$$(Y' + Y'')V = (I' - I''),$$

czyli

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \textcircled{1} & \textcircled{2}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline G_4 + \sum G \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{11} + G_{12}) \\ \hline \end{array} \\
 & \begin{array}{|c|} \hline -(G_{11} + G_{21}) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3} + G_{11} \\ \hline \end{array}
 \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline I \\ \hline \end{array}$$

Równania potencjałów węzłowych dla obwodu z rys. 4.15b mają następującą postać

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline G_1 + \frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3} + G_{22} & -(G_{11} + G_{12}) \\ \hline -(G_{11} + G_{21}) & G_4 + \sum G \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline E \frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Zadanie 4.16.

Ad a) Równania potencjałów węzłowych dla obwodu z rys. 4.16 (gdy $V_3 = 0$) są następujące

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline G_1 + G_2 + G_{11} & G_{12} & -G_2 & 0 \\ \hline G_{21} & G_4 + G_{22} & 0 & -G_4 \\ \hline -G_2 & 0 & G_2 & 0 \\ \hline 0 & -G_4 & 0 & G_3 + G_4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline V_4 \\ \hline V_5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline E_1 G_1 + E_2 G_2 \\ \hline I_5 \\ \hline -E_2 G_2 - I_5 + I_6 \\ \hline -I_6 \\ \hline \end{array}$$

Ad b) Przyjmując węzeł ⑤ za węzeł odniesienia, otrzymujemy

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline G_1 + G_2 + G_{11} & G_{12} & -G_1 - (G_{11} + G_{21}) & -G_2 \\ \hline G_{21} & G_4 + G_{22} & -(G_{21} + G_{22}) & 0 \\ \hline -G_1 - (G_{11} + G_{21}) & -(G_{12} + G_{22}) & G_1 + G_3 + \sum G & 0 \\ \hline -G_2 & 0 & 0 & G_2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline V_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline E_1 G_1 + E_2 G_2 \\ \hline I_5 \\ \hline -E_1 G_1 \\ \hline -I_5 + I_6 - E_2 G_2 \\ \hline \end{array}$$

Zadanie 4.17. Równania podające zależności między prądami I_1 , I_2 a napięciami U_1 , U_2 uwzględniające jedynie parametry trójkątów T_1 i T_2 mają postać

$$\begin{array}{|c|c|} \hline G_{11} + \sum G & G_{12} - (G_{11} + G_{21}) \\ \hline -G_{21} - (G_{11} + G_{12}) & G_{11} + G_{22} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline U_1 \\ \hline U_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ \hline \end{array}$$

czyli

$$YU = I.$$

Korzystając z ogólnej zależności do przekształcenia macierzy admitancyjnej Y w macierz impedancyjną Z n -biegunnika, podanej w tablicy D5 (dodatek), można przedstawić zależność napięcia U_k od prądów w postaci

$$U_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^n \Delta_{sk} I_s,$$

gdzie: Δ - wyznacznik macierzy admitancyjnej Y ,

Δ_{sk} - dopełnienie algebraiczne elementu Y_{sk} tej macierzy leżącego na przecięciu s -tego wiersza z k -tą kolumną.

Zatem układ równań dla czwornika ma postać:

$$U_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} I_2, \quad (1)$$

$$U_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} I_2. \quad (2)$$

Korzystając z zależności

$$I_2 = -G_2 U_2$$

otrzymujemy:

$$U_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} I_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} G_2 U_2, \quad (3)$$

$$U_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} G_2 U_2. \quad (4)$$

Z równania (4) obliczamy

$$U_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta + \Delta_{22} G_2} I_1. \quad (5)$$

Wstawiając uzyskane wyrażenie do równania (3), otrzymujemy

$$U_1 = \frac{1}{\Delta} \left(\Delta_{11} - \frac{\Delta_{12} \Delta_{21} G_2}{\Delta + \Delta_{22} G_2} \right) I_1. \quad (6)$$

Przekształcając to równanie i oznaczając $\Delta_{11} \Delta_{22} - \Delta_{12} \Delta_{21} = \Delta \Delta_{11,22}$, otrzymujemy wzór na opór wejściowy czwornika R_1

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\Delta_{11} + \Delta_{11,22} G_2}{\Delta + \Delta_{22} G_2} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \Big|_{G_2=0}.$$

Z równań (5) i (6) otrzymujemy wzór na wzmocnienie napięciowe K_U

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11} + \Delta_{11,22} G_2} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} \Big|_{G_2=0}.$$

Podstawiając do równania (5) zależność $U_2 = -G_2 I_2$, otrzymujemy wyrażenie określające wzmocnienie prądowe K_I

$$K_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\Delta_{12} G_2}{\Delta + \Delta_{22} G_2} \Big|_{G_2=0} = 0.$$

Opór wyjściowy $R_2 = \frac{U_2}{I_2}$ określamy przy założeniu $G_2 = 0$ i $E = 0$.

W takim przypadku $I_1 = -G_1 U_1$. Wstawiając ten związek do równań (1) i (2) otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{\Delta_{11}}{\Delta} G_1 U_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} I_2, \\ U_2 &= -\frac{\Delta_{12}}{\Delta} G_1 U_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} I_2. \end{aligned}$$

Przekształcając powyższe równanie, uzyskamy wzór na opór wyjściowy czwórnik R_2

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{\Delta_{22} + \Delta_{11,22} G_1}{\Delta + \Delta_{11} G_1}.$$

Dla warunków podanych w zadaniu

$$\sum G = 0.2 - 0.05 - 0.05 + 0.1 = 0.2 \text{ S},$$

$$G_{11} + \sum G = 0.4 \text{ S},$$

$$G_{12} - (G_{11} + G_{21}) = -0.2 \text{ S},$$

$$G_{21} = (G_{11} + G_{12}) = -0.2 \text{ S},$$

$$G_{11} + G_{22} = 0.3 \text{ S},$$

$$\Delta = 0.4 \cdot 0.3 - 0.2 \cdot 0.2 = 0.08 \text{ S},$$

$$\Delta_{11} = 0.3 \text{ S},$$

$$\Delta_{22} = 0.4 \text{ S},$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = -0.2 \text{ S},$$

$$\Delta_{11,22} = \frac{\Delta_{11} \Delta_{22} - \Delta_{12} \Delta_{21}}{\Delta} = 1 \text{ S},$$

zatem

$$R_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{0.3}{0.08} \Omega = 3.75 \Omega,$$

$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = -\frac{0.2}{0.3} \left[\frac{V}{V} \right] = -0.66 \left[\frac{V}{V} \right], \quad K_I = 0,$$

$$R_2 = \frac{\Delta_{22} + \Delta_{11,22} G_1}{\Delta + \Delta_{11} G_1} = \frac{0.4 + 1 \cdot 0.4}{0.08 + 0.3 \cdot 0.4} \Omega = 4 \Omega.$$

Zadanie 4.18. Równania potencjałów węzłowych dla obwodu z rys. 4.18.1 mają następującą postać

$$(G_2 + G_{11})E - (G_2 + G_{11} + G_{12})V_3 = J + I_E, \quad (1)$$

$$-(G_2 + G_{11} + G_{21})E + (G_2 + G_3 + \sum G)V_3 = 0. \quad (2)$$

Z równania (2) $V_3 = 7.55 \text{ V}$.

Podstawiając obliczoną wartość V_3 do równania (1), otrzymujemy

$$I_E = 4.6 \text{ A},$$

natomiast pozostałe prądy

$$I_3 = V_3 G_3 = 7.77 \cdot 0.1 \text{ A} = 0.755 \text{ A},$$

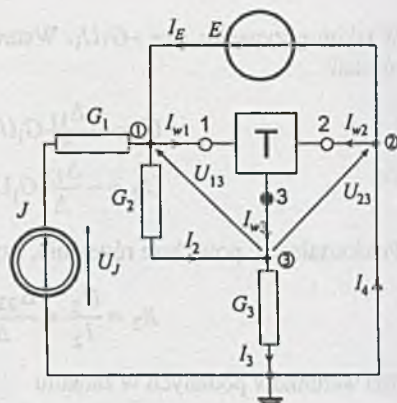
$$I_2 = U_{13} G_2 = 2.45 \cdot 1 \text{ A} = 2.45 \text{ A},$$

$$I_{w3} = I_3 - I_2 = -1.695 \text{ A},$$

$$I_4 = I_3 - J = -3.695 \text{ A},$$

$$I_{w1} = J + I_E - I_2 = 4.15 \text{ A},$$

$$I_{w2} = I_{w3} - I_{w1} = -5.845 \text{ A},$$



Rys. 4.18.1

napięcia

$$U_J = E + \frac{I}{G_1} = 14 \text{ V},$$

$$U_{13} = 2.45 \text{ V},$$

$$U_{23} = -7.55 \text{ V},$$

moce

$$P_{pT} = U_{13} I_{w1} + U_{23} I_{w2} = 54.3 \text{ W},$$

$$P_{G1} = 8 \text{ W}, \quad P_{G2} = 6 \text{ W}, \quad P_{G3} = 5.7 \text{ W},$$

$$P_{pob} = P_{pT} + P_{G1} + P_{G2} + P_{G3} = 74 \text{ W},$$

$$P_{wyd} = P_J + P_E = 28 + 46 = 74 \text{ W},$$

$$P_{pob} = P_{wyd}.$$

Zadanie 4.19. Równania potencjałów węzłowych dla obwodu z rys. 4.19, z odłączonym czterobiegunnikiem, gdy węzeł ④ jest węzłem odniesienia, są następujące:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline G_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & G_2 & -G_2 \\ \hline 0 & -G_2 & G_2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline EG_1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Czterobiegunnik z rys. 4.19 jest opisany równaniami

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \hline \textcircled{1} & G_3 + G_4 & -G_3 & -G_4 \\ \hline \textcircled{2} & -G_3 & G_3 + G_6 & 0 \\ \hline \textcircled{3} & -G_4 & 0 & G_4 + G_5 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Zatem równania obwodu z czterobiegunnikiem mają postać

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline G_1 + G_3 + G_4 & -G_3 & -G_4 \\ \hline -G_3 & G_2 + G_3 + G_6 & -G_2 \\ \hline -G_4 & -G_2 & G_2 + G_4 + G_5 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline EG_1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Rozwiązanie stanowią wartości potencjałów $V_1 = 11 \text{ V}$, $V_2 = 8 \text{ V}$, $V_3 = 6 \text{ V}$, natomiast prądy

$$I_1 = (E - V_1)G_1 = 5 \text{ A},$$

$$I_2 = (V_3 - V_2)G_2 = -1 \text{ A},$$

oraz moce

$$P_E = EI_1 = 80 \text{ W},$$

$$P_{G1} = (E - V_1)I_1 = 25 \text{ W},$$

$$P_{G2} = (V_3 - V_2)I_2 = 2 \text{ W}.$$

Moc pobierana przez czterobiegunnik

$$P_{cz} = V_1 I_1 + V_2 I_2 + V_3 I_3 = V_1 I_1 + (V_2 - V_3)I_3 = 53 \text{ W}.$$

Sprawdzenie

$$P_{wyd} = P_E = 80 \text{ W},$$

$$P_{pob} = P_{G1} + P_{G2} + P_{cz} = 80 \text{ W},$$

$$P_{wyd} = P_{pob}.$$

Zadanie 4.20. Obwód z rys. 4.20 możemy przedstawić dla ułatwienia jak na rys. 4.20.1. Z zasady superpozycji dla obwodu z rys. 4.20.1 mamy

$$I_2 = A'E_2 + B'E_1,$$

$$I_1 = A''E_1 + B''E_2.$$

Z zasady wzajemności $B' = B'' = B$.

Z warunków zadania

$$\Delta I_1 = B \Delta E_2,$$

więc

$$B = \frac{\Delta I_1}{\Delta E_2} = \frac{0.5}{8} \text{ S} = \frac{1}{16} \text{ S},$$

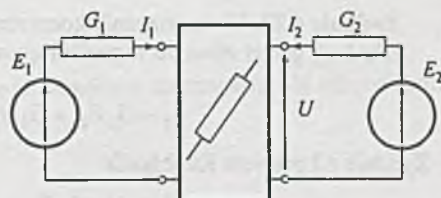
ponadto

$$\Delta I_2 = B \Delta E_1 = 24 \cdot \frac{1}{16} \text{ A} = 1.5 \text{ A},$$

więc

$$\Delta U = \frac{\Delta I_2}{G_2} = \frac{1.5}{0.5} \text{ V} = 3 \text{ V},$$

zatem przy zmianie wartości SEM E_1 o 24 V wskazanie woltomierza zmieni się o 3 V.



Rys. 4.20.1

Zadanie 4.21. Elementy macierzy admitancyjnej Y czwórnika aktywnego określamy na podstawie definicji przedstawionych w tablicy D1 (dodatek) pozostawiając wewnętrzne siły elektromotoryczne SEM w stanie zwarcia, a siły prądomotoryczne SPM w stanie rozwarcia. Składowe wektora zastępczych sił prądomotorycznych obliczamy na podstawie I prawa Kirchhoffa.

Ogólnie, równanie macierzowe potencjałów węzłowych, opisujące obwód z wielobiegunnikiem aktywnym, ma postać

$$I_z + YV = I.$$

Dla obwodu z rys. 4.21a:

$$I_z = \begin{bmatrix} E_1 \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} \\ -E_1 \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} & -\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\ -\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} & \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} \end{bmatrix}$$

Dla obwodu z rys. 4.21b:

$$I_z = \begin{bmatrix} J_0 \\ -J_0 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_1 + G_2 \end{bmatrix}$$

Dla obwodu z rys. 4.21c:

$$I_z = \begin{bmatrix} J_1 \\ -E_2 G_2 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.22. W rozwiązaniu korzystamy z założeń i wyników zadania 4.14.

Dla k -tej gałęzi obwodu w postaci gwiazdy wieloramiennej z rys. 4.22a możemy napisać równanie

$$I_k - G_k E_k = G_k U_k - G_k U_0. \quad (1)$$

Zgodnie z I prawem Kirchhoffa

$$\sum_{i=1}^n I_i + \sum_{i=1}^n G_i E_i = \sum_{i=1}^{n-1} G_i U_i - U_0 \sum_{i=1}^n G_i,$$

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0,$$

stąd

$$U_0 = -\frac{\sum_{i=1}^n G_i E_i}{\sum_{i=1}^n G_i} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} G_i U_i}{\sum_{i=1}^n G_i}.$$

Podstawiając obliczoną wartość napięcia U_0 do równania (1) otrzymujemy

$$I_k - G_k E_k + \frac{G_k \sum_{i=1}^n G_i E_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \sum_{s=1}^{n-1} G_{ks} U_s. \quad (2)$$

Przy tych samych prądach źródłowych, dopływających do poszczególnych węzłów, równanie I prawa Kirchhoffa dla k-tego węzła wieloboku zupełnego z rys. 4.22b ma postać

$$I_k - \sum_{i=1}^n G_{ki} E_{ki} = \sum_{s=1}^{n-1} G_{ks} U_s. \quad (3)$$

W rozwiązaniu zadania 4.14 otrzymaliśmy zależność między przewodnościami w gałęziach gwiazdy n -ramiennej i n -boku zupełnego, która wyraża się wzorem

$$G_{ks} = \frac{G_k G_s}{\sum_{i=1}^n G_i}. \quad (4)$$

Porównując lewe strony równań (2) i (3) możemy napisać

$$G_k \left(E_k - \frac{\sum_{i=1}^n G_i E_i}{\sum_{i=1}^n G_i} \right) = \sum_{i=1}^n G_{ki} E_{ki}.$$

Podstawiając w miejsce przewodności G_{ki} jej wartość określoną zależnością (4) otrzymujemy również

$$G_k \frac{\sum_{i=1}^n G_i E_k - \sum_{i=1}^n G_i E_i}{\sum_{i=1}^n G_i} = \sum_{i=1}^n E_{ki} \frac{G_k G_i}{\sum_{i=1}^n G_i}. \quad (5)$$

Równanie (5) możemy napisać w postaci

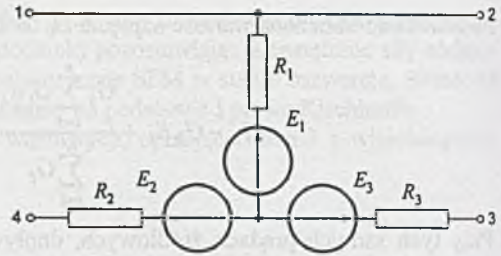
$$\frac{G_k}{\sum_{i=1}^n G_i} \sum_{i=1}^n G_i (E_k - E_i) = \frac{G_k}{\sum_{i=1}^n G_i} \sum_{i=1}^n G_i E_{ki}.$$

Stąd wynika bezpośrednio zależność między siłami elektromotorycznymi SEM E_k i E_s w gałęziach równoważnych obwodów gwiazdy wieloramiennej i SEM E_{ks} wieloboku zupełnego

$$E_{ks} = E_k - E_s.$$

Zadanie 4.23. Na podstawie wskazania omomierza z rys. 4.23a możemy stwierdzić, że badany czwórnik aktywny jest trójnikiem. Dla dowolnego trójnika aktywnego możemy przyjąć np. strukturę w kształcie T zaproponowaną na rys. 4.23.1.

Korzystając z wyników pomiarów przedstawionych na rys. 4.23 możemy określić prądy i napięcia; i tak



Rys. 4.23.1

$$I_1 = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} = 2 \text{ A}; \quad U_1 = E_3 - E_1 = 4 \text{ V},$$

$$I_2 = \frac{E_3 - E_1}{R_1 + R_2} = 1 \text{ A}; \quad U_2 = E_2 - E_1 = 10 \text{ V},$$

$$I_3 = \frac{E_2 - E_3}{R_2 + R_3} = 2 \text{ A}; \quad U_3 = E_2 - E_3 = 6 \text{ V}.$$

Po obliczeniach otrzymujemy

$$E_1 = 2 \text{ V}; \quad E_2 = 12 \text{ V}; \quad E_3 = 6 \text{ V},$$

$$R_1 = 3 \Omega; \quad R_2 = 2 \Omega; \quad R_3 = 1 \Omega.$$

Dla badanego trójnika aktywnego możemy przyjąć, w ramach struktury o kształcie T, obwody równoważne jak na rys. 4.23.2, które od strony zacisków zewnętrznych posiadają takie same właściwości jak obwód z rys. 4.23.1.

Z rys. 4.23.2d i e wynika, że do jednoznacznego określenia właściwości trójnika aktywnego wystarczy dobrać w ramach struktury T wartości oporności R_1 , R_2 i R_3 oraz wartości dwóch sił wymuszających SEM lub SPM. Zatem można zauważyć, że jeden z wyników pomiarów przedstawionych na rys. 4.23e, f, g jest zależny od dwóch pozostałych.

Podobną dyskusję wyników pomiarów możemy przeprowadzić przyjmując strukturę kształtu Π dla badanego trójnika aktywnego.

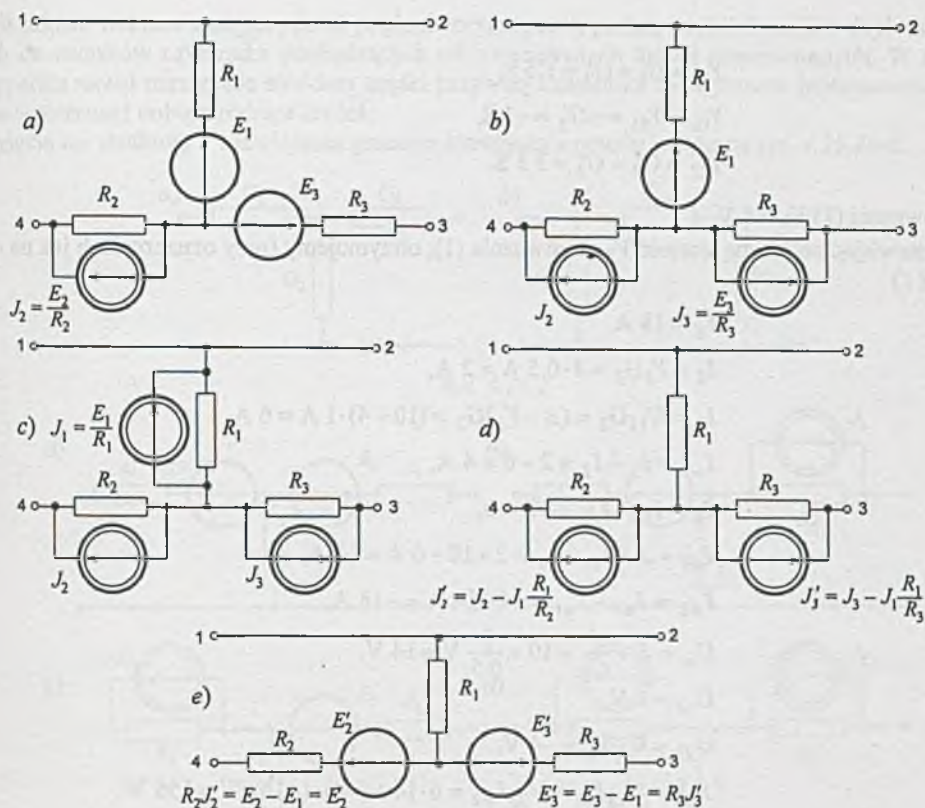
Zadanie 4.24. Równania potencjałów węzłowych dla obwodu z wielobiegunkiem aktywnym możemy przedstawić macierzowo w następujący sposób

$$GV = I - I_z.$$

Korzystając z rozwiązania zadania 4.15 dla obwodu z trójnikiem pasywnym z rys. 4.15 i uwzględniając wektor zastępczych sił prądomotorycznych I_z dla trójnika aktywnego z rys. 4.24 otrzymujemy szukany układ równań

$G_4 + \sum Y$	$-(Y_{11} + Y_{21})$
$-(Y_{11} + Y_{12})$	$\frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3} + Y_{11}$

V_1	$-E_1 Y_{11}$
V_2	J



Rys. 4.23.2

gdzie: Y_{11} , Y_{12} , Y_{22} są elementami macierzy admitancyjnej Y trójkąta z rys. 4.24 określonymi zależnościami

$$Y_{11} = \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{-G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$Y_{22} = \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Zadanie 4.25. Równania potencjałów węzłowych opisujące obwód z rys. 4.18 z trójkątnikiem aktywnym z rys. 4.25 mają następującą postać:

$$(G_2 + Y_{11})E - (G_2 + Y_{11} + Y_{12})V_3 = J + I_E - J'_0, \quad (1)$$

$$-(G_2 + Y_{11} + Y_{21})E + (G_2 + G_3 + \sum Y)V_3 = J'_0, \quad (2)$$

gdzie:

$$Y_{11} = G'_1 + G'_2 = 1.5 \text{ S},$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -G'_2 = -1 \text{ S},$$

$$Y_{22} = G'_2 + G'_3 = 3 \text{ S}.$$

Z równania (2) $V_3 = 4 \text{ V}$.

Podstawiając obliczoną wartość V_3 do równania (1), otrzymujemy (przy oznaczeniach jak na rys. 4.18.1)

$$I_E = 18 \text{ A},$$

$$I_3 = V_3 G_3 = 4 \cdot 0.5 \text{ A} = 2 \text{ A},$$

$$I_2 = U_{13} G_2 = (E - V_3) G_2 = (10 - 4) \cdot 1 \text{ A} = 6 \text{ A},$$

$$I_{w3} = I_3 - I_2 = 2 - 6 = -4 \text{ A},$$

$$I_4 = I_3 - J = 2 - 2 = 0,$$

$$I_{w1} = J + I_E - I_2 = 2 + 18 - 6 \text{ A} = 14 \text{ A},$$

$$I_{w2} = I_{w3} - I_{w1} = -4 - 14 \text{ A} = -18 \text{ A},$$

$$U_J = E + \frac{J}{G_1} = 10 + \frac{2}{0.5} \text{ V} = 14 \text{ V},$$

$$U_{13} = 6 \text{ V},$$

$$U_{23} = 0 - V_3 = -4 \text{ V},$$

$$P_{pT} = U_{13} I_{w1} + U_{23} I_{w2} = 6 \cdot 14 + (-4) \cdot (-18) \text{ W} = 156 \text{ W},$$

$$P_{G1} = 8 \text{ W}; \quad P_{G2} = 36 \text{ W}; \quad P_{G3} = 208 \text{ W},$$

$$P_{pob} = P_{pT} + P_{G1} + P_{G2} + P_{G3} = 208 \text{ W},$$

$$P_{wyd} = P_J + P_E = 28 + 180 = 208 \text{ W},$$

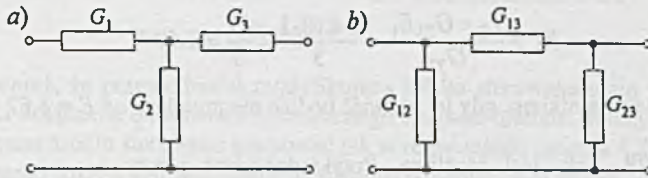
$$P_{pob} = P_{wyd}.$$

Zadanie 4.26. Macierz Y charakteryzuje czwórnik aktywny, gdy wewnętrzne siły elektromotoryczne SEM są zwarte, a siły prądomotoryczne SPM rozwarte. W związku z tym, przy wyznaczaniu parametrów obwodu na podstawie danych elementów macierzy Y możemy traktować go jako czwórnik pasywny. Mając dane tylko Y_{11} , $Y_{12} = Y_{21}$, Y_{22} , czyli trzy różne wartości charakteryzujące czwórnik, nie możemy jednoznacznie określić jego struktury, gdyż czworniki o różnej budowie i różnych parametrach mogą być opisane tą samą macierzą Y . Możemy natomiast przyjąć najprostszą strukturę czwornika, w której parametry mogą być wyznaczone jednoznacznie z danych Y_{11} , $Y_{12} = Y_{21}$, Y_{22} . Taką cechę posiadają czworniki o kształcie Π i Γ z rys. 4.26.1.

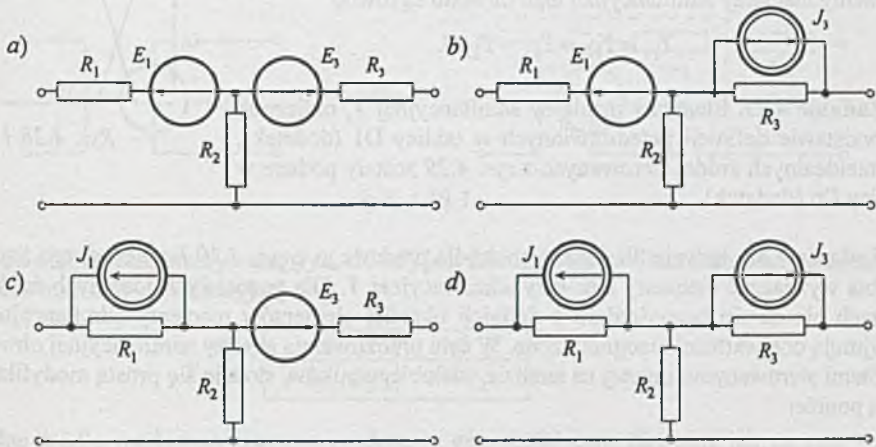
Korzystając z rozwiązania zadania 4.12 otrzymujemy szukane wartości przewodności. Mając daną macierz Y wygodniej jest przyjąć strukturę Π , natomiast jeśli dana jest macierz Z - to strukturę Γ .

Składowe wektora zastępczych sił prądomotorycznych I_z podają wartości prądów dopływających do zacisków czwornika pochodzących od wewnętrznych źródeł niesterowanych. W tym przypadku nawet narzucenie struktury części pasywnej czwornika nie wymusza jednoznacznego rozmieszczenia i doboru rodzaju źródeł.

Przyjęcie np. struktury T rozwiązania generuje rozwiązania przedstawione na rys. 4.26.2a-d.



Rys. 4.26.1



Rys. 4.26.2

Zadanie 4.27. Układ równań potencjałów węzłowych opisujących obwód z rys. 4.27 można zapisać następująco

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_2 + G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{E1} - I_0 \\ E_2 G_2 + I_0 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$V_2 = \frac{G_2 E_2 + I_0 - G_{21} E_1}{G_2 + G_{22}}.$$

Warunek wydajnikowej pracy SEM E_2 można wyrazić w postaci nierówności

$$E_2 > V_2,$$

czyli

$$E_2 > \frac{G_2 E_2 + I_0 - G_{21} E_1}{G_2 + G_{22}},$$

więc

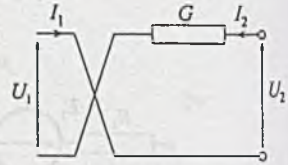
$$E_2 > \frac{I_0 - G_{21} E_1}{G_{22}} = \frac{1 + 10 \cdot 1}{3} = \frac{11}{3} = 3.67 \text{ V.}$$

SEM E_2 będzie wydajnikiem, gdy jej wartość będzie nie mniejsza od $E = 3.67 \text{ V}$.

Zadanie 4.28. Tak, jest możliwe. Przykładem jest prosty czwórnik pasywny przedstawiony na rys. 4.28.1.

Elementy macierzy admitancyjnej tego obwodu są równe

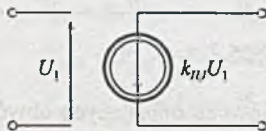
$$Y_{11} = Y_{12} = Y_{21} = Y_{22} G.$$



Rys. 4.28.1

Zadanie 4.29. Elementy macierzy admitancyjnej Y , obliczone na podstawie definicji przedstawionych w tabelicy D1 (dodatek), dla nieidealnych źródeł sterowanych z rys. 4.29 zostały podane w tabelicy D6 (dodatek).

Zadanie 4.30. Jedynie dla idealnego źródła prądowego z rys. 4.30.1 sterowanego napięciowo można wyznaczyć elementy macierzy admitancyjnej Y . Dla pozostałych idealnych źródeł sterowanych nie da się bezpośrednio z definicji określić elementów macierzy admitancyjnej, gdyż przyjmują one wartości nieograniczone. W celu umożliwienia analizy admitancyjnej obwodów ze źródłami sterowanymi, opartej na analizie wielobiegunników, stosuje się prostą modyfikację opisaną poniżej.

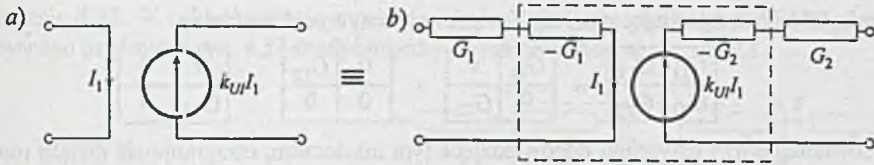


$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{IU} & 0 \end{bmatrix}$$

Rys. 4.30.1

Zauważmy, że przez dodanie do idealnego źródła sterowanego elementów pasywnicznych, w postaci przewodności, otrzymuje się nieidealne źródło sterowane, dla którego istnieje macierz admitancyjna, co stwierdziliśmy w zadaniu 4.29. Zatem źródło idealne można otrzymać przez odpowiednie dołączenie do źródła nieidealnego przewodności o wartościach ujemnych. I tak, idealne źródło napięciowe sterowane prądowo z rys. 4.30a można przedstawić jak na rys. 4.30.2. Obwód ograniczony (rys. 4.30.2) linią przerywaną stanowi nieidealne źródło sterowane scharakteryzowane macierzą admitancyjną

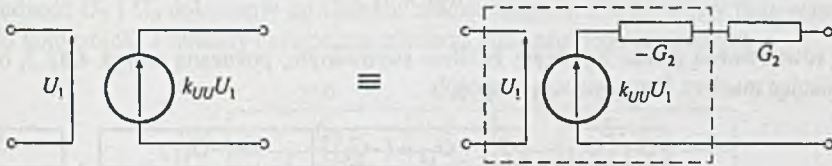
$$Y = \begin{bmatrix} -G_1 & 0 \\ -k_{UI} G_1 G_2 & -G_2 \end{bmatrix}$$



Rys. 4.30.2

Można przyjąć również, że przewodności modyfikujące źródło sterowane mają wartości dodatnie, a przewodności dołączone do obwodu zewnętrznego wartości ujemne. Wtedy macierz Y opisująca zmodyfikowane źródło sterowane ma postać jak w rozwiązaniu zadania 4.29.

Przy rozpatrywaniu źródła napięciowego sterowanego napięciowo z rys. 4.30c wystarczy zmodyfikować jedynie obwód wyjściowy (rys. 4.30.3).



Rys. 4.30.3

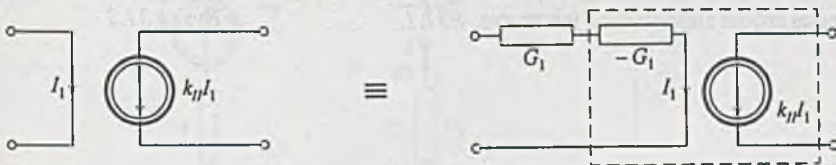
Obwód objęty linią przerywaną (rys. 4.30.3) jest nieidealnym źródłem sterowanym opisanym za pomocą macierzy admitancyjnej

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_{UU}G_2 & -G_2 \end{bmatrix}$$

Idealne źródło prądowe sterowane prądowo z rys. 4.30d modyfikujemy jak na rys. 4.30.4. Obwód objęty linią przerywaną (rys. 4.30.4) jest nieidealnym źródłem sterowanym, opisanym za pomocą macierzy admitancyjnej

$$Y = \begin{bmatrix} -G_1 & 0 \\ -k_{II}G_1 & 0 \end{bmatrix}$$

We wszystkich powyższych modyfikacjach, w zależności od właściwości konkretnie rozpatrywanych obwodów, wybiera się dogodne wartości dołączonych przewodności.

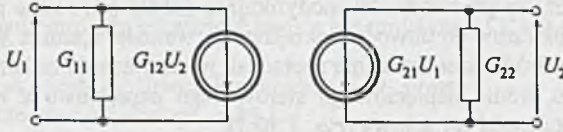


Rys. 4.30.4

Zadanie 4.31. Przedstawiając macierz Y w postaci sumy trzech macierzy

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & G_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

i łącząc równolegle trzy czworniki odpowiadające tym macierzom, otrzymuje się obwód równoważny zawierający czwornik o przewodnościach G_{11} i G_{22} oraz dwa źródła prądowe sterowane napięciowo (rys. 4.31.1).

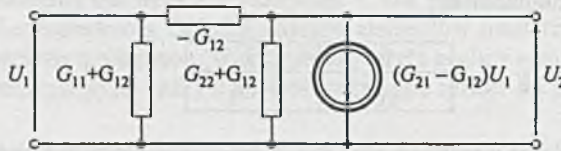


Rys. 4.31.1

Inną równoważną postać z jednym źródłem sterowanym, pokazaną na rys. 4.31.2, otrzymuje się rozpisując macierz Y w następujący sposób

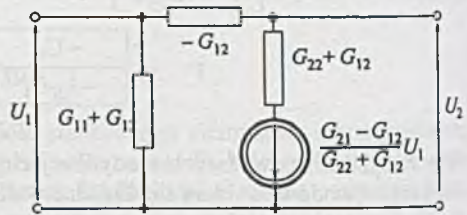
$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} + G_{12} + (-G_{12}) & -(-G_{12}) \\ -(-G_{12}) & G_{22} + G_{12} + (-G_{12}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_{21} - G_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

Obwód z rys. 4.31.2 możemy zastąpić obwodem równoważnym przedstawionym na rys. 4.31.3.



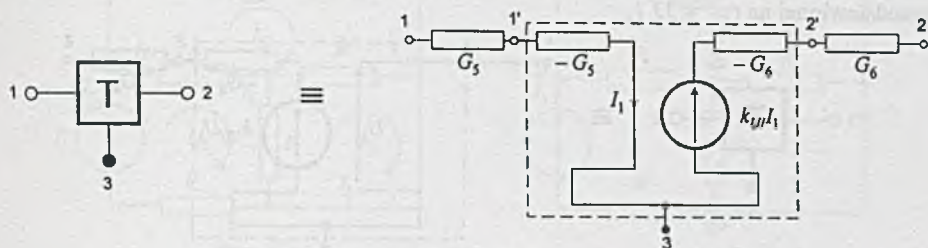
Rys. 4.31.2

Dla $G_{12} = G_{21}$ obwody z rys. 4.31.2 i 4.31.3 są obwodami pasywnymi, gdyż współczynniki $k_{IU} = G_{21} - G_{12}$ i $k_{UU} = \frac{G_{21} - G_{12}}{G_{22} + G_{12}}$ charakteryzujące źródła sterowane przyjmują wartość 0. W takim przypadku równania czwornika podane w temacie zadania można zamodelować jedynie za pomocą źródeł sterowanych jak na rys. 4.31.1.



Rys. 4.31.3

Zadanie 4.32. W celu określenia macierzy admitancyjnej dla idealnego źródła napięciowego sterowanego prądem z rys. 4.32 modyfikujemy je, jak pokazano na rys. 4.32.1.



Rys. 4.32.1

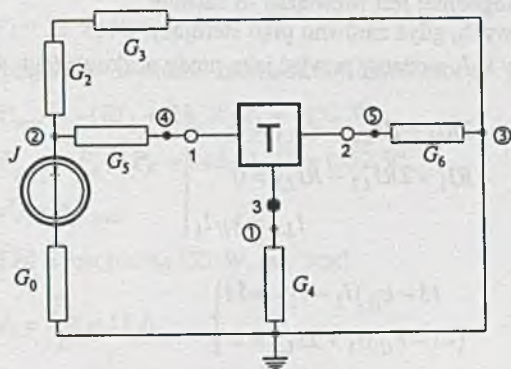
Przewodność G_5 i G_6 dołączamy do obwodu zewnętrznego, a obwód objęty linią przerywaną traktujemy jako trójkąt T opisany następującą macierzą admitancyjną nieokreśloną

$$Y = \begin{array}{c|ccc} & 1' \textcircled{4} & 2' \textcircled{5} & 3 \textcircled{1} \\ \hline 1' \textcircled{4} & -G_5 & 0 & G_5 \\ 2' \textcircled{5} & -k_{UI} G_5 G_6 & -G_6 & G_6 + k_{UI} G_5 G_6 \\ 3 \textcircled{1} & G_5 + k_{UI} G_5 G_6 & G_6 & -G_5 - G_6 - k_{UI} G_5 G_6 \end{array}$$

Analizowany obwód ma postać jak na rys. 4.32.2, a jego równania potencjałów węzłowych można przedstawić w postaci

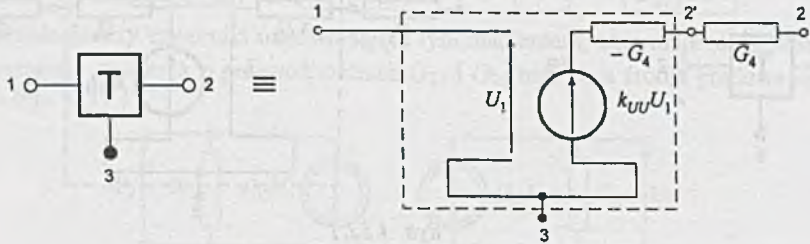
	①	②	④	⑤
①	$G_4 - G_5 - G_6 - k_{UI} G_5 G_6$	0	$G_5 + k_{UI} G_5 G_6$	G_6
②	0	$G_5 + \frac{G_2 G_3}{G_2 + G_3}$	$-G_5$	0
④	G_5	$-G_5$	0	0
⑤	$G_6 + k_{UI} G_5 G_6$	0	$-k_{UI} G_5 G_6$	0

V_1	0
V_2	J
V_3	0
V_4	0



Rys. 4.32.2

Zadanie 4.33. W celu umożliwienia analizy admitancyjnej obwodu z trójnikiem w postaci idealnego źródła napięciowego sterowanego napięciem z rys. 4.33b dokonujemy jego modyfikacji przedstawionej na rys. 4.33.1.



Rys. 4.33.1

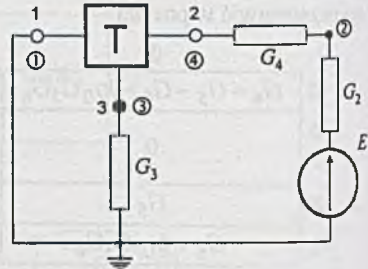
Przewodność G_4 dołączamy do obwodu zewnętrznego, a obwód objęty linią przerywaną traktujemy jako trójkąt T opisany następującą macierzą admitancyjną nieokreśloną

$$Y = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2' & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2' & k_{UU}G_4 & -G_4 & -k_{UU}G_4 + G_4 \\ 3 & -k_{UU}G_4 & G_4 & k_{UU}G_4 - G_4 \end{array}$$

Analizowany obwód po modyfikacji ma postać jak na rys. 4.33.2, a równania potencjałów węzłowych, po dodaniu elementów macierzy admitancyjnej obwodu bez trójnika i macierzy trójnika, są następujące

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline G_2 + G_4 & 0 & -G_4 \\ \hline 0 & G_3 + k_{UU}G_4 - G_4 & G_4 \\ \hline -G_4 & -k_{UU}G_4 + G_4 & -G_4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_2 \\ \hline V_3 \\ \hline V_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline EG_2 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Ze względu na dokładność analizy wartość przewodności G_4 powinna być rzędu wartości przewodności G_2 i G_3 .



Rys. 4.33.2

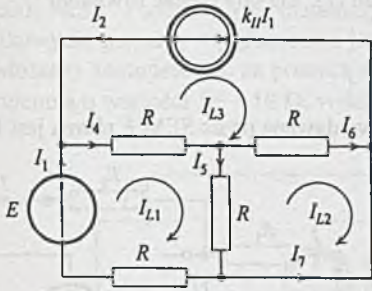
Zadanie 4.34. Najdogodniej jest rozwiązać to zadanie metodą prądów oczkowych, gdyż zarówno prąd sterujący I_1 , jak i prąd sterowany $k_{II}I_1$ możemy przyjąć jako prądy oczkowe (rys. 4.34.1).
Zatem

$$\left. \begin{array}{l} 3RI_1 - RI_{L2} - RI_{L3} = E \\ -RI_1 + 2RI_{L2} - RI_{L3} = 0 \\ I_{L3} = k_{II}I_1 \end{array} \right\} \quad (1)$$

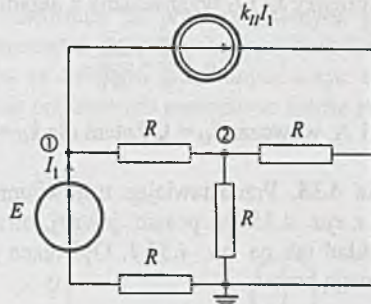
Stąd

$$\left. \begin{array}{l} (3 - k_{II})I_1 - I_{L2} = 11 \\ (-1 - k_{II})I_1 + 2I_{L2} = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Po obliczeniu: $I_1 = 22 \text{ A}$, $I_2 = 44 \text{ A}$, $I_4 = 22 \text{ A}$, $I_5 = 11 \text{ A}$, $I_6 = 11 \text{ A}$, $I_7 = 33 \text{ A}$.



Rys. 4.34.1



Rys. 4.34.2

Rozwiązując to zadanie metodą potencjałów węzłowych, przy przyjęciu numeracji węzłów danego obwodu jak na rys. 4.34.2, uzyskamy układ równań

$$V_1 \frac{2}{R} - V_2 \frac{1}{R} = \frac{E}{R} - k_{II} I_1, \quad (3)$$

$$-V_1 \frac{1}{R} + V_2 \frac{3}{R} = 0. \quad (4)$$

Dodatkowo prąd I_1 wyznaczymy z prawa Ohma

$$I_1 = \frac{E - V_1}{R}.$$

Podstawiając wyrażenie na I_1 do równania (3), otrzymujemy układ równań o postaci

$$\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & \begin{array}{c} \frac{2}{R} - \frac{k_{II}}{R} \\ -\frac{1}{R} \end{array} & \begin{array}{c} -\frac{1}{R} \\ +\frac{3}{R} \end{array} \\ \textcircled{2} & & \end{array} \cdot \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \end{array} = \begin{array}{c} \frac{E}{R}(1 - k_{II}) \\ 0 \end{array}$$

Rozwiązując ten układ równań, obliczymy wartości potencjałów V_1 i V_2

$$V_1 = 33 \text{ V}, V_2 = 11 \text{ V}.$$

Po obliczeniu rozplywu prądów w obwodzie sporządzamy bilans mocy

$$P_{\text{wyd}} = -(RI_4 + RI_6)k_{II}I_1 = 1452 \text{ W},$$

$$P_{\text{pob}} = P_E + P_R = 242 + 1210 = 1452 \text{ W},$$

$$P_{\text{wyd}} = P_{\text{pob}}.$$

Moc wydawana przez SEM E jest równa 121 W, gdy prąd

$$I_1 = \frac{P_E}{E} = 11 \text{ A}.$$

Zależność między k_{II} i I_1 wyznaczamy z układu równań (2). Ma ona postać równania

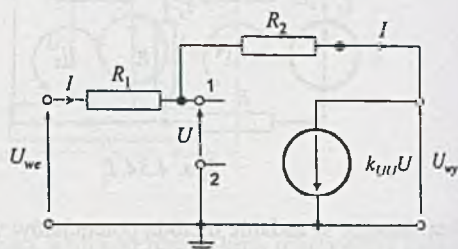
$$k_{II} = \frac{5}{3} - \frac{22}{3I_1}.$$

Gdy $I_1 = 11$ A, wówczas $k_{II} = 1$. Zatem dla $k_{II} = 1$ moc wydawana przez SEM E równa jest 121 W.

Zadanie 4.35. Przedstawiając trójbiegownik z obwodu z rys. 4.35a w postaci jawnej, otrzymujemy układ jak na rys. 4.35.1. Opisujące go równania mają postać

$$I = \frac{U_{we} - U}{R_1} = \frac{U - U_{wy}}{R_2}, \quad (1)$$

$$U = -\frac{1}{k_{UU}} U_{wy}. \quad (2)$$



Rys. 4.35.1

Podstawiając równanie (2) do równania (1), otrzymujemy równanie określające zależność napięcia wyjściowego U_{wy} od napięcia wejściowego U_{we} i parametrów układu

$$U_{wy} = -U_{we} \frac{k_{UU} R_2}{(k_{UU} + 1) R_1 + R_2}.$$

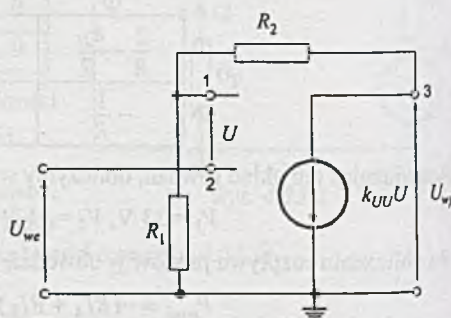
Dla $k_{UU} = \infty$

$$U_{wy} = f(U_{we}) = -\frac{R_2}{R_1} U_{we}.$$

Zadanie 4.36. Podobnie jak w zadaniu 4.35 przedstawiamy trójbiegownik w obwodzie z rys. 4.36a w postaci jawnej; otrzymamy wówczas obwód jak na rys. 4.36.1. Obwód ten możemy opisać za pomocą równań

$$U_{wy} \frac{R_1}{R_1 + R_2} - U_{we} = U, \quad (1)$$

$$U = -\frac{1}{k_{UU}} U_{wy}. \quad (2)$$



Rys. 4.36.1

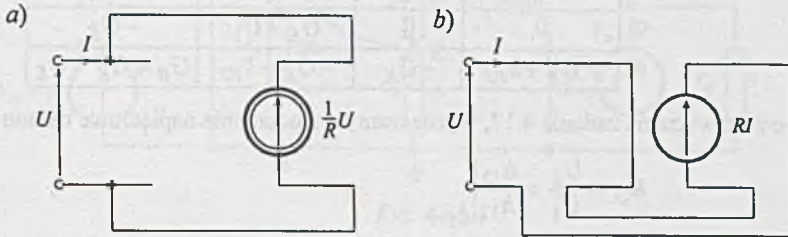
Podstawiając równanie (2) do (1), otrzymujemy równanie określające zależność napięcia wyjściowego U_{wy} od parametrów obwodu i napięcia wejściowego U_{we}

$$U_{wy} = \frac{k_{UU} (R_1 + R_2)}{k_{UU} R_1 + R_1 + R_2} U_{we}.$$

Dla $k_{UU} = \infty$

$$U_{wy} = f(U_{we}) = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_{we}.$$

Zadanie 4.37. Podając opis matematyczny czwórnika za pomocą pewnych parametrów czwórnikowych, możemy wygenerować jego równoważną postać spełniającą dodatkowe wymagania. Możemy zamodelować za pomocą obwodów ze źródłami sterowanymi z rys. 4.37.1 rezystancję ujemną o wartości $R = -10 \Omega$, wykorzystując prądowe lub napięciowe źródła sterowane.

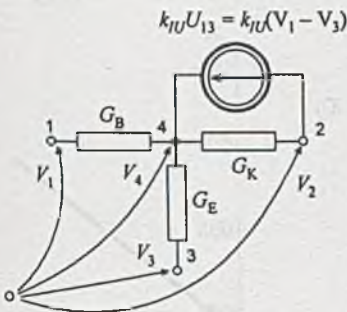


Rys. 4.37.1

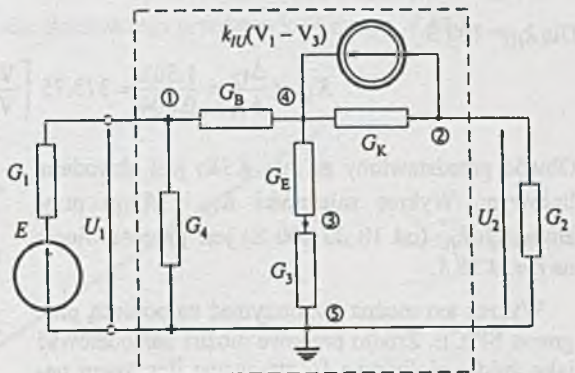
Zadanie 4.38. Przy przyjęciu numeracji węzłów jak na rys. 4.38.1 nieokreślona macierz admitancyjna opisująca dany obwód ma postać

	①	②	③	④
①	G_B	0	0	$-G_B$
②	$-k_{IU}$	G_K	k_{IU}	$-G_K$
③	0	0	G_E	$-G_E$
④	$-G_B + k_{IU}$	$-G_K$	$-G_E - k_{IU}$	$G_B + G_K + G_E$

Obwód z rys. 4.38a możemy przedstawić jak na rys. 4.38.2.



Rys. 4.38.1



Rys. 4.38.2

Przyjmując węzeł ⑤ za węzeł odniesienia obwodu, tworzymy określoną macierz admitancyjną obwodu ograniczonego linią przerywaną (rys. 4.38.2); ma ona postać

	①	②	③	④
①	$G_B + G_4$	0	0	$-G_B$
②	$-k_{IU}$	G_K	k_{IU}	$-G_K$
③	0	0	$G_E + G_3$	$-G_E$
④	$-G_B + k_{IU}$	$-G_K$	$-G_E - k_{IU}$	$G_B + G_K + G_E$

Korzystając z rozwiązania zadania 4.17, wyznaczamy wzmocnienie napięciowe układu K_U

$$K_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} \bigg|_{G_2=0}$$

gdzie

$$\Delta_{12} = (-1)^3$$

$-k_{IU}$	k_{IU}	$-G_K$
0	$G_E + G_3$	$-G_E$
$-G_B + k_{IU}$	$-G_E - k_{IU}$	$G_B + G_K + G_E$

$$\Delta_{11} = (-1)^2$$

G_K	k_{IU}	$-G_K$
0	$G_E + G_3$	$-G_E$
$-G_K$	$-G_E - k_{IU}$	$G_B + G_K + G_E$

Dla $k_{IU} = 10 \text{ S}$

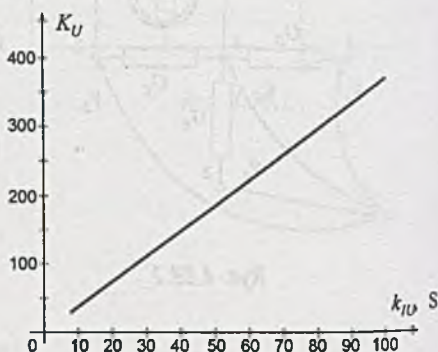
$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{0.153}{0.004} = 38.25 \left[\frac{\text{V}}{\text{V}} \right]$$

Dla $k_{IU} = 100 \text{ S}$

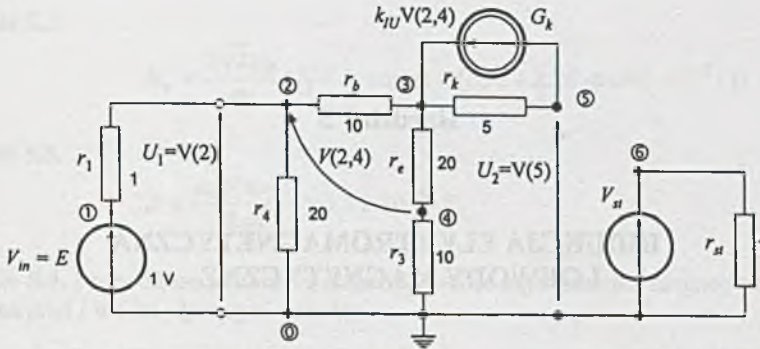
$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{1.503}{0.004} = 375.75 \left[\frac{\text{V}}{\text{V}} \right]$$

Obwód przedstawiony na rys. 4.38a jest obwodem liniowym. Wykres zależności $K_U = f(k_{IU})$ przy zmianach k_{IU} (od 10 do 100 S) jest przedstawiony na rys. 4.38.3.

Wykres ten można też otrzymać za pomocą programu SPICE. Źródło prądowe można zamodelować jako źródło nieliniowe G_k sterowane iloczynem napięcia między bazą i emiterym (napięcie między zaciskami 1 i 3 na rys. 4.38.2) oraz liniowo zmieniającego się napięcia V_{sr} . Zmodyfikowany obwód przedstawiono na rys. 4.38.4 (przyjęto $V_{in} = 1 \text{ V}$ i $r_1 = 1 \Omega$).



Rys. 4.38.3



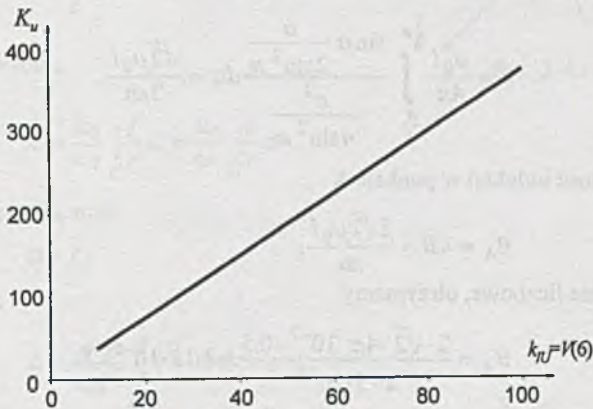
Rys. 4.38.4

Wzmocnienie $k_U = v(5)/v(2)$, a dane wejściowe dla programu mają postać:

Zadanie
nr 4.38

Vin	1	0	1														
r1	2	1	1														
r4	2	0	20														
rb	2	3	10														
rk	3	5	5														
re	3	4	20														
r3	4	0	10														
Vst	6	0	0														
rst	6	0	1														
Gk	3	5	POLY(2)		2	4	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
.DC	LIN		Vst		10	100	5										
.PROBE			v(2)		v(5)												
.END																	

Otrzymany z programu graficznego PROBE wykres zmian wzmocnienia napięciowego $K_U = \frac{V(5)}{V(2)}$ w funkcji współczynnika źródła sterowanego przedstawiono na rys. 4.38.5.



Rys. 4.38.5

Rozdział 5

INDUKCJA ELEKTROMAGNETYCZNA I OBWODY MAGNETYCZNE

Zadanie 5.1. Indukcję magnetyczną w punkcie A obliczamy ze wzoru Biota-Savarta

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \times r}{r^3}.$$

Oznaczając przez α kąt, który tworzą wektory dl i r na rys. 5.1.1, otrzymamy po scałkowaniu

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl,$$

ale

$$l = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cot \alpha,$$

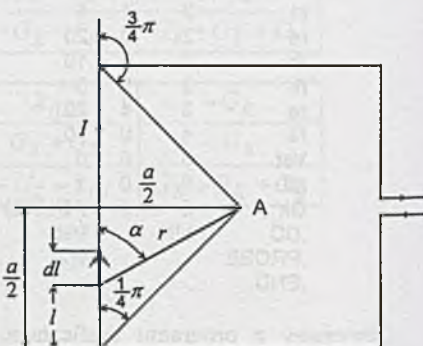
więc

$$dl = \frac{a}{2 \sin^2 \alpha} d\alpha,$$

oraz

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

zatem indukcja pochodząca od jednego boku obwodu



Rys. 5.1.1

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin \alpha \frac{a}{2 \sin^2 \alpha} d\alpha}{\frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{2\pi a},$$

a całkowita wartość indukcji w punkcie A

$$B_A = 4B = \frac{2\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi a}.$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymamy

$$B_A = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.5}{\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 1.13 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

Zadanie 5.2.

$$B_y = \frac{2\sqrt{2}\mu_0}{\pi a} (I_1 + I_2 \cos \alpha) = (1.97 + 2.26 \cdot \cos \alpha) \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

Zadanie 5.3.

$$B = \frac{\mu_0 I (\pi - 1)}{2\pi R} = 1.71 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

Zadanie 5.4. Przewód ma skończony przekrój, wobec tego strumień magnetyczny Φ wytworzony przez prąd I w nim płynący równa się

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{I} \sum \varphi dI,$$

gdzie: φ - strumień przenikający powierzchnię ograniczoną do rurki elementarnej, w której gęstość prądu jest dI , zatem

$$\varphi = \int A dl,$$

gdzie: A - potencjał wektorowy. Wobec tego

$$\Phi = \frac{1}{I} \sum \int A dl dI.$$

Wprowadzając pojęcie gęstości i prądu, otrzymamy

$$dI dl = i dS dl = i dv,$$

stąd

$$\Phi = \frac{1}{I} \int_G A i dv.$$

gdzie: G - obszar przewodu.

Ponieważ

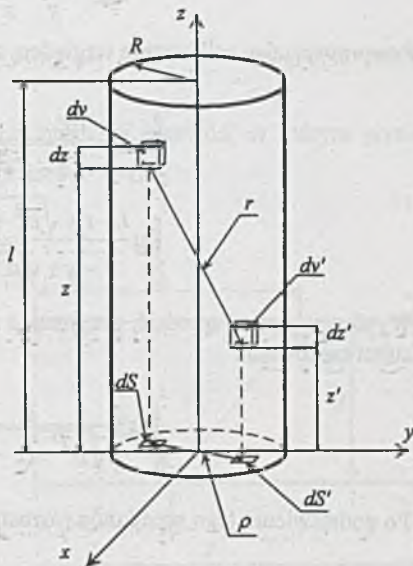
$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I}{r} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G \frac{i}{r} dv,$$

gdzie: C - kontur przewodu, oraz

$$\Phi = LI$$

otrzymamy zależność

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \int_G \int_G \frac{ii'}{r} dv dv'. \quad (1)$$



Rys. 5.4.1

Z rys. 5.4.1

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}, \\ \rho &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \\ dv &= dS dz, \quad dv' = dS' dz' \end{aligned}$$

oraz

$$i = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{I}{S'}.$$

Po podstawieniu tych zależności do równania (1) otrzymamy

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi S'^2} \int_S dS \int_{S'} dS' \int_0^l dz \int_0^l \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} dz'. \quad (2)$$

Przeprowadzając całkowanie względem zmiennych z i z', otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} &= \ln \frac{l - z + \sqrt{\rho^2 + (l - z)^2}}{-z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}, \\ \int_0^l \ln \frac{l - z + \sqrt{\rho^2 + (l - z)^2}}{-z + \sqrt{\rho^2 + z^2}} dz &= 2l \cdot \ln \frac{1 + \sqrt{\rho^2 + l^2}}{\rho} - 2\sqrt{\rho^2 + l^2} + 2\rho. \end{aligned}$$

Wynik ten można uprościć, przyjmując założenie, że $l \gg \rho$. Wtedy otrzymamy przybliżony rezultat całkowania

$$\int_0^l dz \int_0^l \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} dz' \approx 2l \left(\ln \frac{2l}{\rho} - 1 \right).$$

Po podstawieniu tego wyniku do równania (2) otrzymamy

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi S^2} \int_S dS \int_{S'} \left(\ln \frac{2l}{\rho} - 1 \right) dS' = \frac{\mu_0 l}{2\pi} (\ln 2l - 1) - \frac{\mu_0 l}{2\pi S^2} \int_S dS \int_{S'} \ln \rho dS'$$

gdzie:

$$\frac{1}{S^2} \int_S dS \int_{S'} \ln \rho dS' - \text{tzw. średnia geometryczna odległość płaszczyzn } S \text{ i } S'.$$

W tym przypadku płaszczyzny S i S' są kołami o promieniu R, więc

$$\frac{1}{S^2} \int_S dS \int_{S'} \ln \rho dS' = \ln R - \frac{3}{4}.$$

Ostatecznie zależność (2) można zapisać w postaci

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\ln \frac{l}{R} - \frac{3}{4} \right).$$

Przyjmując założenie, że $l \gg R$, otrzymamy ostateczną, przybliżoną postać wzoru na indukcyjność L

$$L \cong \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{l}{R}. \quad (3)$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.1}{2\pi} \ln \frac{0.1}{1 \cdot 10^{-3}} = 0.092 \mu\text{H}.$$

Zadanie 5.5. Indukcyjność wzajemna

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1}.$$

gdzie: Φ_{12} - strumień magnetyczny wytworzony przez pierwszy przewód, w którym płynie prąd o natężeniu I_1 i przenikający drugi przewód.

Zgodnie z twierdzeniem Stokesa

$$\Phi_{12} = \int_{C_2} A_1 dl_2.$$

lecz

$$A_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{I_1}{r} dl_1,$$

więc

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{dl_1 dl_2}{r},$$

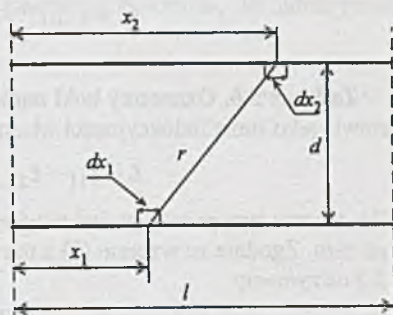
gdzie: C_1, C_2 - kontury przewodów.

W naszym przypadku (rys. 5.5.1) indukcyjność wzajemna M określona jest zależnością

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{dx_1 dx_2}{r},$$

gdzie

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + d^2},$$



Rys. 5.5.1

więc

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + d^2}}.$$

Całkując przez części, otrzymamy

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[2x_2 \ln d + (x_2 - x_1) \ln(x_2 - x_1) + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + d^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + d^2} \right]_{x_1=0}^{x_1=l} \Big|_{x_2=0}^{x_2=l},$$

a po podstawieniu wartości granicznych

$$M = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\ln \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{d} - \frac{\sqrt{l^2 + d^2}}{l} + \frac{d}{l} \right). \quad (1)$$

Jeśli słuszne jest założenie, że $l \gg d$, wówczas M określone jest prostą zależnością

$$M = \frac{\mu_0 l}{\pi} \left(\ln \frac{2l}{d} - 1 \right).$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymamy wartość indukcyjności wzajemnej M

$$M = 4 \cdot 10^{-7} \cdot 1.5 \left(\ln \frac{2 \cdot 1.5}{0.1} - 1 \right) = 0.62 \text{ } \mu\text{H}.$$

Zadanie 5.6. Oznaczmy boki ramki jak na rys. 5.6. Indukcyjność własną ramki można przedstawić jako sumę indukcyjności własnych oraz indukcyjności wzajemnych boków ramki, tzn.:

$$L = L_{11} + L_{22} + L_{33} + L_{44} - M_{13} - M_{31} - M_{24} - M_{42}.$$

We wzorze tym pominięto indukcyjności wzajemne przyległych boków ramki, gdyż są one równe zero. Zgodnie ze wzorem (3) z rozwiązania zadania 5.4 i ze wzorem (1) z rozwiązania zadania 5.5 otrzymamy

$$L_{11} = L_{33} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{a}{r},$$

$$L_{22} = L_{44} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{b}{r},$$

$$M_{13} = M_{31} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} - \sqrt{a^2 + b^2} + b \right],$$

$$M_{24} = M_{42} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[b \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} - \sqrt{a^2 + b^2} + a \right].$$

Po dodaniu i uporządkowaniu otrzymamy wzór końcowy w postaci

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left[a \ln \frac{ab}{r(a+c)} + b \ln \frac{ab}{r(b+c)} + 2c - (a+b) \right], \quad (1)$$

gdzie: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy

$$L = 31.55 \mu\text{H}.$$

Zadanie 5.7. Figurę $abcdef$ uzupełniamy dwoma gałęziami bg i gd jak na rys. 5.7.1, uzyskując prostokąt $agef$. Z zasady superpozycji pól wynika, że figura $abcdef$ jest pod względem elektromagnetycznym równoważna dwóm prostokątom $agef$ i $bcdg$, ponieważ w dołączonych gałęziach płynie ten sam prąd w przeciwnych kierunkach.

Wobec tego indukcyjność zastępcza

$$L = L_{agef} + L_{bcdg} + 2M,$$

gdzie: M - indukcyjność wzajemna prostokątów $agef$ i $bcdg$.

Z symetrii układu i przeciwnych kierunków prądów w prostokątach wynika, że indukcyjność wzajemna jest równa

$$M = \frac{1}{4} L_{agef}.$$

Wobec czego

$$L = \frac{1}{2} L_{agef} + L_{bcdg}.$$

Zgodnie ze wzorem (1) z zadania 5.6 otrzymamy

$$L_{agef} = 31.55 \mu\text{H},$$

$$L_{bcdg} = 13.42 \mu\text{H},$$

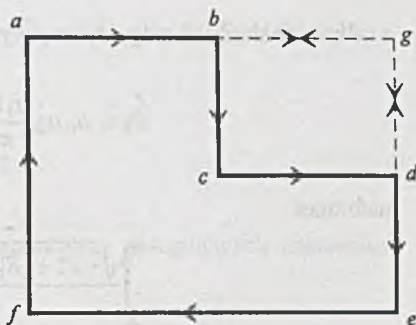
$$L = 29.19 \mu\text{H}.$$

a

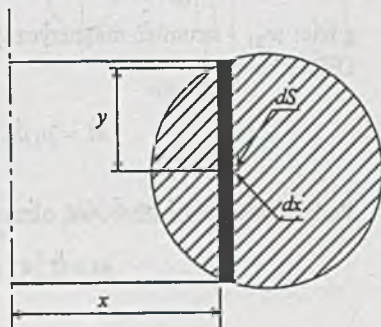
Zadanie 5.8. Natężenie pola magnetycznego H na dowolnej linii siły przebiegającej przez rdzeń będzie równe (rys. 5.8.1)

$$H = \frac{z_1 I_1}{2\pi x},$$

gdzie: I_1 - prąd płynący przez cewkę pierwszą.



Rys. 5.7.1



Rys. 5.8.1

Z rys. 5.8.1 wynika, że $dS = 2ydx$,

$$y = \sqrt{\left(\frac{R_2 - R_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{R_1 + R_2}{2} - x\right)^2} = \sqrt{-x^2 + (R_1 + R_2)x - R_1 R_2},$$

więc

$$d\Phi_1 = 2\mu_0\mu_w \frac{z_1 I_1}{2\pi} \frac{\sqrt{-x^2 + (R_1 + R_2)x - R_1 R_2}}{x} dx,$$

a całkowity strumień magnetyczny wytworzony przez cewkę pierwszą

$$\Phi_1 = \mu_0\mu_w \frac{z_1 I_1}{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sqrt{-x^2 + (R_1 + R_2)x - R_1 R_2}}{x} dx,$$

natomiast

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sqrt{-x^2 + (R_1 + R_2)x - R_1 R_2}}{x} dx &= \\ &= \sqrt{-x^2 + (R_1 + R_2)x - R_1 R_2} - \frac{1}{2}(R_1 + R_2) \arcsin \frac{-2x + R_1 + R_2}{R_2 - R_1} + \\ &\quad + \frac{R_1 R_2}{\sqrt{R_1 R_2}} \arcsin \frac{(R_1 + R_2)x - 2R_1 R_2}{x(R_2 - R_1)} \Bigg|_{x=R_1}^{x=R_2} = \\ &= \pi \left(\frac{R_1 + R_2}{2} - \sqrt{R_1 R_2} \right). \end{aligned}$$

Indukcyjność wzajemna

$$M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{z_2 \Phi_1}{I_1},$$

gdzie: ψ_{21} - strumień magnetyczny skojarzony z cewką drugą.

Ostatecznie

$$M = \mu_1 \mu_w z_1 z_2 \left(\frac{R_1 + R_2}{2} - \sqrt{R_1 R_2} \right).$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymamy

$$M = 0.241 \text{ mH}.$$

Zadanie 5.9.

$$M' = \mu_0 \mu_w z_1 z_2 \frac{1}{4} \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1 + R_2} = 0.287 \text{ mH},$$

$$\delta = \frac{|M - M'|}{M} \cdot 100\% = 19\%.$$

Zadanie 5.10.

$$I = \frac{2\pi\Phi}{\mu_0 \mu_w z h \ln \frac{d_z}{d_w}} = 0.5 \text{ A}.$$

Zadanie 5.11.

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 z^2 \pi d^2}{4l} I^2 = 0.178 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

Zadanie 5.12. To i następne zadanie zostaną rozwiązane przy następujących założeniach upraszczających:

- materiał jest magnetycznie miękki,
- nie występuje histereza,
- strumień rozproszenia można pominąć,
- pole magnetyczne jest równomierne w każdym przekroju poprzecznym,
- strumień w szczelinie powietrznej jest równy strumieniowi w przyległym rdzeniu,
- obliczenie średniej drogi strumienia w elemencie ferromagnetycznym przeprowadza się sposobem uproszczonym.

Schemat zastępczy rozpatrywanego obwodu jest pokazany na rys. 5.12.1. Natężenie pola magnetycznego H_2 otrzymamy z charakterystyki magnesowania (zamieszczonej w dodatku - rys. D1) na podstawie znajomości indukcji B_p :

$$H_2 = 0.3 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Z II prawa Kirchhoffa

$$U_{m2} = H_2 I_2 + \frac{B_p}{\mu_0} I_p = 257 \text{ A}$$

oraz

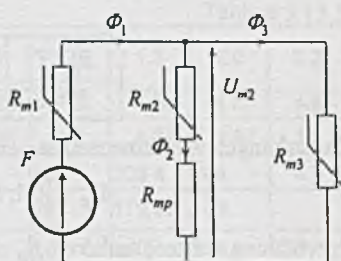
$$H_3 = \frac{U_{m2}}{I_3} 2570 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Z charakterystyki magnesowania (rys. D1 - dodatek) indukcja

$$B_3 = 1.45 \text{ T},$$

więc strumień

$$\Phi_3 = S_3 B_3 = 1.45 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$



Rys. 5.12.1

Ponieważ

$$\Phi_2 = S_2 B_b = 0.3 \cdot 10^{-4} \text{ Wb},$$

więc z I prawa Kirchhoffa dla strumienia magnetycznego

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 1.75 \cdot 10^{-4} \text{ Wb},$$

a indukcja

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = 1.75 \text{ T}$$

i z charakterystyki $B - H$ (rys. D1 - dodatek) natężenie pola

$$H_1 = 9000 \frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Przepływ F obliczymy z II prawa Kirchhoffa

$$F = U_{m2} + H_1 I_1 = 257 + 900 = 1157 \text{ A}.$$

Zadanie 5.13.

$$F'_2 = 151.5 \text{ A}, \quad F''_2 = -74.1 \text{ A}.$$

Zadanie 5.14. Obwód magnetyczny z zadania 5.12 jest obwodem prostym (rys. 5.12.1) składającym się z trzech gałęzi z jedną siłą magnetomotoryczną F . Taki obwód możemy rozwiązać metodą prób. W tym celu zakładamy szereg wartości indukcji B_p w szczelinie i metodą opisaną w zadaniu 5.12, obliczamy odpowiednie wartości przepływów F . Wyniki obliczeń zostały zamieszczone w tablicy 5.14.1

Tablica 5.14.1

$B_p, \text{ T}$	0.2	0.15	0.1
$F, \text{ A}$	561.2	357.4	201.6

Z uzyskanych wyników można wnioskować, że szukana wartość indukcji

$$B_p \in [0.1; 0.15] \text{ T}.$$

Przybliżoną wartość indukcji B_p obliczymy, stosując interpolację liniową; otrzymamy wówczas zależność

$$\frac{B_p - 0.1}{0.15 - 0.1} = \frac{258.4 - 201.6}{357.4 - 201.6},$$

stąd

$$B_p \approx 0.118 \text{ T}.$$

Dokładna wartość indukcji jest 0.125 T.

Obliczenia zostały przeprowadzone z błędem

$$\delta = \frac{0.125 - 0.118}{0.125} 100\% = 5.6\%.$$

Oczywiście, zawężając przedział, w którym dokonujemy interpolacji, zmniejszamy błąd obliczeń pod warunkiem zwiększenia dokładności odczytu B i H z charakterystyki magnesowania.

Zadanie można również rozwiązać metodą wykreślną, podaną w zadaniu 5.12.

Zadanie 5.15. Schemat zastępczy obwodu magnetycznego przedstawia rys. 5.15.1. Gdyby rozpatrywany obwód zawierał jedno źródło siły magnetomotorycznej, można by zastosować metodę prób, jak w zadaniu 5.14. W przypadku obwodu o dwóch lub większej liczbie źródeł siły magnetomotorycznej bardziej odpowiednia jest metoda graficzno-analityczna rozwiązywania obwodów.

Z II prawa Kirchhoffa

$$U_m = F_1 - (H_1 l_1 + H_{1p} l_p), \quad (1)$$

$$U_m = F_2 - (H_2 l_2 + H_{2p} l_p), \quad (2)$$

$$U_m = H_3 l_3, \quad (3)$$

gdzie: H_1, H_2, H_3 - natężenie pola w kolumnach 1, 2, 3,

H_{1p}, H_{2p} - natężenie pola w szczelinach powietrznych.

Dla rozwiązania zadania wykreślamy charakterystykę $\Phi = f(U_m)$ dla strumieni Φ_1, Φ_2, Φ_3 , w następujący sposób: strumieniowi Φ odpowiada indukcja magnetyczna $B = \frac{\Phi}{S}$ oraz natężenie pola magnetycznego H w stali z charakterystyki $B-H$ (dodatek - rys. D1), jak również natężenie H_p w powietrzu. Przy znanych długościach odcinków l i l_p obliczamy napięcia magnetyczne U_m ze wzorów (1) ÷ (3). Tak otrzymane charakterystyki są przedstawione w dodatku (rys. D2), a wyniki zostały podane w tabelicy 5.15.1.

Tabela 5.15.1

$H, \frac{kA}{m}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
B, T	0.175	0.55	0.84	1.0	1.12	1.2	1.26	1.3	1.34	1.37	1.4
Φ, mWb	0.175	0.55	0.84	1.0	1.12	1.2	1.26	1.3	1.34	1.37	1.4
U_{m1}, A	1000.5	901	801	701.5	602	502.5	403	303	203.4	104	4.5
U_{m2}, A	908.5	817	725	633.5	542	450.5	359	267	175.5	84	
U_{m3}, A	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220

Z I prawa Kirchhoffa

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2,$$

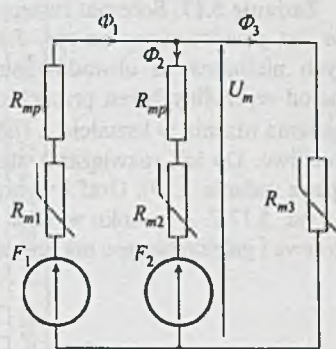
wobec tego punkt przecięcia charakterystyki wypadkowej $\Phi_1 + \Phi_2$, i charakterystyki Φ_3 spełnia bilans strumieni w węźle i stanowi rozwiązanie zadania.

Z wykresu otrzymujemy

$$\Phi_1 = 0.87 \text{ mWb},$$

$$\Phi_2 = 0.67 \text{ mWb},$$

$$\Phi_3 = 1.54 \text{ mWb}.$$



Rys. 5.15.1

Zadanie 5.16.

$$B_p \approx 0.85 \text{ T.}$$

Zadanie 5.17. Schemat zastępczy rozpatrywanego obwodu jest przedstawiony na rys. 5.17.1. W przypadku złożonych nieliniowych obwodów stosowanie do rozwiązania metod wykreślnych jest pracochłonne lub w przypadku połączenia rdzenia w kształcie Δ (jak w tym przypadku) - niemożliwe. Do ich rozwiązania stosujemy metodę iteracyjną (patrz zadanie 3.39). Graf i wybrane drzewo przedstawiono na rys. 5.17.2. Z rysunku wynika, że macierz łącząca gałęzie drzewa i gałęzie łączące ma postać

$$A' = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & +1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Celem określenia warunków początkowych do iteracji linearyzujemy obwód, zakładając np.

$$\mu_{sr} = 1.125 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{m}},$$

wówczas

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_{sr} S_1} = \frac{l_2}{\mu_{sr} S_2} = R_{m2} = 88.89 \cdot 10^4 \text{ H}^{-1}.$$

Obwód rozwiążemy np. metodą oczkową; wówczas

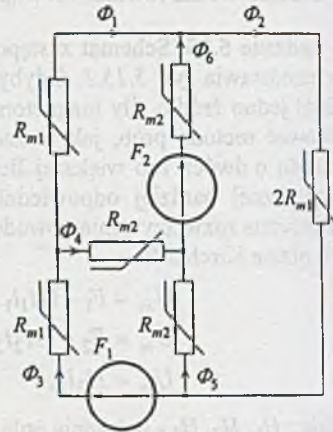
$$\begin{aligned} \Phi_1(R_{m1} + 2R_{m2}) - \Phi_2 R_{m2} - \Phi_3 R_{m2} &= -F_2, \\ -\Phi_1 R_{m2} + \Phi_2(2R_{m1} + 2R_{m2}) - \Phi_3 R_{m2} &= F_2, \\ -\Phi_1 R_{m2} - \Phi_2 R_{m2} + \Phi_3(R_{m1} + 2R_{m2}) &= F_1. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymamy

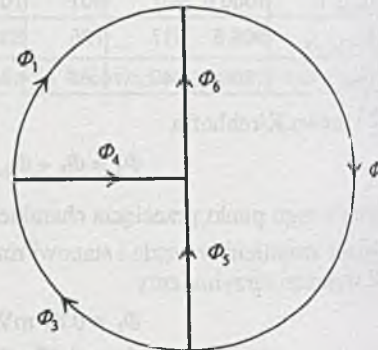
$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_1^0 = 0.28 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}, \\ \Phi_2 &= \Phi_2^0 = 1.13 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}, \\ \Phi_3 &= \Phi_3^0 = 1.97 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}. \end{aligned}$$

Następnie przeprowadzamy obliczenia iteracyjne, których kolejne etapy przedstawiono w tabelicy 5.17.1. Aby przyspieszyć obliczenia, po ostatniej iteracji zakładamy, metodą prób, że

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 0.51 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}, \\ \Phi_2 &= 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}, \\ \Phi_3 &= 1.88 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}. \end{aligned}$$



Rys. 5.17.1



Rys. 5.17.2

Tablica 5.17.1

n	α	$\times 10^{-4}$ Wb				A							$\times 10^{-4}$ Wb			
		Φ_1^{n-1}	Φ_2^{n-1}	Φ_3^{n-1}	Φ_4^n	Φ_5^n	Φ_6^n	U_4^n	U_5^n	U_6^n	U_1^n	U_2^n	U_3^n	Φ_1^n	Φ_2^n	Φ_3^n
1	0.8	0.28	1.13	1.97	1.69	-0.84	0.86	700	-60	-140	560	300	-760	2.96	1.40	2.68
2	0.8	0.12	1.18	1.04	0.22	0.14	0.36	24	18	-168	-144	150	-6	-1.88	1.00	3.84
3	0.8	0.28	1.14	1.6	1.32	-0.46	0.86	170	-37	-136	34	173	-207	0.28	1.20	2.20
4	0.9	0.28	1.15	1.72	1.44	-0.57	0.87	140	-42	-138	2	180	-182	0.01	1.28	2.24
5	0.95	0.25	1.16	1.77	1.52	-0.61	0.91	320	-42	-132	188	174	-362	2.16	1.24	0.30
6	0.95	0.35	1.16	1.7	1.35	-0.54	0.81	90	-40	-143	053	183	-130	-0.46	1.28	2.50
7	0.95	0.31	1.17	1.74	1.43	-0.57	0.86	250	-42	-138	112	180	-292	1.50	1.22	1.50
8	0.95	0.37	1.17	1.73	1.36	-0.56	0.80	93	-41	-142	-49	183	-134	-0.40	1.28	2.48
9		0.33	1.18	1.77	1.44	-0.59	0.85	230	-42	-138	92	180	-272	1.22	1.20	1.74

Po przeprowadzeniu iteracji otrzymamy

$$\Phi'_1 = 0.50 \cdot 10^{-4} \text{ Wb},$$

$$\Phi'_2 = 1.28 \cdot 10^{-4} \text{ Wb},$$

$$\Phi'_3 = 1.92 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

Określamy błędy obliczeń z zależności

$$\delta = \frac{|\Phi - \Phi'|}{\Phi} \cdot 100\%,$$

wówczas

$$\delta_1 = 2\%, \quad \delta_2 = 2\%, \quad \delta_3 = 2\%.$$

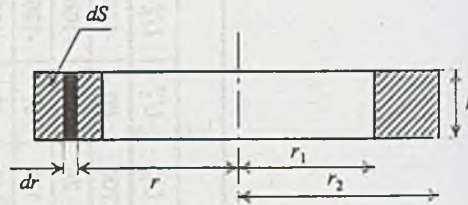
Mniejszego błędu obliczeń nie można uzyskać z uwagi na dokładność odczytu wartości B i H z charakterystyki magnesowania.

Przyjmijmy więc, że

$$\Phi_2 = 1.26 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

Zadanie 5.18. Z równania przepływu wynika, że natężenie pola magnetycznego H dla dowolnej linii siły przebiegającej przez rdzeń (rys. 5.18.1) będzie równe

$$H = \frac{zI}{2\pi r} \quad (1)$$



Rys. 5.18.1

Strumień indukcji przechodzącej przez element powierzchni przekroju rdzenia

$$dS = h dr$$

możemy uważać za jednorodny, czyli

$$d\Phi = BdS = \mu H h dr = \mu h \frac{wI}{2\pi} dr.$$

Ponieważ

$$\frac{zI}{2\pi r_1} > H_1 = 0.8 \frac{\text{kA}}{\text{m}},$$

z równania (1) i charakterystyki magnesowania wynika, że

$$B = \mu' H \quad \text{dla } r_0 < r \leq r_2,$$

gdzie

$$\mu' = \frac{1.05}{800} = 1.31 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{m}},$$

a dla $r \leq r_0$

$$B = B_1 + \mu' H = h B_1 + \mu' h \frac{wI}{2\pi} dr,$$

gdzie

$$B_1 = 0.85 \text{ T},$$

$$\mu'' = \frac{\Delta B}{\Delta H} = 0.25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{m}}.$$

r_0 obliczymy z równania (1); wówczas

$$r_0 = \frac{zI}{2\pi H_1} = 16 \text{ cm}.$$

Całkowity strumień indukcji

$$\Phi = \int_1^{r_2} \left(B_1 h + \mu'' h \frac{zI}{2\pi r} \right) dr + \int_{r_0}^{r_2} \mu' h \frac{zI}{2\pi r} dr = zI \frac{h}{2\pi} \left(\mu'' \ln \frac{r_0}{r_1} + \mu' \ln \frac{r_2}{r_0} \right) + B_1 h (r_0 - r_1). \quad (2)$$

Indukcyjność własną cewki obliczamy ze wzoru

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{z\Phi}{I}. \quad (3)$$

Po podstawieniu zależności (2) do (3) otrzymamy

$$L = \frac{z^2 h}{2\pi} \left(\mu'' \ln \frac{r_0}{r_1} + \mu' \ln \frac{r_2}{r_0} \right) + z B_1 h (r_0 - r_1).$$

Po podstawieniu danych liczbowych

$$L = 0.355 \text{ H}.$$

Zadanie 5.19.

$$L = \frac{\mu' z^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = 2.44 \text{ H}.$$

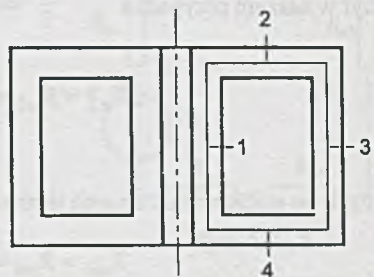
Zadanie 5.20. Drogę strumienia magnetycznego dzielimy na kilka części, ponumerowanych kolejno od 1 do 4, tak jak na rys. 5.20.1. Schemat zastępczy obwodu przy takim podziale przedstawiono na rys. 5.20.2. Obliczamy opory magnetyczne poszczególnych części. Opór magnetyczny kolumny wewnętrznej

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu S_1} = \frac{l + h}{\mu_0 \mu_w \pi (r_4^2 - r_3^2)} = 151.5 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}.$$

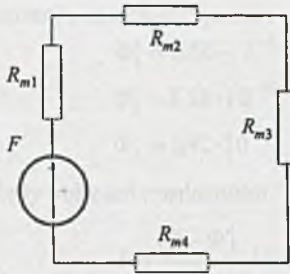
Opór magnetyczny pierścienia zewnętrznego

$$R_{m3} = \frac{l_3}{\mu S_3} = \frac{l + h}{\mu_0 \mu_w \pi (r_4^2 - r_3^2)} = 36.1 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}.$$

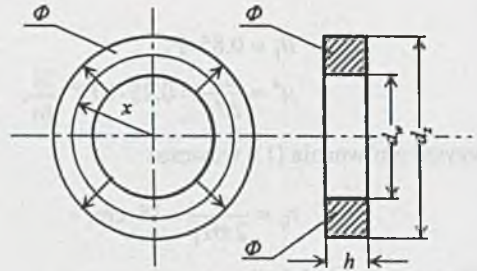
Opór magnetyczny części zamykających jest oporem pierścienia, w którym strumień przepływa promieniowo, tak jak na rys. 5.20.3. Opór magnetyczny tego pierścienia obliczymy korzystając



Rys. 5.20.1



Rys. 5.20.2



Rys. 5.20.3

z prawa Ohma dla obwodów magnetycznych. Jeśli przez pierścień przepływa strumień Φ , to natężenie pola $H(x)$ w pierścieniu w odległości x od osi równa się

$$H(x) = \frac{\Phi}{\mu S} = \frac{\Phi}{\mu 2\pi x h},$$

wobec tego napięcie magnetyczne między powierzchnią zewnętrzną i wewnętrzną pierścienia wynosi

$$U_m = \int_{\frac{d_w}{2}}^{\frac{d_z}{2}} H(x) dx = \frac{\Phi}{2\pi\mu h} \ln \frac{d_z}{d_w},$$

a opór magnetyczny

$$R_m = \frac{U_m}{\Phi} = \frac{1}{2\pi\mu h} \ln \frac{d_z}{d_w} \quad (1)$$

był w naszym przypadku

$$R_{m2} = R_{m4} = \frac{1}{2\pi\mu h} \ln \frac{\frac{2r_3 + 2r_4}{2}}{\frac{2r_1 + 2r_2}{2}} = \frac{1}{2\pi\mu h} \ln \frac{r_3 + r_4}{r_1 + r_2},$$

czyli po podstawieniu danych liczbowych otrzymamy

$$R_{m2} = R_{m4} = 34.9 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}.$$

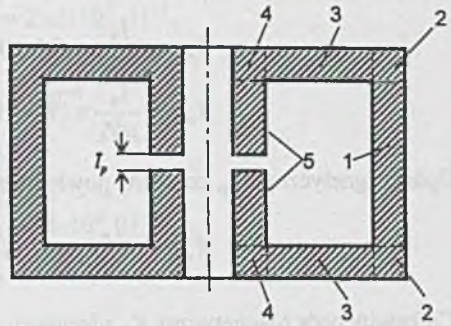
Całkowity opór magnetyczny rdzenia jest równy

$$R_m = R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4} = 257.4 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}.$$

Zadanie 5.21. Indukcyjność kubka wynosi

$$L_0 = \frac{\Psi}{I} = \frac{z\Phi}{L} = \frac{z^2}{R_m}$$

Opór magnetyczny R_m rdzenia ze szczeliną obliczymy dokładniej niż w zadaniu 5.20. W tym celu dzielimy drogę strumienia magnetycznego na kilka części, ponumerowanych kolejno od 1 do 5, tak jak to pokazano na rys. 5.21.1. Schemat zastępczy obwodu przy takim podziale przedstawiono na rys. 5.21.2. Obliczamy opory magnetyczne poszczególnych części. Opór magnetyczny pierścienia zewnętrznego



Rys. 5.21.1

$$R_{m1} = \frac{l}{\mu_0 \mu_w \pi (r_4^2 - r_3^2)} = 27.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

Opór magnetyczny kolumny wewnętrznej

$$2R_{m5} = \frac{l - l_p}{\mu_0 \mu_w \pi (r_2^2 - r_1^2)} = 114.2 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

Opór magnetyczny części zamykających obliczymy ze wzoru (1) z zadania 5.20; wówczas

$$R_{m3} = \frac{1}{2\pi\mu\pi h} \ln \frac{r_3}{r_2} = 19.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$$

Opór magnetyczny rogów wewnętrznych i zewnętrznych zostanie obliczony w sposób przybliżony; przyjmujemy, że długość drogi magnetycznej w rogu zewnętrznym jest równa jednej czwartej obwodu okręgu o promieniu równym średniej z wartości $\frac{h}{2}$ i $\frac{r_4 - r_3}{2}$; zatem

$$l_2 = \frac{\pi}{8} (r_4 - r_3 + h) = 4.51 \text{ mm}$$

Analogicznie dla rogu wewnętrznego

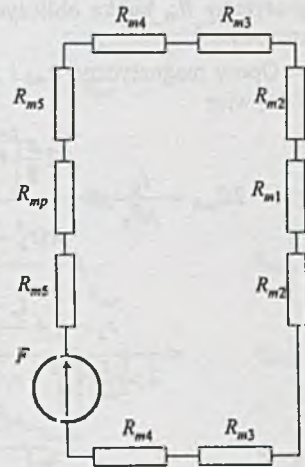
$$l_4 = \frac{\pi}{8} (r_2 - r_1 + h) = 4.28 \text{ mm}$$

Skuteczny przekrój dla rogu zewnętrznego zostanie przyjęty jako średni przekrój przylegających do niego części, tj. pierścienia zewnętrznego i części zamykającej, a więc

$$S_2 = \frac{S_1 + S_3}{2} = \frac{\pi(r_4^2 - r_3^2) + 2\pi r_3 h}{2} = 697.5 \text{ mm}^2$$

Podobnie dla rogu wewnętrznego

$$S_4 = \frac{S_5 + S_3}{2} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2) + 2\pi r_2 h}{2} = 236.1 \text{ mm}^2$$



Rys. 5.21.2

Zatem opory magnetyczne rogów zewnętrznych i wewnętrznych wynoszą odpowiednio

$$R_{m2} = \frac{l_2}{\mu S_2} = 6.4 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1},$$

$$R_{m4} = \frac{l_4}{\mu S_4} = 18.0 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}.$$

Opór magnetyczny R_{mp} szczeliny powietrznej wynosi

$$R_{mp} = \frac{l_p}{\mu_0 S_p} = 1864.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}.$$

Całkowity opór magnetyczny R_m rdzenia ze szczeliną wynosi

$$R_m = R_{m1} + R_p + 2(R_{m2} + R_{m3} + R_{m4} + R_{m5}) = 2095.5 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}.$$

Wobec tego liczba zwojów z jest równa

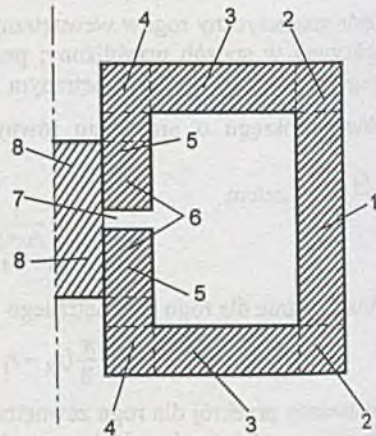
$$z = \sqrt{L_0 R_m} = 1425.$$

Zadanie 5.22. Z symetrii układu wynika, że indukcyjność kubka będzie największa, gdy rdzeń będzie położony symetrycznie względem szczeliny, tak jak pokazano na rys. 5.22.1. Opór magnetyczny R_m kubka obliczymy, przy założeniu że cały strumień Φ zamyka się przez rdzeń stojący.

Opory magnetyczne R_{m6} i R_{m8} obliczymy w taki sam sposób jak opory R_{m2} i R_{m4} w zadaniu 5.21, więc

$$\begin{aligned} 2R_{m6} = \frac{l_6}{\mu S_6} &= \frac{2\pi \left(r_2 - r_1 + \frac{l_r - l_p}{2} \right)}{\mu \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2) + 2\pi r_1 \frac{l_r - l_p}{2}}{2}} = \\ &= \frac{r_2 - r_1 + \frac{l_r - l_p}{2}}{2\mu [r_2^2 - r_1^2 + r_1(l_r - l_p)]} = 61.5 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2R_{m8} = \frac{l_8}{\mu S_8} &= \frac{2\pi \left(r_1 + \frac{l_r - l_p}{2} \right)}{\mu \frac{\pi r_1^2 + 2\pi r_1 \frac{l_r - l_p}{2}}{2}} = \\ &= \frac{r_1 + \frac{l_r - l_p}{2}}{2\mu [r_1^2 + r_1(l_r - l_p)]} = 93.6 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}, \end{aligned}$$



Rys. 5.22.1

$$2R_{m5} = \frac{l_5}{\mu S_5} = \frac{l_r - l_p}{\mu \pi (r_2^2 - r_1^2)} = 23.3 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1},$$

$$R_{m7} = \frac{l_7}{\mu S_7} = \frac{l_p}{\mu \pi r_1^2} = 13.2 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}.$$

Z zadania 5.21

$$R_{m1} = 27.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}, \quad R_{m2} = 64 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1},$$

$$R_{m3} = 10.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}, \quad R_{m4} = 18 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}.$$

Całkowity opór magnetyczny R_m kubka wynosi

$$\begin{aligned} R_m &= R_{m1} + R_{m7} + 2(R_{m2} + R_{m3} + R_{m4} + R_{m5} + R_6 + R_{m8}) \\ &= 307.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}. \end{aligned}$$

Stąd

$$L = \frac{z^2}{R_m} = 6.6 \text{ H}.$$

Zadanie 5.23. Schemat zastępczy obwodu magnetycznego przedstawiono na rys. 5.23.1. Opory

$$2R'_{m6} = \frac{l'_6}{\mu S_5} = \frac{l_r - l_p}{\mu \pi (r_2^2 - r_1^2)} = 90.9 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1},$$

$$R_{mp} = \frac{l_p}{\mu S_p} = 1864.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}.$$

Wartości pozostałych oporów zostały obliczone w zadaniu 5.22. Opór magnetyczny kubka

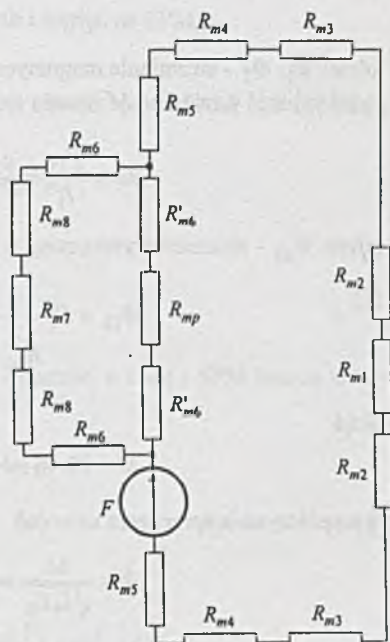
$$\begin{aligned} R'_m &= R_{m1} + 2(R_{m2} + R_{m3} + R_{m4} + R_{m5}) + \\ &+ \frac{[R_{m7} + 2(R_{m6} + R_{m8})](R_{mp} + 2R'_{m6})}{R_{mp} + R_{m7} + 2(R_{m6} + R'_{m6} + R_{m8})} = \\ &= 294.5 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}. \end{aligned}$$

Stąd

$$L' = \frac{z^2}{R'_m} = 6.9 \text{ H},$$

więc błąd

$$\delta = \frac{L' - L}{L'} \cdot 100\% = 4.3\%.$$



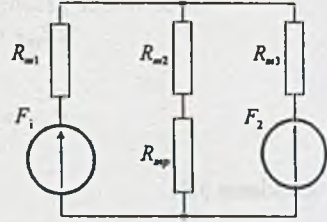
Rys. 5.23.1

Zadanie 5.24. Schemat zastępczy rozpatrywanego obwodu jest pokazany na rys. 5.24.1. Obliczamy kolejno opory magnetyczne poszczególnych części obwodu

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_w S_1} = R_{m3} = 127.4 \cdot 10^4 \text{ H},$$

$$R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_0 \mu_w S_2} = 19.9 \cdot 10^4 \text{ H},$$

$$R_{m3} = \frac{l_3}{\mu_0 \mu_w S_3} = 398.1 \cdot 10^4 \text{ H}.$$



Rys. 5.24.1

Indukcyjności własne obliczymy w następujący sposób

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{I_1} = \frac{z_1^2 \Phi_1}{F_1} = \frac{z_1^2}{R_{m1} + \frac{R_{m3}(R_{m2} + R_{mp})}{R_{m2} + R_{m3} + R_{mp}}} = 27.78 \text{ mH},$$

$$L_2 = \frac{\Psi_2}{I_2} = \frac{z_2^2 \Phi_2}{F_2} = \frac{z_2^2}{R_{m3} + \frac{R_{m1}(R_{m2} + R_{mp})}{R_1 + R_{m2} + R_{mp}}} = 39.99 \text{ mH},$$

gdzie: Φ_1, Φ_2 - strumienie magnetyczne wytworzone przez siły magnetyczne F_1 i F_2 .
Indukcyjność wzajemna M wyraża się wzorem

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{z_2 \Phi_{12}}{I_1} = \frac{z_1 z_2 \Phi_{12}}{F_1},$$

gdzie: Ψ_{12} - strumień wytworzony w kolumnie 3 przez siłę magnetyczną F_1 , a zatem

$$\Phi_{12} = F_1 \frac{1}{R_{m1} + \frac{R_{m3}(R_{m2} + R_{mp})}{R_{m2} + R_{m3} + R_{mp}}} \frac{R_{m2} + R_{mp}}{R_{m2} + R_{m3} + R_{mp}} = 0.341 \cdot 10^{-6} F_1.$$

Stąd

$$M = 20.46 \text{ mH},$$

a współczynnik sprzężenia uzwojeń

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 0.769.$$

Rozdział 6

ZADANIA RÓŻNE

Zadanie 6.1. SEM należy zwiększyć $m \cdot n$ -krotnie, SPM m -krotnie; wówczas potencjały wzrosną $n \cdot m$ -krotnie.

Zadanie 6.2. Moc wydawana przez źródła przed zmianą oporników

$$P_{\text{wyd}} = E^T I + U_J^T J, \quad (1)$$

równa jest mocy pobieranej przez oporniki przed ich zmianą

$$P_{\text{pob}} = I^T R I, \quad (2)$$

gdzie: E, J, I, U_J - wektory SEM, SPM, prądów gałęziowych i napięć na SPM,

R - macierz przekątniowa oporów obwodu.

Jeśli indeksem „prim” oznaczmy wektory i macierz oporów obwodu po zmianie, to z równania (2) otrzymamy

$$P'_{\text{pob}} = I'^T R' I' = m P_{\text{pob}} = m I^T R I = n I' R I',$$

stąd

$$I' = \sqrt{\frac{m}{n}} I, \quad (3)$$

czyli prądy gałęziowe w obwodzie muszą wzrosnąć $\sqrt{\frac{m}{n}}$ - krotnie, a więc i SPM muszą wzrosnąć $\sqrt{\frac{m}{n}}$ - krotnie, czyli

$$J' = \sqrt{\frac{m}{n}} J. \quad (4)$$

Z zależności (1), (3) i (4) otrzymamy

$$\begin{aligned} P'_{\text{wyd}} &= E'^T I' + U_J'^T J' = m P_{\text{wyd}} = n E^T I + m U_J^T J = \\ &= \sqrt{\frac{m}{n}} E'^T I + \sqrt{\frac{m}{n}} U_J'^T J. \end{aligned}$$

Stąd

$$\sqrt{\frac{m}{n}} E'^T = m E^T$$

oraz

$$\sqrt{\frac{m}{n}} U_J'^T = m U_J^T,$$

więc

$$E' = \sqrt{nm} E,$$

i

$$U_J' = \sqrt{nm} U_J.$$

Z porównania równań potencjałów węzłowych obwodu przed zmianami

$$GV = G_1 E + J_z$$

i po zmianach obwodu

$$\frac{1}{n} G V' = \frac{1}{n} \sqrt{nm} G_1 E + \sqrt{\frac{m}{n}} J_z$$

wynika, że

$$V' = \sqrt{nm} V.$$

Do tego samego wniosku można dojść, gdy zauważymy, że napięcia gałęziowe na gałęziach nie zawierających SPM

$$U = E - RI$$

oraz napięcia na SPM U_J wzrosną przy n -krotnym wzroście oporników oraz \sqrt{nm} - krotnym wzroście SEM (i napięć na SPM w obwodzie, które spowodują $\sqrt{\frac{m}{n}}$ - krotny wzrost prądów w obwodzie) \sqrt{nm} - krotnie, więc i napięcia węzłowe względem dowolnego węzła odniesienia wzrosną \sqrt{nm} - krotnie.

Odpowiedź: Wszystkie SEM należy zwiększyć \sqrt{nm} - krotnie, natomiast wszystkie SPM $\sqrt{\frac{m}{n}}$ - krotnie, wówczas prądy wzrosną $\sqrt{\frac{m}{n}}$ - krotnie, a potencjały węzłowe \sqrt{nm} - krotnie.

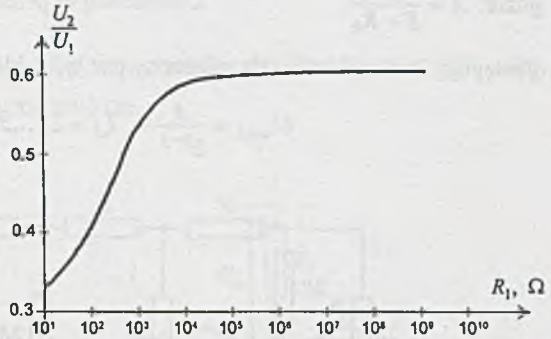
Zadanie 6.3. Dodatkowo należy n -krotnie zmniejszyć wartość elementów wszystkich macierzy admitancji oraz $\sqrt{\frac{m}{n}}$ - krotnie zwiększyć wszystkie składowe wektorów zastępczych SPM.

Zadanie 6.4. Wszystkie niesterowane SEM należy zwiększyć \sqrt{nm} - krotnie, wszystkie niesterowane SPM $\sqrt{\frac{m}{n}}$ -krotnie, współczynniki wpływu źródeł napięciowych sterowanych prądami (k_{UI}) należy zwiększyć n -krotnie oraz współczynniki wpływu źródeł prądowych sterowanych napięciami (k_{IU}) należy zwiększyć $\frac{1}{n}$ - krotnie, natomiast pozostałe współczynniki wpływu (k_{UU}, k_{II}) powinny pozostać nie zmienione.

Zadanie 6.5. Dla $R_1 \rightarrow \infty - \frac{U_2}{U_1} \rightarrow 0.6$,

natomiast przy $R_1 = 0 - \frac{U_2}{U_1} = 0.333$. Za-

leżność $\frac{U_2}{U_1} = f(R_1)$ (w skali logarytmicznej) podano na rys. 6.5.1; do jej sporządzenia można wykorzystać program ALINIES [3], ALIOS1 [1] lub SPICE [18, 19].



Rys. 6.5.1

Zadanie 6.8. Wyniki podano w tablicy 6.8.1. Opór wejściowy jest stały i wynosi

$$R_{1-2} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4.$$

Tablica 6.8.1

	$i = 0$		$i = 1$		$i = 2$		$i = 3$		$i = 4$		$\frac{R_{3-4 \max}}{R}$
	$\frac{U_{wy}}{E_0}$	$\frac{R_{3-4}}{R}$	$\frac{U_{wy}}{E_0}$	$\frac{R_{3-4}}{R}$	$\frac{U_{wy}}{E_0}$	$\frac{R_{3-4}}{R}$	$\frac{U_{wy}}{E_0}$	$\frac{R_{3-4}}{R}$	$\frac{U_{wy}}{E_0}$	$\frac{R_{3-4}}{R}$	
$a - 1^\circ$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$a - 2^\circ$	0	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{44}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{56}{15}$	$\frac{56}{15}$
$b - 1^\circ$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	0	1
$b - 2^\circ$	0	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{36}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{56}{15}$	1	0	$\frac{56}{15}$

Zadanie 6.9. Opór wyjściowy $R_{3-4} = \frac{1}{4} R$, natomiast pozostałe wyniki podano w tablicy 6.9.1.

Tablica 6.9.1

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$\frac{U_{wy}}{E_0}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$\frac{R_{a-b}}{R}$	∞	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	∞

Zadanie 6.10. Korzystając z zasady superpozycji, obliczymy wpływ załączenia klucza K_i ($i = 1, \dots, 5$) na napięcie U_{wy} . Gdy np. załączony jest tylko klucz K_1 , to tematowy obwód z rys. 6.10 można przedstawić jak na rys. 6.10.1. Obwód ten łatwo doprowadzić, przez prostą redukcję, do postaci z rys. 6.10.2, a

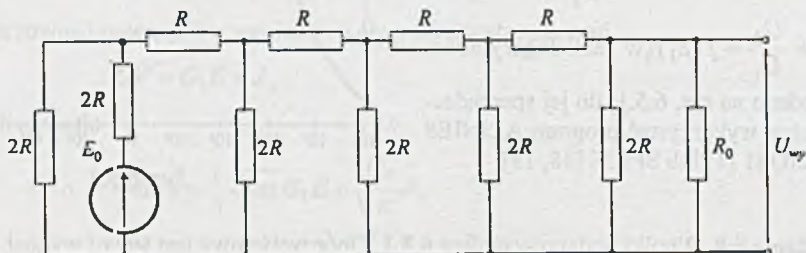
$$U_{wy,1} = \frac{E_0}{32} \frac{R_0}{R + R_0} = \frac{1}{2^5} A,$$

gdzie: $A = \frac{E_0 R_0}{R + R_0}$.

(1)

Postępując analogicznie, gdy załączony jest tylko klucz K_2, \dots, K_5 , uzyskamy

$$U_{wy,i} = \frac{A}{2^{6-j}} \quad (j = 2, \dots, 5).$$



Rys. 6.10.1

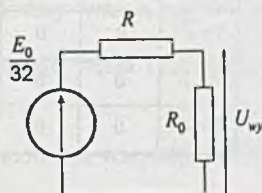
Napięcie wyjściowe jest sumą napięć $U_{wy,i}$ pochodzących od załączonych kluczy, więc

$$U_{wy} = \sum_{i=1}^5 a_i U_{wy,i} = A \sum_{i=1}^5 \frac{a_i}{2^{6-i}}, \quad (2)$$

gdzie:

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{gdy } i\text{-ty klucz wyłączony,} \\ 1, & \text{gdy } i\text{-ty klucz włączony.} \end{cases}$$

Ad a. Z zależności (1) $A = \frac{1}{2} E_0$, więc po podstawieniu do równania (2) i uwzględnieniu warunków zadania otrzymamy



Rys. 6.10.2

$$U_{wy} = \frac{5}{16} E_0 = \frac{1}{2} E_0 \left(\frac{1}{2^{6-3}} + \frac{1}{2^{6-5}} \right);$$

czyli należy załączyć klucze K_3 i K_5 .

Ad b. $A = E_0$, więc należy załączyć klucze K_2 i K_4 .

Zadanie 6.11.

$$U_{wy} = \frac{2}{3} R J_0 \left(\sum_{i=1}^5 \frac{a_i}{2^{5-i}} \right)$$

gdzie:

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{gdy klucz } K_i \text{ w po\u0142o\u017ceniu 1,} \\ 1, & \text{gdy klucz } K_i \text{ w po\u0142o\u017ceniu 2.} \end{cases}$$

Zadanie 6.12. Z rys. 6.12a $U'_n = 0.833(E_0 - U_1)$, natomiast z rys. 6.12b $U''_n = 0.476(E_0 - U_1)$, wi\u0119c w obwodzie z rys. 6.12a napi\u0119cie U_n b\u0119dzie wi\u0119ksze.

Zadanie 6.13. Znale\u017c\u0107 b\u0142\u0105d w poni\u017cszym rozwi\u0105zaniu.

Op\u00f3r mi\u0119dzy w\u0119z\u0142ami a i b r\u00f3wna si\u0119

$$R_{ab} = \frac{1 \cdot R_z}{1 + R_z}, \quad (1)$$

gdzie R_z jest oporem zast\u0119pczym sieci widzianym z zacisk\u00f3w a - b przy od\u0142\u0105czonym oporniku $R_1 = 1 \, \Omega$ (rys. 6.13.1). Aby wyznaczy\u0107 op\u00f3r R_z , do ga\u0142\u0119zi s\u0105siaduj\u0105cych z w\u0119z\u0142em a w\u0142\u0105czamy SEM $E_1 = E_2 = E_3 = E$, tak jak na rys. 6.13.1, i obliczamy pr\u0105d I p\u0142yn\u0105cy przez opornik R_1 . Z zasady superpozycji

$$I = I_{E1} + I_{E2} + I_{E3}.$$

Sie\u0107 jest symetryczna, wi\u0119c

$$I_{E1} = \frac{I}{3} = I_{E2} = I_{E3},$$

gdzie $I_{E1} = I'_1$ jest pr\u0105dem p\u0142yn\u0105cym w ga\u0142\u0119zi z SEM E_1 , a napi\u0119cie U_{ab} jest r\u00f3wne

$$U_{ab} = R_1 I = 1 \cdot I_1.$$

Z twierdzenia o ruchliw\u00f3\u015bci \u017bro\u0119de\u0105 napi\u0119ciowych (rys. 6.13.2) obliczamy napi\u0119cie

$$U_{ba} = R_z I,$$

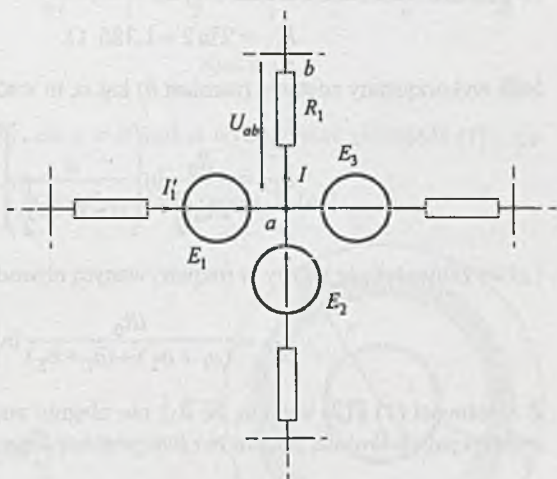
ale

$$|U_{ba}| = |U_{ab}|,$$

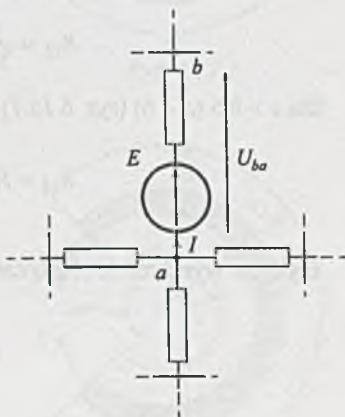
wi\u0119c

$$R_z = 1 \, \Omega.$$

Z zale\u017ano\u015bci (1) op\u00f3r zast\u0119pczy $R_{ab} = 0.5 \, \Omega$.



Rys. 6.13.1



Rys. 6.13.2

Zadanie 6.14. Opór R_{12} widziany z zacisków 1-2 jest równy nieskończonej sumie wartości oporników szeregowo połączonych warstw o elementarnej długości Δx i elementarnej powierzchni ΔS . Opór ΔR elementarnej warstwy Δx jest równy

$$\Delta R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{elementarna długość}}{\text{elementarna szerokość}} R_0 = \frac{\Delta x}{b + \frac{(a-b)(l-x)}{l}} R_0,$$

więc

$$R_{12} = R_0 \int_0^l \frac{dx}{b + \frac{(a-b)(l-x)}{l}} = \frac{lR_0}{a-b} \ln \left(\frac{al}{a-b} - x \right) \Big|_0^l = \frac{lR_0}{a-b} \ln \frac{a}{b}. \quad (1)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$R_{12} = 2 \ln 2 = 1.386 \, \Omega.$$

Jeśli wykorzystany zostanie (zamiast b) kąt α , to wzór na R_{12} można napisać w postaci

$$R_{12} = \frac{R_0}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \ln \left(\frac{a}{a - 2l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right). \quad (1')$$

Łatwo zauważyć, że gdyby w rozpatrywanym obwodzie $a_1 \neq a_2$ i $b_1 \neq b_2$, to

$$R_{12} = \frac{lR_0}{(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)} \ln \left(\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \right). \quad (2)$$

Z zależności (1) i (2) wynika, że R_{12} nie ulegnie zmianie, jeśli wszystkie wymiary, tzn. a , b i c , zwiększymy k -krotnie; *jaką to ma interpretację fizyczną?*

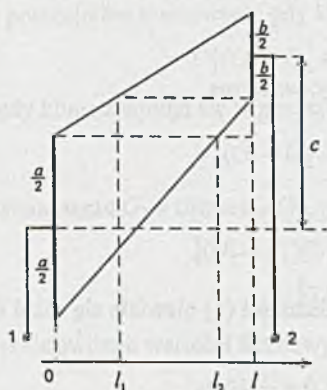
Zadanie 6.15. Dla $c = 10 \text{ cm}$

$$R_{12} = \frac{4lR_0}{3a-2b} \ln \left(\frac{3a+2b}{4b} \right) = 1.386 \, \Omega.$$

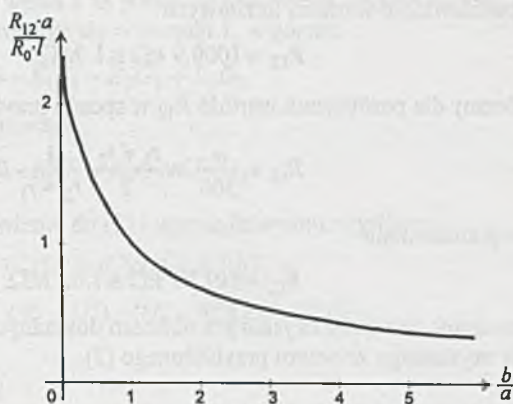
Dla $c > 0.5(a+b)$ (rys. 6.15.1)

$$R_{12} = R_0 \int_0^l \frac{dx}{a+x \frac{2c+b-a}{2l} - x \frac{2c+a-b}{2l}} = \frac{lR_0}{a-b} \ln \frac{a}{b},$$

czyli jest wyrażeniem identycznym ze wzorem (1) w zadaniu 6.14 i niezależnym od wartości c .



Rys. 6.15.1



Rys. 6.16.1

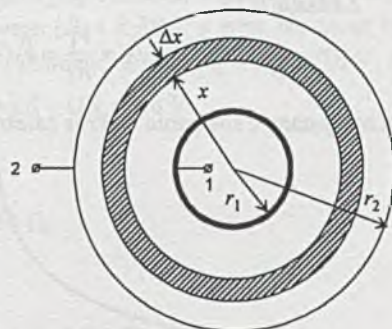
Zadanie 6.16. Dla $a = b$ $R_{12} = \frac{l}{a} R_0 = R_0$, dla $a \neq b$ można wykorzystać zależność (1) z zadania 6.14. Otrzymaną zależność $\frac{R_{12}a}{R_0l} = f\left(\frac{b}{a}\right)$ przedstawiono na rys. 6.16.1.

Zadanie 6.17. Z rys. 6.17.1

$$R_{12} = \frac{R_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

więc

$$R'_{12} = \frac{R_0}{2\pi} \ln \frac{r'_2}{r'_1} > R''_{12} = \frac{R_0}{2\pi} \ln \frac{r''_2}{r''_1}.$$



Rys. 6.17.1

Zadanie 6.18. Przewodność zastępcza G_{12} jest równa (nieskończonej) sumie wartości przewodności elementarnych (rys. 6.18.1) ΔG

$$\Delta G = \frac{\text{def elementarna długość}}{\text{elementarna szerokość}} \frac{1}{R_0} = \frac{\Delta x}{\frac{\alpha}{360} 2\pi x} \frac{1}{R_0},$$

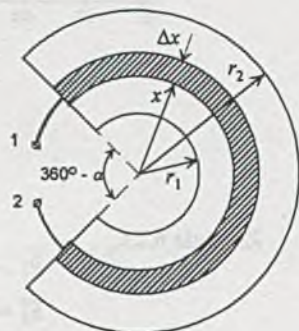
więc

$$G_{12} = \int_1^2 \frac{dx}{R_0 \frac{\alpha}{360} 2\pi x},$$

a opór zastępczy

$$R_{12} = 2\pi R_0 \frac{\alpha}{360} \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

(1)



Rys. 6.18.1

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$R_{12} = 1000.9 \text{ k}\Omega \cong 1 \text{ M}\Omega.$$

Obliczmy dla porównania wartość R_{12} w sposób przybliżony; wówczas

$$R_{12} = \frac{\alpha}{360} 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \frac{1}{r_2 - r_1} R_0, \quad (2)$$

a po podstawieniu

$$R_{12} = 1017.9 \text{ k}\Omega \cong 1.02 \text{ M}\Omega.$$

Zauważmy, że wynik uzyskany z obliczeń dokładnych z zależności (1) niewiele się różni od wyniku uzyskanego ze wzoru przybliżonego (2).

Zadanie 6.19. $R_{12} \cong 20.118 \text{ k}\Omega$.

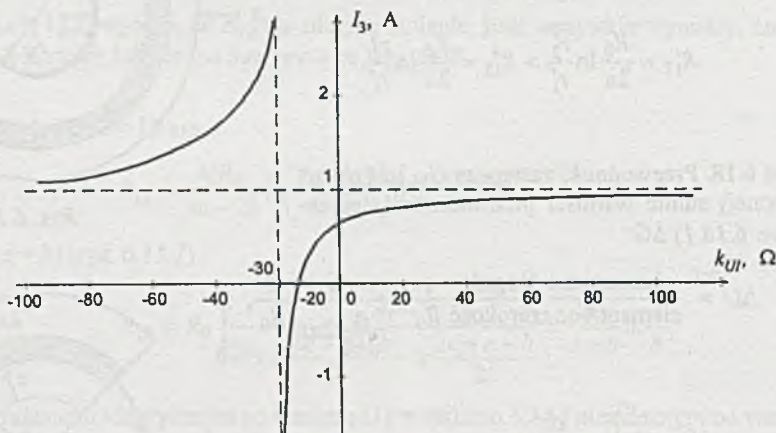
Zadanie 6.20. Ponieważ $E - RI + U_s = 0$, więc dla $U_s = RI = 10I$, czyli dla $k_{UI} = 10 \Omega$ obwód nie posiada rozwiązania.

Zadanie 6.21. Dla $k_{UI} = -30 \Omega$.

Zadanie 6.22.

$$I_3 = \frac{V_1}{R_3} = V_1 G_3 = \frac{E_1 G_1 (1 + G_2 k_{UI}) + E_2 G_2}{G_1 (1 + G_2 k_{UI}) + G_2 + G_3} G_3,$$

a otrzymany z równania wykres zależności $I_3 = I_3(k_{UI})$ przedstawiono na rys. 6.22.1.



Rys. 6.22.1

Zadanie 6.23.

$$E'_1 = -2.333 \text{ V},$$

$$E''_1 = -1.0 \text{ V}.$$

Zadanie 6.24. Przyjmując np. potencjał węzła 2 za potencjał odniesienia, można napisać równanie potencjałów węzłowych, gdy klucz znajduje się w pozycji 1, w postaci

$$U_1'(G_1 + G_2 + G_3) = -E_1'G_1 - E_2G_2 + E_3G_3 \quad (1)$$

oraz gdy klucz znajduje się w pozycji 2, w postaci

$$U_1''(G_1 + G_2 + G_3) = -E_1'G_1 - E_2G_2 + E_3G_3. \quad (2)$$

Po wyznaczeniu G_1 z równania (1), podstawieniu do (2) i uporządkowaniu uzyskamy

$$\begin{aligned} [(U_1' + E_1')(U_1'' + E_2) - (U_1'' + E_1')(U_1' + E_2)]G_2 = \\ = [(U_1' + E_1')(E_3 - U_1'') - (U_1'' + E_1')(E_3 - U_1')]G_3, \end{aligned}$$

a po podstawieniu wartości liczbowych

$$-1.44G_2 = 0.54 \cdot 10^{-3}.$$

czyli

$$G_2 < 0,$$

a więc nie można dobrać rzeczywistych (dodatnich) oporów R_1 i R_2 spełniających warunki zadania.

Uwaga:

Odpowiedź negatywną można dać bez przedstawionych powyżej obliczeń; wystarczy zauważyć, że przyrost napięcia U_1 jest zbierany z dzielnika oporowego (R_1 i $R_2 \parallel R_3$), a więc nie może być większy (co do modułu) od modułu przyrostu napięcia E_1 równego $|\Delta E_1| = |E_1' - E_1''| = 0.6 \text{ V}$, a z treści zadania wynika, że powinien on być równy $|\Delta U_1| = |U_1' - U_1''| = 0.8 \text{ V}$.

Zadanie 6.26.

$$\frac{U_i}{U_{i-1}} = \frac{1}{2}, \quad R_j = \frac{2}{3}R, \quad R = 4450 \, \Omega$$

Zadanie 6.27.

$$\begin{aligned} R_1 &= 50 \, \Omega, & R_2 &= 30 \, \Omega, & R_3 &= 20 \, \Omega, \\ P_{J1} &= 3 \text{ W}, & P_{01} &= 0.75 \text{ W}, \\ P_{J2} &= 4 \text{ W}, & P_{02} &= 0 \text{ W}, \\ P_{J3} &= 4.2 \text{ W}, & P_{03} &= -0.25 \text{ W}. \end{aligned}$$

Zadanie 6.28.

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = R_4 = R_6 = R_7 = 90 \, \Omega, \\ R_3 &= R_5 = 180 \, \Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 6.29.

$$\begin{aligned} E &= 12 \text{ V}, & R_1 &= R_9 + R, & R_2 &= R_4 = R_6 = R_8 = 4R, \\ R_3 &= R_5 = R_7 = 1.25R, & R &= 72 \, \Omega. \end{aligned}$$

Zadanie 6.30.

$$E = 15 \text{ V oraz } U_2 = 4 \text{ V}, U_3 = 1.2 \text{ V i } U_4 = 0.4 \text{ V}.$$

Ponieważ opór zastępczy (przy odłączonym R_0) jest równy odpowiednio $R_{1-5} = 40.7 \Omega$, $R_{2-5} = 49.8 \Omega$, $R_{3-5} = 48.8 \Omega$ i $R_{4-5} = 48.8 \Omega$, więc dla $R_0 = 50 \Omega$ napięcie U_{wy} (w zależności od położenia przełącznika P) równe jest odpowiednio: 6.6 V, 2.0 V, 0.61 V, 0.202 V.

Zadanie 6.31. Oznaczmy dla wygody zapisu $a = \alpha$. Z przyjętego na rys. 6.31 drzewa wynika następujący cykl obliczeniowy dla iteracji zerowej (cyklu zerowego)

$$\begin{aligned} I_l^{(0)} \rightarrow I_l^{(0)} &= I_l^{(0)} \rightarrow U_l^{(0)} = E - R_1 I_l^{(0)} \rightarrow U_l^{(0)} \rightarrow I_l^{(0)*} = \\ &= (E - R_1 I_l^{(0)}) G_2, \end{aligned}$$

wówczas dla cyklu pierwszego

$$\begin{aligned} I_l^{(1)} &= (1-a)I_l^{(0)} + aI_l^{(0)*} = (1-a)I_l^{(0)} + a(E - R_1 I_l^{(0)})G_2 = \\ &= (1-a-aR_1G_2)I_l^{(0)} + aEG_2, \end{aligned}$$

zatem dla cyklu n -tego

$$\begin{aligned} I_l^{(n)} &= (1-a-aR_1G_2)I_l^{(n-1)} + aEG_2 = \\ &= (1-a-aR_1G_2)\left[(1-a-aR_1G_2)I_l^{(n-2)} + aEG_2\right] + aEG_2 = \\ &= (1-a-aR_1G_2)^2 I_l^{(n-2)} + [(1-a-aR_1G_2) + 1] \cdot aEG_2 = \dots \\ &= (1-a-aR_1G_2)^n I_l^{(0)} + [(1-a-aR_1G_2)^{n-1} + (1-a-aR_1G_2)^{n-2} + \dots + 1]aEG_2. \end{aligned}$$

Dla prostoty zapisu oznaczmy przez $b = 1 - a - aR_1G_2$, a ponieważ skończona suma postępu geometrycznego S_{n-1} jest równa

$$S_{n-1} = 1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1} = \frac{1-b^n}{1-b},$$

więc drugi składnik w wyrażeniu na prąd drzewa w n -tym cyklu $I_l^{(n)}$ jest równy

$$\begin{aligned} S_{n-1}aEG_2 &= \frac{1-b^n}{1-1+a(1+R_1G_2)}aEG_2 = \\ &= \frac{1-b^n}{1+R_1G_2}EG_2 = \frac{E}{R_1+R_2}(1-b^n) \end{aligned}$$

i jest zbieżny do rozwiązania, gdy

$$-1 < b < 1,$$

wówczas i pierwszy składnik (z $I_l^{(0)}$) zdąży do zera, zatem

$$-1 < 1 - a(1 + R_1G_2) < 1.$$

Po przekształceniach i uwzględnieniu, że R_1 i R_2 to opory rzeczywiste, otrzymamy przedział stosunku oporów, przy którym proces iteracyjny jest zbieżny

$$\frac{2-a}{a} > \frac{R_1}{R_2} > 0,$$

więc proces iteracyjny jest zawsze rozbieżny, gdy

$$\frac{R_1}{R_2} > \frac{2-a}{a}.$$

Na rys. 6.31.1 podano wykres granicznej zależności stosunku oporów od wartości współczynnika a .

Dla $b = 0$ metoda iteracyjna daje rozwiązanie po pierwszym kroku; wówczas

$$a = \frac{1}{1 + R_1 G_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Zadanie 6.32. Wskazówka: dla $I_1 + I_4 = -(I_2 + I_3) = 0$ układ jest czwórnikami, natomiast jeśli

$$I_1 + I_4 = -(I_2 + I_3) \neq 0,$$

wówczas układ jest czterobiegunnikiem.

Zadanie 6.34. Współczynnik a można dobrać tak, by błąd średniokwadratowy napięcia (lub prądu) był najmniejszy.

Jeśli błąd średniokwadratowy napięcia w zadanych punktach ma być najmniejszy, to minimalizujemy funkcję zapisaną w postaci sumy

$$\min \sum_{k=0}^{11} (\Delta U'_k)^2 = \min \sum_{k=0}^{11} (U_k - U'_k)^2 = \min_a \sum_{k=0}^{11} (U_k - a I_k^2)^2,$$

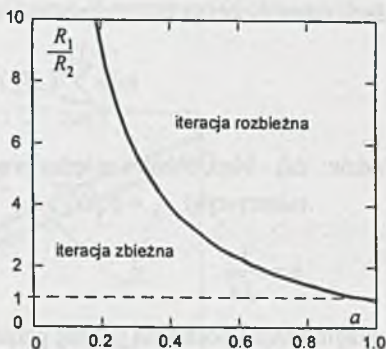
gdzie: $\Delta U'_k$ - błąd, różnica między napięciami: $U_k(I_k)$ uzyskanym z pomiarów (tablica 6.1 w rozdziale 6 w treści zadania) oraz odczytanym z charakterystyki $U'_k(I_k) = a I_k^2$.

Przyrównując pochodną podług parametru a do zera

$$\frac{d}{da} \left[\sum_{k=0}^{11} (U_k - a I_k^2)^2 \right] = 0,$$

otrzymamy wzór na optymalną wartość tego współczynnika, czyli

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{11} U_k I_k^2}{\sum_{k=0}^{11} I_k^4}, \quad (1)$$



Rys. 6.31.1

Jeśli natomiast błąd średniokwadratowy prądu ma być minimalny, to minimalizujemy sumę

$$\min \sum_{k=0}^{11} (\Delta I_k)^2 = \min \sum_{k=0}^{11} (I_k - I'_k(U_k))^2 = \min_b \sum_{k=0}^{11} (I_k - b\sqrt{U_k})^2$$

gdzie: ΔI_k - błąd, różnica między prądem I_k uzyskanym z pomiarów a prądem odczytanym z charakterystyki $I_k = b\sqrt{U_k}$,

$$b = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Przyrównując pochodną podług parametru b do zera

$$\frac{d}{db} \left[\sum_{k=0}^{11} (I_k - b\sqrt{U_k})^2 \right] = 0,$$

otrzymamy wzór na optymalną wartość tego współczynnika

$$b = \frac{\sum_{k=0}^{11} I_k \sqrt{U_k}}{\sum_{k=0}^{11} U_k}. \quad (2)$$

Podstawiając wartości liczbowe, otrzymamy ze wzoru (1) optymalną wartość liczbową współczynnika a

$$a = \frac{87 \cdot 303}{16.542 \cdot 964} = 5.277 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{(\text{mA})^2},$$

czyli

$$U = 5.277 \cdot 10^{-3} I^2, \quad (3)$$

gdzie U w V, I w mA, natomiast z zależności (2)

$$b = \frac{868 \cdot 886}{66} = 13.165 \frac{\text{mA}}{(\text{V})^{1/2}},$$

oraz

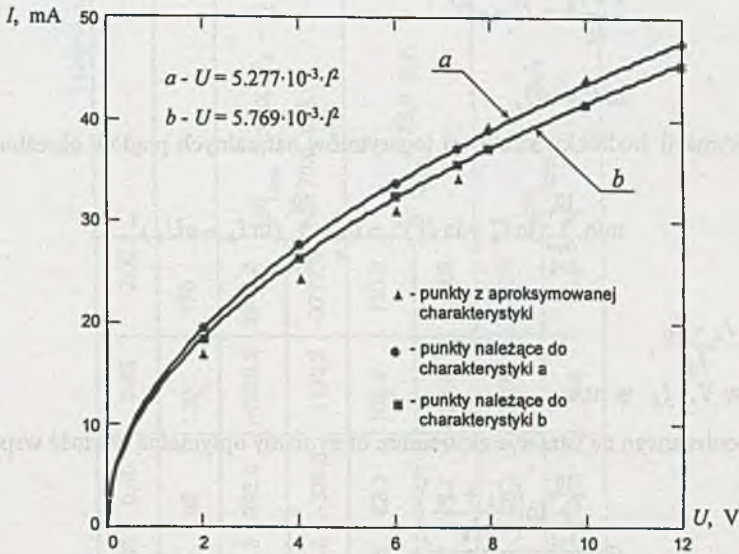
$$c = \frac{1}{b^2} = 5.769 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{(\text{mA})^2},$$

czyli

$$U = 5.769 \cdot 10^{-3} \cdot I^2, \quad (4)$$

gdzie U w V, I w mA.

Na rys. 6.34.1 naniesiono punkty z tablicy 6.1 (trójkąci) oraz charakterystyki opisane równaniami (3) - a i (4) - b.



Rys. 6.34.1

Wartość współczynnika zależy również od przedziału aproksymacji. Np. przy minimalizacji błędu średniokwadratowego przy $U = 0 \div 6$ V otrzymamy

$$a' = \frac{\sum_{k=0}^6 U_k I_k^2}{\sum_{k=0}^6 I_k^4} = \frac{10 \cdot 281}{2 \cdot 235 \cdot 185} = 4.600 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{(\text{mA})^2},$$

natomiast dla $U = 6 \div 11$ V

$$a' = \frac{\sum_{k=0}^{11} U_k I_k^2}{\sum_{k=0}^6 I_k^4} = 5.416 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{(\text{mA})^2}.$$

Zadanie 6.35.

Ad a) Oznaczmy dla uproszczenia zapisu $I_0 = 0.04$ mA, więc

$$\frac{I + I_0}{I_0} = I' = e^{aU}$$

i

$$\ln I' = aU,$$

a błąd aproksymacji średniokwadratowej logarytmów naturalnych prądów określony jest zależnością

$$\min \sum_{k=1}^{10} (\ln I_k^* - \ln I_k')^2 = \min_a \sum_{k=1}^{10} (\ln I_k - aU_k)^2,$$

gdzie:

$$I_k^* = \frac{I_k + I_0}{I_0},$$

$$U_k \text{ w V, } I_k \text{ w mA.}$$

Z warunku koniecznego na istnienie ekstremum otrzymamy optymalną wartość współczynnika a

$$a = \frac{\sum_{k=1}^{10} \ln \left(\frac{I_k + I_0}{I_k} \right)}{\sum_{k=1}^{10} U_k^2}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$a = \frac{17.416}{0.758} \cong 23,$$

więc prąd aproksymowany jest zależnością

$$I = 0.04(e^{23U} - 1) \quad (1)$$

Uwaga

Jeśli wykorzystamy tylko co drugi punkt charakterystyki z tablicy 6.2 w rozdziale 6 w treści zadania (np. 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 V), to optymalna wartość współczynnika a jest równa

$$a = \frac{10.464}{0.55} \cong 19.$$

Ad b) Z warunku koniecznego na istnienie ekstremum wyznaczmy optymalną wartość współczynnika b

$$b = \frac{\sum_{k=1}^{10} I_k U_k^2}{\sum_{k=1}^{10} U_k^4}. \quad (2)$$

Tablica 6.35.1

U_k , V	0.1	0.15	0.21	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	
I_k , mA	0	5	10	25	40	65	95	130	170	
$I'_k = 0.04(e^{23U_k} - 1)$, mA	0.41	1.21	3.9	12.5	39.7	125.3	395.8	-1250.2	3948.3	$ \delta' _{\max} = \max_k I_k - I'_k =$ = 3778.5 mA
bląd $I_k - I'_k$, mA	-0.4	-3.8	6.1	12.5	0.3	-60.3	-300.8	-1120.2	-3778.5	
$I''_k = 520.8 \cdot U_k^2$, mA	5.2	11.7	20.8	35.6	46.9	63.8	83.3	105.5	130.8	$ \delta'' _{\max} = 38.9$ mA
bląd $I_k - I''_k$, mA	-5.2	-6.7	-10.8	-10.6	-6.9	1.2	11.7	24.5	39.8	
$I'''_k = 1058(U_k - 0.1)^2$, mA	0	2.7	10.6	23.8	42.3	66.1	35.2	129.6	169.3	$ \delta''' _{\max} = 2.3$ mA
bląd $I_k - I'''_k$, mA	0	2.3	-0.6	1.2	-2.3	-1.1	-0.2	0.4	0.7	

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$b = \frac{82 \cdot 463}{0.158} = 520.8,$$

więc prąd opisany jest zależnością

$$I = 520.8 U^2. \quad (3)$$

Ad c) Z warunku koniecznego na istnienie ekstremum wyznaczmy optymalną wartość współczynnika c

$$c = \frac{\sum_{k=1}^{10} I_k (U_k - 0.1)^2}{\sum_{k=1}^{10} (U_k - 0.1)^4}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$c = \frac{58 \cdot 0.13}{0.548} \cong 1058,$$

więc prąd opisany jest zależnością

$$I = 1058(U - 0.1)^2. \quad (4)$$

Równania (1), (3) i (4) wykorzystano do sporządzenia tablicy 6.35.1.

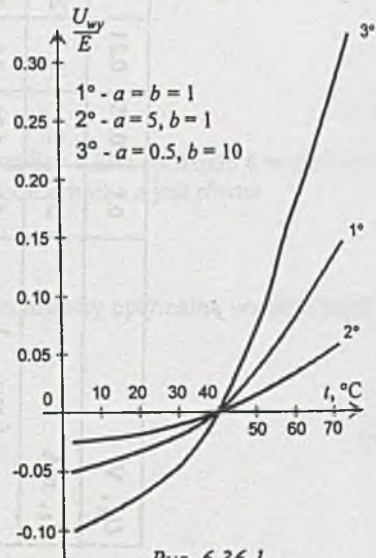
Z tablicy tej wynika, że dla $U = 0 \div 0.5$ V zależność

$$I = 1058(U - 0.1)^2$$

najlepiej aproksymuje element nieliniowy o charakterystyce przedstawionej w tablicy 6.2.

Zadanie 6.36. Do wykreślenia charakterystyk można wykorzystać program ALINIES [3], program ALIOS1 [1] lub program SPICE [18, 19]. Uzyskane, z wielokrotnej analizy obwodu programem ALINIES, wyniki posłużyły do sporządzenia rodziny charakterystyk przedstawionych na rys. 6.36.1.

Najmniejszym nakładem pracy można uzyskać charakterystyki $U_{wy} = f(t)$ wykorzystując program SPICE. Należy zamodelować, wykorzystując możliwości programu SPICE, termistor - element, którego opór jest (w pierwszym przybliżeniu) liniowo zależny od temperatury otoczenia.



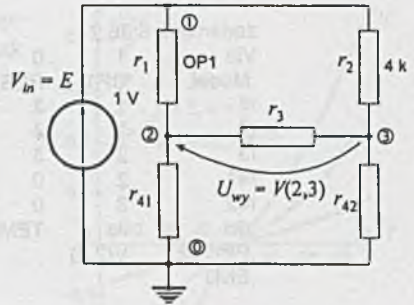
Rys. 6.36.1

Element, którego oporność zmienia się z temperaturą (charakterystyka na rys. 6.36b) $R_1(t)$, można opisać zależnością

$$R_1(t) = R(t \text{ } ^\circ\text{C}) = R(T \text{ } ^\circ\text{K}) = \\ = R(T_0)[1 + TC1(T - T_0)].$$

gdzie:

t - temperatura otoczenia w stopniach Celsjusza,
 $T_0 = 300 \text{ } ^\circ\text{K}$,
 T - temperatura otoczenia w Kelwinach,
 $R(T)$ - rezystancja w temperaturze T ,
 $TC1$ - współczynnik temperaturowy,
 $T = t + 273$.



Rys. 6.36.2

Dla tematowych danych (rys. 6.36b)

$$7 \cdot 10^3 = R(10 + 273) = R(300)[1 + TC1(283 - 300)]$$

oraz

$$1 \cdot 10^3 = R(70 + 273) = R(300)[1 + TC1(343 - 300)],$$

a stąd

$$R = R(T_0) = R(300) = 5.3 \text{ k}\Omega,$$

$$TC1 = -18.868 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{K}}.$$

więc model OP1 termistora uwzględniający wpływ temperatury otoczenia można przedstawić w postaci

MODEL OP1 RES R = 5.3k TC1 = - 18.868E - 03

Z charakterystyki (rys. 6.36b) otrzymamy, że $R_2(t_1) = 4 \text{ k}\Omega$, więc dla oznaczeń z rys. 6.36.2

$$1^\circ R_3 = r_3 = 4 \text{ k}\Omega, \quad R_4 = r_{41} = r_{42} = 4 \text{ k}\Omega,$$

$$2^\circ R_3 = r_3 = 4 \text{ k}\Omega, \quad R_4 = r_{41} = r_{42} = 20 \text{ k}\Omega,$$

$$3^\circ R_3 = r_3 = 40 \text{ k}\Omega, \quad R_4 = r_{41} = r_{42} = 2 \text{ k}\Omega.$$

Dane liczbowe umożliwiające uzyskanie wykresów za pomocą programu SPICE mogą być zapisane (zgodnie z rys. 6.36.2) w postaci:

zadanie nr 6.36.1

```
Vin      1      0      1
.Model    OP1    RES    R=5.3 k    TC1=-18.868E-03
r1        1      2      OP1      1
r2        1      3      4k
r3        2      3      4k
r41       2      0      4k
r42       3      0      4k
.dc       lin    TEMP    10      70      5
.PROBE    V(2,3)
.END
```

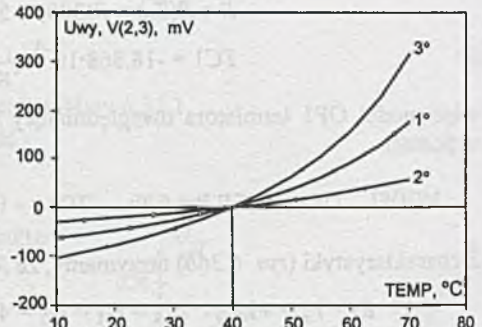

zadanie nr 6.36.2

```
Vin      1      0      1
.Model   OP1    RES    R=5.3 k  TC1=-18.868E-03
r1       1      2      OP1      1
r2       1      3      4k
r3       2      3      4k
r41      2      0      20k
r42      3      0      20k
.dc       lin    TEMP  10      70    5
.PROBE    V(2,3)
.END
```

Zadanie nr 6.36.3

```
Vin      1      0      1
.Model   OP1    RES    R=5.3 k  TC1=-18.868E-03
r1       1      2      OP1      1
r2       1      3      4k
r3       2      3      40k
r41      2      0      2k
r42      3      0      2k
.dc       lin    TEMP  10      70    5
.PROBE    V(2,3)
.END
```

Za pomocą programu graficznego PROBE otrzymamy wykresy zmian napięcia wyjściowego V(2,3)(rodzinę charakterystyk) przy zmianach temperatury od 10 do 70°C przedstawione na rys 6.36.3.



Rys. 6.36.3

Zadanie 6.37. Otrzymane z programu ALINIES [3] lub ALIOS1 [1] wyniki wielokrotnej analizy obwodu naniesiono na wykresie (rys. 6.37.1). Charakterystyki są w tym przypadku bardziej liniowe.

Łatwiej otrzymamy rozwiązania wykorzystując program SPICE. W tym celu należy zamodelować dodatkowo w postaci akceptowanej przez program SPICE termistor R_2 o dodatnim współczynniku temperaturowym o charakterystyce przedstawionej na rys. 6.37.

Parametry modelu temperaturowego rezystora R_2 akceptowanego przez program SPICE obliczymy podobnie jak w zadaniu poprzednim.

Z układu równań

$$\begin{aligned} 1 \cdot 10^3 &= R(20 + 273) = \\ &= R(300) \cdot [1 + TC1(293 - 300)] \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} 7 \cdot 10^3 &= R(70 + 273) = \\ &= R(300) \cdot [1 + TC1(343 - 300)] \end{aligned}$$

wyznamy

$$R = R(300) = R(T_0) = 2.7 \text{ k}\Omega$$

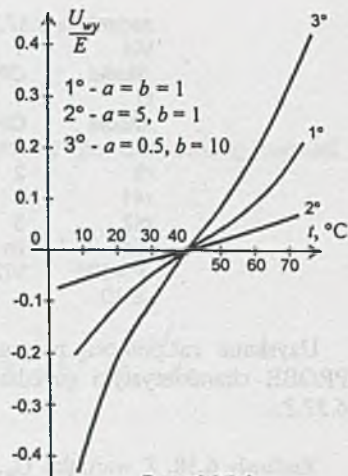
oraz

$$TC1 = 37.037 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{K}},$$

zatem model OP2 tego elementu uwzględniający wpływ temperatury otoczenia ma postać

.MODEL OP2 RES R = 2.7 k TC1 = + 37.037 E-03.

Dla numeracji węzłów jak na rys. 6.36.2 dane mogą być zapisane w postaci:



Rys. 6.37.1

zadanie nr 6.37.1

```
Vin      1      0      1
.Model    OP1    RES    R=5.3 k TC1=-18.868E-03
r1         1      2      OP1      1
.Model    OP2    RES    R=2.7k TC1=37.037E-03
r2         1      3      OP2      1
r3         2      3      4k
r41        2      0      4k
r42        3      0      4k
.dc        lin    TEMP    10      70      5
.PROBE     V(2,3)
.END
```

zadanie nr 6.37.2

```
Vin      1      0      1
.Model    OP1    RES    R=5.3 k TC1=-18.868E-03
r1         1      2      OP1      1
.Model    OP2    RES    R=2.7k TC1=37.037E-03
r2         1      3      OP2      1
r3         2      3      4k
r41        2      0      20k
r42        3      0      20k
.dc        lin    TEMP    10      70      5
.PROBE     V(2,3)
.END
```

zadanie nr 6.37.3

Vin	1	0	1		
.Model	OP1	RES	R=5.3 k	TC1=-18.868E-03	
r1	1	2	OP1	1	
.Model	OP2	RES	R=2.7k	TC1=37.037E-03	
r2	1	3	OP2		
r3	2	3	40k		
r41	2	0	2k		
r42	3	0	2k		
.dc	lin	TEMP	10	70	5
.PROBE	V(2,3)				
.END					

Uzyskane za pomocą programu graficznego PROBE charakterystyki przedstawiono na rys. 6.37.2.

Zadanie 6.38. Z warunku $U_{wy} = 4 \text{ V}$ wynika, że $I_2 = 4 \text{ mA}$ (rys. 6.38.1), a z równań pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzła ② $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ oraz drugiego prawa Kirchhoffa dla oczka III $R_3 I_3 - (R_2 + R_4) I_2 + k_{UI} I_1 + E = 0$ wyznaczmy wartość prądów

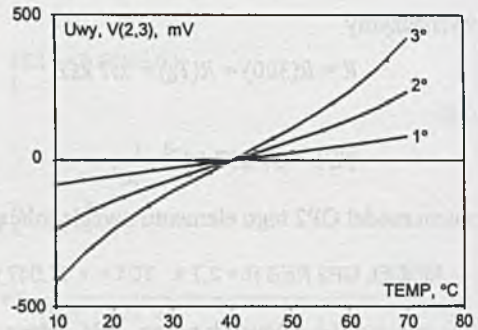
$$I_1 = -1.45 \text{ mA}, \quad I_3 = -5.45 \text{ mA}.$$

Potencjał węzła drugiego jest równy

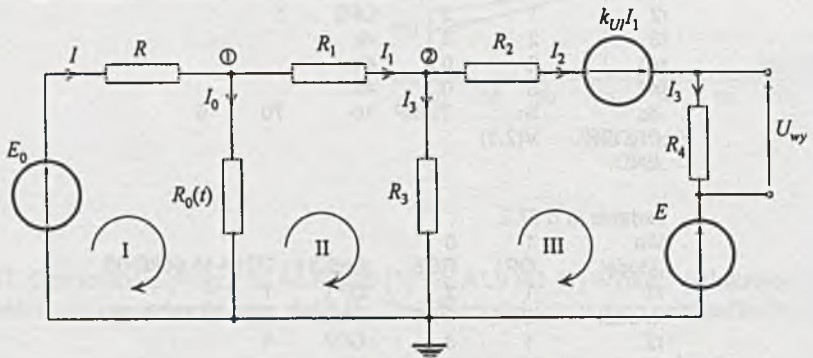
$$V_2 = R I_3 = -0.545 \text{ V},$$

natomiast potencjał węzła pierwszego

$$V_1 = V_2 + R_1 I_1 = -0.545 - 0.145 = -0.650 \text{ V}.$$



Rys. 6.37.2



Rys. 6.38.1

Ponieważ $R_0(t) = R_0(100^\circ) = 500 \, \Omega$, więc prąd $I_0 = \frac{V_1}{R_0} = -1.38 \text{ mA}$, natomiast prąd I (z pierwszego prawa Kirchhoffa) jest równy

$$I = I_0 + I_1 = -2.83 \text{ mA}.$$

Poszukiwaną wartość opornika R wyznaczymy z prawa Ohma

$$R = \frac{E_1 - V_1}{I} = \frac{-2 + 0.69}{-2.83 \cdot 10^{-3}} = 462.9 \, \Omega$$

W celu sporządzenia charakterystyki określającej wpływ temperatury (poprzez zmianę wartości R_0) na napięcie wyjściowe skorzystamy z równań ogólnych.

Z równań potencjałów węzłowych

$$\begin{aligned} V_1 \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0(t)} + \frac{1}{R_1} \right] + V_2 \left[-\frac{1}{R_1} \right] &= \frac{E_1}{R} \\ V_1 \left[-\frac{1}{R_1} \right] + V_2 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_4} + \frac{1}{R_3} \right] &= -\frac{E}{R_2 + R_4} - \frac{k_{UI} I_1}{R_2 + R_4} \end{aligned}$$

oraz z równania

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1}$$

otrzymamy układ równań

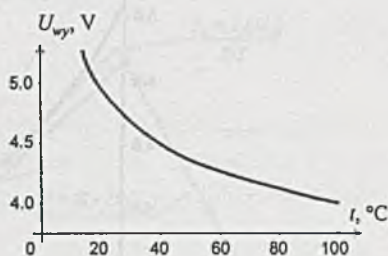
$$\begin{aligned} V_1 \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0(t)} + \frac{1}{R_1} \right] + V_2 \left[-\frac{1}{R_1} \right] &= \frac{E_1}{R}, \\ V_1 \left[\frac{k_{UI}}{R_1(R_2 + R_4)} - \frac{1}{R_1} \right] + V_2 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_4} + \frac{1}{R_3} - \frac{k_{UI}}{R_1(R_2 + R_4)} \right] &= -\frac{E}{R_2 + R_4}, \end{aligned}$$

a napięcie wyjściowe

$$U_{wy} = \frac{E + V_2 + k_{UI} I_1}{R_2 + R_4} R_4 = \frac{E + \frac{1 - k_{UI}}{R_1} V_2 + \frac{k_{UI}}{R_1}}{R_2 + R_4} R_4.$$

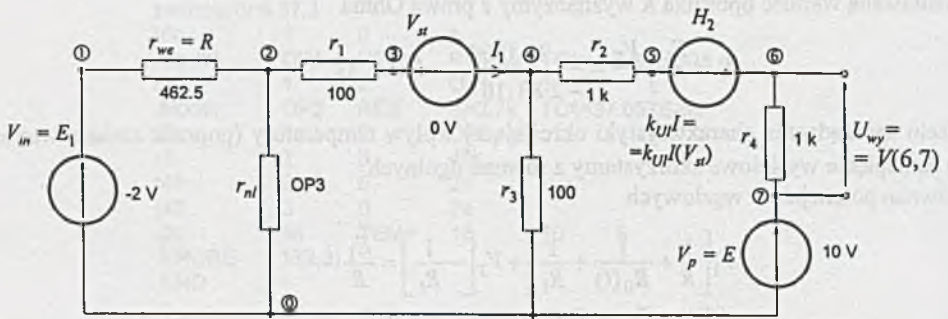
Podstawiając wartości $R_0(t)$ odpowiadające temperaturze $t = 20^\circ \div 100^\circ\text{C}$, otrzymamy zależność $U_{wy} = U_{wy}(t)$, której wykres przedstawiono na rys. 6.38.2.

Dla potrzeb programu SPICE tematowy obwód można przedstawić jak na rys. 6.38.3. Wprowadzono napięciowe źródło sterujące $V_{st} = 0$. Prąd płynący przez to źródło steruje SEM H_2 . Parametry modelu OP3 elementu $R_0(t) = rnl$ wyznaczono, jak w poprzednich przykładach, z rozwiązania układów równań. Model OP3 ma postać



Rys. 6.38.2

.MODEL OP3 RES R=135 TC1=37.037E-3.



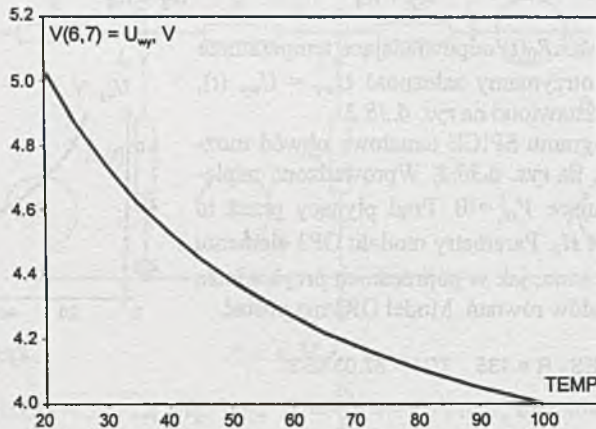
Rys. 6.38.3

Dane wejściowe mają wówczas postać:

zadanie nr 6.38

Vin	1	0	-2	
Vp	0	7	10	
Vst	3	4	0	
rwe	1	2	462.5	
r1	2	3	100	
r2	4	5	1k	
r3	4	0	100	
H2	6	5	Vst	1k
r4	6	7	1k	
.MODEL	OP3	RES	R=135	TC1=37.037E-03
ml	2	0	OP3	1
.DC	LIN	TEMP	20	100 5
.PROBE	V(6,7)			
.END				

Wykres otrzymany z programu PROBE przedstawiono na rys. 6.38.4.



Rys. 6.38.4

Zadanie 6.39. Klucz K_i jest w stanie

$$\begin{cases} 1, & \text{gdy } E_p \leq 0, \\ 2, & \text{gdy } E_p \geq \frac{2}{3} R J_0. \end{cases}$$

Zadanie 6.40. Klucz K_i załączony, gdy $U_1 > E_0$, a wyłączony, gdy $U_1 = 0$.

Zadanie 6.41. Dla $U_s > U_{we}$, $U_{wy} = U_{we}$, natomiast dla $-U_s > U_{we}$ $U_{wy} = 0$.

Zadanie 6.42.

$$U_z = E_0 - \frac{E - E_0}{R + R_0} R_0 = \frac{E + E_0}{2} = 600 \text{ mV},$$

$$R_z = \frac{R R_0}{R + R_0} = 240 \Omega,$$

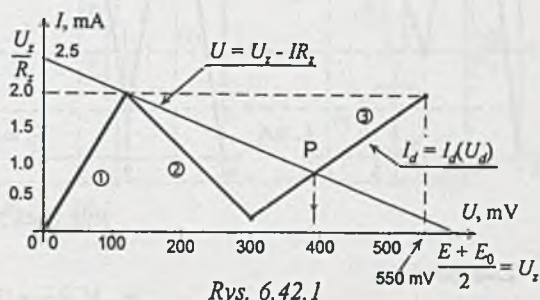
a z wykresu (rys. 6.42.1)

$$U_{wy} = 388 \text{ mV}.$$

Dodatkowo proszę sporządzić wykres zależności

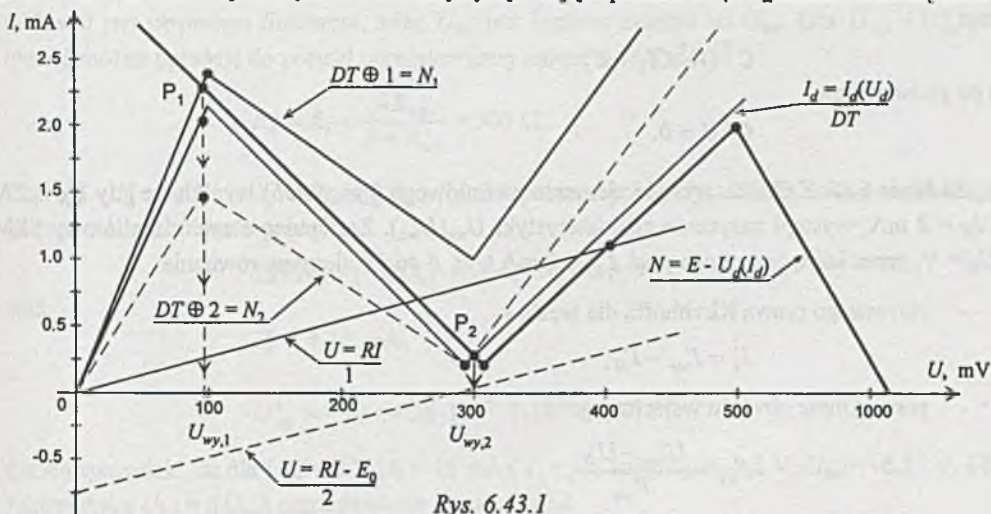
$$U_{wy} = U_{wy}(E_0)$$

dla $E_0 = -4.5 \div -2$, uwzględniając tylko odcinek 1 i 3 charakterystyki diody.



Rys. 6.42.1

Zadanie 6.43. Dodając (równolegle) charakterystyki diody tunelowej (dołączonej do potencjału zerowego) oraz gałęzi z R_0 oraz SEM E_0 dla $E_0 = 0$ i $E_0 = -0.3 \text{ V}$ otrzymujemy (rys. 6.43.1) charakterystyki N_1 i N_2 , które w przecięciu z charakterystyką N dają w punktach P_1 i P_2 szukane rozwiązania.



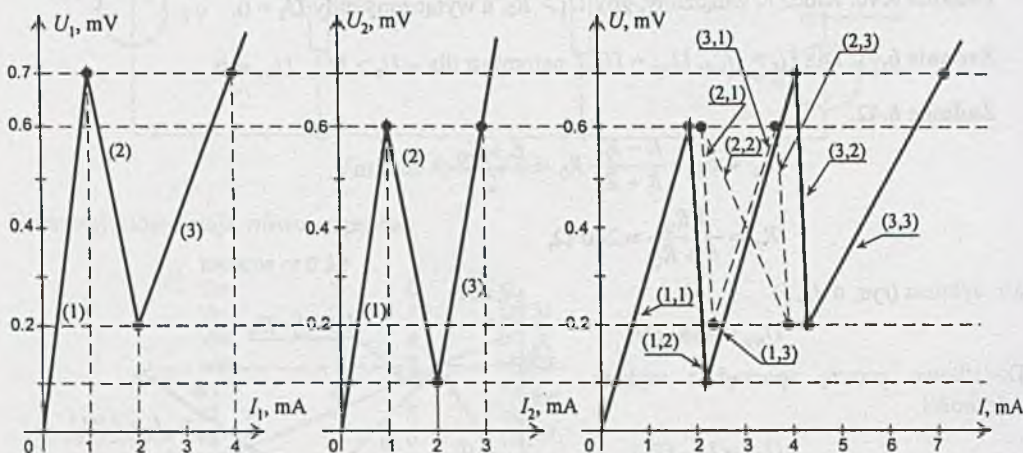
Rys. 6.43.1

Z wykresu:

$$\text{dla } E_0 = 0 \text{ V, } U_{wy} = U_{wy,1} = 97.5,$$

$$\text{dla } E_0 = -0.3 \text{ V, } U_{wy} = U_{wy,2} = 310 \text{ mV.}$$

Zadanie 6.44. Charakterystykę U - I podano na rys. 6.44.1. Zauważmy, że otrzymaliśmy bardzo wiele rozwiązań.



Rys. 6.44.1

Zadanie 6.45.

$$\min_{AI=0} \Psi = \min_{AI=0} (I^T R I - 2E^T I) = \min_{AI=0} (I_1^T C^T R C I_1 - 2E^T C I_1),$$

a

$$\nabla \Psi(I_1) = 2I_1^T C^T R C - 2E^T C = 0,$$

stąd

$$C^T (R^T C I_1 - E) = 0,$$

a po podstawieniu

$$C^T U = 0.$$

Zadanie 6.46. Z charakterystyki elementu nieliniowego (rys. 6.46b) wynika, że gdy $U_N = 2 \text{ V}$ i $I_N = 2 \text{ mA}$, wystąpi nasycenie charakterystyki $U_{wy}(U_{we})$. Zastępując element nieliniowy SEM $U_N = V$, przez którą przepływa prąd $I'_N = 2 \text{ mA}$ (rys. 6.46.1), ułożymy równania:

- pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzła 1

$$I'_1 = I'_{we} - I'_N,$$

- prawa Ohma obwodu wejściowego

$$I'_{we} = \frac{U'_{we} - U'_N}{R_{we}},$$

- pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzła 2

$$I'_1 - I'_2 - I'_3 = 0,$$

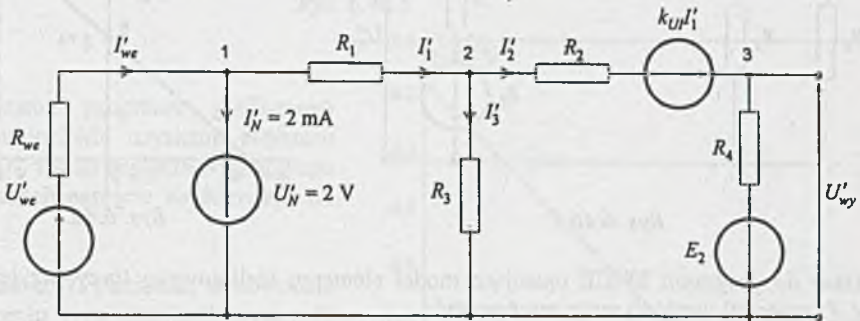
- drugiego prawa Kirchhoffa dla prawego oczka

$$R_3 I'_3 = (R_2 + R_4) I'_2 - E_2 - k_{UI} I'_1,$$

- oraz prawa Ohma dla obwodu wyjściowego

$$U'_{wy} = R_4 I'_2 - E_2,$$

z których wyznaczymy wartości U'_{we} i U'_{wy} .



Rys. 6.46.1

Po obliczeniach

$$U'_{wy} = -10 \text{ V} \text{ a } U'_{we} = 5 \text{ V}.$$

Dla $U_{we} \geq U'_{we}$ napięcie na elemencie nieliniowym $U_N = 2 \text{ V}$, a prąd $I_1 = I_3 = 10 \text{ mA}$ ($I_2 = 0$), więc $U_{wy} = -E_2 = -10 \text{ V}$. Dla $U_{we} < U'_{we}$ modelem elementu nieliniowego jest opornik $R = R_N = 1 \text{ k}\Omega$, a obwód jest obwodem liniowym, więc U_{wy} jest liniowo zależne od U_{we} . Dla $U_{we} = U''_{we} = 0$ obwód można uprościć do postaci przedstawionej na rys. 6.46.2, gdzie

$$R_z = R_1 + \frac{R R_{we}}{R + R_{we}} = 300 \Omega$$

Prąd $I_2'' = I_4'' = 4I_1''$ i jeśli zastąpimy $R_z \parallel R_3$ zastępczym oporem $R_{z1} = 75 \Omega$, to równanie drugiego prawa Kirchhoffa ma postać

$$2075 I_4'' - (-1100) \cdot 0.25 \cdot I_4'' - 10 = 0,$$

stąd

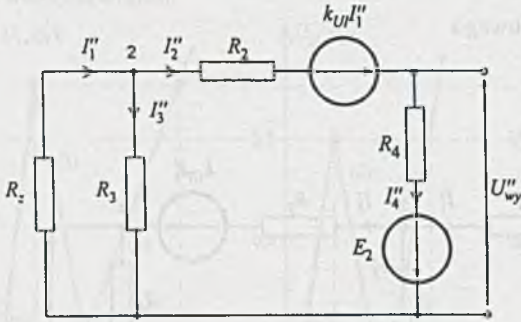
$$I_4'' \cong 4.26 \text{ mA},$$

a

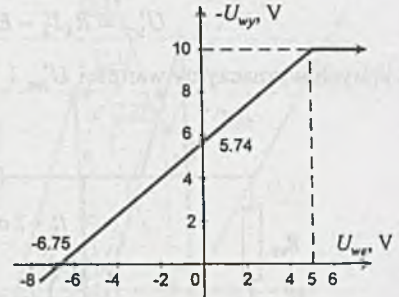
$$U''_{wy} = -10 + 4.26 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^3 = -5.74 \text{ V}.$$

Łatwo sprawdzić, że dla $U_{wy} = 0 \text{ V}$ ($I_2 = 10 \text{ mA}$), $I_1 = -11 \text{ mA}$, $U_N = -3.2 \text{ V}$, $U_{we} = -6.75 \text{ V}$. Charakterystykę $U_{wy} = f(U_{we})$ przedstawiono na rys. 6.46.3.

Do wyznaczenia charakterystyki $U_{wy} = f(U_{we})$ można też wykorzystać program SPICE. Element nieliniowy (włączony między węzły 2 i 0) określony charakterystyką z rys. 6.46b można zamodelować za pomocą liniowego rezystora $rnl = 1 \text{ k}\Omega$ połączonego równolegle z idealizowaną diodą D_{odc} spolaryzowaną napięciem $V_{odc} = 2 \text{ V}$, jak to przedstawiono na rys. 6.46.4. Idealizację diody uzyskano przez przyjęcie bardzo małej wartości prądu nasycenia I_S i współczynnika emisji N .



Rys. 6.46.2



Rys. 6.46.3

Dane do programu SPICE opisujące model elementu nieliniowego (przy przyjętej na rys. 6.46.4 numeracji węzłów) mogą mieć postać:

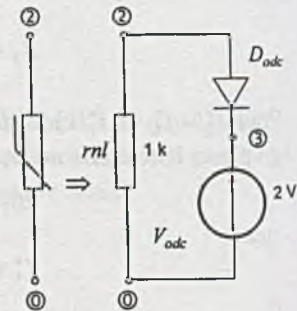
rnl	2	0	1k			
Vodc	3	0	2			
.MODEL	Dodc	D	IS=1E-16	XTI=1	N=0.001	
D1	2	3	Dodc			

Jeśli przyjmujemy numerację węzłów i oznaczenia elementów jak na rys. 6.46.5 oraz wprowadzimy napięcie źródła sterującego $V_{nsp} = 0$, którego prąd $I_1 = I(V_{nsp})$ steruje SEM H_2 , to pełne dane do programu SPICE można przedstawić w postaci:

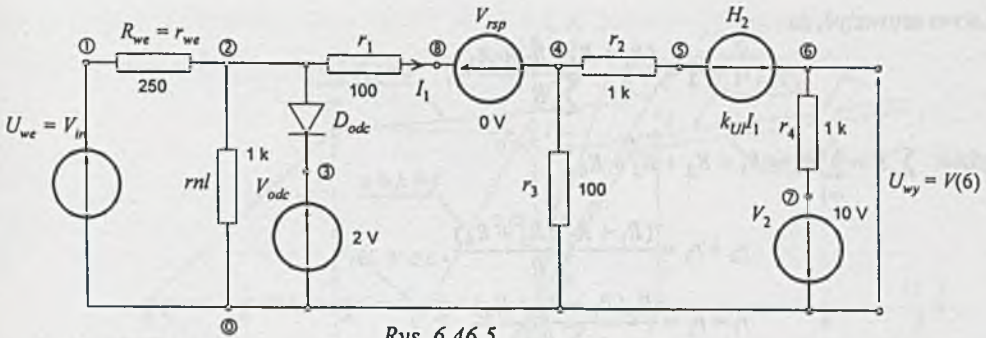
zadanie nr 6.46

```

Vin      1  0  0
Vodc     3  0  2
rwe      1  2  250
rnl      2  0  1k
.MODEL   DodcD  IS=1E-16  XTI=1  N=0.001
D1       2  3  Dodc
r1       2  8  100
Vnsp     8  4  0
r3       4  0  100
r2       4  5  1k
H2       6  5  Vnsp -1.1k
r4       6  7  1k
V2       0  7  10
.DC      Vin 4  6  .1
.PROBE   V(1) V(6)
.END
    
```

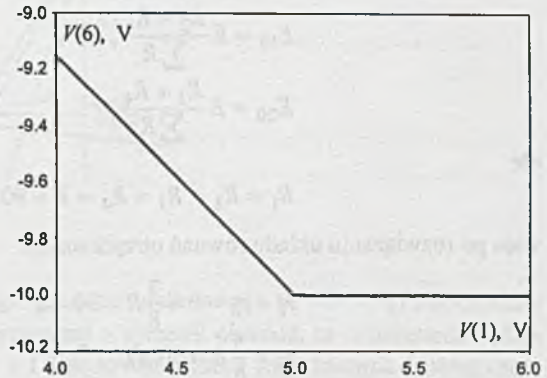


Rys. 6.46.4



Rys. 6.46.5

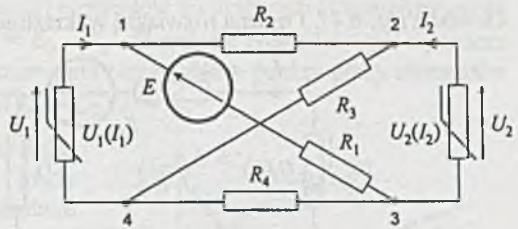
Wykorzystanie programu graficznego PROBE umożliwia uzyskanie wykresu (rys. 6.46.6) zmian napięcia wyjściowego przy zmianach napięcia wejściowego od 4 do 6 V.



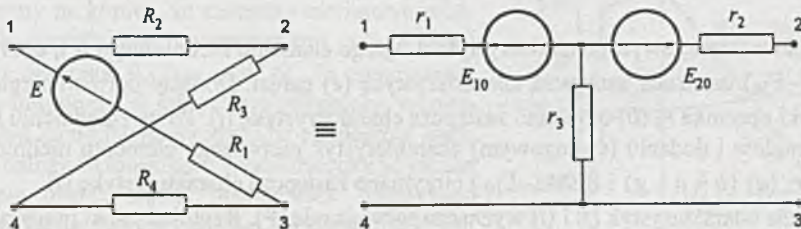
Rys. 6.46.6

Zadanie 6.47. Ponieważ w obwodzie w połączeniu typu „trójkąt” występuje element nieliniowy, nie można obwodu sprowadzić przez łączenie szeregowo-równoległe elementów - do postaci elementarnej, zawierającej dwa elementy (nieliniowe) i idealne źródło napięciowe.

Obwód ten można rozwiązać metodami iteracyjnymi, np. podanymi w rozdziale 3. Przykładowo rozwiążemy ten obwód zastępując pozostałą - po odłączeniu elementów nieliniowych - część obwodu, widzianą z zacisków 1-4, 2-3 (rys. 6.47.1), zastępczym czwornikiem aktywnym, np. w kształcie T (rys. 6.47.2).



Rys. 6.47.1



Rys. 6.47.2

Łatwo zauważyć, że

$$r_1 + r_2 = \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}{\sum R},$$

gdzie: $\sum R = \sum_{i=1}^4 R_i = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$,

$$r_2 + r_3 = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{\sum R},$$

$$r_1 + r_2 = \frac{R_2(R_1 + R_3 + R_4)}{\sum R},$$

$$E_{10} = E \frac{R_2 + R_4}{\sum R},$$

$$E_{20} = E \frac{R_3 + R_4}{\sum R},$$

ale

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R = 80 \, \Omega,$$

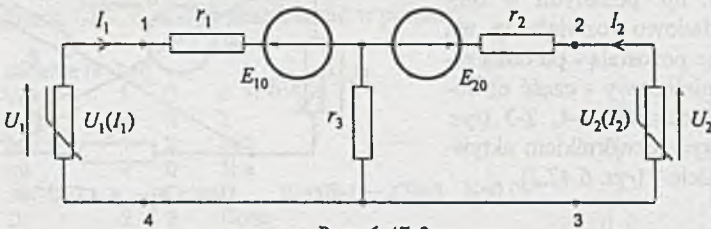
więc po rozwiązaniu układu równań otrzymamy

$$r_1 = r_2 = r = \frac{3}{8} R = 30 \, \Omega,$$

$$r_3 = \frac{5}{8} R = 50 \, \Omega,$$

$$E_0 = E_{10} = E_{20} = \frac{E}{2} = 8 \, \text{V}.$$

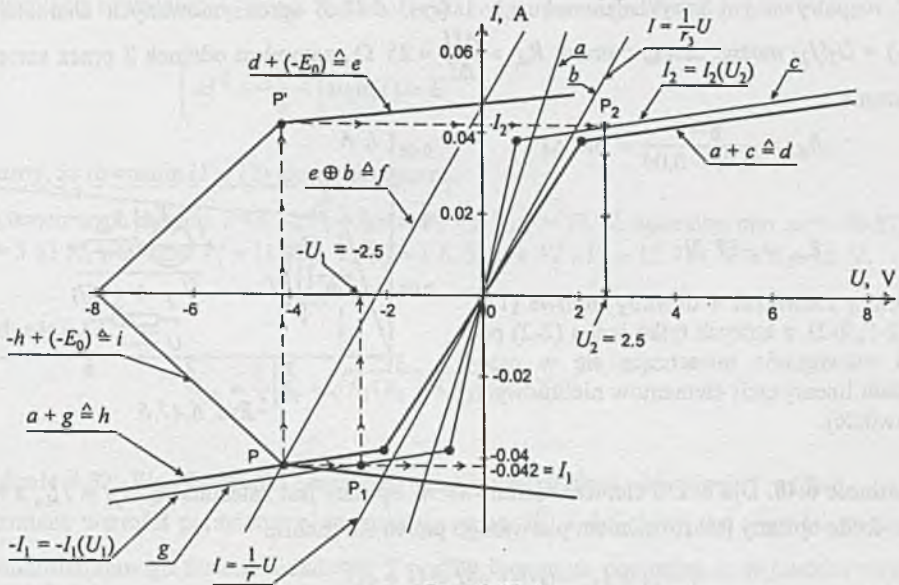
Obwód z rys. 6.47.3 można rozwiązać wykreślnie, a rozwiązanie podano na rys. 6.47.4.



Rys. 6.47.3

Po dodaniu (szeregowym) charakterystyki drugiego elementu nieliniowego (c), opornika r_2 (a) i SEM $E(-E_{20})$ uzyskano zastępczą charakterystykę (e) gałęzi. Dodając ją (równolegle) do charakterystyki opornika r_3 (b) uzyskano zastępczą charakterystykę (f). Po uwzględnieniu kierunków napięć i prądów i dodaniu (szeregowym) charakterystyk pierwszego elementu nieliniowego (g), opornika r_1 (a) ($h \triangleq a + g$) i SEM $(-E_{10})$ otrzymano zastępczą charakterystykę (i).

Przecięcie charakterystyk (f) i (i) wyznacza rozwiązanie (P). Rzutując punkt pracy obwodu (P) na charakterystykę pierwszego elementu nieliniowego (g), otrzymujemy punkt pracy (P_1) tego elementu. Z wykresu $U_1 = 2.5 \, \text{V}$ i $I_1 = 42 \, \text{mA}$.

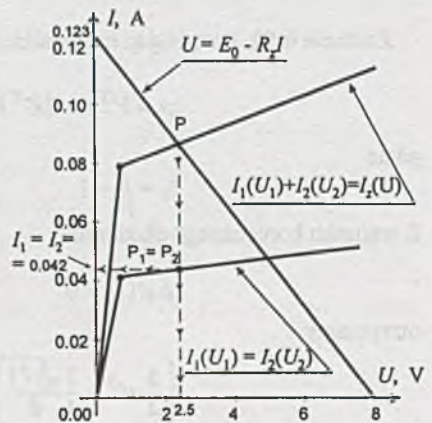


Rys. 6.47.4

Podobnie znajdziemy punkt pracy drugiego elementu nieliniowego ($P - P' - P_2$) i odczytamy wartość $U_2 = 2.5 \text{ V}$ i $I_2 = 42 \text{ mA}$. Jeśli skorzystamy z symetrii obwodu, to rozwiązanie będzie prostsze. Zauważmy, że potencjały punktów 1 i 2 są równe. Można więc zastąpić liniową część obwodu szeregowym połączeniem SEM $E_0 = \frac{E}{2}$ oraz opornika $R_z = r_3 + \frac{r}{2} = 65 \Omega$, a nieliniową równoległym połączeniem dwóch (identycznych) elementów nieliniowych (uzyskanym przez równoległe dodanie charakterystyk) z prostą $U = E_0 - R_z I$. Przecięcie charakterystyk wyznacza punkt pracy (P) obwodu (rys. 6.47.5). Po przerezutowaniu otrzymujemy punkty pracy elementów nieliniowych (P_1, P_2) oraz odczytujemy wartości $U_1 = U_2$ i $I_1 = I_2$.

Gdy znane są punkty pracy elementów nieliniowych, można łatwo policzyć pozostałe napięcia i prądy w obwodzie. Należy zastąpić gałęzie z elementami nieliniowymi SEM równymi U_1 i U_2 lub SPM równymi I_1 i I_2 i rozwiązać obwód liniowy.

Zauważmy na koniec, że elementy nieliniowe można zastąpić (przedziałami) szeregowymi połączeniami SEM E_d i opornika R_d (rys. 6.47.6). Po rozwiązaniu obwodów liniowych, w których uwzględniono wszystkie możliwe kombinacje przedziałów elementów nieliniowych, należy każdorazowo sprawdzić, czy uzyskane rozwiązanie mieści się w przedziałach linearyzacji elementów nieliniowych; jeśli nie, to rozwiązanie odrzucamy.



Rys. 6.47.5

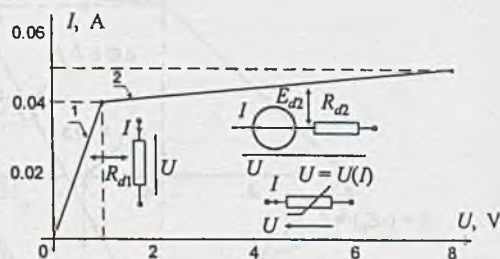
W rozpatrywanym przykładzie odcinek 1 (rys. 6.47.6) aproksymowanych charakterystyk $U_1(I_1) = U_2(I_2)$ można zastąpić przez $R_{d1} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = 25 \Omega$, natomiast odcinek 2 przez szeregowe połączenie

$$R_{d2} = \frac{8-1}{0.05-0.04} = 700 \Omega$$

i

$$E_{d2} = -27 \text{ V}.$$

Należy rozwiązać 4 obwody liniowe (1-1, 1-2, 2-1, 2-2), z których tylko jeden (2-2) posiada rozwiązanie mieszczące się w przedziałach linearyzacji elementów nieliniowych (sprawdzić).



Rys. 6.47.6

Zadanie 6.48. Dla $U \geq 0$ element nieliniowy N_1 opisany jest zależnością $U_N = I_N^2$, a obwód z rys. 6.48a opisany jest równaniem pierwszego prawa Kirchhoffa

$$I = I_1 + I_N = GU + \sqrt{U} = U + \sqrt{U}, \quad (1)$$

natomiast obwód z rys. 6.48b opisany jest równaniem drugiego prawa Kirchhoffa

$$U = U_1 + U_{N2} = r_1 I + f(I) = I + f(I). \quad (2)$$

Z równania (1) obliczymy (dla $U \geq 0, I \geq 0$) napięcie

$$U = \frac{2I+1}{2} + \sqrt{4I+1}$$

i po podstawieniu do (2) otrzymamy

$$U_{N2} = f(I) = \frac{1}{2} + \sqrt{4I+1}.$$

Zadanie 6.50. Rozpisując minimalizowane wyrażenie, otrzymamy

$$\psi = V^T I - 2E^T I = aI_1^3 \text{sign}(I_1) + I_2 \sqrt{\frac{|I_2|}{b}} \text{sign}(I_2) - 2EI_1,$$

gdzie

$$I_1 = I_2 = I.$$

Z warunku koniecznego ekstremum

$$\Delta \psi(I) = 0$$

otrzymamy

$$\left(\frac{3}{2} a I^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{|I|}{b}} \right) \text{sign}(I) = E, \quad (1)$$

a porównując z równaniem II prawa Kirchhoffa dla rozpatrywanego obwodu

$$\left(aI^2 + \frac{\sqrt{|I|}}{b} \right) \text{sign}(I) = E \quad (2)$$

zauważmy, że równania (1) i (2) nie są identyczne.

Dla tematowych danych: $I = 4 \text{ A}$, $V_1 = 16 \text{ V}$, $V_2 = 2 \text{ V}$, $P = 72 \text{ W}$, natomiast min $\psi = -76.876 \text{ W}$ dla $I' = 3.33 \text{ A}$, wówczas $V'_1 = 11.089 \text{ V}$, $V'_2 = 1.825 \text{ V}$, a $V'_1 + V'_2 = 12.914 \text{ V} \neq E = 18 \text{ V}$.

Zadanie 6.51.

$$R_{ab} = \frac{1}{2} \left[R_1 + \sqrt{R_1(R_1 + 4R_2)} \right] = 9.3 \Omega$$

Zadanie 6.52. Współczynniki względnej wrażliwości funkcji układowej $T = T(x_1, \dots, x_n)$ na małą zmianę wartości parametru x_i oznacza się przez $S_{x_i}^T$ i definiuje jako wartości pochodnej logarytmu naturalnego funkcji układowej T podług logarytmu parametru x_i w punkcie znamionowym [11, 20], tzn.:

$$S_{x_i}^T \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{x_i}{T}.$$

W rozpatrywanym przykładzie

$$T(x_1, \dots, x_n) = U(R_1, R_2, E).$$

Istnieje szereg metod obliczania wartości względnych współczynników wrażliwości. Wykorzystamy dwie z nich, tzn.:

- 1) obliczenie współczynników wrażliwości z definicji,
- 2) obliczenie współczynników wrażliwości za pomocą obwodów dołączonych [11].

Ad 1) Ponieważ

$$U_n = E_N \frac{R_{2N}}{R_{1N} + R_{2N}},$$

więc

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial R_1} &= -E_N \frac{R_{2N}}{(R_{1N} + R_{2N})^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial R_2} &= +E_N \frac{R_{1N}}{(R_{1N} + R_{2N})^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial E} &= \frac{R_{2N}}{R_{1N} + R_{2N}}, \end{aligned}$$

natomiast

$$\begin{aligned} S_{R_1}^U &= \frac{\partial U}{\partial R_1} \frac{R_{1N}}{U_N} = -\frac{E_N R_{2N}}{(R_{1N} + R_{2N})^2} = \frac{R_{1N}(R_{1N} + R_{2N})}{ER_{2N}} = \\ &= -\frac{R_{1N}}{R_{1N} + R_{2N}} = -\frac{2}{3}, \\ S_{R_2}^U &= \frac{\partial U}{\partial R_2} \frac{R_{2N}}{U_N} = \frac{R_{1N}}{R_{1N} + R_{2N}} = \frac{2}{3}, \\ S_E^U &= \frac{\partial U}{\partial E} \frac{E_N}{U_N} = 1. \end{aligned}$$

Współczynnik np. $S_{R_1}^U = -\frac{2}{3}$ oznacza, że zmiana wartości rezystora o t_{R_1} %, tzn.

$R_1 = R_{1N} \left(1 + \frac{t_{R_1}}{100} \right)$, przy ustalonych nominalnych wartościach R_2 i E , spowoduje zmianę napięcia U o $t_U = S_{R_1}^U t_{R_1} = -\frac{2}{3} t_{R_1}$ %.

Ponieważ obwód jest liniowy i zasilany z jednego źródła, więc zmiana SEM E o t_E (od wartości nominalnej) spowoduje t_E % zmianę wszystkich rozpyłów prądów i napięć, więc i $t_U = t_E$, ale (gdy zmienia się tylko wartość SEM E) $t_U = S_E^U t_E$, zatem $S_E^U = 1$.

Jeżeli jednocześnie zmieniają się wartości R_1 , R_2 i E , to [11] dla małych zmian wartości elementów

$$t_U = S_{R_1}^U t_{R_1} + S_{R_2}^U t_{R_2} + S_E^U t_E,$$

natomiast graniczne wartości odchyłek wyznacza się z zależności

$$t_{U_g} \cong \pm \left(\left| S_{R_1}^U \right| t_{R_1} + \left| S_{R_2}^U \right| t_{R_2} + \left| S_E^U \right| t_E \right).$$

Dla tematowych danych

$$t_{U_g} \cong \pm \left(\frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{2}{3} \cdot 10 + 1 \cdot 0 \right) = \pm 13.33 \text{ \%}.$$

Sprawdźmy, dla porównania, ile wynoszą dokładne wartości granicznych odchyłek napięcia wyjściowego.

Odchyłka górna wystąpi, gdy $t_{R_1} = -10 \text{ \%} = -t_R$ (ponieważ $S_{R_1}^U < 0$) i $t_{R_2} = 10 \text{ \%} = t_R$ (ponieważ $S_{R_2}^U > 0$; wówczas

$$U_{\max} = E_N \frac{R_{2N} \left(1 + \frac{t_R}{100} \right)}{R_{2N} \left(1 + \frac{t_R}{100} \right) + R_{1N} \left(1 - \frac{t_R}{100} \right)} = 3.793 \text{ V}.$$

Ponieważ

$$U_N = \frac{10}{3} \text{ V},$$

więc

$$t_{U+} = \frac{U_{\max} + U_N}{U_N} \cdot 100 \% = 13.79 \%.$$

Odchyłka dolna wystąpi, gdy $t_{R_1} = t_R = +10 \%$ i $t_{R_2} = -t_R = -10 \%$. Wówczas:

$$U_{\min} = E_N \frac{R_{2N}(1-t_R)}{R_{2N}((1-t_R) + R_{1N}(1+t_R))} = 2.903 \text{ V},$$

$$t_{U-} = \frac{U_{\min} - U_N}{U_N} \cdot 100 \% = -12.9 \%.$$

Różnica między dokładnymi wynikami t_{U+} , t_{U-} i wynikami $\pm t_{U_g}$ uzyskanymi z analizy wrażliwościowej wynika z przybliżonego, dla większych przyrostów wartości elementów, charakteru małoprzyrostowej analizy wrażliwościowej.

W tablicy 6.52.1 podano, dla porównania, wyniki dokładne i uzyskane z metody wrażliwościowej dla kilku wartości tolerancji elementów. Można zauważyć, że ze zmniejszeniem tolerancji elementów maleje różnica między wynikami dokładnymi a uzyskanymi z metody wrażliwościowej.

Tablica 6.52.1

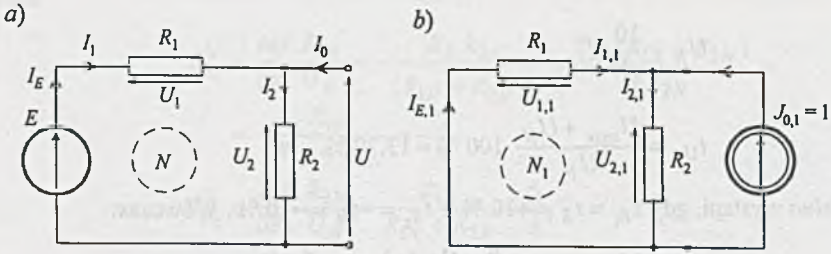
$t_g \%$	$t_{U+} \%$	$t_{U_g} \%$	$(t_{U+} - t_{U_g}) \%$	$t_{U-} \%$	$-t_{U_g} \%$	$(t_{U-} - t_{U_g}) \%$
1	1.338	1.33	+ 0.008	- 1.329	- 1.33	+ 0.001
2	2.70	2.67	+ 0.03	- 2.65	- 2.67	+ 0.02
5	6.77	6.67	+ 0.1	- 6.56	- 6.67	+ 0.11
10	13.79	13.33	+ 0.46	- 12.90	- 13.33	+ 0.43
20	28.57	26.67	+ 1.9	- 25.00	- 26.67	+ 1.67

Ad 2) Obliczanie współczynników wpływu (wrażliwości) z definicji jest możliwe tylko dla prostych obwodów. Bardziej złożone wymagają efektywniejszych metod. Jedną z nich to metoda obwodów dołączonych [11], wymagająca analizy dodatkowego, oprócz obwodu tematowego N , specjalnie skonstruowanego obwodu, tzw. obwodu dołączonego N_1 . Jeśli chcemy obliczyć wrażliwość napięcia U obwodu N , to obwód dołączony N_1 uzyskujemy przez zwarcie SEM E i dołączenie do zacisków wyjściowych SPM $J_{0,1} = 1 \text{ A}$.

Na rys. 6.52.1 przedstawiono obwód podstawowy N (rys. a) i odpowiadający mu obwód dołączony N_1 (rys. b).

Analizując obwód podstawowy N , uzyskamy $U_1 = \frac{20}{3} \text{ V}$, $U_2 = \frac{10}{3} \text{ V}$, natomiast z analizy obwodu dołączonego N_1 uzyskamy $U_{1,1} = -\frac{2}{3} \cdot 10^{-3} \text{ V}$, $U_{2,1} = \frac{2}{4} \cdot 10^{-3} \text{ V}$, $I_{E,1} = -\frac{1}{3} \text{ A}$. Z zależności (2.18) (str. 52 [11]) uzyskamy

$$S_{N_1}^U = S_{G_1}^U = -U_1 U_{1,1} \frac{G_{1N}}{G_N} = +\frac{2}{3},$$



Rys. 6.52.1

a

$$S_{R_1}^U = -S_{G_1}^U = -\frac{2}{3}.$$

Analogicznie

$$S_{G_2}^U = -U_2 U_{2,1} \frac{G_{2N}}{U_n} = -\frac{2}{3} \quad \text{a} \quad S_{R_2}^U = +\frac{2}{3}.$$

Z zależności (2.23) (str. 57 [11])

$$S_E^U = -I_{0,1} \frac{E_N}{U_N} = +1.$$

Oczywiste jest, że uzyskano identyczne jak w 1) wartości współczynników wrażliwości. Zauważmy, że

$$S_{G_1}^U + S_{G_2}^U = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \quad (1)$$

niezależnie od wartości U_1 , G_1 i G_2 .

Sumy współczynników wrażliwości posiadają pewne niezmiennicze właściwości [20], które dla tematowego obwodu zapisane są zależnością (1).

Program SPICE umożliwia również obliczanie stałoprądowych współczynników wrażliwości małoprzrostowych. Obliczane są wartości:

1) pochodnych cząstkowych (*element sensitivity*)

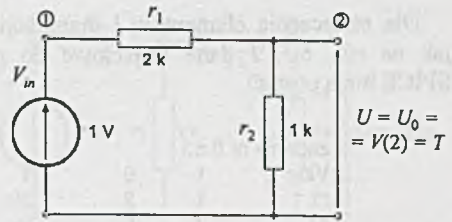
$$Q_x^T \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\text{pochodna wielkości "OUTPUT"}}{\text{podług parametru "ELEMENT NAME"}} \quad (2)$$

oraz

2) wrażliwości półwzględnych podzielonych przez 100 (*normalized sensitivity*)

$$Q_x^T = x \frac{\partial T}{\partial x} \cdot 0.01 = TS_x^T \cdot 0.01. \quad (3)$$

Dla numeracji węzłów i oznaczeń elementów jak na rys. 6.52.2 dane wejściowe do programu SPICE z wykorzystaniem instrukcji .SENS do obliczania wartości współczynników wrażliwości funkcji układowej $T = U = V(2)$ na zmiany wartości elementów mogą mieć postać:



Rys. 6.52.2

```

zadanie nr 6.52
Vin      1      0      1
r1       1      2      2k
r2       2      0      1k
.SENS    V(2)
.END
    
```

wówczas wyniki (fragment) mają postać:

zadanie nr 6.52

**** SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION TEMPERATURE = 27.000 DEG C

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	1.0000	(2)	.3333

**** DC SENSIVITY ANALYSIS TEMPERATURE = 27.000 DEG C

DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(2)

ELEMENT NAME	ELEMENT VALUE	ELEMENT SENSITIVITY(VOLTS/UNIT)	NORMALIZED SENSITIVITY (VOLTS/PERCENT)
r1	2.000E+03	-1.111E-04	-2.222E-03
r2	1.000E+03	2.222E-04	2.222E-03
Vin	1.000E+00	3.333E-01	3.333E-03

Sprawdźmy, korzystając z zależności (2) i (3), że dla $T = V(2)$ i $x = r_1$

$$S_{r_1}^{V(2)} = Qb_{r_1}^{V(2)} \frac{r_1}{V(2)} = (-1.1111E-4) \cdot \frac{2E+3}{0.3333} = -\frac{2}{3} = S_{R_1}^U$$

oraz

$$S_{r_2}^{V(2)} = 100 Q_{r_2}^{V(2)} \frac{1}{V(2)} = 100 \cdot \frac{(-2.222E-03)}{0.3333} = -\frac{2}{3} = S_{R_1}^U.$$

Zadanie 6.53.

$$S_{R_1}^{U_1} = +0.375; \quad S_{R_2}^{U_1} = -0.225;$$

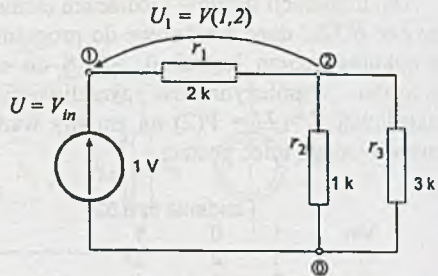
$$S_{R_3}^{U_1} = -0.15; \quad S_U^{U_1} = 1;$$

$$t_{U_1} = |S_{R_1}^{U_1}| t_{R_1} + |S_{R_2}^{U_1}| t_{R_2} + |S_{R_3}^{U_1}| t_{R_3} + |S_U^{U_1}| t_U = +5.75\%.$$

Dla oznaczenia elementów i numeracji węzłów jak na rys. 6.53.1 dane wejściowe do programu SPICE mają postać:

zadanie nr 6.53

```
Vin      1      0      1
r1       1      2      2k
r2       2      0      2k
r3       2      0      3k
.SENS                V(1,2)
.END
```



Rys. 6.53.1

Z obliczeń otrzymamy między innymi wartości potencjałów węzłowych i współczynników wrażliwości:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	1.0000	(2)	.3750
DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(1,2)			
ELEMENT NAME	ELEMENT VALUE	ELEMENT SENSITIVITY (VOLTS/UNIT)	NORMALIZED SENSITIVITY (VOLTS/PERCENT)
r1	2.000E+03	1.172E-04	2.344E-03
r2	2.000E+03	-7.031E-05	-1.406E-03
r3	3.000E+03	-3.125E-05	-9.375E-04
Vin	1.000E+00	6.250E-01	6.250E-03

Ponieważ $T = U_1 = V(1,2) = V(1) - V(2) = 1 - 0.375 = 0.625$ V, więc (z zależności (1) i (2) w rozwiązaniu poprzedniego zadania) np.

$$S_{V_{in}}^{V(1,2)} = \frac{V_{in}}{V(1,2)} Q_{V_{in}}^{V(1,2)} = \frac{1}{0.625} \cdot (6.25E-1) = 1 = S_U^{U_1}$$

lub

$$S_{r_3}^{V(1,2)} = 100 Q_{r_3}^{V(1,2)} \frac{1}{V(1,2)} = 100 \cdot \frac{(-9.375E-4)}{0.625} = -0.15 = S_{R_3}^{U_1}.$$

Zadanie 6.54.

$$S_{R_1}^U = -0.7273; \quad S_{R_2}^U = 0.5455; \quad S_{R_3}^U = -0.5455;$$

$$S_{R_4}^U = +0.7273; \quad S_E^U = 1;$$

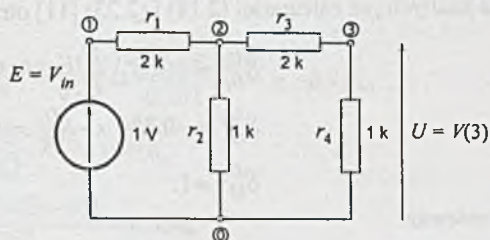
$$t_u = \pm \left(\sum_{i=1}^4 |S_{R_i}^U| t_{R_i} + |S_E^U| t_E \right) = \pm 25.47\%.$$

Różnica w porównaniu z wynikiem dokładnym (+ 28.2%) wynika z niespełnienia warunku małoprzystosowanych zmian wartości elementów. W tym przykładzie również do obliczenia wartości współczynników wrażliwości można wykorzystać program SPICE. Dla oznaczeń jak na rys. 6.54.1 dane wejściowe mają postać:

zadanie nr 6.54

```

Vin      1      0      1
r1       1      2      2k
r2       2      0      1k
r3       2      3      2k
r4       3      0      1k
.SENS
.END      V(3)
    
```



Rys. 6.54.1

Wyniki (fragment):

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	1.0000	(2)	.2727	(3)	.0909

DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(3)

ELEMENT NAME	ELEMENT VALUE	ELEMENT SENSIVITY (VOLTS/UNIT)	NORMALIZED SENSIVITY (VOLTS/PERCENT)
r1	2.000E+03	-3.306E-05	-6.612E-04
r2	1.000E+03	4.959E-05	4.959E-04
r3	2.000E+03	-2.479E-05	-4.959E-04
r4	1.000E+03	6.612E-05	6.612E-04
Vin	1.000E+00	9.091E-02	9.091E-04

Zadanie 6.55. Do obliczenia współczynników wrażliwości napięcia U_5 na zmiany wartości elementów mostka wykorzystana zostanie metoda obwodów dołączonych [11, 20]. Obwód podstawowy N i dołączony N_1 przedstawiono na rys. 6.55.1.

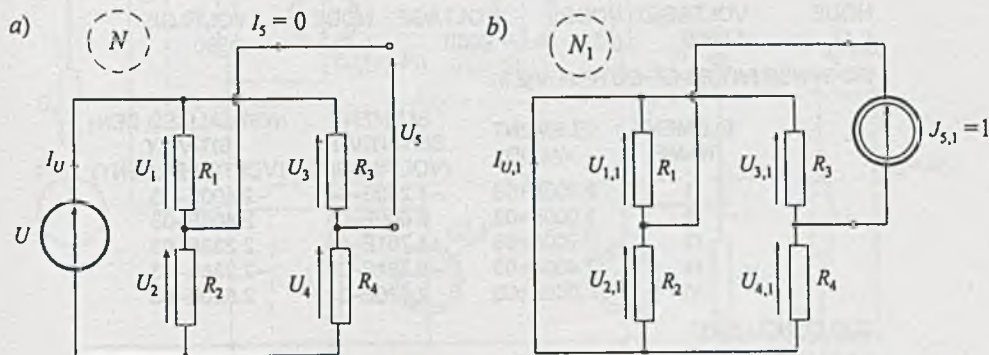
Po rozwiązaniu obwodu podstawowego N uzyskano

$$U_1 = 0.4 \text{ V}, \quad U_2 = 0.6 \text{ V}, \quad U_3 = 0.662 \text{ V}, \quad U_4 = 0.338 \text{ V}.$$

Rozwiązanie obwodu dołączonego N_1 :

$$U_{1,1} = -1.2 \text{ kV}, \quad U_{2,1} = 1.2 \text{ kV}, \quad U_{3,1} = 1.5887 \text{ kV},$$

$$U_{4,1} = -1.5887 \text{ kV}, \quad I_{U,1} = -0.26198 \text{ A}.$$



Rys. 6.55.1

Ze znanych już zależności (2.18) i (2.23) [11] otrzymano

$$\begin{aligned} S_{G_1}^{U_5} &= -U_1 U_{1,1} \frac{G_{1N}}{U_{5N}} = 0.916 = -S_{R_1}^{U_5} = +S_{R_2}^{U_5}, \\ S_{G_3}^{U_5} &= -0.854 = -S_{R_3}^{U_5} = +S_{R_4}^{U_5}, \\ S_U^{U_5} &= 1. \end{aligned}$$

Ponieważ

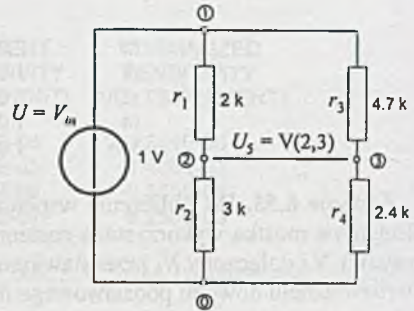
$$t_{U_{5+}} = t_R \sum_{i=1}^4 |S_{R_i}^{U_5}| + |S_U^{U_5}| t_U,$$

więc

$$t_R = \frac{t_{U_{5+}} - |S_U^{U_5}| t_U}{\sum_{i=1}^4 |S_{R_i}^{U_5}|} = 2.54\%.$$

Najbliższa wartość tolerancji, z szeregu podanego w zadaniu, mniejsza od t_R jest rozwiązaniem, czyli $t_R = 2\%$. Oczywiście $t_R = 1\%$ też spełnia warunki zadania. Przyjmując, że rezystor o mniejszej tolerancji wartości jest droższy, wybieramy tańsze elementy, czyli $t_R = 2\%$.

Tematowy obwód, dla potrzeb analizy komputerowej, przedstawiono na rys. 6.55.2. Jeśli dane do programu SPICE będą miały postać:



Rys. 6.55.2

zadanie nr 6.55

```
Vin      1      0      1
r1       1      2      2k
r2       2      0      3k
r3       1      3      4.7k
r4       3      0      2.4k
.SENS
.END      V(2)
```

wówczas:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	1.0000	(2)	.6000	(3)	.3380

DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(2,3)

ELEMENT NAME	ELEMENT VALUE	ELEMENT SENSITIVITY (VOLTS/UNIT)	NORMALIZED SENSITIVITY (VOLTS/PERCENT)
r1	2.000E+03	-1.200E-04	-2.400E-03
r2	3.000E+03	8.000E-05	2.400E-03
r3	4.700E+03	4.761E-05	2.238E-03
r4	2.400E+03	-9.324E-05	-2.238E-03
Vin	1.000E+00	2.620E-01	2.620E-03

JOB CONCLUDED

TOTAL JOB TIME

Współczynniki wrażliwości:

$$S_{R_1}^{U_5} = S_{\eta}^{\nu(2,3)} = \frac{100}{V(2,3)} Q_{\eta}^{\nu(2,3)} = \frac{100 \cdot (-2.4E-03)}{0.262} = -0.916,$$

$$S_{R_2}^{U_5} = S_{\eta}^{\nu(2,3)} = \frac{100 \cdot (2.4E-03)}{0.262} = 0.916,$$

$$S_{R_3}^{U_5} = S_{\eta}^{\nu(2,3)} = \frac{100 \cdot (2.238E-03)}{0.262} = 0.854,$$

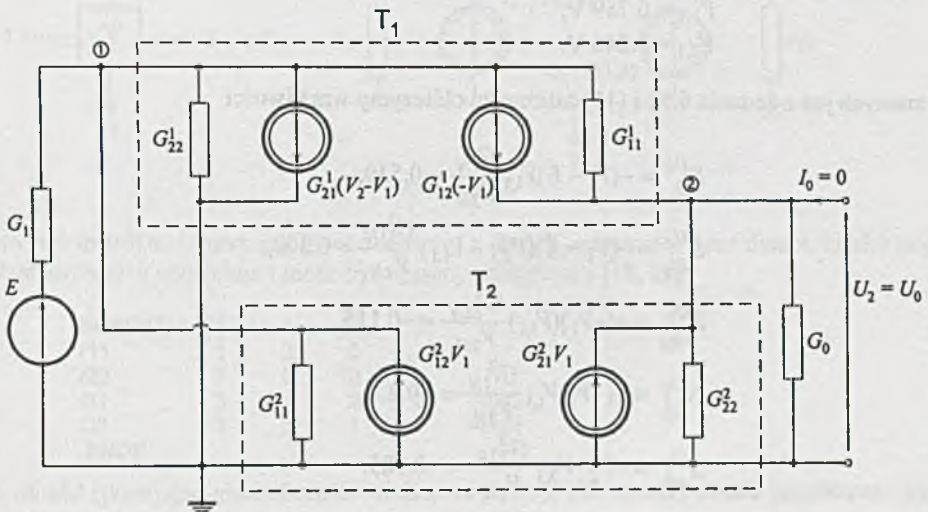
$$S_{R_4}^{U_5} = S_{r_4}^{\nu(2,3)} = \frac{100 \cdot (-2.238E-03)}{0.262} = -0.854,$$

$$S_E^{U_5} = S_{\nu_{in}}^{\nu(2,3)} = \frac{100 \cdot (2.620E-03)}{0.262} = 1.$$

Zadanie 6.56. Współczynniki wrażliwości napięcia wyjściowego U_2 na zmiany parametrów obwodu można obliczyć bądź wprost z definicji, metodą obwodów dołączonych, bądź metodą macierzową [11, 20].

Przedstawimy obliczenia wykorzystujące obwód dołączony. Tematowy obwód z rys. 4.17 można przedstawić jak na rys. 6.56.1 (obwód N), gdzie trójniki zastąpiono równoważnymi układami ze źródłami prądowymi sterowanymi napięciowo (ŽPSN) i przyjęto np. $E = 1$ V. Równania potencjałów węzłowych obwodu N przyjmą postać

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_{11}^1 + G_{11}^2 + G_{22}^1 & -G_{11}^1 \\ -G_{11}^1 & G_2 + G_{11}^1 + G_{22}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 G_1 - G_{21}^1 (V_2 - V_1) - G_{12}^1 (-V_1) + G_{12}^2 V_2 \\ G_{12}^1 (-V_1) + G_{12}^2 V_1 \end{bmatrix}$$



Rys. 6.56.1

a po przekształceniu

$$\begin{array}{|c|c|} \hline G_1 + G_{11}^1 + G_{11}^2 + G_{22}^1 - G_{21}^1 - G_{12}^1 & -G_{11}^1 + G_{12}^1 - G_{21}^2 \\ \hline -G_{11}^1 + G_{12}^1 - G_{21}^2 & G_2 + G_{11}^1 + G_{22}^2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline V_2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline EG_1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych i rozwiązaniu otrzymamy

$$V_1 = 0.462 \text{ V},$$

$$V_2 = 0.308 \text{ V}.$$

Sposób tworzenia obwodu dołączonego N_1 , gdy w obwodzie N występują ŹPSN, opisano w [11, 20]. Zauważmy, że właściwie sam obwód dołączony nie jest potrzebny, ale niezbędne są opisujące go równania umożliwiające obliczenie rozptyłów w tym obwodzie.

Skorzystamy ze znanej [11] zależności łączącej macierze admitancyjne obwodów N i N_1 , a mianowicie

$$Y_1 = Y^T,$$

gdzie: Y_1 macierz admitancyjna obwodu dołączonego,

oraz faktu, że SPM $J_{0,1} = 1 \text{ A}$ w obwodzie dołączonym włączona jest od węzła odniesienia do węzła 2.

Równania węzłowe obwodu dołączonego mają postać:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline G_1 + G_{11}^1 + G_{11}^2 + G_{22}^1 - G_{21}^1 - G_{12}^1 & -G_{11}^1 + G_{12}^1 - G_{21}^2 \\ \hline -G_{11}^1 + G_{12}^1 - G_{21}^2 & G_2 + G_{11}^1 + G_{22}^2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline V_{1,1} \\ \hline V_{2,1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline J_{0,1} \\ \hline \end{array}$$

a po rozwiązaniu

$$V_{1,1} = 0.769 \text{ V},$$

$$V_{2,1} = 3.846 \text{ V}.$$

Ze znanych już z zadania 6.52 i [11] zależności obliczymy wrażliwości

$$S_{G_1}^{U_2} = -(V_1 - E)V_{1,1} \frac{G_{1N}}{V_{2N}} = 0.539,$$

$$S_{G_{11}^1}^{U_2} = -(V_1 - E)(V_{2,1} - V_{1,1}) \frac{G_{11N}^1}{V_{2N}} = 0.308,$$

$$S_{G_{22}^1}^{U_2} = -(-V_1)(V_{1,1}) \frac{G_{22N}^1}{V_{2N}} = -0.115,$$

$$S_{G_{11}^2}^{U_2} = -(-V_1)V_{1,1} \frac{G_{11N}^2}{V_{2N}} = -0.231,$$

$$S_{G_{22}^2}^{U_2} = -V_2 \cdot V_{2,1} \frac{G_{22N}^2}{V_{2N}} = -0.385.$$

Współczynniki wrażliwości napięcia wyjściowego U_2 na zmiany wartości współczynników ZPSN obliczymy z zależności (2.19) [11]. Otrzymamy:

$$S_{G_{12}}^{U_2} = +(-V_1)(V_{2,1} - V_{1,1}) \frac{G_{12N}^1}{V_{2N}} = 0.231,$$

$$S_{G_{21}}^{U_2} = +(V_2 - V_1)(-V_{1,1}) \frac{G_{21N}^1}{V_{2N}} = 0.019,$$

$$S_{G_{12}}^{U_2} = +V_2 V_{1,1} \frac{G_{12N}^2}{V_{2N}} = -0.039,$$

$$S_{G_{21}}^{U_2} = +V_1 V_{2,1} \frac{G_{21N}^2}{V_{2N}} = -0.289.$$

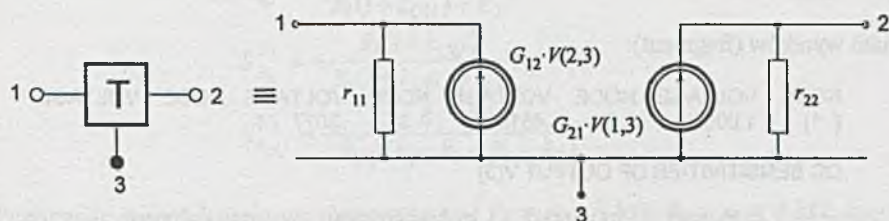
Znak „+” wynika z odwrotności, w porównaniu z rys. 2.6 [11], zastrzałkowania źródła sterowanego.

Do obliczenia współczynników wrażliwości napięcia wyjściowego można wykorzystać program SPICE. Ponieważ w obwodzie z rys. 4.17 występują dwa identyczne podobwody (trójniki pasywne), zdefiniujemy podobwód. Tematowy trójnik T można przedstawić jak na rys. 6.56.2, gdzie

$$r_{11} = \frac{1}{G_{11}} = 5 \Omega,$$

$$r_{22} = \frac{1}{G_{22}} = 10 \Omega,$$

$$G_{12} = G_{21} = -0.05 \text{ S.}$$



Rys. 6.56.2

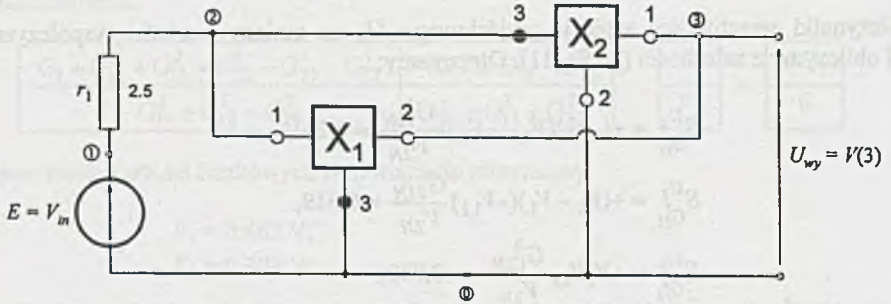
Zatem jest to trójzaczaskowy podobwód złożony z dwóch rezystorów oraz dwóch źródeł prądowych sterowanych napięciem i może być opisany następująco [18, 19]:

```

SUBCKT T1 1 2 3
r11 1 3 5
r22 2 3 10
G1 3 1 2 3 -0.05
G2 3 2 1 3 -0.05
.ENDS

```

Cały obwód (pomijając nieskończenie wielką rezystancję obciążenia) można przedstawić jak na rys. 6.56.3, gdzie przez X_1 i X_2 oznaczono trójniki (podobwody).



Rys. 6.56.3

Jeśli interesują nas wartości współczynników wrażliwości napięcia wyjściowego $U_{wy} = U_2 = V(3)$ na zmiany wartości elementów obwodu, to dane wejściowe do programu SPICE mogą mieć postać:

zadanie nr 6.56

```
Vin      1      0      1
r1       1      2      2.5
X2       3      0      2      T1
X1       2      3      0      T1
.SUBCKT          T1      1      2      3
r11       1      3      5
r22       2      3      10
G1        3      1      2      3      -05
G2        3      2      1      3      -05
.ENDS
.SENS V(3)
.END
```

Z wydruku wyników (fragment):

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	1.0000	(2)	.4615	(3)	.3077		

DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(3)

ELEMENT NAME	ELEMENT VALUE	ELEMENT SENSITIVITY (VOLTS/UNIT)	NORMALIZED SENSITIVITY (VOLTS/PERCENT)
r1	2.500E+00	-6.627E-02	-1.657E-03
X2.r11	5.000E+00	-1.893E-02	-9.467E-04
X2.r22	1.000E+01	3.550E-03	3.550E-04
X1.r11	5.000E+00	1.420E-02	7.101E-04
X1.r22	1.000E+01	1.183E-02	1.183E-03
Vin	1.000E+00	3.077E-01	3.077E-03

wynika, że program nie oblicza wpływu zmian wartości współczynników G_{12} i G_{21} źródeł prądowych sterowanych napięciem (ŻPSN), natomiast wartości pozostałych współczynników wrażliwości wynoszą

$$\begin{aligned} -S_{G_{11}}^{U_2} &= S_{\eta}^{V(3)} = \frac{100}{V(3)} Q_{\eta}^{V(3)} = \frac{100 \cdot (-1.657E-03)}{0.3077} = -0.5385, \\ -S_{G_{11}}^{U_2} &= S_{X_{2,\eta_1}}^{V(3)} = \frac{100}{V(3)} Q_{X_{2,\eta_1}}^{V(3)} = \frac{100 \cdot (-9.467E-04)}{0.3077} = -0.3077, \\ -S_{G_{12}}^{U_2} &= S_{X_{2,r_{22}}}^{V(3)} = \frac{100}{V(3)} Q_{X_{2,r_{22}}}^{V(3)} = \frac{100 \cdot (3.550E-04)}{0.3077} = 0.1154, \\ -S_{G_{11}}^{U_2} &= S_{X_{1,r_{22}}}^{V(3)} = \frac{100}{V(3)} Q_{X_{1,r_{22}}}^{V(3)} = \frac{100 \cdot (7.101E-04)}{0.3077} = 0.2308, \\ -S_{G_{22}}^{U_2} &= S_{X_{2,r_{22}}}^{V(3)} = \frac{100}{V(3)} Q_{X_{2,r_{22}}}^{V(3)} = \frac{100 \cdot (1.183E-03)}{0.3077} = 0.3845, \\ \frac{S_{U_2}}{E} &= S_{V_{in}}^{V(3)} = \frac{100}{V(3)} Q_{V_{in}}^{V(3)} = \frac{100 \cdot (3.077E-03)}{0.3077} = 1. \end{aligned}$$

Zadanie 6.57. Ponieważ

$$U_2 = -U_{we} \frac{k_{UU} R_2}{k_{UU} R_1 + R_1 + R_2},$$

więc łatwo można wyprowadzić wzory na współczynniki wrażliwości małoprzyrostowej napięcia wyjściowego U_2 na zmiany wartości R_1 , R_2 i k_{UU} . Po krótkich przekształceniach otrzymamy:

$$S_{R_1}^{U_2} = -\frac{R_1(1+k_{UU})}{R_1(1+k_{UU})+R_2}, \quad (1)$$

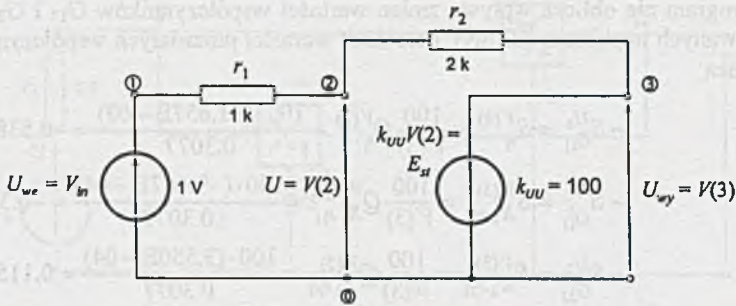
$$S_{R_2}^{U_2} = +\frac{R_1(1+k_{UU})}{R_1(1+k_{UU})+R_2}, \quad (2)$$

$$S_{k_{UU}}^{U_2} = -\frac{R_1+R_2}{k_{UU}(k_{UU}R_1+R_1+R_2)}. \quad (3)$$

Przyjmując wartości liczbowe elementów np.: $R_1 = r_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = r_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $k_{UU} = 100 \frac{\text{V}}{\text{V}}$, $E = V_{in} = 1 \text{ V}$, możemy do obliczenia współczynników wrażliwości wykorzystać program SPICE. Dla numeracji węzłów jak na rys. 6.57.1 (obwód ze źródłem napięciowym sterowanym napięciem) dane wejściowe można zapisać w postaci

zadanie nr 6.57

```
Vin      1      0      1
r1       1      2      1k
r2       2      3      2k
Est       0      3      2      0      100
.SENS
.END
```



Rys. 6.57.1

Wyniki obliczeń (fragmenty)

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	1.0000	(2)	.0194	(3)	-1.9417

DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(3)

ELEMENT NAME	ELEMENT VALUE	ELEMENT SENSITIVITY (VOLTS/UNIT)	NORMALIZED SENSITIVITY (VOLTS/PERCENT)
r1	1.000E+03	1.904E-03	1.904E-02
r2	2.000E+03	-9.520E-04	-1.904E-02
Vin	1.000E+00	-1.942E-00	-1.942E-02

Na ich podstawie można wyliczyć wartości współczynników wrażliwości napięcia wyjściowego $V(3)$ na zmiany r_1 , r_2 i V_{in}

$$S_{r_1}^{V(3)} = S_{R_1}^{U_2} = \frac{100}{V(3)} Q_{r_1}^{V(3)} = \frac{100 \cdot (1.904E-02)}{-1.9417} = -0.9806,$$

$$S_{r_2}^{V(3)} = S_{R_2}^{U_2} = \frac{100}{V(3)} Q_{r_2}^{V(3)} = \frac{100 \cdot (-1.904E-02)}{-1.9417} = +0.9806,$$

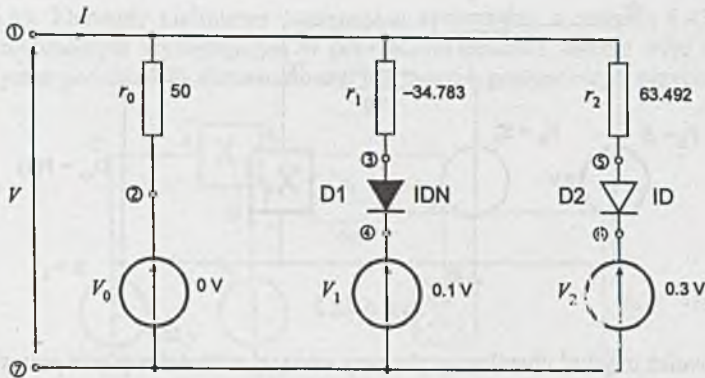
$$S_{V_{in}}^{V(3)} = S_{U_{we}}^{U_2} = \frac{100}{V(3)} Q_{V_{in}}^{V(3)} = \frac{100 \cdot (-1.542E-02)}{-1.5417} = 1.$$

Z zależności (3) wyznaczymy jeszcze $S_{k_{UU}}^{V(3)}$. Otrzymamy po podstawieniu wartości liczbowych:

$$S_{k_{UU}}^{V(3)} = - \frac{3 \cdot 10^3}{100 \cdot (100 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3)} = - \frac{3 \cdot 10^3}{100 \cdot 103 \cdot 10^3} = -0.0029.$$

Zadanie 6.58. Ponieważ w obwodzie z zadania 6.42 występuje nieliniowy rezystor sterowany napięciem (rys. 6.42b), można modelować go podobwodem prezentowanym szczegółowo w zadaniu 3.52.

Łatwo sprawdzić, że podobwód (złożony z trzech gałęzi) modelujący charakterystykę elementu nieliniowego z rys. 6.42b ma postać (i wartości elementów) jak na rys. 6.58.1. Podobwód ten oznaczmy przez T1, a jego opis przedstawia się następująco:

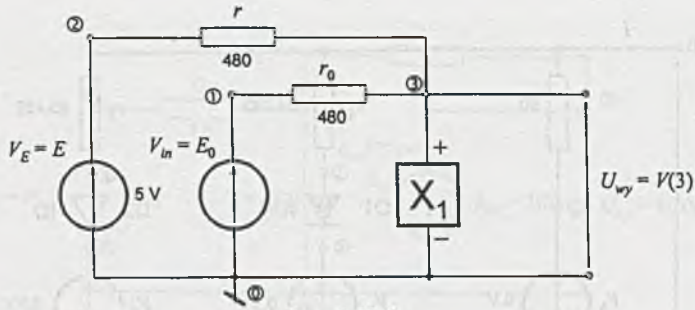


Rys. 6.58.1

```
.SUBCKT      T1      1      7
r0           1      2      50
V0           2      7      DC      0
r1           1      3      -34.783
D1           3      4      IDN
V1           4      7      0.1
r2           1      5      63.492
D2           5      6      ID
V2           6      7      0.3
.MODEL      IDN      D      Is = -1E-14      N = 0.001
.MODEL      ID      D      Is = 1E-14      N = 0.001
.ENDS
```

Jeśli cały obwód z rys. 6.42a przedstawimy jak na rys. 6.58.2, na którym podobwód modelujący element nieliniowy oznaczono przez X1, to dane wejściowe do programu SPICE, pozwalające na uzyskanie interesujących fragmentów charakterystyki, będą miały postać:

```
zadanie 6.58
Vin           1      0      DC      0
VE           2      0      5
r0           1      3      480
r            2      3      480
X1           3      0      T1
.DC          Vin    -4.2    -3.6    0.05
.PROBE      V(3)
.SUBCKT      T1      1      7
.
.
.ENDS
.END
```

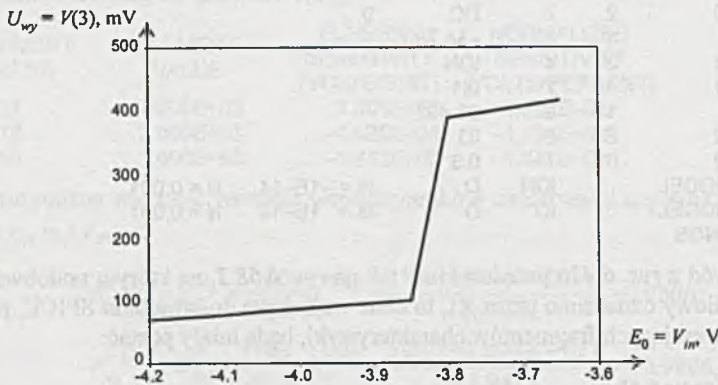


Rys. 6.58.2

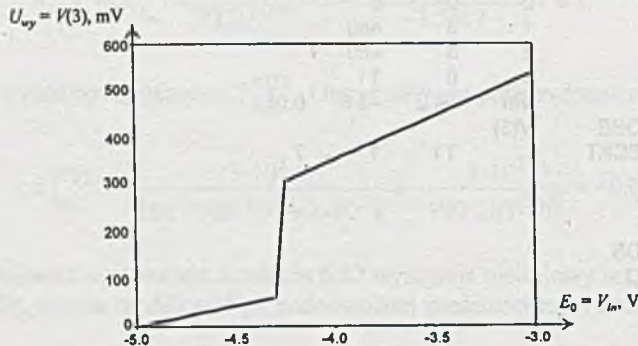
Jeśli chcemy również uzyskać charakterystykę przy rosnącej wartości napięcia polaryzacji $E_0 = V_{in}$, to należy zmienić linijkę z „z” na następującą:

DC Vin -3.0 -5.0 -0.05

Otrzymane charakterystyki $U_{wy} = f(E_0) = V(3)$ przedstawiono na rys. 6.58.3 i 6.58.4.



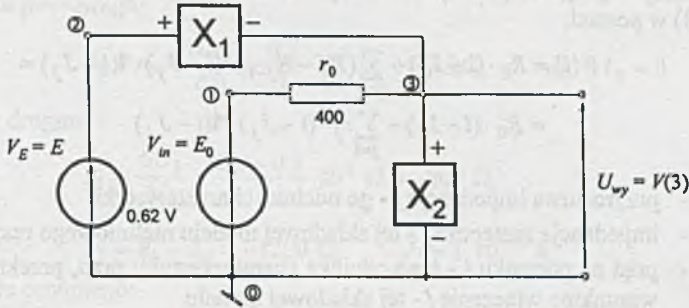
Rys. 6.58.3



Rys. 6.58.4

Łatwo wyjaśnić, obserwując wykres na rys. 6.42.1, dlaczego występuje różnica charakterystyk na rys. 6.58.3 i 6.58.4.

Zadanie 6.59. Elementy nieliniowe występujące w obwodzie z zadania 6.43 są identyczne z elementem nieliniowym występującym w poprzednim zadaniu. Można więc również do ich opisu wykorzystać podukład T1 skonstruowany dla potrzeb poprzedniego przykładu. Jeśli ozna-



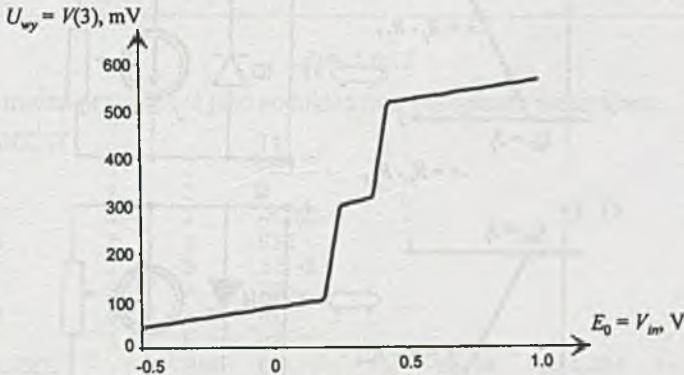
Rys. 6.59.1

czymy podukłady modelujące elementy nieliniowe D1 i D2 przez X1 i X2, to tematowy obwód można przedstawić jak na rys. 6.59.1 a dane wejściowe do programu będą miały następującą postać:

```

zadanie 6.59
Vin      1      0      DC      0
VE       2      0      0.62
X1       2      3      T1
X2       3      0      T1
ro       1      3      400
.DC      Vin    -0.5    1.0      0.01
.PROBE   V(3)
.SUBCKT      T1      1      7
      opisyany w zadaniu 6.58
.ENDS
.END
    
```

Uzyskaną charakterystykę przedstawiono na rys. 6.59.2.



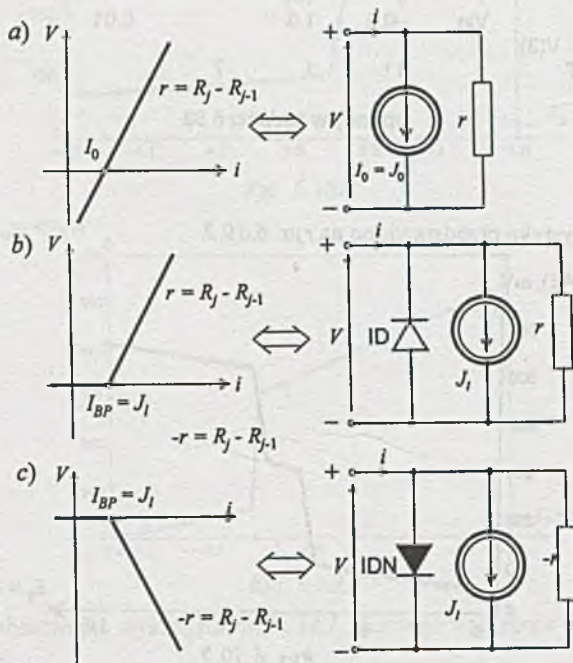
Rys. 6.59.2

Zadanie 6.60. Wykorzystując, analogicznie jak w zadaniu 3.52, do budowy nieliniowego aproksymowanego odcinkami prostej modelu rezystora sterowanego prądowo (rys. 6.44b, str. 90) zależności opisanej w [25], a zapisanej w rozwiązaniu zadania 3.52 jako równanie (1), otrzymamy równania (3) w postaci:

$$\begin{aligned} V(i) &= R_0 \cdot (i - I_0) + \sum_{j=1} (R_j - R_{j-1}) \cdot (i - J_j) \cdot \mathbf{1}(i - J_j) = \\ &= R_0 \cdot (i - I_0) + \sum_{j=1} r_j \cdot (i - J_j) \cdot \mathbf{1}(i - J_j) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: R_j - przyrostowa impedancja j -go odcinka charakterystyki,
 r_j - impedancja zastępcza j -tej składowej modelu nieliniowego rezystora,
 $I_j = J_j$ - prąd na początku j -tego odcinka charakterystyki; prąd, przekroczenie którego warunkuje włączenie j -tej składowej modelu.

Podobnie jak dla rezystora sterowanego napięciem opisanego w zadaniu 3.52, również w modelu nieliniowego rezystora sterowanego prądem można wyróżnić trzy rodzaje elementów składowych. Przedstawiono je, wraz z odpowiadającymi im podmodelami elektrycznymi, na rys. 6.60.1. Występujące w tych podmodelach idealne diody (ID) modeluje się w programie SPICE przez przyjęcie małej wartości prądu nasycenia I_s oraz małej wartości współczynnika emisji N . Dla idealnej diody „negatywnej” (IDN), skojarzonej z ujemną opornością $-r$, przyjmuje się małą (co do modułu) ujemną wartość prądu nasycenia I_s oraz małą wartość współczynnika emisji N .



Rys. 6.60.1

Prześledźmy tworzenie części składowych podobwołu opisującego element nieliniowy N1 o charakterystyce przedstawionej na rys. 6.44b (str. 90, po lewej stronie). Na charakterystyce tej można wyróżnić trzy przedziały.

Dla przedziału pierwszego:

$$R_0 = r_0 = \frac{\Delta U_1}{\Delta I_1} = \frac{0.7}{1} \cdot 10^3 \Omega = 0.7 \text{ k}\Omega, \quad J_0 = I_0 = 0.$$

W przedziale drugim:

$$R_1 = \frac{\Delta U_1}{\Delta I_1} = \frac{0.2 - 0.7}{1} \cdot 10^3 \Omega = -500 \Omega,$$

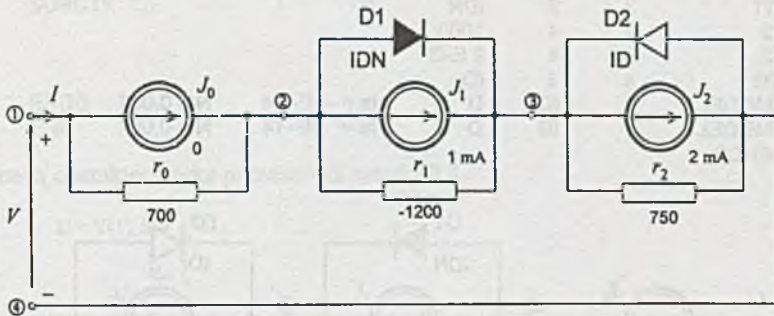
$$r_1 = R_1 - R_0 = -1200 \Omega, \quad J_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

Dla przedziału ostatniego:

$$R_2 = \frac{\Delta U_1}{\Delta I_1} = \frac{0.7 - 0.2}{4 - 2} \cdot 10^3 \Omega = 250 \Omega, \quad r_2 = R_2 - R_1 = 750 \Omega,$$

$$J_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

Z równania (3) wynika, że model zastępczy, w postaci podukładu zastępczego, uzyskuje się łącząc szeregowo podukłady (podmodele) modelujące poszczególne przedziały charakterystyki. Tak więc element nieliniowy N1 o charakterystyce przedstawionej na rys. 6.44a (str. 90) można zamodelować układem przedstawionym na rys. 6.60.2.



Rys. 6.60.2

Obwód ten można przedstawić jako podukład (np. T1) opisany następująco:

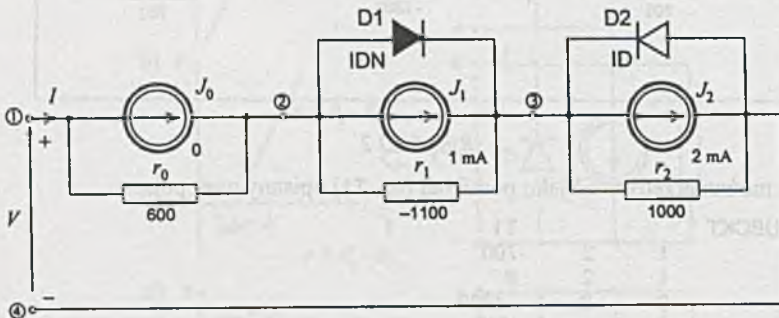
.SUBCKT	1	2	T1	1	4
r0	1	2	700		
I0	1	2	0		
r1	3	2	-1200		
D1	2	3	IDN		
I1	2	3	1 E-3		
r2	3	4	750		
D2	4	3	ID		
I2	3	4	2 E-3		
.MODEL		IDN	D	Is = -1E-14	N = 0.001
.MODEL		ID	D	Is = 1E-14	N = 0.001
.ENDS					

Dla sprawdzenia poprawności obliczeń parametrów podukładu można zdjąć jego charakterystykę. Dane do programu (SPICE) do uzyskania tej charakterystyki mogą mieć, jeśli oznaczymy podukład przez X1, następującą postać:

```
dane do program do określenia charakterystyki V = f(I)
podobwodu T1
X1      1      0      T1
lin     2      1      DC      0
.DC     lin     0      5E-3    5E-5
.PROBE  V(lin)
.SUBCKT T1      1      4
.
.
.ENDS
.END
```

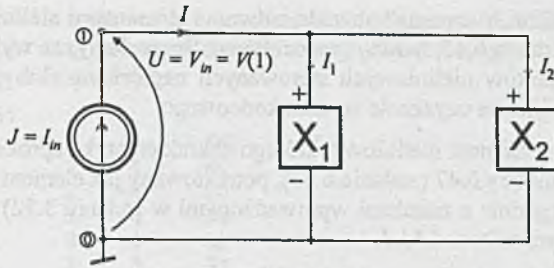
Identyczne postępowanie przy tworzeniu podukładu modelującego drugi element nieliniowy N2 (rys. 6.44b, str. 90) prowadzi do układu przedstawionego na rys. 6.60.3 i opisanego, jako podukład T2, przez następującą sekwencję danych:

```
.SUBCKT T2      1      4
r0      1      2      600
I0      1      2      0
r1      3      2      -1100
I1      2      3      1 E-3
D1      2      3      IDN
r2      3      4      1000
I2      3      4      2 E-3
D2      4      3      ID
.MODEL   IDN      D      Is = -1E-14      N = 0.001
.MODEL   ID      D      Is = 1E-14      N = 0.001
.ENDS
```



Rys. 6.60.2

Tematowy obwód z rys. 6.44a (str. 90) można przedstawić w postaci jak na rys. 6.60.4. Na rysunku tym opisano elementy nieliniowe N1 i N2, zamodelowane przez podukłady T1 i T2, jako X1 i X2.



Rys. 6.60.4

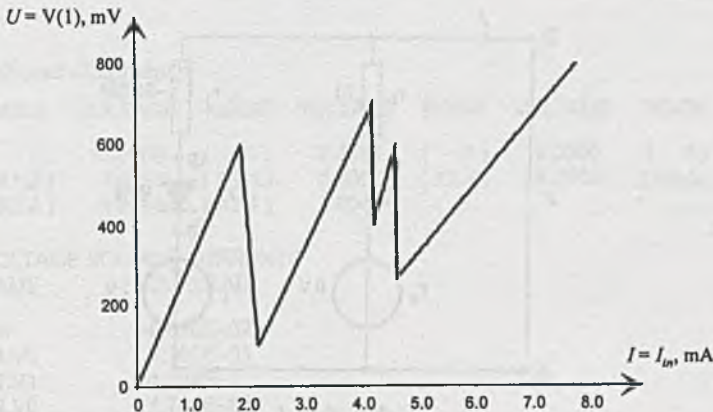
Dane pozwalające na uzyskanie charakterystyki $U = f(I_{in})$ obwodu nieliniowego przedstawionego na rys. 6.60.4 mają postać:

zadanie 6.60

```

Iin      1      0      0
X1       1      0      T1
X2       1      0      T2
.DC      Iin    0      8 m      0.01 m
.PROBE   V(1)
.SUBCKT T1      1      4
.
.
.ENDS
.SUBCKT T2      1      4
.
.
.ENDS
.END
    
```

Otrzymaną charakterystykę przedstawia rys. 6.60.5.



Rys. 6.60.5

Zadanie 6.61. Analiza „klasyczna” obwodu z dwoma elementami nieliniowymi jest, jak przekonuje rozwiązanie zadania 6.47, bardzo pracochłonna. Sprawdźmy, że wykorzystanie programu SPICE i modeli elementów nieliniowych sterowanych napięciowo (lub prądowo) pozwoli na szybsze i mniej pracochłonne uzyskanie wyniku końcowego.

Łatwo sprawdzić, że element nieliniowy, którego charakterystyka aproksymowana odcinkowo przedstawiona jest w tablicy 6.47 (zadanie 6.47), potraktowany jak element nieliniowy sterowany napięciowo, można (zgodnie z zasadami wprowadzonymi w zadaniu 3.52) zamodelować podobodem przedstawionym na rys. 6.61.1.

Parametry tego podobwodu:

- dla pierwszego przedziału ($U \in [0, 1]$ V)

$$G_0 = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{0.04}{1} \text{ S} = 40 \text{ mS}, \quad r_0 = \frac{1}{G_0} = 25 \, \Omega, \quad V_0 = 0,$$

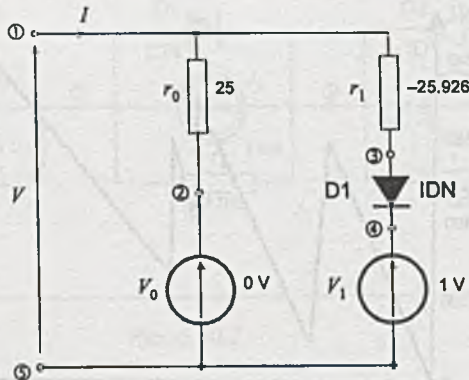
- dla drugiego przedziału ($U \geq 1$ V)

$$G_1 = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{0.05 - 0.04}{8 - 1} \text{ S} = 1.429 \text{ mS}, \quad g_1 = G_1 - G_0 = -38.571 \text{ mS},$$

$$r_1 = \frac{1}{g_1} = -25.926 \, \Omega, \quad V_1 = 1 \text{ V}$$

oraz jego opis:

```
.SUBCKT      T1  1      5
r0           1  2      25
V0           2      5      DC      0
r1           1  3      -25.926
D1           3  4      IDN
V1           4  5      1
.MODEL      IDN  D      Is=-1E-14  N=0.001
.ENDS
```

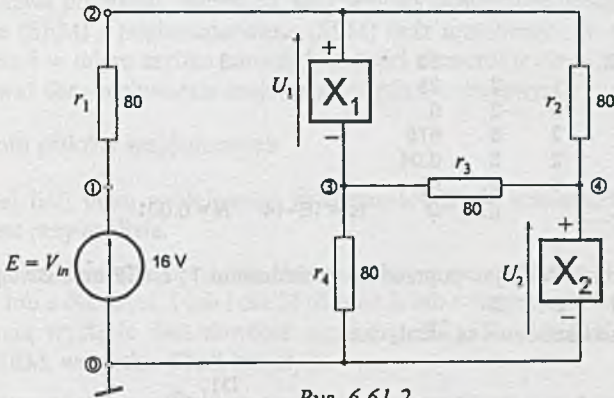


Rys. 6.61.1

Jeśli tematowy obwód z zadania 6.47, przedstawimy jak na rys. 6.61.2 i oznaczymy na nim elementy nieliniowe: pierwszy jako podukład X1, a drugi jako podukład X2, to dane wejściowe do programu SPICE mogą mieć postać:

zadanie 6.61

```
Vin      1      0      DC      16
r1       2      1      80
r2       2      4      80
r3       3      4      80
r4       3      0      80
X1       2      3      T1
X2       4      0      T1
.PRINT   I(Vin)      DC
.SUBCKT  T1          1      5
.
.
.ENDS
.END
```



Rys. 6.61.2

Z wyników obliczeń (fragment):

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	16.0000	(2)	8.4081	(3)	4.0000	(4)	4.4081
(X1.2)	4.0000	(X1.4)	5.0008	(X1.4)	5.0000	(X2.2)	0.0000
(X2.3)	1.0008	(X2.4)	1.0000				

VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME CURRENT

```
Vin      -9.490E-02
X1.V0    1.763E-01
X1.V1    -1.314E-1
X2.V0    1.763E-01
X2.V1    -1.314E-01
```

TOTAL POWER DISSIPATION 1.78E+00 WATS

stąd wyniki końcowe

$$U_1 = V(2) - V(3) = 8.4081 - 4.0000 = 4.4081 \text{ V},$$

$$U_2 = V(4) = 4.4081 \text{ V}.$$

Jeśli potraktujemy element nieliniowy jak element sterowany prądowo, to można go (zgodnie z zasadami wprowadzonymi w zadaniu 6.60) zamodelować podobwodem przedstawionym na rys. 6.61.3.

Parametry tego podobwodu:

- dla pierwszego przedziału ($I \in [0, 0.04] \text{ A}$)

$$R_0 = r_0 = \frac{\Delta U}{\Delta I} = 25 \Omega, \quad I_0 = J_0 = 0,$$

- dla drugiego przedziału ($I \geq 0.04 \text{ A}$)

$$R_1 = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{8-1}{0.05-0.04} = 700 \Omega, \quad r_1 = R_1 - R_0 = 675 \Omega, \quad J_1 = 0.04 \text{ A}$$

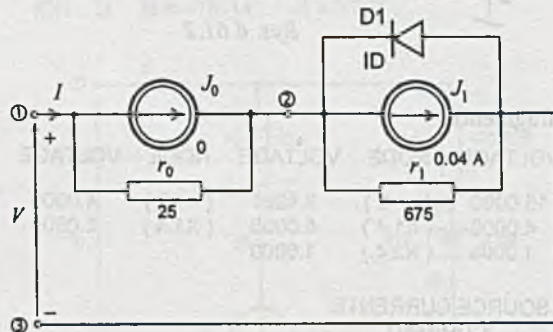
oraz jego opis:

```
.SUBCKT T2 1 3
r0 1 2 25
I0 1 2 0
r1 2 3 675
I1 2 3 0.04
D1 3 2 ID
.MODEL ID D Is=1E-14 N=0.001
.ENDS
```

Dane do programu SPICE jak poprzednio ze zmianami T1 na T2 oraz zastąpienie .SUBCKT T1

1 5 przez .SUBCKT T2 1 3.

Oczywiście wyniki końcowe są identyczne.



Rys. 6.61.3

ZAŁĄCZNIK

OPIS PROGRAMU ALINIES '95

(opracował mgr inż. Andrzej Kukielka)

Program ALINIES '95 (Analiza Liniowych NIesterowanych obwodów prądu Stałego) jest kolejną wersją programu ALINIES tworzonego w Zakładzie Teorii Obwodów i Sygnałów [3], [1]. Program ten służy do obliczania wartości potencjałów węzłowych, prądów płynących w gałęziach, a także do określania mocy wydawanej bądź pobieranej przez poszczególne elementy obwodu.

Program ten został napisany w języku Turbo Pascal 6.0 i skompilowany na procesorze 80286. Do uruchomienia wymaga komputera klasy AT z 1 MB pamięci RAM oraz jak najefektywniej zagospodarowanej pamięci konwencjonalnej (program działa poprawnie przy 530 kB pamięci konwencjonalnej). Program ALINIES '95 może dokonywać analizy obwodów złożonych z 50 węzłów oraz 90 gałęzi.

Jak sugeruje nazwa programu, można za jego pomocą analizować obwody zawierające siły elektromotoryczne (SEM) i prądomotoryczne (SPM) oraz rezystancje. W tej wersji programu można wielokrotnie i w miarę szybko zmieniać wartości elementów obwodu bądź charakter ich połączenia, ponieważ dane o obwodzie znajdują się w pliku wejściowym.

Zasady tworzenia plików wejściowych

1. W pierwszej linii pliku wejściowego musi znajdować się komentarz, ponieważ linia ta pomijana jest przy analizie.
2. Aby kolejne linie zostały poprawnie zinterpretowane, muszą zaczynać się od liter zastrzeżonych - E lub e dla SEM, I lub i dla SPM oraz R lub r dla rezystorów. Po wymienionych literach mogą wystąpić dwa dowolne znaki (np. E2, i23, Rwe). Kolejność deklaracji: wszystkie SEM, wszystkie SPM, rezystory.
3. Po zadeklarowaniu elementu należy podać węzeł początkowy oraz węzeł końcowy, a także jego bezwymiarową wartość (np. E3 2 0 19, R22 4 6 1000). Nie są dozwolone skróty typu 300k, 3m, 20M itp. W przypadku deklarowania wartości w postaci ułamka dziesiętnego należy używać kropki (np. e1 12 3 5.5, Iwe 4 6 0.3). Dozwolone są komentarze, które mogą występować w tej samej linii po deklaracji elementu.

UWAGA !!

Węzłem początkowym dla sił elektromotorycznych SEM i prądomotorycznych SPM powinien być węzeł, do którego skierowana jest taka siła. Jeżeli ta konwencja zostanie zmieniona, to należy podać ujemną wartość siły (np. E2 3 0 10 $\hat{=}$ E2 0 3 -10, Iwy 5 2 0.5 $\hat{=}$ Iwy 2 5 -0.5).

4. Na końcu pliku musi znajdować się słowo kluczowe END lub end. Plik wejściowy może zawierać parametry tylko jednego obwodu.

UWAGA!!

Każdy element *musi* znajdować się między kolejnymi węzłami! W zbiorze wejściowym *musi* istnieć węzeł odniesienia 0 (zero)!

Zbiór z danymi wejściowymi (plik wejściowy) musi znajdować się w katalogu bieżącym, ponieważ tylko ten katalog jest przeszukiwany, gdy jako dana wejściowa podana zostanie przez użytkownika nazwa tego pliku. Zbiór wynikowy utworzony zostanie w katalogu bieżącym; nazwę pliku wynikowego podaje użytkownik.

Dopuszczalne jest nadawanie ww. plikom rozszerzeń, natomiast ich nazwy ograniczone są wymaganiem systemu DOS.

Wraz z nazwą plików nie można umieszczać ewentualnej ścieżki dostępu, ponieważ będzie ona błędnie interpretowana przez program.

Zbiory wejściowe dla programu ALINIES '95 mogą być tworzone w formacie ASCII za pomocą dowolnego edytora tekstów.

Uruchamianie programu

- 1) Program uruchamiany jest za pomocą pliku **alinies.exe**.
- 2) Po uruchomieniu programu jako dane wejściowe należy podać nazwę pliku wejściowego (utworzonego zgodnie z podanymi wyżej zasadami).
- 3) Następnie jako kolejne dane dla programu podaje się nazwę pliku wyjściowego. W pliku o tej nazwie zapisane zostaną wyniki obliczeń.

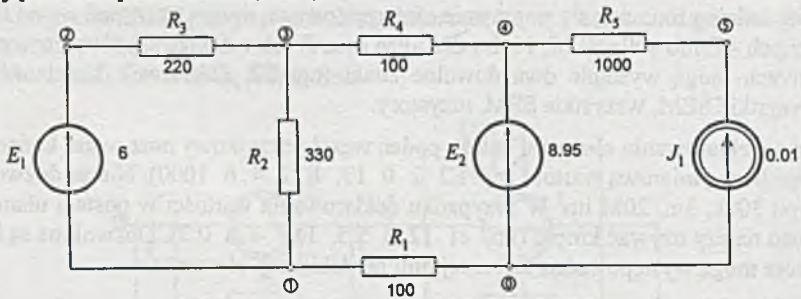
UWAGA !!

Jeżeli w danym katalogu istniał plik o identycznej jak podano nazwie, to zostanie on usunięty i na jego miejsce pojawi się nowy zbiór wynikowy.

Przykład

Program testowano wykorzystując również przykłady z tego zbioru zadań.

Przygotowanie danych wejściowych (pliku wejściowego) oraz otrzymane wyniki przedstawiemy analizując obwód przedstawiony na rys. Z1.



Rys. Z1

Plik wejściowy może mieć postać:

zadanie - opis obwodu z rys. Z1

E1	2	1	6	
E2	4	0	8.95	{siła elektromotoryczna E2 0 wartości 8.95 V między węzłami 4 i 0}
I1	5	0	0.01	
R1	1	0	100	
R2	1	3	330	
R3	2	3	220	
R4	4	3	100	
R5	5	4	1000	
END				

Zawartość pliku wyjściowego:

ALINIES 1995.7.16

zadanie - opis obwodu z rys. Z1

E1	2	1	6	
E2	4	0	8.95	{siła elektromotoryczna E2 o wartości 8.95 V między węzłami 4 i 0}
I1	5	0	0.01	
R1	1	0	100	
R2	1	3	330	
R3	2	3	220	
R4	4	3	100	
R5	5	4	1000	

***** Wartości potencjałów węzłowych *****

V1	1.61145
V2	7.61145
V3	7.33855
V4	8.95000
V5	18.95000

ELEMENTY BIERNE

	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC TRACONA
	WP	WK	I	U	P
R1	1	0	0.01611	1.61145	0.02597
R2	1	3	-0.01735	-5.72711	0.09939
R3	2	3	0.00124	0.27289	0.00034
R4	4	3	0.01611	1.61145	0.02597
R5	5	4	0.01000	10.00000	0.10000

ELEMENTY AKTYWNE

	WEZLY		PRAD	NAPIECIE	MOC TRACONA
	WP	WK	I	U	P
E1	2	1	0.00124	6.00000	0.00744
E2	4	0	0.00611	8.95000	0.05472
I1	5	0	0.01000	18.95000	0.18950

Godzina rozpoczęcia obliczeń : 21:53:6.15

Godzina zakończenia obliczeń : 21:53:6.86

Czas obliczeń wynosi :

minuty, : 0

sekundy, : 0

setne sekundy, : 71

***** KONIEC WYDRUKU *****

Uwagi końcowe

Zasady działania programu przedstawiono w [3] i [1]. Wykorzystano też przy pisaniu programu podręcznik [26].

Program ALINIES '95 oraz jego krótki opis dostępny jest na serwerze Instytutu Elektroniki pod adresem [27] <http://alfa.iele.polsl.gliwice.pl/alinies>.

Wszelkie uwagi na temat działania programu ALINIES '95, proszę kierować bezpośrednio do Pana mgr inż. Andrzeja Kukielki (Instytut Elektroniki p. 819) lub poprzez pocztę elektroniczną do użytkownika KUKIELKA poczta serwera BOSS.

DODATEK

Tablica D1

Macierze i elementy macierzy czwórników







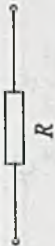
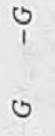
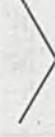
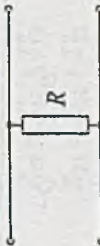
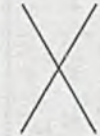
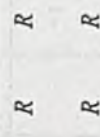
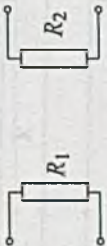
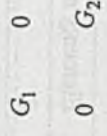
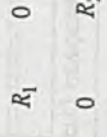

Układ równań czwórnika	Definicje elementów macierzy czwórnika
<p>Układ admitancyjny</p> $\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ <p>$I = YU$ Y – macierz admitancyjna czwórnika</p>	$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big _{U_2=0}$ $Y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \Big _{U_1=0}$ $Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big _{U_2=0}$ $Y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big _{U_1=0}$
<p>Układ impedancyjny</p> $\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ <p>$U = ZI$ Z – macierz impedancyjna czwórnika</p>	$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big _{I_2=0}$ $Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big _{I_1=0}$ $Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big _{I_2=0}$ $Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big _{I_1=0}$

c.d. tablicy D1

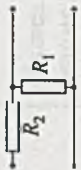

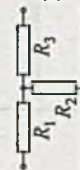
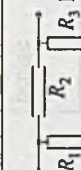
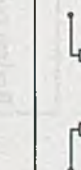

Układ równań czwornika	Definicje elementów macierzy czwornika
<p>Układ mieszany (hybrydowy)</p> $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = H \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ <p>H – macierz hybrydowa czwornika</p>	$H_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big _{U_2=0}$ $H_{12} = \frac{U_1}{U_2} \Big _{I_1=0}$ $H_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big _{U_2=0}$ $H_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big _{I_1=0}$
<p>Układ mieszany (łańcuchowy)</p> $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$ <p>A – macierz łańcuchowa czwornika</p>	$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} \Big _{I_2=0}$ $A_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big _{U_2=0}$ $A_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big _{I_2=0}$ $A_{22} = \frac{I_1}{I_2} \Big _{U_2=0}$

Tablica D2

Elementy macierzy czwórników prostych

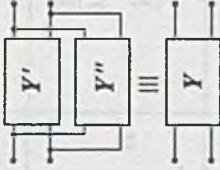
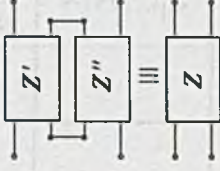
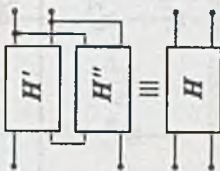
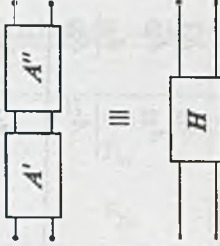
Rodzaj połączenia	Czwórnik	Elementy macierzy czwórnika			
		Y	Z	H	A
proste				0 1	1 0
	Rys. 1			-1 0	0 -1
krzyżowe				0 -1	-1 0
	Rys. 2			1 0	0 1
oporowe wzdłużne				R 1	1 - R
	Rys. 3	G - G	$-G$ G	-1 0	0 -1
oporowe poprzeczne				R R	1 0
	Rys. 4	G_1 0	R_1 0	-1 0	G -1
U izolowane				R_1 0	
	Rys. 5	0 G_2	0 R_2	0 G_2	

c.d. tablicy D2

Rodzaj połączenia	Czwórnik	Elementy macierzy czwórnika			
		Y	Z	H	A
┐		G_1	$R_1 + R_2$	R_1	$\frac{R_1 + R_2}{R_1}$
		$-G_1$ $G_1 + G_2$	R_2 R_2	-1 G_2	$-R_1$ G_2 -1
┌		$G_1 + G_2$	R_2	$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	1
		$-G_1$ G_1	R_2 $R_1 + R_2$	$-\frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $\frac{1}{R_1 + R_2}$	$-\frac{R_1 + R_2}{R_2}$ G_2
└		$\frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}$	$R_1 + R_2$	$R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$	$\frac{R_1 + R_2}{R_2}$
		$-\frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$ $\frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}$	R_2 R_2 $R_2 + R_3$	$\frac{R_2}{R_2 + R_3}$ $-\frac{R_2}{R_2 + R_3}$ $\frac{1}{R_2 + R_3}$	$\frac{R_1 R_2}{R_2}$ G_2 $\frac{R_2 + R_3}{R_2}$
┘		$G_1 + G_2$	$\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$	$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{R_2 + R_3}{R_2}$
		$-G_2$ $G_2 + G_3$	$-\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ $\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$	$-\frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$ $\frac{R_1}{R_1 + R_2}$	$-R_2$ $\frac{R_1 + R_2}{R_1}$
┘		G_1	R_1	R_1	
		0 G_2	0 R_2	0 G_2	

Tablica D3

Połączenia czwórników

Równoległe	Szeregowe	Szeregowo - równoległe	Kaskadowe (łańcuchowe)
			
$Y = Y' + Y''$ $Y_{11} = Y'_{11} + Y''_{11}$ $Y_{12} = Y'_{12} + Y''_{12}$ $Y_{21} = Y'_{21} + Y''_{21}$ $Y_{22} = Y'_{22} + Y''_{22}$	$Z = Z' + Z''$ $Z_{11} = Z'_{11} + Z''_{11}$ $Z_{12} = Z'_{12} + Z''_{12}$ $Z_{21} = Z'_{21} + Z''_{21}$ $Z_{22} = Z'_{22} + Z''_{22}$	$H = H' + H''$ $H_{11} = H'_{11} + H''_{11}$ $H_{12} = H'_{12} + H''_{12}$ $H_{21} = H'_{21} + H''_{21}$ $H_{22} = H'_{22} + H''_{22}$	$A = A' + A''$ $A_{11} = A'_{11}A''_{11} + A'_{12}A''_{21}$ $A_{12} = A'_{11}A''_{12} + A'_{12}A''_{22}$ $A_{21} = A'_{21}A''_{21} + A'_{22}A''_{21}$ $A_{22} = A'_{21}A''_{22} + A'_{22}A''_{22}$

Tablica D4

Przeliczanie macierzy czwórników

	Y	Z	H	A
Y	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ \Delta Z & \Delta Z \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -H_{12} \\ H_{11} & -H_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{22} & -\Delta A \\ A_{12} & -A_{12} \end{matrix}$
Z	$\begin{matrix} Y_{11} & -Y_{12} \\ \Delta Y & \Delta Y \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta H & -H_{12} \\ H_{22} & -H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{11} & \Delta A \\ A_{21} & A_{21} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} 1 & -Y_{12} \\ Y_{11} & \Delta Y \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta Z & Z_{12} \\ Z_{22} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{12} & \Delta A \\ A_{22} & A_{22} \end{matrix}$
A	$\begin{matrix} Y_{22} & -1 \\ -Y_{21} & -Y_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta Z & \Delta Z \\ Z_{21} & Z_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\Delta H & -H_{11} \\ -H_{21} & -H_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$

$$\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

$$\Delta H = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}$$

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$$

$$\Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$$

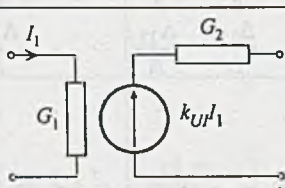
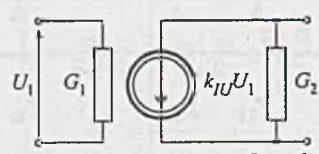
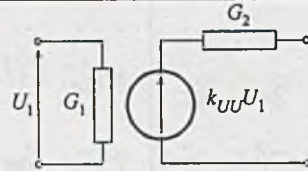
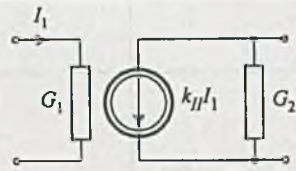
Przeliczanie macierzy n -biegunników

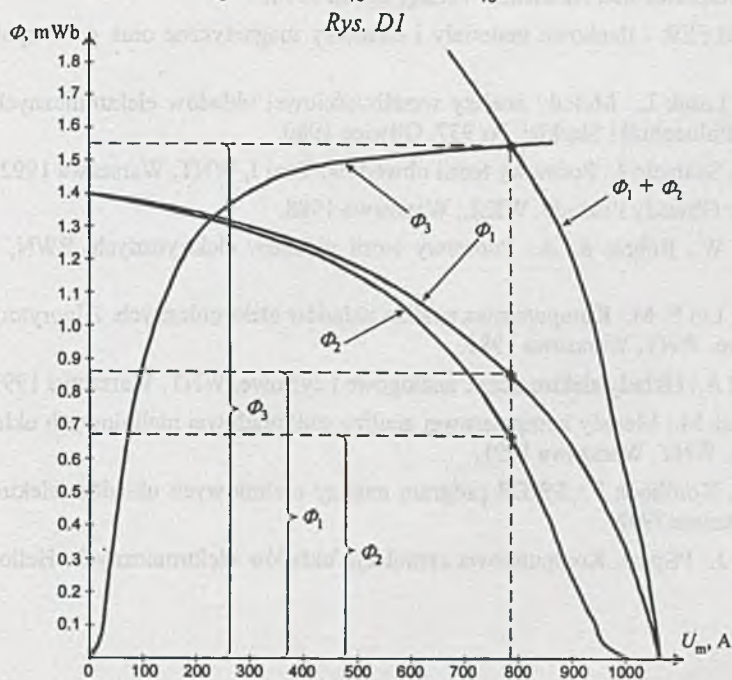
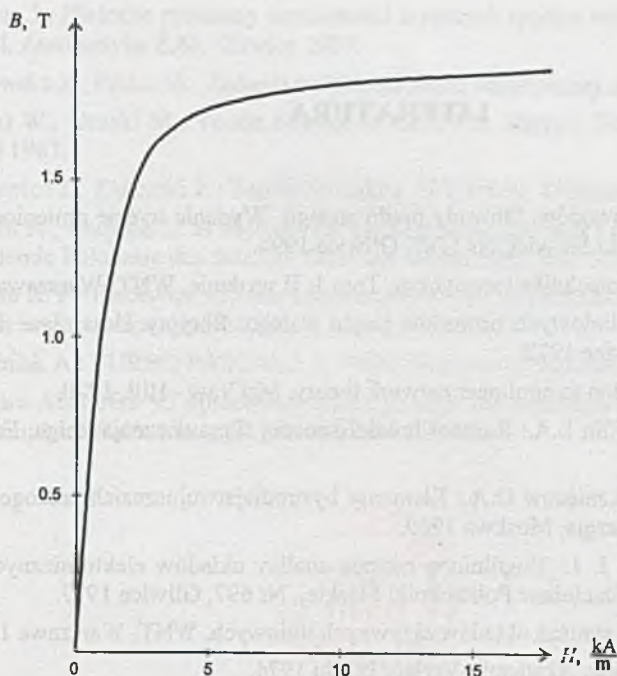
Tablica D5

	Y	Z
Y	$ \begin{array}{ccccc} Y_{11} & Y_{12} & \cdot & \cdot & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdot & \cdot & Y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdot & \cdot & Y_{nn} \end{array} $	$ \begin{array}{ccccc} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & \frac{\Delta_{21}}{\Delta} & \cdot & \cdot & \frac{\Delta_{n1}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta} & \cdot & \cdot & \frac{\Delta_{n2}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} & \frac{\Delta_{2n}}{\Delta} & \cdot & \cdot & \frac{\Delta_{nn}}{\Delta} \end{array} $
Z	$ \begin{array}{ccccc} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & \frac{\Delta_{12}}{\Delta} & \cdot & \cdot & \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{21}}{\Delta} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta} & \cdot & \cdot & \frac{\Delta_{2n}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\Delta_{n1}}{\Delta} & \frac{\Delta_{n2}}{\Delta} & \cdot & \cdot & \frac{\Delta_{nn}}{\Delta} \end{array} $	$ \begin{array}{ccccc} Z_{11} & Z_{12} & \cdot & \cdot & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdot & \cdot & Z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdot & \cdot & Z_{nn} \end{array} $

Tablica D6

Elementy macierzy Y nieidealnych źródeł sterowanych

Nieidealne źródło sterowane	Elementy macierzy admitancyjnej Y źródła sterowanego				
 <p>Rys. 1</p>	<table border="1"> <tr> <td>G_1</td><td>0</td></tr> <tr> <td>$-k_{UI}G_1G_2$</td><td>G_2</td></tr> </table>	G_1	0	$-k_{UI}G_1G_2$	G_2
G_1	0				
$-k_{UI}G_1G_2$	G_2				
 <p>Rys. 2</p>	<table border="1"> <tr> <td>G_1</td><td>0</td></tr> <tr> <td>k_{IU}</td><td>G_2</td></tr> </table>	G_1	0	k_{IU}	G_2
G_1	0				
k_{IU}	G_2				
 <p>Rys. 3</p>	<table border="1"> <tr> <td>G_1</td><td>0</td></tr> <tr> <td>$-k_{UU}G_2$</td><td>G_2</td></tr> </table>	G_1	0	$-k_{UU}G_2$	G_2
G_1	0				
$-k_{UU}G_2$	G_2				
 <p>Rys. 4</p>	<table border="1"> <tr> <td>G_1</td><td>0</td></tr> <tr> <td>$k_{II}G_1$</td><td>G_2</td></tr> </table>	G_1	0	$k_{II}G_1$	G_2
G_1	0				
$k_{II}G_1$	G_2				



Rys. D2



LITERATURA

- [1] Macura A.: Teoria obwodów. Obwody prądu stałego. Wydanie trzecie zmienione, Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej, Nr 1789, Gliwice 1994.
- [2] Cholewicki T.: Elektrotechnika teoretyczna, Tom 1, II wydanie, WNT, Warszawa 1970.
- [3] Chojcan J.: Analiza liniowych obwodów prądu stałego. Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej. Nr 385, Gliwice 1972.
- [4] Chua L. O.: Introduction to nonlinear network theory. McGraw - Hill, 1970.
- [5] Kalantorov P. L., Cejtin L.A.: Rasczot induktiwnostiej. Sprawocznaja kniga, Energia. Moskwa 1970.
- [6] Kuzniecowa A. A., Kuzniecowa O.A.: Elementy bystrodejstwujuščich analogo-cyfrowych preobrazowatelej. Energia, Moskwa 1969.
- [7] Lasek L., Witkowski J. J.: Uogólniona metoda analizy układów elektronicznych. Wyd. II zmienione, Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej, Nr 697, Gliwice 1977.
- [8] Mitra S. K.: Analiza i synteza układów aktywnych liniowych. WNT, Warszawa 1974.
- [9] Pauli W.: Vierpoltheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1974.
- [10] Katalog: POLFER - tlenkowe materiały i elementy magnetyczne oraz podzespoły magnetyczne.
- [11] Chojcan J., Lasek L.: Metody analizy wrażliwościowej układów elektronicznych. Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej, Nr 937, Gliwice 1980.
- [12] Osiowski J., Szabatin J.: Podstawy teorii obwodów. Tom I, WNT, Warszawa 1992.
- [13] Papoulis A.: Obwody i układy. WKiŁ, Warszawa 1988.
- [14] Director S. W., Rohrer R. A.: Podstawy teorii układów elektrycznych. PWN, Warszawa 1976.
- [15] Chua L. O., Lin P. M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. Algorytmy i metody obliczeniowe. WNT, Warszawa 1981.
- [16] Filipkowski A.: Układy elektroniczne analogowe i cyfrowe. WNT, Warszawa 1993.
- [17] Tadeusiewicz M.: Metody komputerowej analizy stałoprądowej nieliniowych układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1991.
- [18] Porębski J., Korohoda P.: SPICE program analizy nieliniowych układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1992.
- [19] Izydorczyk J.: PSpice. Komputerowa symulacja układów elektronicznych. Helion, Gliwice 1993.

- [20] Chojcan J.: Niektóre problemy wrażliwości wyższych rzędów układów elektronicznych. ZN Pol. Śl. Automatyka Z.88, Gliwice 1987.
- [21] Cichowska Z., Pasko M.: Zadania z elektrotechniki teoretycznej. PWN, Warszawa 1985.
- [22] Wolski W., Uruski M.: Teoria obwodów. Cz. I i II. Skrypty Pol. Wrocławskiej, Wrocław 1982 i 1983.
- [23] Klonowicz Z., Zurzycki Z.: Teoria obwodów. T. I, PWN, Warszawa 1983.
- [24] Macura A., Chojcan J.: A Method for Solving Nonlinear and Linear Networks. Bulletin de l'Academie Polonaise des Science. Serie des Techniques. Vol. XX, No 2, 1972, pp. 9 - 15.
- [25] Santoro R. P.: Piecewise - Linear Modeling of I - V Characteristics with SPICE. IEEE Transaction on Education, Vol. 38, No. 2, May 1995, pp. 107 - 117.
- [26] Marciniak A.: TURBO PASCAL 5.5, PWN, Warszawa - Poznań 1990.
- [27] Program ALINIES '95 opracowany przez p. mgr. inż. Andrzeja Kukiełkę dostępny jest pod adresem: <http://alfa.ielc.posl.gliwice.pl/ALINIES>.



Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice
tel./fax (0 prefiks 32) 237-13-81
Dział Sprzedaży i Reklamy (0 prefiks 32) 237-18-48

www.wydawnictwo.polsl.gliwice.pl
wydawnictwo@polsl.gliwice.pl

Wydanie VII poprawione

Nakł. 400 + 55
Zam. 360/01

Ark. wyd. 22

Ark. druk. 21,125

Papier offset. 70x100, 80 g

Fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach, ul. Kujawska 1

**Książki Wydawnictwa Politechniki Śląskiej można nabyć
w Wydawnictwie Politechniki Śląskiej w Gliwicach
oraz w wymienionych poniżej księgarniach**

GLIWICE

- ◆ Punkt Sprzedaży - Wydział Górnictwa i Geologii Pol. Śl.,
ul. Akademicka 2
- ◆ Punkt Sprzedaży - Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki
Pol. Śl., ul. Akademicka 16
- ◆ Punkt Sprzedaży - Wydział Architektury Pol. Śl., ul. Akademicka 7
- ◆ Mercurius - ul. Konstytucji 14
- ◆ Matras - ul. Konstytucji

KATOWICE

- ◆ Punkt Sprzedaży - Wydział Metalurgii, Inżynierii Materiałowej
i Transportu Pol.Śl., ul. Krasińskiego 8
- ◆ Matras - ul. Ściegiennego 41
- ◆ Hurtownia "DIK" - ul. Dulęby 7

ZABRZE

- ◆ Punkt Sprzedaży - Wydział Organizacji i Zarządzania Pol. Śl.,
ul. Roosevelta 26

OPOLE

- ◆ Techniczna J. Szutenberg - ul. Sosnkowskiego 31

KRAKÓW

- ◆ Hurtownia "Pagina" - ul. Moniuszki 25
- ◆ Naukowa - ul. Podwale 6

GDAŃSK

- ◆ EKO-BIS - ul. Dyrekcyjna 6

WARSZAWA

- ◆ Ekonomiczna K. Leki - ul. Grójecka 67
- ◆ Techniczna - ul. Świętokrzyska 14
- ◆ MDM - ul. Piękna 31
- ◆ ORPAN - Pałac Kultury i Nauki
- ◆ Studencka - Pl. Politechniki 1

BIAŁYSTOK

- ◆ Dom Książki (Księgarnia 84) - ul. Dolistowska 3