

**POLITECHNIKA ŚLĄSKA**



**SKRYPTY UCZELNIANE**

**Nr 1960**

**JAN CHOJCAN, ANDRZEJ DRYGAJŁO,  
LUCJAN KARWAN, ANDRZEJ KOLMER**

# **ZBIÓR ZADAŃ Z TEORII OBWODÓW II**

**Wydanie IV**

**50 - LECIE  
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ**



**GLIWICE 1996**

**POLITECHNIKA ŚLĄSKA**

**SKRYPTY UCZELNIANE**

**Nr 1960**

**JAN CHOJCAN, ANDRZEJ DRYGAJŁO,  
LUCJAN KARWAN, ANDRZEJ KOLMER**

# **ZBIÓR ZADAŃ Z TEORII OBWODÓW II**

**Wydanie IV**



**50-LECIE  
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ**

**GLIWICE 1996**

MD

OPINIODAWCA  
Doc. dr inż. Zofia Cichowska

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. inż. Jan Bandrowski  
REDAKTOR DZIAŁU — Doc. dr inż. Zdzisław Pogoda  
SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Leško

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Mgr Roma Łoś



Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Śląskiej

S.45631

Skrypt przeznaczony dla studentów  
Wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki

PL ISSN 0434-0825

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej  
ul. Kujańska 3, 44-100 Gliwice

---

Nakł. 400+55	Ark. wyd. 26	Ark. druk. 27,75	Papier offset. kl. III. 70x100,8 g
Oddano do druku 10.10.95		Podpis. do druku 10.10.95	Druk ukończ. w styczniu 1996
Zam. 251/95			Cena zł 10,40 (104,000,—)

---

Skład, fotokopie, druk i oprawę  
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

4. 396/96

## SPIS TREŚCI

	Str.
PRZEDMOWA .....	5
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ .....	7
WYKAZ NAJCZĘŚCIEJ UŻYWANYCH SYMBOLI GRAFICZNYCH .....	9
I. ZADANIA .....	11
1. Indukcja elektromagnetyczna .....	13
2. Stany nieustalone w obwodach z niesinusoidalnym wymuszeniem .....	20
3. Stany ustalone w obwodach z wymuszeniami sinusoidalnymi ....	46
4. Stany nieustalone w obwodach z sinusoidalnym wymuszeniem ...	78
5. Zadania różne .....	82
II. ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI .....	91
1. Indukcja elektromagnetyczna .....	93
2. Stany nieustalone w obwodach z niesinusoidalnym wymuszeniem .....	109
3. Stany ustalone w obwodach z wymuszeniami sinusoidalnymi ....	257
4. Stany nieustalone w obwodach z sinusoidalnym wymuszeniem ...	352
5. Zadania różne .....	400
Tablica funkcji wykładniczej $e^{-x}$ .....	441
Tablica transformat Laplace'a funkcji czasowych .....	442
LITERATURA .....	443





## PRZEDMOWA DO WYDANIA I

Skrypt jest drugą częścią trzytomowego zbioru zadań z teorii obwodów [5], [6] i powstał w oparciu o ćwiczenia tablicowe z teorii obwodów i sygnałów prowadzonych dla studentów Wydziału Automatyki i Informatyki. Może być też wykorzystany przez studentów innych wydziałów jako pomoc w opanowaniu podstaw elektrotechniki.

W części I podano treść zadań. Zadania z rozwiązaniami zaznaczono pionową kreską na lewym marginesie. Część II zawiera rozwiązanie wybranych zadań i odpowiedzi do pozostałych.

W każdym z pięciu rozdziałów starano się uporządkować zadania od najprostszych do bardziej złożonych i podać rozwiązania zadań typowych. Zadania z indukcji magnetycznej zebrano w rozdziale pierwszym. Rozdział drugi poświęcony jest analizie stanów nieustalonych w obwodach z wymuszeniami niesinusoidalnymi. Analiza stanów ustalonych obwodów z wymuszeniami sinusoidalnymi jest tematem rozdziału trzeciego. Ze względu na specyfikę obliczeń zadania na obliczenia stanów nieustalonych w obwodach z wymuszeniami sinusoidalnymi zebrano w oddzielnym, czwartym, rozdziale. Ostatni rozdział poświęcony jest problemom o różnym stopniu trudności i przykładom nie mieszczącym się w poprzednich rozdziałach np. obliczenia wrażliwości.

W zbiorze podano przykłady wykorzystania programów na m.c. do analizy obwodów.

Pragniemy serdecznie podziękować prof. dr inż. Tadeuszowi Zagajewskiemu i prof. dr hab. inż. Adamowi Macurze za sugestie, zachętę i pomoc w trakcie opracowywania skryptu.

Pani doc. dr inż. Marii Jastrzębskiej dziękujemy za gruntowną recenzję oraz liczne i cenne uwagi, a Pani dr inż. Annie Skrzywan-Kosek za trud włożony w zaopiniowanie i wydanie skryptu. Miło nam podziękować Pani Marii Knapik za staranne wykonanie maszynopisu, a Panu Waldemarowi Knychowi za sporządzenie rysunków.

Autorzy

## PRZEDMOWA DO WYDANIA IV

Skrypt jest przeznaczony dla studentów studiów dziennych i wieczorowych Wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki oraz wydziałów pokrewnych. Zadania ze skryptu są ilustracją wykładów i ćwiczeń tablicowych z teorii dowodów i podstaw elektrotechniki.

Obecne wydanie jest poprawioną i uzupełnioną wersją "Zbioru zadań z teorii obwodów II", wydanego w 1992 roku.

Specjalne wyrazy wdzięczności kierujemy do Pani doc. dr inż. Zofii Cichowskiej za wnikliwą recenzję, która pozwoliła usunąć wiele usterek. Panu doc. dr inż. Zdzisławowi Pogodzie serdecznie dziękujemy za sprawne przygotowanie redakcyjne tego wydania skryptu.

Gliwice, 1995 r.

Autorzy

# WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$e, e(t)$	- napięcie źródłowe, wartość chwilowa, siła elektromotoryczna (SEM)
$E(t)$	- symboliczno-czasowa wartość SEM
$E$	- symboliczna wartość skuteczna SEM
$ E_m $	- wartość maksymalna SEM, amplituda
$ E $	- wartość skuteczna SEM
$u, u(t)$	- napięcie, wartość chwilowa
$u_u(t)$	- składowa ustalona napięcia, wartość chwilowa
$u_p(t)$	- składowa przejściowa napięcia, wartość chwilowa
$U(t)$	- symboliczno-czasowa wartość napięcia
$U$	- symboliczna wartość skuteczna napięcia
$ U_m $	- wartość maksymalna napięcia, amplituda
$ U $	- wartość skuteczna napięcia
$i, i(t)$	- prąd, wartość chwilowa
$i_u(t)$	- składowa ustalona prądu, wartość chwilowa
$i_p(t)$	- składowa przejściowa prądu, wartość chwilowa
$I(t)$	- symboliczno-czasowa wartość prądu
$I$	- symboliczna wartość skuteczna prądu
$ I_m $	- wartość maksymalna prądu, amplituda
$ I $	- wartość skuteczna prądu
$Z$	- impedancja
$R = \text{Re } Z$	- rezystancja, opór
$X = \text{Im } Z$	- reaktancja
$Y$	- admitancja
$C$	- pojemność
$L$	- indukcyjność
$M$	- indukcyjność wzajemna
$k$	- współczynnik sprzężenia magnetycznego
$K$	- transmitancja widmowa
$\varphi, \psi$	- kąt przesunięcia fazowego
$\omega, \omega_g, \omega_0$	- pulsacja, pulsacja graniczna, pulsacja rezonansowa
$f, f_g, f_0$	- częstotliwość, częstotliwość graniczna, częstotliwość rezonansowa
$P$	- moc chwilowa
$P, Q, S$	- moc czynna, bierna, pozorna
$W$	- energia
$B$	- indukcja magnetyczna



$\Phi$	- strumień magnetyczny
$\Psi$	- strumień skojarzony
$R_m$	- opór magnetyczny, reluktancja
$\mathcal{L}$	- transformacja Laplace'a
$\mathcal{L}^{-1}$	- odwrotna transformacja Laplace'a
$\mathcal{F}$	- transformacja Fouriera
$s_k$	- biegun transmitancji operatorowej
$1(t)$	- funkcja skokowa (Heaviside'a)
$\delta(t)$	- funkcja impulsowa (Diraca)
$k_{UU}, k_{UI}$	- współczynnik źródła napięciowego sterowanego
$k_{IU}, k_{II}$	- napięciem, napięciowego - prądem, prądowego - napięciem, prądowego - prądem
$\underline{Z}$	- macierz impedancyjna
$\underline{Y}$	- macierz admitancyjna
$\underline{h}$	- macierz hybrydowa
$\mu$	- przenikalność magnetyczna bezwzględna
$\mu_0$	- przenikalność magnetyczna próżni, stała magnetyczna
$\mu_r$	- przenikalność magnetyczna względna.

# WYKAZ NAJCZĘŚCIEJ UŻYWANYCH SYMBOLI GRAFICZNYCH



- źródło napięcia stałego, siła elektromotoryczna (SEM E)



- źródło napięcia zmiennego



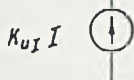
- źródło prądu stałego, siła prądomotoryczna (SPM I)



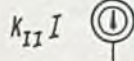
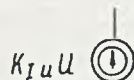
- źródło prądu zmiennego



- źródło napięciowe sterowane: napięciem  $U(k_{UU} U)$ ,  
prądem  $I(k_{UI} I)$



- źródło prądowe sterowane: napięciem  $U(k_{IU} U)$ ,  
prądem  $I(k_{II} I)$



- rezystor



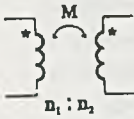
- element impedancyjny



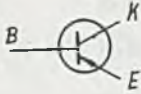
- kondensator



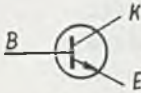
- cewka indukcyjna



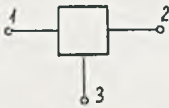
- idealny transformator



- tranzystor



- wzmacniacz operacyjny



- trójnik



- czterobiegunnik, czwórnik



- amperomierz



- woltomierz



- watomierz



- numer węzła



- numer gałęzi

# 1. Zadania

## 1. Zadania

1. Zadanie 1.1. Dany jest układ z dwoma źródłami napięcia  $E_1 = 12V$  i  $E_2 = 6V$  oraz rezystorami  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ . Należy wyznaczyć prądy  $I_1, I_2, I_3$  oraz napięcia  $U_1, U_2$  na rezystorach.



rys. 1.1

## I. ZADANIA

1. Zadanie 1.2. Dany jest układ z dwoma źródłami napięcia  $E_1 = 12V$  i  $E_2 = 6V$  oraz rezystorami  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ . Należy wyznaczyć prądy  $I_1, I_2, I_3$  oraz napięcia  $U_1, U_2$  na rezystorach.



rys. 1.2

1. Zadanie 1.3. Dany jest układ z dwoma źródłami napięcia  $E_1 = 12V$  i  $E_2 = 6V$  oraz rezystorami  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ . Należy wyznaczyć prądy  $I_1, I_2, I_3$  oraz napięcia  $U_1, U_2$  na rezystorach.

1. Zadanie 1.4. Dany jest układ z dwoma źródłami napięcia  $E_1 = 12V$  i  $E_2 = 6V$  oraz rezystorami  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ . Należy wyznaczyć prądy  $I_1, I_2, I_3$  oraz napięcia  $U_1, U_2$  na rezystorach.

1. Zadanie 1.5. Dany jest układ z dwoma źródłami napięcia  $E_1 = 12V$  i  $E_2 = 6V$  oraz rezystorami  $R_1 = 2\Omega$ ,  $R_2 = 3\Omega$ ,  $R_3 = 4\Omega$ . Należy wyznaczyć prądy  $I_1, I_2, I_3$  oraz napięcia  $U_1, U_2$  na rezystorach.

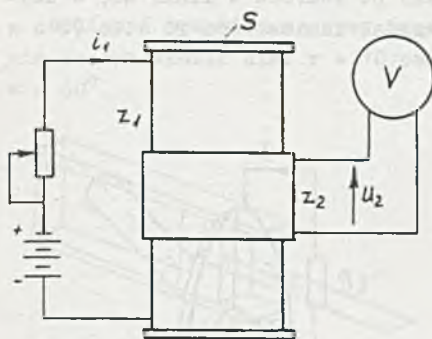




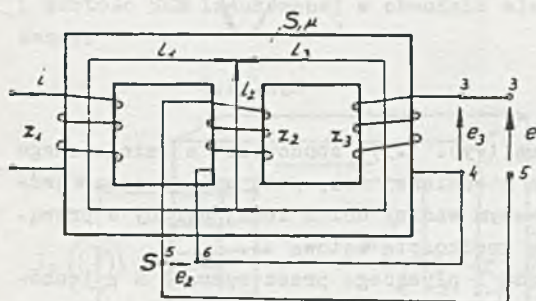
## R o z d z i a ł   1

### 1. INDUKCJA ELEKTROMAGNETYCZNA

**Zadanie 1.1.** Cewka cylindryczna o przekroju poprzecznym  $S = 12 \text{ cm}^2$  i długości  $l = 20 \text{ cm}$  ma  $z_1 = 5000$  zwojów i jest zasilana z baterii akumulatorów przez zmienną oporność. Na środkowej części cewki umieszczono drugą o  $z_2 = 2000$  zwojów (rys. 1.1) tak, że cały strumień wytworzony przez pierwszą cewkę przenika przez drugą. Prąd płynący przez uzwojenie pierwszej cewki narasta liniowo od wartości  $0,1 \text{ A}$  do wartości  $0,5 \text{ A}$ . Określić wskazanie idealnego woltomierza podłączonego do zacisków drugiej cewki, jeżeli czas narastania prądu wynosi a)  $2 \text{ ms}$ , b)  $0,4 \text{ s}$  a strumień rozproszenia nie przenika pętli woltomierza.



Rys. 1.1

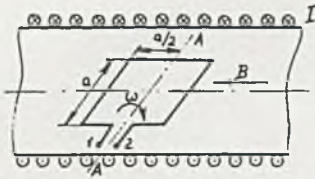


Rys. 1.2

**Zadanie 1.2.** Obliczyć wielkość SEM  $e$  indukowanej między zaciskami 3-5 przez zmienny strumień wymuszony w obwodzie magnetycznym przez prąd  $i = 0,1 \sqrt{2} \sin 10^3 t \text{ A}$  płynący przez uzwojenie o  $z_1$  zwojach oraz indukcyjność zastępczą między zaciskami 3-5 (rys. 1.2).

Wymiary geometryczne obwodu magnetycznego są następujące: średnia długość drogi magnetycznej  $l_1 = 3 \text{ l}_2 = l_3 = 2,3,14 \text{ cm}$ , przekrój rdzenia jest stały i wynosi  $S = 6 \text{ cm}^2$ , a względna przenikalność magnetyczna  $\mu_r = 500$ .

Uzwojenie pierwotne składa się z  $z_1 = 1000$  zwojów, natomiast uzwojenia wtórne nawinięto tak, że  $z_2 = z_3 = 500$  zwojów.

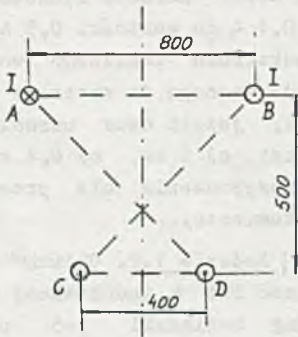


Rys. 1.3

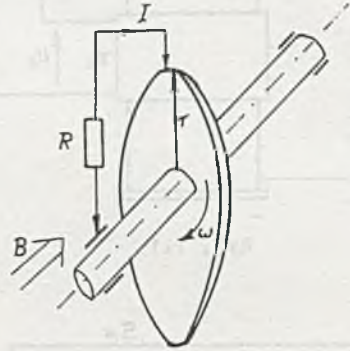
[Zadanie 1.3. Wewnątrz solenoidu, którego długość jest znacznie większa od średnicy, umieszczono kwadratową ramkę o boku  $a$ . Ramka obraca się wokół osi A-A, leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do osi solenoidu, z prędkością 3000 obr/min (rys. 1.3).

Obliczyć przebieg czasowy SEM e indukowanej między zaciskami 1-2. Obliczenia przeprowadzić przy założeniu, że prąd płynący przez uzwojenia solenoidu  $I = 1$  A, solenoid posiada  $z = 20000$  zwojów, długość  $l = 100$  cm i średnicę  $d = 15$  cm, a bok ramki  $a = 5$  cm.

[Zadanie 1.4. Obliczyć wielkość siły elektromotorycznej indukującej się w linii CD (na jednostkę długości  $l = 1$  km) po zwarcia w linii AB, w czasie którego prąd płynący przez tę linię wzrósł liniowo od 20 A do 70 A w ciągu 1 msec (rys. 1.4).



Rys. 1.4



Rys. 1.5

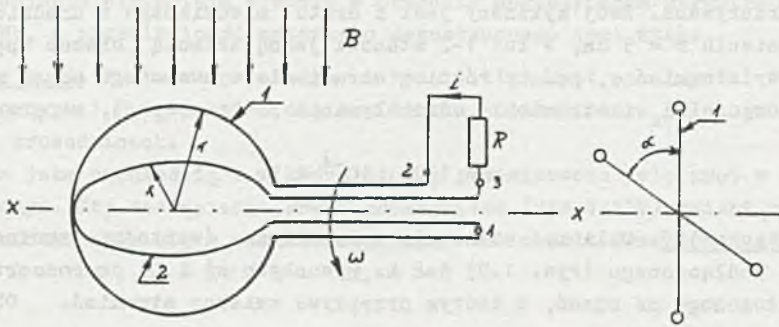
[Zadanie 1.5. Prądnica unipolarna (rys. 1.5) zbudowana z miedzianego walca o promieniu  $r$ , osadzonego na miedzianej osi, jest umieszczona w jednorodnym polu magnetycznym skierowanym wzdłuż osi z lewej strony w prawą. Walec prądnicy obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega$ .

Obliczyć wartość i kierunek prądu  $I$  płynącego przez opornik  $R$  połączony dwoma bezoporowymi ślizgami z walcem i z osią.

Obliczenia przeprowadzić dla  $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$ ,  $r = 20$  cm,  $R = 100 \Omega$ ,  $B = 0,5$  T.

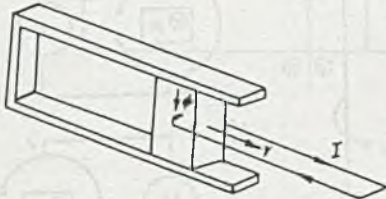
[Zadanie 1.6. Dwa zwoje kołowe o promieniu  $r$  każdy, przesunięte względem siebie o kąt  $\alpha$ , połączone jak na rys. 1.6. Cewki obracają się w jednorodnym polu magnetycznym z prędkością kątową  $\omega$  dookoła osi x-x.





Rys. 1.6

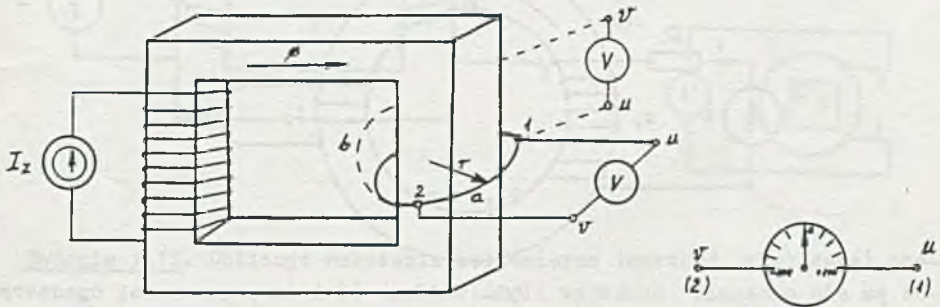
Obliczyć przebieg czasowy prądu i płynącego przez opornik R. Obliczenia przeprowadzić dla:  $r = 10 \text{ cm}$ ,  $\omega = 200 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 100 \Omega$ ,  $B = 0,2 \text{ Wb m}^{-2}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .



Rys. 1.7

**Zadanie 1.7.** W układzie podanym na rysunku 1.7 stalowe zwory przemieszcza się z prędkością  $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Przez zworę przenika stały strumień  $\Phi$ , wytwarzany przez magnes stały. Obwód elektryczny jest połączony ze zworą dwoma ślizgami kontaktowymi odległymi od siebie o  $10 \text{ cm}$ . Zakładając, że indukcja magnetyczna wewnątrz zwory jest

stała i wynosi  $B = 0,2 \text{ T}$ , natomiast na zewnątrz  $B = 0$ , obliczyć kierunek i wartość SEM indukowanej w obwodzie elektrycznym w wyniku poruszania się zwory.



Rys. 1.8

**Zadanie 1.8.** Obliczyć wskazania woltomierza (wartość i znak) podłączonego do zacisków 1-2 zwoju zwartego, jeżeli przewody doprowadzające są połączone z woltomierzem jak na rysunku (rys. 1.8): a) linia ciągła, b) li-

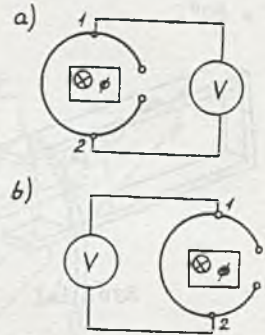
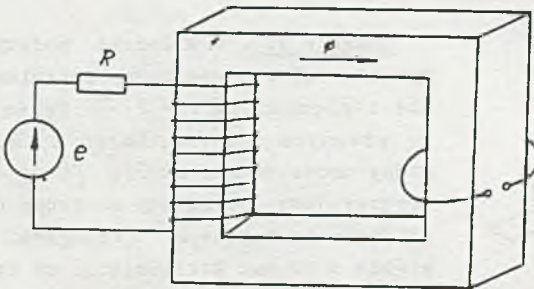


nia przerywana. Zwój wykonany jest z drutu miedzianego o średnicy 2 mm i o promieniu  $r = 5$  cm, a łuk 1-2 stanowi jedną trzecią obwodu pętli. Wypadkowy strumień  $\Phi$ , będący różnicą strumienia wymuszonego przez siłę prądomotoryczną  $I_z$  i strumienia oddziaływania pętli zwartej, ma przebieg

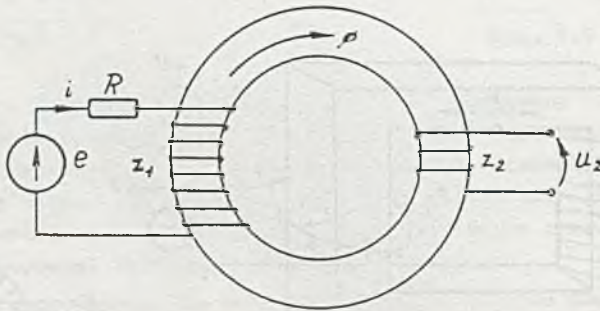
$$\Phi = 100 \cdot 10^{-4} \text{ t Wb.}$$

Zadanie 1.9. Obliczyć wskazania woltomierza (wartości skuteczne napięć) podłączonego (rys. 1.9) jak na rysunkach a) i b) do rozwartego zwoju nałożonego na rdzeń, w którym przepływa zmienny strumień. Obliczenia przeprowadzić dla

$$\Phi = 10^{-3} \sqrt{2} \sin 10^4 \text{ t Wb.}$$



Rys. 1.9



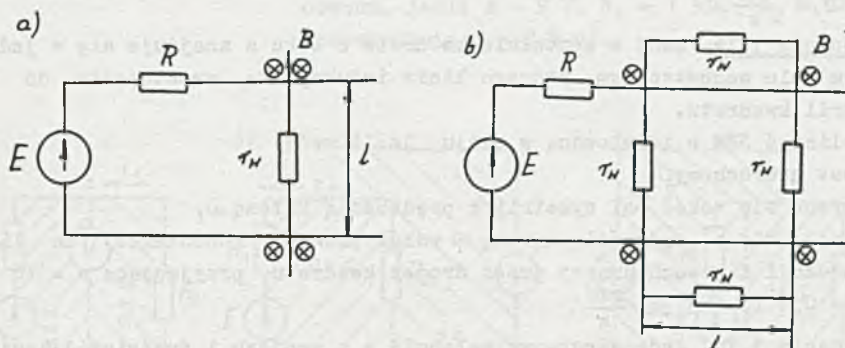
Rys. 1.10

Zadanie 1.10. W obwodzie podanym na rysunku 1.10 dobrać tak ilość zwojów uzwojenia wtórnego  $z_2$ , aby wartość skuteczna napięcia  $u_2$  indukowanego na jego zaciskach, przez strumień  $\Phi$  wymuszony prądem uzwojenia pierwotnego  $i = 10 \sqrt{2} \sin 10^4 \text{ t mA}$ , wynosiła 10 V. Wiadomo, że prąd  $I = 10 \text{ mA}$  płynie

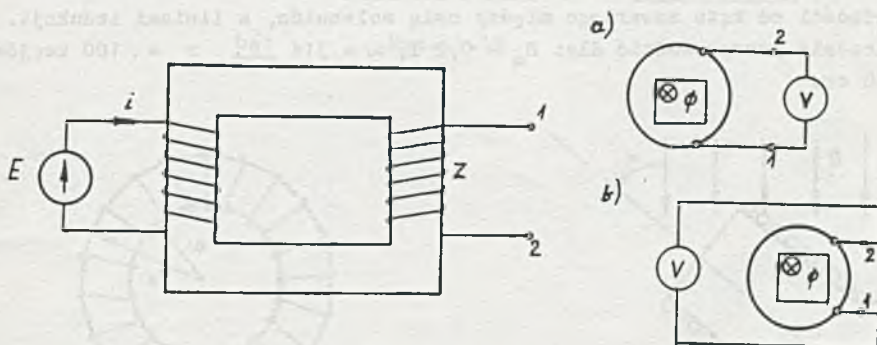
nący w uzwojeniu pierwotnym wymusza w obwodzie magnetycznym strumień  $\Phi_0 = 4 \cdot 10^{-4}$  Wb, a przenikalność materiału magnetycznego jest stała.

[Zadanie 1.11. W obwodzie podanym na rys. 1.11a) pręt o długości  $1,2$  l i oporze omowym  $1,2 r_w$  porusza się bez tarcia w jednorodnym polu, po bezoporowych przewodnicach.

Obliczyć z jaką prędkością i w którą stronę przemieszcza się pręt w stanie ustalonym. Czy zastąpienie pręta prostokątem (rys. 1.11b) zmieni szybkość przemieszczania się w stanie ustalonym? Obliczenia przeprowadzić dla  $E = 10$  V,  $R = 10 \Omega$ ,  $r_w = 2 \Omega$ ,  $l = 1$  m,  $B = 1$  T.



Rys. 1.11



Rys. 1.12

Zadanie 1.12. Obliczyć wskazania woltomierza (wartość skuteczna) podłączonego jak na rys. a) i b) (rys. 1.12) i wyjaśnić dlaczego nie są sobie równe. Obliczenia przeprowadzić przyjmując:  $z = 10$  zwojów,  $\Phi = 10^{-4} \sqrt{2} \sin 10^4 t$  Wb.

[Zadanie 1.13. Zwój kołowy o promieniu  $r$ , umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym, obraca się wokół średnicy ze stałą prędkością kątową  $\omega$ .

Linie pola są prostopadłe do osi obrotu. Obliczyć przebieg czasowy zmian strumienia przenikającego zwoj oraz SEM  $\epsilon$ , która się w nim indukuje.

Dane:  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $\omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $B = 1,2 \text{ T}$ .

[Zadanie 1.14. Prostokątny zwoj o bokach  $a$  i  $b$  znajduje się w polu magnetycznym, którego linie indukcji są prostopadłe do osi symetrii. Obliczyć przebieg czasowy SEM  $\epsilon$  indukowanej w zwoju, jeśli:

- a) jest on nieruchomy,
- b) obraca się wokół dłuższej osi symetrii z prędkością kątową  $\omega$ ,
- c) obraca się wokół krótszej osi symetrii z prędkością kątową  $\omega$ .

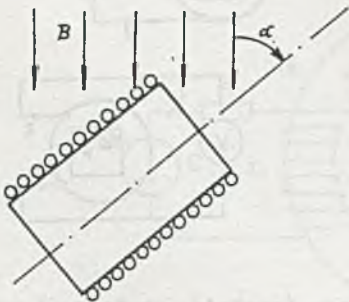
Indukcja  $B$  zmienia się wg zależności  $B = 0,8 \sin \omega t \text{ T}$ ,  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$ ,  $\omega = 62,8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,

Zadanie 1.15. Zwoj w kształcie kwadratu o boku  $a$  znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego linie indukcji są prostopadłe do osi symetrii kwadratu.

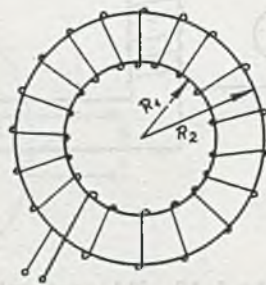
Obliczyć SEM  $\epsilon$  indukowaną w zwoju, jeśli zwoj:

- a) jest nieruchomy,
- b) obraca się wokół osi symetrii z prędkością kątową  $\omega$ ,
- c) obraca się z prędkością kątową  $\omega$  wokół prostej równoległej do linii indukcji i przechodzącej przez środek kwadratu przyjmując:  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $B = 0,6 \text{ T}$ ,  $\omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

[Zadanie 1.16. Jednowarstwowy solenoid o  $z$  zwojach i średnicy  $d$  znajduje się w polu magnetycznym o indukcji  $B = B_m \sin t$  (rys. 1.16). Określić wartość siły elektromotorycznej  $\epsilon$  indukowanej na zaciskach solenoidu w zależności od kąta zawartego między osią solenoidu, a liniami indukcji. Obliczenia przeprowadzić dla:  $B_m = 0,2 \text{ T}$ ,  $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $z = 100$  zwojów,  $d = 8 \text{ cm}$ .



Rys. 1.16

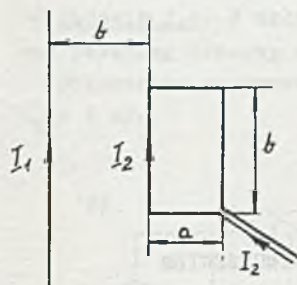


Rys. 1.17

Zadanie 1.17. Na toroidalny karkas powietrzny o promieniach: wewnętrznym  $R_1$  oraz zewnętrznym  $R_2$  (rys. 1.17) nawinięto równomiernie  $z=5000$  zwojów. Obliczyć indukcyjność własną toroidu.

Obliczenia przeprowadzić dla  $R_1 = 25 \text{ mm}$  i  $R_2 = 35 \text{ mm}$ .

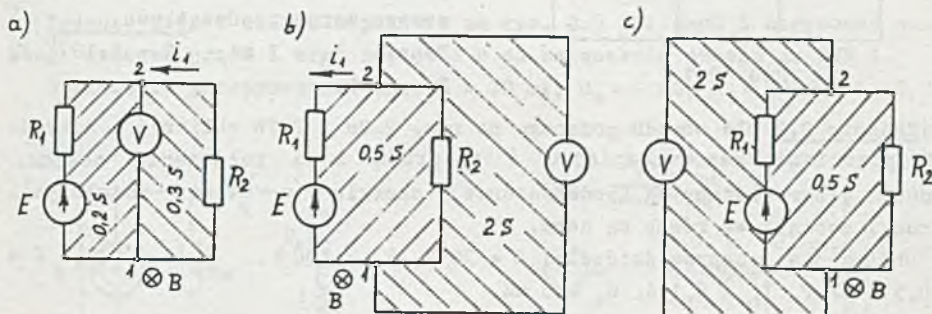




Rys. 1.18

**[Zadanie 1.18.** Określić wielkość siły oddziaływania prostoliniowego nieskończenie długiego przewodnika z prądem  $I_1$  na sztywną umocowaną prostokątną ramkę, przez którą płynie prąd  $I_2$  (rys. 1.18). Obliczenia przeprowadzić dla:  $I_1 = 50$  A,  $I_2 = 2$  mA,  $a = 20$  cm,  $b = 50$  cm.

**[Zadanie 1.19.** W układach podanych na rysunku 1.19 obliczyć błąd wskazania woltomierza spowodowany działaniem zewnętrznego pola o indukcji  $B = 2 \text{ t} + \frac{Wb}{m^2}$  prostopadłego do płaszczyzny obwodu, jeśli  $E = 9$  V,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ , powierzchnia  $S = 0,5 \text{ m}^2$ .

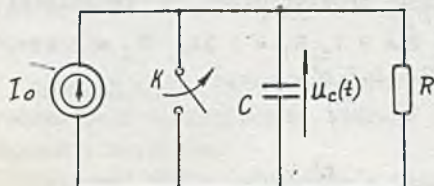


Rys. 1.19



## R o z d z i a ł   2

### 2. STANY NIEUSTALONE W OBWODACH Z NIESINUSOIDALNYM WYMUSZENIEM



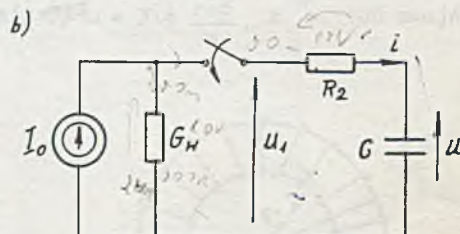
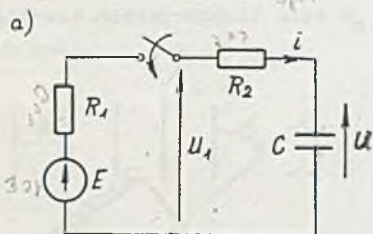
Rys. 2.1

**Zadanie 2.1.** Obliczyć przebieg napięcia  $u_c(t)$  na kondensatorze w obwodzie przedstawionym na rys. 2.1, jeżeli w chwili  $t = 0$  nastąpiło otwarcie klucza K. Przyjąć zerowe warunki początkowe.

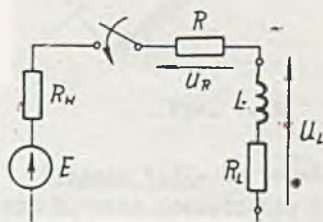
Dane:  $I_0 = 1 \text{ mA}$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .

**Zadanie 2.2** Dla obwodu podanego na rys. 2.2a i 2.2b obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć  $u$  i  $u_1$  prądu  $i$  po załączeniu obwodu, ładunek  $Q$  zgromadzony na kondensatorze i energię (w stanie ustalonym). Warunki początkowe równe są zero.

Obliczenia przeprowadzić dla:  $E = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ ,  $C = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $I_0 = 0,1 \text{ A}$ ,  $G_w = 5 \text{ mS}$ .



Rys. 2.2a, b



Rys. 2.3

**Zadanie 2.3.** W chwili  $t = 0$  do źródła napięcia stałego dołączono rzeczywistą cewkę z szeregowo połączonym opornikiem (rys. 2.3). Obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądu oraz napięcia na cewce i oporniku R, jeśli:

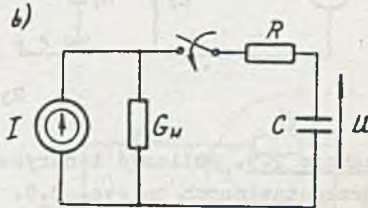
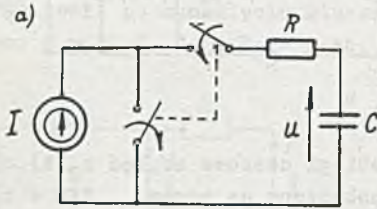
a) oporność czynna cewki  $R_L = 200 \Omega$ ,

b) oporność czynną cewki można pominąć.

Dane:  $E = 24 \text{ V}$ ,  $R_w = 50 \Omega$ ,  $R = 200 \Omega$ ,  $L = 0,2 \text{ H}$ .

**Zadanie 2.4.** W układzie podanym na rys. 2.4a i 2.4b obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u$ , po załączeniu obwodu na SPM I.

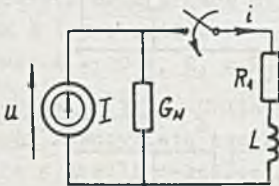
Obliczenia przeprowadzić dla:  $I = 100 \text{ mA}$ ,  $R = 500 \Omega$ ,  $C = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $G_w = 2 \text{ mS}$ .



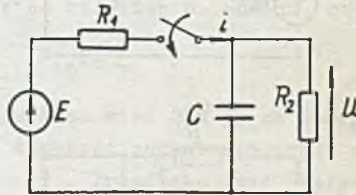
Rys. 2.4

**Zadanie 2.5.** W układzie podanym na rys. 2.5 obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądu  $i$  oraz napięcia  $u$  po załączeniu obwodu na SPM I.

Obliczenia przeprowadzić dla:  $I = 30 \text{ mA}$ ,  $G_w = 1 \text{ mS}$ ,  $R_1 = 500 \Omega$ ,  $L = 0,3 \text{ H}$ .

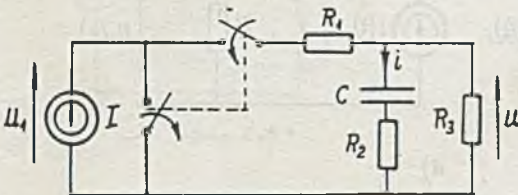


Rys. 2.5



Rys. 2.6

**Zadanie 2.6.** W układzie podanym na rys. 2.6 obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia  $u$  oraz prądu  $i$  po załączeniu SEM E. Obliczyć również ładunek  $Q$  zgromadzony na okładkach kondensatora w stanie ustalonym. Dane:  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 30 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $E = 60 \text{ V}$ .

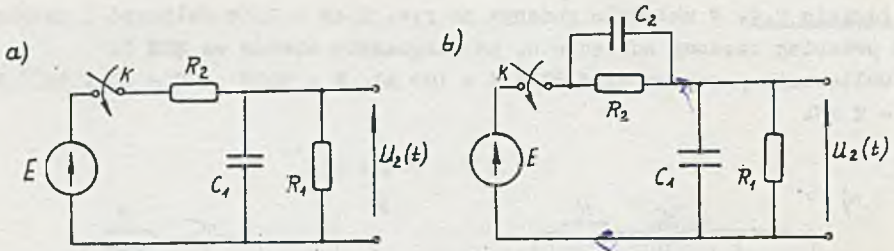


Rys. 2.7

**Zadanie 2.7.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądu  $i$  oraz napięć  $u$  i  $u_1$  po załączeniu obwodu na SPM I (rys. 2.7). Obliczenia przeprowadzić dla:  $I = 100 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $R_3 = 100 \Omega$ ,  $C = 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

**Zadanie 2.8.** Porównać przebiegi czasowe napięć  $u_2(t)$  obwodów przedstawionych na rys. 2.8, jeśli w obydwu obwodach zamknięto klucz K w chwili  $t = 0$ .

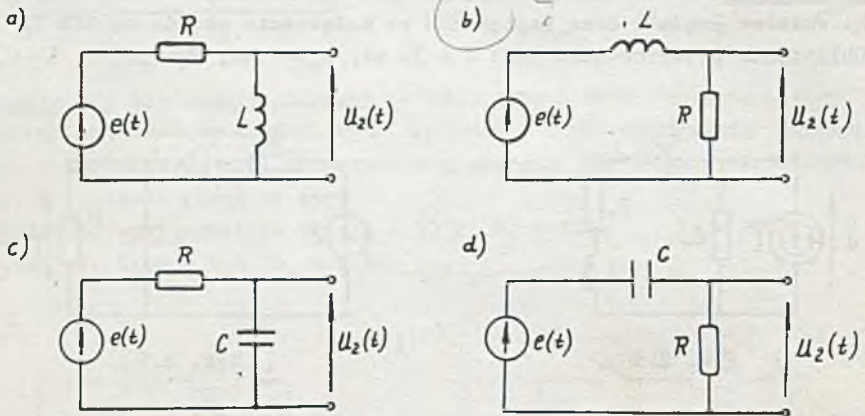
Dane:  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 2 \cdot 10^4 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 1 \cdot 10^4 \text{ nF}$ .



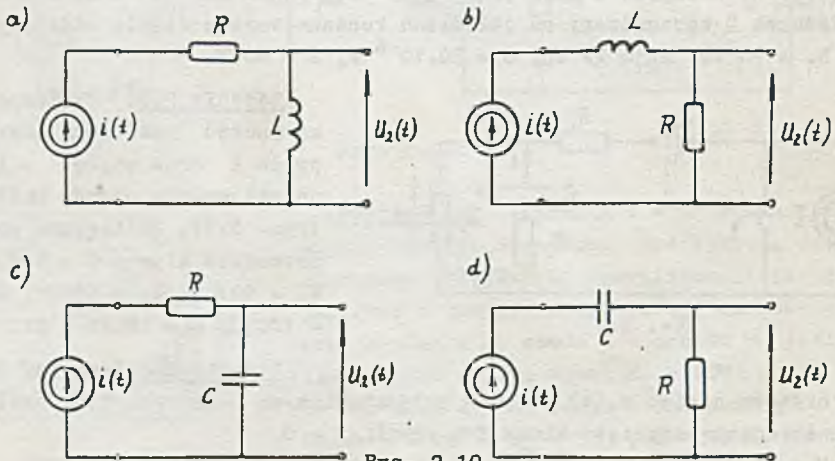
Rys. 2.8a, b

Zadanie 2.9. Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć  $u_2(t)$  obwodów przedstawionych na rys. 2.9. Obwody pobudzone są przez SEM  $e(t) = 1 \delta(t)V$ .

Dane:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 10^{-6} \text{ F}$ .



Rys. 2.9



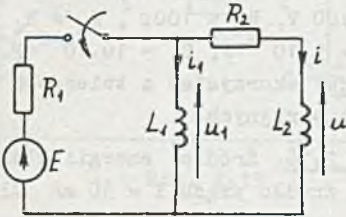
Rys. 2.10



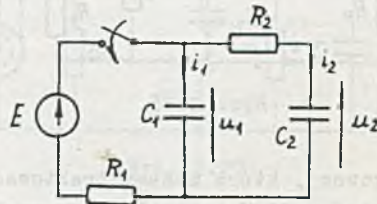
Zadanie 2.10. Obliczyć przebiegi czasowe napięć  $u_2(t)$  obwodów przedstawionych na rys. 2.10. Obwody pobudzone są przez SPM  $i(t) = 1 \delta(t) \text{ A}$ .  
Dane:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 10^{-6} \text{ F}$ .

Zadanie 2.11. W układzie podanym na rys. 2.11 obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć  $u_1$  i  $u$  oraz przebiegi czasowe prądów płynących przez cewki po zamknięciu klucza.

Dane:  $E = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $L_1 = L_2 = 5 \text{ mH}$ .



Rys. 2.11

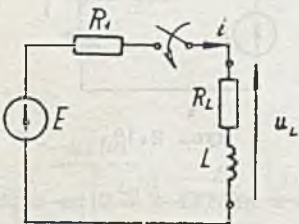


Rys. 2.12

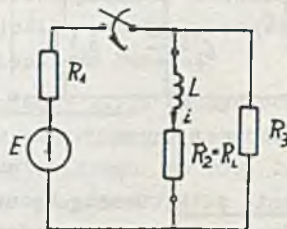
Zadanie 2.12. Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć na kondensatorach oraz prądów płynących przez nie po zamknięciu obwodu na stałą SEM E (rys. 2.12).

Dane:  $E = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 10^3 \Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 10^{-6} \text{ F}$ .

Zadanie 2.13. Obliczyć jaką wartość powinna mieć SEM E, na którą załączamy rzeczywistą cewkę (rys. 2.13), by szybkość narastania prądu w obwodzie w chwili zamknięcia wynosiła  $18 \text{ A s}^{-1}$ . Przedyskutować wpływ parametrów obwodu na szybkość narastania prądu (napięcia na cewce) po zamknięciu klucza. Obliczenia wykonać dla:  $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_L = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ .



Rys. 2.13



Rys. 2.14

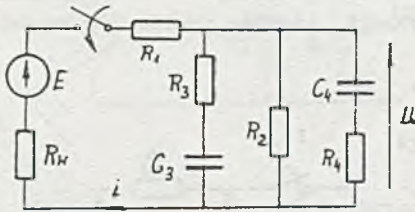
Zadanie 2.14. W celu zmniejszenia szybkości narastania prądu w układzie z zad. 2.13 (rys. 2.13) zbocznikowano cewkę opornikiem  $R_3$ . Należy dobrać wartość rezystancji bocznikującej  $R_3$  oraz SEM E, jeżeli szybkość narastania prądu  $i$  w chwili  $t = 0$  po zamknięciu klucza ma wynosić  $18 \text{ A s}^{-1}$ , a napięcie na cewce w stanie ustalonym  $10 \text{ V}$  (rys. 2.14).

14-17  
cecha odpowiedzi



Przedyskutować wpływ parametrów obwodu na szybkość narastania prądu (napięcia) po załączeniu.

Dane:  $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = R_L = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ .



Rys. 2.15

**Zadanie 2.15.** W układzie podanym na rys. 2.15 dobrać wartości rezystancji  $R_1$  i  $R_2$  tak, by prąd  $i$  po załączeniu SEM  $E$  był nie większy od  $0,4 \text{ A}$ , a napięcie  $u$  nie większe od  $33,3 \text{ V}$ .

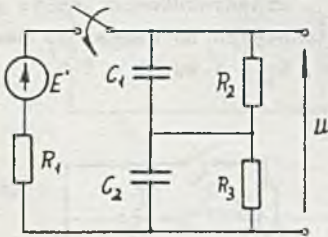
Dane:  $E = 100 \text{ V}$ ,  $R_K = 100 \Omega$ ,  $R_3 = R_4 = 200 \Omega$ ,  $C_3 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $C_4 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

**Wskazówka:** skorzystać z twierdzeń o wartościach skrajnych.

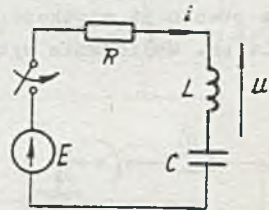
**Zadanie 2.16.** Źródło energii elektrycznej, które możemy traktować jako idealne źródło prądu  $I = 50 \text{ mA}$  dla napięć  $0-20 \text{ V}$  (stabilizator prądowy), zostało obciążone kondensatorem z szeregowo włączonym opornikiem. Należy dobrać wartości pojemności  $C$  tak, by napięcie na kondensatorze osiągnęło wartość  $10 \text{ V}$  po czasie  $0,1 \text{ s}$  chwili załączenia źródła.

**Zadanie 2.17.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u$  po załączeniu układu (rys. 2.17) na rzeczywistą SEM.

Obliczenia przeprowadzić dla:  $E = 100 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



Rys. 2.17



Rys. 2.18

**Zadanie 2.18.** Szeregowy układ RLC załączono w chwili  $t = 0$  na napięcie stałe (rys. 2.18). Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia  $u$  oraz prądu  $i$ .

Obliczenia przeprowadzić dla:

a)  $R = 300 \Omega$ ,  $L = 0,3 \text{ mH}$ ,  $C = 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,

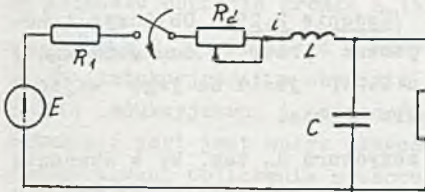
b)  $R = 200 \Omega$ ,  $L = 0,3 \text{ mH}$ ,  $C = 30 \cdot 10^{-9} \text{ F}$ ,

c)  $R = 20 \Omega$ ,  $L = 0,3 \text{ mH}$ ,  $C = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,

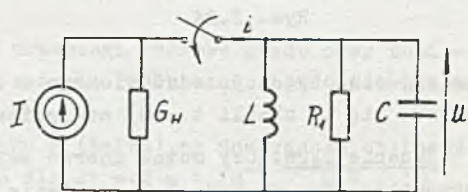
wartość napięcia zasilania  $E = 12 \text{ V}$ .

**Zadanie 2.19.** W układzie podanym na rys. 2.19 dobrać wartość rezystancji opornika  $R_d$  tak, żeby po zamknięciu obwodu na SEM  $E$  przebieg czasowy prądu  $i$  w obwodzie: a) był krytyczny, b) stan nieustalony zanikał (praktycznie) po czasie  $t_1 = 20$  ms.

Obliczenia przeprowadzić dla:  $L = 0,4$  H,  $C = 10 \cdot 10^{-6}$  F,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 50$  k $\Omega$ .



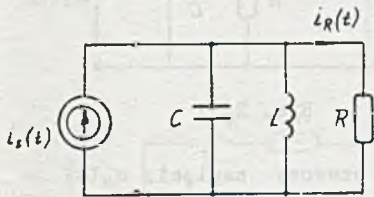
Rys. 2.19



Rys. 2.20

**Zadanie 2.20.** Obliczyć przebiegi czasowe napięcia  $u$  oraz prądu  $i$  po zamknięciu obwodu na SPM  $I$  (rys. 2.20).

Obliczenia przeprowadzić dla  $I = 20$  mA,  $R_1 = 400 \Omega$ ,  $L = 0,03$  H,  $C = 30$  nF,  $G_w = 2,5$  mS.

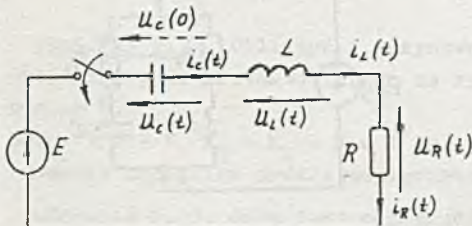


Rys. 2.21

**Zadanie 2.21.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy prądu  $i_R(t)$  w obwodzie przedstawionym na rys. 2.21, gdy  $i_s(t) = 1 \delta(t)$  A.

Obliczenia wykonać dla następujących danych:  $L = 1$  mH,  $C = 10^{-5}$  F, a)  $R = 20 \Omega$ , b)  $R = 100 \Omega$ .

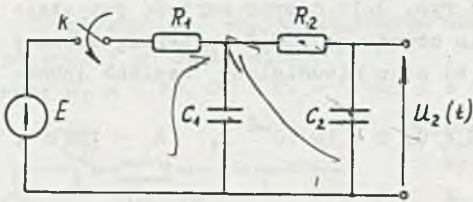
**Zadanie 2.22.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądu w obwodzie z zadania 2.18, jeśli pobudzony zostanie on napięciowym impulsem Diraca.



Rys. 2.23

**Zadanie 2.23.** Ułożyć równania stanu szeregowego obwodu RLC przedstawionego na rys. 2.23 i wyznaczyć numerycznie trajektorię wektora stanu, jeśli warunki początkowe (w chwili zamknięcia klucza  $K$ ) są zerowe.

Dane:  $E = 1$  V, a)  $R = 300 \Omega$ ,  $L = 0,3$  mH,  $C = 3 \cdot 10^{-7}$  F, b)  $R = 20 \Omega$ ,  $L = 0,3$  mH,  $C = 1,5 \cdot 10^{-6}$  F, oraz c)  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 0,5$  H,  $C = 0,05$  F przy niezerowym warunku początkowym na kondensatorze  $u_C(0) = -1$  V.



Rys. 2.24

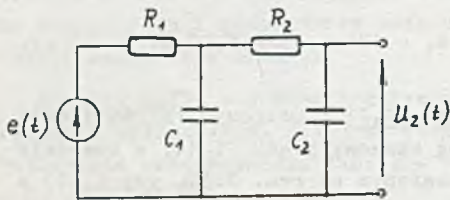
**Zadanie 2.24.** Obliczyć i narysować przebieg napięcia  $u_2(t)$  na wyjściu obwodu przedstawionego na rys. 2.24 po zamknięciu (w chwili  $t = 0$ ) klucza K.

Dane:  $E = 1 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

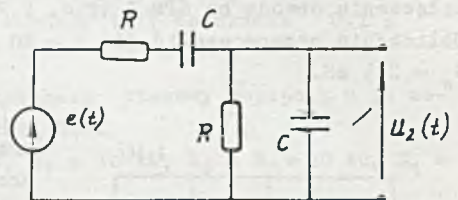
**Zadanie 2.25.** Obliczyć i narysować przebieg napięcia  $u_2(t)$  na wyjściu obwodu przedstawionego w zadaniu 2.24, jeśli na jego wejściu pojawi się (w chwili  $t = 0$ ) napięciowy impuls Diraca.

**Zadanie 2.26.** Czy można dobrać wartość rezystora  $R_2$  tak, by w obwodzie przedstawionym na rys. 2.26 napięcie  $u_2(t)$  - przy pobudzeniu na wejściu np. skokiem jednostkowym napięcia - miało przebieg oscylacyjny?

Dane:  $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R$



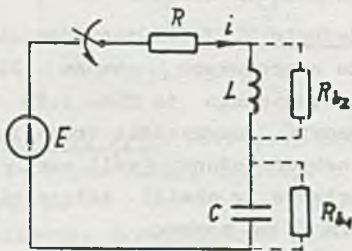
Rys. 2.26



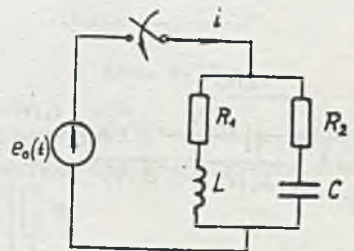
Rys. 2.27

**Zadanie 2.27.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  w obwodzie przedstawionym na rys. 2.27. Obwód jest pobudzony przez SEM  $e(t) = 1(t) \text{ V}$ .

Dane:  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 10^{-8} \text{ F}$ .



Rys. 2.28



Rys. 2.29

**Zadanie 2.28.** W układzie podanym na rys. 2.28 dobrać wartość opornika bocznikującego  $R_b$ , po włączeniu którego równolegle do a) kondensatora C,



b) indukcyjności  $L$ , przebieg czasowy prądu  $i$  po załączeniu na stałą SEM  $E$  będzie aperiodyczny krytyczny. Wartości elementów są następujące:  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 10^{-6} \text{ F}$ ,  $R = 1000 \Omega$ .

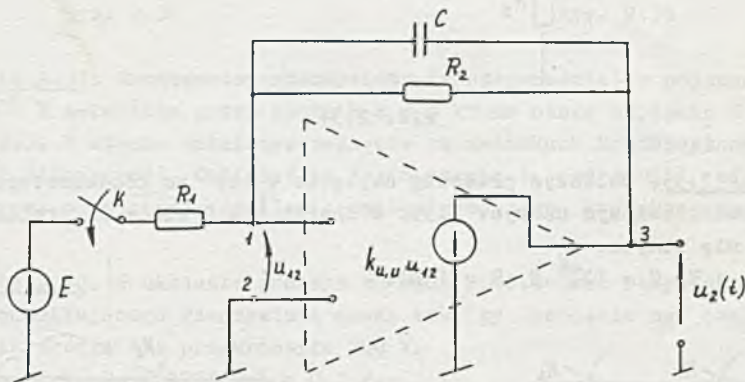
Zadanie 2.29. Obwód z zerowymi warunkami początkowymi podany na rysunku 2.29 włączamy na SEM  $e = e_0(t)$ . Wykazać, że przy spełnieniu warunku  $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R$  prąd płynący przez źródło jest  $i = \frac{e_0(t)}{R}$  niezależnie od kształtu napięcia źródła  $e_0(t)$ .

Zadanie 2.30. Obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądu oraz napięcia na indukcyjności w obwodzie RLC z zadania 2.18b, stosując iterowane modele indukcyjności i pojemności<sup>1)</sup>.

Sprawdzić jaki jest wpływ długości kroku  $T$  (taktu) na dokładność obliczeń numerycznych. Obliczenia przeprowadzić dla  $\Delta t = T = 1 \cdot 10^{-6}$ ,  $0,5 \cdot 10^{-6}$ ,  $0,1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ .

Zadanie 2.31. Obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  w obwodzie z zadania 2.24 stosując iterowane modele pojemności.

Przyjąć  $\Delta t = T = 0,1 \text{ ms}$ .



Rys. 2.32

Zadanie 2.32. Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  na wyjściu obwodu przedstawionego na rys. 2.32 po zamknięciu (w chwili  $t = 0$ ) klucza  $K$ .

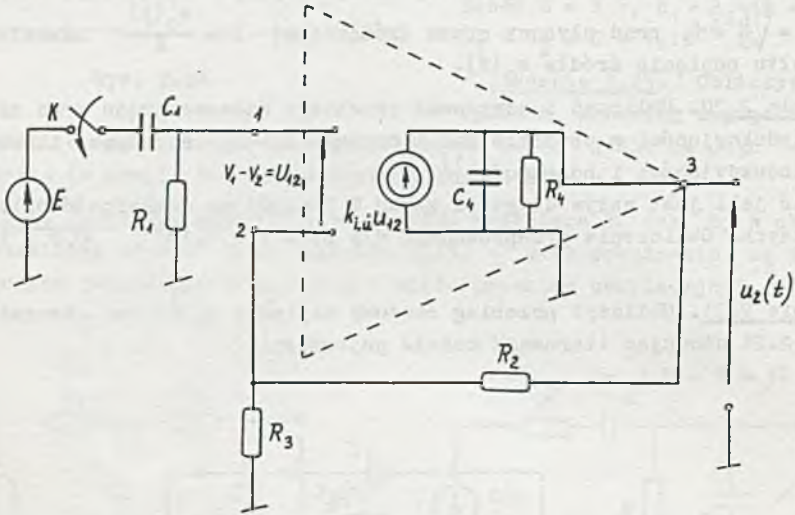
Dane:  $E = 1 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ , a współczynnik  $k_{u,u}$  sterowanego napięciem źródła napięciowego jest równy  $1, 2, 5, 10, 100, 1000, \infty \frac{\text{V}}{\text{V}}$ .

Zadanie 2.33. Jaka jest odpowiedź na impuls Diraca obwodu z zadania 2.32?

<sup>1)</sup> Np. [3] R.4 i [10] ss. 394-417.

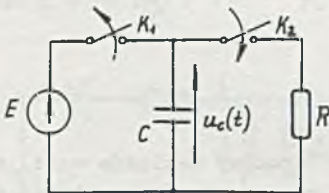


**Zadanie 2.34.** Obliczyć i narysować przebieg napięcia  $u_2(t)$  w obwodzie przedstawionym na rys. 2.34 po zamknięciu (w chwili  $t = 0$ ) klucza  $K$ .  
 Dane:  $E = 1 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 10 \Omega$ ,  $C_1 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $C_4 = 1 \text{ mF}$ ,  $k_{1,u} = 1, 10, 100, 10^4, \infty \frac{\text{A}}{\text{V}}$ .

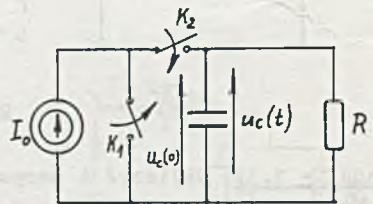


Rys. 2.34

**Zadanie 2.35.** Obliczyć przebieg napięcia  $u_c(t)$  na kondensatorze w obwodzie przedstawionym na rys. 2.35. W chwili  $t = 0$  klucze  $K_1$  otwiera się a klucze  $K_2$  się zamyka.  
 Dane:  $E = 1 \text{ V}$ ,  $C = 10^{-6} \text{ F}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .



Rys. 2.35



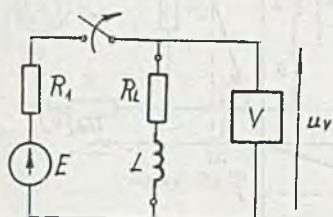
Rys. 2.36

**Zadanie 2.36.** Obliczyć przebieg napięcia  $u_c(t)$  na kondensatorze w obwodzie przedstawionym na rys. 2.36. W chwili  $t = 0$  klucze  $K_2$  zamyka się, następnie  $K_1$  otwiera się, a napięcie  $u_c(0) = U_0$ .  
 Dane:  $I_0 = 1 \text{ mA}$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $U_0 = 2 \text{ V}$ .

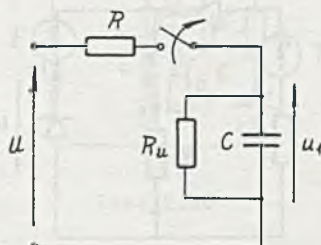
**Zadanie 2.37.** Kondensator o dużej upływności i pojemności znamionowej  $= 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}$  naładowano do napięcia  $U_0 = 50 \text{ V}$  i odłączono. Po czasie

$t_1 = 1 \text{ s}$  od chwili odłączenia zmierzono napięcie na jego zaciskach (woltomierz idealny). Wynosiło ono  $45,3 \text{ V}$ . Zakładając, że upływność kondensatora jest stała, obliczyć po jakim czasie  $t_2$  od chwili odłączenia kondensatora napięcie na jego zaciskach spadnie do wartości  $10 \text{ V}$ .

**Zadanie 2.38.** Do pomiaru napięcia na rzeczywistej cewce użyto woltomierza o rezystancji wewnętrznej  $5 \text{ k}\Omega/\text{V}$ . Obliczyć przebieg czasowy napięcia na zaciskach woltomierza po odłączeniu zasilania (rys. 2.38) oraz energię pobraną przez woltomierza po odłączeniu zasilania. Obliczenia przeprowadzić dla:  $E = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_L = 100 \Omega$ ,  $L = 0,5 \text{ H}$ .



Rys. 2.38

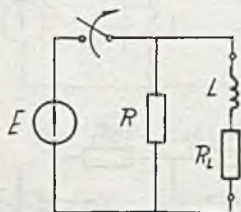


Rys. 2.39

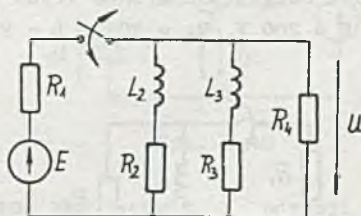
**Zadanie 2.39.** Kondensator rzeczywisty (z upływnością) o pojemności  $C = 200 \cdot 10^{-6} \text{ F}$  załączono przez opornik  $R = 5 \text{ k}\Omega$  na stałe napięcie  $U = 100 \text{ V}$  (rys. 2.39). W stanie ustalonym napięcie na zaciskach kondensatora wynosi  $U_1 = 80 \text{ V}$  (dlaczego?). Obliczyć po jakim czasie  $t_1$  od chwili odłączenia kondensatora od napięcia zasilania napięcie na jego zaciskach zmaleje do połowy.

**Zadanie 2.40.** W układzie podanym na rys. 2.40 dobrać rezystancję opornika  $R$  bocznikującego rzeczywistą cewkę tak, by napięcie na cewce przy odłączaniu źródła nie przekroczyło  $200 \text{ V}$ .

Dane:  $E = 50 \text{ V}$ ,  $R_L = 100 \Omega$ ,  $L = 0,2 \text{ H}$ .



Rys. 2.40



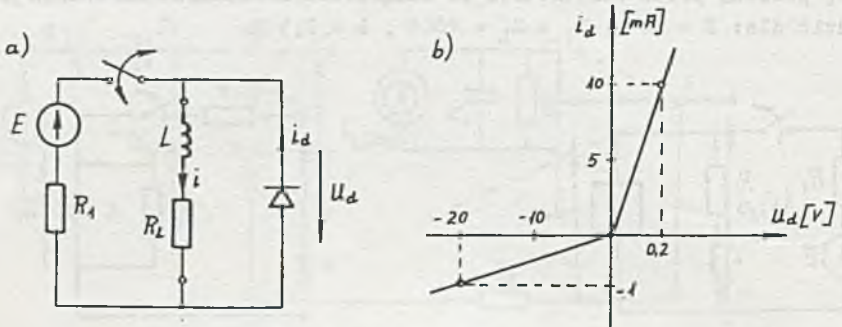
Rys. 2.41

**Zadanie 2.41.** Obliczyć wartość SEM  $E$  zasilającej układ podany na rys. 2.41, jeżeli wiadomo, że maksymalna wartość napięcia  $u$  po odłączeniu za-

silania wynosi 500 V. Dla dobranej SEM E podać przebieg czasowy napięcia u po załączeniu zasilania

Dane:  $R_1 = 400\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = R_4 = 800\Omega$ ,  $L_2 = 0,75\text{ H}$ ,  $L_3 = 0,25\text{ H}$ .

**Zadanie 2.42.** W układzie podanym na rys. 2.42a dołączono równolegle do rzeczywistej cewki nieliniowy opór (diodę) o charakterystyce podanej na rys. 2.42b.



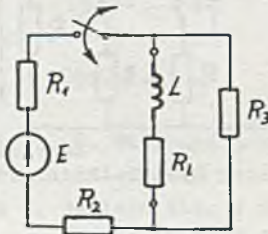
Rys. 2.42a, b

Obliczyć czas  $t_1$ , jaki upłynie od chwili załączenia obwodu na SEM E, po którym prąd płynący przez cewkę osiągnie 0,6 wartości znamionowej oraz czas  $t_2$  od chwili odłączenia zasilania po uzyskaniu stanu ustalonego, po którym prąd płynący przez cewkę zmaleje do 0,4 wartości znamionowej. Otrzymane wyniki porównać z wynikami uzyskanymi, gdy opornik nieliniowy zastąpiono opornikiem liniowym  $R_2 = 200\Omega$ .

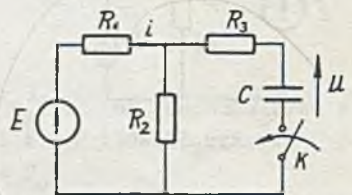
Dane:  $E = 20\text{ V}$ ,  $R_1 = 200\Omega$ ,  $R_L = 200\Omega$ ,  $L = 1\text{ H}$ .

**Zadanie 2.43.** Dobrać wartości rezystancji oporników  $R_2$  i  $R_3$  tak, by wartość prądu i płynącego przez rzeczywistą cewkę nie przekroczyła 100 mA, a maksymalne napięcie na jej zaciskach nie przekroczyło 50 V przy załączeniu i odłączeniu źródła (rys. 2.43).

Dane:  $E = 200\text{ V}$ ,  $R_1 = 50\Omega$ ,  $L = 2\text{ H}$ ,  $R_L = 100\Omega$ .



Rys. 2.43



Rys. 2.44

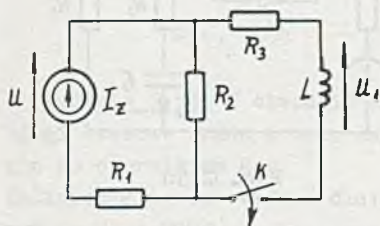


**Zadanie 2.44.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądu  $i$  oraz napięcia  $u$  na kondensatorze po zamknięciu klucza  $K$  (rys. 2.44).

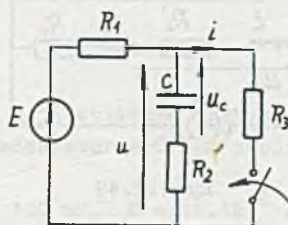
Dane:  $E = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

**Zadanie 2.45.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć  $u$  i  $u_L$  po zamknięciu klucza  $K$  (rys. 2.45).

Dane:  $I_z = 100 \text{ mA}$ ,  $R_2 = R_3 = 5 R_1 = 200 \Omega$ ,  $L = 0,5 \text{ H}$ .



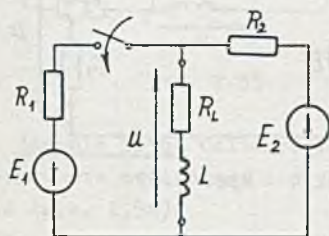
Rys. 2.45



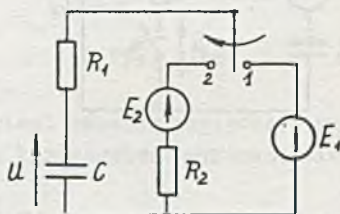
Rys. 2.46

**Zadanie 2.46.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy prądu płynącego przez opornik  $R_3$  oraz napięcia  $u$  po zamknięciu klucza (rys. 2.46). Obliczenia przeprowadzić dla:  $E = 60 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ . Przyjąć, że uprzednio był w obwodzie stan ustalony.

**Zadanie 2.47.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądu płynącego przez cewkę i napięcia na jej zaciskach po podłączeniu SEM  $E_1$  do układu (rys. 2.47). Obliczenia przeprowadzić dla:  $E_1 = 20 \text{ V}$ ,  $E_2 = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ ,  $R_L = 50 \Omega$ ,  $L = 0,2 \text{ H}$ .



Rys. 2.47



Rys. 2.48

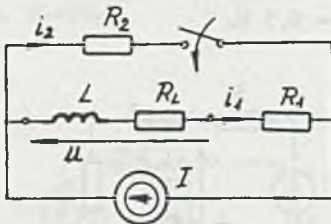
**Zadanie 2.48.** W chwili  $t = 0$  przerzucono przełącznik z pozycji 1 na pozycję 2. Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u$  na kondensatorze (rys. 2.48).

Dane:  $E_1 = 150 \text{ V}$ ,  $E_2 = 50 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

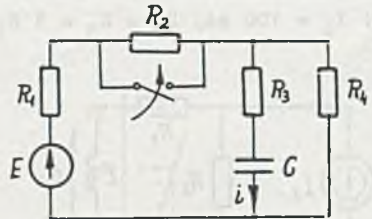


**Zadanie 2.49.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia na rzeczywistej cewce u oraz prądów  $i_1$  i  $i_2$  po dołączeniu do obwodu rezystora  $R_2$  (rys. 2.49).

Dane:  $I = 50 \text{ mA}$ ,  $L = 0,2 \text{ H}$ ,  $R_L = R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ .



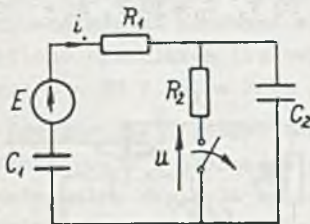
Rys..2.49



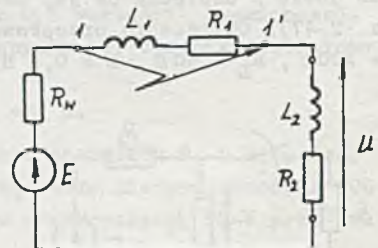
Rys. :2.50

**Zadanie 2.50.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy prądu i po zamknięciu klucza oraz obliczyć energię rozproszoną na oporniku  $R_3$  (rys. 2.50). Obliczenia przeprowadzić dla:  $E = 30 \text{ V}$ ,  $R = R_1 = R_2 = R_4 = 2R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0,47 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

**Zadanie 2.51.** Obliczyć przebiegi czasowe napięcia u na zaciskach klucza po jego otwarciu oraz prądu i w obwodzie przedstawionym na rys. 2.51. Dane:  $E = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2R_2 = 1000 \Omega$ ,  $2C_1 = C_2 = 40 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



Rys. 2.51



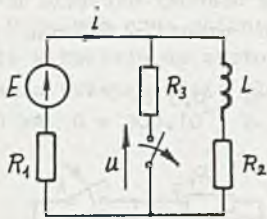
Rys. 2.52

**Zadanie 2.52.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia na zaciskach cewki drugiej ( $L_2$ ,  $R_2$ ) po zwarcie zacisków 1-1' cewki pierwszej ( $L_1$ ,  $R_1$ ) (rys. 2.52).

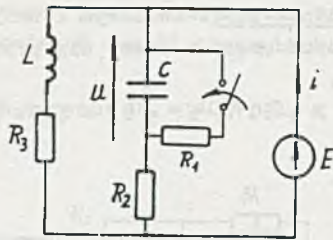
Dane:  $E = 30 \text{ V}$ ,  $R_w = R_1 = 500 \Omega$ ,  $L_1 = 0,5 \text{ H}$ ,  $L_2 = 1 \text{ H}$ .

Obliczenia przeprowadzić dla: a)  $R_2 = 1000 \Omega$ , b)  $R_2 = 0$ .

**Zadanie 2.53.** W układzie podanym na rys. 2.53 obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia u oraz prądu i po odłączeniu opornika  $R_3$ . Obliczenia wykonać dla  $E = 15 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 500 \Omega$ ,  $L = 0,2 \text{ H}$ .



Rys. 2.53



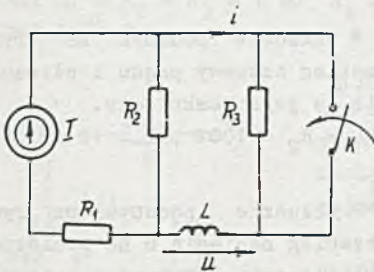
Rys. 2.54

**Zadanie 2.54.** W obwodzie podanym na rys. 2.54 obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądu i oraz napięcia  $u$  na kondensatorze  $C$  po zbocznikowaniu go opornikiem  $R_1$ .

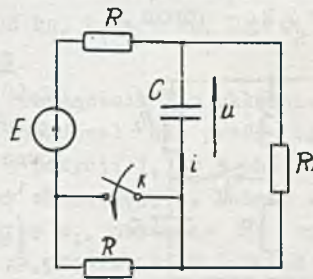
Obliczenia przeprowadzić dla:  $E = 20 \text{ V}$ ,  $L = 100 \text{ mH}$ ,  $C = 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 200 \Omega$ .

**Zadanie 2.55.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia  $u$  na cewce oraz prądu  $i$  przez nią płynącego po zamknięciu klucza  $K$  (rys. 2.55).

Dane:  $I = 100 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \Omega$ ,  $L = 0,5 \text{ H}$ .



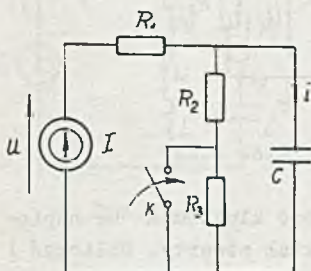
Rys. 2.55



Rys. 2.56

**Zadanie 2.56.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia  $u$  na kondensatorze oraz prądu  $i$  płynącego przez ten kondensator po zamknięciu klucza (rys. 2.56).

Dane:  $E = 30 \text{ V}$ ,  $R = R_1 = 100 \Omega$ ,  $C = 50 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



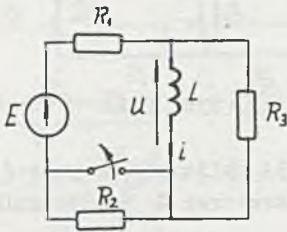
**Zadanie 2.57.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u$  na SPM I oraz prądu płynącego przez kondensator po zamknięciu klucza  $K$  (rys. 2.57).

Dane:  $I = 200 \text{ mA}$ ,  $R_2 = R_3 = 100 \Omega$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $C = 10^{-5} \text{ F}$ .

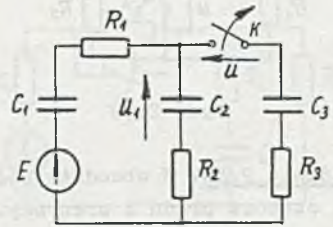
Rys. 2.57

**Zadanie 2.58.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u$  na cewce  $L$  oraz prądu  $i$  przez nią przepływającego po otwarciu klucza  $K$  (rys. 2.58).

Dane:  $E = 50 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 500 \Omega$ ,  $R_3 = 1000 \Omega$ ,  $L = 0,5 \text{ H}$ .



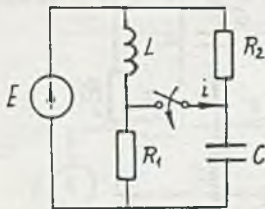
Rys. 2.58



Rys. 2.59

**Zadanie 2.59.** W obwodzie podanym na rys. 2.59 obliczyć przebiegi czasowe napięcia  $u$  na zaciskach klucza  $K$  po jego otwarciu oraz napięcia  $u_1$  na kondensatorze  $C_2$ .

Dane:  $E = 150 \text{ V}$ ,  $C_1 = 40 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $C_2 = 60 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $C_3 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $R_1 = R_3 = 500 \Omega$ ,  $R_2 = 1000 \Omega$ .

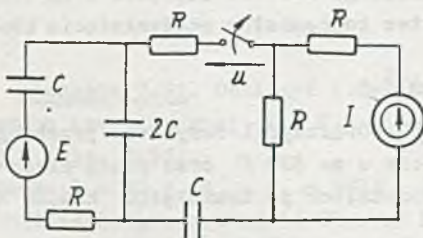


Rys. 2.60

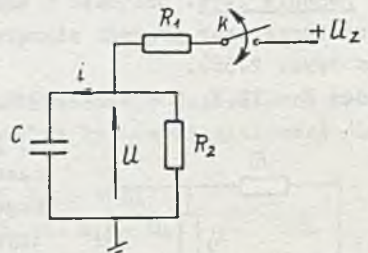
**Zadanie 2.60.** W układzie podanym na rys. 2.60 obliczyć przebieg czasowy prądu  $i$  płynącego przez wyłącznik po jego zamknięciu.

Dane:  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 100 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

**Zadanie 2.61.** W układzie podanym na rys. 2.61 narysować przebieg napięcia  $u$  na zaciskach wyłącznika po jego otwarciu. Wykres sporządzić dla  $I = 2 \text{ A}$ ,  $E = 60 \text{ V}$ ,  $R = 100 \Omega$ ,  $C = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



Rys. 2.61



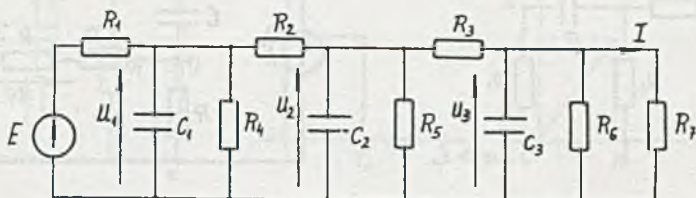
Rys. 2.62

**Zadanie 2.62.** Układ podany na rys. 2.62 załączono kluczem  $K$  na napięcie zasilania  $U_z$ . Po czasie  $t_1 = 1 \text{ s}$  klucz  $K$  został otwarty. Obliczyć i



narysować przebiegi czasowe prądu i płynącego przez kondensator oraz napięcia  $u$  na nim oraz obliczyć po jakim czasie od chwili otwarcia klucza  $K$  napięcie  $u$  zmaleje do wartości  $u = 1$  V.

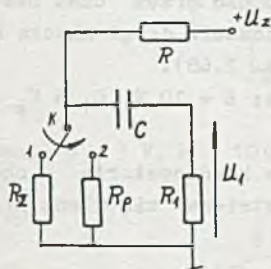
Obliczenia przeprowadzić dla następujących danych:  $U_z = 40$  V,  $R_1 = 10$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 40$  k $\Omega$ ,  $C = 200 \cdot 10^{-6}$  F.



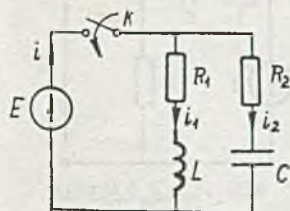
Rys. 2.63

**Zadanie 2.63.** W układzie podanym na rysunku 2.63 obliczyć rozkład napięć na kondensatorach w stanie ustalonym oraz wartość napięcia zasilania (SEM  $E$ ) i moc pobieraną przez układ ze źródła, jeżeli prąd obciążenia  $I = 10$  mA.

Dane:  $R_1 = R_2 = R_3 = 1$  k $\Omega$ ,  $R_4 = R_5 = R_6 = 20$  k $\Omega$ ,  $R_7 = 2$  k $\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = C_3 = 200 \cdot 10^{-6}$  F.



Rys. 2.64



Rys. 2.65

**Zadanie 2.64.** Przełącznik  $K$  w układzie podanym na rys. 2.64 znajdował się przez czas dostatecznie długi w pozycji 1, a w chwili  $t = 0$  został przełączony na pozycję 2. Dobrać wartość pojemności  $C$ , tak by  $u_1$ , napięcie na oporniku  $R_1$ , wynosiło 5 V po czasie  $t_1 = 1$  s od chwili przełączenia; jeżeli  $U_z = 300$  V,  $R = 20$  k $\Omega$ ,  $R_1 = 100$  k $\Omega$ ,  $R_p = 1$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 200$  k $\Omega$ .

**Zadanie 2.65.** W układzie podanym na rys. 2.65 obliczyć i narysować przebieg czasowy prądu  $i$  po załączeniu obwodu na napięcie.

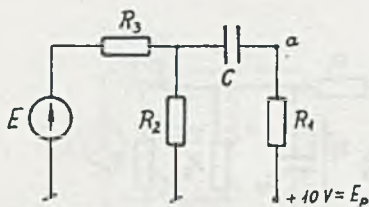
Obliczenia przeprowadzić dla:  $E = 100$  V,  $R_1 = 1$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 2$  k $\Omega$ ,  $L = 10$  mH,  $C = 25 \cdot 10^{-9}$  F.

Podać warunki jakie muszą spełniać elementy:  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  i  $C$ , żeby po załączeniu  $i = \text{const} = i_u$ .

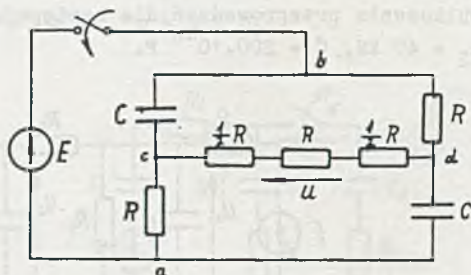
**Zadanie 2.66.** W układzie podanym na rysunku 2.66 obliczyć i narysować przebieg czasowy potencjału punktu  $a$  w stosunku do ziemi, jeżeli w chwili  $t = 0$  nastąpiła skokowa zmiana wartości



SEM E od  $-2\text{ V}$  do  $-8\text{ V}$ . Obliczenia przeprowadzić dla:  $C = 0,05 \cdot 10^{-6}\text{ F}$ ,  $R_1 = 1\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 2\text{ k}\Omega$ .

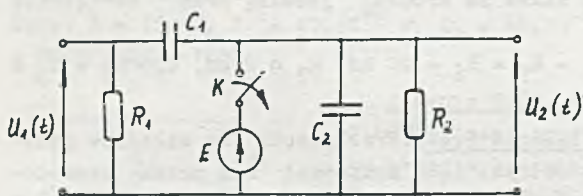


Rys. 2.66



Rys. 2.67

**Zadanie 2.67.** Obliczyć po jakim czasie od chwili załączenia napięcia zasilania napięcie  $u$  osiągnie wartość zero (rys. 2.67). Obliczenia przeprowadzić dla:  $R = 2\text{ k}\Omega$ ,  $C = 5 \cdot 10^{-6}\text{ F}$ .



Rys. 2.68

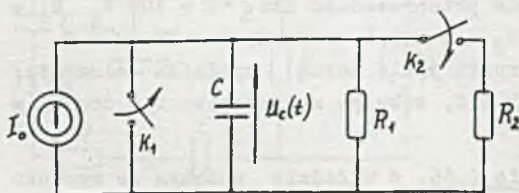
✓ **Zadanie 2.68.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  po otwarciu w chwili  $t = 0$  zamkniętego uprzednio przez czas nieskończenie długi klucza K (rys. 2.68).

Dane:  $E = 10\text{ V}$ ,  $C_1 = C_2 =$

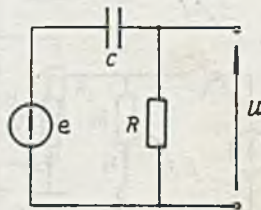
$= C = 1 \cdot 10^{-5}\text{ F}$ ,  $R_1 = R_2 = R = 10\text{ k}\Omega$ .

✓ **Zadanie 2.69.** Obliczyć przebieg napięcia  $u_c(t)$  na kondensatorze w obwodzie przedstawionym na rys. 2.69. W chwili  $t = 0$  otwiera się klucz  $K_1$ , a w chwili  $t = T_1 = R \cdot C$  zamyka klucz  $K_2$ .

Dane:  $I_0 = 1\text{ mA}$ ,  $C = 10^{-6}\text{ F}$ ,  $R_1 = R_2 = 1\text{ k}\Omega$ .



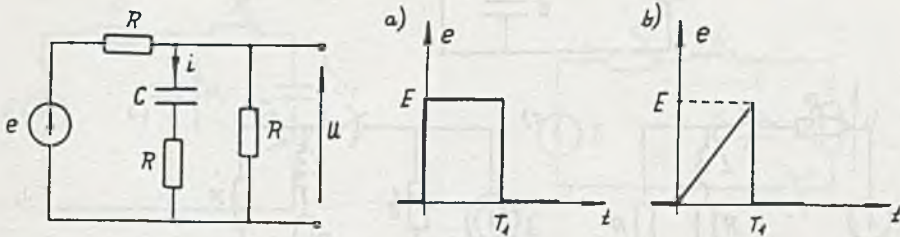
Rys. 2.69



Rys. 2.70

**Zadanie 2.70.** W układzie podanym na rys. 2.70 obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u$  na oporniku R po jakokwiej zmianie napięcia

zasilania od 0 do wartości  $E$ , jeżeli napięcie narastało a) skokowo, b) liniowo w czasie  $T_1 = 1 \text{ ms}$ . Porównać otrzymane przebiegi. Obliczenia przeprowadzić dla:  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



Rys. 2.71

✓ **Zadanie 2.71.** Układ podany na rys. 2.71 zasilany jest napięciem o przebiegu czasowym jak na rys. a) i b).

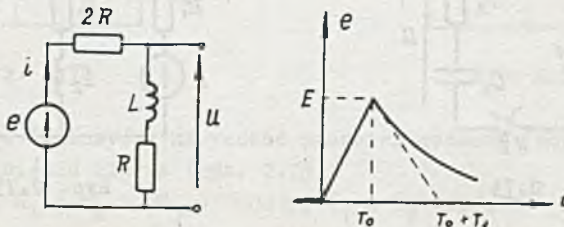
Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia  $u$ .

Dane:  $E = 20 \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $T_1 = 30 \text{ ms}$ .

➔ **Zadanie 2.72.** W układzie podanym na rys. 2.72 obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u$ , jeżeli napięcie zasilania  $e$  zmienia się następująco:

$$e = \begin{cases} \frac{E}{T_0} t & \text{dla } t \in [0, T_0] \\ E e^{-\frac{t-T_0}{T_1}} & \text{dla } t > T_0 \end{cases}$$

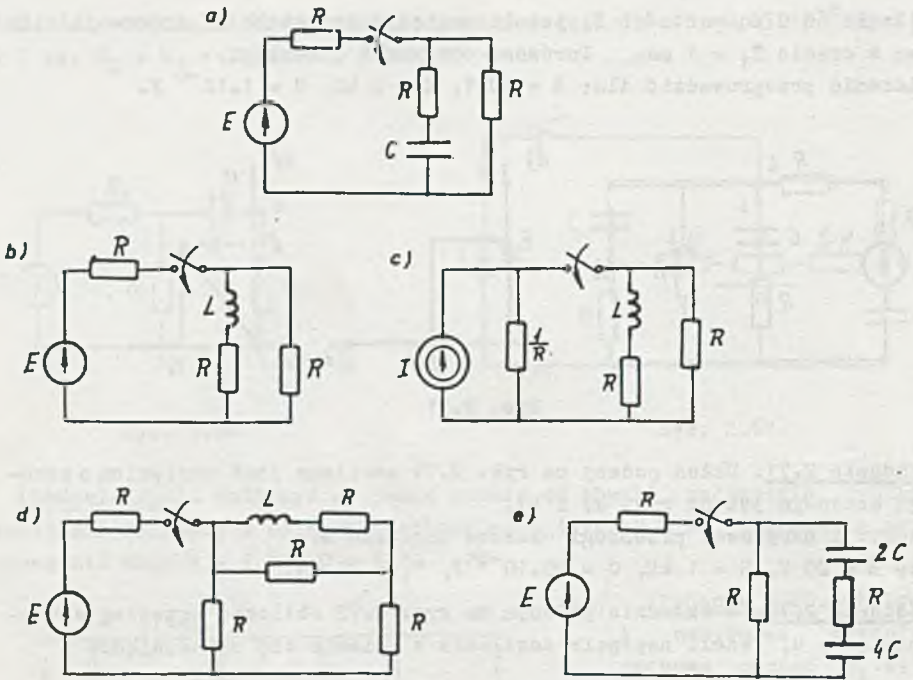
Dane:  $E = 3 \text{ V}$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0,3 \text{ H}$ ,  $T_1 = T_0 = 10 \text{ ms}$ .



Rys. 2.72

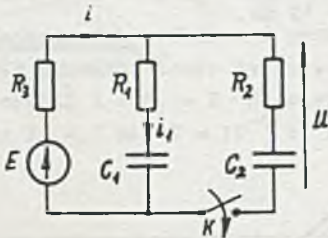
**Zadanie 2.73.** Dla obwodów podanych na rys. 2.73 obliczyć stałe czasowe oraz czas, po którym zaniknie (praktycznie) stan przejściowy przy załączaniu i odłączaniu źródła. Przyjąć, że stan przejściowy zanika, jeżeli zmniejsza się do 2% wartości początkowej.

Dane:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

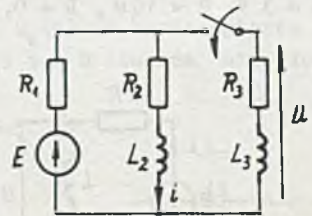


Rys. 2.73

**Zadanie 2.74.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia  $u(t)$  i prądów  $i(t)$  oraz  $i_1(t)$  w układzie z rys. 2.74 po zamknięciu klucza K.  
Dane:  $E = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 50 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



Rys. 2.74



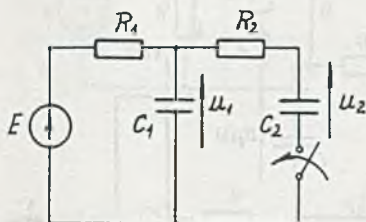
Rys. 2.75

**Zadanie 2.75.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądu  $i$  oraz napięcia  $u$  po dołączeniu rzeczywistej cewki ( $R_3, L_3$ ) do obwodu (rys. 2.75).  
Dane:  $E = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L_2 = L_3 = 0,5 \text{ H}$ .

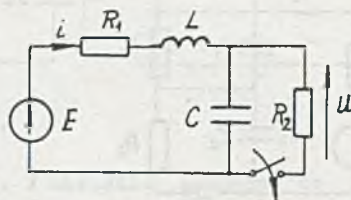


**Zadanie 2.76.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć  $u_1$  i  $u_2$  po zamknięciu klucza (rys. 2.76).

Dane:  $E = 50 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



Rys. 2.76



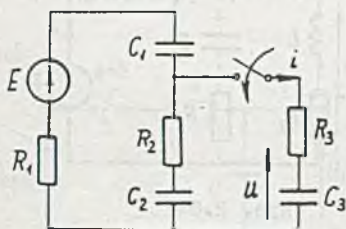
Rys. 2.77

**Zadanie 2.77.** Obliczyć przebiegi czasowe napięcia  $u$  oraz prądu  $i$  po dołączeniu do obwodu opornika  $R_2$  (rys. 2.77), jeśli uprzednio był stan ustalony.

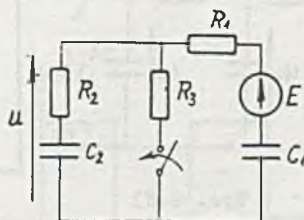
Dane:  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R = 200 \Omega$ ,  $L = 0,5 \text{ H}$ ,  $C = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

**Zadanie 2.78.** Obliczyć przebiegi czasowe napięcia  $u$  na kondensatorze  $C_3$  oraz prądu przez niego płynącego po dołączeniu kondensatora  $C_3$  do układu (rys. 2.78).

Dane:  $E = 60 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $C_2 = C_3 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



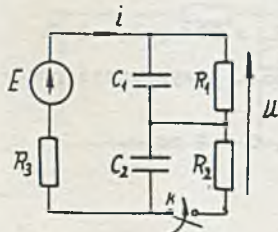
Rys. 2.78



Rys. 2.79

**Zadanie 2.79.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia na oporniku  $R_3$  po zamknięciu klucza (rys. 2.79).

Dane:  $E = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 2R_3 = 1000 \Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



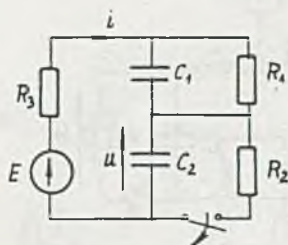
**Zadanie 2.80.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądu źródła  $i$  oraz napięcia  $u$  po zamknięciu klucza  $K$  (rys. 2.80).

Dane:  $E = 120 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

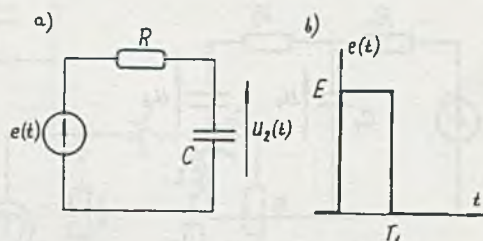
Rys. 2.80

**Zadanie 2.81.** Obliczyć maksymalne wartości prądu  $i$  oraz napięcia  $u$  po odłączeniu opornika  $R_2$  (rys. 2.81).

Dane:  $E = 120 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



Rys. 2.81



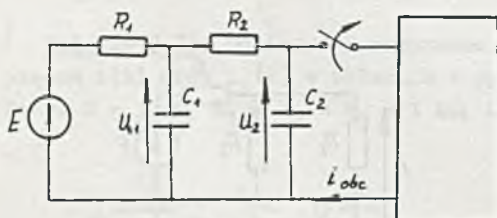
Rys. 2.82

**Zadanie 2.82.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  w obwodzie przedstawionym na rys. 2.82a. Obwód pobudzany jest impulsem napięciowym o przebiegu przedstawionym na rys. 2.82b.

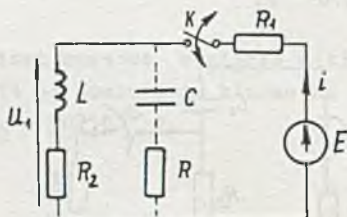
Dane:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $T_1 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ ,  $E T_1 = 1 \text{ Vs}$ .

**Zadanie 2.83.** W układzie podanym na rys. 2.83 obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u_1$  na kondensatorze  $C_1$  po odłączeniu obciążenia.

Dane:  $E = 50 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $i_{obc} = 20 \text{ mA}$ .



Rys. 2.83



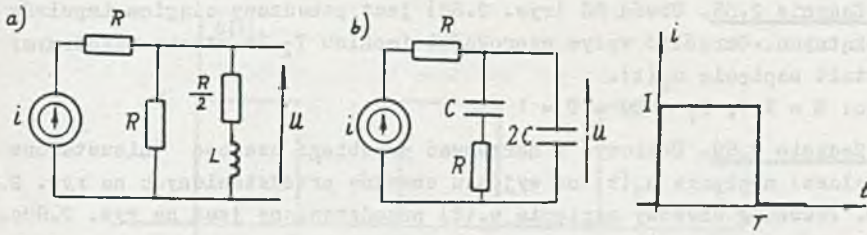
Rys. 2.84

**Zadanie 2.84.** W obwodzie podanym na rys. 2.84 dobrać wartości opornika  $R$  i kondensatora  $C$  bocznikujących rzeczywistą cewkę, by przy załączaniu i odłączaniu klucza  $K$  napięcie  $u_1$  nie przekraczało  $100 \text{ V}$ , a prąd  $i$  płynący przez klucz  $K$  był nie większy od  $1 \text{ A}$  oraz by prąd rozładowania cewki  $L$  (po otwarciu klucza  $K$ ): a) miał przebieg krytyczny, b) zanikał (praktycznie) po czasie  $t_1 = 100 \text{ ms}$ .

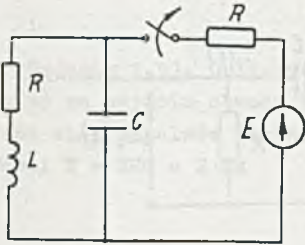
Obliczenia przeprowadzić dla:  $E = 50 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 80 \Omega$ ,  $L = 2 \text{ H}$ .

**Zadanie 2.85.** W obwodach podanych na rysunku 2.85a i b wyznaczyć przebiegi czasowe napięć  $u$  na wyjściach układów.

Dane:  $I = 0,1 \text{ A}$ ,  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 100 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $T = 2 \text{ ms}$ .



Rys. 2.85a, b



Rys. 2.86

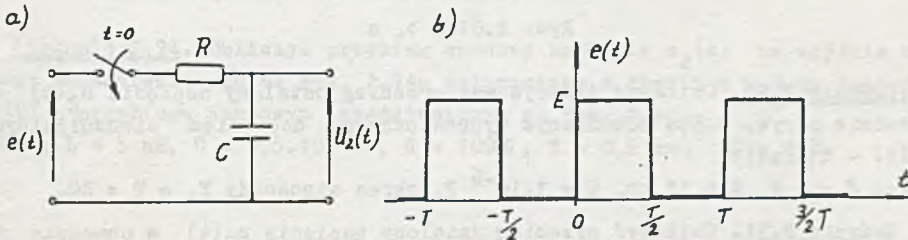
✓ **Zadanie 2.86.** W układzie podanym na rys. 2.86 dobrać wartość pojemności  $C$  tak, żeby prąd płynący przez indukcyjność  $L$  po odłączeniu zasilania miał przebieg krytyczny.  
Dane:  $L = 0,1 \text{ H}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .

| **Zadanie 2.87.** Obliczyć i narysować przebieg napięcia  $u_2(t)$  na kondensatorze w obwodzie RC z rys. 2.87a pobudzanego ciągiem impulsów prostokątnych (rys. 2.87b).

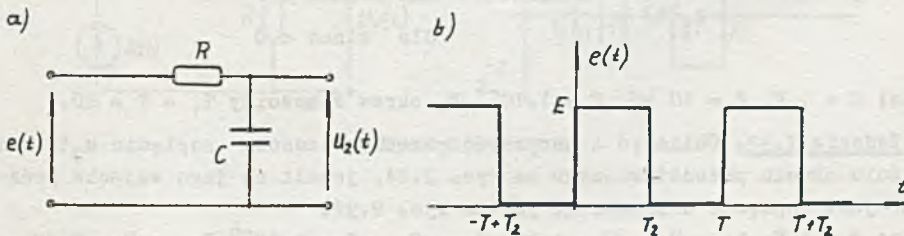
Określić średnią wartość napięcia na kondensa-

torze w stanie ustalonym.

Obliczenia przeprowadzić dla następujących danych: źródło idealne  $E = 1 \text{ V}$  i  $R_w = 0$ ,  $T = 1 \text{ ms}$ ,  $R = 10 \text{ k}\Omega$  oraz dla  $T_1 = RC$  równego a)  $T$ , b)  $0,5 T$ , c)  $0,1 T$ , d)  $2 T$ , e)  $10 T$ .



Rys. 2.87a, b



Rys. 2.88

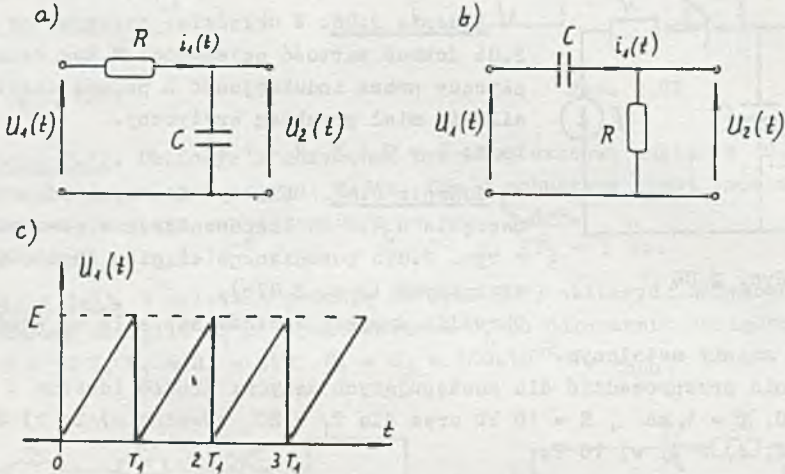


**Zadanie 2.88.** Obwód RC (rys. 2.88) jest pobudzany ciągiem impulsów prostokątnych. Określić wpływ szerokości impulsu  $T_2$  (w stanie ustalonym) na kształt napięcia  $u_2(t)$ .

Dane:  $E = 1 \text{ V}$ ,  $T_1 = RC = T = 1 \text{ ms}$ .

**Zadanie 2.89.** Obliczyć i narysować przebiegi czasowe (nieustalone i ustalone) napięcia  $u_2(t)$  na wyjściu obwodów przedstawionych na rys. 2.89a i b. Przebieg czasowy napięcia  $u_1(t)$  przedstawiony jest na rys. 2.89c.

Dane:  $E = 10 \text{ V}$ ,  $T_1 = T = RC = 1 \text{ ms}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .



Rys. 2.89a, b, c

**Zadanie 2.90.** Obliczyć i narysować przebieg ustalony napięcia  $u_2(t)$  w obwodzie z rys. 2.89a pobudzany wyprostowanym napięciem sinusoidalnym  $u_1(t) = E|\sin t| \text{ V}$ .

Dane:  $E = 1 \text{ V}$ ,  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ , okres sinusoidy  $T_1 = T = RC$ .

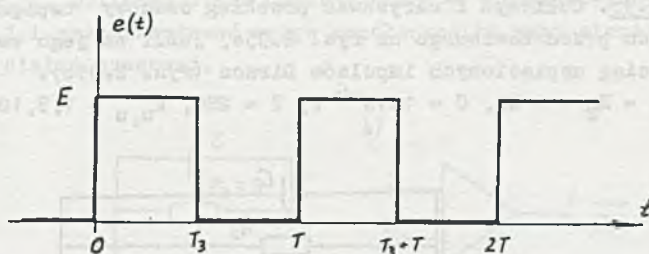
**Zadanie 2.91.** Obliczyć przebieg ustalony napięcia  $u_2(t)$  w obwodzie z rys. 2.89a pobudzany okresowym napięciem  $u_1(t)$  określonym zależnością:

$$u_1(t) = \begin{cases} E \sin \omega t \text{ V} & \text{dla } \sin \omega t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } \sin \omega t < 0 \end{cases}$$

Dane:  $E = 1 \text{ V}$ ,  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ , okres sinusoidy  $T_1 = T = RC$ .

**Zadanie 2.92.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  na wyjściu obwodu przedstawionego na rys. 2.24, jeżeli na jego wejście podawane jest napięcie o przebiegu jak na rys. 2.92.

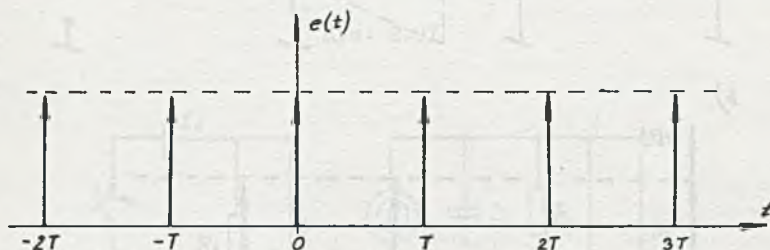
Dane:  $E = 1 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $T = 2 \text{ ms}$ ,  $T_3 = 0,5 T$ .



Rys. 2.92

**Zadanie 2.93.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy ustalony napięcia  $u_2(t)$  na wyjściu obwodu z zadania 2.24, jeżeli na jego wejście podawany jest ciąg impulsów Diraca (rys. 2.93).

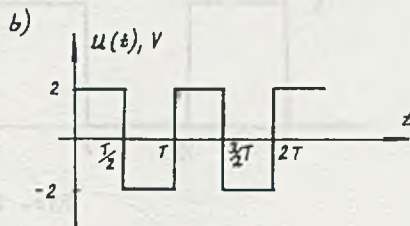
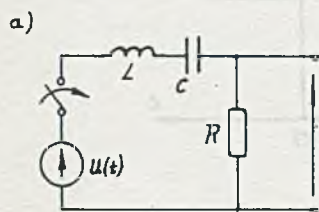
Dane:  $T = 2RC = 2 \text{ ms}$



Rys. 2.93

**Zadanie 2.94.** Obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  na wyjściu obwodu przedstawionego na rys. 2.94a załączonego w chwili  $t = 0$  na napięcie  $u(t)$  o przebiegu czasowym przedstawionym na rys. 2.94b.

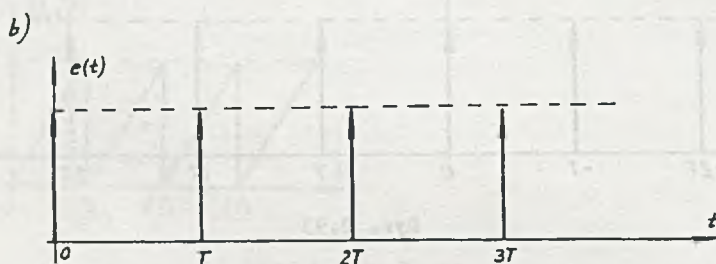
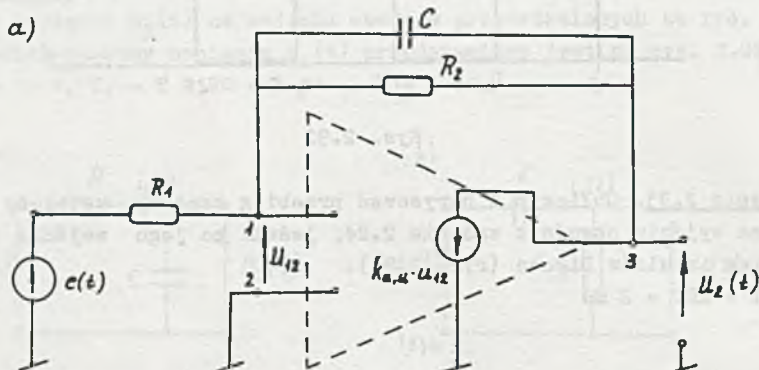
Dane:  $L = 5 \text{ mH}$ ,  $C = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $R = 100 \Omega$ ,  $T = 0,5 \text{ ms}$ ,  $E = 2 \text{ V}$ .



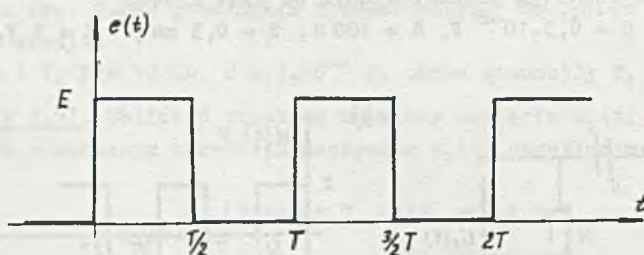
Rys. 2.94'

**Zadanie 2.95.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  na wyjściu układu przedstawionego na rys. 2.95a, jeśli na jego wejście podany zostanie ciąg napięciowych impulsów Diraca (rys. 2.95b).

Dane:  $R = R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $T = 2RC$ ,  $k_{u,u} = 1,5, 10, 100, \infty \frac{\text{V}}{\text{V}}$ .



Rys. 2.95



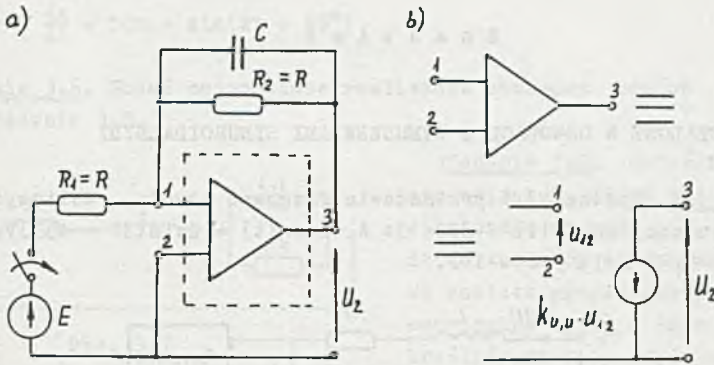
Rys. 2.96

**Zadanie 2.96.** Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia ustalonego  $u_2(t)$  na wyjściu obwodu przedstawionego na rys. 2.95a, jeżeli na jego wejście podawane jest napięcie  $e(t)$  o przebiegu przedstawionym na rys. 2.96.

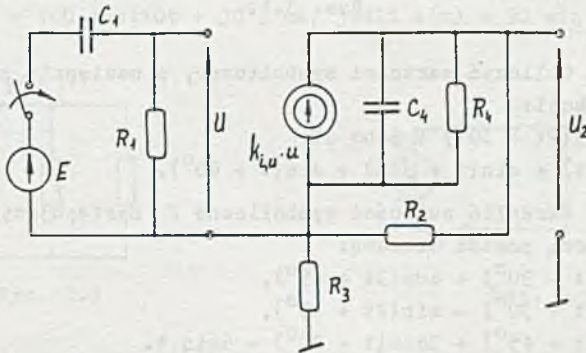
Dane:  $R_1 = R_2 = R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ,  $T = 2RC$ ,  $E = 1 \text{ V}$ ,  $k_{u,u} = 1, 10, \infty \frac{\text{V}}{\text{V}}$ .



**Zadanie 2.97.** Obliczyć stałe czasowe obwodów przedstawionych na rys. 2.97 i 2.97.1 i przedyskutować wpływ współczynnika wzmacnienia ( $k_{u,u}$ ,  $k_{i,u}$ ) na wielkość stałej czasowej.



Rys. 2.97

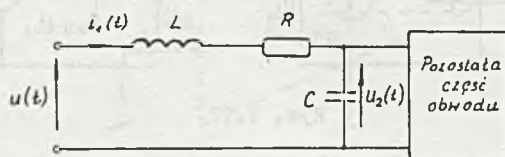


Rys. 2.97.1

## R o z d z i a ł    3

### 1. STANY USTALONE W OBWODACH Z WYMUSZENIAMI SINUSOIDALNYMI

**1Zadanie 3.1.** Rysunek 3.1 przedstawia fragment obwodu. Obliczyć napięcie  $u(t)$  wiedząc, że  $i_1(t) = -3\cos 3t$  A, a  $u_2(t) = 2\sin(3t + 45^\circ)$  V.  
Dane:  $L = 1$  H,  $R = 1\ \Omega$ ,  $C = 1$  F.



Rys. 3.1.

**1Zadanie 3.2.** Obliczyć wartości symboliczne, a następnie przebiegi czasowe danych funkcji:

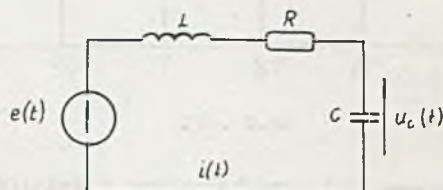
- a)  $f_1(t) = 10\sin(2t + 30^\circ) + 5\cos 2t$ ,
- b)  $f_2(t) = \sin(t) + \sin(t + 30^\circ) + \sin(t + 60^\circ)$ .

**Zadanie 3.3.** Określić wartości symboliczne  $P$  następujących funkcji i podać ich prostszą postać czasową:

- a)  $f(t) = \sin(3t - 90^\circ) + \cos(3t + 45^\circ)$ ,
- b)  $f(t) = \sin(2t + 30^\circ) - \sin(2t + 45^\circ)$ ,
- c)  $f(t) = 4\sin(t + 45^\circ) + 3\cos(t - 30^\circ) + 6\sin t$ .

**1Zadanie 3.4.** Obliczyć przebieg napięcia  $u_c(t)$  w stanie ustalonym dla obwodu przedstawionego na rys. 3.4 zakładając, że  $e(t) = 1\sin 2t$  1(t)V.

Dane:  $L = 0,5$  H,  $R = 1,5\ \Omega$ ,  $C = 1$  F,  $i(0) = 1$  A,  $u_c(0) = 1$  V.



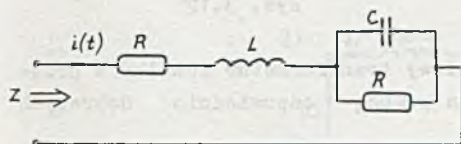
Rys. 3.4.

**Zadanie 3.5.** Znaleźć rozwiązanie w stanie ustalonym następujących równań różniczkowych:

a)  $\frac{dx}{dt} + 2x = 2\sin(2t + 30^\circ),$

b)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 10x = \sin(2t + 45^\circ)$

**Zadanie 3.6.** Podać najprostsze realizacje obwodowe równań różniczkowych z zadania 3.5.

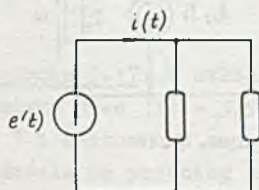


Rys. 3.7

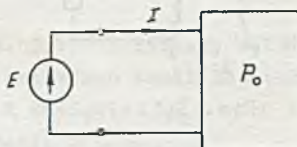
**Zadanie 3.7.** Określić impedancję wejściową  $Z(j\omega)$  dwójnika przedstawionego na rys. 3.7. Zakładając, że do zacisków wejściowych dwójnika zostało przyłożone napięcie sinusoidalne  $e_g(t) = 2\sin 2t$  V, określić przebieg prądu wejściowego  $i(t)$  w stanie ustalonym.

Dane:  $R = 1\Omega$ ,  $L = 1$  H,  $C = 1$  F.

**Zadanie 3.8.** W obwodzie przedstawionym na rys. 3.8 dobrać tak elementy aby prąd  $i(t) = 400 \cos(10t + 30^\circ)$  mA, jeśli  $e(t) = 50 \sin(10t + 45^\circ)$  V.

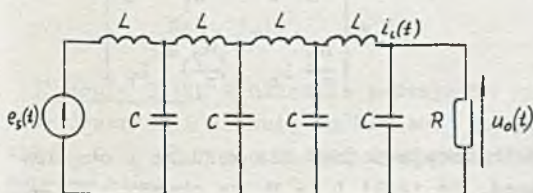


Rys. 3.8



Rys. 3.9

**Zadanie 3.9.** Jest dany dwójnik pasywny  $P_0$  przedstawiony na rys. 3.9 składający się z elementów RLC, na którego wejście załączono sinusoidalną SEM  $e(t)$  o wartości symbolicznej E. Udowodnić, że admitancja wejściowa dwójnika  $Y(j\omega)$  i impedancja wejściowa  $Z(j\omega)$  są związane zależnością  $Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)}$ .



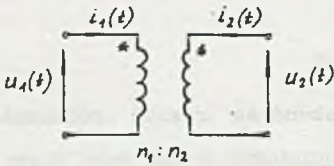
Rys. 3.10

**Zadanie 3.10.** W obwodzie przedstawionym na rys. 3.10 panuje stan ustalony sinusoidalny. Prąd  $i_L(t)$  jest równy  $10\sin 314t$  mA. Obliczyć przebieg napięcia wyjściowego  $u_o(t)$ .

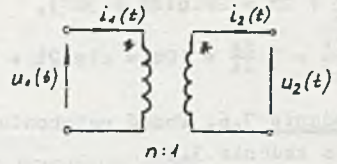
Dane:  $R = 600\Omega$ ,  $L = 0,5$  H,  $C = 4 \mu\text{F}$ .



**Zadanie 3.11.** Obliczyć moc chwilową pobieraną przez transformator idealny przedstawiony na rys. 3.11.



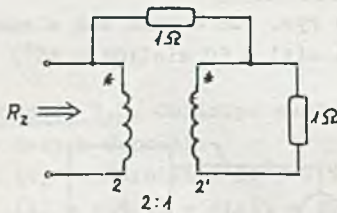
Rys. 3.11



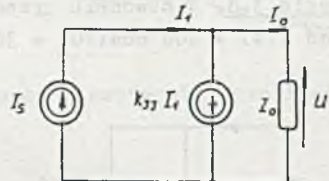
Rys. 3.12

**Zadanie 3.12.** Zamodelować dwuuzwojeniowy transformator idealny o przekładni  $n:1$  przedstawiony na rys. 3.12 za pomocą odpowiednio dobranych dwóch źródeł sterowanych.

**Zadanie 3.13.** Dla obwodu przedstawionego na rys. 3.13 obliczyć rezystancję zastępczą, gdy: a) zaciski 2-2' są rozwarne, b) zaciski 2-2' są zwarte.

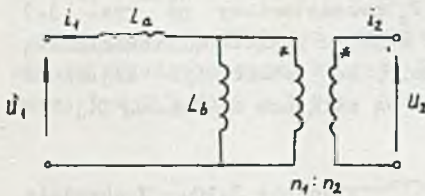


Rys. 3.13



Rys. 3.14

**Zadanie 3.14.** Obliczyć impedancję wejściową  $Z_{we}$  obwodu przedstawionego na rys. 3.14.



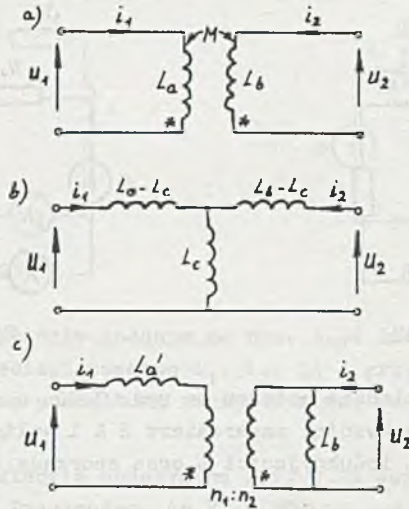
Rys. 3.15

**Zadanie 3.15.** Wykazać, że obwód pokazany na rys. 3.15 jest równoważny parze cewek sprzężonych magnetycznie o macierzy indukcyjnościowej równej

$$L = \begin{bmatrix} L_a + L_b & \frac{n_2}{n_1} L_b \\ \frac{n_2}{n_1} L_b & (\frac{n_2}{n_1})^2 L_b \end{bmatrix}$$

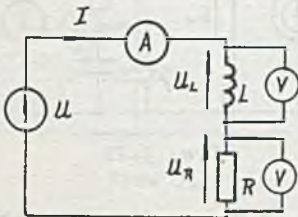
**Zadanie 3.16.** Obliczyć macierze indukcyjnościowe dla każdego z obwodów przedstawionych na rys. 3.16. Pokazać, że jeśli  $L_c = M$ , to obwody a) i b) mają tę samą macierz indukcyjnościową.

Jaką wartość musi mieć  $L_a$  i  $\frac{n_1}{n_2}$ , aby obwody a) i c) miały tę samą macierz indukcyjnościową?

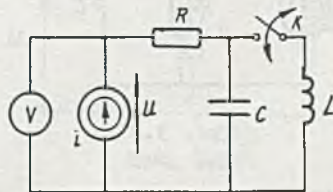


Rys. 3.16

**Zadanie 3.17.** W układzie podanym na rys. 3.17 przyrządy wskazują: amperomierz prąd  $|I| = 3,5$  A, woltomierz na zaciskach cewki napięcie  $|U_L| = 72$  V i woltomierz na zaciskach opornika  $R$  napięcie  $|U_R| = 48$  V. Napięcie źródła ma przebieg sinusoidalny o pulsacji  $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Obliczyć napięcie źródła  $|U|$ , indukcyjność  $L$  oraz opór  $R$ .



Rys. 3.17

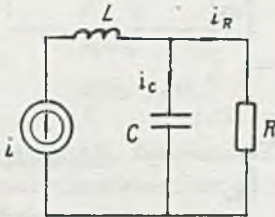


Rys. 3.18

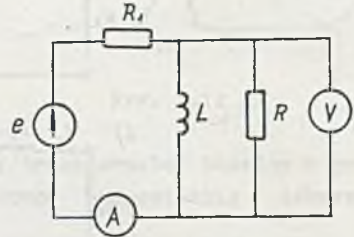
**Zadanie 3.18.** W układzie podanym na rysunku 3.18 wskazania woltomierza przy otwartym i zamkniętym kluczu  $K$  są jednakowe. Podać wartości reakcji  $X_C$  i  $X_L$  oraz sporządzić wykresy wektorowe napięć przy otwartym i zamkniętym kluczu.

Dane:  $|I| = 0,1$  A,  $R = 150 \Omega$ ,  $|U| = 20$  V.

Zadanie 3.19. W układzie podanym na rys. 3.19 siła prądomotoryczna  $i = 0,2 \sqrt{2} \cos 500t$  A,  $L = 20$  mH,  $C = 50 \cdot 10^{-6}$  F,  $R = 40 \Omega$ . Określić przebiegi czasowe prądów płynących przez kondensator  $i_C$  oraz przez opornik  $i_R$ . Wyznaczyć moce chwilowe i czynne dla źródła oraz wszystkich elementów obwodu.



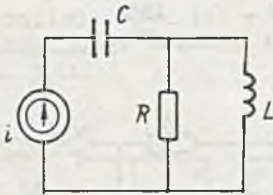
Rys. 3.19



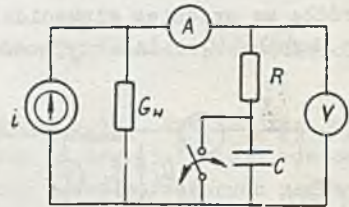
Rys. 3.20

Zadanie 3.20. W układzie podanym na rys. 3.20  $e = 120 \sin 314t$  V,  $R_1 = 25 \Omega$ , a przyrządy wskazują: amperomierz 2 A i woltomierz 47 V. Podać wartości rezystancji  $R$  i indukcyjności  $L$  oraz sporządzić wykres wektorowy napięć i prądów.

Zadanie 3.21. W obwodzie podanym na rys. 3.21 siła prądomotoryczna wydaje moc czynną  $P_T = 40$  mW, a maksymalna wartość energii gromadzona na cewce  $W_{Lm} = 4 \cdot 10^{-5}$  J oraz na kondensatorze  $W_{Cm} = 15 \cdot 10^{-5}$  J. Obliczyć wartości elementów obwodu, jeśli siła prądomotoryczna  $i = 10 \sqrt{2} \sin 314t$  mA.



Rys. 3.21



Rys. 3.22

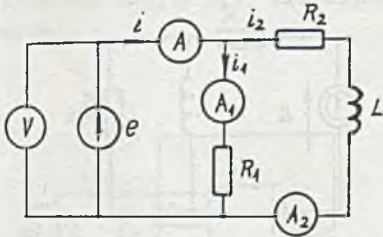
Zadanie 3.22. Przyrządy włączone do układu na rys. 3.22 wskazywały przy zamkniętym kluczu odpowiednio 20 V i 0,04 A, a przy otwartym kluczu 26 V i 0,01 A.

Podać wartości elementów  $R$  i  $C$  oraz moc czynną wydawaną przez źródło (przy otwartym kluczu) o pulsacji  $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

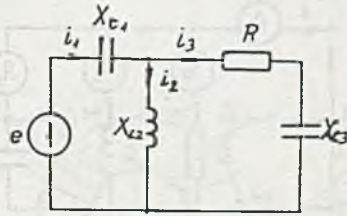
Zadanie 3.23. Idealne przyrządy podłączone do układu (rys. 3.23) wskazują: amperomierz  $A_1$  prąd 2 A, amperomierz  $A_2$  prąd 3 A, amperomierz  $A$  prąd 4 A i woltomierz  $V$  napięcie 24 V.



Obliczyć na podstawie wskazań przyrządów wartość rezystancji  $R_1$  i  $R_2$ , indukcyjności  $L$  oraz moc czynną wydawaną przez SEM  $e$ , jeżeli częstotliwość źródła  $f = 50 \text{ Hz}$ .



Rys. 3.23

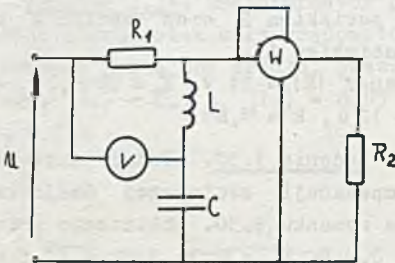


Rys. 3.24

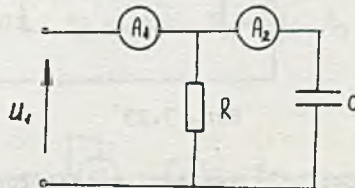
✓ Zadanie 3.24. W układzie podanym na rys. 3.24 źródło wydaje moc czynną  $P = 400 \text{ W}$ . Podać przebiegi czasowe  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  przyjmując częstotliwość źródła  $f = 50 \text{ Hz}$ , fazę początkową napięcia równą zero oraz  $X_{C1} = X_{C3} = 20 \Omega$ ,  $X_{L2} = 20 \Omega$ ,  $R = 25 \Omega$ .

✓ Zadanie 3.25. W układzie podanym na rys. 3.25 watomierz wskazuje  $30 \text{ W}$ , a woltomierz  $93,6 \text{ V}$ . Przyjmując, że  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $L = 0,8 \text{ H}$ ,  $C = 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}$  obliczyć

- 1) wartość rezystancji  $R_1$ ,
- 2) amplitudę  $|U_m|$  przyłożonego napięcia o częstotliwości  $f = 50 \text{ Hz}$ .



Rys. 3.25

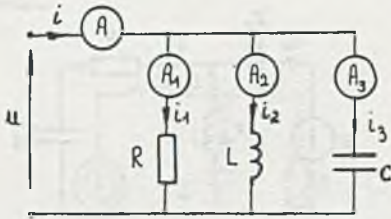


Rys. 3.26

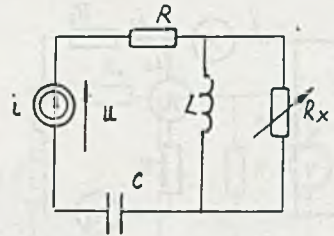
✓ Zadanie 3.26. Obliczyć amplitudę i częstotliwość źródła zasilającego obwód podany na rys. 3.26, jeżeli amperomierze wskazują:  $A_1$  prąd  $0,5 \text{ A}$ ,  $A_2$  prąd  $0,4 \text{ A}$  oraz  $R = 200 \Omega$  i  $C = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

Zadanie 3.27. W układzie podanym na rys. 3.27 obliczyć wskazanie amperomierzy oraz przebiegi czasowe wszystkich prądów.

Dane:  $u = 17\sin 100t$  V,  $R = 20\Omega$ ,  $L = 0,5$  H,  $C = 100 \cdot 10^{-6}$  F.



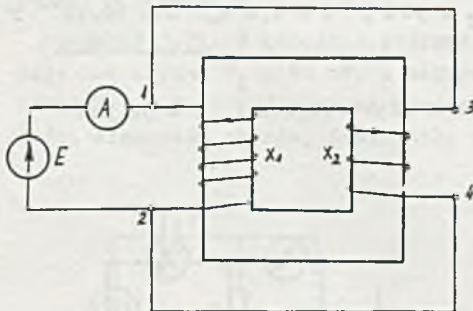
Rys. 3.27



Rys. 3.28

Zadanie 3.28. Dla obwodu przedstawionego na rys. 3.28 dobrać wartość rezystancji  $R_x$  tak, żeby napięcie na SPM było w fazie z prądem przez nią wymuszonym. Dla tego przypadku obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u$ .

Dane:  $i = 0,1 \sqrt{2} \sin 314t$  A,  $R = 20\Omega$ ,  $L = 1$  H,  $C = 20 \cdot 10^{-6}$  F.

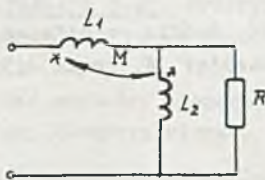


Rys. 3.29

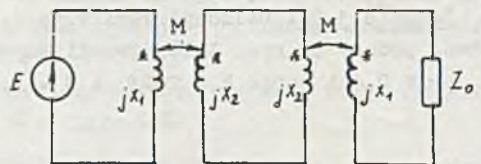
Zadanie 3.29. Obliczyć wskazanie amperomierza w układzie podanym na rys. 3.29, jeżeli współczynnik sprzężenia obu cewek wynosi  $k$ . Co wskaże amperomierz, jeżeli zacisk 3 połączyć z zaciskiem 2 oraz zacisk 4 z zaciskiem 1?

Dane:  $|E| = 11$  V,  $X_1 = 20\Omega$ ,  $X_2 = 12\Omega$ ,  $k = 0,85$ .

Zadanie 3.30. Podać wartość impedancji zastępczej dwójnika na rysunku 3.30. Obliczenia przeprowadzić dla wartości szczegółowych:  $L_1 = 0,2$  H,  $L_2 = 0,35$  H,  $k = 1$ ,  $f = 50$  Hz,  $R = 40\Omega$ .



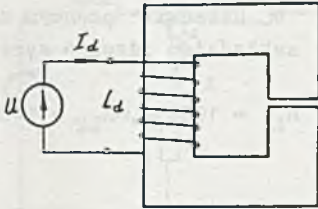
Rys. 3.30



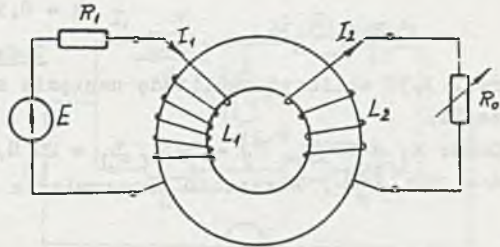
Rys. 3.31

Zadanie 3.31. Jaka impedancja widziana jest z zacisków generatora w układzie z rys. 3.31?

**Zadanie 3.32.** Dławik ze szczeliną powietrzną (rys. 3.32) o indukcyjności  $L_d = 12 \text{ H}$ , rezystancji  $R_d = 80 \Omega$  jest nawinięty z 1000 zwojów i zasilany z generatora napięcia sinusoidalnego  $|U| = 60 \text{ V}$ ,  $f = 500 \text{ Hz}$ . Obliczyć ile razy wzrośnie prąd w sekcji uzwojenia, gdzie nastąpiło zwarcie czterech zwojów przy nie zmienionym napięciu zasilania. Rozproszenie pominać.



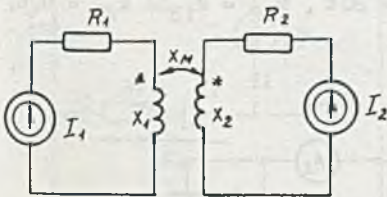
Rys. 3.32



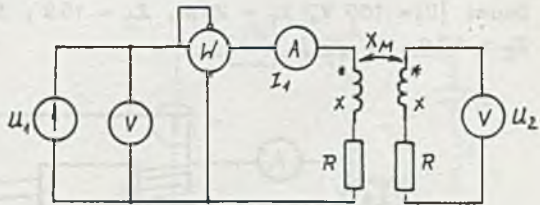
Rys. 3.33

**Zadanie 3.33.** Obciążeniem transformatora z rdzeniem toroidalnym (rys. 3.33) jest zmienny opornik  $R_o$ . Zakładając, że można pominąć opór czynny uzwojeń podać wartość  $R_o$  dla której składowa czynna impedancji wejściowej transformatora będzie maksymalna. Przeprowadzić obliczenia szczegółowe dla następujących danych:  $L_1 = 3 \text{ H}$ ,  $L_2 = 0,03 \text{ H}$ , współczynnik sprzężenia uzwojeń  $k = 0,95$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ .

**Zadanie 3.34.** Transformator powietrzny (rys. 3.34) jest zasilany z dwóch stron przez siły prądomotoryczne. Podać wartości mocy czynnych wydawanych przez oba źródła, jeżeli  $I_2$  wyprzedza  $I_1$  w fazie o  $90^\circ$ . Dane:  $|I_1| = 0,1 \text{ A}$ ,  $|I_2| = 0,05 \text{ A}$ ,  $X_1 = 10 \Omega$ ,  $X_2 = 15 \Omega$ ,  $X_M = 5 \Omega$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 25 \Omega$ .



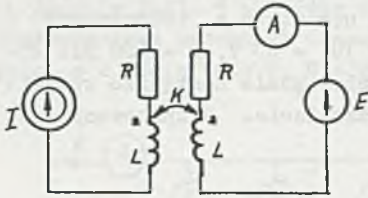
Rys. 3.34



Rys. 3.35

**Zadanie 3.35.** Transformator powietrzny pokazany na rys. 3.35 składa się z dwóch jednakowych uzwojeń i pracuje w stanie jałowym. Przyrządy idealne wskazują  $P = 20 \text{ W}$ ,  $|I_1| = 1,2 \text{ A}$ ,  $|U_1| = 20 \text{ V}$ ,  $|U_2| = 10 \text{ V}$ . Określić  $R$ ,  $X$ ,  $X_M$ .





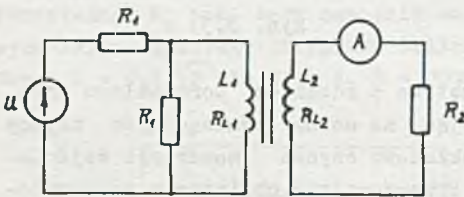
Rys. 3.36

**Zadanie 3.36.** Amperomierz włączony po stronie wtórnej transformatora powietrznego (rys. 3.36) wskazuje zero. Obliczyć ile wynosi amplituda i faza SEM oraz moc wydawania przez SPM. Sporządzić wykresy wektorowe prądów i napięć.

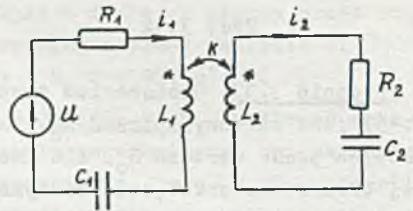
Dane:  $|I| = 0,02 \text{ A}$ ,  $L = 0,2 \text{ H}$ ,  $R = 60 \Omega$ ,  $k = 0,5$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ .

**Zadanie 3.37.** W układzie podanym na rys. 3.37 obliczyć amplitudę napięcia zasilania, zakładając idealne sprzężenie.

Dane:  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 50 \Omega$ ,  $L_1 = 20 \text{ H}$ ,  $L_2 = 2 \text{ H}$ ,  $R_{L1} = 1000 \Omega$ ,  $R_{L2} = 10 \Omega$ ,  $\omega = 300 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , wskazanie amperomierza  $1 \text{ A}$ .



Rys. 3.37



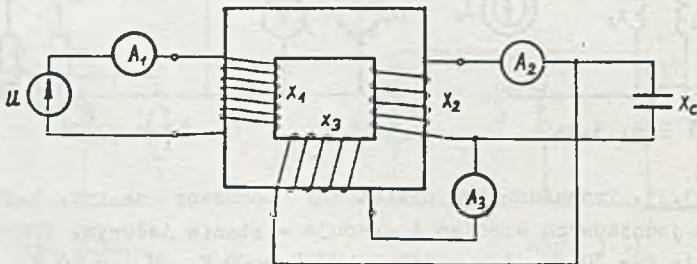
Rys. 3.38

**Zadanie 3.38.** Podać przebiegi czasowe prądów transformatora powietrznego z rys. 3.38.

Dane:  $u = 60 \sqrt{2} \sin 314t \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 30 \Omega$ ,  $L_1 = 0,1 \text{ H}$ ,  $L_2 = 0,15 \text{ H}$ ,  $k = 0,6$ ,  $C_1 = 50 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 100 \mu\text{F}$ .

**Zadanie 3.39.** Obliczyć wskazania amperomierzy w układzie podanym na rysunku 3.39.

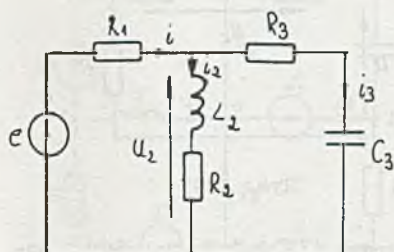
Dane:  $|U| = 100 \text{ V}$ ,  $X_1 = 25 \Omega$ ,  $X_2 = 15 \Omega$ ,  $X_3 = 20 \Omega$ ,  $k_{12} = k_{13} = k_{23} = 0,6$ ,  $X_C = 12 \Omega$ .



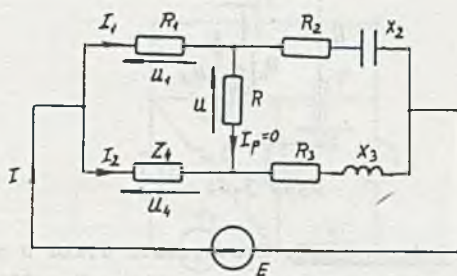
Rys. 3.39

✓ Zadanie 3.40. Obliczyć moc czynną, bierną i pozorną wydawaną przez źródło napięcia oraz sporządzić bilans mocy czynnej w układzie podanym na rys. 3.40.

Dane:  $e = 22 \sqrt{2} \sin 314t$  V,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 20 \Omega$ ,  $X_{L2} = 20 \Omega$ ,  $X_{C3} = 40 \Omega$ .



Rys. 3.40

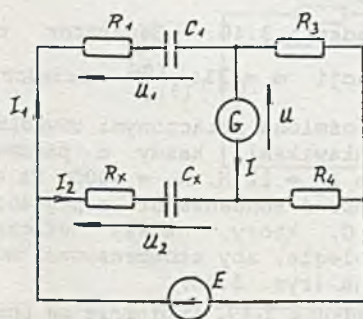


Rys. 3.41

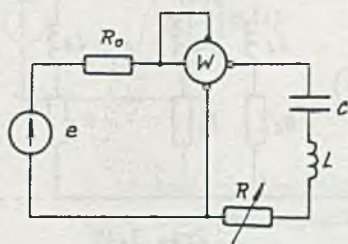
✓ Zadanie 3.41. Dla jakiej wartości impedancji  $Z_4$  mostek podany na rys. 3.41 będzie w równowadze (prąd płynący przez opornik R równa się zero)?

Dane:  $e = 10 \sqrt{2} \sin 1000t$  V,  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $R_3 = 160 \Omega$ ,  $X_2 = 80 \Omega$ ,  $X_3 = 80 \Omega$ ,  $R = 1000 \Omega$ .

Zadanie 3.42. Dla jakich wartości oporności  $R_x$  i pojemności  $C_x$  prąd płynący przez miernik w obwodzie na rys. 3.42 (galwanometr G) jest równy zero, jeżeli częstotliwość źródła  $f = 1000$  Hz, a wartości elementów pozostałych gałęzi mostka są następujące:  $R_1 = 10$  k $\Omega$ ,  $C_1 = 0,47 \cdot 10^{-7}$  F,  $R_3 = 1$  k $\Omega$ ,  $R_4 = 10,85$  k $\Omega$ .



Rys. 3.42

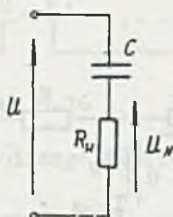


Rys. 3.43

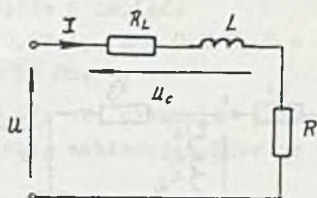
✓ Zadanie 3.43. W układzie podanym na rys. 3.43 sporządzić wykres zależności wskazań watomierza od wartości rezystancji przy jej zmianach od zera do 20 k $\Omega$ ,

Dane:  $e = 11 \sqrt{2} \sin 628t$  V,  $R_0 = 10 \Omega$ ,  $C = 8 \cdot 10^{-6}$  F,  $L = 60$  mH.

**Zadanie 3.44.** Odbiornik omowy o danych znamionowych  $P_N = 12 \text{ W}$ ,  $|U_N| = 60 \text{ V}$  chcemy włączyć do sieci prądu zmiennego  $|U| = 220 \text{ V}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ . Aby uniknąć dodatkowego poboru mocy czynnej zbudowano dzielnik napięcia wykorzystując kondensator (rys. 3.44). Podać jego pojemność  $C$ .



Rys. 3.44

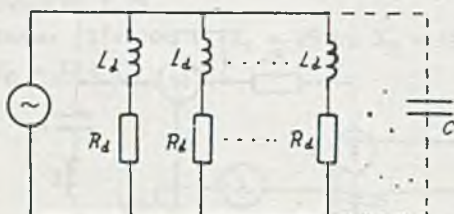


Rys. 3.45

**Zadanie 3.45.** Rzeczywista cewka o parametrach  $L = 0,2 \text{ H}$ ,  $R_L = 80 \Omega$ , połączona szeregowo z opornikiem  $R = 20 \Omega$  włączona jest do sieci prądu sinusoidalnego o częstotliwości  $f_1 = 50 \text{ Hz}$  (rys. 3.45). Jaki opornik należy dodatkowo dołączyć do opornika  $R$ , aby a) prąd cewki się nie zmienił, b) napięcie na cewce się nie zmieniło, przy zmianie częstotliwości sieci na  $f_2 = 60 \text{ Hz}$ .

**Zadanie 3.46.** Opornik o rezystancji  $R = 200 \Omega$  i kondensator o pojemności  $C = 6 \mu\text{F}$  włączono szeregowo na napięcie  $|U| = 110 \text{ V}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ . Dobrać bocznik do opornika  $R$  tak, aby przy zmianie częstotliwości na  $f_1 = 60 \text{ Hz}$  napięcie na kondensatorze nie uległo zmianie.

**Zadanie 3.47.** Cewka o parametrach  $L = 0,2 \text{ H}$ ,  $R_L = 140 \Omega$  obciąża generator sinusoidalny  $|U| = 10 \text{ V}$ ,  $f = 200 \text{ Hz}$ . Jaki element bierny należy włączyć do obwodu cewki, aby przy zmianie częstotliwości na  $f_1 = 300 \text{ Hz}$  wartość skuteczna prądu cewki nie zmieniła się?



Rys. 3.48

**Zadanie 3.48.** Generator o pulsacji  $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  obciążony

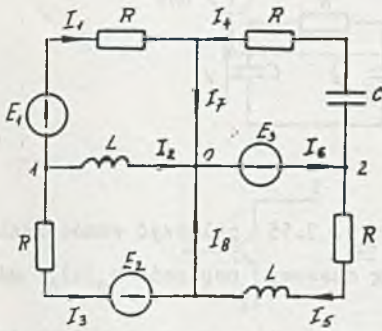
jest ośmioną połączonymi równolegle dławikami, każdy o parametrach  $L_d = 12 \text{ H}$ ,  $R_d = 500 \Omega$ . Należy dobrać kondensator o pojemności  $C$ , który należy włączyć równolegle, aby skompensować moc bierną (rys. 3.48).

**Zadanie 3.49.** Odbiornik ma charakter indukcyjny,  $\cos \varphi = 0,7$ . Zmierzona omomierzem oporność czynna wynosi  $142 \Omega$ . Jaki kondensator należy dołączyć równolegle, aby współczynnik mocy wzrósł do wartości  $\cos \varphi_{\text{ind}} = 0,8$ ?

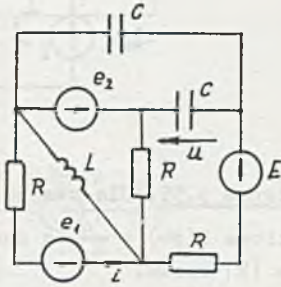


✓ Zadanie 3.50. W układzie podanym na rysunku 3.50 obliczyć rozpiływ prądów.

Dane:  $e_1 = 10\sqrt{2} \sin 500t$  V,  $e_2 = 10\sqrt{2} \cos 500t$  V,  $e_3 = 20\sqrt{2} \sin 500t$  V,  $L = 0,2$  H,  $C = 10 \cdot 10^{-6}$  F,  $R = 100 \Omega$ .



Rys. 3.50



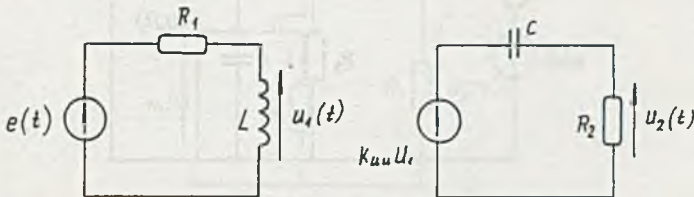
Rys. 3.51

2 Zadanie 3.51. W układzie podanym na rysunku 3.51 obliczyć przebiegi czasowe prądu i oraz napięcia u.

Dane:  $2e_1 = e_2 = 20\sqrt{2} \sin 200t$ ,  $E = 10$  V,  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0,1$  H,  $C = 50 \cdot 10^{-6}$  F.

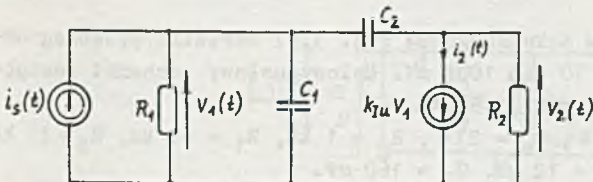
Zadanie 3.52. Dla obwodu przedstawionego na rys. 3.52 obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$ , gdy  $e(t) = \sqrt{2} |E| \sin \omega t$ .

Dane:  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 200 \Omega$ ,  $L = 0,1$  H,  $C = 1 \mu F$ ,  $\omega = 1000$  rad/s,  $k_{uu} = 2|E| = 10$  V.



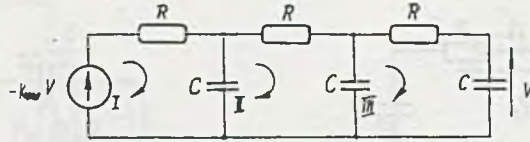
Rys. 3.52

Zadanie 3.53. Obliczyć przebieg napięcia  $v_2(t)$  dla obwodu przedstawionego na rys. 3.53, jeśli  $i_3(t) = \sqrt{2} |I_3| \sin \omega t$ .  
Dane:  $R_1 = R_2 = 1$  k $\Omega$ ,  $C_1 = 10 \mu F$ ,  $C_2 = 1 \mu F$ ,  $k_{iu} = 10^{-3}$  V/A,  $|I_3| = 100$  mA,  $\omega = 1000$  rad/s



Rys. 3.53

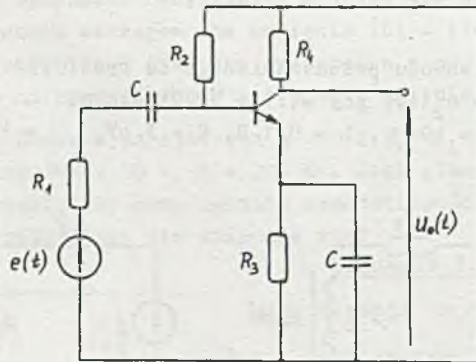
Zadanie 3.54. Rysunek 3.54 przedstawia schemat zastępczy generatora przebiegów sinusoidalnych. Wykazać, że niezerowe napięcia i prądy mogą istnieć w obwodzie tylko dla jednej szczególnej częstotliwości i znaleźć wartość  $k_{uu}$ , dla której jest to możliwe.



Rys. 3.54

Zadanie 3.55. Dla obwodu pokazanego na rys. 3.55 obliczyć wzmocnienie napięciowe  $K(j\omega) = \frac{U_o}{E}$ , a następnie przebieg czasowy napięcia  $u_o(t)$ , gdy  $e(t) = |E| \sin \omega t$ .

Tranzystor jest opisany małosygnałowymi parametrami macierzy hybrydowej  $h$  o następujących wartościach:  $h_{11} = 1500 \Omega$ ,  $h_{12} = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $h_{21} = 50$ ,  $h_{22} = 20 \mu S$ . Pozostałe dane wynoszą:  $|E| = 10 \text{ mV}$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $R_1 = 1,5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 25 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 50 \mu F$ .

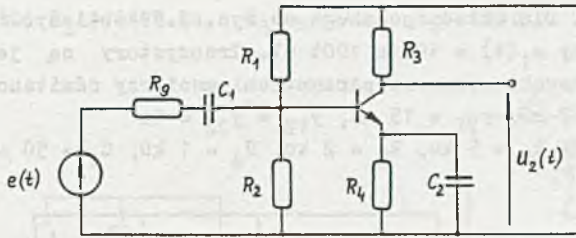


Rys. 3.55

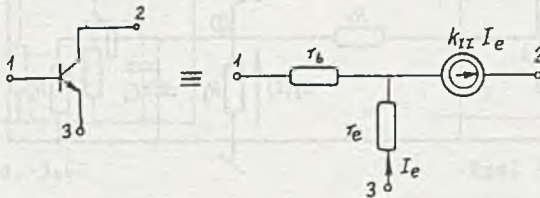
Zadanie 3.56. Obwód z rys. 3.55 obliczyć na m.c. za pomocą programu ACAN.

Zadanie 3.57. Dla obwodu pokazanego na rys. 3.57 określić przebieg napięcia  $u_2(t)$ , jeśli  $e(t) = 10 \sin 100t \text{ mV}$ . Małosygnałowy schemat zastępczy tranzystora przedstawia rys. 3.57.1.

Dane:  $k_{II} = 0,98$ ,  $r_b = 600 \Omega$ ,  $r_e = 23 \Omega$ ,  $R_g = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 60 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 75 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 6,2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 12 \mu F$ ,  $C_2 = 160 \mu F$ .



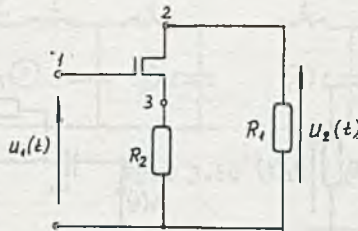
Rys. 3.57



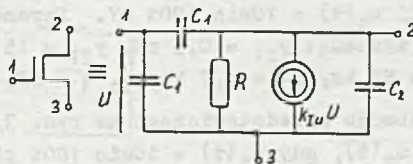
Rys. 3.57.1

**Zadanie 3.58.** Układ z rys. 3.58 przedstawia wzmacniacz z tranzystorem polowym. Obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$ , gdy  $u_1(t) = 10 \sin 10^8 t$  mV. Do obliczeń przyjąć schemat zastępczy tranzystora polowego przedstawiony na rys. 3.58.1.

Dane:  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 0,5 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 10 \text{ pF}$ ,  $C_2 = 1 \text{ pF}$ ,  $R = 0,1 \text{ M}\Omega$ ,  $k_{IU} = 0,1 \text{ mS}$ .



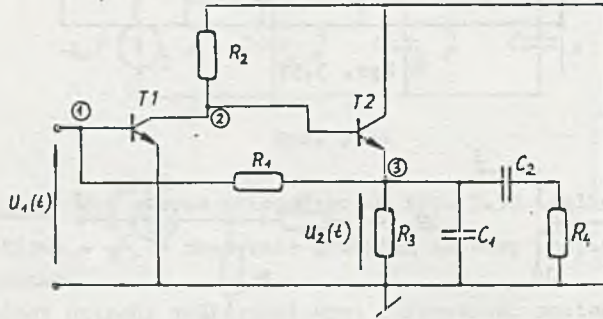
Rys. 3.58



Rys. 3.58.1



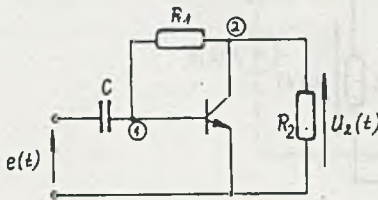
**Zadanie 3.59.** Dla układu podanego na rys. 3.59 obliczyć przebieg napięcia  $u_2(t)$ , gdy  $u_1(t) = 10\sin 100t$  mV. Transzystory są jednakowe, ich własności są scharakteryzowane parametrami macierzy admittancyjnej  $\underline{y}$  i wynoszą:  $y_{11} = 0,67$  mS,  $y_{21} = 15$  mS,  $y_{12} = y_{22} = 0$ .  
Dane:  $R_1 = 50$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 5$  k $\Omega$ ,  $R_3 = 2$  k $\Omega$ ,  $R_4 = 1$  k $\Omega$ ,  $C_1 = 50$   $\mu$ F,  $C_2 = 5$   $\mu$ F.



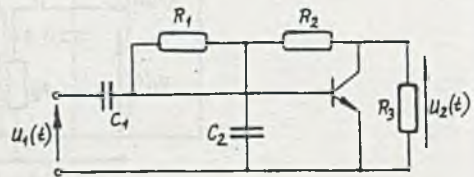
Rys. 3.59

**Zadanie 3.60.** Obwód z rys. 3.59 obliczyć na m.c. za pomocą programu  $\Delta$ CAN [24]

**Zadanie 3.61.** Obliczyć przebieg napięcia  $u_2(t)$  w obwodzie przedstawionym na rys. 3.61, gdy  $e(t) = 10\sin 100t$  mV. Parametry macierzy admittancyjnej tranzystora wynoszą:  $y_{11} = 0,5$  mS,  $y_{21} = 15$  mS,  $y_{12} = y_{22} = 0$ .  
Dane:  $R_1 = 25$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 430$   $\Omega$ ,  $C = 5$   $\mu$ F.



Rys. 3.61

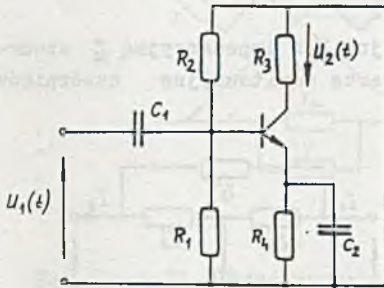


Rys. 3.62

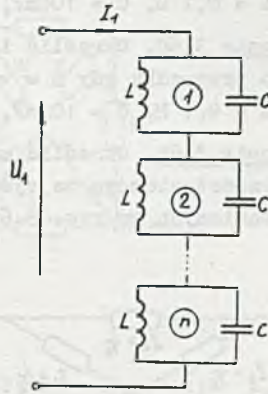
**Zadanie 3.62.** Obliczyć przebieg napięcia  $u_2(t)$  w obwodzie przedstawionym na rys. 3.62, jeśli  $u_1(t) = 10\sin 100t$  mV. Parametry macierzy admittancyjnej tranzystora wynoszą:  $y_{11} = 0,5$  mS,  $y_{21} = 15$  mS,  $y_{12} = y_{22} = 0$ .  
Dane:  $R = 0,1$  M $\Omega$ ,  $R_2 = 82$  k $\Omega$ ,  $R_3 = 4,7$  k $\Omega$ ,  $C_1 = 5$   $\mu$ F,  $C_2 = 1$   $\mu$ F.

**Zadanie 3.63.** Dla obwodu przedstawionego na rys. 3.63 obliczyć przebieg czajowy napięcia  $u_2(t)$ , gdy  $u_1(t) = 10\sin 100t$  mV. Parametry macierzy hybrydowej tranzystora wynoszą:  $h_{11} = 1,5$  k $\Omega$ ,  $h_{12} = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $h_{21} = 50$ ,  $h_{22} = 20$   $\mu$ S.

Dane:  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 14.4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 400 \Omega$ ,  $R_4 = 50 \Omega$ ,  $C_1 = 5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 50 \mu\text{F}$ .



Rys. 3.63

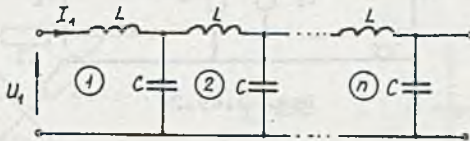


Rys. 3.64

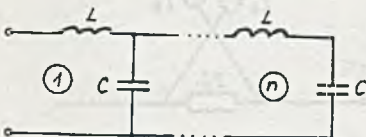
Zadanie 3.64. Określić impedancję wejściową  $Z_{we} = \frac{U_1}{I_1}$  dla obwodu przedstawionego na rys. 3.64.

Zadanie 3.65. Wykazać, że dla obwodu z rys. 3.64 impedancja wejściowa  $Z_{we} = j \frac{n\omega L}{1 - \omega^2 LC}$ .

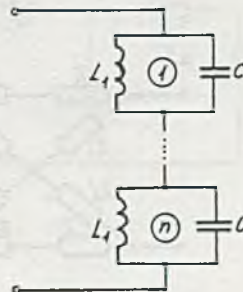
Zadanie 3.66. Określić impedancję wejściową  $Z_{we} = \frac{U_1}{I_1}$  dla obwodu przedstawionego na rys. 3.66.



Rys. 3.66



Rys. 3.67



Rys. 3.67.1

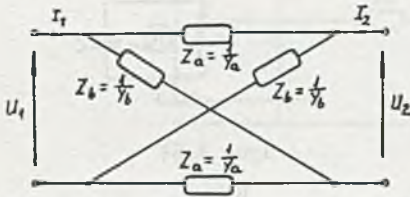
**Zadanie 3.67.** Obliczyć wartości indukcyjności  $L_1$ , dla której obwód z rys. 3.67 jest równoważny obwodowi z rys. 3.67.1.

Dane:  $L = 0,1 \text{ H}$ ,  $C = 10 \text{ mF}$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ,  $n = 2$ .

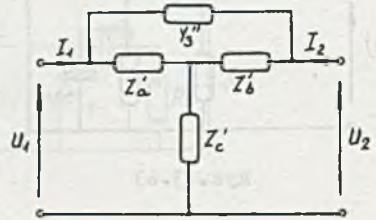
**Zadanie 3.68.** Określić impedancję wejściową  $Z_{we} = \frac{U_1}{I_1}$  dla obwodu z rys. 3.66, w przypadku gdy  $n = \infty$ .

Dane:  $L = 0,1 \text{ H}$ ,  $C = 10 \text{ mF}$ ,  $\omega = 100 \text{ rad/s}$

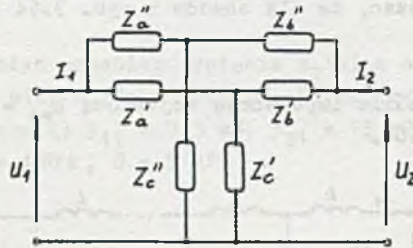
**Zadanie 3.69.** Określić macierz admitancyjną  $\underline{Y}$  i impedancyjną  $\underline{Z}$  czwórnika przedstawionego na rys. 3.69 oraz macierze admitancyjne czwórników przedstawionych na rys. 3.69.1 i 3.69.2.



Rys. 3.69

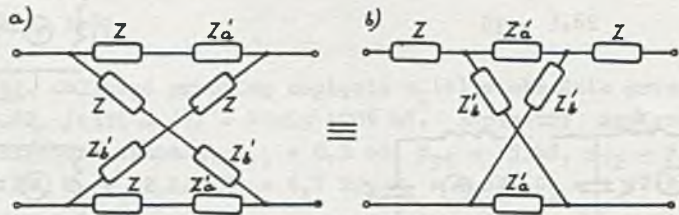


Rys. 3.69.1



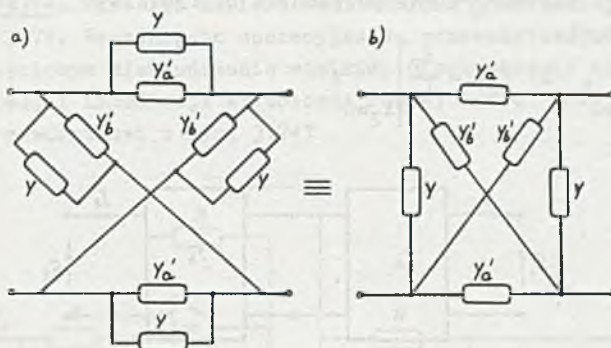
Rys. 3.69.2

**Zadanie 3.70.** Wykazać, że czwórniki przedstawione na rys. 3.70 i rys. 3.70.1 są równoważne.



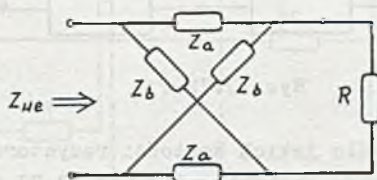
Rys. 3.70



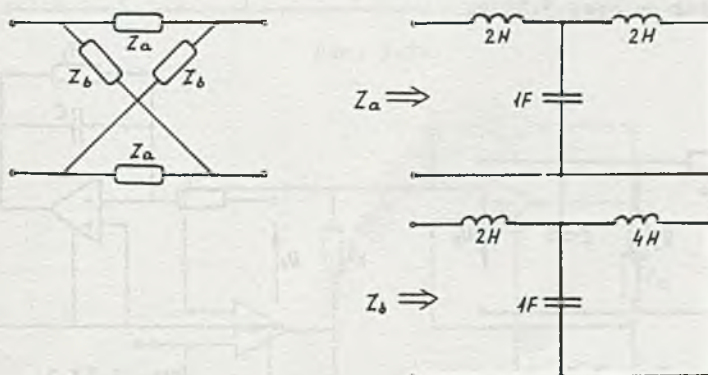


Rys. 3.70.1

**Zadanie 3.71.** Podać warunek, jaki muszą spełniać impedancje  $Z_a$  i  $Z_b$ , aby w obwodzie przedstawionym na rys. 3.71  $Z_{we} = R$ . Czwórnik z rys. 3.71.1 przedstawić w postaci równoważnego trójkątka.



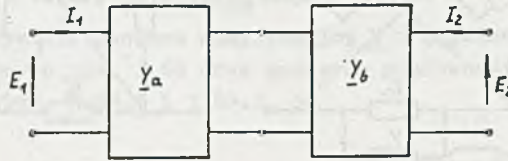
Rys. 3.71



Rys. 3.71.1

**Zadanie 3.72.** Dla czwórników pokazanych na rys. 3.72 i rys. 3.72.1 określić odpowiednio:

a)  $Y_{21} = \frac{I_2}{E_1} \Big|_{E_2=0}$ , b)  $Z_{21} = \frac{E_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$ .

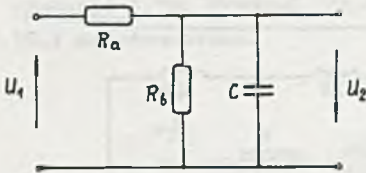


Rys. 3.72

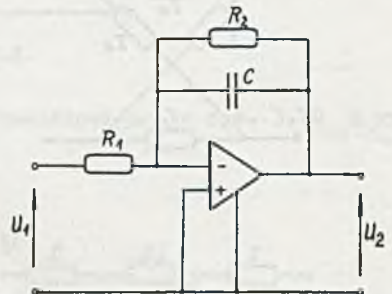


Rys. 3.72.1

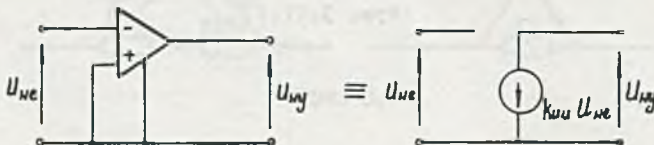
**Zadanie 3.73.** Określić dla jakich wartości rezystorów  $R_a$  i  $R_b$  czwórnik z rys. 3.73 będzie równoważny czwórnikowi z rys. 3.73.1. Podać warunek jaki muszą spełniać wartości rezystorów  $R_1$  i  $R_2$ , aby czwórniki te mogły być równoważne. W obliczeniach przyjąć schemat zastępczy wzmacniacza operacyjnego taki jak na rys. 3.73.2.



Rys. 3.73

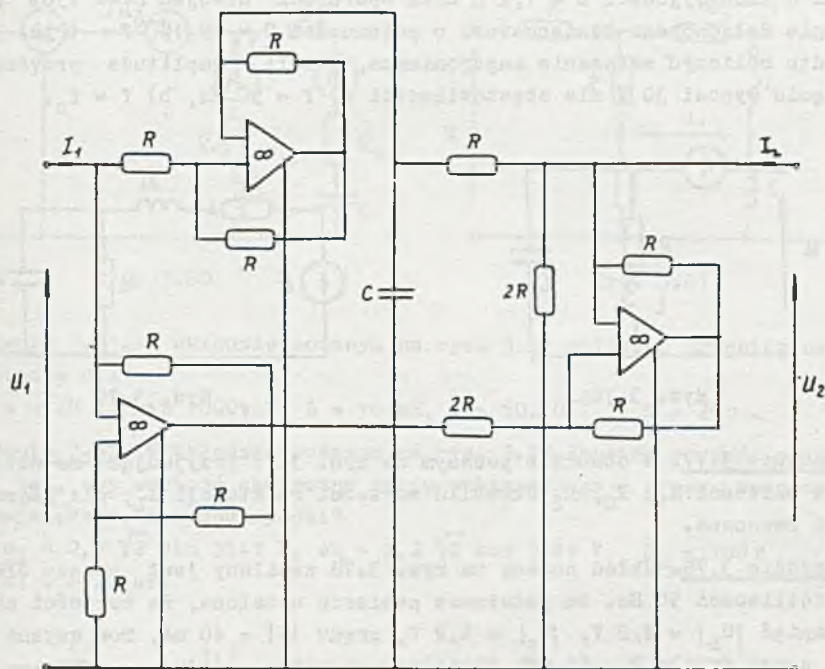


Rys. 3.73.1

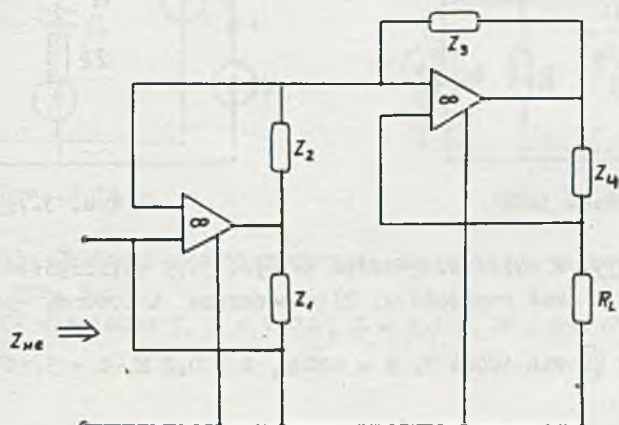


Rys. 3.73.2

**Zadanie 3.74.** Określić macierz admittancejną  $Y$  czwórnik przedstawionego na rys. 3.74. Wzmacniacze operacyjne są wzmacniaczami idealnymi o wzmacnieniu napięciowym nieskończenie wielkim, nieskończenie wielkiej impedancji wejściowej i impedancji wyjściowej równej zero. Jaki czwórnik jest równoważny czwórnikowi z rys. 3.74?



Rys. 3.74

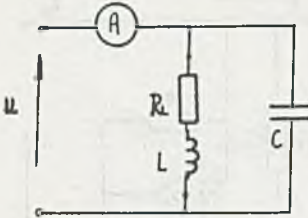


Rys. 3.75

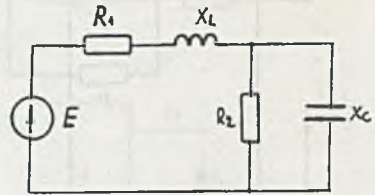


**Zadanie 3.75.** Określić impedancję wejściową  $Z_{we}$  dwójnika przedstawionego na rys. 3.75. Wzmacniacze operacyjne są wzmacniaczami idealnymi (patrz zadanie 3.74). Jaki element bierny jest równoważny dwójnikowi z rys. 3.75, w przypadku gdy:  $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$ ,  $Z_1 = Z_3 = Z_4 = R$ ?

**Zadanie 3.76.** Określić częstotliwość rezonansową  $f_0$  obwodu złożonego z cewki o indukcyjności  $L = 1,2 \text{ H}$  oraz oporności uzwojeń  $R_L = 130 \Omega$  i równolegle dołączonego kondensatora o pojemności  $C = 25 \cdot 10^{-6} \text{ F}$  (rys. 3.76); ponadto obliczyć wskazanie amperomierza, jeżeli amplituda przyłożonego napięcia wynosi  $30 \text{ V}$  dla częstotliwości a)  $f = 50 \text{ Hz}$ , b)  $f = f_0$ .



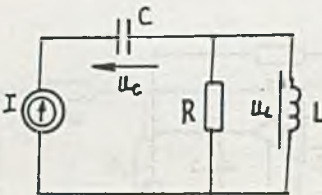
Rys. 3.76



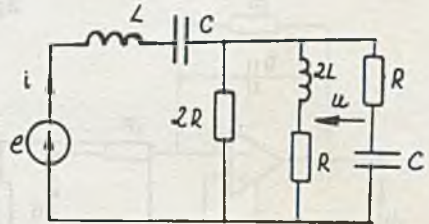
Rys. 3.77

**Zadanie 3.77.** W obwodzie podanym na rys. 3.77 przyjmując za wielkości znane wartości  $R_1$ ,  $X_C$ ,  $R_2$  określić wartości reaktancji  $X_L$ , dla której wystąpi rezonans.

**Zadanie 3.78.** Układ podany na rys. 3.78 zasilany jest przez SPM I o częstotliwości  $50 \text{ Hz}$ . Na podstawie pomiarów ustalono, że wartości skuteczne napięć  $|U_L| = 2,2 \text{ V}$ ,  $|U_C| = 6,2 \text{ V}$ , prądu  $|I| = 40 \text{ mA}$ , moc czynna wydawana przez źródło  $P = 55 \text{ mW}$ . Obliczyć parametry obwodu.



Rys. 3.78



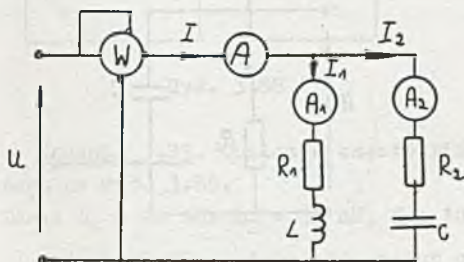
Rys. 3.79

**Zadanie 3.79.** W układzie podanym na rys. 3.79 obliczyć: 1) przebiegi czasowe prądu  $i$  oraz napięcia  $u$ , 2) moc czynną i pozorną wydawaną przez źródło.

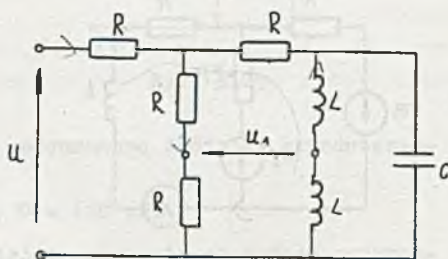
Dane:  $e = 100 \sqrt{2} \sin 1000t \text{ V}$ ,  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0,2 \text{ H}$ ,  $C = 5 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

Zadanie 3.80. Dla obwodu podanego na rys. 3.80 obliczyć: 1) częstotliwość, dla której wystąpi rezonans, 2) wskazania przyrządów przy rezonansie.

Dane:  $u = 22\sqrt{2} \sin \omega t$  V,  $R_1 = 95 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $L = 100$  mH,  $C = 20 \cdot 10^{-6}$  F.



Rys. 3.80



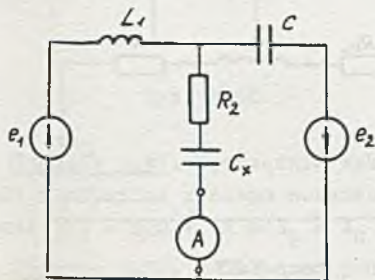
Rys. 3.81

Zadanie 3.81. W układzie podanym na rys. 3.81 obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u_1$ .

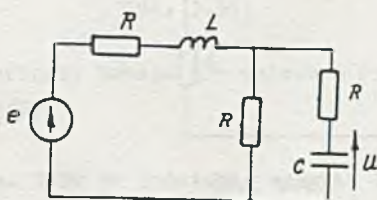
Dane:  $u = 20\sqrt{2} \sin 1000t$  V,  $L = 10$  mH,  $C = 50 \cdot 10^{-6}$  F,  $R = 20 \Omega$ .

Zadanie 3.82. W układzie podanym na rys. 3.82 dobrać wartość pojemności  $C_x$  tak, aby wartość skuteczna prądu wskazywanego przez amperomierz była największa; ile ona wynosi?

Dane:  $e_1 = 2,2\sqrt{2} \sin 314t$  V,  $e_2 = 2,2\sqrt{2} \cos 314t$  V,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $L_1 = 0,3$  H,  $C = 20 \mu\text{F}$ .



Rys. 3.82

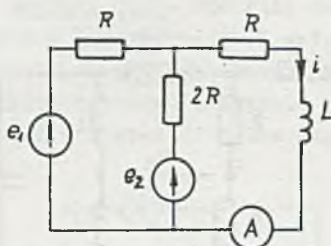


Rys. 3.83

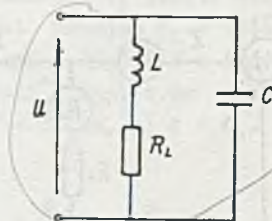
Zadanie 3.83. Obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u$  na kondensatorze C w układzie na rys. 3.83.

Dane:  $e = 50\sqrt{2} \sin 1000t$  V,  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0,1$  H,  $C = 20 \cdot 10^{-6}$  F.

**Zadanie 3.84.** W układzie podanym na rys. 3.84 obliczyć wskazanie amperomierza, jeżeli fazy początkowe SEM  $e_1$  i  $e_2$  są równe, a wartości skuteczne  $|E_1| = 220 \text{ V}$ ,  $|E_2| = 70,5 \text{ V}$ ,  $\omega = 500 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0,1 \text{ H}$ .



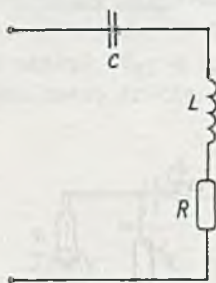
Rys. 3.84



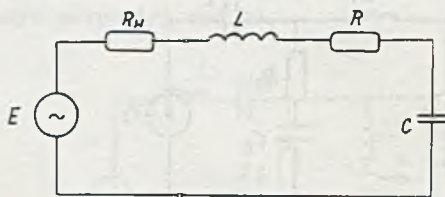
Rys. 3.85

**Zadanie 3.85.** Obwód na rys. 3.85 jest zasilany napięciem sinusoidalnym o częstotliwości rezonansowej układu. Podać procentową zmianę prądu pobieranego przez obwód z generatora przy zmniejszeniu częstotliwości o 10%.  
Dane:  $L = 0,3 \text{ H}$ ,  $R_L = 800 \Omega$ ,  $C = 0,1 \mu\text{F}$ .

**Zadanie 3.86.** Dla układu przedstawionego na rys. 3.86 znaleźć częstotliwość rezonansową  $f_0$  i dobroć obwodu  $Q$ .  
Dane:  $C = 80 \text{ pF}$ ,  $L = 1,2 \text{ mH}$ ,  $R = 40 \Omega$ .



Rys. 3.86



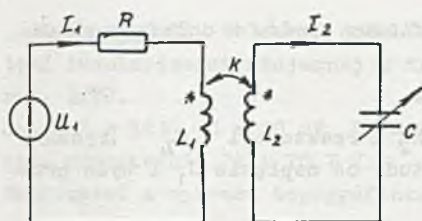
Rys. 3.87

**Zadanie 3.87.** Dany jest (rys. 3.87) obwód rezonansowy szeregowy i źródło sygnału. Obliczyć dobroć układu i szerokość pasma przepuszczania (trzydecybelowego) dla dwóch przypadków: a)  $R_W = 0$ , b)  $R_W = 600 \Omega$ .  
Dane:  $R = 300 \Omega$ ,  $L = 4,5 \text{ mH}$ ,  $C = 200 \text{ pF}$ .

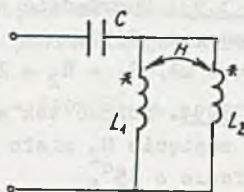
**Zadanie 3.88.** Dla transformatora powietrznego obciążonego zmienną pojemnością (rys. 3.88) sporządzić wykres zależności reaktancji wejściowej od wartości pojemności  $X_{we} = f(C)$ .

Podać wartości liczbowe pojemności, dla których wystąpią rezonanse przyjmując  $L_1 = 2 \text{ H}$ ,  $L_2 = 1,5 \text{ H}$ ,  $k = 0,4$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ .





Rys. 3.88

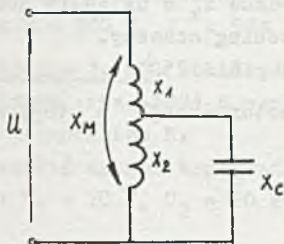


Rys. 3.89

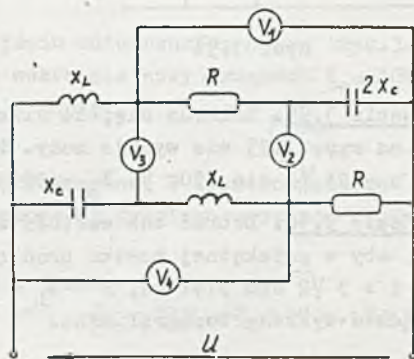
**Zadanie 3.89.** Obliczyć częstotliwość rezonansową dwójnika przedstawionego na rys. 3.89.

Dane:  $L_1 = 20 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 50 \text{ mH}$ ,  $M = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 120 \text{ pF}$ .

**Zadanie 3.90.** Autotransformator obniżający napięcia obciążono pojemnością (rys. 3.90). Podać warunek na to, by z sieci nie był pobierany prąd.



Rys. 3.90



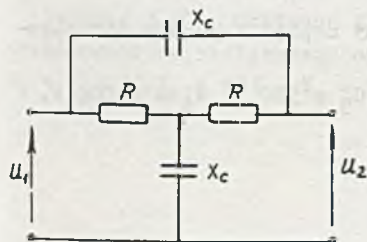
Rys. 3.91

**Zadanie 3.91.** Sporządzić wykres topograficzny napięć dla układu z rys. 3.91 i odczytać z niego wskazania woltomierzy.

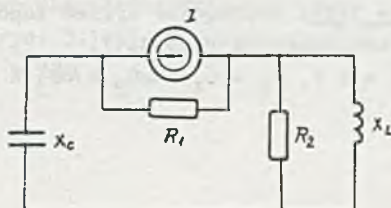
Dane:  $|U| = 220 \text{ V}$ ,  $R = X_L = X_C = 200 \Omega$ .

**Zadanie 3.92.** W układzie podanym na rys. 3.92 na podstawie wykresu topograficznego znaleźć napięcie  $|U_2|$ .

Dane:  $|U_1| = 24 \text{ V}$ ,  $X_C = R = 20 \Omega$ .



Rys. 3.92



Rys. 3.93

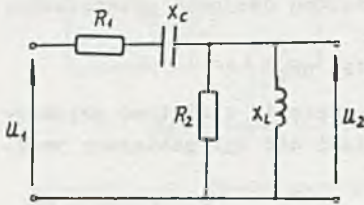
Zadanie 3.93. Sporządzić wykres topograficzny prądów w układzie przedstawionym na rys. 3.93.

Dane:  $|I| = 1 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = X_L = X_C = 1 \text{ k}\Omega$ .

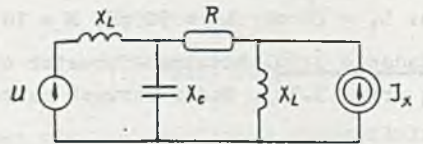
Zadanie 3.94. Dobrać tak wartość oporu  $R_2$  i reaktancji  $X_L$  (rysunek 3.94), aby napięcie  $U_2$  miało tę samą amplitudę co napięcie  $U_1$  i było przesunięte w fazie o  $45^\circ$ .

Dane:  $|U_1| = 120 \text{ V}$ ,  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $X_C = 1 \text{ k}\Omega$ .

Skorzystać z wykresu topograficznego.



Rys. 3.94



Rys. 3.95

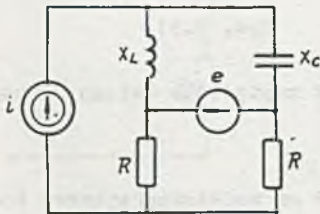
Zadanie 3.95. Zakłada się, że siła prądomotoryczna  $i_x$  w układzie pokazanym na rys. 3.95 nie wydaje mocy. Podać jej przebieg czasowy.

Dane:  $u = 24 \sqrt{2} \sin 250t \text{ V}$ ,  $X_L = 300 \Omega$ ,  $X_C = 500 \Omega$ ,  $R = 750 \Omega$ .

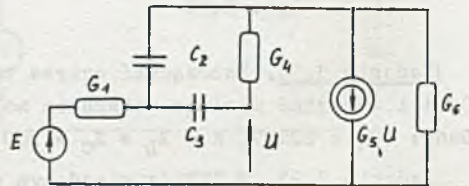
Zadanie 3.96. Dobrać tak wartość siły elektromotorycznej  $e$  (rysunek 3.96), aby w przekątnej mostka prąd nie płynął.

Dane:  $i = 3 \sqrt{2} \sin 314t \text{ mA}$ ,  $R = X_L = X_C = 100 \Omega$ .

Sporządzić wykresy topograficzne.



Rys. 3.96



Rys. 3.97

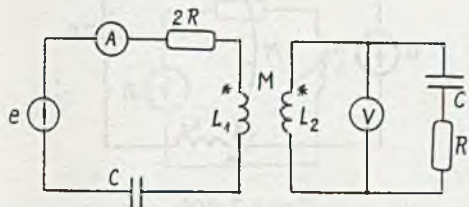
Zadanie 3.97. Sporządzić wykres topograficzny napięć i prądów dla układu przedstawionego na rys. 3.97.

Dane:  $|E| = 1 \text{ V}$ ,  $G_1 = G_4 = \omega C_2 = \omega C_3 = 10^{-4} \text{ S}$ ,  $G_5 = 500 \text{ S}$ ,  $G_6 = 0,006 \text{ S}$ .

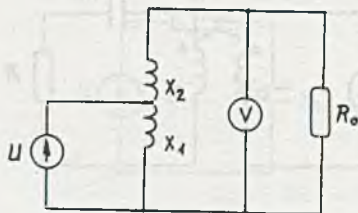
**Zadanie 3.98.** Obliczyć przebieg czasowy napięcia zasilania  $e$  oraz wartość indukcyjności wzajemnej  $M$  transformatora powietrznego pokazanego na rys. 3.98.

Dane:  $R = 50 \Omega$ ,  $C = 40 \mu F$ ,  $L_1 = L_2 = 0,1 H$ ,  $\omega = 500 \frac{rad}{s}$ , a przyrządy wskazują odpowiednio 2A i 70,7 V.

Skorzystać z wykresu topograficznego.



Rys. 3.98



Rys. 3.99

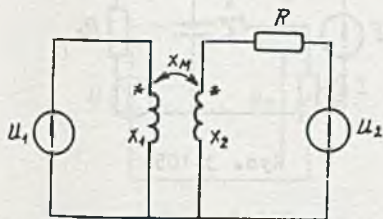
**Zadanie 3.99.** Przy nieobciążonym wyjściu autotransformatora (rys.3.99) woltomierz wskazał 400 V. Jakie będzie wskazanie przy obciążeniu  $R_o = 100 \Omega$ ? Sporządzić wykres topograficzny prądów i napięć.

Dane:  $U = 200 V$ ,  $X_1 = 50 \Omega$ ,  $X_2 = 100 \Omega$ .

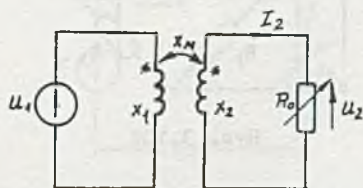
**Zadanie 3.100.** Obliczyć moc czynną przekazywaną w transformatorze powietrznym (rys.3.100) z uzwojenia pierwszego do drugiego oraz moc wydzielaną na oporniku R.

Sporządzić wykres topograficzny prądów i napięć.

Dane:  $U_1 = 20 V$ ,  $U_2 = 20 e^{j90^\circ} V$ ,  $X_1 = 10 \Omega$ ,  $X_2 = 20 \Omega$ ,  $X_M = 10 \Omega$ ,  $R = 20 \Omega$ .



Rys. 3.100



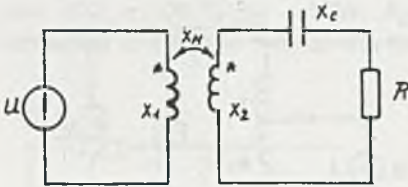
Rys. 3.101

**Zadanie 3.101.** Obliczyć i narysować charakterystykę wyjściową  $U_2 = f(I_2)$  transformatora obciążonego oporowo (rys. 3.101) dla następujących danych:  $U_1 = 110 V$ ,  $X_1 = 40 \Omega$ ,  $X_2 = 20 \Omega$ ,  $X_M = 20 \Omega$ .

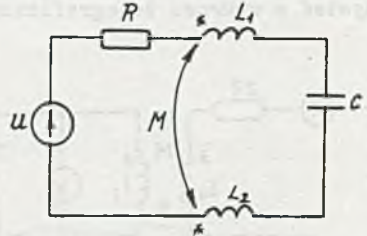


**Zadanie 3.102.** W układzie podanym na rys. 3.102 dobrać tak wartość  $X_C$ , aby na oporniku  $R$  była wydzielana maksymalna moc. Sporządzić wykres topograficzny.

Dane:  $U = 100 \text{ V}$ ,  $X_1 = 10 \Omega$ ,  $X_2 = 20 \Omega$ ,  $X_M = 12 \Omega$ ,  $R = 20 \Omega$ .



Rys. 3.102

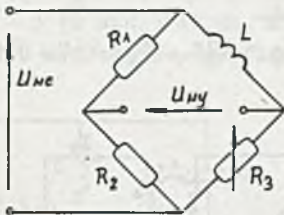


Rys. 3.103

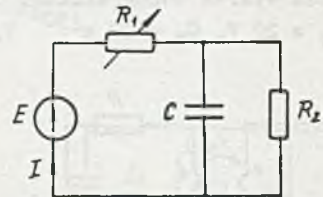
**Zadanie 3.103.** Obliczyć pulsację rezonansową układu podanego na rys. 3.103 oraz sporządzić wykres topograficzny napięć.

Dane:  $U = 100 \text{ V}$ ,  $R = 200 \Omega$ ,  $L_1 = 2 \text{ H}$ ,  $L_2 = 3 \text{ H}$ ,  $M = 1,5 \text{ H}$ ,  $C = 50 \mu\text{F}$ .

**Zadanie 3.104.** Celem uzyskania napięcia przesuniętego w fazie w stosunku do napięcia  $U_{we}$  zastosowano układ mostkowy pokazany na rys. 3.104. Podać warunek na  $R_1$  i  $R_2$ , aby amplituda  $U_{wy}$  nie zmieniała się przy zmianach fazy.

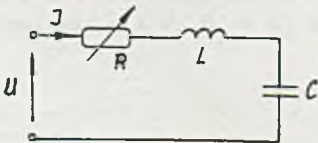


Rys. 3.104



Rys. 3.105

**Zadanie 3.105.** W układzie na rys. 3.105 opór  $R_1$  zmienia się od 0 do  $\infty$ , a pozostałe parametry obwodu wynoszą:  $R_2 = 500 \Omega$ ,  $C = 5 \mu\text{F}$ ,  $E = 24 \text{ V}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ . Znaleźć miejsce geometryczne końców wektora prądu źródła i zbudować wykres mocy czynnej wydawanej przez źródło w zależności od prądu.

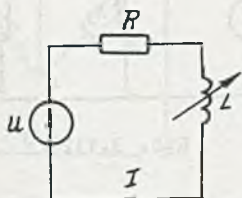


Rys. 3.106

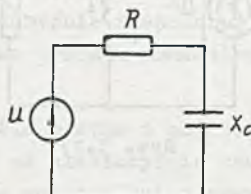
**Zadanie 3.106.** Znaleźć miejsce geometryczne końców wektora prądu  $I$  przy zmianach rezystancji  $R = 0 \div \infty$  (rys. 3.106),  $U = 1 \text{ V}$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $\omega = 500 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

**Zadanie 3.107.** Sporządzić wykres kołowy zmian prądu  $I$  (rys. 3.107). Odczytać z niego wartość prądu, przy której przesunięcie fazowe między napięciem zasilania i napięciem na cewce wyniesie  $60^\circ$ . Dla jakiej wartości  $L$  to wystąpi?

Dane:  $U = 220 \text{ V}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $R = 50 \Omega$ ,  $L$  zmienia się od  $0$  do  $\infty$ .



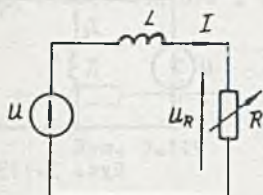
Rys. 3.107



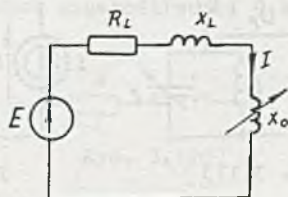
Rys. 3.108

**Zadanie 3.108.** Częstotliwość źródła napięcia  $U$  zmienia się od  $50$  do  $5000 \text{ Hz}$ , a pozostałe parametry obwodu (rys. 3.108) są stałe;  $U = 24 \text{ V}$ ,  $R = 100 \Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ . Sporządzić wykres kołowy zmian prądu w obwodzie i skorzystać z niego przy obliczaniu maksymalnej mocy biernej pobieranej ze źródła. Dla jakiej częstotliwości to wystąpi?

**Zadanie 3.109.** Wartość oporu w układzie na rys. 3.109 zmienia się od  $5$  do  $150 \Omega$ ,  $U = 120 \text{ V}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ . Sporządzić wykres kołowy zmian napięcia i prądu w obwodzie i skorzystać z niego przy wykreśleniu krzywej mocy wydawanej ze źródła w zależności od prądu,  $P = f(|I|)$ .



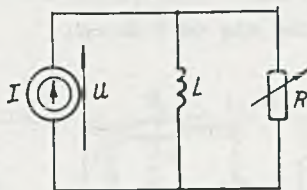
Rys. 3.109



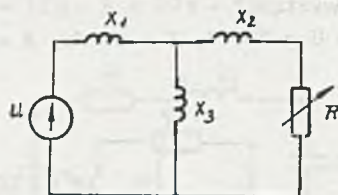
Rys. 3.110

**Zadanie 3.110.** Odbiornik o zmiennej reaktancji  $X_0$  (rys. 3.110) jest zasilany ze źródła napięcia sinusoidalnego  $E = 220 \text{ V}$  poprzez linię, którą można zastąpić parametrami skupionymi  $R_L = 5 \Omega$ ,  $X_L = 3 \Omega$ , znaleźć miejsce geometryczne końców wektora prądu odbiornika i zbudować wykres zmian mocy biernej dostarczonej do odbiornika w zależności od prądu  $P_b = f(|I|)$ , jeżeli  $X_0$  zmienia się od  $5$  do  $30 \Omega$ .

**Zadanie 3.111.** Idealno SPM jest obciążona indukcyjnością i zmiennym oporem (rys. 3.111). Znaleźć miejsce geometryczne końców wektora napięcia  $U$ .  
Dane:  $I = 3 \text{ mA}$ ,  $f = 400 \text{ Hz}$ ,  $L = 30 \text{ mH}$ ,  $R = 0 \div \infty$ .



Rys. 3.111



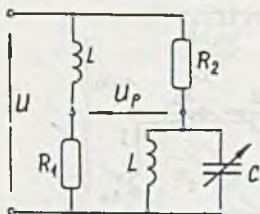
Rys. 3.112

**Zadanie 3.112.** Transformator powietrzny, którego schemat zastępczy pokazano na rys. 3.112 obciążony jest zmiennym oporem  $R$ . Zbudować wykres kołowy końców wektora prądu źródła i skorzystać z niego przy obliczaniu maksymalnej mocy traconej na oporniku  $R$ .

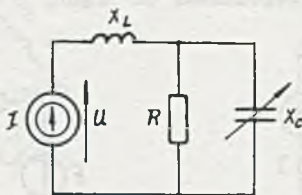
Dane:  $U = 10 \text{ V}$ ,  $X_1 = X_2 = 2 \Omega$ ,  $X_3 = 10 \Omega$ ,  $R = 0 \div 100 \Omega$ .

**Zadanie 3.113.** Pojemność  $C$  w układzie na rys. 3.113 może zmieniać się w granicach  $0 \div \infty$ . Sporządzić wykres kołowy zmian napięcia  $U_p$  i skorzystać z niego przy obliczeniu wartości  $C$ , dla której amplituda  $U_p$  będzie największa.

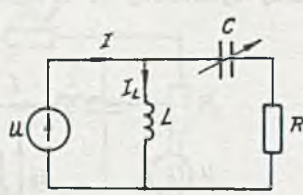
Dane:  $U = 40 \text{ V}$ ,  $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ ,  $R_1 = R_2 = 100 \Omega$ ,  $L = 10 \text{ mH}$ .



Rys. 3.113



Rys. 3.114



Rys. 3.115

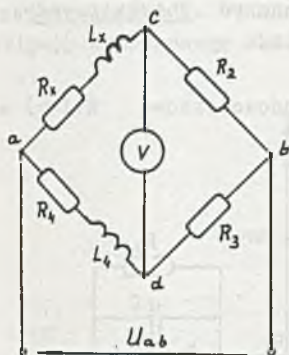
**Zadanie 3.114.** Znaleźć miejsce geometryczne końców wektora napięcia na SPM przy zmianach reaktancji pojemnościowej  $X_C$ . Odczytać z wykresu napięcia na SPM przy rezonansach.

Dane:  $I = 1 \text{ mA}$ ,  $R = 20 \Omega$ ,  $X_L = 8 \Omega$ .

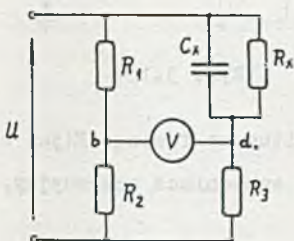
**Zadanie 3.115.** Sporządzić wykres kołowy zmian prądu  $I$  przy zmianach reaktancji  $X_C$  od  $0$  do  $\infty$ . Korzystając z wykresu podać warunek na to, by przy zmianach  $X_C$  można było uzyskać przesunięcie fazowe między prądami  $I$  oraz  $I_L$  większe od  $90^\circ$ .

Dane:  $U = 24 \text{ V}$ ,  $X_L = 10 \Omega$ ,  $R = 10 \Omega$ .





Rys. 3.116



Rys. 3.118

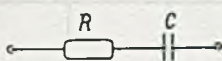
**Zadanie 3.116.** Mostek prądu zmiennego (rys. 3.116) służy do pomiaru nieznanej impedancji o parametrach  $R_x$ ,  $L_x$ . Proces równoważenia jest prowadzony poprzez zmianę nastawialnej indukcyjności  $L_4$  oraz regulację opornika  $R_3$ . Zakładając ustalone wartości  $R_x$ ,  $L_x$ ,  $R_2$  i  $R_4$  odwzorować na płaszczyźnie zespolonej zmiany napięcia  $U_{CD}$  podczas procesu równoważenia mostka.

**Zadanie 3.117.** Dla mostka z poprzedniego zadania odwzorować na płaszczyźnie zespolonej proces równoważenia podczas zmian rezystancji  $R_3$  i  $R_4$ .

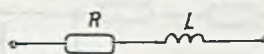
**Zadanie 3.118.** Dla określenia pojemności  $C$  i kąta stratności kondensatora zastosowano układ mostkowy z regulowanymi wartościami oporu (rys. 3.118). Przy ustalonym  $R_3$  tak dobrano wartości oporów  $R_1$  i  $R_2$ , że woltomierz wskazał minimalną wartość napięcia przekątnej mostka. Korzystając z wykresów topograficznych obliczyć  $C_x$  oraz  $\delta_x$ .

Dane:  $U = 110 \text{ V}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $U_{bd} = 44,7 \text{ V}$ ,  $R_1 = 162 \Omega$ ,  $R_2 = 500 \Omega$ ,  $R_3 = 800 \Omega$ .

**Zadanie 3.119.** Dla dwójnika podanego na rys. 3.119 znaleźć miejsce geometryczne końców wektora  $Z$  oraz  $Y$  przy zmianach częstotliwości  $0 \div \infty$ .

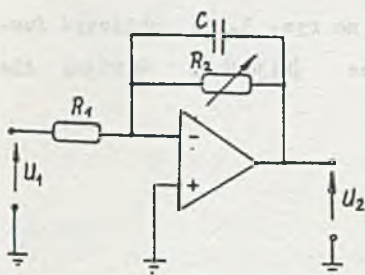


Rys. 3.119



Rys. 3.120

**Zadanie 3.120.** Dla układu z rys. 3.120 znaleźć miejsce geometryczne końców wektora  $Z$  i  $Y$  w całym przedziale częstotliwości.



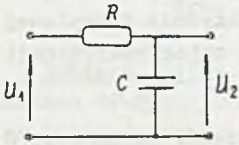
**Zadanie 3.121.** W układzie podanym na rys. 3.121 rezystancja  $R_2$  może być zmieniana w granicach  $0-20 \text{ k}\Omega$ . Określić miejsce geometryczne końców wektora  $U_2$ , gdzie  $U_2$  jest napięciem na wyjściu odwracającym idealnego wzmacniacza operacyjnego.

Dane:  $|U_1| = 1 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $\omega = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

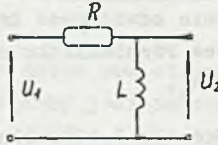
Rys. 3.121

Zadanie 3.122. Dla czwórnika z rys. 3.122 wyznaczyć charakterystykę amplitudowo-fazową  $K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$ .

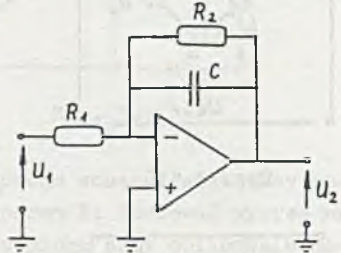
Zadanie 3.123. Wyznaczyć charakterystykę amplitudowo-fazową  $K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$  dla czwórnika podanego na rys. 3.123.



Rys. 3.122



Rys. 3.123

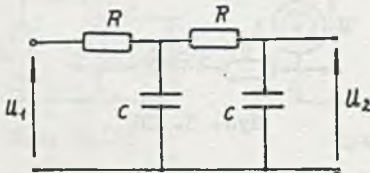


Rys. 3.124

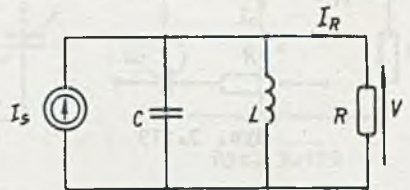
Zadanie 3.124. Wyznaczyć charakterystykę amplitudowo-fazową  $K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$  w układzie z rys. 3.124. Założyć idealny wzmacniacz operacyjny. Dane:  $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ .

Zadanie 3.125. Określić charakterystykę amplitudowo-fazową  $K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$  dla czwórnika przedstawionego na rys. 3.125.

Dane:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ .



Rys. 3.125



Rys. 3.126

Zadanie 3.126. Dla obwodu przedstawionego na rys. 3.126 obliczyć funkcję obwodową  $H(j\omega) = \frac{I_R(j\omega)}{I_S(j\omega)}$ . Narysować wykres  $|H(j\omega)|$  i  $\angle H(j\omega)$  dla

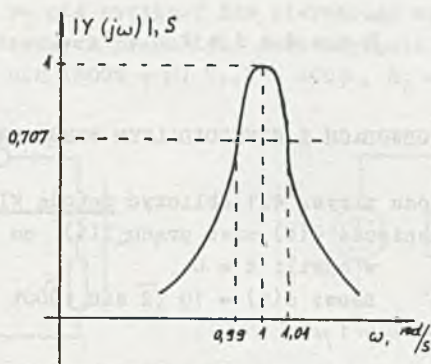
$\omega \in [2,5; 20] 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Dane:

a)  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ ,  $R = 20 \Omega$ ,

b)  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ ,  $R = 100 \Omega$ .

Zadanie 3.127. Na rys. 3.127 jest przedstawiona krzywa rezonansowa  $|Y(j\omega)|$  szeregowego układu RLC. Obliczyć wartości  $R_0$ ,  $L_0$  i  $C_0$ .



Rys. 3.127



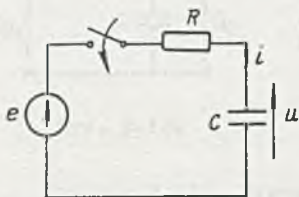


## R o z d z i a ł   4

### 4. STANY NIEUSTALONE W OBWODACH Z SINUSOIDALNYM WYMUSZENIEM

| Zadanie 4.1. Dla obwodu z rys. 4.1 obliczyć metodą klasyczną i narysować przebiegi czasowe napięcia  $u(t)$  oraz prądu  $i(t)$  po zamknięciu klucza w chwili  $t = 0$ .

Dane:  $e(t) = 10 \sqrt{2} \sin 1000t \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ .



Rys. 4.1

| Zadanie 4.2. Dla obwodu z rys. 4.1 obliczyć metodą operatorowo-symboliczną przebiegi czasowe napięcia  $u(t)$  oraz prądu  $i(t)$  po zamknięciu klucza w chwili  $t = 0$ .

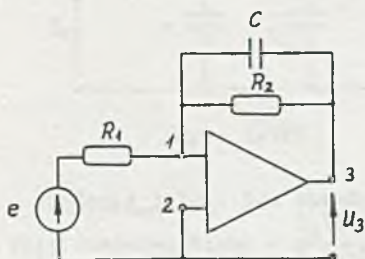
Dane:  $e(t) = 10 \sqrt{2} \sin 1000t \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ .

| Zadanie 4.3. Dla obwodu z rys. 4.1 obliczyć metodą dwóch przeciwnych stanów ustalonych przebiegi czasowe napięcia  $u(t)$  oraz prądu  $i(t)$  po zamknięciu klucza w chwili  $t = 0$ .

Dane:  $e(t) = 10 \sqrt{2} \sin 1000t \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ .

| Zadanie 4.4. Dla obwodu z rys. 4.1 obliczyć metodą całki superpozycyjnej przebiegi czasowe napięcia  $u(t)$  oraz prądu  $i(t)$  po zamknięciu klucza w chwili  $t = 0$ .

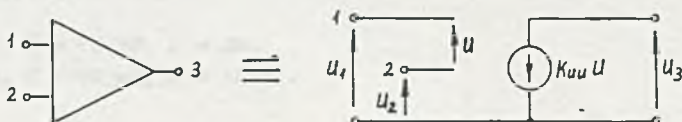
Dane:  $e(t) = 10 \sqrt{2} \sin 1000t \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ .



Rys. 4.5

| Zadanie 4.5. Dla obwodu z rys. 4.5 obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia  $u_3(t)$ . Trójbiegunnik wykorzystany w obwodzie przedstawia rys. 4.5.1.

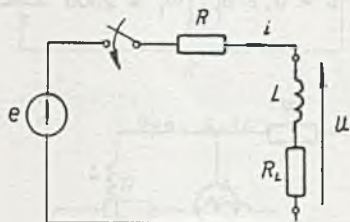
Dane:  $e(t) = 10 \sqrt{2} \sin 1000t \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $k_{UU} = \infty$ .



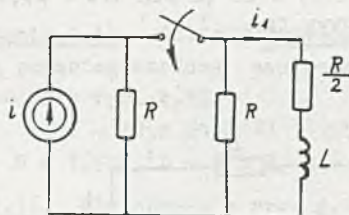
Rys. 4.5.1

**Zadanie 4.6.** W układzie podanym na rysunku 4.6 w chwili  $t = 0$  zamknięto klucz. Obliczyć przebiegi czasowe prądu  $i(t)$  oraz napięcia  $u(t)$ . Dla jakiej wartości fazy początkowej  $\psi_1$  składowa przejściowa będzie największa, a dla jakiej  $\psi_2$  nie wystąpi? Dla pierwszego wypadku sporządzić wykresy przebiegów czasowych prądu  $i(t)$  oraz napięcia  $u(t)$ .

Dane:  $e(t) = 10 \sqrt{2} \sin(500t + \psi) \text{ V}$ ,  $R = 400 \Omega$ ,  $R_L = 100 \Omega$ ,  $L = 0,5 \text{ H}$ .



Rys. 4.6



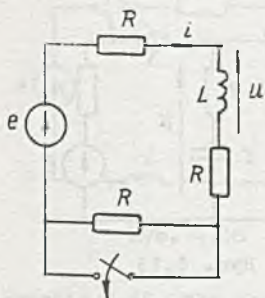
Rys. 4.7

**Zadanie 4.7.** W obwodzie jak na rys. 4.7 obliczyć, dla jakiej fazy włączenia SPM  $i(t)$ , przebieg czasowy  $i_1(t)$  posiada największą składową przejściową. Obliczyć  $i_1(t)$  i podać po ilu okresach SPM  $i(t)$  można przyjąć, że składowa przejściowa jest równa zero (jest mniejsza od 1% wartości początkowej).

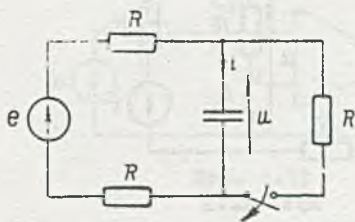
Dane:  $i(t) = 0,5 \sqrt{2} \cos 1000t \text{ A}$ ,  $R = 20 \Omega$ ,  $L = 0,2 \text{ H}$ .

**Zadanie 4.8.** W obwodzie przedstawionym na rys. 4.8 obliczyć przebiegi czasowe prądu  $i(t)$  oraz napięcia  $u(t)$  po zamknięciu klucza w chwili, gdy prąd płynący w obwodzie osiągnął wartość największą. Dla jakiej fazy początkowej SEM  $e(t)$ , w chwili zamknięcia klucza, składowa przejściowa jest największa? Czy składowa przejściowa może być równa zero?

Dane:  $e(t) = 10 \sqrt{2} \sin(500t + \psi) \text{ V}$ ,  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0,4 \text{ H}$ .



Rys. 4.8



Rys. 4.9

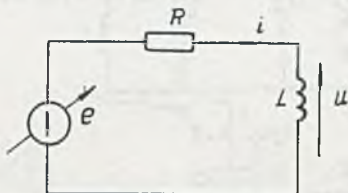
**Zadanie 4.9.** W obwodzie z rys. 4.9 obliczyć przebiegi czasowe prądu  $i(t)$  oraz napięcia  $u(t)$  po otwarciu klucza, jeżeli otwarcie klucza nastą-

piło, w chwili gdy napięcie na pojemności osiągnęło wartość największą.

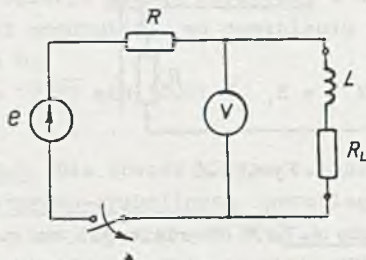
Dane:  $e(t) = 15 \sqrt{2} \cos 1000t$  V,  $R = 1$  k $\Omega$ ,  $C = 1$   $\mu$ F.

**Zadanie 4.10.** Obliczyć przebiegi czasowe prądu  $i(t)$  oraz napięcia  $u(t)$  w obwodzie z rys. 4.10 po skokowej zmianie pulsacji SEM  $e(t)$ , z  $\omega_1$  na  $\omega_2$ , w chwili gdy prąd płynący w obwodzie osiągnął wartość maksymalną.

Dane:  $e(t) = 20 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi)$  V,  $R = 500 \Omega$ ,  $L = 0,2$  H,  $\omega_1 = 2000$   $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\omega_2 = 5000$   $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .



Rys. 4.10

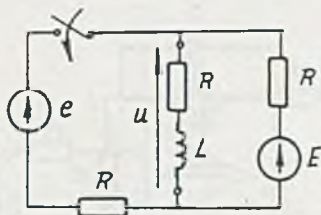


Rys. 4.11

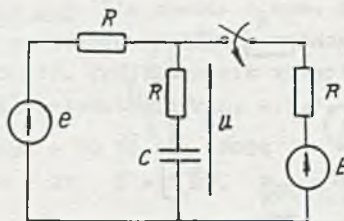
**Zadanie 4.11.** Dla obwodu z rys. 4.11 obliczyć przebieg czasowy napięcia na zaciskach woltomierza o rezystancji wewnętrznej  $R_V$  po odłączeniu zasilania. Obliczenia przeprowadzić dla najmniejkorzystniejszej fazy odłączenia przyjmując  $e(t) = 20 \sqrt{2} \sin(1000t + \psi)$  V,  $R = 200 \Omega$ ,  $L = 0,5$  H,  $R_L = 50 \Omega$ ,  $R_V = 100$  k $\Omega$ .

**Zadanie 4.12.** Obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u(t)$  po dołączeniu w chwili  $t = 0$  do obwodu zasilanego stałą SEM  $E$  sinusoidalnej SEM  $e(t)$  (rys. 4.12).

Dane:  $e(t) = 10 \sqrt{2} \sin 500t$  V,  $E = 10$  V,  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 0,2$  H.



Rys. 4.12

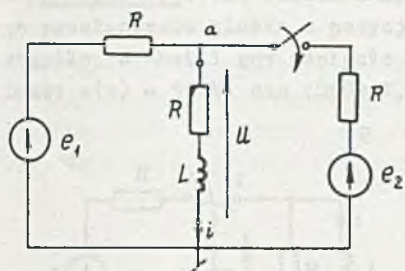


Rys. 4.13

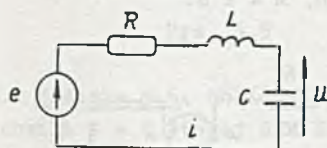
**Zadanie 4.13.** Obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u(t)$  po załączeniu w chwili  $t = 0$  stałej SEM  $E$  do obwodu z sinusoidalną SEM  $e(t)$  (rys. 4.13).

Dane:  $e(t) = 10 \sqrt{2} \sin 500t$  V,  $E = 10$  V,  $R = 1$  k $\Omega$ ,  $C = 2$   $\mu$ F.





Rys. 4.14



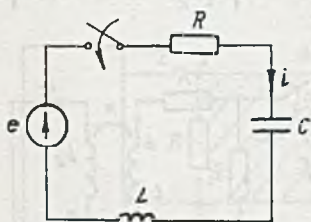
Rys. 4.15

**Zadanie 4.17.** Dla obwodu z rys. 4.15 obliczyć przebieg czasowy prądu  $i(t)$  dla pulsacji rezonansowej  $\omega$ . Obliczenia wykonać dla  $R = 320\Omega$ ,  $400\Omega$ ,  $480\Omega$ .

Dane:  $e(t) = 10\sqrt{2} \sin \omega t \cdot 1(t)$  V,  $L = 40$  mH,  $C = 1$   $\mu$ F.

**Zadanie 4.18.** Obliczyć przebieg czasowy prądu  $i(t)$  w obwodzie z rys. 4.18 po zamknięciu klucza w chwili  $t = 0$ .

Dane:  $e(t) = 10\sqrt{2} \sin (10^4 t + 2,36)$  V,  $R = 100\Omega$ ,  $L = 20$  mH,  $C = 1$   $\mu$ F.



Rys. 4.18

**Zadanie 4.14.** Obliczyć przebiegi czasowe prądu  $i(t)$  oraz napięcia  $u(t)$  po załączeniu w chwili  $t = 0$  SEM  $e_2(t)$  do obwodu z rys. 4.14.

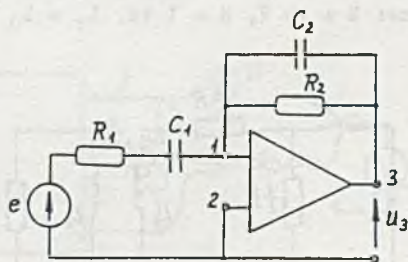
Dane:  $e_1(t) = 10\sqrt{2} \sin 1000t$  V,  $e_2(t) = 10\sqrt{2} \cos 1000t$  V,  $R = 100\Omega$ ,  $L = 0,1$  H.

**Zadanie 4.15.** Obliczyć metodą klasyczną przebieg czasowy napięcia  $u(t)$  dla obwodu z rys. 4.15.

Dane:  $e(t) = 1 \sin 2t \cdot 1(t)$  V,  $i(0-) = 1$  V,  $R = 1,5\Omega$ ,  $L = 0,5$  H,  $C = 1$   $\mu$ F.

**Zadanie 4.16.** Dla obwodu z rys. 4.15 obliczyć metodą dwóch przeciwnych stanów ustalonych przebieg czasowy prądu  $i(t)$ . Obliczenia wykonać dla  $R = 320\Omega$ ,  $400\Omega$ ,  $480\Omega$ .

Dane:  $e(t) = 10\sqrt{2} \sin (1000t - 0,46) \cdot 1(t)$  V,  $L = 40$  mH,  $C = 1$   $\mu$ F.



Rys. 4.19

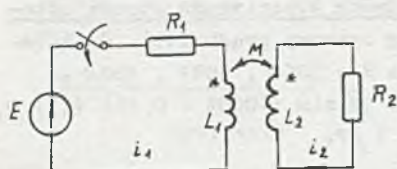
**Zadanie 4.19.** Dla obwodu z rys. 4.19 obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u_3(t)$ . Trójbiegunnik wykorzystany w obwodzie przedstawia rys. 4.5.1.

Dane:  $e(t) = 10\sqrt{2} \sin 5000t \cdot 1(t)$  V,  $R_1 = 2$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 1$  k $\Omega$ ,  $C_1 = 0,2$   $\mu$ F,  $C_2 = 0,1$   $\mu$ F,  $k_{UU} = \infty$ .

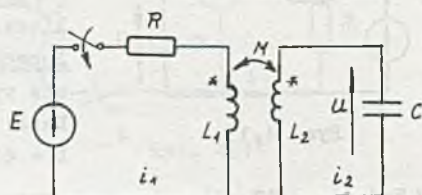
## R o z d z i a ł 5

### 5. ZADANIA RÓŻNE

**Zadania 5.1.** Dla obwodu z rys. 5.1 obliczyć i narysować przebiegi czasowe prądów  $i_1(t)$  oraz  $i_2(t)$  po zamknięciu klucza w chwili  $t = 0$ .  
Dane:  $E = 5 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L_1 = 1 \text{ H}$ ,  $L_2 = 5 \text{ H}$ ,  $M = 2 \text{ H}$ .



Rys. 5.1



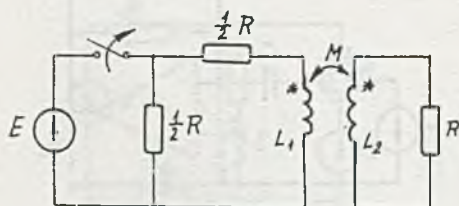
Rys. 5.2

**Zadanie 5.2.** Dla obwodu z rys. 5.2 obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u(t)$  po zamknięciu klucza w chwili  $t = 0$ .

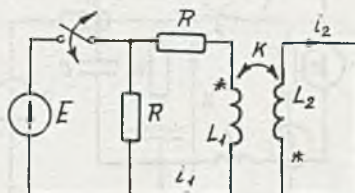
Dane:  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L_1 = L_2 = M = 2 \text{ H}$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ .

**Zadanie 5.3.** Dla obwodu z rys. 5.3 obliczyć przebieg czasowy prądu  $i_2(t)$  po rozwarciu klucza w chwili  $t = 0$ .

Dane:  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L_1 = L_2 = L = 4 \text{ H}$ , a)  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ , b)  $M = 0,5 \sqrt{L_1 L_2}$ .



Rys. 5.3

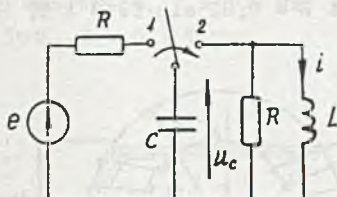


Rys. 5.4

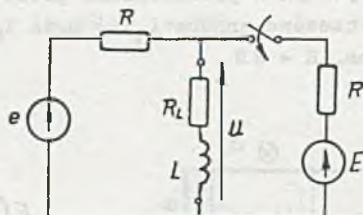
**Zadanie 5.4.** Dla obwodu z rys. 5.4 obliczyć przebiegi czasowe prądów  $i_1(t)$  oraz  $i_2(t)$  po zwarceniu, a następnie po rozwarciu klucza. Przed przełączeniem klucza jest stan ustalony.

Dane:  $E = 20 \text{ V}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L_1 = 5 \text{ H}$ ,  $L_2 = 0,01 \text{ H}$ ,  $k = 0,5$ .

**Zadanie 5.5.** Dla obwodu z rys. 5.5 obliczyć przebieg czasowy prądu  $i(t)$  po przełączeniu klucza z pozycji 1 na pozycję 2. Przełączenie klucza nastąpiło, w chwili gdy napięcie  $u_C$  miało największą wartość.  
Dane:  $e(t) = 50 \sqrt{2} \sin 1000t$  V,  $R = X_C = 100 \Omega$ ,  $L = 0,08$  H.



Rys. 5.5

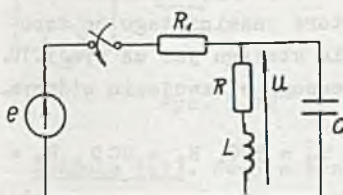


Rys. 5.6

**Zadanie 5.6.** Obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u(t)$  po załączeniu w chwili  $t = 0$  stałej SEM  $E$  do obwodu jak na rys. 5.6.

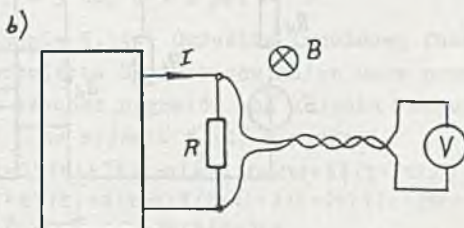
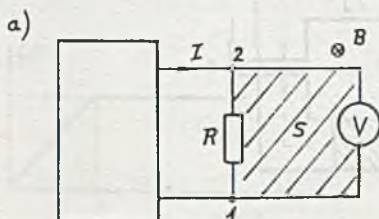
Dane:  $e(t) = 10 \sqrt{2} \sin 1000t$  V,  $E = 10$  V,  $R = 2R_L = 100 \Omega$ ,  $L = 0,1$  H.

**Wskazówka:** zastosować zasadę superpozycji.



Rys. 5.7

**Zadanie 5.7.** W obwodzie z rys. 5.7 dobrać wartość pojemności  $C$  tak, aby częstotliwość rezonansowa obwodu była równa częstotliwości źródła zasilania  $e(t)$  oraz obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u(t)$  po zamknięciu klucza w chwili  $t = 0$ .  
Dane:  $e(t) = 5 \sqrt{2} \sin 10^4 t$  V,  $R = 100 \Omega$ ,  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $L = 10$  mH.



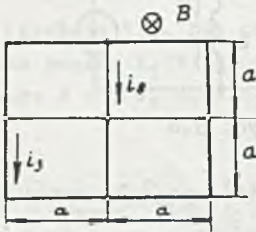
Rys. 5.8

**Zadanie 5.8.** Woltomierz wartości skutecznej podłączono do obwodu jak na rys. 5.8a i b, w celu zmierzenia napięcia na rezystancji  $R$ . Obliczyć wskazania woltomierza wiedząc, że  $B = 0,01 \sin 3,14 \cdot 10^4 t$  T, powierzchnia utworzona przez przewody doprowadzające woltomierza  $S = 0,2$  m<sup>2</sup> (rys. 5.8), obwód z rezystancją  $R$  jest zasilany napięciem sinusoidalnym o częstotli-

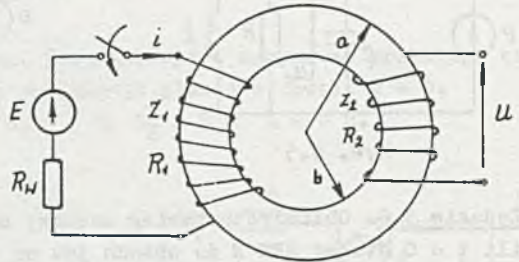


wości  $f = 5 \text{ kHz}$ ,  $I = 0,1 \text{ A}$ ,  $R = 500 \Omega$ . SEM indukowana wewnątrz obwodu jest pomijalnie mała.

**Zadanie 5.9.** Sieć złożoną z odcinków przewodu o długości  $a$  i rezystancji  $R$  każdy, połączono jak na rys. 5.9 i umieszczono w jednorodnym polu magnetycznym w płaszczyźnie prostopadłej do linii indukcji. Obliczyć przebiegi czasowe prądów  $i_3(t)$  oraz  $i_8(t)$ , jeżeli  $B = 0,02 \sin 5 \cdot 10^4 t \text{ T}$ ,  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $R = 2 \Omega$ .



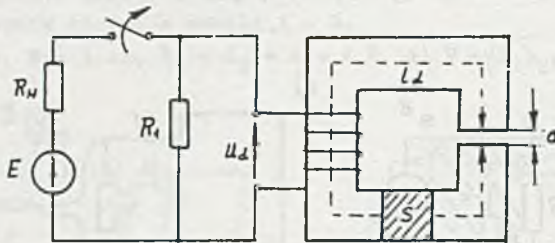
Rys. 5.9



Rys. 5.10

**Zadanie 5.10.** Uzwojenie pierwotne transformatora nawiniętego na toroidalnym rdzeniu jest załączane na źródło napięcia stałego jak na rys. 5.10. Obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  indukowanego w uzwojeniu wtórnym. Pominąć rozproszenie.

Dane:  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 3,5 \text{ cm}$ ,  $\mu = 800$ ,  $z_1 = 1200$ ,  $z_2 = 500$ ,  $R_1 = 80 \Omega$ ,  $R_2 = 25 \Omega$ ,  $E = 24 \text{ V}$ ,  $R_w = 10 \Omega$ .



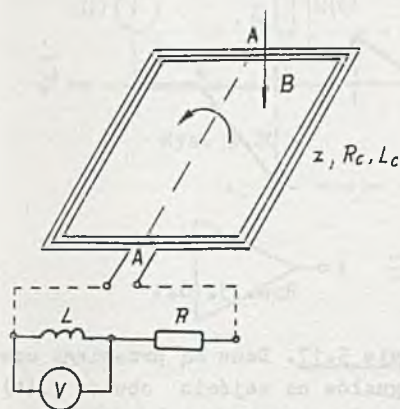
Rys. 5.11

**Zadanie 5.11.** Obwód z dławikiem jak na rys. 5.11 jest odłączany od źródła napięcia stałego. Obliczyć przebieg czasowy napięcia  $u_d(t)$  na uzwojeniu dławika zakładając, że w zakresie zmian prądu przenikalność magnetyczna rdzenia jest stała.

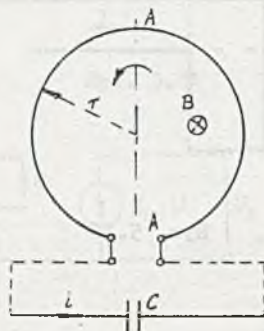
Dane:  $l_d = 28 \text{ cm}$ ,  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $z = 400$ ,  $S = 8 \text{ cm}^2$ ,  $R_d = 40 \Omega$ ,  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_w = 5 \Omega$ ,  $E = 60 \text{ V}$ ,  $\mu = 400$ .

**Zadanie 5.12.** Cewka w kształcie kwadratu o boku  $a$  obraca się wokół osi A-A z częstotliwością  $f$  w polu magnetycznym o indukcji  $B$ . Obliczyć wskazanie woltomierza wartości skutecznej po dołączeniu do zacisków cewki obciążenia rezystancyjno-indukcyjnego jak na rys. 5.12. Pominąć oddziaływanie pola cewki.

Dane:  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $z = 300$ ,  $L_c = 10 \text{ mH}$ ,  $R_c = 20 \Omega$ ,  $L = 30 \text{ mH}$ ,  $R = 50 \Omega$ ,  $B = 0,1 \text{ T}$ .



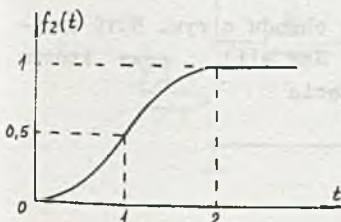
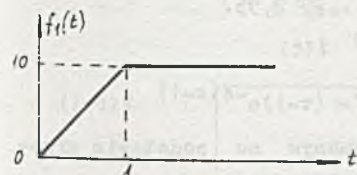
Rys. 5.12



Rys. 5.13

**Zadanie 5.13.** Zwój w kształcie okręgu obraca się wokół osi A-A z prędkością kątową  $2\omega$  w zmiennym polu magnetycznym jak na rys. 5.13. Obliczyć przebieg czasowy prądu  $i(t)$  płynącego przez kondensator podłączony do końców zwoju. Rezystancję i indukcyjność zwoju pominąć.

Dane:  $B = 0,2 \sin \omega t \text{ T}$ ,  $\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $C = 2 \mu\text{F}$ .



Rys. 5.15

**Zadanie 5.14.** Określić impulsową funkcję przejścia  $H(s)$  obwodu mając dane przebiegi czasowe sygnałów na wejściu obwodu  $f_1(t)$  i na wyjściu  $f_2(t)$  w postaci

$$f_1(t) = 11(t) + 31(t-\tau) + 21(t-2\tau) + 51(t-3\tau),$$

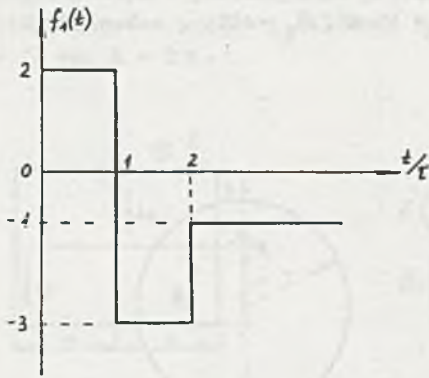
$$f_2(t) = t1(t) + 4(t-\tau)1(t-\tau) + 3(t-2\tau)1(t-2\tau) + 6(t-3\tau)1(t-3\tau).$$

**Zadanie 5.15.** Dane są przebiegi czasowe sygnałów na wejściu obwodu  $f_1(t)$  i na wyjściu  $f_2(t)$  jak na rys. 5.15. Obliczyć przebieg czasowy impulsowej odpowiedzi  $h(t)$  obwodu.

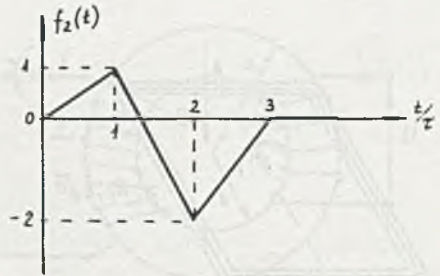
Dane:  $f_1(t) = 10t1(t) - 10(t-1)1(t-1)$

$$f_2(t) = \frac{t^2}{2} 1(t) - 2 \frac{(t-1)^2}{2} 1(t-1) + \frac{(t-2)^2}{2} 1(t-2)$$

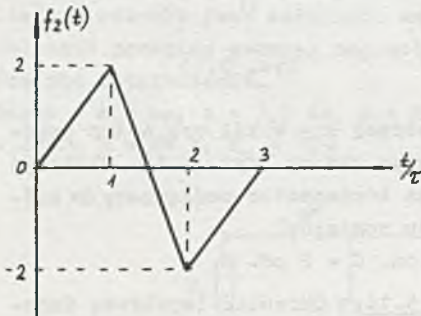
**Zadanie 5.16.** Mając dane przebiegi czasowe sygnałów na wejściu obwodu  $f_1(t)$  z rys. 5.16 i na wyjściu  $f_2(t)$  z rys. 5.16.1 obliczyć przebieg czasowy impulsowej odpowiedzi  $h(t)$  obwodu.



Rys. 5.16



Rys. 5.16.1



Rys. 5.17

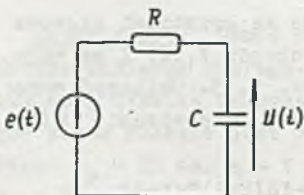
**Zadanie 5.17.** Dane są przebiegi czasowe sygnałów na wejściu obwodu  $f_1(t)$  z rys. 5.16 i na wyjściu  $f_2(t)$  z rys. 5.17. Określić przebieg czasowy impulsowej odpowiedzi obwodu  $h(t)$ .

**Zadanie 5.18.** Obliczyć przebieg czasowy impulsowej odpowiedzi obwodu  $h(t)$  mając dane wartości przebiegów czasowych sygnałów na wejściu obwodu  $f_1(t)$  i na wyjściu  $f_2(t)$  w chwilach  $t = 0,05, 0,15, 0,25, \dots, 2,95$ .

$$f_1(t) = e^{-4t} \cdot 1(t)$$

$$f_2(t) = te^{-4t} - (t-1)e^{-4(t-1)} \cdot 1(t-1)$$

Porównać  $h'(t)$  z przebiegiem czasowym  $h(t)$  otrzymanym na podstawie przekształceń  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  za pomocą rachunku operatorowego.



Rys. 5.19

**Zadanie 5.19.** Dla obwodu z rys. 5.19 obliczyć przebieg czasowy SEM  $e(t)$ , przy którym przebieg czasowy napięcia

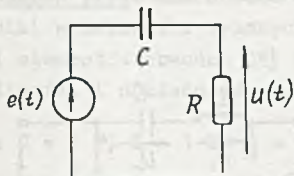
a)  $u(t) = t \cdot 1(t) \text{ V.}$

b)  $u(t) = \frac{t^2}{2} \cdot 1(t) \text{ V,}$

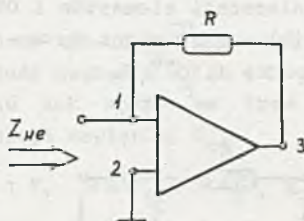
Dane:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \text{ mF}$ .



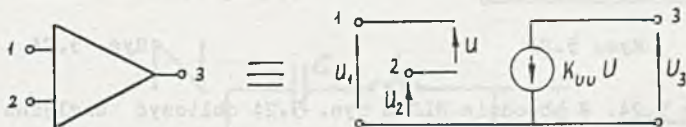
**Zadanie 5.20.** Dla obwodu z rys. 5.20 obliczyć przebieg czasowy SEM  $e(t)$ , przy którym przebieg czasowy napięcia a)  $u(t) = 11(t)$  V, b)  $u(t) = t1(t)$  V.  
Dane:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \text{ mF}$ .



Rys. 5.20



Rys. 5.21



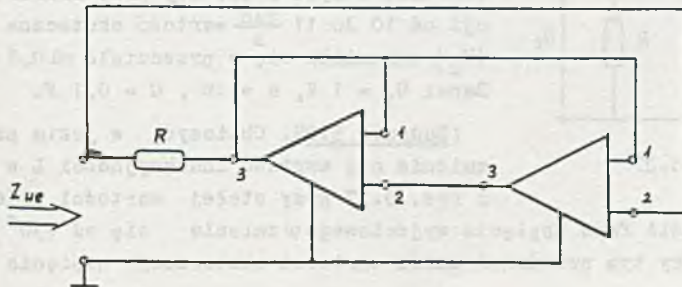
Rys. 5.21.1

**Zadanie 5.21.** Obliczyć impedancję wejściową  $Z_{we}$  obwodu z rys. 5.21. Trójbiegownik wykorzystany w obwodzie przedstawia rys. 5.21.1.

Dane:  $k_{UU}(j\omega) = \frac{K_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}$ ,  $K_0 = 10^5 \frac{\text{V}}{\text{V}}$ ,  $\omega = 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\omega_g = 10^7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .

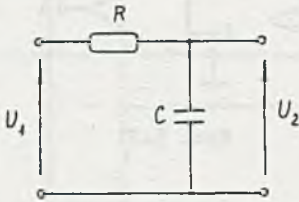
**Zadanie 5.22.** Obliczyć impedancję wejściową  $Z_{we}$  obwodu z rys. 5.22. Trójbiegowniki wykorzystane w obwodzie mają postać jak na rys. 5.21.1.

Dane:  $k_{UU}(j\omega) = \frac{K_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}$ ,  $K_0 = 10^5 \frac{\text{V}}{\text{V}}$ ,  $\omega = 10^7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\omega_g = 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $R = 1 \Omega$ .

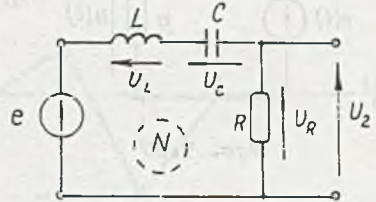


Rys. 5.22

**Zadanie 5.23.** Dla obwodu z rys. 5.23 obliczyć względne współczynniki wrażliwości napięcia  $U_2$  na zmiany wartości elementów  $R, C$  i pulsacji  $\omega$  oraz wyznaczyć graniczne najniekorzystniejsze wartości napięcia  $U_2$  przy:  
 a) 10% tolerancji elementów i 0% tolerancji pulsacji,  
 b) 20% tolerancji elementów i 0% tolerancji pulsacji.  
 Dane:  $u_1(t) = 1\sqrt{2} \sin \omega t$  V,  $\omega = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , wartości nominalne elementów:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .



Rys. 5.23

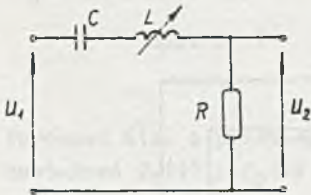


Rys. 5.24

**Zadanie 5.24.** W obwodzie RLC z rys. 5.24 obliczyć względne współczynniki wrażliwości napięcia  $U_2$  na zmiany wartości elementów.  
 Dane:  $e(t) = 1\sqrt{2} \sin \omega t$  V,  $\omega = 0,999 \cdot 10^5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ mH}$ ,  $C = 0,1 \mu\text{F}$ .

**Zadanie 5.25.** Dla obwodu z rys. 4.5 obliczyć wrażliwość względną napięcia  $U_3$  na zmiany wartości elementów obwodu i wzmocnienia  $k_{\text{UU}}$  wzmacniacza z rys. 4.5.1.  
 Dane:  $e(t) = 1\sqrt{2} \sin 1000t$  V,  $R_1 = R_2 = R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $k_{\text{UU}} = 100 \frac{\text{V}}{\text{V}}$ .

**Zadanie 5.26.** Określić, jak zmieni się w obwodzie z rys. 5.23 względny współczynnik wrażliwości napięcia  $U_2$  na zmianę wartości pojemności ( $S_{Y_C}^{U_2}$ ) przy wzroście pulsacji od 1 do  $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .  
 Dane:  $R = 1 \Omega$ ,  $C = 1 \text{ F}$ .



Rys. 5.27

**Zadanie 5.27.** Obliczyć, w jakim przedziale może zmieniać się wartość indukcyjności  $L$  w obwodzie z rys. 5.27, aby przy zmianach pulsacji od 10 do  $11 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  wartość skuteczna napięcia  $|U_2|$  zmieniała się w przedziale od 0,8 do 0,9 V.  
 Dane:  $U_1 = 1 \text{ V}$ ,  $R = 1 \Omega$ ,  $C = 0,1 \text{ F}$ .

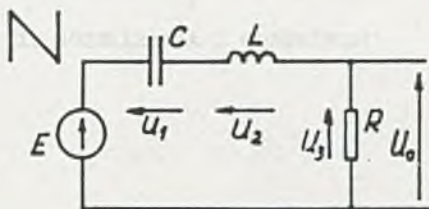
**Zadanie 5.28.** Obliczyć, w jakim przedziale zmienia się wartość indukcyjności  $L$  w obwodzie z rys. 5.27 przy stałej wartości pulsacji  $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , jeśli faza napięcia wyjściowego  $\varphi$  zmienia się od  $+30^\circ$  do  $-45^\circ$ . Jaki jest przy tym przedział zmian wartości skutecznej napięcia wyjściowego  $|U_2|$ ?

Zadanie 5.29. Obliczyć przedział zmian wartości indukcyjności  $L$  w obwodzie z rys. 5.27, dla którego wartość skuteczna  $|U_2|$  i faza  $\varphi$  napięcia wyjściowego  $u_2$  spełniają nierówności  $0,8 \text{ V} \leq |U_2| \leq 0,9 \text{ V}$  i  $-45^\circ \leq \varphi \leq +30^\circ$  przy pulsacji  $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Zadanie 5.30. Dla obwodu przedstawionego na rys. 5.30 obliczyć współczynniki wrażliwości wyższych rzędów amplitudy napięcia  $U_0$  na zmiany wartości elementów obwodu [25] i przedyskutować ich wpływ na kres górny wrażliwości i dokładność wyznaczania tolerancji napięcia  $U_0$ .

Dane:  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $\frac{1}{R} = G = 1 \text{ S}$ ,  $|E| = 1 \text{ V}$ ,  $\omega = \omega_r = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $t_{|E|} = 0$ ,  $t_\omega = 0$ .

Przyjąć oznaczenia:  $C = x_1$ ,  $\frac{1}{L} = \Gamma = x_2$ ,  $G = x_3$ ,  $T = U_0 = T(C, L, R) = T(x_1, x_2, x_3)$ .



Rys. 5.30





## Zadanie 1

Wyznacz prąd płynący w przewodniku.

Wiedząc, że:

przewodnik jest w polu magnetycznym  $B = 0,5 \text{ T}$ .

Przewodnik jest w polu magnetycznym  $B = 0,5 \text{ T}$ . Przewodnik jest w polu magnetycznym  $B = 0,5 \text{ T}$ . Przewodnik jest w polu magnetycznym  $B = 0,5 \text{ T}$ . Przewodnik jest w polu magnetycznym  $B = 0,5 \text{ T}$ .

## II. ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI



rys. 1.10

Wyznacz prąd płynący w przewodniku.

$$I = 1 \text{ A}$$

12

Wyznacz prąd płynący w przewodniku. Wyznacz prąd płynący w przewodniku. Wyznacz prąd płynący w przewodniku. Wyznacz prąd płynący w przewodniku.

Wyznacz prąd płynący w przewodniku.

13

Wyznacz prąd płynący w przewodniku. Wyznacz prąd płynący w przewodniku. Wyznacz prąd płynący w przewodniku. Wyznacz prąd płynący w przewodniku.

$$I = 1 \text{ A}$$

14

Wyznacz prąd płynący w przewodniku.

15

Wyznacz prąd płynący w przewodniku. Wyznacz prąd płynący w przewodniku. Wyznacz prąd płynący w przewodniku. Wyznacz prąd płynący w przewodniku.

16

17

$$I = 1 \text{ A}$$

18





## R o z d z i a ł   1

### 1. INDUKCJA ELEKTROMAGNETYCZNA

#### Zadanie 1.1

Układ można przedstawić jak na rys. 1.1.1.

Ponieważ długość cewki  $l$  jest znacznie większa od średnicy  $d$ , można z małym błędem założyć stałość natężenia pola  $H$  wewnątrz cewki i wyznaczyć je ze znanej zależności:

$$H = \frac{i_1 z_1}{l}, \quad (1)$$

natomiast indukcję

$$B = \mu_0 H. \quad (2)$$

Strumień przepływający przez cewkę pierwszą wywołany przez prąd  $i_1$  obliczymy ze wzoru

$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{i_1 z_1}{l} S. \quad (3)$$

Przyjmując prawoskrętny system strzałkowania wyznaczmy SEM indukowaną w uzwojeniach cewki drugiej przez zmienny strumień z zależności

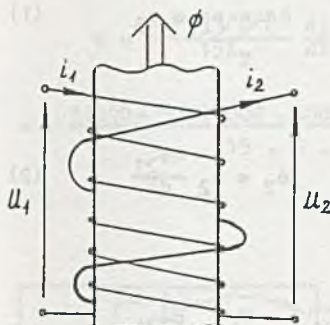
$$u_2 = e_2 = - \frac{d\psi}{dt} = -z_2 \frac{d\Phi}{dt} = \frac{-\mu_0 z_1 z_2 S}{l} \frac{di_1}{dt}. \quad (4)$$

W zakresie liniowych zmian prądu  $i_1$

$$u_2 = \frac{-\mu_0 z_1 z_2 S}{l} \frac{\Delta i_1}{\Delta t}, \quad (4)$$

gdzie:

$$\Delta i_1 = (0,5 - 0,1)A = 0,4 A$$



Rys. 1.1.1

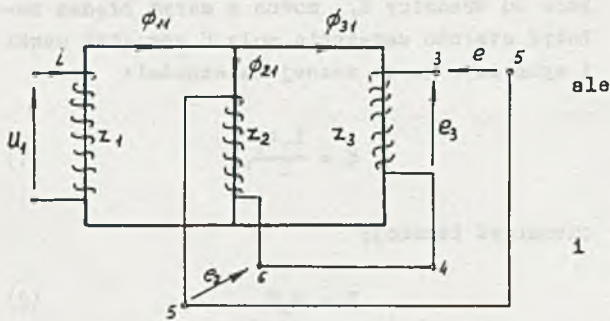
Podstawiając wartości liczbowe dla  $\Delta t$  otrzymamy wskazania woltomierza odpowiednio:

$$a) u_2 = \frac{-4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5000 \cdot 2000 \cdot 12 \cdot 10^{-4}}{20 \cdot 10^{-2}} \frac{0,4}{2 \cdot 10^{-3}} \text{ V} = -15,1 \text{ V}$$

$$b) u_2 = -75,5 \text{ mV.}$$

### Zadanie 1.2

Przedstawiając obwód jak na rys. 1.2.1 i przyjmując lewoskrętny system strzałkowania dla uzwojenia drugiego i trzeciego otrzymamy:



Rys. 1.2.1

$$e = e_2 + e_3 \quad (1)$$

$$e_2 = z_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} \quad (2)$$

$$e_3 = z_3 \frac{d\phi_{31}}{dt} \quad (3)$$

więc

$$e = z_2 \frac{d\phi_{21}}{dt} + z_3 \frac{d\phi_{31}}{dt} \quad (1')$$

Strumień  $\phi_{11}$  obliczymy korzystając z prawa Ohma dla obwodów magnetycznych

$$\phi_{11} = \frac{iz_1}{R_{m1} + \frac{R_{m2}R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}} = \frac{iz_1}{\frac{15}{4} \frac{1}{\mu_r \mu_0 S}} \quad (4)$$

gdzie:

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 S} = \frac{3l_2}{\mu_r \mu_0 S} = 3R_m = R_{m3} \quad \text{- opór magnetyczny rdzenia o średniej drodze magnetycznej } l_1$$

$$R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_r \mu_0 S} = R_m \quad \text{- opór magnetyczny środkowej kolumny.}$$

Strumień w środkowej kolumnie

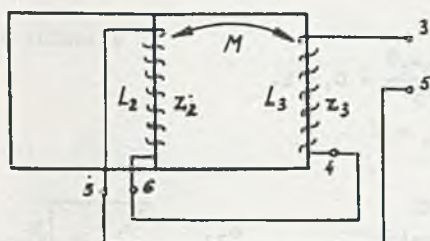
$$\Phi_{21} = \Phi_{11} \frac{R_m 3R_m}{R_m + 3R_m} \frac{1}{R_m} = \frac{3}{4} \Phi_{11} = \frac{1z_1 \mu_r \mu_0 S}{5l_2} \quad (5)$$

Z I prawa Kirchhoffa dla obwodów magnetycznych

$$\Phi_{31} = \Phi_{11} - \Phi_{21} = \frac{1}{4} \Phi_{11} = \frac{1z_1 \mu_r \mu_0 S}{15l_2} \quad (6)$$

więc

$$\begin{aligned} e &= + \frac{z_1 z_2 \mu_r \mu_0 S}{15l_2} \frac{di}{dt} + \frac{z_1 z_2 \mu_r \mu_0 S}{5l_2} \frac{di}{dt} = + \frac{(3z_2 + z_2) z_1 \mu_r \mu_0 S}{15l_2} \frac{di}{dt} = \\ &= + \frac{(1500 + 500) 1000 \cdot 500 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-4}}{15 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-2}} 0,1 \sqrt{2} \cdot 10^3 \cdot \cos 10^3 t \text{ V} = \\ &= + 80 \sqrt{2} \cos 10^3 t \text{ V}. \end{aligned}$$



Rys. 1.2.2

Indukcyjność zastępcza cewek połączonych szeregowo widziana z zacisków 3-5 (rys. 1.2.2) jest równa

$$L_{35} = L_2 + L_3 - 2M_{23} \quad (7)$$

gdzie:

$L_2$  - indukcyjność własna uzwojenia nawiniętego na środkowej kolumnie

$L_3$  - indukcyjność własna uzwojenia  $z_3$ ,

$M_{23} = M_{32}$  - indukcyjność wzajemna cewek  $L_2$  i  $L_3$ .

Indukcyjność  $L_2$  obliczymy ze znanej zależności

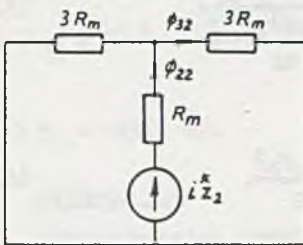
$$L_2 = z_2 \frac{\Phi_{22}}{i^x} \quad (8)$$

gdzie:

$\Phi_{22}$  - strumień magnetyczny przepływający przez środkową kolumnę, wymuszony przez prąd  $i^x$  płynący w zwojach nawiniętych na środkowej kolumnie.



Korzystając z analogii elektromagnetycznej można przedstawić obwód magnetyczny w postaci schematu jak rys. 1.2.3, wówczas



Rys. 1.2.3

więc

$$\Phi_{22} = \frac{i^x_2}{R_m + 1,5R_m}$$

$$L_2 = \frac{z_2^2}{2,5 R_m} = \frac{z_2^2 \mu_r \mu_0 S}{2,5 l_2} = 0,6 \text{ H.}$$

Indukcyjność wzajemna

$$M_{32} = z_3 \frac{\Phi_{32}}{i^x_1}, \quad (9)$$

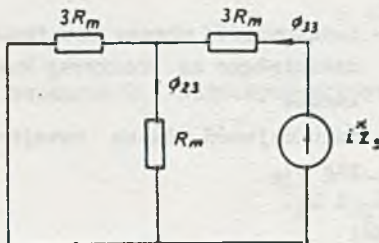
gdzie:

$\Phi_{32}$  - strumień magnetyczny przepływający przez prawą kolumnę, wymuszony prądem  $i^x$  płynącym przez cewkę  $L_2$

więc

$$M_{32} = \frac{z_2 z_3}{5 R_m} = \frac{z_2 z_3 \mu_r \mu_0 S}{5 l_2} = 0,3 \text{ H.}$$

Indukcyjność własna trzeciego uzwojenia



Rys. 1.2.4

gdzie:

$\Phi_{33}$  - strumień przepływający w prawej kolumnie, wymuszony przez prąd  $i^x$  płynący przez zwoje  $z_3$ .

Przyjmując oznaczenia podane na schemacie z rys. 1.2.4 otrzymamy:

$$\Phi_{33} = \frac{i^x_3}{3R_m + \frac{3R_m R_m}{3R_m + R_m}} = \frac{i^x_3}{\frac{15}{4} R_m}$$

więc

$$L_3 = \frac{z_3^2}{15 R_m} = \frac{4}{15} \frac{z_3^2 \mu_r \mu_0 S}{I_2} = 0,4 \text{ H},$$

a indukcyjność wzajemna

$$M_{23} = z_3 \frac{\Phi_{23}}{I_2} = \frac{z_2 z_3 \mu_r \mu_0 S}{5 I_2} = M_{32}.$$

Podstawiając do równania (7) wartości liczbowe otrzymamy

$$L_{3-5} = 0,6 + 0,4 - 2 \cdot 0,3 = 0,4 \text{ H}.$$

### Zadanie 1.3

Natężenie pola magnetycznego wewnątrz solenoidu o  $l \gg d$

$$H = \frac{Iz}{l} \quad (1)$$

a indukcja

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 Iz}{l}. \quad (2)$$

Efektywna długość przewodu ramki przecinająca linie pola wynosi  $2a$ , a prędkość przemieszczania tego przewodu względem linii pola wynosi  $v_n$  (rys. 1.3.1), więc SEM e indukująca się w ramce (SEM rotacji)

$$e = B 2a v_n = B 2a v_s \cos \alpha. \quad (3)$$

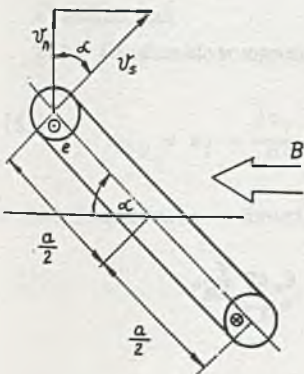
Ponieważ

$$v_s = \omega \frac{a}{2} = 3000 \frac{2\pi}{60} \frac{a}{2} = 100\pi \frac{a}{2},$$

Rys. 1.3.1

więc

$$e_{12} = e = \frac{\mu_0 Iz}{l} 2a 100\pi \frac{a}{2} \cos 100\pi t = 19,7 \cos 100\pi t \text{ mV}.$$



Siłę elektromotoryczną  $e_{12}$  można wyznaczyć przyjmując, że ramka jest nieruchoma, natomiast zmienia się strumień przez nią przenikający. Wówczas SEM wyrazi się zależnością

$$e = \frac{d\Phi}{dt} \quad (4)$$

ale

$$\Phi = BS = \mu_0 HS = \mu_0 \frac{I_z}{l} S,$$

natomiast

$$S = a^2 \sin \omega t,$$

więc

$$e = \mu_0 \frac{I_z}{l} a^2 \omega \cos \omega t \quad V = 19,7 \cos 100\pi t \text{ mV}.$$

#### Zadanie 1.4

Indukcyjność wzajemna (na jednostkę długości  $l$ ) linii dwuprzewodowych nieskończenie długich AB i CD wyraża się zależnością:

$$M = \frac{\mu_r \mu_0}{2\pi} \ln \frac{l_{AD}^2}{l_{AB} l_{CD}} = \frac{1 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3}{2\pi} \ln \frac{60^2 + 50^2}{40 \cdot 80} = 0,129 \frac{\text{mH}}{\text{km}}. \quad (1)$$

SEM indukowane w linii CD przez zmianę prądu płynącego w linii AB

$$e = M \frac{di}{dt}, \quad (2)$$

ponieważ prąd narasta liniowo

$$e = M \frac{di}{dt} = 0,129 \cdot 10^{-3} \frac{70 - 20}{1 \cdot 10^{-3}} = 6,45 \frac{\text{V}}{\text{km}}.$$

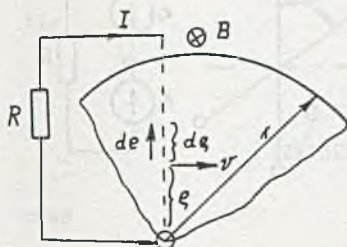
Reasumując

$$e = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 6,45 \frac{\text{V}}{\text{km}} & \text{dla } 0 \leq t \leq 1 \text{ ms} \\ 0 & \text{dla } t > 1 \text{ ms} - \text{jeśli prąd ustali się na wartości } 70 \text{ A.} \end{cases}$$



### Zadanie 1.5

Rozpatrując nieskończenie mały element promienia łączącego oś prądnicy ze ślizgiem na walcu, otrzymamy (rys. 1.5.1) wielkość siły elektromotorycznej indukującej się wskutek przecinania linii sił pola przez przewód



Rys. 1.5.1

$$de = Bvdr = B\omega r dr \quad (1)$$

stąd po scałkowaniu

$$e = \int_0^r de = \int_0^r B\omega r dr = B\omega \frac{r^2}{2}. \quad (2)$$

Przyjmując kierunek prądu I jak na rysunku 1.5.1 otrzymamy z prawa Ohma

$$I = \frac{-e}{R}. \quad (3)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$e = 0,5 \cdot 100 \frac{(0,2)^2}{2} = 1 \text{ V},$$

$$I = -10 \text{ mA}.$$

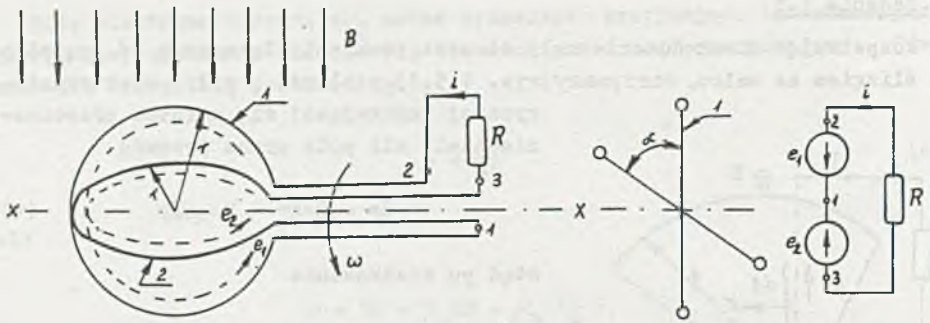
### Zadanie 1.6

Siła elektromotoryczna indukowana w pierwszym zwoju

$$e_{12} = e_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d(BS_1)}{dt} = B \frac{d(S \sin \omega t)}{dt} = B\omega S \cos \omega t \text{ V} \quad (1)$$

a SEM indukowane w drugim zwoju

$$e_{13} = e_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = B\omega S \cos(\omega t - 60^\circ) \text{ V}, \quad (2)$$



Rys. 1.6.1

więc prąd  $i$  płynący w obwodzie (rys. 1.6.1) wyznaczamy z zależności

$$i = \frac{e_1 - e_2}{R} = \frac{B \omega S}{R} [\cos \omega t - \cos(\omega t - 60^\circ)] =$$

$$= \frac{B \omega S}{R} \cos(\omega t + 60^\circ) A = 12,6 \cos(200t + 60^\circ) \text{ mA.} \quad (3)$$

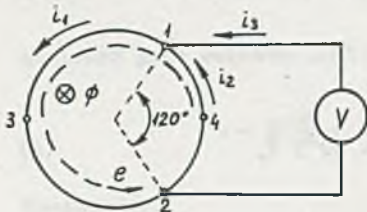
Również i w tym przypadku można obliczyć SEM indukowaną w pętliach jako skutek przecięcia linii pola przez przewód, sposób ten jest w tym przypadku bardziej skomplikowany (sprawdzić).

#### Zadanie 1.7

$e = 40 \text{ mV}$ .

#### Zadanie 1.8

W przypadku zmiennego pola elektromagnetycznego można mówić jedynie o napięciu  $U_{12}$  między punktami 1 i 2 obwodu wzdłuż danej drogi, ponieważ wartość całki



Rys. 1.8.1

$$\int_2^1 \vec{K} d\vec{l}$$

zależy od położenia i kształtu drogi całkowania.

Ad a)

Przyjmując oznaczenia podane na rysunku 1.8.1 można napisać:

$$u_{21} = \int_{2V1} \vec{K} d\vec{l} = \oint_{2V132} \vec{K} d\vec{l} - \int_{132} \vec{K} d\vec{l}.$$

Ponieważ rezystancja wewnętrzna woltomierza jest bardzo duża, więc

$$i_3 \approx 0, \quad \text{a} \quad i_1 = i_2 = i = \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} = \frac{e}{R}.$$

Ale

$$\oint_{2V132} \bar{K} d\bar{l} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{d\phi}{dt} = e = \oint_{24132} \bar{K} d\bar{l}$$

oraz

$$\int_{132} \bar{K} d\bar{l} = i_1 R_1 = i \frac{2}{3} R,$$

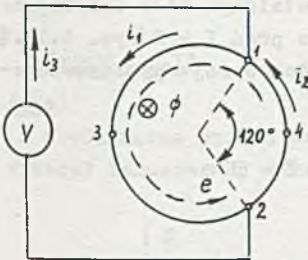
więc

$$u_{21} = e - i_1 R_1 = e - \frac{2}{3} e = \frac{e}{3} = 3,33 \text{ mV}.$$

Woltomierz wychyli się w lewo.

Ad b)

Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rysunku 1.8.2



Rys. 1.8.2

$$u_{21} = \int_{2V1} \bar{K} d\bar{l} = \oint_{2V132} \bar{K} d\bar{l} - \int_{132} \bar{K} d\bar{l} = 0 - i_1 R_1 = -\frac{2}{3} e = -6,67 \text{ mV}.$$

Woltomierz wychyli się w prawo.

#### Zadanie 1.9

a) 10 V, b) 0

#### Zadanie 1.10

Napięcie

$$u_2 = +z_2 \frac{d\phi}{dt}$$

a strumień

$$\Phi = \frac{iz_1}{R_m},$$



więc opór magnetyczny

$$R_m = \frac{l z_1}{\Phi_0},$$

zatem

$$u_2 = z_2 \frac{z_1}{l z_1} \Phi_0 \frac{d i}{d t} = z_2 4 \sqrt{2} \cos 10^4 t \text{ V.}$$

Wartość skuteczna napięcia

$$U_2 = z_2 4 = 10 \text{ V,}$$

więc

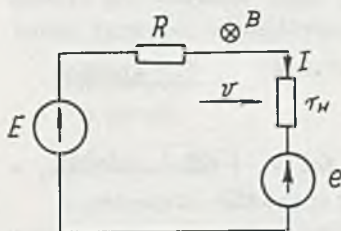
$$z_2 = 2,5 \text{ zwoja.}$$

Trzeci zwój należy nawinąć przez środek rdzenia, żeby objął połowę strumienia.

#### Zadanie 1.11

Ad a)

Można stwierdzić na podstawie reguły lewej ręki, że przewód przemieszcza się w prawo. W stanie ustalonym siła działająca na pręt  $F = 0$ ; więc prąd  $I = 0$  (rys. 1.11.1) a wartość SEM  $e$  indukowanej w przemieszczającym się pręcie



Rys. 1.11.1

$$e = E = Blv$$

stąd

$$v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ad b)

Prędkość  $v$  nie ulegnie zmianie.

#### Zadanie 1.12

a)  $U = 10 \text{ V}$ , b)  $U = 9 \text{ V}$ .

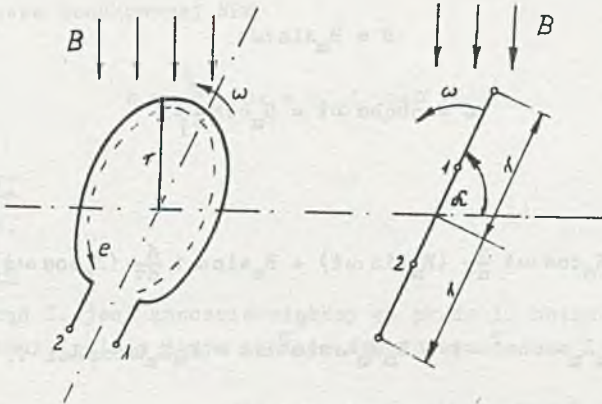
Zadanie 1.13

Przyjmując oznaczenia podane na rys. 1.13.1, wyznaczmy strumień z zależności

$$\Phi = BS_{\alpha} = B\pi r^2 \cos \omega t = 94 \cdot 10^{-4} \cos 50t \text{ Wb.} \quad (1)$$

Stosując lewoskrętny system strzałkowania otrzymamy

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = -B\pi r^2 \omega \sin \omega t = -0,47 \sin 50t \text{ V.} \quad (2)$$

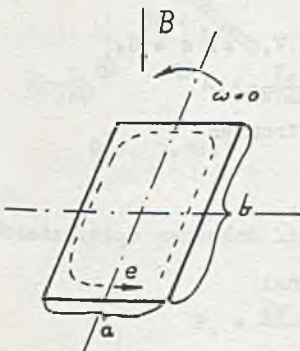


Rys. 1.13.1

Zadanie 1.14

Ad a)

Obwód można przedstawić jak na rys. 1.14.1. Wartość siły elektromotorycznej indukowanej w ramce przez zmienny strumień



ale

$$e = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = BS = abB_m \sin \omega t,$$

więc

$$e = \frac{d}{dt} (abB_m \sin \omega t) = ab\omega B_m \cos \omega t \text{ V.}$$

Rys. 1.14.1

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$e = 0,06 \cdot 0,08 \cdot 62,8 \cdot 0,8 \cos 62,8^\circ \text{ V} = 0,241 \cos 62,8^\circ \text{ V}.$$

Ad b)

W tym przypadku zmienia się w czasie strumień i powierzchnia, więc wartość siły elektromotorycznej indukowanej w obwodzie:

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (BS) = S \frac{dB}{dt} + B \frac{dS}{dt}$$

ale

$$B = B_m \sin \omega t$$

$$S = ab \cos \omega t = S_m \cos \omega t,$$

więc

$$\begin{aligned} e &= S_m \cos \omega t \frac{d}{dt} (B_m \sin \omega t) + B_m \sin \omega t \frac{d}{dt} (S_m \cos \omega t) = \\ &= B_m S_m \omega \cos^2 \omega t - B_m S_m \omega \sin^2 \omega t = B_m S_m \omega \cos 2\omega t \text{ V}. \end{aligned}$$

Podstawiając wartości liczbowe

$$e = 0,8 \cdot 0,06 \cdot 0,08 \cdot 62,8 \cos 2 \cdot 62,8^\circ \text{ V} = 0,241 \cos 125,6^\circ \text{ V}.$$

Ad c)

Nic się nie zmieni, gdyż powierzchnia, przez którą przenika strumień jest taka sama.

#### Zadanie 1.15

$$a) e = 0, \quad b) e = -0,3 \sin 50t \text{ V}, \quad c) e = 0.$$

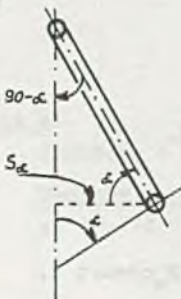
#### Zadanie 1.16

Powierzchnia, którą przenika strumień

$$S_x^* = z S_\alpha.$$

Natomiast  $S_x$  (rys. 1.16.1) wynosi

$$S_x = \frac{\pi d^2}{4} \cos \alpha,$$



Rys. 1.16.1



więc SEM e indukowana w solenoidzie

$$e = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} (S_{\alpha}^* B) = S_{\alpha}^* \frac{dB}{dt} = z \frac{\pi d^2}{4} \cos \alpha B_m \omega \cos \omega t =$$

$$= B_m \frac{z \omega \pi d^2}{4} \cos \omega t \cos \alpha = E_m \cos \omega t \cos \alpha V.$$

Podstawiając wartości liczbowe, otrzymamy

$$e = 31,6 \cos 314t \cos \alpha V.$$

Wartość skuteczna indukowanej SEM

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cos \alpha = 22,4 \cos \alpha V.$$

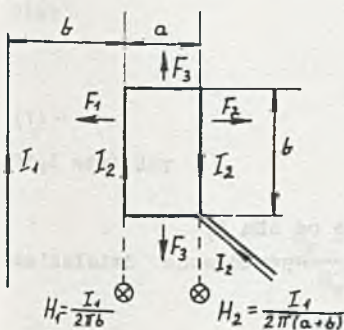
#### Zadanie 1.17

$$L = 13,1 \text{ mH}.$$

#### Zadanie 1.18

Ponieważ prąd  $I_1$  jest znacznie większy od prądu  $I_2$  można przyjąć, że o wartości natężenia pola w danym punkcie decyduje składowa pochodząca od prądu  $I_1$ .

Dla oznaczeń jak na rys. 1.18.1 siły działające na boki prostokąta, przez który płynie prąd  $I_2$  wyznaczmy z zależności:



Rys. 1.18.1

$$F_1 = \mu_0 H_1 I_2 b = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi b} I_2 b = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi},$$

$$F_2 = \mu_0 H_2 I_2 b = \mu_0 \frac{I_1 I_2 b}{2\pi(a+b)},$$

natomiast

$$F_3 = \int_b^{a+b} \mu_0 \frac{I_1}{2\pi x} I_2 dx = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}.$$

Podstawiając wartości liczbowe

$$F_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

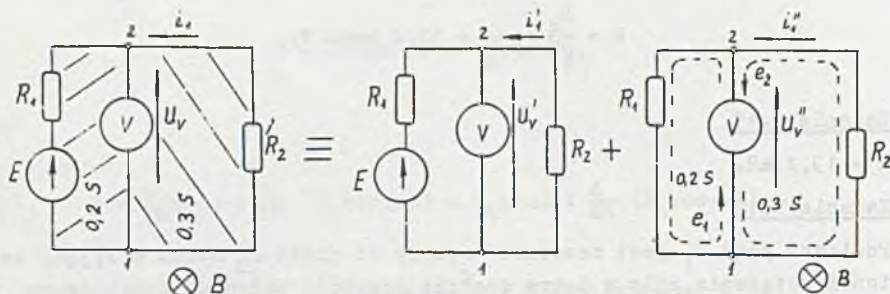
$$F_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{2\pi \cdot 0,7} = 1,43 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_3 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2\pi} \ln 3,5 = 0,626 \cdot 10^{-8} \text{ N.}$$

Zadanie 1.19.

Gdy pominiemy oddziaływanie zewnętrznego pola magnetycznego woltomierz we wszystkich układach wskaże wartość

$$U'_V = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 = 6 \text{ V.}$$



Rys. 1.19.1

Ad a)

Z zasady superpozycji (rys. 1.19.1)

$$U_V = U'_V + U''_V, \quad (1)$$

gdzie:

$U'_V = 6 \text{ V}$  - napięcie na oporniku  $R_2$  pochodzące od SEM  $E$ ,

$U''_V$  - napięcie na zaciskach woltomierza spowodowane działaniem zewnętrznego pola.

Z zależności

$$\oint_{1R_2 2V1} \vec{K} d\vec{l} = e_2 \quad (2)$$

1. Zastosować zasadę superpozycji

$$\oint_{1R_2 2V1} \bar{K} d\bar{l} = \int_{2V1} \bar{K} d\bar{l} + \int_{1R_2 2} \bar{K} d\bar{l} \quad (3)$$

$$e = \frac{d\Phi}{dt} = (S_1 + S_2) \frac{dB}{dt} = e_1 + e_2$$

oraz

$$e = i_1'' (R_1 + R_2)$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} U_V'' &= \int_{2V1} \bar{K} d\bar{l} = \oint_{1R_2 2V1} \bar{K} d\bar{l} - \int_{1R_2 2} \bar{K} d\bar{l} = e_2 - i_1'' R_2 = \\ &= S_2 \frac{dB}{dt} - i_1'' R_2 = \frac{2}{5} e - \frac{e}{R_1 + R_2} R_2. \end{aligned} \quad (3')$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$U_V'' = \frac{2}{5} 0,5 - \frac{2}{5} 0,5 = -\frac{1}{30} \text{ V}$$

więc

$$U_V = 6 - \frac{1}{30} = \frac{179}{30} \text{ V,}$$

Błąd względny

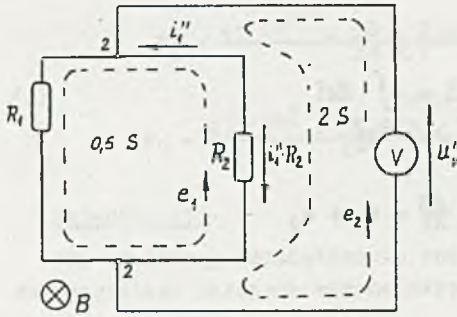
$$\delta = \frac{U_V' - U_V}{U_V'} 100\% = \frac{-\frac{1}{30}}{6} 100\% = -0,55\%.$$

Ad b)

Korzystając z zasady superpozycji obliczmy  $U_V''$  (rys. 1.19.2)

$$U_V'' = \int_{2V1} \bar{K} d\bar{l} = + \int_{2R_2 1} \bar{K} d\bar{l} - \int_{1V2 R_2 1} \bar{K} d\bar{l} = -2S \frac{dB}{dt} - i_1'' R_2 = -e_2 - i_1'' R_2.$$





Rys. 1.19.2

Prąd  $i_1''$  wyznaczmy z zależności

$$\oint \vec{K} d\vec{l} = 0,5 \text{ S } \frac{dB}{dt} = 1R_2 2R_1 i_1'' = i_1'' (R_1 + R_2) + e_1 \quad (5)$$

więc

$$U_V = -2 \text{ S } \frac{dB}{dt} = 0,5 \text{ S } \frac{dB}{dt} \frac{R_2}{R_1 + R_2} =$$

$$= -(2 + \frac{1}{3}) = -\frac{7}{3} \text{ V}. \quad (4')$$

Stąd

$$U_V = 6 - \frac{7}{3} = 3,67 \text{ V},$$

a błąd względny

$$\delta = \frac{-\frac{7}{3}}{6} 100\% = -38,9\%.$$

Ad c)

$$U_V = 6 + \frac{13}{6} = \frac{49}{6} \text{ V}$$

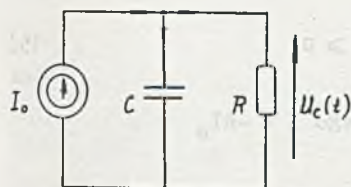
$$\delta = \frac{+\frac{13}{6}}{6} 100\% = +36,1\%.$$

## R o z d z i a ł   2

### 2. STANY NIEUSTALONE W OBWODACH Z NIESINUSOIDALNYM WYMUSZENIEM

#### Zadanie 2.1

Dla czasów  $t \geq 0$  obwód z rys. 2.1 można przedstawić jak na rys. 2.1.1. Z I prawa Kirchhoffs otrzymamy

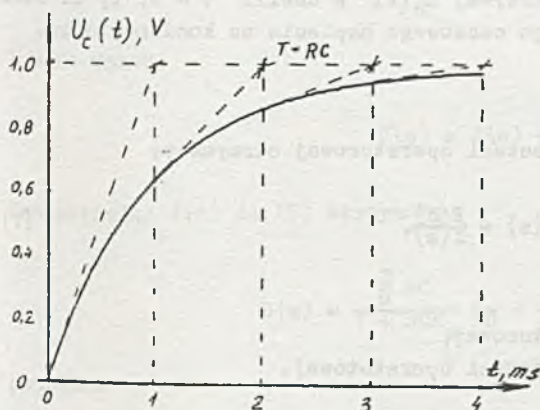


Rys. 2.1.1

$$C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R} = I_0 \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$u_C(0) = 0$$

Łatwo zauważyć, że w chwili  $t = 0$  napięcie na kondensatorze  $u_C(0) = 0$  V, ponieważ jest ono ciągłą funkcją czasu w chwili  $t = 0$ . Zatem cały prąd  $I_0$  płynie przez kondensator i szybkość zmiany napięcia  $u_C$  będzie równa  $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{I_0}{C}$ . W miarę narastania napięcia  $u_C(t)$  coraz większa część prądu  $I_0$  będzie płynąć przez opornik R. Spowoduje to coraz wolniejsze zmiany napięcia  $u_C(t)$ .



Rys. 2.1.2

W stanie ustalonym cały prąd  $I_0$  będzie płynął przez opornik, a zatem  $u_C(t)|_{t=\infty} = RI_0$ . Przebieg napięcia  $u_C(t)$  otrzymamy rozwiązując równanie (1). Rozwiązanie liniowego niejednorodnego równania można przedstawić w postaci

$$u_C = u'_C + u''_C, \quad (2)$$

gdzie:

$u'_C$  - jest rozwiązaniem jednorodnego równania różniczkowego,

$u''_C$  - jest jakimś szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego.

Rozwiązanie jednorodne ma postać

$$u'_c = Ke^{s_0 t}, \quad (3)$$

gdzie:

$$s_0 = -\frac{1}{RC}.$$

Rozwiązaniem szczególnym jest

$$u''_c = RI_0. \quad (4)$$

Podstawiając (3) i (4) do (2) otrzymamy

$$u_c(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + RI_0 \quad t \geq 0 \quad (5)$$

Stałą K dobierzemy tak, aby  $u_c(0) = 0$ . Wobec tego  $K = -RI_0$

$$u_c(t) = RI_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = 1(1 - e^{-10^3 t})V$$

dla  $t \geq 0$

stała czasowa obwodu  $RC \quad T = RC = 1 \text{ msek.}$

Napięcie  $u_c(t)$  jest przedstawione na rys. 2.1.2. Na rysunku tym naniesiono linią przerywaną styczne do krzywej  $u_c(t)$  w chwili  $t = 0, T, 2T$  itd. ułatwiające narysowanie przebiegu czasowego napięcia na kondensatorze.

### Zadanie 2.2

Ad a)

Korzystając z prawa Ohma w postaci operatorowej otrzymamy:

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)}, \quad (1)$$

gdzie:

$E(s)$  - SEM  $E$  w postaci operatorowej,

$Z(s)$  - impedancja obwodu w postaci operatorowej.

Ponieważ:

$$e(t) = E \hat{=} \frac{E}{s} = E(s)$$

$$Z(s) = R_1 + R_2 + \frac{1}{sC} = R_z + \frac{1}{sC},$$



więc prąd

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R_z + \frac{1}{sC}} = \frac{EC}{1 + R_zCs} = \frac{E}{R_z} \frac{R_zC}{1 + R_zCs} = \frac{E}{R_z} \frac{T}{1 + sT}, \quad (1')$$

gdzie:

$R_z = R_1 + R_2$  - opór zastępczy,

$T = R_zC$  - stała czasowa obwodu szeregowego  $R_1R_2C$ .

Przebieg czasowy prądu "i" otrzymamy przez transformację odwrotną prądu  $I(s)$ .

Ponieważ

$$\frac{T}{sT + 1} \hat{=} e^{-t/T}, \quad (2)$$

więc

$$i = \frac{E}{R_z} e^{-t/T}. \quad (3)$$

Przebieg napięcia na kondensatorze można wyznaczyć ze znanej zależności (przy zerowych tkowych)

$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau \quad (4)$$

lub ze wzoru

$$U(s) = J(s) \frac{1}{sC}. \quad (5)$$

Podstawiając (1') do (5) otrzymamy

$$U(s) = \frac{\frac{E}{s} sC}{1 + sCR_z} \frac{1}{sC} = E \frac{1}{s(1 + sT)}, \quad (6)$$

ponieważ

$$\frac{1}{s(sT + 1)} \hat{=} (1 - e^{-t/T}), \quad (7)$$

więc czasowy przebieg napięcia na kondensatorze

$$u = E(1 - e^{-t/T}) \text{ V.} \quad (8)$$

Łatwo sprawdzić, że identyczny wynik otrzymamy rozwiązując równanie (4).  
Z II prawa Kirchhoffa otrzymamy:

$$u_1 = u + R_2 i \quad (9)$$

lub operatorowo

$$U_1(s) = U(s) + R_2 I(s) = I(s) \left( \frac{1}{sC} + R_2 \right). \quad (10)$$

Ze wzoru (9) otrzymamy:

$$u_1 = E(1 - e^{-t/T}) + R_2 \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-t/T} = E \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-t/T} \right). \quad (11)$$

Podstawiając dane liczbowe:

$$R_z = 300 \, \Omega$$

$$T = R_z C = 300 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} = 0,15 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{T} = 6,67 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{E}{R_z} = 0,1 \text{ A}$$

$$\frac{E}{R_1} = R_1 = 10 \text{ V}$$

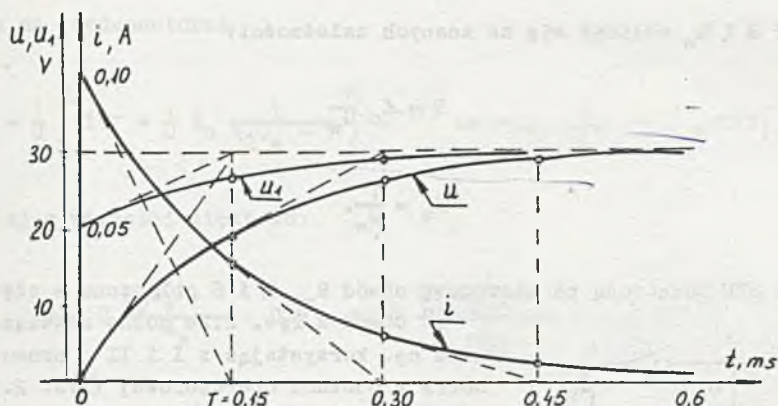
otrzymamy:

$$z \ (3) \quad i = 0,1 e^{-6,67 \cdot 10^3 t} \text{ A} \quad (3')$$

$$z \ (8) \quad u = 30(1 - e^{-6,67 \cdot 10^3 t}) \text{ V} \quad (8')$$

$$z \ (11) \quad u_1 = 30 - 10 e^{-6,67 \cdot 10^3 t} \text{ V.} \quad (11')$$

Wykresy czasowe podano na rys. 2.2.1.



Rys. 2.2.1

Wartość napięcia na kondensatorze w stanie ustalonym (teoretycznie po czasie nieskończenie długim) wyznaczymy bądź korzystając z twierdzenia o wartościach skrajnych, bądź wprost z przebiegu czasowego (8).

Podstawiając  $t = \infty$  otrzymamy

$$U = E. \quad (12)$$

Ładunek zgromadzony na kondensatorze w stanie ustalonym

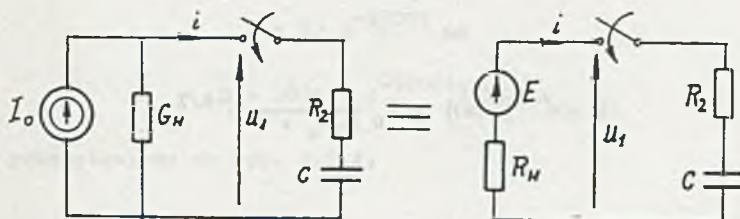
$$Q = CU = 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 30 = 15 \mu C. \quad (13)$$

Energia:

$$W = \frac{1}{2} U^2 C = \frac{1}{2} (30)^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 0,225 \text{ mJ}. \quad (14)$$

Ad b)

1° Obwód z rzeczywistą SPM z rys. 2.2b można przekształcić do obwodu z SEM i oporem wewnętrznym  $R_w$  (rys. 2.2.2).



Rys. 2.2.2



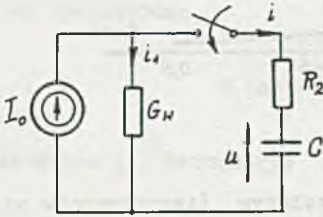
Wartość  $E$  i  $R_w$  oblicza się ze znanych zależności:

$$E = I_o \frac{1}{G_w} \quad (1)$$

$$R_w = \frac{1}{G_w} \quad (2)$$

Obwód z SEM załączoną na szeregowy obwód  $R_w$ ,  $R$  i  $C$  obliczono w części a).

2° Obwód z rys. 2.2b można rozwiązać również np. korzystając z I i II prawa Kirchhoffa w postaci operatorowej (rys. 2.2.3)



Rys. 2.2.3

$$\frac{I_o}{s} = I_1(s) + I(s) \quad (3)$$

$$I_1(s) \frac{1}{G_w} = I(s) (R_2 + \frac{1}{sC}) \quad (4)$$

stąd

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{I_o}{s} \frac{1}{G_w} \frac{sC}{sC \frac{R_2 G_w + 1}{G_w} + 1} = \\ &= I_o \frac{1}{sG_w} \frac{G_w}{R_2 G_w + 1} \frac{sC \frac{R_2 G_w + 1}{G_w}}{sC \frac{R_2 G_w + 1}{G_w} + 1} = I_o \frac{1}{R_2 G_w + 1} \frac{T}{sT + 1}, \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$$T = C \frac{R_2 G_w + 1}{G_w} - \text{stała czasowa obwodu}$$

a

$$i = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = I_o \frac{1}{R_2 G_w + 1} e^{-t/T} \quad (6)$$

Napięcie na kondensatorze

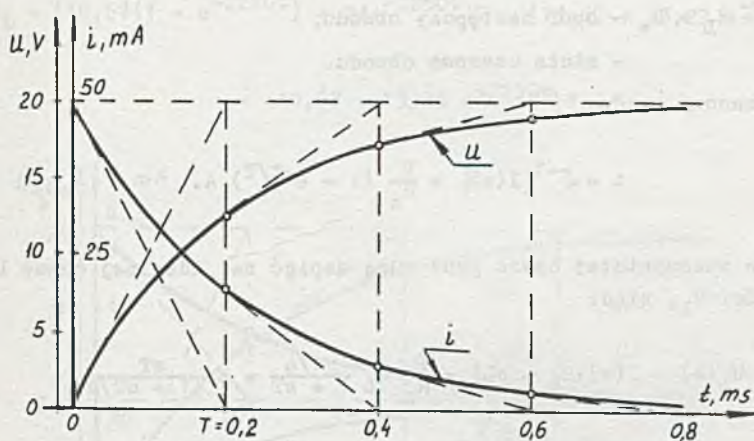
$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau = \frac{1}{C} I_0 \frac{1}{R_2 G_w + 1} \int_0^t e^{-\tau/T} d\tau = I_0 \frac{1}{G_w} (1 - e^{-t/T}). \quad (7)$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$T = C \frac{R_2 G_w + 1}{G_w} = 0,5 \cdot 10^{-6} \frac{200 \frac{1}{200} + 1}{\frac{1}{200}} = 0,2 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{T} = 5 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$$

$$I_0 \frac{1}{R_2 G_w + 1} = 50 \text{ mA}$$



Rys. 2.2.4

otrzymamy przebiegi czasowe  $u$  oraz  $i$

$$z (6) \quad i = 50 e^{-5000t} \text{ mA} \quad (6')$$

$$z (7) \quad u = 20(1 - e^{-5000t}) \text{ V.} \quad (7')$$

Przebiegi przedstawiono na rys. 2.2.4.

Ładunek (w stanie ustalonym):

$$Q = CU = 10 \mu C. \quad (8)$$

Energia:

$$W = \frac{1}{2} U^2 C = 0,1 \text{ mJ}. \quad (9)$$

### Zadanie 2.3

Korzystając z prawa Ohma

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R + R_L + R_w + sL} = \frac{E}{R_z} \frac{\frac{1}{s}}{\frac{L}{R_z} + 1} = \frac{E}{R_z} \frac{1}{(sT + 1)s}, \quad (1)$$

gdzie:

$R_z = R + R_L + R_w$  - opór zastępczy obwodu,

$T = \frac{L}{R_z}$  - stała czasowa obwodu.

Przebieg czasowy prądu:

$$i = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{E}{R_z} (1 - e^{-t/T}) \text{ A}. \quad (2)$$

Napięcie na rzeczywistej cewce jest sumą napięć na idealnej cewce  $L$  i na jej oporności  $R_L$ , więc:

$$U_L(s) = I(s)(R_L + sL) = \frac{E}{R_z} R_L \frac{1/s}{1 + sT} = E \frac{sT}{(1 + sT)s} \quad (3)$$

$$u_L = \mathcal{L}^{-1}\{U_L(s)\} = \frac{E}{R_z} R_L (1 - e^{-t/T}) + E e^{-t/T}. \quad (4)$$

Napięcie to można również wyznaczyć w zależności:

$$u_L = L \frac{di}{dt} + R_L i. \quad (5)$$

Napięcie na oporniku  $R$

$$u_R = iR. \quad (6)$$



Ad a)

Podstawiając wartości liczbowe:

$$R_Z = R + R_L + R_W \approx 450 \Omega$$

$$T = \frac{L}{R_Z} = 0,445 \text{ ms}$$

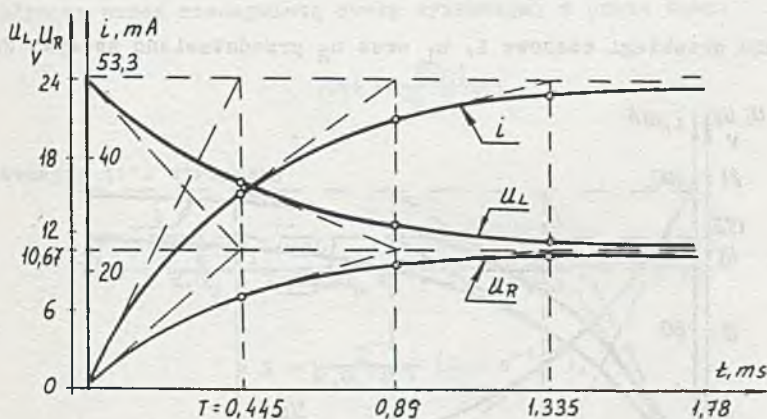
$$\frac{1}{\tau} = 2250 \text{ s}^{-1}$$

do wzoru (2) otrzymamy przebieg czasowy prądu

$$i = 53,3(1 - e^{-2250t}) \text{ mA}, \quad (7)$$

a napięcie na zaciskach rzeczywistej cewki wyznaczmy z zależności (4)

$$\begin{aligned} u_L &= [10,67(1 - e^{-2250t}) + 24e^{-2250t}] \text{ V} = [10,67 + 13,23 e^{-t/T} \text{ V} = \\ &= 10,67 + 13,23 e^{-2250t}] \text{ V}, \end{aligned} \quad (8)$$



Rys. 2.3.1

napięcie na oporniku  $R$  wyznaczmy z równania (6)

$$u_R = 10,67(1 - e^{-2250t}) \text{ V}. \quad (9)$$

Interpretacja graficzna zależności (7), (8) i (9) przedstawiona jest na rys. 2.3.1.

A4 b)

Podstawiając wartości liczbowe

$$R_z = R + R_w = 250 \Omega$$

$$T = \frac{L}{R_z} = 0,8 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{T} = 1250 \text{ s}^{-1}$$

prąd

$$i = 96(1 - e^{-1250t}) \text{ mA.} \quad (1)$$

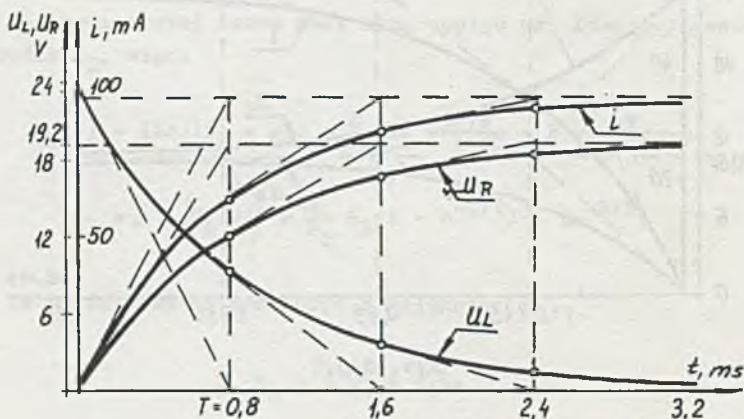
Napięcie na idealnej cewce

$$u_L = 24 e^{-1250t} \text{ V.} \quad (2)$$

Napięcie na oporniku R

$$u_R = 19,2(1 - e^{-1250t}) \text{ V.} \quad (3)$$

Graficznie przebiegi czasowe  $i$ ,  $u_L$  oraz  $u_R$  przedstawiono na rys. 2.3.2.



Rys. 2.3.2

W stanie ustalonym napięcie na zaciskach rzeczywistej cewki jest różne od zera, ponieważ istnieje napięcie na jej oporności wewnętrznej.

Zadanie 2.4

a)  $u = \frac{I}{C} t = 5 \cdot 10^3 t$  V, b)  $u = 50(1 - e^{-50t})$  V.

Zadanie 2.5

Korzystając z metody potencjałów węzłowych:

$$U(s) \left[ \frac{1}{R_1 + sL} + G_w \right] = \frac{I}{s} \quad (1)$$

stąd:

$$U(s) = \frac{\frac{I}{s} (R_1 + sL)}{R_1 G_w + 1 + sL G_w} \quad (1')$$

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{I}{G_w} e^{-t/T} + I \frac{R_1}{R_1 G_w + 1} (1 - e^{-t/T}) = \\ &= I \frac{R_1}{R_1 G_w + 1} + \frac{I}{(R_1 G_w + 1) G_w} e^{-t/T}. \end{aligned} \quad (2)$$

Prąd płynący przez rzeczywistą cewkę wyznaczmy z prawa Ohma:

$$I(s) = \frac{U(s)}{R_1 + sL}. \quad (3)$$

Podstawiając (1') otrzymamy

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{\frac{I}{s} (R_1 + sL)}{R_1 G_w + 1 + sL G_w} \frac{1}{R_1 + sL} = \frac{\frac{I}{s}}{R_1 G_w + 1} \frac{1}{1 + sT} \hat{=} \\ &\hat{=} i = \frac{I}{R_1 G_w + 1} (1 - e^{-t/T}), \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

$$T = \frac{L}{R_1 + \frac{1}{G_w}} = \frac{0,3}{1500} = 0,2 \text{ ms}$$

więc

$$\frac{1}{T} = 5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

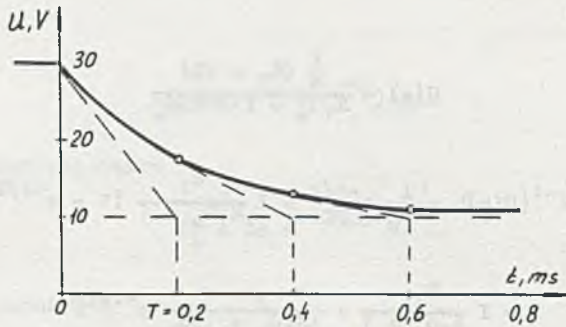


$$u = [10 + 20 e^{-t/T}] V = [10 + 20 e^{-5 \cdot 10^3 t}] V \quad (2')$$

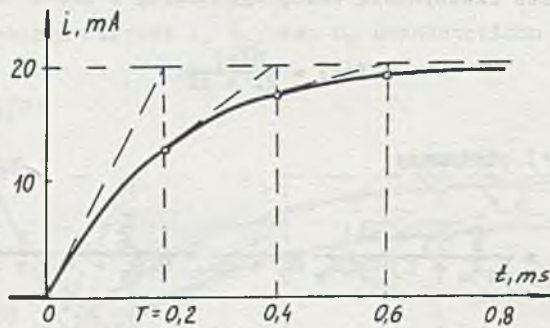
$$i = \frac{30}{500 \cdot 10^{-3} + 1} (1 - e^{-5 \cdot 10^3 t}) \text{ mA} = 20(1 - e^{-t/T}) \text{ mA} =$$

$$= 20(1 - e^{-5 \cdot 10^3 t}) \text{ mA}. \quad (4')$$

Przebieg czasowy napięcia podano na rys. 2.5.1 a prądu na rys. 2.5.2.



Rys. 2.5.1



Rys. 2.5.2

#### Zadanie 2.6

$$i = 2 + 4 e^{-5t} \text{ mA}$$

$$u = 40(1 - e^{-5t}) \text{ V}$$

$$Q = 1,2 \text{ mC}$$

#### Zadanie 2.7

Wskazówka: skorzystać z metody potencjałów węzłowych

$$U(s) \left[ \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC}} \right] = \frac{I}{s} \quad (1)$$

po rozwiązaniu (1) otrzymujemy:

$$U(s) = I \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \frac{1}{s + 1/T} + IR_3 \frac{1}{s(sT + 1)}, \quad (1')$$

a przebieg czasowy

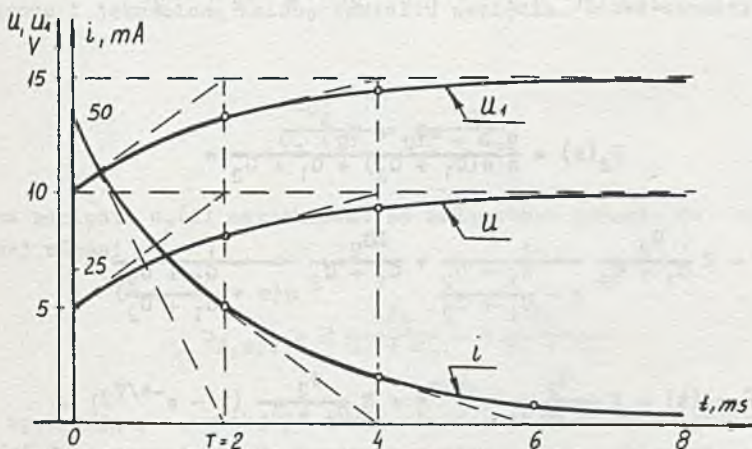
$$\begin{aligned} u &= IR_z e^{-t/T} + IR_3(1 - e^{-t/T}) = 10 - 5 e^{-500t} \text{ V} = \\ &= 5 + 5(1 - e^{-500t}) \text{ V}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

$$R_z = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 50 \Omega$$

$$T = C(R_2 + R_3) = 2 \text{ ms.}$$

$$\frac{1}{T} = 500 \text{ s}^{-1}$$



Rys. 2.7.1

Z równania II prawa Kirchhoffa wyznaczamy napięcie  $u_1$  na zaciskach siły prądomotorycznej I:

$$u_1 = u + IR_1 = [15 - 5 e^{-500t}] \text{ V} = [10 + 5(1 - e^{-t/T})] \text{ V} = [10 + 5(1 - e^{-500t})] \text{ V}. \quad (3)$$

Z pierwszego prawa Kirchhoffs:

$$i = I - i_{R_3} = I - \frac{u}{R_3} = 50 e^{-t/T} \text{ mA} = 50 e^{-500t} \text{ mA} \quad (4)$$

Wykresy przebiegów czasowych napięć  $u$  i  $u_1$  oraz prądu  $i$  przedstawiono na rys. 2.7.1.

### Zadanie 2.8

Ad a)

$$u_2(t) = \frac{E}{2} (1 - e^{-t/T_1}) = 5(1 - e^{-t/T_1}) \text{ V}, \quad (1)$$

gdzie

$$T_1 = C_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1 \text{ s}$$

Ad b)

$$U_2(s)(G_1 + G_2 + sC_1 + sC_2) = \frac{E}{s} (G_2 + sC_2)$$

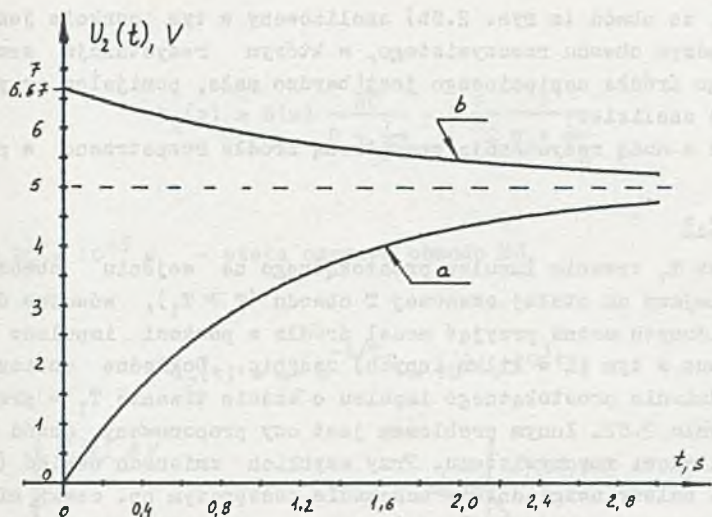
stąd

$$\begin{aligned} U_2(s) &= \frac{E}{s} \frac{sC_2 + G_2}{s(C_1 + C_2) + G_1 + G_2} = \\ &= E \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{1}{s + \frac{G_1 + G_2}{C_1 + C_2}} + \frac{EG_2}{C_1 + C_2} \frac{1}{s(s + \frac{G_1 + G_2}{C_1 + C_2})} \hat{=} \\ &\hat{=} u_2(t) = E \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-t/T_2} + E \frac{G_2}{G_1 + G_2} (1 - e^{-t/T_2}) = \\ &= [6.667 e^{-\frac{2}{3}t} + 5.000(1 - e^{-\frac{2}{3}t})] \text{ V} = [5 + 1.667 e^{-\frac{2}{3}t}] \text{ V}, \quad (2) \end{aligned}$$

gdzie

$$T_2 = \frac{C_1 + C_2}{G_1 + G_2} = (C_1 + C_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3}{2} \text{ s}$$





Rys. 2.8.1

Porównując przebiegi napięcia  $u_2(t)$  w obwodach a) i b) (rys. 2.8.1) zauważymy, że dodanie kondensatora  $C_2$  spowodowało zwiększenie stałej czasowej obwodu i jakościową zmianę kształtu napięcia. Łatwo zauważyć, że gdyby

$$\frac{C_2'}{C_1 + C_2} = \frac{G_2}{G_1 + G_2}, \quad (3)$$

wówczas napięcie  $u_2(t)$  natychmiast po załączeniu narasta do wartości ustalanej równej

$$u_{2, \text{ust}} = E \frac{G_2}{G_1 + G_2} = E \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Zatem spełniający warunek (3) obwód złożony z równolegle połączonej pojemności  $C_1$  z rezystorem  $R_1$  w szereg z równolegle połączoną pojemnością  $C_2$  z rezystorem  $R_2$  ( $(C_1 \parallel R_1)(C_2 \parallel R_2)$ ) jest równoważny dzielnikowi oporowemu założonemu z rezystorów  $R_2$  i  $R_1$  z napięciem  $u_2(t)$  na rezystorze  $R_1$  niezależnie od kształtu napięcia wejściowego.

Obwody spełniające warunek (3) stosuje się w celu wyeliminowania wpływu pojemności na przebieg  $u_2(t)$ . Na przykład w obwodzie wejściowym oscyloskopu, którego impedancję wejściową reprezentuje obwód  $(R_1 \parallel C_1)$  dodaje się równolegle do rezystora  $R_2$  pojemność  $C_2$  spełniającą warunek (3) równą

$$C_2 = \frac{R_1}{R_2} C_1.$$

Zauważmy, że obwód (z rys. 2.8b) analizowany w tym punkcie jest schematem zastępczym obwodu rzeczywistego, w którym rezystancja wewnętrzna rzeczywistego źródła napięciowego jest bardzo mała, pomijalna przy wstępnej zgrubnej analizie.

Przypadek z dużą rezystancją wewnętrzną źródła rozpatrzono w przykładzie 2.17.

### Zadanie 2.9

Jeśli czas  $T_1$  trwania impulsu prostokątnego na wejściu obwodu jest znacznie mniejszy od stałej czasowej  $T$  obwodu ( $T \gg T_1$ ), wówczas do obliczeń przybliżonych można przyjąć model źródła w postaci impulsów Diraca. Tak postąpiono w tym (i w kilku innych) zadaniu. Dokładne obliczenia - przy uwzględnieniu prostokątnego impulsu o czasie trwania  $T_1$  - przeprowadzono w zadaniu 2.82. Innym problemem jest czy proponowany obwód w pełni odpowiada układowi rzeczywistemu. Przy szybkich zmianach napięć (prądów) zasilających należy uwzględnić w schemacie zastępczym np. cewki nie tylko rezystancję i indukcyjność, ale również pojemności między uzwojeniami, podobnie ze schematem zastępczym rezystora i kondensatora. Rozpatrzone w tym zadaniu schematy zastępcze należy traktować jako pierwsze uproszczone przybliżenie rzeczywistości i okazję do opanowania metod analizy obwodów.

### Ad a)

Ponieważ  $E(s) = 1$ , więc napięcie

$$U_2(s) = \frac{E(s)}{R + sL} sL = 1 \frac{sL}{sL + R} = \frac{s}{s + \frac{R}{L}} = \frac{s}{s + \frac{1}{T_1}} = 1 - \frac{\frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{T_1}},$$

gdzie

$T_1 = \frac{L}{R} = 10^{-5} \text{ s}$  - stała czasowa obwodu RL,  
natomiast

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\} = \delta(t) - \frac{1}{T_1} e^{-t/T_1} = [\delta(t) - 10^5 e^{-10^5 t}] \text{ V} \quad (1)$$

### Ad b)

$$\begin{aligned} U_2(s) &= E(s) \frac{R}{sL + R} = 1 \frac{R}{L} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \hat{=} u_2(t) = \\ &= \frac{1}{T_1} e^{-t/T_1} = 10^5 e^{-10^5 t} \text{ V} \end{aligned} \quad (2)$$

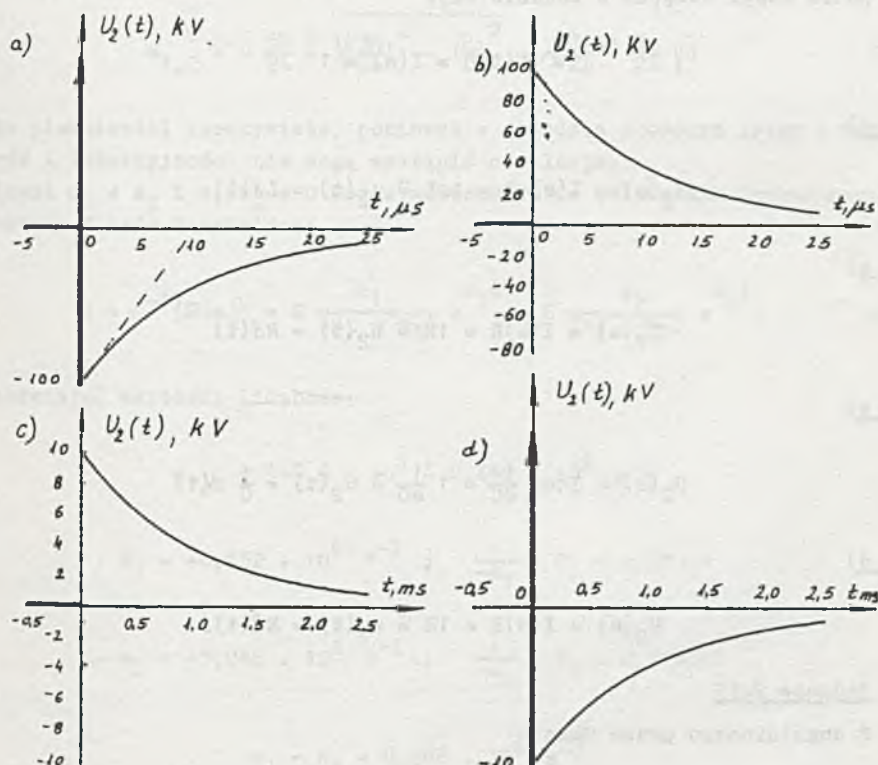
Ad c)

$$U_2(s) = E(s) \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = 1 \frac{1}{T_2} \frac{1}{s + \frac{1}{T_2}},$$

gdzie

$T_2 = RC = 10^{-3} \text{ s}$  - stała czasowa obwodu RC,  
więc

$$u_2(t) = \frac{1}{T_2} e^{-t/T_2} = 10^3 e^{-10^3 t} \text{ V} \quad (3)$$



Rys. 2.9.1



Ad d)

$$U_2(s) = E(s) \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = 1 - \frac{1}{T_2} \frac{1}{s + \frac{1}{T_2}} \hat{=} u_2(t) =$$

$$= \delta(t) - \frac{1}{T_2} e^{-t/T_2} = [\delta(t) - 10^3 e^{-10^3 t}]V \quad (4)$$

Przebiegi czasowe napięć opisanych zależnościami (1)-(4) przedstawiono na rys. 2.9.1.

Zadanie 2.10

Patrz uwagi wstępne w zadaniu 2.9.

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = I(s) = 1$$

Ad a)

$$U_2(s) = I(s)sL = 1sL \hat{=} u_2(t) = L\delta(t)$$

Ad b)

$$U_2(s) = I(s)R = 1R \hat{=} u_2(t) = R\delta(t)$$

Ad c)

$$U_2(s) = I(s) \frac{1}{sC} = 1 \frac{1}{sC} \hat{=} u_2(t) = \frac{1}{C} 1(t)$$

Ad d)

$$U_2(s) = I(s)R = 1R \hat{=} u_2(t) = R\delta(t).$$

Zadanie 2.11

Z uogólnionego prawa Ohma

$$U(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R_1 + \frac{(R_2 + sL_2)sL_1}{R_2 + sL_2 + sL_1}} \frac{(R_2 + sL_2)sL_1}{R_2 + sL_2 + sL_1} \frac{sL_2}{R_2 + sL_2} \quad (1)$$

ponieważ:

$$R_1 = R_2 = R, \quad L_1 = L_2 = L$$

zależność (1) uprościć się do postaci:

$$U(s) = \frac{E}{s} \frac{s^2}{s^2 + 3s \frac{R}{L} + \left(\frac{R}{L}\right)^2} \quad (1')$$

Przyrównując mianownik do zera:

$$M(s) = s^2 + 3s \frac{R}{L} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 = (s - s_1)(s - s_2) = 0 \quad (2)$$

obliczymy pierwiastki:

$$s_{1,2} = -\frac{3R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{3R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = -\frac{3R}{2L} \pm \frac{R}{2L} \sqrt{5} \quad (3)$$

Są to pierwiastki rzeczywiste, ponieważ w obwodzie złożonym tylko z rezystorów i indukcyjności nie mogą wystąpić oscylacje.

Ponieważ  $s_1 \neq s_2$  i  $s_1, s_2 \neq 0$  można zastosować do obliczenia transformacji odwrotnej I wzór Heaviside'a

$$u = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = E \frac{s_1}{(s_1 - s_2)} e^{s_1 t} + E \frac{s_2}{(s_2 - s_1)} e^{s_2 t} \quad (4)$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$s_{1,2} = (-0,6 \cdot 10^6 \pm 0,448 \cdot 10^6) s^{-1}$$

$$s_1 = -0,152 \cdot 10^6 s^{-1} ; \quad \frac{1}{-s_1} = T_1 = 6,58 \mu s$$

$$s_2 = -1,048 \cdot 10^6 s^{-1} ; \quad \frac{1}{-s_2} = T_2 = 0,954 \mu s$$

$$s_1 - s_2 = 0,896 \cdot 10^6 s^{-1}$$

$$u = 20 \frac{(-0,152 \cdot 10^6) e^{s_1 t}}{0,896 \cdot 10^6} - 20 \frac{(-1,048 \cdot 10^6) e^{s_2 t}}{0,896 \cdot 10^6} =$$

$$= [-3,39 e^{-t/T_1} + 23,39 e^{-t/T_2}] V. \quad (4')$$

Napięcie  $u$ , którego przebieg podano na rys. 2.11.1 przyjmuje wartość zero dla: 1) czasów mniejszych od zera, wynika to z zerowych warunków początkowych, 2) w chwili  $t_1 = 2,15 \mu s$  oraz 3) po czasie nieskończenie długim (w stanie ustalonym), natomiast wartość najmniejszą  $u_{min} = 1,49 V$  osiąga po czasie  $t_2 = 4,23 \mu s$  od chwili zamknięcia klucza.

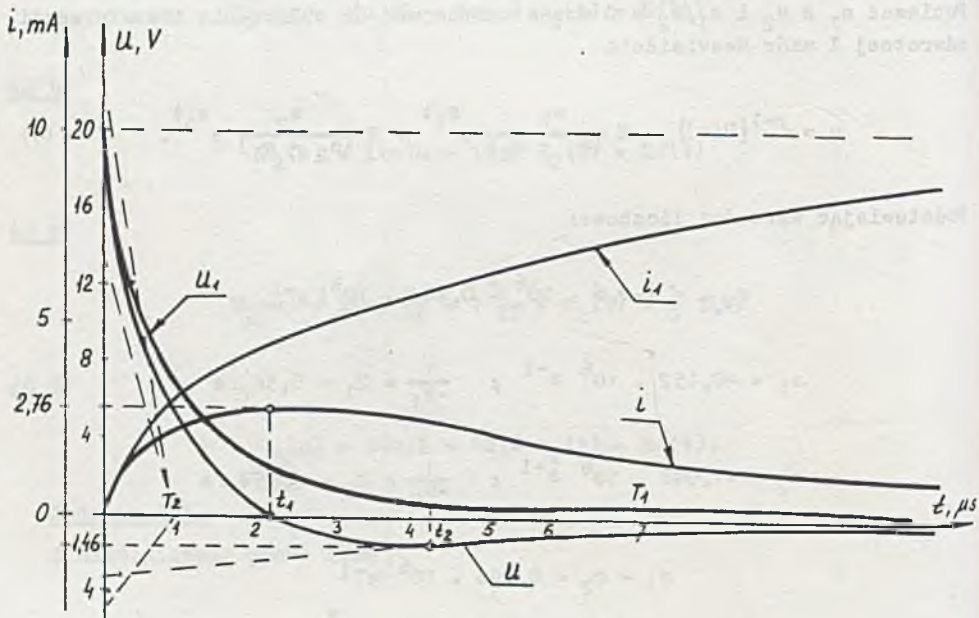
Prąd płynący przez cewkę  $L_2$  wyznaczymy z zależności:

$$u = L_2 \frac{di}{dt}$$

skąd

$$i = \frac{1}{L_2} \int_0^t u d\tau = 4,47 (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) \text{ mA} \quad (6)$$

Prąd osiąga wartość maksymalną równą  $i_{max} = 2,76 \text{ mA}$  po czasie  $t_1 = 2,15 \mu s$  od chwili zamknięcia klucza.



Rys. 2.11.1



Z II prawa Kirchhoffs:

$$u_1 = u + iR_2 = [-3,39 e^{-t/T_1} + 23,39 e^{-t/T_2} + 2 \cdot 10^3 \cdot 4,47 \cdot 10^{-3} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2})] \text{ V} =$$

$$= [5,55 \cdot e^{-t/T_1} + 14,45 \cdot e^{-t/T_2}] \text{ V.} \quad (7)$$

Prąd płynący przez cewkę  $L_1$  wyznaczymy z zależności:

$$i_1 = \frac{1}{L_1} \int_0^t u_1 d\tau = [10 - 2,27 e^{-t/T_1} - 2,67 e^{-t/T_2}] \text{ mA.} \quad (8)$$

Przebiegi czasowe prądów płynących przez cewki i napięć na ich zaciskach podano na rys. 2.11.1.

#### Zadanie 2.12.

$$u_1 = 20(1 - 0,275 e^{-2,62 \cdot 10^3 t} - 0,725 e^{-0,38 \cdot 10^3 t}) \text{ V.}$$

$$i_1 = (14,46 e^{-2,62 \cdot 10^3 t} + 5,54 e^{-0,38 \cdot 10^3 t}) \text{ mA}$$

$$u_2 = (20 - 23,4 e^{-0,38 \cdot 10^3 t} + 3,4 e^{-2,62 \cdot 10^3 t}) \text{ V}$$

$$i_2 = 8,92(e^{-0,38 \cdot 10^3 t} - e^{-2,62 \cdot 10^3 t}) \text{ mA}$$

#### Zadanie 2.13

Z prawa Ohma:

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R_1 + R_L + sL} \hat{=} \quad (1)$$

$$\hat{=} i = \frac{E}{R_1 + R_L} (1 - e^{-t/T}), \quad (2)$$

gdzie:

$$T = \frac{L}{R_1 + R_L}$$

szybkość narastania prądu w chwili załączenia obwodu:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{R_1 + R_L} \frac{1}{T} = \frac{E}{L}. \quad (3)$$

Z treści zadania wynika, że

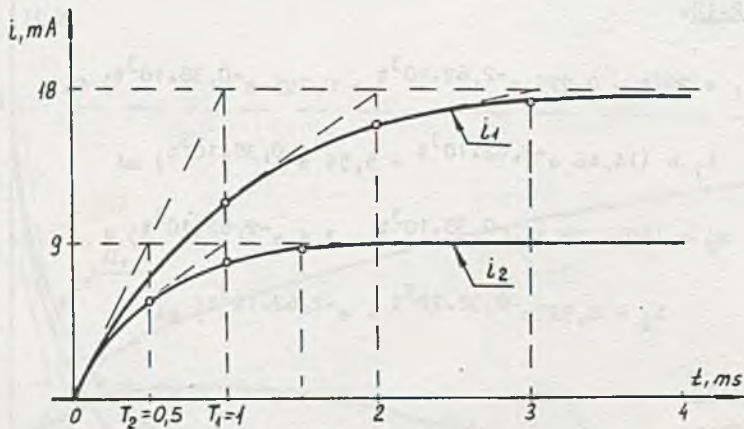
$$\frac{E}{L} = 18 \text{ A s}^{-1}$$

stąd

$$E = L 18 = 18 \text{ V.}$$

W stanie ustalonym

$$u_{Lu} = \frac{E}{R_1 + R_L} R_L = 4,6 \text{ V.} \quad (4)$$



Rys. 2.13.1

Z zależności (3) wynika, że szybkość narastania prądu w obwodzie (w chwili  $t = 0$ ) jest wprost proporcjonalna do wartości przyłożonego napięcia, a odwrotnie proporcjonalna do wartości indukcyjności w obwodzie. Wartość rezystancji oporów  $R_1$  i  $R_L$  nie mają wpływu na początkową szybkość narastania prądu, wpływają natomiast na wielkość stałej czasowej i wartości prądu (napięcia) ustalonego.

Sprawdźmy dla  $R_1 = 0$  i  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ :

$$1^\circ R_C = R_1 + R_L = 1 \text{ k}\Omega, \quad T_1 = L/R_C = 1 \text{ ms}, \quad i_{1u} = 18 \text{ mA}$$

$$2^\circ R_C = R_1 + R_L = 2 \text{ k}\Omega, \quad T_2 = L/R_C = 0,5 \text{ ms}, \quad i_{2u} = 9 \text{ mA}.$$

Przebiegi czasowe podano na rys. 2.13.1.

#### Zadanie 2.14

$$E = 90 \text{ V}, \quad R_3 = 1000 \Omega.$$

Szybkość narastania prądu jest wprost proporcjonalna do wartości SEM  $E$ , a odwrotnie proporcjonalna do  $L$ , ze współczynnikiem  $\frac{R_3}{R_1 + R_3}$ .

#### Zadanie 2.15

$$R_1 = 100 \Omega$$

$$R_2 = 100 \Omega$$

#### Zadanie 2.16

$$C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

#### Zadanie 2.17

$$u = 80(1 - e^{-2,5t}) \text{ V}$$

#### Zadanie 2.18

Z prawa Ohma:

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{E}{L}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \quad (1)$$

$$M(s) = s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = (s - s_1)(s - s_2) = 0. \quad (2)$$

Oznaczając:

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \sqrt{\delta^2 - \frac{1}{LC}}$$

otrzymamy:

$$s_{1,2} = -\delta \pm \beta, \quad (3)$$

więc

$$I(s) = \frac{\frac{E}{L}}{(s - s_1)(s - s_2)}. \quad (1')$$



W zależności od wartości elementów  $R, L, C$  może wystąpić jeden z następujących przypadków:

$$1) \quad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}; \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4)$$

bieguny wyrażenia (2) są rzeczywiste i różne, a więc występują przebiegi czasowe aperiodyczne

$$2) \quad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}; \quad R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5)$$

bieguny równe, więc przebieg czasowy prądu ma charakter aperiodyczny krytyczny

$$3) \quad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}; \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6)$$

- pierwiastki mianownika zespolone, a więc przebieg czasowy prądu ma charakter oscylacyjny tłumiony.

W przypadkach 1) i 3)  $s_1 \neq s_2$ , więc można stosować I wzór Heaviside'a do obliczenia przebiegu czasowego

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \hat{=} 1 = \frac{E}{L} \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ e^{s_1 t} - e^{s_2 t} \right] \quad (7)$$

w przypadku 2)  $s_1 = s_2 = -\delta$

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{(s - s_1)^2}$$

Korzystając z tablicy transformat otrzymamy:

$$i = \frac{E}{L} t e^{s_1 t} \quad (9)$$

Transformację odwrotną prądu  $I(s)$  można też obliczyć korzystając z twierdzenia o splocie bądź z metody residuów.

Z twierdzenia o splocie

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{s - s_1} \frac{1}{s - s_1} = F_1(s) F_2(s),$$

gdzie:

$$F_1(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{s - s_1} \hat{=} f = \frac{E}{L} e^{s_1 t}$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s - s_1} \hat{=} g = +e^{s_1 t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = f * g =$$

$$= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{E}{L} e^{s_1(t-\tau)} e^{s_1\tau} d\tau =$$

$$= \frac{E}{L} e^{s_1 t} \int_0^t d\tau = \frac{E}{L} t e^{s_1 t}.$$

Metoda residuów:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{L(s)}{M(s)}\right\} = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s=s_k} \left[ \frac{L(s)}{M(s)} e^{st} \right],$$

gdzie  $s_k, k = 1, 2, \dots, n \leq m$  (stopień mianownika), są biegunami transformaty  $\frac{L(s)}{M(s)}$ , jeżeli biegun  $s_k$  jest  $w$ -krotny, to

$$\operatorname{res}_{s=s_k} \left[ \frac{L(s)}{M(s)} e^{st} \right] = \frac{1}{(w-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{w-1}}{ds^{w-1}} \left[ \frac{L(s)}{M(s)} (s - s_k)^w e^{st} \right],$$

więc dla bieguna dwukrotnego ( $w = 2$ )

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{E}{L} \frac{1}{(s - s_1)^2}\right\} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d}{ds} \left[ \frac{E}{L} \frac{1}{(s - s_1)^2} (s - s_1)^2 e^{st} \right] = \frac{E}{L} t e^{s_1 t}$$

Podstawiając wartości liczbowe parametrów dla przypadków 1, 2 i 3 otrzymamy

Ad a)

$$\delta = \frac{R}{2L} = 5 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$\beta = \sqrt{\delta^2 - \frac{1}{LC}} = 4,89 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$R = 300 > 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \sqrt{10^3} = 63,2 \Omega$$

więc przypadek 1) aperiodyczny

$$s_1 = -\delta + \beta = -0,11 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$s_2 = -\delta - \beta = -9,89 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

$$s_1 - s_2 = 2\beta = 2 \cdot 4,89 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$$

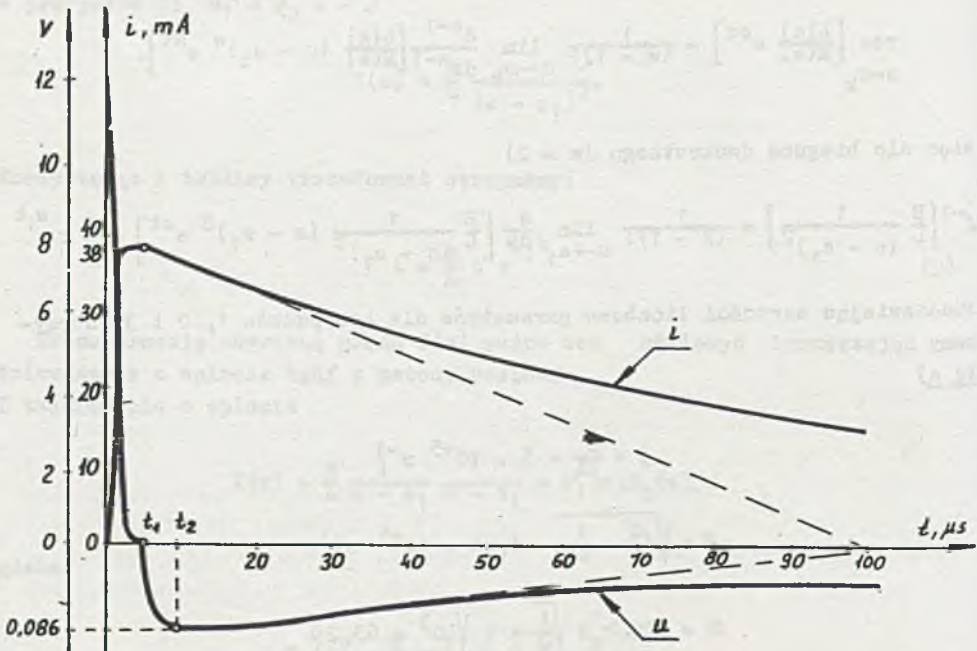
Z zależności (7) mamy

$$i = \frac{E}{L} \frac{1}{2\beta} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) = 40,8 (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) \text{ mA} \quad (10)$$

$$T_1 = -\frac{1}{s_1} = 91 \mu\text{s}$$

$$T_2 = -\frac{1}{s_2} = 1,01 \mu\text{s}$$

prąd osiąga wartość maksymalną  $i_{\max} = 38,4 \text{ mA}$  w chwili  $t_1 = 4,68 \mu\text{s}$ .



Rys. 2.18.1



Napięcie na indukcyjności:

$$u = L \frac{di}{dt} = (12,135 e^{-\frac{t}{T_1}} - 0,135 e^{-\frac{t}{T_2}}) \text{ V} \quad (11)$$

osiąga wartość zero w chwili  $t = t_1$  ( $i = i_m$ ), a wartość minimalną  $u_{\min} = -0,086 \text{ V}$  po czasie  $t_2 = 9,20 \mu \text{ s}$ . Przebieg czasowy aperiodyczny prądu w obwodzie i napięcia na indukcyjności przedstawiono na rysunku 2.18.1 (dla ujemnych wartości napięcia rozszerzono skalę).

Ad b)

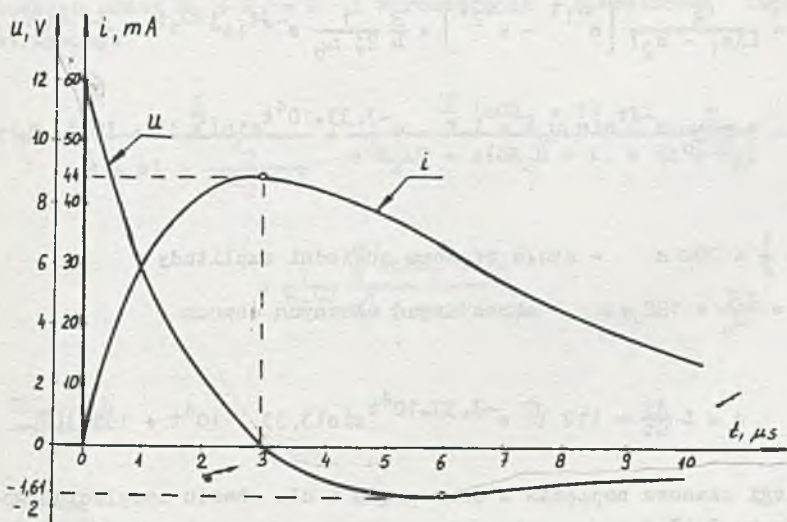
$$\delta = \frac{R}{2L} = 3,33 \cdot 10^5 \text{ sek}^{-1}, \quad \beta = 0$$

$$s_1 = s_2 = -\delta$$

więc zachodzi przypadek 2) zwany krytycznym z (9)

$$i = \frac{E}{L} t e^{s_1 t} = 4 \cdot 10^4 t e^{s_1 t} \text{ A.} \quad (12)$$

Największą wartość osiąga prąd po czasie  $t_1 = -\frac{1}{s_1} = 3 \mu \text{ s}$ . od chwili załączenia obwodu, jego wartość  $i_m = 44 \text{ mA}$ .



Rys. 2.18.2

Napięcie na zaciskach cewki

$$u = L \frac{di}{dt} = E e^{s_1 t} (1 + s_1 t) = 12 e^{s_1 t} (1 - 3,33 \cdot 10^5 t) \text{ V} \quad (13)$$

osiąga ekstremum dla:  $t_2 = 6 \mu s$   $u_{\min} = -1,61 \text{ V}$ .

Przebieg czasowy prądu i w obwodzie oraz napięcie  $u$  na indukcyjności dla przypadku krytycznego przedstawiono na rys. 2.18.2.

Ad c)

$$\delta = \frac{R}{2L} = 3,33 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} \quad - \text{ stała tłumienia}$$

$$\beta = \sqrt{\delta^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{11,1 \cdot 10^8 - 2 \cdot 11,1 \cdot 10^8} = j 3,33 \cdot 10^4 = j \omega_0$$

$\omega_0 = 3,33 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$  - pulsacja drgań własnych obwodu  
więc

$$s_1 = -\delta + j \omega_0 = -3,33 \cdot 10^4 + j 3,33 \cdot 10^4$$

$$s_2 = -\delta - j \omega_0 = -3,33 \cdot 10^4 - j 3,33 \cdot 10^4$$

$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ , więc zachodzi przypadek 3) - zwany oscylacyjnym, z ogólnego wzoru (7) po podstawieniu:

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{L(s_1 - s_2)} \left[ e^{s_1 t} - e^{s_2 t} \right] = \frac{E}{L} \frac{1}{2j \omega_0} e^{-\delta t} [e^{j \omega_0 t} - e^{-j \omega_0 t}] = \\ &= \frac{E}{L \omega_0} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t = 1,2 \cdot e^{-3,33 \cdot 10^4 t} \sin(3,33 \cdot 10^4 t) \text{ A}, \end{aligned} \quad (14)$$

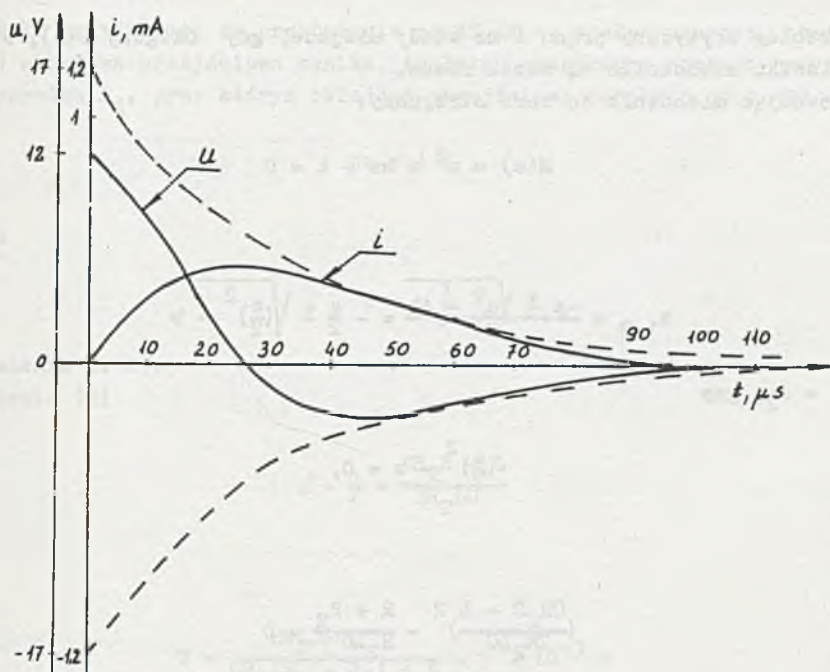
gdzie:

$$T = \frac{1}{\delta} = 20 \mu s. \quad - \text{ stała czasowa obwiedni amplitudy}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 188 \mu s. \quad - \text{ okres drgań własnych obwodu}$$

$$u = L \frac{di}{dt} = [12 \sqrt{2} e^{-3,33 \cdot 10^4 t} \sin(3,33 \cdot 10^4 t + 135^\circ)] \text{ V} \quad (15)$$

Przebiegi czasowe napięcia  $u$  oraz prądu  $i$  dla obwodu oscylacyjnego podano na rysunku 2.18.3.



Rys. 2.18.3

### Zadanie 2.19

Oznaczając przez  $R_1 + R_d = R$  i wprowadzając operatorową impedancję oczka otrzymamy:

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R + sL + \frac{R_2}{sCR_2 + 1}} = \frac{\frac{E}{s} (sCR_2 + 1)}{s^2 R_2 LC + s(CR_2 R + L) + (R + R_2)} =$$

$$= \frac{1}{R_2 LC} \frac{E (sCR_2 + 1)}{s^2 + sa + b},$$

gdzie:

$$a = \frac{CR_2 R + L}{R_2 LC}$$

$$b = \frac{R + R_2}{R_2 LC}.$$



Ad a)

Przebieg krytyczny prądu i ma wtedy miejsce, gdy bieguny  $I(s)$ , a więc pierwiastki mianownika są sobie równe.

Przyrównując mianownik do zera otrzymamy:

$$M(s) = s^2 + sa + b = 0 \quad (2)$$

stąd:

$$s_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad (3)$$

a  $s_1 = s_2$ , gdy

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0, \quad (4)$$

czyli

$$\left(\frac{CR_2R + L^2}{2R_2LC}\right) - \frac{R + R_2}{R_2LC} = 0 \quad (4')$$

Po rozwiązaniu względem  $R$ .

$$R = R_1 + R_d = \frac{L}{R_2C} + 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

a

$$R_d = \frac{L}{R_2C} + 2\sqrt{\frac{L}{C}} - R_1, \quad (5)$$

po podstawieniu wartości liczbowych

$$R_d = 400,8 - 100 = 300,8 \Omega.$$

Dla porównania policzymy wartość  $R_d$ , jaką należałoby włączyć, gdyby wpływ kondensatora można było pominąć (opór  $R_2$  nieskończenie wielki), wówczas zależność (5) przekształca się w znany z zadania 2.18 związek

$$R_d = 2\sqrt{\frac{L}{C}} - R_1 = 300 \Omega.$$

Ad b)

Jeżeli przyjmiemy, że praktycznie po  $4T$  ( $T$  - stała czasowa obwiedni prądu) składowa przejściowa zanika, to łatwo wyznaczymy wartość rezystancji opornika  $R_d$ , przy którym składowa przejściowa zaniknie po  $t_1 = 20$  msek

$$t_1 = 4T, \quad (1)$$

gdzie:

$$T = + \frac{1}{\delta} \quad (2)$$

(wg zadania 2.18).

Z równania (2)

$$\delta = \frac{\alpha}{2} = \frac{CR_2R + L}{2R_2LC} \quad (3)$$

stąd

$$T = \frac{2R_2LC}{CR_2(R_1 + R_2) + L} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (2')$$

po podstawieniu

$$R_d = \frac{80 - 0.4}{500} 10^3 - R_1 = 59,2 \Omega.$$

W tym przypadku

$$R_1 + R_d = 159,2 \Omega \quad \text{a} \quad R_{\text{kryt.}} = 400,8 \Omega,$$

więc prąd  $i$  ma przebieg oscylacyjny tłumiony.

Zadanie 2.20

$$u = 4,36(e^{-0,69 \cdot 10^4 t} - e^{-15,99 \cdot 10^4 t}) \text{ V}$$

$$i = [20 - 11(e^{-0,69 \cdot 10^4 t} - e^{-15,99 \cdot 10^4 t})] \text{ mA}$$

Zadanie 2.21

Przedstawiony na rys. 2.21 obwód jest uproszczonym modelem (pierwszym przybliżeniem) rzeczywistego układu. Przy dokładniejszej analizie układu pobudzanego impulsem Diraca - traktowanym jako przypadek graniczny pobu-

dzenia impulsem o bardzo krótkim czasie trwania - należałoby uwzględnić pełne schematy zastępcze elementów.

Przeanalizujemy uproszczony tematowy obwód.

$$I_R(s) = I_s(s) \frac{1}{sC + \frac{1}{sL} + \frac{1}{R}} \frac{1}{R} = \frac{1}{RC} \frac{s}{s^2 + s \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}} =$$

$$= \frac{1}{RC} \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Przyrównując mianownik

$$M(s) = s^2 + s \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} = (s - s_1)(s - s_2)$$

do zera obliczymy bieguny  $s_1$  i  $s_2$  transmitancji.

I tak

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

i

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

a warunkiem na to, by bieguny były rzeczywiste jest

$$\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 \geq \frac{1}{LC},$$

czyli

$$R_g \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = 5 \Omega.$$

Ponieważ tematowe wartości  $R > R_g$  więc bieguny są zespolone sprzężone, czyli

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} = -\alpha + j \omega_0$$

i

$$s_2 = -\alpha - j \omega_0$$



a

$$\begin{aligned}
 i_R(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{I_R(s)\} = \frac{1}{RC(s_1 - s_2)} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) = \\
 &= \frac{1}{RC 2j \omega_0} \left[ (-\alpha + j \omega_0) e^{(-\alpha + j \omega_0)t} - (-\alpha - j \omega_0) e^{(-\alpha - j \omega_0)t} \right] = \\
 &= \frac{1}{RC \omega_0} \left[ -\alpha \frac{e^{j \omega_0 t} - e^{-j \omega_0 t}}{2j} + j \omega_0 \frac{e^{j \omega_0 t} + e^{-j \omega_0 t}}{2} \right] e^{-\alpha t} = \\
 &= \frac{1}{RC \omega_0} \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} \cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-\alpha t}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right).$$

Podstawiając wartości liczbowe do (1) otrzymamy:

Ad a)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} = 0,968 \cdot 10^4 \frac{1}{s}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2 \cdot 5 \cdot 10^3 \frac{1}{s},$$

więc

$$T = \frac{1}{\alpha} = 0,4 \text{ ms}$$

a pulsacja rezonansowa obwodu

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \frac{1}{s}$$

oraz dobroć obwodu

$$Q = \frac{\omega_r}{\alpha} = 2$$

ponadto

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right) = \arctg(+0,258) = 14,48^\circ,$$

natomiast

$$i_R(t) = 5164,222 \cos(0,968 \cdot 10^4 t + 14,48^\circ) e^{-2,5 \cdot 10^3 t} \text{ A} \quad (2)$$

Ad b)

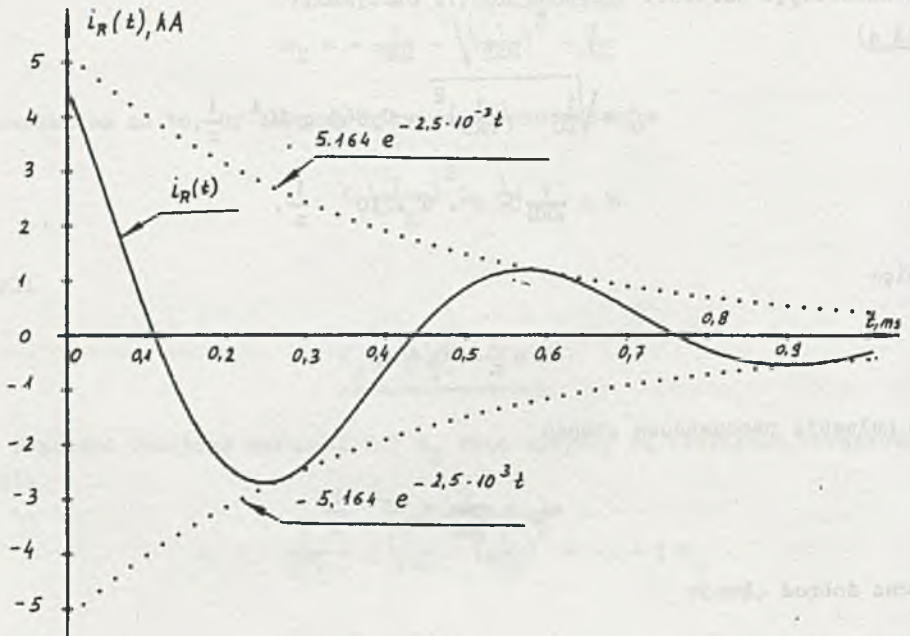
$$\omega_0 = 0,9975 \cdot 10^4 \frac{1}{s}$$

$$\alpha = 5 \cdot 10^2 \frac{1}{s}, \quad T = 2 \text{ ms}$$

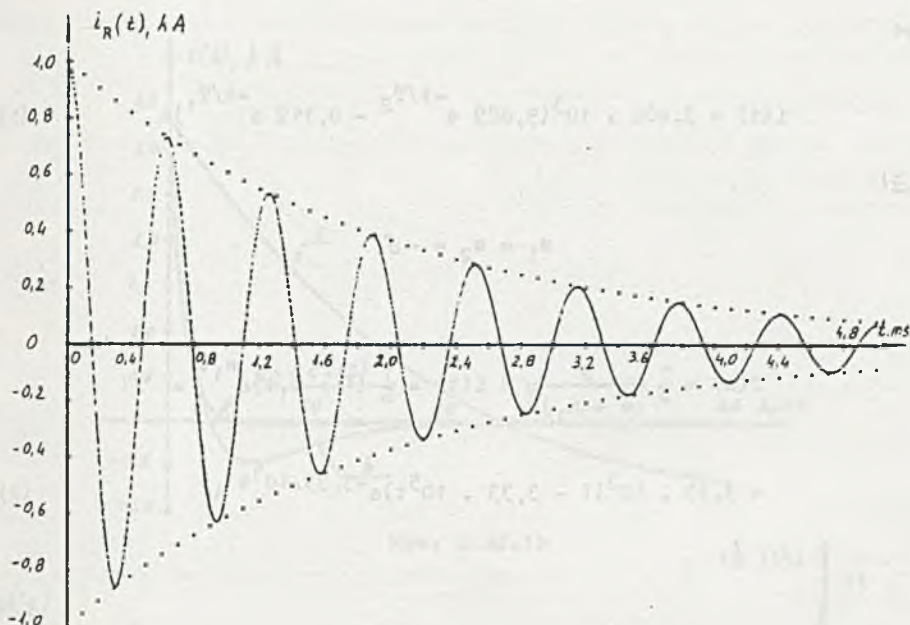
$$\omega_r = 10^4 \frac{1}{s}$$

$$Q = 10$$

$$\varphi = +2,87^\circ$$



Rys. 2.21.1a



Rys. 2.21.1b

$$i_R(t) = 1001,255 \cos(0,9975 \cdot 10^4 t + 2,87^\circ) e^{-5 \cdot 10^2 t} \text{ A} \quad (3)$$

Przebiegi czasowe prądów opisane równaniami (2) i (3) przedstawiono na rys. 2.21.1a i b.

### Zadanie 2.22

Obwód z rys. 2.18 podobnie jak obwód w zadaniu 2.21 należy traktować jako przybliżony uproszczony model układu rzeczywistego.

Ad a)

$$I(s) = \frac{1}{L} \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} \hat{=} i(t) = \frac{1}{L} \left( \frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{s_2}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \right)$$

ale

$$s_1 = -\delta + \beta = -0,112 \cdot 10^5 \frac{1}{s}, \quad T_1 = -\frac{1}{s_1} = 91 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$s_2 = -\delta - \beta = -9,889 \cdot 10^5 \frac{1}{s}, \quad T_2 = -\frac{1}{s_2} = 1,01 \cdot 10^{-6} \text{ s.}$$



więc

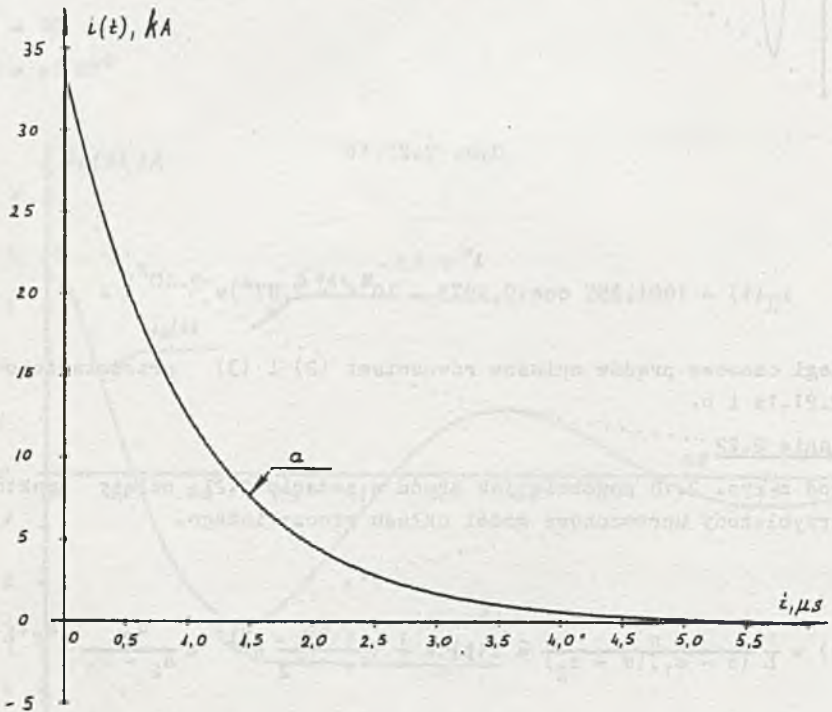
$$i(t) = 3,408 \cdot 10^3 (9,889 e^{-t/T_2} - 0,112 e^{-t/T_1}) \text{ A} \quad (1)$$

Ad b)

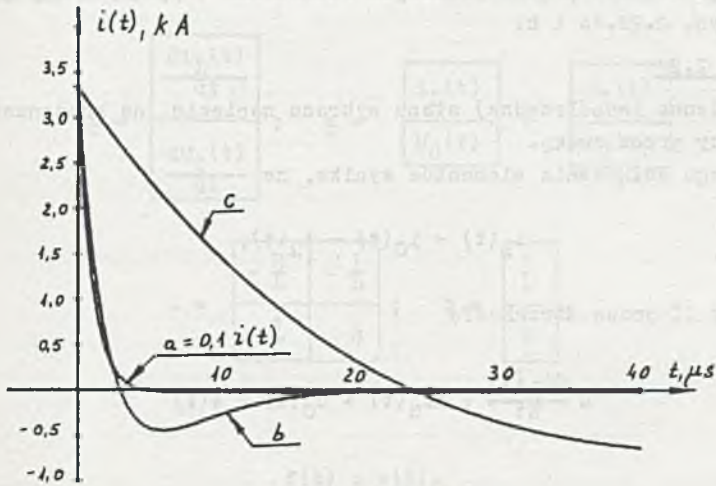
$$s_1 = s_2 = -\delta$$

a

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{L} \frac{s}{(s - s_1)^2} \hat{=} i(t) = \frac{1}{L} (1 + s_1 t) e^{s_1 t} = \\ &= 3,33 \cdot 10^3 (1 - 3,33 \cdot 10^5 t) e^{-3,33 \cdot 10^5 t} \text{ A} \end{aligned} \quad (2)$$



Rys. 2.22.1a



Rys. 2.32.1b

Ad c)

$$s_1 = -\delta + j \omega_0 = -3,33 \cdot 10^4 + j 3,33 \cdot 10^4 \frac{1}{s}$$

$$s_2 = -\delta - j \omega_0 = -3,33 \cdot 10^4 - j 3,33 \cdot 10^4 \frac{1}{s}$$

więc

$$i(t) = \frac{1}{L(s_1 - s_2)} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) =$$

$$= \frac{1}{L \omega_0} \left( -\delta \frac{e^{j \omega_0 t} - e^{-j \omega_0 t}}{2j} + \omega_0 \frac{e^{j \omega_0 t} + e^{-j \omega_0 t}}{2} \right) e^{-\delta t} =$$

$$= \frac{1}{L \omega_0} (-\delta \sin \omega_0 t + \omega_0 \cos \omega_0 t) e^{-\delta t} = \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}}{L \omega_0} \cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-\delta t} =$$

$$= 4,714 \cdot 10^3 \cos(3,33 \cdot 10^4 t + 45^\circ) e^{-3,33 \cdot 10^4 t} \text{ A} \quad (3)$$

gdzie:

$$\varphi = \arctg \frac{\delta}{\omega_0}$$

Przebiegi czasowe prądów opisanych równaniami (1), (2) i (3) przedstawiono na rys. 2.22.1a i b.

### Zadanie 2.23

Jako zmienne (współrzędne) stanu wybrano napięcie na kondensatorze i prąd płynący przez cewkę.

Z szeregowego połączenia elementów wynika, że

$$i_L(t) = i_C(t) = i_R(t), \quad (1)$$

natomiast z II prawa Kirchhoffa

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_R(t) + U_C(t) = e(t) \quad (2)$$

ponadto

$$i_C(t) = C \frac{dU_C(t)}{dt} = i_L(t). \quad (3)$$

Układ równań (1), (2) i (3) można przedstawić w postaci

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i_L(t) - \frac{1}{L} U_C(t) + \frac{1}{L} e(t) \quad (4)$$

$$\frac{dU_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_L(t) \quad (5)$$

lub w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{dU_C(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ U_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e(t) \quad (6)$$

Równanie (6) jest macierzową postacią równania stanu szeregowego obwodu RLC zasilanego z źródła napięciowego  $e(t)$ .

Jak pamiętamy ogólna postać równań stanu

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}f(t) \quad (7)$$



a w naszym przykładzie

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{dU_C(t)}{dt} \end{bmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ U_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$f(t) = e(t).$$

Przy zerowych warunkach początkowych w chwili  $t = t_0$

$$\underline{x}(t_0) = \begin{bmatrix} i_L(t_0) \\ U_C(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ U_0 \end{bmatrix}$$

Istnieje szereg metod analitycznych i numerycznych rozwiązania układu równań różniczkowych (6).

Zajmiemy się, zgodnie z treścią zadania, numerycznym wyznaczeniem trajektorii wektora stanu.

Zauważmy, że

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2(t + \Delta t) - x_2(t)}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

więc dla dostatecznie małych przedziałów czasu  $\Delta t$

$$\dot{\underline{x}} \approx \begin{bmatrix} \frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t} \\ \frac{x_2(t + \Delta t) - x_2(t)}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

więc (7) można napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} x_1(t + \Delta t) \\ x_2(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Delta t + b f(t) \Delta t \quad (8)$$

Jeśli  $t = k\Delta t$ , a  $k = 0, 1, 2, \dots$ , układ (8) można zapisać w postaci

$$\underline{x}[(k+1)\Delta t] = \underline{x}[k\Delta t] + A \underline{x}[k\Delta t] \Delta t + b f(k\Delta t) \Delta t \quad (9)$$

Jeśli  $k = 0$

$$\underline{x}(\Delta t) = \underline{x}(0) + A \underline{x}(0) \Delta t + b f(0) \Delta t, \quad (10)$$

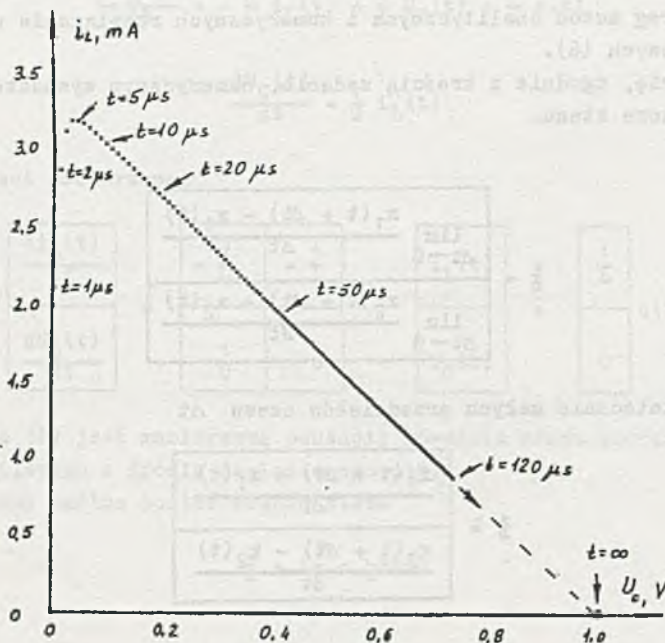
gdzie:

$\underline{x}(0)$  - wektor warunków początkowych (czyli napięcie na kondensatorze i prąd płynący przez cewkę w chwili załączenia klucza),

dla  $k = 1$

$$\underline{x}(2\Delta t) = \underline{x}(\Delta t) + A \underline{x}(\Delta t) \Delta t + b f(\Delta t) \Delta t, \quad (11)$$

gdzie wartość  $\underline{x}(\Delta t)$  obliczono w (10), analogicznie postępujemy dla  $k=2, 3, \dots$



Rys. 2.23.1

Dobór wielkości  $\Delta t$  zależy od wielu czynników, jak: wartości elementów macierzy  $A$ , składowe wektora  $b$ , przedział czasu, w którym interesuje nas trajektoria, żądana dokładność.

Ad a)

Dla tematowych danych ( $R = 300 \Omega$ ,  $L = 0,3 \text{ mH}$ ,  $C = 3 \cdot 10^{-7} \text{ F}$ ,  $E = 1 \text{ V}$ )

$$u(t) = f(t) = e(t) = E \cdot 1(t), \quad I_0 = x_1(0) = 0, \quad U_0 = x_2(0) = 0,$$

a równanie (9) przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)\Delta t] \\ x_2[(k+1)\Delta t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k\Delta t) \\ x_2(k\Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \cdot 10^6 & -3,33 \cdot 10^3 \\ 3,33 \cdot 10^6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k\Delta t) \\ x_2(k\Delta t) \end{bmatrix} \cdot \Delta t + \begin{bmatrix} 3,33 \cdot 10^3 \\ 0 \end{bmatrix} E \cdot \Delta t \quad (12)$$

Przyjęto  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ , a otrzymane wyniki przedstawiono w tablicy 2.1 i na rys. 2.23.1.

Tablica 2.1

k	kΔt w μs	x <sub>1</sub> (kΔt)=i <sub>L</sub> mA	x <sub>2</sub> (kΔt)=U <sub>C</sub> , V	k	kΔt w μs	x <sub>1</sub> (kΔt)=i <sub>L</sub> mA	x <sub>2</sub> (kΔt)=U <sub>C</sub> , V
0	0	0	0	1000	20	2,724	1,921 · 10 <sup>-1</sup>
50	1	2,116	4,043 · 10 <sup>-3</sup>	1500	30	2,435	2,781 · 10 <sup>-1</sup>
100	2	2,872	1,255 · 10 <sup>-2</sup>	2000	40	2,176	3,548 · 10 <sup>-1</sup>
150	3	3,127	2,262 · 10 <sup>-2</sup>	2500	50	1,945	4,235 · 10 <sup>-1</sup>
200	4	3,198	3,318 · 10 <sup>-2</sup>	3000	60	1,739	4,848 · 10 <sup>-1</sup>
250	5	3,201	4,386 · 10 <sup>-2</sup>	3500	70	1,554	5,396 · 10 <sup>-1</sup>
300	6	3,179	5,450 · 10 <sup>-2</sup>	4000	80	1,389	5,886 · 10 <sup>-1</sup>
350	7	3,149	6,505 · 10 <sup>-2</sup>	4500	90	1,241	6,324 · 10 <sup>-1</sup>
400	8	3,116	7,549 · 10 <sup>-2</sup>	5000	100	1,110	6,716 · 10 <sup>-1</sup>
450	9	3,082	8,582 · 10 <sup>-2</sup>	5500	110	9,918 · 10 <sup>-1</sup>	7,066 · 10 <sup>-1</sup>
500	10	3,048	9,604 · 10 <sup>-2</sup>	6000	120	8,864 · 10 <sup>-1</sup>	7,378 · 10 <sup>-1</sup>
					∞	0,000	1,000

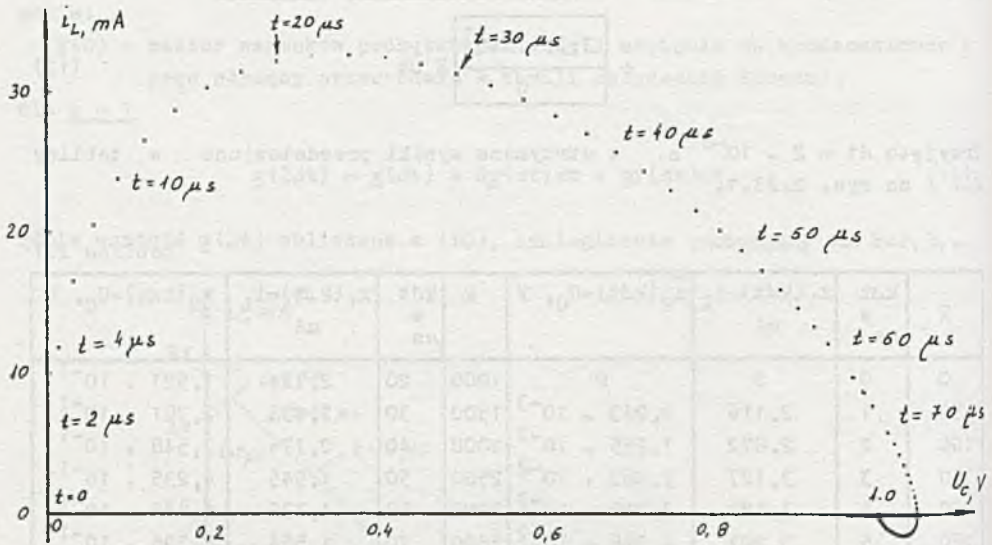


Ad b)

Dla tematowych danych równanie (9) przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)\Delta t] \\ x_2[(k+1)\Delta t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(k-t) \\ x_2(k-t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6,667 \cdot 10^4 & -3,33 \cdot 10^3 \\ 6,667 \cdot 10^5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k\Delta t) \\ x_2(k\Delta t) \end{bmatrix} \cdot \Delta t + \begin{bmatrix} 3,33 \cdot 10^3 \\ 0 \end{bmatrix} E \Delta t \quad (13)$$

Przyjęto  $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-6}$  s, otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 2.23.2 i w tablicy 2.2.



Rys. 2.23.2

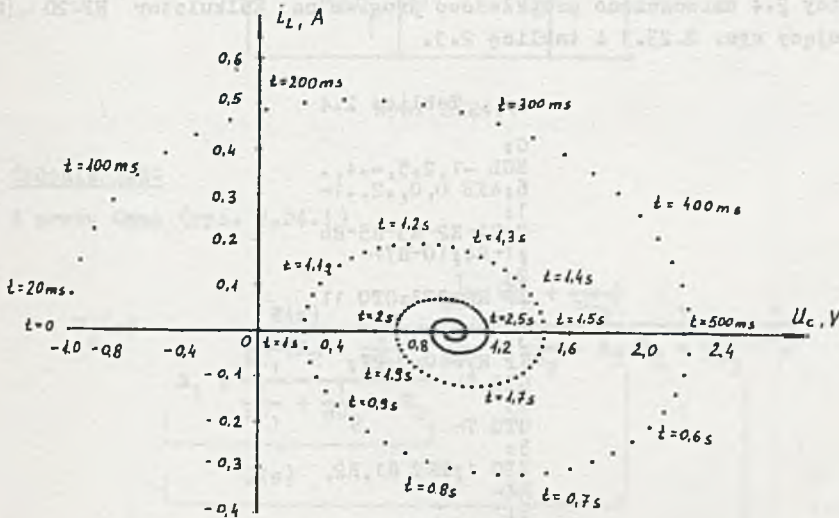
Tablica 2.2

k	kΔt w μs	x <sub>1</sub> (kΔt)=i <sub>L</sub> w mA	x <sub>2</sub> (kΔt)=U <sub>C</sub> w V	k	kΔt w μs	x <sub>1</sub> (kΔt)=i <sub>L</sub> w mA	x <sub>2</sub> (kΔt)=U <sub>C</sub> w V
0	0	0	0	60	30	3,127 · 10 <sup>-1</sup>	4,931 · 10 <sup>-1</sup>
4	2	6,331 · 10 <sup>0</sup>	3,256 · 10 <sup>-3</sup>	80	40	2,575 · 10 <sup>-1</sup>	6,856 · 10 <sup>-1</sup>
8	4	1,182 · 10 <sup>1</sup>	1,453 · 10 <sup>-2</sup>	100	50	1,875 · 10 <sup>-1</sup>	8,353 · 10 <sup>-1</sup>
12	6	1,652 · 10 <sup>1</sup>	3,271 · 10 <sup>-2</sup>	200	100	-8,640 · 10 <sup>-1</sup>	1,043 · 10 <sup>0</sup>
16	8	2,050 · 10 <sup>1</sup>	5,680 · 10 <sup>-2</sup>	300	150	-6,254 · 10 <sup>-1</sup>	1,004 · 10 <sup>0</sup>
20	10	2,380 · 10 <sup>1</sup>	8,585 · 10 <sup>-2</sup>	400	200	5,984 · 10 <sup>-1</sup>	9,983 · 10 <sup>-1</sup>
40	20	3,217 · 10 <sup>1</sup>	2,778 · 10 <sup>-1</sup>		∞	0	1

Ad c)

Dla tematuowych danych ( $R = 1\Omega$ ,  $L = 0,5\text{ H}$ ,  $C = 0,05\text{ F}$ ,  $U_C(0) = -1\text{ V}$ ,  $E = 1\text{ V}$ ) - dobranych tak dla uzyskania czytelnego wykresu -  $I_0 = X_1(0) = 0$ ,  $U_0 = X_2(0) = -1$ ,  $U(t) = 1 - \frac{1}{2}(t)$  a równanie (9) przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)\Delta t] \\ x_2[(k+1)\Delta t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k\Delta t) \\ x_2(k\Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 20 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k\Delta t) \\ x_2(k\Delta t) \end{bmatrix} \Delta t + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} E\Delta t \quad (14)$$



Rys. 2.23.3

Tablica 2.3

k	kΔt w s	x <sub>1</sub> (kΔt)=i <sub>L</sub> w A	x <sub>2</sub> (kΔt)=U <sub>C</sub> w V	k	kΔt w s	x <sub>1</sub> (kΔt)=i <sub>L</sub> w A	x <sub>2</sub> (kΔt)=U <sub>C</sub> w V
0	0	0	-1,00	200	0,4	2,599.10 <sup>-1</sup>	1,963
10	2.10 <sup>-2</sup>	7,842.10 <sup>-2</sup>	-9,858.10 <sup>-1</sup>	250	0,5	5,147.10 <sup>-3</sup>	2,234
20	4.10 <sup>-2</sup>	1,527.10 <sup>-1</sup>	-9,409.10 <sup>-1</sup>	500	1,0	-6,364.10 <sup>-3</sup>	2,391.10 <sup>-1</sup>
30	6.10 <sup>-2</sup>	2,217.10 <sup>-1</sup>	-8,672.10 <sup>-1</sup>	1000	2,0	-4,863.10 <sup>-3</sup>	7,107.10 <sup>-1</sup>
40	8.10 <sup>-2</sup>	2,846.10 <sup>-1</sup>	-7,670.10 <sup>-1</sup>	1500	3,0	-2,786.10 <sup>-3</sup>	8,901.10 <sup>-1</sup>
50	10.10 <sup>-2</sup>	3,404.10 <sup>-1</sup>	-6,428.10 <sup>-1</sup>	2000	4,0	-1,419.10 <sup>-3</sup>	9,583.10 <sup>-1</sup>
100	20.10 <sup>-2</sup>	5,017.10 <sup>-1</sup>	2,311.10 <sup>-1</sup>	∞	∞	0,000	1,000
150	30.10 <sup>-2</sup>	4,576.10 <sup>-1</sup>	1,223.10 <sup>0</sup>				

Przyjęto  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-2}\text{ s}$  a otrzymane wyniki zebrano w tablicy 2.3 i przedstawiono na rys. 2.23.3.

Przedział czasu  $\Delta t$  w rozpatrywanych przykładach dobrano znacznie mniejszy od stałej czasowej obwiedni  $T = \frac{2l}{v}$  i tak dla

a)  $T = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \gg \Delta t = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

b)  $T = 30 \cdot 10^{-6} \text{ s} \gg \Delta t = 5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

c)  $T = 1 \text{ sek} \gg \Delta t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

Jak już wspominaliśmy wyniki umieszczone w tablicach 2.1, 2.2 i 2.3 i wykorzystane do sporządzenia rysunków 2.23.1, 2.23.2 i 2.23.3 uzyskano z zależności (12), (13) i (14). Do ich rozwiązania można wykorzystać m.c. W tablicy 2.4 umieszczono przykładowo program na kalkulator HP-20 [11] realizujący rys. 2.23.3 i tablicę 2.3.

Tablica 2.4

```
0:
SCL -1,2.5,-.4,.
6;AXE 0,0,.2,.1-
1:
0-R1-R2-R3-R5-R6
;1-R4;10-R7-
2:
IF R6>2E3;GTO 11
-
3:
IF R7=10;0-R7;
GTO 5-
4:
GTO 7-
5:
SPC 1;PRT R1,R2,
R4-
6:
PLT R4,R2;PEN-
7:
R2+(-2R2-2R4)2E-
3+4E-3-R5-
8:
R4+20-R2*2E-3-R5
-
9:
R3-R2;R5-R4;R6+1
-R6;R7+1-R7-
10:
2E-3-R6-R1;GTO 2
-
11:
END-
R383
```

Wiersz 0-wy określa skalę i rozmiar rysunku, pozostałe wiersze programu realizują zależność (14). W programie przyjęto następujące oznaczenia:

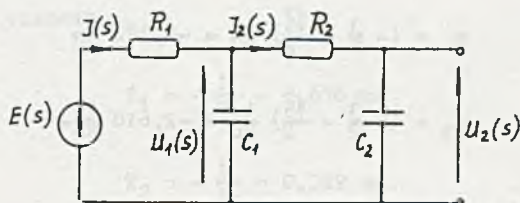
k oznaczono przez R6

$k\Delta t$  oznaczono przez R1

$x_1(k\Delta t) = i_L(k\Delta t)$  oznaczono przez R2



$x_1[(k+1)\Delta t]$       oznaczono przez R3  
 $x_2(k\Delta t) = U_C(k\Delta t)$       "      "      R4  
 $x_L[(k+1)\Delta t]$       "      "      R5.



Rys. 2.24.1

### Zadanie 2.24

Z prawa Ohma (rys. 2.24.1)

$$U_2(s) = \frac{E(s)}{R_1 + \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{sC_1}(R_2 + \frac{1}{sC_2}) + \frac{1}{sC_1} + sC_2 + R_2}}_{I(s)}} \cdot \frac{1}{sC_1} (R_2 + \frac{1}{sC_2}) \cdot \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \cdot \frac{1}{sC_2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{U_1(s)}$   
 $\underbrace{\hspace{15em}}_{I_2(s)}$

ale  $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ,  
 więc

$$\begin{aligned}
 U_2(s) &= \frac{E(s)}{R + \frac{1}{\frac{1}{sC} (R + \frac{1}{sC}) + \frac{1}{sC} + \frac{2}{sC}}} \cdot \frac{1}{sC} (R + \frac{1}{sC}) \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{1}{sC} = \\
 &= \frac{E}{R^2 C^2} \frac{1}{s(s^2 + s \frac{3}{RC} + \frac{1}{R^2 C^2})} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Przyrównując do zera

$$M(s) = s^2 + s \frac{3}{RC} + \frac{1}{R^2 C^2}$$

obliczamy pierwiastki równania:

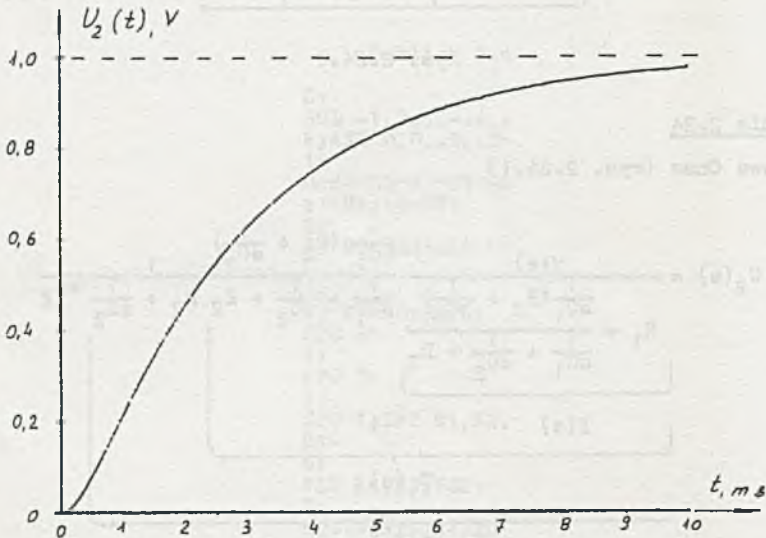
$$s^2 + s \frac{3}{RC} + \frac{1}{R^2 C^2} = 0$$

a

$$s_1 = \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \frac{1}{RC} = -0,382 \frac{1}{RC}$$

i

$$s_2 = \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \frac{1}{RC} = -2,618 \frac{1}{RC}$$



Rys. 2.24.2

Stosując I wzór Heaviside'a otrzymamy

$$\begin{aligned} U_2(s) &= \frac{E}{R^2 C^2} \frac{1}{s(s-s_1)(s-s_2)} \hat{=} u_2(t) = \\ &= \frac{E}{R^2 C^2} \left( \frac{1}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_1(s_1-s_2)} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_2(s_2-s_1)} e^{s_2 t} \right) = \\ &= E \left( 1 + \frac{1}{R^2 C^2 s_1(s_1-s_2)} e^{s_1 t} - \frac{1}{R^2 C^2 s_2(s_2-s_1)} e^{s_2 t} \right) = \\ &= E \left( 1 - 1,17 e^{-0,382 \frac{1}{RC} t} + 0,171 e^{-2,618 \frac{1}{RC} t} \right) \end{aligned}$$

a po podstawieniu wartości liczbowych

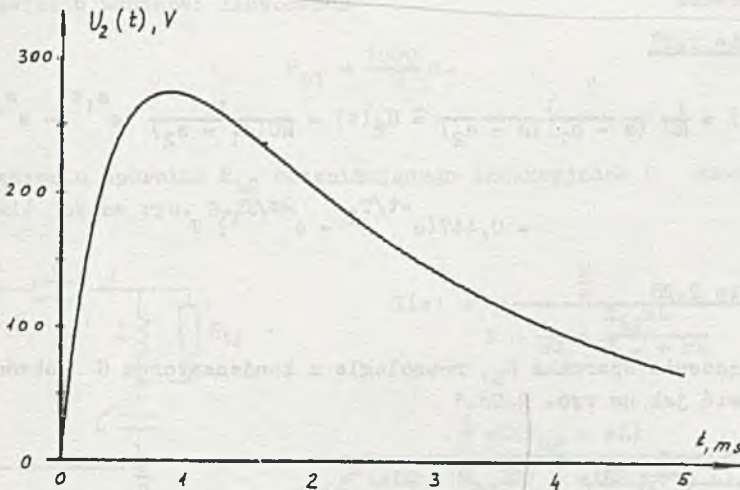
$$u_2(t) = [1 - 1.171 e^{-0,382 \cdot 10^3 t} + 0,171 e^{-2,618 \cdot 10^3 t}] \text{ V}, \quad (2)$$

natomiast stałe czasowe

$$T_1 = -\frac{1}{s_1} = 2,618 \text{ ms},$$

$$T_2 = -\frac{1}{s_2} = 0,382 \text{ ms}.$$

Przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  opisany równaniem (2) przedstawiono na rys. 2.24.2.



Rys. 2.25.1

#### Zadanie 2.25

Transformata Laplace'a napięcia  $e(t) = \delta(t)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 = E(s).$$



Podstawiając  $E(s)$  do wzoru (1) z zadania 2.24 otrzymamy

$$U_2(s) = \frac{1}{R^2 C^2} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \hat{=} u_2(t) =$$

$$= \frac{1}{R^2 C^2} \frac{1}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) = 447,2 (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) V, \quad (1)$$

gdzie:

$$T_1 = 2,618 \text{ ms},$$

$$T_2 = 0,381 \text{ ms}.$$

Na rys. 2.25.1 przedstawiono przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  opisanego równaniem (1).

#### Zadanie 2.26

Nie można.

#### Zadanie 2.27

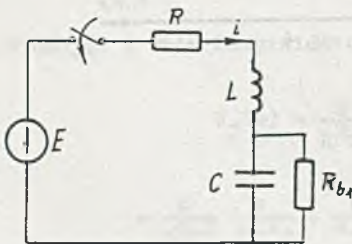
$$U_2(s) = \frac{1}{RC} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \hat{=} U_2(t) = \frac{1}{RC(s_1 - s_2)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) =$$

$$= 0,447 (e^{-t/T_2} - e^{-t/T_1}) V$$

#### Zadanie 2.28

Ad a)

Po włączeniu opornika  $R_{b1}$  równolegle z kondensatorem  $C$  obwód można przedstawić jak na rys. 2.28.1



Rys. 2.28.1

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R + sL + \frac{R_{b1}}{sR_{b1}C + 1}} =$$

$$= \frac{\frac{E}{s} (sR_{b1}C + 1)}{s^2 LR_{b1}C + s(L + RR_{b1}C) + R + R_{b1}}$$

przyporównując mianownik do zera można obliczyć pierwiastki równania

$$M = s^2 + s \frac{L + R_{b1}RC}{LR_{b1}C} + \frac{R + R_{b1}}{LR_{b1}C} = 0 \quad (1)$$

przyrównując wyróżnik równania (1) do zera ( $s_1 = s_2$ ), otrzymamy:

$$\left[ \frac{L + R_{b1}RC}{LR_{b1}C} \right]^2 - 4 \frac{R + R_{b1}}{LR_{b1}C} = 0$$

stąd

$$R_{b1}^2 R^2 C^2 - 4LCR_{b1}^2 - 2R_{b1}RLC + L^2 = 0 \quad (2)$$

po rozwiązaniu

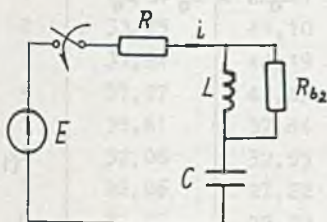
$$(R_{b1})_{1,2} = \frac{RLC \pm 2L\sqrt{LC}}{R^2C^2 - 4LC}$$

po podstawieniu wartości liczbowych

$$R_{b1} = \frac{1000}{3} \Omega.$$

Ad b)

Po włączeniu opornika  $R_{b2}$  bocznikującego indukcyjność  $L$  obwód można przedstawić jak na rys. 2.28.2.



Rys. 2.28.2

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R + \frac{1}{sC} + \frac{R_{b2}sL}{R_{b2} + sL}} =$$

$$= \frac{\frac{E}{s} sC(R_{b2} + sL)}{s^2(RLC + R_{b2}LC) + s(RR_{b2}C + L) + R_{b2}}$$

Przyrównując wyróżnik mianownika do zera otrzymamy

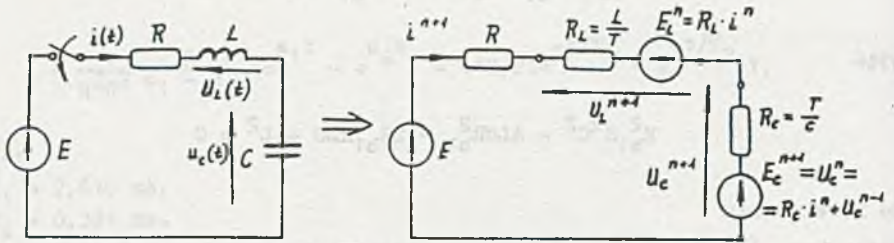
$$(R_{b2})_{1,2} = \frac{RLC \pm 2L\sqrt{LC}}{R^2C^2 - 4LC} \quad (3)$$

a po podstawieniu wartości liczbowych

$$R_{b2} = R_{b1} = \frac{1000}{3} \Omega.$$

Zadanie 2.30

Tematowy obwód, po zastąpieniu elementów L i C ich modelami iterowanymi, można przedstawić jak na rys. 2.30.1.



Rys. 2.30.1

Równanie drugiego prawa Kirchhoffa dla  $n+1$ -go kroku iteracyjnego ma postać

$$E = i^{n+1}(R + R_L) + i^n R_L - U_C^{n+1} = 0,$$

natomiast

$$U_C^{n+1} = E_C^{n+1} + i^{n+1} R_C = U_C^n + i^{n+1} R_C = i^{n+1} R_C + i^n R_C + U_C^{n-1}$$

stąd

$$i^{n+1} = \frac{E + i^n R_L - U_C^n}{R + R_L + R_C} \quad (1)$$

a

$$U_C^n = U_C^{n-1} + i^n R_C, \quad (2)$$

natomiast

$$U_L^{n+1} = i^{n+1} R_L - i^n R_L = i^{n+1} R_L - E_L^n, \quad (3)$$

gdzie:

$$R_L = \frac{L}{T}$$

$$R_C = \frac{T}{C}$$



a) dla  $\Delta t = T = 1 \cdot 10^{-6}$  s

$$R_L = \frac{L}{T} = 300 \Omega,$$

$$R_C = \frac{T}{C} = 33,33 \Omega,$$

a ponieważ w obwodzie nie ma warunków początkowych więc

$$E_L^0 = 0,$$

$$U_C^0 = 0,$$

$$i^0 = 0.$$

W tablicy 2.5 podano wyniki obliczeń iteracyjnych i porównano z wynikami analitycznymi określonymi równaniami (12) i (13) w zadaniu 2.18, w przedziale czasu od 0 do  $10 \cdot 10^{-6}$  s.

Tablica 2.5

n	$i^n$ w mA z zal. (1)	$i(nT)$ w mA z zal. (12)	błąd = $i(nT) - i^n$ w mA	$U_L^n$ w V z zal. (3)	$U_L(nT)$ w V z zal. (13)	błąd = $U_L(nT) - U_L^n$ w V
1	22,50	28,67	6,17	6,75	5,73	-1,02
2	33,75	41,10	7,35	3,37	2,05	-1,32
3	37,94	44,19	6,25	1,27	0,0	-1,27
4	37,97	42,23	4,26	0,0	-1,05	-1,05
5	35,61	37,84	2,23	-0,71	-1,51	-0,80
6	32,06	32,55	0,49	-1,07	-1,62	-0,55
7	28,06	27,22	-0,84	-1,20	-1,55	-0,35
8	24,06	22,29	-1,77	-1,21	-1,39	-0,18
9	20,30	17,98	-2,32	-1,13	-1,20	-0,07
10	16,93	14,32	-2,61	-1,01	-1,00	+0,01

b) Dla  $\Delta t = T = 0,5 \cdot 10^{-6}$  s

$$R_L = 600 \Omega,$$

$$R_C = 16,67 \Omega.$$

a wyniki zebrano w tablicy 2.6.

Tablica 2.6

n	$i^n$ w mA	błąd = $i(nT) - i^n$ w mA	$U_L^n$ w V	błąd = $U_L(nT) - U_L^n$ w V
2	25,19	3,48	6,30	-0,56
4	37,01	4,09	2,78	-0,72
6	40,79	3,40	0,68	-0,68
8	39,96	2,27	-0,50	-0,55
10	36,70	1,14	-1,10	-0,41
12	32,35	0,20	-1,35	-0,27
14	27,73	-0,51	-1,39	-0,16
16	23,28	-0,99	-1,31	-0,08
18	19,24	-1,26	-1,18	-0,02
20	15,71	-1,39	-1,02	+0,02

c) dla  $\Delta t = T = 0,1 \cdot 10^{-6}$  s.

$$R_L = 3000 \Omega,$$

$$R_c = 3,33 \Omega$$

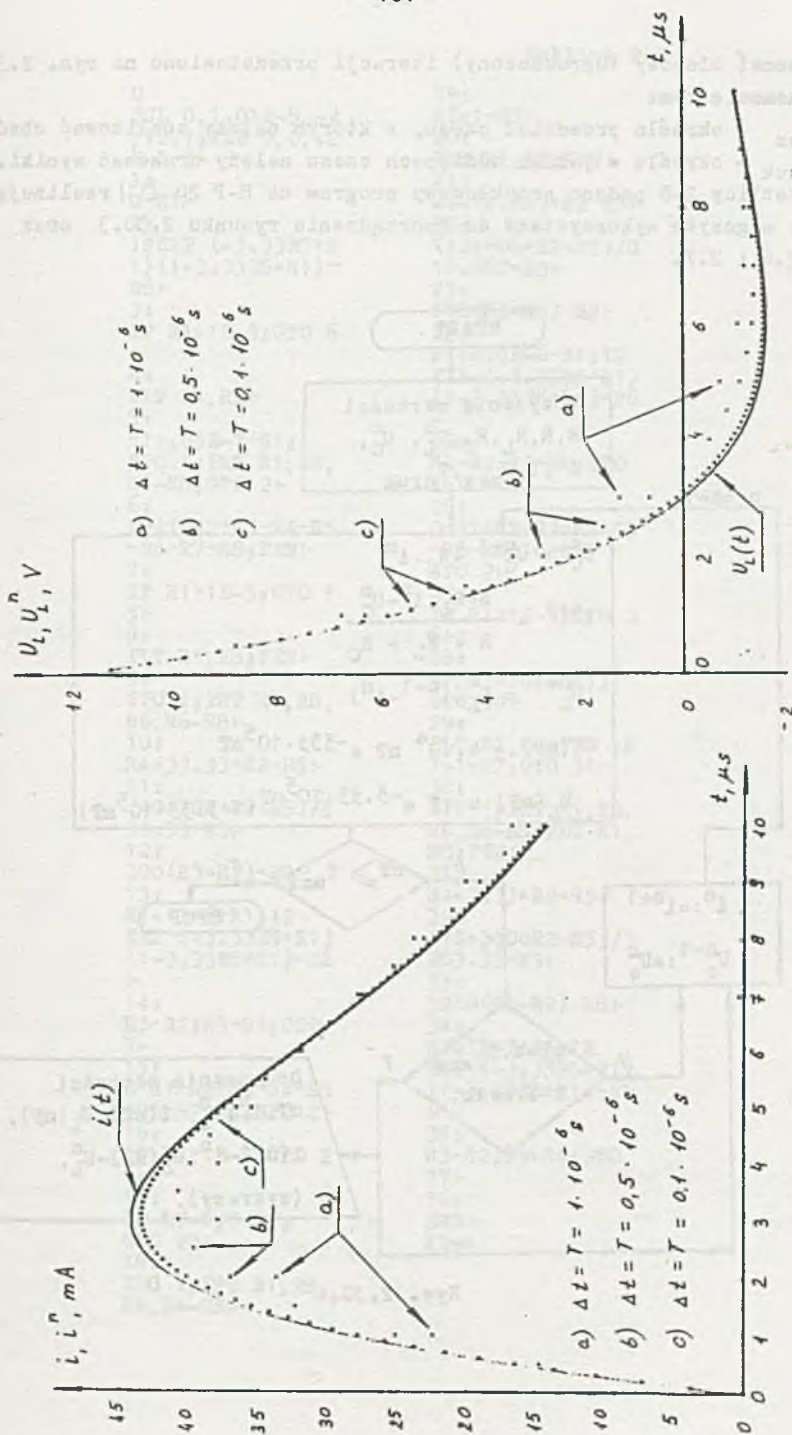
a wyniki zebrano w tablicy 2.7.

Tablica 2.7

n	$i^n$ w mA	błąd = $i(nT) - i^n$ w mA	$U_L^n$ w V	błąd = $U_L(nT) - U_L^n$ w V
10	27,89	0,78	5,86	-0,13
20	40,19	0,91	2,21	-0,16
30	43,43	0,76	0,15	-0,15
40	41,72	0,51	-0,94	-0,11
50	37,58	0,25	-1,43	-0,08
60	32,50	0,05	-1,57	-0,05
70	27,32	-0,10	-1,52	-0,03
80	22,50	-0,21	-1,38	-0,01
90	18,24	-0,26	-1,19	-0,01
100	14,61	-0,29	-1,01	+0,01

Porównując wyniki z tablic 2.5, 2.6 i 2.7 zauważymy, że błąd metody iteracyjnej rośnie liniowo z wielkością kroku T.

Na rys. 2.30.2 przedstawiono przebiegi (analityczne i obliczone iteracyjnie) prądu  $i$ , a na rys. 2.30.3 - napięcia  $U_L$ .



Rys. 2.30.2

Rys. 2.30.3



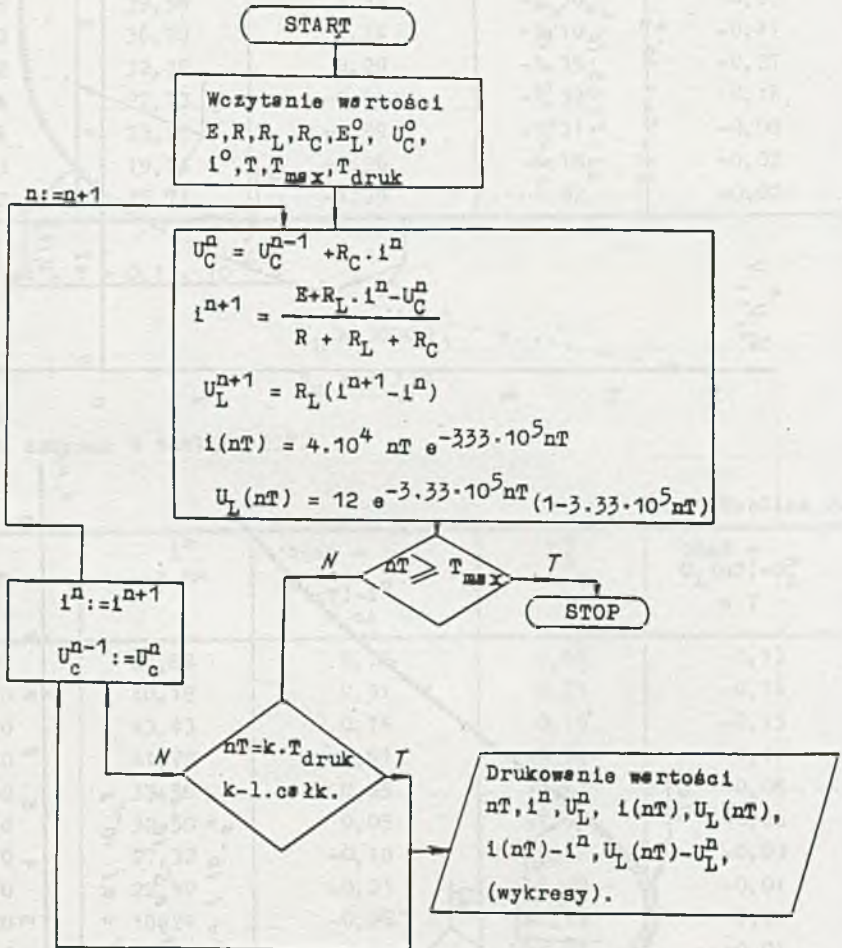
Schemat blokowy (uproszczony) iteracji przedstawiono na rys. 2.30.4

Na schemacie tym:

$T_{\max}$  - określa przedział czasu, w którym należy analizować obwód,

$T_{\text{druk}}$  - określa w jakich odstępach czasu należy drukować wyniki.

W tablicy 2.8 podano przykładowy program na H-P 20 [11] realizujący powyższy algorytm wykorzystany do sporządzenia rysunku 2.30.3 oraz tablic 2.5, 2.6 i 2.7.



Rys. 2.30.4

Tablica 2.8

0	19:
SCL 0,1.01E-5,-2	R7+1-R7-
,12.1;AXE 0,0,.2	20:
E-5,2-	PLT R1,R8;PEN-
1:	21:
0-R1-	R4+16.667*R2 R5-
2:	22:
12EXP (-3.33E5*R	(12+600*R2-R5)/8
1)(1-3.33E5*R1)-	16.667-R3-
R6-	23:
3:	600(R3-R2)-R8-
IF R1>1E-5;GTO 6	24:
-	R1+0.5E-6-R1;12
4:	EXP (-3.33E5*R1)
PLT R1,R6-	(1-3.33E5*R1)-R6
5:	-
R1+.05E-7-R1;	25:
SPC 1;PRT R1,R8,	R3-R2;R5-R4;GTO
R6-R8;GTO 2-	16-
6:	26:
0-R1-R2-R3-R4-R5	0-R1-R2-R3-R4-R5
-R6-R7-R8;PEN-	-R6-R8;10-R7;
7:	SPC 2-
IF R1>1E-5;GTO 1	27:
5-	IF R1>1E-5;GTO 3
8:	6-
PLT R1,R8;PEN-	28:
9:	IF R7=10;1-R7;
SPC 1;PRT R1,R8,	GTO 30-
R6,R6-R8-	29:
10:	PLT R1,R8;PEN ;R
R4+33.33*R2-R5-	7+1-R7;GTO 31-
11:	30:
(12+300*R2-R5)/5	SPC 1;PRT R1,R8,
33.33-R3-	R6,R6-R8;PLT R1,
12:	R8;PEN-
300(R3-R2)-R8-	31:
13:	R4+3.33*R2-R5-
R1+1E-6-R1;12	32:
EXP (-3.33E5*R1)	(12+3000R2-R5)/3
(1-3.33E5*R1)-R6	203.33-R3-
-	33:
14:	3000(R3-R2)-R8-
R3-R2;R5-R4;GTO	34:
7-	R1+1E-7-R1;12
15:	EXP (-3.33E5*R1)
0-R1-R2-R3-R4-R5	(1-3.33E5*R1)-R6
-R6-R7-R8;SPC 2-	-
16:	35:
IF R1>1E-5;GTO 2	R3-R2;R5-R4;GTO
6-	27-
17:	36:
IF R7=1;0-R7;	END-
GTO 20-	R294
18:	
SPC 1;PRT R1,R8,	
R6,R6-R8-	

W programie tym przyjęto następujące oznaczenia:

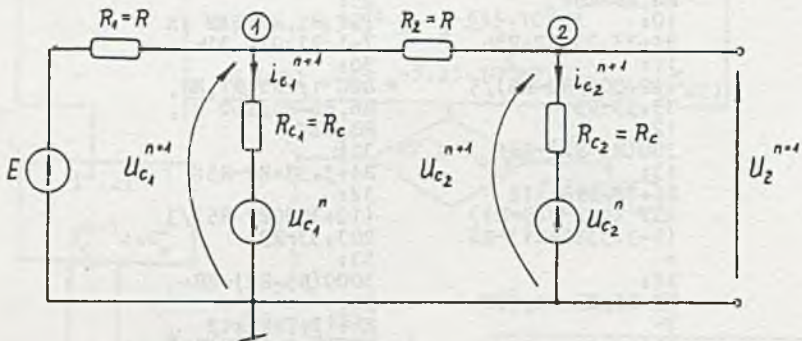
$n.T$	-	oznaczono przez	R1
$i^n$	-	"	" R2
$i^{n+1}$	-	"	" R3
$U_c^{n-1}$	-	"	" R4
$U_c^n$	-	"	" R5
$U_L(kT)$	-	"	" R6
$U_L^{n+1}$	-	"	" R8

W zerowej linijce podano żadaną skalę rysunku. Fragment programu umieszczony w linijkach 1-5 umożliwia wykreślenie  $U_L(t)$  (linia ciągła na rys. 2.30.3). Natomiast wydruk (i wykres) punktowy  $U_L^n$  oraz wielkości błędu dla  $\Delta t = T = 1 \cdot 10^{-6}$  s realizuje fragment programu zawarty w linijkach 7-14.

Dla  $\Delta t = T = 0,5 \cdot 10^{-6}$  s wykres  $U_L^{n+1}$  realizowany jest przez linijki 16-25, a dla  $\Delta t = T = 0,1 \cdot 10^{-6}$  s przez linijki 27-35.

#### Zadanie 2.31

$R_c = \frac{T}{C} = 100 \Omega$  a tematowy obwód można zastąpić, stosując iterowane modele pojemności, obwodem przedstawionym na rys. 2.31.1.



Rys. 2.31.1

Z równań węzłowych obwodu

$$V_1^{n+1} (2G + G_c) - V_2^{n+1} G = EG + U_{c1}^n G_c$$

$$-V_1^{n+1} G + V_2^{n+1} (G + G_c) = U_{c2}^n G_c$$



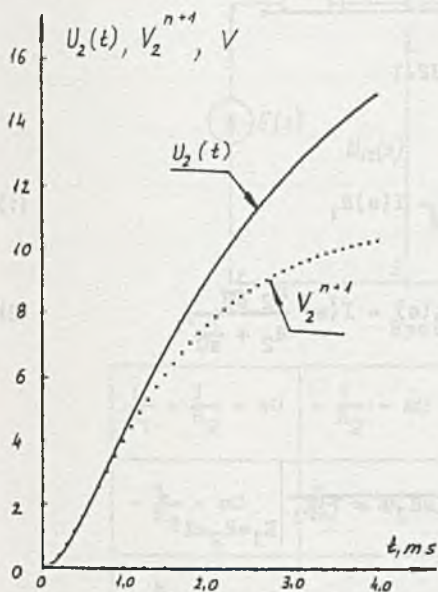
wyznaczymy

$$v_2^{n+1} \approx U_2((n+1)T)$$

$$v_2^{n+1} = E \frac{G^2}{G^2 + 3GG_c + G_c^2} + v_1^n \frac{GG_c}{G^2 + 3GG_c + G_c^2} + v_2^n \frac{G_c(2G + G_c)}{G^2 + 3GG_c + G_c^2} \quad (1)$$

oraz

$$v_1^{n+1} = E \frac{G}{2G + G_c} + v_1^n \frac{G_c}{2G + G_c} + v_2^{n+1} \frac{G}{2G + G_c} \quad (2)$$



Rys. 2.31.2

Napięcia na kondensatorach w chwili  $t=0$  są równe zero, więc

$$U_{c1}^0 = U_{c2}^0 = v_1^0 = v_2^0 = 0$$

a po podstawieniu wartości liczbowych do (1) i (2) otrzymamy

$$v_2^{n+1} =$$

$$= [0,1527 + v_1^n 76,34 \cdot 10^{-3} + v_2^n 0,916] V \quad (1')$$

oraz

$$v_1^{n+1} =$$

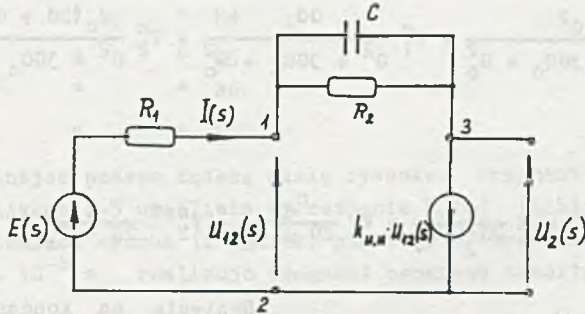
$$= [1,667 + 0,833 v_1^n + 83,33 \cdot 10^{-3} v_2^{n+1}] V \quad (2')$$

Z iteracyjnego rozwiązania (1') i (2') otrzymamy przybliżony przebieg napięcia wyjściowego  $v_2^{n+1}$  przedstawiony na rys. 2.31.2 (kropkowany). Dla porównania na tym samym rysunku naniesiono dokładny, uzyskany analitycznie, przebieg napięcia  $U_2(t)$  (ciągły).

Wskutek kumulowania się błędów z każdej iteracji dla  $t > 1,5$  ms błąd jest już znaczny. Można go zmniejszyć dobierając mniejszy czas  $T = \Delta t$ .

Zadanie 2.32

Tematowy obwód można przedstawić w postaci operatorowej jak na rys. 2.32.1.



Rys. 2.32.1

Z II prawa Kirchhoffa

$$U_{12}(s) = E(s) - I(s)R_1 \quad (1)$$

$$U_2(s) = -k_{u,u} U_{12}(s) = U_{12}(s) - I(s) \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} \quad (2)$$

z stąd

$$\begin{aligned} \frac{U_2(s)}{E(s)} &= - \frac{k_{u,u} R_2}{R_2 + (k_{u,u} + 1)(sR_2C + 1)R_1} \bigg|_{R_1=R_2=R} = \\ &= - \frac{k_{u,u}}{(k_{u,u} + 2) + sRC(k_{u,u} + 1)} \end{aligned} \quad (3)$$

przyrównując  $M(s)$  do zera otrzymamy pierwiastek mianownika

$$s_1 = - \frac{k_{u,u} + 2}{RC(k_{u,u} + 1)} \quad (4)$$

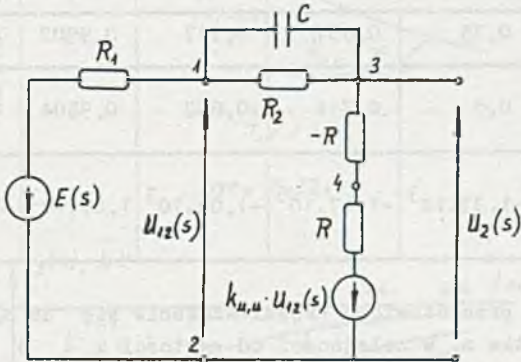
a

$$U_2(s) = \frac{-Ek_{u,u}}{k_{u,u} + 2} \frac{\frac{1}{s}}{s(s + \frac{1}{T_1})} \hat{=} u_2(t) = \frac{-Ek_{u,u}}{k_{u,u} + 2} (1 - e^{-t/T_1}), \quad (5)$$

gdzie

$$T_1 = RC \frac{k_{u,u} + 1}{k_{u,u} + 2}$$

Obwód ten można też rozwiązać metodą potencjałów węzłowych. Ponieważ w obwodzie występuje ŻNSN obwód wymaga uprzedniej modyfikacji [7] przez dodanie sztucznego węzła. Zmodyfikowany obwód przedstawiono na rys. 2.32.2. Wartość rezystancji  $R$  jest dowolna i równa np.  $1 \text{ k}\Omega$ .



Rys. 2.32.2

$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC$	$-\frac{1}{R_2} - sC$	0
$-\frac{1}{R_2} - sC$	$\frac{1}{R_2} + sC - \frac{1}{R}$	$+\frac{1}{R}$
$+\frac{k_{u,u}}{R}$	$+\frac{1}{R}$	0

 $\cdot$ 

$V_1$
$V_3$
$V_4$

 $=$ 

$\frac{E(s)}{R_1}$
0
0

(6)

Po rozwiązaniu układu równań (6) wyznaczymy napięcie

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_3(s)\}.$$

Wracając do wzoru (5), opisującego przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$ , określiśmy wpływ wartości współczynnika  $k_{u,u}$  na przebieg tego napięcia. tzn. na stałą czasową

$$T_1 = RC \frac{k_{u,u} + 1}{k_{u,u} + 2}$$



oraz asymptotę

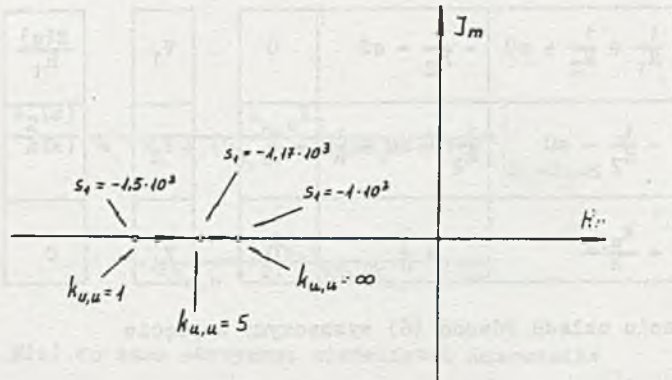
$$E \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 2}.$$

Dodatkowo określimy wpływ  $k_{u,u}$  na pierwiastek mianownika  $s_1$  (4). Otrzymane wyniki zebrano w tablicy 2.9.

Tablica 2.9

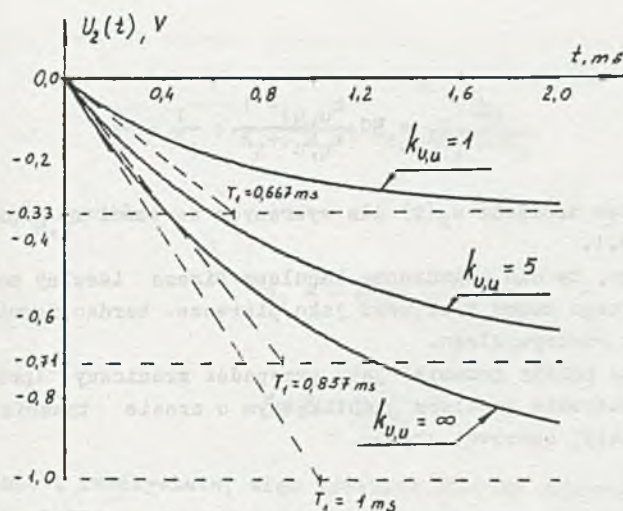
$k_{u,u}$	1	2	5	10	100	1000	$\infty$
$T_1/RC$	0,667	0,75	0,857	0,917	0,9902	0,999	1
$\frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 2}$	0,333	0,5	0,714	0,833	0,9804	0,998	1
$s_1 = -\frac{1}{T_1}$	$-1,5 \cdot 10^3$	$-1,33 \cdot 10^3$	$-1,17 \cdot 10^3$	$-1,09 \cdot 10^3$	$1,01 \cdot 10^3$	$-1,001 \cdot 10^3$	$-1,10^3$

Na rysunku 2.32.3 przedstawiono przemieszczenie się na płaszczyźnie zespolonej pierwiastka  $s_1$  w zależności od wartości  $k_{u,u}$  a na rys. 2.32.4 przebiegi czasowe  $u_2(t)$  dla wybranych wartości  $k_{u,u}$ .

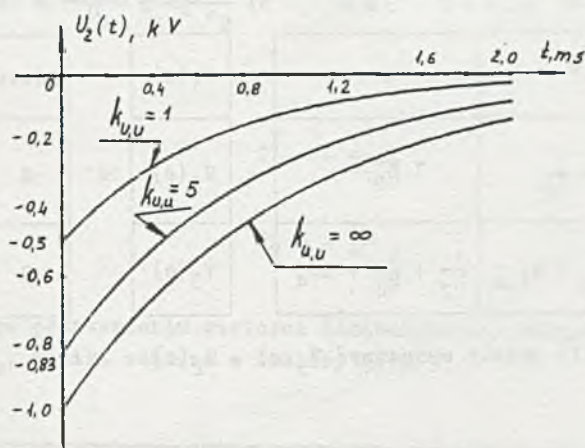


Rys. 2.32.3

Zauważmy, że ze wzrostem  $k_{u,u}$  rośnie stała czasowa  $T_1$  i składowa ustalona asymptota napięcia  $u_2(t)$ , a maleje (co do modułu) wartość pierwiastka mianownika (bieguna)  $s_1$ . W granicy dla  $k_{u,u}$  nieskończenie wielkiego - co odpowiada idealnemu wzmacniaczowi operacyjnemu - obwód (jeśli chodzi o moduł napięcia  $u_2(t)$ ) zachowuje się, tak jak "zwykły" obwód RC.



Rys. 2.32.4



Rys. 2.33.1

### Zadanie 2.33

Podstawiając do wzoru (3) z zadania 2.32  $E(s) = 1$  otrzymamy

$$U_2(s) = \frac{-k_{u,u}}{RC(k_{u,u} + 1)(s + \frac{k_{u,u} + 2}{RC(k_{u,u} + 1)})} \hat{=} u_2(t) = \frac{-1}{RC} \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 1} e^{-t/T_1}, \quad (1)$$

gdzie

$$T_1 = RC \frac{k_{u,u} + 1}{k_{u,u} + 2}.$$

Przebiegi czasowe napięcia  $u_2(t)$  dla wybranych wartości  $k_{u,u}$  przedstawiono na rys. 2.33.1.

Zwróćmy uwagę, że dla pobudzenia impulsem Diraca idealny model wzmacniacza operacyjnego można traktować jako pierwsze, bardzo zgrubne przybliżenie układu rzeczywistego.

Impuls Diraca należy rozumieć jako przypadek graniczny (prostszy w obliczeniach) pobudzenia impulsem prostokątnym o czasie trwania znacznie mniejszym od stałej czasowej obwodu.

#### Zadanie 2.34

Układ równań węzłowych opisujących tematowy obwód, przy numeracji węzłów jak na rys. 2.34 ma następującą postać:

1	2	3		$V_1(s)$		$E(s)sc_1$		$V_2(s)$		0		$V_3(s)$		0		(1)
$\frac{1}{R_1} + sc_1$	0	0	·	$V_1(s)$	=	$E(s)sc_1$		0		0		$V_3(s)$		0		
0	$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}$	$-\frac{1}{R_2}$		$V_2(s)$		0		0								
$-k_{1,u}$	$-\frac{1}{R_2} + k_{1,u}$	$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + sc_4$		$V_3(s)$		0		0								

układu równań (1) należy wyznaczyć  $V_3(s) = U_2(s)$ .  
Ponieważ

$$V_2(s) = \frac{G_2}{G_2 + G_3} V_3(s)$$

$$V_1(s) = E(s) \frac{sc_1}{G_1 + sc_1},$$

więc

$$V_3(s) = E(s) \frac{k_{1,u} s R_1 C_1}{(s R_1 C_1 + 1) \left( \frac{1}{R_2} + s C_4 \right)} = E(s) s \frac{k_{1,u}}{C_4} \frac{1}{\left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \left( s + \frac{1}{R_2 C_4} \right)}, \quad (2)$$



gdzie

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + R_3} + k_{1,u} \frac{R_3}{R_3 + R_3}.$$

Pierwiastki mianownika

$$s_1 = -\frac{1}{R_1 C_1}$$

i

$$s_2 = -\frac{1}{R_z C_4}$$

są niedodatnie i rzeczywiste, więc przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  jest aperiodyczny, zatem

$$V_3(s) \hat{=} u_2(t) = \frac{Ek_{1,u}}{C_4} \frac{1}{s_1 - s_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) = U_2 (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}), \quad (3)$$

gdzie

$$T_1 = -\frac{1}{s_1}$$

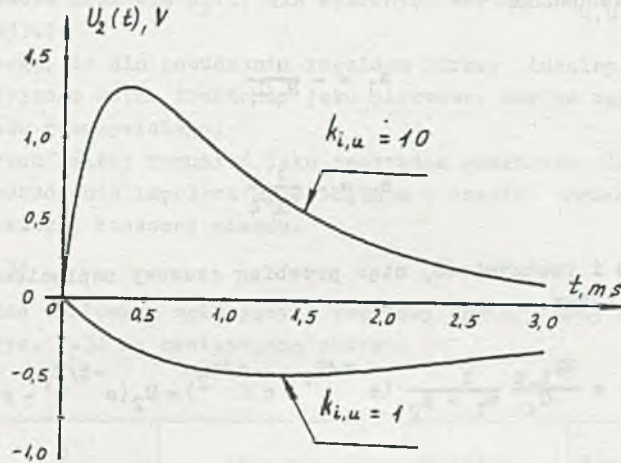
$$T_2 = -\frac{1}{s_2}$$

a otrzymane, po podstawieniu wartości liczbowych dla różnych wartości współczynnika  $k_{1,u}$ , wyniki zebrano w tabelicy 2.10.

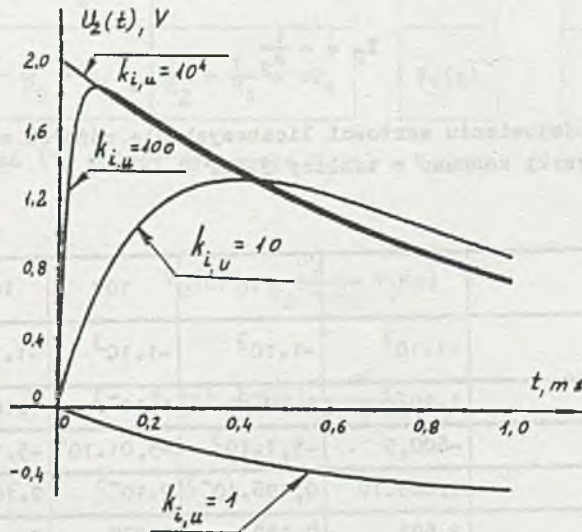
Tablica 2.10

$k_{1,u}, \frac{A}{V}$	1	10	100	$10^4$	$\infty$
$s_1, \frac{1}{s}$	$-1 \cdot 10^3$	$-1 \cdot 10^3$	$-1 \cdot 10^3$	$-1 \cdot 10^3$	$-1 \cdot 10^3$
$T_1 = -1/s_1, s$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
$s_2, \frac{1}{s}$	-600,5	$-5,1 \cdot 10^3$	$-5,01 \cdot 10^4$	$-5 \cdot 10^6$	$\infty$
$T_2 = -1/s_2, s$	$1,665 \cdot 10^{-3}$	$0,196 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	0
$U_2, V$ w zależności (3)	2,503	2,439	2,037	2	2

Zauważmy, że ze wzrostem  $k_{i,u}$  maleje stała czasowa  $T_2$  i w granicy dla nieskończonej wielkości tego współczynnika maleje ona do zera, rośnie natomiast (do 2 V) maksymalna wartość napięcia  $u_2(t)$ . Na rys. 2.34.1 i 2.34.2 przedstawiono przebiegi czasowe napięcia  $u_2(t)$  dla różnych wartości  $k_{i,u}$ .



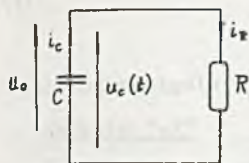
Rys. 2.34.1



Rys. 2.34.2

### Zadanie 2.35

Dla czasów  $t \geq 0$  obwód z rys. 2.35 możemy przedstawić w postaci takiej jak na rys. 2.35.1. Wtedy otrzymamy



Rys. 2.35.1

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = -i_R = -\frac{u_R}{R} = -\frac{u_c}{R},$$

a więc

$$C \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R} = 0, \quad (1)$$

przy czym

$$u_c(0) = E \quad (1a)$$

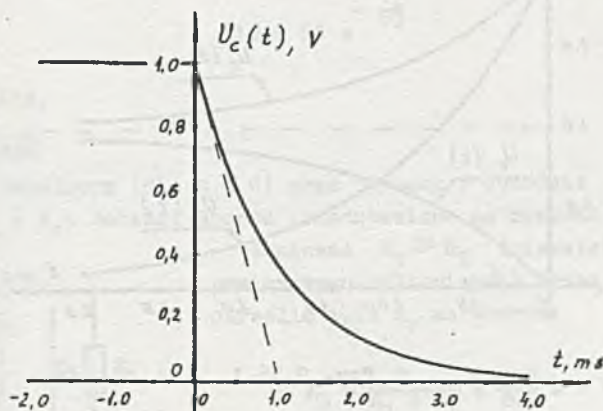
Rozwiązanie równania różniczkowego liniowego, jednorodnego (1) wraz z warunkiem początkowym (1a) jest w postaci

$$u_c(t) = C_1 e^{s_0 t},$$

gdzie  $s_0$  jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, a stałą  $C_1$  dobieramy tak, żeby było spełnione (1a). Wobec tego otrzymamy

$$u_c(t) = E e^{-\frac{t}{RC}} = 1 e^{-\frac{t}{1}} = e^{-10^3 t} \text{ V} \quad (2)$$

Przebieg napięcia  $u_c(t)$  przedstawia rys. 2.35.2.



Rys. 2.35.2



Zadanie 2.36

Z I prawa Kirchhoffa otrzymamy

$$\begin{aligned} C \frac{du_c}{dt} + GU_c &= I_0 \quad t \geq 0, \\ u_c(0) &= U_0. \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:

$$G = \frac{1}{R},$$

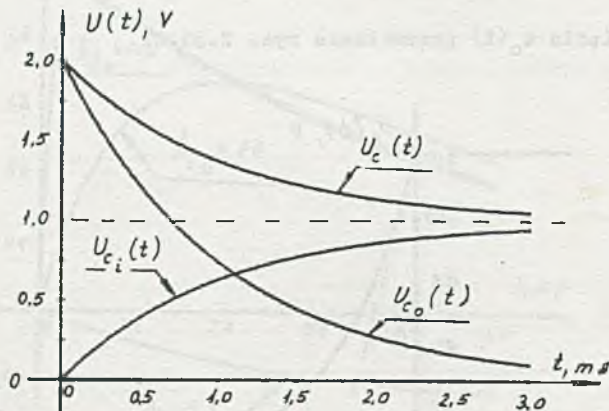
Dla liniowego czasowo niezależnego obwodu całkowita odpowiedź (napięcie  $u_c(t)$ ) jest równa

$$u_c(t) = u_{co}(t) + u_{ci}(t) \quad t \geq 0.$$

Napięcie  $u_{co}(t)$  jest napięciem powstałym w wyniku rozładowania napięcia początkowego na kondensatorze przy wymuszeniu zewnętrznym równym zero. Napięcie  $u_{ci}(t)$  jest napięciem wynikłym z załączenia do obwodu w chwili  $t = 0$  wymuszenia zewnętrznego przy napięciu początkowym na kondensatorze równym zero.

Wobec tego na podstawie zadań 2.1 i 2.35 otrzymamy

$$u_c(t) = \underbrace{u_0 e^{-\frac{t}{RC}}}_{u_{co}(t)} + \underbrace{RI_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}_{u_{ci}(t)} \quad t \geq 0 \quad (2)$$



Rys. 2.36.1

Możemy również  $u_c(t)$  zapisać w postaci

$$u_c(t) = \underbrace{(U_0 - RI_0)}_{\text{stan przejściowy}} e^{-\frac{t}{RC}} + \underbrace{RI_0}_{\text{stan ustalony}} = 1 + 1 e^{-10^3 t} \text{ V}$$

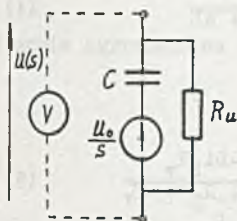
dla  $t \geq 0$

Przebieg napięcia  $u_c(t)$  przedstawia rys. 2.36.1.

### Zadanie 2.37

Schemat zastępczy naładowanego kondensatora z upływnością przedstawiono na rys. 2.37.1. Naładowaną pojemność zastępujemy szeregowym połączeniem pojemności bez warunku początkowego i SEM  $\frac{U_0}{s}$ .

Z prawa Ohma:



Rys. 2.37.1

$$U(s) = \frac{\frac{U_0}{s}}{R_u + \frac{1}{sC}} \quad R_u \hat{=} u(t) = U_0 e^{-t/T}, \quad (1)$$

gdzie:

$T = R_u C$  - stała czasowa obwodu  
dla  $t = t_1$

$$u = 50 e^{-\frac{t}{T}} = 45,3 \text{ V} \quad (2)$$

stąd  $T = 10 \text{ s}$ .

więc dla  $t = t_2$

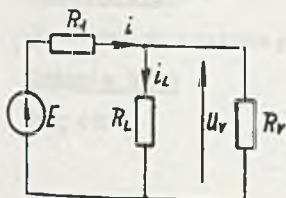
$$10 = 50 e^{-\frac{t_2}{10}} \quad (3)$$

stąd  $t_2 = 16 \text{ s}$ .

### Zadanie 2.38

W stanie ustalonym (dla  $t < 0$ ) prąd płynący w obwodzie określony jest przez  $R_1$ ,  $R_L$  i  $R_v$ . Schemat obwodu przedstawiono na rysunku 2.38.1

Ponieważ  $R_v \gg R_2$  (niezależnie od zakresu pomiarowego woltomierza) można z małym błędem określić  $i_L$  i  $u_v$  ze wzorów:



Rys. 2.38.1

$$i_L \approx \frac{E}{R_1 + R_L} = \frac{20}{200} \text{ A} = 0,1 \text{ A} \quad (1)$$

$$u_v = i_L R_L = 10 \text{ V}. \quad (2)$$

Najbliższy zakres pomiarowy woltomierza wynosi 15 V, więc

$$R_V = 15 \cdot 5 = 75 \text{ k}\Omega. \quad (3)$$

Dla  $t \geq 0$  (po odłączeniu zasilania) należy uwzględnić warunek początkowy na cewce  $i_L(0)$ , gdzie:

$i_L(0)$  - prąd płynący przez cewkę w stanie ustalonym, czyli  
 $i_L(0) = I_L$  - obliczone ze wzoru (1).

Schemat zastępczy obwodu (w postaci operatorowej) pokazano na rys. 2.38.2.

Prąd:

$$I(s) = \frac{Li_L}{R_L + R_V + sL} \quad (4)$$

a napięcie

$$U_V(s) = -I(s)R_V = \frac{-Li_LR_V}{R_V + R_L + sL} \quad (5)$$

Rys. 2.38.2

lub

$$U_V(s) = I(s)R_L + I(s)sL - Li_L. \quad (6)$$

Przechodząc na postać czasową otrzymamy:

$$u_V = -R_V i_L e^{-\frac{t}{T}}, \quad (7)$$

gdzie:

$$T = \frac{L}{R_L + R_V}.$$

Ponieważ  $R_V \gg R_L$ , więc

$$T \approx \frac{L}{R_V} = \frac{0.5}{75 \cdot 10^3} = 6,67 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (8)$$

$$\frac{1}{T} = 150 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$



$$R_V i_L = 75 \cdot 10^3 \cdot 0,1 = 7,5 \cdot 10^3 \text{ V} \quad (9)$$

więc

$$u_V = -7,5 \cdot 10^3 e^{-150 \cdot 10^3 t} \text{ V}. \quad (7')$$

Przebieg czasowy napięcia na woltomierzu

$$U_V = \begin{cases} 10 \text{ V} & \text{dla } t < 0 \\ -7,5 \cdot 10^3 e^{-150 \cdot 10^3 t} \text{ V} & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$

Energia zgromadzona w cewce zostaje rozproszona na opornościach  $R_L$  i  $R_V$

$$W = \frac{1}{2} L i_L^2 = 2,5 \text{ mJ}. \quad (10)$$

$$W = \int_0^{\infty} i^2 (R_V + R_L) dt = R_V \int_0^{\infty} i^2 dt + R_L \int_0^{\infty} i^2 dt.$$

Sprawdźmy wymiarowo:  $\left[ \frac{V_s}{A} \right] [A^2] = [AVs] = [Ws]$ .

Energia pobrana przez woltomierz

$$W_V = W \frac{R_V}{R_V + R_L} \cong W,$$

czyli

$$W_V \cong 2,5 \text{ mWs}.$$

Zwróćmy uwagę, że należy uwzględnić dokładniejszy model elektryczny opisujący własności dynamiczne woltomierza. Model rozpatrywany w tym zadaniu posłużył tylko do zasygnalizowania występujących zjawisk.

#### Zadanie 2.39.

Kondensator posiada upływność,  $R_U = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $t_1 = 2,77 \text{ s}$ .

#### Zadanie 2.40

$$R \leq 400 \Omega$$

Zadanie 2.41

$$E = 625 \text{ V}$$

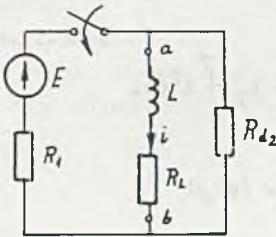
$$u = (-117 e^{-4400t} - 45 e^{-1300t} - 250) \text{ V}.$$

Zadanie 2.42

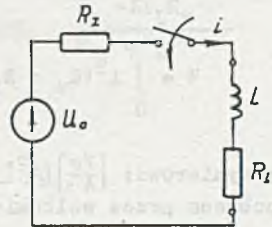
Diodę można zastąpić, w zależności od kierunku płynącego przez nią prądu, opornościami liniowymi

$$R_d = \begin{cases} R_{d1} = \frac{0.2}{10 \cdot 10^{-3}} \Omega = 20 \Omega & \text{dla } i_d \geq 0 \\ R_{d2} = \frac{+20}{1 \cdot 10^{-3}} \Omega = 20 \text{ k}\Omega & \text{dla } i_d < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Przy załączeniu obwodu na SEM E prąd płynie przez diodę w kierunku zaporowym, więc  $R_d = R_{d2}$ . Schemat układu podano na rysunku 2.42.1.



Rys. 2.42.1



Rys. 2.42.2

Prąd  $i$  obliczymy stosując zasadę Thevenina.

Impedancja zastępcza widziana z zacisków a b, przy odłączonej gałęzi z rzeczywistą cewką i przy zwartej SEM E wynosi

$$R_z = R_{ab} = \frac{R_1 R_{d2}}{R_1 + R_{d2}}, \quad (2)$$

a napięcie na zaciskach ab przy odłączonej cewce

$$U_{ab} = U_o = \frac{E}{R_1 + R_{d2}} R'_{d2}. \quad (3)$$

W układzie zastępczym (rys. 2.42.2) można obliczyć prąd korzystając z prawa Ohma

$$I(s) = \frac{\frac{U_0}{s}}{R_z + R_L + sL} \triangleq 1 = \frac{U_0}{R_z + R_L} (1 - e^{-t/T}), \quad (4)$$

gdzie:

$$T = \frac{L}{R_z + R_L} = \frac{R_1 R_{d2} L}{R_1 R_{d2} + R_L} \quad (5)$$

Podstawiając (2) i (3) do (4) otrzymamy

$$i = \frac{ER_{d2}}{R_1 + R_{d2}} \frac{1}{\frac{R_1 R_{d2}}{R_1 + R_{d2}} + R_L} (1 - e^{-t/T}) \quad (4')$$

więc

$$i_u = \frac{ER_{d2}}{R_1 + R_{d2}} \frac{1}{\frac{R_1 R_{d2}}{R_1 + R_{d2}} + R_L} \quad (6)$$

Uwzględniając wartości liczbowe otrzymamy

$$i_u \approx 50 \text{ mA}, \quad T \approx \frac{1}{400} \text{ s} = 2,5 \text{ ms}$$

a

$$i = 50(1 - e^{-400t}) \text{ mA}. \quad (4'')$$

Dla  $t = t_1$

$$i = i_u (1 - e^{-\frac{t_1}{T}}) = 50(1 - e^{-400t_1}) = 0,6 i_u \quad (7)$$



stąd

$$1 - e^{-t_1/T} = 0,6$$

a

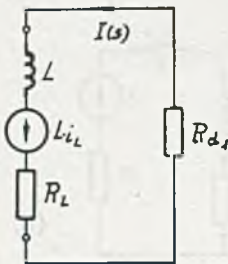
$$e^{t_1/T} = \frac{1}{1 - 0,6} = 2,5 \quad (8)$$

po rozwiązaniu

$$\underline{t_1 = 2,26 \text{ ms}}$$

Po odłączeniu źródła dioda pracuje w kierunku przewodzenia, więc  $R_d = R_{d1}$ . Energia zgromadzona w cewce rozproszona zostaje na rezystancji własnej cewki  $R_L$  i rezystancji diody  $R_{d1}$ .

Schemat układu po odłączeniu źródła pokazano na rys. 2.42.3.



Rys. 2.42.3

$$I(s) = \frac{Li_u}{R_{d1} + R_L + sL} \hat{=} i = i_u e^{-t/T_1}, \quad (9)$$

gdzie

$$T_1 = \frac{L}{R_L + R_{d1}} = \frac{1}{200} \text{ s} = 4,55 \text{ ms} \quad (10)$$

$$\frac{1}{T_1} = 220 \text{ s}^{-1}$$

dla  $t = t_2$

$$i = i_u e^{-t_2/T_1} = 0,4 i_u \quad (11)$$

stąd

$$e^{t_2/T_1} = 2,5$$

a

$$\underline{t_2 = 4,12 \text{ ms}}$$

Zastępując element nieliniowy liniowym rezystorem  $R_2$  otrzymamy, korzystając z zależności (1)-(8), prąd płynący przez cewkę po załączeniu źródła. Przy czym

$$R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 100 \Omega$$

$$U_0 = \frac{E}{2} = 10 \text{ V}$$

$$T' = \frac{L}{R_z + R_L} = \frac{1}{300} \text{ s} = 3,33 \text{ msec},$$

więc

$$\frac{1}{T} = 300 \text{ sek}^{-1}$$

$$i = 33,3(1 - e^{-300t}) \text{ mA.} \quad (12)$$

Dla  $t = t_1$

$$i = 0,6 i_u = 33,3(1 - e^{-300t_1}) \text{ mA}$$

stąd

$$\underline{t'_1 = 3,02 \text{ ms}}$$

Korzystając z zależności (9)-(11) obliczymy prąd płynący przez cewkę, zabocznikowaną opornikiem  $R_2$ , po odłączeniu źródła, gdzie

$$T'_1 = \frac{L}{R_L + R_2} = \frac{1}{400} \text{ s} = 2,5 \text{ ms} = T$$

$$i = i_u e^{-t/T} = 33,3 e^{-400t} \text{ mA.} \quad (13)$$

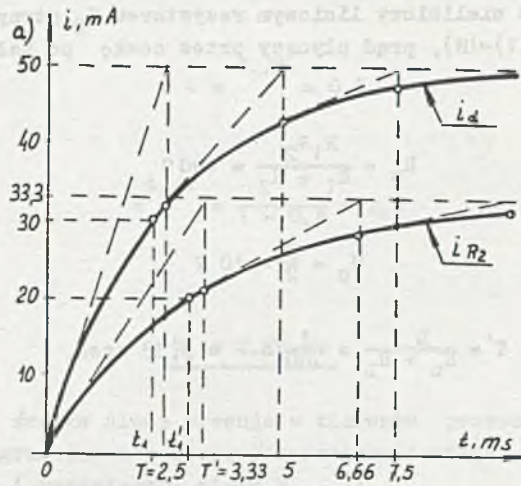
Dla

$$t = t'_2$$

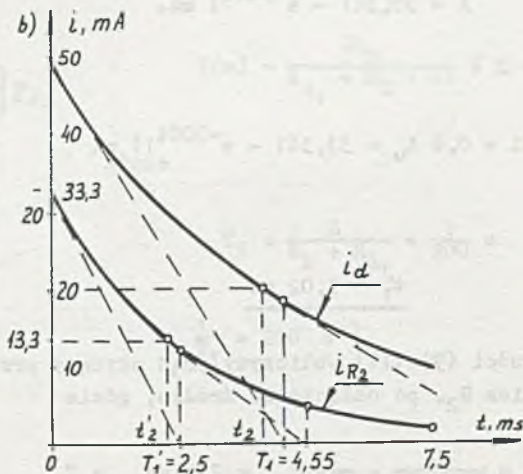
$$i = 0,6 i_u$$

stąd

$$\underline{t'_2 = t_1 = 2,26 \text{ ms}}$$



Rys. 2.42.4a



Rys. 2.42.4b

Przebiegi prądów płynących przez indukcyjność, przy różnych elementach bocznikujących cewkę ( $i_d$  - prąd płynący przez diodę,  $i_{R_2}$  - prąd płynący przez bocznik  $R_2$ ), przy załączeniu (zależności (4'') i (12)) pokazano na rys. 2.42.4a, a przy odłączeniu źródła (zależności (11) i (13)) na rys. 2.42.4b.

Zastosowanie elementu nieliniowego służy do:

- 1) zmniejszenia stałej czasowej (w porównaniu z  $R_2$ ) narastania prądu płynącego przez cewkę po załączeniu zasilania,



- 2) zwiększenia wartości prądu ustalonego  $i_u$  płynącego przez cewkę,
- 3) zwiększenia stałej czasowej rozładowania obwodu z cewką.

Zadanie 2.43

$$R_2 = 1533 \Omega, R_3 = 500 \Omega.$$

Zadanie 2.44

$$i = (10 + 3,33 e^{-133t}) \text{ mA}$$

$$u = 10(1 - e^{-133t}) \text{ V}.$$

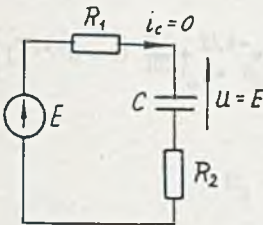
Zadanie 2.45

$$u_1 = 20 e^{-\frac{t}{1,25} 10^3} \text{ V}$$

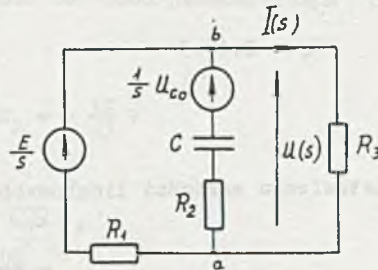
$$u = (14 + 10 e^{-\frac{t}{1,25} 10^3}) \text{ V}$$

Zadanie 2.46

W stanie ustalonym (dla  $t < 0$ ) napięcie na kondensatorze  $u_0 = u_{co} = E$  (rys. 2.46.1). Dołączenie opornika  $R_3$  do układu spowoduje wystąpienie stanu nieustalonego. Nastąpi przeładowanie kondensatora do innej wartości  $u_{co}$  określonej przez parametry obwodu i wartość SEM  $E$ . Schemat układu z uwzględnieniem warunku początkowego na kondensatorze podano na rys. 2.46.2.



Rys. 2.46.1



Rys. 2.46.2

Stosując metodę potencjałów węzłowych mamy

$$v_b(s) \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC}} \right] = \frac{E}{s R_1} + \frac{\frac{U_{co}}{s}}{R_2 + \frac{1}{sC}}, \quad (1)$$

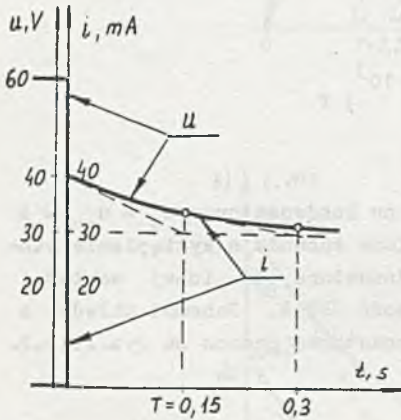
ponieważ

$$R_1 = R_2 = R_3 = R, \quad U_{co} = E$$

otrzymamy

$$V_b(s) \left[ \frac{2}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \right] = \frac{E}{sR} + \frac{E}{s(R + \frac{1}{sC})} \quad (1')$$

$$U(s) = V_b(s) = \frac{2E}{s} \frac{1}{s + \frac{2}{3RC}} + \frac{E}{2} \frac{2}{3RC} \frac{1}{s(s + \frac{2}{3RC})} \quad (1'')$$



a funkcja czasowa

$$u = v_b = \left[ \frac{2E}{s} e^{-t/T} + \frac{E}{2} (1 - e^{-t/T}) \right] v,$$

gdzie

$$T = \frac{3RC}{2} = 0,15 \text{ s}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{20}{3} \text{ s}^{-1},$$

więc

$$i = \frac{v_b}{R_3} = \left[ \frac{2E}{3R} e^{-t/T} + \frac{E}{2R} (1 - e^{-t/T}) \right] A. \quad (2)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$i = (30 + 10 e^{-\frac{20}{3} t}) \text{ mA} \quad \text{dla } t \geq 0$$

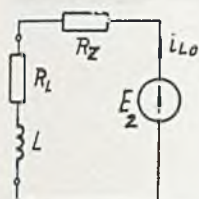
a

$$u = \begin{cases} 60 \text{ V} & \text{dla } t < 0 \\ (30 + 10 e^{-\frac{20}{3} t}) \text{ V} & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$

Przebiegi czasowe napięcia i prądu podano na rys. 2.46.3.

### Zadanie 2.47

Przed dołączeniem SEM  $E_1$  przez cewkę (rys. 2.47.1) płynął prąd

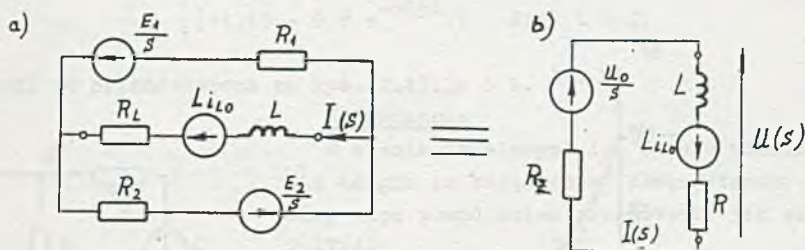


Rys. 2.47.1

$$i_{L0} = \frac{E_2}{R_L + R_Z} = 0,12 \text{ A} \quad (1)$$

$$u = i_{L0} R_L = 6 \text{ V.}$$

Po załączeniu SEM  $E_1$  następuje (trwająca nieskończenie długo) zmiana ilości energii zgromadzonej w cewce do wartości odpowiadającej nowemu stanowi ustalonemu. Ilościowe przebiegi prądu i napięcia wyliczymy ze schematu podanego na rys. 2.47.2a.



Rys. 2.47.2a, b

Stosując zasadę Thevenina można go zastąpić obwodem jednooczkowym (rys. 2.47.2b), gdzie:

$$U_0 = E_2 - \frac{E_2 + E_1}{R_1 + R_2} R_2 = -\frac{10}{3} \text{ V} \quad (3)$$

$$R_Z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200}{3} \Omega. \quad (4)$$

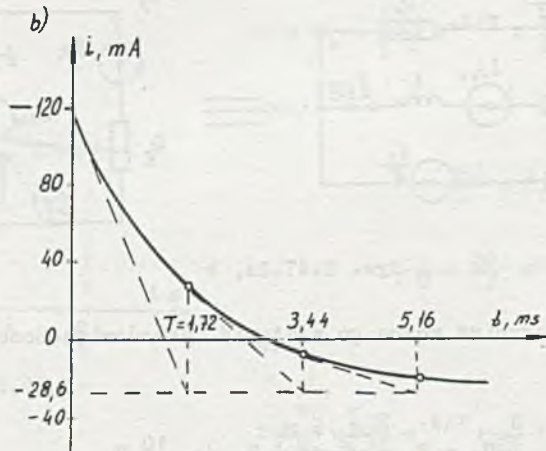
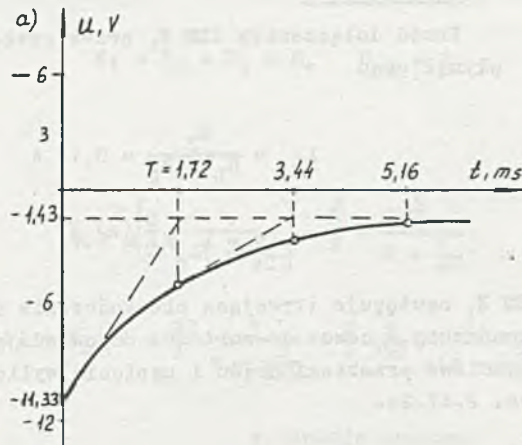
Z prawa Ohma

$$I(s) = \frac{\frac{U_0}{s} + Li_{L0}}{R_Z + R_L + sL} \hat{=} i = \frac{U_0}{R_Z + R_L} (1 - e^{-t/T}) + i_{L0} e^{-t/T} \quad (5)$$

gdzie:

$$T = \frac{L}{R_Z + R_L} \quad (6)$$





Rys. 2.47.3a, b

a

$$U(s) = I(s)(R_L + sL) - Li_{Lo} \quad (7')$$

lub

$$U(s) = U_o - I(s)R_z. \quad (7'')$$

Po podstawieniu (5) do (7'') i transformacji odwrotnej funkcji operatorowej

$$u = \left[ U_o - \frac{U_o}{R_z + R_L} R_z (1 - e^{-t/T}) - i_{Lo} R_z e^{-t/T} \right] V. \quad (8)$$

Podstawiając wartości liczbowe

$$i = [-28,6(1 - e^{-585t}) + 120 e^{-585t}] \text{ mA} \quad (5')$$

$$u = [-1,43 - 9,9 e^{-585t}] \text{ V}. \quad (8')$$

Uwzględniając wartości  $i$  oraz  $u$  przed załączeniem SEM  $E_1$  otrzymamy:

$$i = \begin{cases} 120 \text{ mA} & \text{dla } t < 0 \\ [-28,6(1 - e^{-585t}) + 120 e^{-585t}] \text{ mA} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (5'')$$

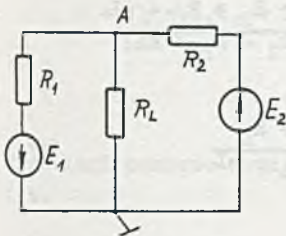
$$u = \begin{cases} +6 \text{ V} & \text{dla } t < 0 \\ [-1,43 - 9,9 e^{-585t}] \text{ V} & \text{dla } t \geq 0. \end{cases} \quad (8'')$$

Przebiegi te przedstawiono na rys. 2.47.3a i b.

#### Sprawdzenie

W stanie ustalonym (po czasie nieskończenie długim po załączeniu) cewka stanowi zwarcie, więc obwód można przedstawić jak na rys. 2.47.4.

Stosując metodę potencjałów węzłowych otrzymamy:



Rys. 2.47.4

$$V_A \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L} \right] = E_2 \frac{1}{R_2} - E_1 \frac{1}{R_1} \quad (9)$$

stąd

$$V_A = u_{\text{ust}} = -1,43 \text{ V},$$

co jest zgodne z wyrażeniem (8'') na napięcie  $u$ , gdy podstawimy  $t = \infty$ .

W chwili załączenia klucza ( $t = 0$ ) prąd płynący przez cewkę zachowuje poprzednią wartość (cewka przeciwdziała zmianom prądu przez nią płynącego) równą 120 mA.

Wynik ten otrzymamy z wyrażenia (5'') podstawiając  $t = 0$ :

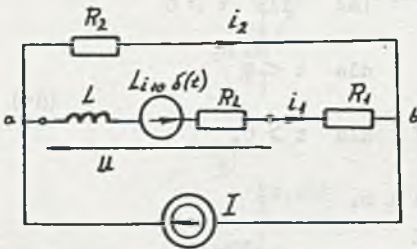
$$i \Big|_{t=0} = 120 \text{ mA}.$$

Zadanie 2.48

$$u = \begin{cases} -150 \text{ V} & \text{dla } t < 0 \\ (+50 - 200 e^{-16,7t}) \text{ V} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.49

Uwzględniając warunek początkowy na cewce ( $i_{10} = I$ ) otrzymamy obwód podany na rys. 2.49.1, z którego stosując metodę potencjałów węzłowych wyznaczamy  $V_a$



Rys. 2.49.1

$$\begin{aligned} V_a(s) \left[ \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_L + sL} \right] &= \\ &= \frac{I}{s} - \frac{Li_{10}}{R_1 + R_L + sL} \end{aligned} \quad (1)$$

stąd

$$\begin{aligned} V_a(s) \frac{R_1 + R_2 + R_L + sL}{R_2(R_1 + R_L + sL)} &= \\ = \frac{\frac{I}{s} (R_1 + R_L) + \frac{I}{s} sL - LI}{R_1 + R_L + sL} &= \frac{I}{s} \frac{R_1 + R_L}{R_1 + R_L + sL} \end{aligned} \quad (1')$$

$$V_a(s) = \frac{I}{s} \frac{(R_1 + R_L)R_2}{R_1 + R_2 + R_L} \frac{1}{sT + 1}, \quad (1'')$$

gdzie:

$$T = \frac{L}{R_1 + R_2 + R_L},$$

co odpowiada

$$V_a(t) = I \frac{(R_1 + R_L)R_2}{R_1 + R_2 + R_L} (1 - e^{-t/T}) \text{ [V]} \quad (2)$$



podstawiając wartości liczbowe otrzymamy:

$$T = \frac{0,2}{400} = \frac{1}{2000} \text{ s} = 0,5 \text{ ms}$$

$$V_a = 5(1 - e^{-2000t}) \text{ V.} \quad (3)$$

Z prawa Ohma

$$i_2 = \frac{V_a}{R_2} = 25(1 - e^{-2000t}) \text{ mA.} \quad (4)$$

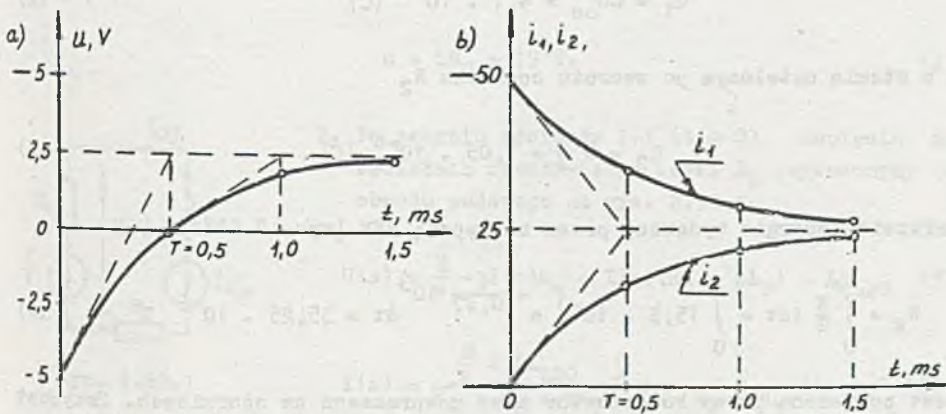
Z I prawa Kirchhoffa

$$i_1 = I - i_2 = 25(1 + e^{-2000t}) \text{ mA} \quad (5)$$

Z II prawa Kirchhoffa

$$\begin{aligned} u &= V_a - i_1 R_1 = 5(1 - e^{-2000t}) - 25 \cdot 10^{-3} \cdot 100(1 + e^{-2000t}) = \\ &= (2,5 - 7,5 e^{-2000t}) \text{ V.} \end{aligned} \quad (6)$$

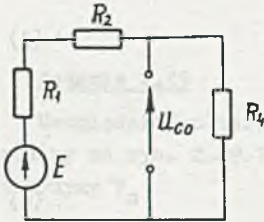
Przebiegi czasowe napięcia  $u$  oraz prądów  $i_1$  i  $i_2$  podano na rys. 2.49.2a i b.



Rys. 2.49.2a, b

Zadanie 2.50

1. W stanie ustalonym (dla  $t < 0$ ) napięcie na kondensatorze  $u_{co} = \frac{E}{3} = 10 \text{ V}$  (rys. 2.50.1).



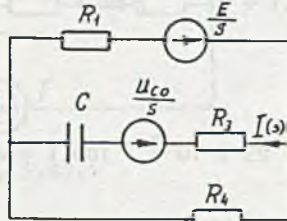
Rys. 2.50.1

2. W chwili  $t = 0$  po zwarciu opornika  $R_2$  następuje zmiana energii  $W_C$  zgromadzonej między okładkami kondensatora.

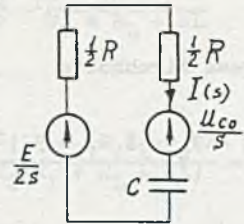
Obwód można przedstawić jak na rys. 2.50.2a. Stosując zasadę Thevenina (rys. 2.50.2b) obliczymy prąd z zależności:

$$I(s) = \frac{\frac{E}{2s} - \frac{u_{co}}{s}}{\frac{R}{2} + \frac{R}{2} + \frac{1}{sC}} \quad \text{z} \quad i = 5 e^{-0,47 \cdot 10^3 t} \text{ mA} \quad (1)$$

a)



b)



Rys. 2.50.2a, b

Ładunek zgromadzony na okładkach kondensatora przed zwarciem opornika  $R_2$

$$Q_1 = C u_{co} = 4,7 \cdot 10^{-6} \text{ [C]} \quad (2)$$

a w stanie ustalonym po zwarciu opornika  $R_2$

$$Q_2 = C \frac{E}{2} = 7,05 \cdot 10^{-6} \text{ [C]} \quad (3)$$

Całkowita energia wydawana przez zastępczą SEM (rys. 2.50.2b)

$$W_E = \int_0^{\infty} \frac{E}{2} i dt = \int_0^{\infty} 15,5 \cdot 10^{-3} e^{-\frac{t}{0,47 \cdot 10^{-3}}} dt = 35,25 \cdot 10^{-6} \text{ J} \quad (4)$$

jest pobierana przez kondensator oraz rozpraszana na opornikach. Przyrost energii kondensatora:

$$W_C = \frac{1}{2} C \left[ \left( \frac{E}{2} \right)^2 - u_{co}^2 \right] = \frac{1}{2} 0,47 \cdot 10^{-6} (15^2 - 10^2) \text{ J} = 29,375 \cdot 10^{-6} \text{ J}. \quad (5)$$

Z równania bilansu

$$W_E = W_C + W_{R_3} + W_{R_2} \quad (6)$$

stąd:

$$W_{R_3} = W_{R_2} = \frac{1}{2} (W_E - W_C) = 2,94 \cdot 10^{-6} \text{ J.} \quad (7)$$

Energię rozproszoną na oporniku  $R_3$  można też obliczyć wprost z zależności:

$$W_{R_3} = \int_0^{\infty} i^2 R_3 dt = \int_0^{\infty} 25 \cdot 10^{-6} e^{-\frac{2t}{T}} 500 dt = 2,94 \cdot 10^{-6} \text{ J.} \quad (8)$$

#### Zadanie 2.51

$$u = 0,$$

$$i = 0.$$

#### Zadanie 2.52

Ad a)

1. W stanie ustalonym ( $t < 0$ ) prąd płynący przez cewki

$$i = i_{L10} = i_{L20} = \frac{E}{R_w + R_1 + R_2} = 15 \text{ mA} \quad (1)$$

a napięcie

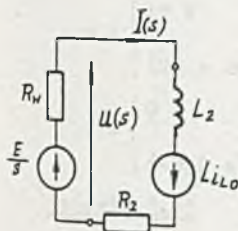
$$u = iR_2 = 15 \text{ V.} \quad (2)$$

2. Po zwarceniu zacisków 1-1' ( $t \geq 0$ ) napięcie na zaciskach rzeczywistej cewki  $L_2$  wyznaczymy z obwodu podanego na rys. 2.52.1

$$U(s) = \frac{E}{s} - I(s)R_w = I(s)(R_2 + sL_2) - Li_{L20} \quad (3)$$

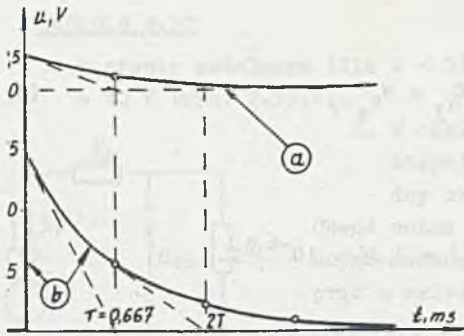
$$I(s) = \frac{\frac{E}{s} + Li_{L20}}{R_w + R_2 + sL_2} \hat{=} i = \frac{E}{R_w + R_2} (1 - e^{-t/T}) +$$

$$+ i_{L20} e^{-t/T}, \quad (4)$$



Rys. 2.52.1





Rys. 2.52.2

gdzie:

$$T = \frac{L_2}{R_w + R_2} = 0,66 \text{ msek}$$

$$\frac{1}{T} = 1500 \text{ sek}^{-1},$$

włec

$$u = E - \frac{ER_w}{R_w + R_2} (1 - e^{-t/T}) -$$

$$- iL_{20}R_w e^{-t/T} = (20 + 2,5 e^{-1500t}) \text{ V.} \quad (3')$$

Wykres czasowy napięcia podano na rys. 2.52.2 - krzywa a.

Ad b)

. W stanie ustalonym

$$i = i_{L20} = \frac{E}{R_w + R_1} = 30 \text{ mA} \quad (5)$$

$$u = 0 \quad (6)$$

. Po zwarcu cewki pierwszej

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s} + L_1 i_{L20}}{R_w + sL_2} \hat{=} i = \frac{E}{R_w} (1 - e^{-t/T_1}) + i_{L20} e^{-t/T_1} \quad (7)$$

$$T_1 = \frac{L_2}{R_w} = 2 \text{ msek}$$

$$\frac{1}{T_1} = 500 \text{ sek}^{-1}$$

napięcie

$$u = E - iR_w = E - E(1 - e^{-t/T_1}) - i_{L20}R_w e^{-t/T_1} + 15 e^{-500t} \text{ V.} \quad (8)$$

Przebieg czasowy podano na rys. 2.52.2 - krzywa b.

Zadanie 2.53

$$u = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ (7,5 + 2,5 e^{-500t}) \text{ V} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$
$$i = \begin{cases} 0,2 \text{ A} & \text{dla } t < 0 \\ (0,15 - 0,05 e^{-500t}) \text{ A} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.54

$$i = \begin{cases} 0,1 \text{ A} & \text{dla } t < 0 \\ [0,1 + 0,05(1 - e^{-1000t})] \text{ A} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$
$$u = \begin{cases} 20 \text{ V} & \text{dla } t < 0 \\ 10(1 + e^{-1000t}) \text{ V} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.55

$$u = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 5 e^{-200t} \text{ V} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$
$$i = \begin{cases} 50 \text{ mA} & \text{dla } t < 0 \\ (100 - 50 e^{-200t}) \text{ mA} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.56

$$u = \begin{cases} 10 \text{ V} & \text{dla } t < 0 \\ (15 - 5 e^{-400t}) \text{ V} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$
$$i = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 0,1 e^{-400t} \text{ A} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.57

$$u = \begin{cases} 42 \text{ V} & \text{dla } t < 0 \\ (22 + 20 e^{-1000t}) \text{ V} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$
$$i = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ (-0,2 e^{-1000t}) \text{ A} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.58

$$u = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ -25 e^{-1000t} \text{ V} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$
$$i = \begin{cases} 0,1 \text{ A} & \text{dla } t < 0 \\ (0,05 + 0,05 e^{-1000t}) \text{ A} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

Zadanie 2.59

$$u = 0, \quad u_1 = 50 \text{ V}$$

Zadanie 2.60

$$i = 0$$

Zadanie 2.61

$$u = 0$$

Zadanie 2.62

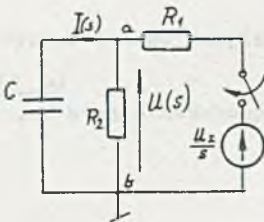
Ponieważ obwody przy załączonym i odłączonym kluczu są różne rozbijamy obliczenia na 2 przedziały:

1° dla  $0 \leq t < t_1$  - gdy załączony jest klucz K,

2° dla  $t \geq t_1$  - po odłączeniu klucza K.

Ad 1°)

Schemat podany na rys. 2.62.1 przedstawia obwód tematowy, narysowany w postaci przyjętej w teorii obwodów, po zamknięciu klucza K. Stosując metodę potencjałów węzłowych, gdy



Rys. 2.62.1

$$v_b = 0$$

otrzymamy

$$v_a(s) \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC \right] = \frac{U_z}{s} \frac{1}{R_1} \quad (1)$$

stąd

$$v_a(s) = U(s) = \frac{U_z}{s} \frac{1}{sCR_1 + 1 + \frac{R_1}{R_2}} \hat{=} u = \frac{U_z R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/T}), \quad (1')$$

gdzie

$$T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = 1,6 \text{ s}$$

$$\frac{1}{T} = 0,625 \text{ s}^{-1}$$



po podstawieniu

$$u = 32(1 - e^{-0,625t}) \text{ V} \quad (1'')$$

dla  $t = t_1 = 1 \text{ s}$

$$u(t_1) = U_{co} = 32(1 - e^{-0,625 \cdot 1}) = 14,87 \text{ V.} \quad (2)$$

Prąd płynący przez kondensator obliczymy ze znanej zależności

$$i = C \frac{du}{dt} = C \frac{1}{T} \frac{U_z R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/T} = \frac{U_z}{R_1} e^{-t/T} = 4 \cdot e^{-0,625t} \text{ mA} \quad (3)$$

dla  $t = t_1 = 1 \text{ s}$

$$i(t_1) = 4 e^{-0,625 \cdot 1} \text{ mA} = 2,14 \text{ mA.} \quad (4)$$

Ad 2°

Po odłączeniu klucza kondensator, ładowany poprzednio ze źródła  $U_z$ , rozładowuje się przez rezystor  $R_2$ . Schemat obwodu rozładowania podano na rys. 2.62.2. Dla ułatwienia zaczynamy liczyć czas od  $t_1$ , wówczas  $t' = 0$  dla  $t = t_1$ .

Można zauważyć, że

$$u = U_{co} e^{-t'/T_1} = 14,8 e^{-0,125t'} \text{ V,} \quad (5)$$

gdzie:

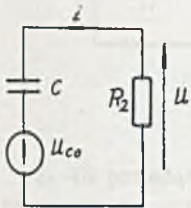
$$T_1 = R_2 C = 8 \text{ s.}$$

$$\frac{1}{T_1} = 0,125 \text{ s}^{-1}$$

$$i = - \frac{U_{co}}{R_2} e^{-t'/T_1} = -0,37 e^{-0,125t'} \text{ mA.} \quad (6)$$

Dla  $t' = t_2$

$$u = 14,8 e^{-0,125t_2} \text{ V} = 1 \text{ V} \quad (7)$$



Rys. 2.62.2

stąd

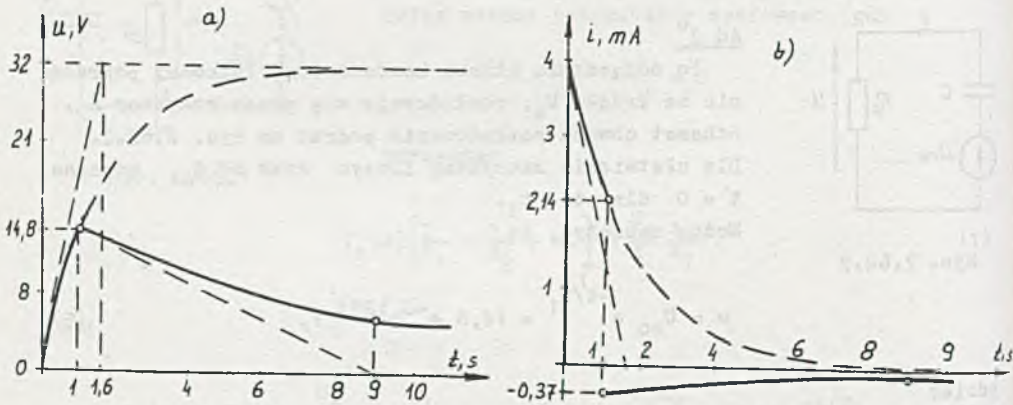
$$\underline{t_2 = 21,595 \text{ s}}$$

Przebiegi czasowe napięcia  $u$  oraz prądu  $i$  można zapisać następująco:

$$u = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 32(1 - e^{-0,625t}) \text{ V} & \text{dla } 0 \leq t < t_1 \\ 14,8 e^{-0,125t} \text{ V} & \text{dla } t \geq t_1 (t' \geq 0) \end{cases} \quad (8)$$

$$i = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 4 e^{-0,625t} \text{ mA} & \text{dla } 0 \leq t < t_1 \\ -0,37 e^{-0,125t} \text{ mA} & \text{dla } t \geq t_1 (t' \geq 0) \end{cases} \quad (9)$$

co ilustruje rys. 2.62.3.



Rys. 2.62.3

Zadanie 2.63

$$U_3 = 20 \text{ V}, \quad U_2 = 31 \text{ V}, \quad U_1 = 43,55 \text{ V}$$

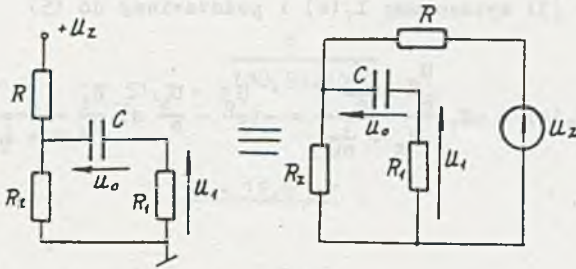
$$E = 58,28 \text{ V}, \quad P_E = 0,86 \text{ W}.$$

Zadanie 2.64

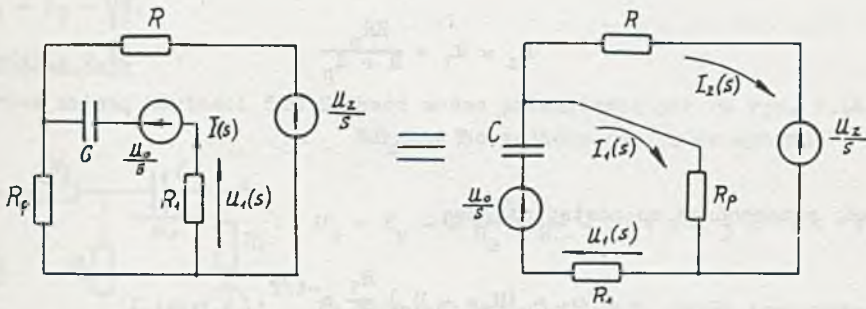
1. W stanie ustalonym (przełącznik  $K$  w pozycji 1) można przedstawić obwód jak na rys. 2.64.1.

Ponieważ prąd przez kondensator nie płynie (stan ustalony), więc

$$U_0 = \frac{U_z}{R + R_z} R_z = 273 \text{ V}. \quad (1)$$



Rys. 2.64.1



Rys. 2.64.2

2. Po przełączeniu K w pozycję 2 obwód przedstawiony jest na rys.2.64.2. Ponieważ  $R_p < R_z$ , więc następuje wyładowanie kondensatora. Korzystamy z metody prądów oczkowych

$$I_1(s)(R_1 + R_p + \frac{1}{sC}) - I_2(s)R_p = \frac{U_o}{s} \quad (2)$$

$$-I_1(s)R_p + I_2(s)(R_p + R) = -\frac{U_z}{s} \quad (3)$$

ponadto

$$I_1(s) = I(s) \quad (4)$$

oraz

$$U_1(s) = -I(s)R_1 \quad (5)$$



Z równań (2) i (3) wyznaczamy  $I_1(s)$  i podstawiamy do (5)

$$U_1(s) = -R_1 \frac{\frac{U_0}{s} - \frac{U_z}{s} a}{R_z + \frac{1}{sC}} = -\left(\frac{U_0}{s} - \frac{U_z}{s} a\right) \frac{R_1}{R_z} \frac{s}{s + \frac{1}{T}}, \quad (5')$$

gdzie:

$$a = \frac{R_p}{R_p + R}$$

$$R_z = R_1 + \frac{RR_p}{R + R_p}$$

$$T = R_z C$$

stąd, przechodząc na postać czasową

$$u_1 = (U_z a - U_0) \frac{R_1}{R_z} e^{-t/T}. \quad (5'')$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$a = \frac{1}{21}$$

$$R_z = 100,95 \text{ k}\Omega$$

$$\frac{R_1}{R_z} = 0,99$$

$$T = 100,95 \cdot 10^3 \text{ C s}$$

$$u_1 = \left(\frac{300}{21} - 273\right) 0,99 e^{-\frac{t}{100,95 \cdot 10^3 \text{ C}}} \text{ V} = -256 e^{-\frac{t}{100,95 \cdot 10^3 \text{ C}}} \text{ V} \quad (6)$$

dla  $t_1 = 5 \text{ s}$

$$u_1 = -256 e^{-\frac{5}{100,95 \cdot 10^3 \text{ C}}} \text{ V} = -5 \text{ V} \quad (7)$$

stąd

$$51,2 = e^{\frac{5}{100,95 \cdot 10^3 C}}$$

a

$$C = 12,6 \mu F.$$

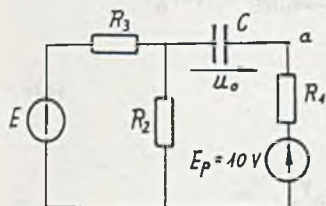
### Zadanie 2.65

$$i = [0,1(1 - e^{-10^5 t}) + 0,05 e^{-0,2 \cdot 10^5 t}] A$$

$$R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

### Zadanie 2.66

Przed zmianą wartości SEM  $E$  obwód można przedstawić jak na rys. 2.66.1  
Warunek początkowy na kondensatorze



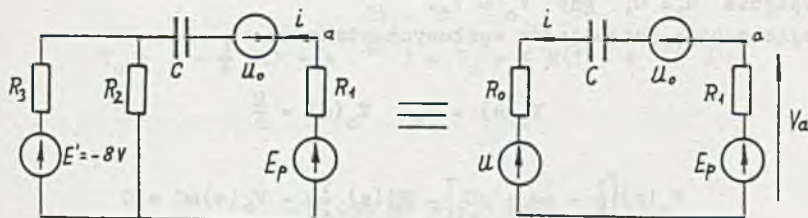
$$U_o = E_p - E \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 10 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 11 V \quad (1)$$

Po skokowej zmianie SEM  $E$  obwód jest równoważny rys. 2.66.2, gdzie:

Rys. 2.66.1

$$U = E' \frac{R_2}{R_2 + R_3} = -4 V \quad (2)$$

$$R_o = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1 k\Omega, \quad (3)$$



Rys. 2.66.2

włęc

$$i = \frac{E_p - U_o - U}{R_o + R_1} e^{-t/T} = 1,5 e^{-10^4 t} mA, \quad (4)$$

gdzie:

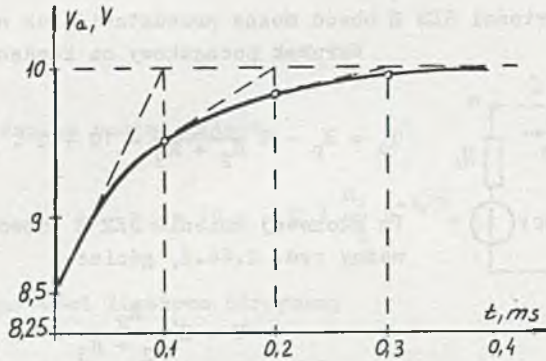
$$T = C(R_0 + R_1) = 0,05 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ sek} = 0,1 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{T} = 10^4 \text{ s}^{-1},$$

więc

$$V_a = E_0 - iR_1 = 10 - 1,5 e^{-10^4 t} \text{ V.} \quad (5)$$

Przebieg czasowy podano na rys. 2.66.3.



Rys. 2.66.3

### Zadanie 2.67

Napięcie  $u = 0$ , gdy  $V_c = V_d$ .

Stosując metodę potencjałów węzłowych otrzymamy:

$$V_a(s) = 0, \quad V_b(s) = \frac{E}{s} \quad (1)$$

$$V_c(s) \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + sC \right] - V_d(s) \frac{1}{2R} - V_b(s) sC = 0 \quad (2)$$

$$V_d(s) \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + sC \right] - V_c(s) \frac{1}{2R} - V_b(s) \frac{1}{R} = 0. \quad (3)$$



Po rozwiązaniu

$$V_d(s) = \frac{6E}{4sC^2R^2} \frac{1 + sCR}{s^2 + 3s \frac{1}{RC} + \frac{2}{R^2C^2}} = \frac{6E}{4sC^2R^2} \frac{RC(s + \frac{1}{RC})}{(s + \frac{2}{RC})(s + \frac{1}{RC})} = \frac{3E}{2sRC} \frac{1}{s + \frac{2}{RC}} \quad (4)$$

więc

$$\mathcal{L}^{-1}\{V_d(s)\} = v_d = \frac{3}{4} E(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}) \quad (4')$$

ale

$$V_c(s) = \frac{3E}{2RCs} \frac{2RC(s + \frac{3}{2RC})}{(s + \frac{2}{RC})} - 2 \frac{E}{s} = 3 \frac{E}{s} \frac{s + \frac{3}{2RC}}{s + \frac{2}{RC}} - 2 \frac{E}{s} \quad (5)$$

więc

$$\mathcal{L}^{-1}\{V_c(s)\} = v_c = E - \frac{3}{4} E(1 - e^{-\frac{2t}{RC}}). \quad (5')$$

Dla  $t = t_1$

$$v_c(t_1) = v_d(t_1)$$

więc

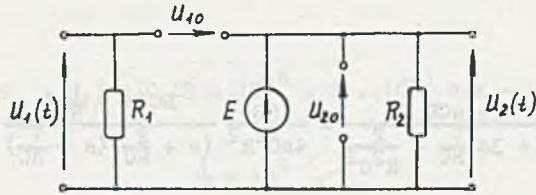
$$v_c = E - \frac{3}{4} E(1 - e^{-\frac{2t_1}{RC}}) = v_d = \frac{3}{4} E(1 - e^{-\frac{2t_1}{RC}}) \quad (6)$$

stąd

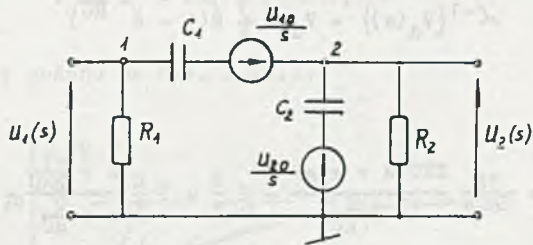
$$t_1 = 1,099 \frac{RC}{2} = 5,5 \text{ ms.}$$

### Zadanie 2.68

Dla  $t < 0$  (w stanie ustalonym) tematowy obwód jest równoważny obwodowi przedstawionemu na rys. 2.68.1.



Rys. 2.68.1



Rys. 2.68.2

Wówczas

$$U_{10} = U_{20} = E$$

1

$$u_1(t) = 0, \quad u_2(t) = E$$

a obwód po otwarciu klucza można przedstawić jak na rys. 2.68.2.  
Z równań węzłowych

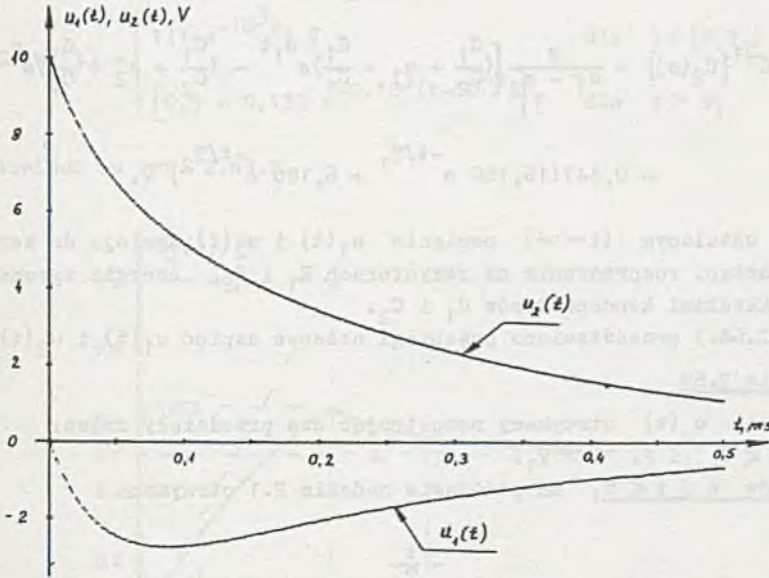
$$V_1(s)(G_1 + sC_1) - V_2(s)sC_1 = -\frac{U_{10}}{s} sC_1$$

$$-V_1(s)sC_1 + V_2(s)(G_2 + sG_1 + sC_2) = \frac{U_{10}}{s} sC_1 + \frac{U_{20}}{s} sC_2$$

$$V_1(s) = U_1(s) = \frac{U_{20}s - U_{10}(s + \frac{G_2}{C_2})}{s^2 + s \frac{C_1G_1 + C_1G_2 + C_2G_1}{C_1C_2} + \frac{G_1G_2}{C_1C_2}}$$

ORAZ

$$V_2(s) = U_2(s) = \frac{U_{10} \frac{G_1}{C_2} + U_{20} (s + \frac{G_1}{C_1})}{s^2 + s \frac{C_1 G_1 + C_1 G_2 + C_2 G_1}{C_1 C_2} + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2}}$$



Rys. 2.68.3

Przyrównując mianownik do zera otrzymamy

$$M(s) = s^2 + s \frac{C_1 G_1 + C_1 G_2 + C_2 G_1}{C_1 C_2} + \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2} = (s - s_1)(s - s_2) = 0$$

a podstawiając wartości liczbowe

$$s_1 = -3,8197 \text{ s}^{-1} \quad \text{ i } \quad T_1 = -\frac{1}{s_1} = 0,2618 \text{ s}$$

ORAZ

$$s_2 = -26,1803 \text{ s}^{-1} \quad \text{ i } \quad T_2 = -\frac{1}{s_2} = 0,0382 \text{ s}$$



Więc przebiegi czasowe napięć  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  są następujące

$$u_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_1(s)\} = \frac{E \frac{G_2}{C_2}}{s_1 - s_2} (e^{s_2 t} - e^{s_1 t}) = 4,472(e^{-t/T_2} - e^{-t/T_1}) \text{ V}$$

oraz

$$\begin{aligned} u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_2(s)\} &= \frac{E}{s_1 - s_2} \left[ \left( \frac{G_1}{C_2} + s_1 + \frac{G_1}{C_1} \right) e^{s_1 t} - \left( \frac{G_1}{C_2} + s_2 + \frac{G_1}{C_1} \right) e^{s_2 t} \right] = \\ &= 0,447(16,180 e^{-t/T_1} + 6,180 e^{-t/T_2}) \text{ V.} \end{aligned}$$

W stanie ustalonym ( $t \rightarrow \infty$ ) napięcia  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  zmniejszają się do zera, ponieważ nastąpi rozproszenie na rezystorach  $R_1$  i  $R_2$ , energii zgromadzonej między okładkami kondensatorów  $C_1$  i  $C_2$ .

Na rys. 2.68.3 przedstawiono przebiegi czasowe napięć  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$ .

#### Zadanie 2.69

Napięcie  $u_c(t)$  otrzymamy rozpatrując dwa przedziały czasu:

1)  $0 \leq t \leq T_1$  i 2)  $t > T_1$ .

Dla czasów  $0 \leq t \leq T_1$  na podstawie zadania 2.1 otrzymamy

$$u_c(t) = I_0 R_1 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) = 1(1 - e^{-10^3 t}) \text{ V,} \quad (1)$$

gdzie

$T_1 = R_1 C = 1 \text{ ms}$  — stała czasowa obwodu dla  $t \in [0, T_1]$ .

W chwili  $t = T_1$  napięcie na kondensatorze osiągnie wartość

$$U_c(T_1) = I_0 R_1 (1 - \frac{1}{e}) = 0,632 \text{ V.}$$

Dla czasów  $t > T_1$  napięcie  $u_c(t)$  obliczymy stosując zasadę superpozycji w chwili  $t = T_1$  została załączona SPM  $I_0$  i rozpoczęło się rozładowanie napięcia  $u_c(T_1)$ . Wobec tego na podstawie zadania 2.36 otrzymamy

$$\begin{aligned} u_c(t) &= R_1 I_0 (1 - \frac{1}{e}) e^{-\frac{(t-T_1)}{T_2}} + I_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-\frac{t-T_1}{T_2}}) = \\ &= [0,632 e^{-2 \cdot 10^3 (t-10^{-3})} + 0,5(1 - e^{-2 \cdot 10^3 (t-10^{-3})})] \text{ V dla } t > T_1 \quad (2) \end{aligned}$$

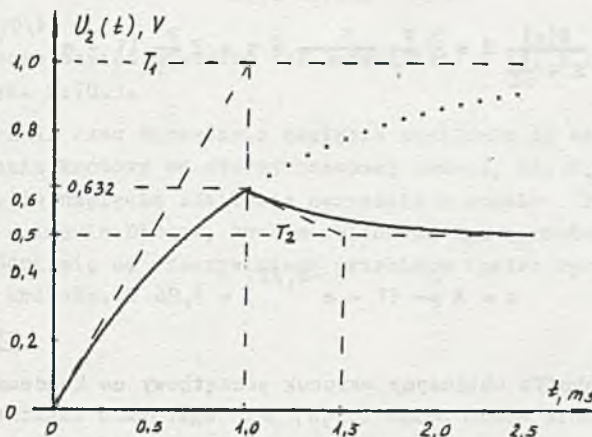
gdzie:

$$T_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = 0,5 \text{ ms.}$$

przebieg napięcia

$$u_2(t) = \begin{cases} 1(1 - e^{-10^3 t}) \text{ V} & \text{dla } t \in [0, T_1] \\ [0,5 + 0,132 e^{-2 \cdot 10^3 (t - 10^{-3})}] \text{ V} & \text{dla } t > T_1 \end{cases}$$

przedstawiono na rys. 2.69.1.



Rys. 2.69.1

### Zadanie 2.70

Ad a)

Ze znanych zależności wyznaczmy

$$u = E e^{-t/T}, \quad (1)$$

gdzie:

$$T = RC = 2 \text{ ms}$$

$$\frac{1}{T} = 500 \text{ s}^{-1}$$

więc

$$u = 10 e^{-500t} \text{ V.} \quad (1')$$

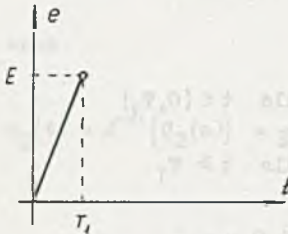
Ad b)

Przebieg czasowy napięcia  $e$  można przedstawić jak na rysunku 2.70.1. Dla umożliwienia obliczeń przeprowadzimy je oddzielnie dla dwóch przedziałów czasowych:

1°  $0 \leq t < T_1$  oraz

2°  $t \geq T_1$ .

1° W przedziale tym



$$e = \frac{E}{T_1} t \triangleq \frac{E}{s T_1} = E(s), \quad (2)$$

więc

Rys. 2.70.1

$$U(s) = \frac{E(s)}{R + \frac{1}{sC}} R = \frac{E}{s} \frac{T}{T_1} \frac{1}{sT + 1} \triangleq u = E \frac{T}{T_1} (1 - e^{-t/T_1}), \quad (3)$$

gdzie:

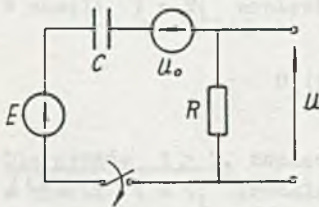
$$T = RC = 2 \text{ ms}$$

$$\text{dla } t = T_1$$

$$u = E \frac{T}{T_1} (1 - e^{-T_1/T}) = 7,86 \text{ V}. \quad (4)$$

Z II prawa Kirchhoffa obliczymy warunek początkowy na kondensatorze C

$$U_0 = E - u = 2,14 \text{ V} \quad (5)$$



Rys. 2.70.2

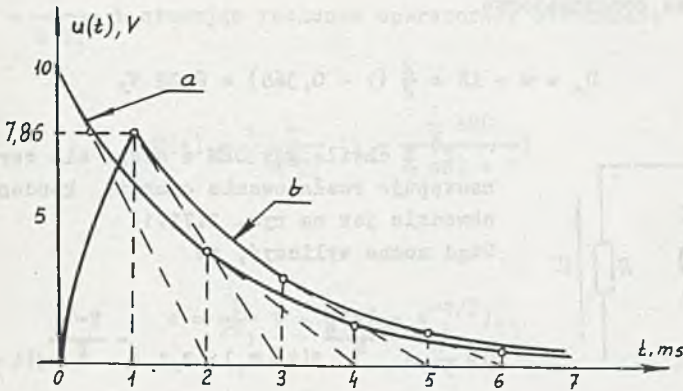
2° Wprowadźmy czas  $t' = 0$  dla  $t = T_1$  (przesunięcie o  $T_1$  osi czasu). Napięcie na oporniku będzie superpozycją napięcia spowodowanego rozładowaniem się warunku początkowego na kondensatorze oraz napięcia od działania SEME załączonej w chwili  $t = 0$  (rys. 2.70.2).  
Więc

$$u = (E - U_0)e^{-t'/T} = 7,85 e^{-500t'} \text{ V}, \quad (6)$$

czyli

$$u = \begin{cases} 20(1 - e^{-500t}) \text{ V} & \text{dla } 0 \leq t < T_1 \\ 7,85 e^{-(t-T_1)500} \text{ V} & \text{dla } t \geq T_1. \end{cases} \quad (7)$$





Rys. 2.70.3

Przebiegi czasowe napięć  $u$  według zależności (1') - (a) i (7) - (b) przedstawiono na rys. 2.70.3.

Wniosek: Jeżeli czas narastania napięcia zasilania do wartości ustalonej jest znacznie krótszy od stałej czasowej obwodu, tj.  $T_1 < T$ , wówczas można założyć, że napięcie zasilania narastało w czasie bardzo krótkim (przypadek a) - impuls Diraca, bowiem obliczone tym sposobem napięcie  $u$  nieznacznie różni się od rzeczywistego przebiegu (patrz rys. 2.70.3), a obliczenia są krótsze.

#### Zadanie 2.71

Ad a)

<sup>10</sup> Dla przedziału czasowego  $t \in [0, T_1)$  układ można traktować jak przy załączeniu stałego napięcia, więc

$$u = \frac{E}{2} - \frac{E}{5} e^{-t/T}, \quad (1)$$

gdzie:

$$T = \frac{3}{2} RC = 30 \text{ ms} = T_1$$

więc

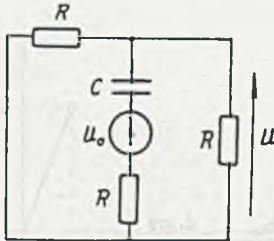
$$u = \left[ 10 - \frac{10}{5} e^{-t/T_1} \right] \text{ V}$$

dla  $t = T_1$

$$u = \left[ 10 - \frac{10}{5} 0,368 \right] \text{ V} = 8,77 \text{ V}$$

a napięcie na kondensatorze

$$U_0 = u - iR = \frac{E}{2} (1 - 0,368) = 6,32 \text{ V.}$$



Rys. 2.71.1

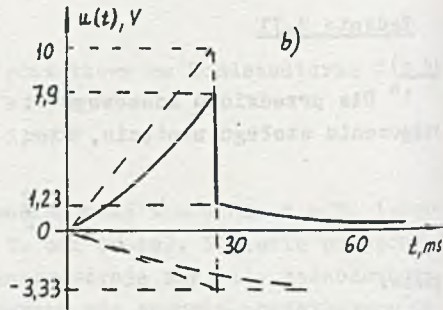
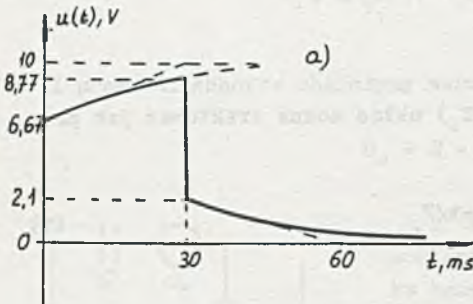
2° Z chwilą gdy SEM e staje się zerem ( $t \geq T_1$ ) następuje rozładowanie energii kondensatora w obwodzie jak na rys. 2.71.1. Stąd można wyliczyć, że

$$u = \frac{U_0}{2} e^{-\frac{t-T_1}{T_1}} 1(t-T_1) = 2,1 e^{-\frac{t-T_1}{T_1}} 1(t-T_1) \text{ V. (2)}$$

Napięcie

$$u = \begin{cases} 10 - \frac{10}{3} e^{-t/T_1} \text{ V} & \text{dla } t \in [0, T_1) \\ 2,1 e^{-\frac{t-T_1}{T_1}} 1(t-T_1) \text{ V} & \text{dla } t \in [T_1, \infty) \end{cases}$$

co przedstawiono na rysunku 2.71.2a.



Rys. 2.71.2a, b

Ad b)

1° Dla  $t \in [0, T_1)$

$$e = \frac{E}{T_1} t,$$

więc  $E(s) = \frac{E}{s^2 T_1}$  i stosując rachunek operatorowy otrzymamy:

$$U(s) = \frac{1}{2} \frac{E}{s^2 T_1} \left( 1 - \frac{\frac{1}{2} sRC}{\frac{3}{2} sRC + 1} \right) \quad (1)$$

stąd

$$u = \frac{E}{2T_1} t - \frac{E}{6} (1 - e^{-t/T}), \quad (1')$$

gdzie

$$T = \frac{3}{2} RC = 30 \text{ ms} = T_1$$

dla  $t = T_1$

$$u = \frac{E}{2} - \frac{E}{6} (1 - e^{-1}) V = 7,9 \text{ V}$$

napiecie na kondensatorze

$$u_c = \frac{E}{2T_1} t - \frac{E}{2} (1 - e^{-t/T}) \quad (2)$$

w chwili  $t = T_1$

$$u_c = U_0 = \frac{E}{2} e^{-1} = 3,68 \text{ V.}$$

2° Dla  $t \geq T_1$  następuje rozładowanie kondensatora, więc

$$u = \frac{U_0}{3} e^{-\frac{t-T_1}{T}} 1(t - T_1) = 1,23 e^{-\frac{t-T_1}{T}} 1(t - T_1) \text{ V} \quad (3)$$

Przebieg czasowy napięcia

$$u = \begin{cases} \frac{E}{2T_1} t - \frac{E}{6} (1 - e^{-t/T}) & \text{dla } t \in [0, T_1) \\ \frac{U_0}{3} e^{-\frac{t-T_1}{T}} 1(t - T_1) & \text{dla } t \geq T_1 \end{cases}$$

przedstawia rys. 2.71.2b.



Zadanie 2.72

1° Dla  $t \in [0, T_0]$  napięcie  $e = \frac{E}{T_0} t$ , więc

$$I(s) = \frac{E(s)}{3R + sL} = \frac{E}{s^2 T_0 L} \frac{1}{s + \frac{3R}{L}} \quad (1)$$

a

$$\begin{aligned} U(s) &= E(s) \left( 1 - \frac{2R}{L} \frac{1}{s + \frac{3R}{L}} \right) = \frac{E}{s^2 T_0} - \frac{E}{T_0 L} \frac{2R}{s^2 (s + \frac{3R}{L})} = u = \\ &= \frac{E}{T_0} t - \frac{2}{3} \frac{E}{T_0} [t - T(1 - e^{-t/T})], \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

$T = \frac{L}{3R}$  stała czasowa obwodu.

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$u = [100t + 2(1 - e^{-100t})] \text{ V}. \quad (2')$$

Z zależności (1) wyznaczmy prąd

$$I(s) = \frac{E}{T_0 L} \frac{1}{s^2 (s + \frac{3R}{L})} \hat{=} i = \frac{E}{T_0 L} T^2 \left[ \frac{t}{T} - (1 - e^{-t/T}) \right]$$

ale  $T = T_1 = T_0$ , więc

$$i = \frac{E}{L} t - \frac{E}{L} T(1 - e^{-t/T}) = [10t - 10^{-1}(1 - e^{-100t})] \text{ A}$$

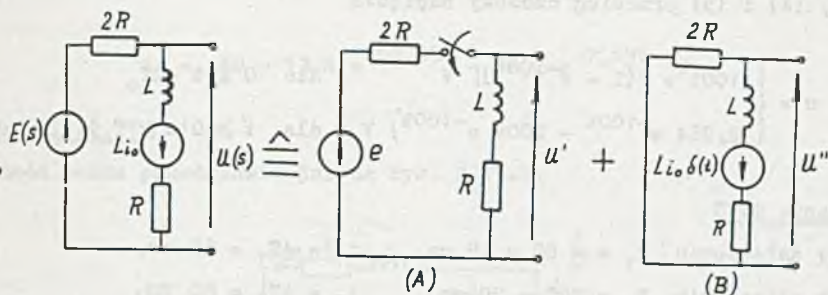
dla  $t = T_0$

$$i = i_0 = 36,8 \text{ mA}.$$

2° Stosując zasadę superpozycji, obliczymy dla  $t > T_0$  napięcie  $u$  jako sumę napięć od warunku początkowego  $u''$  oraz od napięcia zasilania  $u'$  - rys. 2.72.1

$$u = u' + u'' \quad (3)$$

Dla ułatwienia i uproszczenia zapisu wprowadźmy nową oś czasu  $t' = 0$  dla  $t = T_0$ .



Rys. 2.72.1

Ad a)

$$e = E e^{-t'/T_1} \text{ wi} \acute{e}c$$

$$E(s) = E \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}}$$

a

$$U'(s) = E(s) - I(s)2R = E \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} - E \frac{2R}{L} \frac{1}{(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{3R}{L})}$$

ale

$$\frac{3R}{L} = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_1},$$

wi} \acute{e}c

$$U'(s) = E(s) - E \frac{2R}{L} \frac{1}{(s + \frac{1}{T_1})^2} \hat{=} u' = E e^{-t/T_1} - E \frac{2R}{L} t e^{-t'/T_1} =$$

$$= (3 e^{-100t'} - 200t e^{-100t'}) \text{ V.} \quad (4)$$

Ad b)

$$u'' = -i_0 2R e^{-t'/T_1} = -0,736 e^{-100t'} \text{ V.} \quad (5)$$

Z (2'), (4) i (5) przebieg czasowy napięcia

$$u = \begin{cases} [100t + 2(1 - e^{-100t})] \text{ V} & \text{dla } 0 \leq t < T_0 \\ (2,264 e^{-100t'} - 200t' e^{-100t'}) \text{ V} & \text{dla } t' \geq 0 (t \geq T_0). \end{cases}$$

Zadanie 2.73

- a) przy załączeniu  $T_1 = \frac{3}{2} RC = 15 \text{ ms}$  ,  $t_1 = 4T_1 = 60 \text{ ms}$ ,  
 przy odłączeniu  $T_2 = 2RC = 20 \text{ ms}$  ,  $t_2 = 4T_2 = 80 \text{ ms}$ ,  
 (po czasie  $t_1 = 4T_1$  ( $e^{-t_1/T_1} = e^{-4} = 0,019$ , czyli błąd mniejszy od 2%)),
- b)  $T_1 = 0,67 \text{ ms}$  ,  $t_1 = 2,67 \text{ ms}$ ,  
 $T_2 = 0,5 \text{ ms}$  ,  $t_2 = 2 \text{ ms}$ ,
- c)  $T_1 = 0,67 \text{ ms}$  ,  $t_1 = 2,67 \text{ ms}$ ,  
 $T_2 = 0,5 \text{ ms}$  ,  $t_2 = 2 \text{ ms}$ ,
- d)  $T_1 = 0,625 \text{ ms}$  ,  $t_1 = 2,5 \text{ ms}$ ,  
 $T_2 = 0,6 \text{ ms}$  ,  $t_2 = 2,4 \text{ ms}$ ,
- e)  $T_1 = 2RC = 20 \text{ ms}$  ,  $t_1 = 80 \text{ ms}$ ,  
 $T_2 = \frac{8}{3} RC = 26,7 \text{ ms}$  ,  $t_2 = 106,8 \text{ ms}$ ,

Zadanie 2.74

$$u = (30 - 10 e^{-6,67t}) \text{ V}$$

$$i = 10 e^{-6,67t} \text{ mA}$$

$$i_1 = (5 e^{-6,67t} - 15 e^{-20t}) \text{ mA}.$$

Zadanie 2.75

$$i = (10 + 7,5 e^{-2000t} - 2,5 e^{-6000t}) \text{ mA}$$

$$u = (10 + 5 e^{-6000t}) \text{ V}.$$

Zadanie 2.76

$$U_1(s) = \frac{E}{s} \frac{(1 + sRC)^2}{(sRC)^2 + 3sRC + 1}$$

stąd

$$u_1 = [50 + 22,35(e^{-52,35t} - e^{-7,65t})] \text{ V}$$

$$U_2(s) = U_1(s) \frac{1}{1 + sRC}$$

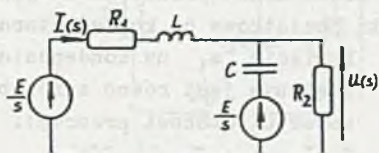


stąd

$$u_2 = 50 - 13,8 e^{-52,35t} - 36,2 e^{-7,65t} \text{ V.}$$

### Zadanie 2.77

Obwód można przedstawić jak na rys. 2.77.1.



Rys. 2.77.1

$$U(s) \Big|_{R_1=R_2=R} = \frac{E}{s} \left[ 1 - \frac{s + \frac{R}{L}}{RC(s^2 + s \frac{R^2 C + L}{RLC} + \frac{2}{LC})} \right]$$

a

$$u = (5 + 30,3 e^{-1770t} - 25,3 e^{-1130t}) \text{ V}$$

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s} - U(s)}{R + sL} = \frac{E}{s} \frac{1}{RLC(s^2 + s \frac{R^2 C + L}{RLC} + \frac{2}{LC})}$$

a

$$i = (25 + 44,2 e^{-1770t} - 69,2 e^{-1130t}) \text{ mA.}$$

### Zadanie 2.78

Warunki początkowe na kondensatorach  $C_1$  i  $C_2$

$$u_{10} = 20 \text{ V} \quad \text{ i } \quad u_{20} = 40 \text{ V,}$$

a

$$u = 30(1 - e^{-25t}) \text{ V}$$

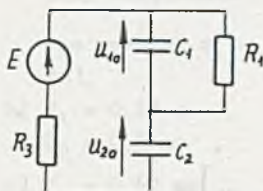
$$i = 7,5 e^{-25t} \text{ mA.}$$

### Zadanie 2.79

$$u = \begin{cases} 15 \text{ V} & \text{dla } t < 0 \\ 7,5 e^{-25t} \text{ V} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

### Zadanie 2.80

1° Dla czasów  $t < 0$  obwód można przedstawić jak na rys. 2.80.1, z którego wyznaczmy warunki początkowe na kondensatorach.



Rys. 2.80.1

Napięcie  $u_1$  na kondensatorze  $C_1$  w stanie ustalonym jest równe zero, bo prąd  $i = 0$  (kondensator  $C_2$  stanowi przerwę).

Z II prawa Kirchhoffa

$$u_{20} = u_{C2} = E \quad (1)$$

$$u_{10} = u_{C1} = 0 \quad (2)$$

Warunki początkowe można również obliczyć z równań w postaci operatorowej korzystając z twierdzeń o wartościach skrajnych

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R_3 + \frac{1}{sC_2} + \frac{R_1}{sR_1C_1 + 1}} \quad (3)$$

a

$$U_1(s) = I(s) \frac{R_1}{sR_1C_1 + 1} = \frac{E}{s} \frac{sR_1C_2}{s^2R_1R_3C_1C_2 + s(R_1\frac{C_1}{C_2} + R_1 + R_3) + 1} \quad (4)$$

i

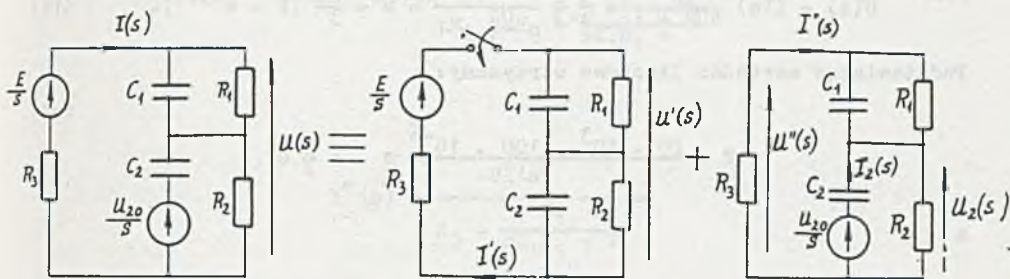
$$U_2(s) = I(s) \frac{1}{sC_2} = \frac{E}{s} \frac{1}{sR_3C_2 + 1 + \frac{sR_1C_2}{sR_1C_1 + 1}} \quad (5)$$

Z twierdzenia o wartościach skrajnych

$$u_{C1} = u_{10} = \lim_{t \rightarrow \infty} u_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sU_1(s) = 0 \quad (6)$$

$$u_{C2} = u_{20} = \lim_{t \rightarrow \infty} u_2 = \lim_{s \rightarrow 0} sU_2(s) = E. \quad (7)$$

2° Dla czasów  $t \geq 0$  (po zamknięciu klucza K) obwód jest równoważny przedstawionemu na rys. 2.80.2.



Rys. 2.80.2

Z zasady superpozycji:

$$U(s) = U'(s) + U''(s) \quad (8)$$

$$I(s) = I'(s) + I''(s) \quad (9)$$

Z prawa Ohma:

$$I'(s) = \frac{\frac{E}{s}}{R_3 + \frac{R_1}{sC_1R_1 + 1} + \frac{R_2}{sC_2R_2 + 1}}$$

Podstawiając

$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

$$C_1 = C_2 = C$$

$$\begin{aligned} I'(s) &= \frac{E}{s} \frac{1}{R} \frac{sCR}{sCR + 1} - \frac{E}{s} \frac{1}{R} \frac{1}{sCR + 1} \hat{=} I' = \\ &= \frac{E}{R} e^{-t/T} + \frac{E}{3R} (1 - e^{-t/T}) = \frac{E}{3R} + \frac{2E}{3R} e^{-t/T}, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie:

$$T = \frac{RC}{3}$$



a napięcie

$$U'(s) = I'(s) \frac{2R}{sCR + 1} = \frac{E}{s} \cdot \frac{2}{s} \frac{1}{\frac{CR}{s} + 1} \hat{=} u' = \frac{2E}{s} (1 - e^{-t/T}). \quad (11)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy:

$$T = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{s} = \frac{2}{s} \text{ s}$$

a

$$i' = (2 + 4 e^{-3/2t}) \text{ mA} \quad (10')$$

$$u' = 80(1 - e^{-3/2t}) \text{ V.} \quad (11')$$

W pierwszej chwili po załączeniu kondensatory stanowią zwarcie więc prąd

$$i' \Big|_{t=0} = \frac{E}{R_3} = \frac{120}{20} 10^{-3} = (2 + 4 \cdot e^0) 10^{-3} \text{ A} = 6 \text{ mA} \quad (12)$$

a napięcie

$$u' \Big|_{t=0} = 0. \quad (13)$$

W stanie ustalonym (po czasie nieskończenie długim) kondensatory stanowią przerwę, więc

$$i'_u = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{120}{60} 10^{-3} \text{ A} = (2 + 4 \cdot 0) \text{ mA} = 2 \text{ mA} \quad (14)$$

a napięcie

$$u'_u = i'_u (R_2 + R_3) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 10^3 \text{ V} = 80 \text{ V.} \quad (15)$$

Dla obwodu z warunkiem początkowym  $U_{20}$  przyjmując oznaczenia z rys. 2.80.2 otrzymamy:

$$I_2''(s) = \frac{\frac{U_{20}}{s}}{\frac{1}{sC_2} + \frac{R_2(R_3 + \frac{R_1}{sC_1R_1 + 1})}{R_2 + R_3 + \frac{R_1}{sC_1R_1 + 1}}} \quad (16)$$

$$U_2''(s) = I_2''(s) \frac{R_2(R_3 + \frac{R_1}{sC_1R_1 + 1})}{R_2 + R_3 + \frac{R_1}{sC_1R_1 + 1}} \quad (17)$$

więc

$$I''(s) = \frac{-U_2''(s)}{R_3 + \frac{R_1}{sC_1R_1 + 1}} =$$

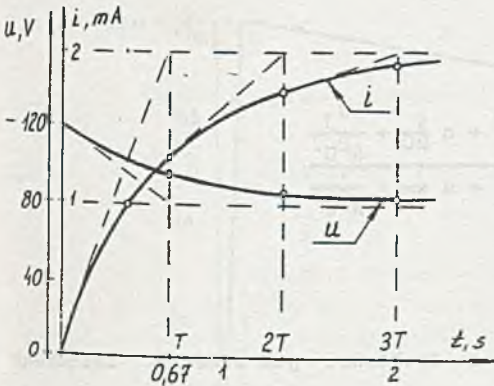
$$= \frac{E}{6} R_2 \frac{(sC_1R_1 + 1)sC_2}{s^2C_1C_2R_1R_2R_3 + sC_1R_1(R_2 + R_3) + C_2R_2(R_1 + R_3) + R_1 + R_2 + R_3} \quad (18)$$

podstawiając:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

$$C_1 = C_2 = C$$

$$I''(s) = -\frac{E}{s} \frac{C}{(RC)^2} \frac{s(sCR + 1)}{s^2 + s \frac{4}{RC} + \frac{3}{(RC)^2}} \quad (18')$$



Rys. 2.80.3

przyrównując mianownik do zera  
znajdujemy pierwiastki

$$M(s) = s^2 + s \frac{4}{RC} + \frac{3}{(RC)^2} = 0. \quad (19)$$

Stąd

$$s_1 = -\frac{3}{RC}$$

$$s_2 = -\frac{1}{RC},$$

czyli

$$I''(s) = -\frac{E}{s} \frac{C}{(RC)^2} \frac{RCs(s + \frac{1}{RC})}{(s + \frac{1}{RC})(s + \frac{1}{RC})} = -\frac{E}{s} \frac{1}{R} \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \hat{=} i'' = -\frac{E}{R} e^{-t/T} = -6 e^{-\frac{3}{2}t} \text{ mA}, \quad (18'')$$

gdzie:

$$T = \frac{RC}{3} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

a

$$U''(s) = -I''(s)R_3 \quad (20)$$

lub w postaci czasowej

$$u'' = -i''R_3 = +120 e^{-3/2t} \text{ V.} \quad (20')$$

Z (10'), (11'), (18'') i (20') otrzymamy napięcie i prąd:

$$u = u' + u'' = [80(1 - e^{-3/2t}) + 120 e^{-3/2t}] \text{ V} = (80 + 40 e^{-3/2t}) \text{ V} \quad (8)$$

$$i = i' + i'' = (2 + 4 e^{-3/2t} - 6 e^{-3/2t}) \text{ mA} = 2(1 - e^{-3/2t}) \text{ mA.} \quad (9')$$

Przebiegi czasowe napięcia  $u$  i prądu  $i$  przedstawiono na rysunku 2.80.3.

#### Zadanie 2.81

$$I(s) = \frac{E}{3R} \frac{s + \frac{2}{RC}}{s^2 + s \frac{2}{RC} + \frac{1}{R^2C^2}}$$

$$i_m = \frac{E}{3R} = 2 \text{ mA} \quad \text{dla } t = 0,$$

$$U(s) = \frac{E}{3s} \frac{s^2 + s \frac{4}{RC} + \frac{R_3}{R^2C^2}}{s^2 + s \frac{2}{RC} + \frac{1}{R^2C^2}},$$

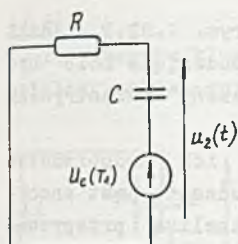
$$u_m = E = 120 \text{ V w stanie ustalonym,}$$

#### Zadanie 2.82

Dla  $t \in [0, T_1]$  tematowy obwód można traktować jak obwód RC załączony na stałą SEM  $E$ , wówczas

$$u_2(t) = E(1 - e^{-t/T}) \quad (1)$$





gdzie:

$$E = \frac{ET_1}{T_1} = 10^6 \text{ V},$$

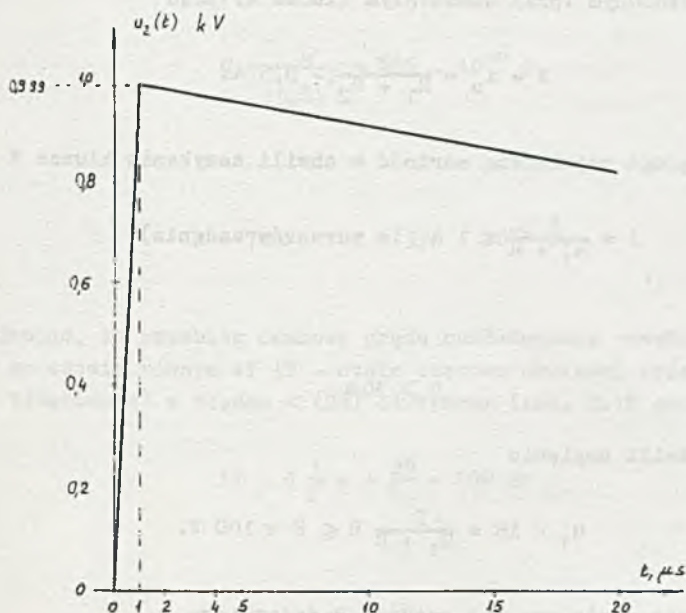
$$T = RC = 10^{-3} \text{ s}$$

Rys. 2.82.1 W chwili  $t = T_1$  gdy napięcie na kondensatorze  $u_2(t_1) = U_C(T_1) = E(1 - e^{-T_1/T}) = 999,4 \text{ V}$  przestaje działać SEM  $e(t)$ . Obwód zastępczy dla  $t > T_1$  przedstawiono na rys. 2.82.1. Z rysunku tego wynika, że

$$u_2(t) = U_C(T_1) e^{-\frac{t-T_1}{T}} \quad 1(t - T_1). \quad (2)$$

Napięcie  $u_2(t)$  na kondensatorze

$$u_2(t) = \begin{cases} E(1 - e^{-t/T}) = 10^6(1 - e^{-\frac{t}{10^{-3}}}) \text{ V} & \text{dla } t \in [0, 1 \cdot 10^{-6}] \text{ s} \\ U_C(T_1) e^{-\frac{t-T_1}{T}} \quad 1(t - T_1) = 999,4 e^{-\frac{t-10^{-6}}{10^{-3}}} \quad 1(t - 10^{-6}) \text{ V} & \text{dla } t > 10^{-6} \text{ s} \end{cases}$$



Rys. 2.82.2

a początkowy fragment jego przebiegu przedstawiono na rys. 2.82.2. Jeśli  $T_1 \rightarrow 0$  (przy  $ET_1 = \text{const}$ ), to w granicy SEM  $e(t)$  pobudzająca może być rozpatrywana jako napięciowy impuls Diraca, czyli uzyskamy rozpatrywany już (w przykładzie 2.9c) obwód.

Porównując przebiegi z rys. 2.82.2 i 2.9.1c zauważymy ich podobieństwo (dla  $t > T_1$ ). Dlatego często, jeśli czas trwania pobudzenia jest znacznie mniejszy od stałej czasowej ( $T_1 \ll T$ ), przybliżona analiza przeprowadzana jest przy przyjęciu pobudzenia impulsem Diraca.

Do tego samego wniosku dojdziemy analizując pozostałe obwody z rys. 2.9.

### Zadanie 2.83

Uwzględniając warunki początkowe na kondensatorach na  $C_2$ :  $U_{20} = 10 \text{ V}$  i na  $C_1$ :  $U_{10} = 30 \text{ V}$ , otrzymamy

$$U_1(s) = \frac{E}{s} \frac{3}{5} \frac{s^2(RC)^2 + 3sRC + \frac{5}{3}}{s^2(RC)^2 + 3sRC + 1}.$$

Stąd

$$u_1 = 50(1 + 0,068 e^{-26,18t} - 0,468 e^{-3,82t}) \text{ V}.$$

### Zadanie 2.84

W stanie ustalonym (przy zamkniętym kluczu K) prąd

$$i = i_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ A}. \quad (1)$$

Prąd może osiągnąć największą wartość w chwili zamykania klucza K

$$i = \frac{E}{R_1 + R} \leq 1 \text{ A} \quad (\text{z warunków zadania}) \quad (2)$$

stąd

$$R \geq 30 \Omega \quad (2')$$

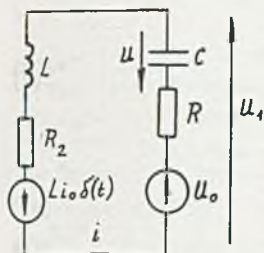
w tej samej chwili napięcie

$$u_1 = iR = \frac{E}{R_1 + R} R \leq E < 100 \text{ V}.$$

Warunek ten jest spełniony dla każdego R dodatniego.

Ad a)

Po otwarciu klucza K i przy założeniu, że w obwodzie przedtem był stan ustalony, obowiązuje układ przedstawiony na rys. 2.84.1.



Rys. 2.84.1

$$|u_1| = |u_0 - i_0 R| \leq 100 \text{ V} \quad (3)$$

stąd

$$R \leq 280 \Omega. \quad (3')$$

Porównując (2') i (3') otrzymamy

$$30 \Omega \leq R \leq 280 \Omega. \quad (4)$$

Przyjmujemy  $R = 70 \Omega$  więc

$$R_z = R + R_2 = 150 \Omega.$$

Z zadania 2.18 (zależność (5)) wiadomo, że dla przebiegów krytycznych

$$R_z = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

stąd

$$C = \frac{L}{\left(\frac{R_z}{2}\right)^2} = 356 \cdot 10^{-6} \text{ F},$$

a więc

$$R = 70 \Omega, \quad C = 356 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$$

Ad b)

Przyjmując, że przebieg czasowy prądu rozładowania cewki zanika praktycznie po czasie równym  $4T$  ( $T$  - stała czasowa obwiedni przebiegu oscylacyjnego tłumionego) z błędem  $< (2\%)$  otrzymamy (zad. 2.18 przypadek c)), że

$$4T = 4 \frac{1}{\delta} = 4 \frac{2L}{R_z} = 100 \text{ ms} \quad (1)$$

stąd

$$\underline{R = 80 \Omega}$$



Pojemność kondensatora  $C$  należy dobrać tak, żeby napięcie  $|u_1| \leq 100$  V. W sposób przybliżony (z nadmiarem) można dobrać pojemność kondensatora zakładając, że cała energia pola magnetycznego nagromadzona w cewce zostaje zamieniona na energię pola elektrycznego nagromadzoną w kondensatorze, stąd:

$$\frac{1}{2} L i_0^2 = \frac{1}{2} C u^2 \quad (2)$$

$$u = i_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2')$$

więc

$$\left| u_0 - i_0 \sqrt{\frac{L}{C}} \right| \leq 100 \text{ V} \quad (2'')$$

i otrzymujemy

$$C \geq 25,6 \cdot 10^{-6} \text{ F.} \quad (2''')$$

Przybliżenie w tym wypadku polega na tym, że pomijamy straty energii na rezystorach  $R_1$  i  $R$  od chwili, gdy  $i = i_0$  do chwili, gdy  $i = 0$  ( $u = u_0$ ) więc niecała energia pola magnetycznego zmieni się na energię pola elektrycznego - zatem w rzeczywistości wartość pojemności  $C$  można przyjąć mniejszą, aniżeli wynikałoby to z nierówności (2'''). Przyjmujemy  $C = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ , a więc  $R = 80 \Omega$ ,  $C = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ .

#### Zadanie 2.85

- a)  $u = [(3,33 + 6,67 e^{-150t}) \{1(t) - 1(t - T)\} - 1,73 e^{-150t} 1(t - T)] \text{ V}$   
 b)  $u = [(1,11(1 - e^{-150t}) + 333t \{1(t) - 1(t - T)\} + 0,956 e^{-150t} 1(t - T)] \text{ V}$

#### Zadanie 2.86

$$C = \frac{4L}{R^2} = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

#### Zadanie 2.87

Przeanalizujemy obwód w pierwszym okresie ( $t \in (0, T)$ ) a następnie w sta-  
 nie ustalonym po nieskończeniu wielu okresach.

W pierwszym okresie

$$\text{dla } t \in (0, T/2)$$

$$u_2(t) = E(1 - e^{-t/T_1}),$$

gdzie  $T_1 = RC$

dla  $t \in (T/2, T)$  (rys. 2.87.1)

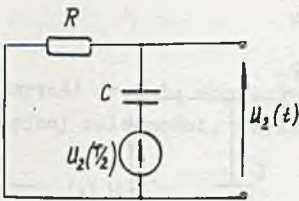
$$u_2(t) = U_2(T/2) e^{-\frac{t-T/2}{T_1}} 1(t - T/2),$$

gdzie

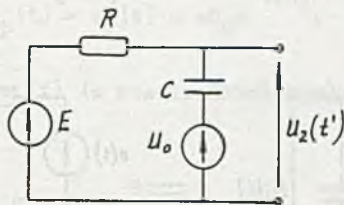
$$U_2(T/2) = E(1 - e^{-\frac{T}{2T_1}}),$$

więc

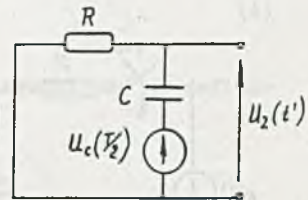
$$u_2(t) = \begin{cases} E(1 - e^{-t/T_1}) & \text{dla } t \in (0, T/2) \\ E(1 - e^{-T/2T_1}) e^{-\frac{t-T/2}{T_1}} 1(t - T/2) & \text{dla } t \in (T/2, T) \end{cases} \quad (1)$$



Rys. 2.87.1



Rys. 2.87.2



Rys. 2.87.3

W stanie ustalonym (po  $n$ -tym okresie) wprowadźmy (dla przejrzystości zapisu) czas  $t'$  ( $t' = 0$  dla  $t = nT$ ), wówczas

dla  $t' \in (0, T/2)$

tematowy obwód można przedstawić jak na rys. 2.87.2

$$u_2(t') = E(1 - e^{-t'/T_1}) + U_0 e^{-t'/T_1}$$

dla  $t' \in (T/2, T)$  (rys. 2.87.3)

napięcie

$$u_2(t') = U_c(T/2) e^{-\frac{t'-T/2}{T_1}} 1(t - T/2),$$

gdzie

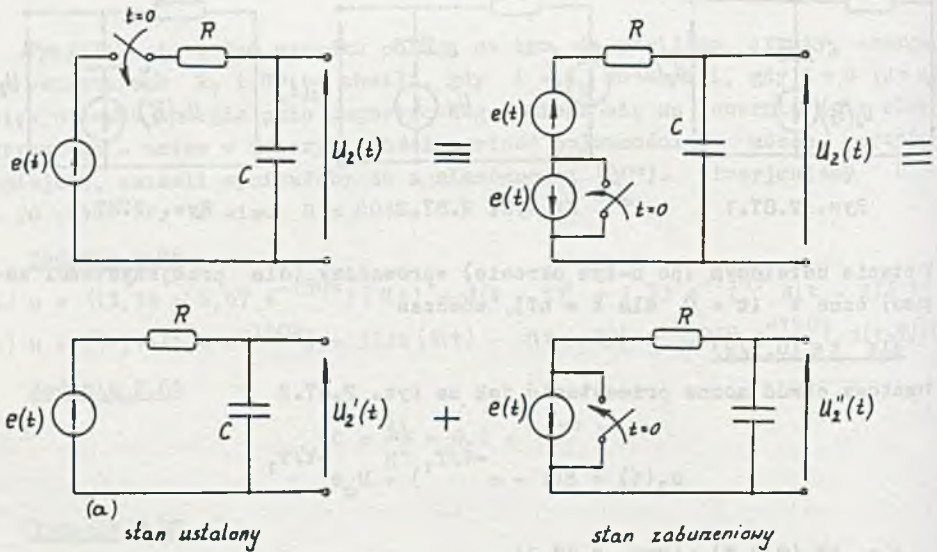
$$U_c(T/2) = u_2(t') \Big|_{t'=T/2} = E(1 - e^{-\frac{T}{2T_1}}) + U_0 e^{-\frac{T}{2T_1}}$$

Ponieważ zakładamy, że w obwodzie zanikła składowa zaburzeniowa, więc warunek początkowy na kondensatorze na początku  $n$ -tego okresu jest identyczny z warunkiem początkowym na końcu  $(n+1)$ -go okresu, czyli

$$u_2(t') \Big|_{t'=0} = u_2(t') \Big|_{t'=T} = U_0 = \left[ E(1 - e^{-\frac{T}{2T_1}}) + U_0 e^{-\frac{T}{2T_1}} e^{-\frac{T}{2T_1}} \right]$$

stąd

$$U_0 = E e^{-\frac{T}{2T_1}} \frac{1 - e^{-\frac{T}{2T_1}}}{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}} \quad (2)$$



Rys. 2.87.4a, b



Przebieg napięcia na kondensatorze w stanie ustalonym

$$u_2(t) = \begin{cases} E(1 - e^{-t'/T_1}) + U_0 e^{-t'/T_1} & \text{dla } t' \in (0, T/2) \\ \left[ E(1 - e^{-T/2T_1}) + U_0 e^{-\frac{T}{2T_1}} \right] e^{-\frac{t'-T/2}{T_1}} & \text{dla } t' \in (T/2, T) \end{cases} \quad (3)$$

Ten sam wynik uzyskamy, jeśli do rozwiązania wykorzystamy metodę dwóch przeciwnych stanów ustalonych. Wówczas można przebieg napięcia  $u_2(t)$  uzyskać z sumowania napięcia ustalonego (rys. 2.87.4a) i zaburzeniowego (rys. 2.87.4b), czyli

$$u_2(t) = u'_2(t) + u''_2(t) = u_{2u}(t) + u_{2p}(t)$$

ale przebieg napięcia  $u'_2(t)$  opisany jest równaniem (3), natomiast

$$u_{2p}(t) = u''_2(t) = -U_0 e^{-t/T_1}. \quad (4)$$

Wartość średnią napięcia  $u_2(t)$  (w stanie ustalonym) wyznaczmy z definicyjnej zależności, czyli

$$\begin{aligned} u_{2, \text{sr}} &= \frac{1}{T} \int_0^T u_2(t') dt' = \\ &= \frac{1}{T} \left[ \int_0^{T/2} E(1 - e^{-t'/T_1}) dt' + \int_0^{T/2} U_0 e^{-t'/T_1} dt' + \int_0^{T/2} u_2(T/2) e^{-t'/T_1} dt' \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[ E \frac{T}{2} + (U_0 - E) T_1 (1 - e^{-T/2T_1}) + u_2(T/2) (1 - e^{-T/2T_1}) \right] = \frac{E}{2} \end{aligned}$$

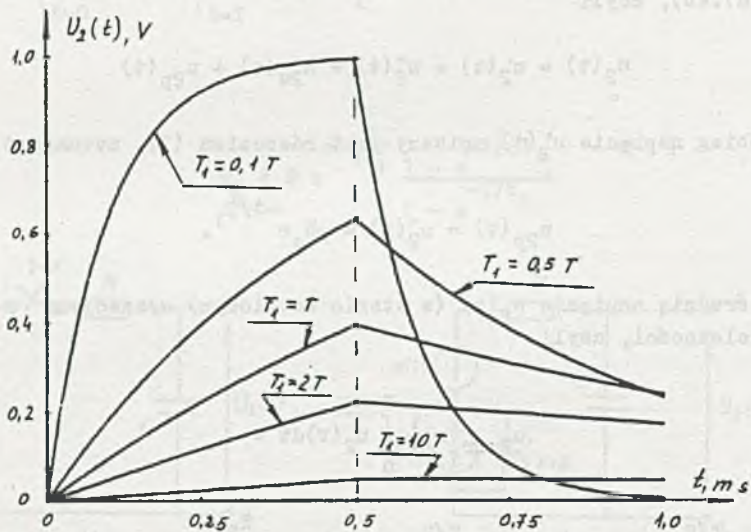
Otrzymane wyniki dla różnych wartości  $T_1$  podano w tabelicy 2.11.

Minimalną wartość osiąga napięcie  $u_2(t)$  (w stanie ustalonym) na końcu (początku) okresu i jest ono równe  $U_0$ , natomiast  $u_{2\text{max}} = u_2(T/2)$  osiągane jest w połowie okresu.

Na rys. 2.87.5 przedstawiono przebiegi napięć (dla różnych  $T_1$ ) w pierwszym okresie, natomiast na rys. 2.87.6 w stanie ustalonym. Zauważmy, że wraz ze wzrostem ilorazu  $\frac{T}{T_1}$  następuje zmniejszenie się składowej zmiennej w napięciu wyjściowym  $u_2(t)$ .

Tablica 2.11

$\frac{T_1}{T}$	1	0,5	0,1	2	10
$\frac{U_0}{E}$	0,378	0,269	0,00669	0,438	0,488
$\frac{U_c(T/2)}{E}$	0,622	0,731	0,993	0,562	0,513
$\frac{u_{2, \text{sr}}}{E}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5



Rys. 2.87.5

Zadanie to można rozwiązać korzystając ze znanych w rachunku operatorowym transformat sygnałów okresowych

Jeśli oznaczymy przez

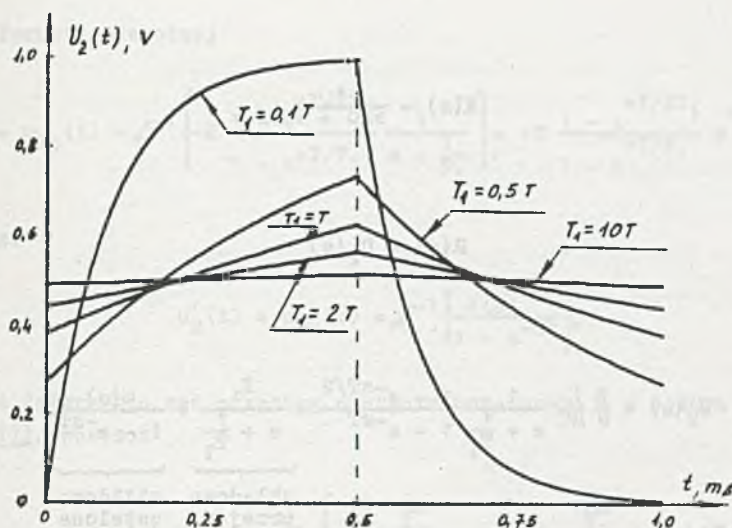
$f_0(t)$  - przebieg pobudzenia w okresie ( $t \in (0, T)$ ),

$f(t)$  - przebieg pobudzenia w całym przedziale czasu ( $t \in (0, \infty)$ ),  
to

$$F_0(s) = \mathcal{L}\{f_0(t)\},$$

natomiast

$$F(s) = \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}}.$$



Rys. 2.87.6

Wielkość wyjściowa

$$R(s) = K(s)F(s) = K(s) \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}},$$

gdzie

$K(s)$  - transmitancja obwodu.

Jeśli

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{L(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)},$$

to

$$R(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n} + \frac{\phi(s)}{1 - e^{-sT}}$$

wyrazy składowej przejściowej (zaburzeniowej)

składowa ustalona

i należy wyznaczyć wartości  $K_1, \dots, K_n$  oraz  $\phi(s)$ .

W rozpatrywanym przykładzie

$$F(s) = E(s) = \frac{K}{s} \frac{1 - e^{-sT/2}}{1 - e^{-sT}}$$



oraz

$$K(s) = \frac{1}{sRC + 1}$$

i

$$R(s) = U_2(s)$$

więc

$$U_2(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \frac{1 - e^{-sT/2}}{1 - e^{-sT}} = \underbrace{\frac{K_1}{s + \frac{1}{T_1}}}_{\text{składowa przejściowa}} + \underbrace{\frac{\phi(s)}{1 - e^{-sT}}}_{\text{składowa ustalona}}$$

gdzie  $T_1 = RC$ , natomiast

$$K_1 = \left( s + \frac{1}{T_1} \right) U_2(s) \Big|_{s = -\frac{1}{T_1}} = -E \frac{1 - e^{-\frac{T}{2T_1}}}{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}}$$

oraz

$$\phi(s) = U_2(s)(1 - e^{-sT}) - \frac{K_1}{s + \frac{1}{T_1}}(1 - e^{-sT}) =$$

$$= \frac{E}{s} \frac{1}{T_1} \frac{1 - e^{-sT/2}}{s + \frac{1}{T_1}} + E \frac{1 - e^{-\frac{T}{2T_1}}}{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}} \frac{1 - e^{-sT}}{s + \frac{1}{T_1}}$$

Napięcie wyjściowe  $u_2(t)$  zawiera składową ustaloną  $u_{2u}(t)$  i składową zaburzeniową (przejściową)  $u_{2p}(t)$

$$u_2(t) = u_{2p}(t) + u_{2u}(t) = u_2'(t) + u_2''(t).$$

Z transformaty odwrotnej

$$u_2''(t) = u_{2p}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -E \frac{1 - e^{+T/2T_1}}{1 - e^{+T/T_1}} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \right\} = -E \frac{1 - e^{+T/2T_1}}{1 - e^{+T/T_1}} e^{-t/T_1}, \quad (5)$$

natomiast

$$u_2'(t) = u_{2u}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Phi(s)}{1 - e^{-sT}} \right\},$$

ponieważ interesuje nas przebieg napięcia ustalonego w jednym okresie ( $t \in (0, T)$ ), wówczas

$$\begin{aligned} u_{2u}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ \Phi(s) \} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ E \frac{\frac{1}{T_1}}{s(s + \frac{1}{T_1})} - E \frac{\frac{1}{T_1}}{s(s + \frac{1}{T_1})} e^{-sT/2} + \right. \\ &+ E \frac{1 - e^{+T/2T_1}}{1 - e^{+T/T_1}} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} - E \frac{1 - e^{+T/2T_1}}{1 - e^{+T/T_1}} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} - E \frac{1 - e^{+T/2T_1}}{1 - e^{+T/T_1}} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} e^{-sT} \left. \right\} = \\ &= E(1 - e^{-T/T_1}) - E(1 - e^{-\frac{t-T/2}{T_1}}) 1(t - \frac{T}{2}) + \\ &+ E \frac{1 - e^{+T/2T_1}}{1 - e^{+T/T_1}} e^{-t/T_1} - E \frac{1 - e^{+T/2T_1}}{1 - e^{+T/T_1}} e^{-\frac{t-T}{T_1}} 1(t - T), \end{aligned}$$

czyli

$$u_{2u}(t) = \begin{cases} E(1 - e^{-t/T_1}) + E \frac{1 - e^{+T/2T_1}}{1 - e^{+T/T_1}} e^{-t/T_1} & \text{dla } t \in (0, T/2) \\ E(e^{-\frac{t-T/2}{T_1}} - e^{-t/T_1}) + E \frac{1 - e^{+T/2T_1}}{1 - e^{+T/T_1}} e^{-t/T_1} & \text{dla } t \in (T/2, T). \end{cases} \quad (6)$$

Porównując otrzymane wyniki z otrzymanymi uprzednio łatwo stwierdzimy, że zależność (2) na  $U_0$  jest równa amplitudzie składowej przejściowej, czyli

$$U_0 = E e^{-T/2T_1} \frac{1 - e^{-T/2T_1}}{1 - e^{-T/T_1}} = E \frac{1 - e^{-T/2T_1}}{1 - e^{-T/T_1}},$$

zyli identyczne są zależności (4) i (5) oraz (3) i (6).

### Zadanie 2.88

W stanie ustalonym (na podstawie rezultatów zadania 2.87)

dla  $t \in (0, T_2)$  (rys. 2.88.1)

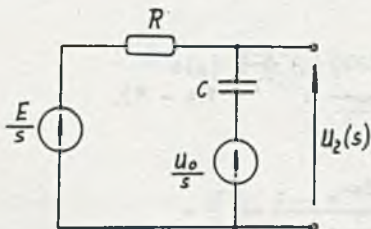
$$u_2(t) = E(1 - e^{-t/T_1}) + U_0 e^{-t/T_1} \quad (1)$$

a dla  $t \in (T_2, T)$  (rys. 2.88.2)

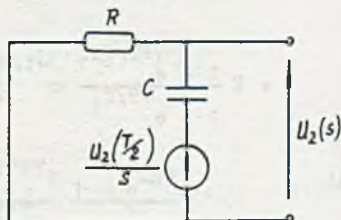
$$u_2(t) = U_2(T_2) e^{-\frac{t-T_2}{T_1}} \mathbf{1}(t - T_2), \quad (2)$$

gdzie

$$U_2(T_2) = u_2(t) \Big|_{t=T_2} = E(1 - e^{-\frac{T_2}{T_1}}) + U_0 e^{-\frac{T_2}{T_1}}.$$



Rys. 2.88.1

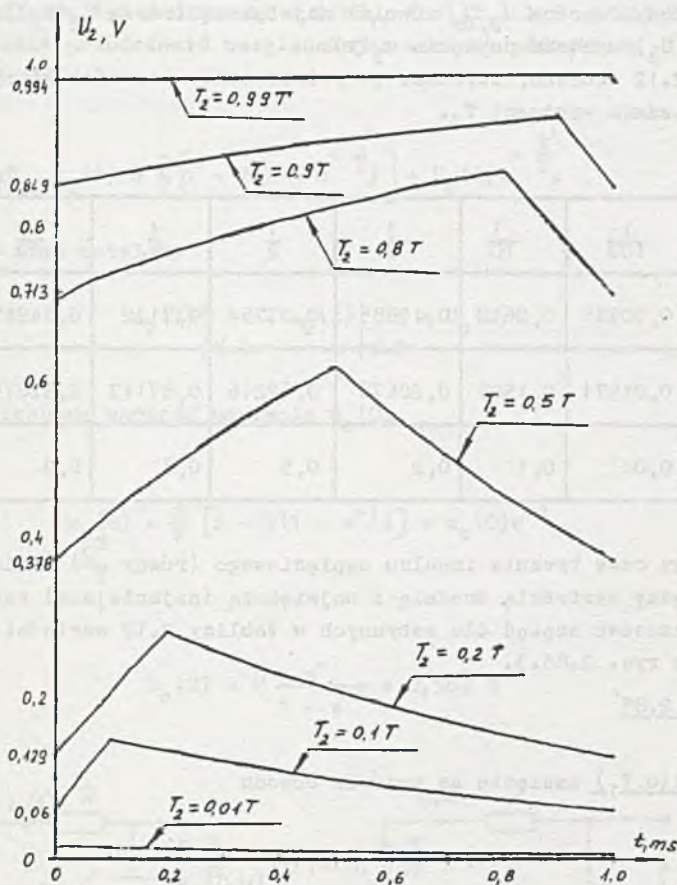


Rys. 2.88.2

Nieznana wartość napięcia  $U_0$  w równaniach (1) i (2) wyliczymy z warunku

$$U_0 = U_2(0) = U_C(0) = U_2(T) = U_C(T),$$





Rys. 2.88.3

spełnionego w stanie ustalonym na początku i końcu n-tego okresu

$$U_o = \left[ E(1 - e^{-\frac{T_2}{T_1}}) + U_o e^{-\frac{T_2}{T_1}} \right] e^{-\frac{T-T_2}{T_1}},$$

a stąd

$$U_o = \frac{E(1 - e^{-\frac{T_2}{T_1}}) e^{-\frac{T-T_2}{T_1}}}{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}} = E \frac{1 - e^{-\frac{T_2}{T_1}}}{1 - e^{-\frac{T}{T_1}}}. \quad (3)$$

Średnia wartość napięcia  $u_2(t)$  oznaczona przez  $u_{2, \text{sr}} = E \frac{T_2}{T}$ .

Łatwo wyznaczyć oprócz  $u_{2, \text{sr}}$  również największą (równą  $U_2(T_2)$ ) i najmniejszą (równą  $U_0$ ) wartość napięcia  $u_2(t)$ .

W tablicy 2.12 zebrano, uzyskane po podstawieniu wartości liczbowych, wyniki dla siedmiu wartości  $T_2$ .

Tablica 2.12

$\frac{T_2}{T}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{99}{100}$
$\frac{U_0}{E}$	0,00585	0,0612	0,12885	0,37754	0,7132	0,84945	0,98426
$\frac{U_2(T_2)}{T}$	0,01574	0,1505	0,28676	0,62246	0,87113	0,92879	0,99415
$\frac{u_{2, \text{sr}}}{E}$	0,01	0,1	0,2	0,5	0,8	0,9	0,99

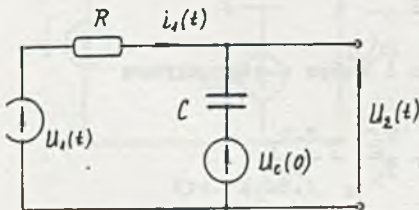
Gdy względny czas trwania impulsu napięciowego (równy  $\frac{T_2}{T}$ ) maleje, rośnie różnica między wartością średnią i największą (najmniejszą) napięcia  $u_2(t)$ . Przebiegi czasowe napięć dla zebranych w tablicy 2.12 wartości  $T_2$  przedstawiono na rys. 2.88.3.

### Zadanie 2.89

Ad a)

Dla  $t \in (0, T_1)$  napięcie na wejściu obwodu

$$u_1(t) = \frac{E}{T_1} t \triangleq U_1(s) = \frac{E}{T_1} \frac{1}{s^2}$$



Rys. 2.89.1

a napięcie wyjściowe

$$U_2(s) = U_1(s) \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \frac{1}{sC} = \frac{E}{T_1 T} \frac{1}{s^2(s + \frac{1}{T})},$$

więc

$$u_2(t) = \frac{E}{T} \left[ t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \right].$$

Prąd

$$I_1(s) = U_1(s) \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{E}{R} \frac{1}{T_1} \frac{1}{s(s + \frac{1}{T})} \triangleq i_1(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

W stanie ustalonym (po  $n$ -okresach  $t \in (nT_1, (n+1)T_1)$  lub  $t' \in (0, T_1)$  ten-  
towy obwód można przedstawić uwzględniając warunek początkowy - jak na  
rys. 2.89.1, wówczas

$$u_2(t) = \frac{E}{T} \left[ t' - T(1 - e^{-\frac{t'}{T}}) \right] + u_c(0) e^{-\frac{t'}{T}}$$

z warunku na stan ustalony

$$u_2(t') \Big|_{t'=0} = u_2(t') \Big|_{t'=T} = u_c(0)$$

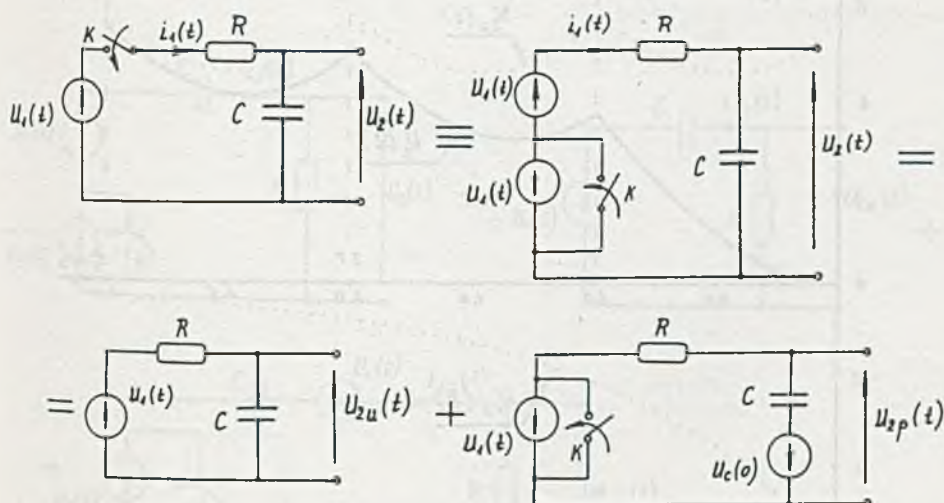
wyznaczymy nieznana wartość napięcia  $u_c(0)$ .

Otrzymamy

$$u_c(0) = \frac{E}{T} [T - T(1 - e^{-1})] + u_c(0) e^{-1},$$

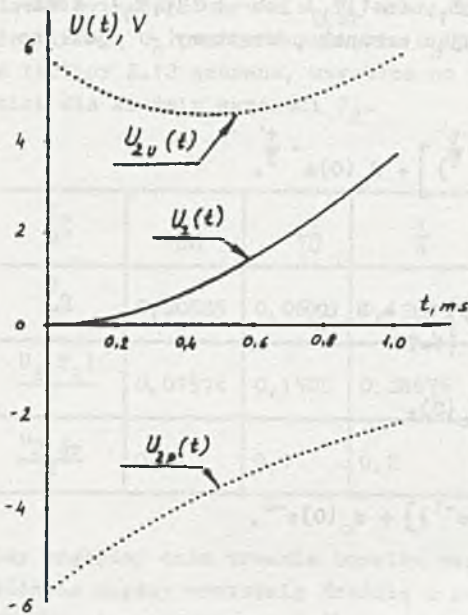
więc

$$u_c(0) = E \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = 0,582 E$$



Rys. 2.89.2





Rys. 2.89.3a

Stan przejściowy (zaburzeniowy) napięcia na wyjściu najłatwiej obliczyć metodą dwóch przeciwnych stanów ustalonych (rys. 2.89.2), wówczas

$$u_2(t) = u_{2u}(t) + u_{2p}(t),$$

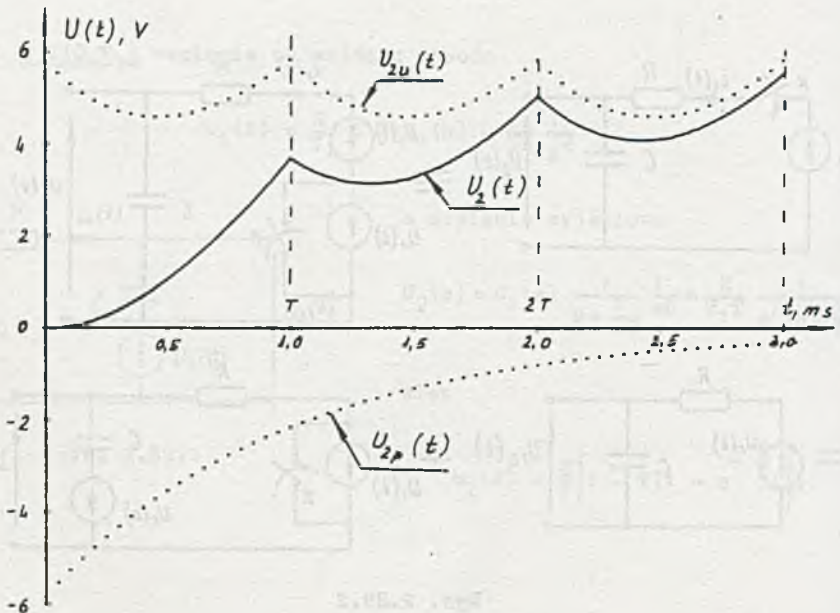
gdzie:

$u_{2u}(t) = u_{2_0}(t)$  - składowa ustalona napięcia wyjściowego,

$u_{2p}(t) = u_{2_i}(t)$  - składowa zaburzeniowa napięcia wyjściowego.

Składowa zaburzeniowa napięcia

$$u_{2p}(t) = u_c(0)e^{-\frac{t}{T}} \text{ dla } t \in (0, \infty),$$



Rys. 2.89.3b

natomiast okresowa składowa ustalona

$$u_{2u}(t) = \frac{E}{T} \left[ t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \right] + u_c(0)e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{dla } t \in (0, T_1).$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$u_{2u}(t) = \left[ 10^4 \left[ t - 10^{-3}(1 - e^{-10^3 t}) \right] + 5,82 e^{-10^3 t} \right] \text{V} \quad \text{dla } t \in (0, 1) \text{ms}$$

$$u_{2p}(t) = -5,82 e^{-10^3 t} \text{V}$$

oraz

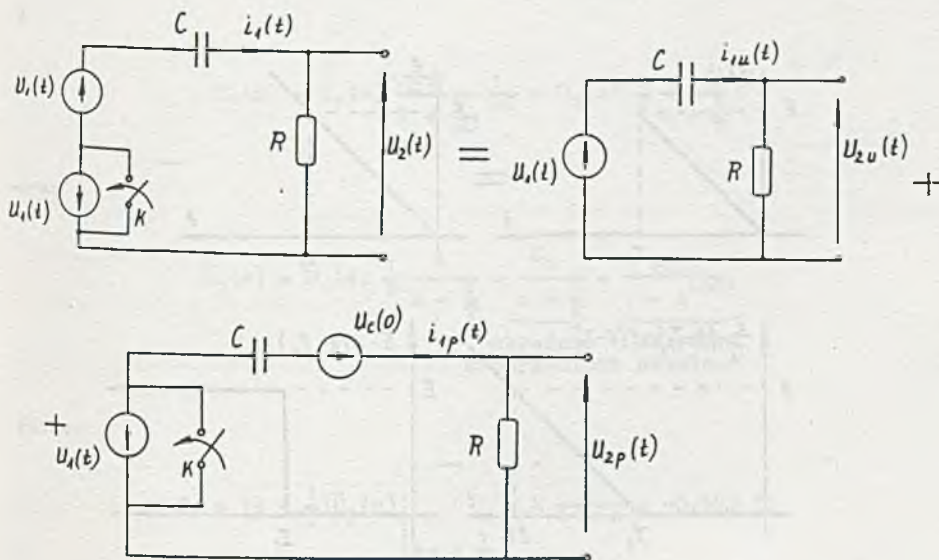
$$u_2(t) = 10^4 \left[ t - 10^{-3}(1 - e^{-10^3 t}) \right] \text{V}.$$

Na rys. 2.89.3 przedstawiono przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$ .

Ad b)

Korzystając z wyników obliczeń poprzedniego zadania i zależności (rys. 2.89.4)

$$u_2(t) = i_1(t)R = i_{1u}(t)R + i_{1p}(t)R = u_{2u}(t) + u_{2p}(t)$$



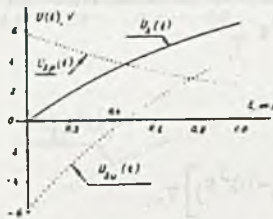
Rys. 2.89.4

otrzymamy

$$u_{2u}(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) - u_c(0)e^{-\frac{t}{T_1}} \quad \text{dla } t \in (0, T_1)$$

oraz

$$u_{2p}(t) = u_c(0)e^{-\frac{t}{T_1}} \quad \text{dla } t \in (0, \infty).$$



Rys. 2.89.5

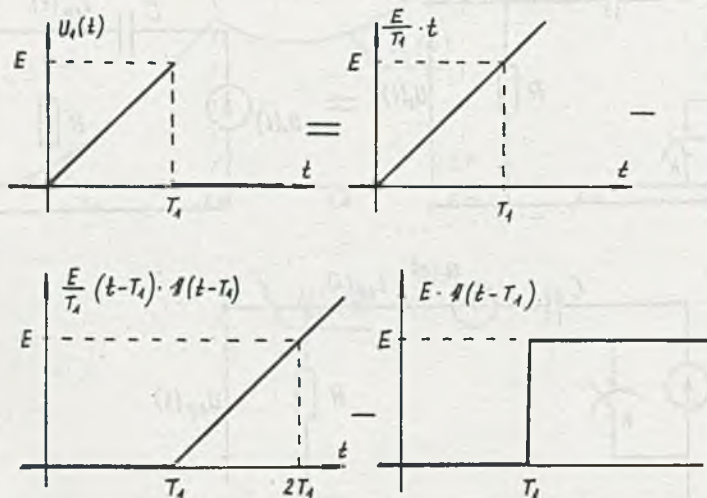
Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy

$$\begin{aligned} u_{2u}(t) &= \\ &= [10(1 - e^{-10^3 t}) - 5,82e^{-10^3 t}] \text{ V} \\ &\text{dla } t \in (0, 1) \text{ ms} \end{aligned}$$

oraz

$$u_{2p}(t) = 5,82e^{-10^3 t} \text{ V} \quad \text{dla } t \in (0, \infty),$$

co przedstawiono graficznie na rys. 2.89.5.



Rys. 2.89.6



Zauważmy, że zadanie to można też rozwiązać korzystając ze wzorów na transformatę Laplace'a sygnałów okresowych. Pokażemy to na przykładzie obwodu z rys. 2.89a.

Okresowo powtarzające się napięcie  $u_1(t)$  (rys. 2.89c) można (dla  $t \in (0, T_1)$ ) przedstawić w postaci (rys. 2.89.6)

$$u_1(t) = \begin{cases} E \frac{t}{T_1} & \text{dla } t \in (0, T_1) \\ 0 & \text{dla } t > T_1 \end{cases}$$

lub

$$u_1(t) = \frac{E}{T_1} [t - (t - T_1) 1(t - T_1) - T_1 1(t - T_1)] \hat{=}$$

$$\hat{=} U_1(s) = \frac{E}{T_1} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-sT_1} - sT_1 e^{-sT_1}),$$

dla okresowo powtarzającego się przebiegu, który oznaczymy przez  $\bar{U}_1(s)$ , otrzymamy

$$\bar{U}_1(s) = \frac{U_1(s)}{1 - e^{-sT_1}}.$$

a

$$U_2(s) = U_1(s) \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \frac{1}{sC} = U_1(s) \frac{1}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$$

oraz

$$\bar{U}_2(s) = \bar{U}_1(s) \frac{1}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = \underbrace{\frac{C_1}{s + \frac{1}{T}}}_{\text{składowa zaburzeniowa}} + \underbrace{\frac{\Phi(s)}{1 - e^{-sT_1}}}_{\text{składowa ustalona}}$$

gdzie:

$$C_1 = \left. (s + \frac{1}{T}) \bar{U}_2(s) \right|_{s = -\frac{1}{T}} = E \frac{1}{1 - e} = -0,582 E,$$

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \bar{U}_2(s)(1 - e^{-sT}) - \frac{C_1}{s + \frac{1}{T_1}}(1 - e^{-sT}) = \\ &= \frac{E}{T_1} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-sT_1} - sT_1 e^{-sT_1}) \frac{1}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} + \frac{0,582E}{s + \frac{1}{T}} (1 - e^{-sT}).\end{aligned}$$

Więc

$$u_{2p}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{C_1}{s + \frac{1}{T_1}} \right\} = -5,82 e^{-10^3 t} \text{ V} \quad \text{dla } t \in (0, \infty)$$

oraz

$$u_{2u}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \Phi(s) \} \quad \text{dla } t \in (0, T_1),$$

zatem można odrzucić człon z  $e^{-sT_1}$ , otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned}u_{2u}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{T_1 T} \frac{1}{s^2} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} + \frac{0,582E}{s + \frac{1}{T}} \right\} = \\ &= \frac{E}{T} \left[ t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \right] + 0,582E e^{-\frac{t}{T}} = \\ &= \left\{ 10^4 \left[ t - 10^{-3}(1 - e^{-10^3 t}) \right] + 5,82 e^{-10^3 t} \right\} \text{ V} \quad \text{dla } t \in (0, T_1)\end{aligned}$$

#### Zadanie 2.90

Dla  $t \in (0; 0,5 T_1)$

napięcie na wejściu obwodu opisane jest zależnością

$$u_1(t) = E \sin \frac{2\pi}{T_1} t$$

więc

$$U_1(s) = E \frac{\frac{2\pi}{T_1}}{s^2 + \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2} = \frac{2\pi E}{T_1} \frac{1}{s^2 + \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2} \quad (1)$$

Operatorowa postać napięcia na wyjściu obwodu jest następująca

$$\begin{aligned}
 U_2(s) &= U_1(s) \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \frac{1}{sC} = U_1(s) \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} = \\
 &= \frac{2\pi E}{TT_1} \frac{1}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \frac{1}{s^2 + \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2} = \\
 &= \frac{2\pi E}{TT_1} \frac{1}{s + j\frac{2\pi}{T_1}} \frac{1}{s - j\frac{2\pi}{T_1}} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = \frac{2\pi E}{TT_1} \frac{L(s)}{N(s)}, \quad (2)
 \end{aligned}$$

gdzie:

$T = RC$  - stała czasowa obwodu  $RC$ ,

$L(s) = 1$ ,

$$N(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) = (s + j\frac{2\pi}{T_1})(s - j\frac{2\pi}{T_1})(s + \frac{1}{T}).$$

Pierwiastki  $s_1$  i  $s_2$  są zespolone sprzężone.

Przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  wyznaczmy z transformaty odwrotnej (np. [16] wzór (4-33) s. 176), po obliczeniach

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= \frac{2\pi E}{TT_1} \left\{ \frac{L(s_3)}{N'(s_3)} e^{s_3 t} + 2\operatorname{Re} \left[ \frac{L(s_1)}{N'(s_1)} e^{s_1 t} \right] \right\} = \\
 &= \frac{2\pi E}{TT_1} \left\{ \frac{L(s_3)}{N'(s_3)} e^{s_3 t} + \operatorname{Re} \left[ \frac{L(s_1)}{N'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{L(s_2)}{N'(s_2)} e^{s_2 t} \right] \right\} \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$N'(s_1) = (s_1 - s_2)(s_1 - s_3),$$

$$N'(s_2) = (s_2 - s_1)(s_2 - s_3),$$

$$N'(s_3) = (s_3 - s_1)(s_3 - s_2).$$

Po podstawieniu wartości liczbowych (gdy  $T = T_1$ ) otrzymamy

$$N'(s_3) = \frac{1}{T^2} (1 + 4\pi^2),$$

$$N'(s_1) = -\frac{4\pi j}{T^2} (1 - j2\pi),$$

$$N'(s_2) = \frac{4\pi j}{T^2} (1 + j2\pi),$$



a więc

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= \frac{2\pi E}{T^2} \left[ \frac{T^2}{1 + 4\pi^2} e^{-\frac{t}{T}} + \operatorname{Re} \left[ \frac{T^2}{-4\pi j(1 - j2\pi)} e^{-j\frac{2\pi}{T_1} t} + \frac{T^2}{4\pi j(1 + j2\pi)} e^{j\frac{2\pi}{T_1} t} \right] \right] = \\
 &= \frac{2\pi E}{1 + 4\pi^2} \left( e^{-\frac{t}{T}} - \cos \frac{2\pi}{T_1} t + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T_1} t \right) = \\
 &= 0,1552E \left( e^{-\frac{t}{T}} - 1,0126 \cos \left( \frac{2\pi}{T_1} t + 9,04^\circ \right) \right) = \\
 &= [0,1552 (e^{-100t} - 1,0126 \cos(628t + 9,04^\circ))] \text{ V} \quad \text{dla } t \in (0; 0,5 T_1)
 \end{aligned}$$

W stanie ustalonym, po  $n$ -okresach  $\frac{T_1}{2}$ , czyli dla  $t \in (n \cdot 0,5 T_1, (n+1) \cdot 0,5 T_1)$  lub  $t' \in (0, 0,5 T_1)$  ( $t' = 0$  dla  $t = n \cdot 0,5 T_1$ ) napięcie na kondensatorze na początku okresu jest równe napięciu na kondensatorze na końcu okresu, czyli

$$u_2(t') \Big|_{t'=0} = u_c(0) = u_2(t) \Big|_{t=0,5T_1} = u_c(T_1/2)$$

Napięcie  $u_2(t')$  jest wynikiem działania napięcia na wejście obwodu i rozkładania się ustalonego warunku początkowego  $u_c(0)$ , więc

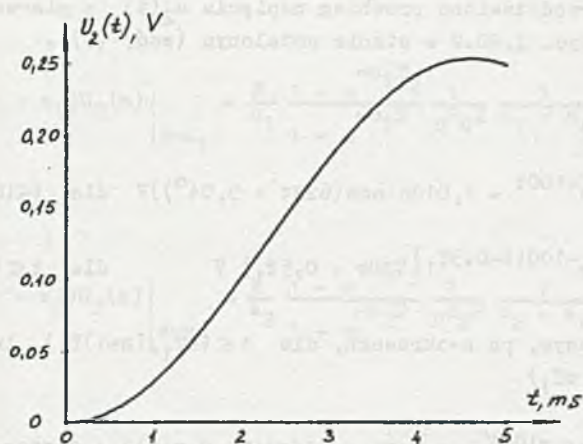
$$u_2(t') = \underbrace{0,1552(e^{-t'/T} - 1,0126 \cos(\frac{2\pi}{T_1} t' + 9,04^\circ))}_{\text{składowa pochodząca od napięcia wejściowego}} + \underbrace{u_c(0)e^{-t'/T}}_{\text{składowa pochodząca od warunku początkowego}} \quad (5)$$

dla  $t' = 0,5 T_1$

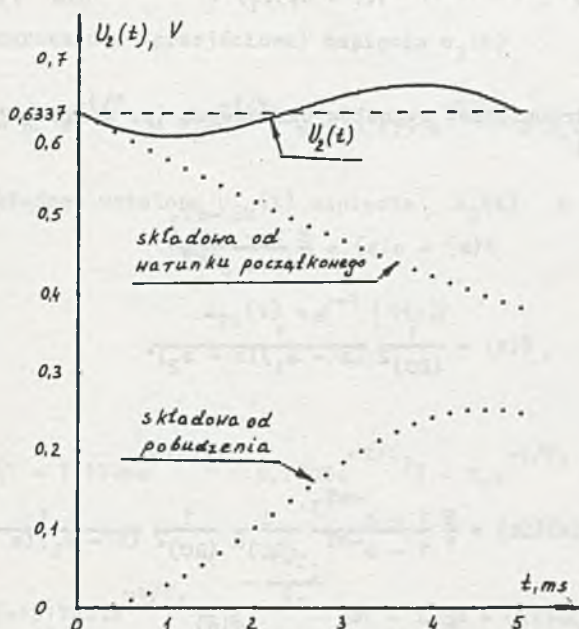
$$u_2\left(\frac{T_1}{2}\right) = u_c(0) = 0,1552(e^{-0,5} + 1,0126 \cos(0,04^\circ)) + u_c(0)e^{-0,5}$$

stąd

$$u_c(0) = \frac{0,1552(e^{-0,5} + 1)}{1 - e^{-0,5}} = 0,6337 \text{ V.} \quad (6)$$



Rys. 2.90.1



Rys. 2.90.2

Po podstawieniu (6) do (5) otrzymamy przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  po  $n$ -tym okresie

$$u_2(t) = 0,7889 e^{-t'/T} - 0,1572 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t' + 9,04^\circ\right) \text{ V} \quad (7)$$

Na rys. 2.90.1 przedstawiono przebieg napięcia  $u_2(t)$  w pierwszym okresie (wzór (4)) a na rys. 2.90.2 w stanie ustalonym (wzór (7)).

Zadanie 2.91

Dla  $t \in (0, T_1)$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0,1552(e^{-100t} - 1,0126 \cos(628t + 9,04^\circ))V & \text{dla } t \in (0; 0,5T_1) \\ 0,2493 e^{-100(t-0,5T_1)} 1(t - 0,5T_1) V & \text{dla } t \in (0,5T_1, T_1) \end{cases}$$

a w stanie ustalonym, po  $n$ -okresach, dla  $t \in (nT_1, (n+1)T_1)$  lub  $t' \in (0, T_1)$  ( $t' = 0$  dla  $t = nT_1$ )

$$u_2(t') = \begin{cases} 0,1552(e^{-100t'} - 1,0126 \cos(628t' + 9,04^\circ)) + 0,2392e^{-100t'} V & \text{dla } t' \in (0; 0,5T_1) \\ 0,3944e^{-100(t'-0,5T_1)} 1(t' - 0,5T_1) V & \text{dla } t' \in (0,5T_1, T_1) \end{cases}$$

Zadanie 2.92

Skorzystamy z transformat sygnałów okresowych (p. zadanie 2.87) i wyników zadania 2.24

$$F(s) = e(s) = \frac{E}{s} \frac{1 - e^{-sT_1}}{1 - e^{-sT}}$$

a

$$K(s) = \frac{1}{(RC)^2} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)},$$

więc

$$U_2(s) = e(s)K(s) = \frac{E}{s} \frac{1 - e^{-sT_1}}{1 - e^{-sT}} \frac{1}{(RC)^2} \frac{1}{(RC)^2} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} =$$

$$= \underbrace{\frac{K_1}{s - s_1}}_{\text{składowa przejściowa}} + \underbrace{\frac{K_2}{s - s_2}}_{\text{składowa ustalona}} + \frac{\Phi(s)}{1 - e^{-sT}}$$



Natomiast

$$K_1 = (s - s_1)U_2(s) \Big|_{s=s_1} = \frac{E}{s_1} \frac{1 - e^{-s_1 T_3}}{1 - e^{-s_1 T}} \frac{1}{R^2 C^2} \frac{1}{s_1 - s_2} = -0,475 \text{ V}$$

oraz

$$K_2 = (s - s_2)U_2(s) \Big|_{s=s_2} = \frac{E}{s_2} \frac{1 - e^{-s_2 T_3}}{1 - e^{-s_2 T}} \frac{1}{R^2 C^2} \frac{1}{s_2 - s_1} = 0,012 \text{ V},$$

zatem

$$\phi(s) = U_2(s)(1 - e^{-sT}) - \frac{K_1}{s - s_1} (1 - e^{-sT}) - \frac{K_2}{s - s_2} (1 - e^{-sT}).$$

Składowa zaburzeniowa (przejściowa) napięcia  $u_2(t)$

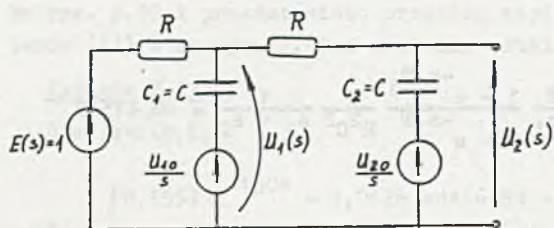
$$u_{2p}(t) = K_1 e^{-t/T_1} + K_2 e^{-t/T_2} = (-0,475 e^{-t/T_1} + 0,012 e^{-t/T_2}) \text{ V},$$

natomiast składowa ustalona  $u_{2u}(t)$  napięcia  $u_2(t)$  w jednym okresie ( $t \in (0, T)$ )

$$u_{2u}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ \phi(s) \}$$

więc

$$u_{2u}(t) = \begin{cases} E(1 - 1,1708e^{-t/T_1} + 0,1708e^{-t/T_2}) - K_1 e^{-t/T_1} - K_2 e^{-t/T_2} & \text{dla } t \in (0, T/2) \\ E[-1,1708(e^{-t/T_1} - e^{-\frac{t-T_3}{T_1}} 1(t - T_3))] + 0,1708[e^{-t/T_2} - e^{-\frac{t-T_3}{T_2}} 1(t - T_3)] - K_1 e^{-t/T_1} - K_2 e^{-t/T_2} & \text{dla } t \in (T/2, T) \end{cases}$$

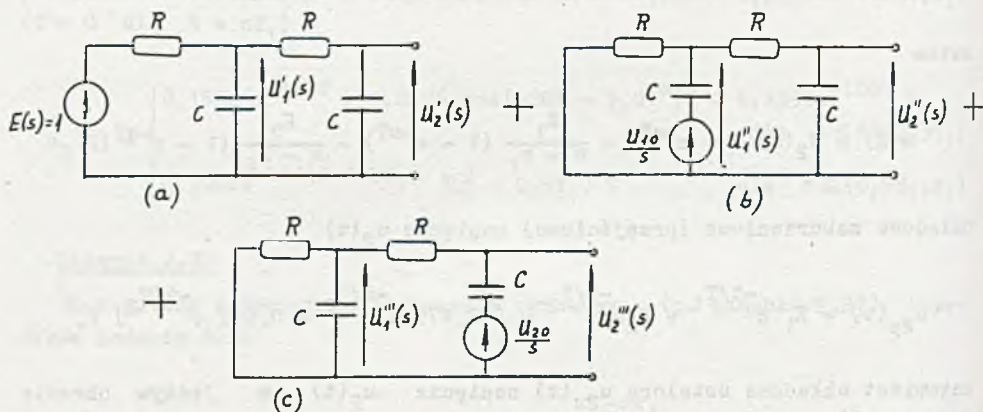


Rys. 2.93.1

### Zadanie 2.93

Przebieg napięcia na wyjściu (w stanie ustalonym) dla  $t \in (0, T)$  otrzymamy po rozwiązaniu obwodu przedstawionego na rys. 2.93.1. Obwód ten rozwiążemy korzystając z zasady superpozycji (rys. 2.93.2), a

$$U_2(s) = U_2'(s) + U_2''(s) + U_2'''(s)$$



Rys. 2.93.2

Ad a)

$u_2'(t)$  obliczono w zadaniu 2.25 wzór (1) więc

$$u_2'(t) = 447,2(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}), \text{ V}, \quad (1)$$

gdzie:

$$T_1 = 2,618 \text{ ms}$$

$$T_2 = 0,382 \text{ ms}$$

Ad b)

Napięcie

$$U_2''(s) = \frac{\frac{U_{10}}{s}}{\frac{1}{sC} + \frac{R(R + \frac{1}{sC})}{2R + \frac{1}{sC}}} \cdot \frac{R(R + \frac{1}{sC})}{2R + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \cdot \frac{1}{sC} + \frac{U_{10}}{RC} \cdot \frac{1}{s^2 + s \frac{1}{RC} + \frac{1}{R^2 C^2}} =$$

$$\hat{=} u_2''(t) = 0,4472 U_{10}(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}), \text{ V} \quad (2)$$

Ad c)

Analogicznie

$$\begin{aligned}
 U_2'''(s) &= \frac{U_{20}}{s} - \frac{U_{20}}{s} \frac{sRC + 1}{s^2 R^2 C^2 + s3RC + 1} = U_{20} \frac{s + \frac{2}{RC}}{(s - s_1)(s - s_2)} \hat{=} u_2'''(t) = \\
 &= \frac{U_{20}}{s_1 - s_2} \left[ \left(s_1 + \frac{2}{RC}\right) e^{s_1 t} - \left(s_2 + \frac{2}{RC}\right) e^{s_2 t} \right] = \\
 &= 0,4472 U_{20} (1,618 e^{-t/T_1} + 0,618 e^{-t/T_2}), \text{ V.} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Więc napięcie na wyjściu obwodu w stanie ustalonym dla  $t \in (0, T)$  opisane jest następującą zależnością ((1) + (2) + (3))

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= u_2'(t) + u_2''(t) + u_2'''(t) = 447,2(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) + \\
 &+ 0,4472 U_{10}(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) + 0,4472 U_{20}(1,618 e^{-t/T_1} + 0,618 e^{-t/T_2}) \text{ V.} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Należy jeszcze obliczyć nieznane wartości warunków początkowych  $U_{10}$  i  $U_{20}$  na kondensatorach.

Przebieg czasowy napięcia  $u_1(t)$  wyznaczymy, podobnie jak  $u_2(t)$ , z zasady superpozycji (rys. 2.93.2), więc

$$\begin{aligned}
 U_1(s) &= U_1'(s) + U_1''(s) + U_1'''(s) = E(s) \frac{1}{RC} \frac{s + \frac{1}{RC}}{(s - s_1)(s - s_2)} + \\
 &+ U_{10} \frac{s + \frac{1}{RC}}{(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{U_{20}}{RC} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \hat{=} \\
 &\hat{=} u_1(t) = u_1'(t) + u_1''(t) + u_1'''(t) = \\
 &= \left[ 447,2(0,618 e^{-t/T_1} + 1,618 e^{-t/T_2}) + 0,4472 U_{10}(0,618 e^{-t/T_1} + 1,618 e^{-t/T_2}) + \right. \\
 &\quad \left. + 0,4472 U_{20}(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}) \right] \text{ V} \quad (5)
 \end{aligned}$$



Dla  $t = T$  (w stanie ustalonym)

$$u_1(T) = U_{10}$$

oraz

$$u_2(T) = U_{20},$$

czyli (p. (4) i (5))

$$(447,2 + 0,4472 U_{10})(e^{-T/T_1} - e^{-T/T_2}) + \\ + 0,4472 U_{20}(1,618 e^{-T/T_1} + 0,618 e^{-T/T_2}) = U_{20} \quad (6)$$

$$(447,2 + 0,4472 U_{10})(0,618 e^{-T/T_1} + 1,618 e^{-T/T_2}) + \\ + 0,4472 U_{20}(e^{-T/T_1} - e^{-T/T_2}) = U_{10} \quad (7)$$

Po podstawieniu wartości liczbowych i uporządkowaniu układu równań (6) i (7) otrzymamy

$$-0,8472 U_{10} + 8,20594 U_{20} = -152,813$$

$$0,20594 U_{10} - 0,6583 U_{20} = -205,94$$

a stąd

$$U_{10} = 277,531 \text{ V}$$

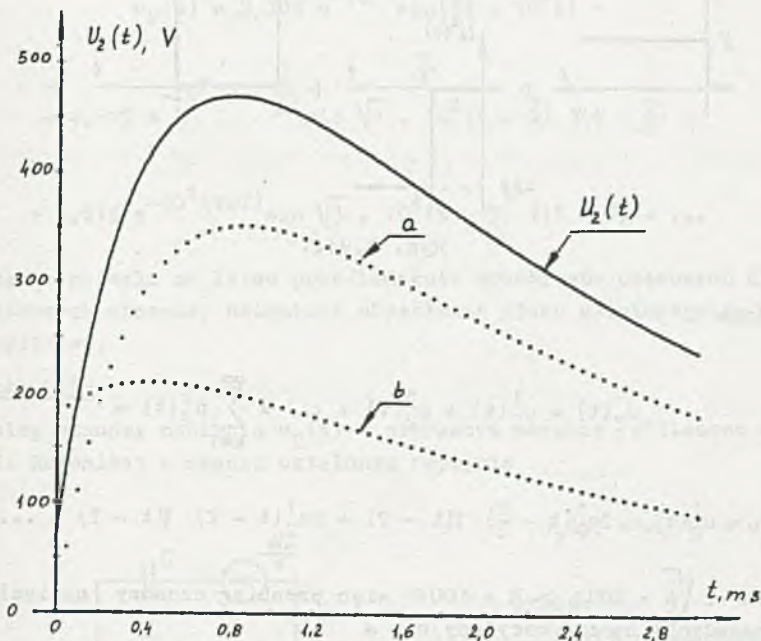
$$U_{20} = 399,657 \text{ V.}$$

Wartości te podstawiamy do równania (4).

Otrzymamy

$$u_2(t) = \underbrace{\left[ 572,31(e^{-\frac{t}{2,618 \cdot 10^{-3}}} - e^{-\frac{t}{0,382 \cdot 10^{-3}}}) \right]}_a + \\ + \underbrace{178,73(1,618 e^{-\frac{t}{2,618 \cdot 10^{-3}}} - 0,618 e^{-\frac{t}{0,382 \cdot 10^{-3}}})}_b \text{ V} \quad (4')$$

Przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  opisanego równaniem (4') przedstawiono na rys. 2.93.3.



Rys. 2.93.3

#### Zadanie 2.94

Ponieważ w obwodzie występuje indukcyjność  $L$  i pojemność  $C$  wykorzystamy do rozwiązania metodę, która nie wymaga żmudnego obliczania warunków początkowych na  $L$  i  $C$  przy zmianach wartości napięcia  $u(t)$ .

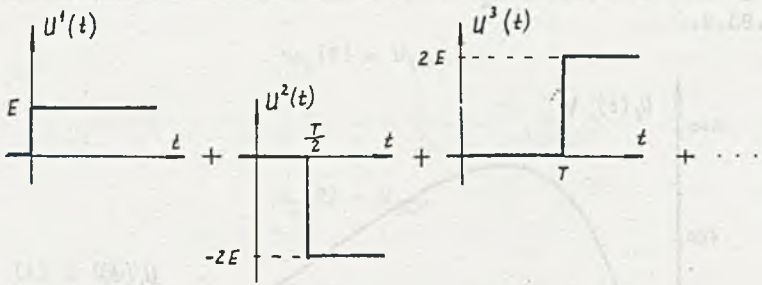
Zauważmy, że napięcie wymuszające  $u(t)$  można przedstawić w postaci

$$u(t) = E \, 1(t) - 2E \, 1(t - \frac{T}{2}) + 2E \, 1(t - T) - 2E \, 1(t - \frac{3}{2}T) + \dots =$$

$$= E \, 1(t) + 2E \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, 1(t - k \frac{T}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k(t)$$

lub graficznie jak na rys. 2.94.1.

Napięcie wyjściowe  $u_2(t)$  będzie sumą odpowiedzi obwodu na kolejne wymuszenia przesunięte w czasie. Wystarczy więc wyprowadzić wzór na przebieg czasowy napięcia wyjściowego, spowodowany pobudzeniem  $E \, 1(t)$ , oznaczmy je  $u_2^1(t)$ .



Rys. 2.94.1

Uczywiście

$$u_2(t) = u_2^1(t) + u_2^2(t) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_2^k(t) =$$

$$= u_2^1(t) - 2u_2^1(t - \frac{T}{2}) \mathbf{1}(t - T) + 2u_2^1(t - T) \mathbf{1}(t - T) - \dots \quad (1)$$

Ponieważ  $2\sqrt{\frac{L}{C}} = 200\Omega > R = 100\Omega$  więc przebieg czasowy napięcia  $u_2^1(t)$  (i pozostałych) będzie oscylacyjny, a

$$u_2^1(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{R + sL + \frac{1}{s}C} R = \frac{ER}{L} \frac{1}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} \approx u_2^1(t) = \frac{ER}{L\omega_0} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t, \quad (2)$$

gdzie

$$\delta = \frac{R}{2L} = 10^4 \frac{1}{s}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 3 \cdot 10^4 \frac{1}{s}$$

a

$$T_1 = \frac{1}{\delta} = 0,1 \text{ ms} \quad - \text{stała czasowa obwiedni}$$

oraz

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,3628 \text{ ms} \quad - \text{okres drgań własnych.}$$



Po podstawieniu wartości liczbowych do (2) zależność (!) przyjmie postać

$$u_2(t) = 2,309 e^{-10^4 t} \sin(\sqrt{3} \cdot 10^4 t) -$$

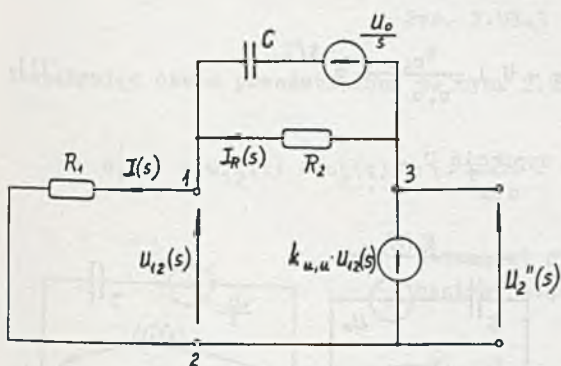
$$- 4,619 e^{-10^4(t - \frac{T}{2})} \sin \sqrt{3} \cdot 10^4(t - \frac{T}{2}) 1(t - \frac{T}{2}) +$$

$$+ 4,619 e^{-10^4(t-T)} \sin \sqrt{3} \cdot 10^4(t - T) 1(t - T) - \dots$$

Metoda ta pozwala na łatwe prześledzenie przebiegów czasowych dla kilku początkowych okresów, natomiast określenie stanu ustalonego tą metodą jest kłopotliwe.

#### Zadanie 2.95

Przebieg czasowy napięcia  $u_2(t)$  w pierwszym okresie obliczono w zadaniu 2.33. Natomiast w stanie ustalonym napięcia



Rys. 2.95.1

$$u_2(t) = u_2'(t) + u_2''(t),$$

gdzie:

$u_2'(t)$  - składowa napięcia pochodząca od pobudzenia impulsem Diraca,

$u_2''(t)$  - składowa pochodząca od rozładowania warunku początkowego  $U_0$  na kondensatorze.

Z zależności (1) z zadania 2.33

$$u_2'(t) = \frac{1}{RC} \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 1} e^{-t/T_1},$$

gdzie

$$T_1 = RC \frac{k_{u,u} + 1}{k_{u,u} + 2},$$

natomiast  $u_2(t)$  obliczymy rozwiązując obwód przedstawiony na rys. 2.95.1,

Dla tego obwodu

$$U_{12}(s) = R_1 I(s)$$

$$U_2''(s) = U_{12}(s) + I_R(s)R_2$$

$$I_R(s)R = -\frac{U_0}{s} + (I(s) - I_R(s)) \frac{1}{sC}$$

$$U_2''(s) = -k_{u,u} U_{12}(s)$$

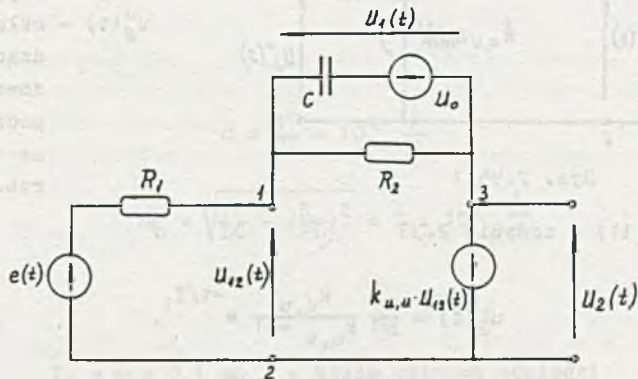
a po uporządkowaniu i redukcji

$$U_2''(s) = -U_0 \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 1} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \hat{=} u_2''(t) = -U_0 \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 1} e^{-t/T_1}$$

Więc, w stanie ustalonym

$$u_2(t) = \left( \frac{1}{RC} - U_0 \right) \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 1} e^{-t/T_1} \quad (1)$$

niestety nieznaną jest wartość napięcia  $U_0$ .



Rys. 2.95.2

Zauważmy, że wartość napięcia na kondensatorze (w stanie ustalonym) na początku i końcu okresu jest taka sama. Zachodzi więc konieczność dodatkowego obliczenia przebiegu czasowego napięcia  $u_1(t)$  na kondensatorze.

Również i w tym przypadku skorzystamy z zasady superpozycji (rys. 2.95.2)

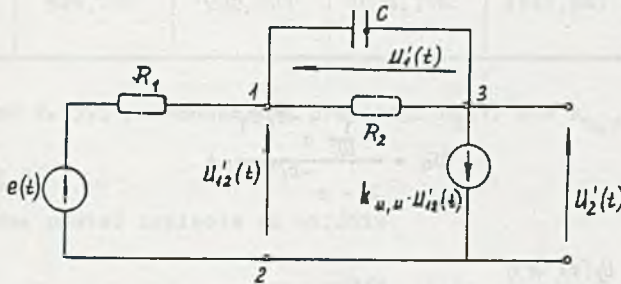
a

$$u_1(t) = u'_1(t) + u''_1(t),$$

gdzie:

$u'_1(t)$  - składowa napięcia od pobudzenia impulsem Diraca (rys. 2.95.3),

$u''_1(t)$  - składowa napięcia od warunku początkowego (rys. 2.95.4).

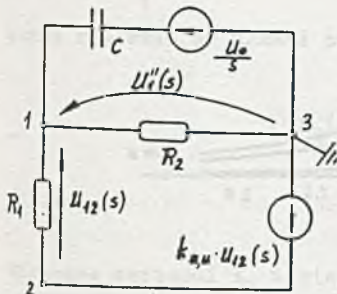


Rys. 2.95.3

Rozpatrując obwód przedstawiony na rys. 2.95.3, otrzymamy, że

$$u'_1(t) = u'_{12}(t) - u'_2(t) = \left(-\frac{1}{k_{u,u}} - 1\right) u'_2(t) = -\frac{1}{RC} e^{-t/T_1}.$$

Natomiast dla obwodu z rys. 2.95.4 można napisać następujący układ równań:



Rys. 2.95.4

a stąd

$$U''_1(s) = U_0 \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \hat{=} u''_1(t) = U_0 e^{-t/T_1}.$$



Zatem

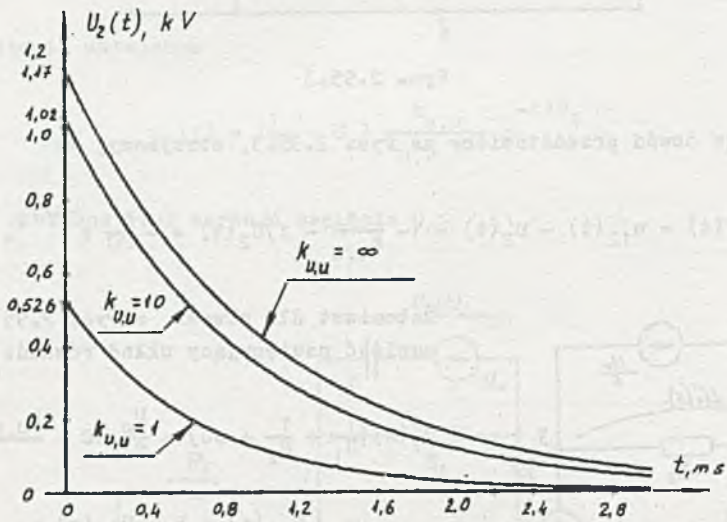
$$u_1(t) = (U_0 - \frac{1}{RC})e^{-t/T_1}$$

a z warunku na stan ustalony

$$u_1(t) \Big|_{t=T} = (U_0 - \frac{1}{RC})e^{-T/T_1} = U_0 = u_1(t) \Big|_{t=0}$$

więc

$$U_0 = \frac{-\frac{1}{RC} e^{-T/T_1}}{1 - e^{-T/T_1}} \quad (2)$$



Rys. 2.95.5

Podstawiając (2) do (1) otrzymamy przebieg czasowy napięcia na wyjściu układu w stanie ustalonym

$$u_2(t) = \frac{1}{RC} \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 1} \frac{1}{1 - e^{-T/T_1}} e^{-t/T_1} = U_2 e^{-t/T_1} \quad (3)$$

W tabelicy 2.13 zebrano wartości amplitudy i stałej czasowej dla różnych wartości  $k_{u,u}$ .

Tablica 2.13

$k_{u,u}$	1	5	10	100	$\infty$
$\frac{T_1}{RC}$	0,667	0,857	0,917	0,9901	1
$U_2$ , V z zależności (3)	526,198	922,821	1024,716	1141,563	1156,518

Na rysunku 2.95.5 przedstawiono przebiegi  $u_2(t)$  dla  $k_{u,u} = 1, 10, \infty$ .

### Zadanie 2.96

Operatorową postać napięcia na wyjściu

$$U_2(s) = E(s)K(s) = \frac{E}{s} \frac{1 - e^{-sT/2}}{1 - e^{-sT}} \frac{(-k_{u,u})}{RC(k_{u,u} + 1)} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}},$$

gdzie

$$T_1 = \frac{RC(k_{u,u} + 1)}{k_{u,u} + 2} - \text{stała czasowa obwodu},$$

$$\text{a } s_1 = -\frac{1}{T_1},$$

można rozłożyć na ułamki proste, więc

$$U_2(s) = \underbrace{\frac{K_1}{s - s_1}}_{\text{składowa przejściowa}} + \underbrace{\frac{\Phi(s)}{1 - e^{-sT}}}_{\text{składowa ustalona}.$$

Nieznane wartości  $K_1$  i  $\Phi(s)$  wyznaczymy z zależności

$$\begin{aligned} K_1 = (s - s_1)U_2(s) \Big|_{s=s_1} &= \frac{E}{-\frac{T}{T_1}} \left( -\frac{k_{u,u}}{RC(k_{u,u} + 1)} \right) \frac{1 - e^{T/2T_1}}{1 - e^{T/T_1}} = \\ &= E \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 2} \frac{1 - e^{+T/2T_1}}{1 - e^{+T/T_1}} \end{aligned}$$

oraz

$$\Phi(s) = U_2(s)(1 - e^{-sT}) - \frac{K_1}{s - s_1} (1 - e^{-sT}) =$$

$$= - \frac{k_{u,u}}{RC(k_{u,u} + 1)} \frac{E}{s} \frac{1 - e^{-sT/2}}{s - s_1} - \frac{K_1}{s - s_1} (1 - e^{-sT}).$$

Składowa przejściowa  $u_{2p}(t)$  napięcia  $u_2(t)$

$$u_{2p}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K_1}{s - s_1} \right\} = E \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 2} \frac{1 - e^{-T/2T_1}}{1 - e^{-T/T_1}} e^{-t/T_1} \quad (1)$$

a składowa ustalona  $u_{2u}(t)$  napięcia  $u_2(t)$  w jednym okresie ( $t \in (0, T]$ ) opisana jest zależnością

$$\begin{aligned} u_{2u}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \Phi(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ - \frac{k_{u,u}}{RC(k_{u,u} + 1)} \frac{E}{s(s - s_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_{u,u}}{RC(k_{u,u} + 1)} \frac{E}{s(s - s_1)} e^{-sT/2} - \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_1}{s - s_1} e^{-sT} \right\} = \\ &= -E \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 2} (1 - e^{-t/T_1}) + E \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 2} (1 - e^{-\frac{t-T/2}{T_1}}) 1(t - T/2) - \\ &- E \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 2} \frac{1 - e^{-T/2T_1}}{1 - e^{-T/T_1}} e^{-t/T_1} + E \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 2} \frac{1 - e^{-T/2T_1}}{1 - e^{-T/T_1}} e^{-\frac{t-T/2}{T_1}} 1(t - T) \end{aligned}$$

Ponieważ interesuje nas przebieg napięcia ustalonego w przedziale czasu od 0 do  $T$ , można pominąć ostatni człon w wyrażeniu na  $u_{2u}(t)$ , tak więc

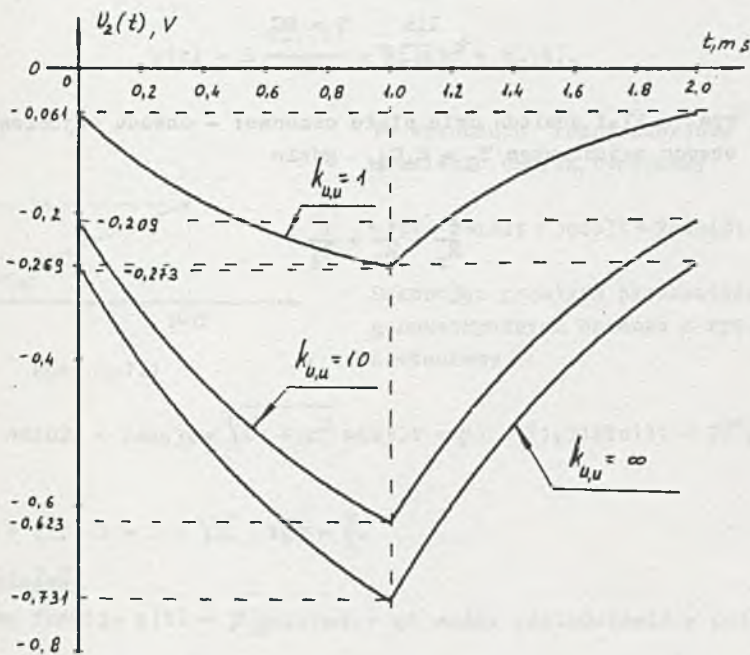
$$u_2(t) = -E \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 2} \left[ (1 - e^{-t/T_1}) - (1 - e^{-\frac{t-T/2}{T_1}}) 1(t - T/2) + \frac{1 - e^{-T/2T_1}}{1 - e^{-T/T_1}} e^{-t/T_1} \right] \quad (2)$$

W tablicy 2.14 podano wartości amplitud i stałych czasowych dla różnych wartości  $k_{u,u}$ .



Tablica 2.14

$k_{u,u} \frac{V}{V}$	1	10	$\infty$
$T_1, ms$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{12}$	1
$K_1$	0,182	0,209	0,378
$E \frac{k_{u,u}}{k_{u,u} + 2}, V$	0,333	0,833	1



Rys. 2.96.1

Przebiegi czasowe napięcia  $u_{2u}(t)$  przedstawiono na rys. 2.96.1.

Zauważmy z rysunku, że dla  $k_{u,u} = \infty$  przebieg napięcia  $u_2(t)$  jest identyczny z dokładnością do znaku z przebiegiem w obwodzie RC z zadania 2.87 dla  $T_1 = 0,5 T$ , przedstawionym na rysunku 2.87.6.

Zadanie 2.97

Obwód z rys. 2.97 posiada jedną stałą czasową

$$T = RC \frac{k_{u,u} + 1}{k_{u,u} + 2}$$

$$\lim_{k_{u,u} \rightarrow 0} T = \frac{1}{2} RC$$

a

$$\lim_{k_{u,u} \rightarrow \infty} T = RC$$

Obwód z rys. 2.97.1 posiada dwie stałe czasowe: - obwodu wejściowego  $T_1 = R_1 C_1$ ; obwodu wyjściowego  $T_2 = R_z C_4$ , gdzie

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}$$

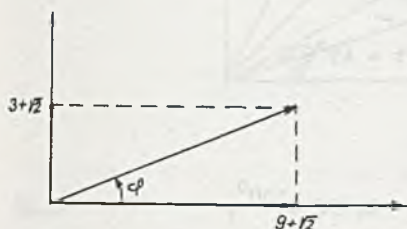
## R o z d z i a ł   3

### 3. STANY USTALONE W OBWODACH Z WYMUSZENIAMI SINUSOIDALNYMI

#### Zadanie 3.1

Na podstawie II prawa Kirchhoffs możemy napisać

$$u(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) + u_2(t).$$



Rys. 3.1.1

Po wykonaniu różniczkowania i podstawieniu danych otrzymamy

$$u(t) = 9\sin 3t + 3\cos 3t + 2\sin(3t + 45^\circ) \text{ V.}$$

Dokonując prostych przekształceń trygonometrycznych zgodnie z rys. 3.1.1 dostaniemy

$$u(t) = A\sin 3t + B\cos 3t = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(3t + \varphi) = 11,31\sin(3t + 23^\circ) \text{ V,}$$

gdzie:

$$A = 9 + \sqrt{2}, \quad B = 3 + \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}.$$

#### Zadanie 3.2

Dowolną funkcję  $y(t) = |A_m|\sin(\omega t + \varphi)$  można przedstawić w postaci

$$y(t) = \operatorname{Im}(A_m e^{j\omega t}), \quad (1)$$

gdzie:

$A_m = |A_m|e^{j\varphi}$  - amplituda zespolona funkcji  $y(t)$ .

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a_1$  i  $a_2$  oraz dwóch funkcji  $y_1(t) =$

$= |A_{m1}|\sin(\omega t + \varphi_1)$ ,  $y_2(t) = |A_{m2}|\sin(\omega t + \varphi_2)$  zachodzi

$$\operatorname{Im}[a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)] = a_1 \operatorname{Im}[y_1(t)] + a_2 \operatorname{Im}[y_2(t)]. \quad (2)$$



Ad a)

Zgodnie z (1) i (2) funkcję  $f_1(t)$  możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \text{Im}[F_1 e^{j2t}] = \text{Im}[10e^{j30^\circ} e^{j2t}] + \text{Im}[5e^{j90^\circ} e^{j2t}] = \\ &= \text{Im}\{[10e^{j30^\circ} + 5e^{j90^\circ}] e^{j2t}\}, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$F_1$  - amplituda zespolona funkcji  $f_1(t)$

$$F_1 = 10e^{j30^\circ} + 5e^{j90^\circ} = 13,23 e^{j49^\circ 6'},$$

a stąd

$$f_1(t) = 13,23 \sin(2t + 49^\circ 6').$$

Ad b)

$$F_2 = 1 + e^{j30^\circ} + e^{j60^\circ} = 2,732 e^{j30^\circ},$$

więc

$$f_2(t) = 2,732 \sin(2t + 30^\circ).$$

### Zadanie 3.3

Ad a)

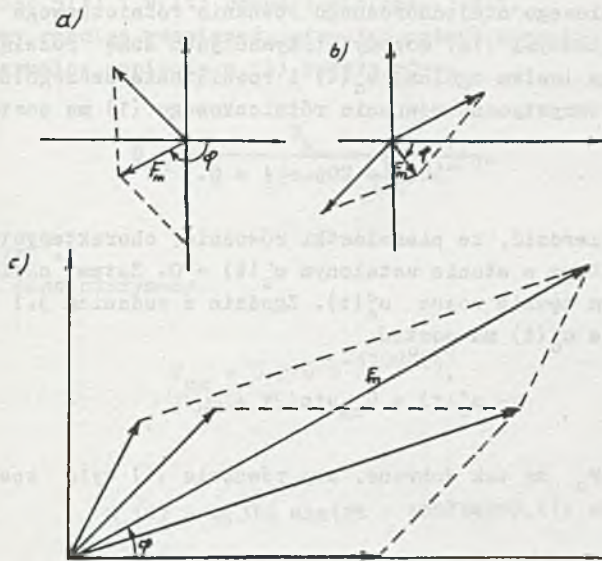
$$F = 0,765 e^{-j157^\circ 30'}$$

$$f(t) = 0,765 \sin(3t - 157^\circ 30').$$

Ad b)

$$F = 0,26 e^{-j52^\circ 30'}$$

$$f(t) = 0,26 \sin(2t - 52^\circ 30').$$



Rys. 3.3.1

Ad c)

$$F = 11,67 e^{j27^{\circ}42'}$$

$$f(t) = 11,67 \sin(3t + 27^{\circ}42').$$

#### Zadanie 3.4

Na podstawie II prawa Kirchhoffs otrzymamy

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = e,$$

a po podstawieniu za  $i = C \frac{du_c}{dt}$  dostaniemy

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = e \quad (1)$$

$$u_c(t) \Big|_{t=0} = u_c(0), \quad (1a)$$

$$\frac{du_c}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{C} i(0).$$

Rozwiązanie liniowego niejednorodnego równania różniczkowego (1) wraz z warunkami początkowymi (1a) możemy otrzymać jako sumę rozwiązania równania jednorodnego (całka ogólna)  $u'_c(t)$  i rozwiązania szczególnego  $u''_c(t)$ . Równanie charakterystyczne równania różniczkowego (1) ma postać

$$LCs^2 + RCs + 1 = 0.$$

Łatwo można stwierdzić, że pierwiastki równania charakterystycznego są ujemne i wobec tego w stanie ustalonym  $u'_c(t) = 0$ . Zatem napięcie  $u_c(t)$  w stanie ustalonym będzie równe  $u''_c(t)$ . Zgodnie z zadaniem 3.1 można założyć, że napięcie  $u''_c(t)$  ma postać

$$u''_c(t) = U_{cm} \sin(2t + \varphi_u), \quad (2)$$

gdzie  $U_{cm}$  i  $\varphi_u$  są tak dobrane, aby równanie (1) było spełnione. Podstawiając (2) do (1) otrzymamy

$$-U_{cm} \sin(2t + \varphi_u) + 3U_{cm} \cos(2t + \varphi_u) = \sin 2t. \quad (3)$$

Dokonując przekształceń trygonometrycznych, możemy (3) przedstawić w postaci

$$(-U_{cm} \cos \varphi_u - 3U_{cm} \sin \varphi_u) \sin 2t + (3U_{cm} \cos \varphi_u - U_{cm} \sin \varphi_u) \cos 2t = \sin 2t,$$

$$\cos 2t = \sin 2t,$$

a stąd:

$$3U_{cm} \cos \varphi_u = U_{cm} \sin \varphi_u, \quad (4)$$

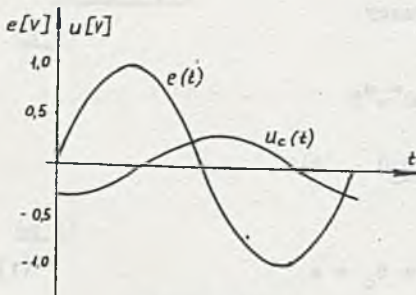
$$-U_{cm} \cos \varphi_u - 3U_{cm} \sin \varphi_u = 1.$$

Rozwiązując układ równań (4) dostaniemy

$$U_{cm} = -0,316 \text{ V} \quad \varphi_u = 71^\circ 36'$$

czyli

$$u_c(t) = -0,316 \sin(2t + 71^\circ 36') = 0,316 \sin(2t - 108^\circ 24') \text{ V}. \quad (5)$$



Rys. 3.4.1



Przebieg napięć  $e(t)$  i  $u_c(t)$  przedstawia rys. 3.4.1.

Zadanie możemy również rozwiązać, stosując metodę symboliczną. Wartość symboliczna maksymalna napięcia  $u_c(t)$  będzie równa

$$U_{cm} = \frac{E_m}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \frac{1}{j\omega C}$$

gdzie  $E_m = 1e^{j0}$ .

Podstawiając dane otrzymamy

$$U_{cm} = 0,316 e^{-j108^\circ 24'}$$

a więc

$$u_c(t) = 0,316 \sin(2t - 108^\circ 24') \text{ V.}$$

### Zadanie 3.5

Ad a)

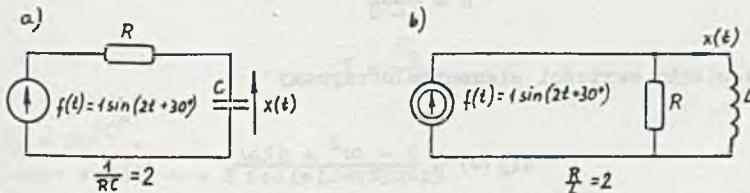
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t - 15^\circ).$$

Ad b)

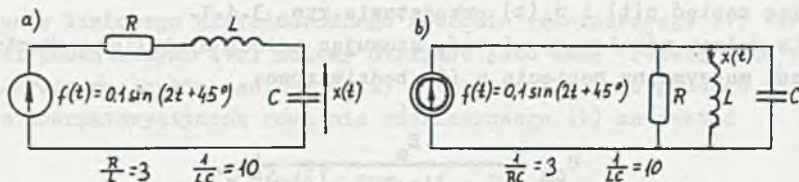
$$x(t) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sin 2t.$$

### Zadanie 3.6

Możliwe najprostsze realizacje obwodowe równania różniczkowego a) z zad. 3.5 przedstawia rys. 3.6, a równania b) rys. 3.6.1.



Rys. 3.6



Rys. 3.6.1

### Zadanie 3.7

Impedancję wejściową dwójnika  $Z(j\omega)$  możemy wyznaczyć dwiema metodami:

- metoda pierwsza polega na kolejnej redukcji dwójnika z wykorzystaniem zależności na impedancje zastępcze szeregowego i równoległego połączenia elementów. Metoda ta jest przydatna przy obliczeniach ręcznych;
- metoda druga polega na obliczeniu wartości symbolicznej  $I$  prądu wejściowego, wywołanego przyłożeniem do zacisków dwójnika dowolnego znanego sinusoidalnego napięcia o wartości symbolicznej  $V$ . Impedancję wejściową liczymy z zależności

$$Z = \frac{V}{I}.$$

Metoda ta przydatna jest w obliczeniach numerycznych i pomiarach.

Ad a)

Impedancja wejściowa wynosi

$$Z = Z_{RL} + Z_{RC},$$

gdzie:

$$Z_{RL} = R + j\omega L,$$

$$Z_{RC} = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Po podstawieniu wartości elementów otrzymamy

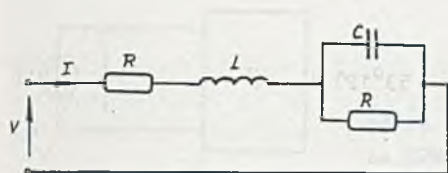
$$Z(j\omega) = \frac{2 - \omega^2 + 12j\omega}{1 + j\omega},$$

a dla  $\omega = 2 \text{ rad/s}$

$$Z(j2) = \frac{-2 + j4}{1 + j2}.$$

Ad b)

Stosując II prawo Kirchhoffa oraz prawo Ohma dla prądów i napięć w postaci symbolicznej możemy napisać zgodnie z rys.-3.7.1



Rys. 3.7.1

$$V = RI + j\omega LI + Z_{RC}I, \quad (1)$$

gdzie:

$$Z_{RC} = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}.$$

Równanie (1) możemy przedstawić w postaci

$$V = (R + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC})I, \quad (2)$$

a po przekształceniu otrzymamy

$$V = \frac{2R - \omega^2 RLC + j\omega(L + R^2C)}{1 + j\omega RC} I. \quad (2a)$$

Ponieważ  $Z = \frac{V}{I}$ , więc na podstawie (2a) dostaniemy

$$Z(j\omega) = \frac{2R - \omega^2 RLC + j\omega(L + R^2C)}{1 + j\omega RC},$$

a po podstawieniu danych

$$Z(j\omega) = \frac{2 - \omega^2 + j2\omega}{1 + j\omega}. \quad (3)$$

Przebieg prądu  $i(t)$  w stanie ustalonym po załączeniu SEM  $e_g(t)$  obliczymy stosując metodę symboliczną. Wartość symboliczna prądu będzie, zgodnie z (2a), równa

$$I = \frac{E_g}{Z}, \quad (4)$$

gdzie  $E_g = 2e^{j0^\circ}$ .

Podstawiając w (3)  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  otrzymamy

$$Z = \frac{-2 + j4}{1 + j2} = 2e^{j53^\circ 12'} \Omega.$$



Wobec tego na podstawie (4)

$$I = 1e^{-j53^{\circ}12'} \text{ A},$$

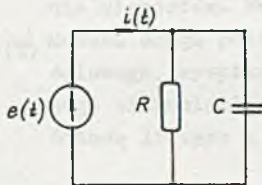
a stąd

$$i(t) = 1\sin(2t - 53^{\circ}12') \text{ A}.$$

### Zadanie 3.8

Ponieważ

$$i(t) = 400\cos(10t + 30^{\circ}) = 400\sin(10t + 120^{\circ}) \text{ mA},$$



Rys. 3.8.1

więc wartości symboliczne prądu  $i(t)$  i napięcia  $e(t)$  wynoszą:

$$E = 50e^{j45^{\circ}} \text{ V}, \quad I = 0,4e^{j120^{\circ}} \text{ A}. \quad (1)$$

Na podstawie (1) możemy obliczyć

$$Y = \frac{I}{E} = 8 \cdot 10^{-3} e^{j75^{\circ}} = 2,07 \cdot 10^{-3} + j 7,73 \cdot 10^{-3} \text{ S} \quad (2)$$

a więc dwójnik ma charakter rezystancyjno-pojemnościowy. Admitancja  $Y(j\omega)$  równoległego połączenia rezystora  $R$  i pojemności  $C$  wynosi

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + j\omega C. \quad (3)$$

Porównując (2) i (3) oraz podstawiając  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  otrzymamy:

$$R = 125 \Omega, \quad C = 77,3 \mu\text{F},$$

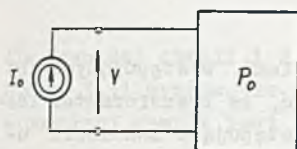
a zatem obwód z rys. 3.8.1 spełnia warunki zadania.

### Zadanie 3.9

Po załączeniu sinusoidalnej SEM  $e(t)$  prąd wejściowy  $i(t)$  wpływający do dwójnika  $P_0$  będzie również sinusoidalny o wartości symbolicznej  $I$  i wobec tego

$$Z(j\omega) = \frac{E}{I}. \quad (1)$$

Następnie, zastępujemy gałąź z SEM  $e(t)$  gałęzią z sinusoidalną SPM  $i_0(t)$ , o wartości symbolicznej  $I_0 = I$ , tak jak przedstawia to rys. 3.9.1. Otrzymamy wtedy



Rys. 3.9.1

$$Y(j\omega) = \frac{V}{I_0}, \quad (2)$$

gdzie  $V$  jest wartością symboliczną napięcia na SPM  $I_0$ . Zgodnie z twierdzeniem o kompensacji [9] będzie  $V = E$ , a wobec tego porównując (1) i (2) otrzymamy

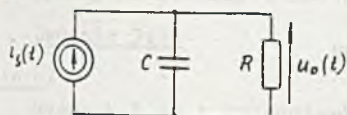
$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} \quad (3)$$

cbdo.

Zależność (3) sugeruje inny sposób wyznaczenia impedancji wejściowej dwójnika z zadania 3.7. Po przyłożeniu do zacisków dwójnika dowolnej znanej sinusoidalnej SPM o wartości symbolicznej  $I$  obliczamy napięcie  $V$  na jej zaciskach i następnie korzystamy z zależności (2) i (3).

#### Zadanie 3.10

Stosując twierdzenie o kompensacji możemy gałąź z prądem  $i_L(t)$  zastąpić gałęzią z sinusoidalną SPM  $i_s(t) = i_L(t)$ . Przebieg napięcia  $u_0(t)$  obliczymy wtedy, rozwiązując obwód pokazany na rys. 3.10.1. Stosując II prawo Kirchhoffs i prawo Ohma dla wartości symbolicznych napięć i prądów otrzymamy



Rys. 3.10.1

$$U_0 = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} I_s = \frac{R}{1 + j\omega RC} I_s. \quad (1)$$

Po podstawieniu danych

$$\frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{600}{1 + j 314.600.4.10^{-6}} = 479 e^{-j37^\circ}$$

$$I_s = 10^{-2} e^{j0^\circ} \text{ A}$$

więc zgodnie z (1)

$$U_0 = 4.79 e^{-j37^\circ} \text{ V} \quad (2)$$

Na podstawie (2) otrzymamy

$$u_0(t) = 4,79 \sin(\omega t - 37^\circ) \text{ V.}$$

### Zadanie 3.11

Zanim określimy związki między prądami i napięciami występującymi na zaciskach transformatora idealnego, należy zauważyć, że transformator idealny w stosunku do rzeczywistego charakteryzują następujące założenia upraszczające:

- 1) nie występuje rozpraszanie energii,
- 2) nie ma strumienia rozproszenia, co oznacza, że współczynnik sprzężenia jest równy jedności,
- 3) indukcyjność własna każdego uzwojenia jest nieskończona.

Ponadto, w celu uproszczenia rozważań zakładamy, że kierunki odniesienia prądów zostały tak dobrane, aby indukcyjność wzajemna była dodatnia. Jeśli przenikalność magnetyczna  $\mu$  rdzenia jest nieskończona, co wynika z założenia 3), to całe pole magnetyczne zawiera się w rdzeniu. Oznaczmy przez  $\Phi$  strumień magnetyczny przenikający dowolny pojedynczy zwoj jednego z dwóch uzwojeń transformatora. Wobec tego, gdy liczby zwojów uzwojenia pierwszego i drugiego będą równe odpowiednio  $n_1$  i  $n_2$ , to całkowite strumienie skojarzone z uzwojeniami wyniosą

$$\psi_1 = n_1 \Phi \quad \text{ i } \quad \psi_2 = n_2 \cdot \Phi$$

Ponieważ  $u_1 = \frac{d\psi_1}{dt}$  i  $u_2 = \frac{d\psi_2}{dt}$ , więc otrzymamy

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1)$$

dla dowolnej chwili i dowolnych wartości napięć  $u_1$  i  $u_2$ .  
Stosując prawo Ohma dla obwodów magnetycznych możemy napisać

$$F_m = n_1 i_1 + n_2 i_2 = R_m \Phi, \quad (2)$$

gdzie:

$F_m$  - siła magnetomotoryczna,

$R_m$  - opór magnetyczny rdzenia.

Z uwagi na to, że opór magnetyczny  $R_m$  jest odwrotnie proporcjonalny do przenikalności magnetycznej  $\mu$ , to jest on równy zero. Wobec tego z (2) wynika, że

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$



lub

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n_2}{n_1} \quad (3)$$

dla dowolnej chwili i dowolnych wartości prądów  $i_1$  i  $i_2$ .

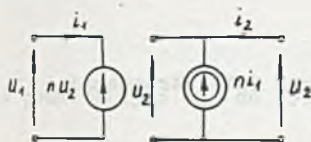
Z rys. 3.11 wynika, że moc chwilowa pobierana przez transformator idealny w dowolnej chwili jest równa

$$p(t) = u_1(t)i_1(t) + u_2(t)i_2(t). \quad (4)$$

Podstawiając do (4) zależności (3) i (1) łatwo zauważyć, że  $p(t) = 0$ . Oznacza to, że transformator idealny jest takim elementem obwodu, który w dowolnej chwili ani nie rozprasza, ani nie magazynuje energii, czyli jest tzw. elementem bezpamięciowym.

### Zadanie 3.12

Na podstawie zależności napięciowych i prądowych, opisujących transformator idealny (zadanie 3.11)



Rys. 3.12.1

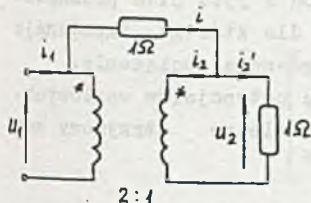
$$u_1' = nu_2, \quad i_2 = -ni_1,$$

otrzymamy równoważny obwód przedstawiony na rys. 3.12.1.

### Zadanie 3.13

Ad a)

Rysunek 3.13.1 przedstawia obwód, w przypadku gdy zaciski 2-2' są rozwarne. W tym przypadku prąd  $i_2 = 0$  i wobec tego otrzymamy



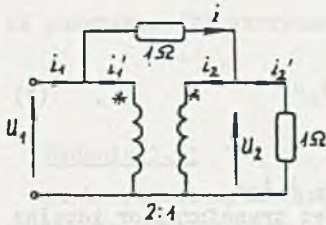
Rys. 3.13.1

$$u_1 = n_1 u_2 = 2u_2 = 2(-Ri_2) \quad (1)$$

gdzie  $R = 1 \Omega$ .

Ponieważ  $i_2 = -2i_1$ , to po podstawieniu do (1) uzyskamy

$$R_z = \frac{u_1}{i_1} = 4 \Omega.$$



Rys. 3.13.2

Ad b)

W tym przypadku  $i \neq 0$  i na podstawie rys. 3.13.2 oraz zależności prądowo-napięciowych opisujących idealny transformator możemy napisać

$$i = \frac{u_1 - u_2}{R} = \frac{u_1 - \frac{1}{2} u_1}{R} = \frac{u_1}{2R}, \quad (2)$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R} = \frac{u_1}{2R}. \quad (3)$$

Z (2) i (3) wynika, że  $i_2 = 0$ , a tym samym  $i'_1 = 0$ .  
Wobec tego  $i_1 = i = i'_2$ , czyli

$$R_z = 2\Omega.$$

#### Zadanie 3.14

Stosując I i II prawo Kirchhoffa do obwodu z rys. 3.14 otrzymamy:

$$I_o = I_s - k_{JJ} I_s,$$

$$U = (I_s - k_{JJ} I_s) Z_o,$$

a wobec tego

$$Z_{we} = \frac{U}{I_s} = (1 - k_{JJ}) Z_o. \quad (1)$$

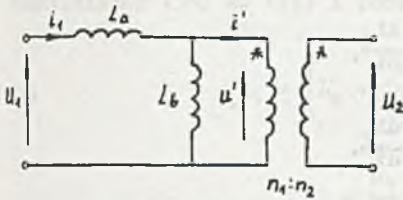
Z (1) wynika, że w przypadku, gdy  $k_{JJ} = 2$ , to obwód z rys. 3.18 przedstawia ujemny konwerter impedancji, tzn. taki obwód, dla którego impedancja wejściowa  $Z_{we}$  jest równa  $-Z_o$ , gdzie  $Z_o$  jest impedancją obciążenia. Zadanie to można również rozwiązać stosując metodę potencjałów węzłowych. Traktując prądowe źródło sterowane jako źródło niezależne otrzymamy następujące równanie

$$\frac{1}{Z_o} U = I_s - k_{JJ} I_1,$$

z którego po podstawieniu  $I_1 = I_s$ , uzyskamy zależność (1).

Zadanie 3.15

Na podstawie zależności (1) i (3) w zadaniu 3.11 oraz rys. 3.15.1 można napisać



Rys. 3.15.1

$$u' = \frac{n_1}{n_2} u_2, \quad i' = -\frac{n_2}{n_1} i_2, \quad (1)$$

a wobec tego

$$u' = L_b \left( \frac{di_1}{dt} - \frac{di'}{dt} \right) = L_b \frac{di_1}{dt} + \frac{n_2}{n_1} L_b \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

Biorąc pod uwagę fakt, że

$$u_1 = L_a \frac{di_1}{dt} + u' \quad (3)$$

i podstawiając (2) do (3) otrzymamy

$$u_1 = (L_a + L_b) \frac{di_1}{dt} + \frac{n_2}{n_1} L_b \frac{di_2}{dt}. \quad (4)$$

Obliczając  $u_2$  z (1) i uwzględniając (2) otrzymamy

$$u_2 = \frac{n_2}{n_1} u' = \frac{n_2}{n_1} L_b \frac{di_1}{dt} + \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 L_b \frac{di_2}{dt}. \quad (5)$$

Zależność (4) i (5) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_a + L_b & \frac{n_2}{n_1} L_b \\ \frac{n_2}{n_1} L_b & \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 L_b \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix}$$

L

cbdo.

Z zadania tego wynika ważny wniosek: indukcyjności sprzężone mogą być zastąpione przez indukcyjności bez sprzężeń i idealny transformator.



Zadanie 3.16

Na podstawie rys. 3.16 dla obwodu a) możemy napisać następujące zależności:

$$u_1 = L_a \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad (1)$$

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt}.$$

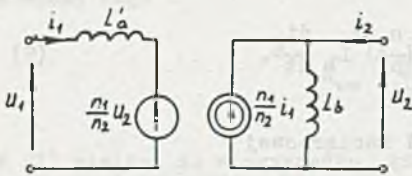
Z (1) wynika, że macierz indukcyjnościowa dla obwodu a) z rys. 3.16 jest równa

$$L = \begin{bmatrix} L_a & M \\ M & L_b \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Dla obwodu b) z rys. 3.16 możemy ułożyć następujące równania:

$$u_1 = (L_a - L_c) \frac{di_1}{dt} + L_c \frac{d}{dt} (i_1 + i_2), \quad (3)$$

$$u_2 = (L_b - L_c) \frac{di_2}{dt} + L_c \frac{d}{dt} (i_1 + i_2)$$



Rys. 3.16.1

i wobec tego macierz indukcyjnościowa w tym przypadku będzie równa

$$L = \begin{bmatrix} L_a & L_c \\ L_c & L_b \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Porównując (2) i (4) widać, że jeśli  $L_c = M$ , to macierze indukcyjnościowe obwodów a) i b) z rys. 3.16 są jednakowe.

Zastępując transformator idealny w obwodzie c) z rys. 3.16 jego schematem zastępczym, zawierającym źródła sterowane (patrz zadanie 3.12), otrzymamy obwód taki, jak na rys. 3.16.1.

Dla tego obwodu możemy ułożyć następujące równania, wynikające bezpośrednio z praw Kirchhoffa:

$$u_1 = L'_a \frac{di_1}{dt} + \frac{n_1}{n_2} u_2, \quad (5a)$$

$$u_2 = L_b \frac{d}{dt} (i_2 + \frac{n_1}{n_2} i_1). \quad (5b)$$

Podstawiając (5b) do (5a) i porządkując otrzymamy:

$$u_1 = \left[ L'_a + \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 L_b \right] \frac{di_1}{dt} + \frac{n_1}{n_2} L_b \frac{di_2}{dt},$$

$$u_2 = \frac{n_1}{n_2} L_b \frac{di_1}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt},$$

a wobec tego macierz indukcyjnościowa dla obwodu c) z rys. 3.16 będzie równa

$$L = \begin{bmatrix} L'_a + \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 L_b & \frac{n_1}{n_2} L_b \\ \frac{n_1}{n_2} L_b & L_b \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Porównując (6) z (2) widzimy, że macierze indukcyjnościowe obwodów a) c) będą równe, gdy:

$$L_a = L'_a + \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 L_b,$$

$$M = \frac{n_1}{n_2} L_b,$$

czyli musi zachodzić:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{M}{L_b},$$

$$L'_a = L_a - \frac{M^2}{L_b}.$$

### Zadanie 3.17

Wartość skuteczna napięcia na indukcyjności L jest równa iloczynowi wartości skutecznej prądu I i reaktancji

$$|U_L| = |I| X_L = |I| \omega L. \quad (1)$$

Napięcie na oporniku

$$U_R = IR. \quad (2)$$

Na podstawie II prawa Kirchhoffa w postaci symbolicznej

$$U = U_R + U_L = IR + Ij\omega L = I(R + j\omega L), \quad (3)$$

gdzie

$R + j\omega L = Z$  - impedancja obwodu  
lub

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\varphi},$$

gdzie

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}.$$

Więc równanie (3) można zapisać w postaci

$$|U| e^{j\psi_u} = |I| e^{j\psi_i} |Z| e^{j\varphi}, \quad (4)$$

gdzie

$\psi_u, \psi_i$  - fazy początkowe napięcia i prądu.  
Z (4) wynika, że

$$|U| = |I| |Z| = |I| \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (4')$$

i

$$\psi_u = \psi_i + \varphi \quad (4'')$$

lub w postaci

$$\begin{aligned} |U| e^{j\psi_u} &= |U_R| e^{j\psi_i} + |U_L| e^{j\psi_i} j = e^{j\psi_i} (|U_R| + |U_L| j) = \\ &= e^{j\psi_i} \sqrt{|U_R|^2 + |U_L|^2} e^{j\varphi_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{|U_L|}{|U_R|} = \arctg \frac{\omega L}{R} = \varphi$$



więc

$$|U| = \sqrt{|U_R|^2 + |U_L|^2} = \sqrt{48^2 + 72^2} = 86,5 \text{ V.} \quad (5)$$

Z równania (1) obliczymy wartość indukcyjności

$$L = \frac{|U_L|}{|I|\omega} = \frac{72}{3,5 \cdot 314} = 65,5 \text{ mH.}$$

Wartość opornika R (z równania (2))

$$R = \frac{|U_R|}{|I|} = \frac{48}{3,5} = 13,72 \Omega.$$

### Zadanie 3.18

Przy otwartym kluczu K. Równanie II prawa Kirchhoffa ma postać

$$U = IR + I \frac{1}{j\omega C} = IR - jIX_C = I(R - jX_C) \quad (1)$$

stąd

$$|U| = |I| \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (1')$$

więc

$$X_C = \sqrt{\left(\frac{|U|}{|I|}\right)^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{0,1}\right)^2 - 150^2} = 133,5 \Omega$$

a

$$Z_1 = R - jX_C = 150 - j 133,5 = |Z_1| e^{j\varphi_1},$$

$$|Z_1| = \sqrt{(150)^2 + (133,5)^2} = 199 \Omega, \quad \sqrt{\left(\frac{150}{199}\right)^2 + 1} = 199 \Omega,$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{-133,5}{150} = -\arctg 0,89 = -41^\circ 40'$$

więc

$$Z_1 = 199 e^{-j41^\circ 40'} \text{ V}$$

Przyjmując fazę początkową prądu  $\psi_1 = 0$ , czyli  $I = |I|$  otrzymamy napięcie  $U$ , dodając wektorowo napięcie na oporniku  $R$  i pojemności  $C$

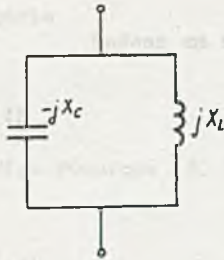
$$U = U_C + U_R = -jX_C I + RI =$$

$$= -j 133,5 \cdot 0,1 + 150 \cdot 0,1 = -j 13,35 + 15. \quad (2)$$

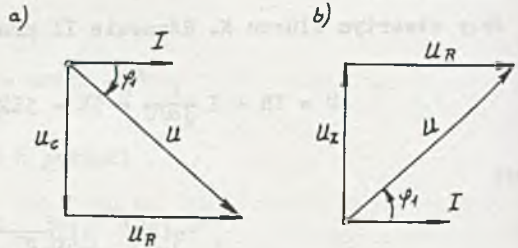
Jednocześnie można obliczyć napięcie zasilania z zależności (1)

$$U = I(R - jX_C) = I|Z_1|e^{j\varphi_1} = 19,9 e^{-j41^\circ 40'} \text{ V}. \quad (1'')$$

Wykres wektorowy ilustrujący równanie (2) przedstawiono na rysunku 3.18.2a. Przy zamkniętym kluczu  $K$ .



Rys. 3.18.1



Rys. 3.18.2

Impedancja zastępcza równoległe połączonego kondensatora i indukcyjności (rys. 3.18.1)

$$Z = \frac{-jX_C jX_L}{j(X_L - X_C)} = -j \frac{X_C X_L}{X_L - X_C} = \frac{X_C X_L}{X_L - X_C} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Z II prawa Kirchhoffa

$$U = I(R + Z) = U_R + U_Z. \quad (4)$$

Porównując (1) z (4) otrzymamy

$$|X_C| = \left| \frac{X_C X_L}{X_L - X_C} \right| \quad (3')$$

stąd

$$X_L = \frac{X_C}{2} = 66,75 \Omega$$

$$Z = -j \frac{\frac{X_C}{2}}{\frac{X_C}{2} - X_C} = jX_C$$

więc

$$Z_C = R + Z = R + jX_C = Z_1 = 199 e^{j41^\circ 40'} \Omega$$

Dodając do napięcia  $U_Z = IZ = j 13,35$  wektorowo napięcie  $U_R = IR = 15 V$  otrzymamy wektor napięcia zasilania  $U$ . Wykres wektorowy napięć przedstawiony jest na rys. 3.18.2b.

### Zadanie 3.19

Impedancja zastępcza równolegle połączonych elementów  $R$  i  $C$

$$Z_1 = \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}$$

a impedancja całkowita

$$Z = Z_1 + jX_L.$$

Wobec napięcie na SPM I

$$U = IZ.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy:

$$X_L = \omega L = 500 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 10 \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500 \cdot 50} 10^6 = 40 \Omega,$$

$$Z_1 = \frac{40(-j 40)}{40 - j 40} = \frac{-j(1 + j)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} 40 = 20 - 20 j,$$



$$Z = 20 - 20j + j10 = 20 - j10 \Omega,$$

$$I = |I|e^{j\psi_I} = 0,2 e^{j\frac{\pi}{2}} = 0,2 jA,$$

więc

$$U = (20 - j10)0,2j = 2 + 4j = \sqrt{2^2 + 4^2} e^{j\psi_U} = 4,47 e^{j63^\circ 25'} V \quad (1)$$

$$\psi_U = \arctg \frac{4}{2} = 90^\circ - 26^\circ 35' = 63^\circ 25'$$

Napięcie na kondensatorze

$$U_C = Z_C I = (20 - 20j)0,2j = 4 + 4j = 4\sqrt{2} e^{j45^\circ} V. \quad (2)$$

Prąd płynący przez kondensator

$$I_C = U_C j\omega C = \frac{4\sqrt{2}}{40} e^{j(45^\circ + 90^\circ)} = 0,1\sqrt{2} e^{j135^\circ} A. \quad (3)$$

Prąd płynący przez opornik

$$I_R = \frac{U_C}{R} = 0,1\sqrt{2} e^{j45^\circ} A. \quad (4)$$

Napięcie na indukcyjności

$$U_L = IjX_L = 0,2j \cdot j10 = -2 V. \quad (5)$$

Przechodząc na postać czasową, otrzymamy odpowiednio z równań (1), (2), (3), (4) i (5)

$$u = 4,47\sqrt{2} \sin(500t + 63^\circ 25') V, \quad (1')$$

$$u_C = 8\sin(500t + 45^\circ) V, \quad (2')$$

$$i_C = 0,2\sin(500t + 135^\circ) = 0,2\cos(500t + 45^\circ) A, \quad (3')$$

$$i_R = 0,2\sin(500t + 45^\circ) A, \quad (4')$$

$$u_L = -2\sqrt{2} \sin 500t V. \quad (5')$$

Moc chwilowa wydawana przez siłę prądomotoryczną

$$p_I = u i = 4,47\sqrt{2} \sin(500t + 63^\circ 25') 0,2\sqrt{2} \cos 500t = \\ = 0,8 + 0,9 \sin(1000t + 63^\circ 25') \text{ VA.}$$

Moc chwilowa pobierana przez kondensator

$$p_C = u_C i_C = 1,6 \sin(1000t + 90^\circ) = 1,6 \cos 1000t \text{ VA.}$$

Moc chwilowa pobierana przez cewkę

$$p_L = u_L i = -0,4 \sin 1000t \text{ VA.}$$

Moc czynna

$$P = |U| |I| \cos \varphi,$$

więc:

$$P_I = 0,8 \text{ W} = P_R,$$

$$P_L = P_C = 0.$$

#### Zadanie 3.20

$$R = 44,34 \Omega$$

$$L = 88,26 \text{ mH}$$

#### Zadanie 3.21

$$R = 440 \Omega,$$

$$L = 4,44 \text{ H},$$

$$C = 6,72 \cdot 10^{-6} \text{ F.}$$

#### Zadanie 3.22

$$R = 500 \Omega,$$

$$C = 1,24 \cdot 10^{-6} \text{ F},$$

$$P = 0,05 \text{ W.}$$

### Zadanie 3.23

Obwód bez przyrządów można przedstawić jak na rys. 3.23.1. Z prawa Ohma

$$R_1 = \frac{\text{wskazanie woltomierza } V}{\text{wskazanie amperomierza } A_1} = \frac{24}{2} = 12 \Omega.$$

Moduł impedancji gałęzi z opornikiem  $R_2$  i indukcyjnością  $L$  obliczymy z zależności

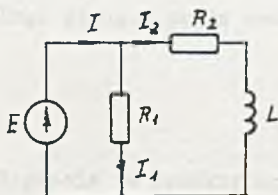
$$|Z| = \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = \frac{\text{wskazanie woltomierza } V}{\text{wskazanie amperomierza } A_2} = 8 \Omega \quad (1)$$

a

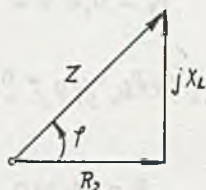
$$Z = R_2 + jX_L = |Z|e^{j\varphi}, \quad (\text{rys. 3.23.2}), \quad (2)$$

gdzie

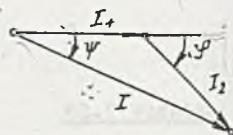
$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R_2}.$$



Rys. 3.23.1



Rys. 3.23.2



Rys. 3.23.3

Wartość argumentu  $\varphi$  impedancji obliczymy korzystając z wykresu wektorowego prądów. Dla wygody założymy, że faza początkowa prądu  $I_1$  jest równa zero (co odpowiada  $\psi_e = 0$ ), wówczas I prawo Kirchhoffa ma postać

$$I = I_1 + I_2. \quad (3)$$

Prąd  $I_2$  jest opóźniony w stosunku do prądu  $I_1$ , bo płynie w gałęzi o charakterze rezystancyjno

Znamy również wartości skuteczne wszystkich prądów (wskazania amperomierzy), więc potrafimy sporządzić wykres wektorowy prądów (rys. 3.23.3). Z zależności

$$|I_2|^2 = |I_1|^2 + |I|^2 - 2|I||I_1|\cos\psi$$



wyznaczymy

$$\psi = \arccos \frac{11}{16} = 46^{\circ}30'$$

Z wykresu widać, że

$$|I|\cos\psi = |I_1| + |I_2|\cos\varphi$$

stąd

$$\varphi = \arccos \frac{|I|\cos\psi - |I_1|}{|I_2|} = \arccos 0,25 = 75^{\circ}30'$$

Z rysunku 3.23.2

$$X_L = |Z|\sin\varphi = 8\sin 75^{\circ}30' = 7,8\Omega$$

więc

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{7,8}{314} \text{ H} = 24,8 \text{ mH}.$$

Z zależności (1) wyznaczmy  $R_2$

$$R_2 = \sqrt{|Z|^2 - X_L^2} = 1,87\Omega.$$

Moc czynna wydawana przez źródło równa jest mocy traconej na opornikach

$$P = |E||I|\cos\psi = |I_1|^2 R_1 + |I_2|^2 R_2 = 24,4 \frac{11}{16} = 66 \text{ W}.$$

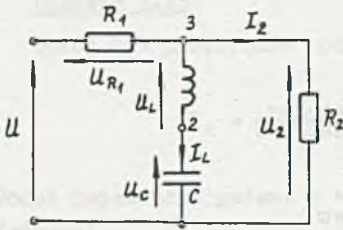
#### Zadanie 3.24

$$\omega = 2\pi f = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$i_1 = 5\sqrt{2} \sin\omega t \text{ A},$$

$$i_2 = 6,4\sqrt{2} \sin(\omega t - 38^{\circ}40') \text{ A},$$

$$i_3 = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^{\circ}) \text{ A}.$$



Rys. 3.25.1

### Zadanie 3.25

Wskazówka: sporządzić wykres wektorowy napięć dla obwodu jak na rys. 3.25.1

$$R'_1 = 19,5 \Omega, \quad |U_m|' = 70,7 \text{ V},$$

$$R''_1 = 170 \Omega, \quad |U_m|'' = 301 \text{ V}.$$

### Zadanie 3.26

$$|U_m| = 60\sqrt{2} \text{ V},$$

$$f = 530 \text{ Hz}.$$

### Zadanie 3.27

$$|I_1| = 0,6 \text{ A}, \quad |I_2| = 0,24 \text{ A}, \quad |I_3| = 0,12 \text{ A} \quad \text{ i } \quad |I| = 0,612 \text{ A},$$

$$i_1 = 0,6\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}, \quad \omega = 100 \text{ rad/s}$$

$$i_2 = 0,24\sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ A},$$

$$i_3 = 0,12\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A},$$

$$i = 0,612\sqrt{2} \sin(\omega t - 11^\circ 20') \text{ A}.$$

### Zadanie 3.28

Impedancja zastępcza układu:

$$Z_z = R - jX_C + \frac{jX_L R_X}{R_X + jX_L} = R + \frac{X_L^2 R_X}{R_X^2 + X_L^2} + j \left[ \frac{R_X^2 X_L}{R_X^2 + X_L^2} - X_C \right]. \quad (1)$$

Napięcie będzie w fazie z prądem i gdy impedancja zastępcza będzie miała charakter rezystancyjny więc jej część urojona równa jest zero

$$\frac{R_X^2 X_L}{R_X^2 + X_L^2} - X_C = 0 \quad (2)$$

stąd

$$R_X = X_L \sqrt{\frac{X_C}{X_L - X_C}}. \quad (3)$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$X_L = \omega L = 314 \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 159 \Omega,$$

mamy

$$R_X = 318 \Omega.$$

Impedancja zastępcza

$$Z_Z = R_Z = 20 + \frac{314^2 \cdot 318}{318^2 + 314^2} \Omega = 178 \Omega$$

a napięcie na zaciskach SPM i

$$u = iZ_Z = 25,0 \sin 314t \text{ V.}$$

### Zadanie 3.29

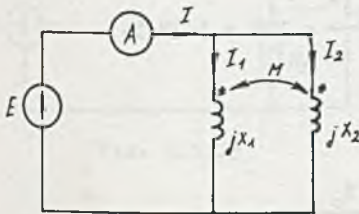
Układ można przedstawić w sposób pokazany na rys. 3.29.1. Równania opisujące ten układ:

$$E = I_1 jX_1 + I_2 jX_M,$$

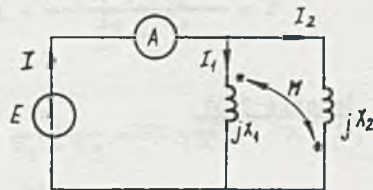
$$E = I_1 jX_M + I_2 jX_2,$$

$$I = I_1 + I_2,$$

$$X_M = k \sqrt{X_1 X_2}$$



Rys. 3.29.1



Rys. 3.29.2

pozwalają wyznaczyć impedancję zastępczą

$$Z = \frac{E}{I} = jX_1 X_2 \frac{1 - k^2}{X_1 + X_2 - 2X_M}.$$



Podstawiając wartości szczegółowe

$$Z = j 20 \cdot 12 \frac{1 - 0,85^2}{20 + 12 - 2 \cdot 0,85 \sqrt{20 \cdot 12}} = j 11,8.$$

Stąd wskazanie amperomierza

$$|I| = \frac{|E|}{|Z|} = \frac{11}{11,8} = 0,935 \text{ A.}$$

Jeśli zaciski cewki drugiej połączymy odwrotnie z cewką pierwszą, co schematycznie pokazuje rysunek 3.29.2, impedancja zastępcza wynosi

$$Z' = jX_1 X_2 \frac{1 - k^2}{X_1 + X_2 + 2X_M},$$

ponieważ zmienia się znak indukcyjności wzajemnej.

Po podstawieniu wartości szczegółowych

$$Z' = j 20 \cdot 12 \frac{1 - 0,85^2}{20 + 12 + 2 \cdot 0,85 \sqrt{20 \cdot 12}} = j 1,14.$$

Amperomierz wskaże prąd

$$|I'| = \frac{|E|}{|Z'|} = \frac{11}{1,14} = 9,65 \text{ A.}$$

### Zadanie 3.30

$$Z = \frac{R(X_2 + \sqrt{X_1 X_2})^2}{R^2 + X_2^2} + j \frac{R^2(\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2})^2}{R^2 + X_2^2} = 109 + j 39,5.$$

### Zadanie 3.31

$$Z = jX_1 \left( 1 - k^2 \frac{jX_1 + Z_0}{jX_1(2 - k^2) + 2Z_0} \right).$$

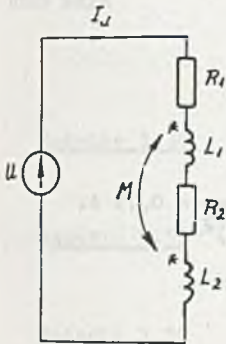
### Zadanie 3.32

Przed zwarciem reaktancji dławika

$$X_d = 2\pi f L_d = 2\pi 500 \cdot 12 = 37700 \Omega.$$

A zatem prąd dławika

$$|I_d| = \frac{|U|}{\sqrt{R_d^2 + X_d^2}} \approx \frac{|U|}{X_d} = \frac{60}{37700} = 1,59 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$



Rys. 3.32.1

Obwód przed zwarcie można przedstawić jak na rys. 3.32.1, przy czym

$$L_d = L_1 + L_2 + 2M = \frac{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2}{R_m} = \frac{(z_1 + z_2)^2}{R_m},$$

gdzie:

$$z_2 = 4,$$

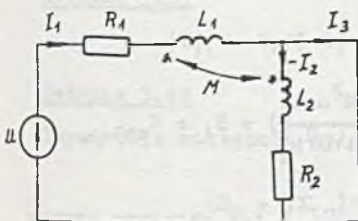
$z_1$  - pozostała część zwojów,

$R_m$  - oporność magnetyczna rdzenia i szczeliny powietrznej.

Stąd:

$$L_1 = \frac{z_1^2}{R_m} = L_d \left( \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right)^2 = 12 \left( \frac{996}{996 + 4} \right)^2 = 11,9 \text{ H,}$$

$$L_2 = \frac{z_2^2}{R_m} = L_d \left( \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right)^2 = 12 \left( \frac{4}{1000} \right)^2 = 0,192 \cdot 10^{-3} \text{ H.}$$



Rys. 3.32.2

Odpowiednio:

$$X_1 = 2\pi f L_1 = 2\pi 500 \cdot 11,9 = 37400 \Omega,$$

$$X_2 = 2\pi f L_2 = 2\pi 500 \cdot 0,192 \cdot 10^{-3} = 0,603 \Omega$$

oraz:

$$R_1 = R_d \frac{z_1}{z_1 + z_2} = 80 \frac{996}{1000} = 79,7 \Omega,$$

$$R_2 = R_d \frac{z_2}{z_1 + z_2} = 80 \frac{4}{1000} = 0,32 \Omega.$$

Równania obwodu po zwarcie (rys. 3.32.2)

$$I_1(R_1 + jX_1) - I_2 jX_M = U \quad (1)$$

$$I_1 jX_M - I_2(R_2 + jX_2) = 0 \quad (2)$$

pozwalają wyliczyć prąd  $I_2$  w sekcji zwartej

$$I_2 = \frac{jX_M U}{R_1 R_2 + j(X_1 X_2 + X_2 R_1)}$$

Wartość bezwzględna prądu

$$|I_2| = \frac{X_M |U|}{\sqrt{(R_1 R_2)^2 + (X_1 R_2 + X_2 R_1)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{37400 \cdot 0,603 \cdot 60}}{\sqrt{(79,7 \cdot 0,32)^2 + (37400 \cdot 0,32 + 0,603 \cdot 79,7)^2}} = 0,75 \text{ A.}$$

Zatem prąd w zwojach zwartych wzrasta

$$\frac{|I_2|}{|I_d|} = \frac{0,75}{1,59 \cdot 10^{-3}} = 472\text{-krotnie.}$$

### Zadanie 3.33

Z równań II prawa Kirchhoffa, dla strony pierwotnej i wtórnej

$$E = I_1(R_1 + j\omega L_1) - I_2 j\omega M,$$

$$I_1 j\omega M = I_2(R_2 + j\omega L_2),$$

mamy

$$\frac{E}{I_1} = R_1 + \frac{R_2 \omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} + j(\omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2 \omega L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}) = R_1 + Z_{we},$$

gdzie  $Z_{we}$  impedancja wejściowa transformatora, a jej składowa czynna

$$R_{we} = \frac{R_2 \omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} = f(R_2).$$

Można wyliczyć, że maksimum tej funkcji występuje dla  $R_2 = \omega L_2$  i wynosi

$$R_{we} = \frac{k^2 L_1}{2 L_2} R_2 = \frac{k^2 L_1}{2 L_2} \omega L_2 = \frac{k^2 \omega L_1}{2}.$$



Po podstawieniu wartości liczbowych

$$R_{\text{wem}} = \frac{0,95^2 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 3}{2} = 426 \, \Omega,$$

przy czym

$$R_0 = \omega L_2 = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,03 = 9,4 \, \Omega.$$

Zadanie 3.34

$$P_1 = 175 \, \text{mW}, \quad P_2 = 87,5 \, \text{mW}.$$

Zadanie 3.35

$$R = 13,9 \, \Omega, \quad X = 9,2 \, \Omega, \quad X_M = 8,3 \, \Omega.$$

Zadanie 3.36

$$|E_m| = 0,888 \, \text{V}, \quad \varphi_E = +90^\circ, \quad P_0 = 24 \, \text{mW}.$$

Zadanie 3.37

$$|U_m| = 1525 \, \text{V}.$$

Zadanie 3.38

$$i_1 = 1,15 \sqrt{2} \sin(314t + 48^\circ 30') \, \text{A},$$

$$i_2 = 0,803 \sqrt{2} \sin(314t + 113^\circ 10') \, \text{A}.$$

Zadanie 3.39

$$|I_1| = 7,25 \, \text{A}, \quad |I_2| = 3,15 \, \text{A}, \quad |I_3| = 3,32 \, \text{A}.$$

Zadanie 3.40

Impedancja zastępcza gałęzi równoległych

$$Z_1 = \frac{(R_2 + jX_{L2})(R_3 - jX_{C3})}{R_2 + R_3 + j(X_{L2} - X_{C3})} = 28 + 4j = 28,3 \, e^{j8^\circ 10'} \, \Omega$$

Impedancja zastępcza układu

$$Z = R_1 + Z_1 = 38 + 4j = 38,210 \, e^{j6^\circ} \, \Omega$$

więc

$$I = \frac{E}{Z} = 0,575 \, e^{-j6^\circ} \, \text{A}.$$

Moc pozorna źródła

$$S = |E||I| = 22 \cdot 0,575 = 12,650 \text{ VA}$$

więc moc czynna

$$P = S \cos 6^\circ = 12,590 \text{ W}$$

a moc bierna

$$Q = S \sin 6^\circ = 1,325 \text{ var.}$$

Moc czynna wydawana przez źródło jest rozpraszana na opornikach  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$ .

Moc pobierana przez opornik  $R_1$

$$P_{R1} = |I|^2 R_1 = 3,30 \text{ W.}$$

Wartość skuteczna napięcia  $u_2$

$$|U_2| = |I| |Z_1| = 16,273 \text{ V}$$

więc wartości skuteczne prądów  $I_2$  i  $I_3$  wynoszą odpowiednio

$$|I_2| = \frac{|U_2|}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}} = 0,576 \text{ A}$$

a

$$|I_3| = \frac{|U_2|}{\sqrt{R_3^2 + X_C^2}} = 0,364 \text{ A.}$$

Moce czynne tracone na opornikach  $R_2$  i  $R_3$ :

$$P_{R2} = |I_2|^2 R_2 = 6,65 \text{ W,}$$

$$P_{R3} = |I_3|^2 R_3 = 2,64 \text{ W.}$$

Bilans mocy czynnej:

$$P = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3},$$

$$12,59 \text{ W} = 3,30 + 6,65 + 2,64 = 12,59 \text{ W}.$$

Zadanie 3.41

Z II prawa Kirchhoffa napięcie na przekątnej mostka

$$U = U_4 - U_1 = I_2 Z_4 - I_1 R_1.$$

Oznaczając:

$$Z_1 = R_1,$$

$$Z_2 = R_2 - jX_2,$$

$$Z_3 = R_3 + jX_3,$$

przy założeniu, że mostek jest w równowadze ( $U = 0$ ), obliczymy

$$I_1 = \frac{E}{Z_1 + Z_2}$$

$$I_2 = \frac{E}{Z_3 + Z_4},$$

więc

$$U = E \left( \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) = E \frac{Z_4 Z_2 - Z_3 Z_1}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)}.$$

Przyrównując licznik ułamka do zera, obliczymy wartość impedancji  $Z_4$ , dla której napięcie  $U$  na przekątnej mostka będzie, niezależnie od amplitudy napięcia zasilania, równe zero

$$Z_4 Z_2 - Z_3 Z_1 = 0$$

więc

$$Z_4 = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} = \frac{50(160 + j80)}{40 - j80} = 100j = jX_{L4} = j\omega L_4,$$



stąd

$$L_4 = \frac{100}{1000} H = 0,1 H.$$

### Zadanie 3.42

Jeżeli prąd  $I$  płynący w przekątnej mostka jest równy zeru, wówczas

$$I_1 = \frac{E}{R_1 - jX_{C1} + R_3} \quad (1)$$

a

$$I_2 = \frac{E}{R_x - jX_{Cx} + R_4} \quad (2)$$

a napięcie na przekątnej mostka

$$U = U_2 - U_1 = I_2(R_x - jX_{Cx}) - I_1(R_1 - jX_{C1}), \quad (3)$$

ale mostek jest w równowadze, więc  $U = 0$ .

Przyrównując (3) do zera, otrzymamy równanie pozwalające wyznaczyć  $C_x$  i  $R_x$ .

$$U = \frac{E}{R_x + R_4 - jX_{Cx}} (R_x - jX_{Cx}) - \frac{E}{R_1 + R_3 - jX_{C1}} (R_1 - jX_{C1}) =$$

$$= \frac{E}{(R_x + R_4 - jX_{Cx})(R_1 + R_3 - jX_{C1})} \cdot$$

$$[(R_x - jX_{Cx})(R_1 + R_3 - jX_{C1}) - (R_1 - jX_{C1})(R_x + R_4 - jX_{Cx})] = 0, \quad (3')$$

czyli

$$(R_x - jX_{Cx})(R_1 + R_3 - jX_{C1}) = (R_1 - jX_{C1})(R_x + R_4 - jX_{Cx})$$

po przekształceniu otrzymamy

$$(R_x - jX_{Cx})R_3 = R_4(R_1 - jX_{C1}) \quad (4)$$

stąd:

$$R_x R_3 = R_1 R_4,$$

$$R_3 X_{Cx} = R_4 X_{C1},$$

więc:

$$R_x = \frac{R_1 R_4}{R_3},$$

$$X_{Cx} = X_{C1} \frac{R_4}{R_3}; \quad C_x = C_1 \frac{R_3}{R_4}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych:

$$R_x = 108,5 \text{ k}\Omega,$$

$$C_x = 0,0434 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$$

#### Zadanie 3.43

$$P = \frac{|E|^2 R}{(R_o + R)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2},$$

$$P = P_m \quad \text{dla} \quad R = 161,3 \Omega, \quad P_m = 0,35 \text{ W}.$$

#### Zadanie 3.44

Napięcie na kondensatorze

$$|U_c| = \sqrt{|U|^2 - |U_N|^2} = \sqrt{220^2 - 60^2} = 211,5 \text{ V}.$$

Prąd w obwodzie:

$$|I| = \frac{P_N}{|U_N|} = \frac{12}{60} = 0,2 \text{ A},$$

$$\frac{|I|}{|U_c|} = \omega C.$$

Stąd

$$C = \frac{|I|}{\omega |U_c|} = \frac{0,2}{2\pi \cdot 50 \cdot 211,5} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$$

#### Zadanie 3.45

4d a)

$$|I| = \text{const.}$$

Ponieważ impedancja cewki wzrosła, należy opór  $R$  zbocznikować oporem  $R_b$  tak, aby impedancja dwójnika pozostała bez zmian

$$\sqrt{(R + R_L)^2 + (2\pi f_1 L)^2} = \sqrt{(R_Z + R_L)^2 + (2\pi f_2 L)^2},$$

gdzie

$$R_Z = \frac{R_b R}{R_b + R}.$$

Podnosząc obustronnie do kwadratu i podstawiając dane

$$(20 + 80)^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 0,2)^2 = (R_Z + 80)^2 + (2\pi \cdot 60 \cdot 0,2)^2,$$

stąd

$$R_Z = 10,8 \Omega,$$

a następnie

$$R_b = 23,5 \Omega.$$

Ad b)

$$|U_c| = \text{const.}$$

Ponieważ napięcie na cewce przy podwyższeniu częstotliwości wzrasta, należy do opornika  $R$  szeregowo włączyć opornik  $R_b$ . Wówczas:

$$|U_{c1}| = \frac{|U|}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (2\pi f_1 L)^2}} \sqrt{R_L^2 + (2\pi f_1 L)^2},$$

$$|U_{c2}| = \frac{|U|}{\sqrt{(R + R_b + R_L)^2 + (2\pi f_2 L)^2}} \sqrt{R_L^2 + (2\pi f_2 L)^2},$$

$$|U_{c1}| = |U_{c2}|.$$

Podstawiając wartości liczbowe

$$\sqrt{\frac{80^2 + (2\pi 50 \cdot 0,2)^2}{100^2 + (2\pi 50 \cdot 0,2)^2}} = \sqrt{\frac{80^2 + (2\pi 60 \cdot 0,2)^2}{(100 + R_b)^2 + (2\pi 60 \cdot 0,2)^2}},$$



otrzymamy

$$R_g = 3 \Omega.$$

### Zadanie 3.46

$$R_b = 1000 \Omega$$

### Zadanie 3.47

Kondensator o wartości pojemności  $C' = 4,21 \mu F$  lub  $C'' = 0,85 \mu F$ .

### Zadanie 3.48

Admitancja zastępcza dławików

$$Y_1 = \frac{8}{R_d + j\omega L_d} = \frac{8R_d}{R_d^2 + (\omega L_d)^2} - j \frac{8\omega L_d}{R_d^2 + (\omega L_d)^2}$$

a kondensatora

$$Y_2 = j\omega C.$$

Warunkiem kompensacji mocy biernej jest, by admitancja wypadkowa miała charakter czynny, czyli  $\text{Im}Y = 0$ , więc

$$\omega C - \frac{8\omega L_d}{R_d^2 + (\omega L_d)^2} = 0,$$

$$C = \frac{8L_d}{R_d^2 + (\omega L_d)^2} = \frac{8 \cdot 12}{500^2 + (314 \cdot 12)^2} = 6,65 \cdot 10^{-6} F.$$

### Zadanie 3.49

$$C = 2 \cdot 8 \mu F.$$

### Zadanie 3.50

Stosując metodę potencjałów węzłowych i przyjmując oznaczenia podane na rys. 3.50, otrzymamy

$$V_0 = 0,$$

$$V_1 \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \right) = -E_1 \frac{1}{R} - E_2 \frac{1}{R}, \quad (1)$$

$$V_2 = E_3.$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$X_L = \omega L = 100 \, \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 200 \, \Omega,$$

$$E_1 = 10 \, \text{V},$$

$$E_2 = 10 \, \text{j V},$$

$$E_3 = 20 \, \text{V},$$

$$V_1 = - \frac{E_1 + E_2}{R \left( \frac{2}{R} - \text{j} \frac{1}{X_L} \right)} = - \frac{100 + 100 \text{j}}{2 - \text{j}} = -20 - \text{j} 60 \, \text{V}. \quad (1')$$

Korzystając z prawa Ohma, obliczymy prądy płynące w gałęziach:

$$I_1 = \frac{V_1 + E_1}{R} = 0,08 - \text{j} 0,06 = 0,1 \, e^{-\text{j}36^\circ40'} \, \text{A}$$

$$I_2 = \frac{V_1}{\text{j}X_L} = -0,06 + \text{j} 0,02 = 0,0635 \, e^{\text{j}161^\circ30'} \, \text{A}$$

$$I_3 = \frac{V_1 + E_2}{R} = -0,02 + \text{j} 0,04 = 0,048 \, e^{\text{j}116^\circ35'} \, \text{A}$$

$$I_4 = \frac{V_2}{R - \text{j}X_C} = 0,04 + \text{j} 0,08 = 0,0895 \, e^{\text{j}63^\circ25'} \, \text{A}$$

$$I_5 = \frac{V_2}{R + \text{j}X_L} = 0,1 - \text{j} 0,1 = 0,141 \, e^{-\text{j}45^\circ} \, \text{A}$$

Z pierwszego prawa Kirchhoffs:

$$I_6 = I_4 + I_5 = 0,14 - \text{j} 0,20 = 0,141 \, e^{-\text{j}58^\circ10'} \, \text{A}$$

$$I_7 = I_4 + I_1 = 0,12 + \text{j} 0,02 = 0,121 \, e^{\text{j}9^\circ30'} \, \text{A}$$

$$I_8 = I_3 + I_5 = 0,08 - \text{j} 0,06 = 0,1 \, e^{-\text{j}56^\circ40'} \, \text{A}$$

Sprawdźmy, czy jest spełnione I prawo Kirchhoffa dla węzła pierwszego

$$I_2 + I_7 + I_8 - I_6 = -0,06 + j 0,02 + 0,12 + j 0,02 +$$

$$+ 0,08 - j 0,06 - 0,14 - j 0,02 = 0.$$

Przechodząc na postać czasową, otrzymamy:

$$i_1 = 0,141 \sin(500t - 36^\circ 40') \text{ A},$$

$$i_2 = 0,0895 \sin(500t + 161^\circ 30') \text{ A},$$

$$i_3 = 0,0632 \sin(500t + 116^\circ 35') \text{ A},$$

$$i_4 = 0,1260 \sin(500t + 63^\circ 30') \text{ A},$$

$$i_5 = 0,2 \sin(500t - 45^\circ) \text{ A},$$

$$i_6 = 0,2 \sin(500t - 8^\circ 10') \text{ A},$$

$$i_7 = 0,17 \sin(500t + 9^\circ 30') \text{ A},$$

$$i_8 = i_1 = 0,141 \sin(500t - 36^\circ 40') \text{ A}.$$

#### Zadanie 3.51

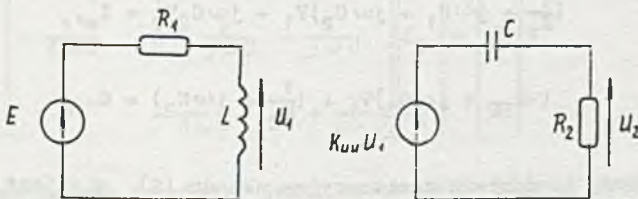
$$i = 56 \sin(200t + 203^\circ 20') \text{ mA},$$

$$u = -10 + 12,1 \sin(200t + 6^\circ 50') \text{ V}.$$

#### Zadanie 3.52

W pierwszym etapie układania równań obwodu, źródła sterowane możemy traktować jako źródła niezależne. Na podstawie rys. 3.52.1 otrzymamy

$$U_2 = \frac{k_{uu} U_1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} R_2 = \frac{j\omega R_2 C}{1 + j\omega R_2 C} k_{uu} U_1. \quad (1)$$



Rys. 3.52.1



drugim etapie obliczamy wielkości sterujące, a mianowicie

$$U_1 = \frac{j\omega L}{R_1 + j\omega L} E. \quad (2)$$

tawiając (2) do (1) ostatecznie otrzymamy

$$U_2 = - \frac{\omega^2 R_2 L C k_{uu}}{(R + j\omega L)(1 + j\omega R_2 C)} E, \quad (3)$$

a po podstawieniu danych

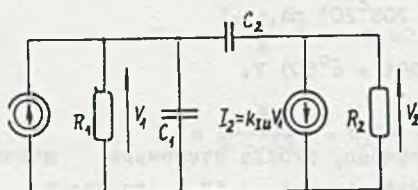
$$U_2 = \frac{3,92}{\sqrt{2}} e^{j123^\circ 42'}.$$

Stąd

$$u_2(t) = 3,92 \sin(1000t + 123^\circ 18' \text{ V}.$$

### Zadanie 3.53

Stosując metodę potencjałów węzłowych do obwodu przedstawionego na r. 3.53.1 uzyskamy następujący układ równań



Rys. 3.53.1

$$\left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 + j\omega C_2\right)V_1 - j\omega C_2 V_2 = I_s \quad (1)$$

$$-j\omega C_2 V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2\right)V_2 = -I_2$$

$$I_2 = k_{IU} V_1.$$

Podstawiając tę zależność do (1), otrzymamy:

$$\left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 + j\omega C_2\right)V_1 - j\omega C_2 V_2 = I_s, \quad (2)$$

$$(-k_{IU} + j\omega C_2)V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2\right)V_2 = 0.$$

to zauważyć, że macierz admitancyjna układu (2) nie jest macierzą symetryczną.

Rozwiązując układ równań (2) dostaniemy

$$V_2 = \frac{-k_{IU}R_1R_2 + j\omega C_2R_1R_2}{-\omega^2R_1R_2C_1C_2 + j\omega R_1(C_1 + C_2 + k_{IU}R_2C_2)} I_S.$$

Podstawiając dane i wykonując obliczenia otrzymamy

$$V_2 = 6,4 \sqrt{2} e^{j15^\circ 12'},$$

a wobec tego

$$v_2(t) = 12,8 \sin(1000t + 5^\circ 12') \text{ V}.$$

### Zadanie 3.54

Równania prądów oczkowych dla obwodu z rys. 3.54 są następujące

$$\begin{bmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & -\frac{1}{j\omega C} & 0 \\ -\frac{1}{j\omega C} & R + \frac{2}{j\omega C} & -\frac{1}{j\omega C} \\ 0 & -\frac{1}{j\omega C} & R + \frac{2}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{uu}V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Wyrażając  $V$  przez  $I_3$  dostaniemy

$$V = \frac{I_3}{j\omega C}. \quad (2)$$

Podstawiając (2) do (1) i dokonując przekształceń otrzymamy układ równań jednorodnych

$$\begin{bmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & -\frac{1}{j\omega C} & \frac{k_{uu}}{j\omega C} \\ -\frac{1}{j\omega C} & R + \frac{2}{j\omega C} & -\frac{1}{j\omega C} \\ 0 & -\frac{1}{j\omega C} & R + \frac{2}{j\omega C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Niezerowe rozwiązanie istnieje, jeśli wyznacznik główny jest równy zero.

Wobec tego otrzymamy

$$R(R^2 - \frac{6}{\omega^2 C^2}) + \frac{1}{j\omega C} (5R^2 - \frac{1 + k_{uu}}{\omega^2 C^2}) = 0. \quad (4)$$

Przyrównując część rzeczywistą i urojoną równania (4) do zera dostaniemy:

$$R^2 = \frac{6}{\omega^2 C^2} \quad \text{lub} \quad \omega = \frac{\sqrt{6}}{RC},$$

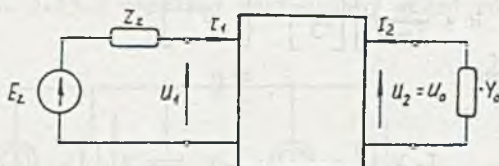
$$5R^2 = \frac{1 + k_{uu}}{\omega^2 C^2} \quad \text{lub} \quad k_{uu} = 29.$$

Przykład ten pokazuje, że jest możliwe otrzymanie drgań sinusoidalnych w obwodzie składającym się z rezystorów, kondensatorów i źródła sterowanego. W praktyce źródło sterowane jest realizowane przez wzmacniacz.

### Zadanie 3.55

Zadanie to można rozwiązać trzema różnymi metodami.

1. Metoda pierwsza polega na zastąpieniu tranzystora schematem zastępczym powstałym z zależności wynikających z jego opisu parametrami macierzy hybrydowej. Tak otrzymany obwód rozwiązuje się jedną ze znanych metod analizy obwodów złożonych.



Rys. 3.55.1

2. Metoda druga polega na tym, że tranzystor traktujemy jak wielobiegownik, opisany macierzą admitancyjną  $\underline{Y}$ . Parametry jej oblicza się na podstawie znajomości parametrów macierzy hybrydowej  $\underline{h}$ . To pozwala na rozwiązanie obwodu metodą po-

tencjałów węzłowych dla obwodów z wielobiegownikami.

3. W metodzie trzeciej traktuje się obwód z rys. 3.55 jako połączenie pewnych czwórników, co pozwala na zredukowanie go do postaci zawierającej jeden czwórnik wypadkowy. Jest on zasilany zastępczą SEM  $E_z$  o pewnej impedancji  $Z_z$  i obciążony admitancją  $Y_o$ , tak jak przedstawia to rys. 3.55.1.

Zadanie rozwiążemy kolejno wszystkimi metodami.

### Ad 1)

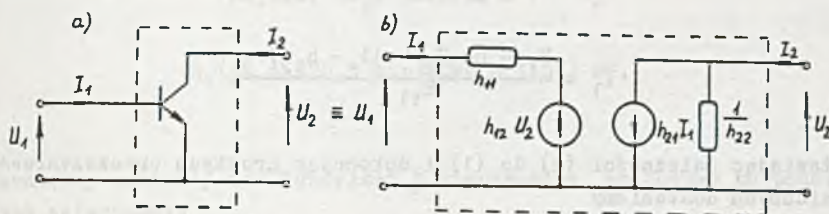
Jeśli tranzystor traktuje się jako czwórnik opisany parametrami macierzy  $\underline{h}$  (rys. 3.55.2a), to na podstawie znanych zależności:

$$U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2,$$

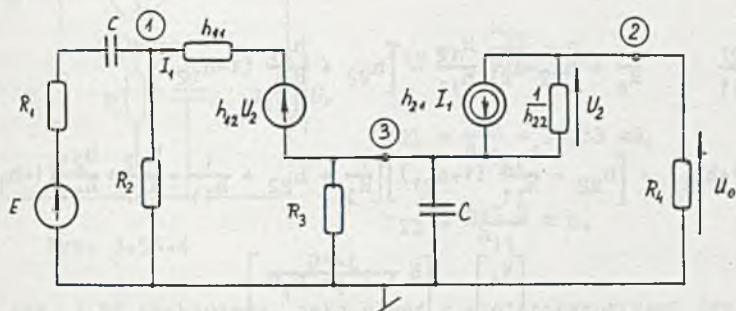
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2,$$



możemy otrzymać schemat zastępczy tranzystora przedstawiony na rys. 3.55.2b.



Rys. 3.55.2



Rys. 3.55.3

Po wprowadzeniu schematu zastępczego tranzystora w obwodzie z rys. 3.55 otrzymamy obwód, przedstawiony na rys. 3.55.3. Otrzymany obwód jest obwodem ze źródłami sterowanymi, który możemy rozwiązać, stosując metodę potencjałów węzłowych. Przyjmując oznaczenia potencjałów węzłowych, takie jak na rys. 3.55.3, otrzymamy następujący układ równań

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{h_{11}} \right) V_1 - 0V_2 - \frac{1}{h_{11}} V_3 &= E \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} + h_{12}U_2 \frac{1}{h_{11}} \\ -0V_1 \left( \frac{1}{R_4} + h_{22} \right) V_2 - h_{22}V_3 &= -h_{21}I_1 \\ -\frac{1}{h_{11}} V_1 - h_{22}V_2 \left( \frac{1}{R_3} + h_{22} + \frac{1}{h_{11}} + j\omega C \right) V_3 &= h_{21}I_1 - h_{12}U_2 \frac{1}{h_{11}} \end{aligned} \quad (1)$$

Łatwo można zauważyć, że:

$$U_2 = V_2 - V_3,$$

$$I_1 = \frac{V_1 - h_{12}V_2 - (1 - h_{12})V_3}{h_{11}} \quad (2)$$

Podstawiając zależności (2) do (1) i dokonując prostych przekształceń algebraicznych dostaniemy

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{j\omega C}{1+j\omega R_1 C} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{h_{11}} \right) & -\frac{h_{12}}{h_{11}} & -\frac{1}{h_{11}} (1 - h_{12}) \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{1}{R_4} + h_{22} - h_{21} \frac{h_{12}}{h_{11}} & - \left[ h_{22} + \frac{h_{21}}{h_{11}} (1 - h_{12}) \right] \\ -\frac{1}{h_{11}} (1 + h_{21}) & - \left[ h_{22} - \frac{h_{12}}{h_{11}} (1 + h_{21}) \right] & \left[ \frac{1}{R_3} + h_{22} + \frac{1}{h_{11}} - \frac{h_{12}}{h_{11}} + \frac{h_{21}}{h_{11}} (1 - h_{12}) + j\omega C \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \frac{j\omega C}{1 + j\omega R_1 C} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Podstawiając dane do (3), otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 1,36 + j 0,09 & 0 & -0,67 \\ 33,33 & 0,1 & -33,33 \\ -34 & 0 & 35 + j 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 0,66 e^{j7,59^\circ} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Na podstawie (4) obliczymy

$$U_o = V_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 42,65 e^{-j116^\circ} E, \quad (5)$$

gdzie:

$$\Delta = (1,36 + j 0,09)0,1(35 + j 5) = 2,63 e^{j22,21^\circ},$$

$$\Delta_2 = -E 0,66 e^{j7,59^\circ} [33,33(35 + j5) - 33,33 \cdot 34] = 112,17 e^{-j93,72^\circ},$$

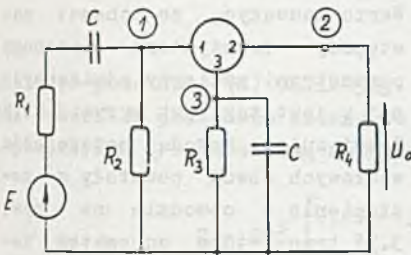
a wobec tego:

$$K(j100) = \frac{U_o}{E} = 42,65 e^{-j116^\circ},$$

$$u_o(t) = 426,5 \sin(100t - 116^\circ) \text{ mV.}$$

Ad 2)

Parametry macierzy admittancejnej  $\underline{y}$  tranzystora obliczymy na podstawie znanych zależności:



Rys. 3.55.4

$$y_{11} = \frac{1}{h_{11}} = 0,67 \text{ mS,}$$

$$y_{12} = -\frac{h_{12}}{h_{11}} \approx 0,$$

$$y_{21} = \frac{h_{21}}{h_{11}} = 33,33 \text{ mS,}$$

(6)

$$y_{22} = \frac{\det h}{h_{11}} \approx 0.$$

Obwód z rys. 3.55 traktujemy, jako obwód z wielobiegunnikami (rys.3.55.4), którego parametry macierzy admittancejnej określa się zależnościami (6). W celu otrzymania równań potencjałów węzłowych obwodu obliczamy:

a) macierz admittancejną obwodu bez wielobiegunnika

$$\underline{Y}_{bw} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} + j\omega C \end{bmatrix} \end{matrix}$$

b) macierz admittancejną wielobiegunnika

$$\underline{Y}_w = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & -(y_{11} + y_{12}) \\ y_{21} & y_{22} & -(y_{21} + y_{22}) \\ -(y_{11} + y_{21}) & -(y_{12} + y_{21}) & \Sigma y \end{bmatrix} \end{matrix}$$

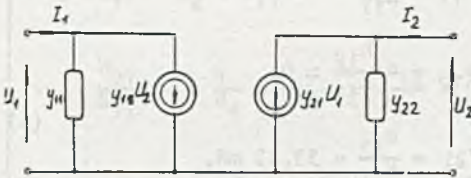
gdzie  $\Sigma y = y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22}$



Macierz admittancejny  $Y$  całego obwodu powstaje jako suma dwóch powyższych macierzy i wobec tego

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{1+j\omega R_1 C} + \frac{1}{R_2} + y_{11} & y_{12} & -(y_{11}+y_{12}) \\ y_{21} & \frac{1}{R_4} + y_{22} & -(y_{21}+y_{22}) \\ -(y_{11}+y_{21}) & -(y_{12}+y_{22}) & \Sigma y + \frac{1}{R_3} + j\omega C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{1}{1+j\omega R_1 C} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Podstawiając dane do (7), otrzymamy układ równań (4).



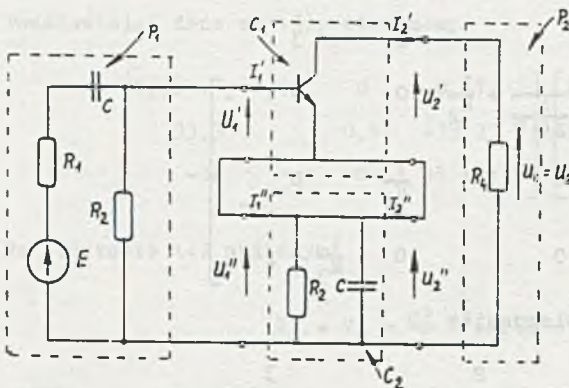
Rys. 3.55.5

Warto zauważyć, że schemat zastępczy tranzystora opisanego parametrami macierzy admittancejny  $y$  jest taki jak na rys. 3.55.5. Rozwiązując metodą potencjałów węzłowych obwód powstały z zastąpienia w obwodzie na rys. 3.55 tranzystora schematem zastępczym z rys. 3.55.5 dostanie-

my, jak łatwo sprawdzić, układ równań (7).

#### Ad 3)

Obwód z rys. 3.55 można przedstawić w postaci pokazanej na rys. 3.55.6. Z rysunku tego wynika, że obwód z rys. 3.55 można uważać za obwód złożony



Rys. 3.55.6

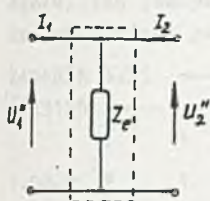
z części  $P_1$  i  $P_2$  oraz z szeregowego połączenia dwóch czwórników  $C_1$  i  $C_2$ . Czwórnik  $C_1$  jest tranzystorem, a czwórnik  $C_2$  posiada postać jak na rys. 3.55.7.

W naszym przypadku

$$Z_e = \frac{R_3 \frac{1}{j\omega C}}{R_3 + \frac{1}{j\omega C}} \quad (8)$$

Parametry macierzy  $Z'$  tranzystora możemy obliczyć na podstawie znajomości parametrów macierzy  $h$ , korzystając ze znanych zależności:

mości parametrów macierzy  $h$ , korzystając ze znanych zależności:



Rys. 3.55.7

$$z'_{11} = \frac{\det h}{h_{22}} = 0,25 \text{ k}\Omega, \quad z'_{12} = \frac{h_{12}}{h_{22}} = 0,025 \text{ k}\Omega,$$

$$z'_{21} = -\frac{h_{21}}{h_{22}} = -2500 \text{ k}\Omega, \quad z'_{22} = \frac{1}{h_{22}} = 50 \text{ k}\Omega.$$

Łatwo można sprawdzić, że macierz impedancyjna  $\underline{z}^c$  czwórnik  $C_2$  będzie równa

$$\underline{z}'' = \begin{bmatrix} z_e & z_e \\ z_e & z_e \end{bmatrix},$$

gdzie na podstawie (8) obliczymy  $z_e = (0,04 - j 0,19)10^3 \Omega$ .

Dwa czworniki połączone szeregowo można zastąpić jednym, którego macierz impedancyjna  $\underline{z}$  będzie sumą macierzy impedancyjnych składowych, czyli

$$\underline{z} = 10^3 \begin{bmatrix} 0,29 - j 0,19 & 0,065 - j 0,19 \\ -2500 - j 0,19 & 50 - j 0,19 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Zgodnie z zasadą Thevenina, zastępując część  $P_1$  obwodu z rys. 3.55.6 zastępczą SEM  $E_z$  i zastępczą impedancją  $Z_z$  oraz oznaczając  $Y_0 = \frac{1}{R_4}$ , sprowadzimy ten obwód do postaci takiej, jak na rys. 3.55.1. Na podstawie rys. 3.55.6 otrzymamy:

$$E_z = E \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = 0,943 e^{j0,43^\circ} E, \quad (10)$$

$$Z_z = \frac{R_2(R_1 + \frac{1}{j\omega C})}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = (1,42 - j 0,18)10^3 \Omega,$$

$$Y_0 = \frac{1}{R_4} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ S}.$$

Zgodnie z rys. 3.55.1 możemy napisać:

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2, \quad (11)$$

$$U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2,$$

oraz:

$$I_2 = -Y_0 U_2,$$

(12)

$$U_1 = E_z - Z_z I_1.$$

Podstawiając (12) do (11) otrzymamy:

$$E_z = (Z_{11} + Z_z) I_1 - Z_{12} Y_0 U_2,$$

(13)

$$U_2 = Z_{21} I_1 - Z_{22} Y_0 U_2.$$

Rozwiązując układ równań (13) obliczymy

$$U_2 = E_z \frac{Z_{21}}{Z_{11} + Z_z + (Z_{22} + \det \underline{Z}) Y_0}.$$

(14)

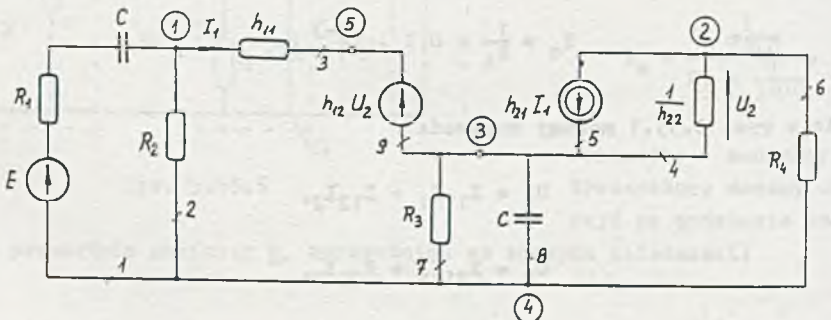
Podstawiając (9) i (10) do (14) dostaniemy

$$U_2 = 426,5 e^{-j 116^\circ} \text{ mV},$$

a ponieważ  $U_0 = U_2$ , więc otrzymany wynik jest zgodny z wynikiem uzyskanym metodą pierwszą i drugą.

### Zadanie 3.56

Program ACAN służy do obliczania stanów ustalonych w obwodach liniowych przy wymuszeniach sinusoidalnych. Dany obwód może składać się z elementów RLCH, źródeł sterowanych, wielobiegunników opisanych macierzami admitancyjnymi oraz sinusoidalnych SEM i SPM. Przed przystąpieniem do napięcia danych do programu należy w danym obwodzie ponumerować węzły i ga-



Rys. 3.56.1



łęzie, tak jak przedstawia to rys. 3.56.1. Dane do programu ACAN będą miały następującą postać

ZADANIE 3.55				← nagłówek	
15.9155				← częstotliwość	
1	1	4	1.5E3	5.0E-5	← pojemność
1.0E-2	2	1	4	2.5E4	← rezystancja
	3	1	5	1.5E3	
	4	2	3	5.0E4	
	5	3	2	rodzaj źr.sterowanego nr gałęzi ster.	
				JI	50,0 3
	6	2	4	1.0E4	
	7	3	4	1.0E3	war.współ.ster.
	8	3	4	5.0E-5	
	9	5	3		
nr gałęzi węzeł pocz. węzeł końc.				EU 5.0E-4	

W wyniku analizy otrzymamy

CZAS POCZĄTKU OBLICZEŃ = 17/15/30

ZADANIE 3.55

WYNIKI ANALIZY OBWODU W STANIE USTALONYM Z WYMUSZENIAMI SINUSOIDALNYMI O CZĘSTOTLIWOŚCI  $F = 15,9$  Hz

NG=1	UG=0.870E-02	FIU=	- 7.31	JG=0.116E-05	FIJ=-133.49	OC=-0.598E-08
NG=2	UG=0.870E-02	FIU=	- 7.31	JG=0.348E-06	FIJ=- 7.31	PC= 0.303E-08
NG=3	UG=0.150E-02	FIU=	- 62.84	JG=0.999E-06	FIJ= 62.84	PC= 0.150E-08
NG=4	UG=0.418E-00	FIU=	-118.09	JG=0.835E-05	FIJ=-118.09	PC= 0.349E-05
NG=5	UG=0.418E-00	FIU=	61.91	JG=0.500E-04	FIJ=-117.16	PC=-0.209E-04
NG=6	UG=0.416E-00	FIU=	-116.97	JG=0.416E-04	FIJ=-116.97	PC= 0.173E-04
NG=7	UG=0.835E-02	FIU=	- 15.67	JG=0.835E-05	FIJ=- 15.67	PC= 0.698E-07
NG=8	UG=0.835E-02	FIU=	- 15.67	JG=0.418E-04	FIJ= 74.33	PC= 0.000E-00
NG=9	UG=0.209E-03	FIU=	-118.09	JG=0.999E-06	FIJ= 62.84	PC=-0.209E-09

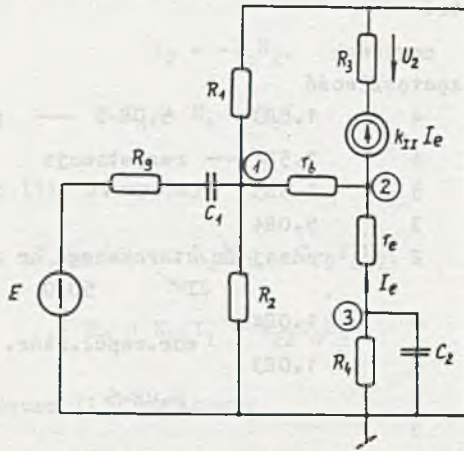
CZAS KOŃCA OBLICZEŃ = 17/15/43

Jak widać czas obliczeń wyniósł 13 s., łącznie z wczytaniem danych i wyprowadzeniem wyników.

### Zadanie 3.57

Wprowadzając schemat zastępczy tranzystora do obwodu z rys. 3.57 otrzymamy obwód taki jak na rys. 3.57.2.

Obwód ten rozwiążemy, stosując metodę potencjałów węzłowych. Oznaczając potencjały tak jak na rys. 3.57.2 możemy ułożyć następujące równania



Rys. 3.57.2

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{R_g + \frac{1}{j\omega C_1}}\right)v_1 - \frac{1}{r_b} v_2 - 0v_3 = E \frac{1}{R_g + \frac{1}{j\omega C_1}}$$

$$-\frac{1}{r_b} v_1 + \left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_e}\right)v_2 - \frac{1}{r_e} v_3 = -k_{II} I_e \quad (1)$$

$$-0v_1 - \frac{1}{r_e} v_1 + \left(\frac{1}{r_e} + \frac{1}{R_4} + j\omega C_2\right)v_3 = 0.$$

Podstawiając

$$I_e = \frac{v_3 - v_2}{r_e}$$

do (1) otrzymamy po prostych przekształceniach algebraicznych

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_b} + \frac{j\omega C_1}{1+j\omega R_g C_1} - \frac{1}{r_b} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r_b} & \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_e} - \frac{k_{II}}{r_e} - \frac{1}{r_e} (1-k_{II}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_e} & \frac{1}{r_e} + \frac{1}{R_4} + j\omega C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \frac{j\omega C_1}{1+j\omega R_g C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Jeśli podstawimy dane do (2), to uzyskamy następujący układ równań

$$\begin{bmatrix} 2,29 + j 0,49 & -1,67 & 0 \\ -1,67 & 2,54 & -0,87 \\ 0 & -43,48 & 4398 + j 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,77 e^{j39,8^\circ} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

stąd po rozwiązaniu

$$V_3 = 6,28 e^{-j32,81^\circ} \text{ mV.}$$

Wartość symboliczną napięcia  $u_2(t)$  obliczymy z zależności

$$U_2 = -V_3 \left( \frac{1}{R_4} + j\omega C_2 \right) k_{II} R_3 = 611 e^{-j124^\circ 36'} \text{ mV,}$$

a wobec tego

$$u_2(t) = 611 \sin(100t - 124^\circ 36') \text{ mV.}$$

### Zadanie 3.58

$$u_2(t) = 7,17 \sin(10^8 t + 48^\circ 33') \text{ mV.}$$

### Zadanie 3.59

Traktując tranzystory T1 i T2 jako wielobiegunki opisane macierzami admittancyjnymi  $\underline{y}'$  i  $\underline{y}''$  możemy ułożyć równanie potencjałów węzłowych dla obwodu z rys. 3.59. Oznaczając węzły obwodu tak jak na rys. 3.59 piszemy:

1) macierz admittancyjną obwodu bez wielobiegunków

$$Y_{bw} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & -Y_1 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ -Y_1 & 0 & Y_1 + Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

gdzie:

$$Y_1 = \frac{1}{R_1}, \quad Y_2 = \frac{1}{R_2}, \quad Y_3 = \frac{1}{R_3} + j\omega C_1, \quad Y_4 = \frac{j\omega C_2}{1 + j\omega R_4 C_2},$$



2) macierze admitancyjne tranzystorów z uwzględnieniem numeracji węzłów;

a) tranzystor T1

$$Y_I = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y'_{11} & y'_{12} & -(y'_{11} + y'_{12}) \\ y'_{21} & y'_{22} & -(y'_{21} + y'_{22}) \\ -(y'_{11} + y'_{21}) & -(y'_{12} + y'_{22}) & \Sigma y' \end{bmatrix} \end{matrix},$$

gdzie:

$$\Sigma y' = y'_{11} + y'_{12} + y'_{21} + y'_{22}.$$

b) tranzystor T2

$$Y_{II} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 0 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y''_{11} & y''_{12} & -(y''_{11} + y''_{12}) \\ y''_{21} & y''_{22} & -(y''_{21} + y''_{22}) \\ -(y''_{11} + y''_{21}) & -(y''_{12} + y''_{22}) & \Sigma y'' \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

gdzie:

$$\Sigma y'' = y''_{11} + y''_{12} + y''_{21} + y''_{22}.$$

Macierz admitancyjna całego układu powstaje jako suma elementów trzech powyższych macierzy z uwzględnieniem numeracji węzłów

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} y'_{11} + Y_1 & y'_{12} & -Y_1 \\ y'_{21} & y'_{22} + y''_{11} + Y_2 & -(y'_{11} + y'_{12}) \\ -Y_1 & -(y''_{11} + y''_{21}) & \Sigma y'' + Y_1 + Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

Z rys. 3.59 wynika, że  $U_1 = V_1$  i wobec tego na podstawie (1) możemy napisać następujący układ równań

$$\begin{bmatrix} y'_{22} + y''_{11} + Y_2 & -(y''_{11} + y''_{12}) \\ -(y''_{11} + y''_{21}) & \Sigma y'' + Y_1 + Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y'_{21} \\ Y_1 \end{bmatrix} U_{1m}. \quad (2)$$

Po podstawieniu danych do (2), otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 0,87 & -0,67 \\ -15,67 & 16,39 + j5,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ 0,2 \end{bmatrix},$$

a stqd

$$V_{3m} = 391 e^{j128,67^\circ} \text{ mV.} \quad (3)$$

Na podstawie (3) możemy napisać

$$u_2(t) = 391 \sin(100t + 128^\circ 42') \text{ mV.}$$

### Zadanie 3.60

Przed przystąpieniem do napisania danych do programu ACAN, należy w obwodzie z rys. 3.59 ponumerować węzły i gałęzie, tak jak przedstawia to rys. 3.60.1.

Dane do programu są w następującej postaci.

### ZADANIE 3.59

1.0E-2	1	1	4			
	2	2	4	5.0E3		
	3	3	4	2.0E3		
	4	3	4		5.0E-5	dane
	5	3	4	1.0E3	5.0E-6	gałęziowe
	6	1	3	5.0E4		

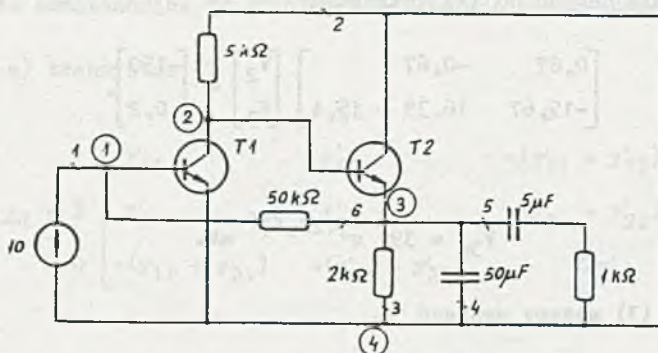
1	3	1	2	4	
		0.67E-3			} wielobiegownik nr 1 ( $T_1$ )
		0.0			
		1.5E-2			
		0.0			

-1.biegunów wielobiegunnika

Diagram showing a network of nodes and connections. Nodes are labeled 2, 3, 4, 3. Connections are labeled 0.67E-3, 0.0, 1.5E-2, 0.0. A note indicates connections to nodes 2 and 3.

parametry macierzy  
admitancyjnej

nr  
wielobiegunka



Rys. 3.60.1

Otrzymane wyniki są następujące

WYNIKI ANALIZY OBWODU W STANIE USTALONYM Z WYMUSZENIAMI SINUSOIDALNYMI O CZĘSTOTLIWOŚCI  $f = 15,9 \text{ Hz}$

CZAS POCZĄTKU OBLICZEŃ = 17/15/53

ZADANIE 3.59

NG=1	UG=0.100E-01	FIU= 0.00	JG=0.133E-04	FIJ=152.63	PC=-0.118E-06
NG=2	UG=0.430E 00	FIU= 146.91	JG=0.860E-04	FIJ=146.91	PC= 0.370E-04
NG=3	UG=0.391E 00	FIU= 128.67	JG=0.195E-03	FIJ=128.67	PC= 0.763E-04
NG=4	UG=0.391E 00	FIU= 128.67	JG=0.195E-02	FIJ=-141.33	PC= 0.000E-00
NG=5	UG=0.391E 00	FIU= 128.67	JG=0.175E-03	FIJ=-167.89	PC= 0.305E-04
NG=6	UG=0.397E 00	FIU= -50.20	JG=0.794E-05	FIJ= -50.20	PC= 0.315E-05

NAPIĘCIA I PRĄDY WIELOBIEGUNNIKÓW

WIELOBIEGUNNIK NUMER 1

NUMER WĘZŁA	NAPIĘCIE	FAZA	PRĄD	FAZA
1 1	0.100E-01	-0.00	0.670E-05	180.00
2 2	0.430E 00	146.91	0.150E-03	180.00
3 4	0.000E 00	0.00	0.157E-03	- 0.00
MOC WYDAWANA PRZEZ WIELOBIEGUNNIK =			0.540E-04	

WIELOBIEGUNNIK NUMER 2

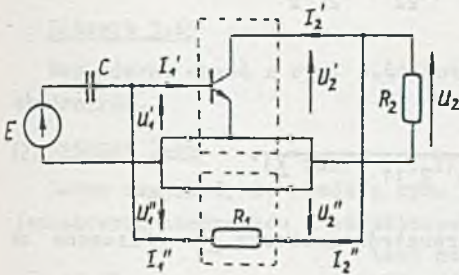
NUMER WĘZŁA	NAPIĘCIE	FAZA	PRĄD	FAZA
1 2	0.136E 00	-148.92	0.910E-04	31.08
2 4	0.391E 00	- 51.33	0.204E-02	31.08
3 3	0.000E 00	0.00	0.213E-02	-148.92
MOC WYDAWANA PRZEZ WIELOBIEGUNNIK =			0.928E-04	

CZAS KOŃCA OBLICZEŃ = 17/15/59



### Zadanie 3.61

Obwód z rys. 3.61 możemy przedstawić w postaci takiej jak na rys. 3.61.1. Z rysunku tego widać, że obwód składa się z równoległego połączenia dwóch czwórników. Jeden z tych czwórników jest tranzystorem, a drugi ma postać taką jak na rys. 3.61.2. Czwórnik taki jest opisany macierzą admittancyjną o postaci



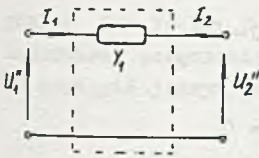
$$\underline{Y}_C = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 \end{bmatrix}$$

Rys. 3.61.1

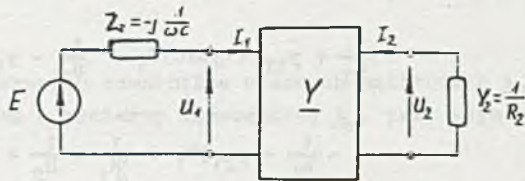
gdzie w naszym przypadku  $Y_1 = \frac{1}{R_1}$ .

Dwa czwórniki równolegle połączone, opisane macierzami admittancyjnymi  $\underline{Y}$  i  $\underline{Y}_C$ , możemy zastąpić jednym czwórnikiem wypadkowym o macierzy admittancyjnej

$$\underline{Y} = \underline{Y} + \underline{Y}_C = \begin{bmatrix} Y_1 + y_{11} & -Y_1 + y_{12} \\ -Y_1 + y_{21} & Y_1 + y_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$



Rys. 3.61.2



Rys. 3.61.3

W ten sposób obwód z rys. 3.61 można zredukować do postaci takiej jak na rys. 3.61.3. Zgodnie z rys. 3.61.3 możemy napisać

$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \quad (2)$$

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$$

oraz

$$I_2 = -Y_2U_2, \quad (3)$$

$$U_1 = E - Z_x I_1.$$

Podstawiając (3) do (2) otrzymamy

$$\begin{aligned} I_1(1 + Y_{11}Z_z) &= Y_{11}E + Y_{12}U_2 \\ -Y_{21}E + Y_{21}Z_zI_1 &= (Y_{22} + Y_2)U_2, \end{aligned} \quad (4)$$

stąd możemy obliczyć

$$U_2 = E \frac{-Y_{21}}{Y_2 + Y_{22} + Z_z(Y_2Y_{11} + \det \underline{Y})}. \quad (5)$$

Podstawiając do (5) dane i wartości parametrów macierzy  $\underline{Y}$  obliczone na podstawie (1) dostaniemy

$$U_{2m} = 33,7 e^{-j122,22^\circ} \text{ mV}.$$

Wobec tego

$$u_2(t) = 33,7 \sin(100t - 122^\circ 13') \text{ mV}. \quad (6)$$

Rozwiązanie możemy również otrzymać, układając równania potencjałów węzłowych dla obwodu z rys. 3.61.

W tym przypadku mamy następujące równania

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + y_{11} + j\omega C\right)V_1 - \left(\frac{1}{R_1} - y_{12}\right)V_2 &= j\omega CE \\ -\left(\frac{1}{R_1} - y_{21}\right)V_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + y_{22}\right)V_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Podstawiając dane i rozwiązując układ równań (7) otrzymamy przebieg napięcia  $u_2(t)$  w postaci (6).

#### Zadanie 3.62

$$u_2(t) = 494 \sin(100t - 129^\circ 9') \text{ mV}$$

#### Zadanie 3.63

$$u_2(t) = 18,5 \sin(100t - 104^\circ 22') \text{ mV}.$$

#### Zadanie 3.64

Obwód z rys. 3.64 jest szeregowym połączeniem  $n$  jednakowych obwodów równoległych LC o impedancji

$$Z = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC},$$

a więc dla  $n$  obwodów

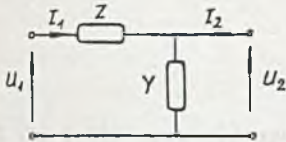
$$Z_{we} = \frac{jn\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$

### Zadanie 3.65

Wskazówka: obwód z rys. 3.64 potraktować jako szeregowe połączenie  $n$  czwórników.

### Zadanie 3.66

Łatwo zauważyć, że obwód z rys. 3.66 stanowi łańcuchowe połączenie  $n$  jednakowych czwórników o strukturze takiej jak na rys. 3.66.1. Czwórnik taki może być opisany parametrami macierzy łańcuchowej  $\underline{A}_C$ , tzn.:



Rys. 3.66.1

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Dla czwórnika o strukturze takiej jak na rys. 3.61.1 macierz  $\underline{A}_C$  będzie w postaci

$$\underline{A}_C = \begin{bmatrix} 1 + ZY & Z \\ Y & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie:  $Z = j\omega L$ ,  $Y = j\omega C$ .

Łańcuchowe połączenie  $n$  jednakowych czwórników o danych macierzach  $\underline{A}_C$  można zastąpić jednym czwórnikiem o macierzy łańcuchowej  $\underline{A}_Z$ , przy czym

$$\underline{A}_Z = \underline{A}_C^n. \quad (3)$$

Obliczenie macierzy  $\underline{A}_Z$  z (3) może być kłopotliwe. Obliczenie znacznie uprościłoby się, gdyby macierz  $\underline{A}_C$  zdiagnozować, tzn.: przedstawić w postaci

$$\underline{A}_C = \underline{X} \underline{D} \underline{X}^{-1}, \quad (4)$$

gdzie  $\underline{D}$  jest macierzą diagonalną.

Wtedy, jak łatwo sprawdzić, dostaniemy

$$\underline{A}_Z = \underline{X} \underline{D}^n \underline{X}^{-1}. \quad (5)$$



Formalnie diagonalizację macierzy  $\underline{A}_c$  (4) można przeprowadzić znajdując jej wartości własne będące pierwiastkami równania charakterystycznego. Wtedy macierz  $\underline{D}$  zostanie utworzona z wartości własnych macierzy  $\underline{A}_c$ , natomiast macierz  $\underline{X}$  z odpowiadających wektorów własnych.

Możliwy jest jednak inny sposób postępowania.

Równanie (4) można interpretować jako połączenie łańcuchowe trzech czwórników o macierzach łańcuchowych równych odpowiednio  $\underline{X}, \underline{D}, \underline{X}^{-1}$ . Macierz łańcuchową diagonalną posiada idealny transformator o przekładni  $n_1$ , a mianowicie

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_1} \end{bmatrix}.$$

Możemy założyć, że macierz  $\underline{X}$  jest w postaci

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

a ponieważ  $AD - BC = 1$  dla czwórników odwracalnych, więc

$$\underline{X}^{-1} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}.$$

Wobec tego otrzymamy  $\underline{A}_c$  po wyznaczeniu jako

$$\underline{A}_c = \underline{X} \underline{D} \underline{X}^{-1} = \begin{bmatrix} ADn_1 - \frac{BC}{n_1} & AB(n_1 - \frac{1}{n_1}) \\ CD(n_1 - \frac{1}{n_1}) & BCn_1 + \frac{AD}{n_1} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Na podstawie (6) i (4) dostaniemy:

$$ADn_1^2 - BC = n_1 a_{11},$$

$$AB(1 - n_1^2) = n_1 a_{12},$$

$$CD(n_1^2 - 1) = n_1 a_{21},$$

$$AD - BCn_1^2 = n_1 a_{22}. \quad (7)$$

Wykorzystując zależność  $\Delta D - BC = 1$  oraz zakładając  $D = 1$ , otrzymamy przekładnię transformatora i stałe czwórnika X:

$$n_1 = \frac{a_{22} + a_{11}}{2} + \sqrt{\frac{(a_{22} + a_{11})^2}{4} - 1},$$

$$A = \frac{n_1 a_{11} - 1}{n_1^2 - 1}.$$

$$B = \frac{1 - n_1 a_{22}}{n_1 a_{21}}, \quad (8)$$

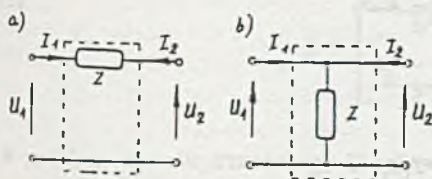
$$C = \frac{n_1 a_{21}}{n_1^2 - 1}.$$

Z (8) i (3) oraz (5) wynika, że

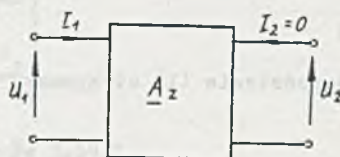
$$\underline{A}_z = \begin{bmatrix} A n_1^n - B C n_1^{-n} & A B (n_1^n - n_1^{-n}) \\ C (n_1^n - n_1^{-n}) & A n_1^{-n} - B C n_1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Ze wzorów (8) wynika, że musi zachodzić  $|n_1| \neq 1$ .

Przypadki, kiedy  $|n_1| = 1$ , są szczególne.



Rys. 3.66.2



Rys. 3.66.3

Tak będzie na przykład wtedy, gdy czwórnik będzie miał postać taką jak na rys. 3.66.2a i b. Jest to przypadek szeregowego lub równoległego połączenia impedancji. Można również zauważyć, że przekładnia transformatora idealnego  $n_1$  jest równa wartościom własnym macierzy  $\underline{A}_c$ . Z określenia parametrów macierzy łańcuchowej czwórnika oraz rys. 3.66.3 otrzymamy

$$z_{we} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11}}{A_{21}}, \quad (10)$$

gdzie  $A_{11}$  i  $A_{21}$  obliczymy na podstawie (8) i (9).

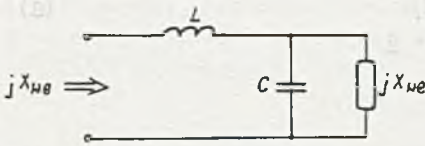
Zadanie 3.67

$$L_1 = 8,16 \text{ mH.}$$

Zadanie 3.68

Impedancję wejściową możemy obliczyć, stosując wzór (10) i (9) z zadania 3.66, w przypadku gdy  $n \rightarrow \infty$ . Wtedy otrzymamy

$$Z_{we} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{A}{C} = j 8,868 \Omega.$$



Rys. 3.68.1

Impedancję wejściową można też obliczyć w inny sposób. Można zauważyć, że  $X_{we}$  układu, od którego odetniemy skończoną liczbę czwórników LC, a więc można układ o  $\infty$  obwodach przedstawić tak jak na rys. 3.68.1. Impedancję  $Z_{we} = j X_{we}$  (układ jest

reaktancyjny) obliczymy na podstawie rys. 3.68.1.

Zatem

$$j X_{we} = j X_L + \frac{j X_{we} (-j X_C)}{j(X_{we} - X_C)}, \quad (1)$$

przy czym:  $X_{we} \neq X_C$  oraz

$$X_L - \frac{X_{we} X_C}{X_{we} - X_C} \neq 0. \quad (2)$$

Na podstawie (1) otrzymamy

$$X_{we}^2 - X_L X_{we} + X_L X_C = 0,$$

a stąd po podstawieniu danych

$$X_{we1,2} = 5 \pm \sqrt{15} \Omega$$

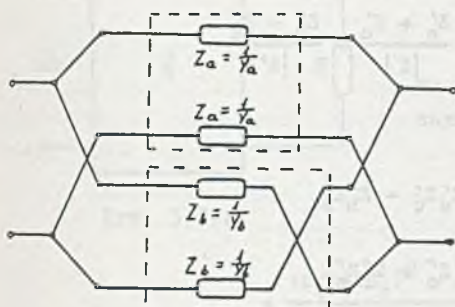
i wobec tego

$$X_{we} = X_{we1} = 5 + \sqrt{15} = 8,873 \Omega.$$



### Zadanie 3.69

Elementy macierzy admitancyjnej  $\underline{Y}$  lub impedancyjnej  $\underline{Z}$  czwórnik z rys. 3.69 można określić bezpośrednio z zależności definicyjnych. Jednak z dru-



Rys. 3.69.3

giej strony czwórnik ten można przedstawić w postaci równoległego połączenia dwóch prostszych czwórników, tak jak przedstawia to rys. 3.69.3. Określając macierze admitancyjne czwórników składowych i dodając je do siebie otrzymamy macierz admitancyjną danego czwórni-  
ka. Wobec tego

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{Y_a}{2} & -\frac{Y_a}{2} \\ -\frac{Y_a}{2} & \frac{Y_a}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_b}{2} & \frac{Y_b}{2} \\ \frac{Y_b}{2} & \frac{Y_b}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{Y_b + Y_a}{2} & \frac{Y_b - Y_a}{2} \\ \frac{Y_b - Y_a}{2} & \frac{Y_b + Y_a}{2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Obliczając macierz  $\underline{Y}^{-1}$  otrzymamy

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \frac{Z_b + Z_a}{2} & \frac{Z_b - Z_a}{2} \\ \frac{Z_b - Z_a}{2} & \frac{Z_b + Z_a}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

W podobny sposób otrzymamy dla czwórnik z rys. 3.69.1

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{Z'_b + Z'_c}{|Z'|} + Y''_3 & -\frac{Z'_c}{|Z'|} - Y''_3 \\ -\frac{Z'_c}{|Z'|} - Y''_3 & \frac{Z'_a + Z'_c}{|Z'|} + Y''_3 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$|Z'| = Z'_a Z'_b + Z'_a Z'_c + Z'_b Z'_c,$$

a dla czwórnik z rys. 3.69.2

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{Z'_b + Z'_c}{|Z'|} + \frac{Z''_b + Z''_c}{|Z''|} & -\frac{Z'_c}{|Z'|} + \frac{-Z''_c}{|Z''|} \\ -\frac{Z'_c}{|Z'|} + \frac{-Z''_c}{|Z''|} & \frac{Z'_a + Z'_c}{|Z'|} + \frac{Z''_a + Z''_c}{|Z''|} \end{bmatrix}$$

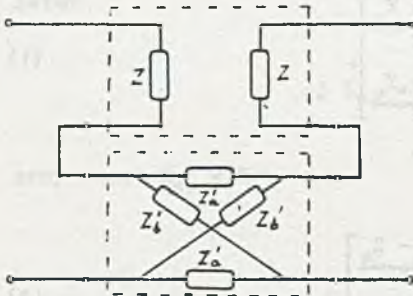
gdzie:

$$|Z'| = Z'_a Z'_b + Z'_a Z'_c + Z'_b Z'_c,$$

$$|Z''| = Z''_a Z''_b + Z''_a Z''_c + Z''_b Z''_c.$$

### Zadanie 3.70

Macierz impedancyjna  $\underline{Z}$  czwórnik z rys. 3.70a będzie w postaci (patrz zadanie 3.69)



Rys. 3.70.2

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \frac{Z'_a + Z'_b}{2} + Z & \frac{Z'_b - Z'_a}{2} \\ \frac{Z'_b - Z'_a}{2} & \frac{Z'_a + Z'_b}{2} + Z \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Czwórnik z rys. 3.70b możemy przedstawić w postaci szeregowego połączenia dwóch czwórników składowych tak jak przedstawia to rys. 3.70.2. Wobec tego macierz impedancyjna  $\underline{Z}$ -tego czwórnik będzie równa

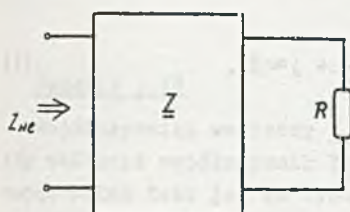
$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Z'_b + Z'_a}{2} & \frac{Z'_b - Z'_a}{2} \\ \frac{Z'_b - Z'_a}{2} & \frac{Z'_b + Z'_a}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z'_b + Z'_a}{2} + Z & \frac{Z'_b - Z'_a}{2} \\ \frac{Z'_b - Z'_a}{2} & \frac{Z'_b + Z'_a}{2} + Z \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Z (1) i (2) wynika, że czwórnik z rys. 3.70 są równoważne,cbdo.

Równoważność czwórników z rys. 3.70.1 można udowodnić,wykazując identyczność ich macierzy admitycyjnych.

### Zadanie 3.71

Można wykazać, że  $Z_{we}$  dla obwodu przedstawionego na rys. 3.71.2 wynosi



Rys. 3.71.2

$$Z_{we} = \frac{\det \underline{Z} + Z_{11}R}{R + Z_{22}} \quad (1)$$

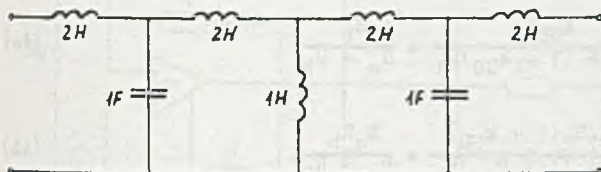
Na podstawie wyników z zadania 3.69 obliczymy

$$\det \underline{Z} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 =$$

$$= \frac{(Z_b + Z_a)^2 - (Z_b - Z_a)^2}{4} = Z_a Z_b \quad (2)$$

Podstawiając (2) do (1), otrzymamy

$$Z_{we} = \frac{Z_a Z_b + Z_{11}R}{R + Z_{22}} = R \frac{Z_{11} + \frac{Z_a Z_b}{R}}{Z_{22} + R} \quad (3)$$



Rys. 3.71.3

Z uwagi na symetrię układu  $Z_{11} = Z_{22}$  i wobec tego, aby  $Z_{we} = R$  musi zachodzić zgodnie z (3)

$$Z_a Z_b = R^2.$$

Dokonując kolejno przekształceń podanych na rys. 3.70 i 3.70.1 czwórnik z rys. 3.71 sprowadzamy do postaci równoważnej jak na rys. 3.71.3

### Zadanie 3.72

$$Y_{21} = - \frac{Y_{21a} Y_{21b}}{Y_{22a} + Y_{11b}}$$

$$Z_{21} = \frac{Z_{21a} Z_{21b}}{Z_{22a} + Z_{11b}}.$$

### Zadanie 3.73

Ponieważ wzmacniacz operacyjny idealny posiada nieskończenie wielką impedancję wejściową, a impedancję wyjściową równą zero, więc dla czwór-



nika z rys. 3.73.1 możemy napisać następujące równanie I prawa Kirchhoffa

$$\frac{U_1 - (-\frac{U_2}{k_{UU}})}{R_1} = -(\frac{U_2}{R_2} + U_2)(\frac{1}{R_2} + j\omega C), \quad (1)$$

a stąd

$$\frac{U_2}{U_1} = K(j\omega) = -\frac{k_{UU}R_2}{R_2 + (1 + k_{UU})R_1} \frac{1}{1 + j\frac{R_1R_2(1 + k_{UU})}{R_2 + (1 + k_{UU})R_1} \omega C}. \quad (2)$$

Dla obwodu z rys. 3.73 obliczymy

$$K(j\omega) = -\frac{R_b}{R_a + R_b} \frac{1}{1 + j\frac{R_aR_b}{R_a + R_b} \omega C}. \quad (3)$$

Aby czwórnik był równoważny, zgodnie z (2) i (3) musi zachodzić:

$$\frac{k_{UU}R_2}{R_2 + (1 + k_{UU})R_1} = \frac{R_b}{R_a + R_b}, \quad (4a)$$

$$\frac{R_1R_2(1 + k_{UU})}{R_2 + (1 + k_{UU})R_1} = \frac{R_aR_b}{R_a + R_b}. \quad (4b)$$

Na podstawie zależności (4a) i (4b) obliczymy:

$$R_a = R_1 \frac{(1 + k_{UU})}{k_{UU}}, \quad (5a)$$

$$R_b = \frac{(1 + k_{UU})R_1R_2}{R_1(1 + k_{UU}) - R_2(k_{UU} - 1)}. \quad (5b)$$

Ponieważ  $R_b > 0$ , więc zgodnie z (5b)

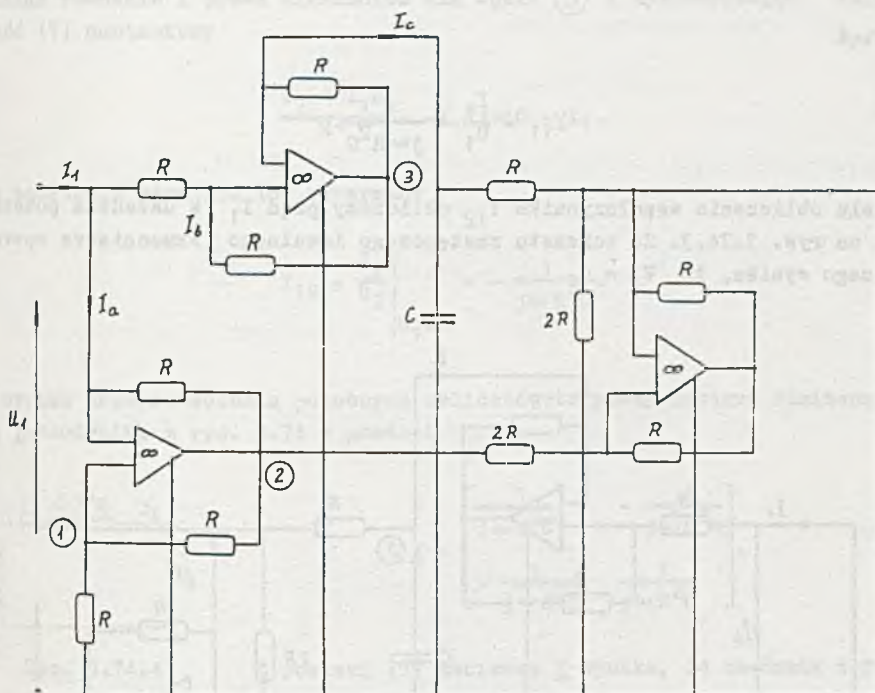
$$R_1(1 + k_{UU}) > R_2(k_{UU} - 1),$$

czyli, aby czwórnik mógł być równoważne, musi zachodzić

$$R_1 > \frac{k_{UU} - 1}{k_{UU} + 1} R_2.$$

### Zadanie 3.74

Współczynniki macierzy  $\underline{Y}$  czwornika z rys. 3.74 obliczymy z definicji. Aby obliczyć współczynnik  $Y_{11}$  zwieramy zacięski wyjściowe czwornika, otrzymując układ taki jak na rys. 3.74.2.



Rys. 3.74.2

Ponieważ założono wzmacniacze operacyjne idealne, więc otrzymamy  $V_1 = U_1$  i  $V_2 = 2U_1$ . Wobec tego możemy napisać następujące równania:

$$I_a = \frac{U_1 - 2U_1}{R} = -\frac{U_1}{R},$$

$$I_b R = -I_c R, \quad (2)$$

$$V_3 = U_1 - 2RI_b, \quad (3)$$





Wobec tego  $I_3 = 0$ , a stąd

$$V_2 = 0 \quad (6)$$

$$I_b = 0.$$

Na podstawie zależności (6) można wykazać, że  $I_c = I_1$ . A zatem

$$V_3 = -I_1 R. \quad (7)$$

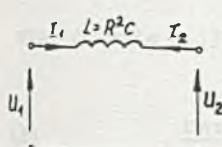
Pisząc równanie I prawa Kirchhoffa dla węzła (3) i wykorzystując zależność (7) dostaniemy

$$\frac{U_3 + I_1 R}{R} = -I_1 R j \omega C + I_1. \quad (8)$$

Na podstawie równania (8) otrzymamy

$$Y_{12} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = -\frac{1}{j \omega R^2 C}.$$

W wyniku przeprowadzenia podobnych obliczeń otrzymamy macierz admitancyjną  $\underline{Y}$  czwórnik z rys. 3.74 w postaci



$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{j \omega R^2 C} & -\frac{1}{j \omega R^2 C} \\ -\frac{1}{j \omega R^2 C} & \frac{1}{j \omega R^2 C} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Rys. 3.74.4

Z postaci (9) macierzy  $\underline{Y}$  wynika, że czwórnik z rys.

3.74 będzie równoważny czwórnikowi pokazanemu na rys. 3.74.4. Na podstawie otrzymanych wyników można zauważyć, że z elementów  $R, C$  i wzmacniaczy operacyjnych mogą powstać układy równoważne cewkom indukcyjnym, co ma duże znaczenie w syntezie układów aktywnych.

### Zadanie 3.75

$$Z_{we} = \frac{Z_1 Z_3 R_L}{Z_2 Z_4}$$

W przypadku gdy  $Z_2 = \frac{1}{j \omega C}$ ,  $Z_1 = Z_3 = Z_4 = R$  to,  $Z_{we} = j \omega R R_L C$  i dwójnik z rys. 3.75 jest równoważny cewce indukcyjnej o indukcyjności  $L = R R_L C$ .

Zadanie 3.76

Admitancja gałęzi z rzeczywistą cewką

$$Y_1 = \frac{1}{R_L + j\omega L},$$

a gałęzi z kondensatorem

$$Y_2 = j\omega C,$$

więc admitancja zastępcza obwodu

$$Y = Y_1 + Y_2 = G - jB. \quad (1)$$

Warunkiem koniecznym wystąpienia rezonansu jest  $B = 0$

$$Y = \frac{1}{R_L + j\omega L} + j\omega C = \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + j \left[ \omega C - \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} \right], \quad (1')$$

więc

$$B = -\omega_0 C + \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} = 0,$$

stąd:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_L}{L}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R_L^2 \frac{C}{L}} = 147 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad (2)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1,2 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}} \sqrt{1 - 130^2 \frac{25 \cdot 10^{-6}}{1,2}} = 147 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} 147 \text{ Hz} = 23,4 \text{ Hz}.$$

Ad a)

Dla pulsacji  $\omega = 2\pi f = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  wartość skuteczna prądu

$$|I| = |U| |Y|. \quad (3)$$

Podstawiając wartości liczbowe:

$$\omega L = 377 \Omega,$$

$$\omega C = 7,85 \text{ mS},$$

do zależności (1) otrzymamy

$$Y = \frac{1}{130 + j 377} + j 7,85 \cdot 10^{-3} = (0,77 + j 5,62) \cdot 10^{-3} \text{ S},$$

więc

$$|Y| = \sqrt{(5,62)^2 + (0,77)^2} \text{ mS} = 5,67 \text{ mS}.$$

z (3)

$$|I| = \frac{30}{\sqrt{2}} 5,67 \cdot 10^{-3} = 121 \text{ mA}.$$

Ad b)

Dla pulsacji rezonansowej ( $\omega(1')$ )

$$|Y| = G = \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} = \frac{130}{130^2 + (147 \cdot 1,2)^2} \text{ S} = 2,7 \text{ mS},$$

więc zgodnie z (3)

$$|I| = \frac{30}{\sqrt{2}} 2,7 \cdot 10^{-3} = 57,3 \text{ mA}.$$

#### Zadanie 3.77

$$X_L = \frac{R_2^2 X_C}{R_2^2 + X_C^2}.$$

#### Zadanie 3.78

$$R = 88 \Omega, \quad L = 0,224 \text{ H}, \quad C = 20,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$$



Zadanie 3.79

Podstawiając wartości liczbowe:

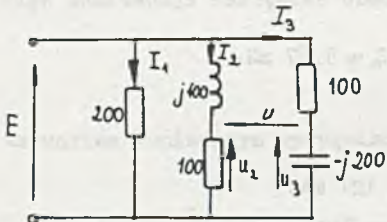
$$\omega L = 1000 \cdot 0,2 = 200 \Omega,$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3} = 200 \Omega,$$

więc  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  - rezonans szeregowy (napięciowy).

Układ można przedstawić jak na rys. 3.79.1.

Z prawa Ohma:



$$I_1 = \frac{100}{200} = 0,5 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{100}{100 + j 400} = [0,059 - j 0,236] \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{100}{100 - j 200} = [0,2 + j 0,4] \text{ A},$$

Rys. 3.79.1

a prąd źródła

$$u_1 + u_2 - u_3 = u_2 - u_3$$

$$u_2 - u_1 - u_3 =$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0,759 + j 0,164 = 0,777 e^{j12^\circ 10'} \text{ A}.$$

Z II prawa Kirchhoffa

$$U = U_2 - U_3 = I_2 100 - I_3 (-j 200) = -74,1 + j 16,4 = 76 e^{j167^\circ 30'} \text{ V},$$

w postaci czasowej:

$$i = 0,777 \sqrt{2} \sin(1000t + 12^\circ 10') \text{ A},$$

$$u = 76 \sqrt{2} \sin(1000t + 167^\circ 30') \text{ V}.$$

Moc czynna źródła

$$P = |E| |I| \cos \varphi(E, I) = 100 \cdot 0,777 \cos 12^\circ 10' = 75,8 \text{ W}$$

a moc pozorną

$$S = |E| |I| = 77,7 \text{ VA}.$$

Zadanie 3.80

Ad 1)

Impedancja gałęzi z indukcyjnością

$$Z_1 = R_1 + j\omega L$$

a gałęzi z pojemnością

$$Z_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C},$$

impedancja zastępcza

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = R + jX, \quad (1)$$

podstawiając wartości

$$Z = \frac{(R_1 + j\omega L)(R_2 - j \frac{1}{\omega C})}{R_1 + R_2 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = R + jX.$$

Przyrównując X do zera, otrzymamy wartość częstotliwości, przy której wystąpi rezonans

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}} = \sqrt{\frac{95^2 - \frac{0,1}{20 \cdot 10^{-6}}}{100^2 - \frac{0,1}{20 \cdot 10^{-6}}}} = 635 \frac{1}{s},$$

a

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 101 \text{ Hz}.$$

Ad 2)

Z prawa Ohma

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{R_1 + j\omega_0 L} = \frac{22}{95 + j 63,5} = 0,193 e^{-j33^\circ 45'} \text{ A}.$$

Wskaźanie amperomierza  $A_1 = 0,193 \text{ A}$

oraz

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{R_2 - j \frac{1}{\omega_0 C}} = \frac{22}{100 - j 78,8} = 0,173 e^{j38^\circ 15'} \text{ A}$$

amperomierz  $A_2$  wskazuje 0,173 A, a prąd źródła

$$I = I_1 + I_2 = |I_1| \cos 33^\circ 45' - j |I_1| \sin 33^\circ 45' + |I_2| \cos 38^\circ 15' + j |I_2| \sin 38^\circ 15' = |I_1| \cos 33^\circ 45' + |I_2| \cos 38^\circ 15' = 0,295 \text{ A.}$$

Moc czynna

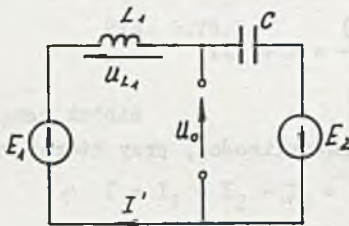
$$P = |U| |I| \cos 0 = 6,5 \text{ W.}$$

### Zadanie 3.81

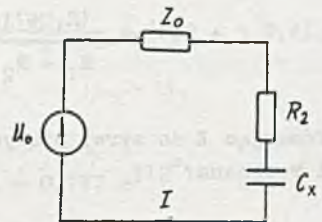
$$u_1 = 0.$$

### Zadanie 3.82

Korzystając z zasady Thevenina można zastąpić obwód, otrzymany przez odłączenie gałęzi środkowej, SEM  $U_0$  i impedancją  $Z_0$ , których wartości obliczymy z obwodu podanego na rys. 3.82.1.



Rys. 3.82.1



Rys. 3.82.2

Z prawa Ohma

$$I' = \frac{E_1 + E_2}{jX_{L1} - jX_C} = 0,048 e^{j135^\circ}$$

a napięcie

$$U_0 = E_1 - I' jX_{L1} = 5,42 + j 3,22 = 6,32 e^{j30^\circ 40'}$$

Impedancja

$$Z_0 = \frac{jX_{L1}(-jX_C)}{jX_{L1} - jX_C} = j 232 = jX_{Lz}.$$

Obwód można przedstawić teraz jak na rysunku 3.83.2.



Prąd jest największy, gdy w obwodzie występuje rezonans napięciowy, czyli

$$X_{Cx} = X_{Lz},$$

stąd

$$C_x = \frac{1}{\omega X_{Lz}} = \frac{1}{314 \cdot 232} \text{ F} = 13,7 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

a wskazanie amperomierza

$$|I| = \frac{|U_o|}{R_2} = 63,2 \text{ mA}.$$

### Zadanie 3.83

$$u = 6,9 \sqrt{2} \sin(1000t - 106^\circ) \text{ V}.$$

### Zadanie 3.84

$$|I| = 0,995 \text{ A}.$$

### Zadanie 3.85

$$21,7\%$$

### Zadanie 3.86

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 514 \text{ kHz},$$

$$Q = \frac{\omega_o L}{R} = 96,8.$$

### Zadanie 3.87

Ad a)

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^{-12}}} = 16,8 \text{ kHz},$$

$$Q_s = \frac{\omega_o L}{R} = \sqrt{\frac{L}{CR^2}} = \sqrt{\frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{200 \cdot 10^{-12} \cdot 300^2}} = 15,8.$$

Szerokość pasma przepuszczania (trzydecybelowego)

$$\Delta f_s = \frac{f_o}{Q_s} = \frac{16,8}{15,8} = 1,06 \text{ kHz}.$$

Ad b)

$$Q_b = \frac{\omega_o L}{(R + R_w)} = \sqrt{\frac{L}{C(R + R_w)^2}} = \sqrt{\frac{4,5 \cdot 10^{-3}}{220 \cdot 10^{-12} (300 + 600)^2}} = 5,26$$

$$\Delta f_b = \frac{f_o}{Q_b} = \frac{16,8}{5,26} = 3,2 \text{ kHz.}$$

Widać wyraźne pogorszenie własności filtrujących obwodu wskutek włączenia szeregowo dodatkowej rezystancji.

Zadanie 3.88

Z równań II prawa Kirchhoffa:

$$U_1 = I_1(R + j\omega L_1) - I_2 j\omega M,$$

$$I_1 j\omega M = I_2(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}),$$

mamy

$$Z_{we} = \frac{U_1}{I_1} = R + j(\omega L_1 - \frac{k^2 \omega^2 L_1 L_2 C}{\omega^2 L_2 C - 1}) = R_{we} + jX_{we}.$$

Stąd

$$X_{we} = \omega L_1 - \frac{k^2 \omega^3 L_1 L_2 C}{\omega^2 L_2 C - 1} = f(C).$$

Dla wartości granicznych C otrzymujemy:

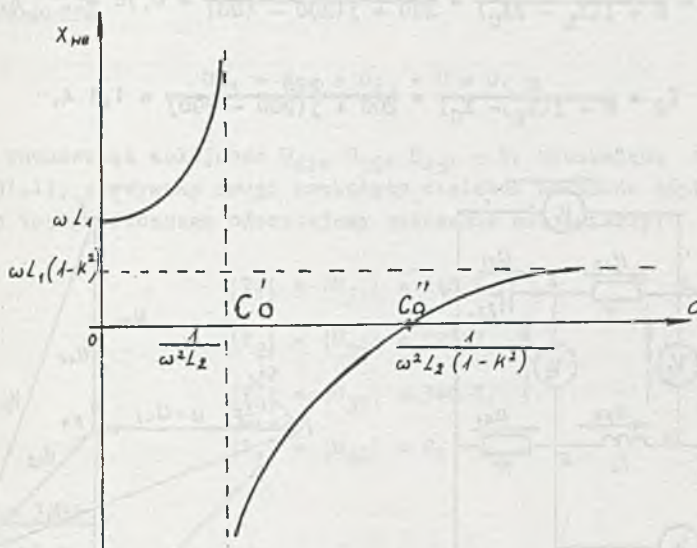
gdy  $C \rightarrow 0$ , to  $X_{we} \rightarrow \omega L_1$

gdy  $C \rightarrow \infty$ , to  $X_{we} \rightarrow \omega L_1(1 - k^2)$ .

Rezonans równoległy ( $|X_{we}| \rightarrow \infty$ ) wystąpi, gdy  $C'_o \rightarrow \frac{1}{\omega^2 L_2}$ , natomiast szeregowy ( $X_{we} = 0$ ), gdy

$$C''_o = \frac{1}{\omega^2 L_2(1 - k^2)}.$$

Wykres reaktancji wejściowej transformatora przedstawia rysunek 3.88.1



Rys. 3.88.1

Podstawiając wartości liczbowe mamy rezonans równoległy dla

$$C_0' = \frac{1}{\omega^2 L_2} = \frac{1}{(2\pi \cdot 50)^2 \cdot 1,5} = 6,75 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 6,75 \mu\text{F},$$

oraz rezonans szeregowy dla

$$C_0'' = \frac{1}{\omega^2 L_2 (1 - k^2)} = \frac{1}{(2\pi \cdot 50)^2 \cdot 1,5 (1 - 0,4^2)} = 8,05 \mu\text{F}.$$

#### Zadanie 3.89

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L_1 + L_2 - 2M}{(L_1 L_2 - M^2)C}} = 108,4 \text{ kHz}.$$

#### Zadanie 3.90

$$I_C = X_2.$$

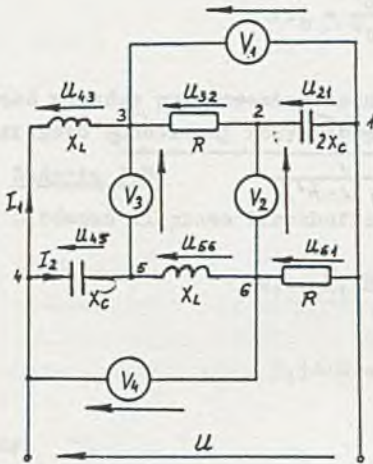
#### Zadanie 3.91

Przyjmując numerację węzłów oraz strzałkowanie prądów i napięć jak na rys. 3.91.1, obliczymy prądy:

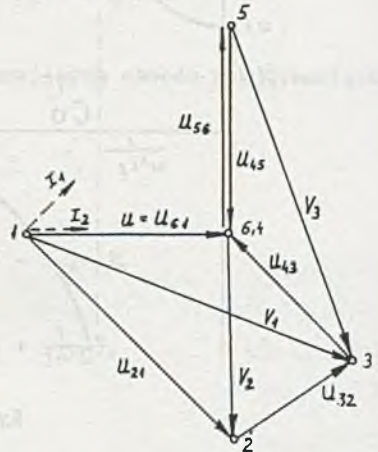


$$I_1 = \frac{U}{R + j(X_L - 2X_C)} = \frac{220}{200 + j(200 - 400)} = 0,78 e^{j45^\circ} \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{U}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{220}{200 + j(200 - 200)} = 1,1 \text{ A},$$



Rys. 3.91.1



Rys. 3.91.2

oraz napięcia:

$$U_{21} = -j2X_C I_1 = -j 400 \cdot 0,78 e^{j45^\circ} = 312 e^{-j45^\circ} \text{ V},$$

$$U_{32} = R I_1 = 200 \cdot 0,78 e^{j45^\circ} = 156 e^{j45^\circ} \text{ V},$$

$$U_{43} = jX_L I_1 = j 200 \cdot 0,78 e^{j45^\circ} = 156 e^{j135^\circ} \text{ V},$$

$$U_{61} = R I_2 = 200 \cdot 1,1 = 220 \text{ V},$$

$$U_{56} = jX_L I_2 = j 200 \cdot 1,1 = 220 e^{j90^\circ} \text{ V},$$

$$U_{45} = -jX_C I_2 = -j 200 \cdot 1,1 = 220 e^{-j90^\circ} \text{ V}.$$

Sposób postępowania przy rysowaniu wykresu topograficznego (rys. 3.91.2).

Przyjmujemy skalę, np.:  $m_U = 50 \text{ V/cm}$ . Nanosimy według przyjętej skali napięcie  $U$ , jako wektor odniesienia. Końce wektora  $U$  odpowiadają punktom 1 i 4. W punkcie 1 zaczepiamy wektor  $U_{21}$ , którego grót wyznacza punkt 2. W punkcie 2 zaczepiamy wektor  $U_{32}$ , a następnie do końca wektora  $U_{32}$  dodajemy wektor  $U_{43}$ .

Grot napięcia  $U_{43}$  wskazuje punkt 4.

W ten sposób uzyskaliśmy zamknięty wielobok wektorów, który wynika z II prawa Kirchhoffa

$$U_{21} + U_{32} + U_{43} - U = 0.$$

Podobnie zachowując kolejność  $U_{61}$ ,  $U_{56}$ ,  $U_{45}$ ,  $-U$ , wynikającą ze schematu (rys. 3.91.1), otrzymamy drugi zamknięty wielobok wektorów napięć.

Z wykresu topograficznego odczytujemy wskazania woltomierzy:

$$|V_1| = |U_{31}| = 348 \text{ V},$$

$$|V_2| = |U_{26}| = 220 \text{ V},$$

$$|V_3| = |U_{35}| = 348 \text{ V},$$

$$|V_4| = |U_{46}| = 0.$$

#### Zadanie 3.92

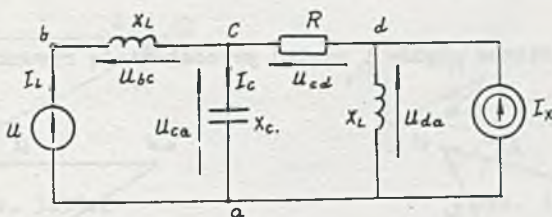
$$|U_2| = 16 \text{ V}.$$

#### Zadanie 3.94

$$R_2 = 4,83 \text{ k}\Omega, \quad X_L = 2 \text{ k}\Omega.$$

#### Zadanie 3.95

Przyjmijmy oznaczenia węzłów i strzałkowanie jak na rys. 3.95.1.



Rys. 3.95.1

Z tematu zadania wynika, że  $U_{da} = 0$ , czyli

$$U_{ca} = U_{cd} = -I_X R. \quad (1)$$

Równanie potencjałów węzłowych dla węzła c

$$U_{ca} \left( \frac{1}{jX_L} + j \frac{1}{X_C} \right) = \frac{U}{jX_L} + I_X. \quad (2)$$

Z zależności (1), (2)

$$I_x = \frac{jUX_C}{X_C X_L - jR(X_C - X_L)} = \frac{j 24 \cdot 500}{500 \cdot 300 - j 750(500 - 300)} =$$

$$= -0,04 + j 0,04 = 0,0565 e^{j135^\circ} \text{ A.}$$

Stąd

$$i_x = 0,0565 \sqrt{2} \sin(2520t + 135^\circ) \text{ A.}$$

Wartości skuteczne symboliczne (potrzebne do sporządzenia wykresów topograficznych) wynoszą odpowiednio:

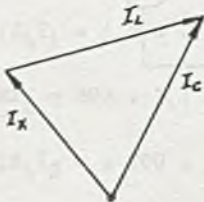
$$U_{ca} = U_{cd} = -I_x R = (0,04 - j 0,04) 750 = 30 - j 30 = 42,5 e^{-j45^\circ} \text{ V,}$$

$$U_{bc} = U - U_{ca} = 24 - 30 + j 30 = -6 + j 30 = 30,6 e^{j101^\circ 20'} \text{ V,}$$

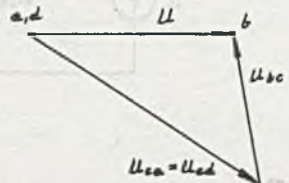
$$I_L = \frac{U_{bc}}{jX_L} = \frac{30,6 e^{j101^\circ 20'}}{j 300} = 0,102 e^{j11^\circ 20'} \text{ A,}$$

$$I_C = \frac{U_{ca}}{-jX_C} = \frac{42,5 e^{-j45^\circ}}{-j 500} = 0,085 e^{j45^\circ} \text{ A.}$$

Wykresy topograficzne prądów i napięć przedstawiają rysunki 3.95.2 oraz 3.95.3.



Rys. 3.95.2



Rys. 3.95.3

### Zadanie 3.96

$$e = 300 \sqrt{2} \sin(314t - 90^\circ) \text{ mV.}$$



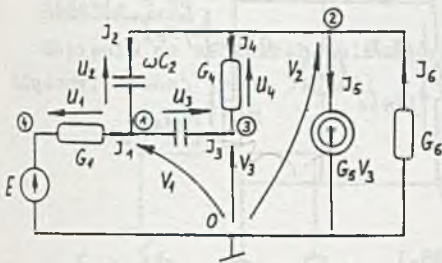
Zadanie 3.97

Po przyjęciu numeracji końców gałęzi jak na rys. 3.97.1, układamy równania węzłowe:

$$V_1(G_1 + j\omega C_2 + j\omega C_3) - V_2j\omega C_2 - V_3j\omega C_3 = EG_1,$$

$$-V_1j\omega C_2 + V_2(G_4 + j\omega C_2 + G_6) - V_3G_4 = -G_5V_3,$$

$$-V_1j\omega C_3 - V_2G_4 + V_3(j\omega C_3 + G_4) = 0.$$



Rys. 3.97.1

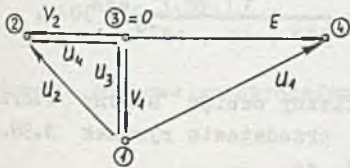
Po rozwiązaniu układu równań i podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:

$$V_1 = -61,5 \cdot 10^{-7} - j 0,5 \text{ V},$$

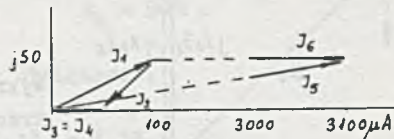
$$V_2 = -0,5 - j 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ V},$$

$$V_3 = -62 \cdot 10^{-7} - j 10^{-7} \text{ V}.$$

Przy sporządzaniu wykresu topograficznego napięć zauważymy, że punkty 3 i 0 praktycznie się pokrywają, bo  $V_3 \approx 0$  (rys. 3.97.2). Po narysowaniu wektorów  $E_1$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  można uzupełnić wykres napięciami gałęziowymi  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$ .



Rys. 3.97.2



Rys. 3.97.3

Znając napięcia gałęziowe wyliczymy prądy:

$$I_1 = (100 + j 50) \mu\text{A},$$

$$I_2 = (-50 - j 50) \mu\text{A},$$

$$I_3 = I_4 = -50 \mu\text{A},$$

$$I_5 = (3100 + j 50) \mu\text{A},$$

$$I_6 = 3000 \mu\text{A}.$$

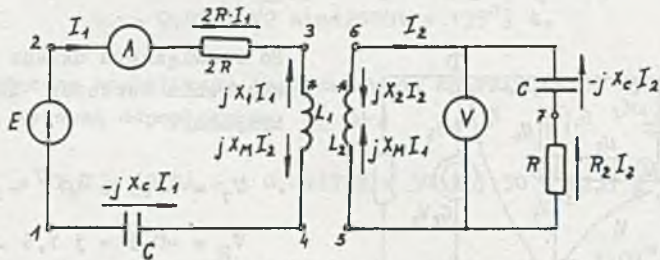
Wykres topograficzny prądów przedstawia rys. 3.97.3 (ze względu na duże różnice między prądami skrócono oś składowych rzeczywistych). Wykres odnosi się do dwóch węzłów:

$$(1) \quad I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

$$(2) \quad I_2 + I_4 + I_5 - I_6 = 0.$$

Zadanie 3.98

Przyjmujemy numerację końców gałęzi i strzałkowanie jak na rys. 3.98.1.

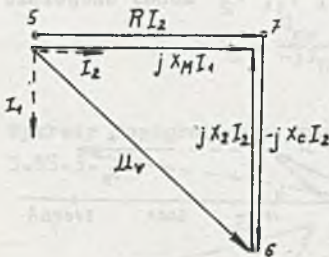


Rys. 3.98.1

Reaktancje poszczególnych elementów wynoszą:

$$I_1 = X_2 = \omega L_1 = 500 \cdot 0,1 = 50 \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} = 50 \Omega.$$



Rys. 3.98.2

Wykres topograficzny napięć strony wtórnej transformatora przedstawia rysunek 3.98.2, z którego widać, że

$$jX_M I_1 = R I_2,$$

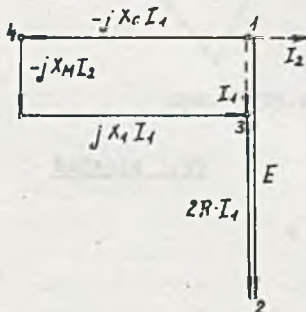
stąd:

$$\omega M |I_1'| = R |I_2|,$$

$$M = \frac{R}{\omega |I_1'|} |I_2| = \frac{R}{\omega |I_1'|} \frac{|U_V|}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} =$$

$$= \frac{50 \cdot 70,7}{500 \cdot 2 \sqrt{50^2 + 50^2}} = 0,05 \text{ H},$$

$$X_M = \omega M = 500 \cdot 0,05 = 25 \Omega.$$



Rys. 3.98.3

Z wykresu topograficznego napięć dla strony pierwotnej transformatora (rys. 3.98.3)

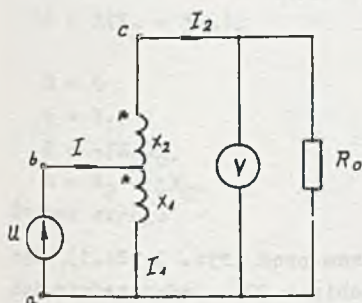
$$E = -jX_M I_2 + 2RI_1 = -j 25 \cdot 1 + 2 \cdot 50(-j 2) = -j 225.$$

Stąd przebieg czasowy napięcia zasilania  $e$  (przy założeniu, że faza początkowa prądu  $i_2$  wynosi 0)

$$e = 225 \sqrt{2} \sin(500t - 90^\circ) \text{ V.}$$

### Zadanie 3.99

Napięcie na zaciskach woltomierza, gdy autotransformator nie jest obciążony, wynosi (rys. 3.99.1)



Rys. 3.99.1

$$U_V = U + \frac{U}{jX_1} jX_M = U(1 + \frac{X_M}{X_1}),$$

czyli

$$400 = 200(1 + \frac{X_M}{50}),$$

stąd

$$X_M = 50 \Omega.$$

Równania oczkowe autotransformatora przy obciążeniu:

$$U = I_1 jX_1 - I_2 jX_M,$$

$$U = I_2(R_o + jX_2) - I_1 jX_M.$$

Po podstawieniu danych:

$$200 = I_1 j 50 - I_2 j 50,$$

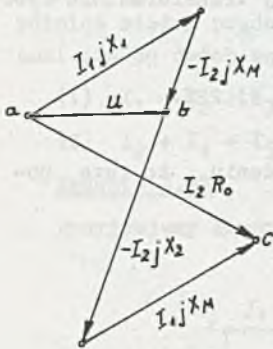
$$200 = I_2(100 + j100) - I_1 j 50,$$

Rys. 3.99.2

można obliczyć:

$$I_1 = 3,2 - j 5,6 = 6,45 e^{-j60^\circ 15'} \text{ A,}$$





Rys. 3.99.3

$$I_2 = 3,2 - j 1,6 = 3,58 e^{-j26^\circ 30'} \text{ A,}$$

$$I = 6,4 - j 7,2 = 9,61 e^{-j48^\circ 20'} \text{ A.}$$

Napięcie na woltomierzu

$$|U_V| = |I_2| R_0 = 3,58 \cdot 100 = 358 \text{ V.}$$

Wykres topograficzny prądów i zbudowany na jego podstawie wykres topograficzny napięć są przedstawione odpowiednio na rys. 3.99.2 oraz 3.99.3.

### Zadanie 3.100

$$P_1 = 7,9 \text{ W, } P_R = 31,7 \text{ W.}$$

### Zadanie 3.102

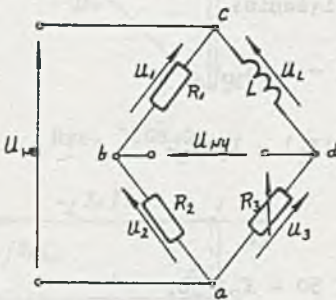
$$X_C = 5,6 \Omega.$$

### Zadanie 3.103

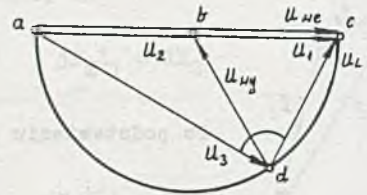
$$\omega_0 = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

### Zadanie 3.104

Ponieważ przez elementy  $L$  i  $R_3$  płynie ten sam prąd (rys. 3.104.1), więc napięcia  $U_L$  i  $U_3$  będą przesunięte względem siebie o  $90^\circ$ . Jednocześnie ich suma daje napięcie  $U_{we}$ . Zatem miejscem geometrycznym potencjału punktu  $d$  względem  $a$  będzie półokrąg oparty na średnicy  $U_{we}$  (rys. 3.104.2).



Rys. 3.104.1



Rys. 3.104.2

Faza początkowa napięcia  $U_{wy}$  będzie zmieniać się w granicach  $0-180^\circ$ . Natomiast warunkiem stałości amplitudy  $U_{wy}$  jest  $R_1 = R_2$ .

Zadanie 3.105

Prąd wydawany przez źródło

$$I = \frac{E}{R_1 + \frac{-jX_C R_2}{R_2 - jX_C}} = \frac{E(R_2 - jX_C)}{R_1(R_2 - jX_C) - jR_2 X_C} \quad (1)$$

Równania okręgu na płaszczyźnie zespolonej

$$W = \frac{A + qB}{C + qD} \quad (2)$$

Porównując z (1) otrzymamy:

$$A = E(R_2 - jX_C),$$

$$B = 0$$

$$q = R_1,$$

$$C = -jR_2 X_C,$$

$$D = R_2 - jX_C.$$

Środek okręgu

$$S = \frac{AD^* - BC^*}{CD^* - DC^*} \quad (3)$$

gdzie  $D^*$  wartość sprzężona.

Podstawiając dane:

$$S = \frac{E(R_2 - jX_C)(R_2 + jX_C)}{-jR_2 X_C(R_2 + jX_C) - (R_2 - jX_C)jR_2 X_C} = jE \frac{R_2^2 + X_C^2}{2R_2 X_C}.$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 636 \, \Omega,$$

więc

$$S = j 49,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

Promień okręgu

$$r = \left| \frac{AD - BC}{CD^* - DC^*} \right| \quad (4)$$

Po podstawieniu wartości

$$r = \frac{|E(R_2 - jX_C)(R_2 - jX_C)|}{|-j2R_2^2X_C|} = E \frac{R_2^2 + X_C^2}{2R_2^2X_C} = 49,5 \cdot 10^{-3} \text{ A.}$$

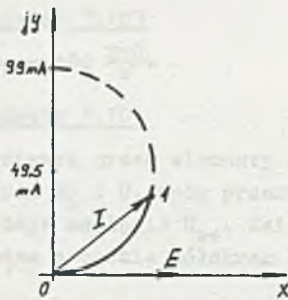
Wykres podano na rysunku 3.105.1.

Gdy  $R_1 = \infty$ , to  $I = 0$  (pkt. "0"), gdy  $R_1 = 0$ , to  $I = \frac{E}{R_2} + jE2\pi fC = \frac{24}{500} + j 24 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 48 + j 38 \text{ mA}$  (pkt "1").

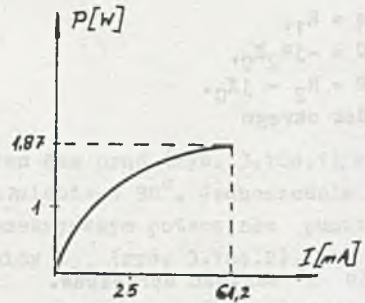
Moc czynna wydawana przez źródło

$$P = |E||I|\cos\varphi.$$

Po przyjęciu skali można sporządzić wykres mocy (rys. 3.105.2), zauważysz, że wartość mocy czynnej  $P$  jest proporcjonalna do długości rzutu wektora  $I$  na wektor  $E$ .



Rys. 3.105.1



Rys. 3.105.2

### Zadanie 3.106

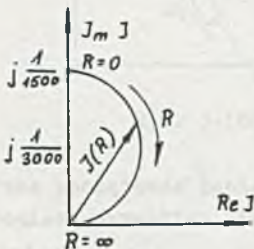
$$I = \frac{U}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{1}{R - j 1500}.$$

Wartości graniczne prądu:

$$I(R = 0) = j \frac{1}{1500},$$

$$I(R = \infty) = 0.$$

Środek okręgu (rys. 3.106.1)



Rys. 3.106.1

$$s = j \frac{1}{3000}.$$



Zadanie 3.107

$L = 92 \text{ mH}$ .

Zadanie 3.108

$P_0 = 2,88 \text{ var}$ ,  $f = 1590 \text{ Hz}$ .

Zadanie 3.109

Dla prądu części okręgu ( $s = -j 19,1 \text{ A}$ ,  $r = 19,1 \text{ A}$ ). Dla napięcia części okręgu ( $s = 60 \text{ V}$ ,  $r = 60 \text{ V}$ ).

Zadanie 3.111

Napięcie na SPM

$$U = I \frac{R + jX}{R + jX} = \frac{IRX}{R + jX} = u + jv.$$

Stąd

$$IRXj = Ru + jXu + Rvj - Xv.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone, otrzymamy:

$$Ru - Xv = 0.$$

$$IRX = Xu + Rv.$$

Eliminując z tych równań  $R$ , otrzymujemy równanie miejsca geometrycznego końców wektora  $U$

$$u^2 + \left(v - \frac{IX}{2}\right)^2 = \left(\frac{IX}{2}\right)^2.$$

Jest to część okręgu o środku  $(0, \frac{IX}{2})$  i promieniu  $\frac{IX}{2}$ .

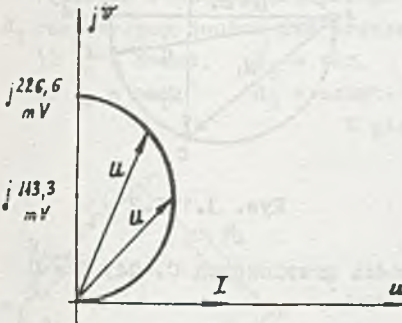
Dla wartości granicznych  $R$  napięcie  $U$  przyjmuje wartości:

$$U = I \frac{0 + jX}{0 + jX} = 0, \quad \text{dla } R = 0,$$

$$U = I \frac{jX}{1 + j \frac{X}{R}} = jXI, \quad \text{dla } R \rightarrow \infty.$$

Po podstawieniu wartości szczegółowych

$$X = 2\pi fL = 2\pi \cdot 400 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 75,5 \Omega,$$



Rys. 3.111.1

$$\frac{IX}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 75,5}{2} = 113,3 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

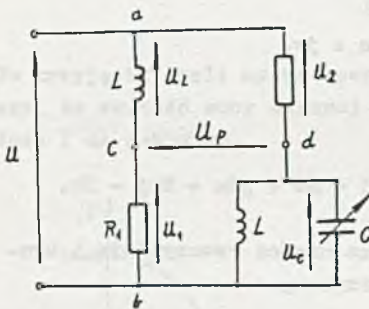
i przyjęciu skali dla prądu  $m_I = 1 \frac{\text{mA}}{\text{cm}}$  i dla napięcia  $m_U = 50 \frac{\text{mV}}{\text{cm}}$  można sporządzić wykres kołowy napięcia  $U$  (rys. 3.111.1).

### Zadanie 3.112

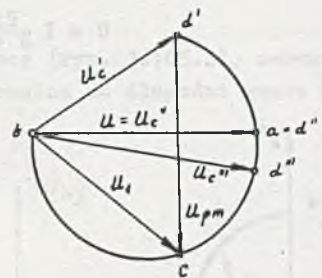
$$P_m = 9,5 \text{ W.}$$

### Zadanie 3.113

Przyjmijmy oznaczenia węzłów i strzałkowanie jak na rys. 3.113.1.



Rys. 3.113.1



Rys. 3.113.2

Napięcie  $U_C$  można łatwo policzyć dla wartości granicznych  $C$ . Gdy  $C = 0$

$$U_C = U_C' = \frac{U}{R_2 + j\omega L} j\omega L = \frac{40}{100 + j10^4 \cdot 10^{-2}} j10^4 \cdot 10^{-2} = 28,3 e^{j45^\circ} \text{ V.}$$

Gdy  $C \rightarrow \infty$ ,  $U_C \rightarrow 0$ .

Układ równoległy LC będzie w rezonansie dla wartości

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{10^8 \cdot 10^{-2}} = 10^{-6} \text{ F.}$$

Wówczas

$$|U_C| = |U_C''| = |U| = 40 \text{ V.}$$

Na podstawie trzech wartości  $U_C$  można łatwo zbudować wykres kołowy (rys. 3.113.2) stwierdzając, że wektor  $U_C$  będzie średnicą okręgu.

Napięcie  $U_1$  nie zmienia się i wynosi

$$U_1 = \frac{U}{R_1 + j\omega L} R_1 = \frac{40}{100 + j10^4 \cdot 10^{-2}} 100 = 28,3 e^{-j45^\circ} \text{ V.}$$

Zatem napięcie  $U_p = -U_C + U_1$  jest wektorem, którego koniec zaczepiony jest w punkcie c, a początek ślizga się po okręgu. Z wykresu widać, że największa wartość  $U_p$  wystąpi dla  $C = 0$  i wynosi  $|U_{pm}| = 40 \text{ V.}$

#### Zadanie 3.114

$$|U'| = 4 \text{ mV}, \quad |U''| = 16 \text{ mV.}$$

#### Zadanie 3.115

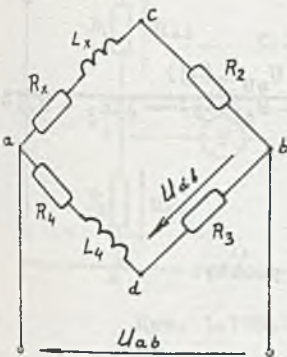
$$X_L > 2R.$$

#### Zadanie 3.116

Ponieważ równoważenie przeprowadza się poprzez zmianę na przemian  $L_4$  i  $R_3$  rozpatrzmy osobno dwa przypadki:

- 1)  $L_4 = \text{const}, \quad R_3 = \text{var},$
- 2)  $L_4 = \text{var}, \quad R_3 = \text{const.}$

W pierwszym przypadku (rys. 3.116.1)



Rys. 3.116.1

$$U_{db} = \frac{U_{ab} R_3}{(R_4 + jX_4) + R_3}$$

jest równaniem okręgu  $k_1$ , w którym

$$A = 0, \quad B = U_{ab},$$

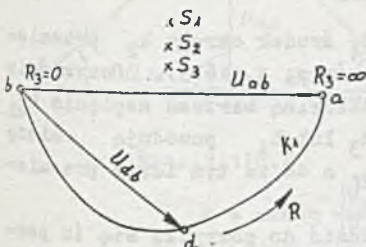
$$C = R_5 + jX_4, \quad D = 1,$$

$$C^* = R_4 - jX_4, \quad D^* = 1.$$

Środek okręgu

$$S = \frac{-U_{ab}(R_4 - jX_4)}{(R_4 + jX_4)1 - 1(R_4 - jX_4)} =$$

$$= \frac{U_{ab}}{2} + j \frac{U_{ab} R_4}{X_4}.$$

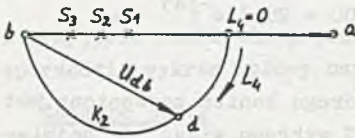


Rys. 3.116.2

Zwróćmy uwagę, że wraz ze wzrostem  $L_4$  środek przemieszcza się jak pokazują punkty  $S_1, S_2, S_3, \dots$  (rys. 3.116.2).



Dla wartości granicznych oporu otrzymujemy punkty:

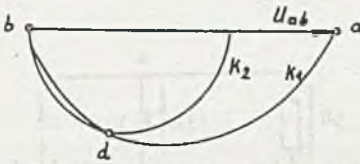


Rys. 3.116.3

$$U_3(R_3 = 0) = 0,$$

$$U_3(R_3 = \infty) = U_{ab}.$$

Rozważmy teraz zmianę  $L_4$ . Dla tego samego równania



Rys. 116.4

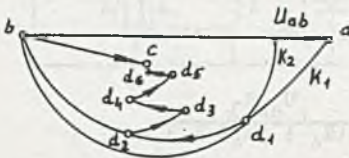
$$U_{db} = \frac{U_{ab} R_3}{R_3 + R_4 + jX_4}$$

mamy:

$$A = U_{ab} R_3, \quad B = 0,$$

$$C = R_3 + R_4, \quad D = j,$$

$$C^* = R_3 + R_4, \quad D^* = -j,$$



Rys. 116.5

środek okręgu  $k_2$

$$S = \frac{U_{ab} R_3 (-j)}{(R_3 + R_4) (-j) - j(R_3 + R_4)}$$

$$= \frac{U_{ab}}{2} \frac{R_3}{R_3 + R_4}.$$

Dla granicznych wartości indukcyjności otrzymujemy punkty:

$$U_3(L_4 = 0) = U_{ab} \frac{R_3}{R_3 + R_4},$$

$$U_3(L_4 = \infty) = 0.$$

Zauważmy, że przy wzrastających wartościach  $R_4$  środek okręgu  $k_2$  przemieszcza się jak pokazują punkty  $S_1, S_2, S_3, \dots$  (rys. 3.116.3). Oczywiście punkt wspólny obu krzywych  $k_1$  i  $k_2$  wyznacza aktualną wartość napięcia  $U_{db}$  (rys. 3.116.4). Zmiana jednego z parametrów  $R_3$  lub  $L_4$  powodują zmianę wielkości i położenia środków okręgów  $k_1$  i  $k_2$ , a co za tym idzie przemieszczanie się ich punktu wspólnego  $d$ .

Proces równoważenia polega na tym, by doprowadzić do pokrycia się (z pewną dokładnością zależną od czułości miernika  $V$ ) punktów  $o$  i  $d$ . Ponieważ

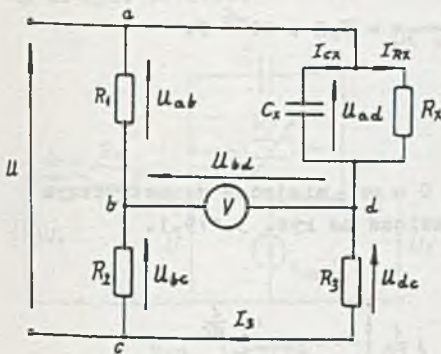
prąd w gałęzi a, c, b spóźnia się za napięciem  $U_{ab}$ , to napięcie  $U_{cb}$  też opóźnia się w fazie za napięciem  $U_{ab}$ . Na przemian będą zmieniane parametry  $R_3$  i  $L_4$  tak, by zmniejszać odległość między punktami d i c, co w układzie odpowiada zmniejszaniu się wychylenia miernika V. I tak (rys. 3.116.5): zmiana  $R_3$  ( $d_1 \rightarrow d_2$  po okręgu  $k_1$ ), aż do osiągnięcia min  $|U_{cd}|$ , zmiana  $L_4$  ( $d_2 \rightarrow d_3$  po okręgu  $k'_1$ ), aż do osiągnięcia min  $|U_{cd}|$  itd. W końcu punkt np.  $d_6$  znajdzie się dostatecznie blisko punktu c, a napięcie na przekątnej  $|U_{cd}| \approx 0$ .

### Zadanie 3.118

Przyjmując oznaczenia jak na rys. 3.118.1 obliczamy:

$$|U_{ab}| = \frac{|U|}{R_1 + R_2} R_1 = \frac{110}{500 + 162} 162 = 27 \text{ V},$$

$$|U_{bc}| = \frac{|U|}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{110}{500 + 162} 500 = 83 \text{ V},$$



Rys. 3.118.1

a następnie budujemy wykres topograficzny napięć (rys. 3.118.2). Ponieważ gałąź z prądem  $I_3$  ma charakter oporowo-pojemnościowy, więc napięcie  $U_{dc}$  wyprzedza o kąt  $\alpha$  napięcia zasilania. Napięcie  $|U_{bd}|$  jest najmniejsze wtedy, gdy wektor  $U_{bd}$  jest prostopadły do wektora napięcia U.

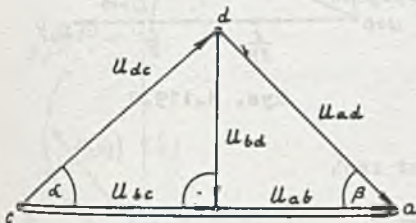
Z wykresu widać, że:

$$|U_{dc}| = \sqrt{|U_{bc}|^2 + |U_{bd}|^2} =$$

$$= \sqrt{83^2 + 44,7^2} = 94,5 \text{ V},$$

$$|U_{ad}| = \sqrt{|U_{bd}|^2 + |U_{ab}|^2} =$$

$$= \sqrt{44,7^2 + 27^2} = 52,3 \text{ V}.$$



Rys. 3.118.2

Stąd:

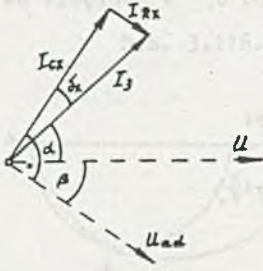
$$\alpha = \arctg \frac{|U_{db}|}{|U_{bc}|} = \arctg \frac{44,7}{83} = 28^\circ 20',$$

$$\beta = \arctg \frac{|U_{bd}|}{|U_{ab}|} = \arctg \frac{44,7}{27} = 58^{\circ}50',$$

$$\delta_x = 90^{\circ} - \alpha - \beta = 90^{\circ} - 28^{\circ}20' - 58^{\circ}50' = 2^{\circ}50'.$$

Obliczając

$$|I_3| = \frac{|U_{dc}|}{R_3} = \frac{94,5}{800} = 0,118 \text{ A}$$



Rys. 3.118.3

można narysować wykres topograficzny prądów (rys. 3.118.3), z którego

$$|I_{cx}| = |I_3| \cos \delta_x = 0,118 \cos 2^{\circ}50' = 0,118 \text{ A},$$

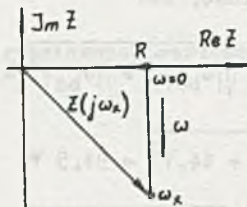
czyli

$$C_x = \frac{|I_{cx}|}{|U_{ad}| 2\pi f} = \frac{0,118}{52,3 \cdot 2\pi \cdot 50} = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ F}.$$

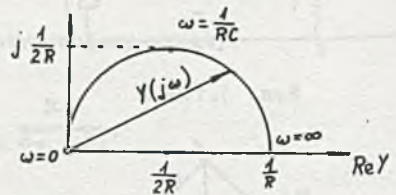
### Zadanie 3.119

Impedancja dwójnika  $Z = R - j \frac{1}{\omega C}$ .

Przy zmianach pulsacji w granicach  $\omega = 0 - \infty$  miejscem geometrycznym końców wektora  $Z$  jest półprosta przedstawiona na rys. 3.119.1.



Rys. 3.119.1



Rys. 3.119.2

Admitancja dwójnika

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\omega j C}{1 + \omega j R C}.$$

Końce wektora  $Y$  przy zmianach  $\omega$  przedstawiają okrąg o środku

$$s = \frac{-jC}{1(-jRC)} = jRC = \frac{1}{2R}$$



i promieniu

$$r = \left| \frac{-1C1}{1(-jCR) - jCR1} \right| = \frac{1}{2R}.$$

Dla granicznych wartości pulsacji mamy:

$$Y(\omega = 0) = 0,$$

$$Y(\omega = \infty) = \frac{1}{R}.$$

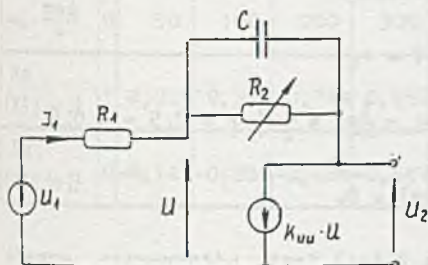
Zatem wykres końców wektora  $Y$  na płaszczyźnie zespolonej będzie półokręgiem jak na rys. 3.119.2.

### Zadanie 3.120

Półprosta na pł.  $Z$  i półokrąg na pł.  $Y$ .

### Zadanie 3.121

Po zastąpieniu wzmacniacza źródłem sterowanym rozwiązujemy obwód podany na rys. 3.121.1.



Rys. 3.121.1

$$I_1 = \frac{U_1 - U}{R_1} = \frac{U + k_{UU}U}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}},$$

$$U_2 = -k_{UU}U.$$

Stąd

$$U_2 = -U_1 \frac{k_{UU}R_2}{k_{UU}(R_1 + j\omega CR_1R_2) + R_1R_2j\omega C + R_1 + R_2}.$$

Uwzględniając, że  $k_{UU} \rightarrow \infty$

$$U_2 = \frac{-U_1R_2}{R_1 + j\omega CR_1R_2}.$$

Jest to równanie okręgu, przy czym:

$$A = 0,$$

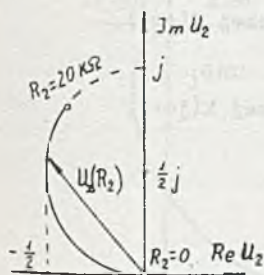
$$B = -1,$$

$$C = R_1,$$

$$D = j\omega CR_1 = j,$$

$$C^* = R_1,$$

$$D^* = -j\omega CR_1 = -j.$$



Rys. 3.121.2

Środek okręgu  $S = \frac{1}{2} j$ , promień  $r = \frac{1}{2}$ .

Dla skrajnych wartości rezystancji  $R_2$  otrzymujemy punkty

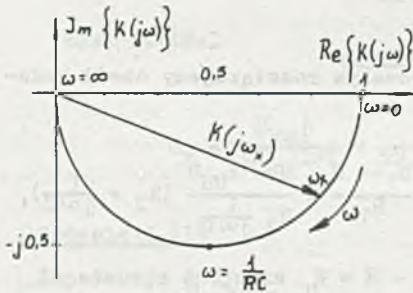
$$U_2(R_2 = 0) = 0,$$

$$U_2(R_2 = 20 \cdot 10^4) = -0,4 + j 0,8.$$

Miejsce geometryczne końców wektora  $U_2$  przy zmianach  $R_2$  przedstawia rys. 3.121.2.

### Zadanie 3.122

$$K(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$



Rys. 3.122.1

Przy zmianie pulsacji w granicach  $0 \div \infty$  koniec wektora  $K(j\omega)$  przemieszcza się po półokręgu.

Wyznamy kilka jego punktów charakterystycznych:

$$K(0) = 1,$$

$$K(\omega = \frac{1}{RC}) = \frac{1}{j+1} = 0,5 - j 0,5,$$

$$K(\infty) = 0.$$

Zatem charakterystyka amplitudowo-fazowa  $K(j\omega)$  jest półokręgiem przedstawionym na rys. 3.122.1.

### Zadanie 3.123

Półokrąg w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej  $K(j\omega)$ .

### Zadanie 3.124

Półokrąg w trzeciej ćwiartce płaszczyzny zespolonej  $K(j\omega)$ .

### Zadanie 3.125

Układamy równania dla obwodu

$$V_1 \left( \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right) = \frac{U_1}{R},$$

$$U_2 = V_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Z których wyznaczamy

$$U_2 = \frac{1}{1 - (\omega RC)^2 + j3\omega RC} U_1$$

Zatem

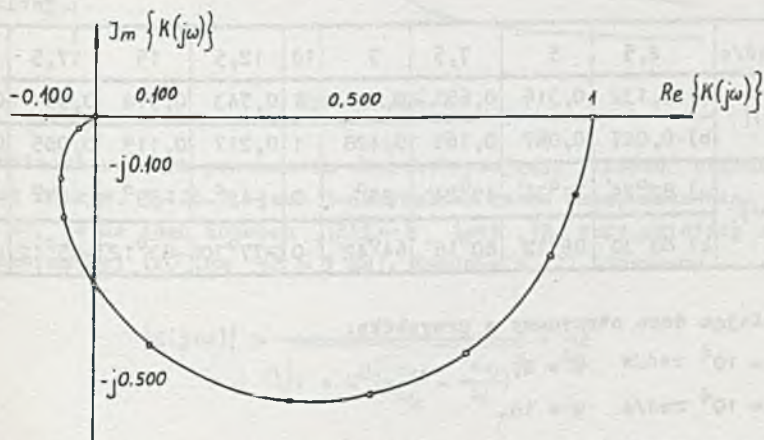
$$\frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = K(j\omega) = \frac{1}{1 - (\omega RC)^2 + j3\omega RC}$$

Wyrażenie to nie jest funkcją biliniową ze względu na  $\omega$ , a więc charakterystyka amplitudowo-fazowa będzie inną krzywą niż okrąg. Po przekształceniu i podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy

$$K(j\omega) = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2} + j \frac{-\frac{3\omega}{1000}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{1000}\right)^2}$$

Tablica 3.1

$\omega, \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	0	50	100	200	300	400	700	1000	1500	2000	5000	$\infty$
Re $\{K(j\omega)\}$	1	0,976	0,925	0,749	0,556	0,391	0,109	0	-0,057	-0,067	-0,030	0
Im $\{K(j\omega)\}$	0	-0,147	-0,280	-0,468	-0,549	-0,559	-0,450	-0,333	-0,206	-0,133	-0,019	0



Rys. 3.125.1



Dla wybranych wartości pulsacji  $\omega$  obliczono część rzeczywistą i urojoną  $K(j\omega)$ . Wyniki zostały zebrane w tablicy 3.1, a rys. 3.125.1 przedstawia wykres  $K(j\omega)$ .

### Zadanie 3.126

Na podstawie rys. 3.126 można napisać

$$K(j\omega) = \frac{I_R}{I_S} = \frac{V}{RI_S} = \frac{1}{RY(j\omega)} = \frac{1}{1 + jR(\omega C - \frac{1}{\omega L})} \quad (1)$$

gdzie

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

Wprowadzając oznaczenia pomocnicze  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  i  $Q = \omega_0 RC$ , wyrażenie (1) przyjmie postać

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \quad (2)$$

Dla obwodu rezonansowego, a takim jest obwód z rys. 3.126,  $\omega_0$  jest częstotliwością rezonansową, natomiast  $Q (Q = \frac{|I_L|}{|I_S|} = \frac{|I_C|}{|I_S|})$  dla częstotliwości rezonansowej) jest tzw. dobrocią układu. Parametry  $\omega_0$  i  $Q$  określają, jak wynika z (2), funkcję obwodową  $H(j\omega)$ .

Tablica 3.2

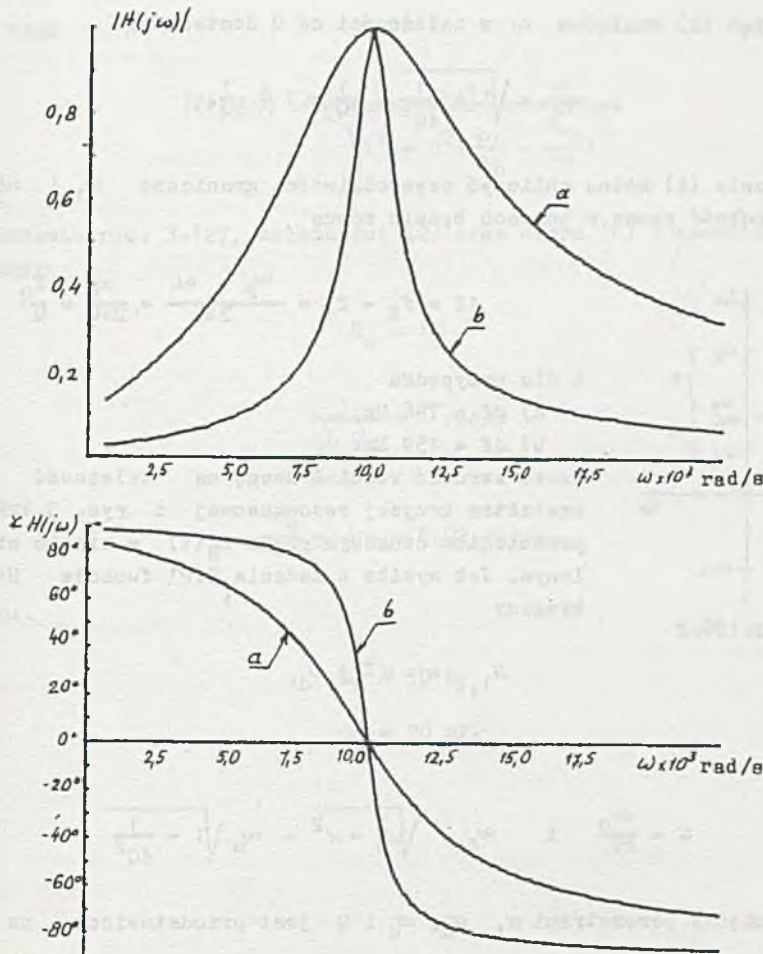
$\omega \times 10^3 \text{ rad/s}$	2,5	5	7,5	9	10	12,5	15	17,5	20
$ H(j\omega) $	a) 0,132	0,316	0,651	0,921	1	0,743	0,514	0,391	0,316
	b) 0,027	0,067	0,169	0,428	1	0,217	0,119	0,085	0,067
$\angle H(j\omega)$	a) $82^\circ 24'$	$71^\circ 36'$	$49^\circ 24'$	$23^\circ$	0	$-42^\circ$	$-59^\circ$	$-67^\circ$	$-71^\circ 36'$
	b) $88^\circ 30'$	$86^\circ 12'$	$80^\circ 18'$	$64^\circ 42'$	0	$-77^\circ 30'$	$-83^\circ 12'$	$-85^\circ 12'$	$-86^\circ 12'$

Podstawiając dane otrzymane w przypadku:

a)  $\omega_0 = 10^4 \text{ rad/s}$      $Q = 2$ ,

b)  $\omega_0 = 10^4 \text{ rad/s}$      $Q = 10$ .

Dla obu powyższych przypadków wartości  $|H(j\omega)|$  i argument  $H(j\omega)$  są podane w tablicy 3.2, natomiast ich przebieg przedstawia rys. 3.126.1.



Rys. 3.126.1

Powszechnie stosowanym parametrem charakteryzującym krzywe rezonansowe, takie jak na rys. 3.126.1, jest 3-decybelowe pasmo przepuszczenia. Oznacza ono to, że na jego końcach  $|H(j\omega)|$  jest  $\sqrt{2}$  razy mniejszy od wartości maksymalnej ( $20 \log \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$ ). Zgodnie z (2) otrzymamy

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

lub

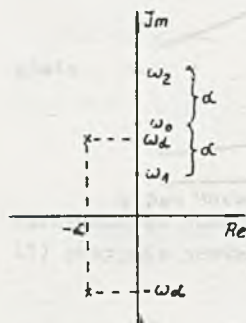
$$q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1. \quad (3)$$

Rozwiązując (2) względem  $\omega$  w zależności od  $Q$  dostaniemy

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \pm \frac{1}{2Q} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q} \quad (4)$$

Na podstawie (4) można obliczyć częstotliwości graniczne  $\omega_1$  i  $\omega_2$ ; wobec tego szerokość pasma w hercach będzie równa

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{f_0}{Q} \quad (6)$$



Rys. 3.126.2

i dla przypadku

a)  $\Delta f = 796 \text{ Hz}$ ,

b)  $\Delta f = 159 \text{ Hz}$ .

Warto zwrócić również uwagę na zależność między kształtem krzywej rezonansowej z rys. 3.126.1, a przebiegiem czasowym prądu  $i_R(t)$  w stanie nieustalonym. Jak wynika z zadania 2.21, funkcja  $H(s)$  ma bieguny

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d,$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{ i } \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Związek między parametrami  $\alpha$ ,  $\omega_d$ ,  $\omega_0$  i  $Q$  jest przedstawiony na rys. 3.126.2.

Z porównania przebiegów czasowych prądu  $i_R(t)$  w zadaniu 2.21 i krzywych rezonansowych na rys. 3.126.1 wynika, że im dobroć układu rezonansowego (przy tej samej częstotliwości rezonansowej) jest większa, tym dłużej trwa stan nieustalony w obwodzie.

### Zadanie 3.127

Admitancja szeregowego układu RLC jest równa

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}, \quad (1)$$

gdzie:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}.$$



Wobec tego

$$|Y(j\omega)| = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1^2 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (2)$$

Na podstawie rys. 3.127, zależności (2) oraz wzoru (6) z zadania 3.126 otrzymujemy:

$$R_0 = 1 \Omega,$$

$$\frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = 1 \text{ rad/s}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \Delta\omega = 0,02 \text{ rad/s}$$

a stąd:

$$L_0 = 50 \text{ H},$$

$$C_0 = 20 \text{ mF}.$$

## R o z d z i a ł    4

### STANY NIEUSTALONE W OBWODACH Z SINUSOIDALNYM WYMUSZENIEM

#### Zadanie 4.1

Równanie wg drugiego prawa Kirchhoffa dla obwodu z rys. 4.1 można zapisać następująco

$$RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) = |E_m| \sin(\omega t + \psi).$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest suma algebraiczna składowej ustalonej  $u_u(t)$  oraz składowej przejściowej  $u_p(t)$

$$u(t) = u_u(t) + u_p(t).$$

Składowa ustalona  $u_u(t)$  jest całką szczególną danego równania różniczkowego niejednorodnego określoną następująco

$$u_u(t) = - \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

gdzie:

$Z = R + \frac{1}{j\omega C}$  - impedancja zespolona obwodu,

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{(10^3)^2 + \left(\frac{1}{10^3 \cdot 10^{-6}}\right)^2} = 10^3 \sqrt{2} \Omega,$$

$$\varphi = \arctg\left(-\frac{1}{R\omega C}\right) = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} u_u(t) &= - \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\omega t + \psi - \varphi) = \\ &= - \frac{10\sqrt{2}}{10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \sqrt{2}} \cos(1000t + 0 + \frac{\pi}{4}) = -10 \cos(1000t + \frac{\pi}{4}) \text{ V,} \end{aligned}$$

$$u_u(t) = -10 \cos(1000t + \frac{\pi}{4}) \text{ V.}$$

Składowa przejściowa  $u_p(t)$  można obliczyć jako całkę ogólną równania różniczkowego jednorodnego

$$RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$u_p = C_1 e^{s_1 t}$$

$C_1$  - stała całkowania,

$s_1$  - pierwiastek równania charakterystycznego

$$RCs_1 + 1 = 0,$$

stąd

$$s_1 = -\frac{1}{RC}.$$

Napięcie  $u(t)$  w stanie nieustalonym jest sumą  $u_u(t)$  i  $u_p(t)$ . Zatem

$$u(t) = -\frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + C_1 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Zgodnie z zasadą ciągłości napięcia na zaciskach pojemności można napisać równanie dla chwili  $t = 0$  następująco

$$0 = -\frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\psi - \varphi) + C_1.$$

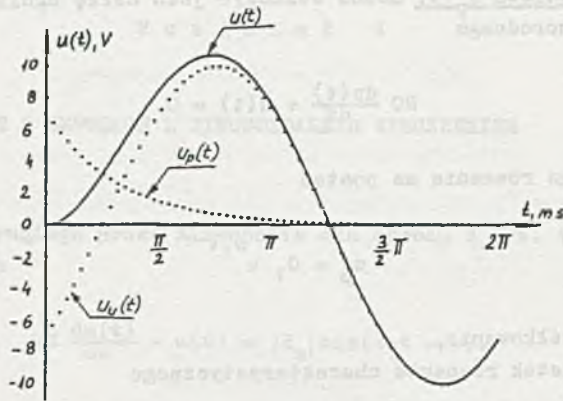
Stąd

$$C_1 = \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\psi - \varphi).$$

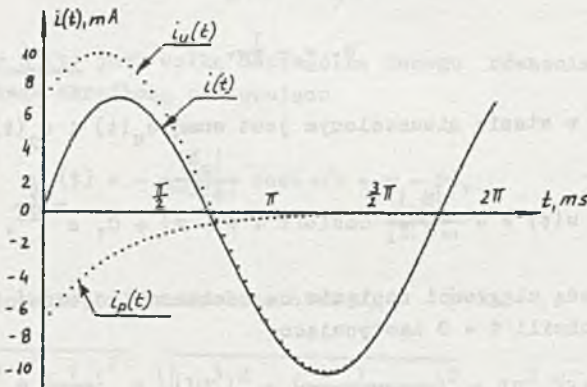
Składowa przejściowa ma postać

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{10\sqrt{2}}{10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \sqrt{2}} \cos(0 + \frac{\pi}{4}) e^{-\frac{t}{10^3 \cdot 10^{-6}}} = \\ &= 5\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} e^{-1000t} = 7,07 e^{-1000t} \text{ V.} \end{aligned}$$





Rys. 4.1.1



Rys. 4.1.2

Zatem

$$u(t) = u_u(t) + u_p(t) = -\frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\omega t + \psi - \varphi) +$$

$$= \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}} = (-10 \cos(1000t + \frac{\pi}{4}) + 7,07 e^{-1000t}) \text{ V.}$$

Prąd płynący w obwodzie z rys. 4.1 można obliczyć z zależności

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} i(t) &= i_u(t) + i_p(t) = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{|E_m|}{R\omega C|Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}} = \\ &= \frac{10\sqrt{2}}{10^3\sqrt{2}} \sin(1000t + 0 + \frac{\pi}{4}) - \\ &= \frac{10\sqrt{2}}{10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3\sqrt{2}} \cos(0 + \frac{\pi}{4}) e^{-\frac{t}{10^3 \cdot 10^{-6}}} = \\ &= (10\sin(1000t + \frac{\pi}{4}) - 7,07 e^{-1000t}) \text{ mA}. \end{aligned}$$

Przebiegi czasowe napięcia  $u(t)$  oraz prądu  $i(t)$  w obwodzie z rys. 4.1 mają postać:

$$u(t) = (-10\cos(1000t + \frac{\pi}{4}) + 7,07 e^{-1000t}) \text{ V},$$

$$i(t) = (10\sin(1000t + \frac{\pi}{4}) - 7,07 e^{-1000t}) \text{ mA}.$$

Przebiegi  $u(t)$  oraz  $i(t)$  przedstawione są na rys. 4.1.1 i 4.1.2.

#### Zadanie 4.2

Dana jest postać czasowa SEM  $e(t)$

$$e(t) = |E_m| \sin(\omega t + \psi).$$

SEM  $e(t)$  można wyrazić symbolicznie jako

$$E(t) = E_m e^{j\omega t} = |E_m| e^{j\psi} e^{j\omega t}.$$

Postać operatorowo-symboliczna jest następująca

$$E(s) = \mathcal{L}[E(t)] = \int_0^{\infty} E_m e^{j\omega t} e^{-st} dt = \frac{E_m}{s - j\omega}.$$

Impedancja obwodu z rys. 4.1 w postaci operatorowej

$$Z(s) = R + \frac{1}{sC} = \frac{RsC + 1}{sC}.$$

Zatem prąd płynący w obwodzie wyrażony operatorowo

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{E_m}{s - j\omega} \frac{sC}{sRC + 1},$$

a napięcie na pojemności

$$U(s) = I(s) \frac{1}{sC} = \frac{E_m}{s - j\omega} \frac{1}{sRC + 1}.$$

Obie zależności mają postać wyrażenia

$$F(s) = \frac{E_m}{s - j\omega} \frac{L(s)}{M(s)}.$$

Przebieg czasowy  $f(t)$  można otrzymać jako urojoną część transformaty odwrotnej Laplace'a wyrażenia  $F(s)$

$$f(t) = I_m \left\{ \mathcal{L}^{-1} [F(s)] \right\}.$$

Jeżeli pierwiastki  $s_k$  mianownika  $M(s)$  są różne od  $j\omega$ , do znalezienia postaci czasowej  $f(t)$  stosuje się wzór Heaviside'a w postaci

$$F(t) = E_m \left[ \frac{L(j\omega)}{M(j\omega)} e^{j\omega t} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{(s_k - j\omega)M(s_k)} e^{s_k t} \right].$$

Do obliczenia postaci czasowej prądu  $i(t)$  w obwodzie z rys. 4.1 są następujące dane:

$$E_m = |E_m| e^{j\varphi},$$

$$L(j\omega) = j\omega C,$$

$$M(j\omega) = j\omega RC + 1.$$

Po przyrównaniu  $M(s)$  do zera otrzymuje się jeden pierwiastek mianownika:

$$s_1 = -\frac{1}{RC},$$

$$L(s_1) = -\frac{1}{R},$$

$$M(s_1) = RC,$$



stad

$$\begin{aligned}
 I(t) &= |E_m| e^{j\psi} \left[ \frac{j\omega C}{j\omega RC + 1} e^{j\omega t} + \frac{\left(-\frac{1}{R}\right)}{\left(-\frac{1}{RC} - j\omega\right)RC} e^{-\frac{t}{RC}} \right] = \\
 &= |E_m| e^{j\psi} \left[ \frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}} e^{j\omega t} + \frac{1}{R} \frac{(-j\frac{1}{\omega C})}{R - j\frac{1}{\omega C}} e^{-\frac{t}{RC}} \right] = \\
 &= |E_m| e^{j\psi} \left[ \frac{e^{j\omega t}}{|Z| e^{j\varphi}} - \frac{j\frac{1}{\omega C}}{R\omega C |Z| e^{j\varphi}} e^{-\frac{t}{RC}} \right] = \\
 &= \frac{|E_m|}{|Z|} e^{j(\omega t + \psi - \varphi)} - \frac{|E_m|}{R\omega C |Z|} e^{j(\psi - \varphi + \frac{\pi}{2})} e^{-\frac{t}{RC}},
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 10^3 \sqrt{2} \Omega,$$

$$\varphi = \arctg\left(-\frac{1}{R\omega C}\right) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Przebieg czasowy prądu  $i(t)$  ma postać

$$i(t) = I_m \{I(t)\} = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{|E_m|}{R\omega C |Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Podstawiając dane

$$i(t) = (10 \sin(1000t + \frac{\pi}{4}) - 7,07 e^{-1000t}) \text{ mA.}$$

Do obliczenia postaci czasowej napięcia  $u(t)$  wg II wzoru Heaviside'a są następujące dane:

$$E_m = |E_m| e^{j\psi},$$

$$L(j\omega) = 1,$$

$$M(j\omega) = j\omega RC + 1,$$

$$s_1 = -\frac{1}{RC},$$

$$L(s_1) = 1,$$

$$M(s_1) = RC.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
 U(t) &= |E_m| e^{j\psi} \left[ \frac{1}{j\omega RC + 1} e^{j\omega t} + \frac{1}{(-\frac{1}{RC} - j\omega)RC} e^{-\frac{t}{RC}} \right] = \\
 &= |E_m| e^{j\psi} \left[ \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}} e^{j\omega t} - \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}} e^{-\frac{t}{RC}} \right] = \\
 &= |E_m| e^{j\psi} \left[ \frac{e^{-\frac{j}{2}}}{\omega C |Z| e^{j\varphi}} e^{j\omega t} - \frac{e^{-\frac{j}{2}}}{\omega C |Z| e^{j\varphi}} e^{-\frac{t}{RC}} \right] = \\
 &= \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} e^{j(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2})} - \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} e^{j(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2})} e^{-\frac{t}{RC}}.
 \end{aligned}$$

Zatem przebieg czasowy napięcia  $u(t)$  ma postać

$$u(t) = I_m \{U(t)\} = -\frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Po podstawieniu danych

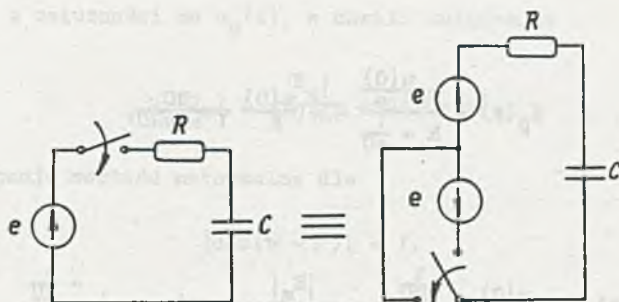
$$u(t) = (-10 \cos(1000t + \frac{\pi}{4}) + 7,07 e^{-1000t}) \text{ V}.$$

Otrzymane przebiegi czasowe, prądu  $i(t)$  oraz napięcia  $u(t)$ , są identyczne z rozwiązaniem zadania 4.1 i ich wykresy przedstawiają rysunki 4.1.1 i 4.1.2.

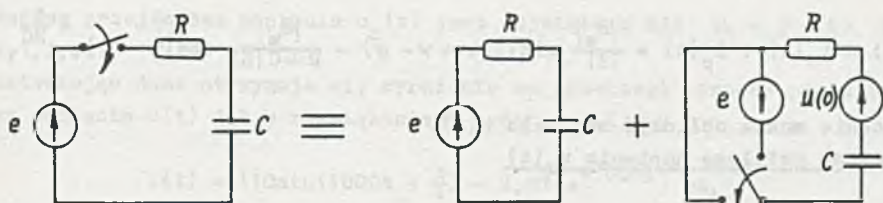
#### Zadanie 4.3

Metoda dwóch przeciwnych stanów ustalonych polega na tym, że załączenie okresowej siły elektromotorycznej  $e(t)$  do obwodu, nie zawierającego żadnych sił wymuszających i posiadającego zerowe warunki początkowe, można rozpatrywać jako wyłączenie jednej z dwóch równych i przeciwnie skierowanych sił elektromotorycznych  $e(t)$  jak na rys. 4.3.

Stąd stan nieustalony po włączeniu do obwodu okresowej siły elektromotorycznej  $e(t)$  w chwili  $t = 0$  można wyrazić jako sumę - składowej ustalonej wywołanej przez stałe załączoną SEM  $e(t)$ , - składowej przejściowej wywołanej wyłączeniem w chwili  $t = 0$  SEM równej  $e(t)$  i przeciwnie do niej skierowanej. Jest to równoznaczne z rozpatrywaniem rozładowywania się warunku początkowego na pojemności pochodzącego od tej siły elektromotorycznej. Przedstawia to poglądowo rys. 4.3.1.



Rys. 4.3



Rys. 4.3.1

Zatem prąd

$$i(t) = i_u(t) + i_p(t).$$

Składowa ustalona prądu  $i_u(t)$  można obliczyć metodą symboliczną. Przebieg czasowy składowej ustalonej prądu wyznaczony w zad. 4.2

$$i_u(t) = \operatorname{Im}\{I_u(t)\} = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Składowa przejściowa prądu  $i_p(t)$  stanowi prąd rozładowania pojemności o napięciu początkowym  $u(0)$ :

$$u(0) = -i_u(0) \frac{1}{j\omega C} = -\frac{|E_m|}{\omega C |Z|} e^{j(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2})},$$

$$u(0) = \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\psi - \varphi).$$



Operatorowo

$$I_p(s) = \frac{-\frac{u(0)}{s}}{R + \frac{1}{sC}} = -\frac{u(0)}{R} \frac{RC}{1 + sRC},$$

stąd

$$i_p(t) = -\frac{u(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{|E_m|}{R\omega C|Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Zatem

$$i(t) = i_u(t) + i_p(t) = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{|E_m|}{R\omega C|Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Podobnie można obliczyć napięcie  $u(t)$ .

Składowa ustalona napięcia  $u_u(t)$

$$U_u(t) = I_u(t) \frac{1}{j\omega C} = \frac{|E_m|}{\omega C|Z|} e^{j(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2})}.$$

Przebieg czasowy składowej ustalonej napięcia

$$u_u(t) = \text{Im}\{U_u(t)\} = -\frac{|E_m|}{\omega C|Z|} \cos(\omega t + \psi - \varphi).$$

Składowa przejściowa napięcia  $u_p(t)$

$$U_p(s) = \frac{u(0)}{s} \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = u(0) \frac{RC}{1 + sRC},$$

$$u_p(t) = u(0) e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{|E_m|}{\omega C|Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}},$$

$$u(t) = u_u(t) + u_p(t) = -\frac{|E_m|}{\omega C|Z|} \cos(\omega t + \psi - \varphi) +$$

$$+ \frac{|E_m|}{\omega C|Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Korzystając z zależności na  $u_p(t)$ , w chwili załączenia

$$u_p(0_+) = \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\psi - \varphi),$$

$u_p(0_+)$  przyjmuje wartość maksymalną dla

$$|\cos(\psi - \varphi)| = 1,$$

stąd

$$\psi_1 = \varphi + k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Składowa przejściowa napięcia  $u_p(t)$  jest największa dla  $\psi_1 = \varphi + k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Podstawiając dane otrzymuje się wyrażenia na przebiegi czasowe prądu  $i(t)$  oraz napięcia  $u(t)$  jak w rozwiązaniach zadań 4.1 i 4.2

$$i(t) = (10 \sin(1000t + \frac{\pi}{4}) - 7,07 e^{-1000t}) \text{ mA},$$

$$u(t) = (-10 \cos(1000t + \frac{\pi}{4}) + 7,07 e^{-1000t}) \text{ V}.$$

#### Zadanie 4.4

Do obliczania odpowiedzi czasowych obwodów z zerowymi warunkami początkowymi na dowolne ciągłe wymuszenie można stosować całkę superpozycyjną w postaci

$$s(t) = f(t)g(0) + \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau,$$

gdzie:

$s(t)$  - odpowiedź obwodu na wymuszenie  $f(t)$ ,

$f(t)$  - dowolna ciągła funkcja wymuszająca,

$g(t)$  - odpowiedź obwodu na wymuszenie funkcją jednostkową.

Dla obliczenia przebiegu prądu  $i(t)$  w obwodzie z rys. 4.1 można zastosować wzór:

$$i(t) = e(t)g(0) + \int_0^t e(t - \tau)g(\tau)d\tau,$$

$$e(t) = |E_m| \sin(\omega t + \psi),$$

$$g(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}}; \quad g(0) = \frac{1}{R}; \quad g'(\tau) = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{\tau}{RC}}.$$

Postać symboliczno-czasowa wymuszenia

$$E(t) = |E_m| e^{j(\omega t + \psi)},$$

stąd

$$I(t) = |E_m| e^{j(\omega t + \psi)} g(0) + |E_m| e^{j(\omega t + \psi)} \int_0^t e^{-j\omega \tau} g'(\tau) d\tau.$$

Całkowanie możemy wykonać następująco

$$\int_0^t = \int_0^\infty - \int_t^\infty$$

Korzystając z twierdzenia o transformacie Fouriera pochodnej funkcji czasu można zapisać

$$P\left[\frac{dg}{dt}\right] = \int_0^\infty g(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega G(j\omega) - g(0).$$

Stąd

$$I(t) = \underbrace{|E_m| e^{j(\omega t + \psi)} j\omega G(j\omega)}_{\text{składowa ustalona}} -$$

$$\underbrace{|E_m| e^{j(\omega t + \psi)} \int_t^\infty e^{-j\omega \tau} g(\tau) d\tau}_{\text{składowa przejściowa}}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{s} \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega} \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$



Zatem

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{|E_m|}{R + \frac{1}{j\omega C}} e^{j(\omega t + \psi)} + \\ &+ |E_m| e^{j(\omega t + \psi)} \frac{1}{R^2 C} \frac{1}{(-j\omega - \frac{1}{RC})} e^{(j\omega + \frac{1}{RC})t} \Big|_t^\infty = \\ &= \frac{|E_m|}{|Z| e^{j\varphi}} e^{j(\omega t + \psi)} + \frac{|E_m| e^{j\omega t}}{j\omega CR |Z| e^{j\varphi}} e^{-\frac{t}{RC}} = \\ &= \frac{|E_m|}{|Z|} e^{j(\omega t + \psi - \varphi)} + \frac{|E_m|}{\omega CR |Z|} e^{j(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2})} e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned}$$

Przebieg czasowy prądu  $i(t)$

$$i(t) = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{|E_m|}{\omega CR |Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Jednostkowa funkcja przejścia dla napięcia  $u(t)$  w obwodzie z rys. 4.1 ma postać

$$G(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \frac{1}{sC}.$$

Stosując całkę superpozycyjną

$$u(t) = e(t)g(0) + \int_0^t e(t - \tau)g(\tau)d\tau,$$

gdzie

$$g(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, \quad g(0) = 0, \quad g'(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Postępując podobnie jak przy obliczaniu przebiegu prądu  $i(t)$ , otrzymuje się

$$u(t) = \underbrace{|E_m| e^{j(\omega t + \psi)} j\omega G(j\omega)}_{\text{składowa ustalona}} - \underbrace{|E_m| e^{j(\omega t + \psi)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} g(\tau) d\tau}_t}_{\text{składowa przejściowa}}$$

gdzie

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega} \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \frac{1}{j\omega C}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} U(t) &= E_m \frac{1}{j\omega C} \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} e^{j(\omega t + \psi)} - \\ &= |E_m| e^{j(\omega t + \psi)} \frac{1}{RC} \frac{1}{(-j\omega - \frac{1}{RC})} e^{-\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right)\tau} \Big|_t = \\ &= \frac{|E_m|}{\omega C |Z| e^{j\varphi}} e^{j(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2})} - \frac{|E_m|}{\omega C |Z| e^{j\varphi}} e^{j(\psi - \frac{\pi}{2})} e^{-\frac{t}{RC}} = \\ &= \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} e^{j(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2})} - \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} e^{j(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2})} e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned}$$

Stąd przebieg czasowy napięcia  $u(t)$

$$u(t) = \operatorname{Im}\{U(t)\} = -\frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{|E_m|}{\omega C |Z|} \cos(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Po podstawieniu danych:

$$i(t) = (10 \sin(1000t + \frac{\pi}{4}) - 7,07 e^{-1000t}) \text{ mA},$$

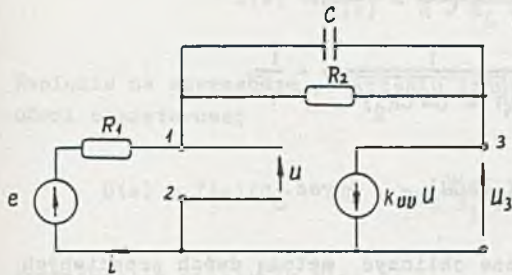
$$u(t) = (-10 \cos(1000t + \frac{\pi}{4}) + 7,07 e^{-1000t}) \text{ V}.$$

Wykresy obu przebiegów przedstawiają rys. 4.1.1 i 4.1.2.

### Zadanie 4.5

Po wrysowaniu obwodu zastępczego trójbiegownika z rys. 4.5.1, obwód : rys. 4.5 przyjmuje postać jak na rys. 4.5.2.

Prąd  $i(t)$  płynący w obwodzie : postaci operatorowej wyraża się wzorem



Rys. 4.5.2

$$I(s) = \frac{E(s) - U(s)}{R_1} =$$

$$= \frac{U(s) - U_3(s)}{R_2 + \frac{1}{sC}}$$

Zależność między napięciem  $u_3(t)$  i  $u(t)$  w postaci operatorowej jest następująca

$$U_3(s) = -k_{UU}U(s),$$

stąd

$$U(s) = -\frac{U_3(s)}{k_{UU}}.$$

Podstawiając  $U(s)$  do wyrażenia na  $I(s)$ , otrzymuje się

$$\frac{E(s) + \frac{U_3(s)}{k_{UU}}}{R_1} = \left( -\frac{U_3(s)}{k_{UU}} - U_3(s) \right) \frac{1 + sCR_2}{R_2}.$$

Dla  $k_{UU} = \infty$

$$\frac{E(s)}{R_1} = -U_3(s) \frac{1 + sCR_2}{R_2},$$

stąd operatorowa funkcja przejścia

$$K_U(s) = \frac{U_3(s)}{E(s)} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + sCR_2}.$$



Symbolicznie:

$$K_U(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j\omega CR_2} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR_2)^2}} e^{j\arctg(-\omega CR_2)}.$$

$$|K_U(j\omega)| = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR_2)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

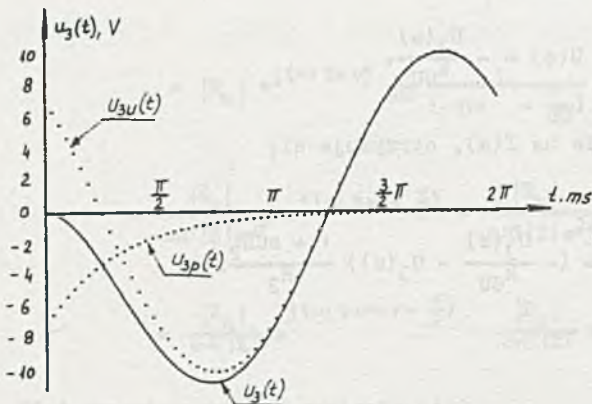
$$\varphi_U(\omega) = \arctg(-\omega CR) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Przebieg czasowy napięcia  $u_3(t)$  można obliczyć metodą dwóch przeciwnych stanów ustalonych (patrz rozwiązanie zadania 4.3).

Składowa ustalona napięcia  $u_{3u}(t)$

$$u_{3u}(t) = |E_m| |K_U(j\omega)| \sin(\omega t + \psi + \varphi_U) = -10 \sin(1000t - \frac{\pi}{4}) \text{ V.}$$

Składowa przejściowa napięcia  $u_{3p}(t)$  wynika z rozładowania pojemności C o napięciu początkowym



Rys. 4.5.3

$$u_C(0) = -u_{3u}(0) =$$

$$= -|E_m| |K_U(j\omega)| \sin(\psi + \varphi_U),$$

czyli

$$u_{3p}(t) =$$

$$= -|E_m| |K_U(j\omega)| \sin(\psi + \varphi_U) e^{-\frac{t}{RC}} =$$

$$= -7,07 e^{-1000t} \text{ V.}$$

Przebieg czasowy napięcia  $u_3(t)$  ma postać

$$u_3(t) = (-10 \sin(1000t - \frac{\pi}{4}) - 7,07 e^{-1000t}) \text{ V.}$$

Wykres przebiegu  $u_3(t)$  przedstawia rys. 4.5.3.

Zadanie 4.6

Operatorowa postać prądu  $i(t)$  jest następująca

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{E(s)}{R + R_L + sL} = E(s) \frac{1}{M(s)}.$$

Napięcie na szeregowym połączeniu indukcyjności  $L$  i rezystancji  $R_L$  w postaci operatorowej

$$U(s) = I(s)(R_L + sL) = \frac{E(s)}{R + R_L + sL} (R_L + sL) = E(s) - I(s)R.$$

Przyrównując mianownik  $M(s)$  do zera, otrzymuje się pierwiastek  $s_1$ :

$$M(s) = R + R_L + sL = 0,$$

$$s_1 = -\frac{R + R_L}{L}.$$

Korzystając z II wzoru Heaviside'a prąd  $i(t)$  w postaci symbolicznej

$$\begin{aligned} I(t) &= |E_m| e^{j\psi} \left[ \frac{1}{M(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{1}{(s_1 - j\omega)M(s_1)} e^{s_1 t} \right] = \\ &= |E_m| e^{j\psi} \left[ \frac{1}{R + R_L + j\omega L} e^{j\omega t} + \frac{1}{(-\frac{R + R_L}{L} - j\omega)L} e^{-\frac{R + R_L}{L} t} \right] = \\ &= |E_m| e^{j\psi} \left[ \frac{1}{|Z| e^{j\varphi}} e^{j\omega t} - \frac{1}{|Z| e^{j\varphi}} e^{-\frac{t}{T}} \right], \end{aligned}$$

gdzie:

$$|Z| = \sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L)^2} = 557 \, \Omega,$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R + R_L} = 0,46 \text{ rad.}$$

Stała czasowa obwodu

$$T = \frac{L}{R + R_L} = 1 \text{ ms.}$$

Stąd

$$i(t) = \operatorname{Im}[I(t)] = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{T}} =$$

$$= (25,4 \sin(500t + \psi - 0,46) - 25,4 \sin(\psi - 0,46) e^{-1000t}) \text{ mA.}$$

Napięcie  $u(t)$  można wyznaczyć z zależności

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R_L i(t).$$

Zatem

$$u(t) = \frac{|E_m| \omega L}{|Z|} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{|E_m| R_L}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi) +$$

$$+ \left[ \frac{|E_m| \omega L}{|Z| T} \sin(\psi - \varphi) - \frac{|E_m| R_L}{|Z|} \sin(\psi - \varphi) \right] e^{-\frac{t}{T}} =$$

$$= \frac{|E_m|}{|Z|} \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \psi - \varphi + \beta) + \frac{|E_m|}{|Z|} R_L \sin(\psi - \varphi) e^{-\frac{t}{T}},$$

gdzie

$$\beta = \arcsin \frac{\omega L}{\sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2}} = 1,19 \text{ rad,}$$

stąd

$$u(t) = (6,8 \sin(500t + \psi - 0,46 + 1,19) + 10,2 \sin(\psi - 0,46) e^{-1000t}) \text{ V.}$$

Składowa przejściowa będzie największa, gdy

$$|\sin(\psi - \varphi)| = 1,$$

stąd

$$\psi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

dla  $k = 0$

$$\psi_1 = 2,03 \text{ rad,}$$



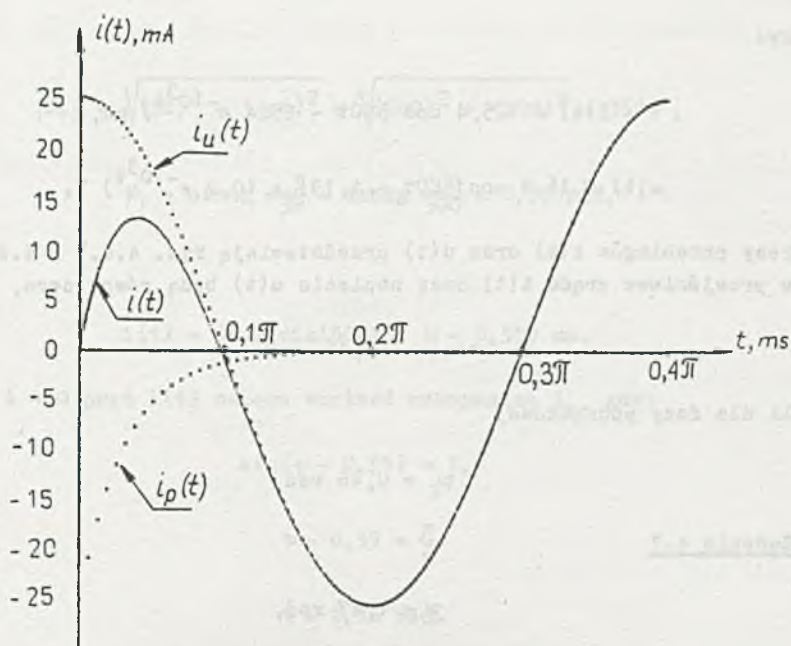


Рис. 4.6.1

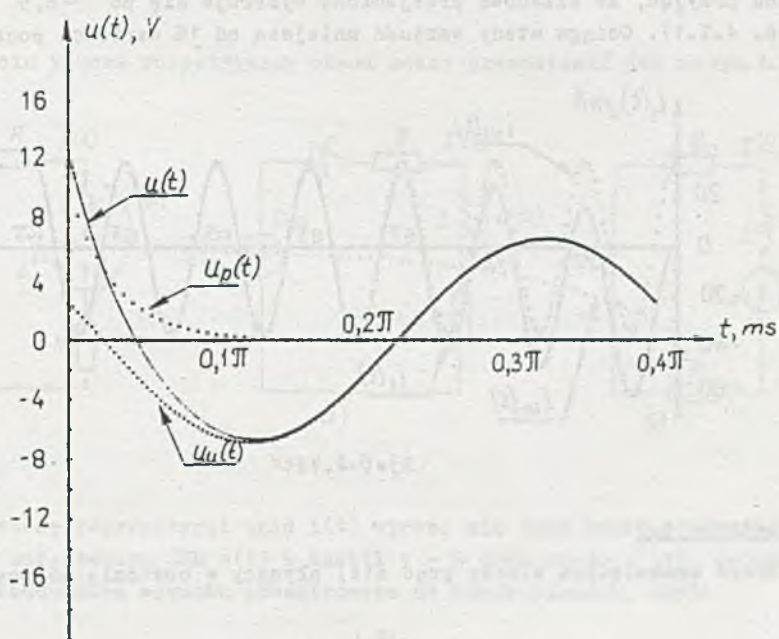


Рис. 4.6.2

wtedy:

$$i(t) = (25,4 \cos 500t - 25,4 e^{-10^3 t}) \text{ mA},$$

$$u(t) = (6,8 \cos(500t + 1,19) + 10,2 e^{-10^3 t}) \text{ V}.$$

Wykresy przebiegów  $i(t)$  oraz  $u(t)$  przedstawiają rys. 4.6.1 i 4.6.2. Składowe przejściowe prądu  $i(t)$  oraz napięcia  $u(t)$  będą równe zero, gdy

$$\sin(\psi - 0,46) = 0,$$

czyli dla fazy początkowej

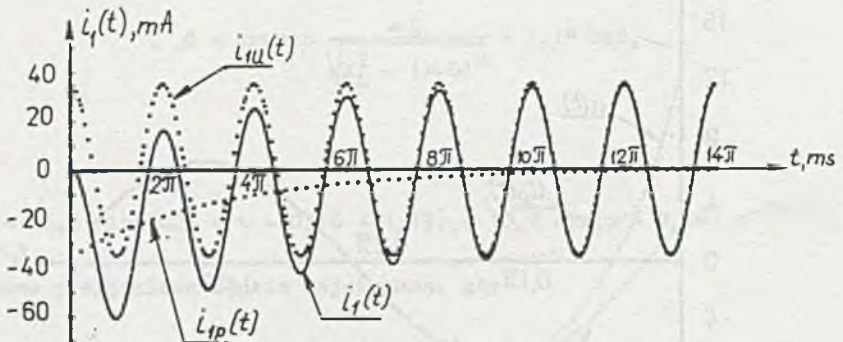
$$\psi_2 = 0,46 \text{ rad.}$$

#### Zadanie 4.7

$$\psi = 1,47 \text{ rad,}$$

$$i_1(t) = (24,9 \sqrt{2} \cos 1000t - 35,2 e^{-100t}) \text{ mA}.$$

Można przyjąć, że składowa przejściowa wyzeruje się po  $\sim 6,5$  okresach rys. 4.7.1). Osiąga wtedy wartość mniejszą od 1% wartości początkowej.



Rys. 4.7.1

#### Zadanie 4.8

Przed zamknięciem klucza prąd  $i(t)$  płynący w obwodzie ma postać

$$t < 0 \quad i(t) = \frac{|E_m|}{|Z_1|} \sin(500t + \psi - \varphi_1),$$

gdzie:

$$|Z_1| = \sqrt{(3R)^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{(300)^2 + (200)^2} = 360 \Omega,$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{L}{3R} = \arctg \frac{200}{300} = 0,59 \text{ rad},$$

zatem

$$i(t) = 39,2 \sin(500t + \psi - 0,59) \text{ mA}.$$

W chwili  $t = 0$  prąd  $i(t)$  osiąga wartość maksymalną  $i_m$ , gdy:

$$\sin(\psi - 0,59) = 1,$$

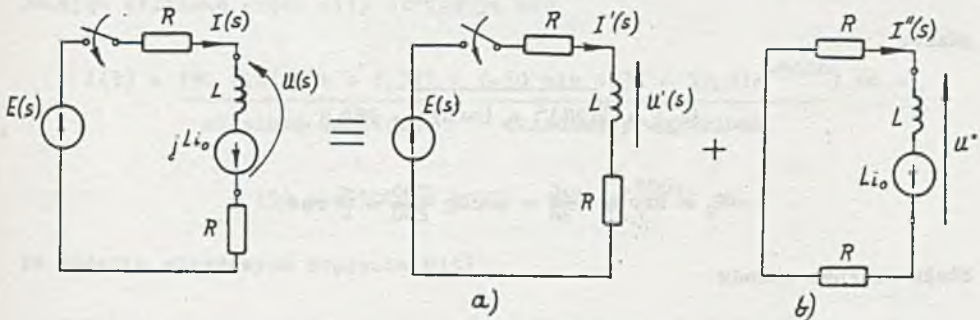
$$\psi - 0,59 = \frac{\pi}{2},$$

$$\psi = 2,16 \text{ rad}.$$

W chwili zamknięcia klucza

$$i(0) = i(0_-) = i_m = 39,2 \text{ mA}.$$

Po zamknięciu klucza rozpatrywany obwód można przedstawić jak na rys. 4.8.1.



Rys. 4.8.1

Stosując zasadę superpozycji prąd  $i(t)$  wyraża się jako suma prądu  $i'(t)$  wywołanego załączeniem SEM  $e(t)$  w chwili  $t = 0$  oraz prądu  $i''(t)$  spowodowanego rozładowaniem warunku początkowego na indukcyjności, czyli

$$i(t) = i'(t) + i''(t),$$



podobnie

$$u(t) = u'(t) + u''(t).$$

$i'(t)$  oraz  $u'(t)$  (rys. 4.8.1 obwód a) można obliczyć, wykorzystując jedną z metod przedstawionych w rozwiązaniach zadań 4.1-4.4.

Operatorowo

$$I(s) = \frac{E(s)}{2R + sL}.$$

Po przejściu na postać czasową

$$i'(t) = \frac{|E_m|}{|Z_2|} \sin(\omega t + \psi - \varphi_2) - \frac{|E_m|}{|Z_2|} \sin(\psi - \varphi_2) e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

Napięcie  $u'(t)$  operatorowo

$$U'(s) = I'(s)sL = \frac{E(s)}{2R + sL} sL.$$

Zatem przebieg czasowy

$$u'(t) = \frac{|E_m| \omega L}{|Z_2|} \cos(\omega t + \psi - \varphi_2) + \frac{|E_m| 2R}{|Z_2|} \sin(\psi - \varphi_2) e^{-\frac{t}{T_2}},$$

gdzie:

$$|Z_2| = \sqrt{(2R)^2 + (\omega L)^2} = 283 \Omega,$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega L}{2R} = \arctg \frac{200}{200} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Stała czasowa obwodu

$$T_1 = \frac{L}{2R} = \frac{0.4}{200} = 2 \text{ ms.}$$

Po podstawieniu danych:

$$i'(t) = (50 \sin(500t + \psi - \frac{\pi}{4}) - 50 \sin(\psi - \frac{\pi}{4}) e^{-500t}) \text{ mA},$$

$$u'(t) = (10 \cos(500t + \psi - \frac{\pi}{4}) + 10 \sin(\psi - \frac{\pi}{4}) e^{-500t}) \text{ V}.$$

$i''(t)$  oraz  $u''(t)$  (rys. 4.8.1 obwód b) da się wyznaczyć w następujący sposób

$$I''(s) = \frac{Li(0)}{2R + sL},$$

stąd

$$i''(t) = i(0) e^{-\frac{t}{T/2}}.$$

Napięcie

$$U''(s) = I''(s)sL - Li(0) = -2RI''(s),$$

zatem

$$u''(t) = -2Ri(0) e^{-\frac{t}{T/2}}.$$

Po podstawieniu danych:

$$i''(t) = 39,2 e^{-500t} \text{ mA},$$

$$u''(t) = -7,84 e^{-500t} \text{ V}.$$

Dodając składowe prądu  $i(t)$  otrzymuje się

$$\begin{aligned} i(t) &= \underbrace{(50 \sin(500t + 1,37))}_{\text{składowa ustalona}} + \underbrace{(-50 \sin 1,37 + 39,2)e^{-500t}}_{\text{składowa przejściowa}} \text{ mA} = \\ &= (50 \sin(500t + 1,37) - 9,8 e^{-500t}) \text{ mA}. \end{aligned}$$

Po dodaniu składowych napięcia  $u(t)$

$$\begin{aligned} u(t) &= \underbrace{(10 \cos(500t + 1,37))}_{\text{składowa ustalona}} + \underbrace{(10 \sin 1,37 - 7,84)e^{-500t}}_{\text{składowa przejściowa}} \text{ V} = \\ &= (10 \cos(500t + 1,37) + 2 e^{-500t}) \text{ V}. \end{aligned}$$

Składowa przejściowa prądu  $i_p(t)$  wyraża się następująco

$$i_p(t) = i'_p(t) + i''_p(t).$$

Korzystając z uprzednio wyprowadzonych zależności

$$i_p(t) = -\frac{|E_m|}{|Z_2|} \sin(\psi - \varphi_2) e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{|E_m|}{|Z_1|} \sin(\psi - \varphi_1) e^{-\frac{t}{T_1}}.$$

W chwili  $t = 0$

$$i_p(0_+) = -\frac{|E_m|}{|Z_2|} \sin(\psi - \varphi_2) + \frac{|E_m|}{|Z_1|} \sin(\psi - \varphi_1).$$

Przyrównując pochodną powyższego wyrażenia względem fazy  $\psi$  do zera, otrzymuje się warunek na fazę  $\psi_1$ , przy której składowa przejściowa jest największa

$$\psi_1 = \arctg\left(\frac{|Z_1| \cos \varphi_2 - |Z_2| \cos \varphi_1}{|Z_2| \sin \varphi_1 - |Z_1| \sin \varphi_2}\right) = -0,2 \text{ rad.}$$

Wówczas

$$i_{p\max}(0_+) = 13,9 \text{ mA.}$$

Przyrównując prąd  $i_p(0_+)$  do zera, otrzymuje się warunek na fazę  $\psi_2$ , przy której składowa przejściowa ma wartość najmniejszą

$$\psi_2 = \arctg\left(\frac{|Z_1| \sin \varphi_2 - |Z_2| \sin \varphi_1}{|Z_1| \cos \varphi_2 - |Z_2| \cos \varphi_1}\right) = 1,37 \text{ rad.}$$

#### Zadanie 4.9

$$i(t) = (6,7 \sqrt{2} \cos(1000t + 0,46) - 0,84 e^{-500t}) \text{ mA,}$$

$$u(t) = (6,7 \sqrt{2} \sin(1000t + 0,46) - 1,67 e^{-500t}) \text{ V.}$$

#### Zadanie 4.10

Przed zmianą pulsacji prąd  $i(t)$  płynący w obwodzie z rys. 4.10 ma postać

$$t < 0 \quad i(t) = \frac{|E_m|}{|Z_1|} \sin(\omega_1 t + \psi - \varphi_1),$$



gdzie:

$$|Z_1| = \sqrt{R^2 + (\omega_1 L)^2} = 640 \Omega,$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega_1 L}{R} = 0,67 \text{ rad},$$

stąd

$$i(t) = 44,2 \sin(2000t + \psi - 0,67) \text{ mA}$$

w chwili  $t = 0$

$$i(0) = i(0-) = i_m = 44,2 \text{ mA},$$

zatem

$$\psi = 0,67 + \frac{\pi}{2} = 2,24 \text{ rad}.$$

Po zmianie pulsacji SEM  $e(t)$  ma postać

$$t \geq 0 \quad e(t) = |E_m| \sin(\omega_2 t + \psi).$$

Zatem po chwili  $t = 0$ , korzystając z zasady superpozycji, prąd  $i(t)$  można obliczyć jako sumę prądu  $i'(t)$  pochodzącego od załączenia w chwili  $t = 0$  sinusoidalnej SEM  $e(t) = |E_m| \sin(\omega_2 t + \psi)$ , oraz prądu  $i''(t)$  od warunku początkowego na indukcyjności.

$$i(t) = i'(t) + i''(t),$$

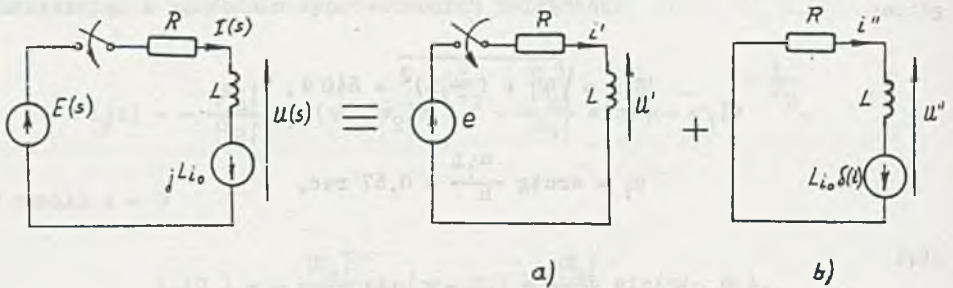
podobnie

$$u(t) = u'(t) + u''(t).$$

Postępując podobnie jak w rozwiązaniu zadania 4.8 otrzymuje się następujące zależności:

Z obwodu na rys. 4.10.1a

$$i(t) = \frac{|E_m|}{Z_2} \sin(\omega_2 t + \psi - \varphi_2) - \frac{|E_m|}{Z_2} \sin(\psi - \varphi_2) e^{-\frac{t}{T/2}},$$



Rys. 4.10.1

$$u(t) = \frac{|E_m| \omega_2 L}{|Z_2|} \cos(\omega_2 t + \psi - \varphi_2) + \frac{|E_m| R}{|Z_2|} \sin(\psi - \varphi_2) e^{-\frac{t}{T_2}},$$

gdzie:

$$|Z_2| = \sqrt{R^2 + (\omega_2 L)^2} = 1115 \Omega,$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega_2 L}{R} = 1,1 \text{ rad},$$

$$T_2 = \frac{L}{R} = 0,4 \text{ ms}.$$

Z obwodu na rys. 4.10.1b

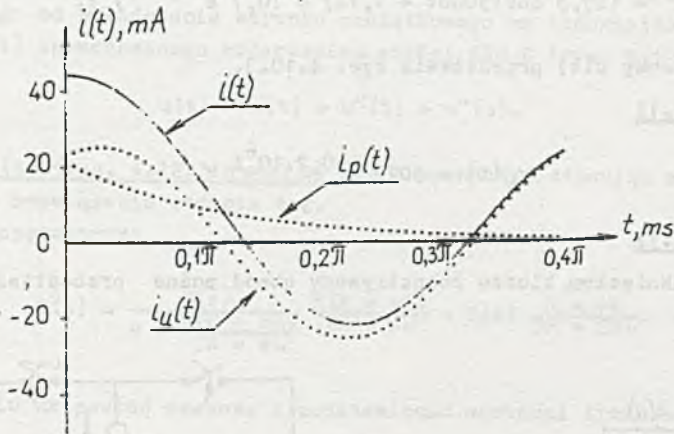
$$i''(t) = \frac{|E_m|}{|Z_1|} \sin(\psi - \varphi_1) e^{-\frac{t}{T_2}} = i(0) e^{-\frac{t}{T_2}},$$

$$u''(t) = -\frac{|E_m| R}{|Z_1|} \sin(\psi - \varphi_1) e^{-\frac{t}{T_2}} = -R i(0) e^{-\frac{t}{T_2}}.$$

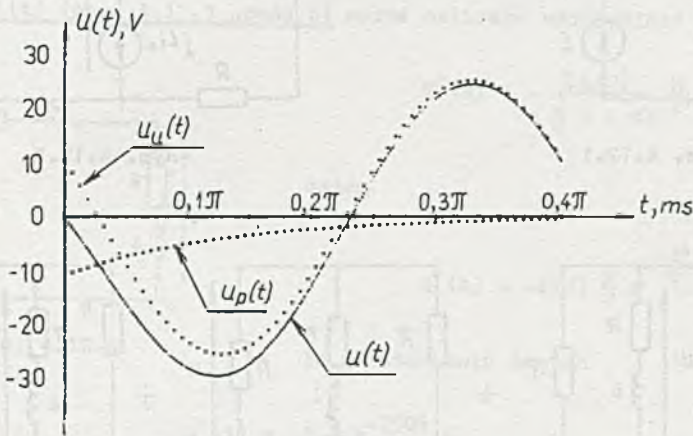
Po zsumowaniu

$$i(t) = \underbrace{\frac{|E_m|}{|Z_2|} \sin(\omega_2 t + \psi - \varphi_2)}_{\text{składowa ustalona}} + \underbrace{\left[ -\frac{|E_m|}{|Z_2|} \sin(\psi - \varphi_2) + i(0) \right] e^{-\frac{t}{T_2}}}_{\text{składowa przejściowa}} =$$

$$= (25,3 \sin(5000t + 1,14) + 21,3 e^{-2500t}) \text{ mA}.$$



Rys. 4.10.2



Rys. 4.10.3

Przebieg czasowy  $i(t)$  przedstawia rys. 4.10.2

$$\begin{aligned}
 u(t) = & \underbrace{\frac{|E_m| \omega_2 L}{|Z_2|} \cos(\omega_2 t + \psi - \varphi_2)}_{\text{składowa ustalona}} + \\
 & + \underbrace{\left[ \frac{|E_m| R}{|Z_2|} \sin(\psi - \varphi_2) - Ri(0) \right] e^{-\frac{t}{\tau_2}}}_{\text{składowa przejściowa}} =
 \end{aligned}$$



$$= (25,3 \cos(5000t + 1,14) - 10,7 e^{-2500t}) \text{ V.}$$

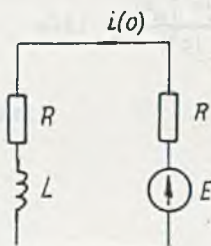
Przebieg czasowy  $u(t)$  przedstawia rys. 4.10.3.

#### Zadanie 4.11

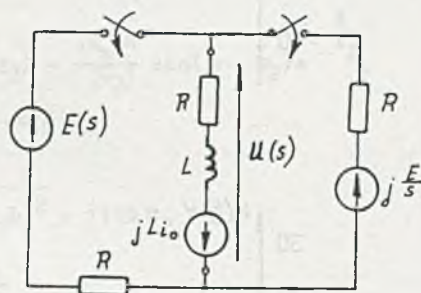
$$u_v(t) = 5070 e^{-0,2 \cdot 10^6 t} \text{ V.}$$

#### Zadanie 4.12

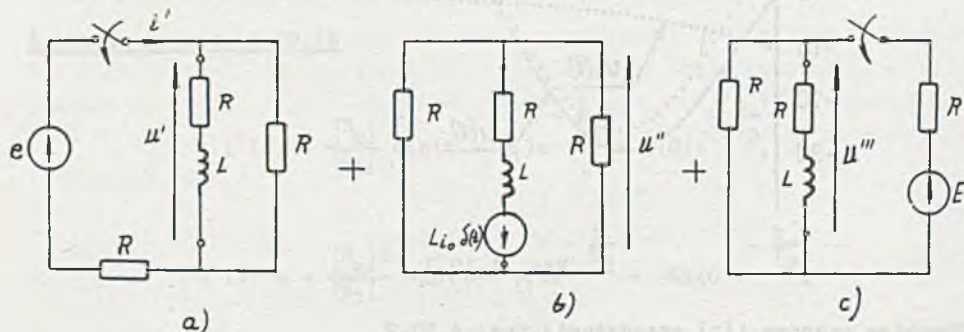
Przed zamknięciem klucza rozpatrywany obwód można przedstawić jak na rys. 4.12.1.



Rys. 4.12.1



Rys. 4.12.2



Rys. 4.12.3

Prąd płynący przez indukcyjność

$$t < 0 \quad i(0) = \frac{E}{2R} = 50 \text{ mA.}$$

Po zamknięciu klucza obwód można przedstawić jak na rys. 4.12.2. Korzystając z zasady superpozycji napięcie  $u(t)$  da się obliczyć jako sumę na-

pięcia  $u'(t)$  wywołanego załączeniem sinusoidalnej SEM  $e(t)$ , napięcia  $u''(t)$  pochodzącego od wyładowania warunku początkowego na indukcyjności oraz napięcia  $u'''(t)$  spowodowanego załączeniem stałej SEM  $E$  (rys. 4.12.3)

$$u(t) = u'(t) + u''(t) + u'''(t).$$

Napięcie  $u(t)$  (rys. 4.12.3 obwód a) można wyznaczyć, stosując metodę przedstawioną w rozwiązaniu zadania 4.2.

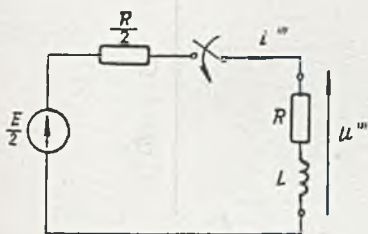
Zależność operatorowa

$$U'(s) = \frac{E(s)}{R + \frac{R(R + sL)}{2R + sL}} \frac{R(R + sL)}{2R + sL} = E(s) \frac{R + sL}{3R + 2sL}.$$

Po przejściu na postać czasową i podstawieniu wartości liczbowych

$$u'(t) = (5,53 \sin(500t + 0,19) + 1,08 e^{-750t}) \text{ V}.$$

Napięcie  $u''(t)$  (rys. 4.12.3 obwód b) można obliczyć następująco



Rys. 4.12.4

$$U''(s) = - \frac{Li(0)}{\frac{1}{2}R + sL} \frac{R}{2},$$

zatem

$$u''(t) = -i(0) \frac{R}{2} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Po podstawieniu danych

$$u''(t) = -2,5 e^{-750t} \text{ V}.$$

Napięcie  $u'''(t)$  można wyznaczyć przekształcając obwód b z rys. 4.12.3 w obwód z rys. 4.12.4 zgodnie z zasadą Thevenina.

Prąd

$$I'''(s) = \frac{\frac{E}{2s}}{\frac{1}{2}R + sL},$$

$$i'''(t) = \frac{\frac{E}{2}}{R} (1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Napięcie

$$u''' = \frac{E}{2} - i''' \frac{R}{2} = \frac{E}{3} + \frac{E}{6} e^{-\frac{t}{T}},$$

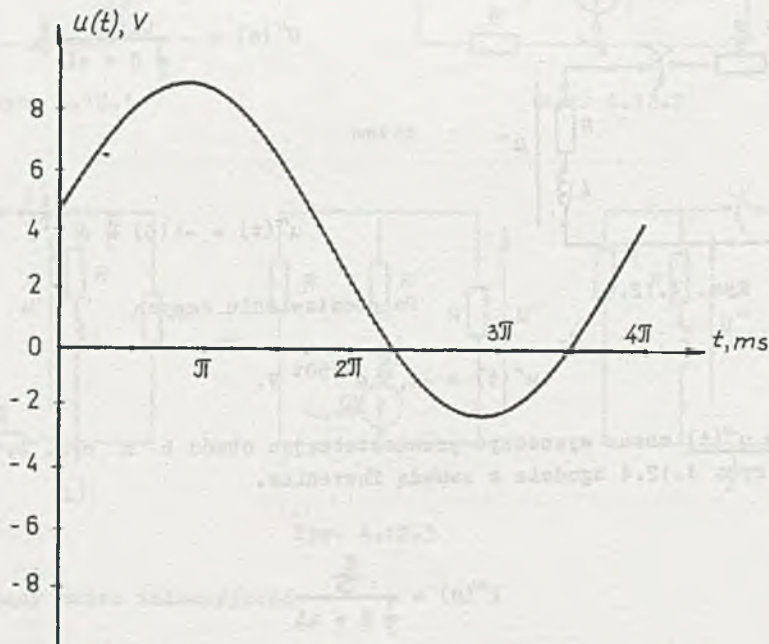
$$T = \frac{2L}{3R},$$

$$u'''(t) = (3,33 + 1,67 e^{-750t}) \text{ V.}$$

Sumując napięcia składowe otrzymuje się

$$\begin{aligned} u(t) &= (5,53 \sin(500t + 0,19) + 1,08 e^{-750t} - 2,5 e^{-750t} + 3,33 + 1,67 e^{-750t}) \text{ V} = \\ &= (3,33 + 5,53 \sin(500t + 0,19) + 0,25 e^{-750t}) \text{ V.} \end{aligned}$$

Przebieg czasowy napięcia  $u(t)$  przedstawia rys. 4.12.5



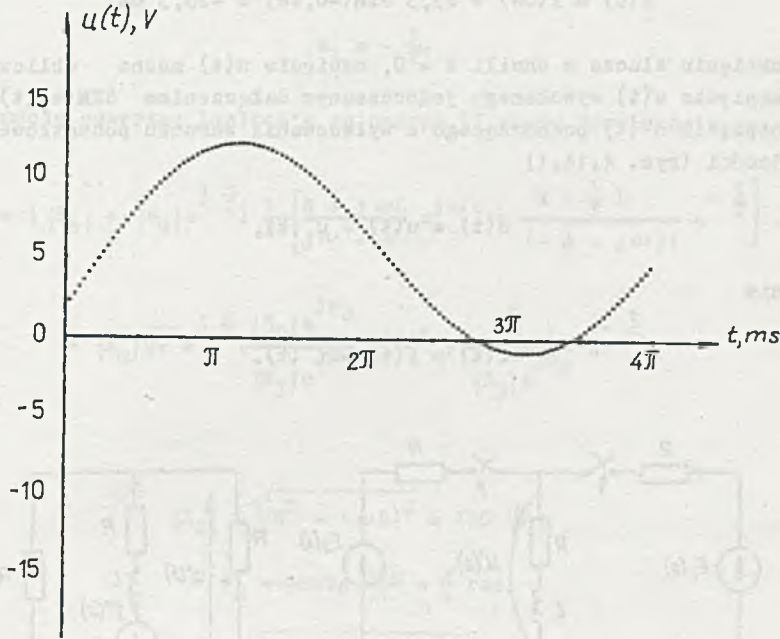
Rys. 4.12.5



Zadanie 4.13

$$u(t) = (5 + 3,92 \sqrt{2} \sin(500t - 0,19) - 2,47 e^{-333t}) \text{ V.}$$

Przebieg napięcia  $u(t)$  przedstawia rys. 4.13.1.



Rys. 4.13.1

Zadanie 4.14

Przed załączeniem SEM  $e_2(t)$  prąd płynący w obwodzie

$$t < 0 \quad i(t) = \left| \frac{R_m}{Z_1} \right| \sin(\omega t - \varphi_1),$$

gdzie:

$$|Z_1| = \sqrt{(2R)^2 + (\omega L)^2} = 100 \sqrt{5} \Omega,$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega L}{2R} = 0,46 \text{ rad.}$$

zatem

$$i(t) = 63,3 \sin(1000t - 0,46) \text{ mA.}$$

W chwili  $t = 0$

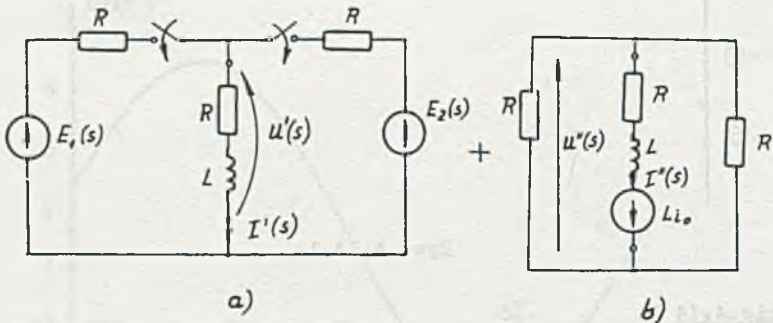
$$i(0) = i(0-) = 63,3 \sin(-0,46) = -28,3 \text{ mA.}$$

Po zamknięciu klucza w chwili  $t = 0$ , napięcie  $u(t)$  można obliczyć jako sumę napięcia  $u'(t)$  wywołanego jednoczesnym załączeniem SEM  $e_1(t)$  i  $e_2(t)$  oraz napięcia  $u''(t)$  pochodzącego z wyładowania warunku początkowego na indukcyjności (rys. 4.14.1)

$$u(t) = u'(t) + u''(t),$$

podobnie

$$i(t) = i'(t) + i''(t).$$



Rys. 4.14.1

Napięcie  $u'(t)$  (rys. 4.14.1 obwód a) można wyznaczyć, stosując metodę potencjałów węzłowych

$$U'(s) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R + sL} \right) = \frac{E_1(s)}{R} + \frac{E_2(s)}{R},$$

stąd

$$U'(s) = [E_1(s) + E_2(2)] \frac{R + sL}{s + \frac{1}{T}},$$

gdzie

$$T = \frac{2L}{3R} = 0,67 \text{ ms.}$$

Przyrównując mianownik do zera można obliczyć pierwiastek

$$s_1 = -\frac{1}{T}.$$

Transformacja odwrotna Laplace'a za pomocą II wzoru Heaviside'a ma postać

$$\begin{aligned} U'(t) &= (|E_m| + |E_m| e^{j\frac{\pi}{2}}) \frac{1}{2L} \left[ \frac{R + j\omega L}{j\omega + \frac{1}{T}} e^{j\omega t} + \frac{R - \frac{1}{T}L}{(-\frac{1}{T} - j\omega)} e^{-\frac{t}{T}} \right] = \\ &= |E_m| \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \left( \frac{|Z_2| e^{j\varphi_2}}{|Z_3| e^{j\varphi_3}} e^{j\omega t} + \frac{\frac{R}{2}}{|Z_3| e^{j\varphi_3}} e^{-\frac{t}{T}} \right), \end{aligned}$$

gdzie:

$$|Z_2| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 100 \sqrt{2} \Omega,$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega L}{R} = \frac{\pi}{4} \text{ rad},$$

$$|Z_3| = \sqrt{(3R)^2 + (2\omega L)^2} = 361 \Omega,$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{2\omega L}{3R} = 0,59 \text{ rad.}$$

Zatem

$$u'(t) = (7,84 \sin(1000t + 0,98) + 0,54 e^{-1500t}) \text{ V.}$$

Prąd

$$I'(s) = \frac{U'(s)}{R + sL} = [E_1(s) + E_2(s)] \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \frac{1}{2L},$$

stąd

$$i'(t) = (|E_m| + |E_m| e^{j\frac{\pi}{2}}) \frac{1}{2L} \left[ \frac{1}{j\omega + \frac{1}{T}} e^{j\omega t} + \frac{1}{(-\frac{1}{T} - j\omega)} e^{-\frac{t}{T}} \right],$$



zatem

$$i'(t) = (55,3 \sin(1000t + 0,19) - 10,9 e^{-1500t}) \text{ mA.}$$

Prąd  $i''(t)$  oraz napięcie  $u''(t)$  (rys. 4.14.1 obwód b) można obliczyć w następujący sposób:

$$I''(s) = \frac{Li(0)}{\frac{1}{2}R + sL},$$

$$i''(t) = i(0)e^{-\frac{t}{T}} = -28,3 e^{-1500t} \text{ mA.}$$

Napięcie:

$$U''(s) = -I''(s) \frac{R}{2},$$

$$u''(t) = -i(0) \frac{R}{2} e^{-\frac{t}{T}} = 1,42 e^{-1500t} \text{ V.}$$

Po zsumowaniu składowych:

$$u(t) = (7,84 \sin(1000t + 0,98) + 1,96 e^{-1500t}) \text{ V,}$$

$$i(t) = (55,3 \sin(1000t + 0,19) - 39,2 e^{-1500t}) \text{ mA.}$$

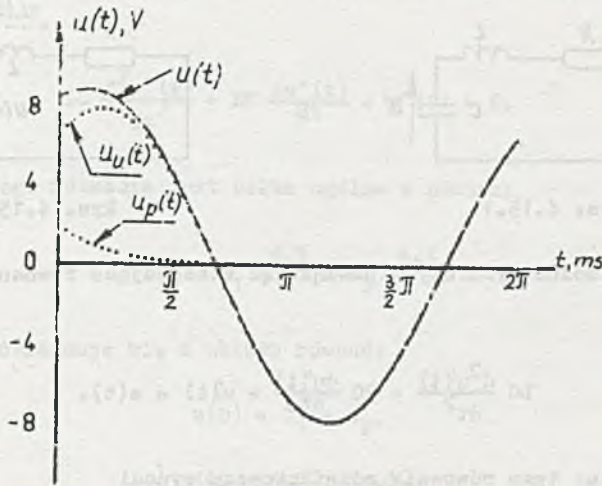
Przebiegi napięcia  $u(t)$  i prądu  $i(t)$  przedstawiają rys. 4.14.2 i 4.14.3. Można sprawdzić, że

$$i(0-) = i(0+) = -28,3 \text{ mA,}$$

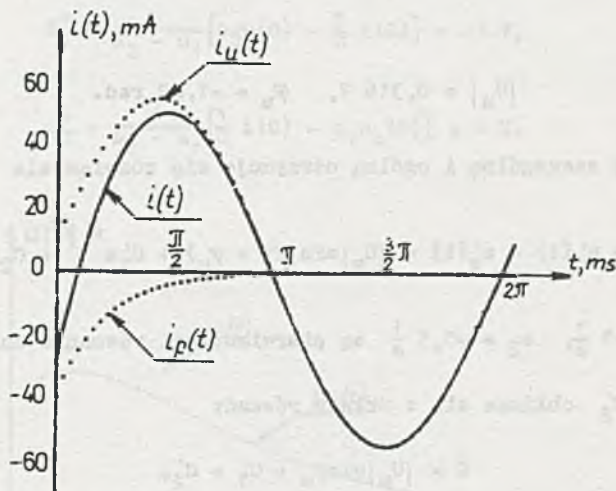
natomiast:

$$u(0-) = 2,83 \text{ V,}$$

$$u(0+) = 8,47 \text{ V.}$$



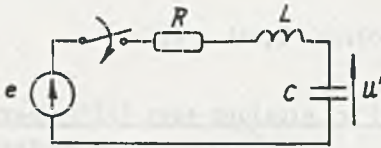
Rys. 4.14.2



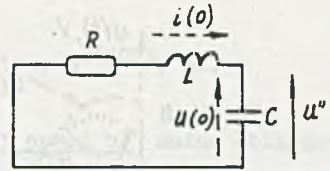
Rys. 4.14.3

#### Zadanie 4.15

Napięcie  $u(t)$  jest sumą napięć  $u'(t)$  i  $u''(t)$ . Napięcie  $u'(t)$  powstaje w wyniku załączenia w chwili  $t = 0$  SEM  $e(t) = |E_m| \sin 2t$  jak na rys. 4.15.1. Napięcie  $u''(t)$  wynika z rozładowania się prądu  $i(0)$  i napięcia  $u_c(0)$  przy wymuszeniu równym zero jak na rys. 4.15.2.



Rys. 4.15.1



Rys. 4.15.2

Napięcie  $u'(t)$  można wyznaczyć rozwiązując następujące równanie różniczkowe

$$LC \frac{d^2 u'(t)}{dt^2} + RC \frac{du'(t)}{dt} + u'(t) = e(t).$$

Całka szczególna tego równania różniczkowego wynosi

$$u'_u(t) = |U_m| \sin(2t + \varphi_u),$$

gdzie:

$$|U_m| = 0,316 \text{ V}, \quad \varphi_u = -1,89 \text{ rad.}$$

Dodając całkę szczególną i ogólną otrzymuje się rozwiązanie

$$u(t) = u'_u(t) + u_p(t) = |U_m| \sin(2t + \varphi_u) + C'_1 e^{s_1 t} + C'_2 e^{s_2 t},$$

gdzie  $s_1 = -1 \frac{1}{s}$ ,  $s_2 = -0,5 \frac{1}{s}$  są pierwiastkami równania charakterystycznego.

Stałe  $C'_1$  i  $C'_2$  oblicza się z układu równań:

$$0 = |U_m| \sin \varphi_u + C'_1 + C'_2,$$

$$0 = 2 |U_m| \cos \varphi_u + s_1 C'_1 + s_2 C'_2.$$

Zatem:

$$C'_1 = \frac{|U_m|}{s_2 - s_1} (2 \cos \varphi_u - s_2 \sin \varphi_u) = -0,697 \text{ V},$$

$$C'_2 = \frac{|U_m|}{s_2 - s_1} (s_1 \sin \varphi_u - 2 \cos \varphi_u) = 0,997 \text{ V}.$$



Napięcie  $u''(t)$  da się wyznaczyć z następującego równania opisującego obwód z rys. 4.15.2

$$LC \frac{d^2 u''(t)}{dt^2} + RC \frac{du''(t)}{dt} + u''(t) = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest całka ogólna w postaci

$$u''(t) = C_1'' e^{s_1 t} + C_2'' e^{s_2 t}.$$

Stałe  $C_1''$  i  $C_2''$  otrzymuje się z układu równań:

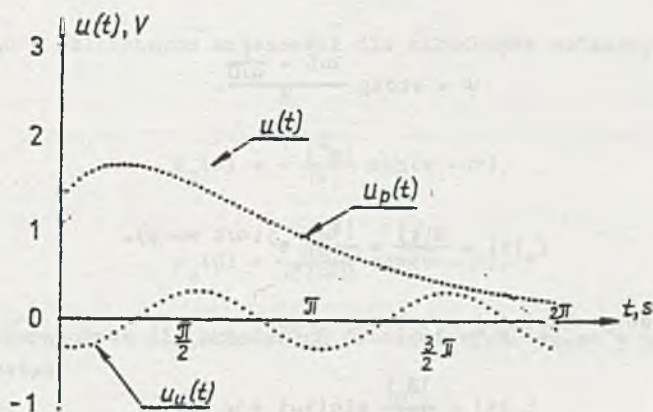
$$u(0) = C_1'' + C_2'',$$

$$\frac{1}{C} i(0) = s_1 C_1'' + s_2 C_2'',$$

stąd:

$$C_1'' = \frac{1}{s_2 - s_1} [s_2 u(0) - \frac{1}{C} i(0)] = -3 \text{ V},$$

$$C_2'' = \frac{1}{s_2 - s_1} [\frac{1}{C} i(0) - s_1 u(0)] = 4 \text{ V}.$$



Rys. 4.15.3

Po dodaniu  $u'(t)$  i  $u''(t)$

$$\begin{aligned} u(t) &= |U_m| \sin(2t + \varphi_u) + (C'_1 + C''_1) e^{s_1 t} + (C'_2 + C''_2) e^{s_2 t} = \\ &= (0,316 \sin(2t - 1,89) - 3,697 e^{-t} + 4,997 e^{-\frac{t}{2}}) \text{ V.} \end{aligned}$$

Przebieg napięcia  $u(t)$  przedstawia rys. 4.15.3.

#### Zadanie 4.16

Korzystając z metody dwóch przeciwnych stanów ustalonych postępujemy podobnie jak w rozwiązaniu zadania 4.3.

Składową ustaloną prądu  $i_u(t)$  można obliczyć metodą symboliczną

$$E(t) = |E_m| e^{j\psi} e^{j\omega t}.$$

Impedancja obwodu z rys. 4.17

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = |Z| e^{j\varphi},$$

gdzie:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Stąd

$$I_u(t) = \frac{E(t)}{Z} = \frac{|E_m|}{|Z|} e^{j(\omega t + \psi - \varphi)}.$$

Przebieg czasowy składowej ustalonej prądu

$$i_u(t) = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Składową ustaloną napięcia  $u_u(t)$  można wyznaczyć podobnie

$$U_u(t) = I_u(t) \frac{1}{j\omega C} = \frac{|E_m|}{|Z|\omega C} e^{j(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2})}.$$

W postaci czasowej

$$u_u(t) = - \frac{|E_m|}{|Z|\omega C} \cos(\omega t + \psi - \varphi).$$

Składową przejściową prądu  $i_p(t)$  stanowi prąd rozładowania indukcyjności o prądzie początkowym  $i(0)$  oraz prąd rozładowania pojemności o napięciu początkowym  $u(0)$ .

Dla  $t \geq 0$

$$i(t) = i_u(t) + i_p(t) \quad u(t) = u_u(t) + u_p(t).$$

Dla  $t = 0$

$$i(0) = i_u(0) + i_p(0) \quad u(0) = u_u(0) + u_p(0).$$

Stąd

$$i_p(0) = i(0) - i_u(0) \quad u_p(0) = u(0) - u_u(0).$$

Przy warunkach początkowych  $i(0) = 0$  i  $u(0) = 0$  jak dla obwodu na rys. 4.17 otrzymuje się

$$i_p(0) = -i_u(0) \quad u_p(0) = -u_u(0).$$

Korzystając z obliczonych zależności dla składowych ustalonych  $i_u(t)$  i  $u_u(t)$ :

$$i_p(0) = - \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\psi - \varphi),$$

$$u_p(0) = \frac{|E_m|}{|Z|\omega C} \cos(\psi - \varphi).$$

Równanie operatorowe dla składowych przejściowych napięć w obwodzie z rys. 4.15 ma postać

$$RI_p(s) + sLI_p(s) - Li_p(0) + \frac{1}{sC} I_p(s) + \frac{u_p(0)}{s} = 0.$$



Stąd składowa przejściowa prądu  $I_p(s)$

$$I_p(s) = \frac{s i_p(0) - \frac{1}{L} u_p(0)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{s i_p(0) - \frac{1}{L} u_p(0)}{(s - s_1)(s - s_2)},$$

$s_1$  i  $s_2$  są miejscami zerowymi mianownika i wynoszą

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Należy zbadać wartość wyrażenia podpierwiastkowego.

Jeżeli  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , to wyrażenie pod pierwiastkiem przyjmuje wartość ujemną i wtedy

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0,$$

gdzie:

$\alpha$  - stała tłumienia,

$\omega_0$  - pulsacja drgań swobodnych obwodu RLC.

Nierówność  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  jest spełniona dla  $R = 320\Omega$  i dla tej wartości:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 4 \cdot 10^3 \frac{1}{s},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = 3 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{s}.$$

W tym przypadku, korzystając z I wzoru Heaviside'a do przekształcenia postaci operatorowej  $I_p(s)$  w postać czasową  $i_p(t)$ , otrzymuje się

$$i_p(t) = -i_p(0)e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t \right) - \frac{u_p(0)}{\omega_0 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Zatem, gdy  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , przebieg czasowy składowej przejściowej prądu  $i_p(t)$  jest oscylacyjny tłumiony i po podstawieniu zależności na  $i_p(0)$  i  $u_p(0)$

$$i_p(t) = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\psi - \varphi) e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t \right) - \frac{|E_m|}{|Z| \omega C} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Stąd prąd  $i(t)$

$$i(t) = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi) +$$

$$+ \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\psi - \varphi) e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t \right) -$$

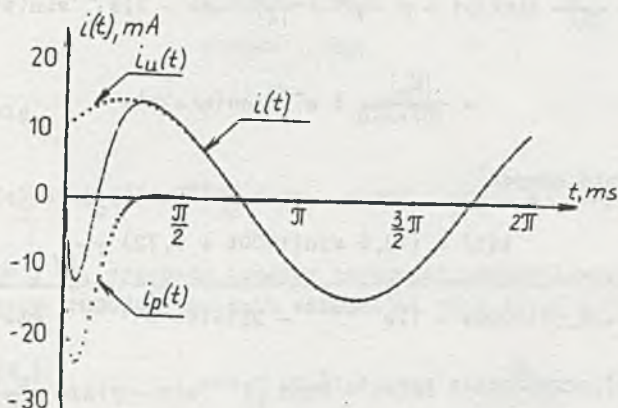
$$- \frac{|E_m|}{|Z| \omega_0 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Po podstawieniu wartości danych

$$i(t) = 14 \sin(1000t + 0,79) + 9,9 e^{-4000t} (4 \sin 3000t - \cos 3000t) -$$

$$- 116,6 e^{-4000t} \sin 3000t \text{ mA.}$$

Przebieg  $i(t)$  przedstawia rys. 4.16.1.



Rys. 4.16.1

Jeżeli  $R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ , to

$$s_{1,2} = -\alpha.$$

Warunek ten jest spełniony dla  $R = 400 \Omega$ , wtedy:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 5 \cdot 10^3,$$

$$\omega_0 = 0.$$

Stosując twierdzenie de l'Hospitala do wyprowadzonej w poprzednim przypadku zależności  $i_p(t)$ , dla  $\omega_0 = 0$ , otrzymujemy

$$i_p(t) = -i_p(0)(\alpha t - 1)e^{-\alpha t} - \frac{u_p(0)}{L} t e^{-\alpha t}.$$

Zatem, gdy  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , przebieg czasowy składowej przejściowej prądu  $i_p(t)$  jest aperiodyczny krytyczny i po podstawieniu zależności na  $i_p(0)$  i  $u_p(0)$

$$i_p(t) = \frac{|E_m|}{|Z|} (\alpha t - 1)e^{-\alpha t} \cdot \sin(\psi - \varphi) - \frac{|E_m|}{|Z|\omega CL} t e^{-\alpha t} \cos(\psi - \varphi).$$

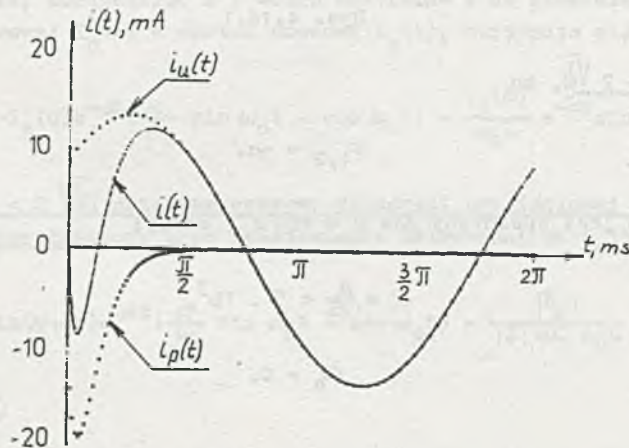
Stąd prąd  $i(t)$

$$i(t) = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{|E_m|}{|Z|} (\alpha t - 1)e^{-\alpha t} \sin(\psi - \varphi) - \frac{|E_m|}{|Z|\omega CL} t e^{-\alpha t} \cos(\psi - \varphi).$$

Po podstawieniu danych

$$i(t) = (13,6 \sin(1000t + 0,72) + 8,97(5000t - 1)e^{-5000t} - 255614t e^{-5000t}) \text{ mA}.$$

Przebieg  $i(t)$  przedstawia rys. 4.16.2.



Rys. 4.16.2



Jeżeli  $R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ , to

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \beta.$$

Nierówność  $R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$  jest spełniona dla  $R = 480 \Omega$  i dla tej wartości:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 6 \cdot 10^3 \frac{1}{s},$$

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{LC}} = 3317 \frac{\text{rad}}{s}.$$

W tym przypadku korzystając z uprzednio wyprowadzonych wzorów należy podstawić  $\omega_0 = j\beta$ , a ponieważ:

$$\sin j\beta t = j \operatorname{sh} \beta t,$$

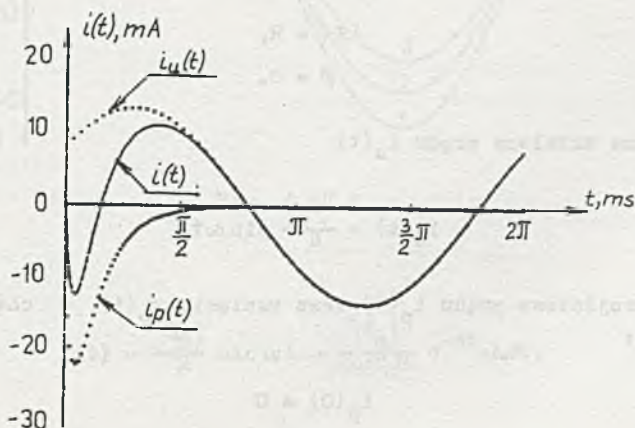
$$\cos j\beta t = \operatorname{ch} \beta t,$$

to otrzymuje się

$$i_p(t) = -i_p(0) e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta t - \operatorname{ch} \beta t \right) - \frac{u_p(0)}{L} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t.$$

Zatem, gdy  $R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$ , przebieg czasowy składowej przejściowej prądu  $i_p(t)$  jest aperiodyczny i po podstawieniu zależności na  $i_p(0)$  i  $u_p(0)$

$$i_p(t) = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\psi - \varphi) e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta t - \operatorname{ch} \beta t \right) - \frac{|E_m|}{|Z| \omega C \beta L} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t.$$



Rys. 4.16.3

Stąd prąd  $i(t)$

$$i(t) = \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \\ + \frac{|E_m|}{|Z|} \sin(\psi - \varphi) e^{-\alpha t} \left( \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sh} \beta t - \operatorname{ch} \beta t \right) - \frac{|E_m|}{|Z| \omega C \beta L} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t.$$

Po podstawieniu danych

$$i(t) = (13,2 \sin(1000t + 0,64) + \\ + 7,87 e^{-6000t} (1,8 \operatorname{sh} 3317t - \operatorname{ch} 3317t) - 99,3 e^{-6000t} \operatorname{sh} 3317t) \text{ mA}.$$

przebieg  $i(t)$  przedstawia rys. 4.16.3.

#### Zadanie 4.17

Przy obliczaniu prądu  $i(t)$  można skorzystać z wyprowadzeń zawartych w rozwiązaniu zadania 4.16. Pulsacja  $\omega$  jest pulsacją rezonansową, gdy

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0,$$

stąd

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

zatem impedancja obwodu z rys. 4.15

$$|Z| = R, \\ \varphi = 0.$$

stąd składowa ustalona prądu  $i_u(t)$

$$i_u(t) = \frac{|E_m|}{R} \sin \omega t.$$

składowe przejściowe prądu  $i_p(t)$  oraz napięcia  $u_p(t)$  w chwili  $t = 0$  są następujące:

$$i_p(0) = 0$$

$$u_p(0) = \frac{|E_m|}{R \omega C}.$$

Dla  $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$i(t) = \frac{|E_m|}{R} \sin \omega t - \frac{|E_m|}{R\omega C \omega_0 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Po podstawieniu  $R = 320 \Omega$  i pozostałych danych

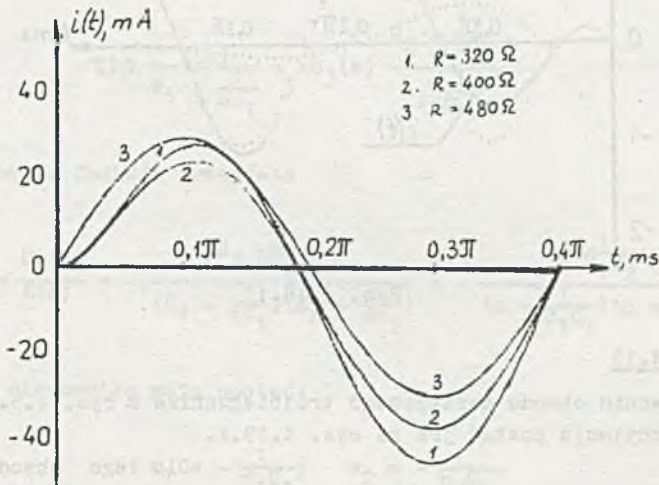
$$i(t) = (44,19 \sin 5000t - 73,66 e^{-4000t} \sin 3000t) \text{ mA}.$$

Dla  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$i(t) = \frac{|E_m|}{R} \sin \omega t - \frac{|E_m|}{R\omega C L} t e^{-\alpha t}.$$

Po podstawieniu  $R = 400 \Omega$  i pozostałych danych

$$i(t) = (35,55 \sin 5000t - 176750t e^{-5000t}) \text{ mA}.$$



Rys. 4.17.1

Dla  $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$i(t) = \frac{|E_m|}{R} \sin \omega t - \frac{|E_m|}{R\omega C \beta L} e^{-\alpha t} \text{sh} \beta t.$$



Po podstawieniu  $R = 480 \Omega$  i pozostałych wartości liczbowych

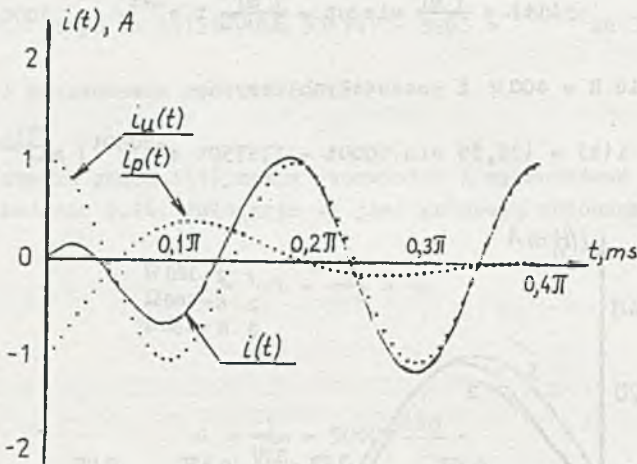
$$i(t) = 29,46 \sin 5000t - 44,4 e^{-6000t} \text{ sh } 3317t \text{ mA.}$$

Przebiegi czasowe prądu  $i(t)$  przedstawia rys. 4.17.1.

#### Zadanie 4.18

$$i(t) = (0,1 \sin(10^4 t + \frac{\pi}{2}) - 0,107 e^{-2,5 \cdot 10^3 t} \cos(6,6 \cdot 10^3 t + 0,36)) \text{ A.}$$

Przebieg prądu  $i(t)$  przedstawia rys. 4.18.1.

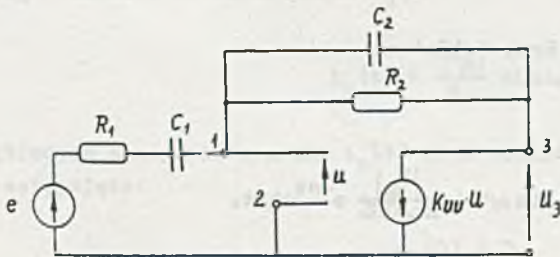


Rys. 4.18.1

#### Zadanie 4.19

Po wrysowaniu obwodu zastępczego trójbiegunnika z rys. 4.5.1, obwód z rys. 4.19 przyjmuje postać jak na rys. 4.19.1.

Dla tego obwodu można napisać następującą zależność operatorową



Rys. 4.19.1

$$\frac{E(s) - U(s)}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{U(s) - U_3(s)}{\frac{R_2 \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}}$$

Związek między napięciem  $U_3(s)$  i  $U(s)$  wyraża się wzorem

$$U_3(s) = -k_{UU}U(s),$$

stąd

$$U(s) = -\frac{U_3(s)}{k_{UU}}.$$

Z tych zależności otrzymuje się

$$\frac{E(s) + \frac{U_3(s)}{k_{UU}}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \left(-\frac{U_3(s)}{k_{UU}} - U_3(s)\right) \frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}.$$

Dla  $k_{UU} = \infty$

$$\frac{E(s)}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = -U_3(s) \frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}.$$

Stąd operatorowa funkcja przejścia

$$K_U(s) = \frac{U_3(s)}{E(s)} = -\frac{R_2 \frac{1}{sC_2}}{(R_1 + \frac{1}{sC_1})(R_2 + \frac{1}{sC_2})} = -\frac{s \frac{1}{R_1 C_2}}{(s + \frac{1}{R_1 C_1})(s + \frac{1}{R_2 C_2})}.$$

Pierwiastki mianownika mają postać:

$$s_1 = -\frac{1}{R_1 C_1}; \quad s_2 = -\frac{1}{R_2 C_2}.$$

Do obliczenia postaci czasowej napięcia  $u_3(t)$  można zastosować II wz. Heaviside'a

$$U_3(t) = |E_m| e^{j\psi} \left[ \frac{L(j\omega)}{M(j\omega)} e^{j\omega t} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{(s_k - j\omega) M'(s_k)} e^{s_k t} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= |E_m| \left[ \frac{-j\omega \frac{1}{R_1 C_2}}{(j\omega + \frac{1}{R_1 C_1})(j\omega + \frac{1}{R_2 C_2})} e^{j\omega t} + \right. \\
 &\quad + \frac{\frac{1}{R_1 C_1} \frac{1}{R_1 C_2}}{(-\frac{1}{R_1 C_1} - j\omega)(-\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2})} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} + \\
 &\quad \left. + \frac{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_2} \frac{1}{R_1 C_2}}{(-\frac{1}{R_2 C_2} - j\omega)(-\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1})} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} \right] = \\
 &= |E_m| \left[ \frac{-R_2 \frac{1}{j\omega C_2}}{(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1})(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2})} e^{j\omega t} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R_2 C_1}{R_1 C_1 - R_2 C_2} \left( -\frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} + \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} \right) \right] = \\
 &= |E_m| \left[ \frac{\frac{R_2}{\omega C_2} e^{j\frac{\pi}{2}}}{|Z_1| e^{j\varphi_1} |Z_2| e^{j\varphi_2}} e^{j\omega t} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R_2 C_1}{R_1 C_1 - R_2 C_2} \left( \frac{\frac{1}{\omega C_1} e^{j\frac{\pi}{2}}}{|Z_1| e^{j\varphi_1}} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} + \frac{\frac{1}{\omega C_2} e^{-j\frac{\pi}{2}}}{|Z_2| e^{j\varphi_2}} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} \right) \right] = \\
 &= |E_m| \left[ \frac{R_2}{\omega C_2} \frac{1}{|Z_1| |Z_2|} e^{j(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi_2)} e^{j\omega t} + \right. \\
 &\quad + \frac{R_2 C_1}{R_1 C_1 - R_2 C_2} \left( \frac{1}{\omega C_1 |Z_1|} e^{j(\frac{\pi}{2} - \varphi_1)} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\omega C_2 |Z_2|} e^{j(-\frac{\pi}{2} - \varphi_2)} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} \right) \right],
 \end{aligned}$$



gdzie:

$$|Z_1| = \sqrt{R_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1}\right)^2} = 10^3 \sqrt{5} \Omega ,$$

$$\varphi_1 = \arctg\left(-\frac{1}{R_1 \omega C_1}\right) = -0,46 \text{ rad},$$

$$|Z_2| = \sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C_2}\right)^2} = 10^3 \sqrt{5} \Omega ,$$

$$\varphi_2 = \arctg\left(-\frac{1}{R_2 \omega C_2}\right) = -1,1 \text{ rad}.$$

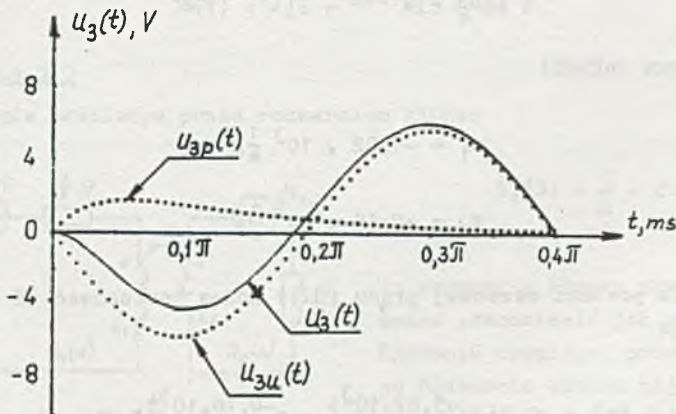
Zatem przebieg czasowy napięcia  $u_3(t)$  ma postać

$$u_3(t) = \operatorname{Im}\{U_3(t)\} = |E_M| \left[ \frac{R_2}{\omega C_2} \frac{1}{|Z_1||Z_2|} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \varphi_2) + \right. \\ \left. + \frac{R_2 C_1}{R_1 C_1 - R_2 C_2} \left( \frac{1}{\omega C_1 |Z_1|} \cos \varphi_1 e^{-\frac{t}{R_1 C_1}} - \frac{1}{\omega C_2 |Z_2|} \cos \varphi_2 e^{-\frac{t}{R_2 C_2}} \right) \right].$$

Po podstawieniu danych

$$u_3(t) = (5,66 \sin(5000t + \pi) + 3,77 e^{-2500t} - 3,77 e^{-10000t}) \text{ V}.$$

Przebieg napięcia  $u_3(t)$  przedstawia rys. 4.19.2.



Rys. 4.19.2

## R o z d z i a ł   5

### 5. ZADANIA RÓŻNE

#### Zadanie 5.1

Stosując drugie prawo Kirchhoffa dla obwodów sprężonych z rys. 5.1 otrzymuje się:

$$\frac{E}{s} = I_1(s)R_1 + I_1(s)sL_1 - I_2(s)sM,$$

$$I_2(s)R_2 + I_2(s)sL_2 - I_1(s)sM = 0.$$

Po przekształceniu

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{\frac{E}{s}}{\frac{s^2(L_1L_2 - M^2) + s(L_2R_1 + L_1R_2) + R_1R_2}{sM}} = \\ &= \frac{E}{s} \frac{M}{L_1L_2 - M^2} \frac{1}{s^2 + s \frac{L_2R_1 + L_1R_2}{L_1L_2 - M^2} + \frac{R_1R_2}{L_1L_2 - M^2}} = \\ &= \frac{E}{s} \frac{M}{L_1L_2 - M^2} \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu danych:

$$s_1 = -5,82 \cdot 10^3 \frac{1}{s},$$

$$s_2 = -0,18 \cdot 10^3 \frac{1}{s}.$$

Dla otrzymania postaci czasowej prądu  $i_2(t)$  można zastosować I wzór Heaviside'a, stąd

$$i_2(t) = -1,76(e^{-5,82 \cdot 10^3 t} - e^{-0,18 \cdot 10^3 t}) \text{ mA}.$$

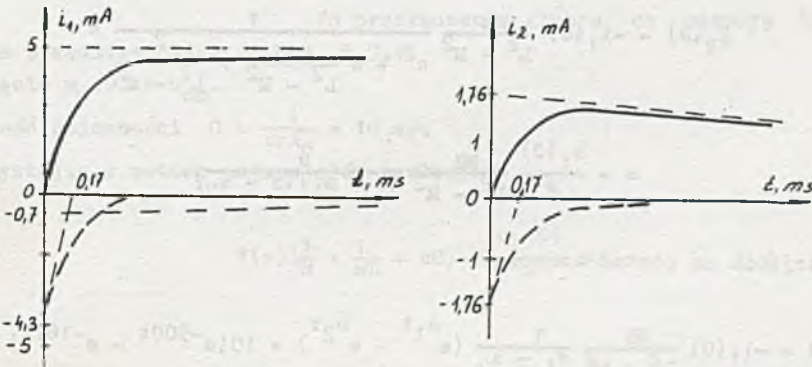
Prąd  $I_1(s)$  można obliczyć w następujący sposób

$$I_1(s) = I_2(s) \frac{R_2 + sL_2}{sM} = \frac{R}{s} \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \frac{sL_2 + R_2}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Po zastosowaniu I wzoru Heaviside'a

$$i_1(t) = (5 - 4,3 e^{-5,82 \cdot 10^3 t} - 0,7 e^{-0,18 \cdot 10^3 t}) \text{ mA.}$$

Przebiegi czasowe prądów  $i_1(t)$  oraz  $i_2(t)$  przedstawia rys. 5.1.1.



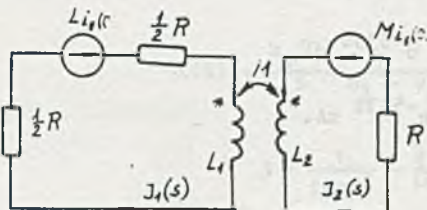
Rys. 5.1.1

### Zadanie 5.2

$$u(t) = 4,6 e^{-50t} \sin 213t \text{ V.}$$

### Zadanie 5.3

W stanie ustalonym przed rozwarciem klucza



Rys. 5.3.1

$$i_1(0) = \frac{R}{L} = 20 \text{ mA.}$$

Po rozwarciu klucza obwody sprzężone można przedstawić jak na rys. 5.3.1. Równania drugiego prawa Kirchhoffa po rozwarciu klucza mają postać:

$$I_1(s)(R + sL_1) - I_2(s)sM = Li_1(0),$$

$$I_2(s)(R + sL_2) - I_1(s)sM = -Mi_1(0).$$



a) gdy  $M = \sqrt{L_1 L_2} = L$ , to

$$I_2(s) = -i_1(0) \frac{LR}{2sL + R} = -\frac{i_1(0)}{2} \frac{T}{1 + sT},$$

gdzie  $T = \frac{2L}{R}$ ,  
stąd:

$$i_2(t) = -\frac{i_1(0)}{2} e^{-\frac{t}{T}} = -10 e^{-125t} \text{ mA},$$

b) gdy  $M = 0,5 \sqrt{L_1 L_2} = 0,5 L$ , to

$$\begin{aligned} I_2(s) &= -i_1(0) \frac{MR}{L^2 - M^2} \frac{1}{s^2 + s \frac{2LR}{L^2 - M^2} + \frac{R^2}{L^2 - M^2}} = \\ &= -\frac{i_1(0)}{s} \frac{MR}{L^2 - M^2} \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)}. \end{aligned}$$

Po przejściu na postać czasową

$$i_2(t) = -i_1(0) \frac{MR}{L^2 - M^2} \frac{1}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) = 10(e^{-500t} - e^{-167t}) \text{ mA}.$$

#### Zadanie 5.4

Po zwarcie klucza:

$$i_1(t) = 20(1 - e^{-267t}) \text{ mA},$$

$$i_2(t) = 223(1 - e^{-267t}) \text{ mA},$$

po rozwarciu klucza:

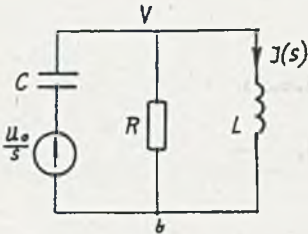
$$i_1(t) = 26,7 e^{-533t} \text{ mA},$$

$$i_2(t) = 298 e^{-533t} \text{ mA}.$$



### Zadanie 5.5

Gdy klucz jest w pozycji 1, to napięcie na pojemności  $u_c$  można obliczyć w następujący sposób



Rys. 5.5.1

$$U_c(j\omega) = \frac{E}{R - jX_c} (-jX_c).$$

Stąd maksymalne napięcie chwilowe  $u_{cm}$

$$u_{cm} = \frac{|E|\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} X_c = 50 \text{ V.}$$

Po przełączeniu klucza na pozycję 2, obwód można przedstawić jak na rys. 5.5.1.

Napięcie  $u_c(0) = u_{cm}$ .

Wartość pojemności  $C = \frac{1}{\omega X_c} = 10 \mu\text{F}$ .

Korzystając z metody potencjałów węzłowych

$$V(s) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC \right) = \frac{u_c(0)}{s} sC,$$

stąd

$$V(s) = \frac{u_c(0)}{s} \frac{s^2}{s^2 + s \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}},$$

zatem

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} = \frac{u_c(0)}{L} \frac{1}{s} \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)}.$$

Po przejściu na postać czasową

$$i(t) = \frac{u_c(0)}{L} \left( \frac{1}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} \right),$$

$$\Delta = \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} = 10^6 - 5 \cdot 10^6.$$

Stąd

$$s_{1,2} = -500 \pm j 1000.$$

Zatem

$$i(t) = (0,625 e^{-500t} \sin 1000t) \text{ A.}$$

### Zadanie 5.6

$$i_L(0) = -43,5 \text{ mA.}$$

Dla  $t \geq 0$  obwód można przedstawić jak na rys. 5.6.1:

$$u(t) = u'(t) + u''(t) + u'''(t),$$

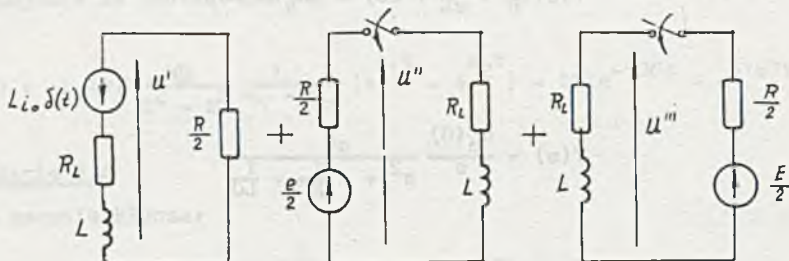
$$u'(t) = 2,18 e^{-1000t} \text{ V,}$$

$$u''(t) = 7,1 \sin 1000t - 2,5 \sin(1000t - \frac{\pi}{4}) - 1,76 e^{-1000t} \text{ V,}$$

$$u'''(t) = 2,5(1 + e^{-1000t}) \text{ V,}$$

zatem

$$u(t) = (5,58 \sin(1000t + 0,32) + 2,5 + 2,92 e^{-1000t}) \text{ V.}$$



Rys. 5.6.1

### Zadanie 5.7

Po przyrównaniu urojonej części impedancji obwodu do zera, otrzymuje się zależność

$$R^2 + (\omega_0 L)^2 = \frac{L}{C}.$$

stąd

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0,5 \mu\text{F.}$$



Przebieg czasowy napięcia  $u(t)$  można obliczyć, stosując metodę dwóch przeciwnych stanów ustalonych jak w zadaniu 4.3.

Składowa ustalona napięcia  $u(t)$  można obliczyć metodą symboliczną:

$$I'(t) = \frac{E(t)}{R_1 + Z_1},$$

$$Z_1 = \frac{(R + j \omega_0 L) \frac{1}{j \omega_0 C}}{R + j(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})},$$

$$U(t) = I'(t) Z_1.$$

Po podstawieniu danych

$$U'(t) = 4 \sqrt{2} \text{ V},$$

stąd

$$u(t) = 4 \sqrt{2} \sin 10^4 t \text{ V}.$$

Prąd płynący przez indukcyjność

$$I_L(t) = \frac{U'(t)}{R + j \omega_0 L} = 40 e^{-j \frac{\pi}{4}} \text{ mA}.$$

Zatem

$$i_L(t) = 40 \sin(10^4 t - \frac{\pi}{4}) \text{ mA}.$$

Dla  $t = 0$ :

$$i_L(0) = -28,3 \text{ mA},$$

$$u_C(0) = 0.$$

Składowa przejściowa napięcia  $u''(t)$  pochodzi od wyłączenia warunku początkowego  $i_L(0)$

$$U''(s) \left( \frac{1}{R_1} + sC + \frac{1}{R + sL} \right) = \frac{L i_L(0)}{R + sL}.$$

Po przekształceniu

$$U''(s) = \frac{i_L(0)}{C} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)},$$

gdzie:

$$s_1 = -3 \cdot 10^4 \frac{1}{s},$$

$$s_2 = -2 \cdot 10^4 \frac{1}{s}.$$

Stosując I wzór Heaviside'a otrzymuje się postać czasową napięcia  $u''(t)$

$$u''(t) = 5,66(e^{-3 \cdot 10^4 t} - e^{-2 \cdot 10^4 t}) \text{ V}.$$

Zatem

$$u(t) = u'(t) + u''(t) = (4 \sqrt{2} \sin 10^4 t + 5,66(e^{-3 \cdot 10^4 t} - e^{-2 \cdot 10^4 t})) \text{ V}.$$

#### Zadanie 5.8

Dla obwodu z rys. 5.8 można napisać zależność

$$\oint_{1V2R1} \bar{K} d\bar{l} = \int_{1V2} \bar{K} d\bar{l} + \int_{2R1} \bar{K} d\bar{l},$$

czyli

$$e(t) = u_{12} + R_1 i(t),$$

gdzie

$$e(t) = S \frac{dB}{dt} = 62,8 \cos 3,14 \cdot 10^4 t \text{ V},$$

stąd

$$\begin{aligned} u_{12}(t) &= e(t) - R_1 i(t) = \\ &= (62,8 \cos 3,14 \cdot 10^4 t - 500 \cdot 0,1 \sqrt{2} \sin(3,14 \cdot 10^4 t + \psi)) \text{ V} = \\ &= (62,8 \cos 3,14 \cdot 10^4 t - 70,7 \sin(3,14 \cdot 10^4 t + \psi)) \text{ V}. \end{aligned}$$

Wskazanie woltomierza jest uzależnione od fazy początkowej  $\psi$  prądu  $i(t)$ .  
Jest największe dla  $\psi = -\frac{\pi}{2}$  rad, wówczas

$$u_{12} = 133,5 \cos 3,14 \cdot 10^4 t \text{ V,}$$

a

$$U_V = \frac{133,5}{2} = 94,5 \text{ V.}$$

Najmniejszą wartość wskazanie osiąga dla  $\psi = \frac{\pi}{2}$  rad

$$u_{12} = -7,9 \cos 3,14 \cdot 10^4 t$$

a

$$U_V = 5,58 \text{ V.}$$

Dla fazy:  $\psi = 0$ ,

$$u_{12} = 94,5 \sin(3,14 \cdot 10^4 t + 2,42) \text{ V,}$$

a

$$U_V = 67 \text{ V.}$$

Dla obwodu z rys. 5.8b

$$U_V = IR = 50 \text{ V.}$$

#### Zadanie 5.9

$$i_3(t) = 2,5 \cos 5 \cdot 10^4 t \text{ A,}$$

$$i_8 = 0.$$

#### Zadanie 5.10

Indukcyjność własna uzwojenia pierwotnego

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{z_1^2 \mu \mu_0 S}{l_{\text{sr}}} = \frac{z_1^2 \mu \mu_0 \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \pi}{2\pi \frac{a+b}{2}} = \frac{z_1^2 \mu \mu_0 \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}{a+b} = \\ &= \frac{1200^2 \cdot 800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} (1,25 \cdot 10^{-2})^2}{9,5 \cdot 10^{-2}} = 2,38 \text{ H.} \end{aligned}$$



Indukcyjność wzajemna

$$M = \frac{z_1 z_2 \mu \mu_0 S}{l_{sr}} = \frac{z_1 z_2 \mu \mu_0 \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}{a+b} =$$

$$= \frac{1200 \cdot 500 \cdot 800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} (1,25 \cdot 10^{-2})^2}{9,5 \cdot 10^{-2}} = 0,992 \text{ H.}$$

Prąd w uzwojeniu pierwotnym

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{\frac{E}{s}}{R_w + R_1 + sL_1} = \frac{E}{R_w + R_1} \frac{1}{s(1 + s \frac{L_1}{R_w + R_1})} =$$

$$= \frac{E}{R_w + R_1} \frac{1}{s(1 + sT)}.$$

Po przejściu na postać czasową

$$i(t) = \frac{E}{R_w + R_1} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) = 0,267(1 - e^{-37,8t}) \text{ A.}$$

Napięcie indukowane w uzwojeniu wtórnym

$$u_2(t) = -M \frac{di}{dt} = -\frac{MJ_m}{T} e^{-\frac{t}{T}} = -0,992 \cdot 0,267 \cdot 37,8 e^{-37,8t} = -10 e^{-37,8t} \text{ V.}$$

Zadanie 5.11

$$u_d = -261 e^{-2,54 \cdot 10^3 t} \text{ V.}$$

Zadanie 5.12

W uzwojeniach cewki indukuje się

$$e(t) = z \frac{d\phi}{dt} = -za^2 2\pi r B \sin 2\pi ft.$$

Wartość skuteczna

$$E = \frac{za^2 2\pi r B}{2} = 133,2 \text{ V.}$$

Wskazania woltomierza

$$U = \frac{E 2 \pi f L}{\sqrt{(R+R_c)^2 + [2 \pi f (L_c + L)]^2}} = \frac{133,2 \cdot 2 \pi \cdot 100 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(50+20)^2 + [2 \pi \cdot 100(10+30) \cdot 10^{-3}]^2}} = 33,8 \text{ V.}$$

### Zadanie 5.13

$$i(t) = (0,156 \sin 314t - 1,4 \sin 942t) \text{ mA.}$$

### Zadanie 5.14

Niech funkcje czasowe podane w tablicy 5.1 zostaną wyróżnione

Tablica 5.1

Wyróżniona funkcja	Oznaczenie $u_k$	Postać czasowa	Postać operatorowa
Impulsowa	$u_0(t)$	$\delta(t)$	1
Skokowa	$u_1(t)$	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
Linowa	$u_2(t)$	$t$	$\frac{1}{s^2}$
Paraboliczna	$u_3(t)$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$

Jeżeli przebieg czasowy sygnału na wejściu obwodu  $f_1(t)$  opisany jest w równomiernych przedziałach czasowych  $\tau$  za pomocą wyróżnionych funkcji

$$f_1(t) = a_0 u_a(t) + a_1 u_a(t - \tau) + a_2 u_a(t - 2\tau) + \dots + a_n u_a(t - n\tau),$$

gdzie zgodnie z przyjętym oznaczeniem funkcji wyróżnionych  $a = 0, 1, 2, 3$ , to jego postać operatorowa dana jest wyrażeniem

$$F_1(s) = \frac{1}{s^a} (a_0 + a_1 e^{-\tau s} + a_2 e^{-2\tau s} + \dots + a_n e^{-n\tau s}).$$

Podobnie przebieg czasowy sygnału na wyjściu obwodu  $f_2(t)$  dany w postaci funkcji wyróżnionych w tych samych przedziałach czasowych  $\tau$

$$f_2(t) = b_0 u_b(t) + b_1 u_b(t - \tau) + b_2 u_b(t - 2\tau) + \dots + b_n u_b(t - n\tau),$$

gdzie zgodnie z przyjętym oznaczeniem funkcji wyróżnionych  $b = 0, 1, 2, 3$ ,

można zapisać operatorowo

$$F_2(s) = \frac{1}{s} (b_0 + b_1 e^{-\tau s} + b_2 e^{-2\tau s} + \dots + b_n e^{-n\tau s}).$$

Po podzieleniu  $F_2(s)$  przez  $F_1(s)$  otrzymuje się impulsową funkcję przejścia

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{F_2(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{s^{b-a}} \frac{b_0 + b_1 e^{-\tau s} + b_2 e^{-2\tau s} + \dots + b_n e^{-n\tau s}}{a_0 + a_1 e^{-\tau s} + a_2 e^{-2\tau s} + \dots + a_n e^{-n\tau s}} = \\ &= \frac{1}{s^c} (c_0 + c_1 e^{-\tau s} + c_2 e^{-2\tau s} + \dots + c_n e^{-n\tau s}). \end{aligned}$$

Indeks  $c = b-a$  zależy tylko od wyboru rodzaju wyróżnionych funkcji w opisie przebiegów  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$ .

Po przekształceniu danych przebiegów czasowych  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  na postać operatorową i przyjęciu  $e^{-\tau s} = x$ , otrzymuje się:

$$F_1(s) = \frac{1}{s} (1 + 3x + 2x^2 + 5x^3),$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s^2} (1 + 4x + 3x^2 + 6x^3).$$

W celu obliczenia współczynników  $c_k$ , dzielenie funkcji  $F_2(s)/F_1(s)$  można przeprowadzić następująco [18]

$$\begin{array}{r} 1 + 3x + 2x^2 + 5x^3 / \frac{1 + x - 2x^2 + 5x^3}{1 + 4x + 3x^2 + 6x^3} + \dots \\ \frac{1 + 3x + 2x^2 + 5x^3}{x + x^2 + x^3} \\ \frac{x + 3x^2 + 2x^3}{-2x^2 - x^3} + \dots \\ \frac{-2x^2 - 6x^3}{5x^3} + \dots \end{array}$$



Posługując się tylko współczynnikami, dzielenie to może mieć zapis

$$\begin{array}{r}
 1,3,2,5/ \begin{array}{r} 1, \quad 1, \quad -2, \quad 5, \quad \dots \\ 1, \quad 4, \quad 3, \quad 6, \quad \dots \\ \hline 1, \quad 3, \quad 2, \quad 5, \quad \dots \\ 1, \quad 3, \quad 2, \quad \dots \\ \hline 1, \quad 3, \quad 2, \quad \dots \\ -2, \quad -1, \quad \dots \\ \hline -2, \quad -6, \quad \dots \\ 5, \quad \dots \end{array}
 \end{array}$$

lub

$$\left\{ \frac{1, \quad 4, \quad 3, \quad 6, \quad \dots}{1, \quad 3, \quad 2, \quad 5, \quad \dots} \right\} = \{1, 2, -2, 5, \dots\}$$

ogólnie

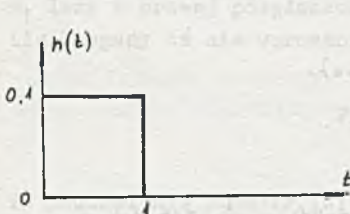
$$\left\{ \frac{b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots}{a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots} \right\} = \{c_0, c_1, c_2, \dots\}$$

Stąd szukana impulsowa funkcja przejścia

$$H(s) = \frac{1}{s} (1 + e^{-s} - 2e^{-2s} + 5e^{-3s} + \dots).$$

#### Zadanie 5.15

Przebiegi czasowe sygnałów  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  w postaci operatorowej są następujące:



Rys. 5.15.1

$$F_1(s) = \frac{10}{s^2} (1 - e^{-s}),$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s}),$$

stąd

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{F_2(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{10s} \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{1 - e^{-s}} = \\
 &= \frac{1}{10s} (1 - e^{-s}).
 \end{aligned}$$

Zatem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = 0,1 \cdot 1(t) - 0,1 \cdot 1(t-1).$$

Przebieg czasowy  $h(t)$  przedstawia rys. 5.15.1.

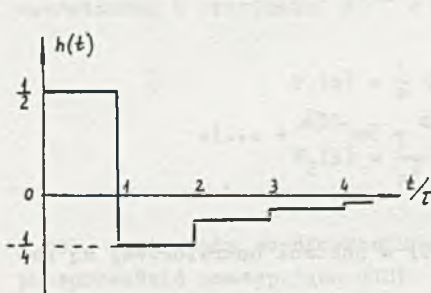
#### Zadanie 5.16

Przebiegi czasowe  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  w postaci operatorowej da się wyrazić następująco:

$$F_1(s) = \frac{1}{2s} (2 - 5e^{-\tau s} + 2e^{-2\tau s}),$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s^2} (1 - 4e^{-\tau s} + 5e^{-2\tau s} - 2e^{-3\tau s}).$$

Korzystając z metody przedstawionej w zadaniu 5.16 po dzieleniu  $F_2(s)/F_1(s)$  otrzymuje się



Rys. 5.16.2

$$\{c_0, c_1, c_2, \dots\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-2}{2} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{1}, \dots \right\}.$$

Zatem impulsowa funkcja przejścia  $H(s)$  ma postać

$$H(s) = \frac{1}{s} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{1} e^{-\tau s} + \frac{5}{2} e^{-2\tau s} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{16} e^{-3\tau s} + \frac{1}{32} e^{-4\tau s} + \dots \right).$$

Przebieg czasowy impulsowej odpowiedzi obwodu

$$h(t) = \frac{1}{2} 1(t) - \frac{2}{1} 1(t-\tau) + \frac{5}{2} 1(t-2\tau) + \frac{1}{16} 1(t-3\tau) + \frac{1}{32} 1(t-4\tau) + \dots$$

przedstawia rys. 5.16.2.

#### Zadanie 5.17

Operatorowo:

$$F_1(s) = \frac{1}{s} (2 - 5e^{-\tau s} + 2e^{-2\tau s}),$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s^2} (2 - 6e^{-\tau s} + 6e^{-2\tau s} - 2e^{-3\tau s}).$$

Wykorzystując metodę przedstawioną w zadaniu 5.16 po dzieleniu  $F_2(s)/F_1(s)$  otrzymuje się

$$\{c_0, c_1, c_2, \dots\} = \frac{\{2, -6, 6, -2\}}{\{2, -5, 2\}} = \{1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{11}{8}, \frac{43}{16}, \frac{171}{32}, \dots\}.$$

Otrzymany szereg liczbowy współczynników impulsowej funkcji przejścia  $H(s)$  jest szeregiem rozbieżnym. Wynika stąd, że przebieg czasowy odpowiedzi impulsowej obwodu jest nieograniczony. Dla wyjaśnienia tego, można zbadać funkcje operatorowe  $F_1(s)$  i  $F_2(s)$  na płaszczyźnie zespolonej.

Po przekształceniu

$$F_1(s) = \frac{1}{s} (1 - 2e^{-\tau s})(2 - e^{-\tau s}).$$

Stąd zera funkcji  $F_1(s)$  wyznaczają równania:

$$e^{-\tau s_1} = \frac{1}{2}.$$

$$e^{-\tau s_2} = 2.$$

Zatem:

$$\tau s_1 = 0,69315 - j2n\pi,$$

$$\tau s_2 = -0,69315 - j2n\pi.$$

Zera  $F_1(s)$  stają się biegunami impulsowej funkcji przejścia  $H(s)$ . Biegun  $s_1$  leży w prawej półpłaszczyźnie, co warunkuje rozbieganie się  $h(t)$ , ile bieguny te nie uproszczą się z zerami funkcji  $F_2(s)$ .

$$F_2(s) = \frac{2}{s^2} (1 - e^{-\tau s})^3.$$

Po podzieleniu  $F_2(s)/F_1(s)$  pozostaje w mianowniku funkcji  $H(s)$  czynnik  $(1 - 2e^{-\tau s})$  dający biegun w prawej półpłaszczyźnie. Zatem za pomocą stabilnego, liniowego obwodu o parametrach skupionych nie można otrzymać na wyjściu przebiegu  $f_2(t)$  z rys. 5.17, gdy na wejście podany jest przebieg  $f_1(t)$  z rys. 5.16. W zadaniu 5.16 funkcja  $F_2(s)$  miała postać

$$F_2(s) = \frac{1}{s^2} (1 - 2e^{-\tau s})(1 - e^{-\tau s})^2.$$

Dzięki czynnikowi  $(1 - 2e^{-\tau s})$  nastąpiło uproszczenie biegunów w prawe półpłaszczyźnie funkcji  $H(s)$ .



Zadanie 5.18

Niech przebiegi czasowe  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  będą aproksymowane przez ciągły impulsów występujących w chwilach próbkowania, każdy o powierzchni równej wartości próbki razy przedział próbkowania  $\tau = 0,1$ . Stąd:

$$f'_1(t) = a_0 \tau \delta(t - 0,05) + a_1 \tau \delta(t - 0,15) + \\ + a_2 \tau \delta(t - 0,25) + \dots + a_{29} \tau \delta(t - 2,95),$$

$$f'_2(t) = b_0 \tau \delta(t - 0,05) + b_1 \tau \delta(t - 0,15) + \\ + b_2 \tau \delta(t - 0,25) + \dots + b_{29} \tau \delta(t - 2,95).$$

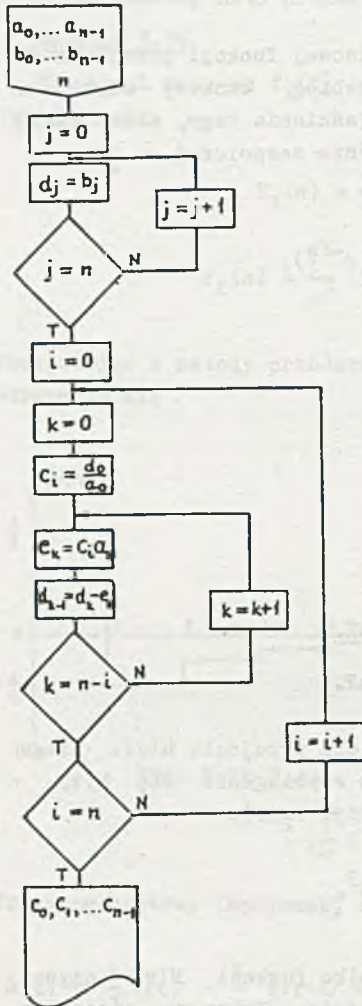
Tym sposobem przebiegi  $f_1(t)$  i  $f_2(t)$  zostały opisane za pomocą funkcji impulsowych w równomiernych przedziałach czasowych  $\tau$ . W postaci operatorowej:

$$F'_1(s) = \tau e^{-0,05s} (a_0 + a_1 e^{-0,1s} + \\ + a_2 e^{-0,2s} + \dots + a_{29} e^{-2,9s}),$$

$$F_2(s) = \tau e^{-0,05s} (b_0 + b_1 e^{-0,1s} + \\ + b_2 e^{-0,2s} + \dots + b_{29} e^{-2,9s}).$$

Do obliczenia impulsowej funkcji przejścia można zatem zastosować metodę podaną w zadaniu 5.16.

$$H''(s) = c_0 + c_1 e^{-0,1s} + c_2 e^{-0,2s} + \dots \\ \dots + c_{29} e^{-2,9s},$$



Rys. 5.18.1

gdzie

$$\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_{29}\} = \frac{\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_{29}\}}{\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{29}\}}.$$

Algorytm dzielenia przedstawiono na rys. 5.18.1.

Otrzymany na podstawie  $H''(s)$  przebieg czasowy odpowiedzi impulsowej obwo-  
du  $h''(t)$  jest ciągiem impulsów, z których pierwszy pojawia się w chwili

$t = 0$ , a nie  $t = 0,05$ , jak to mia-  
ło miejsce w  $f_1'(t)$  i  $f_2'(t)$ . Z ko-  
leci  $h''(t) = 0$  dla  $t < 0$ , stąd pier-  
wszy impuls zawiera się w przedzia-  
le  $0 < t < 0,05$ , pozostałe nato-  
miast posiadają szerokość  $0,1$ .

Zatem, jeżeli ciąg impulsów  $h''(t)$   
otrzymanych na podstawie  $H''(s)$  ma  
mieć interpretację taką samą jak  
ciągi  $f_1'(t)$  i  $f_2'(t)$ , to

$$\begin{aligned} h''(t) = & \tau \frac{2c_0}{\tau} \delta(t) + \tau \frac{c_1}{\tau} \delta(t - 0,1) + \\ & + \tau \frac{c_2}{\tau} \delta(t - 0,2) + \dots \\ & \dots + \tau \frac{c_{29}}{\tau} \delta(t - 2,9) = \tau c_0' \delta(t) + \\ & + \tau c_1' \delta(t - 0,1) + \tau c_2' \delta(t - 0,2) + \\ & + \dots + \tau c_{29}' \delta(t - 2,9). \end{aligned}$$

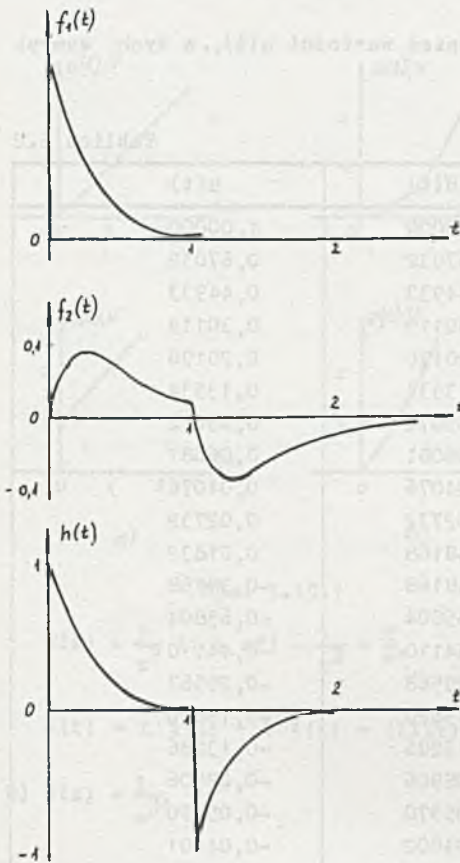
Wyniki obliczeń wg danego algoryt-  
mu zostały zebrane w tablicy 5.2,  
a przebiegi czasowe  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  i  
 $h(t)$  przedstawia rys. 5.18.2. Wy-  
korzystując do obliczenia  $h(t)$  zna-  
ne przekształcenia rachunku opera-  
torowego, otrzymuje się:

$$F_1(s) = \frac{1}{s + 4},$$

$$F_2(s) = \frac{1}{(s + 4)^2} - \frac{e^{-s}}{(s + 4)^2},$$

stąd

$$H(s) = \frac{1}{s + 4} - \frac{e^{-s}}{s + 4}.$$



Rys. 5.18.2

Zatem

$$h(t) = e^{-4t} \mathbf{1}(t) - e^{-4(t-1)} \mathbf{1}(t-1).$$

W tablicy 5.2 dla porównania podano również wartości  $h(t)$ , w tych samych chwilach co  $h(t)$ .

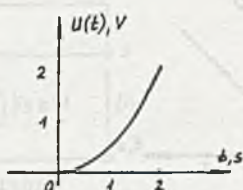
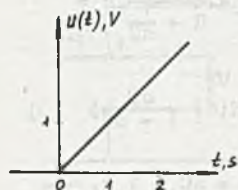
Tablica 5.2

t	$h''(t)$	$h'(t)$	$h(t)$
0	0,050000	1,00000	1,00000
0,1	0,067032	0,67032	0,67032
0,2	0,044933	0,44933	0,44933
0,3	0,030119	0,30119	0,30119
0,4	0,020190	0,20190	0,20190
0,5	0,013534	0,13534	0,13534
0,6	0,009072	0,09072	0,09072
0,7	0,006081	0,06081	0,06081
0,8	0,004076	0,04076	0,04076
0,9	0,002732	0,02732	0,02732
1,0 -	-0,048168	-0,48168	0,01832
1,0 +	-0,048168	-0,48168	-0,98168
1,1	-0,065804	-0,65804	-0,65804
1,2	-0,044110	-0,44110	-0,44110
1,3	-0,029568	-0,29568	-0,29567
1,4	-0,019820	-0,19820	-0,19820
1,5	-0,013286	-0,13286	-0,13286
1,6	-0,008906	-0,08906	-0,08906
1,7	-0,005970	-0,05970	-0,05970
1,8	-0,004002	-0,04002	-0,04001
1,9	-0,002682	-0,02682	-0,02682
2,0	-0,001798	-0,01798	-0,01798
2,1	-0,001205	-0,01205	-0,01206
2,2	-0,000808	-0,00808	-0,00808
2,3	-0,000542	-0,00542	-0,00537
2,4	-0,000363	-0,00363	-0,00360
2,5	-0,000243	-0,00243	-0,00241
2,6	-0,000163	-0,00163	-0,00159
2,7	-0,000109	-0,00109	-0,00106
2,8	-0,000073	-0,00073	-0,00061
2,9	-0,000049	-0,00049	-0,00041



### Zadanie 5.19

Dla obwodu z rys. 5.19 napięcie  $u(t)$  w postaci operatorowej można wyrazić następująco



$$U(s) = \frac{E(s)}{R + \frac{1}{sC}} =$$

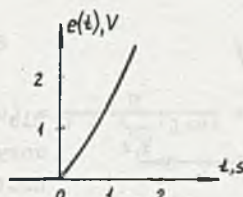
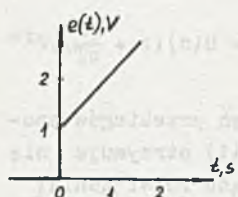
$$= E(s) \frac{1}{1 + sT},$$

gdzie  $T = RC = 1$  s.

Stąd

$$E(s) = U(s)(1 + sT).$$

Dla danych przebiegów czasowych  $u(t)$  otrzymuje się następujące rozwiązania



a)

b)

Rys. 5.19.1

$$E(s) = \frac{1}{s^2} (1 + sT) = \frac{1}{s^2} + \frac{T}{s},$$

$$e(t) = t \cdot 1(t) + T \cdot 1(t) = (t \cdot 1(t) + 1 \cdot 1(t)) \text{ V},$$

$$b) U(s) = \frac{1}{s^3},$$

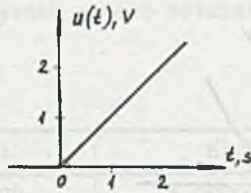
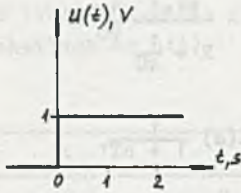
$$E(s) = \frac{1}{s^3} (1 + sT) = \frac{1}{s^3} + \frac{T}{s^2},$$

$$e(t) = \frac{t^2}{2} \cdot 1(t) + tT \cdot 1(t) = \left( \frac{t^2}{2} \cdot 1(t) + t \cdot 1(t) \right) \text{ V}.$$

Rys. 5.19.1 przedstawia dane przebiegi czasowe napięcia  $u(t)$  oraz odpowiadające im przebiegi czasowe SEM  $e(t)$ .

### Zadanie 5.20

Dla obwodu z rys. 5.20 napięcie  $u(t)$  w postaci operatorowej można wyrazić następująco



$$U(s) = \frac{Z(s)}{R + \frac{1}{sC}} R =$$

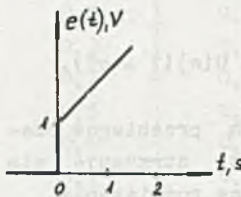
$$= E(s) \frac{sT}{1 + sT},$$

gdzie  $T = RC = 1$  s.

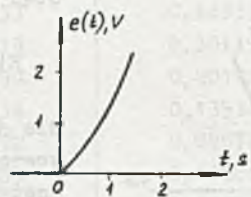
Stąd

$$E(s) = U(s) \left(1 + \frac{1}{sT}\right).$$

Dla danych przebiegów czasowych  $u(t)$  otrzymuje się następujące rozwiązania:



a)



b)

$$a) U(s) = \frac{1}{s},$$

Rys. 5.20.1

$$E(s) = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{sT}\right) =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \frac{1}{T}.$$

$$e(t) = 1 \cdot 1(t) + t \cdot \frac{1}{T} \cdot 1(t) = (1 \cdot 1(t) + t \cdot 1(t)) V,$$

$$b) U(s) = \frac{1}{s^2},$$

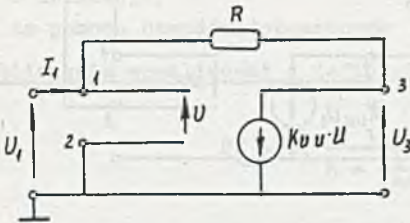
$$E(s) = \frac{1}{s^2} \left(1 + \frac{1}{sT}\right) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} \frac{1}{T},$$

$$e(t) = t \cdot 1(t) + \frac{t^2}{2} \frac{1}{T} \cdot 1(t) = \left(t \cdot 1(t) + \frac{t^2}{2} \cdot 1(t)\right) V.$$

Dane przebiegi czasowe napięcia  $u(t)$  oraz odpowiadające im przebiegi czasowe SEM  $e(t)$  przedstawia rys. 5.20.1.

Zadanie 5.21

Dany obwód z trójbiegunkiem można przedstawić jak na rys. 5.21.2.  
Szukana impedancja wejściowa:



Rys. 5.21.2

$$Z_{we} = \frac{U_1}{I_1},$$

$$I_1 = \frac{U_1 - U_3}{R},$$

$$U_3 = -K_{UU}(j\omega)U_1,$$

stąd

$$Z_{we}(j\omega) = \frac{R}{1 + K_{UU}(j\omega)} = \frac{R}{1 + \frac{K_o}{1 + h \frac{\omega}{\omega_g}}}.$$

Po przyjęciu  $\omega = \omega_1 K_o$  otrzymuje się

$$Z_{we}(j\omega) = \frac{R(\omega_g + j\omega_1 K_o)}{\omega_g + \omega_g K_o + j\omega_1 K_o}.$$

$K_o \gg 1$  oraz  $\omega_1 \ll \omega_g$ , zatem

$$Z_{we}(j\omega) = \frac{R}{K_o} \left( 1 + \frac{\omega_1^2 K_o}{\omega_g^2} \right) + jR \frac{\omega_1}{\omega_g} = (0,01 + j1)\Omega.$$

Obwód z rys. 5.21, od strony zacisków wejściowych stanowi dwójnik uziemiony o charakterze indukcyjnym i dobroci

$$Q = 100.$$

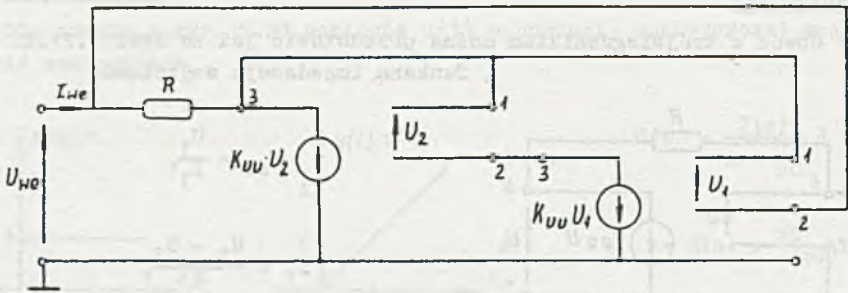
Zadanie 5.22

Dany obwód z trójbiegunkami można przedstawić jak na rys. 5.22.1

$$U_{we} = \frac{U_{we}}{I_{we}},$$

$$I_{we} = \frac{K_{UU}U_2 + U_{we}}{R},$$





rys. 5.22.1

$$U_2 = -K_{JU} U_2 + K_{UU} U_1,$$

$$U_1 = -K_{UU} U_2 - U_{we},$$

stąd

$$Z_{we} = R \left( 1 + \frac{K_{UU}^2}{1 + K_{UU}} \right).$$

Po podstawieniu

$$K_{UU} = \frac{K_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}$$

i uwzględnieniu, że  $K_0 \gg 1$ , otrzymuje się

$$\begin{aligned} Z_{we} &= R \left( 1 + \frac{K_0^2 \omega^2}{K_0 \omega_g^2 - \omega^2 + j \omega K_0 \omega_g} \right) = \\ &= R \left[ \frac{\omega^2 + K_0^2 \omega_g^2}{\omega^2 (\omega^2 + K_0^2 \omega_g^2) + K_0^2 \omega_g^2} - j \frac{\omega K_0^3 \omega_g^3}{\omega^2 (\omega^2 + K_0^2 \omega_g^2) + K_0^2 \omega_g^2} \right] = \\ &= (10 - j 1000) \Omega. \end{aligned}$$

Obwód z rys. 5.22 od strony zacisków wejściowych stanowi dwójnik uziemie-  
ny o charakterze pojemnościowym i dobroci

$$Q = 100.$$

### Zadanie 5.23

Względne współczynniki wrażliwości można wyznaczyć kilkoma metodami [3, 7]. Poniżej zastosowano dwie metody obliczania wrażliwości:

- z definicji,
- za pomocą obwodów dołączonych [3, 7].

#### Obliczanie wrażliwości z definicji

$$U_2 = U_1 \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \frac{1}{j\omega C} = U_1 \frac{1}{j\omega RC + 1}.$$

Stąd nominalna wartość napięcia  $U_2$

$$U_{2, \text{nom}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} \text{ V},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial R} = U_1 \frac{-1\omega C}{(1 + j\omega RC)^2} = -0,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\Omega},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial C} = U_1 \frac{-j\omega R}{(1 + j\omega RC)^2} = -0,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{F}},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \omega} = U_1 \frac{-jRC}{(1 + j\omega RC)^2} = -0,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{s}}.$$

Względne współczynniki wrażliwości napięcia  $U_2$  na zmiany

- rezystancji  $R$

$$\begin{aligned} S_R^{U_2} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{\partial U_2}{\partial R}}{\frac{U_{2, \text{nom}}}{R}} = \frac{\partial U_2}{\partial R} \frac{R}{U_{2, \text{nom}}} = -0,5 \sqrt{2} e^{j45^\circ} = \\ &= -0,5 - j 0,5 = S_R^{|U_2|} + jQ_R^{\varphi}, \end{aligned}$$

- pojemności  $C$

$$S_C^{U_2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U_2}{\partial C} \frac{C}{U_{2, \text{nom}}} = -0,5 \sqrt{2} e^{j45^\circ} = -0,5 - j 0,5 = S_C^{|U_2|} + jQ_C^{\varphi},$$

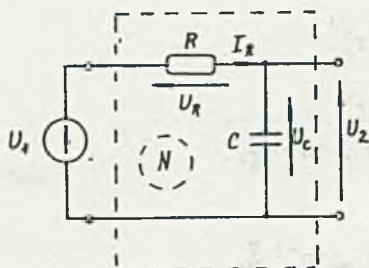
- pulsacji  $\omega$

$$S_{\omega}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial U_2}{\partial \omega} \frac{\omega}{U_{2,\text{nom}}} = -0,5 \sqrt{2} e^{j45^\circ} = -0,5 - j 0,5 = S_{\omega}^{|U_2|} + j Q_{\omega}^U.$$

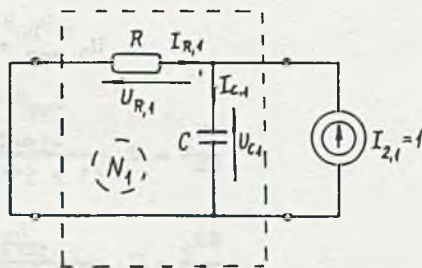
Podobnie

$$S_G^2 = -S_R^2 = 0,5 + j 0,5.$$

Wzrost wartości  $R$ ,  $C$  i pulsacji  $\omega$  powoduje zmniejszenie napięcia  $U_2$ .



Rys. 5.23.1



Rys. 5.23.2

#### Obliczanie wrażliwości za pomocą obwodów dołączonych [7]

Należy obliczyć wpływ zmian wartości parametrów elementów i pulsacji na napięcie  $U_2$  w obwodzie  $N$  z rys. 5.23.1, zatem obwód dołączony  $N_1$  z rys. 5.23.2 jest zasilany na wyjściu przez SPM  $I_{2,1} = 1$  A.

Można sprawdzić, że:

$$I_{R,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} \text{ A}, \quad U_{R,1} = -\frac{10^3}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} \text{ V},$$

$$I_{C,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} \text{ A}, \quad U_{C,1} = \frac{10^3}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} \text{ V}.$$

Po podstawieniu do zależności podanych w rozdz. 2 [7], otrzymuje się względne współczynniki wrażliwości napięcia  $U_2$  na zmiany

- przewodności  $G$

$$S_G^2 = -U_R U_{R,1} \frac{G}{U_{2,\text{nom}}} = 0,5 \sqrt{2} e^{j45^\circ} = 0,5 + j 0,5,$$



- admitancji  $j\omega C$

$$S_{j\omega C}^2 = -U_C U_{C,1} \frac{j\omega C}{U_{2,nom}} = 0,5 \sqrt{2} e^{j45^\circ} = -0,5 - j 0,5.$$

Można zauważyć, że  $S_{j\omega C}^2$  przy ustalonej pulsacji  $\omega$  jest wrażliwością na zmiany pojemności  $C$ , natomiast przy ustalonej wartości pojemności  $C$ , wrażliwością na zmiany pulsacji  $\omega$ .

Na podstawie znanych wartości wrażliwości względnych oraz tolerancji elementów i pulsacji, można obliczyć przybliżone graniczne wartości napięcia  $U_2$ :

$$U'_{2,max} \cong U_{2,nom} (-S_R^2 t_R - S_C^2 t_C - S_{\omega}^2 t_{\omega}) + U_{2,nom},$$

$$U'_{2,min} \cong U_{2,nom} (S_R^2 t_R + S_C^2 t_C + S_{\omega}^2 t_{\omega}) + U_{2,nom},$$

gdzie

$t_R, t_C, t_{\omega}$  - tolerancje rezystancji, pojemności i pulsacji wyrażone w procentach.

a)  $t_R = t_C = 10\%$ , a  $t_{\omega} = 0\%$ ,

zatem:

$$U'_{2,max} = U_{2,nom} (1 + 0,1 + j 0,1) = 0,781 e^{-j39,8^\circ} V,$$

$$U'_{2,min} = U_{2,nom} (1 - 0,1 - j 0,1) = 0,640 e^{-j51,3^\circ} V.$$

Wartości  $U'_{2,max}$  i  $U'_{2,min}$  wyznaczono przy założeniu małych zmian wartości elementów, wtedy słuszne są wzory na względne wrażliwości małoprzrostowe.

Natomiast z zależności na wrażliwości względne  $S_R^2$  i  $S_C^2$  widać, przy jakim granicznym rozkładzie wartości elementów uzyskamy dokładne wartości graniczne napięcia  $U_2$ .

Gdy  $R' = (1 - t_R)R = 0,9 \text{ k}\Omega$  oraz  $C' = (1 - t_C)C = 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ , wówczas

$$U_{2,max} = \frac{1}{j\omega R' C' + 1} = 0,777 e^{-j39^\circ} V.$$

Porównując wartości  $U'_{2,max}$  i  $U_{2,max}$  można stwierdzić błąd modułu 0,39% i fazy 2,3%.

Gdy  $R'' = (1 + t_R)R = 1,1 \text{ k}\Omega$  oraz  $C'' = (1 + t_C)C = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ , wówczas

$$U_{2,\min} = \frac{1}{j\omega R''C'' + 1} = 0,637 e^{-j50,4^\circ} \text{ V.}$$

Wyznaczona wartość  $U'_{2,\min}$  posiada błąd modułu 0,47% i fazy 1,8%.

b)  $t_R = t_C = 20\%$ ,  $t_\omega = 0\%$ .

$$U'_{2,\max} = U_{2,\text{nom}}(1 + 0,2 + j 0,2) = 0,860 e^{-j35,5^\circ} \text{ V,}$$

$$U_{2,\max} = \frac{1}{j\omega 0,8R \cdot 0,8C + 1} = 0,842 e^{-j32,6^\circ} \text{ V.}$$

Błąd modułu wynosi 2,1%, fazy 8,95%.

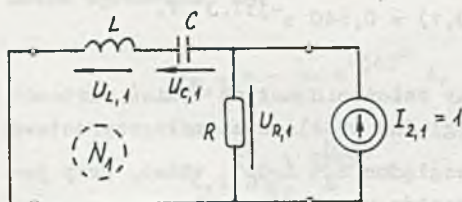
$$U'_{2,\min} = U_{2,\text{nom}}(1 - 0,2 - j 0,2) = 0,583 e^{-j59^\circ} \text{ V,}$$

$$U_{2,\min} = \frac{1}{j\omega 1,2R \cdot 1,2C + 1} = 0,570 e^{-55,2^\circ} \text{ V.}$$

Błąd modułu 2,28% i fazy 6,9%.

#### Zadanie 5.24

Obwód dołączony  $N_1$ , do obwodu N z rys. 5.24, przedstawiony został na rys. 5.24.1.



Rys. 5.24.1

W obwodzie N napięcia na elementach wynoszą:

$$U_R = 0,98 e^{j11,3^\circ} \text{ V} = U_{2,\text{nom}},$$

$$U_C = 98,15 e^{-j78,7^\circ} \text{ V,}$$

$$U_L = 97,96 e^{j101,3^\circ} \text{ V,}$$

a w obwodzie dołączonym  $N_1$ :

$$U_{R,1} = 0,20 e^{-j78,7^\circ} \text{ V,}$$

$$U_{C,1} = -98,15 e^{-j78,7^\circ} \text{ V,}$$

$$U_{L,1} = 97,96 e^{-j78,7^\circ} \text{ V.}$$

Stąd względne współczynniki wrażliwości [7]

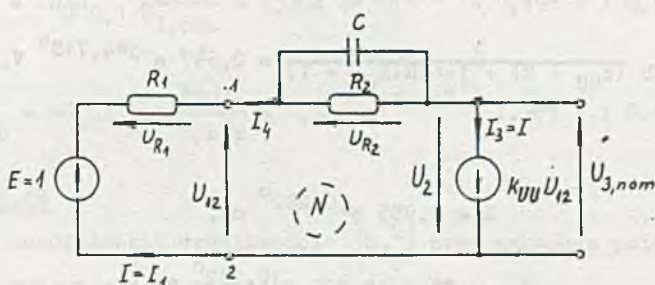
$$S_{G}^{U_2} = -U_G U_{G,1} \frac{G}{U_{2,nom}} = -0,20 e^{-j78,7^\circ} = -0,04 + j 0,19,$$

$$S_{YL}^{U_2} = -U_L I_{L,1} \frac{\frac{1}{j\omega L}}{U_{2,nom}} = -97,96 e^{-j78,7^\circ} = -19,25 + j 96,05,$$

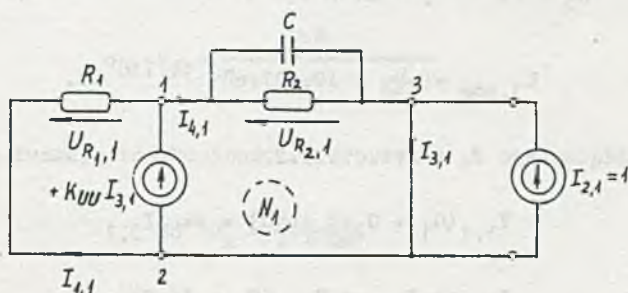
$$S_{YC}^{U_2} = -U_C U_{C,1} \frac{j\omega C}{U_{2,nom}} = 98,15 e^{-j78,7^\circ} = 19,28 - j 96,25.$$

### Zadanie 5.25

Dla wyznaczenia wartości wrażliwości względnych metodą obwodów dołączonych, należy rozwiązać obwód N, jak na rys. 5.25.1 otrzymany z obwodu



Rys. 5.25.1



Rys. 5.25.2



z rys. 4.5 po wrysowaniu obwodu wzmacniacza z rys. 4.5.1 oraz obwód dołączony  $N_1$  z rys. 5.25.2 skonstruowany zgodnie z regułami przedstawionymi w [7].

$$I = \frac{E + U_2}{R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}} = \frac{E + U_2}{R + \frac{R}{j\omega CR + 1}},$$

$$U_{12} = E - IR,$$

$$U_2 = k_{UU} U_{12} = k_{UU} (E - R \frac{E + U_2}{R + \frac{R}{j\omega CR + 1}}) =$$

$$= E k_{UU} \frac{1}{1 + (k_{UU} + 1)(1 + j\omega CR)} =$$

$$= E k_{UU} \frac{1}{(k_{UU} + 2) + j\omega CR(k_{UU} + 1)} = 0,697 e^{-j44,718^\circ} \text{ V},$$

stąd:

$$I = 0,995 e^{j0,282^\circ} \text{ mA},$$

$$U_{R_1} = IR_1 = 0,995 e^{j0,282^\circ} \text{ V},$$

$$U_{R_2} = U_C = I \frac{R}{j\omega CR + 1} = 0,704 e^{-j44,718^\circ} \text{ V},$$

$$U_{3, \text{nom}} = -U_2 = -0,697 e^{-j44,718^\circ} \text{ V}.$$

Dla obwodu dołączonego  $N_1$  z rys. 5.25.2

$$V_{1,1}(G_1 + G_2 + j\omega C) = +k_{UU} I_{3,1}$$

$$I_{3,1} = I_{2,1} + V_{1,1}(G_2 + j\omega C).$$

Po przekształceniu układu równań otrzymuje się

$$V_{1,1} = \frac{-k_{UU}}{(2 + k_{UU})G + j\omega C(1 + k_{UU})} = -0,697 \cdot 10^3 e^{-j44,718^\circ} \text{ V}$$

oraz

$$U_{R_1,1} = -V_{1,1} = +0,697 \cdot 10^3 e^{-j 44,718^\circ} \text{ V},$$

$$U_{R_2,1} = U_{C,1} = V_{1,1} = -0,697 \cdot 10^3 e^{-j 44,718^\circ} \text{ V}$$

Korzystając z obliczonych wartości [7]

$$S_{G_1}^3 = -U_{R_1} U_{R_1,1} \frac{G_1}{U_{3,nom}} = -0,995 e^{j 0,282^\circ} = -0,995 - j 0,005,$$

$$S_{G_2}^3 = -U_{R_2} U_{R_2,1} \frac{G_2}{U_{3,nom}} = 0,704 e^{-j 44,718^\circ} = 0,5 - j 0,495,$$

$$S_{YC}^3 = -U_C U_{C,1} \frac{j\omega C}{U_{3,nom}} = 0,704 e^{j 45,282^\circ} = 0,495 + j 0,5,$$

$$S_{k_{UU}}^3 = -U_{12} I_{3,1} \frac{k_{UU}}{U_{3,nom}} = 1,985 e^{j 0,14^\circ} = 1,985 + j 0,005.$$

#### Zadanie 5.26

Względny współczynnik wrażliwości  $\left| S_{Y_C}^{u_2} \right|$  przy wzroście pulsacji  $\omega$  od 1 do  $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  zmieni się od wartości 0,5 do 0,99.

#### Zadanie 5.27

Napięcie na wyjściu obwodu

$$U_2 = \frac{U_1 R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

jest biliniową funkcją indukcyjności  $L$  o postaci

$$U_2 = \frac{A + Bx}{C + Dx},$$

gdzie:

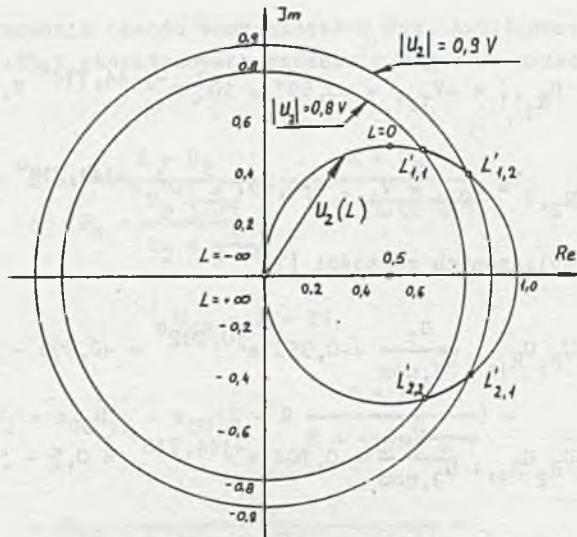
$$x = L,$$

$$A = U_1 R,$$

$$B = 0,$$

$$C = R - \frac{1}{\omega C}$$

$$D = j\omega$$



Rys. 5.27.1

Miejszem geometrycznym końca wektora napięcia  $U_2(L)$  na płaszczyźnie zespolonej, przy zmianach wartości  $L$  od  $-\infty$  do  $+\infty$  jest okrąg o promieniu  $0,5 \text{ V}$  i współrzędnych środka  $(0,5, 0)$ . Na rys. 5.27.1 przedstawiono wykres kołowy napięcia  $U_2(L)$  oraz wykresy  $|U_2| = 0,8 \text{ V}$  i  $|U_2| = 0,9 \text{ V}$ . Wartości graniczne indukcyjności można wyznaczyć z następującej nierówności

$$0,8 \leq \frac{|U_1| R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \leq 0,9.$$

Po podstawieniu danych  $\left(\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$

$$0,8 \leq \frac{1}{1 + (10L - 1)^2} \leq 0,9.$$

Stąd dla

$$L'_1 \in [L'_{1,1}, L'_{1,2}] = [0,025, 0,052] \text{ H}$$

lub

$$L'_2 \in [L'_{2,1}, L'_{2,2}] = [0,148, 0,175] \text{ H}.$$



Dla  $\omega = 11 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,

$$0,8 \leq \frac{1}{\sqrt{1 + (11L - \frac{10}{11})^2}} \leq 0,9.$$

Stąd

$$L_1'' \in [L_{1,1}'', L_{1,2}''] = [0,014, 0,038] \text{ H}$$

lub

$$L_2'' \in [L_{2,1}'', L_{2,2}''] = [0,127, 0,151] \text{ H}.$$

Wspólne przedziały wartości indukcyjności wynoszą

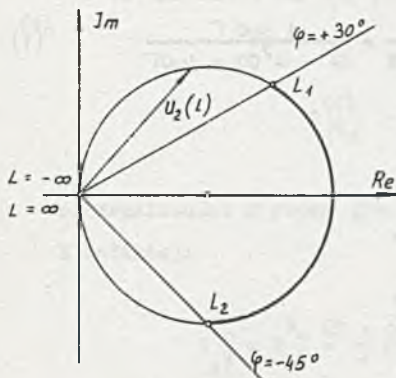
$$L_1 \in [0,025, 0,038] \text{ H}$$

lub

$$L_2 \in [0,148, 0,151] \text{ H}.$$

### Zadanie 5.28

Miejszem geometrycznym końca wektora napięcia  $U_2(L)$  na płaszczyźnie zespolonej przy zmianach wartości  $L$  od  $-\infty$  do  $+\infty$  jest okrąg o promieniu  $0,5 \text{ V}$  i współrzędnych środka  $(0,5, 0)$ . Ograniczenia fazy można dokonać za pomocą prostych wychodzących z początku układu współrzędnych o nachyleniu  $+30^\circ$  i  $-45^\circ$ , jak to przedstawiono na rys. 5.28.1.



Rys. 5.28.1

Wartości graniczne  $L_1$  i  $L_2$  można wyznaczyć następująco:

$$U_2 = |U_2| e^{j\varphi} = \frac{R |U_1| e^{j\varphi_1}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} e^{j\varphi_2}$$

stąd

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0 - \varphi_2 = \arctg\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right).$$

Zatem

$$+30^\circ = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L_1}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)$$

$$-45^\circ = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L_2}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right).$$

Stąd:

$$L_1 = 0,042 \text{ H},$$

$$L_2 = 0,2 \text{ H}.$$

#### Zadanie 5.29

$$L_1 \in [0,042, 0,052] \text{ H},$$

$$L_2 \in [0,148, 0,175] \text{ H}.$$

Zadanie 5.30. W przykładzie zostaną wykorzystane wrażliwości wyższych rzędów dla dokładniejszej aproksymacji funkcji układowej lub zwiększenie kresu górnego wrażliwości małoprzyszostowej. W punkcie 1) zostaną wyznaczone z definicji wrażliwości wyższych rzędów a w 2) metodę obwodów dołączonych. Punkt 3) dotyczy obliczeń kresu górnego wrażliwości, a w 4) określono dokładność aproksymacji funkcji układowej.

Dla obwodu z rys. 5.30 funkcja układowa  $T = U_0$

$$T(j\omega) = U_0 = \frac{1 \cdot ER\omega C}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = \frac{1 \cdot E\omega C \Gamma}{G\Gamma - \omega^2 CG + j\omega C\Gamma} \quad (1)$$

gdzie

$$C = x_1,$$

$$\Gamma = \frac{1}{L} = x_2,$$

$$G = \frac{1}{R} = x_3,$$

a amplituda napięcia wyjściowego

$$|U_0| = \frac{E R \omega C}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} = \frac{E \omega C \Gamma}{\sqrt{(G\Gamma - \omega^2 CG)^2 + (\omega C\Gamma)^2}} \quad (2)$$

Ad 1. Obliczanie wrażliwości z definicji

a) Wrażliwości 1 rzędu

Dla tematowych danych wrażliwości napięcia wyjściowego  $U_o$  na zmiany wartości  $G$ ,  $\Gamma$  i  $C$  obliczane są z zależności [7]:

$$s_{G_o}^U = \frac{U_o}{U_o} \frac{\partial U_o}{\partial G} = \frac{G}{U_o} \frac{-j E \omega C \Gamma (\Gamma - \omega^2 C)}{(G \Gamma - \omega^2 C G + j \omega C \Gamma)^2} = 0$$

$$s_{\Gamma_o}^U = \frac{U_o}{U_o} \frac{\partial U_o}{\partial \Gamma} = s_{\Gamma}^{|U_o|} + j Q_{\Gamma_o}^U = 0 + j$$

$$s_{C_o}^U = \frac{U_o}{U_o} \frac{\partial U_o}{\partial C} = s_C^{|U_o|} + j Q_{C_o}^U = 0 - j.$$

Wynika z nich, że wrażliwości 1 rzędu modułu napięcia wyjściowego na zmiany wartości  $G$ ,  $\Gamma$  i  $C$  są równe zero

$$s_G^{|U_o|} = s_{\Gamma}^{|U_o|} = s_C^{|U_o|} = 0$$

natomiast wrażliwości fazy są równe

$$Q_G^U = 0, \quad Q_{\Gamma}^U = 1 \quad i \quad Q_C^U = -1.$$

Tolerancja amplitudy napięcia wyjściowego wyznaczana jest z zależności

$$t_{|U_o|}^{(1)} = \sum_{i=1}^3 s_{x_i}^{|U_o|} \cdot t_{x_i} = 0 \quad (3)$$

b) Wrażliwości 2 rzędu [25]

Z definicji

$$s_{x_1^2}^U = s_{C^2}^U \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{C^2}{U_o} \frac{\partial^2 U_o}{\partial C^2} = \frac{j \omega C^2 \Gamma^2 G (\omega^2 C - j \omega \Gamma)}{(G \Gamma - \omega^2 C G + j \omega C \Gamma)^3} = -1 + j$$

$$s_{x_2^2}^U = s_{\Gamma^2}^U \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2}{U_o} \frac{\partial^2 U_o}{\partial \Gamma^2} = \dots = -1 - j$$



$$s_{x_2^2}^{U_0} = s_{G^2}^{U_0} \frac{df}{dG} \frac{1}{2} \frac{G^2}{U_0} \frac{\partial^2 U_0}{\partial G^2} = \dots = 0$$

$$s_{x_1 x_2}^{U_0} = s_{C\Gamma}^{U_0} \frac{df}{d\Gamma} \frac{C\Gamma}{U_0} \frac{\partial^2 U_0}{\partial C \partial \Gamma} = \dots = 2$$

$$s_{x_1 x_3}^{U_0} = s_{CG}^{U_0} \frac{df}{dG} \frac{CG}{U_0} \frac{\partial^2 U_0}{\partial C \partial G} = \dots = -1$$

$$s_{x_2 x_3}^{U_0} = s_{\Gamma G}^{U_0} \frac{df}{d\Gamma} \frac{\Gamma G}{U_0} \frac{\partial^2 U_0}{\partial \Gamma \partial G} = \dots = 1.$$

Wrażliwość (drugiego rzędu) amplitudy obliczana jest z zależności [25]

$$s_{x_1^2}^{|T|} \frac{df}{dx_1^2} \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{|T|} \frac{\partial^2 |T|}{\partial x_1^2} = \operatorname{Re}(s_{x_1^2}^T) + \frac{1}{2} (Q_{x_1}^T)^2$$

1

$$s_{x_1 x_j}^{|T|} \frac{df}{dx_1 x_j} \frac{x_1 x_j}{|T|} \frac{\partial^2 |T|}{\partial x_1 \partial x_j} = \operatorname{Re}(s_{x_1 x_j}^T) + Q_{x_1}^T \cdot Q_{x_j}^T$$

Dla tematowych danych

$$s_{x_1^2}^{|U_d|} = s_{G^2}^{|U_d|} = -\frac{1}{2},$$

$$s_{x_2^2}^{|U_d|} = s_{\Gamma^2}^{|U_d|} = -\frac{1}{2},$$

$$s_{x_3^2}^{|U_d|} = s_{G^2}^{|U_d|} = 0,$$

$$s_{x_1 x_2}^{|U_d|} = s_{C\Gamma}^{|U_d|} = 1,$$

$$s_{x_1 x_3}^{|U_d|} = s_{CG}^{|U_d|} = 0,$$

$$s_{x_2 x_3}^{|U_d|} = s_{\Gamma G}^{|U_d|} = 0.$$

Tolerancja amplitudy napięcia wyjściowego po uwzględnieniu wrażliwości 1 i 2 rzędu aproksymowana jest zależnością

$$t_{|U_o|}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 s_{x_i} |U_o| t_{x_i} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 s_{x_i x_j} |U_o| t_{x_i} t_{x_j}$$

Najgorszy przypadek (gdy  $|t| = |t_{x_1}| = |t_{x_2}| = |t_{x_3}|$ ) wystąpi dla  $t = -t_{x_2} = -t_{x_1}$ , wówczas

$$t_{|U_o|}^{(2)} = -2 t^2. \quad (4)$$

c) Wrażliwości 3 rzędu [25]

Z definicji

$$s_{x_3}^{U_o} = s_{c_3}^{U_o} \text{ df } \frac{1}{6} \frac{c_3^3}{U_o} \frac{\partial^3 U_o}{\partial c_3^3} = 2,$$

$$s_{x_2}^{U_o} = s_{\Gamma_3}^{U_o} \text{ df } \frac{1}{6} \frac{\Gamma_3^3}{U_o} \frac{\partial^3 U_o}{\partial \Gamma_3^3} = 2,$$

$$s_{x_3}^{U_o} = s_{c_3}^{U_o} \text{ df } \frac{1}{6} \frac{c_3^3}{U_o} \frac{\partial^3 U_o}{\partial c_3^3} = 0,$$

$$s_{x_1 x_2}^{U_o} = s_{c_2 \Gamma}^{U_o} \text{ df } \frac{1}{2} \frac{c_2 \Gamma}{U_o} \frac{\partial^3 U_o}{\partial c_2 \partial \Gamma} = -2 - 3j,$$

$$s_{x_1 x_3}^{U_o} = s_{c_2 c}^{U_o} \text{ df } \frac{1}{2} \frac{c_2 c}{U_o} \frac{\partial^3 U_o}{\partial c_2 \partial c} = -2 + j,$$

$$s_{x_2 x_1}^{U_o} = s_{\Gamma^2 c}^{U_o} \text{ df } \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2 c}{U_o} \frac{\partial^3 U_o}{\partial \Gamma^2 \partial c} = -2 + 3j,$$

$$s_{x_2 x_3}^{U_o} = s_{\Gamma^2 c}^{U_o} \text{ df } \frac{1}{2} \frac{\Gamma^2 c}{U_o} \frac{\partial^3 U_o}{\partial \Gamma^2 \partial c} = -2 - j,$$

$$s_{x_2^2 x_1} \frac{U_0}{x_2^2 x_1} = s_{g^2 c} \frac{U_0}{g^2 c} \frac{d}{d} \frac{1}{2} \frac{g^2 c}{U_0} \frac{\partial^3 U_0}{\partial g^2 \partial c} = 0,$$

$$s_{x_2^2 x_2} \frac{U_0}{x_2^2 x_2} = s_{g^2 \Gamma} \frac{U_0}{g^2 \Gamma} \frac{d}{d} \frac{1}{2} \frac{g^2 \Gamma}{U_0} \frac{\partial^3 U_0}{\partial g^2 \partial \Gamma} = 0,$$

$$s_{x_1 x_2 x_3} \frac{U_0}{x_1 x_2 x_3} = s_{c \Gamma g} \frac{U_0}{c \Gamma g} \frac{d}{d} \frac{c \Gamma g}{U_0} \frac{\partial^3 U_0}{\partial c \partial \Gamma \partial g} = 4.$$

Wrażliwości (trzeciego rzędu) amplitudy obliczane są z zależności [25]

$$s_{x_1}^{|T|} = \text{Re}(s_{x_1}^T) + \frac{1}{2} s_{x_1}^{|T|} (Q_{x_1}^T)^2 + Q_{x_1}^T Q_{x_1}^T,$$

$$s_{x_1^2 x_j}^{|T|} = \text{Re}(s_{x_1^2 x_j}^T) + \frac{1}{2} s_{x_j}^{|T|} (Q_{x_1}^T)^2 + s_{x_1}^{|T|} Q_{x_1}^T Q_{x_j}^T + Q_{x_1 x_j}^T Q_{x_1}^T + Q_{x_1^2 x_j}^T Q_{x_j}^T,$$

$$s_{x_1 x_j x_k}^{|T|} = \text{Re}(s_{x_1 x_j x_k}^T) + s_{x_1}^{|T|} Q_{x_j}^T Q_{x_k}^T + s_{x_j}^{|T|} Q_{x_1}^T Q_{x_k}^T +$$

$$+ s_{x_k}^{|T|} Q_{x_1}^T Q_{x_j}^T + Q_{x_1 x_j}^T Q_{x_k}^T + Q_{x_1 x_k}^T Q_{x_j}^T + Q_{x_j x_k}^T Q_{x_1}^T.$$

Dla tematowych danych

$$s_{x_3}^{|U_0|} = 1, \quad s_{x_2^2 x_1}^{|U_0|} = -1,$$

$$s_{x_2^2}^{|U_0|} = 1, \quad s_{x_2^2 x_3}^{|U_0|} = -1,$$

$$s_{x_3^2}^{|U_0|} = 0, \quad s_{x_3^2 x_1}^{|U_0|} = 0,$$

$$s_{x_1^2 x_2}^{|U_0|} = -1, \quad s_{x_3^2 x_2}^{|U_0|} = 0,$$

$$s_{x_1^2 x_3}^{|U_0|} = -1, \quad s_{x_1 x_2 x_3}^{|U_0|} = 2.$$



Tolerancja amplitudy napięcia wyjściowego po uwzględnieniu wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu aproksymowana jest zależnością

$$t_{|U_o|}^{(3)} = \sum_{i=1}^3 s_{x_i}^{|U_o|} t_{x_i} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 s_{x_i x_j}^{|U_o|} t_{x_i} t_{x_j} + \\ + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=j}^3 s_{x_i x_j x_k}^{|U_o|} t_{x_i} t_{x_j} t_{x_k}.$$

Dla najniekorzystniejszych warunków pracy

$$t = t_C = t_{x_1} = -t_L = -t_{x_2} = -t_G = -t_{x_3},$$

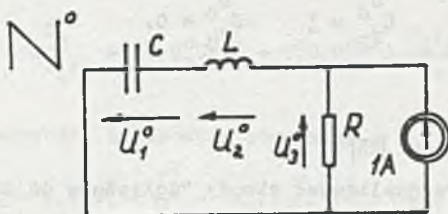
wówczas

$$t_{|U_o|}^{(3)} = -2 t^2 + 4 t^3. \quad (5)$$

## Ad 2. Obliczanie wrażliwości metodą obwodów dołączonych

### a) Wrażliwości 1 rzędu [7]

Do obliczenia wrażliwości 1 rzędu napięcia wyjściowego  $U_o$  na zmiany admitancji gałęzi metodą obwodów dołączonych należy oprócz obwodu podstawowego  $N$  (rys. 5.30) rozwiązać obwód dołączony  $N^o$  (rys. 5.30.1) zasilany SPM 1 A dołączoną do zacisków wyjściowych.



Rys. 5.30.1

Admitancje gałęzi są równe

$$y_1 = j\omega C = j x_1$$

$$y_2 = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega} = -j x_2$$

$$y_3 = G = x_3,$$

a wrażliwości obliczane są (dla  $\omega = \text{const}$ ) z zależności [7]

$$s_{x_1}^{U_0} = s_{y_1}^{U_0} = -U_1 U_1^0 \frac{y_1}{U_0}$$

$$s_{x_2}^{U_0} = s_{y_2}^{U_0} = -U_2 U_2^0 \frac{y_2}{U_0}$$

$$s_{x_3}^{U_0} = s_{y_3}^{U_0} = -U_3 U_3^0 \frac{y_3}{U_0}$$

gdzie:

$U_1$  - napięcie na i-tym elemencie w obwodzie N,

$U_1^0$  - napięcie na i-tym elemencie w obwodzie  $N_0$ .

Ponieważ:

$$U_1 = -j V, U_2 = +j V, U_3 = 1 V,$$

oraz

$$U_1^0 = +j V, U_2^0 = -j 0 \quad \text{i} \quad U_3^0 = 0$$

więc

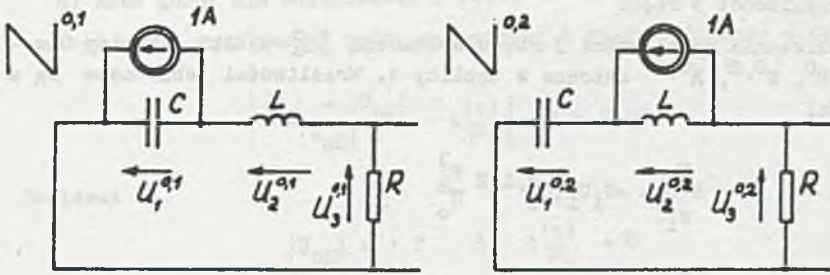
$$s_{y_1}^{U_0} = -(-j)(+j) \frac{1}{1} = -j$$

$$s_{y_2}^{U_0} = j \quad s_{y_3}^{U_0} = 0.$$

b) Wrażliwości 2 rzędu [25]

Należy dodatkowo przeanalizować obwody "dołączone do dołączonych" [25]  $N^{0,1}$ ,  $N^{0,2}$  i  $N^{0,3}$ , tzn. obwody zasilane przez SPM 1 A podłączoną równolegle kolejno do 1, 2 i 3 elementu. Ponieważ  $N^{0,3} = N^0$  (element 3 podłączony jest do zacisków wyjściowych a obwód składa się z dwójników), wystarczy rozwiązać obwody  $N^{0,1}$  i  $N^{0,2}$  (rys. 5.30.2) z SPM 1 A dołączoną równolegle do  $y_1$  i  $y_2$ .

Wyniki analizy obwodów  $N$ ,  $N^0$ ,  $N^{0,1}$  i  $N^{0,2}$  zebrano w tablicy 1.



Rys. 5.30.2

Tablica 1

Obwód	Napięcie na i-tym elemencie		
	i = 1	i = 2	i = 3
N	- j	+ j	1
$N^0 = N^{0,3}$	+ j	- j	0
$N^{0,1}$	1 - j	- 1	+ j
$N^{0,2}$	- 1	1 + j	- j

Wrażliwości 2 rzędu oblicza się z zależności [25]

$$S_{y_1}^{U_o} = U_1 U_1^0 U_1^{0,1} \frac{y_1^2}{U_o}$$

$$S_{y_1 y_k}^{U_o} = (U_1 U_k^0 U_k^{0,1} + U_1^0 U_k U_k^{0,k}) \frac{y_1 y_k}{U_o}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy

$$S_{y_1}^{U_o} = U_1 U_1^0 U_1^{0,1} \frac{y_1^2}{U_o} = (-j)(+j)(1-j) \frac{-1}{1} = -1 + j$$

$$S_{y_2}^{U_o} = -1 - j; \quad S_{y_3}^{U_o} = 0;$$

$$S_{y_1 y_2}^{U_o} = [(-j)(-j)(-1) + (j)(j)(-1)] \frac{1(-1)}{1} = 2$$

$$S_{y_1 y_3}^{U_o} = -j; \quad S_{y_2 y_3}^{U_o} = j.$$



c) Wrażliwości 3 rzędu

Do obliczenia wrażliwości 3 rzędu wystarczą [25] wyniki analizy obwodów  $N$ ,  $N^0$ ,  $N^{0,2}$ ,  $N^{0,2}$  zebrane w tablicy 1. Wrażliwości obliczane są z zależności

$$S_{y_1}^{U_0} = -U_1 U_1^0 (U_1^{0,1})^2 \frac{y_1^3}{U_0}$$

$$S_{y_1 y_k}^{U_0} = -(U_1 U_1^{0,1} U_k^{0,1} + U_1 U_1^0 U_k^{0,1} + U_1 U_1^{0,1} U_k^{0,k} U_k^{0,1} + U_1 U_1^{0,1} U_k^{0,k} U_k^{0,1}) \frac{y_1^2 y_k}{U_0}$$

$$S_{y_1 y_k y_l}^{U_0} = -[U_1 (U_k^{0,1} U_l^{0,1} U_1^{0,1} + U_k^{0,1} U_l^{0,k} U_1^{0,k}) + U_1^0 (U_k^{0,k} U_l^{0,k} U_1^{0,1} + U_k^{0,k} U_l^{0,k} U_1^{0,k}) + U_1^0 (U_k^{0,k} U_l^{0,k} U_1^{0,1} + U_k^{0,k} U_l^{0,k} U_1^{0,k})] \frac{y_1 y_k y_l}{U_0}$$

a wyniki są identyczne z rezultatami uzyskanymi w punkcie 1).

Ad 3. Kres górny wrażliwości małoprzyrostowych [25]

Jest to taka wartość tolerancji elementów, przy której błąd aproksymacji nie przekracza zadanej wartości  $\xi = a$ . W tym przykładzie przyjęto  $\xi = 5\%$ .

Rozpatrzmy najgorsze warunki pracy, wówczas

$$C = C_0 (1+t) \quad (6)$$

$$\Gamma = \Gamma_0 (1-t) \quad (7)$$

$$G = G_0 (1-t) \quad (8)$$

gdzie indeks "o" oznacza wartość nominalną elementu.

Po podstawieniu (6), (7), (8) do (2) i uwzględnieniu wartości liczbowych otrzymamy

$$|U_0| = \frac{1+t}{\sqrt{1+2t+5t^2}} \quad (9)$$

a) Kres górny dla wrażliwości 1 rzędu

Kres górny wrażliwości małoprzyrostowej 1 rzędu obliczamy z zależności

$$\left| \frac{|U_o| - |U_{oN}|}{|U_{oN}|} - t^{(1)}_{|U_o|} \right| = a = 0,05$$

Ponieważ

$$|U_{oN}| = 1 \text{ V} \quad \text{ i } \quad t^{(1)}_{|U_o|} = 0$$

więc

$$\frac{1 + t}{\sqrt{1+2t+5t^2}} = 0,95$$

a

$$t^{(1)}_{1/2} = \begin{cases} -14,1\% \\ +19,7\% \end{cases}$$

Przyjmujemy, że górny kres tolerancji (dla wrażliwości 1 rzędu) dla którego błąd aproksymacji nie przekracza 5% wynosi  $t^{(1)} = \pm 14\%$ .

b) Kres górny dla wrażliwości 2 rzędu

Obliczmy go z zależności

$$\left| |U_o| - 1 - t^{(2)}_{|U_o|} \right| = 0,05.$$

Po podstawieniu (4) i (9) otrzymamy równanie

$$\frac{1 + t}{\sqrt{1+2t+5t^2}} - 1 + 2t^2 = \pm 0,05.$$

którego rozwiązaniem jest

$$t^{(2)} = \begin{cases} -28\% \\ +25\% \end{cases}$$

Górny kres tolerancji (dla wrażliwości 2 rzędu) dla którego błąd aproksymacji nie przekracza 5% wynosi  $t^{(2)} = \pm 25\%$ .

c) Kres górny dla wrażliwości 2 i 3 rzędu

Z zależności

$$\left| |U_d| - 1 - t^{(3)}_{|U_d|} \right| = 0,05$$

po podstawieniu (5) i (9) otrzymamy

$$\frac{1+t}{\sqrt{1+2t+5t^2}} - 1 + 2t^2 - 4t^3 = \pm 0,05$$

a po rozwiązaniu

$$t^{(3)} = \begin{cases} -31\% \\ +37\% \end{cases}$$

Górny kres tolerancji (dla wrażliwości 3 rzędu) dla którego błąd aproksymacji nie przekracza 5% wynosi  $t^{(3)} = \pm 31\%$ .

Im wyższy rząd wrażliwości użyto do aproksymacji zmian funkcji układowej tym wyższy jest kres górny dopuszczalnych tolerancji wartości elementów.

#### Ad 4. Wpływ rzędu wrażliwości na dokładność aproksymacji [25]

Prześledźmy wpływ rzędu wrażliwości na dokładność aproksymacji zmian funkcji układowej dla tolerancji elementów  $t = 14\%$ . Wyniki zebrano w tabelicy 2.

Tablica 2

Tolerancja funkcji układowej spowodowana 14% rozrzutem parametrów obliczona			
dokładnie $t_d = -2,89\%$	z uwzględnieniem wrażliwości 1 rzędu $t^{(1)} = 0\%$	z uwzględnieniem wrażliwości 1 i 2 rzędu $t^{(2)} = -3,92\%$	z uwzględnieniem wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu $t^{(3)} = -2,82\%$
	$t_d - t^{(1)} = -2,89\%$	$t_d - t^{(2)} = 1,03\%$	$t_d - t^{(3)} = -0,06\%$

W dolnym wierszu tablicy 2 widać jak maleje błąd aproksymacji, gdy uwzględnimy wrażliwości wyższych rzędów.



Tablica funkcji wykładniczej  $e^{-x}$

x	$e^{-x}$	x	$e^{-x}$
0,00	1,000	1,40	0,247
0,05	0,951	1,50	0,223
0,10	0,905	1,60	0,202
0,15	0,861	1,70	0,183
0,20	0,819	1,80	0,165
0,25	0,779	1,90	0,150
0,30	0,741	2,00	0,135
0,35	0,705	2,10	0,123
0,40	0,670	2,20	0,111
0,45	0,638	2,30	0,100
0,50	0,607	2,40	0,091
0,55	0,577	2,50	0,082
0,60	0,549	2,60	0,074
0,65	0,522	2,70	0,067
0,70	0,497	2,80	0,061
0,75	0,472	2,90	0,055
0,80	0,449	3,00	0,050
0,85	0,427	3,50	0,030
0,90	0,407	4,00	0,018
0,95	0,387	4,50	0,011
1,00	0,368	5,00	0,007
1,10	0,333	5,50	0,004
1,20	0,301	6,00	0,002
1,30	0,273	7,00	0,001



Tablica transformat Laplace'a funkcji czasowych

Lp.	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
5	$1 - e^{-at}$	$\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$
6	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$(1 - at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{a_2 - a_1} (e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t})$	$\frac{1}{(s+a_1)(s+a_2)}; a_1 \neq a_2$
9	$\frac{1}{a_1 - a_2} (a_1 e^{-a_1 t} - a_2 e^{-a_2 t})$	$\frac{s}{(s+a_1)(s+a_2)}; a_1 \neq a_2$
10	$t - \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
11	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$
12	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$
13	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
14	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
16	$\sin(\omega t + \beta)$	$\frac{\omega \cos \beta + s \sin \beta}{s^2 + \omega^2}$
17	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
18	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$



## LITERATURA

1. Allen J., Gumusscy M., Holt A.G.J.: Inductance simulation and filter design using a single-pole amplifier approximation, *Electronic Letters*, vol. 14, No 19, September 1978, ss. 629-31.
2. Bolkowski S.: *Elektrotechnika teoretyczna, t. I. Teoria obwodów elektrycznych*. WNT, Warszawa 1982.
3. Calahan D.A.: *Projektowanie układów elektronicznych za pomocą maszyny cyfrowej*. WNT, Warszawa 1978.
4. Cichowska Z., Pasko M.: *Zadania z elektrotechniki teoretycznej*. PWN, Warszawa 1985.
5. Chojcan J., Drygajło A., Karwon L., Kolmer A.: *Zbiór zadań z teorii obwodów II. Skrypty uczelniane nr 1702*, Gliwice 1992.
6. Chojcan J., Drygajło A., Karwan L., Kolmer A.: *Zbiór zadań z teorii obwodów II. Skrypty uczelniane nr 1093*, Gliwice 1982.
7. Chojcan J., Lasek L.: *Metody analizy wrażliwościowej układów elektronicznych*, Skrypty Uczelniane nr 937, Gliwice 1980.
8. Chojcan J.: *Niektóre problemy wrażliwości wyższych rzędów układów elektronicznych*. ZN Pol. Śl., Automatyka z. 88, Gliwice 1987.
9. Desoer Ch.A., Kuh E.S.: *Basic circuit theory*, Mc Graw-Hill. New York 1969.
10. Director S.W., Rohrer R.A.: *Podstawy teorii układów elektrycznych*. PWN, Warszawa 1972.
11. Izydorczyk J.: *PSPICE. Komputerowa symulacja układów elektronicznych*. Helion, Gliwice 1993.
12. Kolmer A.: *Praca dyplomowa*. Instytut Elektroniki Pol. Śl., Gliwice 1973.
13. Lathi B.P.: *Teoria sygnałów i układów telekomunikacyjnych*. PWN, Warszawa 1970.
14. Levinstejn M.L.: *Operatorovy pocet v elektrotechnice*. SNTL, Praha 1977.
15. Osiowski J., Szabatin J.: *Podstawy teorii obwodów, t. II*. WNT, Warszawa 1993.
16. Papoulis A.: *Obwody i układy*. WKŁ, Warszawa 1988.
17. Siddigi M.A., Ahmed M.T.: Realisation of grounded capacitor with operational amplifiers and resistance. *Electronics Letters*, Vol. 14, No 19, September 1978, s. 633.
18. Su K.L.: *Time Domain Synthesis of Linear Networks*. Printice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1971.



19. Szczepanik Cz.: Kompensatory prądu przemiennego. WNT, Warszawa 1976.
20. Wagner K.W.: Rachunek operatorowy i przekształcenie Laplace'a. PWN, Warszawa 1960.
21. Weinberg L.: Network analysis and synthesis, Mc Graw-Hill, 1962.
22. Węgrzyn S.: Rachunek operatorowy. PWN, Warszawa 1960.
23. Wolski W., Uruski M.: Teoria obwodów II. Skrypty Pol. Wrocławskiej, Wrocław 1983.
24. Zagajewski T.: Układy elektroniki przemysłowej. WNT, Warszawa 1978.

