POLITECHNIKA ŚLĄSKA

SKRYPTY UCZELNIANE
Nr 1703

JAN CHOJCAN, ANDRZEJ DRYGAJŁO,
ANDRZEJ KOLMER

ZBIÓR ZADAŃ Z TEORII OBWODÓW III

Wydanie III poprawione

GLIWICE 1992

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

SKRYPTY UCZELNIANE
Nr 1703

JAN CHOJCAN, ANDRZEJ DRYGAJŁO,
ANDRZEJ KOLMER

ZBIÓR ZADAŃ Z TEORII OBWODÓW III

Wydanie III poprawione

GLIWICE 1992

OPINIODAWCA
Doc. dr inż. Zofia Cichowska

REDAKCJA
Eugenia Mandrak

REDAKCJA TECHNICZNA
Alicja Nowacka

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

Skrypt przeznaczony dla studentów
Wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki

PL ISSN 0434-0825

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Kujawska 3, 44-100 Gliwice

Nakl. 500+55 Ark. wyd. 21 Ark. druk. 20,625 Papier offset. kl. III 70x100, 70 g
Oddano do druku 27.03.92 Podpis. do druku 27.03.92 Druk ukończ. we wrześniu 1992
Zam. 133/92 Cena zł 23.100,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA

Przedstawione w zbiorze zadania są ilustracją wykładów i ćwiczeń tablicowych z Teorii Obwodów i Sygnałów dla studentów drugiego roku studiów dziennych i wieczorowych Wydziału Automatyki i Informatyki.

Zbiór może być też wykorzystany przez słuchaczy innych Wydziałów jako pomoc w opanowaniu metod analizy stanów nieustalonych w obwodach nieliniowych i w liniach długich oraz analizy widmowej sygnałów okresowych.

W I części skryptu podano tematy zadań. Pionową kreską na lewym marginesie oznaczono zadania z rozwiązaniami.

Część II zawiera rozwiązania większości zadań i odpowiedzi do pozostałych. Na końcu, jako dodatek, podano wzory umożliwiające obliczenie podstawowych parametrów typowych linii długich, wzory na współczynniki szeregu Fouriera typowych przebiegów okresowych, opis metody diagramów Bergerona oraz literaturę wykorzystaną bezpośrednio lub pośrednio przy pisaniu skryptu.

W każdym z rozdziałów, zadania starano się uporządkować wg rosnącej złożoności problemów oraz metod ich rozwiązania.

Zadania z analizy stanów nieustalonych w obwodach z elementami nieliniowymi zebrano w rozdziale pierwszym. Do ich rozwiązania starano się wybrać najefektywniejsze algorytmy.

Zadania z linii długich umieszczono w rozdziale drugim i szczególną uwagę zwrócono na metody analizy stanów nieustalonych.

Analiza widmowa sygnałów okresowych jest tematem zadań rozdziału trzeciego. W rozdziale tym wykorzystano, oprócz transformaty trygonometrycznej i wykładniczej, dyskretną i szybką transformatę Fouriera (FFT) oraz funkcje Walsha.

W trakcie redagowania zbioru zadań do tekstu mogły wkraść się błędy i nieścisłości, które uszły naszej uwadze. Propozycje i uwagi Czytelników, skierowane do Instytutu Elektroniki Politechniki Śląskiej, pozwoliłyby je w przyszłości usunąć. Z góry serdecznie za nie dziękujemy.

Pragniemy w tym miejscu złożyć podziękowanie prof. Adamowi Macurze i prof. Tadeuszowi Zagajewskiemu za inspirację i słowa zachęty w trakcie pisania niniejszego zbioru.

Osobne podziękowanie składamy Pani doc. dr inż. Marii Jastrzębskiej za recenzję i redaktorowi działu Pani dr inż. Annie Skrzywan-Kosek za trud włożony w zaopiniowanie i wydanie tego skryptu.

Dziękujemy także tym wszystkim, których pomoc i dobra wola przyczyniły się do powstania "Zbioru zadań z teorii obwodów III".

Gliwice, kwiecień 1978 r. Autorzy

PRZEDMOWA DO WYDANIA II

Niniejszy skrypt jest poprawioną wersją "Zbioru zadań z teorii obwodów III" wydanego w 1979 roku.

Gliwice, maj 1982

Autorzy

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

C – pojemność

c_o – pojemność jednostkowa linii

C_2 – pojemność na wyjściu linii

d – długość linii

e – idealne źródło napięcia zmiennego w czasie (SEM e)

E – idealne źródło napięcia stałego (SEM E)

f – częstotliwość

g_o – upływność jednostkowa linii

h – grubość laminatu

h_1 – grubość druku

i – prąd zmienny w czasie

I – idealne źródło prądu stałego (SPM I)

i_1, i_2, I_1, I_2 – prądy na początku i końcu linii

$i(t,x)$ – prąd w odległości x od początku linii w chwili t

I_o, I_p – fala prądowa odbita i padająca

l_o – indukcyjność jednostkowa linii

L – indukcyjność

L_2 – indukcyjność na wyjściu linii

M – współczynnik odbicia od początku linii

N – współczynnik odbicia od końca linii

q – ładunek

r_o – rezystancja jednostkowa linii

R – rezystancja

R_1 – impedancja falowa linii bezstratnej

R_o, R_2 – rezystancja wewnętrzna źródła zasilającego linię i rezystancja obciążenia linii

s – operator

t – czas

t_o - czas, po którym fala dojdzie do końca linii

T - stała czasowa

u - napięcie

U_1, U_2 - napięcie na początku i końcu linii

$U(t,x)$ - napięcie w odległości x od początku linii w chwili t

v - prędkość rozchodzenia się fali wzdłuż linii

V - napięcie

V_o, V_p - fala napięciowa odbita i padająca

w - szerokość ścieżki drukowanej

Z - impedancja

Z_o - impedancja wewnętrzna źródła zasilającego linię

Z_2 - impedancja obciążenia linii

Z_1 - impedancja falowa linii długiej

Z_{we} - impedancja wejściowa

α - współczynnik tłumienia

β - współczynnik przesunięcia

γ - współczynnik przenoszenia linii

ε_r - stała dielektryczna

ρ - rezystywność (opór właściwy) przewodnika

λ - długość fali

τ - stała czasowa

φ - strumień, faza

ω - pulsacja

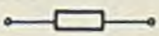
WYKAZ NAJCZĘŚCIEJ UŻYWANYCH SYMBOLI GRAFICZNYCH

idealne źródło napięcia stałego (SEM E)

akumulator (ogniwo)

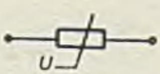
źródło napięcia zmiennego w czasie

idealne źródło prądu (SPM I)

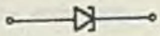


rezystor liniowy

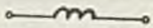
rezystor nieliniowy



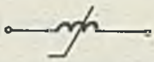
warystor



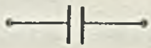
dioda tunelowa



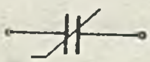
cewka liniowa



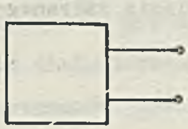
cewka nieliniowa



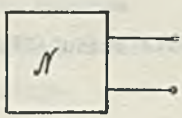
kondensator liniowy



kondensator nieliniowy

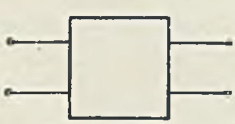


dwójnik

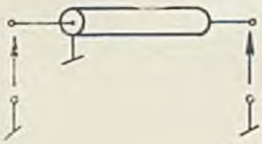


dwójnik nieliniowy

tranzystor p-n-p

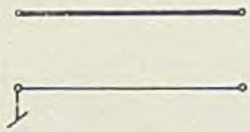


czwórnik



linia długa kablowa

linia długa



linia długa

I. ZADANIA

Rozdział 1

ANALIZA OBWODÓW NIELINIOWYCH W STANIE NIEUSTALONYM

Zadanie 1.1.

Napisać równania ruchu dla obwodu, z elementami nieliniowymi, przedstawionego na rys. 1.1, jeśli nieliniowy trójnik rezystancyjny określają równania

$$v_1 = f_1(v_2, i_1) = 2 + 2v_2 + v_2 i_1^3 - 2i_1^5,$$

$$i_2 = f_2(v_2, i_1) = 4 - i_1^2 v_2 - 2i_1 v_2^3 + 3v_2^5.$$

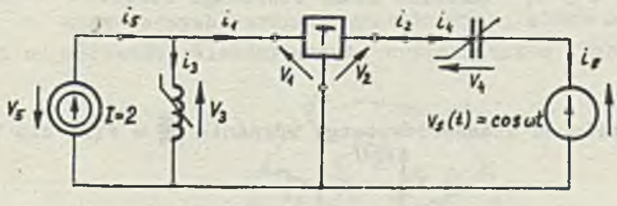
Nieliniową zależność strumienia skojarzonego od prądu w cewce opisuje równanie

$$\varphi = \varphi(i) = 2 - 2i^3 + 5i^5,$$

oraz zależność ładunku od napięcia w kondensatorze. równanie

$$q = q(v) = 1 + 2v - 2v^3 + v^5.$$

Wybrać zbiór zmiennych stanu i sprowadzić równania ruchu do postaci normalnej, czyli równań stanu.



Rys. 1.1.

Zadanie 1.2.

Dla obwodu z zadania 1.1 wybrać zbiór zmiennych stanu i sprowadzić równania ruchu do postaci normalnej, zakładając, że nieliniowa indukcyjność i nieliniowy kondensator opisane są odpowiednio równaniami

$$i_3 = 1 + \varphi_3 + \varphi_3^2, \qquad (1a)$$

$$v_4 = q_4 - q_4^3 \qquad (1b)$$

Zadanie 1.3

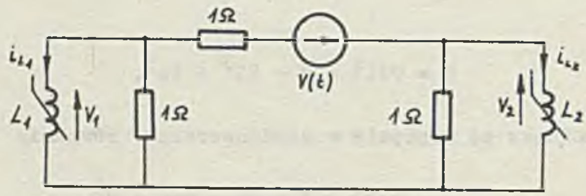
Znaleźć równania stanu dla obwodu przedstawionego na rys. 1.3, przyjmując jako zmienne strumienie φ_1 i φ_2. Nieliniowe indukcyjności opisane są równaniami:

$$L_1 : \varphi_1 = f_1(i_{L_1})$$

$$i_{L_1} = f_1^{-1}(\varphi_1)$$

$$L_2 : \varphi_2 = f_2(i_{L_2})$$

$$i_{L_2} = f_2^{-1}(\varphi_2).$$

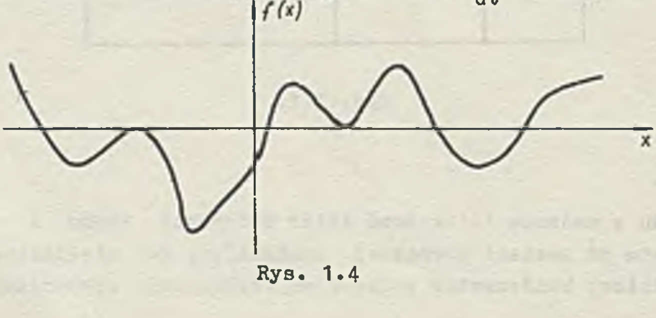


Rys. 1.3

Zakładając, że indukcyjności są liniowe, np.: $\varphi_1 = c \cdot i_{L_1}$, $\varphi_2 = c\, i\, i_{L_2}$ $c = \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}}$ i $v(t) = 5$ V, określić stany równowagi obwodu.

Zadanie 1.4

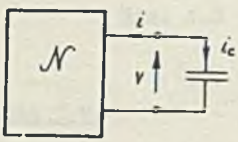
Określić stabilność stanów równowagi równania $\frac{dx}{dt} = f(x)$ dla $f(x)$, jak na rys. 1.4.



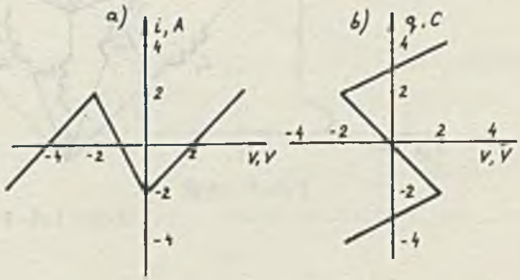
Rys. 1.4

Zadanie 1.5

Dla obwodu pokazanego na rys. 1.5 określić równanie stanu oraz stany równowagi i ich stabilność, przyjmując jako zmienną stanu ładunek q na kondensatorze. Charakterystyka i = G(v) obwodu $\mathcal{N}$ pokazana jest na rys. 1.5.1a, a charakterystyka nieliniowego kondensatora q = q(v) na rys. 1.5.1b.



Rys. 1.5

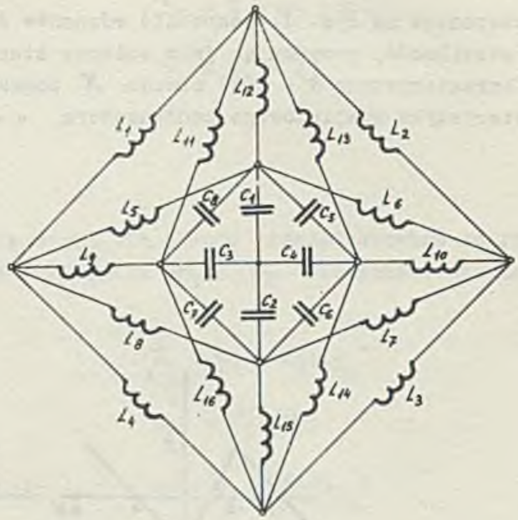


Rys. 1.5.1

Zadanie 1.6

Znaleźć rząd złożoności dla obwodów przedstawionych na rys. 1.6 i 1.6.1. Podstawowym problemem w analizie dynamicznych obwodów jest znalezienie rozwiązania równań ruchu, będących układem nieliniowych równań różniczkowych. Celowa wydaje się klasyfikacja obwodów w zależności od złożoności tychże równań. Rząd złożoności obwodu definiuje się jako maksymalną liczbę n niezależnych warunków początkowych, które można określić w zależności od wielkości elektrycznych, występujących w obwodzie.

Rys. 1.6



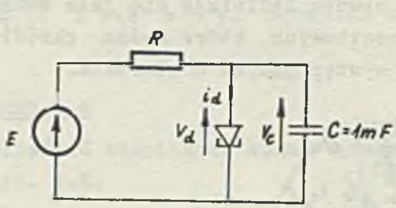
Rys. 1.6.1

Zadanie 1.7

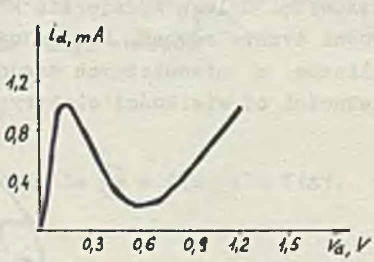
Przedyskutować stabilność stanów równowagi dla obwodu z rys. 1.7 w zależności od rezystancji R. Charakterystykę diody tunelowej przedstawia rys. 1.7.1, a SEM wynosi:

a) E = 1,2 V,

b) E = 0,4 V



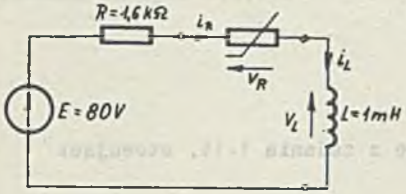
Rys. 1.7



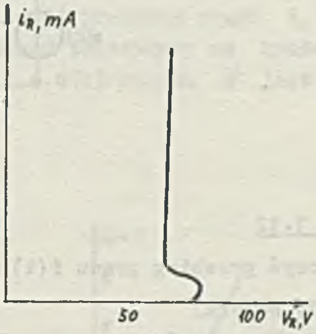
Rys. 1.7.1

Zadanie 1.8

Przedyskutować stabilność stanów równowagi dla obwodu z rys. 1.8. Charakterystyka elementu nieliniowego pokazana jest na rys. 1.8.1.



Rys. 1.8



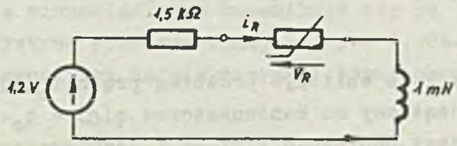
Rys. 1.8.1

Zadanie 1.9

Wykreślić krzywą $f(i_L)$ z zadania 1.8 i przedyskutować stabilność stanów równowagi Q_1, Q_2, Q_3 bezpośrednio na podstawie kryterium stabilności Lapunowa.

Zadanie 1.10

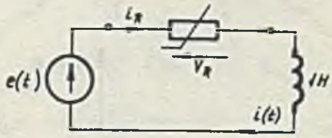
Zbadać stabilność stanów równowagi obwodu z rys. 1.10, w którym w miejsce opornika nieliniowego wstawiono diodę tunelową o charakterystyce takiej, jak w zadaniu 1.7.



Rys. 1.10

Zadanie 1.11

Obliczyć i narysować przebieg prądu i(t) w obwodzie przedstawionym na rys. 1.11. Nieliniowy rezystor ma charakterystykę $v_R = c \cdot i_R^2$, $c = 1V/A^2$, a SEM $e(t) = k \cdot 1(t)$ V. Obliczenia przeprowadzić dla k = 1V i k = 2V.



Rys. 1.11.

Zadanie 1.12

Obliczyć przebieg prądu i(t) w obwodzie z zadania 1.11, stosując:

a) metodę Eulera,
b) metodę Rungego-Kutty.

Porównać dokładność obu rozwiązań.

Zadanie 1.13

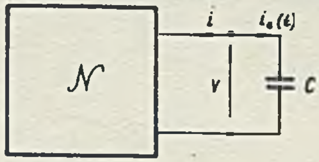
Określić przebieg prądu $i_3(t)$ i napięcia $v_4(t)$ z zadania 1.1 dla $0 \leqslant t \leqslant 2.0$ sek., stosując metodę Eulera przy założeniu, że krok czasowy wynosi 0,1 sek, a $\omega = 1$ rad/s. oraz $i_3(0) = 1A$, a $v_4(0) = 0V$.

Zadanie 1.14

Obliczyć przebieg ładunku q(t) na kondensatorze dla obwodu z zadania 1.5, przyjmując, że w chwili t = 0 ładunek wynosił q(0) = -1C.

Zadanie 1.15

Dla obwodu na rys. 1.15 obliczyć przebieg prądu $i_c(t)$ dla $t \geqslant 0$, zakładając, że ładunek początkowy na kondensatorze $q(\alpha) = q_o$. Charakterystyka $i = G(v)$ obwodu $\mathcal{N}$ jest odcinkowo liniowa i jednoznaczna, przy czym przewodność G_j każdego z jej odcinków ma wartość skończoną i różną od zera.



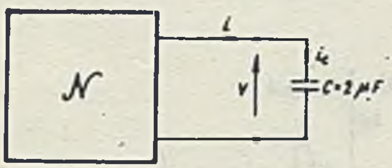
Rys. 1.15

Zadanie 1.16

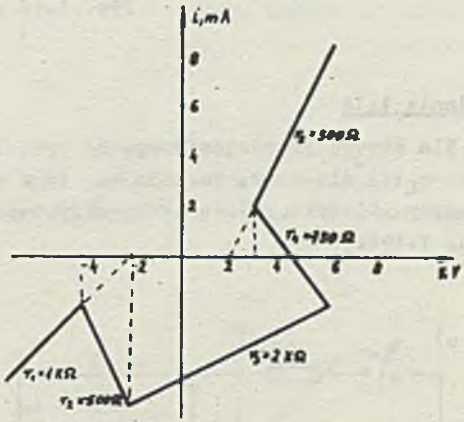
Obliczyć przebieg prądu $i_c(t)$ z zadania 1.15, zakładając, że charakterystyka obwodu $\mathcal{N}$ $i = G(v)$ nie jest jednowartościowa.

Zadanie 1.17

Dla obwodu na rys. 1.17 obliczyć i narysować przebieg prądu $i_c(t)$ i napięcia $v(t)$ dla $t \geqslant 0$, zakładając, że ładunek początkowy na kondensatorze $q(0) = -12 \cdot 10^{-6}$ C. Charakterystyka $i = G(v)$ obwodu $\mathcal{N}$ jest przedstawiona na rys. 1.17.1.



Rys. 1.17



Rys. 1.17.1

Zadanie 1.18

W celu ochrony cewki przed udarem napięciowym (rys. 1.18a) po odłączeniu źródła napięcia sinusoidalnego bocznikuje się ją warystorem o symetrycznej charakterystyce przedstawionej na rys. 1.18b. Podać czasowy przebieg napięcia na cewce przy najniekorzystniejszej chwili otwarcia klucza K.

Dane:

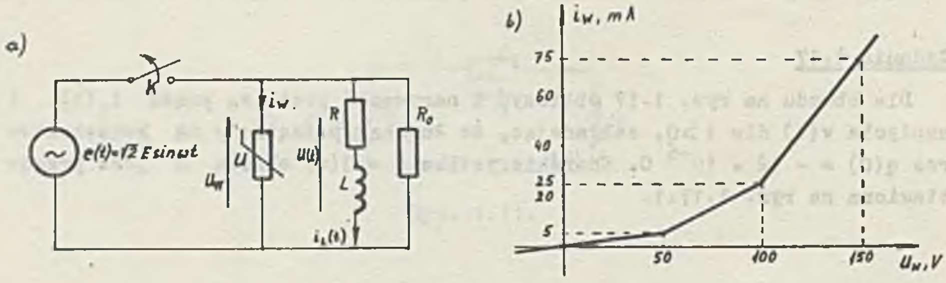
$E = 12V$,

$\omega = 314$ rd/s,

$R = 250\,\Omega$,

R_0 = 2,5 kΩ,

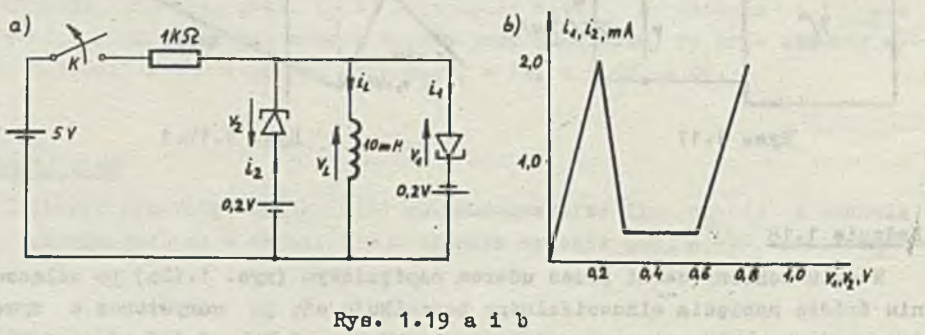
L = 2,5 H.



Rys. 1.18 a i b

Zadanie 1.19

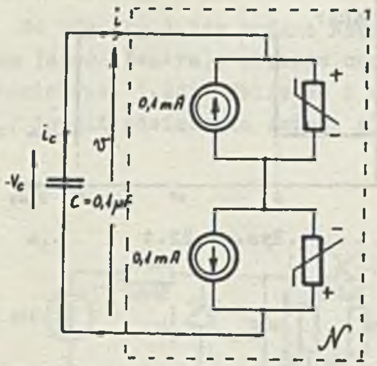
Dla obwodu przedstawionego na rys. 1.19a obliczyć i narysować $i_L(t)$ oraz $v_L(t)$ dla $t \geqslant 0$, zakładając, że w chwili t = 0 wyłącznik K został otwarty. Diody tunelowe są aproksymowane charakterystyką przedstawioną na rys. 1.19b.



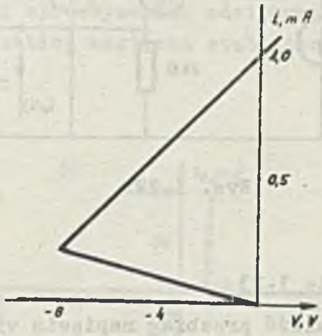
Rys. 1.19 a i b

Zadanie 1.20

Napięcie na kondensatorze w obwodzie przedstawionym na rys. 1.20 równa się 10 V w chwili t = 10 ms.
Obliczyć i narysować przebieg prądu $i_c(t)$ oraz napięcia $v_c(t)$ dla $t \geqslant 10$ ms. Znaleźć taką wartość C, dla której częstotliwość oscylacji w stanie ustalonym równa się 1 kHz. Charakterystykę nieliniowego rezystora przedstawia rys. 1.20.1.



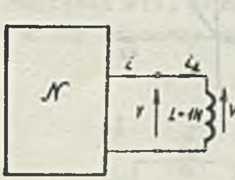
Rys. 1.20



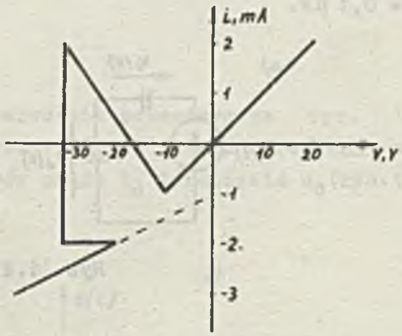
Rys. 1.20.1

Zadanie 1.21

Zakładając, że prąd początkowy płynący przez indukcyjność $i_L(0) = 3$ mA, obliczyć i narysować przebieg $i_L(t)$ oraz $v_L(t)$ dla $t \geq 0$ w obwodzie przedstawionym na rys. 1.21. Charakterystykę $i = G(v)$ obwodu $\mathcal{N}$ przedstawia rys. 1.21.1.



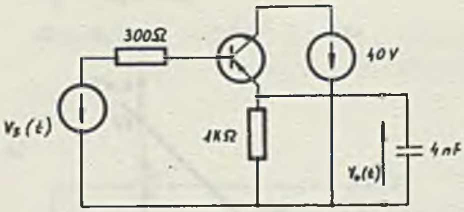
Rys. 1.21



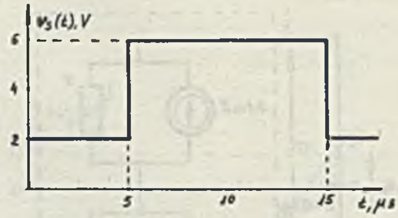
Rys. 1.21.1

Zadanie 1.22

Dla układu z rys. 1.22 i sygnału przełączającego, pokazanego na rys. 1.22.1, obliczyć i narysować przebieg $v_o(t)$. Tranzystor zastąpić uproszczonym schematem Ebersa-Molla przyjmując: $\beta = 60$, $V_{BE_Q} = 0$, $I_{CE_Q} = 0$, a diody rzeczywiste zastąpić idealnymi, jak na rys. 1.22.2 (w rozwiązaniu).



Rys. 1.22.



Rys. 1.22.1

Zadanie 1.23

Znaleźć przebieg napięcia $v_o(t)$ i $v_d(t)$ w obwodzie przedstawionym na rys. 1.23a. Rzeczywista charakterystyka diody jest aproksymowana dwiema prostymi, przedstawionymi na rys. 1.23b, natomiast napięcie $v_s(t)$ ma przebieg prostokątny przedstawiony na rys. 1.23.1. Obliczenia przeprowadzić dla: a) τ = 20 ms, b) τ = 0,2 ms.

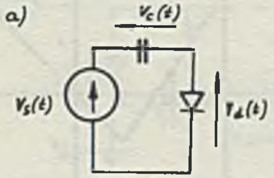
Dane:

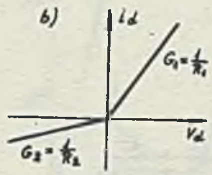
V_o = 1 V,

R = 1 kΩ,

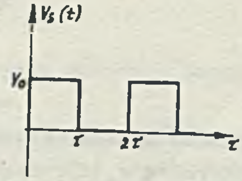
R_2 = 20 kΩ,

C = 0,1 μF.





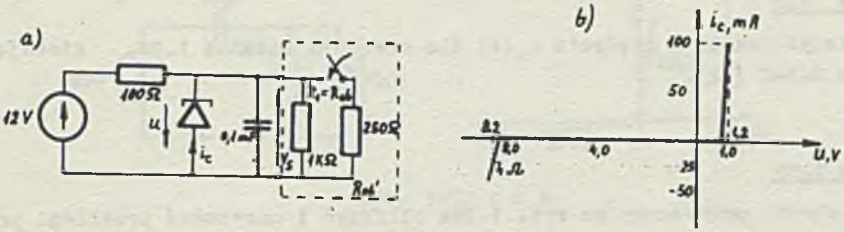
Rys. 1.23 a i b



Rys. 23.1

Zadanie 1.24

Na rysunku 1.24a podano schemat stabilizatora napięcia ze stabilistorem (dioda Zenera), którego charakterystykę aproksymowaną odcinkowo przedstawia rys. 1.24b. Obliczyć i narysować przebieg napięcia stabilizowanego v_s, jeżeli odciążenie zmieni się skokowo.



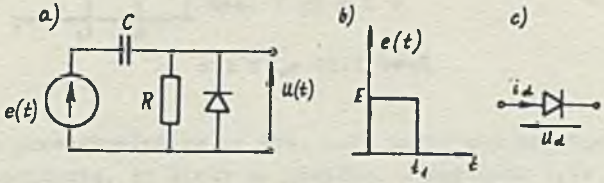
Rys. 1.24 a i b

Zadanie 1.25

Obliczyć, w jakich granicach może zmieniać się rezystancja obciążenia ($R_{ob_n} = R_1 = 1\ k\Omega$), aby wartość chwilowa prądu płynącego przez stabilistor z zadania 1.24 nie przekroczyła wartości $|i_s| = |i_{sm}| = 1\ 25$ mA.

Zadanie 1.26.

Obliczyć przebieg napięcia u(t) w obwodzie pokazanym na rys. 1.26a. Przebieg napięcia e(t) pokazano na rys. 1.26b, a w celu określenia charakterystyki diody dokonano dwóch pomiarów prądu i_d i napięcia u_d(rys.1.26c).



Rys. 1.26 a, b i c

Dane:

$E = 8V$, $t_1 = 0{,}1$ ms, $R = 1\ k\Omega$, $C = 1\ \mu F$, $i_d^{(1)} = 1{,}5$ mA, $i_d^{(2)} = 5$ mA,

$u_d^{(1)} = 0{,}70$ V, $u_d^{(2)} = 0{,}76$ V.

Zadanie 1.27

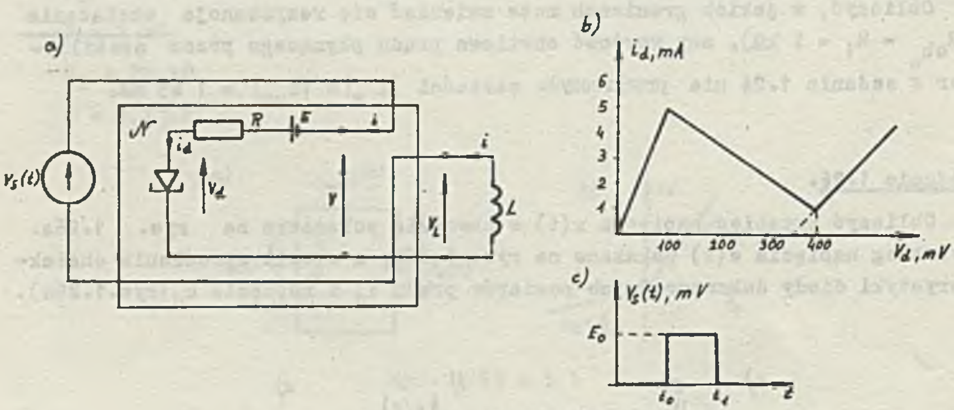
Podać schemat numerycznego obliczenia napięcia u(t) z zadania 1.26 w przedziale czasu $t \in (0, t_m)$ co T sek. Dana jest charakterystyka diody $i_d = I_s(e^{\lambda v_d} - 1)$, SEM e(t), wartości R i C oraz napięcie początkowe v_c^o na kondensatorze.

Zadanie 1.28

Obliczyć przebieg napięcia $u_o(t)$ dla obwodu z zadania 1.26, stosując program NAP-2 [14].

Zadanie 1.29

Dla obwodu pokazanego na rys. 1.29a obliczyć i narysować przebiegi prądu i(t) oraz napięcia $v_L(t)$, jeśli R = 100Ω, E = 450 mV, L = 15 mH. Aproksymowaną charakterystykę diody tunelowej przedstawia rys. 1.29b, a przebieg napięcia $v_s(t)$ rys. 1.29c, dla którego t_o = 50 μs, t_1 = 300 μs, E_o = 200 mV.



Rys. 1.29 a, b i c

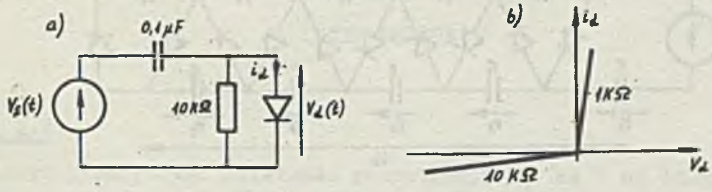
Zadanie 1.30

Dla obwodu z zadania 1.29 określić:

1) minimalną wartość amplitudy impulsu wyzwalającego $v_s(t)$ potrzebną do uzyskania skokowej zmiany napięcia $v_s(t)$,
2) minimalną wartość szerokości impulsu $\delta(\delta = t_1 - t_0)$, zapewniającą pożądany przebieg napięcia $v_L(t)$.

Zadanie 1.31.

Na rys. 1.31a przedstawiono układ stabilizacji poziomu napięcia. Obliczyć przebieg napięcia $v_d(t)$, jeśli dioda aproksymowana jest charakterystyką przedstawioną na rys. 1.31a, b, a napięcie $v_s(t)$ jest sinusoidą o amplitudzie $E_m = 75$ V i częstotliwości $f = 1$ kHz.



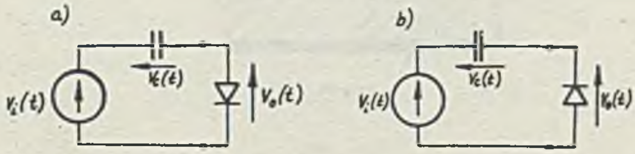
Rys. 1.31 a i b

Zadanie 1.32

Obliczyć napięcie na kondensatorze $v_c(t)$ w obwodzie pokazanym na rys. 1.31a, stosując metodę "obwodu stałego nachylenia".

Zadanie 1.33.

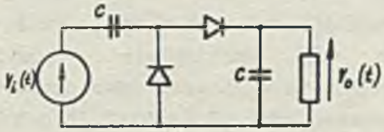
Dla obwodów przedstawionych na rys. 1.33 a i b określić przebieg napięć $v_c(t)$ i $v_o(t)$ zakładając, że diody są idealne, a $v_i(t) = E_m \sin\omega t$.



Rys. 1.33 a i b

Zadanie 1.34

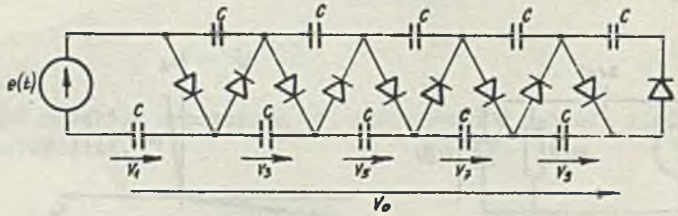
Dla obwodu przedstawionego na rys. 1.34 narysować przebieg napięcia $v_o(t)$, przy założeniu, że diody są idealne, a napięcie $v_i(t) = E_m \sin\omega t$.



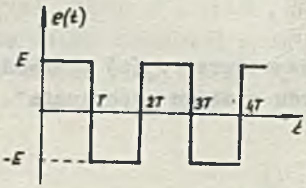
Rys. 1.34

Zadanie 1.35

Obliczyć przebieg napięcia $v_0(t)$ w obwodzie przedstawionym na rys. 1.35. Przebieg napięcia e(t) jest taki, jak na rys. 1.35.1.



Rys. 1.35



Rys. 1.35.1

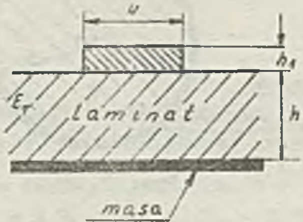
Rozdział 2

LINIE DŁUGIE

Zadanie 2.1

Obliczyć i narysować zależność rezystancji r_0 (na 1 cm długości) ścieżki obwodu drukowanego od szerokości $w \in (0.5, 1.0)$ mm ścieżki (rys. 2.1) w temperaturze 25°C. Ścieżka drukowana wykonana jest z miedzi i ma grubość $h_1 = 70\ \mu m$. O ile procent wzrośnie rezystancja r_0, gdy temperatura wzrośnie do 75°C.

Dane: rezystancja właściwa miedzi $\rho = 0{,}01786\ \Omega\ mm^2/m$ dla 25°C, współczynnik cieplny rezystancji: w temperaturze 25°C 0,385%/°C, w temperaturze 75°C 0,322%/°C.



Rys. 2.1

Zadanie 2.2

Obliczyć wartość impedancji falowej Z_1 linii paskowej (ścieżka obwodu drukowanego). Obliczenia wykonać dla następujących danych (rys. 2.1 z zadania 2.1): szerokość ścieżki $w = 0{,}625$ mm, grubość ścieżki $h_1 = 70\ \mu m$, grubość laminatu $h = 1{,}5$ mm, stała dielektryczna laminatu $\varepsilon_r = 5$.

Założenie: przyjąć, że linia jest bezstratna (jednorodna linia LC-$\overline{ULC}$ z angielskiego "uniformly distributed LC network"). Określić wpływ zmian szerokości ścieżki w oraz grubość laminatu h na wartość impedancji falowej Z_1 oraz parametry jednostkowe linii (l_0, c_0).

Zadanie 2.3

Określić, uwzględniając straty w linii (zadanie 2.1), zależność impedancji charakterystycznej (falowej) Z_1 linii paskowej dla $f = 5$ kHz $\div$ 10 MHz (rys. 2.1).

Dane:

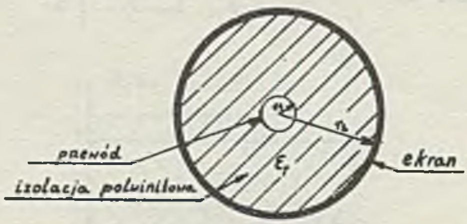
$w = 0{,}625$ mm, $h = 1{,}5$ mm, $h_1 = 0{,}07$ mm, $\varepsilon_r = 5$, $t = 25^{o}C$.

Zadanie 2.4

Obliczyć impedancję falową dla wyższych częstotliwości miedzianego jednożyłowego przewodu koncentrycznego ekranowanego (rys. 2.4) o izolacji polwinitowej oraz wartość rezystancji linii na 1 cm długości przewodu dla niskich częstotliwości.

Dane:

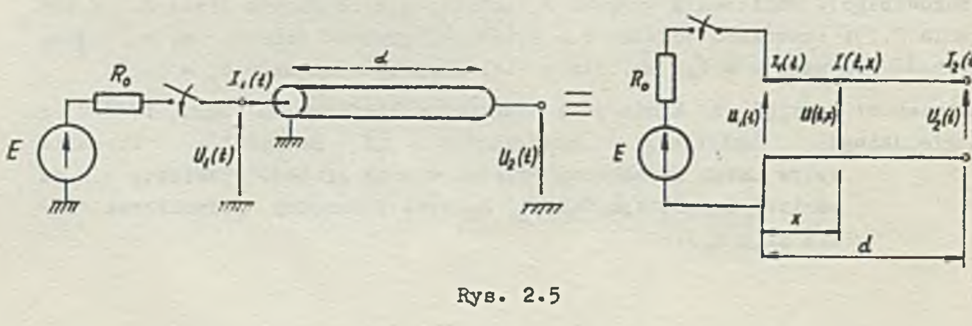
$r_1 = 0{,}2$ mm, $r_2 = 0{,}7$ cm, względna stała dielektryczna polwinitu $\varepsilon_r = 2{,}2$, $\rho = 0{,}01786 \, \Omega \, m^2/m$.



Rys. 2.4

Zadanie 2.5

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia i prądu wzdłuż linii bez strat rozwartej na końcu załączonej w chwili $t = 0$, poprzez opornik R_o, na napięcie stałe E (rys. 2.5).



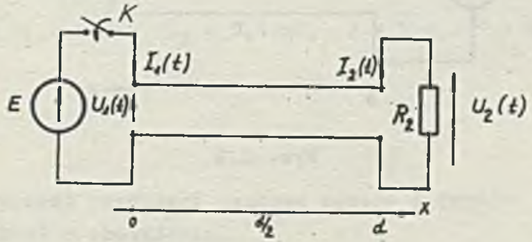
Rys. 2.5

Dane: długość linii d = 1 m, E = 4 V, impedancja falowa linii R_1 = 100Ω, v = 2 . 10^5 km/s, a) R_o = 0,5 R_1, b) R_o = 2 R_1.

Zadanie 2.6

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia i prądu wzdłuż linii, na jej początku, w połowie długości i na końcu (rys. 2.6), po zamknięciu (w chwili t=0) klucza.

Dane: linia bez strat o impedancji falowej R_1 = 100Ω , długość linii d = 0,4 m, v = 2 . 10^5 km/s, a) R_2 = 0,5 R_1, b) R_2 = 2 . R_1, E = 4 V.

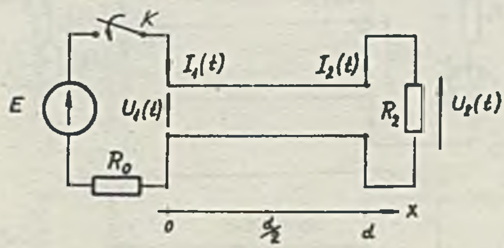


Rys. 2.6

Zadanie 2.7

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć i prądów wzdłuż linii po zamknięciu klucza K (rys. 2.7). Przeanalizować wszystkie przypadki.

Dane: linia bez strat o R_1 = 100Ω , d = 0,4 m, v = 200 000 km/s, E = 4 V, a) R_o = 0,5 R_1, b) R_o = 2 R_1 oraz c) R_2 = 0,5 R_1, d) R_2 = 2 R_1.



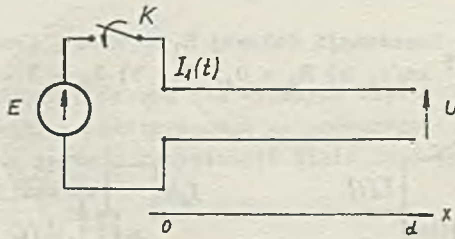
Rys. 2.7

Zadanie 2.8

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia na końcu i prądu na początku linii bezstratnej rozwartej na końcu, załączonej w chwili $t = 0$ na idealną SEM E (rys. 2.8).

Dane:

$E = 4$ V, $R_1 = 100\Omega$, $d = 1$ m, $v = 200\,000$ km/s.



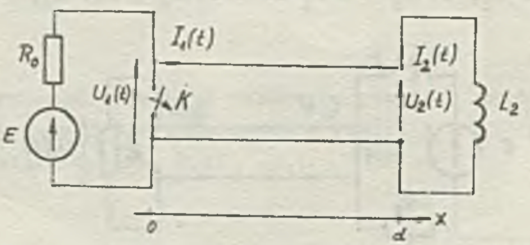
Rys. 2.8

Zadanie 2.9

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii bez strat obciążonej indukcyjnością L_2 po otwarciu klucza K (rys. 2.9).

Dane:

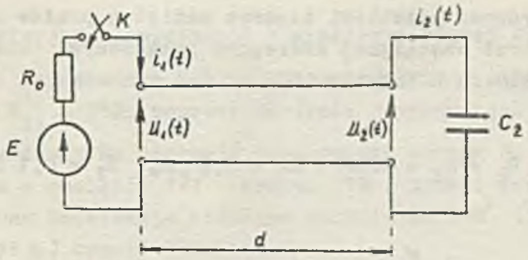
$E = 4$ V, $R_0 = R_1 = 100\Omega$, $L_2 = 0{,}5\,\mu$H, $d = 1$ m, $v = 2 \cdot 10^5$ km/s.



Rys. 2.9

Zadanie 2.10

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii bez strat obciążonej pojemnością C_2, po zamknięciu klucza K (rys. 2.10).



Rys. 2.10

Dane:

$E = 4$ V, $R_o = R_1 = 100\Omega$, $C_2 = 0{,}1$ nF, $d = 1$ m, $v = 2 \cdot 10^5$ km/s.

Zadanie 2.11

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii bez strat o obciążeniu

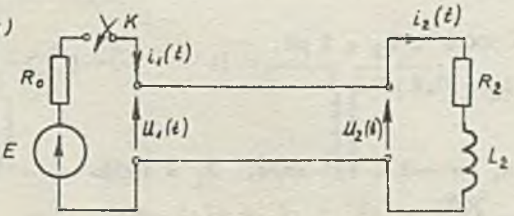
a) szeregowym rezystorowo-indukcyjnym (R_2-L_2) (rys. 2.11.a),

b) równoległym rezystorowo-pojemnościowym ($R_2 \parallel C_2$) (rys. 2.11.b), po zamknięciu klucza K.

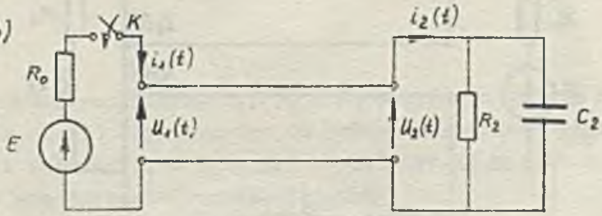
Dane:

$E = 4$ V, $R_o = R_2 = R_1 = 100\Omega$, $L_2 = 1\,\mu$H, $C_2 = 0{,}1$ nF, $d = 1$ m, $v = 2 \cdot 10^5$ km/s.

a)



b)



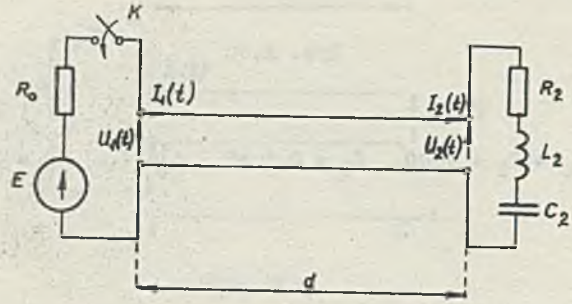
Rys. 2.11 a i b

Zadanie 2.12

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii bez strat obciążonej szeregowo połączonymi elementami R_2 L_2 C_2 po zamknięciu klucza K (rys. 2.12).

Dane:

$E = 4$ V, $R_o = R_1 = R_2 = 100\Omega$, $L_2 = 0,5\ \mu$H, $C_2 = 0,1$ nF, $d = 1$ m, $v = 2 \cdot 10^5$ km/s.



Rys. 2.12

Zadanie 2.13

Bezstratną linię (rys. 2.13) o długości d i impedancji falowej R_1, obciążoną gałęzią oporowo-indukcyjną (R_2 L_2), załączono w chwili $t = 0$ na stałe rzeczywiste źródło napięciowe (E, R_o).

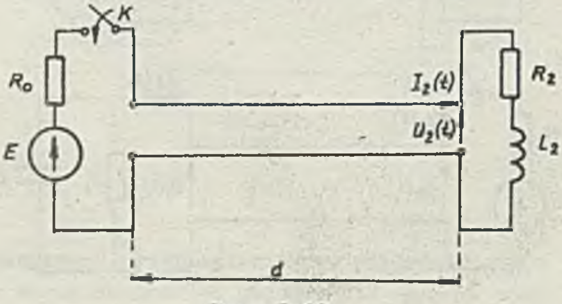
Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia i prądu na końcu linii, gdy:

a) $R_o = R_1$ a $R_2 = 300\Omega$ i $L_2 = 2\ \mu$H,

b) $R_2 = R_o = 50\Omega$ i $L_2 = 0,2\ \mu$H.

Dane:

$E = 4$ V, $d = 1$ m, $v = 2 \cdot 10^5$ km/s, $R_1 = 100\Omega$.

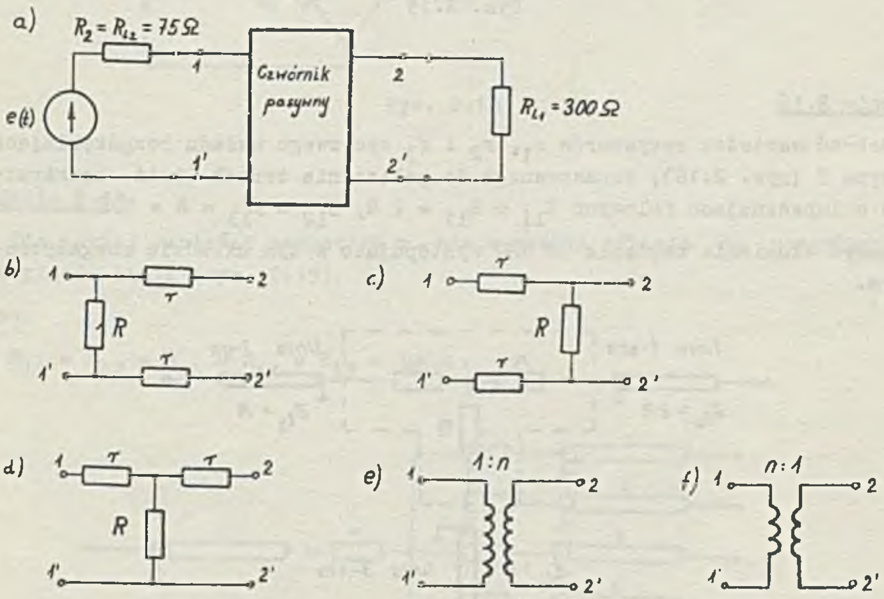


Rys. 2.13

Zadanie 2.14

Antenę telewizyjną o impedancji charakterystycznej $Z_{l_1} = R_{l_1} = 300\Omega$ należy połączyć z bezstratnym kablem koncentrycznym o impedancji charakterystycznej $Z_{l_2} = R_{l_2} = 75\Omega$ poprzez czwórnik pasywny, jak to pokazano na rys. 2.14.a. Czwórnik ma zapewnić dopasowanie anteny do kabla, tzn. impedancja widziana z zacisków 1-1′ wynosi 75Ω, jeżeli 2-2′ obciążone rezystorem 300Ω oraz impedancja widziana z zacisków 2-2′ (jeśli 1-1′ obciążone rezystorem 75Ω) wynosi 300Ω.

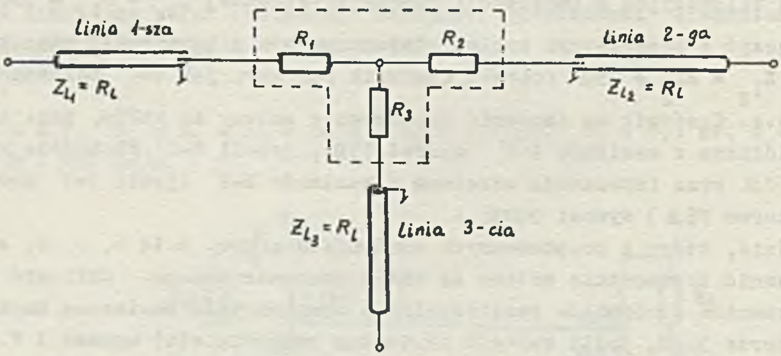
Sprawdzić, który z proponowanych czwórników z rys. 2.14 b, c, d, e i f może zapewnić dopasowanie anteny do kabla koncentrycznego. Obliczyć wartości elementów czwórników realizowalnych oraz wartość skuteczną napięcia na rezystorze 300Ω, jeśli wartość skuteczna napięcia e(t) wynosi 1 V.



Rys. 2.14 a, b, c, d, e, f

Zadanie 2.15

Dobrać wartości rezystorów R_1, R_2 i R_3 oporowego układu rozgałęziającego typu T (rys. 2.15) dopasowanego do połączenia trzech linii o identycznej impedancji falowej $Z_l = R_l = 50\Omega$. Obliczyć tłumienie napięcia (w dB) występujące w tym układzie rozgałęziającym.

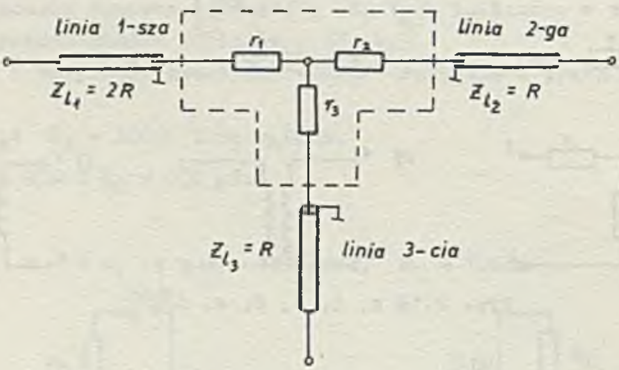


Rys. 2.15

Zadanie 2.16

Dobrać wartości rezystorów r_1, r_2 i r_3 oporowego układu rozgałęziającego typu T (rys. 2.16), dopasowanego do połączenia trzech linii bezstratnych o impedancjach falowych $Z_{l1} = R_{l1} = 2\ R$, $Z_{l2} = Z_{l3} = R = 50\Omega$.

Obliczyć tłumienie napięcia (w dB) występujące w tym układzie rozgałęziającym.



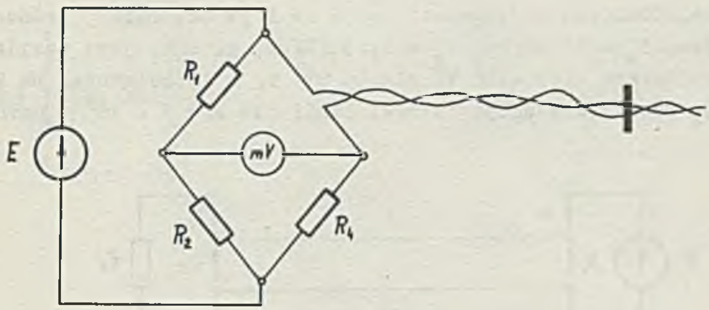
Rys. 2.16

Zadanie 2.17

Czy można dobrać wartości rezystorów r_1, r_2 i r_3 oporowego układu rozgałęziającego z zadania 2.16, jeśli impedancje falowe linii są różne i wynoszą $Z_{l_1} = R_1$, $Z_{l_2} = R_2$ i $Z_{l_3} = R_3$?

Zadanie 2.18

W linii transmisyjnej w postaci dwóch skręconych przewodów o oporności całkowitej 18Ω /km nastąpiło zwarcie w odległości x od źródła (początku linii), (rys. 2.18). Obliczyć x, jeśli mostek pomiarowy jest w równowadze, gdy wartości rezystorów mają następujące wartości: R_1 = 100Ω , R_2 = 200Ω , R_4 = 246Ω .



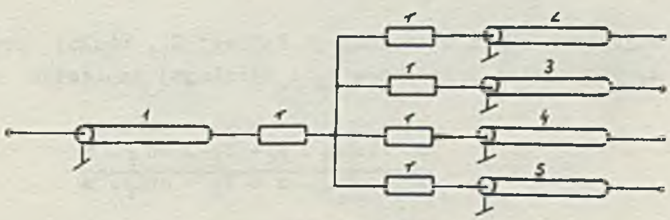
Rys. 2.18

Zadanie 2.19

Dla jakiej wartości rezystora r nie wystąpią odbicia na rozgałęzieniu pięciu linii (rys. 2.19).

Dane:

$R_{11} = R_{12} = R_{13} = R_{14} = R_{15} = 100\Omega$.



Rys. 2.19

Zadanie 2.20

Linia telefoniczna ma następujące parametry (na 1 km długości): rezystancja jednostkowa 18,64Ω /km, indukcyjność jednostkowa 12,42 mH/km, pojemność jednostkowa 0,037 μF/km, konduktancja jednostkowa jest pomijalnie mała. Obliczyć (dla $\omega = 5 \cdot 10^3$ rad/sek):

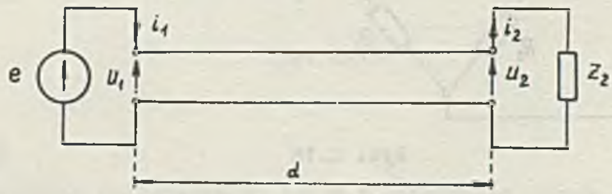
a) impedancję falową linii Z_1,

b) stałą tłumienia α,

c) prędkość propagacji fali v w linii.

Zadanie 2.21

Linia telefoniczna o długości $d = 30$ km i parametrach jednostkowych: $r_0 = 30\Omega/\text{km}$, $l_0 = 18$ mH/km, $c_0 = 0{,}03\,\mu\text{F/km}$, $g_0 \approx 0$, jest zasilana napięciem sinusoidalnym $e(t) = 10\sqrt{2}\sin 5\cdot 10^3 t$, V i obciążona na końcu impedancją Z_2 równą impedancji falowej linii dla $\omega = 5\cdot 10^3$ rad/s (rys. 2.21).



Rys. 2.21

Obliczyć:

a) przebieg czasowy prądu odbiornika oraz

b) tłumienie linii w dB.

Zadanie 2.22

Impedancja wejściowa linii o impedancji falowej Z_1, stałej propagacji γ i długości x, obciążonej impedancją Z_2 i zasilanej napięciem sinusoidalnym jest

$$Z_{we} = Z_1 \cdot \frac{Z_2 \cdot \operatorname{ch}\gamma \cdot x + Z_1 \cdot \operatorname{sh}\gamma \cdot x}{Z_1 \cdot \operatorname{ch}\gamma \cdot x + Z_2 \cdot \operatorname{sh}\gamma \cdot x} \qquad (1)$$

Obliczyć:

a) impedancję wejściową linii bezstratnej zwartej na końcu oraz

b) długość linii x, przy której impedancja wejściowa jest:

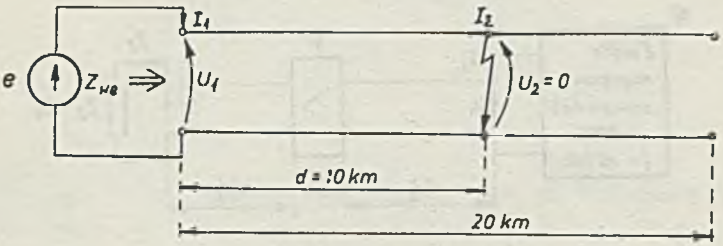
1) równa zero,

2) nieskończenie wielka,

3) równa (co do modułu) wartości $|Z_1|$.

Zadanie 2.23

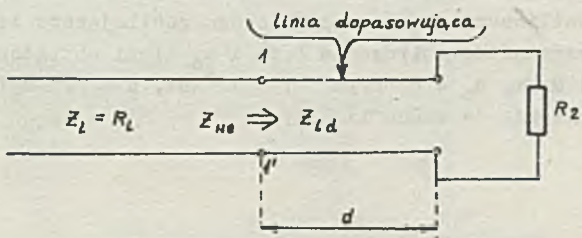
W linii o długości 20 km rozwartej na końcu nastąpiło zwarcie w odległości 10 km od początku. Obliczyć impedancję widzianą z zacisków wejściowych linii dla częstotliwości f, jeśli dla tej samej częstotliwości tłumienie linii wynosi 0,38 dB/km, stała fazowa $\beta = 0{,}87$ rad/km a impedancja falowa linii $Z_1 = 52{,}5\ e^{j5^o}$ (rys. 2.23).



Rys. 2.23

Zadanie 2.24

Bezstratna linia długa o impedancji falowej $Z_1 = R_1 = 50\Omega$ jest obciążona rezystorem $R_2 = 150\Omega$ poprzez linię bezstratną, dopasowującą o stałej fazowej $\beta = 5$ rad/m i impedancji falowej Z_{1d} (rys. 2.24). Obliczyć najmniejszą długość linii dopasowującej oraz wartość Z_{1d} tej linii, przy których nie wystąpi fala odbita na końcu linii o $R_1 = 50\Omega$.

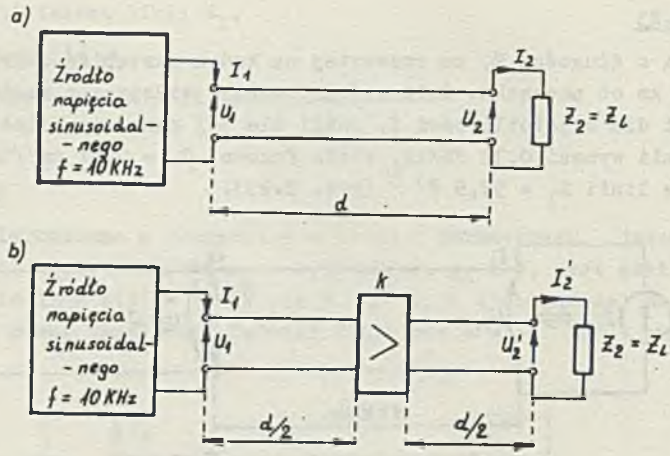


Rys. 2.24

Zadanie 2.25

Linia o długości 12 km ma następujące parametry jednostkowe: $r_o = 25$ Ω/km, $l_o = 0{,}6$ mH/km, $c_o = 40$ nF/km, $g_o \approx 0$. Obliczyć impedancję falową linii dla f = 10 kHz, ponadto przy założeniu, że linia jest obciążona impedancją falową, obliczyć dla f = 10 kHz,

a) długość fali,



Rys. 2.25 a i b

b) prędkość propagacji fali,

c) wzmocnienie wzmacniacza idealnego, który należałoby włączyć w połowie linii, żeby tłumienie na końcu linii (w porównaniu z początkiem) było równe zero (rys. 2.25a i b).

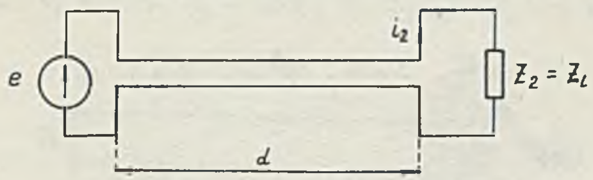
Zadanie 2.26

Wykazać, że dla linii $\overline{\text{URC}}$ (tzn. linii, w której $\omega l_0 \ll r_0$ i $g_0 \ll \omega c_0$) tłumienie i odwrotność długości fali są proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego częstotliwości źródła napięciowego zasilającego linię. Otrzymane wyniki wykorzystać do obliczenia λ, ϑ i t_0 linii obciążonej impedancją falową o $r_0 = 1\ \Omega/\text{m}$, $c_0 = 5$ pF/m, $f = 10^6$ Hz, d = 0,5 m (t_0 - czas, po którym fala dobiegnie do końca linii).

Zadanie 2.27

Linia o długości d = 6 km ma następujące parametry jednostkowe: $r_0 = 28\Omega/\text{km}$, $l_0 = 0{,}2$ mH/km, $c_0 = 80$ nF/km, $g_0 \approx 0$. Obliczyć impedancję falową Z_1 linii. Przyjmując, że linia jest obciążona impedancją falową($Z_2 = Z_1$) i zasilana napięciem sinusoidalnym o amplitudzie $10\sqrt{2}$ V i $f = 5 \cdot 10^3$ Hz (rys. 2.27). Obliczyć:

1) amplitudę prądu odbiornika,
2) długość fali,
3) prędkość propagacji fali.



Rys. 2.27

Zadanie 2.28

Obliczyć, dla jakiej częstotliwości moduł impedancji falowej linii będzie równy 950Ω.

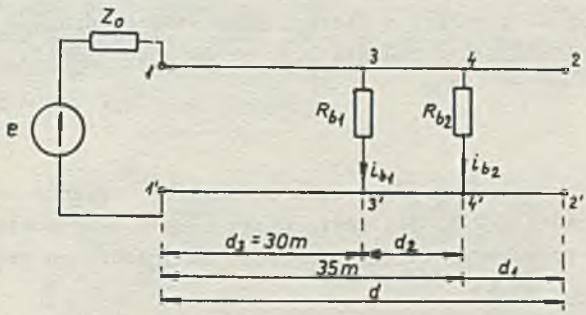
Dane:

$r_o = 25\,\Omega/km$, $l_o = 30$ mH/km, $c_o = 40$ nF/km, $g_o = 6 \cdot 10^{-6}$ s/km.

Zadanie 2.29

Bezstratna linia o impedancji falowej $Z_l = R_l = 600\,\Omega$ i długości 50 m jest zasilana z jednego końca napięciem sinusoidalnym o wartości skutecznej 10 V i częstotliwości 15 MHz poprzez impedancję $Z_o = (200+j\,200)\Omega$ a rozwarta na drugim końcu, ponadto w odległości 30 i 35 m od źródła linia jest bocznikowana rezystorem $R_b = R_{b1} = R_{b2} = 600\,\Omega$ (rys. 2.29).

Obliczyć prądy boczników.



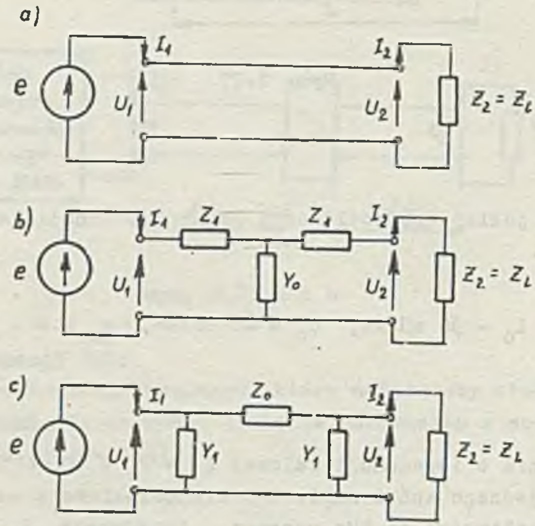
Rys. 2.29

Zadanie 2.30

Obliczyć wartość elementów czwórnika kształtu T (i kształtu Π) równoważnego (w stanie ustalonym przy zasilaniu sinusoidalnym) linii długiej bezstratnej o długości d zasilanej napięciem sinusoidalnym o częstotliwości f i obciążonej impedancją falową (rys. 2.30).

Dane:

$l_o = 5 \frac{nH}{cm}$, $c_o = 0,5 \frac{pF}{cm}$, $f = 5 \cdot 10^8$ Hz, $d = 10$ cm.



Rys. 2.30 a, b i c

Zadanie 2.31

Określić zależność wartości i rodzaju elementów czwórników zastępczych równoważnych linii długiej z zadania 2.30 od długości linii.

Zadanie 2.32

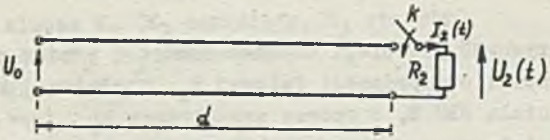
Określić błąd spowodowany przyjęciem do analizy w stanie nieustalonym zamiast linii z zadania 2.30 jej zastępczego układu o elementach skupionych. Obliczenia przeprowadzić dla przypadku załączenia na wejście stałej sem E = 1 V.

Zadanie 2.33

Narysować przebiegi czasowe napięcia i prądu na wyjściu bezstratnej linii załączonej w chwili t = 0 (poprzez klucz K) na opornik R_2 (rys.2.33). Linia jest rozwarta na początku a napięcie wzdłuż linii wynosi U_o.

Dane:

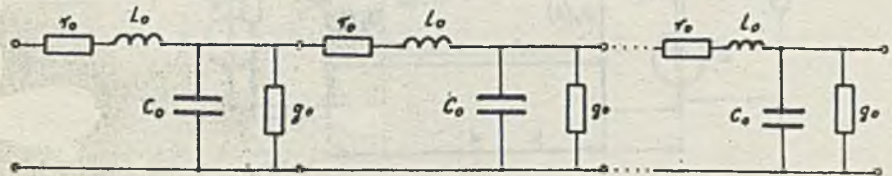
R_1 = 50Ω, U_o = 6 V, R_2 = 100Ω, t_o = 5 ns, c_o = 1 pF/cm.



Rys. 2.33

Zadanie 2.34

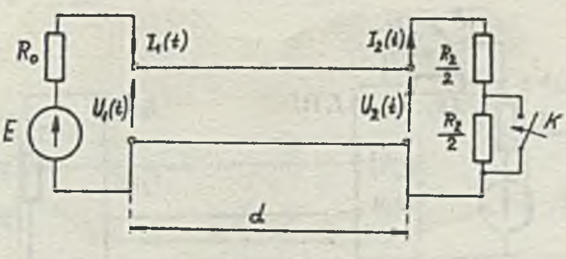
Obliczyć impedancję charakterystyczną linii (rys. 2.34), jeśli l_o = 0, c_o = 0, r_o = 1Ω/m, g_o = 1 S/m.



Rys. 2.34

Zadanie 2.35

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii bez strat (rys. 2.35) po zamknięciu klucza K (tzn. po skokowej zmianie wartości rezystora obciążenia z R_2 do 0.5 R_2). Przed zamknięciem klucza w linii był stan ustalony.



Rys. 2.35

Dane:

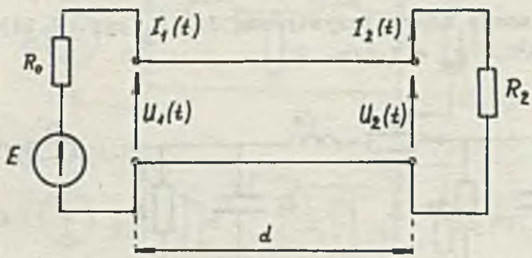
$E = 10$ V, $R_0 = 50\Omega$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 200\Omega$, $t_0 = 5$ ns.

Zadanie 2.36

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii bez strat o impedancji falowej R_1, obciążonej rezystorem R_2 i zasilanej przez stałą SEM E, o oporze wewnętrznym R_0 (rys. 2.36), jeśli stan ustalony został zaburzony przez skokową (w chwili t=0) zmianę wartości R_2 z 50Ω na a) 100Ω, b) 200Ω, c) 0Ω, d) nieskończenie dużą wartość.

Dane:

$E = 10$ V, $R_0 = 50\Omega$, $R_1 = 100\Omega$, $t_0 = 5$ ns.



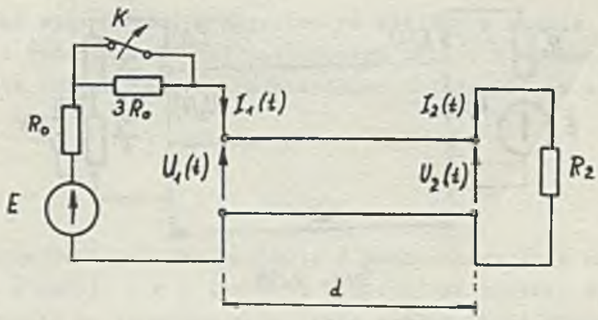
Rys. 2.36

Zadanie 2.37

Narysować przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii bez strat z rys. 2.37, jeśli w chwili t = 0 nastąpi otwarcie klucza K (tzn. skokowa zmiana wartości R_0 z 50Ω na 200Ω).

Dane:

$E = 10$ V, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $t_0 = 5$ ns.



Rys. 2.37

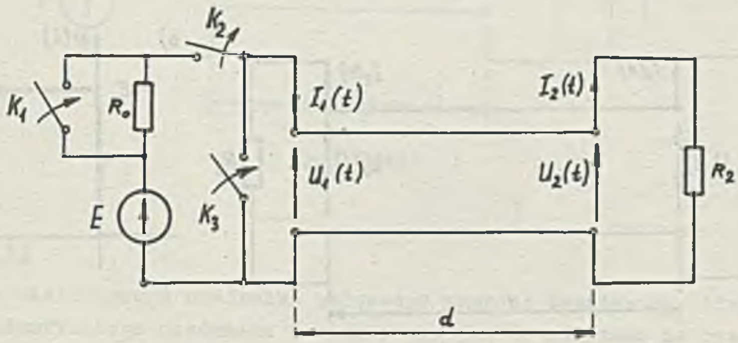
Zadanie 2.38

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii bez strat obciążonej rezystanem R_2 i zasilanej stałą SEM E przez opór R_o (rys. 2.38), jeżeli w chwili t = 0 nastąpiło:

a) zamknięcie klucza K_1 (K_2 zamknięty, K_3 otwarty),
b) otwarcie klucza K_2 (K_3 otwarty),
c) zamknięcie klucza K_3.

Dane:

$E = 10$ V, $R_o = 50\Omega$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $t_o = 5$ ns.



Rys. 2.38

Zadanie 2.39

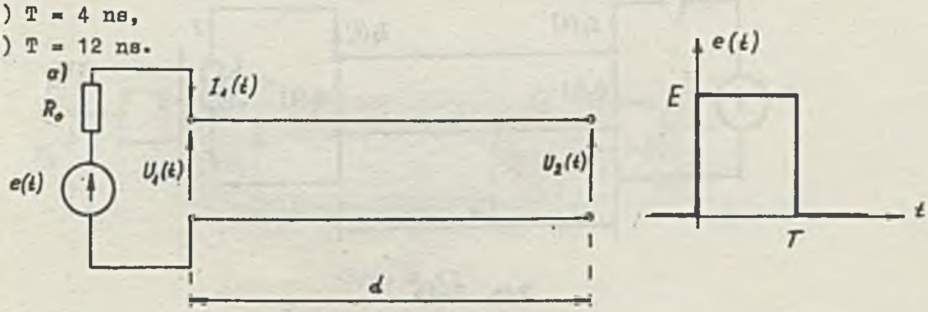
Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia na początku i końcu linii oraz prądu na początku linii rozwartej na końcu i zasilanej impulsem e(t) poprzez rezystor R_o (rys. 2.39 a i b).

Dane:

$E = 10$ V, $R_o = R_1 = 100\Omega$, $t_o = 5$ ns,

dla

a) T = 4 ns,
b) T = 12 ns.



Rys. 2.39.a i b

Zadanie 2.40

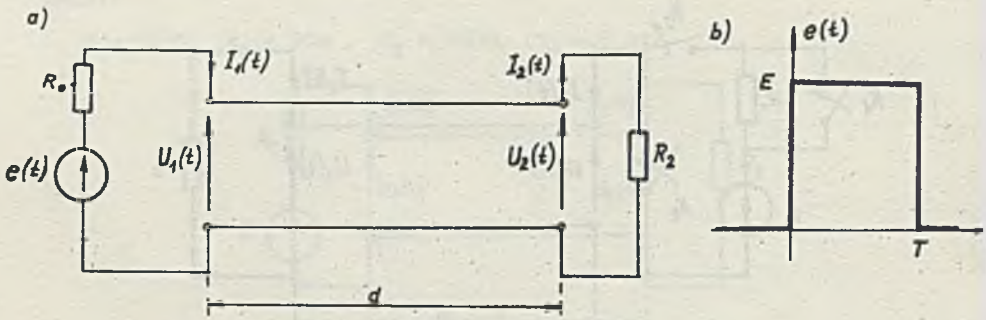
Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii bez strat obciążonej rezystorem R_2 i zasilanej z impulsowego źródła napięcia e(t), poprzez rezystor R_o (rys. 2.40).

Dane:

$E = 10$ V, $R_o = R_1 = 100\Omega$, $t_o = 5$ ns, $T = 4$ ns,

oraz

a) $R_2 = 50\Omega$,
b) $R_2 = 200\Omega$.

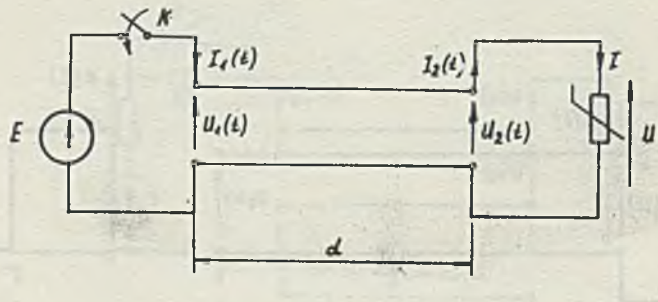


Rys. 2.40

Zadanie 2.41

Obliczyć i narysować przebiegi czasowe napięcia i prądu na wyjściu bezstratnej linii obciążonej elementem nieliniowym opisanym zależnością $U = 5,277 \cdot 10^{-3} I^2$ (U w V, I - w mA) (patrz zadanie 6.34 w [2]) załączonej w chwili t = 0 na stałe napięcie E (rys. 2.41).

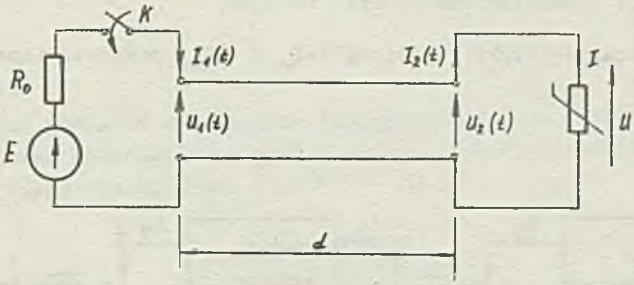
Dane: $E = 5$ V, $R_1 = 50\Omega$, $t_o = 5$ ns.



Rys. 2.41

Zadanie 2.42

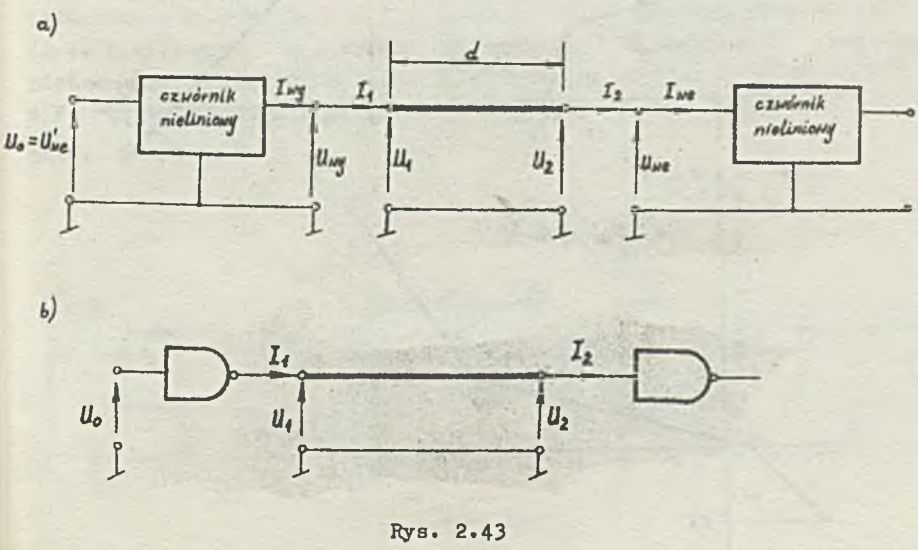
Dla jakiej wartości oporności wewnętrznej R_0 źródła w obwodzie z zadania 2.41 (rys. 2.42) napięcie na elemencie nieliniowym ustali się po 5 ns, jaka będzie wtedy wartość ustalona napięcia na wyjściu linii?



Rys. 2.42

Zadanie 2.43

Wyjście nieliniowego czwórnika połączono poprzez bezstratną linię z wejściem identycznego czwórnika nieliniowego jak to pokazano na rys.2.43a (uproszczony model przesyłania sygnału między "bramkami TTL" [10] - rys. 2.43b). Charakterystyki nieliniowych czwórników przy przyjęciu oznaczeń, jak na rys. 2.43.1, podano na rys. 2.43.2.



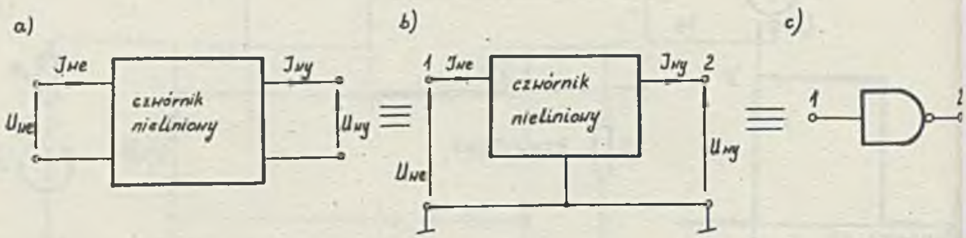
Rys. 2.43

Czwórnik posiada dwie charakterystyki wyjściowe dla napięć:

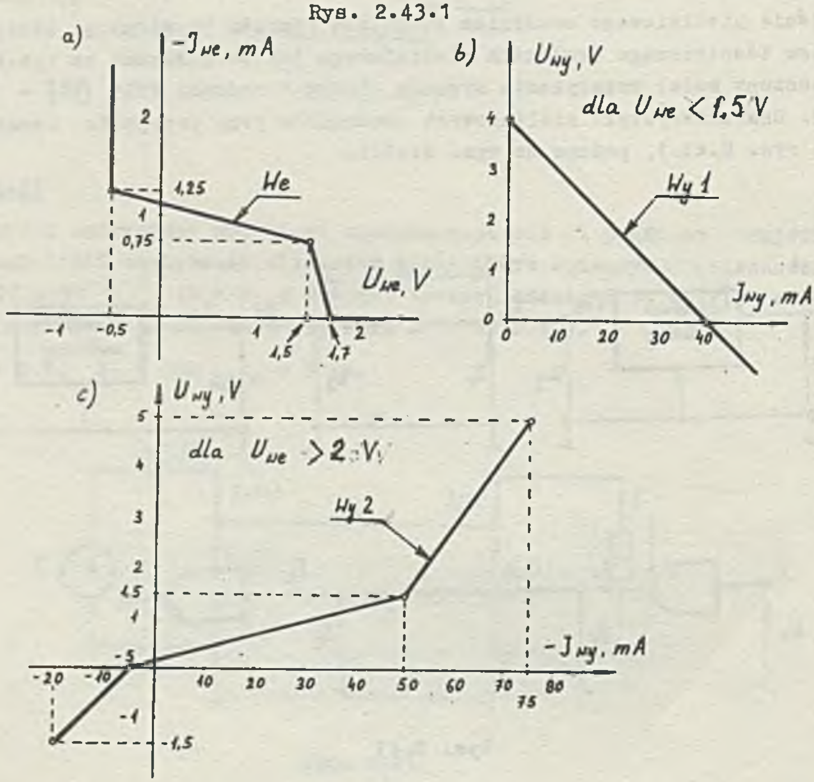
1° $U_{we} > 2$ V wyjście czwórnika opisuje charakterystyka $U_{wy} - I_{wy}$ przedstawiona na rys. 2.43.2b, natomiast dla

2° $U_{we} < 1,5$ V wyjście czwórnika opisuje charakterystyka $U_{wy} - (-I_{wy})$ przedstawiona na rys. 2.43.2c,

oraz jedną charakterystykę wejściową $(-I_{we}) - U_{we}$ przedstawioną na rys. 2.43.2a.



Rys. 2.43.1



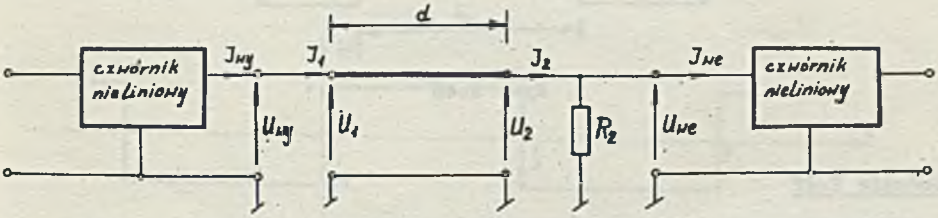
Rys. 2.43.2

Jakie będą przebiegi czasowe napięć $U_1(t)$ i $U_2(t)$ (na początku i końcu linii) po zmianie (w chwili t=0) wartości napięcia U_o (rys. 2.43a) a) z 0,15 V (wartość była podawana przez czas nieskończenie długi) do 4 V, a jakie przy zmianie b) z 4 V do 0,15 V?

Dane: impedancja charakterystyczna linii R_l = 50Ω, d = 1 m, v = 20 cm/ns.

Zadanie 2.44

Czy można poprawić dopasowanie obciążenia do linii w obwodzie z zadania 2.43 przez dołączenie na wyjściu linii, równoległe do obciążenia, dodatkowego rezystora R_2 (rys. 2.44)?

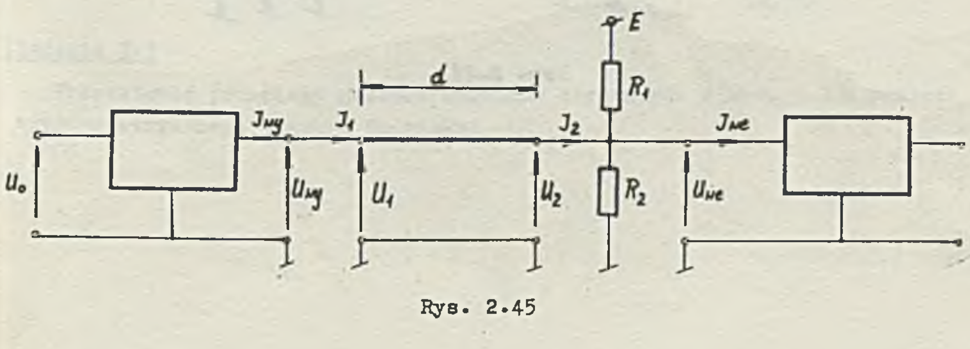


Rys. 2.44

Zadanie 2.45

Dobrać wartości rezystorów R_1 i R_2 obwodu dopasowującego (dla U_2=3 V) dołączonego na wyjściu linii z zadania 2.43 (przedstawionego na rys. 2.43 (rys. 2.45)) oraz dla dobranych wartości R_1 i R_2 sporządzić wykresy napięć na początku i końcu linii przy skokowej zmianie U_o a) z 0,15 V do 4 V, b) z 4 V do 0,15 V.

Dane: E = 5 V.



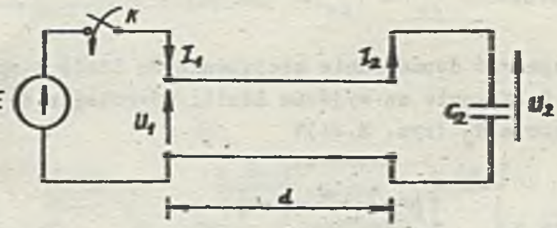
Rys. 2.45

Zadanie 2.46

Obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia na wyjściu bezstratnej linii obciążonej kondensatorem C_2 (rys. 2.46) i załączonej na wyjściu (w chwili t=0) na idealną SEM E.

Dane:

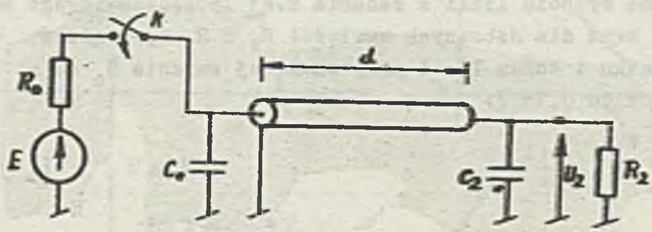
$E = 5$ V, $R_1 = 100\Omega$, czas opóźnienia linii $t_o = 5$ ns, $C_2 = 10$ pF.



Rys. 2.46

Zadanie 2.47

Obliczyć czas, po którym (od chwili zamknięcia klucza K) napięcie na rezystorze R_2 (rys. 2.47) narośnie do połowy wartości ustalonej. Linia bezstratna jest obciążona rezystorem $R_2 = R_1 = 100\Omega$, opór wewnętrzny źródła $R_o = R_1$ i SEM E=5 V oraz czas opóźniania $t_o = 5$ ms. Wejście i wyjście linii zabocznikowano pojemnościami $C_o = C_2 = 50$ pF.



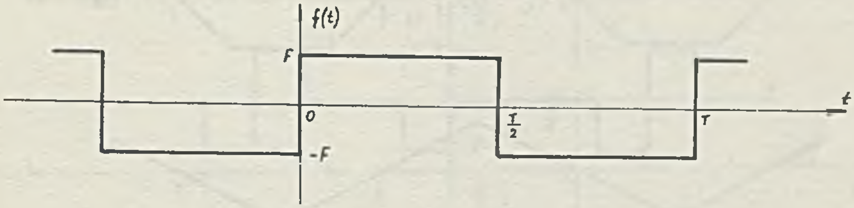
Rys. 2.47

Rozdział 3

ANALIZA WIDMOWA SYGNAŁÓW OKRESOWYCH

Zadanie 3.1

Sygnał okresowy o przebiegu czasowym f(t), podanym na rys. 3.1, aproksymować funkcją $c_1 \sin \omega_1 t$ o pulsacji $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ tak, aby średni błąd kwadratowy aproksymacji był minimalny.



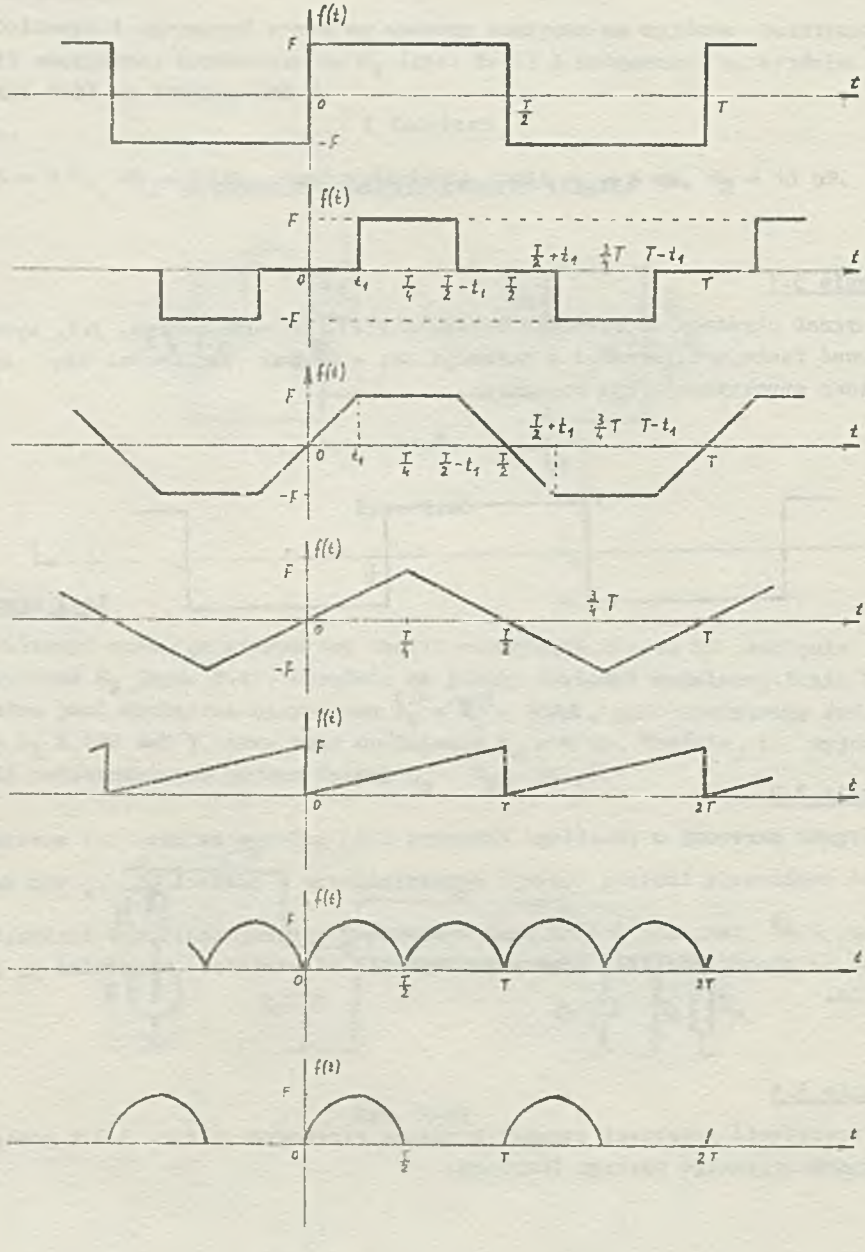
Rys. 3.1

Zadanie 3.2

Sygnał okresowy o przebiegu czasowym f(t) podanym na rys. 3.1 aproksymować kombinacją liniową funkcji sunusoidalnych w postaci $\sum_{k=1}^{m} c_k \sin k\omega_1 t$, gdy $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ tak, aby średni błąd kwadratowy aproksymacji był minimalny. Podać zależność wartości błędu aproksymacji od wartości wskaźnika k, gdy $T = 2\pi$.

Zadanie 3.3

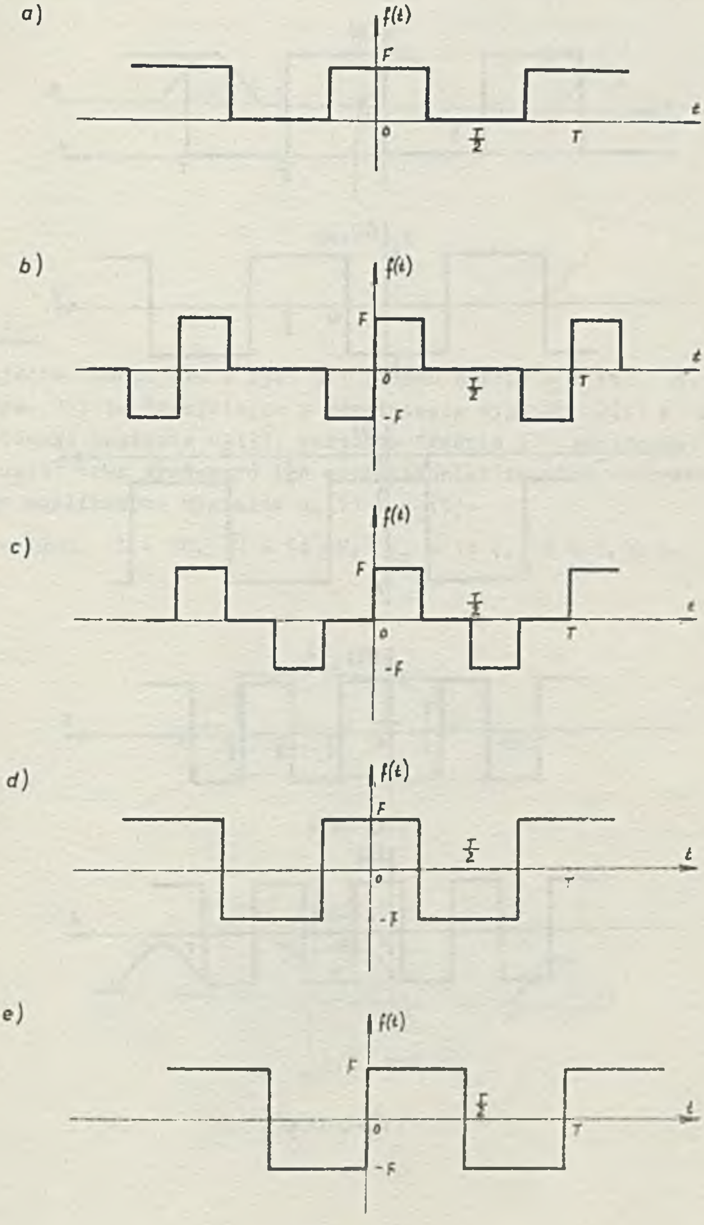
Przedstawić przebiegi czasowe sygnałów okresowych z rys. 3.3 w postaci trygonometrycznego szeregu Fouriera.



Rys. 3.3

Zadanie 3.4

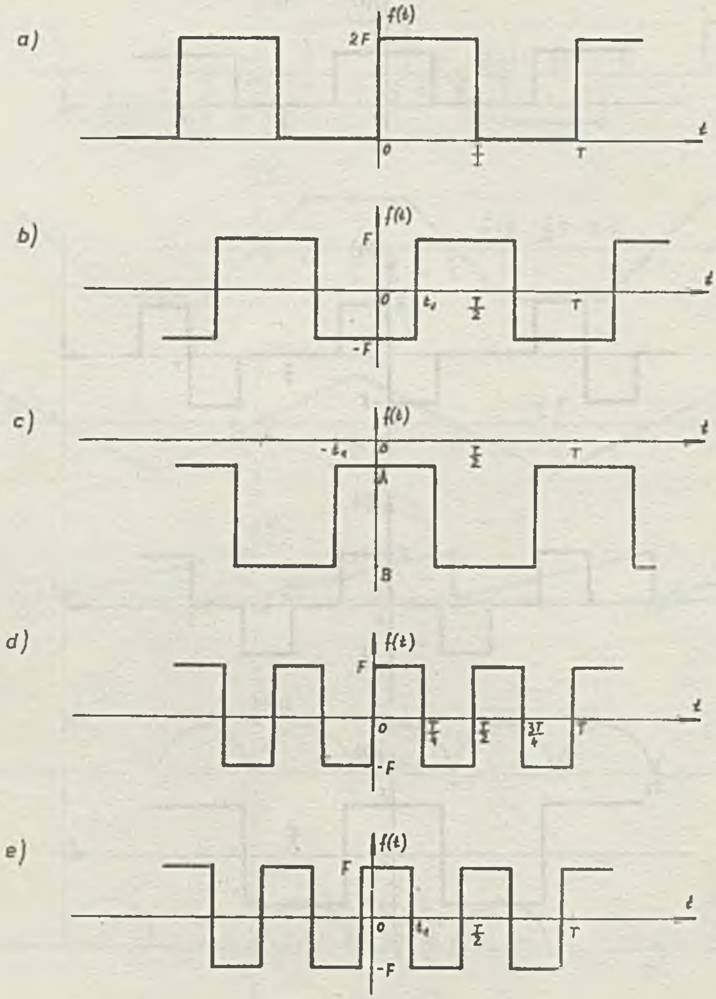
Zbadać rodzaj symetrii przebiegów czasowych sygnałów przedstawionych na rys. 3.4a-e i określić, które współczynniki Fouriera zerują się dla określonego rodzaju symetrii przebiegu.



Rys. 3.4

Zadanie 3.5

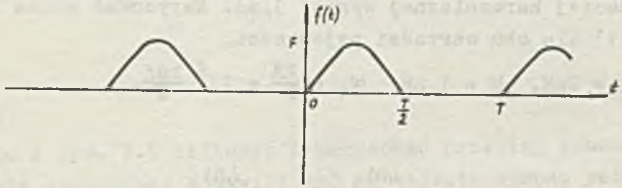
Przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera przebiegi czasowe sygnałów z rys.3.5, korzystając z rozwinięć przedstawionych w tablicy 3.1 (Dodatek 2).



Rys. 3.5

Zadanie 3.6

Na rysunku 3.6 dany jest przebieg czasowy sygnału f(t). Wyznaczyć zależność między wartością skuteczną oraz wartością średnią i współczynnikami rozwinięcia danego przebiegu w szereg trygonometryczny Fouriera. Obliczyć F_{sk} i $F_{śr}$.

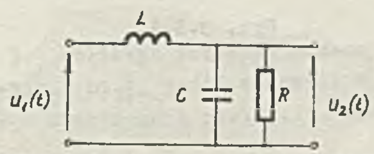


Rys. 3.6

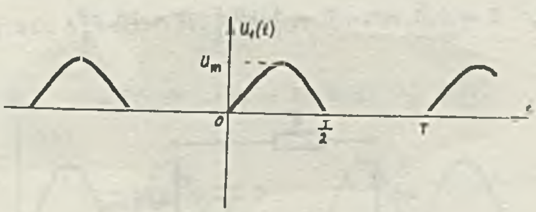
Zadanie 3.7

Na wejście obwodu RLC z rys. 3.7 podano napięcie $u_1(t)$ o przebiegu jak na rys. 3.7.1. Korzystając z rozwinięcia sygnału $u_1(t)$ w szereg Fouriera obliczyć napięcie $u_2(t)$, wartości średnie i skuteczne sygnałów $u_1(t)$ i $u_2(t)$ oraz wyznaczyć ich współczynniki tętnień. Narysować i porównać widma amplitudowe sygnałów $u_1(t)$ i $u_2(t)$.

Dane: R = 400Ω, L = 1H, C = 64 μF, U_m = 10 V, T = 0,02 s.



Rys. 3.7

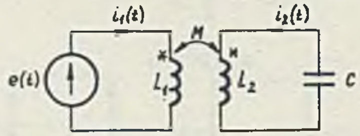


Rys. 3.7.1

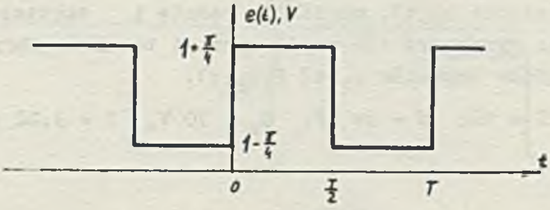
Zadanie 3.8

Obwód z rys. 3.8 jest zasilany ze źródła napięciowego, którego przebieg czasowy $e(t)$ został przedstawiony na rys. 3.8.1. Korzystając z rozwinięcia sygnału $e(t)$ w szereg Fouriera obliczyć natężenie prądu $i_2(t)$. Jak dobrać wartość pojemności C, aby amplituda pierwszej harmonicznej, a następnie trzeciej harmonicznej wynosi 1 mA. Narysować widma amplitudowe $e(t)$ oraz $i_2(t)$ dla obu wartości pojemności.

Dane: $L_1 = L_2 = 2mH$, $M = 1$ mH, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 10^6 \frac{rad}{s}$.



Rys. 3.8

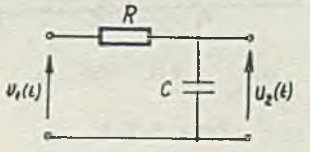


Rys. 3.8.1

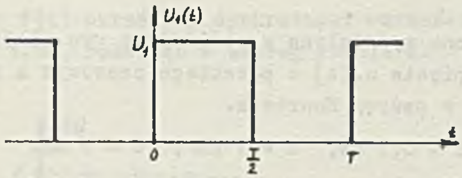
Zadanie 3.9

Dla obwodu z rys. 3.9 obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia $u_2(t)$, wykorzystując rozwinięcie przebiegu $u_1(t)$ z rys. 3.9.1 w szereg Fouriera.

Dane: $U_1 = 10$ V, $T = 0,1$ ms, $R = 1$ kΩ, $C = 25$ nF.



Rys. 3.9

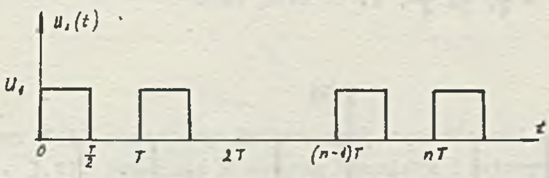


Rys. 3.9.1

Zadanie 3.10

Dla obwodu z rys. 3.9 obliczyć i narysować przebieg czasowy napięcia $u_2(t)$ w stanie ustalonym. W chwili t=0 na wejście obwodu podano napięcie $u_1(t)$ o przebiegu czasowym, jak na rys. 3.10.

Dane: $U_1 = 10V$, $T = 0{,}1$ ms, $R = 1$ kΩ, $C = 25$ nF.



Rys. 3.10

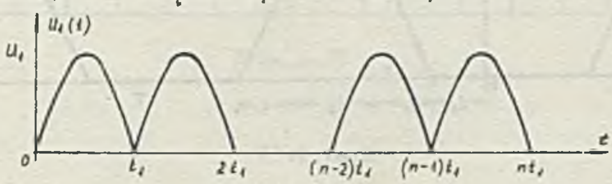
Zadanie 3.11

Dla obwodu z rys. 3.9 obliczyć przebieg czasowy napięcia $u_2(t)$ dla przedziału czasu $[(n-1)t_1, nt_1]$, jeśli w chwili t = 0 na wejściu obwodu podano napięcie $u_1(t)$ o przebiegu z rys. 3.11. Napięcie $u_1(t)$ jest zdefiniowane następująco

$$u_1(t) = U_1 \sin\omega t \cdot \square(t) + 2U_1 \sin\omega(t-t_1)\,\square(t-t_1) + \dots$$

$$\dots + 2U_1 \sin\omega\left[t-(n-1)t_1\right] \cdot \square\left[t-(n-1)t_1\right]$$

Dane: $R = 200\Omega$, $C = 50\,\mu F$, $t_1 = 10$ ms, U_1 32 V.



Rys. 3.11

Zadanie 3.12

Obliczyć moc czynną wydzieloną w obwodzie z rys. 3.9, jeśli na wejście jego podane jest napięcie $u_1(t)$ o przebiegu czasowym z rys. 3.9.1. Wykorzystać rozwinięcie w szereg Fouriera.

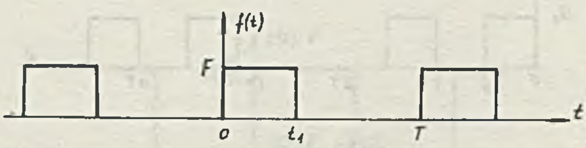
Dane: U_1 = 10 V, T = 0,1 ms, R = 1 kΩ , C = 5 nF.

Zadanie 3.13

Przedstawić przebiegi czasowe sygnałów okresowych z rys. 3.3 w postaci wykładniczego szeregu Fouriera.

Zadanie 3.14

Przedstawić w postaci wykładniczego szeregu Fouriera przebieg sygnału okresowego f(t) z rys. 3.14. Wyznaczyć widmo amplitudowe sygnału i narysować je dla $t_1 = \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.

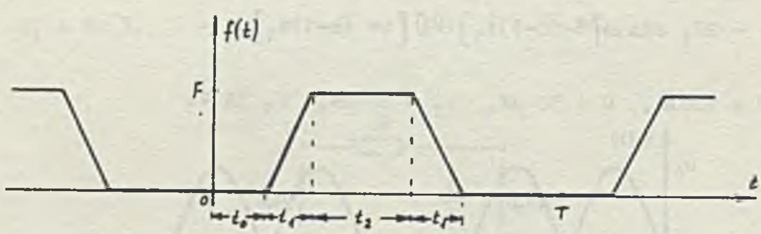


Rys. 3.14

Zadanie 3.15

Wyznaczyć i narysować widmo amplitudowe ciągu impulsów z rys. 3.15 na podstawie rozwinięcia w wykładniczy szereg Fouriera.

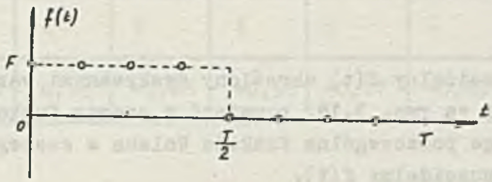
Dane: T = 1 ms, t_1 = 20 μs, t_2 = 80 μs.



Rys. 3.15

Zadanie 3.16

Przebieg czasowy f(t) określony dyskretnymi wartościami w przedziale (0,T), jak na rys. 3.16, rozwinąć w szereg Fouriera.

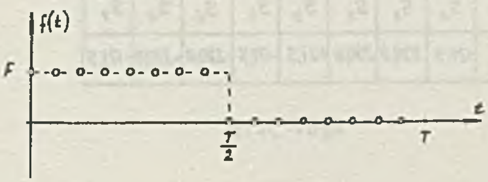


t	0	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{3T}{8}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{5T}{8}$	$\frac{3T}{4}$	$\frac{7T}{8}$
Próbka S_n	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
Wartość próbki	F	F	F	F	0	0	0	0

Rys. 3.16

Zadanie 3.17

Przebieg czasowy f(t) określony dyskretnymi wartościami w przedziale (0,T), jak na rys. 3.17, rozwinąć w szereg Fouriera i otrzymany wynik porównać z rozwiązaniem zadania 3.16. Jak zmienia się dokładność aproksymacji danego przebiegu szeregiem Fouriera w zależności od liczby próbek S_n.



t	0	$\frac{T}{16}$	$\frac{T}{8}$	$\frac{3T}{16}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{5T}{16}$	$\frac{3T}{8}$	$\frac{7T}{16}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{9T}{16}$	$\frac{5T}{8}$	$\frac{11T}{16}$	$\frac{3T}{4}$	$\frac{13T}{16}$	$\frac{7T}{8}$	$\frac{15T}{16}$
Próbka S_n	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}
Wartość próbki	F	F	F	F	F	F	F	F	0	0	0	0	0	0	0	0

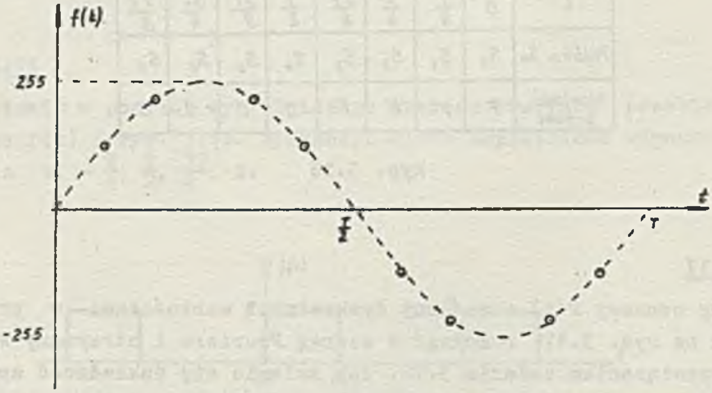
Rys. 3.17

Zadanie 3.18

Przebieg czasowy f(t) określony dyskretnymi wartościami w przedziale (0,T), jak na rys. 3.16, rozwinąć w szereg funkcji Walsha.

Zadanie 3.19

Przebieg sinusoidalny f(t) określony dyskretnymi wartościami w przedziale (0,T), jak na rys. 3.19, rozwinąć w szereg funkcji Walsha, a następnie rozwijając poszczególne funkcje Walsha w szereg Fouriera odtworzyć przebieg sinusoidalny f(t).



t	$\frac{T}{12}$	$\frac{T}{6}$	$\frac{T}{3}$	$\frac{5T}{12}$	$\frac{7T}{12}$	$\frac{2T}{3}$	$\frac{5T}{6}$	$\frac{11T}{12}$
Próbka S_n	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
Wartość próbki	127,5	220,8	220,8	127,5	-127,5	-220,8	-220,8	-127,5

Rys. 3.19

Zadanie 3.20

Przebieg czasowy f(t) określony dyskretnymi wartościami w przedziale (0,T), jak na rys. 3.16, rozwinąć w trygonometryczny szereg Fouriera, stosując szybkie przekształcenie Fouriera.

Zadanie 3.21

Wykorzystując własności funkcji autokorelacji zbadać, czy przebieg czasowy f(t) określony dyskretnymi wartościami podanymi w tablicy 3.21 jest okresowy, a jeśli tak, to obliczyć jego okres T.

Tablica 3.21

t,s	0	10	20	30	40	50	60	70	80
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S_i	0,83	0,73	0,83	-0,28	-0,98	-0,67	-0,88	-0,38	0,83

t,s	90	100	110	120	130	140	150	160	170
i	9	10	11	12	13	14	15	16	17
S_i	0,83	0,73	0,83	-0,28	-0,98	-0,67	-0,88	-0,38	-0,83

t,s	180	190	200	210	220	230	240	250
i	18	19	20	21	22	23	24	25
S_i	0,83	0,73	0,83	-0,28	-0,98	-0,67	-0,88	-0,38

II. ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

Rozdział 1

ANALIZA OBWODÓW NIELINIOWYCH W STANIE NIEUSTALONYM

Zadanie 1.1

Równaniami ruchu obwodu (przez analogię do układów mechanicznych) nazywamy równania powstałe z zastosowania do danego obwodu równań wiążących napięcia i prądy na jego elementach oraz równań topologicznych (I i II prawo Kirchhoffa). Dla obwodu na rys. 1.1 możemy napisać następujące równania topologiczne:

$$- v_5 - v_3 = 0 \tag{1a}$$

$$v_3 - v_1 = 0 \tag{1b}$$

$$v_2 - v_4 - v_6 = 0 \tag{1c}$$

$$- i_5 + i_3 + i_1 = 0 \tag{2a}$$

$$i_2 + i_4 = 0 \tag{2b}$$

$$i_6 - i_4 = 0 \tag{2c}$$

Równania (1a) - (1c) wynikają z II, a równania (2a) ÷ (2c) z I prawa Kirchhoffa.

Pisząc równania dla poszczególnych elementów obwodu trzeba zauważyć, że każdy kondensator wprowadza dodatkową zmienną, tj. ładunek q. Podobnie każda cewka wprowadza dodatkową zmienną - jej strumień skojarzony φ. Wobec tego każdy kondensator opisuje się dwoma niezależnymi równaniami, równaniem określającym zależność v - q i równaniem wiążącym ładunek z prądem, tj.: $i = dq/dt$.

Podobnie cewka opisana jest dwoma równaniami. Jedno przedstawia zależność $i - \varphi$, a drugie wiąże strumień z napięciem, tzn. $v = d\varphi/dt$.

Równania dla poszczególnych elementów obwodu są następujące:

nieliniowy trójnik
$$\begin{cases} v_1 = 2 + 3v_2 + v_2 i_1^3 - 2i_1^5 & (3a) \\ i_2 = 4 - i_1^2 v_2 - 2i_1 v_2^3 + 3v_2^5, & (3b) \end{cases}$$

kondensator
$$\begin{cases} q_4 = 1 + 2v_4 - 3v_4^3 + v_4^5 & \text{(3c)} \\ i_4 = \frac{dq_4}{dt} = \frac{dq_4}{dv_4} \cdot \frac{dv_4}{dt} = (2-9v_4^2 + 5v_4^4)\frac{dv_4}{dt}, & \text{(3d)} \end{cases}$$

cewka
$$\begin{cases} \varphi_3 = 2 - 2i_3^3 + 5i_3^5 & \text{(3e)} \\ v_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d\varphi_3}{dv_3} \cdot \frac{dv_3}{dt} = (-6i_3^2 - 25i_3^4)\frac{di_3}{dt}. & \text{(3f)} \end{cases}$$

SPM $i_5 = 2$ (3g)

SEM $v_6 = \cos\omega t.$ (3h)

Równania (1), (2), (3) tworzą układ 14 równań z 14 niewiadomymi, tj.: v_1, $v_2 \ldots v_6$, i_1, $i_2 \ldots i_6$, q_4, φ_3. Liczbę niewiadomych można natychmiast zmniejszyć o połowę, podstawiając równania (3) w miejsce odpowiednich niewiadomych w równaniach (1) i (2). Otrzymamy wtedy

$$- v_5 - (- 6i_3^2 + 25i_3^4)\frac{di_3}{dt} = 0 \tag{4a}$$

$$(-6i_3^2 + 25i_3^4)\frac{di_3}{dt} - 2-3v_2-v_2i_1^3 + 2i_1^5 = 0 \tag{4b}$$

$$v_2 - v_4 - \cos\omega t = 0 \tag{4c}$$

$$- 2 + i_3 + i_1 = 0 \tag{4d}$$

$$4- i_1^2 v_2 - 2i_1v_2^3 + 3v_2^5 + (2-9v_4^2+5v_4^4)\frac{dv_4}{dt} = 0 \tag{4e}$$

$$i_6 - (2 - 9v_4^2 + 5v_4^4)\frac{dv_4}{dt} = 0. \tag{4f}$$

Równania (4) stanowią układ sześciu niezależnych równań funkcyjno-różniczkowych. Ze względu na to, że nie istnieje ogólna, matematyczna metoda rozwiązywania tego rodzaju układu równań, należy powyższy układ zredukować do postaci dogodnej do dalszej analizy. Pierwszym krokiem w tym kierunku jest wyeliminowanie równań funkcyjnych celem uzyskania układu równań różniczkowych, tzn. takiego układu, w którym w każdym równaniu występuje pochodna względem czasu. Można tego dokonać obliczając v_2 z równania (4c) i i_1 z równania (4d) i podstawiając tak obliczone wielkości do równań (4b) i (4e)

$$- v_5 - (- 6i_3^2 + 25i_3^4)\frac{di_3}{dt} = 0 \tag{5a}$$

$$(- 6i_3^2 + 25i_3^4)\frac{di_3}{dt} - 2 - 3\,(v_4 + \cos\omega t) - (v_4 + \cos\omega t)(2-i_3)^3 + $$
$$+ 2(2 - i_3)^5 = 0 \tag{5b}$$

$$4 - (2 - i_3)^2(v_4 + \cos\omega t) - 2(2 - i_3)(v_4 + \cos\omega t)^3 + 3(v_4 + \cos\omega t)^5 + $$
$$+ (2 - 9v_4^2 + 5v_4^4)\frac{dv_4}{dt} = 0 \tag{5c}$$

$$i_6 - (2 - 9v_4^2 + 5v_4^4)\frac{dv_4}{dt} = 0. \tag{5d}$$

W ten sposób otrzymano układ 4 niezależnych równań różniczkowych z czteroma niewiadomymi v_4, v_5, i_3 i i_6. W tym szczególnym przypadku można zauważyć, że tylko zmienne v_4 i i_3 występują w równaniach (5b) i (5c). Dlatego też, te równania można rozwiązać niezależnie od pozostałych. Należy zwrócić uwagę na fakt, że napięcie v_4 jest napięciem na kondensatorze, a prąd i_3 jest prądem płynącym przez cewkę. Zakładając, że otrzymamy rozwiązanie w postaci $i_3 = f_3(t)$ i $v_4 = f_4(t)$, v_5 i v_6 można łatwo znaleźć z równań (5c) i (5d), a mianowicie:

$$v_5(t) = \left\{ 6\left[f_3(t)\right]^2 - 25\left[f_3(t)\right]^4 \right\} \frac{df_3(t)}{dt} \tag{6a}$$

$$i_6(t) = \left\{ 2 - 9\left[f_4(t)\right]^2 + 5\left[f_4(t)\right]^4 \right\} \frac{df_4(t)}{dt} \tag{6b}$$

Dlatego też głównym problemem jest obliczenie i_3 i v_4 z równań (5b) i (5c). W tym celu należy przekształcić te równania do postaci

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{2 + 3(v_4 + \cos\omega t) + (v_4 + \cos\omega t)(2 - i_3)^2 - 2(2 - i_3)^5}{25i_3^4 - 6i_3^2} \tag{7a}$$

$$\frac{dv_4}{dt} = \frac{-4 + (2-i_3)^2\,(v_4+\cos\omega t) + 2(2-i_3)(v_4 + \cos\omega t)^3 - 3(v_4+\cos\omega t)^5}{2 - 9v_4^2 + 5v_4^4} \tag{7b}$$

Układ równań (7a) i (7b) posiada trzy ważne cechy: (1) czynnik po lewej stronie każdego z równań jest pierwszą pochodną względem czasu wielkości gałęziowej (napięcia lub prądu), (2) po prawej stronie nie występuje czynnik, będący pochodną względem czasu, (3) każda zmienna, występująca po prawej stronie równań występuje również raz w jednym z równań po stronie lewej.

Każdy układ równań spełniający te trzy cechy nazywa się układem w postaci normalnej czyli układem równań stanu, a zmienne niezależne, występujące w tym układzie, nazywają się zmiennymi stanu. Powodem, dla którego redukuje się równanie ruchu do postaci normalnej, jest fakt, że prawie wszystkie dostępne metody rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych zakładają, że układ ten jest w postaci normalnej.

Zadanie 1.2

Nie zawsze można prosto zredukować układ równań funkcyjno-różniczkowych do postaci normalnej. Podstawowym problemem jest wybór odpowiedniego zbioru zmiennych stanu. Łatwo zauważyć, że aby wyrazić i_4 w zależności od napięcia v_4 w zadaniu 1.1 w postaci równania (3d), należy najpierw obliczyć dq_4/dv_4. Pochodną tę można było prosto obliczyć, ponieważ krzywa v-q dla kondensatora była sterowana napięciowo. W tym przypadku należy wyrazić q_4 w zależności od v_4, zanim obliczymy pochodną dq_4/dv_4. Nie jest to jednak możliwe, ponieważ q_4 jest (jak łatwo sprawdzić) wielowartościową funkcją v_4. Oznacza to, że funkcja odwrotna do (1b) nie istnieje. Podobnie w przypadku nieliniowej cewki nie istnieje funkcja odwrotna do (1a). Z tego powodu równania (3) dla poszczególnych elementów w zadaniu 1.1 trzeba napisać w następującej postaci:

nieliniowy trójnik
$$\begin{cases} v_1 = 2 + 2v_2 + v_2 i_1^3 - 2i_1^5 & \text{(2a)} \\ i_2 = 4 - i_1^2 v_2 - 2i_1 v_2^3 + 3v_2^5, & \text{(2b)} \end{cases}$$

kondensator
$$\begin{cases} v_4 = q_4 - q_4^3 & \text{(2c)} \\ i_4 = \dfrac{dq_4}{dt} \end{cases}$$

cewka
$$\begin{cases} i_3 = 1 + \varphi_3 + \varphi_3^3 & \text{(2e)} \\ v_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}, & \text{(2f)} \end{cases}$$

$$\text{SPM} \quad i_5 = 2, \tag{2g}$$

$$\text{SEM} \quad v_6 = \cos \omega t. \tag{2h}$$

Podstawiając te wyrażenia w miejsce odpowiednich zmiennych w równaniach topologicznych (1) i (2) w zadaniu 1.1, otrzymuje się:

$$-v_5-\frac{d\varphi_3}{dt}=0 \tag{3a}$$

$$\frac{d\varphi_3}{dt}-2-3v_2-v_2i_1^3+2i_1^5=0 \tag{3b}$$

$$v_2-q_4+q_4^3-\cos\omega t=0 \tag{3c}$$

$$-2+1+\varphi_3+\varphi_3^3+i_1=0 \tag{3d}$$

$$4-i_1^2\,v^2-2i_1v_2^3+3v_2^5+\frac{dq_4}{dt}=0 \tag{3e}$$

$$i_6-\frac{dq_4}{dt}=0 \tag{3f}$$

Jak zwykle, pierwszym krokiem jest redukcja tych funkcyjno-różniczkowych równań do układu równań różniczkowych. W tym celu obliczamy v_2 w zależności od q_4 z równania (3c) i i_4 w zależności od φ_3 z równania (3d), czyli:

$$v_2=q_4-q_4^3+\cos\omega t,$$
$$i_1=1-\varphi_3-\varphi_3^3.$$

Wstawiając te równania w miejsce v_2 i i_1 w pozostałych równaniach (3), otrzymuje się

$$-v_5-\frac{d\varphi_3}{dt}=0, \tag{4a}$$

$$\frac{d\varphi_3}{dt}-2-3(q_4-q_4^3+\cos\omega t)-(q_4-q_4^3+\cos\omega t)(1-\varphi_3-\varphi_3^3)^3+2(1-\varphi_3-\varphi_3^3)^5=0, \tag{4b}$$

$$4-(1-\varphi_3-\varphi_3^3)^2\,(q_4-q_4^3+\cos\omega t)-2(1-\varphi_3-\varphi_3^3)(q_4-q_4^3+\cos\omega t)^3+3(q_4-q_4^3+\cos\omega t)^5+\frac{dq_4}{dt}=0, \tag{4c}$$

$$i_6-\frac{dq_4}{dt}=0. \tag{4d}$$

Można również zauważyć, że v_5 i i_6 można obliczyć z równań (4a) i (4d), gdy tylko φ_3 i q_4 zostanie znalezione. Wobec tego należy równania (4b) i (4c) sprowadzić do postaci normalnej:

$$\frac{d\varphi_3}{dt}=2+3(q_4-q_4^3+\cos\omega t)+(q_4-q_4^3+\cos\omega t)(1-\varphi_3-\varphi_3^3)^3-2(1-\varphi_3-\varphi_3^3)^5, \tag{5a}$$

$$\frac{dq_4}{dt} = 4 + (1 - \varphi_3 - \varphi_3^3)^2 \, (q_4 - q_4^3 + \cos\omega t) + 2(1 - \varphi_3 - \varphi_3^3)(q_4 - q_4^3 +$$

$$+ \cos\omega t) - 3(q_4 - q_4^3 + \cos\omega t) \, . \tag{5b}$$

Zadanie 1.3

Równania stanu obwodu można otrzymać bez konieczności redukcji równań ruchu, tak jak to miało miejsce w zadaniu 1.1. W tym celu dany obwód przedstawiamy w postaci połączonych dwóch podobwodów N_1 i N_2 tak, jak przedstawiono to na rys.1.3.1. Podobwód N_1 zawiera wyłącznie elementy reaktancyjne, natomiast N_2 jest czysto rezystancyjny.
Następnie, obliczając

$$v_1 = H_1(i_1, i_2, t)$$

i

$$v_2 = H_2(i_1, i_2, t)$$

oraz biorąc pod uwagę, że:

$$v_1 = \frac{d\varphi_1}{dt},$$

$$v_2 = \frac{d\varphi_2}{dt},$$

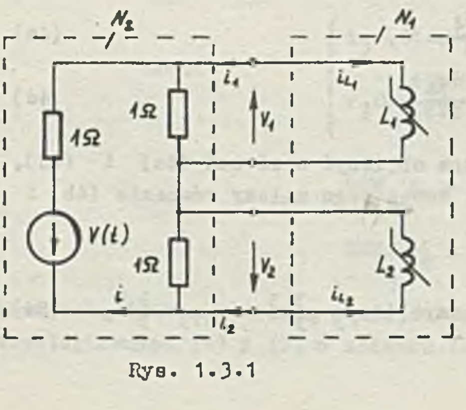
$$i_{l_1} = - i_1,$$

$$i_{l_2} = - i_2,$$

otrzymamy równania stanu w postaci

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = H_1(- f_1^{-1}(\varphi_1), - f_2^{-1}(\varphi_2), t),$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = H_2(- f_1^{-1}(\varphi_1), - f_2^{-1}(\varphi_2), t).$$



Rys. 1.3.1

Zgodnie z oznaczeniami jak na rys. 1.3.1, stosując I i II prawo Kirchhoffa po wprowadzeniu wartości numerycznych dostaniemy

$$v_1 = (i_1 + i) \cdot 1, \qquad (1)$$

$$v_2 = (i_2 - i) \cdot 1, \qquad (2)$$

$$v_2 = i \cdot 1 + v(t) + v_1. \qquad (3)$$

Podstawiając (1) i (2) do (3) wyliczymy, że

$$i = \frac{(i_2 - i_1) \cdot 1 - v(t)}{3}.$$

Stąd

$$v_1 = \frac{2}{3} i_1 + \frac{1}{3} i_2 - \frac{v(t)}{3}, \qquad (4)$$

$$v_2 = \frac{1}{3} i_1 + \frac{2}{3} i_2 + \frac{v(t)}{3}. \qquad (5)$$

Na podstawie (4) i (5) równania stanu przyjmą postać:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= -\frac{2}{3} f_1^{-1}(\varphi_1) - \frac{1}{3} f_2^{-1}(\varphi_2) - \frac{1}{3} v(t) \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= -\frac{1}{3} f_1^{-1}(\varphi_1) - \frac{2}{3} f_2^{-1}(\varphi_2) + \frac{1}{3} v(t) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Mówimy, że obwód znajduje się w stanie równowagi, gdy jego ruch nie zmienia się w czasie. Przez pojęcie ruchu rozumiemy rozwiązanie układu równań stanu. Inaczej mówiąc obwód znajduje się w stanie równowagi, gdy pochodne zmiennych stanu względem czasu są tożsamościowo równe zero. Wobec tego stany równowagi obwodu otrzyma się, rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} f_1^{-1}(\varphi_1) - \frac{1}{3} f_2^{-1}(\varphi_2) - \frac{1}{3} v(t) &= 0 \\ -\frac{1}{3} f_1^{-1}(\varphi_1) - \frac{2}{3} f_2^{-1}(\varphi_1) + \frac{1}{3} v(t) &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

względem zmiennych stanu φ_1 i φ_2. Zakładając, że

$$f_1^{-1}(\varphi_1) = 3\,\varphi_1$$

$$f_2^{-1}(\varphi_2) = 3\,\varphi_2$$

$$v(t) = 5,$$

otrzyma się na podstawie (7) układ równań:

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi_1 + \varphi_2 + \tfrac{5}{3} &= 0 \\ \varphi_1 + 2\varphi_2 - \tfrac{5}{3} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Rozwiązując (8) otrzyma się jeden stan równowagi obwodu, dla którego

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= -\tfrac{5}{3}\ \mathrm{Wb} \\ \varphi_2^{(1)} &= \tfrac{5}{3}\ \mathrm{Wb}. \end{aligned} \tag{9}$$

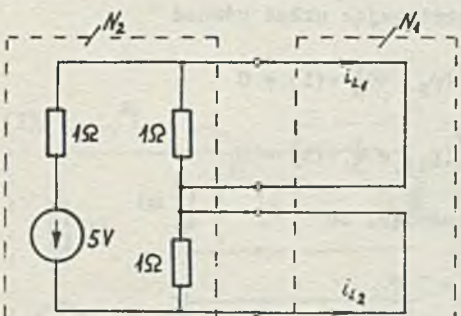
Przedstawiony wyżej sposób otrzymania stanów równowagi wymaga ułożenia wpierw równań stanu. Do identycznego wyniku można dojść, jeśli zauważy się, że w stanie równowagi

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = 0.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ v_2 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$



Rys. 1.3.2

Równanie (10) można zinterpretować jako odnoszące się dla obwodu, w którym cewki stanowią zwarcie. Otrzymamy w ten sposób obwód czysto rezystancyjny taki, jak na rys. 1.3.2. Rozwiązując go, otrzymamy:

$$\begin{aligned} i_{L_1} &= -5\ \mathrm{A} \\ i_{L_2} &= 5\ \mathrm{A}. \end{aligned} \tag{11}$$

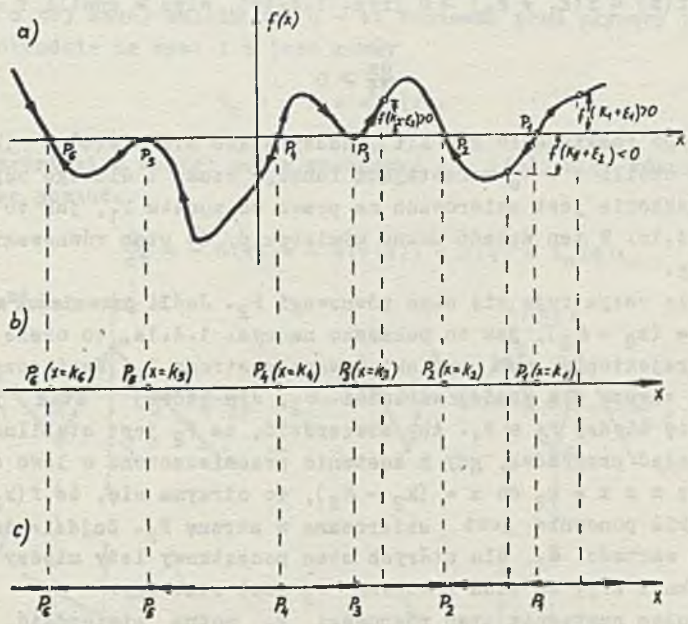
Wykorzystując znaną zależność strumienia od prądu otrzyma się oczywiście ten sam stan równowagi, określony przez równania (9). Stosując tę metodę otrzyma się stany równowagi bez konieczności układania równań stanu. Podobne rozumowanie można przeprowadzić również w przypadku występowania kondensatorów. Ponieważ kondensatory stanowią dla stanu równowagi przerwę, więc stany równowagi otrzyma się rozwiązując obwód rezystancyjny powstały z obwodu rzeczywistego po usunięciu wszystkich kondensatorów i zwarciu cewek.

Zadanie 1.4

Stany równowagi odpowiadające równaniu $\frac{dx}{dt} = f(x)$ znajdzie się, rozwiązując równanie

$$f(x) = 0$$

i oznaczy się je przez P_j tak, jak pokazano na rys. 1.4.1b. Aby określić stabilność stanów równowagi P_j korzysta się z definicji stabilności w sensie Lapunowa dla obwodów n-tego rzędu.



Rys. 1.4.1 a, b i c

W n-wymiarowej przestrzeni tworzymy sferę S , która jest miejscem geometrycznym punktów odległych o ε od stanu równowagi Q. Stan równowagi Q w n-wymiarowej przestrzeni jest <u>stabilny w sensie Lapunowa</u>, jeśli dla dowolnie małej wartości $\varepsilon > 0$ i dowolnego czasu początkowego $t = t_0$ istnieje możliwość znalezienia odpowiadającej sfery S_δ, gdzie $0 < \delta < \varepsilon$ i takiej, że wszystkie trajektorie, zaczynające się wewnątrz S_δ, nigdy nie przetną większej sfery S. Jeśli ponadto wszystkie te trajektorie rozpoczynające się wewnątrz S_δ, dążą ostatecznie do Q, to stan równowagi jest asymptotycznie stabilny.

W celu zbadania stabilności stanu równowagi P_j przeprowadzi się, zgodnie z definicją Lapunowa, następujące rozumowanie. Zakłóca się zmienną stanu x na odległość ε w prawo lub lewo od P_j i obserwuje się otrzymaną trajektorię, zaczynającą się od tego nowego stanu początkowego. Jeśli trajektoria, odpowiadająca każdej takiej wartości ε (tzn. takiej wartości ε, dla której stan początkowy trajektorii wypada między stanami równowagi sąsiadującymi z P_j), zawsze powraca się do P_j, to stan równowagi P_j jest stabilny. Z drugiej strony, jeśli istnieje wartość ε, dla której trajektoria rozbiega się od P_j, wtedy stan równowagi P_j jest niestabilny.

Na początku rozpatrzy się stan równowagi P_1. Zakłada się, że zmienna stanu x została zakłócona z wartości $x = k_1$ do $x = (k_1 + \varepsilon_1)$, w dowolnej chwili początkowej $t = t_o$. Zadaniem jest zbadanie charakteru rozwiązania $x = X(t)$ z $X(t_o) = (k_1 + \varepsilon_1)$ jako warunkiem początkowym. Ponieważ dla tego punktu $f(x) = f(k_1 + \varepsilon_1) > 0$ (rys. 1.4.1a), więc w chwili $t = t_o$

$$\frac{dx}{dt} > 0$$

w wyniku tego rozwiązanie $x = X(t)$, zaczynające się w $x(t) = (k_1 + \varepsilon_1)$, musi być w chwili $t = t_o$ wzrastającą funkcją czasu i dlatego odpowiadająca mu trajektoria jest skierowana na prawo od punktu P_1, jak to pokazano na rys. 1.4.1c. W ten sposób można stwierdzić, że stan równowagi P_1 jest niestabilny.

Następnie rozpatruje się stan równowagi P_2. Jeśli przemieści się x z $x = k_2$ do $x = (k_2 + \varepsilon_2)$, jak to pokazano na rys. 1.4.1a, to okaże się, że $\frac{dx}{dt} < 0$ i trajektoria musi być skierowana w stronę P_2. Jest oczywiste, że tak będzie zawsze dla każdej wartości ε_2, dla której stan początkowy znajdzie się między P_2 a P_1. Aby stwierdzić, że P_2 jest stabilne, trzeba jeszcze zbadać przypadek, gdy x zostanie przemieszczone w lewo od P_2. Gdy zakłóci się x z $x = k_2$ do $x = (k_2 - \varepsilon_2)$, to otrzyma się, że $f(k_2 - \varepsilon_2) > 0$ i trajektoria ponownie jest skierowana w stronę P_2. Zajdzie to dla tych wszystkich wartości ε_2, dla których stan początkowy leży między P_2 i P_3. Stąd wnioskuje się, że stan równowagi P_2 jest stabilny.

Rozpatrując następnie stan równowagi P_3 można stwierdzić, że każda trajektoria odpowiadająca stanowi początkowemu, leżącemu pomiędzy P_3 i P_4, będzie zbiegać się w kierunku P_3. Jednakże, ponieważ trajektoria odpowiadająca dowolnemu stanowi początkowemu, leżącemu pomiędzy P_3 i P_2, rozbiega się od P_3, więc można stwierdzić, że P_3 jest niestabilny. W podobny sposób stwierdza się, że stany równowagi P_4 i P_5 są również niestabilne, a stan równowagi P_6 jest stabilny.

Rozpatrując ponownie przebieg funkcji f(x) w otoczeniu stanów równowagi można wyciągnąć następujący wniosek, będący <u>kryterium stabilności</u> dla obwodów pierwszego rzędu. Niech dx/dt = f(x) będzie równaniem obwodu pierwszego rzędu w postaci normalnej, gdzie f(x) jest ciągłą jednowartościową funkcją x. Niech $P_j(x = k_j)$ będzie stanem równowagi obwodu. P_j jest stabilny wtedy, gdy istnieje przedział wokół $x = k_j$, gdzie f(x) jest monotonicznie malejącą funkcją x. W przeciwnym razie P_j jest niestabilny.

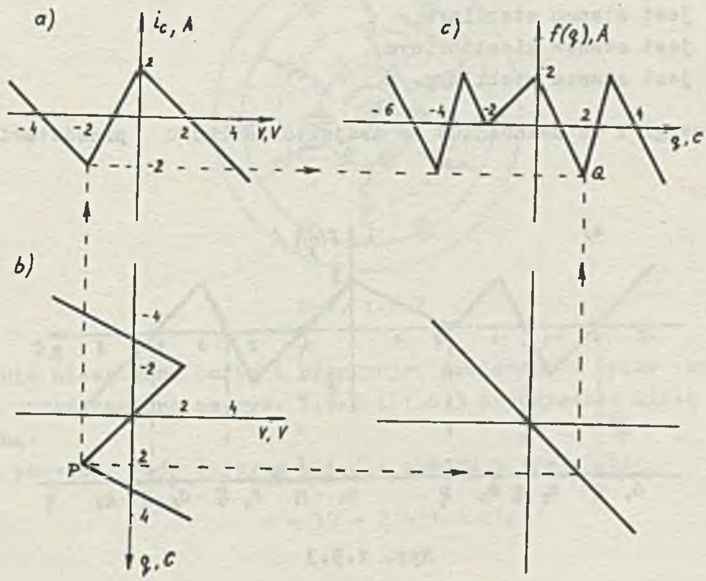
Zadanie 1.5

Rzeczywiste nieliniowe kondensatory nie posiadają takiej zależności ładunku q od napięcia v, jaką przedstawia rys. 1.5.1b. Jednak taką zależność q - v można otrzymać za pomocą elementu zwanego mutatorem. Jest to czwórnik o takich właściwościach, że transformuje charakterystykę v - i na zależność q - v, tzn.: załączając na jedne zaciski rezystor o charakterystyce v - i takiej, jak na rys. 1.5.1b, na zaciskach drugich otrzymany kondensator o tej samej zależności q - v. Ponieważ prąd płynący przez kondensator w obwodzie na rys. 1.5 jest równy

$$i_c = - i = - G(v),$$

a z charakterystyki q = q(v) można wyznaczyć v = v(q), więc równanie stanu przybierze postać:

$$\frac{dq}{dt} = - G(v) = - G(v(q)) = f(q) = i_c(q). \qquad (1)$$



Rys. 1.5.2 a, b i c

W celu wyznaczenia f(q) należy narysować na podstawie charakterystyk $i = G(v)$ i $q = q(v)$ zależność $i_c = -G(v)$ oraz $v = v(q)$ tak, jak przedstawiono to na rys. 1.5.2a, b. Następnie dla danej wartości ładunku (np.: $q_1 = 2C$) określa się punkt P (dla którego $v = -2V$) na charakterystyce v - q i z kolei, przerzutowując go przez charakterystykę $i_c = -G(v)$, otrzyma się punkt Q (dla którego $f(q_1) = -2A$). Postępując podobnie dla innych wartości ładunku otrzyma się zależność f(q) taką, jak na rys. 1.5.2c. Stanami równowagi (patrz zadanie 1.4) dla obwodu z rys. 1.5 są wartości ładunku, dla których funkcja f(q) jest równa zero. Na podstawie rys. 1.5.2c można stwierdzić, że stanami równowagi będą punkty:

1) $P_1 \rightarrow q_1 = -5$ C,

2) $P_2 \rightarrow q_2 = -3,5$ C,

3) $P_3 \rightarrow q_3 = -2$ C,

4) $P_4 \rightarrow q_4 = 1$ C,

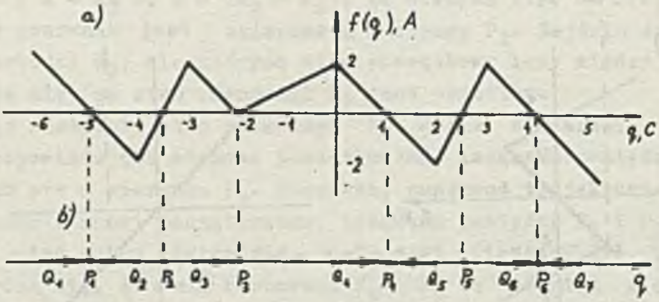
5) $P_5 \rightarrow q_5 = 2,5$ C,

6) $P_6 \rightarrow q_6 = 4$ C,

Z kryterium stabilności Lapunowa podanego w zadaniu 1.4 wynika, że

1) stan P_1 jest stanem stabilnym,
2) stan P_2 jest stanem niestabilnym,
3) stan P_3 jest stanem niestabilnym,
4) stan P_4 jest stanem stabilnym,
5) stan P_5 jest stanem niestabilnym,
6) stan P_6 jest stanem stabilnym.

Stany równowagi i odpowiadające im trajektorie ruchu przedstawia rys. 1.5.3a, b.



Rys. 1.5.3

Zadanie 1.6

Rozwiązanie dowolnego układu n równań różniczkowych w postaci normalnej wymaga znajomości n stałych $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Można również zdefiniować rząd złożoności obwodu jako minimalną liczbę warunków początkowych, którą trzeba podać, ażeby można było w zupełności określić zachowanie się (stan) obwodu. Innymi słowami, rząd złożoności obwodu równa się liczbie zmiennych stanu. Oczywiście właściwy zbiór warunków początkowych dla obwodu będzie składał się z wartości ładunku q lub napięcia v na kondensatorze i strumienia φ lub prądu i w cewce w pewnej dowolnej chwili początkowej $t = t_o$. Rząd złożoności obwodu można określić bez potrzeby sprowadzania równań ruchu do postaci normalnej. Łatwo wykazać, że rząd złożoności dowolnego obwodu jest równy

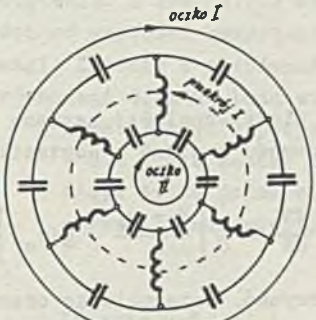
$$n = b_{Lc} - n_c - n_L,$$

gdzie:

b_{L_c} - całkowitej liczbie elementów biernych (cewek i kondensatorów) występujących w obwodzie,

n_c - całkowitej liczbie niezależnych oczek zawierających tylko kondensatory oraz źródła napięciowe i kondensatory,

n_L - całkowitej liczbie niezależnych przekrojów (odcięć), zawierających tylko cewki oraz cewki i źródła prądowe.



Rys. 1.6.2

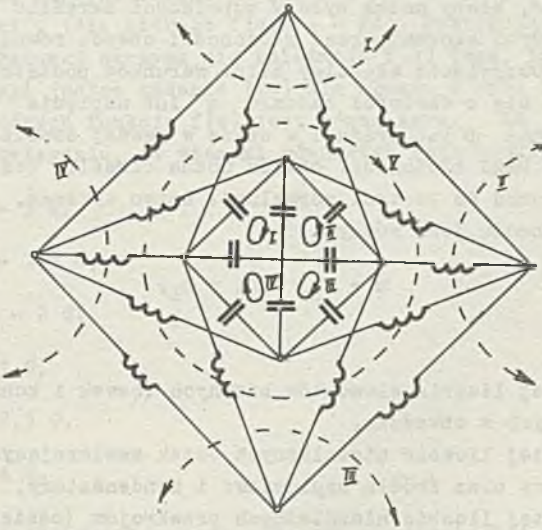
Odpowiednie niezależne oczka i przekroje, zawierające tylko kondensatory i cewki, przedstawiono na rys. 1.6.2 i 1.6.3 odpowiednio linią ciągłą i przerywaną.

Stosując powyższy wzór otrzyma się dla obwodu z rys. 1.6:

$$n = 18 - 2 - 1 = 15,$$

dla obwodu z rys. 1.6.1

$$n = 24 - 4 - 5 = 15.$$



Rys. 1.6.3

Zadanie 1.7

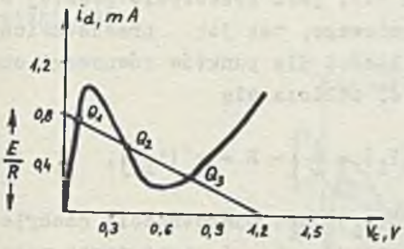
Jeśli charakterystykę diody tunelowej zapisze się w postaci $i_d = g(v_d)$, to można równanie stanu obwodu zapisać w postaci:

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}\left[\frac{E - v_c}{R} - g(v_c)\right] = f(v_c). \qquad (1)$$

Zależność $g(v_d)$ można otrzymać, interpolując charakterystykę diody tunelowej wielomianem. Otrzyma się wystarczającą dokładność, stosując wielomian piątego stopnia

$$i_d = g(v_d) = 17{,}76\ v_d - 103{,}49\ v_d^2 + 229{,}62\ v_d^3 - 226{,}31\ v_d^4 + $$
$$+ 83{,}72\ v_d^5 \text{ mA}.$$

Stany równowagi można określić w prosty sposób, stosując drugą z metod, opisaną w zadaniu 1.3. Otrzyma się je, rozwiązując nieliniowy obwód rezystancyjny metodą graficzną opisaną w [1]. Rozwiązanie przedstawia rys.



Rys. 1.7.2

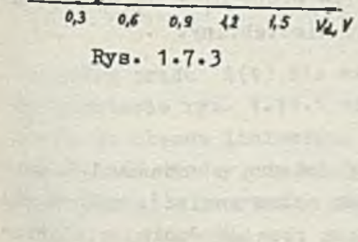
1.7.2 dla pewnej wartości rezystancji oraz SEM E = 1,2 V. Zgodnie ze sformułowanym w zadaniu 1.4 kryterium stabilności punktów równowagi dla obwodów pierwszego rzędu, oblicza się z (1):

$$\frac{df(v_c)}{dv_c} = \frac{1}{C}\left[-\frac{1}{R} - g'(v_c)\right], \qquad (1')$$

gdzie $g'(v_c)$ przedstawia nachylenie krzywej na płaszczyźnie $v_c - i_d$ i nazywa się konduktancją różniczkową (dynamiczną). Z równania (1) wnioskuje się, że stan równowagi Q_j jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{1}{R} > - g'(v_c)\Big|_{Q_j}, \qquad (2)$$

gdzie $- g'(v_c)\Big|_{Q_j}$ jest konduktancją różniczkową (dynamiczną) w punkcie Q_j. Nierówność (2) przedstawia kryterium stabilności dla obwodu z rys. 1.7. Z tego wynika, że stan równowagi jest stabilny zawsze wtedy, gdy konduktancja różniczkowa jest dodatnia w Q_j. W przypadku, gdy $g'(v_c) < 0$, to Q_j jest stabilny wtedy, gdy moduł konduktancji różniczkowej jest mniejszy od konduktancji 1/R prostej obciążenia. Z rys. 1.7.2 widać, że dla napięcia E = = 1,2 V mogą - w zależności od wartości rezystancji R - wystąpić jeden, dwa lub trzy stany równowagi. Zgodnie z nierównością (2) dla każdej wartości rezystancji stany równowagi Q_1 i Q_3 będą stabilne, a stan Q_2 będzie niestabilny. W przypadku, gdy napięcie E = = 0,4 V dla każdej wartości rezystancji wystąpi tylko jeden stan równowagi i będzie on zawsze stanem stabilnym (rys. 1.7.3).



Rys. 1.7.3

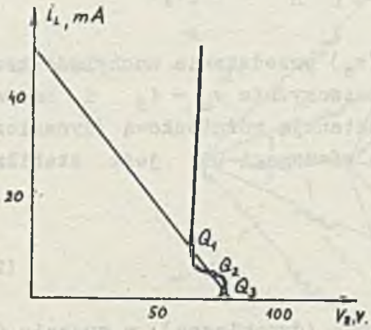
Zadanie 1.8

Oznaczając prąd i napięcie na cewce odpowiednio przez i_L i v_L możemy równanie stanu obwodu zapisać następująco:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{(E - R\,i_L) - r(i_L)}{L} = f(i_L),$$

gdzie $r(i_L)$ jest charakterystyką elementu nieliniowego (np. neonówki). Stany równowagi można znaleźć, jak w zadaniu 1.7, jako przecięcie prostej obciążenia z charakterystyką elementu nieliniowego, tak jak przedstawiono na rys. 1.8.2. Stosując kryterium stabilności dla punktów równowagi obwodu pierwszego rzędu podane w zadaniu 1.4, oblicza się

$$f'(i_L) = \frac{1}{L}\left[- R - r'(i_L)\right], \tag{1}$$



Rys. 1.8.2

gdzie $r'(i_L)$ jest odwrotnością nachylenia krzywej $v_R - i_L$ i przedstawia rezystancję różniczkową.

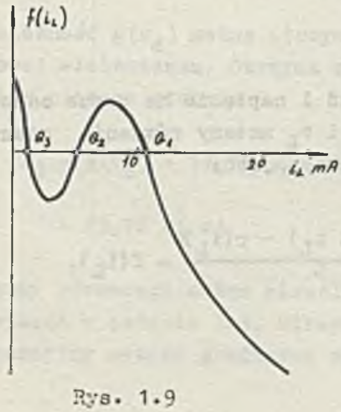
Z równania (1) wynika, że stan równowagi Q_j jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$R > - r'(i_L)\Big|_{Q_j}, \tag{2}$$

gdzie $- r'(i_L)\Big|_{Q_j}$ jest rezystancją różniczkową w punkcie Q_j.

Na podstawie nierówności (2) można stwierdzić, że stan równowagi Q_j na krzywej $v_R - i_L$ jest zawsze stabilny, jeśli rezystancja różniczkowa $r'(i_L)$ jest w tym punkcie dodatnia. Jeśli $r'(i_L) < 0$, to Q_j jest stabilne tylko wtedy, gdy moduł wartości rezystancji różniczkowej w Q_j jest mniejszy od rezystancji R prostej obciążenia. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że stany równowagi Q_1 i Q_3 z rys. 1.8.2 są stabilne, a stan Q_2 jest niestabilny.

Zadanie 1.9

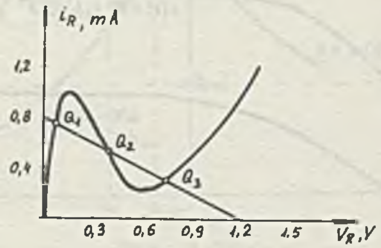


Rys. 1.9

Krzywą $f(i_L) = \frac{1}{L}\left[E - R \cdot i_L - r(i_L)\right]$ wraz z zaznaczonymi punktami równowagi przedstawia rys. 1.9. Stosując kryterium stabilności Lapunowa sformułowane w zadaniu 1.4, można natychmiast stwierdzić, że stany Q_1 i Q_3 są stabilne, a stan Q_2 jest niestabilny.

Zadanie 1.10

Stosując metodę opisaną w zadaniu 1.8, punkty równowagi obwodu można znaleźć, wykorzystując metodę graficzną rozwiązywania nieliniowego obwodu rezystancyjnego, co jest przedstawione na rys. 1.10.1. Z kryterium stabilności, które zostało określone w zadaniu 1.8, wynika, że wszystkie trzy stany równowagi Q_1, Q_2 i Q_3 są stabilne.



Rys. 1.10.1

Zadanie 1.11

Stosując II prawo Kirchhoffa dla obwodu z rys. 1.11, otrzymamy wprost równanie stanu

$$\frac{di}{dt} = a \cdot k - b^2 \cdot i^2 \quad i(0) = 0, \tag{1}$$

gdzie $a = 1 \frac{A}{V \cdot s}$, $b = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{A \cdot s}}$.

Przebieg czasowy prądu i(t) można otrzymać z równania (1) przez rozdzielenie zmiennych i dwustronne scałkowanie, czyli

$$\int_0^i \frac{di'}{(\sqrt{a \cdot k})^2 - b^2 i^2} = \int_0^t dt.$$

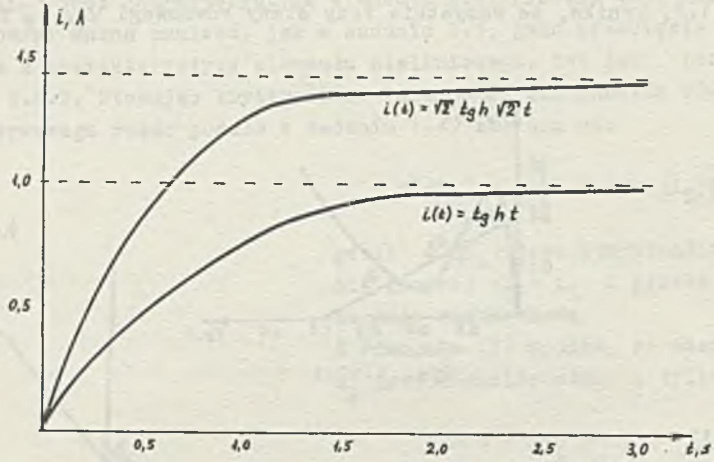
Stąd

$$\frac{1}{\sqrt{k \cdot a}} \operatorname{arctgh} \frac{b \cdot i}{\sqrt{a \cdot k}} = t,$$

lub

$$i = \frac{1}{b} \cdot \sqrt{ka} \operatorname{tgh} \sqrt{a \cdot k}t. \tag{2}$$

Przebieg prądu i(t) dla wartości k = 1V i k = 2V przedstawia rys. 1.11.1. Na podstawie rys. 1.11.1 widać, że w obwodzie nieliniowym, w przeciwieństwie do obwodu liniowego, nie jest zachowana w stanie ustalonym proporcjonalność między odpowiedzią a wymuszeniem. Wynika to z faktu, że wartość prądu, w przypadku gdy k = 2V, nie jest dwa razy większa od wartości prądu, gdy k = 1V.



Rys. 1.11.1

Zadanie 1.12

Ad.a) Jedną z najprostszych metod znalezienia przybliżonego rozwiązania równania

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \tag{1}$$

jest metoda Eulera.
Równanie (1) można zapisać w postaci

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f(x,t)$$

i biorąc dostatecznie małe Δt otrzymuje się w przybliżeniu

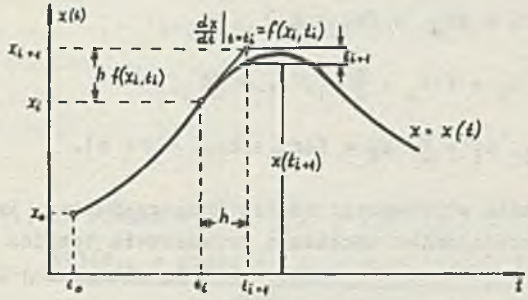
$$\Delta x \approx h\, f\,(x,t), \tag{2}$$

gdzie $h = \Delta t$ jest tzw. krokiem całkowania.
Zgodnie z równaniem (2) i warunkiem początkowym $x(t_o) = x_o$ otrzymamy algorytm Eulera w następującej postaci:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i)$$

$$t_{i+1} = t_i + h \tag{3}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1.$$



Rys. 1.12

Interpretację geometryczną algorytmu Eulera przedstawia rys. 1.12. Stosując powyższy algorytm do obliczenia przybliżonego rozwiązania równania (1) z zadania 1.11 przy założeniu, że K = 1V i i(0) = 0 oraz przyjmując h = 0,5 sek., otrzymamy

$$i_{l+1} = i_l + 0{,}5\,(1 - i_l^2)$$

$$l = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1. \tag{4}$$

Porównanie między rozwiązaniem numerycznym metodą Eulera równania (1) z zadania 1.11, a rozwiązaniem dokładnym przedstawia tablica 1.1.

Tablica 1.1

Czas T	Rozwiązanie metodą Eulera	Rozwiązanie dokładne i = tg ht	Błąd odcięcia
0	0,0000	0,0000	0,0000
0,5	0,5000	0,4621	0,0379
1,0	0,8750	0,7616	0,1134
1,5	0,9922	0,9051	0,0871
2,0	1,0000	0,9640	0,0360
2,5	1,0000	0,9866	0,0134
3,0	1,0000	0,9951	0,0049

Ad. b) Jednym z najbardziej znanych algorytmów rozwiązania równania różniczkowego (1) bez potrzeby szacowania pochodnych wyższego rzędu jest algorytm Rungego-Kutty czwartego rzędu, definiowany w sposób następujący:

$$x_{i+1} = x_i + h\, g(x_i,\ t_i), \tag{5}$$

gdzie

$$g(x_i, t_i) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, t_i) \quad k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}k_1, t_i + \frac{h}{2})$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}k_2, t_i + \frac{h}{2}) \quad k_4 = f(x_i + hk_3, t_i + h).$$

Porównanie rozwiązania otrzymanego metodą Rungego-Kutty z krokiem całkowania h = 0,5s z rozwiązaniem dokładnym przedstawia tablica 1.2.

Tablica 1.2

Czas T	Rozwiązanie metodą Rungego-Kutty	Rozwiązanie dokładne i = tght	Błąd odcięcia
0	0,0000	0,0000	0,0000
0,5	0,4618	0,4621	-0,0003
1,0	0,7616	0,7616	0,0000
1,5	0,9041	0,9051	-0,0010
2,0	0,9630	0,9640	-0,0010
2,5	0,9860	0,9866	-0,0006
3,0	0,9947	0,9951	-0,0004

Z porównania tablicy 1.1 z tablicą 1.2 wynika, że metoda Rungego-Kutty jest bardziej dokładna, niż metoda Eulera. Jest jednak bardziej czasochłonna, ponieważ, aby obliczyć nowe wartości zmiennej niezależnej, należy czterokrotnie obliczać wartość funkcji występującej po prawej stronie równania((1).

Zadanie 1.13

Przedstawiony w zadaniu 1.12 algorytm Eulera rozwiązania równania różniczkowego w postaci normalnej może być w prosty sposób rozszerzony. na rozwiązanie układu n równań różniczkowych w postaci normalnej. W przypadku dwóch równań różniczkowych

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,y,t)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x,y,t)$$

z warunkami początkowymi $x(t_0) = x_0$ i $y(t_0) = y_0$ algorytm będzie następujący:

$$x_{i+1} = x_i + hf_1(x_i, y_i, t_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hf_2(x_i, y_i, t_i) \qquad (1)$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1.$$

Stosując wzory (1) do równań (7a) i (7b) z zadania 1.1, otrzyma się

$$i_{3i+1} = i_{3i} + h\,\frac{2+3(v_{4i} + \cos t_i)+(v_{4i} + \cos t_i)(2-i_{3i})^2-2(2 - i_{3i})^5}{25i_{3i}^4 - 6\,i_{3i}^2} \qquad (2)$$

$$v_{4i+1} = v_{4i} + h \cdot \frac{-4+(2-i_{3i})^2(v_{4i}+\cos t_i)+ 2(2-i_{3i})(v_{4i}-\cos t_i)^2-3(v_{4i}+\cos t_i)^5}{2 - 9v_{4i}^2 + 5\,v_{4i}^4}$$

$$t_{i+1} = t_i + h.$$

Otrzymane na podstawie wzorów (2) wartości prądu $i_3(t)$ i napięcia $v_4(t)$ przedstawiono w tablicy 1.3.

Tablica 1.3

Czas t,s.	$i_3(t)$, A	$v_4(t)$, V
0	1,000	0,000
0,1	1,021	-0,204
0,2	1,037	-0,403
0,3	1,049	-0,893
0,4	1,053	-0,698
0,5	1,060	-0,390
0,6	1,071	-0,834
0,7	1,076	-0,625
0,8	1,084	-0,144
0,9	1,099	-0,340
1,0	1,110	-0,664
1,1	1,117	-0,293
1,2	1,128	-0,561
1,3	1,136	-0,499
1,4	1,156	-28,286
1,5	0,883	-26,866
1,6	-0,178	-25,532
1,7	173,570	-24,069
1,8	174,881	-22,685
1,9	176,202	-21,375
2,0	177,534	-20,136

Zadanie 1.14

Na podstawie przedstawionych na rys. 1.5.3 w zadaniu 1.5 trajektorii ruchu obwodu można stwierdzić, że ładunek na kondensatorze będzie się zmieniał z czasem od wartości początkowej $Q_4 = q(0) = -1C$ do wartości $q_4 = 1C$, po czym pozostanie bez zmian. Aby otrzymać pełną informację, dotyczącą zachowania się układu, należy określić jeszcze czas t_j, po jakim ładunek na kondensatorze osiągnie wartość $q = q_j$ z przedziału zmienności $-1C \leqslant q \leqslant 1C$.

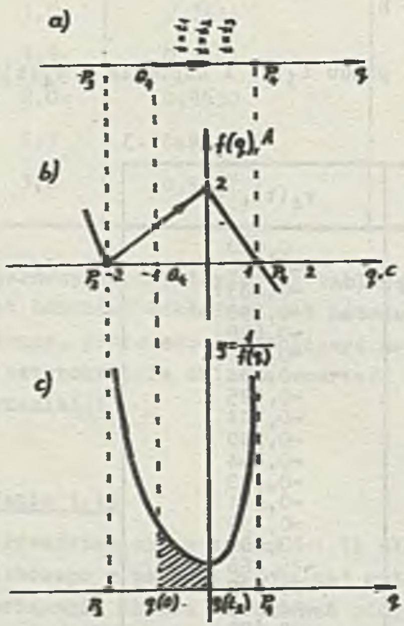
W tym celu równanie (1) z zadania 1.5 przekształca się do postaci

$$dt = \frac{1 \cdot a}{f(q)}\, dq, \tag{1}$$

gdzie a = 1s.

Całkując dwustronnie równanie (1), otrzymuje się

$$t_j = t_o + \int_{q(t_o)}^{q(t_j)} \frac{1 \cdot a}{f(q)}\, dq. \tag{2}$$



Rys. 1.14 a, b i c

Przyjmując czas początkowy $t_o = 0$, dostaje się

$$t_j = \int_{q(0)}^{q(t_j)} \frac{1 \cdot a}{f(q)}\, dq. \tag{2a}$$

Równanie (2a) określające czas t_j, odpowiadający dowolnemu punktowi $q(t_j)$, na trajektorii można również zinterpretować geometrycznie. W tym celu należy przerysować jeszcze raz część trajektorii i funkcji f(q) odpowiadającą stanowi początkowemu Q_4, tak, jak na rys. 1.14 a, b. Następnie należy narysować funkcję $y = \frac{1}{f(q)}$ (rys. 1.14c). Bezpośrednio z równania (2a) widać, że czas t_j będzie równy polu pod krzywą $y = \frac{1}{f(q)}$, zawartemu między stanem początkowym q(0), a dowolnie obranym $q(t_j)$. Dla przykładu czas, po którym ładunek na kondensatorze osiągnie wartość 0C, będzie równy

$$t_2 = \int_{-1}^{0} \frac{1 \cdot a}{q+2}\, dq = a \cdot \ln 2 = 0{,}69 \text{ s}$$

i odpowiada to polu zakreskowanemu na rys. 1.14c. Oczywiście metodę tę stosuje się do dowolnego obwodu nieliniowego pierwszego rzędu, opisanego równaniem stanu

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{3}$$

W celu znaleziania skali czasu dla danej trajektorii, należy:

1) narysować funkcję $y = (1/f(x))$ w całym przedziale x odpowiadającym tej trajektorii,

2) znaleźć pole pod krzywą $y = (1/f(x))$ od stanu początkowego t_o do dowolnie obranego punktu trajektorii,

3) suma pola otrzymanego w punkcie 2 i wartość t_o daje czas, odpowiadający danemu punktowi trajektorii.

W przypadku, gdy funkcja $y = \frac{1}{f(x)}$ ma wartości ujemne, to trajektoria ma zwrot w kierunku ujemnym osi x, a gdy funkcja $y = (1/f(x))$ jest dodatnia, to w kierunku dodatnim. Wobec tego pole pod krzywą jest zawsze dodatnie i rośnie w miarę przemieszczania się wzdłuż trajektorii do stanu równowagi.

Na podstawie powyższych rozważań można stwierdzić, że w obwodzie pierwszego rzędu opisanym równaniem (3), gdzie funkcja f(x) jest jednowartościowa, jego rozwiązanie będzie zawsze monotonicznie rosnącą lub monotonicznie malejącą funkcją. Co więcej, za wyjątkiem szczególnych przypadków potrzeba nieskończenie wielkiego czasu dla uzyskania wartości ustalonej. Aby otrzymać dokładną analityczną postać rozwiązania q(t), należy rozwiązać nieliniowe równanie różniczkowe (1). Ponieważ funkcja f(q) jest odcinkowo liniowa, rozwiązanie można przeprowadzić w dwóch etapach.

I. Dla wartości $-1C \leq q \leq 0C$ równanie (1) przyjmie postać

$$a\frac{dq}{dt} = q + 2 \cdot b, \tag{4}$$

gdzie a = 1s, b = 1C.

Rozwiązaniem równania (4) jest

$$q(t) = -2b + be^{\frac{t}{a}} \ [C]. \tag{5}$$

Ładunek na kondensatorze będzie zmieniał się zgodnie z (5) do czasu t_2(0,69 s), po którym osiągnie wartość 0C. Następnie jego zmiana będzie opisana równaniem różniczkowym

$$a\frac{dq}{dt} = -2q + 2b,$$

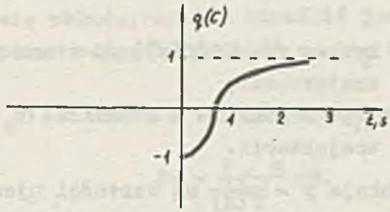
którego rozwiązaniem jest:

$$q(t) = 1 \cdot b - b \cdot e^{-2\frac{(t-t_2)}{a}} \ [C]. \tag{6}$$

Ostatecznie ładunek na kondensatorze będzie zmieniał się według zależności

$$q(t) = (-2b + be^{\frac{t}{a}})\left[1(t)-1(t-t_2)\right] + \left[1 \cdot b - e^{\frac{-2(t-t_2)}{a}}\right] \cdot 1(t-t_2) \ [C]. \tag{7}$$

Graficznie zależność (7) przedstawia rys. 1.14.1.



Rys. 1.14.1

Zadanie 1.15

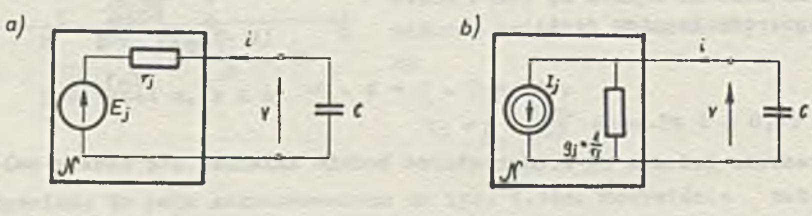
Dla wygody można obliczyć zamiast prądu kondensatora prąd i(t). Równanie stanu dla obwodu z rys. 1.15 będzie miało postać:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{C}\,G(v). \qquad (1)$$

Ponieważ charakterystyka $i = G(v)$ jest odcinkowo liniowa, to dla dowolnej chwili $t = t_0$ punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ musi znajdować się na jednym z jej odcinków. Równanie (1) przyjmuje wtedy postać

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{C}\,G_j(v), \qquad (2)$$

gdzie $G_j(v)$ jest równaniem prostej j-tego odcinka charakterystyki. Punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ będzie znajdować się na j-tym odcinku charakterystyki do czasu, kiedy nie osiągnie on jednego z dwóch jego końców (punktów załamania charakterystyki) w jakiejś chwili czasu $t = t_1$. W ciągu czasu (t_0, t_1) obwód $\mathcal{N}$ można zastąpić równoważnym liniowym obwodem Thevenina lub Nortona o parametrach odpowiadających równaniu prostej j-tego odcinka. Oznacza to, że nieliniowy obwód pierwszego rzędu z rys. 1.15 jest równoważny liniowemu obwodowi pierwszego rzędu z rys. 1.15.1a lub 1.15.1b w tym przedziale czasowym.



Rys. 15.1 a i b

Na podstawie układów z rys. 1.15.1 równanie (2) można napisać w postaci

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{1}{r_j C} v + \frac{1}{r_j C} E_j \tag{3a}$$

lub

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{1}{r_j C} v + \frac{1}{r_j C} (- I_j r_j). \tag{3b}$$

Łatwo można zauważyć, że równania (3a) i (3b) mają tę samą postać:

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{1}{\tau_j} x + \frac{1}{\tau_j} x_j(t_e), \tag{4}$$

gdzie:

$\tau_j = r_j C$

$x_j(t_e) = E_j = - I_j r_j.$

Można sprawdzić, że rozwiązaniem równania różniczkowego (4) jest

$$x(t) = x_j(t_e) + \left[x_j(t_o) - x_j(t_e)\right] e^{-\frac{t-t_o}{\tau_j}} \qquad t \geq t_o. \tag{5}$$

Oczywiście po czasie $t = t_1$ punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ będzie znajdować się na następnym odcinku charakterystyki, co pociągnie za sobą zmianę parametrów obwodu zastępczego Thevenina lub Nortona, a tym samym zmianę współczynników w równaniu (4) i (5). Z powyższych rozważań można wyciągnąć wniosek, że w celu otrzymania pełnego rozwiązania dla dowolnego odcinkowo-liniowego obwodu pierwszego rzędu należy postępować według następującego algorytmu:

1) przedstawić dany obwód w postaci szeregowego połączenia dwójnika rezystancyjnego $\mathcal{N}$ z cewką względnie kondensatorem,
2) określić charakterystykę $i = G(v)$ lub $v = R(i)$ nieliniowego dwójnika rezystancyjnego,
3) ponumerować wszystkie odcinki charakterystyki, poczynając od najmniejszych ujemnych wartości napięcia,
4) określić odpowiedni odcinek j zawierający warunek początkowy $x_j(t_o)$,
5) obliczyć stan równowagi $x_j(t_e)$ i stałą czasową odpowiadającą temu odcinkowi charakterystyki zgodnie z (4),
6) narysować i obliczyć $x(t)$ zgodnie z (5) dla $t \geq t_o$ i odpowiadających $x_j(t_o)$, $x_j(t_e)$ i τ_j,
7) jeśli wartości $x(t)$ otrzymane w pkt. 6 pozostają wewnątrz przedziału określonego przez odcinek j dla wszystkich wartości czasu $t \geq t_o$, to pełne rozwiązanie obwodu składa się tylko z jednej eksponencjalnej funkcji czasu,

8) jeśli wartości x(t) przekraczają przedział określony przez odcinek j, to wtedy trzeba określić czas $t = t_1$, kiedy x(t) osiąga stan końcowy (punkt załamania charakterystyki) odcinka. Eksponencjalne rozwiązanie (5) jest ważne dla czasów $t_0 \leq t \leq t_1$,

9) celem znalezienia dalszej części rozwiązania dla czasu $t > t_1$ należy określić stan przejściowy na odpowiednim odcinku charakterystyki stosownie do zasady zachowania ładunku w kondensatorze (lub strumienia w cewce),

10) traktując stan przejściowy otrzymany w punkcie 9 jako nowy stan początkowy, powtarzamy punkty 4÷9 tyle razy, ile jest to konieczne do otrzymania rozwiązania x(t) dla wszystkich $t \geq t_0$.

Zadanie 1.16

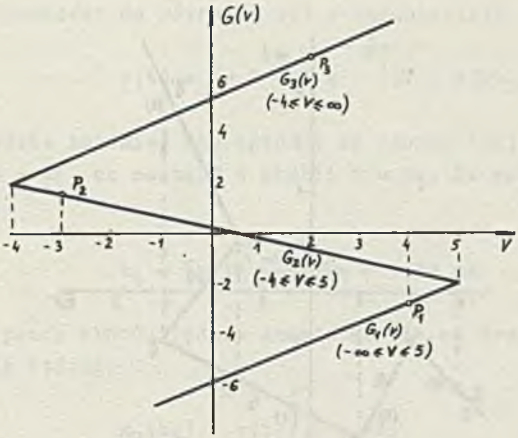
Równanie (1) z zadania 1.15 traci sens przy założeniu, że funkcja G(v) jest różnowartościowa, ponieważ wynikałoby stąd, że rozwiązanie posiada więcej niż jedną wartość pochodnej w danej chwili czasowej. Z drugiej strony wiadomo, że rzeczywisty obwód dynamiczny musi mieć jednoznaczne rozwiązanie dla wszystkich wartości czasu. Tę powstałą pozorną rozbieżność między otrzymanym rozwiązaniem a rzeczywistością można wyjaśnić i usunąć dwiema metodami.

Charakterystykę obwodu $\mathcal{N}$ $i = G(v)$ otrzymano na podstawie pewnego zbudowanego modelu obwodu rzeczywistego. Fakt wystąpienia rozbieżności między rozwiązaniem otrzymanym na podstawie utworzonego modelu a zachowaniem się obwodu rzeczywistego świadczy o tym, że model jest niekompletny, tzn. zostały w nim pominięte pewne istotne pasożytnicze elementy, jak pojemności i indukcyjności.

Metoda pierwsza usunięcia powyższej rozbieżności polega na wprowadzeniu do modelu tych dodatkowych elementów pasożytniczych, co jednak nie zawsze jest sprawą łatwą. Z jednej strony wprowadzone dodatkowe elementy muszą urzeczywistnić dotychczasowy model, z drugiej strony, nie może tych elementów być dużo, bo model będzie zanadto skomplikowany.

Druga z metod, mniej ogólna, opiera się na postulacie o inercji, który wynika z obserwacji praktycznych. Funkcję G(v) można przedstawić w postaci n jednowartościowych gałęzi $G_1(v)$, $G_2(v)$, ..., $G_n(v)$, gdzie każda gałąź $G_j(v)$ jest określona w przedziale $a_j \leq v \leq b_j$. Stan początkowy $v(t_0)$ będzie punktem na jednej z tych gałęzi, np. $G_K(v)$.

Postulat o inercji mówi, że punkt pracy obwodu pozostanie na tej gałęzi, wobec tego równania stanu można zmodyfikować przez zastąpienie różnowartościowej funkcji G(v) funkcją jednowartościową $G_K(v)$. Otrzymane w ten sposób rozwiązanie v(t) jest ważne dla czasu $t \geq t_0$, dla którego $a_K \leq v(t) \leq b_K$. Jeśli założy się, że charakterystyka G(v) obwodu $\mathcal{N}$ jest taka jak na rys. 1.16, to w zależności od stanu początkowego obwodu (P_1, P_2 lub P_3) równanie stanu (1) z zadania 1.15 będzie miało postać:



Rys. 1.16

a) dla stanu początkowego P_1

$$\frac{dv}{dt} = G_1(v) \qquad -\infty \leqslant v \leqslant 5,$$

b) dla stanu początkowego P_2

$$\frac{dv}{dt} = G_2(v) \qquad -4 \leqslant v \leqslant 5,$$

c) dla stanu początkowego P_3

$$\frac{dv}{dt} = G_3(b) \qquad -4 \leqslant v \leqslant \infty$$

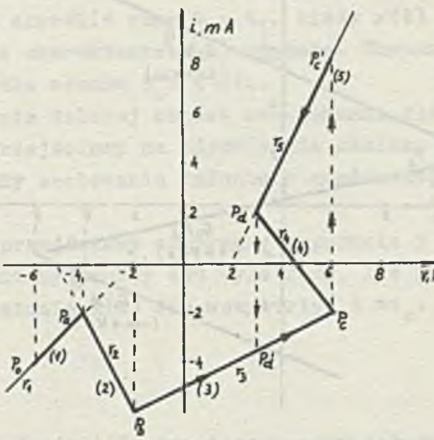
Stosując powyższy postulat o inwercji wraz z zasadą zachowania ładunku (strumienia) w kondensatorze (cewce), można otrzymać zawsze jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnej funkcji G(v).

<u>Zadanie 1.17</u>

Aby otrzymać rozwiązanie dla obwodu z rys. 1.17 należy, zgodnie z algorytmem opisanym w zadaniu 1.15, ponumerować odcinki charakterystyki z rys. 1.17.1 tak, jak na rys. 1.17.2. Z warunku początkowego

$$v(0) = \frac{q(0)}{C} = -6\ V$$

wynika, że w chwili t = 0 punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ znajduje się na pierwszym odcinku charakterystyki w punkcie P_0.



Rys. 1.17.2

Następnie, należy określić drogę dynamiczną, tj. drogę, po której przemieszcza się punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$. Ponieważ $\frac{dv}{dt} = -\frac{i}{C}$, to $\frac{dv}{dt} < 0$ gdy $i > 0$ oraz $\frac{dv}{dt} > 0$ gdy $i < 0$, czyli napięcie na kondensatorze zwiększa się, gdy punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ znajduje się na charakterystyce poniżej osi v i zmniejsza się, gdy jest odwrotnie. Na tej podstawie można wnioskować, że w miarę upływu czasu punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ będzie przemieszczał się od punktu P_o na odcinku pierwszym charakterystyki do punktu P_c odcinka trzeciego poprzez punkty P_a i P_b oraz odcinek drugi. Po osiągnięciu stanu końcowego odcinka trzeciego P_c punkt pracy nie może przemieszczać się wzdłuż odcinka czwartego charakterystyki, gdyż napięcie na kondensatorze nie może maleć w tej części charakterystyki ($\frac{dv}{dt} > 0$). Jedyną możliwością dla drogi dynamicznej jest natychmiastowy przeskok wzdłuż prostej prostopadłej (dlaczego?) ze stanu końcowego P_c do stanu przejściowego P_c' na odcinku piątym charakterystyki. Następnie napięcie na kondensatorze maleje ($\frac{dv}{dt} < 0$) i punkt pracy przesuwa się do punktu P_d, gdzie następuje z podobnych powodów przeskok do punktu P_d'. Wtedy napięcie na kondensatorze ponownie rośnie, aż do momentu, gdy punkt pracy osiągnie punkt P_c, a następnie cały proces powtarza się. Łatwo zatem zauważyć, że napięcie na kondensatorze zmienia się okresowo, tzn. że w obwodzie pojawiły się drgania. W celu otrzymania pełnego analitycznego rozwiązania należy określić dla pierwszego odcinka charakterystyki

$$x_1(0) = v(0) = -6 \text{ V},$$

$$x_1(t_e) = v(t_e) = -2 \text{ V},$$

$$\tau_1 = r_1 \cdot C = 2 \text{ ms}.$$

Podstawiając te wartości do równania (5) w zadaniu 1.15 otrzyma się:

$$v(t) = (-2 - 4\,e^{-\frac{t}{\tau_1}})V \qquad t \geqslant 0. \qquad (1a)$$

Napięcie $v(t)$ będzie zmieniać się zgodnie ze wzorem (1a) do chwili, gdy osiągnie wartość - 4V, co nastąpi w chwili $t = t_1$. Ze wzoru (5) w zadaniu 1.15 otrzyma się

$$t_1 = \tau_1 \ln \frac{-6-(-2)}{-4-(-2)} = 1,39 \text{ ms}$$

Następnie punkt pracy obwodu będzie znajdować się na drugim odcinku charakterystyki, dla którego

$$x_2(t_1) = v(t_1) = -4V,$$

$$x_2(t_2) = v(t_e) = -5V,$$

$$\tau_2 = r_2 \cdot C = -1 \text{ ms},$$

$$v(t) = -5 + e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} V \qquad t \geqslant t_1 \qquad (1b)$$

Po czasie

$$t_2 = t_1 - \tau_2 \ln \frac{-2-(-5)}{-4-(-5)} = 2,49 \text{ ms}$$

punkt pracy obwodu znajdzie się na trzecim odcinku charakterystyki. Ponieważ teraz

$$x_3(t_2) = v(t_2) = -2 \text{ V},$$

$$x_3(t_e) = v(t_e) = 10 \text{ V},$$

$$\tau_3 = r_3 \cdot C = 4 \text{ ms},$$

to napięcie

$$v(t) = 10 - 12\,e^{-\frac{t-t_2}{\tau_3}} V \qquad t \geqslant t_2 \qquad (1c)$$

Punkt P_c na charakterystyce zostanie osiągnięty po czasie

$$t_3 = t_2 + \tau_3 \ln \frac{-2-10}{6-10} = 6,88 \text{ ms},$$

po czym nastąpi natychmiastowy przeskok punktu pracy obwodu i punkt P'_c na charakterystyce zostanie osiągnięty w chwili $t_3^+ = 6{,}88$ ms. Od tego momentu napięcie v(t) będzie maleć ($\frac{dv}{dt} < 0$) zgodnie ze wzorem

$$v(t) = (2 + 4\,e^{-\frac{t-t_3}{\tau_5}})\,V \qquad t \geq t_3 \tag{1d}$$

ponieważ

$$x_5(t_3) = v(t_3) = 6V,$$

$$x_5(t_e) = v(t_e) = 2\ V,$$

$$\tau_5 = r_5 \cdot C = 1\ \text{ms}.$$

W chwili

$$t = t_4 = t_3 + \tau_5 \ln \frac{6-2}{3-2} = 8{,}27\ \text{ms}$$

napięcie na kondensatorze osiągnie wartość 3V, nastąpi natychmiastowy przeskok punktu pracy obwodu z punktu P_d do punktu P'_d charakterystyki. Następnie napięcie będzie narastało według równania

$$v(t) = 10 - 7\,e^{-\frac{t-t_4}{\tau_3}} \qquad t \geq t_4 \tag{1e}$$

aż do wartości 6 V, po czym nastąpi ponowny przeskok punktu pracy obwodu do punktu P'_c na charakterystyce. Będzie to w chwili

$$t = t_5 = t_4 + \tau_3 \ln \frac{3-10}{6-10} = 10{,}51\ \text{ms}.$$

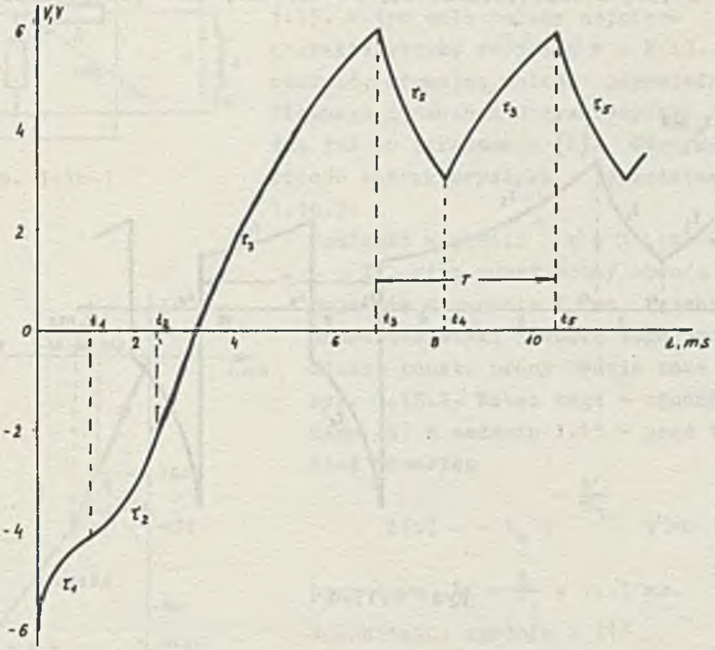
Dla czasu $t > t_5$ napięcie na kondensatorze będzie się zmieniać okresowo według równania (1d) i (1e). Okres drgań będzie wynosił:

$$T = t_5 - t_3 = 2{,}24\ \text{ms}$$

a częstotliwość

$$f = \frac{1}{T} = 446\ \text{Hz}.$$

Przebieg napięcia v(t) opisany równaniami (1a) ÷ (1e) jest przedstawiony na rys. 1.17.3. Warto zauważyć, że ważnym czynnikiem ułatwiającym narysowanie przebiegu napięcia v(t) jest fakt jednakowego nachylenia krzywych eksponencjalnych o stałych czasowych τ_2 i τ_3 w punkcie $t = t_1$ (wykazać!).



Rys. 1.17.3

Prąd $i_c(t)$ oblicza się z zależności

$$i_c = C \cdot \frac{dv}{dt} \tag{2}$$

Różniczkując równania (1a) ÷ (1e) i podstawiając do (2), otrzyma się:

$$i_c(t) = 4\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} \ \text{mA} \quad t > 0 \tag{3a}$$

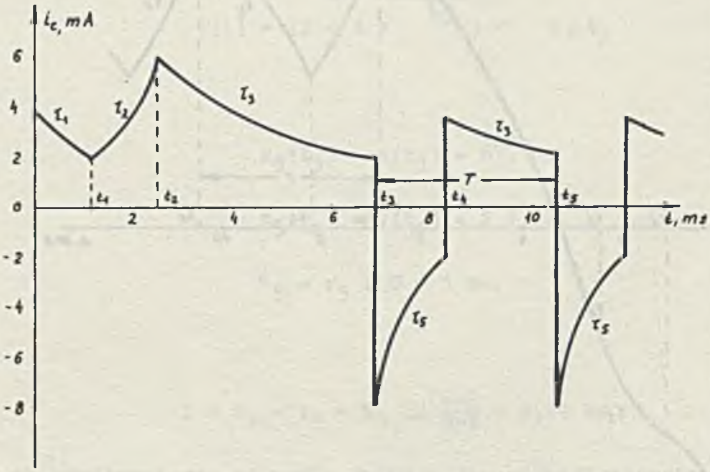
$$i_c(t) = 2\, e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}} \ \text{mA} \quad t \geqslant t_1 \tag{3b}$$

$$i_c(t) = 6\, e^{-\frac{t-t_2}{\tau_3}} \ \text{mA} \quad t \geqslant t_2 \tag{3c}$$

$$i_c(t) = -8\, e^{-\frac{t-t_3}{\tau_5}} \ \text{mA} \quad t \geqslant t_3 \tag{3d}$$

$$i_c(t) = -3{,}5\, e^{-\frac{t-t_4}{\tau_3}} \ \text{mA} \quad t \geqslant t_4 \tag{3e}$$

Po czasie $t \geqslant t_5$ prąd $i_c(t)$ płynący przez kondensator zmienia się okresowo według (3d) i (3e) z częstotliwością, f = 446 Hz, co przedstawia rys. 1.17.4.



Rys. 1.17.4

Zadanie 1.18

W obwodzie z rys. 1.18a istniał stan ustalony zanim klucz K został otwarty. Wobec tego prąd $i_2(t)$, płynący przez cewkę, wyrażał się wzorem

$$i_L(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi),$$

gdzie

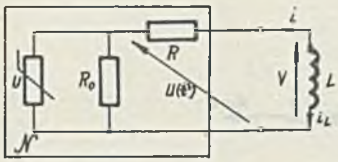
$$I_m = \frac{\sqrt{2}\cdot E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = 20{,}6\ \text{mA}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R} = 72^\circ$$

Najniekorzystniejsza chwila otwarcia klucza K będzie wtedy, gdy wartość chwilowa prądu $i_L(t') = I_m$. Można założyć, że nastąpi to w chwili $t' = 0$. Dla czasu $t' > 0$ obwód z rys. 1.18a można przedstawić w postaci pokazanej na rys. 1.18.1. Równanie stanu dla tego obwodu będzie miało postać:

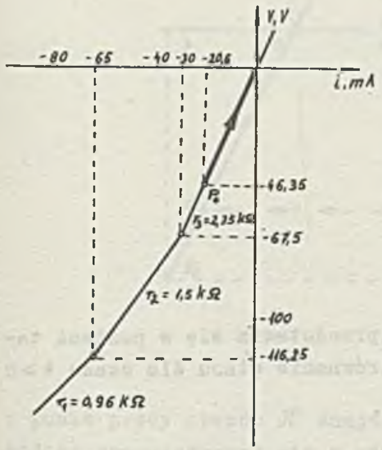
$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v = -\frac{1}{L}R(i), \tag{1}$$

gdzie $v = R(i)$ - charakterystyka dwójnika rezystancyjnego $\mathcal{N}$.



Rys. 1.18.1

Aby obliczyć przebieg prądu $i(t')$ dla $t'>0$ można zastosować algorytm opisany w zadaniu 1.15. W tym celu należy najpierw określić charakterystykę dwójnika $v = R(i)$. Można to uczynić, stosując metodę odpowiedniego graficznego dodawania charakterystyk rezystorów, tak jak to pokazano w [2]. Otrzymaną w ten sposób charakterystykę przedstawia rys. 1.18.2.



Rys. 1.18.2

Ponieważ w chwili $t' = 0$ $i(0) = i_L(0) = - I_m$, więc punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ znajduje się w punkcie P_o na trzecim odcinku charakterystyki i wobec tego droga dynamiczna punktu pracy będzie taka jak na rys. 1.18.2. Wobec tego - zgodnie z równaniem (5) w zadaniu 1.15 - prąd $i(t)$ będzie miał przebieg

$$i(t') = - I_m e^{-\frac{t'}{\tau_3}} \qquad t'>0 \qquad (2)$$

przy czym $\tau_3 = \frac{L}{r_3} = 1,11$ ms.

Wobec tego, zgodnie z (1)

$$v(t') = - r_3 \cdot I_m e^{-\frac{t'}{\tau_3}} \qquad t'>0 \qquad (3)$$

Z rys. 1.18.1 widać, że

$$u(t') = v(t') - i(t') \cdot R. \qquad (4)$$

Z równań (2), (3) i (4) wynika, że napięcie $u(t')$ będzie równe

$$u(t) = -r_3 \cdot i_m e^{-\frac{t'}{\tau_3}} + RI_m e^{-\frac{t'}{\tau_3}} = - 41,2\ e^{-\frac{t}{\tau_3}}\ \text{V} \qquad t'>0 \qquad (5)$$

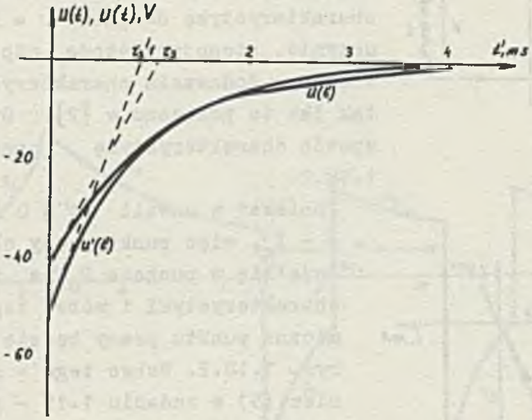
W przypadku, gdyby w obwodzie z rys. 1.18a nie było warystora, to napięcie na cewce $u'(t')$ wynosiłoby

$$u'(t') = - I_m R_o e^{-\frac{t'}{\tau'_3}} = - 51,5\ e^{-\frac{t'}{\tau'_3}}\ \text{V} \qquad t'>0, \qquad (6)$$

gdzie

$$\tau_3 = \frac{L}{R_o + R} = 0,91 \text{ ms.}$$

Przebieg napięcia u(t') i u'(t') zgodnie z (5) i (6) przedstawia rys.1.18.3.

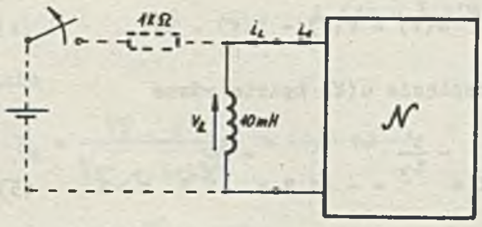


Rys. 1.18.3

Zadanie 1.19

Aby rozwiązać zadanie obwód z rys. 1.19a przedstawia się w postaci takiej jak na rys. 1.19.1. Dla takiego obwodu równanie stanu dla czasu $t>0$ będzie miało postać:

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} v_L = \frac{1}{L} G(i). \qquad (1)$$

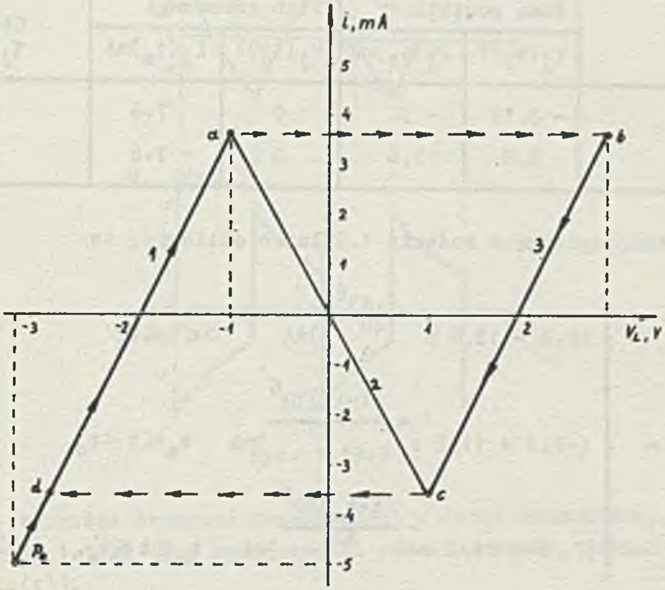


Rys. 1.19.1

Mając określoną charakterystykę $v_L = G(i)$ obwodu $\mathcal{N}$ można znaleźć prąd $i(t)$, będący rozwiązaniem równania różniczkowego (1), stosując algorytm opisany w zadaniu 1.15.

Charakterystyka $i = G(v_L)$ jest zastępczą charakterystyką równoległego połączenia nieliniowych rezystorów, będących szeregowym połączeniem diody tunelowej i SEM. Przedstawia ją rys. 1.19.2. Metody otrzymania takich charakterystyk zostały szczegółowo opisane w [1] i w [2], w zadaniach 3.17-3.21. Ponieważ dla czasów $t<0$ w obwodzie był stan ustalony, więc napięcie $v_L(t) = 0$ V oraz $i(t) = 0$. Stąd w chwili $t = 0^+$

$$i(0^+) = -i_L(0^+) = -\frac{E}{R} = -5 \text{ mA}$$



Rys. 1.19.2

i punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ znajdzie się w punkcie początkowym P_0. Następnie będzie przemieszczał się w górę odcinka 1 charakterystyki do punktu a. Potem, ze względu na to, że $\frac{di}{dt} > 0$, gdy $v_L < 0$ oraz $\frac{di}{dt} < 0$, gdy $v_L > 0$, punkt pracy natychmiast przeskoczy do punktu b na odcinku 3 charakterystyki. Po osiągnięciu punktu c nastąpi przeskok do punktu d na odcinku 1 charakterystyki i punkt pracy ponownie będzie dążył do punktu a, po czym cały proces powtórzy się. W ten sposób w obwodzie z rys. 1.19a powstaną drgania o takim okresie, jaki jest potrzebny, aby punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ przebył drogę a - b - c - d - a.

Zastępując obwód $\mathcal{N}$ liniowym schematem zastępczym o parametrach wynikających z równania prostej odpowiedniego odcinka, otrzymamy równania (1) w takiej postaci, jak równanie (4) w zadaniu 1.15, przy czym:

$$x = i,$$

$$\tau_j = \frac{L}{r_j}$$

$$x_j(t_e) = I_j = -\frac{E_j}{r_j}.$$

Wartości parametrów liniowego schematu zastępczego, dla odcinków 1 i 3 charakterystyki, są przedstawione w tablicy 1.4.

Tablica 1.4

Odcinek	Stan początkowy		Stan równowagi		Stała τ_j µs
	$v_j(t_o)$V	$i_j(t_o)$mA	$v_j(t_o)$V	$i_j(t_e)$mA	
1	- 3,15	- 5	0	7.6	40
3	2,8	3,6	0	- 7.6	40

Stosując metodę opisaną w zadaniu 1.5 łatwo obliczyć, że

$$i(t) = \begin{cases} (7{,}6 - 12{,}6\, e^{-\frac{t\cdot 10^6}{40}})\,\mathrm{mA} & 0 \leqslant t \leqslant t_a \quad (2a) \\ (-7{,}6 + 11{,}2\, e^{-\frac{(t-t_e)10^6}{40}})\,\mathrm{mA} & t_a \leqslant t < t_c \quad (2b) \\ (7{,}6 - 11{,}2\, e^{-\frac{(t-t_c)10^6}{40}})\,\mathrm{mA} & t_c \leqslant t \leqslant t'_a, \quad (2c) \end{cases}$$

gdzie:

$$t_a = \tau_1 \cdot \ln \frac{i(0) - i_1(t_e)}{i(t_e) - i_1(t_e)} = 45{,}9\ \mu s,$$

$$t_c = t_a + \tau_3 \ln \frac{i(t_a) - i_3(t_e)}{i(t_e) - i_3(t_e)} = 87{,}1\ \mu s,$$

$$t'_a = t_c + \tau_1 \ln \frac{i(t_c) - i_1(t_e)}{i(t'_a) - i_1(t_e)} = 128{,}3\ \mu s,$$

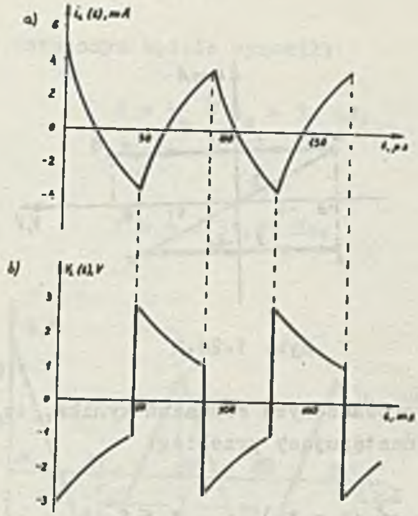
Oczywiście dla $t > t'_a$ prąd i(t) zmienia się okresowo zgodnie z równamiami (2b) i (2c). Wobec tego okres drgań w obwodzie wyniesie

$$T = t'_a - t_a = 82{,}4\ \mu s,$$

a częstotliwość

$$f = \frac{1}{T} = 12{,}14\ \mathrm{kHz}.$$

Prąd płynący przez cewkę $i_L(t) = -i(t)$. Jego przebieg został przedstawiony na rys. 1.19.3a.



Rys. 1.19.3

Napięcie $v_L(t)$ można otrzymać bezpośrednio z drogi dynamicznej, przedstawionej na rys. 1.19.2 (bez konieczności różniczkowania równań określających prąd $i_L(t)$).

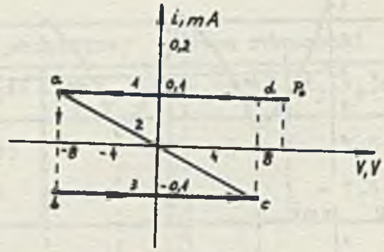
W tym celu należy wykorzystać fakt, że:

1) pochodna dowolnej funkcji eksponencjalnej jest również funkcją eksponencjalną o identycznej stałej czasowej,
2) napięcie na cewce $v_L(t)$ jest zawsze równe zero, kiedy jest stan równowagi. Z tego powodu $v_{L_j}(t_e) = 0$ dla dowolnego odcinka charakterystyki.

Przebieg napięcia $v_L(t)$ jest przedstawiony na rys. 1.19.3b.

Zadanie 1.20

Aby narysować charakterystykę $i = G(v)$ obwodu widzianego od strony zacisków kondensatora, należy wpierw znaleźć charakterystykę rezystora nieliniowego, będącego równoległym połączeniem SPM 0,1 mA i rezystora o charakterystyce takiej jak na rys. 1.20.1, a następnie zastępczą charakterystykę szeregowego połączenia otrzymanych rezystorów. Tak otrzymaną charakterystykę przedstawia rys. 1.20.2. Składa się ona z trzech odcinków, przy czym odcinki pierwszy i trzeci są poziome. Jeśli punkt pracy obwodu będzie znajdował się na jednym z tych odcinków, to wtedy napięcie na kondensatorze będzie liniową funkcją czasu. Wynika to z faktu, że w tym przypadku schemat zastępczy obwodu $\mathcal{N}$ redukuje się do stałej SPM. Przeprowadzając podobne rozumowanie jak w zadaniu 1.17 można stwierdzić, że droga dynamiczna punktu pracy będzie taka, jak zaznaczono na rys. 1.20.2. Z jej przebiegu łatwo wywnioskować, że w stanie ustalonym w obwodzie wystąpią oscylacje.



Rys. 1.20.2

Z dotychczas przeprowadzonych rozważań wynika, że napięcie na kondensatorze będzie miało następujący przebieg:

$$v_c(t) = \begin{cases} v(t_o) - \frac{I_3}{C}(t - t_o) & t_o \leqslant t < t_a \quad (1a) \\ v(t_a) - \frac{I_1}{C}(t - t_a) & t_a < t < t_c \quad (1b) \\ v(t_c) - \frac{I_3}{C}(t - t_c) & t_c \leqslant t < t_a' \quad (1c) \end{cases}$$

gdzie

$$t_a = t_o + C\,\frac{v(t_o) - v(t_a)}{I_3},$$

$$t_c = t_a + C\,\frac{v(t_a) - v(t_c)}{I_1}$$

$$t_a' = t_c + C\,\frac{v(t_c) - v(t_a)}{I_3}$$

Dla czasu $t > t_a'$ napięcie $v_c(t)$ będzie zmieniać się okresowo odpowiednio według równań (1b) i (1c).

Podstawiając dane otrzymane z charakterystyki z rys. 1.20.2, otrzymamy

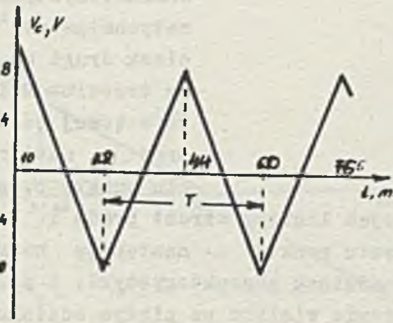
$$v_c(t) = \begin{cases} \left[10 - 1,0(t - 10 \cdot 10^{-3})\right] \text{ V} & 10 \text{ ms} \leqslant t < 28,0 \text{ ms} \\ \left[-8 + 1,0(t - 28,0 \cdot 10^{-3})\right] \text{ V} & 28,0 \text{ ms} \leqslant t < 44,0 \text{ ms} \\ \left[8 - 1,0(t - 44,0 \cdot 10^{-3})\right] \text{ V} & 44,0 \text{ ms} \leqslant t < 62,0 \text{ ms} \end{cases}$$

Okres drgań w stanie ustalonym będzie wynosił:

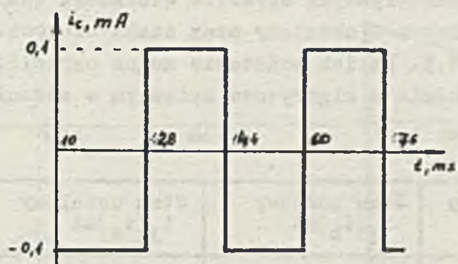
$$T = t'_a - t_a = 34 \text{ ms},$$

a częstotliwość

$$f = \frac{1}{T} = 31{,}25 \text{ Hz}.$$



Rys. 1.20.3



Rys. 1.20.4

Przebieg napięcia $v_c(t)$ jest przedstawiony na rys. 1.20.3, a prądu $i_c(t)$ na rys. 1.20.4. Wartość pojemności kondensatora C, przy której wystąpią w obwodzie drgania o częstotliwości 1 kHz, obliczy się ze wzoru

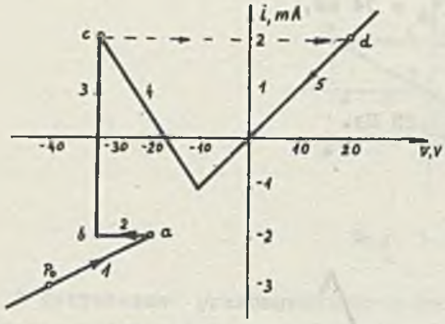
$$C' = \frac{1}{2f}\,\frac{I_1}{v(t_a) - v(t_c)} = 3{,}125 \text{ nF}.$$

<u>Zadanie 1.21</u>

Równanie stanu dla obwodu z rys. 1.21 jest następujące

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L} \cdot G^{-1}(i),$$

gdzie G^{-1} jest funkcją odwrotną do G.



Rys. 1.21.2

Ponieważ funkcja $G^{-1}(i)$ jest odcinkowo liniowa, więc podobnie jak w zadaniach poprzednich, należy wpierw określić drogę dynamiczną punktu pracy obwodu. Przedstawia ją rys. 1.21.2. Rozpoczyna się ona w punkcie początkowym P_0, a następnie po dojściu wzdłuż pierwszego odcinka charakterystyki do punktu a wystąpi natychmiastowy przeskok przez odcinek drugi do punktu b na odcinku trzecim. Dzieje się tak dlatego, że w lewej części charakterystyki prąd i musi rosnąć. Po osiągnięciu punktu b, punkt pracy przesuwa się do punktu c, powodując liniowy wzrost prądu i. Ponieważ prąd i nie może maleć, po osiągnięciu punktu c następuje natychmiastowy przeskok do punktu d na piąty odcinek charakterystyki. Z punktu d punkt pracy dąży w czasie nieskończenie wielkim po piątym odcinku charakterystyki do stanu równowagi, który znajduje się w środku układu współrzędnych. Na podstawie tak określonej drogi dynamicznej punktu pracy obwodu $\mathcal{N}$ można dla każdego odcinka charakterystyki określić wielkości charakterystyczne, tj. stan początkowy, końcowy i ustalony oraz stałą czasową. Zostały one przedstawione w tablicy 1.5. Na ich podstawie można określić przebieg czasowy $i_L(t)$ oraz $v_L(t)$ zgodnie z algorytmem opisanym w zadaniu 1.15.

Tablica 1.5

Nr j	Stan początkowy $i_j(t_a)$mA	Stan końcowy $i_j(t_b)$mA	Stan ustalony $i_j(t_e)$mA	Stała czasowa τ_j µs
1	- 3.0	- 2.0	- 1.0	50
2	- 2.0	- 2.0	- 2.0	∞
3	- 2.0	2.0	∞	0
5	2.0	0	0	100

Na podstawie danych z tablicy 1.5 można obliczyć prąd i(t)

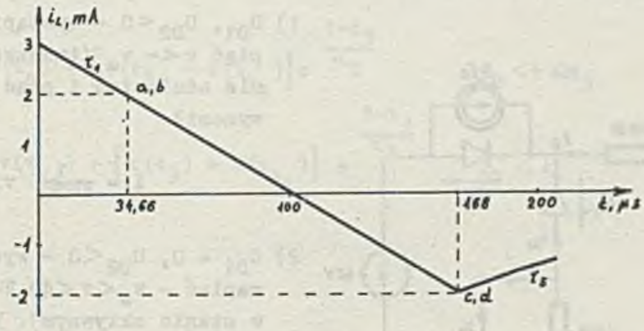
$$i(t) = \begin{cases} -1.0 - 2.0\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} \text{ mA} & 0 \leq t < t_a \\ -2.0 - \frac{v_3}{L} \cdot (t - t_b) \text{ mA} & t_b \leq t < t_c \\ 2.0\, e^{-\frac{t-t_d}{\tau_5}} \text{ mA} & t_d \leq t \end{cases}$$

gdzie:

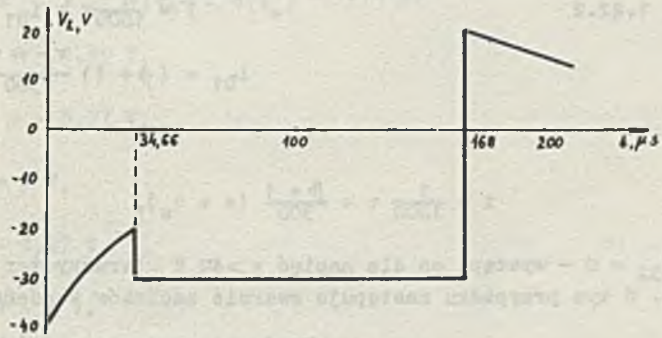
$v_3 = -30$ V,

$$t_a = t_b = \tau_1 \ln \frac{-3.0 - (-1.0)}{-2.0 - (-1.0)} = 34{,}66 \ \mu s,$$

$$t_c = t_d = t_a - \frac{[2.0 - (-2.0)] \cdot L}{v_3} = 168 \ \mu s.$$



Rys. 1.21.3



Rys. 1.21.4

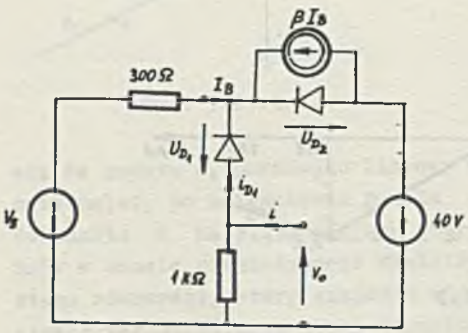
Prąd $i_L(t) = -i(t)$ przedstawiono na rys. 1.21.3. Przebieg napięcia $v_L(t)$ można wyznaczyć bezpośrednio na podstawie przebiegu prądu $i_L(t)$ lub też korzystając z zależności

$$v_L(t) = -L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Przebieg ten przedstawiono na rys. 1.21.4.

Zadanie 1.22

Aby obliczyć przebieg napięcia $v_o(t)$ należy najpierw wyznaczyć charakterystykę prądu i(t) w zależności od napięcia, panującego na zaciskach kondensatorów w obwodzie przedstawionym na rys. 1.22.2. Tranzystor z obwodu na rys.1.22.2 został zastąpiony uproszczonym schematem zastępczym Ebersa-Molla, dla którego przyjęto: $\beta = 60$, $V_{BEo} = 0$, $I_{CEo} = 0$, a diody rzeczywiste zastąpiono idealnymi. W celu otrzymania charakterystyki należy rozważyć następujące przypadki:



Rys. 1.22.2

1) U_{D1}, $U_{D2} < 0$ - wystąpi on dla napięć $v < -v_s$ (tranzystor w stanie odcięcia) i prąd i(t) będzie wynosił

$$i = \frac{1}{1000}\ v,$$

2) $U_{D1} = 0$, $U_{D2} < 0$ - wystąpi on dla napięć $-v_s < v < 40$ V (tranzystor w stanie aktywnym). W tym przypadku mamy:

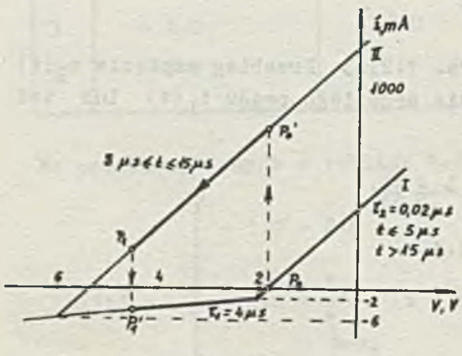
$$i = \frac{1}{1000}v + i_{D1}$$

$$i_{D1} = (\beta + 1)\ \frac{v_s + v}{300}$$

a stąd

$$i = \frac{1}{1000}\ v + \frac{\beta + 1}{300}\ (v + v_s),$$

3) $U_{D1} = 0$, $U_{D2} = 0$ - wystąpi on dla napięć $v > 40$ V (tranzystor w stanie nasycenia). W tym przypadku następuje zwarcie zacisków kondensatora.



Rys. 1.22.3

Ponieważ napięcie $v_s(t)$ jest zmienne w czasie, to również charakterystyka prądu w funkcji napięcia na zaciskach kondensatora będzie zmienna w czasie, co przedstawiono na rys. 1.22.3. Zgodnie z algorytmem przedstawionym w zadaniu 1.15 można znaleźć drogę dynamiczną punktu pracy.

W chwili t = 5 μs punkt pracy przeskoczy natychmiastowo z punktu równowagi P_0 na charakterystyce I do punktu P_0' i następnie będzie przesuwał się po charakterystyce II, aż osiągnie w chwili $t = 15$ μs punkt P_1. Wtedy to, ponieważ napięcie v_s ponownie będzie wynosiło 2V, punkt pracy przeskoczy natychmiast do punktu P_1' na charakterystyce I i następnie będzie przesuwał się po niej, aż osiągnie ponownie punkt równowagi P_0. Mając określoną drogę dynamiczną punktu pracy można określić przebieg czasowy napięcia na kondensatorze, a mianowicie:

$$v_o(t) = v(t_{e_2}) + \left[v(t_{e_1}) - v(t_{e_2})\right] e^{\frac{t-t_1}{\tau_2}} \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

$$v_o(t) = v(t_e) + \left[v(t_2) - v(t_{e_1})\right] e^{\frac{t-t_2}{\tau_1}} \qquad t_2 < t \leqslant t_3$$

$$v_o(t)) = v(t_{e_1}) + \left[v(t_3) - v(t_{e_1})\right] e^{\frac{t-t_3}{\tau_2}} \qquad t_3 < t,$$

gdzie:

$t_1 = 5$ μs,

$t_2 = 15$ μs,

$t_3 = t_2 + \tau_2 \ln \frac{v(t_2) - v(t_e)}{v(t_3) - v(t_e)} = 19{,}4$ μs

$v(t_{e_1}) = -1{,}99$ V,

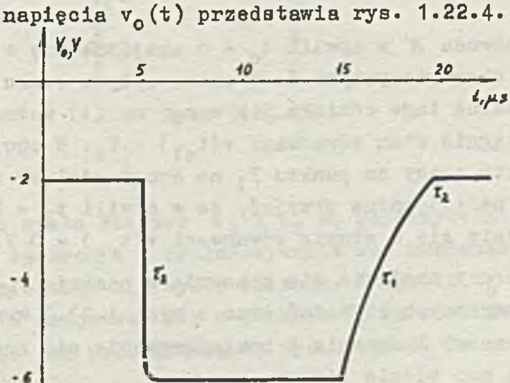
$v(t_{e_2}) = -5{,}77$ V,

$v(t_e) = 0$ V,

$v(t_2) - 5{,}97$ V,

$v(t_3) = -2$ V.

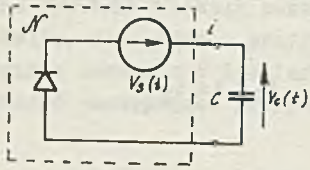
Przebieg czasowy napięcia $v_o(t)$ przedstawia rys. 1.22.4.



Rys. 1.22.4

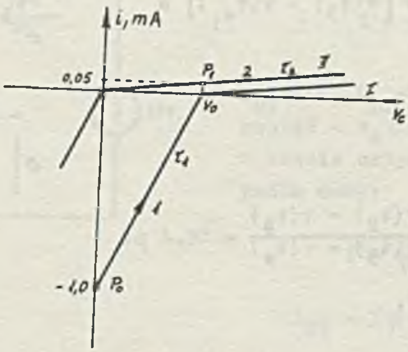
Zadanie 1.23

Z obwodu przedstawionego na rys. 1.23a wyodrębnia się kondensator, tak jak przedstawia to rys. 1.23.2, a następnie po znalezieniu charakterystyki $i = G(v_c)$ podobwodu $\mathcal{N}$, można zastosować algorytm przedstawiony w zadaniu 1.15, pozwalający na znalezienie przebiegu napięć $v_c(t)$ i $v_d(t)$.



Rys. 1.23.2

Kształt charakterystyki $i = G(v)$ jest zależny od napięcia $v_s(t)$. W przypadku, gdy $v_s(t) = V_0$ obowiązuje charakterystyka I, a gdy $v_s(t) = 0$ to charakterystyka II, tak jak przedstawia to rys. 1.23.3



Rys. 2.23.3

Ad a)

Ze względu na to, że $\tau_1 = R_1C = 0{,}1$ ms, a $\tau_2 = R_2C = 2$ ms, więc w tym przypadku

$$\tau \gg \tau_1 \quad \text{i} \quad \tau \gg \tau_2. \tag{1}$$

Punkt pracy podobwodu $\mathcal{N}$ w chwili $t_0 = 0$ znajdzie się w punkcie P_0 na odcinku pierwszym charakterystyki I. W miarę upływu czasu będzie się on przemieszczał wzdłuż tego odcinka i z uwagi na (1) można założyć, że w chwili $t = \tau^-$ osiągnie stan równowagi $v(t_{e1}) = V_0$. W chwili $t_1 = \tau^+$ nastąpi przeskok punktu pracy do punktu P_1 na drugi odcinek charakterystyki II. Również z uwagi na (1) można przyjąć, że w chwili $t_2 = 2\tau^-$ punkt pracy podobwodu $\mathcal{N}$ znajdzie się w stanie równowagi $v(t_{e_2}) = 0$ V. Po upływie czasu $t_2 = 2\tau^+$ punkt pracy znajdzie się ponownie w punkcie P_0 i cały proces powtórzy się. Z powyższych rozważań oraz z rys. 1.23.3 wynika, że w obwodzie wystąpi okresowe ładowanie i rozładowywanie się kondensatora i wobec tego napięcie na nim będzie równe:

$$v_c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \ \mathrm{V} \qquad 0 \leq t \leq \tau$$

$$v_c(t) = 1 \cdot e^{-\frac{t-\tau}{\tau_2}} \ \mathrm{V} \qquad \tau < t \leq 2\tau$$

Ponieważ

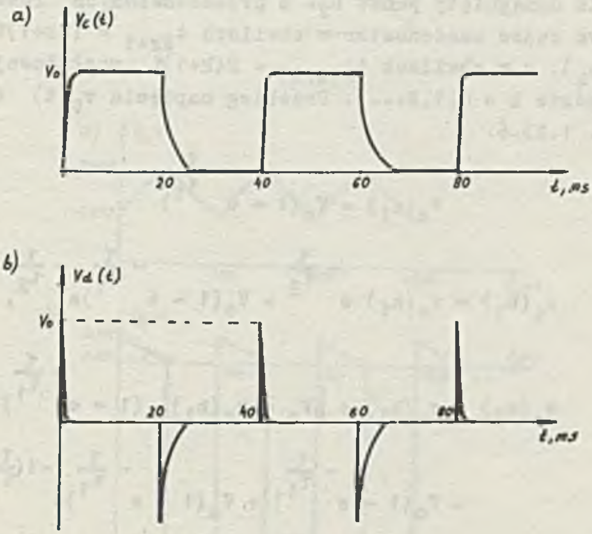
$$v_d(t) = v_s(t) - v_c(t),$$

więc

$$v_d(t) = 1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} \ \mathrm{V} \qquad 0 \leq t \leq \tau$$

$$v_d(t) = -1 \cdot e^{-\frac{t-\tau}{\tau_2}} \ \mathrm{V} \quad \tau \leq t \leq 2\tau.$$

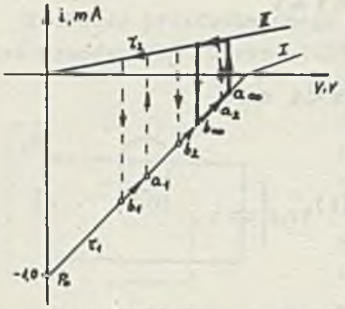
Przebiegi napięć $v_c(t)$ i $v_d(t)$ są przedstawione na rys. 1.23.4 a i b.



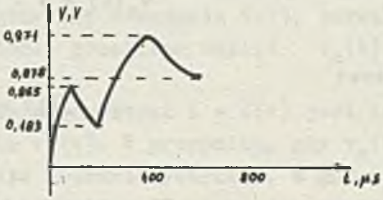
Rys. 1.23.4

Ad b)

W tym przypadku stałe czasowe τ_1 i τ_2 są porównywalne z czasem τ i wobec tego przebieg ładowania i rozładowywania się kondensatora w obwodzie z rys. 1.23.a będzie inny niż wyżej opisany. W chwili $t_0 = 0$ punkt pracy podobwodu $\mathcal{N}$ będzie znajdował się w punkcie P_0 na odcinku pierwszym charakterystyki I, tak jak przedstawia to rys. 1.23.5. Po czasie $t_1 = \tau$ -



Rys. 1.23.5



Rys. 1.23.6

punkt pracy osiągnie punkt a_1 i w chwili $t_1 = \tau^+$ nastąpi natychmiastowy jego przeskok na drugi odcinek charakterystyki II, a po czasie $t_2 = 2\tau^-$ osiągnie on punkt b_1. Następnie w chwili $t_2 = 2\tau^+$ punkt pracy ponownie przeskoczy na pierwszy odcinek charakterystyki I i po czasie $t_3 = 3\tau^-$ osiągnie punkt a_2. Po ponownym przeskoku na charakterystykę II w chwili $t_4 = 4\tau^-$ zostanie osiągnięty punkt b_2. Z przedstawionych rozważań widać, że w miarę upływu czasu kondensator w chwilach $t_{2k+1} = (2k+1)\tau$ ładuje się do napięcia $v_c(a_k)$, a w chwilach $t_{2(k+1)} = 2(k+1)\tau$ rozładowuje się do napięcia $v_c(b_k)$, gdzie $k = 0,1,2\ldots$. Przebieg napięcia $v_c(t)$ dla $k = 1, 2$ przedstawia rys. 1.23.6.

Ponieważ

$$v_c(a_1) = V_0(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}})$$

$$v_c(b_1) = v_c(a_1)\, e^{-\frac{\tau}{\tau_2}} = V_0(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}})e^{-\frac{\tau}{\tau_2}},$$

więc

$$v_c(a_2) = v_c(b_1) + \left[V_0 - v_c(b_1)\right](1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}) =$$

$$= V_0(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}) + V_0(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}})e^{-\tau(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2})} \tag{2a}$$

$$v_c(b_2) = v_c(a_2)\, e^{-\frac{\tau}{\tau_2}}. \tag{2b}$$

Na podstawie przeprowadzonych rozważań oraz (2a) i (2b) można obliczyć, że

$$v_c(a_k) = V_0(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}) \sum_{i=1}^{k} e^{-\frac{(i-1)\tau}{\tau_2}} \tag{3a}$$

$$v_c(b_k) = V_o\left(1-e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}\right) e^{-\frac{\tau}{\tau_2}} \sum_{i=1}^{k} e^{-\frac{(i-1)\tau}{\tau_z}}, \tag{3b}$$

gdzie $\tau_z = \dfrac{\tau_1 \cdot \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$.

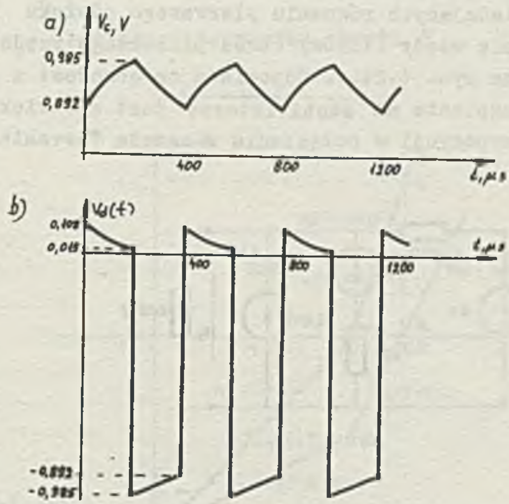
W stanie ustalonym, tzn. wtedy gdy $t \to \infty$, otrzymamy

$$v_c(a_\infty) = \lim_{k\to\infty} v_c(a_k) = V_o\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}\right)\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} e^{-\frac{(i-1)\tau}{\tau_z}} =$$

$$= V_o \frac{1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}}{1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_z}}} \tag{4a}$$

oraz

$$v_c(b_\infty) = v_c(a_\infty)\, e^{-\frac{\tau}{\tau_2}} = V_o \frac{\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}\right) e^{-\frac{\tau}{\tau_2}}}{1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_z}}}. \tag{4b}$$



Rys. 1.23.7a i b

Na podstawie (4a) i (4b) można stwierdzić, że w stanie ustalonym kondensator ładuje się i rozładowuje się okresowo odpowiednio do napięć $v_c(a_\infty)$ i $v_c(b_\infty)$, co przedstawia rys. 1.23.7a, a przebieg napięcia $v_d(t)$ rys. 1.23.7b. Wartości napięć $v_c(a_\infty)$ i $v_c(b_\infty)$ można znaleźć wprost, zakładając, że w stanie ustalonym kondensator w ciągu okresu 2τ ładuje i rozładowuje się do tych samych wartości napięć.

Wobec tego

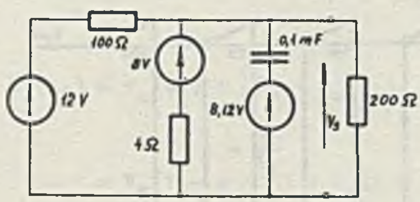
$$v_c(a_\infty) = v_c(b_\infty) + \left[V_o - v_c(b_\infty)\right]\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}\right) \qquad (5a)$$

$$v_c(b_\infty) = v_c(a_\infty)\, e^{-\frac{\tau}{\tau_2}}. \qquad (5b)$$

Rozwiązaniem równań (5a), (5b) są wyrażenia (4a) i (4b)

Zadanie 1.24

Można założyć, że obciążenie zmienia się w chwili $t = 0$. Dla czasu $t<0$ w obwodzie był stan ustalony. Stan równowagi obwodu można określić, rozwiązując, zgodnie z metodą przedstawioną w zadaniu 1.3, nieliniowy obwód rezystancyjny powstały z usunięcia kondensatora w schemacie stabilizatora. Stosując metodę graficzną opisaną w [2] w zadaniu 3.1, otrzymamy $v_{so} = 8{,}12$ V, czyli w chwili $t = 0$ rezystancja odciążenia zmienia się skokowo od wartości $R_{ob} = R_1 = 1\ \mathrm{k}\Omega$ do wartości $R_{ob} = R \parallel R_2 = 200\Omega$, a napięcie na stabilizatorze wynosi $U = -v_{so}$. Wobec tego celem obliczenia napięcia $v_s(t)$ dla $t>0$ można stabilistor zastąpić liniowym schematem zastępczym o parametrach odpowiadających równaniu pierwszego odcinka jego charakterystyki. Otrzymuje się wtedy liniowy obwód pierwszego rzędu, który został przedstawiony na rys. 1.24.1. Odpowiada on obwodowi z rys. 1.24 a, przy założeniu, że napięcie na stabilistorze jest nie większe niż - 8 V. Stosując zasadę superpozycji w połączeniu z zasadą Thevenina, otrzymamy:

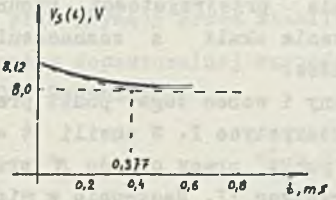


Rys. 1.24.1

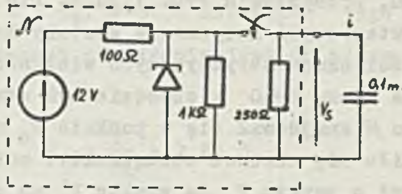
$$v_s(t) = \frac{12}{100 + 200 \parallel 4} \cdot (200 \parallel 4) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + \frac{8 \cdot (100 \parallel 200)}{4 + 100 \parallel 200}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) +$$

$$+ 8 \cdot 12\, e^{-\frac{t}{T}} = 8 + 0{,}12\, e^{-\frac{t}{T}}\ \mathrm{V}, \qquad t > 0 \qquad (1)$$

gdzie: $T = \left[(100 \parallel 4) \parallel 200\right] \cdot 0.1 \cdot 10^{-3} = 0{,}377$ ms.



Rys. 1.24.2

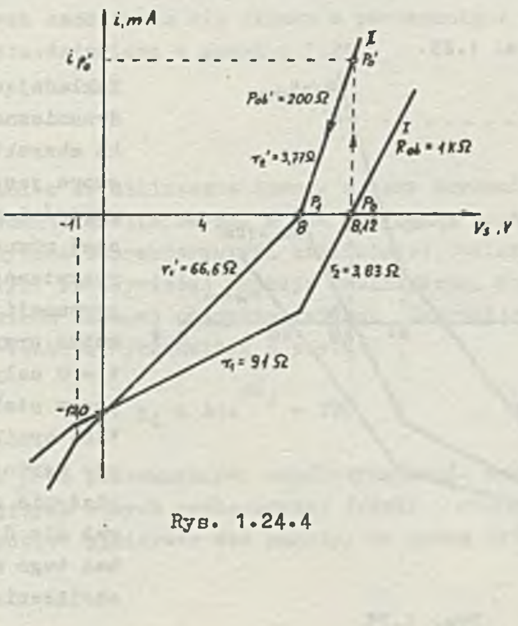


Rys. 1.24.3

Z równania (1) wynika, że napięcie $v_s(t)$ nie będzie mniejsze od 8 V dla czasu $t > 0$, co oznacza, że napięcie na stabilistorze nie będzie większe od - 8V. Wobec tego równanie (1) całkowicie określa przebieg napięcia stabilizowanego $v_s(t)$ przy skokowej zmianie obciążenia. Napięcie $v_s(t)$ przedstawia również rys. 1.24.2. Przebieg napięcia $v_s(t)$ można również obliczyć, stosując metodę zmiennych stanu. W tym celu obwód z rys. 1.24a przedstawia się tak, jak pokazuje to rys. 1.24.3. Wobec tego równanie stanu obwodu z rys. 1.24a będzie miało postać

$$\frac{dv_s}{dt} = -\frac{1}{C}\,G(v_s), \tag{2}$$

gdzie: $i = G(v_s)$ jest charakterystyką obwodu N.



Rys. 1.24.4

Charakterystykę tę, dla wartości rezystancji obciążenia $R_{ob} = 1\ k\Omega$ i $R_{ob} = 200\Omega$, przedstawia rys. 1.24.4. Dla zachowania przejrzystości rysunku charakterystyki narysowane zostały bez zachowania skali z zaznaczeniem wartości charakterystycznych wielkości i punktów.

Dla czasu $t < 0$ w obwodzie był stan ustalony i wobec tego punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ znajdował się w punkcie P_0 na charakterystyce I. W chwili $t = 0$ zmieniło się skokowo obciążenie i wobec tego punkt pracy obwodu $\mathcal{N}$ przeskoczył z punktu P_0 do punktu P_0' na charakterystyce II. Następnie w miarę upływu czasu przemieszcza się on od punktu P_0' w kierunku punktu P_1, osiągając go po czasie $t = \infty$. Aby znaleźć przebieg napięcia $v_s(t)$ dla $t > 0$ należy zastosować algorytm opisany w zadaniu 1.15, otrzymując

$$v_s(t) = 8 + (8.12 - 8)e^{-\frac{t}{\tau_2}} \qquad t > 0. \tag{3}$$

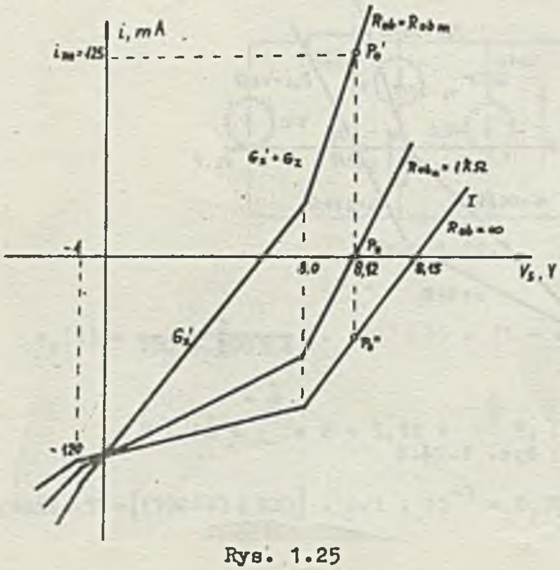
Równanie (3) jest oczywiście równoważne równaniu (1), otrzymanemu przy zastosowaniu metody linearyzacji odcinkowej.

Zadanie 1.25

Charakterystyki $i = G(v_s)$ obwodu $\mathcal{N}$ z rys. 1.24.3 w zadaniu 1.24 dla wartości obciążenia:

1) $R_{ob} = R_{ob} = 1\ k\Omega$
2) $R_{ob} = R_{ob_m} < 200\Omega$,
3) $R_{ob} = \infty$

przedstawia rys. 1.25.



Rys. 1.25

Zakładając, że rezystancja dynamiczna pierwszego odcinka charakterystyki stabilistora jest dużo mniejsza od wartości rezystancji zastępczej równoległego połączenia rezystancji obciążenia i rezystancji o wartości 100Ω, można przyjąć, że w chwili $t = 0$ cały prąd i przepływa przez stabilistor. Z rys. 1.25 wynika, że w przypadku, gdy wartość rezystancji obciążenia zwiększy się, to nawet dla $R_{ob} = \infty$ $|i| < |i_m|$. Wobec tego wartość rezystancji obciążenia może wzrosnąć nieograniczenie. Na podstawie rys. 1.24.4 w zadaniu 1.24 łatwo można wyliczyć, że w przypadku, gdy rezystancja obciążenia wynosi 200Ω, to maksymalny prąd płynący przez stabilistor $i_s = -i_{P_o'} = 31{,}8$ mA. Wobec tego dolna granica dopuszczalnej wartości rezystancji obciążenia jest mniejsza od 200Ω. Oznaczając

$$G'_x = 0{,}01 + \frac{1}{R_x}, \qquad G_z = \frac{1}{R_z} = 0{,}25\ \mathrm{S},$$

gdzie:

R_x - minimalna dopuszczalna wartość rezystancji obciążenia,
R_z - rezystancja pierwszego odcinka charakterystyki stabilistora, otrzymano z rys.1.25

$$G'_x \cdot 8 + (G'_x + G_z)\,0{,}12 = 0{,}125 - (-0{,}120). \tag{1}$$

Z równania (1) otrzymuje się

$$G'_x = 0{,}024\ \mathrm{S}$$

a stąd

$$R_x = 71{,}4\Omega.$$

Tak więc, jeśli rezystancja obciążenia zmienia się w przedziale $R_x \leq R_{obn} < \infty$, to chwilowa wartość prądu płynącego przez stabilistor nie przekroczy 125 mA. W zadaniu tym, uwydatnia się zaleta metody zmiennych stanów przy określaniu jakościowych cech zachowania się układu w porównaniu z metodą linearyzacji odcinkowej, przedstawioną w zadaniu 1.24.

Zadanie 1.26.

Przed przystąpieniem do obliczenia obwodu należy dokonać aproksymacji charakterystyki elementu nieliniowego. W tym przypadku zostanie dokonana aproksymacja analityczna charakterystyki nieliniowej, polegająca na zastąpieniu charakterystyki rzeczywistej funkcją analityczną, która dostatecznie dokładnie odpowiada zadanej charakterystyce. Charakterystykę diody można aproksymować funkcją wykładniczą o postaci

$$i_d = A(e^{\beta u_d} - 1), \tag{1}$$

przy czym stałe A i β są poszukiwanymi współczynnikami. Wyznaczyć je można na podstawie zdjętych danych pomiarowych. Jeżeli charakterystyka ma przechodzić przez zdjęte pomiarowo dwa punkty, to muszą być spełnione dwa równania.

$$i_d^{(1)} = A(e^{\beta u_d^{(1)}} - 1)$$
$$i_d^{(2)} = A(e^{\beta u_d^{(2)}} - 1) \qquad (2)$$

stąd

$$\frac{i_d^{(2)}}{i_d^{(1)}} \; \frac{e^{\beta u_d^{(2)}} - 1}{e^{\beta u_d^{(1)}} - 1}.$$

W celu obliczenia stałej β określa się funkcję pomocniczą

$$f(\beta) = \frac{e^{\beta u_d^{(2)}} - 1}{e^{\beta u_d^{(1)}} - 1},$$

która została przedstawiona w tablicy 1.6

Tablica 1.6

β	20	23,7	24	21	20,5	20,25	20,20	20,15	20,10
$f(\beta)$	3,32	4,15	4,22	3,52	3,42	3,37	3,36	3,35	3,34

Ponieważ $\frac{i_d^{(2)}}{i_d^{(1)}} = 3,34$ to wartość stałej β wynosi 20, 10. Stałą A można wyznaczyć z jednego z równań (2), czyli

$$A = \frac{i_d^{(1)}}{e^{\beta u_d^{(1)}} - 1} = 1,16 \text{ nA}.$$

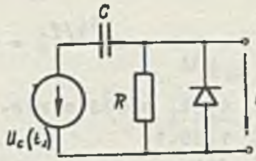
Charakterystykę diody można zatem aproksymować funkcją

$$i_d = 1,16 \cdot 10^{-6} \, (e^{20,1 \, u_d} - 1) \text{ mA}. \qquad (3)$$

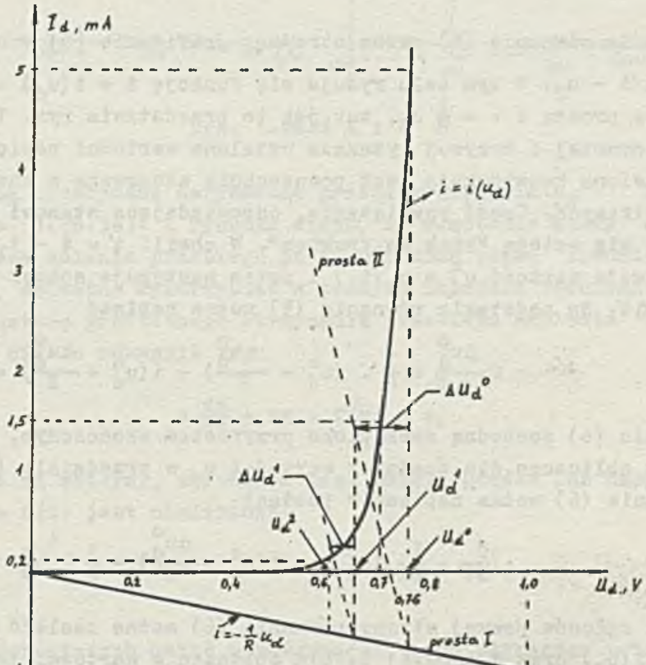
Napięcie u(t) można obliczyć, rozpatrując kolejno dwa przedziały czasowe:

1) $0 < t \le t_1$,

2) $t_1 < t$.



Rys. 1.26.1



Rys. 1.26.2

W pierwszym przypadku obwód z rys. 1.26a można uprościć do obwodu CR ponieważ dioda opisana równaniem (3) dla napięć $u_d < 0$ posiada rezystancję dużo razy większą od rezystora R. Wobec tego

$$u(t) = E\, e^{-t/T} \qquad 0 < t \leqslant t_I, \tag{4}$$

gdzie: T = RC = 1 ms.

W chwili $t = t_1$ napięcie na kondensatorze jest równe

$$u_c(t_1) = E(1 - e^{-t_1/T}) = 0{,}76\ V.$$

W przypadku drugim dla czasu $t > t_1$ obwód z rys. 1.26a można przedstawić tak, jak pokazano to na rys. 1.26.1.
Przebieg napięcia $u_d(t) = -u(t)$ opisuje dla $t > t_1$ równanie

$$C\frac{du_d}{dt} + \frac{u_d}{R} + A(e^{\beta u_d} - 1) = 0. \qquad (5)$$

Rozwiązanie równania (5) można otrzymać graficznie [5] w układzie współrzędnych $i - u_d$. W tym celu rysuje się funkcję $i = i(u_d) = A(e^{\beta u_d} - 1)$, a następnie prostą $i = -\frac{1}{R}u_d$, tak jak to przedstawia rys. 1.26.2. Przecięcie się prostej i krzywej wyznacza ustalone wartości napięcia i prądu. Przedstawiona konstrukcja jest powszechnie stosowana w analizie obwodów elektronicznych. Część rozwiązania, odpowiadająca stanowi nieustalonemu, znajduje się metodą "krok za krokiem". W chwili $t' = t - t_1 = 0$ napięcie u_d przyjmuje wartość $u_d^o = u_c(t_1)$ i potem następuje spadek u_d o Δu_d^o, w czasie $\Delta t'$. Na podstawie równania (5) można napisać

$$C\frac{\Delta u_d^o}{\Delta t'} + \frac{1}{R}\cdot\left(u_d^o + \frac{\Delta u_d^o}{2}\right) + i\left(u_d^o + \frac{\Delta u_d^o}{2}\right) = 0. \qquad (6)$$

W równaniu (6) pochodną zastąpiono przyrostem skończonym, a drugi i trzeci człon obliczono dla średniej wartości u_d w przedziale $(u_d^o,\ u_d^o + \Delta u_d^o)$.

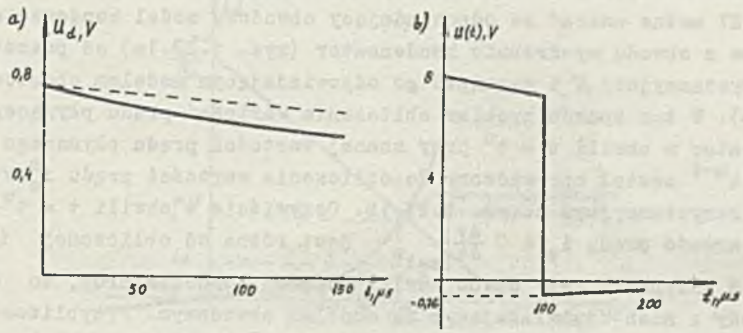
Równanie (6) można napisać w postaci

$$-\left(\frac{C}{\Delta t'} + \frac{1}{2R}\right)\Delta u_d^o = -\,i\left(u_d^o + \frac{\Delta u_d^o}{2}\right) - \frac{1}{R}\cdot u_d^o. \qquad (6)$$

Wartości członów prawej strony równania (6) można znaleźć korzystając z krzywej $i(u_d)$ oraz z prostej I. Dla obliczenia wartości lewej strony równania potrzebna jest jeszcze pewna prosta pomocnicza. Nachylenie tej prostej, zwanej prostą II, jest równe $-\left(\frac{C}{\Delta t'} + \frac{1}{2R}\right)$. Wychodzi ona z punktu o odciętej u_d^o leżącego na prostej I. Przed rysowaniem prostej II należy wybrać wielkość $\Delta t'$ (na rys. $\Delta t' = 50\mu s$).

Wybór $\Delta t'$ jest wynikiem kompromisu. Powinno się ją wybrać tak, by zapewnić odpowiednią ilość kroków rozwiązania. Sposób znalezienia przyrostu Δu_d^o przedstawia rysunek. Krzywa $i\ (u_d)$ musi przepołowić odcinek, przedstawiający Δu_d^o. Wartość u_d na początku następnego kroku jest równa $u_d^1 = u_d^o + \Delta u_d^o$.

Konstrukcja jest wykonywana w dalszym ciągu w opisany sposób. Wynik każdego kroku obliczeniowego jest podstawą do kroku następnego. Postępując w ten sposób kilkakrotnie możemy narysować przebieg napięcia $u_d(t')$ tak, jak przedstawia to rys. 1.26.3a. Na rys. 1.26.3b przedstawiono przebieg napię-



Rys. 1.26.3 a i b

cia u(t). Linią przerywaną narysowano przebieg napięcia $u_d(t)$ dla obwodu bez diody (rys. 1.26.3a). Z rysunku widać, że włączenie diody do obwodu powoduje szybsze malenie przebiegu po zakończeniu czasu trwania impulsu prostokątnego, co można wykorzystać w pewnych układach techniki impulsowej. Opisaną metodę graficznego otrzymania przebiegu napięcia u(t) dla $t > t_1$ stosuje się do równania typu

$$a \frac{dx}{dt} + bx + f(x) = c,$$

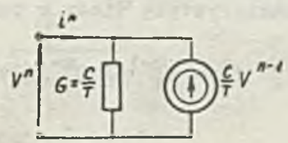
gdzie: a, b, c są stałymi, zmienna x jest zwykle prądem lub napięciem, a funkcja f(x) jest nieliniowa.

Zadanie 1.27

Jedną z najprostszych metod aproksymacji prądu płynącego przez kondensator w chwili $t^n = nT$ jest obliczenie go ze wzoru Eulera (zad. 1.12)

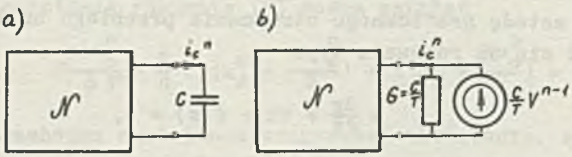
$$i_c^n \cong C \frac{(v_c^n - v_c^{n-1})}{T}, \qquad (1)$$

gdzie: $T = t^n - t^{n-1}$.



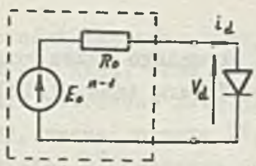
Rys. 1.27

Jeśli równanie (1) będzie uważać się za zapis I prawa Kirchhoffa, to odpowiadać mu będzie model obwodowy przedstawiony na rys. 1.27. Obwód z rys. 1.27 można uważać za odpowiadający obwodowy model kondensatora. Można zatem z obwodu wyodrębnić kondensator (rys. 1.27.1a) od pozostałej części rezystancyjnej $\mathcal{N}$ i zastąpić go odpowiadającym modelem obwodowym (rys. 1.27.1b). W ten sposób problem obliczenia wartości prądu płynącego przez kondensator w chwili $t = t^n$ przy znanej wartości prądu płynącego w chwili $t = t^{n-1}$ został sprowadzony do obliczenia wartości prądu i_c^n w obwodzie czysto rezystancyjnym z rys. 1.27.1b. Oczywiście w chwili $t = t^n$ rzeczywista wartość prądu $i_c = C \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t^n}$ jest różna od obliczonej i_c^n (rys. 1.12). W przypadku, gdy obwód zawiera więcej kondensatorów, to zastępuje się każdy z nich odpowiadającym mu modelem obwodowym. Przybliżone wartości prądów płynących przez nie w chwili $t = t^n$ otrzymuje się po rozwiązaniu otrzymanego obwodu rezystancyjnego. Obwód rezystancyjny z rys.1.27.1b może zawierać nieliniowe rezystory i wtedy trzeba zastosować jedną z metod iteracyjnych dla jego rozwiązania. Jedną z najbardziej znanych metod jest zmodyfikowana metoda Newtona [5].



Rys. 1.27.1 a i b

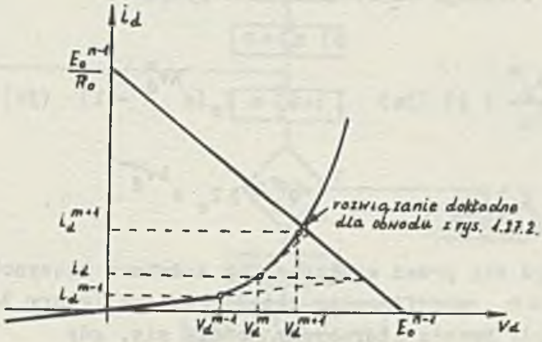
W celu przedstawienia istoty metody zakłada się, że obwód z rys. 1.27.1b zawiera tylko jeden nieliniowy rezystor, np. diodę o charakterystyce $i_d = I_s(e^{\lambda v_d} - 1)$. Wtedy można wyodrębnić ją z obwodu, a pozostałą część liniową zastąpić równoważnym schematem zastępczym Thevenina, tak jak przedstawia to rys. 1.27.2. Jeśli założy się, że znana jest wartość prądu i napięcia diody (i_d^{m-1}, v_d^{m-1}) w (m-1) iteracji, to prąd i_d^m w m-tej iteracji można obliczyć w następujący sposób (rys. 1.27.3):



Rys. 1.27.2

1) linearyzuje się charakterystykę diody w punkcie (i_d^{m-1}, v_d^{m-1})

$$i_d^m = i_d^{m-1} + G_d^{m-1} (v_d^m - v_d^{m-1}), \tag{2}$$

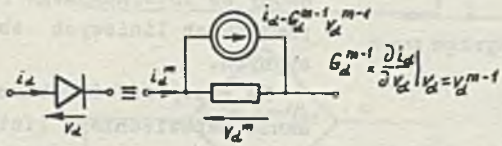


Rys. 1.27.3

gdzie:

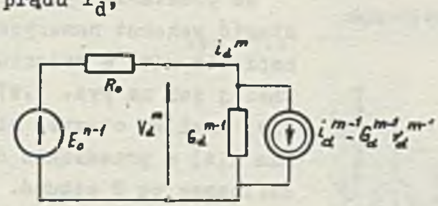
$$G_d^{m-1} = \left.\frac{\partial i_d}{\partial v_d}\right|_{v_d=v_d^{m-1}} = \lambda I_s\, e^{\lambda v_d^{m-1}},$$

2) traktując równanie (2) jako zapis I prawa Kirchhoffa diodę zastępuje się odpowiadającym liniowym modelem zastępczym, przedstawionym na rys. 1.27.4,



Rys. 1.27.4

3) rozwiązując powstały liniowy obwód rezystancyjny (rys. 1.27.5) otrzymuje się wartość prądu i_d^m,



Rys. 1.27.5

4) parametry odpowiadającego liniowego obwodowego modelu diody z rys. 1.27.4 w m-tej iteracji oblicza się następująco:

a) $v_d^m > 0$ b) $v_d^m < 0$

$$v_d^m = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{i_d^m}{I_s} + 1\right) \quad (3a) \qquad i_d^m = I_s\left(e^{\lambda v_d^m} - 1\right) \quad (3b)$$

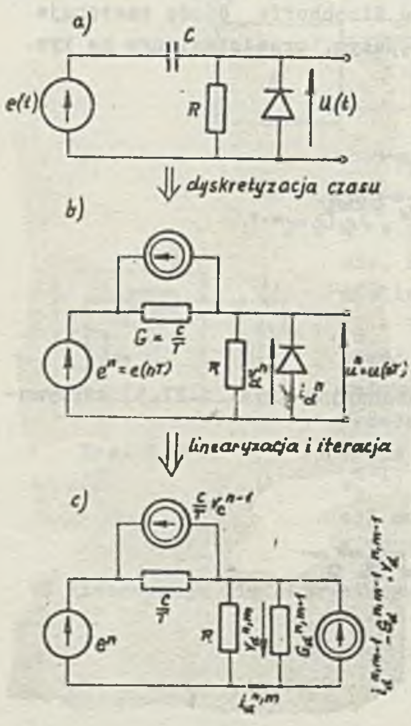
$$G_d^m = \lambda(i_d^m + I_s) \qquad G_d^m = \lambda I_s\, e^{\lambda v_d^{m-1}}$$

Aby zabezpieczyć się przed wystąpieniem nadmiaru maszynowego stosuje się dla napięć $v_d > 0$ zmodyfikowaną metodę Newtona (wzory 3a) zamiast tradycyjnej (wzory 3b). Proces iteracyjny kończy się, gdy

$$\left(v_d^{m_f} - v_d^{m_f-1}\right)^2 \leqslant \varepsilon ,$$

gdzie ε - zadana wartość błędu iteracji, np. $\varepsilon = 10^{-10}$, a m_f końcowa liczba iteracji.

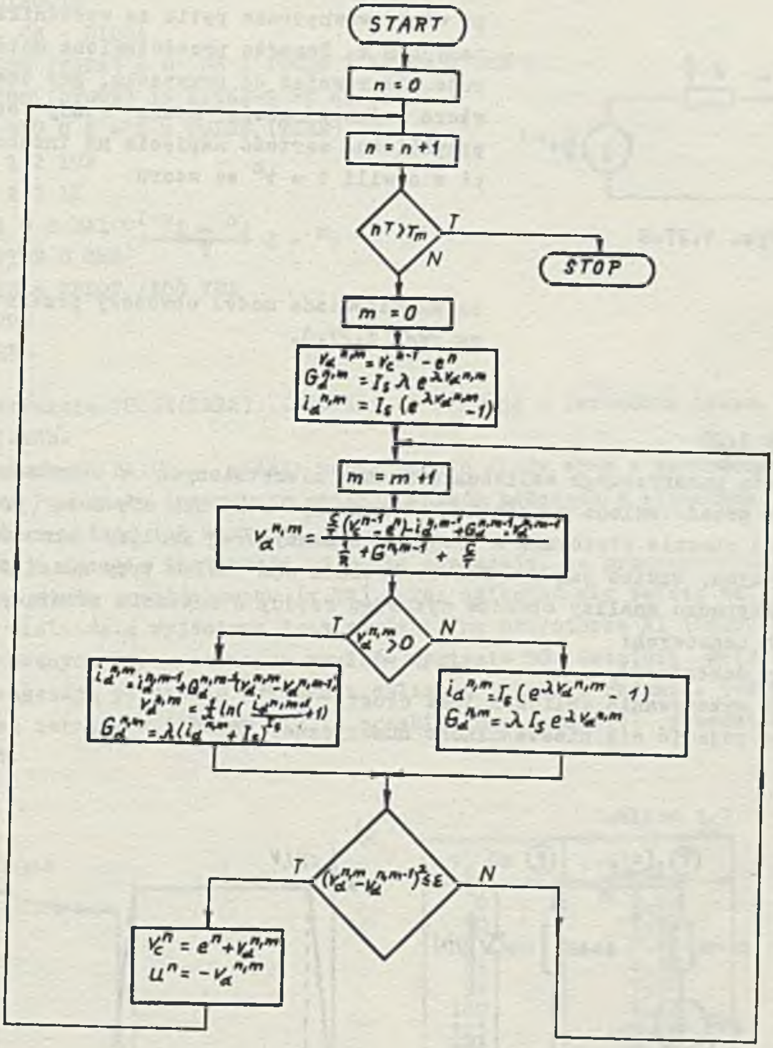
Oczywiście w przypadku, gdy w obwodzie wystąpi więcej niż jeden rezystor nieliniowy, to należy każdy z nich w m-tej iteracji zastąpić odpowiadającym mu liniowym modelem obwodowym. W ten sposób problem obliczenia przebiegów przejściowych w nieliniowym obwodzie zawierającym kondensatory został sprowadzony do interacyjnego rozwiązania odpowiednich liniowych obwodów rezystancyjnych.



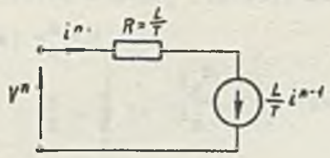
Rys. 1.27.6 a, b i c

Na rys. 1.27.6 pokazano sposób otrzymania odpowiedniego liniowego obwodu rezystancyjnego dla obwodu z zadania 1.26, pozwalającego na obliczenie wartości prądu i_d i napięcia v_d na diodzie w m-tej iteracji dla czasu $t = t^n$.

Na podstawie rys. 1.27.6c można przedstawić schemat numerycznego obliczenia napięcia u(t) w zadaniu 1.26 w postaci takiej jak na rys. 1.27.7. W wyniku takiej analizy otrzyma się wartość napięcia u(t) w przedziale czasu $t \in (0, t_m)$, obliczoną co T sekund. Można zauważyć, że w przypadku, gdy analizowany obwód zawiera wyłącznie liniowe rezystory, to schemat przedstawiony na rys. 1.27.7 znacznie upraszcza się, gdyż nie wystą-



Rys. 1.27.7



Rys. 1.27.8

pi wtedy wewnętrzna pętla ze wskaźnikiem iteracyjnym m. Ponadto przedstawiona metoda stosuje się również do przypadku, gdy obwód zawiera indukcyjności. Można wtedy obliczyć przybliżoną wartość napięcia na indukcyjności w chwili $t = t^n$ ze wzoru

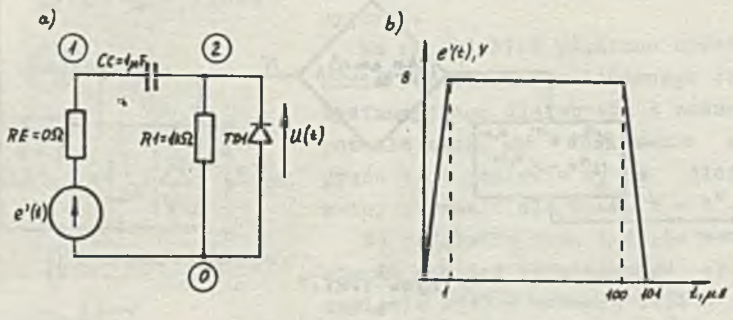
$$v^n = L\,\frac{i^n - i^{n-1}}{T},$$

czemu odpowiada model obwodowy przedstawiony na rys. 1.27.8.

Zadanie 1.28

Metoda numerycznego obliczenia stanów nieustalonych w obwodach nieliniowych przedstawiona w zadaniu 1.27, chociaż odznacza się dużą prostotą, nie jest obecnie stosowana w programach maszynowej analizy obwodów elektronicznych, takich jak np. NAP-2. Posiada ona bowiem trzy zasadnicze wady w przypadku analizy obwodów wyższego rzędu, o znacznie różniących się stałych czasowych:

1) małą dokładność,
2) czas wykonywania obliczeń jest długi,
3) może pojawić się niestabilność numeryczna.



Rys. 1.28 a i b

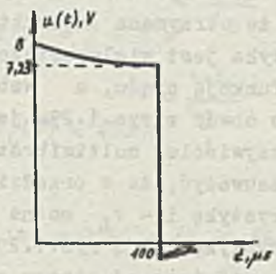
Z tego względu w programie NAP-2 do całkowania równań różniczkowych użyto niejawnej metody wielomianowej ze zmiennym rzędem i krokiem [5]. Do rozwiązywania równań nieliniowych wykorzystana jest metoda Newtona-Raphsona. Aby móc napisać dane do programu NAP-2 obwód z zadania 1.26 przerysowuje się do postaci takiej, jak na rys. 1.28a. Przebieg napięcia e(t) z zadania 1.26 został aproksymowanym przebiegiem e'(t) z rys. 1.28b. Dane potrzebne do przeprowadzenia obliczeń są następujące [14].

```
x CIRCUIT
x : CR - DIODA
PULSE (TAB2) 0 0 1US 1 100US 1 101US 0 1MS 0
BA100 (DIODE) IS 1.16E-9 VT 49.75 MV
RE 1 0 0 E = 8 x PULSE (TIME)
CC 1 2 1UF
R1 2 0 1K
TD1 0 2 BA100
x TIME 0 1MS
x TR x PPLOT (50) VR1
x RUN
x END
```

Instrukcja PULSE(TAB2)... definiuje funkcję o kształcie takim, jak na rys. 1.28b.

Instrukcja BA100... podaje nazwę modelu diody wraz z wartościami parametrów. Pozostałe instrukcje opisują sposób połączenia elementów w obwodzie oraz podają ich wartości.

Czwarta i trzecia instrukcja od końca oznaczają, że przeprowadzona będzie analiza stanu przejściowego (x TR), czas zmieniać się będzie od zera do 1 ms, wielkością wyjściową jest napięcie na rezystorze R1 (VR1), a liczba wydrukowanych i narysowanych wyników wyniesie 50. Ostatnie dwie instrukcje oznaczają polecenie wykonania obliczeń i koniec zadania. Otrzymane wyniki są zebrane w tablicy 1.7, a przebieg napięcia u(t) przedstawia rys. 1.28.1.



Rys. 1.28.1

Tablica 1.7

t_1 μs	u(t), V
0	8,00
10	7,93
51	7,60
69	7,47
92	7,30
100	7,23
101	-0,76
109	-0,72
121	-0,69
149	-0,65
199	-0,60
250	-0,57
301	-0,53
333	-0,52
371	-0,50
414	-0,47

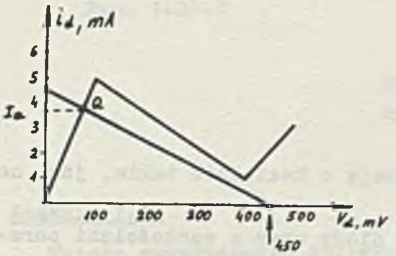
Zadanie 1.29

Obwód z rys. 2.29a jest jedną z możliwych realizacji multiwibratora monostabilnego. Multiwibrator monostabilny jest nieliniowym obwodem przełączającym pierwszego rzędu o następujących cechach:

1) posiada w każdej dowolnej chwili czasu tylko jeden stan równowagi,

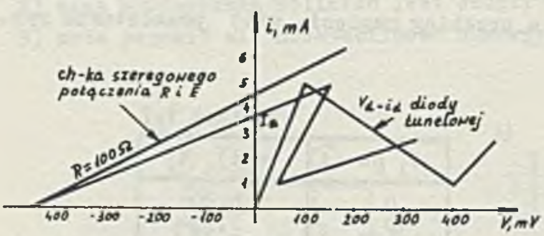
2) stan równowagi jest stabilny,

3) w każdej dowolnej chwili czasu charakterystyka v-i rezystancyjnego podobwodu $\mathcal{N}$ jest wielowartościową funkcją prądu, jeśli element magazynujący energię jest cewką, a wielowartościową funkcją napięcia, jeśli element magazynujący energię jest kondensatorem.



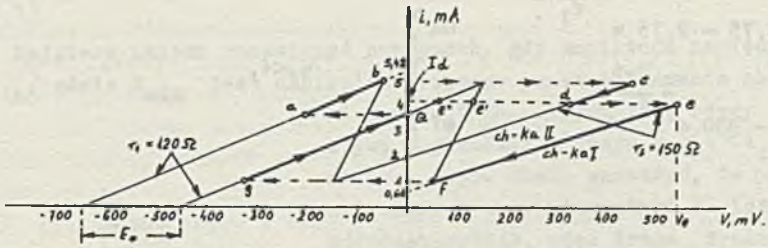
Rys. 1.29.1

Aby określić stan równowagi obwodu dla $t < t_0$ należy - zgodnie z metodą przedstawioną w zadaniu 1.3-przedstawić cewkę jako zwarcie i w tak otrzymanym nieliniowym obwodzie rezystancyjnym obliczyć wartość prądu i. Można tego dokonać znaną metodą graficzną, tak jak przedstawia to rys. 1.29.1. Z rysunku widać, że w stanie równowagi (punkt Q) prąd $I_Q = 3{,}75$ mA. Ponadto widać, że obwód posiada pierwsze dwie z trzech cech charakteryzujących multiwibrator monostabilny. W celu sprawdzenia czy obwód z rys. 1.29a posiada trzecią cechę i obliczenia przebiegów prądu i(t) oraz $v_L(t)$ należy wyznaczyć charakterystykę i-v obwodu rezystancyjnego widzianego od strony zacisków cewki. Charakterystykę tę można otrzymać na drodze graficznej, tak jak przedstawia to rys. 1.29.2. Z rysunku tego wynika, że otrzymana charakterystyka jest wielowartościową funkcją prądu, a wobec tego obwód z rys.1.29a jest rzeczywiście multiwibratorem monostabilnym.



Rys. 1.29.2

Na podstawie rys. 1.29a można zauważyć, że w przedziale czasu $t_0 \leq t < t_1$ wtedy, gdy $v_s(t) \neq 0$ charakterystykę i - v_L można otrzymać, przesuwając w lewo o wartość E_0 charakterystykę i-v z rys.1.29.2. Wobec tego, charakterystyka obwodu rezystancyjnego widziana od strony zacisków cewki przełącza się z charakterystyki I na II w chwili $t = t_0$, a w chwili $t = t_1$ przełącza się ponownie na charakterystykę I (rys. 1.29.3). Droga dynamiczna punktu pracy zależy oczywiście od szerokości δ impulsu $v_s(t)$. W chwili $t=t_0$ punkt pracy przeskakuje ze stanu równowagi Q na charakterystyce I do punktu a na charakterystyce II. Zakładając, że w chwili $t=t_1^-$ punkt pracy osiągnął punkt d, w chwili $t=t_1^+$ musi nastąpić natychmia-



Rys. 1.29.3

stowy przeskok na charakterystykę I. Prąd w cewce nie może ulec nagłej zmianie, a wobec tego przeskok musi nastąpić wzdłuż prostej poziomej $i = I_d$.

Istnieją trzy możliwości przeskoku (e, e', e") na charakterystykę I, lecz zgodnie z postulatem o inercji (zadanie 1.16) punkt pracy przeskoczy do punktu e. Pozostałą część drogi dynamicznej, łatwą do wyznaczenia, przedstawia rys. 1.29.3. Na podstawie tak otrzymanej drogi dynamicznej można określić przebieg i(t) i napięcia $v_L(t)$, a mianowicie:

$$\left.\begin{aligned} i(t) &= 5{,}42 - 1{,}67\, e^{-\frac{t-t_o}{\tau_1}} \quad \text{mA} \\ v_L(t) &= -200\, e^{-\frac{t-t_o}{\tau_1}} \quad \text{mV} \end{aligned}\right\} \quad t_o < t \leqslant t_b$$

$$\left.\begin{aligned} i(t) &= 2 + 3\, e^{-\frac{t-t_b}{\tau_3}} \quad \text{mA} \\ v_L(t) &= 450\, e^{-\frac{t-t_b}{\tau_3}} \quad \text{mV} \end{aligned}\right\} \quad t_b < t \leqslant t_1$$

$$\left.\begin{aligned} i(t) &= 0{,}66 + (I_d - 0{,}66)\, e^{-\frac{t-t_1}{\tau_3}} \quad \text{mA} \\ v_L(t) &= -v_e\, e^{-\frac{t-t_1}{\tau_3}} \quad \text{mV} \end{aligned}\right\} \quad t_1 < t \leqslant t_f$$

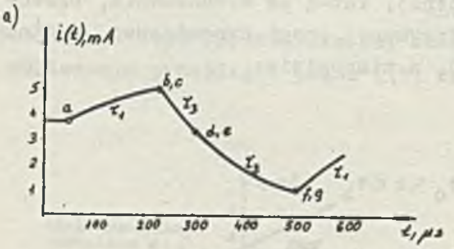
$$\left.\begin{aligned} i(t) &= 3{,}75 - 2{,}75\, e^{-\frac{t-t_f}{\tau_1}} \ \text{mA} \\ v_L(t) &= -\,330\, e^{-\frac{t-t_f}{\tau_1}} \ \text{mV} \end{aligned}\right\}\quad t_f<t,$$

gdzie:

$$\tau_1 = \frac{15}{0{,}12} = 125\ \mu s$$

$$\tau_3 = \frac{15}{0{,}15} = 100\ \mu s$$

$$t_b = t_o + \tau_1 \ln \frac{3{,}75 - 5{,}42}{5 - 5{,}42} = 222{,}5\ \mu s$$



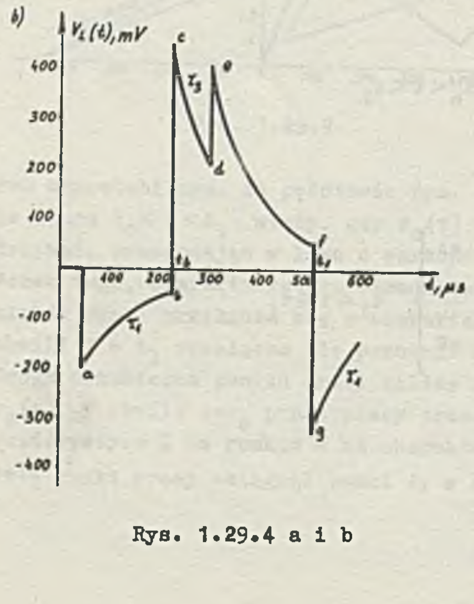
$$I_d = 2 + 3\, e^{-\frac{t_1-t_b}{\tau_3}} = 3{,}38\ \text{mA}$$

$$v_e = 407{,}3\ \text{mV}$$

$$t_f = t_1 + \tau_3 \ln \frac{3{,}38-0{,}66}{1-0{,}66} = 508\ \mu s.$$

Przebiegi prądu $i(t)$ i napięcia $v_L(t)$ przedstawia rys. 1.29.4 a i b. Na podstawie rys. 1.29.4b można zauważyć, że przebieg napięcia $v_L(t)$ posiada dwie ważne cechy, będące podstawą wielu zastosowań multiwibratora monostabilnego.

Po pierwsze, szczytowa wartość napięcia wyjściowego (v_L = 450 mV) jest znacznie większa od amplitudy impulsu wyzwalającego (E_o = 200 mV) i od niej niezależna. Po drugie wartość ta jest osiągana skokowo.

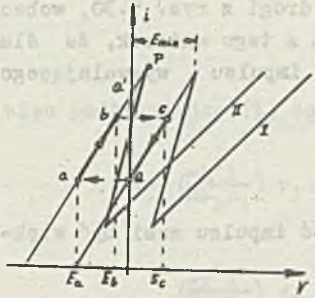


Rys. 1.29.4 a i b

<u>Zadanie 1.30</u>

Ad 1)

Najpierw należy rozpatrzyć przypadek, gdy amplituda napięcia $v_s(t)E_o < E_{min}$, gdzie E_{min} jest napięciem wyższego punktu załamania charakterystyki z rys. 1.30. Otrzyma się wtedy charakterystykę w przedziale czasu $t_o \leqslant t < t_1$ taką, jak na rys. 1.30. Można zauważyć, że ponieważ punkt załamania P charakterystyki II leży w prawej półpłaszczyźnie, więc droga dynamiczna będzie taka, jak przedstawia ją rysunek. Inaczej mówiąc droga dynamiczna punktu pracy nigdy nie przejdzie przez punkt P, gdyż osiągnięcie nowego stanu równowagi Q' wymaga nieskończenie wielkiego czasu. Dlatego też po czasie $t=t_o+\delta$ punkt pracy znajdzie się w punkcie b i następnie przeskoczy do punktu c na charakterystyce I. Odpowiadający przebieg napięcia $v_L(t)$ przedstawiono na rys. 1.30.1. Z rysunku łatwo zauważyć, że pożądany duży skok napięcia $v_L(t)$ w tym przypadku nie wystąpił. Amplituda skoku napięcia $v_L(t)$ jest równa E_o. Jest to oczywiście niepożądana sytuacja. Mówi się, że multiwibrator nie został "wyzwolony". Aby uniknąć takiej sytuacji, amplituda impulsu wyzwalającego $v_s(t)$ musi spełnić zależność

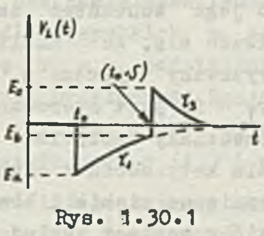


Rys. 1.30

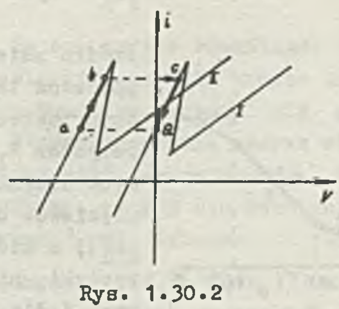
$$E_o > E_{min},$$

co łatwo wywnioskować z rys. 1.30. Wobec tego dla obwodu z zadania 1.29.

$$E_o > 150 \text{ mV}.$$



Rys. 1.30.1



Rys. 1.30.2

Ad 2)

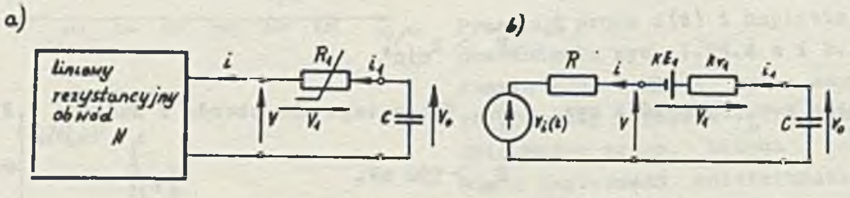
W celu sprawdzenia wpływu szerokości impulsu wyzwalającego δ na przebieg napięcia $v_L(t)$ zakłada się, że jego amplituda jest większa od E_{min}. Z rys. 1.29.3 wynika, że w przypadku, gdy szerokość impulsu δ jest mniejsza niż czas potrzebny do osiągnięcia przez punkt pracy obwodu punktu b na charakterystyce II ($\delta < t_b - t_o$), to wtedy droga dynamiczna będzie taka jak na rys. 1.30.2. Ponieważ jest ona podobna do drogi z rys. 1.30, wobec tego multiwibrator nie zostanie wyzwolony. Wynika z tego wniosek, że dla prawidłowego działania multiwibratora szerokość impulsu wyzwalającego $v_s(t)$ musi spełniać zależność

$$\delta > \delta_{min} = t_b - t_o.$$

W przypadku multiwibratora z rys. 1.29a szerokość impulsu musi być większa od 172,5 μs.

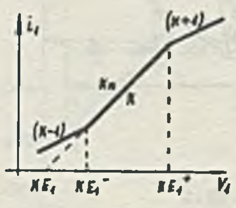
Zadanie 1.31

Obwód z rys. 1.31a można uważać za szczególny przypadek układu z rys. 1.31.1a, w którym liniowy podobwód może zawierać rezystory, niezależne



Rys. 1.31.1 a i b

źródła zmienne w czasie i źródła sterowane. Wówczas podobwód ten można zastąpić jego schematem zastępczym Thévenina. Ponadto zakłada się, że nieliniowy rezystor R_1 jest scharakteryzowany przez n liniowych odcinków oraz krzywa $v_1 - i_1$ jest sterowana napięciowo. Oznacza to, że przedziały napięciowe $({}_KE_1^-, {}_KE_1^+)$, z których każdy określa k-ty odcinek charakterystyki, nie zachodzą wzajemnie na siebie i obwód z rys. 1.31a można przedstawić w postaci takiej jak na rys. 1.31b, a znaczenie parametrów wyjaśnia rys. 1.31.2. Z uwagi na to, że o tym, na którym odcinku charakterystyki rezystora nieliniowego pracuje obwód w dowol-



Rys. 1.31.2

nej chwili $t=t_o$, decyduje wartość napięcia $v_i(t_o)$ i napięcia na kondensatorze $v_o(t_o)$, trzeba określić zależność napięcia v_1 od v_i i v_o. Na podstawie rys. 1.31.1b otrzymuje się

$$v_1 = \left(\frac{-{}_k r_1}{R+{}_k r_1}\right) v_i + \left(\frac{{}_k r_1}{R+{}_k r_1}\right) v_o + \left(\frac{R}{R+{}_k r_1}\right) {}_k E_1. \tag{1}$$

Obwód pracuje na k-tym odcinku, jeśli

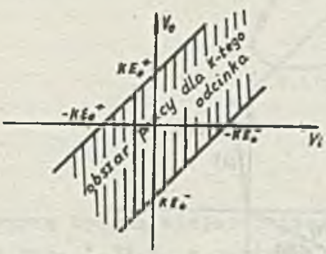
$${}_k E_1^- < v_1 < {}_k E_1^+, \tag{2}$$

więc podstawiając (1) do (2), otrzymuje się

$$\left(\frac{-{}_k r_1}{R+{}_k r_1}\right) v_i + \left(\frac{{}_k r_1}{R+{}_k r_1}\right) v_o < {}_k E_1^+ - \left(\frac{R}{R+{}_k r_1}\right) {}_k E_1 \tag{3}$$

$$\left(\frac{-{}_k r_1}{R+{}_k r_1}\right) v_i + \left(\frac{{}_k r_1}{R+{}_k r_1}\right) v_o > {}_k E_1^- - \left(\frac{R}{R+{}_k r_1}\right) {}_k E_1. \tag{4}$$

Dwie nierówności (3) i (4) przedstawiają na płaszczyźnie $v_o - v_i$ obszar ograniczony dwiema prostymi o nachyleniu równym jeden, tak jak przedstawia to rys. 1.31.3. Punkty przecięcia osi współrzędnych z tymi prostymi ${}_k E_o^+$ i ${}_k E_o^-$, odpowiadające k-temu odcinkowi, są równe odpowiednio:



Rys. 1.31.3

$${}_k E_o^+ = \frac{(R+{}_k r_1)\,{}_k E_1^+ - R\,{}_k E_1}{{}_k r_1} \tag{5}$$

$${}_k E_o^- = \frac{(R+{}_k r_1)\,{}_k E_1^- - R\,{}_k E_1}{{}_k r_1} \tag{6}$$

Proste te nazywa się prostymi przełączeń. Są one zawsze równoległe do siebie i posiadają nachylenie równe jeden. Jeśli wyznaczy się proste przełączeń dla wszystkich n odcinków charakterystyki, to otrzyma się płaszczyznę $v_o - v_i$ podzieloną na n "pasków". Płaszczyznę taką nazywa się płaszczyzną przełączeń. Znając płaszczyznę przełączeń, rozwiązanie obwodu można otrzymać w następujący, stosunkowo prosty, sposób dla dowolnego stanu początkowego $v_o(t_o)$ i napięcia wejściowego $v_i(t)$. Należy:

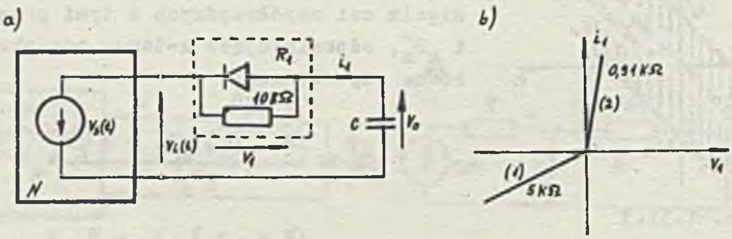
1) określić początkowy punkt P_o o współrzędnych $(v_i(t_o), v_o(t_o))$ na płaszczyźnie przełączeń. Wyznacza to odpowiedni odcinek początkowy charakterystyki,
2) wyznaczyć wartości ${}_k E_1$ i ${}_k r_1$ dla odcinka otrzymanego w punkcie 1.31.1b,

3) zredukować obwód do postaci równoważnej, przedstawionej na rys.1.31.1b. Można sprawdzić całkując równanie różniczkowe, opisujące obwód [6], że napięcie $v_o(t)$ będzie równe:

$$v_o(t) = v_o(t_o)e^{-(t-t_o)/\tau_k} - \frac{1}{\tau_k} e^{-\frac{t}{\tau_k}} \int_{t_o}^{t} e^{\frac{y}{\tau_k}} v_i(y)dy, \qquad (7)$$

4) narysować miejsca geometrycznego punktów $(v_i(t), v_o(t))$ na płaszczyźnie przełączeń dotąd, aż nie przetnie ono prostej przełączeń w pewnym punkcie P_1,
5) określić czas t_1, odpowiadający punktowi P_1. Punkt P_1 jest nowym punktem początkowym ze stanem początkowym $v_o(t_1)$,
6) zastąpić wartości ${}_kE_1$ i ${}_kr_1$ nowymi wartościami odpowiadającymi nowemu odcinkowi pracy dla $t > t_1$ i powtórzyć punkty 3-5,
7) powtórzyć powyższą procedurę tyle razy, ile to jest potrzebne do określenia pełnego rozwiązania dla czasów $t \geqslant t_o$.

Aby móc zastosować powyższą procedurę do rozwiązania obwodu z rys. 1.31a przedstawia się go w postaci pokazanej na rys. 1.31.4a. Charakterystykę zastępczego rezystora R_1 przedstawia rys. 1.31.4b. Ponieważ w przypadku obwodu z rys. 1.31.4a otrzymamy:



Rys. 1.31.4 a i b

$${}_1E_1^- = -\infty \qquad {}_2E_1^- = 0$$

$${}_1E_1^+ = 0 \qquad {}_2E_1^+ = +\infty$$

$${}_1r_1 = 5\ \text{k}\Omega \qquad {}_2r_1 = 0{,}91\ \text{k}\Omega$$

$$R = 0,$$

więc stosownie do wzorów (5) i (6) płaszczyzna przełączeń będzie taka jak na rys. 1.31.5. Z rys. 1.31.4a wynika, że $v_i(t) = - v_s(t)$, więc na podstawie (7)

$$v_o(t) = v_o(t_o)\, e^{-\frac{(t-t_o)}{\tau_k}} + \frac{1}{\tau_k} e^{-\frac{t}{\tau_k}} \int_{t_o}^{t} e^{-\frac{y}{\tau_k}} (-Em \sin\omega y)dy =$$

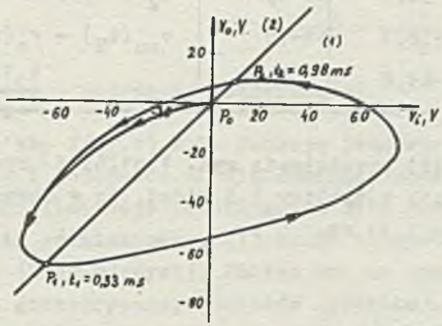
$$= -\frac{E_m}{1-(\omega\tau_k)^2}\sin\omega t - \frac{E_m\omega\tau_k}{1+(\omega\tau_k)^2}\cos\omega t - \left[v_{ou}(t_o) - v_o(t_o)\right] e^{-\frac{(t-t_o)}{\tau_k}}, \quad (8)$$

gdzie

$$\omega = 2\pi f$$

$$v_{ou}(t_o) = -\frac{E_m}{1+(\omega\tau_k)^2}\sin\omega t_o + \frac{E_m\omega\tau_k}{1+(\omega\tau_k)^2}\cos\omega t_o$$

$$\tau_k = {}_k r_1\, C.$$



Rys. 1.31.5

Krzywą będącą miejscem geometrycznym punktów ($v_o(t)$, $v_i(t)$) przedstawiono na rys. 1.31.5, a wartości współrzędnych punktów, na podstawie których została wykreślona, zebrano w tablicy 1.8.

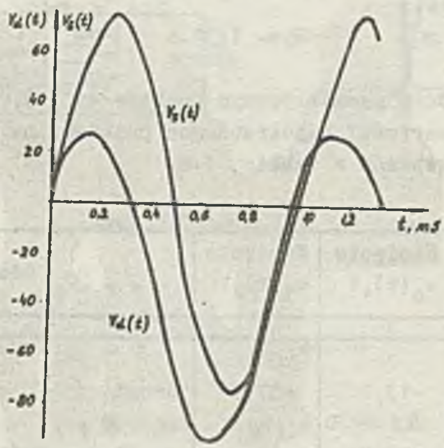
Tablica 1.8

Czas t ms	Napięcie $v_d(t)$,V	Napięcie $v_o(t)$,V	Napięcie $v_i(t)$,V	Odcinek
1	2	3	4	5
0	0	0	0	P_o
0,08	23,8	-13,7	-37,5	drugi $t_o = 0$
0,17	27,2	-37,8	-65	$v_{ou}(t_o) - v_o(t_o) = 32,33$ V
0,25	16,4	-58,6	-75	$\tau_2 = 0,091$ ms
0,33	0	-65,8	-65,8	P_1

cd. tablicy 1.8

1	2	3	4	5
0,42	-25,7	-63,2	-37,5	pierwszy
0,50	-56,6	-56,6	0	$t_1 = 0{,}33$ ms
0,58	-82,6	-45,1	37,5	$v_{ou}(t_1) - v_o(t_1) = 49{,}1$ V
0,67	-94,8	-29,8	65	$\tau_1 = 0{,}5$ ms
0,75	-89,3	-14,3	75	
0,83	-66,2	-1,2	65	
0,92	-29,9	7,1	37	
0,88	0	9,0	9,0	P_2
1,08	27,2	-10,3	-37,5	drugi
1,17	28,3	-36,7	-65	$t_2 = 0{,}98$ ms
1,25	16,9	-58,1	-75	$v_{ou}(t_2) - v_o(t_2) = 30{,}2$ V
1,33	0	-65,8	-65,8	

Przebieg napięcia $v_d(t)$ przedstawia rys. 1.31.6. Z rys. 1.31.6 i na podstawie danych zawartych w tablicy 1.8 widać, że w obwodzie stan ustalony nastąpi po czasie t = 1,33 ms.

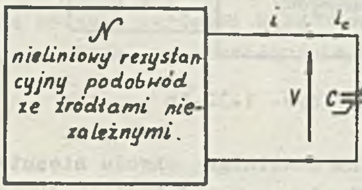


Rys. 1.31.6

Zadanie 1.32

Obwód zawierający nieliniowy kondensator i nieliniowe rezystory oraz niezależne źródła można przedstawić w postaci takiej, jak pokazuje to rys. 1.32. Równanie stanu dla tego obwodu będzie miało postać

$$\frac{dv_o}{dt} = f(v_o,t). \tag{1}$$



Rys. 1.32

Z drugiej strony można napisać

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dv_o}\frac{dv_o}{dt}$$

lub

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{i_c}{C(v_o)}, \tag{2}$$

gdzie: $C(v_o) = \frac{dq(v_o)}{dv_o}$ - pojemność różniczkowa.

Łatwo zauważyć, że aby $f(v_o,t)$ było funkcją jednowartościową, trzeba by charakterystyka v - i podobwodu $\mathcal{N}$ dla dowolnej chwili czasu t oraz charakterystyka v_o-q nieliniowego kondensatora była sterowana napięciowo. Rozwiązanie równania różniczkowego (1) można otrzymać, stosując metodę elementów liniowych (kierunkowych). Polega ona na znalezieniu na płaszczyźnie t - v_o miejsca geometrycznego punktów (izoklin), posiadających tę własność, że krzywa, będąca rozwiązaniem równania różniczkowego (1), przechodzącą przez te punkty, ma stały współczynnik nachylenia równy m. Wobec tego równanie izokliny można określić z zależności

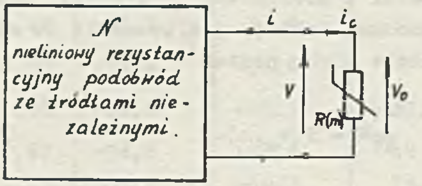
$$\frac{i_c}{C(v_o)} = f(v_o,t) = m. \tag{3}$$

Porównując równania (1), (2) i (3) otrzyma się

$$i_c = mC(v_o). \tag{4}$$

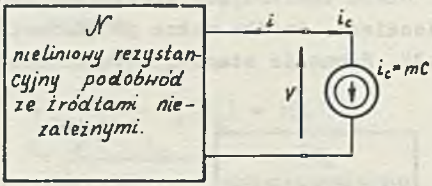
Równanie (4) można zinterpretować jako zależność, definiującą charakterystykę nieliniowego rezystora na płaszczyźnie v_o - i_c. Wobec tego zależność (3), którą musi spełniać izoklina, można zasymulować przez włączenie nieliniowego rezystora R(m) o charakterystyce v_o - i_c określonej przez równanie (4), tak jak przedstawia to rys. 1.32.1a. Otrzymany w ten sposób obwód rezystancyjny nazywa się <u>obwodem stałego nachylenia</u>. Z przytoczonych rozważań wynika, że przebieg napięcia $v_o(t,m)$ na rezystorze R(m) jest izokliną, odpowiadającą nachyleniu m. Ważną cechą tej metody, jest to, że sprowadza ona problem rozwiązania obwodów dynamicznych do problemu rozwiązania obwodów rezystancyjnych.

a)



Rys. 1.32.1a

b)

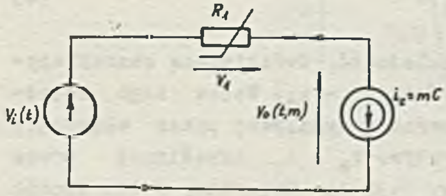


Rys. 1.32.1b

Podsumowując to, można powiedzieć, że izoklina dowolnego obwodu nieautonomicznego pierwszego rzędu, sterowanego napięciowo o obciążeniu pojemnościowym, odpowiadająca dowolnemu nachyleniu m, może być wyznaczona przez określenie napięcia $v_o(t,m)$ na nieliniowym rezystorze R(m) odpowiedniego obwodu stałego nachylenia. Charakterystyka $v_o - i_c$ R(m) jest dana zależnością $i_c = mC(v_o)$, gdzie $C(v_o)$ jest pojemnością różniczkową nieliniowego kondensatora. Jeśli kondensator jest liniowy o pojemności C, to nieliniowy rezystor R(m) sprowadza się do niezależnego źródła prądu stałego o wartości $i_c = mC$ (rys. 1.32.1b).

W podobny sposób można wykazać, że: izoklina dowolnego obwodu nieautonomicznego pierwszego rzędu, sterowanego prądowo, o obciążeniu indukcyjnym, odpowiadająca dowolnemu nachyleniu m, może być wyznaczona przez określenia prądu $i_L(t,m)$ płynącego przez nieliniowy rezystor R(m) odpowiedniego obwodu stałego nachylenia. Charakterystyka $v_L - i_L$ R(m) jest dana zależnością $v_L = mL(i_L)$, gdzie $L(i_L)$ jest różniczkową indukcyjnością nieliniowej cewki. Jeśli cewka jest liniowa o indukcyjności L, to nieliniowy rezystor R(m) sprowadza się do niezależnego źródła napięcia stałego o wartości $v_L = mL$. Rysunek 1.32.2 przedstawia, zgodnie z przedstawioną wyżej metodą, obwód stałego nachylenia dla obwodu z rys. 1.31.4. Na jego podstawie można napisać

$$v_o = v_1 + v_i = m.C._k r_1 + v_i,$$



Rys. 1.32.2

czyli

$$v_o = a + v_i. \qquad (5)$$

Zgodnie z charakterystyką rezystora R_1 (rys. 1.31.4b) otrzyma się

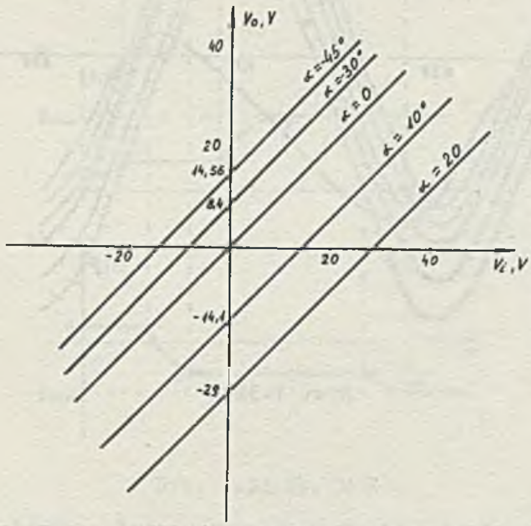
$$a = \begin{cases} -\dfrac{a_r}{a_t}.m'.C._1 r_1 & m'>0 \\ -\dfrac{a_r}{a_t}.m'.C._2 r_1 & m'<0, \end{cases}$$

gdzie:

m' - wartość tangensa odpowiedniego kąta nachylenia,

α. a_r i a_t - współczynniki skali równe odpowiednio 20 $\frac{V}{cm}$ i $0,125 \cdot 10^{-3}$ $\frac{s}{cm}$.

Wartość C i $_k r_1$ należy podać odpowiednio w F i Ω. Wartość współczynnika a dla różnych wartości kąta α są zebrane w tablicy 1.9, a odpowiednie charakterystyki na płaszczyźnie v_i - v_o przedstawia rys. 1.32.3.

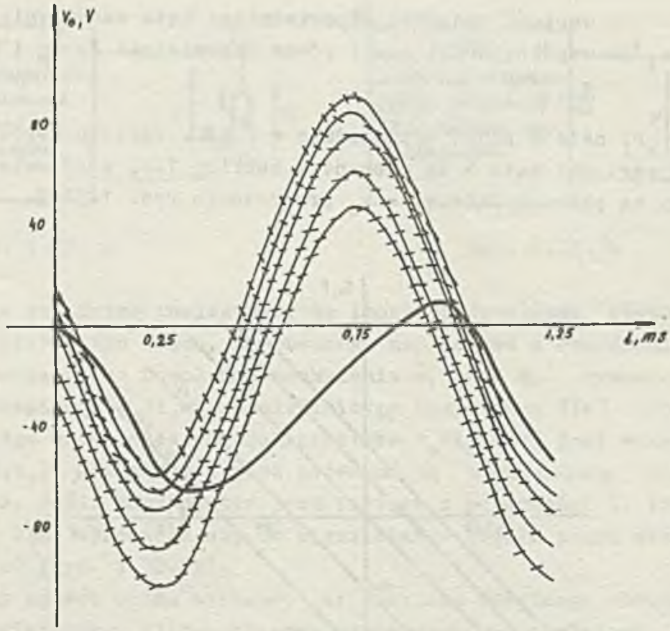


Rys. 1.32.3

Tablica 1.9

α	-45	-30	0	10	20
a, V	14,56	8,4	0	-14,1	-29

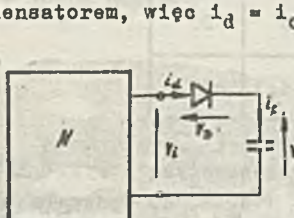
Ze złożenia zależności $v_i(t) = -75 \sin\omega t$ z charakterystyką z rys.1.32.3 otrzyma się zbiór izoklin przedstawionych na rys. 1.32.4, co pozwala na wykreślenie przebiegu napięcia $v_o(t)$. Jest on zgodny z przebiegiem uzyskanym w zadaniu 1.31 metodą płaszczyzny przełączeń.



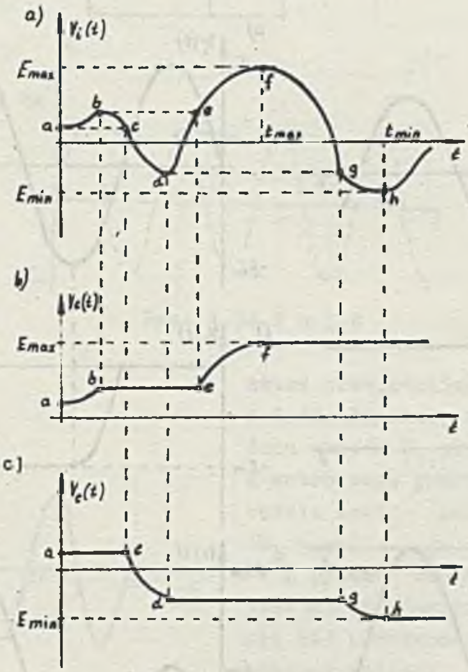
Rys. 1.32.4

Zadanie 1.33

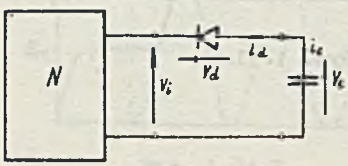
Zanim określi się przebiegi szukanych napięć w obwodach przedstawionych na rys. 1.33 a i b można rozpatrzyć obwód z rys. 1.33.1, będący bardziej ogólnym przypadkiem. Skrzynka N reprezentuje dowolny rezystancyjny lub dynamiczny podobwód. Ponieważ dioda jest szeregowo połączona z kondensatorem, więc $i_d = i_c = C\, dv_c/dt$. Równocześnie $i_d \geqslant 0$ dla diody idealnej i wobec tego można stwierdzić, że $dv_c/dt \geqslant 0$ niezależnie od przebiegu napięcia $v_i(t)$ na zaciskach N. Oznacza to, że napięcie na kondensatorze jest niemalejącą funkcją czasu. Fizycznie fakt ten oznacza niemożność rozładowania się kondensatora. Ażeby otrzymać zależność między $v_i(t)$ a $v_c(t)$ należy zauważyć, że idealna dioda stanowi przerwę w przypadku, gdy $v_o = v_i(t) - v_c(t) \leqslant 0$, a wobec tego napięcie na kondensatorze pozostaje niezmienione ($dv_c/dt = 0$), gdy $v_i(t) \leqslant v_c(t)$. Jeśli $v_i(t)$ osiągnie swoją wartość maksymalną E_{max} w pewnej chwili $t = t_{max}$, to wtedy $v_c(t) = E_{max}$ dla wszystkich czasów $t \geqslant t_{max}$. Jeśli przebieg napięcia $v_i(t)$ będzie taki, jak na rys. 1.33.2a, to przebieg napięcia $v_c(t)$ w obwodzie z rys. 1.33.1 będzie taki jak na rys. 1.33.2b. Dla czasu $t \geqslant t_{max}$ konden-



Rys. 1.33.1

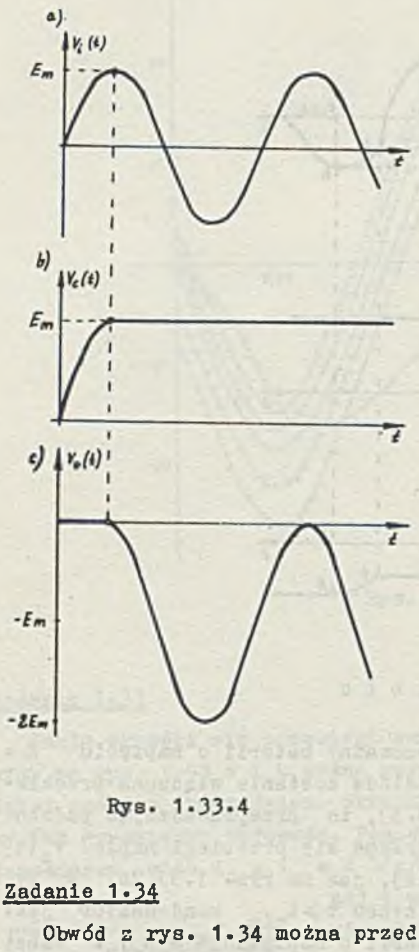


Rys. 1.33.2a, b i c

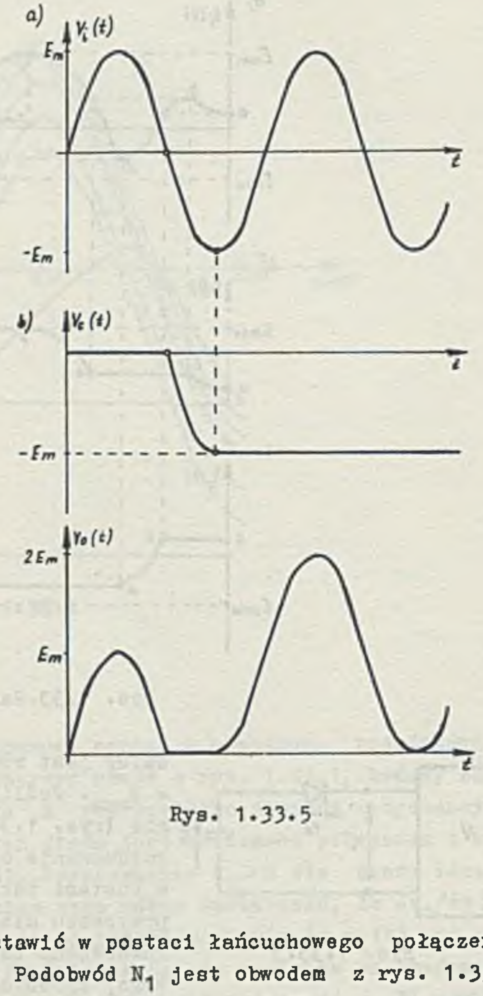


Rys. 1.33.3

sator jest równoważny baterii o napięciu $E = E_{max}$. Jeśli dioda zostanie włączona przeciwnie (rys. 1.33.3), to przeprowadzając podobne rozumowanie otrzyma się przebiegi napięć $v_c(t)$ w postaci takiej, jak na rys. 1.33.2c. W tym przypadku dla czasu $t > t_{min}$ kondensator jest równoważny baterii o napięciu $E = E_{min}$. Wobec tego, zgodnie z przeprowadzonymi rozważaniami, przebiegi napięć $v_c(t)$ i $v_o(t)$ dla obwodów z rys. 1.33 a i b będą takie, jak przedstawiono je na rys. 1.33.4 i 1.33.5.



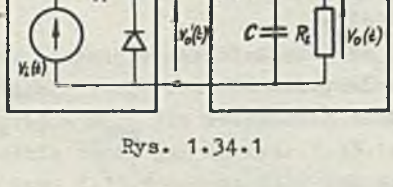
Rys. 1.33.4



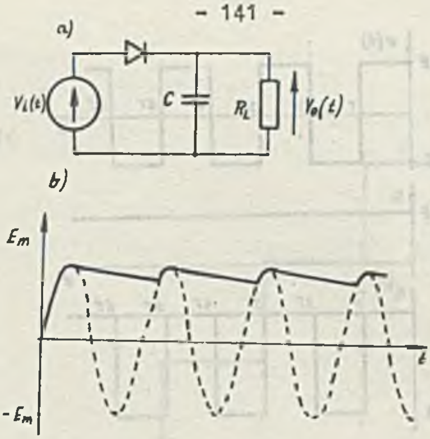
Rys. 1.33.5

Zadanie 1.34

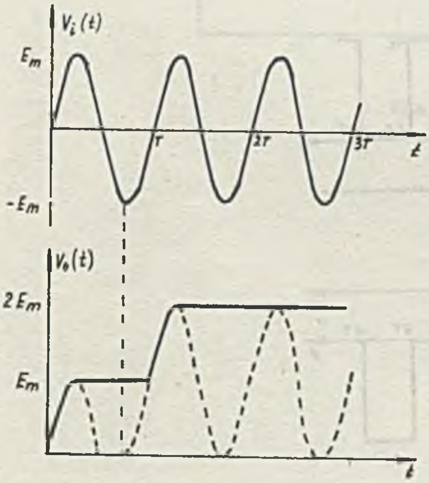
Obwód z rys. 1.34 można przedstawić w postaci łańcuchowego połączenia podobwodów N_1 i N_2 (rys. 1.34.1). Podobwód N_1 jest obwodem z rys. 1.33b. Natomiast podobwód N_2 tym różni się od obwodu z rys. 1.33a, że kondensator C jest obciążony rezystorem R_L. Wobec tego po załączeniu na jego wejście przebiegu sinusoidalnego $v_i(t)$ (rys. 1.34.2a) przebieg napięcia na kondensatorze $v_o(t)$ będzie taki jak na rys. 1.34.2b. Wynika to z faktu że w czasie, gdy dioda nie przewodzi prądu, kondensator rozładowuje się przez rezystor R_L. Dokładny przebieg napięcia $v_o(t)$ dla konkretnych wartości parametrów obwodu można uzyskać, stosując jedną z



Rys. 1.34.1



Rys. 1.34.2 a i b



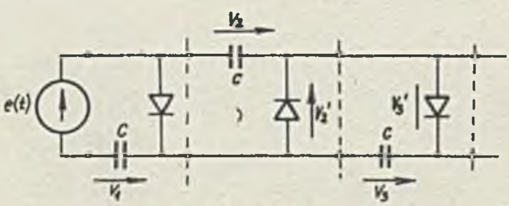
Rys. 1.34.3

metod przedstawionych w zadaniu 1.31 i 1.32. Przebieg napięcia $v_o'(t)$ na wyjściu obwodu N_1 przedstawia rys. 1.33.5c, a wobec tego przebieg napięcia $v_o(t)$ będzie taki, jak na rys. 1.34.3 ($R_L = \infty$).

Z rysunku widać, że napięcie $v_o(t)$ jest stałe o wartości 2 E_m. Na podstawie tej uproszczonej analizy można wyciągnąć wniosek, że obwód z rys. 1.34 jest układem przekształcającym napięcie sinusoidalne o amplitudzie E_m na napięcie stałe o wartości równej 2 E_m.

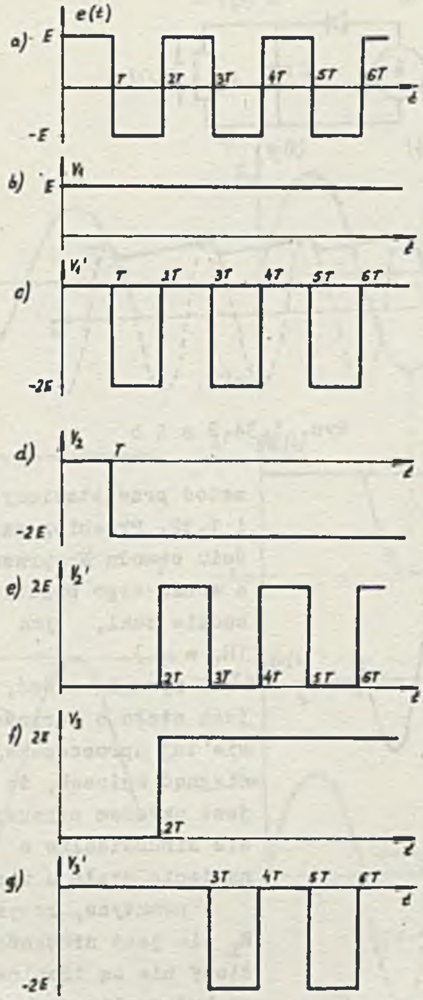
W praktyce, rezystancja obciążenia R_L nie jest nieskończenie wielka i diody nie są idealne. Wtedy obwód musi być analizowany jako obwód nieautonomiczny drugiego rzędu.

Zadanie 1.35

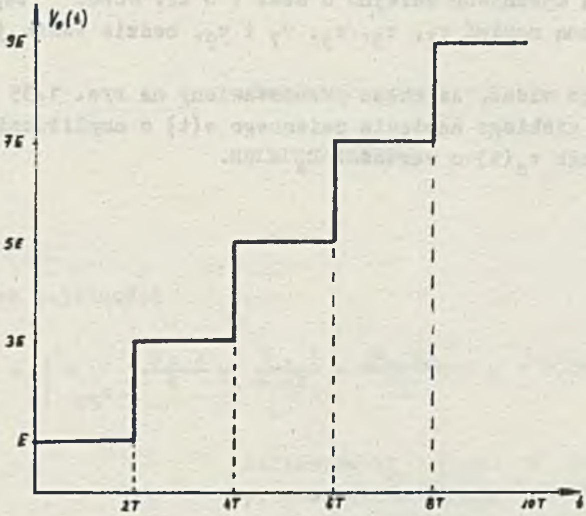


Rys. 1.35.2

Obwód z rys. 1.35 można przedstawić w postaci łańcuchowego połączenia obwodów z rys. 1.33a i b, tak jak przedstawia to rys. 1.35.2. Zgodnie z analizą tych obwodów, przeprowadzoną w zadaniu 1.33, przebiegi napięć na elementach obwodu będą takie jak na rys. 1.35.3. Z przebie-



Rys. 1.35.3



Rys. 1.35.4..

gów napięć przedstawionych na tym rysunku można wywnioskować, że napięcia na kondensatorach v_5, v_7 i v_9 będą miały taki sam kształt jak napięcie v_3 lecz będą opóźnione kolejno o czas t = 2T. Wobec tego napięcie $v_o(t)$, będące sumą napięć v_1, v_3, v_5, v_7 i v_9, będzie takie jak na rys. 1.35.4.

Z rysunku tego widać, że układ przedstawiony na rys. 1.35 służy do przekształcenia niskiego napięcia zmiennego e(t) o amplitudzie E na wysokie napięcie stałe $v_o(t)$ o wartości E_o = 9E.

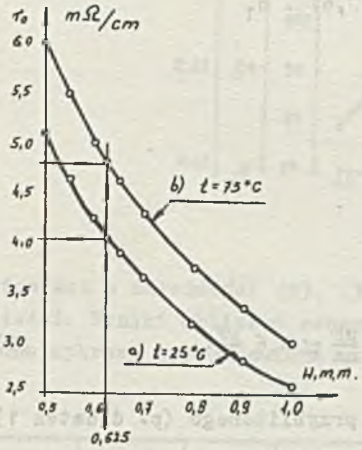
Rozdział 2

LINIE DŁUGIE

Zadanie 2.1

Ze znanych zależności

$$r_0\Big|_{25^\circ C} = \frac{\rho \cdot l}{s} = \frac{\rho \cdot l}{w \cdot h_1} = \frac{\rho \cdot 10^{-2}}{h_1} \cdot \frac{1}{w} = r_0(w).$$



Rys. 2.1.1

Zależność $r_0 = r_0(w)$ w temperaturze 25°C przedstawiono na rys. 2.1.1 (krzywa a). Dla $w = 0{,}625$ mm (wykorzystanego w następnych przykładach) $r_0 = 4{,}08$ mΩ/cm, przyjmiemy wartość 4 mΩ/cm. Współczynnik cieplny rezystancji wcr jest funkcją temperatury, jeśli przyjmiemy dla uproszczenia obliczeń, że zmienia się on liniowo od 25°C do 75°C, to można go zapisać w postaci $wcr(t) = [0{,}385 - (0{,}385 - 0{,}322) \cdot (t - 25)]$ %/°C

a

$$\left(\frac{\Delta r_0}{r_0}\right)\% = \int_{25}^{75} \left[0{,}385 - 0{,}00125(t-25)\right] dt =$$

$$= \ldots = 17{,}7\%$$

Zatem przy wzroście temperatury obwodu drukowanego z 25°C do 75°C jego rezystancja (np. na 1 cm długości) wzrośnie o około 18%. Zależność $r_0 = r_0(w)$ dla temperatury 75°C przedstawiono na rysunku 2.1.1 (krzywa b), a dla $w = 0{,}625$ mm wartości $r_0 = 4{,}8$ mΩ/cm.

Zadanie 2.2

Z zależności analityczno-empirycznych podanych w dodatku 1 (przy $r_0 = 0$, $g_0 = 0$)

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_e}} \cdot 59{,}952 \ln\left(\frac{4h}{d}\right), \ \Omega \ ; \qquad (1)$$

gdzie

$$\varepsilon_e = 0,475 \cdot \varepsilon_r + 0,67$$

$$d = 0,536 \cdot w + 0,67 \cdot h_1$$

więc

$$Z_1 = 94,62\Omega = R_1.$$

W dalszych przykładach będziemy przyjmować (dla uproszczenia obliczeń) $R_1 = 100\Omega$. Ponieważ wzór analityczno-empiryczny na wartość indukcyjności l_o (np. na 1 cm długości linii) jest bardziej dokładny (p. dodatek 1) aniżeli wzór na wartość c_o, więc wykorzystamy go

$$l_o = 2 \ln \left(\frac{4h}{d_o}\right) \frac{nH}{cm}, \tag{2}$$

gdzie

$$d_o = 0,567 \cdot w + 0,67 \cdot h_1$$

a stąd

$$l_o = 5,4 \text{ nH/cm}.$$

Ponieważ

$$Z_1 = R_1 = \sqrt{\frac{l_o}{c_o}},$$

więc

$$c_o = \frac{l_o}{R_1^2} = 0,603 \frac{pF}{cm} \approx 0,6 \frac{pF}{cm}. \tag{3}$$

Dla porównania wartość c_o obliczona ze wzoru przybliżonego (p. dodatek 1)

$$c_o = \frac{\varepsilon_r \cdot w}{11,3 h} \frac{pF}{cm}. \tag{4}$$

wynosi $c_o = 0,184 \frac{pF}{cm}$, a więc błąd jest znaczny.
Prędkość rozchodzenia się fali wzdłuż linii

$$v = \frac{1}{\sqrt{l_o \cdot c_o}}, \tag{5}$$

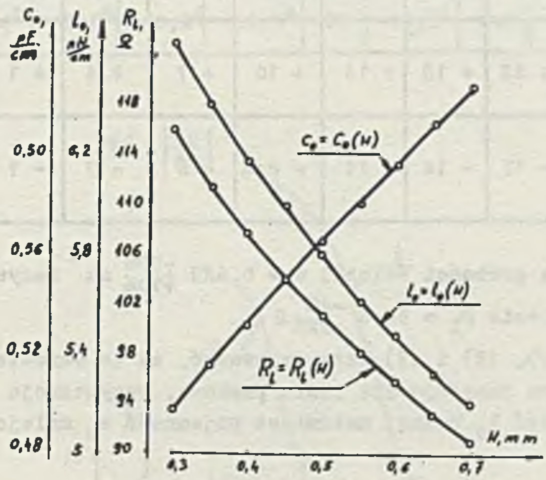
a dla linii paskowej bez strat prędkość tę można obliczyć za pomocą wzoru przybliżonego (p. dodatek 1)

$$v \cong \frac{30}{\sqrt{\varepsilon_e}} \cong 17,2 \text{ cm/ns}. \tag{6}$$

Z zależności (5) $v \cong 17,57$ cm/ns.

Wpływ zmiany szerokości w ścieżki oraz grubości h laminatu na wartość rezystancji falowej linii można określić z zależności (1); po rozpisaniu otrzymamy

$$R_l = \frac{59,952}{\sqrt{0,475 \cdot \varepsilon_r + 0,67}} \cdot \ln\left(\frac{4h}{0,536 \cdot w + 0,67 \cdot h_1}\right) \quad (1)$$



Rys. 2.2.1

Natomiast z zależności (2), (3) określimy zależność l_o i c_o od szerokości ścieżki. Wyniki obliczeń zebrano w tablicy 2.1 i na ich podstawie sporządzono wykresy przedstawione na rysunku 2.2.1.

Tablica 2.1

w, mm	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7
R_l, Ω	115,56	111,39	107,67	104,31	101,26	98,45	95,86	93,45	91,19
l_o, nH/cm	6,64	6,39	6,17	5,98	5,80	5,63	5,48	5,34	5,21
c_o, pF/cm	0,497	0,515	0,532	0,550	0,565	0,581	0,596	0,612	0,627

Więc im szersza jest (w rozpatrywanym zakresie) ścieżka, tym mniejsza wartość rezystancji falowej oraz indukcyjności jednostkowej i większa wartość pojemności jednostkowej linii.

W tablicy 2.2 podano względne procentowe zmiany wartości R_1, l_o, c_o od w odniesione do wartości w = 0,625 mm.

Tablica 2.2

w, mm	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7
$(\frac{R_1 - 94,62}{94,62})\%$	+ 22	+ 18	+ 14	+ 10	+ 7	+ 4	+ 1	- 1	- 4
$(\frac{l_o - 5,4}{5,4})\%$	+ 22	+ 18	+ 14	+ 10	+ 7	∓ 4	+ 1	- 1	- 4
$(\frac{c_o - 0,6}{0,6})\%$	- 17	- 14	- 11	- 8	- 6	- 3	- 1	+ 2	+ 5

Więc przy zmianach grubości ścieżki $w \cong 0,625\,^{-50\%}_{+10\%}$ mm rezystancja falowa zmienia się w zakresie $R_1 = 94,6\,^{-4\%}_{+22\%}\,\Omega$.

Z zależności (1'), (2) i (3) łatwo zauważyć, że ze wzrostem grubości h laminatu, na którym znajduje się linia paskowa, rezystancja falowa linii R_1 oraz indukcyjność l_o rosną, natomiast pojemność c_o maleje.

Zadanie 2.3

Jak już pokazano w zadaniach 2.1 i 2.2, podane w temacie wymiary geometryczne określają linię o $r_o \cong 4$ mΩ/cm, $l_o \cong 5,4$ nH/cm oraz $c_o = 0,6$ pF/cm, natomiast $g_o \simeq 0$. Impedancja charakterystyczna linii

$$Z_1(j\omega) = \sqrt{\frac{r_o + j\omega l_o}{j\omega c_o}} = |Z_1(j\omega)|\; e^{j\varphi(\omega)} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{r_o^2 + (\omega l_o)^2}{(\omega c_o)^2}} \cdot e^{j\left(\frac{\varphi_1 - 90^o}{2}\right)},$$

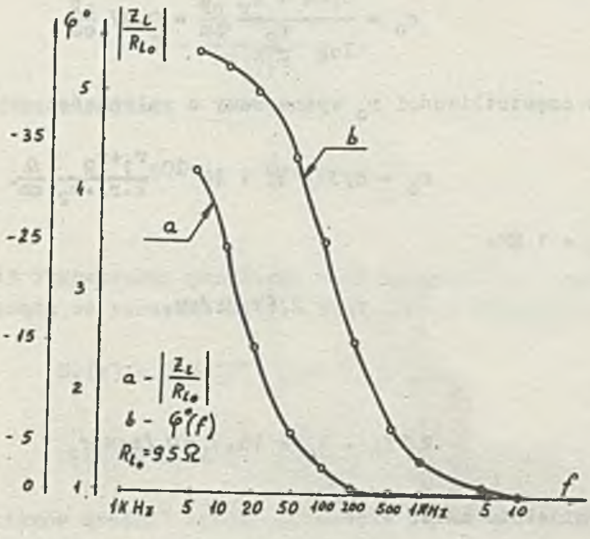
gdzie

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega l_o}{r_o}\right).$$

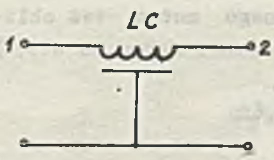
Wyniki zebrano w tablicy 2.3 i przedstawiono na rysunku 2.3.1. Częstotliwość podano w skali logarytmicznej, a moduł impedancji względem rezystancji odniesienia $R_{l_o} = 95\Omega$.

Tablica 2.3

f, kHz	5	10	20	50	100	200	500	1000	50000	10000
$\lvert Z_1 \rvert$, Ω	399	326	232	152	118	102	96	95	95	95
$\left\lvert \frac{Z_1}{R_{1_o}} \right\rvert$	4,20	3,44	2,44	1,60	1,24	1,08	1,01	1,00	1,00	1,00
φ	-44°	-42,6°	-40,2°	-33,5°	-25	-15,3°	-6,7°	-3,4	-0,7°	0°



Rys. 2.3.1



Rys. 2.3.2

Praktycznie dla f ≥ 1 MHz można rozpatrywaną linię paskową traktować jak jednorodną linię bezstratną, często oznaczaną przez $\overline{\text{U L C}}$ (z angielskiego "uniformly distributed LC network") i przedstawioną graficznie jak na rys. 2.3.2.

Obliczenia przeprowadzono przy założeniu niezależności wartości r_o, c_o, l_o, ε_r od częstotliwości f.

Pytanie: jak zmienia się $|Z_1|$ i φ, gdy f → 0?

Zadanie 2.4

Indukcyjność linii (na 1 cm długości) bez uwzględnienia skin - efektu (zjawisko naskórkowości) można obliczyć z zależności (dodatek 1):

$$l_o = 4{,}6 \log \frac{r_2}{r_1} \frac{nH}{cm}$$

a po podstawieniu wartości liczbowych

$$l_o = 2{,}50 \frac{nH}{cm}.$$

Pojemność linii

$$c_o = \frac{0{,}24 \cdot \varepsilon_r}{\log \frac{r_2}{r_1}} \frac{pF}{cm} = 0{,}97 \frac{pF}{cm}.$$

Dla wyższych częstotliwości r_o wyznaczamy z zależności

$$r_o = 8{,}3 \cdot \sqrt{f} \cdot 10^{-10} \frac{r_1+r_2}{2 \cdot r_1 \cdot r_2} \frac{\Omega}{cm}.$$

i np. dla $f_o = 1$ MHz

$$r_o = 2{,}67 \mu\Omega/cm.$$

Ponieważ

$$2\pi f_o \cdot l_o = 15{,}7 \; m\Omega/cm \gg r_o$$

a g_o jest pomijalnie małe, więc

$$Z_1 \cong \sqrt{\frac{l_o}{c_o}} \cong R_1 = \sqrt{\frac{2{,}5 \cdot 10^{-9}}{0{,}97 \cdot 10^{-12}}} = 50{,}77\Omega.$$

Impedancję falową przewodu koncentrycznego ekranowanego można też obliczyć z zależności (dodatek 1)

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot 59{,}952 \ln \frac{r_2}{r_1} = 50{,}6\Omega.$$

Dla niskich częstotliwości

$$r_o = \frac{\rho \cdot l}{s} = \rho \cdot \frac{0{,}01}{\pi \cdot r_1^2} = 1{,}42 \frac{m\Omega}{cm}.$$

Zadanie 2.5

Przykład ten rozwiążemy:

1) analizując kolejne fale wędrowne padające i odbite,
2) przez rozkład na funkcje przedstawiające fale wędrowne,
3) za pomocą wykresu Bergerona.

Współczynnik odbicia, od początku linii

$$M = \frac{R_o - R_l}{R_o + R_l}$$

od końca linii

$$N = \frac{\infty - R_l}{\infty + R_l} = +1,$$

natomiast czas opóźnienia linii

$$\tau = t_o = \frac{d}{v} = 5 \text{ ns}.$$

Ad 1)

Dla uproszczenia rozpatrzymy przebiegi czasowe napięć na początku i końcu linii oraz prądu na początku linii. Napięcie na początku linii

$$U_1(t) = U_1(t,0) \quad \text{dla} \quad t \in (0, 2t_o)$$

$$U_1(t) = U_1 = E \cdot \frac{R_l}{R_l + R_o} = V_p \text{ - fala padająca,}$$

czyli linia (z zacisków źródła) określona jest przez swoją impedancję falową, a napięcie U_1 można przedstawić w postaci

$$U_1 = \frac{E}{2}(1 - M).$$

Napięcie na końcu linii

$$U_2(t) = U_2(t,d) \quad \text{dla} \quad t \in (t_o, 3t_o).$$

Ponieważ N=1, fala padająca odbija się bez zmiany znaku, więc fala odbita napięcia

$$V_o = V_p = E \cdot \frac{R_l}{R_l + R_o},$$

a

$$U_2 = (V_p) + V_o = 2E\,\frac{R_1}{R_1+R_o} = E(1 - M).$$

Napięcie U_1 dla $t \in (2t_o,\ 4t_o)$.

Wracając od końca linii fala V_o odbija się od początku linii i zamienia na kolejną falę padającą

$$V_p' = M \cdot V_o,$$

więc

$$U_1 = (V_p+V_o) + V_p' = V_p(2+M) =$$

$$= \frac{E}{2}\left(\frac{4R_1}{R_1+R_o} + M \cdot \frac{2R_1}{R_1+R_o}\right) = \frac{E}{2}\,(2-M-M^2).$$

Napięcie U_2 dla $t \in (3t_o,\ 5t_o)$.

$$U_2 = (V_p + V_o + V_p') + V_o'$$

ale

$$V_o' = V_p'$$

więc

$$U_2 = 2\,V_p(1 + M) = E(1 - M^2).$$

Napięcie U_1 dla $t \in (4t_o,\ 6t_o)$

$$U_1 = (V_p+V_o+V_p'+V_o') + V_p''$$

ale

$$V_p'' = M \cdot V_o' = M^2 \cdot V_p$$

więc

$$U_1 = V_p(2+2M+M^2) = \frac{E}{2}\,(2-M^2-M^3).$$

Napięcie U_2 dla $t \in (5t_o,\ 7t_o)$

$$U_2 = (V_p+V_o+V_p'+V_o'+V_p'') + V_o''$$

ale

$$V_o'' = V_p''$$

więc

$$U_2 = 2V_p(1 + M + M^2) = E \cdot (1 - M^3).$$

Napięcie U_1 dla $t \in (6t_o, 8t_o)$

$$U_1 = (V_p + V_o + V_p' + V_o' + V_p'' + V_o'') + V_p'''$$

ale

$$V_p''' = M \cdot V_p'' = M^3 \cdot V_p$$

więc

$$U_1 = V_p(2+2M+2M^2+M^3) = \frac{E}{2}(2 - M^3 - M^4).$$

Napięcie U_2 dla $t \in (7t_o, 9t_o)$

$$U_2 = (V_p+V_o+V_p'+V_o'+V_p''+V_o''+V_p''') + V_o'''$$

ale

$$V_o''' = V_p''' = M^3 \cdot V_p$$

więc

$$U_2 = 2V_p(1 + M + M^2 + M^3) = E.(1-M^4)$$

itd.

Łatwo sprawdzić, że przy $t \to \infty$ napięcie na początku i na końcu linii dąży do wartości ustalonej równej napięciu zasilania linii E. W tablicy 2.4 podano wartości liczbowe napięć na początku i końcu linii w czasie dla a) $R_o = 0,5\ R_1$ $(M = -1/3)$ oraz b) $R_o = 2R_1 (M=1/3)$.

Na rysunku 2.5.1a przedstawiono przebiegi napięć (na początku i końcu linii) dla przypadku a) natomiast na rys. 2.5.1b przebiegi dla przypadku b).

Prąd

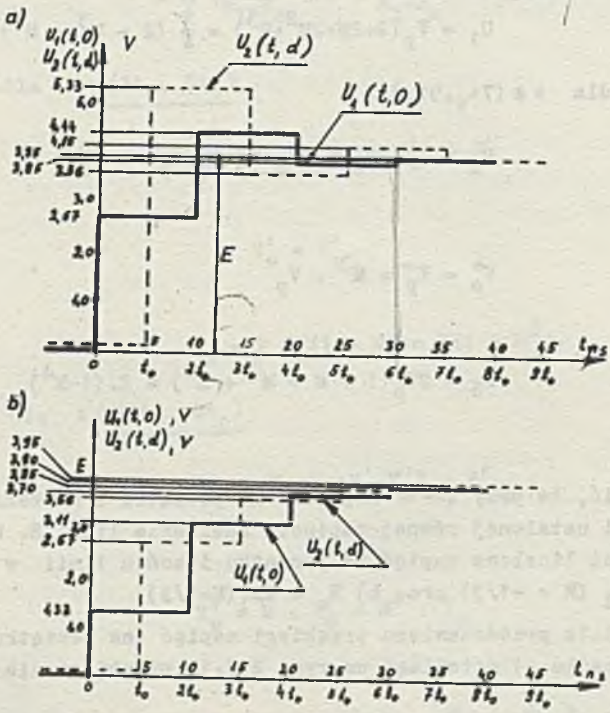
dla $t \in (0,2t_o)$ prąd I_1 jest równy fali padającej prądu, więc

$$I_1 = I_p = \frac{V_p}{R_1} = \frac{E}{R_1 + R_o} = \frac{E}{2R_1}(1-M),$$

czyli pierwsza fala padająca zależy tylko od źródła (SEM E i R_o) i impedancji falowej R_1,

Tablica 2.4

Napięcie $U_1(t,0)$				Napięcie $U_2(t,d)$			
Przedział czasu	Wzór na napięcie	U_1, V dla a)	U_1, V dla b)	Przedział czasu	Wzór na napięcie	U_2, V dla a)	U_2, V dla b)
$0\div 2\,t_o$	$\frac{E}{2}(1-M)$	2,67	1,33	$0\div t_o$	0	0	0
$2t_o\div 4t_o$	$\frac{E}{2}(2-M-M^2)$	4,44	3,11	$t_o\div 3t_o$	$E(1-M)$	5,33	2,67
$4t_o\div 6t_o$	$\frac{E}{2}(2-M^2-M^3)$	3,85	3,70	$3t_o\div 5t_o$	$E(1-M^2)$	3,56	3,56
$6t_o\div 8t_o$	$\frac{E}{2}(2-M^3-M^4)$	3,95	3,90	$5t_o\div 7t_o$	$E(1-M^3)$	4,15	3,85
				$7t_o\div 9t_o$	$E(1-M^4)$	3,95	3,95



Rys. 2.5.1a i b

dla $\quad t \in (2t_o,\ 4t_o)$

$$I_1 = I_p + I_o + I_p'$$

ale

$$I_o = - I_p$$

(ponieważ $I_2 = 0$, więc suma fali padającej i odbitej prądu jest równa zero) oraz

$$I'_p = M \cdot I_p$$

więc

$$I_1 = \frac{V_p}{R_l} - \frac{V_o}{R_l} + \frac{V'_p}{R_l} = \frac{V_p}{R_l}(1 - 1 + M) = \frac{E}{2R_l}\ (1 - M)M,$$

dla $\underline{t \in (4t_o,\ 6t_o)}$

$$I_1 = I_p + I_o + I'_p + I'_o + I''_p = \frac{E}{2R_l}\ (1 - M)M^2$$

analogicznie dla

$$\underline{t \in (6t_o,\ 8t_o)}$$

$$I_1 = \frac{E}{2R_l}\ (1-M)M^3$$

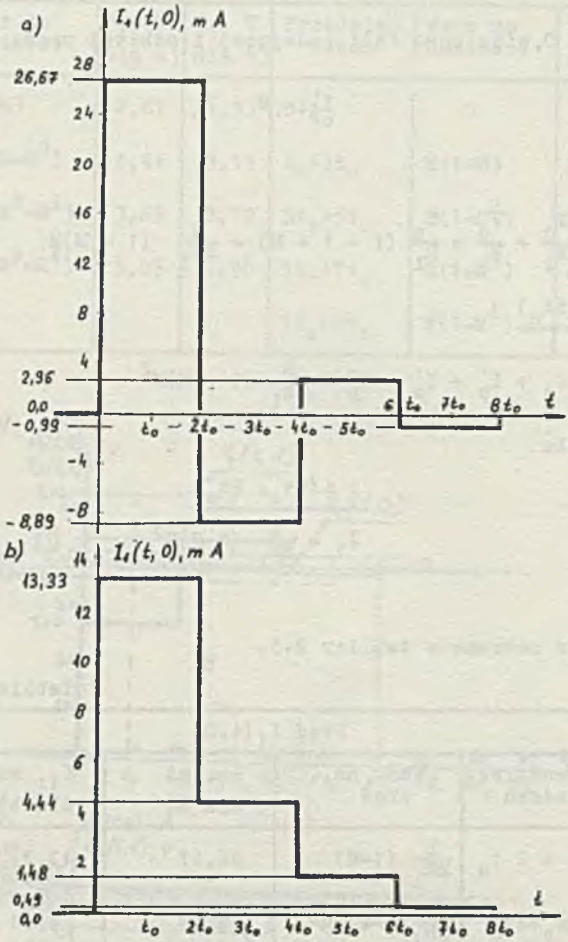
itd.

Wyniki liczbowe zebrano w tablicy 2.5.

Tablica 2.5

Prąd $I_1(t,0)$			
Przedział czasu	Wzór na prąd	I_1, mA dla a)	I_1, mA dla b)
$0 \div 2\ t_o$	$\frac{E}{2R_l}\ (1-M)$	26,67	13,33
$2t_o \div 4t_o$	$\frac{E}{2R_l}(1-M).M$	-8,89	4,44
$4t_o \div 6t_o$	$\frac{E}{2R_l}(1-M).M^2$	2,96	1,48
$6t_o \div 8t_o$	$\frac{E}{2R_l}(1-M).M^3$	-0,99	0,49
....			

Przebieg czasowy prądu $I_1(t,0)$ przedstawiono na rys. 2.5.2a i b odpowiednio dla przypadku a) i b). Łatwo zauważyć, że przy $t \to \infty$ $I_1(t,0) \to 0$. Z wykresów wynika, że przebiegi czasowe napięć i prądów narastają (lub maleją) aperiodycznie do wartości ustalonych, gdy współczynnik odbicia od początku linii $M > 0$ natomiast dla $M < 0$ przebiegi czasowe narastają (lub maleją) periodycznie do wartości ustalonej.

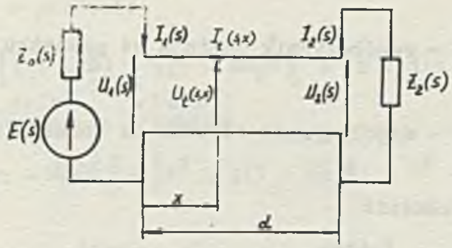


Rys. 2.5.2 a i b

Ad 2)

Ogólna postać równań operatorowych opisujących przebiegi napięcia i prądu wzdłuż linii tematowego obwodu złożonego z elementów o stałych skupionych i rozłożonych (rys. 2.5.3) jest następująca:

$$U_t(s,x) = \frac{E(s)}{Z_2(s)} \; \frac{Z_2(s)\cosh\left[\gamma(d-x)\right] - Z_1(s)\cdot\sinh\left[\gamma(d-x)\right]}{\left(1 + \frac{Z_o(s)}{Z_2(s)}\right)\cosh(\gamma\cdot d) + \left(\frac{Z_o(s)}{Z_1(s)} + \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)}\right)\sinh(\gamma d)}$$



Rys. 2.5.3

oraz

$$I_t(s,x) = \frac{E(s)}{Z_1(s)} \frac{\cosh\left[\gamma(d-x)\right] + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \sinh\left[\gamma(d-x)\right]}{(1 + \frac{Z_o(s)}{Z_2(s)})\cosh(\gamma d) + (\frac{Z_o(s)}{Z_1(s)} + \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)}) \cdot \sinh(\gamma d)}$$

gdzie

$E(s)$ - napięcie zasilania,

$Z_o(s)$, $Z_2(s)$, $Z_1(s)$ - impedancja odpowiednio źródła, obciążenia i falowa linii,

$\gamma = \sqrt{(r+sl)\cdot(g+sc)}$ - współczynnik przenoszenia linii.

Mogą być one przedstawione w postaci

$$U_t(s,x) = \frac{E(s)\cdot Z_1(s)}{Z_1(s)+Z_o(s)} \frac{e^{-\gamma x} + N\, e^{-\gamma\cdot(2d-x)}}{1 - M\cdot N\, e^{-2\gamma d}} =$$

$$= \frac{E(s)\cdot Z_1(s)}{Z_1(s)+Z_o(s)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (MN)^k\, e^{-\gamma(2kd+x)} + \right.$$

$$\left. + N \sum_{k=0}^{\infty} (MN)^k\, e^{-\gamma\left[2(k+1)d-x\right]} \right\} \tag{1}$$

oraz

$$I_t(s,x) = \frac{E(s)}{Z_1(s) + Z_o(s)} \frac{e^{-\gamma x} - N\, e^{-\gamma(2d-x)}}{1 - MN\, e^{-2\gamma d}} =$$

$$= \frac{E(s)}{Z_1(s) + Z_o(s)} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (MN)^k\, e^{-\gamma(2kd+x)} - \right.$$

$$\left. - N \sum_{k=0}^{\infty} (MN)^k\, e^{-\gamma\left[2(k+1)d-x\right]} \right\}, \tag{2}$$

gdzie

$$M = \frac{Z_o(s) - Z_1(s)}{Z_o(s) + Z_1(s)}$$ - współczynnik odbicia od początku linii,

$$N = \frac{Z_2(s) - Z_1(s)}{Z_2(s) + Z_1(s)}$$ - współczynnik odbicia od końca linii.

W rozpatrywanym przykładzie

$$Z_1(s) = R_1,$$

$$M = \frac{R_o - R_1}{R_o + R_1},$$

$$N = \frac{\infty - R_1}{\infty + R_1} = 1$$

$$E(s) = \frac{E}{s} \hat{=} E \cdot 1(t),$$

$$\gamma = s\sqrt{l \cdot c} = \frac{s}{v}$$

więc równania (1) i (2) można napisać w postaci

$$U_t(s,x) = \frac{E}{s} \cdot \frac{R_1}{R_o+R_1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} M^k \cdot e^{-s\frac{2kd+x}{v}} + \sum_{k=0}^{\infty} M^k \cdot e^{-s\frac{2(k+1)d-x}{v}}\right\} \tag{1'}$$

oraz

$$I_t(s,x) = \frac{E}{s(R_o+R_1)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} M^k \cdot e^{-\frac{2kd+x}{v}} - \sum_{k=0}^{\infty} M^k e^{-s\frac{2(k+1)d-x}{v}}\right\} \tag{2'}$$

a po przejściu na postać czasową

$$U(t,x) = E\frac{R_1}{R_o+R_1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} M^k \cdot 1\left(t - \frac{2kd+x}{v}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} M^k \cdot 1\left(t - \frac{2(k+1)d-x}{v}\right)\right\} \tag{3}$$

oraz

$$I(t,x) = \frac{E}{R_o+R_1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} M^k \cdot 1\left(t - \frac{2kd+x}{v}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} M^k\, 1\left(t - \frac{2(k+1)d-x}{v}\right)\right\} \tag{4}$$

Zależności (3) i (4) przedstawiają przebiegi czasowe napięcia i prądu w linii w postaci sumy fal padających i odbitych.

Jeśli zależność (3) i (4) rozpiszemy tak, by po fali padającej wystąpiła fala odbita, czyli w postaci:

$$U(t,x) = \frac{E.R_1}{R_o+R_1}\Bigg\{\Big[\underbrace{1(t-\tfrac{x}{v})}_{\text{fala padająca}} + \underbrace{1(t-\tfrac{2d-x}{v})}_{\text{fala odbita}}\Big] + \Big[M\,.\,1(t-\tfrac{2d+x}{v}) +$$

$$+ M\,.\,1(t-\tfrac{4d-x}{v})\Big] + \Big[M^2\,.\,1(t-\tfrac{4d+x}{v}) + M^2\,.\,1(t-\tfrac{6d-x}{v})\Big] +$$

$$+ \Big[M^3\,.\,1(t-\tfrac{6d+x}{v}) + M^3\,.\,1(t-\tfrac{8d-x}{v})\Big] + \dots\Bigg\} \tag{3'}$$

oraz

$$I(t,x) = \frac{E}{R_o+R_1}\Bigg\{\Big[1(t-\tfrac{x}{v}) - 1(1-\tfrac{2d-x}{v})\Big] +$$

$$+ \Big[M\,.\,1(t-\tfrac{2d+x}{v}) - M\,.\,1(t-\tfrac{4d-x}{v})\Big] + \Big[M^2\,.\,1\,(t-\tfrac{4d+x}{v}) -$$

$$- M^2\,.\,1(t-\tfrac{6d-x}{v}) + M^3\,.\,1(t-\tfrac{6d+x}{v}) - M^3\,.\,1(t-\tfrac{8d-x}{v}) + \dots\Bigg\} \tag{4'}$$

to łatwo na ich podstawie sporządzić wykresy przebiegów czasowych napięcia i prądu wzdłuż linii po załączeniu na linię (w chwili $t=0$) napięcia stałego E (poprzez rezystor R_o).

Zależność (3') po podstawieniu wartości liczbowych dla przypadku a) ma postać

$$U(t,x) = 2{,}67\,.\Bigg\{\Big[1(t-\tfrac{x}{v}) + 1(t-2t_o+\tfrac{x}{v})\Big] + \Big[-\tfrac{1}{3}\,.\,1(t-2t_o-\tfrac{x}{v})$$

$$- \tfrac{1}{3}\,.\,1(t-4t_o+\tfrac{x}{v})\Big] + \Big[\tfrac{1}{9}\,.\,1(t-4t_o-\tfrac{x}{v}) + \tfrac{1}{9}\,1(t-6t_o+\tfrac{x}{v})\Big] +$$

$$+ \Big[\tfrac{-1}{27}\,.\,1(t-6t_o-\tfrac{x}{v}) - \tfrac{1}{27}\,.\,1(t-8t_o+\tfrac{x}{v})\Big] +$$

$$+ \Big[\tfrac{1}{81}\,.\,1(t-8t_o-\tfrac{x}{v}) + \tfrac{1}{81}\,.\,1(t-10t_o+\tfrac{x}{v})\Big] + \dots\Bigg\},\ V \tag{3''}$$

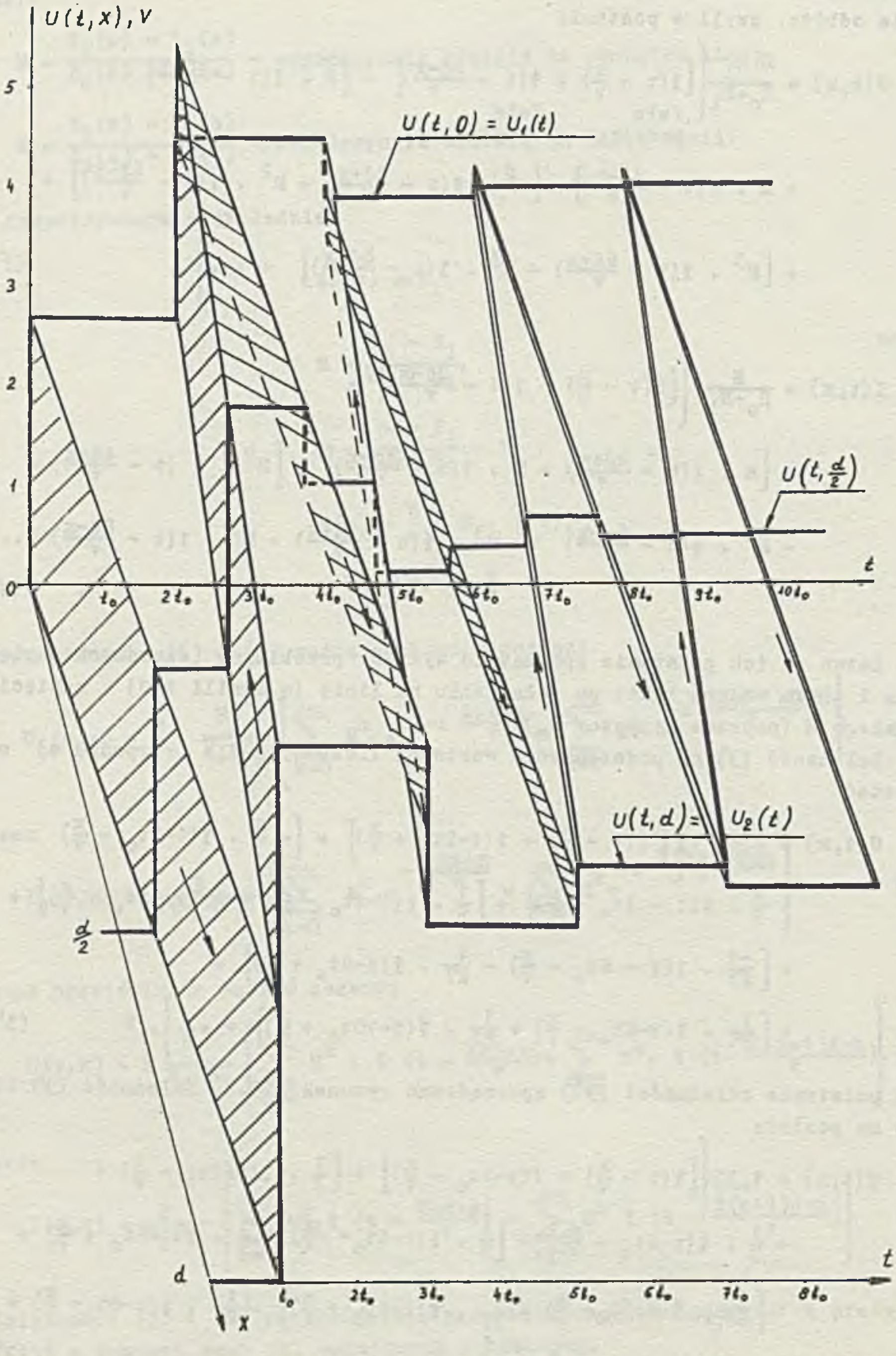
Na podstawie zależności (3") sporządzono rysunek 2.5.4. Zależność (3') dla b) ma postać:

$$U(t,x) = 1{,}33\Bigg\{\Big[1(t-\tfrac{x}{v}) + 1(t-2t_o+\tfrac{x}{v})\Big] + \Big[\tfrac{1}{3}\,.\,1(t-2t_o-\tfrac{x}{v}) +$$

$$+ \tfrac{1}{3}\,.\,1(t-4t_o+\tfrac{x}{v})\Big] + \Big[\tfrac{1}{9}\,.\,1(t-4t_o-\tfrac{x}{v}) + \tfrac{1}{9}\,.\,1(t-6t_o+\tfrac{x}{v}) +$$

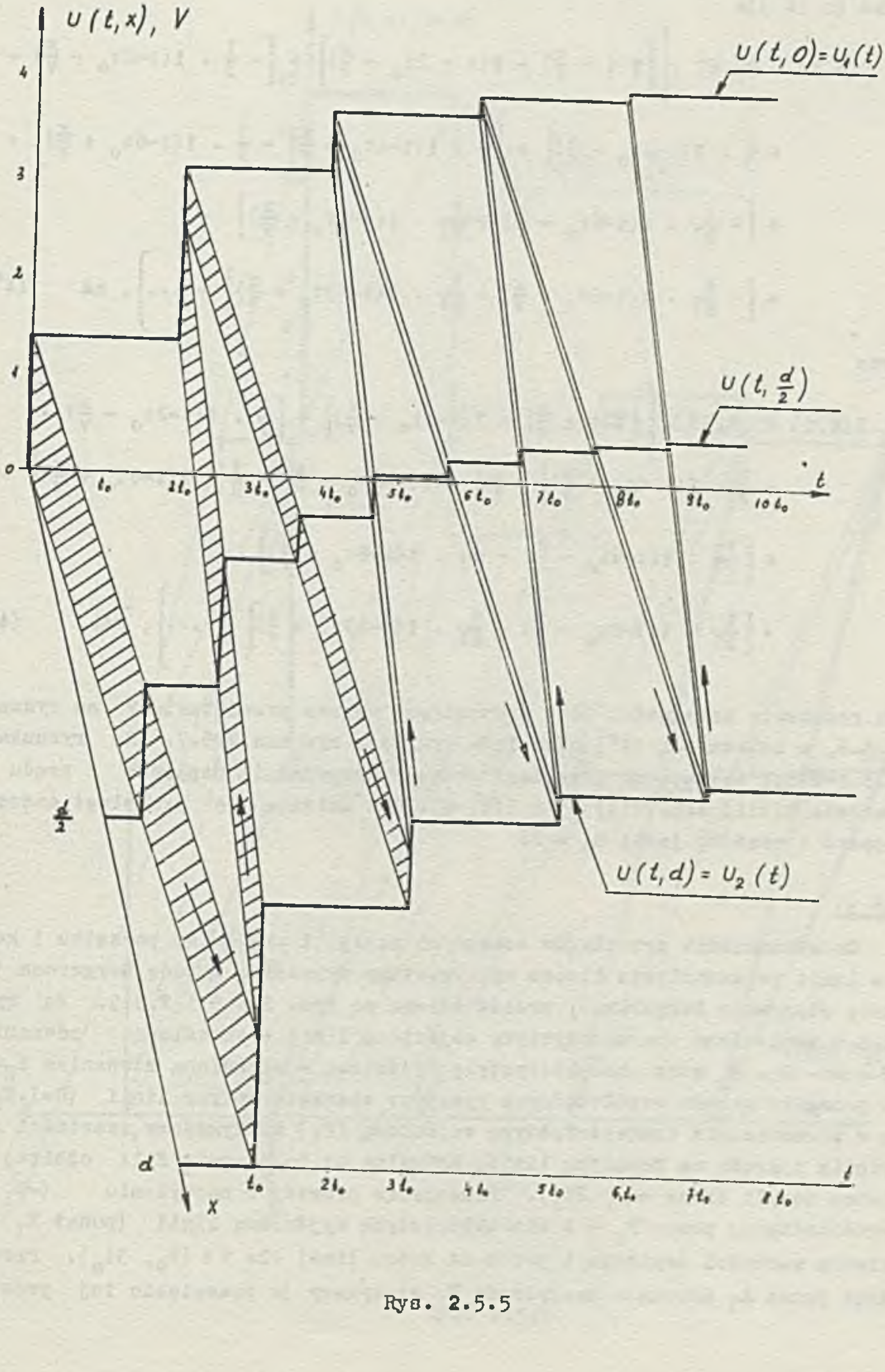
$$+ \Big[\tfrac{1}{27}\,.\,1(t-6t_o-\tfrac{x}{v}) + \tfrac{1}{27}\,.\,1(t-8t_o+\tfrac{x}{v})\Big] + \Big[\tfrac{1}{81}\,.\,1(t-8t_o-\tfrac{x}{v}) +$$

$$\tfrac{1}{81}\,.\,1(t-10t_o+\tfrac{x}{v})\Big] + \dots\Bigg\},\ V \tag{3'''}$$



U(t,x), V
5
4
3
2
1
0
U(t,0) = U₁(t)
U(t, d/2)
U(t,d) = U₂(t)
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
6t₀
7t₀
8t₀
9t₀
10t₀
t
d/2
d
x

Rys. 2.5.4



u(t,x), V
4
3
2
1
0
u(t,0)=u₁(t)
u(t, d/2)
u(t,d) = u₂(t)
t
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
6t₀
7t₀
8t₀
9t₀
10t₀
d/2
d
x

Rys. 2.5.5

Na rysunku 2.5.5 przedstawiono zależność (3‴).
Analogicznie, przebiegi prądu dla przypadków a) i b) mają odpowiednio postać (z (4')):

$$I(t,x) = 26,67 \cdot \left\{ \left[1(t - \frac{x}{v}) - 1(t - 2t_o + \frac{x}{v}) \right] + \left[-\frac{1}{3} \cdot 1(t-2t_o - \frac{x}{v}) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3} \cdot 1(t-4t_o + \frac{x}{v}) \right] + \left[\frac{1}{9} \cdot 1(t-4t_o - \frac{x}{v}) - \frac{1}{9} \cdot 1(t-6t_o + \frac{x}{v}) \right] +$$
$$+ \left[-\frac{1}{27} \cdot 1(t-6t_o - \frac{x}{v}) + \frac{1}{27} \cdot 1(t-8t_o + \frac{x}{v}) \right] +$$
$$\left. + \left[-\frac{1}{81} \cdot 1(t-8t_o - \frac{x}{v}) + \frac{1}{81} \cdot 1(t-10t_o + \frac{x}{v}) \right] + \ldots \right\}, \text{ mA} \qquad (4'')$$

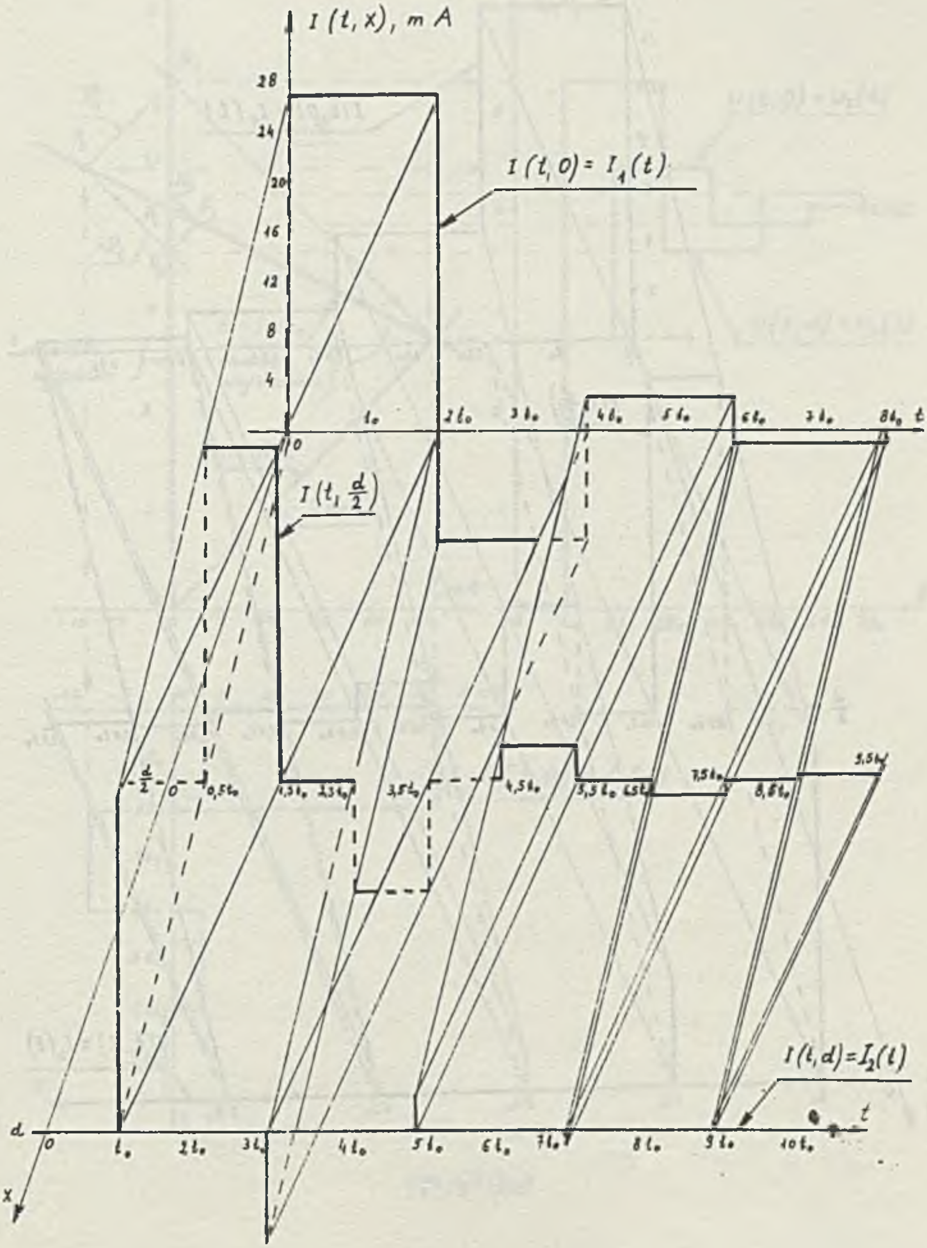
oraz

$$I(t,x) = 13,33 \cdot \left\{ \left[1(t - \frac{x}{v}) - 1(t-2t_o + \frac{x}{v}) \right] + \left[\frac{1}{3} \cdot 1(t-2t_o - \frac{x}{v}) - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{3} \cdot 1(t-4t_o + \frac{x}{v}) \right] + \left[\frac{1}{9} \cdot 1(t-4t_o - \frac{x}{v}) - \frac{1}{9} \cdot 1(t-6t_o + \frac{x}{v}) \right] +$$
$$+ \left[\frac{1}{27} \cdot 1(t-6t_o - \frac{x}{v}) - \frac{1}{27} \cdot 1(t-8t_o + \frac{x}{v}) \right] +$$
$$\left. + \left[\frac{1}{81} \cdot 1(t-8t_o - \frac{x}{v}) - \frac{1}{81} \cdot 1(t-10t_o + \frac{x}{v}) \right] + \ldots \right\}, \text{ mA.} \qquad (4''')$$

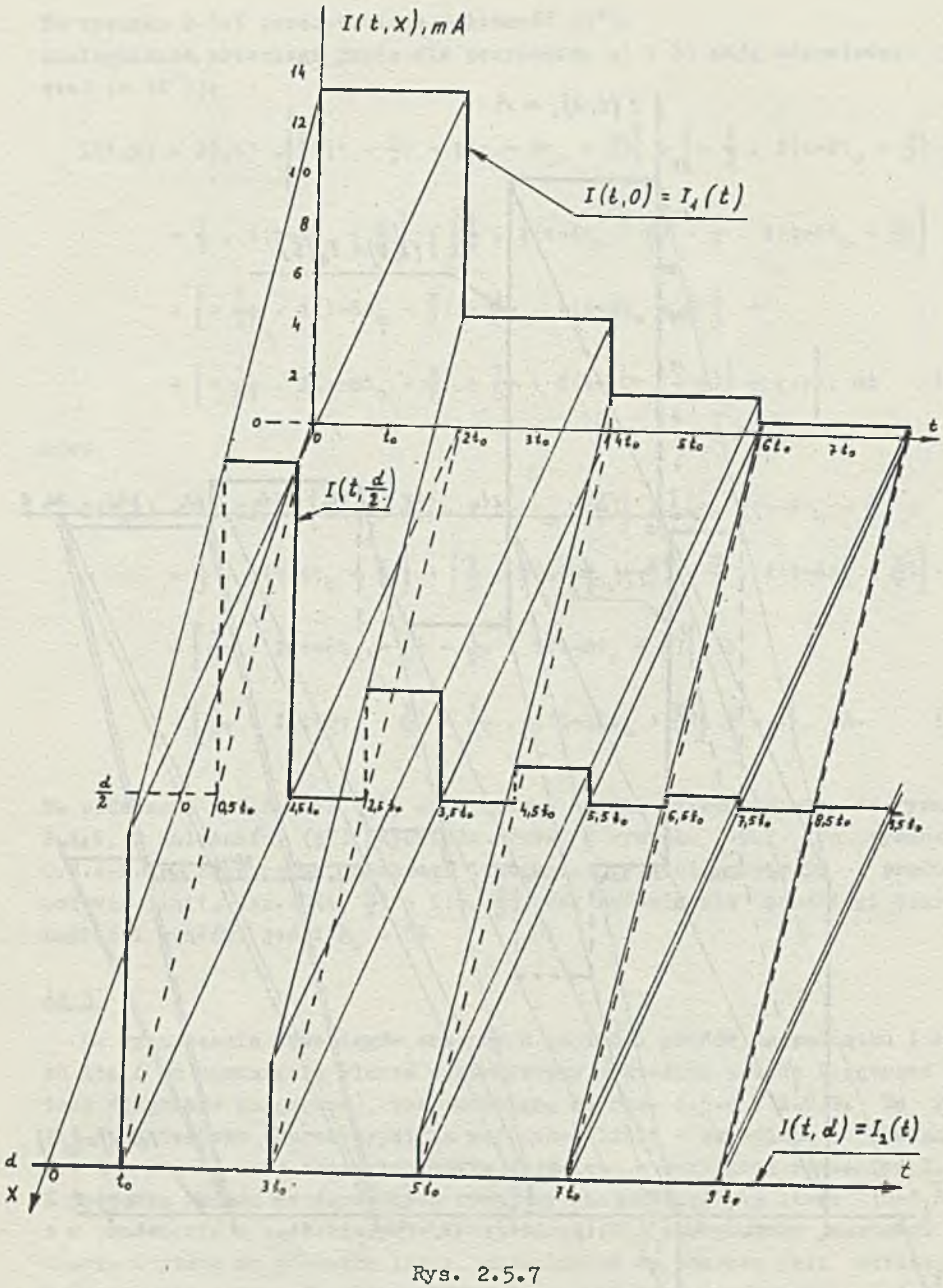
Na podstawie zależności (4″) sporządzono wykres przedstawiony na rysunku 2.5.6, a zależności (4‴) odpowiada wykres z rysunku 2.5.7. Na rysunkach 2.5.4-2.5.7 zaznaczono przebiegi czasowe odpowiednio napięcia i prądu w połowie linii, tzn. $U(t, \frac{d}{2})$ i $I(t, \frac{d}{2})$. Jak zmienią się przebiegi czasowe napięć i prądów, jeśli $R_o = 0$?

Ad 3)

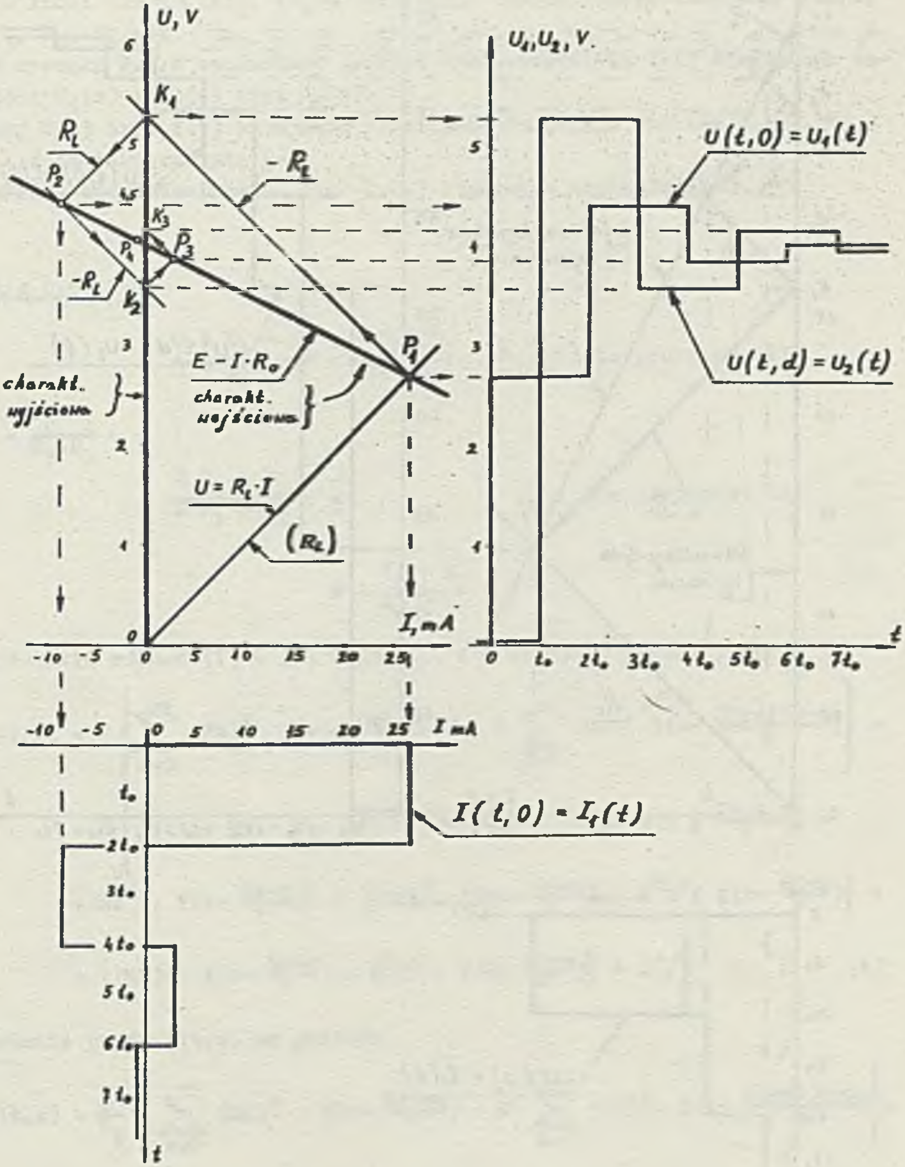
Do wyznaczenia przebiegów czasowych napięć i prądów na początku i końcu linii po zamknięciu klucza wykorzystamy wykreślną metodę Bergerona (metodę diagramów Bergerona), przedstawioną na rys. 2.5.8 i 2.5.9. Na rys. 2.5.8 naniesiono charakterystykę wejściową linii - określoną równaniem $U = E - I \cdot R_o$ oraz charakterystykę wyjściową - określoną równaniem $I_2=0$. Z początku układu współrzędnych rysujemy charakterystykę linii $(U=I.R_1)$, a w przecięciu z charakterystyką wejściową (P_1) otrzymujemy wartości napięcia i prądu na początku linii, aktualne aż do powrotu fali odbitej od końca (czyli przez czas $2t_o$). Przecięcie prostej o nachyleniu $(-R_1)$ - przechodzącej przez P_1 - z charakterystyką wyjściową linii (punkt K_1) określa wartości napięcia i prądu na końcu linii dla $t \in (t_o, 3t_o)$. Prowadząc przez K_1 prostą o nachyleniu R_1 otrzymamy (w przecięciu tej prostej



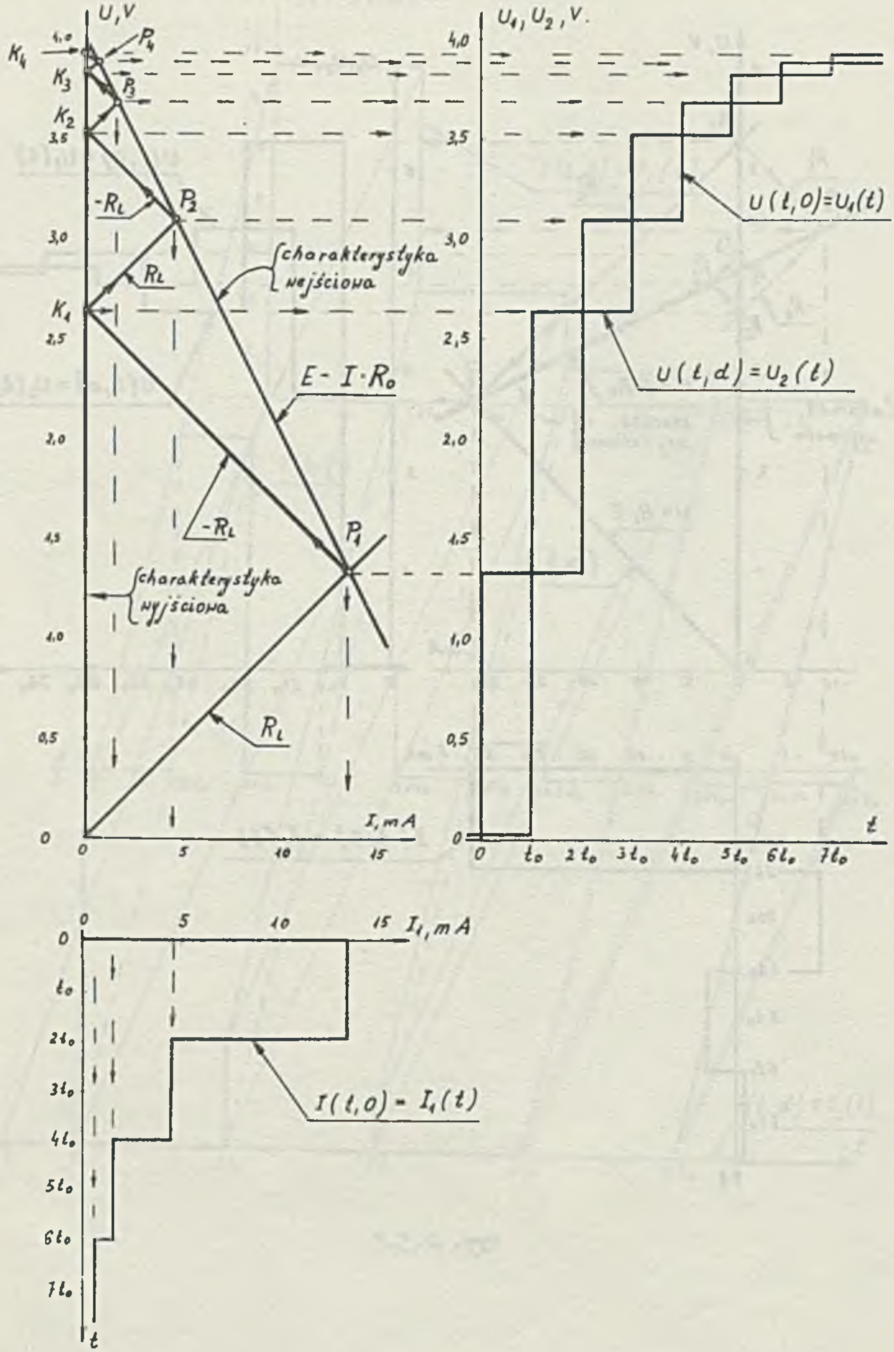
Rys. 2.5.6


I(t,x), mA
14
12
10
8
6
4
2
0
t
I(t,0) = I_1(t)
0
t_0
2t_0
3t_0
4t_0
5t_0
6t_0
7t_0
I(t, d/2)
d/2
0
0,5t_0
1,5t_0
2,5t_0
3,5t_0
4,5t_0
5,5t_0
6,5t_0
7,5t_0
8,5t_0
9,5t_0
I(t,d) = I_2(t)
d
X
0
t_0
3t_0
5t_0
7t_0
9t_0
t

Rys. 2.5.7


U, V
K_1
R_L
P_2
$-R_L$
K_3
P_4
P_3
$-R_L$
K_2
$E - I \cdot R_o$
P_1
charakt. wyjściowa
charakt. wejściowa
$U = R_L \cdot I$
(R_L)
I, mA
I mA
U_1, U_2, V.
$u(t,0) = u_1(t)$
$u(t,d) = u_2(t)$
$I(t,0) = I_1(t)$
t

Rys. 2.5.8


U,V
K4
P4
K3
P3
K2
-RL
P2
RL
K1
charakterystyka wejściowa
E - I·R0
-RL
P1
charakterystyka wyjściowa
RL
I, mA
U1, U2, V.
u(t,0)=u1(t)
u(t,d)=u2(t)
t
0
t0
2t0
3t0
4t0
5t0
6t0
7t0
I1, mA
I(t,0) = I1(t)

Rys. 2.5.9

z charakterystyką wejściową - punkt P_2) wartości napięcia i prądu na początku linii dla $t \in (2t_o, 4t_o)$. Postępując analogicznie, otrzymamy punkty K_2, P_3, K_3, P_4,...

Na rysunku 2.5.8 naniesiono (oprócz charakterystyki U-I) dla wygody zależności $U_1(t)$ i $U_2(t)$ oraz $I_1(t)$.

Wykresy U(t) oraz I(t) otrzymano przez przerzutowanie punktów P_1, K_1, P_2, K_2,... z charakterystyki U-I.

Wykresy przedstawione na rys. 2.5.9 otrzymano analogicznie.

Zadanie 2.6

$$N = \frac{R_2-R_1}{R_2+R_1} = \begin{cases} \dfrac{0{,}5\,R_1 - R_1}{0{,}5\,R_1 + R_1} = \dfrac{-\,0{,}5\,R_1}{1{,}5\,R_1} = -\dfrac{1}{3} & \text{dla przypadku a)} \\[2ex] \dfrac{2\,R_1 - R_1}{2\,R_1 + R_1} = \dfrac{1}{3} & \text{dla przypadku b)} \end{cases}$$

$$M = \frac{R_o - R_1}{R_o + R_1} = -1.$$

Na podstawie równań (1) i (2) w zadaniu 2.5 napięcie wzdłuż linii

$$U(t,x) = E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} (MN)^k\ 1(t - \frac{2kd+x}{v}) + N\sum_{k=0}^{\infty} (MN)^k\ 1(t - \frac{2(k+1)d-x}{v})\right\} =$$

$$= E\left\{\left[1(t-\frac{x}{v}) + N\,.\,1(t-\frac{2d-x}{v})\right] + \left[M.N.\ 1(t-\frac{2d+x}{v}) + \right.\right.$$

$$\left. + MN^2\,.\,1(t-\frac{4d-x}{v})\right] + \left[(MN)^2\,.\,1(t-\frac{4d+x}{v}) + M^2N^3.\ 1(t-\frac{6d-x}{v})\right] +$$

$$\left. + \left[(MN)^3.\ 1(t-\frac{6d+x}{v}) + M^3N^4\,.\,1(t-\frac{8d-x}{v})\right] + \ldots\right\} \tag{1}$$

a równanie prądu I(t,x) ma postać:

$$I(t,x) = \frac{E}{R_1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} (MN)^k\,.\,1(t-\frac{2kd+x}{v}) - N\sum_{k=0}^{\infty} (MN)^k.\ 1(t-\frac{2(k+1)d-x}{v})\right\} =$$

$$= \frac{E}{R_1}\left\{\left[1(t-\frac{x}{v}) - N\,.\,1(t-\frac{2d-x}{v})\right] + \left[MN\,.\,1(t-\frac{2d+x}{v}) - \right.\right.$$

$$\left. - MN^2.\ 1(t-\frac{4d-x}{v})\right] + \left[(MN)^2\,.\,1(t-\frac{4d+x}{v}) - M^2N^3.\ 1(t-\frac{6d-x}{v})\right] +$$

$$\left. + \left[(MN)^3\,.\,1(t-\frac{6d+x}{v}) - M^3N^4\,.\,1(t-\frac{8d-x}{v})\right] + \ldots\right\} \tag{2}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych dla a) napięcie

$$U(t,x) = 4\left\{\left[1(t - \frac{x}{v}) - \frac{1}{3} \cdot 1(t - \frac{2d - x}{v})\right] + \left[\frac{1}{3} \cdot 1(t - \frac{2d + x}{v}) - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{9} \cdot 1(t - \frac{4d - x}{v})\right] + \left[\frac{1}{9} \cdot 1(t - \frac{4d + x}{v}) - \frac{1}{27} \cdot 1(t - \frac{6d-x}{v})\right] +$$
$$\left. + \left[\frac{1}{27} \cdot 1(t - \frac{6d + x}{v}) - \frac{1}{81} \cdot 1(t - \frac{8d-x}{v})\right] + \ldots\right\}, \text{ V} \qquad (1')$$

oraz prąd

$$I(t,x) = 40 \cdot \left\{\left[1(t - \frac{x}{v}) + \frac{1}{3} \cdot 1(t - \frac{2d-x}{v})\right] + \left[\frac{1}{3} \cdot 1(t - \frac{2d + x}{v}) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{9} \cdot 1(t - \frac{4d-x}{v})\right] + \left[\frac{1}{9} \cdot 1(t - \frac{4d+x}{v}) + \frac{1}{27} \cdot 1(t - \frac{6d-x}{v})\right] +$$
$$\left. + \left[\frac{1}{27} \cdot 1(t - \frac{6d+x}{v}) + \frac{1}{81} \cdot 1(t - \frac{8d-x}{v})\right] + \ldots\right\}, \text{ mA}. \qquad (2')$$

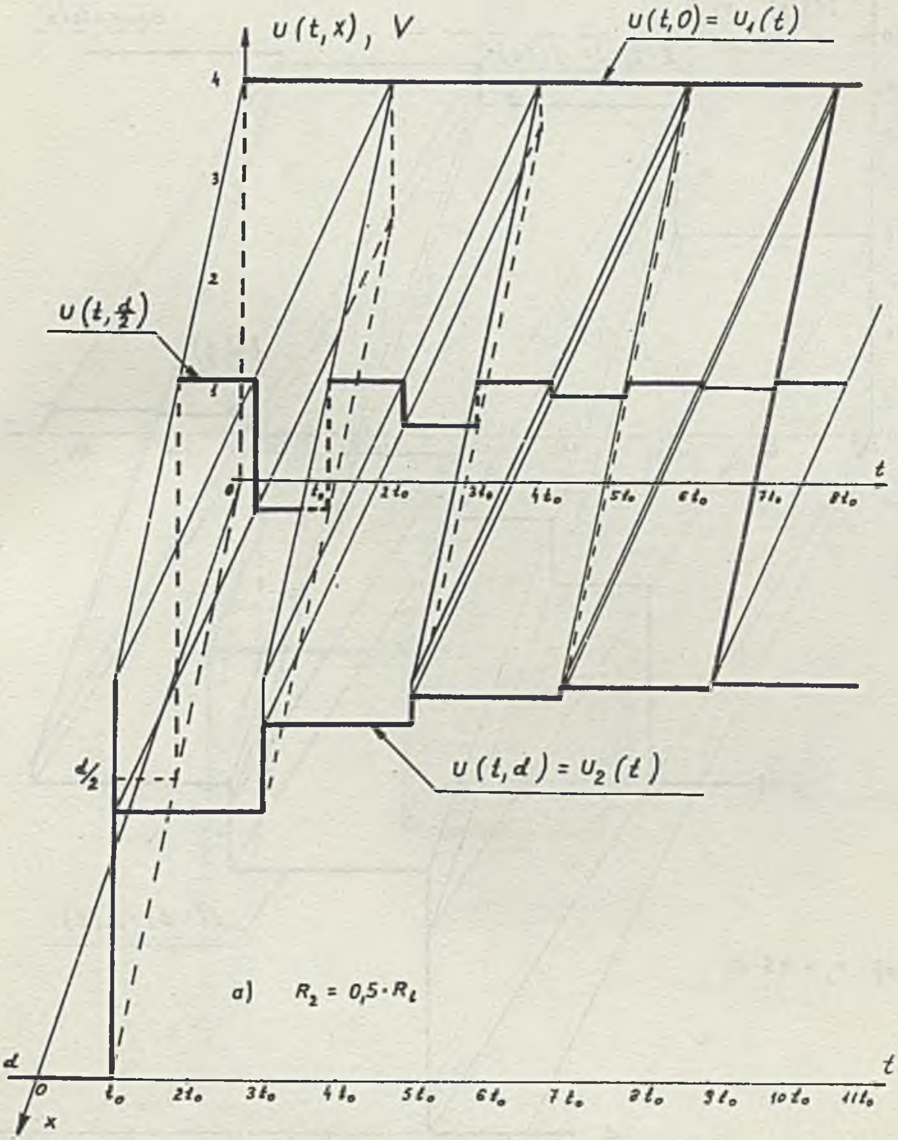
Przebiegi napięć i prądów wzdłuż linii opisane równaniami (1') i (2') przedstawiono na rysunkach 2.6.1 i 2.6.2.
Analogicznie dla przypadku b) napięcie

$$U(t,x) = 4\left\{\left[1(t - \frac{x}{v}) + \frac{1}{3} \cdot 1(t - \frac{2d-x}{v})\right] + \left[-\frac{1}{3} \cdot 1(t - \frac{2d + x}{v}) - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{9} \cdot 1(t - \frac{4d-x}{v})\right] + \left[\frac{1}{9} \cdot 1(t - \frac{4d+x}{v}) + \frac{1}{27} \cdot 1(t - \frac{6d-x}{v})\right] +$$
$$\left. + \left[-\frac{1}{27} \cdot 1(t - \frac{6d+x}{v}) - \frac{1}{81} \cdot 1(t - \frac{8d-x}{v})\right] + \ldots\right\}, \text{ V} \qquad (1'')$$

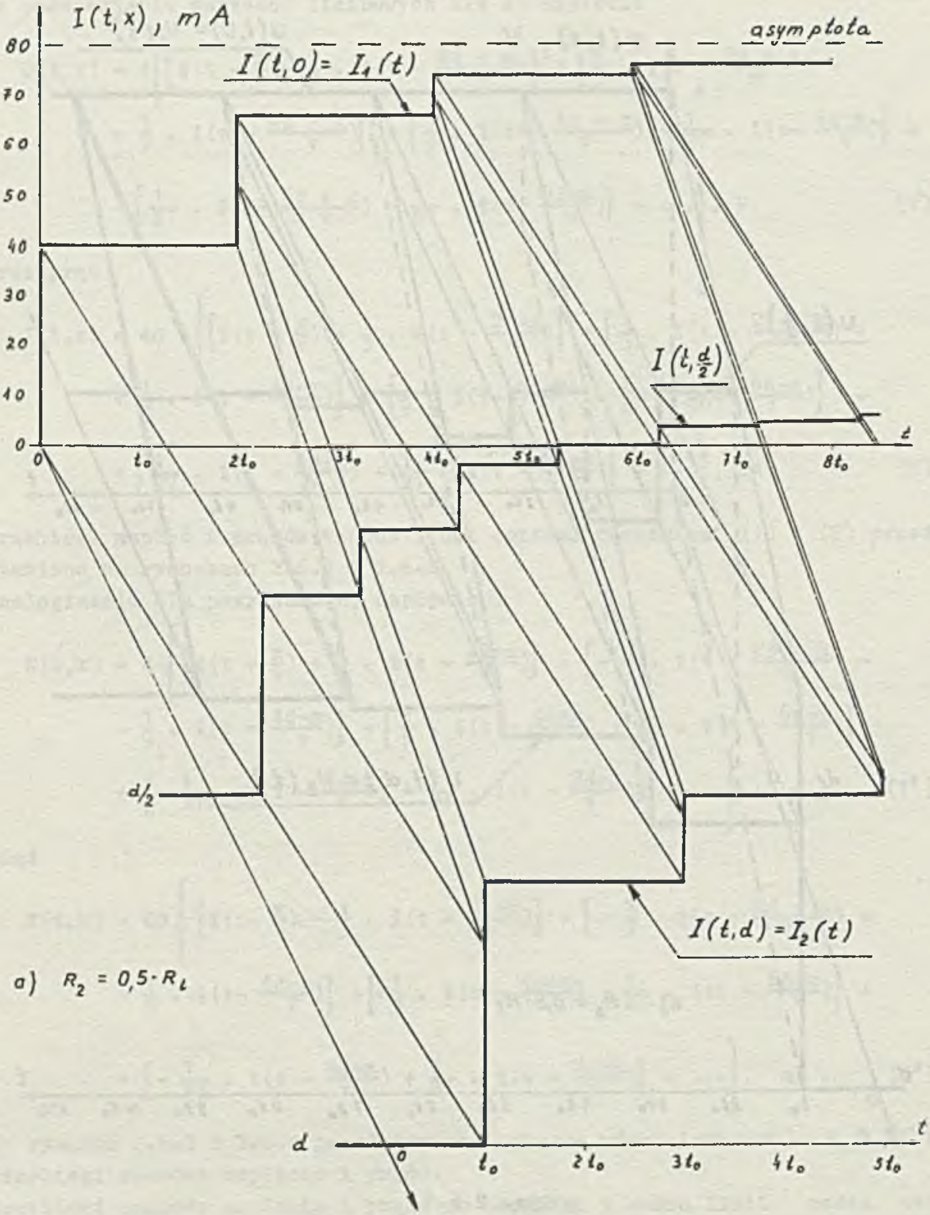
prąd

$$I(t,x) = 40\left\{\left[1(t - \frac{x}{v}) - \frac{1}{3} \cdot 1(t - \frac{2d-x}{v})\right] + \left[-\frac{1}{3} \cdot 1(t - \frac{2d + x}{v}) + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{9} \cdot 1(t - \frac{4d-x}{v})\right] + \left[+\frac{1}{9} \cdot 1(t - \frac{4d+x}{v}) - \frac{1}{27} \cdot 1(t - \frac{6d-x}{v})\right] +$$
$$\left. + \left[-\frac{1}{27} \cdot 1(t - \frac{6d+x}{v}) + \frac{1}{81} \cdot 1(t - \frac{8d-x}{v})\right] + \ldots\right\}, \text{ mA} \cdot \qquad (2'')$$

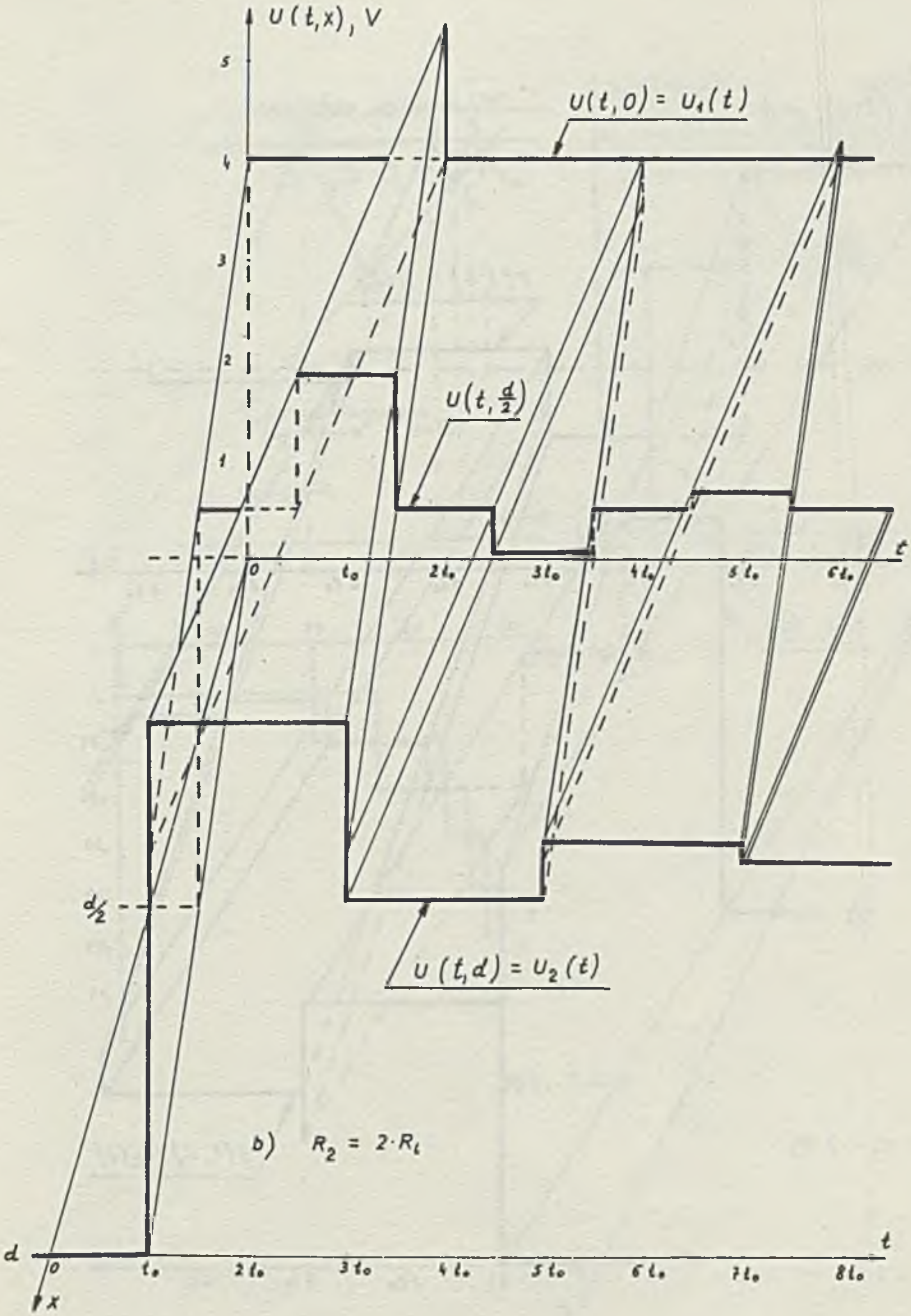
Na rysunku 2.6.3 i 2.6.4 przedstawiono opisane równaniami (1″) i (2″) przebiegi czasowe napięcia i prądu.
Przebiegi czasowe napięcia i prądu na początku i końcu linii można też wyznaczyć metodą diagramów Bergerona. Na rys. 2.6.5 i 2.6.6 przedstawiono konstrukcję przebiegu odpowiednio dla przypadku a) i b).



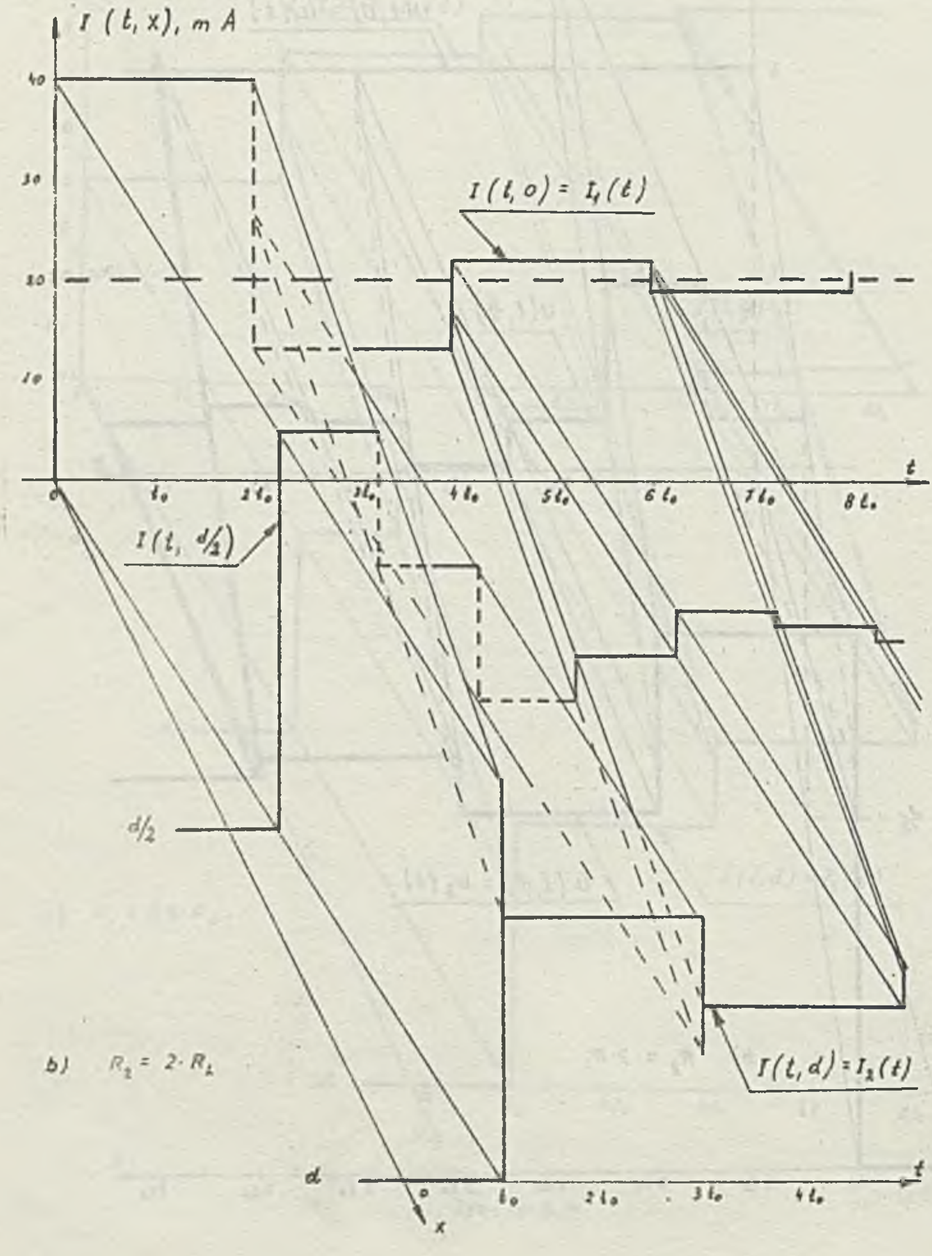
Rys. 2.6.1


I(t, x) , mA
asymptota
I(t,0) = I1(t)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
t0
2t0
3t0
4t0
5t0
6t0
7t0
8t0
t
I(t, d/2)
d/2
I(t,d) = I2(t)
a) R2 = 0,5·R1
d
0
t0
2t0
3t0
4t0
5t0
t

Rys. 2.6.2

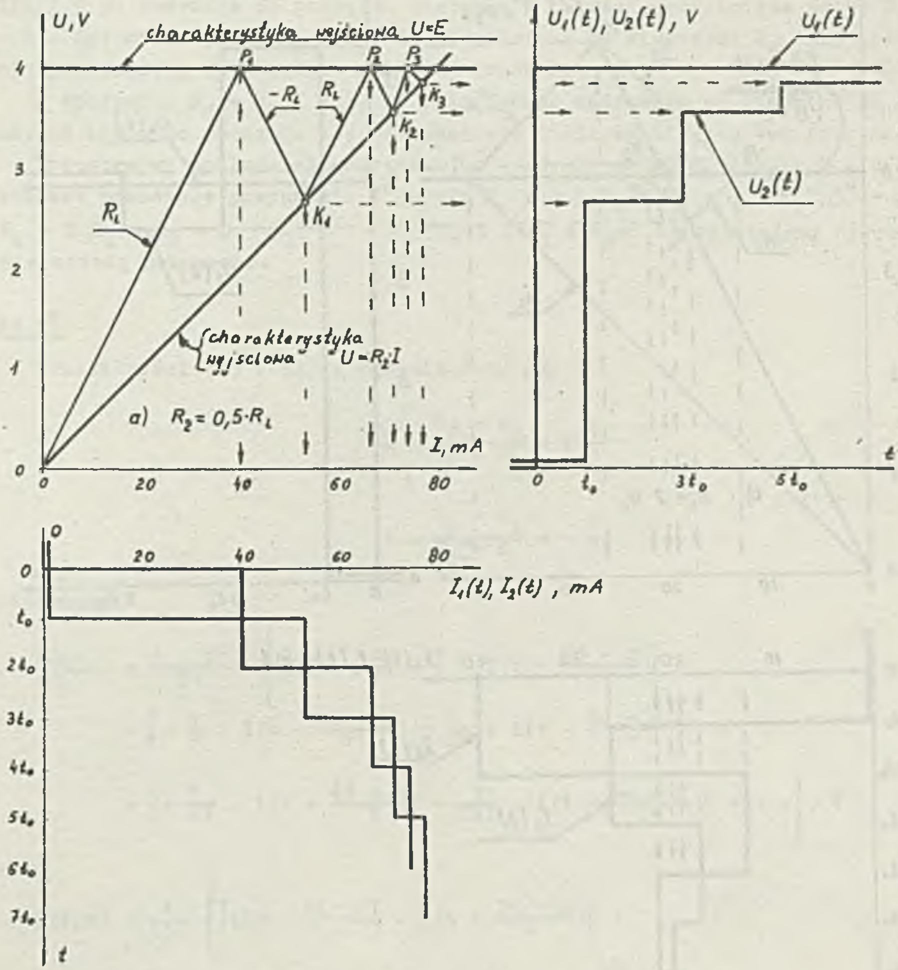

U (t,x), V
U(t,0) = U_1(t)
U(t, d/2)
U (t,d) = U_2 (t)
b) R_2 = 2·R_l
t
0
t_o
2t_o
3t_o
4t_o
5t_o
6t_o
7t_o
8t_o
d
d/2
x

Rys. 2.6.3

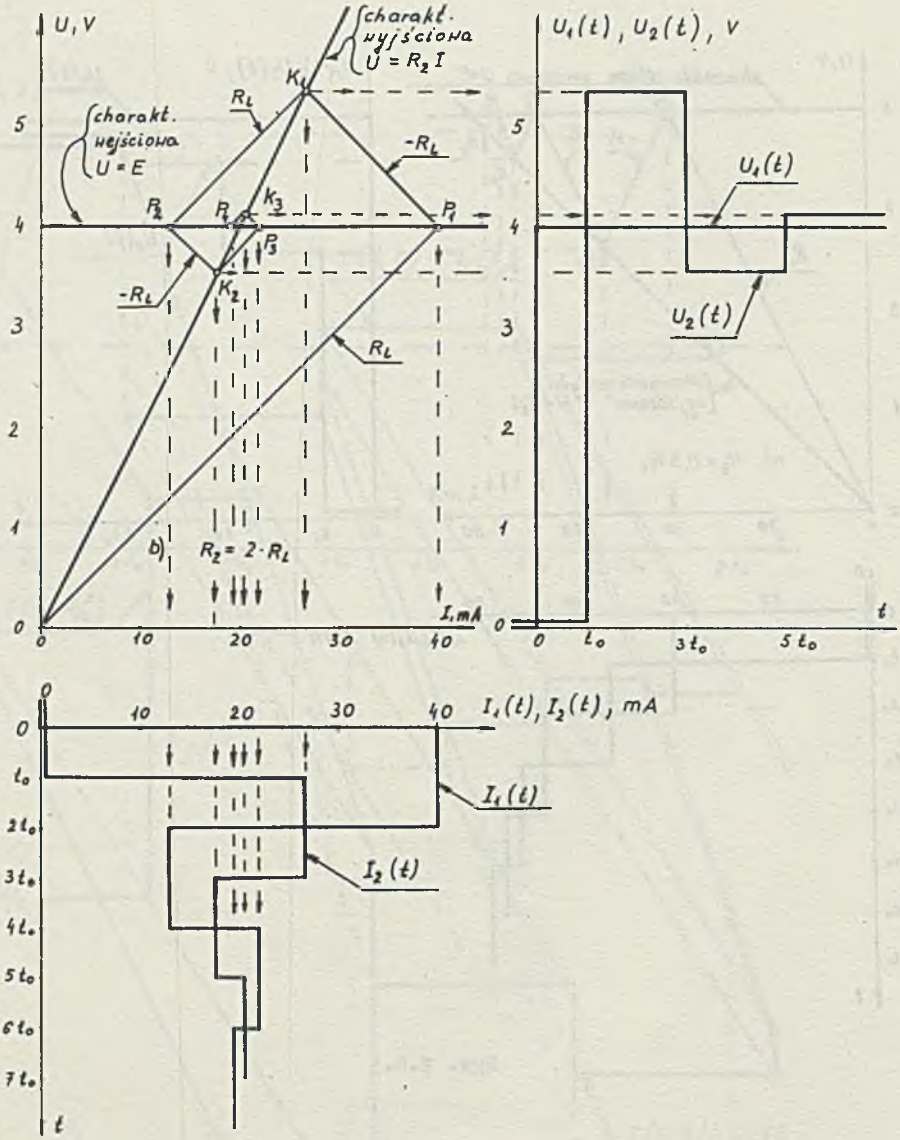


I (t, x), mA
40
30
20
10
I (t, 0) = I₁(t)
t
0
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
6t₀
7t₀
8t₀
I (t, d/2)
d/2
b) R₂ = 2·R₁
I (t, d) = I₂(t)
d
0
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
t
x

Rys. 2.6.4


U,V
charakterystyka wejściowa U=E
P_1
P_2
P_3
$-R_L$
R_L
K_1
K_2
K_3
R_L
charakterystyka wejściowa $U=R_2 \cdot I$
a) $R_2 = 0,5 \cdot R_L$
I, mA
$U_1(t), U_2(t)$, V
$U_1(t)$
$U_2(t)$
t
0
t_0
$3t_0$
$5t_0$
$I_1(t), I_2(t)$, mA
$2t_0$
$4t_0$
$6t_0$
$7t_0$

Rys. 2.6.5


U, V
charakt. wyjściowa U = R₂ I
charakt. wejściowa U = E
K_1
R_L
$-R_L$
P_2
P
K_3
P_1
P_3
K_2
b)
$R_2 = 2 \cdot R_L$
I, mA
$U_1(t), U_2(t)$, V
$U_1(t)$
$U_2(t)$
t
$I_1(t), I_2(t)$, mA
$I_1(t)$
$I_2(t)$

Rys. 2.6.6

Zadanie 2.7

Jeśli $R_2 \neq R_1$ a $R_o = R_1$ fala (napięcia i prądu) odbije się od końca linii i po powrocie do początku zostanie w całości pochłonięta przez $R_o = R_1$. Natomiast jeśli $R_2 = R_1$, to niezależnie od wielkości R_o fala zostanie pochłonięta (nie będzie odbicia) przez R_2.

W przypadku $R_o \neq R_1$ i $R_2 \neq R_1$ fala będzie wędrowała od początku do końca, od końca do początku itd. W tematowej linii ma miejsce ten przypadek.

Rozpatrzymy dokładniej przypadek 1^o - gdy $R_o = 0{,}5\ R_1$ a $R_2 = 2 \cdot R_1$, natomiast pozostałe przypadki: 2^o - gdy $R_o = 0{,}5\ R_1$ a $R_2 = 0{,}5\ R_1$, 3^o - gdy $R_o = 2\ R_1$ a $R_2 = 0{,}5\ R_1$, 4^o - gdy $R_o = 2\ R_1$ a $R_2 = 2\ R_1$ rozwiążemy wykreślnie metodą Bergerona.

Ad 1^o

Z zależności (1) i (2) z zadania 2.5, gdy

$$N = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} = +\frac{1}{3}$$

$$M = \frac{R_o - R_1}{R_o + R_1} = -\frac{1}{3},$$

otrzymamy

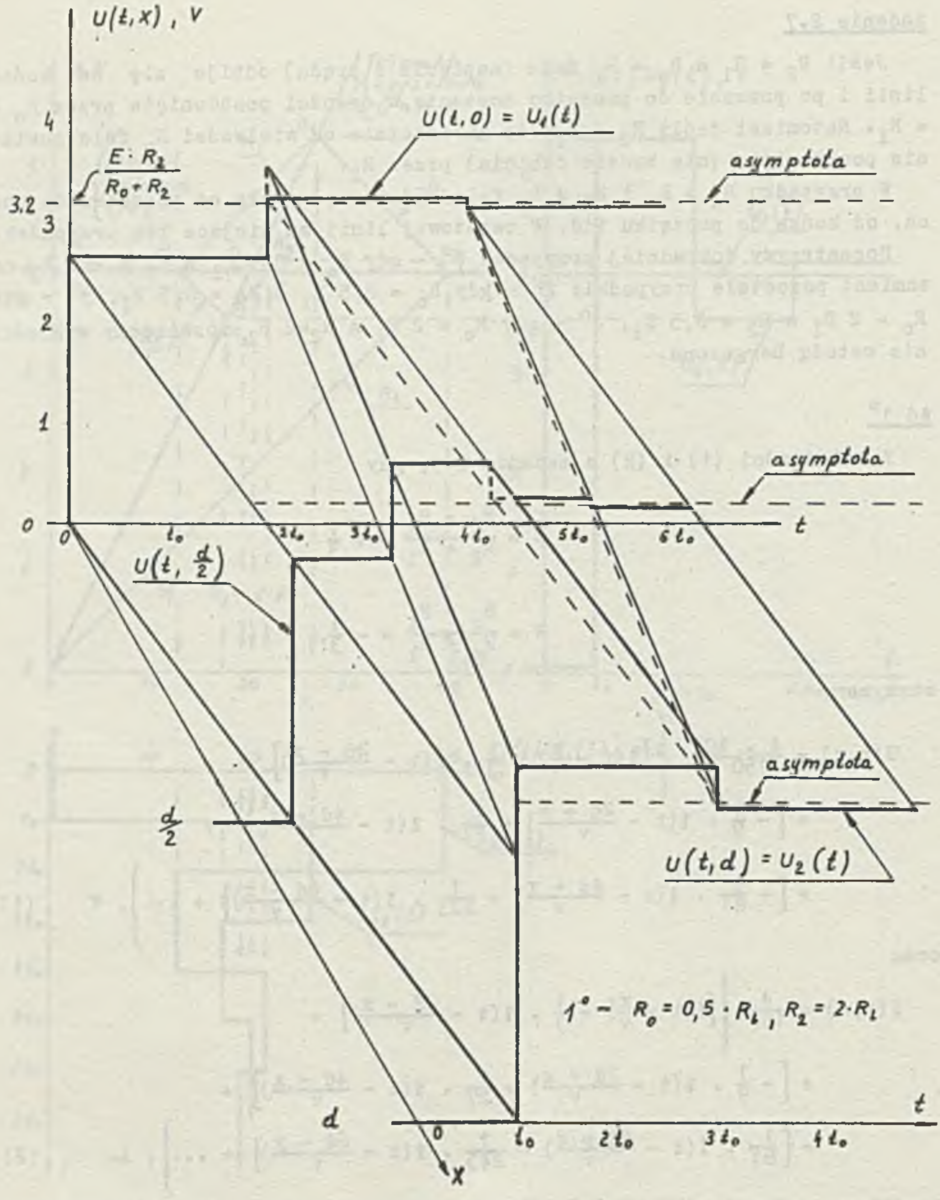
$$\begin{aligned} U(t,x) = \frac{4 \cdot 100}{150} \Big\{ & \Big[1\big(t - \tfrac{x}{v}\big) + \tfrac{1}{3} \cdot 1\big(t - \tfrac{2d - x}{v}\big)\Big] + \\ & + \Big[-\tfrac{1}{9} \cdot 1\big(t - \tfrac{2d + x}{v}\big) - \tfrac{1}{27} \cdot 1\big(t - \tfrac{4d - x}{v}\big)\Big] + \\ & + \Big[+\tfrac{1}{81} \cdot 1\big(t - \tfrac{4d + x}{v}\big) + \tfrac{1}{243} \cdot 1\big(t - \tfrac{6d - x}{v}\big)\Big] + \ldots\Big\},\ \mathrm{V} \end{aligned} \quad (1)$$

oraz

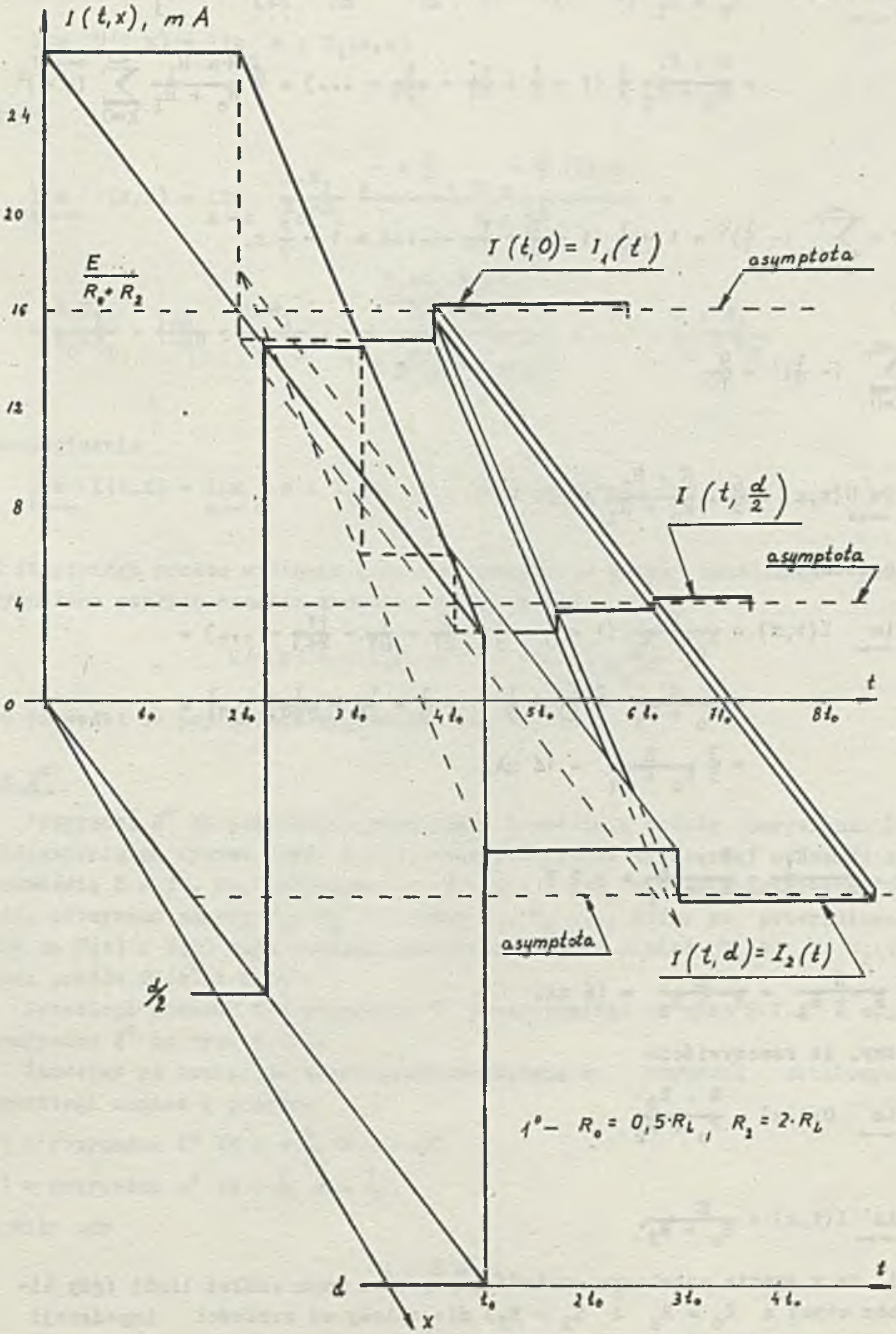
$$\begin{aligned} I(t,x) = \frac{4}{150} \Big\{ & \Big[1\big(t - \tfrac{x}{v}\big) - \tfrac{1}{3} \cdot 1\big(t - \tfrac{2d - x}{v}\big)\Big] + \\ & + \Big[-\tfrac{1}{9} \cdot 1\big(t - \tfrac{2d + x}{v}\big) + \tfrac{1}{27} \cdot 1\big(t - \tfrac{4d - x}{v}\big)\Big] + \\ & + \Big[\tfrac{1}{81} \cdot 1\big(t - \tfrac{4d + x}{v}\big) - \tfrac{1}{243} \cdot 1\big(t - \tfrac{6d - x}{v}\big)\Big] + \ldots\Big\},\ \mathrm{A}. \end{aligned} \quad (2)$$

Przebiegi czasowe $U(t,x)$ i $I(t,x)$ podane zależnościami (1) i (2) przedstawiono na rys. 2.7.1 i 2.7.2. Na rysunkach tych zaznaczono też przebiegi czasowe $U(t, \frac{d}{2})$ i $I(t, \frac{d}{2})$.

Obliczmy wartości amplitud, do których zdążają wartości $U(t,x)$ oraz $I(t,x)$ dla $t \to \infty$.


U(t,x) , V
4
3.2
3
2
1
0
E · R_2 / R_0 + R_2
U(t,0) = U_1(t)
asymptota
asymptota
asymptota
0
t_0
2t_0
3t_0
4t_0
5t_0
6t_0
t
U(t, d/2)
d/2
d
U(t,d) = U_2(t)
1° - R_0 = 0,5 · R_1 , R_2 = 2 · R_1
0
t_0
2t_0
3t_0
4t_0
t
x

Rys. 2.7.1



I (t,x), mA
24
20
16
12
8
4
0
E / R₀+R₂
I (t,0) = I₁(t)
asymptota
I (t, d/2)
asymptota
t
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
6t₀
7t₀
8t₀
asymptota
I (t,d) = I₂(t)
d/2
1° – R₀ = 0,5·R_L , R₂ = 2·R_L
d
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
t
x

Rys. 2.7.2

$$\lim_{t\to\infty} U(t,x) = \frac{E \cdot R_1}{R_o + R_1}\left[(1 + \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27}) + (\tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{243}) + \ldots\right] =$$

$$= \frac{E \cdot R_1}{R_o + R_1}\,\frac{4}{3}\,(1 - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{81} - \tfrac{1}{729} + \ldots) = \frac{4}{3}\,\frac{E \cdot R_1}{R_o + R_1}\sum_{k=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{9})^k$$

ale

$$x = \sum_{k=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{9})^k = 1 - \tfrac{1}{9}\,(1 - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{81} - \ldots) = 1 - \tfrac{1}{9}\,x,$$

stąd

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{9})^k = \frac{9}{10}$$

a

$$\lim_{t\to\infty} U(t,x) = \frac{6}{5}\cdot\frac{E \cdot R_1}{R_o + R_1} = 3{,}2\ \text{V}.$$

Analogicznie

$$\lim_{t\to\infty} I(t,x) = \frac{E}{R_o + R_1}\,(1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} - \tfrac{11}{243} - \ldots) =$$

$$= \frac{E}{R_o + R_1}\,\frac{2}{3}\left[1 - \tfrac{1}{9}\,(1 - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{81} - \tfrac{1}{729})\ \ldots\right] =$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{E}{R_o + R_1} = 16\ \text{mA}.$$

Ale

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{E \cdot R_1}{R_o + R_1} = \frac{E \cdot R_2}{R_o + R_2} = 3{,}2\ \text{V},$$

oraz

$$\frac{2}{3}\,\frac{E}{R_o + R_1} = \frac{E}{R_o + R_2} = 16\ \text{mA}.$$

Wykażmy, że rzeczywiście

$$\lim_{t\to\infty} U(t,x) = \frac{E \cdot R_2}{R_o + R_2}$$

oraz

$$\lim_{t\to\infty} I(t,x) = \frac{E}{R_o + R_2},$$

czyli, że w stanie ustalonym wartość napięcia i prądu wzdłuż linii (gdy linia bez strat a $Z_o = R_o$ i $Z_2 = R_2$) nie zależy od wartości impedancji falowej ale od wartości E, R_o i R_2.

Ponieważ

$$\lim_{t\to\infty} U(t,x) = \lim_{s\to 0} s \cdot U_t(s,x)$$

więc

$$\lim_{t\to\infty} U(t,x) = \lim_{s\to 0} \frac{E.R_1}{R_o+R_1} \frac{e^{-s\frac{x}{v}} + N e^{-\frac{s}{v}(2d-x)}}{1 - M N e^{-s\frac{2d}{v}}} =$$

$$= \frac{E.R_1}{R_o+R_1} \cdot \frac{1+N}{1-MN} = \frac{E.R_1}{R_o.R_1} \cdot \frac{\frac{R_2+R_1-R_2+R_1}{R_2+R_1}}{1 - \frac{R_o-R_1}{R_o+R_1} \cdot \frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}} = \dots = \frac{E \cdot R_2}{R_o + R_2},$$

analogicznie

$$\lim_{t\to\infty} I(t,x) = \lim_{s\to 0} s \cdot I_t(s, x) = \dots = \frac{E}{R_o + R_2} .$$

Z fizycznego punktu widzenia linia bez strat dla stanu ustalonego przy sygnałach stałych oznacza zwarcie, a więc wtedy

$$U(t,x) = U(t,0) = U(t, d) = E \frac{R_2}{R_o+R_2} ,$$

co prowadzi do poprzednio wyprowadzonych wyników.

<u>Ad 2^o</u>

Przypadek 2^o (i pozostałe) rozwiążemy wykreślnie metodą Bergerona. Po naniesieniu na wykres (rys. 2.7.3) charakterystyki wyjściowej opisanej zależnością $U = I \cdot R_2$, wejściowej $-U = E - I \cdot R_o$ oraz charakterystyk linii, otrzymamy punkty P_1, P_2, ... oraz K_1, K_2,..., które po przerzutowaniu na $U(t)$ i $I(t)$ dają szukane przebiegi czasowe napięć $U_1(t)$ i $U_2(t)$ oraz prądów $I_1(t)$ i $I_2(t)$.

Przebiegi czasowe dla przypadku 3^o przedstawiono na rys. 2.7.4 a dla przypadku 4^o na rys. 2.7.5.

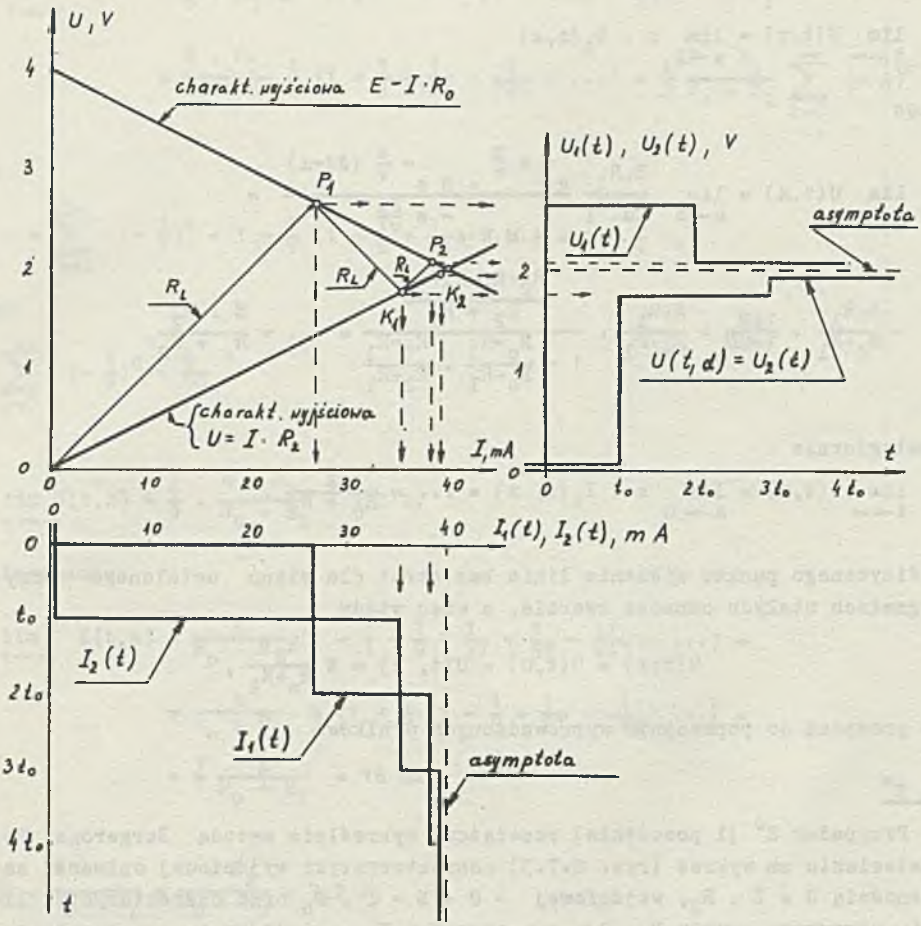
Zauważmy na koniec, że aperiodycznie zdążają do wartości ustalonych przebiegi napięć i prądów:

1) w przypadku 2^o ($N = -\frac{1}{3}$, $M = -\frac{1}{3}$),

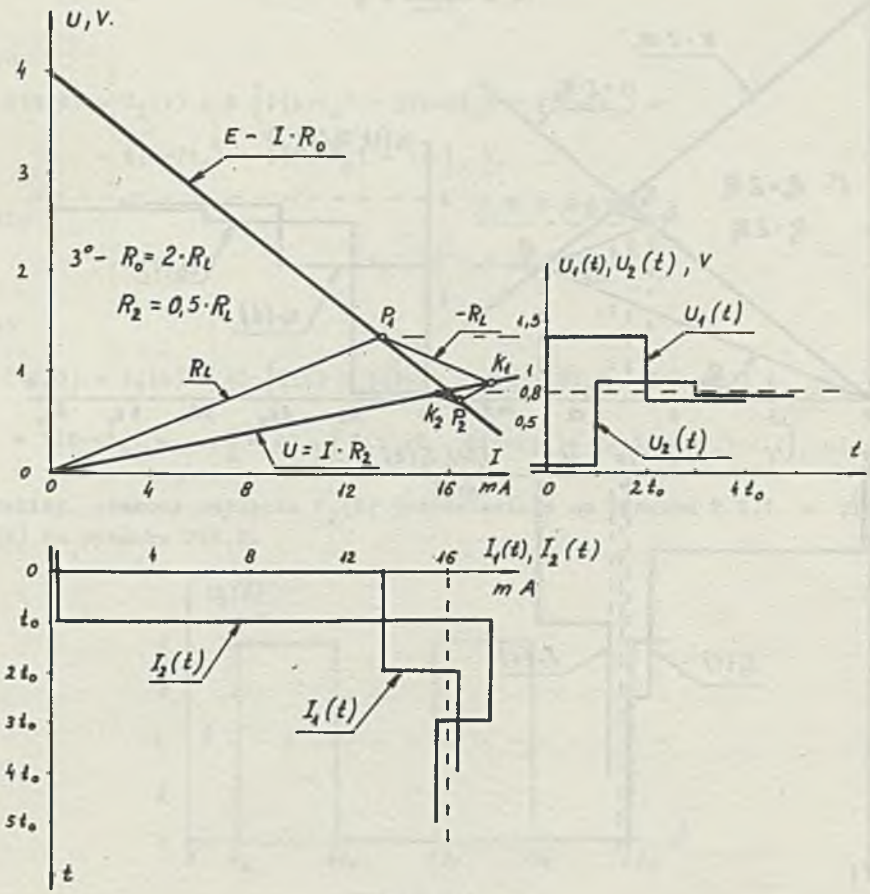
2) w przypadku 4^o ($N = \frac{1}{3}$, $M = \frac{1}{3}$),

a więc gdy

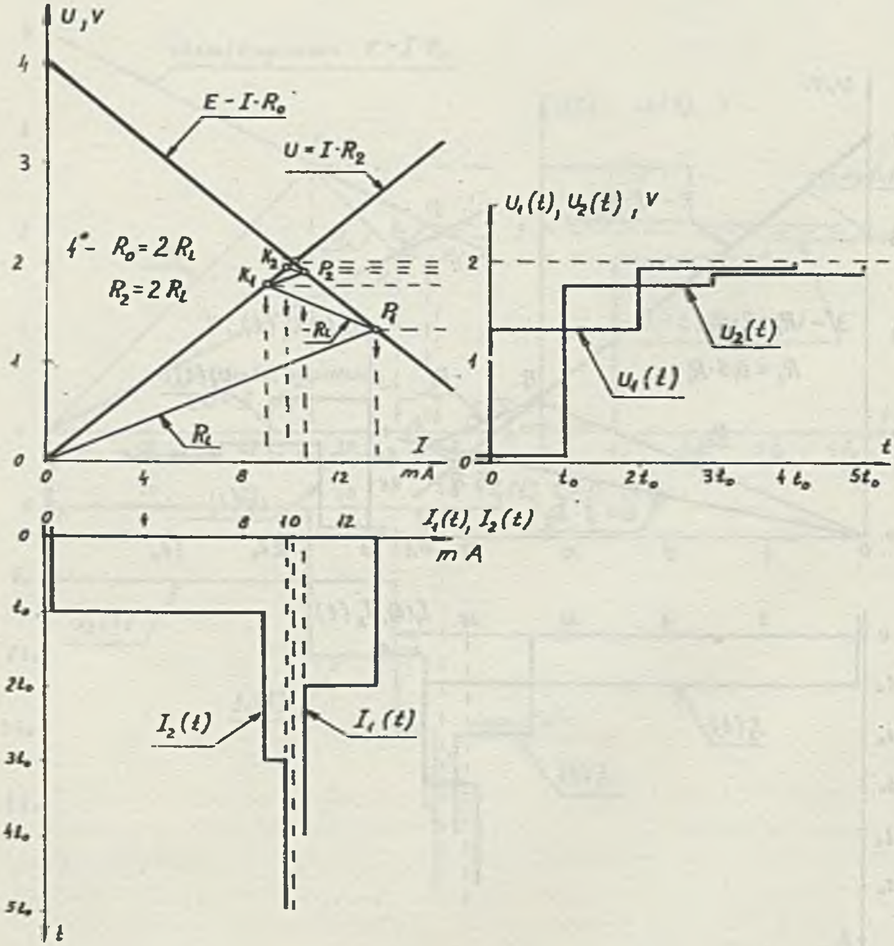
$$M \cdot N > 0,$$


U, V
charakt. wejściowa E - I·R0
P1
P2
RL
K1
K2
charakt. wyjściowa
U = I · RL
I, mA
U1(t), U2(t), V
U1(t)
asymptota
U(t, d) = U2(t)
t
t0
2t0
3t0
4t0
I1(t), I2(t), mA
I2(t)
I1(t)
asymptota

Rys. 2.7.3


U, V.
E - I·R₀
3° - R₀ = 2·Rₗ
R₂ = 0,5·Rₗ
Rₗ
-Rₗ
P₁
K₁
K₂
P₂
U = I·R₂
I
mA
U₁(t), U₂(t), V
U₁(t)
U₂(t)
1,5
0,8
0,5
t
2t₀
4t₀
I₁(t), I₂(t)
mA
I₂(t)
I₁(t)
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
t

Rys. 2.7.4



Rys. 2.7.5

natomiast w przypadku 1° i 3° przebiegi zdążają do wartości ustalonych oscylacyjnie a

$$M \cdot N < 0.$$

<u>Zadanie 2.8</u>

Skorzystamy z zależności (1) oraz (2) z zadania 2.5 podstawiając odpowiednio x = d i x = 0. Współczynniki odbicia od początku i końca linii

$$M = \frac{0-R_1}{0+R_1} = -1$$

$$N = \frac{\infty-R_1}{\infty+R_1} = +1$$

więc

$$U(t,d) = U_2(t) = 8\left[1(t-t_o) - 1(t-3t_o) + 1(t-5t_o) - 1(t-7t_o) + 1(t-9t_o) - \ldots\right],\ V,$$

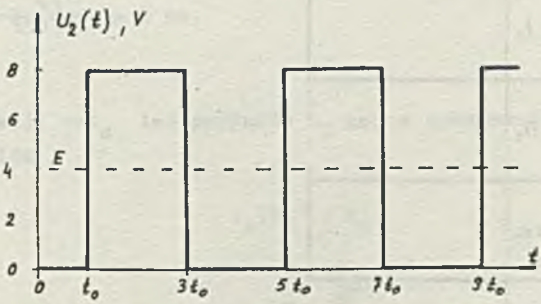
gdzie

$$t_o = \frac{d}{v} = 5\ \text{ns}$$

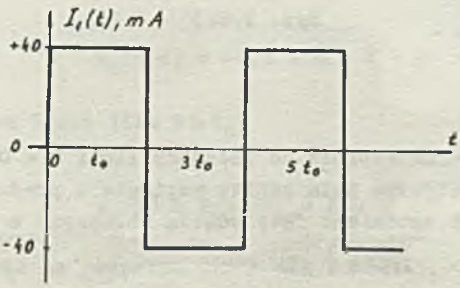
oraz

$$I(t,0) = I_1(t) = 40\left[1(t) - 1(t-2t_o) - 1(t-2t_o) + 1(t-4t_o) + 1(t-4t_o) - \ldots\right] = 40\cdot\left[1(t) - 2\cdot 1(t-2t_o) + 2\cdot 1(t-4t_o) - \ldots\right],\ \text{mA}.$$

Przebieg czasowy napięcia $U_2(t)$ przedstawiono na rysunku 2.8.1 a pradu $I_1(t)$ na rysunku 2.8.2.

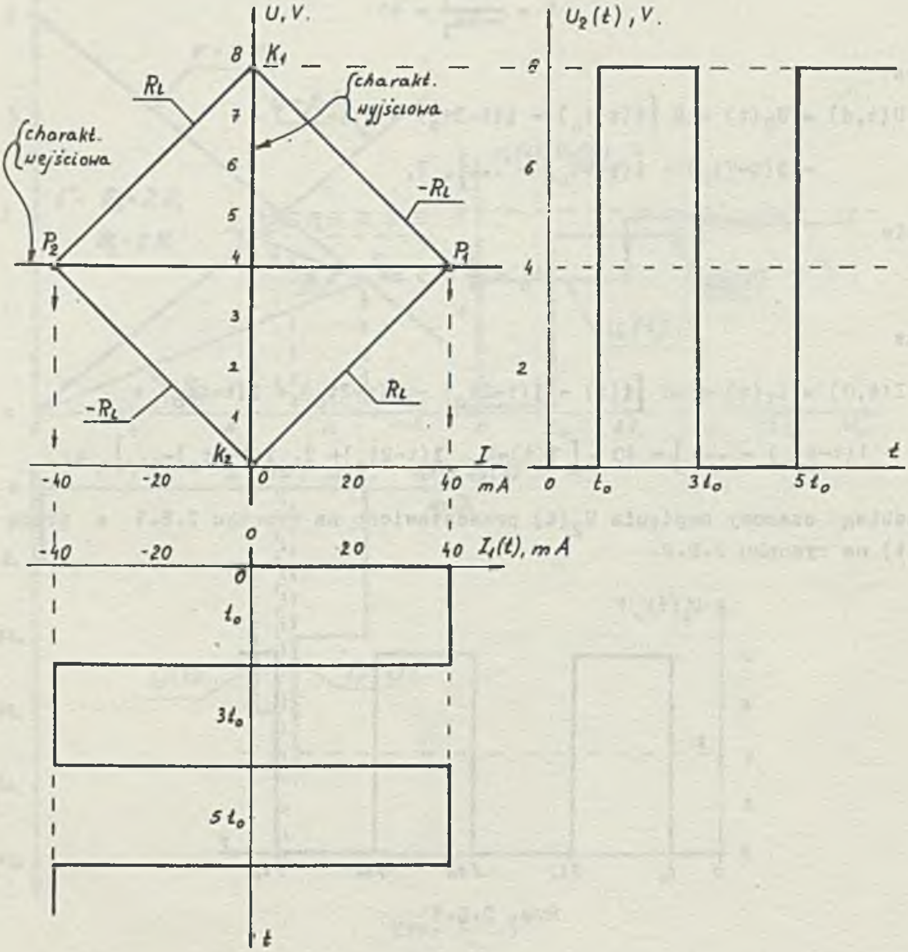


Rys. 2.8.1



Rys. 2.8.2

Identyczne wyniki uzyskamy z diagramu Bergerona, przedstawionego na rysunku 2.8.3.



Rys. 2.8.3

Zadanie 2.9

Ponieważ współczynnik odbicia od początku linii M = 0, wystąpi tylko jedna fala padająca i jedna fala odbita napięcia i prądu. Fala padająca napięcia V_p = 0,5 . E,natomiast falę odbitą obliczymy z zależności:

$$U_2(t)\Big|_{t=t_o} = L_2\frac{dI_2}{dt} = V_p + V_o = L_2\left(\frac{\partial I_p}{\partial t} + \frac{\partial I_o}{\partial t}\right)\Big|_{t=t_o} =$$

$$= L_2\left(\frac{dI_p}{dt} + \frac{dI_o}{dt}\right) = \frac{L_2}{R_1}\left(\frac{dV_p}{dt} - \frac{dV_o}{dt}\right)$$

ponieważ

$$V_p(t,x)\Big|_{t=t_o} = V_p = 0{,}5 \cdot E = \text{const}$$

$$\frac{\partial V_p}{\partial t}\Big|_{t=t_o} = \frac{dV_p}{dt} = 0$$

więc

$$\frac{d\,V_o}{0{,}5 \cdot E + V_o} = -\frac{R_1}{L_2}\,dt$$

a stąd

$$V_o = -0{,}5 \cdot E + K \cdot e^{-\frac{t}{T}},$$

gdzie

$$T = \frac{L_2}{R_1} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{100} = 5\ \text{ns},$$

K - stała.

Ponieważ w chwili $t=t_o$ indukcyjność L_2 można traktować jak nieskończoną impedancję, więc

$$V_o(t_o) = V_p$$

a

$$K = E\,e^{\frac{t_o}{T}}$$

natomiast

$$V_o(t,d) = -0{,}5 \cdot E + E \cdot e^{-\frac{t-t_o}{T}}$$

Napięcie na końcu linii (dla $t \geqslant t_o$)

$$U_2(t) = V_p + V_o = E \cdot e^{-\frac{t-t_o}{T}} \qquad (1)$$

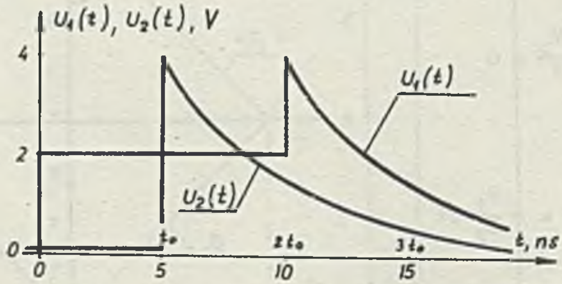
natomiast napięcie na początku linii dla $t \in (0,2t_o)$

$$U_1(t) = 0{,}5 \cdot E \qquad (2)$$

a dla $t \in (2t_0, \infty)$ (uwzględniając przesunięcie czasowe o t_0 względem końca linii)

$$U_1(t) = E \cdot e^{-\frac{t-2t_0}{T}} \qquad (2'')$$

Przebiegi czasowe napięć wyrażone zależnościami (1), (2') i (2'') przedstawiono na rysunku 2.9.1. .



Rys. 2.9.1

Analogicznie można obliczyć przebiegi czasowe prądów na początku i końcu linii, i tak (sprawdzić)

$$I_1(t) = \begin{cases} \dfrac{E}{2R_1} & \text{dla } t \in (0, 2t_0), \qquad (3') \\ \dfrac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{t-2t_0}{T}}\right), & \text{dla } t \in (2t_0, \infty) \qquad (3'') \end{cases}$$

oraz

$$I_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (0, t_0), \qquad (4') \\ \dfrac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{T}}\right), & \text{dla } t \in (t_0, \infty) \qquad (4'') \end{cases}$$

ponieważ

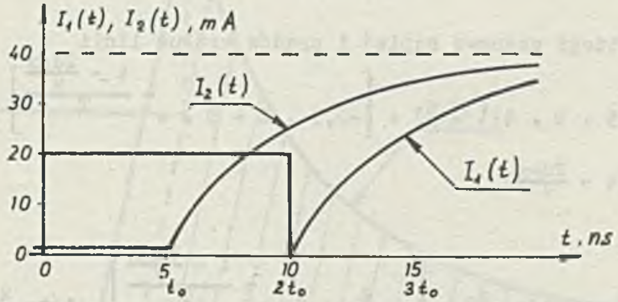
$$I_p(t,0) = \frac{E}{2R_1} \cdot \mathbf{1}(t); \qquad I_p(t,d) = \frac{E}{2R_1} \cdot \mathbf{1}(t-t_0)$$

oraz

$$I_o(t,d) = \left[\frac{E}{2R_1} - \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{T}}\right)\right] \cdot \mathbf{1}(t-t_0)$$

$$I_o(t,0) = \left[\frac{E}{2R_1} - \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{t-2t_o}{T}}\right)\right] \cdot 1(t-2t_o).$$

Zależności (3'), (3") oraz (4'), (4") przedstawiono na rysunku 2.9.2



Rys. 2.9.2

Sprawdźmy, że rozwiązanie można również uzyskać korzystając z ogólnych zależności (1) i (2) z zadania 2.5. Współczynniki odbicia

$$M = 0$$

$$N = \frac{sL_2 - R_1}{sL_2 + R_1}$$

więc

$$U_t(s,x) = \frac{1}{s} \cdot \frac{E}{2} \cdot e^{-\frac{s.x}{v}} + \frac{1}{s} \cdot \frac{E}{2} \frac{sL_2-R_1}{sL_2+R_1} e^{-\frac{s(2d-x)}{v}}$$

oraz

$$I_t(s,x) = \frac{1}{s} \cdot \frac{E}{2.R_1} \cdot e^{-\frac{s.x}{v}} - \frac{1}{s} \cdot \frac{E}{2R_1} \cdot \frac{sL_2-R_1}{sL_2+R_1} \cdot e^{-\frac{s(2d-x)}{v}} .$$

Stosując odwrotną transformatę Laplace'a podług operatora s oraz znane twierdzenie o przesunięciu funkcji zmiennej rzeczywistej:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s) \cdot e^{-sa}\right\} = f(t-a) \cdot 1(t-a),$$

gdzie

$$F(s) = \frac{1}{s}\frac{E}{2} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{s}\frac{E}{2}\frac{sL_2-R_1}{sL_2+R_1}$$

albo

$$\frac{1}{s}\,\frac{E}{2R_1} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{s}\,\frac{E}{2R_1}\cdot\frac{sL_2 - R_1}{sL_2 + R_1}$$

oraz

$$a = \frac{x}{v} \quad \text{lub} \quad \frac{2d-x}{v},$$

otrzymamy przebiegi czasowe napięć i prądów wzdłuż linii

$$U(t,x) = 0{,}5\cdot E\cdot \mathbf{1}(1 - \frac{x}{v}) + \left[-0{,}5\cdot E + E\cdot e^{-\frac{t-\frac{2d-x}{v}}{T}}\right]\cdot$$

$$\cdot\ \mathbf{1}(t - \frac{2d-x}{v}) \qquad (5)$$

oraz

$$I(t,x) = \frac{E}{2.R_1}\cdot \mathbf{1}(t-\frac{x}{v}) - \left[-\frac{E}{2R_1} + \frac{E}{R_1}\,e^{-\frac{t-\frac{2d-x}{v}}{T}}\right]\cdot \mathbf{1}(t-\frac{2d-x}{v}). \qquad (6)$$

Podstawiając odpowiednio x=0 i x=d, otrzymamy wyniki identyczne z otrzymanymi uprzednio.

Podstawiając wartości liczbowe, otrzymamy:

$$U(t,x) = 2\cdot \mathbf{1}(t - \frac{x}{v}) + \left[-2 + 4\cdot e^{-\frac{t-\frac{2d-x}{v}}{5\cdot 10^{-5}}}\right]\cdot \mathbf{1}(t - \frac{2d-x}{v}),\ \text{V} \qquad (5')$$

oraz

$$I(t,x) = 20\cdot\mathbf{1}(t-\frac{x}{v}) - \left[-20 + 40\cdot e^{-\frac{t-\frac{2d-x}{v}}{5\cdot 10^{-5}}}\right]\cdot \mathbf{1}(t - \frac{2d-x}{v}),\ \text{mA}. \qquad (6')$$

Przebiegi czasowe napięć i prądów opisane zależnościami (5') i (6') przedstawiono na rysunkach 2.9.3 i 2.9.4.

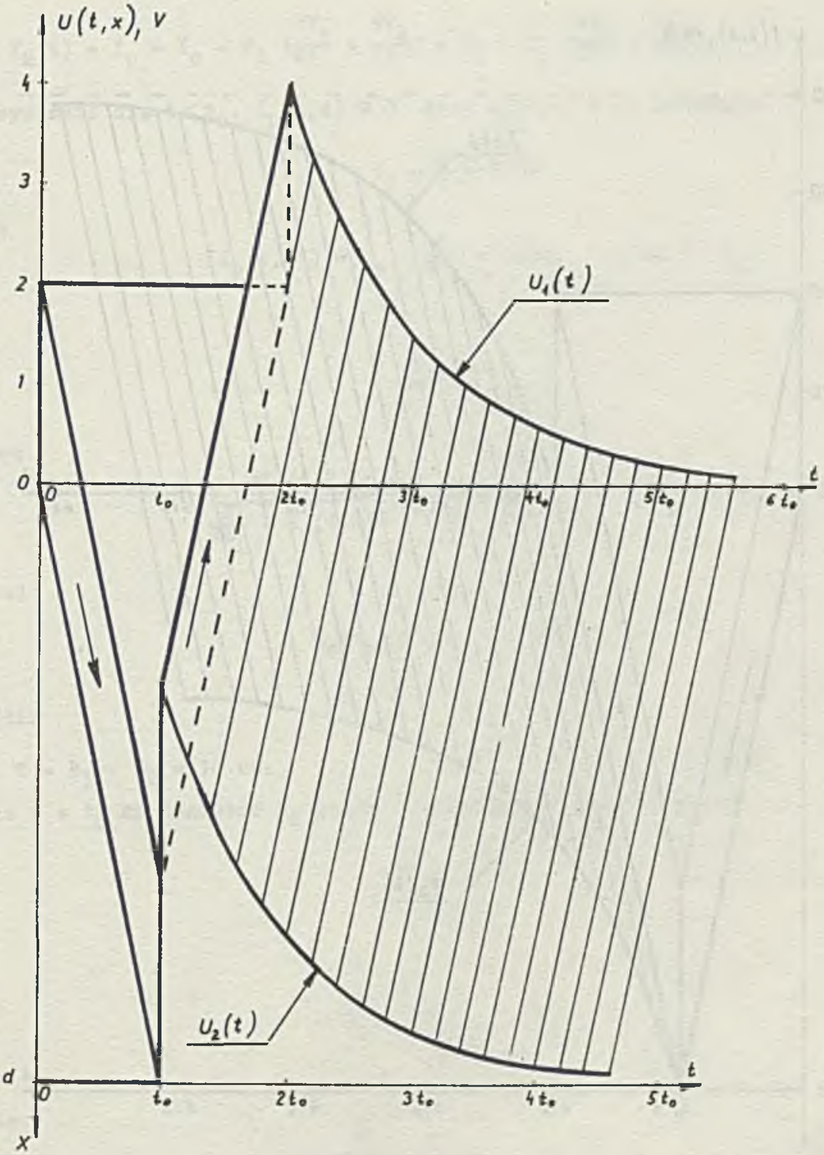
Zadanie 2.10

Zadanie to można rozwiązać analogicznie jak zadanie 2.9 - korzystając 1° z równań różniczkowych opisujących wejście i wyjście linii lub 2° z ogólnych zależności (1) i (2) z zadania 2.5.

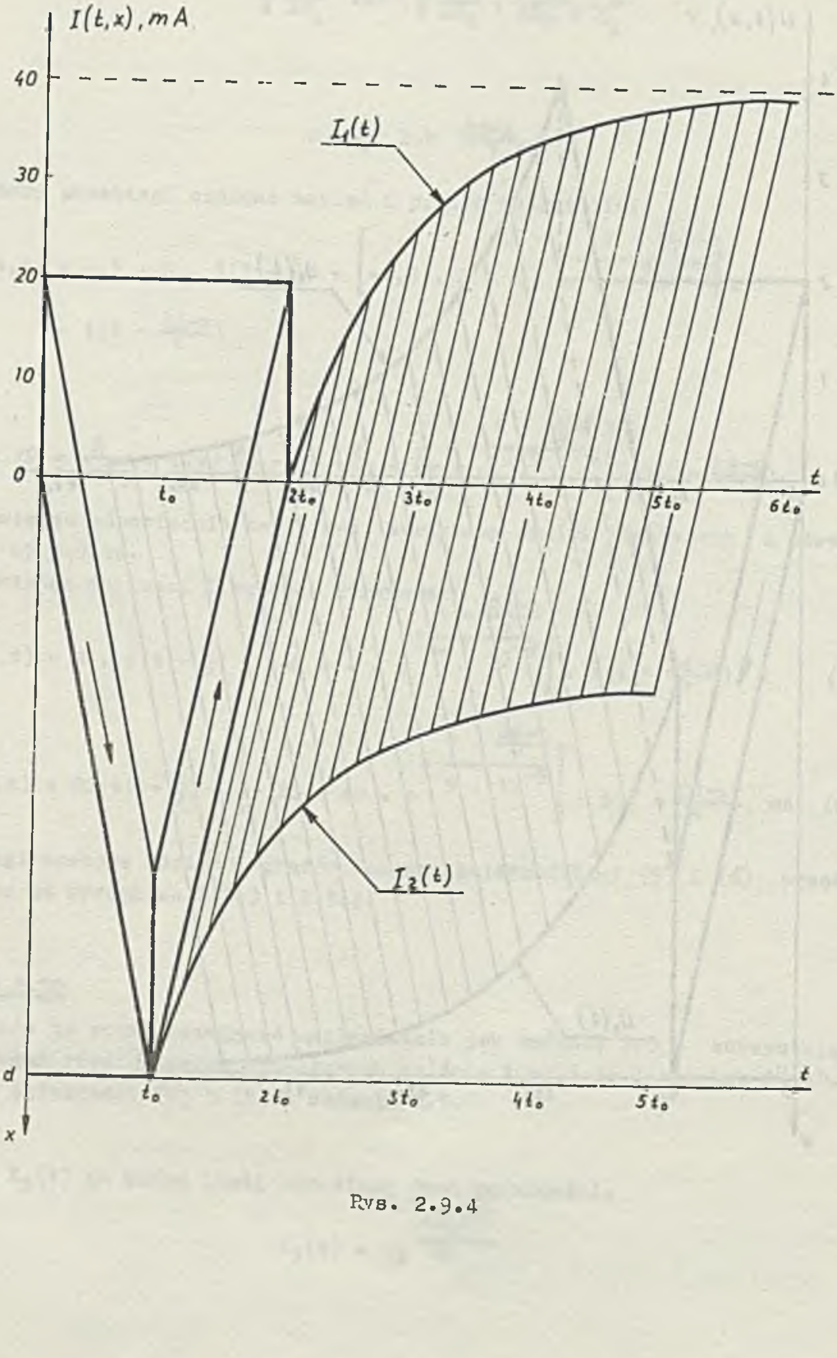
Ad 1°

Prąd $I_2(t)$ na końcu linii określony jest zależnością

$$I_2(t) = C_2\,\frac{dU_2(t)}{dt}$$


U(t,x), V
4
3
2
1
0
0
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
6t₀
t
U₁(t)
U₂(t)
d
0
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
t
x

Rys. 2.9.3



Rys. 2.9.4

Ponieważ $M = 0$, więc

$$I_2(t) = I_p - I_o = C_2\left(\frac{dV_p}{dt} + \frac{dV_o}{dt}\right) = C_2 \cdot R_1\left(\frac{dI_p}{dt} - \frac{dI_o}{dt}\right)$$

(oczywiście dla $t < t_o$, $I_p(t,d) \equiv 0$ oraz $I_o(t,d) \equiv 0$), natomiast

$$t_o = \frac{d}{v} = 5 \text{ ns}$$

ale

$$I_p(t, d) = I_p = \frac{E}{2R_1} = \text{const} \qquad (\text{dla } t \geqslant t_o)$$

a

$$\frac{dI_p}{dt} = 0$$

więc

$$\frac{dI_o(t,d)}{\frac{E}{2E_1} - I_o(t,d)} = -\frac{1}{R_1 \cdot C_2}\, dt \qquad (\text{dla } t \geqslant t_o)$$

stąd

$$I_o(t,d) = I_o = +\frac{E}{2R_1} + A\, e^{-\frac{t}{T}},$$

gdzie

$T = R_1 \cdot C_2 = 10$ ns.

Dla $t = t_o$ kondensator C_2 można traktować jak zwarcie więc

$$N\Big|_{t=t_o} = 1$$

a

$$I_o(t,d)\Big|_{t=t_o} = I_p$$

więc

$$I_o(t_o,d) = +\frac{E}{2R_1} + A \cdot e^{-\frac{t_o}{T}} = -\frac{E}{2 \cdot R_1}$$

stąd

$$A = -\frac{E}{R_1} \cdot e^{\frac{t_o}{R}},$$

natomiast

$$I_o(t,d) = \left(\frac{E}{2R_l} - \frac{E}{R_l} e^{-\frac{t-t_o}{T}}\right) \cdot \mathbf{1}(t-t_o)$$

oraz

$$I_o(t,x) = \left(\frac{E}{2R_l} - \frac{E}{R_l} e^{-\frac{t - \frac{2d-x}{v}}{T}}\right) \cdot \mathbf{1}\left(t - \frac{2d-x}{v}\right).$$

Reasumując, prąd wzdłuż linii w czasie opisany jest zależnością

$$I(t,x) = I_p(t,x) - I_o(t,x) = \frac{E}{2R_l} \cdot \mathbf{1}\left(t - \frac{x}{v}\right) -$$

$$- \left(\frac{E}{2R_l} - \frac{E}{R_l} e^{-\frac{t - \frac{2d-x}{v}}{T}}\right) \cdot \mathbf{1}\left(t- \frac{2d-x}{v}\right)$$

a dla x=0 otrzymamy

$$I(t,0) = I_1(t) = \frac{E}{2R_l} \cdot \mathbf{1}(t) - \left(\frac{E}{2R_l} - \frac{E}{R_l} e^{-\frac{t-2t_o}{T}}\right) \cdot \mathbf{1}(t-2t_o)$$

lub

$$I_1(t) = \begin{cases} \dfrac{E}{2R_l} & \text{dla} \quad t \in (0, 2t_o) \\ \dfrac{E}{R_l} e^{-\frac{t-2t_o}{T}} & \text{dla} \quad t \in (2t_o, \infty) \end{cases} \tag{1}$$

dla x = d natomiast

$$I(t,d) = I_2(t) = \frac{E}{2R_l} \cdot \mathbf{1}(t-t_o) - \left(\frac{E}{2R_l} - \frac{E}{R_l} e^{-\frac{t-t_o}{T}}\right) \cdot \mathbf{1}(t-t_o)$$

lub

$$I_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \in (0, t_o) \\ \dfrac{E}{R_l} e^{-\frac{t-t_o}{T}} & \text{dla} \quad t \in (t_o, \infty). \end{cases} \tag{2}$$

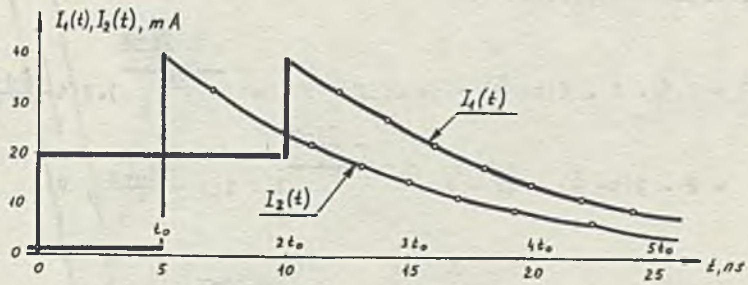
Łatwo sprawdzić, że

$$U_1(t) = \begin{cases} \frac{E}{2} & \text{dla} \quad t \in (0, 2\,t_o) \\ E(1-e^{-\frac{t-2t_o}{T}}) & \text{dla} \quad t \in (2t_o, \infty) \end{cases} \tag{3}$$

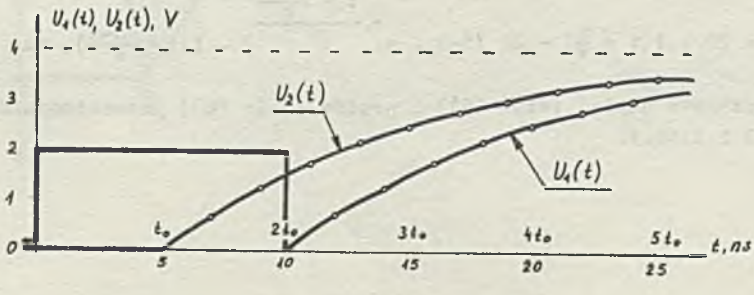
oraz

$$U_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \in (0, t_o) \\ E(1-e^{-\frac{t-t_o}{T}}), & \text{dla} \quad t \in (t_o, \infty). \end{cases} \tag{4}$$

Przebiegi czasowe prądów (określone równaniami (1) i (2)) przedstawiono na rysunku 2.10.1 a napięć (równania (3) i (4)) na rysunku 2.10.2.



Rys. 2.10.1



Rys. 2.10.2

Ad 2^o

Współczynniki odbicia od początku i końca linii

$$M = 0$$

$$N(s) = \frac{\frac{1}{sC_2} - R_1}{\frac{1}{sC_2} + R_1} = \frac{1 - s\,C_2 \cdot R_1}{1 + s\,C_2 \cdot R_1} = \frac{1 - sT}{1 + sT},$$

gdzie $T = R_1 \cdot C_2 = 10$ ns

więc równania (1) i (2) z zadania 2.5 można zapisać w postaci

$$U_t(s,x) = \frac{1}{s}\frac{E}{2}\, e^{-\frac{s.x}{v}} + \frac{1}{s}\frac{E}{2}\frac{1-sT}{1+sT} \cdot e^{\frac{-s(2d-x)}{v}}$$

oraz

$$I_t(s,x) = \frac{1}{s}\frac{E}{2R_1}\, e^{-sx} - \frac{1}{s}\frac{E}{2R_1}\frac{1-sT}{1+sT}\, e^{-\frac{s(2d-x)}{v}}$$

Przebiegi czasowe napięcia

$$U(t,x) = 0{,}5 \cdot E \cdot 1(t - \tfrac{x}{v}) + (+\,0{,}5E - E \cdot e^{-\frac{t - \frac{2d-x}{v}}{T}}).1(t - \tfrac{2d-x}{v}) =$$

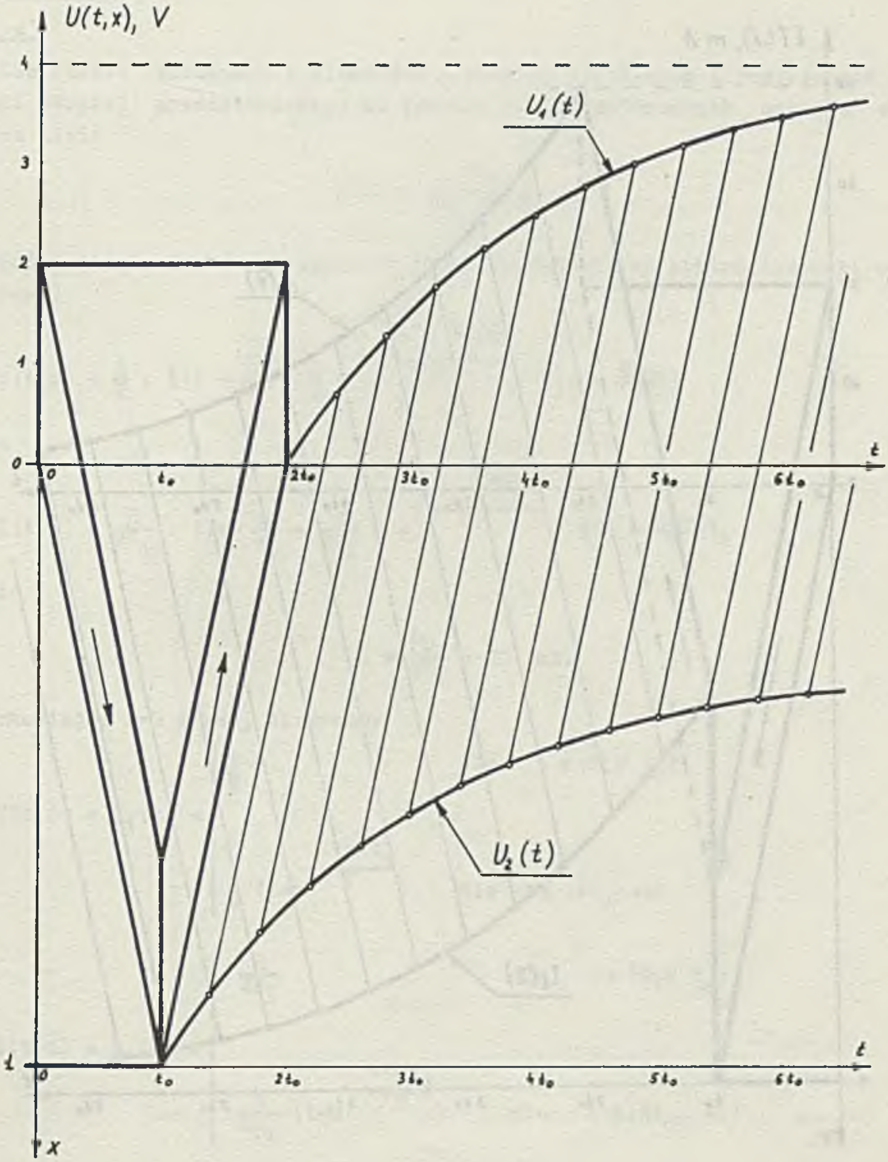
$$= 2 \cdot 1(t - \tfrac{x}{v}) + (2 - 4.e^{-\frac{t - \frac{2d-x}{v}}{T}}) \cdot 1(t - \tfrac{2d-x}{v}),\ V \qquad (5)$$

i prądu

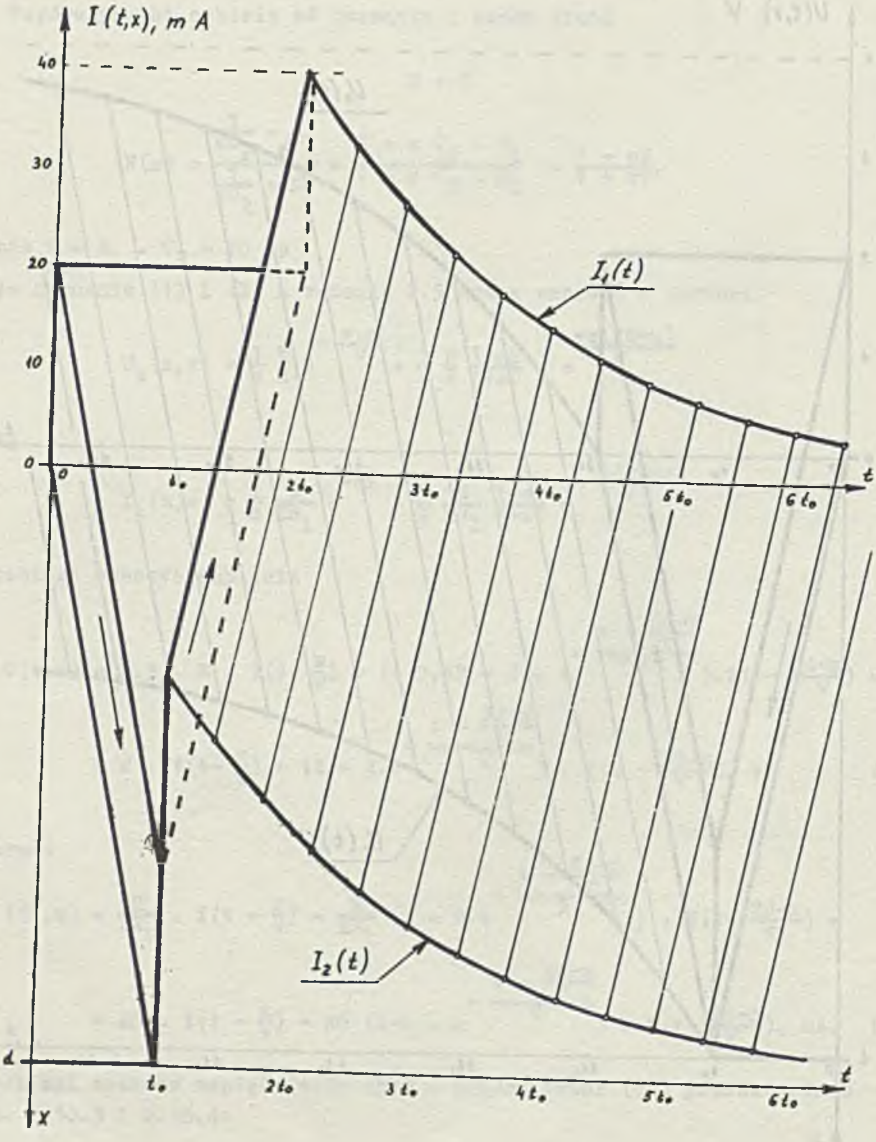
$$I(t,x) = \frac{E}{2R_1} \cdot 1(t - \tfrac{x}{v}) - \frac{E}{2R_1}(1 - 2.e^{-\frac{t - \frac{2d-x}{v}}{T}}) \cdot 1(t - \tfrac{2d-x}{v}) =$$

$$= 20 \cdot 1(t - \tfrac{x}{v}) - 20\,(1 - 2 \cdot e^{-\frac{t - \frac{2d-x}{v}}{T}}) \cdot 1(t - \tfrac{2d-x}{v}),\ mA. \qquad (6)$$

Przebiegi czasowe napięć (wzór (5)) i prądów (wzór (6)) przedstawiono na rys. 2.10.3 i 2.10.4.



Rys. 2.10.3


I (t,x), m A
40
30
20
10
0
0
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
6t₀
t
I₁(t)
I₂(t)
d
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
6t₀
t
x

Rys. 2.10.4

Zadanie 2.11

Ad a)

Dla obwodu (złożonego z elementów o stałych skupionych i rozłożonych - linii długiej) przedstawionego na rysunku 2.11a współczynnik odbicia od końca linii

$$N(s) = \frac{sL_2}{sL_2 + 2R_1}$$

Po podstawieniu do równań operatorowych i przejściu na postać czasową, otrzymamy

$$U(t,x) = \frac{E}{2} \cdot 1(t - \frac{x}{v}) + \frac{E}{2} \cdot e^{-\frac{t - \frac{2d-x}{v}}{T}} \cdot 1(t - \frac{2d-x}{v})$$

oraz

$$I(t,x) = \frac{E}{2R_1} \cdot 1(t- \frac{x}{v}) - \frac{E}{2R_1} \cdot e^{-\frac{t - \frac{2d-x}{v}}{T}} \cdot 1(t - \frac{2d-x}{v}),$$

gdzie

$$T = \frac{L_2}{2R_1} = 50 \ \mu s.$$

Podstawiając x=0 i x=d, otrzymamy

$$U(t,0) = U_1(t) = \begin{cases} \frac{E}{2} & \text{dla} \quad t \in (0,2\,t_o) \\ \frac{E}{2}\,(1+e^{-\frac{t-2t_o}{T}}) & \text{dla} \quad t \in (2t_o, \infty) \end{cases}$$

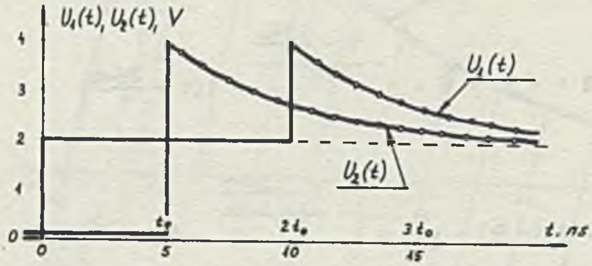
$$I(t,0) = I_1(t) = \begin{cases} \frac{E}{2R_1} & \text{dla} \quad t \in (0,2\,t_o) \\ \frac{E}{2R_1}\,(1-e^{-\frac{t-2t_o}{T}}) & \text{dla} \quad t \in (2t_o, \infty) \end{cases}$$

oraz

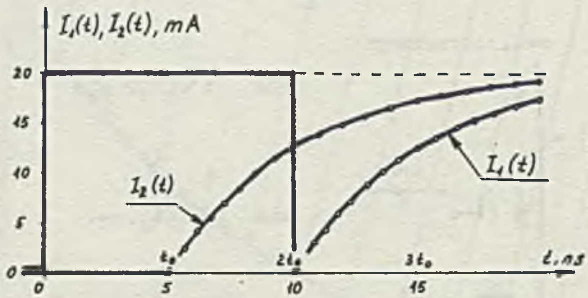
$$U(t,d) = U_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \in (0,\ t_o) \\ \frac{E}{2}\,(1 + e^{-\frac{t-t_o}{T}}, & \text{dla} \quad t \in (t_o, \infty) \end{cases}$$

$$I(t,d) = I_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \in (0,\ t_o) \\ \dfrac{E}{2R_1}\left(1-e^{-\frac{t-t_o}{T}}\right) & \text{dla} \quad t \in (t_o,\ \infty) \end{cases}$$

Przebiegi czasowe napięć $U_1(t)$ i $U_2(t)$ przedstawiono na rys. 2.11.1, a przebiegi czasowe prądów $I_1(t)$ i $I_2(t)$ na rys. 2.11.2.



Rys. 2.11.1

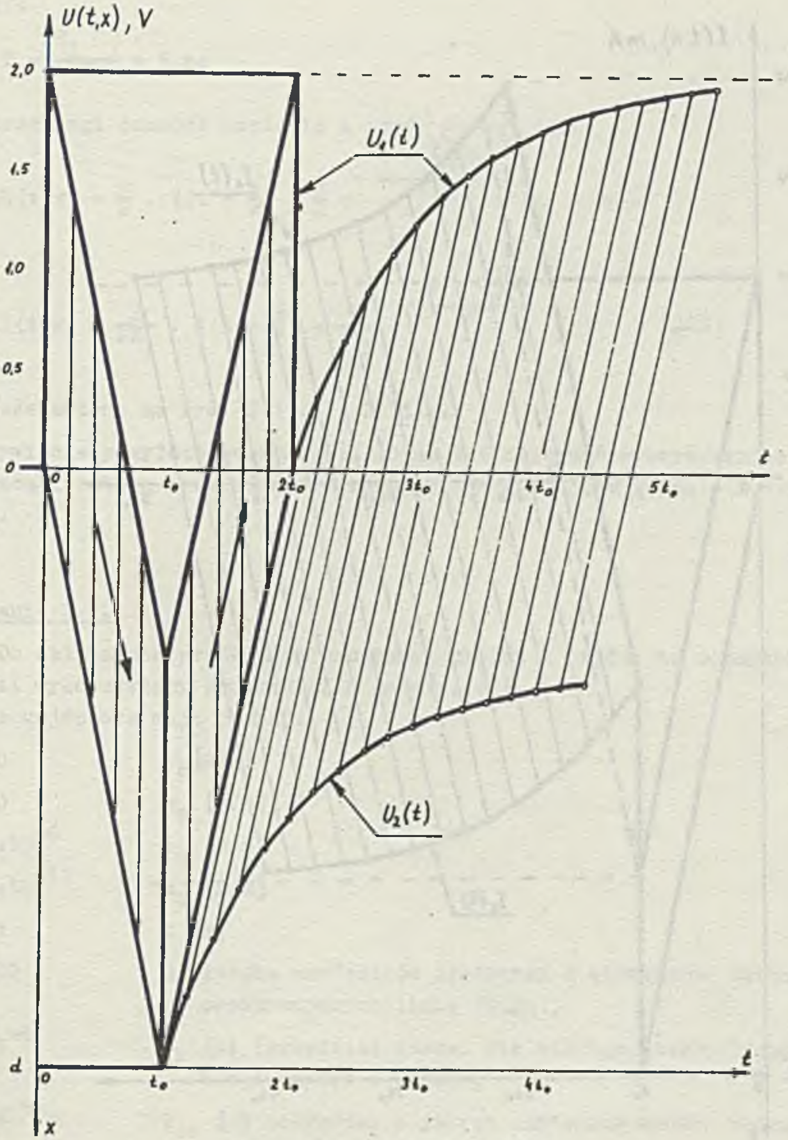


Rys. 2.11.2

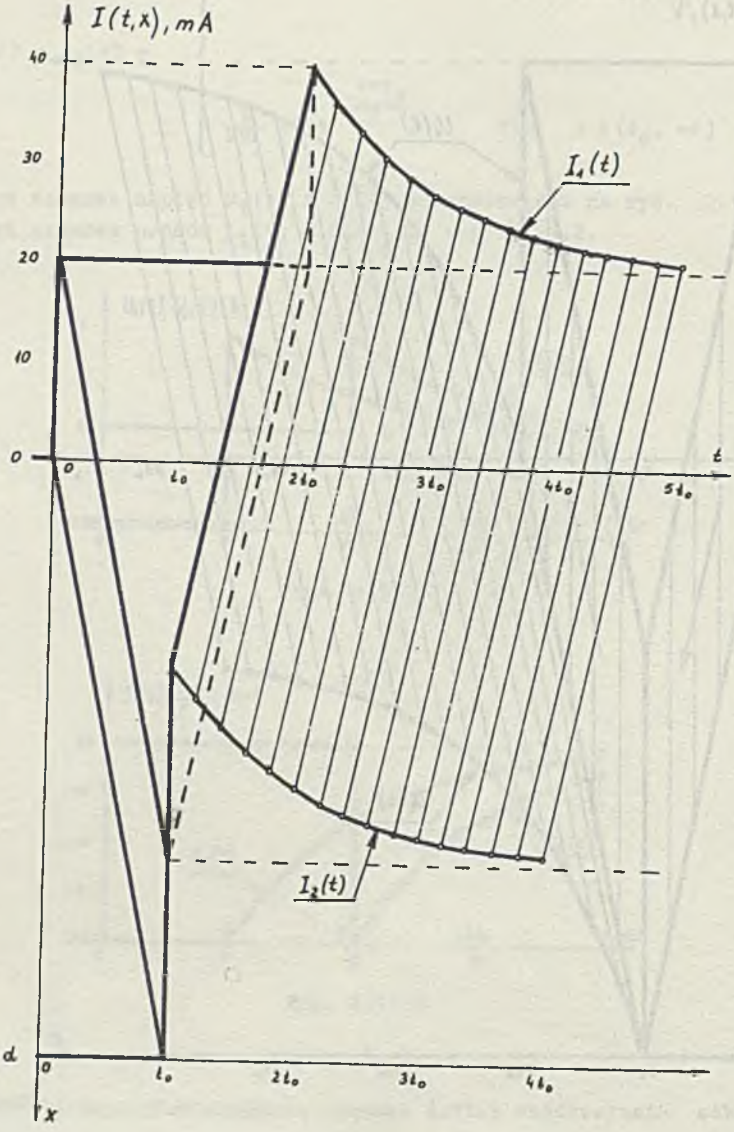
Ad b)

Dla obwodu przedstawionego na rysunku 2.11.b współczynnik odbicia od końca linii

$$N(s) = \frac{\dfrac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} - R_1}{\dfrac{R_2 \cdot \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} + R_1} = \frac{-s}{s + \frac{1}{T}},$$


U(t,x), V
2,0
1,5
1,0
0,5
0
0
t_o
$2t_o$
$3t_o$
$4t_o$
$5t_o$
t
$U_1(t)$
$U_2(t)$
d
0
t_o
$2t_o$
$3t_o$
$4t_o$
t
x

Rys. 2.11.3



I(t,x), mA
40
30
20
10
0
0
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
t
I₁(t)
I₂(t)
d
0
t₀
2t₀
3t₀
4t₀
x

Rys. 2.11.4

gdzie

$$T = \frac{R_1 C_2}{2} = 5 \text{ ns}$$

a przebiegi czasowe napięcia i prądu wzdłuż linii

$$U(t,x) = \frac{E}{2} \cdot \mathbf{1}(t - \frac{x}{v}) - \frac{E}{2} e^{-\frac{t - \frac{2d-x}{v}}{T}} \cdot \mathbf{1}(t - \frac{2d-x}{v})$$

$$I(t,x) = \frac{E}{2R_1} \cdot \mathbf{1}(t - \frac{x}{v}) + \frac{E}{2R_1} e^{-\frac{t - \frac{2d-x}{v}}{T}} \cdot \mathbf{1}(t - \frac{2d-x}{v})$$

przedstawiono na rys. 2.11.3 i 2.11.4.

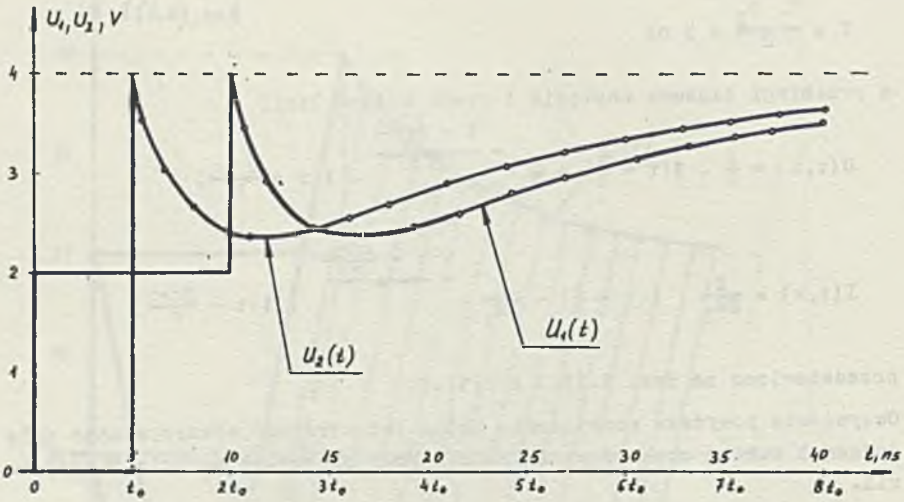
Oczywiście powyższe rozwiązania można też otrzymać wykorzystując falę padającą i odbitą oraz równania różniczkowe opisujące wejście i wyjście linii.

Zadanie 2.12

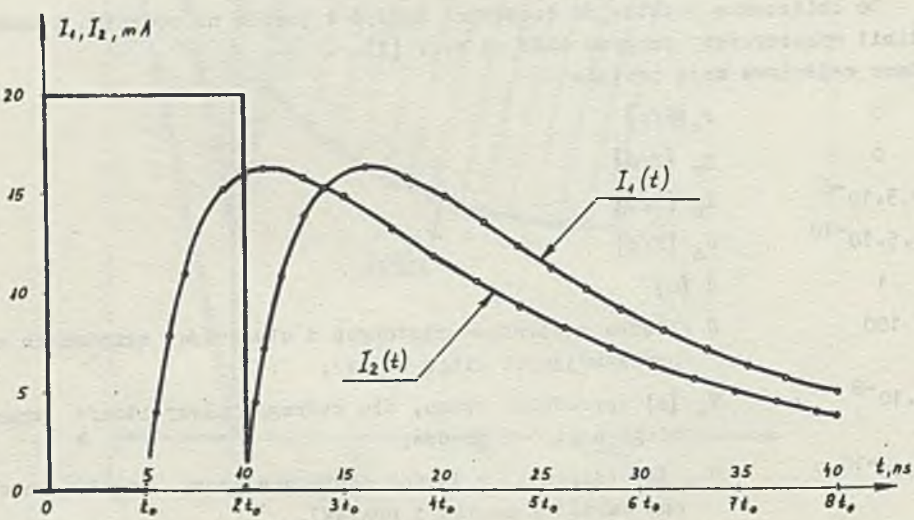
Do obliczenia przebiegów czasowych napięć i prądów na początku i końcu linii wykorzystamy program ALIN na m.c. [7].

Dane wejściowe mają postać:

0	r_0 [Ω/m]
0	g_0 [S/m]
$0{,}5 \cdot 10^{-6}$	l_0 [H/m]
$0{,}5 \cdot 10^{-10}$	c_0 [F/m]
1	d [m]
100	N (liczba czwórników złożonych z elementów skupionych aproksymujących linię długą),
$5 \cdot 10^{-8}$	T_k [s] (przedział czasu, dla którego należy liczyć przebiegi napięć i prądów,
$5 \cdot 10^{-10}$	T_{dr} [s] (określa, w jakich odstępach czasu należy drukować wartości napięć i prądów),
0	warunki początkowe (tu zerowe),
0	
0	
0	
4	E [V]
0	oznacza skok jednostkowy,



Rys. 2.12.1



Rys. 2.12.2

100	R_o [Ω]
7	NR numer obciążenia (p. s. 52 [7]) - szeregowy obwód $R_2L_2C_2$,
100	R_2 [Ω]
$0,5 \cdot 10^{-6}$	L_2 [H]
$0,1 \cdot 10^{-9}$	C_2 [F]
T	koniec.

Ze względów technicznych (rozmiary) nie umieszczono w skrypcie wydruków i wykresów otrzymanych z m.c. Posłużyły one do sporządzenia wykresów przedstawionych na rys. 2.12.1 i 2.12.2. Na rys. 2.12.1 przedstawiono przebiegi czasowe napięć na początku i końcu linii a na rys. 2.12.2 przebiegi czasowe prądów.

Zadanie 2.13

Współczynnik odbicia od początku linii

$$M = \frac{R_o - R_1}{R_o + R_1}$$

a współczynnik odbicia od końca linii

$$N(s) = \frac{(R_2 - R_1) + sL_2}{(R_2 + R_1) + sL_2}.$$

Podstawiając do wzorów (1) i (2) (z zadania 2.5) wyrażenia na M(s), N(s) i E(s) otrzymamy wzory na $U_t(s,x)$ i $I_t(s,x)$

Ad a)

W tym przypadku nie ma odbicia od początku linii (M=0), więc w wyrażeniach na przebiegi czasowe prądu i napięcia wzdłuż linii wystąpią tylko po 2 składowe (fala padająca i odbita)

$$U_t(s,x) = \frac{E}{2s}\left[1 \cdot e^{-\gamma x} + \frac{(R_2 - R_1) + sL_2}{R_2 + R_1 + sL_2} \cdot e^{-\gamma(2d-x)}\right]$$

oraz

$$I_t(s,x) = \frac{E}{2 \cdot R_o \cdot s}\left[1 \cdot e^{-\gamma x} - \frac{(R_2 - R_1) + sL_2}{R_2 + R_1 + sL_2} e^{-\gamma(2d-x)}\right],$$

gdzie

$$\gamma = s\sqrt{l_o c_o} = \frac{s}{v}.$$

Dla x=d (koniec linii)

$$U_t(s,d) = \frac{E}{2s}\left[1 + \frac{(R_2 - R_1) + sL_2}{R_2 + R_1 + sL_2}\right] \cdot e^{-\gamma d} = \dots =$$

$$= E\left[\frac{1}{s} - \frac{\frac{R_o}{L_2}}{s(s + \frac{1}{T})}\right] \cdot e^{-\gamma d}$$

oraz

$$I_t(s,d) = \frac{E}{2R_o s}\left[1 - \frac{(R_2-R_1) + sL_2}{R_2 + R_6+sL_2}\right] \cdot e^{-\gamma d} = \dots = \frac{E}{R_1+R_2} \cdot \frac{\frac{1}{T}}{s(s+\frac{1}{T})} e^{-\gamma d}$$

a przebiegi czasowe

$$U(t,d) = U_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{U_t(s,d)\right\} = E\left[1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-\frac{t-t_o}{T}}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\ 1(t-t_o)$$

oraz

$$I(t,d) = I_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{I_t(s,d)\right\} = \frac{E}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-\frac{t-t_o}{T}}\right) \cdot 1(t-t_o),$$

gdzie

$$T = \frac{L_2}{R_2+R_1} = \frac{L_2}{R_2+R_o},$$

$$t_o = \frac{d}{v}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$t_o = \frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^{-9} = 5 \text{ ns}$$

$$T = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{100 + 300} = 5 \text{ ns}$$

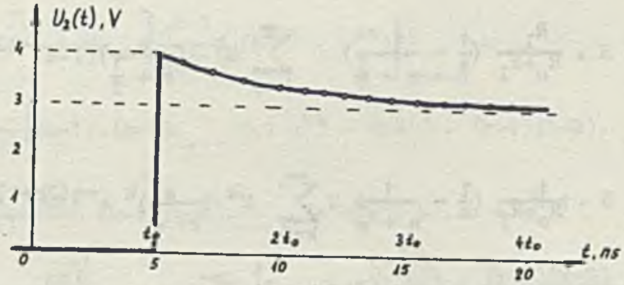
$$U(t,d) = U_2(t) = 4\left[1 - 0{,}25\left(1 - e^{-0{,}2 \cdot 10^9(t-5 \cdot 10^{-9})}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\ 1(t-5 \cdot 10^{-9}), \quad V$$

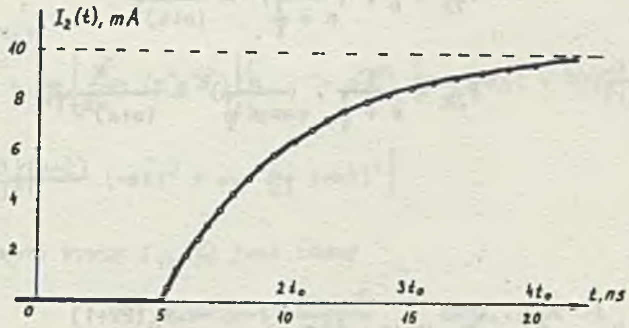
oraz

$$I(t,d) = I_2(t) = 10(1-e^{-0,2 \cdot 10^9 (t-5 \cdot 10^{-9})}) \cdot 1(t-5 \cdot 10^{-9}), \text{ mA}$$

a postać graficzną przebiegów przedstawiono na rys. 2.13.1 i 2.13.2. Zauważmy, że przebiegi te są analogiczne, jak przy zasilaniu obciążenia(R_2L_2) wprost ze źródła o SEM E i oporze wewnętrznym R_o, po przesunięciu o t_o.



Rys. 2.13.1



Rys. 2.13.2

Ad b)

Ponieważ współczynnik odbicia od początku i końca linii jest różny od zera, wystąpią wielokrotne odbicia fali napięcia i prądu od początku i końca linii.

Podstawiając

$$M = \frac{R_o - R_1}{R_o + R_1}$$

oraz

$$N(s) = \frac{sL_2}{2R_2 + sL_2} = \frac{s}{s + \frac{1}{T}}$$

(gdzie $T = \frac{L_2}{2R_2}$)

do wspomnianych już ogólnych wzorów (1) i (2), otrzymamy (dla x=d):

$$U_t(s,d) = E \cdot \frac{R_1}{R_o+R_1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} M^k \left(\frac{s}{s+\frac{1}{T}}\right)^k \cdot e^{-\gamma(2k+1)\cdot d}$$

oraz

$$I_t(s,d) = E \cdot \frac{1}{R_o+R_1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} M^k \left(\frac{s}{s+\frac{1}{T}}\right)^k e^{-\gamma(2k+1)d}$$

W tym przypadku znalezienie transformat odwrotnych jest trudniejsze. Oznaczmy przez

$$F_{1k} = \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{s}{s+\frac{1}{T}}\right)^k = \frac{s^{k-1}}{(s+a)^k}$$

oraz

$$F_{2k} = \frac{1}{s+\frac{1}{T}} \cdot \left(\frac{s}{s+\frac{1}{T}}\right)^k = \frac{s^k}{(s+a)^{k+1}},$$

gdzie

$$a = \frac{1}{T}.$$

Oczywiście

$$U_t(s,d) = E \cdot \frac{R_1}{R_o+R_1} \sum_{k=0}^{\infty} M^k(F_{1k} + F_{2k}) \cdot e^{-s \cdot t_o(2k+1)} \tag{1}$$

oraz

$$I_t(s,d) = R \cdot \frac{1}{R_o+R_1} \sum_{k=0}^{\infty} M^k (F_{1k} - F_{2k}) \cdot e^{-s \cdot t_o(2k+1)}, \tag{2}$$

gdzie

$$t_o = \frac{d}{v}.$$

Obliczmy transformaty odwrotne F_{1k} i F_{2k}. Korzystając z metody residuów, otrzymamy

$$f_{1k}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F_{1k}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{L_{1k}(s)}{M_{1k}(s)}\right\} = \sum_{n=1}^{k} \operatorname*{res}_{s=s_n}\left[\frac{L_{1k}(s)}{M_{1k}(s)}\, e^{st}\right]$$

ale pierwiastki mianownika (dla k=1,2,...) k-krotne (równe - a), więc

$$f_{1k}(t) = \frac{1}{(k-1)!}\cdot\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left(s^{k-1}\cdot e^{st}\right)\right]\Bigg|_{s=-a} =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\Big[(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\, e^{st} + (k-1)\cdot(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 2ste^{st} +$$

$$+ \frac{(k-1)\cdot(k-2)}{2!}(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 3s^2t^2e^{st} + \ldots + s^{k-1}\cdot$$

$$\cdot\, t^{k-1}\cdot e^{st}\Big]\Bigg|_{s=-a} = e^{-at}\Big[1 + (k-1)(-at) + \frac{(k-1)(k-2)}{2!2!}a^2t^2 +$$

$$+ \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3!3!}(-at)^3 + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}(-at)^{k-1}\Big],$$

analogicznie

$$f_{2k}(t) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{ds^k}\left(s^ke^{st}\right)\right]\Bigg|_{s=-a} = e^{-at}\Big[1+k(-at) + \frac{k(k-1)}{2!2!}a^2t^2 +$$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)}{3!3!}(-at)^3 + \ldots \frac{1}{k!}(-at)^k\Big]$$

ponieważ m-ty wyraz $f_{1k}(t)$ jest równy

$$e^{-at}\binom{k-1}{m}\frac{(-at)^m}{m!} \qquad (m=0,\ldots,k-1)$$

natomiast m-ty wyraz $f_{2k}(t)$ jest równy

$$e^{-at}\binom{k}{m}\frac{(-at)^m}{m!} \qquad (m=0,\ldots,k)$$

więc dla k=1,2,..., otrzymamy

$$f_k(t) = f_{1k}(t) + f_{2k}(t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{e^{-at}(-at)^m}{m!}\left[\binom{k-1}{m} + \binom{k}{m}\right] =$$

$$= e^{-at}\sum_{m=0}^{k} (-at)^m \frac{(k-1)!(2k-m)}{m!m!(k-m)!} = e^{-at}\Big[2-(2k-1)at +$$

$$+ \frac{(k-1)(2k-2)}{2!\,2!}a^2t^2 - \frac{(k-1)(k-2)(2k-3)}{3!\,3!}a^3t^3 +$$

$$+ \frac{(k-1)(k-2)(k-3)(2k-4)}{4!\,4!}a^4t^4 + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!}(at)^k\Big] \quad (3)$$

oraz

$$g_k(t) = f_{1k}(t) - f_{2k}(t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{e^{-at}(-at)^m}{m!}\left[\binom{k-1}{m} - \binom{k}{m}\right] =$$

$$= - e^{-at}\sum_{m=0}^{k} \frac{m(k-1)!(-at)^m}{m!m!(k-m)!} =$$

$$= e^{-at}\Big[-(-at) - \frac{2(k-1)}{2!2!}a^2t^2 - \frac{3(k-1)(k-2)}{3!\,3!}(-at)^3 - \ldots$$

$$\ldots - \frac{(k-1)}{(k-1)!}\cdot(-at)^{k-1} - \frac{1}{k!}(-at)^k\Big], \quad (4)$$

natomiast dla k=0

$$F_{10} = \frac{1}{s} \triangleq f_{10}(t) = \mathbf{1}(t)\ 1(t)$$

i

$$F_{20} = \frac{1}{s+a} \triangleq f_{20}(t) = e^{-at}\cdot \mathbf{1}(t)$$

więc

$$f_o(t) = f_{10}(t) + f_{20}(t) = (1 + e^{-at})\cdot \mathbf{1}(t)$$

oraz

$$g_o(t) = f_{10}(t) - f_{20}(t) = (1 - e^{-at})\cdot \mathbf{1}(t)$$

Korzystając z twierdzenia o przesunięciu w dziedzinie zmiennej rzeczywistej:

$$\mathcal{L}\left\{f(t-\alpha)\cdot \mathbf{1}(t-\alpha)\right\} = e^{-s\alpha}\cdot F(s),$$

po podstawieniu (3) i (4) do (1) i (2) otrzymamy wzory na przebiegi czasowe napięcia i prądu na końcu linii, i tak

$$U(t,d) = U_2(t) = E \cdot \frac{R_1}{R_o + R_1} \sum_{k=0}^{\infty} M^k \cdot f_k\left[t-(2k+1)\, t_o\right] \cdot 1\left[t-(2k+1)t_o\right]$$

oraz

$$I(t,d) = I_2(t) = E \frac{1}{R_o+R_1} \sum_{k=0}^{\infty} M^k\, g_k\left[t-(2k+1)\, t_o\right] \cdot 1\left[t-(2k+1)\, t_o\right].$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$M = \frac{50 - 100}{50 + 100} = - \frac{1}{3}$$

$$T = \frac{0,2 \cdot 10^{-6}}{200} = 1 \cdot 10^{-9} = 1 \text{ ns}$$

a

$$U_2(t) = \frac{8}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{3})^k f_k\left[t-(2k+1).5 \cdot 10^{-9}\right] .1\left[t-(2k+1) \cdot 5.10^{-9}\right], \text{ V}.$$

Podstawmy, dla przejrzystości zapisu, czas w ns, to przebieg czasowy napięcia na wyjściu linii ma postać:

$$U_2(t) = \frac{8}{3} \Big\{ 1.(1+e^{-1(t-5)}) \cdot 1(t-5) + (-\tfrac{1}{3})^1 \left[(2 - 1.(t-15)\right] \cdot$$

$$\cdot\, e^{-1(t-15)}\ 1(t-15 + (-\tfrac{1}{3})^2 \left[2-3.(t-25 + 0,5.1.(t-25)^2\right] \cdot$$

$$\cdot\, e^{-1(t-25)} \cdot 1(t-25) + (-\tfrac{1}{3})^3 \left[2-5.(t-35) + 2(t-35)^2 -\right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{6}\,(t-35)^3\right] \cdot e^{-1(t-35)} \cdot 1(t-35) + \ldots, \text{ V}. \qquad (5)$$

Analogicznie

$$I_2(t) = \frac{80}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{3})^k g_k \left[t - (2k+1) \cdot 5 \cdot 10^{-9}\right].$$

$$\cdot\, 1\left[t - (2k+1) \cdot 5 \cdot 10^{-9}\right], \text{ mA}$$

a gdy czas w ns, to

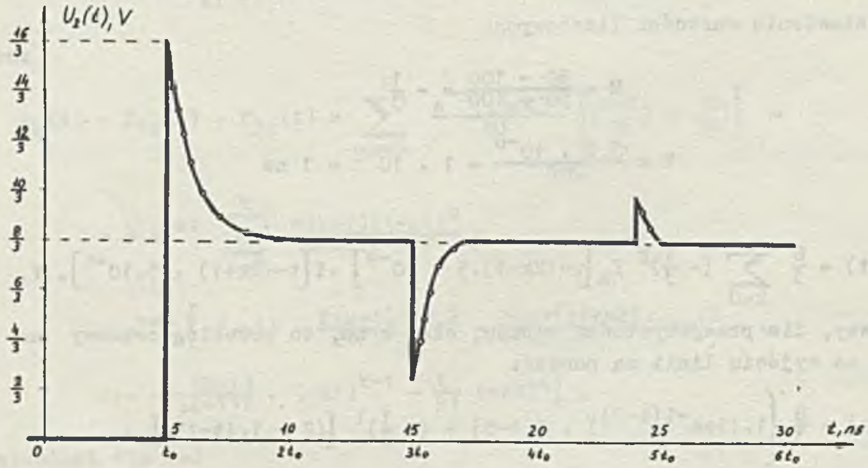
$$I_2(t) = \frac{80}{3} \Big\{ 1 \cdot (1-e^{-1(t-5)}) \cdot 1(t-5) + (-\tfrac{1}{3})^1 \cdot$$

$$\cdot \left[(t-15)e^{-1(t-15)}\right] \cdot 1(t-15) + (-\tfrac{1}{3})^2 \left[(t-25)-0,5\ (t-25)^2\right] \cdot$$

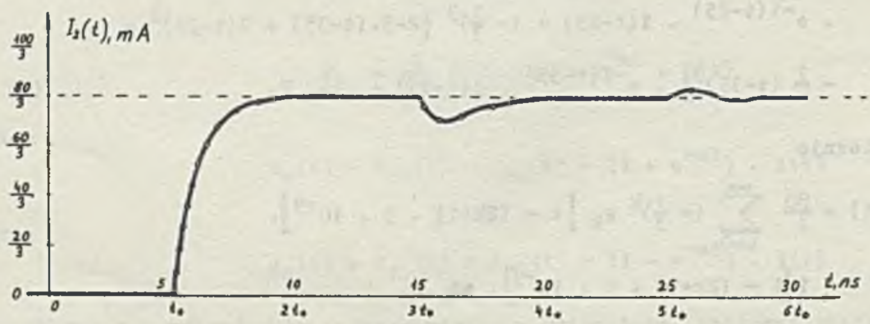
$$\cdot\ e^{-1(5-25)}\ .\ \mathbf{1}(t-25) + (-\tfrac{1}{3})^3 \left[(t-35) - 1\ .\ (t-35)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\ (t-35)^3\right]\ .\ e^{-1.(t-35)}\ .\ \mathbf{1}(t-35) + \ldots \Big\},\ \text{mA}. \qquad (6)$$

Przebiegi czasowe napięcia na końcu linii (opisanego wzorem (5)) przedstawiono na rys. 2.13.3, a przebieg czasowy prądu na końcu linii (opisany równaniem (6)) na rys. 2.13.4.



Rys. 2.13.3



Rys. 2.13.4

<u>Zadanie 2.14</u>

Dla czwórnika z rys. 2.14.b

$$75 = R \,||\, (2r + 300)$$

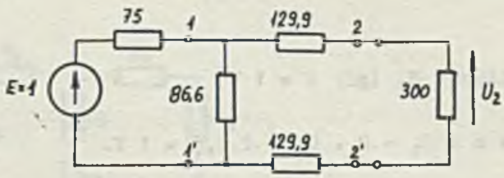
oraz

$$300 = 2r + R \parallel 75$$

istnieją rzeczywiste wartości r i R, dla których powyższe równania są spełnione, mianowicie r = 129,9Ω a R = 86,6Ω. Wartość skuteczna napięcia $u_2(t)$ (rys. 2.14.1) wynosi

$$U_2 = 1 \cdot \frac{1}{75 + \frac{86,6 \cdot (300+259,8)}{86,6 + 300+259,8}} \cdot \frac{86,6 \cdot (300 + 259,8)}{86,6 + 300 + 259,8} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{300 + 259,8} = \frac{0,5}{300 + 259,8} \cdot 300 = \underline{0,268 \text{ V}}$$



Rys. 2.14.1

Dla czwórnika z rys. 2.14.c układ równań:

$$75 = 2r + R \parallel 75$$

$$300 = R \parallel (2r+75)$$

nie jest spełniony dla rzeczywistych realizowalnych wartości R i r, również dla czwórnika z rys. 2.14.d układ równań:

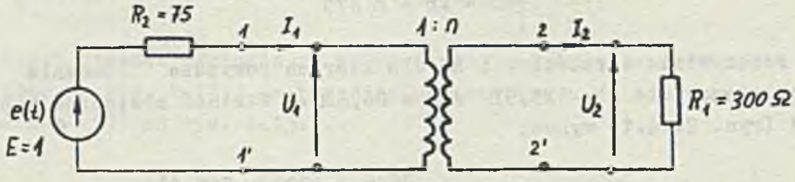
$$75 = r + R \parallel (r + 300)$$

$$300 = r + R \parallel (r + 75)$$

nie jest spełniony dla rzeczywistych realizowalnych wartości R i r.
Dla czwórnika z rys. 2.14e (idealny transformator o przekładni 1:n) z równań łańcuchowych (rys. 2.14.2) dla przeciwnie nawiniętych uzwojeń:

$$U_1 = \frac{1}{n} \cdot U_2$$

$$I_1 = n \cdot I_2$$



Rys. 2.14.2

otrzymamy

$$R_2 = 75\,\Omega = \frac{U_1}{I_1} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{U_2}{I_2} = \frac{1}{n^2} \cdot 300\,\Omega$$

stąd $n = 2$.

Wartość skuteczna napięcia U_2 (gdy $E = 1$ V)

$$U_2 = n \cdot U_1 = 2 \cdot U_1 = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \text{ V}.$$

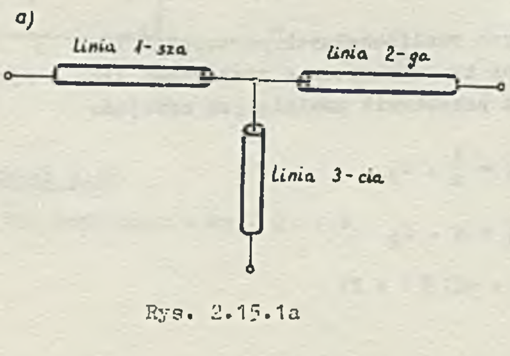
Dla obwodu z rys. 2.14.f $n = 0{,}5$.

Zadanie 2.15

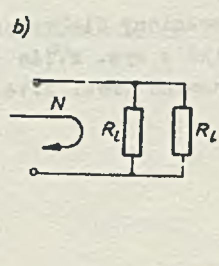
Jeśli połączymy (w punkcie rozgałęzienia) 3 linie o identycznych impedancjach falowych $= R_1$ (rys. 2.15.1a), to nastąpią odbicia, od punktu rozgałęzienia, fali biegnących wzdłuż dowolnej (np. pierwszej) linii, ponieważ współczynnik odbicia (rys. 2.15.1b)

$$N = \frac{0{,}5\,R_1 - R_1}{0{,}5\,R_1 + R_1} = -\frac{1}{3}$$

jest różny od zera.

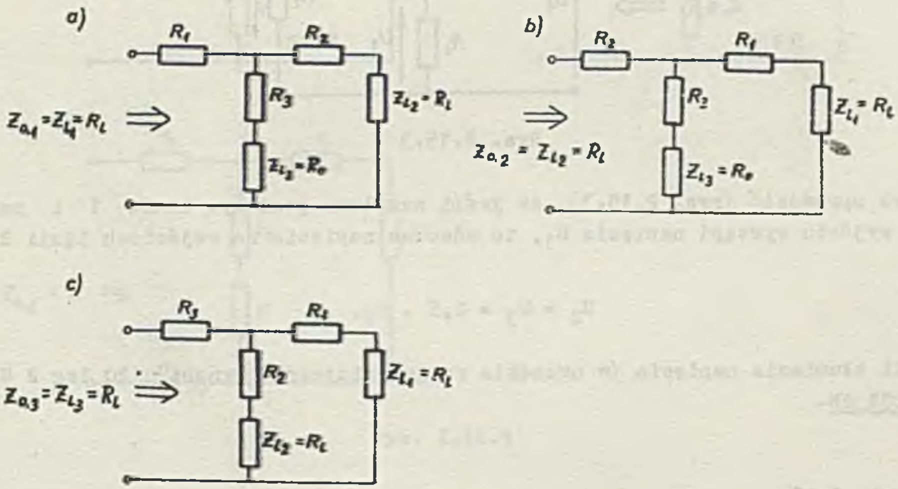


Rys. 2.15.1a



Rys. 2.15.1b

Wprowadzając w punkcie rozgałęzienia odpowiednio dobrane rezystory R_1, R_2 i R_3 można uniknąć odbić, ale część energii przesyłanej liniami rozprasza się na rezystorach dopasowujących (R_1, R_2 i R_3). Nieznane wartości rezystorów R_1, R_2 i R_3 wyznaczymy z układu 3 równań, określających impedancję obciążenia linii: 1, 2 i 3 (rys. 2.15.2 , czyli



Rys. 2.15.2

$$Z_{01} = R_1 + \frac{(R_2+Z_{12})\cdot(R_3+Z_{13})}{R_2+R_3+Z_{12}+Z_{13}}, \qquad (1)$$

$$Z_{02} = R_2 + \frac{(R_1+Z_{11})\cdot(R_3+Z_{13})}{R_1+R_3+Z_{11}+Z_{13}}, \qquad (2)$$

$$Z_{03} = R_3 + \frac{(R_1+Z_{11})\cdot(R_2+Z_{12})}{R_1+R_2+Z_{11}+Z_{12}} \qquad (3)$$

ale

$$Z_{01} = Z_{02} = Z_{03} = Z_{11} = Z_{12} = Z_{13} = R_l$$

oraz układ równań (1), (2) i (3) jest symetryczny, więc

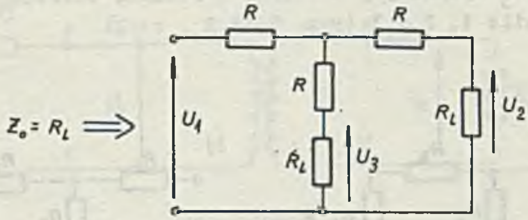
$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

i można wyznaczyć wartość R z zależności (rys. 2.15.3)

$$R_l = R + \frac{1}{2}(R + R_l).$$

stąd

$$R = \frac{1}{3} R_1 = \underline{16.67\Omega}.$$



Rys. 2.15.3

Łatwo sprawdzić (rys. 2.15.3), że jeśli zasilana jest np. linia 1 i na jej wyjściu wystąpi napięcie U_1, to wówczas napięcia na wejściach linii 2 i 3

$$U_2 = U_3 = 0{,}5 \cdot U_1,$$

czyli tłumienie napięcia (w układzie rozgałęziającym) wynosi 20 log 2 = = <u>6.02 dB</u>.

Zadanie 2.16

Podobnie, jak w zadaniu 2.15, można ułożyć równania (1), (2) i (3)(rys. 2.16.1), które przyjmą postać:

$$2R = r_1 + \frac{(r_2+R).(r_3+R)}{r_2+r_3+2R} \tag{1}$$

$$R = r_2 + \frac{(r_1+2R).(r_3+R)}{r_1+r_3+3R}, \tag{2}$$

$$R = r_3 + \frac{(r_1+2R).(r_2+R)}{r_1+r_2+3R}. \tag{3}$$

Z (2) i (3) $r_2 = r_3 = r$

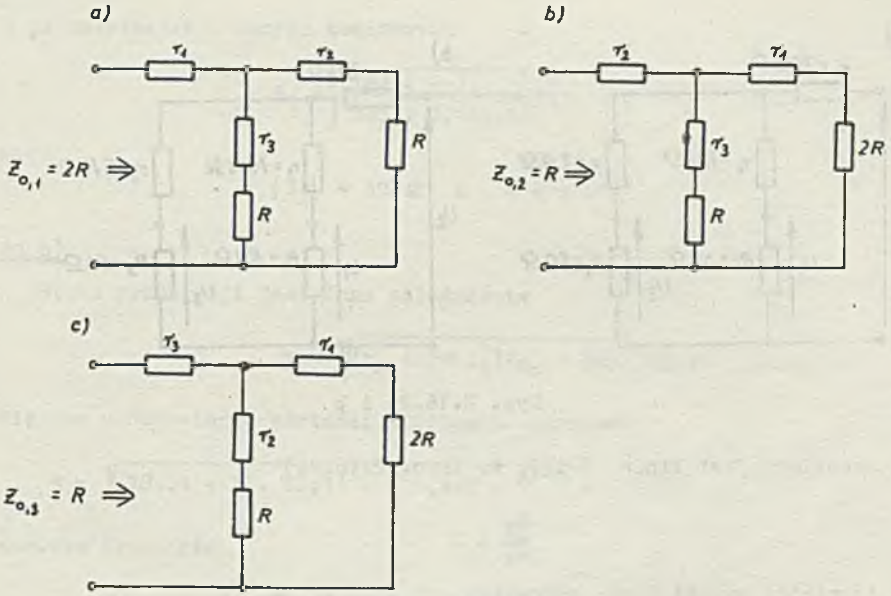
a po przekształceniach:

$$(2r_1.r + r^2) + r_1.R + r.R = R.R_1 \tag{4}$$

$$(2r_1.r+r^2) + r_1 \cdot 0 + r \cdot (2R_1) = R^2 \tag{5}$$

stąd

$$r_1.R + r(R-2R_1) = R.R_1 - R^2$$



Rys. 2.16.1

ale

$$R_1 = 2R$$

więc

$$r_1 = R + 3r. \tag{6}$$

Podstawiając (6) np. do (1), otrzymamy

$$r = \frac{0.5 \cdot R}{3,5} = 7,14\Omega ,$$

a

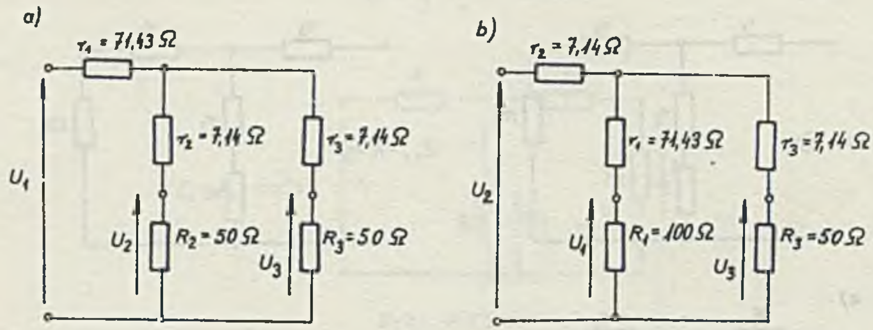
$$r_1 = 71,43\Omega .$$

Jeśli zasilana jest linia 1, to łatwo obliczyć, że stosunek napięcia na wyjściu linii 1 do napięcia na wejściu linii 2 i 3 (rys. 2.16.2a)

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_1}{U_3} = 4,$$

więc tłumienie napięcia na układzie rozgałęziającym wynosi

$$20 \log 4 \cong 12 \text{ dB}.$$



Rys. 2.16.2a i b

Jeśli zasilana jest linia 2 i 3, to (rys. 2.16.2b)

$$\frac{U_2}{U_1} = 2$$

więc tłumienie wynosi 6 dB, natomiast

$$\frac{U_2}{U_3} = \frac{4}{3}$$

więc tłumienie wynosi 2,5 dB.

Zadanie 2.18

$x = 6,83$ km.

Zadanie 2.19

$r = 60\Omega$.

Zadanie 2.20

Ad a)

Impedancja falowa linii

$$Z_1 = \sqrt{\frac{r_o + j\omega l_o}{g_o + j\omega c_o}} = |Z_1|\ e^{j\varphi}$$

a po podstawieniu danych tematowych

$$Z_1 = \sqrt{\frac{18,64 + j \cdot 62,1}{0 + j \cdot 0,185 \cdot 10^{-3}}} = 592\, e^{-j\, 8^\circ 21'}\, \Omega ,$$

więc

$$|Z_1| = 592\,\Omega \quad \text{a} \quad \varphi = -\,8^\circ 21' .$$

Ad b)

Stała propagacji jest dana zależnością

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega l_0)(g_0 + j\omega c_0)} = \alpha + j\beta ,$$

więc po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy

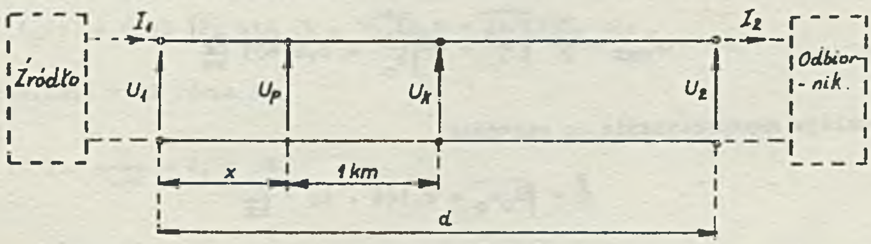
$$\gamma = \sqrt{(18,64 + j \cdot 62,1) \cdot j\, 0,185 \cdot 10^{-3}} = 0,1095 \cdot e^{j\, 81^\circ 36'} ,$$

a stała tłumienia

$$\alpha = 0,1095 \cdot \cos 81^\circ 36' = 0,016\ \frac{\text{Np}}{\text{km}} ,$$

ponieważ stosunek modułów napięć w odległości 1 km (rys. 2.20.1) do siebie wynosi

$$\frac{|U_k|}{|U_p|} = e^{-\alpha} ,$$



Rys. 2.20.1

więc tłumienie w decybelach

$$20 \log \frac{|U_p|}{|U_k|} = 20 \log e^{\alpha} = 0,1388\ \frac{\text{dB}}{\text{km}}$$

a w neperach

$$\ln e^{\alpha} = 0,016\ \frac{\text{Np}}{\text{km}} .$$

Ad c)

Ponieważ $\beta = 0,1095 \cdot \sin 81^\circ 36' = 0,1083 \frac{rad}{km}$, więc długość fali

$$\lambda = 2\pi/\beta = 57,99 \text{ km}$$

a prędkość propagacji

$$v = \lambda \cdot f = 57,99 \cdot \frac{5 \cdot 10^3}{2 \cdot \pi} = 46,149 \cdot 10^3 \ \frac{km}{s}.$$

Oczywiście wartości α i β można też wyznaczyć ze znanych zależności

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{r_o^2 + \omega^2 l_o^2} \cdot \sqrt{g_o^2 + \omega^2 c_o^2} + r_o \cdot g_o - \omega^2 l_o c_o\right)}$$

oraz

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{r_o^2 + \omega^2 l_o^2} \cdot \sqrt{g_o^2 + \omega^2 c_o^2} - r_o \cdot g_o + \omega^2 l_o c_o\right)}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy identyczne (z uwzględnieniem dokładności obliczeń) wyniki i tak

$$\alpha = 0,0159 \ \frac{N_p}{km}$$

a

$$\beta = 0,10835 \ \frac{rad}{km}.$$

Obliczmy wartości graniczne parametrów linii, dla $\omega \to \infty$, wówczas wartość współczynnika α rośnie do wartości określonej zależnością

$$\alpha_{max} = \frac{r_o}{2}\sqrt{\frac{c_o}{l_o}} + \frac{g_o}{2}\sqrt{\frac{l_o}{c_o}} = 0,01609 \ \frac{Np}{km}$$

a $\frac{\beta}{\omega}$ maleje asymptotycznie do wartości

$$\frac{\beta}{\omega} = \sqrt{l_o c_o} = 2,144 \cdot 10^{-5} \ \frac{s}{km}$$

Moduł impedancji falowej maleje (asymptotycznie) do wartości

$$|Z_1|_{min} = \sqrt{\frac{l_o}{c_o}} = 580,5\Omega$$

a faza φ maleje do zera.

Zadanie 2.21

Impedancja falowa linii

$$Z_1 = \sqrt{\frac{r_o+j\,\omega l_o}{g_o+j\,\omega c_o}} = \sqrt{\frac{30 + j.90}{j.0,15.10^{-3}}} = 795,3.e^{-j\ 9^o13'}\Omega,$$

stała propagacji

$$\gamma = \sqrt{(r_o+j\,\omega l_o)(g_o+j\,\omega c_o)} = 0,119\ .\ e^{j\ 80^o47'} = \alpha + j\beta =$$

$$= 0,019 + j\ 0,118,$$

natomiast

$$U_2 = U_1\ .\ e^{-j\gamma\ .\ d} = 10\ e^{-30\ .\ 0,019}\ .\ e^{-j\ 30\ .\ 0,118} =$$

$$= 5,66\ .\ e^{-j\ 3,54}\ V$$

ale

$$3,54\ rad\ \hat{=}\ 202^o50'$$

więc

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_1} = \frac{5.66\ .\ e^{-j\ 202^o50'}}{795,3\ e^{-j\ 9^o13'}} = 6,98\ .\ 10^{-3}\ e^{-j\ 193^o37'}\ A$$

a)

$$i_2(t) = 6,98\ \sqrt{2}\ \sin\ (5\ .\ 10^3\ .\ t - 193^o37'),\ mA.$$

Tłumienie w dB równa się

b)

$$20\ \log \frac{10}{5,66} = 4,94\ dB.$$

Zadanie 2.22

Ad a)

Stała propagacji linii bez strat

$$\gamma = j\omega\sqrt{l_o\ .\ c_o} = j\ .\ \beta,$$

więc impedancja wejściowa linii bez strat, o długości x, zwartej na końcu ($Z_2 = 0$)

$$Z_{we} = Z_1 \cdot \mathrm{th}\gamma \cdot x = Z_1 \,\mathrm{th} j\beta \cdot x = j\, Z_1 \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot x \tag{2}$$

Ad b)

Długość fali

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{l_o \cdot c_o}}}{\dfrac{\omega}{2\cdot\pi}} = \frac{2\cdot\pi}{\omega\cdot\sqrt{l_o\cdot c_o}} = \frac{2\pi}{\beta}$$

stąd $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Podstawiając do (2) otrzymamy

$$Z_{we} = j \cdot Z_1 \cdot \mathrm{tg}\,\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x$$

stąd łatwo zauważyć, że

$$|Z_{we}| = 0 \quad \text{gdy} \quad x = k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (k=0,1,2,\ldots),$$

oraz

$$|Z_{we}| = \infty \quad \text{gdy} \quad x = \frac{2k+1}{4}\cdot\lambda \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

natomiast

$$|Z_{we}| = |Z_1| \quad \text{gdy} \quad \left|j\mathrm{tg}\,\frac{2.\pi}{\lambda}\,x\right| = 1 \quad \text{czyli dla}$$

$$x = \frac{2k+1}{8}\cdot\lambda \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Czy można dla każdej wartości Z_1 dobrać x, żeby $Z_{we} = Z_1$?

Zadanie 2.23

Z zależności (2) z zadania 2.22

$$Z_{we} = Z_1 \cdot \mathrm{th}\gamma d = Z_1 \cdot \mathrm{th}\,(\alpha + j\beta)\, d =$$

$$= Z_1 \frac{e^{\alpha d}\cdot e^{j\beta d} - e^{-\alpha d}\cdot e^{-j\beta\cdot d}}{e^{\alpha d}\cdot e^{j\beta d} + e^{-\alpha d}\cdot e^{-j\beta d}}$$

ale

$$20 \log e^{\alpha} = 0{,}38$$

stąd

$$e^{\alpha} = 1{,}0447$$

a

$$e^{\alpha d} = (1{,}0447)^{10} = 1{,}549$$

natomiast

$$e^{j\beta d} = e^{j\,8,7} = 1 \cdot e^{j\,8,7}$$

Więc

$$Z_{we} = Z_1 \frac{1,549 \cdot e^{j\,8,7} - 0,646 \cdot e^{-j\,8,7}}{1,549 \cdot e^{j\,8,7} + 0,646\, e^{-j\,8,7}}$$

ale

$$8,7 \text{ rad} = (2\pi + 2,417) \text{ rad} \hat{=} 138^{\circ}29'$$

a

$$1 \cdot e^{j\,8,7} = -0,749 + j\,0,663$$

oraz

$$1 \cdot e^{-j\,8,7} = -0,749 - j\,0,663.$$

Zatem

$$Z_{we} = Z_1 \frac{1,549(-0,749 + j\,0,663) - 0,646(-0,749 - j\,0,663)}{1,549(-0,749 + j\,0,663) - 0,646(-0,749 - j\,0,663)} =$$

$$= Z_1 \frac{-0,676 + j\,1,455}{-1,644 + j\,0,599} = 52,5 \cdot e^{-j\,5^{\circ}} \frac{1,605 \cdot e^{j\,115^{\circ}}}{1,750 \cdot e^{j\,160^{\circ}}} =$$

$$= 48,15 \cdot e^{-j\,50^{\circ}}\,\Omega.$$

Czy może być

$$|Z_{we}| > |Z_1|$$

jeśli tak, to dla jakich wartości d (z przedziału 0÷20 km)?

Zadanie 2.24

Jeśli impedancja wejściowa Z_{we}, widziana z zacisków 1-1', będzie równa impedancji falowej linii, tzn.

$$Z_{we} = R_{we} = Z_1 = R_1,$$

to współczynnik odbicia od końca linii będzie równy zero i nie wystąpi w linii fala odbita.
Ale

$$Z_{we} = Z_{1d} \frac{R_2 \operatorname{ch} j\beta \cdot d + Z_{1d} \cdot \operatorname{sh} j\beta \cdot d}{Z_{1d} \operatorname{ch} j\beta \cdot d + R_2 \operatorname{sh} j\beta \cdot d}$$

a po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy

$$50 = Z_{1d}\,\frac{150\cos 5d + j\,Z_{1d}\cdot\sin 5d}{Z_{1d}\cos 5d + j\,150\sin 5d}$$

lub

$$50\,Z_{1d}\cdot\cos 5d + j\,7500\sin 5d = 150\cdot Z_{1d}\cdot\cos 5d + j\,Z_{1d}^2\sin 5d.$$

Po rozdzieleniu składowych rzeczywistych i urojonych otrzymamy

$$50\,Z_{1d}\cos 5d = 150\,Z_{1d}\cdot\cos 5d$$

i

$$7500\sin 5d = Z_{1d}^2\cdot\sin 5d.$$

Stąd

$$\cos 5d = 0$$

a najmniejsza długość linii dopasowującej d, spełniająca ten warunek, jest

$$5d = \frac{\pi}{2},\ \text{czyli}\ \sin 5d = 1$$

wtedy

$$d_{min} = \frac{\pi}{10}\ \text{m} = 31{,}4\ \text{cm i}\ Z_{1d}^2 = 7500$$

stąd

$$Z_{1d} = R_{1d} = 86{,}6\,\Omega.$$

Zadanie 2.25

Ze znanych zależności wyliczymy

$$Z_1 = \sqrt{\frac{25 + j\cdot 10^4\cdot 2\pi\cdot 0{,}6\cdot 10^{-3}}{j\cdot 10^4\cdot 2\pi\cdot 40\cdot 10^{-9}}} = 134{,}17\cdot e^{-j\,16^\circ 46'}\,\Omega$$

oraz

$$\gamma = \sqrt{(25 + j\,37{,}7)\cdot j\,25{,}13\cdot 10^{-4}} = 0{,}337\,e^{j\,73^\circ 13'} =$$

$$= 0{,}097 + j\,0{,}323$$

stąd

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 19{,}47\ \text{km}$$

a

$$v = \lambda\cdot f = 19{,}47\cdot 10^4\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Tłumienie linii obciążonej impedancją falową jest

$$\frac{|U_1|}{|U_2|} = e^{0,097 \cdot 12} = 3,207$$

lub

$$20 \log \frac{|U_1|}{|U_2|} = 10,1 \text{ dB}.$$

Wzmocnienie wzmacniacza musi kompensować tłumienie linii, więc powinno wynosić 10,1 dB (k=3,207).

Zadanie 2.26

Ponieważ

$$\gamma = \sqrt{(r_o + j\,\omega l_o)\ (g_o + j\,\omega c_o)}$$

więc dla

$$r_o \gg \omega l_o \quad \text{i} \quad g_o \ll \omega c_o$$

$$\gamma \cong \sqrt{j\omega\, c_o r_o} = \sqrt{\omega c_o r_o}\ \ e^{j\,45^{o}}$$

stąd

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega c_o\ r_o}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega c_o\ r_o}{2}}$$

oraz

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega \cdot c_o \cdot r_o}}.$$

Dla tematowych danych

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2\,\pi \cdot 10^{6} \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot 1}} = 1,584 \text{ m}$$

$$v \cong 1,58 \cdot 10^{6}\ \frac{m}{s}$$

a

$$\tau = t_o = \frac{d}{v} = 0,316\ \mu s.$$

Zadanie 2.27

$Z_1 = 106,85 \cdot e^{-j\,38^{o}41'}$,

$|I_2| \cdot \sqrt{2} = 34,2\ \sqrt{2}$ mA,

$\lambda = 29,97$ km, $\quad v = 149,9 \cdot 10^{3}\ \frac{km}{s}$.

Zadanie 2.28

$f \cong 193,4$ Hz.

Zadanie 2.29

Impedancja wejściowa widziana z zacisków 4-4' (bez bocznikującego R_{b2}) w kierunku rozwartego końca linii (p. wzór (1) z zadania 2.22 i rys. 2.29.1) wynosi

$$Z_{we,4-4'} = Z_l \cdot \operatorname{cth} \gamma \cdot d_1$$

a

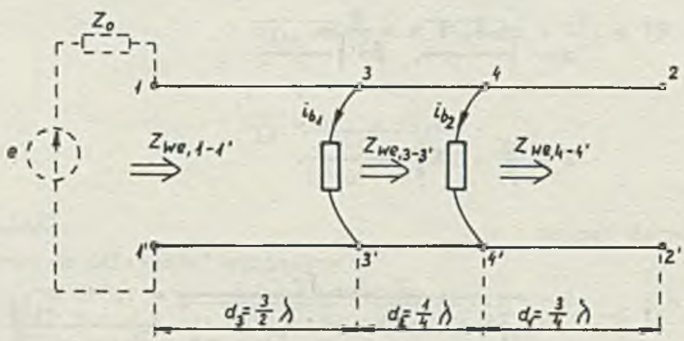
$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{l_o \cdot c_o} = \frac{j\omega}{v}$$

dla linii bezstratnej $v = 3 \cdot 10^8$ m/s oraz

$$\gamma d_1 = j \cdot \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} \cdot 15 = j\,1,5 \cdot \pi$$

więc

$$\operatorname{cth} \gamma \cdot d_1 = 0 \quad \text{i} \quad Z_{we,4-4'} = 0.$$



Rys. 2.29.1

Impedancja wejściowa widziana z zacisków 3-3' (bez R_{b1}) w kierunku bocznika R_{b2} wynosi (zależność (2) z zadania 2.22)

$$Z_{we,3-3'} = Z_l \cdot \operatorname{th} \gamma \cdot d_2$$

a

$$\gamma \cdot d_2 = \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} \cdot 5 = 0,5 \cdot \pi .$$

więc

$$Z_{we,3-3'} = \infty .$$

Powyższe rezultaty można wyjaśnić bez obliczeń jeśli zauważymy, że $\lambda = \frac{v}{f} = 20$ m, wówczas $d_1 = \frac{3}{4}\lambda$ a impedancja linii o długości równej trzy czwarte długości fali rozwartej na końcu jest równa zero, natomiast $d_2 = \frac{1}{4}\cdot\lambda$ i jest to linia ćwierćfalowa zwarta na końcu, więc jej impedancja wejściowa jest nieskończenie wielka. Zatem nie płynie żaden prąd przez R_{b2} ($i_{b2} = 0$).

Z zacisków 1-1' widać linię o długości półtora fali, obciążoną bocznikiem $R_{b1} = Z_l = R_l$, więc $Z_{we,1-1'} = Z_{we} = R_{b1} = 600\,\Omega$ a

$$I_{b1} = \frac{10}{(200 + 600) + j\,200}$$

zatem

$$i_{b1} = 12{,}13\sqrt{2}\sin(2.\pi.15.10^6\,t + \varphi_U - 14^o),\ \text{mA}$$

a

$$i_{b2} = 0.$$

Zadanie 2.30

Napięcie i prąd na początku linii długiej jednorodnej zasilanej napięciem sinusoidalnym i obciążonej impedancją falową opisane są równaniami:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\gamma\cdot d & Z_l\cdot \mathrm{sh}\,\gamma\cdot d \\ \dfrac{\mathrm{sh}\,\gamma\cdot d}{Z_l} & \mathrm{ch}\,\gamma\cdot d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

natomiast równania łańcuchowe czwórnika kształtu T mają postać

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+Z_1\cdot Y_o & 2\cdot Z_1+Z_1^2\cdot Y_o \\ Y_o & 1+Z_1\cdot Y_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

a kształtu

$$\Pi:\quad \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Y_1\cdot Z_o & Z_o \\ 2\cdot Y_1+Y_1^2\cdot Z_o & 1+Y_1\cdot Z_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Porównując (1) i (2) otrzymamy

$$Z_1 = Z_l \cdot \operatorname{th} \frac{\gamma \cdot d}{2}$$

$$Y_o = \frac{1}{Z_l} \operatorname{sh} \gamma \cdot d. \tag{4}$$

Z porównania (1) i (3) otrzymamy

$$Z_o = Z_l \cdot \operatorname{sh} \gamma \cdot d$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_l} \cdot \operatorname{th} \frac{\gamma d}{2}. \tag{5}$$

Oczywiście te same wyniki otrzymamy jeśli zauważymy, że $Z_{we} = Z_l$ i porównamy napięcia na obciążeniu. Na przykład dla czwórnika kształtu T otrzymamy

$$Z_l = Z_1 + \frac{(Z_1 + Z_l)\frac{1}{Y_o}}{Z_1 + Z_l + \frac{1}{Y_o}}$$

oraz

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{Y_o(Z_1 + Z_l + \frac{1}{Y_o})} = e^{-\gamma d}.$$

Równania elementów czwórnika kształtu T równoważnego linii bez strat (równanie (4)) przyjmą postać

$$Z_1 = R_l \operatorname{th} \frac{j\beta \cdot d}{2} = j \cdot R_l \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega \sqrt{l_o c_o} d}{2} = j\omega \cdot R_l \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega\sqrt{l_o c_o}\, d}{2}}{\omega} \tag{4'}$$

oraz

$$Y_o = \frac{1}{R_l} \cdot \operatorname{sh} j\beta \cdot d = j \cdot \frac{1}{R_l} \sin\omega\sqrt{l_o c_o} d = j\omega \cdot \frac{1}{R_l} \cdot \frac{\sin\omega\sqrt{l_o c_o}\, d}{\omega}$$

więc

$$Z_1 = j\omega \cdot \frac{L_1}{2}$$

$$Y_o = j\omega \cdot C_o$$

gdzie

$$L_1 = 2R_l \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega\sqrt{l_o c_o}\, d}{2}}{\omega} = R_l \cdot \sqrt{l_o c_o} d \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega\sqrt{l_o c_o}\, d}{2}}{\omega \cdot \frac{\sqrt{l_o c_o}\, d}{2}} =$$

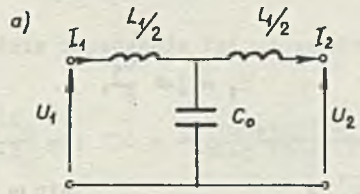
$$= l_o \cdot d \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega \sqrt{l_o c_o}}{2}}{\frac{\omega\sqrt{l_o c_o}\, d}{2}} \tag{6}$$

a

$$C_0 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\sin\omega \cdot \sqrt{l_0 c_0}\, d}{\omega} = \frac{\sqrt{l_0 c_0}\, d}{R_1} \; \frac{\sin\omega \cdot \sqrt{l_0 c_0}\, d}{\omega \cdot \sqrt{l_0 c_0}\, d} =$$

$$= c_0 \cdot d \, \frac{\sin\omega \cdot \sqrt{l_0 c_0}\, d}{\omega \cdot l_0 c_0 \cdot d} \tag{7}$$

a więc elementami czwórnika kształtu T są indukcyjności $\frac{L_1}{2}$ (w gałęziach podłużnych) i pojemność C_0 (w gałęzi poprzecznej) (rys. 2.30.1a).



Rys. 2.30.1a

Dla tematowych danych

$$L_1 = l_0 \cdot d \, \frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi \cdot f \sqrt{l_0 c_0}\, d}{2}}{\frac{2\pi \cdot f \cdot \sqrt{l_0 c_0} \cdot d}{2}} = 50 \cdot 10^{-9} \, \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = 50 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}27 =$$

$$= 63{,}66 \text{ nH}$$

a

$$\frac{L_1}{2} = 31{,}83 \text{ nH},$$

oraz

$$C_0 = c_0 \cdot d \cdot \frac{\sin 2\pi f \sqrt{l_0 \cdot c_0} \cdot d}{2\pi \cdot f \sqrt{l_0 c_0}\, d} = 5 \cdot 10^{-12} \, \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 5 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}637 = 3{,}18 \text{ pF}.$$

Równania elementów czwórnika kształtu ⊓ równoważnego linii bez strat (równanie (5)) przyjmą postać

$$Z_0 = R_1 \cdot \operatorname{sh} j\beta \cdot d = jR_1 \sin\omega \cdot \sqrt{l_0 c_0} \cdot d = j\omega \cdot R_1 \, \frac{\sin\omega \cdot \sqrt{l_0 c_0} \cdot d}{\omega} \tag{5'}$$

oraz

$$Y_1 = \frac{1}{R_1}\ \mathrm{thj}\ \frac{\beta\cdot d}{2} = j\cdot\frac{1}{R_1}\cdot \mathrm{tg}\ \frac{\omega\cdot\sqrt{l_oc_o}\cdot d}{2} =$$

$$= j\omega\cdot\frac{1}{R_1}\cdot\frac{\mathrm{tg}\ \dfrac{\omega\sqrt{l_oc_o}\ d}{2}}{\omega}$$

więc

$$Z_o = j\omega L_o$$

i

$$Y_1 = j\omega\ \frac{C_1}{2},$$

gdzie:

$$L_o = R_1\ \frac{\sin\ \omega\cdot\sqrt{l_oc_o}\ d}{\omega} = R_1\ \sqrt{l_o\cdot c_o}\ d\ \frac{\sin\omega\cdot\sqrt{l_oc_o}\ d}{\omega\cdot\sqrt{l_oc_o}\ d} =$$

$$= l_o\cdot d\cdot\frac{\sin\omega\sqrt{l_oc_o}\ d}{\omega\cdot\sqrt{l_oc_o}\ d}$$

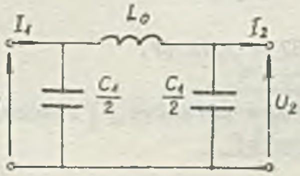
a

$$C_1 = 2\cdot\frac{1}{R_1}\ \frac{\mathrm{tg}\ \dfrac{\omega\sqrt{l_oc_o}\ d}{2}}{\omega} = \frac{1}{R_1}\cdot\sqrt{l_oc_o}\ d\cdot\frac{\mathrm{tg}\ \dfrac{\omega\sqrt{l_oc_o}\ d}{2}}{\dfrac{\omega\cdot\sqrt{l_oc_o}\ d}{2}} =$$

$$= c_od\ \frac{\mathrm{tg}\ \dfrac{\omega\sqrt{l_oc_o}\ d}{2}}{\dfrac{\omega\cdot\sqrt{l_oc_o}\ d}{2}}$$

a więc elementami czwórnika kształtu Π są indukcyjność L_o (w gałęzi podłużnej) i pojemności $\frac{C_1}{2}$ (w gałęziach poprzecznych) (rys. 2.30.1b).

b)



Rys. 2.30.1b

Dla tematowych danych

$$L_o = 50 \cdot 10^{-9} \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 31,83 \text{ nH},$$

oraz

$$C_1 = 5 \cdot 16^{-12} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = 6,37 \text{ pF},$$

a

$$\frac{C_1}{2} = 3,18 \text{ pF}.$$

Sprawdźmy, że rzeczywiście impedancja falowa czwórników kształtów T i Π jest równa 100Ω

$$Z_{we,T} = Z_1 + \frac{(Z_1+Z_1)Z_o}{Z_1+Z_1+Z_o} = j\,100 + \frac{(j\,100+100)(-j\,100)}{100+j\,100-j\,100} = 100\Omega,$$

$$Z_{we,\Pi} = \frac{Z_1 \cdot \left(Z_o + \frac{Z_1 \cdot Z_1}{Z_1 + Z_1}\right)}{Z_1 + Z_o + \frac{Z_1 \cdot Z_1}{Z_1 + Z_1}} = 100\Omega,$$

a napięcie U_2 (jeśli $U_1 = 1$ V) na końcu linii jest równe $1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$ V dla czwórnika kształtu T

$$U_2 = U_1 \frac{Z_o \cdot Z_1}{Z_1(Z_o + Z_1 + Z_1) + Z_o(Z_1 + Z_1)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{(-j100) \cdot 100}{j100(-j \cdot 100+j100+100)+(j100)(j100+100)} =$$

$$= \frac{-j\,10^4}{j\,10^4 - j10^4 + 10^4} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

a dla czwórnika kształtu Π

$$U_2 = U_1 \frac{Z_1 \cdot Z_1}{Z_1 \cdot Z_1 + Z_o(Z_1 + Z_1)} = 1 \frac{-j \cdot 10^4}{-j \cdot 10^4 + 10^4 + j10^4} = e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

<u>Zadanie 2.31</u>

Rozważania nasze ograniczymy do $d \in (0, \lambda)$ i do czwórnika kształtu T. Analogicznie postępując otrzymamy zależności dla czwórnika kształtu Π. Z zależności (4') z zadania 2.30

$$Z_1 = j\,R_1 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} d$$

więc

$$Z_1 = \begin{cases} j\omega \cdot \dfrac{l_o \cdot d}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{\lambda} d)}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot d} & \text{dla } d \in (0, \frac{\lambda}{2}) \\ \dfrac{1}{-j\omega \cdot \frac{c_o \cdot d}{2}} \cdot \dfrac{\frac{\pi}{\lambda} \cdot d}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{\lambda} \cdot d)} & \text{dla } d \in (\frac{\lambda}{2}, \lambda) \end{cases} \tag{1}$$

natomiast

$$Y_o = j\frac{1}{R_1} \cdot \sin\beta \cdot d = j\frac{1}{R_1} \cdot \sin\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot d$$

więc

$$Y_o = \begin{cases} j\omega \cdot c_o \cdot d\,\dfrac{\sin(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot d)}{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d} & \text{dla } d \in (0, \frac{\lambda}{2}) \\ \dfrac{1}{-j\omega}\,\dfrac{\omega}{R_1}\sin(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d) & \text{dla } d \in (\frac{\lambda}{2}, \lambda) \end{cases} \tag{2}$$

Z zależności (1) i (2) wynika, że dla $d \in (0, \frac{\lambda}{2})$ linię długą można zastąpić równoważnym czwórnikiem kształtu T, w którym $Z_1 = j\omega\frac{L_1}{2}$ oraz

$$Y_o = j\omega C_o$$

gdzie

$$L_1 = l_o \cdot d\,\frac{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{\lambda} \cdot d)}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot d}$$

oraz

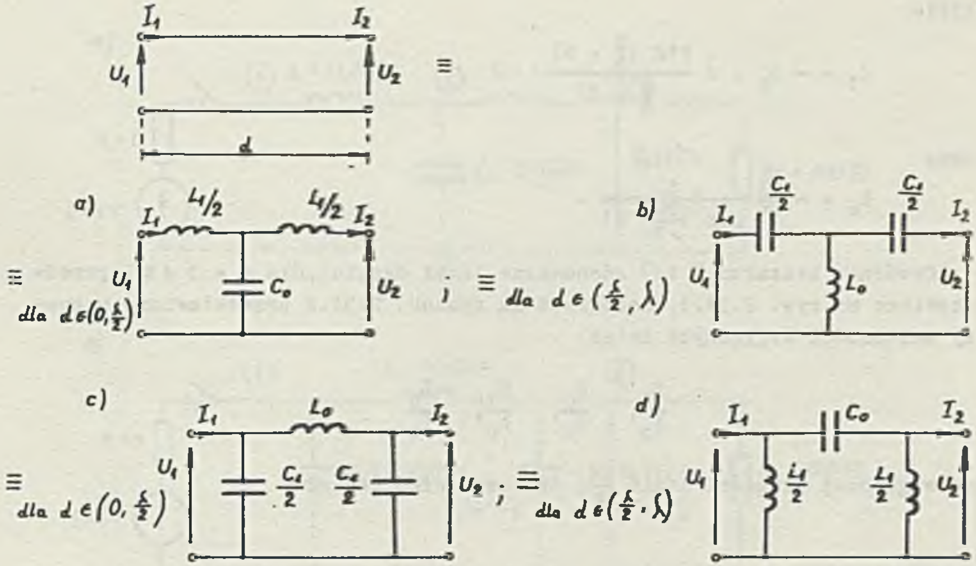
$$C_o = c_o d\,\frac{\sin(\frac{2\pi}{\lambda} d)}{\frac{2\pi}{\lambda} d}$$

natomiast dla $d \in (\frac{\lambda}{2}, \lambda)$

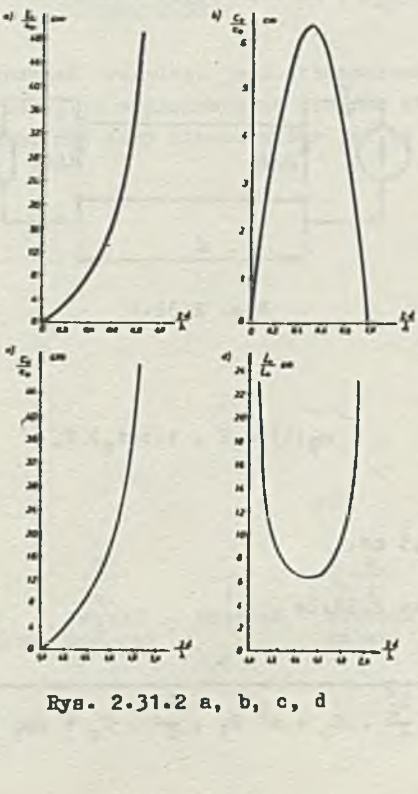
$$Z_1 = \frac{1}{j\omega\frac{C_1}{2}}$$

oraz

$$Y_o = \frac{1}{j\omega L_o},$$



Rys. 2.31.1 a, b, c, d



Rys. 2.31.2 a, b, c, d

gdzie

$$C_1 = - c_o \cdot d \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot d\right)}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot d}$$

oraz

$$L_o = - \frac{R_1}{\omega} \frac{1}{\sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} d\right)} .$$

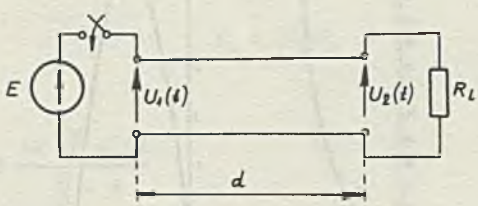
Czwórniki kształtu T i Π równoważne linii długiej, dla $d = 0 \div \lambda$, przedstawiono na rys. 2.31.1, natomiast na rysunku 2.31.2 przedstawiono wykresy zależności względnych zmian

$$\frac{L_1}{l_o}, \quad \frac{C_o}{c_o}, \quad \frac{C_1}{c_o}, \quad \frac{L_o}{l_o}$$

od względnej długości linii $\frac{2d}{\lambda}$, dla czwórnika kształtu T.

Zadanie 2.32

Porównajmy przebieg czasowy napięcia $u_2(t)$ na wyjściu linii (rys. 2.32.1) z napięciem $u_2(t)$ na impedancji obciążenia obwodów z rys. 2.32.2a.



Rys. 2.32.1

Dla linii

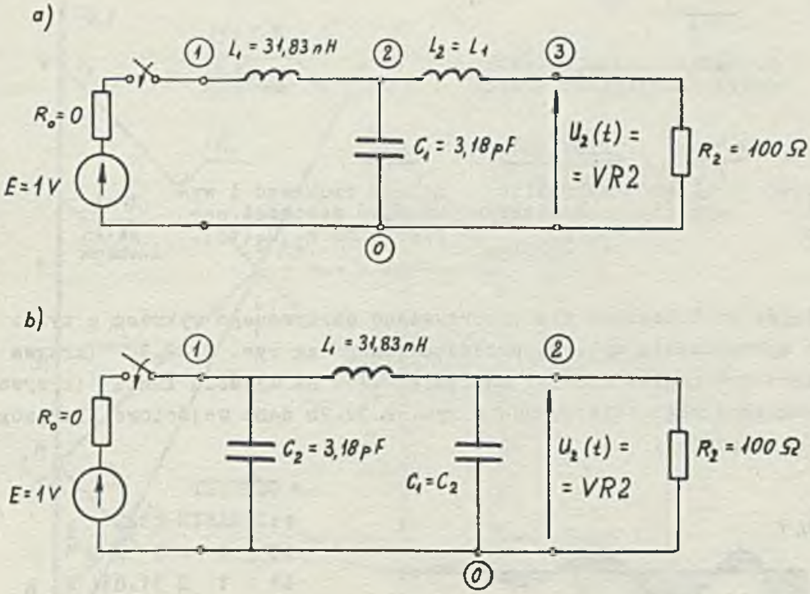
$$u_2(t) = E \cdot 1(t - t_o) \text{ V},$$

gdzie

$$t_o = \frac{d}{v} = 0{,}5 \text{ ns}.$$

Dla obwodu z rysunku 2.32.2a

$$U_2(s) = \frac{E}{s} \frac{R_1}{s^3 \cdot \frac{L_1^2}{4} \cdot C_o + s^2 R_1 \cdot \frac{L_1}{2} \cdot C_o + sL_1 + R_1}$$



Rys. 2.32.2

i otrzymanie czasowej postaci przebiegu jest czasochłonne. Obliczymy więc przebieg czasowy napięcia $u_2(t)$ wykorzystując program NAP [14].
Dane wejściowe do programu NAP przy oznaczeniach jak na rys. 2.32.2a mają postać:

```
* CIRCUIT
* :ZADANIE-2321
RO 1 0 0 E  1
L1 1 2 31.83  N
L2 2 3 31.83  N
C1 2 0  3.18  P
R2 3 0  100
* TIME 0 5   NS
* TR*PPLOT(50)VR2
* RUN
```

gdzie:

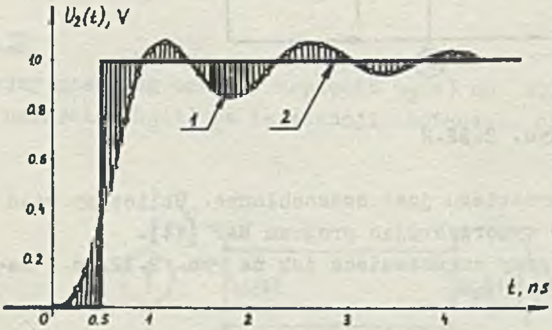
$\underbrace{\text{RO}}_{\text{element}}\quad \underbrace{1}_{\text{węzeł początkowy}}\quad \underbrace{0}_{\text{węzeł końcowy}}\quad \underbrace{0}_{\text{wartość}}\quad \underbrace{\text{E}}_{\text{element gałęzi}}\quad \underbrace{1}_{\text{wartość}}$

```
*TIME    0  5   NS
       przedział czasu, w którym
       należy analizować obwód

*TR          *P          PLOT(50)         VR2
analizować   drukować    wykreślić        należy drukować i wy-
stan nie-    wyniki      charaktery-      kreślić wartości na-
ustalony                 stykę            pięcia na R2(U2(t)).
                         50 punktów
```

Ze względów technicznych nie wykorzystano otrzymanego wykresu a tylko wyniki do sporządzenia wykresu przedstawionego na rys. 2.32.3 (krzywa 1). Na rysunku tym naniesiono też napięcie $U_2(t)$ na wyjściu linii (krzywa 2) i zakreskowano błąd. Dla obwodu z rys. 2.32.2b dane wejściowe dla programu NAP mają postać:

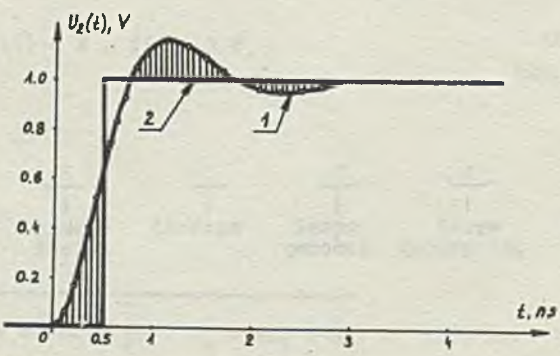
```
* CIRCUIT
*:ZADANIE-2322
RO   1  0  0     E  1
L1   1  2  31.83 N
C1   2  0  3.18  P
C2   1  0  3.18  P
R2   2  0  100
* TIME  0  5NS
* TR * PPLOT(50)  VR2
* RUN
```



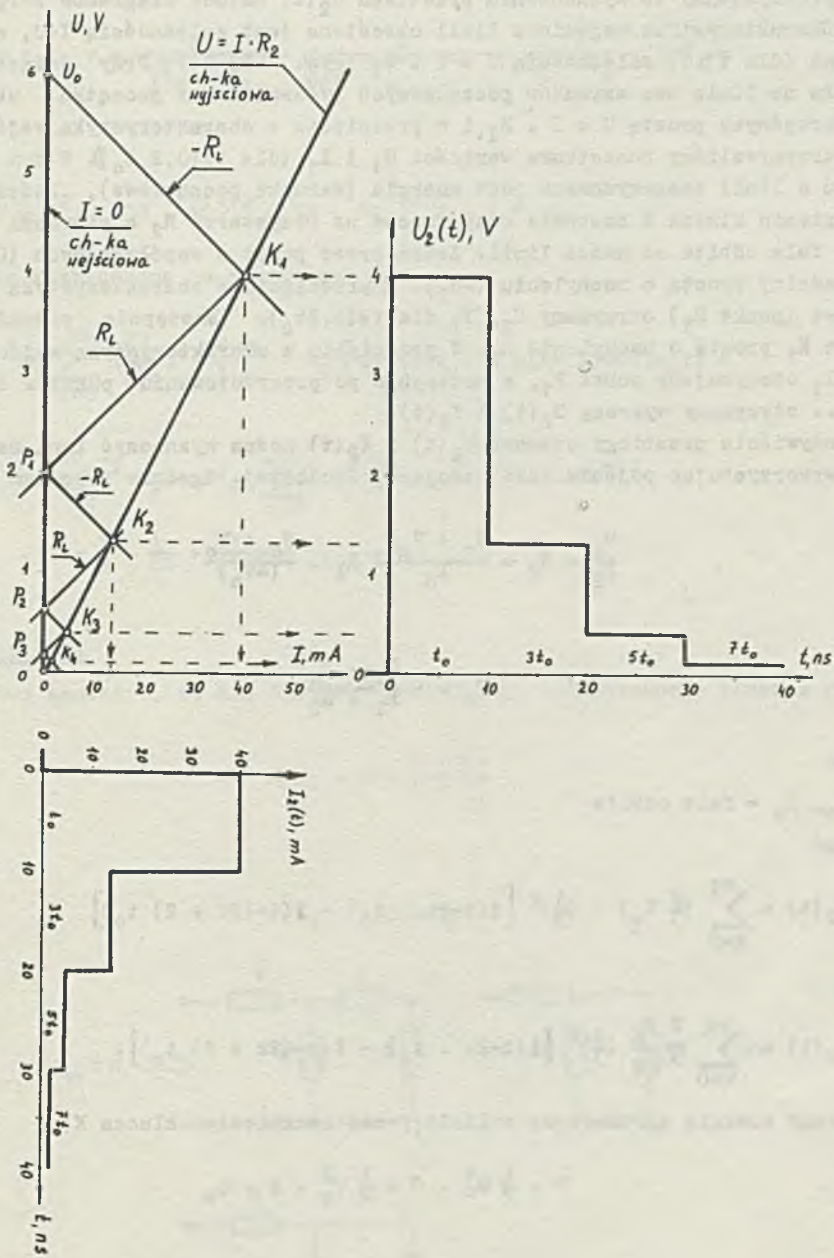
Rys. 2.32.3

Otrzymane wyniki wykorzystano do sporządzenia wykresu przedstawionego na rys.2.32.4 (krzywa 1). Na rysunku tym zakreskowano też błąd.

Zauważmy, że obwody z rys. 2.32.2a i b równoważne linii (i sobie) dla $f = 5 \cdot 10^8$ Hz nie są równoważne linii (i sobie) przy pobudzeniu napięciem stałym.



Rys. 2.32.4


U, V
U = I · R₂
ch-ka wyjściowa
U₀
-R_L
I = 0
ch-ka wejściowa
K₁
R_L
P₁
-R_L
K₂
R_L
P₂
K₃
P₃
K₄
I, mA
U₂(t), V
t₀
3t₀
5t₀
7t₀
t, ns
I₂(t), mA
t, ns

Rys. 2.33.1

Zadanie 2.33

Wykorzystajmy do wyznaczenia przebiegu $U_2(t)$ metodę diagramów Bergerona. Charakterystyka wejściowa linii określona jest zależnością $I=0$, a wyjściowa (dla $t \geqslant 0$) zależnością $U = I \cdot R_2$ (rys. 2.33.1). Przy załączaniu źródła na linię bez warunków początkowych rysowaliśmy z początku układu współrzędnych prostą $U = I \cdot R_1$ i w przecięciu z charakterystyką wejściową otrzymywaliśmy początkowe wartości U_1 i I_1 (dla $t \in (0, 2\,t_0)$). W tym przypadku w linii zmagazynowana jest energia (warunki początkowe), która po zamknięciu klucza K zostanie rozproszona na rezystorze R_2 a pierwsza będzie fala odbita od końca linii. Zatem przez punkt o współrzędnych $(U_0, 0)$ prowadzimy prostą o nachyleniu $(-R_1)$. W przecięciu z charakterystyką wyjściową (punkt K_1) otrzymamy U_2, I_2 dla $t \in (0, 2t_0)$. Następnie prowadzimy przez K_1 prostą o nachyleniu R_1. W przecięciu z charakterystyką wejściową U_1, I_1 otrzymujemy punkt P_1, a następnie po przerzutowaniu punktów K_1, $K_2, \ldots$ otrzymamy wykresy $U_2(t)$ i $I_2(t)$.

Oczywiście przebiegi czasowe $U_2(t)$ i $I_2(t)$ można wyznaczyć inną metodą, np. wykorzystując pojęcie fali padającej i odbitej. Zgodnie z prawem Ohma

$$\frac{U_2}{I_2} = R_2 = \frac{U_0 + V_0}{I_0} = R_1 \cdot \frac{U_0 + V_0}{(-V_0)}$$

stąd

$$V_0 = -\frac{R_1 \cdot U_0}{R_1 + R_2},$$

gdzie

V_0, I_0 - fale odbite

a stąd

$$U_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} U_0\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \left[\mathbf{1}(t-2k \cdot t_0) - \mathbf{1}(t-(2k+2)\,t_0)\right]$$

oraz

$$I_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\,U_0}{3\,R_2} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left[\mathbf{1}(t-2k \cdot t_0) - \mathbf{1}(t-(2k+2)\,t_0)\right].$$

Obliczmy energię zgromadzoną w linii (przed zamknięciem klucza K)

$$W = \frac{1}{2} U_0^2 \cdot C = \frac{1}{2} U_0^2 \cdot d \cdot c_0$$

Długość linii

$$d = t_o \cdot v = \frac{t_o}{\sqrt{l_o \cdot c_o}} = \frac{t_o}{\sqrt{R_1^2 \cdot c_o \cdot c_o}} = \frac{t_o}{R_1 \cdot c_o} = 100\ \text{cm}$$

więc

$$W = \frac{1}{2} C^2 \cdot 100 \cdot 10^{-12} = 18 \cdot 10^{-10}\ \text{J} = 1,8\ \text{nJ},$$

Energia rozproszona na rezystorze R_2

$$W_{R_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2U_o}{3R_2}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \cdot R_2 \left[\mathbf{1}(t-2kt_o) - \mathbf{1}(t-(2k+2)t_o)\right] =$$

$$= \left(\frac{2U_o}{3R_2}\right)^2 R_2 \cdot 2t_o \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k} = \ldots = 16 \cdot 10^{-10} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{6561} + \ldots\right) = W.$$

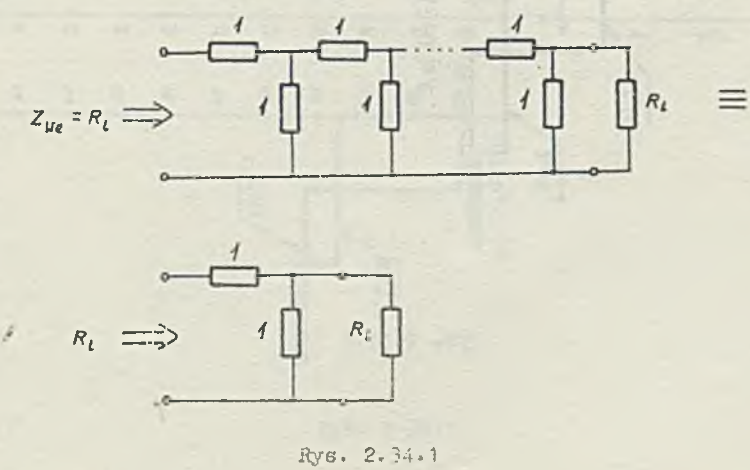
<u>Zadanie 2.34</u>

Łatwo zauważyć, że dla obwodu z rys. 2.34.1 (równoważnego linii z rys. 2.34)

$$R_l = 1 + \frac{1 \cdot R_l}{1 + R_l}$$

stąd

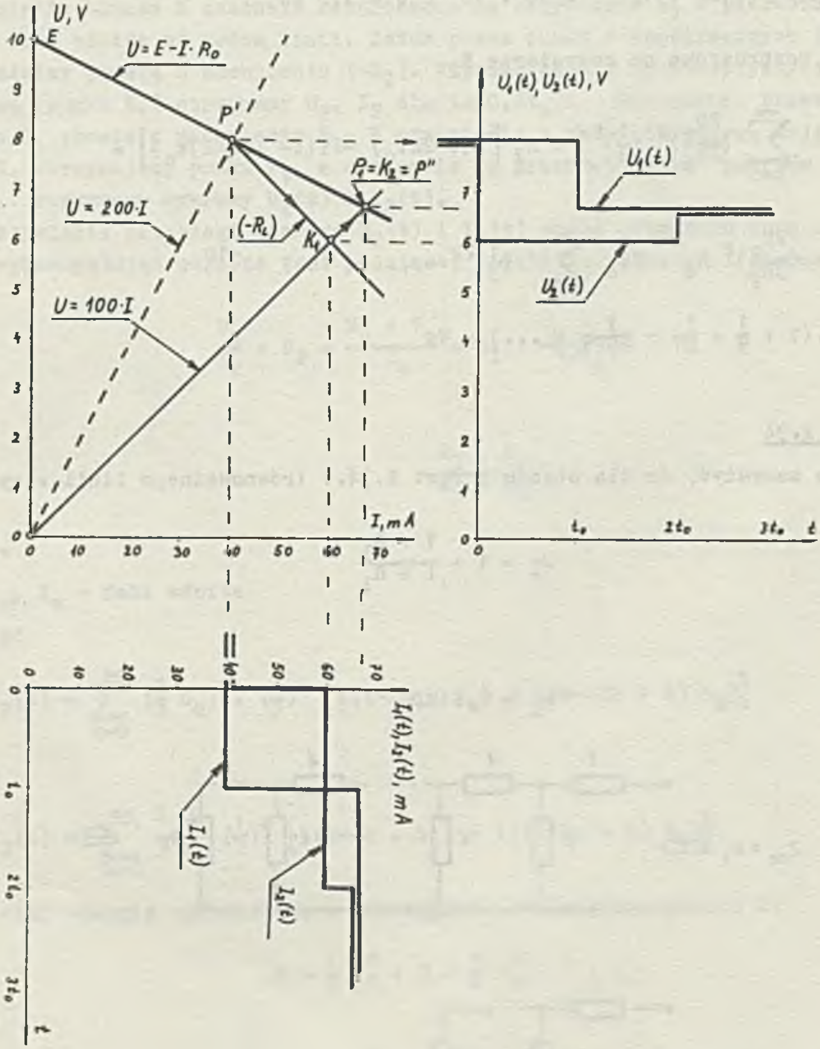
$$R_l = 1,618\Omega$$



Rys. 2.34.1

Zadanie 2.35

Zadanie to można rozwiązać metodą wykreślną Bergerona (rys. 2.35.1). Ponieważ przed zamknięciem klucza K w linii był stan ustalony, więc punkt pracy obwodu P' leży na przecięciu charakterystyki wejściowej - $U = E - I.R_c$ i wyjściowej (linia przerywana) - $U = 200$ I.



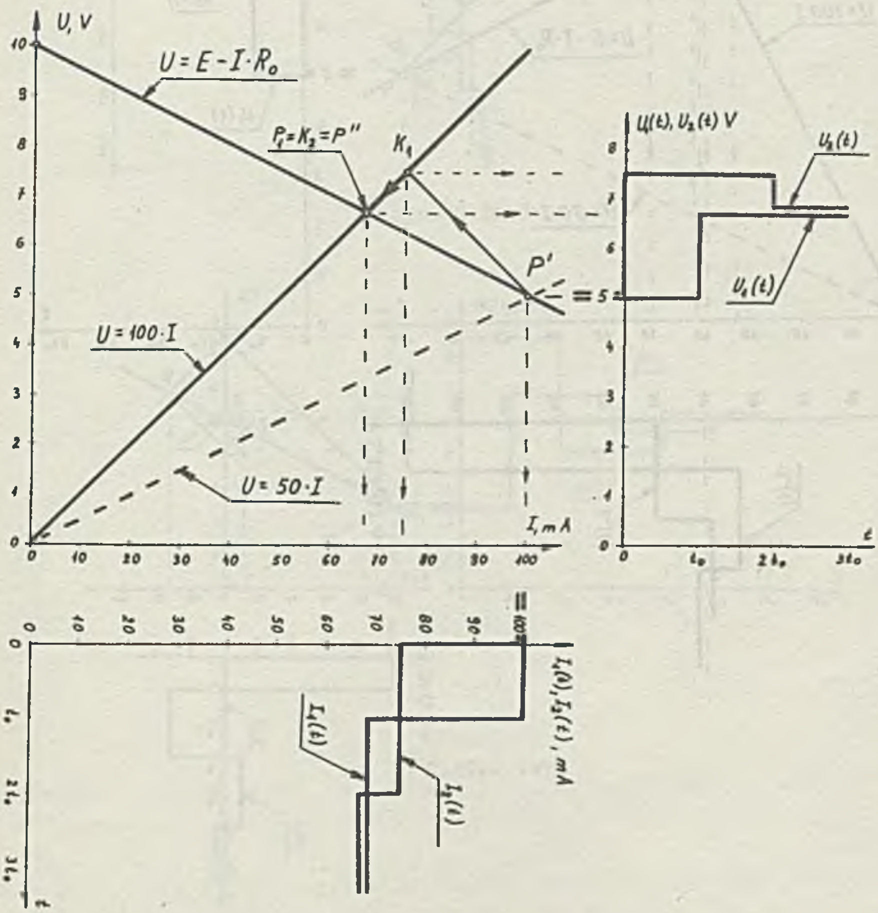
Rys. 2.35.1

Po zamknięciu klucza zmieni się charakterystyka wyjściowa na $U = 100I$, a fala zaburzeniowa przemieszcza się od końca linii do początku. Aby wyznaczyć wartości amplitudy fali napięcia i prądu w chwili $t=0$ prowadzimy przez P' prostą o nachyleniu $(-R_1)$ do przecięcia z charakterystyką wyjściową (nową). Otrzymujemy punkt K_1, który przerzutowujemy na wykresy $U=U(t)$ i $I=I(t)$. Ponieważ $R_2' = \frac{R_2}{2} = R_1$ fale odbite od początku linii $(R_0 \neq R_1)$ nie odbiją się już od końca linii, stąd punkt $P_1 = K_2 = P''$.

Zadanie 2.36

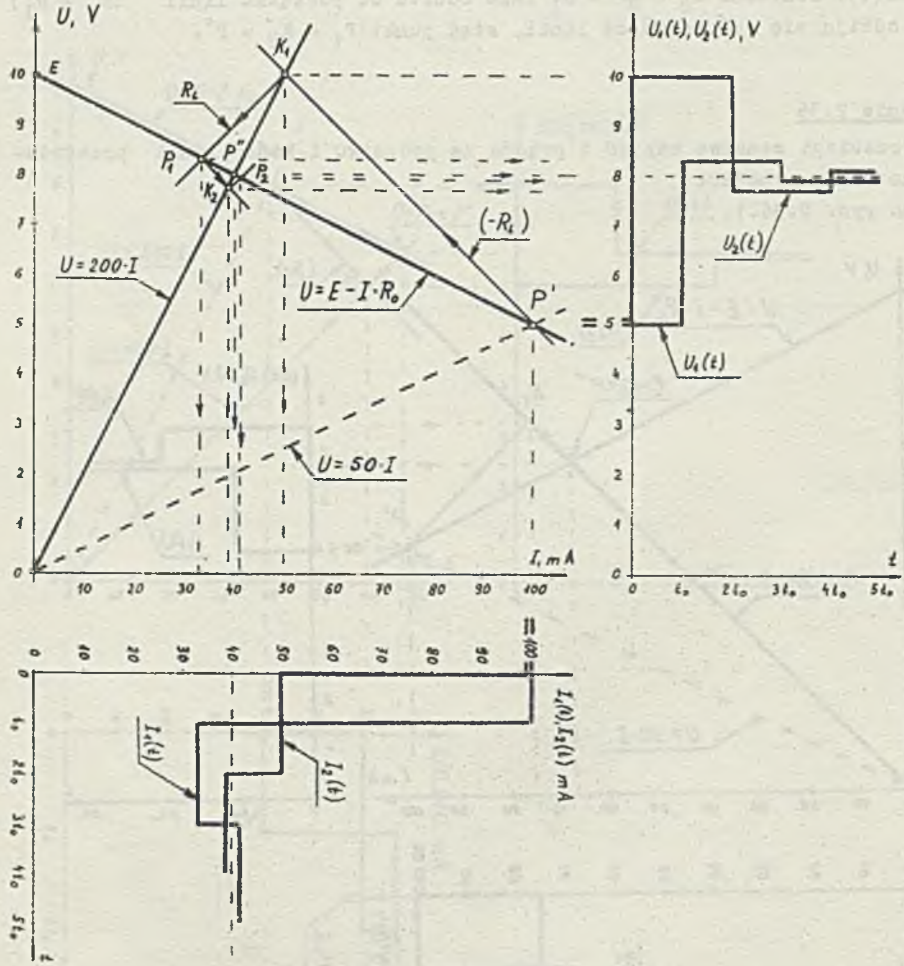
Przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii przedstawiono dla przypadku:

a) na rys. 2.36.1,

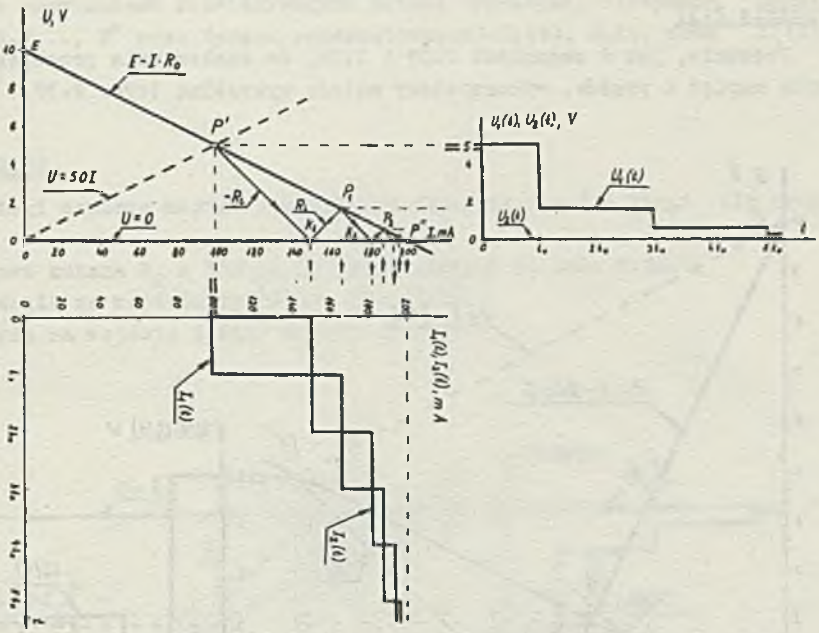


Rys. 2.36.1

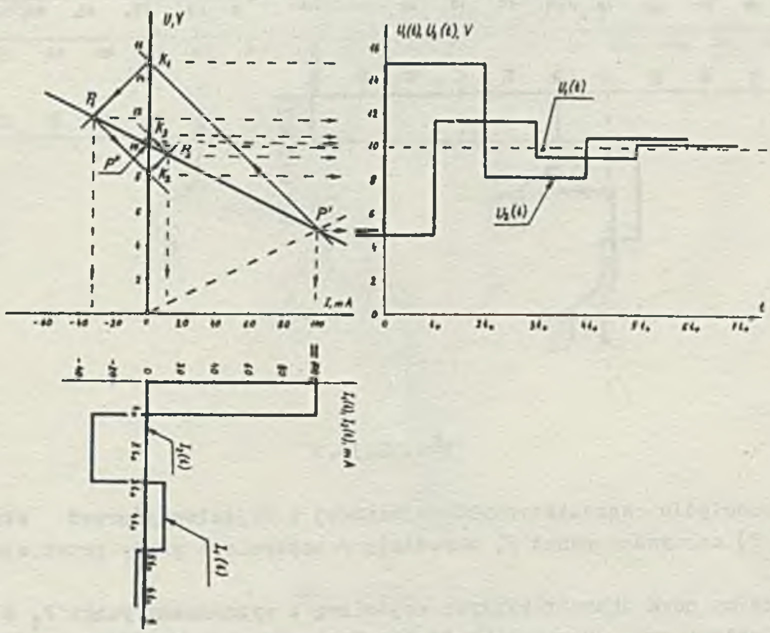
b) na rys. 2.36.2,
c) na rys. 2.36.3,
d) na rys. 2.36.4.



Rys. 2.36.2



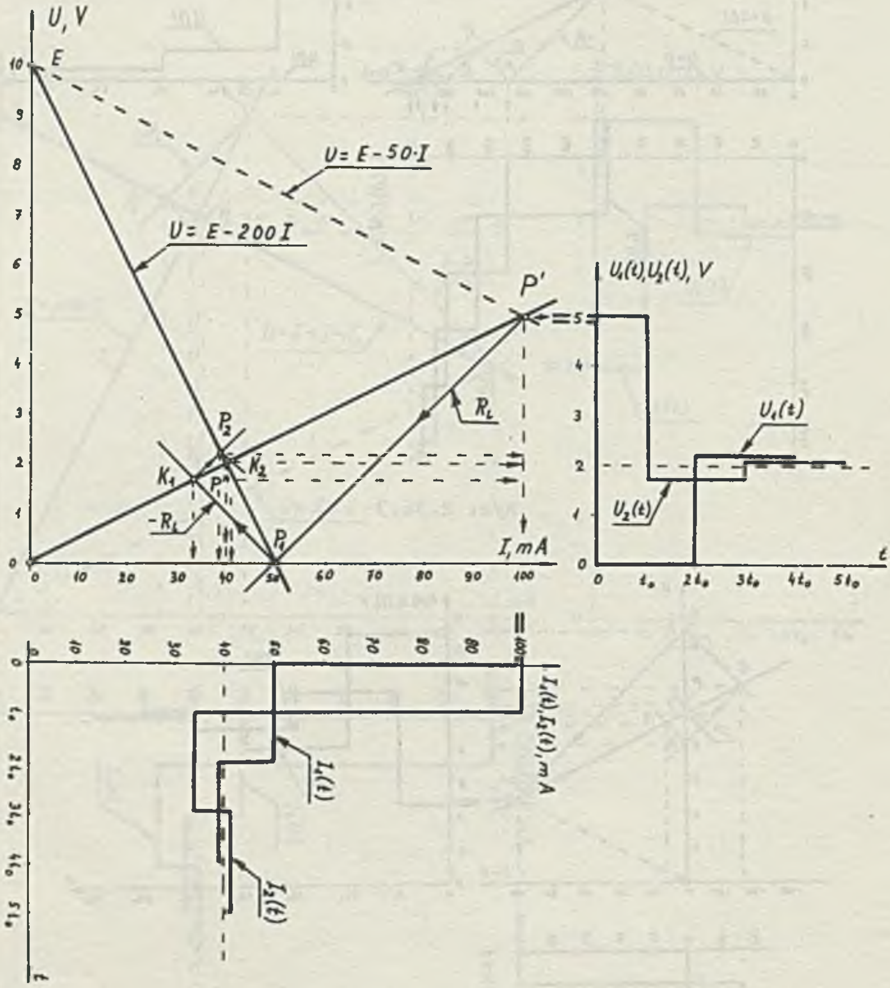
Rys. 2.36.3



Rys. 2.36.4

Zadanie 2.37

Podobnie, jak w zadaniach 2.35 i 2.36, do znalezienia przebiegów czasowych napięć i prądów, wykorzystamy metodę wykreślną (rys. 2.37.1).



Rys. 2.37.1

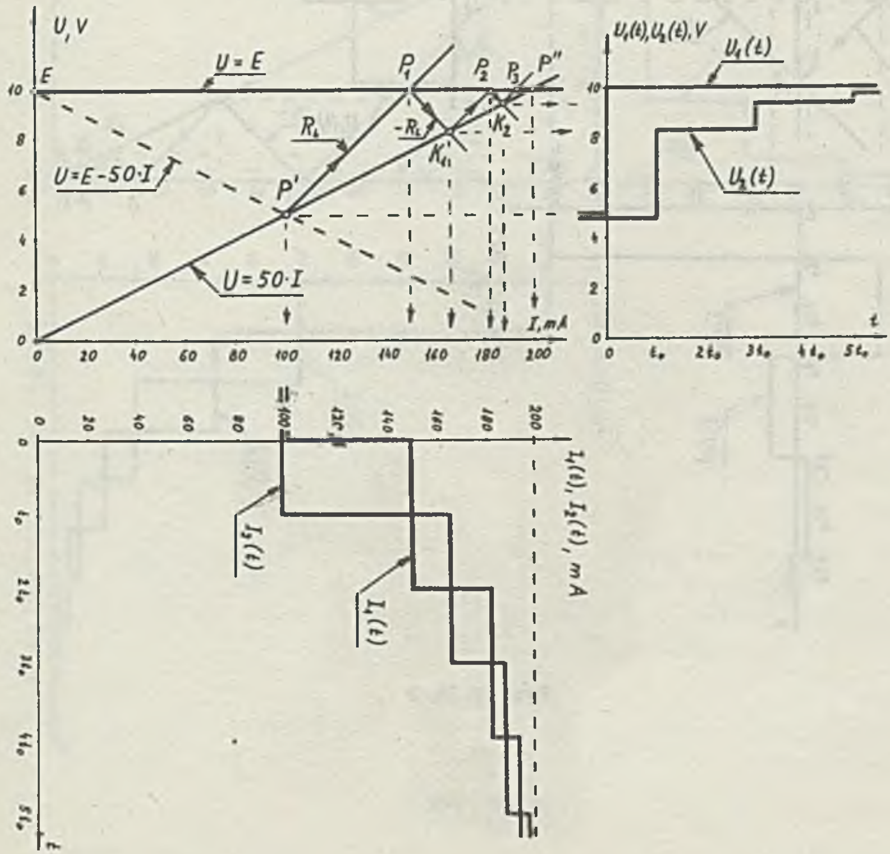
W przecięciu charakterystyki wejściowej i wyjściowej (przed otwarciem klucza K) otrzymamy punkt P', określający napięcia i prądy przed otwarciem klucza.

Nanosimy nową charakterystykę wejściową i wyznaczamy punkt P_1 a z niego napięcie i prąd na początku linii. Postępując analogicznie, jak w poprzednich przykładach rozwiązywanych metodą wykreślną, otrzymamy punkty K_1, P_2, K_2,..., P" oraz (przez przerzutowanie) $U_1(t)$, $U_2(t)$ oraz $I_1(t)$, $I_2(t)$.

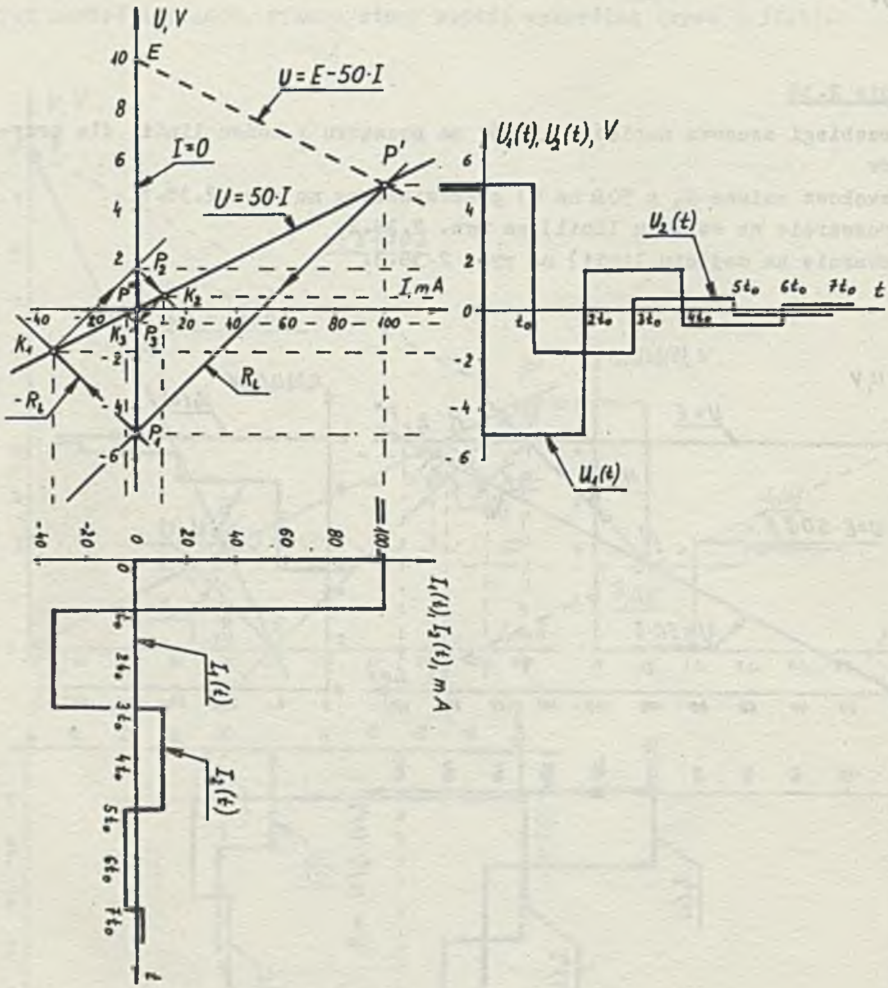
Zadanie 2.38

Przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii dla przypadków

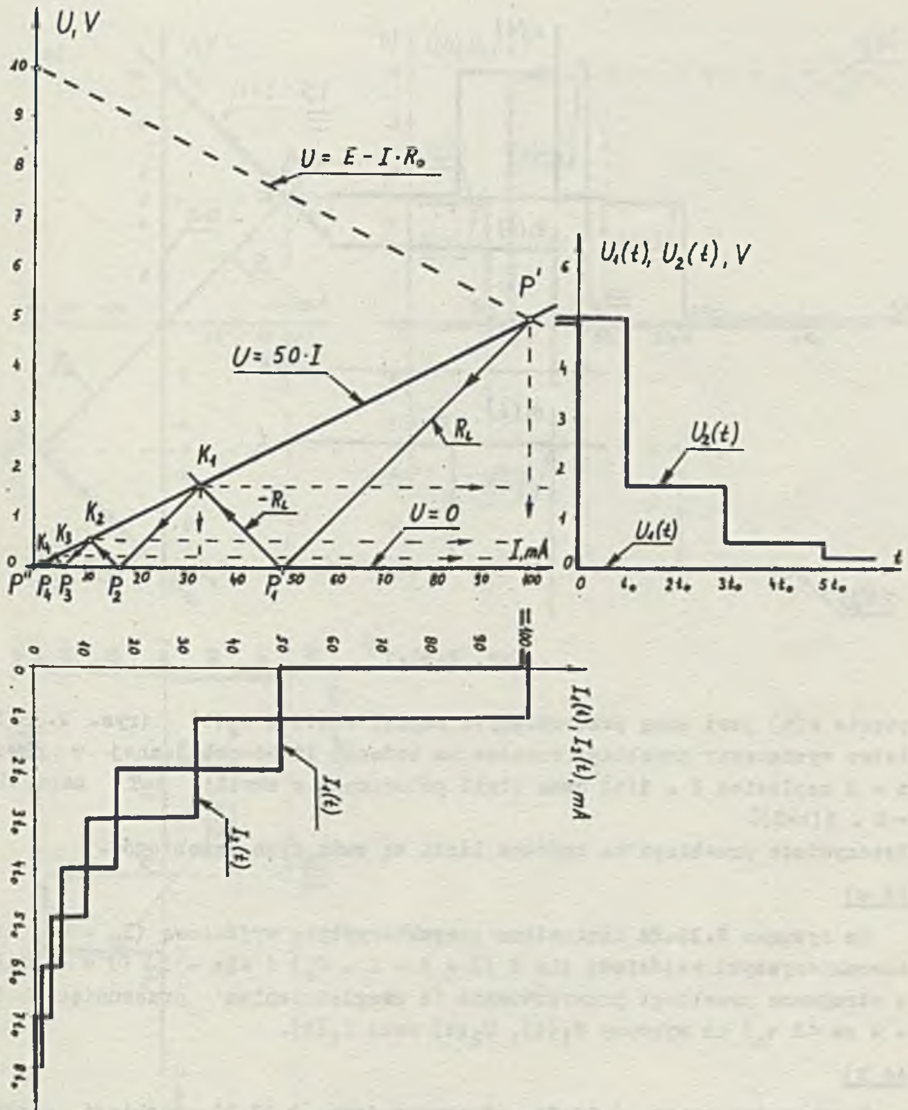
a) (skokowa zmiana R_2 z 50Ω na 0) przedstawiono na rys. 2.38.1,
b) (rozwarcie na wejściu linii) na rys. 2.38.2,
c) (zwarcie na wejściu linii) na rys. 2.38.3.



Rys. 2.38.1


U, V
E
U = E-50·I
I=0
U = 50·I
P'
P₂
P"
K₂
K₁
K₃
P₃
P₁
I, mA
R_L
-R_L
U₁(t), U₂(t), V
U₂(t)
U₁(t)
t
I₁(t), I₂(t), mA
I₁(t)
I₂(t)

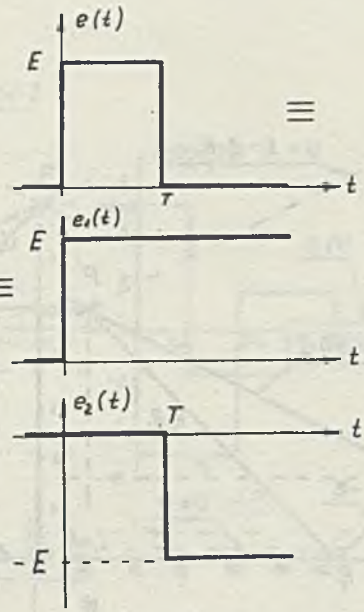
Rys. 2.38.2



Rys. 2.38.3

Zadanie 2.39

Do wyznaczenia przebiegów czasowych na końcach linii bezstratnej można również wykorzystać metodę wykreślną Bergerona; wystarczy zauważyć, że na-



Rys. 2.39.1

pięcie e(t) jest sumą przesuniętych napięć $e_1(t)$ i $e_2(t)$ (rys. 2.39.1). Łatwo wyznaczymy przebiegi czasowe na końcach linii pobudzanej w chwili $t = 0$ napięciem $E \cdot \mathbf{1}(t)$ oraz linii pobudzonej w chwili $t=T$ napięciem $-E \cdot \mathbf{1}(t-T)$.

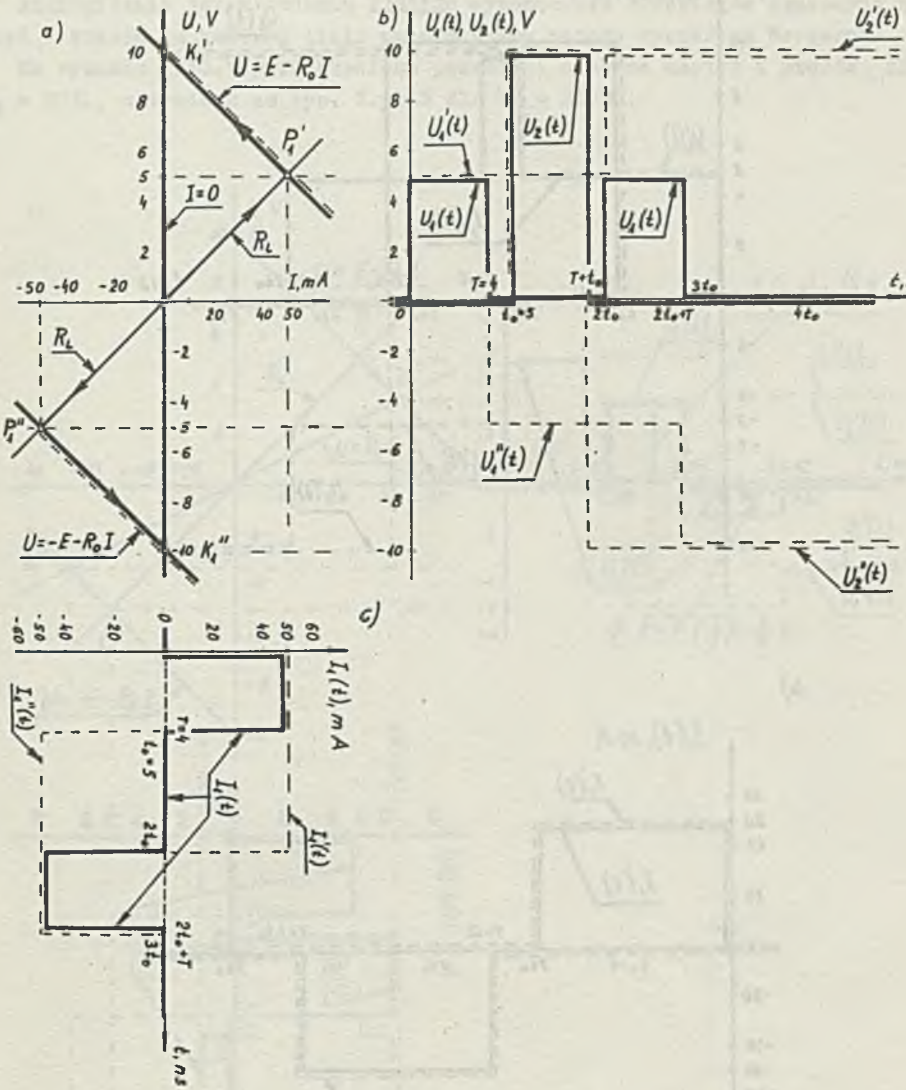
Rzeczywiste przebiegi na końcach linii są sumą tych przebiegów.

Ad a)

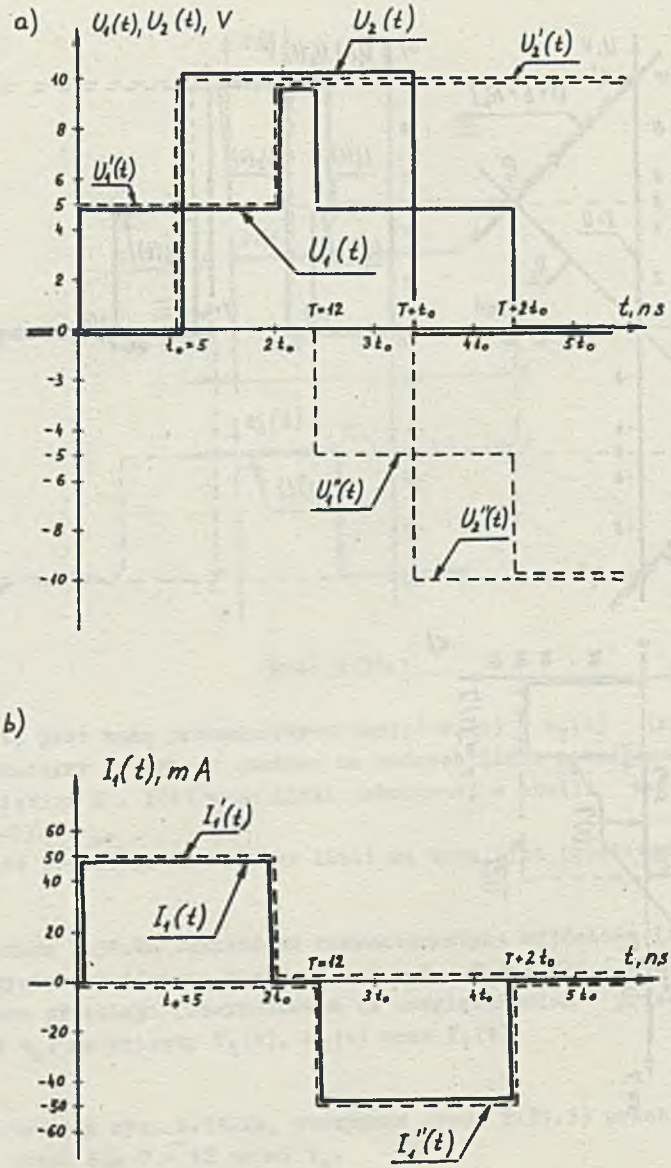
Na rysunku 2.39.2a naniesiono charakterystykę wyjściową ($I_2 = 0$) oraz charakterystyki wejściowe dla E ($U = E - I \cdot R_o$) i dla - E ($U = -E-I.R_o$) a otrzymane przebiegi przerzutowano (z uwzględnieniem przesunięcia $T = 4$ ns $< 2\ t_o$) na wykresy $U_1(t)$, $U_2(t)$ oraz $I_1(t)$.

Ad b)

Wykorzystując rys. 2.39.2a, otrzymano (rys. 2.39.3) przebiegi czasowe napięć i prądu dla $T = 12$ ns $> 2\ t_o$.


a)
U, V
K_1'
$U=E-R_0I$
P_1'
I=0
R_L
I, mA
P_1''
$U=-E-R_0I$
-10 K_1''
b)
$U_1(t), U_2(t), V$
$U_2'(t)$
$U_1'(t)$
$U_2(t)$
$U_1(t)$
T=4
$T+t_0$
$3t_0$
t, ns
$t_0=5$
$2t_0$
$2t_0+T$
$4t_0$
$U_1''(t)$
$U_2''(t)$
c)
$I_1(t)$, mA
$I_1''(t)$
$I_1'(t)$
t, ns

Rys. 2.39.2

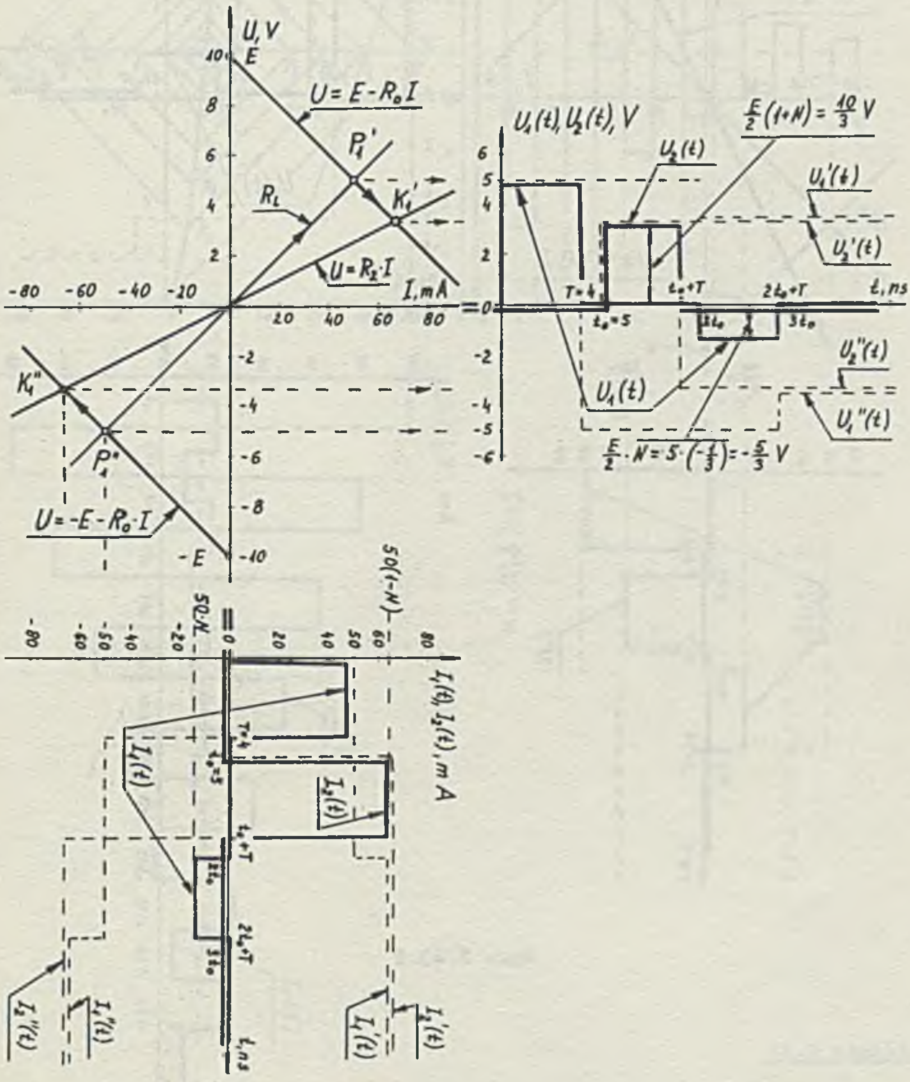

a)
U₁(t), U₂(t), V
U₂(t)
U₂'(t)
U₁'(t)
U₁(t)
T=12
T+t₀
T+2t₀
t, ns
t₀=5
2t₀
3t₀
4t₀
5t₀
U₁''(t)
U₂''(t)
10
8
6
5
4
2
0
-3
-4
-5
-6
-8
-10
b)
I₁(t), mA
I₁'(t)
I₁(t)
I₁''(t)
60
50
40
20
0
-20
-40
-50
-60

Rys. 2.39.3 a i b

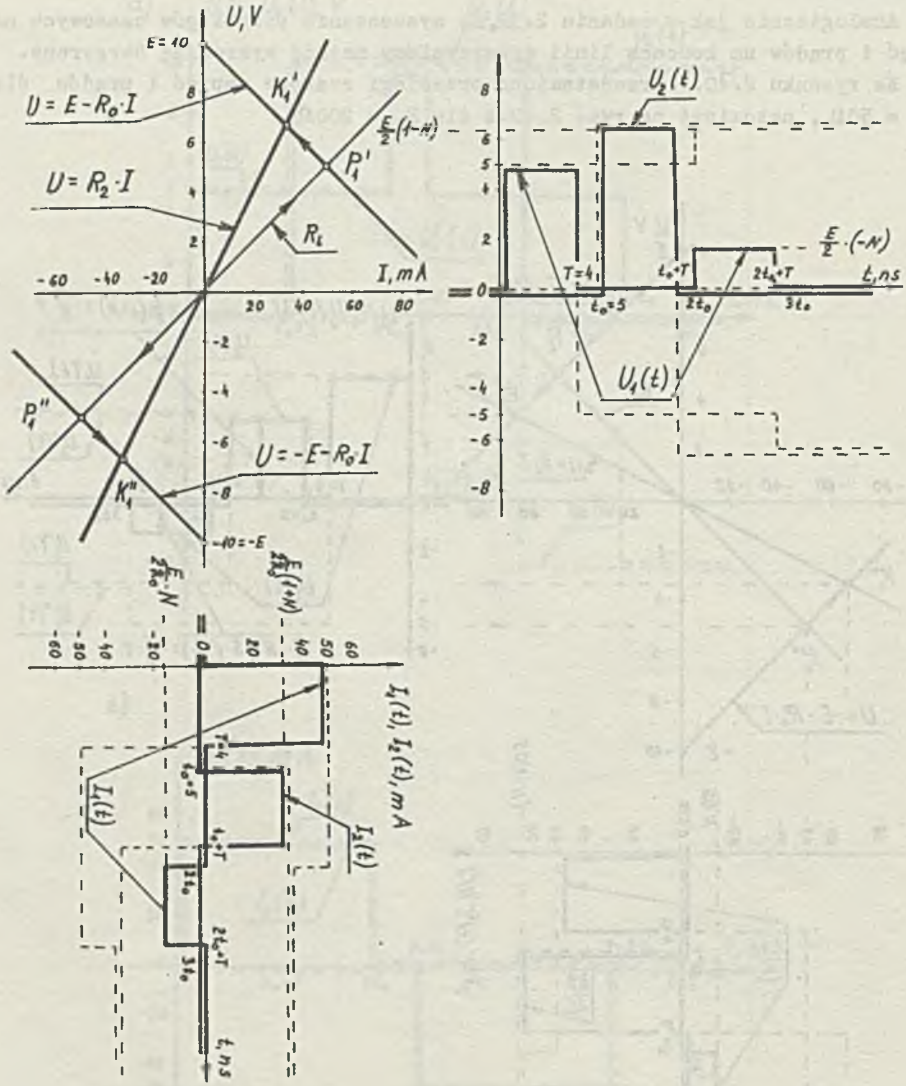
Zadanie 2.40

Analogicznie jak w zadaniu 2.39, do wyznaczenia przebiegów czasowych napięć i prądów na końcach linii wykorzystamy metodę wykreślną Bergerona.

Na rysunku 2.40.1 przedstawiono przebiegi czasowe napięć i prądów dla $R_2 = 50\Omega$, natomiast na rys. 2.40.2 dla $R_2 = 200\Omega$.



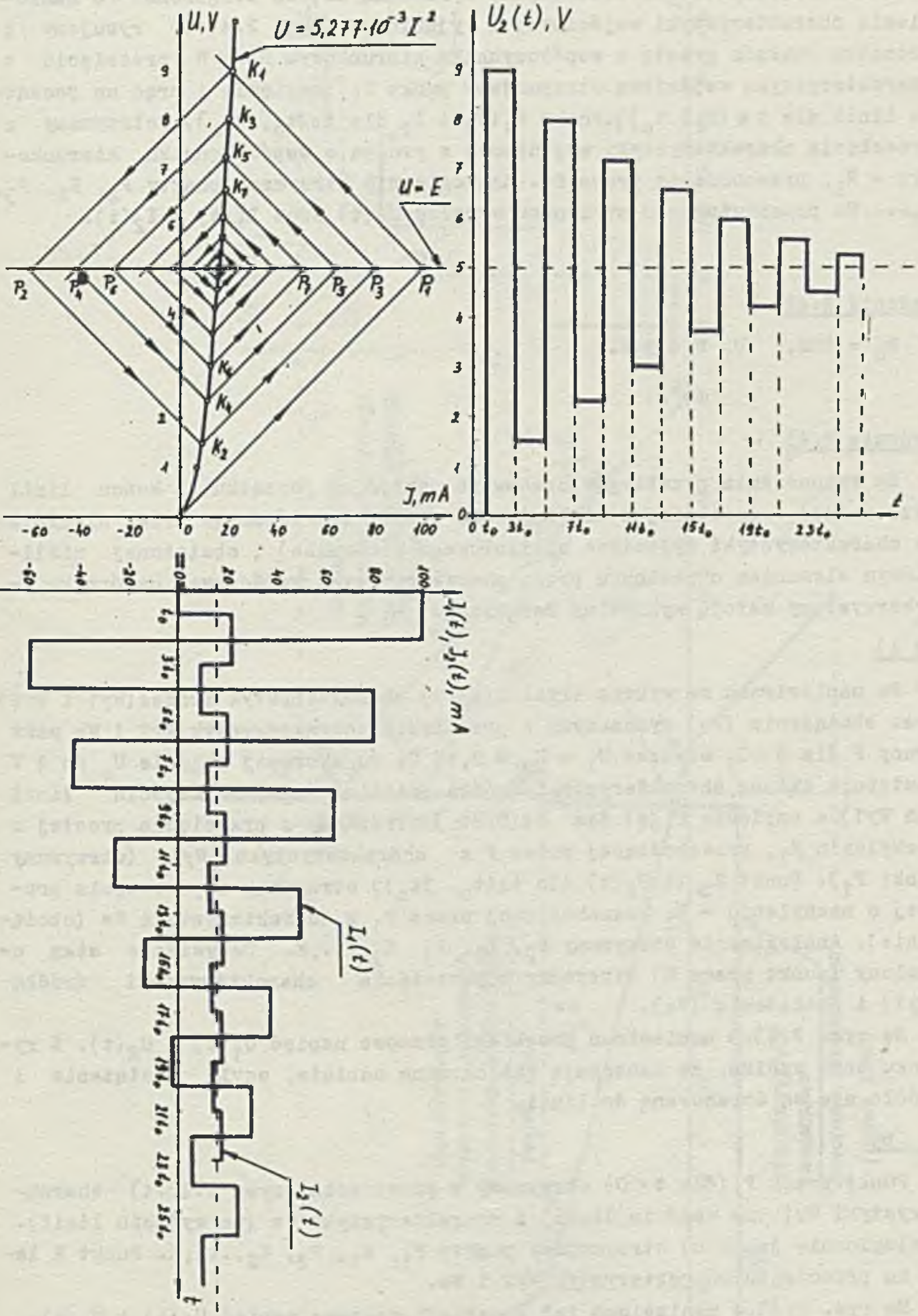
Rys. 2.40.1



Rys. 2.40.2

Zadanie 2.41

Do znalezienia przebiegów czasowych napięć i prądów na początku i końcu linii długiej bezstratnej, załączonej na napięcie stałe i obciążonej



Rys. 2.41.1

nieliniowym rezystorem, zastosujemy wykreślną metodę Bergerona. Po naniesieniu charakterystyki wejściowej i wyjściowej (rys. 2.41.1) rysujemy z początku układu prostą o współczynniku kierunkowym R_1. W przecięciu z charakterystyką wejściową otrzymujemy punkt P_1 (napięcie i prąd na początku linii dla $t \in (0,2\ t_o)$). Punkt K_1 (U_2 i I_2 dla $t \in (t_o,\ 3t_o)$) otrzymamy z przecięcia charakterystyki wyjściowej z prostą o współczynniku kierunkowym $-R_1$, przechodzącą przez P_1. Analogicznie otrzymamy punkty P_2, K_2, P_3, K_3... Po przerzutowaniu otrzymano wykresy $U_2(t)$ oraz $I_1(t)$ i $I_2(t)$.

Zadanie 2.42

$R_o = 50\Omega$, $U_2 \cong 4,3$ V.

Zadanie 2.43

Do wyznaczenia przebiegów czasowych napięć na początku i końcu linii bezstratnej - zasilanej z nieliniowego źródła (określonego przez nieliniowe charakterystyki wyjściowe nieliniowego czwórnika) i obciążonej nieliniowym elementem określonym przez charakterystykę wejściową czwórnika - wykorzystamy metodą wykreślną Bergerona.

Ad a)

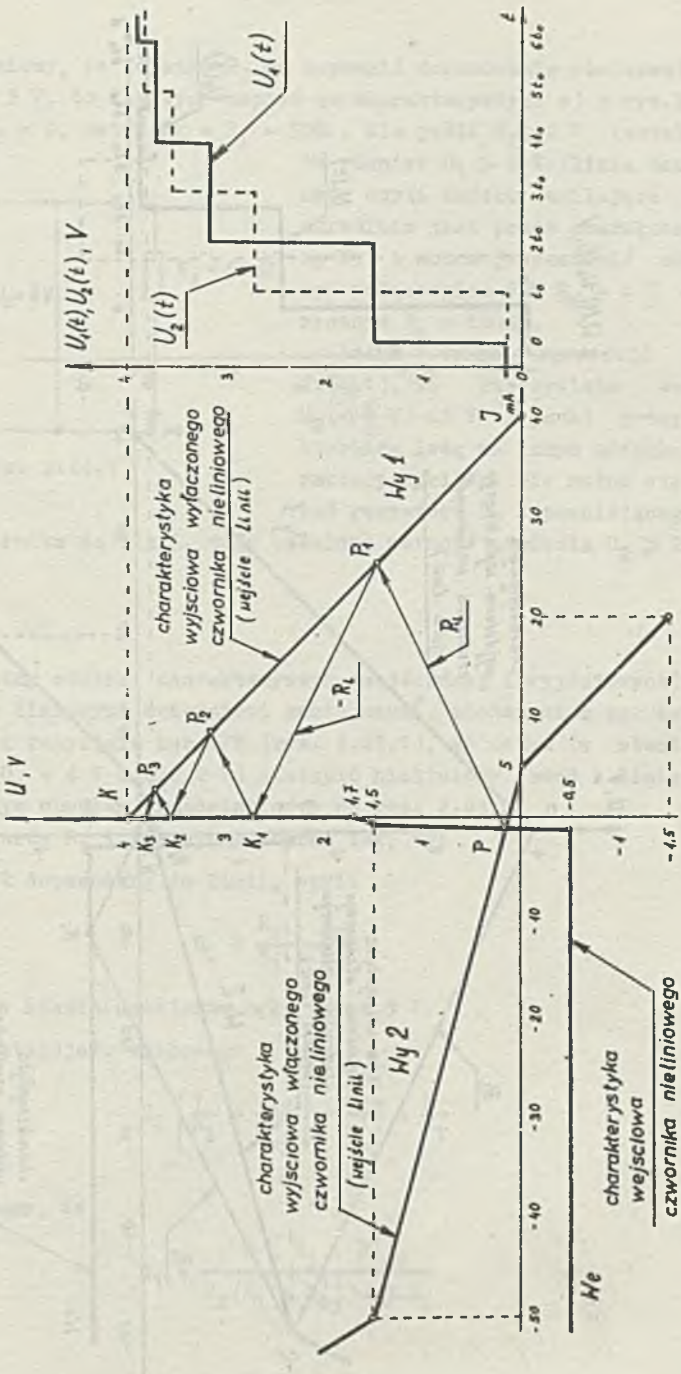
Po naniesieniu na wykres (rys. 2.43.3) charakterystyk źródeł (Wy1 i Wy2) oraz obciążenia (We) wyznaczymy z przecięcia charakterystyk Wy2 i We punkt pracy P dla $t < 0$, wówczas $U_1 = U_2 \cong 0,15$ V. Po skokowej zmianie U_o do 4 V następuje zmiana charakterystyki źródła (nieliniowego) na wejściu linii (na Wy1) a napięcie $U_1(t)$ dla $t \in (0,2t_o)$ otrzymamy z przecięcia prostej o nachyleniu R_1, przechodzącej przez P z charakterystyką Wy1 (otrzymamy punkt P_1). Punkt K_1 (i $U_2(t)$ dla $t \in (t_o,\ 3t_o)$) otrzymamy z przecięcia prostej o nachyleniu $-R_1$ przechodzącej przez P_1 z charakterystyką We (obciążenie). Analogicznie otrzymamy P_2, K_2, P_3, K_3,...,K. Oczywiście stan ustalony (punkt pracy K) otrzymamy z przecięcia charakterystyki źródła (Wy1) i obciążenia (We).

Na rys. 2.43.3 naniesiono przebiegi czasowe napięć $U_1(t)$ i $U_2(t)$. Z rysunku tego wynika, że następują wielokrotne odbicia, czyli obciążenie i źródło nie są dopasowane do linii.

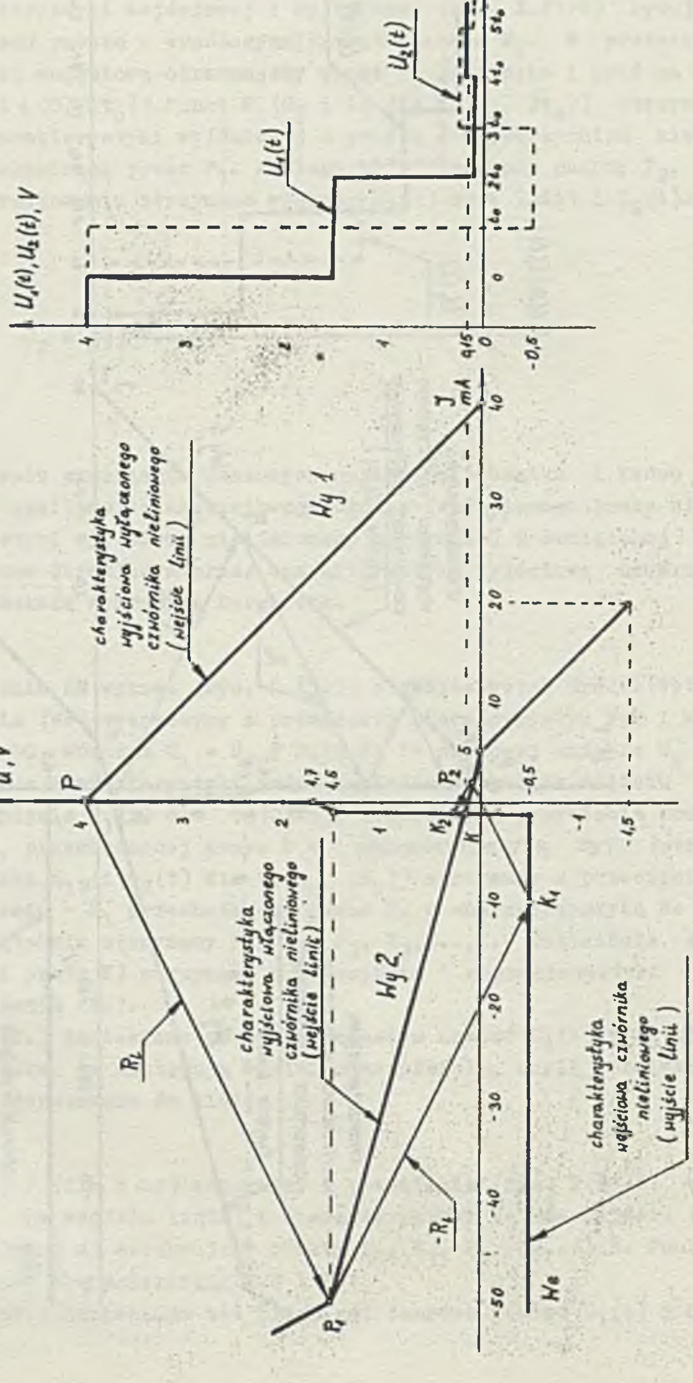
Ad. b)

Punkt pracy P (dla $t < 0$) otrzymamy z przecięcia (rys. 2.43.4) charakterystyki Wy1 (na wejściu linii) i charakterystyki We (na wyjściu linii). Analogicznie jak w a) otrzymujemy punkty P_1, K_1, P_2, K_2,...,K. Punkt K leży na przecięciu charakterystyk Wy2 i We.

Na rys. 2.43.4 naniesiono też przebiegi czasowe napięć $U_1(t)$ i $U_2(t)$.


U, V
K
P_3
P_2
P_1
K_3
K_2
K_1
P
J_{mA}
Hy 1
Hy 2
He
R_L
$-R_L$
charakterystyka
wyjsciowa wyłaczonego
czwornika nieliniowego
(wejście linii)
charakterystyka
wyjsciowa włączonego
czwornika nieliniowego
(wejście linii)
charakterystyka
wejsciowa
czwornika nieliniowego
(wyjście linii)
$U_1(t), U_2(t), V$
$U_1(t)$
$U_2(t)$
t

Rys. 2.43.3

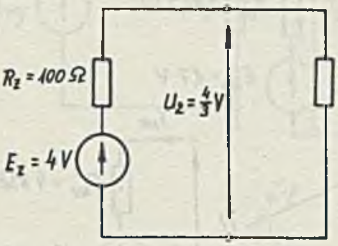


$U_1(t), U_2(t), V$
$U_1(t)$
$U_2(t)$
U, V
I mA
P
P_1
P_2
K
K_1
K_2
R_L
$-R_L$
Wy 1
Wy 2
We
charakterystyka wyjściowa wyłączonego czwórnika nieliniowego (wejście linii)
charakterystyka wyjściowa włączonego czwórnika nieliniowego (wejście linii)
charakterystyka wejściowa czwórnika nieliniowego (wyjście linii)

Rys. 2.43.4

Zadanie 2.44

Jeśli przyjmiemy, że dodanie R_2 ma zapewnić dopasowanie obciążenia do linii dla $U_2 \geqslant 2$ V, to dla tych napięć (z charakterystyki a) z rys.2.43.2 z zad. 2.43) $I_2 = 0$, zatem $R_2 = R_1 = 50\Omega$. Ale jeśli $U_2 \geqslant 2$ V (ustalone), to również $U_1 \geqslant 2$ V (linia bezstratna), czyli źródło zasilające linię określone jest przez charakterystykę Wy1 i można je zastąpić szeregowym połączeniem SEM $E_z = 4$ V i rezystora $R_z = 100\Omega$.



Rys. 2.44.1

Łatwo teraz sprawdzić (rys. 2.44.1), że rzeczywista wartość $U_2 (= \frac{4}{3}\text{ V}) < 2$ V i punkt pracy odbiornika leżą na innym odcinku charakterystyki We. Nie można więc dobrać rezystora R_2 zapewniającego dopasowanie odbiornika do linii, żeby ustalona wartość napięcia $U_2 \geqslant 2$ V.

Zadanie 2.45

Jeśli zastąpimy odcinki charakterystyk (wejściowej i wyjściowych) odpowiadającymi im liniowymi schematami zastępczymi, złożonymi z szeregowego połączenia SEM i rezystora lub SPM (rys. 2.45.1), to można (w stanie ustalonym, przy $U_0 = 4$ V a $U_2 > 2$ V) zastąpić nieliniowy obwód z linią równoważnym liniowym obwodem przedstawionym na rys. 2.45.2.
Wartości rezystorów R_1 i R_2 należy dobrać tak, by:

1) odbiornik był dopasowany do linii, czyli

$$R_1 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \tag{1}$$

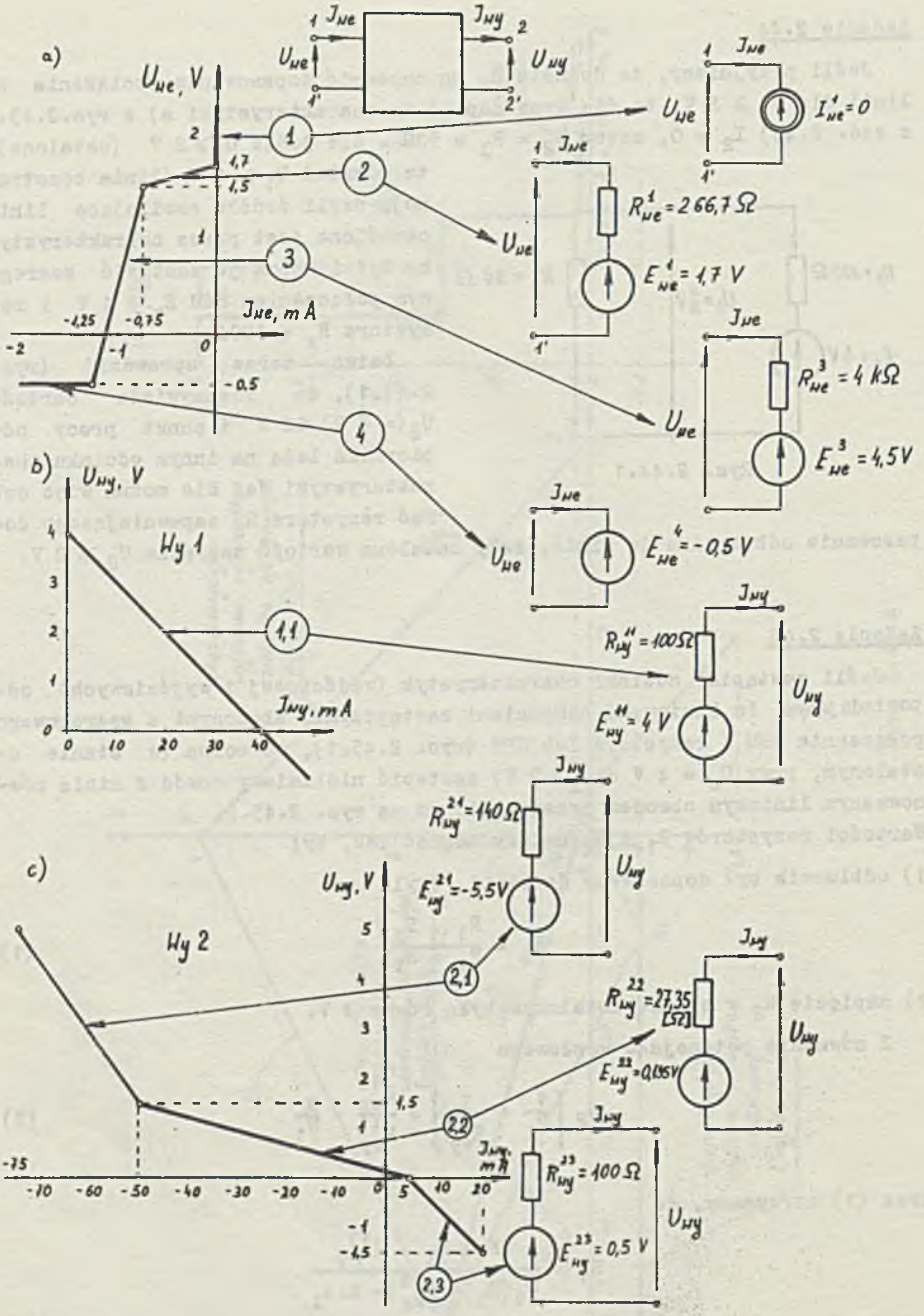
2) napięcie U_2 w stanie ustalonym było równe 3 V.

Z równania potencjału węzłowego

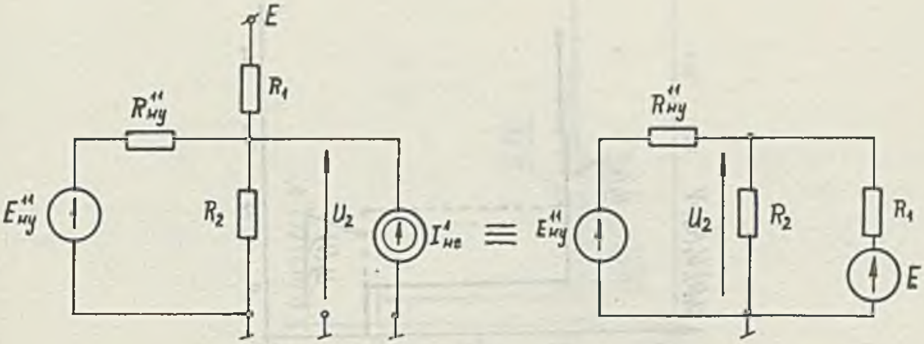
$$U_2 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R^{11}_{wy}}\right] = \frac{E^{11}_{wy}}{R^{11}_{wy}} + \frac{E}{R_1} \tag{2}$$

oraz (1) otrzymamy, że

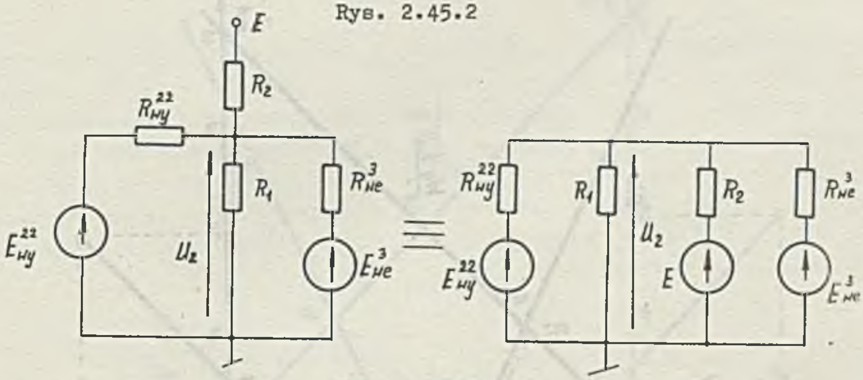
$$R_1 = \frac{E \cdot R_1 \cdot R^{11}_{wy}}{U_2(R_1 + R^{11}_{wy}) - E.R_1}$$



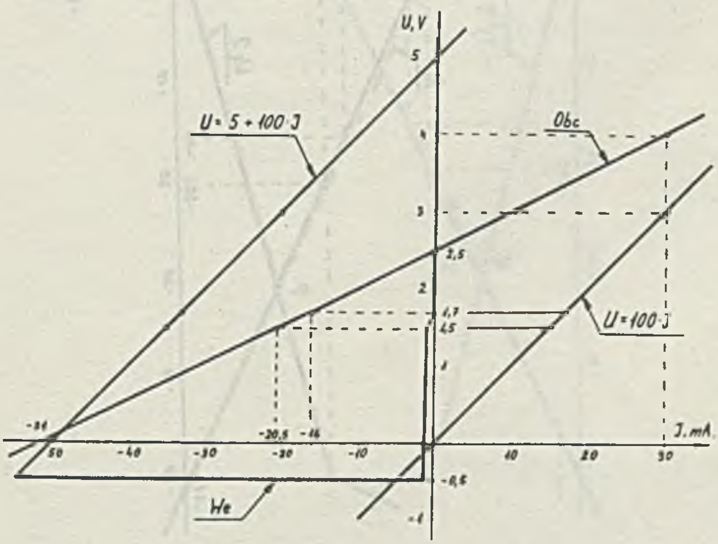
Rys. 2.45.1



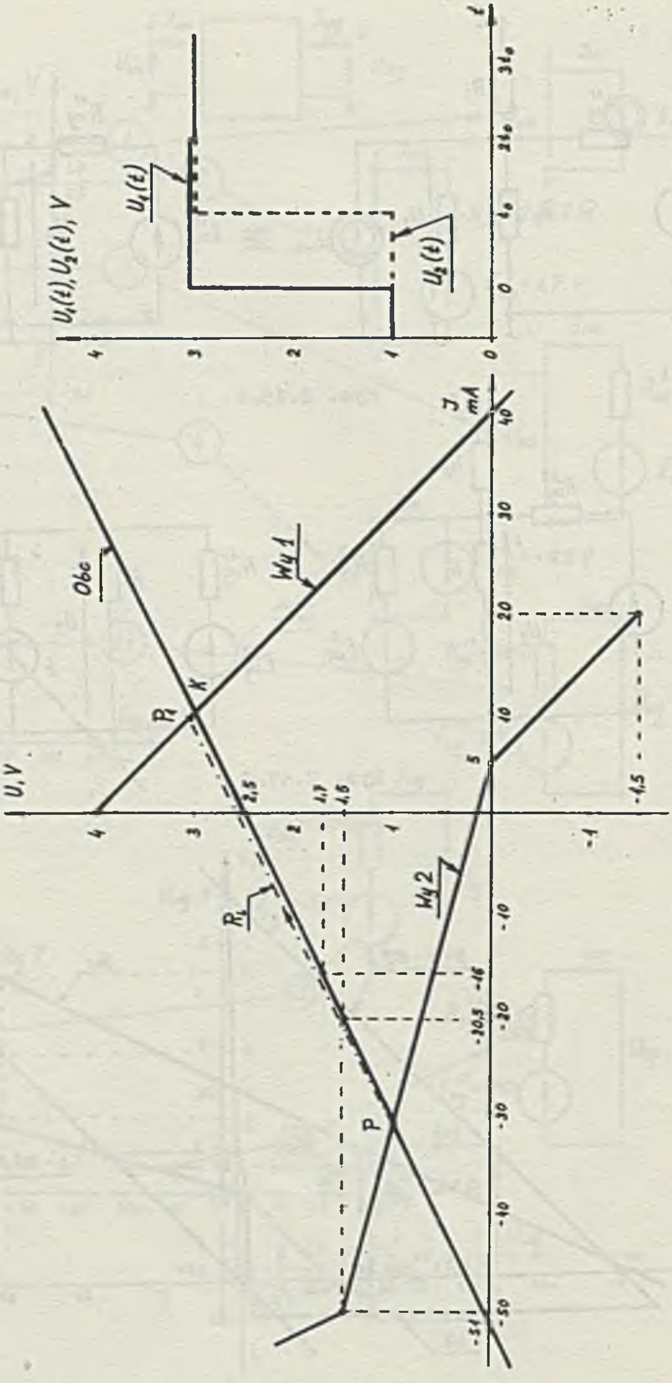
Rys. 2.45.2



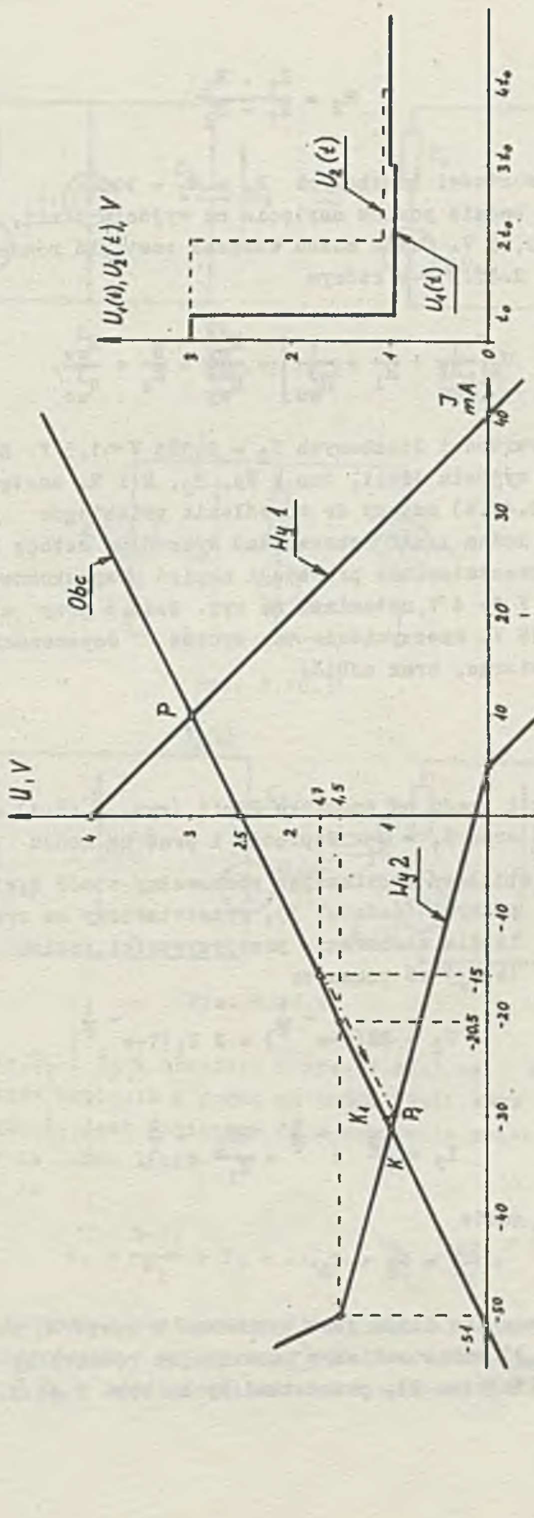
Rys. 2.45.3



Rys. 2.45.4



Rys. 2.45.5



Rys. 2.45.6

oraz

$$R_2 = \frac{R_1 \cdot R_l}{R_1 - R_l}$$

a po podstawieniu wartości liczbowych $R_1 = R_2 = 100\Omega$.

Sprawdźmy, jaki będzie poziom napięcia na wyjściu linii, w stanie ustalonym, jeśli $U_0 = 0{,}15$ V. Obwód można wówczas zastąpić równoważnym obwodem liniowym (rys. 2.45.3), w którym

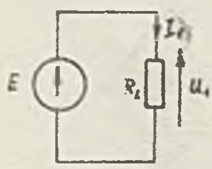
$$U_2\left[\frac{1}{R_{wy}^{22}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{we}^{3}}\right] = \frac{E_{wy}^{22}}{R_{wy}^{22}} + \frac{E}{R_2} + \frac{E_{we}^{3}}{R_{we}^{3}},$$

a po podstawieniu wartości liczbowych $U_2 = 0{,}925\ \mathrm{V} < 1{,}5\ \mathrm{V}$. Zastępując równoległe gałęzie na wyjściu linii, tzn.: We, R_2, E i R_1 zastępczą charakterystyką Obc (rys. 2.45.4) możemy do określenia przebiegów czasowych napięć na początku i końcu linii wykorzystać wykreślną metodę Bergerona.

Na rys. 2.45.5 przedstawiono przebiegi napięć przy skokowej zmianie napięcia U_0 z 0,15 V do 4 V, natomiast na rys. 2.45.6 przy skokowej zmianie U_0 z 4 V do 0,15 V. Rzeczywiście ten sposób dopasowania zapewnia, praktycznie rzecz biorąc, brak odbić.

Zadanie 2.46

Wartość napięcia i prądu na początku linii (rys. 2.46.1) wynoszą (dla $t \in (0, 2\,t_0)$): $U_1 = E$ oraz $I_1 = \frac{E}{R_1}$. Napięcie i prąd na końcu linii (dla $t \in (t_0,\ 3t_0)$) można obliczyć rozwiązując równoważny obwód z elementami skupionymi (dodatek 3), przedstawiony na rys. 2.46.2. Jeśli dla zachowania przejrzystości zapisu przesuniemy (o t_0) oś czasu, to



Rys. 2.46.1

$$U_2 = 2E(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = 2\,U_1(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \qquad (1)$$

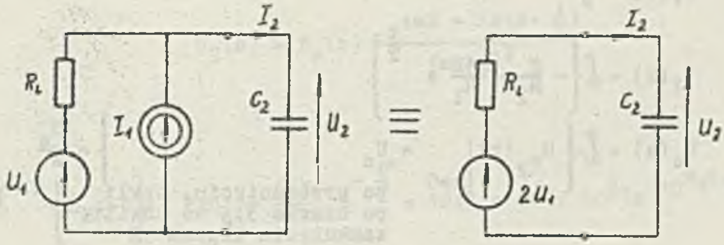
oraz

$$I_2 = \frac{2E}{R_1}\,e^{-\frac{t}{T}} = \frac{2U_1}{R_1}\,e^{-\frac{t}{T}},$$

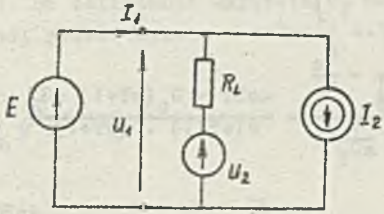
gdzie

$$T = R_1 \cdot C_2.$$

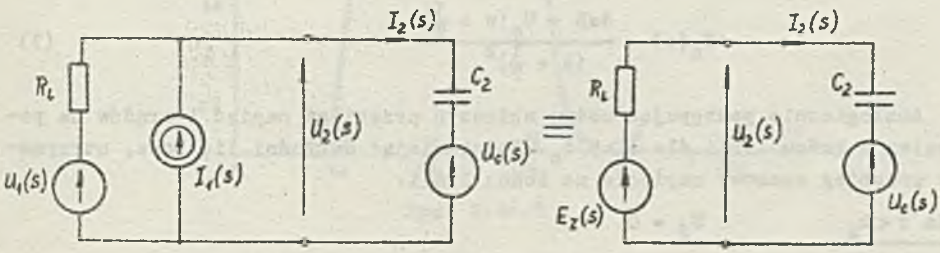
Napięcie U_1 na początku linii jest wymuszone i równe E, natomiast prąd I_1 (dla $t \in (2t_0,\ 4\,t_0)$) można obliczyć rozwiązując równoważny obwód z elementami skupionymi (dodatek 3), przedstawiony na rys. 2.46.3. Oczywiście



Rys. 2.46.2



Rys. 2.46.3



Rys. 2.46.4

przebiegi czasowe U_2 i I_2 w obwodzie z rys. 2.46.3 są opóźnione (o t_o) względem przebiegów napięcia i prądu na końcu linii.

Znajomość prądu I_1 jest konieczna do wyznaczenia przebiegów czasowych napięcia i prądu na końcu linii.
Łatwo sprawdzić, że

$$I_1 = \frac{E-U_2}{R_1} + I_2 = \dots = -\frac{E}{R_1} + \frac{4E}{R_1} e^{-\frac{t}{T}}. \qquad (2)$$

Korzystając ze schematu zastępczego, złożonego z elementów skupionych (rys. 2.46.4), wyznaczymy - przesuwając (dla zachowania przejrzystości zapisu) oś czasu o 3 t_o - napięcie i prąd kondensatora C_2.

I tak

$$U_1(s) = \frac{E}{s}$$

$$I_1(s) = \mathcal{L}\left\{-\frac{E}{R_1} + \frac{4E}{R_1} e^{-\frac{t}{T}}\right\}$$

$$U_c(s) = \mathcal{L}\left\{ U_{c_2}(t)\Big|_{t=0} = U_c \right\} = \frac{U_c}{s}$$

po przesunięciu, czyli po czasie $3t_o$ od chwili zamknięcia klucza K

natomiast

$$E_z(s) = \mathcal{L}\left\{4Ee^{-\frac{t}{T}}\right\} = \frac{4E}{s+\frac{1}{T}},$$

więc

$$I_2(s) = \frac{\frac{4E}{s+\frac{1}{T}} - \frac{U_c}{s}}{R_1 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{4sET - U_c(sT+1)\, sC_2}{s(sT+1)\cdot(sT+1)}$$

a

$$U_2(s) = E_z(s) - R_1 \cdot I_2(s) = E_z(s) - T\,\frac{4sET - U_c(sT+1)}{(sT+1)^2} =$$

$$= E_z(s) - \frac{4sE - U_c\left(s+\frac{1}{T}\right)}{\left(s+\frac{1}{T}\right)^2} \tag{3}$$

Analogicznie postępując można obliczyć przebiegi napięć i prądów na początku i końcu linii dla $t \geqslant 5\, t_o$. Podstawiając wartości liczbowe, otrzymamy przebieg czasowy napięcia na końcu linii.

<u>dla $t < t_o$</u> $\quad U_2 = 0$

<u>dla $t \in (t_o, 3t_o)$</u> $\quad$ napięcie U_2 określone jest zależnością (1)

czyli

$$U_2 = 10\,(1-e^{-10^9 t'})\ \text{V} \quad (t'=0 \text{ dla } t=t_o) \tag{1'}$$

<u>dla $t \in (3t_o,\ 5t_o)$</u> napięcie U_2 określone jest w postaci operatorowej zależnością (3). Ponieważ $2t_o = 10$ T, więc z (1')

$$U_c = U_2\Big|_{t'=2t_o} = 10(1 - e^{-10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-9}}) = 10(1-e^{-10}) \simeq 10\text{V} = 2E$$

natomiast

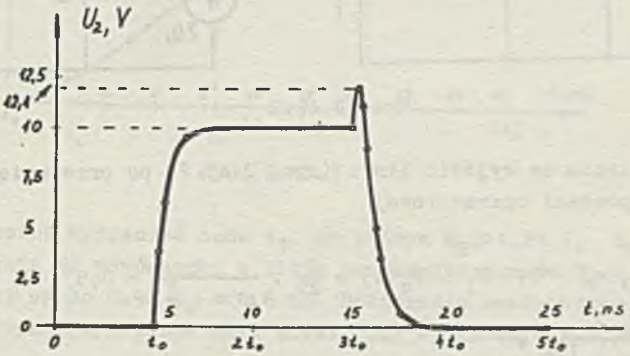
$$U_2(s) = E_z(s) - \frac{4sE - 2E(s+\frac{1}{T})}{(s+\frac{1}{T})^2}$$

więc

$$U_2 = \mathcal{L}^{-1}\left\{U_2(s)\right\} = 2E(1 + \frac{2t''}{T})\, e^{-\frac{t''}{T}} = 10(1 + 2t''\cdot 10^9)e^{-10^9 t''}\,\mathrm{V} \qquad (3')$$

($t'' = 0$ dla $t = 3\,t_o$).

Na rys. 2.46.5 przedstawiono przebieg czasowy napięcia U_2 określony zależnościami (1') i (3'). Do obliczenia napięcia U_2 można też oczywiście wykorzystać ogólną metodę przedstawioną w zadaniu 2.5, lub program na m.c. [7].



Rys. 2.46.5

Zadanie 2.47

Napięcie i prąd na początku linii (dla $t\epsilon(0,2t_o)$) można wyliczyć rozwiązując równoważny obwód o elementach skupionych (dodatek 3), przedstawiony na rys. 2.47.1.

Otrzymamy

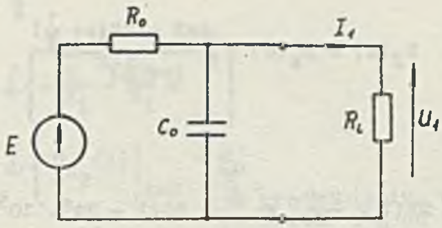
$$U_1 = \frac{E}{2}\,(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

oraz

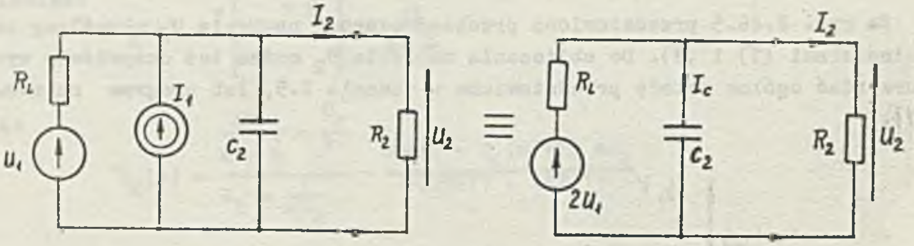
$$I_1 = \frac{E}{2R_1}\,(1 - e^{-\frac{t}{T}}),$$

gdzie

$$T = \frac{1}{2}\,R_1\cdot C_o = 2{,}5\ \mathrm{ns}.$$



Rys. 2.47.1



Rys. 2.47.2

Przebieg napięcia na wyjściu linii (rys. 2.47.2) po przesunięciu (o t_o) osi czasu w postaci operatorowej

$$U_2(s) = U_1(s) - 0,5\, R_1 \cdot I_c(s) = \frac{E}{2T} \cdot \frac{1}{s(s+\frac{1}{T})} - 0,5 \cdot R_1 \cdot \frac{E \cdot C}{2T^2} \cdot \frac{1}{(s+\frac{1}{T})^2},$$

a w postaci czasowej

$$U_2 = \mathcal{L}^{-1}\left\{U_2(s)\right\} = \frac{E}{2}\,(1 - e^{-\frac{t}{T}}) - 0,5\, R_1 \cdot \frac{E}{R_1} \cdot \frac{t}{T}\, e^{-\frac{t}{T}} =$$

$$= \frac{E}{2}\,(1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{t}{T}\, e^{-\frac{t}{T}}),$$

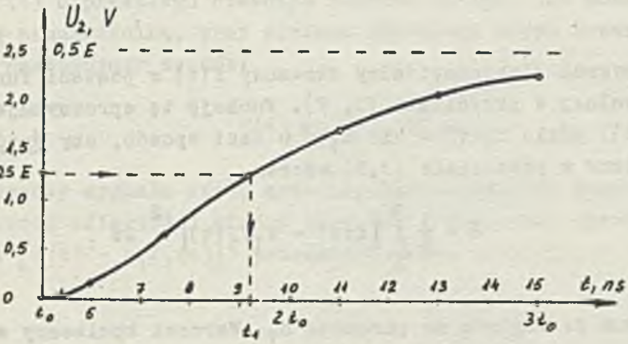
gdzie

$$0,5 \cdot R_1 \cdot C_2 = T = 0,5\, R_1 \cdot C_o.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych

$$U \triangleq \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \in (0, t_o) \\ 2{,}5\left(1 - e^{-\frac{t'}{2{,}5} \cdot 10^9} - \frac{t'}{2{,}5} \cdot 10^9\, e^{-\frac{t'}{2{,}5} \cdot 10^9}\right), \mathrm{V} & \text{dla} \quad t' \in (0, 2t_o) \\ & (\text{dla} \quad t \in (t_o, 3t_o)) \end{cases}$$

a postać graficzną przedstawiono na rys. 2.47.3



Rys. 2.47.3

Z rysunku można wyznaczyć czas t_1, po którym $U_2 \geqslant 1{,}25$ V, $t_1 \cong 1{,}92\ t_o$, a więc opóźnienie (w porównaniu z linią bez kondensatorów C_o i C_2 na jej końcach) wynosi około $0{,}92\ t_o = 4{,}6$ ns. Dołączenie kondensatorów bocznikujących daje w tym przykładzie taki efekt, jak wydłużenie o 0,92 d długości linii.

Rozdział 3

ANALIZA WIDMOWA SYGNAŁÓW OKRESOWYCH

Zadanie 3.1

Dany jest sygnał niesinusoidalny okresowy f(t) w postaci funkcji określonej i całkowalnej w przedziale (0, T). Funkcję tę aproksymujemy przez funkcję $c_1 f_1(t)$, gdzie $f_1(t) = \sin \omega_1 t$, w taki sposób, aby średni błąd kwadratowy określony w przedziale (0,T) wzorem

$$\delta = \frac{1}{T}\int_0^T \left[f(t) - c_1 f_1(t)\right]^2 dt \qquad (1)$$

osiągnął minimum ze względu na parametr c_1. Warunek konieczny minimalizacji błędu δ wyznacza zależność

$$\frac{d\delta}{dc_1} = 0. \qquad (2)$$

Podstawiając do wzoru (2) wartość błędu określoną związkiem (1) i zmieniając kolejność działań całkowania i różniczkowania, otrzymujemy

$$\frac{1}{T}\left[\int_0^T \frac{d}{dc_1} f^2(t)dt - 2\int_0^T f(t)\, f_1(t)dt + 2c_1\int_0^T f_1^2(t)dt\right] = 0. \qquad (3)$$

Funkcja podcałkowa w pierwszej całce jest zerem, gdyż nie zależy ona od parametru c_1. Pozostałe dwie całki pozwalają na wyznaczenie szukanego parametru

$$c_1 = \frac{\int_0^T f(t)\, f_1(t)dt}{\int_0^T f_1^2(t)dt}. \qquad (4)$$

Funkcje f(t) i $f_1(t)$ w przedziale (0,T) są określone następująco

$$f(t) = \begin{cases} F & \text{dla } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -F & \text{dla } \frac{T}{2} < t < T \end{cases} \qquad f_1(t) = \sin \omega_1 t$$

Zatem

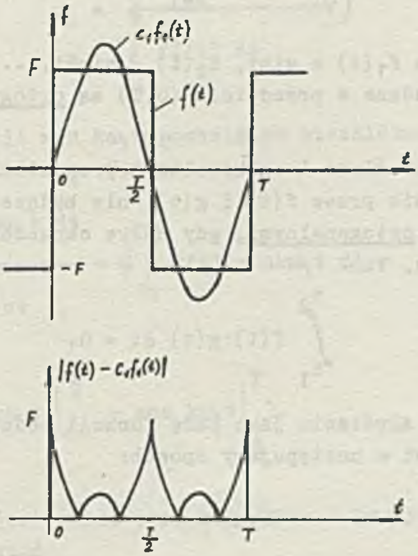
$$c_1 = \frac{\int_0^T f(t)\sin\omega_1 t\,dt}{\int_0^T \sin^2\omega_1 t\,dt} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_1 t\,dt = \frac{4F}{\pi}. \tag{5}$$

Funkcje aproksymująca i aproksymowana są funkcjami okresowymi o takiej samej wartości okresu T, zatem powyższe rozwiązanie jest słuszne dla wszystkich wartości t.

Sygnał f(t) o przebiegu czasowym podanym na rys. 3.1 możemy aproksymować funkcją sinusoidalną, przy minimum średniego błędu kwadratowego aproksymacji, w następujący sposób:

$$f(t) \approx \frac{4F}{\pi}\sin\omega_1 t. \tag{6}$$

Przebieg czasowy sygnału f(t), przebieg aproksymującej funkcji sinusoidalnej oraz wykres odległości między obydwoma przebiegami wyrażonej jako moduł różnicy $|f(t) - c_1 f_1(t)|$ przedstawia rys. 3.1.1.



Rys. 3.1.1

Zadanie 3.2

Oznaczmy sin $k\omega_1 t = f_k(t)$

Zatem

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \sin k\omega_1 t = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t). \tag{7}$$

Średni błąd kwadratowy aproksymacji określony w przedziale (0,T) wzorem

$$\delta = \frac{1}{T}\int_0^T \left[f(t) - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t)\right]^2 dt \tag{8}$$

osiągnie minimum ze względu na parametry c_k, jeśli pochodne cząstkowe błędu względem poszczególnych parametrów przyjmą wartość zero

$$\frac{\partial \delta}{\partial c_1} = \frac{\partial \delta}{\partial c_2} = \ldots = \frac{\partial \delta}{\partial c_m} = 0. \tag{9}$$

Dla dowolnie wybranego parametru c_i mamy

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left\{\int_0^T \left[f(t) - \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(t)\right]^2 dt\right\} = 0 \tag{10}$$

Zbadajmy, czy funkcje $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = \sin 2t, \ldots, f_k(t) = \sin kt, \ldots, f_l(t) = \sin lt, \ldots$, badane w przedziale (0,T) są ortogonalne. Skorzystajmy z definicji:

> Dwie funkcje określone i całkowalne w przedziale od t_1 do t_2, oznaczone odpowiednio przez f(t) i g(t), nie będące tożsamościowo równe zeru, nazywamy ortogonalnymi, gdy całka oznaczona z ich iloczynu jest równa zeru, tzn.
>
> $$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, g(t)\, dt = 0. \tag{11}$$

Całkę tę oznaczamy w skróceniu jako parę funkcji podcałkowych i wyrażamy warunek ortogonalności w następujący sposób:

$$(f,g) = 0. \tag{12}$$

Dla funkcji $f_k(t) = \sin k\omega_1 t$ oraz $f_l(t) = \sin l\,\omega_1 t$ mamy

$$(\sin k\omega_1 t,\ \sin l\omega_1 t) = \int_0^T \sin k\omega_1 t \sin l\omega_1 t\, dt = 0 \tag{13}$$

$$(\sin k\omega_1 t, \sin k\omega_1 t) = \int_0^T \sin k\omega_1 t \sin k\omega_1 t dt = \frac{T}{2} \tag{14}$$

Zatem przy przekształcaniu wyrażenia $\frac{\partial \delta}{\partial c_i}$ korzystamy z tego, że funkcje f_k oraz f_l są ortogonalne dla wszelkich wskaźników k, l różnych od siebie, czyli $(f_k, f_l) = 0$. Od c_i zależą jedynie wyrazy zawierające c_i lub też c_i^2, znikają natomiast takie wyrazy jak

$$\frac{\partial}{\partial c_i}(f,f) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial c_i}(f, f_k) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial c_i} c_k^2(f_k, f_k) = 0 \tag{15}$$

W wyrażeniu $\frac{\partial \delta}{\partial c_i}$ pozostają tylko dwa wyrazy różne od zera, mamy więc

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\int_0^T \left[-2c_i\ f(t)\ f_i(t) + c_i^2\ f_i^2(t)\right] dt = 0. \tag{16}$$

Zmieniamy kolejność działań całkowania i różniczkowania i wyznaczamy parametr

$$c_i = \frac{\int_0^T f(t)\ f_i(t)\ dt}{\int_0^T f_i^2(t)\ dt}. \tag{17}$$

Ortogonalność funkcji $\sin k\omega_1 t$ pozwala na niezależne obliczenie poszczególnych współczynników c_k. Zatem:

$$c_k = \frac{\int_0^T f(t) \sin k\omega_1 t\ dt}{\int_0^T \sin^2 k\omega_1 t\ dt} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin k\omega_1 t\ dt =$$

$$= -\frac{F}{i\pi}\left(\cos k\omega_1 t\Big|_0^{\frac{T}{2}} - \cos k\omega_1 t\Big|_{\frac{T}{2}}^{T}\right).$$

Wartość parametru jest różna przy wskaźniku k parzystym (k=2n) oraz nieparzystym (k=2n-1), stąd

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 2n \\ \frac{4F}{\pi} \cdot \frac{1}{2n-1} & \text{dla } k = 2n-1. \end{cases}$$

Zatem kombinacja liniowa funkcji sinusoidalnych aproksymujących sygnał f(t) z rys. 3.1, przy minimum średniego błędu kwadratowego, ma następującą postać

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \sin k\omega_1 t = \frac{4F}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin(2n-1)\omega_1 t}{2n-1} = \frac{4F}{\pi}(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\,\omega_1 t +$$

$$+ \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \ldots + \frac{1}{m}\sin m\omega_1 t),$$

gdy m jest nieparzyste.

Zbadajmy, jak zmienia się wartość średniego błędu kwadratowego w zależności od liczby składowych funkcji aproksymującej, tzn. w miarę wzrostu wskaźnika k w wyrażeniu $\sum_{k=1}^{m} c_k \sin k\omega_1 t$. Korzystając z tego, że warunek ortogonalności funkcji sin k t jest spełniony, wyrażamy średni błąd kwadratowy w następujący sposób

$$\delta = \frac{1}{T}\left[(f,f) - 2\sum_{k=1}^{m} c_k(f,f_k) + \sum_{k=1}^{m} c_k^2\,(f_k,\,k_k)\right]. \tag{19}$$

Zgodnie z zależnością (17) wyrażamy (f,f_k) przez (f_k,f_k)

$$c_k(f,f_k) = c_k^2\,(f_k,f_k).$$

Zatem

$$\delta = \frac{1}{T}\left[(f,f) - \sum_{k=1}^{m} c_k^2\,(f_k,\,f_k)\right] = \frac{1}{T}\left[(f,f) - c_1^2\,(f_1,f_1) - \right.$$

$$\left. - c_2^2\,(f_2,f_2) - \ldots - c_m^2\,(f_m,f_m)\right]. \tag{20}$$

W wyrażeniu (20) okres $T = 2\pi$

$$(f,f) = \int_0^{2\pi} f^2(t)dt = F^2\int_0^{2\pi} dt = 2\pi . F^2.$$

Dla k=1 $c_1 \sin t = \frac{4F}{\pi}\sin t$, wobec czego średni błąd kwadratowy

$$\delta_1 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi F^2 - (\frac{4F}{\pi})^2\cdot\pi\right] = 0{,}19\ F^2.$$

Dla k=3 przebieg aproksymujący ma postać $c_1\sin t + c_3 \sin 3t = \frac{4F}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin t\ 3t)$, a średni błąd kwadratowy wynosi

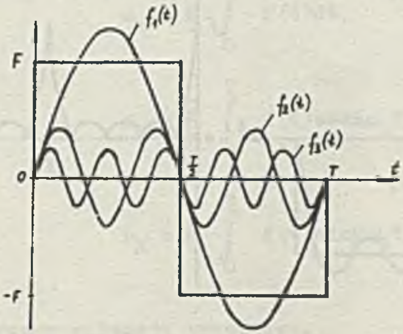
$$\delta_3 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi F^2 - (\frac{4F}{\pi})^2\cdot\pi - (\frac{4F}{3\pi})^2\cdot\pi\right] = 0{,}1\ F^2.$$

Dla k = 5 przebieg aproksymujący przybiera postać $c_1 \sin t + c_3 \sin 3t + c_5 \sin 5t = \frac{4F}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t)$, a średni błąd kwadratowy posiada wartość

$$\delta_5 = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi F^2 - (\tfrac{4F}{\pi})^2 \cdot \pi - (\tfrac{4F}{3\pi})^2 \cdot \pi - (\tfrac{4F}{5\pi})^2 \cdot \pi\right] = 0{,}068\ F^2$$

Z powyższych obliczeń wynika, że aproksymując sygnał f(t) przez większą liczbę składowych w postaci funkcji $f_k(t)$ względem siebie ortogonalnych osiągamy zmniejszenie średniego błędu kwadratowego δ.

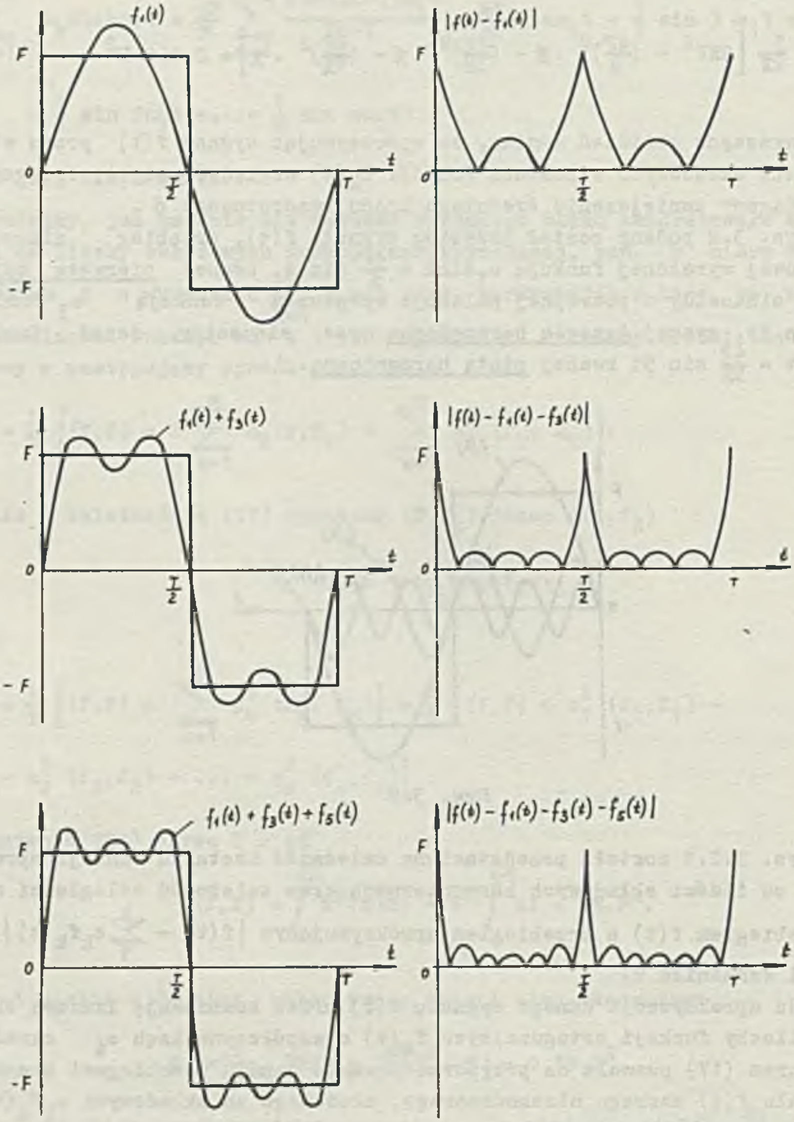
Na rys. 3.2 podany został przebieg sygnału f(t), przebieg sinusoidy podstawowej wyrażonej funkcją $c_1 \sin t = \frac{4F}{\pi} \sin t$, zwanej <u>pierwszą harmoniczną</u>, sinusoidy o potrójnej pulsacji wyrażonej funkcją $c_3 \sin 3t = \frac{4F}{3\pi} \sin 3t$, zwanej <u>trzecią harmoniczną</u> oraz sinusoidy danej funkcją $c_5 \sin 5t = \frac{4F}{5\pi} \sin 5t$ zwanej <u>piątą harmoniczną</u>.



Rys. 3.2

Na rys. 3.2.1 została przedstawiona zależność kształtu funkcji aproksymującej od ilości składowych harmonicznych oraz zależność odległości między przebiegiem f(t) a przebiegiem aproksymującym $\left|f(t) - \sum_1^k c_k f_k(t)\right|$ od wartości wskaźnika k.

Metoda aproksymacji danego sygnału f(t) przez kombinację liniową skończonej liczby funkcji ortogonalnych $f_i(t)$ o współczynnikach c_i określonych wzorem (17) pozwala na przyporządkowanie danemu przebiegowi czasowemu sygnału f(t) szeregu nieskończonego, złożonego ze składowych $c_i f_i(t)$, zwanego szeregiem <u>Fouriera</u>.



$f_1(t)$
$|f(t) - f_1(t)|$
$f_1(t) + f_3(t)$
$|f(t) - f_1(t) - f_3(t)|$
$f_1(t) + f_3(t) + f_5(t)$
$|f(t) - f_1(t) - f_3(t) - f_5(t)|$
F
-F
0
t
$\frac{T}{2}$
T

Rys. 3.2.1

Zadanie 3.3

W celu przedstawienia danego przebiegu sygnału okresowego f(t) o okresie T w sposób dokładny, wykorzystuje się rozwinięcie tego przebiegu w trygonometryczny szereg Fouriera za pomocą jednej z następujących trzech postaci:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_1 t, \tag{21}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin(k\omega_1 t + \phi_k), \tag{22}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k). \tag{23}$$

Współczynniki występujące w powyższych równaniach oblicza się ze wzorów:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt, \tag{24}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega_1 t\, dt, \tag{25}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega_1 t\, dt, \tag{26}$$

gdzie $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ nazywamy pulsacją przebiegu.

Wartości F_k i ϕ_k można obliczyć wychodząc z następującego rozważania

$$F_k \sin(k\omega_1 t + \phi_k) = F_k(\sin k\omega_1 t \cos\phi_k + \cos k\omega_1 t \sin\phi_k). \tag{27}$$

Oznaczamy

$$F_k \cos\phi_k = b_k, \tag{28}$$

$$F_k \sin\phi_k = a_k.$$

Stąd

$$F_k \sin(k\omega_1 t + \phi_k) = a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t. \tag{30}$$

Współczynniki a_k i b_k ze wzoru (30) są identyczne ze współczynnikami w równaniu (21).

Ze wzorów (28) i (29) obliczamy

$$\operatorname{tg}\psi_k = \frac{a_k}{b_k}, \tag{31}$$

$$F_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}. \tag{32}$$

Natomiast faza początkowa przebiegu φ_k w zależności (23) może być określona jako

$$\varphi_k = \psi_k + \frac{\pi}{2} \tag{33}$$

Podstawowe własności szeregów Fouriera

1. Jeżeli przebieg czasowy sygnału f(t) spełnia warunki Dirichleta

I warunek: przedział, w którym przebieg jest określony (okres T), można rozłożyć na skończoną ilość przedziałów, z których w każdym przebieg f(t) jest ciągły i monotoniczny,

II warunek: w każdym punkcie nieciągłości f(t) istnieje granica prawostronna f(t + 0) i lewostronna f(t - 0), to szereg Fouriera zastępujący ten przebieg jest zbieżny i jego suma równa się f(t) w punktach ciągłości przebiegu f(t), a w punktach nieciągłości suma ta równa się

$$\frac{1}{2}\left[f(t-0) + f(t+0)\right]. \tag{34}$$

2. Przy zastąpieniu przebiegu czasowego sygnału f(t) przybliżoną sumą trygonometryczną

$$f_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos k\omega_1 t + \sum_{k=1}^{m} b_k \sin k\omega_1 t \tag{35}$$

średni błąd kwadratowy

$$\delta = \frac{1}{T}\int_0^T \left[f(t) - f_m(t)\right]^2 dt \tag{36}$$

jest najmniejszy, jeżeli za współczynniki a_k i b_k przyjmiemy współczynniki Fouriera dla danej postaci przebiegu f(t) wyrażone wzorami (24)÷(26).

Współczynniki rozwinięcia przebiegów czasowych sygnałów z rys. 3.3. w szereg Fouriera, obliczone wg wzorów (24)÷(33), zostały przedstawione w tablicy 3.1 (Dodatek 2).

Zadanie 3.4

1. Symetria pierwszego rodzaju

Jeżeli przebieg sygnału f(t) jest odpowiednikiem funkcji parzystej, tzn. $f(t) = f(-t)$ jak na rys. 3.4a, to rozwinięcięcia w szereg Fouriera, dla obu stron tej zależności, są następujące

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t + a_2\cos2\omega_1 t + b_2\sin2\omega_1 t + \ldots$$

$$f(-t)\ \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega_1 t - b_1\sin\omega_1 t + a_2\cos 2\omega_1 t - b_2\sin2\omega_1 t + \ldots$$

Aby prawe strony powyższych równań były sobie równe dla dowolnej wartości t, współczynniki b_k muszą się zerować, zatem

$$b_k = 0.$$

2. Symetria drugiego rodzaju

Jeżeli przebieg sygnału f(t) jest odpowiednikiem funkcji nieparzystej, tzn. $f(t) = -f(-t)$ jak rys. 3.4b, to rozwijając w szereg Fouriera obie strony tej zależności otrzymujemy

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t + a_2\cos2\omega_1 t + b_2\sin 2\omega_1 t + \ldots$$

$$-f(-t) = -\frac{a_0}{2} - a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t - a_2\cos2\omega_1 t + b_2\sin2\omega_1 t + \ldots$$

Aby prawe strony powyższych równań były sobie równe dla dowolnej wartości t, muszą się zerować współczynniki a_0 oraz a_k, zatem

$$a_0 = 0; \quad a_k = 0.$$

3. Symetria trzeciego rodzaju

Jeżeli sygnał f(t) jest odpowiednikiem funkcji antysymetrycznej, tzn. $f(t) = -f(t + \frac{T}{2})$ jak na rys. 3.4c, to rozwijając w szereg Fouriera obie strony tej zależności otrzymujemy

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t + a_2\cos2\omega_1 t + b_2\sin2\omega_1 t + \ldots$$

$$-f(t + \frac{T}{2}) = -\frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega_1 t + b_1\sin\omega_1 t - a_2\cos2\omega_1 t - b_2\sin2\omega_1 t + \ldots$$

Aby prawe strony powyższych równań równały się sobie dla dowolnej wartości t, muszą się zerować parzyste współczynniki Fouriera a_{2k} i b_{2k}, mianowicie

$$a_{2k} = 0; \quad b_{2k} = 0 \quad \text{dla } k = 0,\ 1,\ 2,\dots$$

Jeżeli sygnał f(t) posiada symetrię pierwszego i trzeciego rodzaju jak na rys. 3.4d, to zachodzi zależność

$$a_{2k} = b_k = 0 \quad \text{dla} \quad k = 0,\ 1,\ 2,\dots$$

Jeżeli sygnał f(t) posiada symetrię drugiego i trzeciego rodzaju jak na rys. 3.4e, to

$$a_k = b_{2k} = 0 \quad \text{dla} \quad k = 0,\ 1,\ 2,\dots$$

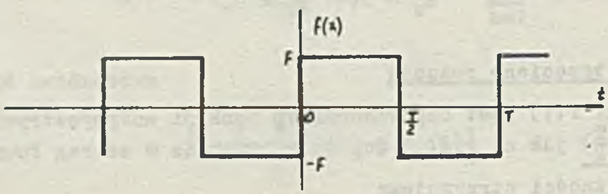
Zbadanie rodzaju symetrii przebiegu czasowego sygnału pozwala na wstępne sprawdzenie poprawności obliczania współczynników rozwinięcia tego przebiegu w szereg Fouriera.

Zadanie 3.5

Dla przedstawienia przebiegów czasowych sygnałów z rys. 3.5 w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera, można wykorzystać rozwinięcie przebiegu prostokątnego z tablicy 3.1 dane wzorem

$$f(t) = \frac{4F}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\omega_1 t}{2n-1}.$$

Przebieg ten podany jest na rys. 3.5.1



Rys. 3.5.1

Przebieg przedstawiony na rys. 3.5a powstał wskutek przesunięcia w górę o wartość stałą F przebiegu z rys. 3.5.1. Przy rozpatrywaniu przebiegu przesuniętego w górę lub w dół w porównaniu z przebiegiem, którego rozwinięcie w szereg Fouriera znamy, do składowej stałej $\frac{a_0}{2}$ należy dodać tę wartość stałą, o którą nastąpiło przesunięcie, a pozostałe harmoniczne nie ulegają zmianie. Zatem sygnał o przebiegu z rys. 3.5a ma następującą postać rozwinięcia w szereg Fouriera

$$f_a(t) = F + \frac{4F}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\omega_1 t}{2n-1} \tag{37}$$

Przy przesuwaniu przebiegu wzdłuż osi czasu, składowa stała $\frac{a_o}{2}$, będąca wartością średnią przebiegu za okres T, nie ulega zmianie. Przesunięciu przebiegu w prawo o wartość t_1 odpowiada zastąpienie funkcji $f(t)$ przez funkcję $f_1(t) = f(t-t_1)$. Przy przesunięciu przebiegu w lewo o wartość t_1 odpowiada zastąpienie funkcji $f(t)$ przez funkcję $f_2(t) = f(t + t_1)$.

Przebieg z rys. 3.5b powstał z przesunięcia w prawo o wartość t_1 przebiegu z rys. 3.5.1. Zatem rozwinięcie w szereg Fouriera przebiegu czasowego z rys. 3.5b ma postać

$$f_b(t) = \frac{4F}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2n-1)\ t - t_1\right]\omega_1}{2n-1} \tag{38}$$

Przebieg z rys. 3.5c powstał z przesunięcia przebiegu z rys. 3.5.1 w dół o wartość stałą $\frac{B+A}{2}$ i w lewo wzdłuż osi czasu o wartość t_1. Zatem rozwinięcie przebiegu z rys. 3.5c ma postać

$$f_c(t) = -\frac{B+A}{2} + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{B-A}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2n-1)t + t_1\right]\omega_1}{2n-1} \tag{39}$$

Przebieg z rys. 3.5d powstał przez dwukrotne zwiększenie częstotliwości przebiegu z rys. 3.5.1. Stąd jego rozwinięcie w szereg Fouriera ma postać

$$f_d(t) = \frac{4F}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\ 2\omega_1 t}{2n-1} \tag{40}$$

Przebieg z rys. 3.5e powstał przez dwukrotne zwiększenie częstotliwości przebiegu z rys. 3.5.1 i przesunięcie go w lewo o wartość $(T/4 - t_1)$. Rozwinięcie w szereg Fouriera przebiegu o takiej postaci jest następujące

$$f_e(t) = \frac{4F}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2n-1)t + \frac{T}{4} - t_1\right]2\omega_1}{2n-1} \tag{41}$$

<u>Zadanie 3.6</u>

Wyznaczmy wartość średnią kwadratu przebiegu okresowego $f(t)$ na jeden okres T, podstawiając za $f(t)$ postać szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T\left[\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\ \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)\right]^2 dt =$$

$$= \left(\frac{a_o}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k^2}{2} + \frac{b_k^2}{2}\right) \tag{42}$$

Obliczona zależność jest znana jako równość Parsevala.

Wartością skuteczną sygnału okresowego f(t) o okresie T nazywamy pierwiastek kwadratowy z wartości średniej kwadratu sygnału, czyli

$$F_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}. \qquad (43)$$

Podstawiając wyniki obliczeń (42) do wzoru (43) otrzymujemy zależność pomiędzy wartością skuteczną sygnału f(t) i współczynnikami szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$F_{sk} = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2 + b_k^2}{2}} \qquad (44)$$

$\frac{a_k}{\sqrt{2}}$ i $\frac{b_k}{\sqrt{2}}$ są wartościami skutecznymi składowych cosinusoidalnych i sinusoidalnych, stąd wartość skuteczna sygnału okresowego jest równa pierwiastkowi z sumy kwadratów składowej stałej $\frac{a_0}{2}$ i wartości skutecznych poszczególnych harmonicznych.

Zależność pomiędzy wartością skuteczną sygnału f(t) i współczynnikami Fouriera ze wzorów (22) i (23) ma następującą postać

$$F_{sk} = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_k^2}{2}} = \sqrt{\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}F_{sk_k}^2}. \qquad (45)$$

Dla sygnału z rys. 3.6 postać rozwinięcia w szereg trygonometryczny Fouriera, podana w rozwiązaniu zadania 3.3 (tablica 3.1), jest następująca

$$f(t) = \frac{F}{\pi} + \frac{F}{2}\sin\omega_1 t - \frac{2F}{3\pi}\cos 2\omega_1 t - \frac{2F}{15\pi}\cos 4\omega_1 t - \ldots$$

Zatem wartość skuteczna tego sygnału

$$F_{sk} = \sqrt{\left(\frac{F}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2F}{3\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2F}{15\pi}\right)^2 + \ldots}$$

Wartością średnią sygnału okresowego o okresie T nazywamy średnią arytmetyczną tego sygnału obliczoną za jeden okres T, czyli

$$F_{śr} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \qquad (46)$$

Wartość średnia sygnałów przemiennych, np. sinusoidalnych, jest równa zero, ponieważ pole powierzchni ograniczonej przebiegiem sygnału w ciągu okresu T jest równe zero. Podstawiając za f(t) postać szeregu trygonometrycznego Fouriera, otrzymujemy

$$F_{śr} = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t)\right] dt = \frac{a_o}{2} \tag{47}$$

Wynika stąd, że wartość średnia sygnału okresowego jest równa składowej stałej rozwinięcia tego sygnału w szereg Fouriera.

Dla sygnału z rys. 3.6 składowa stała $\frac{a_o}{2}$ wynosi $\frac{F}{\pi}$ (tablica 3.1). Zatem wartość średnia

$$F_{śr} = \frac{F}{\pi}.$$

Zadanie 3.7

Sygnał $u_1(t)$ można rozwinąć w trygonometryczny szereg Fouriera zgodnie ze wzorami przedstawionymi w rozwiązaniu zadania 3.3 (tablica 3.1), czyli

$$u_1(t) = \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2}\sin\omega_1 t - \frac{2U_m}{3\pi}\cos 2\omega_1 t - \frac{2U_m}{15\pi}\cos 4\omega_1 t - \ldots$$

Symboliczna postać funkcji przejścia obwodu z rys. 3.7 jest następująca

$$K(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega\frac{L}{R}}. \tag{48}$$

Korzystając z zależności $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ wyrażamy amplitudową funkcję przejścia jako

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_o})^2\right]^2 + (\omega\frac{L}{R})^2}} \tag{49}$$

Zatem dla poszczególnych harmonicznych otrzymujemy

$$K(k\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - k^2(\frac{\omega_1}{\omega_o})^2\right]^2 + k^2(\omega_1\frac{L}{R})^2}} \tag{50}$$

Podstawiając dane mamy

k	0	1	2	4
$K(k\omega_1)$	1	0,186	0,041	0,01

Fazowa funkcja przejścia dla obwodu z rys. 3.7 dla poszczególnych harmonicznych jest następująca

$$\varphi(k\omega_1) = \operatorname{arctg}\left[-\frac{k\,\omega_1 \frac{L}{R}}{1 - k^2(\frac{\omega_1}{\omega_0})^2}\right] \qquad (51)$$

Podstawiając dane otrzymujemy

k	0	1	2	4
$\varphi(k\omega_1)$	0	$8^{\circ}25'$	$3^{\circ}40'$	$1^{\circ}47'$

Zatem

$$u_2(t) = \frac{U_m}{\pi} + 0,186\,\frac{U_m}{2}\sin(\omega_1 t + 8^{\circ}25') - 0,041\cdot\frac{2U_m}{3\pi}\cos(2\omega_1+3^{\circ}40') -$$

$$- 0,01\,\frac{2U_m}{15\pi}\cos(4\omega_1 t + 1^{\circ}47') - \ldots$$

Wartości średnie sygnałów $u_1(t)$ i $u_2(t)$ są jednakowe i wynoszą

$$U_{śr1} = U_{śr2} = \frac{U_m}{\pi} = \frac{10}{\pi} = 3,18\ \text{V}.$$

Wartość skuteczną $u_1(t)$ obliczamy z zależności (45), podanej w rozwiązaniu zadania 3.6.

$$U_{sk1} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi^2} + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{2}{3\pi})^2 + (\frac{2}{15\pi})^2 + \ldots} \approx 5,95\ \text{V}$$

Wartość skuteczna napięcia $u_2(t)$ wyonosi

$$U_{sk2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi^2} + (\frac{0,186}{2})^2 + (\frac{0,041\cdot 2}{3\pi})^2 + (\frac{0,01\cdot 2}{15\pi})^2 + \ldots} \approx 3,32\ \text{V}.$$

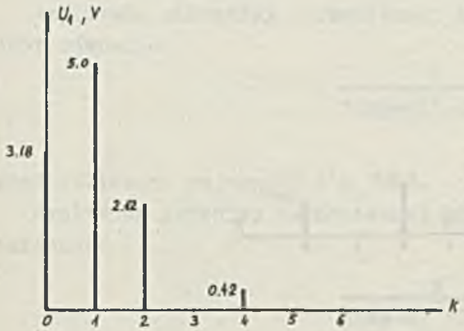
Współczynnik tętnień definiowany jest jako stosunek wartości skutecznej składowych harmonicznych sygnału do jego wartości średniej, stąd dla $u_1(t)$

$$k_{tU_1} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_{k1}^2}{2}}}{U_{śr1}} \approx \frac{3,85}{3,18} = 1,2. \qquad (52)$$

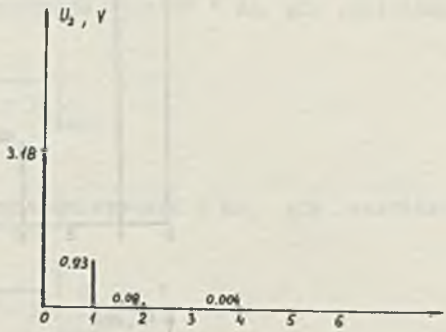
Dla $u_2(t)$

$$k_{tU_2} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_{k2}^2}{2}}}{U_{śr2}} \approx \frac{0,94}{3,18} = 0,29. \qquad (53)$$

Widma amplitudowe sygnałów $u_1(t)$ i $u_2(t)$ przedstawiają rys. 3.7.2 i 3.7.3



Rys. 3.7.2



Rys. 3.7.3

Zadanie 3.8

Korzystając z wyników zadania 3.5, sygnał e(t) z rys. 3.8.1 można rozwinąć w szereg Fouriera w następujący sposób:

$$e(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\omega_1 t}{2n-1} \text{ V} \tag{54}$$

Dla obwodu z rys. 3.8 piszemy II prawo Kirchhoffa w postaci symbolicznej

$$E = I_1 j\omega L_1 + L_2 j\omega M \tag{55}$$

$$I_2 j\omega L_2 + I_1 j\omega M = - I_2 \frac{1}{j\omega C} \tag{56}$$

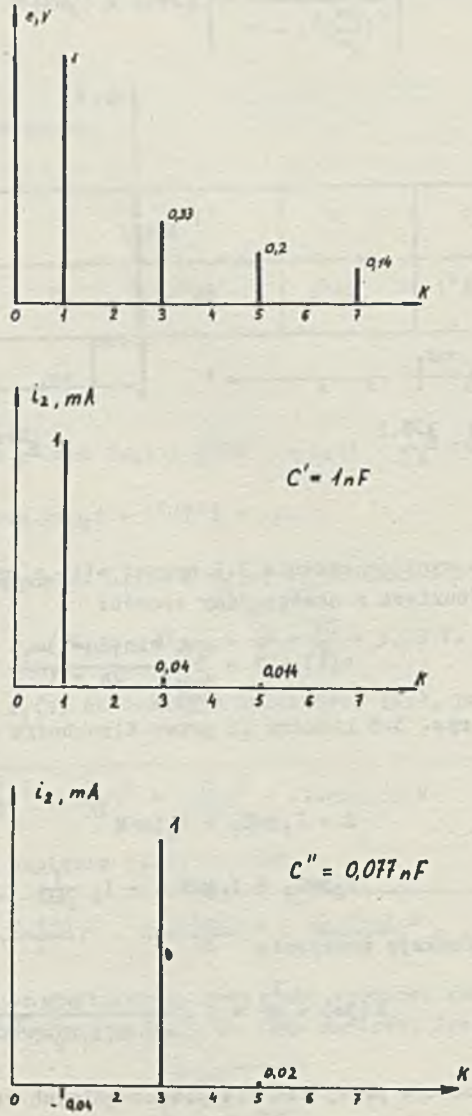
stąd wyznaczamy funkcję przejścia

$$K(j\omega) = \frac{I_2}{E} = j \cdot \frac{\omega CM}{\omega^2 \; C(L_1 L_2 - M^2) - L_1} \tag{57}$$

Amplitudowa funkcja przejścia dla poszczególnych harmonicznych ma zatem postać

$$K\left[(2n-1)\omega_1\right] = \frac{(2n-1)\omega_1 \; CM}{(2n-1)^2 \; \omega_1^2 \cdot C(L_1 L_2 - M^2) - L_1} \tag{58}$$

Podstawiając dane do wzoru (58) i korzystając z zależności (54) i (57), otrzymujemy



e,V
1
0,33
0,2
0,14
K
0 1 2 3 4 5 6 7
i2, mA
1
C' = 1nF
0,04
0,014
K
0 1 2 3 4 5 6 7
i2, mA
1
C'' = 0,077nF
0,02
K
0 0,04 2 3 4 5 6 7

Rys. 3.8.2

$$i_2(t) = e(t) \cdot K\left[j(2n-1)\omega_1\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{3(2n-1)^2 C-2} \cos(2n-1)\omega_1 t \text{ mA},$$

gdzie C wyrażone w nF.

Amplituda pierwszej harmonicznej przyjmuje wartość 1 mA, gdy spełnione jest równanie

$$\left. \frac{C}{3(2n-1)^2\ C - 2} \right|_{n=1} = 1$$

stąd obliczona pojemność $C' = 1$ nF.

Amplituda trzeciej harmonicznej przyjmuje wartość 1 mA, gdy zachodzi zależność

$$\left. \frac{C}{3(2n-1)^2\ C - 2} \right|_{n=2} = 1$$

stąd $C'' = 0,077$ nF.

Widma amplitudowe napięcia $e(t)$ oraz prądu $i_2(t)$ dla pojemności C' i C'' zostały przedstawione na rys. 3.8.2.

Zadanie 3.9

Rozwinięcie przebiegu $u_1(t)$ z rys. 3.9.1 w szereg Fouriera ma następującą postać

$$u_1(t) = \frac{U_1}{2} + \frac{2U_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\omega_1 t}{2n-1} \tag{59}$$

Funkcję przejścia między napięciem U_1 i U_2 wyraża wzór

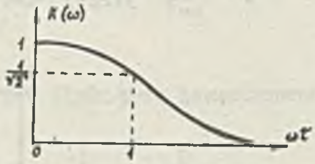
$$K(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{j\,\omega C}}{\frac{1}{j\,\omega C} + R} = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j\omega\tau} \tag{60}$$

stąd

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \tag{61}$$

Orientacyjny wykres charakterystyki $K(\omega)$ przedstawia rys. 3.9.2. Pulsację ω_0 spełniającą warunek $\omega_0\tau = 1$, dla której $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nazwijmy pulsacją graniczną.

Wykorzystując tę zależność, amplitudową funkcję przejścia dla poszczególnych harmonicznych można zapisać w następujący sposób



Rys. 3.9.2

$$K\left[(2n-1)\omega_1\right] = K_{(2n-1)} = \frac{1}{1+\left[(2n-1)\omega_1\tau\right]^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[(2n-1)\omega_0\cdot\tau\,\frac{\omega_1}{\omega_0}\right]^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left[(2n-1)\,\frac{\omega_1}{\omega_0}\right]^2}}. \qquad (62)$$

Wykonajmy obliczenia pomocnicze

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot 10^4 \qquad \omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} = 4 \cdot 10^4$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{2\pi \cdot 10^4}{2 \cdot 10^5} = 0{,}5\pi \quad \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = 2{,}467.$$

Niech $k = 2n-1$ oznacza numer harmonicznej,
b_k amplitudę harmonicznej napięcia u_1,
B_k amplitudę harmonicznej napięcia u_2.

Zatem

$$B_k = K_k \cdot b_k. \qquad (63)$$

Przesunięcie fazowe napięcia u_2 w stosunku do u_1 dla poszczególnych harmonicznych wyraża wzór

$$\varphi_k = -\,\mathrm{arctg}\left(k\,\frac{\omega_1}{\omega_0}\right). \qquad (64)$$

Wyniki obliczeń dla harmonicznych ($k = 0,1,3,5,7$) są następujące

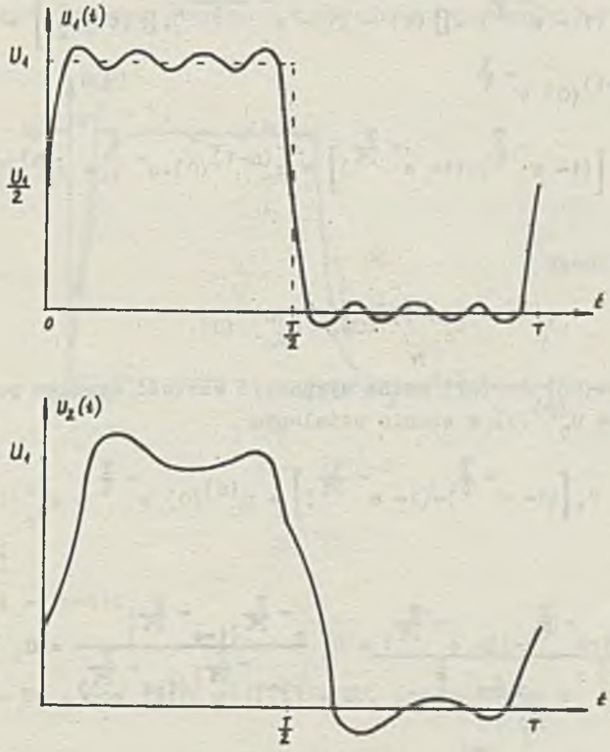
k	0	1	3	5	7
b_k	5	6,37	2,12	1,37	0,91
K_k	1	0,54	0,2	0,13	0,09
B_k	5	3,42	0,42	0,17	0,08
φ_k	0	-57,5°	-78°	-82,7°	-84,8°

Zgodnie z powyższymi wynikami wyrażenie na $u_2(t)$ ma postać

$$u_2(t) = 5 + 3,42\sin(\omega_1 t - 57,5^\circ) + 0,42\sin(3\omega_1 t - 78^\circ) +$$

$$+ 0,17\sin(5\omega_1 t - 82,7^\circ) + 0,08\sin(7\omega_1 t - 84,8^\circ) + \ldots\ \mathrm{V} \tag{65}$$

Na rys. 3.9.3 przedstawiono przebiegi czasowe napięć $u_1(t)$ i $u_2(t)$ w czasie okresu T złożone z 7 pierwszych harmonicznych.

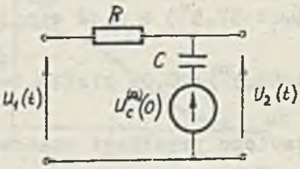


Rys. 3.9.3

Zadanie 3.10

W stanie ustalonym (rys. 3.10.1), warunki początkowe na kondensatorze na początku kolejnych przedziałów czasowych równych okresowi T są jednakowe. Stała czasowa obwodu z rys. 3.9 $\tau = RC$.

W n-tym przedziale czasu $[(n-1)T, nT]$ po przesunięciu układu współrzędnych na rys. 3.10 do punktu $(n-1)T$



Rys. 3.10.1

$$u_2(t) = U_1\left[(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\cdot\mathbb{1}(t) - (1 - e^{-\frac{t-\frac{T}{2}}{\tau}})\cdot\mathbb{1}(t - \tfrac{T}{2})\right] +$$

$$+ u_c^{(n-1)}(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{66}$$

$$u_2(nT) = U_1\left[(1- e^{-\frac{T}{\tau}})-(1- e^{-\frac{T}{2\tau}})\right] + u_c^{(n-1)}(0)\cdot e^{-\frac{T}{\tau}} = u_c^{(n)}(0) \tag{67}$$

Dla stanu ustalonego

$$u_c^{(n-1)}(0) = u_c^{(n)}(0). \tag{68}$$

Podstawiając (68) do (67) można wyznaczyć wartość warunku początkowego na kondensatorze $u_c^{(n)}(0)$ w stanie ustalonym

$$U_1\left[(1- e^{-\frac{T}{\tau}})-(1- e^{-\frac{T}{2\tau}})\right] + u_c^{(n)}(0)\, e^{-\frac{T}{\tau}} = u_{u_c}^{(n)}(0) \tag{69}$$

stąd

$$^{(n)}(0)= U_1\frac{(1-e^{-\frac{T}{\tau}})-(1- e^{-\frac{T}{2\tau}})}{1 -e^{-\frac{T}{\tau}}} = U_1\frac{e^{-\frac{T}{2\tau}}(1-e^{-\frac{T}{2\tau}})}{(1-e^{-\frac{T}{2\tau}})(1+e^{-\frac{T}{2\tau}})} = U_1\frac{e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{2\tau}}}$$

$$u_c^{(n)}(0) = U_1\frac{e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1-e^{-\frac{T}{2\tau}}} \tag{70}$$

Obliczenia pomocnicze

$$\tau = RC = 25\cdot 10^{-6}\,s; \quad \frac{T}{2\tau} = \frac{0.1\cdot 10^{-3}}{2\cdot 25\cdot 10^{-6}} = 2$$

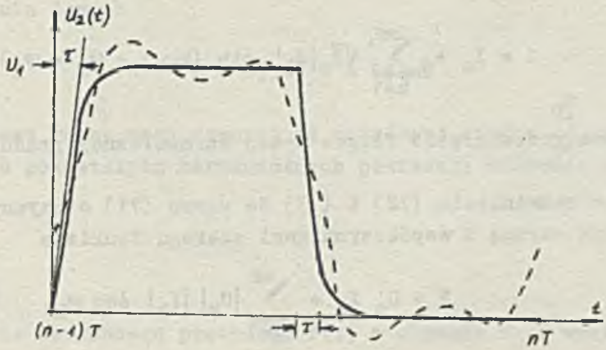
$$u_c^{(n)}(0) = 10\cdot\frac{e^{-2}}{1-e^{-2}} = 1{,}565\ V.$$

Napięcie $u_2(t)$ w stanie ustalonym, w przedziale czasu równym okresowi T, wynosi

$$u_2(t) = 10\left[\left(1-e^{-\frac{t}{5\cdot 10^{-6}}}\right)\mathbb{1}(t) - \left(1-e^{-\frac{t-5\cdot 10^{-5}}{5\cdot 10^{-6}}}\right)\mathbb{1}(t-5\cdot 10^{-5})\right] +$$

$$+ 1,565\, e^{-\frac{t}{5\cdot 10^{-6}}}\ \mathrm{V}.$$

Na rys. 3.10.2 przedstawiony został przebieg $u_2(t)$. Linią przerywaną naniesiono także przebieg otrzymany z rozwiązania zadania 3.9.



Rys. 3.10.2

Zadanie 3.11

Dla $t' = t - (n-1)t_1$

$$u_2(t) = -U_1 \cdot \cos(\omega t' + \varphi)\,\mathbb{1}(t') + 2U_1 \cos\varphi \frac{1}{1-e^{-\frac{t_1}{T}}}\, e^{-\frac{t'}{T}} =$$

$$= 9,7\left[-\cos(314t' + 17^{\circ}) + 3\,.\,05\, e^{-100t'}\right],$$

gdzie $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\omega T}$.

Zadanie 3.12

Moc czynna dla przebiegów okresowych jest równa mocy średniej za okres T i wynosi

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u \cdot i \, dt, \tag{71}$$

gdzie:

u - chwilowa wartość napięcia,
i - chwilowa wartość prądu.

Po rozwinięciu w trygonometryczny szereg Fouriera wartości chwilowe przyjmują postać

$$u = U_o + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, |U_k| \sin (k\omega_1 t + \psi_k), \tag{72}$$

$$i = I_o + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, |I_k| \sin (k\omega_1 t + \psi_k - \varphi_k) \tag{73}$$

gdzie φ_k oznacza przesunięcie fazowe k-tej harmonicznej prądu względem napięcia.

Podstawiając rozwinięcia (72) i (73) do wzoru (71) otrzymuje się zależność między mocą czynną i współczynnikami szeregu Fouriera

$$P = U_o I_o + \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|\,|I_k| \cos \varphi_k. \tag{74}$$

Rozwinięcie przebiegu napięcia z rys. 3.9.1 w szereg Fouriera jest następujące

$$u_1(t) = \frac{U_1}{2} + \frac{2U_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\,\omega_1 t}{2n-1} \tag{75}$$

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\, e^{-\,j\operatorname{arctg} \frac{1}{\omega RC}}. \tag{76}$$

Dla poszczególnych harmonicznych

$$Z_{2n-1} = \sqrt{R^2 + \left[\frac{1}{(2n-1)\omega_1 C}\right]^2}\; e^{-j\operatorname{arctg} \frac{1}{(2n-1)\omega_1 RC}} \tag{77}$$

Zatem

$$i(t) = \frac{U_1}{2R} + \frac{2U_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \frac{(2n-1)\omega_1 C}{\sqrt{\left[(2n-1)\omega_1 RC\right]^2 + 1}} \cdot$$

$$\cdot \sin\left[(2n-1)\omega_1 t + \operatorname{arctg} \frac{1}{(2n-1)\omega_1 RC}\right]. \tag{78}$$

Korzystając z zależności (75) i (78) i podstawiając je do wzoru (74) mamy

$$P = \frac{U_1^2}{4R} + \frac{2U_1^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_1 C}{(2n-1)\sqrt{\left[(2n-1)\omega_1 RC\right]^2 + 1}} \cos\left[\operatorname{arctg} \frac{1}{(2n-1)\,\omega_1\, RC}\right] \qquad (79)$$

Po przekształceniu wyrażenia (79) otrzymujemy

$$P = \frac{U_1^2}{4R} + \frac{8U_1^2}{T^2} \cdot RC^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[(2n-1)\omega_1 RC\right]^2 + 1}. \qquad (80)$$

Po podstawieniu danych

$$P \approx 0{,}025 \text{ W} = 25 \text{ mW}$$

Wartość ta jest równa mocy czynnej od składowej stałej $\frac{U_1^2}{4R}$, składowe mocy pochodzące od pozostałych harmonicznych posiadają wartości o kilka rzędów mniejsze.

Zadanie 3.13

Rozwinięcie okresowego przebiegu f(t) o okresie T w wykładniczy szereg Fouriera ma następującą postać

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_1 t}, \qquad (81)$$

gdzie współczynniki rozwinięcia

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt \qquad (82)$$

a $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ jest pulsacją przebiegu.

Zależność między postaciami trygonometryczną i wykładniczą szeregu Fouriera można wyprowadzić korzystając ze wzorów

$$\cos k\omega_1 t = \frac{1}{2}\left(e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}\right), \qquad (83)$$

$$\sin k\omega_1 t = \frac{1}{2j}\left(e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}\right). \qquad (84)$$

Wychodząc z postaci trygonometrycznej, otrzymuje się

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \frac{1}{2} (e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}) + b_k \frac{1}{2j} (e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}) \right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - jb_k) e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k + jb_k). \tag{85}$$

Ze wzorów na współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera (25) i (26) wynika, że a_k jest funkcją parzystą względem k

$$a_{-k} = a_k, \tag{86}$$

natomiast b_k jest funkcją nieparzystą względem k

$$b_{-k} = - b_k. \tag{87}$$

Wykorzystując zależności (86) i (87) w wyprowadzeniu (85) otrzymuje się

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - jb_k) e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{2} (a_{-k} - jb_{-k}) e^{jk\omega_1 t} =$$

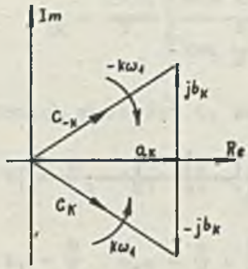
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} (a_k - jb_k) e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{2} (a_k + jb_k) e^{jk\omega_1 t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}. \tag{88}$$

Stąd związek między współczynnikami trygonometrycznego i wykładniczego szeregu Fouriera

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_k - jb_k) & \text{dla } k \geq 0 \\ \frac{1}{2} (a_k + jb_k) & \text{dla } k < 0 \end{cases} \tag{89}$$

Interpretacja współczynnika c_k na płaszczyźnie zespolonej jest przedstawiona na rys. 3.13. Współczynniki rozwinięcia przebiegów okresowych z rys. 3.3 w wykładniczy szereg Fouriera zostały podane w tablicy 3.1. (Dodatek 2).



Rys. 3.13

Zadanie 3.14

Postać wykładniczego szeregu Fouriera dla sygnału f(t) z rys.3.14 jest następująca

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^{t_1} F\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt = \frac{F}{T}\frac{1}{(-jk\omega_1)}\, e^{-jk\omega_1 t}\Big|_0^{t_1} =$$

$$= \frac{F}{T}\frac{1}{(-jk\omega_1)}\left(e^{-jk\omega_1 t_1} - 1\right) = \frac{F}{T}\frac{1}{(-jk\omega_1)}(\cos k\omega_1 t_1 - j\sin k\omega_1 t_1 - 1) =$$

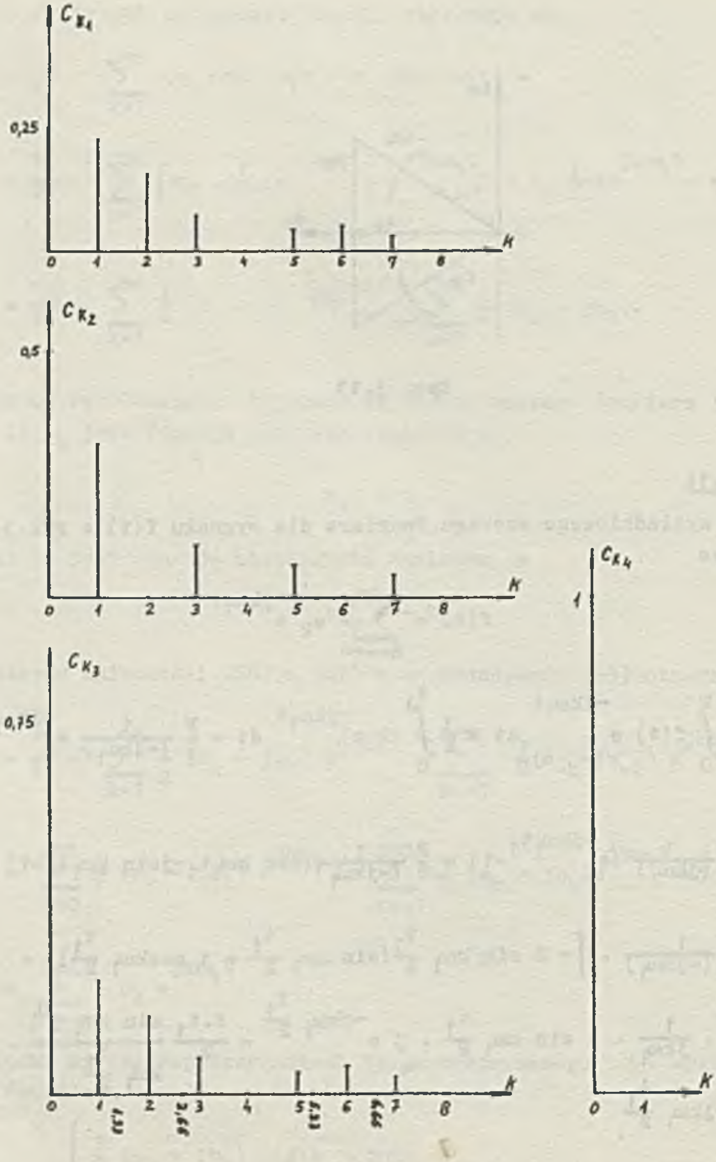
$$= \frac{F}{T}\frac{1}{(-jk\omega_1)}\cdot\left[-2\sin k\omega_1\frac{t_1}{2}\left(\sin k\omega_1\frac{t_1}{2} + j\cos k\omega_1\frac{t_1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{F}{T}\cdot\frac{1}{jk\omega_1}\cdot 2\sin k\omega_1\frac{t_1}{2}\cdot j\, e^{-jk\omega_1\frac{t_1}{2}} = \frac{F.t_1}{T}\,\frac{\sin k\omega_1\frac{t_1}{2}}{k\omega_1\frac{t_1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\, e^{-jk\omega_1\frac{t_1}{2}}.$$

Zatem

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{Ft_1}{T}\,\frac{\sin k\omega_1\frac{t_1}{2}}{k\omega_1\frac{t_1}{2}}\, e^{jk\omega_1\left(t-\frac{t_1}{2}\right)} \tag{90}$$


C K1
0,25
0 1 2 3 4 5 6 7 8 K
C K2
0,5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 K
C K3
0,75
0 1 2 3 4 5 6 7 8 K
C K4
1
0 1 K

Rys. 3.14.1

Widmo amplitudowe wyraża wzór

$$c_k = \frac{F \cdot t_1}{T} \left| \frac{\sin k\omega_1 \frac{t_1}{2}}{k\omega_1 \frac{t_1}{2}} \right| \tag{91}$$

Widmo amplitudowe dla zadanych wartości t_1 ma postać

$$t_1 = \frac{T}{4} \quad c_{k1} = \frac{F}{4} \cdot \left| \frac{\sin k \frac{\pi}{4}}{k \cdot \frac{\pi}{4}} \right|$$

$$t_1 = \frac{T}{2} \quad c_{k2} = \frac{F}{2} \cdot \left| \frac{\sin k \frac{\pi}{2}}{k \cdot \frac{\pi}{2}} \right|$$

$$t_1 = \frac{3T}{4} \quad c_{k3} = \frac{3F}{4} \cdot \left| \frac{\sin k \cdot \frac{3}{4}\pi}{k \cdot \frac{3}{4}\pi} \right|$$

$$t_1 = T \quad c_0 = F \quad c_{k4} = 0 \quad k = 1,2,\ldots$$

Wykres modułu widma przedstawia rys. 3.14.1.

<u>Zadanie 3.15</u>

Na podstawie rys. 3.15 przebieg sygnału f(t) można zdefiniować następująco

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < t \leq t_0 \\ \frac{F}{t_1}(t - t_0) & \text{dla } t_0 < t \leq t_0 + t_1 \\ F & \text{dla } t_0 + t_1 < t \leq t_0 + t_1 + t_2 \\ \frac{F}{t_1}(t - t_0 - 2t_1 - t_2) & \text{dla } t_0 + t_1 + t_2 < t \leq t_0 + 2t_1 + t_2. \end{cases}$$

Rozwinięcie przebiegu f(t) w wykładniczy szereg Fouriera ma następującą postać

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_1 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+t_1} \frac{F}{t_1}(t-t_o)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_{t_o+t_1}^{t_o+t_1+t_2} F \cdot e^{-jk\omega_1 t}\, dt + \frac{1}{T}\int_{t_o+t_1+t_2}^{t_o+2t_1+t_2} \frac{F}{t_1}(t-t_o-2t_1-t_2)e^{-jk\omega_1 t} =$$

$$= \frac{-F}{Tjk\omega_1} e^{-jk\omega_1(t_o+t_1)} + \frac{1}{T}\cdot\frac{F}{k^2 \cdot \omega_1^2 \cdot t_1} e^{-jk\omega_1(t_o+t_1)} -$$

$$- \frac{1}{T}\cdot\frac{F}{k^2\omega_1^2\, t_1}\cdot e^{-jk\omega_1 t_o} - \frac{1}{T}\cdot\frac{F}{jk\omega_1} e^{-jk\omega_1(t_o+t_1+t_2)} +$$

$$+ \frac{1}{T}\frac{F}{jk\omega_1} e^{-jk\omega_1(t_o+t_1)} + \frac{1}{T}\frac{F}{jk\omega_1} e^{-jk\omega_1(t_o+t_1+t_2)} -$$

$$- \frac{1}{T}\cdot\frac{F}{k^2\omega_1^2 t_1} e^{-jk\omega_1(t_o+2t_1+t_2)} + \frac{1}{T}\frac{F}{k^2\omega_1^2\, t_1}\cdot e^{-jk\omega_1(t_o+t_1+t_2)} =$$

$$= \frac{1}{T}\frac{F}{k^2\,\omega_1^2 t_1}\cdot e^{-jk\omega_1\, t_o}\left[e^{-jk\omega_1\, t_1} - 1 - e^{-jk\omega_1(2t_1+t_2)} +\right.$$

$$\left.+ e^{-jk\omega_1(t_1+t_2)}\right] = -\frac{1}{T}\frac{F}{k^2\,\omega_1^2\cdot t_1} e^{-jk\omega_1 t_o}(e^{-jk\omega_1\, t_1} - 1)\cdot$$

$$\cdot\left[e^{-jk\omega_1(t_1+t_2)} - 1\right].$$

Wyprowadzenie pomocnicze

$$e^{-jk\omega_1 t_1} - 1 = \cos k\omega_1 t_1 - j\sin k\omega_1 t_1 - 1 =$$

$$= -2\sin k\omega_1 \frac{t_1}{2}\left(\sin k\,\omega_1 \frac{t_1}{2} + j\cos k\,\omega_1 \frac{t_1}{2}\right) =$$

$$= -2j\sin k\omega_1 \frac{t_1}{2}\, e^{-jk\omega_1 \frac{t_1}{2}}.$$

Zatem

$$c_k = \frac{4F}{T\cdot k^2\omega_1^2 t_1}\sin k\omega_1\frac{t_1}{2}\cdot \sin k\omega_1 \frac{t_1+t_2}{2}\, e^{-jk\omega_1(t_o+\frac{t_2}{2})} =$$

$$= \frac{F(t_1+t_2)}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1 t}{k\omega_1 \cdot \frac{t_1}{2}} \cdot \frac{\sin k\omega_1 \frac{t_1+t_2}{2}}{k\omega_1 \frac{t_1+t_2}{2}} \, e^{-jk\omega_1 (t_0+t_1+\frac{t_2}{2})} \, . \qquad (92)$$

Widmo amplitudowe przebiegu f(t) z rys. 3.15 jest następujące

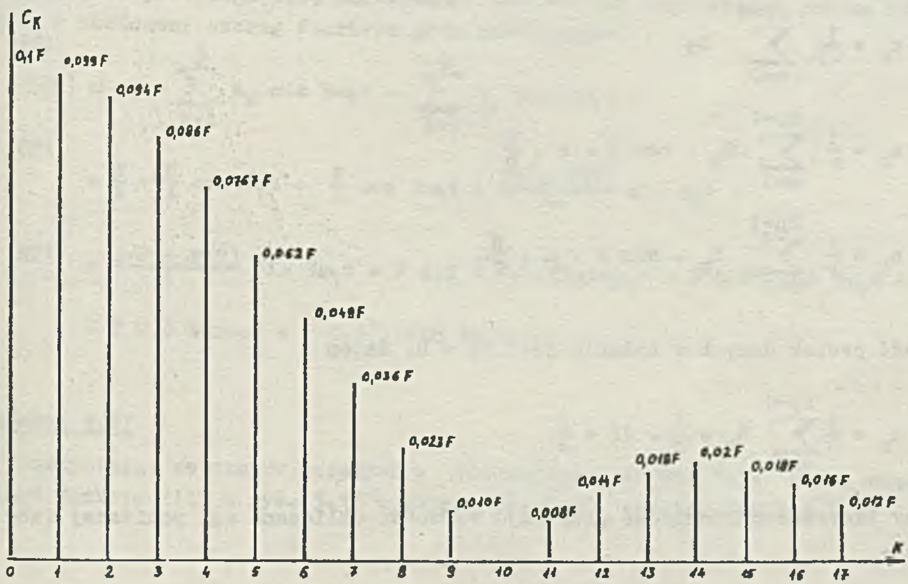
$$c_k = \frac{F(t_1+t_2)}{T} \cdot \left| \frac{\sin k\omega_1 \frac{t_1}{2}}{k\omega_1 \cdot \frac{t_1}{2}} \right| \cdot \left| \frac{\sin k\omega_1 \frac{t_1+t_2}{2}}{k\omega_1 \cdot \frac{t_1+t_2}{2}} \right| \qquad (93)$$

Punkty zerowe widma wyznacza się z warunków

$$\frac{k_i \omega_1 t_1}{2} = i\pi \quad \text{stąd} \quad k_i = \frac{i \cdot 2\pi}{\omega_1 t_1} = 50,\ 100,\ 150, \ldots$$

$$\frac{k_j \omega_1 (t_1+t_2)}{2} = j \cdot \pi \quad \text{stąd} \quad k_j = \frac{j \cdot 2\pi}{\omega_1 (t_1+t_2)} = 10,\ 20,\ 30,\ 40 \ldots$$

Wykres modułu widma przedstawia rys. 3.15.1.



Rys. 3.15.1

Zadanie 3.16

Współczynniki a_0, a_k, b_k szeregu Fouriera są wartościami średnimi funkcji $f(t)$, $f(t)\cos k\omega_1 t$, $f(t)\sin k\omega_1 t$.

Jeśli okres funkcji $f(t)$ podzieli się na 2p równych części i z każdej części pobierzemy próbkę S_n określającą wartość funkcji, to współczynniki a_0, a_k, b_k szeregu Fouriera można obliczyć wg następujących zależności, zwanych wzorami Bessela.

$$a_0 = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{2p-1} \frac{T}{2p} \cdot S_n \tag{94}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{2p-1} \frac{T}{2p} \cdot \left(S_n \cos k \frac{2\pi}{T} \cdot n \cdot \frac{T}{2p}\right) \tag{95}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \sum_{n=0}^{2p-1} \frac{T}{2p} \cdot \left(S_n \sin k \frac{2\pi}{T} \cdot n \frac{T}{2p}\right) \tag{96}$$

stąd

$$a_0 = \frac{1}{2p} \sum_{n=0}^{2p-1} S_n \tag{97}$$

$$a_k = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{2p-1} S_n \cdot \cos k \cdot n \cdot \frac{\pi}{p} \tag{98}$$

$$b_k = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{2p-1} S_n \cdot \sin k \cdot n \cdot \frac{\pi}{p}. \tag{99}$$

Ilość próbek danych w zadaniu jest 2p = 8. Zatem

$$a_0 = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{2p-1} S_n = \frac{1}{8} \cdot 4F = \frac{F}{2}.$$

Trzy pierwsze harmoniczne przyjmują wartości obliczone wg poniższej tablicy.

Tablica 3.16

n	S_n	$S_n \cos n\frac{\pi}{4}$	$S_n \cos 2n\frac{\pi}{4}$	$S_n \cos 3n\frac{\pi}{4}$	$S_n \sin n\frac{\pi}{4}$	$S_n \sin 2n\frac{\pi}{4}$	$S_n \sin 3n\frac{\pi}{4}$
0	F	F	F	F	0	0	0
1	F	$F\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-F\frac{\sqrt{2}}{2}$	$F\frac{\sqrt{2}}{2}$	F	$F\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	F	0	-F	0	F	0	-F
3	F	$-F\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$F\frac{\sqrt{2}}{2}$	$F\frac{\sqrt{2}}{2}$	-F	$F\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0
		$a_1 = \frac{F}{4}$	$a_2 = 0$	$a_3 = \frac{F}{4}$	$b_1 = \frac{F+F\sqrt{2}}{4}$	$b_2 = 0$	$b_3 = \frac{-F+F\sqrt{2}}{4}$

Rozwinięcie przebiegu f(t) określonego dyskretnymi wartościami jak na rys. 3.16 w skończony szereg Fouriera jest następujące

$$f(t) \approx a_o + \sum_{k=1}^{3} a_k \cos k\omega_1 t + \sum_{k=1}^{3} b_k \sin k\omega_1 t =$$

$$= \frac{F}{2} + \frac{F}{4} \cos \omega_1 t + \frac{F}{4} \cos 3\omega_1 t + \frac{(F + F\sqrt{2})}{4} \sin \omega_1 t +$$

$$+ \frac{(-F + F\sqrt{2})}{4} \sin 3\omega_1 t = F\ 0{,}5 + F\cdot 0{,}25 \cos\omega_1 t + F\ 0{,}25 \cos 3\omega_1 t +$$

$$+ F\ 0{,}6 \sin\omega_1 t + F\ 0{,}1 \cdot \sin 3\omega_1 t.$$

Zadanie 3.17

Korzystając ze wzorów podanych w rozwiązaniu zadania 3.16 można rozwinąć funkcję f(t) z rys. 3.17 w szereg Fouriera, tworząc tablicę 3.17

Tablica 3.17

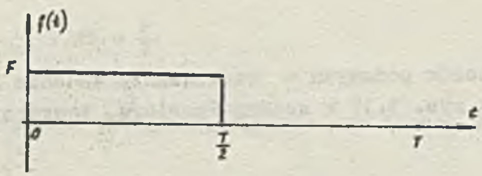
n	S_n	$S_n \cos n\frac{\pi}{8}$	$S_n \cos 2n\frac{\pi}{8}$	$S_n \cos 3n\frac{\pi}{8}$	$S_n \sin n\frac{\pi}{8}$	$S_n \sin 2n\frac{\pi}{8}$	$S_n \sin 3n\frac{\pi}{8}$
0	F	F	F	F	0	0	0
1	F	F.0,92	F.0,71	F.0,38	F.0,38	F.0,71	F.0,92
2	F	F.0,71	0	-F.0,71	F.0,71	F	F.0,71
3	F	F.0,38	-F.0,71	-F.0,92	F.0,92	F.0,92	-F.0,38
4	F	0	-F	0	F	0	-F
5	F	-F.0,38	-F .0,71	F.0,92	F.0,92	-F.0,71	-F.0,38
6	F	-F.0,71	0	F.0,71	F.0,71	-F	F.0,71
7	F	-F.0,92	F.0,71	-F.0,38	-F.0,38	-F.0,71	F.0,92
8÷15	0	0	0	0	0	0	0
Współczynnik Fouriera		a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
Wartość współczynnika		F.0,13	0	F.0,13	F.0,63	0	F.0,19

$$a_o = \frac{1}{16} \cdot \sum_{n=0}^{2p-1} S_n = \frac{1}{16} \cdot 8F = \frac{F}{2}.$$

Zatem szukane rozwinięcie funkcji f(t) z rys. 3.17 w szereg Fouriera jest następujące

$$f(t) \approx F.0,5+F.0,13 \cos\omega_1 t+F.0,13 \cos 3\omega_1 t+F.0,63 \sin\omega_1 t+F.0,19 \sin 3\omega_1 t.$$

Porównajmy 3 rozwinięcia funkcji f(t) z rys. 3.17.1.



Rys. 3.17.1

Pierwsze rozwinięcie wyprowadzone na podstawie wzoru analitycznego funkcji f(t), korzystając z tablicy 3.1 (Dodatek 2)

$$f(t) \approx F.0,5+0.\cos\omega_1 t+0.\cos 3\omega_1 t+F.0,635 \sin\omega_1 t+F.0,21 \sin 3\omega_1 t$$

Drugie rozwinięcie wyprowadzone na podstawie wzorów Bessela przy 2p=8 próbkach.

$$f(t) \approx F \cdot 0{,}5 + F \cdot 0{,}25 \cos\omega_1 t + F \cdot 0{,}25 \cos 3\omega_1 t + F \cdot 0{,}6 \sin\omega_1 t +$$

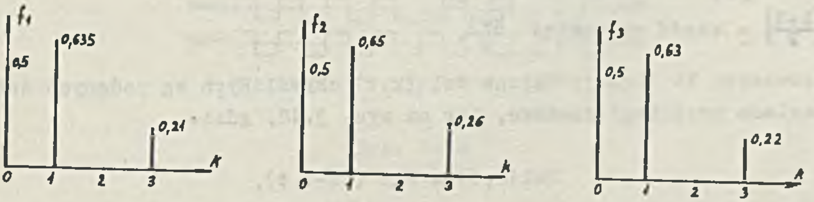
$$+ F \cdot 0{,}1 \sin 3\omega_1 t.$$

Trzecie rozwinięcie wyprowadzone na podstawie wzorów Bessela przy 2p = 16 próbkach

$$f(t) \approx F \cdot 0{,}5 + F \cdot 0{,}13 \cos\omega_1 t + F \cdot 0{,}13 \cos 3\omega_1 t + F \cdot 0{,}63 \sin\omega_1 t +$$

$$+ F \cdot 0{,}19 \sin 3\omega_1 t.$$

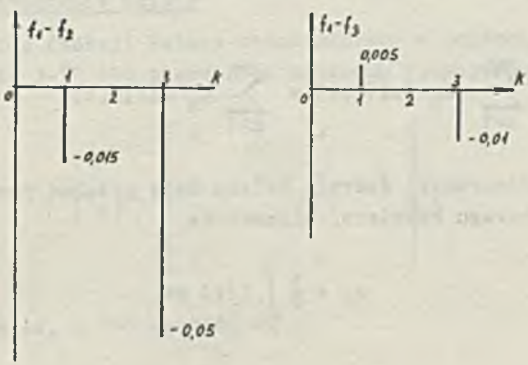
Widma amplitudowe powyższych trzech postaci rozwinięcia w szereg Fouriera przedstawia rys. 3.17.2. Z powyższych rozważań wynika, że im większa



Rys. 3.17.2

sza ilość próbek określających dany przebieg f(t), tym większa dokładność aproksymacji przebiegu f(t) przez szereg Fouriera obliczonego na podstawie tych próbek.

Na rys. 3.17.3 przedstawiono różnice między widmem rzeczywistym i otrzymanym na podstawie próbek.



Rys. 3.17.3

Zadanie 3.15

Szereg dwuwartościowych ortogonalnych funkcji Walsha Wal (k,t) może być zdefiniowany w następujący sposób

$$k=0 \qquad Wal(0,t) = 1 \qquad \text{dla} \quad 0 \leq t < T \tag{100}$$

$$k=1 \qquad Wal(1,t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -1 & \text{dla} \quad \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \tag{101}$$

k=2,3,...

$$Wal(k,t) = \begin{cases} Wal(l,2t) & \text{dla } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ (-1)^m \, Wal(l,2t-T) & \text{dla } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \tag{102}$$

gdzie $l = \left[\frac{k}{2}\right]$ - część całkowita $\frac{k}{2}$,

$m = \left[\frac{k+1}{2}\right]$ - część całkowita $\frac{k+1}{2}$.

Pierwszych 16 funkcji Walsha Wal (k,t) określonych wg podanych definicji posiada przebiegi czasowe, jak na rys. 3.18, gdzie

$$\begin{aligned} Sal(k,t) &= Wal\,(2k-1,t), \\ Cal(k,t) &= Wal\,(2k,t), \end{aligned} \tag{103}$$

dla k = 1,2,3,...

Przebieg czasowy f(t) można rozwinąć w nieskończony szereg funkcji Walsha następująco

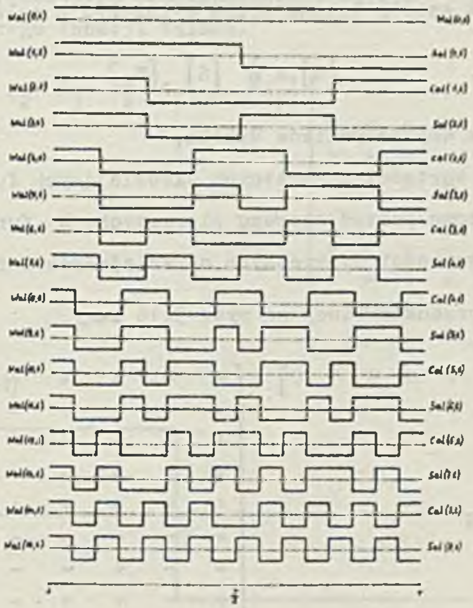
$$f(t) = C_0 + C_1\, Wal(1,t) + C_2\, Wal(2,t) + C_3\, Wal(3,t) + \ldots \tag{104}$$

lub

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, Cal(k,t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, Sal(k,t) \tag{105}$$

Wzory na współczynniki szeregu Walsha mają podobną postać do wzorów na współczynniki szeregu Fouriera, mianowicie

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt, \tag{106}$$



Rys. 3.18

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\ \mathrm{Cal}\ (k,t)\ dt, \qquad (107)$$

$$b_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\ \mathrm{Sal}\ (k,t)\ dt. \qquad (108)$$

<u>Dyskretne przekształcenie Walsha</u>

Skończony szereg funkcji Walsha można zapisać w postaci macierzowej. Korzystając z rys. 3.30 dla pierwszych czterech funkcji, mamy

$$\left[W_4\right] = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \end{bmatrix},$$

gdzie "+" oznacza +1, a "-" wartość -1

Jeżeli przebieg czasowy f(t) jest określony za pomocą N wartości dyskretnych, gdzie $N = 2^n$ (n - liczba całkowita), to współczynniki rozwinięcia funkcji f(t) w szereg Walsha można wyznaczyć z zależności

$$[C] = \frac{1}{N}\,[S]\,[W_N] \tag{109}$$

[C] - macierz współczynników Walsha,

[S] - wektor wartości dyskretnych określających funkcję f(t),

$[W_N]$ - macierzowa postać szeregu pierwszych N funkcji Walsha,

N - ilość wartości dyskretnych określających funkcję f(t).

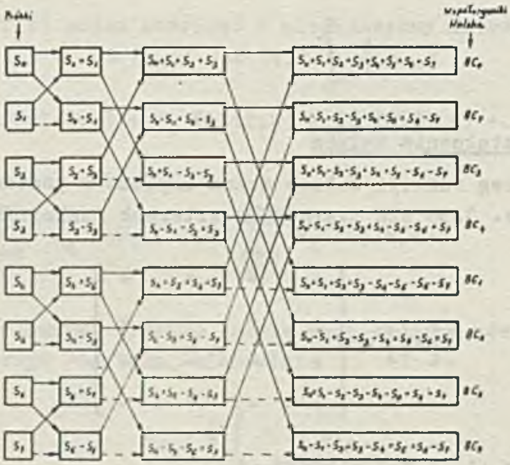
Dla funkcji f(t) przedstawionej na rys. 3.16 mamy

$$[C] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} F & F & F & F & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4F & 4F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

stąd $f(t) = \frac{F}{2}\,Wal(o,t) + \frac{F}{2}\,Wal(1,t)$.

Algorytm dyskretnego przekształcenia Walsha dla N=8 można przedstawić w postaci graficznej, jak na rys. 3.18.1.

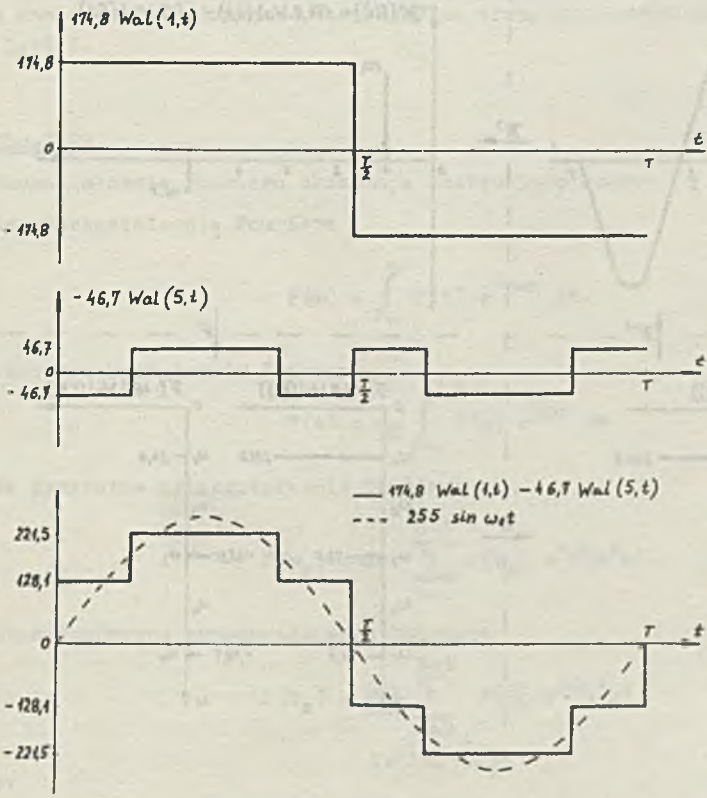


Rys. 3.18.1

Zadanie 3.19

Korzystając z dyskretnego przekształcenia Walsha znajdujemy macierz współczynników szeregu funkcji Walsha.

$$[C] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{bmatrix}$$



Rys. 3.19.1

Po podstawieniu wartości próbek

$$C_0 = C_2 = C_3 = C_4 = C_6 = C_7 = 0$$

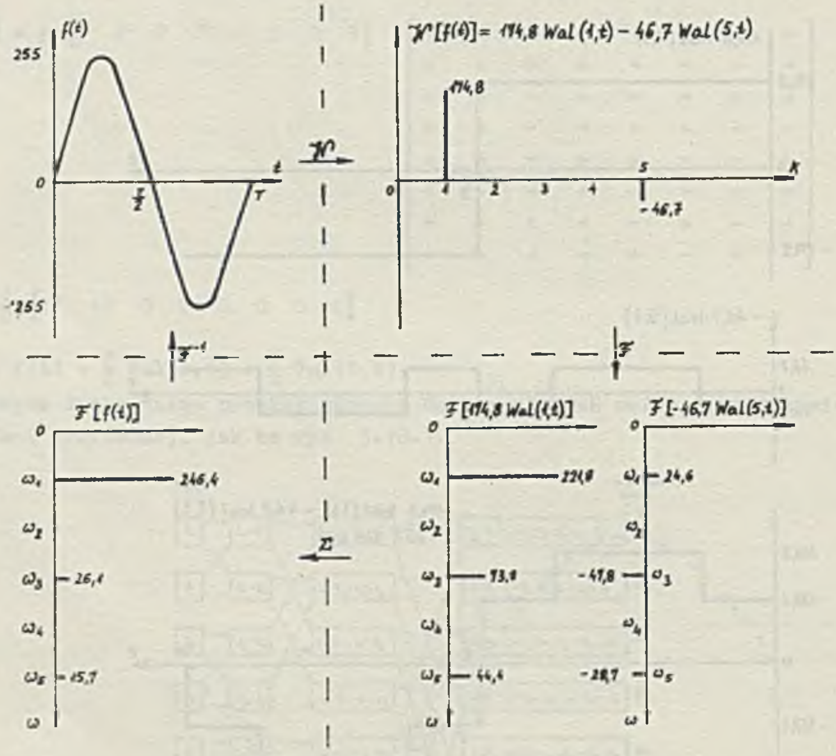
$$C_1 = \frac{1}{8}(S_0 + S_1 + S_2 + S_3 - S_4 - S_5 - S_6 - S_7) = 174{,}8$$

$$C_5 = \frac{1}{8}(S_0 - S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 + S_6 - S_7) = -46{,}7.$$

Zatem

$$f(t) \approx 174{,}8 \text{ Wal}(1,t) - 46{,}7 \text{ Wal}(5,t).$$

Przebieg złożony z funkcji Walsha, aproksymujący przebieg sinusoidalny f(t), przedstawia rys. 3.19.1.
Korzystając z tablicy 3.1 można znaleźć rozwinięcie funkcji 174,8 Wal(1,t) w szereg Fouriera. Widmo pierwszych pięciu harmonicznych przedstawione jest na rys. 3.19.2.



Rys. 3.19.2

Rozwinięcie funkcji - 46,7 Wal(5,t) w szereg Fouriera zawiera tylko współczynniki b_{2n-1} dla n = 1,2,3,...

$$b_{2n-1} = \frac{-46,7}{(2n-1)\pi}\left[4-2\cos\,(2n-1)\,\frac{\pi}{4} + 2\,\cos(2n-1)\,\frac{3\pi}{4} + \right.$$

$$\left. + 2\cos\,(2n-1)\,\frac{5\pi}{4} - 2\cos\,(2n-1)\,\frac{7\pi}{4}\right].$$

Widmo amplitudowe przebiegu -46,7 Wal(5,t) przedstawione jest na rys. 3.19.2.

Sumując widma amplitudowe odpowiadające wyliczonym funkcjom Walsha, otrzymujemy widmo danej funkcji sinusoidalnej. Powinno ono zawierać tylko pierwszą harmoniczną o wartości 255. Otrzymane widmo zawiera pierwszą harmoniczną o wartości 246,4 oraz harmoniczne wyższych rzędów o wartościach znacznie mniejszych. Różnica między widmem rzeczywistym i obliczonym funkcji sinusoidalnej wynika ze stosowania skończonych szeregów Walsha i Fouriera zamiast nieskończonych. Poszczególne etapy przekształceń przedstawia rys. 3.19.2.

<u>Zadanie 3.20</u>

Przekształcenie Fouriera określają następujące wzory:

Proste przekształcenie Fouriera

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt. \tag{110}$$

Odwrotne przekształcenie Fouriera

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{111}$$

Proste dyskretne przekształcenie Fouriera

$$F(\omega_n) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\, e^{-j\omega_n t_k}. \tag{112}$$

Odwrotne dyskretne przekształcenie Fouriera

$$f(t_k) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} F(\omega_n) e^{j\omega_n t_k}, \tag{113}$$

gdzie:

- N – ilość próbek,
- k – numer próbki czasowej,
- n – numer próbki pulsacyjnej,
- $\Delta t = \frac{T}{N}$ – czasowy odstęp próbkowania,
- $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ – pulsacyjny odstęp próbkowania,

$t_k = k \cdot \Delta t = k \cdot \frac{T}{N}$ - czas próbkowania,

$\omega_n = n \cdot \Delta\omega = n \cdot \frac{2\pi}{T}$ - pulsacja próbkowania.

Zatem

$$\omega_n \cdot t_k = \frac{2\pi nk}{N}.$$

Stąd proste i odwrotne dyskretne przekształcenia Fouriera przyjmują postać

$$F(n) = \frac{T}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\, e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \tag{114}$$

$$f(k) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} F(n)\, e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \tag{115}$$

Proste dyskretne przekształcenia Fouriera w postaci macierzowej może być zapisane następująco

$$\left[F(n)\right] = \frac{T}{N} \cdot \left[W^{nk}\right] \cdot \left[f(k)\right] \tag{116}$$

gdzie:

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}},$$

$$W^{nk} = \begin{cases} W^{nk} & nk < N \\ W^{\left[\frac{nk}{N}\right]} & nk \geq N \end{cases} \tag{117}$$

$\left[\frac{nk}{N}\right]$ - całkowita reszta z dzielenia $\frac{nk}{N}$.

Szybkie przekształcenie Fouriera wykorzystuje algorytm Cooleya-Tukeya do rozkładu macierzy $\left[W^{nk}\right]$ stopnia N na iloczyn m macierzy kwadratowych stopnia N tak, aby ilość złożonych mnożeń i sumowań była zminimalizowana. Do obliczenia wartości F(n) na podstawie wzoru (114) trzeba wykonać N^2 złożonych mnożeń. Szybkie przekształcenie Fouriera redukuje tę ilość do 2 m N mnożeń, gdy $N = 2^m$.

Zależność (116) możemy zapisać w następującej postaci

$$\left[F(n)\right] = \frac{T}{N} \cdot \left[W^{nk}\right]_m \left[W^{nk}\right]_{m-1} \cdots \left[W^{nk}\right]_1 \left[f(k)\right], \tag{118}$$

założmy

$$[F(n)] = \frac{T}{N} \cdot [W^{nk}]_m \, [f_{m-1}(n)] \,, \qquad (119)$$

gdzie:

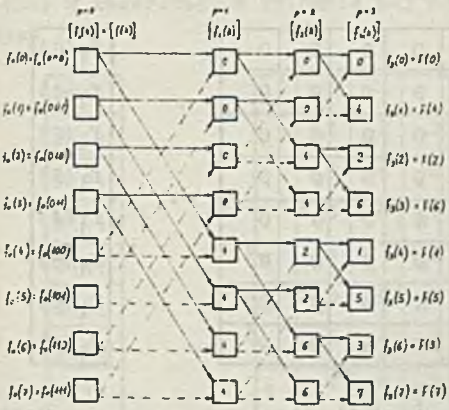
$$[f_p(n)] = [W^{nk}]_p \, [W^{nk}]_{p-1} \cdots [W^{nk}]_1 \, [f(k)]$$

$$[f_p(n)] = [W^{nk}]_p \, [f_{p-1}(n)] \qquad (120)$$

$$[f_o(n)] = [f(k)].$$

Dla N = 8 próbek macierze $[W^{nk}]_p$ możemy wyznaczyć z wykresu przedstawionego na rys. 3.20. Obrazuje on sposób postępowania wg algorytmu Cooleya-Tukeya. Macierz $[f_o(k)]$ zawiera wartości próbek przebiegu czasowego $f_o(0) = S_0$, $f_o(1) = S_1, \ldots, f_o(7) = S_7$. Liczby $k = 0,1,2,\ldots,7$ zostały przedstawione w postaci binarnej. Składowa k wektora $[f_p(k)]$ jest sumą składowej wektora $[f_{p-1}(k)]$ wskazanej przez linię ciągłą i składowej wektora $[f_{p-1}(k)]$, wskazanej przez linię przerywaną, pomnożonej przez W^{nk}. Wykładnik nk równa się liczbie w kwadracie odpowiadającym składowej k wektora $[f_p(k)]$, np.

$$f_1(0) = f_o(0) + W^0 f_o(4).$$



Rys. 3.20

Liczby w kwadracie powstają w następujący sposób:

- bity liczby binarnej k przesuwamy w prawo o m-p miejsc i wpisujemy zero na miejsce wolnego bitu z lewej strony,
- odwracamy kolejność bitów,
- przedstawiamy tak otrzymaną liczbę binarną w postaci dziesiętnej.

Korzystając z wykresu przedstawionego na rys. 3.20 otrzymujemy następujące zależności

$$\left[f_1(k)\right] = \left[W^{nk}\right]_1 \left[f_o(k)\right] \tag{121}$$

$$\begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \\ f_1(4) \\ f_1(5) \\ f_1(6) \\ f_1(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & W^o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^o \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_o(0) \\ f_o(1) \\ f_o(2) \\ f_o(3) \\ f_o(4) \\ f_o(5) \\ f_o(6) \\ f_o(7) \end{bmatrix}$$

$$\left[f_2(k)\right] = \left[W^{nk}\right]_2 \left[f_1(k)\right] \tag{122}$$

$$\begin{bmatrix} f_2(0) \\ f_2(1) \\ f_2(2) \\ f_2(3) \\ f_2(4) \\ f_2(5) \\ f_2(6) \\ f_2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \\ f_1(4) \\ f_1(5) \\ f_1(6) \\ f_1(7) \end{bmatrix}$$

$$\left[f_3(k)\right] = \left[W^{nk}\right]_3 \left[f_2(k)\right] \tag{123}$$

$$\begin{bmatrix} f_3(0) \\ f_3(1) \\ f_3(2) \\ f_3(3) \\ f_3(4) \\ f_3(5) \\ f_3(6) \\ f_3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^o & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_2(0) \\ f_2(1) \\ f_2(2) \\ f_2(3) \\ f_2(4) \\ f_2(5) \\ f_2(6) \\ f_2(7) \end{bmatrix}$$

stąd

$$\left[f_3(k)\right] = \left[W^{nk}\right]_3 \left[W^{nk}\right]_2 \left[W^{nk}\right]_1 \left[f_0(k)\right] \tag{124}$$

$$\begin{bmatrix} f_3(0) \\ f_3(1) \\ f_3(2) \\ f_3(3) \\ f_3(4) \\ f_3(5) \\ f_3(6) \\ f_3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 & 1 & W^6 & W^4 & W^2 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \\ f_0(4) \\ f_0(5) \\ f_0(6) \\ f_0(7) \end{bmatrix}$$

Liczby w kwadratach w kolumnie p=3 odpowiadają liczbom n w F(n). Zatem

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ F(4) \\ F(5) \\ F(6) \\ F(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 & 1 & W^6 & W^4 & W^2 \\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \\ f_0(4) \\ f_0(5) \\ f_0(6) \\ f_0(7) \end{bmatrix}$$

Wyrażenia W^{nk} posiadają następujące wartości

$$W^1 = e^{-j\frac{2\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{4} - j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$W^2 = e^{-j\frac{4\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = -j$$

$$W^3 = e^{-j\frac{6\pi}{8}} = \cos\frac{3\pi}{4} - j\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$W^4 = e^{-j\frac{8\pi}{8}} = \cos\pi - j\sin\pi = -1$$

$$W^5 = e^{-j\frac{10\pi}{8}} = \cos\frac{5\pi}{4} - j\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$W^6 = e^{-j\frac{12\pi}{8}} = \cos\frac{3\pi}{2} - j\sin\frac{3\pi}{2} = j$$

$$W^7 = e^{-j\frac{14\pi}{8}} = \cos\frac{7\pi}{4} - j\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wartości próbek

$$f_o(0) = f_o(1) = f_o(2) = f_o(3) = F$$

$$f_o(4) = f_o(5) = f_o(6) = f_o(7) = 0.$$

Przyjmijmy $T = 1$

Zatem dla pierwszych czterech harmonicznych otrzymujemy

$$F(0) = \frac{1}{8}\left[f_o(0) + f_o(1) + f_o(2) + f_o(3)\right] = \frac{F}{2}$$

$$F(1) = \frac{1}{8}\left[f_o(0) + W^1 f_o(1) + W^2 f_o(2) + W^3 f_o(3)\right] =$$

$$= F \cdot 0{,}125 - j F \cdot 0{,}3$$

$$F(2) = \frac{1}{8}\left[f_o(0) + W^2 f_o(1) + W^4 f_o(2) + W^6 f_o(3)\right] = 0$$

$$F(3) = \frac{1}{8}\left[f_o(0) + W^3 f_o(1) + W^6 f_o(2) + W^1 f_o(3)\right] =$$

$$= F \cdot 0{,}125 - j F\, 0{,}05$$

$$F(4) = \frac{1}{8}\left[f_o(0) + W^4 f_o(1) + f_o(2) + W^4 f_o(3)\right] = 0.$$

Wartości $F(n)$ są współczynnikami c_n rozwinięcia przebiegu $f(t)$ w wykładniczy szereg Fouriera.

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - j\,b_n) \qquad \text{gdzie} \quad a_n \text{ i } b_n -$$

-współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera. Stąd szukana postać rozwinięcia

$$f(t) \approx \frac{F}{2} + F\,0{,}25\cos\omega_1 t + F \cdot 0{,}25\cos 3\omega_1 t + F \cdot 0{,}6\sin\omega_1 t +$$

$$+ F \cdot 0{,}1\sin 3\omega_1 t,$$

gdzie $\omega_1 = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Zadanie 3.21

Funkcja autokorelacji $c(\tau)$ dla wartości dyskretnych może być zdefiniowana w następujący sposób

$$c(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_i S_j$$

$$j = i + \tau \qquad \tau = 0,1,2,\ldots,$$

gdzie:

N - liczba próbek wzięta do badania funkcji,

S_i, S_j - wartości próbek,

τ - przesunięcie między próbkami.

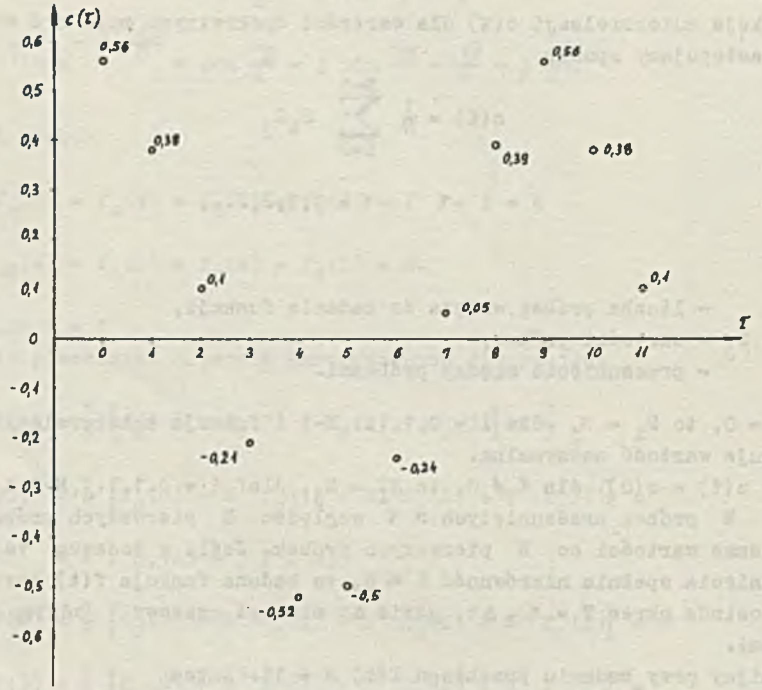
Gdy $\tau = 0$, to $S_i = S_j$ dla $i = 0,1,\ldots,N-1$ i funkcja autokorelacji $c(0)$ przyjmuje wartość maksymalną.
Jeżeli $c(\tau) = c(0)$ dla $\tau \neq 0$, to $S_i = S_j$ dla $i = 0,1,\ldots,N-1$ i oznacza to, że N próbek przesuniętych o τ względem N pierwszych próbek posiada te same wartości co N pierwszych próbek. Jeśli w dodatku ta wartość przesunięcia spełnia nierówność $\tau \leq N$, to badana funkcja $f(t)$ jest okresowa i posiada okres $T = \tau \cdot \Delta t$, gdzie Δt stanowi czasowy odstęp między próbkami.
Przyjmijmy przy badaniu przebiegu $f(t)$ $N = 15$. Zatem

τ	0	1	2	3	4	5
$c(\tau)$	0,56	0,38	0,1	-0,21	-0,52	-0,5

τ	6	7	8	9	10	11
$c(\tau)$	-0,24	0,05	0,39	0,56	0,38	0,1

Rys. 3.21 przedstawia wykres funkcji $c(\tau)$.
Zauważmy, że funkcja autokorelacji przyjmuje wartość maksymalną dla $\tau = 0$ i $\tau = 9$ oraz $c(0) = c(9)$.
Można stwierdzić, że badany przebieg $f(t)$ jest okresowy i okres jego wynosi

$$T = \tau \cdot \Delta t = 9 \cdot 10 = 90 \text{ s.}$$

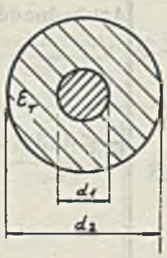
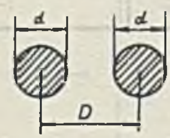
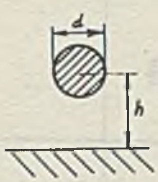
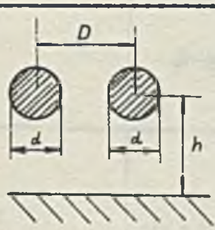

c(τ)
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
τ
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
0,56
0,38
0,1
-0,21
-0,52
-0,5
-0,24
0,05
0,39
0,56
0,38
0,1

Rys. 3.21

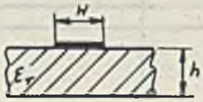
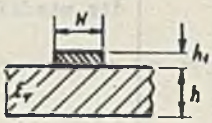
D O D A T E K

Dodatek 1

WZORY DO WYZNACZANIA PARAMETRÓW NIEKTÓRYCH TYPÓW LINII

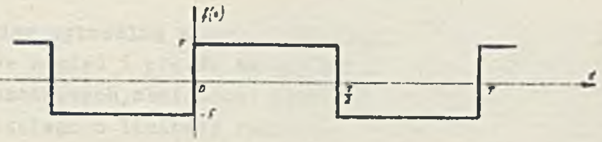
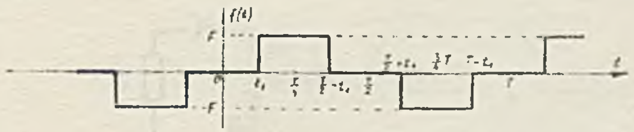
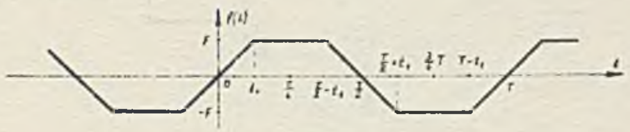
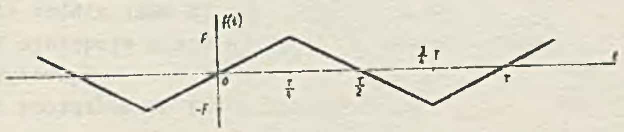
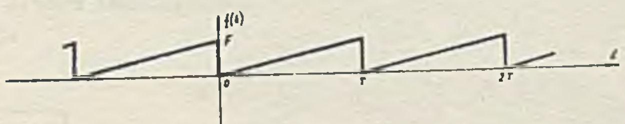
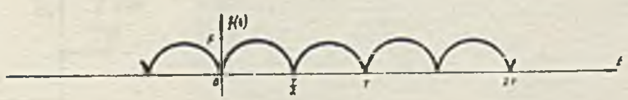
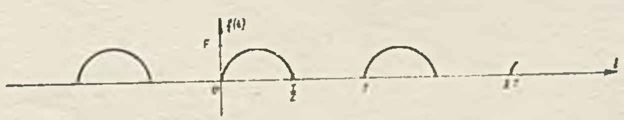
	LINIA	Parametry jednostkowe i impedancja falowa linii: l_o - w μH/m, c_o - w pF/m, r_o - w Ω/m, R_1 - w Ω	
1	2	3	4
1		$l_o = 0{,}2 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}$ $c_o = 55{,}56 \cdot \frac{\varepsilon_r}{\ln \frac{d_2}{d_1}}$ $R_1 = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}$ $r_o = 0{,}632 \cdot 10^{-3} (\rho \cdot f)^{1/2} \frac{d_1+d_2}{d_1 \cdot d_2}$ $r_o = 8{,}3 \cdot 10^{-8} \sqrt{f} \cdot \frac{d_1+d_2}{d_1+d_2}$	jeśli $\omega l_o \gg r_o$ dla miedzi
2		$l_o = 0{,}4 \ln \frac{2D}{d}$, $c_o = \frac{27{,}5}{\ln \frac{2D}{d}}$, $R_1 = 120 \ln \frac{2D}{d}$,	
3		$l_o = 0{,}2 \ln \frac{4h}{d}$ $c_o = \frac{55}{\ln \frac{4h}{d}}$ $R_1 = 60 \ln \frac{4h}{d}$	
4		$l_o = 0{,}4 \ln A$; $A = \frac{2D}{d\sqrt{1+(\frac{D}{2h})^2}}$ $c_o = \frac{27{,}5}{\ln A}$ $R_1 = 120 \ln A$	

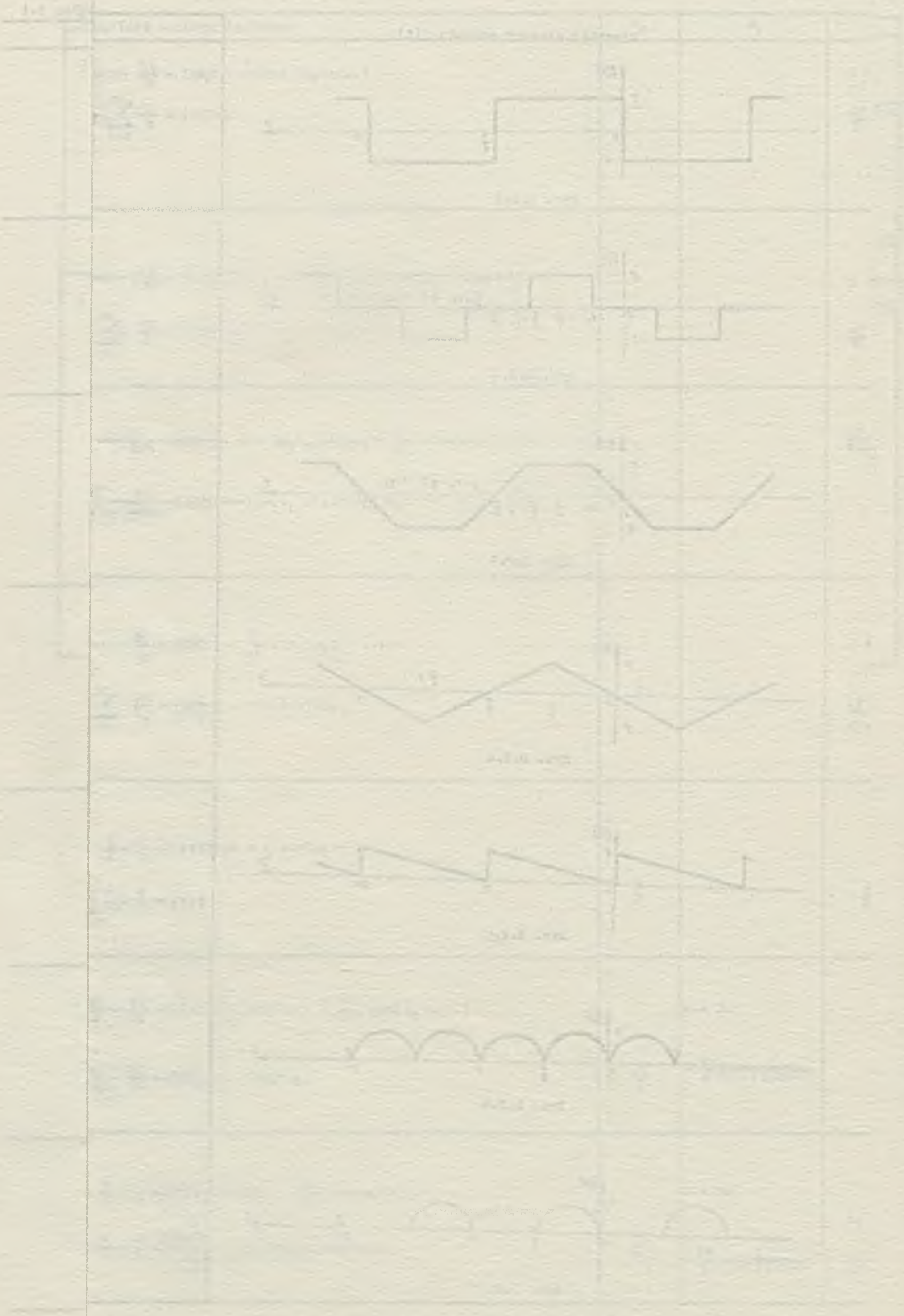
cd. dodatku 1

1	2	3	4
5		$R_l = \frac{1}{\varepsilon_e} 59,952 \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h}\right)$; $\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{10h}{w}\right)^{-1/2}$ $R_l = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_e}} \frac{119.904}{\frac{w}{h} + 2,42 - 0,44 \cdot \frac{h}{w} + \left(1 - \frac{h}{w}\right)}$	$0 \leq \frac{w}{h} \leq 1$ dokładność $\geq 1\%$ $1 \leq \frac{w}{h} \leq 10$ dokładność $\geq 1\%$
6		$l_o = 2 \cdot 10^3 \cdot \ln \left(\frac{4h}{d_o}\right)$; $d_o = 0,567w + 0,67\, h_1$ $c_o = \frac{\varepsilon_r \cdot w}{11,3\, h}$ $R_l = 59,952 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_e}} \cdot \ln \left(\frac{4h}{d}\right)$; $d = 0,536\, w + 0,67\, h_1$ $\varepsilon_e = 0,475\, \varepsilon_r + 0,67$	dokładność $\geq 5\%$ $\frac{w}{h} < 1,25$ $0,1 < \frac{h_1}{w} < 0,8$ $2,5 < \varepsilon_r < 6$

Dodatek 2

Tablica 3.1

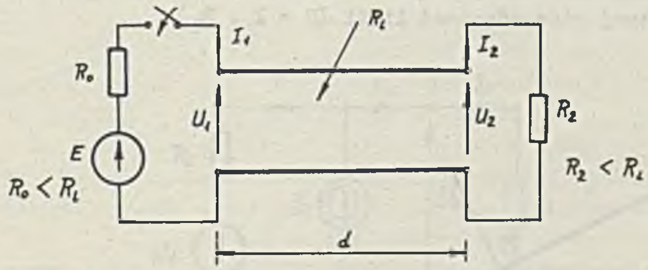
Przebieg czasowy sygnału f(t)	f(t) w postaci szeregu Fouriera	a_o	a_k	b_k	F_k	ψ_k	c_k	c_o
 Rys. D.2.1	$f(t) = \frac{4F}{\pi}(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \ldots)$ $f(t) = \frac{4F}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\omega_1 t$	0	0	$k = 2n-1$ $\frac{4F}{\pi}\cdot\frac{1}{2n-1}$	$k = 2n-1$ $\frac{4F}{\pi}\cdot\frac{1}{2n-1}$	0	$k = 2n-1$ $-j\frac{2F}{\pi}\frac{1}{2n-1}$	0
 Rys. D.2.2	$f(t) = \frac{4F}{\pi}(\cos\omega_1 t_1\cdot\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t_1 \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t_1 \sin 5\omega_1 t + \ldots)$ $f(t) = \frac{4F}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\cos(2n-1)\omega_1 t_1\cdot\sin(2n-1)\omega_1 t$	0	0	$k = 2n-1$ $\frac{4F}{\pi}\cdot\frac{\cos(2n-1)\omega_1 t_1}{2n-1}$	$k = 2n-1$ $\frac{4F}{\pi}\frac{\cos(2n-1)\omega_1 t_1}{2n-1}$	0	$k = 2n-1$ $-j\frac{2F}{\pi}\frac{\cos(2n-1)\omega_1 t_1}{2n-1}$	0
 Rys. D.2.3	$f(t) = \frac{4F}{\pi\omega_1 t_1}(\sin\omega_1 t_1 \sin\omega_1 t + \frac{1}{3^2}\sin 3\omega_1 t_1 \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega_1 t_1 \sin 5\omega_1 t + \ldots)$ $f(t) = \frac{4F}{\pi\omega_1 t_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)\omega_1 t_1 \sin(2n-1)\omega_1 t$	0	0	$\frac{4F}{\pi\omega_1 t_1}\frac{\sin(2n-1)\omega_1 t_1}{(2n-1)^2}$ $k = 2n-1$	$\frac{4F}{\pi\omega_1 t_1}\frac{\sin(2n-1)\omega_1 t_1}{(2n-1)^2}$ $k = 2n-1$	0	$k = 2n-1$ $-j\frac{2F}{\pi\omega_1 t_1}\frac{\sin(2n-1)\omega_1 t_1}{(2n-1)^2}$	0
 Rys. D.2.4	$f(t) = \frac{8F}{\pi^2}(\sin\omega_1 t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega_1 t - \ldots)$ $f(t) = \frac{8F}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\sin(2n-1)\omega_1 t$	0	0	$k = 2n-1$ $\frac{8F}{\pi^2}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$	$k = 2n-1$ $\frac{8F}{\pi^2}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$	0	$k = 2n-1$ $-j\frac{4F}{\pi^2}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}$	0
 Rys. D.2.5	$f(t) = \frac{F}{2} - \frac{F}{\pi}(\sin\omega_1 t + \frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \ldots)$ $f(t) = \frac{F}{2} - \frac{F}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\omega_1 t$	$\frac{F}{2}$	0	$-\frac{F}{\pi}\cdot\frac{1}{k}$	$-\frac{F}{\pi}\cdot\frac{1}{k}$	0	$j\frac{F}{2\pi}\cdot\frac{1}{k}$	$\frac{F}{2}$
 Rys. D.2.6	$f(t) = \frac{2F}{\pi} - \frac{4F}{\pi}(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega_1 t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega_1 t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega_1 t + \ldots)$ $f(t) = \frac{2F}{\pi} - \frac{4F}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos 2n\omega_1 t$	$\frac{2F}{\pi}$	$k = 2n$ $-\frac{4F}{\pi}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$	0	$k = 2n$ $-\frac{4F}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$	$-\frac{\pi}{2}$	$k = 2n$ $-\frac{2F}{\pi}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$	$\frac{2F}{\pi}$
 Rys. D.2.7	$f(t) = \frac{F}{\pi} + \frac{F}{2}\sin\omega_1 t - \frac{2F}{\pi}(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega_1 t + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega_1 t + \ldots)$ $f(t) = \frac{F}{\pi} + \frac{F}{2}\sin\omega_1 t - \frac{2F}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos 2n\omega_1 t$	$\frac{F}{\pi}$	$k = 2n$ $-\frac{2F}{\pi}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$	$b_1 = \frac{F}{2}$ $b_k = 0$	$k = 2n$ $F_1 = \frac{F}{2}$ $F_k = -\frac{2F}{\pi}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$	0 $-\frac{\pi}{2}$	$k = 2n$ $C_1 = -j\frac{F}{4}$ $C_k = -\frac{F}{\pi}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$	$\frac{F}{\pi}$



Dodatek 3

METODA DIAGRAMÓW BERGERONA

Wyjaśnimy wykreślną metodę Bergerona na przykładzie. Określimy przebiegi czasowe napięć i prądów na początku i końcu linii bezstratnej bez warunków początkowych, obciążonej liniowym rezystorem i zasilanej ze źródła napięcia stałego o liniowej rezystancji wewnętrznej (rys. D3.1).

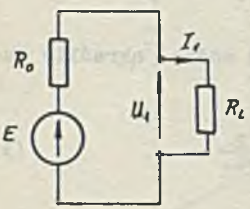


Rys. D3.1

Metodę tę można też stosować, gdy:

- rezystory (R_0, R_2) są nieliniowe,
- napięcie źródła (SEM E) jest zmienne w czasie,
- w linii występuje niejednorodność w postaci szeregowego lub równoległego rezystora,
- warunki początkowe w linii nie są zerowe.

Ideę wykorzystaną w metodzie wykreślnej Bergerona można też wykorzystać do analizy linii (niekoniecznie bezstratnej) obciążonej impedancją i zasilanej ze źródła (napięciowego lub prądowego) o określonej impedancji wewnętrznej.



Rys. D3.2

Wracając do przykładu przedstawionego na rys. D3.1 łatwo zauważyć, że dla $t \in (0, 2t_o)$ (gdzie $t_o = \frac{d}{v}$) linia widziana z zacisków źródła (SEM E, rezystor R_o) może być traktowana jak linia o nieskończonej długości, można więc zastąpić ją jej impedancją falową $Z_l = R_l$ (rys. D3.2). Napięcie U_1 na początku linii oraz prąd I_1 na początku linii można wyznaczyć z zależności

$$U_1 = V_p = \frac{E}{R_o + R_l} \cdot R_l \tag{1}$$

oraz

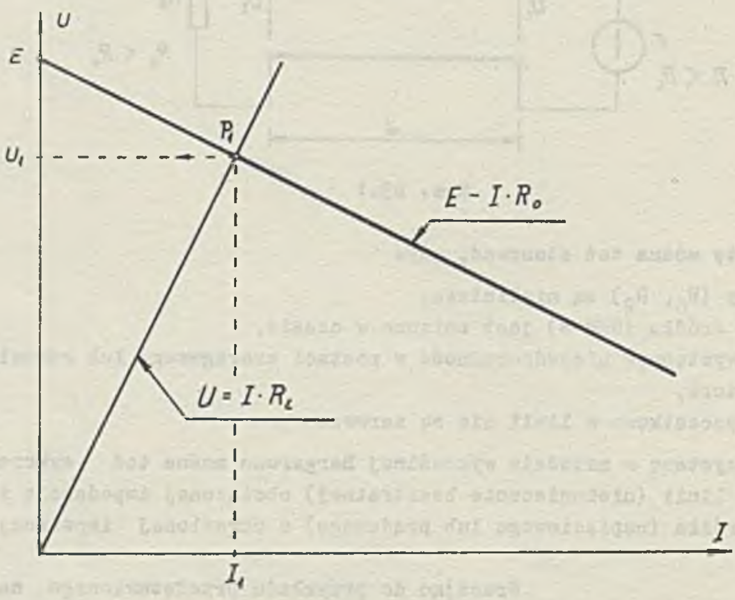
$$I_1 = I_p = \frac{E}{R_c + R_l}, \tag{2}$$

gdzie

V_p - fala padająca (od początku linii) napięcia,

I_p - fala padająca prądu.

Oczywiście obwód ten można też rozwiązać wykreślnie.
Punkt pracy obwodu P_1 (rys. D3.3) o współrzędnych U_1 i I_1 otrzymano z przecięcia charakterystyki obwodu wejściowego ($E - I \cdot R_o$) i charakterystyki bezstratnej nieskończonej linii ($U = I \cdot R_l$).



Rys. D3.3

Napięcie U_2 i prąd I_2 na końcu linii dla $t \in (t_o, 3t_o)$ można określić ze znanych zależności

$$U_2 = V_p + V_o = U_1(1 + N) = U_1\left(1 + \frac{R_2 - R_l}{R_2 + R_l}\right) = 2U_1 \frac{R_2}{R_2 + R_l} \tag{3}$$

oraz

$$I_2 = I_p - I_o = I_1 (1 - N) = 2 I_1 \frac{R_l}{R_2 + R_l}, \tag{4}$$

gdzie:

V_0 - fala odbita (od końca linii) napięcia,

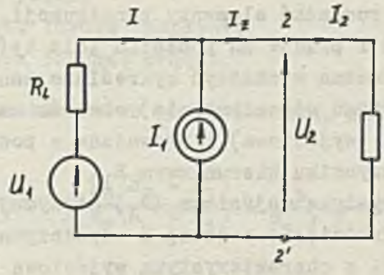
I_0 - fala odbita prądu.

Równanie (3) i (4) można łatwo przekształcić do postaci

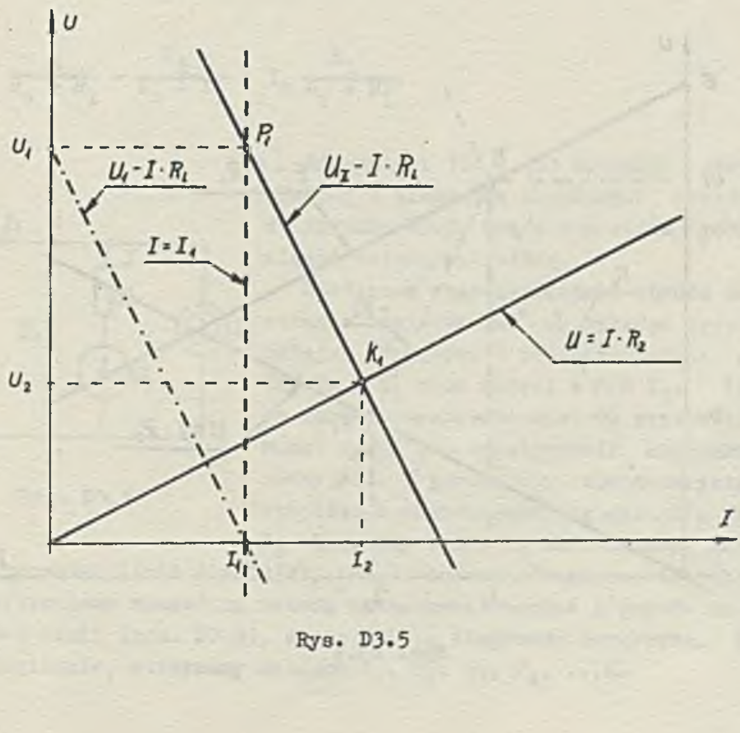
$$U_2\left[\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right]=\frac{U_1}{R_1}+I_1 \tag{3'}$$

oraz

$$I_2=\frac{U_2}{R_2}, \tag{4'}$$



Rys. D3.4

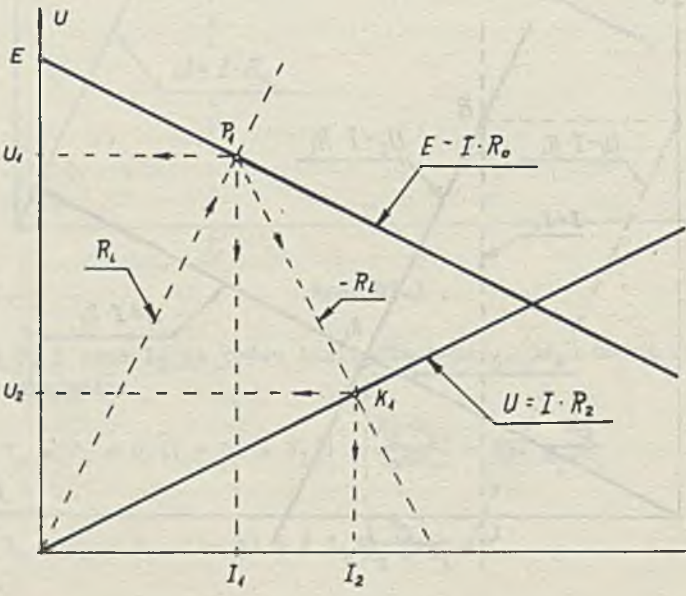


Rys. D3.5

której odpowiada obwód (o elementach skupionych) opisany równaniem potencjału węzłowego, przedstawiony na rys. D3.4. Obwód ten można też rozwiązać wykreślnie (rys. D3.5). Ponieważ interesują nas wartości napięcia U_2 i prądu I_2, można dla części obwodu po lewej stronie zacisków 2-2' wyznaczyć zastępczą charakterystykę ($U_z - I_z \cdot R_z$), dodając ("prądowo") charakterystyki gałęzi z SEM U_1 i R_1 ($U_1 - I \cdot R_1$) oraz gałęzi z SPM I_1 ($I=I_1$). Zauważmy, że zastępcza charakterystyka przechodzi przez punkt P_1 o współrzędnych U_1 i I_1 a $R_z = R_1$, czyli współczynnik kierunkowy prostej jest równy $- R_1$.

W przecięciu charakterystyki zastępczej z charakterystyką obciążenia ($U = I \cdot R_2$) otrzymamy punkt pracy obwodu K_1 o współrzędnych U_2 i I_2.

Jeśli połączymy wykresy z rysunków D3.3 i D3.5 (rys. D3.6) i pominiemy nieistotne dla dalszych rozważań elementy konstrukcji, to zauważymy, że przebiegi czasowe napięć i prądów na początku (dla $t\in(0, 2\,t_o)$) i na końcu (dla $t\in(t_o, 3t_o)$) linii można wyznaczyć wykreślnie nanosząc charakterystyki (z uwzględnieniem systemu strzałkowania) obwodów na wejściu linii (wejściowa) i na jej wyjściu (wyjściowa) i prowadząc z początku układu współrzędnych prostą o współczynniku kierunkowym R_1.
Z przecięcia z charakterystyką wejściową (P_1) otrzymujemy (po przerzutowaniu) wartości U_1 i I_1. Przecięcie prostej o współczynniku kierunkowym $-R_1$ przechodzącej przez P_1 z charakterystyką wyjściową (w punkcie K_1) określa napięcie U_2 i prąd I_2 na końcu linii.



Rys. D3.6

Napięcie U_1 i prąd I_1 na początku linii (dla $t \in (2t_o, 4t_o)$) można wyznaczyć z zależności

$$U_1 = V_p + V_o + V_p' \tag{5}$$

oraz

$$I_1 = I_p + I_o + I_p', \tag{6}$$

gdzie:

V_o - fala odbita (od końca linii) napięcia,
I_o - fala odbita prądu,
V_p' - fala padająca (druga) napięcia,
I_p' - fala padająca (druga) prądu.

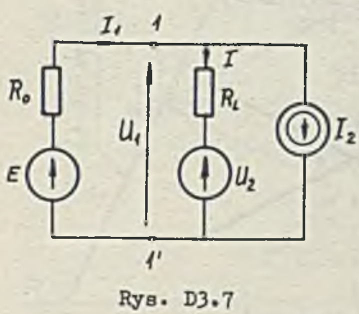
Równania (5) i (6) można łatwo przekształcić, korzystając z równań (1)÷(4), do postaci

$$U_1 = \frac{E}{R_o + R_1} \cdot R_1 + U_2 \frac{R_o(R_2 - R_1)}{R_2(R_o + R_1)} = \frac{E}{R_o + R_1} \cdot R_1 +$$

$$+ \frac{U_2}{R_o + R_1} \cdot R_o - I_2 \cdot \frac{R_o \cdot R_1}{R_o + R_1} \tag{5'}$$

oraz

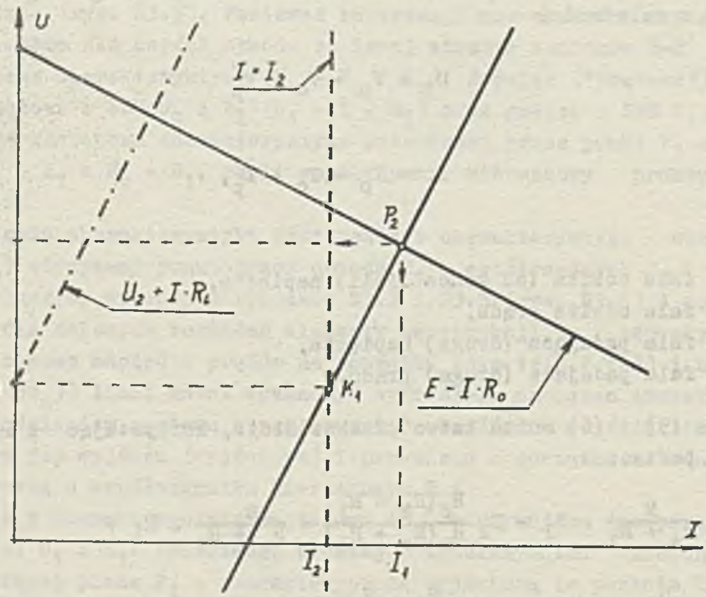
$$I_1 = \frac{E}{R_o + R_1} - \frac{U_2}{R_o + R_1} + I_2 \frac{R_1}{R_o + R_1}. \tag{6'}$$



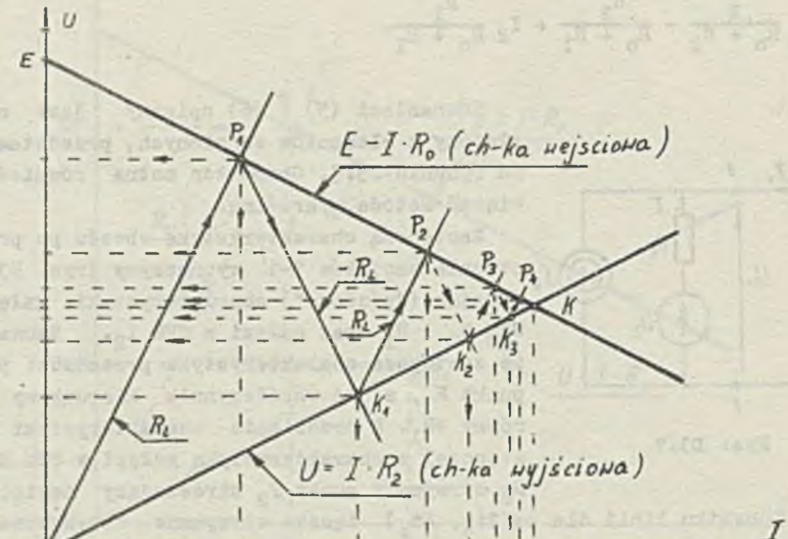
Rys. D3.7

Równaniami (5') i (6') opisany jest obwód złożony z elementów skupionych, przedstawiony na rysunku D3.7. Obwód ten można również rozwiązać metodą wykreślną.

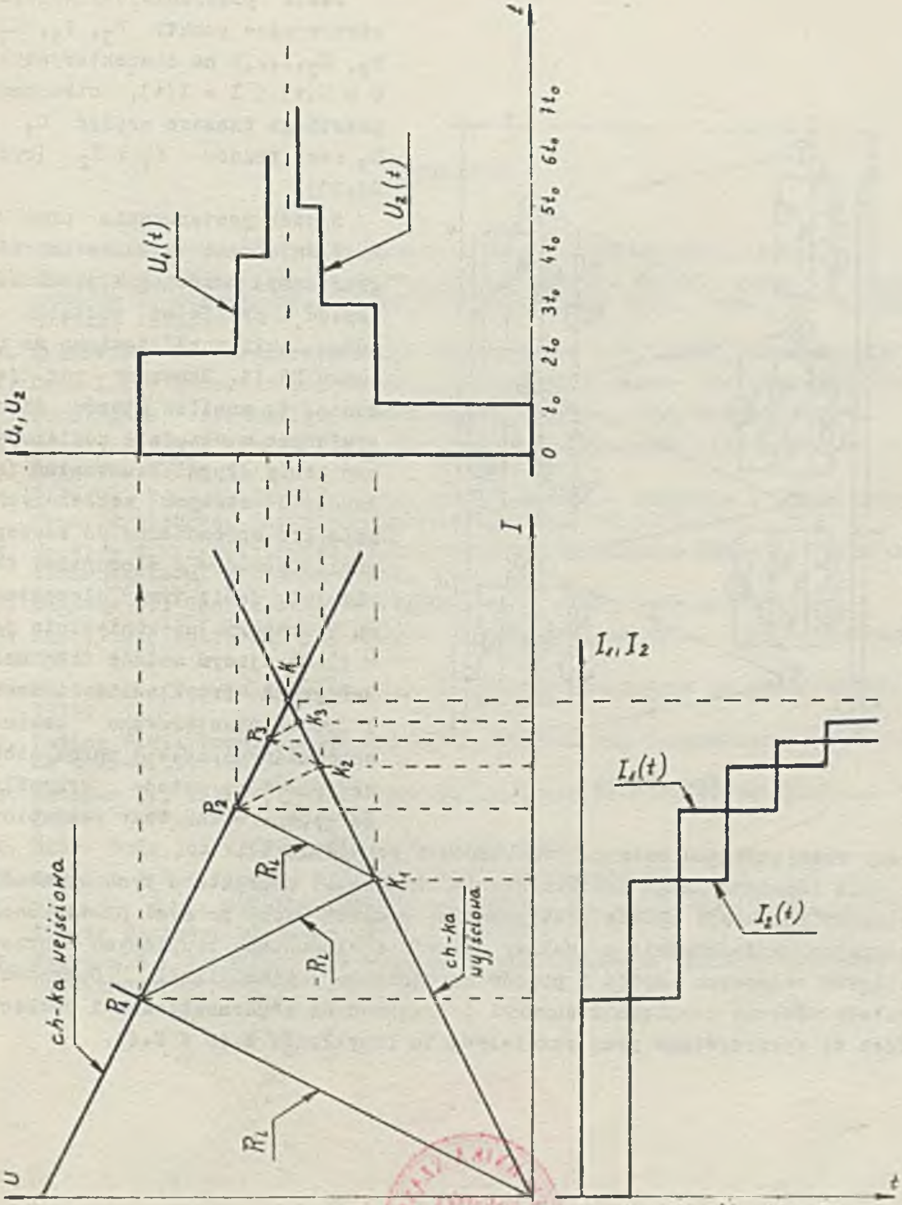
Zastępczą charakterystykę obwodu po prawej stronie zacisków 1-1' wyznaczymy (rys. D3.8) dodając ("prądowo") charakterystyki gałęzi z SEM U_2 i R_1 oraz gałęzi z SPM I_2. Zauważmy, że zastępcza charakterystyka przechodzi przez punkt K_1, a jej współczynnik kierunkowy jest równy $+R_1$. W przecięciu charakterystyki zastępczej z charakterystyką gałęzi z SEM E i R_o otrzymamy punkt P_2 określający napięcie i prąd na początku linii dla $t \in (2t_o, 4t_o)$. Łącząc otrzymane dotychczas wykresy otrzymujemy wykreślną metodę wyznaczania napięć i prądów na początku i końcu linii (rys. D3.9), zwaną metodą diagramów Bergerona. Postępując analogicznie, otrzymamy kolejno K_2, P_3, K_3, P_4,...,K.



Rys. D3.8

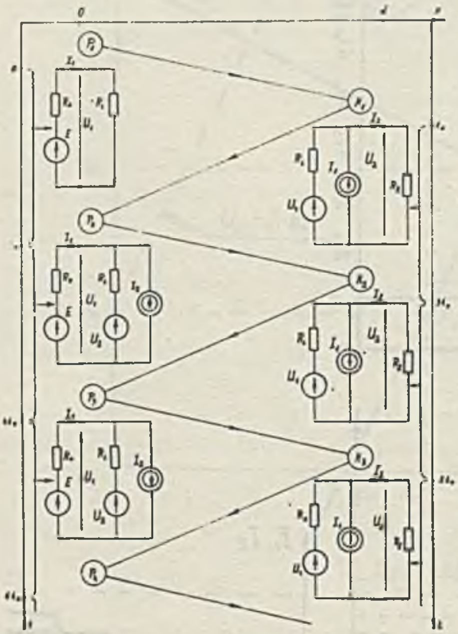


Rys. D3.9



U_1, U_2
$U_1(t)$
$U_2(t)$
t
0 t_0 $2t_0$ $3t_0$ $4t_0$ $5t_0$ $6t_0$ $7t_0$
I
U
E
P
ch-ka wejściowa
ch-ka wyjściowa
R_L
$-R_L$
P_1 P_2 P_3
K K_1 K_2 K_3
I_1, I_2
$I_1(t)$
$I_2(t)$
0 t_0 $2t_0$ $3t_0$ $4t_0$ $5t_0$

Rys. 13.10



Rys. D3.11

Jeśli przerzutujemy kolejno otrzymywane punkty P_3, P_1, K_1, P_2, K_2,...,K na charakterystyki $U = U(t)$ i $I = I(t)$, otrzymamy przebiegi czasowe napięć U_1 i U_2 oraz prądów I_1 i I_2 (rys. D3.10).

Sposób postępowania przy określeniu (nie tylko w sposób graficzny) przebiegów czasowych napięć i prądów na początku i końcu linii przedstawiono na rysunku D3.11. Zauważmy raz jeszcze, że analiza stanów nieustalonych w obwodzie zawierającym linię długą bezstratną (element o stałych rozłożonych) może być sprowadzona do szeregu analiz obwodów z elementami skupionymi. Jeśli tymi elementami są rezystory (niekoniecznie jak w ilustrującym metodę diagramów Bergerona przykładzie liniowe) i źródła niesterowane zamiast wspomnianych analiz można stosować omówioną metodę wykreślną Bergerona - tak też postąpiono przy rozwiązywaniu szeregu przykładów w rozdziale II.

Dla impedancyjnego (niekoniecznie liniowego) charakteru tych elementów słuszny pozostaje sposób postępowania, przedstawiony na rys. D3.11, umożliwiający wnioskowanie z analizy obwodów o elementach skupionych o przebiegach czasowych napięć i prądów na początku i końcu linii. Oczywiście należy wówczas uwzględnić warunki początkowe na kondensatorach i cewkach. Ideę tę wykorzystano przy rozwiązywaniu przykładów 2.46 i 2.47.

LITERATURA

1. Calahan D.: Computer-aided network design. McGraw-Hill. 1972.
2. Chojcan J., Drygajło A., Karwan L., Kolmer A.: Zbiór zadań z teorii obwodów I. Skrypty Uczelniane Nr 692, Gliwice 1977, wyd. II Nr 862, Gliwice 1979.
3. Cholewicki T.: Elektrotechnika teoretyczna, tom II.WNT, Warszawa 1971.
4. Chua L.O.: Introduction to nonlinear network theory. Mc Graw-Hill,1970,
5. Cunningham W.J.: Analiza układów nieliniowych. WNT, Warszawa 1962.
6. Director W.S., Rohrer S.W.: Podstawy teorii układów elektrycznych.PWN, Warszawa 1976.
7. Goik R.: Program analizy stanu nieustalonego w obwodzie z linią długą. Praca dyplomowa. Instytut Elektroniki, Gliwice 1978.
8. Gridley J.H.: Principles of Electrical Transmission Lines in Power and Communication, Pergamon Press, 1967.
9. Lagasse J.: Teoria obwodów elektrycznych. WNT, Warszawa 1965.
10. Łakomy M., Zabrodzki J.: Cyfrowe układy scalone TTL. PWN, Warszawa 1974.
11. Macura A.: Teoria obwodów, cz. I. Skrypty Uczelniane Nr 665, Gliwice 1976.
12. Matick R.E.: Transmission Liner for Digital and Communication Network. Mc Graw-Hill, 1969.
13. Metzger G., Vabre J.-P.: Transmission Lines with Pulse Excitation. Academic Press, 1969.
14. NAP2. Opis języka NAP2-ODRA, Warszawa 1977.
15. Stewart J.L.: Linie przesyłowe. WNT, Warszawa 1962.
16. Walsmley W.M.: Walsh functions transforms and their applications.Electronic Engineering, June 1974, s. 63-68.
17. Węgrzyn S.: Przebiegi nieustalone w elektrycznych liniach i układach łańcuchowych. PWN, Warszawa 1958.