Jan CHOJCAN, Jerzy RUTKOWSKI

ZBIÓR ZADAŃ Z TEORII INFORMACJI I KODOWANIA

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Gliwice 2001

JAN CHOJCAN, JERZY RUTKOWSKI

ZBIÓR ZADAŃ Z TEORII INFORMACJI I KODOWANIA

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ
Gliwice 2001

OPINIODAWCA
Doc. dr hab. inż. Zygmunt Szwaja

KOLEGIUM REDAKCYJNE

REDAKTOR NACZELNY — Prof. dr hab. Zygmunt Kleszczewski
REDAKTOR DZIAŁU — Doc. dr inż. Zdzisław Pogoda
SEKRETARZ REDAKCJI — Mgr Elżbieta Leśko

REDAKCJA
Mgr Roma Łoś

REDAKCJA TECHNICZNA
Alicja Nowacka

S.67103

PROJEKT OKŁADKI
Tomasz Lamorski

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Śląskiej

ISBN 83-88000-94-2

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Śląskiej

Spis treści

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ 7

A. WIADOMOŚCI PODSTAWOWE I TEMATY ZADAŃ

Rozdział I. ENTROPIA I INFORMACJA 11

1. WIADOMOŚCI PODSTAWOWE 11
   1.1. Entropia (nieokreśloność) Shanona źródła dyskretnego 11
   1.2. Własności entropii 11
   1.3. Informacja wzajemna 13
   1.4. Źródło wiadomości (dyskretne) z pamięcią 14
   1.5. Źródło ciągłe 16
   1.6. Dyskretyzacja informacji (sygnału) 16
2. TEMATY ZADAŃ 19

Rozdział II. KODOWANIE I DEKODOWANIE INFORMACJI 30

3. WIADOMOŚCI PODSTAWOWE 30
   3.1. Kody beznadmiarowe (zwięzłe) 30
   3.1.1. Beznadmiarowe kody nierównomierne. Nerówność Krafta 32
   3.1.2. Beznadmiarowe kody równomierne 36
   3.2. Kody nadmiarowe 38
   3.2.1. Kody liniowe 38
4. TEMATY ZADAŃ 58

Rozdział III. KANAŁ TRANSMISYJNY 72

5. WIADOMOŚCI PODSTAWOWE 72
   5.1. Dyskretny kanał bez pamięci 72
   5.2. Kanał z zakłóceniami współpracujący ze źródłem ciągłym 76
6. TEMATY ZADAŃ 78

B. ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

Rozwiązania zadań z rozdziału I. ENTROPIA I INFORMACJA 85
Rozwiązania zadań z rozdziału II. KODOWANIE I DEKODOWANIE INFORMACJI 116
Rozwiązania zadań z rozdziału III. KANAŁ TRANSMISYJNY 148

DODATKI 155
LITERATURA 163

PRZEDMOWA DO WYDANIA I

Zadania umieszczone w skrypcie są ilustracją ćwiczeń tablicowych i wykładów z „teorii informacji" dla studentów czwartego roku (specjalizacji EUC) Wydziału Automatyki i Informatyki. Zbiór ten przydatny jest również dla studentów kierunku **informatyka** (drugi rok Wydziału Automatyki i Informatyki) do przedmiotu „podstawy kodowania i przesyłu informacji" oraz dla studentów Wydziału Matematyczno-Fizycznego dla przedmiotu „teoria sygnału i informacji".

W części A skryptu podano podstawowe wiadomości i tematy zadań. Zadania z rozwiązaniami zaznaczono pionową kreską na lewym marginesie.

W części B umieszczono rozwiązania typowych zadań i odpowiedzi do większości pozostałych.

W rozdziale A.I.1 przedstawiono podstawowe definicje i zależności - wykorzystane w zadaniach i ich rozwiązaniach - opisujące entropię i informację, natomiast w rozdziale A.I.2 tematy zadań z entropii i informacji.

Rozdział A.II.3 zawiera podstawowe wiadomości z kodowania i dekodowania informacji. Zadania z tego zakresu materiału podano w rozdziale A.II.4.

Kanał transmisyjny opisany jest w rozdziale A.III.5, a tematy zadań podano w rozdziale A.III.6.

Całość skryptu uzupełnia wykaz ważniejszych oznaczeń i dodatki w postaci tablic.

Pragniemy wyrazić serdeczne podziękowanie doc. hab. inż. Zygmuntowi Szwaji z Politechniki Poznańskiej za bardzo wnikliwą recenzję umożliwiającą usunięcie wielu nieścisłości i potknięć.

Autorzy

PRZEDMOWA DO WYDANIA IV

Kolejne czwarte wydanie skryptu jest przeredagowanym i uzupełnionym zbiorem zadań z zakresu podstaw teorii informacji i wstępu do teorii kodów. Jest przewidziany jako ilustracja do wykładów dla studentów piątego semestru kierunku **elektronika i telekomunikacja** Wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki. Może być też pomocny przy studiowaniu pokrewnych przedmitów.

Miłym naszym obowiązkiem jest serdeczne podziękowanie twórcom szaty graficznej zbioru p. mgr inż. Halinie Delewicz i p. doc. dr. inż. Zdzisławowi Pogodzie.

Autorzy

Gliwice, maj 1993

PRZEDMOWA DO WYDANIA VI

W wydaniu tym poprawiono zauważone błędy redakcyjne powstałe przy przeredagowywaniu książki, których nie udało się uniknąć w poprzednich wydaniach.

Autorzy

Gliwice, maj 2001

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$\bar{0}(\bar{1})$	ciąg składający się z samych zer (jedynek)
$\mathbf{0}_m$	macierz zerowa $m \times 1$
$\sum_{i=1}^{n} w_i$	suma modulo dwa ciągu $\bar{w}$
$A = \{a_1,...,a_D\}$	alfabet kodu
C	przepustowość kanału
$d_{\min}$	minimalna odległość słów kodowych kodu
D	liczebność alfabetu kodowego
$\mathbf{E}_m$	macierz jednostkowa
$\mathbf{G}$	macierz generująca kodu liniowego
$\mathbf{G}_k$	kanoniczna postać macierzy generującej
$\bar{g}_i$	słowo kodujące (wektor bazowy) odpowiadające i-temu wierszowi macierzy generującej
$g(x)$	wielomian generujący kodu cyklicznego
$\mathbf{H}$	macierz kontrolna kodu liniowego
$H(X)$	entropia (nieokreśloność) źródła X
$H(X,Y)$	entropia łączna źródeł X i Y
$H(X \mid Y)$	entropia warunkowa źródeł X i Y
$H_m(X_m) = H_m(X)$	entropia źródła ciągów Markowa m-tego rzędu
$h(x) = w'(x)$	wielomian odpowiadający ciągowi informacyjnemu w'
$I(X \mid Y)$	informacja wzajemna
k	liczba bitów informacyjnych w słowie
m	liczba bitów kontrolnych w słowie kodowym
n	liczba bitów (długość) słowa kodowego
$\bar{n}$	średnia długość słowa kodowego kodu nierównomiernego
$\mathbf{P}$	macierz prawdopodobieństw przejść kanału (dla alfabetu kodowego)
$P(X) = P = \{p(x_1),..., p(x_m)\} = \{p_1,..., p_M\}$	zbiór prawdopodobieństw dyskretnego źródła X
$p(x_i, y_j) = p_{ij}$	prawdopodobieństwo łączne wystąpienia pary x_i, y_j
$P(x_i \mid y_j)$	prawdopodobieństwo warunkowe wystąpienia x_i, jeśli wystąpiło y_j
$P(j,n)$	prawdopodobieństwo j-krotnego przekłamania słowa kodowego o długości n
R	wydajność źródła, nadmiar (redundancja) kodu
r	liczba powtórzeń kodu z przetwarzaniem; rząd kodu Reeda-Mullera

$\mathbf{S} = \{s_1,...,s_m\}^t = Y(\overline{v})$	syndrom odebranego ciągu $\overline{v}$
$\mathbf{T} = \mathbf{H}$	macierz tworząca (parzystości) kodu liniowego
t_k	maksymalna krotność błędów korygowanych przez kod
t_0, t_d	maksymalna krotność błędów wykrywanych przez kod
$\overline{w}$	słowo kodowe (ciąg kodowy)
$w_i = a_i$	i-ty bit słowa kodowego $\overline{w}$
$\{\overline{w}\}$	zbiór wszystkich słów kodowych kodu
$\overline{w}'$	ciąg informacyjny słowa kodowego $\overline{w}$
$\overline{w}^*$	decyzja dekodera na wyjściu kanału
$W(x)$	wielomian odpowiadający słowu $\overline{w}$
$W(\overline{w}) = d(\overline{w})$	waga słowa $\overline{w}$
$w(j)$	liczba ciągów kodowych o wadze j w kodzie
$\overline{v}$	ciąg odebrany; wektor bazowy kodu Reeda-Mullera
$X = \{x_1,...,x_M\}$	dyskretne źródło M wiadomości
$w(x)$	gęstość prawdopodobieństwa wiadomości x generowanych przez źródło ciągłe X
X^n	n-krotne rozszerzenie źródła X
X_m	źródło ciągów Markowa m -tego rzędu
Y	dyskretne źródło wiadomości
Z	dyskretne źródło wiadomości
$\overline{z}$	ciąg zakłócający
Δx	krok kwantowania
Δ_k	błąd kwantowania
Δt	krok próbkowania
σ_{Δ_k}	średniokwadratowy błąd kwantowania
η	sprawność kodu; stopień wykorzystania kanału
τ	czas trwania wiadomości elementarnej
ϑ	szybkość przesyłania wiadomości.

A. WIADOMOŚCI PODSTAWOWE I TEMATY ZADAŃ

Rozdział I

ENTROPIA I INFORMACJA

1. WIADOMOŚCI PODSTAWOWE

1.1. Entropia (nieokreśloność) Shannona źródła dyskretnego

Miarą **nieokreśloności** (*entropią*) dyskretnego źródła wiadomości X bez pamięci (*rys.1.1*) generującego M różnych wiadomości $x_1,...,x_M$ z prawdopodobieństwami $p_1,...p_M$ jest entropia.

Def.1.1:
$$H(X) \overset{df}{=} H(p_1,...p_M) = -\sum_{i=1}^{M} p_i \operatorname{ld} p_i \tag{1.1}$$

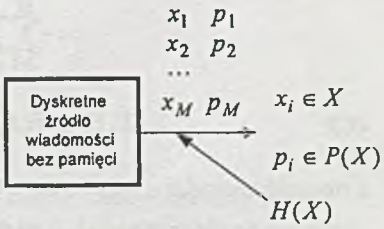
gdzie:

$$\operatorname{ld} = \log_2 x$$

1.2. Własności entropii

W1: Jeśli $p_1,...,p_M$ i $q_1,...,q_M$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi nieujemnymi, takimi że

$$\sum_{i=1}^{M} p_i = \sum_{i=1}^{M} q_i = 1 \tag{1.2}$$



Rys. 1.1

wówczas

$$-\sum_{i=1}^{M} p_i \operatorname{ld} p_i \le -\sum_{i=1}^{M} p_i \operatorname{ld} q_i \tag{1.3}$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_i = q_i$, dla $i = 1, 2, ..., M$.

W2:
$$H(p_1,p_2,...,p_M) \le \operatorname{ld} M \tag{1.4}$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wiadomości są jednakowo prawdopodobne ($p_i = \frac{1}{M}$, $i = 1,2,...,M$).

Inaczej:

entropia źródła osiąga wartość największą, równą ld M, jeśli wszystkie wiadomości są jednakowo prawdopodobne.

Nieokreśloność łączna dwóch źródeł (doświadczeń) X i Y

Jeśli

- źródło X generuje M wiadomości $x_1,...,x_M$ z prawdopodobieństwami $p_1,...,p_M$,
- niekreśloność źródła X wynosi $H(X)$,
- źródło Y generuje L wiadomości $y_1,...,y_L$ z prawdopodobieństwami $q_1,...,q_L$,
- niekreśloność źródła Y wynosi $H(Y)$,

to prawdopodobieństwo łączne pary x_i, y_j wynosi

$$p(x_i, y_j) = \mathrm{P}\{X = x_i \text{ oraz } Y = y_j\} = p_{ij} \tag{1.5}$$

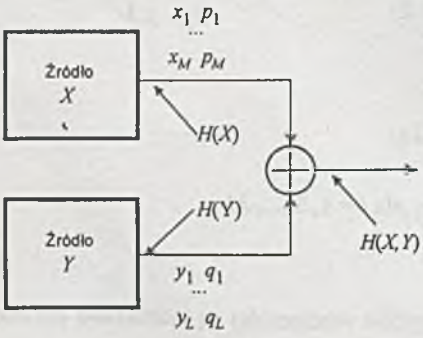
a **nieokreśloność łączna** (*rys.1.2*) oznaczona przez $H(X,Y)$ wynosi:

Def.1.2:
$$H(X,Y) \overset{\mathrm{df}}{=} -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L} p(x_i, y_j) \operatorname{ld} p(x_i, y_j) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L} p_{ij} \operatorname{ld} p_{ij} \tag{1.6}$$

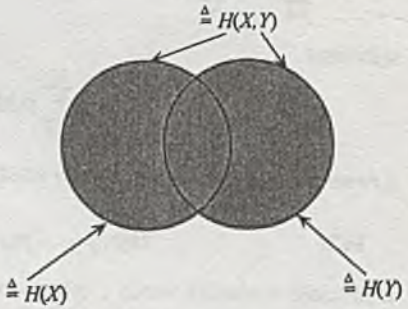
W3:
$$H(X,Y) \le H(X) + H(Y) \tag{1.7}$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy źródła X i Y są statystycznie niezależne.

Interpretację nierówności (1.7) za pomocą zbiorów przedstawiono na *rys. 1.3*.



Rys. 1.2



Rys. 1.3

Entropia warunkowa doświadczeń (źródeł) X i Y

Entropia źródła Y, gdy znany jest wynik doświadczenia X, określona jest zależnością:

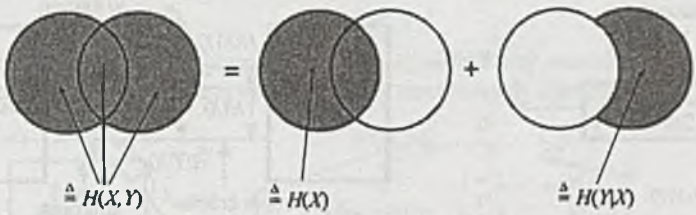
Def.1.3:
$$H(Y|X) \stackrel{df}{=} -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L} p(x_i, y_j) \operatorname{ld} p(y_j \mid x_i) \tag{1.8}$$

jest to **entropia warunkowa** źródła Y, gdy znany jest wynik doświadczenia X.

W4: Entropia łączna dwóch źródeł X i Y spełnia zależność

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y \mid X) = H(Y) + H(X \mid Y) \tag{1.9}$$

co można zinterpretować graficznie na zbiorach, jak to pokazano na *rys. 1.4*.



Rys. 1.4

W5: Entropia warunkowa źródła Y spełnia nierówność

$$H(Y \mid X) \le H(Y) \tag{1.10}$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy źródła są statystycznie niezależne.

1.3. Informacja wzajemna $I(X|Y)$

Informacja wzajemna między źródłami X i Y lub informacja o źródle X na podstawie znajomości źródła Y jest równa różnicy entropii źródła (doświadczenia) X i tej części nieokreśloności, jaka pozostanie po wykonaniu doświadczenia Y (*rys. 1.5*), czyli:

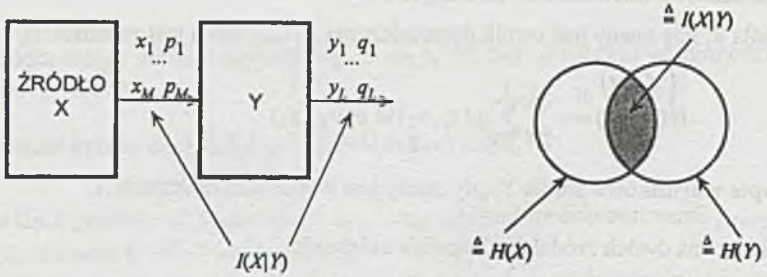
Def.1.4:
$$I(X \mid Y) \stackrel{df}{=} H(X) - H(X \mid Y) = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L} p(x_i, y_j) \operatorname{ld} \frac{p(x_i)}{p(x_i \mid y_j)} =$$
$$= H(Y) - H(Y \mid X) \tag{1.11}$$

gdzie:

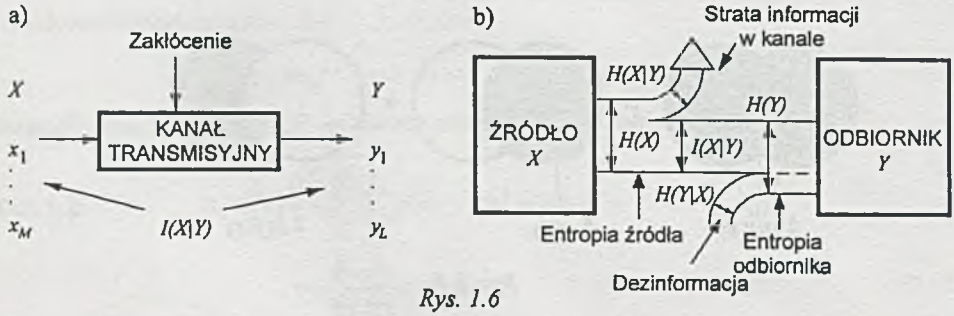
$p(x_i)$ - prawdopodobieństwo *a priori* wystąpienia x_i,

$p(x_i \mid y_i)$ - prawdopodobieństwo *a posteriori*, że jeśli $Y = y_j$, to $X = x_i$.

Jeśli X reprezentuje wiadomości na wejściu kanału transmisyjnego z zakłóceniami, a Y wiadomości na jego wyjściu (*rys.1.6a*), to można informacji wzajemnej nadać interpretację jak na *rys.1.6b*.



Rys. 1.5



Rys. 1.6

1.4. Źródło wiadomości (dyskretne) z pamięcią

n-krotne rozszerzenie źródła

Def.1.5: Jeśli X jest dyskretnym (ziarnistym) źródłem bez pamięci generującym M wiadomości $x_1,...,x_M$ o prawdopodobieństwach występowania $p_1,...,p_M$, to n-krotnym rozszerzeniem X^n źródła X nazwiemy bezpamięciowe źródło generujące M^n elementów (ciągów) $a_1^n,...,a_M^n$, przy czym każdemu z elementów a_i odpowiada n-elementowy ciąg wiadomości x_i generowanych przez źródło X (*rys.1.7*); oczywiście

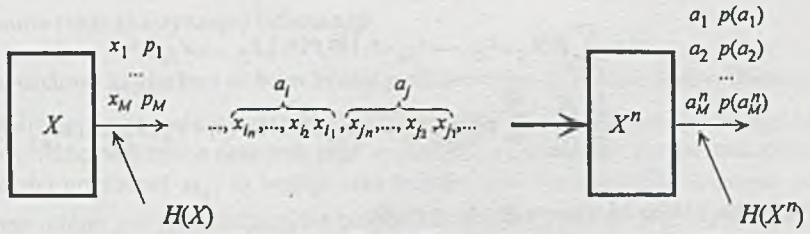
$$p(a_i) = p(x_{i1},...,x_{in}) = p(x_{i_1})p(x_{i_2})...p(x_{i_n}) = p_{i_1}p_{i_2}...p_{i_n} \tag{1.12}$$

natomiast

$$H(X^n) = nH(X) \tag{1.13}$$

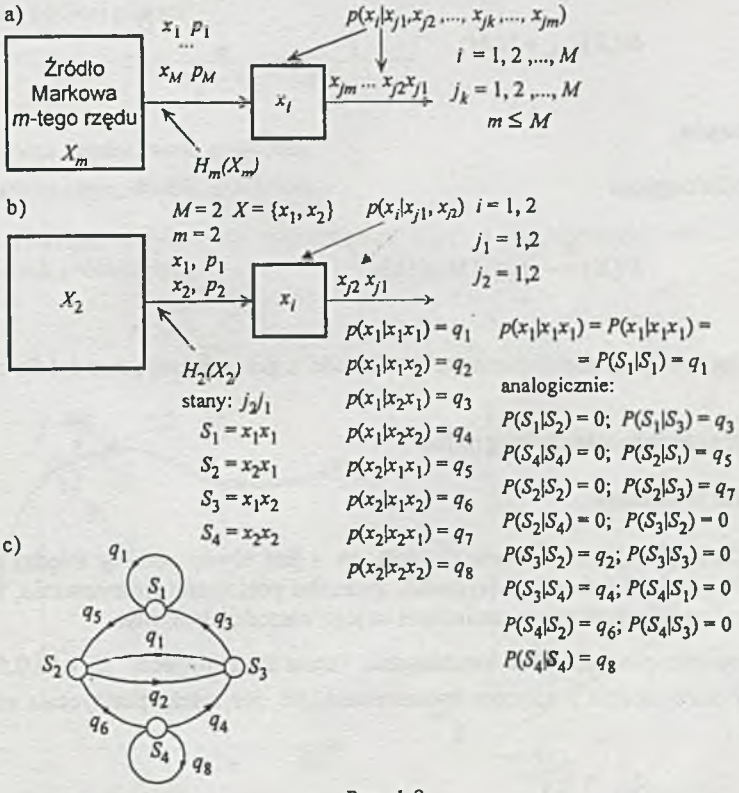
Źródło ciągów Markowa *m*-tego rzędu

Def.1.6: Źródło ciągów Markowa *m*-tego rzędu X_m (**źródło Markowa *m*-tego rzędu**) jest to źródło generujące M różnych wiadomości, w którym pojawienie się wiadomości x_i zależy od m wiadomości uprzednio wygenerowanych przez źródło.



Rys. 1.7

Własności źródła opisane są przez zbiór prawdopodobieństw warunkowych (*rys.1.8a*), a jego stan w danym momencie określa m uprzednio wygenerowanych wiadomości.



Rys. 1.8

Własności źródła ilustruje wykres stanów. Na *rys.1.8b* przedstawiono wykres stanów dla $M = 2$ i $m = 2$.

Entropia źródła Markowa *m*-tego rzędu

Def.1.7:

$$H_m(X_m) = H_m(X) \stackrel{df}{=}$$

$$= -\sum_{X^{m+1}} p(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m}, x_i) \operatorname{ld} p(x_i \mid x_{j_1}, ..., x_{j_m}) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{M} \sum_{j_1=1}^{M} ... \sum_{j_m=1}^{M} p(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m}, x_i) \operatorname{ld} p(x_i \mid x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_m}) \qquad (1.14)$$

Redundancja źródła Markowa *m* - tego rzędu

Def.1.8:

$$R \stackrel{df}{=} 1 - \frac{H_m(X)}{H(X)_{\max}} \qquad (1.15)$$

gdzie

$$H(X)_{\max} = \operatorname{ld} M$$

1.5. Źródło ciągłe

Entropia źródła ciągłego

Def.1.9:

$$H(X) \stackrel{df}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) \operatorname{ld} w(x) dx \qquad (1.16)$$

gdzie

$w(x)$ - gęstość prawdopodobieństwa wiadomości x generowanej przez źródło ciągłe X.

1.6. Dyskretyzacja informacji (sygnału)

Kwantowanie informacji

Def.1.10: Krok (skok) kwantowania (kwant) Δx - jest równy różnicy między sąsiednimi wartościami informacji (sygnału), zwanymi poziomami kwantowania, na które w procesie kwantowania zamieniane są jego wartości chwilowe.

Przy kwantowaniu powstaje błąd kwantowania (szum kwantowania) $\Delta_k \in [0, 0.5\Delta x]$. Jego wariancja, przy dużej liczbie poziomów kwantowania (M), nie zależy praktycznie od rozkładu $x(t)$ i wynosi

$$\sigma_{\Delta_k}^2 = \frac{\Delta x^2}{12} \qquad (1.17)$$

Jeśli ponadto gęstość prawdopodobieństwa błędu jest równomierna w całym przedziale, wówczas średniokwadratowy błąd kwantowania

$$\sigma_{\Delta_k} = \frac{\Delta x}{2\sqrt{3}} \tag{1.18}$$

czyli jest $\sqrt{3}$ - krotnie mniejszy od maksymalnej wartości błędu kwantowania Δ_k .

Próbkowanie (charakteryzacja) informacji

Częstotliwościowe kryterium doboru kroku próbkowania Δt *Kotielnikowa-Shannona*:

Jeśli sygnał ciągły $x(t)$ spełnia *warunki Dirichleta*, tzn. jest ograniczony, odcinkami ciągły i ma skończoną liczbę ekstremów oraz jeśli jego widmo jest ograniczone i równe zeru poczynając od częstotliwości granicznej ω_g, to istnieje taka maksymalna wartość kroku (odstępu) próbkowania Δt, przy której jest jeszcze możliwe bezbłędne odtworzenie tego sygnału z jego próbek. Ten maksymalny krok kwantowania ma wartość

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_g} = \frac{1}{2f_g} \tag{1.19}$$

lub w bardziej ogólnej postaci

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_g - \omega_d} = \frac{1}{2(f_g - f_d)} \tag{1.20}$$

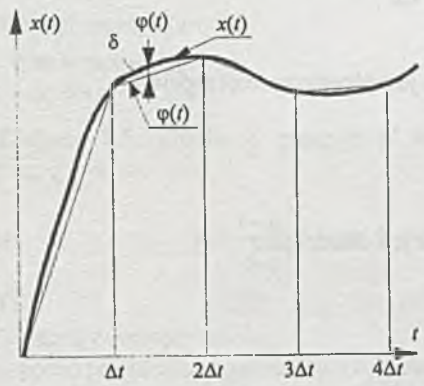
gdzie

ω_d - dolna częstotliwość graniczna,

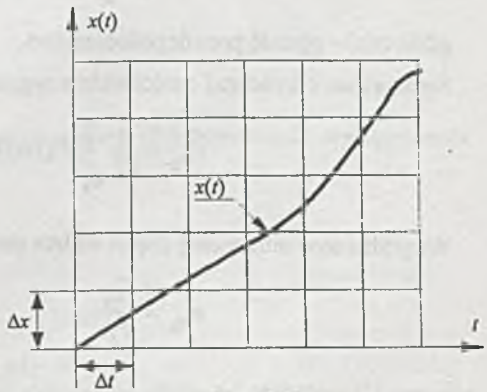
ω_g - górna częstotliwość graniczna.

Jeśli jako kryterium przyjmiemy dopuszczalny błąd δ aproksymacji odcinkowo liniowej (*rys.1.9*), to krok próbkowania

$$\Delta t = \sqrt{\frac{8\delta}{\max|\ddot{x}(t)|}} = \frac{1}{2f_g} 0.9 \sqrt{\frac{\delta}{\max|x(t)|}} \tag{1.21}$$



Rys. 1.9



Rys. 1.10

POLITECHNIKA ŚLĄSKA Biblioteka Główna

Natomiast jeśli należy dobrać krok próbkowania Δt tak, żeby zmiana dyskretnego sygnału $x(t)$ w czasie kroku próbkowania nie przekraczała jednego kwantu (*rys.1.10*), to wówczas krok ten określony jest zależnością

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\max|\dot{x}(t)|} = \frac{1}{2f_g} \cdot 0.32\sqrt{\frac{\delta}{\max|x(t)|}} \tag{1.22}$$

Praktycznie mamy do czynienia z sygnałami o skończonym czasie trwania T i o funkcji gęstości widmowej nie ograniczonej w dziedzinie częstotliwości. Ograniczenie widma do przedziału $0 \div \omega_g$ (w którym zawarta jest prawie cała energia widma) umożliwia wykorzystanie twierdzenia Kotielnikowa-Shannona. Energia odrzuconej części gęstości energii widmowej określa błąd próbkowania.

Dyspersja błędu próbkowania spowodowanego ograniczeniem widma sygnału do częstotliwości ω_g określona jest zależnością

$$\sigma_{\omega_g} \overset{\text{df}}{=} \frac{\frac{1}{\pi T}\int_{\omega_g}^{\infty}|F(j\omega)|^2\,d\omega}{(x_{\max}-x_{\min})^2} = \frac{a_{\omega_g}P_T}{(x_{\max}-x_{\min})} \tag{1.23}$$

gdzie

$$F(j\omega) \overset{\text{df}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

T - czas trwania sygnału $x(t)$,

ω_g - pulsacja graniczna (przyjęta) widma sygnału,

$x_{\max}$, $x_{\min}$ - przedział zmian sygnału $x(t)$,

P_T - średnia moc sygnału:

$$P_T \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\pi T}\int_0^{\infty}|F(j\omega)|^2\,d\omega = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 w(x)dx \tag{1.24}$$

gdzie $w(x)$ - gęstość prawdopodobieństwa.

Średnia moc odrzuconej części widma sygnału $x(t)$ jest określona zależnością

$$P_{\omega_g} \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\pi T}\int_{\omega_g}^{\infty}|F(j\omega)|^2\,d\omega \tag{1.25}$$

Względna moc odrzuconej części widma określona jest zależnością

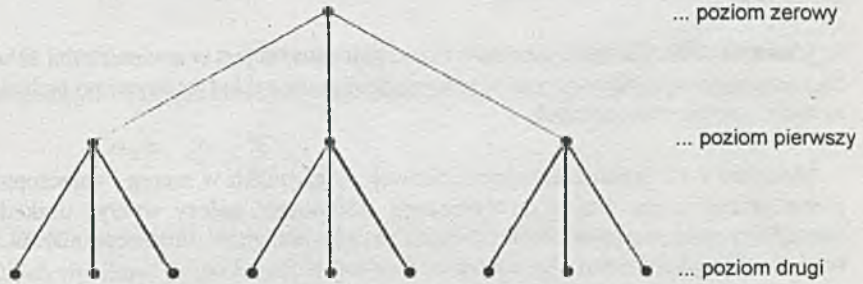
$$a_{\omega_g} \overset{\text{df}}{=} \frac{P_{\omega_g}}{P_T} \tag{1.26}$$

2.TEMATY ZADAŃ

Zadanie 2.1. Określić, jak zmienia się entropia źródła binarnego ze zmianą rozkładu prawdopodobieństw występowania wiadomości źródła.

Zadanie 2.2. Określić entropię pełnego N-poziomowego systemu hierarchicznego, jeśli liczba elementów systemu l_n na poziomie n wynosi $l_n = K^n$, gdzie K - podstawa systemu (określa, ile gałęzi wychodzi z każdego węzła grafu systemu). Przyjąć, że węzeł początkowy grafu (korzeń) przedstawiającego hierarchiczne drzewo systemu jest położony na zerowym poziomie. Każdy element systemu może być w jednym z m jednakowo prawdopodobnych stanów.

Zadanie 2.3. Określić entropię systemu hierarchicznego zadanego grafem (*rys.2.3*), jeśli każdy element systemu może z równym prawdopodobieństwem znajdować się w jednym z czterech stanów.



Rys. 2.3

Zadanie 2.4. Losowe źródło zdarzeń X określone jest przez rozkład dwumianowy

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Obliczyć entropię zródła:

a) w postaci ogólnej,
b) dla $p = 0.5$, $n = 5$.

Zadanie 2.5. Źródło X generuje N wyników o prawdopodobieństwach występowania $p(x_i) = p\,q^{i-1}$,

gdzie $$p = \frac{1-q^N}{1-q^M} \quad \text{oraz} \quad 0 < q < 1.$$

Należy:

a) obliczyć entropię źródła,
b) podać przebliżony sposób obliczania entropii, gdy $N \to \infty$,
c) określić błąd przy obliczaniu entropii, jeśli przy skończonej wielkości N oblicza się entropię z zależności otrzymanej przy $N \to \infty$.

|Zadanie 2.6. Wykazać, ze średnia nieokreśloność odpowiadająca każdej wiadomości generowanej przez źródło jest wielkością dodatnią.

Zadanie 2.7. Wykazać, że $H(Y) = H(X)$, jeśli

a) $Y = X \pm C$, gdzie $C = \text{const}$,
b) $Y = -X$.

|Zadanie 2.8. Jaką maksymalną nieokreśloność może zawierać fotografia 6×9 cm^2, jeśli rozmiar ziarna jest równy 0.01×0.01 cm^2, a każde ziarno może mieć trzy odcienie: biały, czarny i szary.

Zadanie 2.9. Określić ilość informacji, jaką można otrzymać w ciągu sekundy z kwantowanego sygnału telewizyjnego. Każdy kadr zawiera 625 linii, a w ciągu sekundy przekazywany jest 25 razy. Sygnał odpowiadający jednej linii stanowi ciąg 600 impulsów o przypadkowej amplitudzie (równoprawdopodobnej) z przedziału 0-8V, a krok kwantowania sygnału wynosi 1V. Przyjąć, że sygnały nie są skorelowane.

|Zadanie 2.10. Określić, jaka ilość informacji zawarta jest w stwierdzeniu, że w partii N sztuk tranzystorów wyprodukowanych w jednym dniu przez zakład wykryto, po badaniach temperaturowych, n sztuk uszkodzonych.

|Zadanie 2.11. Jedna z dziesięciu żarówek połączonych w szereg i załączonych na stałe napięcie przepaliła się. Mając do dyspozycji woltomierz, należy wykryć uszkodzoną żarówkę. Określić sposób przeprowadzania badania przy najmniejszej liczbie pomiarów, zakładając, że przepalenie się każdej żarówki jest jednakowo prawdopodobne.

|Zadanie 2.12. W celu zidentyfikowania jednakowo prawdopodobnych uszkodzeń urządzenia można przeprowadzić wiele testów. Związek między testami a uszkodzeniami podano w tablicy 2.12.

Tablica 2.12

Uszkodz. / Test	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	1	0
4	0	0	0	1
5	0	1	1	0

W tablicy tej przyjęto oznaczenia:

0 - test nie wykrywa uszkodzenia,
1 - test wykrywa uszkodzenie.

Jaka jest minimalna liczba testów i które z nich należy przeprowadzić, by zidentyfikować każde pojedyncze uszkodzenie ?

|Zadanie 2.13. Cztery identyczne z wyglądu monety różnią się jedynie ciężarem. Jaka jest najmniejsza liczba ważeń na wadze szalkowej bez użycia ciężarków, która pozwoli uszeregować monety od najcięższej do najlżejszej ? Jak należy przeprowadzić ważenie ?

Założenie: wagi monet są tak dobrane, że żadna kombinacja monet na szalkach nie daje stanu równowagi.

Zadanie 2.14. Z 12 monet o jednakowym wyglądzie 11 ma jednakowy ciężar, a jedna różni się ciężarem od pozostałych, przy czym może być ona cięższa lub lżejsza od pozostałych (z równym prawdopodobieństwem). Jaka jest najmniejsza liczba ważeń na wadze szalkowej bez użycia ciężarków, która pozwoli odnaleźć fałszywą monetę i ustalić, czy jest ona lżejsza, czy cięższa od pozostałych. Jaki powinien być algorytm ważeń ?

Zadanie 2.15. Niech $x_1, x_2, ..., x_M$ będzie zbiorem niejednoczesnych wyników doświadczenia i niech $p(x_1), ..., p(x_M)$ i $q(x_1), ..., q(x_M)$ będą dwoma różnymi zbiorami prawdopodobieństw przypisanymi tym doświadczeniom, tzn.

$$\sum_{i=1}^{M} p(x_i) = \sum_{i=1}^{M} q(x_i) = 1$$

Wykazać, że słuszna jest następująca nierówność:

$$\sum_{i=1}^{M} p(x_i) \mathrm{ld} \frac{p(x_i)}{q(x_i)} \geq 0$$

Zadanie 2.16. Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi oraz $a_1, a_2, ..., a_n$ nieujemnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że ich suma jest równa 1. Wykazać, że:

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Zadanie 2.17. Wykazać, że zmiany prawdopodobieństw dążące do zrównania prawdopodobieństw wszystkich wyników $p_1, p_2, ..., p_M$ zawsze dają zwiększenie nieokreśloności.

Zadanie 2.18. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości $x_1, x_2, ..., x_M$ oraz $y_1, y_2, ..., y_L$. Niech $Z=X+Y$.

a) Wykazać, że $H(Z|X) = H(Y|X)$

i stąd jeżeli X i Y są niezależne, to

$$H(Z|X) = H(Y) \text{ a } H(Y) \leq H(Z)$$

i analogicznie

$$H(X) \leq H(Z).$$

b) Podać przykład, w którym $H(X) > H(Z)$, $H(Y) > H(Z)$.

Zadanie 2.19. Wykazać, że:

a) $H(Y,Z|X) \leq H(Y|X) + H(Z|X)$

a równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p(y_j, z_k \mid x_i) = p(y_j \mid x_i) p(z_k \mid x_i)$$

dla wszystkich i, j, k.

b) $H(Z|X,Y) \le H(Z,|X)$

a równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p(y_j, z_k \mid x_i) = p(y_j \mid x_i) p(z_k \mid x_i)$$

dla wszystkich i, j, k.

|Zadanie 2.20. Na ile sposobów można określić położenie figury na szachownicy ? Ile bitów informacji otrzymujemy w każdym sposobie ?

|Zadanie 2.21. Dana jest dyskretna zmienna losowa przyjmująca wartości ze zbioru $x_1, x_2, ..., x_M$. Zmienna losowa Y zdefiniowana jest przez funkcję $Y = g(x)$, gdzie $g(x)$ jest dowolną funkcją.

Wykazać, że $H(Y) \le H(X)$. Przy jakich warunkach nałożonych na funkcję $g(x)$ zachodzi równość ?

|Zadanie 2.22. Dwa połączone doświadczenia X i Y scharakteryzowane są następującymi prawdopodobieństwami łącznymi zdarzeń:

$$p(x_1, y_1) = 0.1, \; p(x_1, y_2) = 0.25, \; p(x_2, y_1) = 0.2, \; p(x_2, y_2) = 0$$
$$p(x_3, y_1) = 0.3, \; p(x_3, y_2) = 0.15.$$

Obliczyć: $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(Y|X)$.

Zadanie 2.23. Dwa niezależne doświadczenia X i Y określone są przez prawdopodobieństwa łączne $p(x_i, y_j)$, przedstawione w tablicy 2.23. Określić entropie warunkowe $H(X|Y)$ oraz $H(Y|X)$.

Tablica 2.23

$p(x_i, y_j)$	x_1	x_2	x_3
y_1	0.1	0.2	0
y_2	0	0.3	0
y_3	0	0.2	0.2

|Zadanie 2.24. Układ stabilizacji położenia, kompensujący przypadkowe zaburzenia, ma dwa czujniki mierzące kąty we wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Sygnały X i Y z czujników poprzez element impulsowy podawane są na układ przeliczający w odstępach czasowych $\Delta t = 0{,}3$ s. Czujniki mają liczby poziomów kwantowania równe $M = m_x = 3$ i $L = m_y = 5$. Na podstawie doświadczeń ustalono prawdopodobieństwa pojawienia się par sygnałów zebrane w tablicy 2.24.

Należy obliczyć:

1° Entropię łączną sygnałów X i Y.
2° Entropię sygnałów X i Y przy niezależnej pracy czujników.
3° Entropie warunkowe sygnałów X i Y przy jednoczesnej pracy czujników.
4° Ilość informacji podaną na układ przeliczający w czasie $T = 30$ s i na jednostkę czasu.

Tablica 2.24

$p(x_i, y_j)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.12	0.10	0.08	0.05	0.03
x_2	0.02	0.04	0.12	0.04	0.02
x_3	0.03	0.05	0.08	0.10	0.12

|Zadanie 2.25. Skala przyrządu pomiarowego zawiera 1000 działek. Błąd przyrządu wynosi ±1 % całej skali i jest rozłożony równomiernie. Określić nadmiar (redundancję) skali przyrządu.

Zadanie 2.26. Sporządzić wykres stanów źródła Markowa drugiego rzędu, jeśli źródło jest źródłem binarnym, a prawdopodobieństwa warunkowe są równe:

$$p(0|00) = p(1|11) = 0.8$$
$$p(1|00) = p(0|11) = 0.2$$
$$p(0|01) = p(0|10) = p(1|01) = p(1|10) = 0.5.$$

Zadanie 2.27. Obliczyć entropię źródła Markowa z zadania 2.26, jeżeli wiadomo, że

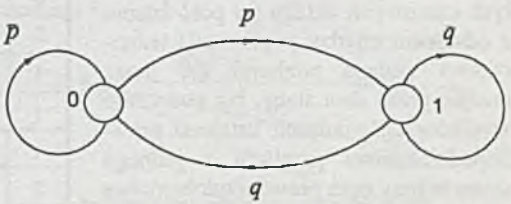
$$p(00) = p(11) = \frac{5}{14}$$

$$p(01) = p(10) = \frac{2}{14}$$

Zadanie 2.28. Źródło Markowa pierwszego rzędu $X=\{0,1\}$ o prawdopodobieństwach symboli $p(0) = \frac{q}{p+q}$, $p(1) = \frac{p}{p+q}$ podane jest na *rys. 2.28.*

Obliczyć:

1° Entropię źródła $H_1(X)$.
2° Wartość entropii przy $p = q$.
3° Przy jakiej wartości $p = q$, $H_1(X) = H_{1\max}(X)$.



Rys. 2.28

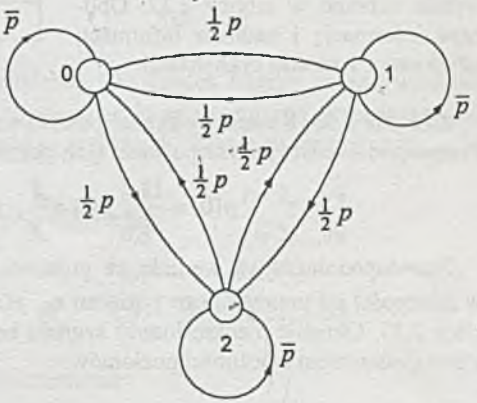
Zadanie 2.29. Źródło Markowa 1 rzędu $X_1 = \{0,1,2\}$ jest przedstawione na *rys.2.29.* Zakładając, że

$$p(0) = p(1) = p(2) = \frac{1}{3}$$

obliczyć:

a) entropię źródła $H_1(X)$,
b) wartość prawdopodobieństwa p, przy której

$$H_1(X) = H_{1\max}(X).$$



Rys. 2.29

Zadanie 2.30. Źródło binarne generuje dwie wiadamości 0 i 1. Obliczyć entropię źródła przy następujących założeniach:

a) wiadomości równoprawdopodobne i statystycznie niezależne,
b) wiadomości statystycznie niezależne $p(0) = \frac{3}{4}$ i $p(1) = \frac{1}{4}$,
c) wiadomości równoprawdopodobne, źródło jest źródłem z pamięcią, przy czym

$$p(0|1) = p(1|0) = \frac{1}{3},$$

d) wiadomości nierównoprawdopodobne i źródło posiada pamięć, natomiast

$$p(0)=\frac{3}{4},\ p(1)=\frac{1}{4},\ p(0\mid 0)=\frac{2}{3},\ p(0\mid 1)=1.$$

Zadanie 2.31. Źródło ciągów Markowa 1 rzędu generuje wiadomości $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$ z prawdopodobieństwami $p(x_0) = 0.4$ i $p(x_1) = 0.6$, natomiast prawdopodobieństwa warunkowe wynoszą:

$$p(x_0 \mid x_0)=0.1,\ p(x_1 \mid x_0)=0.9,\ p(x_0 \mid x_1)=0.6,\ p(x_1 \mid x_1)=0.4$$

Obliczyć entropię źródła $H_1(X)$.

Zadanie 2.32. Układ sygnalizacji napełnienia zbiornika wskazuje trzy stany: 0 - niedomiar wody, 1 - ilość wody w granicach dopuszczalnych, 2 - nadmiar wody. Z powodu dużych stałych czasowych układu (w porównaniu z odstępem między pomiarami) jednorazowa zmiana poziomu nie może przejść przez dwa stany. Na podstawie wyników doświadczeń ustalono prawdopodobieństwa przejścia z jednego stanu w inny oraz prawdopodobieństwa występowania poszczególnych stanów; wyniki zebrano w tablicy 2.32. Obliczyć informację i nadmiar informacji uzyskiwane z układu sygnalizacji.

Tablica 2.32

x_j	x_i	$p(x_j)$	$p(x_i \mid x_j)$	$p(x_j, x_i)$
0	0	0.25	$p(x_0 \mid x_0)=0.4$	0.1
0	1	0.25	$p(x_0 \mid x_1)=0.6$	0.15
0	2	0.25	$p(x_2 \mid x_0)=0$	0
1	0	0.5	$p(x_0 \mid x_1)=0.3$	0.15
1	1	0.5	$p(x_1 \mid x_1)=0.4$	0.2
1	2	0.5	$p(x_2 \mid x_1)=0.3$	0.15
2	0	0.25	$p(x_0 \mid x_2)=0$	0
2	1	0.25	$p(x_1 \mid x_2)=0.6$	0.15
2	2	0.25	$p(x_2 \mid x_2)=0.4$	0.1

Zadanie 2.33. Kwantowy sygnał posiada trzy poziomy: 0,1,2. Prawdopodobieństwa występowania tych poziomów są równe:

$$p(0)=\frac{11}{36},\ p(1)=\frac{4}{9},\ p(2)=\frac{1}{4}$$

Prawdopodobieństwa warunkowe pojawienia się poziomu x_i w zależności od poprzedniego poziomu x_j, $p(x_i|x_j)$ podano w tablicy 2.33. Określić nieokreśloność sygnału bez uwzględniania i z uwzględnianiem zależności poziomów.

Tablica 2.33

Wartości $p(x_i\|x_j)$			
x_i \ x_j	0	1	2
0	$\frac{9}{11}$	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{9}$

Zadanie 2.34. Na wejście kanału podawane są dwa sygnały x_1 i x_2. Na wyjściu otrzymujemy sygnały y_1 i y_2. Prawdopodobieństwa łączne $p(x_i, y_j)$ równe są:

$$p(x_1,y_1)=0.4,\ p(x_1,y_2)=0.4,\ p(x_2,y_1)=0.12,\ p(x_2,y_2)=0.08$$

Obliczyć entropie $H(X)$, $H(Y)$ i $H(X,Y)$.

Zadanie 2.35. Na wejściu binarnego kanału informacyjnego przedstawionego na *rys.2.35* znajduje się źródło generujące dwie wiadomości 0 i 1 z prawdopodobieństwami:

$$p(0) = p(x_1) = \frac{3}{4}$$

i

$$p(1) = p(x_2) = \frac{1}{4}$$

Obliczyć prawodopodobieństwa pojawienia się symboli na wyjściu

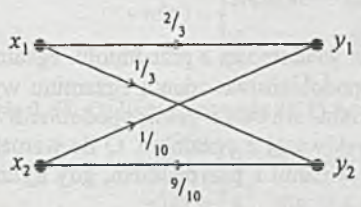
$$p(0) = p(y_1) \quad \text{i} \quad p(1) = p(y_2)$$

oraz prawdopodobieństwa warunkowe $p(x_i|y_j)$ $(i, j = 1, 2)$.

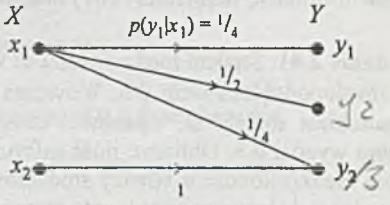
Zadanie 2.36. Obliczyć, ile wynosi informacja wzajemna $I(X|Y)$ między wejściem i wyjściem kanału o 2 wejściach $x_1, x_2 \in X$ i trzech wyjściach $y_1, y_2, y_3 \in Y$, jeśli

$$p(x_1) = p(x = 0) = \frac{1}{2} = p(x_2) = p(x = 1).$$

Prawdopodobieństwa warunkowe kanału przedstawiono na *rys.2.36*.



Rys. 2.35



Rys. 2.36

Zadanie 2.37. Przyrząd o maksymalnym wychyleniu 100 działek mierzy zadaną wielkość z dokładnością ±1 działka. Obliczyć informację wzajemną uzyskaną z pomiaru i stratę informacji spowodowaną niedokładnością przyrządu, jeżeli dane są prawdopodobieństwa warunkowe:

$$\begin{aligned} p(x_i \mid y_j) &= 0.4 && i = 2,...,99 \\ p(x_{i-1} \mid y_i) = p(x_{i+1} \mid y_i) &= 0.3 && i = 2,...,99 \\ p(x_1 \mid y_1) = p(x_{100} \mid y_{100}) &= 0.7 && \\ p(x_i) &= 0.01 && i = 2,...,100 \end{aligned}$$

gdzie:

$X = \{x_1,...,x_{100}\}$ wartości mierzone

$Y = \{y_1,...,y_{100}\}$ wyniki pomiarów.

Zadanie 2.38. Mierzona wielkość X może przyjmować dwie wartości x_0 i x_1 z równym prawdopodobieństwem $p(x_0) = p(x_1)$. Z powodu ograniczonej dokładności przyrządu pomiarowego mogą wystąpić błędy pomiaru, tzn. zamiast x_0, przyrząd może wskazywać x_1 i odwrotnie zamiast x_1, przyrząd może wskazywać x_0 . Warunkowe prawdopodobieństwa takich błędów są równe 0.01. Obliczyć informację wzajemną uzyskiwaną z pomiaru.

Zadanie 2.39. Doświadczenie *a* polega na wybraniu liczby X z liczb 1,2 ,..., N , natomiast doświadczenie *b* uściśla tę liczbę przez postawienie warunku, że szukana liczba X dzieli się przez n. Jaką informację o doświadczeniu *a* uzyskamy z doświadczenia *b* ?

Zadanie 2.40. Obliczyć entropię $H(Y)$ na wyjściu przetwornika przedstawionego na *rys.2.40*, jeśli wiadomo, że na jego wejście podawane są sygnały dyskretne generowane przez źródło X generujące 5 wiadomości:

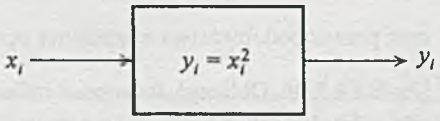
$x_1 = -0.1$ z $p(x_1) = \frac{1}{6}$

$x_2 = -0.05$ z $p(x_2) = \frac{1}{6}$

$x_3 = 0$ z $p(x_3) = \frac{1}{3}$

$x_4 = 0.05$ z $p(x_4) = \frac{1}{6}$

$x_5 = 0.1$ z $p(x_5) = \frac{1}{6}$



Rys. 2.40

Obliczyć informację wzajemną $I(X|Y)$ oraz stratę informacji.

Zadanie 2.41. Student może opanować wszystkie wiadomości z przedmiotu egzaminacyjnego z prawdopodobieństwem 0.6. Wówczas prawdopodobieństwo zdania egzaminu wynosi 0.8. Jeśli natomiast student nie opanował całego materiału, wówczas prawdopodobieństwo zdania egzaminu wynosi 0.3. Obliczyć ilość informacji uzyskiwanej z egzaminu. O ile wzrosła u egzaminatora nieokreśloność o wiedzy studentów w porównaniu z przypadkiem, gdy egzamin zdają tylko studenci, którzy opanowali cały materiał ?

Zadanie 2.42. W układzie regulacji prędkości kątowej wału silnika sygnał wejściowy, w postaci napięcia, może przyjmować jedną z 17 niezależnych dyskretnych wartości, z krokiem kwantowania Δx. Gęstości prawdopodobieństwa pojawienia się tych wartości określone są przez dwustronny rozkład wykładniczy

$$w(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x|}{a}},$$

gdzie:

$a = 0.5$V,

$\Delta x = 0.2$V.

Sygnał jest próbkowany w czasie w odstępach $\Delta t = 0.3$ s, a czas trwania sygnału $T = 30$ s. Określić entropię sygnału i ilość informacji uzyskanej o układzie w czasie T.

Zadanie 2.43. Ciągły sygnał losowy o rozkładzie równomiernym (jednostajnym) zmienia się w przedziałach

a) od 0 do 2,

b) od 0 do 0.5.

Obliczyć entropię sygnału.

Zadanie 2.44. Sygnał generowany przez źródło zmienia się od 0 do 5V, a gęstość rozkładu prawdopodobieństwa w tym przedziale jest stała. Określić ilość informacji uzyskiwaną z pomiaru sygnału woltomierzem wyskalowanym

a) w woltach,
b) w miliwoltach.

Zadanie 2.45. Ciągła zmienna losowa jest określona przez gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

$$w(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

gdzie λ dowolna liczba większa od zera. Obliczyć entropię źródła.

Zadanie 2.46. Obliczyć entropię zmiennej losowej $x(t)$, jeśli wiadomo, że gęstość rozkładu prawdopodobieństwa $w(x)$ zmiennej losowej określona jest zależnością

$$w(x) = \begin{cases} A\cos x & \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla pozostaych wartości } x \end{cases}$$

Zadanie 2.47. Obliczyć entropię $H(X)$ zmiennej losowej $x(t)$ o dystrybuancie

$$w)x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

Zadanie 2.48. Wykazać, że jeśli źródło generujące sygnał ciągły o rozkładzie normalnym przejdzie ze stanu, w którym odchylenie standardowe $\sigma = \sigma_1$, w stan, w którym odchylenie standardowe $\sigma = \sigma_2$, to przyrost entropii ΔH jest równy

$$\Delta H = H_2(X) - H_1(X) = \mathrm{ld}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Zadanie 2.49. Sygnał o czasie trwania T posiada widmo o szerokości ΔF. Chwilowe wartości amplitudy sygnału źródła określone są rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej równej zeru. Obliczyć entropię źródła sygnału i entropię przypadającą na jeden pełny sygnał, jeśli wiadomo, że

$$p\{x \geq 11\} = 0.003$$

Zadanie 2.50. Określić ilość informacji uzyskanej z jednego pomiaru zmiennej losowej x, określonej rozkładem równomiernym w przedziale 0 ÷ 256V, jeśli błąd pomiaru ma rozkład normalny niezależny od wielkości mierzonej, o odchyleniu standardowym σ=1 V .

|Zadanie 2.51. Linia przesyłowa przenosi ciągły modulowany amplitudowo sygnał $x(t)$ o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną równą zero i dyspersją $\sigma^2 = 8\ V^2$. Obliczyć entropię $H(X)$ sygnału $x(t)$ przy dokładności jego pomiaru $\Delta x = 0.2V$.

|Zadanie 2.52. Zakłócenie na wejściu wzmacniacza ma rozkład normalny o wartości średniej $x_{01} = 0$ V i odchyleniu standardowym $\sigma_1 = 0.14$ V. Ile wynosi entropia zakłócenia na wejściu, a ile na wyjściu wzmacniacza, jeśli jego wzmocnienie napięciowe $k = 100$.

|Zadanie 2.53. Określić minimalną liczbę cyfr pola odczytowego, jaką powinien mieć przyrząd cyfrowy o błędzie podstawowym $\Delta p\ \% = 0.01\%$, aby błąd kwantowania $\Delta_k\ \%$ był pomijalnie mały ($\Delta_k\ \% \leq 0.1\ \Delta p\ \%$).

Zadanie 2.54. Woltomierzem cyfrowym, z pięciocyfrowym polem odczytowym o zakresie pomiarowym 200 V i błędzie podstawowym $\Delta p\ \% = 0.01\ \%$, zmierzono napięcie otrzymując wskazanie $U = 125.64$V. Obliczyć niedokładność pomiaru.

|Zadanie 2.55. Określić niezbędną liczbę poziomów kwantowania sygnału, żeby średniokwadratowy błąd kwantowania nie przekroczył 0.3%.

|Zadanie 2.56. Określić średniokwadratowy błąd próbkowania sygnału o skończonym czasie trwania T, jeśli:

1) sygnał $x(t)$ przyjmuje z równym prawdopodobieństwem dowolną wartość z przedziału $0 \div A$,
2) okres próbkowania Δt został wybrany dla ω_g, a w przedziale $0 \div \omega_g$ mieści się 95% widma energetycznego sygnału.

Zadanie 2.57 (2.13a). Rozwiązać zadanie 2.13 dla trzech monet.

|Zadanie 2.58 (2.30a). Dany jest ciąg symboli generowanych przez źródło binarne:

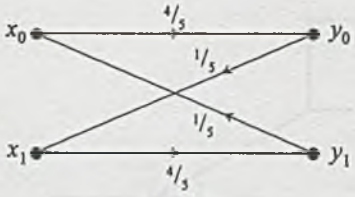
1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0

Zakładając, że ciąg 25 symboli wystarcza do wyznaczenia rozkładu prawdopodobieństw źródła, określić ten rozkład traktując źródło jako:

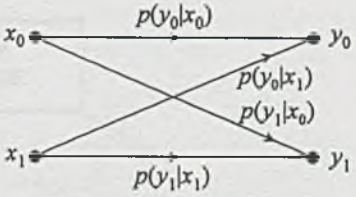
a) źródło bezpamięciowe (Markowa zerowego rzędu),
b) źródło Markowa pierwszego rzędu,
c) źródło Markowa drugiego rzędu.

Wyznaczyć entropię źródła w każdym z tych przypadków.

|Zadanie 2.59 (2.35a). Wielkość wejściowa może przyjmować dwie wartości x_0 i x_1 z prawdopodobieństwami $p(x_0) = \frac{7}{20}$ i $p(x_1) = \frac{13}{20}$. Obliczyć entropię na wyjściu kanału, którego graf przedstawiono na *rys. 2.59*.



Rys. 2.59



Rys. 2.60

Zadanie 2.60 (2.35b). Kanał z zadania 2.59 przedstawić w postaci jak na *rys.2.60* i wyznaczyć wartości charakteryzujących go prawdopodobieństw warunkowych.

Zadanie 2.61 (2.35c). Rozwiązać zadanie 2.59 zakładając odwrotny kierunek strzałek grafu na rys.2.59.

Zadanie 2.62 (2.37a). Mierzona wielkość może przyjmować dwie wartości x_0 i x_1, a prawdopodobieństwo $p(x_0) = 0.4$. Zakładając, że zamiast x_0 przyrząd może wskazać x_1 z prawdopodobieństwem 0.2, a zamiast x_1 może wskazać x_0 z prawdopodobieństwem 0.3, obliczyć:

a) stratę informacji przy pomiarze,
b) dezinformację wnoszoną przez pomiar,
c) ilość informacji uzyskiwanej z pomiaru.

Zadanie 2.63 (2.33a). Zmiana amplitudy sygnału skwantowanego mieści się w trzech przedziałach kwantyzacji x_1, x_2 i x_3 . Prawdopodobieństwa występowania sygnału w każdym z przedziałów są jednakowe, a prawdopodobieństwa warunkowe przejść sygnału między przedziałami wynoszą:

$$p(x_1 \mid x_1) = p(x_3 \mid x_3) = 0.8 = p,$$

$$p(x_2 \mid x_1) = p(x_3 \mid x_2) = p(x_2 \mid x_3) = 0.2 = q.$$

Obliczyć entropię sygnału. Powtórzyć obliczenia dla $p = 0.7$ i $q = 0.3$.

Zadanie 2.64 (2.12a). Rozwiązać zadanie 2.12 zakładając nierównomierny rozkład prawdopodobieństw uszkodzeń:

$$p(U_1) = 0.1,$$

$$p(U_2) = 0.5,$$

$$p(U_3) = 0.2,$$

$$p(U_4) = 0.2.$$

Zadanie 2.65 (2.38a). Obliczyć informację wzajemną uzyskiwaną w wyniku przeprowadzenia kolejnych testów w zadaniu 2.64.

Zadanie 2.66 (2.58a). Rozwiązać zadanie 2.58 zakładając, że zera i jedynki generowane są w „paczkach" zawierających odpowiednio 10 zer i 15 jedynek.

Rozdział II

KODOWANIE I DEKODOWANIE INFORMACJI

3. WIADOMOŚCI PODSTAWOWE

Kody dzielą się na:

a) beznadmiarowe do transmisji przy braku zakłóceń,
b) nadmiarowe do transmisji w kanałach z zakłóceniami.

Najczęściej stosowane są kody binarne. Podział liniowych kodów binarnych przedstawiono na *rys.3.1*.

3.1. Kody beznadmiarowe (zwięzłe)

Ogólnie kodowanie - jest to przedstawianie informacji (wiadomości) w postaci przydatnej do przesyłania, natomiast dekodowanie - jest operacją odwrotną.

Na *rys.3.2* pokazano ideę kodowania i dekodowania informacji przy transmisji przez kanał bez zakłóceń.

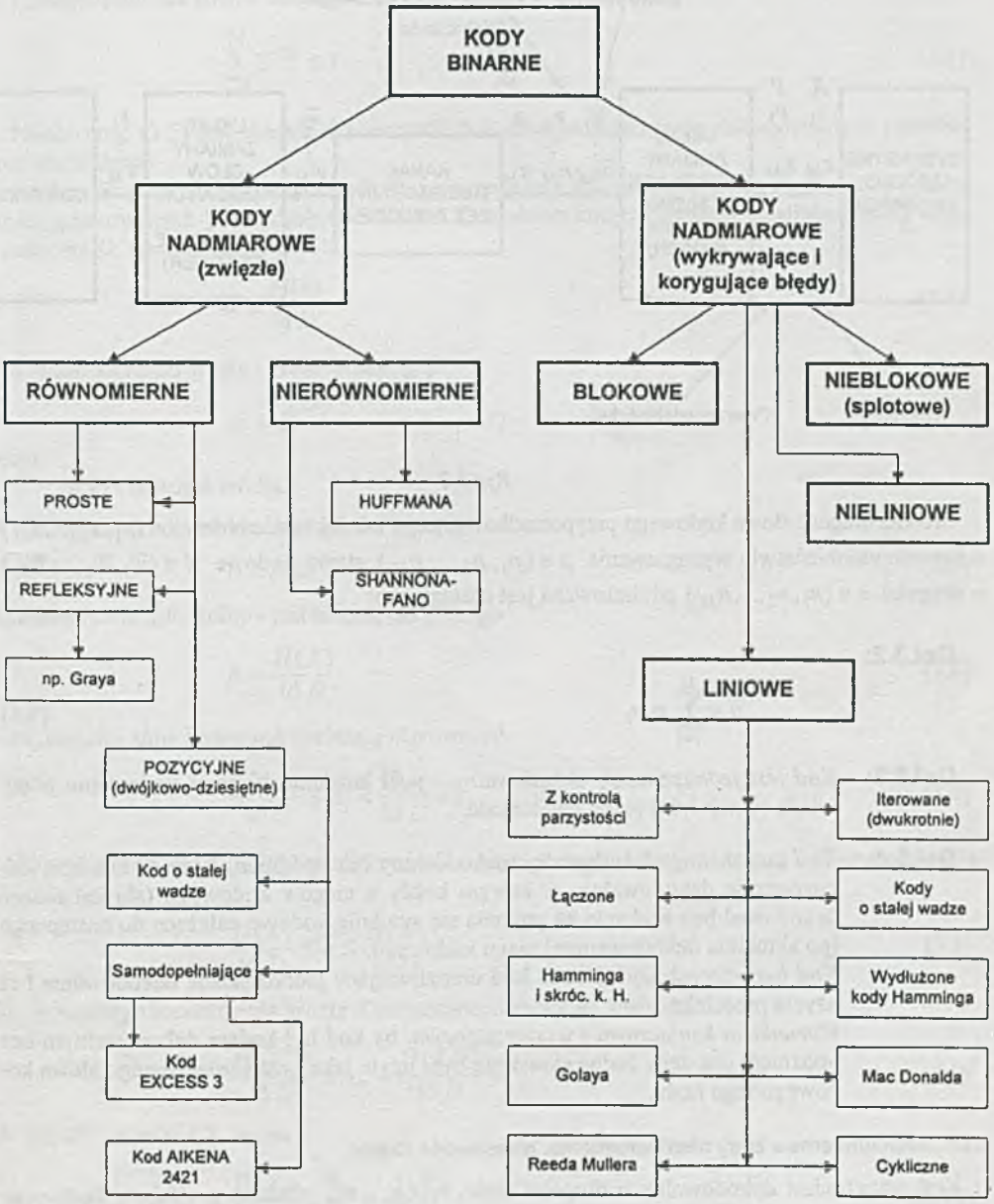
Def.3.1: *Algorytmem* (*kodem*) nazywamy przyporządkowanie (jednoznaczne) wiadomości x_i określonego ciągu symboli alfabetu kodowego (zwanego słowem kodowym) w_i, a *kodowaniem* - proces przekształcania wiadomości w słowa kodowe, natomiast *dekodowaniem* nazywamy proces odwrotny.

Jak już to przedstawiono na *rys.3.1*, kody beznadmiarowe dzielą się na:

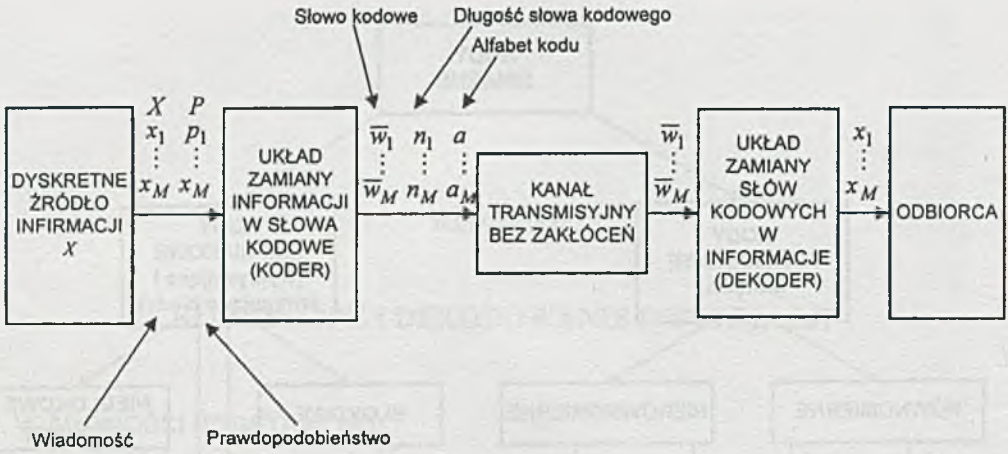
- kody równomierne (blokowe) o stałej długości słowa kodowego

oraz

- kody nierównomierne o zmiennej długości słowa kodowego.


KODY BINARNE
KODY NADMIAROWE (zwięzłe)
KODY NADMIAROWE (wykrywające i korygujące błędy)
RÓWNOMIERNE
NIERÓWNOMIERNE
BLOKOWE
NIEBLOKOWE (splotowe)
PROSTE
HUFFMANA
NIELINIOWE
REFLEKSYJNE
SHANNONA-FANO
np. Graya
LINIOWE
POZYCYJNE (dwójkowo-dziesiętne)
Z kontrolą parzystości
Iterowane (dwukrotnie)
Kod o stałej wadze
Łączone
Kody o stałej wadze
Samodopełniające
Hamminga i skróc. k. H.
Wydłużone kody Hamminga
Kod EXCESS 3
Golaya
Mac Donalda
Kod AIKENA 2421
Reeda Mullera
Cykliczne

Rys. 3.1



Rys.3.2

Średnia długość słowa kodowego przyporządkowującego każdej wiadomości $x \in (x_1, x_2, ..., x_M)$ o prawdopodobieństwie występowania $p \in (p_1, p_2, ..., p_M)$ słowo kodowe $\overline{w} \in (\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_M)$ o długości $n \in (n_1, n_2, ..., n_M)$ zdefiniowana jest następująco:

Def.3.2:

$$\overline{n} \overset{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^{M} p_i n_i \tag{3.1}$$

Def.3.3: *Kod jest jednoznacznie dekodowalny* - jeśli każdemu ciągowi kodowemu odpowiada co najwyżej jedna wiadomość.

Def.3.4: *Kod natychmiast dekodowalny* (dekodowany bez opóźnień) - jest to taki kod jednoznacznie dekodowalny, w którym każdy z ciągów kodowych (słowo) można dekodować bez czekania aż pojawią się symbole kodowe należące do następnego (po aktualnie dekodowanym) ciągu kodowego.
Kod bezprzecinkowy - jest to kod umożliwiający jednoznaczne dekodowanie bez użycia przecinka.
Warunkiem koniecznym i wystarczającym, by kod był kodem dekodowalnym bez opóźnień, jest żeby żadne słowo nie było użyte jako przedrostek innego słowa kodowego tego kodu.

3.1.1. Beznadmiarowe kody nierównomierne. Nierówność Krafta

Kod natychmiast dekodowalny o długości słów $n_1, n_2, ..., n_M$ złożony z alfabetu kodowego o liczności D istnieje wtedy i tylko wtedy (nierówność Krafta), gdy

$$\sum_{i=1}^{M} D^{-n_i} \leq 1 \tag{3.2}$$

W szczególności dla kodów binarnych ($D = 2$) zachodzi

$$\sum_{i=1}^{M} 2^{-n_i} \leq 1 \tag{3.3}$$

Nierówność (3.2) jest słuszna dla wszystkich kodów jednoznacznie dekodowalnych (nierówność McMillana).

Średnia długość słowa kodowego kodu jednoznacznie dekodowalnego, kodującego M wiadomości generowanych przez dyskretne źródło X, w słowa kodowe złożone z alfabetu kodowego o liczności D, spełnia nierówność:

$$\bar{n} \geq \frac{H(x)}{\mathrm{ld}\, D} \tag{3.4}$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p_i = D^{-n_i} \qquad (i = 1, \ldots, M)$$

gdzie:

$H(X)$ - entropia źródła.

W szczególności dla kodów binarnych

$$\bar{n} \geq H(X) \tag{3.5}$$

Kod absolutnie optymalny - jest to kod, dla którego

$$\bar{n} = \frac{H(X)}{\mathrm{ld}\, D} \tag{3.6}$$

Jeśli długości słów kodowych spełniają nierówność

$$\frac{-\mathrm{ld}\, p_i}{\mathrm{ld}\, D} \leq n_i < \frac{\mathrm{ld}\, p_i}{\mathrm{ld}\, D} + 1 \qquad (\text{dla } i = 1, \ldots, M) \tag{3.7}$$

a alfabet kodowy $a_1, a_2, \ldots, a_D$ ma liczność D, *wówczas* średnia długość słowa kodowego spełnia nierówność

$$\frac{H(X)}{\mathrm{ld}\, D} \leq \bar{n} \leq \frac{H(X)}{\mathrm{ld}\, D} + 1 \tag{3.8}$$

Dla m-krotnego rozszerzenia źródła X oznaczanego przez X^m zachodzi:

$$\frac{H(X^m)}{\mathrm{ld}\, D} \leq \bar{n}_m < \frac{H(X^m)}{\mathrm{ld}\, D} + 1 \tag{3.9}$$

ale $H(X^m) = mH(X)$, zatem

$$\frac{H(X)}{\mathrm{ld}\, D} \leq \frac{\bar{n}_m}{m} < \frac{H(X)}{\mathrm{ld}\, D} + \frac{1}{m} \tag{3.10}$$

gdzie:

$\frac{\bar{n}_m}{m}$ - średnia długość słowa kodowego przypadająca na jedną wiadomość.

TWIERDZENIE (Pierwsze twierdzenie Shannona)

Przy kodowaniu M wiadomości generowanych przez źródło X o entropii $H(X)$ w słowa kodowe kodu nienadmiarowego o D symbolach średnia długość słowa kodowego $\bar{n}$ nie może być mniejsza od dolnej granicy równej $\frac{H(X)}{\mathrm{ld}\, D}$.

Jeśli prawdopodobieństwa p_i występowania wiadomości nie są równe ujemnym potęgom liczby D, to nie jest możliwe osiągnięcie dolnej granicy; ale przy kodowaniu wystarczająco długich bloków wiadomości średnia długość słowa kodowego różni się od wartości granicznej o wartość mniejszą od dowolnej zadanej wartości δ, czyli

$$\bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{m'} \frac{\bar{n}_{m'}}{m} - \frac{H(X)}{\mathrm{ld}\, D} < \delta \tag{3.11}$$

Jeśli kod C jest *optymalnym kodem natychmiast dekodowalnym* przeznaczonym do kodowania wiadomości $x_1, x_2, \ldots x_M$ o prawdopodobieństwach występowania $p_1, p_2, \ldots, p_M$, *to kod C jest optymalnym kodem jednoznacznie dekodowalnym*, tzn. nie ma kodu jednoznacznie dekodowalnego C', dla danych prawdopodobieństw $p_1, p_2, \ldots, p_M$ występowania wiadomości, o średniej długości słowa kodowego $\bar{n}_{m'} < \bar{n}$

Optymalny natychmiast dekodowalny binarny kod C przeznaczony do zakodowania M wiadomości $x_1, x_2, \ldots x_M$ uporządkowanych według malejących prawdopodobieństw ($p_1 \geq p_2 \geq, \ldots, \geq p_M$), a wśród wiadomości o tych samych prawdopodobieństwach według rosnących długości słów kodowych posiada *następujące własności*:

1° bardziej prawdopodobnym wiadomościom odpowiadają krótsze słowa, tzn. z warunku $p_j > p_k$ wynika, że $n_j \leq n_k$,

2° dwom najmniej prawdopodobnym wiadomościom odpowiadają słowa kodowe o tej samej długości, czyli $n_M = n_{M-1}$,

3° wśród słów kodowych o długości n_M są dwa różniące się tylko na ostatniej pozycji.

Łącząc dwie najmniej prawdopodobne wiadomości x_M i x_{M-1}, źródła $X = X_0$ w zastępczą wiadomość $x_{M,M-1}$ występującą z prawdopodobieństwem $p_{M,M-1} = p_M + p_{M-1}$ i znów porządkując M - 1 wiadomości według malejących prawdopodobieństw otrzymamy *zredukowane* źródło X_1.

Jeśli kod C_1, kodujący wiadomości zredukowanego źródła X_1, jest optymalny, to również kod C, kodujący wiadomości źródła $X = X_0$, otrzymany z kodu C_1, przez dodanie 0 i 1 do słowa kodowego odpowiadającego wiadomości $x_{M,M-1}$, jest również optymalny. Ilustruje to tablica 3.1.

Idea zilustrowana w tablicy 3.1 jest wykorzystana do konstrukcji kodu Huffmana.

Tablica 3.1

Kod C				Kod C_1			
$X = X_0$	p_i	$\overline{w}_i$	n_i	X_i	p_{i1}	$\overline{w}_{i1}$	n_{i1}
x_1	p_1	$\overline{w}_1$	n_1	x_1	p_1	$\overline{w}_1$	n_1
x_2	p_2	$\overline{w}_2$	n_2	x_2	p_2	$\overline{w}_2$	n_2
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	$x_{M,M-1}$	$p_M + p_{M-1}$	$\overline{w}_{M,M-1}$	$n_{M,M-1}$
...	...	...	...	...	...	...	...
x_{M-2}	p_{M-2}	$\overline{w}_{M-2}$	n_{M-2}	...	...	...	...
x_{M-1}	p_{M-1}	$\overline{w}_{M-1} = [\overline{w}_{M,M-1}\ 0]$	$n_{M-1} = n_{M,M-1} + 1$	x_{M-2}	p_{M-2}	$\overline{w}_{M-2}$	n_{M-2}
x_M	p_M	$\overline{w}_M = [\overline{w}_{M,M-1}\ 1]$	$n_M = n_{M,M-1} + 1$	...	...	...	...

Kod Huffmana

Konstrukcje optymalnego kodu binarnego natychmiast dekodowalnego (**kodu Huffmana**), kodującego M wiadomości $x_1, x_2, ..., x_M$ źródła X generowanych z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, ..., p_M$ można przedstawić w postaci następującego algorytmu:

A1. *Algorytm konstrukcji kodu Huffmana* (3.12)

1° uporządkowanie wiadomości $x_1, x_2, ..., x_M$ źródła $X = X_0$ według malejącego prawdopodobieństwa, $i := 0$;

2° redukcja źródła X_i przez połączenie dwóch najmniej prawdopodobnych wiadomości w jedną zastępczą o prawdopodobieństwie równym sumie prawdopodobieństw redukowanych wiadomości;

3° uporządkowanie zredukowanych wiadomości źródła zredukowanego; jeśli $i = M$-2 (koniec redukcji źródła) skok do 4°, w przeciwnym razie $i := i$+1 oraz powrót do 2°;

4° przyporządkowanie wiadomościom źródła zredukowanego X_{M-2} słów kodowych 0 i 1;

5° $i := i$-1; dopisanie, na najmłodszych pozycjach słów kodowych odpowiadających dwom najmniej prawdopodobnym wiadomościom zredukowanego źródła X_i, 0 i 1;

6° jeśli $i = 0$ skok do 7°, w przeciwnym razie powrót do 5°;

7° zakończenie konstrukcji binarnego kodu Huffmana, kodującego wiadomości $x_1, x_2, ..., x_M$ występujące z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, ..., p_M$, w słowa kodowe o minimalnej wartości średniej długości słowa kodowego $\overline{n}$.

Kod Shannona-Fano

Kod Shannona-Fano nie zawsze jest kodem optymalnym. Konstrukcję kodu S-F można przedstawić w postaci algorytmu:

A2. *Algorytm konstrukcji kodu Shannona-Fano* (3.13)

1° uporządkowanie wiadomości $x_1, x_2, ..., x_M$ źródła $X = X_0$ według malejącego prawdopodobieństwa, $i := 1$;

2° podział wiadomości grupy (podgrupy) o liczności większej od 1, na dwie możliwe równoprawdopodobne podgrupy oraz przyporządkowanie i-tym (licząc od najstarszych) pozycjom słów kodowych wiadomości podgrupy I - 0, a podgrupy II - 1;

3° jeśli nie ma podgrup zawierających więcej niż po jednej wiadomości, to skok do 4°, w przeciwnym razie $i := i + 1$ oraz powrót do 2°;

4° zakończenie konstrukcji binarnego kodu Shannona-Fano kodującego wiadomości $x_1, x_2, ..., x_M$ występujące z prawdopodobieństwami $p_1, p_2, ..., p_M$ w słowa kodowe $\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_M$ o średniej długości $\overline{n}$.

3.1.2. Beznadmiarowe kody równomierne

Najczęściej spotykane kody równomierne proste:

- zapis szesnastkowy (**kod heksadecymalny**),
- międzynarodowy kod telegraficzny **m2** (**Baudota**), 5-pozycyjny - tablica 3.2, dodatek 2 (na końcu skryptu),
- kod **OPTIMA**, 7-pozycyjny, tablica 3.3, dodatek 3,
- kod **ISO-7** (ASCII), 7-pozycyjny - tablica 3.4, dodatek 4,
- kod **KOI-8** stosowany w JS RIAD, 8-pozycyjny - tablica 3.5,dodatek 5,
- kod **EBCDID**.

Wśród kodów refleksyjnych najczęściej stosowany jest kod **Graya**.

Przypomnijmy, że w kodzie refleksyjnym słowa kodowe przyporządkowane dwu kolejnym liczbom dziesiętnym 2^n, gdzie n - liczba pozycji kodu Graya, różnią się tylko na jednej pozycji. Czteropozycyjny kod Graya przedstawiono w tablicy 3.2.

Własności kodu Graya:

1° każde następne słowo kodowe różni się od poprzedniego na jednej pozycji,

2° zmiany na danej pozycji są dwa razy wolniejsze niż w prostym kodzie binarnym,

3° można wyróżnić oś symetrii między $2^{n-1} - 1$ i 2^{n-1} (w tablicy 3.2 między 7 i 8), względem której - z wyjątkiem najstarszej pozycji - pozycje pod osią są lustrzanym odbiciem pozycji nad osią.

A3. *Algorytm zamiany kodu binarnego na kod Graya*: (3.14)

°1 pod binarnym słowem kodowym należy podpisać to samo słowo przesunięte o 1 w prawo bez najmłodszego bitu,

°2 dodać mod 2 poszczególne pozycje w tak zapisanych słowach.

Tablica 3.2

Liczba dziesiętna	Kod prosty binarny				Kod Graya			
0								
2				1				1
2			1				1	1
3			1	1			1	
4		1				1	1	
5		1		1		1	1	1
6		1	1			1		1
7		1	1	1		1		
8	1				1	1		
9	1			1	1	1		1
10	1		1		1	1	1	1
11	1		1	1	1	1	1	
12	1	1			1		1	
13	1	1		1	1		1	1
14	1	1	1		1			1
15	1	1	1	1	1			

A4. *Algorytm zamiany kodu Graya na kod binarny*: (3.15)

1° najstarszy bit słowa kodu binarnego jest równy najstarszemu bitowi słowa kodowego kodu Graya,
2° każdy następny bit słowa kodu binarnego uzyskuje się przez *n*-krotną inwersję odpowiedniego bitu słowa Graya, gdzie *n* - liczba jedynek w słowie kodu Graya na lewo od inwertowanego bitu.

Kody dwójkowo-dziesiętne (BCD - binary coded decimal) (pozycyjne)

Kody pozycyjne dzielą się na:

1° *kod wagowy* o wagach 8421, czyli zwykły 4-pozycyjny kod binarny przeznaczony do kodowania liczb 0-9,
2° *kody samouzupełniające się*, czyli kody, w których kodowane dwójkowo uzupełnienia dziewiątkowe otrzymuje się przez inwersję wszystkich bitów w słowie.

Najczęściej stosowane kody samouzupełniające:

- kod **Aikena** (BCD2421) oraz
- kod **EXCESS** 3 (nadmiarowo-trójkowy)

przedstawiono w tablicy 3.3.

Tablica 3.3

Liczba dziesiętna	Kod binarny BCD 8421				Kod Aikena BCD 2421				Kod Excess 3			
0											1	1
1				1				1		1		
2			1				1			1		1
3			1	1			1	1		1	1	
4		1				1				1	1	1
5		1		1	1		1	1	1			
6		1	1		1	1			1			1
7		1	1	1	1	1		1	1		1	
8	1				1	1	1		1		1	1
9	1			1	1	1	1	1	1	1		

3.2. Kody nadmiarowe

Kody nadmiarowe są najbardziej efektywnym sposobem zwiększania prawdopodobieństwa poprawnej transmisji informacji przez kanały z większym od dopuszczalnego prawdopodobieństwem przekłamania.

Schemat kodowania wiadomości w kod nadmiarowy, transmisję słów kodowych i ich dekodowanie przedstawiono na *rys.3.3.*

W kodach nadmiarowych tylko k z n pozycji wykorzystuje się do kodowania informacji (pozycje informacyjne), pozostałych $n - k = m$ nadmiarowych pozycji wykorzystuje się do kontroli (pozycje kontrolne), tzn. do wykrywania lub korygowania błędów.

3.2.1. Kody liniowe

Kody nadmiarowe dzielą się na kody:

- blokowe,
- nieblokowe.

Def.3.5: Z kodem blokowym mamy do czynienia wówczas, gdy kodowanie polega na przekształceniu k-pozycyjnego ciągu informacyjnego $\overline{w}_i'$ w n-pozycyjny ciąg kodowy (słowa kodowe) $\overline{w}_i$.

Proces kodowania ciągu informacyjnego $\overline{w}_i'$ zamyka się w całości w czasie tworzenia słowa kodowego $\overline{w}_i$.

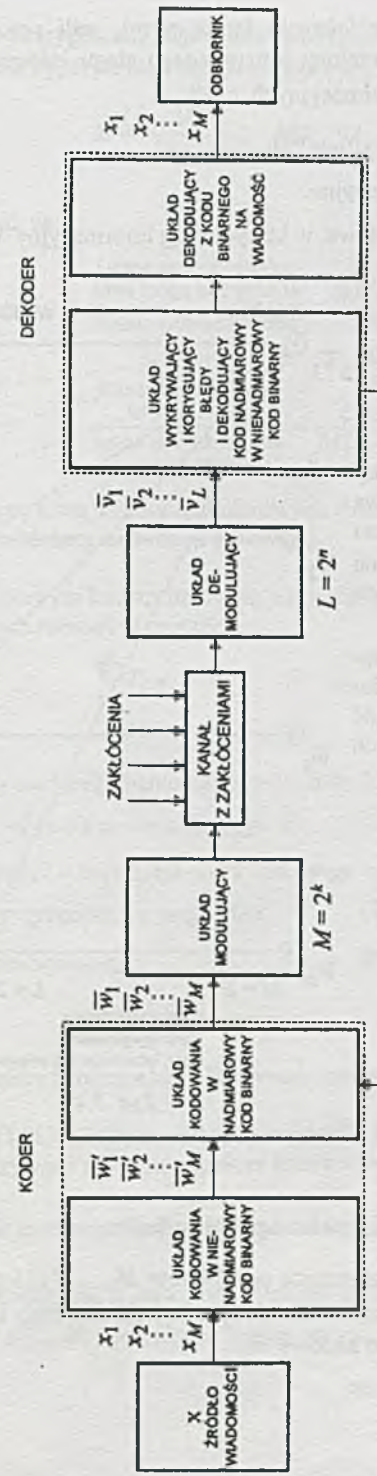
Kod blokowy oznaczamy symbolem (n,k)

gdzie: n - długość słowa kodowego,

k - liczba pozycji informacyjnych w słowie.

Def.3.6: *Sprawność* kodu blokowego

$$\eta \overset{\text{df}}{=} \frac{k}{n} \tag{3.16}$$


X
ŹRÓDŁO
WIADOMOŚCI
x_1 x_2 ⋮ x_M
KODER
UKŁAD
KODOWANIA
W NIE-
NADMIAROWY
KOD BINARNY
$\overline{w}'_1$ $\overline{w}'_2$ ⋮ $\overline{w}'_M$
UKŁAD
KODOWANIA
W
NADMIAROWY
KOD BINARNY
$\overline{w}_1$ $\overline{w}_2$ ⋮ $\overline{w}_M$
$M = 2^k$
UKŁAD
MODULUJĄCY
ZAKŁÓCENIA
KANAŁ
Z ZAKŁÓCENIAMI
UKŁAD
DE-
MODULUJĄCY
$L = 2^n$
$\overline{v}_1$ $\overline{v}_2$ ⋮ $\overline{v}_L$
DEKODER
UKŁAD
WYKRYWAJĄCY
I KORYGUJĄCY
BŁĘDY
I DEKODUJĄCY
KOD NADMIAROWY
W NIENADMIAROWY
KOD BINARNY
UKŁAD
DEKODUJĄCY
Z KODU
BINARNEGO
NA
WIADOMOŚĆ
x_1 x_2 ⋮ x_M
ODBIORNIK
KANAŁ SPRZĘŻENIA ZWROTNEGO

Rys. 3.3

Def.3.7: Kod nadmiarowy jest *kodem nieblokowym* (splotowym), jeśli proces tworzenia i-tego słowa kodowego $\overline{w}_i$ uzależniony jest od i-tego ciągu informacyjnego $\overline{w}_i'$ oraz r - 1 poprzednich ciągów informacyjnych, czyli

$$\overline{w}_i' = f(\overline{w}_{i-1+1}', \ldots, \overline{w}_{i-1}', \overline{w}_i').$$

Ważną klasą kodów splotowych są kody rekurencyjne.

Def.3.8: Kody rekurencyjne są to kody splotowe, w których ciąg informacyjny $\overline{w}_i'$ występuje w sposób jawny w słowie $\overline{w}_i$.

Prześledźmy proces transmisji słów kodowych nadmiarowego blokowego kodu binarnego przez kanał transmisyjny (*rys.3.4*). Można zbudować $M = 2^k$ różnych słów kodowych tworzących kod C.

W czasie transmisji przez kanał mogą wystąpić przekłamania na 0,1,...,n pozycjach słowa kodowego. Dlatego na wyjściu kanału można uzyskać $L = 2^n$ różnych ciągów zerojedynkowych o długości n, z których tylko M należy do kodu C, pozostałe L - M do kodu nie należą.

Ponieważ każde z $M = 2^k$ słów kodowych może przejść, w wyniku działania zakłóceń, w dowolny ciąg o długości n, to może wystąpić w czasie transmisji wszystkich słów kodowych kodu C,

$$M \cdot L = 2^{k+n}$$

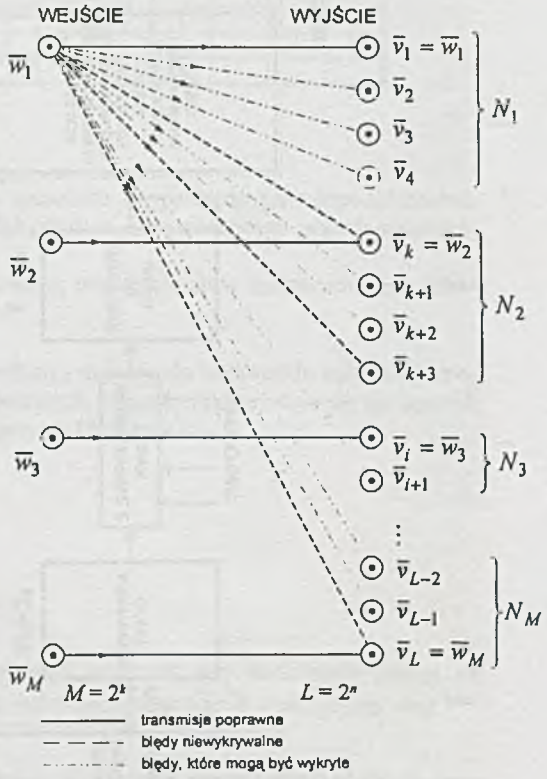
różnoprawdopodobnych stanów, w tym:

$$M = 2^k \qquad (3.17)$$

bezbłędnych transmisji każdego słowa kodowego w siebie,

$$M(M-1) = 2^k(2^k - 1) \quad (3.18)$$

przekłamań słów kodowych w inne słowa kodowe, są to błędy niewykrywalne,



Rys. 3.4

$$M(L-M) = 2^k(2^n - 2^k) \qquad (3.19)$$

przejść słów kodowych w ciągi $\in C$, są to błędy, które mogą być wykryte.

Dzielimy ciągi $\in C$ (jest ich L - M) na M rozłącznych podzbiorów $N_1, \ldots, N_M$ i przyporządkowujemy każdy z nich jednemu słowu kodowemu w ten sposób, że jeśli odebrany ciąg należy do podzbioru N_i, to przyjmuje się, że nadano słowo kodowe $\overline{w}_i$.

Błąd będzie skorygowany poprawnie wtedy, gdy otrzymany ciąg o długości n rzeczywiście powstał ze słowa $\overline{w}_i$, czyli błąd będzie korygowany poprawnie tylko w

$$M\frac{(L-M)}{M} = L - M$$

przypadkach.
Łatwo zauważyć, że:

$$\frac{\text{Liczba różnych błędów, które mogą być wykryte}}{\text{liczba możliwych stanów}} = \frac{M(L-M)}{LM} = \frac{L-M}{L} = 1 - \frac{M}{L} = \frac{2^n - 2^k}{2^n} \qquad (3.20)$$

oraz

$$\frac{\text{liczba różnych błędów korygowalnych}}{\text{liczba różnych błędów wykrywalnych}} = \frac{L-M}{M(L-M)} = \frac{1}{M} \qquad (3.21)$$

Najważniejszą klasą kodów nadmiarowych (blokowych i splotowych) są kody liniowe. Zajmiemy się tylko binarnymi kodami liniowymi.

Def.3.9: Binarnym kodem liniowym nazywamy kod określony układem m liniowo niezależnych równań w postaci:

$$\sum_{l=1}^{n} T_{jl} w_l = 0 \qquad j = 1,2,...,m \qquad (3.22)$$

gdzie:

$\sum$ - wieloargumentowa suma modulo 2,

$a_l = w_l$ - l-ty bit słowa kodowego $\overline{w}$,

$$T_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } l \text{ – ta pozycja ciągu kodowego wchodzi do } j \text{ – tego równania} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

lub w postaci macierzowej

$$\mathbf{T} \cdot \overline{w}^t = \mathbf{0}_m \qquad (3.23)$$

gdzie: $\mathbf{T}$ - macierz tworząca kodu liniowego, macierz parzystości.

Równania (3.22), (3.23) są *testami parzystości* kodu, a pozycje ciągu kodowego objęte j-tym równaniem nazywane są j-tym *zespołem kontrolnym*.

Waga słowa kodowego $\overline{w}_i$ jest równa liczbie jedynek w słowie i oznaczona jest przez $W(\overline{w}_i)$.

Def.3.10: Odległość 2 słów kodowych $\overline{w}_i$ oraz $\overline{w}_j$ (*odległość Hamminga*) oznaczana przez $d(\overline{w}_i, \overline{w}_j)$ jest równa liczbie pozycji, na których się te słowa różnią.

Natomiast minimalna odległość słów kodowych kodu C o liczności M oznaczana przez $d_{\min} = d$ jest równa

Def.3.11:
$$d = d_{\min} \overset{df}{=} \min_{\substack{i,j=1,2,\ldots,M \\ i \neq j}} d(\overline{w}_i, \overline{w}_j) = \min_{\overline{w}_i \neq \overline{0}_n} W(\overline{w}_i) \tag{3.24}$$

gdzie $\overline{0}_n$ - słowo kodowe o długości n złożone z samych zer.

Dla kodu jednoznacznie dekodowalnego $d_{\min} \geq 1$.

W kodzie nadmiarowym:

- wykrywającym błędy o krotności $1,\ldots,t_0$
$$d_{\min} \geq t_0 + 1 \tag{3.25}$$
- korygującym błędy o krotności $1,\ldots,t_k$
$$d_{\min} \geq 2 \cdot t_k + 1 \tag{3.26}$$
- wykrywającym błędy o krotności $1,\ldots,t_0$ i korygującym błędy o krotności $1,\ldots,t_k$ $(t_0 \geq t_k)$
$$d_{\min} \geq t_0 + t_k + 1 \tag{3.27}$$

Optymalizację kodu nadmiarowego można przeprowadzić na podstawie jednego z kryteriów:

KR1: przy zadanej długości słowa n i liczbie pozycji informacyjnych k (kod (n,k)) poszukuje się kodu o największej wartości odległości minimalnej $d_{\min}$, lub (3.28)

KR2: przy zadanej długości słowa kodowego i odległości minimalnej $d_{\min}$ poszukuje się kodu o największej liczbie pozycji informacyjnych k. (3.29)

Właściwości graniczne kodów nadmiarowych określa:

- *kres dolny Warszamowa-Gilberta*
$$\sum_{i=1}^{d-2} \binom{n-1}{i} + 1 < 2^m \tag{3.30}$$

tzn., jeśli spełniona jest nierówność (3.30), to istnieje kod (n,k) o $d_{\min} \leq d$,

- kres górny Hamminga
$$2^m = \sum_{i=0}^{t_k} \binom{n}{i} \tag{3.31}$$

gdzie:

m - liczba pozycji kontrolnych,

t_k - największa krotność błędów korygowanych przez kod.

Kres górny Hamminga osiągają tylko kody absolutnie optymalne. Pozostałe nadmiarowe kody optymalne mieszczą się wewnątrz obszaru wyznaczonego przez kres dolny i górny.

Z (3.31) dla $d_{min} = 3$ otrzymamy:

$$m \geq \mathrm{ld}(n+1) \tag{3.32}$$

W tablicy 3.4 podano minimalną liczbę pozycji kontrolnych $m = n - k$ zapewniających, przy zadanej liczbie pozycji informacyjnych k, wymaganą minimalną odległość słów kodowych d_{min}.

Tablica 3.4

d_{min} =	k =									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	3	3	3	4	4	4	4	4	4
4	3	5	5	6	6	7	7	7	7	8
5	4	7	8	8	8	9	10	10	10	11

W kodzie, w którym pozycje kontrolne występują po pozycjach informacyjnych, zwanym kodem rozdzielnym, w każdym zespole kontrolnym występuje tylko jedna pozycja kontrolna, a jej wartość wyznacza się z równania

$$w_{k+j} = \sum_{l=1}^{k} T_{jl} w_l \tag{3.33}$$

więc macierz tworząca przyjmuje postać:

$$\mathbf{T} = \begin{array}{|cccc|cccc|c} \hline T_{11} & T_{12} & \ldots & T_{1k} & 1 & & \ldots & 0 & \\ T_{21} & T_{22} & \ldots & T_{2k} & & 1 & \ldots & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{m-1,1} & T_{m-1,2} & \ldots & T_{m-1,k} & & 0 & \ldots & 1 & \\ T_{m1} & T_{m2} & \ldots & T_{mk} & & & \ldots & & 1 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{k}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{n-k=m}} & \end{array} = [T_{m,k} \mid E_m] \tag{3.34}$$

Binarny kod liniowy może być też określony przez dowolny zbiór k liniowo niezależnych ciągów kodowych – bazę np. $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_k$, a macierz **G** generująca kod liniowy może być przedstawiona w postaci

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \\ \cdot \\ \bar{g}_k \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Macierz **G** posiada k wierszy i n kolumn.

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wierszy macierzy **G** pokrywa się ze zbiorem $\{\overline{w}\}$ ciągów kodowych kodu (n,k) i jeśli macierz, której wierszami są wszystkie k-pozycyjne ciągi binarne, oznaczymy przez **M**,

$$M \overset{df}{=} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{k} \Big\} 2^k \tag{3.36}$$

to wtedy zbiór słów kodowych $\{\overline{w}\}$ można przedstawić symbolicznie w postaci

$$\{\overline{w}\} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{G} \tag{3.37}$$

Jeśli i-ty wiersz macierzy **M** jest k-pozycyjnym ciągiem informacyjnym $\overline{w}_i'$, to macierzowy zapis tworzenia słowa kodowego kodu liniowego można przedstawić w postaci:

$$\overline{w} = \overline{w}_i' \cdot \mathbf{G} \tag{3.38}$$

Szczególnym przypadkiem macierzy **G** jest *postać kanoniczna*

$$\mathbf{G}_k = \left[\mathbf{E}_k \, \mathbf{P}_{k,m}\right]$$

gdzie:

$\mathbf{E}_k$ - macierz jednostkowa o wymiarach $k \times k$,

$\mathbf{P}_{k,m}$ - k-wierszowa i m-kolumnowa macierz określająca kod (generująca rozdzielny kod liniowy).

Wówczas

$$\overline{w} = \overline{w}' \cdot \mathbf{G}_k = \overline{w}' \left[\mathbf{E}_k \, \mathbf{P}_{k,m}\right] = \left[\overline{w}' \mid \overline{w}' \, \mathbf{P}_{k,m}\right] \tag{3.39}$$

Waga każdego wiersza macierzy

$$P_{k,m} \geq d_{\min} - 1 \tag{3.40}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz tworząca **T** liniowego kodu rozdzielnego związana jest z macierzą generującą $\mathbf{G}_k$ zależnością

$$\mathbf{P}_{k,m} = \mathbf{T}_{m,k}^{t} \tag{3.41}$$

a *macierz kontrolna* **H** kodu (n,k)

$$H = \left[P_{k,m}^{t} \; E_m\right] = T. \tag{3.42}$$

Zbiór $\{\overline{w}\}$ ciągów kodu liniowego jest grupą względem operacji sumowania *modulo 2* oraz stanowi podgrupę $\mathbf{Q}_k$ grupy $\mathbf{Q}_n$ zawierającej zbiór wszystkich binarnych ciągów o długości n.

Def.3.12: *Dekodowanie detekcyjne* ma miejsce wtedy, gdy nadmiar kodowy jest wykorzystywany do wykrywania (detekcji) błędu, a j-ta składowa *syndromu* s_j odebranego ciągu $\overline{v}$ zdefiniowana jest zależnością

$$s_j = Y_j(\overline{v}) \overset{df}{=} \sum_{l=1}^{n} T_{jl} v_l \tag{3.43}$$

natomiast cały syndrom

$$\mathbf{S} = \mathbf{Y}(\overline{v}) = \mathbf{T} \cdot \overline{v}^t \tag{3.44}$$

gdzie:

$$\mathbf{S}^t = [s_1, s_2, \ldots, s_m]$$

Regułę decyzyjną w układzie dekodera detekcyjnego (*rys.3.5*) można przedstawić w postaci

RD 1:

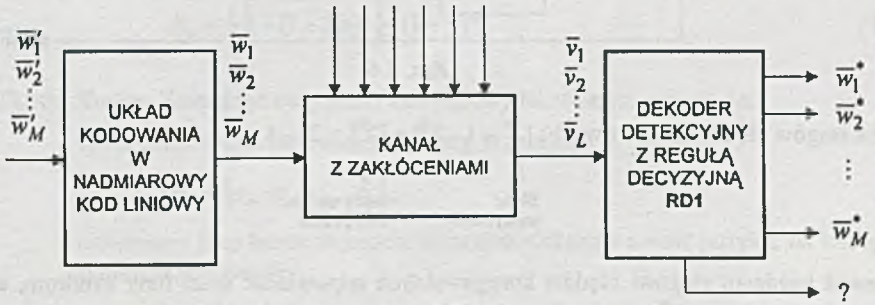
$$\overline{w}^* = \begin{cases} \overline{v} - \text{jeśli odebrany ciąg spełnia warunek } \mathbf{Y}(\overline{v}) = \mathbf{0}_m \\ ? \quad \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \tag{3.45}$$

gdzie:

$\overline{w}^*$ - decyzja dekodera o nadanym ciągu kodowym $\overline{w}$.

Kod liniowy wykrywa wszystkie ciągi błędów o wadze d spełniającej nierówność

$$\mathrm{d} < d_{\min} \tag{3.46}$$



Rys. 3.5

Prawdopodobieństwo błędnej decyzji dekodera **RD1** wynosi

$$P_b = \sum_{j=d_{\min}}^{n} P(j,n) \frac{w(j)}{\binom{n}{j}} \tag{3.47}$$

gdzie:

n - długość słowa kodowego,
$P(j,n)$ - prawdopodobieństwo j-krotnego przekłamania słowa kodowego o długości n,
$w(j)$ - liczba ciągów kodowych o wadze j.

Def.3.13: *Dekodowanie korekcyjne* ma miejsce wtedy, gdy nadmiar kodowy jest wykorzystany do wykrycia i skorygowania błędów.

Dekoder:

1° stwierdza, czy odebrany ciąg $\overline{v}$ jest przekłamany, tzn. oblicza syndrom $\mathbf{Y}(\overline{v})$,

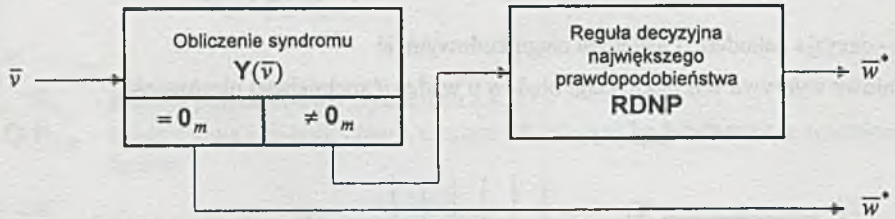
2° jeżeli $\mathbf{Y}(\overline{v}) = \mathbf{0}_m$, podejmuje decyzję $\overline{w}^* = \overline{v}$, natomiast jeśli $\mathbf{Y}(\overline{v}) \neq \mathbf{0}_m$, postępuje zgodnie z *regułą decyzyjną największego prawdopodobieństwa*, tzn.

RDNP: $$\overline{w}^* = \overline{w}_l \tag{3.48}$$

gdzie:
$\overline{w}_l$ - taki ciąg kodowy, że dla $i = 1, 2, ..., M$, $i \neq l$ zachodzi

$$p(\overline{w}_l \mid \overline{v}) \geq p(\overline{w}_i \mid \overline{v}).$$

Zasadę działania dekodera korekcyjnego przedstawiono na *rys.3.6*.



Rys. 3.6

Liczba ciągów błędów (niezerowych) $[2^n - 1 - 2^k] + [2^k] = 2^n - 1$ (3.49)

⇓ Błędy wykrywalne ⇓ Błędy niewykrywalne

Ponieważ każdemu ciągowi błędów korygowalnych odpowiadać musi inny syndrom, a liczba syndromów jest równa $2^m - 1$> (bo $\mathbf{0}_m$ - zarezerwowany jest dla bezbłędnej transmisji), więc

$$\frac{\text{liczba ciągów błędów korygowalnych przez kod liniowy}}{\text{liczba ciągów błędów (nierównopodobnych), które mogą wystąpić przy transmisji kodów liniowych}} = \frac{2^m - 1}{2^n - 1} \cong \frac{1}{2^k} \tag{3.50}$$

Omówimy następujące kody liniowe:

- kod z kontrolą parzystości (detekcyjny),
- kod Hamminga i skrócony kod Hamminga (korekcyjne),
- kody łączone,
- kody iterowane (dwukrotnie),
- wydłużony kod Hamminga,
- kod Golaya,
- kody Reeda-Mullera,
- kod Mac Donalda,
- kod o stałej wadze,
- kody cykliczne.

Def.3.14: *Kodem z kontrolą parzystości* nazywamy kod liniowy opisany równaniem

$$\sum_{l=1}^{n} w_l = 0 \qquad \left(\sum_{l=0}^{n} a_l = 0 \right) \tag{3.51}$$

Kod ten ma parametry $(n,n\text{-}1)$, wartość pozycji kontrolnej wyznacza się z zależności

$$w_n = a_n = \sum_{l=1}^{n-1} a_l \tag{3.52}$$

a

$$d_{\min} = 2. \tag{3.53}$$

Kod z kontrolą parzystości jest typowym rozdzielnym kodem detekcyjnym. Dla błędów niezależnych o prawdopodobieństwie p, prawodopodobieństwo niewykrycia błędu przez kod z kontrolą parzystości o długości słowa n wynosi

$$P_b = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^n\right] - (1-p)^n \tag{3.54}$$

Def.3.15: *Kodem Hamminga* nazywamy kod liniowy tak skonstruowany, że:

1) syndrom ciągu odebranego zapisany w postaci

$$\mathbf{S}^t = [a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1],$$

traktowany jako liczba w zapisie binarnym wskazuje numer pozycji, na której wystąpiło przekłamanie,

2) $n = 2^m - 1.$

Pozycje wchodzące do kolejnych zespołów kontrolnych kodu Hamminga przedstawiono w tablicy 3.5.

Tablica 3.5

j	Pozycje wchodzące do j-tego zespołu kontrolnego									
	kontrolne	informacyjne								
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	...
2	2	3	6	7	10	11	14	15	18	...
3	4	5	6	7	12	13	14	15	...	...
4	8	9	10	11	12	13	14	15	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Kod Hamminga (2^m -1, 2^m – m - 1) jest kodem nierozdzielnym o $d_{\min} = 3$ korygującym błędy 1-krotne. W tablicy 3.6 podano parametry niektórych kodów Hamminga.

Tablica 3.6

k	m	n	$\eta = \frac{k}{n}$
4	3	7	0.5714
11	4	15	0.7333
26	5	31	0.8387
57	6	63	0.9048
120	7	127	0.9449
247	8	255	0.9686

Skrócony kod Hamminga uzyskiwany jest z kodu Hamminga przez skreślenie pewnej liczby pozycji informacyjnych, wówczas

$$n < 2^m - 1$$

Def.3.16: *Kodem r razy łączonym* nazywamy kod, którego ciąg kodowy $\overline{w}$ powstaje z szeregowego połączenia r ciągów $\overline{w}^{(i)}$ ($i = 1, ..., r$) o takiej samej (równej k) długości ciągów informacyjnych.

Odległość minimalna kodu łączonego

$$d_{\min} = \sum_{i=1}^{r} d_{\min_i} \tag{3.55}$$

a sprawność

$$\eta = \frac{k}{\sum_{i=1}^{r} n_i} \tag{3.56}$$

Kod z r-krotnym powtarzaniem powstaje z r-krotnego łączenia ciągów kodowych tego samego kodu (n_1, k), wówczas

$$d_{\min} = r \cdot d_{\min_1} \tag{3.57}$$

natomiast

$$\eta = \frac{\eta_1}{r} = \frac{k}{rn_1} \tag{3.58}$$

Def.3.17: Kod dwukrotnie iterowany posiada ciąg informacyjny o długości $k = k_1k_2$ (k_1, k_2 liczby naturalne większe od 1), a konstruuje się go następująco:

- ciąg informacyjny zapisuje się według ustalonej reguły w macierzy o k_1 kolumnach i k_2 wierszach,
- kolumny macierzy koduje się kodem nadmiarowym (n_1, k_1),
- wiersze natomiast koduje się kodem (n_2, k_2).

Parametry kodu:

$$(n,k) = (n_1n_2, k_1k_2) \tag{3.59}$$

- odległość minimalna

$$d_{\min} = d_{\min_1} \cdot d_{\min_2} \tag{3.60}$$

- sprawność

$$\eta = \frac{k_1k_2}{n_1n_2} = \eta_1\eta_2 \tag{3.61}$$

Def.3.18: *Wydłużony kod Hamminga* uzyskuje się z kodu Hamminga o długości n_1 przez dodanie $(n_1 + 1)$ pozycji kontrolnej wyznaczonej z zależności

$$a_{n_1+1} = \sum_{i=1}^{n_1} a_i \tag{3.62}$$

Dla każdego $m \geq 3$ istnieje wydłużony kod Hamminga o parametrach

$$(2^{m-1}, 2^{m-1} - m)$$

utworzony z kodu Hamminga $(2^{m-1}, 2^{m-1} - m - 1)$ o $d_{\min} = 3$.

Parametry niektórych wydłużonych kodów Hamminga podano w tablicy 3.7.

Tablica 3.7

k	m	n	$\eta = \frac{k}{n}$
4	4	8	0.5000
11	5	16	0.6875
26	6	32	0.8125
57	7	64	0.8906
120	8	128	0.9375
247	9	256	0.9468

W celu wykrycia i skorygowania błędów przez wydłużony kod Hamminga oblicza się dwa syndromy

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{Y}(\overline{v}')$$

gdzie $\overline{v}'$ ciąg złożony z pierwszych n - 1 pozycji odebranego ciągu $\overline{v}$, oraz

$$S_2 = \sum_{l=1}^{n} v_l$$

od ich wartości zależy decyzja dekodera. Wszystkie warianty wartości syndromów i decyzje dekodera przedstawiono w tablicy 3.8.

Tablica 3.8

Numer wariantu	Syndrom $\mathbf{S_1}$	Syndrom S_2	Dekoder	
			czy przekłamanie	decyzja
1	$\mathbf{0}_{m-1}$	0	brak przekłamania	$\overline{w}^* = \overline{v}$
2	$\neq \mathbf{0}_{m-1}$	1	wystąpił błąd pojedynczy, korygowalny	obliczanie z $Y(\overline{v}')$ wartości $\overline{z}'$ wówczas $\overline{w}^* = \overline{v} \oplus \overline{z}'$
3	$\mathbf{0}_{m-1}$	1	wystąpił błąd w pozycji kontronej	$\overline{w}^* = \overline{v} \oplus (0,0,...,0,1)$
4	$\neq \mathbf{0}_{m-1}$	0	wystąpiły błędy o parzystej krotności, niekorygowalne	$\overline{w}^* = ?$

Reprezentantem kodów korygujących błędy o większej krotności jest kod Golaya (23,12), kod ten osiąga górny kres Hamminga określony zależnością (3.21) dla 11 pozycji kontrolnych (m = 11), korygując błędy o krotności 1,2,3 w słowach kodowych o długości n = 23, czyli

$$\sum_{i=0}^{l_k} \binom{n}{i} = c_{23}^0 + c_{23}^1 + c_{23}^2 + c_{23}^3 = 2^{11} = 2^m \tag{3.63}$$

Kod Golaya (24,12) uzyskuje się z kodu (23,12) przez dodanie pozycji sprawdzania parzystości. Liczbę słów kodowych kodów Golaya i ich wagi przedstawiono w tablicy 3.9.

Macierz generująca $\mathbf{G}_k$ rozszerzonego kodu Golaya (24,12) ma postać

$$\mathbf{G}_k = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
1 & 1 & & & & & & & & & & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & \\
1 & & 1 & & & & & & & & & & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 \\
1 & & & 1 & & & & & & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & \\
1 & & & & 1 & & & & & & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & \\
1 & & & & & 1 & & & & & & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & \\
1 & & & & & & 1 & & & & & & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & & & & & 1 & & & & & 1 & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & 1 \\
1 & & & & & & & & 1 & & & & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & 1 & & 1 \\
1 & & & & & & & & & 1 & & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & 1 & \\
1 & & & & & & & & & & 1 & & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & 1 \\
1 & & & & & & & & & & & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 \\
1 & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right] \quad k = 12 \tag{3.64}$$

$k = 12$ $\qquad$ $m = 12$

Tablica 3.9

Waga	Liczba słów kodowych o stałej wadze	
	w kodzie (23,12)	w kodzie (24,12)
0	1	1
7	253	0
8	506	759
11	1288	0
12	1288	2576
15	506	0
16	253	759
23	1	0
24	0	1
Σ	4096	4096

Do starszych i lepiej poznanych rodzin kodów należą kody Reeda-Mullera (**RM**); ich zaletą jest dość łatwy sposób dekodowania.

Def.3.19: *Binarnym kodem Reeda-Mullera* (**RM**) rzędu r o długości słowa $n = 2^p$ (dla $0 \le r \le p$) **RM**(r,p) nazywamy zbiór wszystkich wektorów $\bar{f}$, gdzie $\bar{f}(\bar{v}_1,...,\bar{v}_p)$ jest funkcją boolowską, którą jest wielomian stopnia co najwyżej r.

Na przykład kod **RM** 1 rzędu o długości 8 ($p = 3$), czyli kod **RM**(1,3) zawiera 16 słów kodowych otrzymanych z funkcji boolowskiej równej

$$a_0 \cdot \bar{1} + a_1 \cdot \bar{v}_1 + a_2 \cdot \bar{v}_2 + a_3 \cdot \bar{v}_3, \qquad a_i = 0 \text{ lub } 1,$$

gdzie:

$\bar{v}_1,...,\bar{v}_3 = \bar{v}_p$ - wektory bazowe, przedstawione w tablicy 3.10.

Zauważmy, że słowa kodowe kodu **RM** 1 rzędu (z wyjątkiem $\bar{0}$ i $\bar{1}$, mają wagę 2^{p-r}. Kod **RM** rzędu r zawiera wszystkie liniowe kombinacje wektorów odpowiadające iloczynom

$$\bar{1}, \bar{v}_1,...,\bar{v}_m, \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2, \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3,...,\bar{v}_{p-1} \cdot \bar{v}_p \ldots \text{(stopnia co najwyżej } r).$$

Słowo kodowe posiada

$$k = 1 + \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{r} = \sum_{i=0}^{r} C_p^i \tag{3.65}$$

pozycji informacyjnych.

Własności kodu **RM**: Dla dowolnych liczb całkowitych p i r ($0 \le r \le p$)> istnieje binarny kod **RM** rzędu r posiadający następujące własności: (3.66)

- długość słowa $n = 2^p$,
- liczba pozycji informacyjnych

$$k = 1 + \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{r} = \sum_{i=0}^{r} C_p^i$$

- odległość minimalna $d_{min} = 2^{p-r}$

a więc kod ten wykrywa błędy o krotności $\leq 2^{p-r} - 1$, a koryguje błędy o krotności $\leq 2^{p-r-1} - 1$.

Tablica 3.10

Nr	Funkcja boolowska $\overline{f}$	Słowo kodowe $\overline{w}_i$
1	$\overline{0}$	0 0 0 0 0 0 0 0
2	$\overline{v}_3$	0 0 0 0 1 1 1 1
3	$\overline{v}_2$	0 0 1 1 0 0 1 1
4	$\overline{v}_1$	0 1 0 1 0 1 0 1
5	$\overline{v}_1 + \overline{v}_2$	0 1 1 0 0 1 0 0
6	$\overline{v}_1 + \overline{v}_3$	0 1 0 1 1 0 1 0
7	$\overline{v}_2 + \overline{v}_3$	0 0 1 1 1 1 0 0
8	$\overline{1}$	1 1 1 1 1 1 1 1
9	$\overline{1} + \overline{v}_1$	1 0 1 0 1 0 1 0
10	$\overline{1} + \overline{v}_2$	1 1 0 0 1 1 0 0
11	$\overline{1} + \overline{v}_3$	1 1 1 1 0 0 0 0
12	$\overline{1} + \overline{v}_1 + \overline{v}_2$	1 0 0 1 1 0 0 1
13	$\overline{1} + \overline{v}_1 + \overline{v}_3$	1 0 1 0 0 1 0 1
14	$\overline{1} + \overline{v}_2 + \overline{v}_3$	1 1 0 0 0 0 1 1
15	$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3$	0 1 1 0 1 0 0 1
16	$\overline{1} + \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3$	1 0 0 1 0 1 1 0

W tablicy 3.11 podano liczbę pozycji informacyjnych k w zależności od odległości minimalnej d_{min} w kodzie **RM** dla różnych wartości n i p.

Tablica 3.11

Długość n	4	8	16	32	64	128	256	512
p	2	3	4	5	6	7	8	9
d_{min}	k							
1	4	8	16	32	64	128	256	512
2	3	7	15	31	63	127	253	511
4	1	4	11	26	57	120	247	508
8		1	5	16	42	99	219	466
16			1	6	22	64	163	382
32				1	7	29	93	256
64					1	8	37	130
128						1	9	46
256							1	10
512								1

Istnieją dwie metody tworzenia kodów **RM**. Pierwsza wykorzystuje macierz generującą kodu **G** (i tę omówimy). Druga oparta jest na wykorzystaniu cykliczności kodu **RM**.

A5: *Algorytm tworzenia macierzy* **G** kodu **RM**(r,p): (3.67)

1. pierwszy wiersz macierzy **G** (o $n = 2^p$ kolumnach i $k = \sum_{i=0}^{r} C_p^i$ wierszach) zawiera same jedynki,
2. p wierszy tworzy wektory 1 rzędu, których składowymi jest p wierszy (podmacierz $p \times n$). Kolumnami tej podmacierzy są liczby w zapisie dwójkowym (od zera) od góry do dołu,
3. C_p^2 wierszy tworzy wektory 2 rzędu. Otrzymuje się je ze wszystkich iloczynów dwóch wierszy 1 rzędu,
4. C_p^3 wierszy tworzy wektory 3 rzędu uzyskane z iloczynów trzech wierszy 1 rzędu itd.,
5. C_p^r wierszy, które tworzą wektory r-tego rzędu otrzymane z iloczynów r-wierszy 1 rzędu.

Generowanie kodów optymalnych jest, w ogólnym przypadku, trudne. Często wystarczy, że kod jest dobry.

Przez kod dobry rozumie się tu kod, który posiada największą liczbę pozycji informacyjnych przy ustalonej długości słowa kodowego i ustalonej odległości minimalnej d_{min}. Zauważmy, że kod dobry uzyskuje się stosując kryterium optymalizacji **KR2** (3.29).

Jedną z metod konstruowania takich kodów podał, wykorzystując tzw. modularny (modułowy) opis kodu, **Mac Donald**. Prześledźmy ideę tej metody.

Kod liniowy jest generowany przez macierz **G** o k wierszach i n kolumnach. Różnych niezerowych kolumn tej macierzy może być $2^k - 1$; można je wyrazić w postaci ciągu zerojedynkowego $N = (k_1, k_2, ..., k_n)$, gdzie $n = 2^k - 1$, $k_i = 1$, jeżeli w macierzy **G** występuje kolumna stanowiąca zapis binarny liczby i oraz $k_i = 0$, jeżeli taka kolumna w **G** nie występuje. Taki opis kodu nazywamy *opisem modularnym*.

Jeśli przez **L** oznaczymy macierz $k \times (2^k - 1)$ zawierającą jako kolumny wszystkie niezerowe wektory o długości k, to kolumny macierzy **G** mieszczą się w **L**. Na przykład dla $k = 3$ mamy

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$N = (k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 k_6 k_7) = (1\,1\,1\,1\,1\,1\,1)$$

Jak łatwo zauważyć, kolumny macierzy **L** stanowią binarny zapis liczb od 1 do 7, co zaznaczono przez zapis tych liczb poniżej poszczególnych kolumn. Tak więc w **L** występują wszystkie możliwe niezerowe ciągi o długości 3 i tym samym elementy k_i w ciągu N stanowią opis modularny kodu generowanego przez **L** i wszystkie są równe 1.

Macierz

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

składająca się z 4 kolumn stanowiących zapis binarny liczb 3,5,6 i 7 generuje kod, który w postaci modularnej można przedstawić następująco:

$$N = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$$

Mac Donald zauważył, że jeśli macierz generująca powstaje z zależności

$$\mathbf{G} = \mathbf{L}^{t} \cdot \mathbf{L} \tag{3.68}$$

wówczas niektóre kody (n,k), których modułowy opis zawiera $(2^k - 1 - s)$ zer oraz s jedynek, posiadają największą wartość odległości minimalnej d_{min}.

Kody te przedstawiono w tablicy 3.12.

Tablica 3.12

n	d_{min}	Modularny opis kodu
$2^k - 1$	2^{k-1}	$2^k - 1$ 1,1,1,...1,1,1
$2^k - 2$	$2^{k-1} - 1$	$2^k - 2$ 0,1,1,...,1,1,1
$2^k - 3$	$2^{k-1} - 2$	$2^k - 3$ 0,0,1,...,1,1,1
$2^k - 2^u$	$2^{k-1} - 2^{u-1}$	$2^u - 1$ $\quad 2^k - 2^u$ 0,0,0,...,0,0,0 $\quad$ 1,1,1,...,1,1,1 $(u = 2,...,k-1)$
$2^k - 2^u - 1$	$2^{k-1} - 2^u - 1$	2^u $\quad 2^k - 2^u - 1$ 0,0,0,...,0,0,0 $\quad$ 1,1,1,...,1,1,1 $(u = 2,...,k-1)$

Ze względu na prostotę konstrukcji układu kodującego i dekodującego szerokie zastosowanie znalazły kody cykliczne.

Def.3.20: Kod liniowy nazywany jest kodem cyklicznym, jeśli posiada taką własność, że jeżeli $\overline{w} = (a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_0)$, jest słowem kodowym, to również cykliczne przesunięcie

$$\overline{w}_p = (a_0, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1)$$ jest również słowem kodowym.

Każdemu binarnemu n-pozycyjnemu ciągowi $\overline{w}$ (p. wyżej) można przyporządkować wielomian $w(x)$.

Def.3.21: $$\overline{w} \triangleq w(x) \overset{\text{df}}{=} a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{3.69}$$

gdzie: $a_j = 0$ lub 1 $(j = 0,1,2,...,n-1)$

Def.3.22: Kod cykliczny można opisać za pomocą wielomianu generującego

$$g(x) = x^m + g_{m-1}x^{m-1} + \cdots g_1 x + 1, \tag{3.70}$$

gdzie $g_i = 0$ lub 1 dla $i = 1,2,..., m-1$; każdy wielomian kodowy jest wielokrotnością $g(x)$.

Wartości n i k kodu (n,k) generowanego przez wielomian $g(x)$ stopnia m to:

a) długość ciągów kodowych n określona przez najniższy stopień dwumianu typu $x^n + 1$, który jest podzielny przez $g(x)$,

b) liczba pozycji informacyjnych kodu równa $k = n - m$.

Tak np. jeśli $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ $(m = 4)$, to $(n, k) = (7,3)$, bo wielomian najniższego stopnia typu $x^n + 1$ podzielny przez $g(x)$ jest równy $x^7 + 1$, a więc $n = 7$ i $k = n - m = 7 - 4 = 3$.

W szczególnym przypadku jeśli $g(x)$ stopnia m jest niepodzielny, to $n = 2^m - 1$ albo n jest dzielnikiem liczby $2m - 1$. Kod generowany przez taki wielomian charakteryzuje się minimalną odległością $d_{min} = 3$. W tablicy 3.13 podano przykłady wielomianów generujących stopnia 3, 4, 5 i 6 będących wielomianami nierozkładalnymi. Warto zauważyć, że np. wielomian $g(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ generuje kod o długości $n = \frac{2^6 - 1}{3} = 21$.

Tablica 3.13

Lp.	n	k	m	Wielomian generujący $g(x)$	
				postać binarna	postać wielomianowa
1	7	4	3	1011	$x^3 + x + 1$
2	7	4	3	1101	$x^3 + x^2 + 1$
3	15	11	4	10011	$x^4 + x^2 + 1$
4	31	26	5	100101	$x^5 + x^2 + 1$
5	31	26	5	101111	$x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$
6	31	26	5	110111	$x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
7	63	57	6	1000011	$x^6 + x + 1$
8	63	57	6	1011011	$x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$
9	63	57	6	1100111	$x^6 + x^5 + x^2 + x + 1$

Ponieważ ciąg kodowy $\overline{w}$, a ściślej odpowiadający mu wielomian $w(x)$ jest podzielny przez wielomian generujący $g(x)$, więc istnieją następujące reguły kodowania wiadomości w kod cykliczny:

1. **nierozdzielny** : $w(x) = h(x) \cdot g(x)$ (3.71)

gdzie:

$$h(x) = w'(x) = a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

wielomian odpowiadający ciągowi informacyjnemu $a_i = 0$ lub 1, dla $i = 0,1,\ldots, k - 1$, a k - liczba pozycji informacyjnych w ciągu kodowym,

2. **rozdzielny:** $w(x) = x^m h(x) \oplus r(x)$ (3.72)

gdzie:

$r(x)$ - reszta (stopnia $\leq m$ - 1) z podziału $x^m\ h(x)$ przez $g(x)$:

$$\frac{x^m h(x)}{g(x)} = A(x) \oplus \frac{r(x)}{g(x)} \tag{3.73}$$

Macierz generującą kodu cyklicznego można wyrazić w postaci:

a) k wielomianów

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} x^{k-1}g(x) & & & & & \\ & x^{k-2}g(x) & & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & xg(x) & \\ & & & & & g(x) \end{bmatrix} \tag{3.74a}$$

b) k liniowo niezależnych ciągów zerojedynkowych złożonych ze współczynników wielomianów macierzy **G**:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & g_{m-1} & \cdot & \cdot & g_1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & g_{m-1} & \cdot & g_2 & g_1 & 1 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & g_{m-1} & g_{m-2} & \cdot & g_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & g_{m-1} & \cdot & g_2 & g_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.74b}$$

przy czym przy tworzeniu tej macierzy uwzględniono fakt, że współczynniki g_m i g_0 w wielomianie generującym $g(x)$ są równe 1.

Tak np. dla kodu (7,4) generowanego przez wielomian $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ mamy macierze

$$\begin{bmatrix} x^6+x^5 & +x^3 & & \\ & x^5+x^4 & +x^2 & \\ & & x^4+x^3 & +x \\ & & & x^3+x^2 \quad +1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wierszami macierzy generującej **G** są słowa kodowe kodu rozdzielnego odpowiadające ciągom informacyjnym z jednym niezerowym bitem.

Dekoder detekcyjny kodu cyklicznego po odebraniu $v(x)$ podejmuje decyzję

$$w^*(x) = \begin{cases} v(x) & \text{jeśli } r(x) = 0 \\ ? & \text{jeśli } r(x) \neq 0 \end{cases} \tag{3.75}$$

gdzie:

$r(x)$ - reszta z dzielenia wielomianu $v(x)$, odpowiadającego odebranemu ciągowi $\bar{v}$, przez wielomian generujący kodu $g(x)$

$$v(x) : g(x) = h'(x) \oplus \frac{r(x)}{g(x)} \tag{3.76}$$

4. TEMATY ZADAŃ

Zadanie 4.1. Sprawdzić, czy można zbudować kody natychmiast dekodowalne w następujących przypadkach:

a) jeśli źródło o 10 wiadomościach należy przedstawić w kodzie trójelementowym o długościach słów 1,2,2,2,2,2,2,3,3,3,

b) jeśli źródło o 9 wiadomościach należy przedstawić w kodzie trójelemetowym o długościach słów 1,2,2,2,2,2,3,3,3.

Zbudować takie kody, jeśli jest to możliwe.

Zadanie 4.2. Należy przedstawić w kodzie binarnym natychmiast dekodowalnym sygnał wyjściowy źródła X generującego wiadomości $X = \{0,1,2,....,9\}$. Ponieważ źródło generuje najczęściej wiadomości 0 i 1, należy je zakodować w najkrótsze słowa kodowe, natomiast pozostałych 8 wiadomości w słowa o jednakowej najmniejszej z możliwych długości n.

Zadanie 4.3. Źródło wiadomości $X=\{x_1, ..., x_9\}$ zakodować w kod dwójkowy natychmiast dekodowalny, tak by jednakowo prawdopodobne wiadomości x_1, x_2, x_3, zakodowane były w najkrótsze z możliwych słowa kodowe, a pozostałe wiadomości - w słowa o jednakowej, najmniejszej z możliwych długości n.

Zadanie 4.4. Określić, czy do zakodowania ciągów wiadomości można użyć kodów o alfabecie $A=\{0,1,2\}$ i długościach słów kodowych podanych w tablicy 4.4, tak by te kody były natychmiast dekodowalne.

Tablica 4.4

Liczba słów o długości n w kodzie	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
Kod A	2	1	2	4	1
Kod B	2	2	2	3	1
Kod C	1	4	6	0	0
Kod D	2	2	2	2	3

Zadanie 4.5. Zbiór 9 wiadomości zakodowano tak, że pierwszym czterem wiadomościom odpowiadają słowa kodowe o długości 1, a pozostałym wiadomościom słowa o długości 2. Określić minimalną długość alfabetu kodowego, dla którego skonstruowany kod jest natychmiast dekodowalny.

Zadanie 4.6. Źródło wiadomości generuje zbiór wiadomości $X = \{x_1, x_2, ..., x_6\}$. Każdą wiadomość zakodowano za pomocą słowa kodowego kodu dwusymbolowego $A=\{0,1\}$. Można to zrobić wykorzystując różne rodzaje kodów o różnej długości słów. W tablicy 4.6 podano różne rodzaje kodów: A,B,C,D,E i F oraz prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych wiadomości.

Tablica 4.6

Wiadomość	$p(x)$	Kod A	Kod B	Kod C	Kod D	Kod E	Kod F
x_1	$\frac{1}{2}$	000	0	0	0	0	1
x_2	$\frac{1}{4}$	001	01	10	10	10	100
x_3	$\frac{1}{16}$	010	011	110	110	1100	101
x_4	$\frac{1}{16}$	011	0111	1110	1110	1101	110
x_5	$\frac{1}{16}$	100	01111	11110	1011	1110	111
x_6	$\frac{1}{16}$	101	011111	111110	1101	1111	001

Należy określić:

1) które z podanych kodów są jednoznacznie dekodowalne,
2) które z nich są natychmiast dekodowalne,

oraz obliczyć średnią długość słowa $\overline{n}$ dla wszystkich jednoznacznie dekodowalnych kodów.

Zadanie 4.7. Źródło generuje równoprawdopodobne słowa kodowe kodu trójelementowego o długościach $n = 4$. Ile informacji o źródle uzyskano po odebraniu 8 słów?

Zadanie 4.8. Zbiór wiadomości $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ należy zakodować optymalnie w ciąg słów kodowych (kod Huffmana) kodu binarnego, wiedząc, że wiadomości te są generowane z następującym rozkładem prawdopodobieństwa

$$\mathbf{P}=\{0.3, 0.25, 0.2, 0.15, 0.1\}$$

Obliczyć nadmiar tego kodowania.

Zadanie 4.9. Zakodować w kod Huffmana niezależne wiadomości generowane przez źródło opisane tablicą 4.9. Obliczyć dodatkowo entropię źródła i średnią długość słowa kodowego.

Tablica 4.9

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$p(x_i)$	0.2	0.15	0.15	0.12	0.1	0.1	0.08	0.06	0.04

Zadanie 4.10. Dla źródła wiadomości generującego 8 wiadomości z prawdopodobieństwami $P = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{64}, \frac{1}{64}, \frac{1}{64}\right\}$, należy znaleźć 3 sposoby kodowania wiadomości w słowa kodowe za pomocą kodu binarnego, dla których:

1) średnia długość słowa kodowego jest minimalna,
2) maksymalna długość słowa kodowego jest minimalna,
3) nie ma słowa kodowego o długości większej od czterech i przy tym ograniczeniu średnia długość słowa kodowego jest minimalna.

Znaleźć nadmiar każdego z trzech zbiorów słów kodowych oraz średnie długości słów kodowych.

Zadanie 4.11. Zakodować w kod binarny Huffmana litery alfabetu, przyjmując przerwę jako 33 literę alfabetu. Prawdopodobieństwa występowania liter w języku polskim podano w tablicy 4.11.

Tablica 4.11

Litera	Prawdopodobieństwo	Litera	Prawdopodobieństwo	Litera	Prawdopodobieństwo	Litera	Prawdopodobieństwo
-	0.140	f	0.011	n	0.043	u	0.018
a	0.078	g	0.012	ń	0.001	w	0.037
ą	0.010	h	0.011	o	0.061	y	0.031
b	0.012	i	0.077	ó	0.007	z	0.055
c	0.036	j	0.018	p	0.025	ż	0.008
ć	0.004	k	0.025	r	0.037	ź	0.001
d	0.029	l	0.017	s	0.047		
e	0.064	ł	0.024	ś	0.006		
ę	0.013	m	0.023	t	0.029		

Zadanie 4.12. Przedstawić algorytm konstrukcji kodu Huffmana **A1** (3.12) w postaci schematu blokowego i napisać na jego podstawie program (lub procedurę) np. w języku Pascal lub C.

Zadanie 4.13. Zaproponować algorytm i napisać program dekodowania kodu Huffmana z poprzedniego zadania. Do testowania wykorzystać wyniki zadania 4.8.

Zadanie 4.14. Zakodować w kod Shannona-Fano wiadomości generowane przez źródło X. Prawdopodobieństwa wygenerowania przez źródło poszczególnych wiadomości x_i podano w tablicy 4.14.

Tablica 4.14

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$p(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Zadanie 4.15. Należy skonstruować kod Shannona-Fano do zakodowania ośmiu wiadomości $x_1, x_2, ..., x_8$ o prawdopodobieństwach występowania podanych w tablicy 4.15. W tablicy tej pokazano dwa możliwe warianty podziałów przy konstruowaniu kodu Shannona-Fano. Skonstruować te warianty kodów i określić, który z nich jest lepszy.

Zadanie 4.16. Zakodować w kod Huffmana wiadomości $x_1, x_2, ..., x_8$ generowane przez źródło. Prawdopodobieństwa pojawiania się wiadomości jak w zadaniu 4.15.

Zadanie 4.17. Zakodować w kod binarny Shannona-Fano zbiór dziesięciu jednakowo prawdopodobnych wiadomości. Wykazać, że jest to kod optymalny.

Tablica 4.15

x_i	$p(x_i)$	Wariant podziału	
		1 wariant	2 wariant
x_1	0.22	II	II
x_2	0.2	III	I
x_3	0.16	I	IV
x_4	0.16	IV	III
x_5	0.10	V	V
x_6	0.10	VI	VI
x_7	0.04	VII	VII
x_8	0.02		

Zadanie 4.18. Źródło X generuje 8 niezależnych wiadomości o prawdopodobieństwach pojawienia się podanych w tablicy 4.18. Zakodować wiadomości $x_1, x_2, ..., x_8$ w kod Shannona-Fano i kod Huffmana oraz obliczyć średnie długości słów kodowych, entropię źródła oraz efektywność kodowania zdefiniowaną jako iloraz entropii źródła i średniej długości słowa kodowego $\left(E = \frac{H(X)}{\overline{n}}\right)$.

Tablica 4.18

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$p(x_i)$	0.1	0.18	0.4	0.05	0.06	0.1	0.07	0.04

Zadanie 4.19. Przedstawić algorytm konstrukcji kodu Shannona-Fano **A2** (3.13) w postaci schematu blokowego i napisać na jego podstawie program (lub procedurę) np. w języku Pascal lub C.

Zadanie 4.20. Zaproponować algorytm i napisać program dekodowania kodu Shannona-Fano z poprzedniego zadania. Do testowania wykorzystać wyniki zadania 4.14.

Zadanie 4.21. Źródło generuje wiadomości x_1 i x_2 z prawdopodobieństwami $p(x_1) = 0.89$ i $p(x_2) = 0.11$. Określić średnią długość słowa optymalnego kodu binarnego, jeśli koduje się:

a) po jednej wiadomości,
b) bloki po 2 wiadomości,
c) bloki po 3 wiadomości.

Zadanie 4.22. Źródło generuje trzy wiadomości x_1, x_2 i x_3 z prawdopodobieństwami $p(x_1) = 0.1$, $p(x_2) = 0.6$ i $p(x_3) = 0.3$. Określić średnią długość słowa optymalnego kodu binarnego, jeżeli koduje się a) po jednej wiadomości, b) po dwie wiadomości.

Zadanie 4.23. Źródło generuje dwie wiadomości $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Obliczyć, jak zmienia się prawdopodobieństwo błędnego zdekodowania wiadomości, jeżeli prawodopodobieństwo przekłamania bitu (niezależne) wynosi $p = 10^{-3}$, a każda wiadomość powtarzana jest 3-krotnie i dekodowana zgodnie z optymalną regułą decyzyjną, to znaczy wszystkie ciągi zawierające dwa lub

trzy zera dekodowane są jako 0, a pozostałe jako 1. Przyporządkowanie wiadomościom x_1 i x_2 odpowiednich ciągów na wejściu układu kodującego, na wyjściu układu kodującego i na wyjściu kanału transmisyjnego przedstawiono w tablicy 4.23.

Tablica 4.23

	Wejście kodera	Wyjście kodera	Wyjście kanału
x_1	0	000	000 001 010 100
x_2	1	111	011 101 110 111

Zadanie 4.24. Liczbę 1979 zakodować

a) w prostym kodzie binarnym,
b) w kodzie Graya,
c) w kodzie szesnastkowym (heksadecymalnym),
d) w kodzie binarnym BCD 8421,
e) w kodzie Aikena,
f) w kodzie Excess 3.

Zadanie 4.25. Dokonać konwersji liczby 10001100110 zakodowanej w kodzie Graya na prosty kod binarny.

Zadanie 4.26. Na podstawie algorytmu **A3** (3.14) sporządzić schemat blokowy i napisać na jego podstawie program (lub procedurę) np. w języku Pascal lub C.

Zadanie 4.27. Na podstawie algorytmu **A4** (3.15) sporządzić schemat blokowy i napisać na jego podstawie program (lub procedurę) np. w języku Pascal lub C.

Zadanie 4.28. Źródło wiadomości zakodowano w kodzie binarnym w słowa o długości $n = 6$ o dwóch pozycjach kontrolnych w każdym słowie. Podać liczbę:

a) wiadomości, jakie przy użyciu tego kodu można zakodować,
b) możliwych ciągów binarnych o długości n na wyjściu kanału,
c) wszystkich stanów transmisji,
d) stanów transmisji bezbłędnych,
e) stanów transmisji z błędami niewykrywalnymi,
f) stanów transmisji z błędami wykrywalnymi,
g) stanów transmisji z błędami korygowalnymi.

Zadanie 4.29. Dane są słowa kodowe kodu C zebrane w tablicy 4.29. Obliczyć odległość minimalną d_{min} tego kodu.

Tablica 4.29

i	1	2	3	4	5
$\overline{w}_i$	0010	10110	01101	10011	11100

Zadanie 4.30. Zbudować model geometryczny ciągów binarnych o długości $n = 3$. Wybrać ze zbioru wszystkich ciągów binarnych słowa kodowe kodu:

a) wykrywającego błędy 1-krotne,
b) korygującego błędy 1-krotne.

Zadanie 4.31. Jaka musi być odległość minimalna kodu oraz minimalna liczba pozycji kontrolnych w słowie kodowym, które posiada 3 pozycje informacyjne, żeby kod

a) wykrywał błędy pojedyncze,
b) korygował błędy pojedyncze,
c) wykrywał błędy 1- i 2-krotne, a korygował 1-krotne.

Zadanie 4.32. Jakie parametry posiada czteropozycyjny kod binarny:

a) wykrywający błędy 1-krotne,
b) korygujący błędy 1-krotne.

Zadanie 4.33. Kod liniowy wykrywający błędy 1-, 2- i 3-krotne posiada 5 pozycji informacyjnych. Jaka jest długość słowa kodowego n ?

Zadanie 4.34. Ile pozycji kontrolnych posiada binarny kod o $d_{min} = 4$ przeznaczony do zakodowania 8 wiadomości ?

Zadanie 4.35. Określić, ile pozycji kontrolnych posiada kod binarny o długości słowa $n = 21$, korygujący błędy 1-, 2- i 3-krotne ?

Zadanie 4.36. Ile wiadomości można zakodować w kod binarny o długości słowa $n = 39$, jeśli $d_{min} = 9$?

Zadanie 4.37. Ile słów o wadze 2 zawiera kod o długości $n = 5$?

Zadanie 4.38. Zbudować kod binarny do zakodowania 32 wiadomości w słowa kodowe o wadze 3. Jaka jest minimalna długość słowa kodowego takiego kodu ?

Zadanie 4.39. Określić słowa kodowe kodu (4.3) o macierzy tworzącej

$$T = [1\ 1\ 1\ 1]\ .$$

Jakie własności posiada ten kod ?

Zadanie 4.40. Określić macierz tworzącą **T** liniowego kodu rozdzielnego (5.3) opisanego następującymi równaniami kontrolnymi:

$$w_4 = w_1 \oplus w_2$$
$$w_5 = w_2 \oplus w_3\ .$$

Określić dodatkowo słowa kodowe $\overline{w_i}$ ($i = 1$,..., 8) odpowiadające wszystkim ciągom informacyjnym.

Zadanie 4.41. Znaleźć wszystkie słowa kodowe kodu (7,4) o danej macierzy tworzącej

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1\ 1\ 1\ 1 & 1\ 0\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 0 & 0\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0 & 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}$$

Jakie własności posiada ten kod ?

|Zadanie 4.42. Zbudować dowolną macierz generującą $\mathbf{G}_k$ rozdzielnego kodu liniowego korygującego błędy 1-krotne do kodowania 16 wiadomości. Podać sposób korygowania błędu.

|Zadanie 4.43. Dana jest macierz $\mathbf{G}_k$ generująca kod liniowy (5,3)

$$\mathbf{G}_k = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Znaleźć zbiór wszystkich możliwych słów kodowych.

|Zadanie 4.44. Znaleźć macierz tworzącą $\mathbf{T}$ kodu liniowego o macierzy generującej $\mathbf{G}_k$ z zadania 4.43.

Zadanie 4.45. Dla danej macierzy tworzącej rozdzielnego kodu liniowego

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

znaleźć macierz generującą $\mathbf{G}_k$ i wyznaczyć na jej podstawie wszystkie możliwe słowa kodowe.

Zadanie 4.46. Zbudować dowolną macierz generującą $\mathbf{G}_k$ kodu o $d_{\min} = 3$ przeznaczonego do zakodowania 100 wiadomości.

Zadanie 4.47. Zbudować dowolne macierze $\mathbf{T}$ i $\mathbf{G}_k$ dla kodu o $d_{\min} = 2$ i $n = 6$.

|Zadanie 4.48. Na wejście kanału podawane są słowa kodowe kodu z zadania 4.43. Na wyjściu kanału pojawia się 5 ciągów przedstawionych w tablicy 4.48. Określić decyzję dekodera $\overline{w}_i^*$ o nadanych słowach $\overline{w}_i$ zgodnie z **RD1** (wzór 3.45).

Tablica 4.48

i	1	2	3	4	5
$\overline{v}_i$	01011	01111	10010	10110	11011

|Zadanie 4.49. Zakładając w zadaniu 4.48, że prawdopodobieństwo przekłamania każdego z pięciu bitów jest jednakowe, zastąpić **RD1** regułą decyzyjną największego prawdopodobieństwa **RDNP** (3.48).

|Zadanie 4.50. Obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo poprawnego przesłania słowa kodowego o długości $n = 7$ przez kanał, w którym występują błędy niezależne, a prawdopodobieństwo przekłamania bitu wynosi $p = 10^{-3}$. Obliczyć, jak zmienia się to prawdopodobieństwo po dodaniu w słowie kodowym ósmego bitu parzystości. Jakie jest prawdopodobieństwo niewykrycia błędu w tym przypadku ?

|Zadanie 4.51. Zbudować macierz kontrolną $\mathbf{H}$ dla kodu Hamminga (7,4). Podać zależności służące do obliczania pozycji kontrolnych.

Zadanie 4.52. Zbudować macierz tworzącą **T** dla kodu Hamminga (15,11).

|Zadanie 4.53. Zakodować w kod Hamminga liczbę 11.

Zadanie 4.54. Zakodować w kod Hamminga liczbę 1979.

|Zadanie 4.55. W przykładzie z zadania 4.53 nastąpiło przekłamanie na 3 pozycji. Prześledzić działanie dekodera w tym przypadku.

Zadanie 4.56. Obliczyć syndrom odebranego ciągu $\bar{v}$ = 111011110101011 zakodowanego w kodzie Hamminga. Podać regułę decyzyjną dekodera o nadanym ciągu.

|Zadanie 4.57. Zbudować macierz kontrolną **H** dla skróconego kodu Hamminga (6,3). Podać zależności służące do obliczania pozycji kontrolnych.

|Zadanie 4.58. Zbudować macierz tworzącą **T** dla kodu Hamminga (10,6).

|Zadanie 4.59. Zakodować w skrócony kod Hamminga (6,3) liczbę 6.

Zadanie 4.60. Zakodować w skrócony kod Hamminga (10,6) liczbę 61.

Zadanie 4.61. Obliczyć syndrom odebranego ciągu $\bar{v}$ = 1011110101, jeśli wiadomo, że na wejściu kanału pojawiają się słowa skróconego kodu Hamminga. Jaka jest reguła decyzyjna dekodera o nadanym ciągu ?

|Zadanie 4.62. Sprawdzić, jak zmieniają się efektywność i możliwości korekcyjne kodu z kontrolą parzystości (4,3), jeżeli każde słowo kodowe powtarzane jest trzykrotnie.

Zadanie 4.63. Określić konieczną liczbę powtórzeń przesyłanego nienadmiarowego kodu binarnego, pozwalającą na korygowanie błędów 1- i 2-krotnych.

|Zadanie 4.64. Określić, o ile zwiększą się korekcyjne własności kodu z kontrolą parzystości (4,3) po zastąpieniu go kodem dwukrotnie iterowanym, w którym $n_2 = n_1 = 4$, $k_2 = k_1 = 3$, czyli gdy zamiast pojedynczych słów kodowych będą przesyłane bloki po $k_2 = 3$ słowa kodowe. Określić również sprawność kodowania oraz prześledzić działanie dekodera przy bezbłędnej transmisji, transmisji z jednym błędem, z dwoma błędami oraz z większą liczbą błędów.

|Zadanie 4.65. Określić, o ile zwiększą się korekcyjne własności kodu z kontrolą parzystości (6,5) po zastąpieniu go kodem dwukrotnie iterowanym, w którym

a) $n_2 = n_1 = 6$ i $k_2 = k_1 = 5$,

b) $n_2 = 100$ i $k_2 = 99$.

Obliczyć sprawność każdego z kodów.

|Zadanie 4.66. Zbudować macierz generującą **G** kodu dwukrotnie iterowanego, w którym kolumny i wiersze zakodowane są kodami z kontrolą parzystości (3,2) o macierzach generujących

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

|Zadanie 4.67. Podać macierz tworzącą **T** wydłużonego kodu Hamminga (8,4) oraz na jej podstawie podać równania kontrolne tego kodu.

Zadanie 4.68. Zakodować liczbę14 przy użyciu wydłużonego kodu Hamminga.

|Zadanie 4.69. Na wejściu kanału pojawiają się słowa kodowe wydłużonego kodu Hamminga (8,4). Na wyjściu kanału odebrano ciągi:

$\overline{v} = 00101101$
$\overline{v} = 00111101$
$\overline{v} = 00101100$
$\overline{v} = 00111100$

Jaka jest decyzja dekodera w każdym przypadku ?

|Zadanie 4.70. Określić parametry kodu Reeda-Mullera pierwszego, drugiego i trzeciego rzędu, jeśli $p = 4$.

|Zadanie 4.71. Zbudować macierz **G** kodu Reeda-Mullera rzędu pierwszego, drugiego i trzeciego dla $p = 3$.

Zadanie 4.72. Zbudować macierz **G** kodów **RM** (2,4), (3,4) i (4,4).

Zadanie 4.73. Zakodować w kod **RM** ciąg informacyjny $\overline{w}' = 1010111$.

|Zadanie 4.74. Zakodować w rozszerzony kod Golaya ciąg informacyjny $\overline{w}' = 111101111111$.

Zadanie 4.75. Na podstawie algorytmu **A5** (3.67) sporządzić schemat blokowy i napisać na jego podstawie program (lub procedurę) np. w języku Pascal lub C.

|Zadanie 4.76. Zbudować macierz **G** kodu Mac Donalda o $k = 5$ i $d_{min} = 7$. Podać wagi słów tego kodu.

Zadanie 4.77. Zbudować macierz **G** kodu Mac Donalda o $k = 5$ i $d_{min} = 8$.

|Zadanie 4.78. Obliczyć prawdopodobieństwo wystąpienia błędów niewykrywalnych w kodzie "3 z 7" (kodzie, w którym wszystkie słowa o długości $n = 7$ posiadają stałą wagę $W = 3$) przy przesyłaniu ciągów kodowych przez kanał symetryczny, w którym prawdopodobieństwo przekłamania bitu wynosi $p = 10^{-5}$.

|Zadanie 4.79. Dla danych $k = 4$ i $g(x) = x^3 + x^2 + 1$ zbudować:

a) nierozdzielny kod cykliczny,
b) rozdzielny kod cykliczny.

Znaleźć macierz **G** dla obu przypadków.

|Zadanie 4.80. Czy można za pomocą wielomianu generującego $g(x) = x^5 + x^2 + 1$ utworzyć kod cykliczny z minimalną odległością kodów $d_{min} = 5$?

Zadanie 4.81. Zbudować macierz **G** kodu cyklicznego

a) nierozdzielnego,
b) rozdzielnego

generowanego przez wielomian $g(x) = x^3 + x + 1$ o długości słowa $n = 7$.

|Zadanie 4.82. Wykorzystując macierz **G** zbudować kod cykliczny (nierozdzielny) korygujący błędy pojedyncze, jeśli długość ciągów informacyjnych $k = 4$.

Zadanie 4.83. Zbudować macierz $\mathbf{G}_k$ rozdzielnego kodu cyklicznego wykrywającego błędy 1- i 2-krotne, jeśli długość słów kodowych $n = 15$. Ile wiadomości można zakodować przy użyciu tego kodu ?

Zadanie 4.84. Określić krotność błędów korygowalnych przez kod cykliczny z wielomianem generującym $g(x) = x^4 + x + 1$.

Zadanie 4.85. Do przesyłania 10 wiadomości należy zbudować kod cykliczny korygujący błędy pojedyncze.

|Zadanie 4.86. Sprawdzić, który z trzech odebranych ciągów

a) 0011010
b) 1100101
c) 1010011

jest przekłamany, jeśli wiadomo, że na wejściu kanału pojawiają się słowa kodu cyklicznego, którego wielomian generujący ma postać:

$$g(x) = x^3 + x^2 + 1$$

Zadanie 4.87. Sprawdzić, który z trzech odebranych ciągów

a) 0101111000
b) 0001011001
c) 1101111000

jest przekłamany, jeśli wiadomo, że na wejściu kanału pojawiają się słowa kodu cyklicznego z wielomianem generującym

$$g(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Zadanie 4.88 (4.5a). Zbiór 10 wiadomości należy zakodować w słowa kodowe o długościach zebranych w tablicy 4.88 (trzy warianty). Określić minimalną długość alfabetu kodowego, dla której tak skonstruowany kod jest natychmiast dekodowalny. Zbudować ten kod.

Tablica 4.88

i		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	a.	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3
	b.	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3
	c.	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3

Zadanie 4.89 (4.6a). Wiadomości generowane przez źródło generujące 6 wiadomości o prawdopodobieństwach występowania P={0.25, 0.25, 0.15, 0.15, 0.1, 0.1} należy zakodować w kod binarny natychmiast dekodowalny, tak aby posiadał minimalną średnią długość słowa $\overline{n}$ i by jednocześnie wiadomości x_3, x_4, x_5 i x_6 zakodowane były w słowa o jednakowej długości n.

Zadanie 4.90 (4.6b). Rozwiązać zadanie 4.89, zakładając następujący rozkład prawdopodobieństw źródła:

$$P=\{0.5, 0.15, 0.1, 0.1\ 0.1, 0.05\}.$$

Zadanie 4.91 (4.36a). Określić, korzystając z górnej granicznej własności kodów nadmiarowych, ile wiadomości można zakodować w kodzie binarnym o długości słowa $n = 35$ i o $d_{min} = 9$.

Zadanie 4.92 (4.36b). Ile wiadomości można zakodować w binarnym kodzie nadmiarowym o długości słowa $n = 23$, jeśli $d_{min} = 7$?

Zadanie 4.93 (4.36c). Określić, korzystając z dolnej granicznej własności kodów nadmiarowych, liczbę pozycji informacyjnych kodu o $n = 16$ i $d_{min} = 4$.

Zadanie 4.94 (4.36d). Określić, korzystając z dolnej granicznej własności kodów nadmiarowych, liczbę pozycji informacyjnych kodu o $n = 15$ i $d_{min} = 5$. Otrzymany wynik porównać z wynikiem uzyskanym dla górnej granicznej wartości.

Zadanie 4.95 (4.37a). Ile słów o wadze 2 i $d_{min} = 2$ zawiera kod o długości słowa $n = 5$?

Zadanie 4.96 (4.43a). Znaleźć równania kontrolne kodu opisanego macierzą generującą

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i zakodować w tym kodzie liczbę 13.

|Zadanie 4.97 (4.43b). Znaleźć równanie kontrolne kodu opisanego macierzą generującą:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.98 (4.49a). Wiedząc, że na wejściu kanału pojawiają się słowa kodu opisanego macierzą tworzącą:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

określić decyzję dekodera (zgodnie z **RDNP**), jeśli odebrany ciąg ma postać: $\overline{v} = [010010]$. Określić odległość minimalną tego kodu.

Zadanie 4.99 (4.50a). Skonstruować macierz $\mathbf{G}_k$ kodu z kontrolą parzystości (6,5).

|Zadanie 4.100 (4.78a). Obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo błędnej decyzji dekodera kodu z zadania 4.40, jeśli prawdopodobieństwo przekłamania każdego bitu podczas transmisji przez kanał jest niezależne i wynosi $p = 1 \cdot 10^{-3}$.

Zadanie 4.101 (4.7a). $M = 16$ różnych wiadomości generowanych przez źródło należy zakodować w optymalny nienadmiarowy kod binarny o stałej wadze. Jaka jest waga tego kodu ?

Zadanie 4.102 (4.7b). Jaka jest długość optymalnego nienadmiarowego kodu binarnego o stałej wadze (równej 3) przeznaczonego do zakodowania 18 wiadomości ?

Zadanie 4.103 (4.10a) Skonstruować kod Huffmana kodujący 6 wiadomości generowanych przez źródło z prawdopodobieństwami $P = \{0.3\ 0.2\ 0.2\ 0.15\ 0.1\ 0.05\}$. Obliczyć też średnią długość słowa kodowego.

Zadanie 1.104 (4.37b). Określić minimalną liczbę pozycji kontrolnych kodu, o długości słowa $n = 21$, korygującego przekłamania na 1 i 2 pozycjach.

Zadanie 4.105 (4.49b). Określić decyzję dekodera (zgodnie z **RDNP**) po podaniu na jego wejście ciągów binarnych: a) $\overline{v}_1 = 000110$, b) $\overline{v}_2 = 011010$ uzyskanych na wyjściu kanału z zakłóceniami. Na wejście kanału podawane są słowa kodowe kodu określonego macierzą generującą

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

|Zadanie 4.106 (4.51a). Utworzyć macierz generującą **G** kodu Hamminga (7,4).

|**Zadanie 4.107** (4.51b). Skonstruować macierz generującą **G** wydłużonego kodu Hamminga (8,4).

Zadanie 4.108 (4.56a). Określić syndromy ciągów:

a) $\bar{v}_1 = 111011110101011$

b) $\bar{v}_2 = 111111110111011$

i decyzje dekodera kodu Hamminga.

Zadanie 4.109 (4.61a). Utworzyć słowa kodowe skróconego kodu Hamminga (11,7) odpowiadające zapisowi binarnemu liczb 34 i 47.

Zadanie 4.110 (4.63a). Określić minimalną liczbę powtórzeń kodu z kontrolą parzystości (5,4) umożliwiającą korygowanie przekłamań 1- i 2-krotnych.

Zadanie 4.111 (4.63b). M wiadomości generowanych przez źródło należy zakodować w optymalny kod z powtarzaniem korygujący przekłamania 1,..., k -krotne oraz wykrywający przekłamania 1 ,..., t_0 -krotne. Określić parametry (n, k) oraz r tego kodu dla a) $M = 60$, $t_0 = 3$, $t_k = 1$ oraz b) $M = 35$, $t_0 = 3$ i $t_k = 2$.

Zadanie 4.112 (4.63c). Ile wiadomości można zakodować w kodzie binarnym o długości słowa $n = 10$ z $r = 3$-krotnym powtarzaniem korygującym błędy o krotności 1,...,4 ($t_k = 4$) i wykrywającym błędy o krotności 1,...,6 ($t_0 = 6$). Jaka będzie odpowiedź dla $n = 15$, $r = 2$, $t_k = 5$, $t_0 = 6$?

Zadanie 4.113 (4.69a). Sprawdzić, czy otrzymane na wyjściu kanału ciągi binarne:

a) $\bar{v}_1 = 11011100$,

b) $\bar{v}_2 = 11001101$

są poprawne, a jeśli nie, to skorygować je. Słowa kodowe na wejściu kanału generuje koder wydłużonego kodu Hamminga.

|**Zadanie 4.114** (4.69b). Określić prawdopodobieństwo błędnej decyzji dekodera kodu Hamminga (7,4), jeśli prawdopobieństwa przekłamania bitów (w słowie kodowym) podczas transmisji są niezależne i równe $p = 10^{-3}$. Jaki jest stosunek prawdopodobieństwa wystąpienia błędów korygowalnych przez dekoder do prawdopodobieństwa wystąpienia przekłamania słowa podczas transmisji ?

|**Zadanie 4.115** (4.69c). Jakie jest prawdopodobieństwo błędnej decyzji dekodera skróconego kodu Hamminga (6,3), jeśli prawdopodobieństwa przekłamania w czasie transmisji każdego z bitów słowa kodowego są niezależne i równe $p = 10^{-3}$?

|**Zadanie 4.116** (4.69d). Jakie jest prawdopodobieństwo błędnej decyzji dekodera wydłużonego kodu Hamminga (8,4), jeśli prawdopodobieństwa przekłamania w czasie transmisji każdego z 8 bitów słowa kodowego są niezależne i równe $p = 10^{-3}$?

Zadanie 4.117 (4.69e). Jaka będzie decyzja dekodera wydłużonego kodu Hamminga (8,4) po otrzymaniu na wyjściu kanału ciągu $\overline{v} = 10101011$?

Zadanie 4.118. (4.73a). Jakie słowa kodowe kodu Reeda-Mullera odpowiadają ciągom informacyjnym: a) $\overline{w}_1' = 1101$, b) $\overline{w}_2' = 1001$?

Zadanie 4.119 (4.73b). Zbudować macierz generującą kodu Reeda-Mullera, kodującego $M = 16$ wiadomości i wygenerować słowa kodowe tego kodu odpowiadające ciągom informacyjnym: a) $\overline{w}_1' = 1101$, b) $\overline{w}_2' = 1001$.

Zadanie 4.120 (4.81a). Jakie słowa kodowe a) nierozdzielnego, b) rozdzielnego kodu cyklicznego określonego przez wielomian generujący

$$g(x) = x^3 + x + 1$$

odpowiadają ciągowi informacyjnemu określonemu przez wielomian

$$h(x) = x^2 + x\,?$$

Zadanie 4.121 (4.87a). Jaka jest decyzja dekodera kodu cyklicznego po odebraniu ciągu $\overline{w} = 0111001$, jeśli $g(x) = x^3 + x + 1$ jest wielomianem generującym tego kodu?

Rozdział III

KANAŁ TRANSMISYJNY

5. WIADOMOŚCI PODSTAWOWE

5.1. Dyskretny kanał bez pamięci

Dyskretny kanał bez pamięci, na wejście którego podawanych jest M różnych słów kodowych kodu (n,k), a na jego wyjściu może pojawić się L różnych ciągów (rys.5.1), opisany jest macierzą prawdopodobieństw przejść M postaci

$$\mathbf{M} \overset{df}{=} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots p_{1j} \cdots p_{1L} \\ p_{21} & p_{22} \cdots p_{2j} \cdots p_{2L} \\ \cdots & \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ p_{M1} p_{M2} \cdots p_{Mj} \cdots p_{ML} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

gdzie:

$p_{ij} \overset{df}{=} p(\bar{v}_j \mid \bar{w}_i)$ - są prawdopodobieństwami warunkowymi tego, że pojawiający się na wyjściu kanału ciąg $\bar{v}_j$ został spowodowany nadaniem na wejściu kanału ciągu $\bar{w}_i$,

$\bar{w}_i$ - i-te słowo kodowe o długości n,

$\bar{v}_j$ - j-ty ciąg kodowy o długości n na wyjściu kanału,

$M = D^k$ - liczba różnych słów kodowych na wejściu kanału,

$L = D^n$ - liczba różnych ciągów, o długości n, na wyjściu kanału,

D - liczebność alfabetu kodowego.

Rys. 5.1

Def.5.1: *Kanałem bezpamięciowym* nazywamy kanał, dla którego

$$P(\overline{v}_j \mid \overline{w}_i) = \prod_{l=1}^{n} P(v_{jl} \mid w_{il}) \tag{5.2}$$

dla każdego naturalnego n, gdzie:

w_{il} - l-ty symbol słowa kodowego $\overline{w}_i$,

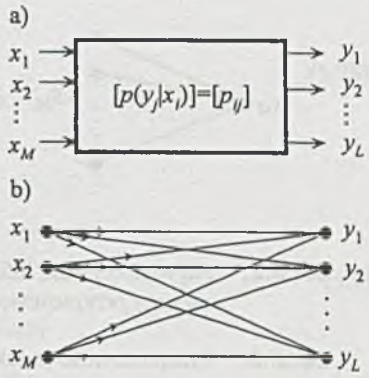
v_{jl} - l-ty symbol odebranego ciągu $\overline{v}_j$.

Najczęściej stosuje się bardziej oszczędny sposób opisu kanału. Załóżmy, że:

- alfabet akceptowany przez wejście kanału ma długość M i zawiera symbole $x_1, x_2,...,x_M$,
- alfabet na wyjściu kanału ma długość L i zawiera symbole $y_1, y_2,...,y_L$.

Uwaga:

- M, L - nie mają związku z oznaczeniami z (5.1) i *rys.5.1*,
- symbole $x_1, x_2,...,x_M$ i $y_1, y_2,...,y_L$ nie mają na ogół związku z wiadomościami generowanymi przez źródło X.



Rys. 5.2

Kanał transmisyjny można przedstawić jak na *rys.5.2* i opisać go przez *macierz prawdopodobieństw przejść kanału* **P** zawierającą zbiór prawdopodobieństw warunkowych $p(y_j|x_i)$.

Macierz **P** zdefiniowana jest jako:

$$\mathbf{P} \overset{\text{df}}{=} \begin{bmatrix} p(y_1 \mid x_1) & p(y_2 \mid x_1) \cdots p(y_L \mid x_1) \\ p(y_1 \mid x_2) & p(y_2 \mid x_2) \cdots p(y_L \mid x_2) \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ p(y_1 \mid x_M) & p(y_2 \mid x_M) \cdots p(y_L \mid x_M) \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

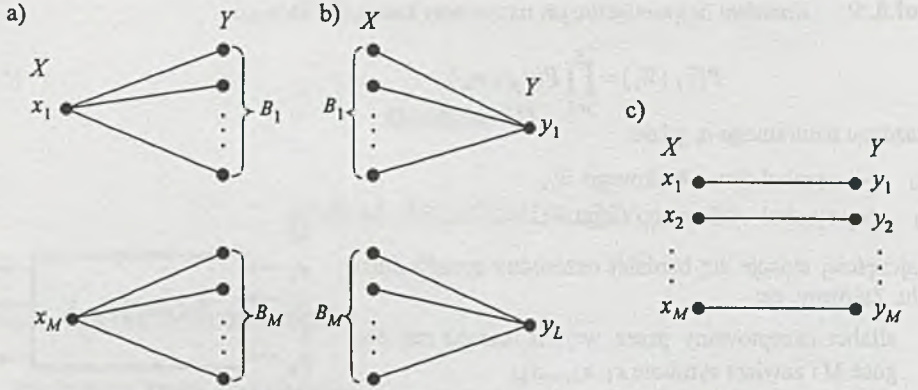
Średnia ilość informacji przenoszonej przez kanał jest równa

$$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - \mathrm{H}(X,Y) \tag{5.4}$$

Dyskretne kanały bez pamięci można podzielić na:

a) *bezstratne*, dla których $H(X|Y) = 0$,
b) *deterministyczne*, dla których $H(Y|X) = 0$,
c) *bez zakłóceń*, tzn. bezstratne i deterministyczne ($L = M$),
d) *symetryczne*, jeśli każdy wiersz macierzy **P** (zał.5.3) zawiera ten sam zbiór $p'_1, p'_2,..., p'_L$, a każda kolumna ten sam zbiór $q'_1, q'_2,..., q'_M$.

Na *rys.5.3* przedstawiono pierwsze trzy typy kanałów.



Rys. 5.3

Def.5.2: Największą ilość informacji, którą można przesłać kanałem w jednostce czasu, nazwiemy *przepustowością kanału* i oznaczymy przez C.

Def.5.3: Przepustowość kanału dyskretnego bez zakłóceń

$$C \overset{\text{df}}{=} \lim_{T\to\infty}\left[\frac{\operatorname{ld} M}{T}\right] = \frac{1}{\tau}\operatorname{ld} D = \vartheta \operatorname{ld} D \left[\frac{\text{bitów}}{\text{s}}\right] \tag{5.5}$$

gdzie:

D - liczebność alfabetu kodowego (liczba symboli kodowych),

n - długość słowa kodowego,

τ

$T = n\cdot\tau$ - czas trwania symbolu (jednakowy dla wszystkich symboli),

$\vartheta = \frac{1}{\tau}$ - szybkość przesyłania symboli $\left[\frac{\text{symbol}}{\text{s}}\right]$.

Def.5.4: *Strumień informacji* wypływającej ze źródła (wydajność źródła)

$$R = \vartheta \cdot H \tag{5.6}$$

gdzie:

H - entropia źródła.

Dla nierównoprawdopodobnych niezależnych symboli o różnym czasie trwania wydajność źródła wyraża się zależnością:

$$R = \frac{-\sum_{i=1}^{M} p_i \operatorname{ld} p_i}{\sum_{i=1}^{M} \tau_i p_i} \left[\frac{\text{bitów}}{\text{s}}\right] \tag{5.7}$$

natomiast dla symboli zależnych

$$R = \frac{-\sum_{i=1}^{M} p(x_i) \sum_{j=1}^{M} p(x_i \mid x_j) ld\, p(x_j \mid x_i)}{\sum_{i=1}^{M} \tau_i p(x_i)} \left[\frac{\text{bitów}}{\text{s}}\right] \tag{5.7a}$$

wreszcie dla symboli niezależnych o równym czasie trwania:

$$R = -\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{M} p_i \operatorname{ld} p_i \left[\frac{\text{bitów}}{\text{s}}\right] \tag{5.7b}$$

Dla kanału bez zakłóceń

$$R = \vartheta \cdot H \le C$$

Def.5.5: *Stopień wykorzystania kanału*

$$\eta = \frac{R}{C} \tag{5.8}$$

Def.5.6: *Przepustowość kanału dyskretnego* z zakłóceniami

$$C \overset{\text{df}}{=} \max_{P(X)} \vartheta [H(X) - H(X \mid Y)] \left[\frac{\text{bitów}}{\text{s}}\right] \tag{5.9}$$

gdzie:

$P(X)$ - rozkład prawdopodobieństw na wejściu kanału.

Dla kanału symetrycznego przepustowość wyraża się zależnością

$$C_{\text{sym}} = \vartheta \left[\operatorname{ld} L + \sum_{j=1}^{L} p'_j \operatorname{ld} p'_j\right] \left[\frac{\text{bitów}}{\text{s}}\right] \tag{5.10}$$

gdzie:

p'_j - prawdopodobieństwa warunkowe dowolnego wiersza macierzy **P**.

Dla *kanału binarnego* $L = 2$ (*rys.5.4*) przepustowość (oznaczana przez C_{BSC}) wyraża się zależnością

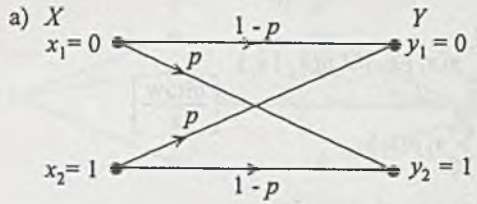
$$C_{\text{BSC}} = \vartheta [1 + p \operatorname{ld} p + (1-p) \operatorname{ld}(1-p)] \left[\frac{\text{bitów}}{\text{s}}\right] \tag{5.11}$$

Przepustowość niesymetrycznego kanału binarnego (*rys.5.5*) wyraża się zależnością (dla $p > q$)

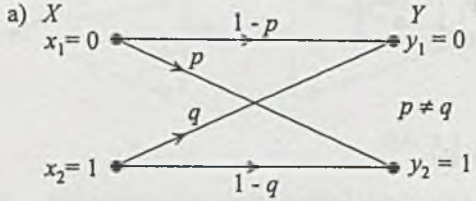
$$C_{\text{GBC}} = \vartheta \cdot \operatorname{ld} \left[2^{\frac{(q-1)H_p + (1-p)H_q}{p-q}} + 2^{\frac{qH_p - pH_q}{p-q}}\right] \left[\frac{\text{bitów}}{\text{s}}\right] \tag{5.12}$$

gdzie:

$H_p = H(p, 1 - p) = H(Y \mid X = x_1)$,
$H_q = H(q, 1 - q) = H(Y \mid X = x_2)$.



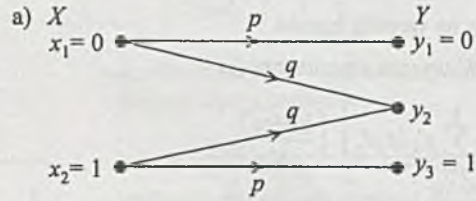
Rys. 5.4



Rys. 5.5

Przepustowość binarnego kanału wymazującego (rys.5.6)

$$C_{\mathrm{BEC}} = \vartheta p \left[\frac{\text{bitów}}{\text{s}}\right] \tag{5.13}$$



Rys. 5.6

5.2. Kanał z zakłóceniami współpracujący ze źródłem ciągłym

Jeśli:

- sygnał wejściowy jest ciągły o ograniczonym widmie, np.$0 \div f_g$ (lub $f_d \div f_g$),
- zakłócenie („biały szum") ma normalny rozkład wartości chwilowych i jest stacjonarne,
- sygnał wejściowy (wiadomość) i zakłócenie są od siebie statystycznie niezależne,

to *przepustowość kanału z zakłóceniami współpracującego ze źródłem ciągłym* jest określona zależnością

$$C = \vartheta[H(Y)_{\max} - H_z] = f_g \operatorname{ld}\left(1 + \frac{P_s}{P_z}\right) \tag{5.14}$$

lub

$$C = \Delta f \operatorname{ld}\left(1 + \frac{P_s}{P_z}\right) \tag{5.15}$$

gdzie:

$H_z = \frac{1}{2}\mathrm{ld}(2\pi P_z)$ - entropia źródła zakłóceń,

$P_z = \sigma_z^2$ - średnia moc zakłóceń,

P_s - średnia moc sygnału na wejściu kanału,

$H(Y)_{\max} = \frac{1}{2}\mathrm{ld}[2\pi(P_s + P_z)]$ - maksymalna wartość entropii wyjścia kanału (gdy rozkład gęstości prawdopodobieństw sygnału wejściowego jest normalny),

$\Delta f = f_g - f_d$.

Dla

$$\frac{P_s}{P_z} >> 1$$

przepustowość

$$C \cong \Delta f \,\mathrm{ld}\frac{P_s}{P_z} \tag{5.16}$$

Największa ilość informacji (w bitach), jaką można przesłać w czasie T pasmem o szerokości Δf przy średniej mocy sygnału P_s i zakłóceń P_z wynosi

$$C \cdot T = T \cdot \Delta f \,\mathrm{ld}\left(1 + \frac{P_s}{P_z}\right)$$

Jeśli moc zakłóceń „białego szumu"

$$P_z = p_z \cdot \Delta f \tag{5.17}$$

gdzie p_z - widmowa gęstość zakłóceń, wówczas przepustowość kanału określona jest zależnością

$$C = \Delta f \cdot \mathrm{ld}\left(1 + \frac{P_s}{P_z \cdot \Delta f}\right) \tag{5.18}$$

6. TEMATY ZADAŃ

Zadanie 6.1. Dana jest macierz prawdobodobieństw przejść **P** kanału zawierająca zbiór prawdopodobieństw warunkowych:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Zaproponować optymalną decyzję odbiornika, jeśli wiemy, że źródło generuje trzy wiadomości z prawdopodobieństwami $p(x_1) = \frac{1}{2}, p(x_2) = p(x_3) = \frac{1}{4}$ oraz obliczyć prawdopodobieństwo błędu dla przyjętej reguły.

Zadanie 6.2. Macierz prawdopodobieństw przejść kanału **P** ma postać

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.98 & 0.01 & 0.01 \\ 0.1 & 0.75 & 0.15 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Obliczyć średnią ilość informacji przenoszoną przez jeden symbol (wiadomość), jeśli $p(x_1) = 0.7$, $p(x_2) = 0.2, p(x_3) = 0.1$. Ile wynosi strata informacji (średnia) przy przesyłaniu $N = 500$ wiadomości ?

Zadanie 6.3. Ile wynosi średnia strata informacji w kanale opisanym macierzą:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 6.4. Kanał transmisyjny opisany jest zbiorem prawdopodobieństw łącznych $p(x_i, x_j)$

$$[p(x_i, x_j)] = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.02 & 0.11 & 0.1 & 0.01 \\ 0.07 & 0.05 & 0.2 & 0.02 \\ 0.03 & 0.07 & 0.02 & 0.2 \\ 0.01 & 0.06 & 0.01 & 0.02 \end{bmatrix} \end{array}$$

Obliczyć stratę (średnią) informacji w kanale.

Zadanie 6.5. Naszkicować zależność przepustowości binarnego kanału symetrycznego od prawdopodobieństwa przekłamania bitu p dla dwóch wartości szybkości przesyłania wiadomości $\vartheta_1 = 1 \frac{\text{wiad.}}{\text{s}}$, $\vartheta_2 = 2 \frac{\text{wiad.}}{\text{s}}$.

Zadanie 6.6. Określić wydajność źródła wiadomości, o równym czasie trwania wiadomości $\tau = 2$ s, jeśli prawdopodobieństwa pojawiania się wiadomości na wyjściu kanału

$$p(y_1) = 0.1, \quad p(y_2) = 0.3, \quad p(y_3) = 0.4, \quad p(y_4) = 0.2$$

a macierz **P** ma postać

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.99 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.98 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.97 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zadanie 6.7. Określić stratę informacji (średnią) w kanale opisanym przez macierz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0.98 & 0.01 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jeśli wszystkie wiadomości generowane są przez źródło z takim samym prawdopodobieństwem.

Zadanie 6.8. Obliczyć ilość informacji przesyłanych w jednostce czasu dla kanału opisanego prawdopodobieństwami łącznymi

$$[p(x_i, y_j)] = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

jeśli szybkość przesyłania wszystkich wiadomości jest taka sama i równa $v = 1 \frac{\text{wiad.}}{\text{s}}$.

Zadanie 6.9. Wyjście dyskretnego kanału bez pamięci k_1 jest podłączone do wejścia innego kanału bez pamięci k_2. Wykazać, że przepustowość łańcucha nie przekracza przepustowości każdego z kanałów k_i ($i = 1,2$).

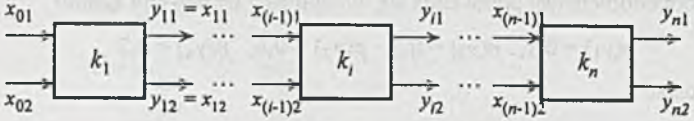
Zadanie 6.10. n symetrycznych kanałów binarnych o prawdopodobieństwie przekłamania bitu p połączono łańcuchowo jak na *rys.6.10*, gdzie:

$X_i = \{x_{i1}, x_{i2}\}$ - jest wejściem $i + 1$ kanału,
$Y_i = \{y_{i1}, y_{i2}\}$ - jest wyjściem i-tego kanału.

Znany jest rozkład prawdopodobieństw na wejściu pierwszego kanału k_1

$$p_{01} = p(x_{01}), \quad p_{02} = p(x_{02}).$$

Wyprowadzić wyrażenie na p_{n1} i pokazać, że $p_{n1} \to 0.5$, gdy $n \to \infty$ niezależnie od wartości p_{01}, jeśli tylko prawdopodobieństwo błędu $p < \frac{1}{2}$.



Rys. 6.10

Zadanie 6.11. Źródło binarne generuje równoprawdopodobne wiadomości. Wydajność źródła R = 1000 bitów/s. Wiadomości te przesyłane są przez binarny kanał symetryczny, w którym średnio co setny symbol jest przekłamany. Określić przepustowość kanału.

Zadanie 6.12. Określić przepustowość symetrycznego kanału binarnego, jeśli p = 0.02, $\tau_0 = \tau_1 = 0.1$ s.

Zadanie 6.13. Źródło binarne generuje $x_1 = 0$ (τ_0) przez 1 sekundę, a $x_2 = 1$ (τ_1) przez 5 sekund. Określić wydajność źródła, gdy:

a) wiadomości są równoprawdopobne i niezależne,
b) $p(x_1) = 0.37$, $p(x_2) = 0.63$,
c) $p(x_1) = 0.2$, $p(x_2) = 0.8$.

Zadanie 6.14. Dla jakich wartości prawdopodobieństw $p(x_1)$ i $p(x_2)$ źródła binarnego jego wydajność będzie największa, jeśli czas przesyłania „0" wynosi $\tau_0 = 0.2$ s, a czas przesyłania „1" wynosi $\tau_1 = 0.8$ s.

Zadanie 6.15. Źródło generuje 5 równoprawdopodobnych sygnałów o równych czasach trwania τ = 20 ms. Określić:

a) szybkość przesyłania sygnałów,
b) wydajność źródła.

Zadanie 6.16. Niesymetryczny kanał binarny posiada macierz **P** o postaci:

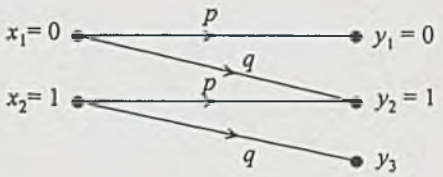
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć przepustowość kanału C dla p = 0.99, ϑ = 1 symb/s i dla q przyjmującego wartości 0, 0.01, 0.2, 0.5, 0.8, 0.98.

Zadanie 6.17. Obliczyć przepustowość kanału opisanego przez macierz prawdopodobieństw przejść

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p-q & q & p \\ p & p & 1-p-q \end{bmatrix}$$

Zadanie 6.18. Sporządzić wykres zależności przepustowości binarnego kanału wymazującego przedstawionego na *rys. 6.18* od prawdopodobieństwa wymazywania q.



Rys. 6.18

Zadanie 6.19. Wykazać, że przepustowość kanału z zakłóceniami w postaci „białego szumu" o danej gęstości widmowej P_z współpracującego ze źródłem ciągłym o średniej mocy sygnału P_s rośnie do wartości $\frac{P_s}{P_z} \operatorname{ld} e$, gdy szerokość widma sygnału zdąża do nieskończoności.

Zadanie 6.20. Określić przepustowość kanału ciągłego z zakłóceniami typu biały gaussowski szum. Pasmo przepuszczania kanału $\Delta f = 1$ kHz .Moc sygnału wejściowego $\sigma_s^2 = P_s = 4000$ [W], a gęstość widmowa zakłóceń $P_z = 0.002$ [Ws].

Zadanie 6.21. Określić pasmo przepuszczania kanału o przepustowości $29.9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{bitów}}{s}$, jeśli stosunek mocy sygnał/szum wynosi 1000.

B. ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

Rozwiązania zadań z rozdziału I

ENTROPIA I INFORMACJA

Zadanie 2.1. Jeżeli oznaczyć prawdopodobieństwo wystąpienia pierwszej wiadomości źródła przez $p(x_1) = p$, to $p(x_2) = 1 - p$.

Zatem entropia źródła

$$H(X) = -p \operatorname{ld} p - (1-p) \operatorname{ld} (1-p).$$

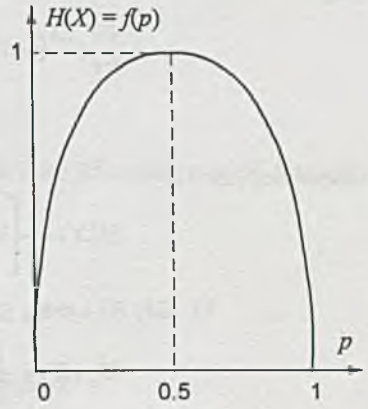
Wykres tej funkcji przedstawiony jest na *rys.2.1.1.* Jak widać:

- maksymalna wartość entropii jest wówczas, gdy $p = 0.5$ i wynosi

$$H_{\max} = 1 \frac{\text{bit}}{\text{wiadomość}}$$

- minimalna entropia jest wówczas, gdy $p = 0$ lub $p = 1$ i wynosi

$$H_{\min} = 0 \frac{\text{bitów}}{\text{wiadomość}}$$



Rys. 2.1.1

Zadanie 2.2. Liczba elementów systemu N-poziomowego wynosi

$$M = \sum_{n=0}^{N} K^n$$

a jego entropia

$$H(X) = \operatorname{ld} m^M = \sum_{n=0}^{N} K^n \operatorname{ld} m$$

Zadanie 2.3. Korzystając z wyników zadania 2.2. dla $K = 3$, $N = 2$, $m = 4$ entropia systemu

$$H(X) = \sum_{n=0}^{2} 3^n \operatorname{ld} 4 = \operatorname{ld} 4 + 3 \operatorname{ld} 4 + 9 \operatorname{ld} 4 = 26 \text{ bitów}$$

Zadanie 2.4.

a) $H(X) = -n[p \operatorname{ld} p + (1-p) \operatorname{ld} (1-p)] - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \operatorname{ld} C_n^k$,

b) $H(X) = 2.198$ bitów

Zadanie 2.5.

a) $$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1-q}{1-q^N} q^{i-1} \operatorname{ld} \frac{1-q}{1-q^N} q^{i-1} =$$

$$= -\operatorname{ld} \frac{1-q}{1-q^N} \left[\frac{1}{1-q^N} \sum_{i=1}^{N} \left(q^{i-1} - q^i \right) \right] - \operatorname{ld} q \left[\frac{1}{1-q^N} \sum \left(q^{i-1} - q^i \right)(i-1) \right]$$

Uwzględniając, że

$$\sum_{i=1}^{N} q^{i-1} - \sum_{i=1}^{N} q^i = 1 - q^N$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{N} q^{i-1}(i-1) - \sum_{i=1}^{N} q^i i + \sum_{i=1}^{N} q^i = -q^N N + \sum_{i=1}^{N} q^i + q^N =$$

$$= -q^N (N-1) + q \frac{1-q^{N-1}}{1-q}$$

otrzymamy , że:

$$H(X) = -\left[\operatorname{ld} \frac{1-q}{1-q^N} + \frac{1}{1-q^N} \left[\frac{q-q^N}{1-q} - (N-1) q^N \right] \operatorname{ld} q \right]$$

b) Gdy $N \to \infty$ to

$$H_\infty(X) = -\left[\operatorname{ld}(1-q) + \frac{q \operatorname{ld} q}{1-q} \right]$$

c)

$$\Delta H = H(X) - H_\infty(X) = \operatorname{ld}\left(1-q^N\right) + \frac{q^N \operatorname{ld} q^N}{1-q^N}$$

Zadanie 2.6. Prawdopodobieństwo każdej wiadomości generowanej przez źródło o $N > 1$ wiadomościach wynosi $p(x_i)$ i jest większe od zera, ($p(x_i) = 0$ oznaczałoby, że źródło nie generuje wiadomości x_i, a $p(x_i) = 1$ oznaczałoby, że źródło generuje tylko jedną wiadomość.
Jak łatwo wykazać, dla

$$0 < z < 1$$

jest słuszna nierówność

$$\ln z < z - 1;$$

mnożąc ją obustronnie przez $z \operatorname{ld} e$, otrzyma się, że:

$$z \operatorname{ld} z < (z^2 - z) \operatorname{ld} e < 0 .$$

A zatem średnia nieokreśloność odpowiadająca każdej wiadomości generowanej przez źródło:

$$- p(x_i) \operatorname{ld} p(x_i) > 0$$

Zadanie 2.8. Na jednej fotografii jest $54 \cdot 10^4$ ziaren. Zakładając, że każde ziarno może przyjmować z równym prawdopodobieństwem trzy odcienie, fotografie można traktować jako źródło X o $n = 3^{54 \cdot 10^4}$ różnych wiadomościach o jednakowych prawdopodobieństwach. Entropia tego źródła:

$$H(X) = \mathrm{ld}\, 3^{54 \cdot 10^4} = 54 \cdot 10^4 \cdot \mathrm{ld}\, 3 = 855\,880 \text{ bitów}$$

Zadanie 2.9. $H(X) = 9\,375\,000 \,\mathrm{ld}\, 9$ bitów

Zadanie 2.10. Prawdopodobieństwo tego, że tranzystor jest dobry, wynosi:

$$p(x_1) = \frac{N-m}{N}$$

a prawdopodobieństwo tego, że jest uszkodzony, wynosi:

$$p(x_2) = \frac{n}{N}$$

Ponieważ badania przeprowadzone są bez straty informacji, to ilość informacji o partii N tranzystorów jest równa jej entropii, czyli:

$$H(X) = -\frac{N-n}{N}\mathrm{ld}\frac{N-n}{N} - \frac{n}{N}\mathrm{ld}\frac{n}{N} =$$

$$= ld\, N - \frac{N-n}{N}\mathrm{ld}(N-n) - \frac{n}{N}\mathrm{ld}\, n$$

Zadanie 2.11. Całkowita entropia źródła (nazwijmy je X) wynosi:

$$H(X) = \mathrm{ld} \cdot 10 = 3.32 \text{ bitu}$$

Każdy pomiar daje dwa możliwe wyniki:

- napięcie (N),
- brak napięcia (B).

Należy tak zaplanować pomiary, by przy każdym pomiarze prawdopodobieństwo wskazania napięcia p(N) było równe (a jeżeli to niemożliwe jak najbliższe) prawdopodobieństwu jego braku p(B). Wówczas doświadczenie składające się z k kolejnych pomiarów (nazwijmy je Y_i) daje (maksymalne) zmniejszenie nieokreśloności o:

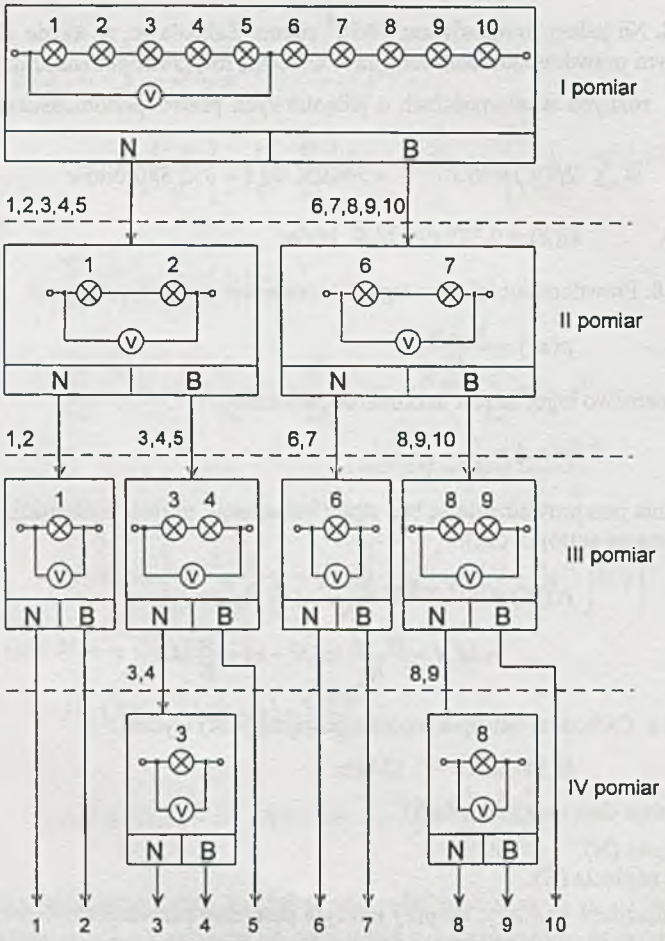
$$\sum_{i=1}^{k} H(Y_i) = k\,\mathrm{ld}\, 2 = k \text{ bitów}$$

Gdy zmniejszenie nieokreśloności uzyskane przez przeprowadzenie k pomiarów jest co najmniej równe nieokreśloności źródła, to k jest najmniejszą liczbą pomiarów wystarczającą do wykrycia uszkodzonej żarówki, czyli

$$k \geq 3.32$$

Do wykrycia przepalonej żarówki potrzeba więc co najmniej czterech pomiarów. Sposób przeprowadzenia pomiarów ilustruje *rys.2.11.1.* Jak z rysunku tego widać, w wyniku pierwszego pomiaru następuje zmniejszenie nieokreśloności o 1 bit, tzn.

$$H(Y_1) = 1 \text{ bit}$$



Rys. 2.11.1

Drugiego pomiaru nie da się przeprowadzić, tak by $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{N})$. Największe zmniejszenie entropii daje załączenie woltomierza na dwie spośród pięciu żarówek podejrzanych o to, że jedna z nich jest przepalona. Wówczas:

$$p(\mathrm{B}) = \tfrac{3}{5}, \qquad p(\mathrm{N}) = \tfrac{2}{5}$$

$$H(Y_2) = -\tfrac{2}{5}\mathrm{ld}\,\tfrac{2}{5} - \tfrac{3}{5}\mathrm{ld}\,\tfrac{3}{5} = 0.972 \text{ bitu}$$

Dla trzeciego pomiaru prawdopodobieństwa wynoszą

$$p(\mathrm{B}) = \tfrac{1}{3}, \qquad p(\mathrm{N}) = \tfrac{2}{3}$$

a

$$H(Y_3) = 0.912 \text{ bitu}$$

Dla czwartego pomiaru

$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{N}) = \frac{1}{2}$$

a

$$H(Y_4) = 1 \text{ bit}$$

Przedstawiony na *rys.2.11.1* algorytm zapewnia wykrycie uszkodzonej żarówki po 4 pomiarach, a w niektórych przypadkach po 3 pomiarach.

Zadanie 2.12. Entropia uszkodzeń:

$$H(X) = \mathrm{ld}\, 4 = 2 \text{ bity}$$

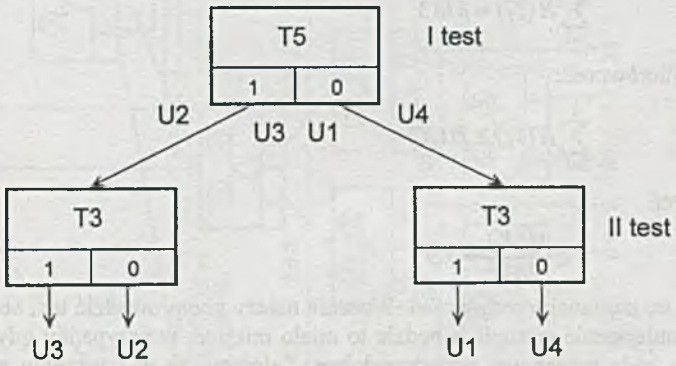
Jeden test daje maksymalne zmniejszenie niewiedzy o uszkodzeniu wtedy, gdy sygnalizacja uszkodzenia jest tak samo prawdopodobna jak brak tej sygnalizacji. Wówczas

$$H(Y) = 1 \text{ bit}$$

Dla zidentyfikowania uszkodzenia wystarczy zatem przeprowadzić $n = 3$ testy. Jako pierwszy wykonać należy test nr 5 lub nr 3, gdyż posiadają one maksymalną entropię równą 1 bit.

Jeżli np. w wyniku przeprowadzenia testu nr 5 stwierdzono istnienie uszkodzenia, wiadomo, że jest to uszkodzenie nr 2 lub nr 3 i wystarczy w celu identyfikacji uszkodzenia przeprowadzić test 1, lub 2, lub 3. W przeciwnym razie, gdy test 5 nie stwierdził uszkodzenia, to wiadomo, że ma miejsce uszkodzenie nr 1 lub 4 i wystarczy przeprowadzić w celu identyfikacji uszkodzenia test 3 lub 4. Przykładowy sposób testowania przedstawiono na *rys.2.12.1.*

Aby zidentyfikować uszkodzenie, wystarczy zatem przeprowadzić test 5 lub test 3.



Rys. 2.12.1

Zadanie 2.13. Cztery monety można uszeregować na 24 sposoby (stanowiące źródło X), jak to ilustruje tablica 2.13.1.

Prawdopodobieństwo, że dana kolejność monet jest uszeregowaniem od najcięższej do najlżejszej, jest dla wszystkich sposobów jednakowe, a zatem entropia źródła

$$H(X) = \mathrm{ld}\, 24 = 4.58 \text{ bitu}$$

Ponieważ każde ważenie ma możliwe 2 jednakowo prawdopodobne wyniki, więc doświadczenie złożone, polegające na k-krotnym ważeniu daje zmniejszenie entropii równe k bitów. Zatem aby

móc uszeregować monety od najcięższej do najlżejszej, trzeba wykonać minimum 5 ważeń. Sposób przeprowadzania ważenia dający mininalną liczbę ważeń przestawiono na *rys.2.13.1.*

Tablica 2.13.1

Lp.	Kolejność monet				Lp.	Kolejność monet			
1	1	2	3	4	13	3	1	2	4
2	1	2	4	3	14	3	1	4	2
3	1	3	2	4	15	3	2	4	1
4	1	3	4	2	16	3	2	1	4
5	1	4	3	2	17	3	4	1	2
6	1	4	2	3	18	3	4	2	1
7	2	1	3	4	19	4	1	3	2
8	2	1	4	3	20	4	1	2	3
9	2	3	1	4	21	4	2	1	3
10	2	3	4	1	22	4	2	3	1
11	2	4	1	3	23	4	3	1	2
12	2	4	3	1	24	4	3	2	1

Zadanie 2.14. Każda z monet może się okazać fałszywa i być przy tym lżejsza lub cięższa od pozostałych. Istnieje zatem 24 jednakowo prawdopodobnych możliwości stanowiących źródło X, którego entropia

$$H(X) = \mathrm{ld}\, 24 = 4.58 \text{ bitu}$$

Ponieważ każde ważenie (niech to będzie doświadczenie Y_i) ma możliwe 3 wyniki, więc doświadczenie złożone polegające na k-krotnym ważeniu może dać zmniejszenie entropii

$$\sum_{i=1}^{k} H(Y_i) = k \,\mathrm{ld}\, 3$$

Należy spełnić nierówność:

$$\sum_{i=1}^{k} H(Y_i) \geq H(X)$$

więc liczba ważeń

$$k \geq \frac{H(X)}{\mathrm{ld}\, 3} = 2.9$$

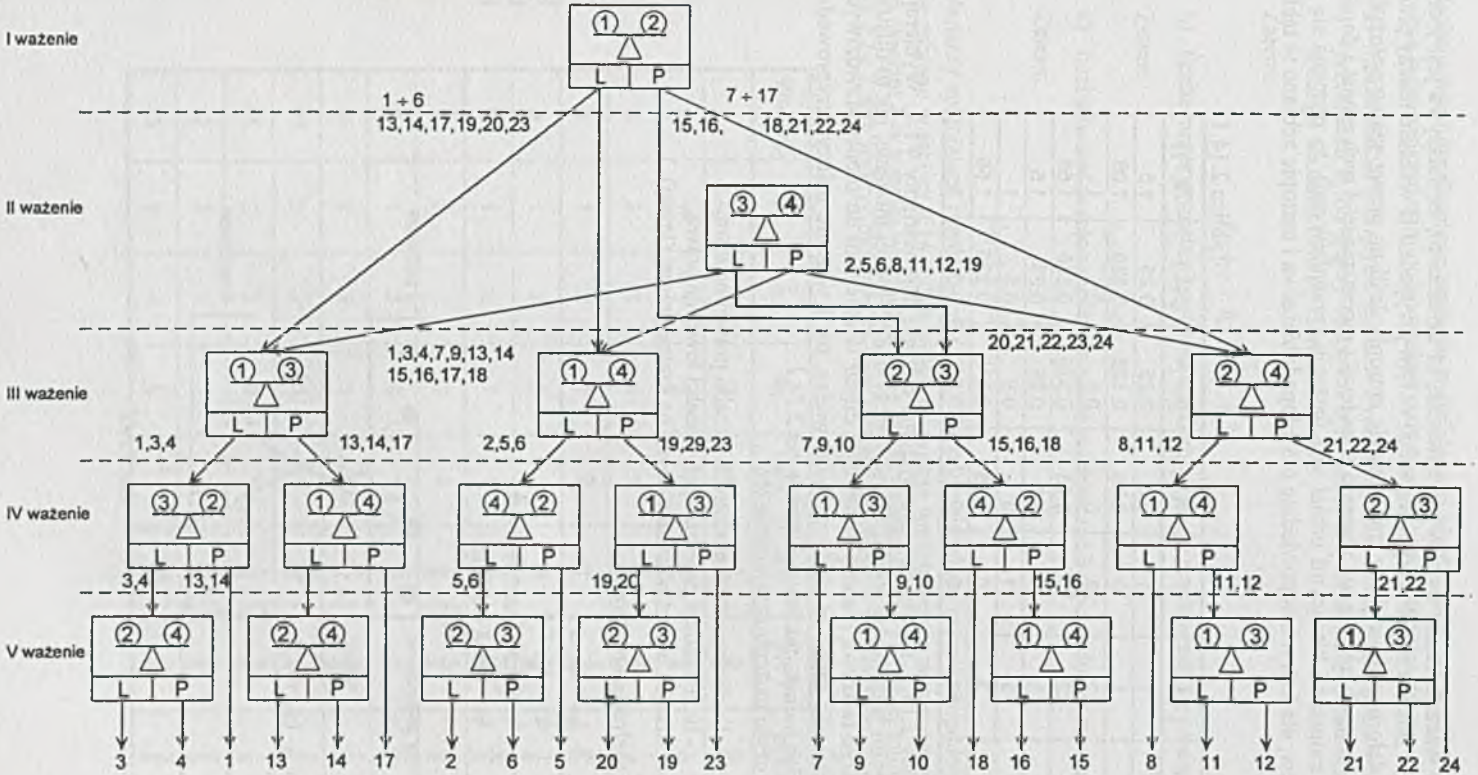
Potrzeba zatem co najmniej trzech ważeń. Ważenia należy przeprowadzić tak, aby każde dawało maksymalne zmniejszenie entropii, a będzie to miało miejsce, w przypadku gdy wszystkie trzy wyniki ważenia będą jednakowo prawdopodobne. Załóżmy, że w I ważeniu na obu szalkach znajduje się po i monet (i = 1,2,3,4,5,6). W tym przypadku prawdopodobieństwo równowagi R wynosi:

$$p(R) = \frac{12 - 2i}{12} = \frac{6 - i}{6}$$

a prawdopodobieństwa, że przeważy prawa szalka P lub lewa szalka L są takie same i wynoszą

$$p(\mathrm{P}) = p(\mathrm{L}) = \frac{i}{12}$$

Jak widać, by $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{P}) = p(\mathrm{L})$, to i musi być równe 4.


I ważenie
II ważenie
III ważenie
IV ważenie
V ważenie
1 + 6
13,14,17,19,20,23
7 + 17
15,16,
18,21,22,24
2,5,6,8,11,12,19
1,3,4,7,9,13,14
15,16,17,18
20,21,22,23,24
1,3,4
13,14,17
2,5,6
19,29,23
7,9,10
15,16,18
8,11,12
21,22,24
3,4
13,14
5,6
19,20
9,10
15,16
11,12
21,22
3 4 1 13 14 17 2 6 5 20 19 23 7 9 10 18 16 15 8 11 12 21 22 24

Rys. 2.13.1

Jeśli w wyniku I ważenia szalki były w równowadze, to oznacza to, że fałszywa jest jedna z monet nie biorących udziału w pierwszym ważeniu. W tym przypadku II ważenie należy przeprowadzić tak, aby dało ono największe zmniejszenie entropii. Jeśli na prawą szalkę położyć i spośród monet nie biorących udziału w I ważeniu, a na lewą j monet spośród tych monet i dopełnić lewą szalkę i-j monetami biorącymi udział w I ważeniu (prawdziwymi), to otrzyma się 8 możliwych wariantów, dla których odpowiednie prawdopodobieństwa i entropie zebrano w tablicy 2.14.1.

Tablica 2.14.1

Wariant	i	j	p(R)	p(P)	p(L)	$H(Y_2)$
1	1	1	0.5	0.25	0.25	1.5
2	1	0	0.75	0.125	0.125	1.06
3	2	2	0	0.5	0.5	1
4	2	1	0.25	0.375	0.375	1.56
5	2	0	0.5	0.25	0.25	1.5
6	3	1	0	0.5	0.5	1
7	3	0	0.25	0.375	0.375	1.56
8	4	0	0	0.5	0.5	1

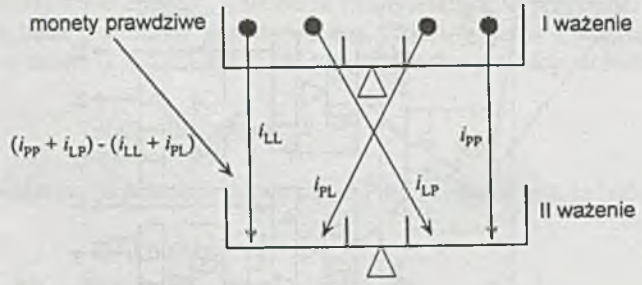
Jak widać z tablicy 2.14.1, największe zmniejszenie entropii dają warianty 4 i 7. Wybierając np. wariant 4 w trzecim ważeniu na obie szalki wystarczy dać po jednej monecie, jak to ilustruje *rys.2.14.2*, aby wykryć fałszywą monetę i ustalić jej ciężar w stosunku do monet prawdziwych. Jeśli w wyniku I ważenia szalki nie były w równowadze, to II ważenie należy przeprowadzić z udziałem wszystkich monet , tak jak to ilustruje *rys.2.14.1*.

Na rysunku tym użyto następujących oznaczeń:

i_{PL} - liczba monet przełożonych z szalki prawej na lewą,
i_{LP} - liczba monet przełożonych z szalki lewej na prawą,
i_{PP} (i_{LL}) - liczba monet pozostawionych na szalce prawej (lewej).

Oczywiście, trzeba spełnić nierówności:

$$i_{PP} + i_{PL} \le 4 \quad (1)$$
$$i_{LP} + i_{LL} \le 4 \quad (2)$$
$$i_{PP} + i_{LP} - (i_{LL} + i_{PL}) \le 4 \quad (3)$$
$$i_{PP} + i_{LP} \ge i_{PL} + i_{LL} \quad (4)$$



Rys. 2.14.1

Liczba wariantów drugiego ważenia spełniających nierówności (1) ÷ (4) jest bardzo duża, lecz można ją zmniejszyć eliminując warianty nie spełniające następujących warunków:

a) liczba monet biorących udział w I ważeniu, a nie biorących udziału w drugim ważeniu nie przekracza 3, bo gdyby fałszywa była jedna z tych monet, to nie dałoby się za pomocą jednego ważenia ustalić, która to moneta.

Zatem:

$$8 - i_{PP} + i_{LP} + i_{PL} \leq 3 \tag{5}$$

b) liczba monet pozostawionych na szalkach nie może przekraczać 3 z powodu jak w punkcie a).

Zatem:

$$i_{PP} + i_{LL} \leq 3 \tag{6}$$

c) liczba monet przełożonych nie może przekraczać 3 z powodu jak w punkcie a).

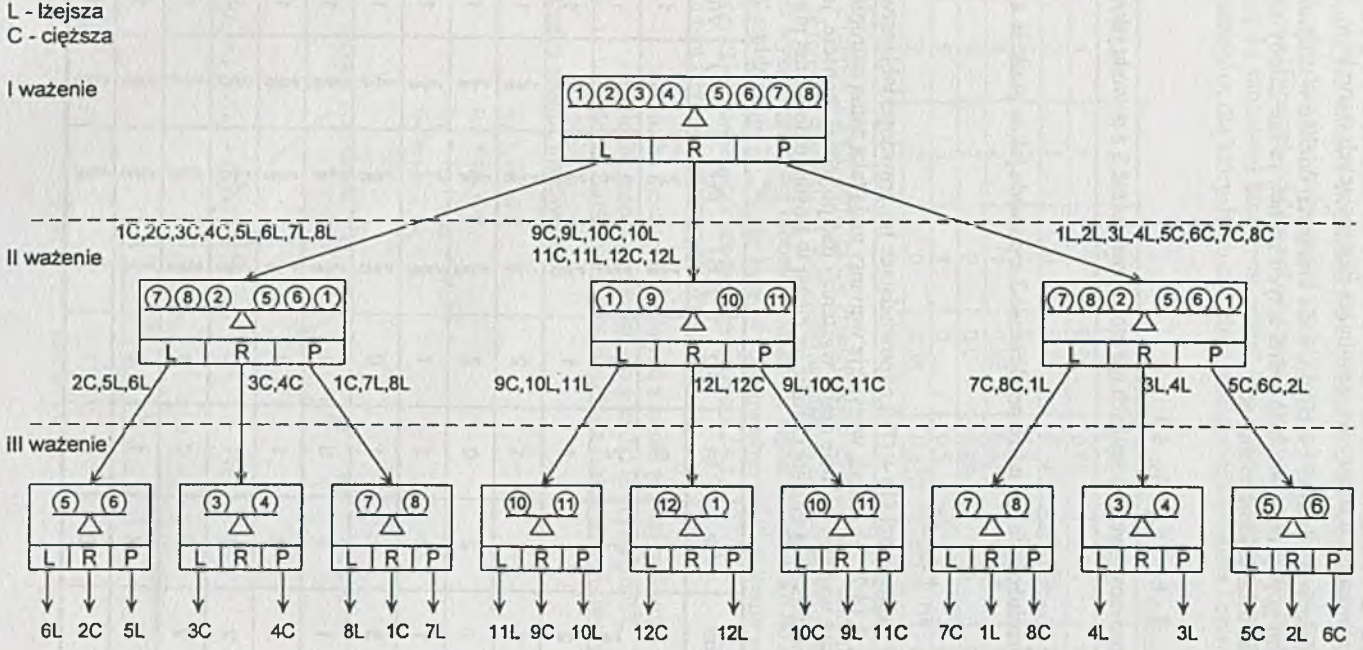
Zatem:

$$i_{PL} + i_{LP} \leq 3 \tag{7}$$

Warianty spełniające nierównoŝci (1) ÷ (7) i odpowiadające im prawdopodobieństwa oraz entropie zebrano w tablicy 2.14.2. Jak widać, wszystkie warianty mają taką samą entropię. Wybierając np. wariant 1 w trzecim ważeniu na dwie szalki wystarczy dać po jednej monecie, jak to ilustruje *rys.2.14.2*, aby wykryć fałszywą monetę i ustalić jej ciężar w stosunku do monet prawdziwych.

Tablica 2.14.2

Wariant	i_{PP}	i_{LP}	i_{PL}	i_{LL}	$p(\mathrm{R})$	$p(\mathrm{P})$	$p(\mathrm{L})$	$H(Y_2)$
1	2	1	2	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	1.56
2	2	1	2	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1.56
3	2	1	1	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1.56
4	1	2	1	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	1.56
5	1	2	0	2	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1.56
6	1	2	1	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1.56
7	3	1	1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1.56
8	1	3	0	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1.56
9	2	2	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	1.56
10	2	2	1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	1.56
11	2	2	0	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1.56
12	3	2	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	1.56
13	2	3	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	1.56


L - lżejsza
C - cięższa
I ważenie
1 2 3 4 5 6 7 8
L R P
1C,2C,3C,4C,5L,6L,7L,8L
9C,9L,10C,10L
11C,11L,12C,12L
1L,2L,3L,4L,5C,6C,7C,8C
II ważenie
7 8 2 5 6 1
1 9 10 11
2C,5L,6L
3C,4C
1C,7L,8L
9C,10L,11L
12L,12C
9L,10C,11C
7C,8C,1L
3L,4L
5C,6C,2L
III ważenie
5 6
3 4
7 8
10 11
12 1
6L 2C 5L
3C 4C
8L 1C 7L
11L 9C 10L
12C 12L
10C 9L 11C
7C 1L 8C
4L 3L
5C 2L 6C

Rys. 2.14.2

Zadanie 2.16. Dla przeprowadzenia dowodu można wykorzystać pierwszą własność entropii **W1** (zależność (1.3)).
Jeżeli za q_i podstawimy

$$q_i = \frac{a_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j}$$

to wówczas

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{ld} a_i \le -\sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{ld} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{ld} x_i + \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{ld}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right)$$

więc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{ld} x_i \le \operatorname{ld}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right)$$

lub

$$\operatorname{ld}\left(x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}\right) \le \operatorname{ld} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

Zatem

$$x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \le \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

Zadanie 2.17. Chcąc wykazać, że zmiany wszystkich prawdopodobieństw dążące do zrównania tych prawdopodobieństw dają zmniejszenie nieokreśloności, wystarczy dowieść, że na przykład jeśli

$$p_1 > p_2$$

a

$$p_1' = p_1 - \Delta p$$
$$p_2' = p_2 + \Delta p$$

gdzie:

$$\Delta p > 0 \quad \text{i} \quad p_1' \ge p_2'$$

to

$$H(p_1', \ldots, p_M') > H(p_1, \ldots, p_M)$$

DOWÓD:
Z definicji

$$H(p_1', \ldots, p_M') = -(p_1 - \Delta p)\operatorname{ld}(p_1 - \Delta p) - (p_2 - \Delta p)\operatorname{ld}(p_2 - \Delta p) - \sum_{i=3}^{M} p_i \operatorname{ld} p_i =$$

$$= -p_1 \operatorname{ld}(p_1 - \Delta p) - p_2 \operatorname{ld}(p_2 - \Delta p) - \sum_{i=3}^{M} p_i \operatorname{ld} p_i + \Delta p \operatorname{ld} \frac{p_1 - \Delta p}{p_2 - \Delta p}$$

Ponieważ jednak

$$\Delta p \operatorname{ld} \frac{p_1 - \Delta p}{p_2 - \Delta p} \ge 0$$

to

$$H(p'_1,...,p'_M) \geq -\mathrm{ld}(p_2+\Delta p) - p_2\,\mathrm{ld}(p_2-\Delta p) - \sum_{i=3}^{M} p_i\, ld\, p_i$$

Dokonując następujących podstawień:

$$q_1 = p_1 - \Delta p, \quad q_2 = p_2 + \Delta p, \quad q_i = p_i \quad (i = 3,...,M)$$

i wykorzystując **W1** entropii (zależność (1.3)), otrzymamy, że:

$$H(p'_1,...,p'_M) > H(p_1,...,p_M)$$ c.b.d.o.

Zadanie 2.18.

a) Każdej parze x_i oraz y_j odpowiada

$$z_k = x_i + y_j$$

gdzie:

$i = 1,..., M$
$j = 1,..., L$
$k = 1,..., ML$

Dla każdej trójki x_i, y_j, z_k słuszne jest, że

$$p(y_j, x_i) = p(z_k, x_i)$$

a stąd

$$p(y_j|x_i) = p(z_k|x_i)$$

Zatem wykorzystując zależność (1.8) otrzymamy

$$H(Y|X) = H(Z|X)$$

Jeśli X i Y są niezależne, to z **W5** entropii (zależność (1.10))

$$H(Y|X) = H(Y),$$

czyli wówczas

$$H(Z|X) = H(Y)$$

Natomiast wykorzystując **W3** entropii (zależność (1.7)), w przypadku gdy X i Y są niezależne, otrzymamy

$$H(Y) \leq H(Z) \quad \text{i} \quad H(X) \leq H(Z)$$

Zadanie 2.20. Położenie figury na szachownicy określić można na dwa sposoby.

I sposób:

Numerując pola od 1 do 64 wystarczy podać jedną z równoprawdopodobnych wiadomości ze źródła X o 64 wiadomościach.
Wówczas:

$$H(X) = \text{ld } 64 = 6 \text{ bitów}$$

II sposób:

Podając współrzędne 1,2,...,8 oraz a,b,c,d,e,f,g,h podać należy 2 wiadomości z 2 źródeł X i Y.
Wówczas

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y) = 2 \text{ ld } 8 = 6 \text{ bitów}$$

Zadanie 2.21. Jak wiadomo z zależnożci (1.9), entropia łączna

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

ale entropia warunkowa $H(Y|X) = 0$, ponieważ Y jest zdeterminowane przez X; stąd

$$H(Y) \leq H(X)$$

Równość występuje wtedy i tylko wtedy, gdy $H(X|Y) = 0$, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zdeterminowane przez Y, czyli gdy dla każdego y_j istnieje takie x_i, że $p(x_i|y_j) = 1$.

Zadanie 2.22. Entropie źródeł X i Y (z zależności (1.1)) są określone zależnościami

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i) \text{ld } p(x_i) = -0.35 \text{ld } 0.35 - 0.2 \text{ld } 0.2 - 0.45 \text{ld } 0.45 = 1.512 \text{ bitu}$$

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{2} p(y_i) \text{ld } p(y_i) = -0.6 \text{ld } 0.6 - 0.4 \text{ld } 04 = 0.971 \text{ bitu}$$

Entropia łączna (zależność (1.6))

$$H(X,Y) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} p(x_i.y_j) ld\ p(x_i, y_j) =$$

$$= 0.1 \text{ ld } 0.1 - 0.25 \text{ ld } 0.25 - 0.2 \text{ ld } 0.2 - 0.3 \text{ ld } 0.3 - 0.15 \text{ ld } 0.15 = 2.228 \text{ bitu}$$

Entropie warunkowe można wyliczyć znając entropię łączną i entropię niezależne, wykorzystując własność entropii łącznej (zależność (1.9))

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

skąd

$$H(X|Y) = 2.228 - 0.971 = 1.257 \text{ bitu}$$

a

$$H(Y|X) = 2.228 - 1.512 = 0.716 \text{ bitu}$$

Entropie warunkowe można też wyliczyć wykorzystując zależność (1.8). W tym przypadku wyliczyć należy dodatkowe prawdopodobieństwa warunkowe $p(x_i|y_j)$ oraz $p(y_j|x_i)$ wykorzystując zależności:

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \qquad i = 1,2,3$$

$$p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} \qquad j = 1,2$$

Wartości tych prawdopodobieństw zebrano w tablicach 2.22.1 i 2.22.2.

Tablica 2.22.1

$p(x_i\|y_j)$	x_1	x_2	x_3
y_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
y_2	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{3}{8}$

Tablica 2.22.2

$p(y_j\|x_i)$	x_1	x_2	x_3
y_1	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{2}{3}$
y_2	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{3}$

Zadanie 2.23.

$H(X) = 1.156$ bitu
$H(Y) = 1.571$ bitu
$H(X,Y) = 2.246$ bitu
$H(X\|Y) = 0.675$ bitu
$H(Y\|X) = 1.09$ bitu

Zadanie 2.24. Entropia łączna

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} p(x_i, y_j) ld\, p(x_i, y_j) =$$

$$= -2\,[0.12 \text{ ld } 0.12 + 0.10 \text{ ld } 0.10 + 0.08 \text{ ld } 0.08 +$$
$$+0.05 \text{ ld } 0.05 + 0.03 \text{ ld } 0.03 + 0.04 \text{ ld} 0.04 + 0.02 \text{ ld } 0.02] -$$
$$- 0.12 \text{ ld } 0.12 = 3.68 \ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

Entropie $H(X)$ i $H(Y)$ przy niezależnej pracy czujników:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i) \text{ld}\, p(x_i)$$

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{5} p(y_i) \text{ld}\, p(y_i)$$

Prawdopodobieństwa $p(x_i)$ i $p(y_i)$ można wyznaczyć na podstawie tablicy 2.24; wynoszą one

$p(x_1) = 0.12 + 0.10 + 0.08 + 0.05 + 0.03 = 0.38$
$p(x_2) = 0.02 + 0.04 + 0.12 + 0.04 + 0.02 = 0.24$
$p(x_3) = 0.03 + 0.05 + 0.08 + 0.10 + 0.12 = 0.38$
$p(y_1) = 0.12 + 0.02 + 0.03 = 0.17$
$p(y_2) = 0.10 + 0.04 + 0.05 = 0.19$
$p(y_3) = 0.08 + 0.12 + 0.08 = 0.28$
$p(y_4) = 0.05 + 0.04 + 0.10 = 0.19$
$p(y_5) = 0.03 + 0.02 + 0.12 = 0.17$

Zatem

$$H(X) = -2(0.38 \text{ ld } 0.38) - 0.24 \text{ ld } 0.24 = 1.559 \ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

$$H(Y) = -2(0.17 \text{ ld } 0.17) - 2(0.19 \text{ ld } 0.19) - 0.28 \text{ ld } 0.28 = 2.295 \ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

Do obliczenia entropii warunkowych wykorzystać można **W4** entropii (zależność (1.9)).

Wówczas

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 3.68 - 1.559 = 1.121 \ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 3.68 - 2.385 = 1.385 \ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

Ilość informacji podawanych do urządzenia przeliczającego w czasie T

$$n H(X,Y) = \frac{T}{t} H(X,Y) = \frac{30}{0{,}3} 3.68 = 368 \text{ bitów}$$

a na jednostkę czasu

$$\frac{H(X,Y)}{t} = \frac{3.68}{0.3} = 12.25 \ \frac{\text{bitu}}{\text{s}}$$

Zadanie 2.25. Przy błędzie wnoszonym ±1 % całej skali, czyli przy błędzie równym 10 działek, przyrząd daje taką samą ilość informacji jak przyrząd posiadający jedynie 50 działek, gdyż np. działki od 1 do 20 można zastąpić jedną działką, działki od 21 do 40 drugą itd. Zatem redundancja skali przyrządu

$$R = \frac{H_{\max}(X) - H(X)}{H_{\max}(X)} = \frac{\text{ld}1000 - \text{ld}50}{\text{ld}1000} = 0.433$$

Zadanie 2.26. W zadaniu:

rząd źródła Markowa $m = 2$
liczba elementów źródła $M = 2$

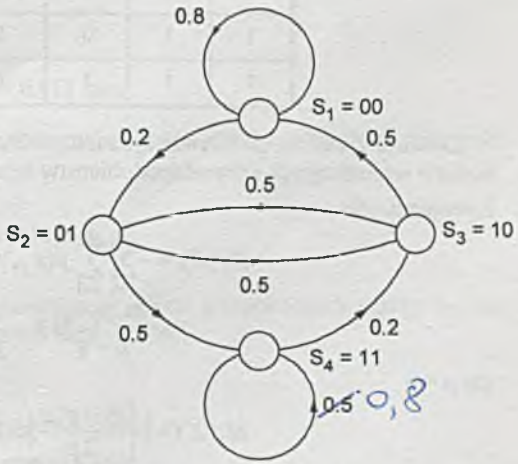
Zatem liczba stanów $n = M^m = 4$; są to stany:

$S_1 = 00$
$S_2 = 01$
$S_3 = 10$
$S_4 = 11$

Prawdopodobieństwo pozostania w stanie S_1 $p(S_1|S_1) = p(0|00) = p(1|11) = 0.8$, natomiast prawdopodobieństwa pozostania w stanie S_2 i S_3

$$p(S_2|S_2) = p(S_3|S_3) = 0$$

ponieważ np. po stanie $S_2 = 01$ może zostać wygenerowany symbol 0 i wówczas nastąpi przejście do stanu S_3, lub symbol 1 i wów-



Rys. 2.26.1

czas nastąpi przejście do stanu S_4. Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu S_2 do S_3 $p(S_3|S_2)$ jest równe prawdopodobieństwu, że po następnym wygenerowanym po 01 symbolem będzie 0, czyli

$$p(S_3|S_2) = p(0|01) = 0.5$$

Opierając się na prawdopodobieństwach warunkowych sporządzono wykres stanów przedstawiony na *rys.2.26.1.*

Zadanie 2.27. Z zależności (1.14) entropia źródła Markowa 2 rzędu wynosi

$$H_2(X) = -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_k, x_j, x_i)\, ld\, p(x_k | x_j, x_i)$$

Należy zatem wyznaczyć najpierw prawdopodobieństwa łączne $p(x_k, x_j, x_i)$ z zależności:

$$p(x_k, x_j, x_i) = p(x_i|x_k,x_j)\, p(x_k, x_j)$$

Wartości tych prawdopodobieństw zebrano w tablicy 2.27.1, a zatem

$$H_2(X) = -2\left(\frac{4}{14}\right)\mathrm{ld}\,0.8 - 2\left(\frac{1}{14}\right)\mathrm{ld}\,0.2 - 4\left(\frac{1}{14}\right)\mathrm{ld}\,0.5 = 0.81 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Tablica 2.27.1

x_i	x_j	x_k	$p(x_i\|x_k,x_j)$	$p(x_k,x_j)$	$p(x_k,x_j,x_j)$
0	0	0	0.8	$\frac{5}{14}$	$\frac{4}{14}$
0	0	1	0.2	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{14}$
0	1	0	0.5	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{14}$
0	1	1	0.5	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{14}$
1	0	0	0.5	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{14}$
1	0	1	0.5	$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{14}$
1	1	0	0.2	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{14}$
1	1	1	0.8	$\frac{5}{14}$	$\frac{4}{14}$

Zadanie 2.28. Na podstawie rysunku można wyznaczyć potrzebne wartości prawdowpodobieństw warunkowych i prawdopodobieństw łącznych, przedstawiono je w tablicy 2.28.1.

Entropia źródła:

$$H_1(X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_j, x_i)\,\mathrm{ld}\,p(x_i|x_j) =$$

$$= -\frac{\bar{p}q}{p+q}\mathrm{ld}\,\bar{p} - \frac{p^2}{p+q}\mathrm{ld}\,q - \frac{q^2}{p+q}\mathrm{ld}\,p + \frac{p\bar{q}}{p+q}ld\,\bar{q}$$

dla $p = q$

$$H_1(X) = -\left[\frac{(1-p)p}{2p}\mathrm{ld}(1-p) + \frac{p}{2}\mathrm{ld}\,p + \frac{p}{2}\mathrm{ld}\,p + \frac{(1-p)p}{2p}\mathrm{ld}(1-p)\right] =$$

$$= -(1-p)\mathrm{ld}(1-p) - p\,\mathrm{ld}\,p = -\bar{p}\,\mathrm{ld}\,\bar{p} - p\,\mathrm{ld}\,p$$

$$H_1(X) = H_{1,\max}(X), \quad \text{gdy} \quad p = \tfrac{1}{2},$$

wówczas

$$H_1(X) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{ld}\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{ld}\tfrac{1}{2} = 1 \ \frac{\text{bit}}{\text{odczyt}}$$

Należy zauważyć, że dla $p = q = \frac{1}{2}$ źródło z pamięcią ma taką samą entropię jak źródło bez pamięci.

Tablica 2.28.1

Lp.	x_i	x_j	$p(x_i\|x_j)$	$p(x_j)$	$p(x_i,x_j)$
1	0	0	$\overline{p}$	$\frac{q}{p+q}$	$\frac{\overline{p}q}{p+q}$
2	0	1	q	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{p+q}$
3	1	0	p	$\frac{q}{p+q}$	$\frac{pq}{p+q}$
4	1	1	$\overline{q}$	$\frac{q}{p+q}$	$\frac{p\overline{q}}{p+q}$

Zadanie 2.29.

a) $H_1(X) = -\mathrm{ld}(1-p) + p\,\mathrm{ld}(1-p) - p\,\mathrm{ld}\,0.5p$

b) $p = \frac{2}{3}$ $\quad H_{1,\max}(X) = 1.585$ bitu

Zadanie 2.30.

a) Jeśli obie wiadomości źródła binarnego są jednakowo prawdopodobne, to

$$H(X) = 1 \text{ bit}$$

b) W tym przypadku

$$H(X) = -\tfrac{3}{4}\mathrm{ld}\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\mathrm{ld}\tfrac{1}{4} = 0.811 \text{ bitu}$$

c) Dla źródła Markowa pierwszego rzędu entropię obliczyć należy z ogólnej zależności (1.14)

$$H_1(X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i,x_j)\,\mathrm{ld}\,p(x_i,x_j)$$

W rozpatrywanym przykładzie na podstawie prawdopodobieństw warunkowych należy wyznaczyć prawdopodobieństwa łączne, tak jak to ilustruje tablica 2.30.1.

Zatem

$$H_1(X) = -\tfrac{1}{3}\mathrm{ld}\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6}\mathrm{ld}\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}\mathrm{ld}\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\mathrm{ld}\tfrac{2}{3} =$$
$$= -\tfrac{2}{3}\mathrm{ld}\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}\mathrm{ld}\tfrac{1}{3} = 0.918 \text{ bitu}$$

Tablica 2.30.1

x_i	x_j	$p(x_i\|x_j)$	$p(x_i,x_j) = p(x_j)p(x_i\|x_j)$
0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

d) Prawdopodobieństwa warunkowe i łączne zebrane zostały w tablicy 2.30.2.

Zatem

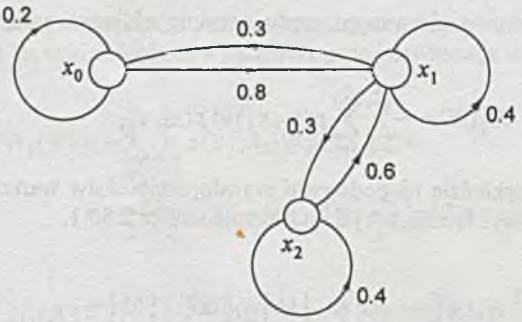
$$H_1(X) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{ld}\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{4}\mathrm{ld}1 - \tfrac{1}{4}\mathrm{ld}\tfrac{1}{3} = 0.688 \text{ bitów}$$

Tablica 2.30.2

x_i	x_j	$p(x_j)$	$p(x_i\|x_j)$	$p(x_i,x_j)$
0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
1	1	$\frac{1}{4}$	0	0

Zadanie 2.31. $H_1(X) = 0.77 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$

Zadanie 2.32. Układ sygnalizacji napełnienia zbiornika jest przykładem źródła Markowa 1 rzędu. Na *rys.2.32.1* przedstawiono je w postaci graficznej.



Rys. 2.32.1

Entropia źródła Markowa 1 rzędu:

$$H_1(X) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_j, x_i) \operatorname{ld} p(x_i \mid x_j) =$$

$$= 0.1 \operatorname{ld} 0.4 - 0.15 \operatorname{ld} 0.6 - 0.15 \operatorname{ld} 0.3 - 0.2 \operatorname{ld} 0.4 - 0.15 \operatorname{ld} 0.3 -$$

$$-0.15 \operatorname{ld} 0.6 - 0.1 \operatorname{ld} 0.4 = 1.26 \ \frac{\text{bitu}}{\text{sygnał}}$$

Natomiast nadmiar informacji obliczony z definicji wynosi:

$$R = \frac{H_{max} - H_1}{H_{max}} = \frac{\operatorname{ld} 3 - 1.26}{\operatorname{ld} 3} = 0.205$$

Zadanie 2.33.

$$H(X) = 1.542 \ \frac{\text{bitu}}{\text{poziom}}$$

$$H_1(X) = 0.89 \ \frac{\text{bitu}}{\text{poziom}}$$

Zadanie 2.34.

$$H(X,Y) = 1.72 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

$$H(X) = 0.722 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

$$H(Y) = 0.999 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 2.35. Prawdopodobieństwa pojawienia się symboli na wyjściu wyliczyć można z zależności ogólnej

$$p(y_i) = \sum_{j=1}^{L} p(y_i \mid x_i) p(x_i) \qquad i = 1,\ldots,M$$

czyli

$$p(y_1) = p(y_1 \mid x_1) p(x_1) + p(y_1 \mid x_2) p(x_2) =$$

$$= \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{21}{40}$$

$$p(y_2) = p(y_2 \mid x_1) p(x_1) + p(y_2 \mid x_2) p(x_2) = \tfrac{19}{40}$$

Natomiast prawdopodobieństwa warunkowe wyliczyć można z zależności ogólnej (wzór Bayesa)

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(y_j \mid x_i) p(x_i)}{p(y_j)} \qquad \begin{matrix} i = 1,\ldots,M \\ j = 1,\ldots,L \end{matrix}$$

czyli

$$p(x_1 \mid y_1) = \frac{p(y_1 \mid x_1) p(x_1)}{p(y_1)} = \tfrac{20}{21}$$

$$p(x_2 \mid y_2) = \frac{p(y_2 \mid x_2) p(x_2)}{p(y_2)} = \tfrac{9}{19}$$

$$p(x_2 \mid y_1) = \tfrac{1}{21}$$

$$p(x_1 \mid y_2) = \tfrac{10}{19}$$

Zadanie 2.36. Z zależności (1.11) informacja wzajemna

$$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y)$$

gdzie:

$$H(X \mid Y) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_j)\,\mathrm{ld}\, p(x_i \mid y_j)$$

Należy więc najpierw wyznaczyć

$p(y_j)$ oraz $p(x_i|y_j)$, następnie $p(x_i, y_j)$ $\quad i = 1, 2$ $\quad j = 1, 2, 3$

Prawdopodobieństwa występowania y_1, y_2 i y_3 na wyjściu kanału wynoszą

$$p(y_1) = p(x_1)p(y_1 \mid x_1) + p(x_2)p(y_1 \mid x_2) = \tfrac{1}{8}$$
$$p(y_2) = \tfrac{1}{4}$$
$$p(y_3) = \tfrac{5}{8}$$

Korzystając ze wzoru Bayesa obliczyć można prawdopodobieństwa warunkowe i łączne

$$p(x_1 \mid y_1) = \frac{p(y_1 \mid x_1)p(x_1)}{p(y_1)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 1 \qquad \text{więc} \quad p(x_1, y_1) = \tfrac{1}{8}$$

analogicznie

$$p(x_2 \mid y_1) = \frac{p(y_1 \mid x_2)p(x_2)}{p(y_1)} = 0 \qquad p(x_2, y_1) = 0$$

$$p(x_1 \mid y_2) = 1 \qquad p(x_1, y_2) = \tfrac{1}{4}$$

$$p(x_2 \mid y_2) = 0 \qquad p(x_2, y_2) = 0$$

$$p(x_1 \mid y_3) = \tfrac{1}{5} \qquad p(x_1, y_3) = \tfrac{1}{8}$$

$$p(x_2 \mid y_3) = \tfrac{4}{5} \qquad p(x_2, y_3) = \tfrac{4}{8}$$

Zatem

$$H(X|Y) = 0.45 \text{ bitu}$$

a ponieważ

$$H(X) = 1\,\text{bit} \quad \text{więc} \quad I(X \mid Y) = 0.55\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Informację wzajemną można by wyznaczyć również wykorzystując zależność

$$I(X \mid Y) = I(Y \mid X) = H(Y) - H(X \mid Y) = 1.3 - 0.75 = 0.55\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 2.37. W zadaniu tym pomiar można traktować jako przesyłanie informacji kanałem z zakłóceniami, jak to ilustruje *rys.2.37.1.*

Informacja wzajemna

$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y)$

więc strata informacji:

$$H(X \mid Y) = -\sum_{i=1}^{100} p(y_i) \sum_{j=1}^{100} p(x_j \mid y_i) ld\, p(x_j \mid y_i)$$

Łatwo sprawdzić, że

$p(y_j) = 0.01 \qquad j = 1,...,100)$

zatem

$H(X|Y) = p(y_1)\,[p(x_1|y_1)\ \mathrm{ld}\ p(x_1|y_1) + p(x_2|y_1)\ \mathrm{ld}\ p(x_2|y_1)] +$

$+ p(y_{100})\,[p(x_{100}|y_{100})\ \mathrm{ld}\ p(x_{100}|y_{100}) +$

$+ p(x_{99}|y_{100})\ \mathrm{ld}\ p(x_{99}|y_{100}) +$

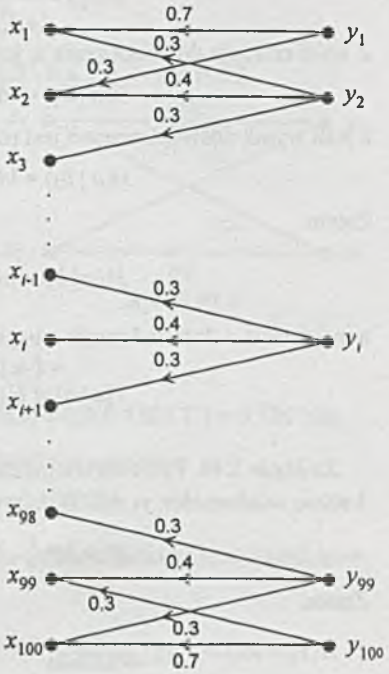
$+ 98\ p(y_2)\,[p(x_1|y_2)\ \mathrm{ld}\ p(x_1|y_2) +$

$+ p(x_2|y_2)\ \mathrm{ld}\ p(x_2|y_2) + p(x_3|y_2)\ \mathrm{ld}\ p(x_3|y_2)] =$

$= 2(0.01)[0.7\ \mathrm{ld}\ 0.7 + 0.3\ \mathrm{ld}\ 0.3] +$

$+ 98\ (0.01)\ [0.3\ \mathrm{ld}\ 0.3 + 0.4\ \mathrm{ld}\ 0.4 + 0.3\ \mathrm{ld}\ 0.3] =$

$= 1.54 \ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$



Rys. 2.37.1

Ponieważ $H(X) = \mathrm{ld}\ 100 = 6.64 \ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$, więc informacja wzajemna pozyskiwana z pomiaru

$$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) = 5.1 \ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

Zadanie 2.38.

$$I(X|Y) = 0.92 \ \frac{\text{bitu}}{\text{pomiar}}$$

Zadanie 2.39. Doświadczenie *a* posiada *N* jednakowo prawdopodobnych wyników:

$$p(a_i) = \frac{1}{N} \qquad i = 1,..., N$$

Zatem entropia doświadczenia a

$$H(a) = \mathrm{ld}\ N$$

Jeśli *m* z *N* liczb dzieli się przez *n*, to prawdopodobieństwo wybrania liczby podzielnej przez *n*

$$p(b_1) = \frac{m}{N}$$

a prawdopodobieństwo wybrania liczby niepodzielnej przez n

$$p(b_2) = \frac{N-m}{N}$$

Z kolei entropia doświadczenia a, jeśli wynik doświadczenia b jest równy b_1, wynosi

$$H(a \mid b_1) = \mathrm{ld}\, m$$

a jeśli wynik doświadczenia b jest równy b_2

$$H(a \mid b_2) = \mathrm{ld}\,(N - m)$$

Zatem

$$H(a \mid b) = p(b_1)H(a \mid b_1) + p(b_2)H(a \mid b_2) = \frac{m}{N}\mathrm{ld}\, m + \frac{N-n}{N}\mathrm{ld}\,(N-m)$$

a informacja o doświadczeniu a uzyskana z doświadczenia b

$$I(a \mid b) = H(a) - H(a \mid b) = \mathrm{ld}\, N - \frac{m}{N}\mathrm{ld}\, m\frac{N-n}{N}\mathrm{ld}\,(N-m)$$

Zadanie 2.40. Przetwornik można przedstawić jak na *rys.2.40.1.* Na wyjściu otrzymać można 3 różne wiadomości: $y_1 = 0.01$, $y_2 = 0.0025$ i $y_3 = 0$ z prawdopodobieństwami:

$$p(y_1) = \tfrac{2}{6},\ p(y_2) = \tfrac{2}{6}\ i\ p(t_3) = \tfrac{1}{3}$$

Zatem

$$H(Y) = \mathrm{ld}\, 3 = 1.58\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

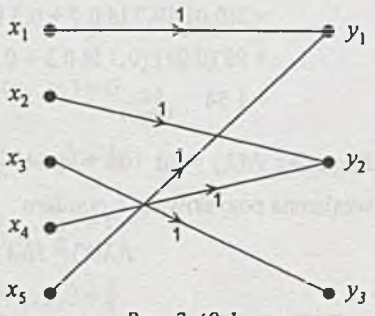
Informacja wzajemna

$$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) = \mathrm{I}(Y|X) = H(Y) - H(Y|X)$$

Ponieważ

$$H(Y|X) = 0$$

to $I(X|Y) = H(Y) = 1.58\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$



Rys. 2.40.1

a strata informacji

$$H(X|Y) = H(X) - H(Y) = 2.25 - 1.58 = 0.67\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

gdyż

$$H(X) = \tfrac{2}{3}\mathrm{ld}\, 6 + \tfrac{1}{3}\mathrm{ld}\, 3 = 2.25\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 2.41. Egzamin można traktować jako przesyłanie informacji przez kanał z zakłóceniami, jak to ilustruje *rys.2.41.1.*

Wzrost nieokreśloności o wiedzy studenta spowodowany tym, że egzamin zdają również ci, którzy nie opanowali całego materiału, a nie zdają również ci, którzy opanowali cały materiał, jest równy stracie informacji, czyli entropii warunkowej $H(X|Y)$.

Entropię tę można wyliczyć z zależności:

$$H(X|Y) = H(Y) + H(Y|X) - H(X)$$

Wystarczy zatem wyznaczyć uprzednio prawdopodobieństwa $p(y_i)$:

$$p(y_1) = p(y_1|x_1)p(x_1) + p(y_1|x_2)p(x_2) = 0.8 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.6$$

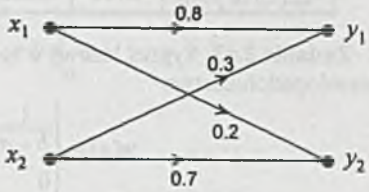
oraz

$$p(y_2) = 0.4$$

Zatem

$$H(Y) = H(X)$$

i



Rys. 2.41.1

$$H(X \mid Y) = H(Y \mid X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i) \sum_{j=1}^{2} p(y_j \mid x_i) \operatorname{ld} p(y_j \mid x_i) =$$

$$= -[0.6(0.8 \operatorname{ld} 0.8) + 0.6(0.2 \operatorname{ld} 0.2) + 0.4(0.3 \operatorname{ld} 0.3) + 0.4(0.7 \operatorname{ld} 0.7)] = 0.785 \text{ bitu}$$

Natomiast informacja wzajemna, czyli ilość informacji uzyskiwanej z egzaminu

$$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) = 0.97 - 0.785 = 0.186 \text{ bitu}$$

Zadanie 2.42. Prawdopodobieństwo pojawienia się sygnału o danym poziomie obliczyć można według formuły przybliżonej:

$$p(x_i) = w(x_i)\Delta x = \frac{1}{2a}\Delta x e^{-\frac{|x_i|}{a}} = 0.2e^{-2|x_i|} \qquad i = 0,1,...,8$$

Wyniki umieszczono w tablicy 2.42.1.

Tablica 2.42.1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$w(x_i)$	1	0.67	0.45	0.30	0.20	0.14	0.091	0.061	0.041
$p(x_i)$	0.2	0.135	0.090	0.060	0.040	0.027	0.018	0.012	0.008

Oczywiście $p(x_i) = p(-x_i)$.
Zatem entropia

$$H(X) = -p(x_0) \operatorname{ld} p(x_0) - 2\sum_{i=1}^{8} p(x_i) \operatorname{ld} p(x_i)$$

gdzie

$$-p(x_0) \operatorname{ld} p(x_0) = 0.464 \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

a wartości $-2p(x_i) \operatorname{ld} p(x_i)$ zebrano w tablicy 2.42.2. Zatem $H(X) = 3.483 \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$

Ilość odczytów

$$n = \frac{T}{\Delta t} = 100$$

czyli ilość informacji uzyskanej o układzie (zmniejszenie nieokreśloności układu) w czasie T wynosi $n\,H(X) = 348.3$ bitu.

Tablica 2.42.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$-2p(x_i)\,\mathrm{ld}\,p(x_i)$	0.780	0.625	0.487	0.371	0.281	0.210	0.153	0.112

Zadanie 2.43. Sygnał losowy o rozkładzie równomiernym w przedziale od a do b ma gęstość prawdopodobieństwa

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & x < a,\ x > b \end{cases}$$

oraz entropię

$$H(X) = \int_a^b \frac{1}{b-a} \mathrm{ld}(b-a)\,dx = \mathrm{ld}(b-a)$$

Zatem

a) $H(X) = \mathrm{ld}\,2 = 1 \dfrac{\text{bit}}{\text{zdarzenie}}$

b) $H(X) = \mathrm{ld}\,0.5 = -1 \dfrac{\text{bit}}{\text{zdarzenie}}$

Jak widać, sygnał o rozkładzie równomiernym w przedziale $\Delta = b - a$ dla $\Delta > 1$ ma entropię dodatnią, a dla $0 < \Delta < 1>$ ma entropię ujemną.

Zadanie 2.44.

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 0 \le x \le 5 \\ 0 & x < 0,\ x > 5 \end{cases}$$

a) Jeżeli przyrząd pomiarowy wyskalowany jest w woltach, to sygnał ciągły zastępowany jest przez sygnał dyskretny o prawdopodobieństwach

$$p(x_i) = w(x_i)\,\Delta x \quad i = 1,...,5$$

gdzie:

$$w(x) = \tfrac{1}{5}$$

$$\Delta x = 1$$

Zatem

$$H(X) = \mathrm{ld}\,5 = 2.32 \dfrac{\text{bitu}}{\text{wskazanie}}$$

b) Analogicznie uwzględniając, że

$$w(x_i) = \tfrac{1}{5}$$

$$\Delta x = 10^{-3}$$

wówczas

$$H(X) = \mathrm{ld}\,5000 = 12.28 \dfrac{\text{bitu}}{\text{wskazanie}}$$

Zadanie 2.45.

$$H(X) = -\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \operatorname{ld} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= -\int_0^\infty \lambda \operatorname{ld} \lambda e^{-\lambda x} dx - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} (-\lambda x) \operatorname{ld} e \, dx =$$

$$= \operatorname{ld} \lambda e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \operatorname{ld} e \left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty =$$

$$= -\operatorname{ld} \lambda + \operatorname{ld} e = \operatorname{ld} \frac{e}{\lambda}$$

Przy obliczaniu całek wykorzystano następującą zależność

$$\int te^t dt = te^t - e^t$$

Zadanie 2.46.

$$H(X) = 1.4 \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

Zadanie 2.47. Związek między dystrybuantą $W(x)$ a rozkładem (gęstością) prawdopodobieństwa $w(x)$ jest następujący:

$$W(x) = \int_{-\infty}^{x} w(x) dx$$

Zatem dla podanej w temacie dystrybuanty

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \; x > 1 \\ 2x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Zatem

$$H(X) = -\int_0^1 2x \operatorname{ld} 2x \, dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{(2x)^2}{2} \ln(2x) - \frac{(2x)^2}{4} \right]_0^1 =$$

$$= -1 + \frac{1}{2 \ln 2} = \operatorname{ld}\left(\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)$$

Zadanie 2.48. Dla rozkładu normalnego

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2x\sigma}} e^{\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

gdzie:

σ - odchylenie standardowe,
σ^2 - wariancja (dyspersja),
x_0 - wartość oczekiwana.

Entropia

$$H(X) = \mathrm{ld}\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right)$$

zatem dla σ_1

$$H_1(X) = \mathrm{ld}\left(\sigma_1\sqrt{2\pi e}\right)$$

a dla σ_2

$$H_2(X) = \mathrm{ld}\left(\sigma_2\sqrt{2\pi e}\right)$$

czyli przyrost entropii

$$\Delta H = H_2(X) - H_1(X) = \mathrm{ld}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Zadanie 2.49. Jeśli wiadomo, że $p\{x \geq 11\} = 0.003$, to

$$\int_{11}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 0.003$$

Z tablic rozkładu normalnego np. [15] wynika, że $\sigma = 3.7$. Zatem

$$H(X) = ld\left(\sqrt{2\pi e}3.7\right)$$

W widmie o szerokości ΔF jest $2\Delta F$> częstotliwości (ΔF częstotliwości dodatnich i ΔF ujemnych). Zatem entropia sygnału na jednostkę czasu

$$H_t(X) = 2\Delta F\, H(X)$$

a entropia jednego pełnego sygnału

$$H_T(X) = TH_t(X) = 2T\,\Delta F\, ld\left(\sqrt{2\pi e}3.7\right)$$

Zadanie 2.50. Entropia zmiennej losowej x

$$H(X) = \mathrm{ld}\ 256 = 8 \text{ bitów.}$$

Ilość informacji uzyskana z jednego pomiaru

$$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y)$$

a entropia warunkowa

$$H(X \mid Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x \mid y)w(y)\, ld\, w(x \mid y)\, dxdy$$

ponieważ

$$w(x \mid y) = W(x \mid x+z) = w(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

więc

$$H(X \mid Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(z)w(y)\,\mathrm{ld}\,w(z)\,dydz =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} w(z)\,\mathrm{ld}\,w(z)\,dz = H(Z) = \mathrm{ld}\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right) = 2.047\ \text{bitu}$$

natomiast

$$I(X \mid Y) = 5.953\ \frac{\text{bitu}}{\text{pomiar}}$$

Zadanie 2.51. Po zastąpieniu źródła ciągłego źródłem dyskretnym można wyliczyć prawdopodobieństwa według formuły przybliżonej, tzn.

$$p(x_i) = w(x_i)\,\Delta x$$

Wówczas entropia

$$H(X) = -\sum_{i=-\infty}^{\infty} \Delta x\, w(x_i)\,\mathrm{ld}\,\Delta x\, w(x_i) \cong \mathrm{ld}\left(\frac{\sqrt{2\pi e}}{\Delta x}\sigma\right) = 5.87\ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

Natomiast gdyby pomiar pozbawiony był błędów, to wówczas

$$H^*(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,\mathrm{ld}\,w(x)\,dx = \mathrm{ld}\left(\sqrt{2\pi e}\cdot\sigma\right) = 3.55\ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

Zatem wskutek niedokładności pomiaru następuje zwiększenie entropii o ΔH równe:

$$\Delta H = H(X) - H^*(X) = -\mathrm{ld}\,\Delta x = 2.32\ \frac{\text{bitu}}{\text{odczyt}}$$

Zadanie 2.52. Entropia zakłócenia na wejściu

$$H(X_1) = \tfrac{1}{2}\mathrm{ld}\,2\pi e\sigma_1^2 = -0.789\ \text{bitu}$$

Wariancja na wyjściu wzmacniacza wynosi

$$\sigma_2^2 = k^2\sigma_1^2$$

Zatem entropia zakłócenia na wyjściu

$$H(X_2) = \tfrac{1}{2}\mathrm{ld}\,2\pi e k^2\sigma_1^2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{ld}\,2\pi e\sigma_1^2 + \mathrm{ld}\,k = H(X_1) + \mathrm{ld}\,k = 5.855\ \text{bitu}$$

tj.

$$H(Y_1) \neq H(X_2)$$

Wniosek: entropia sygnałów ciągłych zależy od współczynnika skali.

Zadanie 2.53. Niedokładność pomiaru wielkości x przyrządem cyfrowym określona jest dwoma składnikami. Pierwszy nazywany błędem podstawowym $\Delta_p\%$ lub klasą przyrządu jest stały dla danego przyrządu niezależnie od wartości mierzonej. Drugi składnik jest to tzw. błąd kwantowania $\Delta_k\%$, wynikający z zasady działania przyrządu cyfrowego (kwantowania). Wartość bezwzględna Δ_k wynosi dla danego przyrządu jedną jednostkę (kwant) na ostatniej pozycji pola odczytowego. Zatem całkowity bezwzględny błąd pomiaru przyrządem cyfrowym wynosi

$$\Delta = x\frac{\Delta_p\%}{100}+1$$

a błąd względny w procentach wynosi

$$\Delta_p\% + \Delta_k\%$$

gdzie:

$$\Delta_k\% = \frac{1}{M}100\%$$

a M - liczba kwantów odczytywana z pola odczytowego przyrządu.
W zadaniu spełnić należy warunek

$$\Delta_k\% = \frac{100\%}{M} \le 0.1\Delta_p\% = 10^{-3}\ \%$$

co zachodzi dla

$$M \ge 10^5$$

czyli pole odczytowe powinno mieć przynajmniej 5 cyfr.

Zadanie 2.54.

$$\Delta_k\% = 0.008\ \% \qquad \Delta\% = 0.018\ \%$$

Zadanie 2.55. Zależność pomiędzy procentowym średniokwadratowym błędem kwantowania a krokiem kwantowania Δx jest następująca:

$$\sigma_{\Delta_k\%} = \frac{\Delta x\%}{2\sqrt{3}}$$

z kolei

$$\Delta x\% = \frac{100\%}{M}$$

gdzie:

M - liczba poziomów kwantowania.

Zatem, by błąd $\sigma_{\Delta_k\%}$ nie przekraczał 0.3 %, należy spełnić nierówność

$$\Delta x\% \le 0.3\cdot 2\sqrt{3} = 1.039$$

co zachodzi dla

$$M \ge 96.24$$

Zatem niezbędna liczba poziomów kwantowania dająca średniokwadratowy błąd kwantowania, nie przekraczający 0.3 %, wynosi 97.

Zadanie 2.56. Średnia moc sygnału (z zależności (1.24))

$$P_T = \int_0^A x^2 w(x)dx = \int_0^A x^2 \frac{1}{A}dx = \frac{A^2}{3} = \frac{1}{\pi T}\int_0^\infty |F(j\omega)|^2\, d\omega$$

oraz średnia moc odrzuconej części widma sygnału $x(t)$ (z (1.25))

$$P_{\omega_g} = \frac{1}{\pi T} \int_{\omega_g}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \, d\omega$$

Natomiast względna moc odrzuconej części gęstości energii widmowej wynosi (z (1.26)):

$$a_{\omega_g} = \frac{\int_{\omega_g}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \, d\omega}{\int_{0}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \, d\omega} = \frac{P_{\omega_g}}{P_T} = 0.05$$

Z zależności (1.23) średniokwadratowy błąd próbkowania spowodowany ograniczeniem widma częstotliwościowego sygnału wyniesie

$$\sigma_{\omega_g} = \frac{a_{\omega_g} P_T}{A^2} = \frac{0.05A^2}{3A^2} 100\% = 1.67\%$$

Zadanie 2.57.

$k = 3$ ważenia.

Zadanie 2.58.

a) Zakładając, że źródło jest bezpamięciowe, otrzymamy następujący rozkład prawdopodobieństw (bierzemy pod uwagę pierwszych 25 symboli):

$$p(0) = \frac{10}{25}, \qquad p(1) = \frac{15}{25}$$

a zatem entropia źródła $H_0 = 0.971$ bitu.

b) Przyjmujemy, że jest to źródło Markowa pierwszego rzędu o dwóch stanach 0 i 1 przyjmowanych z prawdopodobieństwami jak w a). Dla obliczenia prawdopodobieństw przejścia z jednego stanu w inny uwzględnino 26 symboli. Prawdopodobieństwa te wynoszą:

$$p(0\,|\,1) = \frac{7}{15} \qquad p(1\,|\,1) = \frac{8}{15}$$

$$p(0\,|\,0) = \frac{3}{10} \qquad p(1\,|\,0) = \frac{7}{10}$$

A zatem prawdopodobieństwa łączne wynoszą:

$$p(0\ 0) = p(0\,|\,0)p(0) = \frac{3}{25}$$

$$p(0\ 1) = p(1\,|\,0)p(0) = \frac{7}{25}$$

$$p(1\ 0) = p(0\,|\,1)p(1) = \frac{7}{25}$$

$$p(1\ 1) = p(1\,|\,1)p(1) = \frac{8}{25}$$

i entropia źródła:

$$H_1 = -\frac{7}{25}\mathrm{ld}\frac{7}{15} - \frac{8}{25}\mathrm{ld}\frac{8}{15} - \frac{3}{25}\mathrm{ld}\frac{3}{10} - \frac{7}{25}\mathrm{ld}\frac{7}{10} = 0.951 \text{ bitu}$$

c) Przyjmujemy źródło jako źródło Markowa drugiego rzędu o czterech stanach 00, 01, 10 i 11. Prawdopodobieństwa ich wystąpienia policzone zostały w punkcie b). Przy obliczaniu prawdopodobieństw przejścia z jednego stanu w drugi uwzględniono 27 symboli. Prawdopodobieństwa te wynoszą:

$$p(0|00) = \tfrac{1}{3} \qquad p(1|10) = \tfrac{2}{3}$$

$$p(0|01) = \tfrac{3}{7} \qquad p(1|01) = \tfrac{4}{7}$$

$$p(0|10) = \tfrac{2}{7} \qquad p(1|10) = \tfrac{5}{7}$$

$$p(0|11) = \tfrac{3}{8} \qquad p(1|11) = \tfrac{4}{8}$$

A zatem entropia źródła Markowa drugiego rzędu

$$H_2(x) = -\tfrac{3}{25}\left(\tfrac{1}{3}\mathrm{ld}\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\mathrm{ld}\tfrac{2}{3}\right) -$$
$$-\tfrac{7}{25}\left(\tfrac{3}{7}\mathrm{ld}\tfrac{3}{7} + \tfrac{4}{7}\mathrm{ld}\tfrac{4}{7}\right) -$$
$$-\tfrac{7}{25}\left(\tfrac{2}{7}\mathrm{ld}\tfrac{2}{7} + \tfrac{5}{7}\mathrm{ld}\tfrac{5}{7}\right) -$$
$$-\tfrac{8}{25}\left(\tfrac{4}{8}\mathrm{ld}\tfrac{4}{8} + \tfrac{4}{8}\mathrm{ld}\tfrac{4}{8}\right) = 0.949 \text{ bitu}$$

To samo źródło można opisać jako źródło Markowa dowolnego rzędu. Im wyższy rząd, tym mniejsza entropia źródła.

Zadanie 2.59. W celu obliczenia prawdopodobieństw $p(y_j)$ ($j = 0,1,...,M$), gdy dane są wartości prawdopodobieństw $p(x_i)$ ($i = 0,1,...,M$) oraz $p(x_i|y_j)$, należy rozwiązać układ równań:

$$\sum_{j=0}^{m} p(y_j)p(x_i \mid y_j) = p(x_i) \qquad i = 0,...,M$$

W naszym przypadku jest to układ równań:

$$p(y_0)\tfrac{4}{5} + p(y_1)\tfrac{1}{5} = \tfrac{7}{20}$$

$$p(y_0)\tfrac{1}{5} + p(y_1)\tfrac{4}{5} = \tfrac{13}{20}$$

Po rozwiązaniu otrzymamy:

$$p(y_0) = \tfrac{1}{4}, \qquad p(y_1) = \tfrac{1}{4} \quad \text{oraz} \quad H(Y) = 0.81 \text{ bitu}$$

Zadanie 2.60. Prawdopodobieństwa warunkowe $p(y_j|x_i)$ ($i, j = 0,1$) można policzyć ze wzoru Bayesa:

$$p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i \mid y_j)p(y_j)}{p(x_i)}$$

Zatem:

$$p(y_0 \mid x_0) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{20}} = \frac{4}{7}$$

$$p(y_1 \mid x_0) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{7}{10}} = \frac{3}{7}$$

$$p(y_0 \mid x_1) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{13}{20}} = \frac{1}{13}$$

$$p(y_1 \mid x_1) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{7}{20}} = \frac{12}{13}$$

Zadanie 2.61.

$$p(y_0) = 0.41, \quad p(y_1) = 0.59, \quad H(Y) = 0.976 \text{ bitu}$$

Zadanie 2.62. W zadaniu tym pomiar można traktować jako przesyłanie informacji kanałem z zakłóceniami, jak to ilustruje *rys.2.62.1*. Zatem

$$p(y_1) = p(y_2) = 0.5, \quad H(Y) = 1 \text{ bit}$$

Najlepiej jest policzyć najpierw dezinformację wykorzystując zależność (1.8). Otrzymamy:

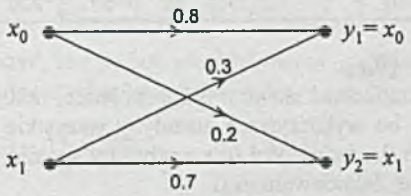
$$H(X \mid Y) = 0.82 \ \frac{\text{bitu}}{\text{pomiar}}$$

Następnie policzyć można ilość informacji uzyskiwanej z pomiaru:

$$I(X \mid Y) = H(Y) - H(Y \mid X) = 0.18 \ \frac{\text{bitu}}{\text{pomiar}}$$

Strata informacji wynosi:

$$H(X \mid Y) = H(X) - I(X \mid Y) = 0.79 \ \frac{\text{bitu}}{\text{pomiar}}$$



Rys. 2.62.1

Rozwiązania zadań z rozdziału II

KODOWANIE I DEKODOWANIE INFORMACJI

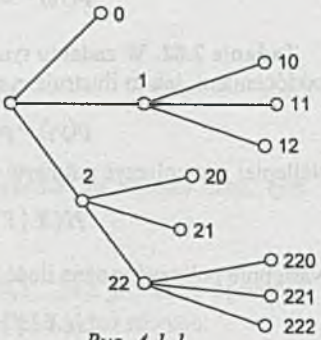
Zadanie 4.1. W celu sprawdzenia, czy kod jest kodem natychmiast dekodowalnym, należy sprawdzić nierówność Krafta (3.2):

a) $\sum_{i=1}^{10} 3^{-m_i} = 3^{-1} + 6\left(3^{-2}\right) + 3\left(3^{-3}\right) = \frac{30}{27} > 1$

W tym przypadku nie da się zbudować kodu natychmiast dekodowalnego.

b) $\sum_{i=1}^{9} 3^{-m_i} = 3^{-1} + 5\left(3^{-2}\right) + 3\left(3^{-3}\right) = 1$

W tym przypadku można zbudować kod natychmiast dekodowalny o zadanej długości słów. Można go skonstruować korzystając z drzewa kodu. Jeśli przyjmiemy, że źródło X generuje dziewięć wiadomości $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, a alfabet kodu $D = A=\{0,1,2\}$, to przykładowe drzewo kodu może wyglądać jak przedstawione na *rys.4.1.1*. Przyporządkowanie wiadomościom słów kodowych przedstawia tablica 4.1.1.



Rys. 4.1.1

Tablica 4.1.1

Wiadomość	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Słowo kodowe	0	10	11	12	20	21	220	221	222

Zadanie 4.2. Alfabet kodu $A = \{0,1\}$.

Wiadomości 0 można przyporządkować słowo o długości jeden, np.0, ale słowa 1 nie można przyporządkować wiadomości 1, bo wykorzystane zostałyby wszystkie pojedyncze przedrostki przed zakodowaniem pozostałych 8 wiadomości (nie można by spełnić warunków koniecznych i wystarczających natychmiastowej dekodowalności).

Zatem wiadomości 1 należy przyporządkować słowo o długości dwa, np. 10. Z nierówności Krafta (3.2) wynika, że

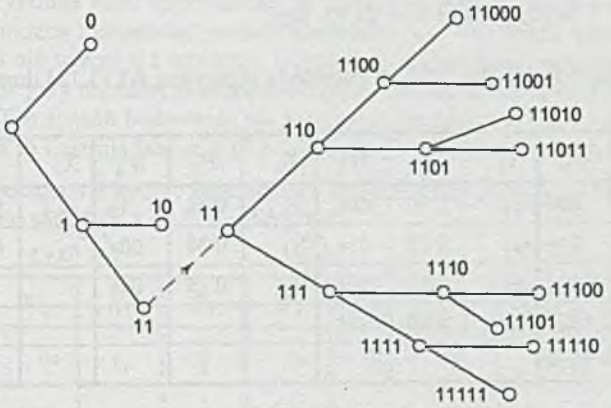
$$2^{-1} + 8(2^{-n}) \leq 1$$

stąd

$$n \geq 5$$

Kod ten można zbudować wykorzystując drzewo przedstawione na *rys.4.2.1*.

Na podstawie drzewa można przyjąć np. taki kod jak w tablicy 4.2.1.



Rys. 4.2.1

Zadanie 4.5. D = 5.

Tablica 4.2.1

Wiadomość	Słowo kodowe	Wiadomość	Słowo kodowe
0	0	5	11011
1	10	6	11100
2	11000	7	11101
3	11001	8	11110
4	11010	9	11111

Zadanie 4.6.

Kod *A* posiada wszystkie słowa o takiej samej długości równej 3. Zatem, aby nie był to kod jednoznacznie dekodowalny, to samo słowo kodowe musiałoby odpowiadać dwu lub więcej wiadomościom. Sytuacja taka nie ma miejsca, co oznacza, że kod *A* jest kodem jednoznacznie dekodowalnym. Ponieważ żadne słowo nie jest przedrostkiem innego słowa, jest to kod natychmiast dekodowalny. Średnia długość słowa, zgodnie z zależnością (3.1), jest równa:

$$\bar{n} = 3\sum_{i=1}^{6} p(x_i) = 3\ \frac{\text{bity}}{\text{wiadomość}}$$

Kod *B*, jak łatwo zauważyć, jest kodem przecinkowym, a rolę przecinka spełnia 0. Jest to zatem kod jednoznacznie, ale nie natychmiast dekodowalny

$$\bar{n} = 2\frac{1}{8}\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Kod *C* jest kodem natychmiast dekodowalnym, a

$$\bar{n} = 2\frac{1}{8}\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Kod *E* jest kodem natychmiast dekodowalnym, a

$$\bar{n} = 2\ \frac{\text{bity}}{\text{wiadomość}}$$

Kody *D* i *F* są kodami niejednoznacznymi.

Zadanie 4.7.

$$n\,H(X) = 8 \text{ ld } 3^4 = 50.72 \text{ bitu}$$

Zadanie 4.8. Sposób tworzenia kodu na podstawie algorytmu **A1** (3.12) ilustruje tablica 4.8.1.

Tablica 4.8.1

X_0	P_0	W_0	X_1	P_1	W_1	X_2	P_2	W_2	X_3	P_3	W_3
x_1	0.30	00	x_1	0.30	00	$x_{3,4,5}$	0.45	1	$x_{1,2}$	0.55	0
x_2	0.25	01	x_2	0.25	01	x_1	0.30	00	$x_{3,4,5}$	0.45	1
x_3	0.20	11	$x_{4,5}$	0.25	10	x_2	0.25	01			
x_4	0.15	100	x_3	0.20	11						
x_5	0.10	101									

Nadmiar kodowania

$$R = \frac{\bar{n} - H(X)}{\bar{n}} = \frac{2.25 - 2.22}{2.25} = 0.013$$

Zadanie 4.9.

$$H(X) = 3.04 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}, \quad \bar{n} = 3.08 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 4.10.

a) Konstruując kod metodą Huffmana, otrzymamy zbiór słów kodowych o najmniejszej średniej długości. Łatwo można wyznaczyć, że przyporządkowanie „wiadomość"-„słowo kodowe" będzie jak w tablicy 4.10.1.

Tablica 4.10.1

Wiadomość	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Słowo kodowe kodu A	0	10	110	1110	111100	111101	111110	111111

b) Z nierówności Krafta, przy założeniu że wszystkie słowa mają jednakową długość, otrzymać można minimalną wartość maksymalnej długości słowa kodowego

$$\sum_{i=1}^{8} 2^{-n_i} = 8 \cdot 2^{-n} \le 1$$

stąd $n \ge 3$, czyli minimalna długość najdłuższego słowa kodowego jest nie mniejsza od 3.

Dla $n = 3$ bardzo łatwo znaleźć zbiór słów kodowych odpowiadający wiadomościom źródła (np. stosując drzewo kodowe) - patrz tablica 4.10.2.

Tablica 4.10.2

Wiadomość	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Słowo kodowe kodu B	000	001	010	011	100	101	110	111

c) Stosując bezpośrednio metodę Huffmana, otrzyma się również słowa o długości sześć. W celu uzyskania kodu optymalnego, w którym nie będzie słowa o długości większej od czterech, można zastosować metodę Huffmana, tak aby każda wiadomość brała udział w redukcji nie więcej niż trzy razy. Uzyskać to można przez połączenie na danym etapie redukcji nie pary najmniej prawdopodobnych wiadomości, lecz dwóch lub więcej par wiadomości. Ten sposób kodowania nie jest jednoznacznie określony i można uzyskać różne wyniki, jak to ilustrują tablice 4.10.3 (dla kodu C') i 4.10.4 (dla kodu C'').

Redundancję każdego z kodów oraz średnią długość słów kodowych, obliczoną wg znanych zależności, podano w tablicy 4.10.5.

Tablica 4.10.3

X_0	P_0	W_0	X_1	P_1	W_1	X_2	P_2	W_2	X_3	P_3	W_3
x_1	$\frac{1}{2}$	0	x_1	$\frac{1}{2}$	0	x_1	$\frac{1}{2}$	0	x_1	$\frac{1}{2}$	0
x_2	$\frac{1}{4}$	100	x_2	$\frac{1}{4}$	100	$x_{2\text{-}4}$	$\frac{7}{16}$	10	$x_{2\text{-}8}$	$\frac{1}{2}$	1
x_3	$\frac{1}{8}$	1010	$x_{3,4}$	$\frac{3}{16}$	101	$x_{5\text{-}8}$	$\frac{1}{16}$	11			
x_4	$\frac{1}{16}$	1011	$x_{5,6}$	$\frac{1}{32}$	110						
x_5	$\frac{1}{64}$	1100	$x_{7,8}$	$\frac{1}{32}$	111						
x_6	$\frac{1}{64}$	1101									
x_7	$\frac{1}{64}$	1110									
x_8	$\frac{1}{64}$	1111									

Zadanie 4.14. Sposób tworzenia kodu Shannona-Fano oparty na algorytmie **A2** (3.13) ilustruje tablica 4.14.1. Średnia długość słowa kodowego tego kodu

$$\bar{n} = 2.75 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 4.15. Sposób konstrukcji kodu dla pierwszego wariantu podziałów przedstawiono w tablicy 4.15.1. Średnia długość słowa kodowego dla tego wariantu:

$$\bar{n} = 2.84 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Sposób tworzenia kodu dla drugiego wariantu podziałów przedstawiono w tablicy 4.15.2. Średnia długość słowa kodowego dla tego wariantu:

$$\bar{n} = 2.8 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Można zatem powiedzieć, że drugi wariant podziałów jest lepszy, bo daje mniejszą średnią długość słowa kodowego.

Tablica 4.10.4

X_0	P_0	W_0	X_1	P_1	W_1	X_2	P_2	W_2	X_3	P_3	W_3
x_1	$\frac{1}{2}$	00	$x_{1,2}$	$\frac{3}{4}$	0	$x_{1,2}$	$\frac{3}{4}$	0	$x_{1,2}$	$\frac{3}{4}$	0
x_2	$\frac{1}{4}$	01	$x_{3,4}$	$\frac{3}{16}$	10	$x_{3,4}$	$\frac{3}{16}$	10	$x_{3\text{-}8}$	$\frac{1}{4}$	1
x_3	$\frac{1}{8}$	100	$x_{5,6}$	$\frac{1}{32}$	110	$x_{5\text{-}8}$	$\frac{1}{16}$	11			
x_4	$\frac{1}{16}$	101	$x_{7,8}$	$\frac{1}{32}$	111						
x_5	$\frac{1}{64}$	1100									
x_6	$\frac{1}{64}$	1101									
x_7	$\frac{1}{64}$	1110									
x_8	$\frac{1}{64}$	1111									

Tablica 4.10.5

Kod	A	B	C'	C''
Redundancja	0	0.33	0.11	0.13
$\bar{n}$	2	3	2.25	2.312

Tablica 4.14.1

X	p	I-p.	II-p.	III-p.	IV-p.	V-p.	VI-p.	VI-p.	W
x_1	$\frac{1}{4}$	0	00						00
x_2	$\frac{1}{4}$		01						01
x_3	$\frac{1}{8}$	1		10	100				010
x_4	$\frac{1}{8}$				101				011
x_5	$\frac{1}{16}$			11		110	1100		1100
x_6	$\frac{1}{16}$						1101		1101
x_7	$\frac{1}{16}$					111		1110	1110
x_8	$\frac{1}{16}$							1111	1111

Tablica 4.15.1

X	p	I-p.	II-p.	III-p.	IV-p.	V-p.	VI-p.	VI-p.	W
x_1	0.22	0	00						00
x_2	0.20		01	010					010
x_3	0.16			011					011
x_4	0.16	1			10				10
x_5	0.10				11	110			110
x_6	0.10					111	1110		1110
x_7	0.04						1111	11110	11110
x_8	0.04							11111	11111

Tablica 4.15.2

X	p	I-p.	II-p.	III-p.	IV-p.	V-p.	VI-p.	VI-p.	W
x_1	0.22	0	00						00
x_2	0.20		01						01
x_3	0.16	1		10	100				100
x_4	0.16				101				101
x_5	0.10			11		110			110
x_6	0.10					111	1100		1110
x_7	0.04						1111	11110	11110
x_8	0.02							11111	11111

Zadanie 4.16.

$$\overline{n} = 2.8 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 4.17.

$$\overline{n} = 3.5 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 4.18.

$$H(X) = 2.551 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

dla kodu Shannona-Fano

$$\bar{n} = 2.64 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}} \quad E = 0.966$$

dla kodu Huffmana

$$\bar{n} = 2.61 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}} \quad E = 0.978$$

Zadanie 4.21.

a) $\bar{n} = \bar{n}_1 = 1 \frac{\text{bit}}{\text{wiadomość}}$

b) kodując wiadomości w bloki po dwie wiadomości, otrzyma się 4 możliwe bloki o prawdopodobieństwach i słowach kodowych zebranych w tablicy 4.21.1.

Tablica 4.21.1

Lp.	Blok	P	W
1	$x_1\ x_1$	0.89^2	0
2	$x_1\ x_2$	$0.89 \cdot (0.11)$	10
3	$x_2\ x_1$	$0.89 \cdot (0.11)$	110
4	$x_2\ x_2$	0.11^2	111

Średnia długość słowa kodowego wynosi w tym przypadku

$$\bar{n} = \frac{\bar{n}_2}{2} = 0.66 \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

c) Kodując wiadomości w bloki po 3 wiadomości, otrzyma się 8 możliwych bloków, które można zakodować w słowa optymalnego kodu binarnego, wykorzystując metodę Huffmana, jak to pokazano w tablicy 4.21.2.

Tablica 4.21.2

X_0	P_0	W_0	P_1	W_1	P_2	W_2	P_3	W_3	P_4	W_4	P_5	W_5	P_6	W_6
$x_1x_1x_1$	0.705	0	0.705	0	0.705	0	0.705	0	0.705	0	0.705	0	0.750	0
$x_1x_1x_2$	0.087	100	0.087	100	0.087	100	0.087	100	0.121	11	0.174	10	0.295	1
$x_1x_2x_1$	0.087	101	0.087	101	0.087	101	0.087	101	0.087	100	0.121	11		
$x_2x_1x_1$	0.087	110	0.087	110	0.087	110	0.087	110	0.087	101				
$x_1x_2x_2$	0.011	11100	0.012	1111	0.022	1110	0.034	111						
$x_2x_1x_2$	0.011	11101	0.011	11100	0.022	1111								
$x_2x_2x_1$	0.011	11110	0.011	11101										
$x_2x_2x_2$	0.001	11111												

Średnia długość słowa kodowego wynosi w tym przypadku

$$\bar{n} = \frac{\bar{n}_3}{3} = 0.533 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Entropia $H(X) = 0.499$ bitu, a dolna granica średniej długości słowa kodowego wynosi, zgodnie z zależnością (3.8):

$$\frac{H(X)}{\mathrm{ld}\, D} = 0.499 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Kodowanie nie pojedynczych wiadomości, lecz bloków wiadomości powoduje zbliżanie się do dolnej granicy średniej długości słowa kodowego tym lepsze, im dłuższe są bloki.

Zadanie 4.22.

$$\bar{n} = \bar{n}_1 = 1.4 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}} \qquad \bar{n} = \frac{\bar{n}_2}{2} = 1.355 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 4.23. Wiadomość zostanie zdekodowana błędnie, gdy nastąpi przekłamanie na dwóch lub trzech pozycjach. Prawdopodobieństwo przekłamania na dwóch pozycjach wynosi

$$P_{e2} = \binom{3}{2} p^2 (1-p) = 2.997 \cdot 10^{-6}$$

Prawdodopobieństwo przekłamania na trzech pozycjach wynosi

$$P_{e3} = p^3 = 10^{-9}$$

Zatem prawdopodobieństwo błędnego zdekodowania z powtarzaniem

$$P_e = P_{e2} + P_{e3} \cong 3 \cdot 10^{-6}$$

a bez powtarzania

$$P_e = p = 10^{-3}$$

Zadanie 4.24.

a) Algorytm przechodzenia z kodu dziesiętnego na prosty kod binarny jest następujący:

1. Liczbę w kodzie dziesiętnym podzielić przez 2, a resztę z dzielenia napisać na ostatniej pozycji liczby w kodzie dwójkowym (na pozycji o wadze 2^0).
2. Wynik ostatniego dzielenia podzielić znowu przez 2, a resztę z dzielenia dopisać po lewej stronie ostatnio dopisanej pozycji.
3. Jeżeli wynik dzielenia jest większy od 1, to wrócić do pkt.2, jeżeli nie, to dopisać 1 na najbardziej znaczącej pozycji liczby w kodzie dwójkowym i zakończyć konwersję.

Sposób kodowania liczby 1979 w prosty kod binarny ilustruje tablica 4.24.1. Zatem liczbie 1979 w kodzie binarnym odpowiada liczba 11110111011. Poprawność kodowania można sprawdzić, dokonując konwersji odwrotnej z kodu binarnego na dziesiętny. Otrzymamy wówczas:

$$11110111011 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 1979.$$

b) Korzystając z postaci binarnej liczby 1979 łatwo przejść na kod Graya zgodnie z algorytmem **A3** (3.14)

$$\begin{array}{r} 11110111011 \\ \oplus\, 01111011101\ (1) \\ \hline 10001100110 \end{array}$$

Zatem w kodzie Graya liczbie 1979 odpowiada liczba 10001100110.

Tablica 4.24.1

	Reszta
1979:2 = 989	1
989:2 = 494	1
494:2 = 247	0
247:2 = 123	1
123:2 = 61	1
61:2 = 30	1
30:2 = 15	0
15:2 = 7	1
7:2 = 3	1
3:2 = 1	1
1	1

c) Algorytm przechodzenia z prostego kodu binarnego na kod heksadecymalny jest następujący:

1. Liczbę w kodzie binarnym podzielić na bloki po 4 bity każdy (od najmłodszych pozycji).
2. Każdemu blokowi przyporządkować cyfrę od 0 do 9 lub literę A,B,C,D,E lub F zgodnie z tablicą 4.24.2.

Konwersję liczby 1979 z postaci binarnej na postać heksadecymalną przedstawia tablica 4.24.3.

d,e,f) Na podstawie tablicy 3.3 można dokonać konwersji liczby 1979 w kod binarny BCD, kod Aikena i kod Excess 3. Wyniki zebrano w tablicy 4.24.4.

Tablica 4.24.2

Kod binarny	Kod heksadecymalny	Kod binarny	Kod heksadecymalny
0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Tablica 4.24.3

Prosty kod binarny	0111	1011	1011
Kod heksadecymalny	7	B	B

Tablica 4.24.4

Kod dziesiętny	1	9	7	9
Kod binarny BCD	0001	1001	0111	1001
Kod Aikena	0001	1111	1101	1111
Kod Excess 3	0100	1100	1010	1100

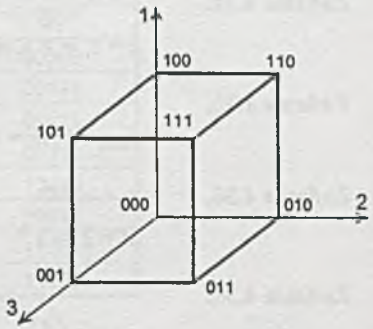
Zadanie 4.25. 11001000110.

Zadanie 4.26.

a) $M = 2^4 = 16$
b) $L = 2^6 = 64$
c) $ML = 2^{10} = 1024$
d) $M = 16$
e) $M(M - 1) = 240$
f) $M(L - M) = 768$
g) $L - M = 48$

Zadanie 4.29. $d_{min} = 1$

Zadanie 4.30. Geometryczny model ciągów binarnych o długości $n = 3$ stanowi sześcian, którego wierzchołkom odpowiadają poszczególne ciągi binarne, jak to przedstawiono na *rys.4.30.1*. Jak widać, odległość między dwoma ciągami równa jest minimalnej liczbie krawędzi łączących odpowiadające tym ciągom wierzchołki.



Rys. 4.30.1

a) Aby kod mógł wykrywać błędy pojedyncze, odległość minimalna musi spełniać nierówność.

Zatem w kodzie takim znalazłyby się ciągi, którym odpowiadają wierzchołki połączone wzajemnie między sobą co najmniej dwoma krawędziami, np. ciągi:

000, 101, 011 i 111.

b) Aby kod mógł korygować błędy pojedyncze, to odległość minimalna musi spełniać nierówność

$$d_{min} \geq 3$$

Zatem w kodzie takim znalazłyby się dwa ciągi, którym odpowiadają przeciwległe wierzchołki, np. ciągi 0100 i 111.

Zadanie 4.31.

a) Z zależności (3.25)

$$d_{min} = 2$$

Z tablicy 3.4 odczytać można, że

$$m = 1$$

b) Z zależności (3.26) wynika, że

$$d_{min} = 3$$

a zatem na podstawie tablicy 3.4

$$m = 3$$

c) Z zależności (3.27)

$$d_{\min} = 4$$

a z tablicy 3.4 wynika, że

$$m = 5$$

Zadanie 4.32.

a) $d_{\min} = 2, \quad n = 4, k = 3, m = 1$
b) $d_{\min} = 3, \quad n = 4, k = 1, m = 3$

Zadanie 4.33.

$$d_{\min} = 4, m = 6, n = m + k = 11$$

Zadanie 4.34.

$$k = 3, m = 5, n = 8$$

Zadanie 4.35.

$$d_{\min} = 7, m = 11$$

Zadanie 4.36.

$$M = 2^k = 2^6$$

Zadanie 4.37.

$$w(2) = \binom{5}{2} = 10$$

Zadanie 4.38.

$$n = 7$$

Zadanie 4.39. Wartości pozycji kontrolnych dla ośmiu ciągów informacyjnych można określić wykorzystując zależności (3.33). Wyniki zebrano w tablicy 4.39.1.

Z tablicy 3.4 odczytać można, że dla $k = 3$ i $m = 1$, $d_{\min} = 2$. Kod ten jest przeznaczony do wykrywania błędów jednokrotnych.

Zadanie 4.40. Z zależności (3.33) i tematowych równań kontrolnych wynika, że macierz $\mathbf{T}$ ma następującą postać:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W tablicy 4.40.1 zebrano możliwe ciągi informacyjne i odpowiadające im słowa kodowe.

Tablica 4.39.1

i	$\vec{w}_i$	w_i	$\bar{w}_i$
1	000	0	0000
2	001	1	0011
3	010	1	0101
4	011	0	0110
5	100	1	1001
6	101	0	1010
7	110	0	1100
8	111	1	1111

Tablica 4.40.1

i	$\vec{w}_i$	$\bar{w}_i$
1	000	00000
2	001	00101
3	010	01011
4	011	01110
5	100	10010
6	101	10111
7	110	11001
8	111	11100

Zadanie 4.42. Do zakodowania 16 wiadomości wystarczą ciągi informacyjne o długości $k = 4$. Aby kod mógł korygować błędy pojedyncze, jego $d_{\min}$ musi być co najmniej równe 3. Dla $d_{\min} = 3$ i $k = 4$ liczba pozycji kontrolnych $m = 3$.

Macierz $\mathbf{G}_k$ kodu rozdzielnego składać się będzie z podmacierzy informacyjnej $k \times k$, która jest macierzą jednostkową oraz podmacierzy kontrolnej $k \times m$. Aby uzyskać $d_{\min} = 3$, wagi ciągów odpowiadających poszczególnym wierszom macierzy $\mathbf{G}_k$ nie mogą być mniejsze od trzech. Wagi wszystkich ciągów podmacierzy informacyjnej wynoszą $W_{Ii} = 1$ ($i = 1, \ldots, 4$) . Jak stąd widać, wagi ciągów podmacierzy kontrolnej $W_{Ki} = 1$ ($i = 1, \ldots, 4$) muszą być równe co najmniej 2. Zatem mogą to być jedynie ciągi:

$$111, 110, 101, 011.$$

Przyporządkowanie tych ciągów ciągom informacyjnym jest dowolne. Przyjmijmy np.

a) $\mathbf{G}_k = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ lub b) $\mathbf{G}_k = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Na podstawie znajomości elementów macierzy $\mathbf{G}_k$ można łatwo znaleźć elementy macierzy $\mathbf{T}$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,0 & 1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1 & 0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,1 & 0\,0\,1 \end{bmatrix}$$

$i = 1\ 2\ 3\ 4 \quad 5\ 6\ 7$

W celu wykrycia i skorygowania błędu należy obliczyć dla odebranego ciągu $\bar{v}$ syndrom $\mathbf{S}$ określony zależnością (3.44).

Jeśli $\mathbf{S} = \mathbf{0}_m$, to znaczy, że nie ma błędu. Każdemu niezerowemu syndromowi $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}_m$ odpowiada błąd na jednej konkretnej pozycji. Na przykład, syndromowi $\mathbf{S}' = [1\ 1\ 0]$ odpowiada błąd na pozycji $i = 2$, syndromowi $\mathbf{S}_i = [1\ 1\ 1]$ - błąd na pozycji $i = 1$ itd.

Zadanie 4.43. Zbiór wszystkich słów kodowych znaleźć można, wykorzystując zależność (3.38). W ten sposób pierwsze słowo kodowe $\bar{w}_1'$, odpowiadające ciągowi informacyjnemu $\bar{w}_1' = [0\ 0\ 0]$, otrzymamy w wyniku mnożenia ciągu informacyjnego przez macierz generującą

$$\bar{w}_1' = [0\ 0\ 0]\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,1 \end{bmatrix} = [0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

Podobnie otrzymamy słowo kodowe $\bar{w}_2'$ odpowiadające ciągowi informacyjnemu $\bar{w}_2' = [0\ 0\ 1]$

$$\bar{w}_2' = [0\ 0\ 1]\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,1 \end{bmatrix} = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]$$

W tablicy 4.43.1 zebrano zbiór wszystkich ciągów informacyjnych i odpowiadających im słów kodowych.

Tablica 4.43.1

i	$\bar{w}_i'$	$\bar{w}_i$
1	000	00000
2	001	00101
3	010	01011
4	011	01110
5	100	10010
6	101	10111
7	110	11001
8	111	11100

Zadanie 4.44. Zgodnie z zależnością (3.42)

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} = \left[\begin{bmatrix} 1\,0 \\ 1\,1 \\ 0\,1 \end{bmatrix}^T \middle| \begin{matrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} 1\,1\,0 & 1\,0 \\ 0\,1\,1 & 0\,0 \end{matrix}\right]$$

Jak łatwo sprawdzić, macierz ta jest macierzą kontrolną słów kodowych zebranych w tablicy 4.43.1.

Zadanie 4.48. W celu określenia decyzji dekodera zgodnie z **RD1** (3.45) określić należy składowe s_1 i s_2 syndromu oraz cały syndrom $\mathbf{S}^t = [s_1, s_2]$ odebranego ciągu $\overline{w}_i$, zgodnie z zależnością (3.43). Wyniki zebrano w tablicy 4.48.1.

Tablica 4.48.1

i	1	2	3	4	5
s_1	0	0	0	0	1
s_2	0	1	0	1	0
$\mathbf{S}^t$	0 0	0 1	0 0	0 1	1 0
$\overline{w}_i$	01011 = $\overline{w}_3$	? błąd	10010 = $\overline{w}_5$	? błąd	? błąd

Zadanie 4.49. Po odebraniu przekłamanego ciągu $\overline{v}_2$ = [0 1 1 1 1] najbardziej prawdopodobne jest, że nadano ciąg odległy o $d = 1$. W tablicy 4.49.1 zebrano odległości pomiędzy ciągiem $\overline{v}_2$ a poszczególnymi słowami kodowymi $\overline{w}_i$ ($i = 1,...,8$).

Tablica 4.49.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d	4	2	1	1	4	2	3	3

Z tablicy tej widać, że najmniej odległe od $\overline{v}_2$ są słowa $\overline{w}_3$ = [0 1 0 1 1] i $\overline{w}_4$ = [0 1 1 1 0]. Zatem zgodnie z regułą **RDNP** dekoder przyporządkowuje ciągowi $\overline{v}_2$ słowo $\overline{w}_3$ lub $\overline{w}_4$.

Po odebraniu ciągu $\overline{v}_4$ = [1 0 1 1 0] można powiedzieć, że nadane zostało słowo $\overline{w}_5$ = [1 0 0 1 0] lub $\overline{w}_6$ = [1 0 1 1 1]. Po odebraniu ciągu $\overline{v}_5$ = [1 1 0 1 1] można powiedzieć, że nadane zostało słowo $\overline{w}_3$ lub $\overline{w}_7$ = [1 1 0 0 1].

Zadanie 4.50. Prawdopodobieństwo poprawnej transmisji przy $n = 7$ wynosi

$$P_p = (1 - p)^7 = 0.993$$

a prawdopodobieństwo wystąpienia błędów (niewykrywalnych) jest równe:

$$P_b = (1 - P_p) = 0.007$$

Po dodaniu bitu parzystości ($n = 8$) otrzymamy nieco mniejsze prawdopodobieństwo poprawnej transmisji, ale i znaczne zmniejszenie prawdopodobieństwa wystąpienia błędów niewykrywalnych. Wówczas prawdopodobieństwo poprawnej transmisji wynosi:

$$P_p = (1 - p)^8 = 0.992$$

a prawdopodobieństwo wystąpienia błędów niewykrywalnych jest równe

$$P_b = P_{e2} + P_{e4} + P_{e6} + P_{e8}$$

gdzie:

$P(j, n) = P_{ej}$ - prawdopodobieństwo wystąpienia j - krotnego przekłamania,

$$P_{e2} = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^6 = 2.783 \cdot 10^{-3}$$

$$P_{e4} = 6.972 \cdot 10^{-11}$$

$$P_{e6} = 2.794 \cdot 10^{-17}$$
$$P_{e8} = 10^{-24}$$

czyli

$$P_b \cong P_{e2} = 2.783 \cdot 10^{-3}$$

Prawdopodobieństwo to można też obliczyć z zależności (3.54).

Zadanie 4.51. Wykorzystując rezultaty zebrane w tablicy 3.5, można zbudować macierz kontrolną dla kodu Hamminga (7,4). Otrzymamy:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} j=1 \\ j=2 \\ j=3 \end{matrix}$$
$$i = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$$

Z macierzy tej wynika, że pozycje kontrolne można obliczyć z zależności

$$w_1 = w_3 \oplus w_5 \oplus w_7$$
$$w_2 = w_3 \oplus w_6 \oplus w_7$$
$$w_4 = w_5 \oplus w_6 \oplus w_7$$

Zadanie 4.53. Liczbie 11 odpowiada w prostym kodzie binarnym słowo 1011. Pozycje informacyjne w kodzie Hamminga

$$w_3 = 1 \qquad w_5 = 0 \qquad w_6 = 1 \qquad w_7 = 1$$

Opierając się na wynikach zadania 4.51, obliczyć można pozycje kontrolne, i tak

$$w_1 = 0 \qquad w_2 = 1 \qquad w_4 = 0$$

Zatem liczba 11 zakodowana w kodzie Hamminga (7,4) ma postać

$$\overline{w} = [0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1]$$

Zadanie 4.54.

$$\overline{w} = [1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$$

Zadanie 4.55. W celu sprawdzenia poprawności odebranego ciągu

$$\overline{v} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1]$$

oraz ewentualnej korekcji błędu jednokrotnego policzyć należy składowe s_1, s_2, s_3 syndromu odebranego ciągu $\overline{v}$ zgodnie z zależnością (4.43). Otrzymamy:

$$s_1 = v_1 \oplus v_3 \oplus v_5 \oplus v_7 = 1$$
$$s_2 = v_2 \oplus v_3 \oplus v_6 \oplus v_7 = 1$$
$$s_4 = v_4 \oplus v_5 \oplus v_6 \oplus v_7 = 0$$

Zatem syndrom kodu Hamminga

$$\mathbf{S}^t = [s_3\ s_2\ s_1] = [0\ 1\ 1]$$

W zapisie dziesiętnym syndromowi temu odpowiada liczba 3, co oznacza, że przekłamanie wystąpiło na trzeciej pozycji, a zakłócenie ma postać:

$$\bar{z} = [0\,0\,1\,0\,0\,0\,0]$$

czyli decyzja dekodera o nadanym ciągu $\bar{v}$ ma postać

$$\bar{w}^* = \bar{v} \oplus \bar{z} = [0\,1\,1\,0\,0\,1\,1]$$

Zadanie 4.56.

$$\mathbf{S}^t = [1\,0\,1\,1], \qquad \bar{w}^* = [1\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1]$$

Zadanie 4.57. Skrócony kod Hamminga (6,3) powstaje z kodu (7,4) przez skreślenie ostatniej pozycji informacyjnej. Czyli opierając się na wynikach zadania 4.51 macierz kontrolna tego kodu ma postać

$$\mathbf{T} = \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1 \end{bmatrix} \begin{matrix} j=1 \\ j=2 \\ j=3 \end{matrix}$$
$$i = 1\;2\;3\;4\;5\;6$$

Pozycje kontrolne obliczyć można z zależności:

$$w_1 = w_3 \oplus w_5$$
$$w_2 = w_3 \oplus w_6$$
$$w_4 = w_5 \oplus w_6$$

Zadanie 4.59. Liczbie 6 odpowiada w prostym kodzie binarnym słowo 110. Zatem

$$w_3 = 1 \qquad w_5 = 1 \qquad w_6 = 0$$

Opierając się na wynikach zadania 4.57, obliczyć można pozycje kontrolne

$$w_1 = 0 \qquad w_2 = 1 \qquad w_4 = 1$$

A zatem liczba 6 zakodowana w słowo kodowe skróconego kodu Hamminga ma postać

$$\bar{w} = [0\,1\,1\,1\,1\,0]$$

Zadanie 4.60.

$$\bar{w} = [1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,1]$$

Zadanie 4.61.

$$\mathbf{S}^t = [0\,1\,1\,1\,1], \qquad \bar{w}^* = [1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,1]$$

Zadanie 4.62. Dla kodu bez powtarzania

$$n_1 = 4 \qquad k = 3$$

więc

$$\eta_1 = \frac{3}{4} \quad \text{a} \quad d_{\min} = 2$$

Dla kodu z $r = 3$-krotnym powtarzaniem

$$n = r\,n_1 = 12 \qquad k = 3$$

więc

$$\eta = \frac{1}{4} \quad \text{a} \quad d_{\min} = r \cdot d_{\min 1} = 6$$

To znaczy, że dzięki 3-krotnemu powtarzaniu można na przykład wykryć wszystkie błędy o krotności 1,2,...,5 lub korygować wszystkie błędy o krotności 1,2. Z drugiej jednak strony znacznie maleje efektywność tego kodu.

Zadanie 4.63. $r = 5$

Zadanie 4.64. Dla kodu z kontrolą parzystości (4,3)

$$d_{\min 1} = 2 \qquad \eta = \frac{3}{4} = 0.75$$

i taki kod może wykrywać wszystkie błędy pojedyncze.
Dla kodu iterowanego (4,4 ; 3,3)

$$d_{\min} = d_{\min 1} d_{\min 2} = 2 \cdot 2 = 4 \qquad \eta = \frac{k_1 k_2}{n_1 n_2} = \frac{9}{16} = 0.56$$

i taki kod może:

a) korygować wszystkie błędy 1-krotne i wykrywać jednocześnie błędy 1- i 2-krotne,
b) wykrywać błędy 1-, 2- i 3-krotne (wynika to z zależności (3.25) i (3.27)).

W tablicy 4.64.1 przestawiono przykładowy blok w kodzie (4,4 ; 3,3) bez przekłamań

Tablica 4.64.1

		n_1				
		k_1				
		1	2	3	4	Σw_i
n_2	k_2 1	1	0	1	0	0
	2	1	0	0	1	0
	3	0	1	1	0	0
	4	0	1	0	1	0
	Σk_i	0	0	0	0	

W tym przypadku sumy modulo 2 wierszy Σk_i (i = 1,2,3,4) i sumy modulo 2 kolumn Σk_i (i = 1, 2, 3, 4) są równe zero.

W tablicy 4.64.2 przedstawiono przykładowy blok przy transmisji z jednym przekłamaniem.

Tablica 4.64.2

	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	1	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	1	0	1

Tablica 4.64.3

	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	1	1	1	1
3	0	1	1	0
4	0	1	0	1

Tablica 4.64.4

	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	1	1	0	1
3	0	1	0	0
4	0	1	0	1

W tym przypadku dla trzeciego wiersza $\Sigma w_i = 1$ oraz dla drugiej kolumny $\Sigma k_i = 1$. Pozostałe sumy są równe zero. Jeśli kod ma korygować błędy jednokrotne, to skorygować należy pozycję na przecięciu 3 wiersza i 2 kolumny.

W tablicach 4.64.3 i 4.64.4 przedstawiono przykładowe bloki przy transmisji z dwoma przekłamaniami. W pierwszym przypadku (tablica 4.64.3) tylko sumy dla drugiej i trzeciej kolumny są równe 1, co oznacza, że występują przekłamania w drugiej i trzeciej kolumnie, lecz nie można ustalić, na której pozycji, czyli nie można ich skorygować. W drugim przypadku (tablica 4.64.4) tylko sumy dla drugiego i trzeciego wiersza oraz drugiej i trzeciej kolumny są równe 1. Oznacza to, że wystąpiły dwa błędy, lecz - podobnie jak w przypadku pierwszym - nie da się ich skorygować.

W tablicach 4.64.5 i 4.64.6 przedstawiono przykładowe bloki z transmisjami z trzema przekłamaniami.

W obydwu przypadkach nastąpiłoby wykrycie błędu, ale w drugim przypadku (tablica 4.64.6), gdyby dekoder został zbudowany tak, by korygować wszystkie błędy pojedycze, to nastąpiłoby podjęcie błędnej decyzji, gdyż skorygowana zostałaby nieprzekłamana pozycja na przecięciu trzeciego wiersza i drugiej kolumny (tylko sumy w trzecim wierszu i drugiej kolumnie są równe 1).

Kod (4,4; 3,3) nie jest w stanie wykryć wszystkich błędów o krotności 4 i większej, gdyż np. po odebraniu bloku przekłamanego na 4 pozycjach jak w tablicy 4.64.7 wszystkie sumy są równe zero, co odpowiada decyzji o bezbłędnej transmisji.

Tablica 4.64.5

	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	1	1	1	1
3	0	1	1	1
4	0	1	0	1

Tablica 4.64.6

	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	1	1	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	0	1

Tablica 4.64.7

	1	2	3	4
1	1	0	1	0
2	1	1	1	1
3	0	0	0	0
4	0	1	0	1

Zadanie 4.65. Kod (6,5) ma $d_{min} = 2$ i $\eta = \frac{5}{6} = 0.833$; kod ten nie może korygować żadnych błędów, może jedynie wykrywać błędy pojedyncze.

a) $d_{min1} = d_{min2} = 2$ oraz $d_{min} = 4$, co znaczy, że kod ten może korygować wszystkie błędy pojedyncze i jednocześnie wykrywać błędy o krotności 1 i 2. Sprawność tego kodu

$$\eta = \frac{25}{36} \cong 0.70$$

b) Kod ten charakteryzuje $d_{min} = 4$, a więc posiada on takie same własności korekcyjne jak kod a). Sprawność tego kodu

$$\eta = \frac{5 \cdot 99}{6 \cdot 100} = 0.825$$

Zastąpienie przesyłania pojedynczych słów kodowych przesyłaniem bloków powoduje z jednej strony polepszenie własności korekcyjnych, a z drugiej nieznaczne zmniejszenie sprawności. Im dłuższe są przesyłane bloki, tym większa sprawność kodu.

Zadanie 4.66. Jeśli macierze generujące $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{G}_2$ mają postać

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} \\ \bar{g}_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{g}_{1k_1} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \bar{g}_{21} \\ \bar{g}_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{g}_{2k_2} \end{bmatrix}$$

to macierz generująca kodu dwukrotnie iterowanego

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} \otimes \bar{g}_{21} \\ \bar{g}_{11} \otimes \bar{g}_{22} \\ \cdot \\ \bar{g}_{11} \otimes \bar{g}_{2k_2} \\ \bar{g}_{12} \otimes \bar{g}_{21} \\ \cdot \\ \bar{g}_{12} \otimes \bar{g}_{2k_2} \\ \cdot \\ \bar{g}_{1k_1} \otimes \bar{g}_{21} \\ \cdot \\ \bar{g}_{1k_1} \otimes \bar{g}_{2k_2} \end{bmatrix}$$

Zatem dla tematowych macierzy $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{G}_2$ macierz $\mathbf{G}$ ma postać

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1\,0\,1 \otimes 1\,0\,1 \\ 1\,0\,1 \otimes 0\,1\,1 \\ 0\,1\,1 \otimes 1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \otimes 0\,1\,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,1 \end{bmatrix}$$

Przez operację $\otimes$ należy rozumieć mnożenie zilustrowane przykładem

$$\begin{array}{r} 101 \\ \otimes 101 \\ \hline 101 \\ 000 \\ 101 \\ \hline 101000101 \end{array}$$

Zadanie 4.67. Macierz $\mathbf{T}$ wydłużonego kodu Hamminga (8.4) utworzy się przez dopisanie do macierzy tworzącej zwykłego kodu Hamminga (7,4) wiersza składającego się z samych jedynek oraz kolumny składającej się z samych zer z wyjątkiem ostatniej pozycji. Zatem

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

a równania kontrolne zawierają obok równań kontrolnych zwykłego kodu Hamminga (7,4):

$$w_1 = w_3 \oplus w_5 \oplus w_7$$
$$w_2 = w_3 \oplus w_6 \oplus w_7$$
$$w_4 = w_5 \oplus w_6 \oplus w_7$$

dodatkowe równanie

$$w_8 = \sum_{i=1}^{7} w_i$$

Zadanie 4.68.

$$\overline{w} = 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1$$

Zadanie 4.69.

a) Na podstawie macierzy $\mathbf{T}$ z zadania 4.67 obliczamy syndromy $\mathbf{S}_1$ i S_2, po podstawieniu otrzymamy:

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{0}_m \quad \text{i} \quad S_2 = 0$$

Oznacza to, że brak jest przekłamań (tablica 3.8), więc

$$\overline{w} = \overline{v} = 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1$$

b) $\mathbf{S}_1^t = [1\,0\,0]$ i $S_2 = 1$

Oznacza to, że wystąpił pojedynczy błąd (tablica 3.8) na pozycji czwatrej, bowiem $1[100]_2 = 4$. Zatem ciąg zakłócający ma postać:

$$\overline{z} = 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0$$

a decyzja dekodera jest równa:

$$\begin{array}{r} 0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,1 \\ \oplus\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0 \\ \hline \end{array}$$
$$\overline{w}^* = \overline{v} \oplus \overline{z} = 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1$$

c) $\mathbf{S}_1 = \mathbf{0}_m$ i $S_2 = 1$

Oznacza to, że wystąpił błąd na pozycji kontroli parzystości. Zatem

$$\overline{w}^* = \overline{v} \oplus 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 = 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1$$

d) $\mathbf{S}_1^t = [1\ 0\ 0]$ i $S_2 = 0$

Oznacza to (tablica 3.8), że wystąpiły niekorygowalne błędy o parzystej krotności.

Zadanie 4.70. Długość słów kodowych

$$n = 2^p = 16$$

Dla $r = 1$

liczba pozycji informacyjnych $k = \sum_{i=0}^{1} C_4^i = 5$

liczba pozycji kontrolnych $m = 11$

sprawność $\eta = \frac{5}{16}$

odległość minimalna $d_{\min} = 2^{p-r} = 8$

Dla $r = 2$

$$k = 11,\ m = 5,\ \eta = \frac{11}{16},\ d_{\min} = 4$$

Dla $r = 3$

$$k = 15,\ m = 1,\ \eta = \frac{15}{16},\ d_{\min} = 2$$

Jak widać, im wyższy rząd kodu Reeda-Mullera (przy zadanym p), tym większa sprawność, lecz gorsze własności detekcyjne i korekcyjne.

Zadanie 4.71. Dla kodu **RM** (1,3), (2,3) i (3,3)

$$n = 8$$

Korzystając z **A5** (3.67) można zbudować macierz **G** tego kodu. Pierwszy wiersz tej macierzy (wektor zerowy) składa się z $n = 8$ jedynek.

Następne $C_3^2 = 3$ wiersze są wektorami bazowymi:

$$\bar{v}_1 = 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1$$
$$\bar{v}_2 = 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1$$
$$\bar{v}_3 = 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1$$

Wektory te tworzą wraz z wektorem zerowym macierz **G** kodu **RM** 1 rzędu:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \end{bmatrix}$$

Następne $C_3^1 = 3$ wiersze otrzymuje się ze wszystkich iloczynów par wektorów bazowych

$$\bar{v}_1\bar{v}_2 = 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1$$

bowiem

$$\begin{array}{r} 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ \underline{0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1} \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1 \end{array}$$

analogicznie

$$\bar{v}_1\bar{v}_3 = 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1$$
$$\bar{v}_2\bar{v}_3 = 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1$$

A cała macierz **G** kodu RM 2 rzędu ma postać

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \end{bmatrix}$$

Następny wiersz ($C_3^3 = 1$) otrzymuje się z iloczynu trójki wektorów bazowych i jest on równy

$$\bar{v}_1\bar{v}_2\bar{v}_3 = 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1$$

A macierz **G** kodu RM 3 rzędu

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.73. $\bar{w} = 1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1$

Zadanie 4.74. $\bar{w} = 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,0$

Zadanie 4.76. Z zależności z tablicy 3.12 wynika, że

$$2^4 - 2^{4-1} - 1 = 7$$

To znaczy, że $n = 15$, a $m = 10$.
Postać modułowa macierzy **G** przyjmie postać:

$$\mathbf{N} = [0, 0, ..., 0\,0, 1, 1, ..., 1, 1]$$
$$\text{16 zer} \qquad \text{15 jedynek}$$

czyli że kolumny macierzy **G** stanowić będą liczby od 17 do 31 w zapisie binarnym, więc

$$\mathbf{G} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 2^4 \\ 2^3 \\ 2^2 \\ 2^1 \\ 2^0 \end{array}$$

17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

W kodzie będzie 31 słów kodowych (bez słowa złożonego z samych zer o wadze zero), w tym

15 słów o wadze 8
15 słów o wadze 7
1 słowo o wadze 15.

Zadanie 4.78. Błąd nie zostanie wykryty, jeśli jednocześnie zostanie przekłamana taka sama liczba zer jak jedynek. Prawdopodobieństwo przekłamania jednej z trzech jedynek wynosi

$$C_3^1 p(1-p)^2 \cong 3 \cdot 10^{-5}$$

a prawdopodobieństwo przekłamania jednego z czterech zer jest równe

$$C_4^1 p(1-p)^3 \cong 4 \cdot 10^{-5}$$

Zatem prawdopodobieństwo niewykrycia błędu przy przekłamaniu dwóch bitów jest równe iloczynowi prawdopodobieństw wystąpienia pojedynczych przekłamań „jedynki" i „zera", w przybliżeniu

$$P_{e2} \cong 12 \cdot 10^{-10}$$

Prawdopodobieństwa niewykrycia błędu przy przekłamaniu czterech i sześciu bitów są do pominięcia w porównaniu z P_{e2}. Zatem prawdopodobieństwo niewykrycia błędu

$$P_b \cong P_{e2} = 12 \cdot 10^{-10}$$

Zadanie 4.79.

a) Słowa kodowe nierozdzielnego kodu cyklicznego obliczyć można z zależności (3.71). Wyniki obliczeń zebrano w tablicy 4.79.1.

Tablica 4.79.1

Lp.	$\overline{w}' \hat{} h(x)$	$g(x)$	$w(x) \hat{} \overline{w}$
0	0000	1101	0000000
1	0001	1101	0001101
2	0010	1101	0011010
3	0011	1101	0010111
4	0100	1101	0110100
5	0101	1101	0111001
6	0110	1101	0101110
7	0111	1101	0100011
8	1000	1101	1101000
9	1001	1101	1100101
10	1010	1101	1110010
11	1011	1101	1111111
12	1100	1101	1011100
13	1101	1101	1010001
14	1110	1101	1000110
15	1111	1101	1001011

Wielomiany potęgowe $w(x)$ o współczynnikach 0, 1 lub odpowiadające im słowa kodowe $\overline{w}$ obliczać można korzystając z zal. (3.71) lub wykonując operację mnożenia na ciągach zerojedynkowych odpowiadających wielomianom $h(x)$ i $g(x)$. Sposób obliczania $\overline{w} \hat{=} w(x)$ pokazany zostanie dokładnie dla dziesiątego słowa kodowego (oznaczonego w tablicy numerem 9).

b) Korzystając z zal. (3.71)

$$h(x) = x^3 + 1 \quad \text{a} \quad g(x) = x^3 + x^2 + 1$$

otrzymamy wielomian i odpowiadające mu słowo kodowe o postaci:

$$w(x) = (x^3 + 1)(x^3 + x^2 + 1) = x^6 + x^5 + x^2 + 1 \hat{=} \overline{w} = 1100101$$

Uwaga: $(2x^3) \bmod 2 = 0 \cdot x^3$

c) Mnożąc ciąg 1101 odpowiadający $g(x)$ przez ciąg 1001 odpowiadający $h(x)$ uzyska się słowo $\overline{w}$ = 1100101 odpowiadające wiadomości $w(x)$, bowiem

$$\begin{array}{rl} & 1\ 1\ 0\ 1 \quad \hat{=} g(x) \\ \times & 1\ 0\ 0\ 1 \quad \hat{=} h(x) \\ \hline & 1\ 1\ 0\ 1 \\ & 0\ 0\ 0\ 0 \\ & 0\ 0\ 0\ 0 \\ \oplus & 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline & 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \quad \hat{=} w(x) \end{array}$$

Macierz **G** dla tego kodu zbudować można opierając się na zależności (3.74), otrzymamy wówczas

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1\,1\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,0\,1 \end{bmatrix}$$

Oczywiście wszystkie słowa można znaleźć bezpośrednio z macierzy **G**.

d) Słowa kodowe rozdzielnego kodu obliczyć można z zależności (3.72) i (3.73). Wyniki obliczeń dla wybranych ciągów informacyjnych zebrano w tablicy 4.79.2.

Tablica 4.79.2

Lp.	$h(x)$	$x^3 h(x)$	$r(x)$	$w(x)$
1	0001	0001000	101	0001101
2	0010	0010000	111	0010111
3	0011	0011000	10	0011010
4	0100	0100000	11	0100011
5	0101	0101000	110	0101110
...	...	...	...	...
8	1000	1000000	110	1000110

Sposób obliczania współczynników wielomianu reszty $r(x)$ prześledzimy dla przykładów 1 i 6:

$$\begin{array}{r} 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 : 1\,1\,0\,1 \\ \underline{1\,1\,0\,1} \\ 1\,0\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 : 1\,1\,0\,1 \\ \underline{1\,1\,0\,1} \\ 1\,0\,1\,0 \\ \underline{1\,1\,0\,1} \\ 1\,1\,1\,0 \\ \underline{1\,1\,0\,1} \\ 1\,1\,0 \end{array}$$

Macierzą kanoniczną $\mathbf{G}_k$ dla tego przypadku jest macierz, której wierszami są słowa kodowe z wagą części informacyjnej $W_I = 1$; jest to macierz o postaci:

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 & 1\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0 & 0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0 & 1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,1 & 1\,0\,1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.80. Dla danego wielomianu generującego $g(x)$ i dla danej liczby pozycji informacyjnych kodu k można zbudować macierz **G** kodu nierozdzielnego (zal. (3.74)). Każdy wiersz tej macierzy będzie posiadał wagę $W = 3$, ponieważ taka jest waga postaci binarnej wielomianu $g(x) \hat{=} 10101$. Z kolei odległość minimalna $d_{\min}$ kodu nie może być większa od najmniejszej z wag wierszy macierzy **G**, więc

$$d_{\min} \leq 3$$

Nie można więc skonstruować kodu cyklicznego o $d_{\min} = 5$, jeśli wielomian generujący kodu ma postać

$$g(x) = x^5 + x^2 + 1$$

Zadanie 4.82. Aby kod mógł korygować błędy pojedyncze, to jego odległość minimalna $d_{\min} = 3$, czyli wymagana waga postaci binarnej wielomianu $g(x)$ wynosi $W = 3$. Z tablicy wielomianów niepodzielnych (tablica 3.13) wybrać można np. wielomian

$$g(x) = x^5 + x^2 + 1$$

Macierz **G** kodu nierozdzielnego dla tego wielomianu ma taką samą postać jak w zadaniu 4.79. Dla danej macierzy **G** łatwo można wygenerować wszystkie słowa kodowe.

Zadanie 4.84.

$$d_{\min} = 3 \qquad t_k = 1$$

Zadanie 4.86. Sprawdzenie poprawności odebranego ciągu odbywa się poprzez obliczenie reszty $r(x)$ (zal. (3.75) i (3.76)):

a)
$$\begin{array}{r} 0\,0\,1\,1\,0\,1\,0 : 1\,1\,0\,1 = 0\,0\,1\,0 \\ \underline{1\,1\,0\,1} \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

W tym przypadku $r(x) \hat{=} \overline{0}$, co oznacza, że odebrany ciąg jest poprawny i odpowiada wiadomości $h(x) \hat{=} 0010$.

b)
$$\begin{array}{l} 1\,1\,0\,0\,1\,0\,1 : 1\,1\,0\,1 = 1\,0\,0\,1 \\ \underline{1\,1\,0\,1} \\ \quad\;\; 1\,1\,0\,1 \\ \quad\;\; \underline{1\,1\,0\,1} \\ \quad\;\; 0\,0\,0\,0 \end{array}$$

$r(x) = \overline{0}, \qquad h(x) \hat{=} 1001$

c)
$$\begin{array}{l} 1\,0\,1\,0\,0\,1\,1 : 1\,1\,0\,1 = 1\,1\,0\,1 \\ \underline{1\,1\,0\,1} \\ \quad 1\,1\,1\,0 \\ \quad \underline{1\,1\,0\,1} \\ \quad\;\; 1\,1\,1\,1 \\ \quad\;\; \underline{1\,1\,0\,1} \\ \quad\;\;\;\; 1\,0 \end{array}$$

W tym przypadku $r(x) \hat{=} 10 \neq \overline{0}$, co oznacza, że odebrany ciąg nie jest poprawny, w czasie trnsmisji nastąpiło przekłamanie.

Zadanie 4.87.

a) $r(x) \hat{=} \overline{0}$

b) $r(x) \hat{=} 111 \neq \overline{0}$

c) $r(x) \hat{=} 10010 \neq \overline{0}$

Zadanie 4.88.

a) $D = 5$ b) $D = 4$ c) $D = 4$

Zadanie 4.89.

$\overline{n} = 2.5, \quad n = 3, \quad n_1 = n_2 = 2$

Zadanie 4.90.

$\overline{n} = 2.2, \quad n = 4, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 2$

Zadanie 4.91 (4.36a). Z zależności (3.31)

$$2^m \geq \sum_{i=0}^{t_k} \binom{n}{i}$$

więc

$$m \geq \mathrm{ld}\left(\sum_{i=0}^{t_k} \binom{n}{i}\right) = \mathrm{ld}\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t_k}\right)$$

Z zależności (3.26) $t_k = 4$, więc

$$m \geq \mathrm{ld}\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}\right) =$$

$$\mathrm{ld}\left.\frac{n^4-2n^3+11n^2+14n+24}{24}\right|_{n=35} = 15.86$$

Przyjmujemy liczbę pozycji kontrolnych $m = 16$, więc liczba pozycji informacyjnych $k = n - m = 19$. W kodzie tym zakodować można $M = 2^k = 2^{19}$ wiadomości.

Zadanie 4.92 (4.36b)

$$M = 2^k = 2^{12}$$

Zadanie 4.93 (4.36c). Z zależności (3.30), dla $d = d_{\min} = 4$

$$2^m > 1 + \sum_{i=1}^{d-2}\binom{m-1}{i} = 1+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2} = \frac{n^2-n+2}{2}$$

więc

$$m > \mathrm{ld}\left(\frac{n^2-n+2}{2}\right) = 6.92$$

Przyjmujemy $m = 7$, więc $k = n - m = 9$.
Ten sam wynik uzyskamy korzystając z tablicy 3.4.

Zadanie 4.94 (4.36d). Dla kresu dolnego Warszamowa-Gilberta

$$m > \mathrm{ld}\left(\frac{n^3-3n^2+8n}{6}\right) = 8.88$$

więc jeśli przyjmiemy $m = 9$, to $k = n - m = 6$.
Ten sam wynik uzyskamy z tablicy 3.4.

Dla kresu górnego Hamminga

$$m \geq \mathrm{ld}\left(\frac{n^2+n+2}{2}\right) = 6.92$$

więc jeśli przyjmiemy $m = 7$, to $k = 8$.

Zadanie 4.95 (4.37a).

$$M = 10$$

Zadanie 4.96 (4.43a).

$$13 \doteq [1101]_2 \doteq \overline{w} = [1101000]$$

Zadanie 4.97 (4.43b). Aby znaleźć równania kontrolne, należy najpierw określić postać kanoniczną macierzy generującej $\mathbf{G}_k$. Jak wiadomo, kod liniowy może być określony przez dowolny zbiór k liniowo niezależnych ciągów kodowych. Z kolei, zbiór wszystkich kombinacji liniowych wierszy macierzy **G** pokrywa się ze zbiorem wszystkich ciągów kodowych $\{\overline{w}\}$ Zatem, chcąc przekształcić macierz **G** w kanoniczną macierz $\mathbf{G}_k$, należy znaleźć takie kombinacje liniowe wierszy **G**, które dają tylko jedną jedynkę na pierwszych k pozycjach. W naszym przypadku należy najpierw zsumować modulo 2 pierwsze trzy wiersze. W wyniku tej operacji otrzymamy słowo kodowe: $\overline{w}$ = [1 0 0 0 1 1 0], czyli pierwszy wiersz macierzy $\mathbf{G}_k$. Sumując modulo 2 - wiersze: 2, 3 i 4 macierzy **G** otrzymamy drugi wiersz macierzy $\mathbf{G}_k$: $\overline{w}$ = [0 1 0 0 0 1 1]. Sumując wiersze: 3 i 4, otrzymamy trzeci wiersz macierzy $\mathbf{G}_k$: $\overline{w}$ = [0 0 1 0 1 1 1]. Czwarty wiersz macierzy **G** jest zarazem czwartym wierszem $\mathbf{G}_k$. Ostatecznie:

$$\mathbf{G}_k = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Stąd łatwo można znaleźć macierz **T**:

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

i równania kontrolne:

$$w_5 = w_1 \oplus w_3 \oplus w_4$$
$$w_6 = w_1 \oplus w_2 \oplus w_3$$
$$w_7 = w_2 \oplus w_3 \oplus w_4$$

Zadanie 4.98 (4.49a).

$$d_{\min} = 3$$
$$\overline{w}^* = [000000] \text{ lub } [011110] \text{ lub } [110011]$$

Zadanie 4.100 (4.78a). Jest to kod (5,3) i ponieważ $2^m = 2^2 < n + 1 = 5+1 = 6$, więc jest to kod detekcyjny. Syndrom obliczany jest z zależności (3.44)

$$\mathbf{S}_j = \mathbf{T} \cdot \overline{v}_i^t = \mathbf{T}(\overline{w}_i \oplus \overline{z}_j)^t = \mathbf{T} \cdot \overline{z}_j^t$$

gdzie:

$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ - macierz tworząca kodu,

$\overline{w}_i$ - nadane na wejściu kanału i-te słowo kodowe,

$\overline{v}_i$ - odebrany na wyjściu kanału i-ty n-ciąg,

$\overline{z}_j$ - zakłócenie (j-te) w kanale.

Na przykład. dla $\overline{w}_i = \overline{w}_7 = [1\ 1\ 0\ 0\ 1]$ i dla $\overline{z}_j = \overline{z}_1 = [0\ 0\ 0\ 0\ 1]$ (p. tablica 4.40.1 w rozwiązaniu zadania 4.40)

$$\overline{v}_7 = \overline{w}_7 \oplus \overline{z}_1 = [1\ 1\ 0\ 0\ 0]$$

a syndrom

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Syndromy odpowiadające przekłamaniom na 1 i 2 pozycjach przedstawiono w tablicy 4.100.1.

Tablica 4.100.1

j	$\overline{z}_j$	$\mathbf{S}_j^T$	Uwagi
1	00001	01	Przekłamanie na 1 pozycji
2	00010	10	
3	00100	01	
4	01000	11	
5	10000	10	
6	11000	01	Przekłamanie na 2 pozycjach
7	10100	11	
8	10010	00	← Błąd nie wykryty przez dekoder
9	10001	11	
10	01001	10	
11	00101	00	← Błąd nie wykryty przez dekoder
12	00011	11	
13	01100	10	
14	00110	11	
15	01010	01	

Prawdopodobieństwo przekłamania na k pozycjach wynosi:

$$P_{ek} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

więc całkowite prawdopodobieństwo przekłamania

$$P_e = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - P_p = 1 - (1-p)^n$$

gdzie

P_p - prawdopodobieństwo poprawnej transmisji.

Pomijamy jako mało prawdopodobne, przy założeniu statystycznej niezależności, przekłamanie na 3 i więcej pozycjach, wówczas

$$P_e \cong \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$$

Z tablicy 4.100.1 wynika, że tylko dwa 2-pozycyjne (z dziesięciu) przekłamania dają zerowy syndrom, czyli nie zostaną wykryte przez dekoder, więc prawdopodobieństwo błędnej decyzji dekodera

$$P_b \cong \frac{2}{10} P_{e2} = \frac{2}{10}\binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} =$$

$$= 2p^2(1-p)^3 = 1.994 \cdot 10^{-6}$$

Zadanie 4.106 (4.51a). Kod Hamminga nie jest kodem rozdzielnym, nie można więc wykorzystać przy konstrukcji macierzy generacyjnej **G** zależności (3.41). Ponieważ słowo kodowe kodu Hamminga (7,4) można przedstawić w postaci:

1	2	3	4	5	6	7
k_1	k_2	i_1	k_3	i_2	i_3	i_4

gdzie:

$i_1,...,i_4$ - pozycje informacyjne,

k_1, k_2, k_3 - pozycje kontrolne

można równania kontrolne (3.22), (3.23) kodu liniowego zapisać, korzystając z tablicy 3.10, w postaci

$$\begin{aligned} k_1 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 &= 0 \\ k_2 \oplus i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 &= 0 \\ k_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 &= 0 \end{aligned}$$

Z równoważnej postaci tych równań:

$$\begin{aligned} k_1 &= i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 \\ k_2 &= i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 \\ k_3 &= i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 \end{aligned}$$

wynika, że kolumny 1, 2 i 4 macierzy generującej **G** (odpowiadają pozycjom kontrolnym) powinny zawierać elementy 1101, 1011, 0111. Jedynka na pozycji k (licząc od góry) oznacza, że w równaniu kontrolnym występuje k-ty bit informacyjny. Pozostałe kolumny zawierają po jednym elemencie niezerowym: kolumna 3 na pozycji 1, kolumna 5 na pozycji 2, kolumna 6 na pozycji 3 i kolumna 7 na pozycji 4. Zatem macierz generująca **G** kodu Hamminga (7,4) ma postać:

$$\mathbf{G}_{H(7,4)} = \begin{matrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ \left[\begin{matrix} 1110000 \\ 1001100 \\ 0101010 \\ 1101001 \end{matrix}\right] \end{matrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Zadanie 4.107 (4.51b). Siedem pierwszych kolumn tej macierzy odpowiada elementom macierzy $G_{H_{(7,4)}}$ } z zadania 4.106. Ponieważ ósmy bit słowa kodowego tego kodu jest równy sumie modulo dwa siedmiu bitów tego słowa, czyli

$$w_8 = k_4 = \sum_{i=1}^{7} w_i = k_1 \oplus k_2 \oplus k_3 \oplus i_1 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$

oraz

$$k_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4$$
$$k_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4$$
$$k_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$

więc

$$k_4 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_3$$

Ostatnie równanie określa wartości elementów ostatniej kolumny macierzy generującej (= 1110). Zatem macierz generująca wydłużonego kodu Hamminga (8,4) ma postać:

$$\mathbf{G}_{H_{(8,4)}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Zadanie 4.114 (4.69b). Prawdopodobieństwo błędnej decyzji dekodera P_b jest równe w przybliżeniu prawdopodobieństwu jednoczesnego przekłamania na dwóch pozycjach, czyli

$$P_b = \sum_{j=2}^{7} P_{ej} \cong P_{e2} = \binom{7}{2} p^2 (1-p)^5 \cong 2.089 \cdot 10^{-5}$$

gdzie: P_j - prawdopodobieństwo j - krotnego przekłamania.

Prawdopodobieństwo występowania błędu podczas transmisji P_e jest dopełnieniem do 1 prawdopodobieństwa poprawnej transmisji P_p i wynosi

$$P_e = 1 - P_p = 1 - (1-p)^7 \cong 6.979 \cdot 10^{-3}$$

Prawdopodobieństwo występowania błędów korygowalnych P_k jest równe prawdopodobieństwu wystąpienia w czasie transmisji pojedynczego przekłamania, czyli

$$P_k = P_{e1} = \binom{7}{1} p(1-p)^6 = 7p(1-p)^6 \cong 6.956 \cdot 10^{-3}$$

Wskaźnik efektywności kodu, określony ilorazem prawdopodobieństwa P_k do P_e jest równy $\frac{P_k}{P_e} = 0.997$ i jest (dla założonego w zadaniu rozkładu zakłóceń) bardzo wysoki.

Zadanie 4.115 (4.69c). Dekoder skróconego kodu Hamminga (6,3) dysponuje $2^m - 1 = 7$ różnymi niezerowymi syndromami. Może więc skorygować poprawnie nie tylko wszystkie przekłamania pojedyncze, ale i jedno (z 15 możliwych) przekłamanie na dwóch pozycjach. Prawdopodobieństwo błędnej decyzji dekodera jest więc określone zależnością

$$P_b = \frac{14}{15}P_{e2} + \sum_{j=3}^{6} P_{ej} \cong \frac{14}{15}P_{e2} = \frac{14}{15}\binom{6}{2}p^2(1-p)^4 =$$
$$= 14p^2(1-p)^4 \cong 1.3944 \cdot 10^{-5}$$

Zadanie 4.116 (4.69c). Prawdopodobieństwo błędnej decyzji dekodera P_b jest równe

$$P_b = \sum_{j=3}^{8} P_{ej} \cong P_{e3} = \binom{8}{3}p^3(1-p)^5 \cong 5.6 \cdot 10^{-8}$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu w czasie transmisji P_e jest równe

$$P_e = 1 - P_p = 1 - (1-p)^8 \cong 7.972 \cdot 10^{-3}$$

natomiast prawdopodobieństwo, że będą to błędy poprawnie skorygowane przez dekoder, wynosi

$$P_k = P_{e1} = 8p(1-p)^7 \cong 7.944 \cdot 10^{-3}$$

W porównaniu z kodem Hamminga (7,4), analizowanym w zadaniu 4.114, w wydłużonym kodzie Hamminga (8,4) jest znacznie mniejsze prawdopodobieństwo błędnej decyzji dekodera.

Rozwiązania zadań z rozdziału III

KANAŁ TRANSMISYJNY

Zadanie 6.1. Jeśli dane są prawdopodobieństwa warunkowe $p(y_j|x_i)$ $(i, j = 1,2,3)$ oraz prawdopodobieństwa $p(x_i)$ $(i = 1,2,3)$, to można obliczyć prawdopodobieństwa na wyjściu kanału $p(y_j)$ $(j = 1,2,3)$, a następnie prawdopodobieństwa warunkowe $p(x_i|y_j)$ $(i, j = 1,2,3)$. Na ich podstawie można przyjąć regułę decyzyjną największego prawdopodobieństwa (zal. (3.48)). To znaczy decyzja odbiornika o nadanej wiadomości, gdy odebrano y_j, jest

$$q(y_j) = x_k$$

gdzie: x_k - taka wiadomość, że dla $i = 1,2,3$ $(i \neq k)$

$$p(x_k|y_j) \geq p(x_i|y_j)$$

Prawdopodobieństwa $p(y_j)$ i $p(x_i|y_j)$ $(i, j = 1,2,3)$ zebrano w tablicy 6.1.1.

Tablica 6.1.1

i	j	$p(y_j)$	$p(x_i\|y_j)$
1	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{3}$
1	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	3	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{7}$
2	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{9}$
2	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$
2	3	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{7}$
3	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{9}$
3	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$
3	3	$\frac{7}{24}$	$\frac{3}{7}$

Z tablicy tej wynika, że

$$p(x_1 \mid y_1) = \frac{2}{3}$$
$$p(x_2 \mid y_1) = \frac{1}{9}$$
$$p(x_3 \mid y_1) = \frac{2}{9}$$

a zatem

$$q(y_1) = x_1$$

Podobnie można określić decyzję dekodera (odbiornika) po odebraniu y_2 i y_3. Łatwo sprawdzić, że:

$$q(y_2) = x_2\,, \qquad q(y_3) = x_3$$

a prawdopodobieństwo błędnej decyzji jest równe

$$P_b = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} p(y_j)p(x_i \mid y_j) =$$
$$= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)+\frac{7}{24}\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\right)=\frac{1}{2}$$

Zadanie 6.2. Kanał opisany macierzą **P** można przedstawić jak na *rys.6.2.1*, a informacja wzajemna (z zal (5.4)) określona jest równaniem

$$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

Entropia źródła

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\,\mathrm{ld}\,p(x_i) = 1.16\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

natomiast entropia warunkowa

$$H(Y \mid X) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i)\sum_{j=1}^{3} p(y_j \mid x_i)\,\mathrm{ld}\,p(y_j \mid x_i) = 0.473\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

więc straty informacji w kanale przy $N = 500$ wiadomości wynoszą

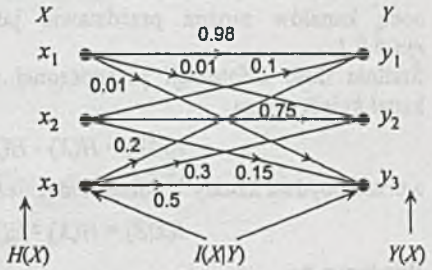
$$N \cdot H(Y|X) = 500 \cdot 0.473 = 236.5 \text{ bitu}$$

Prawdopodobieństwa występowania poszczególnych wyjść kanału obliczyć można z zależności

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i)p(y_j \mid x_i)$$

na podstawie której:

$$p(y_1) = 0.725$$
$$p(y_2) = 0.187$$
$$p(y_3) = 0.087$$



Rys. 6.2.1

Entropia wyjścia kanału

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{3} p(y_j)\,\mathrm{ld}\,p(y_j) = 1.094\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

więc średnia ilość informacji przenoszonej przez kanał

$$I(X|Y) = 1.094 - 0.473 = 0.621\ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

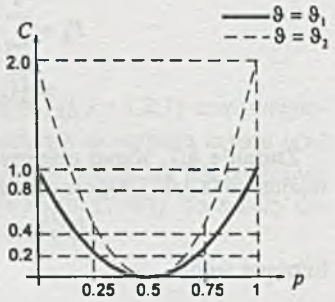
Zadanie 6.3. $H(Y|X) = 0 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$

Zadanie 6.4.

$$H(X) = 1.88 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}} \qquad H(X,Y) = 3.40 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 1.52 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 6.5. Przepustowość symetrycznego kanału binarnego wyraża się zależnością (5.11). Na podstawie tej zależności można sporządzić wykres przedstawiony na *rys.6.5.1*. Z wykresu tego widać, że gdy $p = 0.5$, to przepustowość kanału jest równa 0, natomiast dla $p = 0$ i $p = 1$ przepustowość osiąga wartość maksymalną równą 9.



Rys. 6.5.1

Zadanie 6.6.

$$R = 0.928 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

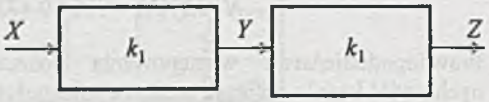
Zadanie 6.7.

$$H(Y|X) = 0.08 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 6.8.

$$H(X) - H(X|Y) = 0.935 \ \frac{\text{bitu}}{\text{wiadomość}}$$

Zadanie 6.9. Układ dwóch połączonych ze sobą kanałów można przedstawić jak na *rys.6.9.1*



Rys. 6.9.1

Średnia ilość informacji przenoszonej przez kanał k_1 jest równa

$$I(X|Y) = H(X) - H(X|Y)$$

a przez obydwa kanały k_{12} określona zależnością

$$I(X|Z) = H(X) - H(X|Z)$$

Wiadomo, że

$$p(x \mid y,z) = \frac{p(x,y,z)}{p(y,z)} = \frac{p(x,y)}{p(y)} \ \frac{p(z \mid x,y)}{p(z \mid y)}$$

Ponieważ $p(z|x, y) = p(z|y)$, zatem

$$p(x|y, z) = p(x|y)$$

Stąd

$$H(X|Y,Z) = H(X|Y)$$

więc

$$I(X|Y) - I(X|Z) = H(X|Z) - H(X|Y,Z)$$

Z właściwości entropii wynika, że

$$H(X|Z) \geq H(X|Y,Z)$$

zatem

$$I(X|Y) \geq I(X|Z)$$

więc

$$C_1 \geq C_{1+2}$$

Podobnie można udowodnić, że

$$I(Y|Z) \geq I(X|Z)$$

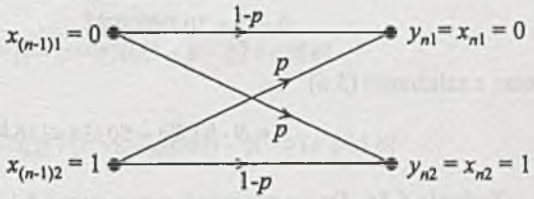
wówczas

$$C_2 \geq C_{1+2}$$

Zadanie 6.10. *n*-ty kanał k_n można przedstawić jak na *rys.6.10.1.*

Zatem

$$p_{n1} = p_{(n-1)1}(1 - p_{(n-1)1})p = \\ = (1-2p)p_{(n-1)1} + p$$



Rys. 6.10.1

Dla kanału $(n - 1)$ - go

$$p_{(n-1)1} = (1-2p)p_{(n-2)1} + p$$

oraz

$$p_{n1} = (1-2p)^2 p_{(n-2)1} + p(1-2p) + p$$

a ostatecznie

$$p_{n1} = (1-2p)^n p_{01} + p(1-2p)^{n-1} + p(1-2p)^{n-2} + \cdots + p(1-2p) + p = \\ = (1-2p)^n p_{01} + \tfrac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$$

Jeśli

$$0 < p < \tfrac{1}{2} \quad \text{to} \quad \lim_{n\to\infty}(1-2p)^n = 0$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} p_{n1} = \tfrac{1}{2}$$

Zadanie 6.11.

$$C = 919.2 \frac{\text{bitu}}{\text{s}}$$

Zadanie 6.12.

$$C = 8.59 \frac{\text{bitu}}{\text{s}}$$

Zadanie 6.13.

a) $R = 0.33 \frac{\text{bitu}}{\text{s}}$

b) $R = 0.27 \frac{\text{bitu}}{\text{s}}$

c) $R = 0.172 \frac{\text{bitu}}{\text{s}}$

Zadanie 6.14.

$$p(x_1) = 0.8, \qquad p(x_2) = 0.2$$

Zadanie 6.15. Z zależności (5.5)

$$\vartheta = \frac{1}{\tau} = 50 \frac{\text{wiadomości}}{\text{s}}$$

oraz z zależności (5.6)

$$R = \vartheta \cdot H(X) = 50 \text{ld} 5 \approx 116 \frac{\text{bitu}}{\text{s}}$$

Zadanie 6.16. Do wyznaczenia przepustowości niesymetrycznego kanału binarnego wykorzystana zostanie zależność (5.12). Dla $p = 0.99$

$$H_p = 0.0806$$

Wartości H_q oraz C, dla różnych wartości prawdopodobieństwa q przekłamania x_2, zebrano w tablicy 6.16.1.

Tablica 6.16.1

q	H_q	C
0	0	0.96
0.01	0.08	0.92
0.2	0.72	0.58
0.5	1	0.28
0.8	0.72	0.09
0.98	0.14	0.08

Zadanie 6.17. Tematowy kanał (*rys.6.17.1*) jest ogólniejszą postacią binarnego kanału wymazującego (zal. (5.13)). Przepustowość symetrycznego kanału binarnego z zakłóceniami jest równa (zależność (5.9)):

$$C = \max_{P(X)} \mathcal{I}[H(X) - H(X \mid Y)] = \mathcal{I}[H(Y) - H(Y \mid X)]_{\max}$$

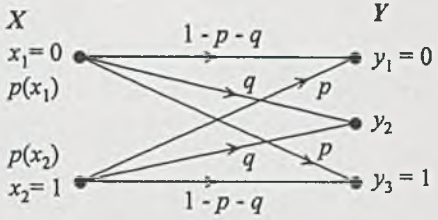
Entropia $H(Y)$ osiągnie wartość maksymalną dla

$$p(x_1) = p(x_2) = 0.5$$

wówczas

$$p(y_1) = p(y_2) = \tfrac{1}{2}(1-q)$$

$$p(y_3) = q$$



Rys. 6.17.1

oraz

$$H(Y)_{\max} = -q \operatorname{ld} q - (1-q)\operatorname{ld}(1-q) - (1-q)$$

Entropia warunkowa

$$H(Y \mid X) = -\sum_{i=2}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_i)p(y_j \mid x_i)\operatorname{ld} p(y_j \mid x_i) =$$

$$= -[p \operatorname{ld} p + (1-p-q)\operatorname{ld}(1-p-q) + q \operatorname{ld} q]$$

więc

$$C = \mathcal{I}\{(1-q)[1 - \operatorname{ld}(1-q)] + (1-p-q)\operatorname{ld}(1-p-q) + p \operatorname{ld} p\}$$

Zadanie 6.19. Z zależności (5.19)

$$C = \Delta f \operatorname{ld}\left(1 + \frac{P_s}{P_z \Delta f}\right)$$

więc

$$\lim_{\Delta f \to \infty} C = \lim_{\Delta f \to \infty} \frac{\operatorname{ld}\left(1 + \frac{P_s}{P_z \Delta f}\right)}{\frac{1}{\Delta f}} = \frac{P_s}{P_z} \operatorname{ld} e$$

Zadanie 6.20.

$$C = 10.970 \ \frac{\text{kbitów}}{\text{s}}$$

Zadanie 6.21.

$$\Delta f = \operatorname{ld} \frac{C}{\left(\frac{P_s}{P_z}\right)} = 3\,\text{MHz}$$

POLITECHNIKA ŚLĄSKA Biblioteka Główna

DODATKI

Dodatek 1

Tablica D1

Wartości –p ld p

p	$-p \operatorname{ld} p$	p	$-p \operatorname{ld} p$	p	$-p \operatorname{ld} p$
0.00	0.0000				
0.01	0.0664	0.36	0.5306	0.71	0.3508
0.02	0.1129	0.37	0.5307	0.72	0.3412
0.03	0.1517	0.38	0.5304	0.73	0.3314
0.04	0.1857	0.39	0.5298	0.74	0.3215
0.05	0.2161	0.40	0.5288	0.75	0.3113
0.06	0.2435	0.41	0.5274	0.76	0.3009
0.07	0.2686	0.42	0.5256	0.77	0.2903
0.08	0.2915	0.43	0.5236	0.78	0.2796
0.09	0.3127	0.44	0. 5211	0.79	0.2687
0.10	0.3222	0.45	0.5184	0.80	0.2575
0.11	0.3503	0.46	0.5153	0.81	0.2462
0.12	0.3671	0.47	0.5120	0.82	0.2348
0.13	0.3826	0.48	0.5083	0.83	0.2231
0.14	0.3971	0.49	0.5043	0.84	0.2113
0.15	0.4105	0.50	0.5000	0.85	0.1993
0.16	0.4230	0.51	0.4954	0.86	0.1871
0.17	0.4346	0.52	0.4906	0.87	0.1748
0.18	0.4453	0.53	0.4854	0.88	0.1623
0.19	0.4552	0.54	0.4800	0.89	0.1496
0.20	0.4644	0.55	0.4744	0.90	0.1368
0.21	0.4728	0.56	0.4684	0.91	0.1238
0.22	0.4806	0.57	0.4623	0.92	0.1107
0.23	0.4877	0.58	0.4558	0.93	0.0974
0.24	0.4941	0.59	0.4491	0.94	0.0839
0.25	0.5000	0.60	0.4422	0.95	0.0703
0.26	0.5053	0.61	0.4350	0.96	0.0565
0.27	0.5100	0.62	0.4276	0.97	0.0426
0.28	0.5142	0.63	0,4199	0.98	0.0286
0.29	0.5179	0.64	0.4121	0.99	0.0140
0.30	0.5211	0.65	0.4040	1.00	0.0000
0.31	0.5238	0.66	0.3957		
0.32	0.5260	0.67	0.3871		
0.33	0.5278	0.68	0.3784		
0.34	0.5292	0.69	0.3694		
0.35	0.5301	0.70	0.3602		

Dodatek 2 Tablica D2 (3.2)

Kod m2

(międzynarodowy kod telegraficzny Baudota)

			a_5				1		1	
			a_4		1				1	
a_3	a_2	a_1								
					Wiersz		e	3	a	-
		1	t	5	l	)	z	"	w	2
	1		Powrót		r	4	d	$	j	'
	1	1	o	9	g	&	b	?	Cyfry	
1			Odstęp		i	8	s	Dzwonek	u	7
1		1	h	+	p	0	y	6	q	1
1	1		n	c	:	f	1	k	(	
1	1	1	m	.	v	;	x	/	Litery	

Dodatek 3 Tablica D3 (3.3)

Kod OPTIMA

				a_7								1		1		1		1	
				a_6				1		1						1		1	
				a_5		1				1				1				1	
a_4	a_3	a_2	a_1		0		1		2		3								
				0	Przesuw taśmy		Odstęp		0	)			-	∨					'	^
			1	1	1	10						÷			j	J	a	A		
		1		2	2	[					s	S			k	K	b	B		
		1	1	3			3	]	t	T			l	L					c	C
	1			4	4	?					u	U			m	M	d	D		
	1		1	5			5	+	v	V			n	N					e	E
	1	1		6			6	=	w	W			o	O					f	F
	1	1	1	7	7	:					x	X			p	P	g	G		
1				8	8	(					y	Y			q	Q	h	H		
1			1	9			9	/	z	Z			r	R					i	l
1		1		A			‘	’	×	;			Powrót karetki (CR)						Małe litery	
1		1	1	B	Stop						.	¬	>	≡			<	"		
1	1			C			Pisanie przerwane (NS)		Pisanie wznowione (WS)				Włączenie dziurkarki nr 1						Duże litery	
1	1		1	D	Wyłączenie pomijania znaków						-	|			:=	↑	Włączenie pomijania znaków			
1	1	1		E	Przełą-czenie czytnika (LEU)						Tabulator						Włączenie dziurkarki nr 2			
1	1	1		F			Nowa linia (NL)		Wyłącze-nie dziurkarek				Wysuw papieru (LF)						Znak korekty	

Uwaga: Piąty bit (a_5) jest bitem kontroli nieparzystości, tzn. $\sum_{i=1}^{7} a_i = 1$

Dodatek 4 Tablica D4 (3.4)

Kod ISO-7 (ASCII)

				a_7					1	1	1	1
				a_6			1	1			1	1
				a_5		1		1		1		1
a_4	a_3	a_2	a_1		0	1	2	3	4	5	6	7
				0	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
			1	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
		1		2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
		1	1	3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
	1			4	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
	1		1	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
	1	1		6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
	1	1	1	7	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1				8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1			1	9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1		1		A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1		1	1	B	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1	1			C	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1	1		1	D	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1	1	1		E	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1	1	1	1	F	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Objaśnienia znaków w tablicy D6

Dodatek 5

Tablica D5 (3.5)

Kod KOI-8

			a_8									1	1	1	1	1	1	1	1
			a_7					1	1	1	1					1	1	1	1
			a_6			1	1			1	1			1	1			1	1
			a_5		1		1		1		1		1		1		1		1
a_4	a_3	a_2	a_1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
				0	НУЛ	АР1	Про-бел	0	@	P		p	ВЦФ	Д16			ю	п	Ю	П
			1	1	НЗ	СУ1	!	1	A	Q	a	q	НЗН	Д17			а*	я	А*	Я
		1		2	НТ	СУ2	"	2	B	R	b	r	РП	УУК			б	р*	Б	Р*
		1	1	3	ЕТ	СУ3	#	3	C	S	c	s	ДОЗ	А18			ц	с	Ц	С*
	1			4	КИ	СТП	¤	4	D	T	d	t	БК	ВКП			д	т	Д	Т*
	1		1	5	КСТ	НЕТ	%	5	E	U	e	u	НС	ОСУ			е*	у*	Е*	У
	1	1		6	ДА	СЫН	&	6	F	V	f	v	НП	ВП			ф	ж	Ф	Ж
	1	1	1	7	ЗВ	КВ	'	7	G	W	g	w	ОЕД	Д23			г	в	Г	В
1				8	ВИ	АН	(	8	H	X	h	x	ДО8	Д24			х*	ь	Х	Ь
1			1	9	ГТ	КН	)	9	I	Y	i	y	ДО9	Д25			и	ы	И	Ы
1		1		A	ИС	ЗМ	*	:	J	Z	j	z	УР	Д26			й	з	Й	З
1		1	1	B	ВТ	АР2	+	;	K	[	k	{	СП2	СП3			к	ш	К	Ш
1	1			C	ВФ	РФ	,	<	L	\	l	|	Д12	ВУП			л	э	Л	Э
1	1		1	D	ВК	РГ	-	+	M	]	m	}	Д13	ВСТ			м	щ	М*	Щ
1	1	1		E	ВЫХ	ВЗ	.	>	N	¬	n	~	НРВ	Д30			н	ч	Н*	Ч
1	1	1	1	F	ВХ	РЗ	/	?	O		o	_	СП1	Д31			о*	ъ	О*	ЭВ

Objaśnienia znaków w tablicy D6

Dodatek 6 Tablica D6

Objaśnienia znaków z tablic D4(3.4) i D5(3.5)

KOD	SYMBOLE KODOWE KODU		ZNACZENIE SYMBOLI
	ISO - 7 (Tablica 3.4)	KOI – 8 (Tablica 3.5)	
0/0	NUL	НУЛ	znak zerowy
0/1	SOH	НЗ	start nagłówka
0/2	STX	НТ	start tekstu
0/3	ETX	ЕТ	koniec tekstu
0/4	EOT	КИ	koniec transmisji
0/5	ENQ	КСТ	pytanie,prośba o odpowiedź
0/6	ACK	ДА	odpowiedź pozytywna odbiornika
0/7	BEL	ЗВ	dzwonek
0/8	BS	ВИ	cofacz, przesunięcie o jedną pozycję wstecz
0/9	HT	ГТ	tabulacja pozioma
0/A	LF	ИС	zmiana wiersza
0/B	VT	ВТ	tabulacja pionowa
0/C	FF	ВФ	zmiana arkusza
0/D	CR	ВК	powrót karetki
0/E	SO	ВЫХ	wyjście z kodu standardowego
0/F	SI	ВХ	powrót do kodu
1/0	DLE	АР1	zmiana sensu występujących po nim znaków
1/1	DC1	СУ1	sterowanie urządzeń zewnętrznych
1/2	DC2	СУ2	sterowanie urządzeń zewnętrznych
1/3	DC3	СУ3	sterowanie urządzeń zewnętrznych
1/4	DC4	СТП	sterowanie urządzeń zewnętrznych (stop)
1/5	NAK	НЕТ	odpowiedź (odbiornika) negatywna
1/6	SYN	СЫН	znak synchronizacyjny
1/7	ETB	КВ	koniec bloku transmisyjnego
1/8	CAN	АН	kasowanie danych poprzedzających ten znak
1/9	EM	КН	koniec nośnika
1/A	SUB	ЗМ	podstawienie znaku w miejsce błędnego
1/B	ESC	АР2	zmiana rejestru lub tablicy kodowej
1/C	FS	РФ	separator zbiorów
1/D	GS	РФ	separator grup
1/E	RS	РЗ	separator zapisów
1/F	US	РЗ	separator jednostek
2/0	SP	Пробел	odstęp
7/F	DEL	ЗВ	unieważnienie

POLITECHNIKA ŚLĄSKA Biblioteka Główna Gliwice

LITERATURA

[1] **Abramson N.**: Teoria informacji i kodowania, PWN, Warszawa 1969.
[2] **Ash R.B.**: Information Theory, J. Wiley 1965.
[3] **Bereziuk N.T.** i inni: Kodirowanije informacji, Wysszaja Szkoła, Charkow 1978.
[4] **Cimbal V.P.**: Zadacznik po tieorii informacji i kodirowanija, Wysszaja Szkoła, Kijew 1977.
[5] **Dróżdż J.**: Podstawy kodowania nadmiarowego, WPW, Warszawa 1980.
[6] **Ingels F.M.**: Information and Coding Theory, Intext, Scranton 1971.
[7] **Jagłom A.M., Jagłom I.M.**: Prawdopodobieństwo i informacja, KiW, Warszawa 1963.
[8] **Kużmin I.V., Kedrus V.A.**: Osnowy tieorii informacji i kodirowanija, Wysszaja Szkoła, Kijew 1977.
[9] **Losew O.I., Plotnikow N.D.**: Osnowy tieorii pieriedaczi dannych, Wysszaja Szkoła, Kijew 1977.
[10] **MacWilliams F.J., Sloane N.J.A.**: The Theory of Error-Correcting Codes, Part I, II, North-Holland, Amsterdam 1977.
[11] **Orlow W.A., Filipow L.I.**: Tieoria informacji w uprażnienijach i zadaczach, Wysszaja Szkoła, Moskwa 1976.
[12] **Peterson W.W., Weldon E.J.**: Kody isprawlajuszczije oszibki, Mir, Moskwa 1976.
[13] **Seidler J.**: Teoria kodów, PWN, Warszawa 1965.
[14] **Szwaja Z., Sobkowiak R.**: Wykłady z telemechaniki - kody Hamminga i ich realizacja, Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Poznańskiej, Poznań 1970.
[15] **Volk W.**: Statystyka stosowana dla inżynierów, WNT, Warszawa 1973.
[16] **Seidler J.**: Nauka o informacji. Tom I. Podstawy, modele źródeł i wstępne przetwarzanie informacji, WNT, Warszawa 1983.
[17] **Seidler J.**: Nauka o informacji. Tom II. Sygnały niosące informację i jej wytwarzanie, WNT, Warszawa 1983.
[18] **Nowakowski J., Sobkowiak W.**: Teoria informacji, WNT, Warszawa 1970.
[19] **Denning D.E.R.**: Kryptografia i ochrona danych, WNT, Warszawa 1992.
[20] **Blake I.F. (Ed.)**: Algebraic Coding Theory: History and Development, Dowden 1973.
[21] **Franks L.E. (Ed.)**: Data Communications Fundamentals of Baseband Transmission, Dowden 1974.
[22] **Ingarden R.S.**: Information Theory and Thermodynamics, Toruń 1974.
[23] **Hamming R.W.**: Coding and Information Theory, Prentice - Hall Inc., New Jersey 1980.

[24] **Shannon C.E., Weaver W.**: The Mathematical Theory of Communication, The Universisty of Illinois Press, 1962.
[25] **McEliece R.J.**:The Theory of Information and Coding, Addison - Wesley, 1977.
[26] **Berlecamp E.R. (Ed.)**: Key Papers in The Development of Coding Theory, IEEE Press, New York 1974.
[27] **Slepien D. (Ed.)**: Key Papers in The Development of Information Theory, IEEE Press, New York 1974.
[28] **Aczel J., Daroczy Z.**: On Measurement of Information and Their Characterization, Academic Press, 1975.
[29] **Townsend A.A.R.**: Digital Line - of - Sight Radio Links.A Handbook, Prentice Hall, 1988.
[30] **Sinneme W., McGovern T.**: Digital, Analog and Data Communication, Prentice Hall, 1986.
[31] **Roden M.S.**: Digital Communication System Design, Prentice Hall,1988.
[32] **Sklar B.**: Digital Communications. Fundamentals and Applications, Prentice Hall, 1988.

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
ul. Akademicka 5, 44-100 Gliwice
tel./fax (032) 237-13-81
Dział Sprzedaży i Reklamy (032) 237-18-48

www.wydawnictwo.polsl.gliwice.pl
wydawnictwo@polsl.gliwice.pl

Wydanie VI poprawione

Nakł. 400 + 55 Ark. wyd. 10,5 Ark. druk. 10,375 Papier offset. 70x100, 80 g
Oddano do druku 12.11.2001 r. Podpis. do druku 12.11.2001 r. Druk ukończ. w grudniu 2001 r.
Zam. 309/01

Fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach, ul. Kujawska 1

Książki Wydawnictwa Politechniki Śląskiej można nabyć w Wydawnictwie Politechniki Śląskiej w Gliwicach oraz w wymienionych poniżej księgarniach

GLIWICE

- Punkt Sprzedaży - Wydział Górnictwa i Geologii Pol. Śl., ul. Akademicka 2
- Punkt Sprzedaży - Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki Pol. Śl., ul. Akademicka 16
- Punkt Sprzedaży - Wydział Architektury Pol. Śl., ul. Akademicka 7
- Mercurius - ul. Konstytucji 14
- Matras - ul. Konstytucji

KATOWICE

- Punkt Sprzedaży - Wydział Metalurgii, Inżynierii Materiałowej i Transportu Pol.Śl., ul. Krasińskiego 8
- Matras - ul. Ściegiennego 41
- Hurtownia "DIK" - ul. Dulęby 7

ZABRZE

- Punkt Sprzedaży - Wydział Organizacji i Zarządzania Pol. Śl., ul. Roosevelta 26

OPOLE

- Techniczna J. Szutenberg - ul. Sosnkowskiego 31

KRAKÓW

- Hurtownia "Pagina" - ul. Moniuszki 25
- Naukowa - ul. Podwale 6

GDAŃSK

- EKO-BIS - ul. Dyrekcyjna 6

WARSZAWA

- Ekonomiczna K. Leki - ul. Grójecka 67
- Techniczna - ul. Świętokrzyska 14
- MDM - ul. Piękna 31
- ORPAN - Pałac Kultury i Nauki
- Studencka - Pl. Politechniki 1

BIAŁYSTOK

- Dom Książki (Księgarnia 84) - ul. Dolistowska 3

BG Politechniki Śląskiej w Gliwicach
nr inw.: 105 - 67103
Mg S.67103

Zadania umieszczone w książce s
wykładów z „teorii informacji i kod
Elektronika i Telekomunikacja Wy
Elektroniki Politechniki Śląskiej.

W części A książki podano po
zadań. Zadania z rozwiązaniami zaznaczono pionową kreską na lewym marginesie.

W rozdziale A.I.1 przedstawiono podstawowe definicje i zależności wykorzystane w zadaniach i ich rozwiązaniach opisujące entropię i informację, natomiast w rozdziale A.I.2 tematy zadań z entropii i informacji. Rozdział A.II.3 zawiera podstawowe wiadomości z kodowania i dekodowania informacji. Zadania z tego zakresu materiału podano w rozdziale A.II.4. Kanał transmisyjny opisany jest w rozdziale A.III.5, a tematy zadań podano w rozdziale A.III.6.

W części B umieszczono rozwiązania typowych zadań i odpowiedzi do większości pozostałych.

Całość książki uzupełnia wykaz ważniejszych oznaczeń i dodatki w postaci tablic.

Słowa kluczowe:

- entropia
- informacja wzajemna
- kod nienadmiarowy
- kod nadmiarowy
- kanał informacyjny

ISBN 83-88000-94-2

Wydawnictwo Politechniki Śląskiej
44-100 Gliwice, ul. Akademicka 5, tel./fax (0 prefiks 32) 237-13-81
Dział Sprzedaży i Reklamy tel. (0 prefiks 32) 237-18-48
www.wydawnictwo.polsl.gliwice.pl, e-mail: wydawnictwo@polsl.gliwice.pl