EGMONT COLERUS

OD TABLICZKI DO RÓŻNICZKI

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO KSIĄŻEK SZKOLNYCH
WE LWOWIE

EGMONT COLERUS

OD TABLICZKI DO RÓŻNICZKI

EGMONT COLERUS

OD TABLICZKI DO RÓŻNICZKI

MATEMATYKA DLA WSZYSTKICH

PRZEKŁAD AUTORYZOWANY
ANTONIEGO NYKLIŃSKIEGO

Z PRZEDMOWĄ
DRA STEFANA BANACHA
PROF. UNIW. JANA KAZIMIERZA

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO KSIĄŻEK SZKOLNYCH WE LWOWIE

131983

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

OKŁADKĘ PROJEKTOWALI
ANNA I FRANCISZEK SEIFERTOWIE

1938

DRUKARNIA NARODOWA W KRAKOWIE

D 235/11

P R Z E D M O W A

Matematyka jest najpiękniejszym i najpotężniejszym tworem ducha ludzkiego. Matematyka jest tak starą, jak stary jest człowiek. Wysoki już poziom osiągnęła w starożytnej Babilonii i Egipcie, wydatnie posunęli ją naprzód Grecy, wielkie zasługi dla jej rozwoju położyli Hindusi i Arabowie. Matematycy średniowiecza przygotowali grunt dla jednego z największych odkryć, które wywarło przemożny wpływ na rozwój kultury i przyczyniło się w wielkiej mierze do osiągnięcia dzisiejszych jej wyżyn.

Odkrycia tego dokonali Newton i Leibniz stwarzając nową metodę badawczą tzw. rachunek różniczkowy i całkowy. Pojęcia nowego rachunku pozwoliły Newtonowi wypowiedzieć prawa rządzące materią we wszechświecie i wyjaśnić ruchy planet. Metody i wyniki rachunku różniczkowego i całkowego umożliwiły zgłębienie tajemnic przyrody i doprowadziły nauki fizyczne do ich wysokiego poziomu. Bez rachunku różniczkowego i całkowego niemożliwym jest istotne zrozumienie nowych teorii o czasie, przestrzeni i budowie materii. Rachunkowi różniczkowemu i całkowemu zawdzięczamy dzisiejsze osiągnięcia w dziedzinie techniki.

W ostatnich czasach wywiera matematyka coraz większy wpływ na rozwój wielu nauk. Matematyka oddaje wielkie usługi dla obronności kraju. Tylko państwa, które pielęgnują matematykę mogą być silne i potężne.

Mimo swojego podstawowego znaczenia dla dzisiejszej kultury, matematyka jest nauką, której istota i rola dla niewielu tylko jest zrozumiała. Laik, mający ogólne wykształcenie nawet bardzo wysokie, nie zawsze zdaje sobie sprawę, czym jest matematyka i jak przy jej pomocy osiągnięto tak potężne wyniki. Do wiadomości ogółu docierają tylko pewne ciekawostki matematyczne podawane przez gazety i książki popularne, które zaciemniają prawdziwą istotę matematyki i dają wręcz fałszywy jej obraz.

Brak było dotychczas książki, nie tylko w literaturze polskiej lecz również w światowej, która by laika wprowadzała w piękny świat matematyki. Istniejące książki zakładają zazwyczaj pewne przygotowanie matematyczne i wymagają poważnego studium. Brak ten usuwa niniejsza książka. Autor postawił sobie za zadanie przedstawić laikowi istotę matematyki wyższej. Zadanie było trudne, lecz autor rozwiązał je znakomicie.

Do zrozumienia książki nie potrzeba ż a d n y c h wiadomości matematycznych. To jest główna zaleta tej książki. Autor wiedząc, że laik niewiele pamięta z matematyki szkolnej, zaczyna od tabliczki mnożenia, prowadzi następnie czytelnika poprzez matematykę elementarną, aby w końcu wyjaśnić mu ideę potężnej teorii rachunku różniczkowego i całkowego.

Przedstawienie jest proste i przystępne. Książkę czyta się łatwo i bez wielkiego wysiłku. Już pierwsze jej strony wywołują podziw, że tak zajmująco i barwnie można pisać o matematyce. Autor przy omawianiu trudniejszych pojęć świadomie rezygnuje niekiedy ze ścisłości, aby w zamian za to uzyskać jaśniejsze intuicyjne przedstawienie zupełnie wystarczające dla laika. Szczęśliwie dobrane przykłady przyczyniają się wydatnie do zrozumienia wykładu. Czytelnik znajdzie ponadto liczne wzmianki z historii matematyki.

Dzieło to zadaje kłam powszechnie przyjętemu mniemaniu, że do zrozumienia matematyki potrzebne są specjalne zdolności. Powyższe zalety książki sprawiły, że autor uzyskał pełny sukces. W ciągu trzech lat książka rozeszła się w wielkiej liczbie wydań.

Laik chcący zapoznać się z matematyką odniesie wielkie korzyści po przeczytaniu tej książki. Nadaje się ona również do pierwszego studium, po którym można następnie przejść do specjalnych dzieł, dla tych wszystkich, którzy jak: przyrodnicy, lekarze, prawnicy, w niewielkim zakresie potrzebują wyższej matematyki. Książkę tę można również zalecić jako lekturę dla zdolniejszych uczniów wyższych klas szkoły średniej. Wielką zasługą Państwowego Wydawnictwa Książek Szkolnych jest wydanie tego dzieła, gdyż przyczyni się ono niewątpliwie do podniesienia kultury matematycznej w szerokich kołach polskiej inteligencji.

Dr Stefan Banach
Prof. U. J. K.

Lwów, dn. 27/IX 1938.

W S T Ę P

Matematyka jest jak gdyby łapką na myszy. Kto raz w nią wpadł, rzadko znajduje wyjście, prowadzące z powrotem do dawnego, przedmatematycznego stanu duszy. Zbyt daleko zawiodłoby nas wyjaśnianie przyczyny tego typowego zjawiska. Dlatego zajmiemy się tylko ustaleniem jego następstw.

Pierwszym z nich jest wielki brak prawdziwych talentów pedagogicznych w tej dziedzinie nauk. Bardzo rzadko tylko łączy się w jednej osobie wielka wiedza matematyczna z łatwością przystępnego wykładu. Z tego jednak wynika jako drugie następstwo — „matematyczny kompleks poczucia niższości" szerokich warstw wykształconych i chętnych wiedzy.

Nie chciałbym być źle zrozumianym. Nie jest moim zamiarem atakować innych, raczej przeciwnie: czuję potrzebę bronić samego siebie. Bo nie jest bynajmniej rzeczą zwyczajną, by laik porywał się na wyłożenie najściślejszej ze wszystkich nauk.

Ponieważ jednak od dawna śledziłem własną mękę i mękę moich kolegów, dojrzał we mnie zamiar, by spisać niejako w ł a s n e p r z e ż y c i e matematyki i to jeszcze w początkowym, stosunkowo może jeszcze niskim stadium zgłębiania tej trudnej dyscypliny. Bo własna moja znajomość tej „łapki na myszy" każe mi się obawiać, że po kilku latach sam nie znajdę już drogi powrotnej.

Lecz do przedsięwzięcia tego skłonił mnie inny jeszcze ważny wzgląd. Oto w sposób dla każdego widoczny matematyka, matematyczne metody i świat pojęć matematycznych coraz silniej przenikają do wszystkich nauk, co więcej, opanowują nawet wiele spraw codziennych. I zgoła nie pocieszający to stan — rzec by się nawet

chciało — kompromitacja współczesnej kultury, że czytelnik nieco poważniejszej rozprawy może się raptem znaleźć jakby w dżungli hieroglifów, które go odstraszają i płoszą; albo, że musi się spokojnie przypatrywać, jak mała garstka wtajemniczonych zbywa go ironicznym wzruszeniem ramion. Mam na myśli bynajmniej nie wyżyny teorii względności czy kwantów, ale rzeczy, które mogą znajdować się w każdym czasopiśmie ekonomicznym czy medycznym. Nie mówiąc już zgoła o statystyce, która, zwłaszcza w krajach anglosaskich, jest dzisiaj na wskróś już zmatematyzowana. Przy tym występuje matematyka w stanie jeszcze bardziej ukrytym w mowie codziennej. Czytamy w gazecie o „integralnym faszyźmie", o „przeciętnych wartościach", o „średnich temperaturach", o „optymalnych efektach", o „krytycznych punktach krzywej", o „polach sił" itp.: a są to wyrażenia zapożyczone bezpośrednio z matematyki i z fizyki matematycznej.

Otóż wcale nie jest koniecznym, by takie słowa przyjmować tylko jako pusty dźwięk lub, co gorsza, sobie samemu wydawać się przez to mniej wartościowym i nie wykształconym. Bo treść takich słów jest równie wspaniała jak symboliczna, równie zrozumiała jak możliwa do opanowania.

Jedno oczywiście trzeba przyjąć jako założenie: pewien, żadną miarą nie dający się uniknąć trud nauki. Największy geometra grecki Euklides, który około r. 300 przed Chr. żył w Aleksandrii, zapytany przez swego króla, Ptolomeusza Filadelfa, o „wygodną" metodę poznania matematyki, odparł śmiało: „Do matematyki nie prowadzi żadna droga królewska". Każdy, powierzchowny nawet znawca tej nauki, musi przyświadczyć tym słowom wielkiego Greka.

Ze stwierdzenia tego faktu bynajmniej jednak nie wynika konieczność defetyzmu i zwątpienia, bo między „królewskimi drogami" a „zdobywaniem Himalajów" istnieje zgodnie z prawem ciągłego przejścia, na mocy zasady ciągłości, niesłychanie wiele możliwości pośrednich.

Zasłużeni i znakomici uczeni, jak Jerzy Scheffers, S. P. Thompson i Gerhard Kowalewski w pełni pojęli tę sytuację i spróbowali zbudować takie pośrednie stopnie. Wprowadzające w ścisłą matematykę dzieła tych trzech wielkich pedagogów są trwałymi zdobyczami kultury. Toteż od niczego nie jestem tak daleki, jak od tej zuchwałej myśli, by chcieć współzawodniczyć z przedziwną plastyką ta-

kiego Scheffersa, z upajającą precyzją i elegancją Kowalewskiego, albo z boskim humorem i nieprzebranym bogactwem Thompsona. Ale — i to „ale" jest rozstrzygające: wszystkie te trzy przytoczone dzieła klasyczne z góry zakładają coś, czego nie można przyjmować jako założenie, jeśli się matematyczny kompleks niższości pragnie doszczętnie usunąć: zakładają one mianowicie wykształcenie gimnazjalne albo przynajmniej opanowanie elementarnej matematyki. Jak często jednak brak właśnie prostych elementarnych pojęć, pomimo całego zamiłowania do matematyki i pomimo ukończenia szkoły średniej, odczułem na samym sobie, kiedy zacząłem się dalej kształcić i uczęszczałem na kurs matematyki wyższej i statystycznej przy austriackim Związkowym Urzędzie Statystycznym. To przeżycie było też właściwą podnietą mojej próby, której się podjąłem lub raczej na którą się porwałem z pełnym i wyraźnie zaakcentowanym uczuciem bojaźni i czci wobec prawdziwej nauki. Bo przekonałem się, że z trzech względów należało by taką książkę dla siebie samego zredagować lub otrzymać jako pomoc od któregoś ze „współuczniów". Po pierwsze — nie trudno wyobrazić sobie takiego „gorliwca", niech nim będzie lekarz, ekonomista, kupiec, przemysłowiec, dziennikarz, przyrodnik — równie dobrze jak wojskowy, urzędnik, robotnik, młode dziewczę czy uczeń, którzy pragnęliby poznać świat pojęć tej „niesamowitej" matematyki od tabliczki mnożenia do całki, w sposób inny od stosowanego w szkole, by tak przyswoić sobie najogólniejsze wiadomości i zyskać przez to pewne wewnętrzne uspokojenie. Nie jest także wykluczone, że „gorliwiec" ów zechce czegoś więcej. Wyniósłszy z mej skromnej książki podstawowe wiadomości, bezpiecznie będzie się mógł powierzyć pewnej dłoni takich przewodników, jak Scheffers, Thompson czy Kowalewski i dotrzeć tak daleko, jak tylko zechce; aż znajdzie się w potrzasku matematyki i nie będzie już nawet mógł pojąć mego marnotrawstwa słów i mojej naiwności. Tacy czytelnicy będą moją szczególną dumą, choćby nawet w końcu mieli mną zupełnie pogardzać. Wreszcie może się zdarzyć, że uczniowie będą się posługiwali moją książką jako zakazanym środkiem pomocniczym. Już w tym miejscu proszę wszystkich pedagogów, by zechcieli mi wybaczyć i nie podnosili przeciwko mnie zarzutu, że „psuję młodzież". Młodzieży zaś oświadczam stanowczo, że w razie jakiejś sprzeczności nie mnie mają wierzyć, lecz powołanemu do tego nauczycielowi.

Poeta Novalis powiedział: „Życie bogów jest matematyką. Wszyscy wysłannicy boscy muszą być matematykami. Czysta matematyka jest religią. Naprawdę szczęśliwi są tylko matematycy. Prawdziwy matematyk jest sam przez się entuzjastą. Bez entuzjazmu nie ma matematyki".

Jeśliby mi się udało tchnąć w mych czytelników ducha tego zapału, byłbym bardzo szczęśliwy. Bo „matematyczny kompleks niższości" rodzi niestety, jak każdy taki kompleks, niskie uczucia nienawiści i urazy. Świetna matematyczka grecka Hypatia, jedyna kobieta, której w historii matematyki przyznaje się miejsce poczesne, została przez motłoch ukamienowana nie tylko z fanatyzmu religijnego; także wielkiemu Leibnizowi nie wyświadczyłem w oczach niejednego konsekwentnego i nieubłaganego przeciwnika matematyki żadnej przysługi przez to, że ośmieliłem się jako ośrodek jego geniuszu wysunąć matematykę i słuszności tego dowieść z powodzeniem, uznanym zgodnie przez naprawdę powołanych.[1]

Pomóc w przezwyciężeniu odrazy przed najczystszą, rzec by się chciało: najświętszą ze wszystkich nauk, ma właśnie ta książka. Powierzchownym pięknoduchom wydaje się matematyka szczytem materializmu. Tym należy powiedzieć, że nie tylko dla hinduskich, babilońskich i egipskich kapłanów religia i matematyka w harmonii żyły i działały. Także dla Pitagorasa, Platona, Mikołaja z Cuzy, Pascala, Newtona, Leibniza — by wymienić tylko kilka nazwisk — była matematyka właśnie źródłem poznania, że nawet „najrzeczywistsza" ze wszystkich nauk budzi na swych najwyższych szczytach prawdziwą wiarę i prawdziwą pokorę przed tym co boskie.

Jednak w ciągu wspólnego przedzierania się w głąb matematyki będziemy jeszcze często mieli sposobność poruszania takich tematów. Teraz pragnąłbym jeszcze pokrótce zdać sprawę z „podziału" ról w tej książce. O ile to możliwe w matematyce, którą buduje wspólna praca tyciącleci, sam jeden ułożyłem niniejszą książkę. Matematyk, dr Walter Neugebauer, przejrzał ją wprawdzie po napisaniu — to dla uspokojenia krytycznie nastawionych czytelników — i udzielił mi niejednej cennej wskazówki. Nie chciałbym go jednak obarczać żadną odpowiedzialnością za mnie, tym bardziej, że może

---

[1] Autor ma na myśli swoją monumentalną biografię Leibniza, wydaną pt. „Leibniz, der Lebensroman eines weltumspannenden Geistes". (Prz. tłum.).

zbyt gorliwie szedłem za radą francuskiego matematyka Piotra Boutroux, aby w nauczaniu zmieniać metodę ujęcia.

Do wielkiej wdzięczności zobowiązał mnie także członek Wiedeńskiego Związku Plastyków, malarz p. H. Strohofer, który nie widział w tym ujmy dla swej wypróbowanej sztuki, że narysował wszystkie figury w tekście według moich wskazówek.

A teraz — trudno, skoro jak wiadomo, do matematyki nie prowadzi żadna królewska droga — musimy, czytelnik i ja, wspólnie wziąć się do dzieła i intensywnie pracować, by od tabliczki mnożenia dotrzeć aż do różniczki i całki. W zasadzie, mam nadzieję, uczyniłem to możliwym. Czy się nie łudzę, powiedzą mi przeciwnicy.

EGMONT COLERUS

ROZDZIAŁ PIERWSZY

„PRAWDZIWA KABAŁA"

W poczekalni lekarza siedzi pacjent. Przeczuwa, że nie prędko znajdzie się w pokoju ordynacyjnym. Dlatego postanawia skrócić sobie czas lekturą. Na stole leżą najrozmaitsze prospekty zakładów leczniczych i linii okrętowych. Szczególnie ściąga na siebie uwagę obrazek, ukazujący całą wspaniałość mórz Południa i miast podzwrotnikowych. Zaciekawiony, otwiera książeczkę i bardzo się rozczarowuje. Bo nie rozumie ani słowa. Prospekt, który według wszelkich pozorów zachwala linię okrętową do Południowej Ameryki, jest zredagowany — nawet tego nie wie pacjent dokładnie — w języku portugalskim. A przecież nie przestaje go studiować. Obrazy kajut, jadalni, przystani portowych są równie piękne jak zrozumiałe. Ale jeszcze coś innego rozumie czytelnik, nie potrzebując tłumaczenia: długie kolumny cyfr, zestawienia liczbowe, tu i ówdzie rozrzucone obliczenia, dane dotyczące przybycia i odjazdu.

Jestem przygotowany na to, że przykład mój wyda się dziecinny, najoczywistszy w świecie, jeżeli nie wręcz niedorzeczny. Bo czyż wątpił kto kiedyś o tym, że prawie wszystkie narody kulturalne posługują się dziś tymi samymi znakami liczbowymi? Cóż miałoby w tym być dziwnego albo problematycznego? Szkoda zatem całego tego wstępu. Cyfra 3 oznacza w portugalskim tekście to samo, co cyfra 3 w tekście polskim, czy angielskim. A obliczenie $5214 \times 7 = 36\,498$ jest w równym stopniu niezależne od kraju, w którym zostało wykonane. I basta!

Przyznaję chętnie, że temu porywczemu dowodzeniu i wysnutemu zeń wnioskowi niewiele albo i nic nawet nie można zarzucić. Nie zgadzam się wyłącznie tylko na to, by dowodzenie to wykluczyć miało wszelkie dalsze rozważania. Co więcej, utrzymuję, że bliższe

przyjrzenie się temu właśnie niedorzecznemu przykładowi zawiedzie nas prościuteńko w głąb najtajniejszej zagadki matematyki i pozwoli nam zapoznać się z wieloma najważniejszymi pojęciami podstawowymi.

Przeciwnik mój mianowicie przeoczył niejedno. Przede wszystkim tylko pojęciowo oznacza to to samo, jeśli prospekt nasz czyta, zajmując się przy tym liczbami, Polak czy Portugalczyk. Bo Portugalczyk używa innych słów dla nazwania liczb niż Polak. A Francuz, Anglik, Szwed znowu innych. To nazywanie liczb prowadzi w pobliże tajników układu liczbowego. Tak np. mówimy na 24 dwadzieścia cztery, tak samo mówi Anglik: *twenty-four* (dwadzieścia-cztery), natomiast Niemiec mówi: *vier-und-zwanzig,* a więc „cztery-i-dwadzieścia". Francuz nie mówi na osiemdziesiąt *„octante",* co oznaczało by logiczne następstwo *trente* (30), *quarante* (40) itd., lecz zdumiewa nas tworem w formie mnożenia *quatre-vingt,* co dosłownie znaczy „cztery dwudziestki".

Zanim bliżej naświetlimy te tajemnice, chciałbym wskazać na wielkie niebezpieczeństwo, jakie może pociągnąć za sobą wymawianie większych zespołów liczb. Znana jest np. ulubiona podrywka, polegająca na tym, że polecamy komuś zapisać liczbę jedenaście tysięcy jedenaścieset jedenaście. Każdy, słysząc tę liczbę, napisze odważnie 11 111, co jak wiadomo znaczy jedenaście tysięcy sto jedenaście. Natomiast jedenaście tysięcy jedenaścieset jedenaście należało by poprawnie zapisać 12 111, bo przecież chodzi tu o sumę 11 000, 1100 i 11.

Stwierdzamy więc, jako pierwszy wynik, że niewątpliwie międzynarodowy sposób zapisywania liczb za pomocą cyfr pozostaje z innym znowu pismem, literowym, w pośrednim tylko związku, a przede wszystkim podlega całkiem innym zasadom. Znaki cyfrowe mianowicie są czystymi znakami pojęć, podczas gdy litery są z góry nie symbolami pojęć, lecz symbolami głosek, z których dopiero później, w zespołach słownych tworzą się symbole pojęć. Pojęcie 3, zapisane cyfrą, wymaga tylko jednego jedynego znaku. Pisząc literami, otrzymamy t r z y w języku polskim przez pewne, ściśle określone uszeregowanie liter r, t, y, z. W języku francuskim natomiast *trois* jest kombinacją aż pięciu liter.

Wszystko to stanowi jednak dopiero początek naszych rozważań. Stoimy u stóp góry liczb, na której szczyt chcemy się dostać.

Dotychczas bowiem mówiliśmy o cyfrach i liczbach, natomiast jeszcze nie o przedziwnym tworze, który nazywamy układem (systemem) liczbowym, a który zasługuje na to, by być największą chlubą umysłu ludzkiego.

W związku z tym postawi mi mój przeciwnik zapewne nowy zarzut. Mianowicie powie: „Jeśli przez swój układ liczbowy rozumiesz to, co każde dziecko opanowało w pierwszej klasie szkoły ludowej, a więc tzw. układ dziesiątkowy, czy system dziesiętny, to zostaw nas łaskawie w spokoju. Znamy ten układ, posługujemy się nim codziennie i wcale nie myślimy podtrzymywać kosztem naszego zainteresowania twojej ochoty do pisania. Ale jeśli chcesz wyjechać z teorią liczb, z badaniami Gaussa, Dirichleta, Dedekinda, Kroneckera i innych wielkich uczonych, to wiedz o tym, że z miejsca zamykamy książkę i oddajemy ją księgarzowi. W tym wypadku nie dotrzymałbyś przecież przyrzeczenia, że nie zakładasz żadnych wiadomości i ograniczysz się do tego tylko, co rzeczywiście niezbędne".

„I tym razem wybornie miły oponencie", muszę na to odpowiedzieć. „Nie pomyślałeś tylko nad tym, że moje rozważania tajemnic układu liczbowego bynajmniej nie są celem same w sobie. Ani mi przez myśl nie przeszło nauczać teorii liczb. Lecz nie mam też zamiaru wyjaśnić tylko, dlaczego dwa tysiące pięćset czternaście pisze się właśnie 2514. Lub raczej nie myślę wcale poprzestać na tych tylko wyjaśnieniach. Właśnie dlatego, że nie mogę nic z góry zakładać, muszę nawiązać do rzeczy powszechnie znanych, aby już w pierwszym rozdziale wyższego rzędu pojęcia matematyczne uczynić dostępnymi. Teraz jednak przerwę naszą rozmowę, by nawiązując do tego co powiedziałem, posunąć się dalej w badaniu".

Wspomnijmy w tym miejscu jednego z największych ludzi, jakich wydała historia ducha: Gottfryda Wilhelma Leibniza (1646—1716), panhistora, wszech nauk mistrza. Jak wiadomo był Leibniz także jednym z bardzo wielkich matematyków i właściwym twórcą analizy nieskończonościowej, czyli tak zwanego rachunku różniczkowego, albo „wyższej matematyki". Otóż Leibniz nazwał swą ogólną naukę o symbolach czyli o znakach *„cabbala vera"* czyli „kabałą prawdziwą". Co oznacza kabała, kabalistyczny itd., to chyba znane. Magia, urok, formuły zaklęć, mistyczne siły, wyzwolone przez słowa i symbole, wchodzą w krąg pojęć kabały. Otóż w owym Leibnizowskim rachunku symboli, w owej ogólnej nauce o symbo-

lach, zawarte są znaki matematyczne jako bardzo istotne składniki.

Zdaję sobie sprawę, że nie łatwo od razu zrozumieć tę pierwszą wzmiankę o wzlotach geniuszu Leibniza. Dlatego, o ile się tylko da, starajmy się zdanie Leibniza dla naszych celów uprościć i stwierdźmy, że już w samym matematycznym sposobie pisania tkwi pewnego rodzaju sztuka czarnoksięska, „prawdziwa kabała". Możemy tę myśl wyjaśnić robiąc małą wycieczkę w historię matematyki, poprawniej — w historię rachunku za pomocą cyfr. Mój przeciwnik nie miał racji, kiedy tak pogardliwie wyrażał się o naszym pospolitym układzie dziesiątkowym. Ogromną i niedającą się wprost wyrazić zasługą tego układu jest, że okazuje się on już dostępnym dla ucznia szkoły elementarnej. Historycznie przedstawia się sprawa zupełnie inaczej. To, co dziś jest zadaniem dla ucznia szkoły ludowej, stanowiło przed paru tysiącami lat zagadnienie konkursowe dla najtęższych matematyków. Bo wtenczas właśnie brakowało układu dziesiątkowego, tej jak gdyby samoczynnej maszyny liczbowej, prawdziwej kabały właściwego sposobu pisania.

W tym miejscu niech mi wolno będzie uczynić małą dygresję od tematu. Mówiłem o właściwym sposobie pisania. Przez to miałem na myśli system jako całość. Obok tego wyższego już znaczenia słów „sposób pisania" chciałbym zwrócić uwagę na to, że nawet znawca wszystkich czarodziejskich znaków matematycznych tylko wtedy będzie umiał się z nimi obchodzić swobodnie i pewnie, jeśli zastosuje się do dwóch, pozornie banalnych reguł. Po pierwsze powinien pisać starannie i możliwie najbardziej przejrzyście. Nie przerzucać się z jednego miejsca na drugie, nie mieszać różnych rzeczy, nie bazgrać rachunków pomocniczych byle gdzie na brzegu, albo w każdym wolnym miejscu. Po drugie — nie wolno początkującemu (a to początkowe stadium sięga bardzo, bardzo daleko w głąb naszej wiedzy) z niecierpliwości przeskakiwać pośrednich szczebli i przeprowadzać w pamięci poszczególnych prostszych działań. Padło już słowo „kabała", więc czarnoksięskie znaki muszą być zapisane. Jeżeli jednak ktoś kładzie specjalny nacisk na to, aby rachunki w każdym stopniu trudności wykonywać w pamięci, a przez to wyćwiczyć i wypróbować swą wyobraźnię, to niechże, na chwilę przed udaniem się na spoczynek, przeprowadzi obliczenia, wyniki zanotuje, ale potem w następnym dniu niech je starannie sprawdzi krok za

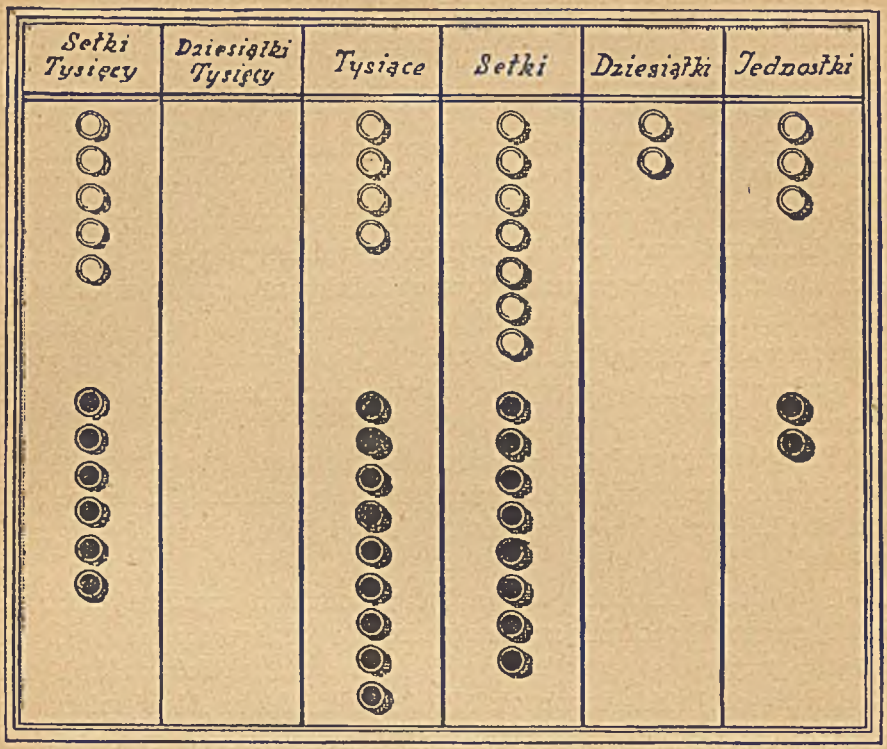


Fig. 1.

krokiem za pomocą prawdziwej kabały. Jest to rada prawie sportowa. Nauczyciel fechtunku, trener tenisa, nauczyciel boksu każe najpierw uczniowi wykonywać każde uderzenie i każdy cios z największą, prawie mikroskopijną precyzją, faza za fazą. Osobisty styl i indywidualne tempo rozwija się już samodzielnie jako powiązanie podstawowych form. Niestety także powierzchowność i niedbałość.

Ale wróćmy znowu do naszego głównego tematu. Nadmieniłem już, że rachowanie z użyciem cyfr, wydające się dziś tak oczywiste, bynajmniej nie było zawsze oczywistością. Dopiero w XII wieku po Chr. stała się prawdziwa kabała wspólnym dobrem Zachodu. I znowu upraszczając historię zagadnienia nadmienię, że w owym czasie walczyły o pierwszeństwo dwie szkoły rachunku. Szkoła abacystów i szkoła algorytmików. *Abacus* jest to prastare liczydło, używane

już w starożytności. Wyobraźmy sobie tablicę podzieloną pionowymi liniami. Każda kolumna odpowiada tzw. jednostkom odpowiednich rzędów, a więc jednostkom, dziesiątkom, setkom, tysiączkom itd. Aby rachować przy pomocy *abacusa,* wstawia się w każdą kolumnę odpowiednią ilość znaczków lub kamyczków. Przypuśćmy, że mamy zesumować, dodać do siebie np. 504 723 i 609 802. (Por. fig. 1.)

Jak widzimy, otrzyma się przez zliczenie kamyków białych (pierwsza liczba) i czarnych (druga liczba) właściwy wynik 1 114 525. Zera nie używało się jeszcze w tym rachunku „abacusowym". Oprócz tego musieliśmy uwzględnić, że 15 setek równa się jednej tysiączce i 5 setkom, że 14 tysiączek równa się jednej dziesiątce tysięcy i 4 tysiączkom i że 11 setek tysięcy równa się milionowi i jednej setce tysięcy.

Nie będziemy zagłębiali się zbytnio w arkana „sztuki abacystów", rachowania liczydłem. Nie trudno jednak przewidzieć, że zwyciężyć musiała „prawdziwa kabała" tej drugiej szkoły, szkoły algorytmików.

I oto dotarliśmy do punktu, który powinien najsilniej pobudzić naszą uwagę. Przedtem jeszcze objaśnienie jednego słowa: *Algorytm* (stąd algorytmik) jest przekręceniem nazwiska Alchwarizmi. Ten wschodnio-arabski matematyk Mahomet Ibn Musa Alchwarizmi pochodził z Khorassanu, a później żył w Bagdadzie. Między rokiem 800 a 825 po narodzeniu Chr. napisał między innymi podstawowe dzieło o rachowaniu znakami liczb, czyli cyframi hinduskimi (noszącymi obecnie nazwę arabskich). I to z użyciem systemu pozycyjnego.[1] Znał już także zero i zapisywał je jako małe kółko. Różnymi drogami przez wyprawy krzyżowe, a także za pośrednictwem uniwersytetów arabskich w Toledo, Sewilli i Grenadzie, dotarły arabskie dzieła w łacińskich przekładach do wiadomości uczonych Zachodu, a wśród tych dzieł także i książka Alchwarizmiego o cyfrach hinduskich.

Powtarzamy: algorytmicy wprowadzili pod nazwą *algorytmu* do krajów zachodnich hinduski układ liczbowy, z uwzględnieniem wartości miejsc. Tym samym zrobiono pierwszy krok do „prawdziwej kabały". Bo nie dostarczało już teraz wyników działań rachunkowych nieporadne liczydło, lecz tajemnicze, iście czarodziejskie pismo

[1] W układzie (systemie) takim znaczenie każdej cyfry zależy od miejsca (pozycji), jakie zajmuje.

dozwalało wykonywać z nieomylną pewnością największe choćby i najbardziej zawiłe rachunki. A cała ta sztuka czarnoksięska nie wymagała niczego prócz dziesięciu znaków od 0 do 9, kawałka papieru, pióra i znajomości małej tabliczki mnożenia.

Niesposób już dzisiaj wżyć się w nastroje ludzi, którzy po raz pierwszy pomnożyć mieli np. 85 243 przez 9621 już nie na liczydle lecz na świstku papieru. Przejmowały ich wówczas magiczne dreszcze szczęścia i jakże często zapewne zdawało im się, że się dostali na sam szczyt wieży Babel, skąd bezpośrednio dotknąć można nieba.

Po tym cofnięciu się w przeszłość i historię musimy jednak znowu powrócić w chłodniejsze regiony. Na razie zdajmy sobie od biedy sprawę, że słowo *algorytm* znaczy tyle, co pisemne rachowanie za pomocą określonych znaków i to w obrębie zamkniętego systemu, który niejako samoczynnie wykonuje za nas część pracy myślowej, a przy tym czyni nam dostępnymi dziedziny, w które wyobraźnia nasza w ogóle nie sięga, albo gdzie się co najmniej bardzo łatwo może zabłąkać. Musimy więc zbadać dokładniej źródła czarodziejskiej siły tego specjalnego algorytmu, zwanego układem albo systemem dziesiątkowym.

ROZDZIAŁ DRUGI

UKŁAD DZIESIĄTKOWY

W pierwszym rzędzie uderza nas tu zaznaczona już wyżej niezmierna prostota tego systemu. Dziesięć symboli cyfrowych to właściwie cały materiał, z jakim mamy do czynienia. Jeśli następnie dodamy kilka symboli związków między liczbami, jak znaki „plus", „minus", „razy" i „podzielone przez" (+, —, ×, :), a wreszcie znak równości, opanujemy już jako tędzy algorytmicy cały świat rachowania liczbami. Bez wątpienia, jako jedno z najważniejszych założeń należy do tej sztuki algorytmicznej coś jeszcze, coś, co wydaje się nam czymś oczywistym, a co właśnie jest kluczem tajemnicy, tak zwany układ pozycyjny.

Jako drastyczny przykład pisowni, nie uwzględniającej wartości zależnej od miejsca, wysuniemy tezę: rzymskie znaki liczb (cyfry). Zażądajmy od rzymskiego „algorytmika", by tylko zesumował np. liczby MDCCCXLIX i MMCXXIV. Przy dziesiątkach i jednostkach popadnie w kłopot, sięgnie po liczydło, po *abacus* i będzie musiał przyznać, że właściwie nie posiada żadnego algorytmu. Algorytmikowi hinduskiego systemu nie sprawi to najmniejszej trudności, by podpisać pod sobą odpowiednio liczby 1849 i 2124. Po paru sekundach poda nam jako wynik sumę 3973.

Lecz teraz przystąpmy już wprost do zagadnienia. Przez układ pozycyjny rozumiemy taki sposób pisania liczb, który każdej cyfrze, jeśli zajmuje inne miejsce (pozycję) nadaje inną wartość. Także wtedy, kiedy to jest ta sama c y f r a. I tak, jeśli zachowamy w liczeniu miejsc porządek od prawej ku lewej, oznacza np. 3 na ostatnim miejscu 3 (jednostki), na przedostatnim 30 (3 dziesiątki), na trzecim od końca 300 (3 setki), na czwartym od końca 3000 (3 ty-

siące) itd. O tak zwanych miejscach dziesiętnych ułamkowych na razie nie mówimy. Tymczasem rozważamy tylko liczby całkowite, pomni powiedzenia Kroneckera, że liczby całkowite pochodzą od Boga, a reszta jest dziełem ludzkim.

Na przykładzie naszym z trójką widzimy, że w miarę posuwania się z prawej ku lewej wartość jej zwiększa się z każdym miejscem dziesięciokrotnie. Stąd nazwa układu dziesiątkowego. Dziesięć nazywa się przy tym zasadą układu.

Choć dokonamy przez to zbyt gwałtownego przeskoku, to jednak dla uproszczenia mających nastąpić wywodów wprowadzimy nowe pojęcie. Mianowicie pojęcie potęgi. Chodzi przy tym o nic innego właściwie, jak o pomnożenie jakiejś liczby przez siebie samą, co zapisuje się specjalnie krótkim znakiem. Na razie jednak nad tym tzw. „potęgowaniem" albo „podnoszeniem do potęgi" nie będziemy się rozwodzili, a tylko na kilku przykładach wyjaśnimy jedynie sposób pisania. Dziesięć razy dziesięć nazywa się „dziesięć do potęgi drugiej" i pisze się 10^2. Dziesięć razy dziesięć razy dziesięć nazywa się „dziesięć do potęgi trzeciej" lub „dziesięć do trzeciej" i zapisuje się 10^3. $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$; $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ itd. Wartości tych liczb można oczywiście wyliczyć. A więc jest $10^2 = 100$, $10^5 = 100\,000$, $5^2 = 5 \times 5 = 25$, $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ itd. Przez pierwszą potęgę jakiejś liczby umówiono się rozumieć samą tę liczbę, ponieważ niejako raz tylko występuje w mnożeniu. A więc $10^1 = 10$, $5^1 = 5$, $29^1 = 29$ itd. W pierwszej potędze zwykle nie zapisuje się małej jedynki z prawej strony u góry. Musimy jednak wprowadzić jeszcze jedną potęgę, której osobliwy wynik trudno w tym miejscu wyjaśnić. Mianowicie tzw. potęgę zerową. Otóż, stawiamy więc żądanie, aby jakaś liczba w ogóle nie występowała jako czynnik mnożenia przez siebie samą. To oznacza np. 10^0, albo słowami: dziesięć do potęgi zerowej. Każdy słusznie powie, że podobne żądanie jest skończoną niedorzecznością. „W ogóle nie mnóż czegoś przez siebie, wykonaj działanie (w dodatku jeszcze mnożenie), w którym jedyny dozwolony czynnik, mianowicie dana liczba, występuje zero razy, a więc w ogóle nie występuje. I podaj mi wynik". Tak przedstawia się zagadnienie. Jak już wspomniałem muszę na razie najuprzejmiej przeprosić i ograniczyć się tylko do oznajmienia, że każda, ale to każda liczba, podniesiona do potęgi zerowej,

daje na wynik jeden.[1] A więc jest $10^0 = 1$, $25^0 = 1$, $275859^0 = 1$ itd., aż do dowolnej wielkości.

Zatem powtórzmy: jakakolwiek liczba do potęgi zerowej daje jeden. Do potęgi pierwszej siebie samą. Do drugiej potęgi — tę liczbę pomnożoną przez siebie. Do trzeciej potęgi — tę liczbę pomnożoną przez siebie i jeszcze raz przez siebie itd. A więc w szczególnym wypadku dla liczby dziesięć: $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, ...

Człowiek spostrzegawczy zauważy natychmiast przy rozważaniu powyższego ciągu liczb, że mała liczba na prawo u góry (tzw. wykładnik potęgowy) podaje ilość zer, jaką posiada odpowiednia potęga dziesięciu. Związek niewątpliwie ważny i w wysokim stopniu ułatwiający zrozumienie konstrukcji układu liczbowego. Jednakowoż nie błąkajmy się więcej, ale odważnie teraz ruszajmy przez głębie i wyniosłości układów liczbowych. Bo do zbadania naszego algorytmu cyfr mamy już w rękach cały rynsztunek.

Zastanawiając się nad liczydłem zrozumiał każdy, że dowolna liczba układu dziesiątkowego składa się z pewnej ilości jednostek, dziesiątek, setek itd. Zadajmy sobie teraz trochę trudu, by znaleźć odpowiedni sposób pisania, który by unaoczniał wewnętrzną budowę każdej liczby, bez konieczności uciekania się do niezgrabnego liczydła (abacusa). Na podstawie poprzednich rozważań nie będzie zbyt trudno znaleźć taki sposób zapisywania. Jest nim tzw. szereg[2] i to szereg potęgowy. Niechaj nikogo nie odstraszają te wyrażenia naukowe. Bo przykład natychmiast wyjaśni rzecz całą. Przyjmijmy, że mamy liczbę 1 483 706 rozwinąć w taki szereg. Dotychczasowe nasze wiadomości pozwolą nam to zrobić bez trudu. A więc napiszemy najpierw jeszcze prymitywnie:

$$6 \times 1 + 0 \times 10 + 7 \times (10 \times 10) + 3 \times (10 \times 10 \times 10) + 8 \times (10 \times 10 \times 10 \times 10) + 4 \times (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10) + 1 \times \times (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10)$$

Tutaj zauważyć należy w pierwszym rzędzie, że każda liczba pomnożona przez 0, znowu daje na wynik 0, i że na odwrót, zero uwa-

---

[1] Z wykluczeniem 0^0, które jest nie oznaczone.

[2] W matematyce nazywa się „szeregiem" zestawienie liczb połączonych znakiem + lub —. Np. $3 + 5 + 8 + 7 + 1$, albo $2 - 4 + 8 - 6$.

żać można zawsze za iloczyn dowolnej liczby przez zero. Tej odwrotnej prawdy użyjemy tu oczywiście dla systematycznego uzupełnienia szeregu w odniesieniu do miejsca dziesiątek. Nadto poczynimy jeszcze dalsze uproszczenia. Najpierw odrzucimy uciążliwy pochyły „krzyżyk" ($\times$) na oznaczenie mnożenia a zastosujemy kropkę, jak to w matematyce powszechnie jest przyjęte. Następnie — wyrażenia w nawiasach przedstawimy jako potęgi. Wreszcie w szeregu takim cyfry stojące przed potęgami noszą nazwę „współczynników". 6, 0, 7, 3, 8, 4, 1 — krótko cyfry, z których się nasza liczba składa — występują w szeregu potęgowym tylko jako „współczynniki". Tymczasem zapamiętajmy sobie tylko to pojęcie. Więcej nie możemy na razie już o nim w tym miejscu powiedzieć.

A zatem zapiszemy teraz matematycznie poprawnie:

$$1\,483\,706 = 6 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^6$$

Tym samym została unaoczniona całkowicie i jednoznacznie wewnętrzna budowa układu dziesiątkowego z uwzględnieniem wartości zależnej od miejsca (pozycji). Nie chciałbym jednak tzw. „dyskusji", czyli roztrząsania tej sprawy pozostawić czytelnikowi, mimo iż narażam się na to, że stanę mu się nudny, lecz postaram się ją wspólnie z nim przeprowadzić. Widzimy najpierw, że następstwo wielkości potęg jest ściśle zachowane. Potęgi dziesięciu następują po sobie w szeregu jako 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 itd. Także współczynniki nic w tym zmienić nie mogą. Bo nawet $9 \cdot 10^0$ (a więc $9 \cdot 1 = 9$) zawsze musi poprzedzać $0 \cdot 10^1$ (a więc $0 \cdot 10 = 0$), ponieważ zero to na miejscu dziesiątek nic innego nie oznacza, jak tylko, że w liczbie jest co najmniej 10 dziesiątek, gdyż żadna liczba nie może przecież zaczynać się od zera. Jako przykład niech posłuży liczba 109, która, napisana jako szereg, wyglądałaby następująco: $9 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$. Że 10^0 równa się 1, o tym już wspomnieliśmy — dalej jest rzeczą jasną, że szereg ten teoretycznie da się przedłużać w nieskończoność. To znaczy, że nie ma żadnej tak wielkiej liczby, która by się nie dała napisać w postaci takiego szeregu rosnących potęg dziesięciu z ich współczynnikami. Na odwrót, każdy taki szereg da się oczywiście przekształcić znowu w pewną liczbę układu dziesiątkowego. $5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^5$ to nic innego, jak tylko liczba 398 075, a mianowicie jeszcze raz, aż do uprzykrzenia —

słowami: 5 jednostek, 7 dziesiątek, 0 setek, 8 tysięcy, 9 dziesiątek tysięcy i 3 setki tysięcy. Z rozmysłem wspomnę dopiero tutaj, że doskonały układ liczbowy zakłada jeszcze, iż tzw. jednostki wyższych rzędów (czyli potęgi dziesięciu) czysto językowo mogą być oznaczane własnymi nazwami (dziesięć, sto, tysiąc itd.). Sprawa ta nie została w naszym układzie ściśle przeprowadzana. Dziwnym trafem mamy odrębne słowa wyłącznie tylko dla 10^1, 10^2 i 10^3, a więc dla dziesięciu, stu i tysiąca. Dziesięć tysięcy i sto tysięcy są już złożeniami. 10^6, czyli „milion" ma znowu własne określenie. Tysiąc milionów (10^9), czyli „miliard", jako następne ścisłe oznaczenie występuje dopiero. A potem następują, według potęg miliona, „bilion" ($1\,000\,000^2 = 10^{12}$), „trylion" ($1\,000\,000^3 = 10^{18}$), „kwadrylion" (10^{24}), „kwintylion" (10^{30}) itd. Przyczyną tej nieregularności mogły moim zdaniem być uwarunkowane historycznie potrzeby praktyczne. Gospodarka pieniężna i wojskowość wymagały pierwotnie jednostek wyższych rzędów tylko do tysiąca. A dopiero bogactwo Marka Polo uczyniło podobno koniecznym pojęcie miliona. Jednostki bardzo wysokich rzędów (bilion itd.) nazywa się zwykle w mowie potocznej „liczbami astronomicznymi", wskazując tym samym ich powstanie i zakres ich stosowania.

Reasumując powtarzamy zatem: układ dziesiątkowy, jako układ jednocześnie także pozycyjny, jest algorytmem. Dozwala nam on wykonywać z największą łatwością wszystkie działania rachunkowe w zakresie dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, których reguły opanowujemy dzisiaj już w szkole elementarnej. Układ dziesiątkowy składa się z własnych symboli pojęciowych, zupełnie różnych od liter, a oznaczających wartości liczb od 0 do 9. Zasadą układu jest liczba, następująca po 9, która nazywa się „dziesięć" a pisze się 10. Dla jednostek dalszych rzędów (potęg dziesięciu) istnieją częściowo własne nazwy jak sto, tysiąc, milion, miliard, bilion itd.

Znaleźliśmy się teraz już tak wysoko na naszej górze liczbowej, że ogarnąć możemy wzrokiem ciągnącą się w nieskończoność i niezmiernie rozgałęzioną dolinę układu dziesiątkowego. Spostrzegamy jednak, że do wierzchołka jeszcze bardzo daleko. Cóż ujrzymy ze szczytu tej góry? Czy ukażą się inne jeszcze doliny? A może też ta góra to płaskowyż, bezkresna a samotna pustynia kamienna?

Odpoczniemy chwilę i zatopimy się w rozmyślaniach. I już na-

wiedzają nas rozmaite niepokojące myśli. Skąd się to wzięło, że Niemcy używają słów *elf* (11) i *zwölf* (12), po których potem następuje *dreizehn* (13), *vierzehn* (14), *fünfzehn* (15), *sechzehn* (16) itd.? Co znaczy zagadkowe francuskie *quatre vingt?* Z punktu widzenia układu dziesiątkowego są to przerwy w układzie, wykolejenia. Co do tego nie ma najmniejszej wątpliwości. *Quatre vingt* (cztery razy dwadzieścia) ma strukturalnie niesłychane podobieństwo do c z t e r d z i e s t u. A niemieckie *elf* i *zwölf* wyglądają wprost jak przedłużenie ciągu liczb jeden (eins) do dziesięciu (zehn). Dlaczego nie mówi się zamiast *„elf"* — „einzehn" a zamiast *„zwölf"* — „zweizehn"? Dlaczego w ogóle właśnie dziesięć jest zasadą naszego układu? Czyż dziesięć wyróżnia się czymśkolwiek od jakiejś innej liczby? Czyż układ dziesiątkowy jest jak gdyby przez Boga ustanowionym układem? Albo może tylko ten fakt, że posiadamy dziesięć palców, a nasi przodkowie niegdyś na palcach właśnie liczyli, jest temu winien, że dajemy pierwszeństwo układowi dziesiątkowemu? Nie chcemy jednak dać naszemu turyście, wspinającemu się na górę liczbową zbyt długo pogrążać się w rozmyślaniach. Dlatego powiadamy mu na ucho: Teoretycznie nie wybija się układ dziesiątkowy niczym, ale to zupełnie niczym, ponad inne układy, o dowolnie innej zasadzie. W rozwoju dziejów istniały już układy sześćdziesiątkowe, piątkowe, dwudziestkowe i dwunastkowe. Wielki Leibniz zajmował się nawet (w Rzymie) w 1690 r. najdziwniejszym ze wszystkich układów, układem dwójkowym (diadycznym), który jako cyframi posługuje się tylko 0 i 1. A nasze *quatre vingt* jest faktycznie anachroniczną pozostałością dawnego celtyckiego układu dwudziestkowego (łączna ilość palców u rąk i nóg!)

ROZDZIAŁ TRZECI

UKŁADY LICZB NIE-DZIESIĄTKOWE

Skoro już tak dobrze poznaliśmy strukturę układu dziesiątkowego, spróbujmy odważnie zbudować zupełnie samodzielnie jakikolwiek inny układ.[1] Najpierw wybierzemy zasadę mniejszą od dziesięciu, np. liczbę sześć, i budować będziemy ściśle na wzór układu dziesiątkowego nasz nowy algorytm. Zobaczymy, jak sobie z tym damy radę. W układzie dziesiątkowym używaliśmy dziesięciu cyfr dziesięciu symboli liczbowych, a mianowicie 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Stąd wynika, że w naszym układzie szóstkowym wystarczy nam sześć cyfr, a więc 0, 1, 2, 3, 4, 5. Jakżeż jednak pisać mamy „sześć", „siedem", „osiem", „dziewięć"? Przypominamy sobie nasz szereg potęgowy. Zasadę do potęgi pierwszej zapisywaliśmy 10^1, albo krótko 10. To była zatem pierwsza liczba dwucyfrowa. Również w układzie szóstkowym napiszemy zasadę 10, tylko, że oznacza tu ona nie dziesięć, lecz sześć. Przyznaję, że u wielu czytelników wierzących jeszcze w boskie zesłanie układu dziesiątkowego wywoła to zamęt. Dlatego posuwajmy się dalej krok za krokiem i wypiszmy najpierw dwadzieścia pierwszych liczb układu dziesiątkowego. Pod nimi dwadzieścia pierwszych, równych co do wartości liczb układu szóstkowego.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.
1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31, 32.

Jak widzimy, wynika sposób pisania bezpośrednio chociażby z faktu, że w rozważanym układzie n i e m o ż n a po prostu inaczej

[1] Mniej wprawny czytelnik może poszczególne obliczenia w tym rozdziale pominąć w czytaniu bez uszczerbku dla zrozumienia całości.

pisać. Bo za pomocą pięciu cyfr i zera nie mogę pojęcia sześciu zapisać inaczej, jak właśnie 10.

Tak samo jak przy pomocy dziewięciu znaków cyfrowych i zera nie można dwunastu inaczej wyrazić jak właśnie przez 12.

Przyjrzyjmy się teraz jednostkom wyższych rzędów. Te (napisane w układzie dziesiątkowym) muszą mieć wartości 6^0, 6^1, 6^2, 6^3, 6^4 itd. A więc, ciągle jeszcze w układzie dziesiątkowym, wartości 1, 6, 36, 216, 1296 itd. Mógłbym zatem w rozwinięciu szeregowym dowolną liczbę układu szóstkowego wyrazić w następujący sposób:

$2 . 6^0 + 4 . 6^1 + 0 . 6^2 + 3 . 6^3 + 5 . 6^4$, co by oznaczało:
$2 . 1 + 4 . 6 + 0 . 36 + 3 . 216 + 5 . 1296$ i zapisane w układzie

dziesiątkowym dałoby na wynik 7154. Zauważmy, że także w dziesiątkowym sposobie pisania „współczynniki" nie mogą przekroczyć pięciu, bo w przeciwnym razie mógłby zostać naruszony porządek wielkości i liczba w układzie szóstkowym nie dałaby się zapisać. Teraz nastąpi śmiałe pociągnięcie. Napiszemy obecnie omawianą liczbę w układzie szóstkowym. Nie trzeba do tego nic więcej, jak ustawić po prostu obok siebie współczynniki. I to zstępując coraz niżej od najwyższej potęgi. A więc nasza liczba, zapisana w układzie szóstkowym, przedstawi się jako 53 042. Bo to właśnie znaczy $2 . 6^0 + 4 . 6^1 + 0 . 6^2 + 3 . 6^3 + 5 . 6^4$! Teraz twierdzimy: 53 042 (układ szóstkowy) równa się 7154 (układ dziesiątkowy). Z własnej pilności zrobimy jeszcze próbę i rozwiniemy teraz obie liczby w szeregi:

7154 (układ dziesiątkowy) $= 4 . 10^0 + 5 . 10^1 + 1 . 10^2 + 7 . 10^3$
53 042 (układ szóstkowy) $= 2 . 6^0 + 4 . 6^1 + 0 . 6^2 + 3 . 6^3 + 5 . 6^4$

albo

$4 . 1 + 5 . 10 + 1 . 100 + 7 . 1000$ ma się równać
$2 . 1 + 4 . 6 + 0 . 36 + 3 . 216 + 5 . 1296$.

Oczywiście rachunek zgadza się. Bo zarówno pierwszy jak i drugi szereg dają na wynik (po zapisaniu w układzie dziesiątkowym) 7154.

Teraz jednak porzućmy układ dziesiątkowy i rozwińmy naszą liczbę 53 042 (układ szóstkowy) w szereg postaci własnego układu. Otrzymamy wtedy:

$53\,042 = 2 . 10^0 + 4 . 10^1 + 0 . 10^2 + 3 . 10^3 + 5 . 10^4$, przy czym 10 nie oznacza już dziesiątki (w układzie dziesiątkowym), lecz pod względem wartości odpowiada 6 układu dziesiątkowego.

Chcemy jednak jeszcze daleko więcej. Pragniemy się przekonać, czy układ szóstkowy spełnia zadania algorytmu tzn., czy nadaje się do wykonywania działań rachunkowych na wzór znanego nam sposobu dodawania, mnożenia itd. W tym celu musimy jednak przygotować sobie jeszcze jeden środek pomocniczy. Mianowicie „tabliczkę mnożenia" układu szóstkowego. Na pierwszy rzut oka wygląda ona jak ćwiczenie rachunkowe człowieka, który dopiero co postradał zmysły. Nieco namysłu, rzut oka na szeregi liczb, a także zastanowienie się nad tym, że obecnie możemy operować tylko sześcioma znakami cyfrowymi, wkrótce uspokoi wzburzone umysły.

Zaryzykujmy więc tę czarnoksięską tabliczkę mnożenia:

1 . 1 = 1	2 . 1 = 2	3 . 1 = 3	4 . 1 = 4	5 . 1 = 5
1 . 2 = 2	2 . 2 = 4	3 . 2 = 10	4 . 2 = 12	5 . 2 = 14
1 . 3 = 3	2 . 3 = 10	3 . 3 = 13	4 . 3 = 20	5 . 3 = 23
1 . 4 = 4	2 . 4 = 12	3 . 4 = 20	4 . 4 = 24	5 . 4 = 32
1 . 5 = 5	2 . 5 = 14	3 . 5 = 23	4 . 5 = 32	5 . 5 = 41

Teraz będziemy dodawali, odejmowali, mnożyli i dzielili, jak gdybyśmy nigdy nic nie słyszeli o układzie dziesiątkowym. Najpierw wykonajmy jakieś dodawanie:

$$\begin{array}{r} 4325 \\ 5041 \\ \hline 13410 \end{array}$$

Zawsze, ilekroć dwie liczby dają w sumie 6, należy mieć na myśli 10. A więc 1 więcej 5 równa się 10 — piszę 0, a 1 dalej. Cztery więcej jeden jest pięć, plus dwa jest 11 — piszę 1, a 1 dalej. Zero więcej jeden jest jeden, plus trzy jest 4 — piszę 4. Pięć więcej cztery jest trzynaście — piszę trzynaście. Naturalnie należałoby mówić nie dziesięć, jedenaście i trzynaście, ale może — sześć, „jedenaszeście" i „trzynaszeście". Główna trudność więc jest natury językowej. Skoro raz mamy słowa na odpowiednie jednostki wyższych rzędów, wtedy każdy układ jest tak łatwy w użyciu, jak dziesiątkowy.

Teraz odejmowanie:

$$\begin{array}{r} 5201 \\ -\ 3544 \\ \hline 1213 \end{array}$$

Słowami: Cztery a 3 jest jedenaście (jedenaszeście) — piszę 3, a jeden dalej. Cztery więcej jeden jest pięć. Pięć a 1 jest dziesięć (sześć) — piszę 1, a 1 dalej. Pięć więcej jeden jest dziesięć (sześć), a 2 jest dwanaście (dwanaszeście) — piszę 2, a 1 dalej. Trzy więcej jeden jest cztery, a 1 jest pięć — piszę 1.

A teraz zapowiedziane mnożenie, do którego jako środek pomocniczy posłuży „tabliczka mnożenia".

$$\begin{array}{r} 3425 \,.\, 31 \\ \hline 15123 \\ 3425 \\ \hline 155055 \end{array}$$

Sprawdźmy to mnożenie przez przeliczenie na układ dziesiątkowy.

3425 (układ szóstkowy) $= 5 \,.\, 6^0 + 2 \,.\, 6^1 + 4 \,.\, 6^2 + 3 \,.\, 6^3 = 809$ (układ dziesiątkowy)

31 (układ szóstkowy) $= 1 \,.\, 6^0 + 3 \,.\, 6^1 = 19$ (układ dziesiątkowy).

Mnożenie w układzie dziesiątkowym daje na wynik

$$\begin{array}{r} 809 \,.\, 19 \\ 7281 \\ \hline 15371 \end{array}$$

Jeśli liczyliśmy poprawnie, jeśli ponadto słusznym jest nasze przypuszczenie, że prawa algorytmów w układzie szóstkowym są te same, co w dziesiątkowym, wtedy musi 15 371 (układ dziesiątkowy) równać się 155 055 (układ szóstkowy), a więc po rozwinięciu w szeregi:

$$1 \,.\, 10^0 + 7 \,.\, 10^1 + 3 \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10^3 + 1 \,.\, 10^4 = 5 \,.\, 6^0 + 5 \,.\, 6^1 + \\ + 0 \,.\, 6^2 + 5 \,.\, 6^3 + 5 \,.\, 6^4 + 1 \,.\, 6^5.$$

Ku naszemu zadowoleniu zachodzi żądana równość obydwu szeregów, o czym się każdy łatwo może przekonać. Zgodnie z zapowiedzią pozostaje nam jeszcze dzielenie w układzie szóstkowym, co natychmiast uzupełnimy. Jesteśmy odważni i nie czujemy obawy przed wielkimi liczbami. A więc:

BIBLIOTEKA ŚLĄSKA

2004013 : 425 = 2413 (wszystko w układzie szóstkowym)
3100
1041
2123
000

Dzielenie nam wyszło, jak się to zwykle mówi. Naturalnie przez cały czas wykonywania dzielenia musieliśmy baczną na to zwracać uwagę, że mamy do czynienia z układem szóstkowym: i to już przy pierwszym szacowaniu ilorazu „na oko", co przy dzieleniu jest konieczne w każdym układzie. Przystępując do dzielenia musimy pytać, ile razy mieści się dzielnik w dzielnej, względnie w odpowiedniej części tej liczby, którą mamy podzielić. W naszym wypadku: ile razy mieściło się 425 w pierwszej grupie 2004? W układzie dziesiątkowym próbowałbym cztery razy. W szóstkowym układzie muszę się zastanowić, że 20 co do wartości znaczy tyle co 12, podczas gdy 4 oznacza w obu układach 4. Ponieważ po 20 następuje jeszcze jedno zero, podczas gdy po 4 stoi 2, sprawa przedstawia się tak, jak gdybym (pisząc w układzie dziesiątkowym) miał podzielić 120 przez 42. Musiałem więc najpierw spróbować napisać 2 w ilorazie. Dla uzyskania drugiego miejsca w ilorazie próbuję podzielić 31 przez 4. Ale 31 oznacza 19 układu dziesiątkowego. A więc na próbę napiszę 4 itd. Ponadto można i trzeba uciec się do pomocy, jak w układzie dziesiątkowym, odpowiedniej tabliczki mnożenia, w tym wypadku więc naszej czarnoksięskiej tabliczki mnożenia. [1]

Ale teraz znowu, jako świeżo upieczeni teoretycy liczb, staliśmy się nienasyceni i chcielibyśmy mieć jeszcze bezwzględną rękojmię, że nasze dzielenie również się zgadza. Możemy ją uzyskać w dwojaki sposób. Po pierwsze możemy cały rachunek przenieść, jak przy mnożeniu, z powrotem do układu dziesiątkowego, w którym się ze zrozumiałych względów czujemy pewniej. Tym razem jednak jesteśmy zbyt zarozumiali, aby pójść tą banalną drogą. Chcemy mianowicie jeszcze mocniej pociągnąć za język nasz algorytm, jeśli tak wolno się wyrazić. Rozumujemy więc tak: Bojaźliwy uczeń szkoły powszechnej, który nie wie, czy wykonane przezeń dzielenie jest po-

[1] Przez to zbyteczne się staje ustawiczne przeliczanie na układ dziesiątkowy przy każdorazowej próbie.

prawne, robi po prostu „próbę“ w ten sposób, że mnoży dzielnik przez iloraz i patrzy, czy przez to otrzymał dzielną. Schematycznie:

dzielna : dzielnik = iloraz
dzielnik × iloraz = dzielna.

Ponieważ, jak już się rzekło, nie chcemy więcej posługiwać się układem dziesiątkowym i uważamy się za uczniów elementarnych układu szóstkowego, mnożymy (wszystko w układzie szóstkowym) liczby

2413 . 425

14500
5230
21313

2004013

Jesteśmy zadowoleni. Bo próba się udała i rzeczywiście otrzymaliśmy dzielną. Ale nasz przeciwnik patrzył nam na ręce i zarzuca nam pewną nieścisłość. Zwraca nam mianowicie uwagę na to, że napisaliśmy nie — jak w schemacie — dzielnik razy iloraz, lecz iloraz razy dzielnik. Chociaż każdy stanie teraz po naszej stronie i powie, że to jest obojętne, ponieważ 5 . 4 daje ten sam wynik co 4 . 5, mimo to jesteśmy wdzięczni naszemu przeciwnikowi i w mig chwytamy sposobność do małej dygresji.

Dodawanie i mnożenie są — że się tak wyrażę — działaniami konstruującymi, jako że składają, łączą, pomnażają, czyli stwarzają syntezę. I dlatego nazywają się ściśle naukowo działaniami syntetycznymi, albo prościej — tetycznymi. Odejmowanie i dzielenie przeciwnie — rozkładają, zmniejszają, dekonstruują. Nazywamy je przeto operacjami analitycznymi, albo też prościej litycznymi. Jest rzeczą jasną, albo — mówiąc ostrożniej — prawdopodobną, że zarówno grupa działań konstruujących, jak też grupa dekonstruujących działań, będą wykazywały, każda dla siebie pewne wspólne dla całej grupy własności. W tym miejscu jednakże nie będziemy się głębiej w to zapuszczali. Zarzut naszego przeciwnika wyzyskamy tylko w tym celu, aby stwierdzić, że dodawanie i mnożenie posiadają w przeciwieństwie do odejmowania i dzielenia bardzo ważną, a powszechnie znaną wspólną własność, mianowicie tę, że ich poszczególne części składowe, elementy, człony, czy jak je wreszcie nazwiemy, można przestawiać nie zmieniając tym samym wyniku.

$5 + 4 + 7 = 4 + 7 + 5 = 7 + 4 + 5$ itd. Również $4 . 5 . 7 = 5 . 7 . 4 = 7 . 5 . 4$ itd. Reguła: W działaniach tetycznych obowiązuje zasada przemienności ich części składowych (zasada kommutatywności). Natomiast w działaniach litycznych, które — mówiąc nawiasem — na naszym stopniu stale składają się tylko z dwóch członów, zasada ta nie obowiązuje w żadnym wypadku. Są one niejako skonstruowane jednostronnie. Stanowi to zasadniczą różnicę, czy odejmę od 5 liczbę 4, czy od 4 odejmę 5. Również co innego jest, czy podzielę 12 przez 3, czy 3 przez 12. Przyznaję, że ta dygresja wyglądać może na razie jak rozwlekanie czegoś oczywistego. Dlatego zaznaczam, że są jeszcze wyższe działania tetyczne (konstruujące) i lityczne (dekonstruujące), gdzie wszystko nie przedstawia się już tak prosto i dlatego godne jest badania.

Lecz powróćmy teraz znowu do naszych układów liczbowych. Dotychczasowe eksperymenty w układzie szóstkowym zaciekawiły nas. Wprawdzie wierzymy, że przy użyciu zasady mniejszej od dziesięciu magia algorytmu prawdziwej kabały zachowuje swą moc, ale to wcale jeszcze nie dowodzi, czy zasada większa od dziesięciu nadaje się również do układu pozycyjnego. Ze względów czysto ekonomiczno rachunkowych nie należy od razu przekraczać pewnej miary, wybierając jako zasadę np. 50. Oczywiście byłoby to możliwe. Ale potęgi 50 rosną tak zawrotnie szybko, że stracilibyśmy rychło wszelką orientację. Poza tym, jak wiadomo, musimy mieć zawsze tyle znaków liczbowych, ile jednostek zawiera zasada. Skądże mamy wziąć te znaki, kiedy i paru dni nie starczyło by na to, aby je znaleźć i wyuczyć się ich?

Zadowolimy się więc faktem, że zasada będzie większa jak dziesięć i wybierzemy jak prawdziwi kabaliści liczbę 13. Z tym ubocznym celem, aby pokazać, że także tzw. liczba pierwsza, czyli liczba całkowita, niepodzielna przez żadną inną liczbę całkowitą oprócz 1, nadaje się na zasadę układu liczbowego. W tym miejscu znowu wtrącimy pewną uwagę. Nasza zasada układu dziesiątkowego 10 jest podzielna tylko przez 5 i przez 2. Liczba 12 natomiast — przez 2, 3, 4 i 6. Dlatego proponowano już nie jeden raz, zupełnie poważnie, aby porzucić układ dziesiątkowy, a przejść do układu dwunastkowego. Miałoby to wprost nieocenione korzyści dla systemu monetarnego, oraz systemu miar i wag, niezależnie od tego, że podział dnia (tarcza zegara) i podział kątów w kole, łatwiej dałyby się

uzgodnić z układem dwunastkowym. Przeciwko temu układowi przemawiają także z natury dane fakty, jak liczba palców u rąk i inne cechy budowy naszego ciała, która ogółem biorąc daje pierwszeństwo pięciokrotności i dwoistości (oczy, uszy, ręce, nogi, palce u rąk i nóg). Ponadto cały dziesiątkowy system miar ze wszystkimi odgałęzieniami jest dziesiątkowo związany z ziemią, ponieważ metr od czasów rewolucji francuskiej określony jest potocznie (choć niedokładnie) jako dziesięciomilionowa część ćwiartki południka ziemskiego. Wszystkie inne miary jak litr, kilogram itd. są znowuż w sposób dziesiątkowy skojarzone z metrem. Wreszcie najważniejsza w świecie wielkość — prędkość światła, przez jakiś kosmiczny przypadek wynosi prawie dokładnie 300.000 kilometrów na sekundę. [1]

A więc małe są widoki na to, byśmy w niedługim czasie mieli się uczyć nowego układu liczbowego. Mimo to zajmiemy się jeszcze trochę naszym układem trzynastkowym, mniej z praktycznych, jak raczej z bardzo ważnych zasadniczych względów. I znowu wypiszmy przedtem początkowe liczby, tym razem trzydzieści pierwszych liczb, w układzie dziesiątkowym i trzynastkowym i to — dla celów porównawczych — jedne pod drugimi.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,

20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.
17, 18, 19, 1A, 1B, 1C, 20, 21, 22, 23, 24.

Ponieważ w układzie trzynastkowym potrzeba nam trzynaście poszczególnych znaków cyfrowych włącznie z zerem, przyjęliśmy — jak to już czytelnik na pewno zauważył — wielkie litery alfabetu łacińskiego A, B, C za cyfry. Podczas gdy w układzie szóstkowym pewne cyfry układu dziesiątkowego zostały przeskoczone i po prostu nie występowały (6, 7, 8, 9), tu jest wręcz przeciwnie. Układ dziesiątkowy przeskakuje trzy cyfry układu trzynastkowego (A, B, C). Moglibyśmy tu także napisać teraz czarnoksięską tabliczkę mnoże-

[1] Gdybym nawet metr określił w systemie dwunastkowym jako 10 000 000 część ćwiartki południka, to prędkość światła, liczona na sekundę byłaby w systemie dwunastkowym 26 razy taka wielka, a więc wynosiłaby 260 000 „kilometrów" systemu dwunastkowego. A zatem wyrażałaby się mniej „okrągłą" liczbą.

nia, w której byłoby np. $5 \cdot 8 = 31$, a $7 \cdot 7 = 3A$ itd., raczej jednak zostawimy to ćwiczenie, jak i przekonanie się, że w układzie trzynastkowym $A \cdot B = 86$, tym czytelnikom, którzy głębiej chcą wniknąć w układy liczbowe.

Lecz musimy jakoś sprawdzić nasz układ trzynastkowy. Wybierzmy do tego celu mnożenie. I to np. mnożenie liczb 92B i A7, co w makaronicznej nomenklaturze układu trzynastkowego można by np. wyrazić słowami: dziewięćset dwadzieściabe razy adzieścia siedem. A więc:

$$\begin{array}{r} 92B \cdot A7 \\ \hline 7126 \\ 4C6C \\ \hline 761CC \end{array}$$

A razy B jest 86 — piszę 6, a 8 dalej, A razy 2 jest 17 plus 8 jest 22 — piszę 2, a 2 dalej; A razy 9 jest 6C plus 2 jest 71 — piszę 71. Dalej: 7 razy B jest 5C — piszę C, a 5 dalej. 7 razy 2 jest 11 plus 5 jest 16 — piszę 6, a 1 dalej. 7 razy 9 jest 4B plus 1 jest 4C — piszę 4C. Następnie dodajemy. Miejsce jednostek: C. Drugie miejsce: $6 + 6$ jest też C. Trzecie miejsce: $C + 2 = 11$ — piszę 1, a 1 dalej. Czwarte miejsce: $4 + 1 = 5$ więcej 1 jest 6. Piąte miejsce: $7 \cdot A$ więc wynik 761CC.

Ponieważ nie mamy ochoty zbytnio się męczyć, decydujemy się teraz na banalność i przeprowadzamy tym razem próbę w układzie dziesiątkowym. I to przy pomocy rozwinięcia w szereg.

$$\begin{aligned} 92B \text{ (układ trzynastkowy)} &= B \cdot 13^0 + 2 \cdot 13^1 + 9 \cdot 13^2 = \\ &= 11 \cdot 1 + 2 \cdot 13 + 9 \cdot 169 = \\ &= 1558 \text{ (układ dziesiątkowy)}, \\ A7 \text{ (układ trzynastkowy)} &= 7 \cdot 13^0 + A \cdot 13^1 = 7 \cdot 1 + 10 \cdot 13 = \\ &= 137 \text{ (układ dziesiątkowy)}. \end{aligned}$$

Teraz pomnożymy w układzie dziesiątkowym:

$$\begin{array}{r} 1558 \cdot 137 \\ 4674 \\ 10906 \\ \hline 213446 \end{array}$$

Jako wynik z mnożenia w układzie trzynastkowym uzyskaliśmy 761CC. Ta liczba powinna być równa 213 446 w układzie dziesiątkowym.

A zatem: $C \cdot 13^0 + C \cdot 13^1 + 1 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13^3 + 7 \cdot 13^4$ ma się równać 213 446 (układ dziesiątkowy). Napiszmy czysto dziesiętnie z równoczesnym wyliczeniem potęg.

$$12 \cdot 13^0 + 12 \cdot 13^1 + 1 \cdot 169 + 6 \cdot 2\,197 + 7 \cdot 28\,561 =$$
$$= 12 + 156 + 169 + 13\,182 + 199\,927 = 213\,446.$$

Tak więc otrzymaliśmy oczekiwany rezultat i dowiedliśmy, że także do układu trzynastkowego, a więc do takiego układu, którego zasada jest większa od dziesięciu, dadzą się zastosować reguły rachunkowe układu pozycyjnego. Muszę zauważyć, że matematyk takiego „dowodu" bynajmniej nie uzna. Nazwie nasze postępowanie co najwyżej sprawdzeniem, albo weryfikacją. Lecz na razie poprzestaniemy na tym mniej wartościowym „dowodzeniu", ponieważ w naszym wypadku jest ono bezpieczniejsze i jednoznaczne.

I oto niespodzianie znaleźliśmy się na szczycie góry liczbowej. Uciążliwość spinaczki, mozolne przedzieranie się przez zarośla liczb i rachunków, przykuwało aż dotąd nasz wzrok do ziemi. Teraz, po wszystkich trudach, z ostatnią kroplą potu i resztkami cierpliwości, możemy swobodnie rozglądnąć się w górnych regionach. I cóż ukazuje się naszym oczom? Widzimy i domyślamy się nieskończenie wielu dolin, podobnych dolinie układu dziesiątkowego, a przecież różniących się od niej. Wszystkie wiodą w nieskończoność, nieograniczoność. Wszystkie obejmują ogół liczb naturalnych. A jednak w każdej z nich, każda liczba, niby roślina, rośnie niejako w innej barwie i rozmiarach...

Nie posuwajmy się jednak za daleko w naszym porównaniu. Poprzestańmy na wyobrażeniu, że stoimy na szczycie, z którego roztacza się przed nami widok na wszystkie układy liczbowe typu pozycyjnego. Każdy z tych układów, o ile to zdołaliśmy rozpoznać, jest nieomylnym, samoczynnym algorytmem, jak gdyby maszyną myślowo-rachunkową. Budowa jest we wszystkich układach ta sama: pewna liczba — jako zasada; tyle znaków liczbowych łącznie z zerem, ile zasada zawiera jednostek; zależność wartości od miejsc polegająca na tym, że każdą cyfrę napisaną w liczbie należy rozu-

mieć jako pomnożoną przez potęgę zasady, odpowiadającą miejscu, na którym ta cyfra stoi. A mianowicie miejscu jednostek odpowiada zagadkowa potęga zerowa, każdemu następnemu — potęga z wykładnikiem stale o jeden większym. Obliczane potęgi nazywają się jednostkami wyższych rzędów. Co się tyczy praktyki rachunkowej, jest rzeczą konieczną, aby jednostki odpowiednich rzędów, przynajmniej jednostki pierwszych rzędów początkowych, miały w każdym języku własne nazwy. W każdym układzie są liczby jednocyfrowe, dwucyfrowe, trzycyfrowe itd. Ilość cyfr jakiejś liczby jest zawsze o jeden większa od potęgi zasady, odpowiadającej najwyższemu miejscu w liczbie. (W liczbie 1 268, a więc c z t e r o cyfrowej, potęgą najwyższego miejsca, a zatem miejsca tysięcy, jest t r z e c i a potęga, bo $10^3 = 10 . 10 . 10 = 1000$; w liczbie 2 586 933, a więc przy s i e d m i u cyfrach, miejscu milionów odpowiada s z ó s t a potęga, gdyż $10^6 = 10 . 10 . 10 . 10 . 10 . 10 = 1\,000\,000$ itd.). Dalej, obowiązują w każdym układzie liczbowym pozycyjnym te same reguły rachunkowe dla działań dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia.

Zanim dotrzemy do ostatecznego rezultatu w naszym badaniu układów liczbowych, warto wspomnieć, że algorytm nie tylko czyni w ogóle możliwym pisemne liczenie bez mozołu. Hinduski układ pozycyjny jest również podstawą konstrukcji wszystkich znanych powszechnie czarodziejskich maszyn do liczenia, które w najbardziej rozpowszechnionej formie spotykamy jako kasy rejestracyjne w przedsiębiorstwach i jako taksometry w dorożkach samochodowych. Właściwe maszyny do liczenia, jakich używa się w bankach, biurach buchalteryjnych, zakładach technicznych itd., oparte są na rozważaniach z teorii liczb. I nie ma w tym nic przypadkowego, że właśnie wielki Leibniz, genialny pionier kabały prawdziwej, skonstruował również w Paryżu w roku 1674 pierwszą maszynę do liczenia, która już wtedy zawierała wszystkie główne części składowe i zasady dzisiejszych cudów techniki w tej dziedzinie (TIM, Mercedes-Euklid itd.).

Oprócz pojęcia automatyczności słusznie i celowo zbudowanego algorytmu, którego wartość każdy z nas może już teraz w pełni pojąć, powinniśmy jako wynik naszych trudów przyswoić sobie inne jeszcze pojęcia matematyki, które zwłaszcza w wyższych dziedzinach naszej umiejętności są niezmiernie ważne: mianowicie pojęcia ogólności, podobieństwa budowy i stałości praw. Ponieważ jednak nie

mamy zamiaru uprawiać żadnej filozofii matematyki, wyprowadzimy także i te pojęcia obrazowo z dotychczasowych naszych badań.

Wyszedłszy z układu dziesiątkowego, uważaliśmy go najpierw za zesłany z nieba, ale w końcu przekonaliśmy się, że był to tylko przypadkowy układ wśród bez liku możliwych układów. Tym samym znaleźliśmy niejako o g ó l n ą postać układu liczbowego i to pozycyjnego. Ustaliliśmy dla tego układu, który może mieć jakąkolwiek dowolną liczbę jako zasadę, o g ó l n e reguły, które bynajmniej nie są związane z jakimś specjalnym tylko przypadkiem, lecz ważne są dla wszystkich układów, a więc są o g ó l n e. Stąd też te układy muszą wykazywać podobieństwo budowy, zwane w języku uczonych „izomorfizmem". Zasada „stałości praw", albo inaczej „niezmienność", oznacza, że przy pewnym podobieństwie budowy jakiś zespół reguł wyraża to samo, mimo iż zewnętrzne formy tych reguł, czyli ich wzory, ulegną zmianie. Układ dziesiątkowy, szóstkowy, trzynastkowy i wszystkie inne niezliczone układy pozycyjne wykazują podobieństwo budowy. Dlatego np. reguły mnożenia są te same dla wszystkich układów. Że układy pozycyjne wykazują także stałość praw, tego dowodzi ich niezmienność względem działań, np. względem mnożenia, w stosunku do którego okazują się niejako nieczułe. Dla mnożenia jest to obojętne, w jakim układzie się odbywa. Dokonywa się zawsze tą samą drogą i prowadzi zawsze do równych wyników. W ten sposób można by każdą maszynę do liczenia nastawić natychmiast na układ szóstkowy czy trzynastkowy, nie zmieniając jej zasady, a tylko przez wymianę niektórych części. Dostarczyłaby nam wtedy posłusznie wyniku napisanego w innym układzie.

Ale nie zapuszczajmy się zbyt daleko w te rozważania. Bo w przeciwnym razie zanadto narazimy się ścisłości, zwłaszcza, że właściwe nasze wiadomości z matematyki, co do ilości materiału, nie wiele przekraczają zasób dziewięcioletniego ucznia szkoły elementarnej.

Nadto, nasuwają się nam nagle wątpliwości. Przypomnieliśmy sobie układ dwójkowy wielkiego Leibniza i odkryliśmy, że cała tabliczka mnożenia tego układu, który zna tylko cyfry 0 i 1, składa się z dwu wyrażeń, a mianowicie $1 . 0 = 0$ i $1 . 1 = 1$. Ucznia niewątpliwie pociąga taka tabliczka mnożenia. My jednak jesteśmy w kłopocie. Bo twierdziliśmy, że w każdym dowolnym układzie można liczyć według tych samych reguł. Jakże jednak mam mnożyć, gdy wiem tylko, że 1 raz 1 równa się 1?

Dręczy nas także drugie jeszcze pytanie. Chcieliśmy, opierając się na naszych dotychczasowych wiadomościach, spróbować samodzielnie obliczyć, ile liczb dwucyfrowych, trzycyfrowych, czterocyfrowych, dziesięciocyfrowych znajduje się w pewnym układzie o jakiejś dowolnej zasadzie; a tu raptem natrafiliśmy na różnorodne trudności.

Chcąc nie chcąc będziemy się w dalszym ciągu musieli zajmować cyframi i liczbami całkowitymi, zanim ostatecznie pożegnamy się z „teorią liczb", a będziemy mogli skierować się do tzw. algebry, czyli rachunku na liczbach ogólnych; tam dopiero przejmie nas zachwytem niewysłowiona magia formy, naprawdę wielka kabała matematyki.

ROZDZIAŁ CZWARTY

SYMBOLE I ROZKAZY

Rzuciwszy w koło okiem z niesamowitej góry liczb zstępujemy w jedną z leżących poniżej dolin i wkraczamy zarazem w nowy zaczarowany kraj wielkości i form. Odważnie podejmujemy jedno z wielu pytań, które zaczęły nas dręczyć, przybierając coraz bardziej na sile. Czyż nie jest to czymś więcej jeszcze niż rzeczą zgoła niewytłumaczoną — pytamy siebie samych — że w każdym układzie liczbowym mogliśmy z bardzo ograniczonej ilości znaków cyfrowych zbudować powoli cały świat liczb naturalnych aż do nieskończoności? A teraz domaga się od nas wielki Leibniz, abyśmy w tę możliwość uwierzyli nawet wtedy, gdy mamy wszystkiego raptem zero i jeden?

Od chwili obecnej wędrujemy prawie wyłącznie po hinduskodziesiątkowej dolinie liczb, z którą zżyci jesteśmy od dzieciństwa. Stwierdźmy to na samym wstępie. Abyśmy się jednak nie zabłąkali, napiszę już na początku naszej drogi, na jakiejkolwiek tablicy, magiczny znak 3!. Co ma oznaczać ta cyfra z wykrzyknikiem? Wygląda to prawie jak stanowczy rozkaz. Lecz czegóż ten rozkaz od nas chce? Co mam dalej począć z jedną jedyną liczbą? Czy mam ją rozłożyć, zmienić, powiększyć, pomniejszyć? Czyż jestem w kraju czarnych, gdzie dzikus jakiś z władczym gestem wydaje nieartykułowany a groźny okrzyk?

Trochę cierpliwości! — odpowiem. Dwie rzeczy chciałem osiągnąć tym czarodziejskim znakiem: po pierwsze, abyśmy wejrzeli w głąb najbardziej swoistego sposobu tworzenia matematycznych wzorów; po wtóre, aby od razu na początku mieć przygotowany czarodziejski klucz do opanowania wszystkich niepokojących nas problemów. Oczywiście, nie musi to być wyłącznie 3!. Rozkaz ten

może równie dobrze brzmieć 1! 5! 25! 273! 102 077!, albo w jakikolwiek inny sposób.

Zanim jednak zajmiemy się bliżej tym szczególnym rozkazem, zaznaczonym przez wykrzyknik, przyjrzyjmy się całkiem ogólnie rodzajom i celom rozkazów matematycznych. Nie spostrzegłszy tego nawet, wykonaliśmy już bowiem dotąd posłusznie cały szereg rozkazów matematycznych, gdyż do posłuszeństwa tego nawykliśmy już od szkoły elementarnej począwszy. Stwierdziliśmy, że poszczególne cyfry i składające się z tych cyfr liczby, są godłami, czyli znakami, lub jak inaczej można się wyrazić, symbolami pewnych pojęć ilościowych. Mówiliśmy dalej o pewnym systemie i przedziwnej sztuce wykonywania obliczeń czyli o algorytmie. W obrębie tego świata znajduje się jednak jeszcze coś innego: właśnie rozkazy! Dopiero zapisywanie i powszechna zrozumiałość tych rozkazów daje nam możność rozwinięcia poszczególnych cyfr w układ i w algorytm. Jeśli działania nazwiemy operacjami, można by mówić o „rozkazach operacyjnych", a o ich pisemnych wyrażeniach jako o symbolach operacji. Krótko mówiąc można rozkaz nazwać także „operatorem". A jednak wolimy w dalszym ciągu używać naszego prostego słowa „rozkaz", przez co oczywiście należy zawsze rozumieć rozkaz matematyczny, czyli wezwanie do matematycznego działania.

Jak rekrutom na podwórzu koszarowym, czy też na placu musztry, zrazu bardzo trudno wykonać na krótką komendę dokładnie i poprawnie cały szereg zawiłych chwytów karabinowych, albo bynajmniej nie prostych zwrotów w marszu, tak samo dla nas, rekrutów matematyki, stanowi największą trudność zrozumieć „rozkaz" i ściśle go wypełnić. Ale na tej „matematycznej dyscyplinie" polega dziewięć dziesiątych matematycznej biegłości.

Zgodnie z naszym założeniem, zacznijmy od spraw najprostszych. Ćwiczmy na rozkaz pierwsze kroki matematycznego marszu i salutowania.

Zapewne może kogoś zaskoczyć takie sformułowanie, a mój nieustępliwy przeciwnik zarzuci mi na pewno znowu nadmiar zbędnych słów. Ale na to nie mogę poradzić. Bo zamiarem moim jest uczynić pojęcie całki równie zrozumiałym jak znak dodawania. A to zamierzenie nie da się urzeczywistnić inaczej, niż w sposób przeze mnie obrany, jeśli założenia są tak skromne jak te, które

przyjęliśmy. Zresztą mówiliśmy już o „rozkazach". Znak dodawania jest rozkazem. Rozkazem jest również znak całki. Nieco bardziej skomplikowanym aniżeli znak dodawania, ale w istocie rzeczy niczym innym.

Mój przeciwnik zatyka sobie uszy. Podejrzewa, że chcę już teraz omawiać całkę. Ależ pragnę tylko dodać odwagi. Poza tym nie myślę nawet w istocie przekroczyć dodawania; mianowicie o ile chodzi o zasadnicze trudności.

Stwierdzamy zatem, że dodawanie jest rozkazem. $5+4=9$. Co to znaczy? Znaczy to: „Weź — przyjacielu — pięć jednostek i dodaj do tego jeszcze dalsze cztery jednostki!" Mała pauza na wykonanie. Co potem? No, potem pisze się symbol, tzw. znak równości, co właściwie nie znaczy nic innego, jak tylko: „Melduję posłusznie, wypełniłem rozkaz". „No i co?" pyta rozkazujący. Na to pada odpowiedź: „Po wykonaniu rozkazu zjawia się z prawej strony nowy symbol, zwany „dziewięć". „W porządku! odmaszerować!"

Ponieważ ten mój militarystyczny sposób przedstawiania sprawy może dla niektórych być mniej zrozumiały, opuśćmy więc plac ćwiczeń i mówmy mniej obrazowo. Także odejmowanie jest takim rozkazem, tak samo mnożenie i dzielenie. Każdy z nas wie już o tym, że rozkaz matematyczny może mieć bardzo zawiłe założenia wykonawcze. Na przykład dzielenie wielocyfrowych liczb w układzie trzynastkowym. A i sam fakt, że należy rachować w pewnym określonym układzie liczbowym, jest też matematycznym rozkazem. Potęgowanie oczywiście również.

Nagromadziliśmy zatem dla naszego pojęcia rozkazu matematycznego już naprawdę wielki materiał przykładowy, jeśli tak można się wyrazić. Dlatego wróćmy znowu do punktu wyjścia, do tego znaku, który niejako przez sam wygląd zewnętrzny, jako wykrzyknik, wydał się nam rozkazem. Co oznacza więc 3! w języku komendy matematycznej? Przygotowani odpowiedzą, że chodzi tu o „silnię" trzech. Dobrze, nie ignorujmy wyrażeń fachowych. Istotnie, jest to trzy-„silnia". Ale treść tego rozkazu zawartą w wykrzykniku i tylko w tym wykrzykniku wolimy wyjaśnić naszym językiem koszarowym, czy dla odmiany językiem książki kucharskiej. Ogólnie brzmi ona: „Bierze się jednostkę, mnoży przez dwa, wynik mnoży się przez trzy, teraz mnoży się przez cztery, a to wszystko przez pięć i tak dalej, aż ostatni czynnik, aż ostatnia

liczba, przez którą się mnoży, będzie tą samą liczbą, przy której właśnie stoi wykrzyknik". Jeśli zatem wykrzyknik stoi przy jedynce, to nie ma więcej nic do roboty. Podobnie, jak w przypadku liczby, która ma być podniesiona do potęgi pierwszej. Ale teraz zaprzestańmy lepiej dalszych objaśnień i obliczmy raczej śmiało mistyczne „silnie" kilkunastu liczb.

$1! = 1 =$	1
$2! = 1.2 =$	2
$3! = 1.2.3 =$	6
$4! = 1.2.3.4 =$	24
$5! = 1.2.3.4.5 =$	120
$6! = 1.2.3.4.5.6 =$	720
$7! = 1.2.3.4.5.6.7 =$	5 040
$8! = 1.2.3.4.5.6.7.8 =$	40 320
$9! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9 =$	362 880
$10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 =$	3 628 800
$11! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11 =$	39 916 800
$12! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12 =$	479 001 600
$13! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13 =$	6 227 020 800
$14! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14 =$	87 178 291 200
$15! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15 =$	1 307 674 368 000
$16! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16 =$	20 922 789 888 000

Jak widać, nasz rozkaz, ów wykrzyknik, prowadzi wnet do wyników olbrzymich. Niewinnie, prawie podstępnie, zaczyna się szereg wyników i stale wzrastając nagle osiąga wartości, które wkrótce przekraczają wszelkie granice wyobraźni. Np. 100-silnia jest już potworem liczbowym gigantycznej wielkości. A mianowicie jest to liczba 158-cyfrowa.

Nie wchodźmy zbyt dokładnie w szczegóły i finezje, ale czysto wzrokowo zauważmy, że szereg „silni" ma pewne podobieństwo do potęg. Różnica polega na tym, że w potędze zawsze ta sama liczba występuje jako czynnik, podczas gdy w silni czynnik za każdym razem wzrasta. W tym miejscu warto spotęgować dla porównania możliwie małą liczbę i przypomnieć przy tym sławny już w starożytności przykład z szachownicą. W bardzo znacznym streszczeniu przedstawia się ta bajka następująco: Król indyjski Shehram chcąc wyna-

grodzić wynalazcę szachów, imieniem Sessa Ebn Daher, obiecuje mu spełnić każde jego życzenie. Ten robi niewinną minę i powiada: „Wielki Królu, moje życzenie nie jest bardzo skromne. Pragnę nagrody w ziarnach pszenicy. Tyle ziarn pszenicy chciałbym otrzymać, ile wypadnie na ostatnim polu szachownicy, jeśli na pierwszym jej polu położy się jedno ziarno, a na każdym następnym dwa razy tyle, co na poprzednim". Król wybucha grzmiącym śmiechem i przyrzeka dotrzymać obietnicy i spełnić życzenie. Jest przekonany, że zwariowany matematyk nie będzie mógł z tej pszenicy upiec nawet jednego bochenka chleba. Lecz bardzo szybko i niezbyt przyjemnie przekonywa się o swym błędzie. Bo liczba ziarn pszenicy wynosi $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $4 \times 2 = 8$, $8 \times 2 = 16$, $16 \times 2 = 32$, $32 \times 2 = 64$, $64 \times 2 = 128$, $128 \times 2 = 256$ albo $(1 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . . .)$ i tak dalej aż do ostatniego pola szachownicy. A że szachownica ma 64 pól, liczba ziarn wynosi 2^{63}, ponieważ na pierwszym polu leży tylko jedno ziarno. To jednak tworzy liczbę

9 223 372 036 854 775 808.

Co ta liczba oznacza, niech uzmysłowi nam fakt, że ilość pszenicy „na ostatnim polu szachownicy" napełniłaby kostkę o krawędzi długiej na 7·48 km, jeśli się przyjmie jako średnią objętość jednego ziarna pszenicy 45·45 milimetrów sześciennych. W tym wypadku, litr pszenicy składałby się z 22 000 ziarn, co istotnie potwierdza faktyczne obliczenie.

Ale nasz król każe sobie ponadto przeliczyć ilość pszenicy według ładunków wielbłądzich. Przez to obraz staje się jeszcze bardziej przerażający. Bo jeśli na jednego wielbłąda załaduje się, licząc w naszym systemie miar, 140 kg pszenicy i jeśli się przyjmie, że jeden wielbłąd zajmuje w pochodzie „gęsiego" pięć metrów miejsca na długość, wtedy karawana wielbłądów, które transportują ową pszenicę, przy obładowaniu 2 303 539 469 744 wielbłądów, będzie wynosiła na długość nie mniej, niż 11 517 697 348 720 metrów, a więc przeszło 11½ miliardów kilometrów. Ta długość karawany oznacza jednak około 8-krotną odległość Saturna, albo 50-krotną odległość Marsa od słońca.

Jeszcze trzecie zobrazowanie: Światowy zbiór pszenicy wynosił średnio w okresie od roku 1927 do 1931 około 1236 milionów cetnarów metrycznych rocznie, to znaczy, że nasz biedny król chcąc

dotrzymać swej obietnicy musiałby dać do rozporządzenia owemu matematykowi około 2609 światowych zbiorów pszenicy, i to zbiorów dwudziestego stulecia, a więc uzyskanych przy użyciu traktorów i sztucznych nawozów. Nasza liczba ziarn przedstawia się jako liczba 19-cyfrowa. Teraz czytelnik będzie sobie w przybliżeniu mógł zdać sprawę, co oznacza 158-cyfrowa liczba, uzyskana przez wyrachowanie 100-silni.

ROZDZIAŁ PIĄTY

KOMBINATORYKA

Po tej dygresji na temat wzrastania wielkości na skutek różnych, na pozór tak niewinnie wyglądających „rozkazów" matematycznych, zapuśćmy się ostrożnie tam, gdzie się rachuje „silniami": w dziedzinę, dla której wprowadzono pojęcie owego 1.2.3.4.5.6.7.8 itd., a więc pojęcie wykrzyknika obok liczby. Jest to część algorytmu tak zwanej kombinatoryki, czyli sztuki kombinowania w dalszym znaczeniu tego słowa. Ponieważ słowo „kombinować" każdemu jest znane, nie troszczmy się o spolszczenie. [1]

I znowu daleki jestem od myśli, by wprowadzić teraz z góry szereg definicji czyli określeń, jakby to z matematycznego punktu widzenia należało uczynić. Jesteśmy rekrutami i prostakami a wszystko, co nas interesuje, odkrywamy na drodze doświadczalnej. Na rzucone z boku przerażone spojrzenie naszego przeciwnika spieszę złożyć uroczyste zapewnienie, że wcale nie chciałem przez to powiedzieć jakoby matematyka była nauką doświadczalną. Ujmując sprawę z grubsza, matematyka pochodzi wyłącznie z głowy, można ją całą zbudować bez żadnego doświadczenia, a również w jej wynikach nie można jej nigdy ani popierać, ani zbijać doświadczeniem, lecz jedynie przez ścisłe zbadanie logicznej poprawności jej operacyj. Ale to tylko mimochodem — dla filozoficznie zainteresowanych czytelników, którzy odnośnie tej sprawy zechcą zapoznać się ze słowem „a priori" albo „apriorycznie".

Pracujmy więc na razie przy pomocy znanego nam już materiału matematycznego, nie zwracając więcej uwagi na przeciwnika.

---

[1] Autorzy „Zarysu arytmetyki politycznej" W-wa 1910, Danielewicz i Dickstein, proponują jako polski odpowiednik kombinacji termin: połączenie.

Pytamy po raz trzeci, jak to jest możliwe, aby z dziesięciu znaków układu dziesiątkowego złożyć wszystkie liczby na świecie. Każdy, kto się przyjrzy np. liczbom 123, 132, 213, 231, 312, 321 i ma jakie takie wyczucie znaczenia słów, powie, że właśnie z poszczególnych znaków cyfrowych „kombinuje" się rozmaite liczby. Zupełnie słusznie! Wszystkie liczby na świecie w rozważanych przez nas układach powstały przez „kombinowanie". Przestawiamy cyfry, przez zamianę znaków zestawiamy liczby i każdej liczbie nadajemy w ten sposób niejako inne oblicze. O wartości miejsc w liczbie nie będziemy tu mówili. Nas interesuje jedynie możliwość odróżniania zewnętrznych „obrazów liczbowych", jeśli można tak powiedzieć. Jeżeli wszystko należycie rozważę, odkrywam jednak duże różnice w samym sposobie, j a k ja te cyfry zestawiam. Dla liczb, których ilość miejsc jest poniżej dziesięciu, używam spośród dziesięciu znaków zawsze tylko co najwyżej jednego, dwóch, trzech itd. aż do dziewięciu dla każdej grupy. Prócz tego mogę jeszcze napisać jedną i tę samą cyfrę więcej razy jak w przypadku 1 111 albo 11 212, albo 1 112. W liczbach dziesięciocyfrowych mogę używać wszystkich dziesięciu cyfr, a tylko wzajemnie je przestawiać. Np. 1234567890 lub 1347658092 itd. Są też liczby dziesięciocyfrowe, w których te same znaki cyfr kilka razy występują. Np. 1 000 000 000 lub 2 322 234 777. W liczbach złożonych z więcej niż 10 cyfr m u s z ą wreszcie występować poszczególne cyfry więcej razy, po prostu dlatego, że nie mogę napisać dwudziestu pięciu różnych znaków, skoro posiadam ich tylko dziesięć.

Mam wrażenie, że wsadziliśmy kij w istne mrowisko i że nasz pierwszy krok więcej wywołał zamętu niż cokolwiek rozjaśnił. Jak tu ten chaos liczb, biegnących w nieskończoność opanować jakimś algorytmem? Co tu pomogą wszystkie „rozkazy", kiedy człowiekowi w głowie tylko aż szumi? I „eksperymenty" na nic się nie zdadzą. Przy liczbie o nieco większej ilości miejsc osągniemy — jak się to wkrótce pokaże — taką ilość możliwości, że ich wyczerpanie wymagałoby, nawet gdybyśmy dzień i noc „kombinowali", okresów czasu, dających się wyrazić wiekami istnień systemów słonecznych. Jak w znanej balladzie Goethego, znaleźliśmy się — powoławszy do życia nasz pierwszy algorytm (układu liczbowego) — w sytuacji ucznia czarnoksiężnika.

Prawdziwą kabałę da się pokonać tylko prawdziwą kabałą. Ma-

giczne słowa i symbole można zneutralizować, unieszkodliwić znowu tylko słowami magicznymi.

Rozpoczniemy więc od tego, że skombinujemy kombinatorykę i spróbujemy diabła wypędzić Belzebubem. Aby jednak nie zatracić przedmiotowości, ubierzemy naszą kombinatorykę kombinatoryki, czyli niejako kombinatorykę do drugiej potęgi, w przykłady. Na końcu sprawdzimy, czy wyczerpaliśmy wszystkie możliwości i czy zbudowaliśmy jakoby zamknięty system kombinatoryczny.

ROZDZIAŁ SZÓSTY

PERMUTACJA

Jakaś przykładna rodzina z dawno już niestety minionych czasów, złożona z obydwojga rodziców i dwanaściorga zdrowych, udanych dzieci siedzi właśnie cała w najlepszej harmonii przy obiedzie. Nagle odzywa się głośno jeden z chłopców. Skarży się, że stale dostaje tylko resztki zupy, bo zajmuje przy stole bardzo niedogodne miejsce. Ponieważ rodzina współżyje w zgodzie i wszelkie nieporozumienia załatwia zwykle drogą wzajemnych ustępstw, zapada postanowienie, by odtąd zmieniać codziennie porządek siedzenia przy stole. W ten sposób służąca, usługująca do stołu, nie będzie tego musiała czynić inaczej jak dotychczas. Na skutek tego wydarzenia rozmowa schodzi na temat oceny, wiele czasu może upłynąć, zanim wyczerpią się wszystkie możliwości uporządkowania osób przy stole. „No, kilka dni", sądzi któryś z chłopców. „Powiedzmy raczej — parę tygodni", poprawia siostra. W końcu godzą się na rok. „Jest przecież na to formuła", odzywa się najstarszy syn. „No, więc jakże przedstawia się nasz przypadek w języku matematycznym?" pyta ojciec, uśmiechając się pod wąsem. Najstarszy syn namyśla się krótką chwilę. Potem powiada: „Ponieważ chodzi tu o przestawienie porządku przy stole, nie jest rzeczą obojętną, czy Ewa siedzi obok Jacka, czy też Jacek obok Ewy. Są to dwa różne wypadki. Poza tym nie tworzy się żadnych grup. Wszyscy, ile nas jest, a więc czternaście osób, będziemy za każdym razem siedzieli w innej kolejności. Jest to zatem taki sam wypadek, jak gdybym czternaście przedmiotów, czyli — jak mówią w matematyce — czternaście elementów, miał poustawiać we wszystkich możliwych kolejnościach. Taki sposób wzajemnego przemieszczania nazywa się permutacją. A formuła jej brzmi: Liczbę elementów należy wziąć

jako silnię. W naszym zatem wypadku czternaście z wykrzyknikiem. Czternaście - silnia!" Ojciec skinął zadowolony. W przerwie między zupą a daniem mięsnym pojawia się na stole papier i ołówek i starsze dzieci z zapałem zabierają się do liczenia. Jak wielką wartość ma ta liczba czarnoksięska, owo 14!? Wynik jest straszliwy! Liczba brzmi: 87 178 291 200. Co począć z tymi miliardami możliwości? Ile na to trzeba czasu? Aha, rok ma przecież 365 dni! Podzielmy więc tę liczbę przez 365. Znowu rachują. Nie wchodząc w treść, lecz idąc jedynie tylko za nowym „algorytmem" ogłasza Jacek, najszybszy spośród rodzeństwa rachmistrz: „Otrzymałem na iloraz liczbę 238 844 633". „Wiesz ty, co to znaczy?" — woła ze zgrozą filozof pośród synów. „To znaczy, że z tym uporządkowaniem przy stole skończymy dopiero prawie za 239 milionów lat, jeśli zechcemy wyczerpać wszystkie możliwości. Że trzeba nam 119 milionów lat, jeśli zmieniać będziemy porządek przy stole dwa razy dziennie, a jeszcze prawie 60 milionów lat jeśli go będziemy zmieniali przy śniadaniu, obiedzie, podwieczorku i kolacji?" „A ja tymczasem umrę, zanim dostanę przyzwoitej zupy" — zawodzi bezradnie najmłodszy.

Na tym prostym przykładzie chcieliśmy przedstawić demoniczną różnorodność możliwości przestawień, magiczną siłę rozkazu „silni" i pierwszą spośród możliwych odmian kombinatoryki. I oto znów mamy nowy „materiał", który zamierzamy systematycznie zbadać.

Przedtem jeszcze kilka słów ku uspokojeniu czytelnika: Nasza przykładna rodzina, przerażona wynikiem obliczeń kombinatorycznych znalazła prostsze wyjście, by uwzględnić usprawiedliwioną skargę najmłodszego syna. Służąca otrzymała polecenie, aby zawsze podawać zaczynała do stołu od jednego i tego samego k r z e s ł a, bez względu na to, kto je zajmuje. Natomiast każdy z członków rodziny „przesiadał" się co dzień o jedno krzesło dalej, a mianowicie w kierunku zgodnym z obrotem wskazówki zegara. Nie zmienił się zatem porządek przy stole w odniesieniu wzajemnym, ze względu na każdorazowe sąsiedztwo zasiadających. Jeśli się jednak przyjmie stół jako układ odniesienia, wtedy porządek zmieniał się codziennie. Dzięki takiemu rozwiązaniu każdy stołownik otrzymywał co piętnaście dni zupę jako pierwszy.

Rozważając to matematycznie mamy i przy takim uporządko-

waniu czternaście poszczególnych przypadków permutacji, z których napiszemy niektóre:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, (pierwszy dzień)
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 1, (drugi dzień)
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 1, 2, (trzeci dzień)

itd.

14, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, (czternasty dzień)
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, (piętnasty dzień).

Otóż czternaście wspomnianych wypadków (pierwszy i piętnasty są przecież równe) uzyskano sztucznie z całej liczby możliwych 87 178 291 200 wypadków permutacji według innej zasady, mianowicie według przemiany „kołowej" albo „cyklicznej", ponieważ dołączył się dalszy, dodatkowy warunek — niezmienności uporządkowania osób względem siebie.

W powyższym przykładzie oznaczyliśmy mające się zmieniać miejsca za pomocą cyfr. Można by je też oznaczyć literami w porządku alfabetycznym. Oczywiście numeracja taka sama przez się bynajmniej nie oznacza uporządkowania podług w i e l k o ś c i czy znaczenia, jak w teatrze numeracja miejsc w tym samym rzędzie. Równie dobrze mógłbym przestawiane przedmioty oznaczyć dla odróżnienia odpowiednimi barwami, nazwami lub jakimikolwiek innymi znakami. Dlatego mówi się przy takim znakowaniu dla odróżnienia poza tym zupełnie równowartościowych przedmiotów o „wskaźnikach", inaczej „indeksach". To czysto porządkowe — że się tak wyrazimy — zastosowanie liczb albo liter odgrywa w matematyce znaczną, coraz to większą rolę, zwłaszcza od czasów Leibniza, którego geniusz wprowadził także i ten „algorytm porządku". Należało by teraz zdać sobie jasno sprawę z rzeczy nie całkiem łatwej. Utrzymywaliśmy stanowczo, że przedmioty mają być równoważne co do wartości, a numery porządkowe czyli wskaźniki, czy jak je tam zechcemy nazwać, nie mają wcale znaczenia wielkości. A jednak spokojnie mówi się, że przedmiot oznaczony dwójką jest „wyższy", albo jest „wyższym elementem" niż przedmiot oznaczony jedynką. Poprawniej należało by powiedzieć: przedmiot 2 jest przedmiotem oznaczonym „wyższym wskaźnikiem" w porównaniu z przedmiotem 1. Poza tym przedmiot 1 i przedmiot 2 są równe,

przede wszystkim równe jako wielkości.[1] I znowu wchodzi w grę pewna kabała. Mianowicie kabała porządku i przyporządkowania. Po prostu nie można by ani mówić, ani pisać, gdyby wskaźniki nie dały się uszeregować według jakiejś zasady. Alfabet okazuje się tu nawet poprawniejszy i mniej dwuznaczny, niż używanie cyfr jako wskaźników, ponieważ trudno uwolnić się od bezwiednego bodaj łączenia z nimi ich znaczenia ilościowego. Litera *d* znajduje się w alfabecie „wyżej" aniżeli litera *b*. W następstwie tego przedmiot *d* jest, jako element permutacji „wyżej" zaszeregowany, aniżeli przedmiot *b*.[2]

Przez to ustalenie „hierarchii miejsc" otrzymuje się dla wszystkich kombinacyjnych rozważań podstawowe pojęcie „dobrze uporządkowanych" elementów. Elementy są wtedy „dobrze uporządkowane", jeśli np. posuwamy się w permutacji w następujący sposób:

abc, acb, bac, bca, cab, cba, albo cyframi
123, 132, 213, 231, 312, 321.

Przy tego rodzaju postępowaniu (przy czym zawsze „niższy" element zatrzymuje się na swoim miejscu, jak długo to tylko możliwe) nie może nam ujść żaden z możliwych wypadków kombinacji, a my kroczymy, jak się to mówi, od „najniższej" do „najwyższej" permutacji z „dobrze uporządkowanymi elementami", a jako dowód zakończenia naszej pracy otrzymujemy na ostatku odwrotność permutacji, z której wyszliśmy. Podczas gdy w „najniższej" permutacji ż a d e n element nie stał przed niższym od siebie, w permutacji „najwyższej" k a ż d y element stoi przed niższym. Nie chciałbym wywołać zamieszania, lecz trudno mi nie zwrócić uwagi, że przy traktowaniu permutacji jako zwykłych liczb, najniższa permutacja jest też faktycznie najmniejszą liczbą, a najwyższa permutacja przedstawia liczbę największą (123 . . . . . 321). Pomiędzy nimi leżą „dobrze uporządkowane" także i co do wielkości wszystkie inne liczby, dające się utworzyć z cyfr 1, 2 i 3.

Powróćmy znowu do naszych wskaźników, nie uważając ich za

[1] Nie wyklucza to możliwości, że przedmioty jako wielkości są różne, tylko, że się nie zwraca uwagi na nie jako wielkości. Interesuje mię wyłącznie sam fakt ich istnienia, ich byt i charakter jednostkowy.

[2] Takie uporządkowanie nazywają też „leksykograficznym" lub „słownikowym".

wielkości. Obecnie oznacza 123 dla nas to samo, co 321 albo 231, mianowicie jakąś dowolną permutację trzech wymienionych wskaźników.

Teraz rozwiążmy problem, w jaki sposób nasz zagadkowy „rozkaz", nasza „silnia", to nasze 3 z wykrzyknikiem, tak trafnie daje ogólną ilość możliwych permutacji. Najpierw rozważmy dla zamknięcia całości albo, jak nieraz się mówi, „zachowania systemu" pewną logiczną niedorzeczność. Podobnie postąpiliśmy już przy potęgach, a to przy potędze zerowej i pierwszej. Pragniemy się zatem dowiedzieć, jak wielka jest ilość permutacji, gdy posiadamy tylko j e d e n element. Rozkaz brzmi więc po prostu: „Staraj się dobrze uporządkowywać jeden element tak długo, aż wyczerpiesz wszystkie możliwości". Po należytym zastanowieniu formułujemy jeden nonsens matematyczny za pomocą innego — jeśli to możliwe — jeszcze większego. Z dumą piszemy: Liczba permutacji równa się 1! (jeden - silnia). Albo słowami: Aby otrzymać wynik, należy 1, od 1 zaczynając, tak długo mnożyć przez następne coraz to większe liczby, aż się wreszcie dojdzie do jedności! Że przy tym znowu otrzyma się liczbę jeden, to chyba jasne.

Po tym wybryku logicznym rozumujmy dalej ostrożnie. Co stanie się przy dwu elementach? Napiszmy w „dobrym uporządkowaniu":

ab ba

Nie ma wątpliwości: Przeszliśmy wszelkie możliwe permutacje od najniższej do najwyższej. A teraz starajmy się myśleć z największą ścisłością, aby znaleźć przejście do znanej nam z twierdzenia formuły. Co zrobiliśmy? Jak długo to było możliwe zatrzymywaliśmy *a* na swoim miejscu, a tymczasem niejako permutowaliśmy *b*. Skoro uporaliśmy się z tym, przesunęliśmy *b* na pierwsze miejsce i permutowaliśmy *a*. A zatem dwa razy wykonaliśmy permutację pojedynczego elementu. Jeden element ma jednak tylko jedną permutację, w następstwie czego liczba permutacji dwóch elementów wynosi 1 . 2 albo, pisząc w naszej postaci, 2!, a więc równa się 2 - silnia, co daje na wynik liczbę 2.

Przy trzech elementach otrzymuje się:

abc	bac	cab
acb	bca	cba

Jeśli znowu zastosujemy naszą metodę, możemy oświadczyć, że trzy razy zatrzymywaliśmy każdy z elementów możliwie najdłużej, jako pierwszy element, a tymczasem permutowaliśmy dwa pozostałe elementy. Ponieważ jednak liczba permutacji dwóch elementów równa jest 1 . 2, więc muszę tę liczbę pomnożyć jeszcze przez 3. Zatem dla 3 elementów ilość permutacji wynosi 1 . 2 . 3, inaczej 3!, albo trzy - silnia, czyli 6. Dla 4 elementów otrzymuje się:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Nie będziemy powtarzali znowu całego wywodu. Krótko mówiąc, zatrzymywaliśmy za każdym razem pierwszy element tak długo, aż zostały wykonane permutacje trzech pozostałych elementów. Ponieważ jednak mam cztery elementy, a więc cztery elementy mogłem postawić na pierwszym miejscu, muszę więc liczbę permutacji trzech elementów pomnożyć przez 4. A zatem 4 razy 1 . 2 . 3, czyli 1 . 2 . 3 . 4, albo 4!, tzn. cztery - silnia, czyli 24.

Jeśli w ten sposób będziemy postępowali dalej, znajdziemy analogicznie, że każda permutacja odnosząca się do elementów z różnymi wskaźnikami, wykazuje tyle możliwych przestawień, ile wynosi liczba elementów, przy czym liczbę tę należy ponadto opatrzyć wykrzyknikiem. A więc liczba permutacji 10 elementów równa się 10!, 75 — równa jest 75!, a 3 124 równa się 3 124! itd. aż do nieskończoności.

Mogło by się jednak zdarzyć, że dane są nie same różne elementy czy wskaźniki, lecz że niektóre z nich są sobie równe. Mówiąc obrazowo, mam np. dwa jabłka, trzy gruszki i jedną wiśnię tak przestawiać, aby uzyskać wszystkie możliwe ugrupowania tych trzech gatunków owoców, przy czym nie muszę zważać na to, czy biorę gruszkę 1 czy gruszkę 2. To znaczy, wypadek permutacji: „gruszka 1, gruszka 2, gruszka 3, jabłko 1, wiśnia, jabłko 2" uważa się za równy wypadkowi „gruszka 3, gruszka 1, gruszka 2, jabłko 2, wiśnia, jabłko 1", a także wypadkowi „gruszka 2, gruszka 1, gruszka 3, jabłko 2, wiśnia, jabłko 1" itd. Nazwijmy dla uproszczenia każde

jabłko *a*, każdą gruszkę *b*, wiśnię — *c*; wtedy mielibyśmy jako „dobrze uporządkowane" permutacje — pierwszą a a b b b c, zaś ostatnią c b b b a a.

Zbyt dużo czasu zabrałoby wyprowadzanie wzoru dla takich przypadków, zwanych „permutacjami z powtarzaniem", czy permutacjami z wielokrotnym występowaniem poszczególnych elementów. Proszę mi więc uwierzyć na słowo, jeżeli wzór ten po prostu wprowadzę. Brzmi on w naszym wypadku: Ogólną ilość permutacji, a więc 6, należy podzielić przez pomnożone przez siebie silnie powtarzających się elementów. A zatem 6! należy podzielić przez iloczyn 2!, 3! i 1!, co napisane w ułamku równa się:

$$\frac{6!}{2!\ 3!\ 1!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2 \times 1.2.3 \times 1} = 60.$$

Będę więc mógł utworzyć 60 różnych ugrupowań naszych gatunków owocowych. Dla czytelników bystrzejszych można by jeszcze dodać, że wzór ten jest właściwie ogólniejszy od poprzedniego. Przy każdej permutacji mógłbym się pytać, ile razy występuje w niej każdy element. A wtedy np. przy pięciu r ó ż n y c h elementach mogę napisać śmiało:

$$\text{ilość permutacji} = \frac{1.2.3.4.5}{1!\ 1!\ 1!\ 1!\ 1!},$$

ponieważ każdy element występuje raz tylko. Jak widzimy, otrzymuje się właściwy wynik. A pierwszy nasz wzór przejdzie, jak się to mówi, na szczególny wypadek drugiego, ogólniejszego.

Na zakończenie rozważania permutacji jeszcze jeden przykład. Jak wielką jest liczba permutacji z elementów a b b b b c? oczywiście

$$\frac{6!}{1!\ 4!\ 1!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1 \times 1.2.3.4 \times 1} = 30.$$

Spostrzegawczy czytelnik zauważy przy tym, że jeśli usunę w myśli wykrzykniki, to sumy liczb nad i pod kreską ułamkową zawsze muszą być równe; jest to oczywiste, bo najpierw zapisujemy w liczniku silnię liczby wszystkich elementów, a potem dopiero w mianowniku silnie grup elementów, tworzących razem ową ogólną liczbę elementów.

Oczywiście, wiele jeszcze dało by się powiedzieć o permutacjach.

Istnieje jeszcze wielka ilość problemów, które można by roztrząsać. Ponieważ jednak permutacja nie przedstawia bynajmniej postaci kombinatoryki najważniejszej dla matematyki w ogóle, a w szczególności dla naszych celów, zakończymy stwierdzeniem, że w permutacji musi się zawsze używać w s z y s t k i c h elementów, że się te elementy przestawia, że więc odmienny porządek elementów w ich następowaniu po sobie rozstrzyga o tym, czy mamy do czynienia z różnymi przypadkami permutacji. Byłby zawsze tylko jeden jedyny wypadek z tylu a tylu elementów, gdybyśmy zwracali uwagę tylko na ich zestawienie, a nie na ich porządek. Permutacja to więc nic innego, jak tylko przestawienie porządku, przetasowanie.

ROZDZIAŁ SIÓDMY

KOMBINACJA W ŚCIŚLEJSZYM ZNACZENIU

Ostatnia uwaga była nie bez specjalnego zamiaru, o czym się wkrótce lepiej przekonamy. Pragniemy teraz bliżej poznać drugą odmianę kombinatoryki, ale znowu nie teoretycznie, lecz obrazowo. Wróćmy przeto do znanego nam już kółka rodzinnego, liczącego czternaście głów. Zastajemy je właśnie po obiedzie, przy beztroskiej zabawie. Jest bowiem dzień świąteczny. Gdy jeden z członków rodziny zaproponował grę w karty, przypominają sobie wszyscy zaczarowany porządek przy stole i od razu rzuca ktoś pytanie, jak długo by to trwało, ażby się wyczerpały wszystkie możliwości codziennej partii taroka. I to, broń Boże, nie ze względu na różnorodność możliwych sytuacji, lecz tylko ze względu na skład partnerów. Rozważano przy tym partie czteroosobowe, o zmieniającym się codziennie składzie partnerów. Przy czym jako grający wchodzą pod rozwagę wszyscy członkowie rodziny, czyli czternaście osób.

Wszyscy są onieśmieleni i nikt nie ryzykuje żadnych przewidywań z góry. Może to znów trwać będzie miliony lat? Na wszelki wypadek lepiej zaufać kabale, algorytmowi kombinatoryki, aniżeli na oślep zgadywać to i owo. Więc biegły w matematyce syn twierdzi natychmiast, że w tym wypadku chodzi o tzw. „kombinację w ściślejszym znaczeniu". Czternaście osób znaczy matematycznie tyle co czternaście przedmiotów, inaczej czternaście elementów. A utworzone z tych elementów grupy czwórek nazywają się kwaternami. (Wyrażenie to znane jest chyba każdemu z loterii i tomboli). Zważa się tu jedynie na same elementy każdego kwaterna, nie zaś na przykład na porządek, na jakieś przestawienie wewnątrz grupy. Bo grupa: matka, ojciec, Jacek, Ewa tworzy tę samą partię taroka,

co ojciec, Jacek, matka, Ewa, albo Ewa, ojciec, matka, Jacek itd. Obliczenie można tu przeprowadzić bardzo szybko, bo istnieje na to specjalny a prosty znak czarodziejski, tzw. „współczynnik dwumianu". Nawiasem mówiąc, sama ta nazwa niewiele ma wspólnego z naszym przykładem. Rzecz polega po prostu na tym, że zapisuje się u góry liczbę wszystkich elementów, pod nią zaś ilość elementów w grupie, ujmuje się to w nawias, czyta się „14 nad 4" i oblicza „rozkaz" wedle ustalonego sposobu. Otrzyma się tedy $\binom{14}{4} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, a to daje liczbę 1 001. Partie taroka zostałyby zatem rozegrane w 1 001 dniach, a więc w przeciągu niespełna trzech lat.

Odwaga i nadzieja wstąpiła we wszystkich, gdy osiągnięto tę „uchwytną" liczbę, a jedna z córek zadaje takie pytanie: „Przypadek zrządził", mówi „że wśród naszego rodzeństwa jest sześciu chłopców i sześć dziewcząt. Interesowało by mię, ile różnych od siebie par tanecznych dało by się z nas utworzyć. To przecież musi być również taka „kombinacja". Bo jest nas dwanaście elementów, jak się to pięknie nazywa. Po wtóre zaś tworzy się grupy po dwa. A w końcu jest to obojętne, czy Jacek tańczy z Ewą, czy Ewa z Jackiem". „Masz rację, Jadziu" oświadcza brat-matematyk. „Jest to tzw. kombinacja amb. Nazywają się tak grupy, liczące po dwa elementy. Jak ambo na loterii, które nie jest przecie niczym innym jak tylko grupą z dwóch liczb złożoną. Mówiąc nawiasem, można by twoje zadanie rozwiązać mniej elegancko, ale za to prościej bez pomocy kombinatoryki. Z sześciu dziewcząt każda tańczy z każdym z sześciu braci. A zatem sześć razy. A więc możliwych jest trzydzieści sześć różnych par tanecznych". „Na cóż zatem potrzebny jest twój czarodziejski wzór?" pyta Ewa. „W tym wypadku można było obliczyć prostym rachunkiem. Pokażę ci jednak, że ten wzgardzony wzór czarodziejski czyni dopiero przejrzystym nasz rachunek. I że potwierdza nasze obliczenie „na chłopski rozum". A zatem: Wszystkie amba z dwunastu elementów dają $\binom{12}{2}$ przypadków kombinacji. Otóż, wśród tych amb byłyby jednak pary złożone bądź z dwóch braci, bądź z dwóch sióstr. A więc nie to, do czego zmierzamy. Postawiliśmy bowiem dalszy warunek, że mają to być właściwe pary taneczne. Musimy więc odjąć pary równopłciowe. Ale pary te

są znowu przypadkami kombinacji. A mianowicie jest po sześć elementów wśród braci i wśród sióstr. A więc po $\binom{6}{2}$ równopłciowych amb. Właściwie jest rachunek już gotowy. Wygląda on tak:

$$\binom{12}{2}-\binom{6}{2}-\binom{6}{2}=\binom{12}{2}-2\cdot\binom{6}{2}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}-2\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=66-30=36,$$

a więc dokładnie ten wynik, jakiego oczekiwaliśmy".

Zanim dokładniej objaśnimy wprowadzony przez wielkiego matematyka Leonarda Eulera i późniejszych sposób pisania, czyli „rozkaz" $\binom{14}{4}$, $\binom{12}{2}$ itd., sięgnijmy znowu po nasze „wskaźniki" i rozpatrzmy „dobrze uporządkowane" przypadki kombinacji. Znowu jesteśmy nienasyceni i twierdzimy, że istnieją „uniony", grupy zawierające po jednym elemencie. Są to elementy same. a b c d e f ma zatem sześć „unionów". Na tym kończy się możliwość kombinowania. Grupy mające po dwa elementy nazywają się „ambami"; grupy po trzy elementy — „ternami"; po cztery — „kwaternami"; po pięć — „kwinternami"; grupy po sześć elementów „seksternami"; grupy po siedem elementów „septernami"; grupy po osiem elementów „okternami". Dalej już trudno w ten sposób tworzyć nazwy. „Nowerna", „decerna", „undecerna" itd. nie mają już ładnego brzmienia. Przede wszystkim nie są używane. Można więc mówić spokojnie o grupach po dziewięć, po dwadzieścia, po trzysta piętnaście elementów itd.

Utwórzmy najpierw z elementów 1, 2, 3, 4, 5, 6 terna, (grupy z trzech elementów).

123	135	234	256
124	136	235	345
125	145	236	346
126	146	245	356
134	156	246	456

Zewnętrzną oznaką zakończenia operacji jest wystąpienie w „dobrym uporządkowaniu" tylu elementów końcowych spośród wszystkich elementów, ile ich zawiera grupa. W rozważanym przykładzie ostatnich trzech elementów: 4, 5 i 6. Jeśli rozważamy amba utworzone z 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, to nazwiemy 12 pierwszym ambem, a 89 ostatnim. Widzimy dalej, że w kombinacji n i g d y nie może znajdować się „wyższy" element przed „niższym". 42 jest jako ambo w jakiejś kombinacji niemożliwe. Bo już przedtem musiało

występować jako ambo 24, a to samo złożenie nie może występować więcej razy.[1]

Dla wprawy utwórzmy jeszcze grupy po cztery z elementów a, b, c, d, e, f, g.

abcd	acde	adef	aefg	bcde	bdef	befg	cdef	cefg	defg
abce	acdf	adeg		bcdf	bdeg		cdeg		
abcf	acdg	adfg		bcdg	bdfg		cdfg		
abcg	acef			bcef					
abde	aceg			bceg					
abdf	acfg			bcfg					
abdg									
abef									
abeg									
abfg									

Jak należy postępować, widać z powyższego zestawienia jasno. Wypisuje się z pierwszych czterech elementów pierwsze kwaterno i zmienia się za każdym razem ostatni element na wyższy, jak długo się da. Skoro już więcej nie można, wówczas podwyższa się element przedostatni itd.

Ogólną ilość wszystkich możliwych kombinacji znajdziemy obecnie za pomocą następującego rozważania: Mam danych np. 6 elementów i z tego mam utworzyć amba. Muszę zatem każdy z tych sześciu elementów połączyć z poszczególnymi z pozostałych każdorazowo (6—1) elementów, a więc z 5 elementami. Miałbym więc 6.5=30 amb. Otóż naliczyliśmy za wiele. Bo przy tym postępowaniu otrzymuję każde ambo podwójnie, mianowicie raz jako „ab“, raz zaś jako „ba“, bo przecież k a ż d y element łączę z pozostałymi. Właściwa liczba kombinacji jest zatem $\frac{6.(6-1)}{2}$ czyli $\binom{6}{2}$, bo ten „rozkaz“ oznacza $\frac{6.5}{1.2}$.

Jeśli chcę przejść do tern, muszę każde z utworzonych już amb połączyć z pozostałymi (6—2) elementami, nie występującymi w odpowiednich ambach. Liczba tern jest więc $\frac{6.(6-1)}{2} \cdot \frac{(6-2)}{3}$,

[1] Dotyczy to tylko tego wypadku, gdy przy tworzeniu amb posuwamy się „syntetycznie“ naprzód. Przy dowolnym tworzeniu amb wystarcza, że mi już więcej nie wolno powtórzyć jakiegoś amba, np. 42, skoro już raz je napisałem. Także nie wolno go powtórzyć jako 24.

bo tu znowu dzieląc przez 3 muszę również wycofać niedozwolone permutacje. W ten sposób możemy posuwać się dalej. Ponieważ teraz jasne już jest prawo tworzenia tych obliczeń, napiszmy od razu np. liczbę kwintern z 10 elementów; wynosi ona $\frac{10.(10-1).(10-2).(10-3).(10-4)}{1.2.3.4.5} = \binom{10}{5} = 252$.

Rozpatrzmy bliżej teraz ten czarodziejski klucz, owo $\binom{10}{5}$ albo $\binom{14}{4}$, czy jak wreszcie napiszemy. Jest jasne, że i to także oznacza pewien rozkaz. Otóż ten „operator" kombinacyjny, inaczej „współczynnik dwumianu", czy jak go tam nazwiemy, posiada bardzo osobliwe własności. Mianowicie można ten rozkaz spełnić w różny sposób. Najpierw w sposób dotychczas przez nas stosowany. Przede wszystkim stwierdzamy, że liczba powyżej stojąca zawsze musi być większa lub co najwyżej równa liczbie pod nią stojącej. Przy tym zastrzeżeniu rozkaz brzmi: „Zamień znak czarodziejski na zwykły ułamek albo na iloraz, przy czym pod kreską ułamkową wpisz silnię liczby stojącej u dołu, następnie nad kreską ułamkową utwórz, zaczynając od liczby stojącej u góry, iloczyn tylu czynników stale o jeden mniejszych, ile wskazuje liczba u dołu". Wygląda to zawile. Dlatego jeszcze szybko trzy przykłady:

$$\binom{17}{6} = \frac{17.16.15.14.13.12}{1.2.3.4.5.6}; \quad \binom{8}{7} = \frac{8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7}; \quad \binom{19}{2} = \frac{19.18}{1.2}$$

Innymi słowy, zaczynam od dołu, mnożąc od jeden aż do liczby u dołu stojącej. Powyżej wstawiam taką samą ilość czynników począwszy od górnej liczby, zmniejszając każdy następny czynnik o jeden.

Do tego samego rezultatu dojdę także inną drogą. Mogę mianowicie $\binom{17}{6}$ przedstawić także jako $\frac{17!}{6!\,(17-6)!}$ To by oznaczało:

$$\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17}{1.2.3.4.5.6 \times 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}$$

Każdy, nieco tylko biegły w rachowaniu, widzi, że można uprościć przez 11! i że wtedy pozostanie to samo, co przy pierwszym sposobie postępowania. Tylko że górne czynniki (12 do 17) są obecnie napisane w porządku rosnącym.

Wynika stąd jednak coś innego jeszcze, co objaśnimy teraz na przejrzystszym przykładzie. $\binom{8}{3}$ według drugiego sposobu tłumaczenia to $\frac{8!}{3!\,(8-3)!}$, czyli $\frac{8!}{3! \times 5!}$ albo rozwinięte $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3 \times 1.2.3.4.5}$ przy czym

wolno mi uprościć tak przez 1.2.3, jak też przez 1.2.3.4.5. Nawiasem mówiąc mógłbym uprościć nie tylko przez 3! lub przez 5!, ale także po każdym z tych uproszczeń przez inne jeszcze liczby. Przyjmijmy jednak, że należy uprościć wyłącznie tylko przez 3! albo przez 5! Uproszczę przez 5! i wtedy otrzymam $\frac{6.7.8}{1.2.3}$, albo jeśli w liczniku odwrócę porządek $\frac{8.7.6}{1.2.3}$, a zatem nic innego jak pierwszy sposób tłumaczenia $\binom{8}{3}$, co ustaliliśmy już w pierwszym przykładzie. Jeśli jednak uproszczę przez 3!, otrzymam ku własnemu zdumieniu coś innego. Mianowicie

$$\frac{4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5} \text{ albo } \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}$$

Co to znaczy? Coś tu chyba jest nie w porządku? Bo wedle pierwszego sposobu tłumaczenia byłoby to wyliczenie $\binom{8}{5}$. Nie ma co więcej mędrkować. $\binom{8}{3}$ ma zatem być równe $\binom{8}{5}$? Czyż to możliwe? Ostatecznie możemy to przecie wyliczyć i sprawdzić.

$$\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56 \qquad \text{a} \quad \binom{8}{5} = \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 56.$$

A zatem nie myliliśmy się. Mówiąc językiem kombinatoryki, da się utworzyć z 8 elementów tyleż tern co kwintern. I tyle amb co sekstern. Bo $\binom{8}{2}$ musi się równać $\binom{8}{6}$, ponieważ drugi sposób tłumaczenia dla $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!}$, a dla $\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!\,(8-6)!} = \frac{8!}{6!\,2!}$, a przez to daje ten sam wynik w obu wypadkach.

Jeśli napiszemy szereg takich „rozkazów“ np. $\binom{9}{1}$, $\binom{9}{2}$, $\binom{9}{3}$, $\binom{9}{4}$, $\binom{9}{5}$, $\binom{9}{6}$, $\binom{9}{7}$, $\binom{9}{8}$, to wiemy już obecnie, że pierwszy operator wraz z ostatnim, drugi wraz z drugim od końca, trzeci wraz z trzecim od końca itd. dają ten sam rezultat.

Bo zawsze zachodzi związek:

$$\binom{\text{Liczba elementów nad Ilość elementów w grupie}}{} = \binom{\text{Liczba elementów nad Liczba elementów mniej ilość elementów w grupie.}}{}$$

Wyliczenie wartości naszego powyższego szeregu dałoby na wynik: 9 unionów, 36 amb, 84 tern, 126 kwatern, 126 kwintern, 84 sekstern, 36 septern, 9 oktern, a zatem dokładnie to samo, co przewidziano z góry.

Tą osobliwą symetrią, tą regularnością zajmiemy się jeszcze później, przy tzw. „twierdzeniu o potędze dwumianu", ponieważ dostarcza nam ona algorytmu o czarodziejskiej mocy obliczania trudnych potęg sum.

Umiemy więc już teraz kombinować w ścisłym znaczeniu tego słowa. Dodajmy jeszcze tylko, że te liczby, które wskazują, czy się ma tworzyć amba, czy terna itd. nazywa się również „klasami" kombinacji. Rozkaz $\binom{5}{3}$ oznacza więc: „Wyznacz ów klucz czarodziejski za pomocą któregoś z dwóch znanych przepisów, a otrzymasz liczbę kombinacji trzeciej klasy, z pięciu elementów". Tym samym otrzymujemy równocześnie według powyższego związku także liczbę kombinacji drugiej klasy z pięciu elementów, bo przecie $\binom{5}{3}$ równa się $\binom{5}{5-3}$, a więc równa się $\binom{5}{2}$.

Podobnie jak przy permutacjach istnieje także tutaj możliwość tak zwanego „powtarzania". Tylko że w kombinacji oznacza to coś innego. Mówiąc poprawnie, mamy w permutacjach tylko wielokrotne występowanie jednako numerowanych albo jednako nazwanych przedmiotów (gruszki, jabłka, kilkakrotne a lub b, kilkakrotne 1 lub 3). Natomiast w kombinacjach z powtarzaniem mam wolną rękę w używaniu każdego elementu tak często, jak mi się podoba. A zatem przy 5 elementach a b c d e wolno mi tworzyć np. takie terna:

aaa, abb, bbc, dee, ddd itd.

Wyprowadzenie wzoru, podającego liczbę możliwych takich kombinacji jest trudne i zawiłe. Dlatego podamy sam rezultat. Wzór brzmi:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Liczba elementów plus liczba elementów w klasie minus jeden}\\ \text{nad}\\ \text{Liczba elementów w klasie}\end{array}\right)$$

Gdybyśmy zatem mieli utworzyć z 8 elementów kwaterna z dopuszczeniem powtarzania, wtedy napiszemy

$$\binom{8+4-1}{4} = \binom{11}{4} = \frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} = 330,$$

co oczywiście wynosi znacznie więcej, niż liczba kwaterm z 8 elementów bez powtarzania, która by wyniosła tylko $\binom{8}{4} = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$.

Na zakończenie naszych rozważań nad kombinacją w ścisłym znaczeniu, dla „zachowania i zamknięcia systemu" wydamy znowu,

jak nieraz już, pewien rozkaz bez sensu. Jako rekruci matematyki, musimy przyzwyczaić się do takich rozkazów dla wzmocnienia naszej dyscypliny. Bo w wojsku, jak wiadomo, nie ma żadnych „niemożliwości". Jak rozkaz, to rozkaz! Chcemy zatem wiedzieć, ile wynosi jakakolwiek liczba „nad" zerem. Owo „nad" rozumieć należy oczywiście jako wyrażone w naszej symbolice kombinatorycznej. A więc ile wynosi np. $\binom{9}{0}$? Rzecz jasna, zadanie dla domu obłąkanych albo dla spirytystów. Bo wymaga się ni mniej ni więcej jak, abym u góry (według pierwszego przepisu) wziął 9 zero razy jako czynnik, zmniejszając każdy następny czynnik o jeden. Pod spodem dla rozrywki i wytchnienia mam napisać 0!, a więc wszystkie liczby, zaczynając od jedynki, aż wreszcie dojdę do zera. Ostatnie żądanie przypomina rozkaz, abym się tak długo wspinał pod górę, aż osiągnę leżącą u jej podnóża dolinę. Znowu jednak wypędzimy diabła Belzebubem. Zastosujemy przeciw-kabałę. Jest jeszcze drugie zadanie z domu obłąkanych, choć nieco mniej kłopotliwe. Mianowicie: liczba nad sobą samą. W naszym zatem wypadku $\binom{9}{9}$. To przynajmniej można wyrachować, a mianowicie jako $\frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$, przy czym od razu widać, że wynik wynosi 1. Zresztą bez rachunku jest również jasne, że istnieje tylko jedna jedyna kombinacja wszystkich elementów, jeśli wielkość klasy równa się liczbie elementów. Podejmujemy teraz próbę „zachowania systemu". Widzieliśmy już przedtem, że jeśli napiszemy w jednym rzędzie współczynniki dwumianu (rozkazy operacji kombinacyjnej) i uporządkujemy je według klas tak, aby ilość elementów w klasie stale wzrastała o jeden, to każde dwa współczynniki dwumianu, jednako odległe od obu końców, dają ten sam wynik. Ponieważ zgodnie z tą ogólną własnością owych „rozkazów" np. $\binom{9}{1}$ i $\binom{9}{8}$ były równe, wystarczy więc tylko przypatrzyć się jeszcze, jakie położenie w szeregu ma $\binom{9}{0}$ i $\binom{9}{9}$. Otóż — jak łatwo zauważyć — stoją one w naszym szeregu przed $\binom{9}{1}$ i po $\binom{9}{8}$ i to w bezpośrednim ich sąsiedztwie. Ponieważ jednak wiemy już, że $\binom{9}{9} = 1$, zatem i $\binom{9}{0}$, zajmujące analogiczne miejsce na przeciwległym końcu tego szeregu, także musi równać się 1.[1] Nasz algorytm przeprowa-

[1] Błędnym byłoby mniemanie, iż wykazaliśmy w ten sposób, że np. $\binom{9}{0}$ „musi" równać się 1. Symbol $\binom{9}{0}$ i każdy symbol tego rodzaju z zerem u dołu, pozbawiony jest znaczenia. Możemy mu zatem nadać wartość zupełnie do-

dził nas ponad przepaściami, których dna nie dojrzy oko ludzkie. Z jednej strony wkroczyliśmy w beznadziejny obszar niewyobrażalności, a tu raptem z drugiej strony znaleźliśmy jasny, prosty, okrągły, uchwytny rezultat. Ta mimochodem rzucona uwaga niech posłuży tylko dla dalszego scharakteryzowania istoty celowego algorytmu. Skoro raz zrozumiemy to pojęcie na wylot, wówczas — powiedzmy to raz jeszcze — cała analiza nieskończonościowa, tyle strachu budzący rachunek różniczkowy i całkowy wydadzą się nam dziecinną igraszką, igraszką bajecznie zabawną, miłą, ba — upajającą.

Ale z innej jeszcze strony musimy zbadać, czy nasz zamach dokonany za pomocą równości $\binom{9}{0} = 1$ nie rozsadzi systemu. W tym celu zastosujemy dalszą własność naszego rozkazu, a mianowicie, jak już wspomniano, że $\binom{9}{9}$ powinno także równać się $\binom{9}{9-0}$, boć przecie np. $\binom{9}{4}$ stale równa się $\binom{9}{9-4}$, czyli $\binom{9}{5}$. Już za pierwszym spojrzeniem na $\binom{9}{9}$ i $\binom{9}{9-0}$ widać, że równość zachodzi.

Na koniec wspomnijmy jeszcze krótko o pewnej innej własności, jaką posiada tego rodzaju kompletny szereg współczynników dwumianu jednej i tej samej liczby elementów. Mianowicie suma ich wartości wynosi stale 2 podniesione do potęgi liczby elementów, w naszym zatem wypadku 2^9, czyli 512. Jeśli wszystkie napiszemy obok siebie w postaci sumy, to otrzymamy:

$$1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512.$$

Jak widzimy $\binom{9}{0}$ i $\binom{9}{9}$ występowały tu już jako gracze skrzydłowi z tej samej partii. Ponieważ jednak — dalsza jeszcze uwaga — wielkość klasy zmienia się od 0 do liczby oznaczającej ilość elementów, więc przy nieparzystej liczbie elementów otrzymuje się parzystą liczbę składników i na odwrót. Mieliśmy klasy 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a zatem 10 klas. Przeto też dziesięć rozkazów do wykonania pracy i dziesięć składników sumy. Przy 4 jako liczbie elementów otrzymało by się $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$, $\binom{4}{4}$, a więc 5 (nieparzysta ilość) składników sumy, a mianowicie 1, 4, 6, 4, 1. Ich suma

---

wolną. Zależy to od umowy. Jeśli nadamy mu wartość 1, to, jak widzimy, symbol $\binom{9}{0}$ spełnia zarazem inne, ogólniejsze własności „rozkazu" kombinacyjnego. Dlatego właśnie przyjmujemy umowę, że $\binom{9}{0} = 1$ (oraz każdy symbol tego typu, gdzie dolna liczba jest zerem, ma się równać 1).

jest znowu odpowiednią potęgą 2, mianowicie $2^4 = 16$. Dalej, jednako od obu końców odległe współczynniki dwumianu mają znów równe wartości. Tylko sześć w pośrodku odgrywa niejako podwójną rolę, jak gdyby podwójny składnik. To da się wyjaśnić istotą liczb parzystych. Przy 10 „nad" klasą zawartą między 0 a 10 musi raz występować w szeregu składnik „10 nad $\frac{10}{2}$" czyli $\binom{10}{5}$. To jednak równa się $\binom{10}{10-5}$, a więc znowu równa się $\binom{10}{5}$. Przy nieparzystej liczbie elementów jest taki „dwulicowy" składnik środkowy niemożliwy, bo np. $\binom{11}{5}$ jest równe $\binom{11}{11-5} = \binom{11}{6}$, ale już $\binom{11}{6}$ wraz z $\binom{11}{11-6} = \binom{11}{5}$ przerzuca się znowu w przeciwnym kierunku. Nie ma właśnie żadnego „11 nad $\frac{11}{2}$", bo $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$ nie jest liczbą całkowitą, a przeto nie wchodzi pod rozwagę jako wielkość klasy w kombinatoryce.

ROZDZIAŁ ÓSMY

WARIACJE

W trakcie kombinatorycznego rozważania kombinatoryki zbadaliśmy dotychczas najpierw wypadek, kiedy za każdym razem należy używać wszystkich elementów, a zatem wyłącznie przemieniać je między sobą, przestawiać, ustawiać w innym porządku i kolejności. To była permutacja. Zaszedł jeszcze przy tym podprzypadek, w którym każdy element mógł występować więcej razy, czyli powtarzać się. Oczywiście co najwyżej aż do liczby wyrażającej ogólną ilość elementów. Jako drugą możliwość rozważaliśmy kombinację w ściślejszym znaczeniu, w której można było używać tylko pewnej części elementów w tzw. grupach kombinacji, inaczej klasach, przy czym zakładano ponadto, że jedną klasę wtedy tylko należało uważać za różną od drugiej, jeśli zawierała inny zespół elementów, jeśli inaczej była zestawiana. I tu zajęliśmy się również podprzypadkiem powtarzania się poszczególnych elementów, a mianowicie tzw. „kombinacją z powtarzaniem", co oznaczało możliwość zestawiania grup z jednego i tego samego elementu, byle jego powtarzanie się nie przekraczało wielkości klasy. W naszej „kombinacji kombinatoryki", która sama jest przypadkiem kombinacji w ściślejszym znaczeniu, pozostawałoby właściwie do omówienia jeszcze tylko jedno, a mianowicie ograniczone używanie elementów ujętych w grupy, czyli klasy, przy czym już jako cecha odróżniająca jedną grupę od drugiej wchodziłoby pod rozwagę nie tylko zestawienie elementów wewnątrz klasy, ale także ich uporządkowanie wewnątrz klasy. Jeślibyśmy więc mieli np. elementy a b c d e f, to ambami byłyby nie tylko a b lub d e, poza którymi już dotychczas nie było żadnego innego sposobu zestawiania, lecz byłyby możliwe także amba b a oraz e d. Chodzi niejako o permutowaną kombinację albo — jak nazywają

ten rodzaj kombinatoryki — o wariację: o najogólniejszą odmianę kombinatoryczną.

Przypuśćmy, że nasza, wielokrotnie już do celów rachunkowych nadużywana rodzina postanowiła, aby co tydzień wysyłać pięcioro dzieci do teatru i to do loży. Ogólnie biorąc, byłaby to, podobnie jak partia taroka, jakaś kombinacja w ściślejszym znaczeniu, gdzie liczba elementów wynosi dwanaście, a wielkość klasy pięć. Cóż, kiedy dzieci utrzymują, że z każdego miejsca w loży widzi się scenę inaczej i doznaje innych wrażeń. A zatem wtedy dopiero stanie się sprawiedliwości zadość, jeśli każde dziecko w obrębie swojej grupy będzie siedziało na każdym miejscu. A więc partia taroka w połączeniu z porządkiem miejsc, jakbyśmy powiedzieli zachowując poprzednie zobrazowania.

Myślę, że mamy już dosyć sprawności matematycznej, aby naszą „wariację" szybko rozwiązać. Możemy sobie rozkaz wariacyjny rozłożyć na dwa etapy: Najpierw kombinować, następnie — wewnątrz grupy kombinacyjnej — permutować! Matematycznie nie oznacza to nic innego, jak tylko: rozkaz kombinacji połączyć znakiem mnożenia z rozkazem permutacji. A więc w naszym przykładzie $\binom{12}{5}$ razy 5! czyli $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ albo, ponieważ pięć-silnia w mianowniku ułamka i pięć-silnia permutacji dadzą się uprościć przez siebie, po prostu $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$. Nasze przykładne rodzeństwo potrzebowałoby zatem $260\frac{1}{3}$ lat, aby przeprowadzić swój plan teatralny pochłaniający wprawdzie nieco mniej czasu, niż sprawa porządku przy stole, ale wciąż jeszcze stanowiący wymagania za duże nawet dla ludzi bardzo cierpliwych.

Moglibyśmy jednak dojść do wariacji także wprost, gdybyśmy postąpili tak, jak przy wydaniu pierwszego rozkazu operacyjnego dla kombinacji w ściślejszym znaczeniu. Tam wycofaliśmy po prostu otrzymaną już wariację dzieląc ją przez silnię klasy. Powtarzając krótko to, co już zostało powiedziane, mogę rozumować w następujący sposób: Mamy dwanaście elementów. Najpierw uniony. A więc grupy po jednym elemencie. Takich jest oczywiście tylko 12. Jeśli z nich chcę utworzyć amba (grupy po dwa) muszę każdy union połączyć z pozostałymi $12 - 1 = 11$ innymi elementami. Liczba amb wynosi zatem $12 \cdot 11 = 132$ przy dwunastu elementach. Aby uzyskać terna, mam każde ambo związać z pozostałymi obecnie

12 — 2 = 10 innymi elementami. Liczba tern jest więc 12 . 11 . 10 = = 1 320 itd. Należy więc począwszy od liczby elementów, tak długo mnożyć zmniejszając każdy następny czynnik o jeden, aż liczba czynników będzie tak wielka, jak liczba elementów klasy. Choć to nie jest praktykowane, można by jednak dla tej „przeciw-silni" wprowadzić również odrębny rozkaz, np. $12 +_{5}$, co by oznaczać miało to samo, co 12 . 11 . 10 . 9 . 8. Dzięki takiej innowacji otrzymałaby wariacja własny rozkaz operacyjny, co pozwalało by rozpoznać ją od razu już po samym wyglądzie zewnętrznym. Nadto rozkaz kombinacji np. $\binom{10}{3}$, zapisany nowym sposobem $\frac{10 +_{\cdot} 3}{3!}$, przedstawiałby się przez to samo od razu jako niby „odpermutowana" wariacja.

Jednakże to mimochodem tylko. Winniśmy omówić jeszcze jedną możliwość, mianowicie wariację z powtarzaniem poszczególnych elementów wewnątrz grup wariacyjnych. Przystaniemy na chwilę. Bo niespostrzeżenie znaleźliśmy się raptem przy jednym z kamieni granicznych naszego badania. Jesteśmy na szczycie, który przewyższając znacznie górę liczbową, umożliwia nam oglądanie związków o olbrzymim znaczeniu. Co oznacza wariacja z dopuszczalnym powtarzaniem, utworzona z tylu a tylu elementów? Obecnie oznacza to dla nas nic innego, jak tylko, że mamy tworzyć amba, terna, kwaterna i wewnątrz tych grup nie tylko permutować, ale także, że możemy jeden i ten sam element dowolnie często obok siebie napisać. W ten sposób np. terna z elementów 1, 2, 3, 4, 5, 6, wariowane z powtarzaniem dają twory takie, jak 111, 123, 321, 335, 616, 422 itd. Gdy przyjrzymy się temu nieco bliżej i dokładniej, doznajemy głębokiego wstrząsu. Wszak wygląda to prawie tak jak tworzenie wszystkich liczb!? Nie tylko wygląda to tak. Ale jest to istotnie podstawowe prawo tworzenia liczb. Dodajmy jeszcze do tego zero, uzupełnijmy liczbę elementów do dziesięciu, wydajmy rozkaz wariacji z powtarzaniem — a mieć będziemy cały układ dziesiątkowy jak na dłoni. Z jednym jedynym ograniczeniem: Zera nie mogą stać na początku przed innymi cyframi. Ale to rozważymy jeszcze później. Powiemy teraz, że uniony to liczby jednocyfrowe, amba — liczby dwucyfrowe, terna — trzycyfrowe itd. Ponieważ jednak nie wiemy, jak się oblicza ilość wariacji tej a tej klasy z powtarzaniem, musimy jeszcze parę chwil wytrzymać w karności. Zostawmy więc na boku układ dziesiątkowy i spokojnie rozważmy, ile

takich wariacji z powtarzaniem możemy za każdym razem utworzyć z a b c d e, a więc z 5 elementów. Zaczynamy znowu od unionów, a więc od grup zawierających po jednym elemencie. Ponieważ dopuszczalne jest powtarzanie, nie skorzystam z „przeciw-silni", lecz dla utworzenia amb połączę każdy union z każdym elementem. A więc aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc, cd, ce, da, db, dc, dd, de, ea, eb, ec, ed, ee. Otrzymam więc $5 \times 5 = 25$ amb. Dla utworzenia tern połączę teraz każde ambo z każdym elementem, przez co otrzymam $5 \times 5 \times 5 = 125$ tern. Liczba kwatern wynosi $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ itd. Nie mamy tu więc przed sobą ani silni, ani współczynników dwumianu, ani przeciw-silni, ale po prostu potęgi. Przy tym podstawą (tak się nazywa liczbę potęgowaną) jest liczba elementów, wykładnikiem potęgowym wielkość klasy. W naszym przypadku, gdzie należało utworzyć wariacje z pięciu elementów z powtarzaniem, jest

liczba unionów $= 5^1 = 5$
liczba amb $= 5^2 = 25$
liczba tern $= 5^3 = 125$
liczba kwatern $= 5^4 = 625$
itd.

Wróćmy teraz znowu do naszych układów liczbowych. Twierdzimy, że wszystkie układy pozycyjne to nic innego tylko „dobrze uporządkowane" układy wariacyjne z powtarzaniem, przy czym, jak już wspomniano, obowiązuje jeszcze dodatkowy warunek, że zero nie śmie występować na początku żadnej liczby.

A więc teraz dopiero spróbujmy zbudować układ dziesiątkowy za pomocą grup wariacyjnych. Dodajmy przedtem, że w rozważaniach naszych będziemy dla prostoty rozumieli przez „wariację" nie zwyczajną wariację, lecz „wariację z powtarzaniem". Po tej umowie, która ma obowiązywać wyłącznie w rozważaniach układów liczbowych, podejmujemy nasze zadanie.

Że pierwszych dziesięć jednocyfrowych liczb tworzą uniony naszego systemu wariacyjnego, to chyba jasne. W myśl wzoru istnieje 10^1, a więc istotnie dziesięć takich unionów, czyli grup pojedynczych. Bo liczba elementów w tym wypadku i dla całego układu dziesiątkowego wynosi 10, a wielkość klasy dla unionów 1. Przy ambach musimy już być ostrożniejsi. Według wzoru można utwo-

rzyć z dziesięciu naszych znaków cyfrowych 10^2, a więc 100 amb. Tymczasem każdy wie, że istnieje tylko 90 dwucyfrowych liczb mianowicie od 10 aż do 99. Czyżby więc układ dziesiątkowy miał być niezupełnym układem wariacyjnym? Może istnieją w końcu liczby, które przeoczyliśmy w naszym układzie dziesiątkowym. W każdym razie przypuszczenie w najwyższym stopniu niesamowite. Odpowiadamy: Owszem, istnieją takie liczby. Tylko, wcale nie nastręczają kłopotu. Mianowicie jest to dziesięć amb zaczynających się zerem. A więc 00 aż do 09, które ze względu na ich wartość nie oznaczają nic innego jak tylko dziesięć jednocyfrowych liczb włącznie z zerem i mają tylko znaczenie kombinatoryczne, ponieważ w kombinatoryce bierze się pod uwagę przedmiotowy charakter każdego elementu, a nie jego znaczenie ilościowe. Przeto każda cyfra w kombinatoryce, co znowu jak zawsze mocno akcentuję, jest bezwartościowym wskaźnikiem, indeksem, numerem porządkowym dla odróżnienia, a zgoła nie określeniem wielkości, czyli symbolem mnogościowym! Budujmy dalej: Tern musiało by być $10^3 = 1\,000$. W rzeczywistości istnieje znowu mniej liczb w postaci tern, czyli liczb trzycyfrowych. Mianowicie 900, a więc liczby od 100 do 999 włącznie. I znowu okazuje się, że można natychmiast rozwiązać zagadkę, jeśli usunie się terna składające się z samych zer, albo zaczynające się od zer, a mianowicie grupy 000 do 099. Pośrodku leżą grupy postaci 003 i 054, a więc wszystkie liczby jednocyfrowe i dwucyfrowe. 10^3 pomniejszone o ilość jednocyfrowych i dwucyfrowych liczb, a więc 1 000 mniej 90 mniej 10 to jest jednak 900, co właśnie powinniśmy otrzymać. W podobny sposób postępuje się dalej. 10^4 równa się 10.000. Czterocyfrowych liczb jednak jest tylko 9 000. To znowu kwestia odjęcia kwatern od 0000 do 0999. A więc wszystkich liczb jednocyfrowych, dwucyfrowych i trzycyfrowych. A 10 000 mniej 900 mniej 90 mniej 10 jest właściwą ilością czterocyfrowych liczb, mianowicie 9 000.

Chwila namysłu pozwoli nam jednak wzór jeszcze bardziej uprościć. Jeśli mianowicie zgodnie z naszym powyższym zestawieniem zważymy, że ilość liczb dwucyfrowych przedstawia się jako

$$10^2 - 10^1 = 100 - 10 = 90,$$

trzycyfrowych jako

$$10^3 - (10^2 - 10^1) - 10^1 = 10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^1 =$$
$$= 10^3 - 10^2 = 900,$$

ilość czterocyfrowych jako

$$10^4 - [10^3 - (10^2 - 10^1) - 10^1] - (10^2 - 10^1) - 10^1 =$$
$$= 10^4 - [10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^1] - 10^2 + 10^1 - 10^1 =$$
$$= 10^4 - [10^3 - 10^2] - 10^2 = 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10^2 =$$
$$= 10^4 - 10^3 = 9\,000,$$

ilość liczb pięciocyfrowych jako

$$10^5 - \{10^4 - [10^3 - (10^2 - 10^1) - 10^1] - (10^2 - 10^1) - 10^1\} -$$
$$- [10^3 - (10^2 - 10^1) - 10^1] - (10^2 - 10^1) - 10^1 =$$
$$= 10^5 - \{10^4 - [10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^1] - 10^2 + 10^1 - 10^1\} -$$
$$- [10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^1] - 10^2 + 10^1 - 10^1 =$$
$$= 10^5 - \{10^4 - 10^3 + 10^2 - 10^2\} - 10^3 + 10^2 - 10^2 =$$
$$= 10^5 - 10^4 + 10^3 - 10^2 + 10^2 - 10^3 + 10^2 - 10^2 =$$
$$= 10^5 - 10^4 = 100\,000 - 10\,000 = 90\,000 \text{ itd.},$$

to widzimy, że aby otrzymać ilość liczb o takiej a takiej liczbie cyfr, wystarczy tylko odjąć następną niższą potęgę. A więc np. ilość wszystkich siedmiocyfrowych liczb w układzie dziesiątkowym uzyska się z wzoru $10^7 - 10^6 = 10\,000\,000 - 1\,000\,000 = 9\,000\,000$, mianowicie jako dobrze uporządkowany system wariacyjny od 1 000 000 począwszy do 9 999 999. Do naszego rezultatu doszlibyśmy także prostszą drogą ujmując z góry wszystkie liczby, np. do 1 000, w postaci tern. Następnie spytalibyśmy, od których tern zaczynają się te grupy, których początkową cyfrą jest jeden. Wypadek ten zachodzi począwszy od 100, gdyż w ciągu dobrze uporządkowanych tern, jest to najmniejsze z tern, zaczynających się jedynką. Ponieważ nadto nie potrzeba nam tern z jednym lub więcej zerami na początku, należy więc od 10^3 odjąć terna od 000 do 099, a więc oczywiście 10^2 czyli 100 tern. Przedstawiają one ze stanowiska wartości liczbowej wszystkie jedno- i dwucyfrowe liczby włącznie z zerem. Ale jest jeszcze trzeci sposób obliczania. Bez jakiejkolwiek pomocy kombinatoryki, wprost na podstawie układu liczbowego. Mianowicie mogę powiedzieć: $10^3 = 1\,000$ jest pierwszą czterocyfrową liczbą układu, ponieważ bezpośrednio przed nią znajduje się 999. Największą dwucyfrową liczbą jest oczywiście 99, ponieważ po niej zaraz następuje 100, jako pierwsza liczba trzycyfrowa. A więc ilość trzycyfrowych liczb jest $999 - 99 = 900$.

Teraz zabiera głos mój przeciwnik, który cały czas przypatrywał

się nieufnie. „Właśnie chciałem zwrócić uwagę na ten ostatni sposób wyznaczania ilości liczb o dowolnej liczbie cyfr" powiada złośliwie. „Swoją wariacją poruszałeś góry, a w końcu urodziła się mała mysz. Mianowicie, dręczony wyrzutami sumienia, ostatecznie sam wstydliwie przyznałeś, że ten problem da się łatwiej rozwiązać bez kombinatoryki. Pozostałeś po prostu wierny osławionej zasadzie: Po co iść prostą drogą, skoro można to osiągnąć także w sposób skomplikowany?"

A jednak, kochany przeciwniku, sprawa wcale nie jest tak prosta. Wybierając tę okrężną drogę miałem przecież niejedno na myśli. Była to serpentyna poznania, bo dokonaliśmy ni mniej, ni więcej, jak tylko sprawdzenia układu liczbowego za pomocą kombinatoryki i sprawdzenia kombinatoryki przez układ liczbowy. Nadto okazał się przy tym nasz układ dziesiątkowy pełnym (bez luk) układem wariacyjnym z powtarzaniem. Algorytm układu dziesiątkowego i algorytm kombinatoryki współdziałają z sobą tak, jak się poruszają dwa misternie obliczone mechanizmy trybowe bez żadnego „martwego chodu". Najogólniejsze związki pomiędzy „przez Boga stworzonymi liczbami całkowitymi" stają się coraz jaśniejsze. Rozumiemy znaczenie i różnicę między liczbą jako wielkością, a liczbą jako wskaźnikiem, jako numerem porządkowym. Teraz posuniemy się jeszcze o krok naprzód, znowu o krok najwyższego uogólnienia. Opuszczamy układ dziesiątkowy. I pytamy, ile jest liczb dwucyfrowych w układzie szóstkowym. Przy tym spokojnie powierzamy się algorytmowi kombinatoryki. Podstawą potęgową jest liczba elementów. Wykładnikiem potęgowym — wielkość klasy. A więc jest $6^2 - 6^1 = 30$ dwucyfrowych liczb w układzie szóstkowym. Wypiszmy je: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, po czym nastąpić musi 100.

Nasze przewidywanie sprawdza się zatem. I zgadza się również to, że w układzie trzynastkowym, jest $13^4 - 13^3 = 26\,364$ liczb czterocyfrowych.

Ten nowy wzór kieruje nasze zaciekawienie w stronę układu dwójkowego Leibniza. Jakże się rzecz tam przedstawia? Otóż zbadajmy, ile jedno-, dwu- itd. aż do sześciocyfrowych liczb występuje w tym niesamowitym układzie, który używa tylko 0 i 1 jako cyfr.

Liczby jednocyfrowe : 2 (bez zera 1)
Liczby dwucyfrowe : $2^2 - 2^1 = 4 - 2 = 2$
Liczby trzycyfrowe : $2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$
Liczby czterocyfrowe : $2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8$
Liczby pięciocyfrowe : $2^5 - 2^4 = 32 - 16 = 16$
Liczby sześciocyfrowe : $2^6 - 2^5 = 64 - 32 = 32$ itd.

Jak poznać łatwo, istnieje jeszcze czwarta reguła dla wyznaczania ilości liczb o określonej ilości cyfr. Mianowicie bierze się liczbę jednocyfrowych bez zera i mnoży kolejno przez zasadę układu. A zatem tutaj: $1 \times 2 = 2$ (dwucyfrowe), $2 \times 2 = 4$ (trzycyfrowe), $4 \times 2 = 8$ (czterocyfrowe) itd. W układzie dziesiątkowym: 9 (jednocyfrowe) razy 10 daje 90 dwucyfrowych. 90×10 daje 900 trzycyfrowych itd. W układzie szóstkowym: 5 jednocyfrowych razy $6 = 30$ dwucyfrowych. 30 dwucyfrowych razy $6 = 180$ trzycyfrowych itd. Jednakże o tym tylko napomkniemy, aczkolwiek i to także zaprowadziłoby nas w tajniki i głębie kombinatoryki.

Załatwmy wreszcie nasz układ dwójkowy. Najpierw wypiszmy nasze liczby.

Układ dziesiątkowy	:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Układ dwójkowy	:	1,	10,	11,	100,	101,	110,	111,	1000,	1001,

Układ dziesiątkowy	:	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16
Układ dwójkowy	:	1010,	1011,	1100,	1101,	1110,	1111,	10000

Np. 1 100 układu dwójkowego, po rozwinięciu w szereg oznacza:

$$1\,100 \text{ (układ dwójkowy)} = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = 0 + 0 + 4 + 8 = 12 \text{ (układ dziesiątkowy).}$$

To więc byłoby w porządku. Jako ostatnią próbę zaryzykujmy jakieś działanie w układzie dwójkowym, np. mnożenie. Z góry wprawia nas w zakłopotanie fakt, że jako całą tabliczkę mnożenia mamy w istocie tylko $1 \times 1 = 1$ i $0 \times 1 = 0$, a więc niejako „najmniejszą tabliczkę mnożenia". Jak mamy więc mnożyć? Z przerażeniem widzimy, iż dotychczas nadaremnie się trudziliśmy, i że obecnie nasz sławny algorytm musi się rozpaść w gruzy. Jesteśmy już jednak badaczami matematyki, poczuwającymi się do odpowiedzialności, więc zaciskamy zęby. Nie wiedząc nawet, co to oznacza, piszemy dwie mie-

szaniny zer i jedynek i śmiało mnożymy: przy pomocy owej „najmniejszej tabliczki". Że przy tym $1 \times 0 = 0$, to rozumie się samo przez się. Bo mnożenie przez zero jest dla wszystkich układów „inwariantem", jest niezmienne. Pamiętajmy jeszcze o założeniu, że liczby układu dwójkowego mogą zawierać tylko jeden i zero. Jeżeli więc nasz algorytm jest właśnie „inwariantem" (niezmiennikiem) względem wszystkich układów, co kilkakrotnie już twierdziliśmy, to mnożenie musi się udać! A więc śmiało:

$$\begin{array}{r} 101101011 \times 110 \\ \hline 101101011 \\ 101101011 \\ 000000000 \\ \hline 100010000010 \end{array}$$

Dla próby rozwińmy te dziwaczne liczby w szeregi.

Mnożna:

$$1.2^0 + 1.2^1 + 0.2^2 + 1.2^3 + 0.2^4 + 1.2^5 + 1.2^6 + 0.2^7 + 1.2^8 = \\ = 1 + 2 + 0 + 8 + 0 + 32 + 64 + 0 + 256 = 363,$$

Mnożnik:

$$0.2^0 + 1.2^1 + 1.2^2 = 0 + 2 + 4 = 6.$$

Podniecenie dochodzi teraz do punktu wrzenia. Bo 363×6, a więc 2 178 ma się równać monstrum liczbowemu, czyli szeregowi:

$$0.2^0 + 1.2^1 + 0.2^2 + 0.2^3 + 0.2^4 + 0.2^5 + 0.2^6 + 1.2^7 + \\ + 0.2^8 + 0.2^9 + 0.2^{10} + 1.2^{11} = 0 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ + 0 + 128 + 0 + 0 + 0 + 2\,048,$$

co ku naszemu radosnemu zdumieniu, równa się 2 178.

Nasz algorytm układów liczbowych, czterech prostych działań rachunkowych i kombinatoryki sprawdzał się wszędzie, pomimo badania skrupulatnego aż do znudzenia i zwyciężył na całej linii. Nawet „układ dwójkowy" ze swą „najmniejszą tabliczką mnożenia" nie zdoła nim zachwiać. Co więcej, mnożenie w tym układzie było specjalnie łatwe. Gorzej z dodawaniem, trzeba było nałamać sobie trochę głowy, bo w układzie dwójkowym $1 + 1 = 10$, zostaje jeden, a $10 + 1 = 11$, dalej $11 + 1 = 100$, zostaje 10 itd. Jeśli jednak położę przed sobą ciąg liczb, który przedtem sobie zapisaliśmy, wtedy

także dodawanie staje się dziecinną igraszką. Używam wtedy pewnego rodzaju tabliczki dodawania „jeden więcej jeden" zamiast tabliczki mnożenia „jeden raz jeden", której przy tym najprostszym układzie w ogóle nie potrzebuję.

Każdy zrozumie teraz, dlaczego wielki Leibniz porównał układ dwójkowy ze stworzeniem świata z nicości. W układzie jedynkowym miałbym tylko zero jako cyfrę. A zatem symbol nicości. Nie mogę w żaden sposób utworzyć jakiejkolwiek liczby. Jeżeli jednak dołączę tylko jedynkę — symbol boskiego aktu stworzenia — wtedy rozbrzmiewa owo potężne „niech się stanie światłość" poprzez kosmos wielkości i form. I oto naraz widzę przed sobą nieskończoną rozmaitość wszystkich liczb całkowitych; mogę je tworzyć, zapisywać, aż do dowolnie wielkiej liczby. Mogę znajdować ich algorytm, mogę rachować, kombinować, wariować — słowem dzięki temu j e d n e m u krokowi staję się władcą całego państwa liczby.

Mimo wszystko nie możemy się jednak zadowolić tą wysokością, na jakiej już stoimy. Nowe zagadnienia, na które się natkniemy, wymagają większego uogólnienia naszych myśli, domagają się ciągle i ciągle nowych algorytmów. A demony matematyki, które zaczęliśmy budzić, nie dadzą nam spokoju, dopóki nie będziemy w posiadaniu ciągle nowych znaków magicznych „prawdziwej kabały", które — jak już teraz przeczuwamy — pozwolą nam wytłumaczyć sobie i ujarzmić pokaźną część widzialnego i niewidzialnego świata.

ROZDZIAŁ DZIEWIĄTY

PIERWSZE KROKI W ALGEBRZE

Nie tylko w jednym miejscu, ale może z dziesięć razy albo i częściej jeszcze, odczuliśmy dotychczas niemal z udręką to, że nie wolno nam było wznieść się do wyższego uogólnienia. Narzuciliśmy sobie surowe ograniczenia. Sami zabroniliśmy sobie opuszczać lub też wykroczyć poza dziedzinę liczb naturalnych. Mimo to cień wyższych algorytmów towarzyszył nam krok w krok. A nawet w jednym miejscu, gdzie już żadną miarą nie dało się przytłumić potrzeby ogólniejszego wyrażenia, przekroczyliśmy ten zakaz w sposób zamaskowany i podstępny. I to w formie szczególnie karygodnego przewinienia. Przeprowadziliśmy mianowicie pewne działanie, z pretensją do ogólnej ważności, nie na liczbach naturalnych, lecz (o zgrozo!) na słowach. Powiedzieliśmy:

$$\text{dzielna} : \text{dzielnik} = \text{iloraz}$$
$$\text{dzielnik} \times \text{iloraz} = \text{dzielna}.$$

Jak wielkie to było zuchwalstwo, zdołamy ocenić znacznie później. Co więcej, występek ten powtórzyliśmy jeszcze przy współczynnikach dwumianu, gdzie mówiliśmy o wyrażeniu: $\binom{\text{liczba elementów nad wielkość klasy}}{}$ przy czym Eulerowski rozkaz operacji kombinatorycznej opatrzyliśmy zamiast liczb w słowa. Teraz jednak nie będziemy się z tego powodu kajali, lecz w myśl słów Goethego: „Błądzić może każdy, ale po tym, jak znosi następstwa błędu, odróżnić można umysł czysty od pospolitego“ spróbujemy nasze przewinienie oddać na usługi umysłu czystego.

W tym celu jednak należy skrupulatnie przestrzegać innych naszych założeń. Do nich należy w pierwszej linii nasza umowa, aby zaczynać od rzeczy najprostszych i najbardziej konkretnych.

Przypuśćmy, że mamy zmierzyć powierzchnię podłogi jakiegoś pokoju, aby kupić dywan na pokrycie tej podłogi. Nie jest to bardzo duży pokój. Ma pięć metrów długości, a cztery metry szerokości. Nie namyślając się wiele, powie każdy, że powierzchnia podłogi wynosi dwadzieścia metrów kwadratowych, ponieważ, aby ją zupełnie pokryć, można, a nawet trzeba położyć na podłodze pięć rzędów po cztery metry kwadratowe, albo cztery rzędy po pięć metrów kwadratowych w jednym rzędzie. Możemy także napisać $5 \times 4 = 20$ albo $4 \times 5 = 20$. Mówi się nawet, że pokój ma w metrach wymiary 4×5. To więc byłoby w porządku. Jeślibym chciał pokryć inną podłogę, o wymiarach 6×8 (w metrach), musiałbym znowu mnożyć i zakupić dywan na 48 metrów kwadratowych itd. Co to jednak znaczy owo „i tak dalej" w tym miejscu? Chyba nic innego, jak każde „i tak dalej" w matematyce. To znaczy, że każdy następny rachunek należy wykonać według podobnego „prawidła". Ale co to jest „prawidło?" Znowu nic innego, jak tylko wyższy, ogólniejszy rozkaz. W naszym wypadku brzmi on: „Jeśli chcesz otrzymać pole czworokąta prostokątnego, to pomnóż długość przez szerokość". „Jaką długość przez jaką szerokość?" pytamy znowu. „No, daną za każdym razem długość, przez należącą do niej szerokość. Albo też pomnóż w odwrotnym porządku. Wszak charakterystyczną cechą mnożenia w ogóle jest przemienność czynników (własność kommutatywna)". Każdy doda teraz, że wie, o co tutaj chodzi: O wzór! A mianowicie o wzór na obliczenie pola prostokąta. Istotnie, chodzi o wzór, który zwykle pisze się $P = a \cdot b$. P oznacza pole prostokąta. Natomiast $a \cdot b$ względnie $b \cdot a$ znaczy długość razy szerokość, względnie szerokość razy długość. Tam do licha, cóżeśmy teraz znowu narobili. Poprzednio algorytm i rozkaz rozciągnęliśmy na słowa, tu nawet na litery.

Nie badajmy dalej, ale weźmy od razu inny przykład. Nikt nie zaprzeczy, że jedno jabłko więcej dwa jabłka daje w sumie trzy jabłka. Cztery jabłka i trzy gruszki natomiast to jest bądź 7 owoców, bądź też jednostka nowej wielkości, np. „talerz owoców". Również 5 jabłek razy trzy to 15 jabłek. A 27 gruszek podzielone przez 9 — to trzy gruszki. Jeśli zamiast jabłek napiszę a, zamiast gruszek b, a zamiast owoców c; dalej, jeśli „talerz owoców" oznaczę np. d, to mogę zapisać:

$$1a + 2a = 3a; \quad 4a + 3b = 7c \quad \text{albo} \quad 4a + 3b = d;$$
$$5a \times 3 = 15a; \quad 27b : 9 = 3b.$$

To już niewątpliwie wygląda na nowy algorytm, na nową automatyczną maszynę myślowo-rachunkową. Teraz jednak idę jeszcze dalej i stawiam sobie nowe zagadnienie: Pytam teraz o coś. Na przykład: „Ile jednostek należy dodać do 28, aby otrzymać liczbę trzy razy tak wielką, jak szukana liczba jednostek?“ Jak powiedziałem, nie znamy jeszcze tej liczby, którą mam dodać do 28. Nie jest mi ona wiadoma. I dlatego nazywa się ją w matematyce „niewiadomą“. Stanowi ona, jak się też mówi w życiu codziennym, „niewiadomą x“ w naszym rachunku. Nazwijmy ją więc x. Mam zatem to x dodać do 28. Dobrze. Mogę to napisać. Tym samym spełniony został pierwszy rozkaz. Teraz jednak to $x + 28$ ma być równe potrójnej niewiadomej liczbie. Ku naszemu zdumieniu znak równości (=) występujący dotychczas tylko jako stwierdzenie zachodzącego faktu lub spełnienia rozkazu, raptem sam zamienia się w rozkaz. A mianowicie w rozkaz $x + 28 = 3x$, co znaczy: $x + 28$ ma być równe albo ma być przyrównane do potrójnego x, do $3 . x$ czyli do $3x$ [1]. Ale w jaki sposób? Otóż tak długo szukamy liczb zamiast x, aż rozkaz równości zostanie spełniony. I znajdujemy, że dla $x = 14$ da się napisać: $14 + 28 = 3 . 14$, czyli $42 = 42$, co naocznie jest słuszne.

Ale tu także się nie zatrzymamy jeszcze. Zauważymy tylko, że ta osobliwa maszyna „przyrównywania“ nazywa się równaniem i że do „rozwiązywania“ takich równań konieczna jest znajomość wielu reguł. Wszystko to poznamy jeszcze dokładnie. Na razie jednak nie wypatrujmy w przód, ale raczej rzućmy okiem wstecz i rozważmy, dzięki czemu przykłady o dywanie na podłogę, o jabłkach i gruszkach i o „niewiadomej x“ związane są między sobą jak gdyby węzłami pewnego rodzaju pokrewieństwa.

Na razie możemy tylko ustalić coś powierzchownego. Nagle opuściliśmy nasze niejako nagie liczby naturalne i powiązaliśmy z cyframi litery; ponadto połączyliśmy jeszcze te nowe symbole ze sobą za pomocą znanych nam już symboli związków, inaczej —

---

[1] $3x$ mogę dlatego napisać zamiast $3 . x$, ponieważ 3 talerze to także jest 3 razy talerz, albo trzy razy jeden talerz itd. „Współczynnik“ w tym znaczeniu to nic innego tylko zamaskowany mnożnik.

za pomocą rozkazów. Stosujemy więc teraz algorytm, naszą „prawdziwą kabałę" nie tylko do liczb, lecz także do jakichkolwiek przedmiotów. Do rzeczy, o których często nie wie się z góry, co oznaczają. Litera *a* raz była długością pokoju, to znowu jabłkiem. Może ona jednak nie być ani jabłkiem, ani długością, ale właśnie samym *a*. Bo trzy litery *a* razy 7 to jest 21 liter *a*. Może to być jednak jeszcze coś mniej niż litera *a*. Mianowicie cokolwiek. Niejako takie „cokolwiek", od którego żąda się tylko, aby w tym samym rachunku pozostało zawsze tym samym, zupełnie nieokreślonym „czymkolwiek". Bo takie trzy jeszcze nieokreślone „cokolwiek" więcej dwa jeszcze nieokreślone „cokolwiek" to jest pięć jeszcze nieokreślonych „cokolwiek". A „niewiadoma x" to coś jeszcze gorszego. Nie tylko, że nieokreślona, ale musi się jej dopiero szukać. Jest szukanym rozwiązaniem jakiejś mniej lub więcej zawiłej zagadki matematycznej.

W każdym razie wprowadziliśmy nowy sposób zapisywania pojęć, w którym znaki pisma (litery) odpowiadają wielce mglistym przedmiotom lub wielkościom. Są one jeszcze w stanie chaosu, są jeszcze nie uformowane. I bynajmniej nie przez Boga stworzone, jak liczby naturalne. Ponadto są wszystkim innym raczej, niż czymś jednoznacznym.

Wszelako właśnie dlatego, że nie są jednoznaczne, że przedstawiają niejako generalne pełnomocnictwo, nie wypełniony blankiet wekslowy, w którym mogę wstawić kwotę według mego upodobania (z wyjątkiem „niewiadomej x", za którą zależnie od okoliczności m u s z ę wstawić pewną określoną kwotę) pozwalają mi owe symbole, zupełnie ogólnie i w sposób ważny w każdym wypadku, naszkicować schematy pewnych stosunków. $P = a \cdot b$ to powierzchnia podłogi nie tylko mego pokoju, ale k a ż d e g o prostokątnego pokoju. Co więcej: To powierzchnia każdego prostokąta w ogóle! Zaś $3a + 2a = 5a$ to zarówno właściwa suma trzech i dwóch jabłek, jak trzech i dwóch linijek, albo trzech i dwóch lokomotyw. Ale to także właściwa suma trzech i dwóch liter *a*, trzech i dwóch liczb, trzech i dwóch piątek lub trzynastek, a więc ogólnie trzech i dwóch przedmiotów lub wielkości tego samego rodzaju. Albo też, jeszcze mgliściej, trzech i dwóch „cokolwiek".

I znowu jakaś „prawdziwa kabała", znowu sam sposób zapisywania dostarczył nam nowej siły magicznej. Magii w postaci rachunku ogólnego, czyli algebry. Poprawniej mówiąc, weszliśmy

w posiadanie liczb ogólnych, różniących się od liczb naturalnych szczegółowych chwilową nieokreślonością. Zanim jednak zbadamy bliżej naszą nową wielką magię, ową *„ars magna"* (wielką sztukę) czy *„artium ars"* (sztukę nad sztukami), jak się ją też nazywa, wtrąćmy słów kilka o jej powstaniu i o dziejach jej nazwy. Ten sam arabski matematyk Alchwarizmi, którego znamy już jako ojca chrzestnego słowa *algorytm,* napisał między innymi rozprawę, zatytułowaną *„L'al'dżebr ou 'al moukabalah"*. Wymieniona rozprawa odnosiła się do pewnych przepisów arytmetycznych dla równań, których tu jeszcze nie możemy rozważać. Stwierdzimy tylko, że dziwny kaprys historii sprawił, iż Alchwarizmi podwójnie został uwieczniony: Jego przekręcone nazwisko dało początek wyrażeniu *„algorytm"*, a z przekręconego tytułu wspomnianej rozprawy powstało słowo „algebra".

Atoli istotny stan rzeczy wcale nie tak się przedstawiał, iż kraje Zachodu przejęły od Arabów zupełnie gotową sztukę, ustalony sposób pisania, czyli zamknięty system rachunku literowego. W ciągu długotrwałego rozwoju, który sięga od starożytnych Hindusów poprzez Arabów, dalej poprzez Vietę aż do Descartes'a i Huddego, udoskonalała się nasza „wielka sztuka" krok za krokiem. Aż wreszcie, właściwie dopiero z końcem XVII stulecia, osiągnęła taki stopień uogólnienia, sprawności i udoskonalenia, który jako tako przypomina jej stan obecny. Dopiero jednak u Leonarda Eulera znajdujemy prawie konsekwentnie znakowanie, które w zupełności możemy uznać za obecnie używane. Zresztą w związku z czym innym powrócimy jeszcze nie jeden raz do historii algebry, którą tutaj naszkicowaliśmy najpobieżniej.

Niechże jednak nikt nie da się odstraszyć tym nieco filozoficznym rozważaniom, którym wspólnie musimy się oddawać. Pokażą się one w rzeczywistości daleko mniej trudne niż np. przeliczanie z jednego układu liczbowego w drugi. Nie mamy wcale ochoty zadowolić się mechanicznymi regułami rachowania, lecz pragniemy aż do dna zbadać wewnętrzną budowę algebry.

ROZDZIAŁ DZIESIĄTY

ZNAKOWANIE ALGEBRAICZNE

Wróćmy najpierw do naszej powierzchni podłogi w pokoju i do dywanu. Ale z tym, że tu również posuniemy się nieco dalej w uogólnianiu i rozważać będziemy już nie przedmiot, ale raczej typ. A więc teraz i w przyszłości będziemy mówili o „prostokącie". O takiej postaci geometrycznej, którą po tym się poznaje, że cztery, parami równoległe proste (odcinki) tworzą czworokąt o czterech tak zwanych prostych kątach, a więc parami są do siebie prostopadłe, spotykają się prostopadle. Jest to gatunek powierzchni, dla którego stosuje się znany wzór $P = a \cdot b$; przy tym (co dowolnie ustalamy) a oznacza dłuższy bok, długość, b natomiast bok krótszy, szerokość. To więc, że coś jest „szersze niż dłuższe", nie odgrywa roli w naszych rozważaniach ze względu na powyższe określenie (definicję). „Szersze niż dłuższe", rozważane czysto geometrycznie i ilościowo, nie ma mianowicie w ogóle żadnego sensu. Zyskuje pełne znaczenie rachunkowe raczej tylko w odniesieniu do położenia jakiegoś przedmiotu. Ale to tylko mimochodem.

Przejdźmy teraz niejako do „algebraicznego" znaczenia iloczynu $a \cdot b$, skoro chcemy w pełni unaocznić sobie ogólność tej formuły. a może oznaczać każdą dowolną liczbę, leżącą pomiędzy 0 i pewną nieograniczenie wielką liczbą. Z góry założono, że spełnia nasz dodatkowy warunek i za każdym razem jest większe niż obok stojące b, które również może oznaczać każdą dowolną liczbę. Równie dobrze można pomyśleć sobie prostokąt o wymiarach 2×1, jak inny o wymiarach $1\,994\,373 \times 284\,786$, a wynik z mnożenia w obu wypadkach oznacza miarę powierzchni, wyrażoną w jednostkach kwadratowych, których znaczenia na razie nie ma potrzeby badać, ponieważ znane są każdemu z nas dostatecznie jako metry kwadra-

towe, centymetry kwadratowe itd. Zbadajmy teraz nasz algebraiczny algorytm co do granic, w których daje się zastosować. W tym celu, przy ustalonej długości, pozwólmy szerokości rosnąć tak dalece, jak tylko można i zmniejszać się tak bardzo, jak to tylko jest możliwe. Otóż, przy uwzględnieniu naszych założeń, istnieją dwa wypadki „graniczne", pomiędzy którymi leżą wszystkie pozostałe wypadki „normalne". Może się mianowicie zdarzyć, że szerokość jest taka sama jak długość, tak, że się właściwie nie wie, co długość, a co szerokość. A zatem *b* równa się *a*, szerokość wzrosła do wartości długości. Zauważmy przy tym, że owo wzrastanie odbywa się nie w sposób ciągły, lecz skokami od liczby do liczby, wszak przecie dotychczas używamy tylko liczb całkowitych naturalnych.

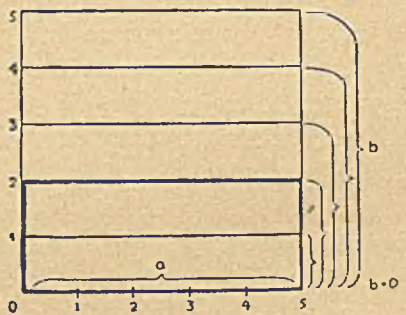


Fig. 2.

Skoro zatem *b* równa się *a*, mogę napisać: $P = a \cdot a$, co już poznaliśmy w postaci potęgi, jako iloczyn równych czynników. $a \times a$ jest więc równe a^2 „a do drugiej", inaczej „a do kwadratu". Z prostokąta powstał kwadrat. Przyznaję, że nieco zbyt szeroko potraktowaliśmy nasz warunek, iż długość ma być stale większa od szerokości. Mianowicie pojęliśmy go w jego negatywnej postaci: „Szerokość ma być n i e w i ę k s z a od długości". A zatem pocyganiliśmy nieco i skorzystaliśmy z „luki w prawie", aby się wśliznąć. Weźmy to wszelako na własne sumienie i szukajmy obecnie drugiego „przypadku granicznego". Co będzie, jeśli szerokość stanie się możliwie najmniejsza, jeśli stanie się zerem? $P = a \cdot 0 = 0$. A więc miara powierzchni prostokąta będzie zerem. Mówiąc geometrycznie — jako „prostokąt" pozostanie tylko odcinek *a*, w myśl reguł geometrii rozciągający się tylko w jednym kierunku, a miano-

wicie na długość. Szerokości w ogóle nie posiada. A zatem wedle wzoru dla powierzchni obliczyliśmy coś przeciwnego powierzchni. Zaiste, zadziwiająca próba mocy naszego algorytmu i dobry dowód wzajemnego dopełniania i jak gdyby zazębiania się dwu algorytmów: algorytmu „algebraicznego" i czysto liczbowego. Z przyjemnością stwierdzamy, że nasza maszyna myślowa zaczyna sprawnie działać. Dlatego odważamy się na znacznie cięższe zadanie. Stawiamy drugie dodatkowe założenie. Mianowicie: długość ma pozostawać ogólnie do szerokości w stosunku 5 do 2. Obojętne, czy to będą dwa i pięć lat świetlnych, kilometrów czy mniejszych jednostek, czy też w ogóle wyrażone będzie w układzie metrycznym miar. Mogą to być cale, wiorsty, jardy, starogreckie parasangi, łokcie, piędzie, stopy, stadia, i Bóg wie co jeszcze. $P = a \,.\, b = 5 \times 2 = 10$. Miara powierzchni rozważanego prostokąta jest zawsze równa pięć razy dwa, czyli dziesięć jednostek kwadratowych odpowiedniego systemu miar. Przedstawmy tę sprawę rysunkiem w różnych jednostkach, nie wymagając specjalnie określonego systemu miar.

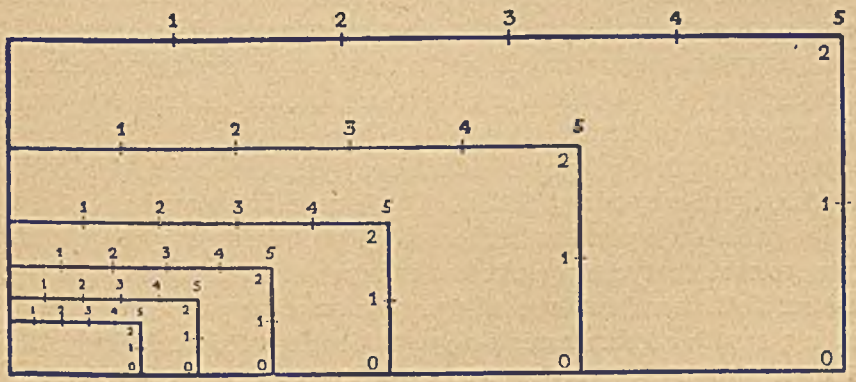


Fig. 3.

Każdy z tych prostokątów, mierzony ustaloną dla niego jednostką długości, posiada pole 10 jednostek kwadratowych odpowiadających przyjętej dla niego mierze długości. Zawsze zgadza się formuła: $a = 5$, $b = 2$, a w następstwie $a \,.\, b = 5 \times 2 = 10$. Jeśli teraz pomyślę sobie, znowu nie w sposób ciągły, ale ostatnim wyobrażalnym skokiem uzyskany, najmniejszy ze wszystkich możliwych prostokątów, w którym tak długość jak i szerokość stała się

zerem, wówczas rachunek przedstawi się: $P = a \cdot b = 0 \times 0 = 0$. Nasz najmniejszy prostokąt ma znowu powierzchnię zerową, to znaczy, musi się obejść w ogóle bez rozciągłości powierzchniowej. Podczas gdy w poprzednio przedstawionym przypadku pozostała przynajmniej długość (albo tylko szerokość, co po skasowaniu pierwszego warunku: „Długość zawsze większa od szerokości" można by także wyprowadzić, gdyby się szerokość zachowało bez zmiany, a długość doprowadziło do zera, tak aby $0 \times b = 0$), w obecnym naszym przypadku powierzchni zniknęła długość wraz z szerokością. Nie pozostało z naszego prostokąta doszczętnie nic, pozostał tylko punkt geometryczny, utwór bez żadnej rozciągłości. W jakiś zagadkowy sposób pozostało jednak jeszcze coś innego, co przeoczyliśmy pod pierwszym wrażeniem. Mianowicie warunek, aby boki prostokąta miały się do siebie jak 5 do 2. Ponieważ ten warunek okazał się zupełnie nieczuły względem systemu miar i wynikających stąd liczb wymiarowych, ponieważ wykazał niezmienność względem każdej, ale to każdej jednostki, możemy traktować jak najogólniej twierdzenie klasycznej geometrii greckiej, twierdzenie Euklidesa, że s t o s u n e k dwóch wielkości jest niezależny od ich miar. A zatem przypuszczamy, oczywiście nie opierając się bezpośrednio na żadnych danych poglądowych, że także wewnątrz naszego punktu nie istniejąca właściwie długość nie istniejącego właściwie prostokąta ma się tak do jego nie istniejącej już szerokości, jak 5 do 2. Krótko, „pięć-nic" razy „dwa-nic" daje na miarę powierzchni „dziesięć-nic". A więc powierzchnia osobliwego, nieegzystującego prostokąta to matematyczny punkt bez żadnych wymiarów, a jednak prostokąt. Jeśli bowiem tego nie przyjmiemy, popadniemy z drugiej strony, czysto algebraicznie i algorytmicznie, w niemały kłopot. Napiszmy, ufając na ślepo maszynie myślowej i „prawdziwej kabale", nasz warunek jako tzw. propocję: a ma się tak do b, jak 5 ma się do 2, czyli

$$a : b = 5 : 2$$

wyrażenie, znane każdemu już ze szkoły elementarnej. Jeśli teraz a i b równocześnie zmniejszę do zera, otrzymam

$$0 : 0 = 5 : 2.$$

Jeśli, rozumując dalej, oba zera oznaczają to samo, wtedy $0 : 0$ byłoby równe jeden. Bo każda liczba podzielona przez siebie samą daje

na wynik jeden. Aby jednak został spełniony rozkaz równości, musiało by także 5 podzielone przez 2 równać się 1, co jest oczywiście żądaniem pozbawionym sensu. Po tym rozważaniu pozostaje mi tylko jedno, a mianowicie tę tak zwaną „proporcję" przedstawić sobie tak, że oba zera mają się do siebie, jak 5 : 2. Mówi się następnie, że 0 dzielone przez 0 samo przez się ma nieoznaczoną wartość, którą zależnie od przypadku musi się, ale też i można, pośrednio określić.

Lecz teraz znowu jesteśmy w kłopocie. Istnieje dla proporcji reguła, mówiąca, że iloczyn obu skrajnych wyrazów musi się równać iloczynowi wyrazów środkowych. Jeśli więc

$$0 : 0 = 5 : 2, \text{ wtedy}$$
$$0 \times 2 \text{ musi się równać } 0 \times 5$$

a to w istocie jest słuszne, bo przecie 0×2 równa się 0, a więc tak samo jak $0 \times 5 = 0$. Dla lepszego zrozumienia zilustrujmy regułę o iloczynie wyrazów skrajnych i środkowych na innym przykładzie.

$$13 : 39 = 7 : 21, \text{ z czego wynika}$$
$$13 \times 21 = 39 \times 7, \text{ czyli } 273 = 273.$$

Już teraz, w chwili, gdy nie opanowaliśmy najprostszych nawet reguł algebry, wdarliśmy się — z pełną świadomością — głęboko w podstawy wyższej matematyki, w analizę nieskończonościową. Szliśmy przy tym — co prawda, tylko w przybliżeniu — za biegiem myśli wielkiego Leibniza, który podobne zagadnienie rozwinął pod tytułem: „Wywód rachunku różniczkowego ze zwyczajnego rachunku algebraicznego". Przez to oczywiście wcale jeszcze nie wyjaśniliśmy naszych sprzeczności.

Wiemy tylko, że mamy do wyboru albo przyjąć coś, co się nie da wyobrazić, przy czym punkt nie mający rozciągłości w żadnym kierunku, rozumieć mamy jako prostokąt o różnych bokach; albo też wyrzec się w części algorytmu, zrezygnować z systemu rachowania, z prawdziwości proporcji. W każdym wypadku mniej kłopotów sprawia nam „szaleńcze" uznanie nicości różniących się od siebie jako miary długości i szerokości, aniżeli nieugięte zaprzeczenie takiej możliwości.

Pod wpływem ostrej przygany naszego przeciwnika, porzucimy jednak te rozważania i powrócimy obecnie do jabłek i gruszek. Że

jedno jabłko więcej pięć jabłek to jest sześć jabłek, nie powinno dla nas na razie stanowić problemu. Gorzej już przedstawia się sprawa, jeśli wypowiemy twierdzenie, że 3 jabłka więcej 5 gruszek to 8 sztuk owoców, albo też znowu jeden talerz owoców. Jeśli oznaczymy jabłko przez *a*, gruszkę przez *b*, sztukę owoców przez *c*, a „talerz pełen owoców" przez *d*, wówczas możemy napisać

$$3a + 5b = 8c \text{ albo}$$
$$3a + 5b = d.$$

Ponieważ w matematyce bezapelacyjną prawdę stanowi fakt, że dwie wielkości, równe jakiejś trzeciej, także wzajemnie są równe, otrzyma się

$$8c = d$$

czyli 8 sztuk owoców, oznacza talerz pełen owoców.

Także ten ostateczny wynik przyjmiemy na razie jako niewątpliwy, tym bardziej, że właściwie z góry go założyliśmy na mocy definicji, tworząc przez dodanie 3 jabłek i 5 gruszek nowe pojęcie rodzajowe talerza owoców i to pewnego określonego, o takim właśnie składzie. Znacznie bardziej tajemnicze jest twierdzenie, że 3 jabłka więcej 5 gruszek tworzą 8 sztuk owoców; aczkolwiek na pierwszy rzut oka wydaje się ono bardziej oczywiste, niż twierdzenie o talerzu. To nowe twierdzenie ma bowiem bardzo poważne następstwa. Jeśli rzeczywiście 3 jabłka więcej 5 gruszek mają się równać 8 sztukom owoców, to bez wątpienia dokonałem pewnej operacji rachunkowej. A mianowicie dokonałem w pewnym sensie zrównania jabłek i gruszek na wyższym poziomie, przez utworzenie ogólniejszego pojęcia. Skoro tylko zacznę rachować w sztukach owoców, nie muszę już w ogóle pisać a, b czy c. Mogę wprost napisać $3 + 5 = 8$ i zaniedbać wszystkie oznaczenia aż do ostatecznego wyniku. Liczenie w sztukach owoców to zasadniczo to samo, jak gdybym miał przed sobą tylko jabłka lub tylko gruszki. Każde z nich to sztuka owoców, przy czym *a* równa się *b*, a jedno i drugie równa się *c* ($a = b = c$). A więc już nie przy pomocy liter rachuję, lecz przy pomocy „współczynników".

Otóż z takiego rozważania mogę uzyskać bardzo ogólne pojęcie „algebry", łączące wszystkie dotychczasowe rezultaty. Jak wiadomo, każda liczba pomnożona przez 1 pozostaje sobie równa. Dlatego, aby zwyczajne rachowanie na liczbach wciągnąć do algebry

jako podprzypadek, mogę wszelkie możliwe liczby uważać za współczynniki, przyjmując równocześnie, że na miejscu jabłek czyli liter występują wszędzie „jedynki". 5 jedynek więcej 17 jedynek daje 22 jedynek. Inaczej

$$5 + 17 = 22.$$

9 348 jedynek razy 15 = 140 220 jedynek albo $9\,348 \times 15 = 140\,220$. Wszystkie rachunki liczbami niemianowanymi w jakimkolwiek układzie liczbowym są to zatem algebraiczne operacje na liczbach, które oznaczyliśmy jako „jedynki", czyli operacje na współczynnikach przy „jedynkach". Przez to zyskaliśmy wspaniały nieprzerwany związek, ciągłe, trwałe przejście z układów liczbowych do algebry. Zauważmy jeszcze, że mnożenie przez jeden daje na wynik samą liczbę mnożoną, oczywiście w każdym układzie, nawet w układzie dwójkowym. Wszystkie układy liczbowe podlegają zasadzie „stałości praw" i wykazują „niezmienność" względem mnożenia przez jeden.

Sądzę, że po takim ujęciu wszystkich dotychczasowych rezultatów głębsze wniknięcie w algebrę nie będzie przedstawiało żadnej zasadniczej trudności. Przedtem jeszcze jedno pytanie. Czy musi się zawsze rachować literami w połączeniu z liczbami danymi? Czy nie można by, podobnie, jak się rachuje samymi liczbami danymi, rachować samymi tylko literami? Pytanie bardzo na miejscu. Dlatego zbadajmy je od razu bliżej. Przepiszmy je na nowo, formułując je dla naszego własnego użytku jako „problem współczynników ogólnych i szczegółowych".

Co to są „współczynniki szczegółowe", pokazaliśmy na niejednym miejscu. Z grubsza rzecz ujmując są to oznaczenia ilości jakichkolwiek jednostek. Przy 5a współczynnikiem jest 5, *a* jednostką w której liczę. Przy $5a + 7b + 3c + 8d \ldots$ 5, 7, 3, 8 są współczynnikami, a, b, c, d ... różnymi jednostkami, jakimi się posługuję. Zamiast tych „jednostek", inaczej „liczb ogólnych", mogę wstawić dowolne liczby, byle tylko ta podstawiona liczba została utrzymana przez ciąg całego rachunku aż do rezultatu. Podstawiona liczba pozostaje podczas całego rachunku ta sama, pozostaje równa, stała, niezmienna. Dlatego nazywa się też a, b, c, d ... „wielkościami stałymi", albo krótko „stałymi". Rozwój, mający za sobą stulecia i umowa wzajemna tak chciały, aby „stałe" w ogóle oznaczać ma-

łymi literami alfabetu łacińskiego. I to literami od początku alfabetu aż do *u*. Począwszy od *u* zarezerwowano litery dla innych celów, które później będziemy rozważali. r, s, t zajmują niejako pośrednie stanowisko i tylko wtedy, gdy to jest nieuniknione,[1] mogą być używane jako „stałe". Ale także na początku alfabetu istnieje szereg miejsc obsadzonych umownie. Litera *e* służy od czasów Eulera wyłącznie do oznaczania zasady tak zwanego „logarytmu naturalnego", litera *i* od czasów Gaussa do zapisywania „liczb zespolonych", a litery *h* używa się chętnie w matematyce wyższej na oznaczenie dowolnie małego przyrostu wielkości. Przy oznaczaniu stałych w wyższej matematyce należy także unikać *d* (jako symbolu odpowiedniej operacji w rachunku różniczkowym). Ponieważ w dłuższym rachunku pozostałyby nam jako alfabet tylko litery a, b, c, f, g, k, l, m ..., takie zaś uszeregowanie przerywane sprzeciwia się prawdziwej elegancji i przejrzystości, posługuje się najnowsza algebra (także z innych jeszcze ważnych względów) wskaźnikami, zaproponowanymi w zasadzie przez Leibniza. Ogólne liczby tego samego typu, np. wyrazy jakiegoś szeregu, zapisuje się za pomocą tej samej litery, do której z prawej strony u dołu dołącza się dla odróżnienia tak zwany wskaźnik (indeks). A zatem a_1, a_2, a_3, a_{27} itd. Dla przykładu pokażemy dowolną liczbę układu dziesiątkowego zapisaną w ten sposób, przy czym użyjemy nawet wskaźnika 0.

Liczba układu dziesiątkowego $= a_0 10^0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + a_4 10^4 +$ itd.

Mój przeciwnik, którego celowo sprowokowałem, przerwie mi natychmiast i uczyni zarzut, że oznaczyłem tutaj współczynniki literami, podczas gdy zamiast jednostek napisałem liczby dane. Otóż właśnie! Chcemy przecież zobaczyć, w jaki sposób można by obejść się bez liczb danych.

Musimy jednak odpowiedzieć dokładniej, aby przeciwnika zmusić do milczenia, bo ciągle jeszcze gestykuluje. A zatem najpierw: a_0, a_1, a_2, a_3 itd. oznaczają tylko, że na tych miejscach m o g ą stać cyfry w porządku „wskaźników". Nic poza tym. Tu, w układzie dziesiątkowym, oczywiście tylko cyfry od 0 do 9. Ponadto przy naj-

---

[1] Np. jeśli potrzeba wielu liter w porządku leksykograficznym (słownikowym), jak dla współczynników długich szeregów potęgowych.

wyższej potędze może stać tylko jedna z cyfr od 1 do 9, bo liczba nie może się przecież zaczynać od zera. A więc dwa „warunki dodatkowe". W ramach tych ograniczeń mogę za każde *a* zawsze wstawić cyfrę, jaka mi odpowiada. A więc $a_0 = 5$, $a_1 = 7$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 0$, $a_5 = 2$. Miałbym wtedy z układu dziesiątkowego liczbę 204 175. Lecz mógłbym także dobrać: $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, $a_4 = 8$, $a_5 = 9$, i otrzymałbym liczbę 989 520; albo $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 6$, a wtedy otrzymałbym 600 000, itd. A więc dzięki mojej symbolice podałem ogólny kształt liczby układu dziesiątkowego, która naturalnie niekoniecznie musi być sześciocyfrowa. Mógłbym przecie a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} itd. wyrazić jakimiś innymi cyframi, a otrzymałbym wówczas jakąkolwiek liczbę 7-, 8-, 9-, 10-, 11-cyfrową. Oczywiście mogę także użyć innych wskaźników.

Np.

$$a_1 10^0 + a_2 10^1 + a_3 10^2 + a_4 10^3 + a_5 10^4 + a_6 10^5 + \ldots,$$

co daje mi tę korzyść, że największy wskaźnik podaje mi od razu ilość miejsc w liczbie, podczas gdy wykładnik potęgowy wskazuje ilość zer. Widzimy zatem, że znowu uzyskaliśmy samoczynną maszynę myślową, algorytm rzędu.

Jak to już weszło u nas w zwyczaj, postaramy się teraz o dalsze jeszcze uogólnienie. Napiszmy obecnie jakąś liczbę nie układu dziesiątkowego, ale jakiegokolwiek układu, pamiętając, że zasada układu pozycyjnego musi wynosić co najmniej dwa (układ dwójkowy) podczas gdy współczynniki mogą się zmieniać od zera aż do takiej liczby, która jest o jeden mniejsza od zasady. Natomiast cyfra na najwyższym miejscu (każdorazowy współczynnik, stojący przy najwyższej w danym wypadku potędze) może tylko „przebiegać" wartości od 1 aż do liczby o jeden mniejszej od zasady. „Przebiegać" oznacza w matematyce, że liczba ogólna może przyjmować wszystkie wartości pomiędzy każdorazowo danymi granicami. Tu oczywiście tylko wartości całkowitoliczbowe.

Aby się dobrze przygotować, ustalmy jeszcze jedno: Zasadę nazwiemy ogólnie *g*. Ponieważ stale pozostaje ta sama, to znaczy wewnątrz układu nie śmie i nie może się zmieniać, nie otrzyma żadnego indeksu. Za to jednak otrzyma go wykładnik potęgowy,

wszak wzrastanie potęg od miejsca do miejsca, to istota wszelkiego układu pozycyjnego. Teraz możemy już napisać:

Liczba układu $g = a_1 g^0 + a_2 g^1 + a_3 g^2 + a_4 g^3 + a_5 g^4 + a_6 g^5 + \ldots$. Teraz pragnę z tego zrobić liczbę układu szóstkowego. g zatem równe jest 6, podczas gdy a_1, a_2, itd. mogą tylko przebiegać wartości od 0 do 5 włącznie; a_6, które dowolnie ustanowiłem jako najwyższe miejsce — tylko od 1 do 5. Niech więc np.: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 5$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$.

Szereg $= 2 . 6^0 + 3 . 6^1 + 0 . 6^2 + 5 . 6^3 + 1 . 6^4 + 2 . 6^5$ (w układzie dziesiątkowym) albo jako liczba układu szóstkowego 215 032.

Teraz użyję tego samego ogólnego szeregu dla układu dwójkowego i wybieram: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$, $a_6 = 1$.

Liczba układu dwójkowego = 101 001 (g jest przy tym 2). Albo chcę liczyć w układzie trzynastkowym, a więc g = 13. Niech przy tym $a_1 = 9$, $a_2 = A$, $a_3 = 5$, $a_4 = 0$, $a_5 = C$, $a_6 = 7$. A zatem: liczba układu trzynastkowego = 7C0 5A9 (przy czym A i C uważa się za cyfry).

Widzimy, że powyższy szereg $a_1 g^0 + a_2 g^1 + \ldots$. przedstawia nam ogólną postać k a ż d e j liczby w układzie pozycyjnym. Wystarczy tylko odpowiednio podstawić z uwzględnieniem pewnych zastrzeżeń.

Wtym miejscu nie zdołamy jeszcze w pełni ocenić, co przez to zyskaliśmy. Najogólniejsze zadanie, ostateczny cel algebry — to dopiero rachowanie tymi schematami, jak gdyby to były liczby w rzeczywistości. To znaczy, że mogę algorytm liczb szczegółowych stosować do liczb ogólnych. Mogę je dodawać, odejmować, mnożyć, dzielić, potęgować itd. I dopiero wtedy wypadnie mi wstawić w wynik liczby szczegółowe, jeśli nie mogę poprzestać w ogóle na tym, by ogólny wzór, niejako nowe prawo, zachować jako rezultat, który gdzieś kiedyś zastosuję.

Jednakże dotychczas nie odpowiedzieliśmy na pytanie, czy w pewnych okolicznościach możemy się też całkiem obejść bez cyfr. Wiemy już wprawdzie, że nie tylko „jednostki", „stałe" można zapisywać literami, lecz, co więcej, także współczynniki. Ale w roli „wskaźników" ciągle jeszcze używaliśmy cyfr. Z prawej strony u dołu współczynników cyfra jako numer miejsca, jako wskaźnik porządkowy, z prawej u góry zasady — jako wykładnik potęgowy. Przenieśmy się teraz energicznie od układów liczbowych

myślą gdzie indziej, zapomnijmy o nich po prostu i napiszmy sobie jakąś sumę liczb ogólnych, jakikolwiek, powiedzmy zamknięty szereg, w którym nie występuje w ogóle żadna cyfra, a następnie przypatrzmy się, czy z tego szeregu możemy otrzymać jakiś konkretny sens. Np.:

$$a_a g^a + a_b g^b + a_c g^c + a_d g^d + a_e g^e + a_f g^f + a_g g^g + a_h g^h *$$

Co to może oznaczać? Otóż może to oznaczać, co tylko chcemy! Z tym jedynym ograniczeniem, że *g* ma pozostać stale to samo i że wskaźniki i wykładniki potęgowe następują w porządku rosnącym, na co nam wskazuje uporządkowanie alfabetyczne. Jeśli dodamy jeszcze jako warunek, że podstawiamy tylko liczby całkowite, wówczas szereg nasz może wyglądać:

$$15 . 7^5 + 8 . 7^9 + 932 . 7^{10} + 20 . 7^{13} + 0 . 7^{25} + 1 . 7^{26} + 10 . 7^{49} + + 42\,535 . 7^{1\,000\,000}$$

albo:

$$0 . 0^0 + 0 . 0^1 + 0 . 0^2 + 0 . 0^{15} + 1 . 0^{30} + 17 . 0^{31} + 2 . 0^{50} + 27 . 0^{642}.$$

Krótko mówiąc, możemy tu już dojść do bardzo wielkiej rozmaitości w realizacjach naszego „schematu budowy", ponieważ przy tym schemacie o nic innego nie chodzi, jak tylko o sumę dowolnie rosnących potęg *g*, które mogą być zestawione z zupełnie dowolnymi współczynnikami.

Jeszcze ogólniejszy byłby szereg:

$$a_a b^a + a_b c^d + a_e d^f + a_d m^b + a_e o^h .$$

Tu mam już w ogólności tylko ten warunek, że wszystkie współczynniki są dowolne, podczas gdy zasady potęgowe mają się między sobą różnić. Wykładniki potęgowe natomiast nie są ani w porządku rosnącym, ani w malejącym. Przy użyciu cyfr mógłby taki szereg wyglądać np. tak:

$$0 . 2^7 + 25 . 7^3 + 4 . 9\,400^{18} + 74 . 1^{10} + 1 . 3^2.$$

Przez posuwanie się w uogólnianiu nie mamy jednak zamiaru wytworzyć poglądu, jakoby możliwe były tylko takie szeregi, skła-

---

* W roli wskaźników i wykładników potęgowych możemy także używać „zakazanych" przedtem liter jak e, d, h itd.

dające się z iloczynów współczynników przez potęgi, które następnie należy dodać. Istnieją wzory nierównie bardziej zawiłe i skomplikowane, a składające się z samych tylko liter. Przeciwnie, na bardzo prostych strukturach (postaciach) staraliśmy się tylko pokazać, że zarówno wskaźniki, jak współczynniki, zasady, wykładniki potęgowe itd. można napisać przy pomocy liter. Mogę każdą liczbę, każdą wielkość zapisać używając liter, zaznaczając przez to, że ich szczegółowa wartość na razie mnie jeszcze nie interesuje. To jest właśnie owa „ogólność" w algebrze. Niekiedy jednak pomimo wszelkiej ogólności wyłonią się nagle liczby szczegółowe, których po prostu nie mogę uniknąć. Przyczyna tego tkwi w istocie operacji rachunkowych (rozkazów). Jeśli zażądam, aby mi powiedziano, ile to jest a . a . a, to nikt nie może twierdzić, że to jest a^n, lecz musi napisać a^3. Ale i tu także znalazłby się wybieg: a mianowicie, gdybym twierdził, że wcale nie wiedziałem, w jakim układzie liczbowym mam zapisać rezultat. W układzie dwójkowym na przykład byłoby a . a . a potęgą a^{11}, w trójkowym układzie a^{10}. Mogę zatem odpowiedzieć że a . a . a to a^n, bo wykładnik potęgowy n dopiero przez podanie układu liczbowego będzie szczegółowo wyznaczony. Tak samo byłoby przy dodawaniu $a + a + a + a + a = 5a$. Przy nieoznaczonym chwilowo układzie liczbowym mógłbym twierdzić, że $a + a + a + a + a$ to jest $m\,a$. Wartość m wtedy mógłbym dopiero podać, gdy mi się wskaże, w jakim układzie mam to napisać. I tak w każdym podobnym przypadku.

ROZDZIAŁ JEDENASTY

OPERACJE ALGEBRAICZNE

Obecnie wiemy już jednak o algebrze tyle, że wypada nam zająć się jej regułami działań. Przede wszystkim jasne to dla nas, że algorytm układów liczbowych nie da się tak po prostu przenieść na litery. Nie możemy ani tworzyć właściwych układów pozycyjnych, bo przecie wszystko ma pozostać ogólne i nieoznaczone, ani też nie możemy na przykład sposobem rachunków cyfrowych dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Również dlatego nie, iż algorytm ten jest ściśle związany z zasadą wartości zależnej od miejsca. Gdyby powiedzieć: $a + b = c$, zostaje jeden — to słusznie wyśmiałby nas nawet nie-matematyk.

Na razie więc miejmy ciągle przed oczyma duszy nasze jabłka, gruszki itp., aby najpierw zebrać podstawowe typy działań, a potem dopiero nabrać nieco więcej śmiałości.

$a + b$ oznacza, że mam dodać do siebie dwie stałe wprawdzie ale dowolne, różne od siebie liczby. Różne dlatego, ponieważ oznaczyłem je różnymi literami. Co mam z tym począć? $a + b$ pozostanie $a + b$, jeśli to chcę jedynie „wyrachować". Najwyżej mogę powiedzieć, że to jest także $b + a$, bo przy dodawaniu obowiązuje własność kommutatywna, prawo przemienności składników. $a + b + c + d$ jest oczywiście również tylko $a + b + c + d$ albo $a + b + d + c$ albo $b + c + a + d$ itd., $a + a = 2a$, to już wiemy. Wobec tego jest np.

$$a + a + a + b + b + c + c + c + c + d = 3a + 2b + 4c + d.$$

Współczynnika 1 nie pisze się. *d* znaczy tyle co 1d czyli 1 razy *d*. Używając wskaźników, przez co łatwiej mogę uniknąć „zabronionych" liter, mógłbym poprzednie wyrażenie zastąpić przez:

$$a_1 + a_1 + a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + a_3 + a_3 + a_4 = \\ = 3a_1 + 2a_2 + 4a_3 + a_4.$$

Przypuśćmy, że mam dwa wyrażenia w postaci sum, które należy dodać. Np.:

$$\begin{array}{r} 3a + 27b + 10c + \quad d + 15e + \quad 8f \quad \text{i} \\ 7a + \quad 0b + \quad 9c + 13d + \quad 6e + 101f \\ \hline \text{Suma: } 10a + 27b + 19c + 14d + 21e + 109f \end{array}$$

Jak widzimy, dodaje się po prostu współczynniki, przy czym zastosowano niejako schemat dodawania (naturalnie bez wartości miejsc). Mógłbym oba wyrażenia napisać wprost w jednym długim szeregu, łącząc je znakiem plus, umieszczając każde w nawiasie lub bez nawiasów. Np. tak:

$$(3a + 27b + 10c + d + 15e + 8f) + (7a + 0b + 9c + 13d + \\ + 6e + 101f) = 3a + 27b + 10c + d + 15e + 8f + 7a + 0b + \\ + 9c + 13d + 6e + 101f = 10a + 27b + 19c + 14d + 21e + 109f.$$

Oczywiście, liter opatrzonych różnymi wskaźnikami lub różnymi wykładnikami, nie można dodawać, tzn. nie można zastępować jedną wspólną literą przez wprowadzenie nowych współczynników, dlatego, że są to pozornie tylko równe wielkości.

$a_1 + a_2 = a_1 + a_2 = a_2 + a_1$, cokolwiek pocznę.

Również $a^2 + a^0 + a^3$ to nic innego jak $a^2 + a^0 + a^3$ albo w porządku rosnącym $a^0 + a^2 + a^3$, lub malejącym $a^3 + a^2 + a^0$, względnie nieuporządkowane $a^2 + a^3 + a^0$ lub $a^3 + a^0 + a^2$ lub $a^0 + a^3 + a^2$.

Słowem, w drugim przykładzie, o ile chodzi o uporządkowanie, możliwych jest sześć permutacji, bo rozporządzamy trzema elementami (a zatem liczba permutacji $3! = 1 . 2 . 3 = 6$), lecz poza tym wyrażenie bynajmniej nie ulega zmianie.

Odejmowanie, jak powiedzieliśmy, da się wykonywać w jedną tylko stronę. a — b to zatem nic jak tylko a — b. Zaś 2a — 6b + + 7c — a + 4b — 2c to tyle co 2a — a + 4b — 6b + 7c — 2c czyli a.....: tu utknęliśmy. Bo raptem stanęliśmy przed nowym zagadnieniem. Poradzimy sobie wprawdzie z *a* i z *c*, ale nie z *b*. Bo jak tu od 4 gruszek odjąć 6 gruszek? Wydostaniemy się z pułapki w prosty sposób. Podobnie, powiadamy, jak fakt taki książ-

kuje kupiec, który posiada 100 cekinów a 120 jest winien. W rezultacie ma 20 cekinów długu, posiada minus 20 cekinów, jeśli jest dozwolony taki paradoks. W matematyce jest na pewno dozwolony. Nasz rachunek daje w końcu *a*, 5c i minus 2b, co napiszemy $a - 2b + 5c$ albo $a + 5c - 2b$ lub $5c - 2b + a$ itd. Gdybyśmy jednak mieli tylko obliczyć $4b - 6b$, musielibyśmy napisać $4b - 6b = -2b$. W ten sposób dotarliśmy do pojęcia liczb ujemnych, które rozważymy jako liczby ujemne szczegółowe i ujemne ogólne (algebraiczne). Możemy je sobie przedstawić za pomocą odcinków na prostej, a mianowicie w następujący sposób:

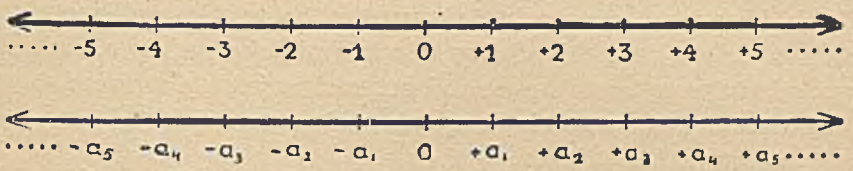


Fig. 4.

na prostej obieramy jakiś punkt, oznaczamy go sobie literą O (tzw. początek osi) i przyjmujemy jeden kierunek na tej prostej jako dodatni (np. na prawo od punktu O), uważając tym samym przeciwny kierunek (u nas na lewo od punktu O) za ujemny. Prostą, na której ustalono kierunek nazywamy osią. Następnie obieramy dowolny odcinek jako jednostkę długości.

Liczbie (+1) odpowiada odcinek, którego początek leży w punkcie O, a koniec w odległości równej obranej jednostce na prawo od punktu O. Liczbie (+ 2) — odcinek, którego początek leży również w punkcie O, a koniec w odległości dwóch obranych jednostek na prawo od punktu O itd., liczbie np. (+ 15) odpowiada odcinek o początku w punkcie O, a końcu leżącym w odległości 15 jednostek na prawo od punktu O.

Podobnie, każdej liczbie ujemnej odpowiada odcinek, mierzony odpowiednią ilością jednostek na lewo od punktu O. A więc, odmierzając 5 jednostek na lewo od punktu O otrzymamy odcinek odpowiadający liczbie (— 5).

W ten sposób każdej liczbie względnej odpowiada na naszej prostej (zwanej też „linią liczbową" lub „osią liczbową") odcinek (kierunkowy). Wszystkie odcinki mają wspólny początek w punkcie O, któremu przyporządkowujemy liczbę zero. Przy tym liczbę (+ 0)

uważamy za równą liczbie (— 0) i dlatego piszemy ją zwykle bez znaku, po prostu 0. Zwykle przy liczbach dodatnich (ze znakiem plus) nie pisze się znaku plus. Przy liczbach ujemnych musi się napisać znak minus. Jest to analogia do zapisywania bezpośrednio po sobie następujących operacji tetycznej i litycznej. Trzy razy *a* pisze się 3 . a albo 3 × a albo 3a. Zwykle 3a. Operację 3 : a można zapisać tylko 3 : a lub $\frac{3}{a}$.

Teraz jednak musimy jeszcze wprowadzić nawiasy, abyśmy mogli wznieść się do wyższego typu rozważań. Nawiasy, których już parę razy używaliśmy bez żadnych komentarzy, np. przy współczynnikach dwumianu, oznaczają, że wszystko, co znajduje się wewnątrz nawiasu należy do siebie, jakby odrębne niejako państwo. Jeśli się wyodrębni wewnętrzną treść nawiasu, można już nie zwracać uwagi na nawias, a z zawartością jego tak postępować, jakby to było samodzielne wyrażenie. Np.:

$$10\,000 - (5\,020 + 23 - 448) = ?$$

Najpierw biorę pod uwagę zawartość nawiasu, wykonuję działania, otrzymuję 4 595 i mogę teraz napisać bez nawiasu 10 000 — — 4 595 = 5 405. Gdybym jednak, uważając nawias za zbyteczny, opuścił go przed obliczeniem wartości jego wnętrza i napisał: 10 000 — 5 020 + 23 — 448, otrzymałbym 4 555, a więc coś zupełnie fałszywego. Zbadajmy jeszcze drugi przykład:

$$15\,375 - 320 + \underbrace{(8\,220 - 26 + 400)}_{8\,594} =$$

$$15\,055 + 8\,594 = 23\,649.$$

Jeśli napiszę teraz w sposób niedozwolony:
15 375 — 320 + 8 220 — 26 + 400, to otrzymam — rzecz osobliwa — także 23 649, a zatem właściwą liczbę. Jakże się to stało? Można więc po prostu opuścić nawias? Aby tajemnicę od razu zdradzić: Można go opuścić, jeżeli bezpośrednio przed nawiasem stoi znak plus, a nie można go opuścić, względnie dopiero po wykonaniu naznaczonych wewnątrz działań lub odpowiednio określonych zmian, jeżeli przed nawiasem bezpośrednio znajduje się znak minus. Aby to jednak wyjaśnić, musimy głębiej wniknąć w istotę liczb ujemnych. W tym celu opatrzmy wszystkie liczby „znakami liczbowymi" (+ albo —) i umieśćmy każdą w nawiasie, aby „znaki

liczb" odróżnić od „rozkazów operacyj", które zapisuje się przy pomocy tych samych znaków (+ albo —). O ile więc nie używamy już liczb naturalnych, a tylko dodatnich i ujemnych, wtedy $5 + 7$ oznacza właściwie $(+5) + (+7)$, co daje $(+12)$. Różnica, jak np. $12 - 7 = 5$, znaczy znowu tyle, co $(+12) - (+7) = (+5)$.

Zanim zajmiemy się operacjami na liczbach ujemnych, przyjrzyjmy się przedtem, jaka jest istota obydwu operacji, dodawania i odejmowania, posługując się linią liczbową.

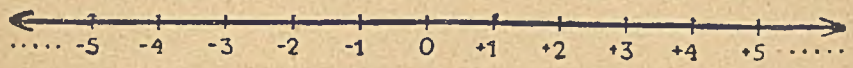


Fig. 5.

Bez długiego namysłu widać, że „rozkaz dodawania" można spełnić na linii liczbowej na rozmaite sposoby. Jeśli dodajemy od zera w prawo, a więc same dodatnie liczby, wtedy skutkiem dodawania musimy się posuwać coraz dalej na prawo. Np.: $(+1) + (+2) = (+3)$ a potem $(+3) + (+1) = (+4)$ itd. Jeśli dodam teraz niejako odbicie tego w lustrze, a więc na lewo od zera $(-1) + (-2)$, to otrzymam (-3). A dalej $(-3) + (-1) = (-4)$. Bo zliczyłem niejako długi. Przy odejmowaniu, które się odbywa tylko na prawo, albo tylko na lewo od zera, musi kierunek być odwrotny. Od zewnątrz zbliżam się do zera. A więc np. $(+4) - (+3) = (+1)$ albo w zwierciadłowym odbiciu: $(-4) - (-3) = -1$, gdyż w ostatnim wypadku odjąłem niejako od długu w kwocie 4 dług w kwocie 3, a więc się oddłużyłem, to znaczy przybliżyłem się do zera (czyli zupełnego oddłużenia). Inaczej mają się sprawy, jeżeli wśród mych obliczeń przekroczę zero. Mam np. dodać $(+3)$ i (-2). Tu, że tak powiem, muszę rozciąć linię liczbową w punkcie zerowym i części odpowiednio obok siebie położyć.

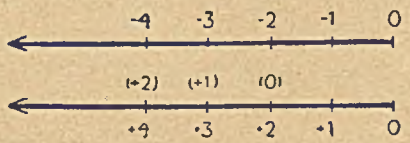


Fig. 6.

A mianowicie tak, aby każda wielkość ujemna znajdowała się ponad odpowiednią dodatnią. Skoro w ten sposób odpowiednio porównałem długi i posiadaną gotówkę, patrzę następnie, czy w któ-

rej z tych dwu kategorii nie ma nadwyżki. Ponieważ jednak przez obustronne znoszenie się długów i odpowiedniej gotówki uzyskałem nowy punkt zerowy, napiszę go w nawiasie w tej części linii liczbowej, na której powstała nadwyżka. W tym wypadku więc w części „dodatniej". Począwszy od nowego zera numeruję dalej. Liczba dolna (tu + 3) pokazuje o ile się posuwam, górna, w nawiasie, wskazuje wynik, tu zatem (+ 1). Dlatego (+ 3) + (— 2) = (+ 1). A teraz znowu zwierciadłowe odbicie tego:

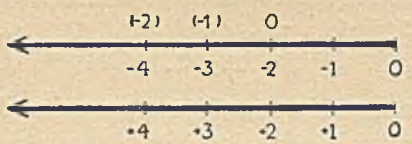


Fig. 7.

Tutaj część ujemna wystaje poza dodatnią. Plus 2 i minus 2 znoszą się, dając nowe zero. Dlatego wynik: nowa liczba ponad minus trzy, a więc: (— 3) + (+ 2) = (— 1).

Pozostawałoby jeszcze odejmowanie z przekroczeniem granicznego zera. Tu musimy postępować ze szczególną ostrożnością. Wybieramy np. (+ 2) — (— 1).

Cóż w ten sposób zanotowujemy? Mając gotówkę w kwocie 2, pozbyliśmy się ponadto długu wynoszącego 1. A więc nie tylko zatrzymaliśmy gotówkę, ale jeszcze oddłużyliśmy się.

W następstwie wynika z naszego rachunku: gotówka 2, umorzony dług 1, a więc pierwotny stan majątkowy gotówka w kwocie 3. Czyli (+ 2) — (—1) = (+ 3).

Zapiszmy teraz wszystkie dotychczas rozważane, a do tego jeszcze inne możliwe wypadki jeden pod drugim, abyśmy mogli z tego wyprowadzić reguły.

(+ 1) + (+ 2) = (+ 3)	(+ 3) + (— 2) = (+ 1)
(— 3) + (— 1) = (— 4)	(— 3) + (+ 2) = (— 1)
(+ 4) — (+ 3) = (+ 1)	(+ 2) — (— 1) = (+ 3)
(— 4) — (— 3) = (— 1)	(— 2) — (+ 1) = (— 3)

Jeśli starannie rozważymy to zestawienie i pomyślimy nad tym, jakby można uniknąć nawiasów, dojdziemy do następującego rezultatu:

$$+1+2=+3 \qquad +3-2=+1$$
$$-3-1=-4 \qquad -3+2=-1$$
$$+4-3=+1 \qquad +2+1=+3$$
$$-4+3=-1 \qquad -2-1=-3.$$

Cóż to znaczy? Przecie nic innego, tylko że „rozkaz" w osobliwy sposób może się połączyć ze „znakiem liczby". Każdą pierwszą kolumnę, przed którą nie znajdował się żaden rozkaz, pozostawiłem bez zmiany, a usunąłem po prostu nawiasy, bo przez to usunięcie nic się bynajmniej zmienić nie mogło, co potwierdza rzut oka na linię liczbową. Tam jednak, gdzie przed nawiasem stał rozkaz, po usunięciu nawiasu częściowo wystąpiły zmiany, częściowo zostało wszystko po dawnemu. A mianowicie + z + dało znowu +; + z — dało —; — z + także —, — z — dało +. Jeszcze zwięźlej powiemy: Jeżeli rozkaz i znak liczby są równe, wypada wtedy plus. Jeśli są nierówne, wówczas wypada minus. Ta reguła ważna jest nie tylko dla j e d n e j liczby w nawiasie, ale też dla większej ilości liczb. Szczegółowe wyprowadzenie tych związków byłoby zbyt długotrwałe. Dlatego poprzestańmy na tym, co poznaliśmy i spróbujmy to zastosować. Np.:

$$20-(3+5-7+6-9) = 20-3-5+7-6+9=22,$$

co również otrzymalibyśmy w rezultacie, gdybyśmy wyliczyli wyrażenie w nawiasie, a zatem gdybyśmy napisali $20-(-2)$, a w końcu $20+2=22$. Teraz wyjaśniła się zagadka, której przedtem nie umieliśmy rozwiązać. Mianowicie: dlaczego przy znaku plus przed nawiasem możemy nawias po prostu opuścić. Otóż, jeśli plus trafi na plus, to pozostaje plus. Trafi natomiast na minus, wówczas pozostanie minus. Np.:

$25+(6-8+4+12-3) = 25+6-8+4+12-3=36$
albo po poprzednim obliczeniu wyrażenia w nawiasie $25+11=36$. Ale teraz możemy także liczby większe odejmować od mniejszych. Np.:

$13-20=(+13)-(+20)=(-7)$ albo $13-20=-7$,
bo w tym wypadku mam niejako 13 cekinami spłacić dług 20 cekinów, a zatem mam o 7 cekinów za mało, czyli 7 cekinów długu.

Należy wyraźnie zaznaczyć, że to wszystko wyłożone zostało nieco pobieżnie. Ze znacznie większą elegancją można by także „znak

liczby" pojąć jako „rozkaz", a mianowicie rozkaz, aby tak daleko posunąć się na linii liczbowej, jak to nakazuje sama liczba. I to w kierunku wskazanym przez „znak liczby". Wówczas $(+3)$ oznaczałoby mniej więcej: „Posuń się na prawo aż do 3." Zaś (-7) oznaczałoby: „Posuń się na lewo od zera aż do 7". Otóż ten rozkaz posuwania się może się spotkać z odpowiednim rozkazem kojarzenia (dodawanie lub odejmowanie). Należy więc, jak to już zresztą próbowaliśmy, tu i tam poruszać się po linii liczbowej, a przy tym kojarzyć. Jeśli teraz porzucimy zupełnie liczby szczegółowe, a nawet nie napiszemy liczb ogólnych, lecz będziemy tylko badali, jak się odbywa wzajemne spotkanie „rozkazów", to mamy do czynienia z tak zwanym „rachunkiem symboli". Na razie nie zapuścimy się głębiej w te najwyższe regiony kabały. Chcemy tylko stwierdzić, że wprowadzamy prosty przypadek „związku pomiędzy rozkazami" czyli „rachunku symboli", jeśli powiemy, że równe rozkazy plus czy minus łączą się w rozkaz plus, różne natomiast w minus.

Przejdźmy teraz do nawiasów różnego rodzaju. Już raz zapisaliśmy je bez bliższego wyjaśnienia. Teraz przyjrzyjmy się takiemu wypadkowi nawiasów, zawartych wewnątrz innych. Mamy np. żądanie, aby wynik z $(3+3-7+2)$ odjąć od 6. To, co z tego wypadnie mamy odjąć od 15, a do tego dodać jeszcze 5. Całość należy odjąć od $23-7+6$. Ale wszystko to przedstawić w postaci planu operacji bez poprzedniego wyliczania. Piszemy:

$$(23-7+6)-\{15-[6-(3+4-7+2)]+5\}=?$$

Rozróżnimy nawiasy: okrągły, graniasty i klamrę. Reguła mówi, że najbezpieczniej uwalnia się od nawiasów zaczynając od tych, wewnątrz których innych nawiasów już nie ma. Mógłbym także uwalniać od zewnętrznych poczynając, taka jednak manipulacja, wymagając dużo wprawy, jest bardziej niebezpieczna. A więc najpierw uwolnimy od nawiasów okrągłych:

$$23-7+6-\{15-[6-3-4+7-2]+5\}=?$$

Następnie uwolnimy od nawiasu graniastego:

$$23-7+6-\{15-6+3+4-7+2+5\}=?$$

A wreszcie od klamry:

$$23-7+6-15+6-3-4+7-2-5=6,$$

wynik, który oczywiście otrzymałbym także przez wyliczenie poszczególnych nawiasów. Mianowicie wszystko przed nawiasami ma wartość 22, wszystko w nawiasach daje na wynik 16, różnica więc wynosi 6.

Śledząc przebieg uważnie widzimy, że przy uwalnianiu od nawiasów niejedna liczba kilkakrotnie zmienia znak, porywana w tej maszynie rachunkowej w różne strony przez mnóstwo wzajemnie krzyżujących się rozkazów, aż w końcu otrzyma swój ostateczny znak. Zaznaczymy tylko, że owo przemienianie znaków oznacza iloczyn (mnożenie) rozkazów, co później jeszcze dokładniej omówimy.

Najwyższy bowiem czas powrócić do algebry, którą porzuciliśmy, popadłszy w zamieszanie w trakcie rozważań nad odejmowaniem. Teraz, przy tej operacji rachunkowej, nie zada nam ona już żadnej zagadki. Bo jeśli np. posiadam dwa jabłka i muszę dać dwa, to nie pozostanie mi nic, czyli mam 0 jabłek. Jeśli jednak posiadam 6 jabłek i muszę 4 oddać, wówczas zostaną mi 2 jabłka. Gdybym jednak posiadał 3 jabłka a 7 musiał oddać, to zostałbym winien 4 jabłka. Wreszcie gdybym już miał długu 5 jabłek, a do tego jeszcze zaciągnął nowy dług w ilości 3 jabłek, to całkowity dług wynosiłby 8 jabłek itd.

(+ 5a) to 5 jabłek posiadanych w zapasie, (— 8a) to 8 jabłek długu. Otóż myślę, że teraz już damy sobie radę bez kolejnego stopniowania trudności i od razu możemy przejść do wyrażeń z nawiasami. I to nawet z liczbami mianowanymi wielorakimi.

$$\begin{aligned}
&15a - \{6a + [3b + 5c - 2a] + [3c - (5a + 7b)] + c\} = \\
&= 15a - \{6a + [3b + 5c - 2a] + [3c - 5a - 7b] + c\} = \\
&= 15a - \{6a + 3b + 5c - 2a + 3c - 5a - 7b + c\} = \\
&= 15a - 6a - 3b - 5c + 2a - 3c + 5a + 7b - c = \\
&= 16a + 4b - 9c.
\end{aligned}$$

Jak widzimy, w algebrze tak zwane „wyrachowanie" wewnątrz nawiasów tylko wtedy jest możliwe, jeśli w nawiasie znajdują się wielkości jednako mianowane. A więc np.:

$$17a - [6b + (9a - 3b + c + 5a - 2c + b) + 2b] = ?$$

Tutaj można by przed uwolnieniem od nawiasów napisać:

$17a - [8b + (14a - 2b - c)]$, co w końcu dałoby

$17a - [8b + 14a - 2b - c] = 17a - 6b - 14a + c =$

$= 3a - 6b + c.$

Już przez cały czas mieliśmy to na końcu języka, że w dodawaniu a również w odejmowaniu można zmieniać kolejność wyrazów, byleby przy każdej liczbie zachowano jej „znak", jej rozkaz; albo też rezultat wszystkich rozkazów, jakie ta liczba ewentualnie otrzymała. W ten sposób dochodzimy do pojęcia tak zwanej sumy algebraicznej. Mianowicie pod pewnym kątem widzenia oceniając powiemy, że nie ma w ogóle żadnego odejmowania, a tylko dodawanie liczb ze znakami plus i minus. $5 - 3 - 2 + 4$ mogę napisać $+ (+5) + (-3) + (-2) + (+4)$. Oczywiście, równie dobrze można by utrzymywać, że istnieją tylko odejmowania. Wówczas miałbym niejako algebraiczną różnicę. W naszym wypadku $-(-5) - (+3) - (+2) - (-4)$, co daje znowu ten sam wynik, a mianowicie $(+4)$. Istnieje więc także własność kommutatywna czyli prawo przemienności rozkazów, przy czym przy liczbie dodatniej ponadto nigdy nie wiem, czy jej znak plus powstał z plus i plus, czy z minus i minus. Ale to tylko mimochodem. Ostatecznie należy stwierdzić, że nasz przykład możemy napisać jako sumę, jako dodawanie, nadto zaś możemy zmieniać porządek składników. A więc np.: $+ (-2) + (+5) + (+4) + (-3)$, co oczywiście znowu daje $(+4)$.

W uogólnianiu naszych rozważań posunęliśmy się dobry kawał naprzód, przeto wprowadźmy (co nie wypływa z logiki, ale z naszej wzrastającej śmiałości) obok prawa przemienności nowe prawo, właściwe mnożeniu, mianowicie prawo rozdzielności, inaczej własność „dystrybutywną". Twierdzimy, że $5\,(7 + 4 - 3 + 9)$ równa się $5 \cdot 7 + 5 \cdot 4 - 5 \cdot 3 + 5 \cdot 9 = 35 + 20 - 15 + 45 = 85$, co naocznie się zgadza, bo po wyliczeniu nawiasu otrzymuje się $5 \cdot 17$, a więc właśnie 85.

Pisząc ogólnie, jest

$a\,(b + c - d + e - f) = ab + ac - ad + ae - af$, czego już dla przekonania się o słuszności w tym przykładzie oczywiście inaczej napisać nie możemy. Co najwyżej, moglibyśmy tylko sprawdzić przez podstawienie liczb szczegółowych. Aby jednak jakoś unaocznić tę fundamentalną własność, skorzystamy na sposób euklidesowski z dowodu geometrycznego. A mianowicie wstawimy na razie w nawias same dodawania. Np.:

$$a\,(b + c + d + e + f) = ab + ac + ad + ae + af.$$

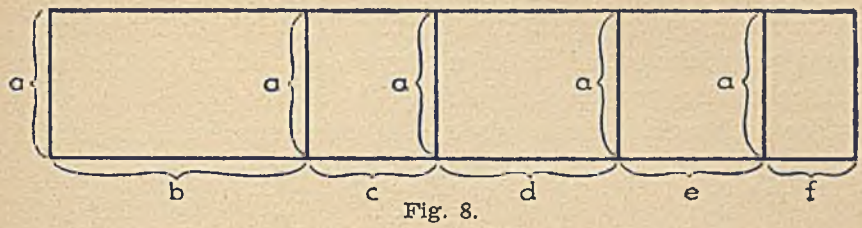


Fig. 8.

Miary powierzchni pięciu prostokątów, które obok siebie ułożyliśmy, są według wzoru znanego nam już z przykładu z dywanem odpowiednio: ab, ac, ad, ae i af. Suma miar powierzchni wszystkich prostokątów zatem ab + ac + ad + ae + af. Ta suma to jednak nic innego, tylko miara powierzchni wielkiego prostokąta (na rysunku grubo obramowanego). Jeśli chcemy ją mianowicie bezpośrednio dla dużego prostokąta wyznaczyć, wówczas musimy „długość", która się da określić jako (b + c + d + e + f), pomnożyć przez „szerokość" *a*. A więc a(b + c + d + e + f). Ponieważ oba sposoby obliczania muszą dać ten sam wynik, jest więc a(b + c + d + e + + f) = ab + ac + ad + ae + af, przez co powyższe nasze przypuszczenie także ogólnie sprawdziliśmy.

Pozostawiamy to ochocie czytelnika, aby powycinał sobie poszczególne składowe prostokąty i sprawdził nasze prawo także w tym przypadku, kiedy wewnątrz nawiasu występują znaki minus. Poukłada wtedy obok siebie „dodatnie" prostokąty, a „ujemne" odejmie przez odpowiednie nałożenie ich na poprzednie. W końcu wykaże, że na wynik otrzyma znowu to samo, co wtedy, gdyby — przy niezmienionym *a* — dolny odcinek, składający się z b, c, d itd., wyznaczył niezależnie od tego, za pomocą dodawania i odejmowania.

Teraz możemy ową „własność rozdzielności", czyli własność „dystrybutywną" rozszerzyć także na „wielomiany", tzn. na wyrażenia, które składają się nie tylko z jednej, ale z dwóch lub więcej liczb. Tym razem zacznijmy geometrycznie (p. fig. 9).

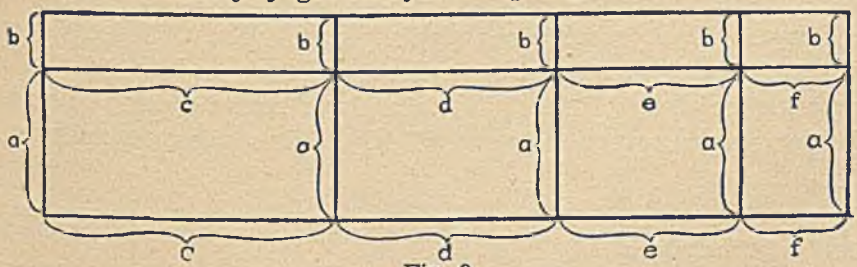


Fig. 9.

Otrzymujemy tu osiem prostokątów. A miary ich powierzchni wyrażają się jako ac, ad, ae, af u góry zaś bc, bd, be, bf. Natomiast miara całkowitej powierzchni jest $(a + b) \cdot (c + d + e + f)$. A więc, stosując własność kommutatywną (przemienności), napisze się

$$(c + d + e + f) \cdot (a + b) = ac + ad + ae + af + bc + bd + be + bf.$$

Tym samym udowodniliśmy fundamentalne prawo, czyli fundamentalną regułę, mnożenia algebraicznego. Brzmi ona: Mając pomnożyć wyrażenie będące sumą kilku wyrazów, przez inne wielowyrazowe wyrażenie, mnoży się najpierw (z uwzględnieniem znaków liczbowych) [1] pierwszym wyrazem drugiego wielomianu wszystkie wyrazy pierwszego wielomianu, a następnie drugim wyrazem drugiego wielomianu wszystkie wyrazy pierwszego wielomianu itd., albo na odwrót. Bo właściwości przemienności i rozdzielności można stosować równolegle. Reguła wydaje się bardzo skomplikowana, jednak nie jest niczym innym jak tylko tym, czego uczyliśmy się jako mnożenia w szkole elementarnej. Co więcej, jest czymś prostszym jeszcze, bo mnożenie w szkole elementarnej uwzględniało obok rozdzielności i przemienności czynników jeszcze wartość miejsc w liczbie i porządek jednostek wyższych rzędów. I to też później pokażemy. Przedtem jednak jeszcze jedno łatwe mnożenie wielomianów algebraicznych (wyrażeń w postaci sumy wielu wyrazów).

$$(7a + 5b + 8c + 9d + e) \cdot (2f + 4g + 6h) = 14af + 10bf + 16cf + 18df + 2ef + 28ag + 20bg + 32cg + 36dg + 4eg + 42ah + 30bh + 48ch + 54dh + 6eh.$$

W otrzymanym wyrażeniu nie da się już nic napisać w prostszej postaci. Można by dokonać pewnych przekształceń, lecz na razie nie będziemy się tym zajmowali. Jak widać, liczby szczegółowe, współczynniki po prostu przez siebie pomnożyliśmy. W istocie nie różni się to niczym od mnożenia liczb ogólnych a, b, c itd. Tylko wskutek specjalnego algorytmu można było liczby szczegółowe niejako przetopić razem na nowe liczby. Właściwie powinnibyśmy

---

[1] I tu również stosuje się znane prawo kojarzenia rozkazów: Równe znaki dają plus, różne minus.

napisać najpierw 7a . 2f czyli 7 . 2 . a . f następnie 5b . 2f czyli 5 . 2 . b . f itd. Otóż może się również zdarzyć, że wskutek innego znowu algorytmu, także i liczby ogólne dadzą się niejako stopić. Mając np. pomnożyć (2a + 3b) . (5a + 7ab), musielibyśmy napisać:

$$(2a + 3b) \cdot (5a + 7ab) = 5a \cdot 2a + 5a \cdot 3b + 7ab \cdot 2a + 7ab \cdot 3b = 10aa + 15ab + 14aab + 21abb.$$

Ale my wiemy już, co oznacza a . a i b . b. A więc ostateczny wynik brzmiałby: $10a^2 + 15ab + 14a^2b + 21ab^2$.

Na podstawie ostatniego przykładu zdobędziemy nowe pojęcie. Mianowicie tak zwane „wyłączanie" czynników poza nawias. To „wyłączanie" jest następstwem prawa rozdzielności, właściwie jego odwróceniem. W zastosowaniu możemy za pomocą niego wyrażenia, nie zawierające nawiasów, przekształcić w wyrażenie z zespołem nawiasów, a raczej, ściślej mówiąc, w czynnik pomnożony przez wyrażenie z zespołem nawiasów. Posłużymy się ostatnio otrzymanym rezultatem:

$$10a^2 + 15ab + 14a^2b + 21ab^2.$$

Jeśli spytamy, która liczba występuje wszędzie, to na pierwszy rzut oka widać, że *a* spełnia ten warunek. Wyłączmy zatem *a* jako „wspólny czynnik".

$$10aa + 15ab + 14aab + 21abb.$$

Jaki jest drugi czynnik? Oczywiście 10a + 15b + 14ab + 21bb. A więc zamiast powyższego rezultatu możemy teraz napisać: a(10a + 15b + 14ab + 21bb), bo mnożenie znowu doprowadziłoby do pierwszego wyrażenia. Ale także w inny sposób możemy „wyłączać" poza nawias. Np.:

$2(5a^2 + 7a^2b) + 3(5ab + 7ab^2)$ albo
$10a^2 + b(15a + 14a^2 + 21ab)$ albo
$10a^2 + 15ab + 7ab\,(2a + 3b)$ albo
$10a^2 + ab[15 + 7(2a + 3b)]$ albo
$a\,\{10a + b[15 + 7(2a + 3b)]$ itd.

„Wyłączanie" poza nawias w zawiłych wyrażeniach jest sztuką, w której się trzeba wyćwiczyć. Często jednak ma ono ogromne zna-

czenie, bo przez przekształcenia, zwłaszcza ułamków, których liczniki i mianowniki są wyrażeniami algebraicznymi, umożliwia się upraszczanie (skracanie) ich. Ale nie uprzedzajmy toku rozważań. Raczej rozpatrzmy prawo rozdzielności przy użyciu liczb ujemnych. Napiszmy odpowiednie zadanie na razie w postaci „sumy algebraicznej"

$[(+a) + (-2b)] . [(+c) + (-3d)]$, wówczas otrzymamy:

$$(+c)(+a) + (+c)(-2b) + (-3d)(+a) + (-3d)(-2b) =$$
$$= ac - 2bc - 3ad + 6bd,$$

co również otrzymalibyśmy, mnożąc wprost $(a-2b)(c-3d) = ac - 2bc - 3ad + 6bd$. Znowu obowiązuje reguła, że mnożenie przy różnych znakach daje minus, przy równych znak plus. Otóż może ktoś spytać: Gdzież są znaki liczb w tym drugim przypadku? Odpowiemy: Należy ich szukać przed liczbami w postaci „stopu" rozkazów. (a—2b) algebraicznie oznacza właśnie $[+(+a)+(-2b)]$ albo $[-(-a)-(+2b)]$ albo $[+(+a)-(+2b)]$.

Przy mnożeniu dystrybutywnym natrafiają na te znaki nowe znaki liczbowe, tak że np. pierwsza liczba w wyniku mogła powstać z $+(+a) . +(+c)$ albo $(-a) . -(+c)$, co zawsze daje w końcu ac. Natomiast drugi wyraz mógł powstać w następujący sposób:

$+(-2b) . +(+c)$, albo $-(+2b) . +(+c)$ albo $+(-2b) . -(-c)$,

co zawsze da $-2bc$.

Rozszerzymy obecnie naszą regułę kojarzenia znaków liczbowych względnie rozkazów i powiemy: Jeżeli przy mnożeniu zejdzie się razem pewna ilość znaków liczbowych, tzn. jeśli należy je połączyć w jeden, wówczas każda ilość znaków plus zawsze daje znowu plus. W wypadku znaków minus daje znak plus tylko ich parzysta ilość, gdyż znaki minus łączą się parami w plus. Nieparzysta liczba znaków minus daje minus. Jeżeli natomiast zejdą się razem znaki plus i minus w dowolnej ilości, wtedy otrzymamy bez względu na ilość czynników dodatnich rezultat dodatni, o ile tylko znaki minus występują w ilości parzystej. W przeciwnym wypadku rezultat ujemny. A więc np.:

$(+a).(+b).(+c)$	$= (+abc)$	(ilość nieparzysta)
$(+a).(+b).(+c).(+d)$	$= (+abcd)$	(ilość parzysta)

$(-a).(-b).(-c).(-d) = (+abcd)$ (ilość parzysta)
$(-a).(-b).(-c) = (-abc)$ (ilość nieparzysta)
$(+a).(+b).(+c).(-d).(-e) = (+abcde)$ (parzysta ilość znaków minus)
$(+a).(+b).(-c).(-d).(-e) = (-abcde)$ (nieparzysta ilość znaków minus).

Obecnie, przy dostatecznej uwadze, jesteśmy w stanie wykonać każde mnożenie algebraiczne w zakresie liczb całkowitych. Obliczmy przykład nieco trudniejszy:

$$(5ab + 3ad + 9bc)(abc - 6de) =$$
$$= 5a^2b^2c + 3a^2bcd + 9ab^2c^2 - 30abde - 18ad^2e - 54bcde.$$

Dalszy przykład:

$$(a - b)(2a + 3b) = 2a^2 - 2ab + 3ab - 3b^2.$$

Tu wyłoniło się coś, czego jeszcze nie spotkaliśmy. Mianowicie ab występuje dwa razy. Raz jako $(-2ab)$, a drugi raz jako $(+3ab)$. Możemy i w tym wypadku dodawać względnie odejmować, ponieważ ab to tak samo wielkość algebraiczna, jak samo *a* czy *b*. A więc: $(-2ab) + (+3ab) = 1ab$ czyli ab. A zatem ostateczny wynik: $2a^2 + ab - 3b^2$. Przy takim dodawaniu (odejmowaniu) konieczna jest wielka ostrożność i staranność w zapisywaniu, aby nie zaszła jakaś pomyłka. Tylko wtedy można dodawać i odejmować, jeśli cała grupa liczb ogólnych jest ta sama. A więc np. $7a^2$ i $4a^2$, albo $5abc^2 - 3abc^2$. Natomiast niemożliwe byłoby przeprowadzenie redukcji dwu-wyrazowego wyrażenia $5abc^2 - 3ab^2c$ na wyrażenie jedno-wyrazowe. Bo abc^2 czyli abcc jest tak dalece różne od ab^2c czyli abbc, jak jabłko od gruszki, chociaż wydają się wzajemnie do siebie podobne. Podobieństwo nie mówi nic zgoła, a tylko bezwarunkowa równość rozstrzyga o możliwości dodawania (odejmowania).

Zbadajmy teraz ogólnie dalszy algorytm, mianowicie algorytm potęgowania. Co to jest potęgowanie, wiemy już. Jest to działanie konstruujące, składające, syntetyczne inaczej tetyczne, rozkaz, aby jakąś liczbę (podstawę potęgi) tyle razy użyć jako czynnika, jak to poleca umieszczony z prawej strony u góry mały wskaźnik (wykładnik potęgowy).

$a^2 = a.a$, $a^3 = a.a.a$, $a^6 = a.a.a.a.a.a$ itd. W jaki sposób

mam teraz mnożyć przez siebie potęgi? Np. a^2 przez a^7. Zapiszmy to sobie:

$$(a \,.\, a) \times (a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a).$$

Ponieważ występują tylko mnożenia, mogę napisać:

$$a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a = a^9.$$

W jakim związku z wykładnikiem 9 pozostają wykładniki 2 i 7? W bardzo prostym: 9 jest sumą $2 + 7$. Sprawa jest właściwie jasna. Każdy wykładnik nakazuje pomnożyć podstawę tyle razy przez siebie, ile wynosi jego ilość jednostek. Jeśli połączę znakiem mnożenia kilka potęg o tej samej podstawie, wówczas mam tę podstawę tyle razy przez siebie mnożyć, ile wskazują wszystkie wykładniki razem wzięte, a więc ich suma. Jest więc np. $a^{15} \,.\, a^6 = a^{15+6} = a^{21}$, $b^{10} \,.\, b^{11} \,.\, b^7 = b^{10+11+7} = b^{28}$ itd. Jeśli tę regułę chcę wyrazić ogólnym wzorem, mogę napisać:

$$a^n \,.\, a^m \,.\, a^r \,.\, a^s = a^{n+m+r+s} \text{ albo } b^c \,.\, b^d \,.\, b^f = b^{c+d+f} \text{ itd.}$$

Obecnie stawiam sobie inne, drugie zagadnienie. Co będzie, jeślibym chciał potęgę potęgować? Np. a^3 do potęgi piątej, czyli $(a^3)^5$. Tu musimy się zastanowić. Co to oznacza? Wszak nic innego jak

$$a^3 \,.\, a^3 \,.\, a^3 \,.\, a^3 \,.\, a^3 = a^{3+3+3+3+3} = a^{5.3}.$$

A więc znowu bardzo prosta reguła. Jeśli się potęgę potęguje, wówczas należy pomnożyć przez siebie wykładniki. Całkiem ogólnie $(a^n)^m = a^{nm}$, albo w wypadku bardziej skomplikowanym $[(b^a)^m]^r = b^{amr}$ itd.

Dla uzupełnienia naszego badania powtórzmy, że każda liczba do potęgi zerowej daje na wynik 1. Będąc w posiadaniu ogólnego sposobu zapisywania liczb możemy teraz twierdzić: $a^0 = 1$, gdzie a może przyjmować wszystkie wartości od jednego począwszy aż do dowolnie wielkiej liczby. Jest dalej $a^0 \,.\, a^n = a^{0+n} = a^n$, bo wszak też $1 \,.\, a^n = a^n$; $a^n \,.\, a$ to oczywiście $a^n \,.\, a^1 = a^{n+1}$. Jeżeli w końcu spytamy, ile wynosi $[(a^0)^3]^5$, to otrzymamy $a^{0.3.5}$, a więc a^0, czyli 1. To rzecz również jasna, wszak a^0 już samo przez się ma wartość 1, a jeden podniesione do każdej dowolnej potęgi znowu daje na wynik 1. Bo można 1 użyć jako czynnika ile razy się tylko chce, a wynik pozostanie równy 1.

Głębiej wnikający czytelnik dostrzeże tu osobliwy związek wszystkich trzech dotychczas znanych nam działań. Potęgować to znaczy tę samą liczbę przez siebie mnożyć. Mnożenie potęg powoduje dodawanie wykładników. Przy tym zaznaczmy jeszcze tylko, że ten cały algorytm to nic innego, tylko stale coraz wyżej spiętrzane dodawanie z równoczesnym podaniem, ile razy należy dokonać dodawania. Bo $3^2 = 3 \cdot 3$, to nic innego jak 3 użyte trzy razy jako składnik, a zatem $3 + 3 + 3$. A $3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, to znowu tylko 3 użyte jako składnik $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ razy, a zatem 81 razy. To zaś wynosi 243, czyli 3^5.

Znający maszyny do rachowania zrozumieją to dobrze. Bo każda maszyna do mnożenia na tym polega, że ta sama liczba jest tak długo dodawana do siebie, aż zostanie spełniony rozkaz mnożenia. Tzn., aż jednaki stale składnik doliczony zostanie do siebie taką ilość razy, jaką podaje mnożnik („wskaźnik" mnożenia). Aby nie wywołać zamętu, przerwijmy nasze rozważanie i stwierdźmy tylko, że dotychczas każda tetyczna operacja wynikała z bezpośrednio niższej. Jeśli przyjmiemy takie uporządkowanie: dodawanie, mnożenie, potęgowanie, to każde mnożenie jest dodawaniem jednakich składników (równych mnożnej) nakazanym przez mnożnik, a każde potęgowanie mnożeniem jednakich czynników (równych podstawie), przy czym tutaj wykładnik potęgowy rozkazuje, ile razy należy użyć podstawy jako czynnika.

Teraz nasuwa się od razu przypuszczenie, że dzielenie w podobny sposób jest związane z odejmowaniem. Domysł nasz jest zupełnie uzasadniony, jak pokaże prosty przykład. Odejmując np. od 120 kolejno liczbę 13 otrzymamy:

$$\begin{aligned}
120 - 13 &= 107 \quad (1.\ \text{odejmow.}) \\
107 - 13 &= 94 \quad (2.\ \text{odejmow.}) \\
94 - 13 &= 81 \quad (3.\ \text{odejmow.}) \\
81 - 13 &= 68 \quad (4.\ \text{odejmow.}) \\
68 - 13 &= 55 \quad (5.\ \text{odejmow.}) \\
55 - 13 &= 42 \quad (6.\ \text{odejmow.}) \\
42 - 13 &= 29 \quad (7.\ \text{odejmow.}) \\
29 - 13 &= 16 \quad (8.\ \text{odejmow.}) \\
16 - 13 &= 3 \quad (9.\ \text{odejmow.}).
\end{aligned}$$

Dalej nie można się posunąć w zakresie liczb dodatnich. Udało się nam odjąć dziewięć razy i trzy otrzymaliśmy jako resztę. „Dzielenie“ daje na wynik

$$120 : 13 = 9, \text{ a więc dokładnie to samo.}$$
$$-3$$

Tym samym zdemaskowaliśmy dzielenie jako powtarzanie odejmowania, co również wie każdy znający się na maszynach do liczenia. Zasadnicze pytanie dzielenia może więc brzmieć nie tylko: ile razy dzielnik mieści się w dzielnej i jaka reszta pozostaje? Lecz równie usprawiedliwione byłoby takie pytanie: Ile razy można odjąć jedną i tę samą wielkość od drugiej i co pozostanie w końcu, jeśli się nie chce posunąć w zakres liczb ujemnych?

Lecz oto znowu widzimy na naszym przykładzie wprost olbrzymią przewagę algorytmu dzielenia nad powtarzaniem odejmowania. Tam dziewięć odejmowań i tyleż źródeł możliwych omyłek, tu jeden jedyny chwyt, aby dojść do wyniku. Mechaniczna maszyna do liczenia może sobie pozwolić na powtarzanie odejmowania. Po pierwsze — nie myli się, ponieważ jej koła zębate mogą tylko przepisowo pracować. Po drugie — ilość obrotów jej części składowych da się prawie że dowolnie zwiększyć (dziś już za pomocą motorów elektrycznych). Po trzecie — oddanie przy pomocy maszyny naszego pisemnego postępowania przy dzieleniu jest w ogóle wcale niemożliwe, ponieważ w maszynie konieczne dla próby mnożenie występuje także w postaci powtarzania dodawania. Ale to tylko nawiasowa uwaga.

Aby dotrzeć do jakiegoś przynajmniej tymczasowego zamknięcia naszych badań algebraicznych, stajemy obecnie wobec problemu, jak wykonywać dzielenie na liczbach ogólnych. Zacznijmy od najprostszego przypadku. Co daje a : b na wynik? Odpowiedź: Nic innego, tylko a : b. Bo dzielenie nie ma własności kommutatywnej (przemienności), podobnie jak odejmowanie da się wykonać w jednym kierunku, ma charakter jednostronny. Co najwyżej moglibyśmy inaczej napisać, np. $a : b = \frac{a}{b}$. Nie oznacza to jednak żadnej korzyści, bo jest to tylko inny sposób pisania, rozkaz inaczej zanotowany. Podobnie jak a . b oznacza to samo, co ab lub $a \times b$. W końcu dla oznaczenia dzielenia moglibyśmy napisać „a dzielone przez b“ albo „a w ułamku nad b“. A nawet „a ma się w stosunku do b“ (przy czym jednak należało by dołączyć jeszcze następnik).

Podobnie jak przy mnożeniu, zbadamy trzy możliwości zachodzące w dzieleniu liczb ogólnych. Mianowicie zachowanie się pojedynczych wielkości ogólnych ze współczynnikami lub bez, zachowanie się potęg i zachowanie się „wielowyrazowych wyrażeń" (wielomianów).

Odnośnie do pojedynczych wielkości to już wspomniano, że przy ich nierówności (a : b) nic się więcej zrobić nie da. Stoję tu wobec rozkazu, który dopiero wtedy mogę szczegółowiej spełnić, gdy „podstawię" za ogólne liczby. Np. a = 12, b = 3. Wówczas jest oczywiście a : b = 12 : 3 = 4. Ale istnieją także inne konstelacje. Co to jest np. 3a : a? Pytamy tu, w jakim stosunku pozostaje ilość 3 jabłek do jednego jabłka. Albo ile razy mieści się jedno jabłko w liczbie trzech jabłek. Odpowiedź jasna: 3a : a = 3. A całkiem ogólnie n . a : a = n. Podobnie 15a : 3a = 5; ba : a = b. Dalej, ponieważ każda liczba dzielona przez siebie samą daje na wynik 1, jest a : a = 1. Jak sądzę, potrafimy pojąć, że 25abcd : 5ac równa się 5bd. Trzeba tylko przy każdym dzieleniu mieć przed oczyma „próbę". W ostatnim wypadku 5bd . 5ac = ? Wymnożenie daje natychmiast 25abcd i potwierdza nasze przypuszczenie. To zatem nie przedstawiałoby więcej żadnych trudności.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej zachowaniu się potęg wobec dzielenia. A mianowicie napisanych najpierw w postaci iloczynów. Co da na wynik

$$(a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a) : (a \,.\, a \,.\, a) = ?$$

Wyrażenie w pierwszym nawiasie mam podzielić najpierw przez *a*, potem jeszcze raz przez *a*, w końcu jeszcze raz przez *a*, bo na jedno przecież wychodzi, czy podzielę np. 27 przez 9 = 3 . 3, czy też najpierw przez 3, a potem jeszcze raz przez 3. Powyższe dzielenie *a*, wziętego sześć razy jako czynnik, przez *a*, wzięte jako czynnik trzy razy, daje na wynik wedle naszych dotychczasowych wiadomości

$$a \,.\, a \,.\, a \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 = a \,.\, a \,.\, a.$$

Albo $a^6 : a^3 = a^3$. Dalej (b . b . b . b . b . b) : (b . b) dałoby b . b . b . b . 1 . 1 czyli b . b . b . b . b = b^5, a więc otrzymałbym $b^7 : b^2 = b^5$. Mamy znowu przed sobą coś w rodzaju odbicia w lustrze i widzimy wyraźnie związek obu rozkładających, litycznych działań dzielenia i odejmowania. Bo $a^6 : a^3 = a^{6-3} = a^3$, zaś

$b^7 : b^2 = b^{7-2} = b^5$. Jako poważni algebraicy nie musimy już dłużej tracić słów, lecz utworzymy wzór $a^m : a^n = a^{m-n}$, który się sprawdza natychmiast przy $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 = 1$ i okazuje się celowym algorytmem. Oczywiście jest $a^m : a = a^{m-1}$ i $a^m : a^0$ czyli $a^m : 1 = a^{m-0} = a^m$. Każdorazowa próba przy pomocy mnożenia musi dać poprawny wynik. Np. $a^m : a = a^{m-1}$, próba $a \cdot a^{m-1} = a^1 \cdot a^{m-1} = a^{1+m-1} = a^m$ itd. Na zakończenie jeszcze trudniejszy przykład, dla pokazania równoczesnego funkcjonowania kilku algorytmów:

$$39a^7b^5c^rd^{m+2} : 13a^4c^sd^3 = 3a^{7-4} \cdot b^5 \cdot c^{r-s} \cdot d^{m+2-3} = 3a^3b^5c^{r-s}d^{m-1},$$

przy czym zauważymy, że niewystępowanie jakiejś potęgi w dzielniku [1] zawsze możemy tak przedstawić, jak gdyby występowała tam odpowiednia podstawa w potędze zerowej (co równa się jedności). W naszym przykładzie $39a^7b^5c^rd^{m+2} : 13a^4b^0c^sd^3$, co przy obliczaniu dla potęgi b daje $b^{5-0} = b^5$, a więc nie zmienia wyniku. W ogólności — co stwierdziliśmy już przy rozważaniu układów liczbowych — wprowadzenie potęgi zerowej okazuje się często użyteczne dla „eleganckiego" zaokrąglenia wzorów, przedstawiających symboliczny zapis jakichś praw.

Po krótkiej uwadze wstępnej odważymy się na przeprowadzenie najcięższego na razie zadania, na dzielenie wielomianów. Przy tego rodzaju wyrażeniach istnieją pewne zasady uporządkowania, które w wielu wypadkach jest niezbędne, chociaż przez „uporządkowanie" wartość wyrażenia się nie zmieni.

Każdy żołnierz wie, że ilość ludzi w kompanii, a także jej wartość bojowa wcale nie zmieni się przez to, jeżeli żołnierzom nie uszykowanym każę w kolumnie marszowej, czy też podczas parady ustawić się według wzrostu. A jednak coś na tym zyskuję przecież. Jeżeli np. z rozwiniętego szeregu każę przejść przepisowo w kolumnę marszową, wówczas najwyżsi maszerują w czołowych czwórkach oddziału i skutkiem swych większych kroków porywają w swe tempo towarzyszy z tyłu, odpowiednio coraz niższych. Także przy obrotach rozwiniętych linii obiera się najmniejszego żołnierza jako punkt obrotu, podczas gdy największy „skrzydłowy" ma do przebycia najdłuższą drogę. Krótko mówiąc, nasz system uporządkowania

[1] Później powiemy też o niewystępowaniu w dzielnej.

okazuje się w marszu celowym, ponieważ w pewien sposób stwarza wyraźne sytuacje, które w specjalnych celach można świadomie zużytkować.

Już raz spotkaliśmy się z takim systemem uporządkowania. Był to „porządek według wielkości" w układzie pozycyjnym. Nie jest to nic innego, jak tylko rozwijanie liczb według „rosnących" albo „malejących" potęg zasady układu; „rosnąco" lub „malejąco"— zależnie od tego, czy się patrzy na liczbę z tej czy innej strony. Na pewno zapisujemy w naszym układzie dziesiątkowym potęgi malejąco od strony lewej ku prawej. Bo 91 435 oznacza przecież $9 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.

Ten system zapisywania możemy obecnie przenieść na wyrażenia algebraiczne, o ile jako wykładniki potęgowe dane są liczby szczegółowe, albo jeśli wiemy z jakichkolwiek dodatkowych założeń, jak należy uszeregować co do wartości wykładniki ogólne.

$a^3 + a^7 + a^4 - a^2 + a^{16} - a^5$ możemy według malejących potęg a napisać także jako

$$a^{16} + a^7 - a^5 + a^4 + a^3 - a^2.$$

Jeślibyśmy natomiast mieli uporządkować
$a^m + a^r + a^s - a^b - a^d + a^h$ i wiedzielibyśmy ponadto, że wykładnik mający dalsze miejsce w alfabecie oznacza zawsze jakąkolwiek, na razie nie oznaczoną, ale niewątpliwie większą liczbę niż litera występująca na bliższym miejscu alfabetu, wówczas moglibyśmy uporządkować malejąco:

$$a^s + a^r + a^m + a^h - a^d - a^b.$$

Ponieważ zwykle staramy się wszystkie algebraiczne pojęcia przedstawiać możliwie najogólniej, idąc coraz dalej za tą myślą przewodnią natrafimy na pewne trudności. Mianowicie mogą się zdarzyć różne potęgi połączone w grupy znakiem mnożenia, jak $19a^2bc^7d^4$ albo $5a^7b^3c^5d^9$ itd. A dalej, może się zdarzyć, że gdy uporządkujemy wyrażenie według potęg a, pozostaną w bezładzie potęgi b; lub jeżeli według b albo c — pozostaną znów w bezładzie potęgi a, b oraz d itd. Nie ma z tego oczywiście żadnego innego wyjścia jak rozstrzygnięcie, co c h c e m y wybrać jako podstawę uporządkowania. Jeżeli pragniemy uporządkować książki w bibliotece według wielkości, wówczas nie możemy ich równocześnie upo-

rządkowywać według treści, o ile wielkość i treść nie są z góry w jakimś związku.

Weźmy się teraz śmiało do dzielenia wielomianów, zwłaszcza że czujemy się w posiadaniu wszystkich wstępnych wiadomości. Podzielmy np. złowrogo wyglądające wyrażenie

$$(10a^4b + 35a^5h + 45a^6b^2h - 4abc^2h - 14a^2c^2h^2 - 18a^3b^2c^2h^2)$$
$$\text{przez } (-2c^2h + 5a^3).$$

Pierwsza reguła: Oba wyrażenia należy uporządkować według malejących potęg pierwszej liczby ogólnej, a więc według malejących potęg a. Piszemy

$$(45a^6b^2h + 35a^5h + 10a^4b - 18a^3b^2c^2h^2 - 14a^2c^2h^2 -$$
$$- 4abc^2h) : (5a^3 - 2c^2h) = ?$$

Dalszy przebieg jest podobny do naszego dzielenia w układzie dziesiątkowym. Mianowicie najpierw próbujemy, ile razy mieści się pierwszy wyraz dzielnika ($5a^3$) w pierwszym wyrazie dzielnej ($45a^6b^2h$). Następnie sprawdzamy przez pomnożenie, przy czym pierwszy wynik (częściowy iloraz) mnożymy przez dzielnik i odejmujemy od dzielnej, względnie od pewnej ilości wyrazów dzielnej odpowiadającej wielomianowi, który jest dzielnikiem. Skoro nie znajdziemy już żadnego takiego wyrazu, od którego można odejmować, wówczas należy najbliższy taki nie nadający się do odejmowania wyraz przepisać poniżej i połączyć z pozostałą „resztą", jak wypadnie, za pomocą dodawania czy odejmowania. Znowu badamy, ile razy mieści się pierwszy wyraz dzielnika w tym wyrazie dzielnej, który zawiera najwyższą potęgę pierwszej ogólnej liczby. Wynik wchodzi do ilorazu. Następnie sprawdzenie mnożeniem. I tak dalej. Rachujemy więc:

$$\begin{array}{lll}
(45a^6b^2h + 35a^5h + 10a^4b - 18a^3b^2c^2h^2 - 14a^2c^2h^2 - 4abc^2h) : & & \\
\mp 45a^6b^2h \qquad\qquad \mp 18a^3b^2c^2h^2 & & : (5a^3 - 2c^2h) = \\
\hline
0 \quad + 35a^5h \qquad\qquad 0 & & = 9a^3b^2h + 7a^2h + 2ab. \\
\pm 35a^5h & & \mp 14a^2c^2h^2 \\
\hline
0 \quad + 10a^4b & & 0 \\
\pm 10a^4b & & \mp 4abc^2h \\
\hline
0 & & 0
\end{array}$$

Dzielenie nam wyszło (jak to zwykle mówią) i dało na wynik $(9a^3b^2h + 7a^2h + 2ab)$, a więc wyrażenie uporządkowane również wedle malejących potęg a. Odnośnie do powyższego schematu należy zauważyć, że odejmowanie wykonaliśmy symbolicznie po prostu przez zmianę znaków liczbowych, bo jak wiadomo, odejmowanie zmienia znaki w odjemniku na przeciwne. Następnie dodajemy algebraicznie, przez co otrzymujemy wynik. A więc przy podwójnym znaku, ważny jest ostatecznie tylko dolny. Mówiąc wyraźniej jeszcze, otrzymaliśmy przez pierwsze pomnożenie $(45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2)$. W dzielnej znajdujemy również obie te wielkości. Moglibyśmy więc napisać: $(45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2)$ w dzielnej mniej wynik z pomnożenia, a więc:

$$(45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2) - (45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2) =$$
$$= 45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2 - 45a^6b^2h + 18a^3b^2c^2h^2,$$

co oczywiście daje zero. Chcąc dalej dzielić, szukamy obecnie najwyższej potęgi a, jaka jeszcze nie zniosła się przy odejmowaniu i znajdujemy $35a^5h$. Dla przejrzystości piszemy ten wyraz pod kreską, jak gdyby chodziło o resztę i postępujemy dalej analogicznie do tego, co powyżej powiedziano.

Bynajmniej nie nasze to zadanie wykształcić mistrzów w rachunku algebraicznym. Staranny dobór przykładów do ćwiczeń można znaleźć w każdym podręczniku dla szkół średnich. Także algebra wielkiego Leonarda Eulera[1] stanowi w tym celu doskonały zbiór ćwiczeń. Ponieważ do całkiem innych celów dążymy, a chcemy tylko ukazać strukturę, układ, budowę matematyki, abyśmy sprostać mogli nawet rachunkowi całkowemu, zadowolimy się, na zakończenie tej części algebry stałych (oznaczonych) liczb ogólnych, dodatkiem jednego jeszcze bezpretensjonalnego zadania na dzielenie:

$$\begin{array}{l} (a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = a - b \\ \underline{-a^2 \mp ab} \\ 0 - ab + b^2 \\ \underline{\mp ab \pm b^2} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

[1] Wydana w znanym zbiorze tzw. „Reclam-Bibliothek".

Dalszy przykład:

$$
\begin{array}{l}
(a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2 \\
\underline{-a^3 \pm a^2b} \\
\quad 0 \quad -a^2b + b^3 \\
\quad\quad \underline{\mp a^2b \mp ab^2} \\
\quad\quad\quad 0 \quad + ab^2 + b^3 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{\pm ab^2 \pm b^3} \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

W ten sposób dotarlibyśmy do następnego punktu wypoczynkowego. Opanowaliśmy na razie cztery zasadnicze działania: dodawanie, odejmowanie, dzielenie i mnożenie, jak również i potęgowanie w zakresie liczb całkowitych we wszystkich układach liczbowych i na liczbach ogólnych (algebraicznych). W ten sposób zyskaliśmy przygotowanie, aby w pewnym zakresie zająć się obecnie rozwiązywaniem zagadek matematycznych, nauką o „niewiadomej x", nauką o równaniach, która będzie dla nas pomostem w drodze ku wyższym i najwyższym regionom naszej sztuki.

ROZDZIAŁ DWUNASTY

UŁAMKI ZWYCZAJNE

Jeszcze tylko jeden mały pagórek musimy przebyć, a będziemy mogli już bez przeszkód poruszać się po rozłogach zagadek matematycznych. Chodzi przy tym raczej o specjalny sposób zapisywania dzielenia, niż o jakąś zasadniczą nowość w zakresie naszego algorytmu.

Historycznie najpóźniej został wprowadzony jako znak dzielenia dwukropek, którego dotychczas używaliśmy prawie wyłącznie. Była w tym szczęśliwa ręka wielkiego Leibniza, który ten symbol stworzył.[1] Tak zwana kreska ułamkowa jako znak dzielenia jest znacznie starszego pochodzenia.

Przez ułamek rozumiano najpierw nic innego, jak tylko dzielenie jeszcze nie wykonane, albo nie dające się wcale doprowadzić do wyniku całkowito-liczbowego.

Wyjątkowo zaczniemy tym razem algebraicznie, od liczb ogólnych, dla których nie ustalamy w żaden sposób ani wartości, ani żadnych stosunków ilościowych, i napiszemy sobie jako typ ułamka np. $\frac{a}{b}$, co znaczy tyle, co a w ułamku nad b, albo a dzielone przez b, albo a: b, albo a w stosunku do b. Liczba stojąca nad kreską ułamkową nazywa się „licznikiem", liczba stojąca pod kreską ułamkową — „mianownikiem". Jeśli licznik równa się jedności, a więc ogólnie $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ itd., wówczas mówimy o „jednostkach ułamkowych". Jeśli licznik jest mniejszy od mianownika, wtedy ułamek nazywa się „właściwym"; można by to zaznaczyć ogólnie $\frac{a}{b}$, gdzie $a < b$. Występujący tu po raz pierwszy tak zwany znak nierówności ($>$, $<$) wskazuje zawsze swym ostrym końcem na mniejszą wielkość, rozwarciem na większą. Rzecz jasna, można to także

[1] W rozprawie „De maximis et de minimis" itd. Acta Eruditorum z r. 1684.

czytać na odwrót, tzn. od strony prawej ku lewej, a więc skoro ma się przed sobą np. $(5+7-2) > (1+3-2+1)$, to po wyznaczeniu wartości wyrażeń w nawiasach można powiedzieć: 10 jest większe od 3, albo 3 jest mniejsze od 10.

Wracając jednak do ułamków, nazwiemy zatem $\frac{a}{b}$ wtedy ułamkiem właściwym, jeśli $a < b$. „Niewłaściwym" zaś wówczas, jeśli $a > b$. W liczbach szczegółowych $\frac{1}{3}$ jest jednostką ułamkową, a równocześnie ułamkiem właściwym. $\frac{2}{3}$ jest ułamkiem właściwym. $\frac{6}{4}$ albo $\frac{3}{2}$ są to ułamki niewłaściwe, ponieważ każdy z nich da się napisać w postaci złożonej z liczby całkowitej i ułamka. Mianowicie $1+\frac{2}{4}$ albo $1+\frac{1}{2}$, lub $1\frac{2}{4}$, względnie $1\frac{1}{2}$.

Jednostki ułamkowe odgrywały szczególną rolę przy wykonywaniu obliczeń u starożytnych Egipcjan i Greków. Tak np. zamiast $\frac{7}{29}$ Egipcjanie pisali sumę jednostek ułamkowych $\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}$, a w Grecji tworzenie podobnych szeregów było na porządku dziennym. Dziś przywykliśmy raczej pomijać jednostki ułamkowe, ponieważ umiemy się obchodzić łatwo i pewnie z ułamkami każdego rodzaju i w każdej postaci. Tylko w rachunku całkowym odgrywa bardzo wielką rolę stosowanie rozkładu na ułamki częściowe, które przypomina takie rozwinięcie na jednostki ułamkowe.

Pojęcie ułamka uczy nas jednak jeszcze czego innego. Mianowicie daje nam ono w ogóle dopiero pojęcie rozkładania liczby całkowitej. $\frac{1}{3}$ jest trzecią częścią jedności. $\frac{5}{7}$ jest siódmą częścią pięciu jednostek itd. A zatem występuje tutaj, zwłaszcza przy ułamkach zwyczajnych coś, co wykracza poza istotę dzielenia. Nie jest to już wcale pytanie, na jakie liczby całkowite mogę rozłożyć jakąś liczbę całkowitą, jak np. przy $12:3=4$, gdzie właśnie cztery trójki dają dwanaście, albo 12 dzielone przez 3 daje liczbę 4; tu atoli problem brzmi: jakie liczby zawarte pomiędzy liczbami całkowitymi mogę uzyskać przez dzielenie na części liczb całkowitych. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{29}{38}$ leżą wszystkie pomiędzy 0 a 1. Moglibyśmy nieskończenie wiele takich liczb położyć pomiędzy zerem a jedynką, gdybyśmy zawsze wybierali licznik mniejszy od mianownika. Tak więc wszystkie ułamki właściwe leżą między zerem a jedynką. A ich wartość przy jednakowym liczniku staje się tym mniejsza, im większy jest mianownik. Np. ułamek $\frac{2}{25}$ jest większy niż $\frac{2}{729}$, co jasne dla każdego, kto po-

niekąd przenika istotę podziału na części. Jeśli licznik i mianownik są równe między sobą, wówczas chodzi o inny sposób zapisania liczby 1. Bo $\frac{a}{a}$ to tyle, co a : a, co zawsze daje na wynik jeden. Jeśli licznik jest 0, wówczas mamy do czynienia z mnożeniem zera przez odpowiedni ułamek. Moglibyśmy wówczas napisać także $0 \cdot \frac{a}{b}$ albo $\frac{0 \cdot a}{b} = \frac{0}{b}$, co oczywiście daje 0. Jeśli natomiast mianownik równa się 0, wtedy jesteśmy porządnie w kłopocie. Mamy coś podzielić przez zero. A więc $a : 0 = ?$ Gdybyśmy chcieli zrobić próbę, musielibyśmy szukać takiej liczby, która, pomnożona przez 0, dałaby na wynik *a*. Rzecz jasna — wymaganie niemożliwe. Bo przecież każda liczba, nawet największa, pomnożona przez 0 również 0 daje na wynik. A zatem $a:0$, inaczej $\frac{a}{0}$ są to wyrażenia nie mające znaczenia liczbowego, pozbawione „sensu". Dlatego, pisząc ogólnie iloraz $a:b$ czy $\frac{a}{b}$, pamiętać musimy, że choć litery *a* i *b* oznaczają całkiem dowolne liczby, mimo to dzielnik *b* nie może być nigdy zerem. Matematycznie dajemy temu wyraz pisząc $b \neq 0$, co oznacza, że *b* nie może równać się 0, czyli że *b* ma być różne od 0. Przekreślony znak równości $\neq$ oznacza „różny od", „nierówny", czy jak wreszcie chcemy to wyrazić.

Rozumując jednak inaczej (powiedziałbym „dynamicznie" a nie „statycznie") dojdziemy do następującego rezultatu: Mianowicie dzielmy kolejno jakąś liczbę, np. 5, przez każdy wyraz następującego nieskończonego ciągu liczbowego:

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; a_5, \ldots\ldots \; a_n, \ldots\ldots$$
$$\frac{1}{1}, \; \frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{1}{4}, \; \frac{1}{5}, \ldots\ldots \; \frac{1}{n}, \ldots\ldots$$

Łatwo odgadnąć prawidło tworzenia wyrazów tego ciągu. Mianowicie w liczniku piszemy zawsze liczbę 1, w mianowniku zaś po kolei wyrazy ciągu liczb naturalnych: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . .

Z dzielenia wypada:

$$5 : a_1 = 5 : \frac{1}{1} = 5 \cdot \frac{1}{1} = 5$$
$$5 : a_2 = 5 : \frac{1}{2} = 5 \cdot \frac{2}{1} = 10$$
$$5 : a_3 = 5 : \frac{1}{3} = 5 \cdot \frac{3}{1} = 15$$
$$5 : a_4 = 5 : \frac{1}{4} = 5 \cdot \frac{4}{1} = 20$$
$$5 : a_5 = 5 : \frac{1}{5} = 5 \cdot \frac{5}{1} = 25 \quad \text{itd....}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób nowy nieskończony ciąg liczbowy o wyrazach:

$$\begin{array}{ccccccccc} b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, \ldots\ldots & b_n \ldots\ldots \\ 5, & 10, & 15, & 20, & 25, \ldots\ldots \end{array}$$

Przypatrzmy się bliżej obu tym ciągom. Każdy wyraz ciągu a_n jest mniejszy od poprzedniego, ciąg jest więc „malejący". Każdy wyraz ciągu b_n jest większy od poprzedniego wyrazu, ciąg jest „rosnący".

Wyrazy ciągu a_n, malejąc, „zbliżają się" swą wartością do zera. „Dostatecznie dalekie" wyrazy różnią się od zera „dowolnie mało". Np. $a_{100} = \frac{1}{100}$ mniej się różni od zera niż wszystkie poprzedzające go wyrazy; jeszcze mniej $a_{500} = \frac{1}{500}$, a jeszcze mniej $a_{1000} = \frac{1}{1000}$.

Im wyższy jest wskaźnik wyrazu, im dalej ten wyraz w ciągu się znajduje, tym mniej różni się swą wartością od zera, tym bliższy jest zera, aczkolwiek żaden z wyrazów tego ciągu nie osiągnie wartości równej zeru.

Rozważaną własność tego ciągu możemy matematycznie ściślej wyrazić w ten sposób: Pomyślmy sobie dowolnie małą dodatnią liczbę, np. 0·001. Łatwo podać wskaźnik, od którego począwszy każdy następny wyraz ciągu będzie się od zera różnił mniej niż o 0·001. Bo $a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0{\cdot}001$, a więc a_{1001} i następne wyrazy różnią się od zera mniej niż o 0·001. Jeśli obiorę 0·0001, to już wyraz $a_{10001} = \frac{1}{10001}$; następne wyrazy różnią się od zera mniej niż 0 0·0001. Obierając 0·000 001 widzimy, że już począwszy od $a_{1\,000\,001} = \frac{1}{1\,000\,001}$ wszystkie dalsze wyrazy różnią się mniej niż o 0·000 001.

Innymi słowy: Do k a ż d e j dowolnie małej dodatniej liczby można znaleźć taki wskaźnik, od którego począwszy wszystkie wyrazy ciągu różnić się już będą mniej niż wynosi owa pomyślana liczba. Krótko i nieściśle wyrażamy to, mówiąc, że „dostatecznie dalekie" wyrazy różnią się od zera „dowolnie mało".

To, co tu poruszyliśmy w rozumowaniu tylko mimochodem, należy właściwie już do analizy nieskończonościowej i nazywa się „wyznaczaniem granicy". O ciągu a_n mówimy bowiem, że posiada granicę równą zeru, albo inaczej, że dąży do zera. Aby zaznaczyć, że 0 jest granicą ciągu a_n piszemy:

$$\lim a_n = 0 \quad \text{albo} \quad a_n \to 0.$$

Znak *lim* jest skróceniem łacińskiego wyrazu *limes* (granica). Powyższe symbole czytamy: „limes $a_n = 0$“, albo: „granicą ciągu a_n jest 0“, albo: „a_n dąży do granicy 0“.

Wróćmy do ciągu b_n. Wiemy już, że to ciąg „rosnący“. Jak wielką jednak wartość osiągnąć mogą „dostatecznie dalekie“ wyrazy naszego ciągu? Oponent podał nam liczbę 1 000, przypuszczając, że tej wartości żaden wyraz ciągu b_n nie przekroczy. Po chwili namysłu odpowiadamy: Wszak $b_{200} = 5 : a_{200} = 5 : \frac{1}{200} = 5 . \frac{200}{1} = 1\,000$, a więc b_{201} i każdy następny wyraz jest już większy od 1 000. Oponent nasz tak łatwo nie ustąpi. Podał teraz liczbę 100 000. Lecz znów znajdujemy, że $b_{20\,000} = 5 : \frac{1}{20\,000} = 100\,000$, zatem każdy wyraz od $b_{20\,001}$ począwszy jest większy od 100 000. A 1 000 000 przekroczy każdy wyraz ciągu b_n, którego wskaźnik będzie większy od 200 000.

Oponent już się dłużej nie spiera, bo przekonał się, że do każdej, dowolnie wielkiej liczby dobrać możemy taki wskaźnik, od którego począwszy każdy wyraz ciągu b_n jest już większy, niż podana liczba. Fakt ten zapisujemy krótko:

$$b_n \to \infty, \text{ albo } \lim b_n = \infty$$

i czytamy: „ciąg b_n dąży do nieskończoności“. Teraz wreszcie możemy wypowiedzieć rezultat, o który nam właśnie chodziło. Wiemy mianowicie, że

$$\frac{5}{a_n} = b_n \quad \text{przy czym} \quad \begin{matrix} a_n \to 0 \\ b_n \to \infty \end{matrix}$$

$$\text{a więc } \frac{5}{a_n} \to \infty \text{ gdy } a_n \to 0, \quad \text{albo inaczej}$$

$$\lim \frac{5}{a_n} = \infty \text{ gdy } a_n \to 0.$$

Lecz karygodnie daleko oddaliliśmy się od naszych ułamków. A jednak posuniemy się w tym jeszcze dalej, ponieważ właśnie niedawno wymieniliśmy słowo „stosunek“. Jakiż to znowu dalszy sens dzielenia ma oznaczać, jeśli powiem: „a ma się w stosunku do b“ i zamiast tego napiszę $\frac{a}{b}$ lub a : b? Najprościej będzie to można poznać, nadając sprawie sens geometryczno-metryczny. Dajmy na to, że należało zmierzyć długość krawędzi prostokątnej płyty stołowej i ustalono 6 metrów długości i 2 metry szerokości. Każde dziecko powie od razu, że długość w stosunku do szerokości ma się tak, jak 6 do 2. Inaczej $6 : 2 = 3$, tzn. właśnie, że płyta stołu jest trzy razy tak długa jak szeroka. W tak zwanym „stosunku“ przyj-

muje się zatem jedną z porównywanych (branych w „stosunku" do siebie) wielkości za jednostkę miary względem drugiej. Mógłbym mianowicie także powiedzieć w ten sposób: Szerokość ma się w stosunku do długości jak $\frac{2}{6}$ lub $\frac{1}{3}$, czyli szerokość płyty stołowej jest jedną trzecią długości. Wyznaczyć jednak miarę jakiejś długości znaczy znaleźć, ile razy odpowiadająca jej jednostka mieści się w całości. To jednak znowu oznacza: podzielić przez jednostkę. W pierwszym wypadku szerokość była jednostką. Otóż długość zawierała trzy jednostki. W drugim wypadku jednostką była długość, a szerokość zawierała jedną trzecią jednostki. Jeśli jednak obecnie odroczymy na później kwestię, którą z rozważanych wielkości przyjąć za jednostkę, a weźmiemy skądinąd odpowiednią obu wielkościom jednostkę, np. metr, to możemy powiedzieć: Długość do szerokości (jeśli obie wyrażono w metrach) ma się jak 6 : 2, inaczej $\frac{6}{2}$. Całkiem ogólnie: Długość w stosunku do szerokości ma się jak a : b, inaczej $\frac{a}{b}$, wyrażone w jakiejkolwiek (tej samej) jednostce.

Takie dwa stosunki, pomiędzy którymi znajdujący się znak równości nakazuje ich identyczność, nazywa się „proporcją" Np.:

$$a : b = 6 : 3 \quad \text{albo}$$

$$27 : 9 = 15 : 5 \qquad \text{inaczej} \quad \frac{27}{9} = \frac{15}{5} \qquad \text{itd.}$$

Ponieważ jednak proporcja odpowiada pewnej określonej postaci równań, poprzestaniemy na razie na tej wzmiance, a bliższe badanie przeprowadzimy dopiero przy równaniach.

Obecnie jednak musimy się wreszcie zająć naszymi ułamkami, a przede wszystkim musimy zbadać ich algorytm, prawa działań odnoszące się do ułamków.

Najpierw dodawanie i odejmowanie. Ułamki, jak mimochodem stwierdziliśmy, są to nowe liczby pośrednie, zawarte pomiędzy liczbami całkowitymi. Ułamki właściwe leżą stosownie do wartości pomiędzy 0 a 1, niewłaściwe odpowiednio gdzie indziej w ciągu liczb całkowitych. Rzecz jasna, używa się też przed ułamkami znaków liczbowych. A zatem istnieją ułamki dodatnie i ujemne.

Jeśli ułamki zwyczajne[1] potraktujemy jako nowe liczby nie uwzględniając czy są „właściwe" czy „niewłaściwe", wówczas możemy je przedstawić sobie jako jabłka, gruszki itd. Jedna trzecia

[1] Odgraniczenie od tak zwanych „ułamków systematycznych", znanych nam jako ułamki dziesiętne, nastąpi później.

niech będzie jabłkiem, jedna czwarta gruszką, jedna siódma cytryną. Mianownik rozstrzyga wyłącznie o charakterze ułamka. On nadaje miano ułamkowi. $\frac{3}{4}$ oznacza trzy razy $\frac{1}{4}$. Licznik zatem jest współczynnikiem, a $\frac{3}{4}$ można by przedstawić jak $3\left(\frac{1}{4}\right)$, a więc trzy gruszki nowego, ułamkowego gatunku. Przez takie proste rozważanie otrzymuje się automatyczny algorytm dodawania i odejmowania ułamków. Dodawać i odejmować można wyłącznie ułamki jednako mianowane. Tzn., można je stopić razem, sprowadzić do wspólnego mianownika, zapisując to w następujący sposób:

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-\frac{2}{3}+\frac{0}{3}=\frac{1+5+7-2+0}{3}=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}.$$

Jeśli natomiast mamy do czynienia z różnymi mianownikami, wówczas muszę najpierw szukać nowego wspólnego mianownika. Mogę chyba sposób, jak się to robi, założyć jako znany, a wobec tego zanotować tylko przykład na taką „najmniejszą wspólną wielokrotność".

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{5}{8}-\frac{4}{13}=?$$

Tutaj wspólny mianownik wynosi $3.5.8.13$, a więc 1560. Aby wszystkie ułamki sprowadzić do 1560-tych, muszę teraz oczywiście zmienić liczniki tak, aby każdy ułamek zachował dawną swą wartość. Ułamek $\frac{1}{3}$ np. zapisany w 1560-tych równa się $\frac{520}{1560}$, ponieważ przez uproszczenie znowu otrzymam $\frac{1}{3}$. Praktycznie należało by spytać, przez co wypadnie pomnożyć licznik, aby otrzymać ułamek o wartości tej samej, co poprzednio. Ponieważ 1560 równa się $3.5.8.13$, byłaby więc $\frac{1}{3}$ równa $\frac{1.5.8.13}{3.5.8.13}$ itd. Nasz rachunek daje zatem:

$$\frac{1.5.8.13}{3.5.8.13}+\frac{2.3.8.13}{5.3.8.13}+\frac{5.3.5.13}{8.3.5.13}-\frac{4.3.5.8}{13.3.5.8}=\frac{520+624+975-480}{1560}=\frac{1639}{1560}.$$

W liczbach ogólnych wyglądałoby dodawanie wzgl. odejmowanie ułamków w następujący sposób:

$$\frac{2a^2b}{5c}+\frac{3df^2}{7bh}-\frac{19abcd^2}{3h^2m}=$$

$$=\frac{2.7.3a^2b^2h^3m+3.5.3cdf^2h^2m-19.5.7ab^2c^2d^2h}{5.7.3.b.c.h^3m}=$$

$$=\frac{42a^2b^2h^3m+45cdf^2h^2m-665ab^2c^2d^2h}{105bch^3m}=$$

$$=\frac{42a^2b^2h^2m+45cdf^2hm-665ab^2c^2d^2}{105bch^2m}$$

Sądzę, że w powyższym ogólnym wypadku wystąpiła przejrzyście struktura dodawania ułamków i sprowadzanie do wspólnego mianownika. W przypadku, gdy wspólny mianownik powstał z iloczynu wszystkich mianowników, należy każdy licznik pomnożyć przez wszystkie mianowniki pozostałych ułamków, aby go zamienić na ułamki o jednakowym mianowniku, a pomimo to zachować wartość równą poprzedniej jego wartości.

Ujmując ułamki jako złożone z nadającej im niejako miano „jednostki ułamkowej" (1 dzielone przez mianownik) i z współczynnika (licznika), otrzymuje się natychmiast regułę mnożenia. Mogę pomnożyć ułamek przez liczbę całkowitą w ten sposób, że pomnożę jego licznik (współczynnik). Trzy razy jedna siódma to jest $3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) = \frac{3}{7}$. Albo 6 razy $\frac{4}{29} = 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{29}\right) = 24 \left(\frac{1}{29}\right) = \frac{24}{29}$. Ogólnie: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$. Że jednak wartość ułamka zwiększy się nie tylko wtedy, gdy pomnożę licznik, ale także, gdy zmniejszę mianownik, mogę też w inny sposób mnożyć. Dwa razy jedna czwarta to także jeden raz wzięta jedna druga. Inaczej $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4:2} = \frac{1}{2}$, co oczywiście otrzymałbym także jako $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ogólnie: $a \cdot \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{b}{c:a}$. Tę drugą regułę stosuje się zamiast „upraszczania". Np. $9 \cdot \frac{5}{27}$ można napisać jako $\frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 3} = \frac{5}{(9 \cdot 3):9}$, a więc jako $\frac{5}{3}$. A to samo otrzymałbym, gdybym właśnie $\frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 3}$ od razu uprościł przez 9.

Mając pomnożyć ułamki przez siebie, wykona się to, mnożąc przez siebie wszystkie mianowniki, osobno zaś wszystkie liczniki. Np.:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{aceg}{bdfh}$$

albo w liczbach szczegółowych

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{9}{12} = \frac{90}{1008} = \frac{45}{504} = \frac{5}{56}.$$

W ostatnim przykładzie liczbowym mógłbym jeszcze przed wykonaniem mnożenia „uprościć". Mianowicie każdy licznik mogę uprościć z którymkolwiek mianownikiem, o ile tylko posiadają wspólny podzielnik, ponieważ w wyniku wszystkie liczniki jako czynniki tworzą nowy licznik, a wszystkie mianowniki jako czynniki — nowy mianownik. Jednak i to również założyć mogę z góry

jako znane, ponieważ należy to do najbardziej elementarnych rachunków.

Pozostało by więc omówić jeszcze tylko dzielenie na ułamkach i potęgowanie ułamków. Zajmijmy się najpierw potęgowaniem, ponieważ stanowi ono pewną odmianę mnożenia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 \text{ znaczy } \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a.a.a.a.a}{b.b.b.b.b}=\frac{a^5}{b^5}.$$

Z tego można wprost odczytać regułę, która mówi, że należy potęgować tak licznik jak i mianownik wspólnym wykładnikiem potęgowym.

Przy wyprowadzaniu dzielenia ułamków przez liczby całkowite nie ma początkowo nic do wyjaśnienia. Ponieważ licznik jest niejako ilością n-tych części, więc po prostu dzielimy licznik. $\frac{3}{4} : 3$ to jest oczywiście $\frac{1}{4}$, podobnie jak 3 jabłka podzielone przez 3 dają na wynik jedno jabłko. Bardziej zawiłą staje się sprawa, gdy staniemy wobec pytania, jak podzielić ułamek przez jakiś drugi ułamek, lub jak podzielić liczbę całkowitą przez ułamek. Ilorazu $5 : \frac{3}{4}$ nie mogę sobie natychmiast wyobrazić. W każdym razie wynik jest większy od 5, bo $\frac{3}{4}$ jest mniejsze niż 1. Ale jak wielki jest ten wynik?

Podobnie jak starożytni Egipcjanie i Grecy spóbujmy się uciec do „jednostek ułamkowych". Wszelako w inny sposób. Mianowicie rozumujemy tak: Jeślibym np. miał podzielić 30 przez 15, to mogę także napisać $30 : (5 . 3)$, co w istocie znaczy to samo. Teraz wolno mi liczbę 30 podzielić najpierw przez 5, co daje 6, po czym znowu 6 dzielić dalej przez 3, by jako ostateczny rezultat otrzymać 2. Jednakowoż mógłbym także najpierw podzielić 30 przez 3, a potem 10 podzielić przez 5, przy czym znowu otrzymałbym 2. Postąpmy podobnie z naszym ułamkiem. Ponieważ mamy podzielić 5 przez $\frac{3}{4}$, napiszmy $5 : (3 . \frac{1}{4})$. Obecnie podzielmy najpierw przez $\frac{1}{4}$. Ten ułamek mieści się w jednostce cztery razy, w następstwie tego w 5 jednostkach dwadzieścia razy. Teraz muszę dalej dwadzieścia podzielić przez trzy, co daje $\frac{20}{3}$ czyli $6\frac{2}{3}$. Spróbujmy na innym przykładzie: Dajmy na to 7 mamy podzielić przez $\frac{5}{9}$. A zatem $7 : (5 . \frac{1}{9})$. Ułamek mieści się w 7 jednostkach 63 razy. 63 znowu należy podzie-

lić przez 5. To daje $\frac{63}{5}$ czyli $12\frac{3}{5}$. Jeśli bliżej rozpatrzymy przebieg, odkryjemy, że należy pomnożyć dzielną przez mianownik „jednostki ułamkowej", a następnie podzielić przez licznik ułamka, który jako drugi czynnik znajduje się w nawiasie. Ogólnie:

$$\text{Dzielna} : \frac{\text{licznik}}{\text{mianownik}} = \text{dzielna} : \left(\text{licznik} \times \frac{1}{\text{mianownik}}\right) =$$
$$= (\text{dzielna} \times \text{mianownik}) : \text{licznik}.$$

Otóż, ostatni wynik mógłbym także napisać tak:

$$\text{Dzielna} : \frac{\text{licznik}}{\text{mianownik}} = \text{dzielna} \times \frac{\text{mianownik}}{\text{licznik}},$$

ponieważ poprzedni rezultat ostateczny da się także napisać

$$\frac{\text{dzielna} \times \text{mianownik}}{\text{licznik}}.$$

Tym samym doszliśmy do pojęcia „odwrotności" ułamka. Odwrotność otrzymamy, jeśli zamienimy licznik z mianownikiem. Odwrotnością $\frac{3}{4}$ jest $\frac{4}{3}$, dla $\frac{5}{9}$ ułamek $\frac{9}{5}$, ogólnie: odwrotnością $\frac{a}{b}$ jest ułamek $\frac{b}{a}$. Co więcej, ponieważ mówiliśmy wyłącznie o „dzielnej" a wcale nie twierdziliśmy, jakoby ta dzielna koniecznie musiała być liczbą całkowitą (zwłaszcza, że funkcja dzielenia rozgrywa się tu wyłącznie w dzielniku, polegając na zmianie rozkazu i symbolu), możemy obecnie całkiem ogólnie twierdzić, że dowolną liczbę dzieli się przez ułamek, mnożąc ją przez jego odwrotność. A zatem $n : \frac{a}{b} = n \cdot \frac{b}{a}$, przy czym n może być jakąkolwiek liczbą ogólną lub szczegółową, dodatnią lub ujemną, całkowitą lub ułamkową. Przeto jest także

$$\frac{n}{m} : \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \cdot \frac{b}{a} = \frac{nb}{ma}.$$

Spróbujmy rozwiązać nasze pierwsze przykłady według nowej reguły: $5 : \frac{3}{4} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$; $7 : \frac{5}{9} = 7 \cdot \frac{9}{5} = \frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$. Nasz algorytm działa zatem sprawnie. Prócz tego da się sprawdzić niejako na „chłopski rozum". Co prawda, całkiem przejrzyście tylko dla jednostek ułamkowych. Mianowicie, jeżeli mam podzielić jakąś

liczbę np. przez $\frac{1}{2}$, to rzecz jasna, że iloraz musi być podwójną liczbą dzielnej, a więc ta liczba razy 2, inaczej razy $\frac{2}{1}$, ponieważ każdą liczbę całkowitą mogę napisać jako ułamek o mianowniku 1. Po drodze przerachujmy jeszcze parę przykładów liczbowych:

$$\frac{5}{3} : \frac{6}{8} = \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{6} = \frac{40}{18} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$$

$$\frac{17}{19} : \frac{9}{13} = \frac{17}{19} \cdot \frac{13}{9} = \frac{221}{171} = 1\frac{50}{171}.$$

Nasze rozważania prowadzą nas do pojęcia ułamka podwójnego (piętrowego), co w istocie nie stanowi niczego innego, tylko odmienny sposób zapisywania dzielenia ułamka przez ułamek. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ mogę napisać $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$,[1] przy czym w obu wypadkach otrzyma się na wynik $\frac{ad}{bc}$. Gdybym miał jednak $a : \frac{c}{d}$, to mogę napisać $\frac{a}{\frac{c}{d}}$ lub $\frac{\frac{a}{1}}{\frac{c}{d}}$ i otrzymam $\frac{ad}{c}$. Jeśliby wreszcie chodziło o dzielenie $\frac{a}{b}$ przez c, należało by napisać ułamek podwójny $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}$ i obliczyć $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c}$, a więc jako wynik $\frac{a}{b \cdot c}$. Ostatni wypadek pokazuje nam zarazem, jak należy dzielić ułamek przez liczbę całkowitą.[2] Mianowicie mnoży się go przez odwrotność liczby całkowitej, przedstawionej uprzednio jako ułamek o mianowniku 1. A zatem: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$.

To stwierdzenie dostarcza nam dalszą ogólną regułę. Ponieważ dzielenie dwóch liczb całkowitych możemy także przedstawić jako dzielenie ułamków, np. $a : b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$, widzimy z tego, że zamiast jakiegokolwiek dzielenia liczb całkowitych, można zawsze mnożyć przez odwrotność dzielnika. Np.

$$100 : 25 = 100 \cdot \frac{1}{25} = \frac{100}{25} = 4.$$

---

[1] Przy ułamku podwójnym należy zaznaczyć tak zwaną „główną" kreskę ułamkową albo przez przedłużenie, albo przez pogrubienie jej.

[2] Rzecz jasna, można ułamek podzielić przez liczbę całkowitą także w ten sposób, że się licznik ułamka (współczynnik) dzieli przez liczbę całkowitą $\left(\frac{5}{6} : 5 = \frac{1}{6}\right)$.

Ten algorytm znajduje najdalej idące zastosowanie w praktycznym rachunku i przy konstrukcji oraz obsłudze mechanicznych maszyn do liczenia.

Uwzględniliśmy chyba tyle rozważań nad ułamkami zwyczajnymi i to nie celem zupełnego wydoskonalenia się w rachowaniu, lecz celem oświetlenia zasadniczych własności, że możemy przejść do zapowiedzianych już dawno „równań".

ROZDZIAŁ TRZYNASTY

RÓWNANIA

Napomknęliśmy już raz, że w nauce o równaniach pewną specjalną rolę odgrywa „niewiadoma x". Twierdziliśmy dalej, że równanie jest algorytmem, misternie pomyślaną maszyną pamięciowo-rachunkową do pisemnego rozwiązywania rozmaitych zagadek. W końcu stwierdziliśmy, że znak równości w równaniu nie oznacza zwyczajnego konstatowania równości, ale po prostu pewien rozkaz. Mianowicie rozkaz dobrania takiej wartości na x, żeby równanie — jak się to mówi — zostało spełnione, czyli aby faktycznie uzyskana została równość.

Nie teoretyzując jeszcze zupełnie postawmy sobie sami taką zagadkę. Pytamy zatem: „Jak wielką jest liczba x, liczba bynajmniej mi nie znana, która spełnia następujący warunek: Mam ją najpierw pomnożyć przez 7, dodać do tego 19, odjąć 4, a po tym wszystkim powinienem otrzymać znowu liczbę x, tym razem pomnożoną przez 10". Zapisując matematycznie:

$$7x + 19 - 4 = 10x.$$

Oczywiście mogę najpierw wyliczyć, co się tylko da wyliczyć. Otrzymam:

$$7x + 15 = 10x.$$

Następnie mógłbym za x wstawiać liczby, od 1 począwszy i sprawdzać, aż wreszcie przy $x = 5$ otrzymałbym równość

$$35 + 15 = 50.$$

Zagadka byłaby więc rozwiązana. Liczbą x jest 5. Takie postępowanie ma wszystkie inne cechy, prócz jednej: nie zadowala na-

szych wymagań. Po pierwsze nie wiem jeszcze zupełnie, czy liczba x jest liczbą całkowitą, czy też może ułamkiem. Nie wiem dalej, czy jest dodatnia, czy ujemna. A w końcu nie wiem, czy oprócz 5 nie ma jeszcze nieskończenie wielu innych rozwiązań.

Zanim jednak przystąpimy do szukania algorytmu dla naszych równań, poddamy głębszej rozwadze samą nazwę i istotę równania. Proszę mi wybaczyć herezję. Ale „równanie" to wcale nie jest trafne słowo na oznaczenie tego, co się tu dzieje. Łacińskie *aequatio* było o wiele lepsze. Słowa pochodzące od czasowników i zakończone na „tio" oznaczają w języku łacińskim zawsze jakąś czynność. *Aequatio* to zatem „tworzenie równości", „doprowadzanie do równości", podobnie jak *privatio* (od *privare* — rabować) znaczy „obrabowanie", „pozbawienie" czegoś. Słowo „przyrównywanie", „wyrównywanie" itd. oddawałoby lepiej sens. Samo „równanie" jest nieco blade. Ponieważ jednak nie potrafimy nic lepszego zaproponować, nie bawmy się w krytyków i opozycjonistów. Nasze roztrząsania językowe podjęliśmy tylko w tym celu, aby sens słowa dokładniej opisać, przy czym zdajemy sobie sprawę z tego, że zaczepianie wyrażeń fachowych, ogólnie używanych kryje w sobie zawsze coś niebezpiecznego.

Stwierdzamy zatem, że przez „równanie" rozumie się żądanie, aby coś wyrównać, doprowadzić do równowagi albo w równowadze utrzymać. Takie żądanie jednak byłoby głupie i zbyteczne, gdyby równość już z góry zachodziła. Ona tylko p o w i n n a właśnie wystąpić. Bo mam ją, przez odpowiedni dobór „niewiadomej x", dopiero wywołać.

Nie posunęliśmy się ani nawet o krok naprzód. To znowu oznacza tylko tyle: mamy obrać na x coś odpowiedniego. Jednakże koniec końców jest to znowu tylko próbowanie, przed czym się właśnie wzbraniamy.

A jednak istniałaby przecież pewna możliwość, pozwalająca znaleźć „niewiadomą x" na drodze rachunkowej, a więc z koniecznością stanowiącą istotę algorytmu. Mianowicie, gdyby mi się udało przenieść wszystkie x na jedną stronę równania, a wszystkie pozostałe liczby na drugą, musiałbym w końcu otrzymać równanie w postaci $x = a$, albo $nx = b$.

Gdybym już był tak daleko, mógłbym problem uważać za rozwiązany. Bo $x = a$ jest wprost rozwiązaniem równania, zaś $nx = b$ — na przykładzie liczbowym np. $3x = 9$ — łatwo można by

rozwiązać. Bo skoro 3x równa się 9, wtedy przecie x równe jest liczbie 3. Albo ogólnie przy $nx = b$ (o ile $n \neq 0$) jest $x = \frac{b}{n}$.

Zanim jednak dojdzie się do takiej ostatecznej formy, która by przy tym dała jeszcze pewność, że istnieje jedno tylko rozwiązanie, musi nawet nie bardzo zawiłe równanie przejść kolejno tyle zmian, że nie sprostałoby temu podejście do rzeczy na chłopski rozum. Potrzeba nam przeto koniecznie jakiegoś algorytmu, dającego się ogólnie stosować i któremu można by zaufać, gdyż można łatwo, a zwłaszcza przy użyciu liczb ogólnych, znaleźć się w labiryncie, z którego nie widać już żadnego wyjścia. Również historycznie bardzo długa to była droga, zanim algorytm taki znaleziono. Zupełną ścisłość reguł w nauce o równaniach zyskano dopiero wskutek rozkwitu algebry w XVI i XVII stuleciu.

Zanim przystąpimy do wyjaśnienia algorytmu, stwierdźmy wyraźnie jeszcze jeden szczegół. W każdym równaniu występują dwa różne rodzaje wielkości czy liczb, których role są najzupełniej odmienne. Niewiadoma, owo x[1] i tak zwane „stałe" lub — jak się je w równaniach najczęściej nazywa — „wyrazy wolne", które od początku rachunku już są znane, względnie które można tak traktować, jak gdyby były znane. Nie troszcząc się jeszcze o reguły rozwiązywania, postarajmy się uwydatnić ową kardynalną różnicę na przykładach. Kto jej niejako nie wyczuwa, absolutnie nie może piąć się w wyższe dziedziny matematyki. Niewiadoma x i „stałe", to wprost różne rasy liczb, jeśli wolno użyć takiego porównania. „Stałe" są oporne, bezwładne, konserwatywne. x jest ruchliwe i wieloznaczne, dopóki nie znajdzie swej właściwej wartości. Dopiero wtedy i tylko wtedy również x staje się liczbą jednoznaczną i stałą. Przedtem jest, jakby powiedział gracz w karty, „jolly Jocker'em". Wszelako tylko w zasadzie. Bo w oznaczonym równaniu x ma z góry określoną wartość, tylko jeszcze nie znalezioną. Jeślibym więc miał np. równanie:

$$7x + 19 - 4 = 10x,$$

wtedy 19 i 4 to są „stałe", 7x i 10x to wielokrotności niewiadomej. Można by też powiedzieć, że niewiadoma występuje z dwoma różnymi współczynnikami. Przypuśćmy, że dane jest równanie:

---

[1] Rozmyślnie mówi się na razie tylko o j e d n e j niewiadomej.

$$7x + 13x + 9x - 2x + 25 = 106,$$

wówczas można oczywiście przeprowadzić dodawanie i odejmowanie niewiadomych. Wszak to także jabłka, tylko że jeszcze nie określonej wielkości. A dalej, istnieje żądanie, że x w każdym wypadku oznacza jedno i to samo. Takie żądania są niezależne od tego, iż chwilowo nie znamy wielkości. Bo jeśli np. powiem, że 5 gwiazd stałych więcej 3 gwiazdy stałe mniej 4 gwiazdy stałe, to są 4 gwiazdy stałe, to bynajmniej nie trzeba wiedzieć, jak wielkie mogą być te gwiazdy stałe. Jest to suma algebraiczna jednoimiennych wielkości. Mielibyśmy więc:

$$7x + 13x + 9x - 2x + 25 = 106 \quad \text{albo} \quad 27x + 25 = 106,$$

co już wygląda prościej, ale jeszcze nie daje żadnego rozwiązania. W pierwszym przykładzie miałem wszystkie „stałe" po jednej stronie znaku równości, a niewiadome były rozłączone, tu stoją wszystkie x na jednej stronie, a „stałe" są rozłączone znakiem równości. Sytuacja wprost beznadziejna. Znak równości przeszkadza mi jak mur w wykonaniu mego zamiaru, aby poprzenosić wszystkie x na jedną stronę, wszystkie stałe natomiast na drugą, co by oznaczało już rozwiązanie, a przynajmniej możliwość rozwiązania na chłopski rozum.

Lecz może się także jeszcze zdarzyć, że równania składają się w ogóle tylko z liter. Co więcej, taka postać równania należy nawet do częstszych wypadków w matematyce. A więc np.:

$$nx + a + b - c = d - mx.$$

Tu wyobraźnia zupełnie już odmawia posłuszeństwa. Wprawdzie przypuszczam, że a, b, c, d, n również m są z góry znane. A żądam tylko, aby x dało się tak wyrazić, że przedstawiłoby się jako jakieś zestawienie tych „stałych". A więc np. $x = \frac{d-a-b+c}{n+m}$, co jest nawiasem mówiąc, właściwym rozwiązaniem równania.[1] Ale jak tu dojść do takiego wyrażenia ogólnego? Jak wpaść przede wszystkim na to za pomocą rozumowania? I przez co zyskam pewność, że takie przypuszczenie, iż x to właśnie $\frac{d-a-b+c}{n+m}$, spełni też faktycznie rozkaz wyrównania?

---

[1] Pod warunkiem, że $n + m \neq 0$.

Pomóżmy sobie, nie chcąc przez to twierdzić nic matematycznego, pewnym zobrazowaniem. Wyobrażamy sobie, że równanie to waga. Na jednej szalce wagi leży tyle a tyle niewiadomych i stałych. Ponieważ wydano rozkaz wyrównania, równanie tylko wtedy będzie równością, jeżeli waga znajdzie się w równowadze. A więc, jeżelibym ją nawet cośkolwiek wytrącił z położenia równowagi, muszę zawsze doprowadzić ją z powrotem do równowagi, w przeciwnym bowiem razie pogwałciłbym rozkaz wyrównania. Zatrzymajmy się na razie nad obrazkiem i uważajmy „stałe" za przedmioty o znanym ciężarze, np. mosiężne odważniki, niewiadome natomiast za przedmioty o nieznanym ciężarze, np. jabłka.[1] W pytaniu naszym chodzić będzie ostatecznie tylko o to, w jaki sposób uda się wyznaczyć ciężar jednego jabłka, jeżeli uprzednio leżały na obu szalkach wagi będącej w równowadze, i jabłka i odważniki, pomieszane ze sobą. Skonstruujmy naszą wagę z równania $2x + 15 = 3x + 3$.

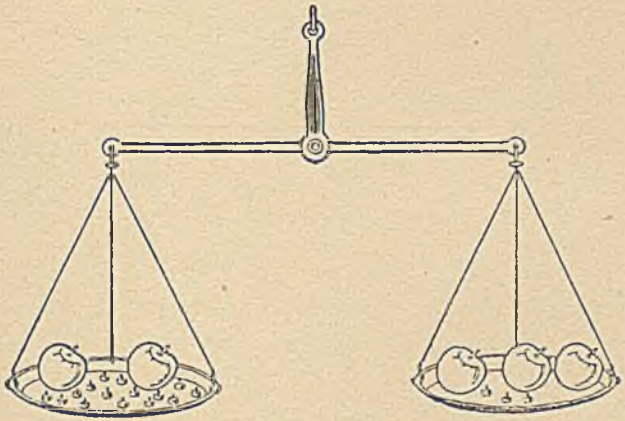


Fig. 10.

Na jednej szali leżą 2 jabłka i 15 odważników dekagramowych, na drugiej 3 jabłka i 3 odważniki dekagramowe. Teraz należy tak długo wymieniać obustronnie, aż się dowiem, ile waży jedno jabłko. „Języczek wagi" pokazuje mi stale, czy spełniony jest rozkaz wyrównania. Owo „nie wolno wytrącić z położenia równowagi" oczy-

[1] Oczywiście jabłka muszą być dokładnie równe sobie co do ciężaru, o czym wszak można wiedzieć, chociaż nawet nie zna się ich ciężaru.

wiście oznacza tylko, że każdorazowo zaburzoną równowagę należy natychmiast znowu przywrócić. Gdybym chciał bezwzględnie zachować stan równowagi, nie mógłbym w ogóle nic zmieniać.

Obecnie staram się — i to jest cel główny — mieć na jednej stronie tylko odważniki, na drugiej tylko jabłka. Wtedy spróbuję wreszcie doprowadzić do tego, by z jednej strony leżało tylko j e d n o jabłko.

Zabierzmy się najpierw do odważników, które odpowiadają „stałym". Rzecz jasna, że nic się nie zmieni w stanie równowagi, jeżeli po obu stronach równocześnie odejmiemy lub dodamy tę samą ilość odważników. A więc na razie zdejmijmy z prawej szalki trzy odważniki, z lewej również trzy odważniki. Waga wychyliła się tam i nazad, ale znowu osiągnęła stan równowagi.

Obecnie wygląda tak:

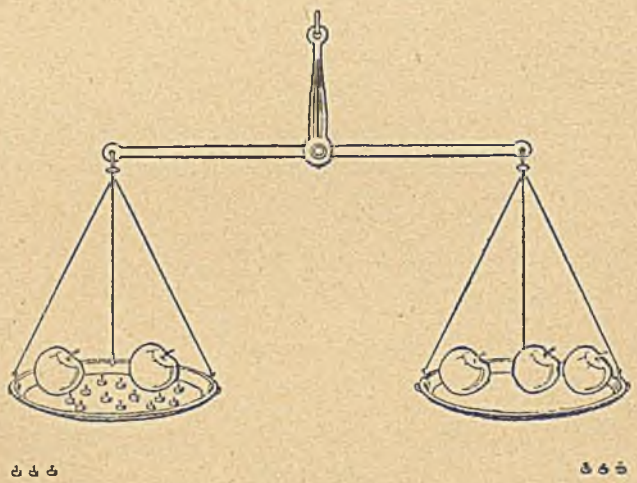


Fig. 11.

Wyrażając matematycznie

$$2x + 12 = 3x.$$

Teraz wystarczy tylko jeszcze pozbyć się dwóch jabłek z lewej strony i dopiąłem celu. Znowu zastosuję ten sam trick, tłumacząc sobie, że znów muszę po obu stronach usunąć po dwa jabłka, o ile chcę zachować równowagę.

Teraz mamy obraz:

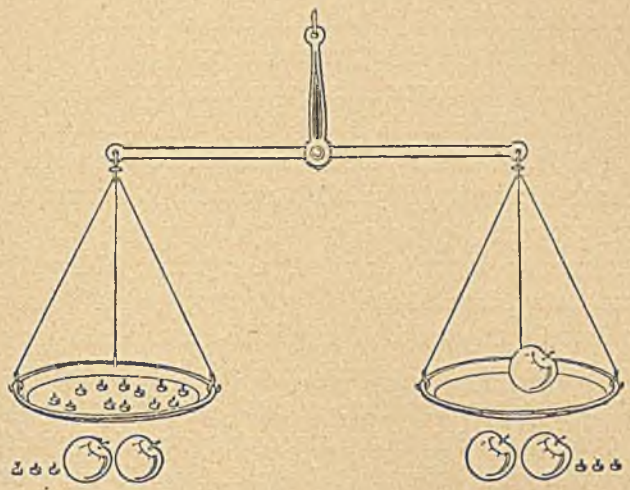


Fig. 12.

co matematycznie oznacza $x = 12$, a tym samym rozwiązanie równania. Jedno jabłko waży 12 dekagramów.

Sprawdźmy obecnie. Nasze dawne równanie brzmiało:

$$2x + 15 = 3x + 3.$$

Jeżeli podstawię za x dwanaście, wówczas otrzymam $2 \cdot 12 + 15 = 3 \cdot 12 + 3$ czyli $24 + 15 = 36 + 3$ czyli $39 = 39$, co oczywiście jest prawdą.

Uzyskaliśmy, czysto poglądowo, regułę nadzwyczaj ważną. Wiemy, że równość zostanie zachowana, rozwiązanie równania się nie zmieni, jeżeli z lewej i z prawej strony znaku równości dodam lub odejmę te same wielkości. To samo zwięźle sformułowane: Dodając do równych wielkości wielkości równe, otrzymujemy równe wielkości; odejmując od równych wielkości wielkości równe, otrzymamy równe wielkości, co naturalnie jest jasne także bez wagi i metody poglądowej. Ale jeszcze jedno: Wszystko to jest ważne tylko przy założeniu z góry, że da się dobrać, względnie obliczyć właściwą wartość na x, bo w przeciwnym razie już od samego początku nie można by się oprzeć na żadnej równości. Mówi się także, że rozwiązalność równania zachodzi pod warunkiem istnienia odpowiedniej

wartości na niewiadomą. Są bowiem równania w ogóle nie mające rozwiązań. Np. równanie $x + 2 = x + 5$ nie posiada pierwiastków. Jakąkolwiek bowiem liczbę podstawiłbym za x, wartość sumy $x + 2$ zawsze będzie m n i e j s z a od wartości $x + 5$.

Można by nasze zobrazowanie na wadze rozwinąć jeszcze dalej. Nie rysujmy już tego jednak, a starajmy się oprzeć na wyobraźni. Otóż wydaje się nam także rzeczą jasną, że równowaga wagi w niczym nie może się zmienić, jeżeli zawartość obu szalek równocześnie pomnożymy przez tę samą, poza tym dowolną liczbę byle różną od zera. Czy mam np. na jednej stronie jedno jabłko a po drugiej stronie dwanaście odważników, czy też po jednej stronie siedem jabłek a po drugiej 84 odważniki, jest to dla stanu równowagi obojętne, z tym jedynym zastrzeżeniem, że tak jabłka pomiędzy sobą jak i odważniki mają równe ciężary. Dalej, będzie również dla stanu równowagi obojętne, jeżeli obie „strony" równania podzielę przez tę samą liczbę od zera odmienną, albo podniosę do tej samej potęgi. Przez „strony" równania rozumiem ogół wszystkich wiadomych i niewiadomych wielkości, znajdujących się przed lub po rozkazie równości. Przy $5x - 4 + 16 = 2x - 8$ jest $(5x - 4 + 16)$ lewą, a $(2x - 8)$ prawą „stroną" równania.

Na razie poprzestaniemy na teoretycznym poznaniu zasady, że zastosowanie każdego ze znanych nam działań równocześnie po obu stronach równania (i to działania tego samego typu) w niczym nie zmieni istoty równania, mianowicie założonej z góry równości obu stron. W praktyce opiera się na tej regule swoista czynność kabalistyczna, tak zwane „przenoszenie" wyrazów i „izolowanie" niewiadomej x. Mając np. dane równanie

$$5x - 4 + 16 = 2x + 8,$$

najpierw utworzę po lewej stronie z $(-4 + 16)$ liczbę 12, a wówczas miałbym

$$5x + 12 = 2x + 8.$$

Obecnie, wzorując się na naszym przykładzie z wagą, spróbuję przenieść wszystkie „stałe" na jedną, a wszystkie „niewiadome" na drugą stronę. W tym celu odejmę najpierw po obu stronach $(2x + 8)$ i otrzymam:

$$\begin{array}{rl} 5x + 12 = & 2x + 8 \\ -2x - 8 = & -2x - 8 \\ \hline 3x + 4 = & 0. \end{array}$$

Teraz znowu wypadło coś, co mię przeraża. $(3x + 4)$ równa się 0. Czy znaczy to może, że obecnie wszystko poszło z wiatrem? I że x także będzie równe 0? Cierpliwości! To przecież nie może tego oznaczać. Mam przed sobą jeszcze jedno wyjście. Przede wszystkim nie mam jeszcze wcale wszystkich x na jednej, a wszystkich „stałych" na drugiej stronie. A zatem muszę teraz odjąć z obu stron albo 3x albo 4, aby osiągnąć takie rozgraniczenie. Spróbujmy tego za pomocą 4.

$$\begin{array}{rl} 3x + 4 = & 0 \\ -4 = & -4 \\ \hline 3x = & 0 - 4. \end{array}$$

Otrzymuję zatem $3x = -4$ i widzę zarazem, że podejrzane zero znowu zniknęło. Obecnie znajduję się tuż przed „rozwiązaniem" równania. Muszę tylko jeszcze x „izolować". Ponieważ mam z lewej strony 3x, otrzymam x jeśli podzielę przez 3. To samo dzielenie muszę zgodnie z mą „regułą wagi" przeprowadzić i z prawej strony, aby zachować równowagę. A więc:

$$\begin{array}{rl} 3x : 3 = & (-4) : 3 \quad \text{czyli} \\ x = & (-4) : 3 = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}. \end{array}$$

Równanie rozwiązane. A teraz zbadajmy tylko jeszcze, czy rozwiązane poprawnie. W tym celu podstawiam w dawne równanie:

$$\begin{array}{rl} 5 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 12 = & 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 8 \\ -\frac{20}{3} + \frac{36}{3} = & -\frac{8}{3} + \frac{24}{3} \\ \frac{16}{3} = & \frac{16}{3} \end{array}$$

(Wszystko sprowadzone do wspólnego mianownika 3)

Sprawdzenie potwierdza nasz rachunek.

Obecnie postaramy się objaśnić „przenoszenie", ponieważ ani nam się nawet nie śni rachować w tak rozwlekły sposób.

$$5x + 12 = 2x + 8.$$

Używamy poprzedniego równania. I zauważamy, że dojdziemy także do rezultatu, jeżeli spróbujemy równocześnie przetransportować 2x do 5x, a 12 do 8. Ba, ale jak? Otóż w bardzo prosty sposób: musimy równocześnie po obu stronach odjąć 2x. Ponieważ jednak przez to zniknie ono w ogóle po prawej stronie, możemy odejmowanie zaznaczyć tylko z lewej strony. A więc:

$$5x - 2x + 12 = 8, \quad \text{czyli} \quad 3x + 12 = 8.$$

Obecnie 12 „wyprawiam w drogę". Dokonam tego przez obustronne odjęcie 12. Wskutek tego 12 zniknie z lewej strony, a tylko z prawej zapisze się odejmowanie. A zatem:

$$3x = 8 - 12, \quad \text{czyli} \quad 3x = -4.$$

Teraz 3 powinno od x powędrować na drugą stronę. Ono występuje jako czynnik. W następstwie tego musimy obie strony podzielić przez 3. Ponieważ jednak na skutek tego 3 z lewej strony zniknie, zjawi się tylko po prawej jako dzielnik. Stąd wynik:

$$x = (-4) : 3 = -\tfrac{4}{3} = -1\tfrac{1}{3}.$$

Gotowe. A przy tym zyskaliśmy naszą szukaną regułę. Brzmi ona: Jeżeli jakaś wielkość „powędruje" z jednej strony znaku równości na drugą, to związany z nią rozkaz działania (operacji) zmieni się na rozkaz odpowiadającego działania przeciwnego. Z działania tetycznego powstaje lityczne, z litycznego — tetyczne. Czyli konkretnie: Z dodawania powstaje odejmowanie, z odejmowania dodawanie, z mnożenia dzielenie, z dzielenia mnożenie.

Właściwie obecnie podołać możemy każdemu równaniu o ile tylko jest liniowe, tzn. o ile niewiadoma występuje tylko w pierwszej potędze. Dlaczego takie równanie nazywa się „liniowym", rozjaśni się nam później na drodze geometrycznej.

Pozostawiamy ochocie czytelnika rozwiązanie wszystkich, dotąd wymienionych przykładów za pomocą nowego algorytmu. Gwoli lepszego zorientowania się przeliczmy bardziej skomplikowane zadania. Np.:

$$\begin{aligned} 5(x-2) - 2x &= 2(x-1) \\ 5x - 10 - 2x &= 2x - 2 \\ 3x - 10 &= 2x - 2 \\ 3x - 2x &= -2 + 10 \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Przykład z samymi tylko literami:

$$\begin{aligned} a(b - c + d) - b(a + c - d) &= ab - (bc - bd - x) \\ ab - ac + ad - ab - bc + bd &= ab - bc + bd + x \\ ab - ac + ad - ab - bc + bd - ab + bc - bd &= x \\ -ab - ac + ad &= x \\ x &= a(-b - c + d). \end{aligned}$$

Odnośnie do tego zadania należy zauważyć, że odwrócenie całego równania, względnie przestawienie obu stron jest zawsze dozwolone. Wszak to to samo, czy się powie $x = 5$ lub $5 = x$. To wynika z istoty znaku równości. Oczywiście mógłbym także obustronnie pomnożyć przez (-1) i jeślibym otrzymał np. $(-x) = (-10)$, mogę napisać:

$$(-x) \cdot (-1) = (-10) \cdot (-1), \text{ czyli}$$
$$x = 10.$$

Podobne mnożenie stosuje się zawsze tam, gdzie przy x występuje znak ujemny, co by oznaczało przeciwną wartość na x, która nas nie obchodzi. Jeślibym zatem na końcu miał $(-x) = (\pm a)$, co znaczy właściwie, że minus x równa się plus albo minus a, wówczas napiszę, albo w myśli wykonam

$$(-x) \cdot (-1) = (\pm a) \cdot (-1), \quad \text{czyli}$$
$$x = (\mp a).$$

Proszę zauważyć, że teraz a ma u góry minus, a plus u dołu. Bo $(+a) \cdot (-1) = (-a)$, $(-a) \cdot (-1) = (+a)$. W następstwie tego znak minus przed a odpowiada pierwszemu mnożeniu, a znak plus drugiemu.

Wszelako zdarzają się takie wypadki, w których dane równanie wygląda tak, jak gdyby rozwiązanie jego było dla nas niedostępne, ponieważ x występuje w potędze innej niż w pierwszej. Np.:

$$(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 + x + 1$$

Takie równanie pozornie tylko stopnia drugiego, inaczej „kwadratowe", okazuje się po wykonaniu działań całkiem niewinnym równaniem „liniowym".

$$x^2 + x - x - 1 = x^2 + x + 1$$
$$x^2 - x^2 + x - x - x = 1 + 1$$
$$-x = 2$$
$$(-x).(-1) = 2(-1)$$
$$x = -2.$$

Również bardzo groźnie wygląda równanie:

$$\frac{5+x}{2} + \frac{13+7x}{3} = 72$$
$$\frac{(5+x).3 + (13+7x).2}{2.3} = 72$$
$$(5+x).3 + (13+7x).2 = 72.2.3$$
$$15 + 3x + 26 + 14x = 432$$
$$17x = 432 - 15 - 26$$
$$17x = 391$$
$$x = \frac{391}{17} = 23.$$

Jeszcze pewna ogólna uwaga: Rozwiązywanie równań to jedna z najważniejszych czynności w matematyce. Używa się przy tym Bóg wie ilu forteli rachunkowych, tricków, sztuczek. Każdy matematyk musi być tak obeznany z „równaniem-maszyną", że „przenoszenie", „izolowanie" itd. potrafiłby wykonać nawet we śnie. Pierwszy lepszy podręcznik arytmetyki dostarczy bez liku dobrze dobranych i różnorodnych przykładów. Szczególnie należy polecić wspaniałą Algebrę Eulera, na którą już wskazywaliśmy. Trudno, skoro nie ma żadnej „królewskiej" drogi do matematyki, radzimy, jeśli to tylko jest możliwe, rozwiązywać setki i tysiące równań, a także samodzielnie układać równania. Takie zajęcie jest rozrywką co najmniej tak miłą, jak rozwiązywanie krzyżówek albo gra w karty. A przy tym rozwija się ów szósty zmysł, który laik tak często podziwia u matematyka. Zmatematyzowanie mózgu jest prawie fizycznym zjawiskiem, podobnie jak np. podświadoma już oczywistość opanowanej sztuki pływania, jazdy na rowerze, właściwego podbicia przy tenisie. Krótko mówiąc, aż do bardzo wysokich stopni jest ono kwestią czystej wprawy. To, czego nie można wyćwiczyć w ogóle, albo tylko w ograniczonym zakresie, rozgrywa się w tak wysokich regionach matematyki, że nas rekrutów ledwie obchodzi. Wszak nie mamy pretensji zostać Napoleonami, lecz co najwyżej

dzielnymi oficerami. Ale — w tym kryje się ta świetność naszego kunsztu — nigdy nie wiadomo, czy kiedyś w jakiejś jasnej sekundzie i my także nie znajdziemy czegoś rewolucyjnego. Nie jest to bardzo prawdopodobne, ale bynajmniej nie jest niemożliwe.

Trzeba jednak znowu obniżyć lot i rozwiać sen o „buławie marszałkowskiej w tornistrze". Zanim jednak rozszerzymy nasze pojęcie równania, zajmijmy się jeszcze układaniem równań, czyli zastosowaniem ich do zagadnień z życia codziennego. Np.:

Ojciec ma obecnie 48 lat, syn 21. Ile lat miał syn, gdy wiek ojca wynosił dziesięć razy tyle, co wiek syna? Przed ilu laty był ojciec dziesięć razy starszy od syna?

Rozumujemy w następujący sposób: Różnica wieku między ojcem a synem wynosi 27 lat. Ta wielkość stale zostaje taka sama, a więc jest „stałą". Jeśli oznaczymy przez x ten wiek syna, gdy ojciec miał 10 razy tyle lat co syn, to ojciec miał wówczas $(x + 27)$ lat. Jednak w myśl założenia ten wiek ma być 10 razy większy od wieku syna, a zatem $10 . x$. Wskutek tego jest $x + 27 = 10x$. W ten sposób zyskaliśmy, względnie jak się mówi „ułożyliśmy" równanie. Obecnie nie zastanawiamy się więcej nad tym, co oznaczają wyrazy równania, lecz z zaufaniem powierzamy się „algorytmowi".

$$x + 27 = 10x$$
$$27 = 9x$$
$$x = \frac{27}{9} = 3.$$

Ojciec miał 30 lat, syn 3 lata, gdy ojciec był 10 razy starszy od syna. To zgadza się naocznie. Było jednak także pytanie, przed ilu laty rzecz tak by się przedstawiała, skoro obecnie ojciec liczy 48 lat. Odejmujemy $48 - 30 = 18$ i odpowiemy: Przed 18 laty. Syn miał wtedy $21 - 18 = 3$ lata.

Chcąc odpowiedzieć na drugie pytanie, można by równanie także tak układać, żeby za x od razu uważać ten okres czasu, przed którym ojciec był 10 razy starszy od syna. Wtedy należało by tak wnioskować: Ojciec ma obecnie 48 lat. Stąd wynika, że był on dziesięć razy starszy od syna przed $(48 - x)$ laty. Ponieważ jednak syn liczy obecnie 21 lat, to także względem syna zachodził ten moment $(21 - x)$ lat temu. Mielibyśmy więc równanie

$$(48 - x) = 10 . (21 - x) \qquad \text{albo} \qquad (21 - x) = \frac{1}{10}(48 - x).$$

Rozwiążmy pierwsze równanie, które jest równoważne drugiemu:

$$(48 - x) = 10 \cdot (21 - x)$$
$$48 - x = 210 - 10x$$
$$9x = 210 - 48$$
$$9x = 162$$
$$x = \frac{162}{9} = 18.$$

Drugie równanie dałoby ten sam wynik. Jest jednak trzeci jeszcze sposób rozwiązania tego zadania. Ponieważ ojciec jest o 27 lat starszy od syna, to jeśli ojciec ma 27 lat, syn liczy 0 lat. W tym czasie właśnie syn urodził się. Otóż, aby wiek syna dziesięć razy przewyższać, musi mieć ojciec o jedną dziewiątą część swej różnicy w wieku więcej lat. Bo dodanie do dziewięciu równych części takiej samej dziesiątej daje dziesięć części. Inaczej mówiąc jest $\frac{9}{9} + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$. Dziesiąta część z $\frac{10}{9}$ to jednak jest $\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9}$, albo dziesięć razy jedna dziewiąta jest $\frac{10}{9}$. A więc jako dziewiątą część z 27 otrzymalibyśmy natychmiast 3, zaś ojciec byłby w 3 lata po urodzeniu syna, mając lat 30, 10 razy starszy od swego, w owej chwili trzechletniego synka.

Chcieliśmy tylko pokazać, jaki zasób możliwości w przekształceniach i sposobności do dyskusji nastręczają nawet całkiem proste równania i jak bardzo zręczność rozwiązującego już tu rozstrzyga o znalezieniu najjaśniejszego i najefektowniejszego rozwiązania. Czytelnicy sami wkrótce posiędą to wyczucie precyzji i elegancji matematycznej. Ale jeszcze jedno: Tutaj zaczyna się sztuka i tu trzeba się już ćwiczyć jak akrobata.

Podajemy jeszcze jedno zadanie tekstowe, które zyskało sławę niemal klasyczną. Tak zwane „Epitafium Diofanta". Diofantos był matematykiem aleksandryjskim w czwartym wieku po Chr. Był to genialny arytmetyk i algebraik, może nawet jedyny, jakiego Grecja posiadała. Bo wszyscy inni matematycy greccy byli raczej geometrami. W każdym razie Diofantos właśnie rozwinął teorię równań i wywarł też decydujący wpływ na matematyków arabskich i średniowiecznych. Według podania napis na jego nagrobku miał brzmieć:

Pod tym nagrobkiem spoczywa Diofant — a dzięki przedziwnej
Sztuce zmarłego i wiek zdradzi ci jego ten głaz:

Chłopcem przez szóstą część życia pozostać bóg mu pozwolił,
Lica pokwitły mu zaś, kiedy dwunasta znów część
Życia minęła; a znowu żywota gdy przebył część siódmą
Młodą małżonkę w dom dobry wprowadził mu bóg,
Która, gdy pięć lat minęło, małego powiła mu synka.
Ale okrutny chciał los, że kiedy syn ledwie wiek
Ojca w połowie osiągnął, ponury zabrał go Hades.
Kojąc ogromny swój ból, szukał Diofant śród liczb
Jeszcze przez cztery lata pociechy, aż rozstał się z życiem.

Wracając od pięknego patosu elegijnych dystychów w chłodniejsze rejony naszej surowej matematyki, stwierdzamy, że nieznany na razie co do czasu trwania wiek życia Diofanta (oznaczamy ten wiek przez x) składa się stopniowo z części tego życia i z podanych ilości lat, które zatem są „stałymi" (wyrazami wiadomymi) równania. Przez $\frac{1}{6}$ swego życia był chłopcem, a więc $\frac{x}{6}$. Potem upłynęło $\frac{x}{12}$ lat, zanim dostał zarost. Po pewnym dalszym okresie $\frac{x}{7}$ lat ożenił się. W 5 lat później przyszedł na świat synek, który jednak dożył tylko wieku $\frac{x}{2}$ lat. Jeszcze 4 lata przeżył Diofant syna, wreszcie umarł, mając x lat.

A zatem nasze równanie ma brzmieć:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Wspólnym mianownikiem ułamków jest 84, ponieważ zarówno 6 jak 12 jak 7 i 2 mieszczą się bez reszty w 84, a przy tym jest to najmniejsza wspólna wielokrotność tych liczb. Tym samym napiszemy:

$$\frac{14x}{84} + \frac{7x}{84} + \frac{12x}{84} + \frac{420}{84} + \frac{42x}{84} + \frac{336}{84} = \frac{84x}{84}$$

Możemy obie strony równania pomnożyć przez 84, przez co odpadną zaraz wszystkie mianowniki. Pozostaje więc:

$$\begin{aligned} 14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 &= 84x \\ 75x + 756 &= 84x \\ 756 &= 9x \\ 9x &= 756 \\ x &= 756 : 9 = 84. \end{aligned}$$

Diofant dożył zatem wieku 84 lat. Czternaście lat był chłopcem, w 21 roku życia pokwitły mu lica, w 33 ożenił się, w 38 urodził mu się syn, który żył 42 lata, a więc do 80 roku życia Diofanta. W żałobie przetrwał 4 ostatnie lata aż do swej śmierci, która nastąpiła, gdy liczył 84 lat.

ROZDZIAŁ CZTERNASTY

RÓWNANIA NIEOZNACZONE

Nie bez przyczyny przyzwaliśmy tu ducha Diofanta. Ten wielki matematyk uchodzi mianowicie za odkrywcę równań szczególnego rodzaju, równań „nieoznaczonych" czyli „diofantycznych". Jak dalece należy je łączyć z jego osobą, to jest co najmniej w równym stopniu nieoznaczone jak same „jego" równania. Z zachowanych pism Diofanta nie wynika zdaniem historyków matematyki nic takiego, co by wskazywało na niego, jako na odkrywcę tego właśnie typu równań. Skoro jednak ta nazwa już raz zyskała prawo obywatelstwa, więc zachowamy ją.

Czymże tedy są owe podwójnie zagadkowe równania „diofantyczne"?

Tym razem zacznijmy od zadania tekstowego i starajmy się odkryć istotę i sposób postępowania przy tych nadzwyczaj ważnych równaniach. Pytamy więc: Jakie dwie liczby mają tę własność, że ośmiokrotność pierwszej, powiększona o trzykrotność drugiej, daje w sumie 91? Jest to pytanie, do którego nie możemy się zabrać z naszą dotychczasową mądrością. Bo spostrzegamy natychmiast, że należy tu szukać wartości nie jednej niewiadomej x, lecz dwóch niewiadomych, które oznaczymy sobie przez x oraz y. Piszemy więc

$$8x + 3y = 91.$$

Co mamy jednak dalej zrobić? W myśl naszych reguł byłoby $8x = 91 - 3y$, a $x = \frac{91-3y}{8}$, albo $3y = 91 - 8x$, a więc $y = \frac{91-8x}{3}$. Oczywiście to nas do niczego nie doprowadzi. Bo w ten sposób jedną niewiadomą wyrażamy stale przez 91 i przez drugą niewiadomą. Przypuśćmy, że jakiś szczęśliwy instynkt naprowadził mię na to,

aby przyjąć x jako 5, y jako 17. Rzeczywiście jest $8 \cdot 5 + 3 \cdot 17 = 40 + 51 = 91$. Byłoby to zatem rozwiązaniem. Mam jednak podejrzenie, że to nie jest jedyne rozwiązanie. A więc i tu trzeba się rozglądnąć za jakimś algorytmem, za jakąś kabałą, która by nas nieomylnie mogła doprowadzić do celu. Musimy przy tym nadmienić jeszcze jedno dodatkowe założenie. Za rozwiązanie takiego diofantycznego równania uznaje się tylko liczby całkowite. W przeciwnym razie już z góry mielibyśmy nieskończenie wiele rozwiązań. Wystarczyło by tylko x przyjąć równe jakiejkolwiek liczbie, np. 7, a otrzymalibyśmy

$$\begin{aligned} 8 \cdot 7 + 3y &= 91 \\ 56 + 3y &= 91 \\ 3y &= 91 - 56 \\ 3y &= 35 \\ y &= 35 : 3 = 11\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Otóż przez wybór x lub y, mógłbym zawsze równanie doprowadzić do równania o jednej niewiadomej, dającego się rozwiązać bez trudności. Bo dowolny wybór jakiejś liczby zamiast jednej z niewiadomych nie oznaczałby nic innego, jak tylko, że tę niewiadomą ustaliłem niejako w specjalnym przypadku.

Żądamy zatem, aby rozwiązanie było liczbą całkowitą i to zarówno dla jednej jak i dla drugiej niewiadomej, jednak całkowitoliczbowe rozwiązanie nie jest możliwe w każdym równaniu o dwóch niewiadomych. Ale o tym później.

Zanim będziemy mogli objaśnić genialną metodę ogólną rozwiązywania, którą nas obdarzył Leonard Euler, musimy przedtem nauczyć się jeszcze jednego, często używanego chwytu matematycznego, który w owej metodzie odgrywa dominującą rolę. Mianowicie jest to „podstawianie“ albo „substytucja“.

Obieramy jakiś konkretny przykład. Nikt nie powie, jakoby równanie

$$2\left(\tfrac{x-4}{3}\right) + 3\left(\tfrac{x-4}{3}\right) - 4\left(\tfrac{x-4}{3}\right) = 9 - 2\left(\tfrac{x-4}{3}\right)$$

bardzo przymilny miało wygląd. Przy bliższej jednak obserwacji zauważamy, że wyrażenie $\left(\tfrac{x-4}{3}\right)$ stale się powtarza i że x nie znajduje się w żadnej innej, jak tylko w tej właśnie konstelacji. Otóż to $\left(\tfrac{x-4}{3}\right)$ mogę uważać niejako za nową wielkość ogólną, za nową nie-

wiadomą i tak się z tym obchodzić, jakby to było (w naszym popularnym języku) jabłko. Nazwijmy to jabłko obecnie n i napiszmy:

$$2n + 3n - 4n = 9 - 2n.$$

Znaczenie tego n przesuwam na razie w myśli na drugi plan. Nie pytam, jakie szczegóły w budowie zawiera jabłko, ile posiada ziarn, ile komór, szypułek, ale oddaję się z zaufaniem pewnemu wyższemu, że tak powiem, algorytmowi i próbuję najpierw odgadnąć, jaką liczbę, jaką stałą należy przyporządkować jabłku. Bo wtedy — taką mam nadzieję — będę mógł dalej badać szczegóły jabłka. Nasze nowe równanie z n jako niewiadomą daje:

$$2n + 3n - 4n + 2n = 9, \quad \text{czyli} \quad 3n = 9, \quad \text{zaś} \quad n = 3.$$

Wiem jednak, boć przecie sam tak przyjąłem, że n równa się $\left(\frac{x-4}{3}\right)$. Obecnie zatem mam nowe równanie, w którym n nie jest już niewiadomą, lecz „stałą" i równe jest 3. To równanie brzmi:

$$n = \frac{x-4}{3}, \quad \text{stąd} \quad x = 3n + 4.$$

Ale, jak powiedziano, n równa się 3. A więc jest $x = 9 + 4 = 13$.

Pozostawiamy czytelnikowi, by rozwiązał to równanie wprost, bez „substytucji", bez „podstawiania" nowej niewiadomej pomocniczej. Z pewnością próba taka, lub zwykłe sprawdzenie przez podstawienie 13 zamiast x potwierdzi poprawność naszego postępowania.

Obecnie więc wiemy praktycznie, co to jest „substytucja". Jest to zastąpienie wyrażenia o skomplikowanej budowie, przez nowe prostsze oznaczenie. Przynajmniej na naszym stopniu wiedzy matematycznej. W wyższej matematyce, szczególnie w rachunku całkowym, gdzie podstawienia odgrywają decydującą i niezbędną rolę, może się równie dobrze zdarzyć, że prostsze wyrażenie zastępuje się przez bardziej skomplikowane. Co więcej, my sami znamy już takie wypadki. Jeśli z jakichkolwiek powodów napiszemy zamiast 1 np. 15^0 (15 do potęgi zerowej), albo wyobrażamy sobie, że b powstało z $b^1 . b^0$, to jest to rodzaj podstawiania w stronę wyrażenia bardziej skomplikowanego. Wszelako tylko bardzo szczególny rodzaj. Chcąc zachować największe uogólnienie należy powiedzieć, że przez podstawienie (substytucję) rozumie się po prostu zastąpienie jednej wielkości przez drugą. Oczywiście nie bez jakiegokol-

wiek wyboru. Wiadomo, że nie można nikomu według jakiegoś widzimisię podać u za x. Ale można wszędzie, gdzie x występuje, napisać zamiast tego u, o ile na końcu nie zapomnimy „warunku" w postaci równości, że x jest właśnie tym u, czyli $x = u$. Można także wszędzie zamiast x napisać wartość 2u. Albo $\frac{u}{2}$ albo $\frac{u}{250}$. Wówczas przy końcu, x jest właśnie dwukrotnością u albo jego połową, albo 250-tą częścią.

Ano dobrze, — przekonaliśmy się, że przez podstawienie dadzą się uprościć bardziej skomplikowane rachunki. Ale właściwie co daje mi w ogólności prawo podstawiać? Logicznie sprawa jest prosta. Wszak utworzyliśmy z $\frac{x-4}{3}$ nadrzędne pojęcie n, które zgodnie z żądaniem zawiera w sobie owo $\left(\frac{x-4}{3}\right)$. Bo przecie podstawiamy pod warunkiem: $n = \frac{x-4}{3}$. Ściśle matematycznie powiemy, że zachodzi tu przypadek podobieństwa budowy — izomorfizmu. Struktura, postać równania czy też jakiejkolwiek operacji nie została naruszona przez „podstawienie", a współczynniki i rozkazy pozostały te same. Algebraicznie mamy do czynienia z układem kilku równań, a to jednego zasadniczego równania, i drugiego wyrażającego warunek dodatkowy. Mianowicie:

$$2\left(\frac{x-4}{3}\right) + 3\left(\frac{x-4}{3}\right) - 4\left(\frac{x-4}{3}\right) = 9 - 2\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

$$\text{i } \frac{x-4}{3} = n.$$

Ale i to możemy pozostawić sobie na później, aby dojść wreszcie do równania Diofanta. Jak już zapowiedzieliśmy, wprowadzimy specjalny rodzaj substytucji, przy której obok warunku w postaci równania występuje jeszcze inne żądanie.

Jeżeli więc jeszcze raz zapiszemy nasz przykład równania „diofantycznego":

$$3y + 8x = 91$$

ze zmienionym nieco porządkiem wyrazów, wtedy metoda Eulera wymaga najpierw, aby jedną niewiadomą wyrazić przez drugą. A mianowicie, z pewnych względów praktycznej natury, niewiadomą ze współczynnikiem mniejszym przez niewiadomą ze współczynnikiem większym. A zatem tutaj y przez x. Otrzymamy:

$$3y = 91 - 8x$$

$$y = \frac{91-8x}{3}$$

To byłby pierwszy krok. Obecnie — idąc za Eulerem — należy ułamek, który trzeba uważać za niewłaściwy, rozłożyć na całości i reszty ułamkowe. A więc:

$$y = \frac{91}{3} - \frac{8x}{3} = 30 + \frac{1}{3} - 2x - \frac{2x}{3}.$$

Teraz ustawiamy obok siebie „całości" i „reszty ułamkowe":

$$y = 30 - 2x + \frac{1}{3} - \frac{2x}{3} = 30 - 2x - \frac{2x-1}{3}.$$

Również ze względów praktycznych położyliśmy przed ułamkiem znak minus, tak że się przedstawia nie jako $+\frac{1-2x}{3}$, lecz $-\frac{2x-1}{3}$, co jednak ma tę samą wartość.

Teraz rozpoczyna się właściwe rozumowanie. Żądaliśmy w sensie równań diofantycznych, by y koniecznie było liczbą całkowitą, a że x także powinno być liczbą całkowitą, $30 - 2x$ musi również dać liczbę całkowitą. Jeżeli jednak ponadto y jest liczbą całkowitą, to w sumie algebraicznej $30 - 2x - \frac{2x-1}{3}$ musi być także $\frac{2x-1}{3}$ liczbą całkowitą, gdyż w przeciwnym razie upadłyby inne warunki. Obecnie zaczyna się „podstawianie". Zgodnie z założeniem przypuszczamy, że $\frac{2x-1}{3}$ jest liczbą całkowitą i oznaczamy ją przez n_1. Wskaźnik (indeks) z prawej strony u dołu dodajemy dlatego, że może będziemy musieli więcej razy podstawiać. Przyjmujemy więc:

$$n_1 \text{ (liczba całkowita)} = \frac{2x-1}{3}.$$

Na podstawie takich samych rozważań jak powyżej, mogę to nowe równanie najpierw tak przekształcić, żeby x wyrazić przez n_1.

$$n_1 = \frac{2x-1}{3}$$
$$3n_1 = 2x - 1$$
$$2x = 3n_1 + 1$$
$$x = \frac{3n_1+1}{2}$$

Obecnie mogę uzmysłowić sobie znowu x, które przecie także musi być liczbą całkowitą, za pomocą rozkładu ułamka na całości i reszty ułamkowe.

$$x = \frac{3n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1+1}{2}.$$

Znowu to samo rozumowanie. x oraz n_1 mają być liczbami całkowitymi. Dlatego $\frac{n_1+1}{2}$ także musi dawać liczbę całkowitą. Moja prze-

zorność, aby n opatrzyć wskaźnikiem, była bardzo uzasadniona. Bo ową ostatnio uzyskaną liczbę całkowitą $\frac{n_1+1}{2}$ oznaczę w drodze nowego podstawienia przez n_2.

Otrzymujemy zatem:

$$n_2 \text{ (liczba całkowita)} = \frac{n_1+1}{2}.$$

Jeśli obecnie n_1 wyrazimy przez n_2 wyłącznie w zakresie liczb całkowitych, wówczas wypadnie

$$2n_2 = n_1 + 1, \quad \text{czyli}$$
$$n_1 = 2n_2 - 1.$$

Ponieważ obecnie wszystkie reszty ułamkowe zniknęły, można zadanie uważać za rozwiązane. Lecz mam jeszcze jedno zadanie wypełnić, może nie tyle trudne, ile zawiłe. Mianowicie muszę teraz odzyskać z powrotem x oraz y, przy czym nie może pozostać nic innego, jak tylko ostatnio podstawione n, a więc w naszym przypadku n_2. Ponieważ jednak $n_1 = 2n_2 - 1$, zaś $\frac{n_1+1}{2} = n_2$, więc $x = n_1 + \frac{n_1+1}{2}$ to nic innego, tylko $2n_2 - 1 + n_2$, czyli $x = 3n_2 - 1$. Natomiast jako ostateczny rezultat na y otrzymaliśmy $y = 30 - 2x - \frac{2x-1}{3}$. Stąd jest $y = 30 - 2(3n_2 - 1) - \frac{2x-1}{3}$. Ponieważ znowu $\frac{2x-1}{3}$ to nic innego, jak tylko n_1, bo przecie przyjęliśmy to równe n_1, więc jest $y = 30 - 2(3n_2 - 1) - n_1$. Ale n_1 znowu równa się $(2n_2 - 1)$. W następstwie otrzymamy y, wyrażone tylko przez „stałe“ i n_2:

$$y = 30 - 2(3n_2 - 1) - (2n_2 - 1) = 30 - 6n_2 + 2 - 2n_2 + 1 =$$
$$= 33 - 8n_2.$$

Dla przejrzystości napiszmy jeszcze raz to już ostateczne, tak zwane ogólne rozwiązanie naszego równania Diofanta, przy czym opuścimy wskaźnik przy n_2, ponieważ użyliśmy wskaźnika dla odróżnienia, a ten traci wszelki sens z chwilą, gdy nie ma co rozróżniać. n_2 czy też n, jak to obecnie nazwiemy, jest dowolną liczbą całkowitą, przy czym

$$x = 3n - 1$$
$$y = 33 - 8n.$$

Zbadajmy teraz, czy nasze Eulerowskie „rozwiązanie“ rzeczywiście jest słuszne. Jak już powiedziano, wolno wstawiać za n każdą

liczbę całkowitą, dodatnią lub ujemną (zero uważa się także za liczbę całkowitą). Równanie brzmiało:

$$8x + 3y = 91.$$

Dla $n = 0$ jest $x = 0 - 1 = -1$; $y = 33 - 0 = 33$.
A więc: $8 . (-1) + 3 . 33 = (-8) + 99 = 91$.
Dla $n = 1$ jest $x = 3 - 1 = 2$; $y = 33 - 8 = 25$.
A więc: $8 . 2 + 3 . 25 = 16 + 75 = 91$.
Dla $n = -1$ jest $x = -3 - 1 = -4$; $y = 33 + 8 = 41$.
A więc: $8 . (-4) + 3 . 41 = -32 + 123 = 91$.
Dla $n = 5$ jest $x = 15 - 1 = 14$; $y = 33 - 40 = -7$.
A więc: $8 . 14 + 3 . (-7) = 112 - 21 = 91$,

itd. od minus do plus nieskończoności.

Naprawdę magiczny algorytm, który dozwala wyznaczyć nieskończenie wiele całkowitoliczbowych rozwiązań dla dwu niewiadomych, za pomocą prostego wzoru! Nasza pierwsza para wartości, uzyskana tylko drogą zgadywania, $x = 5$ oraz $y = 17$ odpowiada $n = 2$, bo wtedy $x = 6 - 1 = 5$, $y = 33 - 16 = 17$.

Można by teraz stawiać dalsze warunki, dopuszczając np. tylko rozwiązania zawarte między 1 a 100, lub między -10 a $+10$, albo tylko dodatnie czy też tylko ujemne. W praktyce są takie warunki częstokroć bardzo ważne. Bardziej wprawny lub szybciej orientujący się czytelnik zgadnie łatwo, jak zadośćuczynić takim ograniczeniom. Po prostu wstawić za *n* kilka liczb znajdujących się powyżej bądź poniżej 0, zestawić sobie najlepiej małą tabelkę, a wtedy widać od razu, jak daleko można się posunąć.[1]

A jednak równania Diofanta są dla nas znowu tylko środkiem do celu, co się później wyraźnie okaże. Dlatego nie staramy się głębiej wniknąć w ich wielce interesujące prawidła szczegółowe, a tylko dodamy jeszcze coś, co już zaznaczyliśmy. Mianowicie, że bynajmniej nie każde równanie z dwiema niewiadomymi ogólnej postaci

$ax + by = c$ (przy czym a, b, c są to dodatnie lub ujemne liczby całkowite)

---

[1] Oczywiście można by także, postępując całkiem poprawnie, ułożyć nierówności warunkowe. Np. $x < 10$, a zatem $(3n - 1) < 10$, stąd $3n < 11$, a więc $n < \frac{11}{3}$. A zatem n mogłoby wynosić co najwyżej 3, jeśliby x miało być mniejsze od 10. Należało by tylko ułożyć odpowiednią nierówność także dla y itd.

przedstawia zarazem właściwe równanie diofantyczne, to znaczy równanie mające całkowitoliczbowe rozwiązania względem obu niewiadomych. Dla charakteru równania Diofanta niezbędnym jest dalsze żądanie, czyli dalszy warunek.

Załóżmy najpierw, żeśmy równanie, jak się to mówi, sprowadzili do najprostszej postaci, to znaczy, że tak długo dzieliliśmy obustronnie, za każdym razem przez wspólny podzielnik (liczb a, b, c), iż dalsze dzielenie w zakresie liczb całkowitych jest niemożliwe. Np., jeślibyśmy równanie

$$9x + 12y = 51 \quad \text{podzielili obustronnie przez 3,}$$

otrzymalibyśmy $3x + 4y = 17$ jako najprostszą postać. Podobnie jeślibyśmy

$$32x + 24y = 124 \quad \text{podzielili obustronnie przez 4,}$$

uzyskamy najprostszą postać

$$8x + 6y = 31.$$

Tu musimy już utknąć, bo trudno pomyśleć, w jaki sposób suma dwu liczb parzystych miałaby tworzyć liczbę nieparzystą. A przecież 8x i 6y muszą być liczbami parzystymi, jeśli przyjmiemy warunek, że x oraz y są liczbami całkowitymi. Bo $8 . 5$ i $8 . 7$ i $8 .(-2)$, oraz $6 .(-5)$ i $6 .(-20)$ i $6 . 1$ itd. są zawsze liczbami parzystymi.

Twierdzimy nawet, że równanie

$$3x + 15y = 19$$

nie jest równaniem diofantycznym. A mianowicie dlatego, że o tym nie tyle decyduje parzystość współczynników, ile raczej to, że współczynniki przy niewiadomych x i y nie mogą w ogóle posiadać żadnego takiego wspólnego podzielnika[1] (tu 3), który by nie był także podzielnikiem wyrazu wiadomego, względnie wyrazów wiadomych („stałych").

Dowód tego twierdzenia niech nam posłuży jako ogólnie obowiązujący przykład poprawnego i ścisłego dowodu matematycznego. Przedtem jeszcze jeden przykład dla unaocznienia.

---

[1] prócz 1.

$9x + 12y = 51$ obustronnie dzielone przez 3 daje
$3x + 4y = 17$.

3 i 4 nie mają żadnego wspólnego podzielnika (prócz 1) mamy więc przed sobą bez wątpienia właściwe równanie Diofanta, o rozwiązaniu całkowitoliczbowym. Według Eulera rozwiązanie jest:

$$3x + 4y = 17$$
$$3x = 17 - 4y$$
$$x = \frac{17-4y}{3} = 5 + \frac{2}{3} - y - \frac{y}{3} = 5 - y - \frac{y-2}{3}$$
$$\frac{y-2}{3} = n$$
$$y - 2 = 3n$$
$$y = 3n + 2; \quad x = 5 - (3n + 2) - n = 3 - 4n.$$

Obraliśmy tu *n* bez żadnego wskaźnika, ponieważ widać było od razu, że nie należy spodziewać się dalszej reszty ułamkowej, jako że w wyrażeniu $\frac{y-2}{3}$ *y* występuje „izolowane" (ze współczynnikiem 1).

Stąd dla $n = 3$ byłoby $x = -9$, $y = 11$,
a $3 \cdot (-9) + 4 \cdot 11 = -27 + 44 = 17$.

W tym przypadku jest zatem wszystko w najlepszym porządku, jak tego oczekiwaliśmy. Wróćmy jednak teraz znowu do dowodu i do liczb ogólnych. W równaniu

$$ax + by = c$$

a, b oraz c nie mają mieć zatem żadnego innego wspólnego podzielnika oprócz 1, w przeciwnym bowiem razie równanie nie byłoby doprowadzone do najprostszej postaci. A gdyby jednak a i b miały wspólny podzielnik różny od 1, co jest możliwe, jak widać z przypadku

$$8x + 6y = 31,$$

gdzie 8 i 6 mają wspólny podzielnik 2. Wyrażając się ogólnie, można by powiedzieć, że *a* i *b* mają ten sam podzielnik *m*, nierówny 1. To jednak znaczyłoby, że $\frac{a}{m}$ i $\frac{b}{m}$ są ciągle jeszcze liczbami całkowitymi. Pomnóżmy te liczby całkowite przez x oraz y, które też mają być liczbami całkowitymi, a iloczyny dodajmy. A więc $(\frac{a}{m}x + \frac{b}{m}y)$. Otóż jasne jest, że także *c* muszę podzielić przez *m*, skoro *a* jak i *b* przez *m* podzieliłem, ponieważ tego wymaga stan równowagi na „wadze" równaniowej. Bo $\frac{a}{m}x + \frac{b}{m}y = \frac{ax+by}{m} = \frac{c}{m}$, jeżeli dawne

równanie było $ax + by = c$. Ponieważ jednak w myśl dawnego założenia c było liczbą całkowitą, zatem o ile $\frac{c}{m}$ ma być sumą liczb całkowitych $\frac{a}{m}x + \frac{b}{m}y$, musiałoby oczywiście c być podzielne przez m, aby po podzieleniu przez m dać na wynik liczbę całkowitą. To jednak sprzeciwia się założeniu, że tylko a i b są podzielne przez m. Tym samym równanie postaci $m \cdot rx + m \cdot sy = c$, gdzie c nie jest podzielne przez m, nie da się n i g d y rozwiązać w liczbach całkowitych względem obu niewiadomych, jeżeli m, r, s i c są liczbami całkowitymi.

Powtarzamy jeszcze raz: Równanie Diofanta zakłada z góry, że współczynniki przy obu niewiadomych są względem siebie „pierwsze", tzn. nie posiadają żadnego wspólnego podzielnika oprócz 1. Natomiast współczynniki przy niewiadomych i wyraz wolny mogą posiadać taki wspólny podzielnik, jak np. w równaniu $3x + 4y = 12$ (4 i 12 mają wspólny podzielnik 4; 3 i 12 wspólny podzielnik 3). Ogólne rozwiązanie tego równania byłoby

$$x = 4 - 4n \quad \text{i} \quad y = 3n, \text{ a więc np. dla}$$
$$n = 5 \quad \text{jest} \quad x = 4 - 20 = -16, \quad \text{a} \quad y = 15.$$

Sprawdzenie: $3 \cdot (-16) + 4 \cdot 15 = -48 + 60 = 12$.

ROZDZIAŁ PIĘTNASTY

POTĘGI O WYKŁADNIKACH UJEMNYCH I UŁAMKOWYCH

Było by rzeczą bardzo ponętną zgłębiać dalej naukę o równaniach, ponieważ spotkalibyśmy się tam jeszcze z pewnym typem równań, który otworzyłby nam właściwy dostęp do wyższej i najwyższej matematyki: z tak zwaną „funkcją", która da się swobodnie wyprowadzić z równań algebraicznych.

Prosimy jednak przyjąć na razie te słowa jako w wysokim stopniu nieścisłą zapowiedź. Następne rozdziały wprowadzą nas już w ten świat czarów. Ponieważ jednak będziemy mogli o wiele swobodniej poruszać się w nauce o funkcjach, jeśli przedtem zdobędziemy się jeszcze na tyle cierpliwości, aby nasze dotychczasowe pojęcie liczby rozszerzyć i głębiej przestudiować algorytm potęgi, nie uchylajmy się i od tego trudu.

Przypominamy sobie, że potęgi o tej samej podstawie dzieliło się, odejmując wykładnik potęgowy dzielnika od wykładnika dzielnej. A więc np. $10^5 : 10^3 = 10^{5-3} = 10^2$ czyli $100\,000 : 1\,000 = 100$. Albo $a^{17} : a^6 = a^{17-6} = a^{11}$ itd. Przy tym zawarliśmy milczącą umowę, że wykładnik potęgowy dzielnej ma być zawsze większy albo co najwyżej równy wykładnikowi dzielnika. A więc ogólnie: Przy dzieleniu $a^m : a^n$ stosowaliśmy warunek $m > n$. Albo, co na jedno wychodzi, $n < m$. Dalej, ponieważ wybieraliśmy m i n zawsze dodatnie, nigdy nie groziło nam niebezpieczeństwo, iż otrzymamy na wynik podstawę z wykładnikiem ujemnym. A jednak można całkiem dobrze pomyśleć sobie ujemny wykładnik potęgowy. Zachodzi tylko pytanie, jaki nadać mu sens w odniesieniu do naszych różnych algorytmów, aby jednocześnie nie naruszyć całości systemu, jaki dotychczas zbudowaliśmy.

Trzymajmy się jeszcze na razie stale tego, że m i n są liczbami dodatnimi, tym razem jednak odwróćmy warunek wyrażony nierównością i załóżmy, że n ma być większe od m ($n > m$, czyli $m < n$). Ponieważ dalej wymagamy, aby wykładnik n należał do dzielnika, otrzymamy przy dzieleniu $a^m : a^n = a^{m-n}$ jako wykładnik potęgowy ilorazu bezwarunkowo liczbę ujemną, bo stosownie do założenia mamy odjąć liczbę większą od mniejszej. Wyrażając szczegółowiej, niech: $a = 10$, $m = 5$, $n = 7$; w następstwie tego $10^5 : 10^7 = 10^{5-7} = 10^{-2}$.

Za pomocą liczb szczegółowych możemy swobodnie liczyć. A więc nasz niepożądany wynik wyliczymy po prostu. Mniej więcej w następujący sposób:

$$10^5 : 10^7 = \frac{10.10.10.10.10}{10.10.10.10.10.10.10}$$

Ponieważ, jak widać, pięć dziesiątek występujących u góry jako czynniki, możemy uprościć z pięcioma dziesiątkami, znajdującymi się jako czynniki w mianowniku, otrzymamy jako rezultat $10^5 : 10^7 = \frac{1}{10.10} = \frac{1}{10^2}$. Owo $\frac{1}{10^2}$ powinno jednak mieć tę wartość, co 10^{-2}.

Przeczuwamy już nowy algorytm, ale dla ostrożności zróbmy jeszcze jedną próbę.

$$a^{11} : a^{16} = \frac{a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a}{a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a.a} = \frac{1}{a.a.a.a.a}$$

A owo $\frac{1}{a.a.a.a.a} = \frac{1}{a^5}$ i ono znowu powinno równać się $a^{11} : a^{16} = a^{11-16} = a^{-5}$.

Poszukiwana przez nas reguła brzmi więc nadzwyczaj prosto: Podstawa a z ujemnym wykładnikiem potęgowym równa się odwrotności tej samej podstawy z tym samym co do bezwzględnej wartości wykładnikiem dodatnim. Za pomocą wzoru: $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$, przy czym a musi być różne od 0.

Ostatnie ograniczenie ma swój określony sens. Bo jeśliby $a = 0$, wtedy byłoby $a^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$, a o tym $\frac{1}{0}$ wiemy już, że nie ma właściwie określonej wartości i dlatego musimy je ze wszelkich rozważań wykluczyć.

Szkoda więcej słów tracić na omawianie wykładników ujemnych. Dzięki naszej prostej regule wcieliliśmy je do naszego algo-

możemy tak samo pewnie operować jak wyrażeniem $c^{5+4-3} = c^6$.

Z istoty odwrotności wynika jeszcze, że $\frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$ możemy rytmu, a wyrażeniem takim jak $b^{(-4+3-2+6-8)} = b^{-5} = \frac{1}{b^5}$ $(b \neq 0)$ przedstawić jako $a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}$. Co do $\frac{1}{a^{-n}}$ można by sobie natomiast wyobrazić, że powstało z $a^0 : a^{-n} = a^{0-(-n)} = a^n$. Za pomocą tej reguły jesteśmy w stanie według upodobania przez zmianę znaku wykładnika przenosić każdą potęgę z mianownika do licznika (i na odwrót). W ten sposób otrzymamy:

$$\frac{a^0}{a^n} = \frac{a^{-n}}{a^0} \text{ oraz } \frac{a^0}{a^{-n}} = \frac{a^n}{a^0}, \text{ albo } \frac{1}{a^n} = a^{-n};$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n.$$

Teraz jednak chcielibyśmy nasz algorytm jeszcze bardziej rozszerzyć. Przypuszczamy mianowicie, że powinnoby być rzeczą możliwą zapisywanie wykładników potęgowych w postaci ułamków zwyczajnych. A więc np.:

$$10^{\frac{5}{6}},\ a^{\frac{7}{9}},\ 15^{\frac{a}{b}},\ 20^{\frac{1}{10}},\ 4^{\frac{3}{7}},\ 9^{\frac{25}{8}},\ \text{itd.}$$

Na razie niczego nie można sobie wyobrazić — zaraz się to wyjaśni — pod potęgą, w której ułamka użyto jako wykładnika potęgowego. Bo żądanie, aby podstawę 10 napisać np. $\frac{5}{6}$ razu jako czynnik, wydaje się na pierwszy rzut oka wymaganiem bez sensu. Nawet, gdybym sobie chciał pomóc przez to, że rozłożyłbym $\frac{5}{6}$ na $5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$, wiedziałbym tylko, że mogę 10 spotęgować najpierw liczbą 5, bo $(10^5)^{\frac{1}{6}}$ także równa się $10^{\frac{5}{6}}$. Potęgowanie liczbą 5 nie sprawi żadnych trudności. Jak jednak mam spotęgować potem wynik $10^5 = 100\,000$ przez $\frac{1}{6}$? Jak użyć 100 000 jedną szóstą część razu jako czynnik? Większą przez to nie stanie się owa liczba ani trochę, ponieważ nawet ani jeden jedyny raz nie mam jej użyć jako czynnika. Według wszelkich pozorów stoję tu wobec jakiegoś nowego rodzaju działania, litycznego działania, które w takim stosunku pozostaje do potęgowania, jak dzielenie do mnożenia albo odejmowanie do dodawania.

Zdradźmy tajemnicę, o jakie nowe działanie, o jaki „rozkaz"

tu chodzi: o tak zwane pierwiastkowanie. A $(100\,000)^{\frac{1}{6}}$ oznacza jako rozkaz nic innego, jak tylko: „Szukaj takiej nieznanej na razie liczby, która wzięta sześć razy jako czynnik da na wynik wartość 100 000".

Jeślibyśmy mieli przed sobą ogólnie $c^{\frac{a}{b}}$, moglibyśmy napisać: $c^{\frac{a}{b}} = (c^a)^{\frac{1}{b}}$, co by oznaczało tyle, jak gdybyśmy mieli znaleźć pewną nieznaną jeszcze liczbę d, która położona b razy jako czynnik, dała by znowu c^a. A więc $(d.d.d.d.d....)$ b razy jako czynnik $= c^a$, czyli

$$d^b = c^a.$$

Otóż każdy wie o tym zapewne, że pierwiastki zapisuje się nie tylko w postaci odwrotności wykładników potęgowych, a więc jako $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{3}}$, $10^{\frac{1}{b}}$ itd., ale już od wieków jest w użyciu tak zwany znak pierwiastka, który według powszechnie przyjętego mniemania, powstać miał z łacińskiego słowa *radix* (dosł. korzeń, przenośnie — zaczątek, pierwiastek) w ten sposób, że małe łacińskie *r* wyciągano do postaci $r\overline{}$, z czego później rozwinął się rzekomo nasz znak $\sqrt{}$. Piszemy więc

$$\sqrt[2]{5816},\quad \sqrt[3]{a.b},\quad \sqrt[a]{25a^4} \text{ itd.}$$

Pierwiastek otrzymuje przy tym tzw. wykładnik pierwiastkowy, będący po prostu odwrotnością ułamka o liczniku 1, który poznaliśmy jako ułamkowy wykładnik potęgowy. A zatem:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} \text{ albo } 10^{\frac{5}{6}} = (10^5)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10^5} \text{ itd.}$$

W podanej interpretacji pierwiastka uzyskuje się z łatwością wszystkie reguły działań na pierwiastkach. Polecamy przeto dla upewnienia się każdy bardziej skomplikowany rachunek na pierwiastkach powtórzyć przy użyciu potęg z wykładnikami ułamkowymi, czyli zmienić algorytm:

$$\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[7]{a^9} \text{ byłoby } a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{9}{7}} = a^{\frac{5}{3}+\frac{9}{7}} = a^{\frac{7.5+3.9}{21}} =$$

$$= a^{\frac{62}{21}} = (a^{62})^{\frac{1}{21}} = \sqrt[21]{a^{62}}.$$

Jeśli pierwiastek ma wykładnik ułamkowy, wówczas zapisując go jako potęgę należy wziąć odwrotność wykładnika. Np.

$$\sqrt[\frac{4}{5}]{a^3} = (a^3)^{\frac{5}{4}} = (a^{3.5})^{\frac{1}{4}} = \sqrt{a^{15}}, \text{ albo}$$

$$\sqrt[\frac{4}{5}]{a^3} = \sqrt[4 \cdot \frac{1}{5}]{a^3} = (a^3)^{5 \cdot \frac{1}{4}} = \left[(a^3)^5\right]^{\frac{1}{4}} = \left[a^{15}\right]^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a^{15}}.$$

Oczywiście, dopuszczalne jest też dzielenie pierwiastków (potęg o wykładnikach ułamkowych), przy czym ponadto otrzymać można w wyniku wykładniki dodatnie lub ujemne. Np.

$$\sqrt[5]{a^6} : \sqrt[3]{a^7} = (a^6)^{\frac{1}{5}} : (a^7)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{5}} : a^{\frac{7}{3}} = a^{\frac{6}{5} - \frac{7}{3}} =$$

$$= a^{\frac{6.3 - 7.5}{15}} = a^{-\frac{17}{15}} = \sqrt[-15]{a^{17}} = \sqrt[15]{a^{-17}} = \sqrt[15]{\frac{1}{a^{17}}} = \frac{\sqrt[15]{1}}{\sqrt[15]{a^{17}}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a^{17}}}$$

Na zakończenie należy zauważyć, że przy drugim pierwiastku zwykle nie pisze się wykładnika, to znaczy, że $\sqrt{a}$ oznacza to samo co $\sqrt[2]{a}$, bo coś takiego jak $\sqrt[1]{a}$ w ogóle nie potrzebuje żadnego znaku pierwiastkowego, ponieważ musi być $\sqrt[1]{a} = a^{\frac{1}{1}} = a^1 = a$.

Powiedzieliśmy uprzednio: „na zakończenie". Zapewne, tylko bardzo powierzchownie przerobiliśmy naukę o pierwiastkach. Bo dla dalszych naszych celów interesują nas nie te rzeczy, które znajdują się wyłożone dokładnie i wyczerpująco w każdym podręczniku, ale zajmujemy się nierównie głębszym problemem: Mianowicie wewnętrzną istotą pojęcia liczby, tak że interesuje nas tu rozszerzenie tego pojęcia przez wprowadzenie operacji pierwiastkowania, rozkazu pierwiastkowania, który, mówiąc nawiasem, bez pomocy tak zwanych logarytmów da się w rachunkach szczegółowych wykonać w na wpół prosty sposób tylko w pewnej określonej i bardzo ograniczonej liczbie przypadków.[1]

[1] Zasadniczo da się obliczyć każdy pierwiastek z jakiejś liczby szczegółowej. Jednak postępowanie, wymyślone w tym celu, wymaga wielkiej staranności i trudu, tak że w praktyce rachunkowej nie jest prawie brane pod uwagę.

ROZDZIAŁ SZESNASTY

LICZBY NIEWYMIERNE

Jeżeli zadamy sobie pytanie, pod jakim warunkiem, rozumując całkiem ogólnie, da się obliczyć jakiś pierwiastek, to przekonamy się, że np. $\sqrt[4]{a}$ wtedy daje wynik od razu jasny, jeżeli a równa się jakiejś liczbie p^4. Bo wtedy jest $\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{p^4} = p^{\frac{4}{4}} = p^1 = p$. Otrzymujemy więc na wynik p i mówimy, że p jest „czwartym pierwiastkiem" z a.

Teraz musimy badać, czy to zawsze jest możliwe. Rozważmy najprostszy przypadek, żądając aby a było liczbą całkowitą. Jakąkolwiek dowolną liczbą całkowitą. Skoro to tylko założyliśmy, zauważamy natychmiast, że trzeba rzadkiego przypadku na to, aby a rzeczywiście było akurat czwartą potęgą jakiejś innej liczby całkowitej. Bo np. w pierwszej setce liczb całkowitych dodatnich znajdujemy właśnie jako czwarte potęgi wyłącznie 1, 16 i 81. To znaczy, że każda całkowitoliczbowa wartość na a, która nie byłaby zarazem jedną z liczb 1, 16 lub 81, nie może oznaczać czwartej potęgi żadnej liczby całkowitej dodatniej. Np. liczba 25 znajdowałaby się między 2^4 a 3^4, liczba 90 pomiędzy 3^4 a 4^4 itd. W matematyce używa się dla wyrażenia owego „międzyliczbowego" położenia tzw. „nierówności". Ponieważ chodzi tutaj o nader ważny sposób pisania, stosowany bezustannie zwłaszcza w wyższej matematyce, pomówimy o tym nieco szczegółowiej. Jeżeli np. chcę zaznaczyć albo postawić jako warunek, że liczba b znajduje się między 30 a 40, to piszę: b jest większe od 30 lecz mniejsze od 40, czyli

$$30 < b < 40.$$

Jeśli natomiast pragnę powiedzieć, że liczba ta leży pomiędzy 30 a 40, ale ewentualnie może przy tym sama wynosić 30 lub 40, wtedy zanotuję

$$30 \leqslant b \leqslant 40.$$

Takie postępowanie nazywa się także „zamykaniem w przedziale", a 30 określa się w tym wypadku jako dolny kraniec, 40 jako górny kraniec przedziału. Przy liczbach ogólnych nie wiem oczywiście z góry, która liczba jest większa, a która mniejsza. Jeżeli napiszę

$$a < b < c,$$

to wówczas *b* leży pomiędzy *a* i *c*. I dopiero pośrednio, dzięki temu sposobowi zapisania dowiaduję się, że *a* jest najmniejszą, *b* największą z tych trzech liczb.[1]

Chcąc obecnie skorzystać z tego sposobu pisania w zastosowaniu do naszych pierwiastków możemy powiedzieć, że 25 leży pomiędzy 2^4 a 3^4, czyli

$$2^4 < 25 < 3^4.$$

Jest więc rzeczą widoczną, że czwarty pierwiastek z 25 nie da się wyliczyć w ten sposób: $\sqrt[4]{p^4} = p$ (gdzie p byłoby liczbą całkowitą dodatnią).

Jednakże posiadamy przecie drugi rodzaj liczb, które znajdują się między liczbami całkowitymi w nieskończonej rozmaitości i stopniowaniu. Mianowicie tzw. ułamki zwyczajne. Dowodziliśmy już, że właśnie „jednostki ułamkowe" $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, itd. leżą między 0 a 1, poza tym zaś jeszcze pozostałe ułamki właściwe, jak $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$... Ponieważ jednak także miejsca wartości pośrednich między dowolnymi innymi liczbami całkowitymi, np. między 12 a 13 zawsze należy rozumieć jako wypełnione liczbami w postaci ułamków niewłaściwych, a więc $\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$, albo w postaci $12 + \frac{1}{2}$, $12 + \frac{3}{4}$, $12 + \frac{7}{8}$ itd., mamy prawo przypuszczać, że o ile nasz $\sqrt[4]{25}$ nie da się rozwiązać w zakresie liczb całkowitych, to przynajmniej da się może za pomocą jakiegoś ułamka. A ponieważ $2^4 = 16$, $3^4 = 81$, przeto sądzimy, że ten czwarty pierwiastek będzie miał postać liczby mie-

[1] Że, jeśli $a < b$ oraz $b < c$, to także $a < c$, jest to przypadek tzw. zasady przechodniości.

szanej: 2 plus jakiś ułamek, coś około $2+\frac{1}{4}$, bo $2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ do potęgi czwartej równa się $\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{6561}{256}=25{\cdot}62...$ A zatem przez szacowanie „na oko" trafiliśmy niezbyt daleko od właściwego wyniku. Wszelako mamy do dyspozycji nieskończoną ilość ułamków, możemy więc oczekiwać, że przez dobranie ułamka nieco mniejszego od $\frac{9}{4}$ trafimy dokładnie na nasz czwarty pierwiastek. Wyznaczanie za pomocą zgadywania byłoby bardzo kłopotliwe i żmudne, ponadto zaś nie dawałoby może nawet pewności, że ułamek taki rzeczywiście znajdziemy. Należy to raz jeszcze zaakcentować, że mamy do wyboru nieskończenie wiele ułamków, których mianowniki mogłyby zawierać też i 200 miejsc, lub 2 000 albo 2 000 000. Może znalezienie dokładnej wartości na $\sqrt[4]{25}$ polegałoby dopiero na wyznaczeniu ułamka, którego mianownik posiada 10 000 kwintylionów miejsc; albo taką liczbę pomnożoną jeszcze przez bilion sekstylionów. Jeszcze ciągle byłby to ułamek zwyczajny. A liczba miejsc w mianowniku mogłaby się stale jeszcze dalej i dalej powiększać.

Musimy zatem postawić nasz problem ogólnie, co nie jest wcale trudne. Wiemy, że możliwe są dwa wypadki: Albo przy n-tym pierwiastku z liczby a owo a równa się p^n, przy czym a i p powinny być liczbami całkowitymi dodatnimi. Albo też nasze a leży pomiędzy dwiema n-tymi potęgami liczby p. A więc $p^n < a < (p+1)^n$. Owo $(p+1)$ jest to bezpośrednio po p następująca liczba całkowita, podobnie jak po 17 następuje liczba $(17+1)=18$. Ponieważ wiemy dalej, że w drugim wypadku $\sqrt[n]{a}$ nie można uzyskać jako liczby całkowitej, pytamy, czy nie da się go uzyskać za pomocą ułamka zwyczajnego $\frac{r}{s}(s \neq 0)$. Wówczas musiałby $\sqrt[n]{a}$ równać się $\sqrt[n]{(\frac{r}{s})^n}$, bo wtedy także $(\frac{r}{s})^{\frac{n}{n}}$ równałoby się $(\frac{r}{s})^1=\frac{r}{s}$, a tym samym pierwiastek dałby się obliczyć jako ułamek zwyczajny. Oczywiście r i s są „względem siebie pierwsze", nie mają wspólnego podzielnika prócz 1, ponieważ ułamek $\frac{r}{s}$ należy rozumieć jako sprowadzony do najprostszej postaci.

Np. jako rozwiązanie napisalibyśmy nie $\frac{24}{15}$, lecz $\frac{8}{5}$.

Ponieważ jest $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{(\frac{r}{s})^n}$, musiałoby naturalnie także a równać się $(\frac{r}{s})^n$ ponieważ równość $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{(\frac{r}{s})^n}$ pozostanie prawdziwa, jeżeli obie jej strony podniosę do n-tej potęgi, a więc

skoro napiszę $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(\sqrt[n]{(\frac{r}{s})^n}\right)^n$. To jednak daje $a = (\frac{r}{s})^n$. Dla dalszego badania muszę sobie przypomnieć o tym, że a jest liczbą całkowitą. Wszak był to punkt wyjścia w naszym rozumowaniu. Skoro jednak a jest liczbą całkowitą, wtedy i to, co jest jej równe, mianowicie $(\frac{r}{s})^n$ musi być też liczbą całkowitą. Dalej jednak, $(\frac{r}{s})^n$ równa się przecie $\frac{r^n}{s^n}$. A liczby r, s są względem siebie pierwsze. Jeżeli jednak licznik i mianownik są względem siebie pierwsze, to nie uzyskają one nigdy wspólnego podzielnika, choćbym je potęgował Bóg wie jak długo, bo ani w liczniku ani w mianowniku nie wystąpi przez to nowy czynnik. Jeśli będę potęgował np. $\frac{3}{5}$, wówczas otrzymam

$$\frac{3.3.3.3.3.3.\ldots\ldots \text{ w nieskończoność}}{5.5.5.5.5.5.\ldots\ldots \text{ w nieskończoność.}}$$

Tym samym także n-te (dowolne) potęgi liczb względem siebie pierwszych pozostaną liczbami względem siebie pierwszymi. A liczby względnie pierwsze, dzielone przez siebie, nie mogą dać nigdy na wynik liczby całkowitej, a zatem nasze a nie może być nigdy liczbą typu $(\frac{r}{s})^n$, jak długo ma pozostać nienaruszonym warunek, że a jest liczbą całkowitą.

Wynikiem naszym jesteśmy wprost zaskoczeni. Bo ni mniej, ni więcej mówi on, że pomimo nieskończonej mnogości ułamków, leżących pomiędzy liczbami całkowitymi, nie można znaleźć żadnego ułamka zwyczajnego, którym by wyrazić można wynik z $\sqrt[4]{25}$. Ponieważ jednak ten $\sqrt[4]{25}$ musi przecież dawać jakiś rezultat, do którego zbliżyliśmy się już bardzo przez liczbę $2\frac{1}{4}$, więc istnieje oprócz liczb całkowitych i ułamkowych jeszcze jakiś inny typ liczb, którymi wypełniają się miejsca między ułamkami. A my uroiliśmy tu sobie, że ułamki wypełniają wszystkie odstępy pomiędzy liczbami całkowitymi.

Nasz wynik, jak mówili Grecy od czasu Pitagorasa, jest „alogos", nie dający się wypowiedzieć, niedorzeczny. Sprzeciwia się poczuciu rozsądku, łac. „ratio". Stąd np. w języku niemieckim nazywa się te nowe liczby tajemnicze, co do których nawet nie wiemy jeszcze, jak je należy zapisać, „irracjonalnymi" (Irrationalzahlen). Te nowe liczby można też wyprowadzić przez rozważanie pojęcia

„współmierności“ (które później będzie rozważane), stąd powstała nazwa, używana w języku polskim, liczb „niewymiernych“ w przeciwieństwie do liczb całkowitych i ułamkowych, tworzących zbiór liczb „wymiernych“.

W jaki sposób jednak mam obecnie wyrazić te niemożliwe do wyrażenia monstra liczbowe, te osobliwe liczby pośrednie, jeżeli wzbronione jest zapisanie ich zarówno w postaci ułamka, jak liczby całkowitej?

Posługując się tablicami logarytmicznymi znajduję np. dla $\sqrt[4]{25}$ wartość 2·23 606... Kropki mają oznaczać, że rachunek bynajmniej nie jest tym samym jeszcze skończony i że w żaden sposób nie da się go skończyć. Dla innej liczby „niewymiernej“ związanej z pomiarem obwodu koła, tzw. liczby π, podał Leibniz wzór, który podaje, że $\frac{\pi}{4}$ można by znaleźć za pomocą następującego szeregu:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} \cdots$$

To znaczy, $\frac{\pi}{4}$ byłoby dopiero wtedy wyrażone, gdybym ten szereg obliczył aż do nieskończoności.[1] Mogę zatem obliczać z dowolną dokładnością, nigdy jednak z ostateczną.

Już teraz widzimy przy wyrażaniu liczb niewymiernych dwie możliwości, które w rzeczywistości wychodzą na jedno i to samo. Mianowicie pisanie w postaci ułamków dziesiętnych i pisanie w postaci szeregów nieskończonych, które, jak wskazuje „szereg Leibniza“, mogą także zawierać na przemian znaki dodawania i odejmowania, dzięki czemu nazywamy je szeregami „przemiennymi“.

Na razie jednak nie zajmiemy się bliżej bardzo trudną nauką o szeregach, lecz posuniemy się w jej badaniu tylko tak daleko, jak się to okaże potrzebne dla uzasadnienia naszego twierdzenia, że oba sposoby pisania liczb niewymiernych polegają właściwie na tej samej zasadzie, mianowicie właśnie na przedstawieniu za pomocą szeregów nieskończonych.

Dla sprawdzenia szeregu leibnizowskiego podamy już teraz, że liczba π, napisana w układzie dziesiątkowym wynosi 3·141592653589793.... Jako inną znaną liczbę niewymierną można by

---

[1] Z ścisłym ujęciem „sumy“ szeregu nieskończonego zapoznamy się w rozdziale 28.

jeszcze podać np. zasadę logarytmów naturalnych, zwaną „liczbą e", która jako szereg przedstawia się w postaci: $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$, a jako ułamek dziesiętny w postaci $e=2{\cdot}718281828459045235 36\ldots$

W tej chwili nasz oponent zwraca nam słusznie uwagę, że o ułamkach dziesiętnych jeszcze w ogóle nie mówiliśmy, wobec czego nie mamy wcale prawa pisać ułamków dziesiętnych zgodnie z zastrzeżeniem, że z góry nie będziemy zakładali jakichkolwiek wiadomości. Dalej, mogą nam zarzucić czytelnicy bardziej uważni i bystrzy, że jest też dosyć przypadków, w których zwyczajne dzielenie, jak to mówią, nie „wychodzi". Coś tu musi być nie w porządku. Bo dzielenie jakichkolwiek liczb całkowitych, to przecie nic innego jak zastąpienie kreski ułamkowej przez użycie dwukropka jako rozkazu. A myśmy twierdzili, jakoby ułamki zwyczajne a liczby niewymierne stanowiły wzajemnie niemal coś wprost przeciwnego; i jakoby liczby niewymierne leżały „pomiędzy" dwoma sąsiednimi ułamkami zwyczajnymi (czyli ilorazami). I dalej tak postępowaliśmy, jak gdyby liczby niewymierne powstały dopiero przez lityczną operację pierwiastkowania, kiedy przecie wiadomo, że choćby takie $20:6$, czyli $\frac{20}{6}$, również daje na wynik niejako liczbę niewymierną, mianowicie $3{\cdot}33333333\ldots$ czyli $3{\cdot}\dot{3}$ (trzy w okresie), albo $3+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{3}{1000000}+\ldots$

Za te zarzuty jesteśmy wdzięczni nad wyraz. Bo to fakt uderzający w oczy, że nawet dobrzy rachmistrze i ludzie z wykształceniem gimnazjalnym nie orientują się w rozróżnianiu tych pojęć, bo nawet nie pomyśleli o tym, albo ich na to odpowiednio nie naprowadzono. Że ułamek zwyczajny różni się od liczby niewymiernej, widzi każdy. Bo ułamek zwyczajny jest skończony, gotowy, zupełny; podczas gdy liczba niewymierna nigdy się nie da przedstawić w żadnym układzie liczbowym jako liczba, ale zawsze jako nieskończony, nie dający się zamknąć p r o c e s, jako reguła operacyjna, jako prawo tworzenia, jako szereg. Można by przeto, inaczej mówiąc, określić liczbę całkowitą i ułamkową jako liczby statyczne, niewymierną, zgodnie z jej zapisywaniem w układzie liczbowym, jako dynamiczną. Nie jest ona właściwie liczbą, ale kierunkiem dążenia do pewnej wielkości, aczkolwiek w części moglibyśmy niewątpliwie uczynić ją zawsze statyczną. I to, jak dalece chcemy. Jeżeli przy $\sqrt[4]{25}$ chcemy tylko wiedzieć, ile wy-

nosi ten pierwiastek z dokładnością do trzech miejsc dziesiętnych, to wtedy $\sqrt[4]{25}$ wynosi właśnie 2·236. Gdybyśmy jednak chcąc obliczyć go jako liczbę układu dziesiątkowego pragnęli powiedzieć, jak wielki jest w ogóle, to istotnie nie możemy dać żadnej odpowiedzi. Bo nie możemy napisać nieskończenie wielu miejsc dziesiętnych. Ale tego przecież nie możemy także zrobić przy ułamku okresowym 3·333333...? Tej liczby także nie możemy doprowadzić do końca. Zapewne! Mianowicie w postaci ułamka dziesiętnego, możliwe jest jednak w tym wypadku doprowadzenie do końca — w postaci ułamka zwyczajnego. Ułamek okresowy 3·3333... to nic innego, tylko $\frac{20}{6}$, czyli $\frac{10}{3}$ albo $10 . (\frac{1}{3})$. Przy takim napisaniu nie ma żadnej wątpliwości. Mogę nawet wskazać palcem na linii liczbowej, gdzie to $10 . (\frac{1}{3})$ leży. Mianowicie w odległości $\frac{1}{3}$ jednostki po 3. Bo $\frac{10}{3}$ to także $3 + \frac{1}{3}$, czyli $3\frac{1}{3}$. Ale $\sqrt[4]{25}$ wyrażonego w układzie dziesiątkowym, czyli owych 2·236... nie znajdę na linii liczbowej, nawet przy pomocy jakiegoś nadziemskiego mikroskopu. I to nawet wtedy, gdybym znał te ułamki zwyczajne, między którymi to leży. Bo to leży tam gdzieś, pośród nieskończonej mnogości innych liczb niewymiernych. Wygląda to bardzo mistycznie. Niestety w tych ramach nie ma możliwości, aby wyjaśnić do gruntu tę nadzwyczaj frapującą sprawę.[1]

[1] Pojętniejszym czytelnikom należy polecić, aby przestudiowali np. u G. Kowalewskiego przedstawienie „przekroju dedekindowskiego", wzgl. zapoznali się z rozprawą prof. A. Hoborskiego p. t. „Nowa teoria liczb niewymiernych", W-wa — Kraków 1923.

ROZDZIAŁ SIEDEMNASTY

UŁAMKI SYSTEMATYCZNE

Przystępujemy więc do najbliższego zadania i zajmiemy się wreszcie badaniem tzw. ułamków systematycznych, których szczególnym wypadkiem są ułamki dziesiętne. Z naszych rozważań nad układami (systemami) liczbowymi możemy się domyśleć, co ma oznaczać wyrażenie „ułamek systematyczny". W każdym układzie pozycyjnym jest coś, co odpowiada „ułamkom dziesiętnym". W układzie szóstkowym następują po „kropce dziesiętnej" (która tam powinnaby się nazywać kropką „szóstkową") części szóste, trzydziesteszóste, dwieścieszesnaste itd. W układzie dwójkowym po kropce „dwójkowej" — połówki, ćwiartki, ósme części, szesnaste części itd., w układzie trzynastkowym po kropce „trzynastkowej" — części trzynaste, stosześćdziesiątedziewiąte, dwatysiącestodziewięćdziesiątesiódme itd., — a w układzie dziesiątkowym dziesiąte, setne, tysięczne itd. Ogólnie zatem jakaś liczba z miejscami całkowitymi i ułamkowymi w pewnym układzie wygląda w następujący sposób, jeżeli zasadę nazwiemy g, a wykładniki potęgowe napiszemy w układzie dziesiątkowym: Np. liczba o pięciu miejscach całkowitych, z czterema miejscami ułamkowymi:

$$mg^4 + ng^3 + og^2 + pg^1 + qg^0 + r\left(\frac{1}{g^1}\right) + s\left(\frac{1}{g^2}\right) + t\left(\frac{1}{g^3}\right) + u\left(\frac{1}{g^4}\right)$$

albo prościej, przy użyciu potęg o wykładnikach ujemnych,

$$mg^4 + ng^3 + og^2 + pg^1 + qg^0 + rg^{-1} + sg^{-2} + tg^{-3} + ug^{-4}.$$

„Kropkę dziesiętną" trzeba by sobie wyobrazić pomiędzy qg^0 a rg^{-1}. Nie będziemy tu przerachowywali wszystkich możliwych układów, lecz zadowolimy się w szczególności układem dziesiątkowym. Liczba układu dziesiątkowego, z miejscami dziesiętnymi, np.

50341·7328, ma postać: $5 . 10^4 + 0 . 10^3 + 3 . 10^2 + 4 . 10^1 + 1 . 10^0 + + 7 . 10^{-1} + 3 . 10^{-2} + 2 . 10^{-3} + 8 . 10^{-4}$, co czyni jej budowę zupełnie przejrzystą.

A więc jeszcze raz: Przez „ułamek systematyczny", który ogólnie oznaczymy małą literą grecką σ (sigma), rozumiemy przedstawienie jakiejś liczby ułamkowej w pewnym układzie pozycyjnym. Zanim jednak ustalimy poszczególne możliwe typy takich ułamków systematycznych, poznamy nowy symbol, który pozwoli nam całkiem istotnie uprościć zapisywanie systematycznych szeregów. Jest to tzw. „operator sumy", znak sumowy, znak: „suma z .....". A wyraża się go za pomocą dużej litery greckiej Σ (sigma). Do tego musimy dalej oznaczyć „zakres sumowania". Taki zakres wtedy tylko ma pewien sens, o ile chodzi o zesumowanie wyrażeń istotnie jednakich pod względem struktury, a odróżniających się jedynie przez jakieś wskaźniki (indeksy). Nasuwa się nam przypuszczenie, że np. jakaś liczba napisana w postaci szeregu w układzie dziesiątkowym, albo liczba jakiegoś innego układu pozycyjnego, odpowiada tym warunkom. Bo każdy składnik takiej liczby składa się ze współczynnika i z zasady, z których pierwszy odróżnia się od innych współczynników wskaźnikiem miejsca, podczas gdy zasady odróżniają się wykładnikami potęgowymi, przy czym indeks miejsca i wskaźnik potęgowy pozostają jeszcze wzajemnie w pewnym związku. Liczba w układzie pozycyjnym $a_1 g^0 + a_2 g^1 + a_3 g^2 + + a_4 g^3 + a_5 g^4 + a_6 g^5 + a_7 g^6 + a_8 g^7$ składa się w każdym składniku z a oraz g. Jest więc sumą wszystkich a pomnożonych przez g. Ale których a . g? Otóż liczb a, opatrzonych wskaźnikami od 1 do 8, pomnożonych przez g, potęgowane wykładnikami 0 aż do 7, przy czym w każdym składniku (to jest ów związek) indeks jest o 1 większy od wykładnika potęgowego, czyli wykładnik potęgowy jest o 1 mniejszy niż indeks. Liczba jest zatem sumą wszystkich wyrazów postaci $a_\nu g^{\nu-4}$ albo $a_{\rho+1} g^\rho$. Znaki ν (ni) i ρ (rho) są to małe litery alfabetu greckiego. Ale na tym jeszcze nie koniec. Bo nie znam jeszcze zakresu, wewnątrz którego tę sumę należy utworzyć. Jak tu sobie poradzić? Otóż, całkiem po prostu! Ponieważ okazuje się, że najmniejsza wartość wskaźnika jest 1, a największa wartość 8, zatem tzw. dolną granicą „przebiegania" jest właśnie 1, a górną granicę owego „przebiegania wskaźnika" stanowi 8. Granice należy zawsze rozumieć włącznie, inkluzywnie. Wskaźnik wy-

kładnika ma natomiast dolną granicę 0, a górną granicę 7. „Przebiega" zatem wartości od 0 do 7. Zwracamy na to uwagę — a jest to jedna z najważniejszych i najbardziej zasadniczych uwag w całej książce — że takie „przebieganie" nazywamy „przebieganiem nieciągłym". Odbywa się ono właściwie skokami w zakresie liczb całkowitych od jednego wskaźnika do drugiego, od jednego wykładnika do drugiego. Dla zachęcenia zdradzimy, że całka, której się tak boimy, to w istocie nic innego tylko taka suma w postaci szeregu, przy której „przebieganie" występuje nie skokami, ale właśnie w sposób ciągły, płynny. Jeśli więc wpoimy sobie dokładnie rozkaz sumowania Σ, zyskamy niesłychanie wiele dla pojęcia całki. Bo „operator sumy" to nic innego, tylko nieciągły, pozbawiony precyzji, niejako gołym okiem dający się przeniknąć operator całkowy. Wielki Leibniz — wyjawmy to już w tym miejscu — napisał na owej karcie z 29 października 1675, brzemiennej w doniosłe dla całego świata następstwa, że nowy całkowy znak $\int$ nie oznacza niczego innego jak „sumę z .....". A znak ten to po prostu wydłużone łacińskie S duże.

Ponieważ jednak oponent mój wali pięściami w stół i wyrywa sobie włosy, przerażony tym, wracam znowu do znaku sumowego. Bo odzyskawszy panowanie nad sobą, twierdzi słusznie, że jeszcze nie wiemy nawet, co to jest ułamek dziesiętny.

Podkreślamy zatem, że zarówno wskaźnik jak wykładnik iloczynów, utworzonych z a przez g „przebiega" odpowiednio od pewnej dolnej granicy do górnej. To znaczy, że skacząc po liczbach całkowitych z jednej na drugą, żadnej jednakowoż nie przeskakując, przybiera wszystkie wartości, dane przez liczby całkowite od granicy dolnej do górnej.

Myślę, że jesteśmy już tak daleko, iż potrafimy napisać nasz operator sumowy. Brzmi on:

$$\sum_{0}^{7\rho} a_{\rho+1} g^{\rho} \quad \text{albo} \quad \sum_{1}^{8\nu} a_{\nu}\, g^{\nu-1}$$

W sposób logiczny i nie budzący zastrzeżeń zapisuje się dolną granicę poniżej rozkazu sumowania, górną zaś granicę — powyżej. Wewnątrz, w środku można, ale nie musi się, napisać, która wielkość jest „bieżąca". Potem następuje wyrażenie podające strukturę składników, opatrzone ogólnym wskaźnikiem i ogólnym wykładnikiem potęgowym.

Oczywiście, mogłyby po znaku sumowym stać dwie, trzy, cztery, pięć liczb ogólnych, a nawet jeszcze więcej, i wszystkie mogłyby być opatrzone tylko wskaźnikami albo tylko wykładnikami potęgowymi, albo jednym i drugim w dowolnym zestawieniu.[1] Nawet jedna i ta sama liczba mogłaby posiadać tak indeks jak wykładnik potęgowy. Wtedy znaczyłoby to, że odnośna liczba ogólna zmienia się, przy czym jej wykładniki potęgowe wzrastają lub maleją według pewnego prawa. Aby jednak zanadto nie popadać w abstrakcję, przeliczmy wspólnie kilka przykładów, natury mniej lub więcej zawiłej. A przy tym zauważmy jeszcze, że rozkaz sumowania oznacza nieprzejrzane wprost możliwości w uproszczeniu rachowania, ponieważ kiedy indziej ledwie dające się napisać wyrażenia, dozwala ująć, igrając, w ramach jednego wyrażenia.

Przypuśćmy, że dana jest np. suma $\sum_{2}^{9\nu} a^{\nu} b_{\nu+1} c_{\nu}^{\nu+2}$. Jak wygląda ta suma po „rozwinięciu"? Otóż, całkiem prosto:

$$a^2b_3c_2^4 + a^3b_4c_3^5 + a^4b_5c_4^6 + a^5b_6c_5^7 + a^6b_7c_6^8 + a^7b_8c_7^9 + a^8b_9c_8^{10} + \\ + a^9b_{10}c_9^{11}.$$

Przy „rozwijaniu" trzeba zgodnie z naturą rzeczy uważać. Ale konieczność natężenia uwagi a trudność, to tak w matematyce, jak gdzie indziej w życiu bynajmniej nie jedno i to samo.

Weźmy obecnie praktyczny przypadek. Jak napiszemy np. ułamek systematyczny o czterech miejscach ułamkowych[2] w układzie dziesiątkowym?

Oczywiście tak: $0 . g^0 + \sum_{1}^{4\nu} a_{\nu} . \frac{1}{g^{\nu}}$ albo $0 . g^0 + \sum_{1}^{4\nu} a_{\nu} g^{-\nu}$. W pierwszej postaci rozwinięcie daje:

$$0 . g^0 + a_1 . \frac{1}{g^1} + a_2 . \frac{1}{g^2} + a_3 . \frac{1}{g^3} + a_4 . \frac{1}{g^4},$$

w drugiej postaci

$$0 . g^0 + a_1 g^{-1} + a_2 g^{-2} + a_3 g^{-3} + a_4 g^{-4},$$

co oczywiście oznacza to samo. Mianowicie 0 jednostek, a_1 dziesiątych, a_2 setnych, a_3 tysięcznych, a_4 dziesięciotysięcznych.

[1] O innych możliwościach rozmyślnie tutaj nic nie mówimy.

[2] W ułamkach systematycznych liczy się tylko miejsca ułamkowe, bez względu na to, czy występują w liczbie miejsca całkowite czy nie.

Oczywiście, można także inaczej wyznaczyć „granice przebiegania". Jeślibym chciał np. napisać ułamek dziesiętny o n-miejscach, gdzie n oznacza jakąś nieokreśloną, ale skończoną liczbę, wtedy musiałbym napisać:

$$0 \cdot g^0 + \sum_1^n {}^{\nu} a_\nu g^{-\nu} = 0 \cdot g^0 + a_1 g^{-1} + a_2 g^{-2} + \ldots\ldots + a_n g^{-n}.$$

Mogę jednak jeszcze śmielej określić granice. Np. dla ułamka dziesiętnego nieskończonego, a więc dla takiego ułamka, który daje ciągle nowe miejsca dziesiętne:

$$0 \cdot g^0 + \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu g^{-\nu} = 0 \cdot g^0 + a_1 g^{-1} + a_2 g^{-2} + a_3 g^{-3} + \ldots\ldots$$

Wreszcie spróbujmy wyrazić jakoś za pomocą naszego nowego „rozkazu" najogólniejszą postać liczby w układzie pozycyjnym. Musimy przy tym zauważyć, że można znaleźć różne odmiany wyrażenia jej, jak to prawie zawsze bywa przy wszystkich tego rodzaju wzorach. Wybierzmy jakąś postać łatwą do zrozumienia:

Liczba w rozwinięciu systematycznym $= \sum_{+m}^{-\infty} {}^{\nu} a_\nu g^\nu$, gdzie $(+m)$ jest dowolnie wielkie. Rozwinięty „rozkaz" daje szereg:

$$a_m g^m + a_{m-1} g^{m-1} + \ldots + a_2 g^2 + a_1 g^1 + a_0 g^0 + a_{-1} g^{-1} + a_{-2} g^{-2} + \ldots$$

Nasz nowy algorytm, w którym przez wzgląd na przyjęty sposób pisania liczb, napisałem górną i dolną granicę na pozór wbrew zdrowemu rozsądkowi, daje nam następujący wynik:

1. Wskaźnik i wykładnik potęgowy w każdym iloczynie a razy g są równe.

2. Oba przebiegają wartości całkowite od m począwszy, stale o jeden malejąc do 0, a stąd jako liczby ujemne do $-\infty$, wzrastając co do bezwzględnej wartości.

Ale nie sięgajmy zbyt głęboko, a tylko pokażmy jeszcze wielce osobliwy, ale bardzo często używany system, wedle którego uzyskać możemy nawet szeregi „przemienne". Są to szeregi, w których znaki wyrazów stale na przemian się zmieniają. Spróbujmy np. napisać sławny szereg Leibniza

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

dla dowolnej ale p a r z y s t e j liczby wyrazów. I to jako rozkaz

sumowania. Urzeczywistnimy nasz zamiar następującym zapisaniem:

Przybliżona wartość dla $\frac{\pi}{4} = \sum_{1}^{2} {}^{\nu} \frac{1}{2\nu-1} (-1)^{\nu+1}$. Zbadajmy obecnie, jak funkcjonuje nasza maszyna algorytmiczna:

1. wyraz: $\frac{1}{(2.1)-1} \quad (-1)^{1+1} = \frac{1}{1} . (-1)^{2} = +1.$
2. wyraz: $\frac{1}{(2.2)-1} \quad (-1)^{2+1} = \frac{1}{3} . (-1)^{3} = -\frac{1}{3}.$
3. wyraz: $\frac{1}{(2.3)-1} \quad (-1)^{3+1} = \frac{1}{5} . (-1)^{4} = +\frac{1}{5}.$
4. wyraz: $\frac{1}{(2.4)-1} \quad (-1)^{4+1} = \frac{1}{7} . (-1)^{5} = -\frac{1}{7}.$

itd.

2n-ty wyraz: $\frac{1}{(2.2n)-1} \quad (-1)^{2n+1} = \frac{1}{4n-1} \quad (-1)^{2n+1} = -\frac{1}{4n-1}.$

Z nieomylną dokładnością otrzymujemy właśnie szereg Leibniza. Należy jeszcze tylko zaznaczyć, że 2n jest ogólnym wyrażeniem liczby całkowitej parzystej. Bo chociaż wybierze się zupełnie dowolnie *n* całkowite (a inne nie wchodzi tu w rachubę), to musi ono, pomnożone przez 2, dać na wynik liczbę parzystą. Jeśli $n = 2$, wówczas jest $2n = 4$. Jeśli $n = 27$, wtedy $2n = 54$ itd. Dlatego wykładnik $2n + 1$, który występuje przy 2n-tym wyrazie, jest liczbą nieparzystą. To także zgadza się znakomicie z naszym algorytmem, bo wszystkie wyrazy „parzyste" mają nieparzyste wykładniki, np. 4-ty wyraz ma wykładnik 5. A więc nasz znak czarnoksięski funkcjonuje bez zarzutu, a przy tym doznajemy jeszcze satysfakcji widząc, jak warunek systematycznej zmiany znaku liczbowego, pozornie nie dający się wyrazić symbolicznie, został wprost włączony w algorytm dzięki temu, że wykorzystano pewną własność potęg. Potęgi liczb ujemnych mianowicie dają zawsze na wynik przy wykładnikach parzystych wartości dodatnie, a przy wykładnikach nieparzystych stale wartości ujemne.[1] Aby się jednak poza tym nic nie zmieniło i aby tylko znak przeskakiwał na przemian z dodatniego na ujemny, wybraliśmy jeszcze ponadto (—1) jako podstawę potęgową. W samej rzeczy, niezwykle przebiegły trick!

Choć było by rzeczą bardzo pociągającą badać dalej ten nowy

[1] Wynika to z prawideł „kojarzenia rozkazów". Np. jest $(-a)^3 = (-a) . (-a) . (-a)$ oraz $(-a)^6 = (-a) . (-a) . (-a) . (-a) . (-a) . (-a)$. Jeśli jednak znak minus występuje w mnożeniu w ilości parzystej, to w wyniku otrzymuje się znak plus, w przeciwnym razie znak minus.

algorytm, który raz jeszcze jak najusilniej zalecić należy do szczegółowego przestudiowania, ponieważ to co pokazano, to tylko bardzo mały fragment zakresu wszystkich możliwości, czas już jednak przejść do naszych ułamków systematycznych. Pomóżmy tu sobie przykładami. Założymy, że zajmować się będziemy tylko tzw. ułamkami „nieprzywiedlnymi", to jest ułamkami, których bezwzględna wartość jest mniejsza niż jeden, a których liczniki i mianowniki są względem siebie pierwsze, a więc nie mają żadnych wspólnych podzielników oprócz 1. Lecz oto niestety, nagromadziły się raptem przed nami nowe pojęcia. Powiedzieliśmy o „bezwzględnej" wartości, więc musimy jeszcze prędko objaśnić ten termin. Jest widoczne, że „mniejszy niż jeden" może oznaczać dwie różne rzeczy. Mianowicie najpierw to, co się zwykle przez to rozumie. A więc np., że $\frac{1}{2}$ jest liczbą mniejszą niż jeden, podobnie jak i $\frac{4}{7}$. W ogóle każdy ułamek właściwy jest mniejszy niż jeden, ponieważ właściwym nazwaliśmy właśnie ten ułamek, który jest mniejszy od 1. Lecz powiedzenie „mniejszy niż 1" ma jeszcze drugie znaczenie, które powstaje przez wprowadzenie liczb ujemnych. 0 jest na pewno mniejsze od 1. Ale jeszcze mniejsze od 0 jest (—1), (—2), (—3) itd., w ogóle każda liczba ujemna. Kto ma długi, tego stan posiadania jest na pewno mniejszy od majątku takiego człowieka, który się mieni właścicielem jednego cekina. A więc uwzględniając właśnie to drugie znaczenie wyrażenia „mniejszy niż ...." nie mogę twierdzić, że tylko ułamki właściwe są mniejsze od jedności.

Z tego powodu przy każdej liczbie rozważam trzy możliwości odnośnie do jej wartości: Wartość jej jako wziętej dodatnio, wartość jej jako wziętej ujemnie, a w końcu jej wartość bezwzględną, jako rozważanej bez znaku, jej znaczenie liczbowe samo przez się. Wtedy piszę liczbę pomiędzy pionowymi kreskami i objaśniam: $|5|$ jest w każdym razie większa od $|3|$, choć oczywiście (—5) z pewnością jest mniejsze niż (+3), a nawet niż (—3). „Bezwzględna" wartość $\left|\frac{1}{2}\right|$ jest zatem zawsze mniejsza niż $|1|$, a również każdy inny ułamek właściwy, rozważany bezwzględnie jest mniejszy od bezwzględnie rozważanej jedności.

Po takim intermezzo możemy wreszcie przystąpić do naszej pracy. Najpierw spróbujemy ustalić, jaką wartość posiada np. ułamek $\frac{3}{40}$. Za pomocą dzielenia znajdujemy wartość 0·075, mamy zatem

przed sobą tzw. ułamek dziesiętny skończony. Podobnie przy $\frac{4}{125}$, co napisane jako ułamek systematyczny da na wynik 0·0312. Że $\frac{1}{2} = 0{\cdot}5$, a $\frac{1}{5} = 0{\cdot}2$, o tym wie każde dziecko. Jeśli teraz, stosując ogólny sposób pisania, oznaczymy licznik ułamka właściwego „nieprzywiedlnego" przez p, mianownik przez q, to wówczas prawdziwą będzie reguła, że każdy taki ułamek zwyczajny da nam skończony ułamek systematyczny, o ile mianownik q ułamka jest liczbą złożoną wyłącznie z dwóch czynników pierwszych 2 i 5, będących zarazem podzielnikami pierwszymi zasady 10 naszego systemu dziesiątkowego.

$$40 = 2.2.2.5 = 2^3.5^1, \quad 125 = 5.5.5 = 5^3.2^0,*$$
$$2 = 2^1.5^0 \text{ i } 5 = 5^1.2^0.$$

Wszędzie zatem w naszych przykładach reguła okazuje się trafną. Dlatego można twierdzić ogólnie, że tylko wtedy mam nadzieję względnie pewność, iż dzielenie „wyjdzie", jeżeli po uproszczeniu przez wszystkie wspólne podzielniki zawarte w dzielnej i w dzielniku, dzielnik będzie się składał jedynie z potęg 2 i 5, przy czym 2 albo 5 mogą także występować w potędze 0-wej, to znaczy mogą w ogóle nie występować. Jeśli więc utworzę liczby np. $2^{27}.5^{13}$ albo ogólnie $2^n.5^m$, wtedy każda inna liczba całkowita jaka tylko na świecie istnieje, podzielona przez to $2^n.5^m$ musi dać na wynik jakiś skończony iloraz w postaci liczby całkowitej albo ułamka systematycznego. A więc każdy ułamek postaci $\frac{p}{2^n 5^m}$ da nam skończony, nieokresowy ułamek systematyczny. Mówiąc całkiem ogólnie, otrzymam w każdym systemie taki skończony ułamek systematyczny, jeżeli licznik p podzielę przez mianownik, złożony jedynie z potęg czynników pierwszych zasady g systemu. A więc w systemie dwójkowym każda liczba da się w sposób skończony podzielić przez taki mianownik, który składa się z potęg 2. W układzie szóstkowym dzielnik musi się w tym celu składać z potęg 2 i 3, w układzie dwunastkowym również z potęg 2 i 3, w układzie trzydziestkowym z potęg 2, 3 i 5. I tak dalej. Powtarzamy: Pewne, dopiero co właśnie objaśnione typy ułamków zwyczajnych dadzą się zamienić na ułamki systematyczne skończone. Można to zapisać: $\sigma_n = 0 . g^0 +$

* Potęgę zerową brakującego czynnika napisano dla zachowania ważności ogólnej reguły.

$+\sum_{1}^{n}{}^{\nu} a_\nu g^{-\nu}$, przy czym górna granica n nie może być nieskończenie wielka.

Jeśliby w mianowniku naszego ułamka $\frac{p}{q}$ znajdowała się liczba, która zawierałaby tylko potęgi czynników pierwszych, przez które zasada nie jest podzielna (a więc w układzie dziesiątkowym np. 3 lub 7 albo 3 i 7), wtedy otrzymuje się jako rezultat dzielenia tzw. okresowy c z y s t y ułamek systematyczny. Wówczas powtarza się jakaś cyfra albo jakaś grupa cyfr aż do nieskończoności. Np. $\frac{1}{7}=0{\cdot}\overbrace{142857}\,\overbrace{142857}\,\overbrace{142857}...$, $\frac{3}{7}=0{\cdot}\overbrace{428571}\,\overbrace{428571}...$, $\frac{4}{11}=0{\cdot}\overbrace{36}\,\overbrace{36}\,\overbrace{36}...$, $\frac{2}{3}=0{\cdot}\dot{6}\dot{6}\dot{6}...$ ...itd. Przyjął się w zapisywaniu tych ułamków taki zwyczaj, że nad cyfrą pojedynczego okresu albo nad dwiema krańcowymi cyframi grupy cyfr tworzącej okres kładzie się kropkę. W ostatnim wypadku, gdy chodzi o powtarzanie się grupy cyfr, także często poziomą kreskę. A więc np. $7{\cdot}\dot{3}$ oznacza $7{\cdot}3333333$ itd., $0{\cdot}\dot{5}432\dot{1}8\dot{9}$ albo $0{\cdot}\overline{5432189}$ oznacza $0{\cdot}\overbrace{5432189}\,\overbrace{5432189}$ itd.

Jako ostatni przypadek pozostawałaby jeszcze możliwość, że mianownik ułamka (dzielnik) zawiera wprawdzie potęgi liczb pierwszych, przez które zasada systemu jest podzielna, ale nadto jeszcze inne potęgi takich liczb pierwszych, które nie są podzielnikami zasady systemu. W układzie dziesiątkowym np. 2 i 3, gdy w mianowniku występuje liczba 6. $\frac{5}{6}$ np. daje jako ułamek systematyczny $0{\cdot}83333...$, a więc typ ułamka, z jakim się jeszcze nie spotkaliśmy. Nazywamy go „ułamkiem okresowym m i e s z a n y m". Najpierw występuje 8, a dopiero potem 3 w okresie. Tutaj „mieszanie" jest nadzwyczaj proste. Ale może się też zdarzyć, że zarówno grupa przed okresem, jak i sam okres składa się z większej ilości cyfr. Przy $\frac{5}{22}=0{\cdot}2\overbrace{27}\,\overbrace{27}\,\overbrace{27}$ grupa przed okresem jest jednocyfrowa, okres zaś dwucyfrowy. Przy $\frac{3}{26}=0{\cdot}1\overbrace{153846}\,\overbrace{153846}$ grupa przed okresem jest jednocyfrowa, okres sześciocyfrowy. Wreszcie przy $0{\cdot}2\overbrace{6387}$ (co dałoby jako ułamek zwyczajny $\frac{2929}{11\,100}$) grupa przedokresowa jest dwucyfrowa, a więc również wielocyfrowa.

Inny jakiś rodzaj złożenia dzielnika czy mianownika jednak nie istnieje. Nie mogąc się bardziej zagłębić w naukę o ułamkach sy-

stematycznych mamy jednak prawo twierdzić, że zamiana ułamków zwyczajnych na systematyczne (a przez to także dzielenie dwóch liczb wymiernych) nigdy nie może dać na wynik nic oprócz ułamka systematycznego skończonego, czy ułamka systematycznego okresowego czystego, albo ułamka systematycznego okresowego mieszanego.

Liczba niewymierna, tzn. ułamek systematyczny, który dąży w nieskończoność bez reguły i bez prawa, albo na podstawie innego prawa tworzenia niż to, które dotąd przedstawiono, jest nie do pomyślenia jako wynik z dzielenia. Może wypaść tylko z pierwiastkowania (mianowicie z operacji o ułamkowym wykładniku potęgowym) albo z obliczania sum pewnych nieskończonych szeregów potęgowych malejących z wykładnikami ujemnymi, albo z innych szeregów ułamków malejących (np. ze wzrastającymi silniami w mianowniku).

Mamy zatem pewność, że z każdego ułamka i z każdego dzielenia liczb wymiernych otrzymamy na wynik jakąś liczbę wymierną. $\frac{p}{q} = r$ (liczba wymierna) jakkolwiek wyglądałyby liczby p, q, czyby to były liczby całkowite, ułamkowe, dodatnie lub ujemne. Tylko że ani p, ani q nie może być liczbą niewymierną.

Skoro sprawa tak się przedstawia, to musi być także możliwa odwrotna zamiana każdego ułamka systematycznego skończonego, nieskończonego okresowego czystego, nieskończonego okresowego mieszanego na liczbę wymierną, na ułamek zwyczajny o postaci nieprzywiedlnej $\frac{p}{q}$. Natomiast ułamka systematycznego nieskończonego mającego nieokresowe prawo tworzenia, albo nieskończonego ułamka systematycznego bez żadnego prawa tworzenia nigdy nie będziemy mogli z powrotem zamienić, boć chodzi tu o liczby niewymierne, a w przeciwnym wypadku wynikałoby, że liczba niewymierna da się zamienić na wymierną.

Taka jednak „powrotna zamiana" może się stać skutecznym sprawdzeniem naszych dotychczasowych przypuszczeń. Tylko na razie nie możemy sobie jeszcze zupełnie dokładnie wyobrazić, w jaki sposób dało by się ująć rachunkiem ułamki nieskończone, choćby nawet okresowe. Wiemy wprawdzie, że $\frac{1}{3}$ równa się 0·333333... (3 w okresie do nieskończoności), gdybyśmy jednak mieli przed sobą

tylko samo 0·333333..., nie wiedzielibyśmy, jak z tego zrobić ułamek zwyczajny. Przynajmniej nie bez ścisłych i głębokich rozważań.

Istotnie najprościej da się z powrotem zamienić na zwyczajny ułamek skończony tylko ułamek dziesiętny. Np. 0·225. Wystarczy go tylko wypowiedzieć, tę wypowiedź napisać jako ułamek zwyczajny, a otrzymamy rezultat. A zatem $0{\cdot}225 = \frac{225}{1000}$, uproszczone jednak przez 25, to nic innego jak „nieprzywiedlna forma $\frac{9}{40}$", która dalej nie da się uprościć. Jeśli natomiast chcę naszą regułę napisać ściśle naukowo, wówczas uczynię to następująco:

$$\sigma_m = \frac{\sum_1^m{}^{\mu} c_\mu \, g^{m-\mu}}{g^m}$$

Przy tym μ (mała litera grecka „mi") jest „liczbą bieżącą", c jest każdorazowym współczynnikiem (więc u nas 2, 2, 5) wreszcie g jest zasadą układu (u nas 10). Liczba m oznacza ilość miejsc skończonego ułamka dziesiętnego (u nas 3). Możemy zatem wstawić:

$$\sigma_m = \frac{2 \cdot 10^{3-1} + 2 \cdot 10^{3-2} + 5 \cdot 10^{3-3}}{10} = \frac{2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1}{1000} = \frac{225}{1000},$$

a więc to samo, co przedtem otrzymaliśmy niejako na chłopski rozum. Nasz wzór ma jednak tę ogromną korzyść, że stosuje się ogólnie do każdego układu pozycyjnego, a przez to odtwarza ścisły schemat ogólnego rozwiązania problemu.

Dla zamiany odwrotnej ułamków okresowych czystych na nieprzywiedlne ułamki zwyczajne korzystamy z wzoru [1]:

$$\sigma_r = \frac{\sum_1^r{}^{\rho} c_\rho \, g^{r-\rho}}{g^r - 1},$$

co nic innego nie oznacza, jak tylko, że w liczniku należy napisać składniki okresu jako liczby całkowite, podczas gdy w mianowniku napisać trzeba tyle dziewiątek, z ilu cyfr składa się licznik. Przy tym wyjaśnieniu miano oczywiście na myśli tylko układ dziesiątkowy.

Jeślibym zatem miał zamienić na ułamek zwyczajny np. 0·3, na-

[1] Wyprowadzenie wzorów na zamianę odwrotną jest zbyt uciążliwe dla naszych celów.

piszę po prostu $\frac{3}{9}$ i otrzymam natychmiast $\frac{1}{3}$. Podobnie $0{,}\dot{6}$, daje $\frac{6}{9}$, a więc $\frac{2}{3}$. Ułamek okresowy czysty $0{,}\dot{0}76923$ należałoby napisać jako $\frac{76923}{999999}$, co po uproszczeniu daje $\frac{1}{13}$. Wszelako z naszą „domową regułą" musimy nieco ostrożnie postępować, o ile jej nie kontrolujemy zarazem ścisłym wzorem.

Mianowicie, o ile okres zaczyna się od zera albo od kilku zer, wtedy nie pisze się wprawdzie tych zer w liczniku, bo przecież liczby całkowite od zer zaczynać się nie mogą. Mimo to jednak bacznie uważać należy na te „zerowe współczynniki", ze względu na ilość dziewiątek, które występują w mianowniku. Ponieważ w powyższym przykładzie okres włącznie z zerem jest sześciocyfrowy, położyliśmy też w mianowniku 6 dziewiątek, chociaż licznik po opuszczeniu zera zachował tylko pięć miejsc.

Odwrotna zamiana ułamków okresowych mieszanych na zwyczajne jest poniekąd zestawieniem obu dotąd omówionych sposobów postępowania. Jeślibym chciał znowu podać „domową regułę" dla układu dziesiątkowego, to musiałbym zażądać: „Najpierw napisz w liczniku wszystkie cyfry ułamka dziesiętnego (a więc zarówno nie należące do okresu, jak cyfry pierwszego okresu) jako liczbę całkowitą. Od tej liczby odejmij, również w postaci liczby całkowitej napisane, cyfry nieokresowe, czyli przed okresem stojące. A potem umieść w mianowniku tyle dziewiątek, ile cyfr posiada okres. Do tych dziewiątek jednak dołącz jeszcze tyle zer, ile wynosi liczba cyfr przed okresem!"

Jeślibym miał zastosować tę regułę np. do $0{,}2\overset{\frown}{27}\overset{\frown}{27}27...$, musiałbym napisać:

$$\sigma_{(m,\ r)} = \frac{227-2}{990} = \frac{225}{990} = \frac{45}{198} = \frac{5}{22}.$$

Jak widać, za pomocą wszystkich naszych wskazówek dotyczących odwrotnej zamiany, otrzymuje się z reguły ułamki w postaci przywiedlnej (nieuproszczone), które należy dopiero sprowadzić do ostatecznej postaci $\frac{p}{q}$ (gdzie p, q są względem siebie pierwsze). Jest to jednak dziecinne zadanie, z którym właściwie każdy uczeń najniższej klasy szkoły średniej bez zarzutu musi umieć sobie poradzić.

Oczywiście, że i dla tego trzeciego, a zarazem ostatniego przypadku „odwrotnej zamiany" istnieje „elegancki" rozkaz ogólny.

Brzmi on:

$$\sigma_{(m,\,r)} = \frac{\sum_{1}^{m+r} c_\nu g^{m+r-\nu} - \sum_{1}^{m} c_\mu g^{m-\mu}}{g^m (g^r - 1)}$$

gdzie m oznacza ilość miejsc przed okresem, r ilość miejsc w okresie, g zasadę układu, c każdorazowy przez odpowiedni wskaźnik przyporządkowany współczynnik, ν jest „bieżącą" liczbą pierwszego, μ „bieżącą" liczbą drugiego rozkazu sumowania, których dolne i górne granice znajdują się przy odpowiednich symbolach sumacyjnych.

Obecnie władamy całym królestwem ułamków systematycznych i potrafimy napisać w każdym dowolnym układzie liczbowym jakikolwiek ułamek systematyczny, a następnie, o ile da się w ogóle odwrotnie zamienić, przekształcić go w jakiś ułamek zwyczajny nieprzywiedlny.

Napiszmy w postaci dziesiętnej np. 0·23471..., wtedy otrzymamy według ostatniego, tylko pozornie strasznego wzoru:

$$\sigma_{(2,\,3)} = \frac{(2.10^{5-1}+3.10^{5-2}+4.10^{5-3}+7.10^{5-4}+1.10^{5-5})-(2.10^{2-1}+3.10^{2-2})}{10^2\,(10^3-1)}$$

$$= \frac{23471-23}{100.999} = \frac{23471-23}{99900} * = \frac{23448}{99900} = \frac{1954}{8325}.$$

Jak widać z tego przykładu, ułamek okresowy mieszany, stosunkowo prosto się przedstawiający, może odpowiadać jakiemuś bardzo skomplikowanemu ułamkowi zwyczajnemu.

Mamy już teraz za sobą wcale wielkie osiągnięcia. Bo znamy już obecnie dziedzinę liczb całkowitych, ułamkowych i niewymiernych. A to wszystko nie tylko w zakresie ich bezwzględnej wartości. Bo znane nam są też liczby dodatnie i ujemne. A wszystkie te liczby znowu we wszelkich możliwych układach liczbowych. Co więcej: Zajmowaliśmy się liczbami ogólnymi, i tu znowu liczbami ogólnymi „stałymi" i niewiadomymi. Ponieważ ponadto zbadaliśmy także algorytm równania z jedną niewiadomą, a także tzw. równania Diofanta, przynajmniej w ich istocie, mamy na tyle dojrzałości matematycznej, aby przystąpić do najwyższego pojęcia matematyki, do nauki o funkcjach. Tu też, nie po omacku, ale otwarcie i radośnie wstępujemy na właściwy teren wyższej matematyki i znowu rozświetla

* Porównaj z „domową regułą"!

nam drogę duch wielkiego Leibniza. Bo on to właściwie w ostatnim dziesiątku lat XVII stulecia ujął pojęcie funkcji w całej głębi i ogólności i on też temu algorytmowi nadał nazwę. I przyświadczyć musimy Oswaldowi Spenglerowi, który określił funkcję jako liczbę kultury Zachodu, jako liczbę „faustyczną".

Bo właśnie ów „faustowski duch" to to, co ją czyni tak urozmaiconą, tak podniecającą — a przy tym w gruncie rzeczy tak łatwą.

Oznajmiamy to w tym miejscu z pełną świadomością zobowiązania, że tego oświadczenia faktami dowieść musimy. Wszystko, co jeszcze nastąpi w tej książce jest łatwiejsze od tego, co już mamy za sobą. Odtąd będziemy wiele mówili, wiele objaśniali, wiele wspólnie dyskutowali. Ale nie będzie więcej żmudnego rachowania i szperania, lecz w górnej sferze matematyki będziemy się radowali śmiałymi chwytami, groteskowymi paradoksami i niespodziewanymi, wręcz niepojętymi rozwiązaniami.

FUNKCJE. (WYWÓD ALGEBRAICZNY)

Niech będzie dane równanie Diofanta prostej postaci, np.

$$3x - y = (-5).$$

Jeśli rozwiążemy to równanie dla uzyskania całkowitych pierwiastków według metody Eulera, wtedy otrzymamy

$$x = \frac{y-5}{3} \text{ oraz } \frac{y-5}{3} = n, \text{ a więc } x = n.$$

Dalej, dla y otrzymujemy rozwiązanie $3n + 5$. Podstawmy obecnie za n liczby od 1 aż do liczby dowolnie wielkiej:

$n = 1, \quad x = 1, \quad y = 8$; sprawdzenie: $3 - 8 = -5,$
$n = 2, \quad x = 2, \quad y = 11$; sprawdzenie: $6 - 11 = -5,$
$n = 3, \quad x = 3, \quad y = 14$; sprawdzenie: $9 - 14 = -5,$
$n = 4, \quad x = 4, \quad y = 17$; sprawdzenie: $12 - 17 = -5,$
$n = 5, \quad x = 5, \quad y = 20$; sprawdzenie: $15 - 20 = -5,$

itd. do nieskończoności.

Znaleźliśmy więc za pomocą eulerowskiej metody nieskończoną ilość rozwiązań całkowitych dodatnich. Równie dobrze moglibyśmy uzyskać nieskończoną ilość rozwiązań całkowitych ujemnych. Albowiem:

$n = -1, \quad x = -1, \quad y = 2$; sprawdzenie: $-3 - (+2) = -5,$
$n = -2, \quad x = -2, \quad y = -1$; sprawdzenie: $-6 - (-1) = -5,$
$n = -3, \quad x = -3, \quad y = -4$; sprawdzenie: $-9 - (-4) = -5,$

itd.

Jak widać, począwszy od $n = (-2)$, wszystkie pary wartości na obie niewiadome są ujemne, gdyż przecie $x = n$, wobec czego x

musi być ujemne, skoro n przyjęto jako ujemne. Ale także y musi stale pozostać ujemne, gdy tylko liczba całkowita n będzie mniejsza od (—1). Bo neutralizująca jej wartość „stała“ dodatnia w wyrażeniu $y = 3n + 5$ wynosi 5, i już od $3 \cdot (-2)$ począwszy strona ujemna uzyskuje bezwzględną przewagę w $y = (-6) + 5$; oczywiście tym bardziej przy $n = (-3)$, a więc $y = (-9) + 5$ itd.

Mamy zatem od razu „podwójną“ nieskończoność możliwych rozwiązań, a to nieskończoną ilość par wartości całkowitych dodatnich i całkowitych ujemnych. Do tej podwójnej nieskończoności dochodzi — jako wypadek specjalny, osobliwy — para wartości dla $n = -1$, przy którym $x = -1$, $y = +2$, ponadto para dla $n = 0$, przy którym $x = 0$, $y = 5$.

Obecnie przekształćmy nieco nasze równanie nieoznaczone, bez żadnych dalszych zmian. A mianowicie napiszmy zamiast $3x - y = -5$ równanie w postaci

$$y = 3x + 5,$$

co nam przecie bez żadnych skrupułów wolno uczynić. A teraz załóżmy, że interesują nas nie tylko liczby całkowite, ale także wartości ułamkowe. Postanawiamy dalej, że najpierw podstawimy zawsze wartość na x, a potem dopiero zajmiemy się szukaniem odpowiedniego y. Pomijając, że robimy to także z zasadniczych względów, w naszym przypadku jest to prostsze, ponieważ y ma współczynnik 1 i ponieważ dzięki temu możemy uniknąć wszystkich dzieleń. Znajdźmy więc kilka par wartości w postaci ułamków:

$$x = \tfrac{1}{2}, \quad y = 3 \cdot \tfrac{1}{2} + 5 = \tfrac{3+10}{2} = \tfrac{13}{2}$$
$$x = \tfrac{1}{3}, \quad y = 3 \cdot \tfrac{1}{3} + 5 = \tfrac{3+15}{3} = \tfrac{18}{3} = 6$$
$$x = \tfrac{2}{7}, \quad y = 3 \cdot \tfrac{2}{7} + 5 = \tfrac{6+35}{7} = \tfrac{41}{7}$$
itd.

Oczywiście na y mogą wypaść także całkowite wartości, jak przy $x = \frac{1}{3}$. Stanowczo jednak zyskają przewagę te wypadki, w których przy x ułamkowym, y także będzie ułamkiem. Dla naszego już nie diofantycznego (tzn. wymagającego rozwiązań już nie tylko w zakresie liczb całkowitych) nieoznaczonego równania z dwiema niewiadomymi mamy obecnie znowu nieskończenie wiele rozwiązań w postaci ułamków. Jak wielkiej „mocy“ jednak jest ta nowa nieskończoność wynika z tego, że już pomiędzy 0 a 1 można liczbie x przy-

dzielić nieskończenie wiele wartości. Tak samo pomiędzy 1 a 2, pomiędzy 2 a 3, itd. Do tego dochodzą ponadto wszystkie możliwości, w których na x żądamy ułamka ujemnego np. $x = -\frac{10}{3}$ itd. Jeśli się przyjrzeć dokładnie, stoimy tu przed następującymi nieskończonymi mnogościami rozwiązań: Wszystkie ułamki dodatnie dają na y przeważnie ułamki, i to dodatnie. Jeśli się przyjmie $x = 0$, co można by uważać za ułamek: „w liczniku zero, w mianowniku jakakolwiek liczba różna od zera", wówczas będzie $y = 5$. Jeśli podstawię za x ułamki ujemne, to wszystkie ułamki od $-\frac{1}{\infty}$ aż do wartości $x = -\frac{5}{3}$, których także jest nieskończenie wiele, dadzą na y jeszcze wartości dodatnie. Przy $x = -\frac{5}{3}$ będzie $y = 0$. Przy wszystkich ułamkach, które są mniejsze niż $-\frac{5}{3}$ (to znaczy leżą dalej na lewo na ujemnej stronie linii liczbowej) a więc np. $-\frac{6}{3}$, y będzie także ujemne.

W każdym razie mamy już dla naszego nieoznaczonego równania podwójną nieskończoność rozwiązań całkowitych i wielokrotną nieskończoność rozwiązań ułamkowych. Do tego jeszcze szczególny wypadek $x = -\frac{5}{3}$.

Otóż na podstawie naszego rozszerzonego pojęcia liczby moglibyśmy jeszcze wpaść na myśl, aby pomiędzy każde dwa ułamki na x podstawić jedną, albo wszystkie z nieskończenie wielu liczb niewymiernych. Np. $\sqrt[4]{25}$ lub coś podobnego. Że przez to y stanie się liczbą niewymierną,[1] widać jasno. Mianowicie, jeśli liczbę niewymierną x przedstawimy za pomocą ułamka dziesiętnego nieskończonego i dodamy do tego stałą, wówczas y składać się będzie właśnie ze sumy ułamka dziesiętnego nieokresowego i pewnej „stałej". Z takiego jednak sumowania wypadnie znowu rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej.

Stoimy zatem obecnie wobec niesamowitej mnogości nieskończenie wielu par rozwiązań, wobec mnogości, która widocznie jest niejako potęgą nieskończoności. I z mistycznym prawie wzruszeniem widzimy, że nasze niewinne równanie

$$y = 3x + 5$$

[1] W matematyce nazywają taką liczbę, złożoną z części wymiernej i niewymiernej, jak np. w naszym przypadku $y = 3 . \sqrt[4]{25} + 5$, „niewymiernością mieszaną".

obejmuje nieskończoną wielokrotność nieskończenie wielu rozwiązań, zarówno po stronie dodatniej jak ujemnej. Wśród tego są niektóre osobliwe wypadki szczególne, a poza tym „nieskończoność do potęgi" par wartości, przy których x oraz y otrzymują różne znaki. Powtarzając jeszcze raz: Możemy przyporządkować liczbie x każdą dowolną wartość ze znakiem dodatnim bądź ujemnym, całkowitą, ułamkową, lub niewymierną, a przez to otrzymamy „przynależne" y. Obie zaś wartości wzajemnie sobie odpowiadające nazwiemy „parą wartości".

Aby plastycznie móc sobie wyobrazić ów osobliwy algorytm, którego niesamowitą wszechstronność na razie tylko przeczuwamy nie zdając sobie jeszcze dokładnie sprawy z wszystkich jego możliwości, skonstruujmy sobie prostą fikcyjną maszynę, której w myśli będziemy kazali odpowiednio „funkcjonować".

Instrument ten wyglądałby w następujący sposób:

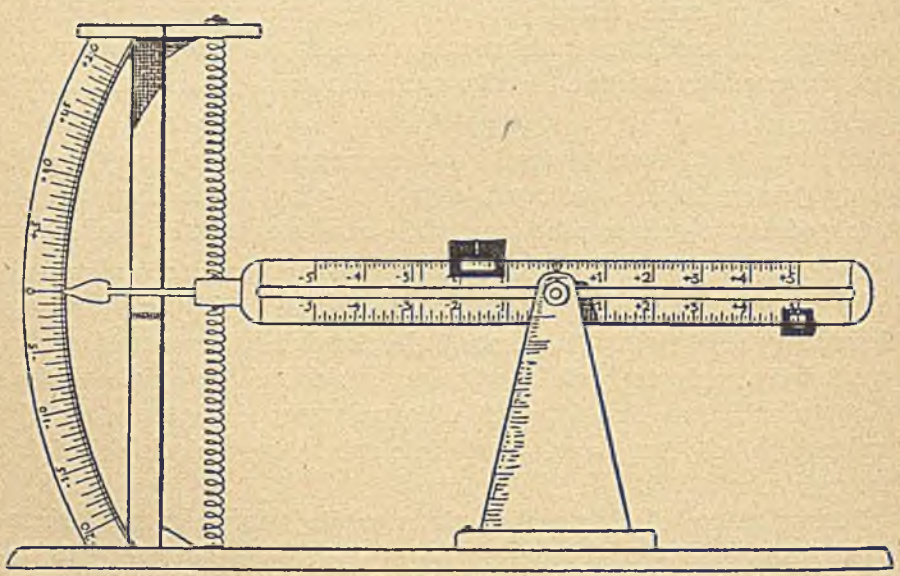


Fig. 13.

Coś w rodzaju belki wagi posiada po jednej stronie wskazówkę, która porusza się wzdłuż półkolistej skali, opatrzonej liczbami. Belka składa się z szyn, które również zaopatrzone są w liczby w pewnych odstępach. Na każdej szynie znajduje się „przesuwalny odważnik". Ponadto da się ten przesuwalny odważnik jeszcze wy-

mieniać. Zgodnie z elementarnymi zasadami mechaniki działanie ciężaru zależy w tym wypadku nie tylko od tego, jak wielki on jest sam przez się, ale także od tego, w którym miejscu „ramienia dźwigni" się znajduje. Jeden kilogram w odległości 5 będzie działał pięć razy większym ciężarem niż jeden kilogram w odległości 1. Powszechnie wiadomo, że na tej zasadzie oparta jest konstrukcja wagi dziesiętnej. W dalszym ciągu uczyniliśmy — powiedzmy — następujące założenia: Wskazówka podaje na skali za każdym razem niejako stan obciążenia naszej „zmiennej" wagi. Jeżeli znajduje się ona w równowadze, wtedy wskazówka stoi na zerze. Ale wskazówkę przytrzymują jeszcze od góry i od dołu spiralne sprężyny tak skonstruowane, że reagują wprawdzie bardzo silnie na wyciąganie, ściskaniu natomiast nie przeciwstawiają wcale znaczącego (żądanie teoretyczne: w ogóle żadnego) oporu. Wreszcie dolna szyna służy do nastawiania „stałych", górna do nastawiania „x". Jednostką jest we wszystkich przypadkach kilogram.

Obecnie możemy już używać naszej maszyny do naszych celów. Dokładniej jeszcze wyjaśnimy sprawę w formie jak gdyby instrukcji obsługi. Załóżmy, że posiadamy kasetkę z najrozmaitszymi odważnikami przesuwalnymi, następnie wyjmijmy z niej dla naszego równania

$$y = 3x + 5$$

ładny kilogramowy odważnik i nasuńmy go na dolną szynę, opatrzoną napisem „stałe" tak daleko, aby środkowy znaczek na przesuwalnym ciężarku padał na kreskę z liczbą pięć na szynie. Ciężarek ruchomy ma w tym celu „okienko". Odważniki takie można zobaczyć w aptece na każdej dziesiętnej wadze osobowej. Ponieważ chodzi o stałą, niezmienną wielkość, przykręcam odważnik przesuwalny na stałe dla wszystkich następnych przypadków. Rzecz jasna, tylko na tak długo, jak długo rozważam równanie

$$y = 3x + 5,$$

w którym „stała" (czyli wyraz wolny) właśnie wynosi 5. Zgodnie z ogólną konstrukcją naszej maszyny kilogram nasz musi wychylić szynę ku dołowi siłą pięć razy większą, aniżeli, gdybym był odważnik przesuwalny przymocował przy znaczku 1. I o ile bym nic innego nie nastawił, wskazówka musiałaby teraz podnieść się i wskazać znaczek 5 na łuku skali. Bo zakładamy z góry, że na to jest obli-

czone urządzenie spiral sprężynowych. Obecnie jednak mam „x" nastawić. Ponieważ nie występuje ono wprost jako x, ale jako x ze współczynnikiem 3, wybieram 3-kilogramowy odważnik przesuwalny, gdyż jeden kilogram odpowiada w naszej maszynie liczbie szczegółowej 1. Gdzie jednak i jak daleko posunąć mam ten odważnik? Jestem w kłopocie i muszę chwilę poświęcić rozważaniu matematycznemu. A to rozważanie powie mi natychmiast, że mam przecie podstawiać za x, a więc przede wszystkim powinienem wybrać to x. Dlatego najpierw zajmę się dobraniem takiego x, aby się „waga" znalazła w stanie równowagi, a więc, co jasne jest bez dalszych wyjaśnień, aby wskazówka wskazywała dla y na zero. Jeśli dokonam tego bez obliczania, a tylko drogą próby, to zauważę, że osiągnę pożądany wynik, o ile przesuwalny odważnik 3-kg znajdzie się dokładnie przy znaczku $-\frac{5}{3}$, czyli $-1\frac{2}{3}$ na górnej szynie. Tam bowiem równoważą się odpowiednie obciążenia, a mianowicie 3-kilogramowe na lewym ramieniu wagi (które nazwiemy ujemnym) w odległości $\left(-\frac{5}{3}\right)$, i 1-kilogramowe na prawym ramieniu (dodatnim) w odległości $(+5)$. Ponadto, ponieważ wedle zasad mechaniki każdorazowe obciążenie wyraża się iloczynem ciężaru i odległości od osi obrotu belki wagowej, więc z jednej strony obciążenie wynosi $3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -5$, a z drugiej $1 \cdot 5 = 5$, a zatem obciążenia są co do bezwzględnej wartości równe. Że jednak na takiej wadze, opatrzonej na ramionach skalą dodatnią i ujemną, tylko wtedy można uzyskać równowagę, jeżeli ta sama bezwzględna wartość występuje zarówno z ujemnym, jak dodatnim znakiem, oznacza wynik nasz niejako optyczne potwierdzenie faktu, że w równaniu

$$y = 3x + 5$$

muszę wybrać x jako $\left(-\frac{5}{3}\right)$, aby otrzymać zero na y. Postawiliśmy już żądanie, że stałej nie wolno więcej ruszyć. Mimo to jednak moglibyśmy ją nastawić na naszej maszynie także w inny, nawet „elegantszy" sposób. A to, jeśli zważymy, że równanie $y = 3x + 5$ można by także napisać w postaci

$$y = 3x^1 + 5x^0,$$

bo, jak wiadomo, każda potęga zerowa daje 1, a przez to istoty równania nie zmienia, można by zatem górną szynę oznaczyć przez x^1 a dolną przez x^0, zaś 5 uważać za współczynnik przy x^0. Wtedy jed-

nakże można by wybrać odważnik 5-kilogramowy i przytwierdzić go przy znaczku 1 na dolnej szynie, gdzie mógłby pozostać, gdyż x^0 musi dawać jeden dla każdej wartości na x, a zatem $5x^0$ przy każdej możliwej postaci równania daje 5 razy odległość 1, czyli 5. To na razie jednak tylko mimochodem. Do sprawy tej jeszcze kiedyś powrócimy.

Zadowolimy się pierwszym tłumaczeniem, według którego naszą stałą umocowaliśmy jako 1-kilogramowy odważnik przesuwalny na dolnej szynie, przy znaczku 5. Dodajmy, że już więcej nie będziemy się troszczyli o ową „stałą", ponieważ w naszym specjalnym równaniu stała się niejako utrwaloną, nieruchomą, stałą częścią maszyny i wpływ swój wywrze automatycznie.

Kusi nas natomiast, by poeksperymentować z drugim odważnikiem przesuwalnym. Ponieważ, jak widzieliśmy, znaczek na szynie oznacza wprost wartość każdorazowego x, wolno nam odważnik przesuwalny posunąć wewnątrz „przedziału" od —5 do +5 na jakiekolwiek „dowolne" miejsce, wolno nam „zmienić" jego położenie. Ale zmiana miejsca oznacza wedle prawa dźwigni zmianę obciążenia, a zmiana obciążenia jest zmianą wartości liczbowej. Zróbmy takie doświadczenie: Posuńmy np. 3-kilogramowy odważnik przesuwalny na znaczek $x = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$. Prawa strona belki wagowej zacznie natychmiast opadać, a wskazówka y wychylać się na skali. Po kilku wahnieniach ustawi się na $9\frac{1}{5}$. Otóż według równania dla $x = \frac{7}{5}$ jest faktycznie $y = 9\frac{1}{5}$, gdyż $3 \cdot \frac{7}{5} + 5 = \frac{21+25}{5} = \frac{46}{5} = 9\frac{1}{5}$ (p. fig. 14).

Skoro zatem x „zmieniliśmy dowolnie", to y „zmieniło się przymusowo" na naszej maszynie.

Jesteśmy już tak daleko, że na podstawie sprawnego „funkcjonowania" naszej maszyny, możemy przejrzeć istotę „funkcji".[1] Stwierdzamy, na razie jeszcze bardzo niedokładnie, że z funkcją wtedy mamy do czynienia, jeżeli wskutek „dowolnej" zmiany jednej wielkości, jakaś druga wielkość zmienia się „przymusowo". Jeżeli, dalej, zamiast wielkości zmiennej użyjemy po prostu słowa „zmienna", wówczas możemy powiedzieć, że w funkcji każde wyznaczenie wartości „zmiennej dowolnej x" wciąga w pewien spo-

[1] To wyprowadzenie pojęcia „funkcji" ze słowa „funkcjonować", użytego w odniesieniu do naszej maszyny, należy oczywiście uważać tylko jako ułatwienie pamięciowe.

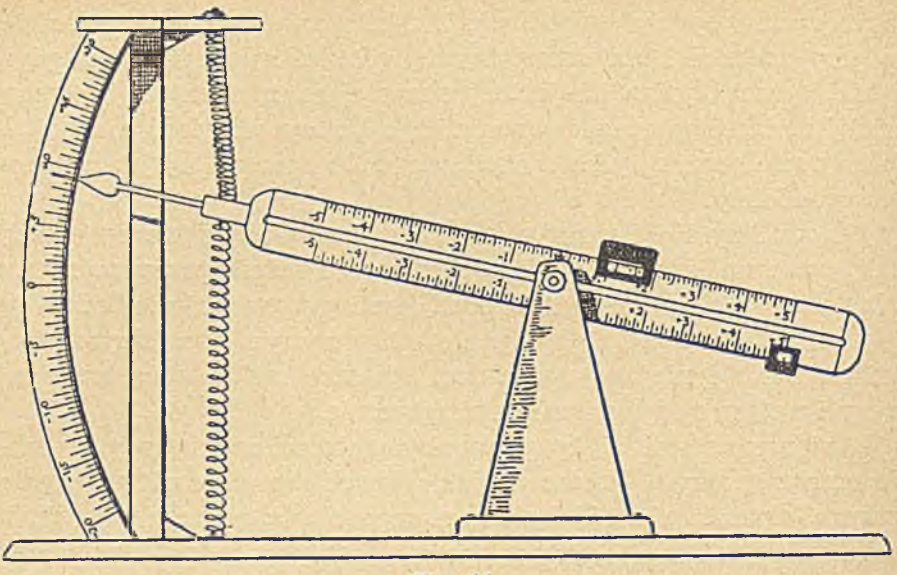


Fig. 14.

sób „zmienną przymusową y“ w ponoszenie konsekwencji tej zmiany. Prawidło, na którym polega ten związek, zwie się funkcją. Nasza maszyna aż dotąd dostarczała wyniku automatycznie. A to dlatego, ponieważ nastawiliśmy maszynę właśnie według tego „prawidła“. „Prawidłem“ tym nie było jednak nic innego, jak tylko nasze równanie

$$y = 3x + 5.$$

I to właśnie „równanie“ nazywa się przy takim sposobie objaśnienia funkcją. Jej najogólniejszą postać zapisuje się od czasów Leibniza: $y = f(x)$. A wypowiada się je: y jest funkcją x. Oznacza to jedynie, że y systematycznie zależy od jakiejkolwiek wartości nadanej x.

W tym miejscu wystąpię z herezją i dopuszczę się czynu rewolucyjnego, do czego czuję się w pewnej mierze upoważniony jako poeta. Twierdzę mianowicie, że ogólnie przyjęty w języku naukowym zwyczaj, który określa dowolnie obraną zmienną jako „niezależną“, a przymusowo wynikającą zmienną jako „zależną“ jest o tyle niefortunny językowo, psychologicznie i pedagogicznie, iż słabsze wrażenie zawsze wywiera kontrast pomiędzy twierdzeniem

a przeczeniem, uzyskanym przy pomocy przedrostka „nie", w porównaniu z kontrastem uzyskiwanym przez użycie wyrażeń zawierających treść już same przez się twierdzącą wzgl. przeczącą. Przy tym przedrostek „nie" nie zawsze stanowi w naszym języku oczywiste zaprzeczenie, ale niekiedy zamaskowane tylko wzmocnienie w sensie twierdzącym. Wystarczy wspomnieć takie twory, jak „nieoceniony i nieodżałowany", by przyznać, że bez mędrkowania i sofisterii trudno uważać je za zaprzeczone. Ale abstrahując nawet od tego rodzaju wyjątków, z pewnością bardziej kontrastowo i znacznie plastyczniej jest przeciwstawić sobie przyjemność i ból, niż przyjemność i nieprzyjemność. Ta anemia antytezy nasila się jeszcze niezmiernie przy imiesłowowych przymiotnikach użytych w znaczeniu rzeczownikowym, jak zmienna „zależna" i zmienna „niezależna". Co gorsza, przez asocjację może komuś przyjść na myśl, że wybór wartości na zmienną w jednym wypadku zależy wyłącznie od mej woli, w drugim natomiast jest ode mnie niezależny. Takie tłumaczenie byłoby jednak wręcz przeciwieństwem tego, co za pomocą zwyczajnie przyjętych określeń pragniemy wyrazić.

Nie mając jednak zamiaru wprowadzać zamieszania zadowolimy się jedynie zwróceniem uwagi na możliwość nieporozumień, a w dalszym ciągu naszych rozważań stosować będziemy, rzecz jasna, powszechnie przyjętą terminologię, tym bardziej, że ma ona za sobą wiekową, a więc niejako uświęcającą tradycję.

Zyskawszy pewne wiadomości o terminologii w nauce o funkcjach, zajmiemy się znowu naszym instrumentem, naszą maszyną do obliczania wartości funkcji i zrobimy nowy eksperyment. Posuniemy ostrożnie 3-kilogramowy odważnik o mały kawałeczek dalej na szynie x i obserwujemy, jak zachowuje się podczas tego wskazówka na skali y? Widzimy, że wskazówka także poruszała się bez przerwy. W końcu zatrzymała się między dwiema kreskami skali. Ale nasz odważnik przesuwalny stoi także gdzieś, w miejscu na szynie nie oznaczonym.

Obecnie, korzystając z usług naszej maszyny, dokonamy nowego chwytu. Przypuszczamy mianowicie, że szyna z przesuwalnym odważnikiem to nic innego tylko oś liczbowa. Że jednak, jak już dobrze wiemy, oś liczbowa składa się w sposób ciągły z punktów odpowiadających wszystkim liczbom całkowitym, ułamkowym i niewymier-

nym, każde ciągłe przesuwanie odważnika oznacza po prostu, że podczas tego „przesuwania" nasze x przybiera wszystkie wartości, leżące w obrębie „granic przesunięcia". A zatem wartości wszystkich liczb całkowitych, ułamkowych i niewymiernych, jakie tylko znajdują się pomiędzy tymi granicami.

Owo pojęcie „ciągłości" odgrywa w nauce o funkcjach ogromnie doniosłą rolę, zwłaszcza od czasu odkryć wielkiego matematyka Weierstrassa. Na razie poprzestaniemy na tej pierwszej wzmiance o tym pojęciu; tym bardziej, że o wiele zrozumialej da się je rozważyć i rozważymy też istotnie na innej drodze, mianowicie geometrycznej.

Na podstawie tego, co dotychczas wiemy o funkcjach, odważmy się rozwiązać pewne specjalne zagadnienie, którego znaczenie i cel w pierwszej chwili będzie dla nas jeszcze tajemnicą. Ponieważ jednak chodzi tu o nadzwyczaj proste zagadnienie algebraiczne, nie widzimy powodu, aby obojętnie przejść nad nim do porządku.

Pytamy zatem, co się stanie ze wskazówką y-ową, jeżeli w jakimś miejscu x wzrośnie za naszą sprawą o pewną określoną wartość. Prawdopodobnie wskazówka poruszy się wtedy o pewną ilość kresek. Moglibyśmy za widoczną miarę zmiany przyjąć np. stosunek, jaki zachodzi pomiędzy przyrostem na x, a wynikającym stąd przymusowo przyrostem na y. A dalej, jeżeli naszemu przyrostowi na x nadamy całkiem ogólną postać, a więc dopuścimy, aby przyrost nastąpił w jakimkolwiek miejscu, to jasne, że związane z tym wychylenie wskazówki y-owej otrzymam także niejako w „jakimś tam miejscu". Wszak mógłbym sobie wyobrazić, że skale na szynie z ruchomym odważnikiem i na półkolu są całkiem po prostu zakryte, albo nieczytelne.

A zatem „jakieś x" albo „x", co znaczy jedno i to samo, ponieważ x pozostawiam nieoznaczone, wzrasta o skończoną wielkość, wynoszącą Δx. Trójkąt (Δ) to greckie D duże (delta). A znane jest każdemu dziecku jako obraz trójkątnego ujścia Nilu, jako „delta" Nilowa. Obok naszego Δ piszę x, aby zaznaczyć, że chodzi o przyrost x. Otóż z tego wynika przymusowe, według „prawidła" funkcji dokonywujące się wychylenie wskazówki na skali y. Ten przyrost nazwiemy naturalnie Δy. Oczywiście, zakłada się ponadto, że maszyna jest „nastawiona" według naszej funkcji, do czego potrzeba jedynie by odważnik 1-kilogramowy znajdował się na

znaczku 5 dolnej szyny, a 3-kilogramowy odważnik gdziekolwiek na górnej szynie.

W języku czysto-algebraicznym pytanie brzmi obecnie: Jak się ma nasze Δy do Δx pod warunkiem „nastawienia" maszyny według funkcji. Albo: jakie Δy wynika przymusowo ze zmiany nastawienia o Δx?

Nie zapuszczając się w drobiazgowe roztrząsania zabierzmy się do sprawy wprost rachunkiem. Jeżeli chcemy „przyrosty" wbudować w nasze równanie (funkcję), musimy napisać:

$$(y + \Delta y) = 3(x + \Delta x) + 5.$$

Bo skoro nastąpił przyrost, po przesunięciu odważnika z x powstało $(x+\Delta x)$, wskutek czego y przeszło przymusowo w $(y+\Delta y)$.

Jeszcze raz, aż do znudzenia: Nie wiemy wcale, jak wielkie jest x. Nie wiemy także, jak wielkie jest Δx. Żądamy tylko, aby było skończone. Nawiasem mówiąc, mogłoby mieć każdą wartość w ogóle. Weźmy je jednak możliwie małe, różne od zera, aby potem łatwiej było wnioskować. A zatem

$$(y + \Delta y) = 3(x + \Delta x) + 5.$$

Szukamy $\Delta y : \Delta x$, czyli $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Inaczej, szukamy stosunku Δy względem Δx. Wykonajmy wreszcie naznaczone mnożenie, aby się pozbyć nawiasów.

$$y + \Delta y = 3x + 3 \,.\, \Delta x + 5.$$

Teraz użyjmy fortelu, pochodzącego znowu od Leibniza, który go co prawda napisał w innej postaci. A mianowicie przypominamy sobie, że y równa się $3x + 5$ i że dlatego wolno nam po obu stronach równości odjąć te równe wielkości, przez co równość nie przestanie być prawdziwa. Wszak pierwszy przykład wagi z jabłkami i dekagramami upoważnił nas naocznie do takiego tricku rachunkowego. A zatem:

$$\begin{array}{rrrr} y + \Delta y = & 3x + 3\Delta x + 5 \\ -y \quad\quad = & -3x \quad\quad -5 \\ \hline \Delta y = 3\,\Delta x \end{array}$$

Jeżeli jednak $\Delta y = 3\,\Delta x$, wtedy jest naturalnie

$$\Delta y : \Delta x = 3\Delta x : \Delta x, \text{ czyli } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.$$

Wyobraźmy sobie teraz, że przesuwalny odważnik cofamy z powrotem do tego miejsca x, z którego wyszliśmy, chcąc uzyskać pierwszy przyrost Δx. Chcielibyśmy bowiem zbadać przebieg zmienności funkcji $y = 3x + 5$ w najbliższym sąsiedztwie punktu wyjścia x. W miarę powrotnego zbliżania się do x zmniejszać się będzie odstęp każdorazowego położenia odważnika przesuwalnego od pierwotnego położenia x, a więc przyrost Δx będzie coraz mniejszy. Gdyby odważnik znalazł się w x, nie byłoby przyrostu, a więc byłoby $\Delta x = 0$. W ten sposób przyrost Δx staje się wielkością zmienną, przy czym każdorazowe wartości przyrostów Δx maleją coraz bardziej aż do zera. Oczywiście, wyobrażając sobie szynę górną jako oś liczbową i przyjmując, że udało się, cofając odważnik, umieścić go z niezwykłą precyzją w każdym ale to każdym punkcie odcinka, odpowiadającemu temu pierwszemu największemu przyrostowi Δx, zanimby odważnik osiągnął z powrotem punkt wyjścia x, wówczas otrzymalibyśmy nieskończenie wiele wartości coraz to mniejszych przyrostów Δx, czyli nieskończony malejący ciąg przyrostów Δx. Wyrazy ciągu, malejąc, osiągnęłyby ostatecznie wartość zero. Umiemy już ten fakt wyrazić matematycznie mówiąc, że nieskończony ciąg przyrostów Δx dąży do zera i zapisujemy to: $\Delta x \longrightarrow 0$.

Podczas tych minimalnych cofnięć odważnika na szynie w kierunku x wskazówka na półkolu nie próżnowała, i w miarę gdy przyrosty Δx stawały się coraz to mniejsze, zbliżała się systematycznie do pierwotnego położenia y. Każdej więc wartości ciągu przyrostów Δx odpowiada coraz to inna wartość Δy. Chcąc uzyskać wartości przyrostów funkcji Δy, odpowiadające każdemu wyrazowi nieskończonego ciągu przyrostów Δx, trzeba by oczywiście dokonać nieskończenie wielu odczytań na obu skalach. Lecz szukany rezultat można uzyskać inną drogą, stosując rachunek ogólny. Wszak nasza maszyna jest „nastawiona" według funkcji $y = 3x + 5$, a to znaczy, że przy każdym przyroście Δx i odpowiadającej mu zmianie funkcji Δy prawdziwa jest równość

$$(y + \Delta y) = 3(x + \Delta x) + 5, \text{ a więc też}$$
$$y + \Delta y = 3x + 3 \cdot \Delta x + 5.$$

Ponieważ y równa się $3x + 5$, stosując nasz trick, otrzymamy

$$\begin{array}{rrrr} y + \Delta y = & 3x + 3\Delta x + 5 \\ -y & = -3x & -5 \\ \hline \end{array}$$

$\Delta y = 3\Delta x$, z tego oczywiście wynik $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$.

A więc dla każdego (byle niezerowego) przyrostu Δx możemy wyznaczyć w ten sposób odpowiadający mu przyrost Δy i stosunek tych liczb $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Widać stąd jasno, że nasz nowy „algorytm" zastępuje nieskończenie wiele obliczeń. Otrzymamy z niego nieskończony ciąg stosunków $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Każdy wyraz tego ciągu stosunków ma stałą wartość 3, jakkolwiek małe będzie Δx. Bo odpowiadające mu Δy zmienia się według tego samego „prawidła", na które „nastawiliśmy" maszynę. Podczas gdy wyrazy ciągu Δx stają się coraz to mniejsze (dążą do zera), wyrazy ciągu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mają stałą wartość 3, a zatem dążą do granicy 3. Matematycznie zapiszemy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow 3, \text{ gdy } \Delta x \longrightarrow 0,$$

albo krócej

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.$$

Tę graniczną wartość ciągu stosunków oznaczymy sobie y' (czyt. y-prim), a że $y = f(x)$, możemy y' wyrazić też symbolem $f'(x)$ (czyt. f-prim). A zatem

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.$$

Teraz zrywamy zasłonę: Bez specjalnego wysiłku myślowego obliczyliśmy co dopiero „pochodną funkcji", podstawowe pojęcie tego rachunku różniczkowego, którego tak się obawialiśmy. I powiadamy: „Pochodna" funkcji $y = 3x + 5$ ma wartość 3. Albo $y' = 3$, albo $f'(x) = 3$. y' inaczej $f'(x)$ oznacza właśnie „pierwszą" pochodną funkcji $y = f(x)$, to znaczy funkcji, w której y przymusowo zależy od pewnej konstelacji x-owych wyrażeń.

Oznaczymy teraz jakikolwiek przyrost zmiennej niezależnej przez dx i nazwiemy go „różniczką zmiennej niezależnej". Utwórzmy następnie iloczyn pochodnej i różniczki dx, czyli $y' \cdot dx$ albo $f'(x) \cdot dx$. Ten iloczyn nazwał Leibniz „różniczką funkcji" i oznaczył przez dy (albo df(x)). A więc

$$dy = y' \cdot dx \quad (\text{albo } dy = f'(x)dx)$$

Jeśli $dx \neq 0$, możemy obie strony ostatniej równości podzielić przez dx, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x).$$

Tym samym zyskaliśmy inne ujęcie „pochodnej" jako „ilorazu różniczkowego" $\frac{dy}{dx}$, a zarazem nowy symbol na jej oznaczenie, najczęściej używany i najdogodniejszy w wielu wypadkach.

Lecz z naszej złowieszczej „pochodnej" wyczytujemy, że w każdym miejscu ma tę samą wartość. Wszędzie, gdzie zmienię x o możliwie najmniejszą wartość Δx, otrzymam w granicy jako stosunek odpowiadającego przyrostu y do naszego Δx liczbę 3. „Stała" żadnej przy tym nie grała roli. Bo gdybym ją usunął, wówczas otrzymałbym

$$\begin{aligned} y &= 3x \\ y + \Delta y &= 3(x + \Delta x) \\ y + \Delta y &= 3x + 3\,\Delta x \end{aligned}$$

stąd odejmując $\quad -y \quad = -3x$

$$\Delta y = 3\,\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3, \quad \text{a} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.$$

Dlaczego tak jest pojmiemy w pełni dopiero później. Właściwie można by to też zrozumieć opierając się na naszej maszynie. Bo zaburzenie równowagi następuje[1] wyłącznie wskutek przesunięcia ciężaru x (3-kilogramowego). I w dodatku w każdym miejscu w ten sam sposób. „Pochodna" jest tym samym „prawidłem zmiany" funkcji, obowiązującym wszystkie wartości x.

Obecnie zajmować się będziemy w dalszym ciągu naszym nowym algorytmem „rachunku różniczkowego" jako formalnej dla nas na razie kabały, której rąbek dopiero udało się nam uchwycić.

[1] Jeżeli pominiemy „bezwładność" 5 kg.

Poczniemy sobie nawet bardzo odważnie, starając się w podobny sposób zbadać jeszcze nową dla nas całkiem funkcję „kwadratową“

$$y = 2x^2 + 7.$$

Pominiemy teraz naszą maszynę i powierzymy się czystej formie. W myśl naszego schematu będzie

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 + 7.$$

Ponieważ jeszcze nie umiemy wyliczyć bezpośrednio $(x + \Delta x)^2$, przedstawmy to jako początkujący w postaci $(x + \Delta x)(x + \Delta x)$, a otrzymamy $[x^2 + x\,\Delta x + x\,\Delta x + (\Delta x)^2]$, a zatem $x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$.

Teraz można zastosować chwyt:

$$\begin{array}{rrr} y + \Delta y = & 2x^2 + 4x\,\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 7 \\ -y \quad = & -2x^2 \qquad\qquad\quad -7 \\ \hline \Delta y = & 4x\,\Delta x + 2(\Delta x)^2 \end{array}$$

Chcąc obliczyć pochodną musimy wyznaczyć wartość stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. W tym celu podzielimy obie strony ostatniej równości przez Δx. Otrzymamy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2\,\Delta x.$$

Ponieważ jednak, jak powiedzieliśmy, pragniemy uzyskać jako ostateczny rezultat nie tzw. iloraz „różnicowy“ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ale „pochodną“ tj. iloraz „różniczkowy“ $\frac{dy}{dx}$, musimy zbadać, jaką wartość posiada stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ „przeszedłszy do granicy“, czyli czemu — według znanej nam już symboliki — równa się $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$, gdy $\Delta x \to 0$. Otóż, ponieważ $\Delta x \to 0$, więc również $2\,\Delta x \to 0$, czyli w granicy możemy je uważać za zero, a zatem, wobec ciągłości funkcji, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 4x$, to znaczy

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x.$$

Tu, w funkcji „kwadratowej“, występuje coś osobliwego. A mianowicie „prawidło“ zmiany wyraża się już nie jako czysty stosunek liczbowy, ale jest wprost zależne od x; wyrażone szczegółowo zmieniać się będzie zależnie od wartości obranej na x, czyli — mówiąc matematycznie — jest nową funkcją zmiennej x. Tutaj sama zmiana jest zmienna, jeśli tak wolno powiedzieć. W istocie związana jest

ściśle z nowym warunkiem, mianowicie z wartością (liczbową) wyrażenia 4x.

Moglibyśmy obecnie według wskazanej metody wyprowadzić czysto formalnie cały algorytm rachunku różniczkowego jako operację algebraiczną. Przez to zyskalibyśmy tylko na ścisłości matematycznej. Że jednak początkujący z pewnością lepiej przenika wszystkie problemy tego „działania", jeżeli to wszystko może sobie przedstawić obrazowo, a dalej, ponieważ także historyczny rozwój naszego „rachunku" dokonał się prawie wyłącznie na drodze geometrycznej, porzucimy raczej ze względów psychologicznych naszą aż dotąd czysto syntetyczną metodę wykładu i wyprowadzimy sobie z geometrii to wszystko, co będzie bezwarunkowo potrzebne do podstawowego zrozumienia naszej nowej operacji i analizy nieskończonościowej w ogóle.

ROZDZIAŁ DZIEWIĘTNASTY

TWIERDZENIE PITAGORASA

Najpierw tedy przenieśmy się na chwilę myślą w zamierzchłą przeszłość. Do starożytnych Egipcjan i Hindusów. Dziś jeszcze zachwyca się każdy znawca architektury nieprawdopodobną precyzją, z jaką zwłaszcza Egipcjanie dokonywali pomiarów długości i kątów w swych budowlach. Było to zasługą tzw. harpenodaptów, czyli „napinaczy sznurów", którzy dzięki swym wiadomościom geometrycznym czynili możliwym wyznaczanie kątów, a osobliwie kątów prostych. W jaki sposób, dowiemy się natychmiast: Wyobraźmy sobie np., że ma być zbudowana olbrzymia, prostokątna świątynia. Jasne jest, że małe uchybienia w dokładności przy wyznaczaniu kątów znaczą tu już bardzo wiele. Wie o tym każdy murarz i cieśla, który ciągle na nowo przykłada pion i węgielnicę. Otóż „napinacze sznurów", kasta należąca do stanu kapłańskiego, odbywali swą geometryczną ceremonię już podczas uroczystości związanej z położeniem kamienia węgielnego pod budowę świątyni. Posługiwali się przy tym bardzo długim sznurem, podzielonym za pomocą węzłów w stosunku 5:3:4. A więc w następujący sposób:

Fig. 15.

Oznaczmy sobie węzły literami a, b, c, d. Otóż jeśli kąt prosty chciano uzyskać przy *c*, część sznura mierzącą 3 jednostki długości umocowywano kołkami przy *b* i *c*. Następnie nastawiano część sznura mającą 4 jednostki w przybliżeniu pod kątem prostym do poprzedniej i końcem części mierzącej 5 jednostek zataczano łuk, aż węzły *a* i *d* się spotkały. Skoro obecnie naciągnięto sznur, a za-

razem umocowano wspólnie *a* i *d* za pomocą kołka, przy *c* znajdował się dokładnie kąt prosty. Przedstawiono to na obrazku:

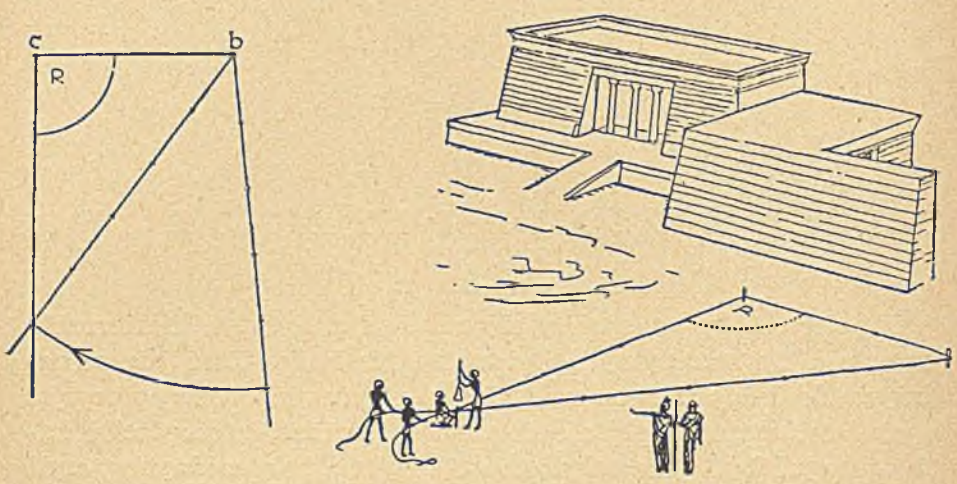


Fig. 16.

Trójkąt, którego boki są do siebie w stosunku 3:4:5, nazywają powszechnie „trójkątem egipskim". Z rysunku widać, że jest to zarazem tzw. trójkąt prostokątny.

Ale nie tylko Egipcjanie, także starożytni kapłani hinduscy posiadali podobny fortel stosowany przy wytyczaniu ołtarzy i w urządzeniach wymagających kątów prostych. Tylko, rzecz osobliwa, w Indiach używano trójkąta o stosunku boków 15:36:39. Abyśmy łatwiej mogli się porozumiewać, powiedzmy już tu od razu, że najdłuższy bok trójkąta prostokątnego nazywa się „przeciwprostokątną", a oba krótsze „przyprostokątnymi". A zatem trójkąt egipski posiada przeciwprostokątną o długości 5, a przyprostokątne o 4 i 3 jednostkach długości, podczas gdy hinduski ma przeciwprostokątną na 39, a dwie przyprostokątne na 36 i 15 jednostek długości.

Otóż trójkąt prostokątny jako taki jest zapewne tylko specjalnym wypadkiem spośród wszystkich możliwych trójkątów. Bo zakłada z góry, że przyprostokątne tworzą kąt dokładnie 90° (dziewięćdziesiąt stopni), skutkiem czego na oba pozostałe kąty razem pozostaje również 90°. Bo, jak wiadomo, suma kątów w trójkącie wynosi 180°, czyli 2 kąty proste = 2R (R oznacza kąt prosty). A ponieważ wiadomo dalej, że naprzeciw mniejszego kąta w trójkącie

leży mniejszy bok (i na odwrót), musi naprzeciw kąta prostego leżeć największy bok, a zatem przeciwprostokątna. Słusznie jednak można się spodziewać, że związek ten nie ogranicza się wyłącznie do stwierdzenia „jest większy" lub „jest mniejszy", ale że da się rozszerzyć na ilościowe ujęcie tego „jest większy" i „jest mniejszy". To znaczy, należało by przypuszczać, że boki dadzą się jakoś wyrazić wzajemnie przez stosunek wielkości kątów, kąty zaś przez stosunek boków. Krótko mówiąc, podejrzewamy, że w trójkącie prostokątnym zachodzi jakiś związek, w którym także odnośnie do boków wyraża się fakt, że kąt prosty jest sumą obydwu pozostałych kątów. Jeśli jednak zechcemy sprawdzić nasz domysł, bardzo się rozczarujemy. Bo $4 + 3 = 7$ a nie 5, a $15 + 36 = 51$, a więc całkiem co innego niż 39. A zatem przypuszczenie zawiodło zupełnie, zarówno w trójkącie egipskim jak i w hinduskim.

Czyżby to więc w końcu wcale nie były trójkąty prostokątne? W każdym razie piramidy i budowle hinduskie nie zdają się przemawiać za takim unicestwiającym pytaniem.

Nie, uspokójmy się! To są dokładne, precyzyjne, nienaganne trójkąty prostokątne. Zarówno egipski, jak i hinduski. Tylko związek przez nas przeczuwany nie jest tak prosty, jak się nam wydawało. Jeżeli wszystkie nasze liczby podniesiemy do drugiej potęgi — na razie bez uzasadnienia, dlaczego — sprawa istotnie przedstawi się inaczej. Bo

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ a więc } 3^2 + 4^2 = 5^2,$$
$$\text{a } 15^2 + 36^2 = 225 + 1296 = 1521, \text{ a zatem } 15^2 + 36^2 = 39^2.$$

Związek ten jest jedną z najważniejszych i najniezbędniejszych reguł geometrii. Nazywa się „twierdzeniem Pitagorasa", albo w gwarze średniowiecznych żaków — *pons asinorum*, czyli „oślim mostem". Sam Pitagoras, który podczas swych podróży do Egiptu i Indii zapoznał się prawdopodobnie z zasadniczymi problemami swego twierdzenia, miał bogom ofiarować z wdzięczności za swe odkrycie hekatombę wołów.[1]

Jeżeli liczby wymiarowe przyprostokątnych przy dowolnie obranej jednostce długości, oznaczymy przez a, b zaś liczbę wymiarową

[1] Stąd pochodzi popularne w świecie uczonych przysłowie, że wszystkie woły drżą, skoro zanosi się na jakieś epokowe odkrycie.

przeciwprostokątnej przez *c*, wówczas twierdzenie brzmi dla każdego trójkąta prostokątnego

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jest bardzo wiele dowodów tego twierdzenia. Pokażemy jeden z nich nie bardzo ścisły, ale za to niezwykle łatwo dający się uzmysłowić.

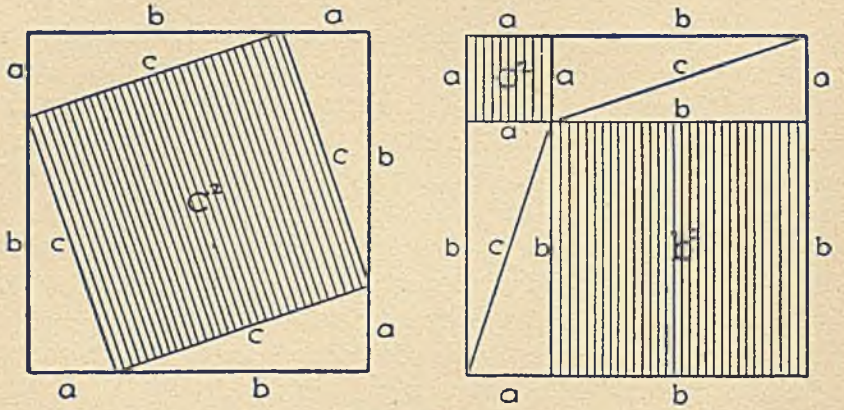


Fig. 17.

W pierwszy wielki kwadrat wpisano kwadrat zbudowany z przeciwprostokątnej, a więc kwadrat o polu równym c^2. Można zatem powiedzieć: c^2 = pole dużego kwadratu minus pola czterech trójkątów (a b c).

W drugim wypadku, w ten sam wielki kwadrat wpisałem dwa kwadraty utworzone odpowiednio z przyprostokątnych, a więc kwadraty, których pola wyrażają się liczbami a^2 i b^2. I otrzymuje się: $a^2 + b^2$ = pole dużego kwadratu mniej pola czterech trójkątów (abc).

Jeżeli jednak dwie wielkości są równe jednej i tej samej trzeciej wielkości, wtedy są także wzajemnie sobie równe. A zatem: $a^2 + b^2 = c^2$, czego należało dowieść.

W ten sposób nadaliśmy naszemu twierdzeniu Pitagorasa postać ogólnego prawa, a tym samym stwierdziliśmy, że trójkątów prostokątnych, które dają się w ten sposób scharakteryzować, można podać, ile się tylko zechce. Czyli innymi słowy: Twierdzenie Pitagorasa wyraża ogólną własność każdego trójkąta prostokątnego.

Ponieważ nasz nowy wzór wyprowadziliśmy ogólnie i ponieważ

jest rzeczą oczywistą, że istnieje nieskończenie wiele trójkątów prostokątnych, uważajmy ten wzór po prostu za równanie, z którym postąpić można zgodnie z algorytmem równań. To znaczy, jeśli jeden tylko bok jest nieznany, możemy go wyznaczyć z dwu pozostałych boków. Do pomocy ustalmy ogólne, jeszcze tymczasowe rozwiązania, jako że są w potędze drugiej.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Jeśli zamiast kwadratów liczb wymiarowych boków chcę obliczyć same te liczby, wtedy pierwiastkując obie strony równania otrzymam

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$ [1]

Wiemy jednak dalej, że wiele pierwiastków daje rozwiązania niewymierne. Mamy na to pouczający przykład, który natychmiast rozpatrzymy. Załóżmy mianowicie, że przyprostokątne mają jednaką długość, a przeto oznaczymy je nie *a* i *b*, lecz każdą przez *a*, to dla tego tzw. równoramiennego trójkąta prostokątnego otrzymamy

$$c^2 = a^2 + a^2$$
$$c^2 = 2a^2$$
$$c = \sqrt{2a^2},$$ a ponieważ z a^2 można obliczyć pierwiastek, będzie ostatecznie $c = a\sqrt{2}$.

Jednak pierwiastek drugi z 2 jest bezwarunkowo liczbą niewymierną, ponieważ 2 nie jest wcale kwadratem żadnej liczby całkowitej. A zatem także i $a\sqrt{2}$. Nawiasem mówiąc, można dwa trójkąty prostokątne równoramienne tak zesunąć, aby utworzyły kwadrat, a wtedy *c* jest tak zwaną przekątną kwadratu (p. fig. 18). Stąd wynika, że przekątna kwadratu pozostaje zawsze do boku kwadratu

---

[1] Dla naszych celów (miary odcinków są liczbami dodatnimi) uwzględniamy tylko dodatnie wartości rozwiązań. O znaku pierwiastków będzie mowa przy liczbach urojonych.

w stosunku, nie dającym się wyrazić ani liczbą całkowitą ani wymierną, a więc w stosunku, którego wykładnik jest liczbą niewymierną, czyli przekątna kwadratu i jego bok są odcinkami „niewspółmiernymi“. Oczywiście także na odwrót. Bo jeśli wybiorę na c jakąś liczbę

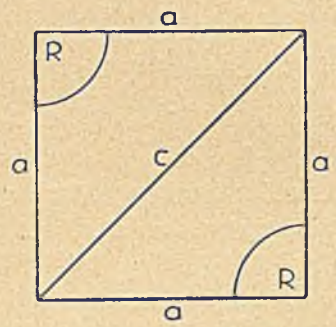


Fig. 18.

całkowitą, a chcę stąd obliczyć a, to ze względu na równość $2a^2 = c^2$, otrzymam na a^2 wartość $\frac{c^2}{2}$, czyli na a wartość $\frac{c}{\sqrt{2}}$, co moglibyśmy byli również wyznaczyć z naszego pierwszego rozwiązania $c = a\sqrt{2}$.

A zatem niewymierność w sensie geometrycznym, nie jest własnością jakiejś wielkości, ale jej stosunku do drugiej wielkości, o ile ten stosunek da się wyrazić tylko przez liczbę niewymierną. I ten właśnie związek nazywa się „niewspółmiernością“. Bo zależy to jedynie od mej woli, którą z dwóch porównywanych ze sobą wielkości przyjmę za jednostkę, względnie za całkowitą wielokrotność jednostki. A więc jeszcze raz: Jeżeli wybiorę w naszym kwadracie za jednostkę a, wtedy c jest niewymierne. Jeżeli natomiast c wybiorę za jednostkę, wówczas niewymierne jest a. Przeto też z gruntu fałszywym jest powiedzenie, że miara obwodu koła jest liczbą niewymierną, dlatego, że według znanego wzoru: długość obwodu $= 2r\pi$, przy czym r oznacza promień koła, musi się mnożyć długość promienia, która właśnie jest liczbą wymierną, przez 2π, a zatem przez liczbę niewymierną. Myśmy się tylko przyzwyczaili, że długość promienia jest właśnie d a n a. Ale na odwrót, jeślibym np. walec stalowy tak długo toczył, aż najczulsza precyzyjna taśma miernicza wykazałaby na długość obwodu 1 m, wtedy na długość promienia, czyli na r, z równania: długość obwodu $= 2r\pi$

otrzymałbym wartość: $\frac{\text{długość obwodu}}{2\pi}$, co na pewno da na wynik liczbę niewymierną. A więc raz długość obwodu, drugim razem długość promienia jest liczbą niewymierną, zależnie od tego, która z obydwu tych wielkości d a n a jest jako liczba wymierna.

Pitagoras miał w swej mistyce liczb ową niewspółmierność, ów związek nie dający się ująć w żadną regułę, ani w żaden uchwytny stosunek, określić jako symbol istoty życia, która także stale opiera się wszelkiemu ujęciu miarowemu. Nie mamy jednak zamiaru zapuszczać się w tym miejscu w głębie symbolicznego znaczenia naszej nowej kabały geometrycznej, a tylko postawimy prawdziwie kabalistyczne zagadnienie. Pytamy mianowicie o regułę, według której moglibyśmy uzyskać wszystkie możliwe trójkąty prostokątne, o całkowitych liczbach wymiarowych boków. A więc np., nie tylko trójkąt egipski i hinduski, ale dowolną ich ilość.

W tym celu nie wchodząc w wywody wyciągniemy ze znakomitego zbioru wzorów prof. O. Th. Bürklena (nowoopracowanego przez dra F. Ringleba, Zbiór Göschena) tabelę, która odpowie na nasze pytanie. A mianowicie, jeżeli u i v oznaczają dwie dowolne liczby całkowite dodatnie, przy czym $u > v$, to trójkąty prostokątne o bokach współmiernych otrzymuje się z wzorów: $c = u^2 + v^2$, $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$.

u	v	$u^2 + v^2 = c$	$u^2 - v^2 = a$	$2uv = b$
2	1	5	3	4
3	1	10	8	6
3	2	13	5	12
4	1	17	15	8
4	2	20	12	16
4	3	25	7	24
5	1	26	24	10
5	2	29	21	20

Ponadto jeszcze, wolno liczby wymiarowe w ten sposób otrzymanych boków trójkątów, np. trójkąta egipskiego, pomnożyć przez dowolną całkowitą liczbę dodatnią, po czym otrzyma się znowu nową nieskończoną ilość trójkątów prostokątnych, których boki wyrażają się całkowitymi liczbami wymiernymi. A więc np.

$$(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 4)^2 + (3 \cdot 3)^2$$
$$15^2 = 12^2 + 9^2$$
$$225 = 144 + 81 = 225.$$

Tak otrzymamy według naszej tabeli również trójkąt hinduski:

$$(3 \cdot 13)^2 = (3 \cdot 12)^2 + (3 \cdot 5)^2$$
$$39^2 = 36^2 + 15^2.$$

Także przez odpowiednie podzielenie jakąś liczbą całkowitą dodatnią otrzymam dalszą nieskończoną ilość trójkątów wymiernych, których boki wszelako wyrażają się już nie liczbami całkowitymi, ale ułamkami. Np.

$$\left(\tfrac{1}{4} \cdot 5\right)^2 = \left(\tfrac{1}{4} \cdot 4\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4} \cdot 3\right)^2$$
$$\tfrac{25}{16} = \tfrac{16}{16} + \tfrac{9}{16}.$$

Idąc jeszcze dalej, mogę pomnożyć przez inne ułamki niż jednostkowe. Np.

$$\left(\tfrac{3}{7} \cdot 5\right)^2 = \left(\tfrac{3}{7} \cdot 4\right)^2 + \left(\tfrac{3}{7} \cdot 3\right)^2$$
$$\left(\tfrac{15}{7}\right)^2 = \left(\tfrac{12}{7}\right)^2 + \left(\tfrac{9}{7}\right)^2$$
$$\tfrac{225}{49} = \tfrac{144}{49} + \tfrac{81}{49}$$ *

---

* Ogólnie mówiąc, dozwolona jest każda postać $(mc)^2 = (ma)^2 + (mb)^2$, gdzie m jest liczbą wymierną (całkowitą lub ułamkową dodatnią), a, b, c są zaś odpowiednimi liczbami z nieskończenie wielu liczb tabeli, albo wymiernymi wielokrotnościami tych liczb.

ROZDZIAŁ DWUDZIESTY

FUNKCJE KĄTOWE

Nie zapuszczajmy się jednak zbyt daleko. Bo nowe wielkie zadanie domaga się od nas największego skupienia uwagi. Mianowicie już przy wyprowadzaniu twierdzenia Pitagorasa przeczuwaliśmy istnienie pewnego koniecznego związku pomiędzy kątami a bokami trójkąta prostokątnego. Specjalna nauka, badająca owe przymusowe związki, nazywa się, jak wiadomo, „trygonometrią". A „związki" te nazywają się, jak się tego domyśliliśmy z pojawienia się słowa „przymusowy", f u n k c j a m i goniometrycznymi albo kątowymi.

Oczywiście, i tej także szczególnej gałęzi matematyki nie będziemy mogli rozważać zbyt długo. Poznamy jednak kilka zasadniczych twierdzeń, ponieważ wchodzą one później w najściślejszy związek z rachunkiem różniczkowym.

Narysujmy sobie najpierw dowolne koło, które za pomocą dwóch do siebie prostopadłych średnic dzielimy na cztery ćwiartki, zwane dawniej kwadrantami (p. str. 194).

Jeśli teraz wyobrazimy sobie, że promień (r) obraca się wokoło środka koła w kierunku strzałki, wyszedłszy niejako z położenia spoczynku OA, aż dotrze w końcu do nowego położenia spoczynku OB, wówczas ten ruchomy promień utworzy podczas tego wraz z ramieniem OA wszystkie możliwe kąty od 0° do 90°. Możemy przecież założyć jako rzecz znaną, że cały okrąg dzieli się na 360 równych części, a przez to ćwierć okręgu podzielona jest na 90 części. Każdej takiej części ćwierć-okręgu odpowiada kąt środkowy, przyjęty za jednostkę miary kątów, tzw. stopień. Jeśliby promień zatrzymał się np., zatoczywszy końcem swym łuk okręgu złożony z 45 rozważanych części okręgu, wówczas kąt o wierzchołku w punkcie O, odpowiadający temu łukowi, wynosi właśnie 45 stopni itd. Teraz

więc możemy śmiało powiedzieć, że w myśl naszego założenia kąt α (alfa) przybiera w pierwszej ćwiartce koła wszystkie wartości od 0 do 90 stopni. (Fig. 19.) Jeżeli dalej z punktu, w którym promień ruchomy r przecina za każdym razem okrąg i który oznaczymy sobie np. przez C, wykreślimy odcinek prostopadły do prostej wyj-

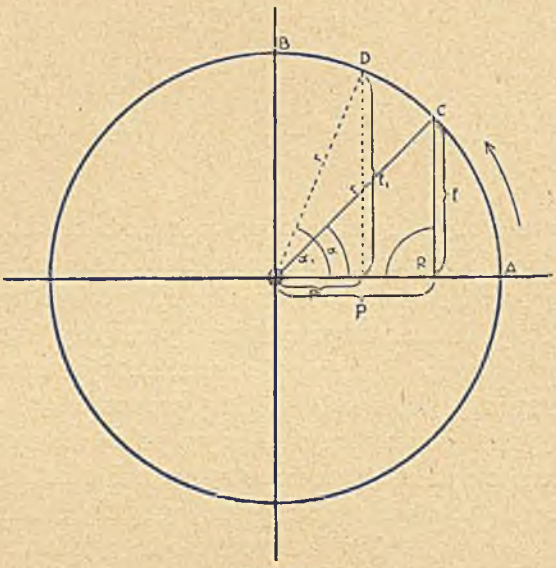


Fig. 19.

ścia OA, wówczas powstanie trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną jest promień, a przyprostokątnymi są: odpowiedni odcinek prostopadły *l* i odcinek *p* na prostej wyjścia. Ten trójkąt zniknie w dwóch położeniach, względnie zleje się z linią prostą. Najpierw, gdy promień ruchomy leży jeszcze na prostej wyjścia OA, drugim zaś razem, gdy pokrywa się z prostą końcową OB. Pomiędzy tymi położeniami leży w pierwszej ćwiartce nieskończenie wiele trójkątów prostokątnych, przy czym kąt α jest oczywiście w każdym trójkącie inny.

Otóż zasadnicze zagadnienie „trygonometrii" brzmi: Jak należy wyznaczyć ten kąt α, jeżeli znamy tylko długości boków trójkąta prostokątnego? Że jakiś związek zachodzi, to od razu widać. Bo w trójkącie nakreślonym linią przerywaną, któremu odpowiada kąt ostry większy od 45°, mam przy niezmienionej przeciwprostokątnej inne przyprostokątne, które oznaczę przez l_1 i p_1.

Wprawdzie najprostszym wydawało by się spróbować wyznaczyć kąt z przyprostokątnej l względnie l_1, przeciwległej szukanemu kątowi. Jednakże już w twierdzeniu Pitagorasa widzieliśmy, że sprawy te nie przedstawiają się tak prosto. Dlatego tutaj także musimy próbować czegoś bardziej skomplikowanego. A mianowicie wyrazić kąt przez stosunek dwóch boków. Jako stare wygi matematyczne przypominamy sobie, że według reguł kombinatoryki możemy utworzyć 6 różnych stosunków, z których każdy byłby stosunkiem dwóch odpowiednich boków. Bo trzy boki są „elementami", a stosunki są parami wariacji bez powtarzania; a więc amba wariacyjne. Wzór brzmi $\binom{3}{2} . 2! = \frac{3 . 2}{1 . 2} . 1 . 2 = 6$. A tymi stosunkami byłyby: r:l, r:p, l:p, l:r, p:r, p:l. W istocie są to wszystkie tzw. „funkcje kątowe".

Narysujmy sobie jeszcze raz trójkąt prostokątny:

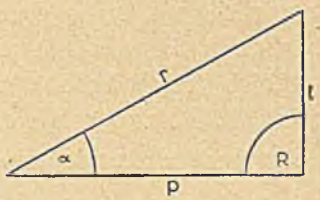


Fig. 20.

Ponadto wymieńmy od razu nazwy tych sześciu funkcji.

l:r jest to *sinus* kąta (stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątowi do przeciwprostokątnej),

p:r „ „ *cosinus* kąta (stosunek przyprostokątnej przyległej kątowi do przeciwprostokątnej),

l:p „ „ *tangens* kąta (stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątowi do przyprostokątnej przyległej),

p:l „ „ *cotangens* kąta (stosunek przyprostokątnej przyległej kątowi do przyprostokątnej przeciwległej),

r:p „ „ *secans* kąta (stosunek przeciwprostokątnej do przyprostokątnej przyległej kątowi),

r:l „ „ *cosecans* kąta (stosunek przeciwprostokątnej do przyprostokątnej przeciwległej kątowi).

Normalnie używa się tylko pierwszych czterech funkcji, tak że nie ma powodu do obaw. Postaramy się jednak rozwiać obawy je-

szcze bardziej. Dla naszych celów potrzebna nam jest właściwie wyłącznie funkcja *tangens*. Mimo to ze względów zasadniczych rozpatrzymy najpierw zachowanie się funkcji *sinus* w pierwszej ćwiartce. Do tego użyjemy pewnego fortelu. Ponieważ *sinus* jest stosunkiem przyprostokątnej l, przeciwległej kątowi α, do promienia r, wobec tego obierzmy tak zwane koło jednostkowe, to znaczy koło o promieniu równym jednostce długości, co nam oczywiście wolno, bo nikt nam wielkości promienia nie narzuca, ani nie może narzucić. Ale wskutek tego nasz *sinus* sprowadza się do $l : 1$, a więc do l, a my osiągnęliśmy to, do czego od początku zdążaliśmy: Możemy mianowicie teraz wyznaczenie kąta ostrego w trójkącie prostokątnym zredukować do wyznaczenia długości przeciwległego boku, a więc odcinka l, a przez to w czarodziejski sposób zamieniliśmy wyznaczanie kąta na mierzenie długości. A dalej, ponieważ „promień 1" może być tak wielki, jak tylko chcemy, bo przecie sami uczyniliśmy promień jednostką długości, ta „istotna wartość sinusa" obowiązuje we wszystkich przypadkach, przy założeniu, że odcinek l mierzymy promieniem. Ale to znowu nie oznacza nic innego, jak tylko, że wartość *„sinusa"* przedstawia właśnie stosunek $l : 1$, czyli $\frac{l}{1}$, czyli l dzielone przez 1.

Na fig. 21. zatem l, l_1, l_2, l_3 itd. przedstawiają odpowiednie wartości funkcji *sinus* dla kątów: α, α_1, α_2, α_3, itd. Stąd natychmiast mogę powiedzieć, że *sinus* 0° wynosi 0, podczas gdy *sinus* 90° równa się liczbie wymiarowej promienia, a zatem według naszego systemu mierzenia ma wartość 1. W pierwszej ćwiartce rośnie więc *sinus* od wartości 0 do wartości 1 i może przyjmować wszelkie pośrednie wartości liczbowe (także niewymierne!), jakie leżą pomiędzy 0 a 1. Nie wyraża się on mianowicie bynajmniej tylko w postaci ułamków zwyczajnych. Bo dla $\alpha = 45°$ na przykład l jest połową przekątnej kwadratu o boku r, albo według twierdzenia Pitagorasa: $r^2 = l^2 + l^2$, czyli $r = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$, a więc $l = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, co oczywiście jest liczbą niewymierną.

Po tej linii rozumowania dalej jednak nie pójdziemy, lecz zauważymy tylko, że w praktyce nie używa się zwykle „istotnych wartości", lecz logarytmów „istotnych wartości". W książeczkach z tablicami logarytmicznymi znajdziemy logarytmy funkcji kąto-

wych obliczone z dokładnością do sekund (1 stopień = 60 minut; jedna minuta = 60 sekund, albo $1° = 60'$, $1' = 60''$).

Obecnie zbadajmy w podobny sposób funkcję *tangens*, szczególnie dla nas ważną. Polskie znaczenie słowa *tangens*, czyli styczna, nasuwa przypuszczenie, że funkcja ta pozostaje w jakimś związku

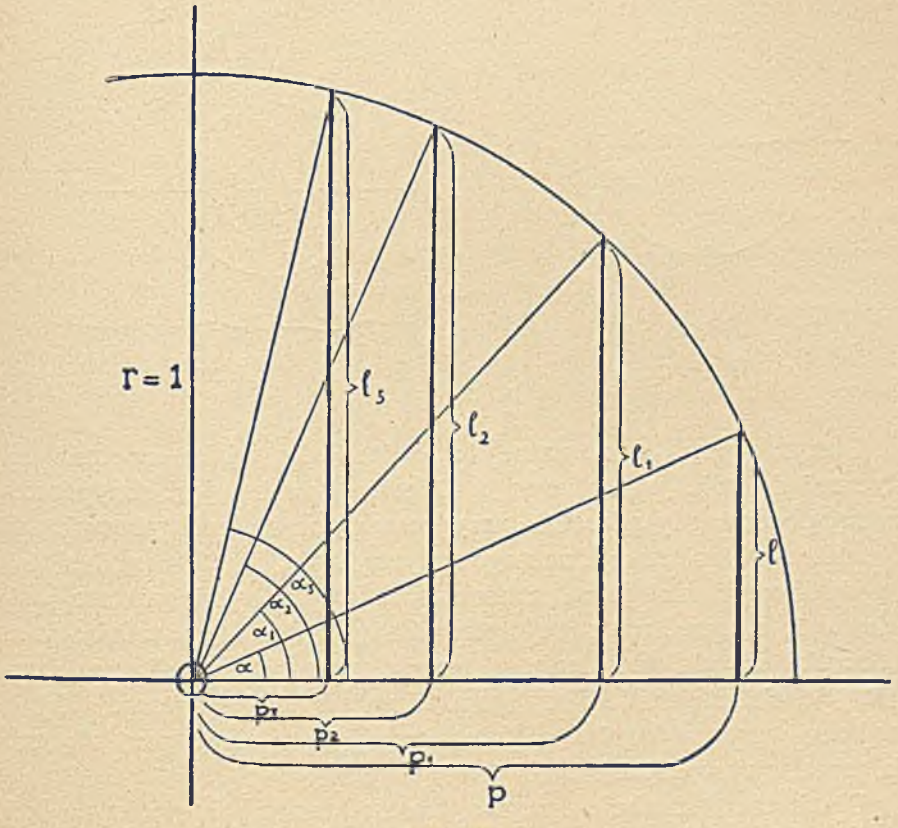


Fig. 21.

z pojęciem „stycznej okręgu". Obecnie skonstruujemy maszynę, za pośrednictwem której związek taki rzeczywiście wyraźnie wystąpi. Ponieważ *tangens* α równa się $l : p$, musimy zastosować inny fortel. Bo obecnie chcielibyśmy, aby p było jednostką. Dlatego teraz ramię ruchome nie może już być tylko promieniem, lecz jakąś prostą. Rysujemy:

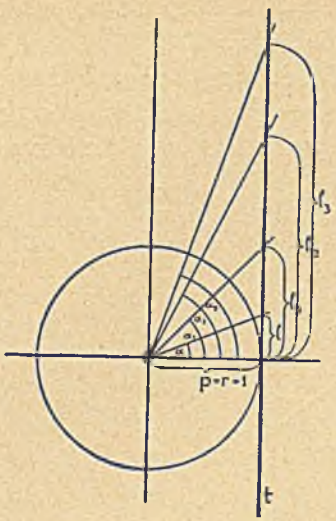


Fig. 22.

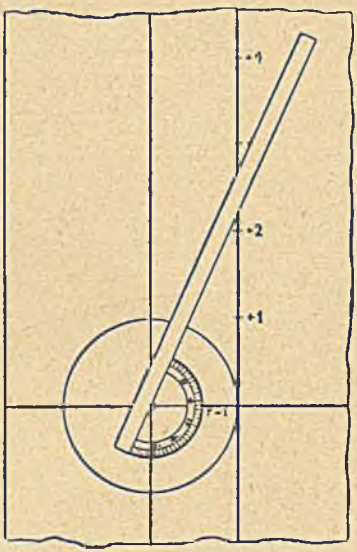


Fig. 23.

Otrzymujemy teraz nasze $1:p=1:r=1:1$ jako odcinek na stycznej do koła jednostkowego. Obecnie promień jest przyprostokątną, podczas gdy pozostała przyprostokątna i przeciwprostokątna są zmienne. Konstrukcja naszego przyrządu (p. fig. 23) zgodna jest z wykreślonym właśnie schematem. Widzimy koło jednostkowe, promień = 1, styczną, na której sporządzamy podziałkę odcinając jako jednostkę długość promienia, a wreszcie przeciwprostokątną obracalną dokoła punktu środkowego a ślizgającą się po stycznej. Kąt α możemy wprost odczytać z kątomierza, odpowiednio przyłożonego do przeciwprostokątnej.

Dla kąta 0° funkcja *tangens* także równa się 0, ponieważ 0:1 równa się zeru. Potem jednak wartości funkcji, dające się za każdym razem odczytać na „stycznej", rosną szybko. Dla $\alpha = 45°$ *tangens* α równa się 1, dla 60° równa się 1·73205, dla 70° równa się 2·74748, dla 80° równa się 5·67128, dla 85° równa się 11·43005, dla 89° równa się 57·28996, dla $89\frac{5}{6}°$ już 343·77371, a wreszcie, osiągając w dalszym ciągu przy bardzo małym wzroście kąta α bardzo wielkie wartości dodatnie, dla 90° nie ma właściwie wartości oznaczonej, ponieważ nasza ruchoma przeciwprostokątna nie może już w ogóle

dosięgnąć stycznej. Jak widać, owo szalone wzrastanie odbywa się pomiędzy $89\frac{5}{6}°$ a 90°, i to w szybko wzmagającym się tempie.

Obecnie słusznie ktoś mógłby zapytać, gdzie stosuje się trygonometrię. Powiedzieliśmy już, że *tangens,* funkcja *tangens,* konieczne potrzebna jest nam w wyższej matematyce. Trudno jednak sobie wyobrazić, aby to było jedynym powodem, dla którego zbudowano tak skomplikowaną, a przy tym wcale trudną naukę.

Dlatego pokrótce wyjaśnimy, że trygonometria potrzebna jest bezwarunkowo wszędzie tam, gdzie należy wyznaczyć kąty trójkąta z jego boków, lub z kątów trójkąta jego boki. Odległości w przestrzeni wyznacza się trygonometrycznie. Cała geodezja (nauka miernictwa) oparta jest na metodach trygonometrycznych. Można zmierzyć wysokość jakiejś góry, np. Mount-Everest, której wierzchołka nikt jeszcze nie osiągnął, i to zmierzyć dokładnie z wielkiej odległości, w ten sposób, że wybieramy na płaszczyźnie „linię podstawową" (bazę), zaś po zmierzeniu jej długości nastawiamy teodolit (lunetę do wyznaczania kątów) tak, aby wycelować nim szczyt góry, a z odpowiednich, w ten sposób uzyskanych trójkątów, obliczamy przyprostokątną, która właśnie przedstawia wysokość góry.

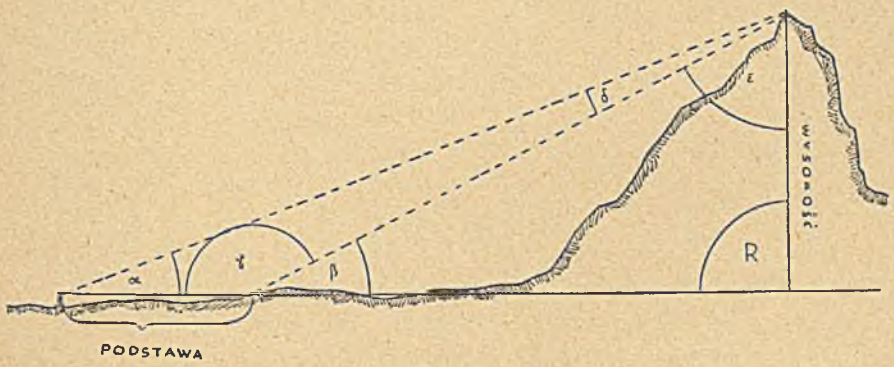


Fig. 24.

Wyznaczywszy kąt α i kąt β (mała litera grecka beta) znajdę kąt γ (gamma) po prostu jako $(180° - \beta)$. Stąd znowu otrzymam kąt δ (delta) jako $[180° - (\alpha + \gamma)]$. Dalej jest $(\beta + \varepsilon) = 90°$, w następstwie tego ε (epsilon) równa się $(90° - \beta)$. Jeśli jednak znam wszystkie kąty, to znam także wartości funkcji kątowych i według prostych stosunkowo wzorów trygonometrycznych, znając długość

linii podstawowej i miary kątów α i γ, mogę obliczyć najpierw długość „linii celowej" (przeciwprostokątnej), a z tej i α wzgl. β wysokość h.

Artyleria posługuje się podobnymi metodami przy strzelaniu do odległych celów.

Nie możemy jednak zapuszczać się głębiej w trygonometrię, a przede wszystkim w trygonometrię na kuli (tzw. trygonometrię sferyczną), która ze zrozumiałych względów odgrywa niezmiernie doniosłą rolę w geografii i astronomii.

Ze względu na całokształt materiału i jako wprowadzenie w nową ważną dziedzinę geometrii, poznamy raczej nowy typ liczb, naprawdę niesamowitych liczb urojonych, których graficzne (wykresowe) przedstawienie udało się dopiero tytanowi myśli matematycznej, Karolowi Fryderykowi Gaussowi (1777—1855).

ROZDZIAŁ DWUDZIESTY PIERWSZY

LICZBY UROJONE

Zgodnie z naszą metodą, która stała się już niemal zwyczajem, wstąpmy w trudną dziedzinę drogą najprostszych rozważań. Przypominamy sobie, że pierwiastkowanie sprawiło nam pierwszą wielką niespodziankę w teorii liczb: postawiło nas wobec liczb niewymiernych. Teraz znowu działanie pierwiastkami wprowadzi nas w dziedzinę liczb urojonych.

Zamiast je ciągle zapowiadać, pokażmy wreszcie sposób ich powstawania. Jeżeli sięgniemy myślą do „rachunku symboli", do owego najprostszego wypadku tego rachunku, mianowicie do „kojarzenia rozkazów" znaków plus i minus, wówczas przypomnimy sobie także ten osobliwy fakt, że skoro skojarzenie już nastąpiło i to bez naszej wiedzy, to mimo najlepszych chęci nie da się jednoznacznie rozstrzygnąć, z czego skojarzenie to powstało. Nikt nie potrafi powiedzieć, czy plus w iloczynie zawiera w sobie mnożenie dwóch plusów, czy mnożenie dwóch minusów. Jeżeli po prostu napiszę $(+a^2)$, wtedy to a^2 mogło równie dobrze powstać z $(+a).(+a)$ jak z $(-a).(-a)$. W zakresie dotąd używanych liczb pytanie to jest mało interesujące. Tzn., przy czterech prostych działaniach nie nabiera ono ani aktualności, ani znaczenia. Bo tak przy dodawaniu, jak przy odejmowaniu mało mnie obchodzi, jak doszło do skutku nasze $(+a^2)$. Tak samo przy mnożeniu i przy dzieleniu. Bo jeżeli nawet podzielę przez $(+a)$, albo przez $(-a)$, otrzymam poprawny jednoznaczny wynik, niezależnie od tego, jak nasze $(+a^2)$ powstało. Przypuśćmy, że byłoby złożone z $(-a).(-a)$. Wtedy podzielenie przez $(+a)$ daje:

$$\frac{(-a).(-a)}{(+a)} = \frac{(-a).[(+a).(-1)]}{(+a)} = \frac{(-a).(+a).(-1)}{(+a)} = \frac{(-a).(-1)}{1} = (+a).$$

Dzielenie przez (— a) daje natomiast:

$$\frac{(-a) \cdot (-a)}{(-a)} = (-a).$$

Jeśliby jednak powstało z (+ a) . (+ a), wówczas dzieląc przez (+ a) miałbym po prostu

$$\frac{(+a) \cdot (+a)}{(+a)} = (+a)$$

a dzieląc przez (— a)

$$\frac{(+a) \cdot (+a)}{(-a)} = \frac{(+a) \cdot [(-a) \cdot (-1)]}{(-a)} = \frac{(+a) \cdot (-a) \cdot (-1)}{(-a)} = (+a) \cdot (-1) = (-a).$$

Nasze cztery wyniki okazałyby się jednak trafnymi także bez pytania o powstanie znaku plus przy $(+a^2)$, po prostu przez zwykłe dzielenie algebraiczne. Bo po wymnożeniu każdorazowego licznika otrzymuje się $(+a^2) : (\pm a)$, a więc albo $(+a^2) : (+a)$ albo $(+a^2) : (-a)$. To, że $(+a^2) : (+a) = (+a)$ i że $(+a^2) : (-a) = (-a)$, nie przedstawia dla nas żadnych trudności, ani nie daje okazji do powstania jakiejkolwiek wieloznaczności.

Inaczej jest z pierwiastkowaniem. Ponieważ zarówno (+a).(+a) jak i (— a) . (— a) daje na wynik to samo, a mianowicie $(+a^2)$, nie otrzymuję na „pierwiastek kwadratowy z $(+a^2)$", czyli na $\sqrt{a^2}$ jednoznacznego rozwiązania. Bo gdyby nawet było rzeczą pewną, że bezwzględną wartością pierwiastka musi być $|a|$, to o znaku tego a nie wiem w ogóle nic, a z samego tylko symbolu $\sqrt{a^2}$ nigdy także nie potrafię się dowiedzieć. Jako uczciwy człowiek muszę się przyznać do tej niewiedzy i wyraźnie napisać: $\sqrt{a^2} = \pm a$, to znaczy albo (+ a) albo (— a). Ta niepewność nie cechuje wszystkich pierwiastkowań. Przy $\sqrt[3]{a^3}$ wiem z pewnością, że rozwiązanie być musi (+ a). Bo (— a) . (— a) . (— a) dałoby $(-a)^3$. Stąd wynika dalej, że $\sqrt[3]{(-a)^3}$ to właśnie (—a). Z czwartym pierwiastkiem, a więc z $\sqrt[4]{a^4}$, mam znowu ambaras. Bo $(+a)^4$ mogło równie dobrze wyniknąć z (+a).(+a).(+a).(+a), jak z (—a).(—a).(—a).(—a). A zatem $\sqrt[4]{a^4}$ to znowu $(\pm a)$, plus albo minus a. Dostrzegamy już prawidło. W myśl reguł „kojarzenia rozkazów" parzysta ilość znaków plus tak samo daje znak plus, jak parzysta ilość znaków mi-

nus. Że jednak potęgi zawsze kryją w sobie taką ilość znaków liczbowych, jaką podaje wykładnik potęgowy, wobec tego przy obliczaniu pierwiastków o wykładnikach pierwiastkowych całkowitych parzystych rozwiązania są wieloznaczne, dla pierwiastków o wykładnikach pierwiastkowych nieparzystych są jednoznaczne. Ogólnie

$$\sqrt[2n]{r} = (\pm s), \quad \sqrt[2n+1]{r} = (+s), \quad \sqrt[2n+1]{(-r)} = (-s).$$

Ponieważ jednak wszelka wieloznaczność utrudnia rozumowanie wprowadzamy przy pierwiastkowaniu pojęcie tzw. „pierwiastka arytmetycznego", określone już jednoznacznie. A mianowicie, jeżeli liczba a jest większa lub równa zeru ($a \geqq 0$), to „arytmetycznym pierwiastkiem" n-tego stopnia z liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b (tzn. dodatnią lub zero), że

$$b^n = a.$$

A więc $\sqrt{16} = 4$, ponieważ $4 > 0$ i $4^2 = 16$

$\sqrt[3]{27} = 3$, „ $3 > 0$ i $3^3 = 27$

$\sqrt[4]{0} = 0$, „ $0^4 = 0$.

Ale nie jest $\sqrt{(-5)^2} = -5$, lecz $\sqrt{(-5)^2} = 5$, ponieważ $5 > 0$.

Ogólnie: $\sqrt{a^2} = |a|$.

O tyle sprawa byłaby wyjaśniona. Teraz jednak nikt nie może nam zabronić, byśmy spytali, jaka jest wartość pierwiastka „parzystego", jeżeli liczba pierwiastkowana ma znak ujemny. Np.

$$\sqrt[2n]{(-r)} = ?$$

Na to całkiem usprawiedliwione pytanie nie jesteśmy w stanie w żaden sposób odpowiedzieć. Bo w zakresie liczb aż dotąd zbadanych nie znajdujemy żadnej odmiany liczb ujemnych, które mogłyby powstać jako wynik potęgowania wykładnikiem parzystym. Każda liczba do potęgi 2n-tej musi mieć znak plus. Jeżeli jednak liczba pierwiastkowana nie daje się przedstawić jako 2n-ta potęga jakiejś liczby, wtedy nie można właśnie wyciągnąć z niej pierwiastka. Ani ogólnie, ani szczegółowo, ani w postaci liczby całkowitej, ani ułamkowej, ani niewymiernej, ani w postaci liczby dodatniej, ani ujemnej.

Mówimy ogólnie, że w zakresie liczb rzeczywistych [1] nie istnieje pierwiastek parzysty z liczby ujemnej. Stąd bezpośrednio wynika, że np. równanie

$$x^2 = (-1)$$

nie posiada rozwiązań rzeczywistych, bo żadna liczba rzeczywista podniesiona do drugiej potęgi (parzystej) w myśl powyższych rozważań nie może dać na wynik ujemnej liczby (—1), a więc nie da się wyciągnąć pierwiastka drugiego stopnia z (—1).

Wróćmy teraz do zwyczajnej „osi liczbowej", która już tak często oddawała nam znakomite usługi, ilekroć szło o uzmysłowienie zawiłych pojęć liczbowych.

Przypuśćmy, że narysowaliśmy oś liczbową, no i użyjmy różnych forteli dla jej przekształcenia.

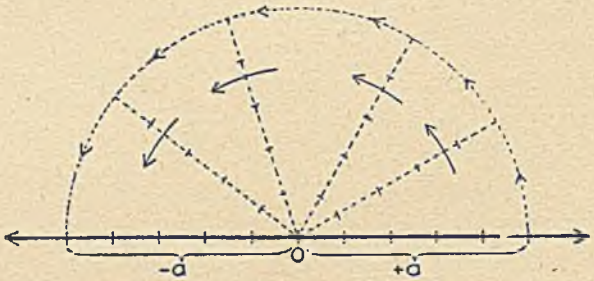


Fig. 25.

Chcąc operować wartościami ogólnymi, weźmy pod uwagę jakiś odcinek dodatniej części osi liczbowej i oznaczmy go przez *a*. W naszym wypadku obraliśmy jako *a* odcinek odpowiadający liczbie 5. Oczywiście można by temu *a* przypisać każdą inną skończoną wartość bezwzględną. Jeżeli teraz punkt zerowy przyjmiemy za punkt, przez który przechodzi oś obrotu, wówczas możemy nasze (+ a) tak długo dokoła niego obracać, aż nakryje zupełnie równe co do wartości bezwzględnej (— a), aż stanie się z nim identyczne, aż się niejako zamieni w (— a). Przyjęliśmy przy tym dwa całkiem dowolne założenia. Po pierwsze — wprowadziliśmy po prostu lewą część osi liczbowej od punktu zerowego jako kierunek uszeregowania wartości ujemnych. Po drugie — uznaliśmy „kierunek obrotu"

[1] Liczby „rzeczywiste" obejmują ogół liczb wymiernych względnych łącznie ze zbiorem liczb niewymiernych względnych.

przeciwny kierunkowi ruchu wskazówek zegara za tzw. obrót dodatni. A zatem, w jaki sposób — pytamy jeszcze raz — powstało z (+ a) raptem (— a)? Czego musieliśmy dokonać geometrycznie i arytmetycznie, aby dojść do takiego wyniku? Geometrycznie, to widać, dokonaliśmy obrotu o „pół okręgu", obróciliśmy (+ a) o 180 stopni dokoła punktu zerowego. Otóż, jeżeli — idąc dalej — zechcemy nadać temu obrotowi niejako arytmetyczne znaczenie, które by nie naruszało naszego ogólnego algorytmu, wówczas należało by chyba „dla utrzymania algorytmu" przypuścić, że taki obrót o 180° odpowiada mnożeniu przez (—1). Wygląda to „jak błędne koło w definiowaniu", ale wkrótce okaże swą wielką skuteczność. Bo wiemy już przez to, że (+ a) . (— 1) = (—a). Owo (— 1) nazwijmy „czynnikiem obrotu". Jeślibym zechciał teraz obracać dalej w przyjętym sensie obrotu, wtedy (— a) przemieniłoby się znowu po 180° w (+ a), arytmetycznie zaś mielibyśmy: (— a) razy „czynnik obrotu" (— 1) daje (+ a). Nasz algorytm zatem, jak dotąd, działa całkiem poprawnie.

A teraz, współbadając, starajmy się prześledzić genialny chwyt wielkiego Karola Fryderyka Gaussa. Co się stanie, pytamy, jeżeli wykonamy obrót nie o 180°, ale tylko o 90°? Co powstanie wtedy z naszego (+ a)? Że wzięte bezwzględnie ma w każdej fazie obrotu wartość |a|, jasne jest już chociażby dlatego, ponieważ jest ono promieniem *a* okręgu, powstającego siłą rzeczy przez obrót. Ale jaki znak ma to nowe, obecnie pionowo ku górze stojące |a|? Twierdzimy, ustalając to zupełnie dowolnie, że znak kierunku zwróconego ku górze jest (+). Rzecz „oczywista" — utrzymywalibyśmy — że +|a| powinno być (+ a). Otóż to wcale nie jest takie „oczywiste". Bo skoro pierwszy 90-stopniowy obrót w niczym znaku nie zmienił, dlaczego następnie drugi miałby raptem zmienić znak na (—). Że tak jednak jest istotnie widać na fig. 26.

„Czynnik obrotu" nie może przecież raz wynosić (+ 1), a zaraz potem przy następnym, równie wielkim obrocie (— 1)? Taki „przemienny" czynnik obrotowy stałby się dla nas czymś nieznośnym. I pozostałby nieznośny. Bo skoro znowu dokonalibyśmy obrotu o 90°, musielibyśmy, wnioskując logicznie, kierunek osi pionowo na dół zwróconej przyjąć za ujemny (—), tak iż nic nie zmieniłoby się, tzn. czynnik obrotowy wynosiłby (+ 1). Spróbujmy tylko przejść do ćwiartki czwartej, a wówczas plus przeskoczy znowu na minus,

bo (— a) musi się pomnożyć przez (— 1), aby otrzymać obrane jako wyjściowe położenie (+ a).

Słowem, stan nadzwyczaj niezadowalający, skoro obrotowi o 180° odpowiada czynnik (— 1), a każdej połowie takiego obrotu o 180° na przemian (+ 1) i (— 1).

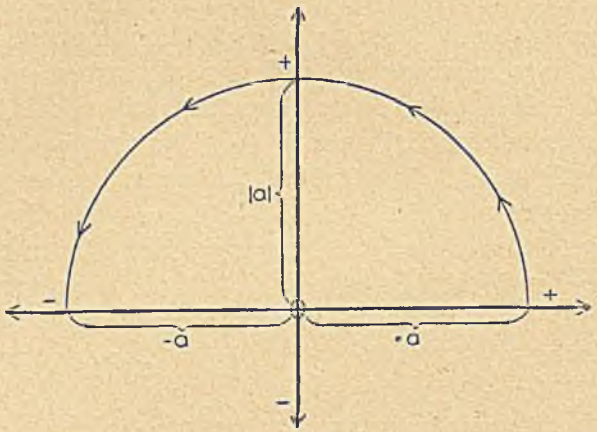


Fig. 26.

Ale mamy przecież sposób, aby się od tej rozterki uwolnić. S z u k a m y po prostu, jak wielki m u s i być „czynnik obrotowy" przy 90°. Szukać, jak wielkie być musi coś niewiadome na razie dla nas, nie oznacza nic innego, jak tylko rozwiązać równanie. W naszym przypadku zależy wszystko od tego tylko, czy potrafimy takie równanie ułożyć. Wiadomo nam, że obrót o 180° odpowiada czynnikowi (— 1). Wiemy zatem, że czynnikiem dla obrotu o 180° jest liczba (— 1). Tę liczbę (— 1) powinno się jednak uzyskać po wykonaniu dwóch półobrotów, każdego o 90°. Jeżeli więc niewiadomy czynnik obrotu o 90° nazwiemy x, otrzymamy, że a . x jest wynikiem obrotu odcinka a o 90°. Ale jeśli wykonam znów obrót o 90°, wówczas muszę raz jeszcze pomnożyć przez ten czynnik obrotowy x. A zatem (a . x) . x powinno się równać a . (— 1). Albo w postaci równania $(ax)x = a(-1)$. Ponieważ obraliśmy odcinek niezerowy a, możemy obustronnie przez a podzielić. Wówczas otrzymamy: $x^2 = (-1)$.

Ku niezmiernemu naszemu zdumieniu doszliśmy do równania, o którym już wiemy, że nie ma pierwiastków rzeczywistych. A więc „czynnik obrotu" odcinka o 90° jest jakąś liczbą nowego rodzaju,

tzw. liczbą „urojoną". Ta liczba jest pierwiastkiem naszego równania $x^2 = (-1)$. Oznaczając ją przez i w konsekwencji otrzymamy

$$i^2 = (-1).$$

Ponieważ i czyni zadość równaniu $i^2 = (-1)$, możemy symbol i zastąpić symbolem $\sqrt{-1}$.

Uzyskaliśmy więc jednostkę „urojoną" i jako „czynnik obrotu" odcinka jednostkowego o 90°. Nasze $i = \sqrt{-1}$ wyświadczy nam teraz przysługę w interpretacji symboli dotychczas nie mających sensu, np.

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(-1) \cdot (+25)} = (\sqrt{-1})\ (\sqrt{25}) = i\sqrt{25} = 5i.$$

$5i$ jest liczbą urojoną, oznaczającą wynik obrotu o kąt prosty odcinka, mającego 5 jednostek długości.

Tym samym uzyskaliśmy także oś liczbową dla liczb urojonych. I wprost mistyczne odkrycie pokazuje nam, że liczby urojone przebiegają w kierunku prostopadłym do osi liczb „rzeczywistych" w jej punkcie zerowym. Ale jeszcze o coś zatroszczył się algorytm. Mianowicie o możliwość obrotu każdej wartości bezwzględnej o 90°. Fakt, który nam się uwidoczni dzięki dokonaniu obrotu poprzez wszystkie cztery ćwiartki. Znowu zaczynamy od $(+a)$. Obróćmy teraz o 90°, wtedy otrzymamy $(+ai)$. Dalszy obrót o 90° daje $(+ai)i$, a więc $(+ai^2)$. Że jednak $i^2 = -1$, otrzymamy po obrocie o 180° liczbę $(-a)$, co najwidoczniej się zgadza. Po przebyciu trzeciej ćwiartki, zatrzymujemy się przy $(-a) \cdot (+i) = -ai$, wreszcie po obrocie o pozostałe 90° przy $(-ai) \cdot i = (-a) \cdot i^2 = (-a)(-1) = (+a)$.

Jeśli sobie uzmysłowimy, co to znaczy, wtedy dopiero dojdziemy do przekonania, że wszystkie liczby, a więc urojone i rzeczywiste razem wzięte, leżą właściwie na płaszczyźnie, albo poprawniej mówiąc, dadzą się razem przedstawić tylko na płaszczyźnie. Bo prostokątny „krzyż osi" jest możliwy tylko na płaszczyźnie. Zakłada on z góry tzw. „dwuwymiarowość".

Ale i teraz jeszcze bynajmniej nie jesteśmy zadowoleni i chcemy nasze nowe wiadomości zużytkować. W tym celu narysujmy na nowo obie osie naszej „płaszczyzny liczbowej", tym razem jednak z liczbami szczegółowymi (por. fig. 27).

Poziomą oś, a więc naszą zwyczajną oś liczb rzeczywistych, nazwijmy osią x-ów, a obie jej części odpowiednio: (+ x) i (— x). Oś liczb urojonych natomiast nazwijmy osią y-ów, jej górną część, zawierającą liczby z czynnikiem (+ i) oznaczmy przez (+ y), część dolną przedstawiającą liczby z czynnikiem (— i) natomiast przez

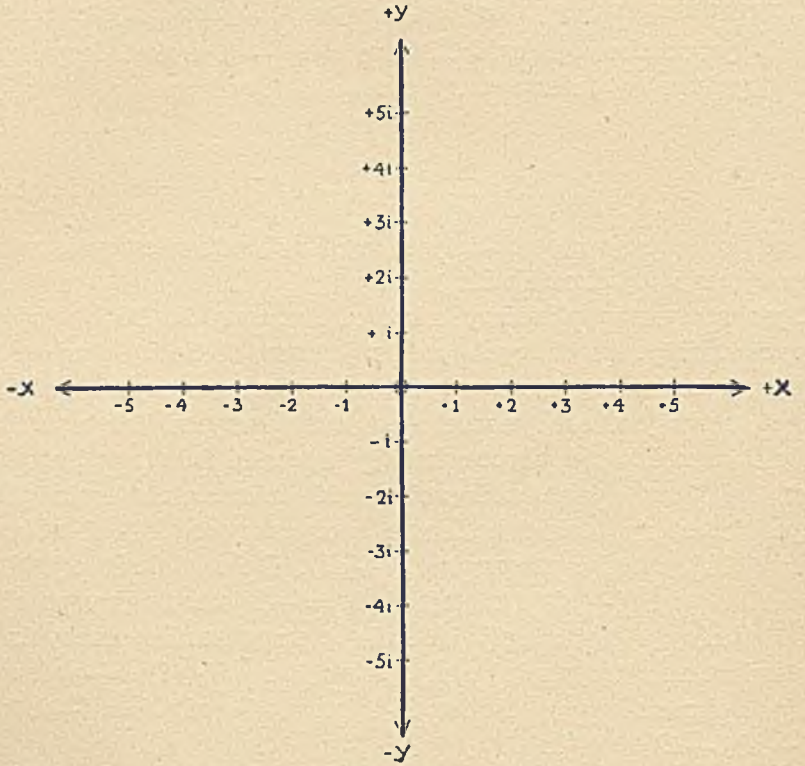


Fig. 27.

(— y). Takie oznaczanie osi stosuje się konwencjonalnie dla wszystkich układów osiowych, do jakiegokolwiek celu miałyby służyć. I my wiele jeszcze będziemy mieli z nimi do czynienia.

Teraz interesuje nas w pierwszym rzędzie, czy oś liczb urojonych jest równie „gęsto obsadzona" jak oś liczb rzeczywistych. Najwidoczniej bowiem od tego zależy gęstość i zapełnienie całej płaszczyzny liczbowej. Bo gdyby oś liczb urojonych nie była równie gęsto obsadzona jak oś rzeczywistych, wówczas nie można by oczy-

wiście każdego punktu płaszczyzny liczbowej (w dodatku jeszcze w najzupełniej dowolnym miejscu) zastąpić kombinacją liczb urojonych i rzeczywistych. Lecz wyprzedzamy fakty. Przecież wcale jeszcze nie wiemy, czy taka kombinacja jest graficznie możliwa i jak wygląda.

Otóż rozumujemy w następujący sposób: Nasze i jest właściwie także pewnego rodzaju „rozkazem". Mianowicie rozkazem, aby mnożyć przez $\sqrt{-1}$. Każda liczba a ma sama przez się odpowiednią wartość bezwzględną $|a|$. Obojętne, czy to $|a|$ jest liczbą całkowitą, ułamkową, czy niewymierną.

Owo $|a|$ mogę zawsze znaleźć w tej niejako „naturalnej" dodatniej części osi liczb rzeczywistych. Bo „historycznie" ta właśnie część osi liczbowej stanowi wyjście dla wszystkich dalszych pojęć liczbowych. Tam leżały najpierw liczby naturalne, tam wsunęliśmy później ułamki, a potem liczby niewymierne. Wtedy dopiero stało się aktualnym „zagadnienie rozkazu", zagadnienie znaków liczbowych. Algebraicznie, łączę teraz $|a|$ z plusem albo z minusem i zyskuję przez to $(+a)$ lub $(-a)$. Następnie przez ćwierć-obrót mogę utworzyć dalsze jeszcze kojarzenia rozkazów. Mianowicie $(+ai)$ oraz $(-ai)$. Rozkaz „plus i" oznacza: „Ruszaj pionowo od zera w górę o $|a|$!" Natomiast rozkaz „minus i": „Ruszaj od zera pionowo na dół o $|a|$!" Tym samym nasz pierwszy problem byłby rozwiązany. Bezwzględna wartość a, $|a|$, jest jednaka dla wszystkich czterech części osi. Zmienia się tylko na rozkaz wyrażony „znakiem liczbowym" czy też na rozkaz „i". Co do gęstości osi urojonych nie ma zatem wątpliwości. Wykazuje ona podobieństwo budowy z osią liczb rzeczywistych, jest z nią izomorficzna. Istnieją przecież istotnie liczby takie, jak $\frac{1}{5}i$, $\frac{1}{17}i$, $i \cdot \sqrt[4]{25}$, $\frac{16b}{9l}$, $\frac{9l}{5}$ itd. Można by i traktować jako znak liczbowy lub jako współczynnik, pisząc:

$$i \cdot \frac{1}{5},\quad i \cdot \frac{1}{17},\quad i \cdot \sqrt[4]{25},\quad \frac{1}{1} \cdot \frac{16b}{9},\quad i \cdot \frac{9}{5} \text{ itd.}$$

Teraz jednak pytamy dalej. Jak przedstawią się kombinacje w postaci sumy lub różnicy liczb rzeczywistych i urojonych? Krótko mówiąc, jak przedstawię graficznie tzw. liczby „zespolone" w ogólnej postaci $(a \pm ib)$? Jest rzeczą jasną, że nie mogę tworzyć „par" liczbowych na jednej osi. Bo „czynniki obrotowe" postaci $(+1)$ lub (-1) przerzucają liczbę $|a|$ na oś rzeczywistych, współczynniki obrotowe postaci $(\pm i)$ natomiast na oś urojonych. Skoro więc do-

piszę „czynniki obrotowe“, powinienbym najogólniejszy typ liczb, liczby zespolone, zapisywać właściwie tak:

$$(\pm 1)\,|a| \pm (\pm i)\,|b|.$$

Obecnie zależy cała różnica pomiędzy liczbami urojonymi a rzeczywistymi od tego tylko, czy |a| i |b| różnią się od 0, czy nie. Je-

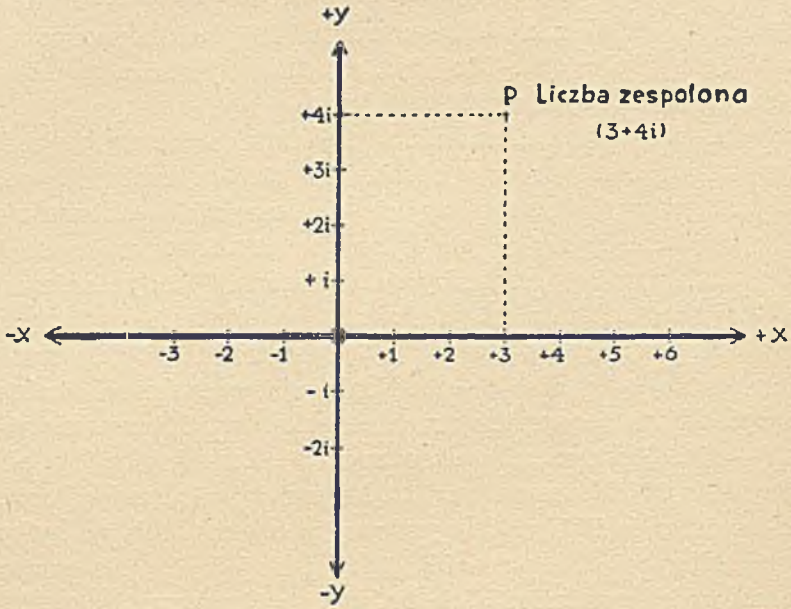


Fig. 28.

żeli |a| równa się zeru, wówczas pozostaje $(\pm i)\,|b|$, to znaczy liczba urojona $(\pm ib)$. Jeżeli |b| stanie się zerem, wówczas pozostanie $(\pm 1)\,|a|$, to znaczy liczba rzeczywista $(\pm a)$. Jeśli |a| i |b| są równocześnie 0, wówczas powstaje samo 0.[1] Jeśli natomiast |a| wraz z |b| są różne od 0, wówczas mamy właśnie najogólniejszy, najobszerniejszy schemat liczby w ogóle, mianowicie „zespół“, połączenie wszystkich możliwości liczbowych, czyli „liczbę zespoloną“.

Chcąc ją geometrycznie przedstawić, musimy zapytać, co właściwie oznacza taki rozkaz $a + bi$ czy $a - bi$ itp. *a* lub $(+a)$ oznacza, że należy posunąć się po dodatniej stronie osi liczbowej o *a*. Szczegółowo biorąc np. o 3. A *bi* oznacza, że równocześnie należy

[1] 0 można także czytać jako dużą literę O: O = łać. *origo*, początek!

wznieść się ku górze, prostopadle do poprzedniego kierunku o *bi*, szczegółowo np. o 4i. To jednak związane jest z ruchem, jest zagadnieniem kinematycznym czyli foronomicznym. (*Kinema* (gr.) = = ruch; *foronomia* = abstrakcyjna, ogólna nauka o ruchu.) A mianowicie, ostateczny cel ruchu można osiągnąć kosztem dwóch ruchów, odbywających się wzdłuż dwóch do siebie prostopadłych kie-

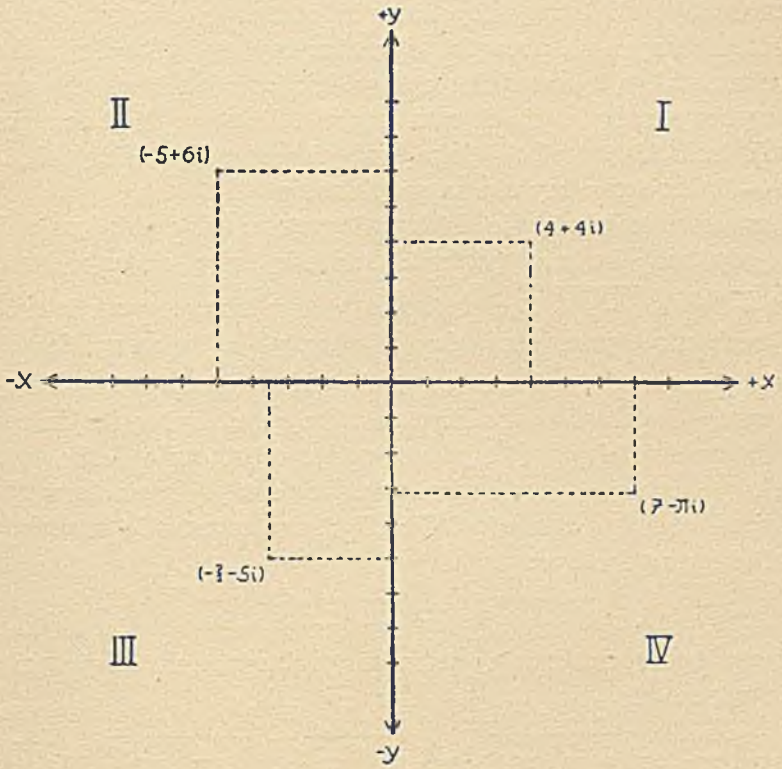


Fig. 29.

runków: musi się zatem dać przedstawić jako rezultat o b u tych ruchów. Krótko mówiąc, punkt końcowy musi odpowiadać równocześnie rozkazowi rzeczywistemu i urojonemu. Narysujmy wreszcie owo (3 + 4i) (por. fig. 28).

Nasze zadanie udało się rozwiązać: „Liczba zespolona" a ± bi leży poza osiami, na płaszczyźnie liczbowej! Teraz dla lepszego uzmysłowienia wyznaczmy liczby zespolone we wszystkich czterech ćwiartkach (por. fig. 29).

Rozkazy znaków, oraz „rozkazy i“ powinny być teraz jasne. Szczególnie godną uwagi jest liczba w ćwiartce IV, bo tutaj część urojona jest jeszcze w dodatku niewymierna. Mianowicie $-\pi . i$, co oznacza $-(3{\cdot}1415926...) \times \sqrt{-1}$.

Matematycznie poprawnie należało by teraz określić równość, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb zespolonych. Ponieważ zbyt wiele zajęłoby nam to czasu, więc zgodnie z przyrzeczeniem danym na początku ograniczymy się tylko do praktycznej wskazówki, a mianowicie: cztery działania na liczbach zespolonych wykonywamy w taki sam sposób, jak na liczbach rzeczywistych, traktując symbol i jako liczbę i zastępując iloczyn $i . i = i^2$ przez -1. Przekonajmy się na przykładzie.

Słusznie się zdziwił wielki fizyk i matematyk holenderski Huygens, gdy mu Leibniz postawił zadanie, aby obliczyć wartość $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$, a przy tym jeszcze utrzymywał, że rezultat tego rachunku jest stosunkowo prosty, a mianowicie liczba 2·449 489 7..., czyli $\sqrt{6}$. Jakże to możliwe, zawołał zapewne Huygens, aby z sumy dwóch pierwiastków, zawierających sumę i różnicę jedności i pierwiastków urojonych, wypadła ostatecznie liczba wprawdzie niewymierna, ale wcale nieskomplikowana? A może to wszystko jest tylko formalną igraszką? Prześledźmy powstanie naszego wyniku. Powinno więc być:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6} .$$

Dla próby (sprawdzenia) podnieśmy obustronnie do potęgi drugiej. A więc

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}\right) . \left(\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}\right) = \sqrt{6} . \sqrt{6}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} . \sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} . \sqrt{1+\sqrt{-3}} +$$

$$+ \sqrt{1+\sqrt{-3}} . \sqrt{1-\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} . \sqrt{1-\sqrt{-3}} = 6$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{-3})^2} + 2\sqrt{(1-\sqrt{-3})\,(1+\sqrt{-3})} + \sqrt{(1-\sqrt{-3})^2} = 6$$

$$1 + \sqrt{-3} + 2\sqrt{1-\sqrt{-3}+\sqrt{-3}-\sqrt{(-3)^2}} + 1 - \sqrt{-3} = 6$$

$$1 + \sqrt{-3} + 2\sqrt{1-(-3)} + 1 - \sqrt{-3} = 6$$

$$1 + \sqrt{-3} + 2\sqrt{4} + 1 - \sqrt{-3} = 6$$

$$1 \qquad + 4 \quad + 1 \qquad = 6, \text{ czyli } 6 = 6.$$

A zatem przypuszczenie Leibniza znakomicie się sprawdziło. Abyśmy jednak w przyszłości nie byli wystawieni już na takie nieporadności w rachunku, jakich co dopiero dokonaliśmy, zanotujmy sobie dwie proste reguły pomocnicze. Mianowicie:

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2,$$

tzn. iloczyn sumy dwóch liczb przez ich różnicę równa się różnicy kwadratów tych liczb.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

tzn. kwadrat sumy, albo różnicy, dwóch liczb jest zawsze sumą kwadratów obu tych liczb plus, albo minus, „podwójny iloczyn" obu liczb. To tylko mimochodem. Podaliśmy dotąd, że jednostkę urojoną $\sqrt{-1}$, oznacza się literą i. I że jeśli to i połączymy znakiem dodawania lub odejmowania z dowolną liczbą „rzeczywistą", wtedy mówimy o liczbie „zespolonej", której ogólna postać da się napisać jako $a + bi$. Jeśli utworzymy natomiast, podobnie jak w przykładzie „Huygensa—Leibniza", dwie liczby zespolone postaci $(a + bi)$ oraz $(a - bi)$, wtedy nazwiemy je „zespolonymi sprzężonymi". Pomnożenie liczb zespolonych sprzężonych przez siebie daje natychmiast liczby rzeczywiste, gdyż $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, a więc $(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(\sqrt{-1})^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$, przy czym i — jak widać — odpadło. Ale także podniesienie do kwadratu liczb „zespolonych sprzężonych" daje wartości rzeczywiste. Bo:

$$[(a + bi) + (a - bi)]^2 = (a + bi)^2 + 2(a^2 - b^2 i^2) + (a - bi)^2 =$$
$$= a^2 + 2abi + b^2 i^2 + 2a^2 - 2b^2 i^2 + a^2 - 2abi + b^2 i^2 =$$
$$= 4a^2 + 2b^2 i^2 - 2b^2 i^2 = 4a^2.$$

Skoro już znamy wszystkie typy liczb, ustalmy niejako ich rodowód czy drzewo genealogiczne:

1. Liczby rzeczywiste.
   - A. Liczby wymierne.
     - a) Liczby wymierne całkowite (2, 4, 99).
     - b) Liczby wymierne ułamkowe ($\frac{5}{7}$, 0·25, 0·3 itd.).
   - B. Liczby niewymierne ($\sqrt[4]{25}$, 3·141592... $= \pi$ itd.).

2. Liczby urojone.
   a) Liczba $i = \sqrt{-1}$.
   b) Liczby zespolone $(a + bi)$.
   c) Liczby zespolone sprzężone $(a + bi)... (a - bi)$.

Dalszy podział mógłby jeszcze wyróżnić:
   a) Liczby szczegółowe (7, $\sqrt[4]{25}$, $5 + i\sqrt{13}$ itd.).
   b) Liczby ogólne (a, c, $\sqrt[n]{p}$, $\frac{r}{s}$, $a - di$ itd.).
   c) Liczby niewiadome (x, y, z itd.).
   d) Liczby zmienne [$y = f(x)$, $z = 5y + 3x$ itd.].

W końcu pozostałoby jeszcze rozróżnienie na:
   A. Liczby dodatnie i ujemne [$(+5)$, $-\sqrt{a}$, $\pm 3x$ itd.].
   B. Liczby bezwzględne ($|7|$, $\left|\frac{3}{16}\right|$, $|a|$, $|d - ni|$, $|y|$).

W ten sposób stanowczo i nieodwołalnie dotarliśmy na najwyższy szczyt góry liczbowej, wznoszącej się nawet w sfery urojone. Istnieją jeszcze wprawdzie takie osobliwości jak „kwaterniony" Hamiltona i tzw. liczby „nadzespolone" itd. Jednakże z osiągniętej wysokości mamy prawo być więcej jeszcze niż zadowoleni. Bo z tym, co posiadamy, możemy już wniknąć głębiej w każdą dziedzinę matematyki.

Jakkolwiek interesujące i płodne w następstwa byłoby dalsze zajmowanie się teorią liczb zespolonych, na których systematycznym zastosowaniu polega jeden z najważniejszych działów wyższej matematyki, tzw. „teoria funkcji analitycznych" czyli „teoria funkcji zmiennych zespolonych", to jednak sprzeniewierzylibyśmy się naszemu zadaniu, gdybyśmy się dłużej przy nich zatrzymali. Ograniczymy się zatem do tego, aby zauważyć, że „liczby zespolone" uważamy po prostu algebraicznie za „wielomiany" i możemy nimi operować ostrożnie wprawdzie, ale bez specjalnej obawy w zakresie czterech działań zasadniczych. Oczywiście, przy szczegółowych obliczeniach zawsze należy mieć na uwadze, że i oznacza właśnie $\sqrt{-1}$. Przy wszelkich jednak obliczeniach wystarczą na pewno najzupełniej nasze prawa „kojarzenia rozkazów".

Że przy czterech podstawowych działaniach (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie) nie popadniemy w żadne trudności, nawet gdy wystąpią liczby urojone, zaznaczyliśmy właśnie przed chwilą. Nie chcielibyśmy jednak tego matematycznego królestwa

duchów, w którym widoczne się stają związki pomiędzy liczbami a formami, związki, których istnienia w jaskrawym świetle liczb rzeczywistych oko ludzkie wcale się nie domyśla, tego królestwa nie chcielibyśmy opuścić, nie dawszy przynajmniej słabego przedsmaku spełniających się w nim cudów. Dlatego zdradzimy, że potęgowanie liczby i, odpowiednio do własności tego i jako „czynnika obrotu", wyznacza pewien cykl, który przebiega w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
i^2 &= (\sqrt{-1})^2 = (-1)^{\frac{2}{2}} = (-1)^1 &&= -1\\
i^3 &= i^2 \,.\, i &&= (-1) \,.\, i &&= -i\\
i^4 &= i^3 \,.\, i &&= (-i) \,.\, i = (-1) i^2 &&= +1\\
i^5 &= i^4 \,.\, i &&= (+1) \,.\, i &&= +i\\
i^6 &= i^5 \,.\, i &&= (+i) \,.\, i = i^2 &&= -1
\end{aligned}$$

itd.

Albo ogólnie:

$$\begin{aligned}
i^{4n} &= +1\\
i^{4n+1} &= +i\\
i^{4n+2} &= -1\\
i^{4n+3} &= -i\\
i^{4n+4} &= +1
\end{aligned}$$

itd., przy czym za n należy podstawiać liczby naturalne od 1 począwszy aż do dowolnej skończonej wielkości.

Jeszcze trudniejszą i bardziej mistyczną postać aniżeli potęgowanie przybiera pierwiastkowanie liczb urojonych i zespolonych. Ponieważ naczelne nasze dążenie zawsze przy tym zwraca się w tym kierunku, aby wyższego rzędu pierwiastki z (—1) zredukować do pierwiastka kwadratowego z (—1), a więc do wartości i, wyprowadzono w tym celu, dzięki różnym genialnym chwytom i przy pomocy koncepcji „czynnika obrotu", rozliczne wzory, których wyjaśnienie zbyt daleko by nas zawiodło.[1] Zadowolimy się zatem uwagą, że pierwiastek kwadratowy z liczby zespolonej $a + bi$ oblicza się w następujący sposób:

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i \,.\, \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \,.$$

[1] Współczynnik przy i nie sprawia przy tym żadnej trudności. Możemy go zawsze wyrazić jako liczbę rzeczywistą. Tak np. jest $\sqrt[12]{-9} = \sqrt[12]{9} \,.\, \sqrt[12]{-1} = \sqrt[12]{9} \,.\, \sqrt[6]{i}$, ogólnie $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a} \,.\, \sqrt[n]{i}$.

Wzór ten oczywiście można też stosować dla pierwiastka kwadratowego z samego i, ponieważ i to nic innego, jak tylko liczba zespolona typu $(a + bi)$, przy czym $a = 0$, $b = \pm 1$. W ten sposób $\sqrt{i}$ daje w myśl naszego wzoru $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$, a $\sqrt{-i}$ według tego samego wzoru $\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$. Z faktu, że pierwiastek z i nie jest już liczbą urojoną czystą, ale liczbą zespoloną, łatwo pojąć, że nie leży on już na osi liczb urojonych (i), ale gdzieś na płaszczyźnie liczbowej.

Całkiem ogólnie: każdy n-ty pierwiastek z i, który z powyższego wzoru można by znaleźć z wielkim trudem i to przez kolejne powtarzanie pierwiastkowania, gdzie ponadto byłby bezpośrednio dostępny tylko pierwiastek 2., 4., 8., 16., 32. itd., da się łatwo i pewnie obliczyć za pomocą innego wzoru. Brzmi on:

$$\sqrt[n]{i} = \cos\left(\frac{90}{n}\right)^\circ + i \,.\, \sin\left(\frac{90}{n}\right)^\circ,$$

przy czym n ogranicza się do liczb całkowitych. Nawiasem mówiąc, są wszystkie n-te pierwiastki z i „parzystymi" pierwiastkami postaci $\sqrt[2r]{i}$, gdyż i, samo będąc już drugim pierwiastkiem, musi się z każdym wykładnikiem pierwiastkowym łączyć w pierwiastek „parzysty" $[(\sqrt[3]{-1}) = \sqrt[3.2]{-1} = \sqrt[6]{-1}$ itd.].

Obecnie, będąc w dobrze zasłużonym posiadaniu całego świata liczb, zastosujmy nasze doświadczenie w spełnianiu „rozkazów ruchu", aby uzyskać coś, co nam w zdumiewający sposób połączy w jedność to wszystko, co dotychczas przywykliśmy uważać za dziedziny astronomicznie od siebie odległe.

Długi i powolny rozwój historyczny prowadził owo odkrycie „geometrii analitycznej", czyli „współrzędnych", od Apolloniusza z Perge, poprzez badania scholastyki, Mikołaja d'Oresme (XIV wiek) i Jana Keplera, aż do Fermata i Descartes'a. Jednakowoż z imieniem Descartes'a, który jako młody oficer kawalerii, na węgierskich leżach zimowych, wśród okropności wojny trzydziestoletniej, ujął tę sztukę „analizy" w pewną zamkniętą całość, powiążmy nierozerwalnie uczucie czci dla geniuszu nieomylnej duchowej siły twórczej.

ROZDZIAŁ DWUDZIESTY DRUGI

WSPÓŁRZĘDNE

Wedle utartego już zwyczaju, zanim wejdziemy w bliższe szczegóły, zmajstrujmy sobie dla uprzystępnienia nową maszynę, aby najpierw przy jej pomocy przyswoić sobie kilka pojęć z najogólniejszej nauki o ruchu, czyli wzmiankowanej już wyżej foronomii. Ta foronomia, jak i sama jej nazwa, popadła dziś prawie zupełnie w zapomnienie. Mówimy w podobnym sensie o „kinematyce", znamy w fizyce, w szczególności w mechanice, rozliczne zasady ruchu, ale prawie zawsze mamy przez to na myśli ruch fizyczny, tzn. ruch „czegoś" materialnego, nawet jeśliby to był fikcyjny, fizyczny „punkt materialny".

Nas jednak to poruszające się „coś" w ogóle nie interesuje. Będziemy tak dalece abstrahowali, chociaż nic podobnego w „rzeczywistości" nie jest możliwe, że rozważać będziemy tylko ruch jako taki. I dlatego posługujemy się tylko punktami matematycznymi, pozbawionymi szerokości liniami matematycznymi i ewentualnie powierzchniami nie posiadającymi grubości. A więc utworami, które tylko pomyśleć można, ale których nie można zobaczyć. Na tym też polega komizm w następującej anegdotce: Pewien dorobkiewicz oddał swego syna, jako „jednorocznego" do arystokratycznego pułku. Syn potrzebuje pieniędzy, a ponieważ nie znajduje już żadnego uzasadnienia na uzyskanie kredytu, pisze do ojca, że w czasie ćwiczeń w strzelaniu złamał „linię celową" i musi zapłacić odszkodowanie skarbowi państwa. — Otóż taka „linia celowa" byłaby naszym ideałem. Bo jest to istotnie matematyczna, niematerialna linia. Mianowicie linia prosta, którą sobie w y o b r a ż a m y, przedłużając kierunek od oka celującego przez celownik i muszkę do celu. Ma zatem

długość, nie ma wcale szerokości. I z powodu tej nieuchwytności „nader trudno“ ją złamać.

To wszystko jednak tylko dla wyjaśnienia, co mamy na myśli, kreśląc w trakcie dalszych rozważań nasze punkty i linie. Nadajemy im symboliczną widzialność, nie wolno nam jednak ani na chwilę zapomnieć, że właściwie powinny one być niewidzialne. No, ale teraz do naszej „maszyny“. Bierzemy zwykłą rysownicę, rozpinamy na niej arkusz papieru rysunkowego i ściśle przy dolnym jej brzegu kładziemy przykładnicę. Następnie od jednej krawędzi rysownicy do drugiej kreślimy poziomą linię. A teraz prosimy kogoś, aby jakimś całkiem nieregularnym ruchem posuwał przykładnicę ku górze. My sami zaś przeciągamy z niezmienną prędkością kreskę od strony lewej ku prawej.

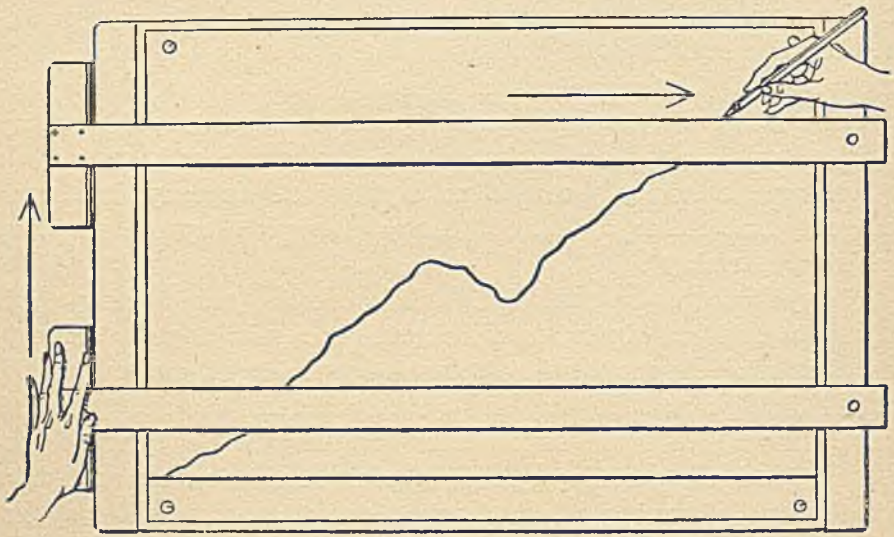


Fig. 30.

Ku naszemu zdziwieniu nie powstała na papierze bynajmniej linia prosta, ale nadzwyczaj nieregularna linia zygzakowata, z którą właściwie nic począć nie można. Nawet nie wznosi się stale. Owszem, w jednym miejscu nasza linia opada — a stało się to wtedy, gdy pomocnikowi naszemu przykładnica wyśliznęła się i wskutek tego przesunęła się z powrotem na dół. Oczywiście, możemy ten eksperyment powtarzać dowolnie często i w dowolny sposób. Można by też

umówić się z „pomocnikiem“, aby przy posuwaniu przykładnicy w górę albo zachował jednostajność, albo pewien rytm. Co wtedy powinnibyśmy otrzymać, odkryjemy później.

Obecnie zbadajmy najpierw „foronomicznie“, dlaczego w ogóle ta osobliwa linia powstała. Ściśle analizując, staramy się wyjaśnić sobie przebieg doświadczenia. Jest rzeczą zrozumiałą, że odbywały się równocześnie dwa stale do siebie prostopadłe ruchy. Mianowicie, moje jednostajne przesuwanie ołówka na prawo i nieregularne posuwanie przykładnicy przez pomocnika ku górze. A w każdej najmniejszej fazie ruchu ołówek był równocześnie przesuwany na prawo i ku górze. A więc—jeśli tak wolno się wyrazić—ołówek starał się sprostać równocześnie obu poruszeniom. Jeżeli pociąg porusza się wśród deszczu, którego krople spadają dokładnie pionowo, wtedy krople te ujrzymy na oknach wagonów nie w postaci pionowych śladów dżdżu, ale jako linie ukośne. A będą one ukośne tym więcej, im prędzej pociąg się porusza. One właśnie także starają się podążać równocześnie w kierunku dwóch wzajemnie prostopadłych ruchów. Maleńką fazę ruchu tego rodzaju moglibyśmy sobie także przedstawić następująco:

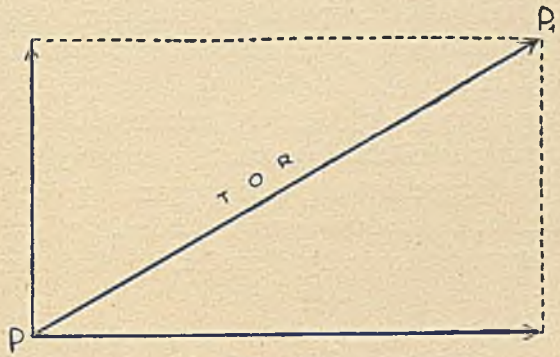


Fig. 31.

Ten tzw. „równoległobok ruchów“ przedstawia usiłowanie punktu P, aby podążyć w kierunku obu ruchów równocześnie. To usiłowanie osiąga też skutek. Bo będąc w P_1, punkt spełnił żądanie ruchu zarówno poziomego, jak pionowego: Posunął się nakazaną drogą na prawo i ku górze.

Ten sposób tłumaczenia ma jednak moc obowiązującą tylko w przybliżeniu, o ile ruch ku górze nie był także ściśle jednostajny.

To znaczy, jako „tor“ punktu pomiędzy P i P_1 tylko wtedy mogła powstać prosta, jeżeli o b a ruchy odbywały się jednostajnie. Tymczasem przy naszej maszynie założyliśmy, że ruch w górę odbywa się dowolnie i niejednostajnie. Możemy zatem nasz „równoległobok ruchów“ nawet w naszej najdrobniejszej fazie ruchu tylko w przybliżeniu uważać za ważny. Bo w rzeczywistości także w obrębie równoległoboku tor byłby w jakiś sposób nieregularny. Np.:

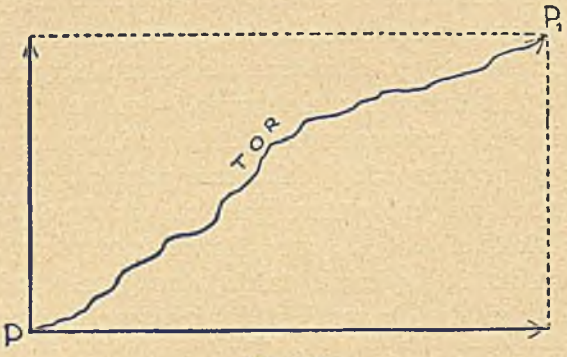


Fig. 32.

I chociażbym obrał nawet Bóg wie jak małe fazy, to ze względu na nieregularne posuwanie w górę, natrafiłbym zawsze na nieregularne „elementy toru“.

Musimy zatem inaczej ująć naszą „analizę“. Jedynym wyjściem, aby przy nieregularności choćby nawet jednego tylko z obydwu ruchów uniknąć nieregularnych torów, jest spróbować wyłączyć w ogóle długość toru, a badanie przeprowadzić wyłącznie na jednym punkcie toru, utworze bez cechy długości. A mianowicie na punkcie dowolnym.

Obieramy na rysownicy punkt P, odstawiwszy przedtem przykładnicę. Jakiż udział brał ten punkt „foronomicznie“ w obydwu ruchach? Z pewnością został przesunięty w prawo o długość x, tzn. poruszyliśmy ołówek o długość x na prawo. Natomiast wysokość, jaką punkt ten osiągnął przez przesunięcie w górę, nazwijmy y (fig. 33).

Teraz moglibyśmy to samo rozumowanie przeprowadzić dla każdego punktu „toru“ i za każdym razem moglibyśmy „długość“ oznaczyć przez x, „wysokość“ albo „szerokość“ przez y. Każdy punkt „toru“ jest więc jednoznacznie określony przez swoje x i swe y.

Wartości na x i na y, które w prosty sposób możemy przecież zmierzyć, są przyporządkowane odpowiedniemu punktowi P. Nazywamy je „współrzędnymi“. Mówiąc ściślej, określiliśmy tzw. „współrzędne punktu“, ponieważ przypisaliśmy, przyporządkowaliśmy punktowi charakterystyczne dla niego wartości położenia.

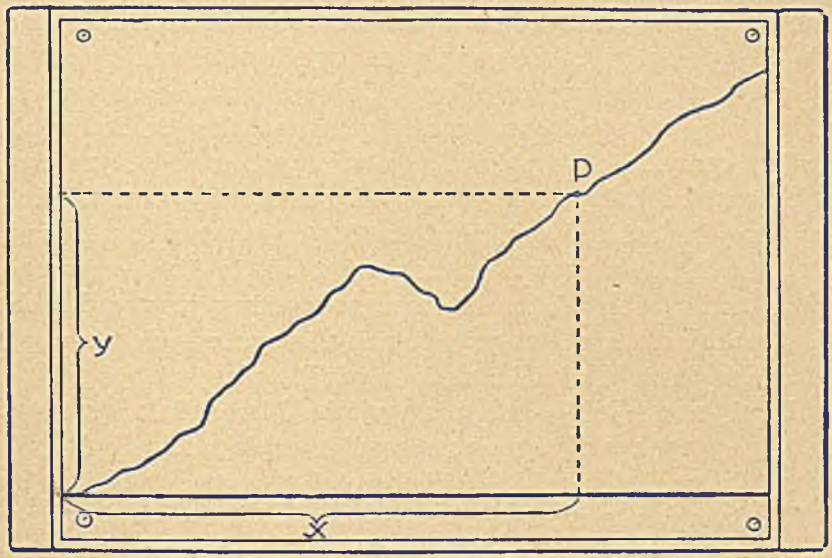


Fig. 33.

Przez to jednak osiągnęliśmy bardzo mało. Bo przecie nie możemy odmierzyć dla nieskończenie wielu punktów, odpowiadających im x i y, aby przez to wyznaczyć ich współrzędne. A że nasz „tor“ składa się jednak z nieskończenie wielu punktów, to prawie pewne, chociażby dlatego, że powyżej każdego punktu prostej podstawowej leży punkt „toru“, a dalej dlatego, ponieważ przy kreśleniu linii na prawo nie odrywaliśmy ołówka od papieru. Według naszych dotychczasowych poglądów taka ciągła linia składa się z nieskończenie wielu punktów. Przy czym arytmetycznie mógłbym twierdzić, że prosta moja, na której odmierzam wartości na x, a więc linia podstawowa, to w ogóle nic innego jak tylko oś liczb rzeczywistych. Bo możemy przecież obrać x w każdym miejscu począwszy od 0, a więc także jako ułamek, lub jako liczbę niewymierną.

Czego nam brak, to oczywiście — ogólnego wzoru, według któ-

rego moglibyśmy wyznaczyć x i y. Jednak wiemy dalej, że wzór, w którym występują liczby x i y i są niewiadomymi, to nic innego, jak tylko diofantyczne albo i niediofantyczne, w każdym razie podobnie nieoznaczone równanie z dwiema niewiadomymi. Leży to jednak zupełnie w naszej mocy, aby np. każdorazowe x u c z y n i ć wiadomym o tyle, że je dowolnie obierzemy. Skoro jednak mogę dowolnie wybrać i podstawić za x, co chcę, wówczas właściwe, odpowiadające y musi wynikać przymusowo, jeśli wzór ma się zgadzać.

A zatem widzimy wreszcie drogę. Co więcej, znamy nawet instrument, aby się na tej drodze pewnie poruszać. Jest to funkcja! Bo w funkcji otrzymuje się z dowolnego x przymusowo przynależne y. Ale jak uzyskać taką funkcję, która by miała tę własność, że byłaby ważną dla każdego punktu „toru"? Sprawa przedstawia się bardzo wątpliwie. Bo zdrowy rozsądek mówi mi, że dla toru wznoszącego się wzdłuż prostej, że dla koła, powiedzmy jeszcze dla elipsy znajdę funkcję toru, ale że przy takich nieregularnych, zygzakowatych torach okaże się to dla mnie niemożliwością. A jednak pozostawałoby jeszcze jedno, ostatnie wyjście. Może udało by się nasz nieregularny tor rozłożyć na poszczególne części, które byłyby bardziej regularne. I dla każdej takiej części utworzyć właściwą funkcję. Zdradzamy z góry, że wszystkie zarzuty i wszystkie pomysły wytrzymują krytykę. Wszelako pojęcie „regularności" jest dość płynne. Ponadto zaś można by cały problem odwrócić i utrzymywać, że jeśli każdemu „torowi" odpowiada funkcja, to tak samo każdej funkcji musi odpowiadać jakiś „tor". Z grubsza rzecz ujmując, i to też jest słuszne. Aby zatem móc naszym domysłom nadać konkretną postać, przygotujmy sobie dalsze ważne narzędzie do naszej „analizy", czyli „geometrii analitycznej".

Najpierw przypominamy uwagę, którą w swoim czasie zrobiliśmy: mianowicie że funkcja jest liczbą „faustyczną" i wyrazem ducha kultury Zachodu. Jak mamy to rozumieć? W tym celu musimy się przyjrzeć dokładniej istocie funkcji. Wspominaliśmy, że funkcję zapisujemy całkiem ogólnie $y = f(x)$, a przez to mamy na myśli, że y równa się jakiemuś zestawieniu wartości na x ze stałymi. Ewentualnie nawet bardzo zawiłemu. W ten sposób równanie

$$y = (2x + 5) \cdot \frac{\sqrt{5x^3 - 19}}{x^5 - x^3 + 2} \cdot 25x^7$$

jest z pewnością funkcją, nawet nadzwyczaj skomplikowaną.

A $y = 5x + 13 \cdot \sin x$ to także pewna funkcja. Słowo funkcja nie jest mianowicie całkiem jednoznaczne. Raz rozumie się przez to całe równanie, o którym z góry zakładamy, że za x można dowolnie podstawiać. Innym razem znowu rozumie się przez to po prostu samo y, gdyż owo y jest niejako rezultatem obliczeń dokonanych przy pomocy x. Można by także napisać:

$$(\text{Funkcja zmiennej } x) = f(x) = 5x + 13 \sin x$$

albo jeszcze wyraźniej

$$\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = 5x + 13 \sin x \\ \hline f(x) = 5x + 13 \sin x. \end{array}$$

Oczywiście, można by także wyrazić w następujący sposób:

$$\begin{array}{l} f(x) = y \\ f(x) = 5x + 13 \sin x \\ \hline y = 5x + 13 \sin x. \end{array}$$

Wiele się grzeszy nagromadzaniem różnych znaczeń słowa „funkcja", które w istocie ma przecież j e d n o tylko znaczenie. A przez to wywołuje się u początkującego zamęt. Dlatego spróbujemy sięgnąć do najprymitywniejszych początków sprawy. Przypuśćmy, że dane mamy równanie:

$$15x^2 + 9x + 3y = 12x - 27.$$

Występuje tutaj x i y. Zmienna x ponadto jeszcze w dwóch różnych potęgach. Zmienna y ma pewien współczynnik, mianowicie 3. Gdybyśmy mieli pracować tą „funkcją", nabawilibyśmy się kłopotu. Zawiodłaby nas nawet nasza kunsztowna maszyna ze wskazówką. Bo wskazówka pokazuje y, a nie $3y$. Taką funkcję nazywa się też „uwikłaną". Musimy spróbować „rozwikłać" ją sobie, uczynić ją „wyraźną". Ponieważ dotychczas stale interesowaliśmy się rezultatem, jak wielkie ma być y, musimy zatem y „izolować" w podobny sposób, jak swego czasu x w zwyczajnych równaniach. Wszak w istocie to przecie nic innego. Mianowicie, jeżeli nam wolno na x obrać jakiekolwiek wartości, wówczas właściwie wszystkie wielkości, w których x występuje, zamieniamy na stałe. A jako niewiadoma (mówiąc technicznym językiem równań) pozostaje tylko y. To rów-

nanie rozwiązujemy właśnie względem y, podobnie, jak można rozwiązać równanie

$$2x + 5a = 24 + 17b$$

w liczbach szczegółowych całkowitych, o ile nam wolno obrać na a i b dowolne wartości. Np.: $a = 2$, $b = 4$. Wtedy byłoby

$$\begin{aligned} 2x + (5 \cdot 2) &= 24 + (17 \cdot 4), \quad \text{czyli} \\ 2x &= 24 + (17 \cdot 4) - (5 \cdot 2) \\ 2x &= 82 \\ x &= 41. \end{aligned}$$

Równaniu wszakże nadaje się dopiero wtedy całkowicie charakter funkcji, jeżeli za x można podstawić jakąś liczbę nie tylko raz, ale zawsze, i to każdą dowolną liczbę.

Aby łatwo było naszą funkcję:

$$15x^2 + 9x + 3y = 12x - 27$$

rozwiązać względem y, trzeba ją teraz „rozwikłać" najpierw, uczynić „wyraźną".

$$\begin{aligned} 3y &= 12x - 27 - 9x - 15x^2 \\ 3y &= 3x - 15x^2 - 27 \\ y &= x - 5x^2 - 9, \text{ albo po uporządkowaniu} \\ y &= -5x^2 + x - 9. \end{aligned}$$

Teraz możemy powiedzieć, że y jest funkcją x, czyli $y = f(x)$, jeżeli przy tym dodamy w myśli, że x można obierać dowolnie. Przy każdym wyborze wartości na x powstanie w ogólności inne y. Oczywiście, możemy wyznaczyć niezliczoną ilość takich $y$psylonów. Przeprowadźmy to praktycznie, a w tym celu ułóżmy małą tabelkę:

x	y	x	y	x	y
1	-13	$\frac{1}{2}$	$-\frac{39}{4}$	0	-9
2	-27	$\frac{2}{3}$	$-\frac{95}{9}$	$\sqrt{2}$	$-17{\cdot}586...$
3	-51	$\frac{1}{8}$	$-\frac{573}{64}$	π	$-55{\cdot}2064...$
4	-85	$\frac{4}{7}$	$-\frac{493}{49}$	e	$-43{\cdot}227...$

W pierwszej kolumnie tabeli podstawiliśmy po prostu liczby naturalne (całkowite dodatnie). W drugiej ułamki zwyczajne. W trze-

ciej zero i liczby niewymierne. Zawsze wypada nam na y oznaczona wartość.

Jeżeli, dalej, określimy teraz każde x wraz z odpowiadającym mu y jako parę liczbową, to można powiedzieć, że otrzymaliśmy tyle par liczbowych, ile podstawiliśmy wartości na x.

Ale przez to jeszcze nie rozwiązaliśmy pierwszego problemu: mianowicie, na jakiej podstawie określa się y jako „liczbę", jako „liczbę faustyczną". Odpowiemy, że y jest pewnego rodzaju wieloznaczną, ruchliwą liczbą, którą otrzymuje się dzięki wartości na x. A mianowicie z przynależnego x. I chociaż to x jest zmienne, to mimo to y nie każdą może przyjąć wartość. Sam sposób, w jaki x występuje, wytycza dla y określone granice. A przez to utworzy ono nie jakiekolwiek, ale zupełnie określone następstwo liczb, jakkolwiek małe nawet obralibyśmy odstępy pomiędzy wartościami na x. A więc zmienia się ono w zależności, przymusowo. I to przymusowe następstwo liczbowe wartości na y można w wyższym sensie pojąć jako „faustyczną", ruchliwą liczbę. Jej obrazem jednak, w ujęciu foronomicznym, jest nasz „tor", albo jak się zwykło mówić, jakaś „krzywa", „wykres krzywej funkcyjnej".

A dalej, jak już zaznaczono, stosunki w funkcji tak się układają, że można wszystko odwrócić. Równie dobrze można by twierdzić, że układ par liczbowych, to jakaś funkcja. Z ostatniej uwagi widzimy, że funkcja może być dana w trojaki sposób:

1. Jako równanie o dwóch niewiadomych,[1] w postaci uwikłanej lub rozwiązanej na jedną z niewiadomych. Np.: $y = -5x^2 + 3x - 9$.

2. Jako „krzywa", dla której dopiero należy szukać wzoru, „funkcji".

3. Jako tabelka par liczbowych, które pochodzą np. z obserwacji. (Przykład: Ilość burz w miesiącu przy oznaczonej średniej temperaturze każdego miesiąca).

W drugim wypadku, jak już wspomniano, należy szukać „funkcji". W trzecim przypadku należy w ogóle dopiero ustalić, czy zachodzi związek funkcyjny, zgodny z jakimś prawem.

Z tymi wszystkimi jednak naszymi głębokimi poglądami nie ruszymy dalej dopóty, dopóki nie wprowadzimy „analitycznych" środków pomocniczych. Rozważmy zatem pytanie, jak się zamienia

[1] Ograniczymy się do dwóch zmiennych!

daną funkcję w wykres krzywej. Pytaniem, w jaki sposób zamienia się z powrotem krzywą na funkcję, zajmiemy się dopiero w ostatnim rozdziale. Również tam zajmiemy się kwestią, jak uzyskać krzywą z par liczbowych (problem interpolacji).

Nasze pytanie, zanim na nie odpowiemy szybko i po prostu, zakłada z góry jeszcze pewną drobnostkę. Zakłada mianowicie konwencjonalną umowę co do „układu osi współrzędnych" albo krótko „układu współrzędnych". Wiele trudności nam to nie sprawi, ponieważ czymś podobnym zajmowaliśmy się już przy liczbach urojonych.

A więc, postępując za Descartes'em (Kartezjuszem), obieramy tzw. prostokątny, czyli ortogonalny kartezjuszowski układ osi współrzędnych, w którym drogą umowy wprowadzamy wszelkie nazwy i inne założenia porządku. Jeszcze raz: Układ nasz wprowadzamy na podstawie u m o w y. Zasadniczo nie wybija się on niczym ponad inne możliwe układy, co najwyżej pewną prostotą. Wygląda w następujący sposób:

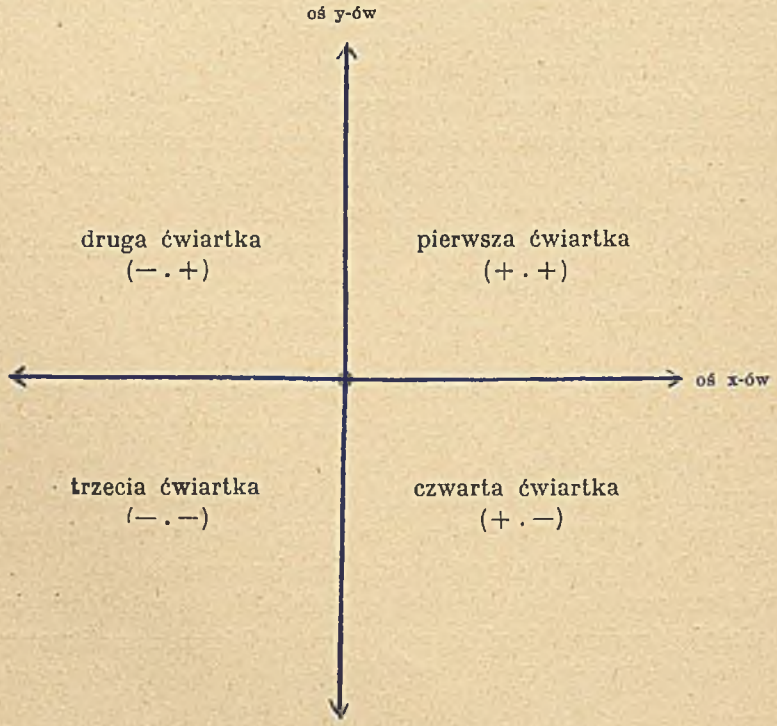


Fig. 34.

Punkt O nazywa się początkiem układu. Oś x-ów nazywa się osią odciętych, oś y-ów osią rzędnych. Obie osie razem „układem współrzędnych". Osie dzielą całą nieograniczoną płaszczyznę niejako na cztery „ćwiartki". Numeruje się je w kierunku przeciwnym obrotowi wskazówek na tarczy zegarowej. Co oznaczają stojące poniżej znaki + i —, objaśnijmy od razu w sposób prosty: mianowicie obie osie możemy też dodatkowo uważać za dwie, prostopadle przecinające się osie liczb rzeczywistych. Przez to bezsprzecznie otrzymamy znaczenie znaków, o ile tylko założymy, że liczby ujemne znajdują się na lewo od początku układu na osi poziomej, a na osi pionowej od początku układu w kierunku ku dołowi. Teraz już bez niczego jesteśmy w stanie rozmieścić „pary liczbowe". Każda para liczb, jaka na świecie istnieje, przedstawia w układzie współrzędnych jakiś punkt, pod założeniem, że jest to para liczb rzeczywistych. Bo zażądaliśmy, aby obie osie były liniami liczb rzeczywistych. Umiejscowienie liczb urojonych i zespolonych na tzw. płaszczyźnie Gaussa widzieliśmy już przedtem. Przy rozważaniu funkcji zmiennej zespolonej wyobrażamy sobie, że obie zmienne zespolone (niezależna i zależna) zostały zobrazowane na dwóch różnych płaszczyznach. Nasza funkcja przyporządkowuje każdej wartości zmiennej niezależnej — a więc jakiemuś punktowi na jednej płaszczyźnie — odpowiednią wartość zmiennej zależnej, czyli odpowiedni punkt na drugiej płaszczyźnie. Mówimy, że związek między zmiennymi, funkcja, p r z e k s z t a ł c a punkty jednej płaszczyzny w odpowiednie punkty drugiej i dlatego związek ten nazywamy „przekształceniem" lub „odwzorowaniem podobnym" (konformicznym). Ta jednakże dziedzina przekracza daleko nasze ramy, ponieważ należy do trudniejszych zagadnień wyższej matematyki.

ROZDZIAŁ DWUDZIESTY TRZECI

GEOMETRIA ANALITYCZNA

Z kilkakrotnego oświadczenia wiadomo już, że jest ciągle naszą ambicją, aby wyjaśnić podstawowe pojęcia analizy nieskończonościowej, a więc dyscypliny, której nadaje się ogólne miano „wyższej matematyki". I na każdym kroku, jaki uczynimy, to sobie musimy uświadomić, że bez przerwy gromadzimy coraz to nowy materiał przygotowawczy dla osiągnięcia zamierzonego celu. Zaniedbamy aż do pewnego stopnia niektóre szczegóły, które same przez się byłyby wielce interesujące i ważne. Niejedno znowu podamy w najszerszych tylko zarysach, albo w naświetleniu obcym zwyczajnej nauce. Tak np. teraz w sposób naprawdę samowolny, a przez to mający wiele luk, zajmiemy się „geometrią analityczną", czyli geometrią odniesioną do układu współrzędnych, aczkolwiek ta właśnie część geometrii była i jest jednym z głównych założeń matematyki. Czas już jednak zaniechać dalszych zapowiadań, a przystąpić wreszcie do rzeczy.

Stawiamy sobie najpierw pytanie, pozornie rozbieżne z tematem, a mianowicie, jakiemu warunkowi muszą czynić zadość dowolnie obrane odcinki, prostopadłe do pewnej prostej, aby ich końce mogły i musiały leżeć na jednej prostej. Albo jeszcze lepiej, jak to się często dzieje w geometrii, uważamy problem już za rozwiązany, a z rozwiązania szukamy „warunków" realizacji (por. fig. 35).

W punktach A do K „prostej g" wystawmy odcinki prostopadłe, dokładnie takiej długości, że końce ich wszystkich leżą na jednej „prostej g_1". Te prostopadłe odcinki oznaczamy przez l_0 aż do l_9 i wystawiamy je w zupełnie dowolnych odległościach od siebie. Jeżeli np. punkt A przyjmę za punkt początkowy mierzenia odległości na „prostej g" i wybiorę jakąś jednostkę długości, wówczas może

się zdarzyć, że ten czy inny odcinek przetnie „prostą g“ w punkcie, któremu odpowiada liczba „niewymierna“. Przyjmujemy w formie umowy, że będzie to dla nas obojętne. Teraz już każdy bez specjalnych zdolności geometrycznych odczyta natychmiast „warunek“ z rysunku. Odcinek AB, prostopadły odcinek l_1, oraz odcinek a_1 szu-

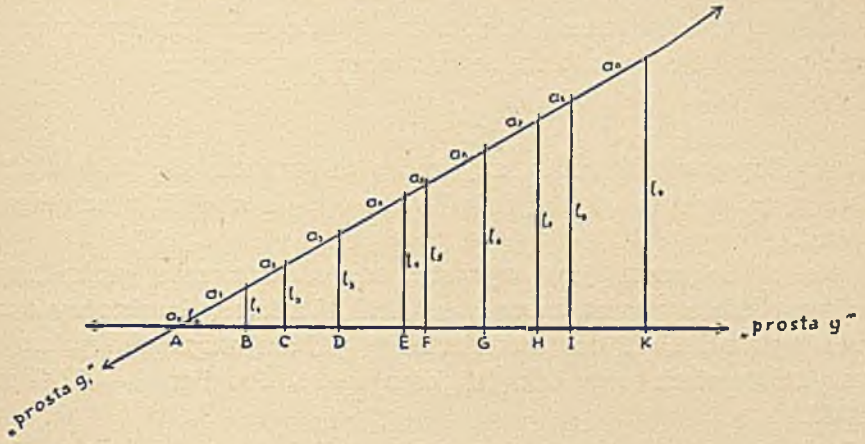


Fig. 35.

kanej „prostej g_1“ tworzą trójkąt. Do tego trójkąta jest podobny trójkąt, utworzony z AC, l_2 i z $(a_1 + a_2)$. Do obu tych trójkątów znowu trójkąt zbudowany z AD, l_3 i z $(a_1 + a_2 + a_3)$ i tak dalej, aż ostatni wreszcie trójkąt podobny utworzą odcinki AK, l_9 i $(a_1 + a_2 + \ldots + a_9)$. Przy tym rozważane trójkąty są prostokątne. Te jednak są podobne wówczas, gdy np. obie przyprostokątne pozostają stale w tym samym stosunku do siebie. Ponieważ jednak podobieństwo trójkątów stanowi założenie możliwości połączenia końców naszych prostopadłych „prostą g_1“; ponieważ dalej to podobieństwo zakłada stałą równość stosunków przyprostokątnych, to „warunkiem“ rozwiązalności naszego zagadnienia jest właśnie ten stały stosunek. A że wreszcie wybór odległości naszych prostopadłych od pewnego ustalonego punktu jest dowolny, wystarczyło by wyznaczyć jeden jedyny stosunek pomiędzy odcinkiem prostopadłym a jego odległością, aby już znać kierunek prostej g_1. Mógłbym napisać

$$\text{(odległość)} : \text{(długość odcinka prostopadłego)} = m : n,$$

$$\text{czyli } n \times \text{(odległość)} = m \times \text{(długość odc. prostopadł.)},$$

$$\text{czyli długość odc. prostopadł.} = \frac{n \times \text{(odległość)}}{m}$$

Jednakowoż nasze ostatnie sformułowanie nadaje się do zamiany na funkcję, i to w postaci rozwiązanej. Bo jeśli przyjmę długość dowolnego odcinka prostopadłego równą y, a odległość tego odcinka równą x, to otrzymam

$$y = \frac{n}{m}x,$$

A dalej, można teraz m i n, które tworzą ułamek, doprowadzić przez podzielenie do k. Tak, że ostatecznie otrzymam

$$y = kx$$

jako ogólny warunek na to, aby końce wszystkich odcinków o długości y, należących odpowiednio do dowolnych x, leżały na jednej prostej.

Ponieważ prosta jest wyznaczona jednoznacznie przez dwa punkty, odnieśmy naszą „prostą g_1", której nadamy konkretny sens przez wybór $k = 2$, do prostokątnego układu współrzędnych. Te dwa punkty niech mają odcięte, jeden $x = 3$, drugi $x = -2$. (Por. fig. 36.)

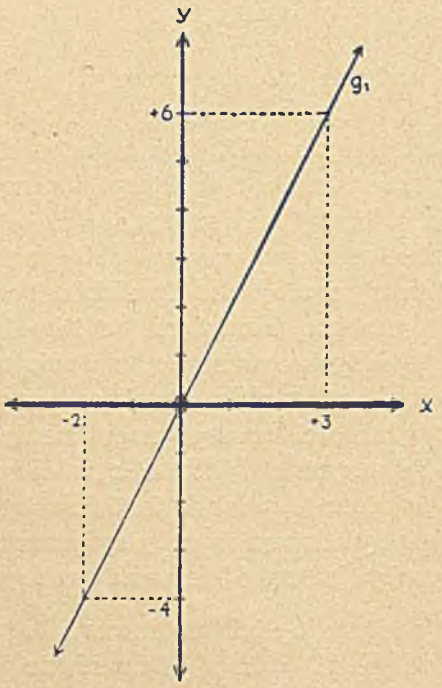


Fig. 36.

Ponieważ nasz warunek $y = kx$ brzmi (przy $k = 2$) $y = 2x$, to dla $x = (+3)$ y równa się $(+6)$, a dla $x = (-2)$ y równa się (-4). Nasza prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych. Czytelnik może teraz szukać — najlepiej na papierze milimetrowym — dla jakiegokolwiek innego x przynależnego mu y. Znajdzie, że koniec tego odcinka y leży zawsze na naszej prostej. Mówimy zatem, że wyznaczyliśmy „równanie analityczne" prostej jako funkcję postaci $y = kx$. Obie niewiadome występują tu w potędze pierwszej. Ponieważ jednak równanie prostej wymaga zawsze pierwszej potęgi niewiadomych, nazywamy takie równanie (funkcję) równaniem „liniowym" (od *„linea"*: linia prosta). Zanim pójdziemy dalej, wtrącimy krótką uwagę o mieszaniu ze sobą w praktyce słów: funkcja i równanie. Z tym dylematem załatwimy się krótko. A mianowicie, stwierdzając, że każda funkcja jest równaniem, ponieważ formalnie zapisuje się ją $y = f(x)$. Ale bynajmniej nie każde równanie jest jakąś funkcją. Tak więc $5x^2 + 3x + 9 = 27$ z pewnością jest równaniem, ale żadną miarą nie jest funkcją. Bo widzę tu tylko jedną niewiadomą x i nie mogę mówić ani o zmiennej niezależnej, ani o zmiennej zależnej. Także i ten chaos językowy sprawia wielkie trudności początkującym.

Ale i teraz wcale jeszcze nie skończyliśmy z badaniem „równania" naszej prostej, które musi być jakąś „funkcją", aby się dało analitycznie przedstawić. Bo twierdzimy, że

$$y = 2x + 3$$

także jest funkcją „liniową". A zatem powinno właściwie dać także jakąś prostą. Sprawdźmy (por. też fig. 37.):

Dla $x = (+3)$ otrzymujemy na y wartość 9, dla $x = (-2)$ jest $y = (-1)$. Tym razem prosta nie przechodzi przez początek układu, ale przecina się z dodatnim kierunkiem osi odciętych w $(+3)$. Można by to stwierdzić także rachunkiem. Bo dla $x = 0$ otrzymujemy $y = (+3)$. Jeśli jednak $x = 0$, to nie oznacza analitycznie nic innego, jak tylko, że szukam na osi rzędnych takiego punktu, przez który przechodzi nasza prosta. Bo dla niej w tym punkcie właśnie odcięta $x = 0$. Podobnie $y = 0$ oznacza punkt przecięcia się prostej z osią odciętych. A więc $0 = 2x + 3$, czyli $2x = -3$, zatem $x = -\frac{3}{2}$. Rzut oka na rysunek przekonuje nas, że prosta przecina faktycznie oś x-ów (odciętych) w punkcie $x = -\frac{3}{2}$. Nasza

nowa maszyna myślowo-rachunkowa okazuje się znowu osobliwym narzędziem czarnoksięskim, czarnoksięskim w wyższym jeszcze stopniu dlatego, że w magiczny jakiś sposób stwarza związek pomiędzy geometrią a arytmetyką. Tę niesamowitą magię podziwiać będziemy jeszcze na przykładach o wiele bardziej zawiłych. A oto

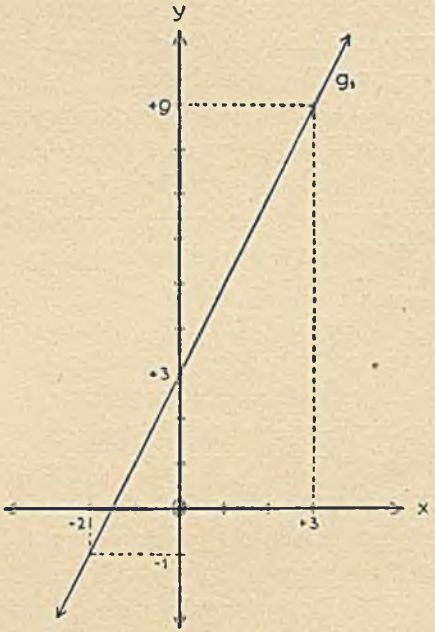


Fig. 37.

próbka: Stwierdziliśmy, że ogólna postać „równania prostej" przechodzącej przez początek układu, wyprowadzona z rozważań o podobieństwie trójkątów, jest

$$y = \frac{n}{m}x,$$

przy czym $\frac{n}{m}$ oznacza stosunek rzędnej do odciętej jakiegoś punktu na prostej. Otóż rzędna i odcięta są jednak „przyprostokątnymi". W następstwie tego ich stosunek jest pewną trygonometryczną funkcją kąta α. (Por. fig. 38.).

A mianowicie, wedle naszych już ustalonych definicji, tzw. funkcją tangens. Że jednak ułamek $\frac{n}{m}$ zawsze da się „wyliczyć", wobec tego w równaniu

$$y = kx$$

„współczynnik“ przy x to nic innego, jak tylko wartość „tangensu“ kąta α. A więc w funkcji liniowej, postaci:

$$y = kx + c \quad (c \text{ oznacza liczbę stałą})^1$$

k jest wartością funkcji tangens kąta α, to znaczy kąta, jaki prosta tworzy z dodatnim kierunkiem osi odciętych. Jeżeli jednak znamy

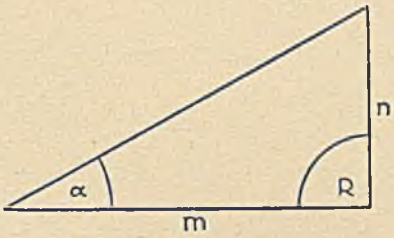


Fig. 38.

tangens tego kąta, to znamy także kąt, a przez to nachylenie względem osi odciętych (liczone zawsze względem jej dodatniego kierunku). Z tych rozważań skorzystamy jeszcze w przyszłości.[2]

Teraz jednak wzrosła nasza ambicja w geometrii analitycznej i chcielibyśmy wyznaczyć także równanie jakiejś linii krzywej, na przykład koła (por. fig. 39).

Krótko mówiąc, chcielibyśmy znaleźć wzór, który by dla każdego *x* dawał *y*, będące rzędną punktu, leżącego na okręgu koła o środku, zgodnie z rysunkiem, w początku układu. Najpierw widzimy, że tylko te wartości na *x* mają pełne znaczenie, które tak po dodatniej jak i ujemnej stronie osi odciętych bezwzględnie wzięte nie przekraczają długości promienia koła. Bo prostopadła w punkcie C nie trafi nigdy okręgu koła. Lecz jak mamy podejść do naszego niełatwego zadania? Może znowu za pomocą jakiegoś „stosunku“. Bo gdzie tylko wybierzemy *x*, „prostopadła“ trafia okrąg

---

[1] Dodanie stałej nie zmienia nigdy wartości funkcji kątowej, o czym można się przekonać przy pomocy rysunku. Prosta zostaje tylko równolegle przesunięta w układzie współrzędnych, bez zmiany kąta nachylenia do osi x-ów.

[2] Z rozważań naszych wynika, że ogólne równanie prostej: $y = kx + c$ nie obejmuje tego przypadku, w którym prosta przecina oś odciętych pod kątem prostym (a więc jest równoległa do osi rzędnych). Wtedy bowiem nie można wyznaczyć współczynnika k, ponieważ tangens kąta prostego jest nieoznaczony.

w jakimś punkcie. Tego właśnie żądaliśmy. Teraz możemy punkt ten połączyć ze środkiem koła za pomocą promienia. Przez to jednak powstanie zawsze trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną we wszystkich wypadkach jest promień, podczas gdy przyprostokątnymi są zawsze: „odległość“ i „odcinek prostopadły“. Jeżeli zatem oznaczę znowu odległość przez x, długość odcinka prostopadłego

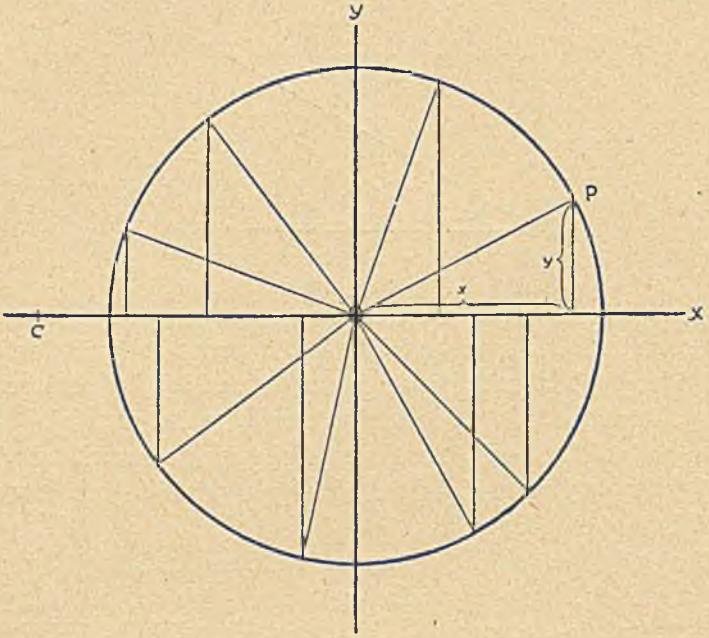


Fig. 39.

przez y, a znam jeszcze ponadto, albo co najmniej przyjmę za znaną długość promienia r, wówczas zachodzi na podstawie twierdzenia Pitagorasa związek

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ , czyli}$$
$$y^2 = r^2 - x^2 \text{ , czyli}$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Że przy tym otrzymam często na y wartości niewymierne, wynika z nauki o pierwiastkach. A dalej, każdorazowo przyjęte x wyznacza dwie wartości na y, mianowicie jedną dodatnią a drugą ujemną, które mają wszelako tę samą wartość „bezwzględną“. Powinnibyśmy zatem napisać:

$$|y| = \sqrt{r^2 - x^2},$$

stąd $y = + \sqrt{r^2 - x^2}$ albo $y = - \sqrt{r^2 - x^2}$.

Wszystko to, co wyprowadziliśmy czysto algebraicznie, jest słuszne. Rzut oka na rysunek poucza nas, że istotnie do każdego x należą dwie wartości na y. A mianowicie jedno y dla górnego, a jedno dla dolnego półokręgu. Oba jednak mają tę samą „bezwzględną" wartość, tę samą długość, różnią się zaś tylko znakami, a przez to położeniem w układzie współrzędnych. I na nowo ogarnia nas podziw dla czarnoksięskiej mocy geometrii analitycznej. Bo to dla nas prawie nie do pojęcia, że fakt wieloznaczności pierwiastka kwadratowego (znany nam z reguł kojarzenia rozkazów) zostaje natychmiast odwzorowany w układzie współrzędnych z pełnym znaczeniem geometrycznym. Ów ścisły związek arytmetyki z geometrią, wywołujący wielki zamęt i niepokój u początkujących, ta identyczność dwóch o całe światy odległych gałęzi matematyki jest naprawdę jednym z największych triumfów odkrywczych wysiłków myśli ludzkiej. A wyjaśnienie tego związku jest zadaniem głębokich i żmudnych roztrząsań matematycznych i filozoficznych, które przekraczają znacznie ramy naszych rozważań. Dlatego musimy ograniczyć się tylko do najprostszego wyjaśnienia, zaznaczając, że nie zajmujemy się właściwie geometrią, gdy stosujemy układ współrzędnych. Używamy raczej dwóch do siebie prostopadłych osi liczbowych, o ustalonych kierunkach dodatnim i ujemnym. A potem operujemy parami liczb przedstawionych na tych dwu osiach. Te pary liczbowe przyjmują jednak w postaci „symbolicznego odwzorowania" charakter punktów na płaszczyźnie. A wtedy podlegają w obrębie p ł a s z c z y z n y pewnikom geometrycznym, tak samo jak posłuszne są prawom geometrii punkty na j e d n e j osi liczb. Tą krótką wzmianką chcemy tylko zainteresować czytelników z żyłką filozoficzną, którzy w każdym dobrym podręczniku geometrii analitycznej mogą znaleźć wszelkie wyjaśnienia.

Lecz inaczej jeszcze „pociągniemy za język" naszą geometrię analityczną. A mianowicie, w przebiegły sposób spróbujemy rozwiązać równanie kwadratowe za pomocą równania koła:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Tak brzmiało równanie koła. Jednakowoż zdarzyć się może oczywiście, że szukamy takiego punktu, albo takich punktów okrę-

gu, dla których $y = 0$. Przedtem jednak podnieśmy jeszcze obie strony równania do kwadratu:

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Skoro y ma być równe 0, wtedy otrzymamy:

$$0 = r^2 - x^2, \quad \text{czyli} \quad x^2 = r^2.$$

Stąd wynika $|x| = \sqrt{r^2}$, a więc $x = \pm r$.

Rozważając wynik analitycznie widzimy, że dla $y = 0$, a więc w tych punktach, których rzędna równa się zeru, okrąg przecina oś odciętych.

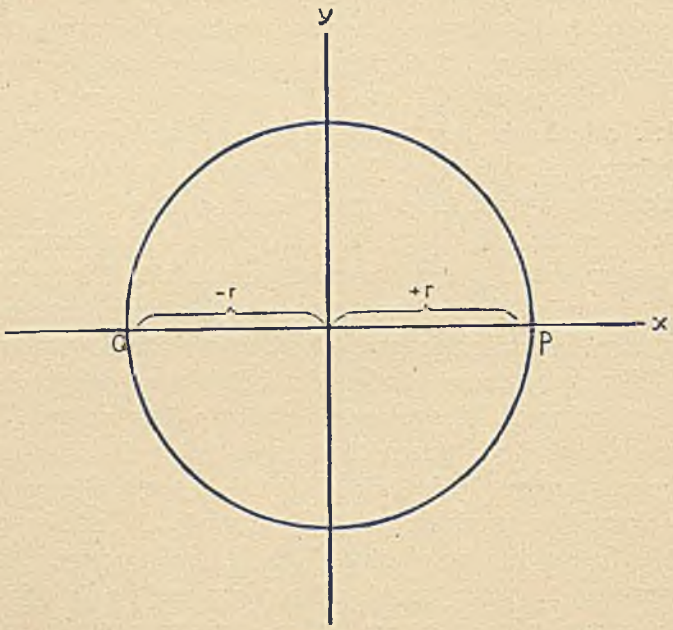


Fig. 40.

To są właśnie punkty P i Q. A więc tu także znowu w naoczny sposób uwydatniła geometria analityczna wieloznaczność rozwiązań równania kwadratowego.

Przy okazji wyjaśnimy, że rozważaniem tym zahaczyliśmy o nadzwyczaj ważną sprawę. Mianowicie: każde równanie o jednej niewiadomej można pojmować jako szczególny przypadek funkcji, w którym *y* przyjęto jako równe zeru. Jeśli dane jest np. równanie

$$x^2 - 2x - 15 = 0,$$

to wyobrażamy sobie, że powstało ono z funkcji

$$y = x^2 - 2x - 15.$$

Posługując się wykresem tej funkcji, musi się szukane x otrzymać tam, gdzie krzywa, będąca obrazem funkcji przecina oś odciętych. Mianowicie w owych punktach tej krzywej, dla których y równa się zeru. Jeślibyśmy wykreślili krzywą na papierze milimetrowym w układzie współrzędnych, to przekonalibyśmy się, że przecina ona oś x-ów w dwóch punktach o odciętych: $x = +5$, oraz $x = -3$. Ta „graficzna" metoda rozwiązywania równań bywa stosowana w przybliżonym rozwiązywaniu równań nie dających się rozwiązać arytmetycznie. Są to takie równania, w których x występuje w potędze wyższej niż czwartej. Przedstawimy ją króciutko. Podstawia się za x rozmaite wartości, wykreśla się krzywą, badając szczegółowo część krzywej w sąsiedztwie punktu przecięcia się jej z osią odciętych. Tam mianowicie posuwamy się stale coraz mniejszymi krokami w podstawianiu wartości na x, aby możliwie najdokładniej utrafić to właśnie x, dla którego $y = 0$. Przy tym jakby „celowaniu" zdarzyć się może także, że trafimy poza cel, ponad ten punkt, a wtedy przy dowolnie przyjętej krzywej mielibyśmy np. taki obraz:

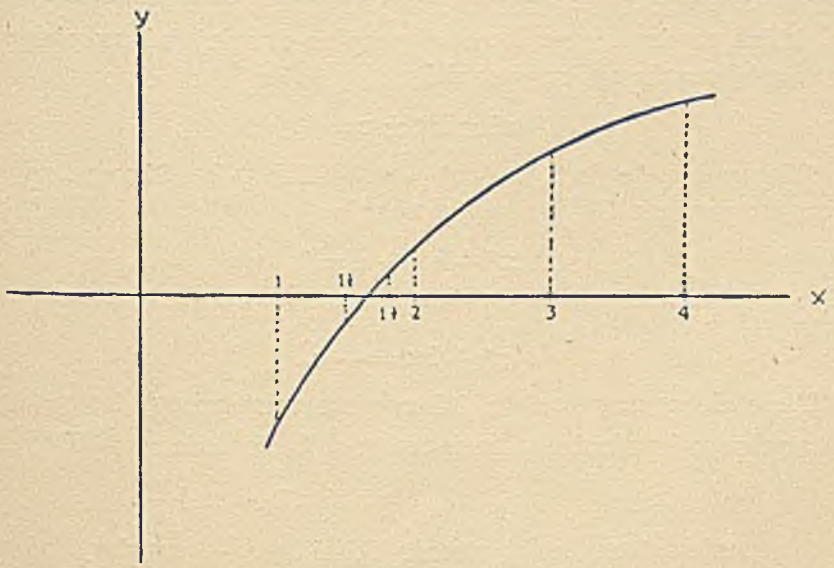


Fig. 41.

Dla $x = 1\frac{1}{2}$ krzywa znajduje się jeszcze pod osią x-ów. Dla $x = 1\frac{5}{6}$ już ponad nią. A więc to x, dla którego $y = 0$, musi leżeć pomiędzy $1\frac{1}{2}$ a $1\frac{5}{6}$. Teraz można dokonywać dalszych prób wewnątrz tego przedziału, aż się trafi na możliwie dokładną wartość. Ta metoda nazywa się *„regula falsi"*, „regułą fałszu", i stanowi tzw. metodę kolejnych przybliżeń. Najpierw bowiem szuka się rozmyślnie fałszywych wyników po obu stronach, aby poznać, gdzie może leżeć poprawny.

Tu również nie możemy zatrzymywać się dłużej, ponieważ obfitość materiału do opanowania staje się ciągle tym większa, im dalej się posuwamy. Wspomnimy tylko, że dzięki tej odmianie rozwiązywania równań spostrzegamy, iż od najwyższej potęgi, w jakiej występuje x, zależy zawsze, ile co najwyżej punktów przecięcia krzywa posiada. Równanie „liniowe" ma najwyżej jeden punkt przecięcia, kwadratowe — najwyżej dwa, trzeciego stopnia — co najwyżej trzy itd. Stąd wynika też, że każde równanie ma co najwyżej tyle „rozwiązań" na x, ile wynosi najwyższa potęga x. Że przy tym są też „urojone" i „zespolone" punkty przecięcia, a raczej rozwiązania, musi wystarczyć tylko wzmianka o tym.

Ze względów praktycznych szybko podamy jeszcze tylko w uzupełnieniu arytmetyczne rozwiązanie równania kwadratowego pełnego, które zawiera x zarówno w potędze drugiej jak w pierwszej. A więc równanie ogólnej postaci

$$x^2 \pm bx \pm c = 0.$$

Wiemy już, że jest $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Skorzystamy teraz z tego wzoru. Wybieramy równanie

$$x^2 + bx + c = 0$$

i najpierw przenosimy c „na drugą stronę". A więc:

$$x^2 + bx = -c.$$

Teraz dokonamy fortelu. Mianowicie uzupełnimy „lewą stronę" do zupełnego kwadratu. A to w ten sposób, że dodamy $\frac{b^2}{4}$. Bo

$$(x + \tfrac{b}{2})^2 \text{ musi się równać } x^2 + bx + \tfrac{b^2}{4}.$$

Ale ponieważ po lewej stronie dodaliśmy $\frac{b^2}{4}$, musimy również prawą stronę „wagi równań" obciążyć tym samym naddatkiem.

A zatem:

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = -c + \frac{b^2}{4}, \text{ czyli:}$$
$$(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c.$$

Skoro teraz obustronnie wyciągniemy pierwiastek kwadratowy, otrzymamy:

$$\sqrt{(x + \frac{b}{2})^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \quad [1]$$
$$\left|x + \frac{b}{2}\right| = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}, \quad \text{a więc}$$
$$x + \frac{b}{2} = +\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}, \quad \text{albo} \quad x + \frac{b}{2} = -\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}, \quad \text{stąd ostatecznie:}$$
$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \quad \text{albo} \quad x = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

Podstawiając otrzymane wyrażenia za x w równaniu $x^2+bx+c=0$ przekonamy się, że oba je spełniają. Oba rozwiązania możemy krócej zapisać:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

Za pomocą tego nadzwyczaj ważnego wzoru możemy rozwiązać każde równanie kwadratowe pełne, przy założeniu, że x^2 występuje w równaniu „izolowane", bez współczynnika, czyli ściślej mówiąc ze współczynnikiem 1, który stale się opuszcza. Jeżeli to nie zachodzi, trzeba najpierw dokonać „izolacji". Np.

$$4x^2 + 7x - 57 = 0.$$

Najpierw uwalnia się x^2 od współczynnika 4, dzieląc tą liczbą obustronnie. Otrzymujemy

$$x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{57}{4} = 0.$$

Teraz mamy równanie, w którym liczbie b ze wzoru odpowiada $\frac{7}{4}$, a liczbie c $\left(-\frac{57}{4}\right)$. Podstawiamy

$$x = -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} - \left(-\frac{57}{4}\right)}$$
$$= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} + \frac{57}{4}}$$
$$= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49 + 912}{64}}$$
$$= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{961}{64}}$$
$$= -\frac{7}{8} \pm \frac{31}{8}.$$

[1] Oczywiście, jeśli rozwiązania mają być rzeczywiste, wyrażenie pod pierwiastkiem musi być dodatnie lub równe zeru, a zatem musi być $\frac{b^2}{4} - c \geqq 0$.

A zatem x wynosi $-\frac{7}{8}+\frac{31}{8}=\frac{24}{8}=3$ oraz $-\frac{7}{8}-\frac{31}{8}=-\frac{38}{8}=$ $=-\frac{19}{4}=-4\frac{3}{4}$.

Krzywa, która by miała równanie $y=4x^2+7x-57$, musiałaby przecinać oś x-ów w punktach $x=+3$ oraz $x=-4\frac{3}{4}$, co czytelnik może sprawdzić na papierze milimetrowym.

Rozdział nasz o układzie współrzędnych, który nas znowu skłonił do rozmaitych dygresji, zamkniemy obecnie stwierdzeniem:

Każda funkcja ogólnej postaci

$$y=f(x)$$

da się przedstawić graficznie jako krzywa w pewnym układzie współrzędnych. Przy tym należy rozumieć wyrażenie „krzywa" ogólnie w ten sposób, że prosta również jest uważana za krzywą. Jest ona wypadkiem „granicznym" krzywej, jest krzywą bez krzywizny. Ta metoda wciągania w zakres pojęcia nadrzędnego tworów tam nie należących, dla zachowania jednolitości systemu, jest nam już znana np. z zerowej potęgi. Rozróżniamy „stopnie" krzywych według potęg x. Tak więc prosta jest krzywą pierwszego, koło krzywą drugiego stopnia. Do krzywych drugiego stopnia należą wszystkie przekroje stożka, jak koło, elipsa, parabola, hiperbola. Krzywe wyższego stopnia, jak np. $y=x^3+x^2+5x-17$, nazywa się „parabolami" trzeciego stopnia. A jeszcze wyższego stopnia, jeżeli x występuje w potędze czwartej, albo jakiejś wyższej potędze. $y=x^7+4x^3+7x-49$ byłaby to „parabola" siódmego stopnia.

Byłoby jeszcze wiele zajmujących zagadnień z geometrii analitycznej. Np. obliczyć punkty przecięcia się dwóch krzywych, albo za pomocą równania wyrazić styczną do krzywej itd. Lecz wszystkie te zagadnienia geometrii analitycznej musimy pominąć, aby się wznieść ku problemom „wyższej" analizy. Aby jednakże problemy te opanować, zajmiemy się nimi w następnym rozdziale z całą surowością i w ogólnych zarysach prześledzimy ich historyczny rozwój.

ROZDZIAŁ DWUDZIESTY CZWARTY

PROBLEM KWADRATURY

O „kwadraturze koła" słyszał już zapewne każdy czytelnik w związku z niejedną kwestią. Choćby dzięki temu, że zagadnienie to jest niemożliwe do rozwiązania, podobnie jak konstrukcja „perpetuum mobile".

Cóż to takiego jest „kwadratura koła"? Otóż, nic innego właściwie, tylko pomiar powierzchni. Bo zadanie polega na tym, aby używając jedynie linii i cyrkla rozłożyć koło albo na same tylko kwadraty jednostkowe, a więc przedstawić je w postaci sumy takich kwadratów, czyli powiedzieć, ile zawiera kwadratów jednostkowych (np. milimetrów kwadratowych); albo znów, co zasadniczo na jedno wychodzi, tylko przy pomocy linii i cyrkla zbudować kwadrat, który miałby to samo pole, co koło. Że taka konstrukcja jest niemożliwa, jakkolwiek małe wybrałbym kwadraty jednostkowe, udowodnił właściwie dopiero Lindemann z końcem dziewiętnastego stulecia, aczkolwiek domyślano się tego już daleko wcześniej, a nawet wiedziano w przybliżeniu choćby np. z szeregu Leibniza. Skoro bowiem liczba π jest ułamkiem dziesiętnym nieskończonym niewymiernego typu, a pole koła przedstawia się zawsze jako $r^2\pi$, to $r.r.\pi$ musi być również liczbą niewymierną. Niemożliwość szukanej konstrukcji nie wynika jednak jeszcze z tej niewymierności. Tak np. przekątna kwadratu jest niewspółmierna z bokiem, a jednak daje się zbudować, jeżeli znamy bok kwadratu. Dlatego niemożliwość kwadratury koła wymagała specjalnego dowodu.[1]

Oczywiście, przy pomocy tych prostych przyrządów zadanie to

[1] Dowód niewymierności liczby π podał Lambert (1770 r.), Lindemann przeprowadził zaś dowód niemożliwości kwadratury koła (1882 r.), uogólniwszy pewne twierdzenia znalezione przez Hermite'a (1873 r.). (Przyp. tłum.)

nie da się rozwiązać w sposób ścisły; można natomiast ściśle wykonać kwadraturę koła posługując się innymi przyrządami pomocniczymi. Były jednakże ogłaszane i stosowane w praktyce konstrukcje, które za pomocą samych tylko prostych i kół pozwalały wykonywać kwadraturę koła sposobem przybliżonym. A więc z popełnieniem błędu, na który w zastosowaniach praktycznych można nie zwracać uwagi.

Do takich właśnie konstrukcji należy bardzo rozpowszechniona przybliżona kwadratura koła, podana przez polskiego matematyka, A. Kochańskiego,[1] a ogłoszona po raz pierwszy w „Acta Eruditorum" w 1685 r.

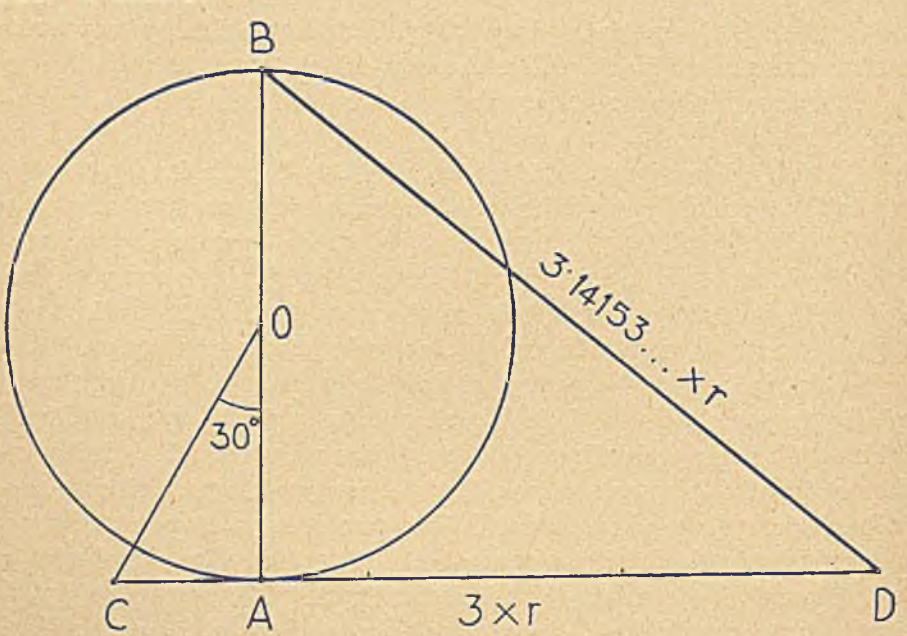


Fig. 42.

Wykreślmy średnicę koła AB i styczną w punkcie A. Ze środka koła O wykreślmy prostą OC, tworzącą z średnicą AB kąt 30°.

---

1 Adam Adamandy Kochański, żyjący w XVII stuleciu, jezuita, wykładał matematykę w Würzburgu i Moguncji, we Florencji, w Pradze, w Ołomuńcu na Morawach, a wreszcie we Wrocławiu. Po powrocie do Polski piastował godność nadwornego matematyka i bibliotekarza króla Jana III Sobieskiego.

Oznaczmy przez C punkt przecięcia tej prostej z naszą styczną. Odkładamy na stycznej od punktu C odcinek CD, równy trzy razy wziętemu promieniowi. Odcinek BD przedstawia w przybliżeniu długość półkola, czyli πr. Opierając się na podanej konstrukcji obliczylibyśmy, że

$$BD = 3{\cdot}1415331... \times r$$

zamiast

$$3{\cdot}1415926... \times r,$$

a więc BD różni się od półokręgu przez niedomiar mniej niż o sześć stutysięcznych promienia.

Jeżeli teraz zbudujemy na odcinku BD prostokąt o wysokości r, to jego pole wynosi ze znacznym przybliżeniem πr^2, a zatem równa się w przybliżeniu polu koła. Zamieniając ten prostokąt na kwadrat, otrzymujemy przybliżoną kwadraturę koła.

Że jednak wyżej wspomniana niewymierność nie jest tu sprawą istotną, o tym wiedział już wielki Archimedes, któremu znane były utwory bardziej skomplikowane niż koło, a których pole wcale nie przedstawia się jako liczba niewymierna. A nawet nie chce się to w głowie pomieścić, dlaczego by pole figury ograniczonej linią krzywą nie mogło być przypadkiem równe wymiernej liczbie jednostek powierzchni (kwadratów jednostkowych). Można nawet podać na to „dowód" bardzo przystępny i poglądowy. Jeśli np. z kartonu (koniecznie jednolitej grubości) wytniemy dowolny kwadrat, np. o boku 1 cm i ten skrawek zważymy na precyzyjnej wadze, oraz otrzymamy stąd, dajmy na to, okrągły ciężar $\frac{1}{10}$ grama, wtedy musi być możliwym wycięcie z tego kartonu, z zastosowaniem najskrupulatniejszej staranności, figury ograniczonej dowolną linią krzywą, która by ważyła np. 3 gramy. Ale figura ta miałaby wtedy bezwarunkowo pole 30 centymetrów kwadratowych.

Poza tymi rozważaniami wiele dały do myślenia matematykom greckim już same np. „księżyce" Hippokratesa. Ich „kwadratura" polega na pewnym rozszerzeniu twierdzenia Pitagorasa. Mianowicie dowiedziono także już w starożytności, że nie tylko suma pól kwadratów utworzonych z przyprostokątnych równa się polu kwadratu na przeciwprostokątnej, ale że, całkiem ogólnie, suma pól dwóch figur podobnych, zbudowanych na przyprostokątnych równa się polu podobnej do nich figury, zbudowanej na przeciwprostokątnej.

Jak wskazuje fig. 43., cały trójkąt prostokątny da się za pomocą wysokości h rozłożyć na dwa częściowe trójkąty, które muszą

być do siebie podobne, ponieważ kąty jednego z nich są równe kątom drugiego. Otóż oba trójkąty częściowe można uważać za figury podobne, które wykreślono na przyprostokątnych (tu wszelako do wewnątrz zasadniczego trójkąta). Dalej, ponieważ cały trójkąt jest również podobny do obu trójkątów częściowych z powodu odpowied-

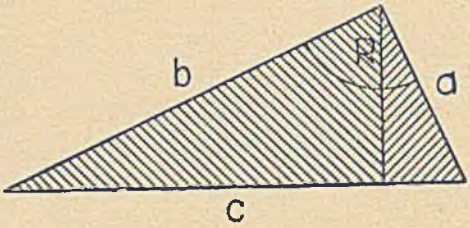


Fig. 43.

nio równych kątów, a ponadto można go uważać za „podobną figurę na przeciwprostokątnej", otrzymuje się słuszność rozszerzonego twierdzenia Pitagorasa z uderzającą wyrazistością. Bo suma „trójkątów na przyprostokątnych" to nic innego, jak tylko „trójkąt na przeciwprostokątnej".

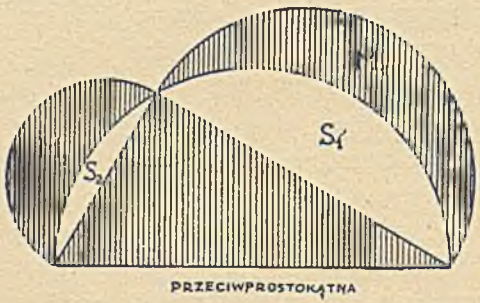


Fig. 44.

Ponadto, według rozszerzonego twierdzenia Pitagorasa także pole półkola zbudowanego na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól półkoli wykreślonych na przyprostokątnych. Bo półkola są zawsze figurami do siebie podobnymi.[1] Ponieważ jednak półkole na

[1] Jako odcinki kołowe, którym odpowiadają równe kąty środkowe (półpełne). Podobnymi bowiem odcinkami koła nazywamy te odcinki, którym odpowiadają równe kąty środkowe.

przeciwprostokątnej występuje na naszej figurze w postaci sumy trójkąta prostokątnego i obu białych odcinków kołowych S_1 i S_2, podczas gdy oba półkola na przyprostokątnych dadzą się przedstawić jako suma odcinka S_1 i księżyca M_1, wzgl. odcinka S_2 i księżyca M_2, zatem zgodnie z rozszerzonym twierdzeniem Pitagorasa musi zachodzić równość:

$$\begin{aligned}
&\text{pole trójkąta} + S_1 + S_2 = (M_1 + S_1) + (M_2 + S_2), \quad \text{czyli}\\
&\text{pole trójkąta} + (S_1 + S_2) = (M_1 + M_2) + (S_1 + S_2), \quad \text{czyli}\\
&\text{pole trójkąta} = (M_1 + M_2) + (S_1 + S_2) - (S_1 + S_2), \quad \text{czyli}\\
&\text{pole trójkąta} = M_1 + M_2.
\end{aligned}$$

Widzimy ze zdumieniem, że udaje nam się wyznaczyć pole sumy „księżyców" z zastosowaniem wyłącznie elementarnej konstrukcji geometrycznej. Bo pole trójkąta możemy w znany nam sposób obliczyć. Co więcej, może się ono (a więc tym samym i pole sumy „księżyców") wyrażać liczbą wymierną. Jednakowoż księżyce są utworami wszechstronnie ograniczonymi liniami krzywymi, a w dodatku jeszcze łukami kół tak, że łatwo można by sądzić, iż łączne ich pole musi się przedstawiać w postaci liczby niewymiernej. A tymczasem — i trudno temu zaprzeczyć — sprawa naocznie przedstawia się wręcz przeciwnie.

Ponieważ, jak wspomniano, podobne rzeczy wiedziano już w klasycznej starożytności, sądzono, że pomiar koła rozbija się tylko o wadliwość metody. Dołączyła się do tego jednak jeszcze jedna okoliczność. Przy przejściu do utworów przestrzennych, odpowiada „kwadraturze" tzw. „kubatura", czyli przedstawienie objętości bryły za pomocą objętości „sześcianów jednostkowych". Otóż podobnie jak kwadratura, rozbija się i kubatura zasadniczo nie tyle o nieregularność czy krzywiznę powierzchni i utworu przestrzennego, ile raczej o brak metody w liczbowym ujęciu powierzchni i brył. Można obliczyć pole prostokąta, trójkąta, wzgl. powierzchnię czy objętość graniastosłupa, stożka, nawet jeszcze ośmiościanu czy dwudziestoczterościanu, o ile dana jest dostateczna ilość „wymiarów" (boków czy krawędzi). Mogą też występować niewymierności przede wszystkim przy stożku, przy walcu i kuli z powodu nieuchronnego tam π. Również np. przy elipsoidzie obrotowej. Ale pytanie, jak poradzić sobie z obliczeniem pola czy objętości bardziej skomplikowanych powierzchni i brył ograniczonych liniami krzywymi lub powierzch-

niami krzywymi (z których o niejednej wiedziano nawet, że kwadratura i kubatura ich musi być możliwa, ponieważ można się było o tym przekonać za pomocą ważenia), stanowiło jedną z największych zagadek i najbardziej piekących problemów matematyki. Aczkolwiek powtarzamy tym samym właściwie rzecz już powiedzianą, wstawmy się w położenie matematyka, któremu zadaje się następujące pytanie: Czy to jest kubatura, czy nie, jeżeli mając 25 centymetrów sześciennych ołowiu w dokładnie odmierzonych kostkach, każda po 1 cm^3, przetopi się je, a następnie przy założeniu, że nic ołowiu nie utracono, ze stopionego ołowiu odleje się jakąkolwiek „bryłkę" nieregularną, ograniczoną powierzchnią krzywą? Jeżeli następnie tę bryłkę zważymy i przekonamy się, że ma ten sam ciężar co 25 kostek; i jeżeli wreszcie ktoś będzie utrzymywał, że kubatura „bryłki" jest możliwa? „Bryłka" posiada mianowicie objętość dokładnie 25 cm^3. Na to nie pozostaje matematykowi żadna inna odpowiedź jak stwierdzenie, że matematyka jest niezdolna do wykonania kubatury środkami elementarnymi, zaś podana kubatura jest tylko przybliżona, jako wykonana drogą okrężną, podobnie jak Archimedes wyznaczył objętość złota w koronie króla Hierona z Syrakuz w ten sposób, że zanurzył ją w wodzie i zmierzył ilość wypartej cieczy, wskutek czego zostało odkryte słynne „prawo Archimedesa".

Ale nie bawmy się ciągle w wyrocznię, lecz podajmy do wiadomości, że tysiąclecia rozmyślań, od czasów najdawniejszych aż do Keplera, wniosły jednak w ten problem nieco światła. Tak np. w roku 1624, który okazał się szczególnie wydajnym dla winnic Austrii Górnej, przeprowadził Kepler gruntowne badania nad beczkami na wino, przy czym nie tylko znalazł sposób obliczania ich objętości, ale równocześnie rozwiązał trudniejszy problem, a to, jak można by sporządzić beczki o pojemności możliwie największej przy najmniejszym zużyciu drzewa (tzn. geometrycznie: przy najmniejszej powierzchni).

W siedemnastym stuleciu — wymieńmy przynajmniej Fermata, Cavalieri'ego, Pascala, Gregoriusa a Sto Vincentio, Wallisa, Sluse'a, de Witta — wzięto się ostro ze wszystkich stron do problemu kwadratury i kubatury, i znaleziono też wiele dobrego i słusznego. Przy tym posługiwano się po części metodą Archimedesa, którą w tym miejscu jeszcze nie możemy zająć się szczegółowiej. Wszelako pełne

światło w te związki wnieśli dopiero Newton i Leibniz przez wprowadzenie do geometrii rozważań nieskończonościowych, czyli przez stworzenie analizy nieskończonościowej.

Dlatego zaprzestaniemy na razie rozważań historycznych i spróbujemy, idąc krok za krokiem, rozwiązać możliwie najbardziej poglądowo problem kwadratury. Zapewne, zrzekamy się przez to filozoficznych subtelności, które i dziś nie są jeszcze ostatecznie rozwiązane i przystępujemy do sprawy w taki sposób, że nasz oponent będzie niewątpliwie niejednokrotnie dawał wyraz swemu oburzeniu. Jesteśmy jednak zdania, że lepsze jest przybliżone pojęcie rzeczy niż w ogóle żadne. Tym bardziej, że nie dopuszczamy się właściwie większego przestępstwa ponad to, iż odtwarzamy poglądy, jakich najwięksi matematycy osiemnastego wieku nie uważali za fałszywe. Ambitniejszy czytelnik zawsze jeszcze potem może się oczyścić z naszych herezji w dziełach wielkich i ścisłych wirtuozów matematyki.

Dla wprowadzenia zauważmy, że problem kwadratury[1] wtedy dopiero stał się w całej ogólności dostępny, kiedy już ugruntowała się geometria analityczna. A więc właściwie po Descartes'ie. I postanawiamy sobie obliczyć pole jakiegoś obszaru, który absolutnie nie jest ze wszystkich stron ograniczony odcinkami prostej. Np. obszaru OBC na fig. 45.

Krzywa K nie jest bynajmniej częścią okręgu. Jest ona jakąkolwiek krzywą, co prawda taką, której „równanie" przypadkiem znamy. Tym równaniem niech będzie $y = f(x)$, to znaczy, że każde y da się obliczyć dla każdego x w ten sposób, że za literę x podstawiamy jakąś szczegółową wartość. Rozmyślnie nie wypisujemy żadnej bardziej skomplikowanej funkcji, aby można było potem łatwiej obliczać. Zakłada się jednak, że $f(x)$ to jakieś bardziej zawiłe wyrażenie, składające się z zestawienia potęg x ze współczynnikami i z wielkości stałych. $f(x)$ oznacza zatem jakiekolwiek wyrażenie, składające się z potęg x i stałych, tylko że bliższe szczegóły dotyczące tego wyrażenia chwilowo mnie nie interesują.

Możliwe, że u początkującego takie uogólnienie wywoła zamęt. Zwłaszcza, że obecnie już nie chcemy liczyć nawet liczbami ogól-

[1] Pomijamy całkiem podobny problem kubatury, ponieważ zakładamy tylko znajomość „geometrii analitycznej płaskiej".

nymi, ale jeszcze wyższymi wielkościami, mianowicie „liczbami faustycznymi", inaczej funkcjami. Dlatego krótko wyjaśnimy jeszcze raz myśl przewodnią:

$$y = f(x) \quad \text{niech to będzie np.} \quad y = \frac{x^3}{6} + 3.$$

Oczywiście równie dobrze mogłoby to być $y = 3x^2 + 4x + 9$,

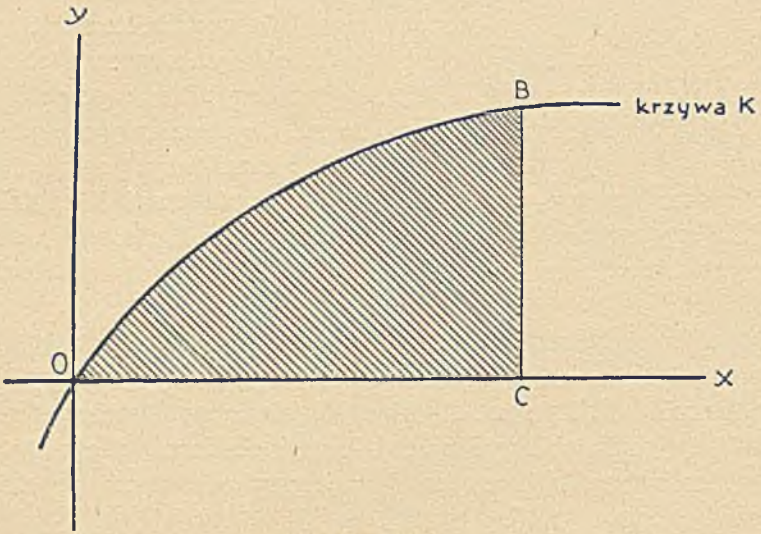


Fig. 45.

albo jeszcze coś innego. Np. $y = 2\sqrt{x^4 - 1}\left(\frac{2}{x} + 17\right)$. Te wszystkie możliwości obejmuje postać $y = f(x)$. To znaczy, zakłada się we wszystkich wypadkach, że wartość na x można wybierać dowolnie, a stąd otrzymuje się potem przymusowo y. Dlatego też jest to arytmetycznie to samo, czy powiemy y czy $f(x)$. Wszak obie wielkości są wzajemnie sobie równe, a geometrycznie nie oznaczają nic innego jak rzędne punktów. „Liczba faustyczna" to nic innego zatem, jak tylko rzędna, którą wystawiamy w każdorazowym punkcie x osi odciętych. A punkty „szczytowe" wszystkich rzędnych tworzą „krzywą".

Wtrącimy jeszcze jedną małą uwagę, zanim przystąpimy do „odkrywania" kwadratury. Realnie mówiąc, „funkcja" oznacza fakt, że jedna wielkość zależy według pewnego prawidła od jakiejś drugiej. Każde dziecko wie, że przedmioty rozszerzają się pod wpływem

ogrzewania. Wszak na tym zjawisku fizycznym oparta jest budowa termometru rtęciowego. Otóż mogę powiedzieć, że rozszerzanie się jest funkcją temperatury. Takich przykładów można podać tysiące. Droga przebyta w czasie jakiejś podróży jest „funkcją" prędkości, z jaką podróż się odbywała. Prędkość spadania ciał jest funkcją siły przyciągania ziemskiego, wzrost człowieka funkcją jego wieku. Także dobroć wina i niektórych serów może być funkcją wieku.

Ponieważ zaś pole koła zależy od długości promienia, więc pole koła jest funkcją promienia. Jako dalszy przykład jeszcze spostrzeżenie z życia codziennego: Każdy doświadczony palacz tytoniu wie o tym, że papierosy mają łagodniejszy smak, jeżeli są grubsze. Ten sam tytoń w węższej tutce ma ostrzejszy smak, niż w tutce o większej średnicy. Jakby się to dało wyjaśnić? Otóż, w bardzo prosty sposób. Ilość papieru przy większej grubości papierosa wzrasta według podziałki „liniowej". Długość obwodu $= 2r\pi$. Jeśli r wynosi np. 5 mm, wówczas połyka się dym z krążka papieru mającego $(2 . 5 . 3{\cdot}14)$ mm, a więc około $31{\cdot}4$ mm w obwodzie. Jeśli będzie $r = 10$ mm, wówczas spala się krążek papieru o obwodzie $(2 . 10 . 3{\cdot}14)$ mm, a zatem $62{\cdot}8...$ mm. Natomiast paląca się powierzchnia tytoniu da się wyrazić przez $P = r^2\pi$. Przy $r = 5$ mm wynosi ona $(25 . 3{\cdot}14...)$ $mm^2 = 78{\cdot}5...$ mm^2, przy $r = 10$ mm natomiast $(100 . 3{\cdot}14...)$ $mm^2 = 314{\cdot}1...$ mm^2. A teraz praktyczne zastosowanie: „Łagodność" jest funkcją kwadratową r, „ostrość" tylko liniową. Gdybym wykreślił „obrazy" tych funkcji, przekonałbym się, że „łagodność" wzrasta nierównie szybciej aniżeli „ostrość".[1] Dlatego właśnie grubsze papierosy z tego samego materiału działają łagodniej, niż cieńsze.

Na zakończenie paradoksalny przykład, wyjęty ze znakomitej książki Jerzego Scheffersa. Przypuśćmy, że ziemię opasano wzdłuż równika pierścieniem żelaznym, dokładnie przylegającym, a złożonym z części, każda o długości jednego metra. Ziemię uważamy za geometrycznie idealną, gładką kulę. Jak dalece, pytamy, rozluźni się ten pierścień, o ile będzie odstawał wokoło od ziemi, jeżeli w jakimkolwiek miejscu dołączę jeszcze jedną metrową część. Na „chłopski rozum" odpowie każdy, że rozluźnienia w ogóle nie będzie można zauważyć. Odstęp od ziemi z pewnością nigdzie nie będzie wi-

[1] „Łagodność" wzrasta według paraboli, „ostrość" według linii prostej.

doczny, ponieważ mógłby wynosić co najwyżej jakichś parę milionowych części milimetra. Tymczasem tak tanim kosztem nie można się bynajmniej wykręcić. Nasz przykład przekona nas nie tylko o niemożliwości polegania na „chłopskim rozumie", ale również o zdumiewającej jednoznaczności matematyki.

Rozumujemy w następujący sposób: Obwód dawnego koła jest $2r\pi$. Stąd długość promienia wynosi $\frac{2r\pi}{2\pi}$. Po rozszerzeniu o jednometrowy człon obwód koła ma długość $(2r\pi + 1)$, wskutek czego na długość promienia wypadnie $\frac{(2r\pi+1)}{2\pi}$, ponieważ długość każdego promienia oblicza się ze wzoru $\frac{\text{Obwód koła}}{2\pi}$. Odejmijmy teraz mniejszy promień od większego, przez co powinniśmy otrzymać odstęp nowego pierścienia kołowego od ziemi. A zatem

$$\frac{2r\pi+1}{2\pi} - \frac{2r\pi}{2\pi} = \text{Odstęp} = A$$

$$\frac{2r\pi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - \frac{2r\pi}{2\pi} = A$$

$$A = \text{Odstęp} = \frac{1}{2\pi}.$$

Ponieważ używaliśmy miary metrowej, jest $1 : 2\pi = 1\text{ m} : 6{\cdot}283...$, co daje 15·92... cm, czyli okrągło 16 cm. Doprawdy, zdumiewający rezultat! A więc przez dołączenie jednego jedynego metra do pozostałych 40 000 kilometrów pierścień kołowy odsunie się od ziemi wszędzie o 16 cm. Wszelako matematyk nie zdziwi się. Bo ze związku

$$A = \frac{1}{2\pi}$$

widzi, że odstęp zależy tylko od π, a więc od wielkości, która z każdorazowym promieniem nie ma nic wspólnego. Napisałby tylko

$$y = A = f(\pi),$$

aby wyrazić przez to, że po dołączeniu nowej części do obwodu odstęp wzrasta stale o jednakową wielkość, bez względu na to, czy chodzi o równik, czy o pierścionek na palcu, czy też o orbitę planety Neptuna, o ile ją uważać będziemy za koło. Zawsze jest ogólnie

$$y = \frac{K}{2\pi},$$

gdzie K oznacza długość dołączonego członu. Jeżeli natomiast dołączymy np. długość całego obwodu koła, a więc $2r\pi$, wówczas otrzymamy

$$y = \frac{2r\pi}{2\pi} = r,$$

co nic innego nam nie mówi, jak tylko, że w kole o podwojonym obwodzie promień wzrośnie także podwójnie. Ale to już wiemy z „przykładu z papierosem", aczkolwiek drogą odwrotną.

Dla zwolenników rozważania na „chłopski rozum" dodajmy tylko, że przecie 16 cm ma tak samo małą wartość w stosunku do promienia ziemskiego, jak jeden metr w stosunku do równika. Ująwszy to w odpowiedni związek matematyczny otrzymamy, że

16 cm : (promienia ziemskiego) = 1 m : (obwodu równika)

i wszystko będzie w porządku.

Teraz jednak, odrobinę więcej oświeceni i elastyczniejsi, musimy wrócić do kwadratury.

Przedtem już postawiliśmy sobie zagadnienie, jak obliczyć pole obszaru, ograniczonego np. przez znaną nam krzywą o równaniu $y = f(x)$, przez oś odciętych i przez dwie rzędne y_1 oraz y_9.

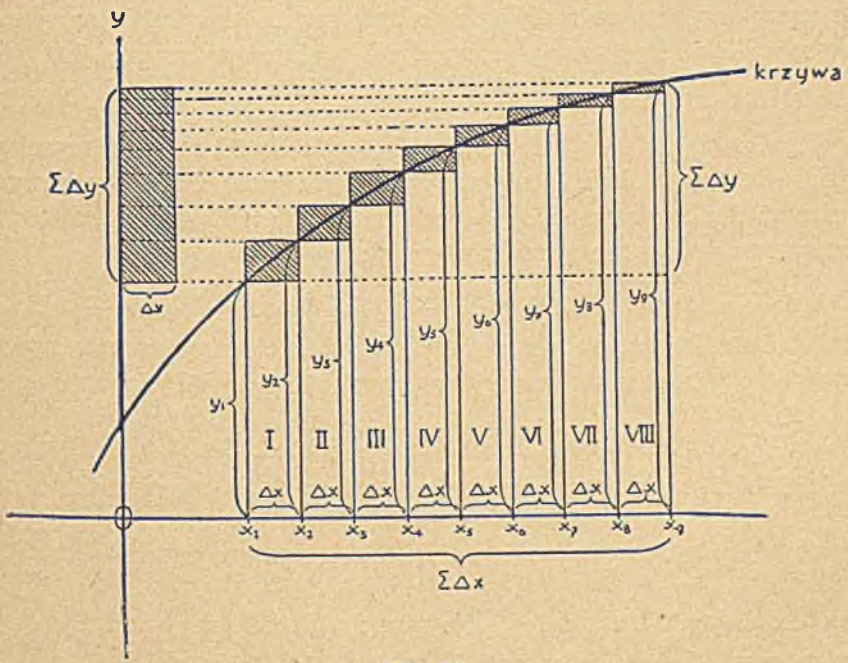


Fig. 46.

Widać z rysunku, że nasze szukane pole jest zawarte pomiędzy sumą pól wszystkich pionowych pasków (prostokątnych), do której nie wliczono pól małych, zakreskowanych prostokątów, a sumą pól wszystkich tych pasków, gdzie pola owych zakreskowanych prostokątów wliczono. Gdyby występowała nie krzywa, ale prosta, przedstawiałoby to dla mnie łatwą zabawkę. Bo wtedy każdy z zakreskowanych prostokątów zostałby przepołowiony i mógłbym wszystko obliczyć w bardzo prosty sposób. Ale ponieważ właśnie krzywa ma stanowić o istocie kwadratury, musimy dalej badać. Na razie, jak wielka jest suma pól pasków, powiedzmy, „wpisanych w krzywą". Paski odpowiednio ponumerowano:

Pole paska I wynosi $(x_2 - x_1) \cdot y_1$
„ paska II wynosi $(x_3 - x_2) \cdot y_2$
„ paska III wynosi $(x_4 - x_3) \cdot y_3$
itd., aż wreszcie
pole paska VIII wynosi $(x_9 - x_8) \cdot y_8$.

Ponieważ jednak, w dalszym ciągu, $(x_2 - x_1)$ równa się $(x_3 - x_2)$ itd., bo przecież przedział $(x_1, \ldots\ldots x_9)$ dzielimy na równe części, oznaczmy wspólną wartość tych różnic, skoro wszystkie są równe, po prostu Δx. Tym samym suma pól pasków wpisanych jest

$$S_w = y_1\Delta x + y_2\Delta x + y_3\Delta x + y_4\Delta x + y_5\Delta x + y_6\Delta x + y_7\Delta x + y_8\Delta x.$$

Suma pól pasków opisanych, których każdorazowa wysokość zgodnie z konstrukcją jest większa niż odpowiednich wpisanych, ponieważ dochodzą jeszcze do nich małe zakreskowane prostokąty, ta suma na podstawie rysunku wynosi:

$$S_o = y_2\Delta x + y_3\Delta x + y_4\Delta x + y_5\Delta x + y_6\Delta x + y_7\Delta x + y_8\Delta x + y_9\Delta x.$$

Jeżeli teraz przypomnimy sobie, że takie sumy można zapisać przy pomocy rozkazu sumacyjnego, możemy przyjąć pierwszą sumę $S_w = \sum_1^8{}^{\nu} y_\nu \Delta x$, a drugą sumę $S_o = \sum_2^9{}^{\rho} y_\rho \Delta x$. Dalej, w myśl prawa rozdzielności można czynniki, które występują we wszystkich składnikach wyłączyć przed znak sumy. Mogę zatem napisać $\Delta x \sum_1^8{}^{\nu} y_\nu$ oraz $\Delta x \sum_2^9{}^{\rho} y_\rho$. Jeżeli, dalej, pole właściwie szukanego obszaru oznaczymy przez F, to wiemy, że

$$\Delta x \sum_{1}^{8} {}_{\nu} y_{\nu} < F < \Delta x \sum_{2}^{9} {}_{\rho} y_{\rho},$$

co nie jest niczym innym, jak sformułowaniem tego, że miara powierzchni, ograniczonej krzywą, jest zawarta pomiędzy sumą pól pasków wpisanych i opisanych.

Można by się podjąć tego wielkiego trudu i przy pomocy znanego równania $y = f(x)$ obliczyć istotnie wartości na y dla wszystkich wartości na x. Przez to uzyskało by się pole sumy prostokątów tak wpisanych jak opisanych i wiedziało by się, że szukana „kwadratura" znajduje się gdzieś pomiędzy tymi wartościami. Uczyńmy teraz Δx mniejsze i coraz mniejsze, a więc paski coraz węższe, wtedy powierzchnia zawarta między „sumą wewnętrzną" a „sumą zewnętrzną" pasków, będzie się stale zmniejszała, co można by łatwo zobaczyć na odpowiednim rysunku.

Jeśli dalej będzie się postępowało wedle tej metody, która stale lepiej wyczerpuje nam niejako rzeczywistość (stąd metoda exhaustii od *exhaurire* = wyczerpywać), dojdzie się w końcu do wcale dobrych przybliżonych wyników. W każdym razie pracy ogromnie wiele, a rezultat, jak wspomniano, tylko przybliżony. Wyobraźmy sobie np., że mamy obliczyć pole paraboli $y = \frac{x^2}{5} + 3$ metodą „wyczerpywania" dla przedziału od $x_1 = 5$ do $x_{1000} = 10$. Trzeba by najpierw ustalić, jak wielkie jest Δx. Ponieważ pomiędzy $x = 5$ a $x = 10$ mam umieścić ni mniej ni więcej tylko 999 pasków prostokątnych, było by $\Delta x = \frac{10-5}{999} = \frac{5}{999}$.

Teraz krok za krokiem należało by obliczyć odpowiednie wartości na y tysiąc razy. A zatem dla

$$x_1 = 5 \qquad y_1 = \frac{25}{5} + 3 = 8$$

$$x_2 = 5 + \frac{5}{999} \qquad y_2 = \frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3$$

$$x_3 = 5 + \frac{10}{999} \qquad y_3 = \frac{\left(5 + \frac{10}{999}\right)^2}{5} + 3$$

itd.

Następnie należało by obliczyć pola wszystkich pasków wpisanych i wszystkich pasków opisanych. A więc:

pole paska wpisanego $1 = y_1 \Delta x = 8 \cdot \frac{5}{999} = \frac{40}{999}$

„ „ „ $2 = y_2 \Delta x = \left[\frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3\right] \cdot \frac{5}{999}$

itd.

pole paska opisanego $1 = y_2 \Delta x = \left[\frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3\right] \cdot \frac{5}{999}$

„ „ „ $2 = y_3 \Delta x = \left[\frac{\left(5 + \frac{10}{999}\right)^2}{5} + 3\right] \cdot \frac{5}{999}$

itd.

Gdyby nawet dla uproszczenia rachunku można było obrać 1000 pasków zamiast 999, a dalej gdyby się uwzględniło, że pole każdego następnego paska wpisanego równa się polu poprzedzającego paska opisanego, to widać jednak, że już tak prosta funkcja jak

$$y = \frac{x^3}{5} + 3$$

sprawia wprost niesłychane trudności, a ponadto, że po tym wszystkim uzyskuje się zaledwie przybliżony wynik.

Ale coś innego jeszcze widać: mianowicie, że dokładność wzrasta systematycznie, im więcej pasków dodamy. Jeślibyśmy więc Δx wybierali coraz mniejsze, wówczas otrzymywalibyśmy za każdym razem coraz dokładniejszą kwadraturę. A zatem, uzyskamy dokładną kwadraturę, jeśli wielkość Δx zmierzać będzie do zera ($\Delta x \longrightarrow 0$), jeśli Δx stanie się „nieskończenie małą“ dx. W tym celu jednak musielibyśmy obliczyć nieskończenie wiele *y*, gdyż każda długość *x* składa się z nieskończenie wielu dx. A zatem, dla kwadratury wymagamy jakiejś operacji, która by nam dozwoliła pomnożyć przez dx sumę wszystkich rzędnych, znajdujących się w przedziale od x_1 do x_n, względnie wystawionych na punktach tego przedziału.[1] Dlatego wielki Cavalieri zapisał problem kwadratury jako *„summa omnium y“* („suma wszystkich y“). A Leibniz zano-

[1] Autor świadomie idzie drogą historycznego rozwoju pojęcia „całki“, ponieważ zdaje mu się ono bardziej przemawiać do wyobraźni. Ściśle i zgodnie ze stanem współczesnej matematyki należało by powiedzieć: Dokładną kwadraturę otrzymamy, jeśli suma „wewnętrzna“ $\sum_\nu y_\nu \Delta_\nu$ i „zewnętrzna“ $\sum_\rho y_\rho \Delta_\rho$ zmierzać będą do wspólnej granicy, gdy ilość przedziałów częściowych Δ_ν rośnie nieograniczenie, a jednocześnie długość tych przedziałów częściowych Δ_ν dąży do zera.

tował 29 października 1676 na owej historycznej karcie słowa: „Będzie pożyteczną rzeczą zamiast owej ‚summa omnium y Cavalieri'ego' pisać odtąd znak $\int ydx$...".

Tym samym dotarliśmy właściwie do punktu kulminacyjnego w naszej książce. Leibniz utrzymuje, że p o ż y t e c z n i e byłoby w miejsce rozkazu *„summa omnium y"* wydać po prostu rozkaz c a ł k i[1] $\int ydx$. Czy jest to tylko zabawa w słowa? Czy też tkwi za tym jednak coś więcej? Może znowu jakaś „prawdziwa kabała"?

To właśnie musimy obecnie zbadać krok za krokiem. Na wszelki wypadek wiemy już, czego się od nas żąda. Uwydatnijmy to jeszcze bardziej. Podobnie, jak przy znaku sumy będziemy notowali „przedział" całkowania, dzięki czemu powstanie całka „określona". Jeżeli pierwsza wartość na x, która nas interesuje, równa się np. a, ostatnia zaś wartość tego przedziału $x = b$, wówczas piszemy

$$\int_a^b ydx$$

i czytamy: „całka z y w przedziale od a do b". Nazywamy przy tym a dolną, b górną granicą całkowania.

Uczynimy jeszcze jeden krok naprzód. Wiemy, że y równa się $f(x)$. Dlatego możemy również napisać

$$\int_a^b ydx = \int_a^b f(x)dx.$$

Mielibyśmy już zatem rozkaz. Cóż z tego, kiedy brak jeszcze recepty na wykonanie go. Bo rozkaz sam przez się wygląda na obłędny. Dla stwierdzenia tego „niepoczytalnego" żądania wystarczy zastanowić się tylko przez chwilę, co oznacza właściwie spełnienie rozkazu całki. Owa czarnoksięska maszyna ma dokonać ni mniej, ni więcej, jak tylko utworzyć następującą sumę nieskończoną pól:

1. paska prostokątnego $f(a) \cdot dx$
2. „ „ $f(a + dx)dx$
3. „ „ $f(a + 2dx)dx$
4. „ „ $f(a + 3dx)dx$

itd. w nieskończoność.

---

[1] Słowo całka, dawniej używane integrał, stworzone zostało przez Jakuba Bernoulli'ego i zgodnie z Leibnizem przyjęte na oznaczenie nowego algorytmu $\int ydx$.

Przy tym $f(a)$, $f(a + dx)$ itd. oznaczają wartości na y, które się otrzymuje odpowiednio dla $x = a$, $x = a + dx$, $x = a + 2dx$ itd. Ponadto, graniczna wartość dx ma się równać zeru. Albo jak się nieściśle mówi: dx ma być „nieskończenie małą".[1]

Otóż ponieważ Leibniza i wszystkie inne wielkie umysły, które tę naukę stworzyły, o wszystko można by posądzić, tylko nie o obłęd, przestańmy już dalej dociekać, natomiast przyjmijmy z wdzięcznością z ich dłoni ten cud.

[1] Albo też ściślej, jak proponuje A. Hoborski w „Wyższej matematyce" — „nieskończenie malejącą".

ROZDZIAŁ DWUDZIESTY PIĄTY

RÓŻNICZKA I PROBLEM REKTYFIKACJI

Kilkakrotnie już mówiliśmy o Δx, o Δy, o dx i o dy. Zwłaszcza dx i dy określiliśmy jako pewnego rodzaju klucze od bram wyższej matematyki. A więc teraz zajmijmy się wreszcie rozpatrzeniem tych maleńkich rzeczy. Przy czym musimy zauważyć, że samo już wyrażenie „rzeczy" jest poważną „herezją". Albowiem nie tylko „maleńkimi", ale w ogóle „rzeczami" nie można ich nazwać. Matematyczne ich określenie poznaliśmy już zresztą poprzednio.

Jeśli mimo to, zmaterializowaliśmy je, to uczyniliśmy to zarówno ze względów historycznych jak i pedagogicznych. Ponieważ książka ta ma być rodzajem wstępu i wzbudzić niejako pierwsze zrozumienie dla rachunku nieskończonościowego, przeto żadnego chyba przedstawienia tych pojęć nie będzie można uznać za dość poglądowe. Historycznie zaczęła się nasza nauka również bardzo poglądowo. I dzięki tej poglądowości dokonano pierwszych wielkich odkryć. A to, że następne dwa wieki wniknęły potem we wszystkie logiczne subtelności problemu, nie upoważnia nikogo do spoglądania na tych, którzy torowali pierwsze drogi, jak na początkujących. Nawet najwspanialszy diament wydobywa się nieraz na powierzchnię podobny do odłamka szkła. Zapewne, nie można lekceważyć pracy amsterdamskich szlifierzy, dzięki którym kamień rozbłyśnie ostatecznie blaskiem odbitym od tysiąca płaszczyzn utworzonych przez szlifowanie. Ale trudno mówić o szlifowaniu bez diamentu. Podobnie bez pewnego prymitywnego może przedstawienia „różniczki" nie ma współczesnej purytańskiej matematyki.

A zatem przechodzimy do porządku nad wszystkimi subtelnymi pytaniami aż do czasu, kiedy przez długie studia opanujemy wszystkie zasady wyższej matematyki. Wtedy też będziemy mogli z peł-

nym zadowoleniem podziwiać i korzystać z precyzji takiego Cesáro, Kowalewskiego, Peany i innych.

Na razie jednak odważnie przedstawmy krzywą, w której ze wzrostem x rośnie także y. Przyrost x oznaczmy Δx, a przyrost y znów Δy [albo $\Delta f(x)$].

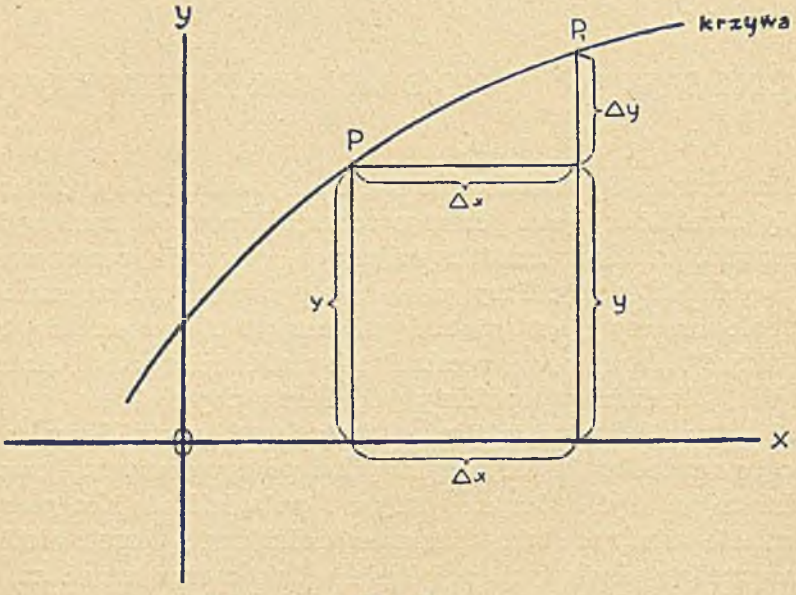


Fig. 47.

Owo x, któremu odpowiadające y wyznacza nam jednoznacznie punkt P krzywej, wzrosło o Δx, a więc o pewną s k o ń c z o n ą wielkość. Wskutek tego powstało przymusowo nowe y, które się przedstawia jako $(y + \Delta y)$. Końcem rzędnej jest punkt P_1, leżący na krzywej. Część PP_1 stanowi wygiętą część krzywej, łuk krzywej. Jeślibym posunął się teraz na osi odciętych na prawo od punktu P nie o skończoną wielkość Δx, ale niejako o „nieskończenie małą" wielkość dx, to krzywa również wzniosłaby się nieco. Wszelako w naszym wypadku również o znikomo mały odcinek dy. Punkty P i P_1 zesunęłyby się prawie że w jeden punkt, a łuk PP_1 krzywej byłby również znikomo mały. Tak mały, że obojętną jest rzeczą, czy uważać go będziemy za cząstkę prostej czy krzywej. Owa „obojętność", czy to część prostej czy krzywej, stanowi oś

analizy nieskończonościowej. Bo dzięki niej zyskujemy możliwość stosowania do cząstek krzywej wszystkich reguł ważnych właściwie dla figur ograniczonych liniami prostymi. Wykorzystamy to zarówno przy „kwadraturze" jak przy „rektyfikacji".[1] Lecz aby pogłębić jeszcze nasze poznanie, przyjrzyjmy się tzw. „trójkątowi charakterystycznemu" Leibniza. Leibniz znalazł w papierach Błażeja Pascala pewien rysunek, który miał służyć właściwie do całkiem innych celów (mianowicie do badania funkcji sinus). Ten jednak rysunek prowadził Leibniza jak pochodnia, rozjaśniająca wszystko okryte dotychczas mrokiem, do jego wielkiego odkrycia rachunku różniczkowego. Dla ułatwienia narysujmy owo *„triangulum characteristicum"* (trójkąt char.) inaczej nieco, niż to zrobił Pascal i Leibniz, nie zmieniając w niczym istoty rzeczy.

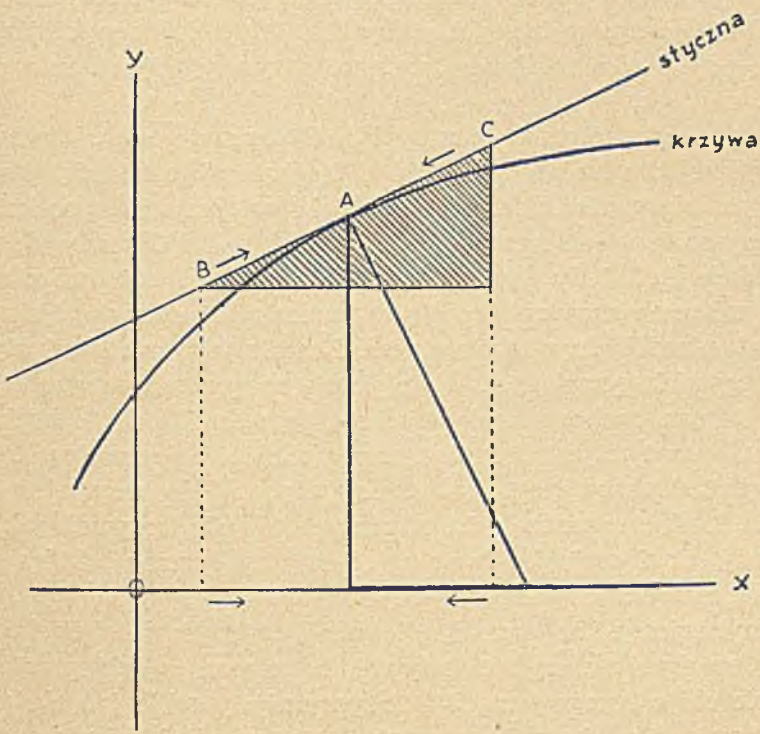


Fig. 48.

[1] Zagadnienie, które będzie później wyjaśnione i rozważane.

W dowolnym punkcie A jakiejś krzywej wykreślmy styczną do niej. Na stycznej tej obierzmy w równych odstępach na prawo i na lewo od punktu A punkty B i C. Otóż w myśl elementarnych praw geometrii widoczną jest rzeczą, że trójkąt zakreskowany podobny jest do trójkąta, obwiedzionego grubą linią. Bo przeciwprostokątna tego ostatniego trójkąta jest prostopadła do przeciwprostokątnej trójkąta zakreskowanego, gdyż zakładamy to z góry. Również dłuższa przyprostokątna trójkąta obwiedzionego grubą linią wykreślona została prostopadle do dłuższej przyprostokątnej trójkąta zakreskowanego. Wskutek tego kąty ostre, zawarte pomiędzy rozważanymi bokami obu trójkątów, są sobie równe. Lecz jeżeli jeden kąt ostry trójkąta prostokątnego równa się odpowiedniemu kątowi ostremu w drugim trójkącie prostokątnym, to także pozostałe kąty ostre obu trójkątów są równe (muszą wynosić po $90 - \alpha$ stopni). Takie jednak trójkąty, w których wszystkie kąty jednego trójkąta są równe odpowiednim kątom drugiego, nazywają się właśnie podobnymi.

Przypuśćmy teraz, że punkty B i C posuwają się równomiernie na stycznej do punktu A. Przez to trójkąt zakreskowany staje się coraz mniejszy, nie zmieniając wszelako w niczym swego kształtu. Możemy sobie w końcu wyobrazić, że punkty B i C zeszły się razem w punkcie A. Wtedy wystąpi w pełni osobliwość różniczek: mianowicie wówczas znajdowałby się w punkcie A mikroskopijnie mały trójkąt, niewidzialny gołym okiem. Kształt jego zachował się nam w olbrzymich rozmiarach w trójkącie narysowanym grubą linią. Tym samym zachowała się wielkość jego kątów i stosunek jego boków. Poza tym jest druga jeszcze osobliwość. Przeciwprostokątna trójkąta zakreskowanego jest częścią stycznej do krzywej w punkcie A. A więc w punkcie A, wspólnym tak dla krzywej jak i dla stycznej, tkwi maleńka p r o s t a cząstka stycznej, która nadto jest też maleńką cząstką krzywej.

Przyznajemy, że owa dwulicowość „elementu łuku" krzywej, który ma być raz częścią krzywej, to znowu częścią prostej, ma w sobie coś z „czarnej magii". Przypomnijmy sobie jednak łańcuch od roweru, składający się przecież, i to w sposób bardzo nawet prymitywny, z kawałeczków prostych, a mimo to przylegający do okręgów kół zębatych. A teraz jeszcze pomyślmy o ogniwach łańcucha, jak o niewyobrażalnie maleńkich. Oczywiście, logicznie bio-

rąc istnieje taki punkt, w którym coś przestaje już być prostym. Proste i krzywe rozważane z jednego stanowiska są to pojęcia tak różne, jak ogień i woda, jak czarne i białe. Z innego stanowiska bardzo dobrze można sobie wyobrazić przejście. Powierzchnia stawu wydaje się nam idealnie płaska. Wszelako ze względu na kulisty kształt ziemi jest zakrzywiona w sposób niewidoczny wprawdzie, ale dający się obliczyć. Jeszcze mniej byłaby zakrzywiona powierzchnia tego samego stawu na kuli wielkości słońca. Gdybym sobie wyobraził kulę wielkości systemu Drogi Mlecznej, zakrzywienie byłoby jeszcze mniejsze, itd. w nieskończoność. Przyjęcie różniczki z góry zakłada takie kosmiczne przybliżenia.

W wypadku idealnym zatem nasz punkt A zawiera malusieńki trójkąt zakreskowany, który jest podobny do „charakterystycznego" i który możemy sobie narysować w olbrzymim powiększeniu.

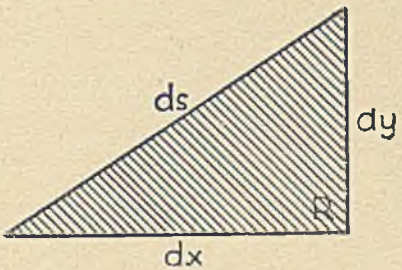


Fig. 49.

Trzy jego boki nazwijmy „różniczkami". Tę przyprostokątną, która jest równoległa do osi odciętych, nazwijmy dx, pozostałą przyprostokątną — dy, a dwulicowy „element łuku-stycznej", reprezentowany przez przeciwprostokątną, ochrzcijmy ds.

Jednakże można by przyjąć, że w każdym punkcie krzywej znajduje się wierzchołek takiego charakterystycznego trójkąta. A dalej, jeślibyśmy nasz trick wykonali następnie w każdym punkcie, to nasza krzywa składałaby się niejako z naszyjnika takich zakreskowanych trójkącików. A d ł u g o ś ć krzywej powstałaby z dołączenia do siebie wszystkich elementów ds. Więc jakiś łuk krzywej wyglądałby w olbrzymim powiększeniu np. tak, jak na fig. 50.

Można by jednak fałszywie zrozumieć sens analizy, zanadto się trzymając trójkąta charakterystycznego, a przy tym zapominając o naszym pierwszym rysunku. Mianowicie musimy zważyć, że dx_1,

dx_2 itd. to są maleńkie przyrosty x. dy_1 itd. są to przyrosty na y, wynikające przymusowo z równania krzywej $y = f(x)$. A ds_1, ds_2 itd. są to powstające przy tym cząstki krzywej, względnie cząstki stycznych. Można sobie mianowicie wyobrazić, że każda krzywa powstała z niezliczonej ilości cząstek stycznych. Jeśli np. bibularz

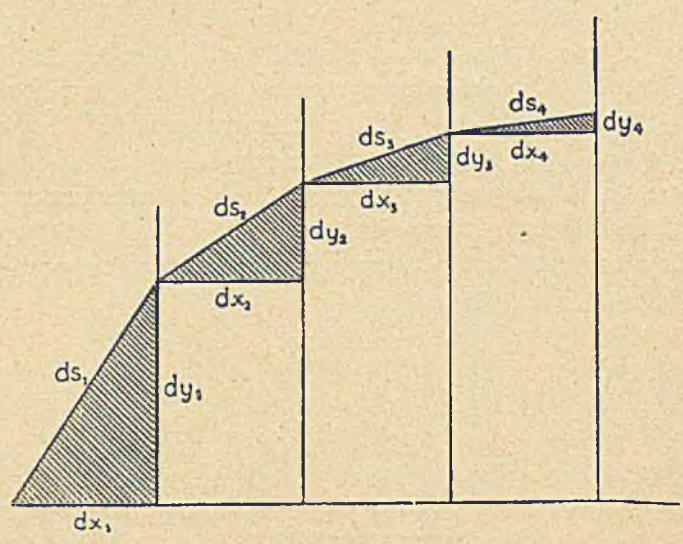


Fig. 50.

kołysze się na papierze, wtedy papier jest styczną a „kołyska" bibularza krzywą. Jeślibym wziął rzecz na odwrót i ustawił bibularz na papierze „kołyską" ku górze, a następnie w sposób zaznaczony na fig. 51. przykładał wzdłuż krzywej sztywną linię, wtedy linia byłaby w każdym punkcie styczną i można by sądzić, że krzywa „kołyski" powstała z nieskończenie wielu punktów, względnie cząstek stycznych. W geometrii często nawet stosuje się konstrukcje krzywych z danych do nich stycznych. Ściśle biorąc, gdy kreślimy okrąg tuszem, wtedy grafion stanowi również nic innego, jak cząstkę stycznej okręgu.

Obecnie już posunęliśmy się tak daleko, że stoimy blisko ujęcia, które da nam za jednym zamachem cały algorytm wyższej matematyki.

Najpierw „rektyfikacja". Rozumiemy przez to pomiar długości jakiejś krzywej. Ponieważ przy tym pomiaru tego dokonać mamy

tylko podziałką prostoliniową, musimy sobie krzywą w myśli wyprostować, z łac. „*rectam facere*". Stąd pochodzi wyrażenie rektyfikacja (*rectificatio*). Sądzono dawniej, że długość każdej krzywej, da się przedstawić tylko w postaci liczby niewymiernej, podobnie jak długość okręgu, jeśli mierzymy ją długością promienia. Wska-

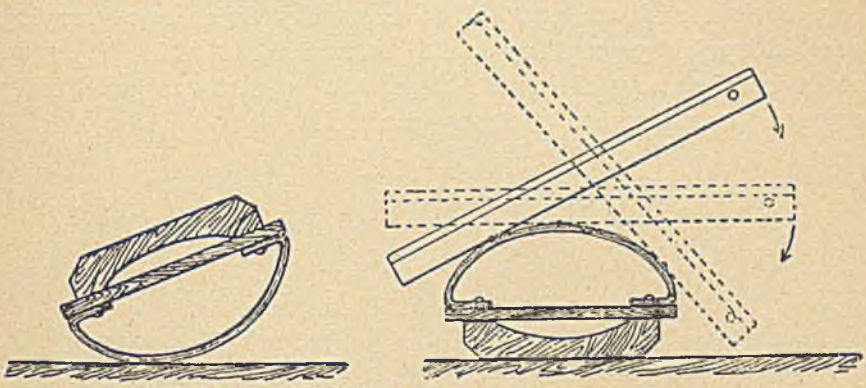


Fig. 51.

zaliśmy już na to, że niewymierność jest czymś względnym. Dodamy jeszcze, że nie stanowi ona bynajmniej istoty trudności przy pomiarach długości krzywych. Ale to tylko nawiasowo. Wracając do rektyfikacji, wiemy, że krzywa jest niejako naszyjnikiem nieskończenie wielu ds. Każde jednak ds da się według twierdzenia Pitagorasa wyrazić jako $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$, czyli $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$. Na razie byłoby wszystko w zupełnym porządku. Brak tylko drobnostki: jak utworzyć nieskończoną sumę wszystkich ds? Napotykamy tu na rozkaz analogiczny całce, którego na razie nie umiemy wykonać. A i to nie pomoże nam wiele, jeśli przypadkowo wpadniemy na to, że długość łuku w przedziale od $x=a$ do $x=b$ powinnaby się równać całce wszystkich ds, czyli całce wszystkich $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, gdyż to ostatnie wyrażenie oznaczać musi to samo. Na chłopski rozum potrafilibyśmy jeszcze rozwiązać całkę $\int_a^b ds$. Jest to po prostu długość łuku krzywej s pomiędzy odciętymi a i b. Z tego jednak nic nam nie przyjdzie. Boć przecie to nie jest odpowiedź, lecz pytanie. Odpowiedzią byłoby rozwiązanie całki $\int_a^b \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$. Spo-

dziewamy się przy tym, że w obliczaniu można by zastosować równanie krzywej $y = f(x)$. Ale jak?

Tym samym powróciliśmy do zagadnienia wyjściowego. Obecnie wiemy dokładnie zarówno przy kwadraturze, jak przy rektyfikacji, co p o w i n n i ś m y zrobić. Co więcej, mamy piękny znak czarnoksięski, znak całkowy. Ale stoimy, jak w ziemię wrośnięci i nie możemy spełnić rozkazu, podobni do człowieka dręczonego przykrym snem, który jakby porażony z miejsca ruszyć nie może, aż wreszcie przebudzi się zlany zimnym potem. Ale to zbawcze przebudzenie przyniesie nam dopiero następny rozdział.

ROZDZIAŁ DWUDZIESTY SZÓSTY

ZWIĄZKI POMIĘDZY POCHODNĄ A ROZKAZEM CAŁKI

Pokazaliśmy już przedtem na drodze czysto arytmetycznej, że gdy dana nam jest funkcja $y = f(x)$, to chcąc wyznaczyć jej różniczkę, trzeba uprzednio wyznaczyć wzajemny stosunek różniczek $\frac{dy}{dx}$, tzn. „pochodną" funkcji. Tę właśnie „pochodną" próbowaliśmy otrzymać w dwóch przypadkach, co nam się istotnie udało. Wyznaczanie „pochodnej" funkcji nazywa się w matematyce „różniczkowaniem". Czytelnik może nam wierzyć, że dowolna jakaś funkcja da się zróżniczkować [1] za pomocą mniej lub więcej zawiłych rachunków. Rachunek różniczkowy, którego zasady wkrótce poznamy, jest operacją, którą można swobodnie władać z taką samą pewnością, jak np. mnożeniem. Czy należy ono do operacji tetycznych czy litycznych, co do tego poglądy są podzielone.[2] Mianowicie ma ono własności obu tych typów operacji. Na razie jednak szkoda nad tym łamać głowę, zbadajmy raczej, a nuż rachunek różniczkowy wyda w nasze ręce klucz do opanowania rachunku całkowego. Porzućmy przeto na jakiś czas geometrię i zabierzmy się do tej sprawy czysto formalnie.

Przy kwadraturze otrzymaliśmy rozkazy postaci: miara po-

---

[1] Oczywiście tylko pod warunkiem, że nie ma własności, które pozostawałyby w sprzeczności z istotą różniczkowania, a więc o ile funkcja ma pochodną w ogóle (czyli o ile jest „różniczkowalna").

[2] Ściśle rzecz biorąc, ujęcie działania w znaczeniu tetycznym bądź litycznym stosuje się tylko do elementarnych działań arytmetycznych, względnie ich uogólnień. Słowa „operacja" użyto tu na oznaczenie różniczkowania raczej w znaczeniu „czynności", a nie w znaczeniu czysto matematycznym.

wierzchniowa $= \int_a^b y\,dx$, czyli $\int_a^b f(x)\,dx$. W obu rozkazach tkwi zarówno funkcja, której obrazem graficznym jest krzywa (raz w postaci rzędnej y, a drugi raz jako wartość funkcji odpowiadająca zmiennej x, równa co do wielkości tej rzędnej y), jak również dx. Dokonajmy teraz w myśli śmiałego chwytu, którego dokonał Leibniz owego historycznego dnia 29 października 1676. Mianowicie traktujemy całki tak, jak gdyby funkcja znajdująca się pod znakiem całki była pochodną jakiejś innej funkcji, tzw. funkcji „pierwotnej". Raz jeszcze zaakcentujmy silnie, że przez to w istocie nie zmieni się nic zgoła. Zmieni się wyłącznie wielka kabała naszego ujęcia. Jeśliby krzywa ograniczająca obszar, którego pole wyznaczamy, miała równanie $y = x^2$, to stale przy nim pozostaje. Przypuszczamy tylko, że istnieje jeszcze inna „pierwotna" funkcja $F(x)$, której pochodną jest właśnie nasza funkcja $y = x^2$.

Jasno zdajemy sobie sprawę, że takie okrężne rozumowanie stanowi największą trudność w analizie nieskończonościowej. Skoro raz się zrozumie ten chwyt, wtedy reszta jest już igraszką i jest kwestią mniej lub więcej mechanicznych obliczań. Wobec trudności zagadnienia marudzenie nic jednak nie pomoże, idźmy raczej dalej. Zatem krótko i węzłowato przyjmujemy, że mamy pochodną

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'.$$

Arytmetycznie rzecz biorąc, jest to równość jak każda inna. Mogę przeto formalnie stosować do niej reguły o przekształceniach równości. A zatem mogę np. pomnożyć każdą stronę przez dx. To, że znak równości występuje dwa razy, nie powinno nas mieszać. Bo jeślibym miał prostokąt o bokach $a = 5$, $b = 3$, to wówczas mógłbym napisać $P = a \cdot b = 5 \cdot 3$, a nawet $P = a \cdot b = 5 \cdot 3 = 15$, a równość pozostanie słuszna, jeślibym pomnożył przez 2 każde wyrażenie: $2P = 2a \cdot b = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$. A zatem pomnożymy w ten sposób przez dx i otrzymamy

$$\frac{dy}{dx}\,dx = f'(x)\,dx = y'dx, \quad \text{czyli}$$
$$dy = f'(x)\,dx = y'dx.$$

Ponieważ jednak w myśl naszej reguły z wagą równość pozostanie prawdziwa, jeżeli na równych wyrażeniach dokonamy tych sa-

mych działań, możemy również do obu, czyli tu do każdej strony równości, zastosować rozkaz całki. A więc:

$$\int_a^b dy = \int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b y'dx.$$

Otóż wpadliśmy ku naszemu zdumieniu na trop nadzwyczaj ważnej własności całki. Jest to działanie odwrotne do różniczkowania. Bo jeślibym znowu opuścił wszystkie całki („od-całkował" — można by powiedzieć na naszym poziomie), to z powrotem otrzymałbym

$$dy = f'(x)\,dx = y'dx$$

a przy podzieleniu przez dx

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\ \frac{dx}{dx} = y'\frac{dx}{dx} = f'(x) = y',$$

a więc poprzedni iloraz różniczkowy. Należało by tylko pomyśleć jeszcze nad tym, co oznacza $\int_a^b dy$. Jest to nieskończona suma wszystkich dy, a więc wszystkich przyrostów na y, w obranym przez nas przedziale badania krzywej. Oczywiście tej krzywej, którą zróżniczkowałem, aby otrzymać $f'(x)$ czyli y'. A więc tej krzywej, która odpowiada nieznanej mi przy całkowaniu funkcji „pierwotnej" $y = F(x)$. A więc $\int_a^b dy$ to zatem po prostu y czyli $F(x)$, ponieważ $F(x)$ oznacza to samo co y.

Tym samym postawiliśmy zagadnienie r a c h u n k u całkowego. Brzmi ono: Mamy daną dowolną funkcję $y = f(x)$, szukamy funkcji „pierwotnej" $y = F(x)$, której pochodna jest równa funkcji danej, a więc

$$F'(x) = f(x).$$

Zwyczajnie zapisuje się „daną" funkcję jako $f(x)$, a jako funkcję pierwotną $F(x)$. Jednakowoż ten sposób zapisywania wywołuje u początkujących zamęt, ponieważ w funkcjach $y = f(x)$, oraz $y = F(x)$, y oznacza dwie różne wartości. Należało by zapisywać albo $y = F(x)$ oraz $y' = f(x)$, albo — i to najkonsekwentniej — $y = F(x)$ i $y' = f'(x)$. Tylko człowiek, który drogą samouctwa przyswoił sobie rachunek nieskończonościowy, może ocenić, jakie trudności sprawia początkującemu najmniejsze odchylenie od konsekwentnego zapisywania.

A zatem wiemy już, że ma być

$$F'(x) = f(x)$$

Jeśli taka funkcja F(x) istnieje, to wówczas nazywa się „całką" funkcji f(x). Działanie, za pomocą którego znając funkcję f(x) wyznaczamy F(x), nazywamy „całkowaniem" i oznaczamy w następujący sposób

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Z tym wiąże się jeszcze jedno pytanie, które się nasuwa od razu każdemu. Dlaczego na oznaczenie funkcji pierwotnej używamy tego samego symbolu, co przy kwadraturze i rektyfikacji, odrzucając niejako tylko granice całkowania? Na to pytanie niełatwo odpowiedzieć. Mianowicie istnieje tak zwana całka „określona" i „nieokreślona". „Określona", oznaczająca pole pewnego obszaru, wskazuje na sumowanie wewnątrz jakiegoś przedziału, „nieokreślona" natomiast wyraża związek między dwiema funkcjami, na mocy którego jedna z nich jest pochodną drugiej. Jeżeli jednak znalazłem całkę „nieokreśloną", wówczas mogę zawsze przez odpowiednie podstawienie granic całkowania przejść do całki „określonej" dzięki prostemu związkowi, jaki między obiema całkami zachodzi. Wkrótce zapoznamy się z tym na przykładach praktycznych.

Obecnie jednak musimy się zwrócić do rachunku różniczkowego, abyśmy mogli dzięki niemu rzeczywiście obliczać całki. Przy tym obie te operacje rozważać będziemy stale wspólnie, wbrew ogólnie przyjętemu sposobowi postępowania. Jednakże dla lepszego przygotowania musimy przejść jeszcze dwa małe pagórki. Mianowicie analizę „rzędu nieskończenie małych" i twierdzenie o rozwinięciu potęgi dwumianu, którego głośnym odkrywcą był Isaac Newton.

ROZDZIAŁ DWUDZIESTY SIÓDMY

TRZY RODZAJE NICOŚCI

Najpierw zajmiemy się zagadnieniem rzędu nieskończenie małych. Z dotychczasowych rozważań widzieliśmy, że w analizie nieskończonościowej wielką rolę odgrywa wielkość zmienna, której bezwzględna wartość maleje nieograniczenie, a więc zmienna zmierzająca do zera, tzw. „nieskończenie mała". Co więcej, przy obliczaniu pochodnej twierdziliśmy, że jeśli Δx zmierza do zera, to tym bardziej zmierzać musi do zera $(\Delta x)^2$.

Arytmetycznie można by to wyjaśnić następującym przykładem. Niechaj „nieskończenie małą" x przedstawia nieskończony ciąg ułamków:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \cdots \longrightarrow 0$$

Wówczas wielkości zmiennej x^2 odpowiadałby ciąg

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}, \frac{1}{100}, \cdots \longrightarrow 0$$

Widzimy, że wyrazy ciągu drugiego maleją „prędzej", a więc x^2 „prędzej" niejako zdąża do zera. Jeszcze „prędzej" zmierzałoby do zera x^3 itd.

Powiemy, że x^2 jest nieskończenie małą „wyższego rzędu" niż x. Jeszcze wyższego rzędu jest nieskończenie mała x^3.

Jakkolwiek interesującą rzeczą byłoby omówić ścisłe ujęcie rzędu nieskończenie małych, jednakże w ramach naszego sposobu przedstawienia musimy odmówić sobie tego. Raczej spróbujmy przedstawić szczególnie poglądowo możliwość rozmaitych rzędów „nieskończenie małych", przy czym wyłącznie tylko rysunkiem zademonstrujemy „trzy rodzaje nicości".

W tym celu wyobraźmy sobie tzw. prostopadłościan (tzn. graniastosłup, którego wszystkie krawędzie są do siebie prostopadłe). Prostopadłościan ten niech będzie sporządzony z metalu, który podobnie jak wszystkie metale rozszerza się pod wpływem ogrzewania. Ale to rozszerzanie nastąpić ma nie we wszystkich kierunkach, ale wyłącznie wzdłuż trzech wymiarów. Można by to osiągnąć np. w ten sposób, że ów blok metalowy umocowuje się w rogu pokoju tak, aby mógł się swobodnie rozszerzać tylko ku górze i w dwie strony ku przodowi.

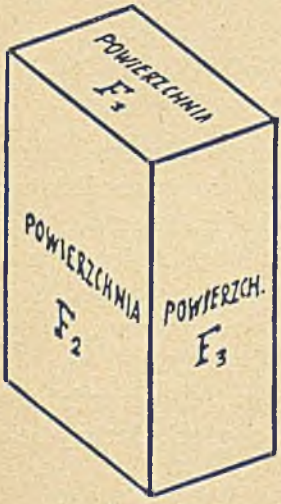


Fig. 52.

Oczywiście, zwiększanie się odpowiednich wymiarów prostopadłościanu metalowego w rozmaitych kierunkach następuje nie oddzielnie, lecz równocześnie. Teraz, skoro prostopadłościan osiągnął już swą największą objętość, rozłóżmy w myśli jego „przyrost". A mianowicie tak, jak gdyby każda z trzech powierzchni F_1, F_2 i F_3 bez względu na pozostałe została przesunięta o odpowiedni „przyrost" z pierwotnego położenia ku górze, lub ku przodowi. (Por. fig. 53.)

Dla wyrazistości przerysowano raz jeszcze poszczególne części tworzące całkowity przyrost i rozstawiono wokoło głównej figury, która pokazuje ich zestawienie. Jasną jest rzeczą, że nasz metalowy prostopadłościan, skoro ochłodzimy go znowu do temperatury początkowej, przyjmie z powrotem tę objętość, powiedzmy lepiej, skurczy się do tej objętości, jaką miał początkowo. Wszystkie przyrosty częściowe zredukują się, mówiąc czysto arytmetycznie, znowu do wielkości równej zeru. Przestaną istnieć. Zanim to jednak nastąpiło, zanim jeszcze stały się, jak to już raz nazwaliśmy, w granicy zerem, miały w osobliwy sposób zasadniczo różne wielkości. Przyrosty powierzchni (F_1, F_2, F_3) stały się znikając cienkimi płatkami powierzchniowymi, trzy sztabkowate dopełnienia (G_1, G_2, G_3) zeszły się z odpowiednimi odcinkami (krawędziami), podczas gdy wreszcie podobny do kostki utwór (P), z przodu u góry, skurczył się w jeden punkt. Znowu natknęliśmy się na zagadkę w odróżnianiu nicości. Powierzchnia - nic, odcinek - nic, punkt - nic nie mogą

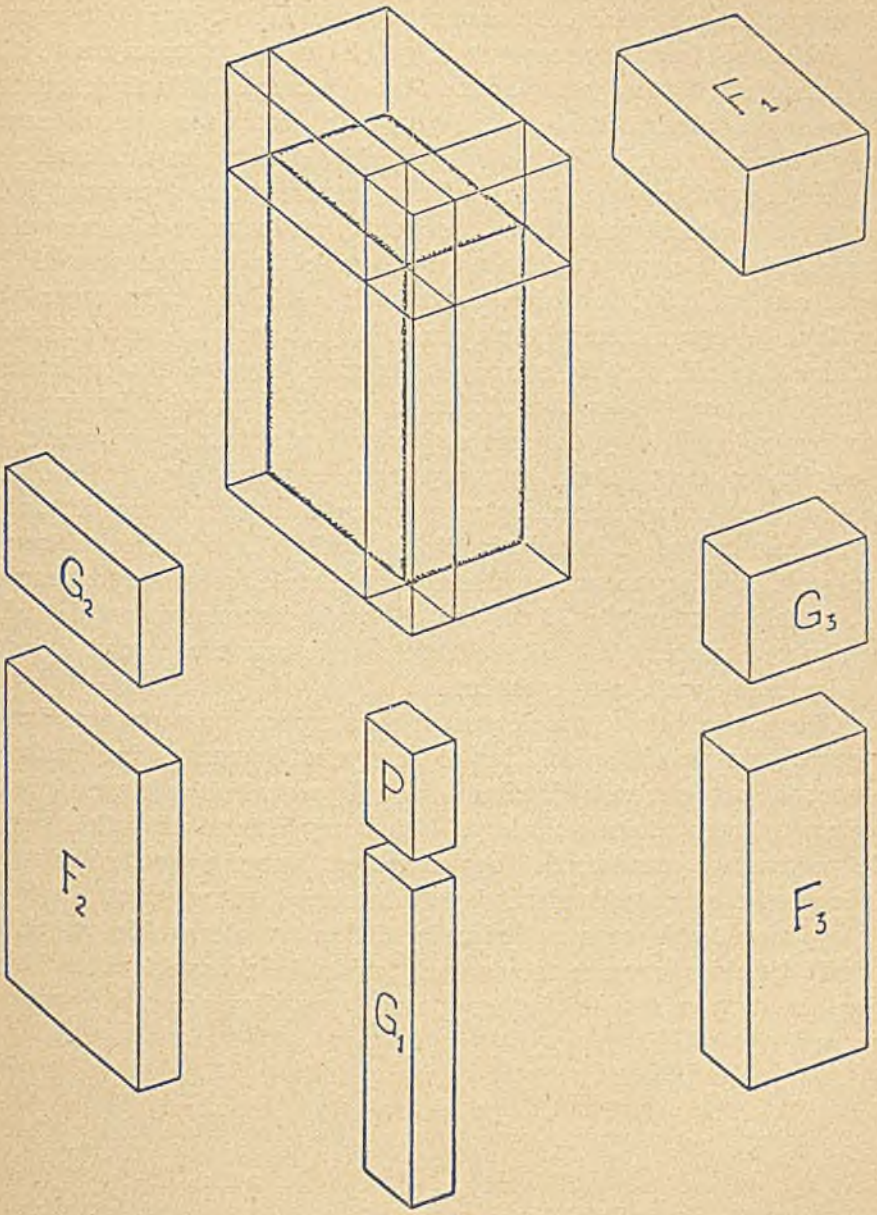


Fig. 53.

być równoznaczne. Są one, o ile dopuszczalne jest takie wyrażenie, nicościami różnej mocy. I zaznaczymy tylko, że również w następujący sposób możemy to wyrazić, jeżeli punkt obierzemy za „jedność nicości": Punkt jest j e d n o s t k ą nicości. Odcinek jest uszeregowaniem nieskończenie wielu punktów, jest więc nieskończenie razy większy, aczkolwiek sam dla siebie również jest nicością. Powierzchnia prostokątna, której miara jest iloczynem wymiarów długości i szerokości, jest nawet mnogością o nieskończenie razy nieskończenie wielu punktach, a więc mnogością o nieskończoności do kwadratu punktów. A nadto, aczkolwiek właściwie tylko przez pomyślane jej ograniczenie i brak grubości, jest znowu pewną odmianą nicości. Ale nie ośmielajmy się zapuszczać zbyt daleko w bardzo skomplikowane głębie tzw. „teorii mnogości", nowej i bardzo abstrakcyjnej gałęzi wyższej matematyki. Stwierdzamy wyłącznie, iż nie tylko rozumowaniem arytmetycznym, ale czysto poglądowo poznaliśmy, że również istnieją pewne rangi w uporządkowaniu „nieskończenie małych". Rozróżnia się je według „rzędu nieskończenie małych". Mówimy zatem o „nieskończenie małej pierwszego, drugiego, trzeciego itd. rzędu". Jeśli $dx \to 0$, to dx jest nieskończenie małą pierwszego rzędu, $(dx)^4$ nieskończenie małą czwartego rzędu, $(dx)^n$ nieskończenie małą n-tego rzędu.

Obecnie jednak powrócić znowu musimy od naszego emocjonującego roztrząsania „nieskończenie małych" do czegoś bardzo konkretnego, aby wreszcie dopełnić ostatniego zastrzeżenia przed podjęciem naszego ataku na szczyt. Zbierzemy zatem wszystkie nasze dotychczasowe wiadomości arytmetyczne, aby opanować sławne twierdzenie o „potędze dwumianu". Istnieją najrozmaitsze metody w wyprowadzaniu tego twierdzenia. Obieramy eleganckie przedstawienie kombinatoryczne, aby uwydatnić związek nauki o kombinacjach ze wspominanymi już częstokroć „współczynnikami dwumianowymi".

ROZDZIAŁ DWUDZIESTY ÓSMY

POTĘGA DWUMIANU

Zaczniemy od ustalenia terminologii. Wyrażenie postaci $(x + a)$ lub $(x + b)$ nazwiemy „dwumianem", albo jeśli się przez to wyrażenie mnoży — „czynnikiem dwumianowym". Przy tym x pojmuje się tutaj nie jako niewiadomą, ale używa się go tylko dla optycznego niejako odróżnienia.[1] „Dwumianem" nazywa się każde połączenie dwóch jakichś liczb znakiem dodawania lub odejmowania, i wyrażenie takie traktuje się jako jakąś nową całość.

Otóż jeżeli pomnożę np. $(x + a)$ przez $(x + b)$, a więc mam utworzyć iloczyn czynników dwumianowych $(x + a)$ oraz $(x + b)$, to otrzymam

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Podobnie byłoby

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc,$$

co czytelnik łatwo może sprawdzić.

Aby budowa naszego wyniku wystąpiła jeszcze wyraźniej, wybierzmy sposób przedstawienia, używany już przy niejednej sposobności przez Leibniza i napiszmy:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} x + ab \qquad \text{oraz}$$

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix}\right\} x + abc.$$

[1] Głębszy sens używania x polega na tym, że „twierdzenia o potędze dwumianu" używa się przeważnie do rozwijania funkcji, w których zmienna x występuje w dwumianie.

Już tutaj dwie rzeczy odróżni wprawniejsze oko. Po pierwsze, że wielkość x, zawarta w każdym dwumianowym czynniku, występuje w porządku potęg malejących. Po drugie, że „współczynniki" tych potęg x mają bez wątpienia charakter kombinatoryczny, ponieważ najpierw zjawiają się wszystkie uniony, potem wszystkie amba, a w końcu wszystkie terna „elementów" a, b, c. Postacią połączenia kombinatorycznego jest „kombinacja bez powtarzania". Elementami są wszystkie różne wielkości a, b, c, występujące w dwumianach.

Dla wyrazistości, rozważmy jeszcze jeden bardziej skomplikowany przykład, a mianowicie

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) =$$

$$= x^5 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right| x^4 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ ae \\ bc \\ bd \\ be \\ cd \\ ce \\ de \end{matrix}\right| x^3 + \left.\begin{matrix} abc \\ abd \\ abe \\ acd \\ ace \\ ade \\ bcd \\ bce \\ bde \\ cde \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} abcd \\ abce \\ abde \\ acde \\ bcde \end{matrix}\right| x + abcde.$$

Dlaczego powstaje taka osobliwa struktura, to nie jest wcale tak zagadkowe, jak się to wydaje na pierwszy rzut oka. Struktura ta wynika po prostu stąd, że przy mnożeniu w naszym wypadku musi się pomnożyć przez siebie zawsze pięć[1] wyrazów. x^5 to nic innego jak $x.x.x.x.x$, ax^4 to znowu nic jak tylko $x.x.x.x.a$. Dalej jest np. $acex^2 = acex.x$ itd. Ta wzmianka powinnaby na razie wystarczyć dla przekonania myślących czytelników o konieczności związków kombinatorycznych.

Teraz ujmijmy w regułę to, co dotychczas poznaliśmy, i ustalmy postać iloczynu czynników dwumianowych, składających się z x i jakiegoś drugiego wyrazu, który w każdym dwumianie ma jakąś inną wartość:

Iloczyn takich czynników dwumianowych przedstawia się jako szereg malejących potęg x, a mianowicie zaczynając się potęgą, któ-

[1] Ogólnie: tyle, ile jest dwumianów.

rej wykładnik równa się ilości wszystkich dwumianów. Wykładniki w tym szeregu potęgowym maleją za każdym razem o jeden. Poza x^1 jest jeszcze zerowa potęga x, tak że wynik mnożenia ma zatem o jeden wyraz więcej aniżeli wynosi ilość dwumianów. Ten szereg zapisany na razie bez współczynników

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots\ldots + x^2 + x^1 + x^0,$$

gdzie n oznacza liczbę dwumianów, otrzyma obecnie współczynniki, a mianowicie

$$C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots\ldots + C_{n-2}x^2 + C_{n-1}x^1 + C_n x^0.$$

Otóż współczynniki te podają za pośrednictwem swych wskaźników (indeksów), której klasy kombinację z n-elementów przedstawia każdy z nich. Wyraz zawierający x^n otrzymuje współczynnik $C_0 = 1$, ponieważ składa się on tylko z x. Następna potęga x^{n-1} ma jako współczynniki wszystkie uniony, x^{n-2} wszystkie amba, x^{n-3} wszystkie terna itd., jakie dadzą się utworzyć z n elementów. I to jako kombinacje bez powtarzania. Ale te „kombinacje" nie są tu już wyłącznie przestawieniami, ale rzeczywiście iloczynami. A zatem tutaj występuje połączenie kombinatoryki i mnożenia.

Jeżeli zastosujemy teraz pewien chwyt i przyjmiemy, że wszystkie nasze a, b, c itd. są sobie równe, tak że $a = b = c = d = e$ itd., wówczas możemy po prostu napisać:

$$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a) \ldots\ldots \text{ itd.}$$

albo, co oznacza to samo

$$(x + a)^n = ?$$

Obecnie dotarliśmy do jądra tak zwanego „twierdzenia o potędze dwumianu", któremu przypada ogromne znaczenie w matematyce. Przez rozwiązanie naszego problemu będziemy w stanie zapisać każdą dowolną potęgę jakiegoś dowolnego dwumianu (na razie dla wykładników całkowitych dodatnich) wprost w postaci malejącego szeregu potęgowego. Obecnie też nie odgrywa już więcej roli to, czy pozostawię owo x, czy je zastąpię jakąś inną literą. Pozostawimy je na swoim miejscu tylko ze względu na związek z poprzednim wynikiem.

Według naszych reguł wynik $(x + a)$ wziętego n-razy jako czyn-

nik, co przecie nic innego nie oznacza jak tylko $(x + a)^n$, musiałby brzmieć w następujący sposób:

$$C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots\ldots + C_{n-2}x^2 + C_{n-1}x + C_n\,x^0.$$

Że C_0 równa się jedności, to już wiemy. Ale jaką wartość mają C_1, C_2, C_3 itd.? Ustalimy to logicznym wnioskowaniem. Nasze C_1 ma być przecie sumą wszystkich unionów, które się otrzymuje z n różnych od x składników dwumianów. Ponieważ jednak te wszystkie składniki są równe a, więc suma wszystkich unionów $a + a + a + a \ldots\ldots + a$ (n-razy) równa się na, albo pisząc kombinatorycznie $\binom{n}{1}a$. Drugi współczynnik C_2 jest sumą wszystkich amb utworzonych z a. Ponieważ każde ambo brzmi $a \,.\, a$, więc jest on sumą wszystkich a^2. Albo kombinatorycznie $\binom{n}{2}a^2$. Terna byłyby $a \,.\, a \,.\, a = a^3$. W następstwie jest $C_3 = \binom{n}{3}a^3$. Obecnie prawidło tworzenia jest już jasne. A tym samym z powodzeniem udało się rozwiązanie zagadnienia. Jest zatem:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}x + \binom{n}{n}a^n.$$

Zanim przeliczymy jakiś szczególny przypadek, omówmy jeszcze pomocniczą tabelkę, znaną pod nazwą „trójkąta Pascala“ albo „trójkąta współczynników dwumianu“, która w bardzo łatwy sposób dozwala nam tworzyć „współczynniki dwumianowe“ aż do dowolnego n. Ma ona następującą postać:

0					1				
I				1		1			
II			1		2		1		
III		1		3		3		1	
IV	1		4		6		4		1
V	1	5		10		10		5	1
VI	1	6	15		20		15	6	1
VII	1	7	21	35		35	21	7	1

itd.

Nie wyprowadzając wcale szczegółowego dowodu jej słuszności, zwracamy na to uwagę, że każda liczba znajdująca się wewnątrz tej tabelki równa się sumie obu liczb, stojących ponad nią z lewej i prawej strony. Przez to jesteśmy w stanie, krok za krokiem, czysto mechanicznie rozszerzyć ten „trójkąt“ aż do nieskończoności. Wypada

jeszcze wspomnieć, że Blaise Pascal odkrył samodzielnie ten trójkąt jako *„triangulus mathematicus"* (trójkąt matematyczny), ale że współczynniki dwumianowe były już wymieniane przed Pascalem przez Stifela (1544), a co więcej, znane były matematykom chińskim już około 1300 r. po nar. Chr.

Słusznie zapyta każdy, jak należy używać tego trójkąta. Otóż w bardzo prosty sposób. Cyfry rzymskie po lewej stronie na brzegu oznaczają potęgi całkowite dodatnie, do jakich chcielibyśmy dwumian podnieść. Następnie, liczby przynależące do odpowiedniego wiersza, odpowiadają współczynnikom, oznaczonym przez nas poprzednio przez C_0, C_1, C_2, ... C_{n-1}, C_n. A zatem muszą być także równe współczynnikom dwumianowym napisanym kombinatorycznie. Wybierzmy więc jako przykład wypadek $(x + a)^7$ i rozwińmy tę potęgę zgodnie z twierdzeniem dwumianu na szereg potęgowy, według malejących potęg x:

$$(x + a)^7 = x^7 + \binom{7}{1} x^6 a + \binom{7}{2} x^5 a^2 + \binom{7}{3} x^4 a^3 + \binom{7}{4} x^3 a^4 + \\ + \binom{7}{5} x^2 a^5 + \binom{7}{6} x a^6 + a^7.$$

Jeżeli dla uzupełnienia napiszemy jeszcze wyrażenie $\binom{7}{0}$ jako współczynnik przy x^7, a wyrażenie $\binom{7}{7}$ jako współczynnik przy a^7, wówczas w dwumianie podniesionym do potęgi 7-mej otrzyma się następujące współczynniki dwumianowe

$\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$, a po wyliczeniu liczby 1 7 21 35 35 21 7 1,

przez co wspaniale sprawdziliśmy trójkąt Pascala.

Jeszcze parę przykładów odnośnie do twierdzenia o potędze dwumianu:

$(4 + 7)^5 = ?$ Oczywiście można by tu po prostu dodać 4 do 7 i obliczyć od razu piątą potęgę 11, przez co otrzymało by się $11^5 = 161\,051$. Chcemy jednak skorzystać ze sposobności, aby nasze twierdzenie sprawdzić i wypróbować znowu z innej strony, przy czym zauważymy jeszcze, że rozkład liczby na dwumian jest polecenia godny także ze stanowiska praktycznych obliczań.[1] Liczymy zatem:

---

[1] Ponadto obliczanie „kwadratu" i „sześcianu" liczb w jakimś układzie pozycyjnym polega na operacjach z dwumianami. Tak np. jest $13^2 = (10+3)^2$ itp.

$$(4+7)^5 = \binom{5}{0}4^5 \cdot 7^0 + \binom{5}{1}4^4 \cdot 7^1 + \binom{5}{2}4^3 \cdot 7^2 + \binom{5}{3}4^2 \cdot 7^3 +$$
$$+ \binom{5}{4}4^1 \cdot 7^4 + \binom{5}{5}4^0 \cdot 7^5 =$$
$$= 1 \cdot 1024 \cdot 1 + 5 \cdot 256 \cdot 7 + 10 \cdot 64 \cdot 49 +$$
$$+ 10 \cdot 16 \cdot 343 + 5 \cdot 4 \cdot 2401 + 1 \cdot 1 \cdot 16807 =$$
$$= 1\,024 + 8\,960 + 31\,360 + 54\,880 + 48\,020 + 16\,807 = 161\,051,$$

przez co otrzymujemy oczekiwany rezultat.

Jako drugi przykład rozwiążemy np.:

$$(1+x)^9 = \binom{9}{0}1^9x^0 + \binom{9}{1}1^8x^1 + \binom{9}{2}1^7x^2 + \binom{9}{3}1^6x^3 + \binom{9}{4}1^5x^4 +$$
$$+ \binom{9}{5}1^4x^5 + \binom{9}{6}1^3x^6 + \binom{9}{7}1^2x^7 + \binom{9}{8}1^1x^8 + \binom{9}{9}1^0x^9 =$$
$$= 1 + 9x + 36x^2 + 84x^3 + 126x^4 + 126x^5 + 84x^6 + 36x^7 + 9x^8 + x^9.$$

Na zakończenie dodajmy jeszcze, że dwumian mógłby naturalnie brzmieć również $(x - a)^n$ albo $(-x - a)^n$. Wedle prawa kojarzenia rozkazów znaków liczbowych należało by wtedy wyznaczyć każdorazowy znak stosownie do występującej potęgi x oraz a. Jeślibyśmy mieli wyznaczyć np. w dwumianie $(x - a)^4$ znak przy $4x^3a$, to jasne, że tylko minus może w grę wchodzić. Bo owa liczba brzmi przecie $4 . x . x . x . (-a)$, a więc $(-4x^3a)$.

W dalszym ciągu rozważań spróbujmy zapisać twierdzenie o potędze dwumianu, używając znaku sumacyjnego:

$$(x+a)^n = \sum_0^n{}^{\nu} \binom{n}{\nu} x^{n-\nu} \cdot a^{\nu} = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1}a^1 + \ldots + \binom{n}{n} x^0 a^n.$$

Ponieważ jednak w matematyce bynajmniej nie pytamy się stale o całkowite dodatnie potęgi dwumianów, musimy zbadać pokrótce ten wypadek, kiedy dana jest potęga ułamkowa lub ujemna. Obieramy najpierw dwumian $(1+x)^n$ i żądamy, by n oznaczało albo liczbę ułamkową, albo jakąś liczbę ujemną. Ponieważ w ramach naszych nie dysponujemy niestety wiadomościami, przy których można by ten przypadek rozważyć szczegółowo, musimy zadowolić się stwierdzeniem, że przy wykładniku potęgowym ułamkowym lub ujemnym potęga dwumianu, czyli rozwinięcie potęgi dwumianu, przechodzi w tzw. n i e s k o ń c z o n y „szereg dwumienny", który ma postać

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots\ldots + \binom{n}{r}x^r + \ldots\ldots$$

r oznacza przy tym liczbę większą niż n.

Jeżeli natomiast nie chcę wyłącznie $(1+x)$, ale np. $(a+x)$,

gdzie $a \neq 0$, rozwinąć w nieskończony szereg dwumienny, wówczas przy pomocy pewnego fortelu mogę nadać dwumianowi postać $(1+x)$, tworząc z $(a+x)^n$ po prostu $a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$. Dzięki temu mogę już potem do $\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ stosować poprzedni wzór, rozwinąć na szereg dwumienny nieskończony, a następnie pomnożyć wynik przez a^n.

Jak już jednak wspomniano, poprzestaniemy tylko na wzmiance o tym. Ale ponieważ raz już mówiliśmy o „szeregach nieskończonych", musimy jeszcze krótko rozważyć, co rozumie się przez słowo „szereg".

Jak sama nazwa wskazuje, szereg powstaje przez połączenie liczb ułożonych w pewnym porządku. A mianowicie przez połączenie przy pomocy dodawania lub odejmowania. Szereg jest skończony, jeżeli urywa się po pewnej oznaczonej, skończonej ilości wyrazów, nieskończony natomiast, jeżeli nie ma ostatniego wyrazu, czyli jak mówimy, zmierza dalej w nieskończoność. Tak np. szereg Leibniza $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ jest szeregiem nieskończonym. W związku z szeregiem Leibniza możemy od razu rozważyć inne jeszcze ważne pojęcie. A mianowicie, jeśli z nieskończonego ciągu wyrazów naszego szeregu:

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \ldots$$

utworzymy nowy ciąg o wyrazach

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots\ldots s_n, \ldots\ldots$$

przy czym $s_1=1$, $s_2=1-\frac{1}{3}$, $s_3=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, $s_4=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$,

$$s_5=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}, \ldots\ldots$$

to gdy wskaźnik n rośnie nieograniczenie, ciąg o wyrazach s_1, s_2, s_3, ... s_n ..... zmierza do granicy, a mianowicie osiąga wartość $\frac{\pi}{4}$. Taki szereg nieskończony nazywa się „zbieżnym", ponieważ dąży do granicznej wartości (tutaj $\frac{\pi}{4}$), czyli skupia się niejako w jedną wspólną wartość. Liczbę $\frac{\pi}{4}$, granicę ciągu s_n, zowiemy „sumą szeregu nieskończonego" i oznaczamy

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots$$

Nazwa „sumy szeregu nieskończonego“ pochodzi stąd, że dawniej szereg nieskończony, zgodnie z pojęciem intuicyjnym, uważano za sumę o nieskończenie wielu składnikach. Jeślibyśmy natomiast utworzyli podobnie ciąg s_1, s_2, s_3, s_4 ..... s_n ..... z wyrazów ciągu:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\ldots,$$

a więc $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 3$, $s_3 = 1 + 3 + 5$, $s_4 = 1 + 3 + 5 + 7$, ..., to przekonalibyśmy się, że ciąg o wyrazach s_n nie ma granicy, a więc szereg

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \ldots\ldots$$

zowiemy szeregiem „rozbieżnym“, ponieważ nie przedstawia żadnej liczby (rozbiega się, rozprasza).

Badanie, czy jakiś szereg jest „zbieżny“ czy „rozbieżny“, należy do najcięższych zadań matematyki. A mianowicie, nie ma bynajmniej pewności, czy szereg o wyrazach systematycznie malejących jest zbieżny. Tak np. dziwnym zbiegiem okoliczności szereg nieskończony

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots\ldots \text{ itd.}$$

jest rozbieżny, aczkolwiek każdy wyraz tego szeregu jest mniejszy od poprzedniego. Suma tego szeregu nieskończonego nie jest oznaczoną liczbą. Natomiast szereg nieskończony:

$$\frac{1}{1,2} + \frac{1}{2,3} + \frac{1}{3,4} + \frac{1}{4,5} + \ldots\ldots \text{ itd.}$$

jest zbieżny, a suma nieskończenie wielu jego wyrazów wynosi 1.

Jak już z szeregu Leibniza widzieliśmy, szereg nieskończony jest często środkiem pomocniczym jakiejś kwadratury. W istocie każda całka da się przekształcić w szereg nieskończony i już Archimedes posługiwał się szeregami nieskończonymi zbieżnymi, dla uzyskania kwadratur.

ROZDZIAŁ DWUDZIESTY DZIEWIĄTY

KWADRATURA PARABOLI ARCHIMEDESA

Wielki Archimedes ma niezaprzeczoną zasługę w tym, że pierwszy stworzył tego rodzaju genialne metody kwadratury powierzchni ograniczonych liniami krzywymi, iż metody te zachowały znaczenie i były w użyciu aż do końca XVII wieku.

Nie będziemy przeto szczędzili trudu, by nieco głębiej wniknąć w metodę archimedesowską, a jako przykład wybierzmy kwadraturę „zwyczajnej paraboli", którą Archimedes pierwszy przeprowadził i którą omawiał w swych pismach „Kwadratura paraboli", „O równowadze płaszczyzny II" i innych. A mianowicie, przyjrzyjmy się przy tym jego czysto geometrycznym próbom, pomijając za trudne dla nas metody statyczne.

Metoda geometryczna, stosowana przez Archimedesa, to tak zwana później metoda „ekshaustii" czyli „wyczerpywania", która w istocie nie wychodzi na nic innego, jak na wpisywanie w krzywą figur jednorodnych, czyli budowanych według pewnego prawidła, ograniczonych liniami prostymi. Wskutek stale wzrastającej ilości owych ciągle zmniejszających się figur ograniczonych prostoliniowo wynika coraz ściślejsze przyleganie ich do linii krzywej, aż po nieskończonym powtarzaniu doszlibyśmy do tak małych odcinków ograniczających te figury wpisane, iż można by je uważać za elementy krzywej. Ale teraz wypadnie uczynić drugi jeszcze krok istotny: musimy umieć znaleźć granicę nieskończonej sumy pól figur ograniczonych prostoliniowo, ponieważ dopiero ta suma nieskończona może nam dać pole „wyczerpywanej" powierzchni, ograniczonej linią krzywą, wypełnionej figurami ograniczonymi prostoliniowo. Czy i jak to jest możliwe, zobaczymy później. Obecnie narysujmy sobie na razie dowolną część „zwyczajnej paraboli", której rozliczne własności znane były również już za czasów Archimedesa.

Szukana jest miara powierzchniowa odcinka [1] paraboli. W odcinek ten wpisujemy obecnie trójkąt, którego jeden wierzchołek leży w wierzchołku paraboli. By rozumowanie uprościć i ułatwić porówna-

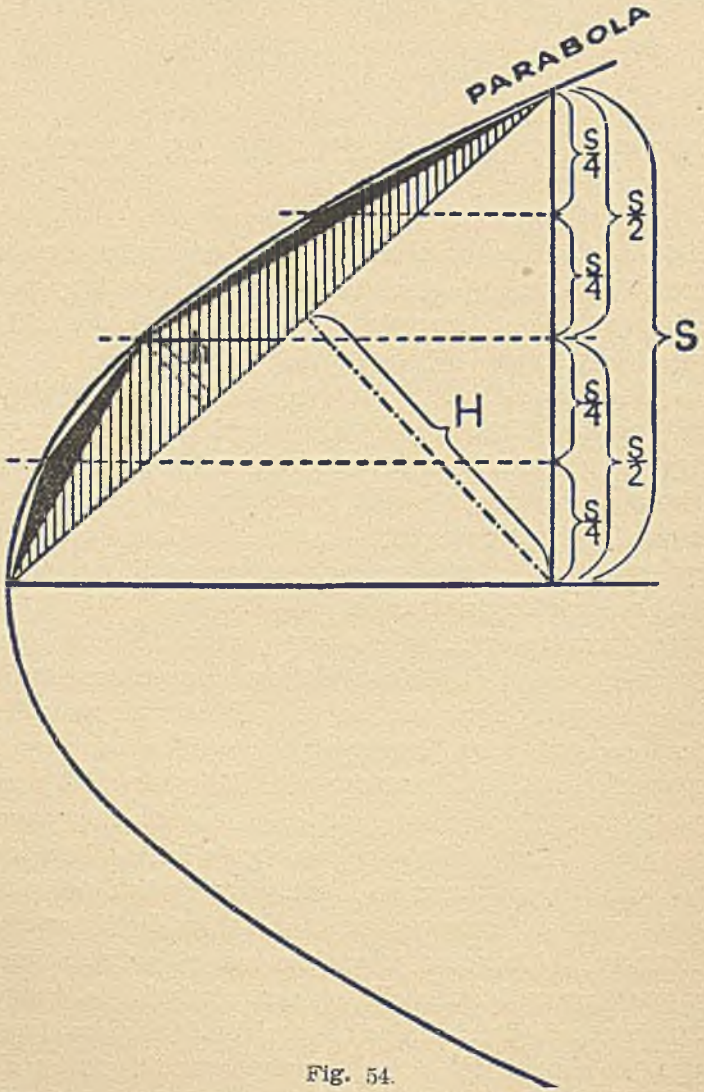


Fig. 54.

[1] Rozróżniamy odcinek krzywej (segment) i wycinek (sektor). Początkujący mogą sobie wyobrazić dla uzmysłowienia odcinka (segmentu) odciętą część okrągłego bochenka chleba, dla wycinka (sektora) kawałek wycięty z kolistego tortu.

nie z całkowaniem paraboli, które później przeprowadzimy, rozważmy tylko górną połowę odcinka parabolicznego. W tej zatem połowie leży teraz duży trójkąt prostokątny (połowa całego trójkąta wpisanego), którego przeciwprostokątna sięga od wierzchołka paraboli aż tam, gdzie ograniczająca odcinek cięciwa przecina u góry parabolę.

Przyprostokątnymi owego trójkąta, który ochrzcimy sobie „dużym trójkątem", są: część osi głównej paraboli i prostopadły do niej odcinek S, który nie jest niczym innym jak tylko połową cięciwy. Teraz rozpoczynamy „exhaustię" czyli „wyczerpywanie". W tym celu przeciwprostokątną przyjmujemy za podstawę nowego trójkąta (na naszym rysunku zakreskowanego), który już wcale nie jest prostokątny. Na obu bokach tego zakreskowanego trójkąta spoczywają dwa nowe „czarne trójkąty", których wierzchołki, podobnie jak wierzchołki wszystkich naszych trójkątów, leżą na paraboli. Teraz możemy tę czynność prowadzić w myśli dalej. Na każdym z dwóch wolnych boków „czarnych trójkątów" umieścilibyśmy znowu jeszcze mniejsze trójkąty, których wierzchołki leżałyby oczywiście również na paraboli itd. aż do nieskończoności. Każdy przyzna, że owe trójkąty muszą ostatecznie wypełnić całą połowę odcinka paraboli. Ale jak utworzyć sumę pól tych wszystkich nieskończenie wielu trójkątów?

Tutaj dopiero zajaśnieje najwspanialszym blaskiem geniusz matematyczny starożytnych Greków. A przy tym podziwiać jeszcze będziemy nieprawdopodobną jasność i prostotę, z jaką uzyskano rozwiązanie tego pozornie nierozwiązalnego problemu. Mianowicie Archimedes wiedział, że sumę szeregu nieskończonego utworzyć można tylko dla szeregu malejącego, którego poszczególne wyrazy pozostają wzajemnie w jakimś wymiernym stosunku. Wiadomym było bowiem, że suma szeregu nieskończonego $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ daje okrągłą wartość wymierną. Mianowicie 2. Jeśliby się zatem udało nasze wyraźnie zmniejszające się pola trójkątów sprowadzić do wzajemnego stałego stosunku zmniejszania się, wówczas cały problem zredukowałby się do problemu obliczenia sumy nieskończonego szeregu malejącego. A „duży trójkąt" mógłby być tak wielki, jak byśmy chcieli. Można by po prostu przyjąć jego pole za 1, a pola pozostałych trójkątów wyrazić w częściach tej 1. Lecz skoro tylko uzyskalibyśmy sumę szeregu nieskończonego, wtedy zawsze jeszcze

można by wynik pomnożyć przez właściwą miarę powierzchni „dużego trójkąta", a przez to musiałoby się otrzymać dokładną kwadraturę paraboli.

Archimedes istotnie dopiął tego celu. A my podążymy teraz w uproszczonej formie za polotem jego myśli. Przy tym znakomite usługi wyświadczy nam schematyczny rysunek, którego przejrzystość ujęcia jest zasługą malarza H. Strohofera, autora wszystkich naszych rysunków w tekście. Uprzedziliśmy o tym, że parabola posiada nadzwyczaj osobliwe własności, których rozważanie zaprowadziłoby nas za daleko. Dlatego wspomnijmy jedynie, że wszystkie poziome, równoległe do siebie proste, przecinające parabolę w S, S_3, S_2, S'_3 itd. (por. fig. 55), nazywają się średnicami paraboli. Taka średnica dzieli cięciwę paraboli na dwie równe części wtedy, jeżeli odcinek średnicy paraboli, zawarty pomiędzy cięciwą a parabolą, jest możliwie największym tego rodzaju odcinkiem średnicy w odpowiednim odcinku paraboli. W tym wypadku punkt przecięcia się średnicy z parabolą nazywa się również „wierzchołkiem" odpowiedniego odcinka paraboli. Tak np. S_1 jest wierzchołkiem odcinka parabolicznego odciętego cięciwą SS'; S_2 jest wierzchołkiem odcinka pomiędzy S a S_1; S_3''' jest wierzchołkiem odcinka należącego do cięciwy S_2' S' itd. W dalszym ciągu należy nadmienić, że już starożytni wiedzieli, naturalnie Archimedes również, iż odcinek *b* osi ma się tak do jakiejś części *b*, jak h^2 do kwadratu długości odcinka prostopadłego, poprowadzonego z punktu podziału na osi aż do przecięcia się z parabolą, co w naszym współczesnym języku matematycznym odpowiada analitycznemu równaniu paraboli $y^2 = x$, albo $y = \sqrt{x}$. [1]

Obecnie jednak rozważmy właściwy problem, posługując się przy tym stale rysunkiem (por. fig. 55).

„Duży trójkąt" ma tu przyprostokątne b i h, oraz przeciwprostokątną SS'. Tym samym pole jego wynosi $\frac{b.h}{2}$. Poprowadźmy w punkcie $\frac{h}{2}$ nową „średnicę", to uzyskamy nowy „wierzchołek" S_1 odcinka paraboli $SS'S_1$. Trójkąt $SS'S_1$ wpisany w ten nowy odcinek paraboli, możemy za pomocą odcinka $\frac{b}{4}$ rozłożyć na dwa składowe

[1] Mianowicie wtedy odcięta punktu końcowego *x* ma się do odciętej punktu podziału *x'* tak, jak się mają do siebie kwadraty odpowiadających im rzędnych y^2 i y'^2. A zatem każdy punkt paraboli wyraża się związkiem $y^2 = x$.

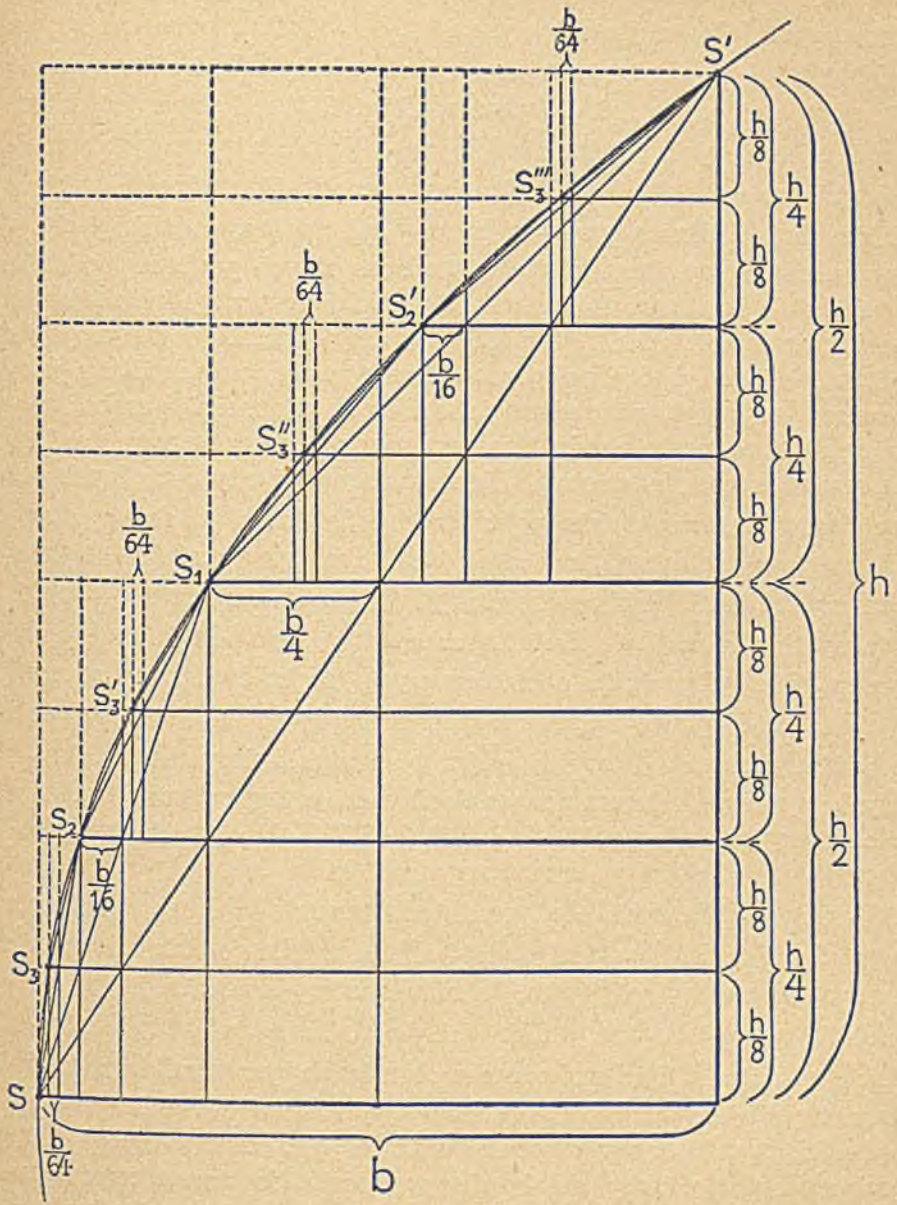


Fig. 55.

trójkąty, przy czym oba mają wspólną podstawę $\frac{b}{4}$ i wysokość $\frac{h}{2}$. Łączne pole obu trójkątów wynosi $2 . (\frac{b}{4} . \frac{h}{2}) : 2$. Ale to znaczy, że trójkąt $SS'S_1$ wykazuje pole $(\frac{b.h}{8} . 2) : 2$, a więc $\frac{b.h}{8}$. Posługując się oznaczeniami poprzedniego rysunku (Fig. 54), mógłbym już zatem powiedzieć, że pole „dużego trójkąta" $\frac{bh}{2}$ jest cztery razy tak wielkie jak pole $\frac{bh}{8}$ „trójkąta zakreskowanego". Teraz poprowadźmy dalsze dwie średnice przy $\frac{h}{4}$ i przy $\frac{3h}{4}$, to znaczy, podzielmy oba $\frac{h}{2}$ znowu na połowy. Średnice poprowadzone z tych punktów podziału wyznaczają dwa nowe wierzchołki S_2 i S'_2. Ponieważ jednak w nowe odcinki paraboli SS_1S_2 i $S_1S_2'S'$ możemy wpisać nowe trójkąty SS_1S_2 i $S_1S_2'S'$, które na poprzednim rysunku oznaczyliśmy jako „czarne trójkąty", na podstawie ogólnych własności paraboli powtarza się na nowo co dopiero przeprowadzone rozumowanie, lecz na zmienionych wielkościach. Mamy cztery trójkąty o równych polach, uzyskane z podziału poprzednich odcinkiem $\frac{b}{16}$, stanowiącym dla każdego podstawę, przy czym każde dwa razem złożone tworzą „czarny trójkąt". Każdy z częściowych trójkątów ma pole $(\frac{b}{16} . \frac{h}{4}) : 2$, a wszystkie razem $(4 . \frac{bh}{64}) : 2$. A zatem $\frac{bh}{32}$. Lecz to nie znaczy nic innego, jak tylko, że pole obu czarnych trójkątów razem stanowi czwartą część pola $\frac{bh}{8}$ „zakreskowanego trójkąta". Jeżeli to samo prawidło tworzenia dalej zastosujemy i przepołowimy na rysunku $\frac{h}{4}$, uzyskamy dzięki czterem nowym średnicom, cztery nowe wierzchołki odcinków parabolicznych S_3, S_3', S_3'', S_3'''. Ale tym samym uzyskamy cztery trójkąty „wyczerpywania", które razem tworzą osiem trójkątów częściowych o równych podstawach $\frac{b}{64}$. Łączne ich pole wynosi zatem $8 . (\frac{b}{64} . \frac{h}{8}) : 2$, czyli $4 . \frac{bh}{512} = \frac{bh}{128}$. To jednak znowu nic innego nie znaczy jak tylko, że nasze cztery nowe trójkąty „exhaustii" mają pole $\frac{1}{4}$ razy takie, jak dwa „czarne trójkąty", których pole wynosiło $\frac{bh}{32}$. Nie wchodząc w oszałamiające wyniki, jakie jeszcze moglibyśmy uzyskać z naszego rysunku we wszelakiej różnorodności, wyciągnijmy obecnie wnioski dla naszego specjalnego problemu. Znaleźliśmy z całą stanowczością, że nasze „wyczerpywanie" daje, pod warunkiem systematycznego przepoławiania h i wynikającego stąd wykreślania średnic oraz budowania trójkątów, szereg malejący, który na razie zapiszemy słowami: Duży trójkąt

ma cztery razy tak wielkie pole jak zakreskowany. Zakreskowany cztery razy takie jak dwa czarne razem. Dwa czarne razem cztery razy tak duże jak razem wzięte cztery trójkąty o wierzchołkach S_3, S_3', S_3'', S_3''' itd. w nieskończoność. Jeżeli teraz pole „dużego trójkąta" przyjmiemy za jednostkę, co bez niczego możemy uczynić, wówczas szereg brzmi: Pole odcinka paraboli równa się $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\ldots$, ponieważ w tym szeregu każdy wyraz stanowi $\frac{1}{4}$ wartości poprzedzającego wyrazu. Teraz jeszcze trzeba, jak już wspomnieliśmy, pomnożyć sumę tego nieskończonego szeregu przez faktyczną miarę powierzchni „dużego trójkąta". A więc ostateczny wynik:

$$\text{Pole odcinka paraboli} = \text{pole dużego trójkąta} \times \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right).$$

Obecnie pozostawało by jeszcze dowiedzieć się, jak wielka jest suma tego malejącego szeregu o nieskończenie wielu wyrazach. Uprzedzając, zdradzimy tajemnicę, że należy ją utworzyć według wzoru $S_\infty = \frac{a}{1-q}$, przy czym a oznacza wyraz „początkowy", a q „iloraz", czyli wartość stosunku w jakim wyrazy maleją. U nas wyrazem początkowym jest 1, a stosunek zmniejszania się wyrazów przedstawia liczba $\frac{1}{4}$, a więc jest $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$. Tym poznaniem dokazaliśmy wszystkiego. Pole połówki odcinka paraboli jest współmierne z polem dużego trójkąta i stanowi dokładnie $\frac{4}{3}$, czyli $1\frac{1}{3}$ jego pola. Jeżeli teraz uwzględnimy linie przerywane, wówczas otrzymamy prostokąt o bokach b i h, którego pole jest dwa razy większe od pola dużego trójkąta. Jeżeli zważymy dalej, że przyjmując pole „dużego trójkąta" za jednostkę, możemy jego miarę oznaczyć również jako $\frac{3}{3}$ (bo $\frac{3}{3}=1$), wtedy pole trójkąta wynosi $\frac{6}{3}=2$. A więc pole odcinka paraboli tak się ma do pola dużego trójkąta, jak $\frac{4}{3}:1$, czyli $\frac{4}{3}:\frac{3}{3}$. Jeżeli spytamy w końcu, jak się ma pole odcinka paraboli do pola prostokąta, otrzymamy jako odpowiedź: Właśnie jak $\frac{4}{3}:\frac{6}{3}$! Ale to znowu nie znaczy nic innego, jak tylko $\frac{4}{3}$ podzielone przez $\frac{6}{3}$, czyli przez 2; ponadto mówi nam, że pole połowy odcinka paraboli stanowi $\frac{2}{3}$ pola prostokąta, utworzonego z połowy jej cięciwy i odcinka osi paraboli odciętego przez

tę cięciwę.[1] Zanim powrócimy z wycieczki w zdumiewająco wspaniałe niwy klasycznej greckiej geometrii proporcji, dodajmy jeszcze, że pierwszy trójkąt nie musi być bynajmniej prostokątny. Moglibyśmy wybrać również jakiś skośno odcięty odcinek paraboli, np. trójkąt zakreskowany, jako trójkąt wyjściowy, a nawet poprawniej rzecz biorąc, powinnibyśmy byli tak wybrać, aby osiągnąć najzupełniejszą ogólność. Gdybyśmy jednak istotnie tak uczynili, wówczas przekonalibyśmy się jeszcze, że parabola przechodząca przez przeciwległe wierzchołki odpowiedniego równoległoboku dzieli również ten ukośnokątny równoległobok w stosunku $\frac{2}{3}$ do $\frac{1}{3}$ i że wszystkie dalsze trójkąty ekshaustii mają łączne pole $\frac{1}{3}$ razy tak wielkie, jak trójkąt wyjściowy, którego podstawą jest cięciwa odcinka paraboli, a którego wierzchołek jest właściwym wierzchołkiem rozważanego odcinka wyjściowego. Nasze ortogonalne (prostokątne) ujęcie odcinka paraboli miało tylko ułatwić przeprowadzenie dowodu i demonstrację, a ponadto też wybraliśmy je, uprzedzając w myśli treść tego rozdziału, gdzie wynik uzyskany przez Archimedesa potwierdzimy rachunkiem całkowym w kartezjuszowskim układzie współrzędnych.

[1] Analitycznie mówiąc, jeśli wierzchołek paraboli leży w początku układu, prostokąt utworzony jest ze współrzędnych punktu paraboli, w którym cięciwa przecina parabolę.

ROZDZIAŁ TRZYDZIESTY

SZEREGI

Teraz jednakże musimy się znowu zwrócić do nauki o szeregach, by dodać jeszcze krótką wzmiankę o pewnej ich odmianie. Są mianowicie szeregi, których wyrazy rosną wskutek dodawania stałej liczby lub też maleją przez jej odejmowanie. Np.:

$$1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm \ldots\ldots \text{ albo}$$
$$500 \pm 496 \pm 492 \pm 488 \pm \ldots\ldots$$

Wyrazy szeregu pierwszego wzrastają w ten sposób, że każdy wyraz jest większy od poprzedniego o 2, w drugim zaś szeregu wyrazy maleją za każdym razem o 4. Takie szeregi nazywamy arytmetycznymi. Jeżeli natomiast wyrazy szeregu zwiększają się wskutek mnożenia i każdy następny wyraz otrzymuje się przez to, że dany wyraz mnoży się przez stały czynnik niezerowy (albo dzieli przez stały niezerowy dzielnik), wówczas mówi się o szeregu geometrycznym. Np.:

$$1 \pm 3 \pm 9 \pm 27 \pm 81 \pm \ldots\ldots \text{ itd.} \quad \text{albo}$$
$$1 \pm \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{16} \pm \tfrac{1}{64} \pm \tfrac{1}{256} \pm \ldots\ldots \text{ itd.}$$

Ogólnie zapisany szereg arytmetyczny brzmi:

$$a \pm (a + d) \pm (a + 2d) \pm (a + 3d) \pm \ldots\ldots \pm (a + nd) \quad \text{albo}$$
$$a \pm (a - d) \pm (a - 2d) \pm (a - 3d) \pm \ldots\ldots \pm (a - nd),$$

geometryczny natomiast:

$$a \pm aq \pm aq^2 \pm aq^3 \pm \ldots\ldots \pm aq^{n-1} \quad \text{albo}$$
$$a \pm a\frac{1}{q} \pm a\frac{1}{q^2} \pm a\frac{1}{q^3} \pm \ldots\ldots \pm a\frac{1}{q^{n-1}} \qquad (q \neq 0)$$

I tu pominiemy wyprowadzanie, a wspomnimy tylko, że szeregi takie nazywają też „postępami“ i że a, które oczywiście nie musi

bynajmniej być 1, nazywa się wyrazem „początkowym". W postępie arytmetycznym liczba d, oznaczająca przyrost lub zmniejszanie się wyrazów, nazywa się „różnicą", w postępie geometrycznym określa się q lub $\frac{1}{q}$ jako „iloraz".

Nas interesuje w pierwszym rzędzie suma takiego szeregu. Dla postępu arytmetycznego, gdy dany jest wyraz początkowy a_1, różnica d, oraz ilość wyrazów n, wzór na sumę brzmi:

$$S_n = [a_1 - \tfrac{d(1-n)}{2}] \cdot n.$$

Nie da się obliczyć sumy postępów arytmetycznych nieskończonych, to znaczy każdy szereg arytmetyczny jest rozbieżny. Wskutek tego, jeśli chcemy dać zadanie nie pozbawione sensu, należy zawsze podać wartość n jako ilości wyrazów. Dla przykładu obliczmy sumę 9 liczb całkowitych parzystych; a zatem

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = ?$$

Wyraz początkowy jest $a_1 = 2$, różnica jest $d = 2$, ilość wyrazów jest $n = 9$. A więc

$$S_n = [2 - \tfrac{2(1-9)}{2}] \cdot 9 = [2 - (-8)] \cdot 9 = 90,$$

co potwierdza znakomicie słuszność naszego wzoru.

Dla postępu geometrycznego stosuje się wzór na sumę:

$$S_n = \frac{qn-1}{q-1} \cdot a_1, \quad (q \neq 1).$$

Mając zatem znaleźć sumę pierwszych 6 wyrazów postępu

$$3 + 15 + \ldots\ldots$$

wiemy, że $a_1 = 3$, $q = 5$, oraz $n = 6$.
A więc:

$$S_6 = \tfrac{5^6-1}{5-1} \cdot 3 = \tfrac{15625-1}{4} \cdot 3 = 3\,906 \cdot 3 = 11\,718,$$

co przez dodanie wyrazów

$$3 + 15 + 75 + 375 + 1\,875 + 9\,375 = 11\,718$$

łatwo da się skontrolować.

Wreszcie zbadajmy postęp geometryczny, którego „iloraz" jest ułamkiem. Podkreślamy, że właśnie te szeregi geometryczne, których wyrazy stale maleją, odgrywają w całej matematyce niesłychanie ważną rolę. Napisane ogólnie, mają dla n wyrazów postać:

$$\sum_{0}^{n-1} {}^{\nu} a \cdot \frac{1}{q^{\nu}} = a + a\frac{1}{q} + a\frac{1}{q^2} + \ldots\ldots + a\frac{1}{q^{n-1}} \quad (q \neq 0).$$

Po tym wszystkim, co dotychczas słyszeliśmy, nie bez sensu byłoby pytanie, czy istnieje suma nieskończonego szeregu geometrycznego? Przeto stawiamy sobie problem, do jakiej wartości granicznej jest „zbieżny" taki szereg, do jakiej dąży sumy? Do takiego szeregu stosuje się wzór $S_\infty = \frac{a}{1-q}$, przy czym dla uproszczenia położono tutaj q zamiast $\frac{1}{q}$, aby uniknąć ułamka w ułamku. Możemy zatem napisać:

$$S_\infty = \frac{a}{1-q} \text{ pod warunkiem } |q| < 1,$$

co właściwie nie wyraża nic innego, jak tylko, że „iloraz" jest tutaj ułamkiem właściwym. Według tego nowego wzoru zbadajmy najpierw szereg Archimedesa dla „powierzchni paraboli". Był on postaci

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256} + \tfrac{1}{1024} + \ldots\ldots$$

Tu wyraz początkowy *a* równa się 1. „Iloraz" jest $\frac{1}{4}$, ponieważ każdy następny wyraz jest czwartą częścią poprzedzającego (czyli każdy wyraz musi się pomnożyć przez $\frac{1}{4}$, aby otrzymać wyraz następny). A zatem suma nieskończenie wielu wyrazów musi dążyć do

$$S_\infty = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}.$$

Jednakowoż $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ równa się $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$, co niedawno właśnie twierdziliśmy.

Mając przed sobą np. szereg

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots$$

wiemy teraz od razu, że jego suma dla nieskończonej ilości wyrazów $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Inny natomiast szereg nieskończony

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} + \cdots$$

ma sumę $S_\infty = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.

Korzystając z naszego wzoru, można powiedzieć ogólnie, że pod warunkiem $|x| < 1$ każdy szereg nieskończony postaci $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots$ jest zbieżny, a suma jego wyrazów wynosi $\frac{1}{1-x}$, co ma również doniosłe znaczenie.

Z tych kilku przykładów poznajemy już, że w obliczaniu sum szeregów nieskończonych zbieżnych tkwi wyraźnie nieskończonościowe prawo, dzięki czemu możemy rozwiązywać również rozmaite problemy geometryczne. O ile, dajmy na to, potrafimy jakąś figurę, chociażby nawet ograniczoną linią krzywą, rozłożyć na nieskończenie wiele figur, których miary powierzchniowe dadzą się uporządkować według malejącego szeregu geometrycznego, wówczas kwadraturę można przeprowadzić bez pomocy rachunku całkowego. Wszak widzieliśmy przykład taki u Archimedesa. I nie mamy prawa wyrażać się z jakimś lekceważeniem o niesłychanej bystrości umysłu ostatnich uczniów Archimedesa, takiego np. Galileusza czy Viviani'ego, którzy w metodzie ekshaustii doszli do niewiarygodnych wprost wyników. To oczywiście nie zmienia w niczym faktu, że specjalnie Viviani, przyjaciel wielkiego Leibniza, musiał przeżyć tragedię, skoro będąc u szczytu swej twórczości przez cuda rachunku nieskończonościowego pozbawiony został wszystkich owoców swych trudów i bez ratunku strącony z tronu matematycznego. My epigoni jednak sięgnijmy teraz śmiało po dojrzały owoc.

ROZDZIAŁ TRZYDZIESTY PIERWSZY

TECHNIKA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

Ponieważ tak sumiennie objaśniliśmy podstawy naszej sztuki, jest obowiązkiem naszym obecnie wyprowadzić czysto formalnie algorytm wyższej matematyki. I jako fundamentalne twierdzenie rachunku różniczkowego stawiamy na czele Leibnizowską równość. Brzmi ona: Pochodna funkcji $= \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. W istocie niczego innego nie daje ta równość, jak tylko inny sposób zapisania tego, co już zbadaliśmy czysto rachunkowo. Wszak swego czasu utworzyliśmy pochodną w ten sposób, że od nowej wartości funkcji $(y + \Delta y) = f(x + \Delta x)$, która powstaje przez przyrost Δx, odjęliśmy dawną wartość funkcji $y = f(x)$. A zatem

$$\begin{array}{rl} y + \Delta y = & f(x + \Delta x) \\ -y \quad = & -f(x) \\ \hline \Delta y = & f(x + \Delta x) - f(x). \end{array}$$

Jeżeli teraz podzielimy obie strony równości przez Δx, otrzymamy istotnie

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Przyjmując coraz mniejsze przyrosty Δx na x (co wyrażamy inaczej mówiąc, że Δx zmierza do 0) otrzymujemy za każdym razem inny przyrost wartości funkcji Δy, a tym samym odpowiadający ciąg wartości ilorazów $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Jeżeli wartości ilorazów $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zmierzają do jakiejś wartości granicznej, gdy Δx dąży do zera, to gra-

nicę tę nazwaliśmy pochodną funkcji i, jak już wiemy, oznaczyliśmy symbolem $\frac{dy}{dx}$, a również $f'(x)$ lub y'. Stąd wynika słuszność naszej pierwszej równości.

Szczerze mówiąc, musimy teraz wyznać, że „równość Leibniza" jest dopiero pewnego rodzaju skorupą, z której w każdym poszczególnym wypadku trzeba wyłuskać jądro. A to nie zawsze tak łatwo. Jeżeli się jednak postępuje systematycznie, można wyprowadzić niejako podstawowe reguły różniczkowania, które uprzystępniają posługiwanie się rachunkiem różniczkowym nawet w skomplikowanych wypadkach, jak gdyby szło np. o mnożenie czy dzielenie. Ponieważ w funkcjach występują stale potęgi x, zajmiemy się najpierw uzyskaniem ogólnego prawidła różniczkowania potęgi. Zacznijmy od najprostszego przypadku, potęgi pierwszej. Np.:

$$y = x + 6.$$

Wtedy jest $y + \Delta y = (x + \Delta x) + 6$, a iloraz różnicowy według wzoru Leibniza

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) + 6 - (x + 6)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x + 6 - x - 6}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Ponieważ iloraz ma wartość stałą, równą liczbie 1, więc granica będzie:

$$\frac{dy}{dx} = 1.$$

Już przy tym należy zauważyć, że wszystkie stałe dodane, bądź odjęte (w naszym wypadku $+6$), przy różniczkowaniu po prostu znikają. Przyczynę, która to powoduje, zbadamy później. Teraz druga potęga:

$$y = x^2 - 7.$$

Wtedy według wzoru Leibniza jest:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - 7 - (x^2 - 7)}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 7 - x^2 + 7}{\Delta x} =$$

$$= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Tutaj również zniknęła po prostu liczba stała (odejmowana!). Pozostało wyrażenie, w którym występuje Δx. Przechodząc do granicy i uwzględniając, że $\Delta x \to 0$, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Teraz moglibyśmy wspinać się uciążliwie coraz wyżej od potęgi do potęgi, drogą tzw. „indukcji zupełnej". Jako doświadczeni matematycy porzucimy taką okrężną drogę, ponieważ dzięki twierdzeniu o potędze dwumianu jesteśmy w stanie rozwiązać sprawę ogólnie. Wypadało by zatem zróżniczkować $y = x^n + a$.

Ponieważ wedle struktury wzoru Leibniza stała i tak **musi** zniknąć, odrzućmy ją i rozważajmy dalej funkcję

$$y = x^n.$$

Przyrost x o Δx daje nam

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n.$$

A iloraz różnicowy według wzoru Leibniza musi brzmieć:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Jeżeli teraz rozwiniemy dwumian $(x + \Delta x)^n$ według twierdzenia o potędze dwumianu, otrzymamy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} (\Delta x)^3 + \ldots] - x^n}{\Delta x}.$$

Jak widać, x^n zniesie się zawsze z $(-x^n)$, tak że zostanie:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} (\Delta x)^3 + \ldots}{\Delta x} =$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x + \binom{n}{3} x^{n-3} (\Delta x)^2 + \ldots$$

Dalej widać jednak, że w każdym przypadku po rozwinięciu dwumianu i uproszczeniu przez Δx, **musi** to Δx już w trzecim wyrazie (po odpadnięciu x^n) występować w potędze wyższej niż pierwszej. Wynika to ze struktury naszego twierdzenia o potędze dwumianu. Otóż, gdy Δx zmierza do zera, wówczas $(\Delta x)^2$ jako nieskończenie mała drugiego rzędu „prędzej" jeszcze zmierza do zera. A pomnożona przez stałą skończoną wartość dalej zdąża do zera. Tym bardziej stosuje się to do dalszych wyrazów, które jako czynniki zawierają nawet nieskończenie małe trzeciego, czwartego itd. rzędu. W granicy otrzymamy zatem:

$$\frac{dy}{dx} = \binom{n}{1} x^{n-1} = n x^{n-1}.$$

A więc otrzymaliśmy bezpośrednio ogólny wzór na pochodną potęgi. Brzmi on

$$\frac{d(x^n)}{dx} = (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Jak wspaniale zgadza się algorytm, można sprawdzić np. na $y = x$, $y = x^2$ i na funkcji stałej. Dla $y = x$ otrzymuje się $y' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$, dla $y = x^2$ wypada $y' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$, a dla stałej, którą można napisać jako $y = ax^0$, wynika $y' = a \cdot 0 \cdot x^{0-1} = a \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$. Tak więc np. pochodna funkcji $y = x^{16}$ byłaby równa $\frac{dy}{dx} = y' = 16x^{16-1} = 16x^{15}$. Można zauważyć, że jedną z właściwości rachunku różniczkowego jest obniżanie się wykładnika potęgowego o jeden. Dla całokształtu zauważmy jeszcze, że wzór nasz ważny jest nie tylko dla wykładników całkowitych dodatnich, ale również dla ujemnych i ułamkowych, tak że pochodna np. dla $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ (gdy $x > 0$) brzmi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

albo dla $y = x^{-3}$ ma postać $\frac{dy}{dx} = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$. Że w wypadku potęg o wykładnikach ujemnych wykładniki się podwyższają zamiast obniżać, to stanowi tylko pozornie wyjątek. Bo wykładnik ujemny oznacza potęgę w mianowniku ułamka, a jeśli potęga rośnie, to rośnie mianownik, ale wartość ułamka m a l e j e. Z tego „zmniejszania się" wykładnika funkcji poddanej różniczkowaniu, podobnie jak i z tej okoliczności, że różniczkowanie przyjmuje za podstawę iloraz, można by wnioskować, że należy ono do peracji litycznych. Całka natomiast jest pewną odmianą sumy i, jak zobaczymy, podwyższa wykładnik funkcji, a tym samym i wartość funkcji. Dlatego rachunek całkowy należałby do działań tetycznych. Tak też go traktujemy. Wszelako zasadniczy powód przeciwko takiemu zaszeregowaniu stanowi okoliczność, że pochodną można zawsze utworzyć, podobnie jak sumę i iloczyn, bezpośrednio i jednoznacznie, podczas gdy obliczanie wartości całki strukturalnie przez to okazuje podobieństwo do dzielenia i pierwiastkowania, że pociąga za sobą jakąś niepewność, wieloznaczność i konieczność próbowania.

Uważny czytelnik mógł zauważyć, że w naszych dotychczasowych różniczkowaniach zmienna niezależna x występowała zawsze

bez współczynnika.[1] Dla zmiennej zależnej y jest to prawie zupełnie oczywiste. Bo różniczkujemy dopiero wtedy, gdy doprowadzimy funkcję do postaci $y = f(x)$, rozwiązanej na y. Natomiast ten brak współczynnika przy potęgach x wcale nie jest oczywisty. Wręcz przeciwnie: Potęgi x występują nawet z reguły ze współczynnikami. Ponieważ jednak współczynniki to nic innego jak stałe, przez które się zmienną mnoży, należy natychmiast zbadać, czy wielkości stałe, mnożące zmienną, znikają podobnie jak te, które się do zmiennej dodaje czy od niej odejmuje. Spróbujmy zatem zróżniczkować funkcję

$$y = 3x^2 + 19.$$

Według wzoru Leibniza jest

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3(x+\Delta x)^2 + 19 - (3x^2 + 19)}{\Delta x}, \text{ a więc}$$

$$= \frac{3[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] + 19 - 3x^2 - 19}{\Delta x} =$$

$$= \frac{3x^2 + 3 \cdot 2x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 19 - 3x^2 - 19}{\Delta x} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 3 \cdot 2x + 3 \cdot \Delta x,$$

a że $\Delta x \longrightarrow 0$, a więc $3 \,.\, \Delta x \longrightarrow 0$, zatem w granicy jest:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \,.\, 2x = 6x.$$

Widzimy, że stała, która jako współczynnik mnoży zmienną, po zróżniczkowaniu pozostaje. Mianowicie otrzymalibyśmy ten sam rezultat, jeślibyśmy funkcję $y = 3(x^2) + 19$ zróżniczkowali stosując dwa odrębne chwyty, a to w ten sposób, że najpierw znaleźlibyśmy pochodną z x^2, a następnie pomnożylibyśmy ją przez 3. Pochodna z x^2 jest $2x$, to razy 3 jest $3 \,.\, 2x = 6x$. Tak czy owak, dodana stała 19 znika w każdym razie.

Teraz zbadajmy tylko jeszcze, czy potrafimy różniczkować w tym wypadku, gdy w jednej funkcji występuje więcej potęg x. O ile by to nam się udało, umielibyśmy różniczkować już wszystkie funkcje tzw. „całkowite wymierne", a ponadto wszystkie funkcje z wykładnikami ułamkowymi i ujemnymi, o ile są postaci

$$y = ax^n \pm bx^{n-1} \pm cx^{n-2} \pm \ldots\ldots \text{ itd.}$$

[1] Tzn. ze współczynnikiem równym jedności, którego nie pisze się zwykle.

Jak powiedziano, n może być przy tym również ułamkiem lub liczbą ujemną.

Próbujemy zatem zastosować naszą zwykłą metodę do funkcji

$$y = 4x^3 - 7x^2 + 9x - 26.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4(x+\Delta x)^3 - 7(x+\Delta x)^2 + 9(x+\Delta x) - 26 - (4x^3 - 7x^2 + 9x - 26)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{4(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - 7[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] + 9(x+\Delta x) - 26 - (4x^3 - 7x^2 + 9x - 26)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{4x^3 + 4\cdot 3x^2\Delta x + 4\cdot 3x(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 - 7x^2 - 7\cdot 2x\Delta x - 7(\Delta x)^2 + 9x + 9\Delta x - 26 - 4x^3 + 7x^2 - 9x + 26}{\Delta x} =$$

$$= 4\cdot 3x^2 + 4\cdot 3x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 7\cdot 2x - 7\cdot\Delta x + 9.$$

Po dodaniu wyrazów podobnych, następnie podzieleniu przez Δx i przejściu do granicy otrzymamy:

$$\frac{dy}{dx} = 4 \,.\, 3x^2 - 7 \,.\, 2x + 9 = 12x^2 - 14x + 9.$$

Ten sam wynik otrzymalibyśmy, jeślibyśmy różniczkowali wyraz po wyrazie. Bo pochodna z $4x^3$ jest $4 \,.\, 3x^2 = 12x^2$, z $-7x^2$ równa się $-7 \,.\, 2x = -14x$, a wreszcie z $9x$ jest $9 \,.\, 1 \,.\, x^0 = 9$. Stała (-26) oczywiście odpada. A więc wiemy teraz, że pochodna sumy równa się sumie pochodnych poszczególnych składników.[1]

Dla ostrzeżenia należy z naciskiem zauważyć, że przy różniczkowaniu iloczynu lub ilorazu, np. $y = (x^2 + 3x + 1)(5x - 16)$ albo $y = \frac{2x^3 - 7}{3x + 9}$, nie można bynajmniej postępować analogicznie. Ale gdzie to możliwe, warto spróbować przed zróżniczkowaniem wymnożyć lub wydzielić, gdyż przez to możemy otrzymać funkcję, dostępną naszym wiadomościom.

---

[1] „Suma" stale jest tutaj rozumiana jako „suma algebraiczna", zawiera zatem w sobie odejmowanie, które można traktować jako dodawanie wyrazów o współczynnikach ujemnych.

Teraz, kiedy wyczerpaliśmy właściwie wszystko, co wiedzieć musimy o rachunku różniczkowym, aby obliczać pochodne, czas najwyższy podać geometryczne znaczenie pochodnej, z czego wynika wielki zakres zastosowań naszego algorytmu, mianowicie wyznaczanie maksimów i minimów, tzn. największych i najmniejszych wartości funkcji, albo, jak się też mówi, ekstremów funkcji. Wiemy, że pochodna to nic innego, jak tylko granica przyrostu rzędnej, odpowiadającego dowolnie małemu przyrostowi odciętej, do tegoż przyrostu odciętej. Inaczej mówiąc: jak się ma w granicy przyrost rzędnej do przyrostu odciętej, jeżeli jakieś x wzrośnie o dowolnie małą wielkość.

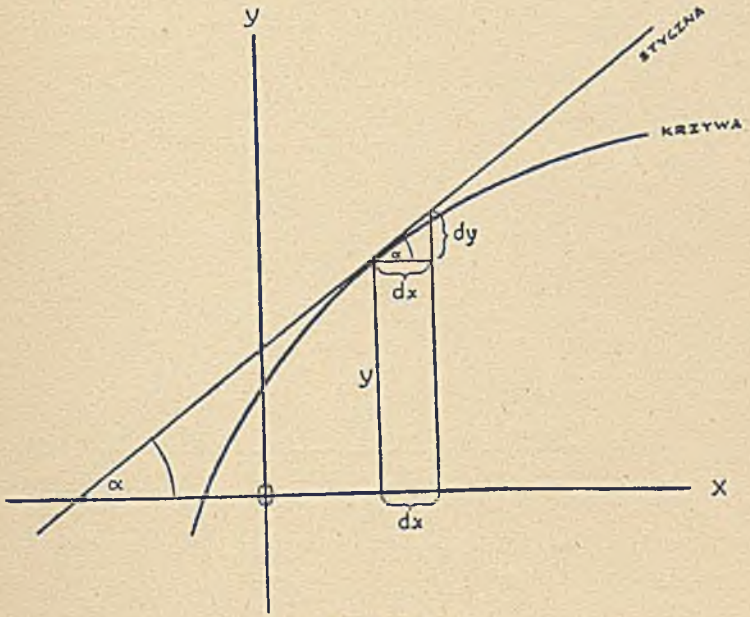


Fig. 56.

Ponieważ ds, jak wiadomo, to nic innego tylko nieskończenie mały odcinek stycznej, wobec tego mogę ten odcinek przedłużyć aż do przecięcia się z osią x-ów. Ale kąt, pod którym styczna przecina oś x-ów, jest równy kątowi pomiędzy ds a dx, ponieważ jedno ramię (ds i jego przedłużenie) są identyczne, podczas gdy drugie ramię z założenia jest równoległe do osi x-ów. Jeżeli teraz przedstawię iloraz różniczkowy $\frac{dy}{dx}$ jako funkcję trygonometryczną, wówczas mu-

szę przyznać, że stosunek przyprostokątnej przeciwległej kątowi do przyprostokątnej przyległej kątowi, to nic innego jak funkcja tangens kąta α. Odpowiednia wartość liczbowa ilorazu różniczkowego, czyli pochodnej, jest więc w każdym punkcie krzywej równa wartości funkcji tangens kąta, jaki tworzy styczna do krzywej w rozważanym punkcie z osią odciętych, przy czym zawsze z dodatnim jej kierunkiem. Sama natomiast różniczka funkcji, czyli $df(x)$ (albo dy), jest przyrostem rzędnej odpowiadającym dowolnemu przyrostowi zmiennej niezależnej (dx), ale nie rzędnej samej krzywej $y = f(x)$, lecz przyrostem rzędnej linii prostej, stycznej do krzywej w rozważanym punkcie. Krótko — różniczka funkcji oznacza przyrost rzędnej, nie wzdłuż krzywej jednak, lecz wzdłuż stycznej.

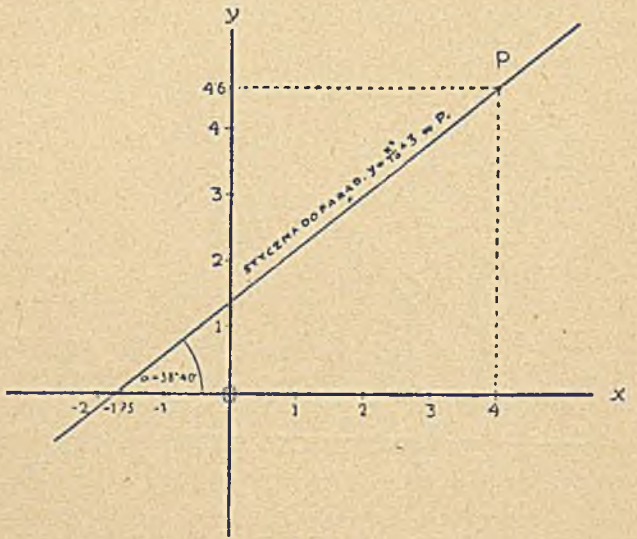


Fig. 57.

Z tego otrzymuje się niesłychanie ważny wynik, a mianowicie: równanie analityczne krzywej dozwala obliczyć współrzędne każdego punktu krzywej, podczas gdy pochodna wyznaczona z tego równania analitycznego (funkcji) zawiera w sobie niejako ogólne prawo przebiegu krzywej, to znaczy każdorazowego nachylenia jej stycznej. Wystarczy tylko wstawić we wzór funkcyjny dowolną liczbę za x, a przez to znamy natychmiast y, to znaczy wiemy, gdzie leży odpowiedni punkt krzywej. Jeżeli jednak podstawimy

za x tę samą wartość w wyrażeniu na pochodną tej funkcji, to wiemy ponadto, jakie nachylenie względem osi x-ów ma styczna do krzywej w tym punkcie. Pokażemy na konkretnym przykładzie ten „hokus-pokus", który dozwala nam wykreślić styczną, nie widząc nawet krzywej. Mamy wyznaczyć bieg paraboli $\frac{x^2}{10}+3$ w punkcie $x=4$. (Por. fig. 57.)

Dla $x=4$ jest $y=\frac{16}{10}+3=\frac{46}{10}=4{\cdot}6$. A więc punkt P ma współrzędne $x=4$, $y=4{\cdot}6$. Zróżniczkujmy funkcję $y=\frac{x^2}{10}+3$, a otrzymamy jako pochodną $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{10}\cdot 2x=\frac{x}{5}$. A zatem przy $x=4$ wartość funkcji tangens kąta, utworzonego przez styczną w tym punkcie P z osią odciętych, równa się $\frac{4}{5}$ czyli $0{\cdot}8$. Tej wartości odpowiada kąt wynoszący 38 stopni 40 minut. Styczna zatem ma położenie wskazane na rysunku. Jeślibyśmy obecnie wykreślili całą parabolę, musiałaby styczna przylegać dokładnie do paraboli we właściwym miejscu i we właściwy sposób.

ROZDZIAŁ TRZYDZIESTY DRUGI

MAKSIMA I MINIMA

Powyższa własność pochodnej była historycznie przyczyną jej odkrycia. Jej drzewo genealogiczne wyrasta niejako z problemów „stycznościowych", które zwłaszcza w siedemnastym wieku od czasu Descartes'a coraz bardziej zaczęto doceniać i coraz dokładniej badać. Przyczyną tego zainteresowania była między innymi rzecz następująca: Każdy w jakiś sposób regularny przebieg albo związek pomiędzy wielkościami da się wyrazić za pomocą funkcji, a przez to znowu za pomocą krzywej. Otóż w obrębie badanej części (przedziału) tej krzywej może stać się ważnym pytanie, w jakim miejscu owa krzywa (a tym samym i funkcja) osiąga najwyższy łub najniższy punkt (wartość). Owe ekstremalne wartości noszą nazwę „maksimów" i „minimów", które to wyrażenia na pewno są każdemu skądkolwiek bądź znane.

Z rysunku widać od razu, że część krzywej pomiędzy x_1 a x_2 ma zarówno maksimum jak minimum. Stąd dalej jasną będzie dla każdego rzeczą, że styczna zarówno w najwyższym jak i najniższym punkcie naszej części krzywej biegnie poziomo, to znaczy jest równoległa do osi x-ów. Wystarczy przecie wyobrazić sobie tylko krzywą jako wygiętą taśmę blaszaną, do której przyłożono linijkę. Albo jeszcze lepiej, stawiamy tę taśmę blaszaną na stole, nie zmieniając jej dawnego położenia. Z pewnością styka się z poziomą powierzchnią stołu w swym najniższym punkcie. Bo gdyby był jakiś punkt niżej jeszcze położony, wtedy musiałby wnikać w płytę stołu. Teraz nastąpi wielki chwyt Leibniza, opublikowany przezeń w roku 1684 w głośnej rozprawie „O maksimach i minimach itd." równocześnie z algorytmem rachunku różniczkowego w „Acta Eruditorum", pierwszym niemieckim czasopiśmie naukowym, za-

łożonym również przez niego. Skoro pochodna ma wartość funkcji trygonometrycznej tangens, tak bowiem ustaliliśmy, wówczas w tych punktach, gdzie styczna biegnie równolegle do osi x-ów, gdzie więc nie ma w ogóle żadnego nachylenia do osi odciętych, musi pochodna przyjmować wartość zero. Bo tangens 0 stopni, jak już wiemy, równa się 0. Aby więc wyznaczyć maksimum lub minimum, odwra-

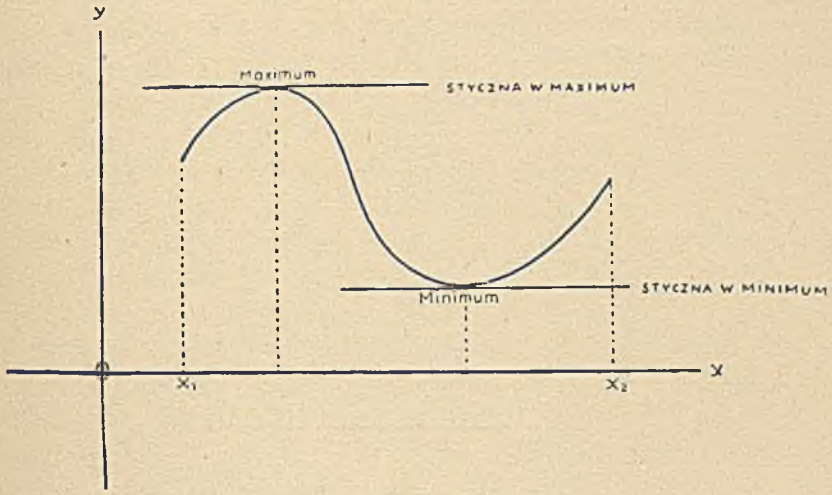


Fig. 58.

cając ten genialny wniosek, kładziemy pochodną $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ i z powstałego stąd równania o jednej niewiadomej obliczamy wartość na x. W tym punkcie x wystarczy tylko poprowadzić rzędną do przecięcia się z krzywą, a musi się ze 100%-ową dokładnością trafić w maksimum albo minimum.

Powiedzieliśmy maksimum „albo" minimum. To wygląda chwiejnie i niezdecydowanie. Komunikujemy jednak dla uspokojenia, że już Leibniz zbadał również wszystkie dodatkowe obliczenia i warunki „rozpoznawcze", na podstawie których można wywnioskować, jaka wartość ekstremalna zachodzi w danym przypadku. Czasami można się tego domyślić z graficznego przedstawienia krzywej, albo z okoliczności zupełnie oczywistych. W każdym razie analiza taka nie jest dla nas aktualna, gdyż zakłada z góry za wiele pojęć, które przekraczają ramy naszego przedsięwzięcia. Pokażemy jednak śmiało i odważnie na kilku interesujących przykładach obli-

czanie wartości ekstremalnych, jako nieodzowne w całej praktyce techniki i fizyki.

Najpierw zadanie klasyczne, że tak powiem: Z kawałka blachy mają być wykonane kwadratowe naczynia, otwarte u góry. W jaki sposób uzyskać można naczynia o możliwie największej pojemności? Ponieważ każde takie naczynie albo pudełko blaszane ma być wykonane z jednego kawałka blachy a potem zlutowane, musi się posiadany kawał blachy pociąć na części kwadratowe, z których każda tworzy materiał na pudełko blaszane.

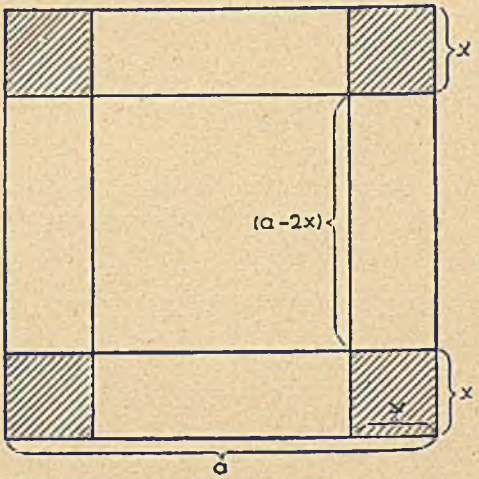


Fig. 59.

Dziecko nawet wie, że pudełko w ten sposób można uzyskać, iż na czterech rogach kwadratu blaszanego wycina się cztery małe i równe sobie kwadraty, a utworzone przez to ściany boczne zagina się ku górze. Ale teraz bynajmniej nie ma pewności, jak wielkie należy wyciąć te (zakreskowane) kwadraty. Teoretycznie rzecz biorąc, długość ich boków x mogłaby wzrastać od 0 aż do $\frac{a}{2}$. Dla 0 cztery narożne punkty byłyby niejako naszymi kwadratami, a pudełko nie miałoby wcale wysokości, ponieważ nie byłoby co zaginać ku górze. Dla $x = \frac{a}{2}$ musiałbym znowu porozcinać całą blachę, a pudełko nie miałoby zupełnie podstawy. Pomiędzy obu tymi wypadkami granicznymi, które wyznaczają w zadaniu zarazem tzw. „przedział", musi się znajdować nieskończenie wiele możliwych pudełek. Począwszy od pudełka, które prawie wcale nie ma wysokości,

a skończywszy na pudełku, którego podstawa jest maleńkim kwadracikiem, a którego wysokość wynosi prawie $\frac{a}{2}$. Jakże mam teraz wśród tego niezliczonego mnóstwa możliwych pudełek znaleźć to właśnie, które naprawdę ma największą pojemność? O ile przede wszystkim uda mi się przedstawić za pomocą jakiejś funkcji, w jaki sposób pojemność zależy od wielkości wyciętych kwadratów, to przez podstawianie różnych wartości na x, zawartych pomiędzy 0 i $\frac{a}{2}$, będę mógł wykreślić krzywą jako obraz graficzny tej zależności. Z rysunku mógłbym w przybliżeniu poznać „maksimum", ponieważ najwyższy punkt krzywej wewnątrz naszego przedziału wskazuje to maksimum. Ale w ten sposób znałbym wartość ekstremum jednak tylko „na oko". Dokładnie, jak już objaśniliśmy, mogę ją znaleźć wtedy tylko, gdy wyznaczę punkt krzywej, w którym styczna biegnie równolegle do osi odciętych, a więc mówiąc arytmetycznie, tę wartość na x, dla której pochodna funkcji równa się zeru. Tym samym zadanie na wyznaczenie ekstremum wymaga stale kilku operacji. Po pierwsze — wyznaczenia przedziału, w obrębie którego szuka się maksimum czy minimum. Po drugie — ustalenia funkcji, której wykres ma wskazać wartość ekstremum swoim najwyższym względnie najniższym punktem. Po trzecie — wyznaczenia pochodnej tej funkcji. Po czwarte — przyrównania pochodnej do zera, z czego powstanie równanie z niewiadomą x. Po piąte — rozwiązania tego równania względem x, przez co znajdzie się wartość ekstremum. Nie bierzemy pod uwagę koniecznej ponadto jeszcze analizy, czy wewnątrz przedziału ekstremum istnieje w ogóle, jak i badania, czy otrzymana w każdym wypadku wartość ekstremalna stanowi maksimum czy minimum, jako wykraczających poza nasze ramy. Dlatego też wybieramy tylko takie przykłady, które niejako same przez się dają odpowiedź na to pytanie.

Postępujmy teraz ściśle według naszych reguł pomocniczych. Stwierdziliśmy co dopiero jako przedział dla naszego x wartości od 0 do $\frac{a}{2}$. Teraz należało by zbudować funkcję. Ponieważ szukamy pojemności, która ma być maksimum, oznaczamy każdą możliwą pojemność przez y. To y musimy teraz wyrazić przez daną liczbę a (długość boku kawałka blachy) i przez dowolne x (długość boku każdego z kwadratów, przeznaczonych do wycięcia). Ale pojemność tego rodzaju prostopadłościanu (graniastosłupa prostego o podstawie kwa-

dratowej[1]) równa się liczbie wymiarowej powierzchni podstawy pomnożonej przez miarę wysokości. Podstawa pudełka musi mieć długość boku $(a - 2x)$, w następstwie czego pole podstawy wynosi $(a - 2x)^2$. Każdorazowa jednak wysokość pudełka to po prostu x, ponieważ pozaginane części wykazują taką szerokość. A zatem pojemność $= y = (a - 2x)^2 x$, czyli $y = (a^2 - 4ax + 4x^2)x$, co po wyrachowaniu i uporządkowaniu według malejących potęg x daje funkcję $y = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$. Jako następny krok pozostaje teraz utworzyć pochodną tej funkcji.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2ax + a^2 \cdot 1 \cdot x^0$$
$$= 12x^2 - 8ax + a^2.$$

Tę pochodną należy przyrównać do zera. A więc:

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0.$$

Według reguł rozwiązywania równań kwadratowych należy najpierw „izolować" x. Podzieliwszy w tym celu obie strony równania przez 12 otrzymamy:

$$x^2 - \frac{8}{12}ax + \frac{a^2}{12} = 0, \quad \text{czyli}$$
$$x^2 - \frac{2a}{3}x + \frac{a^2}{12} = 0.$$

Liczba a jest znaną „stałą" wielkością. W konkretnym przypadku to właśnie wybrana długość boku kwadratowego kawałka materiału. Dlatego a traktujemy po prostu jako jakąś liczbę szczegółową lub współczynnik. Według reguł o rozwiązywaniu równań kwadratowych pełnych otrzymuje się na x wartość:

$$x = \frac{2a}{6} \pm \sqrt{\frac{4a^2}{36} - \frac{a^2}{12}}$$
$$= \frac{2a}{6} \pm \sqrt{\frac{4a^2 - 3a^2}{36}}$$
$$= \frac{2a}{6} \pm \sqrt{\frac{a^2}{36}}$$
$$= \frac{2a}{6} \pm \frac{a}{6}.$$

Na x otrzymuje się zatem dwie wartości $\frac{a}{2}$ i $\frac{a}{6}$. Skoro jednak $\frac{a}{2}$ nie wchodzi w rachubę jako wartość na x, ponieważ nie leży w e-

[1] Ogólnie biorąc, podstawą prostopadłościanu może być dowolny prostokąt. W naszym wypadku jest nią specjalny prostokąt, mianowicie kwadrat.

wnątrz przedziału, a stanowi tylko przypadek krańcowy przedziału, w dodatku jeszcze w praktyce pozbawiony sensu, znaleźliśmy więc, że pudełko ma największą pojemność wtedy, gdy płytę blaszaną pozagina się wzdłuż wszystkich czterech boków o $\frac{a}{6}$. To znaczy, kwadrat podstawy miałby wówczas boki o długości $\frac{4a}{6} = \frac{2}{3}a$, wyso-

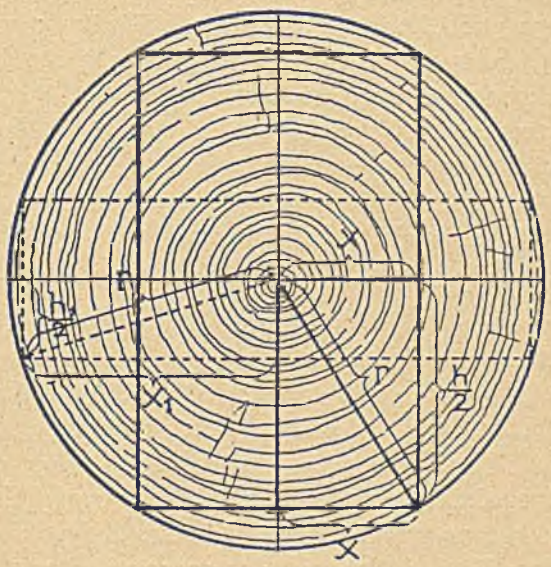


Fig. 60.

kość zaś wynosiłaby $\frac{a}{6}$. Aby sobie stworzyć choć przybliżone pojęcie o tym, czy nasz rachunek się zgadza, przyjmijmy, że w użytej do przeróbki kwadratowej płycie blaszanej długość jednego boku wynosi 60 cm. Pole podstawy, w wypadku wycięcia kwadratów o długości boku $\frac{a}{6}$, a więc 10 cm, wynosiłoby 4×4, czyli 16 decymetrów kwadratowych, wysokość 1 decymetr. A zatem pojemność wynosiłaby dokładnie 16 decymetrów sześciennych, czyli 16 litrów. Gdybyśmy wycięli kwadraty o długości boków tylko 5 cm, to pole podstawy wynosiłoby 5×5, a więc 25 decymetrów kwadratowych. Miara wysokości, która tutaj wynosi 5 cm $= \frac{1}{2}$dcm, pomnożona przez 25 daje pojemność tylko $12\frac{1}{2}$dcm^3, czyli $12\frac{1}{2}$litra. A więc z pewnością

mniejszą niż poprzednio. Gdybym natomiast obrał kwadraty o długości boków np. 15 cm, wtedy pole podstawy pudełka byłoby $3 \times 3\ \text{dcm}^2 = 9\ \text{dcm}^2$, wysokość $15\ \text{cm} = 1{\cdot}5\ \text{dcm}$, a zatem pojemność wynosiłaby $9 \,.\, 1{\cdot}5\ \text{dcm}^3 = 13{\cdot}5\ \text{dcm}^3 = 13{\cdot}5$ litra, co w każdym razie jest mniejsze, niż pojemność pudełka, w którym x równa się $\frac{a}{6}$.

Po tym wstępnym ćwiczeniu, drugi przykład, wzięty ze statyki, sprawi nam już daleko mniej trudności. (Por. fig. 60.)

Z okrągłego pnia drzewa należy wyciąć belkę o przekroju prostokątnym w ten sposób, aby jej siła nośna przy danej długości stanowiła maksimum.[1] Promień przekroju pnia jest nam znany i oznaczamy go przez r. Przyjmijmy bez dowodu, że znany nam też jest udział, jaki biorą w sile nośnej wysokość i szerokość przekroju belki. Ta „wytrzymałość" $= F =$ kwadrat wysokości razy szerokość przekroju. A więc $F = h^2b$. Jeżeli oznaczymy teraz połowę szerokości przez x, wtedy w myśl twierdzenia Pitagorasa $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 - x^2$, czyli $\frac{h^2}{4} = r^2 - x^2$, czyli $h^2 = 4r^2 - 4x^2$. Otóż „wytrzymałość" ma tworzyć maksimum. Wytrzymałość $= F = h^2b$. Ale ponieważ, jak wiemy, $h^2 = 4r^2 - 4x^2$ oraz $b = 2x$, a więc ostatecznie $F = y = (4r^2 - 4x^2) \,.\, 2x$, czyli $y = 8r^2x - 8x^3$. Obecnie posiadamy już funkcję.

Ale jaki „przedział" należy wziąć pod rozwagę? Szerokość (2x) może się zawierać w granicach od 0 do 2r. Z rysunku jest to wyraźnie widoczne. W dodatku, granice same są w zastosowaniu bez sensu, gdyż dla nich belka nie miałaby wcale w jednym wypadku szerokości, w drugim wysokości. Stwierdzamy ponadto, że nas obchodzą tylko dodatnie wartości na x. Bo szerokość ujemna byłaby technicznie pojęciem bez sensu tak samo jak belka bez szerokości lub bez wysokości. Teraz utwórzmy pochodną funkcji.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 8r^2 \,.\, 1 \,.\, x^0 - 8 \,.\, 3 \,.\, x^2$$
$$= 8r^2 - 24x^2.$$

Następny krok to przyrównanie do zera pochodnej i rozwiązanie otrzymanego stąd równania na x.

---

[1] Zaznaczone linią przerywaną ograniczenie przekroju belki oznacza jedną z nieskończenie wielu innych możliwości wycięcia.

$$8r^2 - 24x^2 = 0$$
$$24x^2 = 8r^2$$
$$x^2 = \frac{8}{24}r^2$$
$$x^2 = \frac{1}{3}r^2$$
$$|x| = \sqrt{\frac{r^2}{3}}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{r^2}{3}}$$
$$x = \pm r\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{r}{\sqrt{3}} = \pm\frac{r\sqrt{3}}{3} = \pm\frac{r}{3}\sqrt{3}.$$

Ponieważ interesuje nas tylko wartość dodatnia, stwierdzamy, że belka ma największą wytrzymałość, jeżeli szerokość ($b = 2x$) ma wartość $\frac{2r}{3}\sqrt{3}$ długości promienia. Dla promienia o długości 1 dcm dawałoby to nam szerokość belki około 1·15470 dcm.

Na zakończenie jeszcze zagadnienie na minimum. Wiadomo, że w kwadrat wpisać można nieskończenie wiele kwadratów. Który z tych kwadratów wpisanych ma najmniejsze pole?

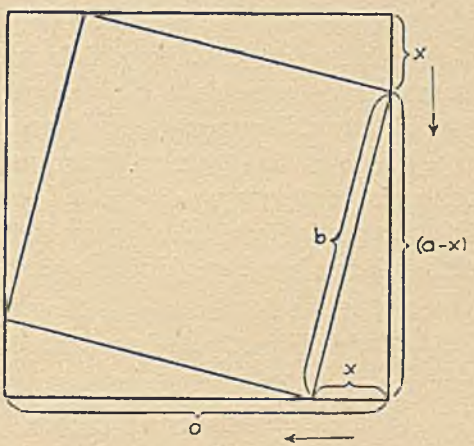


Fig. 61.

Dla ustalenia przedziału należy wziąć pod rozwagę wszystkie kwadraty, dla których x zawarte jest pomiędzy 0 i a. Otrzymam na pewno kwadrat wpisany o największym polu, jeżeli $x = 0$. Bo wtedy przecie jest to sam duży kwadrat. Niech teraz x zwiększa się coraz bardziej w kierunku strzałki, wtedy pole kwadratu wpisanego staje się coraz mniejsze. Wszelako dopóty tylko, dopóki x nie przekroczy pewnego nieznanego jeszcze punktu na odcinku a. Bo

kiedy x osiągnie w końcu długość a, wtedy kwadrat wpisany obróci się niejako o 90° i będzie co do wielkości znowu taki sam, jak duży kwadrat. Teraz szukamy funkcji. Niech długość boku kwadratu wpisanego będzie b, skutkiem czego jego pole b^2. To pole ma tworzyć minimum. A więc $b^2 = y$. Ale jak teraz wyrazić b^2 przez x, od którego zależy — rzecz jasna — wielkość pola kwadratu, jak to już widzieliśmy przy „wyznaczaniu przedziału"? Otóż znowu przychodzi nam z pomocą Pitagoras. Bo $b^2 = x^2 + (a-x)^2$, co po wyliczeniu daje $b^2 = x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$. Funkcja zatem już ustalona:

Pole kwadratu wpisanego $= b^2 = y = 2x^2 - 2ax + a^2$. Zróżniczkowanie funkcji daje $y' = 2 \cdot 2x - 2a \cdot 1 \cdot x^0$, czyli $y' = \frac{dy}{dx} = 4x - 2a$. Wedle dawnej recepty przyrównuje się obecnie pochodną do zera i rozwiązuje równanie na x. A więc:

$$4x - 2a = 0$$
$$4x = 2a$$
$$x = \frac{a}{2}.$$

Ponieważ maksymalne wartości w przedziale naszym dawały, jak już zbadaliśmy, same krańce przedziału, a zatem między owymi krańcami leżeć musi minimum. Na własne oczy przecie widzieliśmy, że pole kwadratu wpisanego po minięciu granicy zero na x, staje się coraz mniejsze, aż w końcu przy $x = a$ znowu jest tak wielkie jak przy $x = 0$. Dalej, rachunek daje jedną tylko wartość na to minimum. A więc minimum istnieje i znajduje się dokładnie symetrycznie pomiędzy 0 i a, mianowicie dla $x = \frac{a}{2}$. Pozostawiamy czytelnikowi do zbadania, jak wielkie jest pole kwadratu np. dla $a = 1$ dcm, jeżeli raz podstawię za x wartość minimum $\frac{a}{2}$, czyli 5 cm $= \frac{1}{2}$ dcm, a potem np. $x = \frac{a}{4}$ oraz $x = \frac{3a}{4}$. Ponieważ krzywa jest symetryczna, musimy dla obu ostatnich wartości na x otrzymać równe kwadraty wpisane, które wszelako muszą mieć pola większe niż kwadrat minimalny dla $x = \frac{a}{2}$. Pola należy obliczać podług wzoru $b^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$. (Rozwiązanie: Przy minimum jest $b^2 = \frac{a^2}{2}$, przy obu tamtych wartościach na x jest $b^2 = \frac{5}{8} a^2$).

ROZDZIAŁ TRZYDZIESTY TRZECI

TECHNIKA CAŁKOWANIA

Musimy znowu nawiązać do tego miejsca, w którym przerwaliśmy rozważanie nad problemem całkowania. Stwierdziliśmy tam, że funkcja pod znakiem całki pozostaje dokładnie w takim stosunku do wartości obliczanej całki, jak pochodna do funkcji, z której ją obliczono. A więc $F(x) = \int y'dx$ czyli $\int f'(x)dx$, ponieważ $dy = f'(x)dx$, a zcałkowanie obu stron tego ostatniego równania daje $\int dy = \int f'(x)dx$. Ale $\int dy$ to jest $F(x)$, tak zwana funkcja pierwotna, czyli po prostu y.

Ponieważ w międzyczasie poznaliśmy podstawowe reguły rachunku różniczkowego, wyjdziemy od rzeczy znanych, przechodząc kolejno do nieznanych, aby zyskać pewne prawidła całkowania. Po prostu zróżniczkujemy jakąś funkcję, a następnie spróbujemy pochodną przekształcić znowu w funkcję pierwotną za pomocą całkowania. Dzięki próbie takiej będziemy mogli odpowiednio, przynajmniej taką żywimy nadzieję, naświetlić istotę techniki całkowania czysto arytmetycznie. A skoro tylko będziemy w posiadaniu algorytmu całkowania, wówczas osiągniemy właściwie ostateczny cel naszej książki.

Wybieramy zatem jako funkcję „pierwotną" funkcję

$$F(x) = y = 2x^3 - 7x^2 + x + 89$$

i tworzymy jej pochodną. Brzmi ona:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y' = 2 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x + 1 \cdot x^0 = 6x^2 - 14x + 1.$$

Spostrzegamy już tu fatalną wieloznaczność całki. Mianowicie nikt na całym świecie nie będzie w stanie w każdym przypadku powrotnego przekształcania pochodnej na funkcję pierwotną

(a to przecie jest istotą całki) podać, jak wielka była stała. Nie wiadomo nawet, czy jakaś stała dana była w ogóle. Co więcej, może nawet było tych stałych więcej, może iloczyn, a może iloraz stałych, które przy różniczkowaniu zniknęły na zawsze. A więc jeżeli funkcję pod całką uważa się istotnie za pochodną jakiejś nieznanej nam jeszcze funkcji pierwotnej, wówczas, logicznie biorąc, nie można mówić o j e d n e j funkcji pierwotnej. Każdej pochodnej odpowiada nieskończenie wiele funkcji pierwotnych, z których mogła ona powstać. A owe funkcje pierwotne różnią się właśnie przez dodanie, bądź odjęcie jakiejś stałej C. Ściśle poprawnie muszę zatem napisać: $F(x) = y = \int f'(x)\,dx \pm C$, albo $\int f'(x)\,dx + C$, jeżeli pozostawię swobodę, by stałej C nadawać także wartości ujemne. W tej też postaci pisze się zawsze całkę nieokreśloną, a o ile jej tak nie napisano, należy właśnie dodać w myśli zupełnie dowolną stałą C. W jaki sposób unieszkodliwia się tę stałą przy całce określonej, dla uzyskania której właściwie obliczamy całkę nieokreśloną, i jakie znaczenie fizyczne oraz geometryczne posiada ta stała, pokażemy później. Na razie nie troszczmy się o nią więcej.

Twierdziliśmy zatem, że funkcja pierwotna $F(x)$ czyli y musi być równa całce $\int f'(x)\,dx$, czyli w naszym konkretnym przypadku:

$$F(x) = y = \int (6x^2 - 14x + 1)\,dx + C.$$

W praktyce zauważyć należy, że dx zamyka zawsze na prawo „zawartość" całki, tak iż nikt nie może mieć wątpliwości, że + C stoi poza znakiem całki. Obecnie ignorujemy w ogóle to C. Porównujemy natomiast wyrazy zawierające x dawnej funkcji pierwotnej z odpowiednimi wyrazami pod znakiem całki. W tym celu napiszmy je najpierw odpowiednio pod sobą:

potęgi x funkcji pierwotnej: $2x^3 - 7x^2 + x$
potęgi x pod znakiem całki: $6x^2 - 14x + 1$.

Zauważmy najpierw, że podobnie jak przy różniczkowaniu można również całkować „wyraz po wyrazie", o ile dotyczy to potęg x połączonych znakiem dodawania lub odejmowania. Ustalamy to od razu jako regułę i piszemy

$$\int (6x^2 - 14x + 1)\,dx = \int x^2 dx - \int 14x dx + \int 1 dx.$$

A więc całka sumy równa się sumie całek jej składników. Po wtóre przypomnijmy sobie, że przy różniczkowaniu „stała" wystę-

pująca jako współczynnik przy zmiennej x nie ulegała zmianie i po zróżniczkowaniu pozostawała dalej jako współczynnik. Dlatego możemy wszystkie czynniki stałe wyłączyć przed znak całki, tak że moglibyśmy również napisać:

$$\int(6x^2 - 14x + 1)\,dx = 6\int x^2dx - 14\int xdx + 1\int dx.$$

Teraz jednak wróćmy znowu do pytania, jak z odnośnej potęgi x pod całką powstaje odpowiednia potęga x funkcji pierwotnej. A zatem jak z $6x^2$ zrobić znowu $2x^3$, z $14x$ znowu $7x^2$, oraz z 1 zmienną x. Pierwszym co mi się narzuca, jest to, że całkowanie podwyższa potęgę x o 1, co jest rzeczą zupełnie oczywistą, jeśli się uwzględni, że potęga x została obniżona o 1 wskutek różniczkowania. A więc ogólnie $\int x^m dx =$ czemuś, jakiemuś współczynnikowi razy x^{m+1}. Tylko jak wielki jest ten współczynnik? Z $2x^3$ powstało $6x^2$. Z $6x^2$ ma znowu powstać $2x^3$. Ponieważ znamy już postępowanie przy x, pytamy jeszcze tylko, jak zrobić z 6 na powrót 2. Otóż w bardzo prosty sposób. Za pomocą podzielenia przez 3. Jednakże powszechnie nie mamy przed sobą funkcji pierwotnej. Lecz tylko pochodną. A dalej, ponieważ spodziewam się, że zmiana współczynnika pozostaje w związku z wykładnikiem potęgowym, gdyż przy różniczkowaniu współczynnik (o ile go już z góry nie było) również powstał wskutek potęgi x (względnie po części powstał z tego powodu), muszę spróbować, jakby uzyskać współczynnik z wykładnika potęgi x pod całką. A zatem z $6x^2$ ma powstać $2x^3$. A że powyżej nazwałem wykładnik potęgowy 2 ogólnie m, muszę 6 podzielić przez $(m + 1)$, a więc przez 3, aby otrzymać współczynnik 2 wyrazu $2x^3$. Zbierając to wszystko razem twierdzimy, że $\int x^m dx$ powinna się równać $\frac{1}{m+1}x^{m+1}$. Sprawdźmy to od razu na pozostałych naszych potęgach. Jaką wartość ma $\int 14xdx$? Tutaj jest $m = 1$. A więc wartość całki wynosi $\frac{14}{1+1}x^{1+1} = \frac{14}{2}x^2 = 7x^2$, a zatem dokładnie to, czego oczekiwaliśmy. Jeżeli w końcu zainteresujemy się $\int 1dx$, wówczas uwzględniając, że $\int 1dx = \int x^0 dx$, otrzymamy $\frac{1}{0+1}x^{0+1} = \frac{1}{1}x^1 = x$, co oczywiście się zgadza.

A zatem formalnie w lot uzyskaliśmy algorytm rachunku całkowego, którego tak się obawialiśmy. Tym samym dotrzymaliśmy przyrzeczenia, że wypełnienie rozkazu całki wyda nam się rzeczą niewiele trudniejszą niż wykonanie jakiegokolwiek innego rozkazu matematycznego. Jednakowoż stosuje się to tylko do funkcji alge-

braicznych całkowitych wymiernych. Przeto nie taimy również, że całkowanie bardziej zawiłych funkcji to wcale nie rzemiosło, ale sztuka. Że np.

$$\int_0^x \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\,dx \quad \text{równa się} \quad \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}+\frac{k}{2}\log\left(\frac{x}{k}+\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\right)^*,$$

nie wyprowadzimy nigdy za pomocą naszych prostych reguł. Do tego konieczne są rozmaite chwyty. Przeto dla praktycznego rachunku całkami istnieją specjalne tablice, w których podane są rozwiązania najrozmaitszych typów całek, uporządkowane według różnych celów i rodzajów zastosowań.

A dalej, nie można również przemilczeć faktu, że są całki, których w ogóle nie da się rozwiązać. Bo możemy tworzyć wyrażenia, które nie istnieją jako pochodne jakiejś funkcji pierwotnej. Nie da się wtedy pomyśleć żadnej funkcji pierwotnej, która by miała taką właśnie pochodną. Jeśli zaś nie ma wcale funkcji pierwotnej, to również nie ma dokładnego rezultatu przy obliczaniu całki. Co najwyżej przybliżony. Zauważmy na zakończenie, że w praktyce możliwe jest przybliżone rozwiązanie każdej całki z dowolną dokładnością.

Aczkolwiek dopiero co zaznaczyliśmy skromność granic, w których obracają się nasze wiadomości, to jednak nie można ich lekceważyć. Mianowicie pomimo naszego słabego wyszkolenia w rachunku całkowym możemy rozwiązywać mnóstwo zadań. A przede wszystkim opanujemy zasadę i zrozumiemy dzięki temu wiele rzeczy, które inaczej stanowić muszą dla laika nierozwiązalną zagadkę.

Zwracamy się więc znowu do problemu kwadratury. Wybieramy zaś jako temat: nakreślić krzywą $y = x - x^2$, i stawiamy żądanie kwadratury w obrębie pewnego przedziału. Ponieważ krzywa ta dla $x = 0$ przechodzi przez początek układu, a od $x = 1$ już znowu odnośnie do rzędnych przechodzi w wartości ujemne i przy rosnącym x pozostaje w 4-tej ćwiartce, zajmijmy się tylko kwadraturą części pomiędzy $x = 0$ a $x = 1$. (Por. fig. 62.)

Kombinujemy nasze umiejętności i ustalamy uprzednio za pomocą zagadnienia na maksimum, jak wielka jest najwięk-

---

* Rektyfikacja paraboli $y = \frac{x^2}{2k}$ (z G. Kowalewskiego: „Wstęp do rachunku nieskończonościowego").

sza rzędna tego odcinka krzywej. Otóż w przedziale od $x = 0$ do $x = 1$ funkcja $y = x - x^2$ wykazuje pochodną $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = 1 - 2x$. Przyrównanie pochodnej do zera daje: $1 - 2x = 0$. Rozwiązanie tego równania: $2x = 1$, czyli $x = \frac{1}{2}$. Owo x leży, jak widać, w żądanym przedziale, ponieważ spotyka się je dokładnie

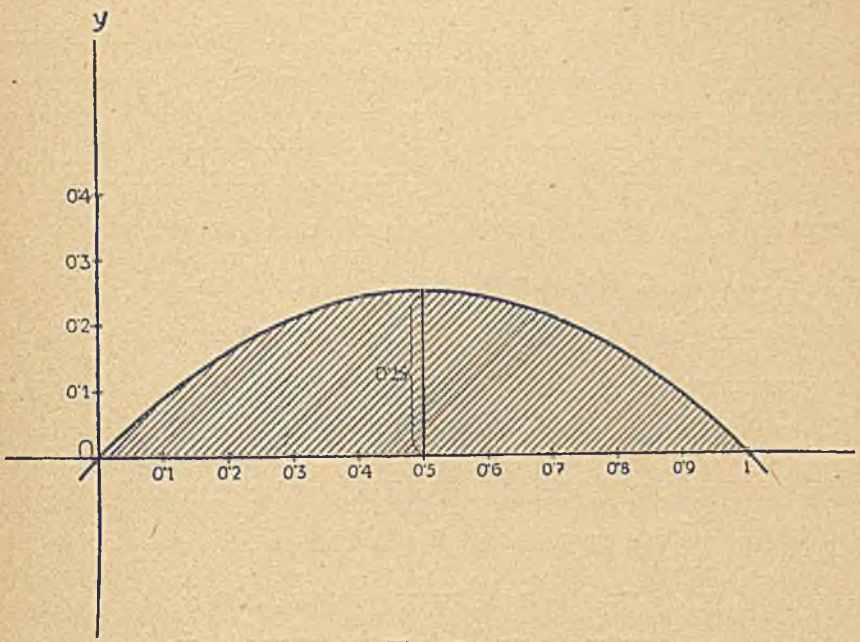


Fig. 62.

w środku pomiędzy 0 a 1. Wracam teraz z powrotem do funkcji, której wykresem jest nasza krzywa i podstawiam $x = \frac{1}{2}$. W następstwie jest $y = x - x^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Najwyższym wzniesieniem naszego odcinka krzywej ponad osią x-ów jest zatem $\frac{1}{4}$, co też widać z rysunku. Tak samo widać, że owo „maksimum" zachodzi dla $x = \frac{1}{2}$.

Przejdźmy obecnie do kwadratury. Wiemy już, że kwadratury dokonuje się przy pomocy całki „określonej", to znaczy całki, opatrzonej górną i dolną granicą. A więc w naszym przypadku $\int_0^1 (x - x^2)\,dx = ?$ Ale jak uzyskać całkę „określoną"? Wskazówka jest bardzo prosta. Należy najpierw obliczyć niejako ogólny wzór,

mianowicie całkę nieokreśloną, która nam podaje, według jakiego prawa mamy wyznaczyć pole powierzchni, ograniczonej naszą krzywą. A więc:

$$F(x) = y = \int (x - x^2)\,dx = \int x\,dx - \int x^2\,dx =$$
$$= \frac{1}{1+1}x^{1+1} - \frac{1}{2+1}x^{2+1} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \text{ (do tego wszędzie jeszcze stała C).}$$

Obecnie dalszym naszym zadaniem jest uwzględnienie „granic" całkowania. Do tego służy, mówiąc nieco powierzchownie, bardzo prosta reguła: mianowicie odejmuje się wartość całki nieokreślonej dla dolnej granicy od wartości całki dla górnej granicy. Jeżeli oznaczymy ogólnie dolną granicę przez a, górną przez b, a więc jeśli mamy przed sobą całkę $\int_a^b f'(x)\,dx$, wtedy ogólna wartość całki nieokreślonej byłaby $f(x) + C$. Teraz należało by położyć $x = a$ oraz $x = b$ i otrzymamy $\int_a^b f'(x)\,dx = [f(b) + C] - [f(a) + C]$, czyli po uwolnieniu od nawiasów graniastych $f(b) + C - f(a) - C = f(b) - f(a)$. Widzimy, że przy obliczaniu całki określonej stała w każdym razie odpada, tak iż otrzymujemy wartość jednoznaczną. W naszym przykładzie górna granica jest 1, dolna 0. Ponieważ całka nieokreślona miała ogólną wartość $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$, należy podstawić:

$$\left[\tfrac{1}{2}(1)^2 - \tfrac{1}{3}(1)^3 + C\right] - \left[\tfrac{1}{2}(0)^2 - \tfrac{1}{3}(0)^3 + C\right] =$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + C - C = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{3}{6} - \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{6}.$$

Nasza pierwsza kwadratura udała się nam. Zakreskowana powierzchnia, ograniczona krzywoliniowo, ma pole równe $\frac{1}{6}$ pola kwadratu, którego bok ma miarę równą tej jednostce długości, jaką obraliśmy dla x na osi odciętych, a która również jest jednostką długości na osi rzędnych. A zatem, jak się krótko mówi, $\frac{1}{6}$ kwadratu jednostkowego.[1]

---

[1] Jeśliby długości odciętych i rzędnych nie były mierzone tą samą jednostką, wówczas całka oznaczałaby ilość „prostokątów jednostkowych", których miary dwóch sąsiednich boków byłyby równe odpowiednio jednostkom długości na osi odciętych i rzędnych. Tym samym nasz „kwadrat jednostkowy" jest szczególnym przypadkiem pewnej ogólniejszej możliwości. W książce tej jednak ograniczymy się do „kwadratów jednostkowych".

WARTOŚĆ ŚREDNIA I CAŁKA OKREŚLONA

Nie porzucimy jednak tego przykładu, nie zwróciwszy uwagi jeszcze na coś innego. Ponieważ długość podstawy naszej figury wynosi 1, a pole $\frac{1}{6}$ kwadratu jednostkowego, zatem figura ta ma takie samo pole jak prostokąt, którego podstawą jest 1, a wysokością $\frac{1}{6}$ jednostki długości. A że jest przecie niesłychanie wiele rzędnych [1] mniejszych, a także niesłychanie wiele większych niż $\frac{1}{6}$, można by więc przypuszczać, że ta $\frac{1}{6}$ przedstawia „średnią rzędną", czyli „średnią wartość wszystkich rzędnych", inaczej „przeciętną rzędną". W tym celu musimy zapoznać się bliżej z pojęciem „średniej wartości", którą w języku codziennym nazywają także „przeciętną". Najprostszą odmianą wartości średniej jest tak zwana „średnia arytmetyczna". Jest to zarazem forma tworzenia przeciętnej, którą instynktownie stosuje już każde dziecko. Jeżeli trzy jabłka mają średnice o długości 5 cm, 10 cm i 15 cm, wtedy przeciętna średnica jabłka wynosi 10 cm. Albo jeśli kupię kilogram cukru raz za 80 groszy, innym razem za 90 groszy, kiedy indziej znów za 95 groszy, a czwartym razem za 99 groszy, wówczas przeciętna cena kilograma cukru to właśnie $\frac{80+90+95+99}{4} = 91$ groszy. Ogólnie tworzy się średnią arytmetyczną podług wzoru $M_A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$.*

Jednakże średnia wartość („średnia rzędna") w naszym przypadku składa się nie ze skończonej ilości poszczególnych wartości

---

[1] Oczywiście wewnątrz przedziału.

* Średnia geometryczna jest to n-ty pierwiastek z iloczynu poszczególnych wartości. A zatem $M_G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots \ldots a_n}$.

rzędnych, ale z nieskończenie wielu takich wartości. A więc przedstawiałaby się, jeżeli y_1, y_2, y_3, y_4 ..... oznaczają rzędne, wzorem: $M_A = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots}{\infty}$ co, oczywiście, jest niemożliwe do obliczenia. Jeżeli jednak to wyznaczenie średniej wartości pojmiemy jako zagadnienie nieskończonościowe, wtedy możemy dojść do pewnego rezultatu. Bo nieskończona suma rzędnych to przecie nic innego, tylko pole rozważanej powierzchni, a przeto wartość jej to całka określona w rozważanym przedziale. Czym jednak jest mianownik ułamka w naszym wzorze na średnią? W istocie niczym innym jak wyrażeniem na nieskończoną ilość rzędnych. A więc niejako zbiorem punktów osi liczbowej, z których wystawiono rzędne. Ale to znowu nic innego, jak tylko długość odcinka na osi x-ów, który tworzy nasz przedział. Nasz nieskończonościowy wzór na średnią brzmiałby wobec tego:

$$\frac{\int_a^b f'(x)\,dx}{b - a}$$

Sprawdźmy teraz ten wzór w naszym przypadku, zanim pokażemy na konkretnym przykładzie niesłychane w praktyce znaczenie owego twierdzenia o średniej wartości dla całki. Znaleźliśmy dla całki $\int_0^1 (x - x^2)\,dx$ wartość $\frac{1}{6}$. Ta $\frac{1}{6}$ zatem stanowi licznik. Mianownik tworzy różnica granic $1 - 0 = 1$. Wskutek tego średnia wartość, czyli średnia rzędna, w naszym przypadku wynosi

$$M_A = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}.$$

Każdy prawie miał sposobność widzieć jakiś samoczynnie rejestrujący aparat. Istnieją rejestrujące termometry, barometry, higrometry itd., znane z gablotek meteorologicznych, znajdujących się w parkach wielkich miast. Wokoło bębna rozpięty jest papier milimetrowy, którego podziałka posiada oznaczenia na dni i godziny. A mianowicie wzdłuż obwodu. Wzdłuż wysokości skala oznacza stopnie temperatury, ciśnienie atmosferyczne, wilgotność powietrza, czy coś innego. Bęben jest w ten sposób połączony z mechanizmem zegarowym, że obraca się dokładnie według podziałki, podczas gdy

rysik z farbą podąża znowu dokładnie w swych ruchach ku górze i ku dołowi za wskazaniami termometru, stanami barometru itd. Ponieważ w każdej chwili, jakkolwiek krótka by ona była, istnieje jakaś temperatura, czy ciśnienie atmosfery, czy wilgotność powietrza, ten rodzaj wykresu jest bezwzględnie ciągły, nieskończonościowy. Odpowiednia krzywa jest przeto ciągła i różniczkowalna. Tylko jest do tego stopnia skomplikowana i tyle zawiera skoków, że ustalenie wzoru dla niej jest w praktyce właściwie niemożliwe. Jeśli zdejmiemy np. po miesiącu papier z bębna, wówczas krzywa wygląda mniej więcej tak:

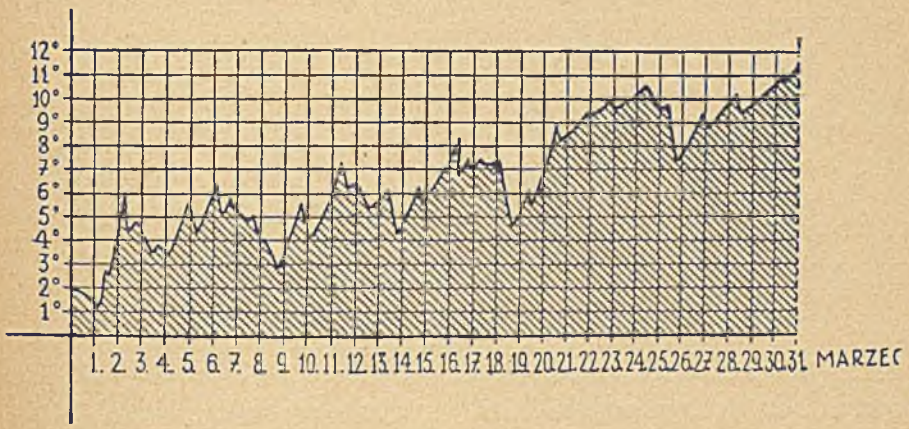


Fig. 63.

Przypuśćmy teraz, że interesuje nas „średnia temperatura w miesiącu marcu". Pokażemy obecnie wybieg, jak wyznaczyć żądaną średnią temperaturę bez żadnego specjalnego rachunku, mimo to jednak jako średnią wartość całki. Rozumujemy w następujący sposób, przy czym odwracamy wszystko „do góry nogami". Wzór dla krzywej, z którego moglibyśmy w jakiś sposób obliczyć całkę określoną jest nam nieznany i pozostanie nieznany. Wartość całki natomiast równa się przecie liczbie mierzącej pole powierzchni, zawartej pomiędzy krzywą, rzędnymi wystawionymi na początku i na końcu przedziału, i osią odciętych. A więc wytnijmy żwawo tę powierzchnię nożyczkami precyzyjnymi, zważmy ją na precyzyjnej wadze fizycznej, a następnie wytnijmy powierzchnię jednostkową, kwadrat jednostkowy. A teraz na podstawie ciężaru powierzchni wy-

znaczmy jej pole, a więc wartość całki. Dajmy na to, że długość boku kwadratu jednostkowego odpowiada np. stopniowi termometru. Taką samą długość wykazuje jednostka miary na osi x-ów, pomyślana jako odpowiednik okresu jednego dnia. Teraz pozostaje tylko podzielić liczbę wymiarową powierzchni, którą znaleźliśmy ważeniem, przez długość „przedziału" a więc przez $(b - a)$, co wynosi tu $31 - 0 = 31$. W ten sposób wcale dokładnie [1] otrzymujemy średnią temperaturę miesiąca. A mianowicie dokładnie, o ile uwzględnimy przy tym nieskończonościowy charakter problemu, że jest to przeciętna nieskończenie wielu temperatur zachodzących w miesiącu. Co się tyczy „funkcji", należało by jeszcze dodać uwagę, że temperatura y zależy tutaj przymusowo od czasu x. Dalej, warto zauważyć, że nie musieliśmy przyjąć koniecznie dni za jednostki dla x. A mianowicie, można by było przed utworzeniem średniej wartości zmierzyć „przedział x" w jednostkach obranych dla y. Na koniec zapiszmy jeszcze matematycznie nasz wybieg:

$$\text{Pole z wyniku ważenia} = \text{n kwadratów jednostkowych} = \frac{\int_a^b f'(x)\,dx}{b - 0}$$

przy czym b należy zmierzyć jednostką, równą długości boku kwadratu jednostkowego. Przykład ten świadczy o niesłychanej wartości operacji czysto myślowych. Bo w rzeczywistości ważono tylko, dzielono i rozumowano. Właściwej zaś całki ani śladu. Niemniej jednak uzasadnienie naszego fortelu mogliśmy oprzeć tylko na rachunku całkowym, bo średnia wartość nieskończenie wielu rzędnych bez rozważań nieskończonościowych nigdy nie dałaby się uzyskać.

Zanim zaczniemy dalsze kwadratury, trzeba głębiej rozważyć pewną własność całki określonej, nad którą początkujący zwłaszcza dobrze sobie głowy nałamią. Chodzi przy tym o znikanie stałej całkowania. Arytmetycznie wykazaliśmy już, że odejmowanie wartości całki obliczonej dla dolnej granicy od wartości całki górnej granicy zawsze m u s i stałą doprowadzić do zniknięcia. Obojętne, czy stała połączona była z całką „nieokreśloną" znakiem dodawania czy odejmowania. Jeśliby całka nieokreślona była $\int f'(x)\,dx$, do której dołą-

[1] Błąd pomiaru tkwi w niedokładności wycinania, ważenia, a wreszcie w niejednorodności papieru.

czono + albo — C, wówczas obliczenie wartości całki określonej tej samej funkcji, $\int_a^b f'(x)\,dx$ będzie miało zawsze postać

$$(\int f'(b)\,dx + C) - (\int f'(a)\,dx + C) = f(b) + C - f(a) - C = f(b) - f(a)$$

albo

$$(\int f'(b)\,dx - C) -)\int f'(a)\,dx - C) = f(b) - C - f(a) + C = f(b) - f(a).$$

Geometrycznie nie oznacza takie odejmowanie nic innego jak odejmowanie jednej miary powierzchniowej od drugiej. Wszelako dopiero w ostatecznym rezultacie. Jak długo jeszcze w grę wchodzi stała, polega nasz problem geometrycznie na odjęciu jednej rzędnej od drugiej. Aby to jednak zrozumieć dokładnie, musimy rozważyć pojęcie krzywej różniczkowej i całkowej. Wiemy, że każdej funkcji odpowiada jakaś krzywa, jako „obraz graficzny" tej funkcji. Jeżeli więc, wracając do naszego poprzedniego przykładu, dana była funkcja $y = x - x^2$, wówczas mogliśmy narysować, jak to zresztą zrobiliśmy (Fig. 62), krzywą odpowiadającą tej funkcji, względnie funkcji w pewnym oznaczonym przedziale. Jeżeli teraz zcałkujemy, otrzymamy

$$F(x) = \int (x - x^2)\,dx \pm C = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm C,$$

a więc znowu jakąś funkcję x, którą również możemy wykreślić. Otóż ta funkcja „pierwotna" daje względem funkcji „wyjściowej" $y = x - x^2$ tak zwaną krzywą całkową. Jednakże nie wiemy, jak wielkie jest C. Nie wiemy nawet, czy jest ono dodatnie, czy ujemne. Mogłoby również być 0. Cóż zatem analitycznie oznacza dodanie (odjęcie) stałej? Zdradzimy od razu: Krzywa jako taka pozostaje ta sama, nie zmienia swego kształtu, czy stała występuje, czy nie. Stała wpływa tylko na przesunięcie krzywej w układzie współrzędnych. Dowolna parabola, wykreślona np. według wzoru $y = \frac{x^2}{4} \pm C$, wygląda zależnie od wielkości C w sposób przedstawiony na fig. 64.

Ponieważ C może przyjmować każdą wartość od $-\infty$ do $+\infty$, przeto każda całka nieoreślona przedstawia zbiór krzywych, które leżą niejako tak gęsto, że pokrywają całą płaszczyznę. Ta własność całki ma ogromne znaczenie w fizyce. Jeżeli nam się uda ustalić dla jakiegoś przedziału (na płaszczyźnie czy w przestrzeni) „równanie różniczkowe", wtedy tym samym przedział ten,

inaczej „pole", jest już określony w każdym punkcie. Mianowicie „rozwiązuje się" równanie różniczkowe całkując je. A otrzymana całka po ustaleniu stałej daje mi stan „pola" w każdym jego punk-

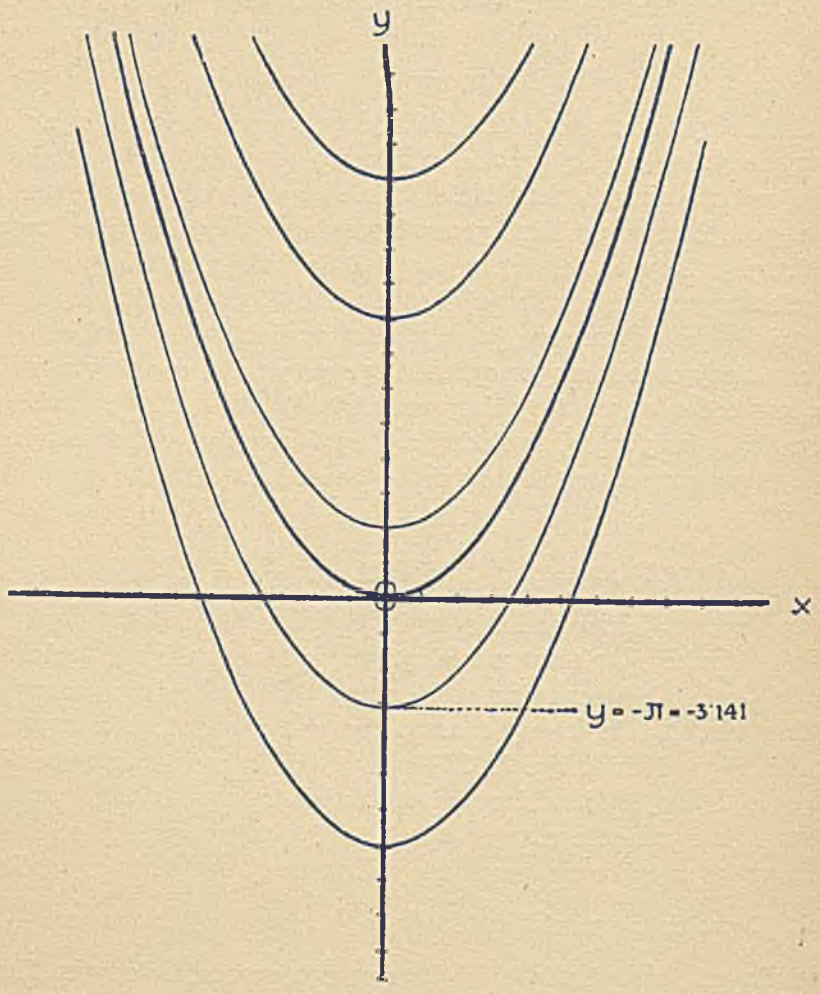


Fig. 64.

cie. Ale to tylko mimochodem. Wiemy teraz, że istnieje nieskończenie wiele krzywych „całkowych", które ponadto są przystające do siebie i zależnie od stałych różnią się tylko położeniem. Jeślibyśmy przyjęli, że całkowano funkcję $y' = \frac{x}{2}$, otrzymalibyśmy jako krzywe

całkowe wszystkie krzywe, wyrażone wzorem $F(x) = \int \frac{x}{2} dx \pm C = \frac{x^2}{4} \pm C$. Teraz każda całka określona $\int_a^b \frac{x}{2} dx$ będzie równa $\left(\frac{b^2}{4} \pm C\right) - \left(\frac{a^2}{4} \pm C\right) = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$. Ponieważ nadto każde $\frac{x^2}{4} \pm C = F(x) = y$, a więc przedstawia rzędną jakiegoś punktu na krzywej całkowej, zatem całka nieokreślona jest ogólnym wyrażeniem rzęd-

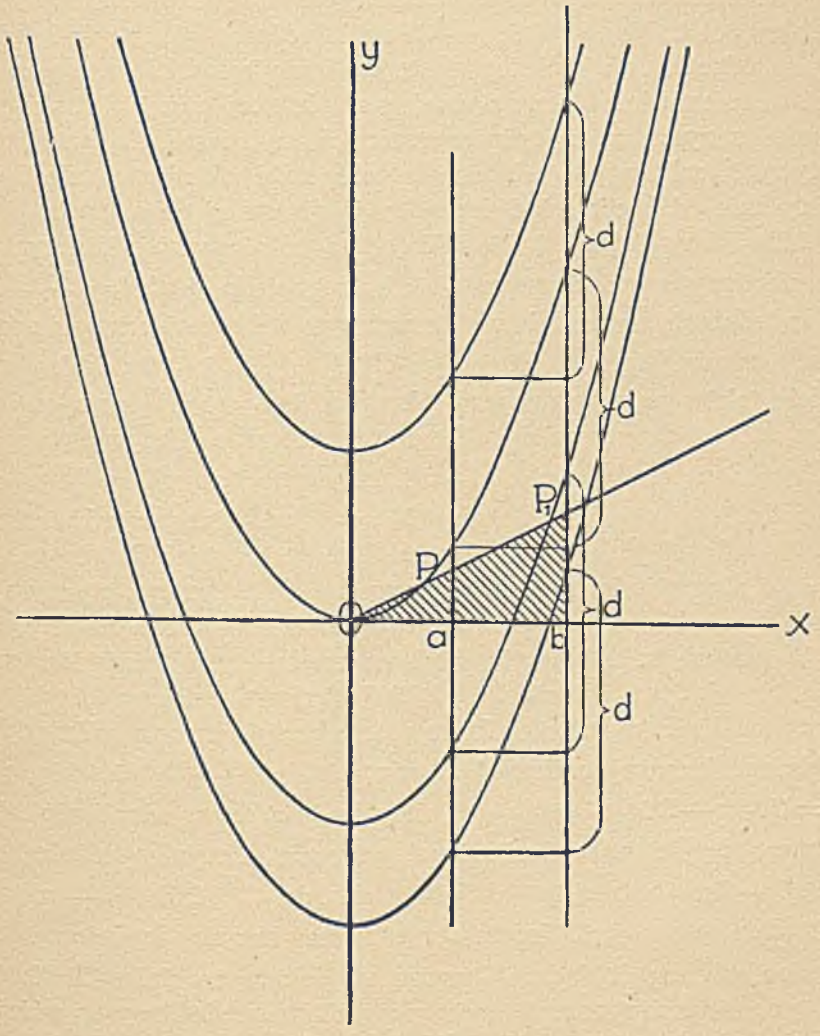


Fig. 65.

nych punktów krzywej całkowej, a całka określona różnicą dwóch oznaczonych rzędnych krzywej całkowej. A mianowicie rzędnej początku i końca przedziału całkowania. Uzmysłowimy to na rysunku, na którym równocześnie uwidoczniono całkowaną funkcję $y' = \frac{x}{2}$ oraz dowolną ilość krzywych całkowych $y = \frac{x^2}{4} \pm C$. Przedziałem całkowania jest przedział zawarty pomiędzy a i b. (Por. fig. 65.)

Jak łatwo zauważyć, obliczane pole zakreskowane równa się różnicy pól trójkątów $OP_1b - OPa$. Ta różnica pól ma być jednak równa odpowiedniej różnicy rzędnych jakiejkolwiek krzywej całkowej. A mianowicie bezwzględnej wartości tej różnicy. Jak łatwo poznać z rysunku, te różnice rzędnych są równe dla wszystkich krzywych całkowych, tak że wartość całki określonej nie zależy faktycznie od wielkości dodanej (odjętej) stałej całkowania.

Mówiliśmy jednak także o krzywej różniczkowej. Weźmy znowu pierwszy przykład $y = x - x^2$, którego całką jest $F = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm C$. W zagadnieniu na maksimum dotyczącym tej samej krzywej znaleźliśmy trzecią jeszcze funkcję $\frac{dy}{dx} = f'(x) = y' = 1 - 2x$, którą oczywiście także możemy unaocznić krzywą, będącą jej „obrazem graficznym". A zatem mamy obecnie trzy krzywe. Krzywą przedstawiającą daną funkcję $y = x - x^2$, krzywą całkową $F = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm C$ (w naszym przypadku obieramy $C = +1$) oraz krzywą różniczkową $y' = 1 - 2x$. Wykreślimy sobie rzędne tych trzech krzywych dla $x = 0{,}4$. Oczywiście można by narysować całe krzywe, co czytelnik łatwo sam sobie może wykonać na papierze milimetrowym (fig. 66).

W punkcie $x = 0{\cdot}4$ wykreślone są rzędne tych trzech krzywych $y = 0{\cdot}24$ (krzywa dana), $F = 1{\cdot}0587$ (krzywa całkowa) i $y' = 0{\cdot}2$ (krzywa różniczkowa). Spróbujmy teraz znaleźć krzywą różniczkową względem krzywej całkowej. Ponieważ $F = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 1$, więc jest $\frac{dF}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2} x - 3 \cdot \frac{1}{3} x^2 = x - x^2$, co ku naszemu zdumieniu daje krzywą wyjściową. Zcałkujmy wreszcie krzywą różniczkową $y' = 1 - 2x$. Całka $\int (1 - 2x)\,dx = \int 1 \cdot dx - \int 2x\,dx = \frac{1}{0+1} x^{0+1} - 2 \frac{1}{1+1} x^{1+1} = x - x^2$. Znowu otrzymujemy krzywą wyjściową. Albo mówiąc całkiem dokładnie, krzywą wyjściową ze stałą $C = 0$. Oto stoi przed nami otworem mechanizm: Całkowanie krzywej różniczkowej daje krzywą wyjścia. Całkowanie krzywej wyjścia daje

krzywą całkową. Wreszcie różniczkowanie krzywej całkowej daje krzywą wyjścia, a różniczkowanie krzywej wyjściowej krzywą różniczkową. Gdybyśmy znali jeszcze tzw. pochodne wyższych rzędów i całki wielokrotne, moglibyśmy w naszej drabinie dodawać ciągle szczeble w górę i na dół aż do nieskończoności, względnie aż dotąd, gdzie pochodna znika, co jednak nastąpi tylko w funkcjach nieokresowych (nieperiodycznych).

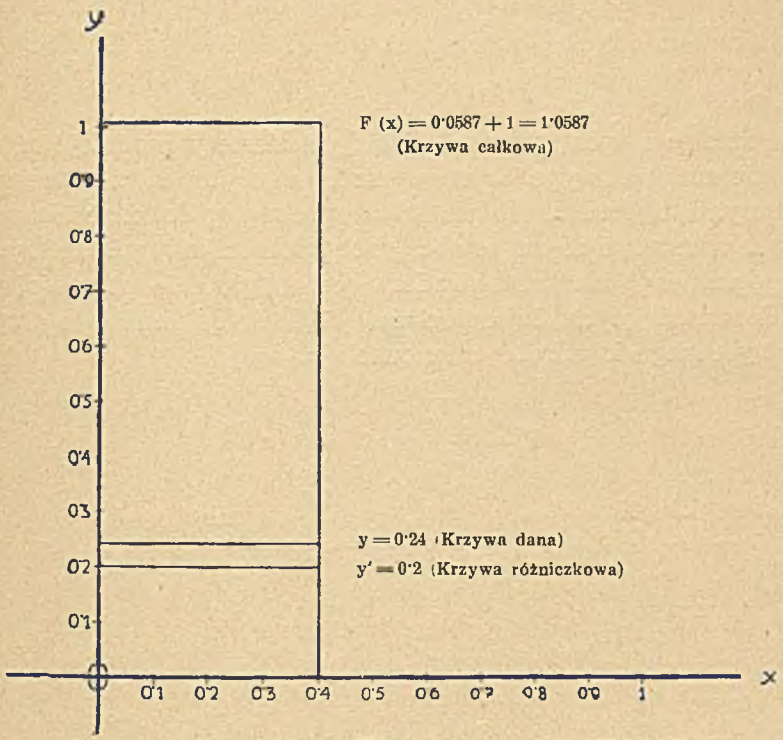


Fig. 66.

DALSZE PROBLEMY KWADRATURY

Po ustaleniu tych wniosków, których niestety bardziej już rozwijać nie możemy, wypróbujmy wreszcie algorytm całki na pewnym granicznym przypadku. Ot dla żartu spróbujmy dokonać „kwadratury" kwadratu. I to za pomocą rachunku całkowego. „Krzywą", która ograniczać ma nasz kwadrat, jest oczywiście prosta równoległa do osi odciętych. Jej odległością od tejże osi musi być długość boku wybranego kwadratu, mianowicie a.

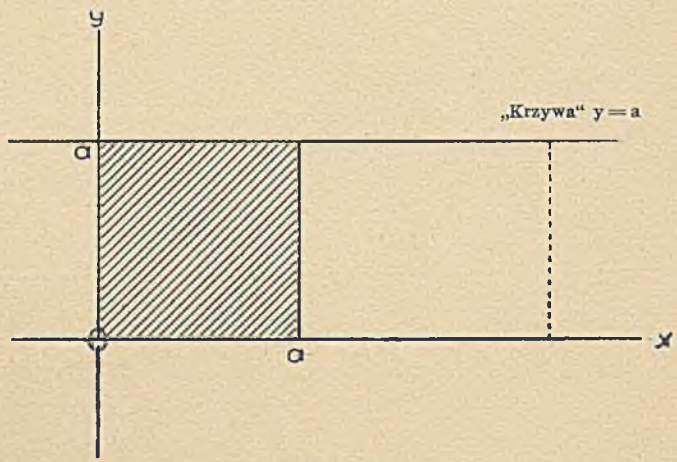


Fig. 67.

Równanie tej krzywej będzie brzmiało $y = a$, lub aby x przemycić, $y = ax^0$. Chcąc otrzymać pole kwadratu, musimy całkować w granicach od $x = 0$ do $x = a$. A więc napiszmy: $F = \int_0^a ax^0 dx =$

$= a\int_0^a x^0 dx$. Całka nieokreślona $\int ax^0 dx \pm C$ daje $a\int x^0 dx \pm C =$ $= a\frac{1}{0+1}x^{0+1} \pm C = ax \pm C$. Całka określona musi być przeto $F = (a \,.\, a \pm C) - (a \,.\, 0 \pm C) = a^2 - 0 = a^2$, dzięki czemu otrzymaliśmy pole kwadratu za pomocą całkowania. Krzywą całkową w naszym przypadku jest prosta o równaniu $F = ax \pm C$. Dodajmy jeszcze, że w ten sam sposób można uzyskać za pomocą całkowania wzór na pole prostokąta. Jeśliby mianowicie przedział całkowania był nie od 0 do *a*, lecz np. od 0 do *b*, wtedy całka nieokreślona zachowa swą wartość, ponieważ krzywa wyjścia $y = ax^0$ pozostaje bez zmiany. Natomiast całka określona daje:

$$F = (a \,.\, b \pm C) - (a \,.\, 0 \pm C) = ab - 0 = ab,$$

co wyraźnie przedstawia wzór na pole prostokąta. Zauważmy na koniec, że krzywa całkowa tylko w punkcie $x = a$ może dać wartość na pole kwadratu. We wszystkich innych punktach daje odpowiednio wartości pól prostokątów, których jednym bokiem jest *a*.

A teraz sprawdźmy jeszcze rachunkiem całkowym zadanie wielkiego Archimedesa, kwadraturę „zwyczajnej paraboli", którą on przedstawia jako: pole odcinka paraboli = pole trójkąta wpisanego $\times$ $\times (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots)$, co w następstwie daje: pole trójkąta

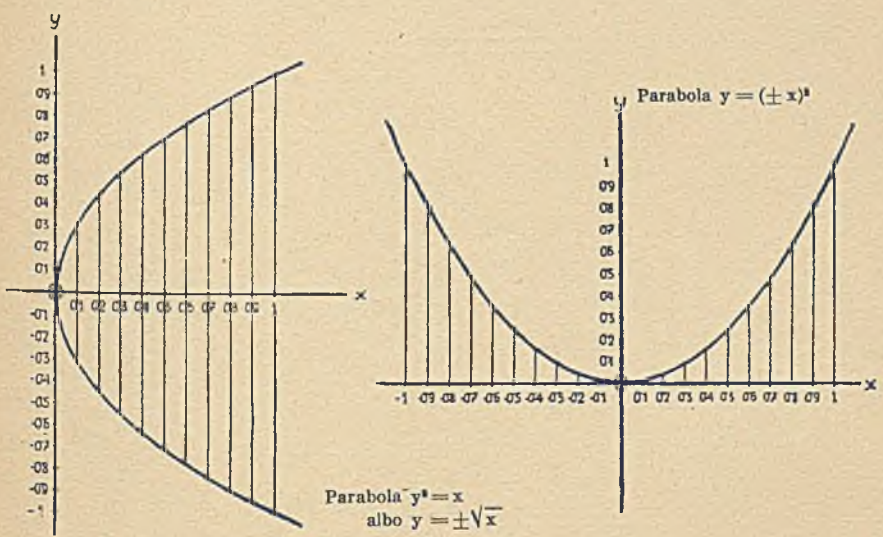


Fig. 68.

wpisanego $\times\frac{4}{3}$. Przeważnie podaje się w szkole jako wzór paraboli $y^2 = 2px$. Otóż nie jest to wcale najprostsza postać równania paraboli, jest nią natomiast tak zwana funkcja odwrotna. Przyjmijmy, co zawsze zrobić wolno, parametr paraboli p równy $\frac{1}{2}$, wtedy z $y^2=2px$ powstanie równanie $y^2 = x$ albo, ograniczając się do wartości $x \geqslant 0$, $y = \sqrt{x}$. W myśl reguł nauki o funkcjach i geometrii analitycznej zamiana ról x oraz y jako zmiennej zależnej i niezależnej nie oznacza nic innego jak tylko obrót krzywej w układzie współrzędnych o 90°. Parabola $y^2 = x$ leży niejako poziomo, parabola $x^2 = y$ (czyli $y = x^2$) pionowo w układzie współrzędnych. (Por. fig. 68.)

Jedna krzywa w stosunku do drugiej nazywa się „krzywą odwrotną", a funkcje nazywają się „funkcjami odwrotnymi" względem siebie. Ale to tylko nawiasowo, dla uspokojenia wszelkich ewentualnych skrupułów, jeżeli w następnych rozważaniach skorzystamy z funkcji $y = x^2$ jakby niejako z funkcji dawnej naszej paraboli.

Wpisaliśmy w myśl metody Archimedesa w odcinek paraboli, który właściwie jest połową odcinka, trójkąt:

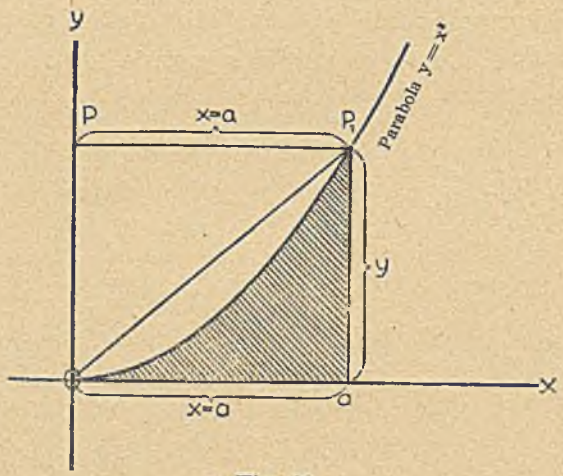


Fig. 69.

Jednakże do rachunku całkowego nadaje się w pierwszej linii część zakreskowana powierzchni, której odpowiada przedział od $x = 0$ do $x = a$. Funkcja naszej krzywej brzmi $y = x^2$, całka nieokreślona natomiast $F = \int x^2 dx \pm C$, co daje $F = \frac{1}{3}x^3 \pm C$. Ponieważ

mamy wyznaczyć wartość całki określonej $F_{(0,a)} = \int_0^a x^2 dx$, trzeba podstawić:

$$F_{(0,a)} = (\tfrac{1}{3}a^3 \pm C) - (\tfrac{1}{3}0^3 \pm C) = \tfrac{a^3}{3}.$$

No, a teraz jak wielkie jest pole odcinka parabolicznego? Otóż możemy to uzyskać odejmowaniem w dalszym ciągu. Jest to mianowicie pole prostokąta o bokach $x = a$ oraz y, minus nasze, z całkowania uzyskane, pole powierzchni zakreskowanej. A więc jest to $ay - \frac{a^3}{3}$. Według funkcji wyjściowej jednak y równa się x^2, a zatem, w przypadku $x = a$, tyle co a^2. W następstwie jest

$$ay - \frac{a^3}{3} = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{3a^3 - a^3}{3} = \frac{2}{3}a^3.$$

Tymczasem Archimedes podał jednakże rezultat swej kwadratury nie w jednostkach a, lecz wyrażony przez pole trójkąta wpisanego. Musimy więc jeszcze znaleźć, jak wielkie jest pole trójkąta OPP_1. Jest to trójkąt prostokątny, o przyprostokątnych y i $x = a$. Jego pole jest tedy równe $\frac{y \cdot a}{2}$, czyli, ponieważ $y = x^2 = a^2$, trójkąt ma pole $\frac{a^3 \cdot a}{2} = \frac{a^3}{2}$. Pole tego trójkąta Archimedes mnoży obecnie przez sumę nieskończonego postępu geometrycznego malejącego $(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots)$, której wartość według wzmiankowanego już wzoru $S_\infty = \frac{1}{1-q}$ (przy czym q w naszym przypadku wynosi $\frac{1}{4}$) musi się równać $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$. Zebraliśmy tedy wszystko, czego nam potrzeba. Według Archimedesa pole połowy odcinka parabolicznego równa się polu trójkąta $\frac{a^3}{2}$ razy suma szeregu $\frac{4}{3}$, a więc $\frac{a^3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2a^3}{3}$, co daje dokładnie tę samą wartość, jaką znaleźliśmy całkowaniem. W tym miejscu skłońmy czoło w głębokiej czci przed przenikliwością umysłu greckiego w ogóle, a w szczególności umysłu takiego Eudoksosa czy Archimedesa, pierwszych pionierów rachunku całkowego.

Oczywiście, możliwą jest również rzeczą obliczenie bezpośrednio przy pomocy rachunku całkowego pola połowy odcinka paraboli „leżącej" ($y^2 = x$ albo $y = \sqrt{x}$). Na tym przykładzie możemy zobaczyć, że nasz algorytm rachunku całkowego da się łatwo i pewnie zastosować do potęg ułamkowych. Jeśli zatem wybierzemy, aby uniknąć pomyłek z oznaczeniami użytymi powyżej przy wyznaczaniu pola,

„przedział“ od $x = 0$ do $x = b$, wówczas należałoby nam obliczyć wartość całki określonej $F = \int_0^b \sqrt{x}dx = \int_0^b x^{\frac{1}{2}} dx$. Naszym b byłby wówczas odcinek osi paraboli od wierzchołka głównego aż do punktu przecięcia się osi z cięciwą, ograniczającą odcinek paraboliczny: a więc dokładnie ten sam odcinek, który na fig. 55 oznaczyliśmy jako b. Teraz obliczenie: Całka nieokreślona z $\sqrt{x} =$

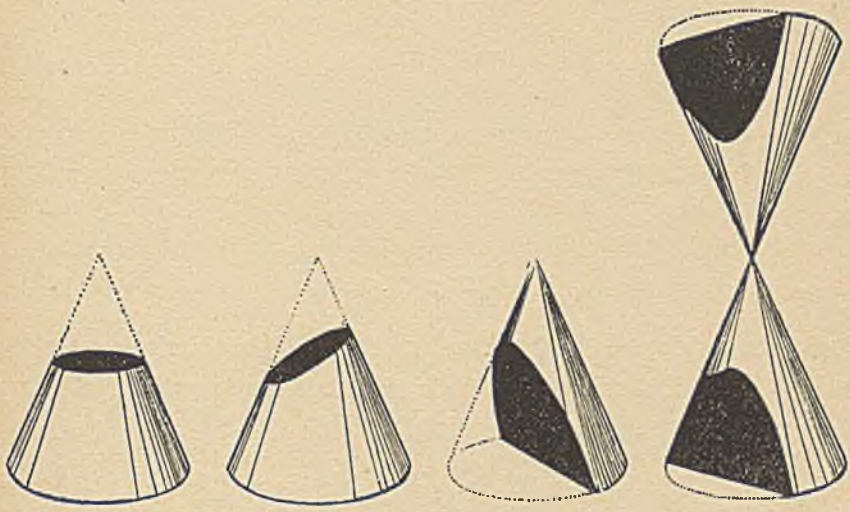
$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx \pm C = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \pm C = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \pm C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \pm C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \pm C.$$

Podstawiając teraz granice 0 i b, otrzyma się wówczas jako całkę określoną $F = \int_0^b x^{\frac{1}{2}} dx = (\frac{2}{3}\sqrt{b^3} \pm C) - (\frac{2}{3}\sqrt{0^3} \pm C) = \frac{2}{3}\sqrt{b^3}$, czyli $\frac{2}{3}b\sqrt{b}$. Ponieważ, dalej, przy „leżącej“ paraboli b nie oznacza nic innego jak tylko podstawę „dużego trójkąta archimedesowskiego“, zaś $\sqrt{b}$ (w myśl równania paraboli $y = \sqrt{x}$) połowę cięciwy, a więc tym samym wysokość „dużego trójkąta“, musielibyśmy w sensie Archimedesa utworzyć najpierw za pomocą b oraz $\sqrt{b}$ pole „dużego trójkąta“, czyli $\frac{b\sqrt{b}}{2}$, a następnie pomnożyć to przez sumę szeregu $S_\infty = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots) = \frac{4}{3}$. Otrzymalibyśmy wtedy na pole połowy odcinka paraboli wartość $\frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{b}}{2} = \frac{2}{3} b\sqrt{b}$, co odpowiada dokładnie wartości, uzyskanej przez całkowanie.

Mamy już teraz tak wielką wprawę w całkowaniu, że w krąg naszych rozważań wciągniemy nawet jakąś prostą potęgę x o wykładniku ujemnym, mianowicie x^{-1}, albo, co na jedno wychodzi, $\frac{1}{x}$. Równanie $y = \frac{1}{x}$ przedstawia hiperbolę, której obie gałęzie łatwo nakreślić w układzie współrzędnych za pomocą odpowiedniego ciągu wartości na x. Dla $x = 1$ jest y również 1. Punkt przecięcia się krzywej z osią y-ów bądź x-ów nie da się znaleźć w ogóle. Bo jakkolwiek duże będzie samo x, y nie będzie 0. A jeżeli będzie $x = 0$, to wtedy $y = \frac{1}{0}$, czyli y przyjęłoby wartość, która pozbawiona jest sensu. A więc przy rozważaniu krzywej o równaniu $y = \frac{1}{x}$, wartość $x = 0$ musimy wyłączyć. Krzywa nasza obejmuje przeto swymi obiema gałęziami ćwiartkę pierwszą wzgl. trzecią, a osie układu są, jak zwy-

kle się mówi, „asymptotami“ hiperboli, co oznacza proste, do których krzywa zbliża się coraz to bardziej, nie mogąc ich nigdy dosięgnąć.

Najpierw jeszcze mała dygresja: koło, elipsa, parabola, hiperbola są to tzw. krzywe drugiego stopnia, ponieważ równania ich są kwadratowe. Niechaj nie myli nas x w potędze pierwszej, w mianowniku równania hiperboli. Nasze $y = \frac{1}{x}$ jest również funkcją kwadratową, ponieważ nie możemy wyznaczyć x bez pomnożenia przez drugą zmienną. Krzywe drugiego stopnia są z geometrycznego punktu widzenia przekrojami stożka. Sposób wykonania przekroju widać z następujących rysunków:



Przekrój równoległy do podstawy: koło | Przekrój ukośny do podstawy: elipsa | Przekrój równoległy do boku: parabola | Przekrój równoległy do osi: hiperbola

Fig. 70.

Każdy, kto ma wyobraźnię przestrzenną, pozna już z samego położenia krzywych na stożku, że hiperbola staje się coraz to szersza i szersza (parabola również), podczas gdy koło i elipsa są „liniami krzywymi zamkniętymi“.

Lecz z następnego rysunku widzimy coś innego jeszcze: A mianowicie, że kwadratura powierzchni ograniczonej hiperbolą m u s i być możliwa.

Na przykład pole figury, ograniczonej wzdłuż osi x-ów odcinkiem od $x = a$ do $x = b$, da się zapewne bardzo łatwo obliczyć, bo znamy przecie funkcję $y = \frac{1}{x}$, która ponadto przedstawia się bardzo prosto. Jak zwykle, wyznaczamy najpierw całkę nieokreśloną $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx$. Powiedzieliśmy wyraźnie swego czasu, że

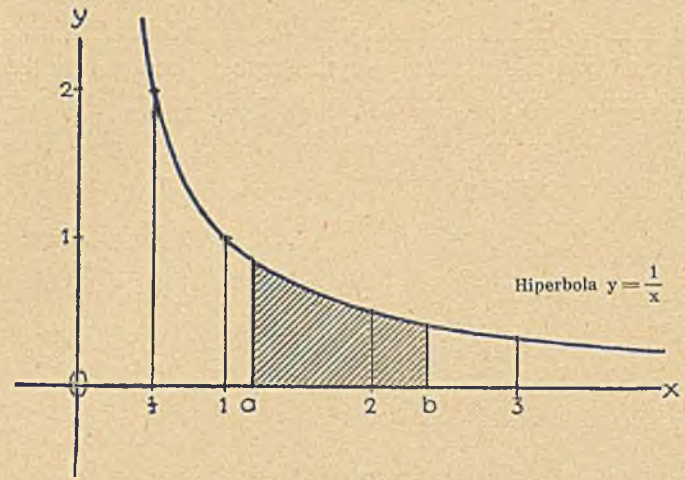


Fig. 71.

$\int x^m dx$ dla każdego m dodatniego, ujemnego lub ułamkowego równa się $\frac{1}{m+1} x^{m+1}$. Obecnie wypadało by i tu również wypróbować słuszność naszego algorytmu. A zatem

$$F(x) = \int x^{-1} dx \pm C = \frac{1}{-1+1} x^{-1+1} \pm C = ?$$

Zatrzymujemy się zdumieni. Bo jako całkę nieokreśloną, od której zależy każda całka określona, otrzymaliśmy wartość $\frac{1}{0} \cdot x^0 = \frac{1}{0} \cdot 1 = \frac{1}{0}$, wartość pozbawioną sensu. Równocześnie widzimy na własne oczy zakreskowane pole na rysunku. Jest więc taka wartość na m (i to jedyna), dla której nie można zastosować wzoru $\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$. To zachodzi przy x^{-1} czyli $\frac{1}{x}$. Dlatego wzór ten pisze się zawsze $\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} [m \neq -1]$, co — jak wiemy — oznacza, że m nie może się równać -1, czyli że m nie śmie mieć wartości -1.

Zdradzimy teraz, iż umyślnie wystawiliśmy czytelnika na próbę, aby mu dać odczuć strach, jakiego ta luka w rachunku

całkowym napędziła pierwszym odkrywcom. Leibniz był wprawdzie tak genialny, iż wiedział z innych rozważań i badań, jak lukę tę zapełnić. Mimo to jednak panowała wówczas wielka jeszcze niepewność, a lukę ową wyzyskiwano już to jako łatwy punkt zaczepienia w atakach przeciwko rachunkowi nieskończonościowemu, już to odczuwano jako kompromitację matematyki.

My epigoni jesteśmy w tym szczęśliwym położeniu, że znając z tylu stron rozwiązanie zagadki, możemy sobie z rozważania jej uczynić rodzaj żonglerskiego niemal widowiska. Aby wnieść trochę światła, wypowiemy magiczne zaklęcie nowej kabały, które brzmi: „logarytm". I tej wielkiej zagadki też nie zostawimy bez rozwiązania, aczkolwiek osiągnęliśmy już właściwie cel tej książki i doprowadziliśmy czytelnika od tabliczki mnożenia do różniczki, a stąd do całki.

Wtrąćmy jeszcze słówko o „rektyfikacji". Powiedzieliśmy już, że przez całkowanie da się wyznaczyć długość łuku krzywej, mianowicie z wzoru $\int ds = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Niestety trudno nam wprowadzić przypadki praktyczne, ponieważ przy rektyfikacji występują zawsze całki tak skomplikowane, iż są one dla nas niemożliwe do obliczenia. Aby jednak pokazać choć jeden przykład, podamy, że np. długość łuku paraboli $y = kx^2$ od punktu $x = 0$ do jakiegoś dowolnego punktu $x = x$ oznacza wartość całki $\int_0^x \sqrt{1 + 4k^2x^2}\,dx$. Po rozlicznych, częściowo bardzo śmiałych przekształceniach, otrzymuje się jako wartość całki monstrualny wzór:

Długość łuku paraboli $= s = \frac{1}{2} x \sqrt{1+4k^2x^2} + \frac{1}{4k} \log\left(\sqrt{1+4k^2x^2} + 2kx\right)$, przy czym k oznacza dowolną liczbę stałą, dodatnią lub ujemną, całkowitą lub ułamkową, wymierną lub niewymierną.

ROZDZIAŁ TRZYDZIESTY SZÓSTY

LOGARYTMY

Jeśli spojrzymy wstecz z tej wysokości, jaką już osiągnęliśmy, i dokonamy niejako przeglądu wszystkich działań, znajdziemy wówczas:

	Operacje tetyczne:	Operacje lityczne:
1.	Dodawanie.	Odejmowanie.
2.	Mnożenie.	Dzielenie.
3.	Potęgowanie.	Pierwiastkowanie.
4.	—	—
5.	Całkowanie.	Różniczkowanie.

Dlaczego jednak Nr 4 naszego zestawienia jest niezajęty? Odpowiedź prosta: Ponieważ pod Nr 4 właśnie ma swoje miejsce logarytmowanie, czyli logarytm. Najpierw wyjaśnienie terminologii. Logarytm nie ma językowo nic wspólnego z algorytmem. Wszak wiemy, że algorytm to nic innego, jak tylko przekręcenie arabskiego nazwiska Alchwarizmi. Logarytm natomiast pochodzi od słowa *„logos arithmos“*, co ma znaczyć mniej więcej: „właściwy stosunek“. Wynalazcami logarytmów są Michał Stifel, oraz Sir John Napier (inaczej Neper).

Nie będziemy jednak marnowali teraz czasu na reminiscencje historyczne, jakkolwiek są one również interesujące, tylko uporamy się z wejściem na ostatni szczebel, jaki nam jeszcze pozostaje, tak samo śmiało i pewnie jak ze wszystkimi dotychczasowymi.

Widoczną jest rzeczą, że z potęgi powstać mogą dwa różne typy funkcji. Jeden typ to ten, którym dotychczas operowaliśmy wyłącznie. Mianowicie jakieś y powstało z jakiegokolwiek x do potęgi n-tej, przy czym n jest liczbą stałą. Poznaliśmy $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, \ldots x^n$. Wszystko

to są tak zwane funkcje p o t ę g o w e. Jako działanie odwrotne do potęgowania poznaliśmy pierwiastek. Jeżeli $x^n = y$, to wtedy właśnie $x = \sqrt[n]{y}$. Oczywiście możliwa jest przy tym też funkcja odwrotna. Moglibyśmy również napisać $y^n = x$ czyli $y = \sqrt[n]{x}$. Funkcja ta jednak ma określoną wartość w zakresie liczb rzeczywistych tylko wtedy, gdy $x \geqslant 0$. Można jednak wyobrazić sobie również, że wykładnik potęgowy nie jest stały, ale że wykładnikiem jest wielkość zmienna. A więc np. $y = a^x$, przy czym a jest stałą liczbą dodatnią (tzn. $a > 0$). Wtedy pytanie brzmiałoby nie w ten sposób: „Co otrzymam, jeżeli dowolną wartość x podniosę do stałej potęgi n?" lecz: „Co otrzymam, jeżeli stałą dodatnią a podniosę do dowolnej potęgi x?" Taką funkcję, w której zmienna znajduje się w wykładniku potęgowym, nazywamy funkcją w y k ł a d n i c z ą. Aby wyłuszczyć tę sprawę całkiem dokładnie, wybierzmy jakiś przykład. W obu razach niech zmienna niezależna x przybiera wartości 1, 2, 3 i 4. Stała w obu wypadkach niechaj wynosi 5. Wtedy funkcja potęgowa $y = x^n$ daje dla $n = 5$ wartości $y = 1^5 = 1$, $y = 2^5 = 32$, $y = 3^5 = 243$ oraz $y = 4^5 = 1\,024$. Natomiast funkcja wykładnicza $y = a^x$ daje dla $a = 5$ wartości $y = 5^1 = 5$, $y = 5^2 = 25$, $y = 5^3 = 125$, oraz $y = 5^4 = 625$. Rzecz jasna, że moglibyśmy teraz z $y = x^n$ np. przy $y = 1\,024$ i znanym $n = 5$ wyliczyć dla x wartość $\sqrt[5]{1\,024} = 4$, gdyż założono przecie z góry, że $y = x^5 = 1\,024$. Przy funkcji wykładniczej $y = a^x$ pytanie o operację odwrotną brzmi całkiem inaczej. Mianowicie: „Do jakiej potęgi muszę podnieść znaną stałą $a = 5$, aby otrzymać np. $y = 125$?" Nie pomoże nam też nic to, jeślibyśmy napisali $\sqrt[x]{125} = 5$. Bo wyciąganie x-tego pierwiastka nie da się przeprowadzić za pomocą żadnej znanej nam operacji. Co najwyżej przy całkiem prostym zestawieniu liczb moglibyśmy znaleźć rezultat za pomocą próby. Ale niech kto tylko spróbuje znaleźć, do jakiej potęgi należało by podnieść np. 10, aby otrzymać 2, a przekona się o zupełnej swej bezradności wobec problemu funkcji odwrotnej względem funkcji wykładniczej.

A więc powtórzmy raz jeszcze: Jeżeli $y = a^x$, należy szukać, jak wielkie jest x przy znanym dodatnim a i znanym y. Otóż ta operacja lityczna, odwrotna względem funkcji wykładniczej nazywa się „logarytmem". Jeżeli $y = a^x$ wówczas x jest logarytmem z y przy stałej zasadzie a. Zapisuje się $x = {}^a\log y$. Ponieważ obojętną jest rze-

czą, jakiego symbolu użyjemy na oznaczenie zmiennej niezależnej, zapiszmy naszą nową funkcję, odwrotną względem wykładniczej, tzw. funkcję logarytmiczną, oznaczając zmienną niezależną jak zwykle przez x, a zatem $y = {}^a\log x$, przy czym pytanie brzmi jednak teraz, do jakiej potęgi y musimy podnieść stałą dodatnią a, aby otrzymać dowolnie obrane x. A zatem np.: Do jakiej potęgi y musi się podnieść stałą 10, aby na x otrzymać wybraną przez nas wartość 2? Albo analitycznie: Jaka rzędna odpowiada w funkcji $y = {}^{10}\log x$ wartości odciętej $x = 2$? Zdradzimy, że y w naszym przypadku byłoby 0·30 103..., a dzięki temu wiedzielibyśmy wszystko, co nas interesuje. Bo

$$0{\cdot}30\,103... = {}^{10}\log 2, \quad \text{czyli} \quad 10^{0{\cdot}30\,103...} = 2.$$

Jeślibyśmy jednak przyjęli $x = -2$, $a = 10$, pytanie brzmiałoby: Do jakiej potęgi y musi się podnieść stałą 10, aby otrzymać na x wartość (-2). Lecz takiej liczby y na pewno nie znajdę. Bo jakiekolwiek byłoby y, całkowite czy ułamkowe, dodatnie czy ujemne, 10^y będzie liczbą dodatnią, ponieważ 10 jest liczbą dodatnią, a zatem nigdy nie będzie równe liczbie ujemnej (-2). Aby więc $y = {}^a\log x$ miało określoną wartość, musi być x liczbą dodatnią, czyli $x > 0$.

Uzupełniamy zatem naszą tabelkę i stwierdzamy:

	Operacje tetyczne:	Operacje lityczne:
1.	Dodawanie $(a + b + c...)$.	Odejmowanie $(a - b - c...)$.
2.	Mnożenie $(a \,.\, b \,.\, c...)$.	Dzielenie $(a : b...)$.
3.	Potęgowanie (a^n).	Pierwiastkowanie $\left(\sqrt[n]{a}\right)$
4.	Funkcja wykładnicza (a^x).	Logarytm $({}^a\log x)$.
5.	Całkowanie $[\int f'(x)\,dx]$.	Różniczkowanie $\left[\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)\right]$.

Lecz teraz znamy dopiero rozkaz operacji logarytmicznej, a nie znamy bynajmniej sposobu wykonywania, czyli „algorytmu logarytmowania".

Aby go uzyskać, musimy mimochodem zwrócić uwagę na dwie różne rzeczy: Logarytmy, o ile nie chodzi o logarytmy potęg zasady, są w ogólności liczbami niewymiernymi. Sposób obliczania ich jest trudny i przekraczałby nasze ramy. Jesteśmy jednak w tym szczęśliwym położeniu, że za małą już kwotę możemy nabyć tak zwane tablice logarytmiczne, które zawierają logarytmy prawie wszystkich liczb, używanych w praktyce. Co więcej, zawierają po-

nadto jeszcze logarytmy funkcji kątowych. Jakie znaczenie ma ta praca, którą wykonali za nas nieustraszeni rachmistrze trzech stuleci, tego wprost nie można pojąć. Bo dopiero zastosowanie logarytmów stworzyło tę sytuację, że w ogóle obliczyć możemy bardziej skomplikowane potęgi i pierwiastki. Owo „w ogóle" należy tak rozumieć, że bezpośrednie obliczanie takich pierwiastków i potęg sprawiałoby inaczej niesłychaną trudność.

Nie mamy obowiązku wyjaśniać, jak się układa tablice logarytmiczne i jak się ich używa. Wskażemy tylko na to, że dzięki logarytmom udaje się przekształcić mnożenie w dodawanie, dzielenie w odejmowanie, potęgowanie w mnożenie, a pierwiastkowanie w dzielenie; a więc działania zarówno tetyczne jak i lityczne drugiego i trzeciego stopnia obniżyć można każde o jeden stopień.

Jako zasada tak zwanego układu (systemu) logarytmicznego może być użyta zasadniczo każda dowolna liczba dodatnia. W praktyce używa się wyłącznie liczby 10 jako zasady tak zwanych logarytmów zwyczajnych, czyli briggowskich, i liczby e (2·7182818...) jako zasady tak zwanych logarytmów naturalnych, czyli neperowskich. Symbolu $^{10}\log x$ nie używa się. Piszemy po prostu $\log x$, a przez to mamy na myśli logarytm o zasadzie 10. Na oznaczenie logarytmu Nepera pisze się albo $^{e}\log x$ albo $\ln x$ albo lx. Symbol $\ln x$ oznacza *„logarithmus naturalis"* (logarytm naturalny). Będziemy zawsze pisali $\log x$ zamiast $^{10}\log x$, zaś przy logarytmach naturalnych dla wyrazistości $^{e}\log x$. Przy logarytmach w ogóle, tam gdzie nie zależy na zasadzie, napiszemy $^{a}\log x$, przy czym a może być jakąkolwiek stałą liczbą dodatnią.

Oczywiście odpowiedni postulat wymaga, aby równość pozostała prawdziwą, jeżeli się ją obustronnie zlogarytmuje. Jeżeli $c = d$, wtedy jest $^{a}\log c = {}^{a}\log d$, a jeśli $^{a}\log c = {}^{a}\log d$, wtedy również $c = d$. Postępowanie w drugim wypadku nazywa się szukaniem *„numerus"* („liczby", tzn. liczby logarytmowanej).

Jako podstawową własność logarytmiczną określa się związek

$$^{a}\log(c \cdot d) = {}^{a}\log c + {}^{a}\log d,$$

a więc fakt, że logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów czynników. Wyprowadzimy tę „podstawową własność". Jeżeli dane są nam np. dwa logarytmy o zasadzie a, a więc $^{a}\log b = B$ oraz $^{a}\log c = C$ $(b > 0, c > 0)$, wtedy zgodnie z określeniem, jak powstają

logarytmy (funkcja wykładnicza!), jest z pewnością $b = a^B$ i $c = a^C$. Bo logarytm, to przecie nic innego jak tylko potęga, do której muszę podnieść zasadę a, by otrzymać numerus (b czy c). Jeżeli jednak $b = a^B$ i $c = a^C$, wtedy z pewnością jest $b \cdot c = a^B \cdot a^C = a^{B+C}$. Jeśli teraz rozpatrzę bliżej tę równość $b \cdot c = a^{B+C}$, wówczas mogę z niej uzyskać nowy logarytm o zasadzie a. Mianowicie ${}^a\log(b \cdot c) = B + C$. Bo $B + C$ to wykładnik, do którego muszę podnieść a, aby otrzymać $b \cdot c$, a zatem to logarytm z $b \cdot c$. Ponieważ $B = {}^a\log b$ oraz $C = {}^a\log c$, co założyliśmy na początku, wstawiam wreszcie te wartości w równość ${}^a\log bc = B + C$ i otrzymuję „własność logarytmiczną“:

$$1. \qquad {}^a\log(b \cdot c) = {}^a\log b + {}^a\log c.$$

Czytelnicy myślący spostrzegą natychmiast, że chodzi tutaj o wykorzystanie reguł działań na potęgach, w czym wszakże nie ma nic dziwnego, bo logarytm powstał z potęgowania wykładnikiem x.

Pozostałe reguły działań na logarytmach wypiszemy, nie wyprowadzając ich:

2. ${}^a\log \frac{c}{d} = {}^a\log c - {}^a\log d \quad (c > 0,\ d > 0)$ (logarytm ilorazu),
3. ${}^a\log c^d = d \cdot {}^a\log c$ (logarytm potęgi),
4. ${}^a\log \sqrt[d]{c} = \frac{1}{d}\,{}^a\log c$ (logarytm pierwiastka).

Reguła czwarta wynika właściwie bezpośrednio z trzeciej, gdyż ${}^a\log \sqrt[d]{c} = {}^a\log c^{\frac{1}{d}}$, co według reguły trzeciej wyliczylibyśmy jako $\frac{1}{d}\,{}^a\log c$.

Po takim powierzchownym zorientowaniu się co do logarytmów w ogóle, które pilni czytelnicy mogą uzupełnić dalszym studium i ćwiczeniami przy pomocy dobrych tablic logarytmicznych, gdzie zawsze znajduje się dokładny przepis użycia, zwrócimy się obecnie do samego centrum wyższej matematyki, do osi, dokoła której niejako obraca się rachunek różniczkowy i całkowy, a mianowicie do liczby e, zasady logarytmów naturalnych. Że wszystkie te reguły, które co dopiero ustaliliśmy, zachowują ważność także dla logarytmów o zasadzie e, na to nie trzeba bliższych wyjaśnień dlatego, że zażądaliśmy przecie, aby występującym tam a (zasadą) mogła być każda dowolna liczba dodatnia, a więc również powinna być nią liczba e. Przeto także np. ${}^e\log(a \cdot b)$ równa się oczywiście ${}^e\log a + {}^e\log b$, itd.

Postawmy sobie teraz następujący problem, nie będący pozornie w żadnym związku z obecnymi rozważaniami: Jakakolwiek liczba, którą spokojnie możemy przyjąć jako najprostszą, a więc 1, niechaj wzrośnie o tak maleńką wielkość, jaką sobie tylko można wyobrazić. A więc np. o możliwie najmniejszą część 1, o $\frac{1}{n}$, przy czym w myśl założenia n musi być nadzwyczaj wielkie. Tak powiększona wielkość niechaj wzrasta dalej „organicznie". To znaczy, ma się dalej rozwijać według tego samego prawidła. I tak dalej w nieskończoność. Otóż pytanie brzmi, do jakiej wartości wzrośnie w ten sposób liczba 1. Na pierwszy rzut oka można by sądzić, że róść będzie do nieskończenie wielkiej wartości. Ale tak bynajmniej nie jest, podobnie jak każde łączenie ze sobą nieskończenie wielu rzędnych nie musi wcale dawać nieskończenie wielkiego pola. Widzieliśmy to już przy kwadraturze. Albo też i przy szeregach „zbieżnych". Również w szeregu Archimedesa $(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\ldots)$ łączy się nieskończenie wiele takich „coś", a mimo to otrzymuje się tylko $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ jako sumę wszystkich składników. Podobnie ma się sprawa z „szeregiem Leibniza" i ze wszystkimi szeregami geometrycznymi malejącymi w ogóle. Przyjrzyjmy się teraz dokładnie, co się stanie z naszą rosnącą jednością. Jeszcze jedno: Na samym początku jedynka ma doznać najmniejszego wyobrażalnie przyrostu. Niejako w formie odszkodowania za to ograniczenie pozwalamy jej jednak na ten przyrost w nieograniczenie wielu fazach wzrastania. „Rośnij i mnóż się, a zapełnij ziemię", wołamy do naszej jedynki.

Skoro więc 1 wzrośnie o $\frac{1}{n}$, gdzie $\frac{1}{n}$ jest dowolnie małą liczbą, wówczas powstanie z tego $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, co na razie nazwijmy a. Teraz a ma rosnąć znowu w podobny sposób, to znaczy, a ma się na nowo powiększyć o dowolnie maleńką część samego siebie, a więc o $\frac{a}{n}$. Wskutek tego powstaje $\left(a+\frac{a}{n}\right)$, co nazwiemy b. Jeśli pójdziemy dalej, to powstanie obecnie $\left(b+\frac{b}{n}\right)$ itd. Przyjrzyjmy się wreszcie, co się w końcu otrzyma. Żądaliśmy, aby $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ równało się a. Przeto powstanie z $\left(a+\frac{a}{n}\right) = \frac{an+a}{n} = a\frac{n+1}{n} = a\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right) = a\left(1+\frac{1}{n}\right)$ natychmiast $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, jeżeli za a podstawi się

znowu $\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Drugie wyrażenie $\left(b+\frac{b}{n}\right)$ równa się jednak $\frac{bn+b}{n}=b\frac{n+1}{n}=b\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)=b\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Jeżeli znowu uwzględnimy, że przez b oznaczyliśmy nic innego jak tylko $\left(a+\frac{a}{n}\right)$, i że to $\left(a+\frac{a}{n}\right)$ otrzymaliśmy właśnie jako $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, wtedy jest $b\,.\left(1+\frac{1}{n}\right)=$ $=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$. Ponieważ ten rachunek prowadzić możemy dowolnie daleko, a ponadto wiemy, że „organiczny przyrost" po pierwszym kroku daje $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, po drugim kroku $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, po trzecim kroku $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$, oraz że nasze „prawidło tworzenia" wymaga bezsprzecznie kontynuowania tego związku, wówczas można spokojnie zawnioskować, że wartość jedynki nieznacznie wzrastającej o $\frac{1}{n}$, otrzyma po n krokach wartość $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Jeżeli teraz zatrzymam się przy n dowolnie wielkim, wtedy dwumian $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ mogę rozwinąć według wzoru dwumiennego Newtona. A mianowicie, ponieważ wszystkie potęgi 1 dają znowu 1, a zatem można je opuścić wszędzie, gdzie występują jako czynniki, jest więc:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1^n+\binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\binom{n}{4}\left(\frac{1}{n}\right)^4+\ldots\ldots=$$
$$=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cdot\frac{1}{n^4}+\ldots\ldots$$

Jeżeli teraz zamiast $(n-1)$, czy $(n-2)$, czy $(n-3)$ itd. napiszę po prostu n, to odrzucając odjemniki 1, 2, 3, itd., zwiększam tym samym wartość każdego wyrazu naszego szeregu. A że ze wzrostem składników zwiększa się suma, więc:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{n}{1!}+\frac{n.n}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n.n.n}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\frac{n.n.n.n}{4!}\cdot\frac{1}{n^4}+\ldots\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}$$

Po przeliczeniu otrzymuje się

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}$$

Jednakowoż pragnęlibyśmy się dowiedzieć, jaka jest suma szeregu nieskończonego, który powstanie, gdy n wzrośnie nieograniczenie. Zapewne suma ta większa będzie niż 2, bo już dwa pierwsze wyrazy dają razem 2. Co więcej, jeśli zważymy, że po opuszczeniu pierwszego wyrazu szereg nasz będzie brzmiał $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots\ldots\right)$,

możemy go porównać z tak zwaną „majorantą“ czyli „szeregiem majorującym“, którego sumę nieskończoną możemy obliczyć, ponieważ jest to malejący szereg geometryczny. Tym szeregiem będzie $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots\right)$. Szereg ten jest, jak widać, „majorantą“, to znaczy każdym wyrazem przewyższa odpowiednie wyrazy naszego pierwszego szeregu. Mianowicie cechą charakterystyczną „majoranty“ jest to, że każdy wyraz „majoranty“ jest co najmniej równy, ale z reguły większy niż analogiczny wyraz badanego szeregu. A więc:

Szereg badany: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots\ldots$

Szereg majorujący: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$

W myśl definicji majoranty wynika drogą prostego rozważania, że jej suma dla nieskończonej ilości wyrazów (podobnie jak każda częściowa suma jej n wyrazów) musi być większa niż suma wyrazów szeregu badanego. Otóż w naszym przypadku sumą nieskończonego szeregu majorującego jest $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Ponieważ jednak w szeregu badanym opuściliśmy pierwsze 1, muszę je przy odpowiednim porównaniu dodać też do majoranty. A zatem otrzymam: (S_∞ majoranty + 1) jest w każdym razie większa niż (suma wyrazów szeregu badanego + 1). Ponieważ (S_∞ majoranty + 1) równa się 3, więc w każdym razie 3 jest większe niż $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, przy n rosnącym nieograniczenie. A zatem graniczna wartość dla $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ znajduje się tedy pomiędzy 2 a 3, jeżeli n przybiera dowolnie wielkie wartości. Tego właśnie chcieliśmy dociec.

Przez obliczenie sumy dostatecznie wielkiej ilości wyrazów szeregu dwumiennego znajdziemy jako wartość dla $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ liczbę 2·71828182845904...

Ta liczba, podobnie jak liczba π, jest liczbą niewymierną i od czasów Eulera oznacza się ją na całym świecie przez „e“. Ze względów, które zaraz poznamy, jest to najważniejsza liczba w całej matematyce.

Znowu nie podając na razie naszego celu, starajmy się rozwinąć w szereg funkcję wykładniczą liczby e, czyli e^x. A więc napiszmy słuszne z pewnością równości:

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
$$e^x = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^x$$

oczywiście, gdy n rośnie nieograniczenie.

Otóż udowodniono (lecz przy naszych wiadomościach nie możemy przeprowadzić szczegółowego dowodu), że e^x jest sumą następującego szeregu nieskończonego:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

Szereg ten nazywa się „szeregiem potęgowym".

Spróbujemy obecnie zróżniczkować szereg potęgowy, co łatwo będzie wykonać, gdyż w myśl odpowiednich twierdzeń rachunku różniczkowego wolno różniczkować po prostu wyraz po wyrazie.

Jeśli zatem $y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$, wtedy jest $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d(e^x)}{dx} = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots\ldots$, co znowu daje $0 + 1 + \frac{2x}{1.2} + \frac{3x^2}{1.2.3} + \frac{4x^3}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$ a po uproszczeniu daje szereg $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$ To jednak nie przedstawia nic innego jak dawny szereg potęgowy.

Natknęliśmy się zatem na funkcję, której pochodna równa się samej funkcji. Teraz można będzie zrozumieć, dlaczego liczbę e nazwaliśmy osią wyższej matematyki. Bo e^x to jedyna funkcja, która równa się swej pochodnej. Ale skoro pochodna równa się funkcji pierwotnej, wówczas także całką tej pochodnej jest sama pochodna. A więc $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$ oraz $\int e^x dx = e^x \pm C$. Ponadto zobaczymy także teraz, jak ogromne oznacza to ułatwienie w rachunku, jeżeli się uda przedstawić jakąś wielkość jako potęgę e. Tym czarnoksięskim trickiem bezustannie operuje się w wyższej matematyce.

Skoro jednak zbadaliśmy zasadę logarytmu naturalnego oraz funkcję wykładniczą tej zasady, powróćmy obecnie znowu do funkcji logarytmicznej, która przy zasadzie e musi brzmieć:

$$y = {}^e\log x, \text{ przy czym } x > 0.$$

Skoro y jest logarytmem z x przy zasadzie e, wtedy oczywiście jest $e^y = x$, co właściwie jest innym sposobem zapisania tego samego faktu. Dzięki tej operacji naszej zmieniły się role zmiennych, a zatem związek funkcyjny został odwrócony. Mając teraz:

$$x = e^y$$

uważamy x za zmienną zależną, zaś y za zmienną niezależną. Spróbujmy zróżniczkować tę funkcję „odwrotną". Tym razem oczywiście „względem y", to znaczy x w liczniku a y w mianowniku. Przy tej sposobności będziemy mogli po raz pierwszy zobaczyć sprawność nowego „tricku czarnoksięskiego". Bo e^y to funkcja wykładnicza o podstawie e, a zatem, podobnie jak każda potęga liczby e ze zmiennym wykładnikiem potęgowym, ma za pochodną „samą siebie", jak mówimy. A więc

$$x = e^y$$
$$\frac{dx}{dy} = e^y.$$

Jeżeli jednak dwie wielkości równają się tej samej trzeciej, to są wzajemnie sobie równe. Wskutek tego jest $\frac{dx}{dy} = x$. Chcielibyśmy jednak znaleźć nie $\frac{dx}{dy}$, lecz $\frac{dy}{dx}$. Również i ten problem jest teraz łatwy do rozwiązania. Bo według elementarnej arytmetyki $\frac{dy}{dx}$ to nic innego jak tylko odwrotność $\frac{dx}{dy}$, podobnie jak np. $\frac{3}{2}$ jest odwrotnością $\frac{2}{3}$. Ponieważ jednak mamy przed sobą równość $\frac{dx}{dy} = x$, musimy utworzyć odwrotności po obu stronach, aby zachować prawdziwość równości. Mianowicie, skoro dwie wielkości są równe między sobą, wtedy ich odwrotności też muszą być sobie równe. Jeśli np. $\frac{6}{2}$ równa się 3, wtedy również $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, czego słuszność widać wyraźnie. A więc utwórzmy wreszcie odwrotności: $\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x}$, czyli $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.*

Długą zatem i okrężną drogą uzyskaliśmy nadzwyczaj zdumiewający rezultat, a mianowicie, że pochodna funkcji $y = {}^e\log x$ równa się $\frac{1}{x}$. Otóż ta $\frac{1}{x}$ w myśl reguł potęgowania to jednak nic innego jak tylko x^{-1}. Ale pochodnej, wynoszącej x^{-1}, nie moglibyśmy nigdy uzyskać za pomocą reguły o różniczkowaniu potęg, która brzmi nx^{n-1}. Bo pochodna z x^3 była równa $3x^2$, z x^2 równa $2x$, z x^1 równa 1, z x^0 równa $0 \cdot x^{0-1} = 0 \cdot x^{-1}$, a więc równa zeru, co wiemy skądinąd, gdyż $x^0 = 1$ przedstawia przecie stałą, która przy różniczkowaniu obraca się w zero. Cofając się systematycznie natrafiamy jednak po x^0 na x^{-1}, co na pochodną daje $-1 \cdot x^{-1-1}$, a więc $-x^{-2}$.

---

* Ze zrozumiałych powodów pominął autor dowód istnienia pochodnej funkcji odwrotnej.

Przeto nic dziwnego, że przy całkowaniu znaleźliśmy lukę w regule $\frac{1}{m+1} x^{m+1}$, gdy x miało wykładnik $m = -1$. Boć przecie wiemy, że mając znaleźć funkcję pierwotną $F(x)$ należy funkcję „podcałkową", to jest wyrażenie, które stoi pod znakiem całki, uważać zawsze za pochodną funkcji pierwotnej $F(x)$. Ponieważ jednakże zawiodła nas zarówno reguła $\frac{1}{m+1} x^{m+1}$ przy $x = -1$, a również nie znalazła się w rachunku różniczkowym żadna taka funkcja, która by miała x^{-1} jako pochodną, byliśmy w rozpaczliwej sytuacji, nie mogąc przeprowadzić w żaden sposób kwadratury powierzchni, ograniczonej częściowo hiperbolą $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

Teraz jednak zagadka rozwiązana. Funkcją pierwotną dla x^{-1}, czyli dla $\frac{1}{x}$ jest $y = {}^e\log x$,* gdyż y' czyli $f'(x)$ tej funkcji brzmi: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}$. A więc jest $F_{(a,b)} = \int_a^b x^{-1}dx = \int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_a^b y'dx$. A ta szukana funkcja y o pochodnej y' to nic innego tylko $y = {}^e\log x$. W następstwie, całka nieokreślona z x^{-1} to całka $F(x) = \int x^{-1}dx = {}^e\log x \pm C$. Natomiast całka określona brzmi:

$$F_{(a,b)} = \int_a^b x^{-1}dx = ({}^e\log b \pm C) - ({}^e\log a \pm C) = {}^e\log b - {}^e\log a.$$

Ze względu na „własność logarytmiczną" są tu jeszcze możliwe pewne przekształcenia. Można mianowicie zamiast ${}^e\log b - {}^e\log a$ napisać też ${}^e\log \frac{b}{a}$, co gdy chodzi o możliwości skrócenia, w niektórych wypadkach upraszcza wynik. Jeśliby to dotyczyło np. przedziału całkowania od $x = a$ do $x = a^2$, w przypadku gdy a większe od jedności, to całka określona wynosiłaby ${}^e\log a^2 - {}^e\log a$. Ponieważ jednak ${}^e\log a^2 - {}^e\log a = {}^e\log \frac{a^2}{a}$, wtedy całka określona równa się po prostu ${}^e\log a$. Podobnie stałą całkowania przy całce nieokreślonej dla uproszczenia wyraża się zwykle w następujący sposób: $F(x) = \int x^{-1}dx = {}^e\log x + C$, co równa się też ${}^e\log x + {}^e\log c$, to znaczy stałą, która jest przecie dowolnie wielka, uważamy za logarytm jakiejś dodatniej liczby (numerus) c. Otóż wtedy, ze względu na to, że ${}^e\log x + {}^e\log c = {}^e\log xc$, całka nieokreślona napisana inaczej wyraża się po prostu jako ${}^e\log cx$.

Na koniec dodajmy jeszcze, że jeden układ logarytmiczny można

---

* Gdy x jest liczbą dodatnią. Przy dowolnym x rzeczywistym różnym od zera jest: $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = {}^e\log |x| + C$.

oczywiście przeliczyć w drugi. Wprawdzie w wyższej matematyce liczymy wyłącznie logarytmami o zasadzie *e*, jak długo rachunek pozostaje ogólny. Powody tego jasne są w świetle dotychczasowych rozważań. Ponieważ jednak wszystkie tablice logarytmiczne za znikomymi wyjątkami zawierają nie logarytmy naturalne, lecz dziesiętne, jesteśmy często zmuszeni przeliczać wyniki z układu *e* w układ dziesiętny. Do tego służy tak zwany „moduł". Wzór modułu podajemy bez wyprowadzania. Moduł jest to liczba 0·4342944819... i oznacza się ją przez *m*. Otóż jeśli się chce przeliczyć logarytm naturalny na dziesiętny, wówczas korzysta się ze wzoru ${}^{e}\log x = \frac{1}{m}\,{}^{10}\log x$. Na odwrót jest ${}^{10}\log x = m \,.\, {}^{e}\log x$. Celem uproszczenia podamy jeszcze wartość $\frac{1}{m}$, która wynosi 2·3025850929... Moduły jednak ważne są oczywiście tylko dla związków zachodzących pomiędzy logarytmami dla zasady *e* oraz logarytmami dziesiętnymi, a nie przy przeliczaniu z innych systemów logarytmicznych (praktycznie nie mających zastosowania).

Wreszcie załączmy jeszcze wykres krzywej $y = {}^{e}\log x$, czyli tak zwanej krzywej logarytmicznej. Ponieważ logarytm z 1 jest w każdym systemie 0, gdyż musi być $e^{y} = x$, a że *x* ma być jedynką, a jedynkę jako wartość potęgi tylko wtedy się otrzymuje, jeżeli jakąkolwiek zasadę podniesie się do potęgi 0, wobec tego krzywa logarytmiczna przetnie oś x-ów w punkcie o współrzędnych $x = 1$, $y = 0$. Dla wartości $x = e$ jest $y = 1$, bo e^{y} ma być równe *x*, zaś *x* powinno być równe *e*, będzie zatem $e^{1} = e$. Podobnie dla $x = e^{2}$

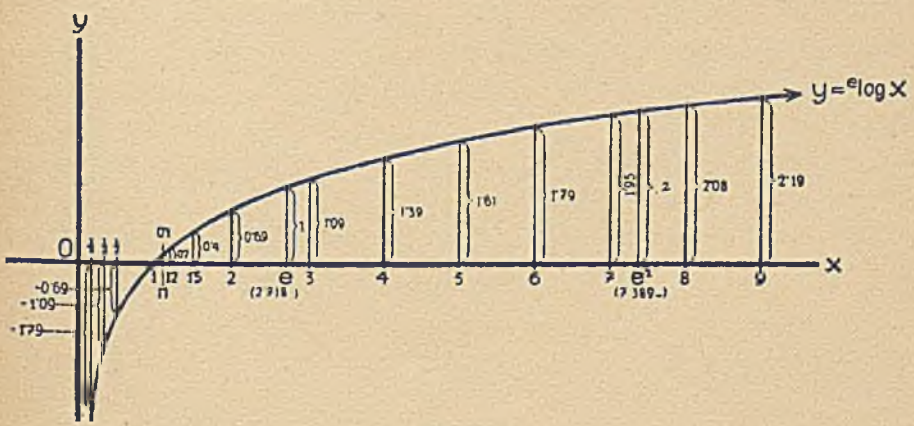


Fig. 72.

jest $y = 2$, dla e^3 jest $y = 3$ itd. Ogólnie biorąc, w każdym systemie logarytmicznym logarytm zasady równa się 1, a logarytm każdej potęgi zasady równa się wykładnikowi potęgowemu, co wyraźnie wynika z definicji $y = {}^a\log x$, $a^y = x$. A zatem logarytm dziesiętny z 1 równa się 0, z 10 równa się 1, z 1000 równa się 3, z 1 000 000 równa się 6. Natomiast z $\frac{1}{10}$ jest równy -1, z $\frac{1}{1000}$ jest równy -3 itd. Dla wszystkich liczb, zawartych pomiędzy całkowitymi potęgami zasady, otrzymuje się jako logarytmy liczby niewymierne, które zawierają oczywiście logarytm najbliższej mniejszej potęgi zasady. Tak więc np. ${}^{10}\log 105$ jest to 2·02 119... Owo 2, które jest logarytmem z $10^2 = 100$, nazywamy „cechą“, natomiast resztę dziesiętną „mantysą“ (od *mantissa* = reszta). Po bliższe dane odsyłamy raz jeszcze do książeczek logarytmicznych.

ROZDZIAŁ TRZYDZIESTY SIÓDMY

INTERPOLACJA, EKSTRAPOLACJA.—ZAKOŃCZENIE.

Szukając logarytmów w tablicach stajemy często wobec problemu, zmuszającego do obliczania wartości pośrednich, gdyż ze względów oczywistych nie mogą być zawarte w tablicach wszystkie logarytmy wszystkich nieskończenie wielu liczb osi liczbowej. Owo szukanie wartości pośrednich nazywa się w matematyce „interpolacją“ (od *interpolare* = wsunąć, pomiędzy czymś umieścić).

Ponieważ pojęcie to ma ogromne znaczenie w matematyce i fizyce, specjalnie zaś w statystyce matematycznej, wyjaśnijmy je zatem w kilku słowach. Na wnikanie w bliższe szczegóły nie pozwala trudność tego problemu, którego pogłębienie stanowi formalnie samo dla siebie pewną naukę. Na pytanie, co to jest wartość interpolowana, da się odpowiedzieć arytmetycznie i geometrycznie. Wartość interpolowana jest to, arytmetycznie rzecz biorąc, pewna liczba zawarta pomiędzy dwiema znanymi nam liczbami. Ale nie pierwsza lepsza pośrednia liczba, tylko liczba, znajdująca się w pewnym określonym „miejscu“ odstępu pomiędzy dwiema znanymi liczbami. Jeśliby np. logarytm z 1 499 równał się 3·17 580, a logarytm z 1 500 wynosił 3·17 609, wówczas mógłby mię np. interesować logarytm z 1 499·5, którego w tak zwanych „pięciocyfrowych“ tablicach nie znajdę bezpośrednio. Na zdrowy rozum powiem sobie, że 1 499·5 leży dokładnie w środku pomiędzy 1 499 a 1 500, że zatem i logarytm powinien również leżeć w środku pomiędzy odpowiednimi logarytmami. Należało by zatem znaleźć średnią arytmetyczną liczb 3·17 580 i 3·17 609, która po obliczeniu i odpowiednim zaokrągleniu do stutysięcznych da logarytm 3·17 595. W podobny sposób można by „interpolować“ w innym miejscu. Np. dla 1 499·8 można by sobie

powiedzieć, że właśnie „odstęp" pomiędzy oboma logarytmami trzeba by podzielić też na dziesięć równych części, a następnie dodać do logarytmu mniejszej liczby osiem takich części. Ten odstęp to właśnie 3·17 609 — 3·17 580, czyli 0·00029, z czego jedna dziesiąta wynosi 0·000029. Osiem takich dziesiątych części odstępu daje 0·000232, wskutek czego logarytm z 1 499·8 powinienby się równać logarytmowi z 1 499 plus osiem dziesiątych odstępu, co daje 3·17 580 + 0·000232, a więc (po zaokrągleniu) 3·17 603.

W taki sam sposób dokonuje się w ogóle interpolacji w tablicach logarytmicznych za pomocą tak zwanych P. P. (*parties proportionales*, części proporcjonalne), które nie są niczym innym jak tylko naszymi dziesiątymi częściami odstępów pomiędzy sąsiednimi logarytmami. Wszelako założono przy tym z góry coś bardzo istotnego, co bynajmniej nie zawsze musi zachodzić a nawet, co się tyczy interpolacji logarytmów mniejszych liczb, nie zachodzi też istotnie. Mianowicie przy tego rodzaju interpolacji proporcjonalnej, inaczej „liniowej", przyjmuje się, że cały odstęp pomiędzy dwoma znanymi logarytmami zawiera przyrosty proporcjonalne do przyrostów liczb logarytmowanych. Aby to jednak uczynić zupełnie wyraźnym, zbadajmy geometryczne znaczenie pojęcia interpolacji. Analitycznie rzecz biorąc, zastępujemy liczby, pomiędzy którymi szukamy wartości pośrednich, rzędnymi (= wartościami funkcji, ypsylonami czyli liczbami fautystycznymi). Rzędne, pomiędzy którymi znajdujące się luki mamy zapełnić nieznanymi nam jeszcze wartościami pośrednimi, nazwijmy sobie „rzędnymi rozstawionymi". W tym momencie, kiedy równanie krzywej jest znane, nie ma już wcale żadnej nieznanej rzędnej. Bo za każde „miejsce", które tutaj jest niczym innym jak odpowiednim x, czyli wartością odciętej, możemy podstawić, a w ten sposób otrzymamy dokładną wartość rzędnej. A zatem z punktu widzenia geometrii analitycznej problem interpolacji zmierza po prostu do tego, aby dla „rzędnych rozstawionych" wyznaczyć jakieś równanie krzywej o tej własności, by zgodnie z tym równaniem wszystkie punkty o naszych rzędnych leżały na krzywej (były punktami krzywej). Lecz powierzchowny nawet szkic już nas poucza, że pomiędzy dowolnie danymi punktami można poprowadzić nieskończenie wiele krzywych, przy czym wszystkie te krzywe łączą dane punkty (fig. 73).

A zatem problem interpolacji nie da się rozwiązać sam przez się, o ile się nie poczyni pewnych założeń. Te właśnie rozważymy obecnie.

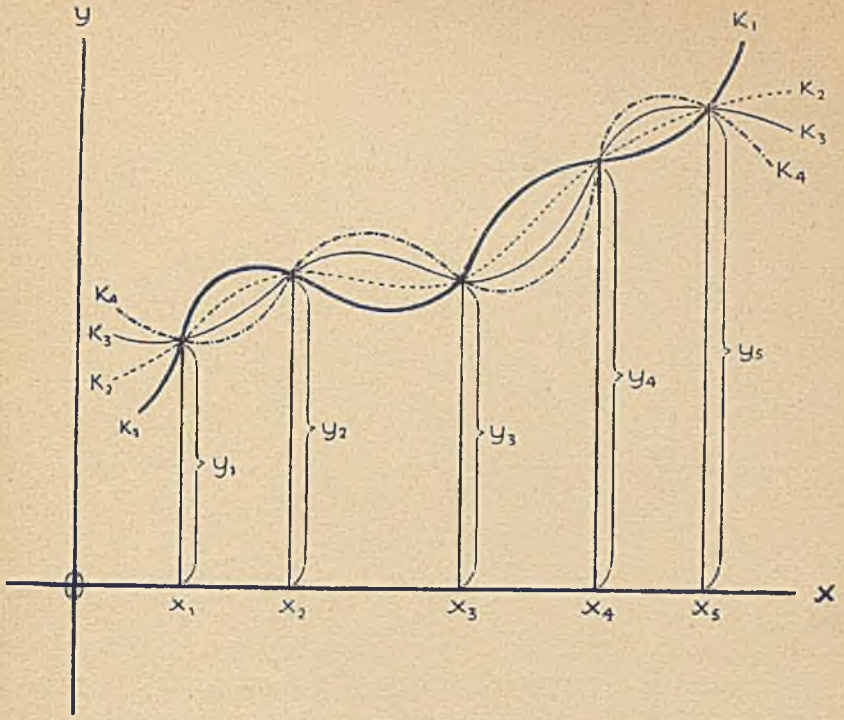


Fig. 73.

Przyjmijmy więc, że mamy interpolować nieznaną jeszcze krzywą pomiędzy dwoma tylko punktami. (Por. fig. 74.)

Jeśli wybierzemy tak zwaną interpolację liniową, wtedy po prostu łączymy te dwa punkty prostą. Jeśli uznamy teraz przedział za sumę wszystkich części, na jakie go podzieliliśmy, i nazwiemy go $\sum \Delta x$, wtedy różnica liczb, czyli różnica rzędnych, będzie odpowiednio $\sum \Delta y$. Otóż podzielmy nasz przedział na równe części Δx. Z rysunku widać bez niczego, że każdemu Δx odpowiada pewne Δy. Ale wskutek założenia, że wszystkie Δx są sobie równe, także wszystkie Δy są równe co do wielkości. Zachodzi zatem proporcja $\sum \Delta x : \sum \Delta y = \Delta x : \Delta y$, przy czym Δx równa się $\sum \Delta x$ podzielonej przez ilość części podziału. Jeśli więc przedział podzielono na n części, wówczas jest $\frac{\Sigma \Delta x}{n} = \Delta x$ i odpowiednio $\frac{\Sigma \Delta y}{n} = \Delta y$. Ale ten rodzaj interpolacji proporcjonalnej jest dopuszczalny tylko tam, gdzie „krzywą“ można istotnie uważać za prostą. Ponieważ nasza

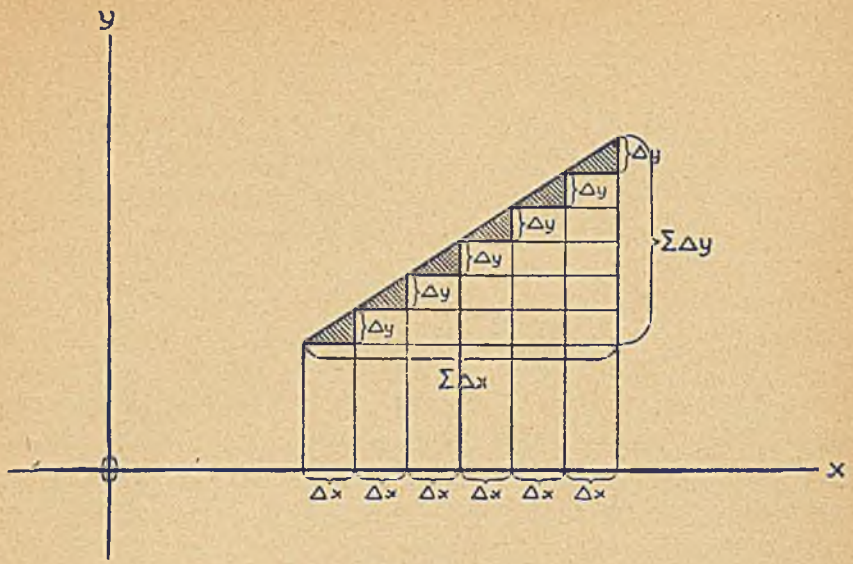


Fig. 74.

metoda „liniowa" stosowana bywa przy logarytmach liczb większych, musimy się przyjrzeć krzywej logarytmicznej. Wprawdzie i dla większych liczb ona też nie jest wcale prostą, jest jednak tak zbliżona do prostej, że błąd, jaki popełniamy wskutek interpolacji liniowej, jest w istocie rzeczy znikomo mały. Jednakowoż w teorii i praktyce statystyki nie stosuje się bynajmniej tylko interpolacji liniowych, ale można także założyć względnie zażądać, by nieznane jeszcze równanie krzywej, które ma być spełnione przez wszystkie dane punkty, miało postać wielomianu, czyli paraboli n-tego stopnia. Równanie to powinnoby zatem brzmieć:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x^1 + a_n x^0 = y.$$

Aby na podstawie podanych punktów znaleźć tego rodzaju równania, wymyślono metody subtelne, i genialne zarazem. Dotyczy to również odpowiedzi na pytanie, jak należy w takich wypadkach przeprowadzać interpolację na podstawie już raz znalezionego równania. Tu już przyrosty na y nie są bynajmniej proporcjonalne do częściowych przyrostów x, ale są od nich zależne w sposób o wiele bardziej zawiły. Ponadto odgrywa jeszcze rolę to, czy punkty podane leżały w równych od siebie odstępach, czy nie. Obok interpolacji „liniowej" i „parabolicznej" są jednak inne jeszcze, o wiele trud-

niejsze i subtelniejsze metody interpolowania, których już nawet nie wymienimy. A chociaż mamy do wyboru właściwie nieskończenie wiele możliwości interpolacji, a więc problem jest zupełnie nieoznaczony, mimo to udaje się często znaleźć bardzo precyzyjne wartości interpolacyjne w zastosowaniach praktycznych i dla celów naukowych.

Aby jednak teoria ta nie wydawała się zbyt sucha, pokażmy cel interpolacji w przypadkach praktycznych. Przypuśćmy, że w jakimś państwie odbywały się spisy ludności co dziesięć lat. Dla braku pieniędzy nie dotrzymano raz terminu. A więc spisów dokonano np. w latach 1870, 1880, 1890, 1900, 1910, 1930, przy czym dały one rezultaty Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6. Nas jednak interesuje liczba ludności w roku 1885, czy w 1907, czy w 1914 albo w 1921. A także w 1920, czyli w roku, w którym spis wcale się nie odbył. Jeśli pominąć np. wojnę, epidemie itp., to natrafiamy na przypadek interpolacji. I to interpolacji pomiędzy rzędnymi, które po części nie są równo oddalone od siebie, gdyż jeden z odstępów wynosi dwadzieścia lat. Mogło by nas ponadto interesować, jak się przedstawiała liczba ludności przed rokiem 1870, np. w 1860 r., albo jak będzie ona wyglądała dajmy na to w roku 1940. Ten problem uzyskiwania wartości (rzędnych), które wykraczają poza nasz przedział, nazywa się problemem „ekstrapolacji". W istocie pytamy się o to, jak przedstawiałaby się funkcja, którą mamy uzyskać z poszczególnych rzędnych, poza przedziałem tych rzędnych, jeżeli własności tej funkcji w przedziale rozszerzylibyśmy poza przedział w obie strony.

Następny przykład z astronomii. Przypuśćmy, że znamy część toru komety na podstawie kilku obserwacji jej kolejnych stanowisk. Dotychczas jednak nie mogliśmy wyznaczyć krzywej toru, ponieważ dokonano za mało obserwacji. A przecież, jeżeli są pewne przypuszczenia co do ewentualnego kształtu toru, możemy z pewnym prawdopodobieństwem tor ten obliczyć w drodze interpolacji i ekstrapolacji. Obserwacja może potem pokazać, jak dalece trafne były nasze przypuszczenia. Co więcej, w przypadku problemu „*n*-mas", to znaczy toru, wyznaczonego na podstawie dostrzeżonych sił przyciągania, pochodzących od więcej niż jednego ciała, zawsze skazani jesteśmy na tego rodzaju metody, ponieważ problem „*n*-mas" do dziś dnia nie da się rozwiązać inaczej jak statystycznie.

Dodajmy jeszcze, że pojęcia interpolacji i ekstrapolacji posiadają znaczenie daleko poza dziedziną matematyki. W życiu codzien-

nym, przy setkach sposobności sami operujemy bezwiednie interpolacjami i ekstrapolacjami. Polityka, historia, życie zawodowe, medycyna posługują się tym pojęciem i próbują pomiędzy znane zjawiska wstawiać wartości pośrednie, a raz poznany przebieg jakiegoś zakresu przenieść w przeszłość, a tym bardziej w wyroczną przyszłość. I częściej, niż się to w rzeczywistości dzieje, należało by także w pozamatematycznym życiu uwzględniać ścisłą przezorność matematyka, szczególnie w odniesieniu do ekstrapolacji. Dało by się wtedy niejednokrotnie uniknąć zgubnych wniosków, wyciąganych z teraźniejszości na przyszłość.

Teraz jednakże wyczerpaliśmy dostatecznie temat, jaki sobie postawiliśmy. Jak się spodziewamy i wierzymy, dotrzymaliśmy również naszego przyrzeczenia, poprowadziwszy czytelnika od tabliczki mnożenia do całki. Jeżeli, w wyższych zwłaszcza dziedzinach, wytwarzał się stan rzeczy coraz bardziej niezadawalający, kiedy to ciągle prawie musieliśmy zastrzegać się, że ten i ów problem, to i owo rozwiązanie w rozwinięciu przekracza nasze ramy, to wówczas—proszę mi wybaczyć — uwaga taka podyktowana była istotnie niedostatkiem naszych wiadomości. Jasne poznanie własnych granic nigdy nie może deprymować. Dla szlachetnych umysłów będzie raczej bodźcem do wyrwania żądła niewiedzy z ciała. Co więcej, uświadomienie niewiedzy to również jedyna pobudka do usunięcia braków przez pracę. Każdy człowiek, każdy naród, cała ludzkość ma tyle przyszłości przed sobą, ile wiedzie za sobą nierozwiązanych problemów, które oczywiście bada uporczywie. Bo kres postępu jest subiektywnym złudzeniem, a tak zwane zakończenie rozwoju oznacza tylko martwotę. Każdy z naszych tytanów matematyki, czy imię jego Pitagoras, Eudoksos, Euklides, Archimedes, Apollonius z Perge, Alchwarizmi, Kepler czy Descartes, uważał rozwój za zamknięty w jakiś sposób. A wszyscy współcześni, idąc za swymi przewodnikami duchowymi, byli tego samego zdania. Ale potem przyszedł Newton, przyszedł Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Riemann, Weierstrass, Minkowski, Hilbert. I stale będą coraz to inni przychodzili. Skoro więc dotychczas wdarliśmy się tylko nieco w dziedzinę matematyki, to mimo to dla zadowolenia własnej ambicji możemy powiedzieć sobie, że przynajmniej zbadaliśmy zasadniczo to, co najistotniejsze. I że dopięliśmy czegoś bardzo ważnego. Wiemy mianowicie, co da się w matematyce osiągnąć, czego da się nauczyć, co można zbadać.

A przez to uzyskaliśmy rzecz najważniejszą: Poważanie dla prawdziwej wielkości rozumu. Faust mówi w pewnym miejscu: „Przywykliśmy, że ludzie wyszydzają to, czego nie rozumieją". Jeśli do tych słów Goethego zastosujemy „funkcję odwrotną", wówczas wyrazimy to, co należy uważać za wspólną korzyść z naszej pracy: „Człowiek to tylko poważa, co rozumie". Poważanie jednak uznaje rzeczy poważane jako doskonałe. A do doskonałości musi i będzie dążyć jednostka, naród, ludzkość. Nie tylko w swym własnym interesie, lecz i dla większej chwały Boga.

B I B L I O G R A F I A

Wychodząc z założenia, że książka ta, ukazawszy chętnemu czytelnikowi piękno i wielkość matematyki, zachęci go do dalszych studiów i pogłębienia nabytych wiadomości, zaopatrzył ją autor w krótką bibliografię przedmiotu. Idąc po tej samej linii, zestawił tłumacz dla użytku czytelnika polskiego krótki wykaz dzieł matematycznych polskich wzgl. dostępnych w języku polskim, a umożliwiających głębsze wniknięcie i ściślejsze zapoznanie się z głównymi zagadnieniami matematycznymi.

J. TANNERY: Arytmetyka teoretyczna i praktyczna. Z VI. wydania franc. przeł. Z. Czubalski. Warszawa, E. Wende i S-ka, 1917.

ST. RUZIEWICZ I E. ŻYLIŃSKI: Wstęp do matematyki. I. Elementy algebry wyższej i teorii liczb. Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Lwów 1927.

W. WILKOSZ: Elementy teorii liczb. Kółko Mat.-Fiz. U. U. J., Kraków 1937.

— Liczę i myślę (Jak powstała liczba). Księgarnia Powszechna, Kraków 1938.

WACŁAW SIERPIŃSKI: Przekroje. Wstęp do teorii liczb niewymiernych. Książnica Atlas, Lwów—Warszawa 1934. Biblioteczka Matematyczna Nr 1.

— Teoria liczb niewymiernych (Wstęp do analizy). Jakubowski, Lwów 1928, wyd. II.

— Wstęp do teorii mnogości i topologii. Jakubowski, Lwów 1930.

J. HADAMARD: Wykład geometrii elementarnej. T. I., Geometria na płaszczyźnie. Kasa im. Mianowskiego. Warszawa 1923.

F. ENRIQUES: Zagadnienia dotyczące geometrii elementarnej. T. I. Krytyka podstaw. Gebethner-Wolff, Warszawa 1914. Przekład St. Kwietniewskiego i Wł. Wojtowicza.

FR. LEJA: Geometria analityczna i początki geometrii różniczkowej. Gebethner-Wolff, Warszawa 1934.

A. HOBORSKI: Wyższa matematyka. Składy główne: Księgarnie Gebethnera i Wolffa. Część I, wyd. 2-gie, Kraków 1928. Część II, Kraków 1923.

G. KOWALEWSKI: Zasady rachunku różniczkowego i całkowego. Z II wyd. niemieckiego za zezwoleniem autora przełożył Ignacy Roliński. Warszawa, E. Wende 1923.

H. POINCARÉ: Nauka i hipoteza. J. Mortkowicz, Warszawa 1908.

— Nauka i metoda. J. Mortkowicz, Warszawa 1911.

— Wartość nauki. J. Mortkowicz, Warszawa 1908.

JAN SLESZYŃSKI: Teoria dowodu. Podług wykładów uniwersyteckich opracował S. K. Zaremba. Kółko Matem.-Fiz. U. U. J. T. I. Kraków 1925. T. II. Kraków 1929.

A. TARSKI: O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej. Książnica Atlas, Lwów—Warszawa. Biblioteczka Matematyczna, tomik 3—5.

J. W. YOUNG: Dwanaście wykładów o zasadniczych pojęciach algebry i geometrii. E. Wende i S-ka. Warszawa—Lwów.

A. N. WHITEHEAD: Wstęp do matematyki. W przekł. Wł. Wojtowicza. E. Wende i S-ka, Warszawa—Lwów.

DOSTRZEŻONE OMYŁKI DRUKU

(które poprawić należy przed rozpoczęciem czytania)

Str. 12. wiersz 6-ty od góry zamiast „przeprowadzana“ ma być „przeprowadzona“

„ 134. „ 1-szy od dołu „ $\left(\frac{x \quad 4}{3}\right)$ „ „ $\left(\frac{x-4}{3}\right)$

„ 145. „ 1-szy od góry w miejsce 3-go i na odwrót

„ 145. „ 4-ty od góry zamiast $\frac{1}{a-n}$ ma być $\frac{1}{a^{-n}}$

„ 147. „ 3-ci od góry „ $\sqrt{a^{15}}$ „ „ $\sqrt[4]{a^{15}}$

„ 156. „ 8-my od dołu „ $a_\nu g^{\nu-4}$ „ „ $a_\nu g^{\nu-1}$

„ 160. „ 3-ci od góry „ $\sum_{1}^{2}$ „ „ $\sum_{1}^{2n}$

„ 165. „ 15-ty od góry w mianowniku zamiast 10 ma być 10^3

„ 216. „ 14-ty od dołu zamiast $\sqrt[3]{-1}$ ma być $\sqrt[3]{\sqrt{-1}}$

„ 287. „ 8-my od dołu „ pole trójkąta „ „ pole prostokąta

„ 290. „ 13-ty od dołu „ $qn-1$ „ „ q^n-1

„ 296. „ 12-ty od dołu „ peracji „ „ operacji

„ 329. „ 11-ty od dołu „ $\frac{a^2}{2} \cdot \frac{4}{3}$ „ „ $\frac{a^3}{2} \cdot \frac{4}{3}$

„ 332. „ 9-ty od dołu „ $\frac{1}{-} \cdot x^0$ „ „ $\frac{1}{0} \cdot x^0$

„ 340. „ 9-ty od dołu „ $\frac{n}{1!}$ „ „ $\frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n}$

SPIS RZECZY

Str.

PRZEDMOWA I

WSTĘP VII

Rozdział I

„PRAWDZIWA KABAŁA“ 1

Rozdział II

UKŁAD DZIESIĄTKOWY 8

Rozdział III

UKŁADY LICZB NIE-DZIESIĄTKOWE 14

Rozdział IV

SYMBOLE I ROZKAZY 27

Rozdział V

KOMBINATORYKA 33

Rozdział VI

PERMUTACJA 36

Rozdział VII

KOMBINACJA W ŚCIŚLEJSZYM ZNACZENIU 44

Rozdział VIII

WARIACJE 54

Rozdział IX

PIERWSZE KROKI W ALGEBRZE 64

Rozdział X

ZNAKOWANIE ALGEBRAICZNE 69

Rozdział XI

OPERACJE ALGEBRAICZNE 81

Rozdział XII

UŁAMKI ZWYCZAJNE 105

Str.

Rozdział XIII
RÓWNANIA 117

Rozdział XIV
RÓWNANIA NIEOZNACZONE 133

Rozdział XV
POTĘGI O WYKŁADNIKACH UJEMNYCH I UŁAMKOWYCH . . 143

Rozdział XVI
LICZBY NIEWYMIERNE 148

Rozdział XVII
UŁAMKI SYSTEMATYCZNE 155

Rozdział XVIII
FUNKCJE. (WYWÓD ALGEBRAICZNY) 169

Rozdział XIX
TWIERDZENIE PITAGORASA 185

Rozdział XX
FUNKCJE KĄTOWE 193

Rozdział XXI
LICZBY UROJONE 201

Rozdział XXII
WSPÓŁRZĘDNE 217

Rozdział XXIII
GEOMETRIA ANALITYCZNA 228

Rozdział XXIV
PROBLEM KWADRATURY 241

Rozdział XXV
RÓŻNICZKA I PROBLEM REKTYFIKACJI 257

Rozdział XXVI
ZWIĄZKI POMIĘDZY POCHODNĄ A ROZKAZEM CAŁKI . . . 265

Rozdział XXVII
TRZY RODZAJE NICOŚCI 269

Str.

Rozdział XXVIII

POTĘGA DWUMIANU 273

Rozdział XXIX

KWADRATURA PARABOLI ARCHIMEDESA 281

Rozdział XXX

SZEREGI 289

Rozdział XXXI

TECHNIKA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO 293

Rozdział XXXII

MAKSIMA I MINIMA 302

Rozdział XXXIII

TECHNIKA CAŁKOWANIA 311

Rozdział XXXIV

WARTOŚĆ ŚREDNIA I CAŁKA OKREŚLONA 317

Rozdział XXXV

DALSZE PROBLEMY KWADRATURY 326

Rozdział XXXVI

LOGARYTMY 334

Rozdział XXXVII

INTERPOLACJA, EKSTRAPOLACJA. — ZAKOŃCZENIE . . . 347

BIBLIOGRAFIA 354

DOSTRZEŻONE OMYŁKI DRUKU 355

POLITECHNIKA ŚLĄSKA BIBLIOTEKA GŁÓWNA w Gliwicach

BG Politechniki Śląskiej
nr inw.: 102 - 131983
Dyr.1 131983

PWRS