ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964
Seria: GÓRNICTWO z. 12 Nr kol. 124

JERZY ANTONIAK

SPRĘŻYSTE PRZEMIESZCZENIE LINY NA ŁUKU OPASANIA

Streszczenie. Następstwem sprężystości lin i przenoszonego przez koło pędne momentu obciążenia jest sprężyste przemieszczenie elementów liny. Rozpatrzenie tego problemu z uwzględnieniem sił tarcia występujących na łuku opasania jest celem artykułu.

Przy nierównym obciążeniu liny po obu stronach koła pędnego ($S_1 > S_2$) moment roboczy pozwalający na podnoszenie ciężaru $Q = S_1 - S_2$ wynika z całkowania zmiennej po łuku opasania siły tarcia. Ponieważ współczynnik sprzężenia μ stalowej liny z sprężystą wykładziną koła pędnego da się wyrazić [1] poprzez zależną od kąta α prędkość sprężystego poślizgu liny, uzyskanie momentu roboczego jest określone przez uformowany profil tejże prędkości.

W pracy [1] wykazano, że uformowany profil prędkości sprężystego poślizgu wykazuje małe prędkości na początku łuku opasania po stronie obciążenia S_1 i stosunkowo duże na końcu łuku opasania po stronie obciążenia S_2. Tak więc decydujący wpływ na wielkość momentu roboczego mają siły tarcia uzyskane na końcowej partii łuku opasania. Każdy element liny wchodzący na koło pędne (powierzchnię tarcia) doznaje wydłużenia lub skrócenia zależnie od kierunku obrotu koła podnoszenia lub opuszczania

ciężaru S_1. Nieodkształcony odcinek liny o długości l przechodząc ze strony o napięciu S_1 na stronę o napięciu S_2 zmienia swoją rzeczywistą długość z wartości $l + \Delta l_1$ na wartość $l + \Delta l_2$ ($\Delta l_1 > \Delta l_2$). Powstała w ten sposób różnica długości ($\Delta l_1 - \Delta l_2$) może być rezultatem:

a) skokowo narastającej zmiany długości rozpatrywanego odcinka oraz nagłej zmiany długości w momencie zejścia liny z łuku opasania. Ten przypadek jest zobrazowany funkcją malejącą coraz intensywniej z kątem α lub czasem t

$$\frac{d\varepsilon}{dt} < 0, \quad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} < 0$$

co przedstawia rys. 1.

b) stopniowej zmiany długości rozpatrywanego odcinka liny na łuku opasania. Ten przypadek jest zobrazowany funkcją początkowo coraz intensywniej malejącą z czasem t aby następnie przejść w funkcję coraz mniej intensywnie malejącą z czasem t

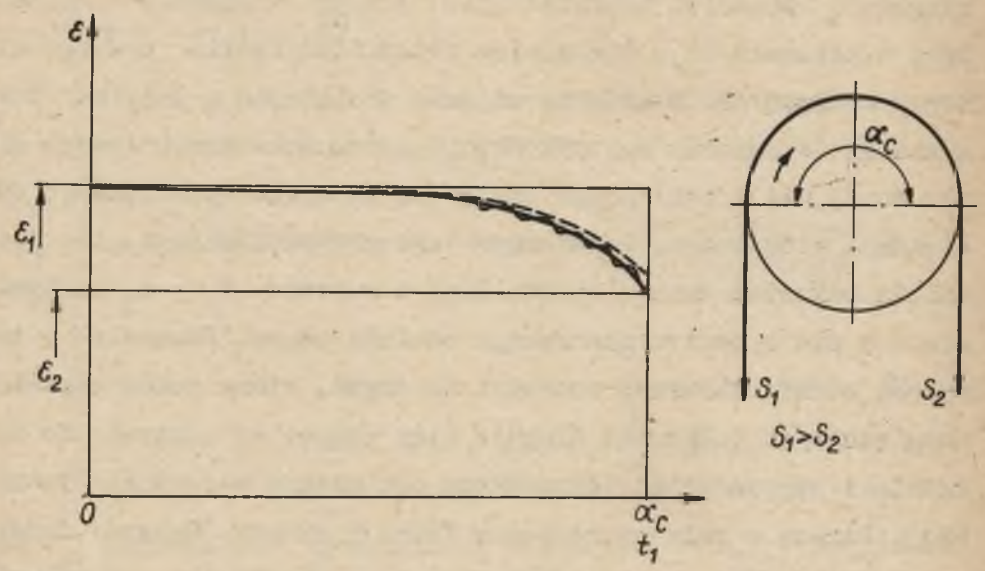
$$\frac{d\varepsilon}{dt} < 0, \quad \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} < 0$$

i w końcowej partii łuku opasania (po stronie S_2)

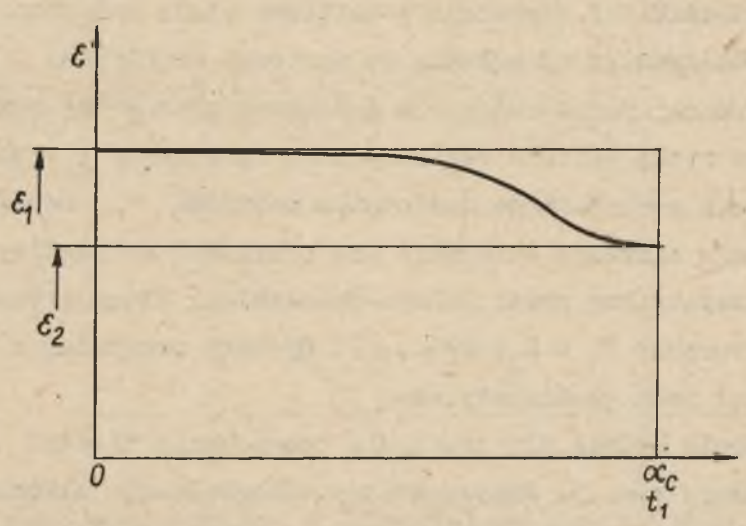
$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} > 0$$

co przedstawia rys. 2.

Przypadkowi a) odpowiada skokowe narastanie wartości współczynnika sprzężenia wzdłuż łuku opasania, który w końcowej partii łuku przechodzi w dynamiczny współczynnik sprzężenia. Nie-



Rys. 1. Podnoszenie ciężaru $S_1 > S_2$. Przypadek a) zmiany wydłużenia jednostkowego liny na łuku opasania

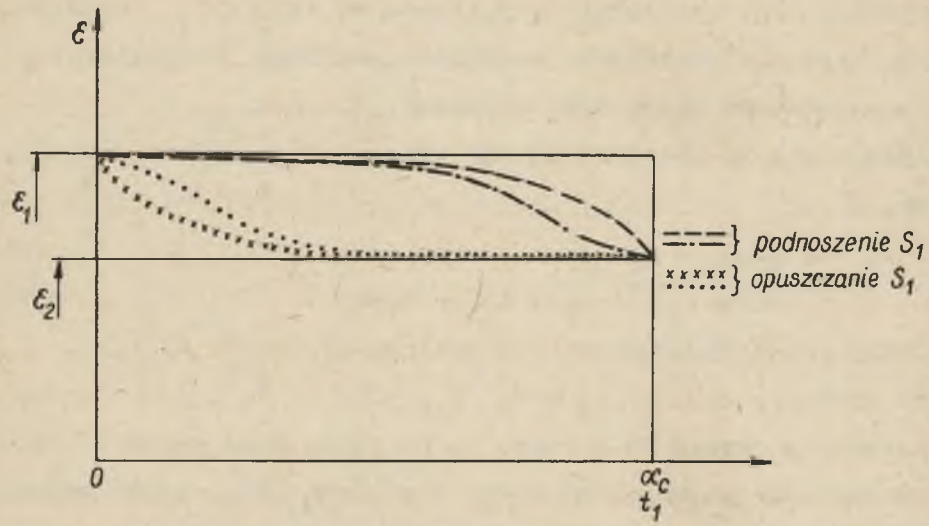


Rys. 2. Podnoszenie ciężaru $S_1 > S_2$. Przypadek b) zmiany wydłużenia jednostkowego liny na łuku opasania

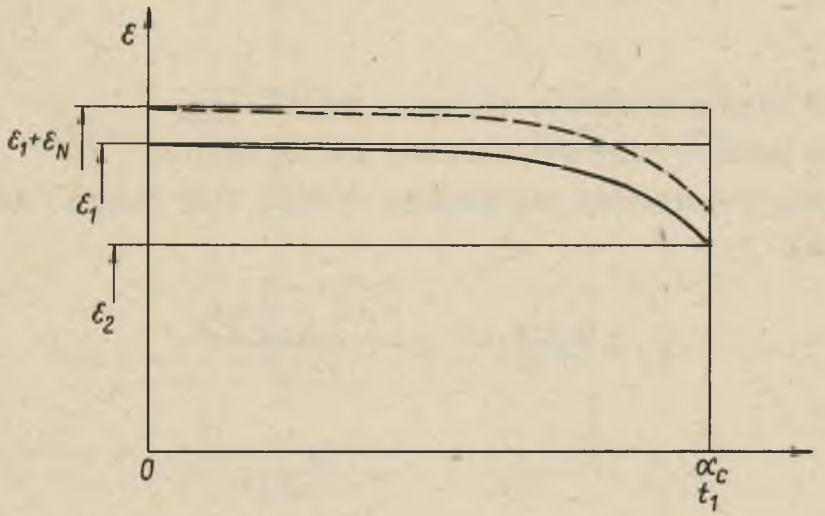
ciągłości szybkości odkształcania $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ w punkcie zejścia liny o napięciu S_2 z wykładziny odpowiadać będzie powstawanie drgań wzdłużnych. Gwałtowne zdjęcie obciążenia z liny na łuku opasania (wykonanie np. pół obrotu przez koło pędne wymaga nie raz mniej niż 1 sek) można uważać za zjawisko dynamicznego odciążenia wzdłużnego. Granicznym tego przypadkiem (rys. 1) jest zmiana odkształcenia elementu liny o wartość $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ natychmiast a nie w pewnym skończonym odcinku czasu. Powstała w ten sposób strefa zaburzeń prowadzi do drgań, które można określić uwzględniając całkowitą długość liny nośnej od naczynia do naczynia i wprowadzając jednostkowe obciążenie w postaci dystrybucji Diraca w celu wyznaczenia funkcji wpływu (Greena) danego zagadnienia. Wyznaczenie funkcji wpływu umożliwia określenie przebiegu drgań dla dowolnego obciążenia liny na łuku opasania. Zagadnienie jest przedmiotem osobnej pracy.

Przypadkowi b) odpowiada początkowo stałe narastanie wartości współczynnika sprzężenia do wartości granicznej (odpowiadającej danej parze trącej) a następnie w końcowej partii łuku opasania stała wartość współczynnika sprzężenia μ = const. Po pominięciu początkowego narastania wartości współczynnika sprzężenia ciernego otrzymuje się przypadek szczególny przypadku b) rozpatrzony przez Eulera-Eytelweina, który prowadzi do znanej formuły $S_1 = S_2 \cdot \exp(\mu \cdot \alpha_c)$. Ogólnie przypadek b) można traktować jako quasistatyczny.

Podobnie będzie dla przypadku opuszczania ciężaru $S_1 > S_2$, co obrazuje rys. 3. Krzywe zmiany odkształcenia elementu liny na łuku opasania będą krzywymi tego samego rodzaju przesuniętymi na wykresie bardziej w lewo. Na rys. 4 zaznaczono spadek napięcia w linie na łuku opasania dla przypadku poślizgu nie-



Rys. 3. Podnoszenie, opuszczanie ciężaru $S_1 > S_2$. Przypadki a) i b) zmiany wydłużenia jednostkowego liny na łuku opasania



Rys. 4. Przypadek poślizgu niesprężystego liny na łuku opasania, wywołany przeciążeniem N

sprężystego liny wywołanego przeciążeniem strony S_1 ciężarem N, przy czym dla określenia prędkości poślizgu niesprężystego jest μ = const na całym łuku opasania.

Zakładając, że nieodkształcona długość liny nośnej wynosi, rys. 5

$$L = l_I + l_{II} + R_1 \cdot \alpha_c \tag{1}$$

a więc jest $\varepsilon_{1I} = 0$, $\varepsilon_{1II} = 0$, $\varepsilon_{1k} = 0$.

Jeśli teraz obciążyć linę równo z obu stron koła pędnego i ciężar własny liny nośnej jest równy ciężarowi liny wyrównawczej $\gamma = \gamma'$ kG/m, to napięcie liny z obu stron koła pędnego będzie równe

$$S_2 = Q + \gamma \cdot (l_I + w) = Q + \gamma \cdot (l_{II} + z) \tag{2}$$

gdzie:

Q - ciężar całkowity naczynia, kG,

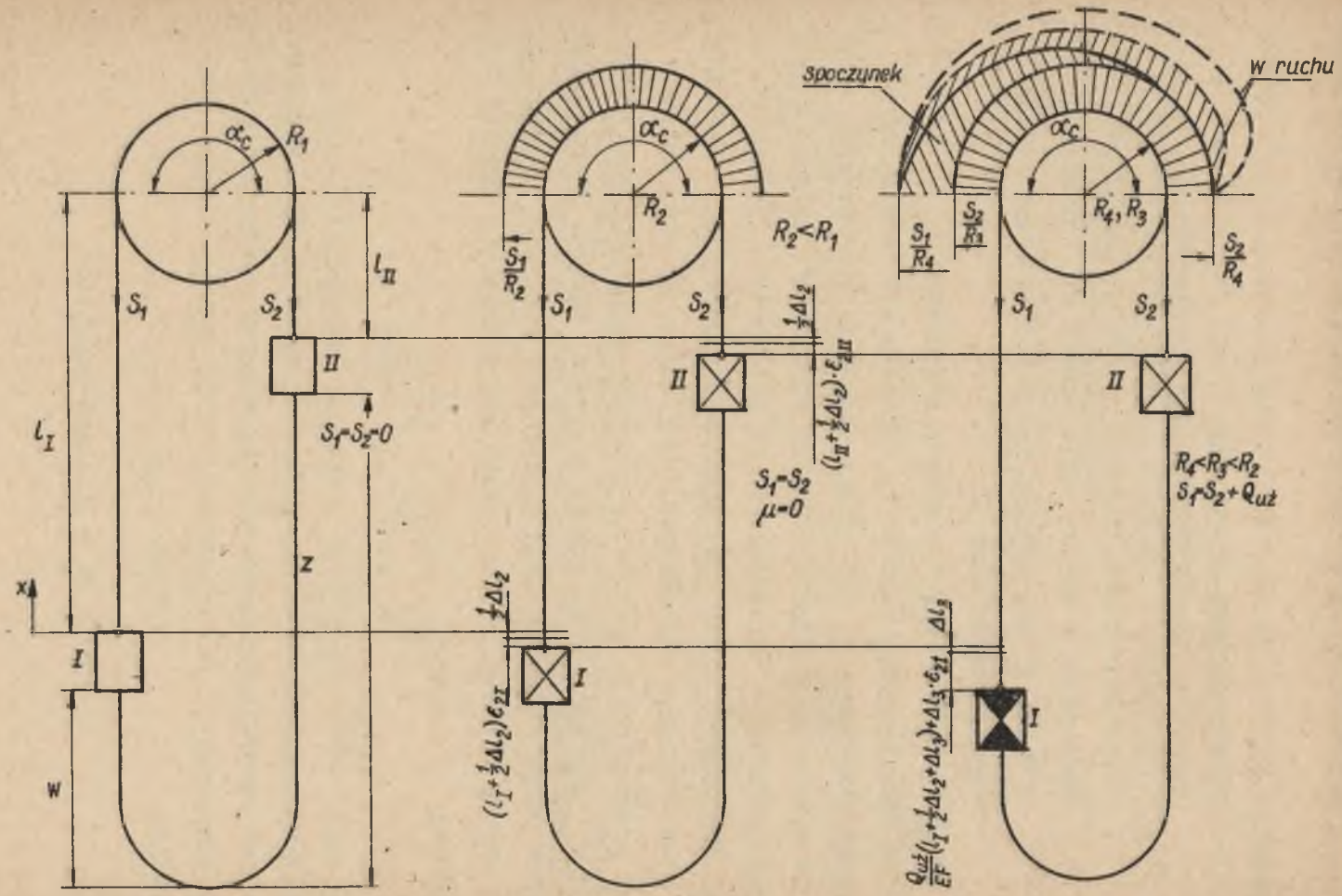
w,z - odcinki liny wyrównawczej jak na rys. 5.

Wydłużenie jednostkowe dla każdego odcinka liny nośnej wyniesie teraz

$$\varepsilon_{2I} = \frac{Q + w \cdot \gamma}{E \cdot F} + \frac{\gamma \cdot (l_I + \frac{1}{2}\Delta l_2)}{2 \cdot E \cdot F} \tag{3}$$

$$\varepsilon_{2II} = \frac{Q + z \cdot \gamma}{E \cdot F} + \frac{\gamma \cdot (l_{II} + \frac{1}{2}\Delta l_2)}{2 \cdot E \cdot F} \tag{4}$$

$$\varepsilon_{2k} = \frac{S_2}{E \cdot F} \tag{5}$$



Rys. 5. Schematy do określenia sprężystego przemieszczenia liny na łuku opasania

gdzie:

E.F - sztywność liny nośnej, kG,

$\Delta l_2 = (R_1 - R_2).\alpha_c + \frac{S_2.R_2.\alpha_c}{E.F}$ - nieodkształcona długość odcinka liny, która przeszła z koła na obie strony liny zwisającej w wyniku zmniejszenia się promienia koła z R_1 na R_2 pod wpływem ugięć promieniowych wykładziny oraz napięcia liny S_2.

Po obciążeniu strony I ciężarem użytecznym Q_{uz}, równowaga sił na łuku opasania zajdzie za udziałem sił tarcia. Lina po stronie obciążenia S_2 nie zmieni długości. Łuk opasania skróci się w wyniku zmniejszenia długości promienia o ugięcie promieniowe wykładziny, wynikające ze zmiany nacisku promieniowego. Lina znajdująca się na łuku opasania wydłuży się. Wydłużenie to można wyliczyć następująco: przyjmując, że nowa krzywa ugięć promieniowych wykładziny po wzroście naciągu po stronie I o wartość $Q_{uż}$ nie wpłynie na zmianę krzywizny okręgu, który pozostanie dalej okręgiem, lecz o promieniu $R_3 < R_2$, elementarny łuk okręgu wyrażony przez elementarną nienapiętą długość liny, wyniesie

$$R_3.d\alpha = dl.(1 + \frac{S}{E.F}) \qquad (6)$$

Zmianę napięcia w linie zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi odnośnie przypadku a) i b) mogą wyrażać różne funkcje. Np. przypadek a) dla zahamowanego koła pędnego oddaje dobrze funkcja

$$S(\alpha) = S_2 + Q_{uż}.\exp(-b.(\alpha_c - \alpha)) \qquad (7)$$

a zatem

$$R_3 \cdot d\alpha = dl \cdot \left[1 + \frac{S_2}{E \cdot F} + \frac{Q_{uż} \cdot \exp(-b \cdot (\alpha_c - \alpha))}{E \cdot F} \right] \tag{8}$$

Biorąc przybliżenie można napisać

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$$

$$dl = R_3 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot d\alpha \tag{9}$$

Wykorzystując zależność (9) w rozpisaniu wyrażenia (8) otrzymuje się

$$dl = R_3 \cdot \left[1 - \frac{S_2}{E \cdot F} - \frac{Q_{uż} \cdot \exp(-b \cdot (\alpha_c - \alpha))}{E \cdot F} \right] \cdot d\alpha \tag{10}$$

Całkując równanie różniczkowe (10) w granicach kąta opasania, otrzymuje się nieodkształconą długość liny będącą aktualnie na łuku opasania

$$l_3 = R_3 \cdot \left[\alpha_c - \frac{S_2 \, \alpha_c}{E \cdot F} - \frac{Q_{uż}}{b \cdot E \cdot F} \right] \tag{11}$$

we wzorze (11) pominięto składnik $\frac{R_3 \cdot Q_{uż} \cdot \exp(-b \cdot \alpha_c)}{b \cdot E \cdot F}$ jako mały. Natomiast długość nieodkształconej liny na łuku opasania, przy napięciu w linie S_2 z obu stron koła była równa

$$l_2 = R_2 \cdot (\alpha_c - \frac{S_2 \cdot \alpha_c}{E \cdot F}) \tag{12}$$

A zatem różnica w długościach liny nieodkształconej spoczywającej na łuku opasania wyniesie

$$\Delta l_3 = l_2 - l_3 = (R_2 - R_3)\cdot\alpha_c + \frac{S_2\cdot\alpha_c}{E\cdot F}\cdot(R_3 - R_2) + \frac{Q_{uż}\cdot R_3}{b\cdot E\cdot F} \qquad (13)$$

Ta długość liny przejdzie z koła pędnego na stronę bardziej obciążoną, na stronę I. Natomiast już od pierwszego obrotu koła w kierunku od S_1 do S_2, różnica napięć w linie po obu stronach koła pozostaje ta sama (ciężar liny wyrównawczej ten sam co nośnej, brak przyspieszeń itp.), lecz rozkład napięcia w linie wzdłuż łuku opasania zmienia się, na łuku opasania jest teraz więcej liny pod napięciem S_1 niż przy zahamowanym kole. Zmianę napięcia w linie wzdłuż łuku opasania można w tym przypadku wyrazić następująco

$$S(\alpha) = S_1 - Q_{uż}\cdot\exp(-b\cdot(\alpha_c - \alpha)) \qquad (14)$$

Wstawiając zależność (14) w (9) i uwzględniając, że łuk opasania nieco zmniejszy się, a odpowiadającym promieniem łuku koła jest $R_4 < R_3$, wykonując przepisane całkowanie otrzymuje się długość nieodkształconej liny znajdującą się na łuku opasania

$$l_4 = R_4\cdot(\alpha_c - \frac{S_1\cdot\alpha_c}{E\cdot F} + \frac{Q_{uż}}{b\cdot E\cdot F}) \qquad (15)$$

Tak więc nieodkształcony odcinek liny spoczywający na łuku opasania ponownie skrócił się przechodząc na stronę bardziej obciążoną, skrócenie to wyniosło

$$\Delta l_4 = l_3 - l_4 = (R_3 - R_4)\alpha_c + (\frac{S_1\cdot R_4}{E\cdot F} - \frac{S_2 R_3}{E\cdot F})\alpha_c - \frac{Q_{uż}}{b\cdot E\cdot F}\cdot(R_4 + R_3) \qquad (16)$$

W czasie ruchu urządzenia wyciągowego, pomimo że napięcie w linie pozostaje stałe z jednej i drugiej strony koła pędnego (przy pominięciu sił dynamicznych) wydłużenie jednostkowe elementów liny wchodzących i schodzących z koła pędnego ulega zmianie. I tak dla strony I jest

$$\varepsilon_I(x) = \frac{Q+Q_{uż}}{E \cdot F} + \frac{(w+x) \cdot \gamma}{E \cdot F} + \frac{(l_I^o - x) \cdot \gamma}{2 \cdot E \cdot F} \tag{17}$$

dla strony II

$$\varepsilon_{II}(x) = \frac{Q}{E \cdot F} + \frac{(z - x) \cdot \gamma}{E \cdot F} + \frac{(l_{II}^o + x) \cdot \gamma}{2 \cdot E \cdot F} \tag{18}$$

gdzie:

$$l_I^o = l_I + \frac{1}{2} \cdot \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4$$

$$l_{II}^o = l_{II} + \frac{1}{2} \cdot \Delta l_2$$

Na koło pędne nawijają się nieodkształcone elementarne długości liny

$$dx = \frac{dx_I}{1 + \varepsilon_I(x)} \tag{19}$$

a zbiegają

$$dx = \frac{dx_{II}}{1 + \varepsilon_{II}(x)} \tag{20}$$

Wielkość przemieszczenia du(x) można dla każdej długości jazdy x wyliczyć z równania

$$du(x) = dx_I - dx_{II} = dx \cdot [\varepsilon_I(x) - \varepsilon_{II}(x)] \tag{21}$$

Wykorzystując (17) i (18) w rozpisaniu wyrażenia (21) po uproszczeniach otrzymuje się równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

$$\frac{du}{dx} - M - \frac{\gamma}{E \cdot F} \cdot x = 0 \tag{22}$$

gdzie:

$$M = \frac{1}{E \cdot F}\left(Q_{uż} - \frac{1}{2} \cdot H \cdot \gamma\right)$$

Rozwiązaniem równania (22) dla warunków brzegowych jest

$$u = A \cdot x + B \cdot x^2 \tag{23}$$

gdzie:

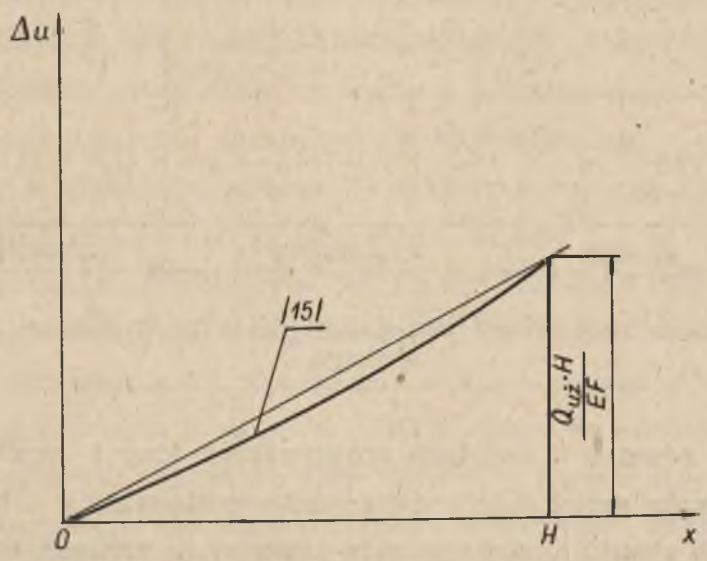
$$A = M \quad i \quad B = \frac{\gamma}{2 \cdot E \cdot F}$$

Dla $x = 0$ jest $\Delta u = 0$, natomiast dla $x = H$ jest $\Delta u = \frac{Q_{uż} \cdot H}{E \cdot F}$. Wykres funkcji danej równaniem (23) przedstawiono na rys. 6. Jeżeli warunek $\gamma = \gamma'$ nie jest spełniony w praktyce to równanie (23) przejdzie w następujące

$$\Delta u = \frac{1}{E \cdot F} \cdot \left[Q_{uż} - H \cdot \left(\gamma' - \frac{\gamma}{2}\right)\right] \cdot x + \frac{1}{E \cdot F} \cdot \left[\gamma' - \frac{\gamma}{2}\right] \cdot x^2 \tag{24}$$

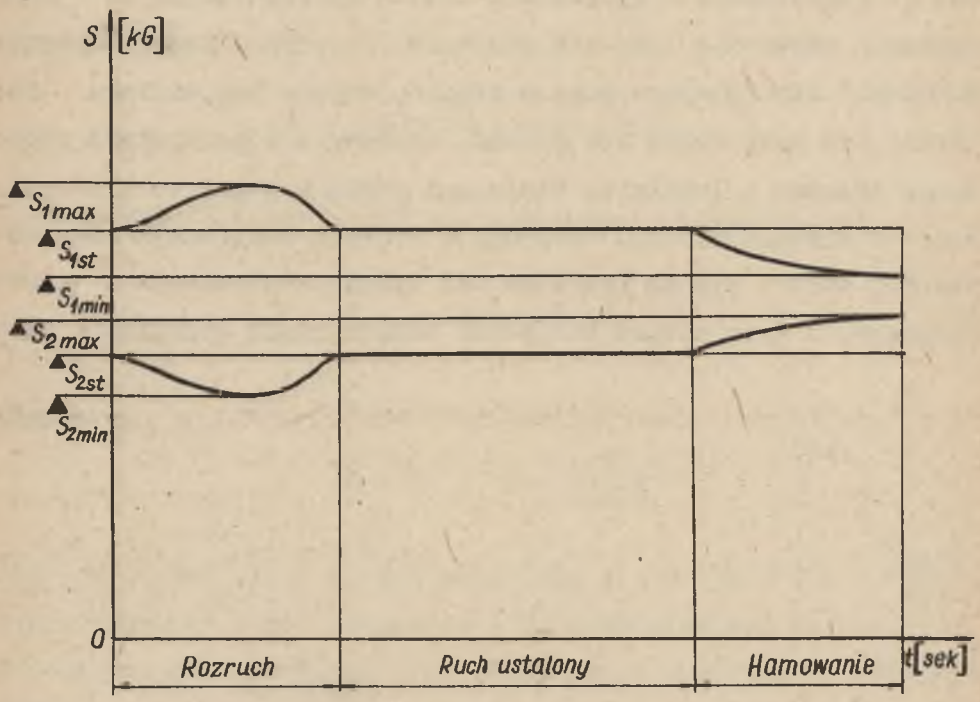
Podobne rozumowanie jak dla ruchu ustalonego można przeprowadzić i dla okresu rozruchu i hamowania. Mając na uwadze rys. 7 oraz fakt intensywnych drgań liny.

Na kole pędnym w czasie ruchu ustalonego zgodnie z wzorem (15) mieści się nieco więcej liny niż jest zabieranej od strony I. W związku z tym następuje jak by przytrzymanie liny na łuku opasania wyrażające się jej poślizgiem sprężystym (pełzaniem) w stronę większego napięcia, a więc w kierunku przeciwnym do ruchu koła. W wyniku sił tarcia występujących na łuku opasania skrócenie liny nie odpowiada jej aktualnemu napięciu. Skrócenie dopełniające może nastąpić jedynie bez udziału sił tarcia lub przy dużym ich spadku. Skrócenie dopełniające przebiega skokowo i lokalnie. Miejscami gdzie wystąpi to skrócenie będą te miejsca na łuku opasania, w których realizacja siły obwodowej odbywa się za udziałem sił tarcia statycznego i kinetycznego. W tych bowiem miejscach współczynnik sprzężenia jest



Rys. 6. Zmiana wypadkowego przemieszczenia liny na łuku opasania w funkcji drogi jazdy x

najmniejszy. Oczywiście przy rozpatrywaniu tego zagadnienia trzeba uwzględnić ten fakt, że siły tarcia są przyłożone mimoosiowo do liny.



Rys. 7. Zmiana napięcia w obu gałęziach liny w czasie jednego wyciągu

Znaczna różnica w modułach sprężystości liny i wykładziny, daje w efekcie wyraźne przemieszczenia wykładziny w kierunku stycznym do obwodu i zmniejszenie przesunięć względnych między liną a wykładziną. Wynikiem tego będzie dłuższe przebywanie wartości współczynnika sprzężenia w przedziale, w którym ma on możliwość największych wahań. Nieco inaczej przebiega skróce-

nie dopełniające przy szybkich obrotach koła pędnego. Na łuku opasania znajduje się coraz więcej liny o napięciu S_1 rys. 5, gdyż skutkiem zmniejszenia się czasu styku liny i wykładziny na początku łuku opasania zmalała wartość współczynnika sprzężenia. W końcowej partii łuku opasania wzrost przyspieszenia poślizgu sprężystego liny powoduje wzrost oporu odkształcanej wykładziny (wzrasta dynamiczny moduł sprężystości wykładziny) i współczynnik sprzężenia przechodzi w dynamiczny. Wzrasta tak że wartość współczynnika b, co prowadzi do zmniejszenia składnika $\frac{Q_{uż}}{b.E.F}$ we wzorze (15) i wzrostu skrócenia dopełniającego. Skrócenie to przebiegać będzie teraz bardziej intensywnie i bliżej końca łuku opasania po stronie napięcia S_2.

Inaczej do zagadnienia wpływu sprężystości wykładziny na rozkład napięcia w linie na łuku opasania podchodzi się w pracy [3]. Zakłada się w niej zupełną niesprężystość liny oraz powstanie skutecznego łuku opasania z logarytmicznym rozkładem nacisków (dla μ = const) po stronie większego obciążenia S_1 w czasie postoju naczynia. Z chwilą rozpoczęcia ruchu, łuk ten przenosi się na stronę przeciwną, stronę S_2, co powoduje jego "amputację". Wywołany w ten sposób niedobór siły tarcia powoduje przesunięcia nieelastycznej liny po łuku opasania w kierunku obciążenia S_1. Przegięcia styczne płytek wykładziny rosną linijnie wraz z kątem α. Zakładając, że ugięcia promieniowe są proporcjonalne do siły obwodowej przenoszonej przez płytkę, otrzymuje się zmianę naciągu i nacisków promieniowych liny na wykładzinę malejącą parabolicznie w kierunku zejścia liny z koła (strona S_2) $S = S_1 - const.\alpha^2$. Pogląd ten jedynie w fazie początkowej nie zgadza się z wywodami przedstawionymi w tej pracy. Natomiast wyniki końcowe są zbliżone do rozważań

przeprowadzonych odnośnie przypadku a), gdyż w krańcowym przypadku bardzo szybkich obrotów koła pędnego można uważać, że prawie cały łuk opasania pokrywa lina o napięciu S_1. Rozbieżności wynikają z trudności wyobrażenia sobie aby mógł powstać początkowy łuk opasania skuteczny z logarytmicznym rozkładem nacisków przy niesprężystej linie w czasie postoju koła pędnego oraz aby przegięcia styczne płytek wykładziny rosły linijnie z kątem α.

UWAGI KOŃCOWE

W teorii sprężystości jest brak szerszych opracowań na temat rozkładu naprężeń i odkształceń stykających się ciał obciążonych siłami normalnymi i stycznymi (siłami tarcia) a szczególnie gdy te ostatnie przyłożone są mimoosiowo. W związku z tym wyżej przytoczone uwagi należy traktować jako przyczynek do tego trudnego zagadnienia. Dodatkowo problem sprężystego odkształcenia liny na łuku opasania staje się ważny w urządzeniach wielolinowych ze względu na wyrównanie naciągów poszczególnych lin.

LITERATURA

[1] Antoniak J.: Badania sprężystości stycznej i promieniowej w wykładzinach kół pędnych oraz wpływ jej na wyrównanie naciągów w układach wielolinowych. Praca doktorska kwiecień 1964 r. Pol. Śląska.

[2] Popowicz O.: Ruchy względne liny i wykładziny na kole pędnym. ZN Pol.Śl. Górnictwo 4. 1962 r.

[3] Pichot G.: Problèmes particuliers à la poulie Koepe. Revue de l'industrie minérale. K 2 1959 r.

УПРУГОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ КАНАТА НА ДУГЕ ОПОЯСАНИЯ

Р е з ю м е

Следствием упругости каната и переносимого приводным колесом момента нагрузки является упругое перемещение элементов каната.
Рассмотрение этого вопроса с учётом сил тренря выступающих на дуге опоясания является целью статьи.

ELASTIC DISPLACEMENT ON THE ARC OF ROPE CONTACT

S u m m a r y

The elastic displacement of rope elements is the result of torque transmission and rope elasticity. In the article this problem with the friction forces on the arc of rope contact together are taken into consideration.