ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965

Seria: GÓRNICTWO z. 13 Nr kol. 138

TADEUSZ DZIURA

ZAGADNIENIE DOKŁADNOŚCI POMIARU DŁUGOŚCI LINII OBSERWACYJNYCH

Streszczenie. W pracy przeanalizowano i wyznaczono wielkości błędów składowych decydujących o dokładności pomiaru długości linii obserwacyjnych. Wyprowadzono proste wzory na błąd średni pomiaru długości taśmami stalowymi po ziemi i w powietrzu dla przeciętnych warunków pomiaru.

1. Uwagi ogólne

Wielkości poziomych odkształceń powierzchni stwierdza się przez cykliczne pomiary odległości między specjalnie w tym celu założonymi punktami obserwacyjnymi. Zmiany tych odległości wskazują na przesunięcia się punktów względem siebie (odkształcenia poziome względne) lub na przesunięcia poszczególnych punktów względem punktu stałego nie podlegającego wpływom eksploatacji górniczej (odkształcenia poziome bezwzględne). Pewien udział w powstawaniu tych zmian długościowych mają błędy pomiaru, których nie da się całkowicie uniknąć.

Odległości między punktami linii obserwacyjnych mierzy się w około 85% taśmami stalowymi o jedynie w około 15% drutami inwarowymi bądź też drutami stalowymi. Pomiar drutami inwarowymi należy zaliczyć do najbardziej dokładnych gdzie błąd względny wg [7] wynosi od 1:50000 do 1:100000 lub jest jeszcze mniejszy. Metoda ta stosowana jest jak już wyżej wspomniano bardzo rzadko z uwagi na duży nakład pracy i konieczność zaangażowania większej ilości pracowników. Dokładność względna pomiaru długości taśmami stalowymi powinna wynosić wg [6] dla odcinków do 20 m 1:5000 a dla odcinków powyżej 20 m 1:1000 tj.

$$\frac{m_L}{L} \leqslant \frac{1}{5000} \quad \text{dla } L < 20 \text{ m}$$

$$\frac{m_L}{L} \leqslant \frac{1}{10000} \quad \text{dla } L > 20 \text{ m}$$

gdzie: m_L jest średnim błędem pomiaru długości L.

2. Metody określenia dokładności w oparciu o wyniki pomiaru

W skład średniego błędu pomiaru długości wchodzą błędy przypadkowe systematyczne i błędy stałe niezależne od wartości mierzonej długości co ujmuje znany w literaturze geodezyjnej wzór

$$m_L = \pm \sqrt{A^2L^2 + B^2L + C^2} \qquad (1)$$

gdzie:

A - współczynnik wpływu błędów systematycznych,

B - współczynnik wpływu błędów przypadkowych,

C - współczynnik wpływu błędów niezależnych o długości L.

Wartości współczynników A,B,C ustala się kilkoma znanymi sposobami na podstawie analizy dokładności szeregu dokonanych pomiarów. Właściwe określenie współczynników A,B,C jest bardzo trudne i w większości wypadków otrzymuje się wielkości urojone. Aby prawdopodobieństwo uzyskania wyników urojonych było niewielkie należałoby współczynniki A,B,C wyznaczyć z bardzo dużej ilości odcinków pomierzonych jak największą ilość razy (patrz [4] str.27) co w przypadku linii obserwacyjnych z uwagi na ich przeznaczenie jest raczej niemożliwe. Należy więc dla celów praktycznych zrezygnować z rozdzielenia wpływu błędów systematycznych i przypadkowych przy określaniu dokładności linii obserwacyjnych z dwóch względów. Primo: pomiary linii obserwacyjnych nie dają wystarczającej ilości obserwacji nadliczbowych a więc istnieje stosunkowo duże prawdopodobieństwo otrzymania wyników urojonych. Secundo: każda metoda zmierzająca do obliczenia współczynników A,B,C wymaga dużego wkładu prac rachunkowych.

Druga metoda określenia średniego błędu pomierzonych długości może mieć szersze zastosowanie do oceny dokładności pomiaru linii obserwacyjnych, gdyż oparta jest na teorii różnic spostrzeżeń. Każdy cykl pomiaru może dostarczyć wystarczającej ilości par spostrzeżeń, gdyż każda długość mierzona jest dwukrotnie, przy czym błędy systematyczne zostają prawie zupełnie wyeliminowane, albowiem pomiar wykonuje się jednym przymiarem i w tych samych warunkach. Dla n odcinków dwukrotnie mierzonych będzie n różnic spostrzeżeń a wtedy błąd średni odcinka

$$m_L = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{4n}} \qquad (2)$$

gdzie:

d - są różnicami dwukrotnego pomiaru n odcinków.

3. Wyznaczenie wielkości błędów składowych pomiaru długości

W zależności od warunków terenowych, pomiary długości linii obserwacyjnych wykonuje się po ziemi albo w powietrzu. W pierwszym wypadku całkowity błąd pomiaru długości będzie:

$$m_L = \sqrt{m_k^2 + \frac{1}{4} m_{Lo}^2 + m_{Lt}^2 + \frac{1}{4} m_{Lp}^2 + m_{Ls}^2} \tag{3}$$

w drugim wypadku

$$m_L = \sqrt{m_k^2 + \frac{1}{4} m_{Lo}^2 + m_{Lt}^2 + m_{Lc}^2 + \frac{1}{4} m_{Lp}^2 + \frac{1}{4} m_{Lz}^2} \tag{4}$$

gdzie:

m_k - błąd komparacji taśmy,
m_{Lo} - wpływ błędu odczytu taśmy,
m_{Lt} - wpływ błędu pomiaru temperatury,
m_{Lc} - wpływ błędu centrowania pionów nad punktami,
m_{Lp} - wpływ błędu określenia siły naciągu,
m_{Ls} - wpływ błędu redukcji do poziomu,
$m_L z$ - wpływ błędu określenia poprawki na zwis taśmy.

Błąd komparacji podawany w metrykach taśm przez instytucje wykonujące sprawdzenia porównawcze wynosi

$$m_k = \pm 0{,}3 \text{ mm}$$

Wartość błędu odczytu według Ogłoblina [3] wynosi:

$$m_o = \pm \frac{t}{3{,}5} \tag{5}$$

gdzie:

t - najmniejsza działka podziału taśmy.

Ogłoblin określił wielkość m_o (patrz [3] str. 237-239) stosując rachunek prawdopodobieństwa do teorii błędów, mając na uwadze noniusz kątowy, gdzie indeks względem podziału zostaje na czas wykonania odczytu unieruchomiony a wtedy faktycznie

$$m_o^2 = \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \Delta^2 \, d\Delta \tag{6}$$

Po scałkowaniu (6) i wprowadzeniu za t wielkości 1 mm

$$m_o = \pm \frac{t}{3,5} = \pm 0,3 \text{ mm} \tag{7}$$

Przy pomiarach długości taśmą, jej podział nie ma stałego położenia względem wskaźników a więc przyjmowanie tu wzoru (7) jest nieporozumieniem. Przeprowadzone badania wskazują, że błąd odczytu zmienia się w przedziale od −1,5 mm do +1,5 mm a wtedy wg wzoru (6)

$$m_o^2 = \frac{1}{3\,t} \int_{-1,5t}^{+1,5t} \Delta^2 \, d\Delta \tag{8}$$

czyli

$$m_o = \frac{t\sqrt{3}}{2} = \pm 0,9 \text{ mm} \tag{9}$$

Porównując (7) i (9) widać, że błąd odczytu przy pomiarach długości taśmi jest trzykrotnie większy od dotychczas przyjmowanego. Wpływ błędu odczytu na długość mierzoną będzie miał wartość:

$$m_{Lo} = m_o \sqrt{2} = \pm 1,2 \text{ mm} \tag{10}$$

Wpływ błędu różnicy temperatur określa równanie:

$$m_{Lt} = L \cdot \alpha \cdot m_t \tag{11}$$

gdzie:

m_t – błąd wyznaczenia różnicy temperatur w czasie pomiaru i komparacji taśmy,

α – współczynnik rozszerzalności liniowej dla t = 1°C.

Dla termometrów pokojowych wg [3] str. 282 błąd graniczny pomiaru temperatury $m_{tg} = \pm 7,7^o$, wg [5] str. 129 $m_{tg} = \pm 5^oC$.

Przyjmując średnio $m_{tg} = \pm 6^{o}$, błąd średni określenia różnicy temperatury $m_t = \pm 2^{o}C$ a wtedy:

$$m_{Lt} = \pm 0{,}023\ L \tag{12}$$

Graniczny błąd centrowania pionu nad punktem wyznaczony empirycznie wynosi $m_{cg} = \pm 2$ mm a więc średni błąd centrowania $m_c = \pm 0{,}67$ mm. Wpływ błędu centrowania pionów nad dwoma punktami będzie:

$$m_{Lc} = m_c \sqrt{2} = \pm 0{,}9\ \text{mm} \tag{13}$$

Wpływ błędu określenia siły naciągu przedstawia równanie

$$m_{Lp} = \frac{1000\ L}{E\ F}\ m_p \tag{14}$$

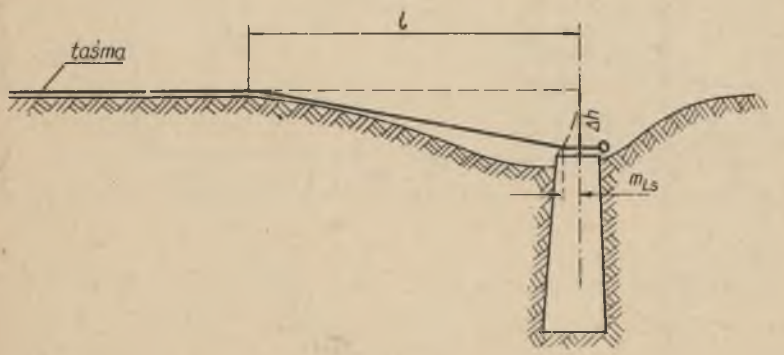
gdzie:

E - moduł Yunga. Dla taśm stalowych $E = 2{,}2\ 10^6\ kg/cm^2$,

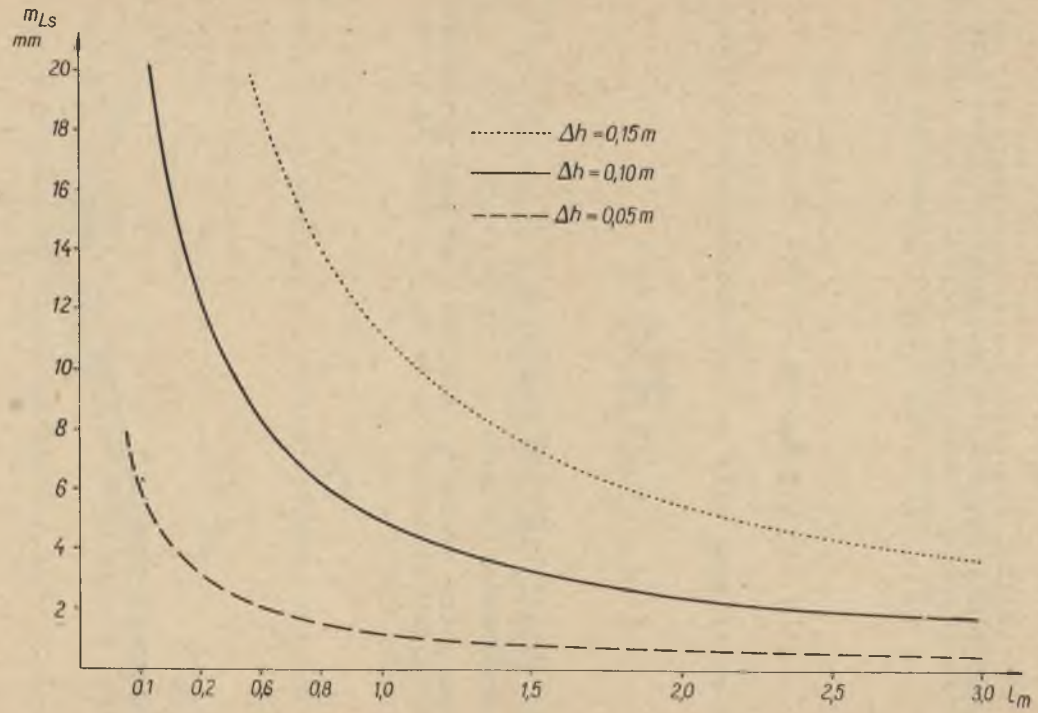
F - przekrój taśmy.

Badając dynamometry produkcji krajowej używane powszechnie przy pomiarach długości stwierdzono, że $m_p = \pm 0{,}67$ kg a więc

$$m_{Lp} = \pm 0{,}007\ L \tag{15}$$



Rys. 1. Położenie taśmy przy pomiarze długości do punktu zagłębionego

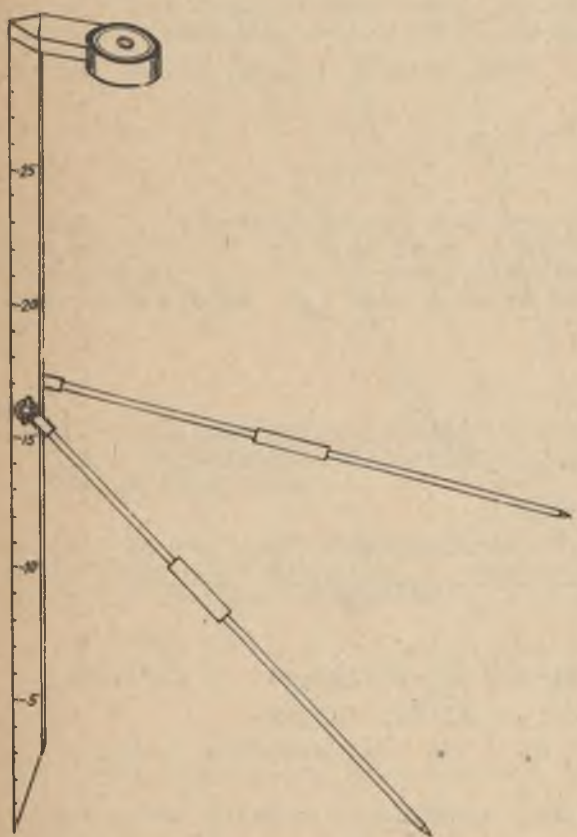


Rys.2. Wykres zależności błędu m_{Ls} od różnicy wysokości Δh i długości l

Wpływ błędu redukcji długości na poziom w przypadku linii obserwacyjnych, gdzie różnice wysokości punktów mierzone są z bardzo dużą dokładnością nie powinien mieć praktycznie żadnego znaczenia. Są jednak wypadki, przy pomiarach długości po ziemi, kiedy na stosunkowo krótkim odcinku 1 (rys. 1) następuje gwałtowna zmiana różnicy wysokości Δh. Najczęściej Δh przypisuje się całej długości L co prowadzi do powstawania znacznych błędów długościowych o charakterze systematycznym, których wielkości obliczone wzorem (16) pokazano:

$$m_{Ls} = -\frac{\Delta h^2}{2l} \qquad (16)$$

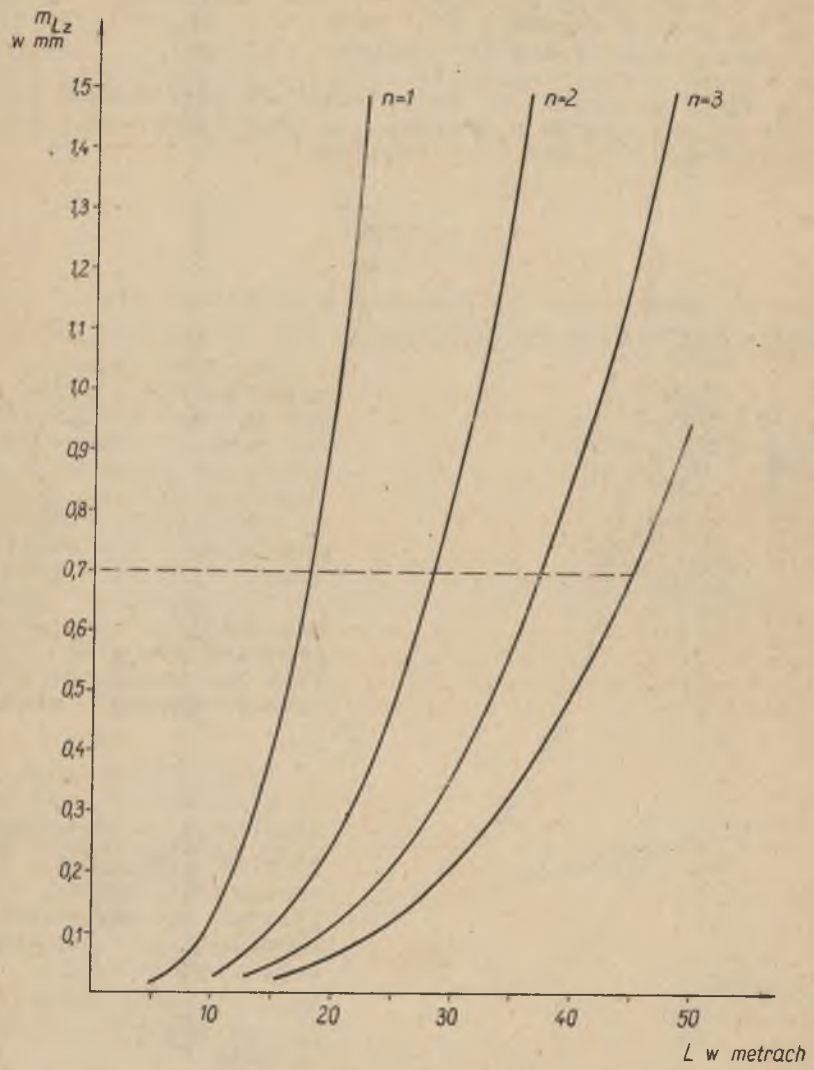
na rysunku 2. Przy pomiarach długości w powietrzu błąd m_{Ls} zostaje prawie całkowicie wyeliminowany. Dla uniknięcia błędu m_{Ls} w pomiarach długości po ziemi należy w wypadkach jak na rys. 1 odpionowywać punkty przy pomocy sztywnego pionownika mechanicznego (rys.3), który zaopatrzony w libelę pudełkową o wartości kątowej 10' /2 mm pozwala na odpionowanie punktu przy Δh = 30 cm z dokładnością do $\pm$ 0,5 mm. Przy malejącej Δh będzie również malała wartość m_{Ls}.



Rys. 3. Mechaniczny pionownik sztywny

Wpływ błędu zwisu taśmy spowodowany jest niewłaściwym określeniem siły naciągu m_p przy pomiarach długości w powietrzu i niewłaściwym określeniem jednostkowego ciężaru taśmy m_g. Równanie (17) pozwala obliczyć wielkość poprawki na zwis

$$\Delta_z = \frac{g^2 L^3}{24\, p^2\, n^2} \qquad (17)$$



Rys.4. Wykres zależności błędu m_{Lz} od długości L mierzonej w powietrzu i od ilości podpór

gdzie:

g - ciężar 1 mb taśmy ($g = 0{,}04$ kg),

P - siła napinania taśmy ($P = 10$ kg $\pm$ 0,67 kg),

$n = i - 1$ gdzie i jest ilością punktów podparcia taśmy.

Różniczkując względem g i P a następnie przechodząc na błędy średnie otrzymamy:

$$m_{Lz} = \frac{g\,L^3}{12\,P^2\,n^2}\left(\frac{g}{P}\,m_p + m_g\right) \tag{18}$$

Wielkość błędu m_g wyznaczono empirycznie (patrz [5] str. 131) i wynosi około $\pm$ 0,00098 kg/m. Należy zaznaczyć, że w szczególnie trudnych warunkach pomiaru (teren gliniasty) wartość m_g może się zwiększyć nawet dwukrotnie. Podstawiając do wzoru (18) wartości liczbowe, przy $n = 1$ otrzymamy:

$$m_{Lz} = \pm\ 122\ \ 10^{-6}\ L^3 \tag{19}$$

Na rys. 4 przedstawiono powyższą zależność dla $n = 1,2,3,4$ przy zmianie L od 5 do 50 m, z którego można odczytać ilość podpór jaką należy zastosować dla długości L mierzonej w powietrzu aby błąd m_{Lz} nie przekroczył z góry żądanej wielkości:

4. Ustalenie granicznej różnicy dwukrotnego pomiaru długości linii obserwacyjnych w oparciu o spodziewane wielkości błędów składowych

Zakładając realność elementarnych błędów omówionych w rozdziale 3 średni błąd długości L mierzonej po ziemi będzie wg wzoru (3) wyrażony równaniem:

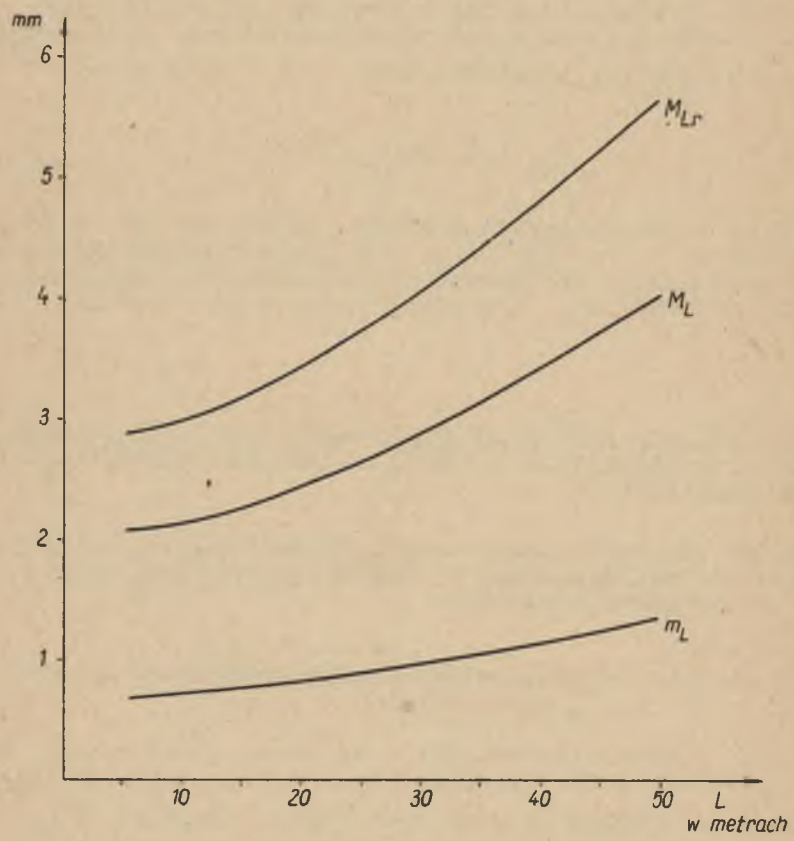
$$m_L = 0{,}67\ \sqrt{1 + 0{,}0012\ L^2} \tag{20}$$

Na rys. 5 przedstawiono dla L od 5-50 m, obliczone wzorem (20) wielkości błędów średnich m_L, błędy graniczne M_L oraz dopuszczalne różnice dwukrotnego pomiaru długości M_{Lgr} mierzonych po ziemi.

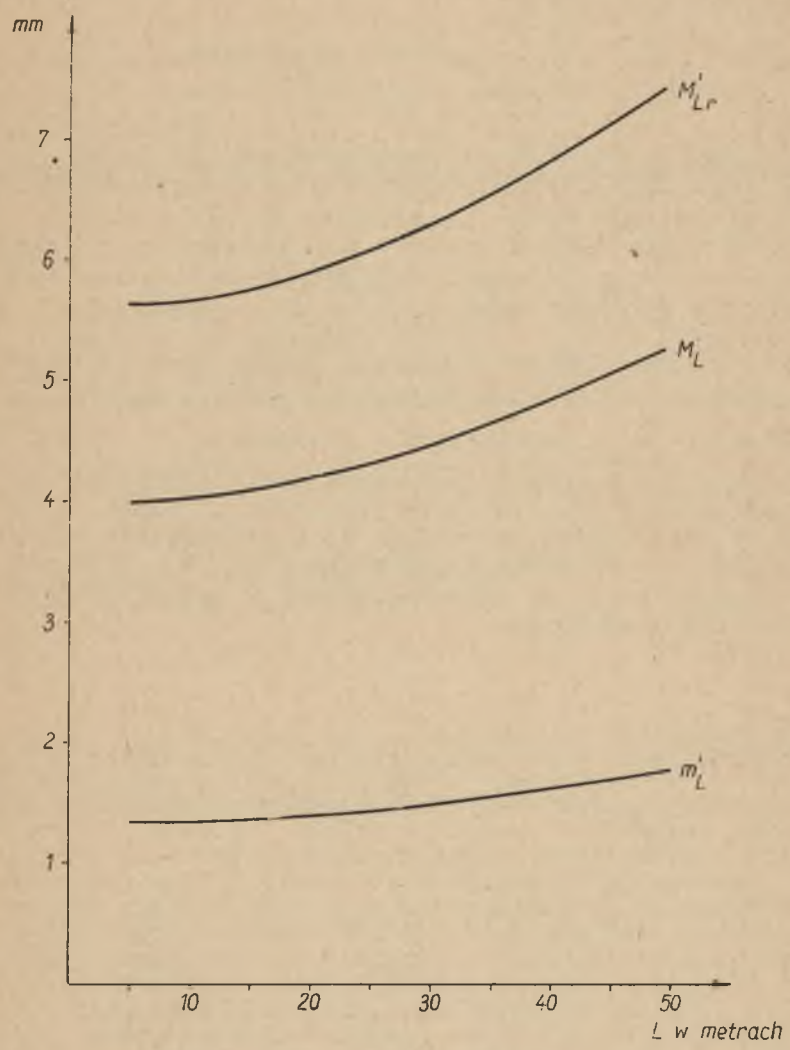
Jeżeli długości mierzone są w powietrzu, średni błąd należy wyliczyć wzorem (4) a więc będzie:

$$m'_L = \sqrt{1,26 + 0,000541\ L^2 + 14,88\ 10^{-8}\ \frac{L^6}{n^4}} \qquad (21)$$

Wielkość błędu m_z zależy między innymi od długości odcinków wolno zwisających czyli od liczby n. Tymczasowa techniczna instrukcja wykonywania prac mierniczych ogranicza długość wolno zwisającego odcinka do 17 m a wtedy ze wzrostem ilości tych odcinków wzrasta gwałtownie błąd m_z. Jak wynika z rys. 4 chcąc utrzymać m_{Lz} w granicach $\pm$ 0,7 mm należałoby już przy długości 27 m stosować jedną podpórkę a przy długości 37 m dwie podpórki



Rys. 5. Wykres rozkładu błędów w zależności od długości L mierzonej po ziemi



Rys.6. Wykres rozkładu błędów w zależności od długości L mierzonej w powietrzu

Przy założeniu wystarczającej ilości podpór aby m_{Lz} nie przekroczył wielkości $\pm$ 0,7 mm, całkowity błąd długości mierzonej w powietrzu będzie:

$$m'_L = 1,32 \sqrt{1 + 0,000309\ L^2} \qquad (22)$$

Po rozwinięciu wzoru (22) w szereg potęgowy ($L \leq 50$ m) i pominięciu jako nie mających praktycznego znaczenia, dalszych wyrazów:

$$m'_L = 1,322 + 0,0002\ L^2 \qquad (23)$$

Na rys. 6 przedstawiono wielkości błędów średnich m'_L, błędów granicznych M'_L oraz dopuszczalne różnice dwukrotnego pomiaru długości M'_{Lgr} mierzonych w powietrzu.

Z porównania rysunków 5 i 6 wynika pewna odrębność kształtowania się błędów długości przy pomiarach po ziemi i w powietrzu. Należy również zaznaczyć, że w szczególnie trudnych warunkach pomiaru długości w powietrzu, błąd m'_L może się jeszcze zwiększyć nawet do błędu granicznego będącego trzykrotną wielkością błędu średniego

5. Uwagi końcowe

Charakterystyką dokładności pomiaru długości jest błąd średni, który można określić w oparciu o wyniki pomiarów na podstawie różnic spostrzeżeń albo znając warunki pomiaru na podstawie wstępnej analizy dokładnościowej. W czasie pomiaru długości należy bezwzględnie przestrzegać zasady, aby różnica dwukrotnego pomiaru odcinka nie przekraczała wielkości dopuszczalnej dla danej metody pomiaru. Jeżeli istnieją po temu możliwości należy pomiar długości wykonać po ziemi, gdyż jest on dokładniejszy od pomiaru długości w powietrzu. Instrukcja dotycząca pomiarów długości linii obserwacyjnych powinna określać górne granice błędów: odczytu, pomiaru temperatury, siły naciągu i centrowania pionów nad punktami jak również, dozwolone dla danych grup długości, różnice dwukrotnego ich pomiaru. Dla uzyskania odpowiedniej dokładności wyznaczenia odkształceń względnych należy zrezygnować z pomiaru długości taśmami stalowymi, stosując dla tych celów druty inwarowe bądź stalowe. Ma to szczególne znaczenie, gdy pomiary prowadzi się dla celów naukowo-badawczych.

LITERATURA

[1] Kochmański T.: Rachunek wyrównawczy. PWSZ, Warszawa 1952.

[2] Kowalczyk Z.: Problem przebitkowy w geodezji górniczej i inżynieryjno-przemysłowej. PWN, Warszawa 1956.

[3] Ogłoblin D.N.: Markszejderskije raboty pri podziemnoj rozrabotkie miestorożdienij. Mietałłurgizdat, Moskwa 1950.

[4] Trojanowski K.: Metoda efektywnego określenia błędów przypadkowych i systematycznych pomiaru długości.Komunikat GIG Nr 344, Wydawnictwo "Śląsk" Katowice 1964.

[5] Dziura T.: Analiza dokładności pomiaru głębokości szybu. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej - Górnictwo 9. 1964.

[6] Wytyczne dla prowadzenia obserwacji ruchów terenu i odkształceń obiektów pod wpływem eksploatacji górniczej.Wyd. MGiE 1959.

[7] Przepisy z zakresu miernictwa górniczego. PMG, Bytom 1959.

ВОПРОС ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ДЛИНЫ НАБЛЮДАТЕЛЬНЫХ ЛИНИИ

Р е з ю м е

В работе были подвержены анализу и определялись величины составляющих погрешностей решающих о точности измерения длины наблюдательных линий. Выведены простые формулы для подсчёта средней погрешности измерения длины стальными лентами по земле и в воздухе для средних условий измерения.

THE PROBLEM OF THE ACCURACY OF OBSERVATION LINE LENGTH

S u m m a r y

In the paper the size of component mistakes decisive about the accuracy of the observation line lengths habe been analyzed and determined. Simple formulae for the mean mistake of the lenght measurement by means of steel tapes on the ground and in the air, for the average measurement conditions have been derived.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA Gliwice