

*Prof. dr Władysław Kołek, mgr inż. Władysław Paszek*

Zakład Maszyn Elektrycznych

## **Równania wyjściowe dla analizy przebiegów w maszynie synchronicznej**

Streszczenie: Niesymetria elektryczna i magnetyczna maszyny synchronicznej. Równania zastępczych uzwojeń stojana i ich interpretacja fizykalna. Wprowadzenie układu jednostek stosunkowych jednolitego dla obwodów stojana i wirnika. Układ równań wyjściowych i ogólna ich dyskusja.

### **1. Wstęp**

W miarę narastających problemów eksploatacji systemów elektroenergetycznych najpierw (w ostatnich dwóch dziesiątkach lat) w krajach o największej wytwórczości energii elektrycznej i dużych terenach, wymagających powiązania systemów i przemysłu energii na dużych odległościach, a następnie również w krajach mniejszych obserwuje się wysuwanie analizy przebiegów nieustalonych maszyny synchronicznej na czoło zagadnień z teorii maszyn elektrycznych. Prace Parka [1], Goriewa [2] stanowią tutaj podstawowy materiał źródłowy. Zagadnienia teorii przebiegów w maszynach synchronicznych nie są rozdziałem zamkniętym, projektowanie i eksploatacja dużych generatorów synchronicznych (turbogeneratorów i hydrogeneratorów) oraz systemów i linii przesyłowych, dostarczają stale nowych tematów do rozwiązywania.

Również u nas przeprowadzana modernizacja oraz rozbudowa energetyki wymaga zajęcia się przez ośrodki naukowe teorią przebiegów w maszynie synchronicznej. Katedra Maszyn Elektrycznych Politechniki Śląskiej już od szeregu lat wysunęła te zagadnienia na pierwszy plan w tematyce planów pracy naukowej.

Przy rozwiązywaniu poszczególnych zagadnień, związanych z analizą przebiegów ustalonych lub nieustalonych w maszynie synchronicznej, zachodzi potrzeba formułowania pojęć, założeń, wyprowadzania równań podstawowych, schematów zastępczych, warunków początkowych itp. Dla dużej ilości różnych zagadnień z teorii maszyn synchronicznych i współpracy systemów można opracować wspólne wyjściowe pojęcia,

schematy zastępcze i równania podstawowe. Opracowanie niniejsze pozwala uniknąć powtarzania założeń wyjściowych przy rozwiązywaniu różnych szczegółowych zagadnień.

Poszczególne prace Katedry z dziedziny maszyn synchronicznych, zwłaszcza te, które dotyczą stanów nieustalonych przy uwzględnieniu niesymetrii elektrycznej i magnetycznej wirnika, będą opierać się na równaniach wyjściowych z powołaniem na niniejszą pracę, określającą warunki, dla jakich te równania mogą być zastosowane.

## 2. Układ zastępczy 2-osiowy

Maszyna synchroniczna posiada twornik (zwykle stojan) uzwojony wielofazowo symetrycznie. Ze względu na powszechne zastosowanie prądu trójfazowego ogranicza się rozważania do maszyn uzwojonych 3-fazowo (przejście na wielofazowy symetryczny układ nie przedstawia żadnych trudności). Symetria wykonania maszyny pozwala również analizować maszynę na modelu dwubiegunowym niezależnie od rzeczywistej liczby biegunów maszyny. Dzięki temu prędkości kątowe elektryczna i mechaniczna są sobie równe.

Magneśnica (zwykle wirnik) wykazuje ogólnie niesymetrię dwuosową elektryczną i magnetyczną. Przyczyna niesymetrii elektrycznej leży w konieczności zasilania elektromagnesu magneśnicy prądem stałym, a więc przy pomocy uzwojenia jednofazowego (dla każdego symetrycznego wielofazowego uzwojenia stojana jednofazowe uzwojenie wirnika jest niesymetryczne).

Niesymetria magnetyczna pochodzi z różnych przewodności magnetycznych dla strumienia zależnie od położenia osi strumienia względem osi uzwojenia wzbudzenia. Wirniki cylindryczne (turbogeneratorów) o uzwojeniu wzbudzenia rozłożonym wykazują stosunkowo niewielką asymetrię magnetyczną, tak że największa różnica przewodności magnetycznej występująca w 2 osiach wzajemnie prostopadłych nie przekracza kilku procent. Pozwala to praktycznie uważać te wirniki za magnetycznie symetryczne (niemniej niesymetria elektryczna nie może pozostać pominięta).

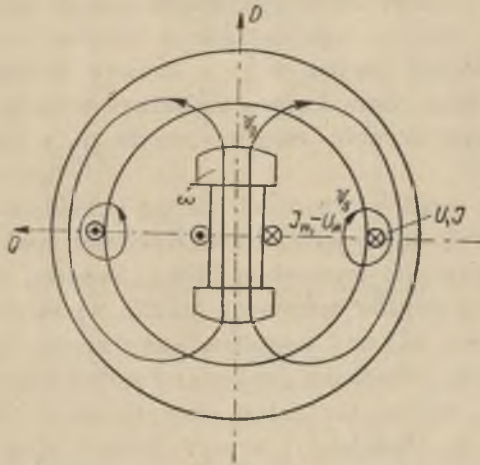
Wirniki wielobiegunowe (generatory wolnobieżne, silniki synchroniczne) o uzwojeniu skupionym umieszczonym na pieńkach biegunów wykazują znaczną asymetrię magnetyczną. Największa różnica przewodności magnetycznej w 2 osiach wynosi przeciętnie 25—50%.

Trójfazowe uzwojenie stojana przy normalnie stosowanych liczbach zębów na biegun i fazę daje rozkład przestrzenny amperozwojów każdej z faz praktycznie sinusoidalny, tak że w dalszym ciągu siła magnetyczna uzwojenia stojana traktowana będzie jako sinusoidalna

(w wypadku znaczniejszych rozbieżności rozważania dotyczą podstawowej harmonicznej rozkładu amperozwojów).

Ze względu na to, że – jak poprzednio wspomniano – wirnik nie posiada symetrii zupełnej (przez symetrię zupełną rozumie się układ wirnika, który wykazuje symetrię elektryczną i magnetyczną względem dowolnie przyjętej osi), lecz wykazuje symetrię jedynie względem osi uzwojenia wzbudzenia oraz osi do niej prostopadłej, również SMM stojana wyrażamy w dwóch jej składowych pokrywających się z osiami symetrii wirnika. Na rozbicie SMM stojana na składowe w dowolnych osiach pozwala założenie sinusoidalne rozkładu amperozwojów.

Takie przedstawienie SMM w postaci 2 składowych SMM odpowiada zastąpieniu wielofazowego uzwojenia stojana 2 fikcyjnymi jednofazowymi uzwojeniami działającymi w osiach symetrii wirnika oraz wirującymi wraz z nimi.



Rys. 1. Wzajemne położenie uzwojeń maszyny synchronicznej

Rysunek 1 przedstawia ideowy obraz uzwojeń obwodów wirnika oraz fikcyjnych uzwojeń zastępczych.

W osi uzwojenia wzbudzenia  $D$  nazywanej w dalszym ciągu osią podłużną sprzegają się ze sobą: uzwojenie wzbudzenia zasilane przez pierścienie prądem stałym, uzwojenie klatki tłumiącej podłużnej, obwód zastępczy bloku żelaza w osi podłużnej oraz zastępcze uzwojenie twornika. W osi poprzecznej  $Q$  sprzegają się ze sobą: uzwojenie klatki tłumiącej poprzecznej, obwód zastępczy bloku żelaza w osi poprzecznej oraz zastępcze uzwojenie twornika.

Uzwojenie wzbudzenia zasilane jest poprzez pierścienie ślizgowe ze wzbudnicy. W czasie stanów nieustalonych płyną w nim również prądy indukowane przez zmieniający się strumień w osi podłużnej. Uzwojenie



klatki tłumiącej umieszczane jest w maszynie z wirnikiem cylindrycznym w żłobkach pod klinami i połączone między sobą pod kołpakami czołowymi (kapami). W maszynie jednobiegunowej stosuje się klatkę z prętów okrągłych umieszczonych w nabiegunnikach, połączonych na czołach pierścieniami lub wycinkami pierścieni. Kliny metalowe mocujące uzwojenie wzbudzenia w żłobkach spełniają również rolę klatki tłumiącej.

Obwody tłumiące nie są zasilane prądem z zewnątrz i przewodzą jedynie prądy indukowane przy zmiennym strumieniu. Działanie tych prądów może być w przybliżeniu zastąpione odpowiednimi prądami w 2 zastępczych uzwojeniach umieszczonych w osi  $D$  i  $Q$ . Przy zmianach strumienia musi się również uwzględnić oddziaływanie stalowego bloku wirnika.

Blok ten zanurzony w polu magnetycznym zachowuje się względem zmian pola magnetycznego nieco odmiennie aniżeli uzwojenie wzbudzenia wirnika. Prądy wirowe występujące w chwilach zmian strumienia magnetycznego powodują niejednoczesne zmiany strumienia w poszczególnych częściach bloku. Zamykające się strugi prądów wirowych wpływają jak zwoje zwarte w polu magnetycznym na wielkość i zmienność pola magnetycznego.

Drogi tych strug prądów wirowych nie są określone przez z góry założone obwody i kształtują się jedynie pod wpływem rozkładu pola magnetycznego i geometrycznych wymiarów bloku. Spośród wszystkich istniejących dróg dla strug prądów wirowych można wyodrębnić przy pomocy analizy matematycznej obwody współśrodkowe z osią strumienia wytwarzające przy zmianach strumienia podstawowe pole oddziaływania (podstawowa harmoniczna). Strugi te można więc zastąpić uzwojeniami zwartymi w osiach  $D$  i  $Q$ . Podobnie i w uzwojeniach tłumiących przedstawione na rysunku 1 zastępcze zwoje reprezentują również w podobny sposób wyodrębnioną podstawową harmoniczną oddziaływania klatki tłumiącej przy zmianach strumienia.

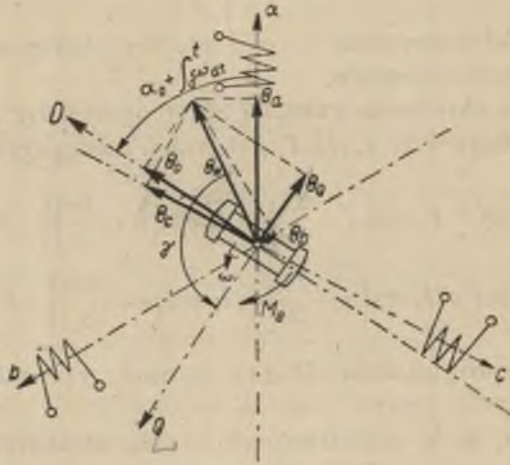
### 3. Sprowadzenie układu 3-fazowego do układu 2-fazowego

Zastępcze uzwojenia w osiach  $D$  i  $Q$  wirujące wraz z wirnikiem zasilane są umyślnymi prądami  $I_D$  i  $I_Q$ . Wartość chwilowa tych prądów wynika z warunków równoważności SMM tych uzwojeń oraz SMM rzeczywistego uzwojenia stojana.

Jeżeli wypadkowa SMM twornika określona jest wartością  $\Theta_{tw}$  oraz kątem położenia  $\gamma$  liczonym do osi  $Q$  w kierunku wirowania wirnika (na rys. 1 i 2 oznaczono strzałkami przyjęte dodatnie kierunki dla osi  $D$  i  $Q$ ), wówczas SMM uzwojeń zastępczych wynoszą odpowiednio

$$\begin{aligned}\theta_D &= \theta_{iw} \sin \gamma, \\ \theta_Q &= \theta_{iw} \cos \gamma.\end{aligned}\quad (1)$$

Dla związania sił magnetycznych uzwojeń zastępczych  $\theta_Q$  i  $\theta_D$  z siłami magnetomotorycznymi poszczególnych faz rzeczywistego uzwojenia stojana wyraża się  $\theta_{iw}$  przy pomocy amperozwojów poszczególnych faz. Rysunek 2 przedstawia przestrzenne ułożenie SMM dla wartości chwilowych oraz przyjętych kątów położenia wirnika względem uzwojeń stojana.



Rys. 2. Wykres przepływu twornika (stojana)

Dla rysunku 2 oznaczono strzałkami przyjęte kierunkowości prądów twornika i SMM (dla prądu dodatniego SMM zgodna z przyjętą strzałką SMM). Na rysunku przyjęto dodatnią wartość prądu w fazie  $a$  oraz ujemne wartości w fazie  $b, c$ . Kąt  $\alpha_0$  oznacza początkowy kąt położenia określony kątem elektrycznym między osią uzwojenia fazy  $a$  a osią podłużną wirnika.

Ponieważ  $\theta_{iw}$  jest sumą geometryczną amperozwojów poszczególnych faz uzwojenia stojana, zatem składowe podłużne i poprzeczne wypadkowej SMM są odpowiednio sumami składowych podłużnych względnie poprzecznych amperozwojów poszczególnych faz:

$$\begin{aligned}\theta_{iw} &= \sum_{k=a,b,c}^A \theta_k, \\ \theta_D &= \sum_{k=a,b,c} \theta_{kD}, \\ \theta_Q &= \sum_{k=a,b,c} \theta_{kQ},\end{aligned}$$

$$\Theta_D = \Theta_a \cos(a) + \Theta_b \cos\left(a - \frac{2\pi}{3}\right) + \Theta_c \cos\left(a - \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$\Theta_Q = \left[ \Theta_a \sin(a) + \Theta_b \sin\left(a - \frac{2\pi}{3}\right) + \Theta_c \sin\left(a - \frac{4\pi}{3}\right) \right],$$

$$I_{02} \quad \Theta_k = I_k w, \quad k = a, b, c,$$

$$a = \alpha_0 + \int_0^t \omega dt;$$

dla stałej szybkości wirowania  $a = \alpha_0 + \omega t$ ;  $w$  – zastępuje liczbą zwojów jednej fazy łączonych szeregowo.

Analogicznie do określenia wartości SMM operujemy chwilowymi wartościami prądów fazowych  $I_a, I_b, I_c$  i uzwojeń zastępczych  $I_D, I_Q$ <sup>1</sup>.

$$I_D = \frac{2}{3} \left[ I_a \cos(a) + I_b \cos\left(a - \frac{2\pi}{3}\right) + I_c \cos\left(a - \frac{4\pi}{3}\right) \right] = F_D(I_k)_{k=a,b,c}, \quad (2)$$

$$I_Q = -\frac{2}{3} \left[ I_a \sin(a) + I_b \sin\left(a - \frac{2\pi}{3}\right) + I_c \sin\left(a - \frac{4\pi}{3}\right) \right] = F_Q(I_k)_{k=a,b,c}.$$

Dla uniknięcia wprowadzania długich formuł wprowadza się symbol  $F_D, F_Q$ .

Z uwagi na to, że w symetrycznym stanie ustalonym wypada:

$$I_a = I_{a_{\max}} \sin(\omega t + \delta),$$

$$I_b = I_{b_{\max}} \sin\left(\omega t + \delta - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$I_c = I_{c_{\max}} \sin\left(\omega t + \delta - \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$I_{a_{\max}} = I_{b_{\max}} = I_{c_{\max}} = I_{\max},$$

oraz

$$\Theta_w = \frac{3}{2} \Theta_{\max},$$

gdzie

$$\Theta_{a_{\max}} = \Theta_{b_{\max}} = \Theta_{c_{\max}} = \Theta_{\max},$$

przyjmuje się dla otrzymania bardziej przejrzystych wzorów przy określe-  
niu prądów zastępczych współczynnik 2/3. Wówczas

<sup>1</sup> Przy analizie przebiegów nieustalonych operuje się zasadniczo wartościami chwilowymi prądów i napięć, zatem użyte tutaj i w dalszym ciągu symbole prądów i napięć dotyczą ich wartości chwilowych. Tam, gdzie będzie mowa o wartościach skutecznych, symbole będą dodatkowo oznaczone.



$$I_D = I_{\max} \sin \gamma,$$

$$I_Q = I_{\max} \cos \gamma.$$

Dla wyznaczenia wartości chwilowych w poszczególnych fazach stojana ze znanych prądów zastępczych  $I_D$  i  $I_Q$  posługujemy się równaniem (2) łącznie z warunkiem wiążącym:  $\sum I_k = 3I_0$ ;  $k = a, b, c$ . (Prąd  $I_0$  określa się jako prąd zerowej kolejności. Dla przebiegów sinusoidalnych prądu twornika odpowiada on składowej zerowej kolejności z rozkładu na składowe symetryczne. Dla wypadku 3-przewodowego przyłączenia uzwojenia stojana prąd  $I_0$  równa się zeru). Po przekształceniu otrzymuje się<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} I_a &= I_D \cos(\alpha) - I_Q \sin(\alpha) + I_0 = f_a(I_D, I_Q) + I_0, \\ I_b &= I_D \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - I_Q \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + I_0 = f_b(I_D, I_Q) + I_0, \\ I_c &= I_D \cos\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) - I_Q \sin\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) + I_0 = f_c(I_D, I_Q) + I_0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$I_k = f_k(I_D, I_Q) + I_0, \quad k = a, b, c.$$

Dla uniknięcia wprowadzania długich formuł wprowadza się symbol  $f_a, f_b, f_c$ , względnie  $f_k$ ;  $k = a, b, c$ .

Wzory powyższe uwzględniają ewentualną obecność składowej zerowej kolejności prądu w uzwojeniu 3-fazowym przyłączonym w układzie 4-przewodowym.

W dalszym ciągu rozważań przyjmować się będzie, gdy specjalnie nie zaznaczono inaczej, jedynie 3-przewodowe przyłączenie stojana i w związku z tym pomija się składnik  $I_0$ .

<sup>1</sup> Wzory (3) na  $I_a, I_b, I_c$  wynikają z następujących związków geometrycznych pomiędzy wektorem na płaszczyźnie a jego rzutami na osie symetrycznie dzielące płaszczyznę:

I. Wektor płaski  $M$  jest sumą geometryczną rzutów na układ osi symetrycznych (rys. 3a)

$$M = M_a \hat{+} M_b \hat{+} M_c.$$

II. Gdy

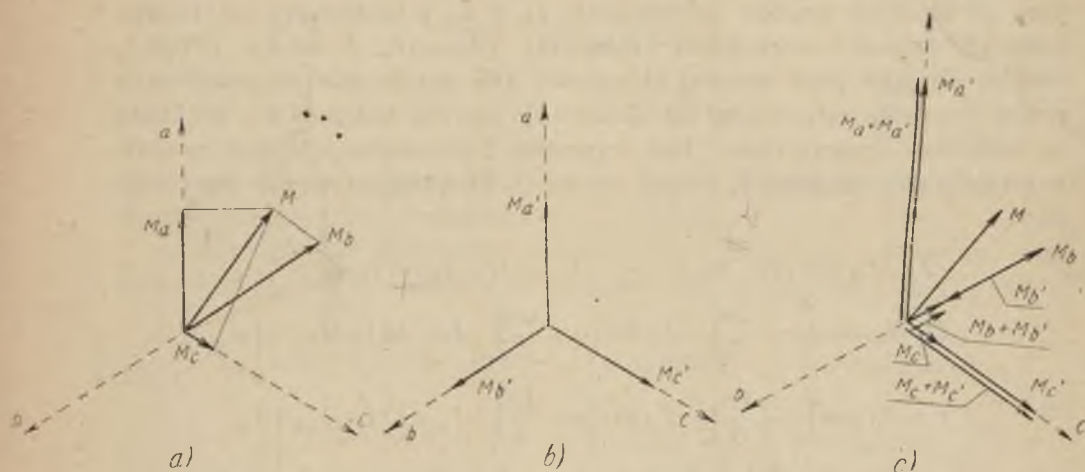
$$|M'_a| = |M'_b| = |M'_c| = M_0,$$

wówczas

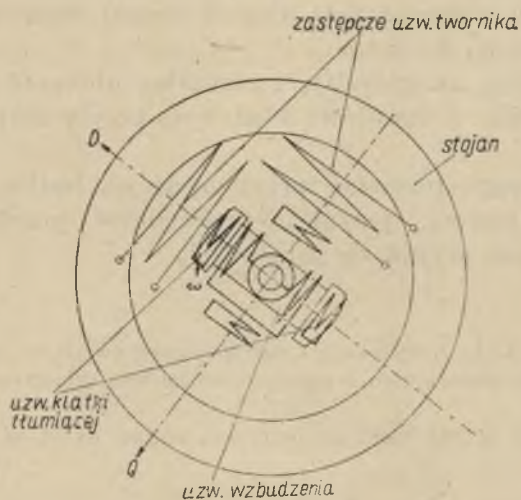
$$M'_a \hat{+} M'_b \hat{+} M'_c = 0 \quad (\text{rys. 3b}).$$

III. Wektor  $M$  może być uważany za sumę 2 układów wektorów osiowych, z których jeden jest układem składowych osiowych wektora  $M$  (punkt I), a drugi dowolnym układem wektorów osiowych o jednakowej wartości liczbowej (punkt II).

Obliczone powyżej SMM twornika współdziałają wraz z SMM wirnika w wytwarzaniu strumienia. Przy założeniu małych nasycień w obwodzie można przyjmując liniową zależność strumienia od SMM rozważać oddzielnie strumienie w obydwu osiach.



Rys. 3. Rzutowanie wektora na osie symetrycznie dzielące płaszczyznę



Rys. 4. Kierunkowości napięć, prądów i liniozwojów zastępczego obwodu stojana i wirnika

Rysunek 4 przedstawia model sprzężonych ze sobą obwodów elektrycznych stojana i wirnika, na którym zaznaczono przyjęte kierunkowości napięć, prądów i liniozwojów. Przy przyjęciu tych kierunkowości otrzymujemy zależność między prądem i napięciem uzwojenia stojana i uzwojenia wzbudzenia



$$U_k = - \frac{d\Psi_k}{dt} - I_k R_{(k=a,b,c)},$$

$$U_w = \frac{d\Psi_w}{dt} + I_w R_{wzrb}. \quad (4)$$

Założono przy tym równe opory czynne  $R$  we wszystkich fazach uzwojenia stojana. Liniozwoje  $\Psi_k$  poszczególnych faz składają się z liniozwojów pola głównego ( $\Psi_{gk}$ ) oraz liniozwojów rozproszenia ( $\Psi_{sk}$ )

$$\Psi_k = \Psi_{gk} + \Psi_{sk}, \quad k = a, b, c.$$

Liniozwoje rozproszenia proporcjonalne są do wartości chwilowej prądu fazy i indukcyjności rozproszenia

$$\Psi_{sk} = L_s \cdot I_k, \quad k = a, b, c.$$

Zakłada się (podobnie jak dla oporności czynnych) jednakowe indukcyjności rozproszenia we wszystkich fazach. Liniozwoje główne wyraża się za pomocą strumienia podłużnego i poprzecznego przy przyjęciu sinusoidalnego rozkładu przestrzennego pola (przy niesinusoidalnym rozkładzie pola rozważania dotyczą pierwszej harmonicznej).

Strumień  $\Phi_D$  względnie  $\Phi_Q$  wytworzony jest przez wypadkowy przepływ wirnika i stojana w osi podłużnej albo w osi poprzecznej:

$$\Psi_{ga} = w[\Phi_D \cos(\alpha) - \Phi_Q \sin(\alpha)] = wf_a(\Phi_D, \Phi_Q),$$

$$\Psi_{gk} = wf_k(\Phi_D, \Phi_Q), \quad k = a, b, c,$$

gdzie  $w$  — oznacza liczbę zwojów równoważnego uzwojenia skupionego dla 1 harmonicznej po uwzględnieniu współczynnika uzwojenia, zatem

$$\Psi_k = wf_k(\Phi_D, \Phi_Q) + I_k L_s, \quad k = a, b, c.$$

Podstawiając  $I_k$  ze wzoru (3) otrzymamy

$$\Psi_k = wf_k(\Phi_D, \Phi_Q) + L_s wf_k(I_D, I_Q) = f_k(w\Phi_D + L_s I_D w\Phi_Q + L_s I_Q), \quad k = a, b, c. \quad (5)$$

Wprowadzamy:

$$\Psi_D = w\Phi_D + I_D L_s,$$

$$\Psi_Q = w\Phi_Q + I_Q L_s, \quad (6)$$

$$\Psi_k = f_k(\Psi_D, \Psi_Q), \quad k = a, b, c.$$

Wstawiamy zatem do wzoru (4):

$$U_a = \left[ \left( \Psi_D \omega + \frac{d\Psi_Q}{dt} \right) \sin(\alpha) + \left( \Psi_Q \omega - \frac{d\Psi_D}{dt} \right) \cos(\alpha) \right] - I_a R.$$

Podstawiamy za  $I_a$  wartość ze wzoru (3):

$$U_a = \left( \Psi_Q \omega - \frac{d\Psi_D}{dt} - I_D R \right) \cos(\alpha) - \left( -\Psi_D \omega - \frac{d\Psi_Q}{dt} - I_Q R \right) \sin(\alpha).$$

Analogicznie

$$U_b, U_c.$$

Zatem

$$U_k = f_k \left[ \left( \Psi_Q \omega - \frac{d\Psi_D}{dt} - I_D R \right), \left( -\Psi_D \omega - \frac{d\Psi_Q}{dt} - I_Q R \right) \right], \quad k = a, b, c. \quad (7)$$

Otrzymana formuła wyrażenia dla napięcia fazowego jest analogiczna jak dla prądu fazowego  $I_k$ . Z porównania wzorów (5) i (3) wynika:

$$\Psi_Q \omega - \frac{d\Psi_D}{dt} - I_D R = U_D, \quad (8)$$

$$-\omega \Psi_D - \frac{d\Psi_Q}{dt} - I_Q R = U_Q,$$

stąd

$$U_k = f_k(U_D, U_Q), \quad k = a, b, c. \quad (9)$$

Napięcie  $U_D$  i  $U_Q$  jest zatem określone rzutami chwilowych wartości napięć fazowych na osie  $D$  i  $Q$ . Po przekształceniu równania dla wyznaczenia  $U_D$  i  $U_Q$  ze zmiennych  $U_k$  otrzymamy podobnie jak dla prądów stojana

$$U_D = F_D(U_k), \quad k = a, b, c,$$

$$U_Q = F_Q(U_k), \quad k = a, b, c.$$

Analogicznie dla  $\Psi$  ze wzoru (5) i (6)

$$\Psi_D = F_D(\Psi_k), \quad k = a, b, c, \quad (10)$$

$$\Psi_Q = F_Q(\Psi_k), \quad k = a, b, c.$$

Dla przypadku przyłączenia twornika w układzie 4-przewodowym i pojawienia się składowej zerowej prądu twornika  $I_0$  wzory (5) i (7) przybierają rozszerzoną postać

$$\Psi_k = f_k(\Psi_D, \Psi_Q) + I_0 L_0, \quad k = a, b, c,$$

$$U_k = f_k(U_D, U_Q) - \frac{dI_0}{dt} L_0 - I_0 R, \quad k = a, b, c,$$

gdzie  $L_0$  — indukcyjność dla prądu zerowej kolejności twornika.

Wyznaczone zależności liniozwojów i napięć twornika pozwalają przy uwzględnieniu obwodów wirnika wykreślić elektryczny układ równoważny w 2 osiach maszyny synchronicznej (rys. 5).

Napięcie  $U_{xD}$ ,  $U_{xQ}$  na zaciskach zastępczych uzwojeń twornika w osi podłużnej i poprzecznej określone równaniem obwodu wynosi

$$U_{xD} = -\frac{d\Psi_D}{dt} - I_D R, \quad (11)$$

$$U_{xQ} = -\frac{d\Psi_Q}{dt} - I_Q R.$$

Z porównania z wzorem (8) wynika związek:

$$U_{xD} = U_D - \omega\Psi_Q = U_D - E_{Drot},$$

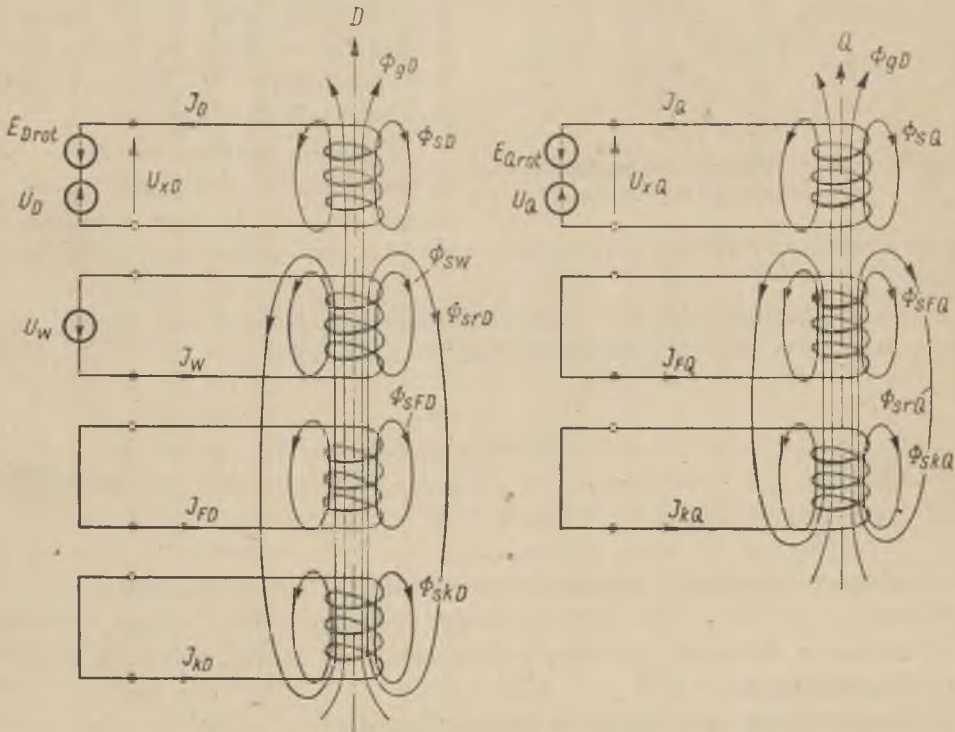
$$U_{xQ} = U_Q + \omega\Psi_D = U_Q - E_{Qrot}, \quad (12)$$

przy czym w powyższych równaniach oznaczono

$$-\omega \cdot \Psi_D = E_{Qrot},$$

$$+\omega \cdot \Psi_Q = E_{Drot},$$

jako siły elektromotoryczne rotacji w osi podłużnej i poprzecznej.

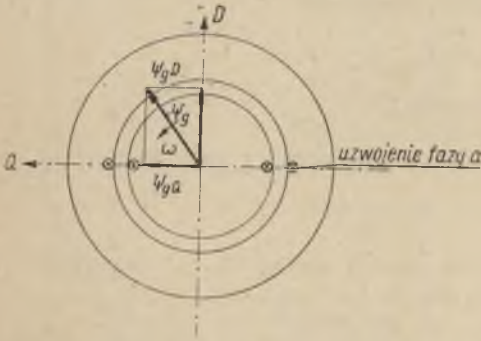


Rys. 5. Schemat zastępczy uzwojeń maszyny synchronicznej w osi podłużnej i poprzecznej



Równania te wyjaśniają, że zastąpienie nieruchomego uzwojenia stojana uzwojeniem zastępczym wirującym wraz z wirnikiem wymaga prócz uwzględnienia składowej  $U_D$  i  $U_Q$  wynikających z rzutowania chwilowych wartości napięć na zaciskach jeszcze uwzględnienia dodatkowej składowej będącej konsekwencją unieruchomienia uzwojenia stojana względem wirnika. To dodatkowe napięcie rotacji jest iloczynem prędkości oraz liniozwojów w osi prostopadłej do danego uzwojenia zastępczego, przy czym liniozwoje w jednej osi dają dodatnią wartość siły elektromotorycznej rotacji w osi skróconej względem osi liniozwojów o  $90^\circ$  elektrycznych przeciwko kierunkowi wirowania.

Ilustruje to fizykalnie rysunek 6, na którym przedstawiono położenie jednej z osi wirnika zgodnie z osią fazy rzeczywistego uzwojenia stojana. Przy dobraniu takiego położenia napięcie indukowane rozpatrywanej fazy  $a$  rzeczywistego uzwojenia jest równocześnie napięciem uzwojenia zastępczego, a składowe liniozwoje tej fazy (w osi fazy oraz w osi prostopadłej do osi fazy) są równocześnie podłużnymi i poprzecznymi składowymi  $\Psi_D$  i  $\Psi_Q$ .



Rys. 6. Zgodne położenie osi podłużnej wirnika z osią fazy twornika

przecinaniem (rotacją) strumienia poprzecznego przez uzwojenie tej fazy.

Dla odróżnienia od siły elektromotorycznej rotacji wprowadza się czasem pojęcie siły elektromotorycznej transformacji

$$\begin{aligned} E_{D_{tr}} &= -\frac{d\Psi_D}{dt}, \\ E_{Q_{tr}} &= -\frac{d\Psi_Q}{dt}, \end{aligned} \quad (13)$$

pochodzącej od zmiany strumienia w odnośnych osiach podłużnej i poprzecznej.

Równania obwodów dla uzwojeń zastępczych można wówczas wypisać w postaci:

dla uzwojenia zastępczego w osi podłużnej

$$U_D = E_{D_{tr}} + E_{D_{rot}} - I_D \cdot R,$$

dla uzwojenia zastępczego w osi poprzecznej

$$U_Q = E_{Q_{tr}} + E_{Q_{rot}} - I_Q \cdot R,$$

dla stanu ustalonego jest  $E_{D_{tr}} = 0$ ,  $E_{Q_{tr}} = 0$ , zatem otrzymuje się

$$U_D = E_{D_{rot}} - I_D \cdot R = \omega \Psi_Q - I_D R,$$

$$U_Q = E_{Q_{rot}} - I_Q R = -\omega \Psi_D - I_Q R.$$

Zgodnie z dotychczasową tradycją w analizie stanów ustalonych generatora synchronicznego symetrycznie obciążonego określa się składową  $-I_D$  jako prąd podłużny, oznaczając go symbolem  $I_d$ , podobnie określa się składową  $-I_Q$  jako prąd poprzeczny, oznaczając go symbolem  $I_q$ . Rysunek 7 przedstawia wykres promieniowy generatora synchronicznego dla stanu ustalonego przy obciążeniu symetrycznym. Przy założonych kierunkowościach jak na rysunku 4 otrzymujemy dla stanu ustalonego równania

$$U_d = E_{d_{rot}} - I_q R,$$

$$U_q = E_{q_{rot}} - I_d R,$$

gdzie

$$E_{d_{rot}} = E_w - I_d X_d,$$

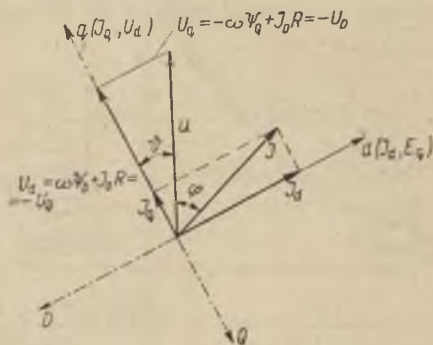
$$E_{q_{rot}} = I_q X_q.$$

$E_w$  — SEM od amperozwojów uzwojenia wzbudzenia,

$X_d, X_q$  — reaktancja synchroniczna dla osi podłużnej  $d$  względem poprzecznej  $q$ .

Jak widać z tego wykresu, znana z teorii ustalonych stanów symetrycznych „składowa podłużna napięcia  $U_d$ “ jest napięciem  $-U_Q$  uzwojenia zastępczego w osi poprzecznej. Podobnie „składowa poprzeczna napięcia  $U_q$ “ jest napięciem  $-U_D$  uzwojenia zastępczego w osi podłużnej. Dla utrzymania terminologii wprowadzonej w analizie ustalonych stanów generatora synchronicznego można wprowadzić symbol  $U_q$  w miejsce  $-U_D$  oraz  $U_d$  w miejsce  $-U_Q$ .

Przy takim przyjęciu rzutowanie prądu na oś  $d$  względnie  $q$  daje składową  $I_d$  względnie  $I_q$ , rzutowanie napięcia daje składową  $U_d$  względnie  $U_q$ .



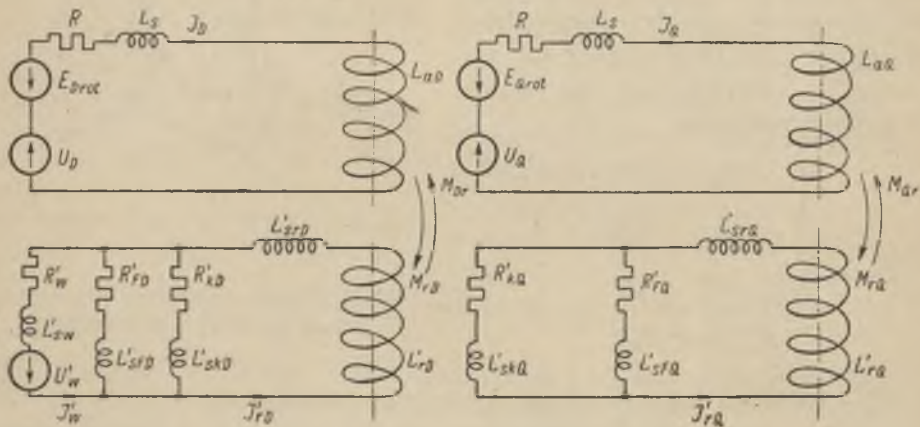
Rys. 7. Wykres wektorowy stanu ustalonego maszyny synchronicznej

#### 4. Równania układu zastępczego

Dokładna analiza przebiegów prądów, napięć i liniozwojów w poszczególnych obwodach wirnika względnie uzwojeń zastępczych stojana wymaga uwzględnienia poszczególnych indukcyjności wzajemnych i własnych tych obwodów. Dla uproszczenia analizy uwzględnia się zwykle tylko istnienie linii sprzężonych ze wszystkimi uzwojeniami (strumień główny  $\Psi_g$ ) i linii rozproszenia sprzężonych tylko z jednym uzwojeniem ( $\Psi_s, \Psi_{sw}, \Psi_{sk}, \Psi_{sF}$ ) decydujących w głównej mierze o charakterze przebiegów.

Można czasami uwzględnić również linie rozproszenia  $\Psi_{sr}$  nie należące do strumienia głównego a splatające się z wszystkimi uzwojeniami wirnika.

Przy uwzględnieniu powyższych założeń dochodzi się w dalszym przekształcaniu układu równoważnego i sprowadzeniu wszystkich obwodów wirnika najpierw do jednego uzwojenia wirnika (rys. 8), a następnie na stronę uzwojenia stojana do schematu zastępczego przedstawionego na rysunku 9.



Rys. 8. Schemat zastępczy uzwojeń maszyny synchronicznej po sprowadzeniu do jednego uzwojenia wirnika

Oznaczone na rysunku 8 oporności i indukcyjności dotyczą wartości poszczególnych gałęzi sprowadzonych na stronę jednego z obwodów wirnika. Ze względu na to, że mierzy się praktycznie zawsze tylko prąd w uzwojeniu wzbudzenia, celowe jest sprowadzenie do uzwojenia wzbudzenia. (Dla osi poprzecznej sprowadza się konsekwentnie również do ilości zwojów uzwojenia wzbudzenia). Indukcyjność rozproszonych (wyłącznych) pojedynczych obwodów oznaczono  $L_s$  i dodatkowym indeksem poszczególnego obwodu.

Indukcyjność rozproszenia (łącznie) wszystkich obwodów wirnika oznaczono  $L_{sr}$ .



Indukcyjność główna wirnika oznaczona jest na schemacie przez  $L_{rD}$  względnie  $L_{rQ}$ .

Indukcyjność główną uzwojeń zastępczych twornika (stojana) oznaczono odpowiednio  $L_{aD}$  względnie  $L_{aQ}$ ;  $M_{rD}$  i  $M_{Dr}$  oraz  $M_{rQ}$  i  $M_{Qr}$  określają indukcijności wzajemne.

Określenie indukcijności i głównych, i wzajemnych wynika z podstawowych związków między liniozwojami a prądem:

$$M_{rD} = \frac{\partial \Psi_{rD}}{\partial I_D} = \frac{\Theta_{D \text{ stoj}}}{I_D} w_r \Lambda_D = \frac{3}{2} w w_r \Lambda_D, \quad (14)$$

$$M_{Dr} = \frac{\partial \Psi_D}{\partial I_{rD}} = \frac{\Theta_{D \text{ wir}}}{I_{rD}} w \Lambda_D = w w_r \Lambda_D.$$

Analogicznie

$$M_{rQ} = M_{rD} \cdot \frac{\Lambda_Q}{\Lambda_D},$$

$$M_{Qr} = M_{Dr} \cdot \frac{\Lambda_Q}{\Lambda_D}.$$

$\Lambda_D, \Lambda_Q$  oznacza przewodność magnetyczną dla strumienia w osi  $D$  względnie  $Q$ . Wychodząc z prawa Ohma dla obwodu zastępczego uzwojenia twornika i wirnika otrzymuje się równania:

$$U_D - E_{D \text{ rot}} = -(L_s + L_{aD}) \frac{dI_D}{dt} - RI_D - \frac{dI_{rD}}{dt} M_{Dr},$$

$$U_w = L_{sw} \frac{dI_w}{dt} + R_w I_w + (L'_{rD} + L'_{srD}) \frac{dI_{rD}}{dt} + M_{rD} \frac{dI_D}{dt}.$$

Po sprowadzeniu na jedną stronę (twornika) otrzymamy:

$$\begin{aligned} -(U_D - E_{D \text{ rot}}) &= (L_s + L_{aD}) \frac{dI_D}{dt} + RI_D + \frac{d}{dt} \left( I'_{rD} \frac{w_r}{w} \frac{2}{3} \right) \left( M_{Dr} \frac{3}{2} \frac{w}{w_r} \right), \\ \left( U'_w \frac{w}{w_r} \right) &= \left( L'_r \frac{w^2}{w_r^2} \frac{3}{2} \right) \frac{d}{dt} \left( I'_w \frac{w_r}{w} \frac{2}{3} \right) + \left( R'_w \frac{w^2}{w_r^2} \frac{3}{2} \right) \left( I'_w \frac{w_r}{w} \frac{2}{3} \right) + \\ &+ (L'_{rD} + L'_{srD}) \left( \frac{w^2}{w_r^2} \frac{3}{2} \right) \frac{d}{dt} \left( I_{rD} \frac{w_r}{w} \frac{2}{3} \right) + M_{rD} \frac{w}{w_r} \frac{dI_D}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

względnie

$$-(U_D - E_{D \text{ rot}}) = (L_s + L_{aD}) \frac{dI_D}{dt} + RI_D + L_{aD} \frac{dI_{rD}}{dt},$$

$$U_w = L_{sw} \frac{dI_w}{dt} + R_w I_w + (L_{aD} + L_{srD}) \frac{dI_{rD}}{dt} + L_{aD} \frac{dI_D}{dt}. \quad (15)$$

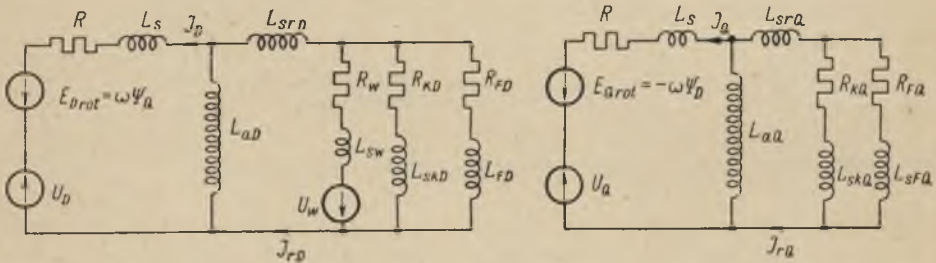
Analogicznie otrzymuje się dla uzwojenia zastępczego<sup>1</sup>:

$$-(U_Q - E_{Q\text{rot}}) = (L_s + L_{aQ}) \frac{dI_Q}{dt} + RI_Q + L_{aQ} \frac{dI_{rQ}}{dt},$$

$$0 = L_{rkQ} \frac{dI_{kQ}}{dt} + R_{kQ} I_{kQ} + (L_{rQ} + L_{srQ}) \frac{dI_{rQ}}{dt} + L_{rQ} \frac{dI_Q}{dt}. \quad (16)$$

Wzory redukcyjne indukcyjności, oporności, napięć i prądów wirnika wynikają bezpośrednio z porównania (14) i (15). Jest widoczne, że dla tego układu sprowadzonego ostatecznie do dwuuzwojeniowego transformatora iloczyn przekładni napięciowej i prądowej nie jest równy jedności i wynosi 2/3. Jest to następstwem różnej ilości faz w stojanie i w wirniku, podobnie jak to występuje w trójfazowym silniku asynchronicznym z wirnikiem uzwojonym dwufazowo. Podczas gdy przekładnia napięciowa wynosi  $\frac{w}{w_r}$ , przekładnia prądowa wynosi  $\frac{w_r}{w} \cdot \frac{2}{3}$ .

Rysunek 9 przedstawia końcowy ogólny schemat zastępczy maszyny synchronicznej rozpadający się na schematy osi podłużnej i poprzecznej wzajemnie związane istnieniem siły elektromotorycznej rotacji w jednym obwodzie zależnej od strumienia w drugim obwodzie. Często indukcyjności figurujące w schematach zastępczych przedstawia się jako reaktancje wynikające przez formalne pomnożenie indukcyjności przez pulsację znamionową ( $\omega_N$ ) generatora.



Rys. 9. Schemat zastępczy uzwojeń maszyny synchronicznej po sprowadzeniu na stronę uzwojenia twornika

Dla praktycznego operowania schematem zastępczym maszyny synchronicznej wprowadza się jednostki prądów i napięć odniesione do parametrów znamionowych stojana generatora (wartości fazowych maksymalnych):

$$I_{odn} = I_{Nf},$$

$$U_{odn} = U_{Nf}.$$

<sup>1</sup> Wielkości prądów, napięć, oporności i indukcyjności figurujące w (15) i (16) przedstawiają wielkości sprowadzone na stronę zastępczego uzwojenia stojana.

Tym samym jednostka pochodna oporności  $R_{\text{odn}} = \frac{U_{Nf}}{I_{Nf}}$ . Dzięki temu parametry występujące w analizie wyrażają się typowymi wielkościami niezależnie od wielkości mocy maszyny. W konsekwencji takiego przyjęcia jednostki prądu i napięcia należy dla obwodu wzbudzenia jako jednostkę odniesienia prądu przyjmować wartość  $I_{Nf} \cdot \frac{3}{2} \frac{w}{w_r}$ , jako jednostkę odniesienia napięcia wartość  $U_{Nf} \cdot \frac{w_r}{w}$ , jako jednostkę oporności i indukcyjności wartość  $\frac{U_{Nf}}{I_{Nf}} \cdot \left( \frac{w_r^2}{w^2} \cdot \frac{2}{3} \right)$ .

Często ze względu na wygodę w innych obliczeniach przyjmuje się odmienną wartość prądu jako jednostkę odniesienia dla prądu wzbudzenia. Tak np. sprowadza się często prąd wzbudzenia do prądu biegu jałowego przy znamionowym napięciu i częstotliwości

$$I_{\text{odn}} = I_{w_0}$$

Przy obliczeniach termicznych wygodnie jest przyjąć jako jednostkę wartość prądu wzbudzenia w warunkach znamionowego obciążenia. Przy przyjęciu jednostek odniesienia prądu dla obwodów wirnika innych niż dla twornika dla odnośnych składników wyprowadzonych równań dochodzą dodatkowe współczynniki wyrównawcze.

Dotychczasowe rozważania doprowadziły do określenia związków ilościowych pomiędzy prądami, napięciami i strumieniem maszyny synchronicznej. Ze związków tych można również obliczyć moment i moc maszyny synchronicznej.

Wychodząc z zasady superpozycji określa się moment działający na uzwojenia twornika oddzielnie od składowych strumieni podłużnych i poprzecznych

$$M_e = -[\Phi_D \Theta_Q - \Phi_Q \Theta_D] \quad (17a)$$

(dodatnią wartość momentu przyjęto dla kierunku momentu działającego na wirnik w kierunku przeciwnym do kierunku wirowania).

Wstawiając

$$\Theta_D = \frac{3}{2} I_D w, \quad \Theta_Q = \frac{3}{2} I_Q w,$$

$$\Phi_D w = \Psi_{Dg} = (I_{rD} + I_D) L_{aD},$$

oraz

$$\Phi_Q w = \Psi_{Qg} = (I_{rQ} + I_Q) L_{aQ},$$

otrzymamy

$$M_e = -\frac{3}{2} [L_{aD} I_Q I_{rD} + (L_{aD} - L_{aQ}) I_Q I_D - I_{aQ} I_D I_{rQ}]. \quad (17b)$$



Wyrażenie na moment można również przedstawić w postaci:

$$M_e = \Psi_D \cdot I_Q - \Psi_Q \cdot I_D, \quad (17c)$$

którą łatwo otrzymać z porównania wzorów (17a) oraz (17c).

Ponieważ prądy stojana i wirnika wyrażone są w przyjętych poprzednio jednostkach stosunkowych, moment obliczony według wzoru ma jako jednostkę odniesienia wartość

$$\frac{I_N \cdot U_{NF}}{\omega_N} \cdot \frac{3}{2}.$$

Wartość momentu wyrażona w jednostkach stosunkowych jest równa wartości mocy wyrażonej w jednostkach stosunkowych (jednostka odniesienia dla mocy  $\frac{3}{2} U_{NF} \cdot I_{NF}$ ).

Obliczony powyżej moment określa moment elektryczny, który wchodzi w ogólne równanie momentów działających na masy wirujące zespołu maszyny synchronicznej:

$$-J \frac{d\omega}{dt} - M_e + M_m = 0, \quad (18)$$

gdzie

$M$  — moment mechaniczny dostarczony do układu (przyjęto dodatnią wartość momentu mechanicznego działającego w kierunku wirowania),

$J$  — moment bezwładności mas wirujących.

Jeżeli momenty  $M_e$  i  $M_m$  wyrażone są w jednostkach stosunkowych, prędkość kątowna  $\omega$  wyraża się w odniesieniu do  $\omega_{\text{odn}} = \omega_N$ , wówczas moment bezwładności wyraża się w postaci stałej czasowej  $J \cdot \frac{\omega_N^2}{P_N} = T_r(\text{sek})$ , gdzie  $T_r$  oznacza tzw. stałą rozruchową.

W równaniu (18) należy wówczas wstawić  $T_r$  w miejsce  $J$ .

Fizycznie stała rozruchowa odpowiada czasowi, po którym układ dochodzi do szybkości jednostkowej pod działaniem momentu jednostkowego idącego na przyspieszenie mas. Równanie momentu można zastąpić równaniem mocy:

$$-\frac{d}{dt} \frac{J\omega^2}{2} - P_e + P_m = 0 \quad (19)$$

lub też w jednostkach stosunkowych:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{T\omega^2}{2} \right) - P_e + P_m = 0.$$

Dotychczasowa analiza doprowadziła w efekcie końcowym do wyznaczenia podstawowych równań wyjściowych maszyny synchronicznej,

wiążących parametry zewnętrzne zarówno po stronie elektrycznej i mechanicznej z parametrami wewnętrznymi elektrycznymi i mechanicznymi maszyny:

$$\begin{aligned}
 1) \quad U_D &= +\Psi_Q \omega - \frac{d\Psi_D}{dt} - I_D R, \\
 2) \quad U_Q &= -\Psi_D \omega - \frac{d\Psi_Q}{dt} - I_Q R, \\
 3) \quad U_0 &= -\frac{d\Psi_0}{dt} - I_0 R, \\
 4) \quad U_w &= \frac{d\Psi_w}{dt} + I_w R_w, \\
 5) \quad -J \cdot \frac{d\omega}{dt} - M_e + M_m &= 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Występujące w równaniach wielkości  $\Psi$ ,  $M_e$  wyraża się za pomocą prądów i elementów wewnętrznych schematu zastępczego:

$$\begin{aligned}
 \Psi_D &= (I_D + I_{rD})L_{aD} + I_D L_s, \\
 \Psi_Q &= (I_Q + I_{rQ})L_{aQ} + I_Q L_s, \\
 \Psi_0 &= I_0 L_0, \\
 \Psi_w &= (I_D + I_{rD})L_{aD} + L_{sr} \cdot I_r + I_w \cdot L_{sw}, \\
 M_e &= \frac{3}{2} [I_{aD} I_Q I_{rD} + (L_{aQ} - L_{aD}) I_Q I_D - L_{aD} I_D I_{rQ}].
 \end{aligned} \tag{21}$$

Powyższy układ równań wraz z równaniami obwodów wirnika określa jednoznacznie pracę maszyny synchronicznej przy uwzględnieniu warunków początkowych dla poszczególnych obwodów elektrycznych oraz układu mechanicznego.

Warunek początkowy dla obwodów elektrycznych stanowi ciągłość funkcji czasowej liniozwojów a dla układu mechanicznego — ciągłość funkcji czasowej prędkości.

W rozwiązaniu powyższego układu równań można wyodrębnić zwykle 2 podstawowe człony. Pierwszy określa tzw. stan ustalony maszyny synchronicznej uwarunkowany zewnętrznymi narzuconymi parametrami układu elektromechanicznego maszyny synchronicznej. Są to zwykle napięcia sieci, napięcie wzbudzenia i moment mechaniczny, prędkość wirowania itp. Wielkości takie będą oznaczone jako parametry narzucone. Drugi człon rozwiązania określa tzw. stan przejściowy spowodowany początkową zmianą konfiguracji układu względnie parametrów narzuconych.

Możliwość wyodrębnienia członu ustalonego i nieustalonego rozwiązania nie jest regułą. Istnieją przypadki, gdy warunki pracy układu uniemożliwiają osiągnięcie stanu ustalonego.

Ogólne rozwiązanie podanego układu równań jest bardzo trudne, gdyż prowadzi do nieliniowych równań różniczkowych wysokich rzędów. (Nieliniowość równań wprowadza równanie piąte układu równań 20).

Przy założeniu stałej prędkości  $\left(\frac{d\omega}{dt} = 0\right)$  układ sprowadza się do równań liniowych wyższych rzędów. Rozwiązanie szczególne takiego układu jest zasadniczo możliwe np. przy zastosowaniu rachunku operatorowego, jednakże ze względu na wysoki rząd równania również i w tym wypadku poprzestaje się często na rozwiązaniach przybliżonych.

Przy założeniu stałej prędkości wirnika  $\left(\frac{d\omega}{dt} = 0\right)$  układ równań wyjściowych synchronicznej maszyny przedstawia się w postaci operatorowej po dokonaniu transformacji obu stron równań (20)<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} U_D(p) &= -p\Psi_D(p) + p\Psi_{D_0} - I_D(p)R + \omega\Psi_Q(p), \\ U_Q(p) &= -p\Psi_Q(p) + p\Psi_{Q_0} - I_Q(p)R - \omega\Psi_D(p), \\ U_0(p) &= -p\Psi_0(p) - p\Psi_{D_0} - I_0(p)R, \\ U_w(p) &= -p\Psi_w(p) - p\Psi_{w_0} + I_w(p)R_w, \end{aligned} \tag{22}$$

gdzie  $\Psi_{D_0}$ ,  $\Psi_{Q_0}$ ,  $\Psi_{0_0}$ ,  $\Psi_{w_0}$  oznaczają wartości początkowe odnośnych liniozwojów. Przy narzuconych zewnętrznych parametrach maszyny synchronicznej (zwykle założony przebieg napięcia  $U_D, U_Q, U_w$ ) otrzymuje się szukany przebieg (zwykle prądy lub liniozwoje) w postaci operatorowej, wychodząc z układu równań (21) i (20) oraz równań obwodów wirnika dla schematu zastępczego, wyrażonych operatorowo.

Otrzymany ostatecznie przebieg wyrażony w postaci operatorowej przekształcamy powrotnie do szukanej postaci czasowej. Przekształcenie odwrotne do postaci czasowej, wyrażające się ogólnie całką Bromwicha, w większości praktycznych wypadków można sprowadzić — za pomocą rozkładu funkcji operatorowej na ułamki proste — do znanego wzoru Heaviside'a.

W przypadku skomplikowanej funkcji narzuconych zewnętrznych parametrów maszyny synchronicznej, np. napięcia wzbudzenia (często funkcja  $U_w(t)$  nie jest podana analitycznie) dla uniknięcia bezpośredniego rozwiązywania całki Bromwicha można posłużyć się metodą całki Duhamela.

Metoda ta pozwala również wyznaczyć czasowy przebieg  $J(t)$  w sposób wykreślny, gdy znany jest zadany przebieg  $U_w(t)$ .

<sup>1</sup> W niniejszej pracy stosuje się przekształcenie Laplace'a-Carsona

$$f(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$



Dla szczególnego przypadku z góry zadanej zmiennej w czasie prędkości wirnika (prędkość jest wówczas parametrem narzuconym maszyny) oraz wiadomej funkcji czasowej  $\Psi_D$  i  $\Psi_Q$  (przy małych oporach czynnych obwodu twornika łatwo wyznaczyć przybliżony przebieg  $\Psi_D$  i  $\Psi_Q$  przy znanym napięciu przyłożonym) z transformacji Laplace'a-Carsona równań (20) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} U_D(p) &= -p\Psi_D(p) + p\Psi_{D_0} - I_D(p)R - \mathcal{L}[\omega(t)\Psi_Q(t)], \\ U_Q(p) &= -p\Psi_Q(p) + \Psi_{Q_0} - I_Q(p)R + \mathcal{L}[\omega(t)\Psi_D(t)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Równania nie zawierające czynnika  $\omega(t)$  pozostają bez zmiany.

Zaznaczoną transformację iloczynu 2 funkcji czasowych można wykonać wprost zgodnie z definicją przekształcenia Laplace'a-Carsona, lub też można posłużyć się spletem funkcji operatorowej. W szczególnym wypadku, gdy funkcja  $\omega(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ ,

$$\mathcal{L}[\omega(t)\Psi(t)] = p \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{p_k M'(p_k)} \frac{\Psi(p-p_k)}{p-p_k} + \frac{N(0)}{M(0)} \Psi(p),$$

gdzie

$p_k$  pierwiastki równania  $M(p) = 0$ .

Przy zastosowaniu metody całki Duhamela dla funkcji  $\omega(t)\Psi(t)$  — analogicznie jak wyżej opisano dla zadanej funkcji  $U_w(t)$  — można obejść się bez kłopotliwej często transformacji funkcji  $\omega(t)\Psi(t)$ .

## 5. Wektorowa forma równań wyjściowych

Podaną wyżej metodę rozwiązania układu równań maszyny synchronicznej przez oddzielne obliczenie przebiegów w osi podłużnej i poprzecznej można często znacznie uprościć przez wprowadzenie abstrakcyjnej płaszczyzny, przyporządkowanej np. płaszczyźnie wirnika, wirującej w układzie wirnika. W płaszczyźnie tej leżą osie  $D$  i  $Q$  oraz wielkości prądów  $\bar{J}$ , napięć  $\bar{U}$  i liniozwojów  $\bar{\Psi}$ , określone jako wektory płaskie przez odnośne współrzędne — osi poprzecznej i podłużnej

$$\bar{I} = I_D \hat{+} I_Q,$$

$$\bar{U} = U_D \hat{+} U_Q,$$

$$\bar{\Psi} = \Psi_D \hat{+} \Psi_Q.$$

Przyporządkowując tej płaszczyźnie płaszczyznę zespoloną Gaussa (wielkościom w osi podłużnej przyporządkowuje się wartości rzeczywiste, wielkościom w osi poprzecznej przyporządkowuje się wartości urojone),

odpowiednie wektory prądów napięć i liniozwojów można przedstawić jako wielkości zespolone:

$$\begin{aligned}\hat{I} &= I_D + jI_Q, \\ \hat{\Psi} &= \Psi_D + j\Psi_Q, \\ \hat{U} &= U_D + jU_Q.\end{aligned}\tag{24}$$

Przyjęcie takiej upraszcza postać równań (20). maszyny synchronicznej

$$\hat{U} = -\frac{d\hat{\Psi}}{dt} - \hat{I}R - j\omega\hat{\Psi}.\tag{25}$$

W ogólnej postaci również równanie czwarte układu równań (20) można przedstawić w sposób następujący:

$$\hat{U}_w = \frac{d\hat{\Psi}_w}{dt} + \hat{I}_w R_w,\tag{26}$$

w przypadku zasilania obwodów wirnika w dwóch osiach<sup>1</sup>.

Układ równań (25) i (26) stanowi uogólnienie teorii dwuosiowej, rozpatrywanej dotychczas na przykładzie maszyny synchronicznej, na wszystkie maszyny wirujące spełniające założone na wstępie warunki symetrii uzwojeń twornika (wielofazowe maszyny asynchroniczne, synchroniczne, asynchroniczne kolektorowe).

W przypadku maszyny asynchronicznej kolektorowej napięcie  $\hat{U}_w$  przedstawia wtrącone w obwód uzwojeń wirnika napięcie o częstotliwości poślizgu wyrażone w postaci symbolicznej jako wektor wirujący w płaszczyźnie wirnika z prędkością kątową poślizgu.

Wzór (17c) na moment działający na wirnik maszyny można przedstawić jako iloczyn wektorowy wektora płaskiego  $\bar{\Psi}$  oraz  $\bar{I}$ .

$$M = (\bar{\Psi} \times \bar{I}).\tag{27a}$$

Przy określeniu wielkości  $\bar{\Psi}$  i  $\bar{I}$  liczbami zespolonymi  $\hat{\Psi}, \hat{I}$  w przyjętej płaszczyźnie zespolonej wartość momentu działającego na wirnik można przedstawić w postaci:

$$M = R_e(-j\hat{\Psi} \cdot \bar{I}),\tag{27b}$$

<sup>1</sup> Przypadek zasilania uzwojenia wzbudzenia maszyny synchronicznej w dwóch osiach spotyka się np. w zastosowaniach automatyki przy napędach synchronicznych mechanicznego sterowania impulsów napięć siatkowych prostowników rtęciowych dla celów regulacji kąta zapłonu.

gdzie

$R_e$  – wartość rzeczywista wyrażenia w nawiasie,

$\hat{I}$  – chwilowa symboliczna wartość wektora sprzężonego z wektorem  $\hat{J}$ .

Układ równań (25) i (26) wyraża się w postaci operatorowej<sup>1</sup>

$$\hat{U}(p) = -p\hat{\Psi}(p) + p\hat{\Psi}_0 - \hat{I}(p)R - jp \sum \text{Res} \left[ \frac{\hat{\Psi}(p-p_s)\omega(p_s)}{(p-p_s)p_s} \right], \quad (28)$$

$$\hat{U}_w(p) = p\hat{\Psi}_w(p) - p\hat{\Psi}_{w0} + \hat{I}_w(p)R, \quad (29)$$

przy czym rezidua należy obliczyć dla punktów osobliwych  $p_s$  funkcji  $\frac{\omega(p)}{p}$ .

Dla stałej prędkości wirnika równanie (25) przybiera postać

$$\hat{U}(p) = -(p+j\omega)\hat{\Psi}(p) + p\hat{\Psi}_0 - \hat{I}(p)R. \quad (30)$$

Ta postać równania ma zastosowanie dla analizy wszystkich stanów o stałej prędkości kątovej wirnika. Również wiele przypadków, w których ściśle teoretycznie nie można by założyć stałej prędkości, sprowadza się do przyjęcia powyższego równania, jako równania wyjściowego.

## 6. Uwagi ogólne o metodach analizy

Jak wynika z powyższych rozważań, ogólne rozwiązanie układu równań stanu nieustalonego maszyny synchronicznej nastęrcza duże trudności matematyczne. Dopiero przyjęcie pewnych założeń upraszczających umożliwia rozwiązanie układu równań.

W pierwszym rzędzie w uproszczeniach dąży się do ustalenia prędkości wirnika sprowadzającego układ równań do równań liniowych, ewentualnie dla zmiennych prędkości wirnika przyjmuje się z góry zadany, najczęściej liniowy przebieg prędkości. Dalsze z kolei uproszczenia stanowi pominięcie względnie tylko przybliżone uwzględnienie oporów czynnych twornika, które przy praktycznych wykonaniach maszyny odgrywają zwykle stosunkowo najmniejszą rolę (niemniej w niektórych przypadkach czynny opór zewnętrzny sieci sumujący się w oporze czynnym twornika nie pozwala na takie uproszczenia), przez co obniża się rząd równania różniczkowego i tym samym stopień algebraicznego równania charakterystycznego (względnie algebraicznego równania operatorowego). Zwykle dla przybliżonego uwzględnienia oporów czynnych twornika oblicza się przybliżone pierwiastki  $p_{k_0}$  algebraicznego równania charakterystycznego  $f(p)$

<sup>1</sup> Jest to ciekawy przypadek transformacji czasowej funkcji zespolonej w obszar zmiennej zespolonej.



przy pominięciu oporów czynnych twornika, a następnie posługując się metodą przybliżenia Newtona otrzymuje się skorygowane pierwiastki

$$p_{k_1} = p_{k_0} - \frac{f(p_{k_0})}{f'(p_{k_0})}.$$

Postępując w ten sposób otrzymuje się kolejno zerowe ( $p_{k_0}$ ), pierwsze ( $p_{k_1}$ ), drugie ( $p_{k_2}$ ) itd. przybliżenie rozwiązania układu równań.

W obwodach wirnika przyjmuje się uproszczenia polegające na zastąpieniu opisanego poprzednio skomplikowanego układu bloku litego prostym obwodem zastępczym, który włącza się zwykle w rozważaniach do obwodu klatki tłumiącej.

Dalsze przyjmowanie założeń upraszczających obniża odpowiednio rząd równania różniczkowego i tak np. dla maszyny synchronicznej bez obwodów tłumiących w wirniku uzyskuje się równanie różniczkowe 3 rzędu. Gdy zachodzi konieczność analizy układu maszyny synchronicznej w stanie nieustalonym, przy czym nie znany jest z góry przebieg prędkości wirnika (co ma miejsce np. w analizie elektrodynamicznych przebiegów przy wyznaczaniu stateczności w stanie nieustalonym), stosuje się zwykle przybliżone rozwiązanie układu równań metodą „krok po kroku“ wyznaczenia poszczególnych, kolejnych punktów przebiegów z różniczkowych przyrostów przy zastąpieniu występującego w analizie ilorazu różniczkowego ilorazem różnicowym.

Wpłynęło w czerwcu 1954 r.

#### LITERATURA

- [1] K. H. Park, *Two Reaction Theory of Synchronous Machines*, Part I i II, Trans. AIEE, 1929.
- [2] A. A. Горев, *Переходные процессы синхронной машины*, Москва 1950.
- [3] Б. В. Булгаков, *Колебания*, Москва 1949.
- [4] Е. И. Казовский, *Переходные процессы в машинах переменного тока двойного питания и их рассмотрение с помощью круговой диаграммы*, "Электричество" Nr 8, 1950.