ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: GÓRNICTWO z. 18 Nr kol. 163

JÓZEF WOJNAROWSKI

ZASTOSOWANIE METODY DELTA DO WYZNACZENIA FUNKCJI TŁUMIENIA SPRĘŻYNY GUMOWEJ

Streszczenie. W pracy zastosowano metodę delta do wyznaczenia funkcji tłumienia gumy FU-10.

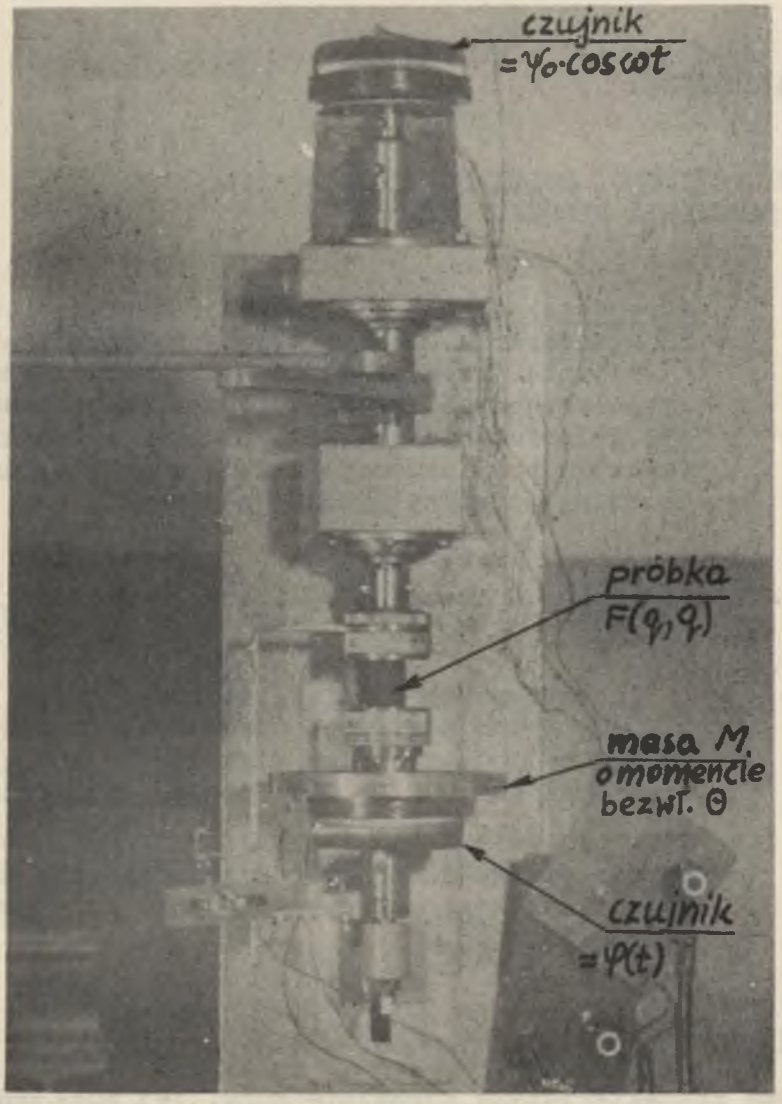
Badania przeprowadzono w oparciu o analizę drgań skrętnych układu o jednym stopniu swobody. Na podstawie zarejestrowanych trajektorii fazowych analizowanego układu uzyskano funkcje walcowej sprężyny gumowej w postaci:

$$D(q,\dot{q}) = A_0 \operatorname{sgn} \dot{q} + A_1 \dot{q} + A_2 q^2 \dot{q} + A_3 \dot{q}^3$$

Zaobserwowano również, że ze wzrostem amplitudy drgań następuje spadek dekrementu tłumienia co jest wynikiem miękkiego charakteru tłumienia gumy ($A_3 < 0$). Ponadto stwierdzono, że w procesie drgań zanikających, drgania odbywają się wokół przemieszczającego się środka drgań, zdążającego asymptotycznie do pewnego położenia.

1. Wstęp

Nieliniowa charakterystyka sprężysta gumy, jej duża zdolność do pochłaniania energii przy równoczesnym obniżeniu krzywej rezonansu - to cechy ogólnie znane. Rzeczywiste jednak prawo wewnętrznego pochłaniania energii jest niezupełnie wyjaśnione. Niedostateczna ilość informacji tego problemu wpływa na to, że na ogół stosuje się w odniesieniu do gumy model Voigta-Kelvina [1, 13] albo z tak zwanym tłumieniem urojonym [12] ewentualnie inny model liniowy [9]. We wszystkich tych mo-



Rys. 1. Stanowisko pomiarowe

delach zakłada się proporcjonalność siły tłumienia do prędkości odkształceń. To oczywiście prowadzi do prostej proporcjonalności pomiędzy częstością kątową, a tak zwanym tłumieniem właściwym. W rzeczywistości wielkość tłumienia w szerokim przedziale nie zależy od częstości obciążeń [3, 12], co zresztą dotyczy nie tylko gumy, ale i szeregu innych materiałów [5]. Przyczyna tego faktu tkwi w tym, że zarówno charakterystyka sprężysta jak i funkcja tłumienia gumy są wyraźnie nieliniowe.

Znane w literaturze metody określenia nieliniowej funkcji tłumienia, oparte są na metodach przybliżonych i na ogół są rozpatrywane dla przypadku liniowej charakterystyki sprężystej w postaci $F_0(q) = \varkappa^2 \cdot q$ [4, 6, 10].

Dla układów silnie nieliniowych J. Skowroński [11] zwraca uwagę na możliwość syntezy układu drgającego, drogą kolejnych przybliżeń, dla uzyskania odpowiednich charakterystyk rozpatrywanego układu.

W pracy tej podjęto próbę wyznaczenia funkcji tłumienia gumy, odwróconą metodą "delta", w oparciu o analizę drgań pręta gumowego przy obciążeniach skrętnych. W tym celu autor zaprojektował stanowisko pomiarowe, którego ogólne zasady przedstawia rys. 1. Stanowisko to przystosowano do badań drgań skrętnych zarówno swobodnych jak i kinematycznie wymuszonych. Badania przeprowadzono na próbkach wykonanych z gumy twardej FU-10 w temperaturze 20°C. Guma ta posiadała następujące własności mechaniczne: wytrzymałość na rozciąganie - 146 kG/cm^2 twardość - 80° Sh° i wydłużenie względne przy rozciąganiu - 250%.

2. Drgania skrętne układu o jednym stopniu swobody

Rozważmy układ składający się z masy M o momencie bezwładności Θ zamocowanej na dolnym końcu pręta gumowego. Górny koniec pręta, który spełnia funkcję sprężyny o nieliniowej charakterystyce sprężystej i tłumienia może być albo nieruchomy albo wymuszony sinusoidalnie zgodnie z prostym ruchem harmonicznym $\psi = \psi_0 \cos(\omega \cdot t)$. Dla takiego układu działanie momentu wymuszającego na masę M przenosi się zarówno za pośrednictwem sił sprężystych jak i tłumieniowych występujących w próbce gumowej. Układ taki (rys. 2)

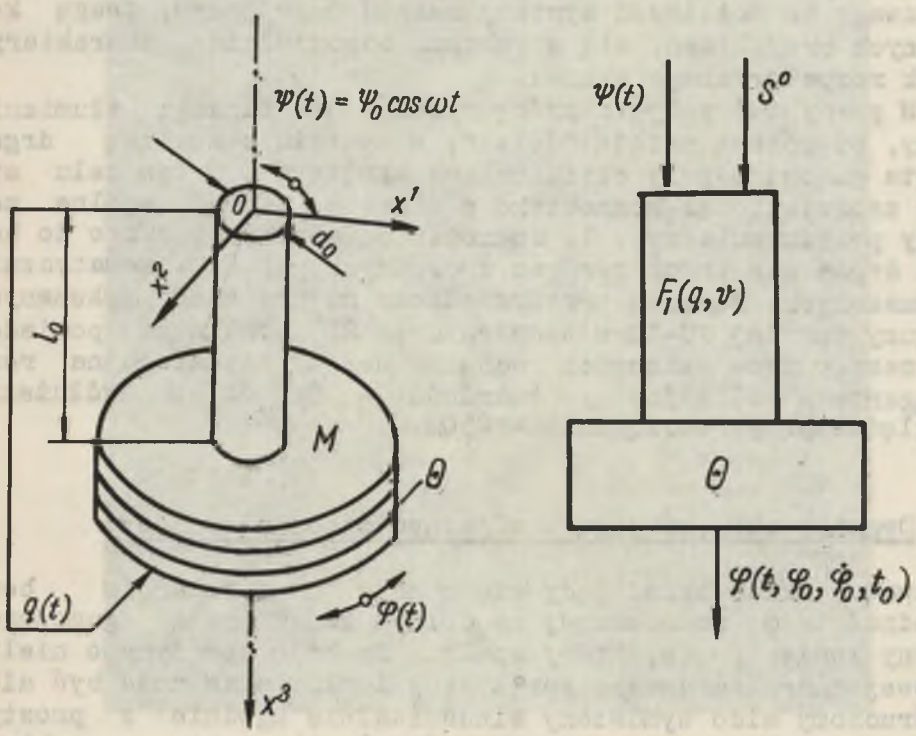
stanowi więc uproszczony model o jednym stopniu swobody, który można opisać równaniem

$$\Theta\ddot{\varphi} = -F_1\left[(\dot{\varphi}-\dot{\psi}),\ (\varphi-\psi)\right], \tag{2.1}$$

gdzie:

$\varphi = \varphi(t)$ - przemieszczenie kątowe masy M,

$\psi = \psi_0 \cos(\omega t)$ - wymuszenie kątowe górnego końca próbki.



Rys. 2

Oznaczając przez q kąt mierzony względem górnego końca próbki (mierzony w układzie względnym), możemy napisać:

$$\varphi - \psi = q, \qquad \dot{\varphi} - \dot{\psi} = \dot{q},$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{q} + \ddot{\psi} = \ddot{q} - \psi_0 \omega^2 \cos(\omega t); \tag{2.2}$$

po podstawieniu (2.2) do (2.1) i po przekształceniu otrzymujemy:

$$\dot{q} + F(q, \dot{q}) = \psi_0 \omega^2 \cos(\omega t), \tag{2.3}$$

gdzie:

$$F(q, \dot{q}) = \frac{1}{\theta} F_1 (q, \dot{q}).$$

Zagadnienie więc sprowadza się zgodnie z twierdzeniem o jednoznaczności [4] do określenia ruchu punktu o jednostkowym momencie bezwładności w płaszczyźnie prostopadłej do wektora kąta skręcenia q pod działaniem uogólnionych sił skierowanych wzdłuż tego wektora.

Funkcja $F(q,\dot{q})$ jest określona w obszarze K dwuwymiarowej przestrzeni fazowej układu:

$$K: \begin{array}{l} -q_I < q < q_I \\ -\dot{q}_I < \dot{q} < \dot{q}_I \end{array} \tag{2.4}$$

i dla $t \in [t_0, \infty]$ oraz spełnia warunki dostateczne do istnienia jednoznaczności rozwiązań równania (2.3) - warunki Lipschitza, szczególnie, że funkcja ta jest w tym obszarze analityczna.

Wobec warunku analityczności funkcji $F(q,\dot{q})$ możemy ją rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu (0,0) co zapisujemy symbolicznie jako:

$$F(q,\dot{q}) = \left[F(q,\dot{q})\right]_0 + \frac{1}{1!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial q} q + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \dot{q}\right) F(q,\dot{q})\right]_0 +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial q} q + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \dot{q}\right)^2 F(q,\dot{q})\right]_0 + \ldots \tag{2.5}$$

Po zastąpieniu wartości pochodnych w zerze współczynnikami i rozłożeniu funkcji $F(q,\dot{q})$ na siły sprężysto-potencjalne i tłumieniowe działające na masę M [4] możemy napisać:

$$F(q,\dot{q}) = F_o(q) + D(q,\dot{q}),$$
$$F(0,0) = 0. \tag{2.6}$$

Podstawiając zależność (2.6) do równania (2.3) otrzymujemy

$$\ddot{q} + D(q,\dot{q}) + F_o(q) = \psi_o \omega^2 \cos(\omega t). \tag{2.7}$$

W przypadku utwierdzenia górnego końca pręta (rys. 1) znika prawa strona równania (2.7) i otrzymujemy równanie drgań zanikających.

3. Zanikające drganią swobodne układu

W dalszym ciągu rozpatrujemy drgania tłumione układu w obszarze K będącym pewnym skończonym otoczeniem punktu osobliwego, wokół którego trajektorie fazowe mają charakter j = = + 0 krzywych.

Podstawiając do równania (2.7) $\psi_o = 0$ otrzymujemy:

$$\ddot{q} + D(q,\dot{q}) + F_o(q) = 0 \tag{3.1}$$

przy warunkach początkowych:

$$S^o \begin{cases} q(t_o) = q_o, \quad \dot{q}(t_o) = \dot{q}_o, \\ q_o^2 + \dot{q}_o^2 > 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

przy czym $F_0(q)$ nazywamy charakterystyką sił sprężysto-potencjalnych określającą ruch konserwatywnego układu z potencjalną energią

$$V_0(q) = \int F_0(q)\, dq. \tag{3.3}$$

Stałą całkowania tak dobieramy, aby wartość $V_0(q_0) = 0$. Ponadto z charakteru sił sprężystych wynika, że:

$$F_0(q) \cdot q \geqslant 0 \quad \text{i} \quad F_0(0) = 0 \tag{3.4}$$

Fazowe trajektorie odpowiadające ruchowi takiego konserwatywnego układu można określić równaniem [4]:

$$0{,}5\, \dot{q}^2 + V_0(q) = H(q,\dot{q}), \tag{3.5}$$

gdzie: $H(q,\dot{q})$ - jednostajnie dodatnio określona co do znaku całkowita energia układu w każdym punkcie $P(q,\dot{q})$ płaszczyzny fazowej. Warunek, że całkowita energia układu charakteryzująca drgania tłumiące w obszarze K jest funkcją monotonicznie malejącą z czasem, możemy zapisać:

$$\frac{dH}{dt} < 0 \tag{3.6}$$

i po zróżniczkowaniu równania (3.5) oraz uwzględnieniu (2.6) i (3.3) otrzymujemy:

$$\frac{dH}{dt} = -\dot{q} \cdot D(q,\dot{q}). \tag{3.7}$$

To pociąga za sobą warunek dodatniej dyssypacji energii układu, który zapisujemy:

$$\dot{q} \cdot D(q,\dot{q}) > 0 \quad \text{dla wszelkich } q. \tag{3.8}$$

Iloczyn $\dot{q} \cdot D(q,\dot{q})$ można interpretować jako moc sił tłumionych, wielkość którego przedstawia intensywność przejścia zasobu całkowitej energii $H(q,q)$ układu w inne postacie energii.
Dlatego $D(q,\dot{q})$ nazywamy funkcją tłumienia sprężyny gumowej. Dla rozwiązania równań (2.7) i (3.1) konieczną jest znajomość zarówno charakterystyki sprężystej jak i funkcji tłumienia - ogólnie modelu mechanicznego rozpatrywanego układu. W przypadku odwrotnym, tzn. gdy znane są rozwiązania równań (2.7) lub (3.1), można przy określonej charakterystyce sprężystej wyznaczyć funkcje tłumienia.

Zwróćmy tutaj uwagę, że znajdywanie rozwiązań układu przy określonej charakterystyce sił sprężystych i tłumionych jest zagadnieniem łatwiejszym i nawet przy nieliniowym modelu mechanicznym możemy z dowolnym przybliżeniem określić egzenstencję ruchu dla jego rozwiązań. Zagadnienie to w literaturze nazywany jest a n a l i z ą układu. Problemem daleko trudniejszym jest poszukiwanie funkcji tłumienia układu dla z góry zadanego ruchu. Zagadnienie to odwrotne do analizy, zwane jest s y n t e z ą układu.

Zakładając więc znajomość charakterystyki sprężystej oraz trajektorii fazowej uzyskanej na drodze doświadczalnej, możemy równanie (3.1) przekształcić następująoo:

$$\ddot{q} + \varkappa^2 q + D(q,\dot{q}) + R_o(q) = 0 \qquad (3.9)$$

gdzie: $R_o(q) = F_o(q) - \varkappa^2 q$ - zawiera wszystkie człony nieliniowe charakterystyki sprężystej.
Dalej przez wprowadzenie

$$\delta = \frac{1}{\varkappa^2}\left[D(q,\dot{q}) + R_o(q)\right] \qquad (3.10)$$

możemy napisać:

$$\ddot{q} + \varkappa^2(q+\delta) = 0 \qquad (3.11)$$

albo zmieniając skalę czasu przez wprowadzenie $\tau = \varkappa \cdot t$ i po wyeliminowaniu , otrzymujemy

$$\frac{dv}{dq} = -\frac{q+\delta}{v}, \tag{3.12}$$

gdzie:

$$v = \frac{dq}{d\tau},$$

którego obrazem są trajektorie fazowe w układzie współrzęd- $(q, \dot{q}/\varkappa)$. Jeśli bowiem przyjmiemy małe przedziały czasu $\Delta\tau$, to metoda "delta" umożliwia otrzymanie przybliżonego rozwiązania w postaci trajektorii fazowej, a dalej zależności $q(t)$ oraz $\dot{q}(t)$. Nas interesuje jednak zagadnienie syntezy. Mamy więc trajektorię fazową uzyskaną doświadczalnie i dla odczytanych z niej wielkości $q^{(i)}$, $\dot{q}^{(i)}$, $\delta^{(i)}$ oraz znanej funkcji $R_o(q)$ możemy po przekształceniu równania (3. 10) napisać:

$$D(q,\dot{q}) = \varkappa^2\delta - R_o(q), \tag{3.13}$$

albo:

$$D(q, \frac{dq}{d\tau}) = \delta - \frac{1}{\varkappa^2} \cdot R_o(q). \tag{3.14}$$

Dalsza jednak aproksymacja jest wtedy możliwa, jeśli znamy model mechaniczny układu, a więc gdy znamy charakterystykę sprężystą i charakter funkcji tłumienia.

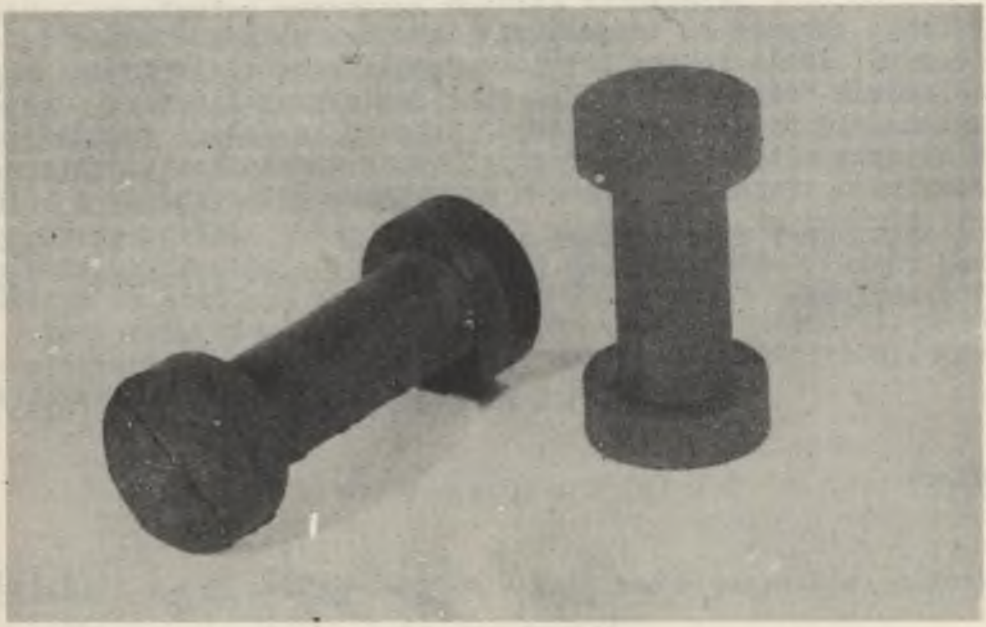
4. Przeprowadzone badania

Badania przeprowadzono na kilku próbkach. Kształt próbek (rys. 3) był uwarunkowany możliwością zamocowania ich w uchwytach. Próbki przed przystąpieniem do badań dynamicznych poddano skręcaniu na skręcarce w celu znalezienia charak-

terystyki sprężystej [14]. Następnie na stanowisku pomiarowym (rys. 4) przeprowadzono kolejno:

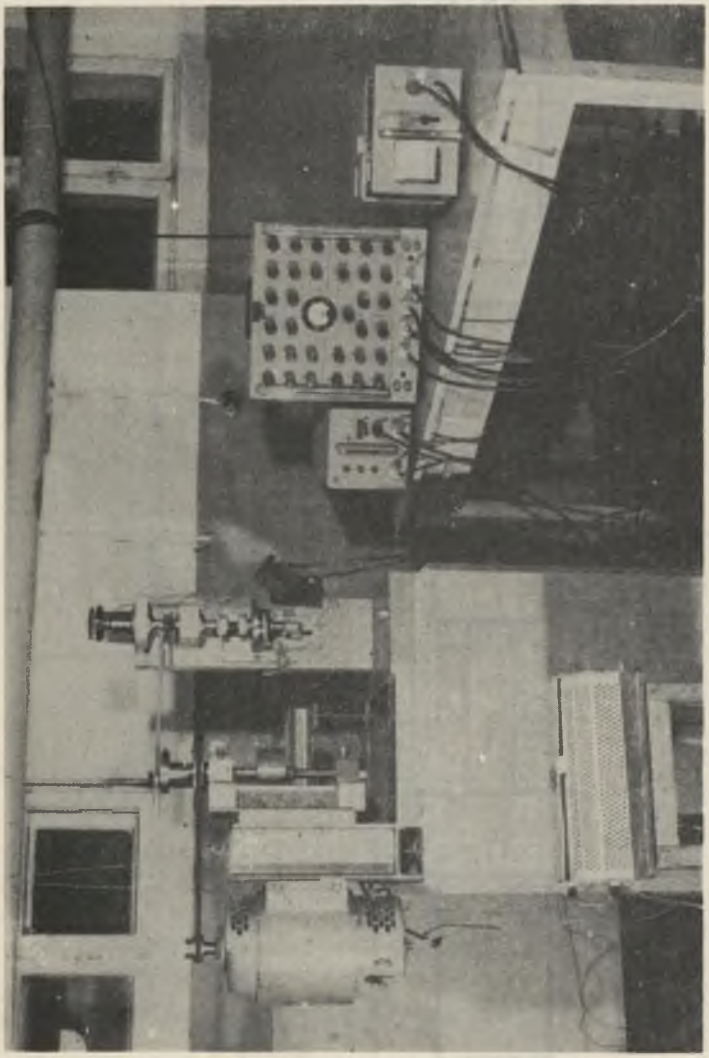
1. Rejestrację kąta skręcenia $q = q(t)$ oraz na płaszczyźnie fazowej $(q,\dot{q})$ swobodnych drgań skrętnych układu (rys. 5).

2. Rejestracje wymuszonych kinematycznie drgań skrętnych układu. Zapisu dokonano na 4-kanałowym rejestratorze firmy Kelvin-Hughes.

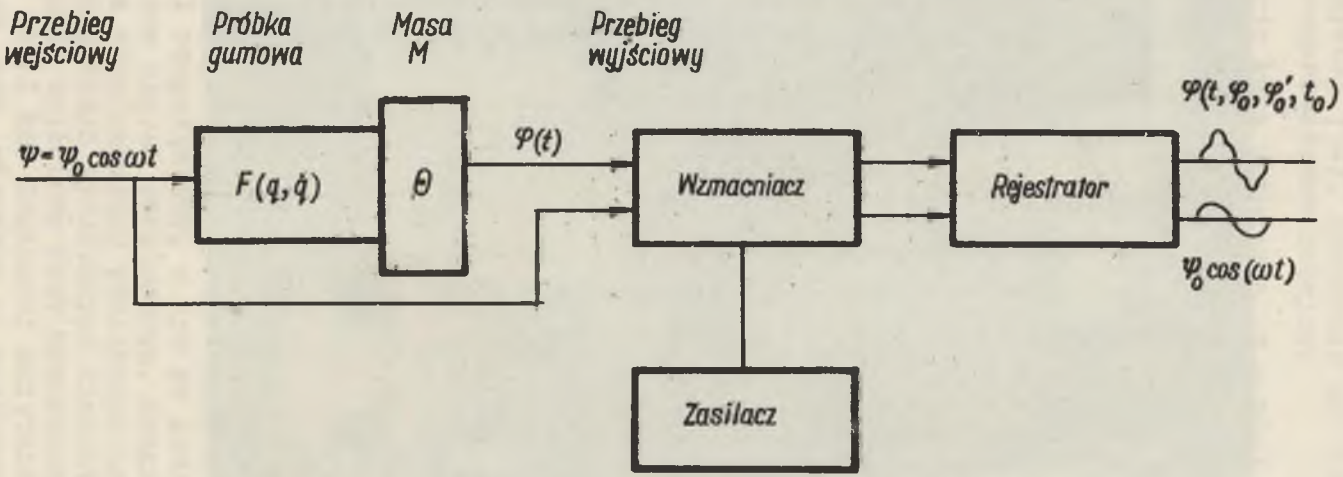


Rys. 3.

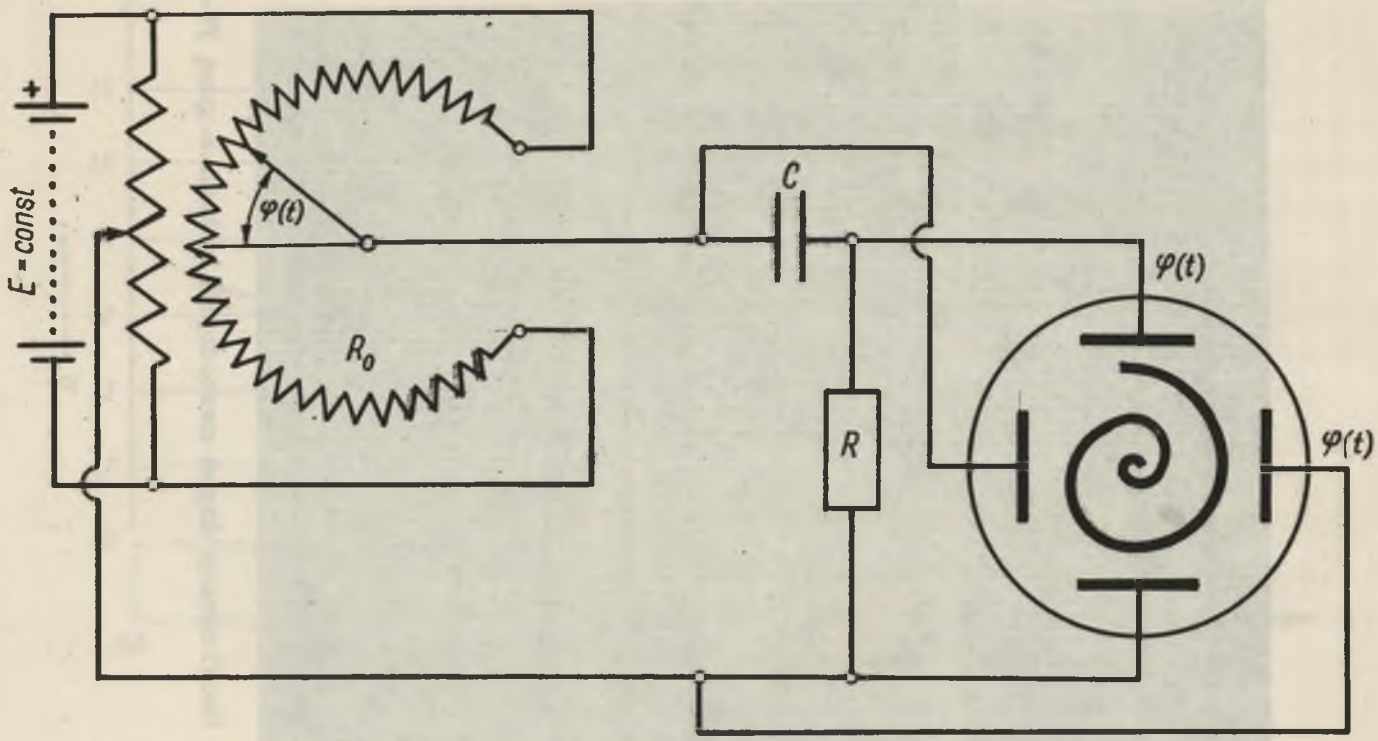
Pomiar amplitud odbywał się za pomocą czujników oporowych, z których sygnał kierowany był do układu rejestrującego. W przypadku wyznaczania trajektorii fazowej, sygnał wyjściowy został rozgałęziony, z tym że jeden tor był podłączony na poziome płytki oscyloskopu, drugi zaś po przejściu przez człon różniczkujący podłączono na pionowe płytki (rys. 6). Przy drganiach wymuszonych kinematycznie rejestrowano zarówno sygnał wyjściowy (kąt wymuszenia górnego końca próbki $\psi(t)$ jak i kąt drgającej skrętnie masy M w układzie względnym, tzn. mierzono go względem górnego uchwytu próbki. Taki sposób pomiaru umożliwiał łatwiejszą anali-



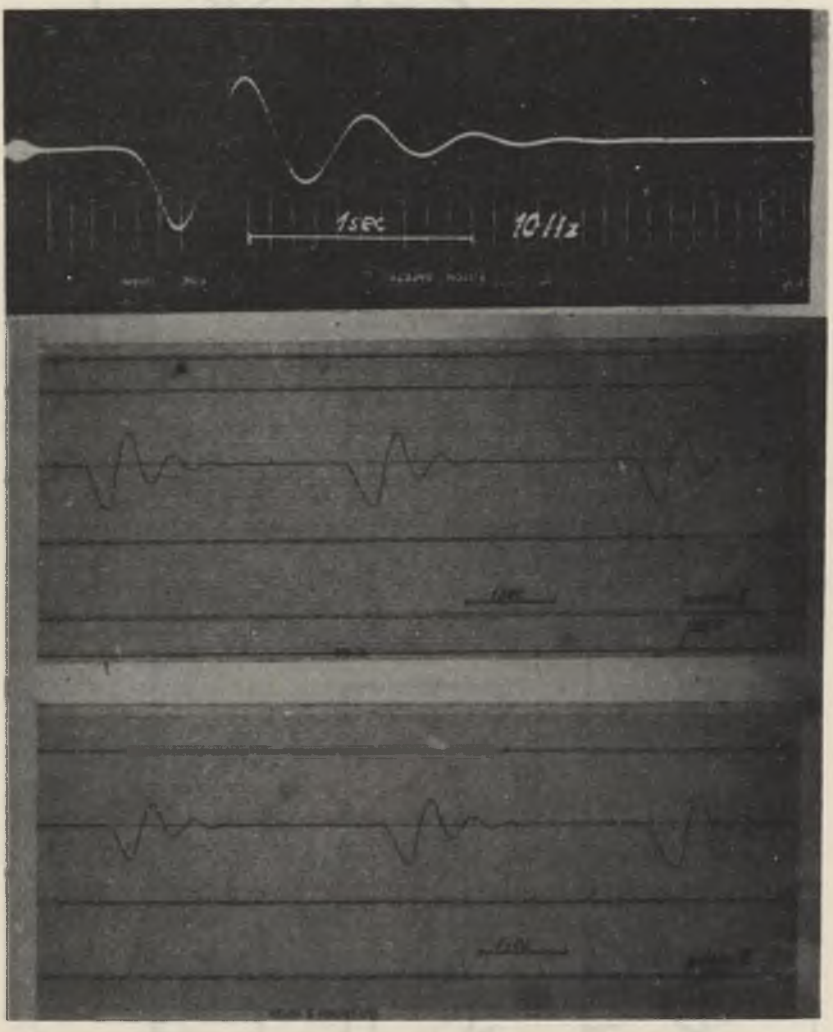
Rys. 4



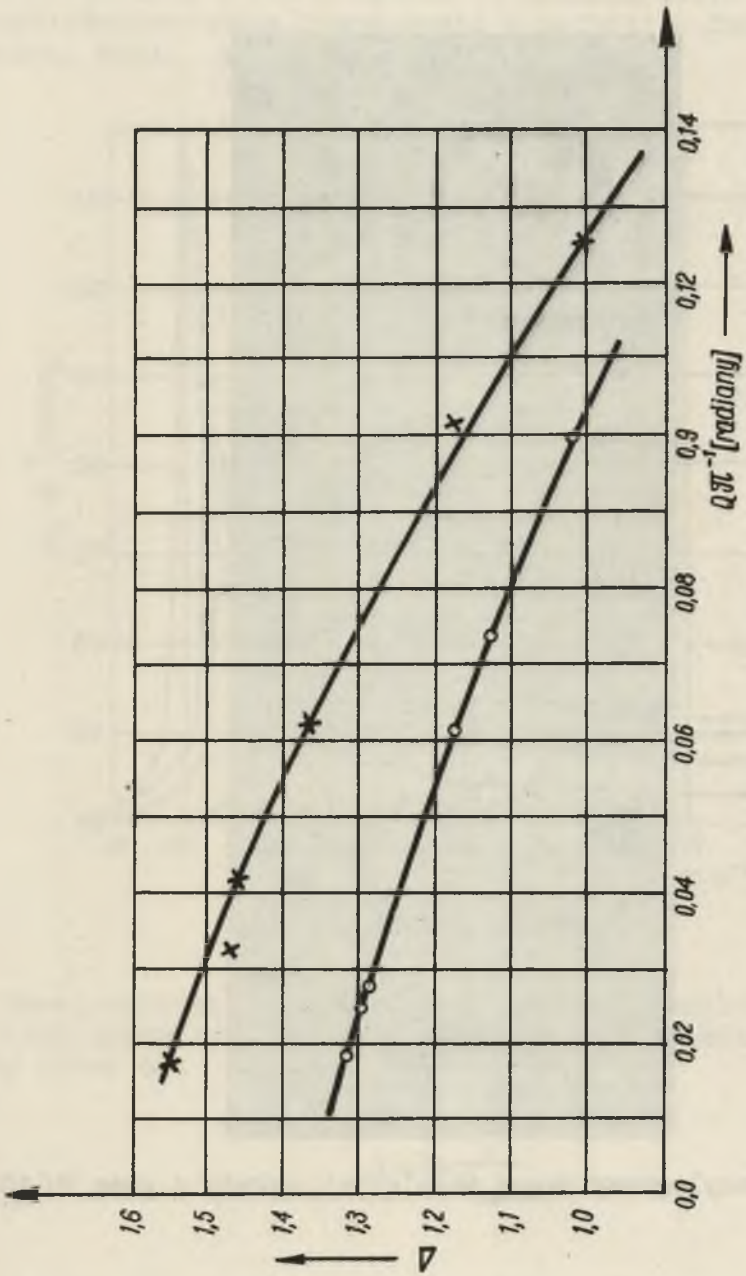
Rys. 5. Schemat blokowy układu pomiarowego



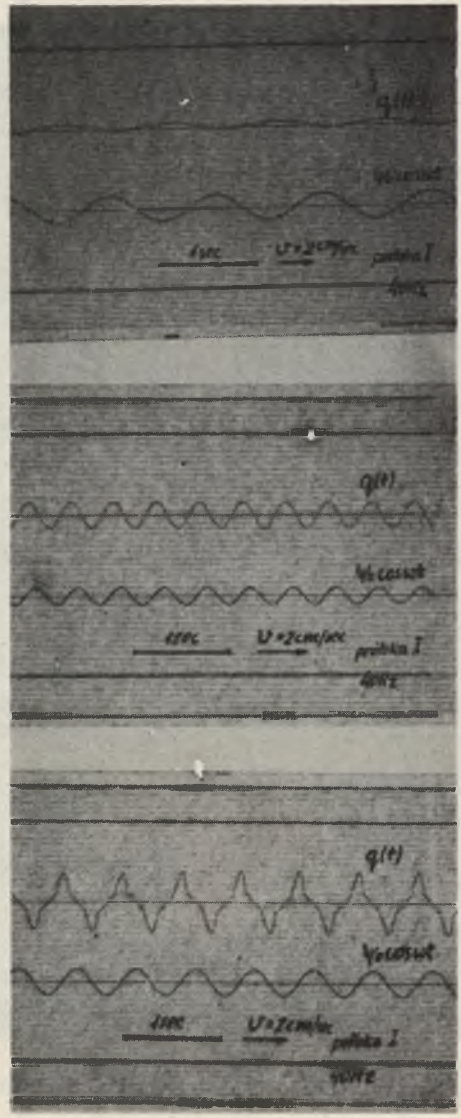
Rys. 6. Schemat układu pomiarowego na płaszczyźnie fazowej



Rys. 7. Oscylogramy drgań swobodnych układu z gumą FU-10

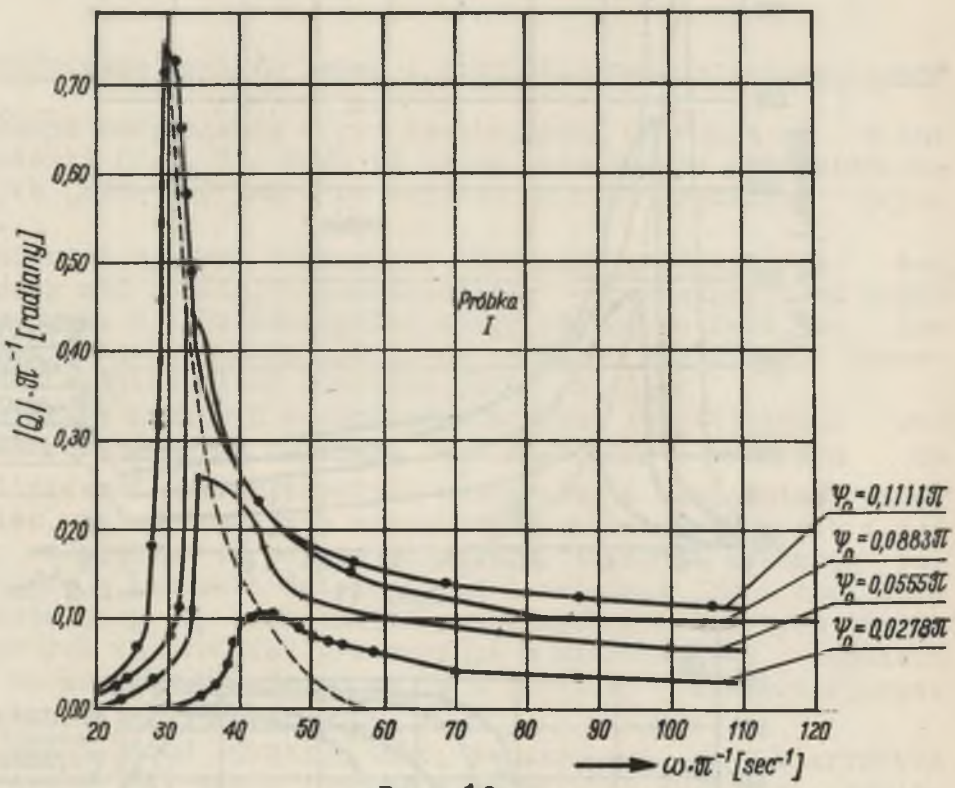


Rys. 8. Zależność dekrementu tłumienia od amplitudy $\Delta = f(Q)$



Rys. 9. Oscylogramy drgań ustalonych układu z gumą FU-10

zę uzyskanych wyników. Układ napędowy zabezpieczał wymuszenie kinematyczne przekazywane na próbkę, które z dobrym przybliżeniem można przedstawić w postaci funkcji harmonicznej typu: $\psi = \psi_0 \cos(\omega t)$.

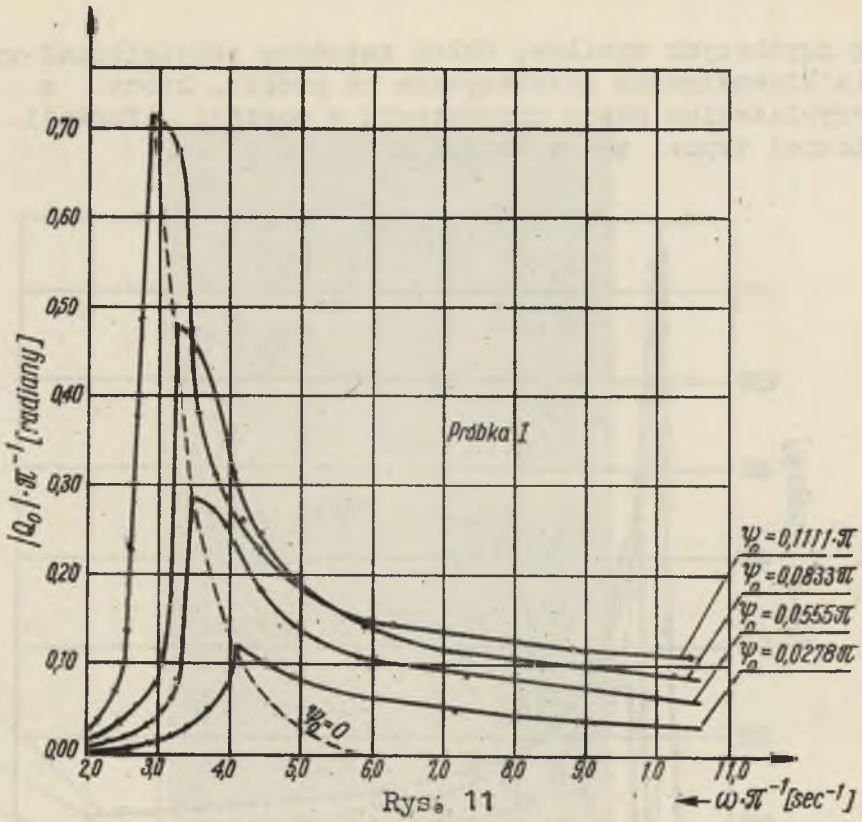


Rys. 10

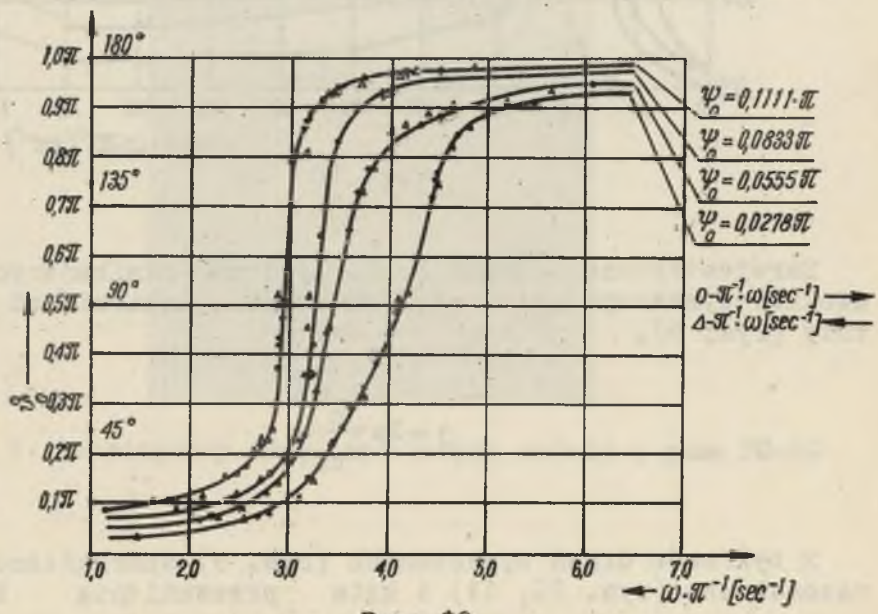
Zarejestrowane wykresy (rys. 7) drgań zanikających pozwoliły wyznaczyć zależność dekrementu tłumienia od amplitudy (rys. 8).

$$\Delta = \ln \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \tag{4.1}$$

Z wykresów drgań wymuszonych (rys. 9) sporządzono krzywe rezonansowe (rys. 10, 11) i kąta przesunięcia fazowego


0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
$|Q_0|\cdot\pi^{-1}$ [radiany]
Próbka I
$\psi_0=0,1111\cdot\pi$
$\psi_0=0,0833\pi$
$\psi_0=0,0555\pi$
$\psi_0=0,0278\pi$
$\psi_0=0$
2,0
3,0
4,0
5,0
6,0
7,0
8,0
9,0
10
11,0
$\omega\cdot\pi^{-1}$ [sec^{-1}]

Rys. 11


180°
135°
90°
45°
1,0π
0,9π
0,8π
0,7π
0,6π
0,5π
0,4π
0,3π
0,2π
0,1π
$\psi_0=0,1111\cdot\pi$
$\psi_0=0,0833\pi$
$\psi_0=0,0555\pi$
$\psi_0=0,0278\pi$
o-$\pi^{-1}\cdot\omega$ [sec^{-1}]
Δ-$\pi^{-1}\cdot\omega$ [sec^{-1}]
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
6,0
7,0
$\omega\cdot\pi^{-1}$ [sec^{-1}]

Rys. 12

(rys. 12). Oscylogramy odczytano na specjalnym mikroskopie z dokładnością do pół mikrona. Stwierdzono przy tym, że zarówno okresy zarejestrowanych drgań wymuszających jak i wymuszonych były równe z dokładnością do błędu odczytu. Jest to zgodne z podawanymi informacjami w literaturze [2].

5. Omówienie wyników badań i przyjęcie modelu mechanicznego

Uzyskane oscylogramy drgań zanikających wskazują na silne tłumienie (rys. 7). Jest to także widoczne na portretach fazowych (rys. 13) jak i na wejściu na cykl graniczny (rys. 14).

Również wykresy dekrementu tłumienia potwierdzają ten wniosek uwidaczniając zmienność tego współczynnika od amplitudy (rys. 8). Na szczególną uwagę zasługuje fakt, że dekrement logarytmiczny maleje ze wzrostem amplitudy. Obserwowane zjawisko jest odwrotne jak u metali.

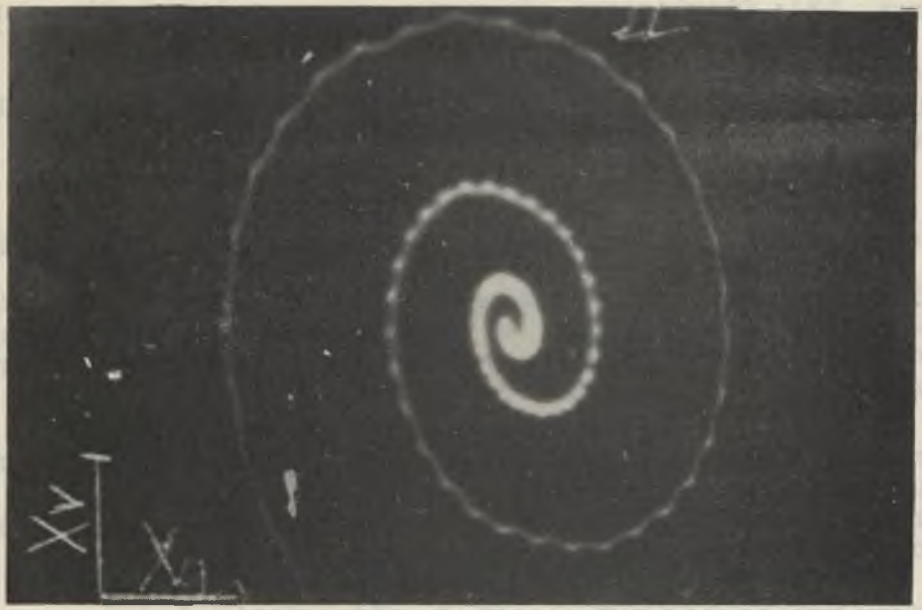
Wykresy krzywych rezonansowych (rys. 10, 11) jak i wykresy przesunięcia fazowego ϑ_0 (rys. 12) wskazują na nieliniowość charakterystyki sprężystej i tłumienia. Widać bowiem, że zarówno przy rosnących częstościach ω jak i też przy malejących od pewnej częstości ω do 0 wykazują pochylenie w kierunku osi amplitud i zależnie od amplitudy wymuszającej ψ_0 wierzchołki poszczególnych krzywych rezonansowych są bardziej przesunięte w kierunku osi amplitud dla większych ψ_0. Świadczy to o miękkiej charakterystyce sprężystej próbek gumowych.

Wyniki badań wykazują więc, że zarówno charakterystyka sprężysta [14] jak i funkcja tłumienia są wyraźnie nieliniowe.

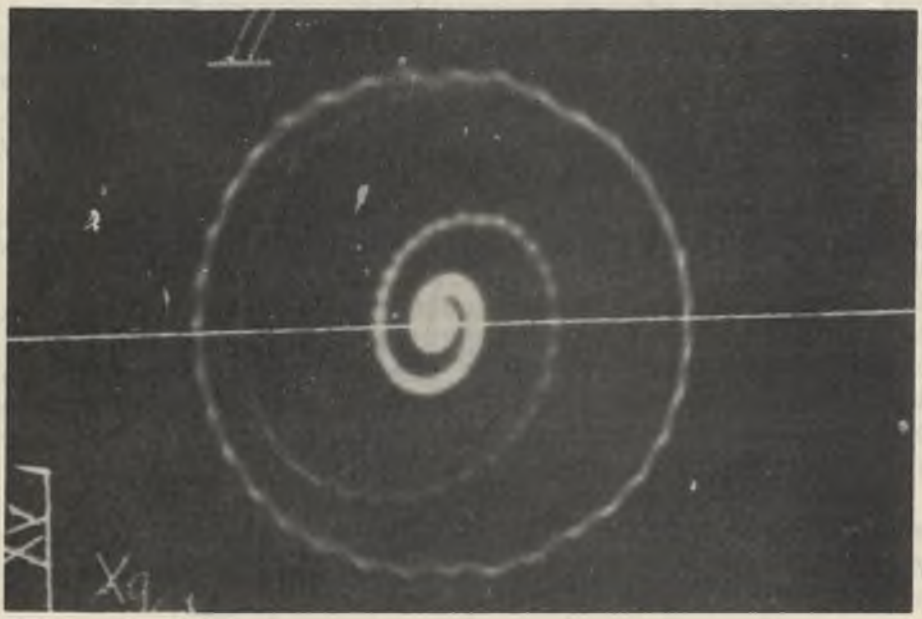
Dlatego też dla dalszych rozważań przyjmiemy model mechaniczny ciała niesprężystego jaki podaje S. Ziemba [16]. Obrazem tego modelu jest układ złożony ze sprężyny nieliniowej wiskotycznego tłumika na ogół nieliniowego i szeregowo połączonych z nim suwaków o różnych oporach zaopatrzonych w ograniczniki (rys. 15).

Tłumienie nieliniowe takiego modelu jest wynikiem tarcia wewnętrznego w materiale zarówno o charakterze wiskotycznym, jak i o charakterze tarcia suchego. Będzie ono więc funkcją złożoną odkształcenia i prędkości:

$$> R^* = D(q,\dot{q}) < \tag{5.1}$$



Rys. 13. Trajektoria fazowa



Rys. 14. Wejście na cykl graniczny

Równocześnie funkcja tłumienia $D(q,\dot{q})$ oprócz dyssypacji dodatniej i warunków Lipschitza musi spełniać:

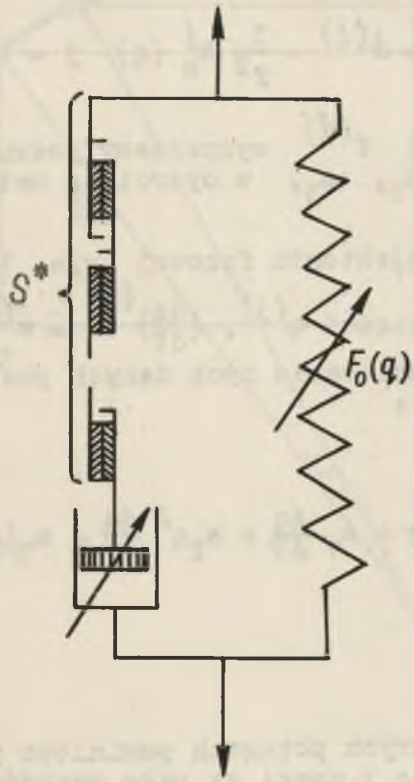
$$D(-q-\dot{q}) = D(q,\dot{q}),$$

$$D(q,-\dot{q}) = -D(q,\dot{q}), \tag{5.2}$$

$$D(q,0) = 0;$$

dla $0<\dot{q}_1<\dot{q}_2$

$0<q_2<q_1$ jest $D(q,\dot{q}_2)>D(q,\dot{q}_1)\geqslant 0.$



Rys. 15

Uwzględniając warunki (2.5) i (5.2) możemy równanie (3.13) przepisać następująco:

$$a_0 \operatorname{sgn} \frac{dq}{d\tau} + a_1 \frac{dq}{d\tau} + a_2 q^2 \frac{dq}{d\tau} + a_3 \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^3 =$$

$$= \delta - \frac{1}{\varkappa^2} R_0(q) = f(\delta, q), \qquad (5.3)$$

Jeśli więc rozpatrzymy ciąg punktów $P^{(j)}(q,\dot{q}) \ldots P^{(N)}(q,\dot{q})$, (rys. 16) położonych wzdłuż trajektorii fazowej, to możemy odczytując dla tych punktów odpowiedni ciąg wartości $\delta^{(j)}$ i przy znanym ciągu wartości $R_0^{(j)}(q)$ obliczyć ciąg wartości funkcji

$$f^{(j)}(\delta,q) = \delta^{(j)} - \frac{1}{\varkappa^2} R_0^j(q) \quad j = 1,2\ldots N \qquad (5.4)$$

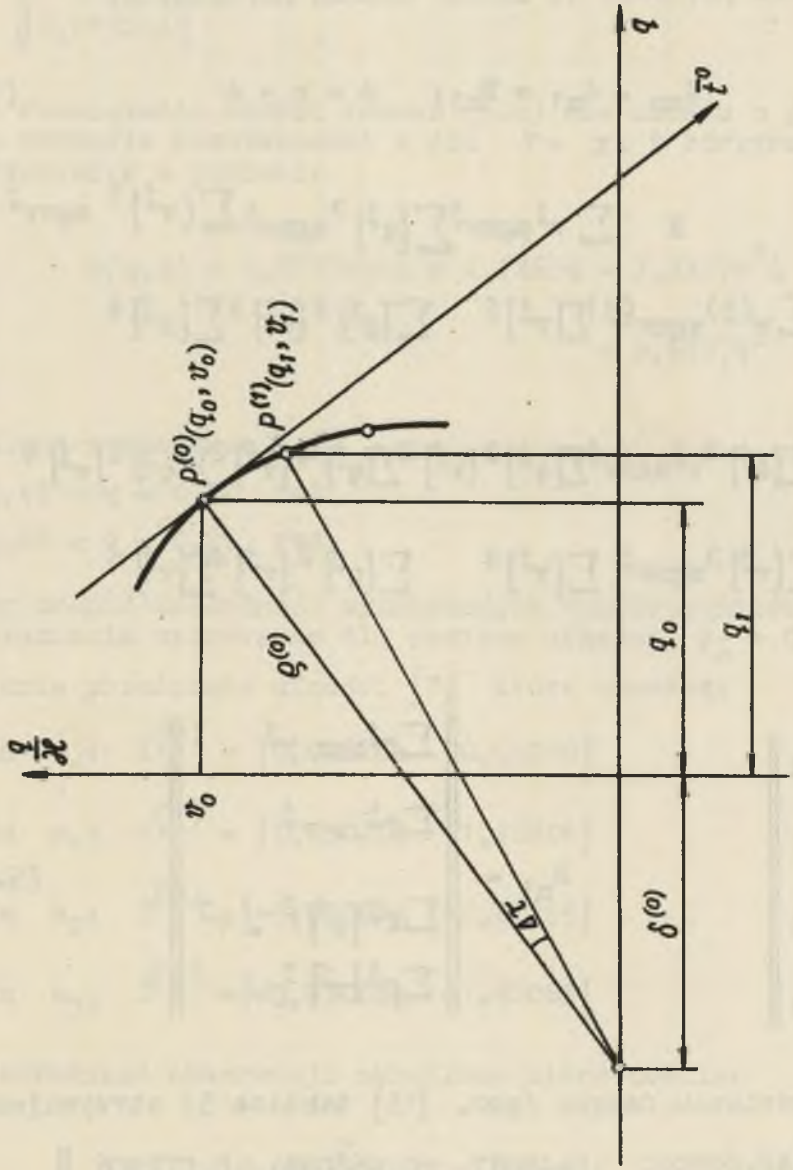
Mając ciąg wartości $f^{(j)}$ wyznaczamy poszukiwane współczynniki a_0, a_1, a_2, a_3, w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów.

W tym celu z trajektorii fazowej (rys. 14) odczytano odpowiednie ciągi wartości $q^{(j)}$, $\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^{(j)} = v^{(j)}$ i $\delta^{(j)}$ (por. [15] tabl. 4). Na podstawie tych danych poszukujemy taką funkcję tłumienia[x]:

$$D\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) = a_0 \operatorname{sgn} \frac{dq}{d\tau} + a_1 \frac{dq}{d\tau} + a_2 q^2 \frac{dq}{d\tau} + a_3 \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^3 \qquad (5.5)$$

---

x) Składniki o wyższych potęgach pominięto po wstępnych obliczeniach, a to z uwagi na małe wartości w porównaniu ze składnikiem liniowym.


$\frac{\varkappa}{2}$
v_0
$p^{(0)}(q_0, v_0)$
$p^{(1)}(q_1, v_1)$
$\rho^{(0)}$
$\Delta\tau$
q_0
q_1
$\rho^{(0)}$
τ
q

Rys. 16

aby suma kwadratów różnicy pomiędzy wartością $f^{(j)}$ uzyskaną na drodze doświadczalnej i obliczoną ze wzoru (5.3) była najmniejsza.
Warunek ten prowadzi do układu równań normalnych:

$$X_{mn} \cdot A_{n1} = B_{n1}, \quad m = n = 4 \tag{5.6}$$

gdzie:

$$X_{mn} = \begin{Vmatrix} N & \sum v^j \operatorname{sgn} v^j & \sum [q^j]^2 \operatorname{sgn} v^j & \sum [v^j]^3 \operatorname{sgn} v^j \\ \sum v^{(j)} \operatorname{sgn} v^{(j)} & \sum [v^j]^2 & \sum [q^j]^2 [v^j]^2 & \sum [v^j]^4 \\ \sum [q^j]^2 v^j \operatorname{sgn} v^j & \sum [q^j]^2 [v^j]^2 & \sum [q^j]^4 [v^j]^2 & \sum [q^j]^2 [v^j]^4 \\ \sum [v^j]^3 \operatorname{sgn} v^j & \sum [v^j]^4 & \sum [q^j]^2 [v^j]^4 & \sum [v^j]^6 \end{Vmatrix} \tag{5.6a}$$

$$A_{n1} = \begin{Vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix} \qquad B_{n1} = \begin{Vmatrix} \sum f^j \operatorname{sgn} v^j \\ \sum f^j \cdot v^j \\ \sum f^j [q^j]^2 \cdot v^j \\ \sum f^j [v^j]^3 \end{Vmatrix} \tag{5.6b}$$

Po uwzględnieniu danych (por. [15] tablica 5) otrzymujemy:

$$X_{mn} = \begin{Vmatrix} 42{,}000000 & 1{,}40077 & 0{,}062059 & 0{,}072906 \\ 1{,}140077 & 0{,}573501 & 0{,}026229 & 0{,}022122 \\ 0{,}062059 & 0{,}026229 & 0{,}0034046 & 0{,}0009086 \\ 0{,}072906 & 0{,}022122 & 0{,}0009086 & 0{,}001394 \end{Vmatrix}$$

$$B_{n1} = \begin{Vmatrix} 3,696078 \\ 0,451346 \\ 0,014996 \\ 0,015204 \end{Vmatrix}$$

Po rozwiązaniu układu równań (5.6) dla układu o jednostkowym momencie bezwładności i dla $\tau = \chi \cdot t$ otrzymano funkcje tłumienia w postaci:

$$D(q,\dot{q}) = 0,0777\,\mathrm{sgn}\dot{q} + 1,1265\dot{q} - 3,3247q^2\dot{q} + - 8,8657\dot{q}^3 \qquad (5.7)$$

określoną w obszarze K_1:

$-0,49 < q < 0,49$ rad

$-0,26 < q < 0,26$ rad.

Aby ocenić dokładność wyznaczonych współczynników funkcji tłumienia wyznaczono dla poziomu ufności $p_o = 0,90$ odpowiednie przedziały ufności [7] które wynoszą:

$$\begin{aligned} &\text{dla } a_o: \quad I^{(0)} = [0,09626;\ 0,05918] \\ &\text{dla } a_1: \quad I^{(1)} = [0,85020;\ 1,40206] \\ &\text{dla } a_2: \quad I^{(2)} = [-5,83181;\ -0,81765] \\ &\text{dla } a_3: \quad I^{(3)} = [-13,93065;\ -3,80083] \end{aligned} \qquad (5.8)$$

zaś dokładność obserwacji określono nierównością:

$$0,05673 < \sigma < 0,08432 \qquad (5.9)$$

zauważmy tutaj, że obliczone współczynniki metodą najmniejszych kwadratów, które wyszły za duże w porównaniu z pozo-

stałymi świadczą o małym wpływie tych składników. W pewnym więc zakresie składniki nieliniowe funkcji tłumienia przedstawiają małe wartości i można je pominąć.

Gdybyśmy założyli, że pierwszy składnik wyznaczonej funkcji jest również wynikiem tarcia w układzie, to uzyskana funkcja tłumienia gumy jest pierwszym przybliżeniem. Dla dalszej analizy zapiszmy funkcje tłumienia w postaci ogólnej:

$$D(q,\dot{q}) = A_0 \operatorname{sgn}\dot{q} + A_1\dot{q} + A_2 q^2\dot{q} + A_3\dot{q}^3 \tag{5.10}$$

gdzie:

$A_0 > 0, \quad A_1 > 0'$

$A_2 < 0' \quad A_3 < 0 \quad$ i $\quad \dot{q}.D(q,\dot{q}) \geqslant 0$

albo po przekształceniu

$$D(q,\dot{q}) = A_0 \operatorname{sgn}\dot{q} + \left[A_1 + R_1(q,\dot{q})\right] \cdot \dot{q} \tag{5.11}$$

gdzie:

$$R_1(q,\dot{q}) = A_2 q^2 + A_3\dot{q}^2$$

Z warunku, że

$$\frac{\partial R_1}{\partial \dot{q}} = 2\,A_3\dot{q} < 0 \quad \text{dla} \quad \dot{q} > 0 \tag{5.12}$$

widzimy, że guma posiada własności tłumieniowe o charakterze miękkim. Ponadto z charakteru otrzymanej funkcji tłumienia widzimy, że jest ona nieliniową funkcją zarówno prędkości jak i przemieszczenia. Ujemny współczynnik przy $\dot{q}^3$ charakteryzuje tłumienie miękkie gumy i wpływ na spadek dekrementu tłumienia przy wzrościa amplitudy [8]. Należy jednak przypuszczać, że o gwałtowności tego spadku decyduje nieliniowy składnik reprezentujący tarcie o charakterze suchym. Wniosek ten potwierdzałby fakt, że z jednej strony

pochylenie krzywych uzyskanych na drodze doświadczalnej jest znaczne z drugiej zaś duża wartość współczynnika przy q^3 wskazywałaby na mały wpływ tego składnika na funkcje tłumienia.

Należy zatem założyć, że przy wzroście amplitudy spadek dekrementu tłumienia jest uwarunkowany wpływem składników nieliniowych, których model Voigta nie uwzględnia.

7. Wnioski

W zbadanym zakresie doświadczenia stwierdzono, że guma twarda FU-10 nie spełnia założeń modelu liniowego. I zarówno charakterystyka sprężysta [14] jak funkcja tłumienia są wyraźnie nieliniowe. Miękka charakterystyka sprężysta gumy przy skręcaniu pozwala wytłumaczyć pochylenie krzywych rezonansowych w kierunku malejących częstości. Zaobserwowany zaś spadek dekrementu tłumienia ze wzrostem amplitudy drgań jest wynikiem miękkiego charakteru tłumienia gumy. Wyznaczona funkcja tłumienia gumy FU-10 wyjaśnia, że siły tłumieniowe w gumie są nieliniowe i to zarówno wiskotyczne jak i o charakterze tarcia suchego. Ponadto zauważono, że w procesie drgań zanikających, drgania odbywają się wokół przemieszczającego się środka drgań, który wraz z zanikaniem drgań zdąża asymptotycznie do pewnego ustalonego położenia.

LITERATURA

[1] Gobel E.F.: Berechnung und Gestalung von Gummifedern, Berlin 1955.

[2] Jorisz J.I.: Izmiernyje wibracji, Maszgiz, 1956.

[3] Kaliski S.: Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych, W-wa 1957.

[4] Kauderer H.: Nieliniejnaja mechanika, Moskwa 1963.

[5] Kin N., Tong: Tieorija miechaniczeskich kolebanij, Moskwa 1963.

[6] Klotter K.: The Atteniation of Damped Free Vibrations and the Derivation of the Damping Law from Recorded Data, Procc. of second U S National Congr. of Appl. Mechanics.

[7] Linnik I.W.: Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowania obserwacji, Warszawa 1962.

[8] Osiński Z.: Drgania swobodne nieliniowego układu z uwzględnieniem relaksacji i tarcia wewnętrznego, Arch. Budowy Maszyn 4 VII 1961.

[9] Poturajew W.M.: Isledowanije i rasczieł rezinometaliczeskich dietalej rabotajuszczich na sdwig, Izw. Wyższ Ucz. Zaw. Gornyj Żurnał, 9, 1961.

[10] Senik P.H.: Wiznaczenije funkcji jaka charakterizuje rozsijuwannja energii koliwnoj sistiemi, Prikład. Mech. 1, VI, 1960.

[11] Skowroński J.: O możliwościach syntezy pewnych silnie nieliniowych mechanicznych dyskretnych układów drgających Zag. Drg. Nielin. 1, 1960.

[12] Sorokin E.S.: Metod uczeta nieuprugogo soprotiwlienij materiała, Issl. po dinamikie sorużenij Moskwa 1951.

[13] Treloar L.R.C.: The Physics of Rubber Elasticity, Oxford 58.

[14] Wojnarowski J.: Charakterystyka sprężysta walca gumowego przy skręcaniu. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Nr 147. Mechanika, z. 25, 1965 r.

[15] Wojnarowski J.: Wyznaczenie dynamicznej charakterystyki pręta gumowego przy obciążeniach skrętnych. Rozprawa doktorska, Gliwice 1963.

[16] Ziemba S.: Drgania swobodne o silnie nieliniowym tłumieniu, Arch. Mech. Stos. 5, 1957.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДЕЛЬТА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ГАШЕНИЯ РЕЗИНОВОЙ ПРУЖИНЫ

Р е з ю м е

В работе был применен метод дельта для определения функции гашения резины ФУ-10.

Исследования были произведены на основании анализа крутильных колебаний системы с одной степенью свободы. На основании зарегистрированных фазовых траекторий анализованной системы были получены функции гашения цилиндрической резиновой пружины в следующей форме:

$$D(\dot{q},\dot{q}) = A_0 \cdot \operatorname{sgn} \dot{q} + A_1 \dot{q} + A_2\dot{q}^2\dot{q} + A_3\dot{q}^3$$

Одновременно было замечено, что с увеличением амплитуды колебаний происходит падение декремента затухания, что является результатом мягкого характера гашения резины ($A_3 < 0$). Кроме того было установлено, что в процессе затухающих колебаний, колебания происходят вокруг перемещающегося центра колебаний, асимптотически приближающегося к некоторому установившемуся положению.

APPLICATION OF DELTA METHOD TO THE DETERMINATION OF THE DAMPING FUNCTION OF THE RUBBER SPRING

S u m m a r y

In the paper application of delta method to the determination of the damping function of rubber FU-10 has been applied. Investigations were being based on the analysis of torsional vibrations of the one degree of freedom system. On the basis of recorded data of the analysed systems phase trajectories a damping function of the rubber cylindrical spring has been achieved.
It has the folloving shape:

$$D(q,\dot{q}) = A_0 \operatorname{sgn} \dot{q} + A_1 \dot{q} + A_2 q^2 \dot{q} + A_3 \dot{q}^3$$

It was remarked too that with the increase of the vibration amplitude the decrease of the logarithmic damping decrement follows, as a result of a soft character of rubber $A_3 < 0$ damping.

It was noticed moreover that the process of fading vibrations, the vibrations take place along the displaced centre of vibrations that tends in a asymptotic way towards a centre established position.