

Kand. nauk. techn. Adam Macura
Katedra Podstaw Elektrotechniki

Analiza własności oporów ujemnych i stabilności układów zawierających takie opory*

Streszczenie. W pracy przeprowadzono analizę przyczyn powodujących niestabilność oporów ujemnych; wykazano, że zachowanie oporu ujemnego określone jest przez jego operatorową admitancję albo impedancję. Podano sposób określania stabilności układów zawierających opór ujemny, oparty na metodzie Nyquista oraz szereg twierdzeń ułatwiających określenie stabilności.

W rozdziale 1 przeprowadzono klasyfikację dwójników aktywnych na dwójniki zdolne do oddawania energii prądu zmiennego do każdego dwójnika pasywnego przyłączonego do nich i dwójniki zdolne do oddawania energii prądu zmiennego tylko do pewnych dwójników pasywnych. Drugi rodzaj — to opory ujemne, które według Bode możemy podzielić na 2 klasy stabilne przy zwarciu i stabilne przy biegu luzem.

W rozdziale 2 przeprowadzono krytyczną analizę przyczyn niestabilności oporów ujemnych. Rozpatruje się wpływ nieliniowości charakterystyk, wpływ elementów biernych obwodu zewnętrznego oraz zjawiska zachodzące wewnątrz oporu ujemnego. W oparciu o metodę Liapunowa wykazuje się, że o stabilności układu decydują zjawiska zachodzące wewnątrz oporu ujemnego. Poddano krytyce pogląd Herolda o kierunku obiegu charakterystyki dynamicznej oporu ujemnego.

W rozdziale 3 i 4 określa się własności admitancji względnie impedancji operatorowej oporu ujemnego kl. I i II, zakładając związek między napięciem i prądem oporu ujemnego typu:

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k J}{dt^k} = \sum_{k=0}^l b_k \frac{d^k U}{dt^k}$$

Udowadnia się, że dwójniki niestabilne bądź przy zwarciu, bądź przy biegu luzem muszą być oporami ujemnymi. Podaje się szereg przykładów.

W rozdziale 5 podano szereg twierdzeń dotyczących stabilności układów zawierających opór ujemny.

W rozdziale 6 rozpatruje się stabilność dla dużych zaburzeń za pomocą metody Nyquista przystosowanej do układów nieliniowych. Przeprowadzona w rozdziale 6 dyskusja stabilności dla dużych zaburzeń pozwala na stosunkowo proste stwierdzenie czy układ przy danej wielkości zaburzenia jest stabilny, czy nie. Na podstawie otrzymanych wyników wydaje się, że dla określenia stabilności dla dużych zaburzeń jest również konieczne uwzględnienie elementów biernych oporu ujemnego.

* Artykuł niniejszy jest streszczeniem pracy kandydackiej.

1. Wstęp

Punktem wyjścia dla rozważań przeprowadzonych w pracy jest opór ujemny rozpatrywany jako dwójnik. Praca przedstawia próbę określenia własności takich dwójników z ich czysto „zewnętrznych“ właściwości tj. charakterystyk statycznych i charakterystyk częstotliwości, bez wnikania w wewnętrzny mechanizm zjawisk oporu ujemnego¹. Daje to z jednej strony możliwość sklasyfikowania całego szeregu układów pracujących na różnych zasadach (łuk, dynatron, wzmacniacz ze sprzężeniem zwrotnym itp.) w dwu klasach, z drugiej strony utrudnia jednak fizykalną interpretację otrzymanych wyników, która z konieczności musiałaby być inna dla każdego oporu ujemnego.

1.1. Określenie oporu ujemnego

Wśród dwójników aktywnych można wyodrębnić dwójniki, które mogą dostarczać energię w postaci prądu zmiennego. Z kolei wśród tych ostatnich można przeprowadzić podział na dwa rodzaje:

1. Dwójniki zdolne oddawać energię prądu zmiennego do każdego dwójnika pasywnego przyłączonego do nich. Do tego rodzaju należą wszystkie generatory obcowzbudne.

2. Dwójniki zdolne do oddawania energii prądu zmiennego tylko do pewnych dwójników pasywnych.

Własności wymienionych dwójników omówimy poniżej na podstawie pewnych przykładów.

Weźmy na przykład dynatron. Przy odpowiednim doborze napięcia anodowego i w połączeniu z równoległym obwodem rezonansowym o dostatecznej dobroci oraz odpowiedniej częstotliwości własnej, otrzymamy drgania nie zanikające, a dynatron będzie oddawał energię prądu zmiennego do zewnętrznego obwodu, którym w tym wypadku jest ów obwód równoległy.

Jeżeli jednak zmniejszymy odpowiednio opór rzeczywisty obwodu równoległego, to drgań nie otrzymamy i dynatron nie będzie oddawał energii do obwodu zewnętrznego. Podobnie łuk elektryczny odpowiednio zasilany i połączony z szeregowym obwodem rezonansowym, przy dostatecznej dobroci tego ostatniego oraz odpowiedniej częstotliwości własnej obwodu wytworzy drgania nie zanikające — oddając energię prądu zmiennego do zewnętrznego obwodu. Przy zbyt wielkiej wartości oporu czynnego drgań nie zanikających nie otrzymamy.

Przy zdejмовaniu charakterystyk statycznych takich dwójników na-

¹ Tak jak się to czyni w konwencjonalnej teorii dwójników i czwórników.

trafiamy na zjawisko nagłych przeskoków punktu pracy na charakterystyce albo na drgania. Występowanie tych zjawisk uzależnione jest również od obwodu zewnętrznego, w szczególności od wielkości i konfiguracji jego elementów. Również i tutaj zachodzi oddawanie energii prądu zmiennego (periodycznie lub aperiodycznie) do obwodu zewnętrznego, przy czym zjawisko to występuje tylko w pewnych obwodach.

Jeżeli opisujemy zachowanie się takiego układu przez podanie przebiegów napięć czy też prądów powstałych w układzie po zaistnieniu jakiegos pobudzenia, to układ, określony z energetycznego punktu widzenia jako nie oddający energii prądu zmiennego, nazywamy stabilnym¹. Układ, w którym nasz dwójnik oddaje energię — to układ niestabilny.

Przypuśćmy, że dobraliśmy dwójnik składający się tylko z oporów rzeczywistych tak, że w połączeniu z dwójnikiem aktywnym drugiego rodzaju powstał układ stabilny. Jeśli w szereg z jakąś istniejącą gałęzią włączymy jeszcze SEM zmienną idealną, to może się okazać, że w pewnym zakresie częstotliwości dwójnik ten oddaje do obwodu zewnętrznego energię elektryczną w postaci prądu zmiennego o częstotliwości równej częstotliwości włączonej SEM. Jeżeli przebiegi prądów i napięć mieszczą się w zakresie liniowości wszystkich elementów układu, to można się o tym przekonać np. przez pomiar kąta przesunięcia fazowego φ między napięciem a prądem dwójnika aktywnego.

Przy zastrzałkowaniu odbiornikowym będzie on większy od 90° , a więc moc średnia

$$P_{\text{sr}} = UJ \cos \varphi < 0$$

dla $90^\circ < \varphi < 270^\circ$,

co oznacza, że dwójnik nasz zamiast pobierać — dostarcza energię. Energia ta pochodzi ze stanowiącego część składową oporu ujemnego źródła energii — najczęściej źródła napięcia stałego. Wielkość tego ostatniego jest ograniczona, zatem ograniczona musi być również wielkość oddawanej energii. Inaczej mówiąc, moc oddawana przez taki dwójnik nie może być funkcją stale rosnącą ze wzrostem np. napięcia na dwójniku. Z tego bezpośrednio wynika, że dwójnik taki musi być nieliniowy dla większych wartości prądów i napięć.

W zakresie liniowości takiego dwójnika — jeżeli równocześnie $\varphi = 180^\circ$, to

$$P = -UJ = -RJ^2 \quad (1)$$

oraz

$$U(t) = -RJ(t). \quad (2)$$

¹ Ścisłejsze określenie stabilności podamy dalej.

przy strzałkowaniu odbiornikowym. Stąd wzięła się nazwa „opór ujemny“ dla tego rodzaju dwójników.

W dalszym ciągu dwójniki aktywne drugiego rodzaju nazywać będziemy oporami ujemnymi.

Badając bliżej warunki stabilności układu składającego się z oporu ujemnego i oporu czynnego dochodzimy do podziału oporów ujemnych na dwie klasy:

Klasa I — Opory ujemne stabilne w połączeniu z małym oporem zewnętrznym.

Klasa II — Opory ujemne stabilne w połączeniu z dużym oporem zewnętrznym.

Taką klasyfikację przeprowadził już Bode [1]. Klasyfikacja ta jest praktycznie bardzo przydatna, ponieważ pozwala na doświadczalnie proste i szybkie stwierdzenie, do której z klas dany opór ujemny należy.

Teoria oporów ujemnych, przedstawiona w niniejszej pracy, będzie oparta na tych dwóch faktach doświadczalnych.

1.2. Określenie stabilności

Obwód elektryczny nazwiemy stabilnym, jeżeli prąd zaburzeniowy w dowolnej gałęzi (i -tej) wywołany przez załączenie SEM $E = \text{const}$ będzie mniejszy od pewnej wartości $\eta(E)$ zależnej tylko od wielkości E :

$$J_{zi}(t) < \eta_i(E) \text{ dla każdego } t > 0,$$

przy czym $J_{zi}(t) = J_i(t) - J_{0i}$ — prąd zaburzeniowy jest równy różnicy prądu istniejącego w chwili t w danej (i -tej) gałęzi obwodu $J_i(t)$ i prądu J_{0i} istniejącego w tejże gałęzi przed włączeniem SEM E (w chwili $t \neq -0$).

Innymi słowy: w układzie stabilnym można otrzymać dowolnie małe odchylenia prądu od swej wartości spoczynkowej przez zapewnienie dostatecznie małych wielkości pobudzeń.

Pojęcie stabilności układu jest związane z istnieniem pewnego pobudzenia w układzie. W związku z tym należy odróżnić stabilność dla dużych pobudzeń od stabilności dla małych pobudzeń. Okazuje się bowiem, że w układach nieliniowych warunki stabilności dla małych pobudzeń mogą się znacznie różnić od warunków stabilności dla dużych pobudzeń. O ile problem stabilności dla małych pobudzeń można wyjaśnić najczęściej na podstawie liniowego przybliżenia układu, to problem stabilności dla dużych pobudzeń jest już problemem z natury nieliniowym.

W pierwszej części pracy (rozdz. 2—5) rozważania dotyczą tylko stabilności dla małych pobudzeń, którą w dalszym ciągu nazywać będziemy krótko „stabilnością“.

W rozdziale 6 omówiono stabilność dla dużych pobudzeń.

2. Przyczyny niestabilności oporów ujemnych

Przy klasyfikacji oporów ujemnych wspomniano już o tym, że opory ujemne klasy I są niestabilne w połączeniu z dużym oporem czynnym, zaś opory ujemne klasy II są niestabilne w połączeniu z małym oporem czynnym. Oprócz tego wspomniano o niestabilności zachodzącej w układach zawierających prócz oporu ujemnego i dodatniego jeszcze elementy L i C , i zwrócono uwagę na różne zachowanie się obu wspomnianych klas w połączeniu z tymi samymi układami R , L , C . Oba opory jednak w odpowiednich warunkach zachowują się tak samo, mianowicie w układzie stabilnym mogą oddawać energię tylko wtedy, gdy w tym układzie istnieje jakaś SEM zmienna. Poza tym w układzie stabilnym nie ma różnic między oporami obu klas: obie można zastąpić jednym układem zastępczym: oporem — R_u . Zachodzi więc pytanie: jakie są przyczyny niestabilności oporów ujemnych w pewnych układach¹. Przy próbie wytłumaczenia tych zjawisk można wymienić trzy możliwe właściwości oporów ujemnych, które mogłyby wpływać na niestabilność:

- 1) nieliniowość charakterystyk,
- 2) elementy bierne zewnętrznego obwodu,
- 3) zjawiska zachodzące wewnątrz oporu ujemnego.

Wszystkie trzy wyżej wymienione możliwe przyczyny niestabilności znalazły w literaturze swoich przedstawicieli. Wpływ tych trzech właściwości rozpatrzmy najpierw dla stabilności dla małych pobudzeń.

2.1. Wpływ nieliniowości charakterystyk

W celu wyjaśnienia tego wpływu zakładamy najpierw, że opór ujemny jest czystym oporem ujemnym klasy I i nie ma składowej biernej. Charakterystykę jego

$$J = f(U)$$

przybliżmy krzywą n -tego stopnia

$$J = \sum_{i=0}^n a_i U^i. \quad (3)$$

¹ „Przyczyny niestabilności“ należy tu rozumieć jako te właściwości oporu ujemnego, które trzeba uwzględnić, by otrzymać prawidłowy opis zachowania się oporu ujemnego.

Jeżeli do oporu ujemnego przyłączony jest liniowy obwód elektryczny, to zachowanie się takiego układu będzie opisane przez układ równań różniczkowych:

$$\frac{dU_k}{dt} = \sum_{i=1}^s b_{ki} U_i + \Phi_k(U_1 \dots U_s) \quad k = 1 \dots s, \quad (4)$$

przy czym pierwsze wyrażenie po prawej stronie powyższego równania zawiera liniowe człony, zaś $\Phi_k(U_1 \dots U_s)$ zawiera tylko nieliniowe człony.

Przez skreślenie wszystkich nieliniowych funkcji Φ_k otrzymamy układ równań różniczkowych liniowych, a po sprowadzeniu do jednego równania różniczkowego wyższego rzędu, tzw. równanie różniczkowe I przybliżenia.

Liapunow np. [8], [9] wykazał, że jeżeli równanie charakterystyczne tego równania różniczkowego I przybliżenia nie ma pierwiastków z częścią rzeczywistą równą zeru, to stabilność dla małych pobudeń jest określona w zupełności przez to właśnie równanie różniczkowe I przybliżenia, niezależnie od charakteru członów nieliniowych pełnego układu równań różniczkowych.

Równania różniczkowe I przybliżenia układów z oporami ujemnymi tylko w wyjątkowych przypadkach mają pierwiastki z częścią rzeczywistą równą zeru. Tylko w tych wyjątkowych przypadkach należy uwzględnić człony nieliniowe, a więc zakrzywienie charakterystyk. W pozostałych przypadkach celem rozstrzygnięcia kwestii stabilności można rozpatrywać opór ujemny jako element liniowy.

W tym miejscu należy zwrócić uwagę, że aczkolwiek nieliniowość oporu ujemnego nie jest przyczyną niestabilności tych oporów, to jednak istnieje prawdopodobnie związek między charakterem zakrzywienia „n” czy „s” a klasą oporu ujemnego I czy II [32], [33].

2.2. Wpływ elementów biernych obwodu zewnętrznego

Drobow [10], Weizel i Rompe [11] — podobnie jak i wielu innych autorów — uważali, że elementy bierne obwodu zewnętrznego decydują o stabilności oporu ujemnego. Drobow tłumaczy, że pojemność należy uwzględnić wtedy, gdy przepływa przez nią duży prąd

$$J(t) = C \frac{dU(t)}{dt},$$

a prąd ten może przyjąć nawet przy małych wartościach C dużą wartość, jeżeli $\frac{dU(t)}{dt}$ jest duże, co zachodzi na zakrzywieniach, poza odcinkiem

opadającej charakterystyki oporu ujemnego, i konieczne jest jakoby przy oporach ujemnych I klasy.

Na odwrót, indukcyjność należy uwzględniać wtedy, gdy napięcie na niej

$$U(t) = L \frac{dJ(t)}{dt}$$

może przyjąć dużą wartość, co znowu przy małym L może nastąpić dla dużego $\frac{dJ(t)}{dt}$ występującego na zakrzywieniu charakterystyki oporu ujemnego klasy II. Elementy L i C mają przy tym mieć charakter indukcyjności lub też pojemności rozproszenia.

Rozważania takie, niewątpliwie słuszne w okolicy zakrzywień charakterystyk, nie są słuszne w okolicy części prostoliniowej, na której przecież znajdować się może punkt pracy układu. Dopiero po wyjściu punktu pracy na zakrzywienie, układ mógłby się „dowiedzieć“, co ma „wybrać“ — indukcyjność czy pojemność. Koncepcja taka więc upada.

Wielu autorów, a między nimi Weizel i Rompe, nie uzasadnia w ogóle przyjęcia tego lub innego rodzaju elementu biernego obwodu zewnętrznego. Dzieje się to zazwyczaj przy omawianiu stabilności łuku elektrycznego, gdzie przyjęcie indukcyjności można często „przemycić“ bez tłumaczenia jako tzw. indukcyjność doprowadzeń. Błądność tego stanowiska wykażemy poniżej.

Z kolei omówimy wpływ elementów biernych obwodu zewnętrznego.

Stabilność badać będziemy na podstawie liniowego układu zastępczego.

Przypuścimy, że opór ujemny załączono do obwodu zewnętrznego, którym jest dowolny dwójnik pasywny i liniowy o admitancji operatorowej $Y(p)$.

Uwzględnijmy najpierw tylko indukcyjność L_u , która mogłaby np. być indukcyjnością doprowadzeń łączących opór ujemny z dwójnikiem (rys. 1). Włączymy w szereg z oporem ujemnym SEM $E(t)$:

$$\text{SEM} \quad E(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ E & \text{dla } t > 0. \end{cases}$$

Można wykazać [12], że układ taki będzie na pewno niestabilny dla

$$G_u < Y(0),$$

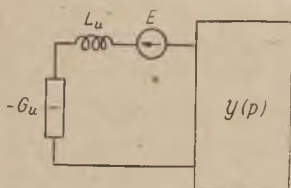
gdzie $Y(0)$ przedstawia przewodność dwójnika dla prądu stałego.

Uwzględnijmy teraz tylko pojemność przewodów doprowadzających C_u (rys. 2). W tym przypadku można wykazać [12], że układ taki będzie na pewno niestabilny dla

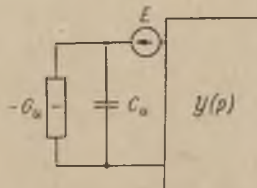
$$G_u > Y(0).$$

Z powyższego wynika, że warunek niestabilności¹ zależy od elementu biernego „najbliższego“ oporowi ujemnemu; w pierwszym przypadku jest nim indukcyjność L_u , w drugim pojemność C_u .

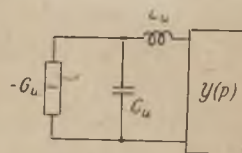
Wykażemy teraz, że L_u czy też C_u muszą być częściami składowymi oporu ujemnego. Jeżeli przyjmujemy indukcyjność doprowadzeń L_u , to powinniśmy uwzględnić również pojemność między zaciskami oporu ujemnego C_u (rys. 3), wskutek czego zmieni się warunek niestabilności



Rys. 1. Uwzględnienie indukcyjności doprowadzeń

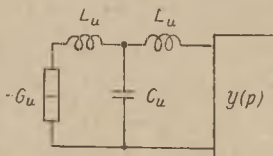


Rys. 2. Uwzględnienie pojemności doprowadzeń

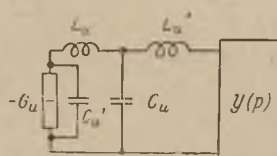


Rys. 3. Uwzględnienie pojemności na zaciskach oporu ujemnego

z $G_u < Y(0)$ na $G_u > Y(0)$, możemy bowiem L_u teraz traktować jako część składową dwójnika zewnętrznego. Gdyby jednak wewnątrz oporu ujemnego znajdowała się jeszcze jakaś indukcyjność L_u (rys. 4), to warunek znów zmieniałby się na $G_u < Y(0)$. Uwzględnienie natomiast C_u (rys. 5), prowadzi z kolei do warunku $G_u > Y(0)$.



Rys. 4. Uwzględnienie indukcyjności wewnętrznej oporu ujemnego



Rys. 5. Uwzględnienie pojemności wewnętrznej oporu ujemnego

Postępując tak dalej znajdziemy się wewnątrz oporu ujemnego, a warunek stabilności będzie znów zależał od elementu „najbliższego“. W ten sposób wykazano, że decydujący wpływ na niestabilność mają elementy biernie oporu ujemnego. Mogłyby nimi być indukcyjności i pojemności wewnętrzne oporu ujemnego, jednak również

¹ Należy zaznaczyć, że warunek stabilności nie zawsze można przedstawić w tak prosty sposób; — np. w pierwszym przypadku $Y(0) < G_u$ niekoniecznie musi być warunkiem wystarczającym dla stabilności.

uwzględnienie innych zgoła przebiegów fizykalnych, zależnych np. od pochodnych napięcia lub prądu, prowadzić może do wyrażen typu

$$L \frac{dJ(t)}{dt} \quad \text{lub} \quad C \frac{dU(t)}{dt}.$$

Możemy wówczas formalnie mówić o elementach biernych oporu ujemnego, mając na myśli indukcyjności i pojemności zastępczego układu elektrycznego oporu ujemnego — jego „modelu“.

Na fakt, że przy rozpatrywaniu stabilności łuku elektrycznego należy uwzględnić różnego rodzaju „zbiorniki energii“ wewnątrz łuku elektrycznego, wskazywał już Kaufmann [13].

2.3. Zjawiska zachodzące wewnątrz oporu ujemnego

Dotychczas przyjmowaliśmy, że w oporze ujemnym klasy I prąd jest funkcją tylko napięcia, zaś w oporze ujemnym klasy II, napięcie jest funkcją prądu. Założenie to oparte było na charakterystyce statycznej oporu ujemnego. Jednak jest ono niewystarczające, ponieważ w poprzednim ustępie stwierdzono, że sam opór ujemny musi mieć pewne własności, które przypisać można elementom biernym¹ wchodzącym w skład oporu ujemnego — czyli że opór ujemny rozpatrywany jako dwójnik (liniowy w danym zakresie prądów i napięć) jest elementem, w którym prąd $J(t)$ [lub napięcie $U(t)$] jest zależny nie tylko od $U(t)$, $J(t)$, ale również i od pochodnych $U(t)$, $J(t)$, to znaczy, że ogólnie należałoby przyjąć, że prąd $J(t)$ (lub napięcie $U(t)$) jest podany przez równanie różniczkowe²

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i J(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^k b_i \frac{d^i U(t)}{dt^i}. \quad (5)$$

Stosując tu rachunek operatorowy, otrzymamy przy tzw. zerowych warunkach początkowych:

$$\left[\sum_{i=0}^n a_i p^i \right] J(p) = \left[\sum_{i=0}^k b_i p^i \right] U(p), \quad (6)$$

a dalej

$$J(p) = \frac{G_u(p)}{H_u(p)} U(p),$$

przy czym

$$G_u(p) = \sum_{i=0}^k b_i p^i,$$

¹ Układu rzeczywistego lub modelowego.

² Dla łuku zależność taką stosowano już dawno (np. Granowski [14]).

$$H_u(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i,$$

a oznaczając

$$\frac{G_u(p)}{H_u(p)} = Y_u(p) = \frac{1}{Z_u(p)}$$

$$J(p) = Y_u(p)U(p) \text{ lub } U(p) = Z_u(p)J(p). \quad (7)$$

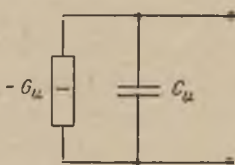
Jeżeli na przykład założymy, że w oporze klasy I prąd zależy nie tylko od napięcia, ale i od jego pochodnej względem czasu, to otrzymamy:

$$J(t) = b_0 U(t) + b_1 \frac{dU(t)}{dt},$$

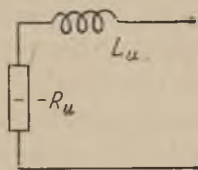
$$J(p) = (b_0 + pb_1)U(p),$$

a stąd otrzymalibyśmy układ zastępczy podany na rys. 6, przy czym

$$b_0 = -G_u, \quad b_1 = C_u.$$



Rys. 6. Układ zastępczy Barkhausena dla oporu ujemnego klasy I



Rys. 7. Układ zastępczy Barkhausena dla oporu ujemnego klasy II

Dla oporu klasy II założymy, że napięcie na nim zależy od prądu i jego pierwszej pochodnej względem czasu:

$$U(t) = a_0 J(t) + a_1 \frac{dJ(t)}{dt},$$

$$U(p) = (a_0 + a_1 p) J(p),$$

co prowadzi do układu zastępczego podanego na rys. 7, przy czym

$$a_0 = -R_u, \quad a_1 = L_u.$$

Układy te podał już Barkhausen [7], uzasadniając przyjęcie ich opóźnieniem zachodzącym między przyczyną a skutkiem.

Warunki stabilności są tu zgodne z rzeczywistością. Układy zastępcze podane powyżej Barkhausen stosował tylko dla dynatronu i łuku elektrycznego.

Steimel [3], Rothe i Kleen [4] upodobnili zjawiska zachodzące wewnątrz łuku i dynatronu do zjawisk zachodzących w sztucznym łuku i sztucznym dynatronie, a więc do zjawisk zachodzących we wzmacniaczach ze sprzężeniem zwrotnym. Jednak i tutaj rozstrzygnięcie kwestii stabilności (np. według Nyquista) możliwe jest tylko w przypadku uwzględnienia opóźnienia między napięciem na wejściu i na wyjściu wzmacniacza, np. przez uwzględnienie, pojemności¹ równoległej do wejścia wzmacniacza, czy też przez założenie opóźnienia w współczynniku wzmocnienia (w rachunku operatorowym współczynnik wzmocnienia wzmacniacza $K(p) = Ke^{-pt}$ ²).

Przyjęcie opóźnienia wzmacniacza zachodzącego między przyczyną a skutkiem zdaje się najlepiej odpowiadać rzeczywistości:

W przypadku sztucznego łuku czy też dynatronu jest to opóźnienie między napięciem na wejściu a napięciem na wyjściu wzmacniacza wchodzącego w skład oporu ujemnego; w przypadku łuku elektrycznego — jest to opóźnienie wywołane bezwładnością przebiegów w łuku; w przypadku dynatronu jest to opóźnienie zachodzące przy emisji wtórnej elektronów.

Jak widać, zjawiska te, różnej natury fizycznej, mogą spowodować ten sam efekt — niestabilność.

Fakt istnienia pętlowej charakterystyki dynamicznej oporu ujemnego tłumaczy Herold [15] właśnie owym opóźnieniem czasowym między przyczyną a skutkiem. Dla oporu ujemnego klasy I powinna ona mieć obieg zgodny z kierunkiem wskazówek zegara, a dla klasy II — niezgodny.

Łatwo możemy wykazać błędność tego rozumowania: dołączając szeregowo z oporem ujemnym dostatecznie dużą indukcyjność nie zmienimy warunku stabilności, ale możemy zmienić kierunek obiegu charakterystyki. Kierunek obiegu charakterystyki zależy w ogóle w dużej mierze od częstotliwości i jeszcze nie mówi o opóźnieniu w stanach nieustalonych.

Z kolei należy zastanowić się nad tym, jaki kształt równania różniczkowego odpowiada poszczególnym klasom oporów ujemnych. Nie wyjaśniliśmy bowiem jeszcze, dlaczego przy dynatronie prąd jest funkcją napięcia i jego pochodnej, a przy łuku jest odwrotnie — tzn. napięcie jest funkcją prądu i jego pochodnej. Poza tym całego szeregu oporów ujemnych nie można opisać przez przyjęcie tak prostych zależności. Zachowanie się np. dwójników posiadających opór ujemny tylko dla pewnego zakresu częstotliwości w zasadzie nie można opisać

¹ Pojemność ta nie jest identyczna z pojemnością międzyelektrodową, choć ta ostatnia może być znacznie większa.

² Patrz również ustęp 5. 3.

na podstawie tak prostych układów zastępczych. Ze względu na prostotę rozważań przeprowadzać je będziemy przy użyciu rachunku operatorowego, nad funkcją admitancji lub impedancji operatorowej.

3. Własności oporu ujemnego klasy I

W ustępie 1.1 przeprowadzono klasyfikację dwójników aktywnych według ich zachowania się w połączeniu z czystym oporem czynnym.

Układ: opór ujemny klasy I — duży opór czynny jest układem niestabilnym, zaś przy małej wartości oporu czynnego, układ taki jest układem stabilnym. Jeżeli będziemy zmieniali wartość oporu czynnego od $G = \infty$ do $G = 0$ ¹, to układ ze stanu stabilnego powinien przy pewnej wartości przewodności przejść do stanu niestabilnego.

3.1 Własności „doświadczalne”

Określimy ściślej własności wyżej podanego układu, otrzymane na drodze doświadczalnej. Własności te nazwiemy „doświadczalnymi”:

a) Układ jest stabilny przy przewodności G większej od pewnej przewodności G_u , której wartość zależy tylko od dwójnika aktywnego.

b) Układ jest niestabilny przy przewodności G mniejszej od tejże wartości G_u .

Z tych dwóch faktów wynikają dwa przypadki szczególne:

c) Układ jest stabilny przy zwarcu.

d) Układ jest niestabilny przy biegu luzem.

3.2. Własności funkcji $Y_u(p)$

Podane w ustępie 3.1 fakty doświadczalne narzucają na admitancję $Y_u(p)$ pewne warunki, które ta admitancja musi spełnić. Podamy tu twierdzenia w odniesieniu do funkcji $Y_u(p)$, które udowodnimy w następnym ustępie.

Twierdzenia

a) Jeżeli $G > G_u$, to dla $\text{Re}(p) > 0$ musi być $Y_u(p) + G \neq 0$, czyli: funkcją $Y_u(p) + G$ dla $G > G_u$ nie może posiadać pierwiastków z dodatnią częścią rzeczywistą.

b) Jeżeli $G < G_u$, to dla $\text{Re}(p) > 0$ musi być $Y_u(p) + G = 0$, dla co najmniej jednej wartości p , czyli: funkcja $Y_u(p) + G$ dla $G < G_u$ musi posiadać co najmniej jeden pierwiastek z dodatnią częścią rzeczywistą.

¹ Celowe jest tutaj stosowanie przewodności $G = \frac{1}{R}$.

Określenie krytycznej wartości G_u podamy dalej.

c) Admitancja wejściowa $Y_u(p)$ dwójnika klasy I nie może posiadać biegunów na prawej półpłaszczyźnie p (z wyjątkiem $p = \infty$ — patrz dalej).

d) Admitancja wejściowa $Y_u(p)$ dwójnika klasy I musi posiadać co najmniej jeden pierwiastek na prawej półpłaszczyźnie p .

3.3. Dowody do twierdzeń punktu 3.2

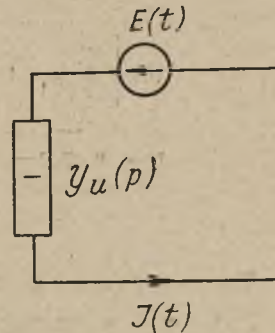
Udowodnimy najpierw punkty c) i d)

Twierdzenie c)

Funkcja operatorowa prądu przy włączeniu SEM jednostkowej (rys. 8), ma postać:

$$J(p) = E(p) Y_u(p) = \frac{E}{Z_u(p)}$$

Jeżeli układ jest stabilny, to $Z_u(p)$ nie może posiadać zer na prawej półpłaszczyźnie, a ponieważ zera funkcji $Z_u(p)$ są biegunami funkcji $Y_u(p)$, to $Y_u(p)$ nie może tam mieć biegunów (z wyjątkiem ewentualnego bieguna dla $p = \infty$).



Rys. 8. Załączenie SEM jednostkowej na opór ujemny

Jeżeli w $Y_u(p) = \frac{G_u(p)}{H_u(p)}$ stopień licznika jest wyższy o jeden od stopnia mianownika, to $Y_u(p)$ ma biegun dla $p = \infty$.

Wówczas możemy wydzielić

$$\frac{G_u(p)}{H_u(p)}$$

i otrzymamy

$$Y_u(p) = ap + \frac{G_{u1}(p)}{H_u(p)} = ap + Y_{u1}(p),$$

a więc

$$J(p) = Eap + E Y_{u1}(p).$$

Pierwszemu członowi po prawej stronie, $Ea p$, odpowiada funkcja czasowa (funkcja Diraca)

$$Ea \delta(t),$$

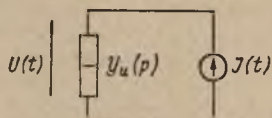
która nie wpływa na stabilność. Jeżeli układ jest stabilny, to funkcja $Y_{u1}(p)$ nie może mieć biegunów na prawej półpłaszczyźnie p . Ale biegunami funkcji $Y_{u1}(p)$ są zera funkcji $H_u(p)$. Jeżeli więc $Y_{u1}(p)$ nie ma biegunów na prawej półpłaszczyźnie, to nie ma ich i $Y_u(p)$ mające te same bieguny co $Y_{u1}(p)$, z wyjątkiem $p = \infty$, który nie wpływa na stabilność.

Twierdzenie d)

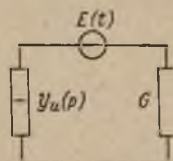
Jeśli w tym przypadku załączymy na opór ujemny SPM $J(p)$ jednostkową (rys. 9), wówczas otrzymamy

$$U(p) = \frac{J(p)}{Y_u(p)} = \frac{J}{Y_u(p)}.$$

Jeżeli układ jest niestabilny, to $Y_u(p)$ musi mieć co najmniej jeden pierwiastek na prawej półpłaszczyźnie p (a więc co najmniej jeden pierwiastek z dodatnią częścią rzeczywistą).



Rys. 9. Załączenie SPM jednostkowej na opór ujemny



Rys. 10. Załączenie SEM jednostkowej na obwód — $Y_u(p), G$

Twierdzenie a)

Załączmy w szereg z dwójnikiem przewodność czynną G (rys. 10):

$$J(p) = \frac{E}{\frac{1}{Y_u(p)} + \frac{1}{G}} = \frac{E G Y_u(p)}{Y_u(p) + G}.$$

Ponieważ układ ma być stabilny, to $\frac{G Y_u(p)}{Y_u(p) + G}$ nie może mieć biegunów na prawej półpłaszczyźnie p .

Jak udowodniono wyżej, $Y_u(p)$ nie ma tam biegunów (twierdzenie d), a więc cały licznik nie ma biegunów na prawej półpłaszczyźnie, zaś mianownik, $Y_u(p) + G$, nie może mieć tam zera, ponieważ zera mianownika są biegunami funkcji $J(p)$, a więc musi być

$$Y_u(p) + G \neq 0$$

$$\text{dla } \operatorname{Re}(p) > 0 \text{ oraz } G > G_u.$$

Twierdzenie b)

Układ jest niestabilny, a więc $J(p)$ musi mieć co najmniej jeden biegun na prawej półpłaszczyźnie p ; ponieważ licznik wyrażenia na $J(p)$ nie ma tam biegunów, to mianownik $Y_u(p) + G$ musi mieć co najmniej jedno zero, czyli

$$Y_u(p) + G = 0$$

dla $\text{Re}(p) > 0$ oraz $G < G_u$

dla co najmniej jednej wartości p .

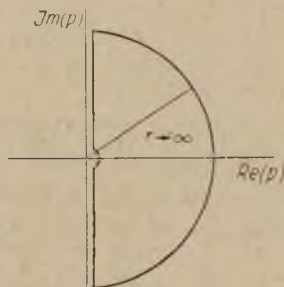
W celu wyjaśnienia dalszych własności funkcji $Y_u(p) + G$ musimy skorzystać z innego sposobu wyznaczania zer takiej funkcji.

Twierdzenie

Ilość pierwiastków (N) funkcji $Y_u(p) + Y(p)$ regularnej na prawej półpłaszczyźnie z wyjątkiem ewentualnego punktu $p = \infty$ określa równanie ¹ [16]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{Y_u'(p) + Y'(p)}{Y_u(p) + Y(p)} dp = -N, \tag{8}$$

przy czym C_p jest drogą całkowania na płaszczyźnie p : od $p = -ri$ do $p = +ri$ i dalej po półokręgu $re^{i\varphi}$, gdzie $r \rightarrow \infty$ oraz $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, z wyłączeniem punktu $p = 0$ oraz punktu $p = \infty$ (rys. 11).



Rys. 11. Droga całkowania w płaszczyźnie p

Wprowadźmy nową zmienną

$$w_y = Y_u(p) + Y(p).$$

Droga całkowania C_p na płaszczyźnie p przejdzie teraz na nową krzywą C_w na płaszczyźnie w .

Określmy nową krzywą C_w , wzdłuż której przeprowadzamy całkowanie:

¹ Funkcja $Y_u(p) + Y(p)$ jest regularna na prawej półpłaszczyźnie gdyż, jak wyjaśniono w twierdzeniu d), $Y(p)$ nie ma tam biegunów. Ewentualny biegun w $p = \infty$ wykluczamy przez odpowiednie przyjęcie krzywej C_p (rys. 11).

1. Droga całkowania wzdłuż osi urojonej od $p = -ri$ do $p = +ri$ przekształca się w $C_{w1} = Y_u(i\omega) + Y(i\omega)$, gdzie ω zmienia się od $-r$ do $+r$ ($r \rightarrow \infty$).

2. Droga całkowania wzdłuż półokręgu o promieniu $r \rightarrow \infty$ przekształca się w półokrąg nieskończonej duży, zamknięty w prawo¹:

$$C_{w2} = Y_u(p) + Y(p)$$

dla $|p| \rightarrow \infty$ i $-\frac{\pi}{2} < \arg p < \frac{\pi}{2}$,

zaś $C_w = C_{w1} + C_{w2}$,

Po wprowadzeniu nowej zmiennej otrzymamy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_w} \frac{dw_y}{w_y} = -N; \quad (9)$$

funkcja w mianowniku wyrażenia podcałkowego ma tylko jeden pierwiastek $w_y = 0$

Warunek stabilności brzmi zatem:

Aby układ był stabilny, krzywa C_w należąca do tego układu nie może obejmować punktu $w_y = 0$.

Wygodnym sposobem sprawdzenia czy punkt $w_y = 0$ leży wewnątrz obszaru określonego przez krzywą C_w jest badanie przyrostu $\arg w_y$. Mianowicie [16]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_w} \frac{dw_y}{w_y} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_w} \arg w_y = -N, \quad (10)$$

gdzie $\Delta_{C_w} \arg w_y$ jest przyrostem kąta promienia wodzącego z punktu 0 przy pełnym obiegu jego końca wzdłuż krzywej C_w (dla $-\infty < \omega < \infty$).

Ponieważ $w_y(p)$ dla sprzężonych wartości p przyjmuje również wartości sprzężone, wystarczy rozpatrzeć krzywą składającą się z krzywej

$$C_{w'1} = Y_u(i\omega) + Y(i\omega)$$

dla

$$0 < \omega < \infty$$

i krzywej

$$C_{w'2} = Y_u(p) + Y(p)$$

dla

$$|p| \rightarrow \infty \quad \text{i} \quad \frac{\pi}{2} < \arg p < 0,$$

zaś

$$C_w' = C_{w'1} + C_{w'2}$$

¹ O ile $Y_u(p)$ i $Y(p)$ mają stopień licznika co najmniej o jeden większy od stopnia mianownika.

wówczas otrzymamy

$$\frac{1}{\pi i} \int_{C_{w'}} \frac{dw_y}{w_y} = \frac{1}{\pi} \Delta C_{w'} \arg w_y = -N. \quad (11)$$

Obchodzimy więc końcem promienia wodzącego krzywą $C_{w'}$ (dla $0 < \omega < \infty$) i badamy przyrost kąta promienia wodzącego. Zatem układ jest stabilny, gdy przyrost kąta $\Delta C_{w'} \arg w_y = 0$. W celu określenia, kiedy układ jest stabilny, można więc korzystać z charakterystyki częstotliwościowej oporu ujemnego, która może być również podana z pomiaru.

Wykażemy teraz, że dwójnik klasy I musi być oporem ujemnym. W tym celu załączamy dwójnik na SPM $J(p)$ jednostkową i wówczas

$$U(p) = \frac{J(p)}{Y_u(p)} = \frac{J}{Y_u(p)}$$

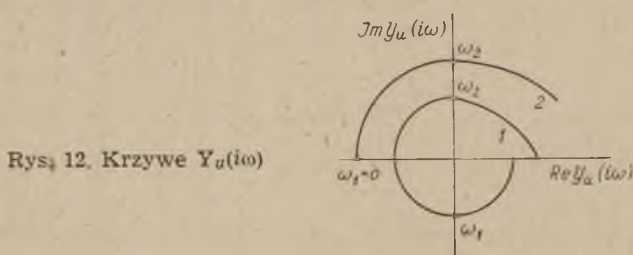
Posłużmy się charakterystyką częstotliwości. W tym przypadku $Y(p) = 0$, a zatem kwestię stabilności rozwiąże krzywa

$$w_y(i\omega) = Y_u(i\omega),$$

czyli charakterystyka częstotliwości samego dwójnika. Układ taki, jako załączony na opór nieskończenie wielki jest niestabilny (patrz ustęp 3.1, punkt d), a więc musi być:

$$\Delta C_{w'} \arg Y_u(i\omega) < 0,$$

czyli krzywa $Y_u(i\omega)$ musi obejmować punkt 0 (patrz rys. 12, krzywa 1 lub 2). Z rysunku widać, że wtedy dla pewnego zakresu częstotliwości



Rys. 12. Krzywe $Y_u(i\omega)$

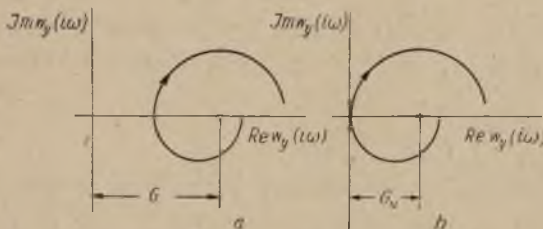
(dla krzywej 1 $\omega_1 < \omega < \omega_2$, dla krzywej 2 $0 < \omega < \omega_2$) składowa rzeczywista admitancji jest ujemna, a więc

$$90^\circ < \varphi < 270^\circ.$$

Z kolei wyjaśnimy znaczenie G_u . Jeżeli opór ujemny był załączony na przewodność G nieskończenie dużą (był zwarty) i przewodność tę będziemy zmniejszali, to przy wartości $G = G_u$ układ musi przejść ze stanu stabilnego do niestabilnego. Rozpatrując to zagadnienie za pomo-

cą charakterystyk częstotliwości $w_y(i\omega)$ na płaszczyźnie p otrzymamy rys. 13. Obraz krzywej $w_y(i\omega)$ będzie się w miarę zmniejszania G przesuwał w lewo. Ponieważ funkcja $Y_u(p)$ nie ma biegunów na prawej półpłaszczyźnie (twierdzenie c), ustęp 3.2), to nie może ich mieć i funkcja $Y_u(p) + G$, ponieważ przyjmuje ona wartości nieskończenie duże dla tych samych p co i $Y_u(p)$.

W chwili, w której krzywa zaoznie obejmować punkt 0 układ stanie się niestabilny. Według twierdzenia a) i b) (ustęp 3.2) przypadek ten zachodzi dla wartości $G = G_u$, zaś z rys. 13 b widać, że wartość owa jest

Rys. 13. Wyznaczenie G_u

najmniejszą przewodnością opczu ujemnego dla częstotliwości ω_u , przy której składowa bierna admitancji $Y_u(i\omega)$ jest równa zeru:

$$-G_u = \min Y_u(i\omega_u), \quad (12)$$

gdzie ω_u — częstotliwości, dla których $\text{Im } Y_u(i\omega) = 0$.

Z tych samych rysunków wynika, że w otoczeniu punktu $-G_u = \min Y_u(i\omega)$ krzywa $Y_u(i\omega)$ musi mieć przebieg z dołu do góry:

$$\left. \frac{d}{d\omega} \text{Im } Y(i\omega) \right|_{\omega = \omega_u} < 0 \quad (13)$$

albo

$$\left. \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_u} < 0. \quad (14)$$

D o w ó d

Tylko wtedy przyrost kąta Δ_{C_w} , $\arg Y_u(i\omega)$ z punktu 0 może być mniejszy od zera

$$\Delta_{C_w}, \arg Y_u(i\omega) < 0,$$

co jest równoznaczne z istnieniem zera, a więc niestabilnością. Gdyby $\Delta_{C_w}, \arg Y_u(i\omega) > 0$, to mielibyśmy biegun, co jest sprzeczne z założeniem.

Sprawdzenia, czy dana funkcja $Y_u(p)$ spełnia podane wyżej warunki, można dokonać w dwojaki sposób:

1. Przez badanie funkcji $Y_u(p)$, ustalenie jej zer i biegunów.
2. Przez badanie krzywej $Y_u(i\omega)$.

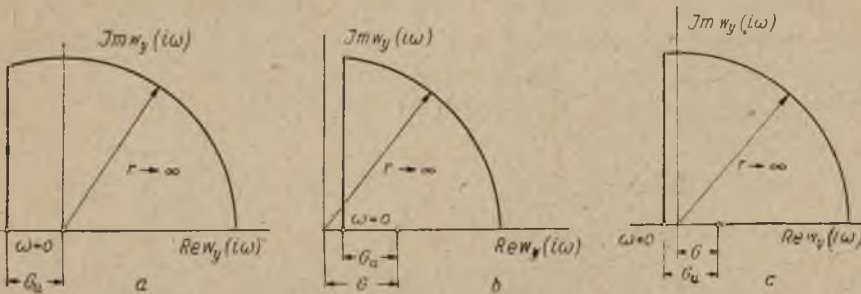
Drugi sposób jest zazwyczaj łatwiejszy. Można go jednak stosować tylko wtedy, gdy z góry wiadomo, że funkcja $Y_u(p)$ nie ma biegunów na prawej półpłaszczyźnie.

3.4. Przykłady funkcji spełniających wymagania podane w punktach 3.1—3.3

1. Najprostszą funkcją $Y_u(p)$ spełniającą powyższe wymagania jest:

$$Y_u(p) = -G_u + p C_u. \quad (15)$$

Admitancja ta odpowiada układowi zastępczemu Barkhausena (ustęp 2.3, rys. 6). Kształt krzywej admitancji dla $p = i\omega$ przedstawiony jest na rys. 14 a.



Rys. 14. Wykres $w_y(i\omega)$ dla układu zastępczego Barkhausena

a) Admitancja powyższa posiada jeden jedyny biegun $p = \infty$, spełnia więc warunek c) (ustęp 3.2). Dalsze punkty można sprawdzić bądź przez badanie admitancji $Y_u(p)$, bądź przez badanie krzywej $Y_u(i\omega)$ według metody podanej w ustępie 3.3.

b) Funkcja posiada jeden pierwiastek dodatni

$$p = \frac{G_u}{C_u},$$

spełnia więc warunek d) (ustęp 3.2). Na rysunku 14 a krzywa C_w obejmuje punkt 0.

c) Dla $G > G_u$ mamy:

$$p = \frac{G_u - G}{C_u} < 0,$$

co widać również z wykresu, który przedstawia rys. 14 b. Funkcja spełnia więc warunek a) (ustęp 3.2).

d) Dla $G < G_u$ mamy jeden pierwiastek dodatni:

$$p = \frac{G_u - G}{C_u} > 0,$$

co widać z rys. 14 c.

e) Z rysunków 14 a, b i c widać, że:

$$-G_u = \min Y(i\omega_u),$$

przy czym w tym przypadku $\omega_u = 0$.

f) Z rysunku 14 a widać, że

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} < 0.$$

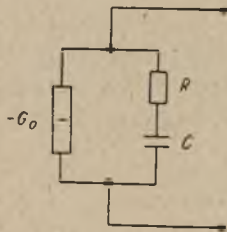
Układ taki przedstawia opór ujemny w całym zakresie częstotliwości $0 < \omega < \infty$. Ma on więc dla prądu stałego charakterystykę opadającą (np. dynatron). W przypadku niestabilności z oporem czynnym występuje jeden człon czasowy typu e^{pk^t} , gdzie p_k rzeczywiste > 0 .

Stan nieustalony jest więc aperiodyczny — układ przeskakuje do innego punktu pracy, dla którego może już być stabilny.

2. Jako drugi przykład rozpatrzmy admitancję:

$$Y_u(p) = -G_0 + \frac{1}{R + \frac{1}{pC}} = -G_0 + \frac{pC}{1 + pRC}, \quad (16)$$

której odpowiada układ zastępczy przedstawiony na rys. 15.



Rys. 15. Układ zastępczy oporu ujemnego

a) Admitancja ma jeden jedyny biegun $p = -\frac{1}{RC}$ leżący na lewej półpłaszczyźnie.

b) Pierwiastkiem $Y_u(p)$ jest

$$p = \frac{G_0}{C(1 - G_0 R)}$$

Pierwiastek ten jest większy od zera, gdy

$$G_0 < \frac{1}{R}.$$

Jest to więc warunek, by $Y_u(p)$ mogło być oporem ujemnym.

c) Obliczmy G_u . Według ustępu 3.3 (12)

$$-G_u = \min Y(i\omega_u),$$

$$Y(i\omega) = -G_0 + \frac{i\omega C}{1 + i\omega RC} \quad \omega_u = 0,$$

zatem

$$G_u = G_0.$$

d) Dla $G > G_u$ mamy:

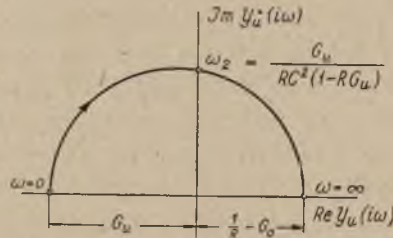
$$p = \frac{G_u - G}{C[1 + (G - G_u)R]} < 0.$$

e) Dla $G < G_u$ mamy:

$$G_u - G > 0,$$

zaś mianownik jest większy od zera, a więc $p > 0$.

Rys. 16. Wykres $w_y(i\omega)$ dla układu z rys. 15



f) Z rysunku 16 widać, że

$$\left. \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} < 0.$$

Układ taki przedstawia opór ujemny w zakresie częstotliwości $0 < \omega < \omega_2$, ma więc również charakterystykę statyczną opadającą.

3.5. Wzmacniacz ze sprzężeniem zwrotnym napięciowym jako opór ujemny klasy I¹

Według Bodego [1] administrację wejściową wzmacniacza z napięciowym sprzężeniem zwrotnym można przedstawić jako:

$$Y_u(p) = Y_0(p) [1 - K(p)\beta(p)], \quad (17)$$

gdzie

$Y_0(p)$ — admitancja wejściowa tego wzmacniacza przy wyłączonych lampach (z uwzględnieniem oporów wewnętrznych lamp),

$K(p)$ — współczynnik wzmocnienia wzmacniacza bez sprzężenia zwrotnego,

$\beta(p)$ — funkcja przejścia obwodu sprzężenia zwrotnego.

¹ Szczególny przypadek tego rodzaju rozpatrywał Crisson [6].

Na wstępie można zaznaczyć, że $Y_0(p)$, $K(p)$ i $\beta(p)$ nie mają biegunów na prawej półpłaszczyźnie:

$Y_0(p)$ jako admitancja obwodu pasywnego,

$K(p)$ jako współczynnik wzmocnienia wzmacniacza stabilnego (bez sprzężenia zwrotnego),

$\beta(p)$ jako funkcja przejścia pasywnego obwodu.

Wobec tego $Y_u(p)$ nie ma biegunów na prawej półpłaszczyźnie, gdyż bieguny $Y_u(p)$ są równocześnie biegunami $Y_0(p)$, $K(p)$ lub $\beta(p)$ i spełniony jest warunek c) (ustęp 3.2).

Aby admitancja wejściowa $Y_u(p)$ miała co najmniej jeden pierwiastek na prawej półpłaszczyźnie p musi być spełniony warunek:

$$1 - K(p)\beta(p) = 0$$

dla $Re(p) > 0$ dla co najmniej jednej wartości p . Warunek ten najlepiej sprawdzić za pomocą wykresu Nyquista.

Jeżeli krzywa Nyquista dla danego wzmacniacza obejmuje punkt -1 , to warunek ten jest spełniony, istnieje wtedy co najmniej jeden pierwiastek z dodatnią częścią rzeczywistą. Inaczej mówiąc, wzmacniacz taki musi być niestabilny, aby mógł być oporem ujemnym.

Obliczmy teraz G_u . Według (12)

$$-G_u = \min Y(i\omega_u) = \min Y_0(i\omega_u) [1 - K(i\omega_u)\beta(i\omega_u)].$$

Wielkość tę znajdziemy z charakterystyki częstotliwościowej oporu ujemnego. Charakterystykę tę można otrzymać z krzywej Nyquista przez mnożenie dla każdej wartości ω , $Y_0(i\omega)$ z $[1 - K(i\omega)\beta(i\omega)]$.

$1 - K(p)\beta(p)$ ma co najmniej jeden pierwiastek na prawej półpłaszczyźnie; $Y_0(p)[1 - K(p)\beta(p)]$ ma te same pierwiastki. Jeżeli więc krzywa

$$1 - K(i\omega)\beta(i\omega)$$

obejmuje punkt 0, to i krzywa

$$Y_0(i\omega) [1 - K(i\omega)\beta(i\omega)]$$

musi obejmować punkt 0. Z tego wynika, że dla pewnych wartości ω

$$Y_u(i\omega) = |Y_u| e^{i\varphi},$$

musi być

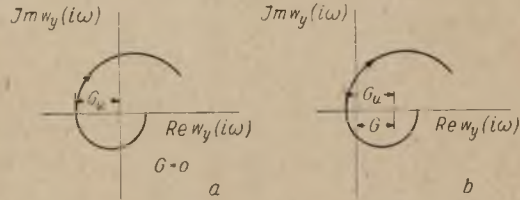
$$90^\circ < \varphi < 270^\circ,$$

a więc mamy dla pewnego zakresu opór ujemny.

Z kolei rozpatrzmy zachowanie się takiego wzmacniacza przy przyłączeniu na jego wejście przewodności G . Dołączenie takiej przewodności spowoduje przesunięcie się charakterystyki częstotliwościowej o wartość odpowiadającą G w prawo (rys. 17). Jeżeli $G < G_u$, to krzywa obejmuje punkt 0, układ jest więc niestabilny (punkt b), ustęp 3.2). Jeżeli

$G > G_u$, to krzywa nie obejmuje punktu 0, układ jest więc stabilny (pkt a), ustęp 3,2). Jeżeli mamy $K(0) = 0$ (wzmacniacz wzmacnia tylko składowe zmienne) lub $\beta(0) = 0$ (sprzężenie zwrotne tylko dla składowych zmiennych), to

$$Y_u(0) = Y_0(0) > 0.$$



Rys. 17. Wykres $w_y(i\omega)$ dla wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym

Krzywa $Y_u(i\omega)$ zaczyna się więc na prawej półpłaszczyźnie. Praktycznie zawsze spełniony jest warunek:

$$K(i\infty) = 0 \text{ lub } \beta(i\infty) = 0,$$

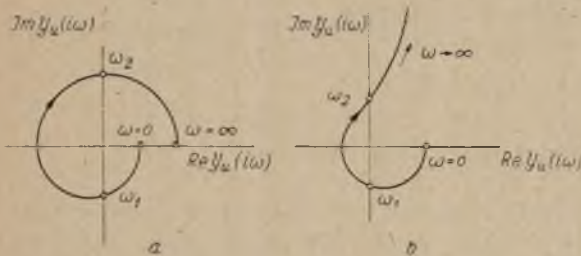
wtedy

$$Y_u(i\infty) = Y_0(i\infty).$$

Krzywa $Y_u(i\omega)$ musi się więc kończyć na prawej półpłaszczyźnie. Możliwe są tu dwa przypadki:

1) $Y_0(i\omega) =$ wartości rzeczywistej stałej, wtedy krzywa ma kształt przedstawiony na rys. 18 a,

2) $Y_0(i\infty) = i\infty$, wtedy krzywa ma kształt przedstawiony na rys. 18 b. W obu przypadkach mamy do czynienia z dwójnikiem klasy I, który tylko w pewnym zakresie częstotliwości $\omega_1 < \omega < \omega_2$ przedstawia opór ujemny. Układy takie nie mają charakterystyki statycznej opadającej.



Rys. 18. Wykres $w_y(i\omega)$ dla wzmacniacza ze sprzężeniem zwrotnym

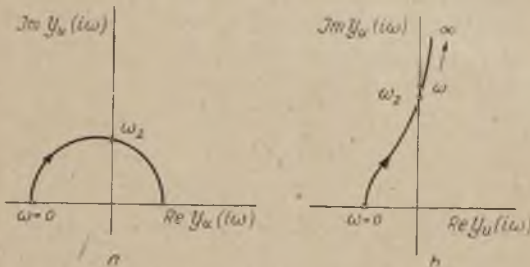
W przypadku niestabilności z oporem czynnym występują dwa członny typu $e^{p_k t}$, przy czym $\text{Re } p_k > 0$, mogą zatem w pewnych przypadkach zaistnieć drgania (sinusoidalne lub relaksacyjne).

Jeżeli

$$K(0) \neq 0 \text{ i } \beta(0) \neq 0$$

(wzmacniacz napięcia stałego i sprzężenie zwrotne dla napięcia stałego), to przy

$$K(0)\beta(0) > 1$$



Rys. 19. Wykres $w_y(i\omega)$ dla wzmacniacza prądu stałego ze sprzężeniem zwrotnym dla prądu stałego

krzywa $Y_u(i\omega)$ zaczyna się na lewej półpłaszczyźnie (rys. 19). Dwójnik w zakresie $0 < \omega < \omega_2$ przedstawia więc opór ujemny. Tego rodzaju układ będzie miał charakterystykę statyczną opadającą.

4. Własności oporu ujemnego klasy II

Według klasyfikacji przeprowadzonej w ustępie 1.1 dwójnik aktywny połączony z dużym oporem czynnym powinien być stabilny, zaś przy zmniejszaniu wartości tegoż oporu czynnego przy pewnej jego wartości powinien on przejść ze stanu stabilnego do niestabilnego.

4.1. Własności „doświadczalne”

- Układ jest stabilny przy oporze R większym od pewnego oporu R_u , którego wartość zależy tylko od dwójnika aktywnego.
- Układ jest niestabilny przy oporze R mniejszym od tegoż R_u .
Jako dwa przypadki szczególne otrzymamy:
- Układ jest niestabilny przy zwarciu.
- Układ jest stabilny przy biegu luzem.

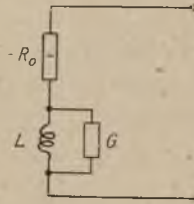
4.2. Dualność obu klas oporów ujemnych

Jak łatwo sprawdzić, wszystkie twierdzenia poprzednio wyprowadzone dla oporu ujemnego klasy I będą ważne dla klasy II po zamianie elementów

G przez R ,
 C przez L ,
 L przez C ,
 Y przez Z ,

więc przez elementy analogiczne.

Z punktu widzenia teorii obwodów opory ujemne klasy I i II są więc układami dualnymi. W szczególności oba układy zastępcze Barkhausena są układami dualnymi. Przykłady oporów ujemnych klasy II można więc otrzymać przez konstrukcję graficzną [34] z odpowiednich przykładów dla klasy I. Na przykład z rys. 15 otrzymamy rys. 20.



Rys. 20. Układ zastępczy oporu ujemnego klasy II

Charakterystyki amplitudowo-fazowe dla oporów klasy II będziemy rysowali na płaszczyźnie $Z(i\omega)$, otrzymamy wtedy dla dualnych układów te same kształty charakterystyk.

Ciekawym przykładem oporu ujemnego klasy II jest wzmacniacz z prądowym sprzężeniem zwrotnym. Jest to również układ dualny.

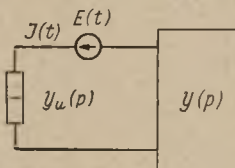
5. Stabilność układów zawierających opór ujemny

Jakikolwiek układ zawierający opór ujemny przedstawić można w postaci połączenia dwóch dwójników — oporu ujemnego — i reszty układu, traktowanej jako dwójnik. Rozpatrywać będziemy jedynie układy, które jako jedyny element aktywny zawierają opór ujemny.

5.1 Stabilność układów zawierających opór ujemny klasy I

W obwodzie przedstawionym na rys. 21 działa SEM jednostkowa $E(p)$, wówczas

$$J(p) = \frac{E(p)}{\frac{1}{Y_u(p)} + \frac{1}{Y(p)}} = \frac{E Y(p) Y_u(p)}{Y(p) + Y_u(p)} \quad (18)$$



Rys. 21. Załączenie SEM $E(p)$ na obwód $Y_u(p)$, $Y(p)$

Układ będzie stabilny, jeżeli $J(p)$ nie ma na prawej półpłaszczyźnie p biegunów.

Licznik wyrażenia nie ma tam biegunów:

$Y(p)$ jako admitancja obwodu pasywnego,

$Y_u(p)$ jako opór ujemny klasy I (ustęp 3.2, punkt c).

Wobec tego biegunami $J(p)$ mogą być tylko zera mianownika. Warunkiem stabilności jest zatem: $Y(p) + Y_u(p)$ nie ma zer na prawej półpłaszczyźnie. Badanie tego warunku można wykonać przy użyciu metody podanej w ustępie 3.2. Zaznaczyć należy, że funkcja $Y(p) + Y_u(p)$ jest regularna na prawej półpłaszczyźnie (nie ma tam biegunów, bo ani $Y(p)$, ani $Y_u(p)$ ich tam nie ma). W myśl podanego tam sposobu należy wykresić krzywą:

$$w_y(i\omega) = Y(i\omega) + Y_u(i\omega) \text{ dla } \omega > 0$$

oraz badać przyrost kąta promienia wodzącego z punktu 0 przy pełnym jego obiegu wzdłuż tej krzywej (dla $0 < \omega < \infty$). Mając krzywe $Y(i\omega)$ i $Y_u(i\omega)$ podane z osobna na wykresie, należy utworzyć ich sumę, punkt po punkcie dla każdego ω .

Jeżeli mamy do czynienia z układami zastępczymi Barkhausena, to narysowanie krzywej $w_y(i\omega)$ jest nadzwyczaj proste [12].

Podzielmy krzywą $w_y(i\omega)$ na odcinki leżące na prawej półpłaszczyźnie (k_+) i na odcinki leżące na lewej półpłaszczyźnie (k_-) wówczas

$$\Delta_{C_w} \arg w_y(i\omega) = \sum_{k=1}^n \Delta_{k-} + \sum_{k=1}^m \Delta_{k+} = -N\pi, \quad (19)$$

gdzie

Δ_{k-} — przyrost kąta na „ujemnym“ k -tym odcinku krzywej,

Δ_{k+} — przyrost kąta na „dodatnim“ k -tym odcinku krzywej.

Na rysunku 22 a, b, c i d są przedstawione niektóre możliwe przebiegi krzywej $w_y(i\omega)$ na lewej półpłaszczyźnie. Z rysunków tych wynika, że

$$\Delta_{k-} \neq 0 \text{ oraz } \Delta_{k+} \neq 0,$$

jeżeli początek i koniec k -tego (ujemnego) odcinka leżą na różnych półosiach, zaś

$$\Delta_{k-} = 0 \text{ oraz } \Delta_{k+} = 0,$$

jeżeli początek i koniec k -tego odcinka leżą na tej samej półosi. Dalej wynika z rysunku, że dla układu stabilnego (rys. 22 a i d)

$$\sum \Delta_{k-} = 0. \quad (20)$$

wtedy, jak wynika z równania (19), również

$$\sum \Delta_{k+} = 0. \quad (21)$$

Twierdzenie 1

W celu rozstrzygnięcia kwestii stabilności, można ograniczyć analizę albo do części krzywej leżącej na lewej półpłaszczyźnie, albo do części leżącej na prawej półpłaszczyźnie.

Twierdzenie 2

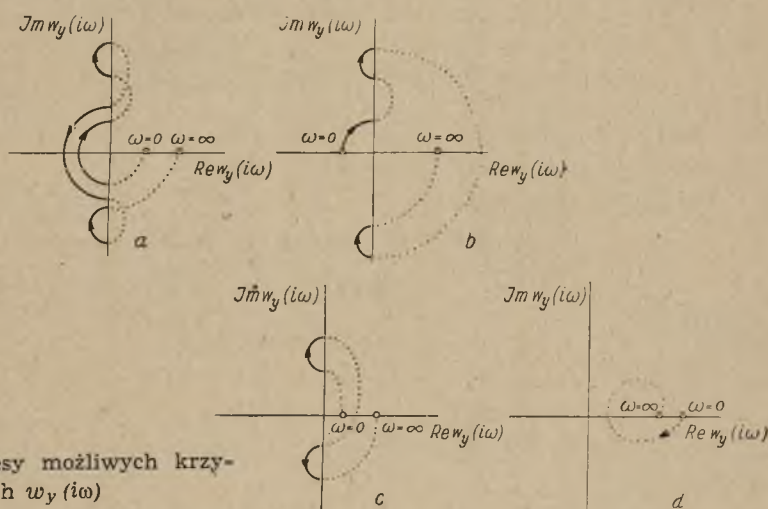
Jeżeli dwójnik I (II) jest oporem ujemnym w zakresach częstotliwości

$$\begin{aligned} \omega_1 < \omega < \omega_2, \\ \omega_3 < \omega < \omega_4, \\ \dots \\ \omega_{2n-1} < \omega < \omega_{2n}, \end{aligned} \tag{22}$$

to celem zbadania stabilności układu wystarczy zbadać sumę przyrostów kątów promieni wodzących po poszczególnych odcinkach krzywej

$$w_y(i\omega) = Y(i\omega) + Y_u(i\omega)$$

dla tych zakresów częstotliwości.



Rys. 22. Wykresy możliwych krzywych $w_y(i\omega)$

D o w ó d

Dla skrajnych częstotliwości pasma

$$\omega_s = \omega_1, \omega_2 \dots \omega_{2n}$$

$$\operatorname{Re} [w_y(i\omega_s)] = \operatorname{Re} [Y_u(i\omega_s) + Y(i\omega_s)] > 0, \tag{23}$$

bo $\operatorname{Re} Y_u(i\omega_s) = 0,$

a $\operatorname{Re} Y(i\omega_s) > 0,$

zaś ewentualne odcinki krzywej $w_y(i\omega)$ leżące na lewej półpłaszczyźnie odpowiadać mogą tylko częstotliwościom leżącym wewnątrz pasma, bo tylko dla

$$\omega_{s-1} < \omega < \omega_s$$

może być

$$\operatorname{Re} [w_y(i\omega)] < 0.$$

Twierdzenie 3

Gdy dla każdego ω , dla którego

$$\operatorname{Re} Y_u(i\omega) < 0 \quad (24)$$

jest

$$|Y(i\omega)| > |Y_u(i\omega)|, \quad (25)$$

to układ jest stabilny.

D o w ó d

Jeżeli układ ma być stabilny, to musi być:

$$\Delta_{C_w'} \arg [Y(i\omega) + Y_u(i\omega)] = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta_{C_w'} \arg [Y(i\omega) + Y_u(i\omega)] &= \Delta_{C_w'} \arg \left\{ Y(i\omega) \left[1 + \frac{Y_u(i\omega)}{Y(i\omega)} \right] \right\} = \Delta_{C_w'} \arg Y(i\omega) + \\ &+ \Delta_{C_w'} \arg \left[1 + \frac{Y_u(i\omega)}{Y(i\omega)} \right], \end{aligned}$$

ale $\Delta_{C_w'} \arg Y(i\omega)$, jako przyrost kąta dla układu stabilnego ($Y(i\omega)$ jest admitancją układu pasywnego) musi być równy zeru.

Zbadajmy dalej krzywą

$$\frac{Y_u(i\omega)}{Y(i\omega)} = \frac{|Y_u(i\omega)| e^{i\varphi_u}}{|Y(i\omega)| e^{i\varphi}} = \frac{|Y_u(i\omega)|}{|Y(i\omega)|} e^{i(\varphi_u - \varphi)};$$

ponieważ

$$|Y(i\omega)| < |Y_u(i\omega)|,$$

to

$$\operatorname{Re} \frac{Y_u(i\omega)}{Y(i\omega)} = \left| \frac{Y_u(i\omega)}{Y(i\omega)} \right| \cos(\varphi_u - \varphi) > -1,$$

a więc

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{Y_u(i\omega)}{Y(i\omega)} \right] > 0.$$

Krzywa ta leży więc w zupełności na prawej półpłaszczyźnie, zatem i dla niej

$$\Delta_{C_w'} \arg \left[1 + \frac{Y_u(i\omega)}{Y(i\omega)} \right] = 0.$$

Twierdzenie powyższe wynikałoby wprost z twierdzenia Rouché'a [16] [1], gdyby nierówność (25) spełniona była dla każdej wartości ω . Jednak wartość takiego twierdzenia byłaby znacznie mniejsza, stosowanie twierdzenia Rouché'a wymaga bowiem znajomości tych odcinków krzywych $Y_u(i\omega)$ i $Y(i\omega)$, które, jak tutaj wykazano, na stabilność nie wpływają i które poza tym są doświadczalnie trudne do otrzymania ze względu na to, że częstotliwości dla tych odcinków krzywych są albo bliskie zeru albo bardzo wysokie.

Twierdzenie odwrotne do powyższego nie zawsze jest ważne.

Twierdzenie 4

Układ jest stabilny, jeżeli

$$|Y_u(i\omega)| < |Y(i\omega)| \tag{26}$$

dla tych częstotliwości, dla których

$$\arg [Y_u(i\omega) + Y(i\omega)] = 0. \tag{27}$$

Dowód

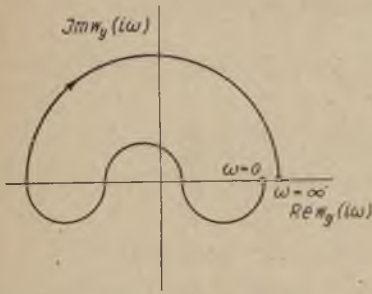
Wszystkie punkty przecięcia się krzywej

$$Y_u(i\omega) + Y(i\omega) = w_y(i\omega)$$

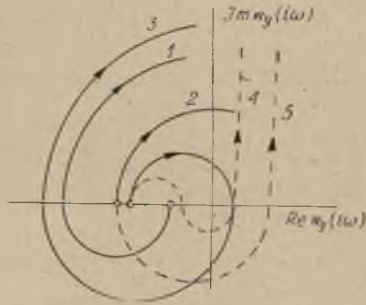
z osią rzeczywistą leżą wtedy na prawej półosi rzeczywistej (patrz rys. 22 c).

Twierdzenie odwrotne do powyższego nie musi być prawdziwe.

Na rysunku 23 przedstawiona jest charakterystyka częstotliwości układu stabilnego nie spełniającego twierdzenia odwrotnego do twierdzenia 4



Rys. 23. Wykres $w_y(i\omega)$ dla układu nie spełniającego twierdzenia odwrotnego do twierdzenia 4



Rys. 24. Możliwe przebiegi krzywych $w_y(i\omega)$

Jeżeli dany dwójnik jest oporem ujemnym począwszy od częstotliwości $\omega = 0$, to można podać twierdzenie o niestabilności.

Twierdzenie 5

Układ zawierający opór ujemny posiadający własność

$$Y_u(0) < 0 \tag{28}$$

jest na pewno niestabilny w połączeniu z obwodem, dla którego

$$Y(0) < Y_u(0). \tag{29}$$

Dowód

Krzywa

$$Y(i\omega) + Y_u(i\omega) = w_y(i\omega)$$

może mieć tylko kształt 1—3 przedstawiony na rys. 24. Kształt 4 i 5 jest wykluczony, dla niego bowiem

$$\Delta_{c_w}, \arg W_y < 0.$$

co by oznaczało, że $w_y(p)$ ma bieguny na prawej półpłaszczyźnie, co jest niemożliwe, ponieważ ani $Y(p)$, ani $Y_u(p)$ nie mogą ich tam mieć. Pozostałe krzywe (1—3) zaczynające się na lewej półosi mają

$$\Delta_{c_w}, \arg w_y < 0,$$

a więc układ jest niestabilny.

Szereg innych twierdzeń o stabilności podaje Bode [1].

5.2. Stabilność układów zawierających opór ujemny klasy II

Korzystając ze stwierdzonej w ustępie 4.2 dualności obu klas oporów ujemnych można odpowiednich twierdzeń używać również dla układów zawierających opór ujemny klasy II, po przeprowadzeniu zamiany:

$$Y_u(p) \text{ na } Z_u(p), Y(p) \text{ na } Z(p), \text{ oraz } G \text{ na } R.$$

5.3. Omówienie artykułu K. Steimela

K. Steimel [31] usiłuje wykazać, że możliwość istnienia drgań o ustalonych amplitudach:

- a) w oporze ujemnym klasy I z obwodem równoległym,
- b) w oporze ujemnym klasy II z obwodem szeregowym, zaś niemożliwość takich drgań:
- c) w oporze ujemnym klasy I z obwodem szeregowym,
- d) w oporze ujemnym klasy II z obwodem równoległym, można uzasadnić na gruncie teorii liniowej na podstawie metody Nyquista.

Steimel stosuje przy tym wprowadzone przez siebie układy zastępcze łuku i dynatronu [3].

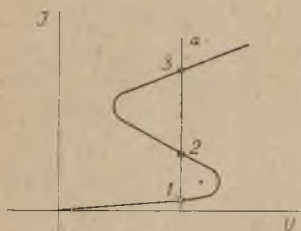
Wyniki dyskusji, zgadzają się z doświadczeniem tylko w pierwszych dwóch przypadkach. W pozostałych dwóch, a więc w tak zwanych „fałszywych“ kombinacjach, wbrew twierdzeniom Steimla nie otrzymujemy wyników zgodnych z doświadczeniem. Omówimy tu przypadek 1 c (wg numeracji Steimla).

Na wstępie należy stwierdzić, że wykres przedstawiony w jego pracy (rys. 3 c [31]) ma zły kierunek obiegu; wynika z niego, że w przypadku objęcia przezeń punktu $+1$ przyrost kąta promienia wodzącego po krzywej od punktu $\omega = 0$ do $\omega = \infty$ wynosi $+2\pi$, a więc funkcja przeniesienia wzmacniacza bez sprzężenia zwrotnego miałaby co najmniej jeden biegun na prawej półpłaszczyźnie — wzmacniacz byłby już bez sprzężenia zwrotnego niestabilny. (Podobnie błędny jest wykres przedstawiony na rys. 3 a [31]).

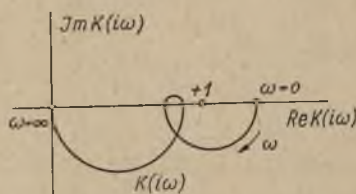
Jest to najwidoczniej pomyłka. Po uwzględnieniu tej pomyłki wynika z wykresu 3 c [31], że układ byłby stabilny. Tymczasem tak dobrany sztuczny łuk ma charakterystykę przedstawioną na rys. 25.

W tym przypadku prosta oporu¹ przecina charakterystykę w trzech punktach, z których punkt 2 (rys. 25) jest niestabilny; układ musi przeskoczyć do punktu 1 lub 3. Tego faktu doświadczalnego teoria więc nie potwierdza.

Błąd polega tu na zbytym uproszczeniu układu. Wzmacniacz z rys. 1 c [31] ma, jak to widać na rys. 3 c [31], przy częstotliwości $\omega = \infty$ jeszcze wzmocnienie $\neq 0$, jest więc układem zupełnie nierealnym.



Rys. 25. Charakterystyka sztucznego łuku



Rys. 26. Wykres $w_y(i\omega)$ dla sztucznego łuku połączonego z obwodem rezonansowym

Uwzględnienie tego, że realny wzmacniacz dla $\omega = \infty$ ma wzmocnienie równe zero (np. przez uwzględnienie pojemności wejściowej lamp), prowadzi do wykresu przedstawionego na rys. 26, z którego widać, że układ taki jest zawsze niestabilny, o ile tylko wzmocnienie dla prądu stałego jest większe od jedności (to znaczy, o ile tylko charakterystyka statyczna ma zakres oporu ujemnego). Dopiero taki układ zastępczy umożliwia opisanie zachowania się układu rzeczywistego w sposób poprawny.

Łatwo sprawdzić, że dopiero wzmacniacz realny odpowiada warunkom postawionym w rozdziale 3 i 4 dla oporów ujemnych.

6. Stabilność dla dużych pobudzeń

Dotychczasowe rozważania dotyczyły tylko stabilności dla małych pobudzeń. Stabilność dla dużych pobudzeń rozpatrzmy na podstawie metody Nyquista dla obwodów nieliniowych [21], [27], [28], [29]. Rozważania przeprowadzimy na oporze ujemnym klasy I. W tym przypadku

$$E(t) = U_u(t) + U(t).$$

¹ Jest to opór czynny dla prądu stałego obwodu równoległego, równy tutaj zero.

Stosując transformację Laplace'a-Carsona otrzymamy:

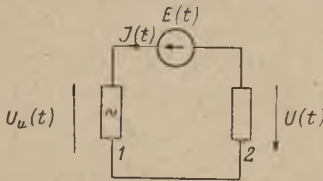
$$\mathcal{L}_c E(t) = \mathcal{L}_c U_u(t) + \mathcal{L}_c U(t),$$

ale

$$\mathcal{L}_c E(t) = E(p),$$

$$\mathcal{L}_c U(t) = U(p) = \frac{J(p)}{Y(p)}.$$

Założmy, że elementy biernego oporu ujemnego włączone są w skład $Y(p)$, a więc w elemencie 1 (rys. 27) prąd jest funkcją jedynie napięcia, $J(t) = f[U_u(t)]$ charakterystyka tego elementu jest więc bezpętlowa.



Rys. 27. Połączenie oporu ujemnego z dwójnikiem pasywnym

Założmy na początku, że napięcie na oporze ujemnym zmienia się skokowo:

$$U_u(p) = U_m,$$

wtedy prąd $J(t)$ zmienia się również skokiem.

Można dla tego przypadku napisać operatorowo:

$$J_s(p) = [U_u(p)]$$

i utworzyć admitancję operatorową:

$$Y_s(p) = \frac{J_s(p)}{U_u(p)} = \frac{f[U_u(p)]}{U_u(p)},$$

gdzie litera s oznacza, że w ten sposób określona admitancja ważna jest jedynie dla $U_u(t)$ zmieniającego się skokowo¹. W tym przypadku $Y_s(p)$ jest funkcją jedynie „amplitudy“ napięcia U_m .

Jeżeli napięcie na oporze ujemnym zmienia się sinusoidalnie, to możemy napisać:

$$Y_{\sim}(p) = \frac{J_{\sim}(p)}{U_u(p)},$$

gdzie znaczek \sim oznacza, że admitancja określona w ten sposób ważna jest jedynie dla napięcia sinusoidalnego. W obu przypadkach mamy zatem:

$$J(p) = \frac{E(p) Y(p) Y_u(p)}{Y(p) + Y_u(p)},$$

¹ To znaczy, jeżeli $U_u(t)$ ma kształt skoku, impulsu prostokątnego lub ciągu impulsów prostokątnych.

gdzie $Y_u(p)$ równe jest odpowiednio $Y_s(p)$ lub $Y_{\sim}(p)$, zaś $E(t)$ ma kształt funkcji skokowej $E(p) = E$. Po załączeniu $E(t)$ powstanie na oporze ujemnym napięcie $U_u(t)$, które w pierwszej chwili można aproksymować funkcją skokową lub sinusoidą. Stabilność takiego układu można teraz zbadać za pomocą krzywych Nyquista. W tym celu należy narysować krzywą $Y(i\omega)$ i zbadać, czy odpowiedni punkt krzywej $Y_u(i\omega)$ odpowiadający danemu napięciu leży wewnątrz czy też zewnątrz krzywej $Y(i\omega)$ [27], [28], [29].

Punkt leżący wewnątrz krzywej oznacza, że $J(p)$ ma dla danej wartości U_m bieguny na prawej półpłaszczyźnie, układ jest więc niestabilny — prąd $J(t)$ narasta. Tym samym wzrasta również i U_m powodując dalsze przesunięcie się odpowiadającego mu punktu krytycznego aż do punktu przecięcia się charakterystyk $Y(i\omega)$ i $Y_u(i\omega)$.

Krzywa $Y_u(i\omega)$ może się przecinać z krzywą $Y(i\omega)$ w kilku punktach. Każdy punkt odpowiada pewnemu stanowi równowagi. Dla danego układu możemy mieć więcej niż jeden stan równowagi, należy wobec tego stwierdzić, czy dany stan jest stanem równowagi stabilnej czy nie. Jeżeli zwiększenie U_m w okolicy danego punktu powoduje wyjście punktu krytycznego poza charakterystykę $Y(i\omega)$, to stan równowagi w danym punkcie jest stanem równowagi stabilnej; U_m odpowiadające temu punktowi (odczytane z krzywej $Y_u(i\omega)$) jest zatem napięciem ustalonym na oporze ujemnym; ω odpowiadające temu punktowi (odczytane z krzywej $Y(i\omega)$) jest częstotliwością ustalonych drgań w układzie.

Musimy w tym miejscu odróżnić zagadnienie stabilności w danym punkcie pracy, od zagadnienia stabilności amplitudy ustalonych drgań. W pierwszej części pracy rozpatrywano tylko pierwsze zagadnienie i to dla małych pobudzeń.

Jeżeli punkt przecięcia wyznacza nam jako częstotliwość $\omega = 0$, to mamy do czynienia z pierwszym zagadnieniem, jeżeli zaś częstotliwość $\omega \neq 0$, to mamy do czynienia z drugim zagadnieniem.

Pierwszy rodzaj stabilności nazywać będziemy dalej stabilnością układu w punkcie pracy, zaś drugi rodzaj stabilnością amplitudy drgań.

Z kolei przedstawimy wykres $Y_s(i\omega)$ i $Y_{\sim}(i\omega)$ dla charakterystyk oporu ujemnego I klasy.

6.1. Obliczenie $Y_s(i\omega)$

a) Dla charakterystyki przedstawionej na rys. 28 mamy:

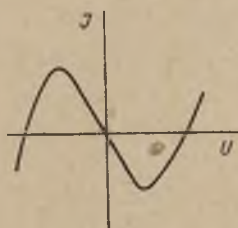
$$J(t) = a U_u^3(t) - G_u U_u(t),$$

zatem

$$Y_s(p) = a U_m^2 - G_u.$$

W dalszym ciągu operować będziemy funkcją

$$-Y_s(i\omega) = G_u - a U_m^2. \quad (30)$$



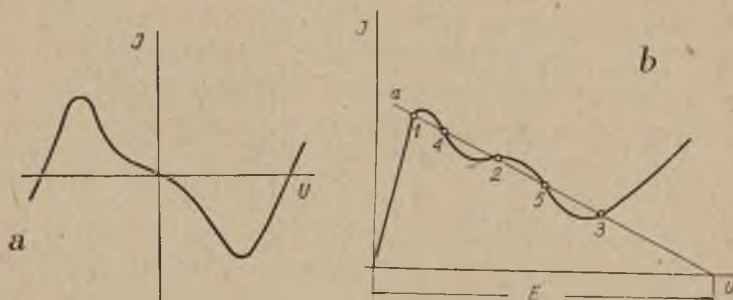
Rys. 28. Charakterystyka oporu ujemnego klasy I

b. Dla charakterystyki przedstawionej na rys. 29 a mamy:

$$J(t) = b U_u^5(t) - a U_u^3(t) - G_u U_u(t),$$

a więc

$$-Y_s(i\omega) = G_u + a U_m^2 - b U_m^4. \quad (31)$$



Rys. 29. Falista charakterystyka oporu ujemnego klasy I

c. Dla bardziej falistej charakterystyki mielibyśmy (rys. 29 b):

$$J(t) = c U_u^7(t) - b U_u^5(t) + a U_u^3(t) - G_u U_u(t),$$

a więc

$$-Y_s(i\omega) = G_u - a U_m^2 + b U_m^4 - c U_m^6. \quad (32)$$

Wykresy funkcji $-Y_s(i\omega)$ są przedstawione w następnych ustępach.

6.2. Obliczenie $Y_{\sim}(i\omega)$

a) Dla charakterystyki przedstawionej na rys. 28 mamy:

$$J(t) = a U_u^3(t) - G_u U_u(t),$$

a więc przy

$$U_u(t) = U_m \sin \omega t$$

$$J(t) = \left(\frac{3}{4} a U_m^3 - G_u U_m \right) \sin \omega t - \frac{1}{4} a U_m^3 \sin 3\omega t,$$

zatem

$$J(p) = \left(\frac{3}{4} a U_m^3 - G_u U_m \right) \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} - \frac{1}{4} a U_m^3 \frac{3p\omega}{p^2 + 9\omega^2},$$

skąd

$$-Y_{\sim}(p) = \left(G_u - \frac{3}{4} a U_m^2 \right) + \frac{3}{4} a U_m^2 \frac{p^2 + \omega^2}{p^2 + 9\omega^2};$$

otrzymamy wtedy dla $-Y_{\sim}(i\omega)$:

$$-Y_{\sim}(i\omega) = -\frac{3}{4} a U_m^2 + G_u,$$

$Y_{\sim}(i\omega)$ nie jest więc zależne od ω .

b) Dla charakterystyki przedstawionej na rys. 29 a mamy odpowiednio:

$$-Y_{\sim}(i\omega) = G_u + \frac{3}{4} a U_m^2 - \frac{5}{8} b U_m^4,$$

c) Dla bardziej falistej charakterystyki otrzymamy (rys. 29 b):

$$-Y_{\sim}(i\omega) = G_u - \frac{3}{4} a U_m^2 + \frac{5}{8} b U_m^4 - \frac{35}{64} c U_m^6.$$

Wykresy tych funkcji są takie same jak dla $Y_s(i\omega)$, tylko ocyfrowanie krzywych (przez U_m) jest inne. We wszystkich przypadkach krzywe zaczynają się od tej samej wartości G_u .

Zarówno $Y_s(i\omega)$, jak i $Y_{\sim}(i\omega)$ są więc funkcjami jedynie amplitudy U_m .

Metoda Nyquista dla obwodów nieliniowych ma charakter metody przybliżonej. Wyniki otrzymane tą metodą będą tym ściślejsze, im bardziej kształt napięcia na oporze ujemnym będzie odpowiadał założonemu przebiegowi (sinusoidzie lub napięciu prostokątnemu). Mimo to metoda ta daje nawet przy znacznych odchyleniach kształtu napięcia na oporze ujemnym od założonego, jakościowo dobre wyniki.

W zależności od przewidywanego kształtu napięcia na oporze ujemnym, stosować można bądź $Y_s(i\omega)$, bądź $Y_{\sim}(i\omega)$. Jednak wyniki otrzymane w obu przypadkach różnią się tylko ilościowo. Wskazuje to na dużą elastyczność metody.

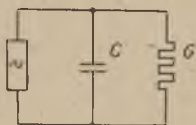
6.3 Układ: opór ujemny — obwód RC (rys. 30)

W tym przypadku

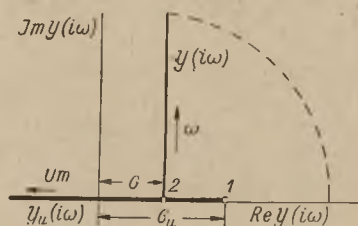
$$Y(i\omega) = i\omega C + G.$$

Krzywa ta oraz krzywa $Y_u(i\omega)$ przedstawione są na rys. 31.

Punkt odpowiadający $U_m = 0$ znajduje się wewnątrz krzywej $Y(i\omega)$; układ jest więc niestabilny w tym punkcie pracy. Punkt 2 odpowiadający przecięciu się obu charakterystyk jest punktem stabilnym, wyznacza on ustaloną amplitudę oraz częstotliwość. Częstotliwością odczytaną z krzywej $Y(i\omega)$ jest w tym przypadku $\omega = 0$. Amplitudę otrzymamy z krzywej $Y_u(i\omega)$.



Rys. 30. Układ: opór ujemny klasy I — obwód RC



Rys. 31. Wykres $Y(i\omega)$ dla układu z rys. 30

a) Przy założeniu prostokątnego napięcia na oporze ujemnym mamy w tym punkcie:

$$Y_s(i\omega) = G,$$

stąd otrzymamy

$$U_m = \pm \sqrt{\frac{G_u - G}{a}},$$

a więc wartość odpowiadającą ustalonemu napięciu na oporze ujemnym, zgodną z rzeczywistością. Mamy tu dla punktu 2 do czynienia ze stabilnością punktu pracy dla pobudzeń dowolnej wielkości; zarówno zwiększenie, jak i zmniejszenie U_m doprowadza w końcu układ z powrotem do tego punktu.

b) Przy założeniu sinusoidalnego napięcia na oporze ujemnym otrzymamy te same wyniki, tylko napięcie obliczymy teraz ze wzoru:

$$-Y_{\sim}(i\omega) = G,$$

skąd otrzymamy

$$U_m = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{G_u - G}{a}} = 1,15 \sqrt{\frac{G_u - G}{a}},$$

a więc błąd rzędu 15%.

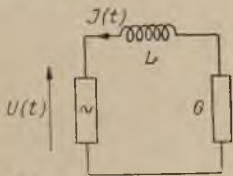
Mimo to, że w tym przypadku napięcie na oporze ujemnym nie jest sinusoidalne, wyniki są jakościowo zupełnie poprawne.

6.4. Układ: opór ujemny — obwód RL (rys. 32)

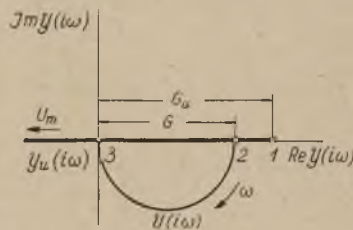
Mamy tutaj:

$$Y(i\omega) = \frac{1}{R + i\omega L}$$

Odpowiednie krzywe przedstawiono na rys. 33, z którego wynika, że dla $G < G_u$ mamy do czynienia ze stabilnością punktu pracy dla małych pobudzeń, co zgodne jest z teorią liniową (patrz [12]).



Rys. 32. Układ: opór ujemny klasy I — obwód RL



Rys. 33. Wykres $Y(i\omega)$ dla układu z rys. 32

Przy założeniu prostokątnego napięcia na oporze ujemnym układ byłby stabilny, gdyby napięcie na oporze ujemnym nie przekroczyło wartości:

$$U_2 = \sqrt{\frac{G_u - G}{a}}$$

w tym przypadku napięcie ustalone wyniosłoby:

$$U_1 = 0$$

Jeśliby pobudzenie przekroczyło tę wartość, to napięcie osiągnęłoby wartość:

$$U_3 = \sqrt{\frac{G_u}{a}}$$

Powyższe wyniki są zupełnie niezgodne z rzeczywistością.

6.5. Układ: opór ujemny — obwód równoległy RLC (rys. 34)

Krzywe $Y(i\omega)$ przedstawione są na rys. 35. Punkt odpowiadający $U_m = 0$ (1) znajduje się wewnątrz krzywej $Y(i\omega)$, układ jest niestabilny w tym punkcie dla pobudzeń każdej wielkości.

Przy założeniu sinusoidalnego napięcia otrzymamy ustaloną amplitudę z wyrażenia:

$$-Y_{..}(i\omega) = \frac{RC}{L}$$

a więc

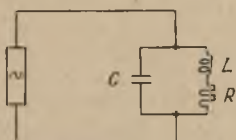
$$U_m = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{G_u - \frac{RC}{L}}{a}}$$

Wartość ta jest zgodna z wartościami otrzymywanymi innymi metodami.

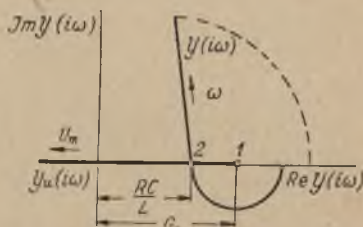
Warunkiem stabilności jest tutaj:

$$G_u < \frac{RC}{L}$$

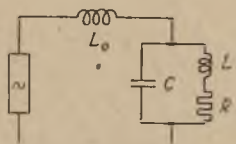
Jest to stabilność dla pobudzeń dowolnej wielkości.



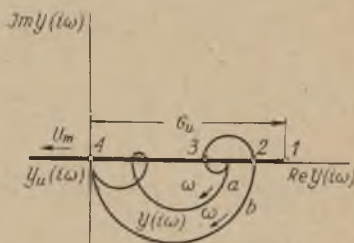
Rys. 34. Układ: opór ujemny klasy I — obwód równoległy RLC



Rys. 35. Wykres $Y(i\omega)$ dla układu z rys. 34



Rys. 36. Układ: opór ujemny klasy I L_0 — obwód równoległy RLC



Rys. 37. Wykres $Y(i\omega)$ dla układu z rys. 36

6.6. Układ: opór ujemny L_0 — obwód równoległy RLC (rys. 36)

Krzywe przedstawione są na rys. 37.

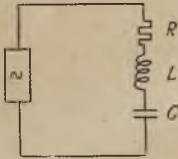
Układ byłby w punkcie 1 stabilny dla małych pobudzeń, niestabilny zaś dla dużych. Stabilna amplituda napięcia ustalonego wynosiłaby tu:

$$U_m = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{G_u}{a}}$$

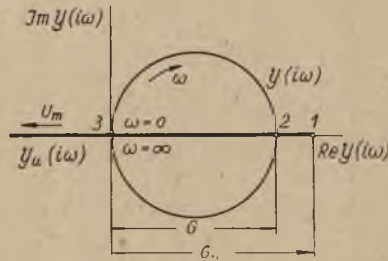
a częstość drgań $\omega = \infty$. Również i te wyniki nie są zgodne z rzeczywistością.

6.7. Układ: opór ujemny — szeregowy obwód RLC (rys. 38)

Krzywe $Y(i\omega)$ przedstawione są na rys. 39. Omawiany tu układ byłby w punkcie 1, jak to wynika z rys. 39, stabilny dla małych pobudeń,



Rys. 38. Układ: opór ujemny klasy I — obwód szeregowy RLC



Rys. 39. Wykres $Y(i\omega)$ dla układu z rys. 38

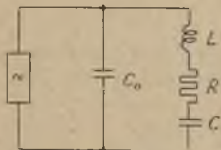
zaś ustalone napięcie po dużym pobudzeniu wynosiłoby (przy założeniu prostokątnego napięcia na oporze ujemnym):

$$U_1 = \sqrt{\frac{G_u}{a}}$$

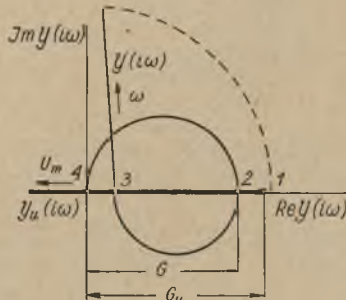
a więc wartość zgodną z rzeczywistością. Jedynie istnienie tu stabilności dla małych pobudeń (zgodnie zresztą z liniową teorią — patrz [12]) jest niezgodne z rzeczywistością.

6.8. Układ: opór ujemny — C_o — obwód szeregowy RLC (rys. 40)

Krzywe $Y(i\omega)$ przedstawione są na rys. 41.



Rys. 40. Układ: opór ujemny klasy I, C_o — obwód szeregowy RLC



Rys. 41. Wykres $Y(i\omega)$ dla układu z rys. 40

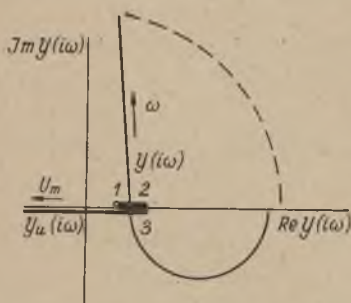
W tym przypadku układ jest niestabilny w punkcie 1 dla pobudeń każdej wielkości, zgodnie z rzeczywistością. Również napięcie ustalone,

przy założeniu prostokątnego napięcia na oporze ujemnym, jest zgodne z rzeczywistością:

$$U_3 = \sqrt{\frac{G_u}{a}}$$

6.9 „Twarde” samowzbudzenie obwodu równoległego

Jeżeli charakterystyka oporu ujemnego jest falista (rys. 29 a), to dla układu przedstawionego na rys. 34 otrzymamy charakterystyki zilustrowane na rys. 42. Jak widać z rysunku, układ jest stabilny w punkcie 1 ($U_m = 0$) dla małych pobudzeń. Punkt 2 odpowiada niestabilnej amplitudzie drgań, przypadkowe zmniejszenie się amplitudy spowoduje zaniknięcie, zaś zwiększenie amplitudy — narastanie drgań, aż do wartości odpowiadającej punktowi 3. Punkt ten wyznacza stabilną amplitudę drgań.



Rys. 42. Wykres $Y(i\omega)$ dla układu z rys. 34 przy charakterystyce z rys. 29

W tym przypadku zgodnie z rzeczywistością może być:

$$G_u > \frac{RC}{L}$$

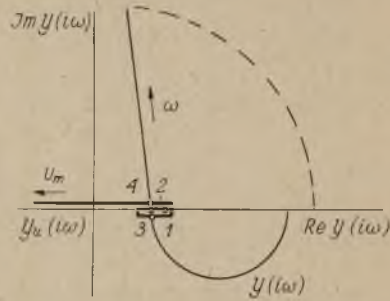
a drgania wzbudzone przez duże pobudzenie mogą istnieć.

6.10. Istnienie w zależności od sposobu wzbudzenia dwóch stabilnych amplitud w układzie oporu ujemnego z równoległym obwodem rezonansowym

Jeżeli mamy do czynienia z jeszcze bardziej falistą charakterystyką, to w układzie takim można zaobserwować, w zależności od sposobu wzbudzenia, drgania o różnej amplitudzie. Aproksymując charakterystykę krzywą siódmego stopnia pkt 6.2, (rys. 29 b), otrzymamy charakterystyki przedstawione na rys. 43.

Jak widać z rysunku, układ jest niestabilny w punkcie 1, przy czym ustalą się drgania o stabilnej amplitudzie odpowiadającej punktowi 2. Jeśliby pobudzenie przekroczyło amplitudę odpowiadającą punktowi 3,

to amplituda narodzi się do wartości odpowiadającej punktowi 4. Punkty 2 i 4 odpowiadają zatem stabilnej amplitudzie drgań, punkt 3 zaś niestabilnej.



Rys. 43. Wykres $Y(i\omega)$ dla układu z rys. 34 przy bardzo falistej charakterystyce

6.11. Stabilność punktu pracy na wznoszącej się części charakterystyki

W układzie $J'(t)$, $U'_u(t)$ charakterystyka ma postać:

$$J'_u(t) = a U'_u{}^3(t) - 3a U_0 U'_u{}^2(t) + (3a U_0{}^2 - G_u) U'_u(t),$$

a tym samym

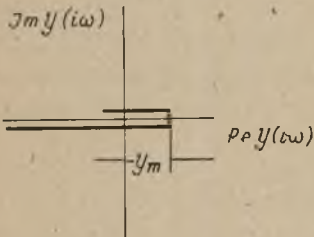
$$-Y_s(i\omega) = -a U_m{}^2 + 3a U_0 U_m - (3a U_0{}^2 - G_u).$$

Jeżeli znajdujemy się na wznoszącej się części charakterystyki, to

$$3a U_0{}^2 - G_u > 0.$$

Kształt $-Y_s(i\omega)$ przedstawiony jest na rys. 44, przy czym

$$-Y_m = -\frac{3}{4} a U_0{}^2 + G_u.$$



Rys. 44. Wykres $Y(i\omega)$ dla układu: opór ujemny klasy I — opór rzeczywisty, gdy punkt pracy znajduje się na wznoszącej się części charakterystyki

W układzie z oporem czynnym i pojemnością (rys. 31) otrzymamy stabilność punktu pracy dla pobudzeń każdej wielkości, gdy

$$G > |Y_m|,$$

a więc

$$G > \left| -\frac{3}{4} a U_0{}^2 + G_u \right|,$$

co odpowiada, jak łatwo się przekonać, przypadkowi, w którym prosta oporu przecina charakterystykę statyczną tylko w jednym punkcie ($U'_m = 0$).

Stabilność punktu pracy dla małych pobudzeń otrzymamy, gdy

$$G < |Y_m|;$$

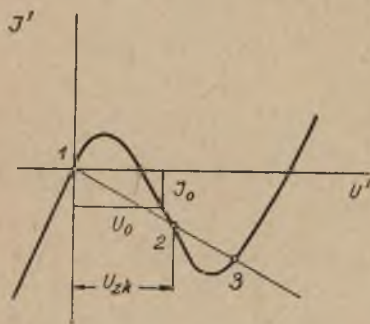
wtedy prosta oporu przecina charakterystykę statyczną w trzech punktach.

Krytyczną wielkość pobudzenia U_{zk} otrzymamy z równości

$$G = -Y_s(i\omega),$$

$$U_{zk} = \frac{3}{2} U_0 - \sqrt{\frac{9}{4} U_0^2 - 3U_0 - \frac{G - G_u}{a}},$$

gdzie U_{zk} jest, jak można się łatwo przekonać, współrzędną środkowego punktu przecięcia się prostej oporu z charakterystyką statyczną (pkt 2 na rys. 45). Dla pobudzeń większych od U_{zk} układ przeskoczy do



Rys. 45. Charakterystyka oporu ujemnego

punktu 3. Wyniki te są całkowicie zgodne z doświadczeniem. Można również wykazać, stosując admilancję $Y_{\sim}(i\omega)$, że dla punktów pracy na wznoszącej się części charakterystyki nie mogą istnieć drgania o stabilnej amplitudzie. Wtedy bowiem

$$-Y_{\sim}(i\omega) = -\frac{3}{4} a U_m^2 - (3a U_0^2 - G_u).$$

Wobec warunku

$$3a U_0^2 - G_u > 0$$

(znajdujemy się na wznoszącej się części charakterystyki) cała krzywa $-Y_{\sim}(i\omega)$ leży na lewej połowie płaszczyzny p , nie ma więc punktów przecięcia z krzywą $Y(i\omega)$.

6.12. Omówienie artykułu H. Pfeiffera

Fakt, że drgania o stabilnej amplitudzie w obwodzie równoległym mogą istnieć tylko przy połączeniu obwodu z oporem ujemnym klasy I, a w obwodzie szeregowym tylko przy połączeniu tegoż obwodu z opo-

rem ujemnym II klasy, uzasadnia H. Pfeiffer [30] na podstawie samych tylko kształtów charakterystyk statycznych oporów ujemnych.

Również i metoda Nyquista dla obwodów nieliniowych daje ten sam wynik.

W pracy niniejszej przedstawiono powyższe zjawiska dla oporu ujemnego klasy I w połączeniu z równoległym obwodem rezonansowym (pkt 6.5), a w połączeniu z obwodem szeregowym (pkt 6.7).

W tym drugim przypadku widzimy na rys. 39, że punkt 2 odpowiada niestabilnej amplitudzie drgań, małe bowiem zwiększenie amplitudy prowadzi nas do dalszego narastania amplitudy aż do osiągnięcia punktu 2, który odpowiada częstotliwości $\omega = 0$ (lub $\omega = \infty$) i nie przedstawia więc ustalonej amplitudy drgań, lecz stabilny punkt pracy.

Samo więc zakrzywienie wystarcza tutaj do wytłumaczenia niemożliwości istnienia drgań. Jednak, jak już wspomniano w punkcie 6.7, występuje tu stabilność dla małych pobudzeń, co jest sprzeczne z doświadczeniem.

Przyjęcie dodatkowej pojemności (jako najbliższego oporowi ujemnemu elementu) tłumaczy nam zgodnie z rzeczywistością niestabilność punktu pracy (pkt 1 na rys. 41) oraz niestabilność amplitudy (pkt 2, na rys. 41), niemożliwość istnienia drgań sinusoidalnych o ustalonej amplitudzie).

Okazuje się dalej, że jeżeli w układzie oporu ujemnego klasy I z obwodem równoległym przyjmie się jako element „najbliższy“ oporowi ujemnemu indukcyjność L_0 (dowolnie mała), to otrzymuje się w teorii błędne wyniki (pkt 6.6), mimo że w rzeczywistości mogą istnieć drgania o stabilnej amplitudzie. Wydaje się więc, że samo zakrzywienie charakterystyki nie wystarcza do prawidłowego opisu zjawisk zachodzących w takich układach.

6.13. Wnioski

1. Nieuwzględnienie C przy charakterystyce statycznej kształtu \sim powoduje pojawienie się przy obwodzie szeregowym dla $G < G_u$ nie istniejącej w rzeczywistości stabilności w punkcie pracy 1 (rys. 39) dla małych pobudzeń.

2. Uwzględnienie L jako pierwszego elementu za oporem ujemnym powoduje:

a) przy obwodzie R, L (pkt 6.4) pojawia się dla $G < G_u$ stabilność dla małych pobudzeń w punkcie 1 (rys. 39), która w rzeczywistości nie istnieje;

b) przy tymże obwodzie i $G > G_u$ jako napięcie ustalone otrzymuje się wartość różną od zera (pkt 3), chociaż istnieje wtedy tylko jedno

miejsce przecięcia prostej oporu z charakterystyką oporu ujemnego (dla $U = 0$);

c) przy obwodzie równoległym RLC (pkt 6.6) pojawia się dla $G < G_u$ stabilność w punkcie 1 (rys. 37) dla małych pobudzeń, a dla każdego $G > G_u$ niestabilność dla dowolnych pobudzeń, co jest niezgodne z doświadczeniem.

3) Uwzględnienie pojemności jako najbliższego oporowi ujemnemu elementu nie prowadzi nigdzie do wyników sprzecznych z doświadczeniem.

Na podstawie powyższych wyników można przypuszczać, że również i dla stabilności dla dużych pobudzeń oraz stabilności amplitudy drgań należałoby rozpatrywać opór ujemny jako element nieliniowy, posiadający charakterystykę pętlowa, to znaczy element, w którym prąd (napięcie) zależy nie tylko od napięcia (prądu) ale i jego pochodnych w czasie.

LITERATURA

- [1] H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, New York 1946.
- [2] K. Heegner, *Schwungradschaltung und Serienschaltung bei selbsterregten durch Elektronenröhren erzeugten Schwingungen*, „Zeitschrift für Hochfrequenztechnik“, 1932, str. 198.
- [3] K. Steimel, *Die Stabilität und Selbsterregung elektrischer Kreise mit Organen fallender Charakteristik*, „Zeitschrift für Hochfrequenztechnik“, 1930, str. 161.
- [4] H. Rothe, W. Kleen, *Elektronenröhren als Schwingungserzeuger und Gleichrichter*, Leipzig 1948.
- [5] G. Crissin, *Negative Impedance and the Twin 21-type Repeater*, Bell. Syst. Techn. Journ., July 1931.
- [6] Łukasiewicz, *Przyczynek do nieliniowej teorii oscylatorów z ujemnymi oporami*, „Przegląd Telekomunikacyjny“, nr 6—7, 1949.
- [7] H. Barkhausen, *Warum kehren sich die für den Lichtbogen gültigen Stabilitätsbedingungen bei Elektronenröhren um?* Physikal. Z, nr 27, 1926.
- [8] И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, Москва-Ленинград 1952.
- [9] Г. Н. Дубошин, *Основы теории устойчивости движения*. Издательство Московского Университета, 1952.
- [10] С. И. Дробов, *Радиопередающие устройства*. Москва 1951.
- [11] W. Weizel, R. Rompe, *Theorie Elektrischer Lichtbögen und Funken*, Leipzig 1949.
- [12] A. Macura, *Stabilność w obwodach elektrycznych zawierających opór ujemny*. „Przegląd Telekomunikacyjny“, nr 8, 1953.
- [13] W. Kaufmann, *Ann. d. Phys.*, nr 2, 1900, str. 158.
- [14] В. Л. Грановский, *Электрический ток в газе*, Москва-Ленинград 1952.
- [15] E. W. Herold, *Negative Resistance and Devices for obtaining it*. P.I.R.E., Oct. 1935.
- [16] F. Leja, *Funkcje analityczne i harmoniczne*. Warszawa-Wrocław 1952.
- [17] F. Strecker, *Die elektrische Selbsterregung mit einer Theorie der aktiven Netzwerke*, Stuttgart 1947.
- [18] J. Groszkowski, *Generacja i stabilizacja częstotliwości*, Warszawa 1947.

- [19] J. Groszkowski, *Charakterystyki dynatronu*. „Przegląd Elektrotechniczny”, nr 23, 1934.
- [20] J. Groszkowski, *Generatory o stałej częstotliwości*, „Przegląd Radiotechniczny”, nr 9—10, 1933.
- [21] К. Ф. Теодорчик, *Автоколебательные системы*, Москва-Ленинград 1952.
- [22] F. M. Colebrook, *The Dynatron Oscillator*, *Wir. Eng.*, nr 8, 1931.
- [23] J. E. Houldin, *The Dynatron Oscillator*, *Wir. Eng.*, Aug. 1937.
- [24] M. S. Scroggie, *Applications of the Dynatron*, *Wir. Eng.*, Oct. 1933.
- [25] E. L. Ginzton, *Stabilized Negative Impedances*, „*Electronics*”, July, Aug. Sept. 1945.
- [26] J. L. Merrill, *Theory of the Negative Impedance Converter*, *Bell. Syst. Techn. Journ.*, Jan. 1951.
- [27] E. C. Johnson, *Sinusoidal Analysis of Feedback-Control Systems Containing Nonlinear Elements*, *AIEE Transactions*, Vol. 69, part I, 1950.
- [28] R. J. Kochenberger, *A Frequency Response Method for Analyzing and Synthesizing Contactor Servomechanisms*, *AIEE Transactions*, Vol. 69, part I, 1950.
- [29] Основы автоматического регулирования, под ред. В. В. Солодовникова Москва 1954.
- [30] H. Pfeiffer, *Die Erzeugung ungedämpfter elektrischer Schwingungen in Serien und Parallelschwingkreisen*. „*Zeitschrift für angewandte Physik*”, nr 11, 1954.
- [31] K. Steimel, *Ein zweiter Beitrag zur Lösung des „Rukopschen Problems“*. „*Telefunken Zeitung*”, März 1953.
- [32] J. Groszkowski, *Indukcyjność i oporność ujemna elementu pobudzającego o zaskoku napięcia*. *Archiwum Elektrotechniki*, tom II, zeszyt 3—4, 1953.
- [33] J. Groszkowski, *O „indukcyjności” łuku i „pojemności” dynatronu*. *Archiwum Elektrotechniki*, tom III, zeszyt 1, 1954.
- [34] M. F. Gardner, J. L. Barnes, *Transients in Linear Systems*, New York 1942.
- Rękopis dostarczono 28 XII. 1955.

