ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

NR 18 ELEKTRYKA Z. 5 1958

DOC. OLDRICH KONIČEK

ZASTOSOWANIE TRANSFORMACJI LAPLACE'A PRZY OBLICZANIU SZEREGÓW FOURIERA FUNKCJI PERIODYCZNYCH

S t r e s z c z e n i e. Zagadnieniu zastosowania transformacji Laplace'a do obliczania szeregów fourierowskich funkcji periodycznych nie było dotąd w literaturze poświęcone systematyczne studium. Obok fragmentarycznych prac Mac Lachlana |10| i A.J. Lurjego |9| można jedynie spotkać się z rozwiązywaniem za pomocą tej metody pewnych konkretnych przykładów. Podobny charakter mają również uwagi porozrzucane w niektórych książkach poświęconych transformacji Laplace'a jak np. [1], [3], [6], [7].

W przedstawionej pracy będzie podane ogólne systematyczne ujęcie tego zagadnienia. Konieczna jest przy tym jedynie znajomość podstawowych zasad transformacji Laplace'a i metody Lurjego znajdowania transformaty impulsu o skończonej długości podanej w pracach [4], [8]. Przy stosowaniu przedstawionej w tej pracy metody zbędnym się staje całkowanie, a w pewnych przypadkach nawet i posługiwanie się tablicami transformat.

1. Wstęp

T w i e r d z e n i e 1. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest przedziałami regularną funkcją periodyczną o okresie T, to jej szereg Fouriera

$$a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t\right),$$

gdzie

$$a_o = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)\,d\tau$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(\tau)\cos\frac{2\pi k}{T}\tau\,d\tau$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(\tau)\sin\frac{2\pi k}{T}\tau\,d\tau \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

jest zbieżny do

$$\frac{1}{2}\left[f(t+o) + f(t-o)\right]$$

Szereg Fouriera można też napisać w postaci zespolonej.

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k\, e^{j\frac{2k\pi}{T}t},$$

gdzie

$$A_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}\, dt.$$

przy czym

$$a_o = A_o,\quad a_k = 2\,\mathrm{Re}\,A_k,\quad b_k = -2\,\mathrm{Im}\,A_k \tag{1}$$

W praktyce obliczenie współczynników (1) dla bardziej skomplikowanych funkcji periodycznych jest żmudne nawet wówczas, gdy korzystamy z tablic całek. Celem przedstawionej metody jest usunąć te trudności, tak aby współczynniki (1) można było otrzymać bez przeprowadzania jakiegokolwiek całkowania, lecz jedynie przez wyliczenie części rzeczywistej i urojonej liczby zespolonej.

W obliczeniach praktycznych można korzystać z prostych wzorów, które dalej zostaną wprowadzone.

2. Uwagi pomocnicze

2.1. Transformaty impulsów o skończonej długości

D e f i n i c j a 1. Funkcję F(p) określoną całką

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt, \quad p = x + j y \tag{2}$$

będziemy nazywać transformatą funkcji f(t) i pisać

$$F(p) = L \left\{ f(t) \right\}$$

Funkcję f(t), dla której zachodzi relacja (2), będziemy nazywali oryginałem transformaty F(p) i pisać $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$.

D e f i n i c j a 2. Funkcję określoną w następujący sposób

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < \tau_1,\ 0 \leqslant \tau_1 \\ f(t) & \text{dla } \tau_2 < t < \tau_1 \\ 0 & \text{dla } \tau_2 < t \end{cases} \tag{3}$$

będziemy nazywać impulsem o skończonej długości.

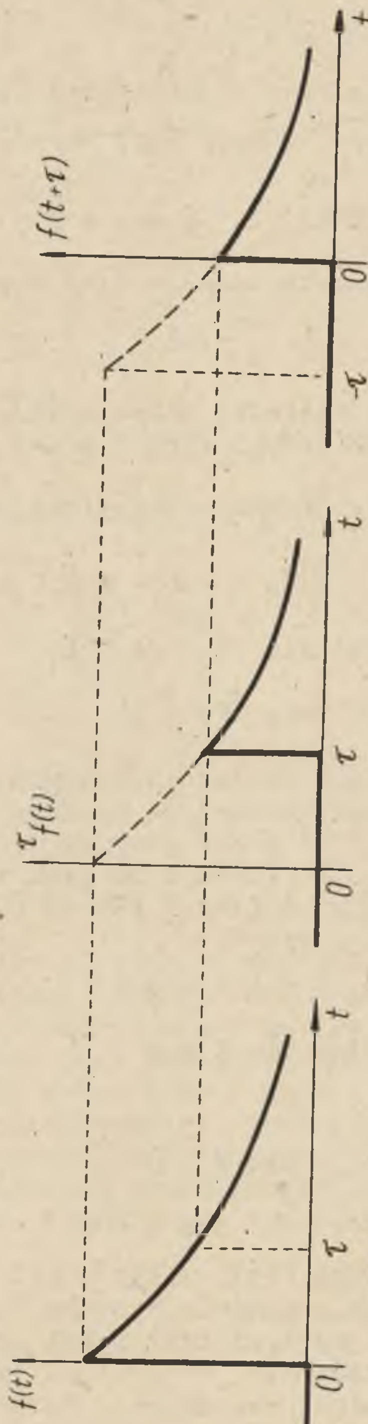
Taka funkcja jest przedstawiona na rysunku 2. Jest ona otrzymana z funkcji f(t) przez przyjęcie, że w przedziałach $0 < t < \tau_2$ i $\tau_2 < t$ funkcja ta jest równa zeru.

Oznaczamy jeszcze przez ${}^{\tau}f(t)$ i $f(t+\tau)$ funkcje zdefiniowane w następujący sposób:

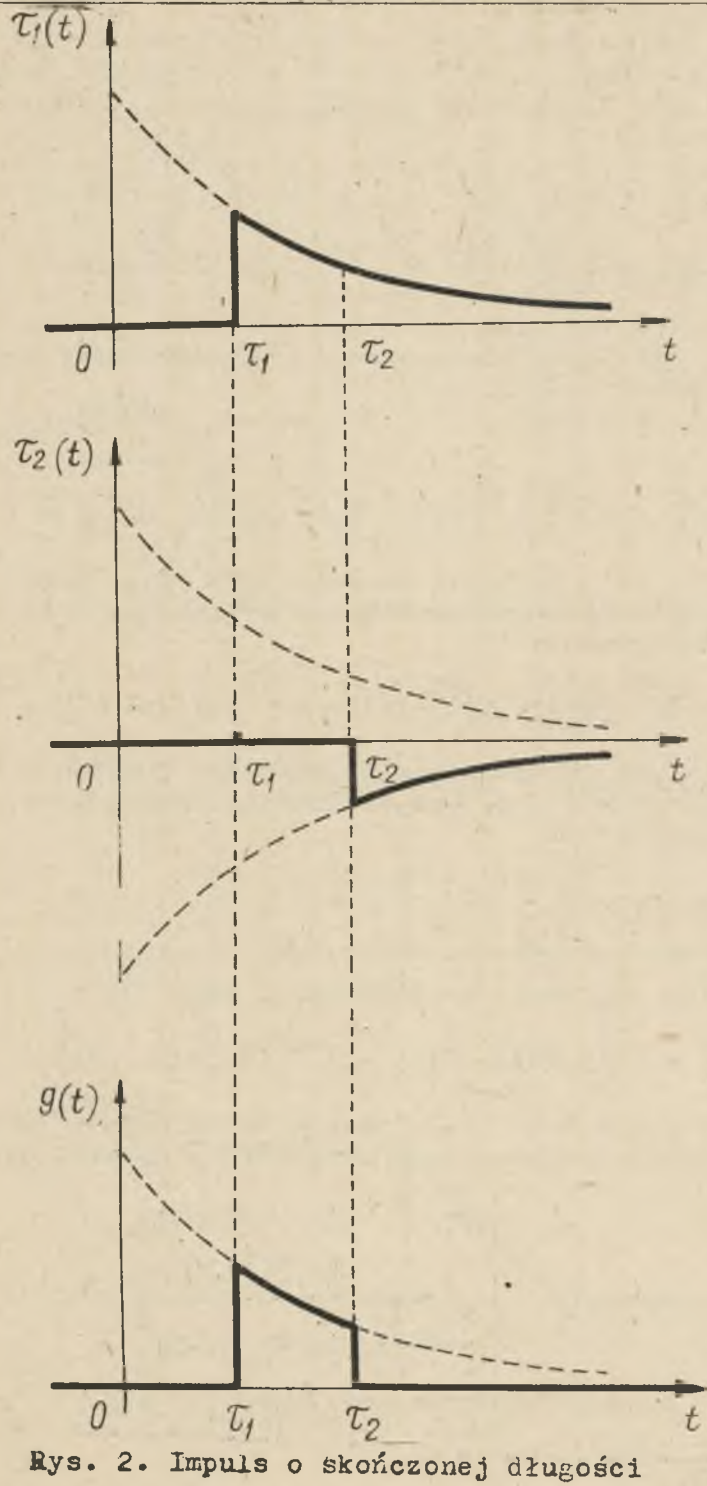
$${}^{\tau}f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ f(t) & \text{dla } \tau < t \end{cases}$$

$$f(t+\tau) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ f(t+\tau) & \text{dla } 0 < t \end{cases}$$

Zależności między funkcjami f(t), ${}^{\tau}f(t)$, $f(t+\tau)$, są łatwe do określenia na podstawie rysunku 1. Funkcja f(t) została utworzona z funkcji f(t) przez przyjęcie, że jest równą zeru w przedziale $0 < t < \tau$. W tym przypadku nie zachodzi zatem żadne przesunięcie funkcji f(t).



Rys. 1. Funkcje $\tau\, f(t)$ i $f(t+\tau)$



Rys. 2. Impuls o skończonej długości

Funkcję $^{\tau}f(t)$ możemy jednak interpretować i jako funkcję przesuniętą, mianowicie jako przesunięcie funkcji $f(t+\tau)$ o τ. Z tej uwagi wynika wprost następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e 2. Jeżeli $f(t)$ jest funkcją transformowalną wg Laplace'a (krótko L - funkcją), to

$$L\left\{^{\tau}f(t)\right\} = e^{-p\tau} L\left\{f(t+\tau)\right\}$$

Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia o przesunięciu.

Teraz już łatwo możemy znaleźć transformatę funkcji $g(t)$ określonej wzorem (3).

T w i e r d z e n i e 3. Jeżeli $f(t)$ jest L - funkcją, to

$$L\left\{g(t)\right\} = e^{-p\tau_1} L\left\{f(t-\tau_1)\right\} - e^{-p\tau_2} L\left\{f(t+\tau_2)\right\}$$

D o w ó d. Ponieważ funkcja $g(t)$ jest równa $^{\tau_1}f(t) - {}^{\tau_2}f(t)$, jak to przedstawiono na rysunku 2, więc na podstawie twierdzenia 1

$$L\left\{g(t) = L\left\{^{\tau_1}f(t)\right\} - L\left\{^{\tau_2}f(t)\right\} = e^{-p\tau_1}L\left\{f(t+\tau_1)\right\} - e^{-p\tau_1}L\left\{f(t+\tau_2)\right\}$$

W dalszych rozważaniach wyjątkowego znaczenia będzie przypadek $\tau_2 = 0$, a $\tau_2 = T$. Dlatego wprowadzimy następujące oznaczenia

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & \text{dla } 0<t<T \\ 0, & \text{dla } T<t \end{cases} \qquad (4)$$

Wówczas na podstawie twierdzenia 2 mamy

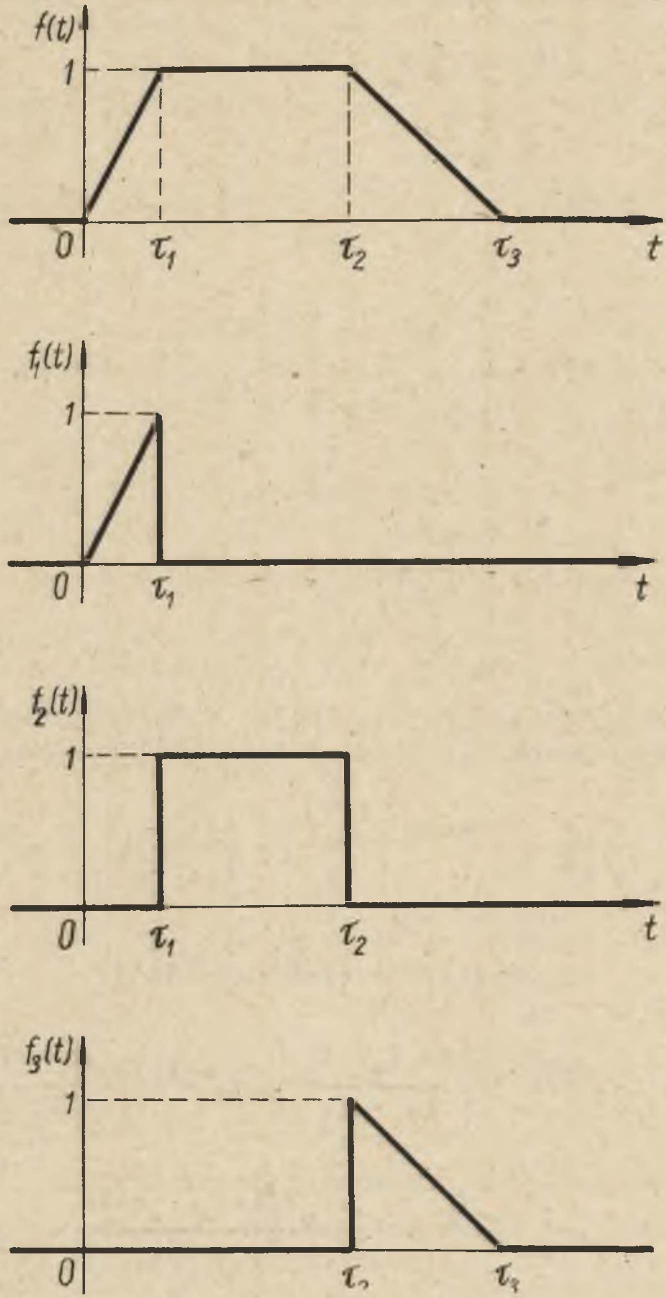
$$F_T(p) = L\left\{f_T(t)\right\} = F(p) - e^{-pT} L\left\{f(t+T)\right\} \qquad (5)$$

P r z y k ł a d 1. Znaleźć transformatę funkcji $f(t)$, której przebieg jest pokazany na rysunku 3.

Jest

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\tau_1}, & \text{dla } 0<t<\tau_1 \\ 1, & \text{dla } \tau_1<t<\tau_2 \\ \dfrac{t-\tau_3}{\tau_2-\tau_3} & \text{dla } \tau_2<t<\tau_3 \\ 0, & \text{dla } \tau_3<t \end{cases} \qquad (6)$$

1/ [3]



Rys. 3. Impuls o kształcie trapezu

Funkcję f (t) można przedstawić jako sumę trzech funkcji typu g (t):

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t),$$

gdzie

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau_1}, & 0 < t < \tau_1 \\ 0, & \tau_1 < t \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2 \\ 0, & \tau_2 < t \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \tau_2 \\ \frac{t - \tau_3}{\tau_2 - \tau_3}, & \tau_2 < t < \tau_3 \\ 0, & \tau_3 < t \end{cases}$$

Przebiegi funkcji $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ są również przedstawione na rysunku 3. Z twierdzenia (3) wynika

$$L\left\{f_1(t)\right\} = \frac{1}{\tau_1}\,\frac{1}{p^2} - e^{-p\tau_1}\,L\left\{\frac{t+\tau_1}{\tau_1}\right\} = \frac{1}{\tau_1}\,\frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-p\tau_1}\right) - \frac{1}{p}\,e^{-p\tau_1}$$

$$L\left\{f_2(t)\right\} = \frac{1}{p}\left(e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}\right) \tag{7}$$

$$L\left\{f_3(t)\right\} = e^{-p\tau_2}\,L\left\{\frac{t - \tau_2 + \tau_2}{\tau_2 - \tau_3}\right\} - e^{-p\tau_3}\,L\left\{\frac{t - \tau_2 + \tau_3}{\tau_2 - \tau_3}\right\} =$$

$$= \frac{1}{p}\,e^{-p\tau_2} - \frac{1}{p^2}\,\frac{e^{-p\tau_3} - e^{-p\tau_2}}{\tau_2 - \tau_3}$$

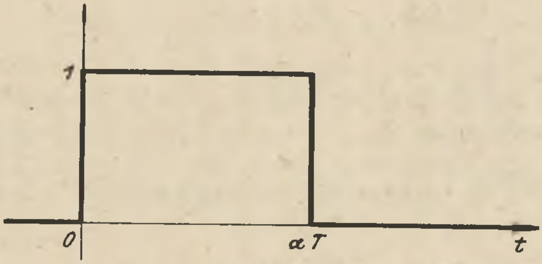
a stąd

$$F(p) = \frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{\tau_2}\left(1 - e^{-p\tau_1}\right) - \frac{e^{-p\tau_3} - e^{-p\tau_2}}{\tau_2 - \tau_3}\right] \tag{8}$$

Przyjmując za τ_1, τ_2, τ_3 odpowiednie wartości możemy otrzymać transformaty impulsów różnych kształtów.

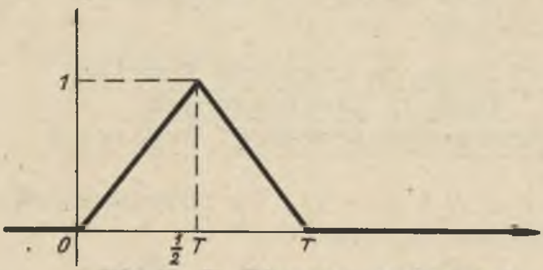
P r z y k ł a d 2. $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau_3 = \alpha T$ odpowiada impulsowi przedstawionemu na rysunku 4. Z (8) otrzymujemy dla niego

$$F_{\alpha T}(p) = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-\alpha pT}\right) \tag{9}$$



Rys.4.Impuls prostokątny

P r z y k ł a d 3. $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2}T$, $\tau_3 = T$ odpowiada impulsowi przedstawionemu na rysunku 5.



Rys. 5. Impuls trójkątny

Wówczas

$$F_T(p) = \frac{2}{T}\,\frac{1}{p^2}\left[1 - e^{-\frac{1}{2}pT}\right]^2 \tag{10}$$

2.2. Transformaty funkcji periodycznych

Korzystając z rezultatów otrzymanych w ustępie 2.1. udowodnimy następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e 4. Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia periodycznej funkcji f(t) o okresie T takiej, że $L\{f(t)\} = F(p)$ i $f(t) = f_T(t)$ dla $0 < t < T$ jest

$$F(p) = \frac{F_T(p)}{1 - e^{-pT}}, \tag{11}$$

gdzie $F_T(p)$ jest obrazem funkcji $f_T(t)$ określonej wzorami (4).

D o w ó d. Niech $f(t)$ będzie periodyczną L-funkcją o okresie T, funkcja $f(t)$ jest określona w następujący sposób

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T \\ 0, & T < t \end{cases}$$

Na podstawie twierdzenia 2

$$F_T(p) = F(p) - e^{-pT} L\{f(t+T)\} = F(p) - e^{-pT} L\{f(t)\} =$$

$$= (1 - e^{-pT}) F(p)$$

a stąd już bezpośrednio wynika (11).

Jeżeli więc $F(p)$ ma postać (11), to oczywiście wystarczy skonstruować funkcję periodyczną $f(t)$ o okresie T taką, że $f(t) = f_T(t)$ dla $0 < t < T$, które

3. Obliczanie szeregów Fouriera funkcji periodycznych za pomocą transformacji Laplace'a

T w i e r d z e n i e 5. Na podstawie określenia (4) funkcji $f_T(t)$ możemy napisać

$$F_T(p) = \int_0^\infty f_T(t)\, e^{-pT} = \int_0^T f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

a kładąc w tym wzorze $p_k = j\,\frac{2k\pi}{T}$ otrzymamy

$$F_T\left(j\,\frac{2k\pi}{T}\right) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-j\frac{2k\pi}{T}}\, dt$$

a więc jak to wynika z porównania z (1) wyrażenie na współczynnik A_k symbolicznego szeregu Fouriera podzielony przez T, czyli

$$A_k = \frac{1}{T} F_T(p_k), \qquad p_k = j\,\frac{2k\pi}{T}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

a na podstawie dalszych relacji (1)

$$\boxed{\begin{aligned} a_o &= \frac{1}{T} F_T(o) \\ a_k &= \frac{2}{T} \operatorname{Re} F_T(p_k) \\ b_k &= -\frac{2}{T} \operatorname{Im} F_T(p_k) \end{aligned}} \tag{12}$$

U w a g a 1. W twierdzeniu 7 udowodniliśmy prawdziwość wzorów (12). Zbieżność szeregu wynika natomiast z twierdzenia 1 tej pracy.

U w a g a 2. Czasami podstawienie $p = p_k$ do $F_T(p)$ prowadzi do symbolu nieoznaczonego $\frac{0}{0}$. Wtedy, jak można wykazać [5],

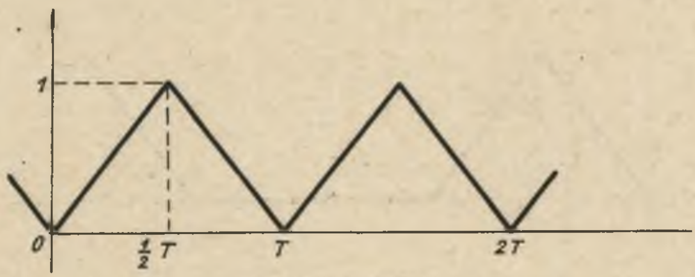
$$F_T(p_k) = \lim_{p \to p_k} F_T(p)$$

można bowiem wykazać, że $F_T(p)$ jest funkcją analityczną, a więc ciągłą dla $p \neq \infty$

P r z y k ł a d 4. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji periodycznej

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{T} t & \text{dla } nT < t < (n + \frac{1}{2})T \\ -\frac{2}{T}(t - T) & \text{dla } (n + \frac{1}{2})T < t < (n + 1)T, \end{cases}$$

której przebieg pokazany jest na rysunku 6. Przebieg odpowiadający jej funkcji $f_T(p)$ jest na rysunku 5.



Rys. 6. Funkcja periodyczna składająca się z ciągu impulsów trójkątnych

Na podstawie przykładu 3

$$F_T(p) = \frac{2}{Tp^2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}pT}\right)^2$$

a stąd

$$a_o = \frac{1}{T} F_T(o) = \frac{2}{T^2} \lim_{p \to o} \left(\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}pT}}{p}\right)^2 = \frac{2}{T^2}\,\frac{T^2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{T} F_T(p_k) = -\frac{4}{T^2}\,\frac{T^2}{4k^2\pi^2}\left(1 - e^{-k\pi j}\right)^2 = \frac{1}{k^2\pi^2}\left[1 - (-1)^k\right]^2 =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dla k parzystych} \\ \dfrac{-4}{k^2\pi^2} & \text{dla k nieparzystych} \end{cases}$$

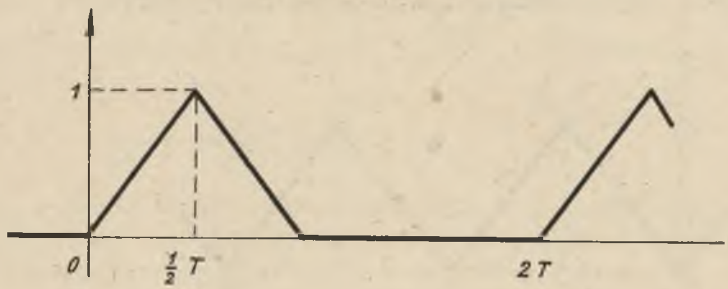
Stąd wynika

$$a_{2k} = 0, \qquad a_{2k+1} = -\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}, \qquad b_k = 0,$$

a więc

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=o}^{k=\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\frac{2(2k+1)\pi}{T}t$$

P r z y k ł a d 5. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji periodycznej f(t) o okresie 2T, której przebieg jest pokazany na rysunku 7.



Rys. 7. Funkcja periodyczna składająca się z ciągu impulsów przedzielonych przerwą

Funkcja ta ma ten sam podstawowy impuls co funkcja z przykładu 4, a dodatkowo okres przerwy w przedziale $T \div 2T$.

Stąd:

$$F_{2T}(p) = F_T(p) = \frac{2}{T}\frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}pT}\right)^2, \quad p_k = \frac{k\pi}{T}\, j$$

Jak również

$$\frac{2}{2T} F_{2T}(p) = \frac{2}{T^2\, p^2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}p\,T}\right)^2$$

a stąd

$$\frac{2}{2T} F_{2T}(p_k) = -\frac{2}{k^2\, \pi^2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}k\pi\, j}\right)^2 =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{dla } k = 4n \\ \dfrac{4}{k^2\pi^2}\, j & \text{dla } k = 4n-1 \\ -\dfrac{8}{k^2\pi^2} & \text{dla } k = 4n-2 \\ -\dfrac{4}{k^2\pi^2}\, j, & \text{dla } k = 4n-3 \end{cases}$$

Dalej

$$\frac{1}{2T} F_{2T}(o) = \lim_{p \to o} \frac{1}{4}\left(\frac{1 - e^{-\frac{1}{2}pT}}{\frac{1}{2}pT}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Ostatecznie:

$$a_o = \frac{1}{4}$$

$$a_{4k} = a_{4k-1} = a_{4k-3} = 0, \qquad a_{4k-2} = \frac{2}{(2k-1)^2\pi^2},$$

$$b_{2k} = 0, \quad b_{4k-1} = \frac{4}{(4k-1)^2\pi^2}, \quad b_{4k-3} = \frac{4}{(4k-3)^2\pi^2},$$

to jest

$$b_{2k-1} = (-1)^{k+1} \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2}$$

i

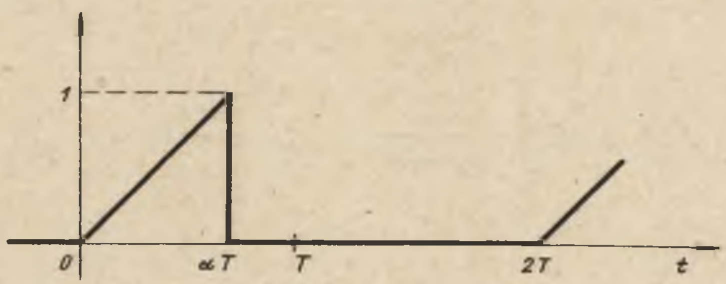
$$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left[\frac{1}{2} \cos \frac{2(2k-1)\pi}{T} t + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \sin \frac{(2k-1)\pi}{T} t \right]$$

P r z y k ł a d 6. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji periodycznej

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha T} t, & 2nT < t < (2n+\alpha) T \\ 0 ; & (2n+\alpha) T < t < 2(n+1) T, \end{cases}$$

której przebieg jest przedstawiony na rysunku 8.



Rys. 8. Funkcja periodyczna składająca się z ciągu impulsów trójkątnych przedzielonych przerwą

Z przebiegu funkcji przedstawionej na rysunku 3 i obowiązującego dla niżej podanego wzoru (8) wynika

$$F_{2T}(p) = \frac{1 - (1 + \alpha pT) e^{-\alpha pT}}{\alpha p^2 T},$$

a stąd

$$F_{2T}(o) = \lim_{p \to o} \frac{1 - (1 + \alpha pT)\, e^{-\alpha pT}}{\alpha p^2 T} = \frac{1}{2} \alpha T$$

$$F_{2T}(p_k) = - \frac{T}{\alpha k^2 \pi^2} \left[1 - (1 + \alpha k \pi j)\, e^{-k\alpha \pi j} \right]$$

a na podstawie wzorów (12)

$$a_o = \frac{1}{2T} F_{2T}(o) = \frac{1}{4} \alpha$$

$$a_k = \frac{1}{T} \operatorname{Re} F_{2T}(p_k) = - \frac{1}{\alpha k^2 \pi^2} (1 - \cos k\alpha\pi - k\alpha\pi \sin k\alpha\pi)$$

$$b_k = - \frac{1}{T} \operatorname{Im} F_{2T}(p_k) = \frac{1}{\alpha k^2 \pi^2} (\sin k\alpha\pi - k\alpha\pi \cos k\alpha\pi)$$

Autor dziękuje doc. S. Węgrzynowi za dyskusję o pracy i przekład.

LITERATURA

[1] H.S. Carslaw & J.C. Jaeger, Operational Methods in Applied Mathematics, wyd. 2, Oxford University Press, 1948.

[2] Б.А. Фукс и Б.В. Шабат, Функции комплексного переменного и некоторые из их приложения, Гостехиздат., Москва 1949.

[3] R.V. Churchill, Modern Operational Mathematics in Engeneering, Mac Graw-Hill, New York 1944.

[4] O. Koniček, Výpočet ustálené a přechodné slžky řešení obyčejné lineárni diferenciální rovnice s konstantními koeficienty. Sborník prací fakulty elektrotechn. inž. za rok 1954, SNTL, Praha 1956.

[5] O. Koniček, Konstrukce Fourierových řad periodických funkcí pomocí Laplaceovy transformace. Sborník II, vědecké konference ČVUT, faculta elektrotechnická, SNTL 1957.

[6] И.М. К о н т о р о в и ч, Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, вып. 2, Гостехиздат., Москва 1953.

[7] М.А. Л а в р е н т е в и Б.В. Ш а б а т, Методы теории функций комплексного переменного, Гостехиздат., Москва 1951.

[8] А.И. Л у р ь е, Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, вып. 2, Гостехиздат., Москва 1950.

[9] А.И. Л у р ь е, О периодическом решении системы литейных уравнений с постоянными коэффициентами. Прикл. мат. и мех. XII (1948), 353 - 362.

[10] N.W. Mac L a c h l a n, Fourier's Expansions Obtained Operationally, Phil. Mag. 24 1937, 1055-1058.

[11] J. Š t ě p i n a & O. K o n i č e k, Výpočet periodických řešení elektrických obvodů pomocí Laplaceovy transformace, Elektr. Obzor 43 1953, 9, 449 - - 504.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ ЛАПЛАСА ДЛЯ РАСЧЁТОВ РЯДОВ ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Вопросы применения трансформации Лапласа для расчётов рядов фурье периодических функций не были до сих пор в литературе систематически рассмотрены. В работе поднятся общее систематическое изложение этого вопроса. Нужно при этом только знание основных принципов трансформации Лапласа и метода Лурье, нахождения изображения импульса конечной длины, даных в работах [4] и [10]. При применению представленного в работе метода стается лишным интегрирование, а в некоторых случаях даже пользование таблицами изображений.

Доказывается именно, что коэффициенты рядов Фурье в виде

$$a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t\right),$$

можно расчитать из формул:

$$a_o = \frac{1}{T} F_T(o)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \operatorname{Re} F_T(p_k) \qquad b_k = -\frac{2}{T} \operatorname{Im} F_T(p_k)$$

где: $F_T(p)$ - трансформация за один период периодической функции $f(t)$.

Résumé

APPLICATION DE LA TRANSFORMATION LAPLACE AU CALCUL DES SERIES FOURIER DES FONCTIONS PERIODIQUES

Le problème d´application de la transformation Laplace pour le calcul des series Fourier n´etait pas jusq´a present entamé dans la bibliographie. Le récent travail donne un apercu systematique du probléme. Une connaissance des principes fondamentales de transformation Laplace et de la methode Lurie, concernant la transformation de impulses à dureé limitée travant [4] et [10] est seulement exigée au lecteur. D´aprés la methode proposée, l´integration et l´usage des tables des transformations deviennent superflues. Où démontre, que les coefficients Fourier:

$$a_o + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T} t\right)$$

peuvent être calcules d´après les formules:

$$a_o = \frac{1}{T} F_T(o)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \operatorname{Re} F_T(p_k) \qquad b_k = -\frac{2}{T} \operatorname{Im} F_T(p_k)$$

on $F_T(p)$ exprime la transformation pour une periode de la fonction en vue.