DOLP-NETTO

ZARYS RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO I CAŁKOWEGO

ORAZ

ZBIÓR ZADAŃ ROZWIĄZANYCH

PRZEŁOŻYŁ

LUDOMIR WOLFKE

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

1 9 2 2

NAKŁADEM TRZASKI, EVERTA I MICHALSKI
WARSZAWA, HOTEL EUROPEJSKI

Rachunek różniczkowy.

Funkcje jednej zmiennej niezależnej.

§ 1. Tablica wzorów na pochodne funkcji prostych.

$y = a x^n$	$\frac{dy}{dx} = n a x^{n-1}$
$y = \frac{a}{x^n} = a x^{-n}$	$= -\frac{n a}{x^{n+1}} = -n a x^{-n-1}$
$y = a\sqrt[n]{x} = a x^{\frac{1}{n}}$	$= \frac{a}{n\sqrt[n]{x^{1-n}}} = \frac{1}{n} a x^{\frac{1}{n}-1}$
$y = a\sqrt[n]{x^p} = a x^{\frac{p}{n}}$	$= \frac{p}{n} a \sqrt[n]{x^{p-n}} = \frac{p}{n} a x^{\frac{p}{n}-1}$
$y = \sqrt{x}$	$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = e^x$	$= e^x$
$y = a^x$	$= a^x \lg a$
$y = \lg x$	$= \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$= \cos x$
$y = \cos x$	$= -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$= \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{cotg} x$	$= -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \operatorname{arc}\sin x$	$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arccos x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \operatorname{arc\,tg} x$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{1+x^2}$

$y = \operatorname{arc\,cotg} x$ $\qquad$ „ $= -\frac{1}{1+x^2}$.

§ 2. Określenie funkcji jednej zmiennej niezależnej. Określenie i rozwinięcie pochodnej.

Równość, w której występuje jedna tylko wielkość nieoznaczona x związana za pomocą jakichkolwiek działań z dowolną liczbą danych i stałych wielkości $a, b, c, \ldots$ jest albo tożsamością, albo równaniem określającem tę wielkość nieoznaczoną. Tożsamością jest równość sprawdzająca się przy wszelkich wartościach wielkości x, jak np.

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Równanie jest równością, która sprawdza się nie dla każdej wartości x, przykładem takiej równości jest

$$x^2 - 2ax + b = 0.$$

Z równością taką związane jest przeto zagadnienie następujące: znaleźć tę wartość, wzgl. te wartości x, które czynią zadość danej równości. Wielkość x nazywa się wówczas wielkością niewiadomą; wyznaczenie wartości tej niewiadomej jest zadaniem teorji równań.

Równość, w której oprócz danych wielkości stałych występują dwie nieoznaczone wielkości x i y może być również tożsamością, np.

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

Jeżeli jednak równość taka nie jest tożsamością, to wówczas można rozważać ją jako równanie określające jedną z niewiadomych wielkości y (lub x), o ile drugiej wielkości, x (lub y) nadaje się jakąkolwiek określoną wartość. War-

tość ta może być wybrana dowolnie; od niej zależna jest pozostała wielkość.

Dowolnie wybrana wielkość x (lub y) nazywa się wtedy zmienną niezależną; określona w zależności od niej pozostała wielkość y (lub x) nazywa się zmienną zależną; nazywamy ją również funkcją zmiennej niezależnej.

Przykład 1: (a) $Ax+By+C=0$,

skąd (b) $y=-\frac{Ax+C}{B}$,

lub też (c) $x=-\frac{By+C}{A}$.

Przykład 2: (a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$,

skąd (b) $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,

lub też (c) $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$.

Związek pomiędzy wielkościami zmiennemi wyrażony jest w obu przykładach przez każde z równań (a), (b), (c). We wzorze (b) zmienna y przedstawiona jest w postaci wyrażenia algebraicznego zawierającego oprócz wielkości stałych jedną tylko zmienną niezależną x; mówimy wówczas, że y jest funkcją wyraźną zmiennej x. We wzorze (c) przedstawiona jest nawzajem zmienna x jako funkcja wyraźna zmiennej y. Wzory (a) określają natomiast zależność jednej zmiennej od drugiej w postaci uwikłanej. Następujące symbole:

$$y=f(x),\ y=\varphi(x),\ y=F(x),\ \ldots$$

służą wogóle do oznaczenia funkcji wyraźnych zmiennej x; w znakowaniu takiem nie wymienione są wielkości stałe związane ze zmienną niezależną x. Uwikłana zależność funkcjonalna pomiędzy zmienemi x i y może być również zaznaczona symbolicznie, a mianowicie za pomocą wzorów:

$$f(x,y)=0,\ g(x,y)=0,\ h(x,y)=0,\ \ldots$$

Istnieje wiele funkcji posiadających tę własność, że każdej wartości zmiennej niezależnej x odpowiada jedna tylko wartość y, jak np. funkcje $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sin x$; istnieją jednak również i takie wyrażenia funkcjonalne, które dla każdej wartości zmiennej x dają więcej niż jedną wartość y, np. $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\arcsin x$. Wynika stąd podział funkcji na jednowartościowe i wielowartościowe; te ostatnie mogą być dwuwartościowemi, trójwartościowemi..., a nawet nieskończenie-wielowartościowemi, jak np. $y=\arcsin x$.

Podstawiając we wzorze na pewną funkcję wyraźną $y=f(x)$ dwie różne wartości zmiennej niezależnej: x i x_1, otrzymujemy odpowiednie wartości funkcji: $y=f(x)$ i $y_1=f(x_1)$ i wówczas z obu par wartości utworzyć możemy następujący iloraz różnic:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}. \qquad (1)$$

Dla różnic tych wprowadzamy znakowanie skrócone: $x_1-x=\Delta x$, $y_1-y=f(x_1)-f(x)=\Delta y=\Delta f(x)$, wówczas iloraz (1) może być również tak napisany:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1^a)$$

Wartość ilorazu różnic jest stosunkiem przyrostu zmiennej zależnej do przyrostu zmiennej niezależnej.

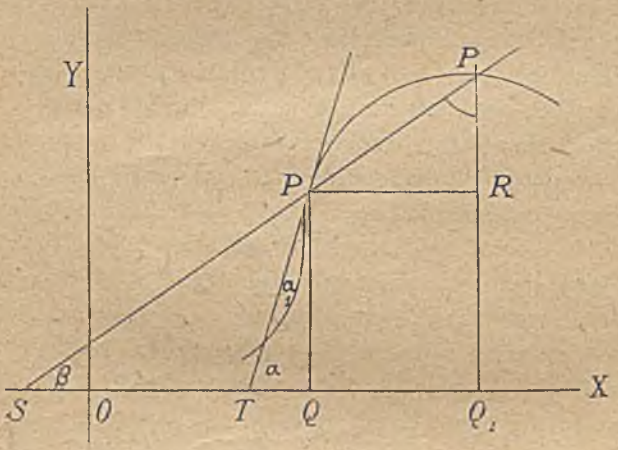
Możemy podać interpretację geometryczną ilorazu różnic. W tym celu przypominamy znane z geometrji analitycznej przedstawienie funkcji $y=f(x)$ w postaci krzywej płaskiej odniesionej do układu współrzędnych prostokątnych OX, OY. Odcięta OQ pewnego punktu P leżącego na tej krzywej stanowi wartość zmiennej x, a rzędna QP wartość funkcji $f(x)$. Odciętej x odpowiada rzędna y lub wiele rzędnych, stosownie do tego, czy $f(x)$ jest funkcją jednowartościową, czy też wielowartościową. Niechaj P oznacza punkt krzywej posiadający odciętą x i rzędną y.

Piszemy w skróceniu $P=(x, y)$. Niechaj będzie dalej $P_1=(x_1, y_1)=(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Wówczas $PR=QQ_1=x_1-x=\Delta x$ i $P_1R=y_1-y=\Delta y$, i otrzymujemy stąd

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\text{tang } \beta.$$

Tg β możemy nazwać poprostu współczynnikiem kątowym prostej SPP_1. Widocznem jest wówczas, że:

Rys 1.



Iloraz różnic (1) lub (1ª) stanowi współczynnik kątowy siecznej PP_1, która przecina krzywą w punktach $P=(x, y)$ i $P_1=(x+\Delta x, y+\Delta y)$.

O ile dana jest funkcja f to w każdym poszczególnym wypadku iloraz ten może być obliczony.

Przykład 1: $y=ax^2$, $y_1=ax_1^2$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=a\frac{x_1^2-x^2}{x_1-x}=a(x_1+x).$$

Przykład 2: $y=\sqrt{x}$, $y_1=\sqrt{x_1}$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x}}{x_1-x}=\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x}}.$$

Będziemy teraz na wykresie zmieniać położenie punktu P_1, posuwając go po linji krzywej i zbliżając nieograniczenie do stałego punktu P. Dla ustalenia prawidłowego poglądu na znaczenie analityczne takiego procesu należy wprowadzić pewne pojęcia nowe.

Rozważając wielkość rzeczywistą a bez uwzględnienia jej znaku (dodatniego lub ujemnego), mówimy o wartości bezwzględnej tej wielkości; tak np. liczby $+1$ i -1 posiadają bezwzględną wartość 1. Dla wartości bezwzględnej liczby a przyjmujemy znakowanie $|a|$.

Jeżeli pewna wielkość zmienia się w ten sposób, że jej wartość bezwzględna staje się mniejszą i w dalszym procesie zmienności pozostaje mniejszą od danej dowolnie małej wartości bezwzględnej, to taką wielkość zmienną nazywamy nieskończenie małą. Wielkość nieskończenie mała nie posiada przeto wartości stałej; jest to zmienna zbliżająca się nieograniczenie do zera.

Jeżeli różnica $\alpha - a$ pomiędzy zmienną wielkością α i stałą wielkością a jest nieskończenie mała (wartości tej różnicy zbliżają się nieograniczenie do zera), to stała wielkość a nazywa się granicą zmiennej α. Zaznaczamy to, pisząc

$$\lim(\alpha - a) = 0 \text{ albo } \lim \alpha = a$$

przyczem symbol „lim“ stanowi skrót wyrazu „limes“ (granica). Jeżeli np. zmienna α otrzymuje kolejno wartości występujące w jednym z ciągów

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots$$

$$\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{9}{8}, \tfrac{15}{16}, \cdots \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}, \frac{2^{2n+1}+1}{2^{2n+1}}, \cdots$$

to w pierwszym wypadku $\lim \alpha = 0$, a w drugim $\lim \alpha = 1$. Znak „lim“ stosujemy również i w tym wypadku, kiedy zmienna α rośnie nieograniczenie; piszemy wówczas $\lim \alpha = \infty$, aczkolwiek wtedy nie może być mowy właściwie o żadnej granicy.

Jeżeli $\lim \alpha = a$ i $\lim \beta = b$, to wynika stąd

$$\lim (\alpha \pm \beta) = a \pm b, \quad \lim (\alpha \beta) = ab,$$

ponieważ wraz z różnicami $\alpha - a$ i $\beta - b$ stają się również nieskończenie małemi i różnice

$$(\alpha \pm \beta) - (a \pm b) \text{ i}$$

$$(\alpha - a)(\beta + b) + (\alpha + a)(\beta - b) = 2(\alpha\beta - ab)$$

Zakładając dalej, że b nie jest równe zeru, mamy

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b};$$

ponieważ wraz z różnicami $\alpha - a$ i $\beta - b$ staje się jednocześnie nieskończenie małą i różnica

$$\frac{(\alpha - a)b - (\beta - b)a}{\beta b} = \frac{\alpha b - \beta a}{\beta b} = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{a}{b}$$

Uczyńmy obecnie różnicę Δx we wzorze (1ª) wielkością nieskończenie małą, biorąc stałą wartość x i zmienną x_1. Jeżeli Δy staje się wówczas również wielkością nieskończenie małą, to y nazywa się zmienną ciągłą dla rozważanej wartości x. Jeżeli y jest zmienną ciągłą dla wszelkich wartości x, zawartych pomiędzy x_1 i x_2, to mówimy, że y jest funkcją ciągłą zmiennej x w przedziale od x_1 do x_2. Pozostaje wtedy do rozstrzygnięcia pytanie, czy iloraz (1ª) dąży do pewnej granicy przy nieskończenie małych wartościach Δx. O ile tak jest istotnie, to granicę tę nazywamy pochodną funkcji y względem x i piszemy

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (2)$$

przyczem symbole $\frac{dy}{dx}$, y', $f'(x)$ są w zupełności równoznaczne. Rozważane już wyżej przykłady dowodzą, że pochodna określona jako granica ilorazu dwuch wielkości nieskończenie małych może posiadać ściśle określoną wartość skończoną.

Poszukiwanie pochodnej dla danej funkcji nazywamy różniczkowaniem funkji. Dla funkcji $y = ax^3$ mamy

$$\frac{dy}{dx} = y' = \lim a(x + x + \Delta x) = 2ax,$$

dla funkcji $y = \sqrt{x}$ $\frac{dy}{dx} = y' = \lim \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \Delta x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Odnośnie do znakowania $\frac{dy}{dx}$ należy wyraźnie zaznaczyć, że ani licznik ani mianownik w powyższym symbolu złożonym nie był osobno określony i że dx i dy nie są równoznaczne z $\lim \Delta x$ i $\lim \Delta y$ Jeżeli przeto w rozważanych przykładach napiszemy otrzymane wyniki w postaci $dy = 2ax\,dx$ albo $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ i ogólnie

$$dy = y'dx = f'(x)dx$$

to właściwe znaczenie takich wzorów jest to, które zostało wyrażone w poprzednich wzorach (2)*).

Możliwa jest prosta interpretacja geometryczna pochodnej podobna do tej, którą wskazano dla ilorazu różnic. Zachowujemy stałe położenie punktów P i Q i zbliżamy nieograniczenie punkt Q_1 do punktu Q. Wówczas punkt P_1 dąży nieograniczenie do punktu P, a położeniem krańcowem siecznej SP staje się styczna TP. Pochodna stanowi współczynnik kątowy stycznej w punkcie $P = (x, y)$:

$$\operatorname{tang} \alpha = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x). \qquad (3)$$

Na podstawie tych rozważań wstępnych możemy wy-

---

*) Iloczyn $f'(x)\,\Delta x$ nazywamy różniczką funkcji $f(x)$ względem zmiennej x i oznaczamy przez dy albo $df(x)$. Stosując pojęcie różniczki do szczególnej funkcji $f(x) = x$, pochodna której równa się 1, otrzymujemy: $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, a więc różniczką zmiennej niezależnej jest przyrost tej zmiennej. Określenie różniczki $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ i wyprowadzony z niego wniosek $dx = \Delta x$ uzasadniają znakowanie pochodnej $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. *(Przyp. tłum.)*

prowadzić wzory, podług których wykonywa się obliczanie pochodnych dla poszczególnych funkcji. Zaczynamy od funkcji $y = f(x) = ax^n$ (n jest liczbą całkowitą dodatnią).

Wartościom x i x_1 odpowiadają wartości funkcji $y = ax^n$ i $y_1 = ax_1^n$ i stąd wynika

$$\frac{dy}{dx} = \lim a\left(\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}\right) = \lim a(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}).$$

Jeżeli założymy teraz $x_1 = x$, to otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}. \tag{4}$$

Jeżeli $n = 0$, to funkcja $y = a$, jest więc wtedy wielkością stałą, a więc i $y_1 = a$. Różnica Δy jest wówczas równą zeru i jednocześnie iloraz różnic $\Delta y : \Delta x = 0$. Przechodząc do granicy, mamy dla

$$y = a = \text{Constans}, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Wzór ten może być również stwierdzony za pomocą wykresu funkcji. Dla funkcji $y = a$ wykresem jest prosta równoległa do osi OX, z którą schodzi się styczna, poprowadzona w dowolnym punkcie wykresu. Wobec tego $\alpha = 0$, $\operatorname{tang} \alpha = 0$.

Dowiedziemy następnie, że wzór (4) sprawdza się również dla ujemnych całkowitych wartości wykładnika n. Zakładamy:

$$y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n} \quad (n \text{ jest liczbą całkowitą dodatnią})$$

i znajdujemy podobnie jak wyżej

$$\frac{dy}{dx} = \lim a\frac{\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x^n}}{x_1 - x} = \lim \frac{-a}{x_1^n x^n} \cdot \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}$$

$$= \lim \frac{-a}{x_1^n x^n}(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}).$$

Jeżeli teraz założymy, że $x_1 = x$, to otrzymamy wzór (4) odpowiadający ujemnemu wykładnikowi:

$$\frac{dy}{dx} = -nax^{-n-1}.$$

Dla dalszego uogólnienia wzoru (4) wprowadzamy pojęcie funkcji odwrotnej. W związku z daną funkcją $y = f(x)$ może być rozważana pewna nowa funkcja $x = \varphi(y)$, posiadająca tę własność, że każda para wartości (x, y), czyniąca zadość jednemu z tych równań, czyni również zadość i drugiemu równaniu. Funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ znajdują się w takim związku wzajemnym, jak funkcje (b) i (c) w obu przykładach na str. 3. Łatwo pojąć, w jaki sposób przejść można od wykresu funkcji $y = f(x)$ do wykresu funkcji $y = \varphi(x)$. Należy wykonać w tym celu obrót całej dawnej figur dokoła dwusiecznej kąta utworzonego przez dodatnie promienie obu osi.

Jeżeli (x, y) i $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ stanowią dwie pary wartości czyniących zadość równaniom $y = f(x)$ i $x = \varphi(y)$, to istnieje tożsamość:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1.$$

Granica iloczynu równa się iloczynowi granic, skąd wynika:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = f'(x) \cdot \varphi'(y) = y' \cdot x' = 1, \qquad (5)$$

a więc jeżeli jedna funkcja jest funkcją odwrotną względem drugiej, to iloczyn pochodnych tych dwóch funkcji równa się jedności.

Za pomocą wykresu funkcji można również łatwo wykazać prawdziwość dowiedzionego wzoru (5), ponieważ po wykonaniu obrotu dokoła dwusiecznej należy zastąpić kąty β i α kątami $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \beta$ $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$; wobec tego

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \operatorname{tang} \alpha \cdot \operatorname{tang} \alpha_1 = 1.$$

Posługując się wzorem (5) możemy obecnie dowieść, że i dla funkcji

$$y = a\sqrt[n]{x} = ax^{\frac{1}{n}}$$

może być również wyznaczona pochodna podług wzoru (4). Odwrotna funkcja $x = \frac{1}{a^n} y^n$ posiada mianowicie pochodną

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a^n} n y^{n-1} = \frac{1}{a} n x^{1-\frac{1}{n}},$$

stąd zaś, na zasadzie wzoru (5), wynika zgodnie ze wzorem (4)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \cdot a x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Jeżeli w szczególności $y = \sqrt{x}$, to $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Funkcja funkcji. Jeżeli y jest funkcją zmiennej z, np. $y = f(z)$, a zmienna z jest sama znowu funkcją zmiennej x, np. $z = g(x)$, to wynika stąd, że $y = f[g(x)]$ jest również funkcją zmiennej x. Wartościom x i x_1 odpowiadają wartości y, y_1 i z, z_1 określone na podstawie zależności funkcjonalnych. Oznaczamy:

$$x_1 - x = \Delta x, \quad y_1 - y = \Delta y, \quad z_1 - z = \Delta z,$$

mamy wówczas tożsamość:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

i na zasadzie twierdzenia o granicy iloczynu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}. \tag{6}$$

Jeżeli y jest funkcją zmiennej z, a z jest funkcją zmiennej x, to pochodna funkcji y względem x równa się iloczynowi pochodnej funkcji y względem z przez pochodną funkcji z względem x.

Przykład: $y=(ax)^2=z^2$, zakładając: $z=ax$;

$$\frac{dy}{dz}=2z, \quad \frac{dz}{dx}=a; \quad \frac{dy}{dx}=2z\cdot a=2a^2x.$$

Dla funkcji $y=a^2x^2$ otrzymujemy ten sam wynik.

Wzór (6) może być uogólniony, gdy założymy:

$$y=f(u), \quad u=\varphi(z), \quad z=\rho(x),$$

wówczas:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}.$$

Mamy wreszcie możność dowieść obecnie wzoru (4) dla tego wypadku, kiedy wykładnik jest ułamkiem i funkcja posiada postać:

$$y=a\sqrt[n]{x^p}=ax^{\frac{p}{n}}.$$

Kładąc bowiem: $z=x^p$, otrzymujemy

$$y=az^{\frac{1}{n}}, \quad z=x^p; \quad \frac{dy}{dz}=\frac{1}{n}az^{\frac{1}{n}-1}, \quad \frac{dz}{dx}=px^{p-1},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{n}a(x^p)^{\frac{1}{n}-1}\cdot px^{p-1}=\frac{p}{n}ax^{\frac{p}{n}-1}.$$

Tym sposobem wzór (4) został dowiedziony dla wszelkich wymiernych wartości wykładnika, mamy przeto twierdzenie następujące:

Pochodną funkcji potęgowej, posiadającej wykładnik wymierny, otrzymujemy ze wzoru dla danej funkcji potęgowej mnożąc współczynnik przez wykładnik potęgi i zmniejszając następnie sam wykładnik o jedność.

Przykład 1. $f(x)=4x^3$, $f'(x)=12x^2$.

2. $f(x)=2x^{-3}$, $f'(x)=-6x^{-4}$.

3. $f(x)=4x^{\frac{3}{2}}$, $f'(x)=6x^{\frac{1}{2}}$.

4. $f(x)=2x^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x)=-x^{-\frac{3}{2}}$.

Funkcje złożone. Jeżeli funkcje jednej zmiennej niezależnej połączone są za pomocą jakkichkolwiek dzia-

łań, to wyrażenie stanowiące wynik takiego połączenia nazywamy funkcją złożoną. Jeżeli z dwuch funkcji $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ utworzona jest suma lub różnica $y=u\pm v$, to $\Delta y=\Delta u\pm\Delta v$, stąd zaś po wykonaniu dzielenia przez Δx i przejściu do granic, mamy:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx} \text{ albo } (u\pm v)'=u'\pm v'. \qquad (7)$$

Dla uogólnienia otrzymanego wzoru weźmy $v\pm w$ zamiast v; znajdujemy wówczas:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}\pm\frac{dw}{dx} \text{ albo } (u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w'.$$

Pochodna sumy funkcji jednej zmiennej niezależnej równa się sumie pochodnych poszczególnych funkcji. Pochodna różnicy dwóch funkcji jednej zmiennej niezależnej równa się różnicy pomiędzy pochodną odjemnej i pochodną odjemnika.

Dla iloczynu $y=u.v$ otrzymujemy:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v),$$
$$\Delta y=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v,$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x,$$
$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}\lim\Delta x;$$

a ponieważ ostatni wyraz powyższej równości znika, mamy przeto:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \text{ albo } (u.v)'=uv'+vu'. \qquad (8)$$

Otrzymujemy pochodną iloczynu dwuch funkcji jednej zmiennej niezależnej, mnożąc pochodną pierwszego czynnika przez drugi czynnik, a pochodną drugiego czynnika przez pierwszy czynnik i dodając następnie znalezione w ten sposób iloczyny.

Przykład 1: $y=x^3.x^4=u.v$; $u'=3x^2$, $v'=4x^3$, $y'=x^4.3x^2+x^3.4x^3=7x^6$; ten sam wynik może być otrzymany bezpośrednio dla funkcji $y=x^7$.

Przykład 2: $y=(a+bx^2)(c+ex^3)=u.v$; $u'=2bx$, $v'=3ex^2$; $y'=2bx(c+ex^3)+3ex^2(a+bx^2)=2bcx+3aex^2+5bex^4$. Wykonawszy najprzód mnożenie i obliczywszy pochodną wielomianu otrzymalibyśmy ten sam wynik.

Zastępując funkcję v iloczynem vw, należy jednocześnie wziąć $v'w+w'v$ zamiast v'; wzór (8) przybiera wówczas następującą postać:

$$y'=(uvw)'=vw.u'+uw.v'+uv.w'.$$

Jeżeli zmienny czynnik v zastąpimy stałą liczbą a, to $v'=0$ i wobec tego dla funkcji $y=au$ mamy $y'=au'$ czyli $(au)'=au'$.

Pochodna iloczynu stałego czynnika przez funkcję zmiennej x równa się iloczynowi tego czynnika stałego przez pochodną funkcji.

Dla ilorazu $y=\frac{u}{v}$ mamy:

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)},$$

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\lim\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\lim\Delta v)},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v.u'-uv'}{v^2} \qquad (9)$$

Otrzymujemy pochodną funkcji ułamkowej, mnożąc pochodną licznika przez mianownik i po-

chodną mianownika przez licznik, odejmując następnie od pierwszego iloczynu drugi i dzieląc wreszcie różnicę iloczynów przez kwadrat mianownika.

Przykład: $y=\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{u}{v}$; $u'=2x$, $v'=1$,

$$y'=\frac{2x(x-a)-1\,.\,(x^2-a^2)}{(x-a)^2}=1.$$

Rozważając daną funkcję w postaci uproszczonej $y=x+a$, otrzymujemy ten sam wynik.

Wzór na pochodną ilorazu może być otrzymany prostszą drogą za pomocą wzoru na pochodną iloczynu. Jeżeli bowiem

$$y=\frac{u}{v},\ \text{to}\ u=y\,.\,v,\ u'=vy'+yv',$$

$$y'=\frac{u'-yv'}{v}=\frac{u'-\frac{u}{v}\,.\,v'}{v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Dowiedzione twierdzenia, dotyczące pochodnych funkcji złożonych, stanowią wypadki szczególne pewnego twierdzenia ogólnego, do którego przystąpimy obecnie, wprowadzając nowe określenia.

Jeżeli $f(u, v)$ jest funkcją dwuch zmiennych u, v, to może być poszukiwana pochodna tej funkcji względem u z zachowaniem stałej wartości dla v, albo odwrotnie — pochodna względem v, gdy zmiennej u nadajemy wartość stałą. Znaleziona w ten sposób pochodna danej funkcji nosi nazwę pochodnej cząstkowej względem zmiennej u, albo v. Gdy zmienne u, v są same również funkcjami pewnej zmiennej niezależnej x, to i dana funkcja jest również funkcją zmiennej x i pochodna funkcji $f(u, v)$ względem x nosi nazwę pochodnej zupełnej. Pochodna zupełna funkcji $f(u, v)$ może być również określona względem zmiennej u, o ile v jest funkcją zmiennej u, i analogicznie — względem v, gdy u jest funkcją zmiennej v.

Z powyższego wynika, że pochodna zupełna funkcji $f(u, v)$ względem u (albo v) nie jest równoznaczna z pochodną cząstkową funkcji $fu, v)$ względem u (albo v) i wobec tego konieczne jest odrębne znakowanie pochodnej cząstkowej; stosujemy w tym celu okrągłe litery „∂“ zamiast prostych „d“:

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \lim \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u},$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \lim \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}.$$

Przechodzimy obecnie do zapowiedzianego wyżej twierdzenia. Niech będzie $y = f(u, v)$, przyczem u i v są funkcjami zmiennej x, a mianowicie $u = \varphi(x)$ i $v = \psi(x)$. Mamy znaleźć pochodną funkcji y względem x. Wartościom x i x_1 niechaj odpowiadają u, v, y i u_1, v_1, y_1. Wówczas

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v_1) + f(u, v_1) - f(u, v)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v_1)}{u_1 - u} \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{f(u, v_1) - f(u, v)}{v_1 - v} \frac{v_1 - v}{x_1 - x}.$$

Gdy x_1 dąży do x i jednocześnie u_1, v_1, y_1 do u, v, y, to

$$\lim \frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim \frac{v_1 - v}{x_1 - x} = \frac{dv}{dx}, \quad \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy}{dx},$$

$$\lim \frac{f(u, v_1) - f(u, v)}{v_1 - v} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v};$$

nie jest natomiast bezpośrednio oczywistą granica, do której dąży pierwszy iloraz prawej strony ostatniego wzoru. Widzimy jednak, że

$$\frac{f(u_1, v_1) - f(u, v_1)}{u_1 - u} - \frac{f(u_1, v) - f(u, v)}{u_1 - u}$$

wraz z przyrostem dx równocześnie dąży do zera. Granicą tej różnicy jest zero i wobec tego

$$\lim \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v_1)}{u_1 - u} = \lim \frac{f(u_1, v) - f(u, v)}{u_1 - u} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}.$$

Otrzymujemy przeto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u,v)}{dx} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{dv}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} \quad (10)$$

Znaleźliśmy wzór na pochodną zupełną funkcji y względem zmiennej x. Widzimy zatem, że: jeżeli u i v są funkcjami zmiennej x, a y jest funkcją zmiennych u i v, to pochodną zupełną funkcji y oblicza się podług powyższego wzoru za pomocą pochodnych cząstkowych tej funkcji względem u i v.

Przykład 1. Jeżeli y jest sumą lub różnicą funkcji u i v, to $y = f(u, v) = u \pm v$, $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v} = \pm 1$ i $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$. (Por. wzór 7).

Przykład 2: Jeżeli $y = f(u, v) = u \cdot v$, to $\frac{\partial f}{\partial u} = v$, $\frac{\partial f}{\partial v} = u$, $\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$. (Por. wzór 8).

Przykład 3: Jeżeli $y = f(u, v) = \frac{u}{v}$, to $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$. (Por. wzór 9).

Przykład 4: Jeżeli y jest funkcją jednej tylko zmiennej u, druga zaś zmienna v nie występuje wcale we wzorze na y, to we wzorze (10) znika drugi wyraz strony prawej; prócz tego $\frac{\partial f}{\partial u}$ jest wtedy równoznaczne z $\frac{df}{du}$ czyli $\frac{dy}{du}$. Dla funkcji $y = f(u)$ otrzymujemy wtedy: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. (Por. wzór 6).

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI

Należy pokazać obecnie w jaki sposób wzór (10) może być uogólniony. Rozważamy funkcję trzech zmiennych $y=f(u, v, w)$, przyczem u, v, w są funkcjami jednej zmiennej niezależnej x, a mianowicie: $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$, $w=\rho(x)$; nadajemy zmiennej niezależnej dwie wartości różne x i x_1 i oznaczamy odpowiednie wartości funkcji:

$$u=\varphi(x), \quad v=\psi(x), \quad w=\rho(x), \quad y=f(u, v, w)$$
$$u_1=\varphi(x_1), \quad v_1=\psi(x_1), \quad w_1=\rho(x_1), \quad y_1=f(u_1, v_1, w_1)$$

tworzymy następnie iloraz różnic:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(u_1, v_1, w_1)-f(u, v, w)}{x_1-x},$$

i nadajemy mu postać podatną do wyznaczenia granicy, a mianowicie:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(u_1, v_1, w_1)-f(u, v_1, w_1)}{u_1-u}\frac{u_1-u}{x_1-x}$$
$$+\frac{f(u, v_1, w_1)-f(u, v, w_1)}{v_1-v}\frac{v_1-v}{x_1-x}+\frac{f(u, v, w_1)-f(u, v, w)}{w_1-w}\frac{w_1-w}{x_1-x}.$$

Jeżeli teraz x_1 dąży nieograniczenie do wartości x, to znikają jednocześnie różnice (y_1-y), (u_1-u), (v_1-v), (w_1-w) i trzy liczniki zawierające częściowe przyrosty funkcji y, a rozważania podobne do tych, jakie przeprowadzono przy dowodzeniu wzoru (10) dają obecnie:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}. \qquad (10^a)$$

Funkcje algebraiczne i przestępne. Działaniami algebraicznemi nazywamy dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i podnoszenie do potęgi o wykładniku wymiernym, stałym. Jeżeli zmienna niezależna, we wzorze na daną funkcję związana jest z wielkościami stałemi za pomocą skończonej liczby działań algebraicznych, to daną funkcję nazywamy funkcją algebraiczną. Możliwem jest jednak, że pewna funkcja algebraiczna jest również wynikiem nieskończenie wielu działań algebraicznych. Tak n. p.

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+x^{n+1}+\ldots=\lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1}{1-x}$$

jest funkcją algebraiczną. Funkcje, które nie są algebraicznemi, nazywamy funkcjami przestępnemi. Należą do nich w szczególności funkcje wykładnicze e^x i a^x oraz funkcje względem nich odwrotne $\lg x$ i $\mathrm{Lg}\,x$; następnie funkcje trygonometryczne $\sin x$, $\cos x$,... i odwrotne, funkcje kołowe $\arcsin x$, $\arccos x$,...

§ 3. Zadania na poszukiwanie pochodnych funkcji algebraicznych.

1) $y=a$ $\quad \frac{dy}{dx}=0$

2) $y=ax$ $\quad$ „ $=a$

3) $y=ax+b$ $\quad$ „ $=a$

4) $y=ax^2$ $\quad$ „ $=2ax$

5) $y=2x^3$ $\quad$ „ $=6x^2$

6) $y=4ax^5$ $\quad$ „ $=20ax^4$

7) $y=-\frac{5x^3}{a}$ $\quad$ „ $=\frac{-15x^2}{a}$

8) $y=a+2bx+cx^2$ $\quad$ „ $=2b+2cx$

9) $y=\frac{a}{x}=ax^{-1}$ $\quad$ „ $=\frac{-a}{x^2}$

10) $y=\frac{a}{x^4}$ $\quad$ „ $=\frac{-4a}{x^5}$

11) $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ „ $=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

12) $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ „ $=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

13) $y=\sqrt[n]{x^p}$ $\quad$ „ $=\frac{p}{n}\cdot\sqrt[n]{x^{p-n}}$

14) $=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ „ $=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

15) $y=\dfrac{1}{5\sqrt[4]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3}{20}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$

16) $y=x^3\sqrt{x}$ $\qquad$ „ $=\dfrac{7}{2}\cdot\sqrt{x^5}$

17) $y=\dfrac{a}{x^3\sqrt{x}}$ $\qquad$ „ $=-\dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{x^9}}$

18) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2\sqrt[3]{x}}$ $\qquad$ „ $=-\dfrac{13}{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^{17}}}$

19) $y=x\sqrt{x\sqrt{x}}$ $\qquad$ „ $=\dfrac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$

20) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^3\sqrt{x}}{m}}$ $\qquad$ „ $=\dfrac{7}{6}\sqrt[6]{\dfrac{x}{m^2}}$.

W następujących przykładach należy znaleźć pochodne przez wprowadzenie zmiennej pomocniczej z podług wzoru (6).

21) $y=f(z),\ z=\varphi(x)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}$

22) $y=(a+bx)^2=z^2$ $\qquad$ „ $=2b(a+bx)$

23) $y=(a-bx)^3$ $\qquad$ „ $=-3b(a-bx)^2$

24) $y=(a+bx^2)^2$ $\qquad$ „ $=4bx(a+bx^2)$

25) $y=(a-bx^3)^5$ $\qquad$ „ $=-15bx^2(a-bx^3)^4$

26) $y=(a+x^2)^3$ $\qquad$ „ $=6x(a+x^2)^2$

27) $y=\left(a-\dfrac{1}{x}\right)^3$ $\qquad$ „ $=\dfrac{3(ax-1)^2}{x^4}$

28) $y=(a+bx+cx^2)^n$ $\qquad$ „ $=n(a+bx+cx^2)^{n-1}.(b+2cx)$

29) $y=\dfrac{1}{a+bx}=z^{-1}$ $\qquad$ „ $=\dfrac{-b}{(a+bx)^2}$

30) $y=\dfrac{1}{(a-bx^2)^3}$ $\qquad$ „ $=\dfrac{6bx}{(a-bx^2)^4}$

31) $y=\dfrac{1}{(c-x^p)^n}$ $\qquad$ „ $=\dfrac{pnx^{p-1}}{(c-x^p)^{n+1}}$

32) $y=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{(1-x)^3}$ $\qquad$ „ $=-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{9}{(1-x)^4}$

33) $y = \sqrt{a+bx} = z^{\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{b}{2\sqrt{a+bx}}$

34) $y = \sqrt{2px}$ $\quad \text{„} = \frac{p}{\sqrt{2px}}$

35) $y = \sqrt{f(x)}$ $\quad \text{„} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

36) $y = \frac{1}{\sqrt{a-bx}} = z^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \text{„} = \frac{+b}{2\sqrt{(a-bx)^3}}$

37) $y = \sqrt{a-bx^2}$ $\quad \text{„} = \frac{-bx}{\sqrt{a-bx^2}}$

38) $y = \sqrt{2ax+x^2}$ $\quad \text{„} = \frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}}$

39) $y = \sqrt{1-x^4}$ $\quad \text{„} = \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

40) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$ $\quad \text{„} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x}}{\sqrt{a^2-x^2}}$

41) $y = \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$ $\quad \text{„} = \frac{x-a}{\sqrt{(2ax-x^2)^3}}$

42) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x^3)^4}}$ $\quad \text{„} = \frac{4x^2}{\sqrt[3]{(2-x^3)^7}}$

43) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-a)^3}}$ $\quad \text{„} = \frac{-3}{4\sqrt[4]{(x-a)^7}}$

44) $y = \frac{1}{\sqrt[n]{(a+bx)^p}}$ $\quad \text{„} = -\frac{p}{n} \cdot \frac{b}{\sqrt[n]{(a+bx)^{p+n}}}$

W następujących przykładach zastosować wzór na podstawienie i dwa dalsze wzory:

45) $y = u \cdot v$ $\quad \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$

46) $y = \frac{u}{v}$ $\quad \text{„} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$

47) $y = (a^2+x^2)(a^2-x^2)$ $\quad \text{„} = -4x^3$

48) $y = (a + bx)(a - bx)$ $\quad \frac{dy}{dx} = -2b^2x$

49) $y = (1 - 2x)(1 + 3x)$ $\quad " = 1 - 12x$

50) $y = x^4(a - 2x^3)^2$ $\quad " = 4x^3(a - 2x^3)(a - 5x^3)$

51) $y = (a + x)\sqrt{a - x}$ $\quad " = \frac{a - 3x}{2\sqrt{a - x}}$

52) $y = x\sqrt{1 + x}$ $\quad " = \frac{2 + 3x}{2\sqrt{1 + x}}$

53) $y = x^2\sqrt{a - x}$ $\quad " = \frac{4ax - 5x^2}{2\sqrt{a - x}}$

54) $y = x\sqrt{1 - x^2}$ $\quad " = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

55) $y = \frac{a}{x}\sqrt{a^2 + x^2}$ $\quad " = \frac{-a^3}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

56) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}$ $\quad " = -\frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{(x^3 - 1)^2}$

57) $y = \frac{1 - x}{1 + x}$ $\quad " = \frac{-2}{(1 + x)^2}$

58) $y = \frac{1 - 2x^2}{2 - x^2}$ $\quad " = \frac{-6x}{(2 - x^2)^2}$

59) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$ $\quad " = \frac{4x(x - 3)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$

60) $y = \frac{(a + x^2)^3}{(b - x^3)^2}$ $\quad " = \frac{6x(a + x^2)^2(b + ax)}{(b - x^3)^3}$

61) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ $\quad " = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$

62) $y = \frac{\sqrt{a + bx}}{x}$ $\quad " = -\frac{2a + bx}{2x^2\sqrt{a + bx}}$

63) $y = \frac{x}{\sqrt{1 + x}}$ $\quad " = \frac{2 + x}{2\sqrt{(1 + x)^3}}$

64) $y = \sqrt{\frac{a + bx}{a - bx}}$ $\quad " = \frac{ab}{(a - bx)^2}\sqrt{\frac{a - bx}{a + bx}}$

65) $y = \frac{1}{x\sqrt{a + x}}$ $\quad " = -\frac{2a + 3x}{2x^2\sqrt{(a + x)^3}}$

66) $y=\sqrt{\frac{x}{x^2-a^2}}$ $\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+a^2}{2\sqrt{x(x^2-a^2)^3}}$

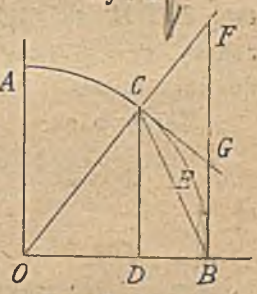
67) $y=[x+\sqrt{1+x}]^2$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2+3x+(2x+1)\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}$

§ 4. Pochodne funkcji trygonometrycznych i funkcji kołowych.

Chcąc znaleźć pochodną funkcji $y=\sin x$ należy zastosować dwa proste twierdzenia geometryczne:

Jeżeli łuk AB (Rys. 2) jest ćwiartką okręgu, to dla każdego punktu C leżącego na tym łuku mamy $CD<CB<CEB$; jeżeli następnie punkt C zbliża się nieograniczenie do punktu B, to istnieje wówczas przybliżona równość pomiędzy prostopadłą CD, cięciwą CB i łukiem CEB. Wynika stąd przybliżona równość pomiędzy wstawą (sinus) i teoretyczną wartością kąta (dla bardzo małych kątów).

Rys. 2.

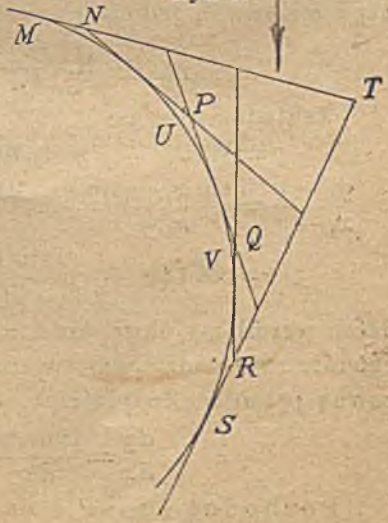


Jeżeli $MUVS$ (Rys. 3) jest łukiem dowolnym lecz jednostronnie wypukłym i proste MN, NP, PQ, QR, RS są stycznemi do tego łuku, to

$$MN+NP+PQ+QR+RS<MT+TS$$

i nierówność ta pozostaje prawdziwą bez względu na liczbę tych stycznych pośrednich, które dotykają krzywej w punktach leżą-

Rys. 3.



cych pomiędzy punktami M i S. Gdy powiększamy do nieskończoności liczbę stycznych pośrednich, zbliżając jednocześnie nieograniczenie każdą parę sąsiednich punktów styczności, to z powyższej nierówności otrzymujemy nową nierówność dotyczącą długości łuku: $MUVS < MT + TS$. Jeżeli następnie punkt M zbliża się nieograniczenie do punktu S, to otrzymana nierówność zamienia się na przybliżoną równość pomiędzy łukiem i sumą stycznych $MT + TS$.

Jeżeli przeto CG i GB (rys. 2) są stycznemi w punktach C i B, to $CEB < CG + GB < FG + GB = FB$, to znaczy, że $\alpha \leqq \operatorname{tang} \alpha$, przyczem znak równości odnosi się do kąta $\alpha = 0$.

Mamy więc:

$$\sin \alpha \leqq \alpha, \quad \alpha \cos \alpha \leqq \sin \alpha,$$
$$\alpha \cos \alpha \leqq \sin \alpha \leqq \alpha,$$
$$\cos \alpha \leqq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \leqq 1.$$

Gdy α dąży do zera, to lewa strona powyższego wzoru staje się równą jedności i wobec tego:

$$\lim_{\alpha = 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Zakładamy teraz:

$$y = \sin x, \qquad y_1 = \sin x_1,$$
$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(x_1 + x) \sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{x_1 - x}$$
$$= \cos \tfrac{1}{2}(x_1 + x) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)}.$$

Jeżeli weźmiemy następnie $x_1 = x$, to dla ostatniego ułamka, zgodnie z dowiedzionem twierdzeniem, otrzymamy granicę równą jedności. Znajdujemy przeto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x. \tag{11}$$

Pochodną funkcji $\sin x$ jest $\cos x$.

W podobny sposób wyprowadzamy wzór na pochodną funkcji cosinus.

$$y = \cos x, \qquad y_1 = \cos x_1,$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\cos x_1 - \cos x}{x_1 - x} = \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(x_1 + x) \sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{x_1 - x}$$

$$= -\sin \tfrac{1}{2}(x_1 + x) \frac{\sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x. \tag{12}$$

Pochodną funkcji $\cos x$ jest $-\sin x$.

Wzór ten może być zresztą wyprowadzony również i z poprzedniego wzoru, ponieważ $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin z$ jeżeli złożymy $z = \frac{\pi}{2} - x$. Mamy wtedy $\frac{dy}{dz} = \cos z, \frac{dz}{dx} = -1$, więc $\frac{dy}{dx} = -\cos z = -\sin x$.

Pochodne funkcji tang x i cotg x otrzymujemy w prosty sposób za pomocą powyższych wzorów

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{13}$$

$$y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{14}$$

Zadania.

68) $y = \sin(ax) = \sin z$ $\qquad \frac{dy}{dx} = a \cos(ax)$

69) $y = \cos(ax)$ $\qquad$ „ $= -a \sin(ax)$

70) $y = \sin \frac{x}{a}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{a} \cdot \cos \frac{x}{a}$

71) $y = a \cos \frac{x}{a}$ $\qquad$ „ $= -\sin \frac{x}{a}$

72) $y = \sin(x^n) = \sin z$ $\qquad$ „ $= n x^{n-1} \cos(x^n)$

73) $y = \cos\sqrt{ax}$ " $= -\dfrac{a\sin\sqrt{ax}}{2\sqrt{ax}}$

74) $y = a\sin\dfrac{a}{x}$ " $= -\dfrac{a^2}{x^2}\cdot\cos\dfrac{a}{x}$

75) $y = a\cos\dfrac{1}{x}$ " $= \dfrac{a}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$

76) $y = \sin\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ " $= \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}\cdot\cos\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

77) $y = \operatorname{tg}(ax)$ " $= \dfrac{a}{\cos^2(ax)}$

78) $y = a\operatorname{tg}\dfrac{x}{a}$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{a}}$

79) $y = a\operatorname{tg}\dfrac{a}{x}$ " $= -\dfrac{a^2}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{a}{x}}$

80) $y = \sin(a+bx) = \sin z$ " $= b\cos(a+bx)$

81) $y = \cos(a - bx^2)$ " $= 2bx\sin(a - bx^2)$

82) $y = \sin^2 x = z^2$ " $= \sin(2x)$

83) $y = \cos^2(ax)$ " $= -a\sin(2ax)$

84) $y = 2\sin^n(ax)$ " $= na\sin^{n-2}(ax)\sin(2ax)$

85) $y = \cos^n\dfrac{a}{x}$ " $= \dfrac{na}{x^2}\cdot\cos^{n-1}\dfrac{a}{x}\sin\dfrac{a}{x}$

86) $y = \dfrac{1}{\sin x} = z^{-1}$ " $= -\dfrac{\operatorname{cotg} x}{\sin x}$

87) $y = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^n$ " $= \dfrac{n\sin x}{\cos^{n+1} x}$

88) $y = \dfrac{1}{2}\sin x + \sin\dfrac{x}{2}$ " $= \cos\dfrac{3x}{4}\cos\dfrac{x}{4}$

89) $y = \dfrac{1}{12}\cos 3x - \dfrac{1}{4}\cos x$ " $= -\dfrac{1}{2}\cdot\cos 2x\sin x$

90) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ " $= \dfrac{4}{\sin^2(2x)}$

91) $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$ " $= 3\cos 3x$

92) $y = \frac{1}{2\sin^2 x} - \frac{1}{4\sin^4 x}$ „ $= \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}$

93) $y = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x$ „ $= \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\cos^2 x}$

94) $y = \sin x \cos x$ „ $= \cos 2x$

95) $y = (1 - \cos 2x)^2$ „ $= 16\sin^3 x \cos x$

96) $y = 2\cos^2(x + a) - \cos 2x$ „ $= -4\cos(a + 2x)\sin a$

97) $y = (x \operatorname{tg} x)^2$ „ $= x \operatorname{tg} x \left(\frac{\sin 2x + 2x}{\cos^2 x}\right)$

98) $y = 3\sin x \cos^2 x + \sin^3 x$ „ $= 3\cos x \cos 2x$

99) $y = (4\sin x - 8\sin^3 x)\cos x$ $\frac{dy}{dx} = 4\cos 4x$

100) $y = (a + b\sin x)\cos x$ „ $= b\cos 2x - a\sin x$

101) $y = \sin x \sin(a - x)$ „ $= \sin(a - 2x)$

102) $y = \frac{a - b\cos x}{a + b\cos x}$ „ $= \frac{2ab\sin x}{(a + b\cos x)^2}$

103) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ „ $= \frac{-1}{\cos^2(45^0 + x)}$

104) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}$ „ $= \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

105) $y = \sin x - x\cos x$ „ $= x\sin x.$

Funkcje kołowe (cyklometryczne) są funkcjami odwrotnemi względem funkcji trygometrycznych i na tej zasadzie pochodne ich mogą być otrzymane ze wzorów na pochodne funkcji trygometrycznych.

1. $y = \operatorname{arc}\sin x$

jest funkcją odwrotną względem $x = \sin y$, a ponieważ:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

więc:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (15)$$

2. $y = \arccos x$

odpowiada funkcji $x = \cos y$; ponieważ zaś

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2},$$

więc:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{16}$$

Prostsze jest następujące dowodzenie:

$$y = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $y = \operatorname{arc\,tg} x$

Mamy $x = \operatorname{tg} y$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$, stąd zaś po odwróceniu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \tag{17}$$

4. $y = \operatorname{arc\,cotg} x$.

Ze wzoru $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x$ otrzymujemy łatwo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{18}$$

Możliwe jest również następujące dowodzenie:

$y = \operatorname{arc\,cotg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = \operatorname{arc\,tg} z$, jeżeli $z = \frac{1}{x}$.

wówczas $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1+z^2}$; $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ i

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+z^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Zadania.

106) $y = \arcsin(ax)$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$

107) $y = \arccos(a-x)$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(a-x)^2}}$

108) $y = \arcsin \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$ „ $= \frac{-2a}{a^2 + x^2}$

109) $y = \arcsin \frac{1}{x}$ „ $= -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

110) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$ „ $= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

111) $y = \arccos \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$ „ $= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}$

112) $y = \arccos \left(\frac{a - x}{x}\right)$ „ $= \frac{a}{x\sqrt{2ax - a^2}}$

113) $y = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}$ „ $= \frac{1}{\sqrt{a - bx^2}}$

114) $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ „ $= \frac{1}{1 + x^2}$

115) $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{ax}$ „ $= \frac{a}{2(1 + ax)\sqrt{ax}}$

116) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a - x}$ „ $= \frac{a}{(a - x)^2 + x^2}$

117) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x - 2}$ „ $= \frac{-1}{1 + (x - 2)^2}$

118) $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ „ $= \frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

119) $y = \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{2 - x}$ „ $= \frac{1}{2(3 - x)\sqrt{2 - x}}$

120) $y = \operatorname{arc\,cotg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ „ $= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

121) $y = \operatorname{arc\,cotg} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$ „ $= \frac{-1}{2(1 + x^2)}$

122) $y = \operatorname{arc}(\cos = \sin x)$ „ $= -1$

123) $y = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = m \operatorname{tg} x)$ „ $= \frac{m}{m^2 + (1 - m^2)\cos^2 x}$

124) $y = \operatorname{arc\,cotg} \frac{1}{\sqrt{x}}$ „ $= \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$

125) $y = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = a \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$ „ $= -\frac{\frac{1}{2}a}{1+(a^2-1)\sin^2\frac{x}{2}}$

126) $y = a \,.\, \operatorname{arc\,sin} \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a} - \sqrt{2ax-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

127) $y = \sqrt{ax-x^2} - a \,.\, \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a-x}{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

128) $y = (x - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x) \,.\, \operatorname{arc\,tg} x$ „ $= \frac{x + x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}$.

§ 5. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne.

W rozwinięciu potęgi dwumianu:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\frac{x^3}{n^3} + \ldots$$

dla wykładnika dodatniego całkowitego, rozważamy prawą stronę:

$$1 + \frac{x}{1} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{1.2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$$

Badając wyrażenie powyższe, gdy liczba n nieograniczenie rośnie, nie możemy zastosować twierdzenia o granicy sumy (str. 7, wiersz pierwszy), ponieważ twierdzenie to zostało dowiedzione jedynie dla skończonej liczby składników, a w danym wypadku liczba wyrazów wraz z liczbą n nieograniczenie rośnie.. Niechaj p oznacza pewną liczbę całkowitą dodatnią mniejszą niż n, lecz większą niż bez-

względna wartość liczby x. Rozważamy dany szereg do tego wyrazu włącznie, który zawiera x^p, a sumę wyrazów pozostałych oznaczamy przez $R_{p,n}$.

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$=1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{1.2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}+R_{p,n}. \quad (A)$$

Bezwzględna wartość reszty $R_{p,n}$, jako sumy pozostałych wyrazów, nie przewyższa sumy bezwzględnych wartości tych wyrazów; odrzucając przytem czynniki dwumienne mniejsze od jedności otrzymujemy następującą nierówność:

$$|R_{p,n}|<\frac{|x|^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}+\frac{|x|^{p+2}}{1.2\ldots(p+2)}+\cdots+\frac{|x|^n}{1.2\ldots n}$$

$$<\frac{|x|^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}\left[1+\left(\frac{|x|}{p+1}\right)+\left(\frac{|x|}{p+1}\right)^2+\cdots\right]$$

Prawa strona nierówności została powiększona przez zmniejszenie mianowników i przez zamianę otrzymanego postępu geometrycznego skończonego na nieskończony, a ponieważ założyliśmy, że $|x|<p$, więc otrzymaliśmy postęp nieskończenie malejący, sumę którego możemy określić i wówczas prawa strona nierówności przybiera następującą postać:

$$\frac{|x|^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{|x|}{p+1}}.$$

Mamy przeto

$$0<|R_{p,n}|<\frac{|x|^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{|x|}{p+1}}. \quad (B)$$

Wzór (B) wskazuje dwie wartości, pomiędzy któremi zawarta jest bezwzględna wartość reszty $R_{p,n}$ przy wszelkim wykładniku $n>p$, albowiem i lewa i prawa strona

podwójnej nierówności jest niezależna od n. Nierówność (B) sprawdza się w szczególności dla dowolnie wielkich wartości n. Powiększając nieograniczenie liczbę n we wzorze (A) i zakładając $\lim_{n=\infty} R_{p,n} = R_p$, możemy obecnie granicę sumy skończonej liczby wyrazów zastąpić sumą granic tych wyrazów: otrzymujemy wtedy:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{x^p}{1.2\ldots p}+R_p, \quad \text{(C)}$$

$$0<|R_p|<\frac{|x|^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{|x|}{p+1}}. \quad \text{(D)}$$

Sprowadziwszy prawą stronę wzoru do postaci niezależnej od wykładnika n powiększamy następnie również nieograniczenie wartość liczby p we wzorze (C). Przy wszelkiej skończonej wartości x ostatni ułamek we wzorze (D) staje się równym jedności, a poprzedzający go ułamek w prawej stronie tegoż wzoru (D) przedstawić możemy w następujący sposób:

$$\frac{|x|^k}{1.2\ldots k}\cdot\frac{|x|}{k+1}\cdot\frac{|x|}{k+2}\cdots\frac{|x|}{p+2}<\frac{|x|^k}{1.2\ldots k}\left(\frac{|x|}{k+1}\right)^{p-k+1}$$

zakładając $k\leqq|x|<k+1$.

Pierwszy czynnik prawej strony ostatniego wzoru posiada wartość stałą skończoną, a drugi dąży do zera, jest on bowiem potęgą ułamka właściwego o wykładniku rosnącym nieograniczenie. Tym sposobem znajdujemy $\lim_{p=\infty} R_p = 0$, i otrzymujemy następujące rozwinięcie:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots \quad \text{(E)}$$

w postaci szeregu nieskończonego, zbieżnego przy wszelkich rzeczywistych, dodatnich i ujemnych wartościach liczby x. Szczególną wartość tego szeregu dla $x=1$ oznaczamy literą e

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots$$

Ponieważ prawa strona jest wtedy >2, ale

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots<3$$

przeto liczba e powinna być zawarta między liczbami 2 i 3; znajdujemy;

$$e = 2,718\,281\,828\,459\ldots$$

We wzorze (E) n jest liczbą całkowitą. Jeżeli x oznacza liczbę całkowitą dodatnią, to we wzorze tym zastąpić możemy n przez nx; mamy wtedy:

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{x}{nx}\right)^{nx} = \lim\left(1=\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

$$= \left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = e^x,$$

przyczem ostatnie przekształcenie jest możliwe, gdyż granica iloczynu skończonej liczby x czynników równa się iloczynowi granic. Dla całkowitej dodatniej wartości x mamy przeto

$$e^x = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots \qquad (F)$$

Jeżeli następnie y oznacza liczbę całkowitą dodatnią, to biorąc ny zamiast n mamy:

$$e^x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^{ny} = \lim\left(1+\frac{x}{ny}\right)^{ny} = \left[\lim\left(1+\frac{\frac{x}{y}}{n}\right)^n\right]^y,$$

$$e^{\frac{x}{y}} = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{\frac{x}{y}}{n}\right)^n.$$

Wzór (F) sprawdza się przeto dla wszelkiej wymiernej, dodatniej wartości x.

Rozważając wreszcie dodatnią, niewymierną liczbę x zawartą pomiędzy dwoma ułamkami wymiernemi

$$\frac{p}{q}<x<\frac{s}{t},$$

mamy

$$1+\frac{\frac{p}{q}}{1}+\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^2}{1.2}+\ldots<1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots<1+\frac{\frac{s}{t}}{1}+\frac{\left(\frac{s}{t}\right)^2}{1.2}+\ldots$$

a zbliżając nieograniczenie oba ułamki wymierne do niewymiernej liczby x przekonywamy się o prawdziwości wzoru (F) dla wszelkiej dodatniej wartości x.

W analogiczny sposób zbadać możemy dla dodatnich lub ujemnych wartości x

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^n$$

Widzimy wówczas, że biorąc $\frac{x}{n}$ zamiast n we wzorze (B) otrzymujemy dla reszty $|R_{p,n}|$ granicę zero przy wszelkiej wartości p i nieograniczenie wzrastającej liczbie n i wobec tego po przejściu od wzoru (A) do wzoru (C) pozostaje tylko pierwszy wyraz 1. Dla wszelkich dodatnich i ujemnych wartości x mamy przeto:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{x^2}\right)^n=1.$$

Po zamianie x na $-x^2$ wynika stąd:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n=1$$

to znaczy, że

$$e^x\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=1$$

albo

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{-x}{n}\right)^n=e^{-x}$$

Wzór (F) sprawdza się przeto dla wszelkich rzeczywistych wartości x.

Chcąc obecnie znaleźć pochodną funkcji $y=e^x$, zaczynamy w ten sposób:

$$y + \Delta y = e^{x+\Delta x}, \quad y = e^x; \quad \Delta y = e^x(e^{\Delta x} - 1),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right)$$

Kładąc $e^{\Delta x} - 1 = \frac{1}{n}$ to znaczy $e^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{n}$, $\Delta x = \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ mamy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{e^x}{n \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{e^x}{\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Gdy Δx dąży do zera, to n wzrasta nieograniczenie, a $\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ staje się równym $\lg e = 1$. Mamy przeto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^x}{dx} = \underline{e^x}. \tag{19}$$

Wyznaczając pochodną dla każdego wyrazu prawej strony we wzorze (F) otrzymujemy ponownie dawny szereg nieskończony zbieżny. W danym wypadku jest przeto dopuszczalne wyznaczenie pochodnej szeregu nieskończonego przez obliczenie pochodnych poszczególnych wyrazów.

Logarytmy obliczone przy zasadzie e oznaczamy przez lg (por. str. 19); ze względu na ich własności szczególne, podane niżej (por. zad. 424), noszą one nazwę logarytmów naturalnych.

Dla znalezienia pochodnej funkcji wykładniczej postaci ogólniejszej $y = a^x$ zakładamy $a = e^m$ i otrzymujemy wtedy $m = \lg a$, to znaczy, że m jest logarytmem naturalnym liczby a. Mając wówczas $y = e^{mx} = e^z$ gdy $mx = z$, znajdujemy

$$\frac{dy}{dz} = e^z \quad \frac{dz}{dx} = m \quad \text{i} \quad \frac{dy}{dx} = me^z = me^{mx} = \underline{a^x \lg a}. \tag{19a}$$

Pochodne obu funkcji logarytmicznych wynikają z otrzymanych wzorów przez rozważanie funkcji odwrotnych względem powyższych funkcji wykładniczych. Jeżeli:

$$y = \lg x$$

to $x = e^y$, $\frac{dx}{dy} = e^y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$ (20)

Funkcji $y = \operatorname{Lg} x$ (przy zasadzie a) odpowiada również funkcja odwrotna $x = a^y$, pochodna której $\frac{dx}{dy} = a^y \lg a$, skąd:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y . \lg a} = \frac{1}{\lg a} \cdot \frac{1}{x} \quad (20\,a)$$

Zadania.

129) $y = e^{ax} = e^z$ $\quad \frac{dy}{dx} = a e^{ax}$

130) $y = e^{-ax}$ $\quad = -a e^{-ax}$

131) $y = a e^{\frac{x}{a}}$ $\quad = e^{\frac{x}{a}}$

132) $y = e^{x^2}$ $\quad = 2x e^{x^2}$

133) $y = e^{2\sqrt{ax}}$ $\quad = \frac{a e^{2\sqrt{ax}}}{\sqrt{ax}}$

134) $y = e^{\cos x}$ $\quad = -\sin x e^{\cos x}$

135) $y = e^{\sin^2 x}$ $\quad = \sin 2x e^{\sin^2 x}$

136) $y = e^{\operatorname{arc tg} x}$ $\quad = \frac{e^{\operatorname{arc tg} x}}{1 + x^2}$

137) $y = x^2 e^x$ $\quad = x e^x (2 + x)$

138) $y = e^x (x - 1)$ $\quad = x e^x$

139) $y = e^x x^n$ $\quad = (x + n) e^x x^{n-1}$

140) $y = (x^2 - 2x + 2) e^x$ $\quad = x^2 e^x$

141) $y = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$ $\quad = 2\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)$

142) $y = \cos x e^{\sin x}$ $\quad = (\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x}$

143) $y = e^{2x} \sin^2 x$ $\quad = e^{2x} (2 \sin^2 x + \sin 2x)$

144) $y = \frac{e^x}{x^n}$ $\quad = \frac{e^x (x - n)}{x^{n+1}}$

145) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $\quad = \frac{2 e^x}{(e^x + 1)^2}$

146) $y = \dfrac{e^x(x-n)}{x^n}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x[x+(x-n)^2]}{x^{n+1}}$

147) $y = \sqrt{e^{ax}}$ $\quad " = \dfrac{a}{2}\sqrt{e^{ax}}$

148) $y = \sqrt{x(e^x+1)}$ $\quad " = \dfrac{e^x(x+1)+1}{2\sqrt{x(e^x+1)}}$

149) $y = a^{\sqrt{xx+1}}$ $\quad " = \dfrac{x\,a^{\sqrt{xx+1}}\lg a}{\sqrt{x^2+1}}$

150) $y = a^{\operatorname{tg} x}$ $\quad " = \dfrac{a^{\operatorname{tg} x}\lg a}{\cos^2 x}$

151) $y = (a^{mx}+b)^p$ $\quad " = p\,(a^{mx}+b)^{p-1}\,a^{mx}\,m \lg a$

152) $y = a^x \cdot x^a$ $\quad " = a^x x^{a-1}(a + x \lg a)$

153) $y = \lg(a-x)$ $\quad " = -\dfrac{1}{a-x}$

154) $y = \lg(x^n) = n \lg x$ $\quad " = \dfrac{n}{x}$

155) $y = \lg \dfrac{1}{x} = -\lg x$ $\quad " = -\dfrac{1}{x}$

156) $y = \lg(ax) = \lg a + \lg x$ $\quad " = \dfrac{1}{x}$

157) $y = (\lg x)^n = z^n$ $\quad " = \dfrac{n(\lg x)^{n-1}}{x}$

158) $y = \lg\left(\dfrac{a}{a+x}\right)$ $\quad " = -\dfrac{1}{a+x}$

159) $y = \lg x + \lg x^2 = 3 \lg x$ $\quad " = \dfrac{3}{x}$

160) $y = \lg(1-x^2) = \lg z$ $\quad " = -\dfrac{2x}{1-x^2}$

161) $y = \lg\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$ $\quad " = -\dfrac{a}{x(a+x)}$

162) $y = \lg(a - \sqrt{x})$ $\quad " = \dfrac{1}{2(x - a\sqrt{x})}$

163) $y = \lg(e^{mx} + e^{-mx})$ „ $= \frac{m(e^{mx} - e^{-mx})}{e^{mx} + e^{-mx}}$

164) $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$ „ $= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

165) $y = x - 2\sqrt{x} + 2\lg(1+\sqrt{x})$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$

166) $y = \lg\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ „ $= \frac{-a}{x\sqrt{a^2-x^2}}$

167) $y = \lg(a + be^x)$ „ $= \frac{be^x}{a+be^x}$

168) $y = \lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2}\lg(1+x^2)$ „ $= -\frac{x}{1+x^2}$

169) $y = \lg\sqrt{2ax - x^2}$ „ $= \frac{a-x}{2ax-x^2}$

170) $y = \lg\frac{1+x}{1-x}$ „ $= \frac{2}{1-x^2}$

171) $y = \lg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ „ $= \frac{a}{a^2-x^2}$

172) $y = \lg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ „ $= \frac{1}{x(1-x^2)}$

173) $y = \frac{1}{x}\lg x$ „ $= \frac{1-\lg x}{x^2}$

174) $y = \lg\frac{1+a^{\sqrt{x}}}{1-a^{\sqrt{x}}}$ „ $= \frac{a^{\sqrt{x}}\lg a}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1-a^{2\sqrt{x}}}\right)$

175) $y = x\sqrt{a^2+x^2} + \lg(x+\sqrt{a^2+x^2})$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+a^2+1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

176) $y = \lg(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$

177) $y = \frac{m}{2}\lg(x^2-a^2) + \frac{n}{2a}\lg\frac{x-a}{x+a}$ „ $= \frac{mx+n}{x^2-a^2}$

178) $y = \frac{1+x^2}{2}\lg(1+x^2) - \frac{x^2}{2}$ „ $= x\lg(1+x^2)$

179) $y=\frac{3}{4}\lg\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{1}{4}\lg\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x \quad \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-3x}{x^4-1}$

180) $y=\lg(x-1)+3\lg(x+1)+\lg(x^2+1)+5\operatorname{arc\,tg}x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x^3+3x^2+2x-7}{x^4-1}$$

181) $y=\frac{1}{\sqrt{a}}\lg\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{a+bx}}$

182) $y=\frac{1}{x}\lg\frac{1+x}{1-x}$ „ $=\frac{2}{x(1-x^2)}-\frac{1}{x^2}\lg\frac{1+x}{1-x}$

183) $y=\frac{1-x^4}{2x^2}\lg\frac{1+x}{1-x}$ „ $=\frac{1+x^2}{x^2}-\frac{x^4+1}{x^3}\lg\frac{1+x}{1-x}$

184) $y=\frac{x}{1-x}\lg x$ „ $=\frac{1-x+\lg x}{(1-x)^2}$

185) $y=\lg\sin x$ „ $=\operatorname{cotg}x$

186) $y=\lg\cos x$ „ $=-\operatorname{tg}x$

187) $y=\lg\lg x$ „ $=\frac{2}{\sin 2x}$

188) $y=\lg\operatorname{cotg}x=\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ „ $=-\frac{2}{\sin 2x}$

189) $y=\lg\sin\left(\frac{x-a}{x}\right)=\lg\sin z$ „ $=\frac{a}{x^2}\operatorname{cotg}\left(\frac{x-a}{x}\right)$

190) $y=\lg\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2$ „ $=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

191) $y=\lg\sin\sqrt{a+bx}$ „ $=\frac{b}{2\sqrt{a+bx}}\operatorname{cotg}\sqrt{a+bx}$

192) $y=\lg\cos\sqrt{\frac{1}{x}}$ „ $=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\lg\sqrt{\frac{1}{x}}$

193) $y=\lg\left(\frac{a+b\operatorname{tg}x}{a-b\operatorname{tg}x}\right)$ „ $=\frac{2ab}{a^2-(a^2+b^2)\sin^2 x}$

194) $y=\lg\operatorname{tg}x+\lg\cos x+\lg\sin x \quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{cotg}x$

195) $y=\lg f(x)=\lg z$ „ $=\frac{f'(x)}{f(x)}$

Pochodna logarytmu naturalnego funkcji równa się ułamkowi, którego mianownik jest daną funkcją, a licznik — pochodną tej funkcji.

Pochodne funkcji mających postać $y=f(u, v)=u^v$, gdzie u i v są funkcjami zmiennej niezależnej x, mogą być znalezione za pomocą wzoru (10).

Mamy wówczas $\frac{\partial f}{\partial u}=vu^{v-1}$, $\frac{\partial f}{\partial v}=u^v \lg u$, i

$$\frac{dy}{dx}=vu^{v-1}\cdot\frac{du}{dx}+u^v \lg u\cdot\frac{dv}{dx} \qquad (21)$$

Przykład 1: $y=(ax)^{mx}$; $u=ax$, $v=mx$; $\frac{du}{dx}=a$, $\frac{dv}{dx}=m$,

$$\frac{dy}{dx}=m(ax)^{mx}(1+\lg x+\lg a).$$

Przykład 2: $y=(\sin x)^{\cos x}$; $\frac{du}{dx}=\cos x$, $\frac{dv}{dx}=-\sin x$;

$$\frac{dy}{dx}=(\sin x)^{\cos x-1}(\cos^2 x-\sin^2 x \lg \sin x)$$

Poszukiwanie pochodnych tego rodzaju funkcji może być nieco ułatwione, jeżeli rozważamy najprzód logarytm naturalny takiej funkcji i znajdujemy pochodną jego względem x, mnożąc pochodną względem y, czyli odwrotność danej funkcji, przez pochodną funkcji y względem zmiennej niezależnej x.

Przykład 3: $y=x^x$; $\lg y=x \lg x$; $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=1+\lg x$;

$$\frac{dy}{dx}=(1+\lg x)y=x^x(1+\lg x).$$

Przykład 4: $y=\left(\frac{a}{x}\right)^x$; $\lg y=x(\lg a-\lg x)$;

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{a}{x}\right)^x(\lg a-\lg x-1).$$

Przykład 5: $y=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\left(\frac{1-x}{x}\right)}=z^z$; $\frac{dy}{dz}=z^z(1+\lg z)$,

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x^2},\quad \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\left(\frac{1-x}{x}\right)}\left[1+\lg\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\cdot\frac{1}{x^2}$$

Przykład 6: $y=\sqrt[x]{x}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1-\lg x)$.

Przykład 7: $y=\sqrt[x]{\frac{1}{x}}$; $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\lg x-1}{x^2}\right)$.

Przykład 8: $y=(a+bx)^{\frac{1}{x}}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{(a+bx)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(\frac{bx}{a+bx}-\lg(a+bx)\right)$.

Przykład 9: $y=\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^x$; $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\left[\lg\left(\frac{a}{x}\right)-1\right]$

Przykład 10: $y=(\operatorname{arc\,tg} x)^x$;

$$\frac{dy}{dx}=(\operatorname{arc\,tg} x)^x\left(\lg\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x}{\operatorname{arc\,tg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\right).$$

§ 6. Funkcje uwikłane.

Poszukiwanie pochodnych związane było dotychczas z założeniem, że funkcja dana jest wyraźnie w postaci $y=f(x)$. Jeżeli natomiast obie zmienne x i y związane są wzajemnie w ten sposób, że pewna funkcja obu tych zmiennych przyrównana jest do zera:

$$f(x, y)=0,$$

(por. str. 3), to y jest funkcją uwikłaną zmiennej x, przyczem wyraźna postać funkcji $y=\varphi(x)$ jest wprawdzie określona za pomocą równania $f(x, y)=0$, nie może być jednak sformułowana, gdyż nie zawsze możliwe jest rozwiązanie równania $f(x, y)=0$ względem y. Konieczną jest wobec tego nowa metoda poszukiwania pochodnych.

Zwracamy się w tym celu do wzoru (10), str. 17,

$$y=f(u,\ v);\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

gdzie u i v były funkcjami zmiennej x. Jeżeli w szczególności założymy $y=0$, to zaznaczymy jedynie, że funkcje u i v stale czynią zadość równaniu $f(u,\ v)=0$. Mamy wówczas $\frac{dy}{dx}=0$ i otrzymujemy:

$$f(u,\ v)=0;\quad \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}=0.$$

Biorąc następnie $u=x$ i przyjmując zamiast v nowe znakowanie y, mamy $\frac{du}{dx}=1$ i znajdujemy:

$$f(x,\ y)=0;\quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{22}$$

Przykład 1: $f=x^2+y^2-r^2=0$. Znajdujemy bezpośrednio:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0,\ \text{skąd}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

albo podług wzoru (22): $\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y,\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

Posługując się postacią wyraźną, możliwą w danym wypadku do sformułowania:

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\ \text{mamy:}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$$

Przykład 2: $f=y^n-x^p=0;\ ny^{n-1}\frac{dy}{dx}-px^{p-1}=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{px^{p-1}}{ny^{n-1}}=\frac{p}{n}\cdot\frac{x^{p-1}}{\left(x^{\frac{p}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{p}{n}x^{\frac{p}{n}-1}$$

Podług wzoru (22):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -px^{p-1},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = ny^{n-1},\quad \frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{ny^{n-1}}$$

Chcąc uniknąć mianowników i znaków pierwiastka, gdy funkcja przedstawiona jest w postaci wyraźnej, przechodzimy zwykle, przed wyznaczaniem pochodnej, do postaci uwikłanej. Zamiast $\frac{dy}{dx}$ piszemy zazwyczaj y'.

Przykład 3: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $f = y^3x^2 - 1 = 0$; $3y^2y'x^2 + 2y^3x = 0$,

$y' = -\frac{2y}{3x}$, albo: $y' = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}}$. To samo znajdujemy wyznaczając pochodną dla funkcji przedstawionej w postaci wyraźnej.

Przykład 4: $y' = x\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$, $\frac{y^2}{x^2} = \frac{a+bx}{a-bx}$,

$$f = bxy^2 + bx^3 - ay^2 + ax^2 = 0;$$
$$by^2 + 2bxyy' + 3bx^2 - 2ayy' + 2ax = 0,$$
$$y' = \frac{by^2 + 3bx^2 + 2ax}{2ay - 2bxy}$$

Przykład 5: $y = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$, albo $f = y^4 - 2y^2x - 1 = 0$;

$4y^3y' - 4yxy' - 2y^2 = 0$, $y' = \frac{y}{2(y^2 - x)} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}$.

Zadania

196) $f = ax + by + c = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = a$, $\frac{\partial f}{\partial y} = b$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}$

197) $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

198) $y=\frac{(x+a)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$; $f=y^2(x-a)-(x+a)^3=0$;

$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2-3(x+a)^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y(x-a)$,

$\frac{dy}{dx}=\frac{3(x+a)^2-y^2}{2y(x-a)}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^3}$.

199) $f=a^{x-y}-x^y=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=a^{x-y}\lg a-yx^{y-1}$,

$\frac{\partial f}{\partial y}=-a^{x-y}\lg a-x^y\lg x$, $\frac{dy}{dx}=\frac{x\lg a-y}{x\lg(ax)}$.

200) $f=\sin x-\cos y=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{\sin y}=-1$.

201) $f=e^{x+y}-a^x=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y}-a^x\lg a$, $\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y}$,

$\frac{dy}{dx}=-1+\lg a$.

202) $f=e^{ax+by}-c=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=ae^{ax+by}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=be^{ax+by}$,

$\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{b}$ Z postaci prostszej: $ax+by=\lg c$ otrzymujemy ten sam wynik.

203) $f=(e^x-1)(e^y-1)-1=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=e^x(e^y-1)$,

$\frac{\partial f}{\partial y}=e^y(e^x-1)$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y-1}{e^x-1}\cdot\frac{e^x}{e^y}=-\frac{e^x}{e^y}(e^y-1)^{-1}$.

204) $f=ay-e^{\sqrt{b-x}}=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{e^{\sqrt{b-x}}}{2\sqrt{b-x}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=a$,

$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{2\sqrt{b-x}}$.

205) $f=\cos x-x\cos y=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=-\sin x-\cos y$,

$\frac{\partial f}{\partial y}=x\sin y$, $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x+\cos y}{x\sin y}$

206) $f=y(x+\sin x)=0$; łatwo zrozumieć, że podobne zadanie prowadzi jedynie do wniosku $dx=0$ albo $dy=0$, ponieważ f staje się równem zeru tylko w dwuch wypadkach: $y=0$ albo $x+\sin x=0$.

207) $f=x\sin(x-y)-(x+y)=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=\sin(x-y)+x\cos(x-y)-1$

$\frac{\partial f}{\partial y}=-x\cos(x-y)-1$, $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x-y)+x\cos(x-y)-1}{x\cos(x-y)+1}$.

Rozwiązać następujące zadania, nie obliczając oddzielnie pochodnych cząstkowych, a opierając się bezpośrednio na wzorze:

$$f(x,\ y)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0.$$

208) $f=y^2-2px=0$; $2yy'-2p=0$, $y'=\frac{p}{y}$.

209) $f=\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}-c=0$; $\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{b}{y}}y'=0$,

$y'=-\sqrt{\frac{by}{ax}}$.

210) $f=\arcsin\frac{x}{y}-\lg x=0$; $\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}y'-\frac{1}{x}=0$,

$y'=\frac{xy-y\sqrt{y^2-x^2}}{x^2}$.

211) $f=y^2+x^2-(ax+b)^2=0$; $yy'+x-a(ax+b)=0$.

212) $f=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2\lambda xy=0$;
$(x-\alpha+\lambda y)+(y-\beta+\lambda x)y'=0$.

213) $f=y^2(x^2-1)-ax^2=0$; $y(x^2-1)y'+x(y^2-a)=0$.

214) $f=(ax+by+c)(\alpha x+\beta y+\gamma)-mx^2-ny^2=0$;
$(a+by')(\alpha x+\beta y+\gamma)+(\alpha+\beta y')(ax+by+c)$
$-2mx-2nyy'=0$.

215) $f=(x^2+y^2-1)(ax+by)-mx^2-ny^2=0$;
$2(x+yy')(ax+by)+(a+by')(x^2+y^2-1)$
$-2mx-2nyy'=0$.

216) $f=(1-ax)(x^2+y^2)-1=0;$
$-a(a^2+y^2)+2(x+yy')(1-ax)=0.$

217) $f=\left(1+x+\frac{1}{y}\right)\left(1+y+\frac{1}{x}\right)=0;$

$$\left(1-\frac{y'}{y^2}\right)\left(1+y+\frac{1}{x}\right)+\left(y'-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+x+\frac{1}{y}\right)=0.$$

218) $f=(x^2+y^2-ax)^2-a^2(x^2+y^2)=0;$
$(x^2+y^2-ax)(2x+2yy'-a)-a^2(x+yy')=0.$

219) $f=x^2y^2-(a^2-x^2)(y+b)^2=0;$
$xy^2+x^2yy'+x(y+b)^2-(y+b)y'(a^2-x^2)=0.$

220) $f=a^x-e^{x-y}=0;\ a^x\lg a-e^{x-y}+e^{x-y}y'=0,\ y'=1-\lg a$
Prościej: $x\lg a=x-y;\ y'=1-\lg a.$

221) $f=y^2-2ye^x+2x\lg y=0;$
$yy'-e^x(y+y')+\lg y+xy^{-1}y'=0.$

222) $f=\sin x-\sin(2y-x)=0;$
$\cos x+\cos(2y-x)-2y'\cos(2y-x)=0.$

223) $f=y\sin x+x^2y^2+a\cos y+b=0;$
$y\cos x+y'\sin x+2xy(y+xy')-ay'\sin y=0$

224) $f=e^x\cos y-e^y\sin x=0;$
$e^x\cos y-e^y\cos x-(e^x\sin y+e^y\sin x)y'=0.$

225) $f=\sin x+\sin y+\sin(x+y)=0;$

$$y'=-\frac{\cos x+\cos(x+y)}{\cos y+\cos(x+y)}.$$

§ 7. Funkcje określone za pomocą wzorów:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t).$$

Zależność funkcji y od zmiennej x bywa częstokroć ustanawiana w ten sposób, że obie zmienne x i y określone są jako funkcje trzeciej zmiennej za pomocą wzorów postaci:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t).$$

Jeżeli ze wzorów takich potrafimy wyrugować zmienną t, to otrzymujemy wzór wyrażający bezpośrednio zależność

pomiędzy x i y. Mając np. $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ otrzymujemy równanie $f = x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Ponieważ t jest wówczas właściwą zmienną niezależną, nadajemy przeto tej zmiennej dwie wartości szczególne t i t_1 i otrzymujemy odpowiednie wartości funkcji:

$$x = \varphi(t) \qquad x_1 = \varphi(t_1)$$
$$y = \psi(t) \qquad y_1 = \psi(t_1),$$

a z tych wartości tworzymy następującą tożsamość:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\dfrac{y_1 - y}{t_1 - t}}{\dfrac{x_1 - x}{t_1 - t}}. \tag{A}$$

Zachowując stałą wartość t i zmniejszając nieograniczenie różnicę $t_1 - t$, przechodzimy od ilorazów różnic we wzorze (A) do pochodnych i otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}. \tag{23}$$

Wzór ten, przepisany w postaci $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$, albo $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ jest jedynie powtórzeniem znanego wzoru (6), str. 11.

Przykład 1: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; $\frac{dx}{dt} = -a\sin t$, $\frac{dy}{dt} = b\cos t$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$. Rugując t, otrzymujemy równanie $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, albo: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ i stąd dwa wzory dla pochodnej:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \text{ albo } \frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Trzy otrzymane wzory są równoznaczne, ponieważ $\operatorname{cotg} t = \frac{bx}{ay} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Przykład 2: $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha + b$; $\frac{dx}{dt} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dt} = \sin\alpha$; $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$. Rugując t, otrzymujemy: $y = x\operatorname{tg}\alpha + b$ i stąd: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$.

Zadania.

226) $y = at$, $x = a(1-t)$ $\quad \frac{dy}{dx} = -1$

227) $y = \frac{a}{a-t}$, $x = \frac{b}{b-t}$ $\quad$ „ $= \frac{a(b-t)^2}{b(a-t)^2}$

228) $y = \frac{1-t}{1+t}$, $x = \frac{2t}{1+t}$ $\quad$ „ $= -1$

229) $y = \frac{t^2}{2}$, $x = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3}$ $\quad$ „ $= \sqrt{\frac{t}{2}}$

230) $y = (e^{at} - 1)^3$, $x = (e^{at} - 1)^2$ $\quad$ „ $= \frac{3}{2}(e^{at} - 1)$

231) $y = \frac{4(a-t)^3}{a^2t^2}$, $x = \frac{3a - 2t}{at}$ $\quad$ „ $= \frac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2t}$

232) $y = \sin^2 t$, $x = \sin 2t$ $\quad$ „ $= \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2t$

233) $y = b\sin^2 t$, $x = a\cos^2 t$ $\quad$ „ $= -\frac{b}{a}$

234) $y = 1 - \cos t$, $x = t - \sin t$ — $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$

235) $y = a \cos^2 \frac{bt}{2}$, $x = b \operatorname{tg} \frac{bt}{2}$ — $= -\frac{a}{b} \sin bt \cos^2 \frac{bt}{2}$

236) $y = \operatorname{tg} t$, $x = \frac{1}{\cos^2 t}$ — $= \frac{1}{2} \operatorname{cotg} t$

237) $y = \sin t - t \cos t$, $x = \cos t + t \sin t$ — $= \operatorname{tg} t$

238) $y = \frac{1}{2} \sin t + \sin \frac{t}{2}$, $x = \frac{1}{2} \cos t + \cos \frac{t}{2}$ — $= -\operatorname{cotg} \frac{3}{4} t$

239) $y = t - \cos t$, $x = t - \sin t$ — $= \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)}{\sin^2 \frac{t}{2}}$

240) $y = \frac{a \sin t}{1 + b \cos t}$, $x = \frac{c \cos t}{1 + b \cos t}$ — $= -\frac{ab + a \cos t}{c \sin t}$

241) $y = \sin t (\cos 2t)^{\frac{1}{2}}$, $x = \cos t (\cos 2t)^{\frac{1}{2}}$ — $= -\operatorname{cotg} 3t$

242) $y = \frac{\sin^3 t}{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}$, $x = \frac{\cos^3 t}{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}$ — $= -\operatorname{tg} 3t$

243) $y = 2 \sin t - \sin 2t$, $x = 2 \cos t - \cos 2t$ — $= \operatorname{tg} \frac{3}{2} t$

244) $y=(a+r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t$ $\quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\frac{2a+r}{2a}t$

$x=(a+r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$

245) $y=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$x=\arccos\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\quad$ „ $=1.$

§ 8. Pochodne wyższego rzędu.

Funkcje wyraźne. Pochodna funkcji $y=f(x)$ jest również funkcją zmiennej x i może być przeto poddana tym działaniom, za pomocą których sama powstała z danej funkcji. Mamy wówczas:

$$\frac{df'(x)}{dx}=\lim\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim\frac{1}{\Delta x}\left|\frac{f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right.$$

$$=\lim\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2};$$

licznik ostatniego ułamka oznaczamy przez $\Delta(\Delta f)=\Delta^2 f$ $=\Delta(\Delta y)=\Delta^2 y$ i otrzymujemy:

$$\frac{df'(x)}{dx}=\lim\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}=\lim\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}.$$

Stosujemy w danym wypadku znakowanie $f''(x)$ albo y'', a więc:

$$y''=f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{d^2f}{dx^2}\text{*)}.$$

---

*) Wzór (8) na pochodną iloczynu jest równoznaczny ze wzorem na różniczkę iloczynu: $d(u\,.\,v)=u\,.\,dv+v\,.\,du$. Różniczka funkcji y jest iloczynem $y'dx$; różniczkę rzędu drugiego d^2y otrzymujemy jako

Podobnie mamy:

$$y''' = f'''(x) = \frac{df''(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^3f}{dx^3},$$

i t. d. Wyrażenia:
y'', y''', y'''',... $y^{(n)}$ albo: $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$,... $f^{(n)}(x)$ nazywamy drugą, trzecią,... $n^{tą}$ pochodną lub też ogólnie: pochodnemi wyższych rzędów.

Przykład 1: $y = x^p$; $\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = p(p-1)x^{p-2}$,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = p(p-1)(p-2)x^{p-3},\ldots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = p(p-1)\ldots(p-n+1)x^{p-n}.$$

Przykład 2: $y = \sin x$; $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y'''' = \sin x$, i t. d.

Przykład 3: $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, i t. d.

Zadania.

246) $y = x^3$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

247) $y = (a - bx)^4$ $\quad$ „ $= 12b^2(a - bx)^2$

248) $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2$ $\quad$ „ $= 12x^2 - 12x + 10$

249) $y = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad$ „ $= -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$

250) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\quad$ „ $= -\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

251) $y = \sqrt{2px}$ $\quad$ „ $= \frac{p^2}{\sqrt{(2px)^3}}$

---

różniczkę różniczki pierwszego rzędu, zakładając, że dx w iloczynie $y'dx$ jest liczbą niezależną od x.

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = y''dx.dx = y''dx^2.$$

Zrozumiałem jest wówczas znakowanie: $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ *(Przyp. tłum.)*.

252) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a+bx}}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4b^2}{9\sqrt[3]{(a+bx)^7}}$

253) $y = x + \sqrt[3]{(x-a)^5}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{10}{9\sqrt[3]{x-a}}$

254) $y = x(a-x)$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -2$

255) $y = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2}{x^3}$

256) $y = \dfrac{x}{(a-x)^2}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4a+2x}{(a-x)^4}$

257) $y = e^{mx}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = m^2 e^{mx}$

258) $y = a^{mx}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = a^{mx}(m \lg a)^2$

259) $y = e^{\varphi(x)}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{\varphi(x)}[(\varphi'(x))^2 + \varphi''(x)]$

260) $y = e^{-x^2}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}$

261) $y = \lg(1+x^2)$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

262) $y = x \lg x$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{x}$

263) $y = x^2 \lg x$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 3 + 2\lg x$

264) $y = \dfrac{\lg x}{x}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\lg x - 3}{x^3}$

265) $y = \sin(a-2x)$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -4\sin(a-2x)$

266) $y = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

267) $y = \arccos x$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

268) $y = x e^{\sin x}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{\sin x}(2\cos x + x\cos^2 x - x\sin x)$

269) $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^x \left(-\dfrac{1}{x} + (1+\lg x)^2\right)$

270) $y = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

271) $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$

272) $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$ $\quad$ „ $= -\frac{2ax}{(x^2+a^2)^2}$

273) $y = x^6$ $\quad y''' = 6 \cdot 5 \cdot 4x^3$

274) $y = \frac{1}{x}$ $\quad$ „ $= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$

275) $y = \sqrt{x}$ $\quad$ „ $= \frac{1 \cdot 3}{4 \sqrt[8]{x^5}}$

276) $y = \lg(a+bx)$ $\quad$ „ $= \frac{2b^3}{(a+bx)^3}$

277) $y = \sin(nx)$ $\quad$ „ $= -n^3 \cos(nx)$.

Jeżeli $y = f(z)$ i $z = \varphi(x)$, to $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$. Biorąc ponownie pochodne obu stron, otrzymujemy podług wzoru (6), str. 11:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dz}.$$

Dalsze różniczkowanie daje:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 2\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2z}{dx^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^3z}{dx^3}.$$

Przykład: $y = (x+bx^2)^3 = z^3$, $z = a+bx^2$;

$\frac{dy}{dz} = 3z^2$, $\frac{d^2y}{dz^2} = 6z$, $\frac{d^3y}{dz^3} = 6$, $\frac{dz}{dx} = 2bx$, $\frac{d^2z}{dx^2} = 2b$, $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$;

$\frac{d^3y}{dx^3} = 24b^2x(3a+5bx^2)$.

Funkcje uwikłane. Zmienna y jest funkcją uwikłaną zmiennej x, jeżeli równanie postaci $f(x, y) = 0$ wyraża zależność pomiędzy x i y. Pochodną $\frac{dy}{dx}$ otrzymujemy

z równania: $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$. Jeżeli teraz dla pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f}{\partial x}$ znajdziemy powtórnie pochodną cząstkową względem x, to otrzymamy drugą pochodną cząstkową funkcji f względem x; oznaczamy ją przez $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Oznaczamy również przez $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ tę pochodną, która wynika z dwukrotnego różniczkowania cząstkowego funkcji f względem y. W analogiczny sposób należy pojmować $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ czyli $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$, jako wynik cząstkowego różniczkowania względem x i następnie względem y. Tę ostatnią pochodną należy odróżniać od innej pochodnej $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}$ czyli $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, która wynika z cząstkowego różniczkowania $f(x, y)$ najprzód względem y, a następnie względem x.

Przykład: $f=x^3+3x^2y-y^3=0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+6xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3x^2-3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=6x.$$

W przykładzie tym $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$. Możemy dowieść, że równość tych dwuch pochodnych sprawdza się zawsze, jeżeli są one funkcjami ciągłemi zmiennych x i y. We wzorze:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim \frac{f(x_1, y) - f(x, y)}{x_1 - x}$$

nadajemy zmiennej y dwie wartości szczególne y i y_1, tworzymy iloraz różnic i określamy jego granicę; mamy wówczas:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \lim \frac{\frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{x_1 - x} - \frac{f(x_1, y) - f(x, y)}{x_1 - x}}{y_1 - y}$$

przyczem znak „lim“ wskazuje jednocześnie na przejście od wartości x_1 do x i od y_1 do y. W podobny sposób, ze wzoru:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y}$$

po podstawieniu wartości szczególnych x i x_1 i utworzeniu ilorazu różnic, wynika wyrażenie następujące:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \lim \frac{\frac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y)}{y_1 - y} - \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y}}{x_1 - x},$$

w którem także znak „lim“ odnosi się do obu zmiennych x i y. Oba otrzymane wyrażenia mogą być sprowadzone do postaci wspólnej

$$\frac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y) - f(x, y_1) + f(x, y)}{(x_1 - x)(y_1 - y)},$$

a więc i granice, do których one dążą we wskazanym procesie zmienności, powinny być także równe, to znaczy, że

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} \quad \text{czyli:} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}.$$

Należy jednak zauważyć, że dowodzenie powyższe stosuje się tylko do takiej dziedziny wartości zmiennych x i y, w której wyrażenie

$$\lim \frac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y) - f(x, y_1) + f(x, y)}{(x_1 - x)(y_1 - y)}$$

zmienia się w sposób ciągły zachowując skończoną wartość gdy x_1 i y_1 zbliżają się nieograniczenie do x i y.

Gdy wyznaczamy następnie pochodną zupełną dla obu stron równania $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ względem x, to należy pamiętać, że pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ są wogóle zależne od obu zmiennych x i y i wobec tego stosuje się prawidło następujące:

Jeżeli $F(x,y)=0$, to $\frac{dF(x,y)}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$

Otrzymujemy wtedy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

stąd zaś znajdujemy po podstawieniu $\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}$ i po odpowiedniej redukcji — wzór ostateczny:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \qquad (24)$$

Rozważania powyższe wyjaśniają dostatecznie sposób obliczania pochodnych wyższych rzędów funkcji uwikłanej i wobec tego zbyteczne jest wyprowadzanie odnośnych wzorów ogólnych.

Przykład 1: $f=y^2+bx^2-2ay+ax-b=0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2bx+a \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-2a$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2b \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4b(y-a)^2+(2bx+a)^2}{4(y-a)^3}$$

Przykład 2: $f = e^{ax-by} - c = 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a e^{ax-by} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -b e^{ax-by}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 e^{ax-by} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b^2 e^{ax-by}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -ab e^{ax-by} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -ab e^{ax-by}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Ze wzoru $ax - by = lqc$ może być łatwiej otrzymany ten sam wynik.

Zadania.

Podane są niżej częściowe rozwiązania, za pomocą których mogą być otrzymane odpowiedzi ostateczne podług wzoru (21), str. 56.

278). $f = x^3 - x^2 y + y^5 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2x.$$

279). $f = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2x^2 + 2y^2 - a^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(2x^2 + 2y^2 + a^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y + 4x^2 + 2a^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy$$

280). $f = e^{\sin x} - x e^{\sin y} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\sin x} \cos x - e^{\sin y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x e^{\sin y} \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x e^{\sin y}(\sin y - \cos^2 y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{\sin y} \cos y.$$

281) $f=y+ye^{-x}-x=0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}=1+e^{-x}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=-ye^{-x}-1$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=ye^{-x}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=-e^{-x}$.

282) $f=\sin x+\sin y+\sin(x-y)=0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\cos y-\cos(x-y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x+\cos(x-y)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\sin y-\sin(x-y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\sin x-\sin(x-y)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\sin(x-y)$.

Funkcje określone za pomocą wzorów: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Pierwsza pochodna wyrażona jest we wzorze (23), str. 47:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}.$$

Różniczkując obie strony względem x, otrzymujemy:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Uwzględniając następnie związek $\frac{dt}{dx}=1:\frac{dx}{dt}$, znajdujemy wzór następujący:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

Zadania.

283) $y=b\sin t$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$

$x=a\cos t$

284) $y = a(1 - \cos t)$, $x = a(t - \sin t)$ „ $= -\dfrac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$

285) $y = \sin^2 t$, $x = \cos 2t$ „ $= 0$

286) $y = e^{at}$, $x = e^{-at}$ „ $= 2e^{3at}$.

Drugą pochodną otrzymać można z pierwszej również w następujący sposób:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Przykład: $y = \dfrac{1}{1-t}$, $x = \lg t$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{1+t}{(1-t)^3}, \quad \frac{dt}{dx} = t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t^2+t}{(1-t)^3}.$$

§9. Zastosowanie rachunku różniczkowego do obliczania wartości wyrażeń nieoznaczonych.

Wyrażenia postaci $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Możliwe jest istnienie takich dwuch funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, które przy $x = a$ stają się obie równemi zeru. Funkcja ułamkowa postaci $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ posiada wówczas dla $x = a$ wartość nieoznaczoną $f(a) = \frac{0}{0}$. Możliwość usunięcia podobnej nieoznaczoności wyjaśnimy najprzód na przykładach.

Przykład 1: $f(x) = \dfrac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$, $f(a) = \frac{0}{0}$. Jeżeli przed podstawieniem $x = a$ podzielimy licznik i mianownik przez $(x - a)$, to wówczas $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + a^2}{x + a}$, skąd znajdujemy następnie $f(a) = \frac{3}{2}a$.

Przykład 2: $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$, $f(0)=\frac{0}{0}$. Odejmując 1 od szeregu stanowiącego rozwinięcie funkcji e^x, dzieląc resztę przez x i kładąc następnie $x=0$, znajdujemy $f(0)=1$.

Przykład 3: $f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; $f(0)=\frac{0}{0}$. Postać uproszczona:

$$f(x)=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$ daje: $f(0)=\frac{1}{2}$.

Przykład 4: $f(x)=\frac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-a}$; $f(a)=\frac{0}{0}$.

$$f(a)=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\right)_{x=a}=(x+\sqrt{ax}+a)_{x=a}=3a.$$

Powodem nieoznaczoności, ujawnionym w powyższych przykładach, jest ta okoliczność, że licznik i mianownik ułamka posiadają pewien czynnik wspólny, znikający dla $x=a$ i zamieniający jednocześnie na zero licznik i mianownik danego ułamka.

Poszukiwanie takiego czynnika wspólnego i usuwanie go przed podstawieniem może być z korzyścią zastąpione inną metodą, polegającą na obliczaniu pochodnych. Jeżeli

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ i } f(a)=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{0}{0},$$

to $f(a+\delta)=\left[\frac{\varphi(x+\delta)}{\psi(x+\delta)}\right]_{x=a}$ nie jest już wogóle wartością nieoznaczoną i może służyć do określenia $f(a)$, gdy δ dąży nieograniczenie do 0. Ponieważ zaś $\varphi(a)=0$ i $\psi(a)=0$, możemy przeto ułożyć następującą równość:

$$f(a+\delta)=\left[\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\psi(x+\delta)-\psi(x)}\right]_{x=a}=\left[\frac{\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{(x+\delta)-x}}{\frac{\psi(x+\delta)-\psi(x)}{(x+\delta)-x}}\right]_{x=a}.$$

Zbliżając nieograniczenie δ do 0, otrzymujemy równocześnie:

$$\lim f(a+\delta) = f(a),$$

$$\lim \left[\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{(x+\delta)-x}\right]_{x=a} = [\varphi'(x)]_{x=a} = \varphi'(a),$$

$$\lim \left[\frac{\psi(a+\delta)-\psi(x)}{(x+\delta)-x}\right]_{x=a} = [\psi'(x)]_{x=a} = \psi'(a).$$

$$f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \qquad (25)$$

Przykład 1: $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$, $f(2) = \frac{0}{0}$, $\varphi'(x) = 2x-5$, $\psi'(x) = 3x^2-4x-1$, $f(2) = \frac{\varphi'(2)}{\psi'(2)} = -\frac{1}{3}$

Przykład 2: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $f(0) = \left(\frac{\cos x}{1}\right)_{x=0} = 1.$

Przykład 3: $f(x) = \frac{a^x-1}{xa^x}$; $f(0) = \frac{0}{0}$, $\varphi'(0) = \lg a$, $\psi'(0) = (a^x + x a^x \lg a)_{x=0} = 1$, $f(0) = \lg a$.

Może się zdarzyć, że wartość ułamkowa w nowej postaci pozostaje również nieoznaczoną, jeżeli $\varphi'(a) = 0$ i $\psi'(a) = 0$. Wskazany sposób poszukiwania istotnej wartości powinien być wówczas powtórnie zastosowany do nowego ułamka.

Przykład 4: $f(x) = \frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{2x^3-3ax^2+a^3}$; $f(a) = \frac{0}{0}$, więc

$$f(a) = \left[\frac{3x^2-2ax-a^2}{6x^2-6ax}\right]_{x=a} = \frac{0}{0} \text{ i } f(a) = \left[\frac{6x-2a}{12x-6a}\right]_{x=a} = \frac{2}{3}$$

Przykład 5: $f(x) = \frac{\sin 2x - 2\sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$; $f(0) = \frac{0}{0}$. Nieoznaczoność znika dopiero po trzykrotnem różniczkowaniu licznika i mianownika; znajdujemy wówczas

$$f(0) = \left[\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)}\right]_{x=0} = \left[\frac{2\cos x - 8\cos 2x}{2e^x}\right]_{x=0} = -3.$$

Wychodząc z założenia, że funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ stają się jednocześnie równemi zeru przy $x=a$, gdy posiadają wspólny czynnik $(x-a)$, możemy dowieść wzoru (25) w inny sposób:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{(x-a)\rho(x)}{(x-a)\pi(x)}, \quad f(a)=\frac{\rho(a)}{\pi(a)};$$

$$\varphi'(x)=\rho(x)+(x-a)\rho'(x), \quad \psi'(x)=\pi(x)+(x-a)\pi'(x).$$

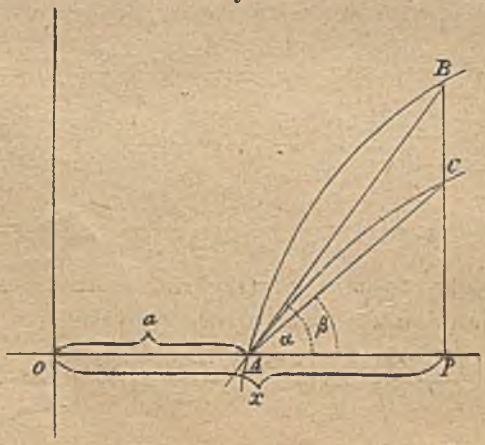
Dla $x=a$, lecz wyłącznie tylko dla tej wartości x, mamy $\rho(a)=\varphi'(a)$, $\pi(a)=\psi'(a)$ i $f(a)=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$.

Możliwy jest również geometryczny sposób dowodzenia wzoru (25). Jeżeli AB jest wykresem funkcji $u=\varphi(x)$ i AC — wykresem funkcji $v=\psi(x)$, przyczem $\varphi(a)=0$ i $\psi(a)=0$, to obie krzywe powinny przecinać się z osią odciętych w punkcie A, ponieważ punktowi temu odpowiadają $x=a$, $u=0$, $v=0$. Pewnej dowolnej wartości $x=OP$ odpowiadają wartości funkcji $u=\varphi(x)=PB$ i $v=\psi(x)=PC$; wówczas

$$f(x)=\frac{u}{v}=\frac{(x-a)\operatorname{tg}\alpha}{(x-a)\operatorname{tg}\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Gdy zmienna x zbliża nieograniczenie do stałej wartości a,

Rys. 4.



to sieczne AB i AC przechodzą w styczne do odpowiednich krzywych poprowadzone w punkcie A i tym sposobem jednocześnie $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$ stają się równemi $\varphi'(a)$ i $\psi'(a)$. Dla $x=a$ mamy zatem

$$f(a)=\left(\frac{u}{v}\right)_{x=a}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(x)}.$$

Jeżeli $f(a)=\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty}$, to $f(a)=\left[\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}$

i wobec tego nowa postać nieoznaczona sprowadzona jest do poprzedniej. Znajdujemy w taki sposób:

$$f(a)=\left[\frac{-\varphi'(x)}{\frac{[\psi(x)]^2}{-\varphi'(x)}}\right]_{x=a}=\left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\cdot\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2\right]_{x=a}$$

$$f(a)=\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}\cdot[f(a)]^2,\quad f(a)=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \tag{26}$$

Jeżeli wyrażenie ułamkowe posiada postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ przy $x=a$, to znajdujemy jego wartość istotną, różniczkując licznik i mianownik i kładąc następnie $x=a$.

Zadania.

287) $f(x)=\dfrac{6x^2-5x+1}{8x^2-2x-1}$ $\qquad f(\frac{1}{2})=\dfrac{1}{6}$

288) „ $=\dfrac{x^n-1}{x-1}$ $\qquad f(1)=n$

289) „ $=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ $\qquad f(1)=\dfrac{1}{2},\ f(2)=\dfrac{3}{5}$

290) „ $=\dfrac{x^3+4x^2-2x-8}{x^4-8x^2+12}$ $\qquad f(\pm\sqrt{2})=\dfrac{-4\mp\sqrt{2}}{4}$

291) $f(x)=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$ $\qquad f(1)=\dfrac{n(n+1)}{2}$

292) „ $=\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ $\qquad f(7)=-\dfrac{1}{56}$

293) „ $=\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{12-x}}{2x-3\sqrt{19-5x}}$ $\qquad f(3)=\dfrac{8}{69}$

294 „ $=\dfrac{a-\sqrt[5]{2x^5-a^5}}{\sqrt[3]{x^3-a^3}}$ $\qquad f(a)=0$

295) „ $=\dfrac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$ $\qquad f(a)=\dfrac{16}{9}a$

296) „ $=\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}$ $\qquad f(0)=\dfrac{1}{2}$

297) „ $=\dfrac{e^x-e^{-x}}{1-x-\lg(e-x)}$ $\qquad f(0)=\dfrac{2e}{1-e}$

298) „ $=\dfrac{xe^{\cos x}}{1-\sin x-\cos x}$ $\qquad f(0)=-e$

299) „ $=\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ $\qquad f(0)=1$

300) „ $=\dfrac{a^x-1}{x}$ $\qquad f(0)=\lg a$

301) „ $=\dfrac{\lg x}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad f(1)=0$

302) „ $=\dfrac{a^{\lg x}-x}{\lg x}$ $\qquad f(1)=\lg a-1$

303) „ $=\dfrac{\lg(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ $\qquad f(2)=\dfrac{4}{7}$

304) „ $=\dfrac{\lg(a+x)-\lg a}{x}$ $\qquad f(0)=\dfrac{1}{a}$

305) „ $=\dfrac{\lg\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\qquad f(a)=\dfrac{1}{a}$

306) $f(x) = \dfrac{\sin(nx)}{x}$ $\qquad f(0) = n$

307) „ $= \dfrac{\sin x}{\sin 2x}$ $\qquad f(\pi) = -\dfrac{1}{2}$

308) „ $= \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ $\qquad f(0) = \dfrac{a}{b}$

309) „ $= \dfrac{2\sin x - 1}{\cos 3x}$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

310) „ $= \dfrac{x\cos x}{x - \sin x}$ $\qquad f(0) = \dfrac{1}{0}$

311) „ $= \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ $\qquad f(0) = 0$

312) „ $= \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{2e^x - 2 - 2x}$ $\qquad f(0) = 0$

313) „ $= \dfrac{2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg} x - 1}{2\sin^2 x - \cos^2 x - \frac{1}{2}}$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{10}{3}$

314) „ $= \dfrac{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3}{\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3}$ $\qquad f(\operatorname{arc\,tg} 3) = 2$

315) „ $= \dfrac{\operatorname{arc\,sin}(2-x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ $\qquad f(2) = 0$

316) „ $= \dfrac{\operatorname{arc\,sin}\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $\qquad f(a) = \dfrac{1}{a}$

317) „ $= \dfrac{\operatorname{arc\,cos}(1-x)}{\sqrt{2x - x^2}}$ $\qquad f(0) = 1$

318) „ $= \dfrac{\lg\cos x}{x}$ $\qquad f(0) = 0$

319) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$ $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

320) „ $= \dfrac{\lg(1 + e^x)}{a + bx}$ $\qquad f(\infty) = \dfrac{1}{b}$

321) „ $= \dfrac{\lg(a + x)}{x}$ $\qquad f(\infty) = 0$

322) „ $= \dfrac{x^4}{e^x}$ $\qquad f(\infty) = 0$

323) $\quad = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x} \qquad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$

324) $\quad = \dfrac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cotg} x} \qquad f(0) = \dfrac{1}{2}$

325) $\quad = \dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{cotg} \dfrac{x\pi}{2}} \qquad f(0) = \dfrac{\pi^2}{2}$

Wyrażenia nieoznaczone postaci $\infty - \infty$. Jeżeli we wzorze $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \dfrac{\pi(x)}{\rho(x)}$ przy $x = a$ mianowniki tylko otrzymują wartości $\psi(a) = 0$ i $\rho(a) = 0$; to $f(a) = \infty - \infty$. Przed podstawieniem $x = a$ zamieniamy wówczas różnicę ilorazów na iloraz $[\varphi(x)\rho(x) - \pi(x)\psi(x)] : \psi(x)\rho(x)$, który dla $x = a$ przybiera postać nieoznaczoną $\dfrac{0}{0}$

326) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x - x^3}{x^3 \sin x} \qquad f(0) = \infty.$

327) $\quad = \dfrac{x}{\operatorname{cotg} x} - \dfrac{\dfrac{\pi}{2}}{\cos x} \qquad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

328) $\quad = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\lg x} \qquad f(1) = -\dfrac{1}{2}$

329) $\quad = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\lg(1-x)} \qquad f(0) = +\dfrac{1}{2}$

330) $\quad = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{1 - \sin x} \qquad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \infty.$

Postać nieoznaczoną $0 . \infty$ otrzymuje $f(x) = \varphi(x) . \psi(x)$ dla $x = a$ jeżeli jeden czynnik iloczynu staje się równym zeru, a drugi przybiera wartość nieskończenie wielką. Rozważanej funkcji nadajemy wówczas następującą postać:

$$f(a) = \left[\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}}\right]_{x=a} = \frac{0}{0} \text{ lub } = \frac{\infty}{\infty},$$

jeżeli $\varphi(a)=0$, $\psi(a)=\infty$ lub odwrotnie.

331) $f(x)=\frac{1}{e^x-1}\cdot\lg a^x$ $\qquad f(0)=\lg a$

332) „ $=x\cdot\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $\qquad f(\infty)=1$

333) „ $=(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$ $\qquad f(1)=\frac{2}{\pi}$

334) „ $=\arcsin\frac{x-a}{a}\cdot\operatorname{cotg}(x-a)$ $\qquad f(a)=\frac{1}{a}$

335) „ $=(1-\sin x)\cdot\lg x$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

Wyrażenia potęgowe postaci nieoznaczonej. Fukcja $y=u^v$, gdzie u i v są funkcjami zmiennej x, może być również przedstawiona w następujący sposób $y=e^{v\lg u}$, ponieważ $\lg y=v\lg u$. Jeżeli zatem, przy $x=a$

1) $u=0$ i $v=0$, to $y=0^0$,
2) $u=\infty$ „ $v=0$, „ $y=\infty^0$,
3) $u=1$ „ $v=\infty$, „ $y=1^\infty$.

Jeżeli wreszcie $y=\sqrt[v]{u}$, to $\lg y=\frac{1}{v}\lg u$, albo $y=e^{\frac{1}{v}\lg u}$. O ile wówczas, przy $x=a$

4) $u=1$ i $v=0$, to $y=\sqrt[0]{1}$,
5) $u=0$ „ $v=\infty$, „ $y=\sqrt[\infty]{0}$,
6) $u=\infty$ „ $v=\infty$, „ $y=\sqrt[\infty]{\infty}$.

W podobnych wypadkach wykładnik liczby e równa się $0\cdot\infty$.

336) $f(x)=x^x$ $\qquad f(0)=1$

337) „ $=x^{\frac{1}{x}}$ $\qquad f(\infty)=1$

338) „ $=(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

339) „ $=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Uwaga. Jeżeli za pomocą różniczkowania nie możemy określić wartości wyrażenia nieoznaczonego, to po-

sługujemy się wówczas rozwinięciem danej funkcji na szereg nieskończony.

§ 10. Maxima i minima funkcji.

Fukcje wyraźne. Zakładamy, że funkcja $y=f(x)$ otrzymuje wartości skończone i zmienia się w sposób ciągły (str. 7) w przedziale od $x=x_0$ do $x=x_0+h$. Dla wartości x, należących do tego przedziału, możemy napisać wzór (2), str. 7, w następujący sposób:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x[f'(x)+\varepsilon]$$

gdzie ε jest wartością zmienną dążącą do zera wraz z przyrostem Δx. Przypuszczamy następnie, że $f'(x)$ nie równa się zeru. Możemy wówczas wyznaczyć tak małą wartość dla Δx, ażeby $|\varepsilon|<|f'(x)|$ (por. str. 6); nawias łamany, znajdujący się w prawej stronie ostatniego wzoru otrzymuje wtedy znak zgodny ze znakiem $f'(x)$. Ponieważ zaś lewa strona równości stanowi przyrost funkcji, możemy przeto powiedzieć, że:

Gdy pochodna $f'(x)$ nie równa się zeru, to możemy wyznaczyć tak mały obszar zmienności x, że wewnątrz tego obszaru przy dodatnich wartościach pochodnej przyrosty zmiennej niezależnej i odpowiednie przyrosty funkcji posiadają jednakowe znaki, a przy ujemnej wartości pochodnej — posiadają znaki przeciwne. Inaczej mówiąc: przy dodatniej wartości pochodnej funkcja rośnie wraz ze zmienną niezależną i razem z nią również maleje. Przy ujemnej wartości pochodnej funkcja rośnie, gdy zmienna maleje i odwrotnie.

Ażeby uzupełnić powyższe twierdzenie, zakładamy obecnie, że pochodna $f'(x)$ równa się zeru dla wartości zmiennej x, zawartych w pewnym dowolnie małym, lecz skończonym przedziale od a do b, przyczem b jest $>a$. Posługując się dowolną stałą liczbą rzeczywistą κ rozważamy dwie funkcje

$$\Phi(x)=f(x)-\kappa^2 x,\quad \varphi(x)=f(x)+\kappa^2 x$$

i ich pochodne

$$\Phi'(x) = f'(x - \kappa^2) = -\kappa^2, \quad \varphi'(x) = f'(x) + \kappa^2 = +\kappa^2.$$

Zgodnie z dowiedzionem wyżej twierdzeniem funkcja $\varphi(x)$ stale rośnie w przedziale od a do b, natomiast funkcja $\Phi(x)$ stale maleje. Wobec tego jest $\Phi(b) < \Phi(a)$ i $\varphi(b) > \varphi(a)$, a więc

$$f(b) - f(a) < \kappa^2(b - a) \text{ i } f(b) - f(b) > -\kappa^2(b - a).$$

Gdyby wartość $f(b)$ nie była równa $f(a)$, to wynikałaby stąd oczywista sprzeczność, można bowiem wybrać tak małą wartość dla κ^2, że będzie

$$|f(b) - f(a)| > |b - a|\kappa^2$$

Powinno być przeto $f(b) = f(a)$; a ponieważ ten sam wniosek można wyprowadzić dla wszelkich wartości x zawartych w przedziale od a do b, więc mamy dowiedzione twierdzenie następujące: Jeżeli w pewnym przedziale skończonym pochodna $f'(x)$ zachowuje stale wartość 0, to funkcja $f(x)$ w tym przedziale posiada wartość stałą.

Dowiedzione twierdzenia mogą być odwrócone: Jeżeli funkcja $f(x)$ rośnie, to pochodna $f'(x)$ otrzymuje wartości dodatnie, lub też staje się zerem przy pewnych wartościach zmiennej; jeżeli funkcja $f(x)$ maleje, to pochodna otrzymuje wartości ujemne lub też staje się zerem, dla pewnych wartości zmiennej. Jeżeli funkcja zachowuje wartość stałą, to jej pochodna jest stale równa zeru i odwrotnie.

Dla twierdzeń powyższych możemy podać bardzo prostą interpretację geometryczną, jeżeli x i y rozważamy jako współrzędne prostokątne punktu krzywej. Pochodna bowiem jest styczną trygonometryczną (tangens) tego kąta, który utworzony jest przez styczną do krzywej w punkcie (x, y) z dodatnim kierunkiem osi odciętych (§ 2, str. 8), i przytem styczna winna być poprowadzona w kierunku

od punktu (x, y) do punktu $(x + dx, y + dy)$, Jeżeli funkcja $f(x)$ rośnie wraz ze zmienną x, to krzywa wznosi się, gdy rozważamy ją w kierunku rosnących wartości zmiennej. Wówczas dx i dy są jednocześnie dodatniemi. (Rys. 5a w punkcie $M_{,,}$ rys. 6a w punkcie $M_{,,,}$ rys. 7a w punktach $M_{,}$ i $M_{,,}$). Styczna do krzywej tworzy z kierunkiem rosnących wartości x taki kąt, dla którego dostawa (cosinus) i wstawa (sinus) są jednocześnie dodatniemi, przyczem dostawa $= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ a wstawa $= \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. (Jest to dodatni kąt ostry $\alpha_{,}$ na rys. 5a, dodatni kąt ostry $\alpha_{,,}$ na rys. 6a, a na rys. 7a — kąt ostry dodatni $\alpha_{,}$ względnie $\alpha_{,,}$).

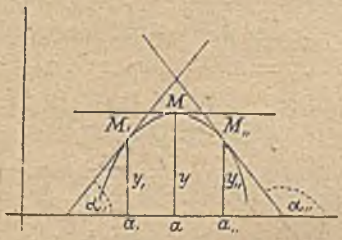
Jeżeli zaś przeciwnie funkcja $y = f(x)$ maleje przy powiększaniu wartości zmiennej x, to krzywa opada, gdy rozważamy ją w kierunku rosnących wartości zmiennej. Wtedy jest dx dodatnie, a dy ujemne. (Rys. 5a w punkcie $M_{,,,}$ rys. 6a w punkcie $M_{,}$; rys 8a w punktach $M_{,}$ i $M_{,,}$). Styczna do krzywej poprowadzona we wskazanym wyżej kierunku tworzy z dodatnim kierunkiem osi odciętych taki kąt, którego dostawa jest dodatnia, a wstawa ujemna. (Jest to ujemny kąt ostry przyległy do $\alpha_{,,}$ na rys. 5a, do $\alpha_{,}$ na rys. 6a, do $\alpha_{,}$ i do $\alpha_{,,}$ na rys. 8a). Kąty te leżą pod osią odciętych i otrzymane są przez przedłużenie stycznej po za punkt przecięcia jej z osią odciętych.

Zgodnie z powyższem wypowiedzieć możemy dowiedzione twierdzenia w następujący sposób:

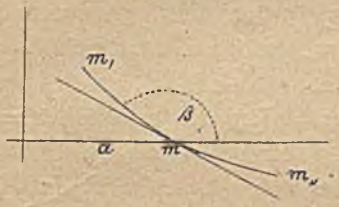
Jeżeli krzywa wznosi się, to styczna do niej poprowadzona w kierunku od puntu (x, y) do punktu $(x + dx, y + dy)$, tworzy z dodatnim kierunkiem osi odciętych kąt ostry dodatni i odwrotnie.

Jeżeli krzywa opada, to styczna do niej poprowadzona w kierunku od punktu (x, y) do punktu $(x + dx, y + dy)$, tworzy z dodatnim kierunkiem osi odciętych kąt ostry ujemny i odwrotnie.

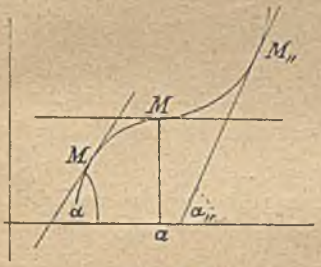
Rys. 5 a.



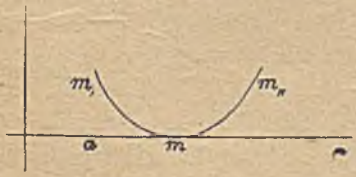
Rys. 5 b.



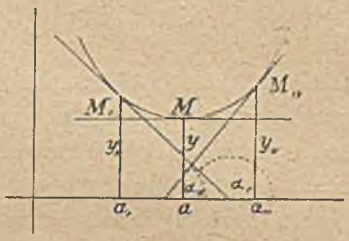
Rys. 7 a.



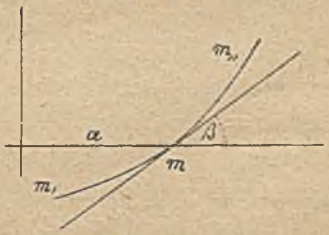
Rys. 7 b.



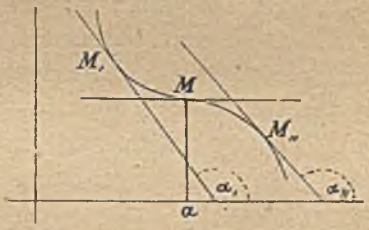
Rys. 6 a.



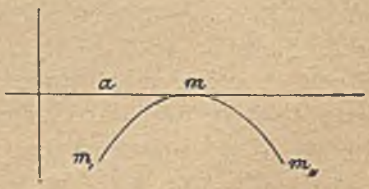
Rys. 6 b.



Rys. 8 a.



Rys. 8 b.



Od rozważań wstępnych przechodzimy do badania funkcji $y=f(x)$, zakładając, że funkcja ta i jej pierwsza pochodna otrzymują wartości skończone i zmieniają się w sposób ciągły w przedziale od $x=a-\delta$ do $x=a+\delta$ Zakładamy prócz tego, że $f'(a)=0$; wówczas funkcja $f(x)$ przy $x=a$ nie jest ani rosnącą, ani malejącą. Odnośnie do wykresu funkcji możemy zauważyć, że: w punkcie $x=a$ krzywa nie wznosi się i nie opada; punktowi takiemu możemy nadać nazwę obrazową poziomu chwilowego. Do omówienia mamy cztery wypadki możliwe:

Pierwszy. Pochodna $f'(x)$ przechodzi od wartości dodatnich przez zero do wartości ujemnych, gdy zmienna niezależna, stale rosnąca, przechodzi przez wartość $x=a$. Wówczas funkcja $y=f(x)$ do punktu $x=a$ rośnie, a po przekroczeniu tego punktu — maleje. Wartość funkcji $f(a)$ jest wobec tego większa niż $f(a-\delta)$ i większa niż $f(a+\delta)$ bez względu na to, jak małą jest wartość dodatnia liczby δ. W tym wypadku wartość funkcji $f(a)$ nosi nazwę maximum. Za pomocą wykresu przedstawiony jest przebieg zmienności funkcji na rys. 5a, gdzie odcięta każdego punktu krzywej przedstawia wartość zmiennej niezależnej x, a rzędna — odpowiednią wartość funkcji $f(x)$. Przebieg zmienności pochodnej $f'(x)$ przedstawiony jest poglądowo na rys. 5b, gdzie x jest odciętą, a $f'(x)$ — rzędną.

Drugi. Pochodna $f'(x)$ przechodzi od wartości ujemnych przez zero do wartości dodatnich, gdy zmienna niezależna, stale rosnąca, przechodzi przez wartość $x=a$. Wówczas funkcja $f(x)$ do punktu $x=a$ maleje, a po przekroczeniu tego punktu — rośnie. Wartość funkcji $f(a)$ jest wobec tego mniejsza niż $f(a-\delta)$ i mniejsza niż $f(a+\delta)$, bez względu na to, jak małą jest liczba dodatnia δ. W tym wypadku wartość funkcji $f(a)$ nazywamy minimum. Na wykresie za pomocą rzędnych, przedsta-

wiony jest poglądowo przebieg zmienności funkcji $f(x)$ na rys. 6a i przebieg zmienności pochodnej na rys. 6b. Zmienną niezależną x przedstawia na obu rysunkach odcięta.

Trzeci. Pochodna $f'(x)$ jest dodatnią przy $x=a-\delta$, zmieniając się następnie w sposób ciągły maleje i osiąga wartość zero przy $x=a$, później zaś wzrasta, a więc przy $x=a+\delta$ jest znowu dodatnią, bez względu na to, jak małą jest liczba δ. Wtedy funkcja $f(x)$ jest funkcją rosnącą przed osiągnięciem wartości $f(a)$ i po osiągnięciu tej wartości; nie posiada przeto przy $x=a$ ani maximum, ani minimum. Za pomocą rzędnych przedstawiona jest funkcja $f(x)$ na rys. 7a i jej pochodna $f'(x)$ na rys. 7b.

Czwarty. Pochodna $f'(x)$ jest ujemną przy $x=a-\delta$, zmieniając się w sposób ciągły rośnie i osiąga wartość zero przy $x=a$, a następnie maleje i wobec tego przy $x=a+\delta$ jest znowu ujemną, bez względu na to, jak małą jest liczba δ. Wówczas funkcja $f(x)$ jest funkcją malejącą przed osiągnięciem wartości $f(a)$ i po osiągnięciu tej wartości; nie posiada zatem przy $x=a$ ani maximum ani minimum. Za pomocą rzędnych przedstawiony jest przebieg zmienności tej funkcji na rys. 8a i przebieg zmienności pochodnej $f'(x)$ na rys. 8b.

[Jeżeli styczna w pewnym punkcie krzywej przecina ją w tym samym punkcie, to punkt taki nazywamy punktem przegięcia krzywej. W rozważanych wyżej dwuch ostatnich wypadkach wykres krzywej posiada punkt przegięcia i styczna w tym punkcie zajmuje położenie szczególne, będąc równoległą do osi odciętych].

Otrzymane wyniki mogą być w ten sposób streszczone:

I. Funkcja $y=f(x)$, która wraz ze swą pierwszą pochodną zmienia się w sposób ciągły nie otrzymując wartości nieskończenie wielkich

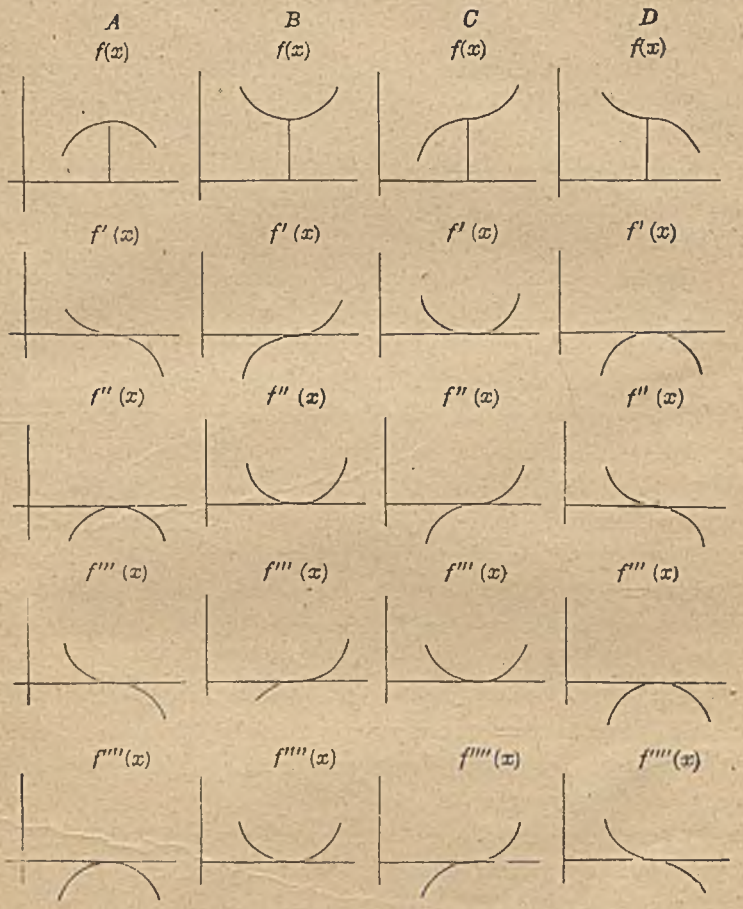
w przedziale od $x=a-\delta$ do $x=a+\delta$, posiada przy $x=a$ maximum (względnie: minimum), jeżeli pochodna $f'(x)$ przechodząc przez zero przy $x=a$ doznaje zmiany znaku. Maximum zachodzi wówczas, gdy $f'(a-\delta)>0$ i $f'(a+\delta)<0$, a minimum — gdy $f'(a-\delta)<0$ i $f'(a+\delta)>0$.

II. Jeżeli zaś pochodna $f'(x)$ przechodzi przez zero przy $x=a$ zmieniając się w sposób ciągły, lecz nie zmieniając swego znaku, to funkcja $f(x)$ przy $x=a$ nie posiada ani maximum, ani minimum.

Zakładamy teraz, że funkcja $y=f(x)$ i jej pochodne $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,... aż do pochodnej rzędu n^{tego}: $f^n(x)$ są funkcjami skończonemi i ciągłemi w przedziale od $x=a-\delta$ do $x=a+\delta$. Przypuszczamy dalej, że $f^n(x)$ jest tą pochodną najniższego rzędu, która nie jest równą zeru przy $x=a$, wszystkie natomiast pochodne niższych rzędów są równe zeru przy $x=a$, czyli: $f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{n-1}(a)=0$. Można wówczas wybrać dla liczby δ tak małą wartość dodatnią, ażeby pochodna $f^n(x)$ nie zmieniała swego znaku w przedziale od $x=a-\delta$ do $x=a+\delta$. Wnioskujemy wówczas, że $f^{n-1}(x)$ przy $x=a$ przechodzi od wartości dodatnich do ujemnych, lub odwrotnie — od ujemnych do dodatnich, zależnie od tego, czy $f^n(a)$ jest ujemne, czy też dodatnie. W pierwszym wypadku $f^{n-2}(a)$ stanowi maximum, w drugim zaś — minimum, co wynika bezpośrednio z twierdzenia I. W każdym razie widocznem jest, że $f^{n-2}(x)$ w przedziale od $a-\delta$ do $a+\delta$ nie zmienia znaku i że znak ten jest zgodny ze znakiem $f^n(x)$. Wskutek tego otrzymujemy dla $f^{n-3}(x)$ tę samą zmianę znaku, co i dla $f^{n-1}(x)$ i podobne wnioskowanie powtarza się dalej perjodycznie przy kolejnem rozważaniu pochodnych niższych rzędów.

Jeżeli teraz n jest liczbą parzystą i $f^n(a)$ posiada

Rys. 9.



wartość ujemną, to dochodzimy do wniosku, że $f''(a)$ ma również znak ujemny. Wtedy $f'(x)$ przy $x=a$ przechodzi od wartości dodatnich do ujemnych i $f(a)$ stanowi maximum funkcji $f(x)$. (Rys. 9 *A*).

Gdy n jest liczbą parzystą i $f^n(a)$ posiada wartość dodatnią, to i $f''(x)$ ma również wartość dodatnią.

Wtedy $f'(x)$ przy $x=a$ przechodzi od wartości ujemnych do dodatnich i $f(a)$ stanowi minimum funkcji $f(x)$. (Rys. 9 *B*).

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $f'(x)$ otrzymuje wartości dodatnie lub ujemne zależnie od tego, czy $f^n(a)$ posiada wartość dodatnią, czy też ujemną. Wobec tego funkcja $f(x)$ przy $x=a$ nie posiada ani maximum, ani minimum, lecz osiąga jedynie chwilowy poziom, gdyż $f'(a)=0$. (Rys. 9, *C* i *D*).

Należy wyobrazić sobie, że szereg wykresów tworzących kolumnę pionową na rys. 9 przedłużony jest perjodycznie aż do pochodnej $f^n(x)$ włącznie. Jeżeli pochodne rozważane są kolejno, począwszy od $f'(x)$, to pochodna $f^n(x)$ jest pierwszą pochodną, dla której wykres przy $x=a$ nie spotyka się z osią odciętych; w otoczeniu punktu a wykres ten leży po jednej stronie osi odciętych. Pochodna poprzedniego rzędu $f^{n-1}(x)$ przy wartościach x bliskich a jest funkcją stale malejącą lub stale rosnącą, przyczem $f^{n-1}(a)=0$, a więc na wykresie odpowiednia część krzywej przecina się z osią odciętych, lecz w punkcie przecięcia oś odciętych nie jest styczną do krzywej, ponieważ $f^n(a)\neq 0$. Pochodna rzędu $(n-2)$ czyli $f^{n-2}(x)$ w otoczeniu punktu $x=a$ zachowuje znak zgodny ze znakiem $f^n(a)$ i staje się równą zeru przy $x=a$, a więc odpowiednia część wykresu tej pochodnej leży po jednej stronie osi odciętych, dotykając tej osi. W wypadkach *A* i *B* (rys. 9) n jest liczbą parzystą, a w wypadkach *C* i *D* — liczbą nieparzystą.

Jeżeli trzeba znaleźć maxima lub minima danej funkcji $y=f(x)$, która wraz z pierwszemi pochodnemi zmienia się w sposób ciągły i otrzymuje wartości skończone w przedziale od $x=x_0$ do $x=x_0+h$, to posługujemy się, zgodnie z powyższem, **następującą regułą:**

Układamy równanie $f'(x)=0$ i szukamy pierwiast-

ków tego równania w przedziale od x_0 do x_0+h. Jeżeli $x=a$ jest takim pierwiastkiem, to $f(a)$ stanowi maximum, albo minimum zależnie od tego, czy $f''(a)$ posiada wartość ujemną, czy też dodatnią.

Jeżeli prócz $f'(a)=0$ i $f''(a)=0$, to szukamy takiej pochodnej najniższego rzędu, która przy $x=a$ nie równa się zeru. Gdy pochodna ta jest rzędu parzystego, to stosownie do tego, czy posiada ona wartość ujemną, czy dodatnią, $f(a)$ stanowi maximum albo minimum danej funkcji.

Przykład 1: Dla jakich wartości x funkcja $f(x)=x+\frac{1}{x}$ osiąga wartość max. albo min.? $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0$, skąd $x=\pm 1$; $f''(x)=\frac{2}{x^3}$. Ponieważ $f''(1)=2>0$, więc $f(1)=2$ stanowi minimum; $f(-1)=-2$ jest maximum, gdyż $f''(-1)=-2$ jest liczbą ujemną.

Przykład 2: $f(x)=\sin x+\cos x$; $f'(x)=\cos x-\sin x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ i $\frac{5\pi}{4}$; $f''(x)=-\sin x-\cos x$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ stanowi maximum, ponieważ $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ stanowi minimum, gdyż $f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)>0$. Okresowość.

Przykład 3: Dla jakiej wartości x funkcja $f(x)=\left(\frac{a}{x}\right)^x$ posiada wartości maximum, albo minimum?

$f'(x)=\left(\frac{a}{x}\right)^x(\lg a-\lg x-1)=0$, skąd $\lg x=\lg\frac{a}{e}$, $x=\frac{a}{e}$,

$f''(x)=-\frac{1}{x}f(x)+f'(x)(\lg a-\lg x-1)$; $f''\left(\frac{a}{e}\right)=-\frac{e}{a}\cdot e^{\frac{a}{e}}$;

jest więc liczbą ujemną, przeto $f\left(\frac{a}{e}\right)=e^{\frac{a}{e}}$ stanowi max.

Przykład 4: Przy jakiej wartości x funkcja $f(x)=\sin x \sin(a-x)$ stanowi max. albo min.?

$f'(x)=\sin(a-2x)=0$, skąd $a-2x=0$, albo $=\pi$, albo $=2\pi$; $x=\frac{a}{2}$, albo $=\frac{a-\pi}{2}$, albo $=\frac{a}{2}-\pi$; $f''(x)=-2\cos(a-2x)$.

Ponieważ $f''\left(\frac{a}{2}\right)=-2$, więc $f\left(\frac{a}{2}\right)=\sin^2\frac{a}{2}$ stanowi max., $f''\left(\frac{a-\pi}{2}\right)=2$, więc $f\left(\frac{a-\pi}{2}\right)=-\cos^2\frac{\alpha}{2}$ stanowi min. Trzecia wartość funkcji równa się pierwszej. Okresowość.

Przykład 5: Przy jakich wartościach x funkcja $f(x)=\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$ posiada wartość max., albo min.?

$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x \operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}=0$, skąd $\operatorname{tg}^3 x=1$, $x=\frac{\pi}{4}$ i $x=\frac{5\pi}{4}$

Gdy $f'(x)=\frac{u}{v}$, to $f''(x)=\frac{v.u'-u.v'}{v^2}$. Dla wyznaczonych wartości x licznik u pochodnej $f'(x)$ jest równy zeru, a więc wzór dla drugiej pochodnej redukuje się do $f''(x)=\frac{u'}{v}$.

W danym przykładzie $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ stanowi max., $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ min., ponieważ $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$ i $f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)>0$. Okresowość.

Zadania.

W rozwiązaniach podane są tylko wartości zmiennej x, dla których funkcja osiąga wartości maximum lub minimum; te ostatnie mogą być łatwo obliczone przez podstawienie.

340) $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$ Mx. przy $x=\frac{a}{3}$, Mn. przy $x=a$

341) „ $=x^3+6x^2-15x$ Mx. „ $x=-5$, Mn. „ $x=1$

342) „ $=x^2(1-x)$ Mx. „ $x=\frac{2}{3}$, Mn. „ $x=0$

343) „ $=x^2(a-x)^2$ Mx. „ $x=\frac{a}{2}$, Mn. „ $x=a$
Mn. „ $x=0$

344) „ $=\frac{x}{x^2+1}$ Mx. „ $=1$, Mn. przy $x=-1$

345) „ $=x+\frac{a^2}{x}$ Mx. „ $=-a$, Mn. przy $x=a$

346) „ $=\frac{a^3}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}$ Mn. „ $x=\frac{a}{a+1}$; $a>0$

347) „ $=\frac{x}{x^2+2x+4}$ Mx. „ $x=2$
Mn. „ $x=-2$

348) „ $=\frac{x}{ax^2-bx+c}$ Mx. „ $x=\sqrt{\frac{c}{a}}$
Mn. „ $x=-\sqrt{\frac{c}{a}}$

349) „ $=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$ Mx. przy $x=-\sqrt{2}$
Mn. „ $x=\sqrt{2}$

350) „ $=\pm\sqrt{2ax-x^2}$ Mx. „ $x=a$, Mn. przy $x=a$

351) „ $=\sqrt{2ax^2(2a-x)}$ Mx. „ $x=\frac{4a}{3}$, Mn. „ $x=0$

352) „ $=x+\sqrt{1-x}$ Mx. „ $x=\frac{3}{4}$

353) „ $=x\sqrt{2-x^2}$ Mx. „ $x=1$, Mn. przy $x=-1$

354) „ $=x\sqrt{ax-x^2}$ Mx. „ $x=\frac{3a}{4}$

355) „ $=(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$ Mx. „ $x=\frac{a}{2}$

356) „ $=e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}$ Mn. „ $x=0$

357) $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ Mx. przy $x=2$. Mn. przy $x=0$

358) „ $=\frac{a^x}{x}$ Mn. „ $x=\frac{1}{\lg a}$; $a>1$

359) „ $=xe^{\frac{1}{x}}$ Mn. „ $x=1$

360) „ $=e^{2x}+e^x$ Mn. „ $x=\lg\frac{1}{2}$

361) „ $=x^x$ Mn. „ $x=\frac{1}{e}$

362) „ $=x^{\frac{1}{x}}$ Mx. „ $x=e$

363) „ $=\frac{x}{\lg x}$ Mn. „ $x=e$

364) „ $=x^{1-\lg x}$ Mx. „ $x=\sqrt{e}$

365) „ $=2\sin x+\sin 2x$ Mx. „ $x=\frac{\pi}{3}$

366) „ $=\sin 2x+2\sin(a-x)$ Mx. „ $x=\frac{a}{3}$, Mn. przy $x=-a$

367) „ $=\frac{\cos^2 x}{a^2}+\frac{\sin^2 x}{b^2}$, $a>b$ Mx. „ $x=\frac{\pi}{2}$, Mn. „ $x=0$

368) „ $=\cos x+\cos(a-x)$; $a<\pi$

Mx. przy $x=\frac{a}{2}$

369) $f(x)=\sin x\,.\,\sin(a+x)$ Mx. „ $x=\frac{\pi-a}{2}$,

Mn. przy $x=\pi-\frac{a}{2}$

370) „ $=\sin x\,.\,\cos(a-x)$ Mx. „ $x=\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}$,

Mn. przy $x=\frac{a}{2}+\frac{3\pi}{4}$

371) „ $=e^x\,.\,\cos x$ Mx. „ $x=\frac{\pi}{4}$, Mn. przy $x=\frac{5\pi}{4}$

372) „ $=\frac{e^x}{\sin x}$ Mn. „ $x=\frac{\pi}{4}$, Mx. „ $x=\frac{5\pi}{4}$.

Rozważaliśmy dotychczas maxima i minima w tych wypadkach, kiedy pochodna danej funkcji jest funkcją skończoną i ciągłą. Możliwy jest jednak również i taki wypadek, kiedy funkcja $f(x)$ w przedziale od $x=a-\delta$ do $x=a+\delta$ zmienia się w sposób ciągły otrzymując wartości skończone, a natomiast pochodna $f'(x)$ przy $x=a$ doznaje przerwy ciągłości. Nie są wówczas równe granice $\lim f'(a-\delta)$ i $\lim f'(a+\delta)$ dla nieograniczenie malejących wartości δ. Nie obawiając się nieporozumienia możemy oznaczyć dwie powyższe granice przez $f'(a-0)$ i $f'(a+0)$, przyczem $f'(a-0)$ oznacza tę granicę, do której zbliża się nieograniczenie $f'(x)$, gdy zmienna x wzrastając dąży do wartości a; $f'(a+0)$ oznacza natomiast granicę pochodnej $f'(x)$ w tym wypadku, kiedy zmienna x malejąc zbliża się nieograniczenie do wartości a. Jeżeli $f'(a-0)$ i $f'(a+0)$ mają znaki różne, to $f(a)$ stanowi maximum albo minimum, zależnie od tego, czy $f'(a-0)$ ma wartość dodatnią, czy ujemną.

Przykład: Załóżmy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, skąd $\frac{dy}{dx}=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}t$ i $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a(\sin\frac{1}{2}t)^4}$. Funkcja y posiada maximum $y=2a$, gdy $t=\pi$, $x=a\pi$ przyczem $\frac{dy}{dx}$ zmienia się wtedy w sposób ciągły; otrzymuje natomiast wartość minimum $y=0$, gdy $t=0$, $x=0$ i wówczas pochodna $\frac{dy}{dx}=-\infty$ przy $x=-0$ i $\frac{dy}{dx}=+\infty$ przy $x=+0$. Rozwiązania powtarzają się okresowo; okresem jest 2π.

Funkcje uwikłane. Jeżeli z równania $f(x,y)$ wyznaczyć mamy największą lub najmniejszą wartość dla y, to wartość zmiennej niezależnej powinna być tak wybrana, ażeby dla niej spełniony był warunek $\frac{dy}{dx}=0$. Ponieważ

zaś $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$, więc warunek ten jest równoznaczny z warunkiem $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Ostatnie równanie zawiera wogóle obie zmienne i rozważane łącznie z równaniem $f(x, y) = 0$ stanowi układ równań, po rozwiązaniu którego otrzymujemy poszukiwaną wartość x i odpowiednią wartość y. Gdy wyznaczona para wartości x i y czyni zadość nie tylko warunkowi $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, lecz i równaniu $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, to $\frac{dy}{dx}$ jest wyrażeniem nieoznaczonem, które później szczegółowo zbadamy. Obecnie zakładamy, że $\frac{\partial f}{\partial y}$ nie staje się równem zeru. Druga pochodna, zgodnie ze wzorem (24), str. 56 sprowadza się wówczas do wyrażenia $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y}$.

Przykład: $f = y^2 + 2x^2 y + 4x - 3 = 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2.$$

Z układu dwuch pierwszych równań mamy $x = 1$, $y = -1$ i $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$. Ponieważ dla pierwszej pary wartości jest jednocześnie $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, przeto pierwsza wartość funkcji y nie stanowi ani maximum, ani minimum. Dla drugiej natomiast pary wartości mamy $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{16}{9}$ i wobec tego $y = 2$ stanowi maximum.

Zadania.

373) $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$;

Przy $x = 0$, $y = b$ max., $y = -b$ min.

374) $f = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$.

Przy $x = 0$, $y = 0$ nie stanowi ani max., ani min., przy $x = \pm \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ jest $y = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ max. i $y = -\frac{a}{4}\sqrt{2}$ min.

375) $f = x^3 - 3a^2x + y^3 = 0$;

$x = a$ daje $y = a\sqrt[3]{2}$ jako max. i $x = -a$ daje $y = -a\sqrt[3]{2}$ jako min.

376) $f = 4x^3 - 20x - 8y + 41 = 0$;

$x = \frac{5}{2}$ daje $y = 2$ jako min.

377) $f = (y - x)^3 + x + 6 = 0$;

przy $x = -6 - \frac{1}{3\sqrt{3}}$ jest $y = -6 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ max.

„ $x = -6 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$ „ $y = -6 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ min.

378) $f = y^2 - ay - \sin x = 0$; $a > 2$;

$x = \frac{\pi}{2}$ daje $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4}$ jako max. i

$y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4}$ jako min.

Co otrzymujemy dla $x = -\frac{\pi}{2}$?

Maxima i minima przy uwzględnieniu warunków dodatkowych. Dana jest funkcja $z = f(x, y)$ i oprócz tego równanie $\varphi(x, y) = 0$ wyrażające związek pomiędzy zmiennemi x i y. Należy określić x i y w ten sposób, ażeby wartości tych zmiennych czyniły zadość równaniu $\varphi(x, y) = 0$ i nadawały jednocześnie funkcji z wartość maximum albo minimum.

Przykład: W koło $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ wpisać prostokąt o największem polu, prowadząc boki równolegle do osi współrzędnych. Jeżeli x i y są współrzędnemi wierzchołka leżącego w pierwszej ćwiartce to $z = 4xy$ jest tą funkcją, dla której znaleźć mamy wartość maximum, przyczem niewiadome wartości x i y powinny spełniać warunek $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, ponieważ odpowiedni punkt ma leżeć na okręgu. Z równania $\varphi = 0$ możemy wyrazić łatwo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ i podstawić we wzorze $z = 4xy$; do-

wiadujemy się wówczas, że funkcja $z = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$ przy $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ osiąga wartość maximum.

W wielu wypadkach jednak podobne podstawienie jest bardzo trudne, lub zgoła niemożliwe i wobec tego zadania podobne rozwiązywać należy w inny sposób. Ponieważ y za pomocą równania $\varphi = 0$ uzależnione jest od x, przeto x należy uważać jako jedyną zmienną niezależną i wartości x, nadające funkcji z wartość maximum lub minimum, powinny spełniać warunek $\frac{dz}{dx} = 0$, to znaczy, że powinno być

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \qquad (A)$$

Z równania $\varphi = 0$ otrzymujemy:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \qquad (B)$$

i po wyrugowaniu pochodnej $\frac{dy}{dx}$ z równań (A) i (B), mamy:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = 0,$$

albo $$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \qquad (C)$$

Z równań (C) i $\varphi = 0$ znajdujemy wtedy takie wartości x i y, które nadają funkcji z wartość maximum albo minimum, pozostaje więc do zbadania znak drugiej pochodnej $\frac{d^2y}{dx^2}$ wzór dla której będzie następnie wyprowadzony.

Metodę powyższą możemy wszakże w następujący sposób zmodyfikować.

Równanie (C) jest równoznaczne z układem równań:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \qquad (D)$$

gdzie λ oznacza liczbę stałą, nieoznaczoną, po wyrugowaniu której przechodzimy od układu (D) do (C). Dołączając następnie równanie $\varphi=0$, mamy układ trzech równań z trzema niewiadomemi x, y i λ; ponieważ zaś

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial (f+\lambda\varphi)}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{\partial (f+\lambda\varphi)}{\partial y}$$

mamy więc dla określenia niewiadomych, x, y i λ trzy równania następujące:

$$\frac{\partial (f+\lambda\varphi)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial (f+\lambda\varphi)}{\partial y}=0,\quad \varphi(x,\ y)=0. \qquad (27)$$

Pozostaje jeszcze do wyznaczenia $\frac{d^2z}{dx^2}$. Ze wzorów (A) i (B) wynika:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right]$$

$$0=\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right].$$

Mnożąc ostatnie równanie przez λ i dodając do poprzedniego, mamy:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial (f+\lambda\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial (f+\lambda\varphi)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right].$$

Po wykonaniu różniczkowania w prawej stronie, otrzymujemy $\frac{d^2y}{dx^2}$ pomnożone przez $\frac{\partial (f+\lambda\varphi)}{\partial y}$. Przy rozważanych wartościach iloczyn ten równy jest zeru zgodnie ze wzorem (27), a więc w danym wypadku mamy:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{\partial^2 (f+\lambda\varphi)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 (f+\lambda\varphi)}{\partial y\,\partial x}\frac{dy}{dx}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 (f+\lambda\varphi)}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 (f+\lambda\varphi)}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx}.$$

jeżeli wreszcie $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, to wynika stąd

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]^2 - 2\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial y^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]^2}{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]^2}.$$

Znak otrzymanego wyrażenia nie zależy od mianownika, a więc funkcja z osiąga wartość maximum, gdy licznik jest ujemy, i minimum, jeżeli licznik jest dodatni.

Chcąc przeto znaleźć maximum lub minimum funkcji $z = f(x, y)$ z uwzględnieniem dodatkowego warunku $\varphi(x, y) = 0$, należy kierować się **następującą regułą:**

Określamy wartości trzech niewiadomych x, y, λ tak, ażeby uczynić zadość równaniom (27). Jeżeli dla znalezionych wartości wyrażenie $\frac{d^2z}{dx^2}$ posiada wartość dodatnią (ujemną), to otrzymujemy minimum (maximum).

Przykład 1: Przy jakich wartościach x i y funkcja $z = xy$ osiąga maximum lub minmum, jeżeli dane jest równanie warunkowe:

$\varphi = x^3 + y^3 - axy = 0$. $f + \lambda\varphi = xy + \lambda(x^3 + y^3 - axy)$;

$\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial x} = y + \lambda(3x^2 - ay) = 0$; $\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y} = x + \lambda(3y^2 - ax) = 0$.

Z powyższych równań wynika $x = y$, a następnie z równania $\varphi = 0$:

$$x = y = \frac{a}{2}, \text{ i wreszcie } \lambda = -\frac{2}{a}, \quad z = \frac{a^2}{4};$$

$$\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x^2} = 6\lambda x = -6, \quad \frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial y^2} = 6\lambda y = -6,$$

$$\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x\partial y} = 1 - \lambda a = 3; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2 - ay = \frac{a^2}{4},$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3y^2 - ax = \frac{a^2}{4}$; $\frac{d^2z}{dx^2} = -18$, więc $z = \frac{a^2}{4}$ stanowi maximum.

Przykład 2: Podług danego boku a i przeciwległego kąta α zbudować trójkąt posiadający największe pole. Kąty przyległe do danego boku a oznaczamy przez x i y, wówczas pole $F = \frac{a^2 \sin x \sin y}{2 \sin \alpha}$. Iloczyn utworzony z czynników stałych i zmiennych osiąga największą lub najmniejszą wartość, gdy iloczyn czynników zmiennych staje się największym lub najmniejszym; wobec tego możemy odrzucić a^2 i $2 \sin \alpha$, a rozważać jedynie $z = f(x, y) = \sin x \sin y$, jako funkcję, dla której wyznaczyć należy maximum. Istnieje jednocześnie związek $\varphi = x + y + \alpha - \pi = 0$, więc $f + \lambda\varphi = \sin x \sin y + \lambda(x + y + \alpha - \pi)$, $\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial x} = \cos x \sin y + \lambda = 0$, $\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y} = \sin x \cos y + \lambda = 0$, skąd $\sin(x - y) = 0$ czyli $x - y = 0$, drugie zaś rozwiązanie $x - y = \pi$ jest niedopuszczalne. Przy $y = x$ mamy następnie $\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x^2} = -\sin^2 x$, $\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial y^2} = -\sin^2 x$, $\frac{\partial^2(f+\lambda\varphi)}{\partial x \partial y} = \cos^2 x$, a ponieważ $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1$, więc przy $y = x$ wartość $\frac{d^2 z}{dx^2}$ jest ujemną i pole trójkąta osiąga maximum. Z pośród wszelkich możliwych trójkątów, o danej podstawie i danym kącie przy wierzchołku, największe pole posiada trójkąt równoramienny.

Inne zadanie, a mianowicie: W dany odcinek kołowy, wpisać trójkąt o największem polu, jest w zupełności równoznaczne z poprzedniem.

Zadania.

379) Jak wielki powinien być kąt u podstawy w trójkącie równoramiennym, wpisanym w dany okrąg, jeżeli pole trójkąta ma posiadać największą wartość?

Jeżeli r oznacza promień koła a x — kąt niewiadomy, to pole $F = 4r^2 \sin^3 x \cos x$ osiąga wartość max., gdy $\cos x = \frac{1}{2}$, skąd $x = 60^0$. Trójkąt wpisany równoboczny posiada pole największe.

380) Podstawa trójkąta $= a$ i kąt przeciwległy $= \alpha$ są dane. Jak należy wykreślić trójkąt, jeżeli obwód jego ma być maximum?

Oznaczając pozostałe boki przez x i y, mamy:

$$f = x + y + a, \quad \varphi = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha - a^2 = 0.$$

Znajdujemy max. funkcji f przy $x = y$.

381) Dany odcinek a podzielić należy na dwie części tak, aby iloczyn długości otrzymanych odcinków był największy. $z = xy$, $\varphi = x + y - a = 0$; z osiąga max. przy $x = y = \frac{a}{2}$.

382) Suma przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest stała, a mianowicie $x + y = 2s$. Jak należy wybrać długości tych przyprostokątnych, ażeby przeciwprostokątna z osiągnęła min.?

Min. funkcji z przy $x = y$.

383) Punkt M znajduje się wewnątrz kąta α, wierzchołkiem którego jest punkt A. Należy poprowadzić prostą przez punkt M, przecinającą ramiona danego kąta w punktach B i C w ten sposób, ażeby pole trójkąta ABC było możliwie najmniejsze.

Prowadzimy z punktu M równoległą do AC przecinającą AB w punkcie D. Zakładamy: $AD = a$, $MD = b$; $AB = x$, $AC = y$, $F = \frac{1}{2} xy \sin \alpha$, więc $z = xy$; $\varphi = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - 1 = 0$. Min. pola F przy $x = 2a$, a więc wtedy, gdy $MB = MC$.

384) Na podstawie AB trójkąta ABC dany jest punkt M; prosta równoległa do AB spotyka AC w punkcie D i CB w punkcie E. W jakiej odległości od podstawy

należy poprowadzić prostą DE, ażeby pole trójkąta DEM osiągnęło max.?

Zakładamy: podstawa $AB=c$, wysokość trójkąta $ABC=h$, podstawa $DE=y$, wysokość trójkąta $DEM=x$; mamy wówczas: $F=\frac{1}{2}xy$, $\varphi=cx+hy-ch=0$; max. pola F przy $x=\frac{1}{2}h$.

385) W trójkącie dana jest podstawa b i wysokość h. Jak należy zbudować trójkąt, jeżeli suma dwuch pozostałych boków ma posiadać wartość min.?

Jeżeli x i y oznaczają kąty u podstawy, to $z=\frac{h}{\sin x}+\frac{h}{\sin y}$ wyraża sumę pozostałych boków, $bh=\frac{b^2\sin x\sin y}{\sin(x+y)}=2F$, więc $\varphi=\operatorname{cotg}x+\operatorname{cotg}y-\frac{b}{h}=0$.

Przy $x=y$ funkcja z osiąga min.

386) Na bokach AB i BC danego trójkąta wyznaczyć punkty D i E w ten sposób, ażeby odcinek DE dzielił pole trójkąta na połowy i jednocześnie posiadał najmniejszą długość.

$BD=x$, $BE=y$, $BA=c$, $BC=a$;

$DE^2=x^2+y^2-2xy\cos B$, $\varphi=xy-\frac{ac}{2}=0$. Znajdziemy $z=x^2+y^2-ac\cos B=\text{Min.}$, gdy $x=y=\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

Równoznaczne z powyższem jest zadanie następujące: „znaleźć najmniejszą wartość podstawy trójkąta, gdy dane jest jego pole i kąt przy wierzchołku“.

387) Punkty A i B leżą po jednej stronie prostej DE; na prostej DE wyznaczyć taki punkt C, ażeby suma $AC+CB$ była min.

Prowadzimy AP i BQ prostopadle do DE; zakładamy

$AP=p$, $BQ=q$, $PQ=c$; $\sphericalangle ACP=x$, $\sphericalangle BCQ=y$,

wówczas $z = AC + BC = \frac{p}{\sin x} + \frac{q}{\sin y}$, $\varphi = p \operatorname{cotg} x + q \operatorname{cotg} y - c = 0$; z jest min. gdy $x = y$.

Jeżeli ACB stanowi drogę przebytą przez promień świetlny, to rozwiązanie powyższego zadania wyraża prawo odbicia zgodnie z zasadą, że droga przebyta powinna posiadać wartość min.

388) Dany jest kąt B i odcinek $DE = b$. Należy umieścić dany odcinek w ten sposób, ażeby końce jego leżały na ramionach danego kąta i pole trójkąta DBE było max.

Niechaj $BD = x$, $BE = y$; $F = \frac{1}{2} xy \sin B$, $\varphi = x^2 + y^2 - 2xy \cos B - b^2 = 0$. $F = \text{max.}$, gdy $x = y$. (por. uwagę do zad. 386). W zadaniu powyższem mamy nowe sformułowanie i nowe rozwiązanie przykładu 2.

389) Dany jest kąt prosty przy wierzchołku A i na jednem ramieniu tego kąta dane są punkty B i C. Znaleźć na drugiem ramieniu punkt D tak, ażeby kąt $BDC = v$ był możliwie największy.

$$AB = b,\ AC = c\ AD = x,\ \sphericalangle ABD = \beta,$$

$$\sphericalangle ACD = \gamma;\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x}{b},\quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{c};\quad \operatorname{tg} v = \frac{(c-b)x}{bc + x^2}$$

wraz z kątem v osiąga max. przy $x = \pm\sqrt{bc}$.

390) Który z czworokątów posiadających cztery dane boki a, b, c, d ma największe pole?

Jeżeli x oznacza kąt między bokami a i b, a y — kąt między c i d, to $2F = ab \sin x + cd \sin y$.

Z rozważania przekątnej wynika równanie:

$$\varphi = 2ab \cos x - 2cd \cos y - a^2 - b^2 + c^2 + d^2 = 0.$$

Otrzymujemy max. dla F, gdy $\sin(x + y) = 0$ t. zn. $x + y = \pi$. Czworokąt jest wtedy wpisalny w okrąg.

391) W elipsę należy wpisać prostokąt o największem polu, prowadząc boki równolegle do osi elipsy.

Równania elipsy: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$;
$F = 4xy = 2ab \sin 2t = \max.$ gdy $t = 45^0$, skąd:
$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

392) Jak wielki powinien być promień koła, jeżeli wycinek o danym obwodzie $= 2a$ ma posiadać największe pole?

Jeżeli promień $= x$ i długość łuku $= 2y$, to $x + y = a$ i $F = xy$ posiada wartość max. przy $x = \frac{a}{2}$.

393) Odcinek paraboli utworzony jest przez prostopadłą do jej osi cięciwę BC, odległość której od wierzchołka A równa się a. Wewnątrz odcinka poprowadzić drugą cięciwę MN równoległą do pierwszej w ten sposób, ażeby prostokąt, jednym bokiem którego jest cięciwa MN, a przeciwległy bok leży na cięciwie BC, posiadał największe pole.

Jeżeli x, y są współrzędnemi poszukiwanego punktu, przyczem oś paraboli jest osią odciętych, a styczna poprowadzona przez wierzchołek — osią rzędnych, to $F = y(a - x)$ i $y^2 = 2px$; $F = \max.$ gdy $x = \frac{a}{3}$.

394) Warunki poprzednie; obwód prostokąta powinien być min.

$\frac{1}{2}U = y + a - x$; $y^2 = 2px$. Znajdujemy $U = \min.$, gdy $y = p$, $x = \frac{1}{2}p$.

395) Dwie styczne do koła tworzą kąt $= 2\alpha$. Jak należy poprowadzić trzecią styczną, jeżeli pole trójkąta opisanego utworzonego przez trzy styczne ma być min?

Kąty, jakie tworzy trzecia styczna z dwiema danemi oznaczamy przez $2x$ i $2y$; wówczas:

$$F = r^2(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} \alpha) \text{ i}$$

$\varphi = x + y + \alpha - 90^0 = 0$. F osiąga min., gdy $x = y$.

BIBLIOTEKA

396) W kole dana jest cięciwa AB; w utworzonym przez tę cięciwę mniejszym odcinku kołowym należy poprowadzić drugą cięciwę CD równolegle do pierwszej tak, ażeby trapez $ABCD$ posiadał pole max.

Niech będzie M środkiem okręgu, MH promieniem prostopadłym do AB, $\sphericalangle AMH = \alpha$, $\sphericalangle CMH = x$, wówczas $2F = r^2(\sin x + \sin\alpha)(\cos x - \cos\alpha)$ i osiąga max. gdy $x = \frac{\alpha}{3}$, co wynika z równania $\cos 2x = \cos(x - \alpha)$.

397) Dowieść, że pole wielokąta foremnego o stałym obwodzie osiąga największą wartość, gdy liczba boków staje się nieskończenie wielką (wielokąt przechodzi w koło).

Jeżeli x oznacza liczbę boków i P — obwód wielokąta, to pole jego $F = \frac{P^2}{4x}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{x}$ jest max., gdy $\sin\frac{2\pi}{x} = \frac{2\pi}{x}$, t, zn. $x = \infty$.

398) Stożek obrotowy, o wierzchołku A, średnicy podstawy $BC = 2r$ i tworzącej $AB = s$, należy przeciąć płaszczyzną równoległą do AC w ten sposób, ażeby pole otrzymanego odcinka paraboli było max.

Niechaj S oznacza wierzchołek paraboli na tworzącej AB, SD — oś paraboli równoległą do AC, przyczem D leży na BC. Załóżmy następnie $SD = x$, a rzędną odpowiedniego punktu paraboli oznaczmy przez y, wówczas $F = \frac{2}{3}xy$ i $y^2 = BD \cdot DC = DC(2r - DC)$. Otrzymujemy stąd $y = \frac{2r}{s}\sqrt{sx - x^2}$ i F osiąga max. gdy $x = \frac{3}{4}s$, czyli $AS = \frac{1}{4}AB$.

399) Na prostokącie opisać elipsę o najmniejszem polu.

a i b niech oznaczają połowy boków prostokąta, x i y — połowy osi elipsy $F = xy\pi$ i $\varphi = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0$.

Mamy $F = \min.$, gdy $x = a\sqrt{2}$, $y = b\sqrt{2}$. (Por. zadanie 391).

400) Na trójkącie równoramiennym opisać należy elipsę o najmniejszem polu, prowadząc małą oś elipsy równolegle do podstawy trójkąta.

Niechaj A oznacza wierzchołek trójkąta, podstawa $BC = 2n$, wysokość $= h$. Jeżeli u i v oznaczają połowy osi elipsy, to równanie wierzchołkowe elipsy ma postać następującą: $u^2y^2 = v^2(2ux - x^2)$ i wobec tego istnieje związek: $u^2n^2 = v^2(2uh - h^2)$. Pole $F = uv\pi$ osiąga min. przy $u = \frac{2}{3}h$.

401) W trójkąt równoramienny należy wpisać elipsę w ten sposób, ażeby mała oś elipsy była równoległą do podstawy i pole elipsy posiadało wartość maximum.

Niechaj $AB = 2n$ oznacza podstawę, C — wierzchołek, $DC = h$ — wysokość trójkąta i jednocześnie oś odciętych, AB — oś rzędnych u i v — połowy osi elipsy. Mamy następnie równanie elipsy: $u^2y^2 = v^2(2ux - x^2)$ i równanie prostej AC: $y = -\frac{n}{h}x + n$. Szukamy odciętych punktów przecięcia elipsy z prostą AC i przyrównywamy wyrażenie podpierwiastkowe do zera, zaznaczając w ten sposób warunek styczności. Otrzymujemy wtedy: $v^2 + \frac{2n^2u}{h} - n^2 = 0$; $F = uv\pi$ osiąga max., gdy $u = \frac{h}{3}$.

402) Wykreślić parabolę o osi prostopadłej do podstawy trójkąta równoramiennego i dotykającej ramion tego trójkąta, w ten sposób, ażeby odcinek tej paraboli ograniczony przez podstawę trójkąta posiadał największe pole.

Niechaj A oznacza wierzchołek trójkąta, h — wy-

sokość, $BC=2n$ — podstawę trójkąta, A — początek układu współrzędnych, S — wierzchołek paraboli; $AS=u$. Oś odciętych przechodzi przez środek podstawy trójkąta. Równanie paraboli: $y^2=2p(x-u)$, równanie prostej $AB: y=\frac{n}{h}x=kx$. Warunek styczności prostej AB z parabolą: $p-2k^2u=0$, przyczem p nie jest jeszcze określone.

Pole odcinka paraboli $F=\frac{2}{3}\sqrt{2p(h-u)^3}$ osiąga maximum, gdy $u=\frac{h}{4}$.

403) Dane jest równanie koła $y^2=2rx-x^2$. Początek układu jest jednocześnie wierzchołkiem paraboli, osią której jest oś odciętych, przyczem parabola przecina się z danym okręgiem w punktach B i C. Jaką wartość należy nadać parametrowi p paraboli, ażeby odcinek tej krzywej, ograniczony cięciwą BC, posiadał największe pole?

Współrzędne punktu B oznaczamy przez x i y, wówczas $F=\frac{2}{3}xy$, $y^2=2px$ i $y^2=2rx-x^2$, skąd wynika, że $F=\frac{8}{3}\sqrt{p(r-p)^3}$ osiąga wartość maximum, gdy $p=\frac{r}{4}$.

404) Który z walców obrotowych, posiadających powierzchnię całkowitą $=a^2$, ma największą objętość?

Promień podstawy $=x$, wysokość $=y$, objętość $V=x^2y\pi$,

$\varphi=2\pi x(x+y)-a^2$: V osiąga max. przy $y=2x$.

405) Stożek obrotowy przecięty jest płaszczyzną równoległą do podstawy, a otrzymane przecięcie jest podstawą walca obrotowego wpisanego w stożek. Jak należy poprowadzić płaszczyznę przecięcia, chcąc otrzymać walec o największej objętości?

Promień podstawy stożka $= r$, wysokość $= h$; promień podstawy walca $= x$, wysokość $= y$. $V = x^2 y\pi$; $\varphi = hx + ry - hr = 0$. V osiąga max. przy $x = \frac{2r}{3}$.

406) Z pośród stożków obrotowych, posiadających tworzącą $= s$, wybrać ten, którego objętość jest największą.

Max. objętości stożka przy promieniu podstawy $= s\sqrt{\frac{2}{3}}$.

407) W kole o promieniu r wziąć taki wycinek, z którego można utworzyć boczną powierzchnię stożka o największej objętości.

Jeżeli x oznacza promień podstawy stożka, to objętość V osiąga maximum przy $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$.

408) Ostrosłup przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy i wielokąt przecięcia przyjęto za podstawę graniastosłupa, którego druga podstawa leży na płaszczyźnie podstawy ostrosłupa. Jak należy poprowadzić płaszczyznę przecięcia, chcąc otrzymać max. objętości graniastosłupa?

Pole podstawy ostrosłupa B, wysokość h; pole podstawy graniastosłupa y, wysokość x. Mamy: $y : B = (h - x)^2 : h^2$ i $V = xy$ osiąga maximum przy $x = \frac{h}{3}$. — (por. z zad. 405).

409) Te same warunki zadania, tylko zamiast graniastosłupa zbudować należy drugi ostrosłup, podstawą którego jest wielokąt przecięcia, a wierzchołek leży na podstawie danego ostrosłupa.

410) Te same warunki, tylko zamiast ostrosłupów wzięte są dwa stożki.

411) Na osi paraboli dany jest punkt B i pomiędzy wierzchołkiem A i punktem B należy poprowadzić cięciwę paraboli CD prostopadłą do osi w ten sposób,

ażeby objętość stożka, utworzonego przez obrót trójkąta BCD dokoła osi paraboli, była największą.

Jeżeli CD przecina się z osią w punkcie P, przyczem $AB=a$, $AP=x$, $CP=y$, to mamy $y^2-2px=0$ i $V=\frac{1}{8}y^2\pi(a-x)$ osiąga max. przy $x=\frac{a}{2}$.

412) W kulę wpisać taki ostrosłup czworokątny foremny, którego objętość byłaby największa.

Jeżeli x oznacza odległość podstawy ostrosłupa od środka kuli, a y — połowę boku podstawy, to $V=\frac{1}{3}y^2(r+x)$ i $x^2+2y^2-r^2=0$. Przy $x=\frac{r}{3}$ objętość V osiąga max.

413) Dla jakiego punktu ćwiartki elipsy kąt utworzony przez normalną i średnicę, z tegoż punktu wyprowadzoną, jest największy?

Równanie elipsy $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; współrzędne szukanego punktu: x, y; poszukiwany kąt: ψ; $\operatorname{tg}\psi=\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}xy$ wraz z iloczynem xy osiąga max. przy $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{2}}$.

414) Dowieść, że styczna poprowadzona w punkcie, wyznaczonym w poprzedniem zadaniu, tworzy z osiami trójkąt o najmniejszem polu.

415) Dwie kule położone są zewnętrznie jedna względem drugiej. Dla jakiego punktu prostej, przechodzącej przez środki tych kul, suma powierzchni kulistych widocznych z tego punktu jest największą?

416) Odcinek łączący środki dwuch kul jest średnicą okręgu zakreślonego na jednej z płaszczyzn przesuniętych przez ten odcinek. Dla jakiego punktu wziętego na tym okręgu suma widocznych części powierzchni kulistych jest największą?

§ 11. Szeregi Taylora i Maclaurina.

Twierdzenie o wartości pośredniej. Zakładając, że funkcja $f(x)$ i jej pochodna $f'(x)$ są ciągłemi w przedziale od $x=a$ do $x=b$, przyczem M oznacza największą, a m najmniejszą wartość pochodnej $f'(x)$ w tym przedziale, rozważamy dwie nowe funkcje

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-M(x-a)$$
$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-m(x-a).$$

Wówczas, we wskazanym przedziale, mamy

$$\Phi'(x)=f'(x)-M<0, \quad \varphi'(x)=f'(x)-m>0,$$

a więc w tych warunkach $\varphi(x)$ stale rośnie, a natomiast $\Phi(x)$ maleje (por. § 10). Przy $x=a$ funkcje Φ i φ stają się równemi zeru, a więc $\Phi(b)$ jest ujemne i $\varphi(b)$ dodatnie, to znaczy, że

$$f(b)-f(a)-M(b-a)<0, \quad f(b)-f(a)-m(b-a)>0.$$

Jeżeli przeto zmienna t we wzorze

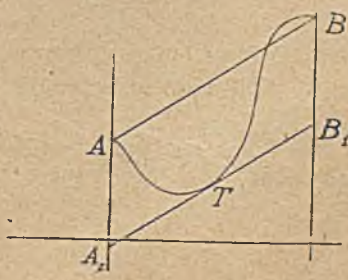
$$f(b)-f(a)-(b-a)f'(t)=\psi(t)$$

zmienia się w przedziale od a do b, to gdy $f'=M$, wartość funkcji ψ jest ujemną, a gdy $f'=m$ funkcja ψ otrzymuje wartość dodatnią. Ponieważ ψ jest funkcją ciągłą w przedziale od a do b, więc istnieje w tym przedziale taka wartość zmiennej t, dla której $\psi(t)=0$. Oznaczamy tę wartość przez $a+\Theta(b-a)$, gdzie Θ jest pewnym ułamkiem właściwym dodatnim; wynika stąd

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\Theta(b-a))\,(0\leqq\Theta\geqq 1). \quad (28)$$

Wzór powyższy nosi nazwę twierdzenia o wartości pośredniej; posiada on prostą interpretację geometryczną: jeżeli krzywa ograniczona punktami A i B jest linją ciągłą i jednocześnie współczynnik kątowy stycznej zmienia się w sposób ciągły,

Rys. 10.



to przynajmniej w jednym punkcie łuku AB styczna A_1B_1 jest równoległą do cięciwy AB.

Z dowiedzionego twierdzenia wynika następujący wniosek: Jeżeli $f(a)=0$ i $f(b)=0$, lub też wogóle $f(a)=f(b)$, to w przedziale od $x=a$ do $x=b$ istnieje pierwiastek równania $f'(x)=0$.

Szereg Taylora. Zakładamy, że funkcja $f(x)$ i n pierwszych pochodnych tej funkcji zmieniają się w sposób ciągły i otrzymują wartości skończone w przedziale od a do b. Rozważamy dalej funkcję $\psi(x)$

$$\psi(x)=f(b)-f(x)-\frac{b-x}{1}f'(x)-\frac{(b-x)^2}{1\cdot 2}f''(x)-\ldots$$
$$-\frac{(b-x)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)-\frac{(b-x)^p}{p}K,$$

przyczem p i K są wartościami niezależnemi od x. Liczbę K wyznaczymy za pomocą równania liniowego względem K, stawiając warunek: $\psi(a)=0$. Postać wzoru, wyrażającego funkcję ψ, dowodzi oprócz tego, że i $\psi(b)=0$. Na zasadzie wniosku, otrzymanego z twierdzenia o wartości pośredniej, przekonywamy się, że istnieje taka wartość $x=\xi$ w przedziale od a do b, dla której pochodna funkcji $\psi(x)$, czyli

$$\psi'(x)=-\frac{(b-x)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x)+(b-x)^{p-1}K$$

staje się równą zeru; to znaczy, że jest taka wartość pośrednia ξ, dla której

$$K=\frac{(b-\xi)^{n-p}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\xi)$$

Podstawiając znalezione wyrażenie we wzorze na $\psi(a)$ i uwzględniając zaznaczony wyżej warunek: $\psi(a)=0$, — otrzymujemy

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots$$
$$+\frac{(b-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^p(b-\xi)^{n-p}}{p\cdot 1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\xi).$$

Zamiast a i b wprowadzamy nowe znakowanie x i $x+h$; wówczas $\xi = a+(b-a)\theta = x+\theta h$. Mamy wtedy

$$(29)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2.\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p.1.2\ldots(n-1)}f^{n}(x+\theta h)$$

Ostatni wyraz nazywamy resztą i oznaczamy przez R. Kładąc w tym wyrazie $p=1$, znajdujemy wzór na resztę Lagrange'a.

$$R_1=\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n}(x+\theta h),$$

przy $p=n$ otrzymujemy wzór na resztę Cauchy'ego

$$R_{11}=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Wzór (29) jest szeregiem Taylora. Wyprowadzony jest na podstawie założenia, że funkcja $f(x+h)$ i jej pochodne aż do pochodnej rzędu n^{go} włącznie są jednowartościowemi, skończonemi i ciągłemi w przedziale obejmującym wartość $h=0$.

Szereg Maclaurina. Jeżeli we wzorze (29) zamiast x weźmiemy 0 i x zamiast h, to otrzymamy szereg

$$(30)\quad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots$$
$$+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(0)+R^0$$

$$R^0=\frac{(1-\theta)^{n-p}x^n}{p.1.2\ldots(n-1)}f^{n}(\theta x)$$

i w szczególności

$$R_1^0=\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2\ldots(n-1)}f^{n}(\theta x),\qquad R_{11}^0=\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{n}(\theta x).$$

Wzór ten sprawdza się wtedy, gdy funkcja $f(x)$ i n pierwszych pochodnych tej funkcji są funkcjami jednowartościowemi, skończonemi i ciągłemi w przedziale zawierającym wartość $x=0$.

Obliczanie wartości $f'(0)$, $f''(0)\ldots$ wymaga uprzedniego wyznaczenia pochodnych $f'(x)$, $f''(x)\ldots$ i podstawienia następnie $x=0$.

Jeżeli we wzorze (29) $\lim R=0$ przy $n=\infty$ i warunek, wskazany powyżej dla funkcji i jej pochodnych, jest spełniony, to otrzymujemy rozwinięcie na szereg nieskończony:

$$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1}f'(a)+\frac{x^2}{1.2}f''(a)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots \quad (31)$$

Podobne rozwinięcie otrzymać możemy również ze wzoru (30), jeżeli $\lim R^{(0)}=0$ przy $n=\infty$ i spełniony jest warunek dotyczący funkcji i jej pochodnych. Mamy wtedy:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots \quad (32)$$

Warunek: $\lim R=0$, względnie $\lim R^{(0)}$ przy $n=\infty$, pociąga za sobą zbieżność szeregu (31) względnie (32); odwrotne natomiast rozumowanie może okazać się mylnem, ponieważ prawe strony wzorów (31) i (32) mogą być szeregami zbieżnemi, nie będąc jednocześnie rozwinięciem dla $f(a+x)$ względnie $f(x)$, o ile R dąży do granicy nierównej zeru przy $n=\infty$.

Zadania.

417) Dwumian. Dla funkcji $f(x)=x^n$ znajdujemy: $f(a)=a^n$, $f'(a)=na^{n-1}$, $f''(x)=n(n-1)a^{n-2}$, $f'''(a)=n(n-1)(n-2)a^{n-3}$, i t. d. Podług wzoru Taylora otrzymujemy $f(x+a)$, czyli:

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}\frac{x}{1}+n(n-1)a^{n-2}\frac{x^2}{1.2}$$
$$+n(n-1)(n-2)a^{n-3}\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

418) Znaleźć rozwinięcie dla $(1+x)^{-n}$. $f(x)=x^{-n}$, $f(1)=1$,

$f'(1)=-n, f''(1)=n(n+1), f'''(1)=-n(n+1)(n+2)$ i t. d.

$$(1+x)^{-n}=1-\frac{n}{1}x+n(n+1)\frac{x^2}{1.2}-n(n+1)(n+2)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

419) Rozwinąć wyrażenie $\sqrt{1+x}$.

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$ i t. d.

więc $f(1)=1$, $f'(1)=\frac{1}{2}$, $f''(1)=-\frac{1}{4}$ i t. d.

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^3}{6}-\ldots$$

420) Dowieść wzoru:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots$$

421) Dla funkcji $f(x)=x^3-3x^2+4x-5$ znaleźć $f(x+2)$.

Mamy $f(2)=-1$, $f'(2)=4$, $f''(2)=6$, $f'''(2)=6$;

$f(x+2)=-1+4x+3x^2+x^3$.

422) Za pomocą wzoru Maclaurina dowieść:

$$\frac{a+x}{b+x}=\frac{a}{b}+\frac{b-a}{b^2}x+\frac{a-b}{b^3}x^2+\frac{b-a}{b^4}x^3+\ldots$$

423) Rozwinąć funkcję a^x. $f(x)=a^x$, $f(0)=1$, $f'(0)=\lg a$, $f''(0)=(\lg a)^2$, $f'''(0)=(\lg a)^3$ i t. d.

$$a^x=1+\frac{x}{1}\lg a+\frac{x^2}{1.2}(\lg a)^2+\frac{x^3}{1.2.3}(\lg a)^3+\ldots$$

Otrzymujemy stąd rozwinięcie dla e^x, kładąc e zamiast a; wówczas $\lg a=\lg e=1$.

424) Rozwinąć $\lg(1+x)$. $f(x)=\lg x$, $f(1)=0$, $f'(1)=1$, $f''(1)=-1$, $f'''(1)=2$, $f''''(1)=-1.2.3$, $f^{(v)}(1)=1.2.3.4$ i t. d.

$$\lg(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots$$

Kładąc $-x$ zamiast x, mamy

$$\lg\frac{1+x}{1-x}=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\ldots\right).$$

Po podstawieniu $x=\frac{1}{2z+1}$ otrzymujemy z ostatniego następujący wzór dogodny do obliczeń:

$$\lg(z+1)=\lg z+2\left[\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2z+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2z+1)^5}+\cdots\right].$$

Z równości $a^x=y$ wynika $\mathrm{Lg}\,y=x$ (przy zasadzie a); a z równości $e^{x\lg a}=y$ mamy $\lg y=x\lg a$ i stąd

$$\mathrm{Lg}\,y=\frac{1}{\lg a}\lg y,\quad \mathrm{Lg}(1+x)=\frac{1}{\lg a}\lg(1+x).$$

Jeżeli chcemy przeto rozwinąć $\mathrm{Lg}(1+x)$, to należy wyrazy rozwinięcia $\lg(1+x)$ podzielić przez $\lg a$. Najprostsze i najbardziej naturalne rozwinięcia otrzymujemy zatem przy $a=e$; dlatego też logarytmy obliczone przy zasadzie e nazywamy logarytmami naturalnemi.

425) Dowieść, że:

$$(1+e^x)^3=8+12\frac{x}{1}+24\frac{x^2}{1.2}+54\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots$$

426) Rozwinięcie dla funkcji $\sin(x+a)$. $f(x)=\sin x$, $f(a)=\sin a$, $f'(a)=\cos a$, $f''(a)=-\sin a$ i t. d.

$$\sin(x+a)=\sin a+\cos a\frac{x}{1}-\sin a\frac{x^2}{1.2}-\cos a\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots$$

Przy $a=0$ mamy:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots$$

427) Rozwinięcie dla funkcji $\cos(x+a)$. $f(x)=\cos x$, $f(a)=\cos a$, $f'(a)=-\sin a$, $f''(a)=-\cos a$, $f'''(a)=\sin a$, i t. d.

$$\cos(a+x)=\cos a-\sin a\frac{x}{1}-\cos a\frac{x^2}{1.2}+\sin a\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots$$

Przy $a=0$ mamy:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\cdots$$

428) W podobny sposób rozwijamy:

$$\operatorname{tg}(a+x)=\operatorname{tg}a+\frac{1}{\cos^2 a}\frac{x}{1}+\frac{2\operatorname{tg}a}{\cos^2 a}\frac{x^2}{1.2}+\frac{2(1+3\operatorname{tg}^2 a)}{\cos^2 a}\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

Reguła tworzenia współczynników nie jest tutaj widoczną.

429) Podług wzoru Maclaurina rozwinąć $f(x)=\cos^2 x$.

$$\cos^2 x=1-2\frac{x^2}{1.2}+8\frac{x^4}{1.2.3.4}-32\frac{x^6}{1.2.\ldots.6}+\ldots$$

430) Za pomocą wzoru Maclaurina dowieść wzoru Moivre'a. Dana jest funkcja $f(x)=(\cos x+i\sin x)^n$. Znajdujemy: $f'(x)=n(\cos x+i\sin x)^{n-1}(-\sin x+i\cos x)=ni(\cos x+i\sin x)^n=ni\,.\,f(x)$, stąd zaś wynika $f''(x)=ni\,.\,f'(x)=(ni)^2 f(x)$ i t. d. Mamy następnie $f(0)=1$, $f'(0)=ni$, $f''(0)=-n^2$, $f'''(0)=-n^3 i$ i t. d., więc

$$(\cos x+i\sin x)^n=1-\frac{n^2x^2}{1.2}+\frac{n^4x^4}{1.2.3.4}-\ldots$$
$$+i\left(\frac{nx}{1}-\frac{n^3x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\right),$$

a uwzględniając otrzymane przedtem rozwinięcia funkcji $\sin x$ i $\cos x$, znajdujemy:

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos(nx)+i\sin(nx).$$

431) Rozwinąć funkcję $f(x)=\arcsin x$. Pochodne wyższych rzędów nie wyrażają się za pomocą prostych wzorów i wobec tego dogodniej jest zastosować t. zw. metodę współczynników nieoznaczonych, która prowadzi zawsze do celu, o ile rozwinięcie jest wogóle możliwe. Zakładamy:

$$\arcsin x=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$$

i znajdujemy natychmiast $A=0$ przy $x=0$. Biorąc pochodne obu stron, mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\ldots$$

dla lewej strony otrzymujemy z zadania (420) rozwinięcie:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$$

i przez porównanie znajdujemy:

$$B=1, \quad C=0, \quad D=\frac{1}{2.3}, \quad E=0 \text{ i t. d.}$$

$$\operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

przy $x=1$ mamy $\operatorname{arc\,sin} x = \frac{\pi}{2}$.

432) Rozwinięcie funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$. Zakładamy:

$$\operatorname{arc\,tg} x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

wówczas $A=0$ przy $x=0$. Z różniczkowania stron wynika

$$\frac{1}{1+x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots$$

a ponieważ, jak wiadomo

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

więc przez porównanie znajdujemy, że

$$B=1, \quad C=0, \quad D=-\tfrac{1}{3}, \quad E=0 \text{ i t. d.}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Przy $x=1$ jest $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4}$, więc mamy:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \ldots$$

Zbierając po dwa wyrazy, mamy wzór dogodny do obliczenia π.

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\right)$$

Zakładając $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, mamy $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 1$, więc $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$. Znajdujemy stąd:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right) - \dots$$

W każdem z zadań powyższych zbadać należy wzór na resztę.

Dla zakończenia niniejszego rozdziału dowiedziemy jeszcze pewnych wzorów niezbędnych do dalszych rozważań.

Kładąc ix zamiast x w rozwinięciu funkcji e^x, mamy:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1\,2\ldots.6} + \dots$$
$$+ i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots\right).$$

jest więc $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, a wogóle:

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \qquad (33)$$

ponieważ zaś $e^{inx} = (\cos x + i\sin x)^n$, otrzymujemy przeto w łatwy sposób ponownie wzór Moivre'a. Ze wzorów

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \text{ i } e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

wynika

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad (34)$$

gdzie zównież zastąpić możemy x przez nx.

Jeżeli w podobny sposób wprowadzimy ix zamiast x w zadaniu N° 421, to otrzymujemy:

$$\lg\frac{1+ix}{1-ix} = 2i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right),$$

a po uwzględnieniu rozwinięcia funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$, wynika stąd:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+ix}{1-ix} \qquad (35)$$

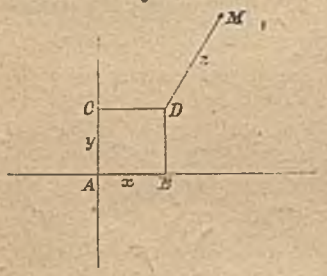
Funkcje dwuch zmiennych niezależnych.

§ 12. Poszukiwanie pochodnych.

Jeżeli zmienne x i y, występujące we wzorze $z=f(x, y)$, są wzajemnie od siebie niezależne to wartości otrzymywane przez funkcję z mogą być przedstawione geometrycznie w następujący sposób.

Na płaszczyźnie układu współrzędnych prostokątnych wyznaczamy punkt D (rys. 11) podług danych wartości zmiennych x i y, wystawiamy prostopadłą do płaszczyzny w punkcie D i odmierzamy na tej prostopadłej odcinek, którego długość równa się wartości funkcji z, obliczonej przy danych wartościach zmiennych x i y. Otrzymujemy wtedy w przestrzeni pewien punkt M. Jeżeli z jest funkcją wielowartościową, to otrzymujemy wtedy na jednej prostopadłej więcej niż jeden punkt. Miejsce geometryczne punktu M, wyznaczonego podług wzoru $z=f(x, y)$ przy rozmaitych wartościach zmiennych x i y, jest pewną powierzchnią.

Rys. 11.



Zmiana wartości funkcji $z=f(x, y)$ może być osiągnięta w trojaki sposób, a mianowicie:

1) przez zmianę wartości x na x_1 przy stałej wartości y,

2) przez zmianę wartości y na y_1 przy stałej wartości x,

3) przez równoczesną zmianę wartości x i y na x_1 i y_1.

Stosownie do tego należy rozróżniać 3 odrębne przyrosty wartości funkcji, a mianowicie:

1) $f(x_1, y) - f(x, y)$; 2) $f(x, y_1) - f(x, y)$; 3) $f(x_1, y_1) - f(x, y)$.

Przyrosty takie rozważaliśmy już poprzednio (str. 15—17), określając pochodną zupełną funkcji dwuch zmiennych. Zgodnie z nowem znakowaniem, wzór (10) piszemy w następujący sposób:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

We wzorze tym występuje dowolna zmienna niezależna t, przyczem wyrażenia $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ są cząstkowemi pochodnemi funkcji z określonemi za pomocą wzorów:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim \frac{f(x_1, y) - f(x, y)}{x_1 - x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y}.$$

Mnożąc pochodną zupełną funkcji z przez przyrost zmiennej niezależnej t, otrzymujemy różniczkę zupełną funkcji z (por. przypisek na str. 8)

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{36}$$

Pochodna zupełna rzędu drugiego funkcji z może być znaleziona jako pochodna zupełna pierwszej pochodnej zupełnej tejże funkcji; w tym celu opieramy się również na twierdzeniu wyrażonem we wzorze (10), biorąc przytem pod uwagę, że pochodne $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$ są jedynie funkcjami zmiennej t, a nie są zależne od x i y i dzięki temu pochodne tych pochodnych wyznaczone względem x i y są równe zeru.

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dx\,dy}{dt\,dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Mnożąc pochodną zupełną rzędu drugiego funkcji z przez kwadrat przyrostu zmiennej niezależnej otrzymujemy **różniczkę zupełną rzędu drugiego funkcji dwuch zmiennych**:

$$d^2z=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{dx\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Zadania.

433) $z=3x^2+xy^2+y^4$ $\quad dz=(6x+y^2)dx+(2xy+4y^3dy)$

434) $z=\frac{xy}{x+y}$ $\quad$ „ $=\frac{x^2dy+y^2dx}{(x+y)^2}$

435) $z=\sqrt{x^2-y^2}$ $\quad$ „ $=\frac{x\,dx-y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}}$

436) $z=(2x-5y^2)^3$ $\quad$ „ $=3(2x-5y^2)^2(2dx-10y\,dy)$

437) $z=y\sin x+\cos(x-y)$ $\quad dz=[y\cos x-\sin(x-y)]dx+[\sin+\sin(x-y)]dy$

438) $z=(\sin 3x+\cos y)^2$

$dz=2(\sin 3x+\cos y)(3\cos 3x\,dx-\sin y\,dy)$

439) $z=x^2-axy+y^2$ $\quad d^2z=2(dx^2-a\,dx\,dy+dy^2)$

440) $z=y^2e^x$ $\quad d^2z=e^x(y^2dx^2+4y\,dx\,dy+2dy^2)$.

§ 13. Maxima i minima funkcji dwuch zmiennych niezależnych.

Jeżeli powierzchnia rozważana na początku poprzedniego artykułu posiada taki punkt M, którego odległość od płaszczyzny XY jest algebraicznie większą (mniejszą) niż odpowiednie odległości punktów tej powierzchni, znajdujących się w najbliższem otoczeniu punktu M, to war-

tość funkcji z, odpowiadająca punktowi M, stanowi (maximum (minimum) funkcji z. Gdy prowadzimy następnie przez taki punkt M, w dowolnym kierunku, płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny XY i wyznaczamy, w przecięciu z powierzchnią, krzywe przechodzące przez punkt M, to styczne do tych krzywych, poprowadzone w punkcie M są równoległe do płaszczyzny XY. Gdy rozważamy na płaszczyznie XY krzywe dowolne przechodzące przez punkt D, to tym krzywym odpowiadają rozmaite równania wyrażające związek pomiędzy x i y. Każdemu punktowi takiej krzywej odpowiada określona para wartości x i y, a następnie ściśle określona wartość z, skąd wynika wreszcie, że każdej krzywej na płaszczyznie powinna odpowiadać ściśle określona krzywa na danej powierzchni. Jeżeli można wyznaczyć taką wartość z, która stanowi maximum albo minimum dla wyznaczonych w ten sposób na powierzchni linji krzywych, to wartość taka jest jednocześnie wartością maximum albo minimum dla funkcji $z = f(x, y)$ W art. 10 otrzymywaliśmy również wartości zmiennych x i y, dla których $z = f(x, y)$ osiąga największą albo najmniejszą wartość, znalezione wszakże wartości zmiennych musiały podlegać dodatkowemu warunkowi: $\varphi(x, y) = 0$. Zagadnienie obecnie rozważane, różni się przeto od dawniejszego brakiem podobnego warunku, to znaczy, że zależność pomiędzy x i y może być dowolnie wybrana. Dołączając przeto dowolny warunek $\varphi(x, y) = 0$, albo dwa dowolne warunki $x = \chi(t)$, $y = \psi(t)$ sprowadzamy nowe zadanie do dawnej postaci. Funkcja z staje się wtedy funkcją jednej zmiennej niezależnej t i istnienie maximum albo minimum uwarunkowane jest równaniem:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 0.$$

Ponieważ pochodne $\frac{dx}{dt}=x'$ i $\frac{dy}{dt}=y'$ mogą posiadać dowolne wartości, więc równanie powyższe spełnione jest wówczas i tylko wówczas, gdy

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{37}$$

Z dwuch ostatnich równań otrzymujemy te wartości dla x i y, przy których funkcja z osiąga maximum albo minimum. Należy obecnie zbadać znak drugiej pochodnej wyrażonej za pomocą wzoru otrzymanego w poprzednim artykule

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x'^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}x'y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2.$$

Oznaczając pochodne cząstkowe rzędu drugiego przez a b i c i przekształcając trójmian kwadratowy, mamy:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=ax'^2+2bx'y'+cy'^2=\frac{(ax'+by')^2+(ac-b^2)y'^2}{a}.$$

Druga pochodna funkcji z przy wszelkich wartościach x' i y' posiada stałe znak dodatni, jeżeli $(ac-b^2)>0$ i jednocześnie $a>0$. Funkcja z osiąga wówczas wartość minimum. Jeżeli natomiast $(ac-b^2)>0$ i $a<0$, to druga pochodna zachowuje stałe znak ujemny przy wszelkich wartościach x' i y'; funkcja osiąga wówczas maximum. Jeżeli wreszcie $(ac-b^2)<0$, to wartość drugiej pochodnej przy odpowiednim wyborze wartości x' i y' może otrzymać znak dodatni, bądź ujemny. Wspólny warunek istnienia maximum albo minimum sprowadza się do nierówności $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{dy^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0$ i wówczas

z stanowi maximum, jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$

z stanowi minimum, jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$.

Zadania.

441) $z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 5$ min. przy $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{2}{3}$

442) $z = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$ „ „ $x = \frac{27}{2}$, $y = 5$

443) $z = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ „ „ $x = y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$

444) $z = (x+y)^2 - (x+5y+xy)$ „ „ $x = -1, y = 3$

445) $z = xy^2(a - x - y)$ max. przy $x = \frac{a}{6}$, $y = \frac{a}{3}$

446) $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ „ „ $x = y = 60^0$

447) $z = \sin x \sin y \sin(\alpha - x - y)$ „ „ $x = y = \frac{\alpha}{3}$

448) $z = x^3 - 3axy + y^3$ „ „ $x = y = a$.

449) Objętość prostopadłościanu $= a^3$. Jakiej długości powinny być krawędzie, ażeby powierzchnia prostopadłościanu osiągnęła wartość min.?

Prostopadłościan powinien być sześcianem o krawędzi $= a$.

450) Liczbę a rozłożyć na 3 części w ten sposób, ażeby ich iloczyn osiągnął wartość max.

$z = xy(a - x - y)$ osiąga max., jeżeli każda część $= \frac{a}{3}$.

451) Wpisać w koło trójkąt posiadający pole max.

Kąty środkowe oparte na bokach trójkąta oznaczmy przez x, y i $(2\pi - x - y)$, wówczas pole $F = \frac{1}{2}r^2[\sin x + \sin y + \sin(2\pi - x - y)]$ osiąga max., gdy wszystkie 3 kąty środkowe są równe; boki trójkąta są wówczas także równe.

452) Suma trzech boków trójkąta $= 2s$. Jakiej długości powinny być boki, ażeby pole trójkąta było największe?

$F = \sqrt{s(s-x)(s-y)(x+y-s)}$ osiąga max., gdy wszystkie 3 boki są równe.

453) Z danej kuli wyciąć prostopadłościan o największej objętości.

Promień kuli $= r$, połowy krawędzi oznaczamy przez x, y, u; istnieje wówczas związek: $x^2+y^2+u^2=r^2$ Objętość

$$z=8xyu \text{ jest max. dla } x=y=u=\frac{r}{\sqrt{3}}.$$

§ 14. Funkcje jednorodne.

Wyraz ax^2y^2 nazywamy wyrażeniem piątego wymiaru, ponieważ suma wykładników obu zmiennych równa się 5, a wyrażenie $\frac{ax^4y}{zu}$ nazywamy wyrażneiem trzeciego wymiaru, gdyż różnica pomiędzy sumą wykładników licznika i sumą wykładników mianownika równa się 3. Wymiar wyrazu, oczywiście, może być również liczbą ujemną lub ułamkową. Jeżeli pewna funkcja jest sumą algebraiczną wyrazów jednakowego wymianu, to nosi nazwę funkcji jednorodnej. Funkcjami jednorodnemi stopnia n nazywamy wogóle te funkcje, które posiadają następującą własność: po zamianie zmiennych $x, y, z,\ldots$ na iloczyny $tx, ty, tz,\ldots$ istnieje następująca równość:

$$f(tx, ty, tz,\ldots)=t^n f(x, y, z,\ldots) \qquad (38)$$

Przykład 1: $f(x,y)=5x^2-2xy+7y^2$;

$$f(tx,ty)=5t^2x^2-2tx\,ty+7t^2ty^2=t^2f(x,y).$$

Przykład 2: $f(x,y,z)=\dfrac{x^3z^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{5}{2}}z^2}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+z}$

$$f(tx,ty,tz)=\frac{t^3x^3t^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{5}{2}}y^{\frac{5}{2}}t^2z^2}{t^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+tz}=t^{\frac{7}{2}}f(x,y,z).$$

Twierdzenie Eulera o funkcjach jednorodnych. We wzorze (38) zakładamy $tx=u$, $ty=v$, $tz=w$ i różniczkujemy obie strony względem t:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dt}=nt^{n-1}f(x,y,z),$$

a ponieważ $\frac{du}{dt} = x,\ \frac{dv}{dt} = y,\ \frac{dw}{dt} = z,$

więc $\frac{\partial f}{\partial u} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot z = n t^{n-1} f(x, y, z).$

Nadając teraz dowolnej liczbie t wartość równą 1, zamieniamy jednocześnie $\frac{\partial f}{\partial u}$ na $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ na $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ na $\frac{\partial f}{\partial z}$ i otrzymujemy:

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = n \cdot f(x, y, z) \qquad (39)$$

We wzorze tym wyrażone jest twierdzenie Eulera

Przykład 1: $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2;$

$$\frac{2x}{a^2} \cdot x + \frac{2y}{b^2} \cdot y - 2z \cdot z = 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2\right).$$

Przykład 2: $f = x^3 + 2ax^2y - ay^3 = 0;$

$$(3x^2 + 4axy)x + (2ax^2 - 3ay^2)y = 3(x^3 + 2ax^2y - ay^3).$$

Przykład 3: $f = \sqrt{x^3 - y^2z} = R;$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2}{2R},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2yz}{2R},\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-y^2}{2R},$$

$$\frac{3x^3 - 2y^2z - y^2z}{2R} = \frac{3}{2}\left(\frac{x^3 - y^2z}{R}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x^3 - y^2z}.$$

Przykład 4: $f = \frac{xy}{x^3 + y^3};$

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y^4x + x^4y}{(x^3 + y^3)^2} = -\frac{xy}{x^3 + y^3}.$$

Przykład 5: $f = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{z};$

$$-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot x + \tfrac{1}{2}\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{z} \cdot y - \frac{y^{\frac{1}{2}}}{z^2} \cdot z = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{z}\right)$$

§ 15. Szeregi Taylora i Maclaurina dla funkcji dwuch zmiennych niezależnych.

Jeżeli zmiennym x i y nadajemy wartości $x+\xi$ i $y+\eta$, to funkcję $f(x, y)$ możemy rozwinąć na szereg podług potęg liczb ξ i η. Rozwinięcie takie możemy sprowadzić do rozważanego w § 11, kładąc $\xi=rt$, $\eta=st$ i $f(x+rt, y+st)=F(t)$, przyczem t przyjmujemy za zmienną niezależną, a liczbom x, y, r, s przypisujemy wartości stałe. Podług wzoru Maclaurina mamy wówczas:

$$F(t)=F(0)+F'(0)\frac{t}{1}+F''(0)\frac{t^2}{1.2}+F'''(0)\frac{t^3}{1.2.3}+\ldots$$

Przy obliczaniu pochodnych F', F'',... możemy przyjąć $x+rt=u$, $y+st=v$, wskutek czego przekształca się $F(t)$ na $f(u, v)$. Jednocześnie mamy $\frac{du}{dt}=r$, $\frac{dv}{dt}=s$, a pochodne wyższych rzędów znikają. Mamy przeto:

$$F(t)=f(u, v)$$

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$F''(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$F'''(t)=\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}\left(\frac{du}{dt}\right)^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial u^2\partial v}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{dv}{dt}+3\frac{\partial^3 f}{\partial u\,\partial v^2}\frac{du}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial v^3}\left(\frac{dv}{dt}\right)^3;\ \text{i t. d.}$$

Kładąc $t=0$, otrzymujemy $f(x, y)$ zamiast $f(u, v)$ i jednocześnie pochodne cząstkowe funkcji f względem u i v zamieniają się na pochodne względem x i y W ten sposób otrzymujemy wartości $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ i t. d., a więc:

$$F(t)=f(x, y)+\left[\frac{\partial f}{\partial x}r+\frac{\partial f}{\partial y}s\right]\frac{t}{1}+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}r^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}rs+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}s^2\right]\frac{t^2}{1.2}$$

$$+\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}r^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}r^2s+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}rs^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}s^3\right]\frac{t^3}{1.2.3}\cdots$$

Chcąc wyprowadzić bezpośrednio wzór powyższy, zakładamy:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2}=\frac{A}{(x-\alpha)^2}+\frac{B}{x-\alpha},$$

czyli $mx+n=A+B(x-\alpha)$ i znajdujemy $B=m$ i $A=m\alpha+n$. Obie części możemy następnie całkować. Możliwy jest również następujący sposób:

$$\int\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2}dx=\frac{m}{2}\int\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}dx+\int\frac{m\alpha+n}{(x-\alpha)^2}dx$$

$$=m\lg(x-\alpha)-\frac{m\alpha+n}{x-\alpha}.$$

65) $$\int\frac{2x-13}{(x-5)^2}dx=2\lg(x-5)+\frac{3}{x-5}$$

66) $$\int\frac{3x+1}{(x+2)^2}dx=3\lg(x+2)+\frac{5}{x+2}$$

3) Pierwiastki α i β równania $x^2+2ax+b=0$ są liczbami zespolonemi postaci:

$$\alpha=p+qi,\ \beta=p-qi.$$

Wówczas $p=-a$, $q=\sqrt{b-a^2}$ i wzór (4), po uwzględnieniu wzoru (5) przybiera następującą postać:

$$\int\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}dx=\int\frac{mx+n}{(x-p-qi)\ (x-p+qi)}dx$$

$$=\frac{\{m(p+qi)+n\}\lg(x-p-qi)-\{m(p-qi)+n\}\lg(x-p+qi)}{2qi}$$

$$=\frac{mp+n}{q}\cdot\frac{1}{2i}\lg\frac{x-p-qi}{x-p+qi}+\frac{m}{2}\lg[(x-p-qi)\ (x-p+qi)]$$

$$=\frac{m}{2}\lg(x^2+2ax+b)+\frac{mp+n}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}+C. \qquad (7)$$

Wzór powyższy może być zresztą dowiedziony bezpośrednio:

$$\int\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}dx=\frac{m}{2}\int\frac{2x+2a}{x^2+2ax+b}dx+\int\frac{n-am}{x^2+2ax+b}dx$$

$$=\frac{m}{2}\lg(x^2+2ax+b)+\int\frac{n-am}{(x+a)^2+(b-a^2)}dx.$$

Pierwiastek $\sqrt{b-a^2}$ posiada wartość rzeczywistą, możliwe jest przeto podstawienie $(a+x)=z\sqrt{b-a^2}$ i otrzymujemy wtedy:

$$\int \frac{n-am}{(x+a)^2+(b-a^2)}\,dx=\frac{n-am}{\sqrt{b-a^2}}\int \frac{1}{z^2+1}\,dz=\frac{n-am}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tg} z.$$

Mamy więc ostatecznie:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b}\,dx=\frac{m}{2}\lg(x^2+2ax+b)+\frac{n-am}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}$$

Wzór ten różni się tylko o liczbę stałą od wzoru (7), ponieważ $p=-a$, $q=\sqrt{b-a^2}$.

Zadania

67) $\int \frac{2u-10}{u^2+2u+10}\,du=\lg(u^2+2u+10)-4\operatorname{arc\,tg}\frac{u+1}{3}$

68) $\int \frac{2u-20}{u^2-8u+25}\,du=\lg(u^2-8u+25)-4\operatorname{arc\,tg}\frac{u-4}{3}$

69) $\int \frac{3u+4}{u^2+4u+8}\,du=\frac{3}{2}\lg(u^2+4u+8)-\operatorname{arc\,tg}\frac{u+2}{2}$

70) $\int \frac{u+6}{u^2-3}\,du=\frac{1}{2}\lg(u^2-3)+\sqrt{3}\lg\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}$

71) $\int \frac{u+6}{u^2+3}\,du=\frac{1}{2}\lg(u^2+3)+2\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{3}}$

72) $\int \frac{6u}{u^2+4u+13}\,du=3\lg(u^2+4u+13)-4\operatorname{arc\,tg}\frac{u+2}{3}$

73) $\int \frac{10u-44}{u^2-4u+20}\,du=5\lg(u^2-4u+20)-6\operatorname{arc\,tg}\frac{u-2}{4}$

74) $\int \frac{u^2}{5u^2+12}\,du=\frac{1}{5}u-\frac{1}{25}\sqrt{60}\operatorname{arc\,tg}u\sqrt{\frac{5}{12}}$

75) $\int \frac{4u-5}{u^2-6u+10}\,du=2\lg(u^2-6u+10)+7\operatorname{arc\,tg}(u-3)$

76) $\int \frac{27u^6}{3u^2+2}du = \frac{9u^5}{5} - 2u^3 + 4u - \frac{8}{\sqrt{6}} \operatorname{arc\,tg}\, u\sqrt{\frac{3}{2}}$

77) $\int \frac{1}{a+bu^2}du = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\, u\sqrt{\frac{b}{a}}$, jeżeli $ab>0$.

Całkowanie funkcji ułamkowej postaci:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m}{x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} \ldots + b_n}.$$

Zakładamy, że $m<n$. Gdyby warunek ten nie był spełniony, to po wykonaniu dzielenia licznika przez mianownik otrzymalibyśmy funkcję całkowitą z dołączonym do niej ułamkiem postaci $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, w którym mielibyśmy $m<n$. Należy przedewszystkiem rozłożyć mianownik na czynniki dwumienne i w tym celu rozwiązać trzeba równanie:

$$f(x) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_n = 0.$$

Biorąc pod uwagę znaleziony pierwiastek α równania $f(x)=0$, należy rozróżniać dwa wypadki.

1) Pierwiastek α równania $f(x)=0$ nie równa się żadnemu z pozostałych pierwiastków tego równania, to znaczy, że $f(x)$ dzieli się przez $(x-\alpha)$, lecz nie dzieli się przez $(x-\alpha)^2$, a więc możemy założyć $f(x)=(x-\alpha)g(x)$, przyczem równanie $g(x)=0$ nie posiada pierwiastka α. Kładziemy wówczas

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)g(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{\psi(x)}{g(x)}.$$

Wynika stąd

$$\varphi(x) = Ag(x) + \psi(x)(x-\alpha)$$

i przy $x=\alpha$ znajdziemy $A=\varphi(\alpha):g(\alpha)$. Mamy następnie

$f'(x)=(x-\alpha)g'(x)+g(x)$ więc $f'(\alpha)=g(\alpha)$

i

$$A = \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)} \tag{8}$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}\frac{1}{x-\alpha} + \frac{g(x)}{\psi(x)}.$$

Ułamki takie, jak ten, który stanowi pierwszą część prawej strony ostatniego wzoru, nazywamy ułamkami prostemi. Całkowanie danej funkcji wymiernej sprowadza się w ten sposób do całkowania prostszej funkcji wymiernej ponieważ $g(x)$ jest funkcją całkowitą stopnia $(n-1)$. Jeżeli równanie $f(x)=0$ posiada wszystkie pierwiastki różne, to sposób całkowania jest już znaleziony. W tym wypadku mamy wogóle

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=\frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)}\lg(x-\alpha)+\int\frac{\psi(x)}{g(x)}dx,$$

i gdy $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, to po wykonaniu całkowitego rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste, otrzymujemy

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=\frac{\varphi(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\lg(x-\alpha_1)+\frac{\varphi(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)}\lg(x-\alpha_2)+\ldots$$
$$+\frac{\varphi(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}\lg(x-\alpha_n)$$

Przykład: $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=\dfrac{7x^2+7x-176}{x^3-9x^2+6x+56}$;

$\alpha_1=-2,\ \alpha_2=4,\ \alpha_3=7;\ f'(x)=3x^2-18x+6$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-4}+\frac{A_3}{x-7}$$

$$A_1=\frac{\varphi(-2)}{f'(-2)}=-3,\ A_2=\frac{\varphi(4)}{f'(4)}=2,\ A_3=\frac{\varphi(7)}{f'(7)}=8$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=-\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-4}+\frac{8}{x-7}.$$

Zadania.

78) $\displaystyle\int\frac{7x^2+7x-176}{x^3-9x^2+6x+56}dx=-3\lg(x+2)+2\lg(x-4)+8\lg(x-7).$

79) $\displaystyle\int\frac{5u^2-7u+13}{u^3-6u^2+11u-6}du=\frac{11}{2}\lg(u-1)-19\lg(u-2)+\frac{37}{2}\lg(u-3)$

80) $\int \frac{u^2+5u+41}{(u+3)(u-1)(u-\frac{1}{2})}du = \frac{5}{2}\lg(u+3)+\frac{47}{2}\lg(u-1)-25\lg\left(u-\frac{1}{2}\right)$

81) $\int \frac{1}{u^3-a^2u}du = \frac{1}{2a^2}\lg(u^2-a^2)-\frac{1}{a^2}\lg u$

82) $\int \frac{10u^3+40u^2+40u+6}{u^4+6u^3+11u^2+6u}du = \lg u+2\lg(u+1)$
$+3\lg(u+2)+4\lg(u+3)$

83) $\int \frac{17u^2-u-26}{(u^2-1)(u^2-4)}du = \frac{5}{3}\lg(u-1)-\frac{4}{3}\lg(u+1)+$
$+\frac{10}{3}\lg(u-2)-\frac{11}{3}\lg(u+2)$

84) $\int \frac{4u^3+9u^2-270u+653}{(u-3)(u-4)(u-7)(u+5)}du = \lg(u^2-7u+12)$
$+4\lg(u-7)-2\lg(u+5)$

85) $\int \frac{u^2-3u+3}{u^3-4u^2-7u-10}du = \frac{13}{21}\lg(u+2)+\frac{13}{28}\lg(u-5)-\frac{1}{12}\lg(u-1)$

86) $\int \frac{5u^2-7au+11a^2}{u^3-6au^2+11a^2u-6a^3}du = \frac{9}{2}\lg(u-a)-17\lg(u-2a)$
$+\frac{35}{2}\lg(u-3a)$

87) $\int \frac{2u^3+12au^2-8a^2u-12a^3}{(u^2-a^2)(u^2-4a^2)}du = \lg(u^2-a^2)+3\lg\frac{u-2a}{u+2a}$

88) $\int \frac{2u^4-10u^3+21u^2-20u+5}{u^2-3u+2}du = \frac{2u^3}{3}-2u^2+5u$
$+\lg(u-2)+2\lg(u-1).$

Jeżeli równanie $f(x)=0$, o współczynnikach rzeczywistych, posiada pierwiastek zespolony $\alpha=p+qi$, to posiada również sprzężony z nim pierwiastek $\beta=p-qi$. Rozkład na ułamki proste może być i wówczas również wykonany podług powyższej metody z uwzględnieniem następujących zmian:

Mamy

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\varphi(p+qi)}{f'(p+qi)}\frac{1}{x-p-qi}+\frac{\varphi(p-qi)}{f'(p-qi)}\frac{1}{x-p+qi}+\ldots$$

i zakładając $\frac{\varphi(p+qi)}{f'(p+qi)}=s+ti$, skąd $\frac{\varphi(p-qi)}{f'(p-qi)}=s-ti$

otrzymujemy:

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=(s+ti)\lg(x-p-qi)+(s-ti)\lg(x-p+qi)+\ldots$$

$$=s\lg[(x-p)^2+q^2]+ti\lg\frac{x-p-qi}{x-p+qi}+\ldots,$$

przyczem w prawej stronie wzoru dodać możemy dowolną liczbę stałą. Zgodnie z uwagą uczynioną na str. 126 odnośnie do wzoru (5), mamy

$$ti\lg\frac{x-p-qi}{x-p+qi}=-2t\cdot\frac{1}{2i}\lg\frac{x-p-qi}{x-p+qi}$$

$$=-2t\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}+C.$$

Dochodzimy tym sposobem do wzoru zawierającego wartości rzeczywiste

$$\int\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=s\lg[(x-p)^2+q^2]-2t\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}+\ldots$$

Przekształcenia powyższe przerobimy w następujących przykładach:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}=\frac{2x}{(x-i)(x+i)(x-ri)(x+ri)},\quad r=\sqrt{3}$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{A_1}{x-i}+\frac{A_2}{x+i}+\frac{A_3}{x-ri}+\frac{A_4}{x+ri}$$

$$A_1=\frac{\varphi(i)}{f'(i)}=\frac{1}{2},\quad A_2=\frac{\varphi(-i)}{f'(-i)}=\frac{1}{2},\quad A_3=\frac{\varphi(ri)}{f'(ri)}=-\frac{1}{2},$$

$$A_4=\frac{\varphi(-ri)}{f'(-ri)}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{\frac{1}{2}}{x-i}+\frac{\frac{1}{2}}{x+i}-\frac{\frac{1}{2}}{x-ri}-\frac{\frac{1}{2}}{x+ri}$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=\frac{1}{2}[\lg(x-i)+\lg(x+i)]-\frac{1}{2}[\lg(x-ri)+\lg(x+ri)]$$

$$=\frac{1}{2}\lg(x^2+1)-\frac{1}{2}\lg(x^2-r^2i^2)$$

89) $$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}dx=\frac{1}{2}\lg\frac{x^2+1}{x^2+3}$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}$$

$$=\frac{A_1}{x-2-5i}+\frac{A_2}{x-2+5i}+\frac{A_3}{x-1-2i}+\frac{A_4}{x-1+2i}$$

$$A_1=\frac{\varphi(2+5i)}{f'(2+5i)}=2-3i,\quad A_2=\frac{\varphi(2-5i)}{f'(2-5i)}=2+3i,$$

$$A_3=\frac{\varphi(1+2i)}{f'(1+2i)}=3-4i,\quad A_4=\frac{\varphi(1-2i)}{f'(1-2i)}=3+4i;$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{2-3i}{x-2-5i}+\frac{2+3i}{x-2+5i}+\frac{3-4i}{x-1-2i}+\frac{3+4i}{x-1+2i}$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=(2-3i)\lg(x-2-5i)+(2+3i)\lg(x-2+5i)$$

$$+(3-4i)\lg(x-1-2i)+(3+4i)\lg(x-1+2i)$$

$$=2\lg[(x-2-5i)(x-2+5i)]+3\lg[(x-1-2i)(x-1+2i)]$$

$$-3i\lg\frac{x-2-5i}{x-2+5i}-4i\lg\frac{x-1-2i}{x-1+2i}$$

Po wykonaniu mnożenia i po zastosowaniu do dwuch ostatnich części wzoru (5), str, 126, znajdujemy:

90) $$\int \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}dx=2\lg(x^2-4x+29)$$

$$+3\lg(x^2-2x+5)+6\operatorname{arc\,tg}\frac{x-2}{5}+8\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{2}.$$

Rozważane zagadnienie jest właściwie równoznaczne z poszukiwaniem całki ułamka posiadającego postać $\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}$, gdy $b>a^2$. Zagadnienie takie może być rozwiązane bezpośrednio.

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b}dx = \tfrac{1}{2}m\int \frac{(2x+2a)dx}{x^2+2ax+b} + (n-ma)\int \frac{dx}{(x+a)^2+(b-a^2)}$$

$$= \tfrac{1}{2}m\lg(x^2+2ax+b) + \frac{n-ma}{\sqrt{b-a^2}}\int \frac{dz}{1+z^2},$$

kładąc: $\sqrt{b-a^2}z = x+a$. Otrzymujemy przeto:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b}dx = \tfrac{1}{2}m\lg(x^2+2ax+b) + \frac{n-ma}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}. \quad (9)$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{8x^2-29x+61}{(x-1)(x^2-6x+13)} = \frac{A}{x-1} + \frac{mx+n}{x^2-6x+13}$$

$A = \dfrac{\varphi(1)}{f'(1)} = 5$. Podstawiamy znalezioną wartość; wówczas:

$$\frac{8x^2-29x+61}{(x-1)(x^2-6x+13)} = \frac{5(x^2-6x+13)+(mx+n)(x-1)}{(x-1)(x^2-6x+13)}$$

Przez porównanie współczynników odpowiednich wyrazów znajdujemy następujące związki: $8 = 5+m$, $61 = 65-n$, czyli $m=3$, $n=4$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2-6x+13}.$$

$$91)\int \frac{8x^2-29x+61}{(x-1)(x^2-6x+13)}dx = 5\lg(x-1) + \frac{3}{2}\lg(x^2-6x+13) + \frac{13}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2}.$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{mx+n}{x^2+x+1} + \frac{rx+t}{x^2-x+1}.$$

Sprowadzając prawą stronę do wspólnego mianownika, otrzymujemy z porównania współczynników:

$$1 = (mx+n)(x^2-x+1) + (rx+t)(x^2+x+1);$$

$$m+r=0,\ n-m+r+t=0,\ m-n+r+t=0,\ n+t=1;$$

$$m=\tfrac{1}{2},\ n=\tfrac{1}{2},\ t=\tfrac{1}{2},\ r=-\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} - \frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}.$$

92) $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\lg\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

93) $\int \frac{15x^2+66x+21}{(x-1)(x^2+4x+29)}\,dx = 3\lg(x-1)+6\lg(x^2+4x+29) + \frac{42}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{5}$

94) $\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}\,dx = \frac{4}{7}\lg(x-2)+\frac{17}{14}\lg(x^2+3) - \frac{1}{7\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}$

95) $\int \frac{x^2+6x-16}{(x-3)(x^2+4)}\,dx = 5\lg(x-3)+\lg(x^2+4)+6\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$

96) $\int \frac{2x^3+28x^2-257x+531}{(x^2-16x+69)(x^2-6x+16)}\,dx = \frac{5}{2}\lg(x^2-16x+69) + \frac{13}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-8}{\sqrt{5}} - \frac{3}{2}\lg(x^2-6x+16) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{\sqrt{7}}.$

2. Jeden z pierwiastków równania $f(x)=0$, a mianowicie α jest pierwiastkiem r-krotnym, to znaczy, że $f(x)$ dzieli się przez $(x-\alpha)^r$, ale nie dzieli się przez $(x-\alpha)^{r+1}$, a więc $f(x)=g(x)(x-\alpha)^r$, przyczem równanie $g(x)=0$ nie posiada pierwiastka α. Zakładamy

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^r g(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^r} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_r}{x-\alpha} + \frac{\psi(x)}{g(x)},$$

i szukamy liczników $A_1, A_2, \ldots A_r$ dla powyższych ułamków prostych. Wyprowadzanie wzorów ogólnych i obliczanie za pomocą takich wzorów nie jest dogodne w danym wypadku; dogodniejszy jest sposób następujący. Zakładamy $x-\alpha=y$ i mnożąc obie strony przez y^r układamy wzór

$$\frac{\varphi(y+\alpha)}{g(y+\alpha)} = A_1 + A_2 y + \ldots + A_r y^{r-1} + \frac{\psi(y+\alpha)}{g(y+\alpha)} y^r;$$

uporządkowawszy następnie licznik i mianownik lewej strony podług potęg wzrastających, wykonywamy zaznaczone dzielenie dochodząc w otrzymanym ilorazie do potęgi y^{r-1} włącznie; przez porównanie współczynników znajdujemy poszukiwane liczby A.

Przykład 1: $\frac{x+2}{x^4+x^3}=\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x}+\frac{\psi(x)}{x+1}$. Wprowadzanie pomocniczej liczby y jest tu zbyteczne. Dzieląc

$$\frac{2+x}{1+x}=2-x+x^2-x^3+\ldots,$$

znajdujemy

$$\frac{x+2}{x^4+x^3}=\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

Dla licznika $\psi(x)$ znajdujemy podług dawnej metody wartość równą -1.

Przykład 2: $\frac{x^2+x+1}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{A_1}{(x-2)^2}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{\psi(x)}{x+1}$

$\frac{y^2+5y+7}{y+3}+A_1+A_2y+\frac{\psi(y+2)}{y+3}y^2$, przy $x=y+2$.

Dzieląc

$$\frac{7+5y+y^2}{3+y}=\frac{7}{3}+\frac{8}{9}y+\frac{1}{27}y^2+\ldots$$

mamy

$$\frac{x^2+x+1}{(x-2)^2(x+1)}=\frac{7}{3(x-2)^2}+\frac{8}{9(x-2)}+\frac{1}{9(x+1)}$$

przyczem $\psi(x)=\frac{1}{9}$ znalezione jest za pomocą dawnej metody.

Po wykonaniu rozkładu na ułamki proste możemy każdy ułamek przecałkować.

Przykład 3:

$$\frac{5u^3-11u^2+5u+4}{(u-1)^4}=\frac{A_1}{(u-1)^4}+\frac{A_2}{(u-1)^3}+\frac{A_3}{(u-1)^2}+\frac{A_4}{u-1};$$

kładąc $u-1=y$, znajdujemy łatwo

$$3-2y+4y^2+5y^3=A_1+A_2y+A_3y^2+A_4y^3,$$

ponieważ funkcja $g(x)$ w danym przykładzie nie istnieje. Z równania tego znajdujemy

$$A_1 = 3,\ A_2 = -2,\ A_3 = 4,\ A_4 = 5;$$

$$\frac{5u^3-11u^2+5u+4}{(u-1)^4} = \frac{3}{(u-1)^4} - \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{4}{(u-1)^2} + \frac{5}{u-1}$$

97) $$\int \frac{5u^3-11u^2+5u+4}{(u-1)^4}\,du = -\frac{1}{(u-1)^3} + \frac{1}{(u-1)^2} - \frac{4}{u-1} + 5\lg(u-1)$$

98) $$\int \frac{u^3-4u^2+1}{(u-2)^2}\,du = \frac{u^2}{2} - 4\lg(u-2) + \frac{7}{u-2}$$

99) $$\int \frac{2u^5-u^4+4u^2-5u+1}{(u-3)^6}\,du = 2\lg(u-3) - \frac{29}{u-3} - \frac{84}{(u-3)^2} - \frac{490}{3(u-3)^3} - \frac{721}{4(u-3)^4} - \frac{427}{5(u-3)^5}$$

100) $$\int \frac{3u^2-17u+21}{(u-2)^3}\,du = \frac{1}{2(u-2)^2} + \frac{5}{u-2} + 3\lg(u-2)$$

101) $$\int \frac{6u^3+89u^2+438u+719}{(u+5)^4}\,du = -\frac{4}{3(u+5)^3} + \frac{1}{(u+5)^2} + \frac{1}{u+5} + 6\lg(u+5)$$

W pewnych wypadkach możliwe jest również zastosowanie metody całkowania przez części.

102) $$\int u^n(u-\alpha)^{-p}\,du = -\frac{u^n(u-\alpha)^{-p+1}}{p-1} + \frac{n}{p-1}\int u^{n-1}(u-\alpha)^{-p+1}\,du$$

$$\int u^2(u-\alpha)^{-4}\,du = -\frac{u^2(u-\alpha)^{-3}}{3} + \frac{2}{3}\int u(u-\alpha)^{-3}\,du$$

$$\int u(u-\alpha)^{-3}\,du = -\frac{u(u-\alpha)^{-2}}{2} + \frac{1}{2}\int (u-\alpha)^{-2}\,du$$

$$\int (u-\alpha)^{-2}\,du = -(u-\alpha)^{-1}$$

103) $$\int \frac{u^2}{(u-\alpha)^4}\,du = -\frac{1}{3}\left[\frac{u^2}{(u-\alpha)^3} + \frac{u}{(u-\alpha)^2} + \frac{1}{u-\alpha}\right]$$

104) $$\int \frac{u^3+a^2u-a^3}{(u-a)^3}\,du = (u-a) - \frac{a^3}{2(u-a)^2} - \frac{4a^2}{u-a} + 3a\lg(u-a)$$

105) $$\int \frac{u^2}{(a+bu)^3}\,du = -\frac{u^2}{2b(a+bu)^2} - \frac{u}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^3}\lg(a+bu)$$

106) $$\int \frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+4)}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{3u^2}{(u^2+1)(u^2+4)}\,du$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{4(u^2+1)-(u^2+4)}{(u^2+1)(u^2+4)}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{4}{u^2+4}\,du$$
$$- \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} u$$

$$\frac{9x^4-3x^3-23x^2+30x-1}{(x-1)^4(x+3)} \quad \frac{3}{(x-1)^4} \quad \frac{2}{(x-1)^3} \quad \frac{5}{(x-1)^2} \quad \frac{7}{x-1} \quad \frac{2}{x+3}$$

107) $$\int \frac{9x^4-3x^3-23x^2+30x-1}{(x-1)^4(x+3)}\,dx = -\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2}$$
$$- \frac{5}{x-1} + 7\lg(x-1) + 2\lg(x+3)$$

108) $$\int \frac{x^4-7x^3+7x^2-11x+13}{x^2(x+1)(x^2+x+1)}\,dx = -\frac{13}{2x^2} + \frac{37}{x} + 51\lg x$$
$$- 35\lg(x+1) - 8\lg(x^2+x+1) - \frac{10}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

109) $$\int \frac{x^4-2x^2+7x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx = -\frac{5}{2(x-1)} - \lg(x-1)$$
$$+ \frac{3}{2(x+1)} + 2\lg(x+1)$$

110) $$\int \frac{x^3-22x^2+57x+32}{(x+1)^2(x-3)^2}\,dx = \frac{3}{x+1} + 5\lg(x+1) - \frac{2}{x-3}$$
$$- 4\lg(x-3)$$

111) $$\int \frac{7x^3-32x^2+50x-28}{(x-1)^3(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$$
$$+ 3\lg(x-1) + 4\lg(x-4)$$

112) $$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\,dx = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\lg(x-1) - \lg x$$

113) $$\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{3}{2}\lg(x-1) + \frac{3}{4}\lg(x^2+1) - \operatorname{arc\,tg} x$$

114) $$\int \frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}\,dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + 2\lg x - \frac{1}{4}\lg(x+1) - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{7}{4}\lg(x-1).$$

Rozkład na ułamki proste możliwy jest również i w tym wypadku, kiedy istnieją wielokrotne pierwiastki zespolone.

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{2x+1}{(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{A_2}{(x-i)^2} + \frac{A_1}{x-i} + \frac{B_2}{(x+i)^2} + \frac{B_1}{x+i}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}i}{x-i} + \frac{\frac{1}{4}i}{x+i} - \frac{\frac{2i+1}{4}}{(x-i)^2} + \frac{\frac{2i-1}{4}}{(x+i)^2}$$

115) $$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{4}i\lg\frac{x-i}{x+i} - \frac{\frac{2i-1}{4}}{x+i} + \frac{\frac{2i+1}{4}}{x-i} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x-2}{2(x^2+1)}$$

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{\frac{i}{8}}{(x+i)^3} - \frac{\frac{1}{16}}{(x+i)^2} + \frac{\frac{i}{16}}{x+i} - \frac{\frac{i}{8}}{(x-i)^3} - \frac{\frac{1}{16}}{(x-i)^2} - \frac{\frac{i}{16}}{x-i}$$

116) $$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{8}\frac{x^3}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg} x.$$

Wzorami redukcyjnemi nazywamy wzory, za pomocą których dane zadanie sprowadza się do podobnego zadania prostszego. Przez wielokrotne zastosowanie podobnego wzoru można w wielu wypadkach dojść do ostatecznego obliczenia pewnej całki, bądź sprowadzić rozwią-

zanie do takiej całki, której obliczenie za pomocą znanych metod jest znacznie łatwiejsze.

Wzór podany niżej może być sprawdzony przez różniczkowanie obu stron. Widzimy jednocześnie, że liczby m, n, p mogą być dowolne, jedynie tylko $(n+1)$ nie powinno być równe zeru.

$$117)\quad \int x^n (a+bx^m)^p\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(a+bx^m)^p - \frac{mbp}{n+1}\int x^{m+n}(a+bx^m)^{p-1}\,dx$$

$$118)\quad \int x^4 (a+bx^2)^3\,dx = \frac{x^5}{5}(a+bx^2)^3 - \frac{6b}{5}\int x^6 (a+bx^2)^2\,dx.$$

Przy dodatniej wartości p, posługując się powyższym wzorem, możemy dojść stopniowo do takiej całki, gdzie wykładnik dwumianu jest mniejszy od jedności. Jeżeli natomiast wykładnik dwumianu jest ujemny, to wzór (117) należy odwrócić. Biorąc wówczas p zamiast $p-1$ i n zamiast $n+m$, mamy:

$$119)\quad \int x^n (a+bx^m)^p\,dx = \frac{x^{n-m+1}}{mb(p+1)}(a+bx^m)^{p+1} - \frac{n-m+1}{mb(p+1)}\int x^{n-m}(a+bx^m)^{p+1}\,dx.$$

Wzór jest bezużyteczny przy $p=-1$

$$120)\quad \int \frac{x^5}{(1+x^2)^3}\,dx = -\frac{x^4}{4(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\lg(1+x$$

Zadanie to może być również rozwiązane w taki sposób

$$\frac{x^5}{(1+x^2)^3} = \frac{x^3(1+x^2)-x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2} - \frac{x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{x(1+x^2)-x}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{x}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{x^5}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{(1+x^2)^3} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{x}{x^2+1}$$

121) $$\int \frac{x^5}{(1+x^2)^3}\,dx = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\lg(x^2+1).$$

Wzory (117) i (119) są niedogodne w pewnych wypadkach, ponieważ bezwzględna wartość wykładnika przy czynniku jednomiennym wzrasta we wzorze (117), gdy m i n są jednakowego znaku, i we wzorze (119), gdy m i n mają znaki różne. Dogodniejszemi są wtedy wzory (139) do (142) podane niżej.

$$\int \frac{\varphi(x)}{x^n - 1}\,dx.$$

Ze wzoru Moivre'a (Rach. różn. zad. 430) mamy

$$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Rozwiązując równanie $x^n - 1 = 0$, obliczamy $x = \sqrt[n]{1}$ podług powyższego wzoru, przyczem bierzemy $1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$, gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą. Mamy wtedy:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

i dla n kolejnych wartości całkowitych liczby k znajdujemy n różnych wartości pierwiastka $\sqrt[n]{1}$:

$k = 0$: $\quad w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k = 1$; $\quad w_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

$k = 2$; $\quad w_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}$

. . . . . .

$k = n - 1$; $\quad w_{n-1} = \cos\frac{n-1}{n}2\pi + i\sin\frac{n-1}{n}2\pi.$

Nadając nowe wartości całkowite liczbie k otrzymujemy ponownie znalezione już poprzednio wartości pierwiastków. Tak np. przy $k = n$ mamy:

$$w_n = \cos\frac{2n\pi}{n} + i\sin\frac{2n\pi}{n} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$

$$= \cos 0 + i\sin 0 = w_0.$$

Znajdujemy następnie podług wzoru Moivre'a:

$$w_1^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = w_2$$

$$w_1^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^3 = \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n} = w_3, \text{ i t. d.}$$

Jest więc: $w_0 = 1$; $w_2 = w_1^2$; $w_3 = w_1^3, \ldots w_{n-1} = w_1^{n-1}$.

Prócz tego: $\cos\frac{n-k}{n}2\pi + i\sin\frac{n-k}{n}2\pi = \cos\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right)$

$+ i\sin\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}$, to znaczy, że pierwiastki w_k i w_{n-k} są liczbami zespolonemi sprzężonemi. Jeżeli n jest liczbą parzystą, to pierwiastek $w_{\frac{n}{2}}$ jest sam ze sobą sprzężony, czyli rzeczywisty, a więc są wtedy dwa pierwiastki rzeczywiste ± 1. Gdy np. $n = 6$, to:

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \text{ i } w_5 = \cos\frac{5\pi}{3}$$

$$+ i\sin\frac{5\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3},$$

więc w_5 jest pierwiastkiem sprzężonym z w_1.

Przykład 1: $x = \sqrt[3]{1}$; $w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$+ \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = w_1^2$;

$w_3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = \cos 0 + i\sin 0 = w_0 = 1$.

Przykład 2: $x = \sqrt[4]{1}$ $w_0 = 1$; $w_1 = i$;

$w_2 = w_1^2 = -1$; $w_3 = w_1^3 = -1$.

Przykład 3: $x = \sqrt[6]{1}$; $w_0 = 1$; $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$;

$w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_3 = -1$; $w_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$;

$w_5 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Sprzężonemi są: w_5 i w_1, w_4 i w_2) wreszcie w_3 jest sprzężony sam ze sobą.

Dla uproszczenia piszemy $w_1 = \varepsilon$, a pozostałe pierwiastki otrzymujemy przez kolejne potęgowanie liczby ε.

Mamy wówczas:

$$\frac{\varphi(x)}{x^n - 1} = \frac{A_0}{x-1} + \frac{A_1}{x-\varepsilon} + \frac{A_2}{x-\varepsilon^2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-\varepsilon^{n-1}}$$

i na zasadzie wzoru (8), str. 129:

$$A_k = \left[\frac{\varphi(x)}{nx^{n-1}}\right]_{x=\varepsilon^k} = \left[\frac{x\varphi(x)}{nx^n}\right]_{x=\varepsilon^k} = \frac{\varepsilon^k \varphi(\varepsilon^k)}{n}.$$

$$\frac{\varphi(x)}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\left[\frac{\varphi(1)}{x-1} + \frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{x-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2\varphi(\varepsilon^2)}{x-\varepsilon^2} + \ldots + \frac{\varepsilon^{n-1}\varphi(\varepsilon^{n-1})}{x-\varepsilon^{n-1}}\right].$$

122) $$\int \frac{\varphi(x)}{x^n - 1}\,dx = \frac{1}{n}\Big[\varphi(1)\lg(x-1) + \varepsilon\varphi(\varepsilon)\lg(x-\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^{n-1}\varphi(\varepsilon^{n-1})\lg(x-\varepsilon^{n-1})\Big].$$

Wyrazy występujące w tym wzorze możemy połączyć parami tworząc wyrażenia rzeczywiste. Sprzężonemi są pierwiastki ε^k i ε^{n-k}, a więc muszą być również sprzężonemi i liczniki $A_k = \varepsilon^k \varphi(\varepsilon^k)$ i $A_{n-k} = \varepsilon^{n-k}\varphi(\varepsilon^{n-k})$, to znaczy, że $A_{n-k} = A - Bi$, jeżeli $A_k = A + Bi$. Ponieważ zaś $(x-\varepsilon^k)(x-\varepsilon^{n-k}) = x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1$, więc na zasadzie wzoru (9), str. 134 mamy:

$$\varepsilon^k\varphi(\varepsilon^k)\lg(x-\varepsilon^k) + \varepsilon^{n-k}\varphi(\varepsilon^{n-k})\lg(x-\varepsilon^{n-k}) =$$

$$A\lg\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right) - 2B\operatorname{arc\,tg}\frac{x - \cos\frac{2k\pi}{n}}{\sin\frac{2k\pi}{n}}$$

123) $$\int \frac{1}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\left[\lg(x-1)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\lg\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\lg\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[\lg(x-1)-\frac{1}{2}\lg(x^2+x+1)-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$$

124) $$\int \frac{x^3-3x}{x^4-1}dx = \frac{3}{4}\lg\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{1}{4}\lg\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$$

W następnem zadaniu kładziemy $\sqrt{3}=r$.

125) $$\int \frac{x}{x^6-1}dx$$
$$= \frac{1}{6}\left[\begin{array}{l}\lg(x-1)+\frac{-1+ri}{2}\lg\left(x-\frac{1+ri}{2}\right)-\frac{1+ri}{2}\lg\left(x+\frac{1-ri}{2}\right)\\ +\lg(x+1)+\frac{-1+ri}{2}\lg\left(x+\frac{1+ri}{2}\right)-\frac{1+ri}{2}\lg\left(x-\frac{1-ri}{2}\right)\end{array}\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left[\lg(x^2-1)-\frac{1}{2}\lg(x^4+x^2+1)-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right].$$

Obliczanie takich całek możemy ułatwić, jeżeli przy rozkładzie na ułamki proste łączymy parami wyrazy sprzężone. Tak np.:

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{mx+n}{x^2+x+1}.$$

$A = \frac{\varphi(1)}{f'(1)} = \frac{a+b+c}{3}$. Podstawiając znalezioną wartość A i sprowadzając prawą stronę do wspólnego mianownika, porównywamy współczynniki liczników, otrzymując:

$$m = \frac{2a-b-c}{3},\quad n = \frac{a+b-2c}{3}.$$

126) $$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\left[(a+b+c)\lg(x-1)\right.$$

$$+\frac{1}{2}(2a-b-c)\lg(x^2+x+1)+(b-c)\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big]$$

127) $$\int\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4-1}dx=\frac{a+c}{4}\lg(x^2-1)+\frac{a-c}{4}\lg(x^2+1)$$
$$+\frac{b+d}{4}\lg\frac{x-1}{x+1}+\frac{b-d}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$$

$$\int\frac{\varphi(x)}{x^n+1}dx.$$

Równanie: $x^n+1=0$, czyli $x=\sqrt[n]{-1}$ rozwiązujemy również podług wzoru Moivre'a, kładąc $-1=\cos(1+2k)\pi+i\sin(1+2k)\pi$, gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą. Wówczas:

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{1+2k}{n}\pi+i\sin\frac{1+2k}{n}\pi$$

$k=0;\quad w_0=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}$

$k=1;\quad w_1=\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n}$

$k=2;\quad w_2=\cos\frac{5\pi}{n}+i\sin\frac{5\pi}{n}$

. . . . . .

$k=n-1;\quad w_{n-1}=\cos\frac{2n-1}{n}\pi+i\sin\frac{2n-1}{n}\pi.$

Możemy łatwo dowieść, że dla jakiejkolwiek nowej wartości całkowitej liczby k otrzymujemy jeden ze znalezionych już pierwiastków, mamy więc tylko n pierwiastków różnych. Podług wzoru Moivre'a

$$w_2^3=\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n}=w_1$$

$$w_0^5=\cos\frac{5\pi}{n}+i\sin\frac{5\pi}{n}=w_1$$

. . . . . .

$$w_{n-1}^{n-1}=\cos\frac{2n-1}{n}\pi+i\sin\frac{2n-1}{n}\pi=w^{n-1}.$$

Znalezione wartości pierwiastków i w danym wypadku również mogą być ugrupowane parami, jako zespolone sprzężone, albowiem

$$w_{n-1-k} = \cos\frac{2n-2k-1}{n}\pi + i\sin\frac{2n-2k-1}{n}\pi$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{2k+1}{n}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

$$= \cos\frac{2k+1}{n}\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}$$

jest wartością sprzężoną z w_k.

Przykład 1: $x = \sqrt[3]{-1}$; $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_1 = -1$, $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

Przykład 2: $x = \sqrt[4]{-1}$; $w_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$, $w_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$; $w_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$, $w_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$. Sprzężonemi są w_0 i w_3, w_1 i w_2.

Obliczając daną całkę, kładziemy $w_0 = \varepsilon$; wówczas:

$$\frac{\varphi(x)}{x^n+1} = \frac{A_1}{x-\varepsilon} + \frac{A_2}{x-\varepsilon^3} + \frac{A_3}{x-\varepsilon^5} + \ldots + \frac{A_n}{x-\varepsilon^{2n-1}}$$

$$A_k = \left[\frac{\varphi(x)}{nx^{n-1}}\right]_{x=\varepsilon^{2k-1}} = \left[\frac{x\varphi(x)}{nx^n}\right]_{x=\varepsilon^{2k-1}} = -\frac{1}{n}\varepsilon^{2k-1}\varphi(\varepsilon^{2k-1}).$$

$$\frac{\varphi(x)}{x^n+1} = -\frac{1}{n}\left[\frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{x-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3\varphi(\varepsilon^3)}{x-\varepsilon^3} + \ldots + \frac{\varepsilon^{2n-1}\varphi(\varepsilon^{2n-1})}{x-\varepsilon^{2n-1}}\right]$$

$$128)\quad \int\frac{x(x)}{x^n+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{n}\left[\varepsilon\varphi(\varepsilon)\lg(x-\varepsilon) + \varepsilon^3\varphi(\varepsilon^3)\lg(x-\varepsilon^3) + \ldots\varepsilon^{2n-1}\varphi(\varepsilon^{2n-3})\lg(x-\varepsilon^{2n-1})\right].$$

Jeżeli $\varepsilon^k\varphi(\varepsilon^k) = A + Bi$, to wartością sprzężoną jest $\varepsilon^{2n-k}\varphi(\varepsilon^{2n-k}) = A - Bi$, i odpowiednie wyrazy całki mogą być również połączone dla otrzymania wartości rzeczywistych.

$$(A+Bi)\lg\left(x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$
$$+(A-Bi)\lg\left(x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$
$$=A\lg\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi+1\right)-2B\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{n}\pi}.$$

129) $$\int\frac{2x^2-x+3}{x^3+1}dx=2\lg(x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

130) $$\int\frac{x^2}{x^4+1}dx=-\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}\lg\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right.$$
$$\left.-\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)-\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)\right]$$

131) $$\int\frac{x^5+x^2+4}{x^6+1}dx=\frac{1}{6}\left[\lg(x^6+1)-2\sqrt{3}\lg\frac{(2x-\sqrt{3})^2+1}{(2x+\sqrt{3})^2+1}\right.$$
$$\left.+6\operatorname{arctg}\frac{x^3-2x}{2x^2-1}\right]$$

132) $$\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\left[(a-b+c)\lg(x+1)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(2a+b-c)\lg(x^2-x+1)+(b+c)\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$$

133) $$\int\frac{1}{x^6-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3+1}dx$$
$$=\frac{1}{6}\left[\lg\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\lg\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$$

134) $$\int\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}\lg\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

135) $$\int\frac{x^5}{(x^3+1)^2}dx=\frac{1}{3}\lg(x^3+1)+\frac{1}{3(x^3+1)}.$$

§ 3. Wzory redukcyjne.

Za pomocą wzorów redukcyjnych, całki złożone mogą być w wielu wypadkach sprowadzone do postaci prostszej (por. str. 139). W niniejszym artykule wyprowadzimy ważniejsze wzory redukcyjne.

Wzór redukcyjny dla całki: $\int \frac{1}{(a+bx+cx^2)^n} dx.$

kładąc: $a+bx+cx^2=t$, mamy:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{b+2cx}{t^n}\right)=\frac{2c}{t^n}-\frac{n(b+2cx)^2}{t^{n+1}}.$$

Ponieważ $(b+2cx)^2$ możemy zastąpić przez $4ct-4(ac-b^2)$, więc:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{b+2cx}{t^n}\right)=\frac{(4ac-b^2)n}{t^{n+1}}-\frac{2c(2n-1)}{t^n}.$$

Całkując strony tego równania i kładąc następnie $n-1$ zamiast n, możemy napisać je w postaci:

$$136)\quad \int \frac{1}{t^n} dx=\frac{b+2cx}{(n-1)(4ac-b^2)t^{n-1}}+\frac{(2n-3)2c}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{1}{t^{n-1}} dx.$$

Przy $b=0$ i $c=1$ otrzymujemy wzór szczególny:

$$137)\quad \int \frac{1}{(x^2+a)^n} dx=\frac{1}{2(n-1)a}\cdot\frac{1}{(x^2+a)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a}\int \frac{1}{(x^2+a)^{n-1}} dx.$$

Zachowując wskazane znakowanie: $a+bx+cx^2=t$, mamy:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{m-1}}{t^n}\right)=(m-1)\frac{x^{m-2}}{t^n}-\frac{nx^{m-1}(b+2cx)}{t^{n+1}}$$

$$=\frac{(m-1)x^{m-2}t-nx^{m-1}(b+2cx)}{t^{n+1}}$$

$$=(m-1)a\frac{x^{m-2}}{t^{n+1}}-(n-m+1)b\frac{x^{m-1}}{t^{n+1}}-(2n-m+1)c\frac{x^m}{t^{n+1}}.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy wzór:

$$138)\quad \int \frac{x^m}{t^{n+1}}\,dx = -\frac{1}{(2n-m+1)\,c}\cdot\frac{x^{m-1}}{t^n} - \frac{(n-m+1)\,b}{(2n-m+1)\,c}\int \frac{x^{m-1}}{t^{n+1}}\,dx + \frac{(m-1)\,a}{(2n-m+1)\,c}\int \frac{x^{m-2}}{t^{n+1}}\,dx.$$

Wzór powyższy sprowadza dana całkę do dwuch analogicznych całek, przyczem mianownik t^{n+1} pozostaje bez zmiany, a wykładnik licznika zmniejsza się o 1 i o 2. Wzór ten stosujemy wówczas, gdy m jest liczbą dodatnią; możemy go jednak przekształcić, wyrażając ostatnią całkę za pomocą pierwszej i drugiej i po przekształceniu stosować do ujemnych wartości wykładnika m. Zwykle jednak w podobnym wypadku przekształcamy całkę przez podstawienie $x=\frac{1}{z}$ lub też przed całkowaniem rozkładamy na ułamki proste.

Wzór redukcyjny dla całki $\int x^n (a+bx^m)^p\,dx$.

Mamy: $\frac{d}{dx}[x^n(a+bx^m)^p] = nx^{n-1}(a+bx^m)^p + mbp(a+bx^m)^{p-1}x^{m+n-1}$

przyczem $x^{n-1}(a+bx^m)^p = ax^{n-1}(a+bx^m)^{p-1} + bx^{m+n-1}(a+bx^m)^{p-1}.$

jest tożsamością, po uwzględnieniu której otrzymujemy

$$\frac{d}{dx}[x^n(a+bx^m)^p] = nax^{n-1}(a+bx^m)^{p-1} + b(mp+n)x^{m+n-1}(a+bx^m)^{p-1}$$

Po całkowaniu stron znajdujemy dwa wzory:

$$139)\quad \int x^{n-1}(a+bx^m)^{p-1}\,dx = \frac{x^n(a+bx^m)^p}{na} - \frac{b(mp+n)}{na}\int x^{m+n-1}(a+bx^m)^{p-1}\,dx$$

$$140)\ \int x^{m+n-1}(a+bx^m)^{p-1}\,dx = \frac{x^n(a+bx^m)^p}{b(mp+n)} - \frac{na}{b(mp+n)}\int x^{n-1}(a+bx^m)^{p-1}\,dx.$$

Posługujemy się wzorem pierwszym albo drugim, stosownie do tego, czy wykładnik czynnika jednomiennego chcemy powiększyć, czy też zmniejszyć o m jedności. Wykładnik dwumianu pozostaje bez zmiany.

$$\frac{d}{dx}[x^n(a+bx^m)^p] = nx^{n-1}(a+bx^m)^p + bmpx^{m+n-1}(a+bx^m)^{p-1}.$$

$$bx^{m+n-1} = x^{n-1}(a+bx^m) - ax^{n-1};$$

$$\frac{d}{dx}[x^n(a+bx^m)^p] = (mp+n)x^{n-1}(a+bx^m)^p - ampx^{n-1}(a+bx^m)^{p-1}.$$

Po całkowaniu znajdujemy następujące wzory:

$$141)\ \int x^{n-1}(a+bx^m)^p\,dx = \frac{x^n(a+bx^m)^p}{mp+n} + \frac{amp}{mp+n}\int x^{n-1}(a+bx^m)^{p-1}dx$$

$$142)\ \int x^{n-1}(a+bx^m)^{p-1}\,dx = -\frac{x^n(a+bx^m)^p}{amp} + \frac{mp+n}{amp}\int x^{n-1}(a+bx^m)^p\,dx.$$

Za pomocą pierwszego wzoru zmniejszamy —, a za pomocą drugiego powiększamy wykładnik p o 1.

§ 4. Funkcje algebraiczne niewymierne.

$$\int f\left(x, \sqrt[n]{a+bx}\right)dx.$$

Całkę taką możemy sprowadzić do postaci wymiernej drogą podstawienia:

$$\sqrt[n]{a+bx} = z, \quad x = \frac{z^n-a}{b}, \quad dx = \frac{nz^{n-1}}{b}\,dz.$$

Przykład: $S=\int x\sqrt{a+bx}\,dx$; $a+bx=z^2$, $x=\frac{z^2-a}{b}$,

$$dx=\frac{2z}{b}dz;\quad S=\frac{2}{b^2}\int(z^4-az^2)\,dz=\frac{2}{b^2}\left(\frac{z^5}{5}-\frac{az^3}{3}\right).$$

143) $$\int x\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{b^2}\sqrt{(a+bx)^3}\left(\frac{a+bx}{5}-\frac{a}{3}\right).$$

Możemy również zastosować metodę całkowania przez części:

$$\int x(a+bx)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}x}{3b}-\frac{2}{3b}\int(a+bx)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}x}{3b}-\frac{2}{3b}\cdot\frac{2}{5b}(a+bx)^{\frac{5}{2}}.$$

144) $$\int x(a+bx)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{5b^2}\sqrt{(a+bx)^3}\left(bx-\frac{2a}{3}\right)$$

145) $$\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}dx=3\int(z^3-1)^2z\,dz=3\left(\frac{z^8}{8}-\frac{2z^5}{5}+\frac{z^2}{2}\right)$$

$$=3\sqrt[3]{(1+x)^2}\left(\frac{1}{8}(1+x)^2-\frac{2}{5}(1+x)+\frac{1}{2}\right)$$

146) $$\int\frac{1}{\sqrt{a+bx}}dx=\frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$$

147) $$\int\frac{1}{\sqrt[n]{(a+bx)^p}}dx=\frac{n}{(n-p)\,b\sqrt[n]{(a+bx)^{p-n}}}$$

148) $$\int\frac{1}{\sqrt[3]{a+bx}}dx=\frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+bx)^2}$$

149) $$\int x\sqrt[3]{a+bx}\,dx=\frac{3}{28b^2}(4bx-3a)\sqrt[3]{(a+bx)^4}$$

150) $$\int x^2\sqrt[3]{a+bx}\,dx=\frac{3}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^3}{10}-\frac{2a}{7}(a+bx)^2\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{4}(a+bx)\right]\sqrt[3]{a+bx}$$

151) $$\int\frac{x}{\sqrt[4]{a+bx}}dx=\frac{4}{21b^2}(3bx-4a)\sqrt[4]{(a+bx)^3}$$

152) $\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \frac{3}{7}(x^2-x-12)\sqrt[3]{x-4}$

153) $\int \frac{x^2}{3\sqrt[3]{x+2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{8}+\frac{9-3x}{10}\right)\sqrt[3]{(x+2)^2}$

154) $\int \frac{x^2}{\sqrt{3x+5}}\,dx = \frac{2}{27}\left(\frac{9x^2}{5}-4x+\frac{40}{3}\right)\sqrt{5+3x}$

155) $\int \frac{\sqrt{x}}{a-1}\,dx = 2\sqrt{x}+\lg\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

156) $\int \frac{1}{x\sqrt{a+x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\lg\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}$

157) $\int \frac{1}{x\sqrt{x-a}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{a}}$

158) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\lg\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}$

159) $\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\lg\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}};\quad a>0$

160) $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = -\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+x-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}$
$+2x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{6}}+6\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}$

161) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}\,dx = -\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}$
$-(x+1)-\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}}-\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

Zakładamy: $x+1=z^6$.

162) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\sqrt{1+x}+\lg\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$

163) $\int \frac{1}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}\,dx = \frac{1}{b-a}\int(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})\,dx\cdot$
$=\frac{2}{3(b-a)}\left[(x-a)^{\frac{3}{2}}+(x-b)^{\frac{3}{2}}\right.$

164) $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3a}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right]$

165) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = -\left(x+4\sqrt{x}+4\lg(1-\sqrt{x})\right)$

166) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = 2\lg(1+\sqrt{x})$

167) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = 4\sqrt{1+\sqrt{x}}\left[\frac{(1+\sqrt{x})^2}{5} - \frac{1+\sqrt{x}}{3}\right]$

168) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}\,dx = 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x}$
$+ 6\sqrt[6]{1+x} - 6\lg(1+\sqrt[6]{1+x})$

169) $\int \frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{b\beta}\sqrt{a+bx} - \frac{2\alpha}{b\beta^2}\lg(\alpha+\beta\sqrt{a+bx})$

170) $\int \frac{1}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx}}\,dx = 2\int \frac{1}{\alpha b - a\beta + \beta z^2}\,dz$

Założyliśmy $z^2 = a+bx$. Dalsze rozwiązanie zależne jest wartości $\beta(\alpha b - a\beta)$.

W podobnych zadaniach można z korzyścią zastosować metodę całkowania przez części przed podstawieniem dla obniżenia wykładnika potęgi. Podajemy następujące przykłady:

171) $\int x^n\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}(a+bx)^{\frac{3}{2}}x^n - \frac{2n}{3b}\int x^{n-1}(a+bx)^{\frac{3}{2}}\,dx$

172) $\int x^n\sqrt[3]{a+bx}\,dx = \frac{3(a+bx)^{\frac{4}{3}}x^n}{4b} - \frac{3n}{4b}\int x^{n-1}(a+bx)^{\frac{4}{3}}\,dx$

173) $\int x^n\frac{1}{\sqrt[3]{a+bx}}\,dx = \frac{3(a+bx)^{\frac{2}{3}}x^n}{2b} - \frac{3n}{2b}\int x^{n-1}(a+bx)^{\frac{2}{3}}\,dx.$

$$\int \frac{A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Możemy użyć metody współczynników nieoznaczonych; sposób postępowania objaśnia przykład następujący. Zakładamy:

174) $$\int \frac{30x^5+30x^4+12x^3+21x^2-15x-1}{\sqrt{4+2x+3x^2}}\,dx$$
$$=(\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)\sqrt{4+2x+3x^2}$$
$$+K\int\frac{1}{\sqrt{4+2x+3x^2}}\,dx$$

gdzie liczby α i K są współczynnikami nieoznaczonemi. Istnienie powyższej tożsamości jest uzasadnione z tego względu, że pochodne obu stron posiadają identyczną postać. Różniczkując otrzymujemy mianowicie:

$$\frac{30x^5+30x^4+12x^3+21x^2-15x-1}{\sqrt{4+2x+3x^2}}$$
$$=(4\alpha_4x^3+3\alpha_3x^2+2\alpha_2x+\alpha_1)\sqrt{4+2x+3x^2}$$
$$+\frac{(4+3x)(\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)+K}{\sqrt{4+2x+3x^2}}$$
$$30x^5+30x^4+12x^3+21x^2-15x-1$$
$$=(4\alpha_4x^3+3\alpha_3x^2+2\alpha_2x+\alpha_1)(3x^2+2x+4)$$
$$+(4+3x)(\alpha_4x^4+\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)+K,$$

Porównanie współczynników odpowiednich wyrazów prowadzi do równań: $30=15\alpha_4$, $\alpha_4=2$; $30=12\alpha_3+9\alpha_4$, $\alpha_3=1$; $12=9\alpha_3+7\alpha_3+16\alpha_4$, $\alpha_2=-3$; $21=6\alpha_1+5\alpha_2+12\alpha_3$, $\alpha_1=4$; $-15=3\alpha_0+2\alpha_1+8\alpha_2$, $\alpha_0=-1$; $-1=K+4\alpha_1+\alpha_0$, $K=-16$.

175) $$\int\frac{30x^5+30x^4+12x^3+21x^2-15x-1}{\sqrt{4+2x+3x^2}}\,dx$$
$$=(2x^4+x^3+3x^2+4x-1)\sqrt{4+2x+3x^2}-16\int\frac{1}{\sqrt{4+2x+3x^2}}\,dx.$$

Odkładając na razie obliczenie ostatniej całki, zajmiemy się rozważaniem ogólniejszego przykładu; współczynniki oznaczymy literami, ustalimy jedynie stopień n tej funkcji całkowitej, która stanowi licznik funkcji niewymiernej podlegającej całkowaniu, biorąc np. $n=9$.

176) $$\int \frac{A_9x^9+A_8x^8+\ldots.+A_1x+A_0}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$
$$=(\alpha_8x^8+\alpha_7x^7+\ldots.+\alpha_1x+\alpha_0)\sqrt{a+2bx+cx^2}$$
$$+K\int\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Różniczkując obie strony równania i znosząc mianownik, otrzymujemy:

$$A_9x^9+A_8x^8+A_7x^7+\ldots.+A_1x+A_0$$
$$=(8\alpha_8x^7+7\alpha_7x^6+\ldots.+a_1)(a+2bx+cx^2)$$
$$+(\alpha_8x^8+\alpha_7x^7+\alpha_6x^6+\ldots.+\alpha_1x+\alpha_0)(b+cx)+K$$

a z porownania współczynników równych potęg mamy następujące związki:

$$\begin{aligned}
A_9&=9c\alpha_8\\
A_8&=8c\alpha_7+17b\alpha_8\\
A_7&=7c\alpha_6+15b\alpha_7+8a\alpha_8\\
A_6&=6c\alpha_5+13b\alpha_6+7a\alpha_7\\
A_5&=5c\alpha_4+11b\alpha_5+6a\alpha_6\\
A_4&=4c\alpha_3+\ 9b\alpha_4+6a\alpha_5\\
A_3&=3c\alpha_2+\ 7b\alpha_3+4a\alpha_4\\
A_2&=2c\alpha_1+\ 5b\alpha_2+3a\alpha_3\\
A_1&=1c\alpha_0+\ 3b\alpha_1+2a\alpha_2\\
A_0&=\qquad\ 1b\alpha_0+1a\alpha_1+K.
\end{aligned}\qquad(10)$$

Z powyższego układu równań otrzymujemy współczynniki α i K. Z pośród danych liczb A mogą oczywiście niektóre równać się zeru.

Sposób obliczenia pozostałej całki zależny jest od znaku wartości c. Zbadamy najprzód:

$\int\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$, gdy mamy $c>0$, zakładamy wówczas

$$\sqrt{a+2bx+cx^2}=x\sqrt{c}+z,\quad x=\frac{z^2-a}{2(b-\sqrt{c}z)},$$

$$dx=\frac{-\sqrt{c}z^2+2bz-a\sqrt{c}}{2(b-\sqrt{c}z)^2}\,dx=\frac{z+x\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}z}\,dz,$$

$$\sqrt{a+2bx+cx^2} = \frac{-\sqrt{c}z^2+2bz-a\sqrt{c}}{2(b-\sqrt{c}z)};$$

177) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}dx = \int \frac{1}{b-z\sqrt{c}}dz = -\frac{1}{\sqrt{c}}\lg(b-z\sqrt{c})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\lg(b+cx-\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2})$$

albo $$= \frac{1}{\sqrt{c}}\lg(b+cx+\sqrt{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}),$$

stosownie do tego, czy $\sqrt{c}$ weźmiemy ze znakiem dodatnim, czy ujemnym. Łatwo zauważyć, że różnica między znalezionemi wartościami jest liczbą stałą, a mianowicie $\frac{1}{\sqrt{c}}\lg(b^2-ac)$.

Jeżeli mamy $c<0$, to w otrzymanych wzorach występują wartości urojone; można oczywiście, w tym wypadku, wzory ostateczne przekształcić, dogodniej jest jednak wypadek ten rozpatrzeć niezależnie od poprzedniego. Piszemy wówczas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx-cx^2}}dx, \quad \text{przy } c<0,$$

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}} = \int \frac{\sqrt{c}\,dx}{\sqrt{(b^2+ac)-(b-cx)^2}}.$$

Zakładamy $z = \frac{b-cx}{\sqrt{b^2+ac}}$, $x = \frac{b-z\sqrt{b^2+ac}}{c}$,

$$dx = -\frac{1}{c}\sqrt{b^2+ac}\,dz, \quad \sqrt{a+2bx-cx^2} = \sqrt{\frac{b^2+ac}{c}}(1-z^2)$$

178) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin z$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{b-cx}{\sqrt{b^2+ac}}.$$

Zastosowane przekształcenie staje się niemożliwem, jeżeli $b^2+ac=0$; podobny wynik otrzymać możemy je-

dnak tylko wtedy, gdy a posiada wartość ujemną, albowiem c oznacza liczbę dodatnią. Kładąc wówczas $\alpha = -a$ otrzymujemy wyrażenie podpierwiastkowe $-\alpha + 2bx - cx^2$, a następnie w postaci:

$$-\frac{1}{c}[(cx-b)^2-(b^2-ac)] = -\frac{1}{c}(cx-b)^2.$$

mamy zatem: $\sqrt{a+2bx-cx^2} = \sqrt{\frac{-1}{c}}(cx-b)$ i otrzymane wyrażenie może być w dalszym ciągu przekształcone podług poprzednich wzorów.

Wyrażenie niewymierne, występujące w podanych niżej zadaniach, oznaczamy częstokroć jedną literą R.

179) $$\int \frac{x^3+5x^2-3x+4}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3}+\frac{25}{12}x-\frac{163}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{85}{16}\lg\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

180) $$\int \frac{4x^4+15x^3-9x^2+14x+46}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,dx = (x^3-2x^2+3x+7)R + 10\lg(3+x+R)$$

181) $$\int \frac{5x^2-2x+10}{\sqrt{5x^2-5x+8}}\,dx = \left(\frac{5}{6}x+\frac{47}{12}\right)R + \frac{55}{8\sqrt{3}}\lg\left(3x-\frac{5}{2}+\sqrt{3}\,R\right)$$

182) $$\int \frac{x^3+4x^2-6x+3}{\sqrt{5+6x-x^2}}\,dx = -\left(\frac{x^2}{3}+\frac{9x}{2}+\frac{227}{6}\right)R - 139\arcsin\frac{3-x}{\sqrt{14}}$$

183) $$\int \frac{-45x^3+20x^2+65x+54}{\sqrt{7+8x-5x^2}}\,dx = (3x^2+4x+5)R - \frac{6}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{4-5x}{\sqrt{51}}$$

184) $$\int \frac{mx^2+nx+p}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=\left(\frac{mx}{2c}+\frac{2cn-3bm}{2c^2}\right)\sqrt{a+2bx+cx^2}$$
$$+\left(p-\frac{2bcn-3b^2m+acm}{2c^2}\right)\int\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

185) $$\int\sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx=\int\frac{cx^2+2bx+a}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$
$$=\left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2c}\right)R+\left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2c}\right)\int\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

Będzie więc naprzykład:

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x.$$

186) $$\int\sqrt{3x^2+10x+9}\,dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{6}\right)R+\frac{1}{\sqrt{27}}\lg\left(3x+5+\sqrt{3}R\right)$$

187) $$\int\sqrt{11+12x-8x^2}\,dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right)R-\frac{31}{8\sqrt{2}}\arcsin\frac{3-4x}{\sqrt{31}}$$

188) $$\int x\sqrt{8+x-x^2}\,dx=\int\frac{-x^3+x^2+8x}{\sqrt{8+x-x^2}}\,dx$$
$$=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{12}-\frac{67}{24}\right)R-\frac{33}{16}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{33}}$$

189) $$\int\frac{x}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=\frac{1}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}$$
$$-\frac{b}{c}\int\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

190) $$\int\frac{x^2}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=\left(\frac{x}{2c}-\frac{3b}{2c^2}\right)R+\frac{3b^2-ac}{2c^2}\int\frac{1}{R}\,dx$$

191) $$\int\frac{x^3}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=\left(\frac{x^2}{3c}-\frac{5bx}{6c^2}+\frac{5b^2}{2c^3}-\frac{2a}{3c^2}\right)R$$
$$+\left(\frac{3ab}{2c^2}-\frac{5b^3}{2c^3}\right)\int\frac{1}{R}\,dx$$

192) $$\int \frac{x^4}{\sqrt{3+2x+x^2}}\,dx = \left(\frac{x^3}{4} - \frac{7x^2}{12} + \frac{x}{3} + \frac{5}{2}\right) R - \frac{7}{2} \lg (1+x+R)$$

193) $$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+2x+3x^2}}\,dx = \left(\frac{x^4}{15} - \frac{x^3}{20} + \frac{x^2}{108} + \frac{7x}{405} - \frac{19}{810}\right) R + \frac{1}{162\sqrt{3}} \lg (1+3x+\sqrt{3}\,R)$$

194) $$\int x\sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \int \frac{cx^3+2bx^2+ax}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{bx}{6c} + \frac{a}{3c} - \frac{b^2}{2c^2}\right) R + \left(\frac{b^3}{2c^2} - \frac{ab}{2c}\right) \int \frac{1}{R}\,dx$$

195) $$\int \sqrt{(5x^2+4x+3)^3}\,dx = \int \frac{25x^4+40x^3+46x^2+21x+9}{\sqrt{5x^2+4x+3}}\,dx = \left(\frac{5x^3}{4} + \frac{3x^2}{2} + \frac{79x}{40} + \frac{63}{100}\right) R + \frac{363}{200\sqrt{5}} \lg (2+5x+\sqrt{5}\,R)$$

196) $$\int (2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}\,dx = \int \frac{(2x-5)(2+3x-x^2)}{\sqrt{2+3x-x^2}}\,dx = \left(\frac{2x^2}{3} - 3x + \frac{1}{6}\right) R + \frac{17}{4} \arcsin \frac{3-2x}{\sqrt{17}}$$

197) $$\int (x^2-3x+5)\sqrt{3x^2-2x+6}\,dx = \left(\frac{x^3}{4} - \frac{37x^2}{36} + \frac{625}{216}x - \frac{503}{216}\right) R + \frac{2227}{216\sqrt{3}} \lg (3x-1+\sqrt{3}\,R)$$

198) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \pm \frac{1}{\sqrt{b}} \lg \left(bx \pm \sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right)$$

199) $$\int \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

200) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \lg \left(b+cx+\sqrt{c}\sqrt{2bx+cx^2}\right)$$

201) $$\int \frac{1}{\sqrt{2bx-cx^2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{b-cx}{b}$$

202) $\int \sqrt{a+bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \lg\left(bx+\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}\right)$

203) $\int \sqrt{a-bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a-bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \arcsin x\sqrt{\frac{b}{x}}$

204) $\int \sqrt{2ax+x^2}\,dx = \frac{a+x}{2} R - \frac{a^2}{2} \lg(a+x+R)$

205) $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2} R - \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{a-x}{a}$

206) $\int x^2\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \left(\frac{x^3}{4} - \frac{ax^2}{12} - \frac{5a^2x}{24} - \frac{5a^3}{8}\right) R$

$$- \frac{5a^4}{8} \arcsin \frac{a-x}{a}$$

Związki (10), str. 155, prowadzą do wzorów następujących:

207) $\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = (\alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n-2}x^{n-2}$

$$+ \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0)\sqrt{a+bx^2} + K\int \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx.$$

$\alpha_{n-1} = \frac{1}{nb}$; $\alpha_{n-2} = 0$; $\alpha_{n-3} = -\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{a}{b}\alpha_{n-1}$; $\alpha_{n-4} = 0$;

$\alpha_{n-5} = -\frac{n-3}{n-4}\cdot\frac{a}{b}\alpha_{n-3}$; $\alpha_{n-6} = 0$; $\alpha_{n-7} = -\frac{n-5}{n-6}\cdot\frac{a}{b}\alpha_{n-5}$ itd.

$K = -a\alpha_1$, a więc dla nieparzystej liczby n jest zawsze $K = 0$

208) $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{b}\int \frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{b}\sqrt{a+bx^2}$

209) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{x}{2b}\sqrt{a+bx^2} - \frac{a}{2b\sqrt{b}} \lg(bx+\sqrt{b}\,R)$

210) $\int \frac{x^3}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3\cdot 2}\right)\sqrt{a+bx^2}$

211) $\int \frac{x^4}{\sqrt{1+5x^2}}\,dx = \left(\frac{x^3}{20} - \frac{3x}{50}\right) R + \frac{6}{25\sqrt{5}} \lg(5x+\sqrt{5}\,R)$

212) $$\int \frac{x^5}{\sqrt{3+2x^2}}\,dx = \left(\frac{x^4}{10} - \frac{x^2}{5} + \frac{3}{5}\right)\sqrt{3+2x^2}.$$

Całka (207) może być również znaleziona za pomocą odpowiedniego wzoru redukcyjnego.

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{b}\int x^{n-1}\,\frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{b}x^{n-1}\sqrt{a+bx^2} - \frac{n-1}{b}\int x^{n-2}\sqrt{a+bx^2}\,dx$$

$$\int x^{n-2}\sqrt{a+bx^2}\,dx = a\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx + b\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx.$$

213) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx = \frac{1}{nb}x^{n-1}\sqrt{a+bx^2} - \frac{(n-1)a}{nb}\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a+bx^2}}\,dx$$

214) $$\int \frac{x^6}{\sqrt{3-5x^2}}\,dx = -\left(\frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{40} + \frac{9x}{400}\right)\sqrt{3-5x^2}$$

$$+ \frac{27}{400\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x}{\sqrt{15}}.$$

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to:

215) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}x^{n-3}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}x^{n-5} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{3}{2}x\right)\sqrt{1-x^2}$$

$$+ \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}\cdots\frac{3}{2}\arcsin x$$

216) $$\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left(\frac{x^5}{6} + \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{5}{16}\arcsin x.$$

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to:

217) $$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}x^{n-3}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-3}{n-4}x^{n-5} + \ldots\right)\sqrt{1-x^2}$$

218) $$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left(\frac{x^6}{7} + \frac{6x^4}{35} + \frac{8x^2}{35} + \frac{16}{35}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

$$S=\int\frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

Przez podstawienie $x-\alpha=\frac{1}{z}$ przekształca się S na całkę następującą:

$$S=-\int\frac{1}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)z+(a+2b\alpha+c\alpha^2)z^2}}\,dz.$$

Wartość tej całki wyznaczamy w rozmaity sposób, zależnie od wartości współczynnika przy z^2.

1) $a+2b\alpha+c\alpha^2=m>0$,

219) $$\int\frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$
$$=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}\lg\frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x\pm\sqrt{m}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x-\alpha}$$

2) $a+2b\alpha+c\alpha^2=m<0$,

220) $$\int\frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-m}}\arcsin\frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x}{(x-\alpha)\sqrt{b^2-ac}}$$

Jeżeli wreszcie 3) $a+2b\alpha+c\alpha^2=0$,

to α jest pierwiastkiem równania $a+2bx+cx^2=0$. Oznaczając drugi pierwiastek przez β, mamy $c(x-\alpha)(x-\beta)=cx^2+2bx+a$. Podstawienie $(x-\alpha)=z^2$ daje $(x-\beta)=(z^2+\alpha-\beta)$, więc

$$S=\frac{2}{\sqrt{c}}\int\frac{1}{z^2\sqrt{z^2+\alpha-\beta}}\,dz.$$

Za pomocą nowego podstawienia $z=\frac{1}{u}$ otrzymujemy

$$S=-\frac{2}{\sqrt{c}}\int\frac{u}{\sqrt{(\alpha-\beta)u^2+1}}\,du=-\frac{2}{\sqrt{c}}\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)u^2+1}}{\alpha-\beta}$$

i następnie powracamy do dawnego znakowania:

$$S=-\frac{2}{c}\frac{\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)}=-\frac{2}{c}\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)}$$

Mamy dalej $\alpha+\beta=-\frac{2b}{c}$, skąd $\alpha-\beta=2\frac{b+c\alpha}{c}$. Ostatecznie znajdujemy:

221) $$\int\frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}dx=-\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{(b+c\alpha)(x-\alpha)}$$

222) $$\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+2x+3}}dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\lg\frac{2x+4+\sqrt{6}R}{x-1}$$

223) $$\int\frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-6x+1}}dx=-\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{x+5}{(x-2)\sqrt{8}}$$

224) $$\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Jeżeli jest $a>0$, to:

225) $$\int\frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\lg\frac{a+bx+\sqrt{a}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}$$

Jeżeli jest $a<0$, to:

226) $$\int\frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{a+bx}{x\sqrt{b^2-ac}}$$

227) $$\int\frac{1}{x\sqrt{2ax-x^2}}dx=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}$$

228) $$\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx=\lg\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

229) $$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}dx=\arcsin\frac{x-2}{x\sqrt{5}}$$

230) $$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=-\arcsin\frac{1}{x}.$$

$$S=\int\frac{1}{(x-\alpha)^n\sqrt{a+2bx+cx^2}}dx.$$

Drogą podstawienia $x-\alpha=\frac{1}{z}$ znajdujemy:

$$S=-\int\frac{z^{n-1}}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)z+(a+2b\alpha+c\alpha^2)z^2}}dz.$$

231) $$\int \frac{1}{(x-1)^3\sqrt{3-2x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}\right)\sqrt{3-2x^2} + 7\lg\frac{3-2x-\sqrt{3-2x^2}}{x-1}$$

232) $$\int \frac{1}{(x-2)^4\sqrt{1-4x+x^2}}\,dx = \left(\frac{1}{9(x-2)^3}+\frac{2}{27(x-2)}\right)R$$

233) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

234) $$\int \frac{1}{x^3\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left(\frac{-1}{2ax^2}+\frac{3b}{2a^2x}\right)R + \left(\frac{3b^2}{2a^2}-\frac{c}{2a}\right)\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

235) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-4x+x^2}}\,dx = -\frac{1}{x}R + 2\lg\frac{1-2x-R}{x}$$

236) $$\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{1}{2}\lg\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

237) $$\int \frac{1}{x^4\sqrt{3-2x+x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{9x^3}+\frac{5}{54x^2}+\frac{1}{54x}\right)R - \frac{2}{27\sqrt{3}}\lg\frac{3-x-\sqrt{3}R}{x}$$

238) $$\int \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}\,dx = \int \frac{b+cx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx + a\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx + b\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Rozkładamy $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ na ułamki proste, otrzymując w ten sposób sumę takich funkcji, których całki możemy znaleźć.

239) $$\int \frac{3x+1}{x^2-x-6}\cdot\frac{5}{\sqrt{3x^2+4x-7}}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+2}\right)\frac{1}{R}\,dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{8}}\lg\frac{11x-1-\sqrt{32}R}{x-3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{4x+11}{5(x+2)}$$

240) $$\int \frac{4x+17}{x^2+x-6}\cdot\frac{1}{\sqrt{5-2x^2}}\,dx=\frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{5-4x}{(x-2)\sqrt{10}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{13}}\arcsin\frac{6x+5}{(x+3)\sqrt{10}}$$

241) $$\int \frac{3x-5}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4}}\,dx=\frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{x-1}$$
$$+\frac{17}{5\sqrt{5}}\lg\frac{x+4-\sqrt{5}\sqrt{x^2+4}}{x-1}$$

242) $$\int \frac{1}{(x^2-9)\sqrt{5+6x-7x^2}}\,dx=\frac{1}{6\sqrt{40}}\arcsin\frac{7-9x}{(x-3)\sqrt{11}}$$
$$-\frac{1}{6\sqrt{76}}\arcsin\frac{12x-2}{(x+3)\sqrt{11}}.$$

$$S=\int\frac{1}{(x-p-qi)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Całkę taką otrzymujemy ze wzoru (219), kładąc $\alpha=p+qi$. Mamy wówczas jednocześnie $m=a+2bp+c(p^2-q^2)+2q(b+cp)i$. Zakładamy $m=\rho(\cos t+i\sin t)$, czyli $\rho\cos t=a+2bp+c(p^2-q^2)$, $\rho\sin t=2q(b+cp)$, określając stąd wartości ρ i t. Jednocześnie znajdujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\cos\frac{t}{2}-i\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$S=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\cos\frac{t}{2}-i\sin\frac{t}{2}\right)\cdot\lg\left[a+bp+(b+cp)x-\sqrt{\rho}\cos\frac{t}{2}R\right.$$
$$\left.+\left\{(b+cx)q-\sqrt{\rho}\sin\frac{t}{2}R\right\}i\right]-\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\cos\frac{t}{2}-i\sin\frac{t}{2}\right)\lg(x-p-qi)$$

Ponieważ wzór dla całki niniejszej powstał z rozkładu na ułamki proste funkcji $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, przeto istnieje rów-

nież drugi wzór, wynikający z powyższego przez zmianę znaku przy jednostce urojonej. Posługując się znakowaniem skróconem, piszemy oba wzory w ten sposób:

$$S = (A+Bi)\lg(P+Qi) - (A+Bi)\lg(x-p-qi)$$
$$S_1 = (A-Bi)\lg(P-Qi) - (A-Bi)\lg(x-p+qi)$$

$$S+S_1 = A\lg(P^2+Q^2+2B\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q} - A\lg[(x-p)^2+q^2] + 2B\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}.$$

Kładąc $x^2 = z$, mamy:

243) $$\int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+z)\sqrt{1-z^2}}\,dz = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

244) $$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \int \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2} + a\,.\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}.$$

Kładąc $x^3 = z^2$, znajdujemy:

255) $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{a^3-z^2}} = \frac{2}{3}\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}.$$

Podstawiamy $x^2 = z$, obliczając:

246) $$\int x^3\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx + \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = -\left(\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4}\right)\sqrt{1-x^4} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sin}x^2$$

247) $$\int (x+\sqrt{1+x^2})^n dx = \frac{1}{2}\int (z^n+z^{n-2})\,dz \quad \text{przy } z = x+\sqrt{1+x^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n+1}}{n+1} + \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n-1}}{n-1}\right].$$

§ 5. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne.

$$\int f(e^x)\,dx.$$

Całki powyższej postaci obliczamy po podstawieniu $z = e^x$.

248) $\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m}$

249) $\int (e^{3x} + \sqrt{e^x})\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + 2\sqrt{e^x}$

250) $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx = \int \frac{z-1}{z(z+1)}\,dz = 2\lg(e^x + 1) - x$

251) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \operatorname{arc\,tg} e^x$

252) $\int \frac{1}{\sqrt{a + be^x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{\sqrt{a + be^x} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + be^x} + \sqrt{a}}; \quad z = \sqrt{a + be^x}$

253) $\int \frac{1}{e^x}\,dx = -\frac{1}{e^x}$

254) $\int e^x \sqrt{1 + e^x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1 + e^x)^3}$

255) $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}\,dx = -\frac{1}{e^x - 1}$

256) $\int (e^x + e^{-x})^2\,dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + 2x$

257) $\int \frac{e^x}{e^x + a}\,dx = \lg(e^x + a)$

258) $\int \frac{4e^x + 6e^{-x}}{9e^x - 4e^{-x}}\,dx = \frac{35}{36} \lg\left(e^{2x} - \frac{4}{9}\right) - \frac{3x}{2}$

259) $\int \frac{1}{e^x + e^{2x}}\,dx = \lg(1 + e^x) - \frac{1}{e^x} - x$

260) $$\int \frac{e^x}{(e^x+a)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-1)(e^x+a)^{n-1}}$$

$$\int f(x, e^x)\,dx.$$

Prócz podstawienia wskazanego wyżej, możemy częstokroć zastosować metodę całkowania przez części.

261) $$\int e^x x^4\,dx = e^x x^4 - 4\int e^x x^3\,dx$$

262) $$\int e^x x^3\,dx = e^x x^3 - 3\int e^x x^2\,dx \quad \text{i t. d.}$$

263) $$\int e^x x^4\,dx = e^x(x^4 - 4^3x + 12x^2 - 24x + 24)$$

264) $$\int e^x x^n\,dx = e^x(x^n - nx^{n-1} + n[n-1]x^{n-2} + \ldots)$$

265) $$\int e^{mx} x^n\,dx = \frac{e^{mx}x^n}{m} - \frac{n}{m}\int e^{mx} x^{n-1}\,dx$$

266) $$\int (a+bx)^n e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}(a+bx)^n}{m} - \frac{nb}{m}\int e^{mx}(a+bx)^{n-1}\,dx.$$

Powyższy wzór redukcyjny może być stosowany przy dodatnich i przy ujemnych wartościach wykładnika m. Można go również odwrócić, kładąc następnie $-p$ zamiast $n-1$.

267) $$\int (a+bx)^{-p} e^{mx}\,dx = -\frac{e^{mx}(a+bx)^{-p+1}}{(p-1)b} + \frac{m}{(p-1)b}\int e^{mx}(a+bx)^{-p+1}\,dx.$$

Dla $p=1$ wzór ten jest bezużyteczny; znajdujemy wówczas całkę za pomocą rozwinięcia na szereg nieskończony.

268) $$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots\right)dx$$

$$= \lg x + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \ldots$$

269) $$\int x^4 e^{2x}\,dx = e^{2x}\left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\right)$$

270) $\int x^3 e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)$

271) $\int \frac{e^x}{x^4}\,dx = -e^x\left(\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{6x^2}+\frac{1}{6x}\right)+\frac{1}{6}\int\frac{e^x}{x}\,dx$

272) $\int \frac{e^x}{(x-a)^n}\,dx = e^a\int\frac{e^z}{z^n}\,dz$, gdy $z=x-a$.

Funkcje wykładnicze przy zasadzie a sprowadzamy do zasady e, kładąc $a=e^m$.

273) $\int a^{bx} f(x)\,dx = \int e^{mbx} f(x)\,dx; \quad m=\lg a$

274) $\int x^3 a^x\,dx = a^x\left(\frac{x^3}{m}-\frac{3x^2}{m^2}+\frac{6x}{m^3}-\frac{6}{m^4}\right)$

275) $\int \frac{a^x}{x^4}\,dx = -a^x\left(\frac{1}{3x^3}+\frac{m}{6x^2}+\frac{m^2}{6x}\right)+\frac{m^3}{6}\int\frac{a^x}{x}\,dx$

276) $\int f(x)\,dx = \int e^z f(e^z)\,dz$, gdy $z=\lg x$.

277) $\int (\lg x)^n\,dx = \int e^z z^n\,dz = e^z(z^n - nz^{n-1}+\ldots)$

$= x[(\lg x)^n - n(\lg x)^{n-1}+n(n-1)(\lg x)^{n-2}-\ldots]$.

Całkę powyższą można również znaleźć łatwo za pomocą całkowania przez części.

278) $\int (\lg x)^n\,dx = x(\lg x)^n - n\int(\lg x)^{n-1}\,dx$

279) $\int \lg x\,dx = x(\lg x-1)$

280) $\int (\lg x)^2\,dx = x([\lg x]^2-2\lg x+2)$

281) $\int x^n \lg x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\lg x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\lg x-\frac{1}{n+1}\right)$

282) $\int x^{-n}\lg x\,dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\left(\lg x+\frac{1}{n-1}\right)$

283) $\int x^3 \lg x\, dx = \frac{x^4}{4}\left(\lg x - \frac{1}{4}\right)$

284) $\int \frac{\lg x}{x^4}\, dx = -\frac{1}{3x^3}\left(\lg x + \frac{1}{3}\right)$

285) $\int \frac{1}{x} \lg x\, dx = \frac{1}{2}(\lg x)^2$

286) $\int (a+bx)^n \lg x\, dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} \lg x - \frac{1}{(n+1)b} \int \frac{(a+bx)^{n+1}}{x}\, dx$

287) $\int (4+3x)^2 \lg x\, dx = \frac{(4+3x)^3}{9} \lg x - \frac{64}{9} \lg x - 16x - 6x^2 - x^3$

288) $\int \lg(a+bx)\, dx = \frac{a+bx}{b}(\lg[a+bx] - 1)$

289) $\int x^n \lg(a+bx^m)\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \lg(a+bx^m) - \frac{mb}{n+1} \int \frac{x^{m+n}}{a+bx^m}\, dx$

290) $\int \lg(a+bx^2)\, dx = x \lg(a+bx^2) - 2x + 2a \int \frac{1}{a+bx}\, dx$

291) $\int x \lg(1+x^2)\, dx = \frac{1+x^2}{2} \lg(1+x^2) - \frac{x^2}{2}$

292) $\int x^3 \lg(x^2+3)\, dx = \frac{x^4}{4} \lg(x^2+3) - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{2} - 3x^2 + 9 \lg(x^2+3)\right)$

293) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \lg x\, dx = \sqrt{a^2+x^2} \lg x - \int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\, dx$

$$= (\lg x - 1)\sqrt{a^2+x^2} - a \lg \frac{a - \sqrt{a^2+x^2}}{x}$$

§ 6. Funkcje trygonometryczne i odwrotne kołowe.

Wzory podstawowe dla całkowania funkcji tego rodzaju otrzymujemy przez odwrócenie odpowiednich wzorów rachunku różniczkowego.

294) $\int \cos x\, dx = \sin x$

295) $\int \sin x\,dx = -\cos x$

296) $\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx$

297) $\int \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx$

298) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x$

299) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x$

300) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\lg\cos x$

301) $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \lg\sin x$

302) $\int \operatorname{tg} nx\,dx = -\frac{1}{n}\lg\cos nx$

303) $\int \operatorname{cotg} nx\,dx = \frac{1}{n}\lg\sin nx$

304) $\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_1$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_2.$$

Z pośród trzech otrzymanych rozwiązań, każde dwa różnią się między sobą jedynie o liczbę stałą.

305) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

306) $\int \cos^2 x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$

Ze wzorów (300) i (301) wynika:

307) $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)\,dx = \lg\sin x - \lg\cos x = \lg \operatorname{tg} x$, albo:

308) $\int \frac{2}{\sin 2x}\,dx = \lg \operatorname{tg} x$, albo:

309) $\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

310) $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\,dx = -\int \frac{1}{\sin z}\,dz = -\lg \operatorname{tg} \frac{z}{2}$

$$= -\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \lg \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

Potęgi funkcji $\sin x$ i $\cos x$ mogą być całkowane za pomocą wzorów redukcyjnych. Niechaj:

$$S_n = \int \sin^n x\,dx.$$

$$\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$

$$S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)\,dx$$

$$S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n$$

$$nS_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) S_{n-2}$$

311) $$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x\,dx.$$

Odwracając otrzymany wzór i kładąc następnie $-p$ zamiast $n-2$, mamy:

312) $$\int (\sin x)^{-p}\,dx = -\frac{1}{p-1} \cos x (\sin x)^{-p+1} + \frac{p-2}{p-1} \int (\sin x)^{-p+2}\,dx.$$

Posługując się temi wzorami możemy sprowadzić dowolny całkowity wykładnik p, względnie $-p$, do wykładnika 2 albo 1 i następnie zastosować jeden ze znanych już wzorów.

313) $$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\left(\sin^2 x + 2\right)\cos x$$

314) $$\int \sin^4 x\,dx = -\left(\frac{1}{4}\sin^3 x + \frac{3}{8}\sin x\right)\cos x + \frac{3x}{8}$$

315) $$\int \sin^5 x\,dx = -\left(\frac{1}{5}\sin^4 x + \frac{4}{15}\sin^2 x + \frac{8}{15}\right)\cos x$$

316) $$\int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

317) $$\int \frac{1}{\sin^4 x}\,dx = -\left(\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{3\sin x}\right)\cos x$$

Wzory redukcyjne dla $\cos^n x$ mogą być otrzymane w analogiczny sposób, bądź też wyprowadzone ze wzorów (311) i (312) przez podstawienie:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin z$$

318) $$\int \cos^n x\,dx = \int \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = -\int \sin^n z\,dz.$$

Po rozwinięciu tej ostatniej całki, wracamy do dawnego znakowania, kładąc $\cos x$ zamiast $\sin z$ i $\sin x$ zamiast $\cos z$; otrzymujemy wtedy:

319) $$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

320) $$\int (\cos x)^{-p}\,dx = \frac{1}{p-1}\sin x(\cos x)^{-p+1} + \frac{p-2}{p-1}\int (\cos x)^{-p+2}\,dx$$

321) $$\int \cos^4 x\,dx = \left(\frac{1}{4}\cos^3 x + \frac{3}{8}\cos x\right)\sin x + \frac{3}{8}x$$

322) $$\int \cos^5 x\,dx = \left(\frac{1}{5}\cos^4 x + \frac{4}{15}\cos^2 x + \frac{8}{15}\right)\sin x$$

323) $$\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

324) $$\int \frac{1}{\cos^5 x}\,dx = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

Za pomocą wzorów:

$$\sin nx = \frac{e^{nxi} - e^{-nxi}}{2i}, \quad \cos nx = \frac{e^{nxi} + e^{-nxi}}{2}$$

możemy sprowadzić $\sin^n x$ i $\cos^n x$ do funkcji łuku wielokrotnego; przekształcenie takie objaśnimy na przykładzie:

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}}{32i}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} - 5\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + 10\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{16}[\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x].$$

325) $$\int \sin^5 x\,dx = \frac{1}{16}\left[-\frac{\cos 5x}{5} + \frac{5\cos 3x}{3} - 10\cos x\right]$$

326) $$\int \cos^6 x\,dx = \frac{\sin 6x}{192} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{5x}{16}$$

327) $$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{32}\left[\frac{\sin 6x}{6} - \frac{3\sin 4x}{2} + \frac{15\sin 2x}{2}\right] + \frac{5x}{16}$$

328) $$\int \cos^7 x\,dx = \frac{1}{64}\left[\frac{\sin 7x}{7} + \frac{7\sin 5x}{5} + 7\sin 3x + 35\sin x\right]$$

329) $$\int \cos^8 x\,dx = \frac{1}{128}\left[\frac{\sin 8x}{8} + \frac{4\sin 6x}{3} + 7\sin 4x + 28\sin 2x\right] + \frac{35x}{128}$$

Kładąc $\sin x = y$, względnie $\cos x = y$, otrzymujemy:

$$\int \sin^n x\,dx = \int \frac{y^n}{\sqrt{1-y^2}}\,dy; \quad \int \cos^n x\,dx = -\int \frac{y^n}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

330) $$\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\int (1-y^2)\,dy$$

$$= -\left(y - \frac{y^3}{3}\right) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$$

331) $$\int \cos^5 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\,dx = \int (1-y^2)^2\,dy$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x$$

332) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{1-\cos^2 x} = \int -\frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2}\lg\frac{1-y}{1+y}$

$$= \frac{1}{2}\lg\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

333) $\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\left[\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{4}{15\sin^3 x} + \frac{8}{15\sin x}\right]\cos x$

334) $\int \frac{dx}{\sin^7 x} = -\left[\frac{1}{6\sin^6 x} + \frac{5}{24\sin^4 x} + \frac{5}{16\sin^2 x}\right]\cos x + \frac{5}{16}\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

335) $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{\sin x}{5\cos^5 x} + \frac{4\sin x}{15\cos^3 x} + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x.$

Po podstawieniu $\sin x = \frac{1}{y}$, względnie $\cos x = \frac{1}{y}$, znajdujemy:

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\int \frac{y^{n-1}}{\sqrt{y^2-1}}\,dy; \quad \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{y^{n-1}}{\sqrt{y^2-1}}\,dy.$$

336) $\int \frac{dx}{\cos^7 x} = \left[\frac{1}{6\cos^6 x} + \frac{5}{24\cos^4 x} + \frac{5}{16\cos^2 x}\right]\sin x + \frac{5}{15}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

337) $\int \frac{dx}{\cos^8 x} = \left[\frac{1}{7\cos^7 x} + \frac{6}{35\cos^5 x} + \frac{8}{35\cos^3 x} + \frac{16}{35\cos x}\right]\sin x$

338) $\int \sin^n x\cos x\, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$

339) $\int \cos^n x\sin x\, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$

$$\int \sin^m x\cos^n x\, dx.$$

Całkę powyższą sprowadzamy zazwyczaj do prostszej całki tego samego rodzaju, za pomocą całkowania przez części:

$$\int \sin^m x\cos^n dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2}x\cos^{n+2}x\,dx.$$

$$\sin^{m-2}x\cos^{n+2}x = \sin^{m-2}x\cos^n x(1-\sin^2 x) = \sin^{m-2}x\cos^n x - \sin^m x\cos^n x.$$

Rozkładając ostatnią całkę podług powyższego wzoru i redukując podobne wyrażenia, otrzymujemy:

$$340)\quad \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx.$$

Kładąc $m = p+2$, mamy:

$$\int \sin^{p+2} x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{p+1} x \cos^{n+1} x}{p+n+2} + \frac{p+1}{p+n+2}\int \sin^p x \cos^n x\, dx.$$

$$341)\quad \int \sin^p x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{n+1} x}{p+1} + \frac{p+n+2}{p+1}\int \sin^{p+2} x \cos^n x\, dx$$

Za pomocą wzoru (340) osiągamy zmniejszenie dodatniego wykładnika m, a za pomocą wzoru (341) — powiększenie ujemnego wykładnika p; wykładnik n w obu wypadkach nie zmienia się. Kładąc znowu $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ zamiast x, i $-dx$ zamiast dx, otrzymujemy z dwuch ostatnich wzorów, nowe:

$$342)\quad \int \cos^m x \sin^n x\, dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{n+m}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\, dx$$

$$343)\quad \int \sin^n x \cos^p x\, dx = -\frac{\sin^{n+1} x \cos^{p+1} x}{p+1} + \frac{p+n+2}{p+1}\int \sin^n x \cos^{p+2} x\, dx$$

$$344)\quad \int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \left[\frac{\sin^5 x}{6} - \frac{\sin^3 x}{24} - \frac{\sin x}{16}\right]\cos x + \frac{x}{16}$$

$$345)\quad \int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = \left[\sin^6 x - \frac{\sin^4 x}{5} - \frac{4\sin^2 x}{15} - \frac{8}{15}\right]\frac{\cos x}{7}.$$

Zadania tego rodzaju mogą być również w taki sposób rozwiązywane:

346) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)\, dx$

$$= \left[\frac{\sin^3 x}{4} - \frac{\sin x}{8}\right] \cos x + \frac{x}{8}$$

347) $\int \sin^3 x \cos^8 x\, dx = \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6}$

348) $\int \sin^3 x \cos^6 x\, dx = \frac{\cos^9 x}{9} - \frac{\cos^7 x}{7}$

349) $\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\, dx$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9}.$$

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos x} dx \qquad \int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx.$$

Zakładając dla pierwszej całki $\sin x = y$, a dla drugiej $\cos x = y$, przekształcamy je na całki funkcji wymiernych:

$$-\int \frac{y^n}{y^2 - 1} dy \quad \text{i} \quad \int \frac{y^n}{y^2 - 1} dy.$$

Po wykonaniu dzielenia całkujemy wyłączony wielomian, w pozostałym zaś ułamku dogodniej jest przed całkowaniem wykonać powrotne podstawienie.

350) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^2 x}{2} - \lg \cos x$

351) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos x} dx = -\frac{\sin^5 x}{2} - \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

352) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

353) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx = \frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^2 x}{2} + \lg \sin x$

354) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x}$

355) $\int \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x}$

Redukcję ujemnych wykładników za pomocą wzorów (341) i (343) zastąpić możemy innym sposobem rozwiązania:

356) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)^2\,dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x$

357) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1+\sin^2 x}{\sin x}$

358) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^5 x}\,dx = \left[\cos^4 x - \frac{25\cos^2 x}{8} + \frac{15}{8}\right]\frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{15}{8}\lg \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

359) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\,dx = \left[-\sin^3 x + \frac{3\sin x}{2}\right]\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{2}\lg \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right]$

360) $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x}\,dx = \left[-\frac{\sin^6 x}{3} - 2\sin^4 x + 8\sin^2 x - \frac{16}{3}\right]\frac{1}{\cos^3 x}$

361) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \lg \operatorname{tg} x$

362) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2\operatorname{cotg} 2x$

363) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \lg \operatorname{tg} x$

364) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \frac{1}{3\sin x \cos^3 x} - \frac{8}{3}\operatorname{cotg} 2x.$

Całkując przez części, otrzymujemy:

365) $\int \operatorname{tg}^n x\,dx = \int \sin^n x \cos^{-n} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx$

366) $\int \operatorname{cotg}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x\,dx$

367) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \lg \cos x$

368) $\int \operatorname{tg}^8 x\,dx = \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x - \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$

369) $\int \operatorname{cotg}^6 x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \operatorname{cotg} x \quad x$

370) $\int \operatorname{cotg}^7 x\,dx = -\frac{\operatorname{cotg}^6 x}{6} + \frac{\operatorname{cotg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} - \lg \sin x.$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Rugując jedną z całek powyższych, otrzymujemy:

371) $\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx]$

372) $\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx].$

Biorąc w otrzymanych wzorach $-x$ zamiast x, mamy:

373) $\int e^{-ax} \sin bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx + b\cos bx]$

374) $\int e^{-ax} \cos bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx - b\sin bx]$

375) $\int e^{ax} \sin mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int e^{ax}\sin(m+n)x\,dx + \frac{1}{2}\int e^{ax}\sin(m-n)x\,dx$

376) $\int e^{ax} \sin^4 bx\,dx = \frac{1}{8}\int e^{ax}(\cos 4bx - 4\cos 2bx + 3)\,dx$

377) $\int e^{ax} \cos^3 bx\,dx = \frac{1}{4}\int e^{ax}(\cos 3bx + 3\cos bx)\,dx$

378) $\int x^n \sin x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

379) $\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx$

380) $$\int \frac{\sin x}{x^n}\,dx = -\frac{\sin x}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx$$

381) $$\int \frac{\cos x}{x^n}\,dx = -\frac{\cos x}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x}{x^{n-1}}\,dx.$$

Kładąc $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, mamy $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ i

382) $$\int \frac{dx}{a+\cos x} = \frac{2}{a-1}\int \frac{dy}{y^2 + \frac{a+1}{a-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\, y\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, \text{ gdy } \frac{a+1}{a-1} > 0,$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-a^2}} \lg \frac{y - \sqrt{\frac{1-a}{1-a}}}{y + \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}}, \text{ gdy } \frac{a+1}{a-1} < 0.$$

Przy $a = 1$

383) $$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

W podobny sposób kładąc $\sin x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$, mamy $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ i

384) $$\int \frac{dx}{a+\sin x} = \frac{2}{a+1}\int \frac{dy}{y^2 + \frac{a-1}{a+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\, y\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}, \text{ gdy } \frac{a-1}{a+1} > 0.$$

$$= \frac{+1}{\sqrt{1-a^2}} \lg \frac{y - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{y + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}, \text{ gdy } \frac{a-1}{a+1} < 0.$$

Przy $a=1$ mamy:

385) $$\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}=-\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

386) $$\int \frac{\cos x}{a+\cos x}dx=\int\left(1-\frac{a}{a+\cos x}\right)dx=x-a\int\frac{dx}{a+\cos x}$$

387) $$\int \frac{\sin x}{a+\sin x}dx=x-a\int\frac{dx}{a+\sin x}$$

388) $$\int \frac{dx}{a+b\sin x+c\cos x}=S$$

$$S=m\int\frac{dx}{ma+mb\sin x+mc\cos x}=m\int\frac{dx}{ma+\sin\lambda\sin x+\cos\lambda\cos x}$$

kładąc $mb=\sin\lambda$, $mc=\cos\lambda$, skąd $m=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}$ i następnie $\lambda=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c}$, otrzymujemy:

$$S=m\int\frac{dx}{am+\cos(x-\lambda)}.$$

Tym sposobem dana całka sprowadzona jest do obliczonej już poprzednio całki (382)

389) $$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right);\quad m=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \lambda=\frac{\pi}{4}.$$

Jeżeli $ma-1=0$, skąd $a=\sqrt{b^2+c^2}$, to:

300) $$\int\frac{dx}{a+b\sin x+c\cos x}=\frac{1}{a}\cdot\frac{c\sin x-b\cos x}{a+b\sin x+c\cos x}.$$

Całki oznaczone.

W całkach, które rozważaliśmy dotychczas, występowała zawsze pewna dowolna, nieoznaczona liczba stała; całki takie noszą przeto nazwę **nieoznaczonych**. Gdy

wybrana została pewna określona wartość dla nieoznaczonej liczby stałej, to w dalszych obliczeniach, dotyczących tej samej całki, nie możemy, oczywiście, zmieniać wybranej wartości: całka wtedy staje się pewną ściśle określoną funkcją zmiennej niezależnej x. W prawej stronie wzoru

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

możemy rozważać pewną szczególną wartość zmiennej x, np. b i pisać $F(b) + C$; nie możemy jednak w ten sam sposób postępować z lewą stroną wzoru, ponieważ symbol dx nie jest równoznaczny z symbolem db równym stale zeru, gdy b oznacza liczbę stałą. Należy przeto posługiwać się innem znakowaniem, a więc np.

$$\left|\int f(x)\,dx\right|_{x=b} \quad \text{albo krócej:} \quad \int^{b} f(x)\,dx.$$

mamy przeto:

$$\int^{b} f(x)\,dx = F(b) + C.$$

Biorąc inną wartość a dla zmiennej x, mamy również:

$$\int^{a} f(x)\,dx = F(a) + C;$$

a więc rozważając jedną tylko funkcję pierwotną i zachowując przeto tę samą wartość stałej liczby C, otrzymujemy:

$$\int^{b} f(x)\,dx - \int^{a} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Lewą stronę tego wzoru oznaczamy krócej

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C]. \quad (11)$$

Otrzymaną w podobny sposób wartość nazywamy całką oznaczoną, liczby zaś a i b nazywamy granicami całkowania, przyczem a nazywa się granicą dolną, a b — granicą górną. Zgodnie z powyższem określeniem, całka oznaczona równa się różnicy pomiędzy temi

dwiema wartościami całki nieoznaczonej, które otrzymane są po podstawieniu górnej i dolnej granicy całkowania w założeniu, że przy obu podstawieniach stała liczba C zachowuje tę samą wartość. Całka oznaczona posiada zatem wartość niezależną od wartości liczby C.

Ze wzoru (11) wynikają następujące twierdzenia:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)]$$

$$= F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx. \qquad (12)$$

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx. \qquad (12^a)$$

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (12^b)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (13)$$

Jeżeli górną granicę całkowania przyjmiemy za zmienną niezależną, oznaczając ją przez u, to całka oznaczona

$$\int_a^u f(x)\,dx = F(u) - F(a)$$

nie jest już wtedy wartością stałą, lecz zmienną, a mianowicie funkcją zmiennej u. Zgodnie z określeniem pojęcia całki, mamy:

$$\frac{d}{du}\int_a^u f(x)\,dx = \frac{d}{du}F(u) = f(u). \qquad (14)$$

Pochodna całki oznaczonej, rozważana względem zmiennej granicy górnej, równa się funkcji występującej pod znakiem całki.

Jeżeli natomiast dolną granicę całkowania przyjmujemy za zmienną niezależną, to uwzględniając wzór (13), mamy:

$$\frac{d}{dv}\int_c^b f(x)\,dx = -f(v). \qquad (14^a)$$

Pisząc wzór (14) w postaci

$$d\int_a^u f(x)\,dx = f(u)\,du, \qquad (14^b)$$

wnioskujemy, że o ile funkcja f otrzymuje wartości skończone, to całka oznaczona jest ciągłą funkcją swej granicy górnej, albowiem przyrost całki oznaczonej wraz z przyrostem funkcji f staje się jednocześnie nieskończenie małym. Funkcja znajdująca się pod znakiem całki może nie być funkcją ciągłą, to znaczy (por. str. 81) może być $f(x+0)$ nie równe $f(x-0)$. Jeżeli tak jest w przedziale od $x=a$ do $x=b$, a mianowicie przy $x=c$, to całkę oznaczoną określamy wówczas w ten sposób:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-0} f(x)\,dx + \int_{c+0}^b f(x)\,dx$$
$$= F(b) - F(c+0) + F(c-0) - F(a).$$

Przypominając znaczenie różniczki, możemy przepisać wzór (14^b) w postaci:

$$\int_a^{u+\Delta u} f(x)\,dx - \int_a^u f(x)\,dx = \int_u^{u+\Delta u} f(x)\,dx = f(u)\,\Delta u$$

oznaczając przez Δu dowolnie mały przyrost granicy górnej. W podobny sposób otrzymujemy szereg wzorów.

$$\int_a^{a+\Delta u} f(x)\,dx = \Delta u\, f(a),$$

$$\int_{a+\Delta u}^{a+2\Delta u} f(x) = \Delta u\, f(a+\Delta u),$$

$$\int_{a+2\Delta u}^{a+3\Delta u} f(x)\,dx = \Delta u\, f(a+2\Delta u).$$

. . . . . .

i dodając następnie stronami n takich równości, otrzymujemy:

$$\int_a^{a+n\Delta u} f(x)\,dx = \Delta u\,[f(a) + f(a+\Delta u) + f(a+2\Delta u) + \ldots + f(a+(n-1)\Delta u)].$$

Założywszy $n\Delta u = b - a$, powiększamy następnie nieograniczenie liczbę n i wskutek tego zmniejszamy równocześnie nieograniczenie Δu. Z poprzedniego wzoru otrzymujemy wtedy:

$$(1.) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \delta\,.\,[f(a) + f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(b-\delta)].$$

Wzór powyższy stanowi nowe określenie całki oznaczonej, niezależnie od pojęcia całki nieoznaczonej i wobec tego może być użyty do bezpośredniego obliczenia całki oznaczonej. Podajemy następujący przykład:

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{\delta=0} \delta\,.\left[e^a + e^{a+\delta} + \ldots + e^{a+(n-1)\delta}\right]$$

$$= \lim \delta\, e^a (1 + e^{\delta} + e^{2\delta} + \ldots + e^{(n-1)\delta})$$

$$= \lim \delta\,.\, e^a \frac{e^{n\delta} - 1}{e^{\delta} - 1}$$

$$= \lim \frac{\delta}{e^{\delta} - 1}(e^b - e^a) = e^b - e^a,$$

ponieważ granica, do której dąży otrzymany iloraz, wyznaczona podług reguł rachunku różniczkowego, równa jest jedności.

Może się zdarzyć, że funkcja $f(x)$, występująca pod znakiem całki, w przedziale od x do b przy pewnej wartości $x = c$ staje się nieskończenie wielką, a mimo to całka oznaczona może posiadać określoną wartość. W tym wypadku określać należy całkę oznaczoną w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

przyczem jednak należy zbadać, czy całki oznaczone, znajdujące się w prawej stronie wzoru, dążą do granic skoń-

czonych i ściśle określonych, niezależnych od δ względnie od ε. Mamy np.

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\delta=0} \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{\varepsilon=0} \int_{1+\varepsilon}^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$= \lim_{\delta=0} \left[3(x-1)^{\frac{1}{3}} \right]_{x=0}^{x=1-\delta} + \lim_{\varepsilon=0} \left[3(x-1)^{\frac{1}{3}} \right]_{x=1+\varepsilon}^{x=9}$$

$$= -3 - \lim_{\delta=0} 3\delta^{\frac{1}{3}} - \lim_{\varepsilon=0} 3\varepsilon^{\frac{1}{3}} + 6 = 3,$$

natomiast

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \lim_{\delta=0} \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} + \lim_{\varepsilon=0} \int_{1+\varepsilon}^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

nie posiada określonej wartości.

Podobne uogólnienie pojęcia całki możliwe jest również w tym wypadku, kiedy jedna z granic całkowania, albo obie granice dążą do nieskończoności. Zakładamy wówczas

$$\int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \int_\alpha^{\frac{1}{\delta}} f(x)\,dx \quad (\delta \text{ dodatnie})$$

o ile całka, znajdująca się w prawej stronie powyższego wzoru dąży istotnie do pewnej granicy skończonej i ściśle określonej, a więc niezależnej od δ. Tak np.

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{\delta=0} \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{-x}\,dx = \lim_{\delta=0} \left[-e^{-x} \right]_0^{\frac{1}{\delta}} = 1 - \lim_{\delta=0} e^{-\frac{1}{\delta}} = 1;$$

natomiast $\int_0^\infty e^x\,dx$ nie posiada skończonej wartości. W podobny sposób należy pojmować

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\delta=0} \int_0^{\frac{1}{\delta}} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon=0} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^0 f(x)\,dx.$$

Zadania.

391) $\int_a^b mx^n\,dx = \frac{m}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$

392) $\int_{-2}^{+2} x^4\,dx = \frac{64}{5}$

393) $\int_a^b (a+bx)\,dx = \frac{2ab + b^3 - 2a^2 - a^2 b}{2}$

394) $\int_0^3 (2x + 3x^2)\,dx = 36$

395) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(1 + \frac{3x}{2} - x^2\right) dx = \frac{13}{48}$

396) $\int_0^{3a} \frac{x^2 - 3ax}{x - 4a}\,dx = a^2\left(\frac{15}{2} - 8\lg 2\right)$

397) $\int_3^5 \frac{x}{x^2 - 4}\,dx = \frac{1}{2}\lg\frac{21}{5}$

398) $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$

399) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$

400) $\int_2^7 \frac{x}{x^2 + 2x - 3}\,dx = \frac{1}{4}\lg 6 + \frac{3}{4}\lg 2$

401) $\int_0^a dx\,\sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}$

402) $\int_2^7 dx\,\sqrt{x+2} = \frac{38}{3}$

403) $\int_0^a dx\,\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2\pi}{4}$

404) $\int_0^a 3x\sqrt{x^2 + 4a^2}\,dx = a^3(5\sqrt{5} - 8)$

405) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$

406) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$

407) $\int_1^4 \frac{x^2}{\sqrt{2+4x}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

408) $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx = \frac{3a^2\pi}{8}$

409) $\int_0^{2b} dx\sqrt{2bx-x^2} = \frac{b^2\pi}{2}$

410) $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6.....2n}\cdot\frac{\pi}{2}$

411) $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2.4.6.....2n}{3.5.7....(2n+1)}$

412) $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$

413) $\int_0^1 x e^x\,dx = 1$

414) $\int_0^2 e^{ax}\,dx = \frac{e^{2a}-1}{a}$

415) $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$

416) $\int_{-1}^{+1} a^x\,dx = \frac{a^2-1}{a\lg a}$

417) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \lg 2$

418) $\int_1^e x^2 \lg x\,dx = \frac{1+2e^3}{9}$

419) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = 1-\sqrt{0{,}5}$

420) $\int_0^\pi 2a\sin\frac{x}{2}\,dx = 4a$

421) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)\,dx = 0{,}6848\ldots = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

422) $\int_0^{\pi} \sin mx\,dx = \frac{1 - \cos m\pi}{m}$

423) $\int_0^{\pi} \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m}$

424) $\int_0^{\pi} \sin 2ax\,dx = 0$, gdy a jest liczbą całkowitą

425) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx = \frac{\pi}{4}$

426) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$

427) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2 \cdot 4 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$

428) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \cos^6 x)\,dx = \frac{\pi}{32}$

429) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{1}{2}}$

430) $\int_0^1 (1 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{3\pi}{32}$.

Zakładamy $x = \sin^3\varphi$; mamy wówczas $\varphi = 0$ zamiast $x = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zamiast $x = 1$, jako nowe granice całkowania.

431) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^3 x\,dx = \frac{3e^{\pi} - 1}{8}$

432) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx = \frac{4}{3}$

433) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx = \frac{1}{2} \lg 2$

434) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = 1.$

Zastosowanie rachunku różniczkowego i całkowego do geometrji.

§ 1. Styczne i normalne do krzywych płaskich.

Styczna do krzywej $y=f(x)$, poprowadzona w punkcie (x, y), posiada współczynnik kątowy $=\frac{dy}{dx}$ (str. 8), a równanie tej stycznej jest postaci następującej:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x), \tag{1}$$

jeżeli X, Y są współrzędnemi zmiennemi dowolnego punktu stycznej, a x, y są współrzędnemi punktu styczności. Gdy równanie krzywej podane jest w postaci $f(x, y)=0$, to zamiast $\frac{dy}{dx}$ w równaniu stycznej kładziemy $-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}$, pisząc:

$$(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}=0. \tag{2}$$

W równaniu (2) oddzielimy wyrazy ze zmiennemi X, Y i wyraz wolny: mamy wówczas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}X+\frac{\partial f}{\partial x}Y-\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y\right)=0 \tag{2a}$$

Weźmiemy teraz równanie jednorodne $f_1(x, y, z)=0$, otrzymane z równania danego $f(x, y)=0$ przez zamianę x, y na odpowiednie stosunki $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ i przez usunięcie mia-

nowników; odwrotne przejście: od funkcji jednorodnej f_1 do danej funkcji f możemy wykonać kładąc $z=1$. Związek taki istnieje oczywiście również pomiędzy pochodnemi cząstkowemi obu funkcji względem x i y, to znaczy, że:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)_{z=1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{z=1}.$$

Uwzględniając twierdzenie Eulera o funkcji jednorodnej stopnia n:

$$x\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}+z\frac{\partial f_1}{\partial z}=nf_1(x, y, z)=0 \qquad (3)$$

znajdujemy:

$$-\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)=-\left(x\frac{\partial f_1}{\partial x}+y\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)_{z=1}=\left(z\frac{\partial f_1}{dz}\right)_{z=1},$$

a więc równanie stycznej w postaci (2^a) może być otrzymane z równania

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}X+\frac{\partial f_1}{\partial y}Y+\frac{\partial f_1}{\partial z}z=0 \qquad (4)$$

po podstawieniu $z=1$.

Przykład: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ jest postacią zwykłą, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0$ postacią jednorodną równania elipsy, $\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}=-2z$. Postać jednorodna równania stycznej: $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-z^2=0$. Przy $z=1$ znajdujemy zwykłą postać równania stycznej: $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-1=0$.

Jeżeli krzywa określona jest za pomocą dwuch równań: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, to $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$ i równanie stycznej:

$$(Y-y)\frac{dx}{dt}-(X-x)\frac{dy}{dt}=0 \qquad (5)$$

Jeżeli wreszcie $r=f(t)$ jest równaniem krzywej w układzie współrzędnych biegunowych, to: $x=r\cos t$; $y=r\sin t$;

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos t-r\sin t;\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin t+r\cos t.$$

Normal'na. Normalną nazywa się prosta, prostopadła do stycznej, poprowadzona przez punkt styczności. Jej współczynnik kątowy równa się przeto $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. Różnym postaciom równania krzywej odpowiadają równania normalnej postaci następujących:

$$y=f(x) \qquad (Y-y)\frac{dy}{dx}+(X-x)=0 \qquad (6)$$

$$f(x,\ y)=0 \qquad (Y-y)\frac{\partial f}{\partial x}-(X-x)\frac{\partial f}{\partial y}=0 \qquad (7)$$

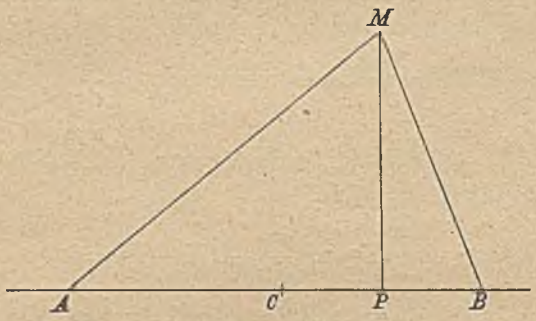
$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \qquad (Y-y)\frac{dy}{dt}+(X-x)\frac{dx}{dt}=0. \qquad (8)$$

Znaleźć równanie stycznej w przykładach następujących:

1) Hiperbola: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$; styczna: $\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}-1=0$.
2) Parabola: $y^2-2px=0$; styczna: $yY-p(X+x)=0$.
3) Parabola Neil'a; $x^3-py^2=0$;
styczna: $3x^2X-2pY-py^2=0$.
4) Cisoida: $y^2(2r-x)-x^3=0$;
styczna: $2y(x-2r)Y+(3x^2+y^2)X-2ry^2=0$.
5) Liść Descartes'a: $x^3-3axy+y^3=0$;
styczna: $(x^2-ay)X+(y^2-ax)Y-axy=0$.
6) Lemniskata jest krzywą otrzymaną w następujący sposób: dane są dwa punkty stałe A i B i długość $AB=2e$; wyznaczamy miejsce geometryczne punktów M, zajmujących na płaszczyźnie takie położenia, że iloczyn promieni wodzących MA i MB jest stały. Kła-

dąc: $MA=r$, $MB=r_1$ i $r.r_1=a^2$, mamy $CA=CB=e$; $CP=x$, $MP=y$; $[y^2+(e+x)^2][y^2+(e-x)^2]=a^4$;

Rys. 12.



$(y^2+x^2)^2=2e^2(x^2-y^2)+a^4-e^4$. W wypadku szczególnym, gdy $a=e$, otrzymujemy równanie:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.^1$$

Podstawiając: $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ znajdujemy równanie biegunowe: $r=a\sqrt{2\cos 2t}=b\sqrt{\cos 2t}$, gdzie $b=a\sqrt{2}$.

Przy wyznaczaniu poszczególnych punktów krzywej możemy posługiwać się układem kół, posiadających wspólną cięciwę $=2a$; ta ostatnia bowiem dzieli każdą ze średnic prostopadłych do niej na odcinki, których iloczyn zachowuje stałą wartość $=a^2$ i tym sposobem każda para znalezionych odcinków stanowi parę promieni wodzących wyznaczających punkt krzywej.

Znajdujemy równanie stycznej:

$(x^2+y^2-x^2)xX+(x^2+y^2+a^2)yY+a^2(y^2-x^2)=0$

7) Krzywa logarytmiczna: $y=a^x$;
styczna: $Y-y=(X-x)\,a^x \lg a$.

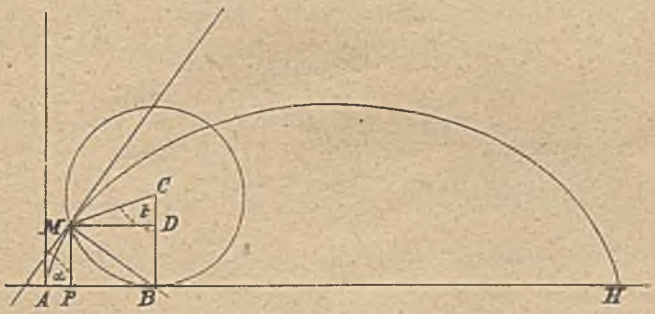
8) Krzywa łańcuchowa: $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$;

styczna: $Y - y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)(X - x)$.

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}$, przeto kąt nachylenia stycznej wyznaczamy za pomocą takiego trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątną jest rzędna punktu styczności, a m jest jedną z przyprostokątnych.

9) Cykloida. Jeżeli koło (rys. 13), styczne początkowo

Rys. 13.



do prostej AB w punkcie A, toczy się następnie po prostej AB, to punkt M, rozważany na okręgu tego koła i znajdujący się początkowo w punkcie A, zakreśla cykloidę. Każdemu zupełnemu obrotowi koła odpowiada wtedy jedna gałąź cykloidy. Zakładamy $AP = x$, $PM = y$, $MC = a$. Kąt utworzony przez promień CM z promieniem CB poprowadzonym do nowego punktu styczności przyjmujemy za zmienną niezależną t, wówczas łuk $MB = at$. Ponieważ $AB =$ łukowi MB, więc $x = AP = AB - MD = a(t - \sin t)$;

$y = MP = CB - CD = a(1 - \cos t)$. Są to równania cykloidy. Rugując t, otrzymujemy:

$$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

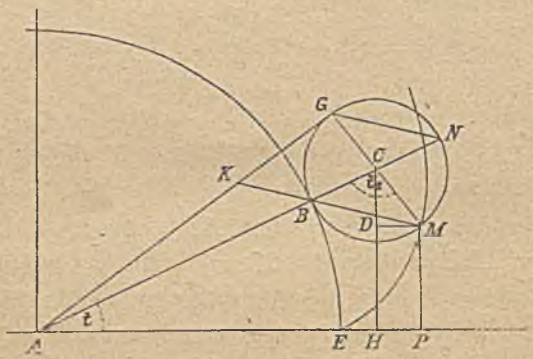
Równanie stycznej: $Y - y = (X - x) \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$

„ normalnej: $Y - y = -(X - x) \operatorname{tg} \frac{t}{2}$.

Możemy dowieść, że normalna w punkcie M przechodzi przez chwilowy punkt styczności ruchomego koła z prostą, podstawiając równocześnie w równaniu normalnej $X = at$, $Y = 0$, jako współrzędne punktu B i $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ czyli współrzędne punktu M.

10) Epicykloida. Jeżeli koło, którego środkiem jest punkt C (rys. 14), toczy się po okręgu stałego koła,

Rys. 14.



mającego środek w punkcie A, przyczem koła te są do siebie styczne zewnętrznie, to punkt M znajdujący się na obwodzie ruchomego koła zakreśla epicykloidę.

Załóżmy $AB = r$, $CB = a$, $AP = x$, $MP = y$. Kąty EAB i MCB oznaczmy odpowiednio przez t i t_1;

mamy wtedy: łuk $BE = rt$, łuk $BM = at_1$, łuk $BE =$ łuk. BM, czyli $rt = at_1$, skąd $t_1 = \frac{rt}{a}$; $x = AH + DM$; $AH = (a+r)\cos t$; $DM = a\sin\left(t + t_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -a\cos(t + t_1) = -a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$; $y = CH - CD$; $CH = (a+r)\sin t$; $CD = a\cos\left(t + t_1 - \frac{\pi}{2}\right) = a\sin(t + t_1) = a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t$. Otrzymujemy w ten sposób równania epicykloidy:

$$x = (a+r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$$

$$y = (a+r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t.$$

Równanie stycznej: $Y - y = (X - x)\operatorname{tg}\left(\frac{r+2a}{2a}\right)t$

„ normalnej: $Y - y = -(X - x)\operatorname{ctg}\left(\frac{r+2a}{2a}\right)t$.

Możemy dowieść, że i w tym wypadku normalna do krzywej w punkcie M przechodzi przez punkt styczności B, podstawiając równocześnie w równaniu normalnej współrzędne punktu B, czyli $X = r\cos t$, $Y = r\sin t$ i współrzędne x, y punktu M.

11) Kardioida jest szczególnym wypadkiem epicykloidy, odpowiadającym warunkowi $a = r$. Równania jej są przeto następującej postaci: $x = 2a\cos t - a\cos 2t = a(2\cos t + 1 - 2\cos^2 t)$; $y = 2a\sin t - a\sin 2t = 2a\sin t(1 - \cos t)$. Przekształcając powyższy układ równań przez zamianę x na $a - x$ otrzymujemy: $x = 2a\cos t(\cos t - 1)$; $\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} t$; $\cos t = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

$x^2+y^2=4a^2(1-\cos t)^2$; $(x^2+y^2)^2-4ax(x^2+y^2)-$ $-4a^2y^2=0$. Kładąc: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, otrzymujemy równanie biegunowe:

$$r=2a(1+\cos\varphi)=4a\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

12) Gdy toczące się koło jest wewnętrznie styczne do koła stałego, to punkt rozważany na okręgu ruchomego koła zakreśla: hipocykloidę, przy $r>a$, albo perycykloidę, przy $r<a$. Równania tych krzywych otrzymujemy z poprzednich równań, biorąc $-a$ zamiast a.

13) Krzywa Archimedesa: $r=at$, albo: $x=at\cos t$, $y=at\sin t$.
Styczna: $(Y-y)(\cos t-t\sin t)-(X-x)(\sin t+t\cos t)+0$.

14) Krzywa logarytmiczna: $r=a^t$.
Styczna: $\frac{Y-y}{X-x}=\frac{\lg a\sin t+\cos t}{\lg a\cos t-\sin t}=k$ (= współcz. kątowemu stycznej).

Współczynnik kątowy k_1 promienia wodzącego równa się tg t. Możemy dowieść, że $\operatorname{tg} v=\frac{k-k_1}{1-kk_1}=\frac{1}{\lg a}$, to znaczy, że kąt, jaki tworzy styczna z promieniem wodzącym posiada dla wszystkich punktów danej krzywej stałą wartość.

§ 2. Punkty podwójne, punkty zwrotu (ostrza), punkty sprzężone (odosobnione).

Jeżeli we wzorze (2), po podstawieniu współrzędnych punktu styczności, otrzymujemy $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, to $\frac{dy}{dx}$ otrzymuje postać nieoznaczoną i wówczas dla takiego punktu (rozważanego w odległości skończonej) kierunek stycznej jest również nieoznaczony. Istotną wartość powyższego wyrażenia nieoznaczonego znajdujemy w wiadomy sposób:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{dx}}{\dfrac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{dx}} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}},$$

skąd wynika:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}. \qquad (9)$$

O ile otrzymane wyrażenie nie posiada równocześnie postaci nieoznaczonej, to za pomocą powyższego wzoru znajdujemy dla pochodnej $\frac{dy}{dx}$ wogóle dwie wartości różne, a więc krzywa w rozważanym punkcie posiada dwie styczne różne, co możliwe jest wówczas, gdy dwie gałęzie krzywej przecinają się w tym punkcie. Punkt taki nazywamy punktem podwójnym (węzłem). Ażeby dwie znalezione wartości były rzeczywistemi i różnemi, powinno być $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Jeżeli natomiast $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, to styczne schodzą się ze sobą, pętlica znika wówczas i punkt podwójny staje się punktem zwrotu. Jeżeli wreszcie $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, to $\frac{dy}{dx}$ posiada wartości zespolone. Punkt ten jest punktem krzywej w tem znaczeniu tylko, że współrzędne jego czynią zadość równaniu krzywej; nazywamy go punktem odosobnionym, albo sprzężonym. Punkty podwójne, punkty zwrotu i punkty odosobnione posiadają przeto tę własność wspólną, że współrzędne ich czynią zadość równaniom:

$$f(x, y)=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{10}$$

mamy przytem:

punkt podwójny, jeżeli $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

„ zwrotu „ „ $=$ „

„ odosobniony, „ „ $<$ „

Rugując $\frac{dy}{dx}$ z układu otworzonego przez równania (1) i (9) otrzymujemy równanie stopnia drugiego względem współrzędnych X i Y

$$(Y-y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2(Y-y)(X-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+(X-)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0, \tag{11}$$

jest to równanie układu dwuch stycznych poprowadzonych w rozważanym punkcie krzywej. Dla punktu zwrotu krzywej — lewa strona tego równania jest kwadratem zupełnym.

Jeżeli współrzędne dowolnego punktu krzywej są funkcjami pewnego parametru: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, to dla punktu podwójnego równanie stycznej, w postaci (5) nie zawiera wyrażenia nieoznaczonego i wówczas istnieje inny sprawdzian dla stwierdzenia punktu podwójnego, a mianowicie dwum różnym wartościom parametru t odpowiadają jednocześnie równe wartości zmiennej x i równe wartości zmiennej y. Warunek ten wyrażamy w następujący sposób:

$$x=\varphi(t)=\varphi(t_1); \quad y=\psi(t)=\psi(t_1). \tag{12}$$

Rozwiązania powyższego układu równań są wartościami parametru odpowiadającemi punktowi podwójnemu. Podstawiając kolejno w równaniu (5) odpowiadające sobie wzajemnie wartości parametru, otrzymujemy równania obu stycznych w punkcie podwójnym.

Jeżeli powyższe wartości parametru: t i t_1 zbliżają się do siebie nieograniczenie, to pętlica krzywej maleje nieograniczenie, znikając wreszcie przy $t=t_1$. Punkt podwójny

staje się wtedy punktem zwrotu; dla takiego punktu mamy nie tylko $\varphi(t)=\varphi(t_1)$, $\psi(t)=\psi(t_1)$, lecz również i $t=t_1$.

Zważywszy teraz, że dla punktu podwójnego spełniają się równania:

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_1)}{t-t_1}=0, \qquad \frac{\psi(t)-\psi(t_1)}{t-t_1}=0,$$

— równoznaczne z równaniem (12) — niezależnie od wielkości pętlicy, przeto w wypadku krańcowym, to znaczy dla punktu zwrotu mamy:

$$\lim\frac{\varphi(t)-\varphi(t_1)}{t-t_1}=0, \quad \lim\frac{\psi(t)-\psi(t_1)}{t-t_1}=0, \text{ albo:}$$

$$\frac{dx}{dt}=0, \qquad \frac{dy}{dt}=0. \tag{13}$$

Współczynnik kątowy stycznej, równy $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$, otrzymuje wtedy postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ i posiada wartość istotną $\frac{d^2y}{dt^2}:\frac{d^2x}{dt^2}$. Otrzymujemy wobec tego następujące równanie układu stycznych w punkcie zwrotu, schodzących się ze sobą:

$$\left\{(Y-y)\frac{d^2x}{dt^2}-(X-x)\frac{d^2y}{dt^2}\right\}^2=0. \tag{14}$$

Uważamy za właściwe przedstawić pojęcie punktu zwrotu ze stanowiska czysto geometrycznego.

Bierzemy na krzywej ciągłej trzy kolejne punkty nieskończenie blizkie: 1, 2, 3 i prowadzimy dwa promienie nieograniczone, z których jeden, wychodząc z punktu 1, przechodzi przez punkt 2, a drugi wyprowadzony z punktu 2, przechodzi przez punkt 3; promienie te możemy przyjąć za styczne do krzywej w punktach 1 i 2, poprowadzone jednostronnie w kierunku wzrastającego łuku krzywej. Mówimy, że kierunek krzywej zmienia się w punkcie 2 w sposób ciągły, jeżeli styczne powyższe tworzą ze sobą

kąt nieskończenie mały. Następuje natomiast przerwa ciągłości w procesie zmienności kierunku krzywej, gdy styczne w punktach nieskończenie bliskich tworzą ze sobą kąt skończonej wielkości; punkt 2 nazywamy wtedy ostrzem. Wypadkiem szczególnym jest punkt zwrotu, wówczas mianowicie, gdy styczne 1, 2 i 2, 3 tworzą ze sobą kąt 180°. Ażeby się o tem przekonać, należy rozpatrywać punkt zwrotu jako taki, który powstał z punktu podwójnego. Punkty 1 i 3, rozważane poprzednio w dwuch różnych położeniach, umieszczamy obecnie w punkcie podwójnym, a punkt drugi — na pętlicy, w dowolnem położeniu. Promienie 1, 2 i 2, 3 tworzą wówczas jedną linję prostą, lecz zwrócone są w przeciwne strony i tworzą kąt 180°. Rozumowanie takie może być przeprowadzone niezależnie od tego, jak wązką jest pętlica krzywej; a więc stosuje się ono i do tego wypadku krańcowego, kiedy punkt podwójny staje się punktem zwrotu. Cięciwa 1, 2 staje się wtedy ostatnią styczną przed punktem zwrotu, a cięciwa 2, 3 pierwszą styczną za punktem zwrotu. Każda z tych stycznych poprowadzona jest jednostronnie w stronę rosnącego łuku krzywej.

15) Lemniskata: $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$ posiada punkt podwójny: $x=0$, $y=0$ i w tym punkcie dwie styczne: $Y=\pm X$ nachylone do osi odciętych pod kątami 45° i 135°, a więc prostopadłe do siebie.

16) Cisoida: $y^2(2r-x)-x^3=0$; punkt zwrotu, $x=0$, $y=0$; styczna $Y^2=0$.

17) Parabola Neil'a: $x^3-py^2=0$; punkt zwrotu: $x=0$, $y=0$; styczna: $Y^2=0$.

18) $f=x^4+a^2x^2-a^2y^2=0$; punkt podwójny; $x=0$, $y=0$; styczne: $Y=\pm X$.

19) $f=x^3+xy^2-2x^2-2y+2=0$; punkt zwrotu: $x=1$, $y=1$; styczna: $(Y+X-2)^2=0$.

20) $f=y^2-x^3-x^2=0$; punkt podwójny: $x=y=0$; styczne: $Y=\pm X$.

21) $f=x^4+y^4-2a^2y^2-2b^2x^2+b^4=0$; punkt podwójny: $x=\pm b$, $y=0$; styczne: $Y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{2}(X+b)$; $Y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{2}(X-b)$.

22) $f=x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0$; punkt podwójny: $x_1=a$, $y_1=0$; $x_2=-a$, $y_2=0$; $x_3=0$, $y_3=-a$; styczne: $Y_1=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}(X_1-a)$; $Y_2=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}(X_2+a)$; $Y_3=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}X_3-a$.

23) $f=(y-b)^2-(x-a)^5=0$; punkt zwrotu: $x=a$, $y=b$; styczna: $(Y-b)^2=0$.

24) $f=5y^2+10y-x^3+2x^2+5=0$; punkt odosobniony: $x=0$, $y=-1$.

25) $f=(y-x)^2-x^3=0$; punkt zwrotu: $x=0$, $y=0$; styczna: $Y=X$.

26) $f=ay^2-x^3+bx^2=0$; punkt odosobniony: $x=0$, $y=0$.

27) $f=y^2-(2-x)^2(1-x)=0$; punkt odosobniony: $x=2$, $y=0$.

28) Spodkowa elipsy: $ax^2+by^2-(x^2+y^2)^2=0$; punkt odosobniony $x=0$, $y=0$.

29) $y=ax+b\sqrt{\sin x-1}$ jest równaniem układu punktów odosobnionych: $x_1=\frac{\pi}{2}$, $y_1=\frac{a\pi}{2}$; $x_2=\frac{5\pi}{2}$, $y_2=\frac{5a\pi}{2}$ i t. d., leżących na prostej $y=ax$.

30) Cykloida: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; $\varphi'(t)=a(1-\cos t)=0$, $\psi'(t)=a\sin t=0$. Ponieważ równania te spełniają się przy $t=0$, 2π, 4π i t. d., przeto $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=2a\pi$, $y_2=0$ i t. d., są punktami

zwrotu. Styczne w tych punktach są prostopadłe do osi odciętych.

31) Ewoluta elipsy:

$$x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t, \qquad y=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$$

posiada 4 punkty zwrotu, odpowiadające wartościom parametru: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

§ 3. Koło krzywizny i ewoluta krzywej.

Biorąc na krzywej trzy punkty 1, 2, 3, prowadząc cięciwy 1, 2 i 2, 3 i wystawiając prostopadłe ze środków tych cięciw, otrzymujemy w punkcie przecięcia prostopadłych środek koła, przechodzącego przez trzy punkty krzywej. Gdy te trzy punkty zbliżają się do siebie nieograniczenie, to cięciwy, malejąc nieograniczenie schodzą się z elementami krzywej i jednocześnie z odpowiedniemi elementami okręgu koła. Prostopadłe do cięciw stają się wtedy normalnemi do krzywej, nieskończenie blizkiemi, a koło staje się kołem krzywizny. Miarą krzywizny w danym punkcie krzywej nazywamy krzywiznę koła odpowiadającego temu punktowi krzywej, wyznaczonego w powyższy sposób; przyczem krzywizną koła nazywamy odwrotność jego promienia. Zaczynamy od wyznaczenia środka koła krzywizny, gdy krzywa jest określona za pomocą równań; $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$; prowadzimy normalne z dwuch punktów krzywej: x, y i x_1, y_1 i określamy ich punkt przecięcia. Mamy następujące równania normalnych:

$$(X-x)\frac{dx}{dt}+(Y-y)\frac{dy}{dt}=0 \qquad (15)$$

$$(X-x_1)\frac{dx_1}{dt_1}+(Y-y_1)\frac{dy_1}{dt_1}=0. \qquad (16)$$

Współrzędne X i Y punktu przecięcia czynią zadość obu równaniom. Wprowadzając nieoznaczony na razie

współczynnik m, jako niewiadomą pomocniczą, zastępujemy równanie (15) układem równań:

$$X = x - m\frac{dy}{dt}, \qquad Y = y + m\frac{dx}{dt} \tag{17}$$

i podstawiając w równaniu (16) otrzymujemy równanie dla m:

$$\left(x - m\frac{dy}{dt} - x_1\right)\frac{dx_1}{dt_1} + \left(y + m\frac{dx}{dt} - y_1\right)\frac{dy_1}{dt_1} = 0$$

$$m = \frac{(x - x_1)\frac{dx_1}{dt_1} + (y - y_1)\frac{dy_1}{dt_1}}{\frac{dy}{dt}\frac{dx_1}{dt_1} - \frac{dx}{dt}\frac{dy_1}{dt_1}}. \tag{18}$$

Wracając następnie do równań (17), otrzymujemy współrzędne punktu przecięcia normalnych; ponieważ jednak punkt przecięcia powinien być wyznaczony zgodnie z założeniem, że normalne zbliżają się do siebie nieograniczenie, przeto i dla pomocniczej niewiadomej m, po odpowiedniem przekształceniu znalezionego wzoru, należy wyznaczyć krańcową wartość.

$$m = \frac{\left[\frac{x - x}{t - t_1}\right]dx_1 + \left[\frac{y - y_1}{t - t_1}\right]dy_1}{\left[\frac{\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt_1}}{t - t_1}\right]dx - \left[\frac{\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt_1}}{t - t_1}\right]dy} \tag{19}$$

Przechodząc zaś do granic, gdy t_1 staje się równem t, mamy:

$$m = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}. \tag{20}$$

Podstawiając znalezioną wartość m we wzorach (17) znajdujemy współrzędne środka krzywizny:

$$X = x - \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}$$

$$Y = y + \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}. \qquad (21)$$

Otrzymujemy wreszcie promień krzywizny obliczając odległość środka X, Y od danego punktu krzywej x, y:

$$\rho = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2} = m\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^3}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}. \qquad (22)$$

Jeżeli w otrzymanych wzorach przyjmiemy x za zmienną niezależną, zamiast t, to otrzymamy wówczas $y = \psi(x)$, albo $= f(x)$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, a więc:

$$m = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad (23)$$

$$X = x - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad Y = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad (24)$$

$$\rho = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad (25)$$

Jeżeli krzywa dana jest w układzie współrzędnych biegunowych za pomocą równania: $r=f(t)$, to podstawiając we wzorach (21) i (2) $x=r\cos t$ i $y=r\sin t$, znajdujemy:

$$X=x-\frac{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\right]\left[\frac{dr}{dt}\sin t+r\cos t\right]}{r^2+2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-r\frac{d^2r}{dt^2}} \tag{26}$$

$$Y=y+\frac{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\right]\left[\frac{dr}{dt}\cos t-r\sin t\right]}{r^2+2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-r\frac{d^2r}{dt^2}} \tag{27}$$

$$\rho=\frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\right]^3}}{r^2+2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-r\frac{d^2r}{dt^2}}. \tag{28}$$

Jeżeli wreszcie równanie krzywej dane jest w postaci $f(x, y)=0$, to podług wzoru (7) układamy najprzód równania dwuch normalnych poprowadzonych w punktach x, y i x_1, y_1:

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial y}-(Y-y)\frac{\partial f}{\partial x}=0; \tag{29}$$

$$(X-x_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}-(Y-y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}=0. \tag{30}$$

Dla wyznaczenia współrzędnych punktu przecięcia X, Y zakładamy, na zasadzie równania (29)

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=m_1,$$

podstawiamy następnie:

$$X=x+m_1\frac{\partial f}{\partial x},\qquad Y=y+m_1\frac{\partial f}{\partial y} \tag{31}$$

w równaniu (30) i otrzymujemy:

$$\left(x-x_1+m_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y_1}-\left(y-y_1+m_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$$

$$m_1=\frac{(x_1-x)\frac{\partial f}{\partial y_1}-(y_1-y)\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y_1}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x_1}}$$

$$m_1=\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}-\left(\frac{y_1-y}{x_1-x}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}-\frac{\partial f}{\partial y}}{x_1-x}\right]-\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x}}{x_1-x}\right]\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{32}$$

Gdy normalne schodzą się ze sobą, to ich punkt przecięcia staje się środkiem krzywizny. Znajdujemy przytem odpowiednią granicę wartości m_1.

$$\lim\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x};\quad \lim\frac{\partial f}{\partial y_1}=\frac{\partial f}{\partial y};\quad \lim\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{dy}{dx};$$

$$\lim\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1}-\frac{\partial f}{\partial y}}{x_1-x}\right]=\frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{dx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx};$$

$$\lim\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x}}{x_1-x}\right]=\frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{dx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Wprowadzając znalezione wartości do wzoru (32) i biorąc $-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}$ zamiast $\frac{dy}{dx}$, otrzymujemy tę wartość m, która, po podstawieniu we wzorach (31), daje współrzędne X i Y środka krzywizny. Znajdujemy:

$$m_1=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}; \tag{33}$$

$$\rho = \pm m_1 \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^3} = \frac{}{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} \quad (34)$$

Możemy dojść do wzoru (34) również w ten sposób, że bierzemy dawne wzory (23) i (25) i podstawiamy w nich:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}.$$

Przekonywamy się wówczas łatwo, że $m = m_1 \frac{\partial f}{\partial y}$. Należy przeto we wzorze (34) wziąć znak dodatni, albo ujemny, stosownie do tego, czy $\frac{\partial f}{\partial y}$ posiada wartość dodatnią, czy ujemną. Zgodne są wówczas w zupełności dwie wartości ρ otrzymane ze wzorów (25) i (34).

Jeżeli ν oznacza kąt, jaki tworzy promień krzywizny, poprowadzony od punktu krzywej do środka krzywizny, z dodatnim kierunkiem osi odciętych, to mamy wówczas:

$$\cos\nu = \frac{X - x}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}}, \quad \sin\nu = \frac{Y - y}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}}.$$

Równania te decydują ostatecznie, w jakim kierunku odmierzyć należy promień krzywizny na normalnej od punktu (x, y). Bezwzględną wartość promienia krzywizny otrzymujemy z poprzednich wzorów.

W każdym punkcie krzywej odróżniać możemy stronę wklęsłą od strony wypukłej; wklęsłą nazywamy tę stronę, po której znajduje się środek krzywizny, odpowia-

dający danemu punktowi krzywej, stronę przeciwną nazywamy wypukłą.

Każdemu punktowi krzywej danej odpowiada, wogóle, pewien środek krzywizny. Miejsce geometryczne środków krzywizny jest pewną nową linją krzywą odpowiadającą danej; nazywamy ją ewolutą danej linji krzywej. Równania wyrażające X i Y i równanie danej krzywej stanowią układ równań, określający ewolutę; po wyrugowaniu współrzędnych punktu krzywej z powyższego układu otrzymujemy równanie ewoluty w postaci ostatecznej.

Określić elementy koła krzywizny dla następujących krzywych:

32) Koło: $x^2+y^2-r^2=0$; $m_1=-\frac{1}{2}$; $X=0$, $Y=0$; $\rho=\pm r$. Koło krzywizny, wyznaczone dla dowolnego punktu, schodzi się z kołem danem.

33) Elipsa: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$;

$$m=\frac{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}{ab};\quad X=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\quad Y=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Rugując parametr t z dwuch ostatnich równań, otrzymujemy równanie ewoluty: $\sqrt[3]{b^2Y^2}+\sqrt[3]{a^2X^2}=\sqrt[3]{(a^2-b^2)^2}$.

Następnie: $X=\frac{a^2-b^2}{a^4}x^3$, $Y=-\frac{a^2-b^2}{b^4}y^3$; $\rho=\frac{\{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t\}^{\frac{3}{2}}}{ab}$.

34) Hiperbola: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

$$m_1=\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\frac{a^2b^2}{2};$$

$$X=\frac{a^2+b^2}{a^4}x^3,\quad Y=-\frac{a^2+b^2}{b^4}y^3;$$

$$\rho=\pm a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

35) Parabola: $y^2-2px=0$; $m_1=-\frac{y^2+p^2}{2p^2}$; $X=3x+p$, $Y=-\frac{y^3}{p^2}$; $x=\frac{X-p}{3}$, $y^3=\sqrt{p^4Y^2}$; po podstawieniu otrzymujemy z równania paraboli równanie jej ewoluty: $Y^2=\frac{8}{27p}(X-p)^3$. Widzimy, że ewoluta jest wówczas parabolą Neil'a, (str. 193). Mamy następnie $\rho=\mp\frac{1}{p^2}\sqrt{(p^2+y^2)^3}$.

36) Cisoida: $x^3-y^2(2r-x)=0$; $m_1=-\frac{8r-3x}{6x(2r-x)}$; $X=\frac{-rx(12r-5x)}{3(2r-x)^2}$, $Y=\frac{8r\sqrt{x}}{3\sqrt{(2r-x)}}$; $\rho=\mp\frac{r\sqrt{x(8r\mp3x)^3}}{2(2r-x)^2}$

37) Krzywa łańcuchowa: $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$; $m=y$; $X=x-\frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-e^{-\frac{2x}{a}}\right)$, $Y=y+\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=2y$; $\rho=\frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2=\frac{y^2}{a}$.

Dla każdej krzywej, długość odcinka normalnej, zawartego pomiędzy krzywą i osią odciętych, oblicza się podług wzoru: $N=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Dla linji łańcuchowej mamy stąd $N=\frac{y^2}{a}$, a więc odcinek normalnej równa się promieniowi krzywizny; znajduje się wszakże po drugiej stronie krzywej.

38) Cykloida: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; $m=-2$; $X=a(t+\sin t)$, $Y=-a(1-\cos t)=-y$. Równania powyższe określają ewolutę cykloidy. Kładąc $t_1+\pi$ zamiast t, mamy $X-a\pi=a(t_1-\sin t_1)$, $Y+2a=a(1-\cos t_1)$; biorąc następnie X_1 zamiast

$X - a\pi$ i Y_1 zamiast $Y + 2a$, co równoznaczne jest z odpowiedniem przesunięciem osi współrzędnych, otrzymujemy równania ewoluty:

$$X_1 = a(t_1 - \sin t_1),\ Y_1 = a(1 - \cos t_1),$$

skąd wynika, że ewoluta cykloidy jest również cykloidą, równą danej, otrzymaną za pomocą przesunięcia równoległego danej cykloidy; jej punkt początkowy posiada współrzędne $a\pi$, $-2a$. Znajdujemy $\rho = -4a \sin \frac{t}{2}$, a ponieważ normalna $= 2a \sin \frac{t}{2}$, przeto promień krzywizny jest dwa razy większy, niż normalna. Oba odcinki leżą po jednej stronie krzywej i wobec tego znajdujemy środek krzywizny przez podwojenie odcinka normalnej.

39) Epicykloida: $x = (a + r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$,

$$y = (a + r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t;\quad m = \frac{2a}{r+2a};$$

$$X = \frac{r}{r+2a}\left[(a+r)\cos t + a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t\right];$$

$$Y = \frac{r}{r+2a}\left[(a+r)\sin t + a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t\right];$$

$$\rho = \frac{4a(r+a)}{r+2a}\sin\frac{r}{2a}t.$$

Środek krzywizny wyznacza się konstrukcyjnie w następujący sposób: prowadzimy (rys. 14) średnicę MG, łączymy G z A i przedłużamy normalną MB; punkt przecięcia K jest poszukiwanym środkiem krzywizny i KM jest promieniem krzywizny. Ponieważ GN jest równoległe do BM i równe BM, mamy zatem

$$KB = \frac{r}{r+2a}GN = \frac{r}{r+2a}BM, \text{ i}$$

$$KM=\left(1+\frac{r}{r+2a}\right)BM=\frac{2(a+r)}{2a+r}BM$$
$$=\frac{2(a+r)}{2a+r}2a\sin\frac{t}{2}=\frac{4a(a+r)}{2a+r}\sin\frac{rt}{2a}=\rho.$$

40) Lemniskata: $r=a\sqrt{\cos 2t}$. Mamy $m=\frac{1}{3}$;
$X=\frac{2a\cos^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}}$, $Y=-\frac{2a\sin^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}}$; $\rho=\frac{a}{3\sqrt{\cos 2t}}=\frac{a^2}{3r}$.
Ponieważ $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, więc $x^2+y^2=$
$=a^2\cos 2t$, czyli $\cos 2t=\frac{x^2+y^2}{a^2}$, $\rho=\frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2}}$. Okreś-
ślając $\sin^2 t$ i $\cos^2 t$ w zależności od współrzędnych środka krzywizny, otrzymujemy na zasadzie wzorów: $\cos^2 t+\sin^2 t=1$ i $\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t$ następujące równanie ewoluty: $3(X^{\frac{2}{3}}+Y^{\frac{2}{3}})(X^{\frac{2}{3}}-Y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=2a$.

41) Krzywa logarytmiczna: $r=a^t$. Znajdujemy $m=1$; $X=-a^t\lg a\sin t$, $Y=a^t\lg a\cos t$; $\rho=a^t\sqrt{1+(\lg a)^2}$. Chcąc znaleźć równanie biegunowe ewoluty wyznaczamy promień wodzący środka krzywizny $R=\sqrt{X^2+Y^2}=a^t\lg a$. Kładąc następnie $\lg a=a^{\varepsilon}$, mamy $R=a^{t+\varepsilon}$, a więc ewoluta krzywej logarytmicznej jest krzywą logarytmiczną, równą danej i powstaje z danej krzywej przez obrót o kąt ε.

§ 4. Punkty przegięcia.

Jeżeli trzy nieskończenie bliskie punkty krzywej leżą na jednej prostej, to odpowiedni promień krzywizny staje się nieskończenie wielkim. Gdy x, y są współrzędnemi jednego z takich punktów, to różnice $X-x$ i $Y-y$ otrzymują wartości nieskończenie wielkie. Jeżeli jednocześnie zmieniają się przytem znaki powyższych różnic, przy przejściu przez punkt x, y, to zmienia się rodzaj krzywizny w ten sposób, że strona wklęsła staje się stroną

wypukłą i nawzajem. Podobny punkt (x, y) nazywamy punktem przegięcia.

Rozważamy układ równań, złożony z równania krzywej, i równania, wyrażającego warunek istnienia nieskończenie wielkiego promienia krzywizny, i rozwiązując ten układ, otrzymujemy współrzędne wszystkich tych punktów, które mogą być punktami przegięcia. Są one istotnie punktami przegięcia, jeżeli w tych punktach następuje zmiana znaku różnic $X-x$ i $Y-y$.

Jeżeli równanie krzywej dane jest w postaci $f(x, y)=0$, to zgodnie ze wzorem (34) ρ otrzymuje wartość nieskończenie wielką, gdy:

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2=0.$$

Lewą stronę powyższego równania możemy przedstawić w postaci wyznacznika; mamy wówczas:

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{35}$$

Mnożąc trzecią kolumnę przez $(n-1)$, dzielimy jednocześnie wyznacznik przez $n-1$ i kładziemy nf zamiast zera; otrzymujemy wtedy:

$$\Delta=\frac{1}{n-1}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & nf \end{vmatrix}=0. \tag{36}$$

Odejmujemy następnie od elementów trzeciej kolumny odpowiednie elementy pierwszej kolumny pomnożone przez x

i odpowiednie elementy drugiej, pomnożone przez y. Tym sposobem sprowadzamy $(n-1)\Delta$ do postaci następującej:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & nf - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (37)$$

Zakładając, że dana funkcja $f(x, y)$ została sprowadzona do postaci jednorodnej $f(x, y, z)$, możemy zastosować twierdzenie Eulera: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf$, gdzie n oznacza stopień funkcji. Ponieważ następnie $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ są również funkcjami jednorodnemi, a mianowicie stopnia $(n-1)$, to na zasadzie tegoż twierdzenia:

$$\begin{aligned} x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} \\ x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} \\ x\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= (n-1)\frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (38)$$

Dzięki powyższym związkom sprowadzamy równanie (37) do postaci:

$$\Delta = \frac{1}{n-1}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & z\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} & z\frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \quad (39)$$

Zakładając w otrzymanym wyznaczniku $z = 1$, wracamy do dawnej funkcji $f(x, y)$ i otrzymujemy równanie, wyrażające warunek istnienia, nieskończenie wielkiego pro-

mienia krzywizny. Przekształcamy dalej otrzymane równanie, mnożąc elementy trzeciego wiersza przez $(n-1)$

$$\Delta = \frac{1}{(n-1)^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Odejmując od elementów trzeciego wiersza odpowiednie elementy pierwszego pomnożone przez x i odpowiednie elementy drugiego wiersza pomnożone przez y, otrzymujemy po uwzględnieniu wzorów (38) i po założeniu $z=1$:

$$\Delta_1 = (n-1)^2\,\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0. \qquad (40)$$

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu występujące w równaniach $\Delta = 0$, albo $\Delta_1 = 0$ są wogóle funkcjami stopnia $(n-2)$, a więc otrzymane równania są stopnia $3(n-2)$; równania te przedstawiają pewne krzywe rzędu $3(n-2)$. Współrzędne punktów przegięcia krzywej $f=0$, otrzymane przez rozwiązanie układu równań: $f=0$ i $\Delta=0$, albo $\Delta_1=0$ są jednocześnie współrzędnemi punktów przecięcia danej krzywej $f=0$ z krzywą $\Delta_1=0$. Punktów tych krzywa rzędu n posiada przeto wogóle $3n(n-2)$. Krzywe drugiego stopnia nie posiadają punktów przegięcia, (por. zad. 48).

Jeżeli krzywa jest określona za pomocą równań: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, to promień krzywizny, zgodnie ze wzorem (22) staje się nieskończenie wielkim, gdy:

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad (41)$$

i z równania tego otrzymujemy wartości parametru odpowiadające punktom przegięcia.

Dla równania $y=f(x)$, zgodnie ze wzorem (23) omawiany warunek sprowadza się do:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0. \tag{42}$$

Dla następujących linii krzywych znaleźć rzeczywiste punkty przegięcia, nie leżące w nieskończoności.

42) $f=x^3+y^3+6axy+1=0.$

Równanie jednorodne: $x^3+y^3+6axyz+z^3=0.$

$$\Delta_1=6^3\begin{vmatrix} x & az & ay \\ az & y & ax \\ ay & ax & z \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{6^3}\Delta_1=xyz(1+2a^3)-a^2(x^3+y^3+z^3)=0;\quad z=1,$$

wówczas mamy: $x^3+y^3+1-\frac{1+2a^3}{a^2}xy=0.$ Z równania tego, rozważanego łącznie z równaniem $f=0$, znajdujemy: $x=0,\ y=-1;\ x=-1,\ y=0$, jako współrzędne punktów przegięcia.

43) $f=x^3-3ax^2+c^2y=0.$

Równanie jednorodne; $x^3-3ax^2z+c^2yz^2=0.$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 6(x-az) & 0 & -6ax \\ 0 & 0 & 2c^2z \\ -6ax & 2c^2z & 2c^2y \end{vmatrix};$$

$-\Delta_1=24(x-a)c^4=0.$ Z równań $\Delta_1=0$ i $f=0$ znajdujemy $x=a,\ y=\frac{2a^3}{c^2}$ jako współrzędne punktu przegięcia.

44) $f=x^2y-x+y=0$, albo $x^2y-xz^2+yz^2=0.$

Warunek: $x^3\quad x^2y-2x-y=0.$ Punkty przegięcia: $x=0,\ y=0;\ z=\pm\sqrt{3},\ y=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}.$

45) $f=(a-x)^5-y=0$. Warunek: $(a-x)^3=0$. Punkt przegięcia: $x=a$, $y=0$.

46) $f=x^4-a^2x^2+a^3y=0$. Punkty przegięcia: $x=\pm\frac{a}{\sqrt{6}}$, $y=\frac{5a}{36}$

47) $f=y-x^3=0$. Punkt przegięcia: $x=0$, $y=0$

48) Znaleźć punkty przegięcia stożkowej, gdy równanie jej dane jest w postaci ogólnej:

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2C & 2B & 2E \\ 2B & 2A & 2D \\ 2E & 2D & 2F \end{vmatrix}.$$

Wyznacznik Δ jest niezależny od x i y; jeżeli nie jest on równy zeru, to krzywa nie posiada żadnego punktu przegięcia. Jeżeli natomiast współczynniki równania krzywej, czynią wyznacznik, tożsamościowo równym zeru, to stożkowa w każdym punkcie posiada krzywiznę równą zeru i jest wówczas układem dwuch prostych.

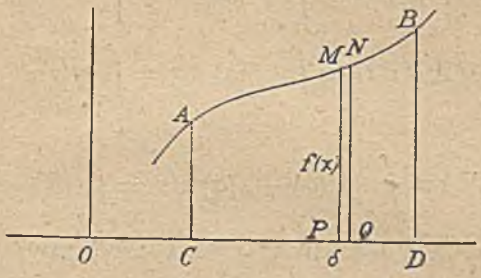
49) Znaleźć punkty przegięcia krzywej $y=\sin x$.

$x=0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,$ i t. d., $y=0$.

§ 5. Pola figur płaskich.

Chcąc obliczyć pole figury płaskiej, ograniczonej łukiem krzywej AB, rzędnemi AC i BD i odcinkiem CD osi odciętych (rys. 15), dzielimy $CD=(b-a)$ na n części równych, kładąc $\frac{b-a}{n}=\delta$, i wystawiamy rzędne we wszystkich punktach podziału. Tym sposobem pole figury podzielimy na n części. Przy dostatecznie małem δ pole każdej z otrzymanych części figury, np. $MNQP$, możemy mierzyć iloczynem δ przez jedną z rzędnych, ograniczają-

Rys. 15.

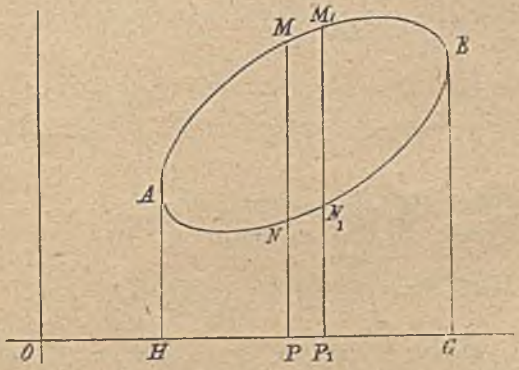


cych tę część figury. Jeżeli przeto $y=f(x)$ jest równaniem krzywej, to dla poszukiwanego pola, zgodnie ze wzorem (15), str. 185, wynika wzór

$$\text{Pole } ABDC=\lim \delta[f(a)+f(a+\delta)+..+f(b-\delta)]=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Chcąc dalej obliczyć pole ograniczone krzywą $AMBNA$ (rys. 16)

Rys. 16.



prowadzimy dwie rzędne AH i BG, styczne do krzywej; cała krzywa leży przytem pomiędzy stycznemi AH i BG. Jeżeli $MP=F(x)=Y$, $NP=f(x)=y$, $OH=a$, $OG=b$, to zgodnie z dowiedzionem poprzednio

$$HAMBG = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b Y\,dx,$$

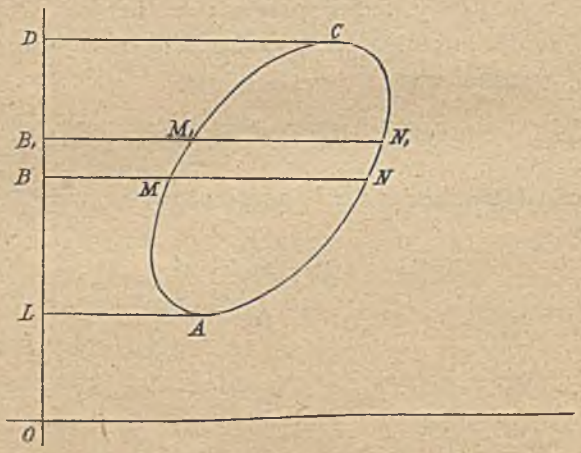
$$HANBG = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx,$$

a więc

$$\text{Pole } AMBNA = \int_a^b [F(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b (Y - y)\,dx. \quad (43)$$

Jeżeli odciętą punktu krzywej rozważamy jako funkcję

Rys. 17.

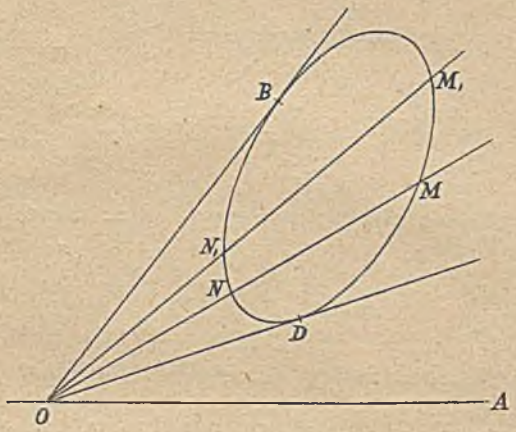


rzędnej, kładąc (rys. 17) $OL = \alpha$, $OD = \beta$; $BN = \Phi(y) = X$, $BM = \varphi(y) = x$, to otrzymujemy

$$\text{Pole } AMCNA = \int_\alpha^\beta [\Phi(y) - \varphi(y)]\,dy = \int_\alpha^\beta (X - x)\,dy.$$

Jeżeli wreszcie krzywa dana jest w układzie współrzędnych biegunowych, to prowadząc promienie wodzące, rozkładamy pole ograniczone krzywą na części postaci MM_1N_1N (rys. 18) i zakładamy $OM = R$, $ON = r$, $OM_1 = R_1$, $ON_1 = r_1$, kąt $MOA = t$, kąt $M_1OA = t_1$, kąt $DOA = \gamma$, kąt $BOA = \delta$.

Rys. 18.



Zakładając, że kąt $M_1OM = t_1 - t$ jest nieskończenie mały, przyjmujemy łuki MM_1 i NN_1 za odcinki prostolinjowe; wobec tego mamy:

$$\text{Pole } NMM_1N_1 = \lim \frac{(RR_1 - rr_1)\sin(t_1 - t)}{2}$$

$$\text{Pole } BNDMB = \lim \frac{\Sigma(RR_1 - rr)\sin(t_1 - t)}{2} = \int_{\gamma}^{\delta} \frac{R^2 - r^2}{2} dt, \quad (47)$$

gdyż ostatecznie $R_1 = R$, $r_1 = r$, $\sin(t_1 - t) = \text{arc}(t_1 - t) = dt$. Jeżeli ma być obliczone pole $OBMDO$, to należy założyć $r = 0$, skąd wynika:

$$\text{Pole } OBMDO = \int_{\gamma}^{\delta} \frac{R^2}{2} dt.$$

50) Obliczyć pole ograniczone łukiem paraboli $y^2 = 2px$, rzędną y i osią odciętych.

$$\text{Pole} = \int_0^x y\,dx = \int_0^x \sqrt{2px}\,dx = \frac{2}{3}xy.$$

Łuk paraboli zawarty pomiędzy wierzchołkiem i punktem (x, y) dzieli prostokąt o podstawie x i wysokości y w ten sposób, że dwie trzecie pola tego prostokąta stanowi część zawartą wewnątrz paraboli.

51) Znaleźć pole koła; $x=r\cos t$, $y=r\sin t$.

$dx=-r\sin t\,dt$; przy $x=0$, $t=\frac{\pi}{2}$, przy $x=r$, $t=0$.

$$\text{Pole}=4\int_0^r y\,dx=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 r^2\sin^2 t\,dt=4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=r^2\pi.$$

52) Znaleźć pole elipsy; $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

$$\text{Pole}=4\int_0^a y\,dx=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab\sin^2 t\,dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=ab\pi.$$

53) Obliczyć pole figury ograniczonej łukiem hiperboli $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ i cięciwą prostopadłą do osi odciętych.

$$\text{Pole}=2\int_a^z y\,dx=2b\int_a^z dx\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}.$$

Otrzymaną całkę przekształcamy, kładąc $x=a\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$; przekształcenie takie jest możliwe, ponieważ wyrażenia powyższe czynią zadość równaniu krzywej. Przy $t=0$ $x=a$ i $dx=\frac{a}{2}(e^t-e^{-t})\,dt$, więc:

$$\text{Pole}=\frac{ab}{2}\int_0^t(e^t-e^{-t})^2\,dt=\frac{ab}{2}\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}-2t\right)=xy-abt.$$

Następnie: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=e^t$, skąd $t=\lg\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$.

$$\text{Pole}=xy-ab\lg\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

54) Dane jest równanie hiperboli odniesionej do asymptot. Równanie krzywej: $xy=m^2$; A jest początkiem układu współrzędnych równoległych, S — wierzchołkiem hiperboli, SB — rzędną i $AB=p$ — odciętą wierzchołka; MD jest rzędną i $AD=x$ odciętą dowolnego

punktu M hiperboli, — kąt utworzony przez asymptoty $= \alpha$. Obliczyć pole $SBDM$.

Mamy układ współrzędnych ukośnych, więc różniczka pola $= y \sin\alpha\, dx$, wówczas:

$$\text{Pole} = \sin\alpha \int_p^x \frac{m^2}{x}\, dx = m^2 (\lg x - \lg p) \sin\alpha.$$

55) Znaleźć pole figury ograniczonej gałęzią cykloidy i osią odciętych; $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

$$\text{Pole} = \int_0^{2a\pi} y\, dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt = 3a^2\pi$$

56) Wyznaczony jest łuk krzywej, w przedziale od $t = 0$ do $t = \pi$, za pomocą równań $x = a(1 - \text{cost})$, $y = at$. Obliczyć pole ograniczone łukiem krzywej, rzędną dla $t = \pi$ i osią odciętych,

$$\text{Pole} = a^2 \int_0^{\pi} t \sin t\, dt = a^2\pi.$$

57) Obliczyć pole figury ograniczonej gałęzią epicykloidy i dwoma promieniami koła podstawowego, poprowadzonemi do końców tej gałęzi;

$$x = (a + r)\cos t - a\cos\left(\frac{a + r}{a}\right) t,$$

$$y = (a + r)\sin t - a\sin\left(\frac{a + r}{a}\right) t.$$

Wyobraźmy sobie (rys. 14, str. 196) krzywą EM wykreśloną aż do punktu Q, w którym spotyka koło podstawowe, wówczas, $AEMQA$ jest tą figurą, której pole mamy obliczyć. Prowadzimy promień $AM = R$ i zakładamy kąt $MAE = \varphi$, wówczas:

$$\text{Pole } AEMA = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} R^2 d\varphi.$$

Ponieważ $R^2 = x^2 + y^2$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, $\cos^2\varphi = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$, gdy x, y są współrzędnemi punku M, więc

$$\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{dt}=\frac{d\frac{y}{x}}{dt},\quad\text{albo}\quad\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}}{x^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}}{R^2}=\frac{(a+r)(2a+r)\left[1-\cos\frac{r}{a}t\right]}{R^2};$$

$$\text{Pole}=\frac{1}{2}\int_0^t R^2\frac{d\varphi}{dt}\,dt=\frac{(a+r)(2a+r)}{2}\int_0^t\left[1-\cos\frac{r}{a}t\right]dt.$$

Ażeby utworzyć figurę $AEMQA$ należy wykonać całkowity obrót koła tworzącego, zatem ma być $rt=2a\pi$ czyli $t=\frac{2a\pi}{r}$.

$$\text{Pole } AEMQA=\frac{(a+r)(2a+r)}{2}\int_0^{\frac{2a\pi}{r}}\left[1-\cos\frac{r}{a}t\right]dt$$

$$=\frac{(a+r)(2a+r)a\pi}{r}.$$

Odejmując pole wycinka kołowego $AEQA=ar\pi$, otrzymujemy pole $EMQBE$.

58) Pole kardioidy $=6a^2\pi$ otrzymujemy z poprzedniego wzoru, kładąc $r=a$.

59) Znaleźć pole lemniskaty: $R^2=a^2\cos 2t$.

$$\text{Pole}=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,dt=a^2.$$

60) Znaleźć pole krzywej Archimedesa: $R=at$ utworzonej przez pierwszy obrót promienia wodzącego.

$$\text{Pole}=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}t^2\,dt=\frac{4a^2\pi^3}{3}.$$

§ 6. Obliczanie długości krzywych płaskich.

Jeżeli x, y i x_1, y_1 są współrzędnemi dwuch dowolnych punktów M i M_1 krzywej płaskiej, to cięciwa:

$$MM_1 = s = \sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2} = (x-x_1)\sqrt{1+\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)^2}.$$

Wynika stąd wzór na różniczkę łuku:

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Jeżeli α i a są odciętemi końców A i B danego łuku, to:

$$S = \text{arc}\,AB = \int_\alpha^a dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (49)$$

Gdy odcięta jest dana jako funkcja rzędnej, to zakładamy:

$$s = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = (y-y_1)\sqrt{1+\left(\frac{x-x_1}{y-y_1}\right)^2},$$

skąd wynika następnie: $ds = dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, i jeżeli β i b oznaczają rzędne końców łuku, to mamy:

$$S = \text{arc}\,AB = \int_\beta^b dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}. \qquad (50)$$

Dla równania postaci: $f(x,y)=0$ otrzymujemy ze wzoru (49):

$$S = \int_\alpha^a dx\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}:\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (51)$$

stąd zaś, na podstawie związku $\frac{\partial f}{\partial x}dx = -\frac{\partial f}{\partial y}dy$,

$$S = -\int_\beta^b dy\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}:\frac{\partial f}{\partial x}. \qquad (52)$$

Jeżeli wreszcie określona jest krzywa za pomocą równań $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ i założymy $\alpha=\varphi(\gamma)$, $a=\varphi(c)$, to ze wzoru (49), mamy:

$$S = \int_\gamma^c dt\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}. \qquad (53)$$

61) Obliczyć obwód koła; $x=r\cos t$, $y=r\sin t$.

$$S = \int_0^{2\pi} dt\sqrt{(\sin^2 t+\cos^2 t)r^2} = 2r\pi.$$

62) Obliczyć długość łuku paraboli od wierzchołka do punktu (x, y); $y^2 = 2px$.

$$S = \int_0^y dy \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} = \frac{y}{2p}\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \lg \left| \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p} \right|$$

63) Znaleźć długość łuku paraboli Neil'a od wierzchołka do punktu (x, y); $y^2 = ax^3$.

$$S = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{9ax}{4}} = \frac{8}{27a}\left[\left(1 + \frac{9ax}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

64) Obliczyć długość łuku krzywej łańcuchowej od najniższego punktu tej krzywej do punktu (x, y),

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right).$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^x dx \sqrt{4 + \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)^2} = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \sqrt{y^2 - m^2}.$$

Łuk linii łańcuchowej zawarty pomiędzy najniższym jej punktem i punktem (x, y) jest równoważny drugiej przyprostokątnej takiego trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna równa się rzędnej m najniższego punktu, a przeciwprostokątną jest rzędna końca łuku.

65) Znaleźć długość łuku cykloidy:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

$$S = a\int_0^{2\pi} dt \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a.$$

66) Obliczyć długość łuku epicykloidy.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4(a + r)^2 \sin^2 \frac{r}{2a} t.$$

$$S = 2(a + r)\int_0^{\frac{2a\pi}{r}} \sin\frac{r}{2a} t\, dt = \frac{8a(a + r)}{r}.$$

Kładąc $a = r$ otrzymujemy długość kardioidy $= 16a$.

67) Znaleźć długość łuku krzywej Archimedesa; $r = at$

$$S = a\int_0^t \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{a}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \lg\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]$$

68) Obliczyć obwód elipsy; $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Czwarta część obwodu elipsy równa się:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}, \quad \text{kładąc} \quad \frac{a^2-b^2}{a^2} = \varepsilon.$$

$$S = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 t - \frac{1}{8}\varepsilon^4\cos^4 t - \frac{1}{16}\varepsilon^6\cos^6 t - \ldots\right]dt;$$

$$S = \frac{a\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3\varepsilon^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5\varepsilon^6 - \ldots\right].$$

§ 7. Obliczanie powierzchni obrotowych.

Jeżeli krzywa płaska obraca się dokoła osi odciętych, to z obrotu tej krzywej powstaje pewna powierzchnia krzywa. Jeżeli y jest rzędną, odpowiadającą elementowi linji krzywej, to różniczka powierzchni obrotowej jest powierzchnią boczną stożka ściętego, w którym obwód przecięcia środkowego $= 2y\pi$, a tworzącą jest różniczka ds łuku linji krzywej; to znaczy, że różniczka powierzchni obrotowej $dO = 2y\pi ds$ i jeżeli a i b są odciętemi końców łuku krzywej, to:

$$O = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (54)$$

69) Znaleźć powierzchnię czaszy kulistej, jeżeli $y = \sqrt{2rx-x^2}$ jest równaniem okręgu tworzącego i h jest wysokością czaszy.

$$O = 2\pi\int_0^h dx\sqrt{2rx-x^2}\sqrt{1+\frac{(r-x)^2}{2rx-x^2}} = 2r\pi h.$$

70) Obliczyć boczną powierzchnię stożka obrotowego.

Jeżeli $y=kx$ jest równaniem tworzącej stożka i h jest wysokością stożka, to:

$$O=2k\pi\sqrt{1+k^2}\int_0^h x\,dx=k\pi h^2\sqrt{1+k^2}.$$

Ponieważ $k=\operatorname{tg}\alpha$, gdy α oznacza kąt nachylenia tworzącej do osi odciętych, więc $kh=r=$ promieniowi podstawy i $h\sqrt{1+k^2}=s=$ długości odcinka tworzącej. Po podstawieniu tych wartości mamy: $O=r\pi s$.

71) Obliczyć powierzchnię powstałą z obrotu cykloidy dokoła osi odciętych; $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

$$O=2a^2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

$$=8a^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=\frac{64a^2\pi}{3}.$$

72) Obliczyć powierzchnię paraboloidy obrotowej. Równanie paraboli: $y^2=2px$.

$$O=2\pi\sqrt{p}\int_0^x dx\sqrt{p+2x}=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}[(p+2x)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}].$$

73) Obliczyć powierzchnię elipsoidy obrotowej.

Wypadek pierwszy: elipsa obraca się dokoła osi wielkiej.

Jeżeli $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ jest równaniem elipsy, to

$$\frac{1}{2}O=\frac{2b\pi}{a^2}\int_0^a dx\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}.$$

Zakładamy $a^2-b^2=e^2$, wówczas:

$$\frac{1}{2}O=\frac{2b\pi}{a^2}\int_0^a dx\sqrt{a^4-e^2x^2}$$

$$\frac{1}{2}O=\frac{b\pi}{a^2}\left[x\sqrt{a^4-e^2x^2}+\frac{a^4}{e}\arcsin\frac{ex}{a^2}\right]_0^a$$

$$\frac{1}{2}O=b^2\pi+\frac{a^2b\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Wypadek drugi: elipsa obraca się dokoła osi małej.

$$\frac{1}{2}O=\frac{2a\pi}{b^2}\int_0^b dy\sqrt{b^4+e^2y^2}$$

$$\frac{1}{2}O=\frac{a\pi}{b^2}\left[y\sqrt{b^4+e^2y^2}+\frac{b^4}{e}\lg\left(e^2y+e\sqrt{b^4+e^2y^2}\right)\right]_0^b$$

$$\frac{1}{2}O=a^2\pi+\frac{ab^2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\lg\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Co otrzymujemy z powyższych wzorów, gdy $b=a$?

§ 8. Obliczanie objętości brył obrotowych.

Jeżeli część płaszczyzny, ograniczona łukiem krzywej, dwiema rzędnemi i osią odciętych, obraca się dokoła tej osi, tworząc bryłę obrotową, to różniczka objętości otrzymanej bryły $dV=y^2\pi dx$; gdy α i a są odciętemi końców łuku, to znajdujemy wzór na objętość bryły obrotowej

$$V=\pi\int_\alpha^a y^2dx.$$

74) Obliczyć objętość kuli.

$$V=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}r^3\pi.$$

75) Znaleźć objętość elipsoidy obrotowej powstałej z obrotu elipsy dokoła osi wielkiej.

$$V=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\frac{4ab^2\pi}{3}.$$

76) Obliczyć objętość warstwy paraboloidy obrotowej. Jeżeli x_1 i x_2 są odciętemi końców łuków paraboli, to:

$$V=2p\pi\int_{x_1}^{x_2}x\,dx=2p\pi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)(x_2-x_1).$$

77) Znaleźć objętość bryły, która powstaje z obrotu figury płaskiej ograniczonej jedną gałęzią cykloidy

i osią odciętych, gdy oś odciętych łącząca końce danego łuku jest jednocześnie osią obrotu.

$$V = a^3\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = 8a^3\pi \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt = 5a^3\pi^2.$$

78) W kole, którego promień $=r$, rozważamy odcinek kołowy, ograniczony cięciwą równą $2s$. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu tego odcinka kołowego dokoła średnicy poprowadzonej równolegle do cięciwy.

$$\frac{1}{2} V = \pi \int_0^s (r^2 - x^2)\, dx - s\pi (r^2 - s^2);$$

$$V = \frac{4}{3} s^3 \pi.$$

TREŚĆ

Rachunek różniczkowy.

Funkcje jednej zmiennej niezależnej.

Str.

1. Tablica wzorów na pochodne funkcji prostych 1
2. Określenie funkcji jednej zmiennej niezależnej. Określenie i rozwinięcie pochodnej 2
3. Zadania na poszukiwanie pochodnych funkcji algebraicznych 19
4. Pochodne funkcji trygonometrycznych i funkcji kołowych 23
5. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne 30
6. Funkcje uwikłane 41
7. Funkcje określone za pomocą wzorów: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. 46
8. Pochodne wyższego rzędu 50
9. Zastosowanie rachunku różniczkowego do obliczania wartości wyrażeń nieoznaczonych 59
10. Maxima i minima funkcji 68
11. Szeregi Taylora i Maclaurina 97

Funkcje dwuch zmiennych niezależnych.

12. Poszukiwanie pochodnych 106
13. Maxima i minima funkcji dwuch zmiennych niezależnych 108
14. Funkcje jednorodne 112
15. Szeregi Taylora i Maclaurina dla funkcji dwuch zmiennych niezależnych 114

Rachunek całkowy.

Całki nieoznaczone.

1. Najprostsze wzory rachunku całkowego 116
2. Całkowanie ułamków algebraicznych wymiernych 123
3. Wzory redukcyjne 148

Str.
4. Funkcje algebraiczne niewymierne 150
5. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne 167
6. Funkcje trygonometryczne i odwrotne kołowe 170

Całki oznaczone 181

Zastosowanie rachunku różniczkowego i całkowego do geometrji.

1. Styczne i normalne do krzywysh płaskich 191
2. Punkty podwójne, punkty zwrotu (ostrza), punkty sprzężone (odosobnione) 198
3. Koło krzywizny i ewoluta 204
4. Punkty przegięcia 213
5. Pola figur płaskich 218
6. Obliczanie długości krzywych płaskich 224
7. Obliczanie powierzchni obrotowych 227
8. Obliczanie objętości brył obrotowych 229

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ