

RYSZARD GESSING  
Katedra Teorii Regulacji

WYSTARCZAJĄCY WARUNEK  
ASYMPTOTYCZNEJ STABILNOŚCI GLOBALNEJ  
NIELINIOWYCH UKŁADÓW IMPULSOWYCH

**Streszczenie.** W pracy został podany i udowodniony wystarczający warunek stabilności globalnej dla pewnego typu nieliniowych równań różnicowych. Przeprowadzono porównanie tego warunku z warunkami stabilności dla liniowych równań różnicowych. Podano przykłady zastosowania warunku dla układów z nieliniowym impulsatorem o modulowanej wysokości i szerokości impulsu.

1. Wstęp

Układy impulsowe, w których występuje chociażby jeden element nieliniowy prowadzą do nieliniowych równań różnicowych. Do analizy stabilności takich układów R.E. Kalman i I.E. Bertram w pracy [1] stosują drugą metodę Lapunowa, opierając się na rachunku wektorowym. Podają oni wystarczające warunki stabilności dla układu impulsowego dającego się opisać za pomocą układu nieliniowych równań różnicowych.

W pracy [2] J.Z. Cypkin podaje wystarczający warunek stabilności dla nieliniowych układów z impulsatorem o modulowanej wysokości impulsu. Warunek ten polega na wprowadzeniu pewnych ograniczeń w stosunku do impulsowej charakterystyki częstotliwości części liniowej układu.

W niniejszej pracy autor podaje oryginalny wystarczający warunek stabilności nieliniowych układów impulsowych, opierając się na rekurencyjnej metodzie analizy, tzn. wykorzystując fakt że równanie różnicowe  $m$ -tego rzędu jest wzorem rekurencyjnym,

z którego można obliczyć wartość funkcji dla dowolnego argumentu  $n$ , jeżeli znane są jej wartości dla  $n$  kolejnych poprzednich wartości argumentu.

2. Dowód wystarczającego warunku asymptotycznej stabilności globalnej nieliniowych układów impulsowych

Będziemy się zajmowali układami, w których przebieg interesującej nas wielkości da się opisać za pomocą równania różnicowego  $n$ -tego rzędu o postaci:

$$y_{n+k} + a_{1,n}y_{n+k-1} + \dots + a_{k,n}y_n = 0 \quad (1)$$

gdzie współczynniki  $a_{i,n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , są funkcjami zmiennych  $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}$ , czyli ogólnie jest

$$a_{i,n} = a_i(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}).$$

O funkcjach  $a_{i,n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , zakładamy że są ciągłe.

Dla takich układów udowodnimy następujący wystarczający warunek asymptotycznej stabilności globalnej:

Układ opisany równaniem (1) jest asymptotycznie stabilny globalnie w obszarze określonym nierównościami:

$$|y_n^*| < y^*; \quad n = 0, 1, \dots, k-1; \quad (2)$$

gdzie  $y^* > 0$ , jeżeli dla każdych warunków początkowych  $y_n^*$  należących do obszaru (2) jest spełniona nierówność:

$$A_0 = \sum_{i=1}^k |a_i(y_0^*, y_1^*, \dots, y_{k-1}^*)| < 1 \quad (3)$$



Dowód:

Z równania (1) mamy:

$$y_{n+m} = -a_{1,n} y_{n+m-1} - \dots - a_{m,n} y_n \quad (4)$$

Zmienną  $y_n$  można traktować jako ciąg, którego  $m+1$  kolejnych wyrazów jest powiązanych wzorem rekurencyjnym (4). Weźmy pod uwagę ciąg modułów  $|y_n|$ . Oznaczamy przez  $|y_{n+k_{\max}}|$  największą z wartości  $|y_{n+k}|$ , gdzie  $k = 0, 1, \dots, m-1$ . Jest zatem:

$$|y_{n+k_{\max}}| \geq |y_{n+k}|, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Dalej mamy:

$$\begin{aligned} |y_{n+m}| &= |-a_{1,n} y_{n+m-1} - \dots - a_{m,n} y_n| \leq \\ &\leq |a_{1,n} y_{n+m-1}| + \dots + |a_{m,n} y_n| \leq \\ &\leq |a_{1,n}| |y_{n+k_{\max}}| + \dots + |a_{m,n}| |y_{n+k_{\max}}| \end{aligned}$$

A więc:

$$|y_{n+m}| \leq |y_{n+k_{\max}}| A_n \quad (5)$$

gdzie

$$A_n = \sum_{i=1}^m |a_{i,n}|.$$

Nierówność (5) jest prawdziwa dla dowolnego  $n$ . Wynika z niej że jeżeli jest spełniony warunek (3) w przedziale (2), wtedy dla dowolnych warunków początkowych z przedziału (2) jest również

$$A_n < 1 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

$$1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \neq 1.$$

Oznaczamy teraz przez  $A_{n_{\max}}$  największą ze wszystkich wartości jakie przyjmuje  $A_n$ , gdy  $n$  zmienia się od zera do nieskończoności. Ze względu na zależności (6) wartość taka istnieje i spełnia nierówność

$$1 > A_{n_{\max}} \geq A_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

a więc

$$|y_{n+n}| \leq |y_{n+k_{\max}}| A_n < |y_{n+k_{\max}}| A_{n_{\max}}$$

czyli

$$|y_{n+m}| \leq |y_{n+k_{\max}}| A_{n_{\max}} \quad (8)$$

Dla wyrazu  $|y_{n+k_{\max}}|$  również zachodzi nierówność (8):

$$|y_{n+k_{\max}}| \leq |y_{n+k_{\max} - m + k_{1\max}}| A_{n_{\max}} \quad (9)$$

Na podstawie nierówności (8) i (9) mamy

$$|y_{n+m}| \leq |y_{n+k_{\max} - m + k_{1\max}}| A_{n_{\max}}^2$$

W końcu otrzymujemy:

$$|y_{n+m}| \leq |y_0^* + k_{0\max}| A_{n_{\max}}^s$$

gdzie  $s$  jest nie mniejsze od części całkowitej ilorazu  $\frac{n}{m}$ , a  $|y_0^* + k_{0\max}|$  jest modułem wyrazu należącego do warunków czątkowych. po-



Ze względu na nierówność (7) mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ |y_{0+k}^*| A_{n, mx}^s \right] = 0,$$

zatem wyrazy ciągu  $|y_{n+m}|$ , a więc i ciągu  $y_{n+m}$  są zbieżne do granicy równej zeru i układ jest asymptotycznie stabilny globalnie w obszarze (2).

Jeżeli równanie różnicowe

$$y_{n+m} + \alpha_{1,n} y_{n+m-1} + \dots + \alpha_{m,n} y_n = 0 \quad (1')$$

ma współczynniki

$$\alpha_{i,n} = \alpha_i(n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+m-1}) \quad (10)$$

wtedy wystarczający warunek stabilności globalnej przybiera postać:

Układ opisany równaniem (1') jest asymptotycznie stabilny globalnie w obszarze określonym nierównościami:

$$|y_n^*| < y^*, \quad n = 0, 1, \dots, m-1, y^* > 0.$$

Jeżeli dla każdego warunków początkowych  $y_n^*$  należących do tego obszaru jest spełniona nierówność:

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^m |\alpha_{i,n}| \leq q < 1 \quad (11)$$

$$\text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$q > 0.$$

Nierówność (11) musi być w tym przypadku spełniona po to aby istniała wartość  $\alpha_{n, mx} < 1$ .

Występujące w warunku (11) współczynniki  $\alpha_{1,n}$  mogą być funkcjami nie tylko wielkości  $n, Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots, Y_{n+m-1}$  ale również dowolnych innych wielkości.

### 3. Porównanie podanego warunku stabilności z warunkami dla układów liniowych

Dla liniowych układów impulsowych problem stabilności jest rozwiązany. Znane tu są na przykład warunki stabilności Hurwitza, które są warunkami koniecznymi i wystarczającymi. Obecnie przeprowadzimy porównanie przedstawionego warunku stabilności globalnej nieliniowych układów impulsowych z warunkami stabilności Hurwitza dla liniowych układów impulsowych.

#### a) Układ impulsowy pierwszego rzędu

Układ taki można opisać równaniem różnicowym pierwszego rzędu o postaci:

$$Y_{n+1} + \alpha_{1,n} Y_n = 0 \quad (12)$$

Wystarczający warunek stabilności nieliniowego układu impulsowego:

$$\|\alpha_{1,n}\| \leq q < 1 \quad (13)$$

$$\text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

pokrywa się w tym przypadku z koniecznym i wystarczającym warunkiem stabilności układu liniowego.

#### b) Układ impulsowy drugiego rzędu

Dla nieliniowego równania różnicowego

$$Y_{n+2} + \alpha_{1,n} Y_{n+1} + \alpha_{2,n} Y_n = 0 \quad (14)$$



wystarczający warunek stabilności jest

$$|\alpha_{1,n}| + |\alpha_{2,n}| \leq q < 1 \quad (15)$$

dla  $n = 0, 1, 2, \dots$

Wystarczające i konieczne warunki stabilności układu liniowego o równaniu różnicowym:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0$$

są

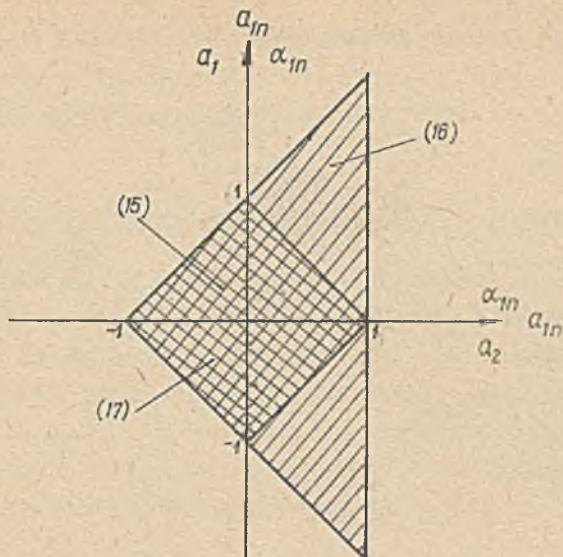
$$1 + a_1 + a_2 > 0$$

$$1 - a_2 > 0 \quad (16)$$

$$1 - a_1 + a_2 > 0$$

Na płaszczyźnie  $a_1, a_2$  warunki (16) przedstawiają część płaszczyzny ograniczonej trójkątem co jest widoczne na rys. 1. Dla porównania na rysunku tym naniesiono również obszar wyznaczony warunkiem (15). Jest to kwadrat leżący wewnątrz trójkąta określonego warunkami (16). Jeżeli punkty o współrzędnych  $\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}$  leżą wewnątrz kwadratu spełniając warunek (15), to nieliniowy układ impulsowy jest na pewno stabilny.

Należy przy tym podkreślić, że punkty  $(\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n})$  mogą się zupełnie dowolnie przemieszczać wewnątrz kwadratu (15) ze wzrostem  $n$ , gdyż dla funkcji  $\alpha_{1,n}$  i  $\alpha_{2,n}$  nie było żadnych ograniczeń. Jak widać przy zupełnie dowolnych funkcjach  $\alpha_{1,n}$  i  $\alpha_{2,n}$  obszar współczynników stabilnych  $\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}$  jest mniejszy od obszaru współczynników stabilnych  $a_1$  i  $a_2$ .



Rys. 1

Jeżeli współczynniki równania różnicowego (14) nie zależą bezpośrednio od  $n$ , wtedy zgodnie z (3) warunek nasz ma postać

$$\left| a_1(y_0^*, y_1^*) \right| + \left| a_2(y_0^*, y_1^*) \right| < 1 \quad (17)$$

dla dowolnych warunków początkowych  $y_0^*$  i  $y_1^*$  spełniających nierówności  $|y_0^*| \leq y_1^*$  i  $|y_1^*| \leq y_0^*$ . Dla każdej pary  $y_0^*$ ,  $y_1^*$  mamy określone współczynniki  $a_{1,n}$  i  $a_{2,n}$ , od których żądamy aby spełniały nierówność (17). Na płaszczyźnie  $a_{1,n}$ ,  $a_{2,n}$  nierówność (17) określa również pewien obszar, którego granicą pokrywa się z granicą obszaru (15).

Łatwo dać przykład takich funkcji  $a_{1,n}^*$  i  $a_{2,n}^*$ , że punkty  $(a_{1,n}^*, a_{2,n}^*)$  będą leżeć wewnątrz obszaru (16) a na granicy obszaru (17), a przebieg  $y_n$  będzie niestabilny.

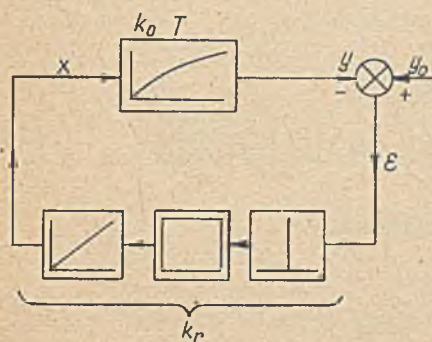
Niechaj:

$$a_{1,n}^* = \begin{cases} 0,5 & \text{gdy } y_n \text{ i } y_{n+1} \text{ mają jedna-} \\ & \text{kowe znaki;} \\ -0,5 & \text{gdy } y_n \text{ i } y_{n+1} \text{ mają różne} \\ & \text{znaki;} \end{cases} \quad (18)$$

$a_{2,n}^* = 0,5$  niezależnie od  $y_n$  i  $y_{n+1}$ .



Dla tak określonych funkcji można za pomocą metody rekurencyjnej, korzystając z równania (14) wyznaczyć kolejne wartości  $y_n$ . I tak jeżeli  $y_0^* = 1$  i  $y_1^* = 1$ , to  $y_2 = -1, y_3 = -1, y_4 = +1, y_5 = +1$ , itd. przebiegi powtarzają się i układ jest niestabilny.



Rys. 2

Na rys. 2 przedstawiony jest schemat blokowy układu z obiektem inercyjnym i rzędu, którego działanie można opisać za pomocą równania różnicowego o współczynnikach (18). Impulsator o modulowanej wysokości impulsu ma czas trwania impulsu znacznie mniejszy od okresu impulsowania, a więc przebieg  $x$  jest w przybliżeniu schodkowy. Wzmocnienie regulatora  $k_r$  jest pew-

ną funkcją  $\varepsilon_n$  i  $\varepsilon_{n+1}$ . Mamy mianowicie:

$$k_{r_{n+1}} = \begin{cases} k'_r & \text{gdy } \varepsilon_n \text{ i } \varepsilon_{n+1} \text{ mają jednakowe znaki} \\ k''_r & \text{gdy } \varepsilon_n \text{ i } \varepsilon_{n+1} \text{ mają różne znaki} \end{cases}$$

Dla takiego układu mamy przybliżone równania:

$$y_{n+1} = y_n D + k_0 x_{n+1} (1-D)$$

$$y_0 - y_n = \varepsilon_n \quad (19)$$

$$x_{n+1} - x_n = k_{r_n} \varepsilon_n$$

gdzie:  $D = e^{-\frac{T_1}{T}}$

$T$  - stała czasowa obiektu,

$k_0$  - wzmacnienie obiektu,

$T_1$  - okres impulsowania impulsatora,

$k_r$  - wzmacnienie regulatora.

Regulując z układu równań (19) zmienne  $y_n, x_n, y_0$  otrzymujemy równanie:

$$\varepsilon_{n+2} + [-1 - D + k_0 k_r (1-D)] \varepsilon_{n+1} + D \varepsilon_n = 0 \quad (20)$$

Wystarczy teraz dobrać parametry układu:

$$D = e^{-\frac{T_1}{T}} = 0,5;$$

$$k_0 k_r' = 4; k_0 k_r'' = 2;$$

aby otrzymać równanie różnicowe o współczynnikach (18). Zatem układ o takich parametrach będzie niestabilny. Dla podanego przykładu wystarczający warunek stabilności globalnej (17) jest również warunkiem koniecznym. Wymagana zależność  $k_r$  od  $\varepsilon_n$  i  $\varepsilon_{n+1}$  może być zrealizowana za pomocą układu przekaźnikowego.

### c) Układy impulsowe wyższych rzędów

W przestrzeni  $m$ -wymiarowej o współrzędnych  $a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{m,n}$ , lub  $\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \dots, \alpha_{m,n}$  nierówności (3) i (11) określają obszary współczynników stabilnych. Łatwo zauważyć, że obszary określone nierównościami (3) i (11) mają wspólną powierzchnię graniczną otaczającą obszar stabilnych współczynników równania (1) i (1'). Dla układów impulsowych wyższego rzędu zawsze obszar współczynników stabilnych równania nieliniowego jest częścią obszaru współczynników stabilnych równania liniowego.



Jeżeli założymy, że współczynniki nieliniowego równania różnicowego (1) mają określony znak, wtedy dla pewnych przypadków warunki stabilności nieliniowego i liniowego równania będą się pokrywały. I tak np. jeżeli wszystkie współczynniki równania nieliniowego mają ujemne wartości wtedy dla równania nieliniowego mamy warunek:

$$- a_{1,n} - a_{2,n} - \dots - a_{m,n} < 1, \quad (21)$$

a dla równania liniowego - warunek:

$$- a_1 - a_2 - \dots - a_m < 1, \quad (22)$$

będący jedną z nierówności warunków Hurwitza. Obszary wyznaczone warunkami (21) i (22) pokrywają się. Drugi przypadek jest wtedy gdy znaki współczynników  $a_{1,n}$  i  $a_1$  są takie, że:

$$\operatorname{sgn} a_{1,n} = \operatorname{sgn} a_1 = \operatorname{sgn}(-1)^{1+1}.$$

W tym przypadku warunek nieliniowego równania jest:

$$a_{1,n} - a_{2,n} + a_{3,n} - \dots + (-1)^{m+1} a_{m,n} < 1, \quad (23)$$

a dla równania liniowego:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{m+1} a_m < 1 \quad (24)$$

i obszary stabilnych współczynników równania liniowego i nieliniowego pokrywają się.

Dla równania różnicowego drugiego rzędu oba rozpatrzone przypadki zachodzą gdy  $a_{2,n} < 0$  i  $a_2 < 0$ . Na rys. 1 widać, że w tym przypadku granice kwadratu (17) i trójkąta (15) pokrywają się.



#### 4. Przykłady zastosowania wystarczającego warunku stabilności globalnej

##### Przykład 1

Rozpatrzmy układy regulacji z obiektem inercyjnym 1 rzędu, których schematy blokowe są przedstawione na rys. 3. W obu układach występuje element nieliniowy. Zakładamy, że czas trwania impulsu jest krótki w porównaniu z okresem impulsowania, a więc że przebieg  $x$  jest schodkowy. Dla układu z rys. 3a mamy równania:

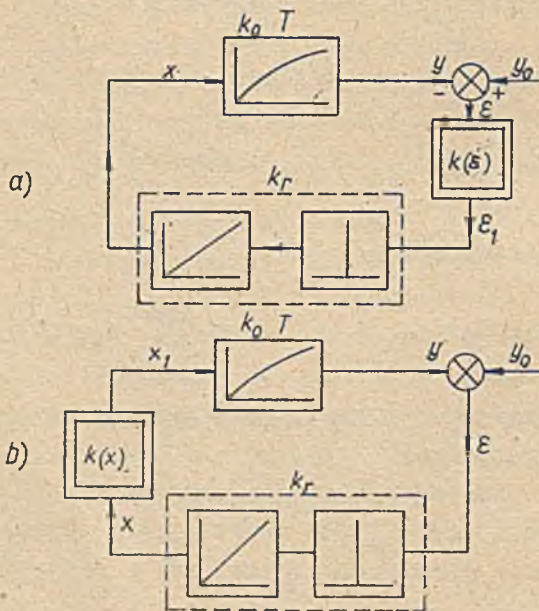
$$y_{n+1} = y_n \cdot e^{-\frac{T_i}{T}} + k_o x_{n+1} \left(1 - e^{-\frac{T_i}{T}}\right)$$

$$y_o - y_n = \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_{1n} = k(\varepsilon_n) \varepsilon_n$$

$$x_{n+1} - x_n = k_r \varepsilon_{1n}$$

(25)



Rys. 3



gdzie:

- $T$  - stała czasowa obiektu,
- $k_0$  - wzmacnienie obiektu,
- $T_1$  - okres impulsowania impulsatora,
- $k(\varepsilon_n)$  - wzmacnienie elementu nieliniowego.

Rugując z układu równań (25) zmienne  $y_n, x_n, \varepsilon_{1n}, y_0$  otrzymujemy równanie

$$\varepsilon_{n+2} + \left[ -1 - D + k_0 k_r k(\varepsilon_{n+1})(1-D) \right] \varepsilon_{n+1} + D\varepsilon_n = 0 \quad (26)$$

gdzie:

$$D = e^{-\frac{T_1}{T}}$$

Dla układu z rys. 3b można napisać:

$$y_{n+1} = y_n e^{-\frac{T_1}{T}} + k_0 x_{1n+1} \left( 1 - e^{-\frac{T_1}{T}} \right)$$

$$y_0 - y_n = \varepsilon_n$$

(27)

$$x_{n+1} - x_n = k_r \varepsilon_n$$

$$x_{1n} = k(x_n)x_n$$

Rugując z układu równań (27) tym razem zmienne  $y_n, \varepsilon_n, x_{1n}$  i podstawiając  $y_0 = 0$  (tzn. licząc wszystkie zmienne od ich stanu ustalonego) otrzymujemy równanie:

$$x_{n+2} + \left[ -1 - D + k_0 k_r k(x_{n+1})(1-D) \right] x_{n+1} + Dx_n = 0 \quad (28)$$



Jak widać równania (26) i (28) mają identyczne współczynniki. Wystarczający warunek stabilności rozpatrywanych układów jest zatem:

$$\left| -1 - D + k_0 k_r k_z (1-D) \right| + |D| < 1 \quad (29)$$

gdzie

$k_z$  - zmienna wartość wzmocnienia elementu nieliniowego.

Warunek (29) po prostych przekształceniach można sprowadzić do warunku:

$$\frac{2D}{1-D} < k_0 k_r k_z < \frac{2}{1-D} \quad (30)$$

Dla identycznych układów liniowych tzn. gdy  $k_z = \text{const}$  otrzymujemy warunek stabilności

$$k_0 k_r k_z < 2 \frac{1+D}{1-D} \quad (31)$$

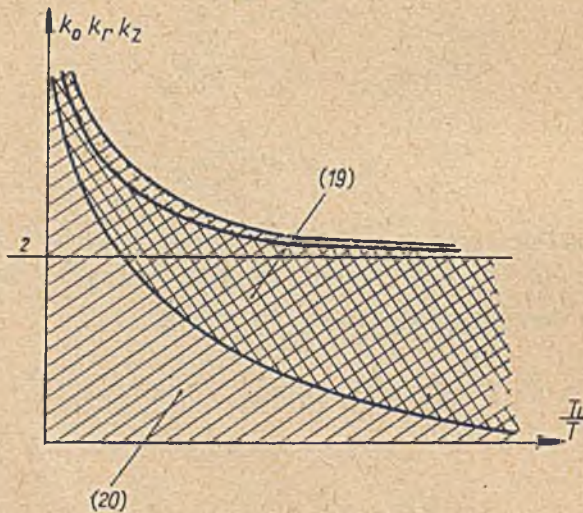


Рис. 4



Na rys. 4 przedstawiono dopuszczalne zmiany współczynnika wzmocnienia układu otwartego (dla różnych wartości stosunku  $T_1/T$ ) wyznaczone z warunku (30). Dla porównania przedstawiono na tym rysunku obszar wartości  $k_0$ ,  $k_r$ ,  $k_z$  i  $T_1/T$  wyznaczony z warunku (31).

Warunki początkowe  $y_0^*$ ,  $y_1^*$  dla których nieliniowy układ jest stabilny wyznaczmy bezpośrednio z nierówności (30). Będą to takie warunki  $|y_0^*| < y^*$  i  $|y_1^*| < y^*$ , dla których jest spełniona nierówność (30). Wartość  $y^*$  będzie oczywiście zależała od rodzaju nieliniowości elementu nieliniowego - może być ona równa nieskończoności i wtedy układ będzie stabilny dla dowolnych warunków początkowych.

### Przykład 2

Na rys. 5a przedstawiony jest schemat blokowy układu regulacji impulsowej z modulacją szerokości impulsów, w którym występuje obiekt inercyjny 1 rzędu.

Zakładamy, że impulsator podaje impulsy takie, że czas trwania każdego impulsu jest proporcjonalny do wielkości sygnału błędu  $\varepsilon$  w chwili rozpoczynania się tego impulsu<sup>\*)</sup>. Oddziaływanie każdego impulsu na część liniową układu można zastąpić oddziaływaniem różnicy dwóch funkcji  $A$  i  $1(t)$ , odpowiednio względem siebie przesuniętych. Korzystając z tego faktu i kładąc  $y_0 = 0$  mamy następujące równania:

$$x \left[ (n+1)T_1 - \frac{T}{2} \right] - x \left[ nT_1 - \frac{T}{2} \right] = -k_1 \tau A_s; \quad (32)$$

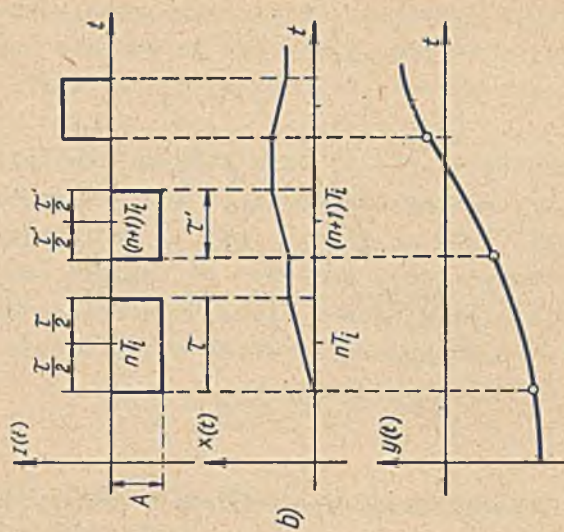
gdzie

$$A_s = A \operatorname{sgn} y \left[ nT_1 - \frac{T}{2} \right];$$

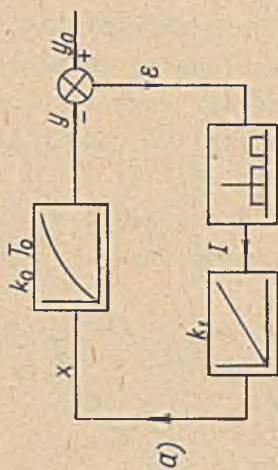
$$\tau = k_2 \left| y \left[ nT_1 - \frac{T}{2} \right] \right| \quad \text{gdy} \quad \left| y \left[ nT_1 - \frac{T}{2} \right] \right| \leq |y_{\max}|$$

<sup>\*)</sup> Większość impulsatorów, w których występuje "mechaniczne" badanie położenia wskazówki przyrządu pomiarowego ma taką zasadę działania.





Rys. 5





$$\tau = \tau_{mx} \quad \text{gdy} \quad \left| y \left[ nT_1 - \frac{\tau}{2} \right] \right| > |y_{mx}|$$

$k_2$  - współczynnik proporcjonalności impulsatora

$$\begin{aligned}
 & 1 \\
 & y \left[ (n+1)T_1 - \frac{\tau'}{2} \right] = y \left[ nT_1 - \frac{\tau}{2} \right] e^{-\left(T_1 - \frac{\tau'}{2} + \frac{\tau}{2}\right) \frac{1}{T_0}} + \\
 & + k_0 x \left[ nT_1 - \frac{\tau}{2} \right] \left[ 1 - e^{-\left(T_1 - \frac{\tau'}{2} + \frac{\tau}{2}\right) \frac{1}{T_0}} \right] - k_0 k_1 A_S \left[ T_1 - \frac{\tau'}{2} + \frac{\tau}{2} \right] + \\
 & + k_0 k_1 A_S T_0 \left[ 1 - e^{-\left(T_1 - \frac{\tau'}{2} + \frac{\tau}{2}\right) \frac{1}{T_0}} \right] + k_0 k_1 A_S \left[ T_1 - \frac{\tau'}{2} - \frac{\tau}{2} \right] - \\
 & - k_0 k_1 A_S T_0 \left[ 1 - e^{-\left(T_1 - \frac{\tau'}{2} - \frac{\tau}{2}\right) \frac{1}{T_0}} \right]^{*}) \quad (33)
 \end{aligned}$$

Występujące w równaniach (32) i (33) wielkości  $x \left[ nT_1 - \frac{\tau}{2} \right]$  i  $y \left[ nT_1 - \frac{\tau}{2} \right]$  nie są wielkościami skwantowanymi w czasie, gdyż chwile  $nT_1 - \frac{\tau}{2}$  nie powtarzają się okresowo, a zatem nie są to funkcje dyskretne w sensie Cypkina. Oznaczając jednak

$$y_n = y \left[ nT_1 - \frac{\tau}{2} \right] \quad \text{i} \quad x_n = x \left[ nT_1 - \frac{\tau}{2} \right]$$

można traktować  $x_n$  i  $y_n$  jako pewne ciągi wartości dla rosnącego  $n$  nie interesując się specjalnie chwilami, w których one przypadają.

Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
 & x_{n+1} - x_n = -k_1 k_2 A y_n \\
 & y_{n+1} = y_n D + k_0 x_n (1-D) - k_0 k_1 A k_2 y_n + \\
 & + 2 k_0 k_1 A_S T_0 B \operatorname{sh} \frac{\tau}{2T_0}; \quad (34)
 \end{aligned}$$

\*) W równaniach tych przyjęto, że chwila  $nT_1$  przypada w połowie czasu trwania impulsu. Ogólnie można przyjąć, że chwila  $nT_1$  "dzieli" impuls w stosunku  $\alpha\tau$  i  $(1-\alpha)\tau$  gdzie  $0 < \alpha < 1$ .



gdzie

$$D = e^{-\left(T_i - \frac{T'}{2} + \frac{T}{2}\right) \frac{1}{T_0}}; \quad B = e^{-\left(T_i - \frac{T'}{2}\right) \frac{1}{T_0}}$$

Oznaczając przez

$$k_{\tau} = \frac{\operatorname{sh} \frac{\tau}{2T_0}}{\frac{\tau}{2T_0}}$$

dostajemy z układu równań (34) równanie:

$$x_{n+2} + \left[-1 - D + k(1 - k_{\tau} B)\right] x_{n+1} + \left[D(1-k) + k k_{\tau} B\right] x_n = 0 \quad (35)$$

gdzie

$$k = k_0 k_1 k_2 A.$$

A zatem układ z rys. 5a jest na pewno stabilny gdy

$$\left| -1 - D + k(1 - k_{\tau} B) \right| + \left| D(1 - k) + k k_{\tau} B \right| < 1 \quad (36)$$

Korzystając z tego, że

$$D(1-k) + k k_{\tau} B = B \left[ e^{-\frac{\tau}{T_0}} + k \left( k_{\tau} - e^{-\frac{\tau}{2T_0}} \right) \right] > 0$$

gdyż

$$k_{\tau} \geq 1$$

można warunek (36) sprowadzić do postaci:

$$\frac{2D}{1 - B(2k_{\tau} - e^{-\frac{\tau}{2T_0}})} < k < \frac{1}{1 - D} \quad (37)$$



Występujące w nierówności (37) wielkości

$$L(\tau, \tau') = \frac{2D}{1 - B(2k_\tau - e^{-\frac{\tau}{2T_0}})} \quad \text{i} \quad P(\tau, \tau') = \frac{2}{1 - D},$$

są wielkościami zmiennymi w zależności od długości impulsów  $\tau$  i  $\tau'$ . Wystarczy zatem, aby nierówność (37) była spełniona dla takich kombinacji  $\tau$  i  $\tau'$ , dla których wielkość  $L(\tau, \tau')$  przyjmuje wartość maksymalną a wielkość  $P(\tau, \tau')$  - wartość minimalną. Łatwo zauważyć, że  $P_{\min}(\tau, \tau')$  występuje wtedy gdy wielkość  $D$  przyjmuje wartość minimalną (ponieważ  $0 < D < 1$ ) co zachodzi dla  $\tau = \tau_{\max}$  i  $\tau' = 0$ . Rozumując podobnie można dojść do wniosku, że  $L_{\max}(\tau, \tau')$  zachodzi dla wartości  $\tau = 0$  i  $\tau' = \tau_{\max}$  lub  $\tau = \tau_{\max}$  i  $\tau' = \tau_{\max}$ .

Jeżeli nierówność (37) zachodzi dla wszystkich kombinacji  $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$  i  $0 \leq \tau' \leq \tau_{\max}$ , wtedy układ jest stabilny dla warunków początkowych:  $|y_0^*| \leq |y_{\max}^*|$  i  $|y_1^*| \leq |y_{\max}^*|$  gdzie  $|y_{\max}^*| < |y_{\max}|$ . W wyprowadzonym wystarczającym warunku stabilności (37) występuje ograniczenie współczynnika  $k$  "od dołu", jest to zatem dosyć ostry warunek. Wynika to stąd, że wyprowadzając warunek (3), nie nakładaliśmy żadnych ograniczeń na współczynniki równania różnicowego. Za to występujące w warunku (37)  $k$  nie musi być wielkością stałą, może być dowolnie zmienne w granicach nierówności (37) i układ będzie stabilny.

## 5. Zakończenie

Występujące w układach impulsowych wielkości  $x_n$  i  $y_n$  itd. można traktować jako ciągi. Takie podejście ma pewne zalety: po pierwsze - umożliwia włączenie nowego aparatu matematycznego dla rozpatrywania układów impulsowych; po drugie - można w ten sposób rozpatrywać układy impulsowe, w których interesujące nas wielkości nie są wielkościami skwantowanymi w czasie.



Poza tym, przy tej metodzie równanie różnicowe jest wzorem rekurencyjnym, z którego łatwo obliczyć każdy następny wyraz ciągu, gdy znane jest  $m$  - wyrazów poprzednich. Bardzo łatwo zatem można bezpośrednio z równania różnicowego obliczać przebieg przejściowy interesującej nas wielkości, jeżeli znane są warunki początkowe. Przedstawiony w tej pracy wystarczający warunek stabilności nieliniowych układów impulsowych został wyprowadzony przy wykorzystaniu tej właśnie metody.

Na zakończenie należy podkreślić, że niniejsza praca powstała w wyniku dyskusji z kolegami na zebraniach Katedry Teorii Regulacji Politechniki Śląskiej. Pragnę w tym miejscu podziękować Panu Prof. dr Stefanowi Węgrzynowi za cenne uwagi i wskazówki dotyczące pracy, a Panu dr inż. Adamowi Bukowemu za aktywny udział w dyskusji.

#### LITERATURA

- [1] Kalman R.E., Bertram I.E.: Control System Analysis and Design Via the "Second Method" of Lyapunov. Basic Engineering. June 1960.
- [2] Cypkin I.E.: Ob ustojczivosti w cełom nieliniejnych impulsnych awtomatycznych sistem. Doklady Akademii Nauk SSSR 1962 Tom 145 Nr 1.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 3.II.1964 r.



ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АССИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
В БОЛЬШОМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

## Р е з ю м е

В статье представлено и доказано достаточные условия устойчивости в большом для определенного типа нелинейных разностных уравнений. Доказательство проведено с помощью рекуррентного метода, используя тот факт, что разностное уравнение  $n$ -того порядка по существу это рекуррентная формула, на основании которой можно вычислить значение функции для произвольного аргумента если известны ее значения для последовательных, предшествующих значений аргумента. Дано сравнение этого условия с условиями устойчивости для линейных разностных уравнений. В статье даны также примеры применения найденного условия к системам с нелинейным импульсным регулятором с модуляцией высоты и ширины импульсов.

A SUFFICIENT CONDITION FOR THE GLOBAL ASYMPTOTIC STABILITY  
OF NONLINEAR SAMPLED-DATA SYSTEMS

## Summary

A sufficient condition for the global stability of certain nonlinear difference equations has been presented and proved in this paper. The condition has been proved by means of a recurrence analysis method based on the fact that a difference equation of order  $n$  is a recurrence relation from which it is possible to get the value of the function for any value of the argument  $n$ , if the values of the function for  $n$  previous arguments are known. The condition obtained has been compared with the stability conditions for linear difference equations. Some examples of the application of this condition for systems with a nonlinear impulsator generating amplitude - and width-modulated pulses have been presented.