

RYSZARD GESSING
Katedra Teorii Regulacji

ZASTOSOWANIE METODY RÓWNAŃ RÓŻNICOWYCH
DO UKŁADÓW REGULACJI Z NIELINIOWYM IMPULSATOREM
O PROSTOKĄTNYM KSZTAŁCIE IMPULSÓW

Streszczenie. W pracy podany jest sposób otrzymywania równania różnicowego zamkniętego układu regulacji z nieliniowym impulsatorem dającym prostokątne impulsy

- a) o modulowanej wysokości,
- b) o modulowanej szerokości i zmiennym początku,
- c) o modulowanej szerokości i ustalonym początku.

Za pomocą tego sposobu zostały wyprowadzone wzory na współczynniki równań różnicowych dla wymienionych przypadków.

Podany jest również sposób rozwiązania numerycznego otrzymanych nieliniowych równań różnicowych, przy dowolnym przebiegu wielkości zakłócającej. Otrzymane równania różnicowe mogą służyć również do badania stabilności układu za pomocą wystarczającego warunku stabilności podanego przez autora.

1. Wstęp

Do analizy pracy nieliniowych układów impulsowych stosowane są w zasadzie trzy metody: metoda funkcji opisującej, metoda płaszczyzny (przestrzeni) fazowej i metoda równań różnicowych.

Metoda funkcji opisującej jest metodą przybliżoną, określającą warunki istnienia przebiegów periodycznych. Jest ona opracowana dla przypadków, gdy okres drgań periodycznych jest wielokrotnością okresu impulsowania. W innych przypadkach przy stosowaniu tej metody napotyka się na duże trudności.

Za pomocą metody płaszczyzny (przestrzeni) fazowej można przeprowadzić badanie stabilności układu i określić pewne wskaźniki regulacji takie jak: wielkość i ilość przeregulowań i periodyczność lub aperiodyczność przebiegu wielkości regulowanej.

Metoda równań różnicowych jest metodą będącą jeszcze w stadium rozwoju i polegającą na badaniu rozwiązań równań różnicowych. Za pomocą tej metody można badać zarówno stabilność układu jak i wskaźniki jakości regulacji takie jak: czas regulacji, wielkość przeregulowań, błąd statyczny i dynamiczny. Wskaźniki te można bezpośrednio znaleźć z rozwiązania równania różnicowego. Cała trudność polega na braku dostatecznie opracowanej teorii rozwiązywania nieliniowych równań różnicowych. Jeżeli jednak znamy równanie różnicowe, to rozwiązanie numeryczne dla określonych warunków początkowych można znaleźć za pomocą metody rekurencyjnej, jak to będzie pokazane w dalszym ciągu pracy. Poza tym stabilność układu można określić za pomocą kryteriów stabilności wprost z równania różnicowego, bez szukania rozwiązania.

Punktem wyjściowym metody równań różnicowych jest ułożenie równań różnicowych układu.

Przeprowadzona tu klasyfikacja metod badania nieliniowych układów impulsowych została zaczerpnięta z pracy [1], będącej referatem wprowadzającym do "Teorii układów dyskretnych" na I Kongresie IFAC w Moskwie w 1960 roku. W pracy tej E.I. Jury podsumowując rozwój tej dziedziny nauki pisze:... "W ostatnim okresie wysiłki są skierowane głównie na badanie własności równań różnicowych. W związku z tym w znacznej mierze wyjaśni się obraz metod rozwiązywania, klasyfikacji i zachowywania się rozwiązań tych równań".

W tej pracy zostały opracowane równania różnicowe dla układów regulacji dowolnego rzędu z nieliniowym impulsatorem dającym prostokątne impulsy w pierwszym przypadku o modulowanej wysokości i dwóch pozostałych przypadkach - o modulowanej szerokości.

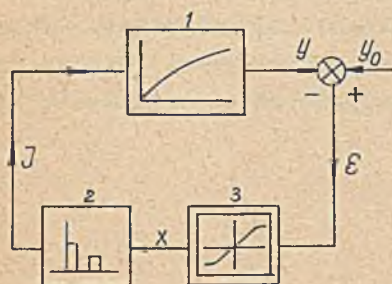
Podany jest również sposób znajdowania rozwiązania numerycznego otrzymanych nieliniowych równań różnicowych, przy dowolnym przebiegu wielkości zakłócającej. Otrzymane równania różnicowe mogą stanowić podstawę do badania stabilności układu, za pomocą wystarczającego warunku stabilności podanego przez autora.

2. Układy regulacji z nieliniowym impulsatorem o prostokątnym kształcie impulsów

Będziemy się zajmowali układami, w których część ciągła jest liniowa, a impulsator jest nieliniowy o modulowanej wysokości albo szerokości impulsów. Nieliniowość impulsatora o modulowanej wysokości impulsów wynika z nieliniowej zależności amplitudy od sygnału błęd. Impulsator o modulowanej szerokości impulsów wprowadza do układu nieliniowość wynikającą wprost z zasady jego działania. Rozpatrzmy kolejno układy regulacji z tymi impulsatorami.

a) Układ regulacji z nieliniowym impulsatorem o modulowanej wysokości impulsów

Schemat blokowy takiego układu został przedstawiony na rys. 1. Zarówno część ciągła 1, jak i impulsator 2 występujący na tym



Rys. 1

rysunku są liniowe. Nieliniowość impulsatora została przedstawiona przez oddzielny blok elementu nieliniowego 3.

Równanie różnicowe dla takiego układu można ułożyć wykorzystując opracowane w literaturze wzory na funkcje przejścia dla liniowych układów impulsowych. W tym celu należy

napisać wyrażenie na operatorową funkcję przejścia otwartego układu impulsowego składającego się z elementów 1 i 2:

$$K^*(q) = \frac{Y^*(q)}{X^*(q)} \quad (1)$$

Następnie należy z równania (1) przejść na równanie różnicowe wiążące wielkości $x(n)$ i $y(n)$

$$\begin{aligned} y(n+m) + a_1 y(n+m-1) + \dots + a_m y(n) = \\ = b_1 x(n+m-1) + \dots + b_m x(n), \end{aligned} \quad (2)$$

i napisać pozostałe równania dla układu z rys. 1:

$$\begin{aligned} y_0(n) - y(n) &= \varepsilon(n) \\ x(n) &= f[\varepsilon(n)] = c_n \varepsilon(n) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie

$$c_n = \frac{f[\varepsilon(n)]}{\varepsilon(n)}$$

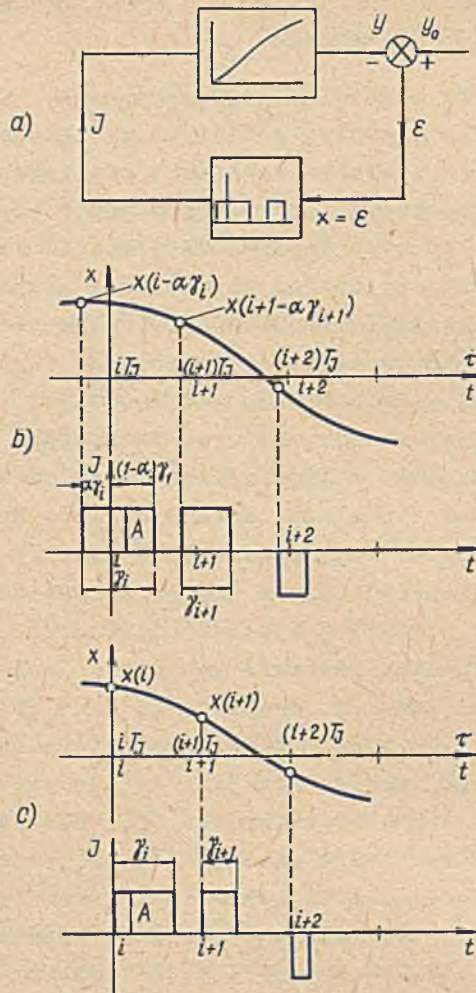
Po wyrugowaniu nie interesujących nas wielkości z układu równań (2) i (3) otrzymujemy w końcu szukane równanie różnicowe zamkniętego układu regulacji.

W dalszym ciągu pracy wyprowadzimy wzory na współczynniki równania różnicowego (2) bez korzystania z dyskretnej transformacji Laplace'a, pokazując pewien sposób wyprowadzania tych wzorów przydatny dla układów z impulsatorem o modulowanej szerokości impulsu.

b) Układ regulacji z impulsatorem o modulowanej szerokości i zmiennym początku impulsów*

Wśród impulsatorów o modulowanej szerokości impulsów rozpowszechnione są impulsatory, w których występuje okresowe mechaniczne badanie położenia wskazówki przyrządu mierzącego sygnał błędu. Kilka takich impulsatorów jest opisanych w pracy [2]. Większość tego typu impulsatorów wysyła impulsy, których szerokość jest proporcjonalna do wartości sygnału błędu w chwili rozpoczynania się impulsów przy czym chwile rozpoczynania się poszczególnych impulsów zmieniają swoje położenie względem równo od siebie oddalonych chwil iT_I , w zależności od wielkości sygnału błędu. Na rys. 2a został przedstawiony schemat blokowy układu z impulsatorem o modulowanej szerokości i zmiennym początku impulsów, a na rys. 2b - przebieg impulsów w takim układzie. Jak widać chwila iT_I (T_I - okres impulsowania impulsatora) dzieli impuls o szerokości γ_1 w stosunku α i $1-\alpha$, gdzie α spełnia nierówność $0 < \alpha < 1$ i w ogólnym przypadku, podobnie jak i γ_1 może zależeć od wartości sygnału błędu x w chwili $(1 - \alpha\gamma_1)T_I$. Wielkość α zależy oczywiście od konstrukcji impulsatora. Charakterystyczną własnością takiego impulsatora jest to, że wielkość $x(1-\alpha\gamma_1)$, która decyduje o szerokości impulsu γ_1 nie jest wielkością skwantowaną w czasie, gdyż chwile $i - \alpha\gamma_1$ nie powtarzają się okresowo. Dla wyprowadzenia równania różnicowego układu zamkniętego należy najpierw napisać równanie różnicowe układu otwartego wiążące wielkości x i y , co zrobimy w dalszej części pracy.

*) Ze względu na brak w literaturze opracowań odnoszących się do takich impulsatorów, w pracy będą one nazywane jak wyżej.



Rys. 2

c) Układ regulacji z impulsatorem o modulowanej szerokości i ustalonym początku impulsów

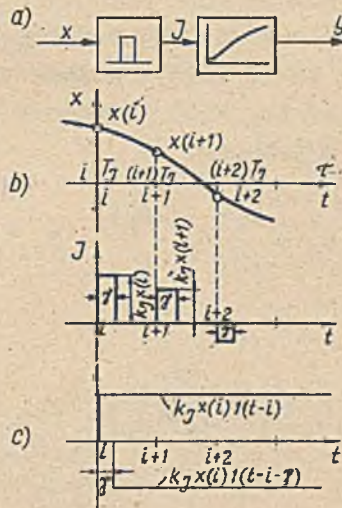
Zasada działania takiego impulsatora została przedstawiona na rys. 2c. W tym przypadku początek impulsu zawsze przypada w chwili iT_I . Wielkość $x(i)$ decydująca o szerokości impulsu jest w tym przypadku wielkością skwantowaną w czasie. Jak widać jest to szczególny przypadek impulsatora z punktu b-mianowicie przy $\alpha = 0$.

Dla napisania równania różnicowego zamkniętego układu zajmmy się podobnie jak w poprzednich przypadkach, równaniem różnicowym układu otwartego.

3. Równanie różnicowe otwartego układu impulsowego

a) Układ z liniowym impulsatorem o modulowanej wysokości impulsów

Zajmiemy się teraz układem składającym się z liniowego impulsatora o modulowanej wysokości impulsów i szeregowo z nim połączonym elementu ciągłego (rys. 3a). Zakładamy, że opera-



Rys. 3

torowa funkcja przejścia elementu ciągłego jest znana i ma postać:

$$\bar{K}(s) = \frac{\bar{L}(s)}{\bar{M}(s)} = \mathcal{L}[\bar{k}(\tau)]$$

gdzie:

$\bar{k}(\tau)$ - czasowa funkcja przejścia elementu ciągłego,
 \mathcal{L} - symbol transformacji Laplace'a - Carsona.

Zakładamy, że $\bar{L}(s)$ i $\bar{M}(s)$ są wielomianami, takimi że stopień licznika jest nie większy od stopnia mianownika. Równanie

$$\bar{M}(s) = 0$$

posiada l różnych pierwiastków nie równych zero i jeden równy zero. Wprowadzamy teraz nową skalę czasu $t = \frac{\tau}{T_I}$. Dla operatorowej funkcji $K(p)$ odpowiadającej czasowej funkcji $k(t) = \bar{k}(t T_I) = \bar{k}(\tau)$ mamy:

$$K(p) = \frac{L(p)}{M(p)} = \mathcal{L}[k(t)] = \bar{K}\left(\frac{p}{T_I}\right) = \frac{\bar{L}\left(\frac{p}{T_I}\right)}{\bar{M}\left(\frac{p}{T_I}\right)}$$

co wynika ze znanego dla rachunku operatorowego twierdzenia o zmianie skali. Znając zatem $\bar{K}(s)$ możemy obliczyć $K(p)$. Dla czasowej funkcji przejścia $k(t)$ elementu ciągłego w nowej skali czasu t mamy wyrażenie:

$$k(t) = \left[D_0 + \sum_{k=1}^l D_k e^{p_k t} + D_{-1} t \right] 1(t) \quad (5)$$

gdzie

$$D_0 = \left[\frac{d}{dp} \frac{pL(p)}{M(p)} \right]_{p=0}; \quad D_k = \frac{L(p_k)}{p_k M'(p_k)}; \quad D_{-1} = \frac{L(0)}{M'(0)}$$

Impulsator podaje na układ ciąg impulsów takich, że wysokość i -tego impulsu jest proporcjonalna do sygnału wejściowego x w chwili $t = i$ (rys. 3b). Każdy z impulsów można przedstawić za pomocą różnicy dwóch funkcji $k_I x(i) i(t-i)$ odpowiednio względem siebie przesuniętych (rys. 3c).

Przebieg $y_1(t)$ pochodzący od działania i -tego impulsu ma zatem postać:

$$y_1(t) = k_I x(i) [k(t-i) - k(t-i-\gamma)]$$

Oznaczamy:

$$k_\gamma(t-i) = k(t-i) - k(t-i-\gamma) \quad (6a)$$

Funkcja y w chwili t przyjmuje wartość wynikającą z działania wszystkich impulsów, które wystąpiły przed chwilą t . Dla czasu t spełniającego nierówność $n-1+\gamma < t < n$ mamy więc:

$$y(t) = k_I \sum_{i=0}^{n-1} x(i) k_\gamma(t-i)$$

Jeżeli stopień $L(p)$ jest mniejszy od stopnia $M(p)$ wtedy na podstawie twierdzenia o wartościach skrajnych dla rachunku operatorowego mamy $k(0) = K(\infty) = 0$. Dla wartości dyskretnej $y(n)$ jest zatem:

$$y(n) = k_I \sum_{i=0}^{n-1} x(i) k_\gamma(n-i)^* \quad (7a)$$

*) Jeżeli wielomiany $L(p)$ i $M(p)$ są tego samego stopnia, wtedy może być $k(0) \neq 0$. Równanie (7a) jest wtedy prawdziwe dla impulsów które przyjmują w chwili $t = i$ wartość nie $k_I x(i)$ lecz wartość równą zero, co zazwyczaj zachodzi w układach spotykanych w praktyce.

Uwzględniając zależności (5), (8a) i (7a) otrzymujemy:

$$y(n) = k_I \sum_{i=0}^{n-1} x(i) \sum_{k=0}^l B_k e^{p_k(n-i)} \quad (8a)$$

gdzie

$$B_k = \frac{L(p_k)}{M(p_k)} \frac{1 - e^{-p_k \gamma}}{p_k}; \quad k = 1, 2, \dots, l$$

$$B_0 = \frac{L(0)}{M(0)} \gamma; \quad p_0 = 0$$

Utwórzmy sumę:

$$Y(n) = y(n+m) + a_1 y(n+m-1) + \dots + a_m y(n) \quad (9a)$$

gdzie liczba m i stałe a_1, a_2, \dots, a_m zostaną później obliczone. Uwzględniając (8a) otrzymujemy dla sumy (9a) po przekształceniach wyrażenie:

$$\begin{aligned} Y(n) = & k_I \sum_{i=0}^{n-1} x(i) \sum_{k=0}^l B_k e^{p_k(n-i)} \left[e^{p_k m} + a_1 e^{p_k(m-1)} + \dots + a_m \right] + \\ & + k_I \sum_{k=0}^l B_k \left[\sum_{i=n}^{n+m-1} x(i) e^{p_k(n+m-1-i)} + a_1 \sum_{i=n}^{n+m-2} x(i) e^{p_k(n+m-1-i)} + \dots + \right. \\ & \left. + a_{m-1} x(n) e^{p_k} \right] \quad (10a) \end{aligned}$$

Aby zależność (10a) była równaniem różnicowym musi być

$$e^{p_k m} + a_1 e^{p_k(m-1)} + \dots + a_m = 0 \quad (11a)$$

dla $k = 0, 1, \dots$

Zależność (11a) jest równaniem algebraicznym m -tego rzędu, którego rząd m i współczynniki a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) chcemy obliczyć, a którego pierwiastki są znane i wynoszą e^{p_k} ($k = 0, 1, \dots, l$). Aby równanie (11a) mogło być spełnione dla $l+1$ pierwiastków musi być $m = l + 1$. Współczynniki równania (11a) obliczamy na podstawie wzorów Viety:

$$\begin{aligned} a_1 &= -e^{p_0} - e^{p_1} - e^{p_2} - \dots - e^{p_l} \\ a_2 &= e^{p_0} e^{p_1} + e^{p_0} e^{p_2} + \dots + e^{p_{l-1}} e^{p_l} \\ a_m &= (-1)^m e^{p_0} e^{p_1} \dots e^{p_l} \end{aligned} \quad (12a)$$

Ponieważ równanie (11a) spełnione jest również dla pierwiastka $p_0 = 1$, więc dla współczynników a_i mamy zależność

$$1 + a_1 + a_2 + \dots + a_m = 0 \quad (13a)$$

Uwzględniając w równaniu (10a) zależność (11a) dostajemy po przekształceniach równanie różnicowe otwartego układu impulsowego o postaci:

$$\begin{aligned} y(n+m) + a_1 y(n+m-1) + \dots + a_m y(n) &= \\ &= b_1 x(n+m-1) + \dots + b_m x(n) \end{aligned} \quad (14a)$$

Dla stałych współczynników b_i mamy wzory:

$$b_i = k_I \sum_{k=0}^l B_k \sum_{j=1}^m a_{i-j} e^{p_k j} \quad (15a)$$

gdzie oznaczono $a_0 = 1$.

Otrzymane równanie różnicowe jest równaniem liniowym, którego rząd jest równy rzędowi mianownika operatorowej funkcji przejścia elementu ciągłego.

b) Układ z impulsatorem o modulowanej szerokości i zmiennym początku impulsów

Rozpatrzmy teraz równanie różnicowe układu z rys. 3a, w którym występuje impulsator o modulowanej szerokości i zmiennym początku impulsów. Przebieg impulsów w tym przypadku został pokazany na rys. 2b. Zakładamy, że część ciągła układu posiada funkcję przejścia taką samą jak w przypadku a, a więc funkcja $k(t)$ jest określona wzorami (5). Impulsator daje impulsy o szerokości:

$$\gamma_1 = k_I |x(i - \alpha \gamma_1)| \quad \text{gdy} \quad |x(i - \alpha \gamma_1)| \leq |x_{mx}|$$

$$\gamma_1 = \gamma_{mx} = k_I |x_{mx}| \quad \text{gdy} \quad |x(i - \alpha \gamma_1)| \geq |x_{mx}|$$

gdzie:

k_I - "wzmocnienie" impulsatora,

x_{mx} - wartość x przy której następuje nasycenie impulsatora.

Podobnie jak w przypadku a) przebieg $y_1(t)$ pochodzący od działania i-tego impulsu ma postać

$$y_1(t) = a \operatorname{sgn}[x(i - \alpha \gamma_1)] [k(t - i + \alpha \gamma_1) - k(t - i - (1 - \alpha) \gamma_1)] \quad (6b)$$

Ze względu na pracę zamkniętego układu regulacji interesują nas teraz wartości wielkości x i y w chwili $t = n - \alpha \gamma_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Należy pamiętać o tym, że funkcje $x(n - \alpha \gamma_n)$ i $y(n - \alpha \gamma_n)$ nie są dyskretnymi funkcjami w sensie Cypkina, gdyż chwile $n - \alpha \gamma_n$ nie powtarzają się okresowo. Oznaczając:

$$x(n - \alpha \gamma_n) = x_n \quad \text{i} \quad y(n - \alpha \gamma_n) = y_n \quad (7b)$$

będziemy wielkości x_n i y_n traktowali jako ciągłe.

Zakładając, że dla $t < 0$ $x(t) = 0$ i uwzględniając wzory (5) (6b) i (7b) mamy podobnie jak w przypadku a:

$$y_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_i (n-\alpha)\gamma_n = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{sgn}[x_i] \sum_{k=0}^1 B_{k,i} e^{p_k(n-\alpha)\gamma_n} \quad (8b)$$

gdzie

$$B_{k,i} = \frac{L(p_k)}{M(p_k)} \frac{e^{p_k \alpha \gamma_i} 1 - e^{-p_k(1-\alpha)\gamma_i}}{p_k}; \quad k = 1, 2, \dots, 1$$

$$B_{0,i} = \frac{L(0)}{M(0)} \gamma_i; \quad p_0 = 0.$$

W dalszym ciągu postępujemy podobnie jak w przypadku a. Tworzymy więc sumę:

$$Y_n = y_{n+m} + f_1 y_{n+m-1} + \dots + f_m y_n = \sum_{j=0}^m f_j y_{n+m-j} \quad (9b)$$

gdzie $f_0 = 1$, a liczba m i wielkości f_1, f_2, \dots, f_m zostaną określone w dalszym ciągu. Uwzględniając (8b) mamy po przekształceniach:

$$Y_n = A \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{sgn}[x_i] \sum_{k=0}^1 B_{k,i} e^{p_k(n-i)} \sum_{j=0}^m f_j e^{p_k(m-j-\alpha)\gamma_{n+m-j}} + A \sum_{k=0}^1 \sum_{j=0}^{m-1} f_j \sum_{i=n}^{n+m-j-1} B_{k,i} \operatorname{sgn}[x_i] e^{p_k(n+m-j-\alpha)\gamma_{n+m-j-1}} \quad (10b)$$

Zależność (10b) będzie równaniem różnicowym jeżeli:

$$f_1 e^{p_k(m-1-\alpha)\gamma_{n+m-1}} + \dots + f_m e^{-p_k \alpha \gamma_n} = e^{p_k(m-\alpha)\gamma_{n+m}} \quad (11b)$$

dla $k = 0, 1, \dots, 1$.

Z układu równań (11b), których jest $l+1$ można wyznaczyć wielkości f_1, \dots, f_m gdy $m=l+1$. Z wzorów Cramera mamy wtedy:

$$f_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1^{(m-1-\alpha\gamma_{n+m-1})} & p_1^{(m-2-\alpha\gamma_{n+m-2})} & \dots & p_k^{(m-\alpha\gamma_{n+m})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{(m-1-\alpha\gamma_{n+m-1})} & p_1^{(m-2-\alpha\gamma_{n+m-2})} & \dots & p_1^{(m-\alpha\gamma_{n+m})} \end{vmatrix} \quad (12b)$$

a Δ_i jest wyznacznikiem, który powstaje z Δ przez zastąpienie i -tej kolumny wyrażeniami wolnymi $-e^{p_k(m-\alpha\gamma_{n+m})}$. Ponieważ $\Delta \neq 0$ (pierwiastki p_0, p_1, \dots, p_l są różne), więc wielkości f_1, f_2, \dots, f_m są jednoznacznie określone. Jak widać są to funkcje zmiennych $\gamma_n, \gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{n+m}$ lub ponieważ $\gamma_1 = k_I |x_1|$ więc:

$$f_i = f_i(x_1, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$$

Ponieważ $p_0 = 0$ więc na podstawie równania (11b) mamy następującą zależność dla funkcji f_1 :

$$1 + f_1 + f_2 + \dots + f_m = 0 \quad (13b)$$

Uwzględniając w równaniu (10b) zależności (11b) i podstawiając

$$\operatorname{sgn}[x_1] = \frac{x_1}{|x_1|} = \frac{k_I x_1}{\gamma_1^*} \quad (14b)$$

gdzie $\gamma_1^* = k_I |x_1|$ dla dowolnej wartości x_1 , otrzymujemy po przekształceniach równanie różnicowe otwartego układu o postaci:

$$y_{n+m} + f_1 y_{n+m-1} + \dots + f_m = g_1 x_{n+m-1} + \dots + g_m x_n \quad (15b)$$

Dla współczynników g_1 mamy przy tym wzory:

$$g_1 = k_I \frac{A}{\gamma_{n+m-1}^*} \sum_{k=0}^1 B_{k,n+m-1} \sum_{j=1}^1 f_{1-j} e^{p_k(j-\alpha)\gamma_{n+m-1+j}} \quad (16b)$$

Otrzymane równanie (15b) jest nieliniowe, gdyż zarówno współczynniki f_1 jak i g_1 są funkcjami $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$.

Należy pamiętać o tym, że występujące w równaniu (15b) wielkości x_n i y_n nie są dyskretnymi funkcjami lecz ciągami. Równanie to wiąże $m+1$ kolejnych wyrazów tych ciągów i przez analogię do równania (15b) nazywamy go równaniem różnicowym.

c) Układ z impulsorem o modulowanej szerokości i ustalonym początku impulsów

Zajmiemy się teraz otwartym układem przedstawionym na rys. 3a, w którym występuje impulsor o modulowanej szerokości i ustalonym początku impulsów oraz część ciągu o funkcji przejścia $K(p)$ analogicznej jak w przypadkach a i b. Przebiegi impulsów w takim układzie są przedstawione na rys. 2c. Jest to szczególny przypadek układu z punktu b - mianowicie dla $\alpha = 0$. Podczas gdy w przypadku b wielkości $x(n-\alpha\gamma_n)$ i $y(n-\alpha\gamma_n)$ nie były wielkościami skwantowanymi w czasie, to teraz wielkości $x(n)$ i $y(n)$ są wartościami funkcji x i y w równo od siebie oddalonych chwilach czasu, jak w przypadku a.

Wyprowadzone w przypadku b wzory uproszczą się po uwzględnieniu tego, że $\alpha = 0$. Tak więc mamy:

$$B_{k,1}^* = \frac{L(p_k)}{M(p_k)} \frac{1 - e^{-p_k \gamma_1}}{p_k}; \quad k = 1, 2, \dots, l$$

$$B_{0,1}^* = \frac{L(0)}{M(0)} \gamma_1; \quad p_0 = 0$$

Zależność (8b) ma teraz postać:

$$y(n) = A \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{sgn} [x(i)] \sum_{k=0}^1 B_{k,i}^* e^{P_k(n-1)} \quad (8c)$$

Równanie (11b) jest teraz takie jak (11a). Stałe współczynniki a_1, a_2, \dots, a_m obliczamy tak jak w przypadku a z wzorów (12a). Dla tego układu otrzymujemy zatem równanie różnicowe o postaci

$$\begin{aligned} y(n+m) + a_1 y(n+m-1) + \dots + a_m y(n) = \\ = g_1^* x(n+m-1) + \dots + g_m^* x(n) \end{aligned} \quad (15c)$$

gdzie stałe współczynniki a_1, a_2, \dots, a_m określają równania (12a), a dla funkcji g_1^*, \dots, g_m^* mamy wzory:

$$g_i^* = k_I A_{n+m-1} \sum_{k=0}^1 B_{k,n+m-1} \sum_{j=1}^1 a_{i-j} e^{P_k j} \quad (16c)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

gdzie:

$$A_{n+m-1} = \frac{A}{\gamma_{n+m-1}^*};$$

$$\gamma_{n+m-1}^* = k_I |x(n+m-1)|, \text{ dla dowolnej wartości } x(n+m-1);$$

$$a_{i-j} \text{ określają wzory (12b); } a_0 = 1.$$

Otrzymane równanie różnicowe (15c) jest równaniem nieliniowym, jest ono jednak znacznie prostsze niż równanie (15b). Lewa strona równania (15c) jest taka sama jak (14a), a występujące po prawej stronie równania współczynniki g_1, \dots, g_m są funkcjami (każdy jednej zmiennej) takimi, że:

$$g_i^* = g_i^*(\gamma_{n+m-1}^*) = g_i^{**}(x(n+m-1)) \text{ dla } i = 1, 2, \dots, m \quad (16c^*)$$

Widać tutaj duże podobieństwo budowy równania różnicowego (15c) i równania różnicowego (15a). Dla przeanalizowania różnicy między nimi napiszemy wzory (16a) i (16c) w nieco innej niż poprzednio postaci.

Wzory (16a) można inaczej napisać:

$$b_i = k_I \gamma \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^1 B_k \sum_{j=1}^1 a_{i-j} e^{p_k j} \quad (16a')$$

a wzory (16c):

$$g_i^* = k_I A \frac{1}{\gamma_{n+m-1}^*} \sum_{k=0}^1 B_{k,n+m-1}^* \sum_{j=1}^1 a_{i-j} e^{p_k j} \quad (16c')$$

Z poprzednich równań widać, że wzory na wielkości B_k i $B_{k,n+m-1}^*$ różnią się tylko tym, że zamiast stałej wielkości γ we wzorach na B_k , występuje zmienna wielkość γ_{n+m-1} - we wzorach na $B_{k,n+m-1}^*$. A zatem wzory (16a') i (16c') różnią się między sobą tym, że zamiast stałego iloczynu $k_I \gamma$ w przypadku a występuje stały iloczyn $k_I A$ w przypadku c, a zamiast stałych pozostałych wielkości γ - w przypadku a, odpowiednie zmienne wielkości γ_{n+m-1}^* i γ_{n+m-1} w przypadku c. Iloczyny $k_I \gamma$ i $k_I A$, określają "powierzchniowe" współczynniki wzmocnienia impulsatorów, gdyż iloczyn $k_I \gamma |x(i)|$ w przypadku a jest równy powierzchni i-tego impulsu, tak samo jak iloczyn $k_I A |x(i)|$ - w przypadku c.

Jeżeli impulsator z przypadku c w czasie pracy nie wchodzi w zakres nasycenia tzn. mamy $|x_i| \leq |x_{\max}|$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$ wtedy mamy $\gamma_{n+m-1}^* = \gamma_{n+m-1}$. W tym przypadku równanie różnicowe (15c) układu z impulsatorem o modulowanej szerokości i ustalonym początku impulsu można od razu napisać jeżeli znamy równanie różnicowe (15a) układu z impulsatorem liniowym o modulowanej wysokości impulsu. W tym celu należy zamiast iloczynu $k_I \gamma$, we współczynnikach (16a) podstawić iloczyn $k_I A$, a zamiast pozostałych stałych wielko-

ści γ odpowiednie zmienne wielkości γ_{n+m-1} , kierując się przy tym informacją (16c'). Jeżeli impulsator w przypadku c w czasie pracy wchodzi w zakres nasycenia, wtedy dla otrzymania z równania (15a) równania (15c) należy współczynniki (16a) przedstawić w postaci (16a') tzn. należy wyciągnąć iloczyn $\frac{1}{\gamma} k_I \gamma$ przed nawias, a następnie zamiast niego podstawić $\frac{1}{\gamma_{n+m-1}^*} k_{IA}$. Zamiast pozostałych wielkości γ należy podstawić odpowiednie wielkości γ_{n+m-1} .

4. Równanie różnicowe zamkniętego układu regulacji impulsowej

Jeżeli znane jest równanie różnicowe otwartego układu, to łatwo jest wtedy otrzymać równanie różnicowe zamkniętego układu. Jeżeli dla układu z rys. 1 znamy równania (2) i (3), to rugując z nich niepożądane wielkości otrzymamy równanie różnicowe zamkniętego układu w przypadku a. Takie równanie różnicowe wiążące sygnał błędu z wartością zadaną y_0 ma postać:

$$\begin{aligned} \varepsilon(n+m) + [a_1 + b_1 c_{n+m-1}] \varepsilon(n+m-1) + \dots + [a_m + b_m e_n] \varepsilon(n) = \\ = y_0(n+m) + a_1 y_0(n+m-1) + \dots + a_m y_0(n) \end{aligned} \quad (17a)$$

gdzie

$$c_{n+m-1} = \frac{f[\varepsilon(n+m-1)]}{\varepsilon(n+m-1)} \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, m-1.$$

O współczynniku c_{n+m-1} określającym nieliniowy element 3 zakładamy to, że jest określony dla dowolnego $\varepsilon(n+m-1)$.

W przypadku b równanie różnicowe zamkniętego układu regulacji z rys. 2a otrzymamy analogicznie jak w przypadku a uwzględniając równanie różnicowe (15b) otwartego układu i równanie dla węzła sumującego:

$$x(n) = \varepsilon(n) = y_0(n) - y(n)$$

Podobnie jak poprzednio otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+m} + [f_1 + g_1] \varepsilon_{n+m-1} + \dots + [f_m + g_m] \varepsilon_n = \\ = y_{0,n+m} + f_1 y_{0,n+m-1} + \dots + f_m y_{0,n} \end{aligned} \quad (17b)$$

Funkcje f_1 i g_1 zależą w tym przypadku od wszystkich wielkości $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_{n+m}$, a wielkości ε_n i $y_{0,n}$ nie są wielkościami ε i y_0 skwantowanymi w czasie.

W przypadku c równanie różnicowe zamkniętego układu ma postać:

$$\begin{aligned} \varepsilon(n+m) + [a_1 + g_1^*] \varepsilon(n+m-1) + \dots + [a_m + g_m^*] \varepsilon(n) = \\ = y_0(n+m) + a_1 y_0(n+m-1) + \dots + a_m y_0(n) \end{aligned} \quad (17c)$$

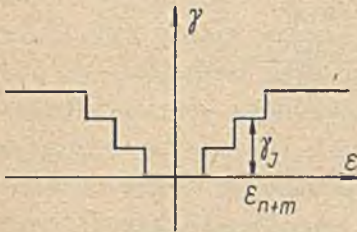
Funkcje g_1^* zależą teraz każda od jednej wielkości $\varepsilon(n+m-1)$ gdzie $i = 1, 2, \dots, m$.

Widać tutaj duże podobieństwo równań (17a) i (17c). Nie można jednak znaleźć takiej funkcji $f(\varepsilon)$ nieliniowego elementu 3 układu a żeby był on równoważny układowi c, gdyż każda z funkcji g_1^* jest inną funkcją argumentu $\varepsilon(n+m-1)$, a funkcje $y_{0,n+m-1}$ są takie same, zmienia się tylko argument $\varepsilon(n+m-1)$.

Ponieważ współczynniki $[a_1 + b_1 c_{m+n-1}]$ i $[a_1 + g_1^*]$ równań (17a) i (17c) zależą od wielkości $\varepsilon(n+m-1)$ gdzie $i=1, 2, \dots, m$, a nie zależą od $\varepsilon(n+m)$, więc z równań tych można zawsze obliczyć wartość $\varepsilon(n+m)$ gdy się zna poprzednie wartości $\varepsilon(n+m-1)$, dla $i = 1, 2, \dots, m$ i przebieg $y_0(n)$. W ten sposób traktując równania (17a) i (17c) jako wzory rekurencyjne można krok po kroku obliczyć przebieg błędu $\varepsilon(n)$ w układzie, czyli wyznaczyć rozwiązanie numeryczne równanie różnicowego, przy danym przebiegu $y_0(n)$. W tym celu należy w równaniu zamiast n podstawić kolejno wartości $-m, -(m-1), \dots, 0, 1, \dots$ itd. przyjmując, że $\varepsilon(n+m-1)$ i $y_0(n+m-1)$ są równe zero dla $n+m-1 < 0$, co oznacza, że układ dla czasów $n < 0$ miał pobudzenie równe zero.

Równanie różnicowe (17b) również wiąże między sobą $m+1$ kolejnych wartości ε_n i $y_{0,n}$, ponieważ jednak współczynniki $f_1 + g_1$ zależą od wszystkich wielkości $\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_{n+m-1}$ i również od ε_{n+m} , to z równania tego nie da się w sposób prosty obliczyć wartości ε_{n+m} gdy się zna wartości ε_{n+m-i} , $i = 1, 2, \dots, m$. Równanie (17b) w tym przypadku jest algebraicznym równaniem przestępnym względem niewiadomej ε_{n+m} i do rozwiązania jego tzn. do obliczenia ε_{n+m} za każdym razem trzeba stosować metody przybliżone, co jest bardzo uciążliwe ze względu na skomplikowaną budowę współczynników $f_1 + g_1$. Fakt, że nie znamy chwil $(1-\alpha\gamma_1)$, w których należy brać ciągłą funkcję $y_0(t)$ (gdyż $y_{0,i} = y_0(1-\alpha\gamma_1)$), praktycznie wyklucza obliczenie przebiegu ε_n w przypadku gdy funkcja $y_0(t)$ jest różna od stałej.

Obliczenie przebiegu ε_n znacznie się upraszcza w przypadku gdy czas trwania impulsu γ jest wielkością skwantowaną w poziomie tzn. zależność γ od ε dla impulsatora jest taka jak to przedstawiono na rys. 4, co często zachodzi dla impulsatorów z modulacją szerokości impulsu. W tym przypadku znając wartości ε_{n+m-1} dla $i = 1, 2, \dots, m$ obliczymy wartość ε_{n+m} w ten sposób, że podstawimy do współczynników równania różnicowego zamiast wielkości γ_{n+m} jedną z wartości γ_I (rysunek 4). Jeżeli obliczonej wielkości ε_{n+m} odpowiada wybrana



Rys. 4

wartość γ_I zgodnie z zależnością γ od ε , to wartości γ_I i ε_{n+m} zostały obliczone jeżeli nie odpowiada, to wybieramy nową wartość γ_I i przeprowadzamy ponownie obliczenie.

Do obliczenia w taki sposób rozwiązania numerycznego mogą być zastosowane matematyczne maszyny liczące. W prostszych przypadkach można to rozwiązanie obliczyć bez maszyn matematycznych (patrz przykłady).

Równanie różnicowe (17b) może być również wykorzystane do badania stabilności układu, za pomocą kryterium podanego przez autora w poprzednim artykule tego zeszytu.

Równanie różnicowe (17b) znacznie się upraszcza, gdy przyjmiemy założenie, że długość impulsu γ_1 zależy od sygnału błędny nie w chwili $(1-\alpha\gamma_1)$ lecz w chwili i . Otrzymujemy wtedy przybliżone równanie różnicowe, w którym $f_1 = a_1 = \text{const}$, g_1 pozostają bez zmiany i które posiada podobne własności jak równanie (17a) i (17c).

Równanie różnicowe (17a), (17b) i (17c) można wszystkie zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+m} + a_{1,n}\varepsilon_{n+m-1} + \dots + a_{m,n}\varepsilon_n = y_{0,n+m} + b_{1,n}y_{0,n+m-1} + \\ + \dots + b_{m,n}y_{0,n} \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie współczynniki $a_{i,n}$ i $b_{i,n}$ w zależności od układu są albo funkcjami zmiennych ε_{n+m-1} i $i = 0, 1, \dots, m$ albo też stałymi.

Niech

$$y_{0,n} = c \cdot 1(n), \quad \text{gdzie } c = \text{const.}$$

wtedy dla $n \geq m$ mamy

$$\varepsilon_{n+m} + a_{1,n}\varepsilon_{n+m-1} + \dots + a_{m,n}\varepsilon_n = [1 + b_{1,n} + \dots + b_{m,n}]c$$

Na podstawie wzorów (12a) i (12b) mamy:

$$1 + b_{1,n} + \dots + b_{m,n} = 0 \quad (12)$$

Zatem przebieg ε_n dla $n \geq m$ określa w tym przypadku równanie:

$$\varepsilon_{n+m} + a_{1,n}\varepsilon_{n+m-1} + \dots + a_{m,n}\varepsilon_n = 0 \quad (18)$$

Warunki początkowe ε_0^* , ε_1^* , ..., ε_{m-1}^* określimy przy tym z równania (17) podstawiając kolejno zamiast $n+m$ wartości $0, 1, 2, \dots, m-1$ i kładąc

$$\varepsilon_{n+m-i} = y_{0, n+m-i} = 0 \quad \text{dla } n+m-i < 0$$

$$y_{0, n+m-i} = c \quad \text{dla } n+m-i \geq 0$$

Rozumowanie takie można przeprowadzić dla każdej funkcji $y_{0, n}$ takiej że $y_{0, n} = \text{const}$ dla $n \geq n_0$.

Tak więc badanie stabilności układu sprowadza się do badania równania różnicowego (18).

Oczywiście w sposób podobny jak wyżej można otrzymać równanie zamkniętego układu regulacji impulsowej wiążące między sobą wielkość regulowaną y i wielkość zadaną y_0 . Na przykład takie równanie dla przypadku c ma postać:

$$\begin{aligned} y(n+m) + [a_1 + g_1^*] y(n+m-1) + \dots + [a_m + g_m^*] y(n) = \\ = g_1^* y_0(n+m-1) + g_2^* y_0(n+m-2) + \dots + g_m^* y_0(n) \end{aligned} \quad (19c)$$

Występująca we wszystkich powyższych równaniach i na schematach wielkość y_0 może być nie tylko wielkością zadaną ale może ona być również dowolną wielkością zakłócającą, działającą w węźle sumującym.

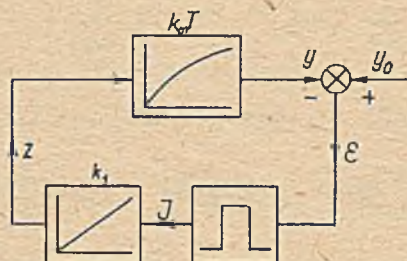
5. Przykłady

Obecnie zastosujemy wyprowadzone wzory do prostego układu regulacji składającego się z impulsatora, serwowatoru i obiektu inercyjnego pierwszego rzędu (rys. 5). Na przykładzie tym porównamy działanie tego układu w przypadku gdy występuje w nim:

- a) liniowy impulsator o modulowanej wysokości impulsów,
- c) impulsator o modulowanej szerokości i ustalonym początku impulsów.

Funkcja przejścia części ciągłej układu jest

$$K(p) = \frac{k}{p(1+pT)}$$



Rys. 5

gdzie $k = k_0 k_1 T_I$;

$$T = \frac{T_0}{T_I}$$

Przypadek a

Rozpatrzmy najpierw otwarty układ regulacji. Zgodnie z (15a) równanie różnicowe dla niego jest:

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = b_1 \varepsilon(n+1) + b_2 \varepsilon(n) \quad (20a)$$

gdzie współczynniki a_1 , a_2 , b_1 i b_2 obliczymy na podstawie wzorów (12a) i (16a). Mamy więc:

$$a_1 = -(1+D); \quad a_2 = D \quad \text{gdzie} \quad D = e^{-\frac{1}{T}} \quad (21a)$$

$$b_1 = k_I \left[\sum_{k=0}^1 B_k a_0 e^{Dk} \right] = k_I [B_0 a_0 + B_1 a_0]$$

$$B_0 = k\gamma; \quad B_1 = kT(1 - e^{-\frac{1}{T}}) = kT(1 - \beta); \quad a_0 = 1$$

gdzie $\beta = e^{-\frac{1}{T}}$.

Zatem

$$b_1 = k_I k \left[\gamma + T(1 - \beta)D \right] = k_I k \gamma \left[\gamma + T(1 - \beta)D \right] \frac{1}{\gamma} \quad (22a)$$

$$b_2 = k_I \sum_{k=0}^1 B_k \sum_{j=1}^2 a_{2-j} e^{p_k j} = k_I \sum_{k=0}^1 B_k (a_1 e^{p_k} + a_0 e^{2p_k}) =$$

$$= k_I k \left[-\gamma(1+D) + \gamma - T(1-\beta)(1+D)D + T(1-\beta)D^2 \right] =$$

$$= k_I k \left[-\gamma D - T(1-\beta)D \right] = k_I k \gamma D \left[(\beta-1)T - \gamma \right] \frac{1}{\gamma} \quad (23a)$$

Równanie różnicowe zamkniętego układu wiążące wielkość regulowaną y i wielkość zadaną y_0 ma postać:

$$\begin{aligned} y(n+2) + [a_1 + b_1]y(n+1) + [a_2 + b_2]y(n) &= \\ &= b_1 y_0(n+1) + b_2 y_0(n) \end{aligned} \quad (24a)$$

Jest to równanie różnicowe liniowe o stałych współczynnikach. Rozwiązanie tego równania, gdy znana jest funkcja $y_0(n)$ nie nastręcza żadnych trudności, gdyż sposób rozwiązywania liniowych równań różnicowych jest opracowany. Przebieg $y(n)$ przy znanej funkcji $y_0(n)$ możemy również znaleźć krok po kroku za pomocą metody rekurencyjnej.

Przypadek c

Równanie otwartego układu w tym przypadku ma postać:

$$y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = g_1^* \varepsilon(n+1) + g_2^* \varepsilon(n) \quad (20c)$$

gdzie a_1 i a_2 określają wzory (21a) a dla g_1^* i g_2^* na podstawie wzorów (16c) mamy:

$$\begin{aligned} g_1^* &= \left[\sum_{k=0}^1 B_{k,n+1}^* a_0 e^{p_k} \right] k_I A_{n+1} = \\ &= \left[B_{0,n+1}^* a_0 + B_{1,n+1}^* D \right] k_I \frac{A}{\gamma_{n+1}^*} \end{aligned}$$

$$B_{0,n+1}^* = k\gamma_{n+1}; \quad B_{1,n+1}^* = kT(1-\beta_{n+1});$$

$$\beta_{n+1} = e^{-\frac{\gamma_{n+1}}{T}}$$

gdzie γ_{n+1}^* i γ_{n+1} zależą od wielkości $\varepsilon(n+1)$

Zatem:

$$g_1^* = k_I k_A \left[\gamma_{n+1} + T(1-\beta_{n+1})D \right] \frac{1}{\gamma_{n+1}^*} \quad (22c)$$

$$g_2^* = \left[\sum_{k=0}^1 B_{k,n}^* \sum_{j=1}^2 a_{2-j} e^{p_k j} \right] k_I A_n =$$

$$= k_I A_n \sum_{k=0}^1 B_{k,n}^* (a_1 e^{p_k} + a_0 r^{2p_k}) =$$

$$= k_I k \frac{A}{\gamma_n^*} \left[-\gamma_n(1+D) + \gamma_n^{-T(1-\beta_n)}(1+D)D + T(1-\beta_n)D^2 \right]$$

Zatem:

$$g_2^* = k_I k AD \left[(\beta_n - 1)T - \gamma_n \right] \frac{1}{\gamma_n^*} \quad (23c)$$

gdzie β_n , γ_n i γ_n^* zależą teraz od wielkości $\varepsilon(n)$.

Zamknięty układ regulacji jest zatem opisany równaniem:

$$y(n+2) + (a_1 + g_1^*)y(n+1) + (a_2 + g_2^*)y(n) =$$

$$= g_1^* y_0(n+1) + g_2^* y_0(n) \quad (24c)$$

Jak widać współczynniki g_1^* i g_2^* tym się różnią od współczynników b_1 i b_2 ; że zamiast stałego iloczynu $k_I \gamma$ w przypadku a występuje stały iloczyn $k_I A$ w przypadku c, a zamiast stałych pozostałych wielkości γ w przypadku a - odpo-

wiednie zmienne wielkości γ_n i γ_{n+1} w przypadku c, można było zatem od razu napisać równanie różnicowe w przypadku c.

Dla porównania działania obu układów znajdziemy odpowiedź ich na skok jednostkowy wielkości zadanej $y_0(n)$, dla konkretnych parametrów obu układów. Niech parametry ciągłej części układu będą:

$$k = 6; \quad T_0 = 2 T_I;$$

Dane impulsatora a są:

$$k_I^a = 5; \quad \gamma = 0,2$$

Na podstawie wzorów (21a), (22a) i (23a) obliczamy współczynniki równania (20a):

$$a_1 = -1,6065; \quad a_2 = 0,6065; \quad b_1 = 2,17, \quad b_2 = 0,189.$$

Zatem równanie różnicowe (20a) ma postać:

$$\begin{aligned} y(n+2) + 0,5635 y(n+1) + 0,7955 y(n) = \\ = 2,17 y_0(n+1) + 0,189 y_0(n) \end{aligned} \quad (25a)$$

Podstawiając kolejno zamiast n wartości: $-2, -1, 0, 1, \dots$ itd. obliczamy kolejno $y(0), y(1), y(2), \dots$ itd. za pomocą metody rekurencyjnej, pamiętając o tym że:

$$y(n) = y_0(n) = 0 \quad \text{dla} \quad n < 0$$

i

$$y_0(n) = 1 \quad \text{dla} \quad n \geq 0$$

Obliczenie przebiegu $y(n)$ można przeprowadzić korzystając bezpośrednio z rozwiązania równania (25a), które przy $y_0(n) = 1(n)$ ma postać:

$$y(n) = 1 - 0,882^n \cos[n 108,45^\circ] + 1,063 \cdot 0,882^n \sin[n 108,45^\circ] \quad (26a)$$

W tabelicy 1a przedstawiono wynik obliczeń przebiegu $y(n)$, przy założeniu, że $y_0(n) = 1(t)$, dla kolejnych dwudziestu wartości n . Obliczenia te wykonano za pomocą metody rekurencyjnej przy pomocy suwaka logarytmicznego.

Tabela 1

Impulsator →	a	c	c		a	c	c
$y_0(n) =$	1(t)	1(t)	0,3.1(t)		1(t)	1(t)	0,3.1(t)
n	y(n)	y(n)	y(n)	n	y(n)	y(n)	y(n)
0	0	0	0	11	1,386	-1,918	0,409
1	2,17	1,266	0,622	12	1,016	-0,684	0,42
2	1,136	2,333	0,426	13	0,685	2,219	0,145
3	-0,009	1,649	-0,075	14	1,165	3,573	0,294
4	1,461	-0,729	0,355	15	1,158	2,267	0,42
5	1,543	-1,334	0,625	16	0,78	-0,651	0,225
6	0,326	0,421	0,121	17	0,998	-2,012	0,266
7	0,946	3,376	0,104	18	1,177	-0,713	0,375
8	1,567	4,237	0,552	19	0,904	2,196	0,269
9	0,722	2,635	0,325	20	0,913	3,551	0,272
10	0,707	-0,452	0,067				

Dla impulsatora c dobierzemy tak dane, aby przy tej samej wartości błędu wysyłał on impuls o tym samym polu co impulsator a. Musi być więc:

$$k_I^a \gamma = k_I^c A = 5,0,2 = 1 \quad (27)$$

Zakładamy zatem że

$$k_I^c = 1; \quad A = 1;$$

a część ciągła układu pozostaje bez zmiany.

Dla współczynników równania (20c) mamy teraz wzory:

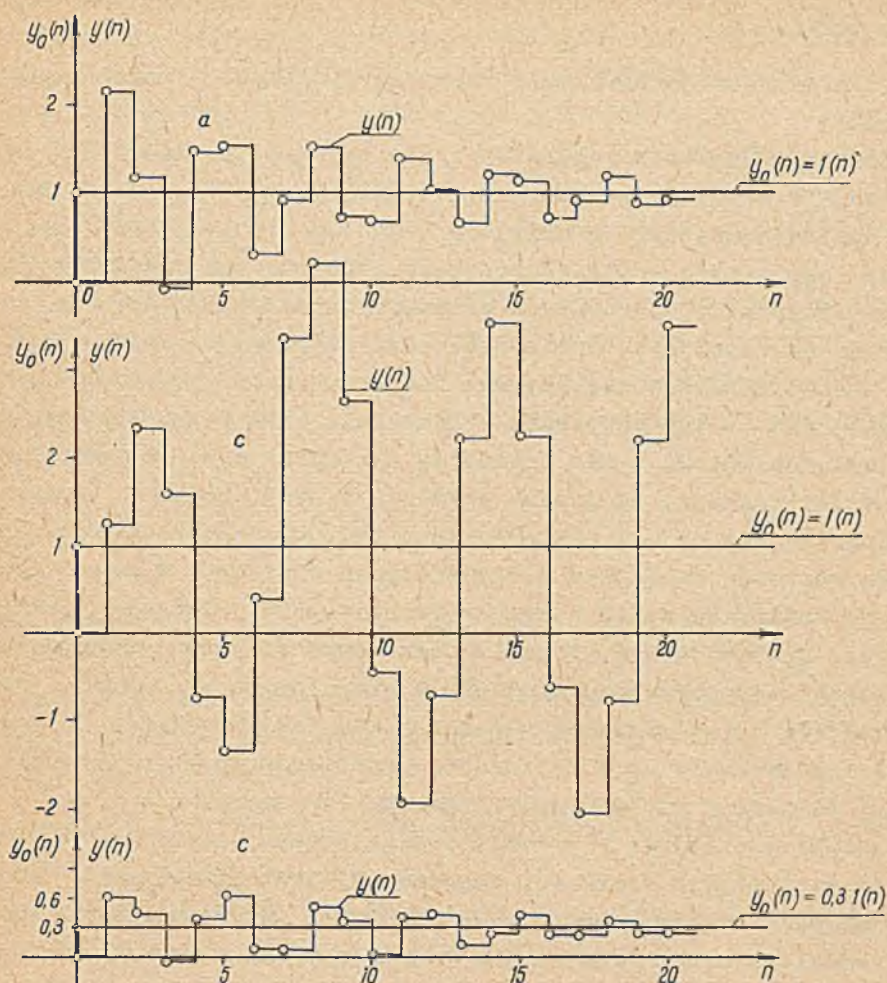
$$q_1^* = \frac{6}{\gamma_{n+1}^*} \left[\gamma_{n+1} + 1,213(1 - \beta_{n+1}) \right]; \quad q_2^* = \frac{3,939}{\gamma_n^*} \left[(\beta_n - 1)2 - \gamma_n \right]$$

Równanie (20c) jest teraz nieliniowe i przy jego rozwiązywaniu napotyka się na bardzo duże trudności, ze względu na brak metod rozwiązywania takich równań. Można jednak za pomocą metody rekurencyjnej wyliczyć kolejne wartości $y(n)$ określając w ten sposób rozwiązanie numeryczne przy danym $y_0(n)$.

W tabelicy 1c przedstawiono wynik obliczeń przebiegu $y(n)$ gdy $y_0(n) = 1(n)$, oraz gdy $y_0(n) = 0,3 \cdot 1(t)$, dla kolejnych dwudziestu wartości n .

Na rysunku 6 wykreślono przebiegi $y(n)$ na podstawie wykonanych obliczeń dla wszystkich trzech przypadków. Widać z nich wyraźnie że o ile układ z impulsatorem a jest stabilny to układ z impulsatorem c przy $y_0(n) = 1(n)$ jest niestabilny, pomimo tego, że parametry impulsatorów a i c spełniają zależność (27). Natomiast układ z impulsatorem c jest stabilny dla zaburzenia $y_0(n) = 0,3 \cdot 1(t)$.

Dla rozpatrywanego ciągłego układu zmiana impulsatora z impulsatora a na impulsator c o tym samym "powierzchniowym" współczynniku wzmocnienia doprowadza układ do niestabilnej pracy.



Rys. 6

6. Zakończenie

Z przeprowadzonych uprzednio rozważań wynikają następujące wnioski:

Jeżeli w układzie regulacji z nieliniowym impulsatorem informacja o stanie wielkości regulowanej jest pobierana w sposób periodyczny, tzn. w chwilach równo od siebie oddalonych, wtedy lewa strona równania różnicowego otwartego układu ma stałe współczynniki, a równanie różnicowe zamkniętego układu jest wzorem rekurencyjnym, z którego można obliczyć wartość funkcji w chwili następnej, gdy się zna jej wartości w chwilach poprzednich. W tym przypadku pomimo tego, że równanie różnicowe jest nieliniowe i nie potrafimy określić jego rozwiązania w postaci funkcji, to jednak przebieg funkcji można znaleźć posługując się metodą rekurencyjną, tzn. obliczając krok po kroku wartości funkcji w poszczególnych chwilach. W ten sposób potrafimy określić rozwiązanie numeryczne równania różnicowego. Występująca w równaniu różnicowym wielkość regulowana jest dla tego przypadku wielkością skwantowaną w czasie. Wyproawdzone tutaj równania różnicowe dla takich układów mogą mieć zastosowanie przy obliczaniu przebiegów wielkości regulowanej za pomocą matematycznych maszyn liczących.

Jeżeli w układzie regulacji z nieliniowym impulsatorem informacja o stanie wielkości regulowanej jest pobierana w sposób nieperiodyczny, tzn. w chwilach które nie są równo od siebie oddalone wtedy lewa strona równania różnicowego m -tego rzędu dla otwartego układu posiada współczynniki które są funkcjami wielkości regulowanej w $m+1$ kolejnych chwilach. Równanie różnicowe zamkniętego układu regulacji w tym przypadku wiąże między sobą $m+1$ kolejnych wartości regulowanej wielkości, a jego współczynniki zależą od tych samych $m+1$ wartości, nie da się zatem w sposób prosty obliczyć wartość funkcji w chwili następnej, gdy się zna jej wartości w chwilach poprzednich. Równanie różnicowe jest względem tej wartości równaniem algebraicznym przestępnym. Równania różnicowe w tym przypadku mogą być podstawą do badania stabilności układu. W o-

gólnym przypadku są to równania dosyć skomplikowane. Przybliżone równania różnicowe otrzymujemy zakładając, że pobieranie informacji jest periodyczne, a impulsy są wysyłane w taki sposób jak w rzeczywistości. Dokładność przybliżonego równania jest tym lepsza im mniejsze jest α i im większe są stałe czasowe części liniowej układu. Przybliżone równania posiadają takie własności jak równania różnicowe układów z periodycznym pobieraniem informacji.

W pracy nie rozpatrzono wszystkich układów regulacji z liniową częścią ciągłą i nieliniowym impulsatorem o prostokątnym kształcie impulsu, jednak zastosowany tutaj sposób przy wyrowadzeniu równań różnicowych może być zastosowany również do innych układów tego typu.

LITERATURA

- [1] Jury E.J.: "Sowremennyye dostizhenia w oblasti impulsnykh i cifrowykh sistem regulirovaniya". Prace i kongresu IFAC Moskwa 1961.
- [2] Cypkin J.Z.: "Teoriya impulsnykh sistem". Fizmatgiz Moskwa 1958.
- [3] Praca zbiorowa pt. "Analiza i synteza układow regulacji impulsowej i cyfrowej" PAN - Warszawa 1962.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 16.III.1964 r.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ АНАЛИЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИМПУЛЬСНЫМ
РЕГУЛЯТОРОМ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ВЫХОДНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

Р е з ю м е

Одним из многих методов анализа нелинейных импульсных систем является метод разностных уравнений. Основной точкой этого метода является составление разностного уравнения для исследуемой системы.

В статье показан способ составления разностных уравнений для систем управления включающих нелинейный импульсный регулятор с прямоугольными выходными импульсами

- а) с модуляцией высоты импульсов,
- б) с модуляцией ширины и с переменным началом импульсов,
- в) с модуляцией ширины и с постоянным началом импульсов.

С помощью предложенного метода выведено формулы, определяющие коэффициенты разностных уравнений для вышеприведенных случаев.

Дан также метод численного решения полученных нелинейных разностных уравнений для произвольного типа возмущения.

Полученные разностные уравнения могут быть применены для исследования устойчивости системы с помощью достаточного условия устойчивости предложенного автором (см. предыдущая статья).

AN APPLICATION OF THE DIFFERENCE EQUATION METHOD TO CONTROL SYSTEMS WITH A NONLINEAR IMPULSATOR GENERATING RECTANGULAR PULSES

Summary

Nonlinear sampled-data systems can be analyzed by the difference equation method. The method starts by formulating the difference equation for the system to be analyzed. The paper presents a method for getting the difference equations for control systems with a nonlinear impulsator generating rectangular pulses

- a) with amplitude modulation,
- b) with width modulation and a varying starting point,
- c) with width modulation and a fixed starting point.

Using this method the formulae for the coefficients of the difference equations for the cases mentioned above have been obtained. A method for getting numerical solutions of these difference equations for any type of forcing function has been presented as well. The obtained difference equations can be used for the stability analysis based on the sufficient stability condition formulated by the author. This condition is presented in the previous article.