ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965

Seria: AUTOMATYKA z. 6 Nr kol. 132

ANTONI NIEDERLIŃSKI
Katedra Napędu Elektrycznego*

O PEWNEJ SYMETRII MACIERZY UKŁADU DYNAMICZNEGO UMOŻLIWIAJĄCEJ ANALIZĘ STABILNOŚCI ZA POMOCĄ UOGÓLNIONEGO KRYTERIUM HURWITZA

Streszczenie. Zdefiniowano macierz niby-skośnie-symetryczną (nss) i podano 9 twierdzeń określających jej właściwości. Wykazano, że w przypadku analizy stabilności układów dynamicznych opisanych macierzą nss można badać wartości własne stowarzyszonej z nią macierzy o elementach zespolonych i stopniu dwukrotnie mniejszym od stopnia macierzy nss. Zaproponowano kryterium umożliwiające tę analizę. Podano przykład układu dynamicznego opisanego macierzą nss.

1. Definicja macierzy niby-skośnie-symetrycznej

1.1. Macierzą niby-skośnie-symetryczną (nss) typu I nazywa się macierz kwadratową stopnia 2n dającą się przedstawić w postaci:

$$A_I = \begin{array}{|c|c|} \hline P & Q \\ \hline -Q & P \\ \hline \end{array}$$

gdzie P i Q są podmacierzami kwadratowymi stopnia n.

*) Obecnie: Katedra Automatyki Procesów Przemysłowych

1.2. Macierzą niby-skośnie-symetryczną (nss) typu II nazywa się macierz kwadratową stopnia 2n dającą się przedstawić w postaci:

$$A_{II} = \begin{array}{|c|c|} \hline A_{I\,11} & A_{I\,12} \\ \hline A_{I\,21} & A_{I\,22} \\ \hline \end{array}$$

gdzie A_{Iij} są podmacierzami nss typu I.

Przykłady: macierz

$$A_{I} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & b & -j & -k \\ \hline d & e & -m & -n \\ \hline j & k & a & b \\ \hline m & n & d & e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline P & Q \\ \hline -Q & P \\ \hline \end{array}$$

jest macierzą nss typu I gdyż zapisana przy pomocy podmacierzy kwadratowych wykazuje symetrię wymaganą w definicji 1.1.

Macierz

$$A_{II} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & -j & -b & -k \\ \hline j & a & k & -b \\ \hline -d & -m & e & -n \\ \hline m & -d & n & e \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline A_{I\,11} & A_{I\,12} \\ \hline A_{I\,21} & A_{I\,22} \\ \hline \end{array}$$

jest macierzą nss typu II, gdyż można ją zapisać za pomocą podmacierzy będących macierzami nss typu I.

2. Twierdzenie I

Dla każdej macierzy nss typu I istnieje podobna do niej macierz nss typu II.

Dowód:

Niech będzie dana macierz nss typu I:

$$A_I = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline P & C & Q & D \\ \hline L & T & M & U \\ \hline -Q & -D & P & C \\ \hline -M & -U & L & T \\ \hline \end{array}$$

Zmieniając drugą kolumnę macierzy z trzecią kolumną, a drugi wiersz macierzy z trzecim wierszem, otrzymuje się macierz

$$A_{II} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline P & Q & C & D \\ \hline -Q & P & -D & C \\ \hline L & M & T & U \\ \hline -M & L & -U & T \\ \hline \end{array}$$

Macierze A_I i A_{II} posiadają następujące wspólne cechy:

a) wyznaczniki tych macierze są sobie równe

$$\det A_I = \det A_{II}$$

b) ślady tych macierzy są sobie równe

$$s\{A_I\} = s\{A_{II}\}$$

A więc macierze A_I i A_{II} są macierzami podobnymi.

3. Wniosek z tw. I:

Dla każdej macierzy nss typu I można zawsze znaleźć macierz nss typu II tego samego stopnia, posiadającą te same wartości własne co macierz ss typu I.

Dla każdej macierzy nss typu II można zawsze znaleźć macierz nss typu I tego samego stopnia, posiadającą te same wartości własne co macierz nss typu II.

4. Twierdzenie II

Suma dwóch macierzy nss typu I stopnia 2n jest również macierzą nss typu I stopnia 2n.

Dowód:

Niech A_I i B_I będą macierzami nss typu I stopnia 2n.

$$A_I = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline P_1 & C_1 & Q_1 & D_1 \\ \hline L_1 & T_1 & M_1 & U_1 \\ \hline -Q_1 & -D_1 & P_1 & C_1 \\ \hline -M_1 & -U_1 & L_1 & T_1 \\ \hline \end{array} \qquad B_I = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline P_2 & C_2 & Q_2 & D_2 \\ \hline L_2 & T_2 & M_2 & U_2 \\ \hline -Q_2 & -D_2 & P_2 & C_2 \\ \hline -M_2 & -U_2 & L_2 & T_2 \\ \hline \end{array}$$

Suma tych macierzy

$$A_I + B_I = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline P_1 + P_2 & C_1 + C_2 & Q_1 + Q_2 & D_1 + D_2 \\ \hline L_1 + L_2 & T_1 + T_2 & M_1 + M_2 & U_1 + U_2 \\ \hline -Q_1 - Q_2 & -D_1 - D_2 & P_1 + P_2 & C_1 + C_2 \\ \hline -M_1 - M_2 & -U_1 - U_2 & L_1 + L_2 & T_1 + T_2 \\ \hline \end{array}$$

jest zgodnie z definicją macierzą nss typu I.

5. Twierdzenie III

Suma dwóch macierzy nss typu II stopnia 2n jest również macierzą nss typu II stopnia 2n.
Dowód: jak powyżej.

6. Twierdzenie IV

Iloczyn dwóch macierzy nss typu I stopnia 2n daje macierz nss typu I stopnia 2n.
Dowód:

$$\begin{bmatrix} P_1 & Q_1 \\ -Q_1 & P_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_2 & Q_2 \\ -Q_2 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1P_2 - Q_1Q_2 & P_1Q_2 + Q_1P_2 \\ -P_1Q_2 - Q_1P_2 & P_1P_2 - Q_1Q_2 \end{bmatrix}$$

Z twierdzenia IV i II wynika

7. Twierdzenie V

Iloczyn dwóch macierzy nss typu II stopnia 2n daje macierz nss typu II stopnia 2n.

8. Twierdzenie VI

Macierz odwrotna względem macierzy nss typu I jest również macierzą nss typu I.
Dowód:
Rozpatrzmy macierz kwadratową stopnia 2n:

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

gdzie A, B, C i D są podmacierzami kwadratowymi stopnia n.

Odpowiednia macierz odwrotna ma postać:

$$R^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline \left[A - BD^{-1}C\right]^{-1} & -D^{-1}C\left[A - BD^{-1}C\right]^{-1} \\ \hline -A^{-1}B\left[D - CA^{-1}B\right]^{-1} & \left[D - CA^{-1}B\right]^{-1} \\ \hline \end{array}$$

Niech macierz R będzie macierzą nss typu I, a więc $A = D$ i $C = -B$.
Wówczas

$$R^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline \left[A + BA^{-1}B\right]^{-1} & A^{-1}B\left[A + BA^{-1}B\right]^{-1} \\ \hline -A^{-1}B\left[A + BA^{-1}B\right]^{-1} & \left[A + BA^{-1}B\right]^{-1} \\ \hline \end{array}$$

jest również macierzą nss typu I.

9. Twierdzenie VII

Macierz odwrotna względem macierzy nss typu II jest również macierzą nss typu II.
Dowód: jak powyżej.

10. Twierdzenie VIII

Macierz nss dowolnego typu posiada tylko zespolone sprzężone wartości własne.

Dowód zostanie przeprowadzony metodą indukcji matematycznej

a) rozpatrzmy macierz nss stopnia 2:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline p & q \\ \hline -q & p \\ \hline \end{array}$$

Równaniem charakterystycznym tej macierzy jest

$$\begin{vmatrix} \mu-p & p \\ -q & \mu-p \end{vmatrix} = 0$$

a stąd wartości własne

$$\mu_1 = p - jq$$
$$\mu_2 = p - jq$$

a więc dla $n = 1$ twierdzenie jest udowodnione.

b) załóżmy, że twierdzenie jest słuszne dla macierzy nss stopnia 2N. Rozpatrzmy równanie liniowe którego macierz przekształcenia jest macierzą nss typu II stopnia 4N:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

gdzie A_{ij} są macierzami nss typu I stopnia 2N.
Eliminując z równania (1) zmienne X_2 otrzymuje się równanie:

$$Y_1 - A_{12} A_{22}^{-1} Y_2 = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) X_1 \tag{2}$$

którego macierz przekształcenia jest macierzą nss typu I stopnia 2n. A więc wartości własne macierzy przekształcenia równania (2) odpowiadające zmiennym X_1 są wielkościami zespolonymi sprzężonymi. Eliminując z równania (1) zmienne X_1 otrzymuje się równanie:

$$Y_2 - A_{21} A_{11}^{-1} Y_1 = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) X_2 \tag{3}$$

14. Twierdzenie IX

Wartości własne macierzy stowarzyszonej z daną macierzą nss stanowią podzbiór liczb zespolonych niesprzężonych zbioru wartości własnych macierzy nss.

Dowód:

a) Rozpatrzmy macierz nss stopnia 2 (n = 1):

$$\begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$$

wartości własne tej macierzy są równe:

$$\mu_1 = p - jq$$

$$\mu_2 = p + jq$$

Macierzą stowarzyszoną z macierzą (1) jest macierz stopnia 1 (skalar)

$$\begin{bmatrix} p - jq \end{bmatrix}$$

o wartości własnej

$$\mu = p - jq$$

czyli dla n = 1 twierdzenie zostało udowodnione.

b) zakłada się, że twierdzenie jest słuszne dla n = N. Rozpatrzmy równanie liniowe, którego macierz przekształcenia jest macierzą nss typu II stopnia 4N:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{I11} & A_{I12} \\ A_{I21} & A_{I22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

gdzie A_{Iij} są macierzami nss typu I stopnia 2N.

Odpowiednie równanie liniowe stowarzyszone stopnia 2N o współczynnikach zespolonych ma postać:

$$\begin{bmatrix} Y_{1S} \\ Y_{2S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{I11S} & A_{I12S} \\ A_{I21S} & A_{I22S} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{1S} \\ X_{2S} \end{bmatrix}$$

Eliminując z równania (3) zmienne X_2 otrzymuje się równanie stopnia 2N:

$$Y_1 - A_{I12} A_{I22} Y_2 = (A_{I11} - A_{I12} A_{I22}^{-1} A_{I21}) X_1 \tag{5}$$

i odpowiadające mu równanie stowarzyszone stopnia N:

$$Y_{1S} - A_{I12S} A_{I22S}^{-1} Y_{2S} = (A_{I11S} - A_{I12S} A_{I22S}^{-1} A_{I21S}) X_{1S} \tag{6}$$

Zgodnie z założeniem wartości własne macierzy stowarzyszonej stopnia N

$$A_{I11S} - A_{I12S} A_{I22S}^{-1} A_{I21S}$$

stanowią podzbiór liczb zespolonych niesprzężonych zbioru wartości własnych macierzy nss stopnia 2N:

$$A_{I11} - A_{I12} A_{I22}^{-1} A_{I21}$$

Eliminując z równania (3) zmienne X_1 otrzymuje się równanie stopnia 2N:

$$Y_2 - A_{I21} A_{I11}^{-1} Y_1 = (A_{I22} - A_{I21} A_{I11}^{-1} A_{I12}) X_2 \tag{7}$$

i odpowiadające mu równanie stowarzyszone stopnia N:

$$Y_{2S} - A_{I21S} A^{-1}_{I11S} Y_{1S} = (A_{I22S} - A_{I21S} A^{-1}_{I11S} A_{I12S}) X_{2S} \quad (8)$$

Zgodnie z założeniem wartości własne macierzy stowarzyszonej stopnia N:

$$A_{I22S} - A_{I21S} A^{-1}_{I11S} A_{I12S}$$

stanowią podzbiór liczb zespolonych niesprzężonych zbioru wartości własnych macierzy nss stopnia 2N:

$$A_{I22} - A_{I21} A^{-1}_{I11} A_{I12S}$$

Ponieważ wymienione dwa zbiory wartości własnych macierzy nss stopnia 2N zawierają wszystkie wartości własne macierzy nss typu II stopnia 4N z równania (3), a wymienione dwa zbiory wartości własnych macierzy stowarzyszonych stopnia N zawierają wszystkie wartości własne macierzy stowarzyszonej stopnia 2N z równania (4), stąd wartości własne macierzy stowarzyszonej stopnia 2N z równania (4):

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A_{I11S} & A_{I12S} \\ \hline A_{I21S} & A_{I22S} \\ \hline \end{array}$$

stanowią podzbiór liczb zespolonych niesprzężonych zbioru wartości własnych macierzy nss stopnia 4N z równania (3):

$$\begin{array}{|c|c|}\hline A_{I11} & A_{I12} \\ \hline A_{I21} & A_{I22} \\ \hline \end{array}$$

Na mocy twierdzenia o podobieństwie macierzy nss typu I i II powyżej udowodnione twierdzenie jest również słuszne dla macierzy nss typu I.

15. Wniosek z twierdzenia IX

Wartości własne macierzy nss i macierzy z nią stowarzyszonej posiadają te same części rzeczywiste. Stąd możliwość analizy stabilności układu dynamicznego opisanego macierzą nss stopnia 2n, polegająca na znalezieniu odpowiedniej macierzy stowarzyszonej stopnia n (odpowiadającej o połowę mniejszemu równaniu różniczkowemu o współczynnikach zespolonych) i zastosowaniu kryterium będącego uogólnieniem kryterium Hurwitza dla przypadku równania charakterystycznego o współczynnikach zespolonych.

16. Uogólnione kryterium Hurwitza

W celu określenia znaków części rzeczywistych pierwiastków wielomianu o współczynnikach zespolonych można posłużyć się następującym kryterium wynikającym ze znanego twierdzenia (por. Gantmacher, Mišina-Proskurjakov).

Niech $F(p)$ jest wielomianem o współczynnikach zespolonych. Podstawiając $p = jy$ otrzymuje się

$$F(jy) = c_0y^n + c_1y^{n-1} + \dots + c_n + j(d_0y^n + d_1y^{n-1} + \dots + d_n)$$

Jeżeli $d_0 = 0$ należy wielomian $F(jy)$ pomnożyć przez j, zapisując rezultat również w postaci:

$$jF(jy) = c_0y^n + c_1y^{n-1} + \dots + c_n + j(d_0y^n + d_1y^{n-1} + \dots + d_n)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym by wszystkie pierwiastki wielomianu $F(p)$ miały części rzeczywiste ujemne jest by minory $\nabla_2, \nabla_4, \dots \nabla_{2n}$ znajdujące się w lewym górnym ro-

gu wyznacznika A utw rzonego z współczynników wielomianu F(jy) (gdy $d_0 \neq 0$ dla F(jy)) lub jF(jy) (gdy $d_0 = 0$ dla F(jy)) były tego samego znaku. Wyznacznik A stopnia 2n ma postać:

$$A = \begin{vmatrix} d_0 & d_1 & \dots & d_n & 0 & \dots & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_0 & \dots & d_{n-1} & d_n & \dots & 0 \\ 0 & c_0 & \dots & c_{n-1} & c_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

17. Przykład układu dynamicznego opisanego macierzą nss

Rozpatrzmy uogólnioną maszynę elektryczną (por. Kron) przy założeniu magnetycznej i elektrycznej symetrii osi podłużnej i poprzecznej. Równanie tej maszyny przy założeniu stałości parametrów ma postać:

$$\begin{bmatrix} U_{ds} \\ U_{dr} \\ U_{qs} \\ U_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + pL_s & pM & & \\ pM & r_r + pL_r & M\omega & L_r\omega \\ & & r_s + pL_s & pM \\ -M\omega & -L_r\omega & pM & r_s + pL_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{dr} \\ i_{qs} \\ i_{qr} \end{bmatrix}$$

gdzie indeksem "d" oznaczono wielkości w osi podłużnej maszyny, indeksem "q" wielkości w osi poprzecznej maszyny, indeksem "s" wielkości stojana a indeksem "r" wielkości wirnika, $p = d/dt$, U - chwilowa wartość napięcia, i - chwilowa wartość prądu, ω = const - prędkość obrotowa maszyny.

Odpowiednie równanie stowarzyszone ma postać:

$$\begin{bmatrix} U_{ds}+jU_{qs} \\ U_{dr}+jU_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s + pL_s & pM \\ M(p - j\omega) & r_r + L_r(p - j\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{ds}+ji_{qs} \\ i_{dr}+ji_{qr} \end{bmatrix}$$

Maszynami elektrycznymi magnetycznie i elektrycznie symetrycznymi dającymi się sprowadzić do maszyny uogólnionej opisanej macierzą nss są np. następujące maszyny: maszyna synchroniczna niejawnobiegunowa, maszyna asynchroniczna jedno- i dwuklatkowa, maszyna asynchroniczna pierścieniowa, silnik Schrage, przesuwnik fazowy Scherbiusa. Również pewne układy tych maszyn można opisać macierzami nss.

Przedmiotem analizy stabilności w oparciu o uogólnione kryterium Hurwitza mogą być w rozpatrywanym przykładzie wyłącznie elektryczne przebiegi przejściowe przy ω = const. Zawężoną w ten sposób analizę stabilności przeprowadza się:

- dla układów generator - sieć,
- dla pewnych układów zawierających silniki wówczas, gdy mimo ograniczenia wywołanego założeniem stałości prędkości obrotowej dochodzi się do pewnych ciekawych z praktycznego punktu widzenia wyników. Należy tu przede wszystkim wymienić zagadnienie analizy samowzbudzenia się maszyn elektrycznych prądu zmiennego, włączonych do sieci poprzez kondensator. Zjawisko samowzbudzenia w wymienionym przypadku można wykryć tylko na podstawie analizy stabilności elektrycznych przebiegów przejściowych. W poz. [6] spisu literatury autor zastosował uogólnione kryterium Hurwitza do analizy stabilności przebiegów elektrycznych w silniku asynchronicznym załączonym do sieci poprzez kondensator.

W zakończeniu autor pragnie wyrazić podziękowania za życzliwą krytykę i cenne sugestie panu prof. Stefanowi Węgrzynowi.

LITERATURA

[1] Beckenbach E.F.: "Nowoczesna matematyka dla inżynierów"PWN Warszawa 1962.

[2] Cholewicki T.: "Macierzowa analiza obwodów liniowych" PWN, Warszawa 1958.

[3] Gantmacher F.Ja.: "Teorija matric", Gostechizdat, Moskwa 1953.

[4] Kron G.: "The Applications of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery", General Electric Review, April/1935 - October/1938.

[5] Mišina A.P., Proskurjakov I.V.: "Vysšaja algebra", Fizmatgiz, Moskwa 1962.

[6] Niederliński A.: "O zastosowaniu pewnego kryterium algebraicznego do analizy stabilności przebiegów elektrycznych w układach elektromechanicznych opisanych przestrzenno-czasowymi transmitancjami operatorowymi". Zeszyty Naukowe "Elektryka", 19/1964.

[7] Zurmühl R.: "Matrizen und ihre technische Anwendungen", Springer Verlag, Berlin 1961.

[8] Von Weiss A.: "Einführung in die Matrizenrechnung zur Anwendung in der Elektrotechnik" Oldenbourg Verlag, München 1961.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 24.1.1964 r.

О НЕКОТОРОЙ СИММЕТРИИ МАТРИЦЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО КРИТЕРИЯ ГУРВИЦА

Р е з ю м е

Дано определение квази-косо- симметрической матрицы, а также приведено 9 теорем, определяющих ее свойства. Доказано, что для квази-косо-симметрических матриц свойство квази-косо - симметрии сохраняется при сложении, умножении, а также при получении обратной матрицы. Доказано также, что у квази-косо-симметрической матрицы имеются только комплексно-сопряженные собственные числа. Для произвольной квази-косо-симметрической матрицы порядка 2n определено присоединенную матрицу порядка n с комплексными элементами. Констатировано, что собственные числа присоединенной матрицы составляют подмножество комплексных несопряженных чисел из множества собственных чисел соответствующей квази-косо--симметрической матрицы. Отсюда вытекает возможность исследования устойчивости динамической системы, описывающейся с помощью квази-косо-симметрической матрицы порядка 2n, заключающейся в переходе к присоединенной матрице порядка n В дальнейшем устойчивость исследуется на основе предложенного критерия, которое является обобщением известного критерия устойчивости Гурвица для случая характерного уравнения с комплексными коэффициентами. Представлено пример динамической системы, описывающейся с помощью квази-косо-симметрической матрицы

ON A SYMMETRY OF THE DYNAMICAL SYSTEM MATRIX WHICH ENABLES THE STABILITY ANALYSIS BY MEANS OF THE GENERELIZED HURWITZ CRITERION

Summary

A quasi-skew-symmetric matrix has been defined and 9 theorems concerning its properties have been presented. It has been shown that the quasi-skew-symmetric form of a matrix remains invariant by summation, multiplication and inversion of quasi-skew-symmetric matrices. It has been proved that a quasi-skew-symmetric matrix has only complex conjugate characteristic roots. To every quasi-skew-symmetric matrix of order 2n an associated matrix of order n with complex elements has been defined. It has been proved that the characteristic roots of the associated matrix constitute a complex nonconjugate subset of the set of complex conjugate characteristic roots of the original matrix. Hence it is possible to analys the stability of a dynamical system described with a quasi-skew-symmetric matrix of order 2n using as a starting point a proper associated matrix of order n. A criterion for that purpose has been proposed. The criterion is a generalization of the Hurwitz stability criterion for a characteristic equation with complex coefficients. An example of a dynamical system described with a quasi-skew-symmetric matrix has been presented.