ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1965

Seria: AUTOMATYKA z. 6 Nr kol. 132

ZDZISŁAW POGODA
Katedra Teorii Regulacji

SYNTEZA FILTRÓW OPTYMALNYCH DLA PRZYPADKU ISTNIENIA SKŁADOWEJ ZDETERMINOWANEJ

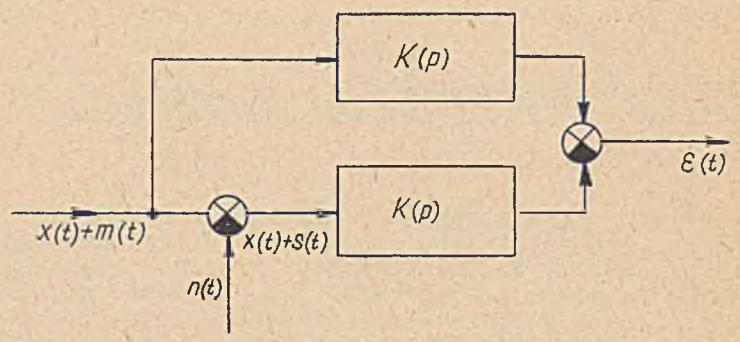
Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę syntezy filtru optymalnego w przypadku gdy użyteczny sygnał wejściowy posiada składową stochastyczną i zdeterminowaną, na które nałożony jest szum o charakterze stochastycznym. Problem rozwiązywany jest za pomocą metody wariacyjnej przy dodatkowym warunku minimum całki błędu zdeterminowanego z wagą, która jest nieoznaczonym współczynnikiem Lagrange'a. Wykazano, że warunki minimum błędu średniokwadratowego i minimum całki błędu zdeterminowanego są na ogół sprzeczne.

1. Wstęp

Będziemy zakładać, że sygnał sterujący, działający na wejściu układu jest sumą składowej o charakterze stochastycznym $m(t)$ o znanej funkcji korelacji $R_m(\tau)$ i gęstości widmowej $S_m(\omega)$ oraz składowej zdeterminowanej, regularnej $x(t)$ o znanym przebiegu czasowym. Ponadto, na wejściu działa również zakłócenie o charakterze stochastycznym $n(t)$ o gęstości widmowej $S_n(\omega)$. Zadaniem filtru jest możliwie dokładne wyeliminowanie zakłócenia $n(t)$ oraz przekształcenie sygnału sterującego zgodnie z operatorem $H(p)$. Układ modelowy pozwalający obliczyć błąd przedstawiony jest na rys. 1.

Z rys. 1 wynika, że błąd $\varepsilon(t)$ jest sumą dwóch składowych; składowej stochastycznej, pochodzącej od niedoskonałego odfiltrowania zakłócenia $n(t)$ i składowej regularnej, pochodzącej od niedoskonałego przekształcenia sygnału regularnego $x(t)$.

W przypadku układów liniowych, obydwie składowe błędu są od siebie niezależne i korzystając z zasady superpozycji można je obliczać niezależnie od siebie.



Rys. 1. Układ modelowy służący do obliczenia błędu

Za kryterium optymalności względem składowej statystycznej przyjmiemy minimum błędu średniokwadratowego $\overline{\varepsilon^2_{st}}$. Minimum to musi być wyznaczone przy dodatkowym warunku izoparametrycznym: ograniczonej wartości całki z kwadratu błędu dla składowej regularnej J_ε. Zagadnienie to rozwiążemy metodą nieoznaczonych współczynników Lagrange'a. Funkcjonał podlegający minimalizacji można więc zapisać w następujący sposób:

$$M = \overline{\varepsilon^2_{st}} + \varrho\, J_\varepsilon, \tag{1}$$

przy dodatkowym ograniczeniu

$$J_\varepsilon \leqslant \xi. \tag{2}$$

Należy zaznaczyć, że podobna metoda była stosowana w pracy [1] do obliczania filtrów z ograniczonym pasmem przenoszenia i ograniczających zjawisko nasycenia. Obydwa składniki funkcjonału (1) zależą od nieznanego współczynnika Lagrange'a ϱ i funkcji przejścia filtru. Przyrównując wariację tego funkcjo-

nału do zera, możemy więc znaleźć funkcję przejścia filtru jako funkcję współczynnika Lagrange'a ϱ. Podstawiając to wyrażenie na funkcję przejścia do warunku (2) wyznaczamy dopuszczalny zakres zmian współczynnika ϱ, w którym spełniona jest nierówność (2). Następnie obliczamy błąd średniokwadratowy i wybieramy taką wartość współczynnika ϱ_1 leżącą w poprzednio znalezionym przedziale, aby wartość $\overline{\varepsilon^2_{st}}$ była najmniejsza.

2. Obliczenie optymalnej funkcji przejścia

Obliczenie błędu średniokwadratowego występującego w funkcjonale nie różni się niczym od analogicznego problemu w klasycznej teorii Wienera.

W dziedzinie zespolonej można błąd ten wyrazić wzorem:

$$\overline{\varepsilon^2_{st}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon \, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H\bar{H}S_m - K\bar{H}S_m - \bar{K}HS_m - K\bar{K}S_s\right] d\omega \qquad (3)$$

gdzie S_m - gęstość widmowa składowej stochatycznej sygnału sterującego a S_s - gęstość widmowa sumy obydwu sygnałów statystycznych; sterującego i zakłócenia.

W przypadku braku korelacji między nimi

$$S_s = S_m + S_n \qquad (4)$$

Jeśli $\varepsilon_r(t)$ - składowa regularna błędu, a $E_r(j\omega)$ jej transformacja Fouriera, to całka z kwadratu błędu regularnego może być, obliczona za pomocą twierdzenia Parsevala

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_r\bar{E}_r \, d\omega, \qquad (5)$$

gdzie $\bar{E}_r(j\omega) = E_r(-j\omega)$.

Na podstawie rys. 1 możemy napisać

$$E_r = (H - K)X, \tag{6}$$

gdzie $X(j\omega)$ - transformacja Fouriera składowej regularnej sygnału sterującego. Wobec tego

$$E_r\bar{E}_r = (H-K)(\bar{H}-\bar{K})X\bar{X}. \tag{7}$$

Podstawiając (3) i (5) do wzoru (1), znajdujemy

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_\varepsilon + \varrho E_r\bar{E}_r\right]d\omega. \tag{8}$$

Uwzględniając (3) i (7) oraz wykonując wariację funkcjonału (8) względem niewiadomej funkcji K, otrzymamy

$$\delta M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(Q + Q_1)\delta K + (\bar{Q} + \bar{Q}_1)\delta\bar{K}\right]d\omega, \tag{9}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} Q &= \bar{K}S_s - \bar{H}S_m, \\ Q_1 &= \varrho(\bar{K}-\bar{H})X\bar{X}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Jak zostało pokazane w pracy [2], wariacja ta będzie miała wartość zero, jeśli funkcja $\bar{Q} + \bar{Q}_1$ będzie posiadała bieguny tylko w prawnej półpłaszczyźnie (dla $p = j\omega$).
Minimum błędu średniokwadratowego przy ograniczonej całce z kwadratu błędu regularnego daje więc taka funkcja przejścia K, dla której wyrażenie

$$K(S_s + \varrho X\bar{X}) - H(S_m + \varrho X\bar{X}) = \bar{Q} + \bar{Q}_1 \tag{11}$$

posiada bieguny tylko w prawej półpłaszczyźnie. Z bilansu biegunów otrzymujemy stąd

$$K = \frac{1}{\left[S_s + \varrho X\bar{X}\right]^-} \left[\frac{H(S_m + \varrho X\bar{X})}{\left[S_s + \varrho X\bar{X}\right]^+}\right]_- , \tag{12}$$

gdzie znaki "+" lub "-" u góry oznaczają rozkład na czynniki a u dołu na składniki posiadające odpowiednio bieguny tylko w prawej albo tylko w lewej półpłaszczyźnie. Wzór (12) nadaje się tylko do obliczania optymalnej funkcji przejścia przy dowolnej strukturze filtru. Jednak metodą podaną w [2] łatwo go uogólnić na przypadek minimalno-fazowej części zadanej.
Po obliczeniu funkcji przejścia zależnej od parametru ϱ można za pomocą równania (6) wyznaczyć błąd regularny układu a następnie całkę z kwadratu błędu (równanie (5)). Całkę (5) łatwo obliczyć za pomocą tabel podanych np. w [1]. Następnie należy zbadać, dla jakich wartości ϱ spełniona jest nierówność

$$J_\varepsilon(\varrho) \leq \xi. \tag{13}$$

Znając dopuszczalny ze względu na warunek (13) zakres zmian parametru ϱ, można, obliczając za pomocą wzoru (3) błąd średniokwadratowy, wybrać taką jego wartość, która daje minimum tego błędu. Zwykle warunki minimum błędu średniokwadratowego i minimum całki z kwadratu błędu regularnego są sprzeczne i należy wtedy wybierać wartości ϱ, dla których (13) przechodzi w równość.

3. Przypadki szczególne

3.1. Śledzenie sygnału regularnego w obecności zakłóceń

Jest to przypadek najprostszy. Mamy tu

$$H \equiv 1, \quad S_m \equiv 0, \quad S_s = S_n. \tag{14}$$

Uwzględniając te wyrażenia we wzorze (12), otrzymujemy

$$K = \frac{1}{\left[S_n + \varrho X\bar{X}\right]^-}\left[\frac{\varrho X\bar{X}}{\left[S_n + \varrho X\bar{X}\right]^+}\right]_- . \tag{15}$$

Jeśli założyć jeszcze brak zakłócenia, to otrzymujemy stąd oczywisty rezultat $K = 1$.

3.2. Różniczkowanie sygnału regularnego w obecności zakłóceń

Kładąc

$$H = j\omega, \quad S_m = 0, \quad S_s = S_n \tag{16}$$

otrzymujemy

$$K = \frac{1}{\left[S_n + \varrho X\bar{X}\right]^-}\left[\frac{\varrho j\omega X\bar{X}}{\left[S_n + \varrho X\bar{X}\right]^+}\right]_- . \tag{17}$$

Należy podkreślić, że operacji całkowania sygnałów, przy których wynik narasta nieograniczenie nie można zrealizować tak, aby funkcjonał M posiadał wartość skończoną.

Jeśli bowiem filtr będzie astatyczny, to błąd średniokwadratowy będzie nieskończenie wielki. Jeśli natomiast filtr będzie statyczny, to całka z kwadratu błędu regularnego staje się nieograniczona. Jest to skrajny przypadek sprzeczności w jednoczesnym ograniczeniu obydwóch rodzajów błędów.

Warto też zwrócić uwagę, że w przypadku braku sygnału regularnego, wzór (12) daje wynik zgodny z klasyczną teorią Wienera.

4. Przykłady

4.1. Zaprojektować filtr dla przekazywania sygnału w postaci skoku jednostkowego w obecności zakłóceń w postaci białego szumu.

Dane:

$$S_n = c^2, \quad X = \frac{1}{p}, \quad J_\varepsilon \leqslant \xi, \quad j\omega = p.$$

Obliczamy funkcje występujące we wzorze (15)

$$S_n + \varrho X\bar{X} = c^2 - \frac{\varrho}{p^2} = \frac{p^2c^2 - \varrho}{p^2} = \frac{\sqrt{\varrho} + pc}{p}\,\frac{\sqrt{\varrho} - pc}{-p},$$

stąd

$$\left[S_n + \varrho X\bar{X}\right]^- = \frac{\sqrt{\varrho} + pc}{p}, \quad \left[S_n + \varrho X\bar{X}\right]^+ = \frac{\sqrt{\varrho} - pc}{-p},$$

$$\frac{\varrho X\bar{X}}{\left[S_n + \varrho X\bar{X}\right]^+} = \frac{\varrho}{-p^2}\,\frac{-p}{\sqrt{\varrho} - pc} = \frac{\sqrt{\varrho}}{p} + \frac{c\sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho} - pc}.$$

Optymalna funkcja przejścia filtru jest więc równa

$$K = \frac{p}{\sqrt{\varrho} + pc}\,\frac{\sqrt{\varrho}}{p} = \frac{1}{1 + p\frac{c}{\sqrt{\varrho}}}.$$

Błąd regularny wyniesie

$$E_r = (1 - K)X = \frac{\frac{c}{\sqrt{\varrho}}}{1 + p\frac{c}{\sqrt{\varrho}}}.$$

Łatwo stąd obliczyć całkę z kwadratu błędu

$$J_\varepsilon = \frac{c}{2\sqrt{\varrho}} \leqslant \xi.$$

Współczynnik ϱ jest więc ograniczony przez tę nierówność od dołu. Minimalna jego wartość jest równa

$$\varrho_{min} = \frac{c^2}{4\S^2}.$$

Gęstość widmową błędu statystycznego obliczamy za pomocą wzoru

$$S_\varepsilon = \frac{c}{1 + p\frac{c}{\sqrt{\varrho}}}\,\frac{c}{1 - p\frac{c}{\sqrt{\varrho}}}.$$

stąd

$$\overline{\varepsilon^2_{st}} = \frac{c\sqrt{\varrho}}{2}$$

Widać więc, że błąd stochastyczny w przeciwieństwie do błędu regularnego jest tym mniejszy im mniejszy jest współczynnik ϱ. Wybieramy więc wartość minimalną, możliwą ze względu na spełnienie warunku (13). Otrzymujemy wtedy

$$J_\varepsilon = \S, \quad \overline{\varepsilon^2_{st}} = \frac{c^2}{4\S}.$$

4.2. Zaprojektować filtr dla przekazywania sygnału zmieniającego się ze stałą prędkością, w obecności zakłóceń o gęstości widmowej:

$$S_n = \frac{1}{1 - p^2} \qquad X = \frac{1}{p^2}.$$

Mamy tutaj

$$\left[S_n + \varrho X\overline{X}\right] = \frac{1}{1-p^2} - \frac{\varrho}{4} = \frac{p^2+ap+b}{p^2(1+p)}\,\frac{p^2-ap+b}{-p^2(1-p)},$$

gdzie

$$b = \sqrt{\varrho}\ , \quad a^2 = \varrho + 2\sqrt{\varrho}\,,$$

$$\frac{\varrho X\bar{X}}{\left[S_n+\varrho X\bar{X}\right]^+} = \frac{\varrho}{-p^4}\,\frac{-p^2(1-p)}{p^2-ap+b} = \frac{b+pd}{p^2} + \frac{e+pf}{p^2-ap+d},$$

gdzie

$$d = a - \sqrt{\varrho}.$$

Optymalna funkcja przejścia filtru będzie więc równa

$$K = \frac{p^2(1+p)}{p^2+ap+b}\,\frac{b+pd}{p^2} = \frac{(1+p)(b+pd)}{p^2+ap+b}.$$

Dla błędu regularnego otrzymamy

$$E_r = \frac{1+\sqrt{\varrho}-a}{p^2+ap+b},$$

oraz

$$J_\varepsilon = \frac{(1+\sqrt{\varrho}-a)^2}{2ab} = \S\,.$$

Otrzymane wyrażenie na całkę z kwadratu błędu regularnego jest nierozwiązalne względem ϱ. Dla konkretnej wartości liczbowej można go rozwiązać numerycznie i przyjąć wartość, dla której $J_\varepsilon = \S$.

4.3. Zaprojektować filtr różniczkujący dla takich samych danych jak w poprzednim przykładzie.

Wykorzystując wyniki z poprzedniego przykładu, znajdujemy

$$\frac{H\varrho X\bar{X}}{\left[S_n+\varrho X\bar{X}\right]^+} = \frac{\varrho(1-p)}{p(p^2-ap+b)} = \frac{b}{p} + \frac{C+pD}{p^2-ap+b}.$$

Wobec tego

$$K = \frac{p^2(1+p)}{p^2+ap+b} \cdot \frac{b}{p} = \frac{p(1+p)b}{p^2+ap+b}.$$

Błąd regularny będzie

$$E_r = [p - K]\frac{1}{p^2} = \frac{p+a-b}{p^2+ap+b},$$

a stąd

$$J_\varepsilon = \frac{b+(a-b)^2}{2ab}.$$

4.4. Zaprojektować filtr optymalny dla przekazywania sygnału stochastycznego o gęstości widmowej

$$S_m = \frac{1}{1-p^2}$$

w obecności zakłóceń o charakterze białego szumu ($S_n = 1$) z ograniczoną całką z kwadratu błędu regularnego przy skokowej zmianie wartości średniej (poziomu regulacji), tzn.

$$X = \frac{1}{p}.$$

Mamy tutaj

$$S_s = \frac{1}{1-p^2} + 1 = \frac{2-p^2}{1-p^2},$$

oraz

$$S_s + \varrho X\bar{X} = \frac{2-p^2}{1-p^2} - \frac{\varrho}{p^2} = \frac{p^2+ap+b}{p(1+p)} \frac{p^2-ap+b}{-p(1-p)},$$

$$S_m + \varrho X\bar{X} = \frac{1}{1-p^2} - \frac{\varrho}{p^2} = \frac{p(1+p)-\varrho}{p^2(1-p^2)},$$

gdzie

$$a = 2(1+\sqrt{\varrho}) + \varrho, \quad b = \sqrt{\varrho}.$$

Wobec tego

$$\frac{S_m + \varrho X\bar{X}}{\left[S_s + \varrho X\bar{X}\right]^+} = -\frac{p^2(1+\varrho)-\varrho}{p^2(1-p^2)} \cdot \frac{p(1-p)}{p^2-ap+b} =$$

$$= \frac{b+pd}{p(1+p)} + \frac{C+pD}{p^2-ap+b}$$

gdzie

$$d = \frac{b(1+a) + 1 + \varrho}{a + b + 1}$$

i ostatecznie

$$K = \frac{p(1+p)}{p^2+ap+b} \frac{b+pd}{p(1+p)} = \frac{b+pd}{p^2+ap+b}.$$

Dla błędu regularnego otrzymujemy

$$E_r = (1-K)X = \frac{p+a-d}{p^2+ap+b},$$

oraz

$$J_\varepsilon = \frac{b+(a-d)^2}{2ab}$$

Wobec tego

$$K = \frac{p^2(1+p)}{p^2+ap+b} \cdot \frac{b}{p} = \frac{p(1+p)b}{p^2+ap+b}.$$

Błąd regularny będzie

$$E_r = [p - K]\frac{1}{p^2} = \frac{p+a-b}{p^2+ap+b},$$

a stąd

$$J_\varepsilon = \frac{b+(a-b)^2}{2ab}.$$

4.4. Zaprojektować filtr optymalny dla przekazywania sygnału stochastycznego o gęstości widmowej

$$S_m = \frac{1}{1-p^2}$$

w obecności zakłóceń o charakterze białego szumu ($S_n = 1$) z ograniczoną całką z kwadratu błędu regularnego przy skokowej zmianie wartości średniej (poziomu regulacji), tzn.

$$X = \frac{1}{p}.$$

Mamy tutaj

$$S_s = \frac{1}{1-p^2} + 1 = \frac{2-p^2}{1-p^2},$$

oraz

$$S_s + \varrho X\bar{X} = \frac{2-p^2}{1-p^2} - \frac{\varrho}{p^2} = \frac{p^2+ap+b}{p(1+p)} \frac{p^2-ap+b}{-p(1-p)},$$

$$S_m + \varrho X\bar{X} = \frac{1}{1-p^2} - \frac{\varrho}{p^2} = \frac{p(1+p)-\varrho}{p^2(1-p^2)},$$

gdzie

$$a = 2(1+\sqrt{\varrho}) + \varrho, \quad b = \sqrt{\varrho}.$$

Wobec tego

$$\frac{S_m + \varrho X\bar{X}}{\left[S_s + \varrho X\bar{X}\right]^+} = -\frac{p^2(1+\varrho)-\varrho}{p^2(1-p^2)} \cdot \frac{p(1-p)}{p^2-ap+b} =$$

$$= \frac{b+pd}{p(1+p)} + \frac{C+pD}{p^2-ap+b}$$

gdzie

$$d = \frac{b(1+a) + 1 + \varrho}{a + b + 1}$$

i ostatecznie

$$K = \frac{p(1+p)}{p^2+ap+b} \frac{b+pd}{p(1+p)} = \frac{b+pd}{p^2+ap+b}.$$

Dla błędu regularnego otrzymujemy

$$E_r = (1-K)X = \frac{p+a-d}{p^2+ap+b},$$

oraz

$$J_\varepsilon = \frac{b+(a-d)^2}{2ab}$$

LITERATURA

[1] Newton G.C. Jr., Gould L.A., Kaiser J.F.: Analytical Designe of Linear Feedback Controls, J. Wiley, 1957 r.

[2] Pogoda Z.: Synteza filtrów optymalnych przy ograniczonej strukturze układu. Archiwum Automatyki i Telemechaniki tom IX, z. 3 1964 r.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 7.II.1964 r.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СИГНАЛА

Р е з ю м е

В статье представлено метод синтеза оптимальных фильтров в случае, когда полезный входной сигнал имеет стохастическую и детерминированную составляющие с наложенной стохастической помехой. Для решения этой проблеммы применено вариационный метод с добавочным условием минимума интеграла детерминированной ошибки с весом, являющимся неопределенным коэффициентом Лагранжа. Доказано, что условия минимума среднеквадратической ошибки и минимума интеграла детерминированной ошибки являются, вообщее говоря, противоречивыми.

A SYNTHESIS OF OPTIMUM FILTERS FOR SIGNALS HAVING A DETERMINISTIC COMPONENT

Summary

The paper presents a method of synthesizing optimum filters for input signals having a stochastic and a deterministic component, on which a stochastic noise is superposed. The problem has been solved by means of the variational method with the condition to minimize the weighing deterministic error integral. The weight used has been a Lagrange multiplier. It has been shown, that the conditions for obtaining a minimum mean-square error and the conditions for obtaining a minimum deterministic error integral are generally contradictory.