C.K. WYDAWNICTWO KS. SZK.

ARYTMETYKA

DLA SEMINARYÓW NAUCZYCIELSKICH.

NAPISAŁ

MIECZYSŁAW JAMRÓGIEWICZ.

Cena egzemplarza oprawnego 1 K 60 h

LWÓW
NAKŁADEM C. K. WYDAWNICTWA KSIĄŻEK SZKOLNYCH
1904.

Książek szkolnych, wydanych nakładem c. k. Wydawnictwa książek szkolnych, nie wolno sprzedawać po cenach *wyższych, od wymienionych na tytule.* Każda książka, wydana nakładem c. k. Wydawnictwa książek szkolnych, winna mieć na kartce tytułowej, prócz c. k. orła z napisem »c. k. Wydawnictwo książek szkolnych«, pieczęć c. k. Namiestnictwa we Lwowie. Egzemplarzy, nie zaopatrzonych tą pieczęcią, nie wolno sprzedawać w handlu ani używać w szkołach.

SPIS RZECZY.

Zadania, oznaczone gwiazdką, trzeba w klasie przerobić.

1. Liczenie.

Wyraz, oznaczający ilość jednorodnych przedmiotów, nazywa się liczbą (число, die Zahl). Liczbę otrzymujemy w następujący sposób: jeden z danych przedmiotów bierzemy jako miarę, czyli jednostkę zasadniczą (основна одиниця, die Einheit), a na pytanie: Ile mamy? — odpowiadamy wyrazem jeden. Otrzymujemy w ten sposób liczbę jeden. Dobrawszy do tej jednostki drugą taką samą, odpowiadamy na powyższe pytanie wyrazem dwa i t. d.

Tworzenie liczb przez kolejne dobieranie po jednostce nazywa się liczeniem. Przez liczenie otrzymujemy szereg liczb, zwany naturalnym szeregiem liczb (природний ряд чисел).

Z tego wynika:

a) Liczba ma takie miano, jakie miała jednostka. Liczba taka wyraża nie tylko ilość, lecz także i jakość przedmiotów (n. p. ośm metrów, dziesięć koron), i nazywa się liczbą mianowaną (ч. іменоване, eine benannte Zahl). Liczba, wyrażająca tylko ilość przedmiotów (n. p. pięć, ośm, dziesięć), nazywa się liczbą niemianowaną (ч. неіменоване, eine unbenannte Zahl), albo także liczbą oderwaną (ч. відорване, eine abstrakte Zahl). Jednostką liczb oderwanych jest jeden.

b) Zliczać, czyli zbierać jednostki w jedną liczbę można tylko wtedy, jeżeli one mają to samo miano.

Zadania.

1. W jaki sposób można oznaczyć ilość pieniędzy, snopów zboża, zboża młóconego?

2. Jakiemi jednostkami mierzymy *a)* długość, *b)* ciężar?

*3. Ile milimetrów *(mm)* idzie na jeden centymetr *(cm)*; centymetrów na jeden decymetr *(dm)*; decymetrów na jeden metr *(m)*; metrów na jeden dekametr *(dkm)*; dekametrów na jeden hektometr *(hm)*; hektometrów na jeden kilometr *(km)*?

*4. Ile hektogramów *(hg)* zawiera kilogram *(kg)*; ile dekagramów *(dkg)* hektogram; ile gramów *(g)* dekagram?

*5. W jaki sposób otrzymamy z metra decymetr, z decymetra centymetr, z centymetra milimetr? — Czemże jest decymetr w stosunku do metra, centymetr w stosunku do decymetra, milimetr do centymetra?

*6. W jaki sposób otrzymacie z metra centymetr, milimetr? — Czemże jest centymetr, milimetr względem metra?

*7. Ile dziesiątych (n. p. metra) potrzeba na 1 (n. p. metr); setnych na jedną dziesiątą; tysięcznych na jedną setną?

*8. Ile razy jest dziesiąta część mniejsza od jedności, setna od dziesiątej, tysiączna od setnej?

2. Układ dziesiątkowy.

Liczyć można w nieskończoność, nieskończenie przeto wiele może być liczb. Aby jednak nie potrzeba było tworzyć nieskończenie wiele wyrazów, radzimy sobie w ten sposób (§ 1. zad. 3—4), iż zawsze z 10 jednostek tworzymy jednostkę wyższą. W ten sposób otrzymujemy:

nazwawszy jednostkę zasadniczą krótko jednostką,
z 10 jednostek zasadniczych jednostkę pierwszego rzędu, zwaną dziesiątką,
z 10 dziesiątek jednostkę drugiego rzędu, zwaną setką,
z 10 setek jednostkę trzeciego rzędu, zwaną jednostką tysięcy,
z 10 jednostek tysięcy jednostkę czwartego rzędu, zwaną dziesiątką tysięcy,
z 10 dziesiątek tysięcy jednostkę piątego rzędu, zwaną setką tysięcy.

Gdy do każdego z powyższych wyrazów dodamy »milionów«, otrzymamy sześć wyższych jednostek. Jeszcze wyższe jednostki otrzymamy, dodając do nich wyraz »bilionów«, »trylionów« i t. d.

Aby podać liczbę, wymienia się, jakie jednostki i ile razy każda z nich zawiera się w danej ilości, a to tym porządkiem, iż najpierw podaje się liczbę jednostek rzędu najwyższego, a potem kolejno coraz to niższych. N. p. *a)* Pięćset sześćdziesiąt cztery. —

b) Dwieście ośmdziesiąt sześć milionów trzysta siedmdziesiąt tysięcy dziewięćset pięć.

Z powyżej podanego zestawienia wynika, że każda jednostka wyższa jest 10 krotnością bezpośrednio niższej i odwrotnie, że każda jednostka rzędu niższego jest dziesiątą częścią jednostki rzędu bezpośrednio wyższego. Zbiór jednostek tak ułożonych nazywamy układem dziesiątkowym. Wszystkie liczby wyrażamy w tym układzie.

3. Pisanie liczb.

I. Do napisania liczby służą osobne znaki czyli cyfry. Powszechnie używa się cyfer arabskich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cyframi oznaczamy, ile się razy każda jednostka w danej liczbie zawiera. Ponieważ w układzie dziesiątkowym może jednostka pewnego rzędu być wzięta co najwyżej 9 razy (dlaczego?), przeto podane znaki wystarczą zupełnie do celu, do którego służą.

Aby nie potrzeba pisać, jakichto użyto jednostek do oznaczenia liczby, zgodzono się, aby — idąc od strony prawej ku lewej — na pierwszem miejscu kłaść jednostki zasadnicze, na drugiem dziesiątki i t. d., jak wskazuje stojąca poniżej tabliczka.

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
setki	dziesiątki	jednostki	setki	dziesiątki	jednostki	setki	dziesiątki	jednostki	setki	dziesiątki	jednostki	setki	dziesiątki	jednostki	setki	dziesiątki	jednostki
tysięcy						tysięcy						tysięcy					
bilionów						milionów											

Tysiąc milionów nazywamy także miliardem.

Pisząc liczbę, należy pamiętać, że n. p. miejsce piąte wtedy tylko niem będzie, jeżeli 4te, 3cie, 2gie i 1sze, a więc wszystkie miejsca niższe będą wypełnione. Gdyby brakło jednostek pewnego rzędu, miejsce tych należy wypełnić zerem (0). Tak n. p. liczbę *b)* (§ 2.) napiszemy: 286 370905.

Dla łatwiejszego przeglądu ujmujemy cyfry danej liczby w grupy po 6 cyfer w grupie — licząc zawsze od prawej ku lewej — i oddzielamy te grupy albo odstępami, jak wyżej, albo przecinkami. N. p. 7„308425,127506.

Zadania.

1. Ile jednostek idzie na 1, 2, 3, 5, 6, 8 dziesiątek? Ile jednostek na 1, 2, 4, 7 setek?

2. Ile dziesiątek idzie na 2, 3, 4, 5, 9 setek; ile na 1, 2, 3, 7, 8 jednostek tysięcy?

3. Napiszcie następujące liczby: *a)* Pięć tysięcy dwieście siedmdziesiąt dziewięć. — *b)* Sześćset tysięcy sto ośmdziesiąt jeden. — *c)* Dwieście sześć milionów cztery tysiące ośm. — *d)* Ośmdziesiąt tysięcy dziewięć milionów czterysta tysięcy pięćset. — *e)* Dwadzieścia sześć bilionów trzy tysiące pięćdziesiąt ośm milionów trzysta ośm.

4. Przeczytajcie następujące liczby: *a)* 458; *b)* 268145; *c)* 405680; *d)* 3 612745; *e)* 90 600400; *f)* 309080 876502; *g)* 700000 600009.

5. Dopiszcie do liczby 315 z prawej strony *a)* ośm zer, *b)* dziesięć zer, *c)* 15 zer i przeczytajcie te liczby.

*6. Przestawcie w liczbie 5694 *a)* cyfrę 6 z cyfrą 9 — *b)* w liczbie 3852 cyfrę 2 z cyfrą 3. — Czy liczby, chociaż z tych samych cyfer złożone, będą takie same?

*7. W liczbie 4567 kładźcie *a)* cyfrę 4 po 5, po 6, po 7; *b)* cyfrę 7 przed 6, przed 5, przed 4. — Czy liczby są te same, co przedtem?

*8. Uczyńcie, co wskazano w zadaniu 7., *a)* z cyfrą 5, *b)* z cyfrą 3 w liczbie 3 612745 i odpowiedzcie na zadane w 7. pytanie.

II. Każda cyfra, znajdująca się w liczbie, ma dwojaką wartość (§ 3. zad. 6—8): l i c z b o w ą (в. чисельна) (n. p. 4, 7) i m i e j s c o w ą (в. місцева). Pierwszą poznajemy po postaci cyfry, drugą po miejscu, na którem ona stoi (§ 3. tabliczka). Wartość liczbowa wskazuje ilość, zaś wartość miejscowa jakość jednostek. Pierwsza jest niezmienna, druga zmienia się ze zmianą miejsca.

Zadania.

*9. Jakim zmianom uległa wartość miejscowa cyfer 6 i 9 w zadaniu 6*a*, cyfer 2 i 3 w zadaniu 6*b* (§ 3.)?

*10. Co się stało z wartością miejscową cyfer 7 i 4 w zadaniu 7 i cyfer 5 i 3 w zadaniu 8 (§ 3.).

11. Oznaczcie na wyrywki wartość miejscową każdej cyfry w zadaniu 4 (§ 3.).

*12. Dopisujcie do liczby *a)* 6354; *b)* 670958 na początku (t. j. przed cyfrą 6) kolejno 1, 2, 3 zera i oznaczajcie wartość miejscową każdej cyfry. Co się z tego dowiadujecie?

*13. Dopisujcie do liczb *a)* 382; *b)* 56914 kolejno 1, 2, 3, 4, 5 zer z prawej strony i oznaczajcie wartość miejscową każdej cyfry. — Co się stało z wartością miejscową każdej cyfry? — Co się stało z całą liczbą?

*14. Napiszcie liczby 10, 100, 1000, 10000, 100000 razy większe od liczby *a)* 37; *b)* 594; *c)* 7438. — Przeczytajcie liczby w ten sposób otrzymane.

*15. Odrzucajcie w liczbie 786430000000 kolejno 1, 2, 3 i t. d. zera. Co się stanie z wartością miejscową każdej cyfry? — Co się stanie z liczbą?

*16. Napiszcie liczby 10, 100, 1000, 10000 razy mniejsze od liczby 4720 000000.

4. Ułamki dziesiętne.

Jeżeli za miarę weźmiemy jednostkę zasadniczą (§ 1.), lub jej dziesięciokrotność, stokrotność i t. d. (§ 2.), otrzymamy **liczbę całkowitą** (число ціле, eine ganze Zahl). Możemy jednakowoż przyjąć za jednostkę także **dziesiątą** część jednostki zasadniczej, dziesiątą część dziesiątej, czyli **setną** jednostki zasadniczej i t. d. (§ 1. zad. 5—6). Liczba oznaczająca, ile się dziesiątych, setnych, tysięcznych, dziesięciotysięcznych i t. d. części w danej liczbie zawiera, nazywa się **ułamkiem dziesiętnym** (дріб десяточний, ein Dezimalbruch).

Ponieważ dziesiąte są 10 razy mniejsze niż jednostka, przeto napisać je trzeba na pierwszem miejscu z prawej strony jednostek; z tych samych powodów staną setne po prawej stronie dziesiątych i t. d.... dla oznaczenia zaś, gdzie się kończą całkowite miejsca, a gdzie zaczynają dziesiętne, kładziemy z prawej strony jednostek u góry kropkę, zwaną **kropką dziesiętną** (точка десяточна). N. p. 34·5768 oznacza: Trzydzieści cztery całkowitych, 5 dziesiątych, 7 setnych, 6 tysięcznych i 8 dziesięciotysięcznych.

Układ jednostek całkowitych i dziesiętnych przedstawia tabliczka:

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	·	1	2	3	4	5	6
setki	dziesiątki	jednostki	setki	dziesiątki	jednostki	setki	dziesiątki	jednostki	setki	dziesiątki	jednostki	Kropka dziesiętna	dziesiąte	setne	tysięczne	dziesięciotysięczne	stotysięczne	milionowe
tysięcy						tysięcy												
milionów																		
miejsca całkowite													miejsca dziesiętne					

Gdy nie ma całkowitych w ułamku dziesiętnym, kładziemy w miejsce nich zero; zerem wypełnić potrzeba także owe miejsca dziesiętne, których brakuje.

Ułamek dziesiętny odczytujemy, odczytując najpierw liczbę całkowitą, a następnie każde miejsce dziesiętne z osobna (jak przykład powyżej podany). Częściej jednak odczytujemy miejsca dziesiętne, jak gdyby to była liczba całkowita, i dodajemy nazwę najniższej wartości miejscowej. N. p. 34·5768 = Trzydzieści cztery całkowitych, pięć tysięcy siedmset sześćdziesiąt ośm dziesięciotysięcznych.

Albowiem 5 dziesiątych = 50 setnych = 500 tysięcznych = 5000 10-tysięcznych
7 setnych = 70 tysięcznych = 700 10-tysięcznych
6 tysięcznych = 60 10-tysięcznych
i 8 10-tysięcznych.

Razem czyni to 5768 dziesięciotysięcznych.

Zadania.

1. Oznaczcie wartość miejscową każdej cyfry i odczytajcie następujące ułamki dziesiętne: *a)* 0·57; *b)* 28·649; *c)* 359·671283; *d)* 0·0074; *e)* 35·0596; *f)* 680·07045.

2. Napiszcie następujące liczby: *a)* Pięć całkowitych, siedmset czterdzieści sześć tysięcznych; *b)* Dwieście siedmdziesiąt całkowitych, trzydzieści dziewięć setnych. *c)* Zero całkowitych, trzysta czterdzieści jeden dziesięciotysięcznych; *d)* Ośm całkowitych, siedm tysięcznych; *e)* Siedmdziesiąt całkowitych, ośmnaście milionowych.

*3. Dopiszcie do ułamków *a)* 574·607; *b)* 0·4761; *c)* 64·0082 z prawej strony 1, 2, 3 zera i oznaczcie wartość miejscową każdej cyfry. — Czy się wartość ułamka zmieniła?

*4. Dopiszcie w liczbie 0·46 przed cyfrą 4 a z prawej strony kropki 1, 2, 3, 4 zera i oznaczcie wartość miejscową każdej cyfry. — Co się stało z wartością ułamka dziesiętnego?

*5. Odczytawszy ułamek *a)* 0·915876; *b)* 7·43258; *c)* 0·0714629, przesuńcie w nim kropkę dziesiętną o 1, 2, 3, 4, 5, 6 miejsc ku ręce prawej i odczytajcie nowe liczby. — Co się stało z wartością miejscową każdej cyfry? — Co się stało z ułamkiem dziesiętnym?

*6. Przesuńcie w ułamku *a)* 67489·13; *b)* 58·791; *c)* 0·768 kropkę dziesiętną o 1, 2, 3, 4 miejsca w lewo i odczytajcie nowe liczby. — Co się stało z wartością miejscową każdej cyfry? — Co się stało z wartością całego ułamka?

7. Ile dziesiątych potrzeba na 1, 2, 4, 8 jednostek; na 1, 3, 4, 7 dziesiątek?

8. Ile tysięcznych idzie na 1, 3, 4, 9 setnych; na 1, 2, 3, 8 dziesiątych; na 1, 2, 5 jednostek?

9. Ile metrów, decymetrów, centymetrów i milimetrów zawiera się w *a)* 57·348 *m*; *b)* 7·609 *m*; *c)* 0·078 *m*; *d)* 0·006 *m*?

10. Ile kilogramów, dekagramów i gramów czyni: *a)* 0·008 *kg*; *b)* 0·079 *kg*; *c)* 0·694 *kg*; *d)* 0·8 *kg*; *e)* 24·784 *kg*?

5. Cyfry rzymskie.

Starożytni Rzymianie używali do pisania liczb następujących znaków: I=1; V=5; X=10; L=50; D=500; M=1000. — Znak I kładli przed V i X, aby ich wartość zmniejszyć o 1, a X przed L i C przed D i M, aby wartość tych znaków zmniejszyć o 10 i 100. — Aby zaś wartość pewnej liczby zwiększyć, kładli po jej stronie prawej znak mniejszy I, X albo C a to raz, dwa lub trzy razy. W ten sposób otrzymamy: IV=4; XL=40; CD=400; VI=6; LX=60; DC=600.

Zadania.

1. Odczytajcie następujące daty: Jan Kazimierz urodził się 22. marca MDCIX roku; koronował się 17. stycznia MDCXLIX r.; zrzekł się korony 16. marca MDCLXVIII r.; umarł 16. grudnia MDCLXXII r.

2. Kazimierz W. umarł 5. listopada MCCCLXX r., a powtórny pogrzeb zwłok jego odbył się 8. lipca MDCCCLXIX r.

3. Napiszcie cyframi rzymskiemi następujące daty: Św. Salomea urodziła się 6. maja 1202 r.; zmarła 7. listopada 1268 r.; kanonizowana 1662 r.

4. Królowa Jadwiga umarła w roku 1399; Stefan Batory w r. 1586; Jan III. Sobieski w r. 1696; Stanisław August Poniatowski w r. 1798.
5. Napiszcie cyframi rzymskiemi rok waszych urodzin.

6. Liczby ogólne.

Wiedząc n. p., że 1 *m* kosztuje 8 K, dowiemy się, że za 4 *m* zapłacimy 8 K . 4. Ale tak samo trzeba postąpić, aby się dowiedzieć, ile kosztuje 7 *kg*, jeżeli za 1 *kg* płaci się 5 K; ile trzeba zapłacić za 6 *ha*, jeżeli 1 *ha* kosztuje 870 K i t. d. Z tego wynika reguła: Znajdujemy wartość towaru, mnożąc cenę przez jego ilość. To możnaby napisać:

Wartość = cena . towar albo króciej

$w = c \, . \, t$ . . . . . 1)

Z tego wynika, że każda z tych głosek przedstawiać może wszelką liczbę, nazywamy je przeto liczbami ogólnemi (ч. загальні), podczas gdy liczby, przedstawione znakami arabskimi, nazywamy liczbami szczegółowemi (ч. частні). Te bowiem podają tylko przypadek szczegółowy, podczas gdy tamte odnoszą się do każdego przypadku wogóle.

Mamy zadanie: Balon podnosił się z chyżością 12 *m*. Jak wysoko wzniósł się w 9 sekundach? — Z rozwiązania wyniknie: wysokość = 12 *m* . 9.

Ale w ten sam sposób obrachujemy wysokość w każdym innym podobnym przypadku, więc wogóle:

Wysokość = chyżość . sekundy, albo króciej

$w = c \, . \, s$ . . . . . 2)

Z tych przykładów wynika:

1. Każda głoska alfabetu może oznaczać wszelką możebną liczbę, lecz w jednem zadaniu może mieć tylko jedno znaczenie (n. p. cena, chyżość).

2. Ta sama głoska (w i c) może w różnych zadaniach mieć rozmaite znaczenie.

3. W jednem i tem samem zadaniu znaczymy rozmaite liczby rozmaitemi głoskami.

Powszechnie zgodzono się, aby liczby niewiadome, których przeto wartość ze zadania wyszukać trzeba, oznaczać końcowemi głoskami alfabetu: x, y, z, w i t. d., wiadome zaś liczby początkowemi głoskami: a, b, c...

Podstawić (підставити, substituieren) znaczy, w miejsce liczby ogólnej położyć liczbę szczegółową. N. p. gdy podstawimy w 2) $c=7\,m$, $s=6''$, otrzymamy $w=7\,m.6=42\,m$.

Z § 1. wynika, że n. p.

$5\,m=1\,m+1\,m+1\,m+1\,m+1\,m$

$17\quad=1+1+1+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;17$ razy

$30\quad=1+1+1+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;30$ razy

więc $a\quad=1+1+1+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;a$ razy

$b\quad=1+1+1+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;b$ razy.

Każdą zatem liczbę możemy rozłożyć na jednostki.

7. Podział działań.

Z liczb, utworzonych przez liczenie, możemy tworzyć liczby nowe według pewnych prawideł. To tworzenie nazywa się działaniem rachunkowem (ділане рахункове, Rechnungsoperation). Działania są następujące: dodawanie (додаване, die Addition), odejmowanie (віднимане, die Subtraktion), mnożenie (множене, die Multiplikation), dzielenie (ділене, die Division), podnoszenie do potęgi (степеньоване, das Potenzieren), wyciąganie pierwiastka (коріньоване, das Radizieren) i logarytmowanie (льоґаритмоване, das Logarithmieren).

Nauka o liczbach i o działaniach na nich nazywa się arytmetyką (аритметика, die Arithmetik).

8. Dodawanie liczb całkowitych.

I. *Dodawać znaczy do danej liczby doliczyć tyle i takich jednostek, ile ich i jakie zawiera druga liczba.* Znakiem dodawania jest +. Znak ten czytamy »a«, albo »więcej«.

N. p. $6\,m+(3\,m)=6\,m+1\,m+1\,m+1\,m=9\,m$

$7\,m+(4\,dm)=7\,m+1\,dm+1\,dm+1\,dm+1\,dm=7\,m\;4\,dm$

$a+(b)=a+1+1+1+1+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;b$ razy $=a+b$.

Liczby, które mamy dodawać, nazywamy składnikami (додатники, die Addenden). Liczbę, którą otrzymujemy z dodawania, nazywamy sumą (сума, die Summe), dlategoto $a+b$ można przeczytać »suma z a i b«.

Liczbę, na której ma być działanie wykonane, będziemy zamykać nawiasem (скобка). Znak działania kładziemy przed nawiasem. Więc $a+(b)$ oznacza sumę oznaczoną, ale jeszcze nie wykonaną, zaś $a+b$ jest już sumą wykonaną.

Z powyższego przeprowadzenia wynika, że *suma zawiera tyle jednostek, ile ich jest razem w składnikach.*

Jeżeli a i b są liczbami różnorodnemi, nie można ich zebrać w jedną liczbę, jak nie można zebrać razem n. p. $7\,m + (4\,dm)$. Zbiera się razem w jedną liczbę tylko liczby jednorodne. N. p. $6\,m + 3\,m = 9\,m$. Liczby ogólne są zaś wtedy jednorodne (§. 6. 1.) jeżeli są wyrażone temi samemi głoskami. I tak kładziemy

$$\left.\begin{aligned} a+a&=2a \\ a+a+a&=3a \\ a+a+a+a&=4a \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 1)$$

i t. d.

Liczbę szczegółową (2, 3 i t. d.), stojącą przed liczbą ogólną, nazywamy **spółczynnikiem** (сочинник, der Koeffizient). — *Spółczynnik oznacza, ile razy liczbę ogólną mamy do siebie dodać.* — Gdzie nie ma spółczynnika, tam domyślamy się spółczynnika 1.

Z powyżej przytoczonego wynika:

$$3\,a + 4\,a = a + a + a + a + a + a + a = 7\,a$$
$$2\,b + 3\,b = b + b + b + b + b = 5\,b$$
$$5\,c + c = c + c + c + c + c + c = 6\,c$$

a przeto: *Liczby ogólne jednorodne zbiera się razem, kładąc przed liczbą ogólną sumę spółczynników jako spółczynnik.*

Uwaga: Dodawać można wszelkie liczby, zbierać tylko jednorodne. Dodawanie zatem a zbieranie to nie jest jedno i to samo.

Sumę z kilku składników tworzymy, dodając do sumy dwóch składników składnik trzeci, do tej sumy składnik czwarty i t. d.

$$a + (b) + (c) = a + b + (c) = a + b + c \ \ldots\ldots\ 2)$$

Sumę kilku liczb nazywamy **wielomianem** (многочлен), a każdy składnik tegoż **jednomianem** albo **wyrazem pojedynczym** (одночлен). Wielomian, złożony tylko z dwóch wyrazów (n. p. $a+b$), nazywamy **dwumianem** (двочлен), z trzech **trójmianem** (тричлен) i t. d.

Podstawmy w 2) $a=g+h+k$; $b=l+m+p$; $c=r+s+t$, a otrzymamy

$$(g+h+k)+(l+m+p)+(r+s+t)=g+h+k+l+m+p+r+s+t \quad 3)$$

To znaczy: *Wielomiany dodajemy, opuszczając nawias.*

Zadania.

1. Ile wynosi suma:
a) 8 *cm* + (5 *cm*) + (4 *cm*); — *b)* 4 *kg* + (2 *kg*) + (6 *kg*) + (3 *kg*)?

2. $(5a+3b+c)+(2a+b+4c)+(a+2b+3c)=?$

3. *a)* $7a+(5a+3b)+(4b+2c)=?$
b) $m+(2p+n)+(3m+n)+(4p+m+5n)=?$

*4. *a)* $(x+y+z)+(x+y+z)+(x+y+z)=?$
b) $(m+p)+(m+p)+(m+p)+(m+p)+(m+p)=?$

*5. (8 dziesiątek + 2 jednostki) + (4 dziesiątki + 5 jednostek) = ?

*6. (3 setki + 4 dziesiątki + 7 jednostek) + (5 setek + 7 dziesiątek + + 8 jednostek) = ?

*7. Przedstawcie liczbę *a)* 74; *b)* 258; *c)* 6347 jako sumę tych jednostek, z których się ona składa.

*8. Dodajcie *a)* do liczby 5 tyle, aby suma równała się 9; *b)* do 8 tyle, aby wyszło na sumę 15; *c)* do 9 tyle, aby suma była 18. — Wykonajcie to piśmiennie.

*9. Przedstawcie liczbę 6 jako sumę dwóch składników, z których jeden jest *a)* 2; *b)* 3; *c)* 4.

*10. Przedstawcie liczbę *a)* 12; *b)* 18 jako sumę dwóch składników, z których jeden ma być 5, 8, 9. — Jak wielki będzie drugi składnik?

*11. Napiszcie cyfry 1, 2, 3.....9 jednę pod drugą w rzędzie pionowym, następnie piszcie w rzędzie pierwszym liczby coraz większe o 1, w drugim o 2 i t. d., aby ich było 9 w każdym rzędzie.

*12. Wyrachujcie *a)* 7 *m* + 5 *m* i 5 *m* + 7 *m*; *b)* 9 *kg* + 4 *kg* i 4 *kg* + 9 *kg*; *c)* 8+6 i 6+8. — Czy się suma zmieniła?

II. *Liczby wielocyfrowe dodajemy, dodając do siebie jednostki tego samego rzędu* (§ 8. zad. 5. i 6.). Przy tem należy pamiętać, aby sumę zamienić na jednostki rzędu wyższego, jeżeli ona będzie większa niż 10.

Albowiem: 73 + 25 = (7 dzies. + 3 jedn.) + (2 dzies. + 5 jedn.) (§ 8. zad. 7.)
= 7 dzies. + 3 jedn. + 2 dzies. + 5 jedn. (§ 8. zad. 5—6)
= 9 dzies. + 8 jedn. = 98.

Przy dodawaniu w pamięci wygodniej jest zacząć dodawanie od jednostek rzędu najwyższego, przy piśmiennem zaś od jednostek rzędu najniższego.

Zamiast pisać składniki obok siebie, pisze się najczęściej jeden pod drugim. W tym przypadku opuszcza się znak dodawania, jednostki równoimienne pisze się pod sobą, a sumę oddziela się od składników kreską poziomą.

Aby zrobić próbę, t. j. przekonać się, czy przy dodawaniu nie zaszła omyłka, dodajemy liczby powtórnie, ale zwykle w porządku odwrotnym, t. j. jeżeli pierwotnie dodawaliśmy z góry na dół (od prawej ku lewej), natenczas przy powtórnem dodawaniu dodajemy z dołu do góry (od lewej ku prawej). Czynimy to z następujących powodów. Jeżeli przy dodawaniu, dajmy na to, z góry na dół porachowaliśmy przez omyłkę n. p. $15+7=23$, tedy prawie pewnie ten sam błąd się odnowi, gdy, dodając powtórnie, przyjdziemy do liczb $15+7$. Nie może się zaś odnowić, bo inne do dodawania otrzymamy liczby, jeżeli będziemy dodawali w porządku odwrotnym.

Zadania.

13. Wykażcie, iż *a)* $65+32=97$; *b)* $751+234=985$.

14. Wyrachujcie w pamięci: *a)* $53+42=?$ *b)* $168+476=?$ *c)* $964+578=?$ *d)* $2673+4859=?$

*15. Wyrachujcie piśmiennie: *a)* $48+76+59=?$ *b)* $326+154+289=?$ *c)* $3784+5296+831+4096=?$ — Zaczynajcie dodawać raz od dziesiątek, drugi raz od setek, trzeci raz od jednostek. — Dlaczego zaczynamy piśmienne dodawanie od jednostek?

16. Znajdźcie sumę:

a)	*b)*	*c)*	*d)*
3784	13600	45792	35 748694
29657	27954	258008	28 076499
37800	698	960709	3 509006
4069	87045	874885	29 376087

*17. Znajdźcie liczbę 10, 100 razy większą (§ 3. zad. 13. i 14.) od sumy *a)* $48+79$; *b)* $596+372$

*18. Ile wynosi suma *a)* $50000+6000+800+40+2$; *b)* $300000+70000+9000+200+10+8$?

*19. Przedstawcie liczbę *a)* 376; *b)* 2951; *c)* 34786 jako sumę składników, podobnych do onych w poprzedzającem zadaniu. — Czy każdą liczbę można w ten sposób przedstawić?

20. Ktoś oszczędził w styczniu 24 K, a w każdym następnym miesiącu o 13 K więcej niż w poprzedzającym. Wyrachujcie na pamięć, ile oszczędzał w każdym miesiącu, a piśmiennie, ile oszczędził w roku?

21. Z końcem roku MDCCCLXXXVIII wynosiła ludność Przedlitawii 22 144244 mieszkańców, Zalitawii 15 739375, Bośnii i Hercegowiny 1 362914. Ileż mieszkańców wynosiła ludność całej monarchii Austryackiej?

22. W monarchii Austryackiej przypada na role i ogrody 231700 km^2 (czytaj: kilometrów kwadratowych): pod winnice 6700 km^2; na łąki i pastwiska 155700 km^2, pod lasy 190500 km^2.

Ileż kilometrów kwadratowych wynosi cały urodzajny obszar monarchii?

*23. Pewien urzędnik wydaje miesięcznie 246 K. Ileż wydaje *a)* na kwartał; *b)* na pół roku? *c)* na rok?

*24. Uczeń napisał w pięciu rzędach, pod sobą stojących, porządkiem wszystkie cyfry od 9 do 0. Ponieważ między cyframi nie podawał przecinków, otrzymał pięć jednakich liczb. Zdjęty ciekawością znalazł ich sumę. — Jak wielka była ta suma?

9. Dodawanie ułamków dziesiętnych.

Z definicyi dodawania (§ 8. I i II) wynika, że *ułamki dziesiętne dodaje się tak samo, jak liczby całkowite, a w sumie kładzie się kropkę dziesiętną przed sumą dziesiątych.*

N. p. 2·36+4·57 = 2 jedn. + 3 dziesiątych + 1 setna +
4 „ + 5 „ + 7

6 jedn. + 8 dziesiątych + 8 setn. = 6·88.

Zadania.

1. Znajdźcie sumę liczb: *a)* 57·34+40·76+8·12+21·93; *b)* 0·8+0·876+15·494+0·52+38·785; *c)* 341·69074+21·00865+564·00083+11·98.

2. Znajdźcie sumę liczb:

a)	*b)*	*c)*	*d)*
3·572	456·9073	0·74876	0·008748
26·948	18·0937	0·49387	0·074652
13·651	150·13	0·92256	0·000976
7·439	764·8054	0·61042	0·081009

*3. Znajdźcie sumę pięciu liczb, z których każda jest 0·6784.

*4. Z pieniędzy otrzymanych na wydatki składał uczeń miesięcznie 2·14 K. Ileż uskładał w 3, 4, 6 miesiącach?

5. Rolnik posiada 18·356 *ha* (czytaj: hektarów) pola ornego, 7·48 *ha* łąk, 3·59 *ha* nieużytków i 2·068 *ha* lasu. — Jaki obszar zajmuje cała jego posiadłość?

6. Jezioro Genewskie zajmuje obszar 573·2 km^2 (czytaj: kilometrów kwadratowych), jezioro Bodeńskie 538·5 km^2, Zurichskie 87·9 km^2, Lago Maggiore 210·4 km^2. — Jak wielki obszar zajmują te cztery jeziora razem?

7. Ktoś ma pole w postaci pięciokąta, którego boki mają długość: 96·74 *m*, 105·84 *m*, 100 *m*, 94·6 *m* i 98·85 *m*. — Jak wielki jest obwód tego pola?

8. Do pewnego przedsiębiorstwa przystąpiło czterech spólników; *A* złożył 876·56 K, a każdy następny o 115·78 K więcej niż jego poprzednik. Ile złożyli wszyscy razem?

10. Odejmowanie.

I. Odejmować znaczy: *odliczyć od danej liczby tyle i takich jednostek, ile ich i jakie druga liczba dana zawiera.*

Znakiem odejmowania jest kreska pozioma (—), k órą czytamy »mniej«.

N. p. 8 K—(3 K)=8 K—1 K—1 K—1 K=5 K,
9—(6)=9—1—1—1—1—1—1=3,
30—(12)=30—1—1—1 . . . 12 razy=18,
$a-(c)=a-1-1-1$ . . . c razy$=a-c$.

Liczba (8 K), od której odejmujemy, nazywa się odjemna (умалимок, der Minuend); liczba (3 K), którą od pierwszej odejmujemy, nazywa się odjemnik (відемник, der Subtrahend); liczba (5 K), która z odejmowania wychodzi, nazywa się reszta (останок, der Rest), albo różnica (ріжниця, die Differenz), dlatego $a-b$ można przeczytać »różnica z a i b«.

Bardzo często piszemy odjemnik pod odjemną, a wtedy opuszczamy znak odejmowania, a różnicę oddzielamy od liczb danych kreską poziomą.

Z powyższego określenia wynika, że *różnica dwóch liczb równych równa się zeru.*

Zważywszy, że każdą liczbę można uważać za sumę dwóch składników (§ 8. zad. 9. i 10.) otrzymamy:

8 K—3 K=5 K+3 K—3 K=5 K
9 —6 =3 +6 —6 =3.

Z tego wynika:

a) Odjemna jest sumą dwóch składników, z których jeden (odjemnik) jest dany, a drugiego (różnicy) szukamy.

b) Jeżeli ze sumy dwóch składników odejmiemy składnik jeden, natenczas różnicą będzie składnik drugi.

Z tego wynika dalej, że

5 K (różnica)+3 K (odjemnik)=8 K (odjemnej)

a przeto *c) odejmuje się liczby, dodając do odjemnika tyle i takich jednostek, aby otrzymać odjemną.*

II. Z *c)* wynika:

$a+b+c-(m+p)=a+b+c-m-p$ albowiem

$a+b+c-m-p+(m+p)=a+b+c-m-p+m+p=a+b+c.$

A więc *wielomian odejmujemy, odejmując każdy jego wyraz.*

Ponieważ każdą liczbę wielocyfrową można uważać za wielomian, złożony z jednostek tej liczby (§ 8. zad. 18. i 19.), więc wynika z tego, że *odejmujemy liczby wielocyfrowe, odejmując jednostki każdego rzędu z osobna.*

Odejmowanie piśmienne rozpoczynamy od jednostek rzędu najniższego.

Zadania.

1. Wykażcie według *c)* (§ 10. I), dlaczego *a)* $12m-4m=8m$; *b)* $16\,K-7\,K=9\,K$; *c)* $28-16=12$; *d)* $64-28=36$?

2. Wykażcie, dlaczego *a)* $8m+6p-(3m+4p)=5m+2p$; *b)* $2a+3b+4c-(2a+b)=2b+4c$?

3. *a)* $5x+2y+3z-(x+y+z)$;
b) $6a+4b+8c-(2a+3b+5c)+(a+b+c)$.
c) $2m+3p+7w+(5m+2p+2w)-(3m+4p+4w)-(m+p+5w)$.

*4. Znalazłszy różnicę $5-2$, dodajcie do odjemnej i do odjemnika *a)* 1; *b)* 4; *c)* 8; *d)* 20; *e)* 30 i szukajcie różnic ponownie. — Co spostrzegacie?

*5. Znalazłszy różnicę $748-312$, dodajcie do odjemnej i do odjemnika *a)* 2 setki; *b)* 5 dziesiątek i szukajcie różnic ponownie. — Co spostrzegacie?

*6. Dodajcie do odjemnej i do odjemnika różnicy:
$5x+7y-(4x+3y)$ *a)* $6m$; *b)* $8y$; *c)* $2x$; *d)* $5p$ i znajdźcie każdym razem różnicę. — Co spostrzegacie?

*7. Ktoś pobierał rocznie 2740 K a wydawał 2510 K. Gdy płaca jego wzrosła o 200 K, wzrosły o tyleż i wydatki. — Ile oszczędzał przedtem a ile potem? — Kiedy oszczędzał więcej?

Kiedy się różnica nie zmienia?

*8. W różnicy $9-6$ dodajcie *a)* do odjemnej 7, do odjemnika 4; *b)* do odjemnej 10, do odjemnika 5; *c)* do odjemnej 5, do odjemnika 6; *d)* do odjemnej 4, do odjemnika 7. — Czy się różnica nie zmieniła?

*9. Urzędnik, który pobierał rocznie 3567 K, wydawał 3412 K; w tym jednak roku, w którym jego płaca powiększyła się o 400 K, powiększyły się wydatki o 500 K. — Ile oszczędzał przedtem, a ile potem?

III. Z tej reguły, że *różnica się nie zmieni, jeżeli do odjemnej i do odjemnika tę samą liczbę dodamy* (§ 10. zad. 4.—7.), korzystamy, gdy liczba jednostek pewnego rzędu jest mniejsza w odjemnej niż w odjemniku. Wówczas powiększamy odjemną wedle potrzeby o 10, 20, 30 i t. d. tych właśnie jednostek, a odjemnik o 1, 2, 3 i t. d. jednostek rzędu wyższego. N. p.

$$\begin{array}{cccc} & {}^{+10} & & {}^{+10} \\ 7 & 2 & 8 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & 8 \\ {}_{+1} & & {}_{+1} & \\ \hline 2 & 5 & 4 & 3 \end{array}$$

Do odjemnej dodajemy 10 jednostek, a do odjemnika 1 dziesiątkę = 10 jednostkom.

Do odjemnej dodajemy 10 setek, a do odjemnika 1 jednostkę tysięcy = 10 setkom, więc się różnica nie zmieni.

Zadania.

10. Znajdźcie różnicę: *a)* 51968—37245; *b)* 64705—290743; *c)* 41928—29369; *d)* 80000—3256 i uwidocznijcie, w jaki sposób to się stało?

11. W roku MDCCCLXXX było w Przedlitawii 22 144244 mieszkańców, a w Zalitawii 15 739375 mieszkańców. — O ile więcej ludności było w Przedlitawii?

*12. Odejmujcie *a)* od liczby 1235 liczbę 247; *b)* od liczby 13788 liczbę 4596 tyle razy, ile razy będzie można to uczynić. — Ile razy odejmowaliście pierwszą, ile razy drugą liczbę?

*13. Znalazłszy sumę

a)	176300	*b)*	567328	*c)*	297415
	498251		904507		874526
	84999		699008		2 352074
	36700		870697		4 076532
	250887		342831		84129

opuśćcie jeden składnik, znajdźcie ponownie sumę i tę odejmijcie od sumy, poprzednio otrzymanej? — Co spostrzegacie?

Jak się robi próbę przy dodawaniu?

14. Kupiec wydał na towary 15374 K, pobrał zaś za nie 4764 K, 2981 K, 1058 K i 5132 K. — Ile koron stracił? (Znajdźcie stratę, nie szukając wcale sumy dochodu).

*15. W r. 1892 upłynęło od urodzenia Jana III Sobieskiego 268 lat, a od jego śmierci 196 lat. — Jak długo żył Sobieski, w którym roku się urodził, a w którym umarł? — Napiszcie daty urodzin i śmierci cyframi rzymskiemi.

[Uwaga: Przy datach wydarzeń należy najpierwej oznaczyć, ileto lat już upłynęło od Narodzenia Chrystusa Pana].

16. Bolesław Chrobry umarł w r. MXXV; Kazimierz W. w r. MCCCLXX. Ile lat upłynęło od ich śmierci do dziś?

17. Władysław Jagiełło wstąpił na tron MCCCLXXXVI r.; Zygmunt August umarł MDLXX r. — Jak długo panował w Polsce ród Jagiellonów?

*18. Kupiec otrzymał *brutto* 5328 *kg* towaru; *tarą* wynosiła 160 *kg*. — Ile wynosiło *netto*?

[Uwaga. Ważąc towary, które wysłać potrzeba w opakowaniu, waży się najpierw opakowanie. Ciężar opakowania nazywa się *tara*. Następnie waży się towar już opakowany. Ciężar towaru wraz z opakowaniem nazywa się *brutto*. Ciężar samego towaru nazywa się *netto*. — Wyrazów brutto i netto używa się także przy dochodach. Dochód brutto jestto dochód bez potrącenia wydatków. Dochód netto jestto czysty dochód po strąceniu wydatków].

19. Znajdźcie netto, wiedząc, że *a)* $\mathrm{B^{tto}}$ 738 *kg*, $\mathrm{T^a}$ 23 *kg*; *b)* $\mathrm{B^{tto}}$ 1056 *kg*, $\mathrm{T^a}$ 74 *kg*; *c)* $\mathrm{B^{tto}}$ 3700 *kg*, $\mathrm{T^a}$ 154 *kg*.

20. Kupiec otrzymał trzy paki tego samego towaru, które ważyły: *a)* $\mathrm{B^{tto}}$ 3756 *kg*, $\mathrm{T^a}$ 162 *kg*; *b)* $\mathrm{B^{tto}}$ 1954 *kg*, $\mathrm{T^a}$ 118 *kg*; *c)* $\mathrm{B^{tto}}$ 2315 *kg*, $\mathrm{T^a}$ 75 *kg*. Ile wynosiło całe $\mathrm{N^{tto}}$?

21. Pewien przedsiębiorca miał 10600 K dochodu brutto. Wydatki jego wynosiły w styczniu 2376 K, w lutym 1347 K, w marcu 2 408 K, w kwietniu 2397 K. — Ile miał czystego dochodu. [Nie szukajcie osobno sumy wydatków].

22. Ile dochodu netto miała W. Brytania w r. 1881 z telegrafu, jeżeli dochód brutto wynosił 1 633844 funtów szterlingów, a wydatki 1 305006 funtów szterlingów?

11. Odejmowanie ułamków dziesiętnych.

Z § 10. I *c*, z uwzględnieniem § 9. wynika, że *odejmujemy ułamki dziesiętne jak liczby całkowite, kładąc kropkę dziesiętną przed różnicą dziesiątych.*

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość powyższej reguły w sposób, wskazany w § 10. I. na przykładach: *a)* 0·9—0·6; *b)* 0·07—0·05; *c)* 0·006—0·004.

2. Wykażcie w sposób, podany w § 10. II., jak należy odjąć ułamki: *a)* 6·8—4·5; *b)* 7·96—5·24; *c)* 58·479—16·023.

3. W jaki sposób odejmiecie:
a) 23·32—14·97; *b)* 146·576—93·398; *c)* 8—2·4; *d)* 5—0·684; *e)* 9·6—0·84798 (§ 10. III.).

4. Znajdźcie różnice:

a)	576·0074	*b)*	871·000004	*c)*	328
	109·689		351·410032		196·3457

5. Kupiec pobrał za towary 346·74 K, 459·13 K, 476·9 K i 257·81 K, a wydał 218·45 K, 161·92 K, 370 K, 576·12 K. — Ileż ma gotówki?

6. Promień równika ma 6377·4 *km*, a połowa osi ziemskiej 6 356·1 *km*. O ileż krótsza jest ta od promienia?

7. Ktoś zapytany, w którym się roku urodził, taką dał odpowiedź: »Powiększ różnicę między 1000 a 258·542 o różnicę między 5688·357 a 4579·815, a otrzymasz rok, w którym się urodziłem«.

8. Ktoś miał w 4 miesiącach dochodu brutto 5890 K. Wydatki wynosiły 594·78 K, 698·47 K, 729·52 K, 1946·34 K. — Jaki miał czysty dochód?

9. Z zapasu 426·6 *hl* (czytaj: hektolitrów) wina sprzedano: 132·784 *hl*, 78·312 *hl*, 145·508 *hl*. — Jaki jest jeszcze zapas wina?

10. Z obszaru, wynoszącego 276·4896 *ha* pola, sprzedano kawałkami: 15·37 *ha*, 64·5287 *ha*, 18·45 *ha*. — Ileż pola ma jeszcze właściciel?

11. Ktoś spłaca dług, wynoszący 3000 K, w ten sposób, iż w pierwszym roku płaci 756·74 K, a w każdym następnym o 97·86 K mniej. Ile jest jeszcze winien po upływie 5 lat?

12. Sześcienny centymetr platyny waży 23 *g*, złota 19·362 *g*, żelaza 7·799 *g*, rtęci 13·59593 *g*. O ile gatunkowo cięższa jest platyna od każdego z tych metali z osobna?

12. Liczby algebraiczne.

Gdyby ktoś miał dochodu 7 K, a wydatków 5 K, natenczas rachunek przedstawiałby się następująco:

$$7\text{ K}-5\text{ K}=5\text{ K}+2\text{ K}-5\text{ K}=5\text{ K}-5\text{ K}+2\text{ K}=0+2\text{ K}=+2\text{ K}.$$

Gdyby zaś dochód był 5 K, a wydatki 7 K, natenczas wypadłoby z rachunku: $5\text{ K}-7\text{ K}=5\text{ K}-(5\text{ K}+2\text{ K})=5\text{ K}-5\text{ K}-2\text{ K}$ (§ 10. II.)

$$=0-2\text{ K}=-2\text{ K}.$$

Wogóle $a+b-(a)=a+b-a=a-a+b=0+b=+b$

$$m-(m+p)=m-m-p=o-p=-p.$$

Liczba $+2$ $(=0+2)$, $+b$ $(=0+b)$ wskazuje, ile jednostek mamy do zera dodać, dlatego nazywa się liczbą **dodatnią** (ч. додатне). Każda liczba dodatnia jest większa niż zero.

Liczba -2 $(=0-2)$, $-p$ $(=0-p)$ wskazuje, ile jednostek mamy od zera odjąć, dlatego nazywa się liczbą ujemną (ч. відємне). Każda liczba ujemna jest mniejsza niż zero. — Liczbę -1 nazywamy jednostką ujemną.

Liczbę dodatnią znaczymy, kładąc przed nią znak $+$ (czytaj: »więcej«), liczbę zaś ujemną, kładąc przed nią znak $-$ (czytaj: »mniej«). Jeżeli liczba dodatnia stoi na czele, można znak $+$ opuścić, dlategoto, gdy nie ma przed liczbą znaku, domyślamy się znaku $+$. Znaku $(-)$ nie można nigdy opuścić.

Znaki $(+)$ dodatni i $(-)$ ujemny, stojące przed liczbą, nazywamy znakami algebraicznymi, a liczby opatrzone znakiem algebraicznym, liczbami algebraicznemi, albo względnemi (ч. альґебраїчне або зглядне, algebraische Zahl). Liczbę bez znaku algebraicznego $(2, b, p)$ nazywamy liczbą bezwzględną (ч. беззглядне, absolute Zahl), albowiem podaje ona tylko, ile było jednostek bez względu na to, czy ich było mniej, czy więcej niż zero.

Każdą liczbę bezwzględną można uważać za algebraiczną dodatnią.

Z tego, co wyżej przytoczono, wynika:

a) Liczba dodatnia jest tem większa, im jest większa jej wartość bezwzględna.

b) Liczba ujemna jest tem mniejsza, im jest większa jej wartość bezwzględna.

c) Liczby dodatnie a ujemne są sobie wręcz przeciwne. N. p. Temperatura $+15°$ a $-15°$; 56 K dochodu a 56 K wydatków.

d) Z § 1. wynika, że jednostka liczby dodatniej jest dodatnia, a liczby ujemnej ujemna. Zatem:

$+5=+1+1+1+1+1$	$-5=-1-1-1-1-1$
$+13=+1+1+1\ldots$ 13 razy	$-13=-1-1-1-\ldots$ 13 razy
$+a=+1+1+1+1\ldots$ a razy	$-a=-1-1-1-1\ldots$ a razy.

Ponieważ $+a$ wskazuje, że mamy a jednostek odjąć od zera, zaś $-a$ wskazuje, że mamy a jednostek dodać do zera, przeto gdy wypadnie równocześnie a jednostek do zera dodać i odjąć, zero wyjść musi. A zatem

$$+a-a=0.$$ To znaczy:

e) Dwie liczby algebraiczne równe a wręcz przeciwne znoszą się.

13. Dodawanie liczb algebraicznych.

Z dotychczas przedstawionego wynika, że znaki + i — mogą być albo znakami działań albo znakami algebraicznymi. Otóż czy mają znaczenie pierwsze, czy drugie, poznaje się w ten sposób: znak stojący przed nawiasem jest znakiem działania i dlatego odpada, gdy działanie wykonamy. Wszelkie inne znaki, stojące przy liczbach, są znakami algebraicznymi. N. p. $-7-(4)$. Znak — przed nawiasem jest znakiem odejmowania, zaś — przy 7 i + przy 4 są znakami algebraicznymi.

Z definicyi dodawania (§ 8. I.) wynika:

$$\left.\begin{array}{l} +a+(+b)=+a+1+1+1+\ldots\ b\,\text{razy}=(\S 12.\,d)+a+b \\ +a+(-b)=+a-1-1-1-\ldots\ b\,\text{razy}=\qquad +a-b \\ -a+(+b)=-a+1+1+1+\ldots\ b\,\text{razy}=\qquad -a+b \\ -a+(-b)=-a-1-1-1-\ldots\ b\,\text{razy}=\qquad -a-b \end{array}\right\} \ldots\ 1).$$

Z 1) (§ 13.) wynika: *Liczby algebraiczne dodajemy, pisząc je obok siebie z ich znakami algebraicznymi.*

To samo prawidło wynika dla wielomianów (§ 8. I.).

Według powyższej reguły będzie:

$$\left.\begin{array}{l} +a+(+a)+(+a)+(+a)=+a+a+a+a=(\S 8.1.)+4a \\ -a+(-a)+(-a)+(-a)=-a-a-a-a=\qquad -4a \end{array}\right\} \ldots\ 2).$$

Na odwrót przeto: $+4a=+a+a+a+a$

$$-4a=-a-a-a-a.$$

Z tego wynika dalej, n. p.

$$+5\,a+3\,a=-5\,a+\,(a+a+a)\,=+5a+a+a+a=+a+a+a+$$
$$+a+a+a+a+a=+8a$$

$$-5a-3a=+5a+(-3\,a)=-5\,a+\,(-a-a-a)=-5\,a-a-a=$$
$$=-a-a-a-a-a-a-a-a=-8\,a.$$

A więc: *Liczby jednorodne o równych znakach zbierzemy w jedną, jeżeli położymy znak spólny, spółczynniki dodamy, a liczbę ogólną raz napiszemy.*

Gdyby było: $+5a-3\,a=+5a+(-3\,a)=+5a+(-a-a-a)=+$
$$+a+a+a+a+a-a-a-a=+2\,a\,(\S.\ 12.\ e)$$

$$-5\,a+3\,a=-5\,a+(3\,a)=-5\,a+(a+a+a)=-a-a-a-a-a+$$
$$+a+a+a=-2\,a.$$

A więc: *Liczby jednorodne o przeciwnych znakach zbierzemy w jedną, jeżeli położymy znak liczby większej, odej-*

miemy spółczynnik mniejszy od większego, a liczbę ogólną raz napiszemy.

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość twierdzeń: *a)* $+a+(+b)+(-c)=+a+b-c$; *b)* $-a+(-b)+(-c)=-a-b-c$.

2. Znajdźcie następujące sumy:
a) $5m-3n+2p+(3m+2n-2p)$; *b)* $7m+n-4p+(-3m-5n-2p)$; *c)* $m-n+p+(m+n-p)$.

3. $2x-3y+5w-4z+(-x+2y-w+3z)+(3x-4y+2w-2z)=?$

4. $15a+9b-6c-7d+20f+(-8a-5b+3c+2d-8f)+(-2a+b+3c+5d-10f)=?$

5. $3a-5b+4c+[7a-2b+3c+(-2a+3b-4c)]=?$

6. $x+y-z+[2x+4y+(x-5y-3z)+2z]=?$

7. $10mn-7np+5pr-6rs+[mn+(8np-4pr)+2rs]=?$

8. $4a-4b+4c-4d+\{2a+2b-2c+2d+[3a-3b+3c-3d+(a+b+c+d)]\}=?$

9. $8ab-6cd-4fg+5mn+\{5ab+[3cd-4fg+(2ab+2cd+2fg)]+cd+mn\}=?$

10. $\{x+y+z+[x+y+z+(x+y+z)]\}+\{2x-3y+2z+[-3x-2y-z+(-2x+y-5z)]\}=?$

14. Odejmowanie liczb algebraicznych.

Z § 10. I. *c)* wynika:
$+a-(+b)=+a-b$ albowiem $+a-b+(+b)=+a-b+b=+a$.

Tak samo udowodni się, że

$$+a-(-b)=+a+b$$
$$-a-(+b)=-a-b$$
$$-a-(-b)=-a+b$$

oraz $+a-b-(m-n+p)=+a-b-m+n-p$.

Z tego wynika: *Liczby algebraiczne odejmujemy, zmieniając znaki algebraiczne odjemnika.*

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość następujących twierdzeń:
a) $3m-(-2p)=+3m+2p$; *b)* $7x+3y-(5z-4w)=7x+3y-5z+4w$.

2. *a)* $5a-(-3a)-(7a)=?$ *b)* $-4a-(-2a)-(3a)=?$

*3. *a)* $0-(3a)$; *b)* $0-(-3a)$; *c)* $0-(2a-3b)$; *d)* $0-(-5m+7n-8p)$.

4. $9ab-8cd-(5ab-7cd)-(-ab+4cd)=?$

5. $4x+5z+6w-(8x+5z+3w)+(x-z-w)=?$

6. $25a+13b-7c+[19a-12b+8c-(a-b+5c)]=?$

7. $16x-14y+12z-[-7x+7y-7z+(-8x-8y+8z)]=?$

8. $19a+14b+20c-[8a+2b+15c-(-5a-7b-4c)]=?$

9. $[8m-5p+6z-(2m-3p+5z)]+[m+8p-7z-(2m-4p-9z)]=?$

10. $[a-b+c-(2a+2b-2c)]-[-3a+2b-4c-(-a+b+c)]=?$

11. $a-\{b-[c-|d-(-f)|]\}=?$

12. $7a+6b-4c-\{3a-[4a+5b-(7b-5c)]\}=?$

15. Mnożenie.

I. *Mnożyć znaczy, liczbę daną dodać do siebie tyle razy, ile jednostek zawiera w sobie druga liczba dana* (§ 8. zad. 23—24).

N. p. $7K\times3=7K.3=7K+7K+7K=21K$

$7\times3=7.3=7+7+7=21$

Liczba (7 K), którą mamy pomnożyć, nazywa się mnożna (множимок, der Multiplikand); liczba (3), przez którą mnożymy, nazywa się mnożnikiem (множник, der Multiplikator). Liczba (21 K), wychodząca z pomnożenia, nazywa się iloczyn (добуток, das Produkt).

Znakiem mnożenia jest albo (×), albo kropka u dołu między mnożną a mnożnikiem. Znak ten czyta się »razy«.

N. p. »7 K razy 3«, albo »3 razy po 7 K«.

Z powyższego określenia wynika:

a) Mnożnik może być tylko liczbą *niemianowaną, całkowitą i bezwzględną*. W przypadkach, w których wydawać się może, że jest inaczej, nie samo mnożenie będzie naznaczone, jak to się w stósownem miejscu wykaże. Mnożna może być mianowana, a wtedy jest iloczyn tego samego miana, co mnożna, albo niemianowana, a wtedy jest iloczyn także niemianowany.

b) Ponieważ mnożna i mnożnik czynią iloczyn, przeto każda z tych liczb nazywa się czynnikiem (чинник, der Faktor) iloczynu.

Ponieważ $7.3=21$
więc $21=7.3$.

W pierwszym przypadku dane są czynniki, a szukamy iloczynu, w drugim dany jest iloczyn, a szukamy jego czynników. Więc *rozłożyć liczbę na czynniki, znaczy znaleźć takie liczby, których iloczyn równałby się danej liczbie.*

c) N. p. $$3.4=3+3+3+3=\begin{matrix}1&&1&&1&&1\\1&+&1&+&1&+&1\\1&&1&&1&&1\end{matrix}=12$$

$$4.3=4+4+4=\begin{matrix}1&&1&&1\\1&+&1&+&1\\1&&1&&1\\1&&1&&1\end{matrix}=12$$

a więc $3.4=4.3$.

To znaczy: *Czynniki, w jakimkolwiek porządku wzięte, dają ten sam iloczyn,*

d) $a.1=1.a=a$.

e) $0.6=0+0+0+0+0+0=0$
$m.0=0.m=0+0+0+\ldots$ m razy$=0$.

Iloczyn równa się zeru, jeżeli jego jeden czynnik jest zerem.

f) Iloczyn z kilku czynników powstanie, jeżeli iloczyn dwóch czynników pomnożymy przez czynnik trzeci i t. d., albo jeżeli pomnożymy między sobą iloczyny co dwóch czynników. N. p.

$2.3.4.5=[(2.3).4].5=[6.4].5=24.5=120$ albo
$2.3.4.5=(2.3).(4.5)=6.20$ = $=120$.

Zadania.

1. Co to znaczy: *a)* $9m.4$; *b)* 9 K.4; *c)* 9.4?

*2. Co to znaczy: 6.4, a co 4.6? — Który z tych iloczynów jest większy?

*3. Co więcej kosztowało: *a)* czy 4 *dkg* po 3 halerze, czy 3 *dkg* po 4 halerze; *b)* 7 *m* po 2 K, czy 2 *m* po 7 K?

4. Dlaczegoto, rozwiązawszy zadanie 11. w § 8., otrzymaliście tabliczkę mnożenia?

*5. Rozłóżcie na czynniki liczbę: *c)* 6; *b)* 15; *c)* 35; *d)* 72; *e)* 81.

*6. Ileto czyni 10.3; 100.5; $1000.4=$? — Wykażcie prawdziwość waszego twierdzenia.

*7. Ile wynosić będzie: *a)* 328.10; *b)* 328.100; *c)* 328.1000? (§ 3. zad. 13. i 14.).

*8. Na jakie czynniki najłatwiej rozłożyć liczby: 30, 500, 7000? (§ 15. zad. 7.).

II. Z § 15. I. wynika, że

$a.3=a+a+a \quad\quad =3a$ [§ 8. 1)] a więc naodwrót $3a=3.a$
$a.8=a+a+a+\ldots$ 8 razy $=8a$ „ „ $8a=8.a$
$a.b=a+a+a+\ldots$ b razy $=ba=ab$ „ „ $ab=a.b$
$5a.3b=5.a.3.b=15ab$ (§ 15. I. *f*).

A więc: 1) *Liczby ogólne mnożymy, mnożąc spółczynniki i pisząc liczby ogólne bez znaku w porządku alfabetycznym.* Mnożenie zatem liczb ogólnych można tylko zaznaczyć.

2. *Jeżeli między liczbami ogólnemi nie ma znaku działania, należy domyśleć się znaku mnożenia.*

N. p. $mnp=m.n.p$.

3. Tylko w tym przypadku, gdy iloczyn składa się z tych samych czynników, znaczymy go inaczej, a to:

$a.a=a^2$ (czytaj: »a podniesione do potęgi drugiej« albo »a do drugiej«)
$a.a.a=a^3$ (czytaj: »a podniesione do trzeciej potęgi« albo »a do trzeciej«)
$a.a.a.a=a^4$ (czytaj: »a podniesione do czwartej potęgi« albo »a do 4-tej«).

Liczbę (2, 3, 4), stojącą ponad liczbą ogólną, nazywamy **wykładnikiem** (виложник); liczbę ogólną wraz z wykładnikiem nazywamy **potęgą** (степень), samą zaś liczbę (a) **zasadą** (основа) potęgi.

Wykładnik wskazuje więc, *ile razy mamy zasadę przez siebie pomnożyć.*

N. p. $5^3=5.5.5=125$; $10^2=10.10=100$; $b^5=b.b.b.b.b$.

Wykładnika 1 nie pisze się. Więc $a=a^1$; $10=10^1$.

4. *Potęgi o tych samych zasadach mnożymy, podnosząc spólną zasadę do sumy wykładników.* Albowiem

$$a^3.a^5=a.a.a.a.a.a.a.a=a^8.$$

Uwaga: Liczby ogólne są jednorodne, jeżeli się składają z tych samych potęg. N. p. $5a^2b^3c$ i $7a^2b^3c$ są jednorodne, zaś $5a^2b^3c$ i $5a^3b^2c$ i $5a^2b^3d$ są różnorodne.

Zadania.

9. *a)* $5m.7p$; *b)* $4ab.3cd$; *c)* $2amp.8bsx$.
10. *a)* $4abc.2abc.3abc$; *b)* $2mnp.3mnp.4mnp$.
11. *a)* $6a^2.8a^3$; *b)* $4mn^2.8m^2n$;
c) $2a^3m^2p^5.4am^3p^2.7a^4mp^5$.

*12. *a)* 10.10^2; *b)* 10.10^3; *c)* 10.10^4; *d)* $10^2.10^2$; *e)* $10^2.10^3$; *f)* $10^3.10^3$.

*13. Ile to czyni razem: *a)* $9.10^2+3.10+8$; *b)* $7.10^3+ +4.10^2+8.10+6$; *c)* $6.10^5+4.10^4+0.10^3+7.10^2+0.10+1$?

*14. Przedstawcie jako sumę potęg liczby 10 (patrz zadanie poprzedzające) następujące liczby: *a)* 5328; *b)* 60047; *c)* 3084209.

III. Ponieważ każdą liczbę dodatnią można uważać za liczbę bezwzględną (§ 12.), przeto:

$(+5).(+3)=(+5).3=+5+(+5)+(+5)=+5+5+5=+15$

$(+a).(+b)=(+a).b=+a+(+a)+(+a)+\ldots b \text{ razy}=+a+a+$
$+a+\ldots b \text{ razy}=+ab$

$(-5).(+3)=(-5).3=-5+(-5)+(-5)=-5-5-5=-15$

$(-a).(+b)=(-a).b=-a+(-a)+(-a)\ldots b \text{ razy}=-a-a-$
$-a\ldots b \text{ razy}=-ab$

$(+5).(-3)=(-3).(+5)=(-3).5=-3+(-3)+(-3)+(-3)+$
$+(-3)=-3-3-3-3-3=-15$

$(+a).(-b)=(-b).(+a)=(-b).a=-b+(-b)+(-b)\ldots a \text{ razy}=$
$=-b-b-b-\ldots a \text{ razy}=-ba=-ab.$

Ponieważ $m.n=n.m$, przeto gdy podstawimy $n=-1$, będzie $m.(-1)=(-1).m=-1+(-1)+(-1)\ldots m \text{ razy}=-1-1-$
$-1\ldots m \text{ razy}=-m\ldots$ 1)

Zatem $(-a).(-b)=(-a).(-1.b)=(-a).b(-1)=(-ab).(-1)$.. 2)

Ale według 1) jest

$$(-ab).(-1)=(-1).(-ab)=-(-ab)$$

przeto $(-a).(-b)=-(-ab)=0-(-ab)=+ab$ (§ 14.).

Do takiego wyniku doprowadzi nas także następujące rozumowanie:

N. p.	$-5.4=-20$	$-a.4=-4a$
	$-5.3=-15$	$-a.3=-3a$
	$-5.2=-10$	$-a.2=-2a$
	$-5.1=-\ 5$	$-a.1=-\ a$
	$-5.0=\ \ 0$	$-a.0=\ \ 0.$

Podczas gdy mnożnik zmniejsza się o 1, wzrasta iloczyn o 5, (a). Jeżeli więc mnożnik jeszcze dalej o 1 będzie się zmniejszać, to iloczyn będzie się o 5, (a) zwiększać, przeto

$-5 \, . -1 = +5 \qquad\qquad -a \, . -1 = +a$

$-5 \, . -2 = +10 \qquad\qquad -a \, . -2 = +2a$

$-5 \, . -3 = +15 \qquad\qquad -a \, . -3 = +3a$

i t. d. $\qquad\qquad$ i t. d.

a wogóle $\quad (-a) \, . \, (-b) = +ab.$

Z tego wszystkiego wynika: *Iloczyn liczb algebraicznych jest dodatni, jeżeli czynniki mają równe znaki, a ujemny, gdy czynniki mają przeciwne znaki.*

Zadania.

15. *a)* $(-7a) \, . \, (6c)$; *b)* $(-7a) \, . \, (-6c)$; *c)* $(+7a) \, . \, (+6c)$; *d)* $(+7a) \, . \, (-6c)$.

16. *a)* $(4am) \, . \, (-5bp)$; *b)* $(-8xy) \, . \, (-4wz)$; *c)* $(-9bc) \, . \, (-5dg)$.

17. *a)* $(+8a^2) \, . \, (+6a^3)$; *b)* $(-8a^3) \, . \, (-4a^3)$; *c)* $(2a) \, . \, (-a)$.

18. *a)* $(3a^2b^2) \, . \, (5a^3b^3)$; *b)* $(7m^3n^4) \, . \, (-2mn)$; *c)* $(-8ax^2y^3) \, . \, (-4a^3x^2y)$.

*19. *a)* $(+m) \, . \, (+m)$; *b)* $(-m) \, . \, (-m)$; *c)* $(+m) \, . \, (+m) \, . \, (+m)$; *d)* $(-m) \, . \, (-m) \, . \, (-m)$; *e)* $(+m) \, . \, (+m) \, . \, (+m) \, . \, (+m)$; *f)* $(-m) \, . \, (-m) \, . \, (-m) \, . \, (-m)$.

20. *a)* $(15a^2x^3) \, . \, (2ax^2) \, . \, (3a^2x) \, . \, (a^4x^4)$;
b) $(-2bm^2z) \, . \, (3b^2mz^3) \, . \, (4b^3m^3z^2) \, . \, (-bmz)$;
c) $(gwz) \, . \, (-gwz) \, . \, (-3gwz) \, . \, (-4gwz)$.

16. Mnożenie wielomianów.

Z § 15. I. wynika:

I. $(a+b+c) \, . \, 4 = (a+b+c) + (a+b+c) + (a+b+c) + (a+b+c)$
$= a+b+c+a+b+c+a+b+c+a+b+c = 4a+4b+4c.$

Albo:

$$(a+b+c) \, . \, m = (a+b+c) + (a+b+c) + (a+b+c) + \ldots m \text{ razy} =$$

$$\begin{array}{l} = a+b+c \\ \;\; a+b+c \\ \;\; a+b+c \\ \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \; m \text{ razy} \\ \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \hline ma+mb+mc \quad \ldots\ldots\ldots \; 1). \end{array}$$

To znaczy: *Wielomian mnożymy przez liczbę, mnożąc każdy jego wyraz przez tę liczbę.*

Z tego wynika, że n. p.

$246 . 3 =$ (§ 15. zad. 13. i 14) $(2 . 10^2 + 4 . 10 + 6) . 3 = 3 . 2 . 10^2 + 3 . 4 . 10 + 3 . 6$
$= 3 . 2$ setki $+ 3 . 4$ dziesiątki $+ 3 . 6$ jednostek $=$
$= 6$ set. $+ 12$ dziesiąt. $+ 18$ jedn. $=$
$= 6$ set $+ 1$ set. $+ 2$ dzies. $+ 1$. dzies. $+ 8$ jedn. $= 738$.

To znaczy: *Liczbę wielocyfrową mnożymy, mnożąc jej każde miejsce z osobna.* Przytem należy zamienić iloczyn jednostek każdego rzędu, jeżeli on jest większy niż 10, na jednostki rzędu wyższego i te do jednostek równoimiennych dodać. — Mnożenie z pamięci rozpoczynamy od jednostek rzędu najwyższego, piśmiennie zaś od jednostek rzędu najniższego mnożnej.

II. *Przez 10, 100, 1000...* (przez potęgę liczby 10) *mnożymy, dopisując do mnożnej z jej prawej strony 1, 2, 3... zer* (§ 3. zad. 13. i 14.).

Zadania.

1. Dlaczegoto: *a)* $(8a-5b+6c).2=16a-10b+12c$; *b)* $(4a-5x).b=4ab-5bx$?

2. $(2a-3b+4c).m=$? — Podstawcie $a=4$, $b=7$, $c=9$, $m=6$.

3. *a)* $(4m-7n+6p).(-4a)$; *b)* $(8x-7y+5z).(-3xyz)$.

4. $(2a^3-3a^2+4a+1).5a+(a^2+6a-7).(-2a^3)=$?

5. $(5-3x+4x^2-4x^3).2x-(1+2x-3x^2+4x^3)(-2x)=$?

6. $[(a^3-2a^2+4a-1).2+(a^2-a+5).3]-[(2a^3-3a^2+ +a-8).6-(a^2+a-5).2]=$?

7. $\{(5x-7y).(-3xy)-(2x+3y).(-4xy)+[(x+y).5xy- -(x-y).7xy]\}.xy=$?

*8. Dlaczegoto *a)* $586.4=2344$; *b)* $7984.3=23952$? — Wykażcie prawdziwość tego według § 15. I.

*9. Przedstawcie mnożną w przykładach: *a)* 373.4; *b)* 4291.3; *c)* 57864.2 jako sumę potęg liczby 10 i zastosujcie § 15. I. i § 16. II.

*10. Rozwiążcie z pamięci a potem piśmiennie — rozpoczynając od jednostek rozmaitych rzędów — *a)* 525.4; *b)* 1345.8; *c)* 3298.6. — Dlaczego zaczynamy pisemne mnożenie od jednostek rzędu najniższego?

11. Kupiec sprowadził 9 *hl* wina po 94 K; 7 *hl* po 156 K; 3 *hl* po 218 K. Ile kosztuje go to wszystko wino razem? [Ile kosztował każdy gatunek z osobna, wyrachujcie z pamięci].

12. Kupiec otrzymał 5 pak towaru; B^{tto} każdej wynosiło 1309 *kg*, T^a 79 *kg*. — Ile kosztował ten towar, jeżeli kilogram N^{tto} płaci się po 3 K?

13. Ktoś wydaje rocznie 4692 K. Ileż zostanie mu po upływie 8 lat z majątku, wynoszącego 60000 K?

14. Hektar (*ha*) zawiera 100 arów (*a*), ar ma 100 m^2 (czytaj: »metrów kwadratowych«). Ile metrów kwadratowych jest w 37 *ha*?

*15. Ileto uczyni: *a)* 427.3.10; *b)* 957.8.100; *c)* 389.7.1000?

III. Jeżeli w 1) (§ 16. I.) podstawimy $m=d+f+g+h$, wyniknie: $(a+b+c).(d+f+g+h)=(d+f+g+h).a+(d+f+g+h).b+$ $+(d+f+g+h).c$.

A zatem: *Wielomian mnożymy przez wielomian, mnożąc cały wielomian jeden przez każdy wyraz drugiego.* Dla ułatwienia przeglądu podpisujemy zwykle wyrazy jednorodne pod siebie. N. p.

$$(3a^3-4a^2+8a+7).(4a^2+5a-6)=$$

$$\begin{array}{rrrrrr} =12a^5 & -16a^4 & +32a^3 & +28a^2 & & \\ & +15a^4 & -20a^3 & +40a^2 & +35a & \\ & & -18a^3 & +24a^2 & -48a & -42 \\ \hline 12a^5 & -a^4 & -6a^3 & +92a^2 & -13a & -42. \end{array}$$

Zadania.

16. *a)* $(5a-6b+7c).(3a+2b-4c)$;
b) $(8w+x-y+4z).(2w-5x+17y-8z)$.

17. *a)* $(7x^2-4xy+5y^2)(6x-7y)$; *b)* $(2-3x+4x^2+$ $+5x^3)(1-7x+3x^2)$.

*18. *a)* $(a+b).(a-b)$; *b)* $(x+y).(x-y)$; *c)* $(9-4)(9+4)$.

*19. *a)* $(a+b).(a+b)$; *b)* $(x+y).(x+y)$; *c)* $(z+7).(z+7)$; *d)* $(a+b+c).(a+b+c)$.

20. *a)* $(4x^2+6x+3).(4x^2+6x+3)$; *b)* $(5m^3-2m^2+$ $+4m-1).(5m^3-2m^2+4m-1)$.

*21. *a)* $(7.10+3).(7.10+3)$; *b)* $(6.10+9).(6.10+9)$;
c) $(4.10^2+8.10+1).(4.10^2+8.10+1)$;
d) $(3.10^2+1.10+7).(3.10^2+1.10+7)$.

IV. Z § 15. I. wynika, że n. p. 348.762 = 348.700
+ 348.60
+ 348.2.

A ponieważ jasną jest rzeczą, że § 16. I. można i tu zastosować, więc mamy wziąć 700 razy po 8 jedn., 4 dzies. i 3 setki; 60 razy po 8 jedn., 4 dzies. i 3 setki, w końcu 2 razy po 8 jedn., 4 dziesiątki i 3 setki.

Ponieważ

700 . 8 jedn. = 5600 jedn. = 56 setek = 6 set. i 5 jedn. tys.
700 . 4 dzies. = 2800 dzies. = 28 jedn. tys. = 8 jedn. tys. i 2 dzies. tys.
700 . 3 set. = 2100 set. = 21 dzies. tys. = 1 dzies. tys. i 2 set. tys.

przeto

348 . 700 = 2436 setek. Tak samo wykażemy, że
348 . 60 = 2088 dziesiątek a
348 . 2 = 696 jednostek.

Podpisawszy jednoimienne miejsca pod sobą i dodawszy je, otrzymamy 348 . 762 = 2436
2088
696
265176

Jest rzeczą jasną, że także 348 . 762 = 348 . 2
+ 348 . 60
+ 348 . 700 = 696
2088
2436
265176

Ponieważ 348 . 7 = 2436; 348 . 6 = 2088; 348 . 2 = 696, któreto iloczyny nazywamy częściowymi iloczynami, przeto z powyższego przeprowadzenia wynika: *Liczby wielocyfrowe mnożymy, mnożąc całą mnożną przez każdą cyfrę mnożnika.* Przy podpisywaniu częściowych iloczynów posuwamy się o jedno miejsce na prawo, jeżeli rozpoczynamy mnożenie najwyższem miejscem mnożnika, jeżeli zaś rozpoczęliśmy mnożenie najniższem miejscem mnożnika, natenczas posuwamy się na lewo. — Podpisawszy częściowe iloczyny należycie, dodajemy je do siebie.

W sposób wskazany mnożymy dla zachowania pewnego porządku, można jednak mnożyć w dowolnym porządku, byle tylko przy podpisywaniu częściowych iloczynów jednoimienne cyfry pod sobą stały. N. p.

659 . 274 = 4613	Ponieważ 70 . 9 jed. = 630 jed. = 3 dziesiąt., 6 set.
1318	200 . 9 jedn. = 1800 jed. = 8 set., 1 jed. tys.
2636	4 . 9 jedn. = 36 jed. = 6 jed., 3 dzies.
180566	

Zadania.

*22. Wykażcie w sposób wyżej podany, jak należy pomnożyć: *a)* 48 . 37; *b)* 923 . 418; *c)* 2769 . 75.

*23. Przedstawcie liczby, podane w zadaniu poprzedzającem, w postaci wielomianów i wykonajcie mnożenie według III (§ 16.).

Co otrzymaliście, pomnożywszy setki przez setki, setki przez dziesiątki i t. d.?

*24. Postąpcie jak wskazano w zadaniu 22. i 23. (§ 16.) z liczbami *a)* 734 . 209; *b)* 734 . 2009; *c)* 734 . 20009.

25. Ile potrzeba pszenicy na obsianie 48 *ha* pola, jeżeli na hektar wychodzi 186 *kg* pszenicy?

26. Rolnik obsiał 24 *ha* pszenicą, a 68 *ha* żytem. Jakiego dochodu brutto może się spodziewać, jeżeli z hektara zbiera się przeciętnie 34 *hl* pszenicy, a 17 *hl* żyta i jeżeli za hektolitr pszenicy płaci się 17 K a za żyto 12 K?

27. Na pokrycie długu, wynoszącego 213496 K, sprzedano 248 *ha* po 680 K. — Czy pokryto dług? Czy może brakło pieniędzy i ile?

28. Do pewnego przedsiębiorstwa przystąpiło 2658 uczestników, każdy z udziałem wynoszącym 327 K, i 4856 uczestników z udziałami po 2645 K. — Jak wielki był kapitał zakładowy tego przedsiębiorstwa?

17. Mnożenie ułamków dziesiętnych.

I. *Ułamek dziesiętny mnożymy przez 10, 100, 1000...* (przez potęgę liczby 10), *posuwając w mnożnej kropkę dziesiętną o 1, 2, 3... miejsca ku ręce prawej* (§ 4. zad. 5).

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość powyższego twierdzenia na następujących przykładach: *a)* 5·64 . 10; *b)* 0·0683 . 100; *c)* 2·50769 . 1000; *d)* 0·00587 . 10000.

2. Wiedząc, że Korona ma 100 halerzy, wyrachujcie, ile halerzy czynią 0·07 K; 0·56 K; 3·08 K; 2·789 K?

3. Moneta austryacka, wartości 20 K, waży 6·775 *g*, a zawiera czystego złota 6·097 *g*. — Ile ważą i ile zawierają czystego złota: 10, 100, 1000 takich monet?

*4. Ile to czyni:
a) 0·1.10; 0·01.10; 0·001.10; 0·0001.10; 0·00001.10;
b) 0·1.100; 0·01.100; 0·001.100; 0·0001.100; 0.00001.100;
c) 0·1.1000; 0·01.1000; 0·001.1000; 0·0001.1000; 0·00001.1000?

II. Jeżeli kamień wzleci n. p. 7 *m* w górę, a następnie spadnie 7 *m* na dół, będzie tam, skąd wyleciał. Jeżeli napiszemy liczbę na tablicy i zmażemy, zniweczymy własną pracę. I wogóle jest rzeczą samą przez się jasną (axiomatem), że dwa równe a wręcz przeciwne działania znoszą się. Z tego wynika, że n. p.

3·2 = 3·2 . 10 : 10 = 32 : 10 . . . 1).

Jeżeli zatem będzie zadane n. p. 4·68 . 3·2, a wstawimy wartość z 1) otrzymamy 4·68 . 3·2 = 4·68 . 32 : 10.

Pozornie zatem było naznaczone tylko mnożenie, w rzeczywistości są naznaczone dwa działania.

Zastosujmy powyższy axiomat także do mnożnej, i zważmy, że również jest rzeczą jasną, iż porządek, w jakim wykonujemy działania, nie zmienia wyniku, a otrzymamy

4·68 . 3·2 = 468 : 100 . 32 : 10 = 468 . 32 : 100 : 10 =
= 14976 : 100 : 10 (§ 4. zad. 6.) = 149·76 : 10 =
= 14·976.

Z tego wynika reguła: *Ułamki dziesiętne mnożymy, mnożąc je jak liczby całkowite i odcinając w iloczynie kropką tyle miejsc dziesiętnych, ile ich jest w obydwóch czynnikach.*

Zadania.

5. Wykażcie prawdziwość powyższej reguły na przykładach: *a)* 0·008 . 4; *b)* 0·759 . 3; *c)* 4·6483 . 5.

6. Wykażcie prawdziwość powyższej reguły na przykładach: *a)* 6·58 . 3·8; *b)* 2·564 . 0·37; *c)* 0·079 . 0·00463.

7. Hektolitr wina kosztował 245·68 K. — Ile zapłacono za 2, 5, 8 *hl*?

*8. Wykonajcie: *a)* 24·768 . 90; *b)* 2·4712 . 600; *c)* 0·52487 . 3000; *d)* 0·0076894 . 20000 — rozkładając mnożnik na czynniki, z których jeden ma być potęgą 10, i oznaczcie z góry wartość miejscową najniższego miejsca w iloczynie.

9. Ktoś wydaje dziennie 5·78 K. Ile wydaje na miesiąc? — Ile na rok?

*10. Znajdźcie następujące iloczyny:
a) 0·1 . 0·1; 0·1 . 0·01; 0·1 . 0·001; 0·1 . 0·0001;
b) 0·01 . 0·01; 0·01 . 0·001; 0·01 . 0·0001; 0·01 . 0·00001.

*11. Znajdźcie iloczyn 364·56 . 27·8. Zacznijcie mnożyć najwyższem miejscem mnożnika, a oznaczajcie wartość miejscową (§ 17. zad 4. i 8.) pierwszej cyfry w każdym częściowym iloczynie.

*12. Znajdźcie iloczyn *a)* 208·519 . 47·36; *b)* 73·548 . 0·0987. — Zacznijcie mnożyć najniższem miejscem mnożnika, a oznaczajcie wartość miejscową pierwszej cyfry w każdym częściowym iloczynie.

13. Wieśniak sprzedaje 9·7 morgów pola po 616 K za hektar.— Ile weźmie za to pole, jeżeli 1 morg=0·5755 *ha*?

14. Ktoś wydawał miesięcznie 168·6 K. Ile zostało mu z gotówki, wynoszącej 2000 K, po upływie 7·4 miesięcy?

15. Kupiec sprowadził towaru B^{tto} 135·6 *kg*; T^{a} wynosiła 24·7 *kg*. Kilogram N^{tto} tego towaru płacił po 3·86 K, a sprzedawał po 4·13 K. — Ile kosztował go ten towar? — Za ile sprzedał go? — Ile zyskał na tem? — Jak możnaby oznaczyć wielkość zysku wprost?

*16. Robotnik pracował przez 138·5 dni, pobierając dziennie po 4·67 K. — Ile pobrał za cały czas? [Odrzućcie w iloczynie te miejsca, które dla robotnika nie mają wartości. — Ile ich odrzucicie?]

*17. Z hektara pola zbiera się przeciętnie 32·8 *hl* pszenicy. Jakiego plonu można się spodziewać z 7·4789 *ha*? [W iloczynie zatrzymajcie te tylko miejsca, które będą oznaczać całkowite litry, gdyż niższe będą w tym przypadku bez wartości].

*18. Kupiono 58·76 *m* płacąc za metr 12·79 K. Ile kosztował ten towar? [Zatrzymajcie tylko te miejsca, które oznaczają halerze, albowiem nie mamy mniejszej monety].

19. Hafciarka wyhaftowała 3·54 *m* wstawki po 1·28 K za metr; 2·76 *m* po 2·48 K i 7·8 *m* po 0·74 K. — Ile brakuje jej jeszcze pieniędzy na zarzutkę, która kosztuje 20 K?

20. Gospodarz pewien skupywał różnymi czasy pole, a to: 6·84 *ha* po 672·86 K za hektar; 12·6749 *ha* po 806·7 K; 0·8972 *ha* po 1000 K i 24·579 *ha* po 964 K. — Ile nabył pola i ile go ono kosztuje?

18. Skrócone mnożenie.

Jeżeli z mnożenia otrzymamy miejsca dziesiętne, nie mające praktycznej wartości (§ 17. zad. 16—18.), więc je odrzucamy.

Ułamek, w ten sposób otrzymany, nazywa się **ułamkiem skróconym** (дріб скорочений). Przy takiem postępowaniu potrzeba jednak zważać, jaką wartość liczbową ma najwyższe odrzucone miejsce.

N. p. *a)* 68·57496 K = 68 K + 0·57 K + 0·004 K + 0·00096 K.
A ponieważ 0·004 K = 0·4 h jest już bez wartości, przeto możemy położyć 68·57496 K = 68·57 K.

b) 68·57596 K = 68 K + 0·57 K + 0·005 K + 0·00096 K.
Tu 0·005 K = 0·5 h czyni już pół halerza. W takim razie odrzucając, trzeba zamiast tego wziąć 1 h, a więc trzeba poprzednie miejsce poprawić o 1. Będzie zatem

68·57596 K = 68·58 K.

Poprawkę taką tem bardziej potrzeba uskutecznić, jeżeli najwyższe z miejsc odrzuconych jest większe niż 5.

Można jednak od razu tak mnożyć, aby w iloczynie nie otrzymywać miejsc, które nie mają praktycznej wartości. Mnożenie takie nazywa się **mnożeniem skróconem** (скорочене множене, abgekürzte Multiplikation).

Sposób postępowania wskażemy na przykładzie.

```
768·41589 . 34·928
      8 2943
---------------
23052 477 (tysięcznych)
 3073 663      "
  691 574      "
   15 368      "
    6 147      "
---------------
26839·229 (tysięcznych)
```

W iloczynie potrzeba 3 miejsc dziesiętnych. Najniższą przeto wartością miejscową będą tysięczne. — Ponieważ 3 mnożnika oznacza dziesiątki, więc przez 3 zaczniemy mnożyć dziesięciotysięczne, albowiem 10.0·0001 = 0·001.
Jednak 3.10.0·00009 = 0·0027 = 0·003, więc te 3 bierzemy do poprawki. Krótko powiada się: »3.9 = 27; do poprawki 3«.
Cyfra 4 mnożnika oznacza jednostki, a ponieważ 1.0·001 = 0·001, więc jednostkami zaczniemy mnożyć od tysięcznych. Ale i tu

4.0·0008 = 0·0032 = 0·003, czyli 4.8 = 32, »do poprawki 3«.

Tak samo wykaże się, że cyfrą 9 mnożnika trzeba rozpocząć mnożenie od 1 w mnożnej, ale poprzednio pomnożyć 9.5 = 45 = = 5 do poprawki i t. d.

Z tego wynika następująca reguła: *Jednostki mnożnika podpisuje się pod to miejsce mnożnej, które ma być najniższe w iloczynie, a cały mnożnik pisze się w odwrotnym porządku. Każdą cyfrą mnożnika rozpoczyna się mnoże-*

nie od stojącej nad nią cyfry w mnożnej, a tylko dla poprawki mnoży się jedno miejsce na prawo.

Zadania.

1. Pomnóżcie *a)* 57·6108.0·06; *b)* 1547·6093.0·007 tak, aby najniższe miejsce iloczynu oznaczało tysięczne, setne.

2. Wykażcie prawdziwość reguły, wyżej podanej, na iloczynach: *a)* 7325·4785.8·629 (do setnych); *b)* 318·427.16·35874 (do dziesiątych); *c)* 272·4546.0·089746 (do 3 miejsc dziesiętnych).

3. Jak wielka jest różnica między iloczynem zupełnym a skróconym *a)* 76·4827.9·562 (do 3 miejsc dziesiętnych); *b)* 8315·46.0·0287 (do setnych).

4. Pomnożyć 26·0841 *kg* przez 57·9 tak, aby najniższe miejsce iloczynu oznaczało gramy.

5. Ile zapłacimy za 78·534 *kg*, jeżeli kilogram kosztuje 16·74 K? (Najniższe miejsce ma oznaczać halerze).

6. Centymetr sześcienny rtęci waży 13·59593 *g*. Jaki ciężar ma rtęć, zawierająca 698·674 cm^3? [Iloczyn tylko w liczbie całkowitej].

7. Metr sukna kosztuje 15·83 K. Ile trzeba zapłacić za 78·57 *m*? [Najniższe miejsce ma oznaczać halerze]. — Czy wielka jest różnica między zupełnym a skróconym iloczynem?

8. Obwód koła otrzymamy, pomnożywszy jego średnicę przez liczbę 3·14159. — Jakżeż wielki będzie obwód koła, którego średnica jest *a)* 0·837 *m*; *b)* 16·09 *m*; *c)* 158·7 *m* długa? [Najniższe miejsca iloczynu mają oznaczać centymetry].

9. Koło, mające w średnicy 1·476 *m* (patrz zadania poprzednie), obróciło się podczas jazdy 874·5 razy. Jak długa była droga, którą przejechano? [Do dziesiątych metra].

19. Podnoszenie liczb do drugiej potęgi.

Podnieść liczbę do drugiej potęgi czyli do kwadratu (§ 15. II. 3.) znaczy, pomnożyć ją przez siebie dwa razy. N. p. (§ 16. zad. 21.)

a) $73^2 = 73.73 = (70+3).(70+3) = (7.10+3).(7.10+3) =$

$= 7.7.10^2$	$7^2.10^2$	4900		49.
$\left.\begin{matrix}7.3.10\\7.3.10\end{matrix}\right\}$	albo $2.7.3.10$	420	albo	42.
	3^2	9		9
3.3				5329

b) $487^2 = 487.487 = (480+7)(480+7) = (48.10+7).(48.10+7)$ czyli

$$487^2 = \left.\begin{array}{l} 48.48.10^2 \\ \left\{\begin{array}{l} 48.7.10. \\ 48.7.10 \end{array}\right. \\ \quad 7.7 \end{array}\right\} = \begin{array}{c} 48^2.10^2 \\ 2.48.7.10 \\ 7^2 \end{array}$$

Ale $48^2 = 48.48 = (40+8).(40+8) = (4.10+8).(4.10+8) =$

$$= \left.\begin{array}{l} 4.4.10^2 \\ \left\{\begin{array}{l} 4.8.10 \\ 4.8.10 \end{array}\right. \\ \quad 8.8 \end{array}\right\} = \begin{array}{c} 4^2.10^2 \\ 2.4.8.10 \\ 8^2 \end{array}$$

Przeto wstawiwszy, otrzymamy

$$487^2 = \left.\begin{array}{c} 4^2.10^2.10^2 \\ 2.4.8.10.10^2 \\ 8^2.10^2 \\ 2.48.7.10 \\ 7^2 \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{c} 4^2.\cancel{10^4} \\ 2.4.8.\cancel{10^3} \\ 8^2.\cancel{10^2} \\ 2.48.7.\cancel{10} \\ 7^2 \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{r} 16\cancel{0000} \\ 64\cancel{000} \\ 64\cancel{00} \\ 672\cancel{0} \\ 49 \\ \hline 237169 \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 16. \\ 64. \\ 64. \\ 672. \\ 49 \\ \hline 237169 \end{array}$$

Z tego wynika: *Przy podnoszeniu liczby do kwadratu podnosimy pierwszą cyfrę tylko do kwadratu, z każdej zaś następnej cyfry tworzymy: 1) podwójny iloczyn z niej i poprzedzających, wziętych jako liczba, 2) jej kwadrat.* — Podpisując wyniki, posuwamy się o jedno miejsce ku stronie prawej.

Ponieważ podnoszenie do potęgi jest właściwie mnożeniem, przeto z § 17. II wynika: *Ułamek dziesiętny podnosimy do drugiej potęgi tak, jakby on był liczbą całkowitą, ale odcinamy w tej drugiej potędze dwa razy tyle miejsc, ile ich było w danej zasadzie.* N. p.

$$7.36^2 = \begin{array}{r|r} 7^2 & 49. \\ 2.7.3 & 42. \\ 3^2 & 9. \\ 2.73.6 & 876. \\ 6^2 & 36 \\ \hline & 54{\cdot}1696 \end{array}$$

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość podanej powyżej reguły na przykładach: *a)* 47^2; *b)* 479^2.

2. Podnieście do kwadratu *a)* 5·68; *b)* 0·574; *c)* 0·0746 i pomnóżcie każdą z tych liczb przez siebie samą.

3. Wykonajcie: *a)* 6271^2; *b)* $45·83^2$; *c)* $276·512^2$.

*4. Podnieście do kwadratu: *a)* 708; *b)* 3·064; *c)* 4700·6. — Jaką regułę wysnujecie z tego?

*5. Podnieście do kwadratu: *a)* 730; *b)* 6340; *c)* 9400; *d)* 37900; *e)* 38000. — Co spostrzegacie?

*6. Podnieście do kwadratu: *a)* 0·768; *b)* 0·0419; *c)* 0·009643.

*7. Podnieście do drugiej potęgi: *a)* 67; *b)* 458; *c)* 1786; *d)* 2139. — Ile miejsc przybyło z pierwszej cyfry, a ile z każdej następnej? — Ile miejsc miała zasada, a ile ich ma kwadrat?

*8. Podnieście do kwadratu: *a)* 749; *b)* 1238, oznaczywszy z góry, ile miejsc będzie w kwadracie. — Oddzielcie w kwadracie kreskami pionowemi miejsca, które powstały z jednostek, dziesiątek i t. d.

*9. Podnieście do drugiej potęgi: *a)* 7·36; *b)* 23·58 i oddzielcie w kwadracie kreską pionową miejsca, które powstały z dziesiętnych od tych, które powstały z całkowitych. — Gdzie położycie kreskę?

*10. Podnieście do kwadratu: *a)* 41·27; *b)* 6·027; *c)* 0·0428; *d)* 0·009764 i podzielcie kwadrat, jak wskazano w zadaniu 9 i 8.

20. Wyciąganie drugiego pierwiastka.

Wyciągnąć z liczby danej drugi pierwiastek znaczy znaleźć taką liczbę, którąby podniesiona do drugiej potęgi wydała daną liczbę.

Znakiem drugiego pierwiastka jest $\sqrt{}$. Więc n. p.

$\sqrt{64} = 8$ albowiem $8^2 = 64$.

Z tego wynika, że szukany pierwiastek (8) jest właściwie zasadą, której druga potęga (64) jest dana. Gdyby zatem było: $\sqrt{54·1696}$, natenczas uważamy 54·1696 za kwadrat jakiejś liczby. Jeżeli więc podzielimy tę liczbę na działy, po dwie cyfry w dziale, (dlaczego?), zaczynając od kropki dziesiętnej (§ 19. zad. 9.), to dowiemy się, że w 54 jest kwadrat pierwszej cyfry pierwiastka. Pierwszą zatem cyfrą tego będzie 7, albowiem $7^2 = 49$ i zostaje się 5. — Dopisawszy do reszty 5 następny dział, wiemy, (§ 19.), że w 516 zawiera się

$\sqrt{54·|16|96} = 7·36$
49
516 : 143.3
8796 : 1466.6
" "

kwadrat z cyfry drugiej (6), a gdy ten odetniemy, pozostanie $51=2.7.x$, jeżeli przez x oznaczymy drugą cyfrę pierwiastka. Cyfra ta $x=51:2.7=51:14=3$.

Znalazłszy drugą cyfrę, powinno się utworzyć to co się w 516 zawiera, więc: $2.7.3$ i 3^2 czyli 429; ale to samo otrzymamy dopisując do 14 liczbę 3 i mnożąc przez 3, albowiem $143.3=429$. Do pozostałej reszty 87 dopisujemy następny dział i postępujemy tak samo, jak przy dziale drugim.

Rzecz ta, krótko zebrana, opiewa: Podzieliwszy daną liczbę na działy, po dwie cyfry w dziale, wyciągamy z działu pierwszego drugi pierwiastek; w każdym następnym dziale, dopisanym do poprzedzającej reszty, odcinamy ostatnią cyfrę z prawej strony, a pozostałą liczbę dzielimy przez liczbę znalezioną, podwójnie wziętą. Nowo otrzymaną cyfrę dopisujemy do dzielnika i mnożymy przez nią.

Gdyby na początku były zera, każdy dział zer daje zero. Wyciągamy więc dopiero pierwiastek z pierwszej znaczącej liczby.

Zadania.

1. Wyciągnijcie drugi pierwiastek z kwadratów, otrzymanych w zadaniu 7. § 19., wyjaśniając powód postępowania.

2. Wyciągnijcie pierwiastki z kwadratów, otrzymanych po rozwiązaniu zadań 4, 5, 9 w § 19.

3. *a)* $\sqrt{5592\cdot0324}$; *b)* $\sqrt{325584\cdot36}$; *c)* $\sqrt{349\cdot839616}$

4. *a)* $\sqrt{0\cdot003364}$; *b)* $\sqrt{0\cdot501264}$; *c)* $\sqrt{49\cdot57427281}$

5. Podstawcie we wzorze $x=\sqrt{m^2+p^2}$ *a)* $m=21$, $p=28$; *b)* $m=2\cdot28$, $p=3\cdot04$; *c)* $m=7\cdot4$, $p=6\cdot9$.

6. Podstawcie we wzorze $y=\sqrt{m^2-p^2}$ *a)* $m=65$, $p=52$; *b)* $m=240$, $p=144$; *c)* $m=86\cdot5$, $p=51\cdot9$; *d)* $m=0\cdot748$, $p=0\cdot296$.

7. Jak długi jest bok kwadratu, którego powierzchnia ma *a)* $1398\cdot76\ m^2$; *b)* $66\cdot5836\ m^2$; *c)* $0\cdot5490981\ m^2$; *d)* $768\cdot3642\ m^2$? — [Bok kwadratu znajdziemy, wyciągając z jego powierzchni drugi pierwiastek].

21. Dzielenie.

Dzielić dwie dane liczby znaczy szukać takiej liczby, którąby, pomnożona przez drugą z nich, dała pierwszą. N. p.

$8\ K:4=2\ K$ albowiem $2\ K.\ 4=8\ K$

Liczba (8 K), którą mamy podzielić, nazywa się **dzielną** (ділимок, der Dividend); ta zaś (4), przez którą dzielimy, jest **dzielnikiem** (дільник, der Divisor). Liczbę szukaną (2 K) nazywamy **ilorazem** (квот, der Quotient).

Znakiem dzielenia jest (:)

Z powyżej podanego określenia wynika:

$8:4=2$ więc $8=2.4$

$a:b=c$ „ $a=c.b$

1. *Dzielna (8, a) jest iloczynem dzielnika i ilorazu.*

Jeżeli $a:b=c \; . \; . \; . \; . \; . \; m)$ także $a:c=b \; . \; . \; . \; . \; n)$ albowiem $a=bc$.

Podstawmy wartość za a w $m)$ i w $n)$ a otrzymamy

$bc:b=c$ $bc:c=b$ To znaczy:

2. *Gdy iloczyn dwóch czynników (bc) podzielimy przez jeden z nich, otrzymamy czynnik drugi.*

3. *Każda liczba, podzielona przez siebie samą, daje na iloraz 1.*

$8:8=1$ albowiem $1.8=8$; $a:a=1$ albowiem $1.a=a$

4. *Zero, podzielone przez jakąkolwiek liczbę, daje zero.*

$0:a=0$ albowiem $0.a=0$ (§ 15. *e*).

5. N. p. $168:14=12$ $168:7=24$ $168:4=42$ $168:2=84$.

Z tego wynika, że w miarę jak dzielnik maleje, wzrasta iloraz. Gdyby zaś dzielnik stał się nieskończenie małym (0), natenczas iloraz musiałby być nieskończenie wielkim (∞), a więc

$a:0=\infty$

6. $a^5:a^3=a^2=a^{5-3}$ albowiem $a^2.a^3=a^5$

$b^7:b^4=b^3=b^{7-4}$ „ $b^3.b^4=b^7$

Potęgi o równych zasadach dzielimy, podnosząc spólną zasadę do różnicy wykładników. — Dzielenie potęg o różnych zasadach można tylko naznaczyć w postaci ułamka.

N. p. $a^3b^2:c^4=\frac{a^3b^2}{c^4}$

7. $(+8):(+4)=+2$ albowiem (§ 15. III) $(+2).(+4)=+8$

$(-8):(-4)=+2$ „ $(+2).(-4)=-8$

$(+8):(-4)=-2$ „ $(-2).(-4)=+8$

$(-7):(+4)=-2$ „ $(-2).(+4)=-8$

A więc: *Iloraz jest dodatni, jeżeli dzielna i dzielnik mają znaki równe, a ujemny, jeżeli mają znaki różne.*

8. $(a.b):c=(a:c).b$ albowiem $(a:c).b.c=(a:c).c.b=ab$
$(a.b):c=a.(b:c)$ „ $a.(b:c).c=ab$

Iloczyn dzielimy przez liczbę, dzieląc jeden jego czynnik przez tę liczbę.

9. 8 K:4=2 K albowiem 2 K.4=8 K
8 K:4 K=2 „ 2.4 K=8 K

Pierwsze z tych zadań opiewa: Rozdzielić 8 K na 4 równe części, czyli znaleźć 4^{ta} część z 8 K. — Drugie zadanie żąda: Dowiedzieć się, ile razy mieszczą się 4 K w 8 K, a tem samem, ile razy są 8 K większe niż 4 K.

Pierwsze zadanie jest dzieleniem właściwem, drugie stosunkiem (відношене). Z tego wynika, że w dzieleniu jest dzielnik liczbą niemianowaną, a iloraz tego samego miana, co dzielna, a w stosunku są dzielna i dzielnik jednakowego miana, a iloraz liczbą niemianowaną.

Dzielenie samych liczb niemianowanych, n. p. 6:2=3, można uważać za dzielenie właściwe i za stosunek.

Zadania.

*1. Znajdźcie połówkę (część drugą), część czwartą, ósmą z 16 K.

*2. Jak wielka będzie część trzecia, szósta z 24 *m*?

*3. Podajcie na pamięć *a*) część 8-mą z 24, 32, 40, 64, 72; *b*) część 7-mą z 14, 28, 56, 63; — 9-tą z 36, 54, 81.

Jak się znachodzi połówkę, część trzecią, czwartą i t. d.?

4. *a)* $(+24):(+3)$; *b)* $(+24):(-3)$; *c)* $(-24):(-3)$; *d)* $(-24):(+3)$.

5. *a)* $(+x^7):(-x^2)$; *b)* $(-x^7):(-x^2)$; *c)* $(+x^7):(+x^2)$; *d)* $(-x^7):(+x^2)$.

6. *a)* $(-10\,m^8):(+5\,m^3)$; *b)* $(-10\,m^8):(-5\,m^3)$; *c)* $(+10\,m^8):(+5\,m^3)$; *d)* $(+10\,m^8):(-5\,m^3)$.

7. *a)* $(-18\,m^8\,y^5):(-6\,m^4\,y^3)$; *b)* $(18\,m^6\,y^5):(6\,m^4\,y^3)$; *c)* $(18\,m^5\,y^7):(-3\,m^3\,y^2)$.

8 *a)* $(12\,ab):(4\,mn)$; *b)* $(-12\,ab):(-4\,am)$; *c)* $(-12\,ab):(4\,mn)$; *d)* $(12\,ab):(4\,ab)$.

9. *a)* $(15\,a^3b^3c):(-3\,a^2bd)$; *b)* $(30\,m^2n^3p^4):(6\,mn^3p^3w)$; *c)* $(-25\,x^5y^3z):(-5\,xyz)$.

10. Jak wielka jest część 6-ta z 42 *ha*, a ile razy są 42 *ha* większe od 6 *ha*?

*11. Jaką wartość liczbową i miejscową będzie miała połówka z 6 setek, 8 dziesiątek i 4 jednostek?

*12. Jaką wartość liczbową i miejscową będzie miała część trzecia z 6 dziesiątek tysięcy, 9 dziesiątek i 3 jednostek?

*13. Znajdzie część 2-gą, 4-tą i 8-mą z 16 K i wyrachujcie, ile razy jest połówka większa od części 4-tej i 8-mej, a część 4-ta od 8-mej?

*14. Znajdźcie część 2-gą i 6-tą z 42 m i wyrachujcie, ile razy jest część 2-ga większa od 6-tej?

22. Dzielenie wielomianów.

I. Ponieważ $(a+b+c)\,m = am + bm + cm$ przeto (§ 21. 2.)
$(am + bm + cm) : m = a + b + c$ . . . . 1).

Ale $a = \frac{am}{m}$; $b = \frac{bm}{m}$; $c = \frac{cm}{m}$ przeto

$$(am + bm + cm) : m = \frac{am}{m} + \frac{bm}{m} + \frac{cm}{m}$$

To znaczy: *Wielomian dzielimy przez liczbę, dzieląc każdy jego wyraz przez dzielnik.*

Stosując to do liczb szczególnych, otrzymamy: n. p.

$684:2=(6.10^2+8.10+4):2=3.10^2+4.10+2=342$

Dzielimy zatem liczbę wielocyfrową, dzieląc każdą jej cyfrę z osobna.

Dzielenie rozpoczynamy od jednostek rzędu najwyższego, aby resztę — jeżeli jaka zostanie — można zamienić na jednostki rzędu niższego i te do jednoimiennych dodać. N. p.

1) 9504:4=2376
 15
  30
   24
   ..

1) Czwarta część z 9 jednostek tysięcy są 2 jednostki tysięcy, albowiem 4.2 jed. tyś. = 8 jedn. tyś. i zostaje 1 jedn. tyś. = 10 setek, a do tego 5 setek = 15 setek i t. d.

2) 5476:8=684·5
 67
  36
   40

2) Ponieważ nie możemy 5 jedn. tys. rozdzielić na 8 części, więc 5 jed. tys. = 50 setek a 4 setki = 54 setek. Ósma część z 54 setek jest 6 setek i t. d. W końcu zostanie reszta 4 jednostki. Te zamieniamy na 40 dziesiątych i roz-

dzielamy na 8 części, a ponieważ 8-ma część z 40 dziesiątych jest 5 dziesiątych, przeto kładziemy w ilorazie kropkę dziesiętną.

Gdyby przy dzieleniu ciągle zostawała reszta, natenczas można — otrzymawszy tyle miejsc, ile ich do dokładności zadania potrzeba — skrócić ułamek (§ 18.). Często nie dzielimy pozostałej reszty, lecz naznaczamy dzielenie w postaci ułamka N. p.

$$5476:8=684\tfrac{4}{8}.$$

Zadania.

1. Wykonajcie: *a)* $57:3$; *b)* $356:4$; *c)* $1368:9$

2. Ile kilogramów żyta potrzeba na obsianie hektara pola, jeżeli na 9 *ha* wyszło 2484 *kg* żyta?

3. Z 8 *ha* łąki zapłacono 1678 K. Ile kosztował hektar?

4. Poczemu wypada hektolitr, jeżeli 7 *hl* kosztuje 2049 K?

5. Z 4 *ha* pola zebrano w jednym roku 924 *hl*, w drugim 288 *hl*, w trzecim 796 *hl* ziemniaków. Jakiż był przeciętny zbiór z jednego hektara?

6. Za 7 *hl* wina zapłacono 1064 K. Ile zapłacić potrzeba za 17 *hl* tego wina?

7. Ktoś kupił 3 *hl* pola po 858 K; 4 *ha* po 972 K; 2 *ha* po 718 K. — Po czemu wypada w przecięciu hektar pola?

8. $(8a^4+16a^3+20a^2+24a+32):4=?$

9. $(21b^3x^5-12b^2x^4+15bx^2):3bx^2=?$

10. $(28ab^2y^3-21a^2b^3y^4+14a^3b^4y^5):-7ab^2y^3=?$

11. $(12x^6+18x^4+6x^3):6x^2=?$ Podstawcie w zadaniu i rozwiązaniu $x=10$.

12. $[(a^8b^6-a^7b^5-a^6b^4):(-a^4b^4)].(-2ab+1)=?$

II. Ponieważ liczba się nie zmieni, jeżeli ją przez tę samą liczbę podzielimy i pomnożymy, przeto

$ab+bc+bd+bf=[(ab+bc+bd+bf):b].b$, a gdy wykonamy dzielenie, $ab+bc+bd+bf=(a+c+d+f)b$

To znaczy: Jeżeli we wielomianie znajduje się *spólny czynnik, można go wyłączyć za nawias* (вилучити за скобку), *mnożąc i dzieląc cały wielomian przez ten spólny czynnik*, przyczem dzielenie się wykonuje, a mnożenic tylko naznacza.

Według tej reguły otrzymamy: N. p.

$$a-b-c+d=[(a-b-c+d):-1].(-1)=(-a+b+c-d).(-1)=-(-a+b+c-d)$$

Wyłącza się zatem -1 przed nawias, zmieniając znaki algebraiczne wielomianu.

Zadania.

13. Wyłączcie spolny czynnik w zadaniach, wyżej podanych, 9—12.

14. $(48\,m^2-52\,m^3+60\,m^4-68\,m^5):4\,m^2-$
$-(84\,m^2+133\,m^3-56\,m^4-105\,m^5):7\,m^3=?$
W różnicy wyłączcie — jeżeli można — spólny czynnik przed nawias.

15. Wyłączcie przed nawias spólny czynnik z wielomianów:
a) $2\pi r^2+2\pi rh$; *b)* $\pi r^2+\pi rs$.

III. Prawidło, wyłuszczone pod I. (§ 22.), pozostaje w całej mocy, gdy dzielnik jest wielocyfrowy. Stosując je zaś do przykładu

$$\begin{array}{l} 697{,}6:218=32 \\ \;\,436 \end{array}$$

zauważymy, że trzeba 6 jedn. tyś. i 9 set. i 7 dziesiątek zamienić na 697 dziesiątek, aby z nich znaleźć 218-tą część. Zarazem wynika (§ 21. 9.), że wartość miejscowa pierwszej cyfry ilorazu będą dziesiątki.

Gdy przeto dzielnik jest wielocyfrowy, odcinamy na pierwszą część dzielnej tyle najwyższych miejsc, ile ich ma dzielnik, albo o jedno więcej, gdyby odcięta dzielna jeszcze była zamała. Tę dzielimy, próbując, ile razy pierwsza cyfra dzielnika mieści się w pierwszej cyfrze dzielnej.

Dalszy sposób postępowania jest taki sam, jak w § 22. I. — *Pierwsza* zaś *cyfra ilorazu ma taką samą wartość miejscową, jaką ma najniższa cyfra pierwszej odciętej dzielnej.*

Przy dzieleniu wielomianów postępujemy tak samo, jak przy dzieleniu liczb wielocyfrowych, dzieląc pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika i robiąc próbę. N. p.

$$\begin{array}{l} (am+bm+cm+an+bn+cn):(m+n)=a+b+c \\ \underline{am \qquad\qquad +an} \\ \qquad\quad bm+cm+bn+cn \\ \qquad\underline{+bm \qquad\; +bn} \\ \qquad\qquad\; cm+cn \\ \qquad\qquad\; \underline{cm+cn} \end{array}$$

Pamiętać jednak należy, aby w dzielnej i dzielniku, oraz w każdej częściowej dzielnej potęgi tej samej zasady w naturalnym porządku albo wzrastały, albo malały, czyli aby dzielna i dzielnik były uporządkowane albo rosnąco, albo malejąco (порядковане після степений зростаючих або малїючих).

Zadania.

16. *a)* $(600+400+90+6):(30+2)=?$
b) $(4.10^3+6.10^2+6.10+9):(2.10+3)=?$

17. $(1+4y+7y^2+8y^3+3y^4):(1+2y+y^2)=?$ — Podstawcie w zadaniu i rozwiązaniu $y=10$.

18. *a)* $(x^3+x^2-10x+8):(x^2-3x+2)=?$
b) $(28a^5-20a^3b^2+42a^2b^3-30ab^5):(4a^3+6b^3)$.

19. $(2-2ay-8a^2y^2+38a^3y^3-30a^4y^4):(1-3ay+5a^2y^2)=?$

20. $(x^4-4x^3-45x^2-136x+70):(x^2-2x-35)=?$

21. $(30y^5-63y^4-45y^3+21y^2-30):(5y^2-3y-2)=?$

*22. *a)* $(x^2-y^2):(x-y)$; *b)* $(m^2-n^2):(m-n)$;
c) $(x^2-y^2):(x+y)$; *d)* $(a^2-b^2):(a+b)$.

23. Obszar Galicyi wynosi 78352 km^2; Śląska 5133 km^2? Krainy 9965 km^2, Karyntyi 10333 km^2? — Ile razy jest Galicya większa od każdego z wymienionych krajów? (Dzielcie tak długo, aż otrzymacie w ilorazie 2 miejsca dziesiętne).

24. Światło przebiega w sekundzie 311000 *km*. Ileż sekund potrzebuje światło, aby doszło ze słońca na ziemię, jeżeli średnia odległość ziemi od słońca jest 158 323000 *km*?

*25. Z ilu miejsc całkowitych będzie się składać iloraz 1519392:3274? [Dajcie naprzód odpowiedź, a potem dzielcie].

*26. Pewien urzędnik pobiera miesięcznie 427 K. Ile koron może on wydawać dziennie, jeżeli chce w roku oszczędzić 1164 K. [Oznaczcie z góry, z ilu miejsc całkowitych będzie się składał iloraz].

27. Posłaniec zrobił w 16 godzinach 88 *km*. Ile *km* zrobiłby pod tymi samymi warunkami w 9·7 godzinach?

28. Woźnica zgodził się na 96 K za przewóz ładunku na odległość 128 *km*. Ileż według tej zgody potrzebaby zapłacić za przewóz tego samego ładunku na odległość 26·9 *km*?

*29. Znalazłszy iloraz 42:7, pomnóżcie dzielną i dzielnik przez 2, 4, 10, 35 i szukajcie ilorazu nowo otrzymanych liczb. — Co spostrzegacie?

*30. W pewnym roku miał A dochodu 11220 K, B 748 K; w roku następnym miał każdy z nich 5 razy więcej dochodu. — Ileż razy więcej dochodu miał A niż B w roku pierwszym, a ile razy w drugim? — Co spostrzegacie?

Kiedy się iloraz nie zmienia?

*31. Znalazłszy iloraz 127872:1728, podzielcie dzielną i dzielnik przez 3, 4, 6, i szukajcie nowo otrzymanych liczb. — Co spostrzegacie?

*32. Na ulepszenie gospodarstwa wydał A 3776 K, B 49088 K. W drugim roku wynosiły te wydatki już tylko 4tą, a w następnym tylko 8mą część tychże. — Ileż razy więcej wydawał B niż A co roku? — Co spostrzegacie?

Kiedy się iloraz nie zmienia?

*33. A miał 9264 K, B 386 K, C 6672 K a D 278 K majątku. — Ileż razy więcej miał A niż B, a C niż D? — Co spostrzegacie? [Wyraźcie spostrzeżenia wasze słowami].

*34. W miejscowości A jest na 3626 mieszkańców 98 żydów, a w B na 4181 mieszkańców 113 żydów. Ile razy jest liczba mieszkańców w A, a ile razy w B większa od liczby żydów w tych miejscowościach? — Co spostrzegacie? [Wyraźcie spostrzeżenia wasze słowami].

23. Dzielenie ułamków dziesiętnych.

I. *Ułamek dziesiętny dzielimy przez 10, 100, 1000 i t. d.* (przez potęgę z 10), *posuwając w dzielnej kropkę dziesiętną o 1, 2, 3 i t. d. miejsc w lewo* (§ 4. zad. 6.).

Zadania.

1. Podzielcie: *a)* 348·6 : 10; *b)* 5·36 : 10; *c)* 5742·8 : 100; *d)* 274856·9 : 10000 i wykażcie prawdziwość powyższego twierdzenia.

2. Podzielcie: *a)* 738 : 10; *b)* 1324 : 100; *c)* 278 : 10000 i wykażcie prawdziwość powyższego twierdzenia. [Patrz § 4. Uwaga].

3. Po czemu wypada dekagram, gram kawy, której kilogram kosztuje 3·9 K?

4. Za metr sukna płaci się 13·6 K. — Ile trzeba zapłacić za 8·7 *dm*?

5. Za 100 *kg* pszenicy płacono 19·8 K. — Ile zapłacono za 378·6 *kg*? (Do trzech miejsc dziesiętnych).

6. Ile kilogramów waży 674 funtów angielskich, jeżeli 100 funtów angielskich = 45·359 *kg*? (Do 3 miejsc dziesiętnych).

II. *Jeżeli dzielnik jest ułamkiem dziesiętnym, mnożymy dzielną i dzielnik przez 10, 100, 1000 i t. d.*, albowiem przez to iloraz się nie zmieni (§ 22. zad. 29. i 30.), a dzielnik stanie się liczbą całkowitą. — *A gdy dzielnik jest liczbą całkowitą*, natenczas z § 22. I. i III. wynika, że *ułamek dziesiętny należy dzielić tak samo, jak liczbę całkowitą*, a tylko kropkę dziesiętną trzeba położyć w ilorazie we właściwem miejscu, w którymto celu *należy z góry oznaczyć wartość miejscową pierwszej części ilorazu.*

Zadania.

7. Wykażcie prawdziwość powyższego twierdzenia na przykładach: *a)* 56·48:4; *b)* 567·234:6; *c)* 0·2616:8.

8. Wykażcie prawdziwość powyższego twierdzenia na przykładach: *a)* 7503·2:18; *b)* 775·45:243; *c)* 39·0229:521; *d)* 0·24346:658.

9. Znajdźcie ilorazy: *a)* 960·12:3·78; *b)* 41·4594:14·86; *c)* 0·977456:12·48.

*10. Przerwijcie dzielenie, otrzymawszy w ilorazie dziesiąte: *a)* 76·4825:0·328; *b)* 7·5249678:0·0824; *c)* 156·2987:34·7. Oznaczcie z góry, z ilu miejsc będzie się składał iloraz.

*11. Za dzień pracy pobrało 468 robotników 730·19 K płacy. Ile wziął jeden robotnik? — Przestańcie dzielić, skoro dalsze miejsca będą dla robotnika bez wartości. — Oznaczcie z góry, z ilu miejsc będzie się składał iloraz.

*12. Winiarz mieszał 64 *l* wina po 0·82 K za litr i 96 *l* po 1·37 K. Po czemu wypada litr tej mieszaniny?

*13. Kupiec zmieszał 57 *kg* kawy po 3·98 K i 46 *kg* po 3·59 K za kilogram. — Po czemu wypada kilogram tej mieszaniny?

14. Wieśniak kupił 20·86 *ha* pola za 11385·88 K, a sprzedał je ze stratą 683·15 K. — Po czemu płacił, a po czemu sprzedawał hektar?

15. Gospodyni wydaje na śmietankę tygodniowo 3·36 K, za mięso miesięcznie 146·54 K; inne wydatki wynoszą rocznie 1748 K. Ileż wydaje gospodyni dziennie?

16. Mleczarnia zakupiła 3·56 *hl* mleka po 10·72 K za hektolitr. Po czemu ma sprzedawać litr tego mleka, aby zarobić 10 K na wydanej kwocie.

24. Dzielenie skrócone.

Taki sposób dzielenia, przy którym otrzymujemy w ilorazie tylko tyle miejsc, ile ich dokładność zadania wymaga, nazywa się dzieleniem skróconem (скорочене дїленє).

Różni się ono od zwykłego tem, że — oznaczywszy wartość miejscową najwyższego miejsca w ilorazie — zatrzymujemy w dzielniku tyle tylko miejsc, ile ich ma być w ilorazie, a zamiast dopisywać do reszty następne miejsca z dzielnej, odcinamy najniższe miejsce w pozostałym dzielniku. Otrzymaną cyfrą ilorazu mnożymy te odcięte miejsca w celu otrzymania poprawki.

N. p. 976·4057:24·76 (do dziesiątych).

Ponieważ 976·4057:24·76=97640·57:2476 więc najwyższe miejsce ilorazu będzie oznaczało dziesiątki. Będą więc w ilorazie 2 miejsca całkowite i 1 dziesiętne, razem 3 miejsca. Przeto

976·4057:24·76=976,40·57:247|6=39·4 3.6=18; poprawka 2
233 9.7=63; „ 6
11 4.4=16; „ 2.
1

Uwaga: Jeżeli w dzielniku jest mniej cyfer, niż ich ma być w ilorazie, mnożymy dzielną i dzielnik przez 10, 100 i t d aż otrzymamy w dzielniku żądaną ilość cyfer.

Zadania.

1. *a)* 13·705468:2·571; do 2 miejsc dziesiętnych.
   b) 268·5724:3·8469; tylko całkowite w ilorazie.
   c) 378051·2976:578·48; tylko całkowite w ilorazie.
   d) 0·764825:0·68235; do setnych.

Dzielcie także sposobem nieskróconym i znajdźcie, czy wielka jest różnica między obydwoma ilorazami?

2. *a)* 53·4786:6·492; do setnych.
   b) 137·00748:54·628; do 4 miejsc dziesiętnych.
   c) 0·819326:2·954; do 3 „ „
   d) 0·96:0·0006745; tylko całkowite w ilorazie.

*3. *a)* 325·4789:13·76; do tysięcznych.
   b) 28·34678:0·0582; do setnych.
   c) 67·053428:0·000294; tylko całkowite.
   d) 0·78653247:0·007539; do setnych.

*4. *a)* $\sqrt{276·587}$; *b)* $\sqrt{0·658964}$; *c)* $\sqrt{0·07548}$. — Otrzymawszy trzy miejsca w pierwiastku, użyjcie dalej skróconego dzielenia.

5. Obrachujcie: *a)* $\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{3}$ do siedmiu miejsc; trzy ostatnie zapomocą skróconego dzielenia.

6. Obszar, mający 675·56 *ha*, kupiono za 580000 K. Po czemu wypada hektar? (Iloraz tylko w liczbie całkowitej).

7. Za 56·34 *q* (cetnarów) towaru zapłacono 15042·78 K. Ile kosztował 1 *q* tego towaru? (Do 2 dziesiętnych).

8. Centymetr sześcienny powietrza waży 0·001299075 *g*. Jaką przestrzeń zajmuje powietrze ważące 1 *kg*? (W liczbie całkowitej).

25. O liczbach wielorakich.

Z § 1. wynika, że miara musi być jednorodna z wielkością, którą mierzymy, dlategoto mamy różnego rodzaju miary. I tak miarą pierwotną, czyli zasadniczą do mierzenia

a) długości jest metr (*m*), długość będąca 40 000000wą częścią południka ziemskiego;

b) powierzchni jest metr kwadratowy (m^2), kwadrat, którego każdy bok jest metr długi;

c) przestrzeni jest metr sześcienny (m^3), kostka, której każda krawędź ma metr długości;

d) ciężaru jest gram (*g*), ciężar 1 cm^3 wody o 4° C;

e) pieniędzy jest korona (K) i t. d.

Aby uniknąć zbyt wielkich liczb, albo zbyt małych ułamków, utworzono z tych miar zasadniczych miary pochodne, które do jednostki zasadniczej zostają w ścisłym, z góry oznaczonym stosunku.

Liczba, wyrażająca ilość tylko jednych miar (7 *m*; 8 K), nazywa się liczbą jednoimienną (ч. одноіменне, einnamig). — Liczbę, oznaczającą ilość rozmaitych jednostek tego samego rodzaju, nazywamy liczbą wieloraką (ч. многоіменне, mehrnamig). N. p. 6 *km* 8 *m* 5 *cm*; 7 lat 3 miesiące 4 dni.

Liczba, podająca, ile razy jest pewna miara większa od innej miary tego samego rodzaju, nazywa się zamiennikiem (замінник, der Verwandler).

Każdą liczbę wieloraką można zamienić na jednoimienną, zamieniając kolejno miary wyższe na niższe lub odwrotnie. Zamiana liczby wielorakiej na jednoimienną gatunku najniższego, nazywa się rozkładaniem (розведене, das Resolvieren). Rozkłada się liczbę wieloraką, mnożąc liczbę gatunku wyższego przez odpowiedni zamiennik.

Zamiana liczby wielorakiej na jednoimienną gatunku najwyższego nazywa się złożeniem (зведене, das Reduzieren). Składamy liczbę, dzieląc liczbę gatunku niższego przez odpowiedni zamiennik.

Zadania.

1. Rozłóżcie: *a)* 8 *km*; *b)* 15 *km* 4 *m* na metry.

2. Rozłóżcie: *a)* 7 *m*; *b)* 5 *m* 8 *dm*; *c)* 9 *m* 7 *dm* 8 *cm* na centymetry.

3. Rozłóżcie: *a)* 4 *kg*; *b)* 15 *dkg* 6 *g*; *c)* 1 *kg* 80 *dkg* 7 *g* na gramy.

4. Ile centymetrów kwadratowych zawiera się w *a)* 35 m^2 24 dm^2 70 cm^2; *b)* 40 m^2 56 dm^2; *c)* 10 m^2?

5. Ile metrów kwadratowych czynią: *a)* 3 *ha*, *b)* 7 *ha* 48 *a*; *c)* 45 *ha* 28 m^2; *d)* 2 *ha* 70 *a* 16 m^2?

6. Ile dni czynią: *a)* 7 lat; *b)* 4 lata 8 mies.; *c)* 12 lat 9 mies. 20 dni?

7. Ile sekund czynią: *a)* 8 dni; *b)* 4 dni 20 godzin; *c)* 5 dni 18 gdzin 45 min. 15 sek.?

8. Zamieńcie na liczbę wieloraką: *a)* 76·845 *kg*; *b)* 54·76 *kg*.

9. Zamieńcie na liczbę wieloraką: *a)* 7·6 *hl*; *b)* 56·48 *hl*.

10. Zamieńcie na liczbę wieloraką: *a)* 26·576 *m*; *b)* 37·5974 m^2; *c)* 274·876901 m^3.

11. Zamieńcie na kilometry: *a)* 5700 *m*; *b)* 4 000000 *cm*.

12. Zamieńcie na metry kwadratowe: *a)* 600 dm^2; *b)* 74000 cm^2; *c)* 56 000000 mm^2.

13. Ile metrów czynią: *a)* 8 *m* 4 *dm*; *b)* 15 *m* 6 *dm* 8 *cm*; *c)* 9 *m* 7 *cm* 8 *mm*?

14. Ile koron zawiera się w *a)* 13 K 18 h; *b)* 9 K 50 h; *c)* 341 K 8 h; *d)* 72 h?

15. Ile kilogramów zawiera się w *a)* 7 *kg* 46 *dkg*; *b)* 2 *kg* 58 *dkg* 7 *g*; *c)* 46 *dkg* 2 *g*; *d)* 9 *dkg* 7 *g*?

26. Dodawanie liczb wielorakich.

Z § 8. II. wynika: *Liczby wielorakie dodajemy, dodając z osobna liczby każdego gatunku.* Rozpoczynamy dodawanie od liczb gatunku najniższego, a gdy otrzymana suma jest większa niż odpowiedni zamiennik, tworzymy z niej liczbę gatunku wyższego i tę do liczb równoimiennych dodajemy.

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość powyższej reguły na przykładach: *a)* 5 *kg* 16 *dkg* 4 *g* + 2 *kg* 3 *dkg* 5 *g*; *b)* 38 K 56 h + 4 K 3 h.

2. Znajdźcie następujące sumy:

a) 346 K 74 h	*b)* 26 *kg* 48 *dkg* 8 *g*	*c)* 7 *hl* 5 *l* 6 *dcl*
215 „ 9 „	4 „ 35 „ 7 „	15 „ 48 „ 2 „
54 „ 90 „	1 „ 9 „ 3 „	38 „ 25 „ 8 „
168 „ 51 „	15 „ — „ 6 „	14 „ 18 „ 7 „

d)	6 lat	8 mies.	15 dni	12 godz.
	15 „	— „	12 „	20 „
	4 „	3 „	28 „	— „
	7 „	9 „	— „	14 „

3. Stefan Batory urodził się 27. września 1533 r., a umarł, mając 53 lat 2 mies. 15 dni. — W którymże roku umarł? [§ 10. zad. 15. Uwaga].

4. Kąty w trójkącie są: $a=48°\,51'\,26''$; $b=79°13'\,48''$; $c=51°\,54'\,46''$. Ile wynosi ich suma?

5. Wieśniak ma pole w 4 kawałkach, których obszary wynoszą: 2 *ha* 26 *a* 13 m^2, 1 *ha* 84 *a* 67 m^2, 2 *ha* 8 *a* 90 m^2 i 3 *ha* 54 *a* 28 m^2. — Ile pola razem ma ów wieśniak? — [Wyraźcie każdy obszar w hektarach i szukajcie sumy powtórnie].

6. Robotnik A pracował przez 15 dni 12 godzin, B przez 6 dni 10 godz., C przez 6 dni 14 godz., D przez 8 dni 10 godz.— Za jaki czas należy się im zapłata?

7. Pole w postaci pięciokąta ma miedze długie na: $a=42$ *m* 8 *dm* 3 *cm*; $b=74$ *m* 5 *dm* 9 *cm*; $c=38$ *m* 7 *dm*; $d=52$ *m* 8 *cm*; $e=45$ *m* 6 *dm*. Jak wielki jest obwód tego pola? — [Zamieńcie te długości na metry i szukajcie sumy powtórnie].

*8. Ktoś oszczędzał miesięcznie 27 K 64 h. Ile oszczędził w 4 miesiącach? Ile oszczędził w roku?

9. Zegar idzie później o 2 godz. 38 min. 52 sek. Któraż jest godzina rzeczywiście, jeżeli on wskazuje 10 godz. 40 min. 8 sek.?

27. Odejmowanie liczb wielorakich.

Z § 10. wynika bezpośrednio, że *odejmujemy liczby wielorakie, odejmując liczby każdego gatunku z osobna.* Odejmowanie rozpoczynamy od liczb gatunku najniższego.

Jeżeli liczba pewnego gatunku w odjemnej jest mniejsza niż w odjemniku, natenczas dodajemy do odjemnej i do odjemnika 1, 2, 3 i t. d. jednostek gatunku wyższego (§ 10. zad. 5—7 i III).

		+12	+30	
N. p.	8 lat	4 mies.	12 dni	30 dni = 1 mies.
	5 „	7 „	26 „	12 mies. = 1 rok.
	+1	+1		
	2 lat	8 mies.	16 dni.	

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość powyższej reguły na przykładach:
a) 12 *kg* 8 *g* — 7 *kg* 2 *g*;
b) 9 mies. 15 dni 16 godz. — 2 mies. 10 dni 6 godz.

2. Znajdźcie różnice:

a) 12 *kg* 269 *g*	*b)* 48 lat 3 mies. 20 dni 10 godz.	*c)* 56° 32′ 14″
5 „ 560 „	27 „ 9 „ 25 „ 18 „	17° 58′ 46″

d) 25 *ha* 16 *a* 48 m^2	*e)* 748 K	*f)* 154 *hl*
13 „ 79 „ 88 „	326 K 76 h	76 *hl* 40 *l* 7 *dcl*

3. Długość geograficzna Wiednia jest 48° 13′ 55″ a Krakowa 50° 3′ 55″. Jakie jest geograficzne oddalenie tych miast?

4. W trójkącie jest kąt $a = 48° 16' 34''$, $b = 56° 34' 58''$. Ile stopni ma kąt trzeci, wiedząc, że suma wszystkich trzech kątów trójkąta wynosi 180°?

5. W czworokącie wynosi suma wszystkich kątów 360°. Ileż stopni ma kąt czwarty, jeżeli $a = 94° 18' 32''$, $b = 88° 20' 10''$, $c = 120° 13' 45''$?

6. Cesarz Franciszek Józef I. urodził się 18. sierpnia 1830 r.— Ileż lat miał 2. stycznia 1900 r.?

7. Król Jan Kazimierz urodził się 22. marca 1609 r., koronował się 17. stycznia 1649 r., zrzekł się korony 16. marca 1668 r., umarł 16. grudnia 1672 r. W jakimże wieku koronował się, jak długo panował, w jakim wieku umarł i ile lat upłynęło od chwili, gdy się zrzekł korony?

8. Ktoś ma następujące długi: 1578 K 76 h; 3728 K 46 h; 5426 K; 13764 K 58 h i 9058 K 13 h. — Na pokrycie tych długów ma następujące wierzytelności: 4728 K 16 h; 11256 K 25 h; 12376 K 18 h; 987 K 80 h; 864 K 50 h i 7428 K 66 h. — Ileż mu zostanie gotówki, gdy pokryje swoje długi?

28. Mnożenie liczb wielorakich.

Ponieważ tylko mnożna może być liczbą wieloraką, a mnożnik tylko liczbą niemianowaną (§ 15. *a*), przeto tak samo jak w § 16. można wykazać, że *mnożymy liczbę wieloraką, mnożąc liczbę każdego gatunku*. Mnożenie rozpoczynamy od liczb gatunku najniższego, a jeżeli iloczyn jest większy niż odpowiedni zamiennik, zamieniamy go na liczbę gatunku wyższego i tę do odpowiedniego iloczynu dodajemy.

N. p. Ile trzeba zapłacić robotnikom za 3 tygodnie 5 dni, jeżeli dzienna płaca wynosi 3 K 46 h? — Ponieważ 3 tygodnie 5 dni = 26 dni, więc wywnioskujemy, że zapłata będzie wynosiła

3 K 46 h . 26 a ponieważ 46 h . 26 = 1196 h = 11 K 96 h

więc 89 K 96 h

Często można zadanie wygodniej rozwiązać, *zamieniając mnożną na liczbę jednoimienną*. Powyższe zadanie rozwiązałoby się w ten sposób:

$$\begin{array}{l} 3{\cdot}46\ \mathrm{K}.26 \\ \hline 6\ 92 \\ 2\ 076 \\ \hline 89{\cdot}96\ \mathrm{K} = 89\ \mathrm{K}\ 96\ \mathrm{h}. \end{array}$$

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość powyższej reguły na przykładach: *a)* 7 *m* 5 *dm* 6 *cm*×3; *b)* 12 *hl* 4 *l*×4; *c)* 8 lat 10 mies. 28 dni 14 godz.×2.

2. Znajdźcie następujące iloczyny: *a)* 3 lat 7 mies. 26 dni×56. *b)* $76° 54' 32'' \times 8$.

3. Za metr sukna płaci się 12 K 48 h. Ile trzeba zapłacić za 9 *m* 56 *cm* tego sukna?

4. Głos przebiega na sekundę 333 *m*. Jaką drogę przebiegnie w 6 min. 48 sek.?

5. Miesiąc księżycowy trwa 29 dni 12 godz. 44 min. — O ileż jest rok księżycowy krótszy od słonecznego, który ma 365 dni 5 godz. 48 min. 48 sek.

6. Rok słoneczny trwa 365 dni 5 godz. 48 min. 48 sek., a rok zwyczajny 365 dni. Jakiż więc błąd wynika z tego powodu w 4 latach? — Jaki błąd wynika w 100 latach z powodu, że co 4ty rok jest rokiem przestępnym o 366 dniach?

7. Kupiec sprowadził 8 *hl* 46 *l* wina po 96 K 50 h i 4 *hl* 75 *l* po 126 K 64 h za hektolitr. — Ile kosztuje go to wino?

8. Okręt śrubowy, który płynie z Hamburga do New-Yorku, przebiega na godzinę 40 *km* 240 *m*. Jakże daleko ma on jeszcze do New-Yorku, jeżeli już jest 5 dni 12 godz. w drodze, a cały jego bieg ma 6 *Mm* 688 *km*?

29. Dzielenie liczb wielorakich.

I. Jeżeli dzielenie ma znaczenie dzielenia właściwego, a więc gdy dzielnik jest liczbą niemianowaną (§ 21. 9.), wtedy (§ 22.) *dzielimy liczbę wieloraką, dzieląc liczbę każdego gatunku z osobna*. Dzielenie rozpoczynamy od liczby gatunku najwyższego.— Często jednak będzie wygodniej, *zamienić dzielną na liczbę jednoimienną i tę podzielić*.

Zadania.

1. Wykonajcie na obydwa sposoby: *a)* 12 *m* 9 *dm* 6 *cm*:3; *b)* 918 *kg* 256 *g* : 4; *c)* 15 lat 7 mies. 18 dni 9 godz.:7.

2. Za 76 *kg* 54 *g* zapłacono 243 K 40 h. Po czemu wypada kilogram?

3. Robotnik potrzebowałby na wykonanie pewnej pracy 2 lat 9 mies. 15 dni. W jakim czasie wykona tę pracę 15 robotników?

4. Za 56 *hl* 12 *l* owsa zapłacono 266 K 56 h. Ile kosztował hektolitr tego owsa?

5. Okręt śrubowy przebiega na godzinę 40 *km* 240 *m*. Jaką drogę robi na sekundę?

II. Jeżeli dzielenie ma znaczenie mieszczenia się albo stosunku (§ 21. 9.), natenczas zamieniamy dzielną i dzielnik na liczby jednoimienne i tego samego miana, poczem dzielimy.

Zadania.

6. Koło ma w obwodzie 4 *m* 6 *dm*. Ile razy obróci się ono na drodze, 3 *km* 169 *m* 4 *dm* długiej?

7. Miesiąc księżycowy trwa 29 dni 12 godz. 44 min. Ile takich miesięcy jest w roku, który ma 365 dni 5 godz. 48 min. 50 sek.?

8. A miał 64 *ha* 75 *a* 48 m^2 pola, B 178 *ha* 7 *a* 57 m^2. Jednak B sprzedał 8 *ha* 13 *a* 22 m^2. — Ile razy więcej miał B od A przed sprzedażą, a ile razy więcej po sprzedaży. — O ile więcej miał B od A przed sprzedażą, a ile po sprzedaży?

9. A ma 4865 K 48 h, B 17029 K 18 h gotówki. Ile razy ma B więcej niż A?

10. Lokomotywa biegnie z chyżością 32 *km* 470 *m* na godzinę. Ile czasu potrzebuje, aby przejechać przestrzeń między Lwowem a Krakowem, wynoszącą 337 *km* 560 *m*?

11. Ile razy mieści się kąt mający 22° 30′ w kącie o 180°?

12. Pewna ilość robotników wykopuje dziennie 76 m^3 546 dm^3 ziemi. W ilu dniach wykopią ci sami robotnicy 2908 m^3 748 dm^3 ziemi?

30. Podzielnik i wielokrotność liczb.

Jeżeli przy dzieleniu nie zostaje reszta, natenczas powiadamy, że dzielna jest przez dzielnik **p o d z i e l n a** (подільна, teilbar).

Dzielnik nazywa się wówczas podzielnikiem (подільник, das Maß) dzielnej, którą znowu nazywamy wielokrotnością (многократь, das Vielfache) dzielnika. N. p. 6 : 3 = 2 więc 3 jest podzielnikiem 6ciu, a 6 jest dwukrotnością 3ech.

Liczby (n. p. 5, 7, 11 i t. d.), których podzielnikiem jest tylko 1 albo one same, nazywamy bezwzględnie pierwszemi (ч. беззглядно перві, absolute Primzahlen).

Liczby, które mają podzielniki (n. p. 8, 30, 40 i t. d.), są liczbami złożonemi (зложені, zusammengesetzt).

Zadania.

*1. Przekonajcie się, czy 78 jest podzielnikiem liczb 1482 i 1872?

*2. Czy liczba 53 jest podzielnikiem liczb 477, 954 i 1590?

*3. Podzielcie iloczyn 2.3.5.7.13 przez każdy czynnik z osobna. — Czego się dowiadujecie? [§ 21. 2.].

*4. Utwórzcie liczbę z czynników 2, 2, 2, 3, 3, 7 i drugą z czynników 2, 2, 2, 3, 3, 7, 7, 5 i dowiedzcie się, czy liczby te są przez siebie podzielne?

5. Znajdźcie 25-krotność liczby 375; 64-krotność liczby 258.

*6. Czy liczba 14322 jest wielokrotnością liczb 2, 3, 7, 11, 31?

*7. Czy liczby 315, 630, 3465 są wielokrotnościami liczb 5, 9, 7?

*8. Czy 2772 jest wielokrotnością liczb 154 i 231?

*9. Czy 9072 jest wielokrotnością liczb 213 i 324?

*10. Dowiedzcie się, czy 38 jest podzielnikiem liczby 456 i jej 2, 3, 7-krotności?

*11. Czy *a)* liczba 27 jest podzielnikiem liczb 189 i 175 i ich sumy? *b)* liczba 38 podzielnikiem liczb 114, 418 i ich sumy?

*12. Czy *a)* 2 jest podzielnikiem liczb 900, 70, 4 i ich sumy; *b)* 4 podzielnikiem liczb 7000, 300, 50, 8 i sumy?

Co wynika ze zadań 11 i 12?

31. Cechy podzielności.

I. Aby udowodnić, że liczba jest przez drugą podzielna, potrzeba wykazać, że ich iloraz jest liczbą całkowitą.

Dochodźmy, czy 3796 jest podzielne przez 2?
3796 : 2 = (3.1000+7.100+9.10+6) : 2 = [§ 22. i § 21. 8.] = (3.500+7.50+9.50+3) = 1898 liczbie całkowitej. Jest więc 3796 podzielne przez 2.

Z tego jednak wynika, że dziesiątki i wszystkie wyższe miejsca jako wielokrotności 10 (§ 21. 8.), są w każdej liczbie podzielne przez 2, zatem *cała liczba jest podzielna przez 2, jeżeli jej jednostki są przez 2 podzielne*. Jednostki są przez 2 podzielne, jeżeli ich jest 0, 2, 4, 6 albo 8.

Liczbę, podzielną przez 2, nazywamy liczbą parzystą (ч. паристе).

W ten sam sposób, jak wyżej, wykaże się, że *przez 5 są te liczby podzielne, których jednostki są 0 albo 5, a przez 10 te liczby, których jednostki są 0.*

Zadania.

1. Wykażcie w powyższy sposób, dlaczego liczby 958, 5970, 38412 są podzielne przez 2.

2. Wykażcie w powyższy sposób, dlaczego liczby 647, 8425, 28463 nie są przez 2 podzielne.

3. Wykażcie w powyższy sposób, dlaczego liczby 760, 2345, 48760 są — a liczby 557, 3568, 24752 nie są podzielne przez 5.

4. Wykażcie, które z liczb 7684, 4795, 38670, 370065, 5790, są podzielne tylko przez 2, które tylko przez 5, a które przez 2 i przez 5? — Podzielcie każdą przez podany podzielnik.

5. Które z liczb powyższych (zad. 4.) są podzielne przez 10?

*6. Dzielcie liczbę *a)* 368, *b)* 416 i każdy z otrzymanych ilorazów przez 2, jeżeli 2 będzie jego podzielnikiem. Wkońcu pomnóżcie wszystkie dzielniki i ostatni iloraz przez siebie. — Co spostrzegacie?

*7. Dzielcie liczbę *a)* 5875, *b)* 10625 a następnie każdy z otrzymanych ilorazów przez 5, jeżeli będzie przez 5 podzielny. Wkońcu pomnóżcie przez siebie wszystkie dzielniki i ostatni iloraz. — Co spostrzegacie?

II. Gdyby było dane 93728 : 4, natenczas
93728 : 4 = (9.10000+3.1000+7.100+28) : 4 = [§ 22. i § 21. 8.] = (9.2500+3.250+7.25+7) = 23432 liczbie całkowitej.

Ale w ten sposób można każdą liczbę rozłożyć, i w każdej będą setki i wszystkie wyższe miejsca jako wielokrotności liczby 100 (§ 21. 8.) podzielne przez 4. Zatem *przez 4 są te liczby po-*

dzielne, w których dwa miejsca najniższe dają liczbę podzielną przez 4.

Tak samo wykaże się, *że przez 25 są te liczby podzielne, w których dwa miejsca najniższe dają liczbę podzielną przez 25, a przez 100 te liczby, które kończą się na dwa zera.*

Zadania.

8. Wykażcie w powyższy sposób, dlaczego liczby 576, 3720, 47136 są — a liczby 487, 6989, 50634 nie są podzielne przez 4. — Podzielcie je przez 4.

9. Wykażcie w powyższy sposób, dlaczego 975, 4950, 58600 są — a liczby 945, 5080, 35768 nie są podzielne przez 25? — Podzielcie je przez 25.

10. Wskażcie, które z liczb 716, 718, 5778, 5060, 23454 są podzielne przez 4, które tylko przez 2, a które przez 4 i 2? — Podzielcie je przez ich podzielniki.

11. Wskażcie, które z liczb 235, 700, 3475, 8925, 87640, 15900 są podzielne tylko przez 5, które przez 25, a które przez 5 i 25? — Podzielcie je przez ich podzielniki.

12. Które z liczb, podanych w zadaniu 11., są podzielne przez 100, które tylko przez 10, a które przez 100 i 10?

III. W sposób wyżej podany można wykazać, że *przez 8, 125, 1000 są te liczby podzielne, których trzy najniższe miejsca, wzięte jako liczba, są podzielne przez 8, 125, 1000.* — Przez 1000 są zatem podzielne liczby, kończące się na trzy zera.

Zadania.

13. Wykażcie, dlaczego liczby 15248, 27176, 749152 są — a liczby 31249, 89156, 37476 nie są podzielne przez 8.

14. Wykażcie, które z liczb 407574, 52800, 14375, 26875, 768500 są, a które nie są podzielne przez 125.

IV. Ponieważ $10=9+1$, $100=99+1$, $1000=999+1$ i t. d., przeto można każdą liczbę rozłożyć także w sposób następujący: N. p. $5286=5.1000+2.100+8.10+6=5(999+1)+2(99+1)+$
$+8(9+1)+6=5.999+5+2.99+2+8.9+8+6=5.999+2.99+$
$+8.9+21$ zatem
$5286:3=(5.999+2.99+8.9+21):3=5.333+2.33+8.3+7=$
$=1762$ liczbie całkowitej.

Z powyższego przeprowadzenia wynika, że *liczba jest podzielna przez 3, jeżeli suma jej cyfr jest przez 3 podzielna.* Tak samo wykaże się, że *przez 9 są liczby podzielne, jeżeli suma ich cyfr jest przez 9 podzielna.*

Ponieważ liczba, podzielna przez 2 i 3, jest wielokrotnością liczb 2 i 3 a więc i liczby 6, przeto *przez 6 są podzielne liczby parzyste, które są zarazem podzielne przez 3.*

Zadania.

15. Wykażcie w powyższy sposób, dlaczego liczby 813, 5976, 63417 są — a liczby 587, 1436, 23845 nie są podzielne przez 3.

16. Wykażcie w powyższy sposób, dlaczego liczby 153, 3627, 836145 są, a liczby 538, 4786, 63417 nie są podzielne przez 9.

17. Które z liczb 5056, 7530, 40074, 801475 są — a które nie są podzielne przez 6? — Podzielcie je przez 6.

18. Podzielcie liczby: 675, 4068, 34650, 4019700 przez ich podzielniki.

*19. Podzielcie *a)* 1404; *b)* 2520 a następnie każdy z otrzymanych ilorazów przez ich najmniejszy podzielnik (1 wyjąwszy) i pomnóżcie wszystkie podzielniki i ostatni iloraz przez siebie. — Co spostrzegacie?

32. Rozkładanie liczby na czynniki.

Czynniki (§ 15. I. *b*), które są liczbami pierwszemi, nazywamy czynnikami pierwszymi (перві чинники, Primfaktoren). Rozkładamy liczbę na czynniki pierwsze, dzieląc ją przez najmniejszy pierwszy podzielnik (1 wyjąwszy) tak długo, jak długo można (§ 31. zad. 6. 7. i 19.). N. p.

4620:2	albo	4620	2	
2310:2		2310	2	
1155:3		1155	3	przeto $4620 = 2.2.3.5.7.11$
385:5		385	5	
77:7		77	7	
11:11		11	11	

Zadania.

1. Rozłóżcie na czynniki pierwsze: *a)* 243; *b)* 567; *c)* 18304.

*2. Rozłożywszy na czynniki pierwsze liczby 6600 i 5940, wypiszcie po razu czynniki spólne, i podzielcie ich iloczynem dane liczby. — Co spostrzegacie?

*3. Odrzućcie z wypisanych w zadaniu 2 czynników czynnik jeden i podzielcie iloczynem czynników pozostałych dane liczby.— Co spostrzegacie?

*4. Do wypisanych w zadaniu 2 czynników dobierzcie taki, który przychodzi tylko w jednej z danych liczb, i podzielcie dane liczby iloczynem tych czynników. — Co spostrzegacie?

*5. Rozłożywszy na czynniki pierwsze liczby 119700, 321750, 154440 postąpcie jak wskazano w zadaniu 2. i 4.

*6. Rozłożywszy na czynniki pierwsze liczby 1664 i 2673, wskażcie te liczby, które są podzielnikami danych liczb.

33. Największy spólny podzielnik.

Liczba, będąca podzielnikiem dwóch lub więcej liczb (§ 30. zad. 1. 2.), jest ich spólnym podzielnikiem (спільний подільник, das gemeinsame Maß). Największa liczba, będąca spólnym podzielnikiem kilku liczb, jest ich największym spólnym podzielnikiem (§ 32. zad. 2. i 5.).

Liczby, nie mające spólnego podzielnika (32. zad. 6.), nazywamy liczbami niespółmiernemi (неспівмірні, inkommensurabel).

Z podanego określenia wynika, że największy spólny podzielnik kilku liczb ma zawierać wszystkie spólne ich czynniki. — [Zadanie 2. w § 32. wskazuje, jak się szuka największego spólnego podzielnika].

Zadania.

1. Wyszukajcie największy spólny podzielnik (nw. s. p.) liczb: *a)* 504, 1260, 1134; *b)* 1125, 875, 1625; *c)* 1638, 1386, 126.

2. Jaki jest nw. s. p. liczb: *a)* 186, 390, 715, *b)* 2200, 1125, 1932?

*3. Wyszukawszy nw. s. p. liczb *a)* 84, 60, 132; *b)* 924, 660, 792, pomnóżcie go przez niespólne czynniki tych liczb, a otrzymany iloczyn podzielcie przez każdą z danych liczb. — Co spostrzegacie?

*4. Uczyńcie, co wskazano w 3., opuszczając *a)* jeden z czynników spoólnych, *b)* jeden z czynników niespólnych. — Co spostrzegacie?

5. Wybierzcie z pomiędzy liczb 188, 828, 786, 1375 co dwie liczby i oznaczcie ich nw. s. p. — Czy są między niemi liczby niespółmierne?

*6. Znalazłszy nw. s. p. liczb 745, 855, 1035, podajcie, czy te liczby mają jeszcze inne spólne podzielniki? — Ile ich mają.

34. Najmniejsza spólna wielokrotność.

Liczba, będąca wielokrotnością kilku danych liczb, nazywa się ich spólną wielokrotnością (§. 30. zad. 3.), najmniejsza zaś liczba z pomiędzy spólnych wielokrotności, jest najmniejszą spólną wielokrotnością (nm. s. w. найменьша спільна многократь, das kleinste gemeinsame Vielfache) danych liczb.

Ponieważ w najmniejszej spólnej wielokrotności ma się mieścić każda z danych liczb, przeto ma się ona składać ze wszystkich czynników, z których się składają dane liczby, ale oprócz tych nie może zawierać żadnych innych (§. 33. zad. 3. i 4.). N. p. dane są liczby 8, 15, 18, 24

8	2	15	3	18	2	24	2	Czynnik spólny liczbom	8, 18 i 24 jest 2
4	2	5	5	9	3	12	2	» » »	15, 18 i 24 » 3
2	2			3	3	6	2	» » »	8 i 24 jest 2, 2,
						3	3	Niespólne czynniki są:	5 i 3.

przeto nm. s. w. = 2. 3. 2. 2. 5. 3 = 360.

Jeżeli zważymy, że biorąc czynniki liczby 24, bierzemy tem samem liczbę 8, natenczas będzie powyższy sposób w skróceniu następującym:

1) Liczbę mniejszą (8), która się w większej mieści bez reszty, opuszcza się.

2) Wyłącza się spólny podzielnik tak długo, jak długo dwie liczby go mają.

3) Spólne podzielniki mnożymy przez czynniki niespólne. A zatem

15,	18,	24	2	
15,	9,	12	3	nm. s. w. = 2.3.5.3.4 = 360.
5,	3,	4		

Zadania.

1. Znajdźcie rozkładaniem na czynniki *nm. s. w.* liczb 14, 32, 48, 64 i okażcie (§. 33. zad. 4.), że ona jest rzeczywiście najmniejsza.

2. Znajdźcie *nm. s. w.* liczb 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i okażcie, że ona jest spólną wielokrotnością.

3. Znajdźcie *nm. s. w.* liczb *a*) 3, 5, 7, 11, 13; *b*) 2, 8, 16, 32, 64, 128; *c*) 3, 6, 30, 150; *d*) 4, 12, 24, 120, 840.

4. Jaka jest *nm. s. w.* liczb: *a*) 2, 4, 8, 14; *b*) 6, 12, 20, 30; *c*) 4, 6, 18, 21, 25; *d*) 5, 15, 20, 24, 40; *e*) 3, 4, 7, 920?

35. O ułamkach.

I. Aby namierzyć n. p. $\frac{3}{4}$ *m* (trzy czwarte), bierzemy $\frac{1}{4}$ (jedną czwartą) *m* za miarę i mierzymy takich 3.

Jeżeli pewną, dokładnie oznaczoną część jednostki zasadniczej przyjmiemy za nową jednostkę, ta nazywa się jednostką ułamkową (дробова одиниця).

N. p. $\frac{1}{2}$ (jedna druga albo pół), $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}=0{\cdot}1$, $\frac{1}{100}=0{\cdot}01$... jeżeli jednostkę zasadniczą podzielimy na 2, 3, 4, 10, 100 równych części.

Ułamek (der Bruch) jestto zbiór pewnych jednostek ułamkowych. Do wyrażenia ułamka ($\frac{3}{4}$) potrzeba dwóch liczb: mianownika (4. знаменник, der Nenner), który oznacza, jaką częścią jednostki zasadniczej jest jednostka ułamkowa — i licznika (3. чисельник, der Zähler), który podaje, ile takich jednostek wzięto. Licznik piszemy nad mianownikiem, a między nimi kładziemy kreskę poziomą, zwaną kreską ułamkową (дробова чертка, der Bruchstrich).

Tak licznik jak i mianownik, uważany oddzielnie, jest liczbą całkowitą.

Ułamek, którego mianownikiem jest liczba 10, 100, 1000 itd. (potęga z 10. §. 4.), nazywa się ułamkiem dziesiętnym, wszystkie zaś inne ułamki, ułamkami zwyczajnymi (дроби прості, gemeine Brüche).

Z określenia ułamka wynika, że n. p. $\frac{5}{7}$ powstanie, jeżeli znajdziemy 7-mą część z 1 i tę 5 razy do siebie doliczymy.

A zatem:

$\frac{5}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$

Albo także $5:7=(1+1+1+1+1):7=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$

przeto $\frac{5}{7}=5:7$ i na odwrót.

A zatem: *Ułamek możemy uważać za naznaczone dzielenie, w którem licznik jest dzielną, a mianownik dzielnikiem* i na odwrót.

Liczba, składająca się z liczby całkowitej i ułamka, nazywa się liczbą mieszaną (ч. мішане, eine gemischte Zahl). N. p. $5\frac{3}{4}$=właściwie $5+\frac{3}{4}$; $7\frac{9}{10}=7{\cdot}9$.

Zadania.

1. Nakreślcie linijkę 1 *dm* długą i przedstawcie na niej $\frac{1}{2}$ *dm*, $\frac{1}{5}$ *dm*, $\frac{1}{10}$ *dm*.

2. W jaki sposób otrzymamy $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$? — Przedstawcie rysunkiem.

*3. Ile to razy $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{100}$ zawiera się w jednostce zasadniczej? Ile ich będzie potrzeba na 2, 3, 7 jednostek zasadniczych?

4. Przedstawcie rysunkiem: *a)* $\frac{1}{4}$ *dm*, $\frac{2}{4}$ *dm*, $\frac{3}{4}$ *dm*, $\frac{4}{4}$ *dm*; *b)* $\frac{1}{5}$ *dm*, $\frac{2}{5}$ *dm*, $\frac{3}{5}$ *dm*, $\frac{4}{5}$ *dm*, $\frac{5}{5}$ *dm*; *c)* $\frac{1}{10}$ *dm*, $\frac{3}{10}$ *dm*, $\frac{5}{10}$ *dm*, $\frac{10}{10}$ *dm*.

Która liczba jest tu licznikiem, a która mianownikiem?

5. Ile halerzy czyni $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$ K — a ile centymetrów $\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{20}{20}$ metra? — Która liczba jest tu licznikiem, a która mianownikiem?

*6. Na linijce dowolnej długości przedstawcie $3\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$. Zmierzcie, ile połówek jest w $3\frac{1}{2}$, czwartych w $1\frac{3}{4}$, trzecich w $5\frac{2}{3}$.

*7. Na linijkach tej samej długości, nakreślonych jedna pod drugą, przedstawcie: *a)* $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$; *b)* $\frac{8}{8}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{16}{8}$.

*8. Ile halerzy czynią: *a)* $\frac{4}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{8}{10}$; *b)* $\frac{10}{10}$, $\frac{15}{10}$, $\frac{20}{10}$ koron?

II. Ułamek, którego licznik jest mniejszy niż mianownik (§. 35. zad. 7a i 8a.), zawiera mniej jednostek ułamkowych, niż ich jest w jednostce zasadniczej, a przeto jest mniejszy niż 1. Ułamek taki nazywa się właściwym ułamkiem (др. істний, echter Bruch).

Ułamek, którego licznik jest równy mianownikowi lub od niego większy (§. 35. zad. 7b. 8b.), nazywa sią ułamkiem nie-właściwym (др. неістий, unechter Bruch). W pierwszym przypadku jest ułamek równy 1, w drugim większy niż 1. (Dlaczego?)

Zadania.

9. Wskażcie, które z ułamków: $\frac{3}{4}$ godzin, $\frac{15}{15}$ godz., $\frac{7}{5}$ godz., $\frac{7}{10}$ godz., są właściwe, a które niewłaściwe. Zamieńcie godziny na minuty.

*10. Ile centymetrów czyni: $\frac{3}{2}$ *dm*, $\frac{5}{5}$ *dm*, $\frac{10}{10}$ *dm*? — Jakie to są ułamki?

*11. Ile godzin czyni: $\frac{5}{8}$ dni, $\frac{28}{12}$ dni? — Otrzymane godziny zamieńcie na liczby wielorakie.

*12. Pomnóżcie: *a*) w ułamku $\frac{1}{2}$, *b*) w ułamku $\frac{8}{3}$ mianownik przez 2, 3, 4. — Czy to będą ułamki właściwe czy niewłaściwe? Przedstawcie każdy z nich rysunkiem. — Który z nich jest największy, a który najmniejszy? Ile razy jest jeden większy od drugiego?

*13. Pomnóżcie w ułamku $\frac{1}{4}$ licznik przez 2, 3, 5, 6. — Czy ułamki te są właściwe, czy niewłaściwe? Postąpcie, jak w zadaniu 12, i odpowiedźcie na zadane tam pytania.

*14. Podzielcie w ułamku $\frac{7}{30}$ miesiąca mianownik przez 2, 3, 5, 10. — Czy otrzymacie ułamki właściwe czy niewłaściwe? — Zamieńcie każdy na dnie i podajcie, który z nich jest największy?

*15. Podzielcie w ułamku $\frac{64}{20}$ K licznik przez 2, 4, 8, 16. — Czy otrzymacie ułamki właściwe czy niewłaściwe? — Zamieńcie każdy z nich na halerze. — Który z nich jest największy?

36. Przemiana ułamków.

I. Ponieważ ułamek n. p. $\frac{15}{8}=15:8$ (§. 35. I.), więc $\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$. A przeto

Ułamek niewłaściwy zamieniamy na liczbę mieszaną, dzieląc licznik przez mianownik,

II. Z §. 35. II. wynika, że $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{5}{5}=\frac{a}{a}=\frac{b}{b}$, t. z., że możemy 1 zamienić na ułamek niewłaściwy, którego licznik jest równy mianownikowi. Gdyby zatem było n. p. $4\frac{3}{7}$, tedy zważywszy, że $1=\frac{7}{7}$, $4\frac{3}{7}=4+\frac{3}{7}=\frac{4.7}{7}+\frac{3}{7}=\frac{4.7+3}{7}=\frac{31}{7}$

A zatem: *Liczbę mieszaną zamieniamy na ułamek niewłaściwy o mianowniku danego ułamka, pozostawiając mia-*

nownik, a tworząc licznik w ten sposób, że liczbę całkowitą mnożymy przez mianownik i dodajemy do tego iloczynu licznik.

Zadania.

Zamieńcie na liczby mieszane ułamki: $\frac{9}{5}$, $\frac{18}{6}$, $\frac{247}{11}$, $\frac{378}{15}$, $\frac{730}{365}$, $\frac{5748}{347}$, $\frac{12376}{211}$.

*2. Czy z ułamków $\frac{240}{4}$, $\frac{120}{4}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{8}{4}$ będą liczby całkowite, czy mieszane? — Zamieńcie ułamki. — Który z danych ułamków, sądząc z otrzymanych liczb, jest największy?

*3. Zamieńcie na liczby mieszane lub całkowite: $\frac{1944}{6}$, $\frac{1944}{12}$, $\frac{1944}{24}$, $\frac{1944}{72}$. Który z tych ułamków, sądząc z otrzymanych liczb, jest największy?

4. Zamieńcie na ułamek niewłaściwy o mianowniku 7 liczby 3, 6, 12, 15, 30.

5. Ile piątych, dziesiątych, dwudziestych, czterdziestych zawiera się w 7 całkowitych? — Napiszcie to.

6. Dlaczego $1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$; $2\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$; $4\frac{7}{20}=\frac{87}{20}$?

7. Zamieńcie na ułamki niewłaściwe: $2\frac{1}{2}$, $2\frac{5}{7}$, $14\frac{3}{4}$, $26\frac{5}{8}$, $136\frac{213}{371}$.

8. Zamieńcie na ułamki niewłaściwe: $8\frac{7}{10}$, $25\frac{31}{100}$, $94\frac{17}{1000}$, $9\frac{7}{10000}$. Napiszcie te liczby w innej postaci (§. 4.).

III. Jeżeli położymy n. p. $\frac{5}{7}=5:7$ (§. 35. I.)$=x$, natenczas

(§. 21. 1.) $\qquad 5=7x$

a że $\qquad m=m$

więc $\qquad 5.\,m=7.\,mx$ $\qquad$ bo równe liczby, pomnożone przez równe, dają równe iloczyny.

Ale $\qquad 7.\,m=7.\,m$

przeto $\qquad \frac{5\,m}{7\,m}=x=\frac{5}{7}$ $\qquad$ bo równe liczby, podzielone przez równe, dają równe ilorazy.

Tak samo udowodni się, że $\frac{5}{7}=\frac{5:m}{7:m}$ A więc:

Wartość ułamka nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik przez tę samą liczbę a) pomnożymy, b) podzielimy.

Do tego samego wniosku dojdziemy w następujący sposób: Licznik wskazuje, ile jednostek ułamkowych zawiera się w ułamku. Zwiększając zatem licznik 2, 3, 4... m razy (§. 35. zad. 13), zwiększamy wartość ułamka 2, 3, 4... m razy. Zwiększając zaś mianownik 2, 3, 4... m razy (§. 35. zad. 12.), zmniejszamy wartość ułamka 2, 3, 4... m razy. Nie zmieni się przeto wartość ułamka, jeżeli jego licznik i mianownik 2, 3, 4... m razy zwiększymy.

Zadania.

9. Ile gramów czyni $\frac{3}{4}$ kg.? — Pomnóżcie licznik i mianownik tego ułamka przez 2, 5, 10 i oznaczcie, ile teraz będzie on zawierał gramów?

10. Ile stopni czyni $\frac{5}{6}$ kąta pełnego? — Pomnóżcie licznik i mianownik przez 2, 3, 4, 5, 6. — Ile stopni będzie teraz ułamek wyrażał?

*11. Zamieńcie *a)* $\frac{5}{7}$ na równy mu ułamek o mianowniku 21
b) $\frac{8}{15}$ " " " " " 30
c) $\frac{18}{20}$ " " " " " 100

Ile razy jest nowy mianownik większy od danego? — Ileż razy będzie nowy licznik większy od licznika danego?

*12. Pomnóżcie licznik i mianownik ułamka $\frac{2}{3}$ przez 20, ułamka $\frac{3}{4}$ przez 15, ułamka $\frac{7}{12}$ przez 5, a $\frac{13}{15}$ przez 4. — Czy się wartość tych ułamków zmieniła? — A co spostrzegacie?

13. Ile stopni ma $\frac{24}{60}$ kąta pełnego? — Podzielcie licznik i mianownik przez 2, 3, 4, 6, 12. — Ile stopni przedstawia ułamek teraz?

14. Ile halerzy jest w $\frac{70}{100}$ K? — Podzielcie licznik i mianownik przez 2, 5, 10. Ile halerzy jest teraz w ułamku?

*15. Dzielcie licznik i mianownik ułamków: $\frac{210}{330}$, $\frac{756}{2052}$, $\frac{9000}{12600}$ przez ich spólne podzielniki, jak długo te będą w nich przychodziły. — Czy się wartość ułamków zmieniła?

IV. Twierdzenie *a)* (§. 36. III) służy do tego, aby dane ułamki przemienić na inne o spólnym mianowniku (§. 36. zad. 12). W tym celu bierze się na spólny mianownik *nm. s. w.* danych mianowników. Nowy mianownik dzielimy przez dany, a ilorazem mnożymy dany licznik. Iloczyn tak otrzymany będzie nowym licznikiem (§. 36. zad. 11).

Zadania.

16. Sprowadźcie do spólnego mianownika ułamki:

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{17}{32}$ *b)* $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{11}{18}$, $\frac{13}{36}$
c) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ *d)* $\frac{13}{16}$, $\frac{19}{30}$, $\frac{17}{50}$, $\frac{1}{60}$
e) $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{9}{1000}$ *f)* $\frac{137}{150}$, $\frac{207}{346}$, $\frac{83}{720}$.

17. Zamieńcie ułamki: $\frac{3}{4}$ kąta pełnego, $\frac{7}{12}$ kąta pełnego, $\frac{8}{9}$ kąta pełnego i $\frac{13}{15}$ kąta pełnego na ułamki o spólnym mianowniku i oznaczcie, ile stopni było w każdym ułamku przedtem, a ile jest teraz.

18. Zamieńcie ułamki $\frac{5}{6}$ dni, $\frac{1}{3}$ dni, $\frac{7}{8}$ dni na inne o spólnym mianowniku i oznaczcie, ile godzin jest w każdym ułamku teraz, a ile było przedtem.

V. *Ułamek upraszczamy* (скорочуємо), *dzieląc jego licznik i mianownik przez ich spólny podzielnik* (§ 36. zad 15.). — Uprościć należy ułamek zawsze, jeżeli tylko można.

Zadania.

19. Uprośćcie $\frac{180}{200}$ *m*. — Ile centymetrów jest w ułamku danym, a ile w nowym?

20. Uprośćcie ułamki: $\frac{112}{176}$; $\frac{1287}{4248}$; $\frac{1320}{1815}$; $\frac{16400}{18000}$; $\frac{3432}{5544}$.

37. Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne.

Z § 35. I. wynika, że n. p.

$\frac{7}{16} = 7:16 = 0{\cdot}4375$
70
60
120
80

Zamieniamy resztę 7 na 70 dziesiątych; resztę 6 dziesiątych na 60 setnych i t. d. i otrzymamy ułamek dziesiętny.

Zatem: *Ułamek zwyczajny zamieniamy na dziesiętny, dzieląc licznik przez mianownik.*

Zadania.

1. Zamieńcie następujące ułamki na dziesiętne: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{157}{200}$.

*2. Zamieniwszy ułamki $\frac{7}{8}$, $\frac{23}{40}$, $\frac{51}{64}$, $\frac{173}{250}$ na ułamki dziesiętne, rozłóżcie każdy mianownik na czynniki pierwsze. — Z jakich czynników składają się mianowniki?

*3. Zamieńcie na ułamki dziesiętne: $\frac{4}{9}$, $\frac{19}{33}$, $\frac{51}{111}$, $\frac{5}{7}$. — Co spostrzegacie. Rozłóżcie mianowniki na czynniki pierwsze.

*4. Zamieńcie na ułamki dziesiętne: $\frac{17}{30}$, $\frac{19}{24}$, $\frac{41}{55}$. — Co spostrzegacie? Rozłóżcie mianowniki na czynniki pierwsze.

*5. Zamieńcie na ułamki dziesiętne: $\frac{4}{9}$, $\frac{76}{99}$, $\frac{648}{999}$.

38. Zamiana ułamków dziesiętnych na zwyczajne.

I. Z poprzedniego paragrafu wynika, że ułamki dziesiętne są albo skończone (скінчені) (§ 37. zad. 2.), albo peryodyczne (навороткі) (§ 37. zad. 3. i 4.). Ułamki peryodyczne są to ułamki, w których pewna liczba powtarza się bez końca. Liczbę tę nazywamy peryodem (наворот).

Ułamek peryodyczny przedstawiamy w ten sposób, że piszemy peryod tylko raz, a nad jego pierwszą i ostatnią cyfrą kładziemy kropki. N. p.

$0{\cdot}6666\ldots\ldots = 0{\cdot}\dot{6}$ $\qquad$ $0{\cdot}57\,57\,57\ldots\ldots = 0{\cdot}\dot{5}\dot{7}$

$0{\cdot}745\,745\,745\ldots\ldots = 0{\cdot}\dot{7}4\dot{5}$ $\qquad$ $0{\cdot}58\,6974\,6974\ldots\ldots = 0{\cdot}58\dot{6}97\dot{4}$

Ułamki peryodyczne są dwojakie: *a)* peryodyczne czyste (нав. чисті) (§ 37. zad. 3.), w których peryod zaczyna się od dziesiątych, i *b)* peryodyczne mieszane (нав. мішані) (§ 37. zad. 4.), w których przed peryodem stoi liczba nie powtarzająca się.

Ułamek dziesiętny skończony zamieniamy na zwyczajny, podpisując mianownik pod dane miejsca dziesiętne, poczem ułamek upraszczamy, jeżeli to uczynić można.

N. p. $0{\cdot}64 = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$.

Zadania.

1. Zamieńcie na ułamki zwyczajne: *a)* 0·4; *b)* 0·05; *c)* 0·006; *d)* 0·0008.

2. Zamieńcie na ułamki zwyczajne: *a)* 0·38; *b)* 0·384; *c)* 0·56; *d)* 0·4352.

3. Zamieńcie na ułamki zwyczajne: *a)* 3·8; *b)* 27·06; *c)* 4·536; *d)* 74·000512.

II. Niech będzie dany ułamek peryodyczny 0·648 648 648..... Jeżeli zamiast niego weźmiemy $\frac{648}{1000}$, natenczas będzie to zamało, trzeba więc ten ułamek powiększyć nieco, zmniejszając mianownik o 1. Jakoż gdy położymy (§ 37. zad. 5.)

$\frac{648}{999} = \frac{72}{111} = 72:111 = 0{\cdot}648\ldots\ldots$ więc na odwrót $0{\cdot}\dot{6}4\dot{8} = \frac{648}{999}$

```
720
 540
  960
   720
```

A zatem: *Ułamek peryodyczny czysty zamieniamy na zwyczajny, podpisując pod peryod jako licznik tyle dziewiątek jako mianownik, ile miejsc ma peryod.*

Ułamek peryodyczny mieszany możemy przedstawić jako sumę dwóch ułamków. N. p.

$$0{\cdot}7\,35\,35\,35\ldots\ldots = \tfrac{7}{10} + \tfrac{35}{990}$$

A gdy te ułamki dodamy, otrzymamy ułamek zwyczajny. Zamianę takich ułamków uskutecznimy w paragrafie następnym.

Zadania.

4. Zamieńcie na ułamki zwyczajne: *a)* $0{\cdot}\dot{6}$; *b)* $0{\cdot}\dot{7}$; *c)* $0{\cdot}\dot{8}$ — a otrzymane ułamki zamieńcie na odwrót na dziesiętne.

5. Zamieńcie na ułamki zwyczajne: *a)* $0{\cdot}\dot{1}\dot{3}$; *b)* $0{\cdot}\dot{1}\dot{8}$; *c)* $0{\cdot}\dot{2}\dot{4}$; *d)* $0{\cdot}\dot{4}0\dot{2}$; *e)* $4{\cdot}\dot{5}$; *f)* $7{\cdot}\dot{1}3\dot{5}$; *g)* $48{\cdot}\dot{7}06\dot{2}$.

39. Dodawanie ułamków.

Z § 8. I. i § 35. I. wynika, że n. p.

$$\frac{6}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{6+1+1+1+1}{7}=\frac{6+4}{7}=\frac{10}{7}=1\tfrac{3}{7}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{m}{b}=\frac{a}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\ldots\ m\ \text{razy}=\frac{a+1+1+1+\ldots\ m\ \text{razy}}{b}=\frac{a+m}{b}$$

A zatem: *Ułamki o równych mianownikach dodajemy, dodając ich liczniki i podpisując pod tę sumę spólny mianownik.* Jeżeli mianowniki nie są równe, trzeba poprzednio sprowadzić ułamki do spólnego mianownika (спільний знаменник).

Liczby mieszane dodajemy, dodając najpierw ułamki, a potem liczby całkowite.

Zadania.

1. Znaleźć sumę ułamków: *a)* $\frac{5}{18}+\frac{7}{18}+\frac{11}{18}+\frac{17}{18}$; *b)* $\frac{15}{121}+\frac{38}{121}+\frac{75}{121}+\frac{91}{121}+\frac{120}{121}$; *c)* $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}+\frac{14}{15}$; *d)* $\frac{6}{7}+\frac{11}{21}+\frac{23}{36}+\frac{19}{28}$

*2. Ile to czyni razem: *a)* $\frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{9}{1000}$; *b)* $\frac{9}{10}+\frac{4}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{3}{10000}$; *c)* $\frac{7}{10}+\frac{29}{1000}+\frac{5}{10000}$? [Porówn. z § 4.].

3. Dodajcie następujące liczby: *a)* $3\frac{2}{3}+4\frac{3}{4}+5\frac{4}{5}$; *b)* $28\frac{5}{9}+136\frac{7}{12}+272\frac{17}{20}$; *c)* $138\frac{1}{3}+204\frac{3}{5}+68\frac{6}{7}+300\frac{10}{11}$; *d)* $15\frac{1}{2}+308\frac{1}{4}+111\frac{5}{6}+2\frac{7}{8}$.

*4. Ileto czyni razem: *a)* $271\frac{3}{10}+342\frac{9}{10}+28\frac{53}{100}+17\frac{17}{100}$; *b)* $470\frac{67}{100}+8\frac{301}{1000}+152\frac{37}{100}+212\frac{567}{1000}+\frac{309}{10000}$? — Przedstawcie te liczby w innej postaci (§ 4.) i dodajcie powtórnie.

*5. Zamieńcie na ułamki zwyczajne [§ 38. II.]: *a)* 0·8555... *b)* 0·4 86 86 86... *c)* 0·65 428; *d)* 0·154 888... *e)* 24·26 4 4 4... *f)* 12·566734.

6. Kupiec ma do sprzedania resztki sukna: $2\frac{3}{10}$ *m*, $1\frac{1}{2}$ *m*, $1\frac{3}{5}$ *m*, $2\frac{7}{10}$ *m*, $\frac{3}{4}$ *m*, $\frac{19}{20}$ *m*, $1\frac{37}{50}$ *m*. — Ile metrów jest wszystkiego sukna razem? — Zamieńcie dane liczby na liczby wielorakie i szukajcie sumy powtórnie.

7. Kupiec sprzedał w poniedziałek $9\frac{5}{8}$ *kg*, $12\frac{23}{50}$ *kg*, $3\frac{1}{2}$ *kg*, $10\frac{3}{5}$ *kg* cukru; we wtorek sprzedał $7\frac{19}{20}$ *kg*, $13\frac{1}{4}$ *kg*, $2\frac{3}{4}$ *kg*, $6\frac{3}{10}$ *kg* cukru. Ile sprzedał w jednym dniu, ile w drugim, a ile w obydwóch razem? — Zamieńcie na liczby wielorakie i szukajcie sumy powtórnie.

8. Za wykopanie pierwszej warstwy wądołu na 1 *m* głębokiej zapłacono $13\frac{3}{5}$ K, za każdą zaś dalszą warstwę na 1 *m* głęboką o $5\frac{1}{4}$ K więcej. Ile koron kosztowało wykopanie wądołu 8 *m* głębokiego?

9. W trójkącie jest kąt $a=73\frac{11}{15}°$; $b=52\frac{3}{5}°$; $c=53\frac{2}{3}°$. Ile stopni ma suma wszystkich kątów? — Zamieńcie na liczby wielorakie i szukajcie sumy powtórnie.

10. Posłaniec wysłany z A do B szedł przez 4 dni. Pierwszego dnia zrobił $18\frac{3}{8}$ *km*, drugiego $16\frac{5}{12}$ *km*, trzeciego $12\frac{7}{15}$ *km*, czwartego $10\frac{7}{10}$ *km*. Jak daleko jest z A do B?

40. Odejmowanie ułamków.

Z § I. *c* wynika, że n. p.

$$\frac{7}{11}-\frac{4}{11}=\frac{7-4}{11}=\frac{3}{11} \quad \text{albowiem} \quad \frac{3}{11}+\frac{4}{11}=\frac{7}{11}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}; \quad \text{albowiem} \quad \frac{a-c}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a-c+c}{b}=\frac{a}{b}$$

A zatem: *Ułamki o równych mianownikach odejmujemy, podpisując spólny mianownik pod różnicę ich liczników.* Gdy mianowniki nie są równe, sprowadzamy odjemną i odjemnik do spólnego mianownika.

Liczby mieszane odejmujemy, odejmując najpierw ułamki, a potem liczby całkowite.

Jeżeli ułamek w odjemnej jest mniejszy niż w odjemniku, dodajemy (§ 10. III.) do odjemnej i odjemnika 1, a to do odjemnika jako liczbę całkowitą, a do odjemnej w postaci ułamka niewłaściwego. N. p.

$$9\tfrac{2}{5}-6\tfrac{4}{5}=9\tfrac{2}{5}+\tfrac{5}{5}-6\tfrac{4}{5}+1=9\tfrac{7}{5}-7\tfrac{4}{5}=2\tfrac{3}{5}$$

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość wyżej podanej reguły na przykładach: *a)* $\frac{7}{9}-\frac{4}{9}$; *b)* $\frac{11}{12}-\frac{5}{12}$; *c)* $\frac{23}{25}-\frac{3}{25}$.

2. Znajdźcie różnice: *a)* $\frac{79}{100}-\frac{59}{100}$; *b)* $\frac{9}{10}-\frac{47}{100}$; *c)* $\frac{13}{10}-\frac{457}{1000}$. Przedstawcie te ułamki w postaci dziesiętnych i odejmijcie jeszcze raz.

3. Znajdźcie różnice: *a)* $\frac{1}{2}-\frac{5}{16}$; *b)* $\frac{6}{7}-\frac{3}{8}$; *c)* $\frac{5}{8}-\frac{1}{6}$; *d)* $\frac{20}{21}-\frac{5}{9}$.

4. Znajdźcie różnice: *a)* $12\frac{3}{5}-7\frac{1}{2}$; *b)* $20\frac{1}{6}-3\frac{5}{6}$; *c)* $248\frac{16}{21}-159\frac{5}{24}$.

5. Wykonajcie: *a)* $30-\frac{3}{7}$; *b)* $125-76\frac{5}{21}$; *c)* $361-148\frac{29}{36}$; *d)* $79\frac{2}{9}-19\frac{7}{10}$; *e)* $420\frac{11}{18}-156\frac{17}{21}$; *f)* $31\frac{7}{48}-29\frac{11}{12}$.

6. Wykonajcie: *a)* $16\frac{57}{100}-9\frac{23}{100}$; *b)* $14\frac{73}{100}-2\frac{561}{1000}$; *c)* $258-194\frac{3}{10}$; *d)* $517-309\frac{57}{100}$; *e)* $6-2\frac{641}{1000}$; *f)* $615\frac{1}{10}-206\frac{477}{1000}$.
Przedstawcie te liczby w postaci ułamków dziesiętnych i odejmijcie powtórnie.

7. Jak wielkie jest N^{tto}, jeżeli B$^{tto}=256\frac{13}{20}$ *kg*, a T$^{a}=16\frac{5}{8}$ *kg*? Zamieńcie te liczby na wielorakie i szukajcie różnic powtórnie.

8. Na dług wynoszący 17700 K, spłacono $784\frac{13}{25}$ K, $2858\frac{13}{20}$ K, $10367\frac{4}{5}$ K, $1556\frac{1}{4}$ K. — Ile jeszcze pozostaje długu? — Wykonajcie to zadanie także zapomocą liczb wielorakich.

9. Kupiec kupił towar za $524\frac{63}{100}$ K, a sprzedał go za $638\frac{3}{10}$ K. Ile zyskał?

10. Z roli, mającej $27\frac{11}{20}$ *ha*, zasiano żytem $10\frac{3}{10}$ *ha*, pszenicą $4\frac{4}{25}$ *ha*, hreczką $1\frac{1}{8}$ *ha*. Ile jeszcze hektarów nie obsiano.

11. Sprowadzono towar w trzech pakach. B^{tto} ważyło $148\frac{1}{2}$, $109\frac{1}{4}$, $206\frac{3}{5}$ *kg*: T^{a} była $7\frac{3}{8}$, $5\frac{9}{10}$, $10\frac{5}{12}$ *kg*. — Ile wynosiło całe N^{tto}?

41. Mnożenie ułamka liczbą całkowitą.

Z § 15. I. wynika, że n. p.

$$\frac{5}{7}.3=\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}=\frac{5+5+5}{7}=\frac{5.3}{7}$$

$$\frac{a}{b}.c=\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots\ldots c\text{ razy}=\frac{a+a+a+\ldots\ldots c\text{ razy}}{b}=\frac{ac}{b}$$

To znaczy: *Ułamek mnożymy liczbą całkowitą, mnożąc licznik mnożnikiem, a nie zmieniając mianownika.*

Zastosujemy tę regułę do przypadku n. p.

$$\tfrac{5}{6}.3 = \frac{5.3}{6} = \frac{5}{6:3} \quad (\S\ 36.\ \text{III } b.)$$

Z tego wynika: Jeżeli mianownik jest wielokrotnością mnożnika, można *ułamek pomnożyć przez liczbę całkowitą, dzieląc mianownik przez mnożnik, a nie zmieniając licznika.*

[Uwaga: Powyższą regułę można także wysnuć z § 35. zadan. 13. i 14.]

Liczby mieszane mnożymy, zamieniwszy je poprzednio na ułamki.

Jeżeli mnożnik i mianownik mnożnej mają spólny podzielnik, natenczas można je przed mnożeniem uprościć. N. p.

$$\tfrac{7}{20}.15 = \frac{7.15}{20} = \frac{7.3}{4} = \tfrac{21}{4} = 5\tfrac{1}{4} \quad \text{albo} \quad \tfrac{7}{20}.15 = \tfrac{7}{4}.3 = \tfrac{21}{4} = 5\tfrac{1}{4}$$

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość reguły na przykładach: *a)* $\frac{5}{7}.4$; *b)* $\frac{3}{4}.5$; *c)* $\frac{7}{9}.6$; *d)* $\frac{5}{6}.12$.

2. Jak pomnożycie ułamki: *a)* $\frac{5}{9}.3$; *b)* $\frac{7}{12}.4 =$; *c)* $\frac{1}{10}.5$?

3. Znajdźcie iloczyny: *a)* $\frac{23}{32}.4$; *b)* $\frac{231}{375}.25$; *c)* $\frac{26}{31}.8$; *d)* $\frac{143}{217}.58$.

*4. Wykonajcie: *a)* $\frac{5}{7}.7$; *b)* $\frac{7}{12}.12$; *c)* $\frac{3}{20}.20$ — Co spostrzegacie? Wyraźcie spostrzeżenie wasze słowami.

5. Rozwiążcie następujące zadania: *a)* $2\frac{3}{5}.24$; *b)* $6\frac{13}{25}.14$; *c)* $137\frac{5}{6}.72$; *d)* $358\frac{4}{9}.56$.

*6. Wykonajcie *a)* $215\frac{3}{10}.31$; *b)* $114\frac{17}{100}.9$ *c)* $96\frac{341}{1000}.7$. — Przedstawcie te liczby w postaci ułamków dziesiętnych i pomnóżcie powtórnie.

7. Ile komu czynią 345 dukatów, jeżeli dukat jest wart $12\frac{2}{5}$ K?

8. Krok, którym Rzymianie mierzyli odległość, wynosił $1\frac{1}{2}$ *m*. — Ile metrów czynią 3000 rzymskich kroków? — Zamieńcie na kilometry.

9. Za rubel srebrny płaci się $3\frac{1}{5}$ rubli papierowych. Ile rubli papierowych potrzeba zapłacić za 158 rubli srebrnych?

10. Metr sukna kosztuje $12\frac{3}{5}$ K. — Ile trzeba zapłacić za 84 *m*?

11. Rolnik sprzedał 25 *ha* pola po $570\frac{4}{5}$ K, 17 *ha* łąk po $348\frac{1}{4}$ K i 26 *ha* nieużytków po $115\frac{7}{10}$ K. — Ile wziął za wszystko pole?

12. Robotnik pracował przez 6 dni po $10\frac{2}{3}$ godzin, przez 15 dni po $8\frac{3}{4}$ godzin, przez 10 dni po $9\frac{5}{8}$ godzin. Przez ile więc godzin pracował, a przez ile odpoczywał w tych 31 dniach?

13. W pewnym warstacie wyrabiano przez 6 dni po $15\frac{2}{5}$ *m* płótna, przez 4 dni po $18\frac{3}{5}$ *m*, przez 7 dni po $16\frac{1}{2}$ *m*. Ile metrów płótna mają jeszcze zrobić, jeżeli przyjęto obstalunek na 300 *m*?

14. W starym dokumencie znaleziono następującą notatkę: »Mam, gdy to piszę, $59\frac{5}{6}$ lat: starszy mój syn liczy sobie $20\frac{3}{4}$, a młodszy $15\frac{1}{3}$ lat. Gdyby każdy z nas miał 18 razy więcej, natenczas razem żylibyśmy tyle lat, ile ich upłynęło od narodzenia Chrystusa Pana«. — W którymże roku, miesiącu i dniu pisano tę notatkę.

42. Dzielenie ułamka przez liczbę całkowitą.

Z § 21. wynika, że n. p.

$$\frac{5}{7}:3=\frac{5}{7.3};\quad \text{albowiem}\quad \frac{5}{7.3}\cdot 3=\frac{5.3}{7.3}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc};\quad \text{albowiem}\quad \frac{a}{bc}\cdot c=\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$$

A zatem: *Ułamek dzielimy przez liczbę całkowitą, mnożąc mianownik przez dzielnik, a nie zmieniając licznika.*

Jeżeli zastosujemy powyższą regułę w przypadku n. p.

$$\frac{6}{7}:3=\frac{6}{7.3}=\frac{6:3}{7}\quad (\S\ 36.\ \text{III}\ b)$$

natenczas wyniknie: Jeżeli licznik jest wielokrotnością dzielnika, można *podzielić ułamek przez liczbę całkowitą, dzieląc licznik przez dzielnik, a nie zmieniając mianownika.*

[Uwaga: Powyższą regułę można także wysnuć z § 35. zad. 12. i 15.]

Liczbę mieszaną zamieniamy na ułamek i następnie dzielimy.

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość reguły, wyżej podanej, na przykładach: *a)* $\frac{8}{9}:4$; *b)* $\frac{15}{19}:5$; *c)* $\frac{28}{29}:7$.

2. Wykażcie prawdziwość reguły, wyżej podanej, na przykładach: *a)* $\frac{1}{2}:3$; *b)* $\frac{3}{5}:2$; *c)* $\frac{3}{8}:4$; *d)* $\frac{15}{23}:10$.

3. Za 36 *m* sukna zapłacono $489\frac{1}{5}$ K. Ile kosztował metr?

4. Obwód kwadratu jest $307\frac{1}{2}$ *m* długi. Jak długi jest jeden bok tegoż?

5. Za 114 *kg* towaru zapłacono $245\frac{1}{3}$ K. — Ile trzeba zapłacić za 265 *kg* tego samego towaru?

6. Kupiono 7 *hl* wina po $72\frac{3}{4}$ K, 12 *hl* po $82\frac{1}{2}$ K i 17 *hl* po $58\frac{2}{5}$ K. Poczemu wypada hektolitr w przecięciu?

7. Kupiec sprowadził 138 *kg* towaru po $3\frac{27}{50}$ K, a sprzedał ten towar za $546\frac{7}{20}$ K. Ile zyskał na całej sprzedaży, a ile na każdym kilogramie?

8. Do wykonania pewnej pracy potrzeba 248 robotników przez $15\frac{1}{6}$ miesięcy. W jakim czasie wykonają tę pracę 358 robotników?

9. Pewien zapas żywności wystarczyłby dla 4960 ludzi na $5\frac{2}{5}$ miesięcy. Na jak długo wystarczy ten zapas dla 5730 ludzi?

10. Gospodyni wydała $18\frac{63}{100}$ K, ponieważ kupiła 74 jaj po $5\frac{1}{2}$ *h*, 3 *kg* masła po $2\frac{2}{5}$ K i 6 *kg* mięsa. Poczemuż wypada kilogram mięsa?

43. Mnożenie przez ułamek.

Jeżeli metr kosztuje n. p. 12 K, tedy całkiem słusznie wnioskujemy, że za 3, 4, 5 i t. d. metrów zapłacimy 3, 4, 5, i t. d. *razy* po 12 K, lecz gdy analogicznie powiadamy, że n. p. za $\frac{5}{6}$ *m* zapłacimy $\frac{5}{6}$ razy po 12 K, to popełniamy właściwie niedorzeczność. Można bowiem dać 12 K raz, dwa, trzy i t. d. razy, ale nigdy $\frac{5}{6}$ razy. Jeżeli mimoto mówimy i piszemy 12 K . $\frac{5}{6}$, to jestto tylko krótszy sposób wyrażenia się, a co właściwie znaczy, wynika ze sensu zadania. I tak: ponieważ 1 *m* kosztuje 12 K, przeto $\frac{1}{6}$ *m* będzie kosztować 12 K : 6, a przeto za $\frac{5}{6}$ *m* zapłacimy 12 K : 6 . 5, więc

$$12\text{ K}\,.\,\tfrac{5}{6}=12\text{ K}:6\,.\,5$$

Króciej dojdziemy do tego samego rezultatu z § 35. I, z którego wynika, że n. p.

$$12\,.\,\tfrac{5}{6}=12\,.\,5:6=12:6\,.\,5=10$$

$$a\cdot\frac{m}{b}=a\,.\,m:b$$

$$\tfrac{5}{7}\,.\,\tfrac{3}{4}=\tfrac{5}{7}\,.\,3:4=\frac{5\,.\,3}{7}:4=\frac{5\,.\,3}{7\,.\,4}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{p}=\frac{a}{b}\cdot m:p=\frac{am}{b}:p=\frac{am}{bp}$$

A więc: *Liczbę mnożymy ułamkiem, mnożąc ją licznikiem, a dzieląc mianownikiem.* Ponieważ obojętną jest rzeczą, w jakim porządku wykonamy te działania, przeto, gdy liczba jest podzielna przez mianownik, pierwej dzielimy ją mianownikiem, a następnie otrzymany iloraz mnożymy licznikiem.

Ułamek mnożymy ułamkiem, mnożąc licznik licznikiem, a mianownik mianownikiem.

Liczby mieszane zamieniamy na ułamki i te mnożymy.

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość powyższych reguł na przykładach: *a)* $8.\frac{2}{3}$; *b)* $7.\frac{5}{8}$; *c)* $9.\frac{4}{5}$; *d)* $\frac{2}{3}.\frac{5}{7}$; *e)* $\frac{10}{11}.\frac{7}{9}$; *f)* $\frac{11}{13}.\frac{9}{10}$.

*2. Znajdźcie iloczyny: *a)* $6.\frac{1}{2}$, *b)* $15.\frac{1}{3}$; *c)* $28.\frac{1}{4}$; *d)* $31.\frac{1}{5}$. — Co to znaczy pomnożyć przez $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ i t. d.?

3. Znajdźcie iloczyny *a)* $24.\frac{7}{12}$; *b)* $56.\frac{5}{8}$; *c)* $165.\frac{23}{45}$; *d)* $538.\frac{16}{21}$.

4. Pomnóżcie: *a)* $1\frac{1}{2}.1\frac{1}{3}$; *b)* $7\frac{3}{5}.9\frac{3}{8}$; *c)* $15\frac{7}{9}.12\frac{3}{4}$; *d)* $25\frac{19}{20}.17\frac{5}{18}$.

*5. Wykonajcie: *a)* $29\frac{6}{10}.7\frac{33}{100}$; *b)* $3\frac{7}{10}.6\frac{9}{10}$; *c)* $27\frac{3}{100}.36\frac{1}{10}$. Przedstawcie czynniki i iloczyn w postaci ułamków dziesiętnych i porównajcie z § 17. II.

6. Hektolitr wina kosztuje $170\frac{3}{5}$ K. Ile trzeba zapłacić za $8\frac{1}{10}$ *hl*?

7. Kupiec sprowadził towaru B-tto $370\frac{7}{20}$ *kg*; T-a$=17\frac{3}{9}$ *kg*. Ile zapłacił za ten towar, jeżeli kilogram netto kosztował $17\frac{3}{4}$ K?

8. Za 37 *m* sukna zapłacono $270\frac{1}{3}$ K. Ile zapłaci się za $20\frac{1}{4}$ *m*?

9. Cztery osoby podzieliły się spadkiem, wynoszącym 15000 K, w ten sposób, że A otrzymała $\frac{3}{10}$, B $\frac{3}{16}$, C $\frac{5}{12}$ a D resztę tej kwoty. Ponieważ D zrzekła się swego działu, więc tamci spadkobiercy rozdzielili kwotę, która na D przypadała, równo między siebie. — Ileż otrzymała każda z trzech osób?

10. Rolnik obsiał żytem $2\frac{1}{3}$ razy więcej hektarów niż pszenicą, pszenicą $1\frac{1}{2}$ razy więcej niż owsem, a owsa ma $3\frac{2}{5}$ razy więcej hektarów niż ugoru. Jeżeli więc ma ugoru $2\frac{1}{5}$ *ha*, ileż ma wszystkiego pola?

11. Za 6 dni pracy zapłacono 17 kosiarzom $142\frac{4}{5}$ K. Ileż zapłaci się 12 kosiarzom za $13\frac{3}{4}$ dni pracy?

44. Dzielenie przez ułamek.

Ponieważ nie zmieni się iloraz, jeżeli dzielną i dzielnik pomnożymy przez tę samą liczbą, przeto n. p.

$7 : \frac{3}{4} = 7 . 4 : \frac{3}{4} . 4 = 7 . 4 : 3 = 7 . \frac{4}{3}$

$a : \frac{m}{p} = ap : \frac{m}{p} \cdot p = ap : m . = a \cdot \frac{p}{m}$

$\frac{5}{9} : \frac{4}{11} = \frac{5}{9} . 11 : \frac{4}{11} . 11 = \frac{5}{9} . 11 : 4 = \frac{5}{9} . \frac{11}{4}$

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{p} = \frac{a}{b} \cdot p : \frac{m}{p} \cdot p = \frac{a}{b} \cdot p : m = \frac{ap}{bm} = \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{m}$$

A zatem: *Jakąkolwiek liczbę dzielimy przez ułamek, mnożąc ją odwrotną wartością dzielnika.*

Liczby mieszane zamieniamy na ułamki niewłaściwe.

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość reguły, wyżej podanej, na przykładach: *a)* $4 : \frac{2}{3}$; *b)* $8 : \frac{5}{13}$; *c)* $18 : \frac{16}{27}$; *d)* $\frac{1}{5} : \frac{2}{3}$ *e)* $\frac{5}{8} : \frac{3}{4}$.

2. Znajdźcie ilorazy: *a)* $24\frac{3}{7} : 6\frac{2}{3}$; *b)* $58\frac{8}{19} : 14\frac{5}{9}$; *c)* $13\frac{2}{11} : 2\frac{7}{10}$.

3. Znajdźcie ilorazy: *a)* $3\frac{5}{10} : 2\frac{7}{10}$; *b)* $47\frac{39}{100} : 21\frac{87}{100}$; *c)* $64\frac{131}{1000} : 15\frac{9}{10}$. Przedstawcie te liczby w postaci ułamków dziesiętnych i wykonajcie dzielenie powtórnie.

4. Za $15\frac{3}{4}$ dni zapłacono robotnikom $156\frac{13}{20}$ K. Ile zapłaci się za $23\frac{1}{2}$ dni?

5. Za towar, którego B-tto ważyło 315 *kg*, T-a $18\frac{3}{8}$ *kg*, zapłacił kupiec $330\frac{7}{20}$ K. Poczemu wypada kilogram netto?

6. Ile sekund potrzebuje kula, aby przelecieć 1 *km*, jeżeli w sekundzie przebiega $470\frac{1}{4}$ *m*?

7. Winiarz, sprzedając hektolitr wina po $86\frac{2}{5}$ K, wziął za nie $439\frac{4}{5}$ K. Ile ma jeszcze hektolitrów na składzie, jeżeli pierwotnie miał 30 *hl*?

8. Z obszaru wynoszącego 267 *ha* sprzedano $178\frac{3}{20}$ *ha* za $130168\frac{4}{25}$ K. Poczemu sprzedawano hektar i ile jeszcze pola pozostało?

9. Kupiec zapłacił za $367\frac{3}{5}$ *m* sukna $3859\frac{4}{5}$ K. Sprzedawszy pewną ilość tego towaru, sprzedawał resztę ze stratą $1\frac{3}{4}$ K na każdym metrze. Ileż metrów sprzedał ze stratą, jeżeli wziął za nie $682\frac{1}{2}$ K?

45. O równaniach pierwszego stopnia.

Jeżeli napiszemy n. p.

$14 = 9 + 5$

otrzymamy t. z. t o ż s a m o ś ć (рівність), t. j. połączenie dwóch liczb, których równość sama przez się jest jasna. Jeżeli zaś napiszemy

$14=x+5$ . . . . 1)

otrzymamy równanie (рівнане, die Gleichung), albowiem mamy z tego x tak oznaczyć, aby $14=x+5$ było tożsamością. To się stanie, jeżeli $x=9$. Wtedy bowiem będzie $14=9+5$.

Równanie zatem *jest to połączenie znakiem równości dwóch liczb, które tylko pod pewnymi warunkami są równe.*

W każdem równaniu są jedne liczby znane (звісні) (14, 5), drugie niewiadome (незвісні) (x). Niewiadome liczby znaczymy końcowemi głoskami alfabetu (x, y, z, u, w). Jeżeli w równaniu tylko jedna taka głoska przychodzi, równanie jest o jednej niewiadomej; w równaniu o 2 niewiadomych przychodzą dwie takie głoski, n. p.

$3\,x+8\,y=40-x$.

Rozwiązać równanie (розвязати рівнанє) *znaczy, wynaleźć taką szczególną wartość* (частна вартість), *która, podstawiona w równaniu za niewiadomą, zamieni równanie na tożsamość.* Ta liczba szczególna nazywa się pierwiastkiem (корінь, die Wurzel) równania. Pierwiastkiem równania 1) jest 9 albowiem $9+5=14$ jest tożsamością.

W równaniu rozróżniamy stronę lewą i prawą. Lewa strona równania są to liczby stojące po naszej lewej — prawa, po naszej ręce prawej ze względu na znak równości.

46. Porządkowanie równań.

Porządkowanie równań składa się z kilku czynności, a wszystkie polegają na tej samej przez się jasnej prawdzie, że równe liczby nie przestaną być równemi, jeżeli tym samym ulegną zmianom. Do porządkowania należy:

I. Wykonać naznaczone działania po obydwu stronach równania.

Zadania.

1. $2x-5-(7x-3x)=7-3x+(4x-11)$.
2. $7+8y+[9y-4-(5y+6)]=8y-1-[2y-15-(3y-4)]$.
3. $(5z-1)(2-3z)=(3z+4)(2-5z)$.
4. $7x-15-(13x-35)=(x-8)(x+2)$.
5. $20-2x+3x^2-(8-x-6x^2)=(2-3x)(2+3x)$.
6. $(z^2-2z+1)(4+z)=3z^3-z^2+2z-1-(2z^3+z^2+9z-21)$.

II. Równanie nie zmieni się, jeżeli je całe przez tę samą liczbę *a)* pomnożymy, — albo *b)* podzielimy. N. p.

1) $\frac{3x}{4}=6 \qquad 3x=24$

$\quad 4=4 \qquad\quad 3=3$

$4.\frac{3x}{4}=24 \qquad \frac{3x}{3}=8$

$3x=24 \qquad x=8$

2) $\frac{my}{a}=b \qquad my=ab$

$\quad a=a \qquad\quad m=m$

$a.\frac{my}{a}=ab \qquad \frac{my}{m}=\frac{ab}{m}$

$my=ab \qquad y=\frac{ab}{m}$

Twierdzenia *a)* używamy, *aby równanie uwolnić od ułamków*. W tym celu *mnożymy całe równanie t. j. jego lewą i prawą stronę przez nm. s. w. mianowników*. N. p.

$\frac{x}{2}-\frac{x}{4}+1=\frac{5x}{6}-2$ $\quad$ *nm.s.w.* mianowników$=12$, więc

$12.\frac{x}{2}-12.\frac{x}{4}+12.1=12.\frac{5x}{6}-12.2$ $\quad$ czyli (§ 43.)

$6x-3x+12=10x-24$

Twierdzenia *b)* używamy, aby równanie uprościć, jeżeli wszystkie jego wyrazy mają spólny podzielnik. N. p.

$36x-12=4x+8$ $\quad$ spólny podzielnik$=4$, więc

$9x-3=x+2.$

Zadania.

7. $7z-4=8+\frac{z}{4}$ $\qquad$ 8. $\frac{2x}{3}+5=\frac{4x}{5}+\frac{7x}{15}-2$

9. $\frac{x}{2}-\frac{x}{4}-1=\frac{x}{6}+7$ $\qquad$ 10. $\frac{y}{2}+\frac{y}{6}+\frac{y}{7}+\frac{y}{12}+9=y$

11. $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=x-\frac{x}{4}-\frac{x}{5}$ $\qquad$ 12. $1+\frac{5y}{12}=\frac{2y}{9}-\frac{3y}{4}+\frac{y}{6}$

13. $5+\frac{3y}{4}-\frac{5y}{6}=3-\frac{2y}{3}+\frac{3y}{8}$

14. $\left[\frac{z}{4}-\frac{2}{5}\right]\cdot\left[\frac{z}{10}-\frac{1}{8}\right]=\frac{z^2}{40}+\frac{5z}{8}-\frac{7z}{16}-\frac{43}{200}$

*15. Pomnóżcie przez -1 obydwie strony równania:

a) $-4x=-32$ $\qquad$ *b)* $-2y=8+6y$

c) $-7+3x=-x-15$ $\qquad$ *d)* $-2z-8=-7z-16$

Równanie się nie zmieni, jeżeli w całem zmienimy znaki.

16. Uprośćcie następujące równania:

a) $6x-12=9x-15$ *b)* $16-4y=10y-20$
c) $-5z+4z^2=-7z^2-30z$ *d)* $100x-4x^2=0$
e) $15z^2-20z=0$ *f)* $165-77y=220-88y$
g) $120-48x=-60x-84$ *h)* $z^4-496z^3=-12z^3$.

III. Równanie nie zmieni się, jeżeli po jego obydwóch stronach tę samą liczbę dodamy, albo odejmiemy. N. p.

1)
$$\begin{array}{rcl} 2x-3 & = & 4+x \\ +3 & = & +3 \\ \hline 2x & = & 4+x+3 \\ -x & = & -x \\ \hline 2x-x & = & 4+3 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rcl} ax+b & = & c-dx \\ -b & = & -b \\ \hline ax & = & c-dx-b \\ dx & = & dx \\ \hline ax+dx & = & c-b \end{array}$$

47. Rozwiązywanie równań o jednej niewiadomej.

Z II. i III. (§. 46.) wynika, że można *każdą liczbę przenieść z jednej strony znaku równości na drugą, ale trzeba na niej wykonać działanie przeciwne temu, jakie w równaniu jest naznaczone.*

Korzystając z tej reguły, przenosimy wiadome na jedną, niewiadome na drugą stronę i zbieramy liczby jednorodne.

Równanie o jednej niewiadomej będzie rozwiązane, jeżeli po jednej jego stronie pozostanie niewiadoma ze spółczynnikiem + 1. (§. 46. II).

Rozwiązawszy równanie trzeba zrobić próbę (провірити), t. j. podstawić w równaniu otrzymany pierwiastek i przekonać się, czy rzeczywiście otrzymamy tożsamość.

Zadania.

1. Rozwiążcie następujące równania:

a) $15+x=30$ *b)* $46=x-10$
c) $18-y=7$ *d)* $5=15-y$
e) $7x+13=41$ *f)* $38=2z+24$
g) $13-4z=-7$ *h)* $70=35-5x$

2. Rozwiążcie następujące równania, przenosząc niewiadome na stronę prawą:

$a)$ $16x-12=24x-52$ $\qquad$ $b)$ $8+7x=9+6x$

c) $-3y+5y-1+4y+15=-y+28$ $\qquad$ $d)$ $4-13y+2y-7y-40=0$

e) $5z+3z^2-4z-8z^2+7z+2z=0$ $\qquad$ $f)$ $-12z^2+4z^3=8z^3-16z^2$

3. Rozwiążcie równania, podane w § 46. zad. 16. przenosząc niewiadome na stronę lewą.

4. Rozwiążcie równania 7—14 w §. 46.

5. Rozwiążcie równania:

$a)$ $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x}{8}+15=x-\frac{5}{6}$ $\qquad$ $b)$ $2\frac{1}{3}x-7=\frac{5x}{6}+1\frac{3}{4}$

c) $\left[\left|\frac{2x}{3}-1\right|\cdot\frac{5}{7}-\left|\frac{3x}{5}+2\right|\right]\cdot\frac{1}{4}=\frac{9x}{14}+\frac{43}{820}$ $\qquad$ $d)$ $\frac{2x-5}{8}-\frac{7-3x}{12}=\frac{x}{3}-1$

48. Układanie równań.

Jeżeli są podane warunki, którym niewiadoma powinna zadość uczynić, natenczas można z nich ułożyć równanie. W tym celu naznaczamy niewiadomą n. p. przez x i na tem spełniamy dokładnie to wszystko, czego zadanie wymaga. N. p.

Chłopiec zapytany, ile ma halerzy, odrzekł: Gdybym miał 3 razy tyle *i* 2 razy tyle, jak mam, naówczas miałbym 85 halerzy. Ileż miał halerzy?

Otóż chłopczyk miał x halerzy; więc:

$3x+2x=85$ $\qquad$ czyli $5x=85$ $\qquad$ przeto $x=17$

Zadania.

1. Ilu jest uczniów w pewnej klasie, jeżeli 7 krotność tej liczby jest od jej 4 krotności większa o 96?

2. Jakato jest liczba, której część trzecia i czwarta jest o 34 mniejsza od jej dwukrotności?

3. Dodaj do 12-tej części lat, przez które żył dzielny nasz król Jan Sobieski jeszcze 66 lat, a otrzymasz liczbę jego życia. — Jak długo żył ten król?

4. Jakato jest liczba, której 6 krotność jest od 8 trzy razy większa?

5. Uczeń zapytany, ile ma lat, odpowiedział: Trzecia część moich lat jest o 3 lata większa od czwartej części mojego wieku przed 7 laty. — Ileż ma lat?

6. Chłopiec zapytany, ile ma lat, odpowiedział: Mój ojciec jest ode mnie o 31 lat starszy. Gdy do trzeciej części mojego wieku dodam piątą część tych lat, jakie mam wraz z ojcem, otrzymam liczbę o 3 większą od lat mojego wieku. — Ileż ma lat?

7. Matka dała dwom synom 54 orzechów. Starszy zachwycił, ile mógł, zostawiając resztę młodszemu. Pokazało się, że młodszy dostał tylko $^4/_5$ tego, co wziął starszy. Ileż orzechów miał każdy z nich?

8. Z zapasu wynoszącego 266 *kg*, sprzedał kupiec $\frac{12}{7}$ tego, co pozostało. — Ileż sprzedał?

9. Mam w myśli ułamek o mianowniku 4. Jeżeli licznik i mianownik tego ułamka powiększę o 1, otrzymam ułamek mniejszy od pierwotnego o $\frac{1}{2}$. — Jakito jest ułamek?

10. Dziewczynka rzekła: Moja siostra starsza zarabia miesięcznie dwa razy tyle, jak ja, a zarobek siostry najstarszej jest o 9 koron mniejszy od potrójnego zarobku mego. Razem zarabiamy o 6 koron więcej, niż 5 krotność zarobku mego. — Ileż zarabia każda ze sióstr miesięcznie?

11. Dziewczyna odlała z naczynia, w którem miała mleko, połowę zawartości, potem połowę reszty i litr, i znowu trzecią część tej reszty. W końcu zostało jej 2 *l* mleka. — Ileż mleka miała pierwotnie?

12. Przekupka sprzedała trzecią część jabłek, które miała w koszu, po 3 h, resztę po 4 h i zostały jej jeszcze 2 jabłka. Razem wzięła za nie 256 h. — Ileż miała jabłek?

13. Jak długo żył staruszek, który dziesiątą część wieku swojego żadnych nauk nie pobierał, piątą część tegoż spędził w szkołach, przez lat 40 był urzędnikiem, a na emeryturze był tak długo jak w szkołach?

14. Ktoś włożył wszystką gotowiznę w przedsiębiorstwo. Gdy się kapitał podwoił, wyjął 100 K; gdy się reszta potroiła, wyjął 200 K, a gdy się ta reszta podwoiła, wyjął 1000 K. W końcu miał 8 razy tyle, co pierwotnie. — Jakiż kapitał włożył w przedsiębiorstwo?

15. Zyskiem, wynoszącym 1558 K mają się czterej spólnicy w ten sposób podzielić, że B ma wziąć $\frac{3}{2}$ tego, co weźmie A, C połowę tego, co dostanie B, a D $\frac{5}{2}$ zysku, który przypadnie dla C. Ileż dostanie każdy spólnik?

16. Gmina B dała dwa razy tyle robotników jak A, C dostarczyła dwa razy tyle, jak A i B razem, a D dwa razy tyle jak A, B i C razem. Wszystkich robotników było 135. Ileż ich dostarczyła każda gmina?

17. Wieśniaczka wyniosła na targ jaja, aby kupić mięsa. Gdyby sprzedawała jaja po 5 h, brakłoby jej 8 h, sprzedawała

więc 3 jaja za 16 h, a wskutek tego utargowała o 4 h więcej, niż jej potrzeba. — Ileż miała jaj?

18. Ojciec dał córce pewną ilość koron. Córka nakupiła potrzebnych materyałów; sprzedawszy wyhaftowane wstawki, zyskała połowę tego, co wydała, a ojciec dodał jej 2 K. — Teraz udało się jej podwoić majątek, a ojciec dodał jej 3 K. Córka podwoiła kapitał znowu i dostała od ojca 4 K. Pokazało się, że trzecia część jej teraźniejszego kapitału jest 5 krotnością tego, co jej dał ojciec pierwotnie. Ileż otrzymała od ojca?

19. Powierzchnia dwóch pokoi prostokątnych wynosi razem 26 m^2. Jeden pokój jest 4 *m*, drugi 5 *m* długi, ale zato drugi jest o 2 *m* węższy od pierwszego. — Jak szerokie są te pokoje?

20. Z pola prostokątnego, 57 *m* szerokiego, sprzedano kawałek o 969 m^2 mniejszy od połówki danego pola. Jak długie było całe pole, jeżeli kawałek sprzedany był o 1 *m* krótszy od czwartej części całej długości, a miał szerokość całego pola?

21. Trójkąt i prostokąt mają podstawę 15 *m* długą; wysokość prostokąta jest 2 razy większa niż wysokość trójkąta, a powierzchnia tegoż o 85 m^2 większa od 6-ej części powierzchni prostokąta. Jak wysoki jest trójkąt?

22. Jak wielka jest podstawa trójkąta 7 *dm* wysokiego, jeżeli połowa, część trzecia i czwarta jego powierzchni ma 9·1 dm^2?

23. Trapez 17 *cm* wysoki, którego podstawa jest 2 razy dłuższa, niż drugi bok równoległy, ma taką samą powierzchnię jak prostokąt 8 *cm* wysoki, którego podstawa jest od podstawy trapezu o 10 *cm* dłuższą. Jak długi jest każdy z równoległych boków trapezu?

24. Powierzchnia trapezu 14 *cm* wysokiego, w którym bok do podstawy równoległy jest od niej o 5 *cm* krótszy, jest tak wielka jak połowa, część czwarta i ósma powierzchni trójkąta 22 *cm* wysokiego, który ma z trapezem jednaką podstawę. Jak długie są te podstawy?

49. O stosunkach.

Wiadomo (§. 21. 9), że *stosunek* (відношене, das Verhältniss) *jestto znak liczbowy, wskazujący, ile razy jedna wielkość jest większa od drugiej.* Liczby w stosunku muszą być jednakowego miana. N. p.

a) $8\,k : 4\,k = 2$ *b*) $3\,m : 6\,m = \frac{1}{2}$

Liczbę pierwszą (8 *k*, 3 *m*) nazywamy p o p r z e d n i k i e m (передник, das Vorderglied), drugą (4 *k*, 6 *m*) n a s t ę p n i k i e m (слїдник, das Hinterglied), a iloraz z nich $(2, \frac{1}{2})$ wykładnikiem (виложник або кротник, der Exponent) stosunku.

Stosunek (*a*), którego wykładnik jest większy od 1, nazywamy stosunkiem rosnącym (в. зростаюче, steigend), zaś malejącym (в. малїюче, fallend), jeżeli wykładnik jest ułamkiem właściwym (*b*).

Jeżeli mamy n. p.

a) $3\,m : 4\,m$ i $4\,m : 6\,m$ *b*) $a : p$ i $p : c$

natenczas dwa takie stosunki ustawiamy w jeden:

a) $3\,m : 4\,m : 6\,m$ *b*) $a : p : c$

Przytem należy pamiętać, że $4\,m$ i p są równocześnie następnikami stosunku pierwszego i poprzednikami stosunku drugiego.

Po wykładniku poznajemy, jaki między poprzednikiem a następnikiem zachodzi stosunek, dlatego:

I. *dwa stosunki o równych wykładnikach są równe.*

N. p.

a) $12\,k : 4\,k = 3$ *b*) $6\,l : 3\,l = 2$

$15\,m : 5\,m = 3$ $6 : 3 = 2$

przeto $12\,k : 4\,k = 15\,m$ i $5\,m$ przeto $6\,l : 3\,l = 6 : 3$

Z I (*b*) wynika dalej:

II. Stosunek liczb mianowanych: czyli stosunek wielkości (в. величин), można zastąpić stosunkiem tych samych liczb niemianowanych, czyli stosunkiem liczbowym (в. чисельне).

Zadania.

1. Znajdźcie wykładniki stosunków: *a*) $12\,k : 4\,k$; *b*) $18\,m : 9\,m$; *c*) $462 : 66$. — Jakie to są stosunki?

2. Znajdźcie wykładniki stosunków: *a*) $6\,km : 24\,km$; *b*) $7\,ha : 15\,ha$; *c*) $216 : 252$. — Jakie to są stosunki?

*3. Pomnóżcie poprzednik i następnik stosunków, podanych w zad. 1., przez 2, 3, 5 i szukajcie wykładników — Co spostrzegacie?

*4. Podzielcie w stosunkach, podanych w zadaniu 1., poprzednik i następnik przez ich spólny podzielnik i szukajcie wykładników. — Co spostrzegacie?

5. Jakato liczba jest *a*) 7 razy, *b*) $\frac{1}{3}$ razy większa od 12 *km*, 39 *hl*, 246?

6) W roku 1880 było w Przedlitawii katolików obrządku rzym. kat. 17685648, w Zalitawi 7899692. Jaki był ich wzajemny stosunek, a jaki był stosunek jednych i drugich do całej ludności,

która wynosiła w Przedlitawii 22144244 w Zalitawii 15739375 dusz? (Dzielcie do dwóch miejsc dziesiętnych).

7. Moneta, mająca wartości 20 K, waży 6·775 *g*, czystego zaś złota jest w niej 6·097 *g*. W jakim stosunku pozostaje jej waga do wagi czystego złota, w niej zawartego? — (Do 2 miejsc dziesiętnych).

*8. W pewnej fabryce zapłacono 988 robotnikom za 91 dni pracy 32214 K, a 76 robotnikom za 7 dni pracy 2478 K. — W jakim stosunku zostawały liczby robotników, dni i zapłaty? — Co spostrzegacie?

*9. Dla 3684 żołnierzy wystarcza pewna żywność na 3 miesiące 24 dni, a dla 921 żołnierzy wystarcza ta sama żywność na 1 rok 3 miesiące 6 dni. W jakim stosunku zostają tu liczby żołnierzy, a w jakim liczby czasu?

III. *Stosunek się nie zmieni, jeżeli jego poprzednik i następnik przez tę samą liczbę a) pomnożymy* (§ 22. zad. 23—24 i § 49. zad. 3.), *b) podzielimy* (§ 22. zad. 25—26 § 49. zad. 4.). — Twierdzenia III *a)* używamy, *aby stosunek uwolnić od ułamków* (увільнити від дробів). W tym celu *mnożymy poprzednik i następnik przez nm. s. w. mianowników.*

N. p. $2\frac{5}{6} : 1\frac{3}{4} = \frac{17}{6} : \frac{7}{4} = 12 . \frac{17}{6} : 12 . \frac{7}{4} = 34 : 21$

Twierdzenia III. *b)* używamy, *aby stosunek uprościć* (скоротити). W tym celu *dzielimy poprzednik i następnik przez ich spólny podzielnik.* N. p.

$$624 : 528 = 156 : 132 = 39 : 33 = 13 : 11$$

Zadania.

10. Uwolnijcie od ułamków: *a)* $\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$ — *b)* $\frac{7}{9} : \frac{5}{12}$ — *c)* 0·91:0·13 — *d)* $1 : \frac{5}{8}$ — *e)* 3:0·125 — *f)* $2\frac{7}{12} : 1\frac{11}{15}$ — *g)* $23\frac{2}{3} : 7\frac{1}{4}$. — Znajdźcie wykładniki przed i po uwolnieniu od ułamków.

11. Na targu płacono hektolitr pszenicy po $16\frac{3}{5}$ K, żyta po $14\frac{3}{8}$ K. Na następnym targu była pszenica po $18\frac{1}{2}$ K, żyto po $15\frac{5}{6}$ K za hektolitr. Czy w tym samym stosunku podrożała pszenica, jak żyto? Co podrożało bardziej?

12. Pszenica, która ważyła $37\frac{5}{9}$ *kg*, miała po wyschnięciu tylko $36\frac{1}{25}$ *kg* wagi. Groch świeży ważył $20\frac{5}{6}$ *kg*, a po wyschnięciu $19\frac{7}{12}$ *kg*. Czy w tym samym stosunku usycha groch jak pszenica?

13. Uprośćcie następujące stosunki: *a)* 54:36; *b)* 231:153; *c)* 2730:210; *d)* $\frac{4}{5} : \frac{8}{15}$; *e)* 0·45:0·378; *f)* $3\frac{3}{8} : 5\frac{2}{5}$; — Znajdźcie wykładniki przed i po uproszczeniu.

14. A ma 1446·06 *ha*, B 206·57 *ha* pola. W jakim stosunku zostają ich posiadłości?

15. W Austryi jest w okrągłej liczbie 17728000 Słowian, z tego: Polaków 3250000, Rusinów 3160000, Czechów 7140000. W jakim stosunku zostają te liczby do ogólnej liczby Słowian, a w jakim między sobą?

16. Jeżeli *a)* średnica koła ma 9·6 *cm*, wynosi jego obwód 30·16 *cm*
b) „ „ „ 3·8 *cm*, „ „ „ 11·94 *cm*
W jakim stosunku zostaje tu obwód koła do średnicy. (Do 2 miejsc dziesiętnych).

IV. Z kilku stosunków prostych tworzymy stosunek złożony (відн. зложене), mnożąc poprzedniki przez siebie a następniki przez siebie. N. p.

		b) $a:b$
Ze stosunków prostych	*a)* $2:3$	$c:d$
	$4:5$	$d:e$
	$6:7$	$b:f$
otrzymamy stosunek złożony	$2.4.6:3.5.7$	$a.c.d.b:b.d.e.f$
czyli	$48:105$	$ac:ef$

Przed utworzeniem stosunku złożonego [przykład *b)*] można poprzednik jednego i następnik drugiego stosunku przez tę samą liczbę pomnożyć lub podzielić. (Dlaczego?)

Zadania.

17. Utwórzcie stosunek złożony ze stosunków:

a) 6:11	*b)* 4:5	*c)* 0·56:0·09
3: 2	5:6	0·36:0·4
5: 7	6:7	1·35:0·27

18. Utwórzcie stosunek złożony ze stosunków:

a) $1:\frac{2}{5}$	*b)* $2\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}$	*c)* 2·6:3·8
$\frac{3}{10}:2$	$3\frac{2}{7}:5\frac{5}{6}$	3·4:5·7
$\frac{5}{8}:\frac{3}{6}$	$4\frac{1}{3}:2\frac{1}{6}$	3·6:8·4

19. A pracował przez 15 dni po 8 godzin dziennie, B przez 12 dni po 9 godzin dziennie. Któryż z nich i ile razy większą zapłatę dostanie?

20. W pewne przedsiębiorstwo włożył A 3500 K. na 8 miesięcy, B 4000 K na 10 miesięcy, C 3000 K na rok. W jakim stosunku będą zostawały ich zyski na tem przedsiębiorstwie?

21. Przy budowie drogi pracowało z gminy A 50 ludzi przez 40 dni po 7 godzin dziennie, z B 60 ludzi przez 35 dni po 8 godzin dziennie, z C 70 ludzi przez 20 dni po 10 godzin dziennie. W jakim stosunku będą zostawały zarobki tych gmin?

50. O proporcyach.

I. Połączenie dwóch równych stosunków (§ 49. I. *a)* nazywamy *proporcyą* (пропорция, die Proportion). N. p.

$$12\ K : 4\ K = 15\ m : 5\ m$$

Ponieważ każdy stosunek wyraża, ile razy jego porzednik jest większy od następnika, przeto proporcyę czyta się n. p. »12 K są tyle razy większe od 4 K, ile razy są 15 *m* większe od 5 *m*. Albo także: »12 K mają się do 4 K, jak 15 *m* do 5 *m*«. Na odwrót: gdyby było dane n. p., że »8 *m* są tyle razy większe od 4 *m*, ile razy 12 *kg* od 6 *kg*«, tedy napisalibyśmy:

$$8\ m : 4\ m = 12\ kg : 6\ kg \ldots 1)$$

Liczby, tworzące proporcyę, nazywamy jej wyrazami (члени), a to: pierwszy (8 *m*) i czwarty (6 *kg*) wyrazami skrajnymi (чл. скрайні, äussere Glieder), drugi (4 *m*) i trzeci (12 *kg*) wyrazami średnimi (чл. середні, innere Glieder).

Proporcya (jak n. p. 1), w której wyrazy są liczbami mianowanemi, nazywa się proporcyą wielkości. Odrzuciwszy miana otrzymamy:

$$8 : 4 = 12 : 6$$

proporcyę liczbową, która jest równa pierwszej (§ 49. II.). Aby w działaniach, jakie w proporcyi wykonać trzeba, nie doznać przeszkody, należy każdą proporcyę zamienić na liczbową.

II. Z powyższego określenia proporcyi w połączeniu z § 49. I. wynika, że *a) w każdej proporcyi są wykładniki obydwóch stosunków równe*. N. p.

a) 12:4=15:5 Tu jest 12:4=3 i 15:5=3, ale zarazem 12.5=4.15
b) 8:4=12:6 „ „ 8:4=2 i 12:6=2, „ „ 8.6=4.12

Jakoż wogóle niech będzie dane, że $a:b=c:d$ jest proporcyą, natenczas (§ 50. II. *a*) jeżeli $a:b=m \ldots$ 2) także $c:d=m \ldots 3)$

Z 2) wynika . . . . $a=bm$

Z 3) wynika $c=dm$, więc . . . . $d=\frac{c}{m}$

przeto $ad=bm.\frac{c}{m}=bc$, czyli

b) W każdej proporcyi jest iloczyn wyrazów skrajnych równy iloczynowi wyrazów średnich.

Ponieważ dogodniej jest szukać iloczynu niż ilorazu, dlatego prawie wyłącznie używa się twierdzenia *b)* aby się przekonać, czy dane zestawienie jest istotnie proporcyą.

III. Z twierdzania II. *b)* (§ 50.) wynika:

a) Każdą proporcyę można zamienić na równanie. N. p.

$(7+x):(3-x)=9:1$ więc $(7+x)=(3-x).9$

czyli $7+x=27-9x$, z czego $10x=20$ więc $x=2$

b) Z dwóch równych iloczynów można ułożyć proporcyę, kładąc czynniki jednego ilorazu jako wyrazy skrajne, a drugiego jako wyrazy średnie.

N. p. Jeżeli $ab=cd$, więc $a:c=d:b$ albowiem z tego wynika naodwrót $ab=cd$

$20=20$ czyli $4.5=2.10$, a z tego $4:2=10:5$.

IV. Cztery liczby (n. p. 2, 4, 5 i 10), z których można ułożyć proporcyę, są do siebie proporcyonalne (пропорцiональнi). Każda z takich liczb jest czwartą proporcyonalną do trzech innych.

Proporcya, w której obydwa wyrazy średnie są równe, n. p.

$$8:4=4:2$$

nazywa się ciągłą (тягла, stetig), powtarzający się wyraz średni nazywa się średnią geometrycznie proporcyonalną, albo krótko średnią geometryczną (середна ґеометрична, geometrisches Mittel) dla wyrazów skrajnych.

Zadania.

1. Osądźcie na obydwa sposoby [II. *a)* i *b)*], czy zestawienia: *a)* $14:8=7:4$; *b)* $64:8=16:2$; *c)* $27:33=63:77$; *d)* $36:12=12:4$ są proporcyami?

2. Czy można na obydwa sposoby [II. *a)* i *b)*] sprawdzić, czy zestawienia: *a)* 63 K : 39 K = 42 robotników : 26 robotników; *b)* 66 *kg*:42*kg*=55 *m*:35 *m* są proporcyami? — Co trzeba zrobić, aby obydwa sposoby można zastosować?

3. Ułóżcie proporcye z następujących iloczynów: *a)* $13.12=3.39$; *b)* $8.8=4.16$; *c)* 49 *km*.6=14.21 *km*.

4. Ułóżcie proporcye ciągłe o wyrazach skrajnych: *a)* 2 i 8; *b)* 4 i 9; *c)* 20 i 5.

*5. Zamieńcie następujące proporcye na równania i rozwiążcie je: *a)* $12:x=8:6$; *b)* $13:9=x:18$; *c)* $x:5=4:3$; *d)* $7:6=4:x$; *e)* $a:b=x:c$; *f)* $m:n=p:x$.

6. Zamieńcie następujące proporcye na równania i rozwiążcie je: *a)* $8:(x+7)=6:(x+4)$; *b)* $(x-20):(x-36)=18:6$; *c)* $(x+8):3=(32-x):5$; *d)* $2:17=(x-15):(x+15)$.

51. Zmiany w proporcyi.

I. Proporcya się nie zmieni, jeżeli

a) przestawimy wyrazy skrajne, t. z. jeżeli położymy na miejscu pierwszym wyraz czwarty, a na czwartym pierwszy.

Jeżeli bowiem $a:b=c:d$ jest proporcyą

natenczas $ad=bc$

Ale w takim razie n. p., gdy przestawimy wyrazy skrajne, będzie

$$d:b=c:a$$

a w tem także $ad=bc$

Tak samo wykaże się:

b) Proporcya się nie zmieni, jeżeli przestawimy wyrazy średnie, albo

c) wyrazy skrajne ze średnimi.

Zadania.

1. Przestawcie w proporcyach, podanych w zadaniu 1. (§ 50.), wyrazy skrajne i przekonajcie się, czy otrzymaliście proporcye.

2. Przestawcie w proporcyach, podanych w zadaniu 1. (§ 50.), wyrazy średnie i przekonajcie się, czy otrzymaliście proporcye.

3. Przestawcie w proporcyach, podanych w zad. 1. (§ 50.), wyrazy skrajne ze średnimi i przekonajcie się, czy otrzymaliście proporcye?

II. Pomnóżmy w proporcyi $8:4=12:6$

wyraz skrajny i średni n. p. przez 5, a otrzymamy $40:4=60:6$

co także jest proporcyą, albowiem $40.6=4.60$

Wogóle, jeżeli $a:b=c:d$ jest proporcyą

natenczas $a.d=b.c$

Ale $\underline{m=m}$

więc $am.d=cm.b$

z czego $am:b=cm:d$

A więc *proporcya się nie zmieni, jeżeli wyraz skrajny i średni przez tę samą liczbę pomnożymy.*

Twierdzenia tego używamy, aby proporcyę uwolnić od ułamków. W tym celu mnożymy wyraz skrajny i średni przez nm. s. w. mianowników.

N. p. $\frac{2}{3} : x = 7 : \frac{5}{4}$

Z tego $3 . \frac{2}{3} : x = 3 . 7 : \frac{5}{4}$ czyli $2 : x = 21 : \frac{5}{4}$. Z tego dalej:

$2 : x = 4 . 21 : 4 . \frac{5}{4}$ czyli $2 : x = 84 : 5$.

Liczby mieszane zamieniamy na ułamki niewłaściwe, a następnie uwalniamy od nich proporcye.

Zadania.

4. Uwolnijcie od ułamków następujące proporcye:
a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 6 : 3$, *b)* $8 : 2 = \frac{2}{5} : \frac{1}{10}$; *c)* $0·6 : 0·04 = 105 : 7$
d) $2 : \frac{5}{6} = 24 : 10$, *e)* $56 : 7 = 3 : \frac{3}{8}$, *f)* $100 : 18 = 4 : 0·72$
przestawcie *a)* wyrazy skrajne, *b)* średnie, *c)* skrajne ze średnimi i przekonajcie się, czy to są proporcye?

5. Uwolnijcie od ułamków proporcye:
a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{4} : \frac{1}{6}$, *b)* $2\frac{1}{2} : 3 = 5\frac{3}{5} : 6\frac{18}{25}$, *c)* $2\frac{1}{3} : 2\frac{1}{4} = 5\frac{5}{6} : 5\frac{5}{8}$,
d) $13\frac{7}{8} : 15 = 5\frac{11}{20} : 6$, *e)* $5·04 : 0·6 = 21·672 : 2·58$,
f) $0·8 : 6 = 0·07 : 0·525$.

Przekonajcie się przed i po uwolnieniu od ułamków, czy są to proporcye?

6. Uwolnijcie od ułamków następujące proporcye:
a) $x : 3\frac{1}{4} = 7 : 2\frac{5}{6}$, *b)* $12\frac{2}{3} : y = 5\frac{1}{20} : \frac{1}{10}$, *c)* $7\frac{5}{6} : 3\frac{1}{4} = z : \frac{5}{12}$,
d) $7 : 0·4 = 0·6 : x$, *e)* $y : 2·5 = 3·18 : 0·2$, *f)* $1 : z = 0·24 : 0·7$.

7. Proporcye podane w zadaniu 6. zamieńcie na równania i rozwiążcie je.

III. *Proporcya się nie zmieni, jeżeli wyraz skrajny i średni przez tę samą liczbę podzielimy.* N. p.

Podzielmy w proporcyi $8 : 4 = 12 : 6$ wyraz skrajny i średni przez 3

otrzymamy $8 : 4 = 4 : 2$, co także jest proporcyą

albowiem $8 . 2 = 4 . 4$

Wogóle, jeżeli $a : b = c : d$ jest proporcyą, natenczas $ad = bc$

ale $m = m$

więc $\frac{a}{m} . d = b . \frac{c}{m}$

z czego $\frac{a}{m} : b = \frac{c}{m} : d$

Tego twierdzenia używamy, aby proporcyę uprościć. W tym celu dzielimy wyraz skrajny i średni przez ich spólny podzielnik.

Zadania.

8. Uprośćcie następujące proporcye: *a)* $4 : 6 = 6 : 9$; *b)* $55 : 143 = 10 : 26$; *c)* $92 : 12 = 115 : 15$. — Przekonajcie się przed i po uproszczeniu, czy są to proporcye?

9. Uprośćcie następujące proporcye: *a)* $3 : \frac{5}{8} = 1\frac{11}{25} : \frac{3}{10}$; *b)* $1\frac{1}{8} : 7\frac{1}{3} = 1\frac{4}{5} : 12\frac{4}{15}$; *c)* $32 : 1\frac{19}{21} = 36 : 2\frac{1}{7}$; *d)* $1{\cdot}4 : 10{\cdot}5 = 0{\cdot}8 : 6$; *e)* $5{\cdot}04 : 21{\cdot}672 = 0{\cdot}6 : 2{\cdot}58$; *f)* $6 : 3{\cdot}3 = 10 : 5{\cdot}5$.

10. Uprośćcie następujące proporcye: *a)* $15 : 24 = x : 18$; *b)* $17 : 4\frac{1}{4} = 56 : y$; *c)* $z : 0{\cdot}18 = 6 : 0{\cdot}4$; *d)* $x : 2\frac{2}{3} = 4\frac{3}{8} : 7$; *e)* $23{\cdot}4 : y = 13{\cdot}05 : 8$; *f)* $35{\cdot}2 : 5{\cdot}28 = z : 0{\cdot}9$.

IV. Z kilku proporcyi tworzymy proporcyę **złożoną**, mnożąc wyrazy nad sobą stojące. N. p.

Ponieważ
$$\begin{array}{ll} 2:3=4:6 & \\ \underline{5:10=4:8} & \text{są proporcyami, więc także} \\ 10:30=16:48 & \text{jest proporcyą albowiem} \\ 10.48=30.16 & \end{array}$$

Wogóle jeżeli
$$\begin{array}{lll} a:b=c:d & \text{więc} & ad=bc \\ f:g=h:k & \text{,,} & fk=gh \\ m:n=p:s & \text{,,} & \underline{ms=np} \\ & \text{przeto} & afm\,.\,dks=bgn\,.\,chp \\ & \text{czyli} & afm : bgn = chp : dks \end{array}$$

Przed utworzeniem proporcyi złożonej można którekolwiek wyrazy, byle wyraz skrajny i średni przez tę samą liczbę pomnożyć lub podzielić. N. p. z proporcyi

$$\begin{array}{c} x:3=5:7 \\ z:x=4:9 \\ y:z=1:2 \end{array}$$

otrzymamy, podzieliwszy w pierwszej i drugiej proporcyi przez x i przez 3, a w drugiej i trzeciej przez z i przez 2

$$\begin{array}{c} 1:1=5:7 \\ 1:1=2:3 \\ \underline{y:1=1:1} \end{array}$$

a z tego
$$y:1=10:21$$

Zadania.

11. Utwórzcie proporcyę złożoną:

a)
$$\begin{array}{c} x:3=y:5 \\ y:z=1:6 \\ z:10=4:7 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c} 4\frac{1}{6}:x=7:4 \\ 2\frac{1}{5}:3=\frac{7}{10}:y \\ 6:y=2\frac{1}{2}:8 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{c} 0{\cdot}6:0{\cdot}9=y:x \\ y:1{\cdot}2=z:3{\cdot}6 \\ z:4{\cdot}2=0{\cdot}16:5 \end{array}$$

52. Rozwiązanie proporcyi.

Rozwiązać proporcyę, znaczy, znaleźć do trzech danych czwartą proporcyonalną. Przed rozwiązaniem zwykle uwalniamy proporcyę od ułamków i upraszczamy, jeżeli można. Sposób rozwiązania proporcyi podaje zadanie 5. w § 50., co można także w ten sposób wyprowadzić.

Niech będzie dana proporcya n. p. $x:4=5:7$
Wykładnik stosunku drugiego wynosi $\frac{5}{7}$, przeto taki sam będzie wykładnik stosunku pierwszego, więc

$x:4=\frac{5}{7}$ a z tego

$x=4\times\frac{5}{7}=\frac{4\times5}{7}$

Zatem: I. *Wyraz skrajny proporcyi równa się iloczynowi wyrazów średnich podzielonemu przez drugi wyraz skrajny.*

Gdyby była dana proporcya

$8:x=9:5$ . . . 1), tedy na mocy § 51. *c)* będzie $x:8=5:9$, a stąd według I (§ 52.).

$x=\frac{8\times5}{9}$ Jeżeli ten wynik porównamy z 1) otrzymamy:

II. *Wyraz średni proporcyi równa się iloczynowi wyrazów skrajnych, podzielonemu przez drugi wyraz średni.*

Zadania.

1. Okażcie prawdziwość twierdzenia I. na przykładach:
a) $y:5=13:9$; *b)* $8:3=11:z$; *c)* $x:6=1:5$.

2. Okażcie prawdziwość twierdzenia II. na przykładach:
a) $4:y=11:9$; *b)* $2:7=z:3$; *c)* $1:x=5:8$:

3. Okażcie prawdziwość twierdzeń I. i II. zapomocą równań na przykładach: *a)* $7:x=5:6$; *b)* $y:9=15:8$; *c)* $11:4=8:z$.

4. Rozwiązawszy proporcye: *a)* $x:18=15:24$; *b)* $69:194=21:z$; *c)* $91:728=728:y$; podstawcie znalezioną wartość w miejsce niewiadomej i sprawdźcie, czy to jest proporcya?

5. Rozwiążcie i sprawdźcie proporcye:
a) $z:\frac{1}{2}=3:\frac{3}{4}$, *b)* $0{\cdot}8:1{\cdot}6=2{\cdot}04:x$, *c)* $y:3\frac{1}{3}=2\frac{3}{4}:5$,
d) $x:2=0{\cdot}15:0{\cdot}6$, *e)* $3:1{\cdot}5=2{\cdot}05:y$, *f)* $z:12=24:3\frac{1}{5}$,
g) $\frac{9}{16}:x=5:48$, *h)* $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=y:\frac{1}{5}$, *k)* $5{\cdot}4:1{\cdot}8=z:0{\cdot}45$.

6. Rozwiążcie proporcye, podane w zadaniu 10. § 51.

53. Reguła trzech prosta.

Zadania (n. p. § 22. zad. 6, 21., 22. i t. p.), w których z trzech liczb danych szukamy czwartej, nazywamy regułą trzech (правило трох, Regeldetrie). Łatwo zauważyć, że we wszystkich tych zadaniach są co dwie liczby tego samego gatunku.

Regułę trzech, składającą się tylko z dwóch gatunków liczb, nazywamy prostą (правило трох просте).

I. Pierwszy sposób rozwiązania jest (patrz wyżej przytoczone zadania) sprowadzeniem do jedności. (зведене до одиниці). N. p. 1) Za 7 *m* materyi wełnianej zapłacono 35 K, ile trzeba zapłacić za 12 *m*?

Zadanie to, jak każda reguła trzech składa się ze założenia i z pytania. Założeniem jest: »Za 7 *m* zapłacono 35 *k*«, — reszta jest pytaniem.

Ze założenia wynika, że

1 *m* kosztował $\frac{35}{7} h = 5$ K, a przeto

12 *m* „ $\frac{35}{7}$ K$.12 = 5$ K$.12 = 60$ K

Gdybyśmy należytość za 12 *m* naznaczyli przez x, wynikłoby

$$x = 60 \text{ K}$$

2) Pewną pracę wykonałoby 20 robotników w 18 dniach; (założenie) w ilu dniach wykona tą samą pracę 30 robotników, (pytanie)?

Ze założenia wynika, że

1 robotnik wykonałby tą pracę w 20.18 dniach = 360 dniach

więc 30 „ „ $\frac{20.18}{30}$ dniach $= \frac{360}{30}$ dni $= 12$ dni.

Z rozwiązania obydwóch zadań wynika, że odnosimy postawione pytanie do jedności, stąd więc nazwa tego sposobu.

II. Drugi sposób rozwiązania reguły trzech polega na zastósowaniu proporcyi, potrzeba jednak poprzednio osądzić, w jakiej zawisłości pozostają wielkości danych dwóch gatunków.

Jeżeli wielkość jedna 2, 3, 4... *n* razy wzrasta lub maleje, a równocześnie wzrasta lub maleje 2, 3, 4... *n* razy wielkość druga (§. 49. zad. 8.), natenczas są te dwie wielkości wprost proporcyonalne, (прямо пропорціональні) czyli zostają do siebie *w stosunku prostym* (в прямім відношеню). Wprost proporcyonalne są n. p. towar i zapłata, liczba robotników i zapłata za ich pracę i t. p.

Jeżeli zaś wielkość jedna 2, 3, 4... n razy wzrasta lub maleje, a wielkość druga równocześnie 2, 3, 4... n razy maleje lub wzrasta (§. 49. zad. 9.), natenczas są te dwie wielkości odwrotnie proporcyonalne (відворотно пропорціональні), albo stoją do siebie w stosunku odwrotnym (у відворотнім відношеню). Do takich należą n. p. liczba robotników i czas potrzebny do wykonania pewnej pracy, — ilość ludzi i czas, na który wystarczy pewien zapas żywności i t. p.

W powyżej podanym przykładzie 1) są wielkości wprost proporcyonalne, zatem ponieważ 12 *m* jest więcej niż 7 *m*, zapłata x K za nie będzie większa niż 35 K a to tyle razy, ile razy właśnie są 12 *m* większe niż 7 *m*. Zatem (§. 50. I)

$$x \text{ K} : 35 \text{ K} = 12 : 7 \text{ z czego } x = \frac{35 \text{ K} . 12}{7} = 60 \text{ K}.$$

Niech y oznacza w zadaniu 2. (§. 53) niewiadomą liczbę dni. Ponieważ wielkości, w tem zadaniu przychodzące, są odwrotnie proporcyonalne, więc y dni będzie mniejsze niż 18 dni, dlatego, że 30 robot. jest większe niż 20 rob. A więc 18 dni tyle razy większe niż y dni, ile razy 30 robot. jest większe niż 20 robot. Zatem (§.50. I)

$$18 \text{ dni} : y \text{ dni} = 30 : 20, \text{ a z tego } y = \frac{18 \text{ dni} . 20}{30} = 12 \text{ dni}$$

Zadania.

1. Woźnica zgodził się, że za pewną cenę przewiezie 12 *q* na odległość 54 *km*. Jak daleko powiezie on za tę samą cenę 12 *q*?

2. Ile potrzeba zapłacić woźnicy za przewóz $4\frac{1}{2}$ *q* na pewną odległość, jeżeli za przewóz $7\frac{3}{4}$ *q* na tą samą odległość płaci się $57\frac{1}{2}$ K?

3. Jak długo wystarczy pewien zapas żywności dla 4000 żołnierzy, jeżeli dla 3500 żołnierzy wystarczyłby na 5 miesięcy 10 dni?

4. Pewien przedsiębiorca potrzebuje 351 ludzi, aby wykonać zamierzoną robotę w 204 dniach. Ile ludzi będzie on musiał jeszcze przyjąć, aby tę robotę wykonać w 153 dniach?

5. Aby przez 5 lat zbierać trawę, potrzeba na $3\frac{5}{8}$ *ha* $72\frac{1}{2}$ *kg* nasienia. Ileż nasienia trawy potrzeba w tym celu na obsianie $4\frac{5}{6}$ *ha*?

6. Wieśniak wysiał na 6·78 *ha* 1491 *kg* żyta. Jakiż obszar obsieje 2000 *kg* żyta?

7. Jeżeli 26 dukatów wymieniano za 296·4 K, ile koron trzeba dać za 35 dukatów?

8. W pewnym dniu płacono 100 marek pruskich za 125 K. Ileż marek pruskich można było dostać w tym dniu za 84·56 K?

9. Jeżeli za 348 rubli zapłacono $829\frac{4}{5}$ K, ile K zapłacić potrzeba w tym samym dniu za $264\frac{1}{2}$ rubla?

10. Za pewną zapłatę wykopie się wądół 12 *m* długi, 8 *m* szeroki. Jak szeroki wądół wykopie się za tę samą zapłatę, jeżeli jego długość ma 9 *m* wynosić?

11. Za pewną długość sukna 130 *cm* szerokiego zapłacono $168\frac{3}{4}$ K. Ile koron zapłacimy za tę samą długość sukna 96 *cm* szerokiego?

12. Koło, mające w obwodzie $17\frac{5}{8}$ *m*. obróciło się na pewnej drodze 174 razy. Jak wielki jest obwód innego koła, które obróciło się na tej samej drodze 258 razy?

13. Na okręgu koła można wbić 78 zębów $3\frac{1}{3}$ *cm* szerokich. Ile zębów można wbić na okręgu tego samego koła, jeżeliby każdy ząb miał $3\frac{1}{4}$ *cm* szerokości.

*14. Za wypożyczenie 100 K na przeciąg jednego roku zapłacono 9 K. Ile potrzeba zapłacić za wypożyczenie na ten sam czas *a*) 700 K; *b*) 3560 K; *c*) 48564 K?

*15. Wierzyciel wziął za wypożyczenie 3748 K na przeciąg jednego roku 393·54 K. Ileż wypada od 100 koron za ten sam czas?

*16. Od 100 K płaci się rocznie $12\frac{1}{4}$ K. Ile wynosiła wypożyczona kwota, jeżeli zapłacono od niej za rok 661·5 K?

17. Pracując 9 godzin dziennie, wykonaliby robotnicy pewną pracę w 8 mies. 14 dn. W jakim czasie wykonają ci sami robotnicy tę samą pracę, jeżeli będą pracowali 12 godzin dziennie?

18. Jak długo będzie pracować pewna ilość robotników za 576 K, jeżeli za 490 K pracowała ta sama ilość robotników przez 38 dni?

19. Ktoś, mający rocznego dochodu 3786 K, wydaje miesięcznie 236·48 K. Ile może wydawać miesięcznie urzędnik, pobierający 2840 K, gdyby chciał wydawać w tym samym stosunku jak tamten.

20. Do pewnego przedsiębiorstwa przystąpił A z kapitałem 10800 K, B z kapitałem 12000 K. Jaki zysk będzie miał B, jeżeli A zyskał 1728 K? — Ile wynosił cały zysk?

21. Dwie osoby włożyły w pewne przedsiębiorstwo równe kapitały, ale A na $6\frac{7}{15}$ miesięcy, B na $5\frac{5}{6}$ miesięcy. Przedsiębiorstwo upadło, wskutek czego poniosła osoba B 1480 K straty. — Ile straciła osoba A?

22. Z gmin A i B pracowała ta sama ilość ludzi, ale z gminy A przez $16\frac{1}{2}$ dni, z gminy B przez $15\frac{3}{4}$ dni. Jaką zapłatę otrzymała gmina B, jeżeli A dostała 268 K?

54. O regule trzech złożonej.

Regułę trzech, w której przychodzą wielkości więcej niż dwóch gatunków, nazywamy **regułą trzech** złożoną (правило трох зложене). I tu z każdego gatunku przychodzą dwie liczby, a między wszystkiemi jedna jest niewiadoma.

Do rozwiązania reguły trzech złożonej służą dwie metody:

I. Sprowadzenie do jedności. N. p.

Za 15 *m* sukna 130 *cm* szerokiego zapłacono 180 K. (Założenie).

Ile (x) koron zapłacić trzeba za 17 *m* sukna 120 *cm* szerokiego? (Pytanie).

Aby zadanie rozwiązać, trzeba najpierw odpowiedzieć na pytanie: Ile koron trzeba zapłacić za 1 *m* sukna 1 *cm* szerokiego?

Ze założenia wynika, że

1 *m* sukna 130 *cm* szerokiego kosztował $\frac{180}{15}$ K

1 *m* „ 1 *cm* „ „ $\frac{180}{15.130}$ K

przeto

1 *m* „ 120 *cm* „ „ $\frac{180.120}{15.130}$ K

17 *m* „ 120 *cm* „ „ $\frac{180.120.17}{15.130}$ K

więc

$$x = \frac{180.120.17}{15.130} = 188\tfrac{4}{13} \text{ K}$$

II. Za pomocą proporcyi.

Każdą regułę trzech złożoną można rozłożyć na kilka reguł trzech prostych. I tak rozłożymy powyższy przykład na:

1) 15 *m* sukna 130 *cm* szerokiego kosztują 180 K
   17 *m* „ 130 *cm* „ „ y K

więc $y:180=17:15$

2) 17 *m* sukna 130 *cm* szerokiego kosztują y K
   17 *m* „ 120 *cm* „ „ x K

więc $x:y=120:130$

Z tych dwóch proporcyi wynika (51. IV.)

$x:180=17.120:15.130$ albo $x:180=17.:15$
$=120:130$

Z tego wynika: *Gatunek, w którym przychodzi niewiadoma, porównujemy z każdym gatunkiem z osobna, jak gdyby inne warunki były te same. Z otrzymanych w ten sposób stosunków prostych tworzymy stosunek złożony i rozwiązujemy otrzymaną proporcyę.*

Zadania.

1. Ile koron potrzeba zapłacić 35 robotnikom za 14 dni pracy, jeżeli 40 robotnikom za 10 dni pracy płaci się 240 K? (Użyjcie obydwóch sposobów).

2. Ile potrzeba zapłacić 35 robotnikom za 14 dni 10-godzinnej dziennie pracy, jeżeli 40 robotnikom za 10 dni 8-godzinnej pracy płaci się 240 K? (Przeprowadźcie obydwa sposoby).

3. Jeżeli 17 robotników otrzymało za 30 dni 765 K zapłaty, przez ile dni będzie pracować 15 robotników za 800 K zapłaty? (Przeprowadźcie obydwa sposoby).

4. Jeżeli 20 robotników otrzymało za 30 dni 9 godzinnej pracy 765 K, przez ile dni będzie pracować 15 robotników 10 godzin dziennie za 800 K? (Przeprowadźcie obydwa sposoby).

5. Na 3 suknie damskie potrzeba $24\frac{1}{2}$ *m* materyi 70 *cm* szerokiej. Ile metrów wyjdzie na 5 takich samych sukien materyi *a)* 90 *cm*, *b)* 120 *cm* szerokiej.

6. Z łąki 300 *m* długiej, $85\frac{5}{7}$ *m* szerokiej, zebrano 8 wozów siana po 8 *q* na wozie. Ile wozów siana po 9 *q* zbierze się z łąki 357 *m* długiej a 82 *m* szerokiej?

7. Na obsianie pola 240 *m* długiego, 70 *m* szerokiego, wyszło 294 *kg* grochu. Jak długie było pole, 85 *m* szerokie, na którego obsianie wyszło 300 *kg* grochu?

8. Woźnica zgodził się, że przewiezie 18$\frac{5}{8}$ *q* na 42 *km* za 35 K. Jak daleko powiezie więc 26 *q* za 74 K?

*9. Za wypożyczenie 100 K płaci się rocznie 8 K. Ile koron trzeba zapłacić za wypożyczenie 3650 K na 7 lat?

*10. Ile koron trzeba zapłacić za wypożyczenie 100 K na rok, jeżeli za wypożyczenie 4500 K na 6 lat zapłacono 1890 K?

11. Ile godzin dziennie będzie pracować 28 robotników przez 9 dni za 400 K, jeżeli 13 robotników pracowało za 280·8 K przez 12 dni po 12 godzin dziennie.

12. Za 9$\frac{3}{4}$ *m* sukna 120 *cm* szerokiego zapłacono 136$\frac{1}{3}$ K. Ile zapłaci się za 15 *m* sukna tego samego gatunku ale 130 *cm* szerokiego?

13. Jeżeli do wykonania pewnej pracy potrzeba, aby 18 ludzi pracowało przez 15 dni po 12 godzin dziennie, przez ile dni po 8 godzin dziennie pracować musi 20 ludzi, aby tę samą pracę wykonać?

14. Koło, poruszane przez drugie, a mające na okręgu 35 zębów, robi 7$\frac{2}{5}$ minutach 150 obrotów. Ile obrotów zrobi inne koło, w ten sam sposób poruszane, w 10$\frac{3}{4}$ minutach, jeżeli ma na okręgu 28 zębów?

15. Dla 2400 ludzi wystarczy pewien zapas żywności na 14 tygodni, jeżeli każdy tygodniowo będzie dostawać 7$\frac{5}{8}$ *kg* tej żywności. Na jak długo wystarczy ta żywność dla 2800 ludzi, jeżeli każdy dostanie tygodniowo 6$\frac{3}{4}$ *kg*?

16. Za pomalowanie powały 4$\frac{1}{4}$ *m* długiej, 5$\frac{1}{3}$ *m* szerokiej, zapłacono 9 K. Ile trzeba zapłacić za pomalowanie powały 6 *m* długiej, a 4$\frac{3}{4}$ *m* szerokiej?

55. O regule podziału.

I. Reguła podziału prostego (правило подїлу), także reguła spółki (спілки), jestto zadanie, w którem mamy daną liczbę podzielić na kilka nierównych części, zostających jednak w pewnym, z góry oznaczonym stosunku. N. p.

Liczbę 294 rozdzielić na trzy liczby zostające w stosunku jak 10 : 15 : 24 (§. 49.).

Ponieważ jest jeden tylko stosunek liczb, przeto podział nazywa się prosty.

Zważywszy, że uczyni się wymaganiom zadość, gdy pierwsza liczba *(x)* będzie zawierać równych części 10, podczas gdy druga *(y)* zawierać ich będzie 15, a trzecia *(z)* 24, przyjdziemy do wniosku, że tych wszystkich części będzie:

$$10+15+25=49$$

a jedną taką częścią będzie

$$294:49=6$$

przeto

$$x=10.6=60;\ y=15.6=90;\ z=24.6=144.$$

Z tego wynika: *Daną liczbę dzielimy przez sumę liczb stosunkowych* (ч. відносительні), *a ilorazem mnożymy każdą liczbę stosunkową z osobna.*

Gdyby należało wogóle liczbę L podzielić w stosunku jak $a:b:c:d$ (§. 49), a niewiadome części naznaczymy przez w, x, y, z, natenczas według tej reguły będzie

$$w=\frac{L}{a+b+c+d}\cdot a \qquad x=\frac{L}{a+b+c+d}\cdot b$$

$$y=\frac{L}{a+b+c+d}\cdot c \qquad z=\frac{L}{a+b+c+d}\cdot d$$

Gdyby w stosunku przychodziły ułamki należy stosunek od nich uwolnić, a następnie uprościć, jeżeli uprościć można. N. p.

Liczbę 138 podzielić w stosunku jak $2\frac{2}{3}:4:5\frac{3}{5}$

$2\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	40	10.3=30
4	4	60	15.3=45
$5\frac{3}{5}$	$\frac{28}{5}$	84	21.3=63
		138:46=3	

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość powyższej reguły na przykładach:

a) dwaj robotnicy zgodzili się, że wykonają pewną pracę za 270 K. Ileż należy się każdemu z nich, jeżeli jeden 15 dni, drugi 12 dni pracował?

b) Liczbę 600 rozłożyć na trzy liczby, któreby zostawały do siebie w stosunku jak 5:7:8.

2. Rozdzielcie liczbę 720 na cztery części, zostające do siebie w stosunku jak 15:30:45:60.

3. Rozdzielcie liczbę 161 na trzy części, zostające do siebie w stosunku jak $\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$.

4. Rozdzielcie liczbę 304 na trzy części, zostające do siebie w stosunku jak $\frac{1}{2} : \frac{5}{6} : \frac{7}{9}$.

5. Rozdzielcie liczbę 450 na cztery części, zostające do siebie w stosunku jak $5\frac{1}{2} : 1\frac{3}{8} : 2\frac{3}{4} : 1\frac{5}{6}$.

6. Gmina A dostarczyła 20, B 24, C 30, D 40 robotników, którzy zarobili razem 1368 K. Ile przypadnie z tego na każdą gminę?

7. Gmina A liczy 660, B 780, C 960, D 1200 mieszkańców. Ile robotników ma dostarczyć każda z tych gmin do budowy spólnej drogi, jeżeli codzień potrzeba 180 robotników?

8. Na założenie spólnego sklepu dał A 9600 K, B 9800 K, C 10600 K. Po pewnym czasie wynosił czysty dochód 6400 K. Ile zysku przypadnie na każdego spólnika?

9. Do pewnego przedsiębiorstwa, do którego potrzeba 240000 K kapitału wkładkowego, mają przystąpić trzy osoby z udziałami, zostającymi w stosunku jak 5:8:12. Ileż ma dać każda z nich? — Ile straciła każda z tych osób, jeżeli cała strata wynosiła 36000 K?

10. Z kwoty 6660 K ma otrzymać A $\frac{5}{12}$, B $\frac{2}{15}$, C $\frac{1}{8}$ a D resztę. Ileż przypadnie na każdą osobę?

11. Pewne przedsiębiorstwo, w które A włożył 8000 K, B 7600 K, C 7000 K, przyniosło 4520 K zysku. Ile zrobił każdy spólnik?

12. Spadkiem 11160 K miały się podzielić cztery osoby tak, że A miała dostać $\frac{2}{5}$, B $\frac{1}{6}$, C $\frac{1}{8}$ a D resztę tej kwoty. Osoba C zrzekła się jednak swego udziału, który rozebrały trzy inne osoby w stosunku do należących się im kwot. — Ileż dostała każda z nich?

13. Proch strzelniczy składa się z 75 części saletry, 13 części węgla i 12 części siarki. Ile trzeba wziąć z każdego z tych materyałów, aby otrzymać kilogram prochu?

14. Na czernidło do butów bierze się 8 części węgla kostnego, 4 części syropu, 1 część witryolu żelaza i 2 części oliwy. Ileż trzeba wziąć z każdego materyału, aby otrzymać 30 *kg* czernidła?

II. Jeżeli potrzeba daną liczbę podzielić w kilku naraz stosunkach, natenczas jest r e g u ł a p o d z i a ł u z ł o ż o n e g o.

I. P r z y k ł a d. Gmina A dostarczyła 20 robotników, którzy pracowali przez 15 dni, B dała 30 robotników na 12 dni. Ile dostanie każda z tych gmin, jeżeli zarobek wynosił 2134 K?

20 rob. zarobią	w 15 dn.	tyle, ileby zar.	1 rob.	w 20.15=300 dn.
30 „ „	12 „	„ „ „	1 „	30.12=360 dn.

Gdyby gminy A i B dostarczyły po 1 robotniku ale A przez 300 dni, B przez 360 dni, potrzebaby zarobek 2134 K podzielić w stosunku jak 300:360=20.15:30.12, który to stosunek jest złożony ze stosunków 20:30 i 15:12, więc i w danym przypadku należy 2134 K podzielić w stosunku złożonym. Przeto będzie, ponieważ

$$\begin{array}{r} 20:30=2:3 \\ 15:12=5:4 \\ \hline 300:360=10:12 \\ =5:6 \end{array}$$

według I. 2134 K:11=194

Gmina A otrzymała zatem 5.194= 970 K
„ B „ „ 6.194=1164 K

2. Przykład. W pewne przedsiębiorstwo włożył A 500 K na 6 mies., B 400 K na 5 mies., C 600 K na 4 mies. Jakże podzielą się zyskiem, 851 K wynoszącym?

500 K przyniesie w 6 mies. tyle dochodu, ile w 1 m. przyniosł. 6.500 K
400 K „ w 5 mies. „ „ „ w 1 m. „ 5.400 K
600 K „ w 4 mies. „ „ „ w 1 m. „ 4.600 K

Gdyby zaś każda z tych osób dała kapitał na 1 miesiąc, natenczas podzieliliby się zyskiem w stosunku jak 6.500:5.400:4.600 K, co jest stosunkiem złożonym ze stosunków 500:400:600 i 6:5:4.

Schematycznie rzecz tak się przedstawi

500—6	30	15.23	345
400—5	20	10.23	230
600—4	24	12.23	276
	851:37=23		851

Z tego wynika: *Przy regule podziału złożonego tworzymy ze stosunków prostych stosunek złożony i rozwiązujemy zadanie według reguły podziału prostego.*

Zadania.

15. Z dwóch robotników pracował jeden przez 6 dni po 9 godzin, drugi przez 5 dni po 12 godzin. Obaj zarobili razem 38 K. Ile zarobił każdy z nich?

16. Woźnicom, z których jeden wiózł 18 *q* na 32 *km*, drugi 15 *q* na 30 *km*, zapłacono razem 30 K. Ile dostanie każdy z nich?

17. Na pastwisku, za którego dzierżawę zapłacono 92 K, pasł A 8 krów przez 150 dni, B 12 krów przez 150 dni, C 16 krów przez 100 dni. Ileż ma każdy z nich zapłacić?

18. Do pewnego przedsiębiorstwa, które trwało 2 lata, przystąpił A z kapitałem 5000 K; w 4 miesiące później przystąpił B z kapitałem 6000 K, a w 6 miesięcy po rozpoczęciu interesu C z kapitałem 10000 K. Ile zarobił każdy z nich, jeżeli przedsiębiorstwo zamknięto z zyskiem 4300 K?

19. W pewne przedsiębiorstwo, które trwało 3 lata, włożył A 24000 K, B 20000 K, C 16000 K. A wycofał jednak swój kapitał po $2\frac{1}{4}$ latach, B po $2\frac{5}{6}$ latach, a tylko C dotrwał do końca. Przedsiębiorstwo przyniosło 13200 K zysku. Ile z tego dostanie każdy spólnik?

20. Do pewnej roboty, którą zgodzono hurtem za 7000 K, dostarczył A 10 ludzi, którzy pracowali przez 40 dni po 10 godz. dziennie; B przystawił 12 ludzi, a ci pracowali przez 60 dni po 12 godz. dziennie, C zaś dał tylko 8 ludzi na 60 dni po 14 godz. dziennie. Ileż przypadnie z onej kwoty dla każdego przedsiębiorcy?

21. Pewna firma handlowa zbankrutowała, zostawiając wszystkiego 17910 K, a jest winna wierzycielowi A 12600 K od $5\frac{1}{2}$ lat, B 10800 K od $4\frac{3}{4}$ lat, a C 9000 K od 7 lat. — Ileż odbierze każdy z wierzycieli?

22. Liczbę 272 podzielić w stosunku jak $2\frac{2}{3}:3\frac{3}{4}:4\frac{4}{5}$ i w stosunku jak $1\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}:3\frac{3}{4}$.

56. O regule mieszanin.

Często potrzeba z kilku gatunków towaru zrobić gatunek pośredni, albo z kilku metali wytworzyć metal średniej jakości. Tak n. p. do czystego srebra lub złota dodajemy miedzi lub innych metali, aby wyroby były twardsze.

Do oznaczenia zawartości złota i srebra w wyrobach podaje się jakiej próby jest stop, t. z. ile gramów czystego złota lub srebra zawiera się w kilogramie stopu. N. p. złoto, z którego bite są 20 koronówki jest 900 próby, t. z., że w kilogramie 20 koronówek jest 900 *g* czystego złota, a 100 *g* przymieszki.

Wyroby ze złota, ważące więcej niż 20 *g*, i ze srebra nad 30 *g* można wtedy tylko w handlu sprzedawać, jeżeli urząd cechowniczy wyciśnie na nich znak czyli puncę. Puncę mogą otrzymać wyroby ze złota co najmniej 580 a najwyżej 920 próby, srebrne zaś co najmniej 750 a najwięcej 950 próby.

Reguła podająca, w jakim stosunku należy mieszać dane gatunki, aby z nich wytworzyć gatunek pośredni, nazywa się **regułą mieszanin** (правило змішки).

Niektóre zadania tu należące są zwykłem tylko mnożeniem i dzieleniem (§ 23. zad. 12. i 13.); mogą być jednakże innego rodzaju zadania jak n. p.

1. Zadanie. Złotnik chce miec 10 *kg* srebra 600 próby, a ma srebro A 900 próby i srebro B 400 próby. Ileż ma wziąć z każdego gatunku?

2. Zadanie. Kupiec ma kawę A, której kilogram kosztuje 4·32 K i kawę B po 2·8 K za kilogram. Ileż ma więc z każdego gatunku, aby otrzymać 76 *kg* po 3 K za kilogram?

I. *Sposób zapomocą równań:*

1. Zadanie. Jeżeli z A weźmie x *kg*, będzie musiał wziąć z B $(10-x)$ *kg*. W pierwszych będzie 900 x gramów czystego srebra. Przeto

$$9000\,x+400\,(10-x)=10.600=6000$$

Rozwiązawszy to równanie, otrzymamy $x=4$. Potrzeba więc wziąć z A 4 *kg* a z B 6 *kg*.

Jakoż istotnie: Ponieważ w

1 *kg* 900 *g*,	więc	w 4 *kg*	jest	4.900=3600 *g*	cz. sr.
1 *kg* 400 *g*,	„	w 6 *kg*	„	6.400=2400 *g*	cz. sr.
zatem		w 10 *kg*	jest	6000 *g*	cz. sr.
a	„	w 1 *kg*	„	600 *g*	cz. sr.

2. Zadanie. Gdyby kupiec wziął z gatunku A z *kg*, musiałby wziąć z gatunku B $(76-z)$ *kg*. Pierwsze kosztowałyby go 4·32 z koron, drugie $(76-z)$. 2·8 koron, a razem tyle, ile kosztować będą 76 *kg* po 3 K.

Zatem

$$4{\cdot}32\,z+(76-z).2{\cdot}8=76.3=228$$

Z czego $z=10$ *kg*, a z gatunku B 66 *kg*.

II. *Sposób zapomocą reguły podziału.*

1. Zadanie. Niech złotnik bierze z gatunku A x *kg*, a z B y *kg* srebra. Ponieważ w 1 *kg* 600 próby jest o 900—600 gramów mniej czystego srebra niż w 1 *kg* srebra 900 próby, przeto x *kg* żądanej próby będą zawierały x (900—600) gramów czystego srebra mniej niż x *kg* 900 próby. Natomiast y *kg* srebra 600 próby

będą zawierały y (600—400) gramów cz. sr. więcej, niżby ich było w y *kg* srebra B. Ponieważ niedobór trzeba pokryć nadwyżką, więc

$$x\,(900-600)=y\,(600-400)$$

czyli (§ 50. III. *b*) $x:y=(600-400):(900-600)$

$$x:y=200:300$$

Mamy 10 *kg* podzielić w stosunku jak 200:300. Jestto więc reguła podziału.

Schematycznie przedstawi się rzecz w sposób następujący:

A) 900	x	600—400	200	2
600				
B) 400	y	900—500	300	3

Więc $x=4$ *kg*, $y=6$ *kg*.

2. Zadanie. Niech kupiec zmiesza x *kg* gatunku A z y *kg* gatunku B. Sprzedając po 3 K traci na 1 *kg* gatunku A 4·32—3 koron, więc na x *kg*, traci x (4·32—3) koron, natomiast zyskuje na 1 *kg* gatunku B (3—2·8) koron, a na y *kg* zyskuje y (3—3·8) koron.

Ponieważ zysk ma być równy stracie, przeto

$$x\,(4{\cdot}32-3)=y\,(3-2{\cdot}8)$$

czyli (§ 50. III *b*) $x:y=(3-2{\cdot}8):(4{\cdot}32-3)$

$$x:y=0{\cdot}2:1{\cdot}32$$
$$x:y=20:132$$
$$x:y=5:33$$

Albo schematycznie:

A) 4·32	x	3—2·8	0·2	20	5
3					
B) 2·8	y	4·32—3	1·32	132	33

Więc $x=10$, $y=66$.

Wogóle, gdyby z gatunku a i b trzeba było otrzymać pośredni c, natenczas

a	x	$c-b$
c		
b	y	$a-c$

więc $x:y=(c-b):(a-c)$.

Z tego wynika: *Różnicę między wartością gatunku lepszego a średniego piszemy przy gatunku gorszym, zaś różnicę między średnim a gorszym przy gatunku lepszym.*

Otrzymamy w ten sposób liczby stosunkowe do dalszego rachunku, który jest regułą podziału.

Zadania.

1. Ktoś zmieszał 40 *l* wina po 72 h, 16 *l* po 80 h i 14 *l* po 90 h. — Co kosztuje litr tej mieszaniny?

2. Kupiec miesza 10 *kg* kawy po 4·3 K i 15 *kg* po 2·8 K. Po czemu może sprzedawać kilogram tej mieszaniny.

3. Kupiec zmieszał 17 *kg* ryżu po 70 h z 23 *kg* po 56 h. Po czemu może sprzedawać kilogram tej mieszaniny.

4. Ile czystego złota, a ile złota 400 próby trzeba stopić, aby otrzymać 1 *kg* złota 840 próby. (Rozwiążcie na obydwa sposoby).

5. Kupiec ma wino po 60 K i po 160 K za hektolitr, a chciałby otrzymać hektolitr po 90 K. — Ileż ma wziąć z każdego gatunku? (Rozwiążcie na obydwa sposoby).

6. Ile kilogramów mąki po 36 h potrzeba zmieszać z mąką po 28 h, aby otrzymać 1 *q* mąki po 30 h za kilogram? (Rozwiążcie na obydwa sposoby).

7. Ile trzeba dolać wody do wina, którego hektolitr kosztuje 90 K, aby otrzymać 50 *l* wina po 60 K za hektolitr? (Zróbcie próbę).

8. Kupiec ma ryż po 70 h i po 56 h za kilogram. Ileż ma wziąć z każdego gatunku, aby otrzymać 40 *kg* ryżu po 64 h? (Zróbcie próbę).

9. Złotnik ma 4 *dkg* srebra czystego i 6 *dkg* srebra 800 próby. Ile ma dodać miedzi, aby otrzymał 8 *dkg* srebra 750 próby? (Miedź jest srebrem 0-ej próby. Najpierwej trzeba oznaczyć, jakiej próby będzie stop z danych gatunków srebra).

10. Kupiec ma 80 *l* wina po 200 K i 60 *l* po 120 K za hektolitr. Ile ma dolać wody, aby otrzymać 100 *l* wina po 100 K za hektolitr. (Najpierwej trzeba oznaczyć, poczemu byłoby wino, gdyby się zmieszało dane gatunki razem).

57. O regule łańcuchowej.

Mamy następujące zadanie: Ile (x) koron trzeba zapłacić za 17 *m* materyi, jeżeli 15 yardów tejże kosztowało 4 ℔ (funtów szterlingów)? — Do rozwiązania tego zadania potrzeba znać pośredniki, wykazujące stosunek yardów do metrów i funtów szterlingów do koron, dlatego to zadanie nazywa się regułą łańcuchową (правило ланцюхове, die Kettenregel).

Połóżmy 15 yardów $=z$ m a 4 £ $=y$ K,
otrzymamy $x:y=17:z$... 1)
Ale 1 £ $=20$ szylingów, a 1 szyling $=1{\cdot}2$ K, przeto 1 £ $=20.1{\cdot}2$ K
więc

$$y=4.20.1{\cdot}2 \text{ K}$$

$$1 \text{ yard}=91{\cdot}438\ cm=\frac{91{\cdot}438}{100}\ m \text{ przeto}$$

$$z=\frac{15.91{\cdot}438}{100}\ m$$

A więc z 1) będzie

$$x:4.20.1{\cdot}2 \text{ K}=17:\frac{15.91{\cdot}438}{100}$$

czyli $x:4.20.1{\cdot}2 \text{ K}=17.100:15.91{\cdot}438$... 2)
Z tej proporcyi wynika

$$x.91{\cdot}438.15=17.100.4.20.1{\cdot}2$$

Zamiast pisać czynniki jeden obok drugiego, napiszmy je pod sobą, a zamiast znaku równości połóżmy kreskę pionową, a otrzymamy:

x	17		x K	17 m
	100	Ten iloczyn nie zmieni	1 m	100 cm
91·438		się, jeżeli dopiszemy	91·438 cm	1 yard
15	4	1 jako czynnik, a wtedy	15 yard	4 £
	20	będzie:	1 £	20 szylingów
	1·2 K		1 szyling	1·2 K

Z tego wynika: *Kładziemy pytanie po obydwóch stronach kreski pionowej i układamy łańcuch w ten sposób, ażeby następna liczba po stronie lewej była tego samego miana jak poprzednia po stronie prawej.* Łańcuch jest zamknięty, gdy ostatnia liczba po stronie prawej (1·2 K) jest równego miana z niewiadomą.

Z 2) wynika

$$x=\frac{17.100.4.20.1{\cdot}2}{91{\cdot}438.15}=119 \text{ K}$$

To znaczy: *Niewiadoma równa się iloczynowi liczb, stojących po stronie prawej, podzielonemu przez iloczyn liczb, będących po stronie lewej.*

Jak z powyższego wynika, jest łańcuch właściwie równaniem, można go więc na mocy § 46. II. uwolnić od ułamków i uprościć.

Zadania.

1. Przeprowadźcie w powyższy sposób rzecz całą na przykładzie. Ile koron zapłacimy za 7 *hl* pszenicy, której 500 *kg* kosztuje w Berlinie 60 marek, wiedząc że 1 *hl* waży 70 *kg*, a 1 M= 1·2 K?

2. Ile powinien kosztować bochenek chleba, $1\frac{1}{2}$ *kg*, jeżeli 1 *hl* żyta płaci się 20 K, wiedząc, że 1 *hl* żyta waży 70 *kg*, z 5 *kg* żyta jest 4 *kg* mąki, a z 3 *kg* mąki 4 *kg* chleba?

3. Ile kosztuje bochenek chleba, ważący $1\frac{1}{2}$ *kg*, przy danych w zadaniu 2. warunkach, jeżeli piekarz za każde 100 K wydanych odbiera 120 K?

4. Po czemu będzie kupiec sprzedawał metr sukna, którego 157 *m* kosztowały we fabryce 1884 K, jeżeli koszta sprowadzenia wynoszą $3\frac{1}{2}$ K na każde 100 K wartości, a kupiec za 100 K wydanych chce pobrać 130 K?

5. Kupiec wysłał ze Lwowa do Warszawy 74 *m* materyi po 195 K za 13 *m*. Ile rubli papierowych ma dostać, jeżeli 100 rubli papierowych=256 K?

6. Za furmankę od 4 mil austryackich płaciło się 6 złr. w. a. Ileż w takim razie rubli potrzebaby zapłacić od 30 wiorst, jeżeli 10 mil austryackich=75·864 *km*, 10·6678 *km*=10 wiorst, 100 rubli=254 K, a 2 K=1 złr. w. a.?

7. Za 30 *m* koronek zapłacono 276 franków. Po ile szylingów wypadnie więc 1 yard, jeżeli 10 szylingów=12 K, 10 K=21 fr, a 100 yardów=91·44 *m*?

8. Ile franków warte jest złoto, zawarte w 1 koronie austr., jeżeli z 900 *g* czystego złota biją 2952 K, a z 1000 *g* czystego złota 3100 fr?

9. Ile koron trzeba zapłacić we Lwowie za $37\frac{1}{4}$ *q*, którego 5 czetwerty kosztowały 48 rubli, wiedząc, że 100 rubli=258 K, 1 czetwert=2·098 *hl*, a 10 *hl* żyta waży 7 *q*?

10. Kupiec sprzedawał towar ze stratą, a mianowicie dostawał za każde 100 K wydanych tylko 94 K. Ileż stracił na towarze, za który miał w Berlinie zapłacić 876 M, jeżeli za 100 M płaci się 126 K?

58. O potęgach.

I. *Potęgować* (степенювати) *znaczy* (§ 15. II. 3.) *daną liczbę pomnożyć przez siebie tyle razy, ile jednostek ma wykładnik* (виложник).

N. p. $5^2 = 5.5 = 25 \qquad 2^3 = 2.2.2 = 8$

$a^4 = a.a.a.a.$

Zadania.

*1. Znajdźcie drugie potęgi liczb szeregu naturalnego od 1—10.
*2. Znajdźcie trzecie potęgi liczb szeregu naturalnego od 1—10.
*3. Znajdźcie drugie potęgi liczb 10, 100, 1000, 10000.
*4. Znajdźcie trzecie potęgi liczb 10, 100, 1000, 10000.

II. Cztery pierwsze działania na potęgach dane są w § 13., § 14., § 15., § 16., § 21. i § 22. Dodać tu należy tylko:

1) Z odwrócenia twierdzenia, podanego w § 15. II. 4., wynika: *Potęga, której wykładnik jest sumą, równa się iloczynowi potęg o danej zasadzie.* N. p.

$$a^7 = a^{3+4} = a^3.a^4 \quad \text{albowiem} \quad a^3.a^4 = a^7$$
$$a^7 = a^{5+2} = a^5.a^2 \quad \text{albowiem} \quad a^5.a^2 = a^7$$

2) *Potęgi o tych samych wykładnikach mnożymy, podnosząc iloczyn zasad do spólnego wykładnika.*

$$a^5.b^5 = (ab)^5 \quad \text{albowiem} \quad \begin{array}{l} a^5 = a.a.a.a.a \\ b^5 = b.b.b.b.b \end{array}$$
$$\text{przeto} \quad a^5.b^5 = (ab).(ab).(ab).(ab).(ab) = (ab)^5$$

3. *Potęgi o tych samych wykładnikach dzielimy, podnosząc iloraz zasad do spólnej potęgi.*

$$a^5 : b^5 = \left(\frac{a}{b}\right)^5; \quad \text{albowiem} \quad \begin{array}{l} a^5 = a.a.a.a.a \\ b^5 = b.b.b.b.b \end{array}$$
$$\text{przeto} \quad \frac{a^5}{b^5} = \frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$$

Zadania.

5. Obrachujcie, czemu się równa 2^7, 4^6, 5^5.
6. Czemu się równa *a)* $(a+b)^2 . (a+b)^2$; *b)* $(x+y)^2 . (x-y)^2$
c) $7^3 . \left(\frac{1}{7}\right)^3$; *d)* $28^2 . \left(\frac{1}{4}\right)^2$

7. *a)* $(8a^2)^5 : (4a^2)^5$; *b)* $(6a^3b^3c^3)^4 : (3a^3b^3c^3)^4$;
c) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 : \left(\frac{4}{15}\right)^2$; *d)* $\left(\frac{4a^2}{6c}\right)^3 : \left(\frac{2a^2}{6c}\right)^3$.

59. Podnoszenie jednomianów do potęgi.

I. Z § 58. I wynika, że n. p.

$(+a)^2=(+a).(+a)=+a^2$ $(+a)^3=(+a).(+a).(+a)=+a^3$

$(+a)^4=(+a).(+a).(+a)=+a^4$

$(+a)^5=(+a).(+a).(+a).(+a).(+a)=+a^5$

A więc: *Każda potęga liczby dodatniej jest dodatnia.*

$(-a)^2=(-a).(-a)=+a^2$

$(-a)^3=(-a).(-a).(-a)=-a^3$

$(-a)^4=(-a).(-a).(-a).(-a)=+a^4$

$(-a)^5=(-a).(-a).(-a).(-a).(-a)=-a^5$

A więc: *Parzysta potęga liczby ujemnej jest dodatnia, nieparzysta potęga jest ujemna.*

II. $(ab)^5=ab.ab.ab.ab.ab=$

$=a.b.a.b.a.b.a.b.a.b$ (§ 15. II. 2.)

$=a.a.a.a.a.b.b.b.b.b$ (§ 15. I. c)

$=a^5.b^5$

To znaczy: *Iloczyn podnosimy do potęgi, podnosząc każdy jego czynnik do danej potęgi.*

Zadania.

1. *a)* $(56)^3$; *b)* $(8)^4$; *c)* $(20)^5$; *d)* $(200)^3$; *e)* $(2\ ab)^2$; *f)* $(4\ ab)^3$; *g)* $(4\ xyz)^4$.

2. *a)* $(-2\,nm)^4$; *b)* $(-3\,mn)^3$; *c)* $(+2\,mn)^4$; *d)* $(+2mn)^5$.

3. *a)* $(-3\,a)^2.(-2\,a)^2$; *b)* $(-a)^5.(2\,a)^6$; *c)* $(-2\,a)^4.(a)^4$

III. Z § 58. I. wynika, że n. p.

$$(a:b)^5 = \left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^5}{b^5}$$

To znaczy: *Ułamek (iloraz) podnosimy do potęgi, podnosząc do danej potęgi licznik (dzielną) i mianownik (dzielnik).*

4. *a)* $(\frac{3}{4})^2$; *b)* $(\frac{2}{7})^3$; *c)* $(17\frac{3}{5})^2$; *d)* $(34\frac{3}{8})^2$.

5. *a)* $\left(\frac{4\,ab}{5\,mp}\right)^2$; *b)* $\left(\frac{m}{3\,xy}\right)^4$; *c)* $\left(\frac{17\,c}{24\,b}\right)^2$.

6. *a)* $(-\frac{2}{3})^3$; *b)* $(-\frac{2}{3})^4$; *c)* $(-\frac{5}{8})^2.(-\frac{7}{4})^2$.

IV. Z § 58. I. wynika, że n. p.

$$(a^m)^5 = a^m.a^m.a^m.a^m.a^m = a^{m+m+m+m+m} = a^{5m}$$

To znaczy: *Potęgę podnosimy do potęgi, podnosząc zasadę do iloczynu wykładników.*

Z tego wynika na odwrót, że n. p.

$$a^{5m} = (a^m)^5$$

To znaczy: *Potęgę, której wykładnik jest iloczynem, możemy zamienić na potęgę podniesioną do potęgi.*

Zadania.

7. *a)* $(7^4)^3$; *b)* $(2\,a^2)^4$; *c)* $(b^3\,c^4)^2$; *d)* $(2\,ab^2\,c^3)^3$.

8. *a)* $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^4$; *b)* $\left(\frac{4\,mn^2}{5\,p^2\,x^3}\right)^3$; *c)* $\left(\frac{ab^2}{c^3\,d^4}\right)^3$.

9) *a)* $(m^2\,n^3)^2.(m^3n^2)^3$; *b)* $\left(\frac{ab^2}{c^3\,d^4}\right)^3.\left(\frac{cd^3}{a^2\,b}\right)^3$;

c) $\left(\frac{2a^2\,b^3\,c}{3m^2\,n^2}\right)^2 : \left(\frac{2ab^2\,c^2}{3mn^3}\right)^3$

10. *a)* $(7.10^4)^3$; *b)* $(8.10^5)^2$;

11. *a)* 3^4; *b)* 5^4; *c)* 8^6; *d)* $(20)^6$ *e)* $(500)^4$.

V. Z § 21. 6. wynika, że n. p.

$a^4 : a^7 = a^{4-7} = a^{-3}$

Ale $a^4 : a^7 = \frac{a^4}{a^7} = \frac{a^4 : a^4}{a^7 : a^4} = \frac{1}{a^3}$

przeto $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

Ponieważ $\left(\frac{1}{a}\right)^3 = \frac{1^3}{a^3} = \frac{1}{a^3}$ (§ 59. III.)

więc $a^{-3} = \left(\frac{1}{a}\right)^3$

Tak samo wykaże się, że n. p.

$2^{-5} = (\tfrac{1}{2})^5$

Liczbę $\frac{1}{a}$ nazywamy odwrotnością liczby a, $\frac{1}{2}$ odwrotnością liczby 2 i t. p. Zatem: *Wykładnik ujemny wskazuje, ile razy odwrotność zasady mamy przez siebie pomnożyć.*

Zadanie.

12. *a)* 10^{-1}, *b)* 10^{-2}, *c)* 10^{-3}, *d)* 10^{-4}.
13. *a)* $2^{-2}.2^2$; *b)* $2^{-3}.2^3$; *c)* $2^{-4}.2^4$.
14. *a)* $a^{-2}b^3.a^3b^{-2}$; *b)* $mp^{-1}x^{-3}.m^{-2}p^2x^5$.
15. *a)* $(2^{-2})^2$; *b)* $(3^2)^{-2}$; *c)* $(10^{-4})^2$.

60. Kwadrat i sześcian dwumianu.

I. Z § 58. I. wynika, że

$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = (a-b).(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

To znaczy: *Druga potęga,* (czyli kwadrat), (друга степень або квадрат), *dwumianu składa się z kwadratu części pierwszej, z podwójnego iloczynu części obydwu i z kwadratu części drugiej.*

Kwadrat każdej liczby jest dodatni (§ 59. I.), podwójny zaś iloczyn jest dodatni, gdy składniki mają znaki równe, a ujemny jeżeli mają znaki różne.

Powyższą regułę możemy zastósować do każdego wielomianu, jeżeli go rozłożymy na dwumian. N. p.

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+$$
$$+2(a+b).c+c^2$$

Według tej reguły podnosimy liczbę dziesiętną do kwadratu (§ 19.) N. p.

$487^2=(400+80+7)^2=(4.10^2+8.10+7)^2=$

$4^2.10^4$	$4^2.10^4$	160000
$2.4.8.10^3$	$2.4.8.10^3$	64000
$8^2.10^2$	$8^2.10^2$	6400
$2.480.7$	$2.48.7.10$	6720
7^2	7^2	49
		237169

Z czego wynika znana reguła (§ 19).

Zadania.

1. $(2a+3a^2)^2$ 2. 5. $\left(\frac{5m^2-4p}{6a^3+2c}\right)^3$ 3. $(a+2b+3c)^2$

4. $(3ab^2+5c^2d^3)^4$ 5. $\left(\frac{5m^2-4p}{6a^3+2c}\right)^3$ 6. $\left(\frac{7m+4m^2n}{8ab^3}\right)^2$

7. $(30+7)^2$ 8. $(600+70+8)^2$ 9. 345^2

10. 2658^2 11. $71{\cdot}4^2$ 12. $68{\cdot}37^2$

*13. $4{\cdot}072^2$ *14. $60{\cdot}072^2$ *15. $7{\cdot}0906^2$

*16. 7360^2 *17. 34200^2 *18. 976000^2

Jakie prawidło wynika ze zadań 13—18?

*19. $0{\cdot}0648^2$ *20. $0{\cdot}9057^2$ *21. $0{\cdot}00976^2$

Jakie prawidło wynika ze zadań 19—21?

II. Z § 58. II. 1) wynika:

$$(a+b)^3=(a+b)^2.(a+b)=(a^2+2ab+b^2).(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+$$
$$+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

$$(a-b)^3=(a-b)^2.(a-b)=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=a^3-$$
$$-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Z tego wynika: *Trzecia potęga*, (czyli sześcian), (трета степень або куб) *dwumianu jest sumą 1) ze sześcianu pierwszej części, 2) z potrójnego iloczynu kwadratu części pierwszej i drugiej, 3) z potrójnego iloczynu części pierwszej i kwadratu części drugiej i 4) ze sześcianu części drugiej.*

Gdy dwumian jest sumą, są wszystkie wyrazy dodatnie, a gdy różnicą, są parzyste potęgi wyrazu ujemnego dodatnie, nieparzyste ujemne.

Zadania.

22. $(2a+b)^3$ 23. $(a^2+5b)^3$ 24. $(x+4)^3$

25. $(5-y)^3$ 26. $(2x^3+4y^2)^3$ 27. $(5m-n^2)^3$

28. $\left(\frac{4a+2b}{10}\right)^3$ 29. $\left(\frac{7x-6z}{100}\right)^3$ 30. $\left(\frac{7a+8b^3}{1000}\right)^3$

31. $(4.10+c)^3$ 32. $(5.10^2+f)^3$ 32. $(7.10^3+y)^3$

*34. $(6.10+7)^3$ *35. $(8.10+2)^3$ *36. $(9.10+1)^3$

III. Według powyżej podanej reguły (II), podnosimy liczbę dziesiętną do sześcianu (§ 60. zad. 34—36.). N. p.

$$742^3=(740+2)^3=(74.10+2)^3=74^3.10^3+3.74^2.10^2.2+$$
$$+3.74.10.2^2+2^3$$

Ale

$$74^3=(70+4)^3=(7.10+4)^3=7^3.10^3+3.7^2.10^2.4+3.7.10.4^2+4^3$$

Zatem

$742^3=7^3.10^6$	343000000	343
$3.7^2.4.10^5$	58800000	588
$3.7.4^2.10^4$	3360000	336
$4^3.10^3$	64000	64
$3.74^2.2.10^2$	3285600	32856
$3.74.2^2.10$	8880	888
2^3	8	8
	408518488	408518488

Z tego wynika: *Liczbę szczególną podnosimy do sześcianu podnosząc pierwszą jej cyfrę tylko do sześcianu. Z każdej następnej cyfry tworzymy: 1) potrójny kwadrat poprzedzającej liczby pomnożony przez tę cyfrę, 2) potrójny iloczyn z poprzedzającej liczby i jej kwadratu, 3) jej sześcian.*

Gdyby był dany ułamek dziesiętny n. p. 4·57, natenczas

$$4{\cdot}57^3=\left(4\tfrac{57}{100}\right)^3=\left(\frac{457}{10^2}\right)^3=\frac{457^3}{10^6}=95{\cdot}443993$$

To znaczy: *Ułamek dziesiętny podnosimy do sześcianu tak, jak gdyby on był liczbą całkowitą, ale w sześcianie odcinamy* t r z y r a z y *tyle miejsc dziesiętnych, ile ich było w danej liczbie,*

Zadania.

37. Wykażcie prawdziwość reguł, wyżej podanych, na przykładach: *a)* 84^3; *b)* 196^3; *c)* $47{\cdot}5^3$; *d)* $0{\cdot}618^3$.

38. Podnieście do trzeciej potęgi: *a)* 2471; *b)* 5918; *c)* 26·38; *d)* 2·647.

*39. Podnieście do sześcianu:

a) 409; *b)* 5076; *c)* 0·382; *d)* 0·07645.

Co spostrzegacie?

*40. Podnieście do sześcianu liczby: *a)* 560; *b)* 37200; *c)* 45000; *d)* 673000. — Co spostrzegacie?

*41. Podnieście do sześcianu: *a)* 127; *b)* 4182, *c)* 7629; *d)* 5074 i oddzielcie w sześcianie kreskami pionowemi miejsca, które powstały z jednostek, od tych, które powstały z dziesiątek i t. d. — Ile miejsc powstaje z każdej cyfry? — Ile miejsc miała zasada, a ile ich ma jej sześcian?

*42. Podnieście do trzeciej potęgi: *a)* 6·47; *b)* 28·51; *c)* 0·748; *d)* 0·0964 i oddzielcie kreską pionową miejsca, które powstały z dziesiętnych, od tych, które powstały z całkowitych, a dalej postąpcie jak w zadaniu 41. — Gdzie położyliście pierwszą kreskę?

61. O pierwiastkach.

I. Z § 20. wiadomo, że

$$\sqrt{64}=8 \qquad \text{albowiem} \qquad 8^2=64$$

Tak samo będzie $\sqrt[3]{343}$ (czytaj: »Trzeci pierwiastek z 343«) $=7$ albowiem $7^3=343$.

Wogóle, jeżeli $\sqrt[m]{a}=b$ natenczas $b^m=a$.

A zatem: *Wyciągnąć* m^{ty} *pierwiastek* (добути корінь) *z danej liczby (a) znaczy znaleźć taką liczbę (b), któraby podniesiona do m^{tej} potęgi wydała daną liczbę.*

Daną liczbę *(a)* uważamy za $m^{tą}$ potęgę, której wykładnikiem jest m. Wykładnik m nazywa się w tym przypadku wykładnikiem pierwiastkowym (виложник корінний).

Ponieważ $\sqrt[1]{a}=a$, albowiem $a^1=a$, $\sqrt[1]{5}=5$, albowiem $5^1=5$, więc pierwszego pierwiastka nie wyciągamy nigdy, a ponieważ każdy wykładnik pierwiastkowy z wyjątkiem drugiego trzeba wyraźnie napisać, przeto gdy nie ma wykładnika pierwiastkowego, domyślamy się 2.

Uwaga: We wzorze $b^m = a$ są trzy liczby tak ze sobą połączone, iż można każdą z nich oznaczyć, jeżeli dwie inne są dane. I tak jeżeli będzie dane b i m, otrzymamy (kładąc $a = x$) $x = b^m$. Szukamy w tym przypadku niewiadomej potęgi. To działanie nazywa się potęgowanie (степеньоване). N. p $x = 2^3 = 8$.

Jeżeli jest dane m i a, zaś $b = y$ będzie niewiadome, otrzymamy, jak wynika z wyżej przytoczonego, $y = \sqrt[m]{a}$. To działanie nazywamy wyciąganiem pierwiastka (корінньоване).

Gdyby zaś wykładnik był niewiadomy, n. p. $b^x = a$, natenczas piszemy $x = \log_b a$, a czytamy: x jest logarytmem (wykładnikiem) potęgi a dla zasady b. Działanie takie nazywamy logarytmowaniem (льоґаритмоване). N. p. $x = \log_{10} 100 = 2$ albowiem $10^2 = 100$; $y = \log_{10} 1000 = 3$, albowiem $10^3 = 1000$; $z = \log_2 8 = 3$, albowiem $2^3 = 8$.

Z powyższego wynika, że tak przy potęgowaniu jak i przy wyciąganiu pierwiastka jest dany wykładnik, ale przy potęgowaniu szukamy potęgi, mając dany pierwiastek jej, a w drugim przypadku szukamy pierwiastka, mając daną potęgę. Są więc te działania wręcz sobie przeciwne.

II. Niech n. p. $\sqrt[4]{a^3} = x \ldots 1)$

natenczas $a^3 = x^4$

a przeto także $(a^3)^m = (x^4)^m$ czyli $a^{3m} = x^{4m}$

a więc także $\sqrt[4m]{a^{3m}} = \sqrt[4m]{x^{4m}} \ldots \quad 2)$

A ponieważ dwa wręcz przeciwne działania znoszą się, przeto

otrzymamy z 2) $\sqrt[4m]{a^{3m}} = x$

Z tego i z równania 1) wynika $\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4m]{a^{3m}} \ldots 3)$

Podstawmy w równaniu 3) $m = \frac{1}{p}$ a otrzymamy

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[\frac{4}{p}]{a^{\frac{3}{p}}}$$

Z tego wynika: *Wartość pierwiastka się nie zmieni, jeżeli wykładnik pierwiastkowy i potęgowy przez tę samą liczbę* a) *pomnożymy*, b) *podzielimy*.

Twierdzenia *a)* używamy, aby kilka danych pierwiastków sprowadzić do spólnego wykładnika pierwiastkowego, którym będzie nm. s. w. danych wykładników pierwiastkowych. N. p.

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[12]{a^8}; \qquad \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^9}; \qquad \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^{10}}$$

Twierdzenia *b)* używamy, aby pierwiastek uprościć, jeżeli wykładnik pierwiastkowy i potęgowy mają spólny podzielnik. N. p.

$$\sqrt[20]{a^5} = \sqrt[4]{a}; \qquad \sqrt[12]{a^3 b^6} = \sqrt[4]{ab^2}.$$

Zadania.

1. Wykażcie w sposób wyżej podany prawdziwość następujących zestawień:

$a)\ \sqrt{a^5}=\sqrt[6]{a^{15}}$; $b)\ \sqrt[3]{xy^2}=\sqrt[12]{x^4y^8}$; $c)\ \sqrt[4]{ab^3c^5}=\sqrt[8]{a^2b^6c^{10}}$;
$d)\ \sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3]{a^2}$; $e)\ \sqrt[8]{a^6b^4}=\sqrt[4]{a^3b^2}$; $f)\ \sqrt[12]{a^4b^6}=\sqrt[6]{a^2b^3}$.

2. Sprowadźcie do spólnego wykładnika pierwiastkowego:

$a)\ \sqrt{a},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[5]{a}$; $b)\ \sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[5]{a^4},\ \sqrt[6]{a^5}$; $c)\ \sqrt{ab},\ \sqrt[3]{ab},\ \sqrt[4]{ab},\ \sqrt[5]{ab}$;
$d)\ \sqrt[4]{a^2b^3},\ \sqrt[8]{a^5b^2},\ \sqrt[10]{a^4b^3}$; $e)\ \sqrt[6]{xy^5},\ \sqrt[8]{x^3y^3},\ \sqrt[10]{x^5y}$;
$f)\ \sqrt{xy},\ \sqrt[3]{xy},\ \sqrt[4]{xy},\ \sqrt[6]{xy}$.

3. Uprośćcie pierwiastki:

$a)\ \sqrt[8]{a^6}$; $b)\ \sqrt[20]{a^4b^8}$; $c)\ \sqrt[60]{a^5b^{10}c^{20}}$; $d)\ \sqrt[15]{x^6y^9}$; $^*e)\ \sqrt[3]{a^6}$;
$^*f)\ \sqrt[6]{a^{12}y^{18}}$; $^*g)\ \sqrt[5]{x^{10}y^{30}}$; $^*h)\ \sqrt{m^4n^6p^8}$.

III. Ponieważ dwa wręcz przeciwne działania znoszą się, przeto n. p. $2=\sqrt[3]{2^3}$; $a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[5]{a^5}\ \dots$

Każdą zatem liczbę możemy przedstawić w postaci pierwiastka, jeżeli ją podniesiemy do dowolnej m^tej^ potęgi, a zarazem wyciągniemy ten sam m^ty^ pierwiastek.

62. Cztery działania na pierwiastkach.

I. Dodawanie i odejmowanie pierwiastków uskuteczniamy według reguł poznanych w § 13. i § 14. Zauważać tylko należy, że jednorodne są te pierwiastki, które mają równe wykładniki pierwiastkowe i te same liczby pod znakiem pierwiastku. Jednorodne są n. p. $4\sqrt[3]{a^2b}$ i $-2\sqrt[4]{a^2b}$, zaś $\sqrt[4]{ab}$ i $\sqrt{ab}$, albo $\sqrt[3]{a^2b}$ i $\sqrt[3]{ab^2}$ są różnorodne. — Pierwiastki jednorodne zbieramy według reguł podanych w § 13.

Zadania.

1. $3\sqrt{ab}+4\sqrt[3]{ab}-5\sqrt[4]{ab}+(2\sqrt{ab}-3\sqrt[3]{ab}+5\sqrt[4]{ab})=?$

2. $\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4}+(-\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4})=?$

3. $7a\sqrt{a}-4a^2\sqrt[3]{a^2}+a^3\sqrt[4]{a^3}-5a^4\sqrt[5]{a^4}-(6a\sqrt{a}+4a^2\sqrt[3]{a^2}-$
$-2a^3\sqrt[4]{a^3}+4a^4\sqrt[5]{a^4})=?$

4. $x-2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}+5\sqrt[5]{x}-(-2x+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}+5\sqrt[5]{x})=?$

5. $3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{3}+\sqrt[5]{3}-(3-\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{3}-\sqrt[5]{3})=?$

6. $7\sqrt[5]{xy^4}-6\sqrt[5]{x^2y^3}+6\sqrt[5]{x^3y^2}-4\sqrt[5]{x^4y}-(6\sqrt[5]{xy^4}+6\sqrt[5]{x^3y^2}-$
$-6\sqrt[5]{x^2y^3}-6\sqrt[5]{xy^4})=?$

7. $3+\sqrt{3}-(5-\sqrt[3]{3})+(4+\sqrt{3})-[5-\sqrt{3}-(4+\sqrt[3]{3})]=?$

8. $\sqrt[5]{a}-3\sqrt[4]{a}+4\sqrt[8]{a}-[\sqrt[6]{a}-2\sqrt[4]{a}+3\sqrt[3]{a}-\{2\sqrt[5]{a}-3\sqrt[6]{a}+\sqrt[3]{a}-$
$-(\sqrt[5]{a}+\sqrt[4]{a}-2\sqrt[3]{a})\}]=?$

II. Ponieważ dwa wręcz przeciwne działania znoszą się, więc n. p. $\sqrt[5]{a}\,.\,\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{(\sqrt[5]{a}\,.\,\sqrt[5]{b})^5}=$ (§ 59. II.) $\sqrt[5]{(\sqrt[5]{a})^5\,.\,(\sqrt[5]{b})^5}=\sqrt[5]{ab}$

To znaczy: *Pierwiastki o równych wykładnikach pierwiastkowych mnożymy, wyciągając spólny pierwiastek z iloczynu liczb, stojących pod znakiem pierwiastka.*

Gdyby wykładniki były różne, trzeba je sprowadzić do spólnego wykładnika pierwiastkowego (§ 61. II.).

Zadania.

9. Wykażcie prawdziwość powyższej reguły na przykładach:
a) $\sqrt[3]{x}\,.\,\sqrt[3]{y}$; *b)* $\sqrt[4]{a^3}\,.\,\sqrt[4]{b^5}$; *c)* $\sqrt[m]{c}\,.\,\sqrt[m]{d}$.

10. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[4]{a^3})\,.\,\sqrt[6]{b^5}$;

11. $(3\sqrt[4]{ab^2}-4\sqrt[8]{a^3b^3}-5\sqrt[12]{a^5b^4})\,.\,\sqrt{ab}$;

12. $(\sqrt{ax}-\sqrt[3]{ax})(2\sqrt{ax}+4\sqrt[3]{ax})$;

13. $(\sqrt[3]{a^5}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^5}-\sqrt[3]{b^2}$;

14. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})+(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,.\,(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$;

15. $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{4})(\sqrt[6]{2}-\sqrt[5]{3}+\sqrt[10]{4})-(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[4]{4})(\sqrt[6]{2}+\sqrt[5]{3}-\sqrt[10]{4})$;

16. $[\sqrt[4]{5}+\sqrt[6]{7}-(2\sqrt[4]{5}-3\sqrt[6]{7})]\,.\,[\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{7}-(2\sqrt[3]{5}-3\sqrt[4]{7})]$.

*17. Wykonajcie naznaczone mnożenie, stosując twierdzenie podane w § 61. III.: *a)* $m\sqrt[3]{a}$; *b)* $a\sqrt[5]{c}$; *c)* $mn\sqrt[5]{a^2mn^2}$; *d)* $3\sqrt{2a}$; *e)* $2a\sqrt[3]{4a^2}$; *f)* $5ab\sqrt{4ab}$.

III. Ponieważ dwa wręcz przeciwne działania znoszą się, więc n. p. $\sqrt[5]{a}:\sqrt[5]{b}=\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b}}=\sqrt[5]{\left(\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b}}\right)^5}=$ [§ 59. III.] $\sqrt[5]{\frac{(\sqrt[5]{a})^5}{(\sqrt[5]{b})^5}}=\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$

To znaczy: *Pierwiastki o równych wykładnikach pierwiastkowych dzielimy, wyciągając spólny pierwiastek z ilorazu liczb, stojących pod znakiem pierwiastka.*

Gdyby wykładniki pierwiastkowe były różne, trzeba je sprowadzić do spólnego wykładnika pierwiastkowego.

Zadania.

18. Wykażcie prawdziwość powyższego twierdzenia na przykładach: *a)* $\sqrt{a}:\sqrt{m}$; *b)* $\sqrt[6]{x}:\sqrt[6]{y}$; *c)* $\sqrt[4]{a^2b^3}:\sqrt[4]{a^2b^3}$; *d)* $\sqrt[p]{a}:\sqrt[p]{b}$.

19. *a)* $\sqrt{a}:\sqrt[6]{a}$; *b)* $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[6]{a}$; *c)* $\sqrt[9]{a^8}:\sqrt[3]{a^2}$;
d) $\sqrt[15]{a^7b^6}:\sqrt[20]{a^8b^7}$; *e)* $8\sqrt[18]{m^8p^7c^6}:2\sqrt[24]{m^7p^7c^7}$;
f) $6\sqrt{mp^3n}:3\sqrt[15]{m^3pn^4}$.

20. *a)* $(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt{a^3}+\sqrt[12]{a^{19}}):\sqrt[6]{a^5}$;
b) $(6\sqrt[4]{a^3b^4}-8\sqrt[8]{a^7b^7}-10\sqrt[12]{a^{11}b^{10}}):2\sqrt{ab}$;
c) $(30\sqrt[12]{2}+15\sqrt[3]{2}-9\sqrt[60]{2^{17}}+60\sqrt[60]{2^{11}}):5\sqrt[12]{2}$;
d) $5\sqrt[14]{a^{13}x^{11}z^9}-35\sqrt[14]{a^6x^5z^4}-20\sqrt[24]{a^{11}x^9z^7}):5\sqrt[14]{axz}$.

21. $(6ax+10\sqrt[20]{a^{27}x^{21}}-12\sqrt[12]{a^{17}x^{13}}-12\sqrt[12]{a^5x^{15}}-20\sqrt[30]{a^{23}x^{39}}+$
$+24\sqrt[6]{a^5x^8}):(3\sqrt[4]{ax^3}+5\sqrt[5]{a^3x^4}-6\sqrt[6]{a^4x^5})=?$

22. $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}):(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})$.

23. $(\sqrt[5]{a^4}-2\sqrt[15]{a^6b^5}+\sqrt[3]{b^2}):(\sqrt[5]{a^2}-\sqrt[3]{b})$.

24. $(8\sqrt[7]{a^6}-48\sqrt[56]{a^{53}}+192\sqrt[28]{a^{29}}-64\sqrt[8]{a^9}):(2\sqrt[7]{a^2}-4\sqrt[8]{a^3})$.

63. Potęgowanie pierwiastków i wyciąganie pierwiastka.

I. Z § 58. I. wynika, że n. p.
$(\sqrt[6]{a^5})^3=\sqrt[6]{a^5}\,.\,\sqrt[6]{a^5}\,.\,\sqrt[6]{a^5}=$ [§ 62. II.] $\sqrt[6]{a^{15}}=$ [§ 61. II.] $\sqrt{a^5}$.

Z tego wynika: *Pierwiastek podnosimy po potęgi, mnożąc wykładnik potęgowy, albo dzieląc wykładnik pierwiastkowy.* Drugiego sposobu można wtedy tylko użyć, gdy wykładnik pierwiastkowy jest podzielny przez wykładnik potęgi.

Zadania.

1. Wykażcie prawdziwość powyższej reguły na przykładach:
a) $(\sqrt{a})^5$; *b)* $(\sqrt[7]{a^5})^4$; *c)* $(\sqrt[8]{a^3})^2$; *d)* $(\sqrt[9]{a^5})^3$.

2. $(3\sqrt[3]{a}-5\sqrt[3]{a^2})^2$. 3. $(4\sqrt{a}-5\sqrt[4]{a^3})^2$.

4. $(2\sqrt{a}-\sqrt[4]{a^3})^3$. 5. $(5\sqrt{a}+7\sqrt[3]{a^2})^3$.

6. $(7\sqrt[6]{a^5}-4\sqrt[4]{b^3})^2$ 7. $(2\sqrt[3]{a}-5\sqrt[5]{b})^3$.

II. Z § 61. I. wynika, że n. p.

$$\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{a}\,.\,\sqrt[4]{b} \text{ albowiem } (\sqrt[4]{a}\,.\,\sqrt[4]{b})^4=ab$$

Z tego wynika: *Z iloczynu wyciągamy pierwiastek, wyciągając wskazany pierwiastek z każdego czynnika.*

III. W ten sam sposób wykaże się, że *wyciągamy pierwiastek z ułamka* (ilorazu), *wyciągając wskazany pierwiastek z licznika* (dzielnej) *i mianownika* (dzielnika).

Zadania.

8. Wykażcie prawdziwość powyższego twierdzenia na przykładach:

a) $\sqrt[5]{a^2b^3}$; *b)* $\sqrt[6]{a^5b^7c}$; *c)* $\sqrt[4]{m^3np}$; *d)* $\sqrt[8]{ax^5y^7}$.

9. Wyciągnijcie pierwiastek: *a)* $\sqrt[3]{8a^3b^6}$; *b)* $\sqrt{289a^6b^4c^2}$; *c)* $\sqrt{1156x^6}$; *d)* $\sqrt[3]{729a^6b^9}$ stosując twierdzenie z § 61. II. *b*.

10. Wyciągnijcie pierwiastek, rozłożywszy poprzednio liczbę pod pierwiastkiem na stosowne czynniki (§ 58. III.): *a)* $\sqrt[3]{a^4}$; *b)* $\sqrt[4]{b^6}$; *c)* $\sqrt[3]{25x^7}$; *d)* $\sqrt[3]{512a^7b^4}$; *e)* $\sqrt[6]{a^8b^8c^3}$; *f)* $\sqrt[7]{a^{15}b^{21}x^{28}}$.

11. Wykażcie prawdziwość twierdzenia III. na przykładach:

a) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; *b)* $\sqrt[3]{\frac{m}{p}}$; *c)* $\sqrt[4]{\frac{a^3x}{by^3}}$; *d)* $\sqrt[8]{\frac{a^7bx^5}{c^3d^7}}$;

12. Wyciągnijcie pierwiastek: *a)* $\sqrt[4]{b^8:a^{12}}$; *b)* $\sqrt{25a^6:81b^4}$; *c)* $\sqrt[3]{64m^3:9p^6}$; *d)* $\sqrt[8]{a^6b^6c^4:f^4g^6d^6}$, stosując twierdzenie z § 61. II. *b*.

13. Wyciągnijcie pierwiastek, rozłożywszy poprzednio liczbę pod pierwiastkiem na stosowne czynniki (§ 58. II. 1.):

a) $\sqrt{\frac{16a^5}{25c^4}}$; *b)* $\sqrt[3]{\frac{343a^7b^4}{125d^8f^8}}$; *c)* $\sqrt[4]{\frac{m^7n^6p^5}{x^5y^6z^7}}$; *d)* $\sqrt[6]{\frac{a^8b^8c^4}{f^8g^9h^5}}$

IV. Z § 61. II. *b* wynika (zad. 3*e*—3*h*), że *wyciągamy pierwiastek z potęgi, dzieląc wykładnik potęgowy przez wykładnik pierwiastkowy.*

Zadania.

14. Wykażcie prawdziwość powyższego twierdzenia na przykładach: *a)* $\sqrt{a^8}$; *b)* $\sqrt[3]{b^{12}}$; *c)* $\sqrt[4]{(a^2b^3)^8}$; *d)* $\sqrt[6]{(mnp)^{12}}$.

15. *a)* $\sqrt{25a^8c^6}$; *b)* $\sqrt[4]{3^4p^{12}}$; *c)* $\sqrt[7]{m^{14}p^{21}x^{28}}$;
d) $\sqrt{\frac{a^4b^6c^8}{d^6e^8f^{10}}}$; *e)* $\sqrt{\frac{x^{10}y^{15}z^{20}}{a^5b^5c^{10}}}$

16. *a)* $\sqrt{9a^7b^{14}}$; *b)* $\sqrt[3]{729m^9p^{10}c^{11}}$; *c)* $\sqrt[4]{d^8e^9f^{10}}$;
d) $\sqrt{\frac{64a^{15}b^{14}}{81f^8g^6}}$; *e)* $\sqrt[7]{\frac{a^8x^9z^{10}}{b^9y^{12}}}$.

V. Ponieważ dwa wręcz przeciwne działania znoszą się, przeto (n. p.):

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[12]{\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}\right)^{12}} = \sqrt[12]{\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}\right)^{4.3}} = \sqrt[12]{\left(\left[\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}\right]^4\right)^3} = \sqrt[12]{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3} = \sqrt[12]{a}$$

To znaczy: *Z pierwiastka wyciągamy pierwiastek, mnożąc wykładniki pierwiastkowe.*

Zadania.

17. Wykażcie prawdziwość twierdzenia na przykładach:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$; *b)* $\sqrt[3]{\sqrt{b}}$; *c)* $\sqrt{\sqrt[4]{m}}$; *d)* $\sqrt[4]{\sqrt{n}}$.

18. *a)* $\sqrt{\sqrt{a}}$; *b)* $\sqrt[5]{\sqrt[3]{b^2}}$; *c)* $\sqrt[4]{\sqrt{am}}$; *d)* $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$;
e) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}}$; *f)* $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{m^2}}}$.

19. Wykonajcie działanie, stosując § 61. III.:

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$; *b)* $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; *c)* $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$; *d)* $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}$.

Uwaga. Ponieważ n. p. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[7]{x^4} = x^{\frac{4}{7}}$ i t. d., przeto na odwrót $a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4}$, $x^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{a^4}$ i t. d.

To znaczy: *Potęga o wykładniku ułamkowym jest właściwie pierwiastkiem, którego wykładnikiem pierwiastkowym jest mianownik, a wykładnikiem potęgowym licznik wykładnika.*

64. Wyciąganie trzeciego pierwiastka z liczb szczególnych.

Jeżeli potrzeba wyciągnąć trzeci pierwiastek z 95·443993, natenczas uważamy liczbę daną za sześcian (§ 61. I.) jakiejś liczby. Ponieważ przy podnoszeniu do sześcianu z miejsc dziesiętnych pierwiastka powstają dziesiętne (§ 60. zad. 42.), a z drugiego i każdego dalszego miejsca otrzymujemy trzy miejsca w sześcianie, przeto podzielimy (§ 60., zad. 41.) — począwszy od kropki dziesiętnej — daną liczbę na działy, po 3 cyfry w dziale. Zatem:

$$\begin{array}{ll}
\sqrt[3]{95{\cdot}|443|993} = 4{\cdot}57 & \\
64 & \\
\hline
31443 : (3.4^2=)48 & \\
240 & 3.4^2.5 \\
300 & 3.4.5^2 \\
125 & 5^3 \\
\hline
4318993 : (3.45^2=)\ 6075 & \\
42525 & 3.45^2.7 \\
6615 & 3.45.7^2 \\
343 & 7^3 \\
\hline
\end{array}$$

Pierwszy dział 95 przedstawia (§ 60. III.) sześcian pierwszej cyfry, zatem $\sqrt[3]{95}=4$ i zostaje 31. — Gdy do tej reszty dopiszemy następny dział a drugą cyfrę naznaczymy przez x, będzie

$$31443=3.4^2.x+3.4.x^2+x^3.$$

Najdalej na prawo wysunięty jest x^3, a przed nim idzie $3.4.x^2$, jeżeli przeto dwie ostatnie cyfry odetniemy, pozostanie $314=3.4^2.x$. Z tego otrzymamy $x=314:3.4^2$ czyli $x=314:48=5$. — Zrobiwszy próbę, otrzymamy resztę 4318, z którą w ten sam sposób postąpimy.

Z tego wynika: *Podzieliwszy daną liczbę na działy, wyciągamy z pierwszego działu trzeci pierwiastek, a przy każdym następnym odcinamy dwa ostatnie miejsca i dzielimy pozostałą liczbę przez potrójny kwadrat liczby już znalezionej.*

Zadania.

1. *a)* $\sqrt[3]{474552}$; *b)* $\sqrt[3]{148877}$; *c)* $\sqrt[3]{14886756}$.

2. *a)* $\sqrt[3]{405{\cdot}224}$; *b)* $\sqrt[3]{860{\cdot}085351}$; *c)* $\sqrt[3]{12{\cdot}812904}$.

3. Wyciągnijcie trzeci pierwiastek z liczb, otrzymanych po rozwiązaniu zadań 38—42 w § 60.

4. *a)* $\sqrt[3]{0{\cdot}915498611}$; *b)* $\sqrt[3]{72{\cdot}58602}$; *c)* $\sqrt[3]{115{\cdot}478}$; *d)* $\sqrt[3]{0{\cdot}076294}$; *e)* $\sqrt[3]{5000{\cdot}0462}$; *f)* $\sqrt[3]{1782{\cdot}49}$.

65. Liczby niewymierne i urojone.

Jeżeli liczba, z której wyciągamy pierwiastek jest rzeczywiście potęgą, natenczas pierwiastek można dokładnie oznaczyć. Niechże bowiem będzie w liczbie $\sqrt[m]{a}$ liczba $a=b^{pm}$, natenczas

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{b^{pm}}=b^{p}.$$

Jeżeli zaś liczba, pod pierwiastkiem stojąca, nie jest potęgą m^tą^, natenczas $\sqrt[m]{a}$ nie będzie można dokładnie przedstawić ani zapomocą liczby całkowitej, ani zapomocą ułamka. Liczby takie nazywamy niewymiernemi liczbami (ч. нераціональні, irrationale Zahlen).

Jeżeli pierwiastek jest liczbą niewymierną, wyciągamy go tak długo, aż otrzymamy tyle miejsc, ile ich do dokładności zadania potrzeba. (§ 64. zad. 4 *e*, 4 *f*).

Z § 59. I. wynika, że parzysta potęga liczby czy dodatniej, czy ujemnej jest tylko dodatnią. Gdyby zatem wynikło ze zadania n. p.

$$\sqrt[4]{-a}$$

natenczas byłabyto liczba, której w praktycznem życiu nie ma. Liczba taka nazywa się liczbą urojoną (ч. мниме, immaginäre Zahl). Urojoną nazywa się dlatego, że liczbę taką tylko sobie pomyśleć można.

Przeciwieństwem do liczb urojonych są liczby rzeczywiste (ч. реальні, reelle Zahlen).

66. Rachunek procentu prostego.

Wierzyciel (віритель, der Gläubiger) jestto osoba, która osobie drugiej, dłużnikowi (довжник, der Schuldner), wypożyczyła pewną kwotę pieniężną, zwaną kapitałem (капітал, das Kapital). Kapitał jest dla dłużnika długiem, (довг) dla wierzyciela wierzytelnością (віритeльність).

Dłużnik jest obowiązany zwrócić po umówionym czasie wierzycielowi wypożyczony kapitał, a nadto zapłacić mu pewne z góry oznaczone wynadgrodzenie, zwane dochodem (дохід, die Zinsen). Wynadgrodzenie za rok od każdych 100 koron kapitału nazywa się procentem (процент, das Percent). N. p. 5% (czytaj „5 procent“ albo „5 od sta na rok“).

Niech k oznacza kapitał, p procent, d dochód a l lata. W kapitale k jest setek $\frac{k}{100}$, a ponieważ od każdej setki pobieramy p koron, przeto dochód roczny będzie $\frac{k}{100}p$, a przeto za lat l

$$d=\frac{k}{100}p.\,l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

W równaniu tem przychodzą cztery liczby; jeżeli więc trzy z nich będą dane, natenczas będzie można czwartą obrachować.

I. Mamy zadanie: Jaki dochód przyniesie kapitał 7100 K, dany na 5% po 4 lat. 7 mies. i 18 dniach?

Według 1) będzie:

$$d=\frac{7100}{100}.5.4\text{ l. 7 m. 18 dni}$$

Tu można użyć t. z. praktyki włoskiej:

Dochód za 1 rok	355 K
d za 4 lata	1420 K
„ 6 mies. $=\frac{1}{2}$ r	177·5 K
„ 1 mies. $=\frac{1}{6}$ z 6 mies.	29·58 K
„ 15 dni $=\frac{1}{2}$ z 1 mies.	14·79 K
„ 3 dni $=\frac{1}{5}$ z 15 dni	2·96 K
	1644·83 K

Zadania.

1. Przeprowadźcie całe wnioskowanie na przykładach:

a) Kapitał 600 K, umieszczony na 5%, procentował się przez 4 l;
b) „ 2350 K, „ „ 4%, „ „ „ 7 l;
c) „ 8764 K, „ „ 3%, „ „ „ 12 l.

2. Ile dochodu przyniosły następujące kapitały:

a) 976 K, umieszczone na $5\frac{3}{4}$% przez $7\frac{1}{2}$ l;
b) 2845 K, „ „ $4\frac{1}{2}$% „ $5\frac{2}{3}$ l
c) 1576 K, „ „ $4\frac{4}{5}$% „ $8\frac{7}{12}$ l.

3. Jaki dochód przyniesie kapitał 4786 K, umieszczony na $4\frac{1}{2}$%, *a)* w 3 l 8 mies.; *b)* 2 l 9 mies.; *c)* 4 l 2 mies.?

4. Jaki dochód przyniesie kapitał 7468, dany na 5%, *a)* w 7 *l* 20 dniach; *b)* 6 *l* 150 dniach?

5. Jaki dochód przyniesie kapitał 12600 K, umieszczony na $5\frac{3}{4}$%, w czasie, *a)* 5 lat 6 mies. 15 dni; *b)* 4 lat 9 mies. 20 dni; *c)* 8 l 5 mies. 17 dni?

6. Ktoś umieścił 6488 K na $4\frac{3}{4}$% na 10 lat; po upływie jednak 6 lat 7 mies. 16 dni spadła stopa procentowa na $4\frac{1}{2}$%. Ile dochodu otrzyma więc po upływie owych 10 lat? — Jaki będzie kapitał wraz z dochodem?

7. A kupił dobra za 340800 K. Gospodarował sam przez 6 lat 8 miesięcy, mając 12% rocznego dochodu. Po upływie tego czasu wydzierżawił dobra, a dzierżawca zobowiązał się płacić mu $9\frac{5}{8}$% rocznie. — Ileż dochodu przyniosły mu te dobra w 15 latach?

8. Ktoś włożył w przedsiębiorstwo 30645 K. W przeciągu 18 lat 11 miesięcy wynosiły zyski $15\frac{1}{6}$%, straty $4\frac{3}{5}$%. Ileż było czystego dochodu?

9. Osoby A i B zawiązały spółkę z kapitałem zakładowym 15800 K. Ponieważ nierówne były ich udziały, przeto A dostał 26·48%, B 47·5%, z czystego zysku, a resztą powiększono kapitał rezerwowy. — Ile dostał A, ile B, a ile wynosił kapitał rezerwowy po upływie 8 lat 6 miesięcy, jeżeli przedsiębiorstwo niosło 15%?

10. Fabrykant ma od kapitału 140000 K rocznego dochodu 15%. Z tego przeznaczył $5\frac{1}{2}$% na wynadgrodzenie (tantiemy) dla robotników, $8\frac{1}{4}$% na fundusz rezerwowy, 3% na cele dobroczynne, $15\frac{7}{12}$% na powiększenie fabryki. Ile wynosiła każda z tych pozycyi, i ile zostało dla fabrykanta po upływie 6 lat 8 miesięcy.

11. Ojciec przekazał testamentem synowi, mającemu 7 lat 8 miesięcy, 4568 K, danych na $7\frac{3}{4}$%. — Jaką kwotę odbierze ten syn, gdy dojdzie do pełnoletności?

12. Ktoś sprzedaje kamienicę pod tym warunkiem, aby nabywca w szedł w jej posiadanie dopiero po upływie 9 miesięcy i 20 dni, a żąda gotówką 34500 K. — Ileż właściwie kosztuje ta kamienica nabywcę, jeżeli mógłby swój kapitał umieścić na 5%?

II. Z równania 1) w § 66. wynika: $k = \frac{100\,d}{pl}$

Do tego samego rezultatu dojdziemy

a) sprowadzeniem do jedności. N. p. Jakiego potrzeba kapitału, aby w 3 latach, licząc po 4%, mieć 150 K dochodu?

Na	4 K	dochodu w roku		potrzeba . . .	100 K	kapitału
„	1 K	„	„	„	$\frac{100}{4}$ K	„
„	1 K	„	w 3 latach	„	$\frac{100}{4.3}$ K	„
„	150 K	„	„	„	$\frac{100.150}{4.3}$ K	kapitału.

b) zapomocą proporcyi: Według § 54. II. będzie w powyższym przykładzie

$$\begin{array}{r} K:100=150:4 \\ =\ \ 1:3 \\ \hline \text{więc } K:100=150:4.3 \end{array} \qquad \text{z czego } K=\frac{100.150}{3.4}$$

Zadania.

13. Rozwiążcie na obydwa sposoby: Znaleźć kapitał, który umieszczony na

a)	3%,	przyniósł	w 8 latach	3600	K dochodu
b)	4%,	„	w 6 „	500	„ „
c)	$3\frac{4}{5}$%,	„	w $7\frac{1}{2}$ „	2000	„ „
d)	4·58%,	„	w 5 lat. 3 mies.	864	„ „

14. Komuś dają w posagu dom, niosący rocznie 160 K czystego dochodu, albo gotówką 7000 K. Co będzie dla niego korzystniejsze, jeżeli kapitał, włożony w dom, niesie $6\frac{3}{4}$%?

15. Jakiego potrzeba kapitału, aby, umieszczony na 8·6%, przyniósł tyle rocznego dochodu, ile przynosi kapitał 2768 K, dany na 7·8%?

16. Ojciec obiecał, że doda synowi, gdy się ten dorobi 5000 K majątku, tyle, aby miał rocznego dochodu 1000 K. — Ileż kapitału ma ojciec dać synowi, jeżeli ten umieścił swój majątek 5000 K na $6\frac{5}{8}$%?

17. Ktoś ma w kasie oszczędności pocztowej, która płaci 3%, złożony kapitał, który przynosi rocznie 150 K. Ile dochodu rocznego miałby od tego samego kapitału w banku, który płaci $3\frac{1}{2}$%?

18. Jakito kapitał, umieszczony na $5\frac{2}{7}$%, przyniósł w 6 mies. 15 dniach 117 K dochodu?

19. Ktoś rozważył, że najkorzystniej będzie włożyć kapitał, który przy $3\frac{1}{5}$% przyniósł w 5 l. 8 m. 3600 K, wraz z tym dochodem w przedsiębiorstwo, niosące $7\frac{4}{5}$%. — Ileż będzie miał rocznego dochodu, gdy uczyni, jak zamierzył?

20. Ktoś dał pewien kapitał na 5%. Po upływie jednak $4\frac{1}{2}$ lat zniżono stopę procentową na $4\frac{3}{4}$%, wskutek czego nie miał, gdy ubiegło razem 8 lat, spodziewanego pierwotnie dochodu 3680 K. Ileż stracił na tej zniżce?

III. Kapitał wraz z dochodem nazywamy **kapitałem końcowym** (к. наконечний, der Endwert), kapitał zaś pierwotnie na procencie umieszczony, nazywa się **kapitałem początkowym** (к. початковий, der Barwert).

Mamy zadanie: Jaki jest kapitał początkowy, który w 4 latach, umieszczony na 5%, wzrósł do sumy 720 K?

a) Zapomocą równań: Jeżeli kapitał był x, natenczas wynosił dochód $\frac{x.5.4}{100}$, więc $x+\frac{x.5.4}{100}=720$ z czego $x=600$ K.

b) Zapomocą sprowadzenia do jedności:

1 K kapitału początkowego dała w 1 roku 0·05 K dochodu
1 K „ „ „ w 4 latach 0·2 K „
1 K „ „ „ „ 1·2 K końcowego

przeto na 1 K kapitału końc. potrzeba w 4 latach $\frac{1}{1 \cdot 2}$ K kapitału początkowego.
„ 720 K „ „ „ „ $\frac{720}{1 \cdot 2}$ K „ „.

Zatem: *Kapitał początkowy znajdziemy, dzieląc cały kapitał końcowy* (720) *przez kapitał końcowy od 1 korony* (1·2).

Zadania.

21. Przeprowadźcie obydwa sposoby rozwiązania na przykładach: Jaki był kapitał początkowy, jeżeli tenże

a) po upływie 10 lat przy 6% przyniósł 112 K kapitału końcowego.
b) „ „ 8 „ „ $4\frac{1}{2}$% „ 272 K „ „
c) „ „ 5 „ „ $4\frac{3}{4}$% „ 990 K „ „
d) „ „ $7\frac{1}{2}$ „ „ $5\frac{3}{8}$% „ 4215 K „ „

22. Komuś należy się na mocy testamentu 6380 K ale dopiero po upływie 6 lat 7 miesięcy. Ileż należałoby mu się dziś, jeżeli kapitał niesie 5%?

23. Dłużnik ma za dług, zrobiony przed 12 laty, zapłacić wierzycielowi 1690 K. Jak wielki był jego dług pierwotnie, jeżeli płaci od niego $5\frac{3}{4}$%?

24. Za kamienicę daje A 36800 K, ale płatnych za 1 rok 6 miesięcy; B daje 37000 K, ale płatnych za 2 lata. Któryż z nich stawia korzystniejsze warunki dla kupującego, jeżeli można mieć 5%?

25. Ktoś ma za 5 miesięcy odebrać 358·75 K. Ile może żądać zaraz, jeżeli kapitał można umieścić na 6%?

26. Ktoś kupił folwark pod następującymi warunkami: gotówką płaci 15700 K; za 7 miesięcy 18050 K, a za rok — licząc od dnia kupna — 17872 K. Ileż właściwie kosztuje go ten folwark, jeżeli kapitał może przynieść $4\frac{1}{2}$%?

IV. Z równania 1) § 66 wynika: $p=\frac{100\,d}{kl}$

Do tego samego rezultatu dojdziemy (jak pod II. w § 66.) zapomocą *a)* sprowadzenia do jednosci, *b)* proporcyi.

Zadania.

27. Przeprowadźcie obydwa sposoby rozwiązania na przykładach: Na którym procencie umieszczono:

a) 300 K	kapitału,	który w	5 latach	przyniósł	60 K	dochodu;
b) 700 K	„	„	10 „	„	210 K	„
c) 4200 K	„	„	$6\frac{3}{4}$ „	„	1124 K	„
d) 564 K	„	„	2 lat. 7 mies.	„	72·85 K	„

28. Ktoś ma kapitał, który mu przy 4% niesie rocznie 500 K dochodu. Na jakim procencie potrzebaby ten kapitał umieścić, aby przynosił 568 rocznego dochodu?

29. Kapitał 3680 K niósł dotąd rocznie 165·6 K dochodu, teraz umieszczono go na procencie o $\frac{3}{4}$ większym od poprzedniego. Jakiż niesie teraz dochód?

30. Kupiec ma za 3 miesiące 18 dni zapłacić 1000 K. Spodziewając się, że w tym czasie utarguje 860 K, włożył 3180 K do banku, aby dochodem od tego kapitału pokryć resztę. — Jaki procent płaci bank?

31. Kupiec A miał za 2 miesiące 20 dni zapłacić kupcowi B kwotę 2784·56 K, posyła mu jednak zaraz 2759·81 K. — Na jakiż procent musiałby B dać tę kwotę, aby się po upływie danego czasu należytość wyrównała.

V. Z równania 1) § 66. wynika: $l = \frac{100\ d}{k \cdot p}$

Do tego samego rezultatu dojdziemy (jak pod II. § 66.) *a)* przez sprowadzenie do jedności, *b)* zapomocą proporcyi.

Zadania.

32. Przeprowadźcie obydwa sposoby na przykładach: W jakim czasie przyniesie

a)	kapitał 80 K	dany na 4%,	dochodu	22·4 K
b)	„ 369 K,	„ „ 5%,	„	66·1 K
c)	„ 684 K,	„ „ $4\frac{1}{4}$%	„	199·8 K

33. W jakim czasie podwoi się kapitał 2500 K dany na 5%?

34. W jakim czasie podwoi się kapitał *a)* 65 K, *b)* 172 K, *c)* 8536·49 K, dany na 4%? — Co spostrzegacie?

35. Jak długo trzeba czekać, aby kapitał 2145 K, dany na $7\frac{1}{7}$%, tyle przyniósł dochodu, ile go przynosi kapitał 4680 K przy 5% w 4 latach 5 miesiącach?

36. Przy narodzeniu syna umieścił ojciec 3800 K na 4% z tem zastrzeżeniem, że syn może odebrać ten kapitał wtedy dopiero,

gdy on wraz z odsetkami wyniesie 7600 K. — Ileż lat miał syn, gdy ten kapitał podjął?

37. Ktoś dał 1684 K na $4\frac{3}{4}\%$ w tym celu, aby otrzymać po pewnym czasie 559·93 K dochodu. Gdy jednak upłynęła połowa onych lat, przez które kapitał miał leżeć, dołożył jeszcze 1580 K. Jakiż kapitał końcowy otrzymał po upływie onego czasu?

38. Dłużnik ma oddać 300 K za 4 miesiące, 900 K za 8 miesięcy i 1600 K za 12 miesięcy. W jakimże terminie mógłby oddać bez zysków i strat dla siebie cały dług, jeżeli wierzyciel zgodził się na 6%?

39. Ktoś ma odebrać 500 K za 4 miesiące, 800 K za 6 miesięcy, 800 K za 8 miesięcy, i 1400 K za 10 miesięcy. — Kiedyż może bez zysków i strat zażądać całej wierzytelności naraz przy 6%?

67. Rachunek terminu.

Mówimy n. p.: »Sąsiad miał 15. czerwca termin w sądzie«, t. z., że w tym dniu miał się stawić w sądzie; »krawiec nie dotrzymał mi terminu«, t. z., że nie przyniósł sukni na oznaczony dzień. Terminem (термин) wogóle nazywamy dzień z góry postanowiony, w którym pewna czynność ma się odbyć. Termin w sprawach pieniężnych jestto ściśle i naprzód oznaczony dzień, w którym dłużnik ma dotrzymać wierzycielowi zobowiązań.

Niekiedy zdarza się, że dłużnik musi zmienić terminy rat, które miał płacić. Zachodzić tu mogą dwa przypadki.

I. *Dłużnik płaci raty w innych terminach.* N. p. 1. Ktoś zobowiązał się zapłacić 800 K po 2 miesiącach, 500 K po 3 mies., a 600 K po 5 mies., zapłacił atoli 800 K po upływie 1 mies. a 500 K po 4 mies. Po iluż miesiącach ma zapłacić resztę?

Przypuśćmy, że można mieć 7%. Ponieważ dłużnik może procentować kwoty aż do chwili oddania, przeto przy pierwszym sposobie spłaty miałby dochodu (§ 66. 1.)

$$8 . 7 . \tfrac{2}{12} + 5 . 7 . \tfrac{3}{12} + 6 . 7 . \tfrac{5}{12} \; . \; . \; . \; . \; . \; a)$$

Przy drugim sposobie spłat miałby dochodu — jeżeli termin ostatniej raty przez *t* naznaczymy —

$$8 . 7 . \tfrac{1}{12} + 5 . 7 . \tfrac{4}{12} + 6 . 7 . \tfrac{t}{12} \; . \; . \; . \; b)$$

Zmiany takie robi się zawsze pod warunkiem, że dłużnik — a więc i wierzyciel — nie poniesie ani straty ani zysku, co wtedy nastąpi, jeżeli dochody *a)* i *b)* będą równe.

Zatem

$$8.7.\tfrac{2}{12}+5.7.\tfrac{3}{12}+6.7.\tfrac{5}{12}=8.7.\tfrac{1}{12}+5.7.\tfrac{4}{12}+6.7.\tfrac{t}{12}\ \ldots\ c)$$

Podzielmy całe równanie przez 7 a pomnóżmy przez 12

$$8.2+5.3+6.5=8.1+5.4+6\,t$$

$$61=28+6\,t$$

$$t=5\tfrac{1}{2}\text{ mies.}$$

Łatwo zauważać, że otrzymane w ten sposób równanie *(c)* będzie można zawsze przez stopę procentową podzielić, a wtedy otrzymamy taki sam wynik, jak gdyby kapitał przynosił 1%. Nadto można zamiennik miesięcy na lata (12) również opuścić, przez co rachunek cały się uprości. N. p.

2. Ktoś miał zapłacić 300 K za 5 mies., 200 K za 7 mies., 500 K za 8 mies., tymczasem zapłacił 200 K za 3 mies., 500 K za 5 mies. Po iluż miesiącach ma zapłacić resztę?

Przy pierwszym sposobie spłat miałby dochodu

$$3.5+2.7+5.8\ \ldots\ldots\ d)$$

Przy drugim zaś sposobie, naznaczywszy przez t termin ostatniej raty $2.3+5.5+3\,t\ \ldots\ldots\ f)$

Ponieważ *f)* ma być równe *d)*, przeto

$$2.3+5.5+3\,t=3.5+2.7+5.8$$

czyli $31+3\,t=69$

$$t=12\tfrac{2}{3}\text{ mies.}$$

Zadania.

3. Ktoś zobowiązał się spłacić 2000 K za 2 lata, 1600 K za 4 lata, tymczasem płaci 2400 K już po $1\frac{1}{6}$ latach. Kiedy ma zapłacić resztę?

4. Na dniu 1. stycznia 1900 r. zobowiązał się ktoś, że zapłaci 21. marca 1500 K, 29. czerwca 2000 K, a 12. września 1200 K; zapłacił zaś 1. marca 1000 K, 20. maja 900 K, a 13. sierpnia 1600 K. Kiedyż ma zapłacić resztę?

5. Ktoś miał po 8 mies. oddać dług 3000 K; on płaci jednak 1800 K gotówką. Po iluż więc latach może oddać resztę?

6. Zobowiązano się spłacić dług 20000 K czterech równych ratach, a to pierwszą ratę za 2 mies., a każdą następną o 2 mies. później od poprzedzającej, zapłacono zaś 5000 K za 2 mies., 6000 K za 3 mies., a 4000 K za 5 mies. — Po iluż miesiącach trzeba zapłacić ostatnią ratę?

II. *Dłużnik chce spłacić wszystkie raty naraz.* Ów termin, w którym dłużnik bez straty i zysku może spłacić wszystkie raty naraz, nazywa się średnim terminem (середний термін). N. p. (§ 67. zad. 1.) Ktoś zobowiązał się zapłacić 800 K po 2 miesiącach, 500 K po 3 miesiącach, a 600 K po 5 miesiącach. W jakim terminie może zapłacić cały dług naraz? — Płacąc ratami miałby dłużnik dochód podany pod *a)*, płacąc zaś naraz kwotę 800+500+600=1900 K w terminie t miałby przy 7% dochód

$$19.7.\tfrac{t}{12} \quad \ldots\ldots \quad g)$$

Ponieważ znowu nie może być ani strat, ani zysków, przeto *g)* musi być równe *a)*,

$$18.7.\tfrac{t}{12}=8.7.\tfrac{2}{12}+5.7.\tfrac{3}{12}+6.7.\tfrac{5}{12}$$

albo podzieliwszy przez 7, a pomnożywszy przez 12

$$19.t=8.2+5.3+6.5.$$

Dla łatwiejszego przeglądu pomnóżmy równanie to przez 100

$$1900\ t=800.2+500.3+600.5 \quad \ldots\ldots$$

z czego
$$t=\frac{800.2+500.3+600.5}{1900}$$

$$t=3\tfrac{4}{19}\text{ mies.}$$

Łatwo spostrzedz, że i tutaj stopa procentowa wypada z rachunku, możemy więc przyjąć 1%.

Gdyby było zadanie ogólne: kwotę r_1 mamy zapłacić po l_1, r_2 po l_2, r_3 po l_3, r_4 po l_4 latach, albo całą kwotę $r_1+r_2+r_3+r_4$ naraz w terminie t, natenczas otrzymalibyśmy dochód przy pierwszym sposobie spłat: — biorąc 1% —

$$\frac{r_1}{100}.l_1+\frac{r_2}{100}.l_2+\frac{r_3}{100}.l_3+\frac{r_4}{100}.l_4 \quad \ldots\ldots \quad h)$$

Spłacając cały kapitał naraz, mielibyśmy dochód

$$\frac{(r_1+r_2+r_3+r_4)}{100}\ t \quad \ldots\ldots \quad i)$$

Ponieważ *i)* ma być równe *h)*, więc

$$\frac{(r_1+r_2+r_3+r_4)}{100}\ t=\frac{r_1\ l_1}{100}+\frac{r_2\ l_2}{100}+\frac{r_3\ l_3}{100}+\frac{r_4\ l_4}{100}$$

czyli
$$(r_1+r_2+r_3+r_4)\ t=r_1l_1+r_2l_2+r_3l_3+r_4l_4$$

z czego
$$t=\frac{r_1\,l_1+r_2\,l_2+r_3\,l_3+r_4\,l_4}{r_1+r_2+r_3+r_4} \quad \ldots\ldots \quad m)$$

To znaczy: *Średni termin znajdziemy, dzieląc sumę iloczynów, utworzonych z rat i ich terminów, przez sumę rat.*

Niech będzie zadane: Znaleźć termin średni dla rat w zadaniu 2 (§ 67.). Schematycznie rzecz się tak przedstawi:

300 K — 5 mies.	. . . . .	1500
200 K — 7 mies.	. . . . .	1400
500 K — 8 mies.	. . . . .	4000
1000		$t = 6900 : 1000 = 6{\cdot}9$ mies.

Zadania.

7. Kwota 10000 K miała być spłacona w 4 ratach, a to: 3000 K za 4 mies., 2500 K za 6 mies., 2000 K za 8 mies., a reszta za rok. W jakim średnim terminie możnaby całą sumę naraz spłacić? — (Znalazłszy średni termin, oznaczcie, ileby było dochodu przy jednym, ile przy drugim sposobie spłacenia na 5%).

8. Na dniu 1. lipca stanęła ugoda, że A ma zapłacić 1600 K zaraz, 1400 K na dniu 1. września, a 1000 K 1. listopada. W jakim średnim terminie może zapłacić całą sumę naraz?

9. Ktoś miał spłacić dług w 5 ratach. Pierwsza rata, płatna za 1 rok, miała wynosić 6000 K, każda zaś następna ma być zapłacona o rok później, a wynosić o 1000 K mniej. — Jaki byłby średni termin tego długu?

*10. Ktoś spłacił w terminie średnim kwotę 15000 K, zamiast ją spłacić w trzech równych ratach ale w terminach 2 mies., 4 mies. i 6 mies. — Jakiż był średni termin?

*11. Znajdźcie średni termin pięciu rat, z których każda wynosi 80 K, a są płatne: pierwsza za 3 mies., a każda następna o 1 miesiąc później od poprzedzającej.

*12. Podstawcie we wzorze *m)* (§ 67.) $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$, a według reguły, która z tego wyniknie, oznaczcie średni termin w zadaniu 10. i 11. — Czy takie same liczby wynikły teraz jak przedtem?

13. A ma spłacić 6000 K w ten sposób, że 1000 K zapłacić ma za 3 mies., 2000 K za 4 mies., 3000 K za 8 mies.; B ma taki sam dług spłacić w takich samych terminach, ale w równych ratach. Który z nich wcześniej miałby zapłacić, gdyby chcieli oddać swoje długi w średnich terminach?

14. Ktoś miał spłacić 50 K za 3 mies., 60 K za 4 mies., 70 K za 5 mies., 80 K za 6 mies., 100 K za 8 mies. Zapłaciwszy jednak dwie pierwsze raty we właściwych terminach, spłaca resztę w terminie średnim. Czy nie byłoby korzystniej cały dług uiścić w terminie średnim?

63. Rachunek procentu składanego.

Ponieważ wierzyciel może roczny dochód od swojego kapitału umieszczać także na procencie, przeto w zakładach kredytowych dolicza się dochód za pewien okres czasu do kapitału, czyli kapitalizuje się dochód. Kapitał jest wtedy umieszczony na procencie składanym (процент складаний).

I. Rachunek kapitału końcowego od jednego tylko kapitału.

a) Okres roczny.

Gdyby zakład kredytowy płacił n. p. 4%, natenczas 1 K kapitału początkowego, uczyni 1·04 K kapitału końcowego, a 2, 3, 4 . . . n koron kapitału początkowego, uczynią 2, 3, 4 . . . n razy po 1·04 K kapitału końcowego. Zatem

1 K z początkiem	uczyni	z końcem	1go	roku	. . . .	1·04 K
1·04 K	„	„	„	2go	„	$1{\cdot}04 . 1{\cdot}04 = 1{\cdot}04^2$ K
$1{\cdot}04^2$ K	„	„	„	3go	„	$1{\cdot}04 . 1{\cdot}04^2 = 1{\cdot}04^3$ K

i t. d.

Zatem 1 K uczyni po upływie n lat . . . . $1{\cdot}04^n$ K, gdyby zaś było koron n. p. 700, natenczas kapitał końcowy (k)

$$k = 700 . 1{\cdot}04^n \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 1)$$

Liczba $1{\cdot}04^n$ jest kapitałem końcowym 1 korony. Wartości te podane są w tabeli A. — *Kapitał końcowy znajdziemy, mnożąc kapitał początkowy przez kapitał końcowy od jednej korony.*

b) Okres półroczny.

Jeżeli dochód dolicza się do kapitału co pół roku, natenczas procent za ten okres będzie połową procentu rocznego, ale okresów będzie 2 razy więcej. N. p. Kapitał 600 K, dany na 4% procentu składanego przy półrocznej kapitalizacyi, będzie wynosił po upływie 5 lat $k = 600\,(1{\cdot}02)^{10}$.

Zadania.

1. Przeprowadźcie rzecz jak wyżej na przykładach: Jak wielki będzie kapitał końcowy przy całorocznej kapitalizacyi

a) od 900 K po 6 latach, dany na 5%

b) „ 600 K po 5 „ „ „ $4\frac{1}{2}$%.

2. Ile dochodu przyniesie kapitał

a) 1200 K, na 4% procentu składanego po upływie 15 lat przy całor. kapital.
b) 3567 K. „ 4% „ „ „ 20 „ „ „ „
c) 2000 K, „ $4\frac{1}{4}$% „ „ „ 10 „ „ „ „
d) 276 K, „ $4\frac{1}{2}$% „ „ „ 30 „ „ „ „

3. Gdy się córka narodziła, złożył ojciec 3500 K na 4% procentu składanego przy całorocznej kapitalizacyi. Ileż odbierze córka, doszedłszy do pełnoletności (24 lat)?

4. Kupiec rozpoczął handel, mając 20000 K, ale powiększał kapitał obrotowy rocznym dochodem. Jaki będzie miał majątek po upływie 20 lat, jeżeli handel niesie przeciętnie 5%?

5. Ktoś kupił kamienicę za 45000 K. Gotówką dał 26000 K, resztę ma spłacić za 3 lata, za które ma jednak zapłacić albo 6% procentu prostego, albo 5% procentu składanego. Na któryż warunek ma się zgodzić?

6. Ktoś ma 3600 K majątku, który może umieścić albo na 5% procentu prostego, albo na $4\frac{1}{2}$% procentu składanego przy całorocznej kapitalizacyi? O ile większy byłby jego majątek po upływie 15 lat w jednym lub w drugim przypadku?

7. Ojciec złożył na rzecz nowonarodzonego syna 1500 K na $4\frac{1}{2}$% procentu składanego przy całorocznej kapitalizacyi. Gdy jednak syn miał lat 10, zniżono stopę procentową na 4%. Ileż otrzyma syn, doszedłszy do pełnoletności?

*8. Do kasy oszczędności, która płaci od wkładek 4% procentu składanego przy całorocznej kapitalizacyi, włożono pierwotnie 876 K; po upływie 8 lat dołożono 648 K, a po upływie dalszych 6 lat jeszcze 1000 K. — Całą należytość odebrano, gdy upłynęło 12 lat od ostatniej wkładki. Ile wynosił kapitał końcowy?

9. Ile wynosić będzie kapitał końcowy od

a) 500 K, na 4% proc. skład. po 2 latach przy $\frac{1}{2}$ rocznej kapital.
b) 800 K, na 5% „ „ „ 3 „ „ „ „
c) 1500 K, na 5% „ „ „ 15 „ „ „ „
d) 3720 K, na 6% „ „ „ 20 „ „ „ „
e) 4560 K, na 4% „ „ „ 25 „ „ „ „

10. O ile większy będzie dochód od kapitału 6200 K, danego na 4% procentu składanego przy półrocznych okresach od dochodu przy całorocznej kapitalizacyi w *a)* 7 latach, *b)* 15 latach, *c)* 25 latach?

11. Jak będzie najkorzystniej umieścić kapitał 7500 K na 15 lat, czy na 5% procentu prostego, czy na $4\frac{1}{2}$% procentu składanego przy całorocznej, czy na 4% przy półrocznej kapitalizacyi?

*12. Ktoś umieścił w kasie oszczędności 950 K na 4%. Po upływie 2 lat dołożył 670 K, a po upływie dalszych $3\frac{1}{2}$ lat jeszcze 850 K. Kasa kapitalizuje je półrocznie. — Jakiż był kapitał końcowy po upływie 13 lat licząc od pierwszej wkładki?

13. Gdy córka miała lat 5, złożył ojciec na jej rzecz 2500 K na 5% procentu składanego w półrocznych okresach. Gdy jednak doszła do 12 lat, zniżono stopę procentową na 4%. Ileż otrzymała córka, doszedłszy do 20 lat wieku?

II. Jeżeli do pewnego kapitału dokładamy nowe kwoty, natenczas kapitał końcowy jest równy sumie kapitałów końcowych od poszczególnych kwot (§ 67. zad. 8. i 12.). Rachunek jednak uprości się, jeżeli wkładki będą jedne i te same, a powtarzać się będą co roku. N. p.

Ktoś wkłada 500 K z początkiem każdego roku na 4% procentu składanego przy całorocznej kapitalizacyi. Ile odbierze po upływie 3 lat, licząc od pierwszej wkładki?

Pierwsze 500 K wzrosną w 3 latach do kwoty . . . $500 . 1{\cdot}04^3$
Drugie 500 K „ w 2 latach „ $500 . 1{\cdot}04^2$
Trzecie 500 K „ w 1 roku „ $500 . 1{\cdot}04$

Zatem kapitał końcowy (K) po upływie 3 latach będzie

$$K = 500 . 1{\cdot}04^3 + 500 . 1{\cdot}04^2 + 500 . 1{\cdot}04 = 500\,[1{\cdot}04^3 + 1{\cdot}04^2 + 1{\cdot}04]$$

z czego łatwo wyczytać regułę.

Zadania.

14. Znajdźcie kapitał końcowy, jeżeli wkładano

a) po 700 K przez 3 lata z początkiem każdego r. na 5% składany
b) po 950 K „ 4 „ „ „ „ „ $4\frac{1}{2}$% „
c) po 860 K „ 5 „ „ „ „ „ 4% „

[Przeprowadźcie rzecz całą w sposób wskazany wyżej].

15. Mężczyzna 40-letni rozpoczął wkładać do kasy oszczędności z początkiem każdego roku po 800 K na $4\frac{1}{2}$% składanego. Jakąż kwotę otrzyma, doszedłszy do 50 lat wieku?

16. Oficyaliście, pobierającemu 3700 K rocznej płacy, ściąga służbodawca 6% z jego płacy, dodaje sam drugie tyle i umieszcza tę kwotę na 4% składany. Jaką odprawę otrzyma ten oficyalista, gdy wysłuży 20 lat?

17. Urzędnik w pewnej fabryce pobiera 4000 K rocznie. Aby jemu i jego rodzinie zabezpieczyć na starość utrzymanie, składa właściciel fabryki na rzecz jego 2000 K na $4\frac{1}{2}$% składanego, a nadto corocznie 6% z jego płacy. Jakąż odprawę otrzyma ten urzędnik *a)* po 10 latach, *b)* 15 latach, *c)* 20 latach, *d)* 30 latach?

18. Ktoś chce staremu słudze, który ma jeszcze do łaskawego chleba 5 lat dosługiwać, dać zaraz gotówką 4000 K, albo składać na rzecz jego w banku po 500 K co pół roku. — Co będzie ko-

rzystniejsze dla onego sługi, jeżeli bank płaci 4% procentu składanego, a kapitalizuje półrocznie?

19. Ktoś wkładał przez 3 lata z początkiem każdego półrocza po 236 K. Po 3 latach przestał wkładać, ale pozostawił należącą mu się kwotę jeszcze przez 12 lat w banku. Ile odebrał w końcu, jeżeli bank płaci 4% procentu składanego, a kapitalizuje półrocznie?

20. Urzędnik, który pobierał przez 8 lat 2500 K płacy rocznej, a przez nas'ępnych 12 lat po 3300 K rocznie, wkładał 6% swej płacy na $4\frac{1}{2}$% procentu składanego. Ileż złożył w ten sposób w 20 latach?

69. Obrachowanie kapitału początkowego.

Niech będzie dane, że n. p. kapitał (K), umieszczony na 4% procentu składanego, wzrósł w przeciągu 10 lat do kwoty 5000 K. Natenczas według I (§ 67.) $5000 = K \,.\, 1{\cdot}04^{10}$

a z tego $K = \frac{5000}{1{\cdot}04^{10}} = 5000 \,.\, \frac{1}{1{\cdot}04^{10}}$

Ułamek $\frac{1}{1{\cdot}04^{10}}$ jest odwrotną wartością kapitału końcowego 1 korony. Odwrotne wartości tegoż kapitału podane są na tablicy B

Z powyższego wynika: *Kapitał początkowy przy procencie składanym znajdziemy, mnożąc kapitał końcowy przez odwrotną wartość kapitału końcowego 1 korony.*

Zadania.

1. Wyszukajcie kapitał początkowy, który

a) w 5 latach przy 4% składanym wzrósł do kwoty 7600 K
b) w 8 „ „ 5% „ „ „ „ 976 K 18 h
c) w 12 „ „ $4\frac{1}{2}$% „ „ „ „ 2578 K 36 h.

2. Syn, zostawszy pełnoletnim, podjął w banku, który płaci $4\frac{1}{2}$% procentu składanego, 12000 K. Ileż na ten cel włożył ojciec przy jego narodzeniu?

3. Podróżny zmarł nagle bez testamentu, a sąd złożył znaleziony przy nim kapitał na 4% procentu składanego. Dopiero po 50 latach podjęli spadek prawni spadkobiercy, a ci otrzymali milion koron. Ile pieniędzy miał ów podróżny przy sobie?

4. Słudze zapisał jego służbodawca 3000 K, płatnych w 5 lat po śmierci testatora. Główny spadkobierca chce jednak zaraz spła-

cić onego sługę. Ileż ma mu dać, jeżeli kapitał ten mógłby nieść $4\frac{1}{2}\%$ procentu składanego?

5. Pewne dobra kupują trzej kupcy. A daje za nie gotówką 458000 K; B daje 460000 K, ale płatnych dopiero po upływie 2 lat; C daje 465000, płatnych po upływie 5 lat od dnia zawarcia kontraktu. Któryż z nich stawia najkorzystniejsze warunki, biorąc na uwagę, że od kapitału można mieć 5% procentu składanego?

6. Pewien ojciec chciałby zabezpieczyć swojej córce, mającej 3 lata, 100000 K, a synowi, mającemu 7 lat, kwotę 60000 K, gdy dzieci te dojdą do pełnoletności. Ileż ma złożyć na ten cel przy 4% i kapitalizacyi półrocznej?

7. Ktoś chciałby swojemu nowonarodzonemu dziecku zabezpieczyć 20000 K, gdy ono dojdzie do pełnoletności, a ma do wyboru, albo umieścić kapitał na 6% prosty, albo na $4\frac{1}{2}\%$ składany w okresach rocznych, albo na 4% składany w okresach półrocznych. — Któryż sposób ma wybrać?

8. W przeciągu 25 lat dorobił się kupiec na sprzedaży herbaty majątku, wynoszącego 25687 K a to w ten sposób, że 6% dochodu, który ten handel przynosił, wkładał co pół roku w interes. Jakimże kapitałem rozpoczął ten handel?

9. W testamencie znalazł pewien spadkobierca następujący ustęp: »Wkładam na głównego spadkobiercę mojego majątku obowiązek, aby sukcesorom pana A, od którego przed 20 laty pożyczyłem pieniądze na 5%, wypłacił kapitał wraz z odsetkami w łącznej kwocie 28650 K. Jaką kwotę pożyczył testator, zważywszy, że mógł liczyć procent prosty albo składany?

10. Ktoś sprzedał kamienicę, którą był kupił przed 15 laty, za 48600 K i obrachował, że — nie licząc czynszu, jaki pobierał — zarobił $2\frac{1}{2}\%$ składanego. Za ileż nabył tę kamienicę?

70. Niektóre zastósowania rachunku procentowego.

I. Tara (§ 10. zad. 18. Uwaga.) może być podana 1) jako tara rzeczywista (тара дійсна), gdy się podaje, ile waży całe opakowanie, — 2) tara przeciętna (т. пересічна), podająca, ile n. p. na każdą pakę lub beczkę towaru przypada opakowania; 3) tara w procencie (т. процентова), n. p. 3% Tª, t. z., że na każde 100 *kg* brutto przypadają 3 *kg* opakowania.

Tara rzeczywista oblicza się z tary procentowej od brutto jak dochód za rok.

II. Ponieważ kupiec, który kupił towar hurtem, a sprzedaje częściowo, mógłby ponieść stratę przez to, że każdemu kupującemu nieco przeważy, przeto aby tej uniknął, otrzymuje od kupca hurtownego nawagę czyli sopratarę (навара), t. j. pewną ilość kilogramów, za które nie płaci. N. p. 2% nawagi znaczy, że na każde 100 *kg* netto ma odtrącić 2 *kg*, za które nie płaci.

Zadania.

1. Paka waży B^{tto} 350 *kg*, T^{a} $2\frac{1}{2}$%. Ile wynosi N^{tto}?

2. Sprowadzono trzy paki kawy, ważące B^{tto} 86·4 *kg*, 126·58 *kg*, 90·67 *kg* T^{a} 4%. Ile wynosi N^{tto} każdej paki?

3. Kupiec sprowadził towaru B^{tto} 576 *kg*, T^{a} $3\frac{1}{3}$%. St^{a} $1\frac{1}{2}$%. Ile kosztuje ten towar, jeżeli kilogram netto kosztuje 4·16 K?

*4. Kupiec sprowadził dwie beczki oliwy: 158 *kg* i 296 *kg* B^{tto}; T^{a} $4\frac{1}{2}$%. Po czemu ma sprzedawać kilogram tejże, jeżeli 100 *kg* netto płacił po 196·2 K, a chce zarobić 24% [t. zn. za 100 K wydanych, chce pobrać 124 K].

*5. Kupiono w młynie 468 *kg* mąki. T^{a} $3\frac{1}{4}$%, St^{a} $1\frac{1}{2}$%, 100 *kg* netto po 38 K. Po czemu trzeba sprzedawać kilogram tej mąki, aby zarobić 20%?

6. Kupiec A posyła kupcowi B trzy beczki towaru, które ważyły B^{tto} 278 *kg*, 259 *kg*, 308 *kg*. T^{a} wynosiła w przecięciu 34 *kg* na beczce, sopratara $2\frac{1}{2}$%. Ile ma żądać za ten towar, jeżeli kilogram netto liczy sobie po 3·58 K?

7. Jaki procent wynosiła tara, jeżeli

a)	na 748 *kg*	brutto	przypadało	703·12 *kg*	netto
b)	na 408 *kg*	„	„	388·42 *kg*	„
c)	na 356 *kg*	„	„	336·42 *kg*	„

8. Za towar, którego kilogram netto kosztował 3 K, zapłacił kupiec 718 K 65 h. Jakiż procent sopratary przyznano mu, jeżeli brutto wynosiło 256 *kg* a tara 5%?

*9. Kupiec sprzedał B^{tto} 418 *kg*, T^{a} 6%, St^{a} $2\frac{1}{2}$%, kilogram netto po 5·6 K za 2665·18 K. Jaki miał procent zysku?

*10. Towar, którego było B^{tto} 700 *kg*, T^{a} $3\frac{3}{4}$%, St^{a} $2\frac{1}{4}$%, a kilogram netto kosztował 3 K 74 h, sprzedał kupiec za 2266·07 K. Jaki miał procent straty [t. z. Ile koron stracił na 100 K wydanych]?

III. Rabat (рабат) jest to opust z ceny towaru, jaki daje sprzedający kupującemu. N. p. Za książkę, która kosztuje 2 K zapłaci księgarz każdy tylko 1·6 K, otrzymuje więc 20% rabatu, który stanowi jego zysk, gdy książkę tę odprzeda.

Rabat podany jest zwykle w procencie (n. p. 20%), a oblicza się go jak dochód za rok.

IV. Skonto (дисконт) jestto kwota, którą potrąca sobie dłużnik dlatego, że odsyła swój dług wcześniej niż był obowiązany. N. p. A dostał od B towar za 2586 K z terminem 4 miesięcy i 3% skonta. To znaczy, że kupiec A ma odesłać swojemu wierzycielowi 2586 K dopiero po upływie 4 miesięcy, gdyby atoli chciał wcześniej odesłać, natenczas ma sobie potrącić 3% za ten czas, o który wcześniej płaci, a to dlatego, że nie odsyłając wcześniej, niż był obowiązany, mógł te pieniądze jeszcze procentować. — Skonto oblicza się jak dochód za pewien czas.

Zadania.

11. Kupiec otrzymał do sprzedaży towar wartości 1586 K z rabatem 8%. Ileż ma odesłać, gdy towar sprzeda?

12. Księgarz otrzymał od nakładcy 120 egzemplarzy dzieła w cenie po 86 h z rabatem 20%. Ile ma zapłacić za te książki nakładcy?

13. Nakład 1000 egzemplarzy pewnego dzieła kosztował 910 K. Cena egzemplarza wynosi 1·5 K. Ile zarobi nakładca, sprzedawszy cały nakład, jeżeli rabat księgarski wynosił 18%?

14. W pewnej fabryce, która daje swoim odbiorcom $3\frac{1}{2}$% rabatu, kupiono towaru B^{tto} 2796 *kg*, T^{a} $4\frac{3}{4}$%, St^{a} $2\frac{1}{3}$%. Ile zapłacono gotówką, jeżeli kilogram netto kosztuje 6·7 K?

15. Kupiec sprowadził towar za 1678 K z terminem 2 miesięcy i 3% skonta. Ileż zapłacił zaraz?

16. Kupiec sprowadził 20. stycznia towary wartości 2540 K z terminem zapłaty 20. czerwca tego samego roku. Tymczasem odsyła należytość już 1. kwietnia. Ileż ma odesłać, jeżeli skonto wynosi 4%? [W rachunkach kupieckich ma miesiąc 30 dni].

17. Ktoś sprowadził towary za 3700 K z terminem 5 miesięcy i 4·5% skonta, odstępuje zaś ten towar kupcowi B z terminem 3 miesięcy i $3\frac{3}{4}$% skonta. Ile zarobi na tem, jeżeli B zapłaci gotówką, a on wierzycielowi zaraz należytość odeszle?

18. Kupiec może dostać towar wartości 5468 K albo przy 3% skonto z terminem 2 miesięcy, albo z terminem 3 miesięcy przy $2\frac{1}{2}$% skonta. Co będzie korzystniejsze?

V. Są ludzie, którzy tem się trudnią i z tego żyją, iż sprzedającemu wyszukują kupca na towar, a kupującemu wskazują, gdzie może dostać to, czego szuka. Ludzie ci nazywają się senzalami, kurtyerami, stręczycielami albo litkupnikami (сензаль, баришівник). Ponieważ stręczyciel służy kupującemu i sprzedającemu, przeto od obydwóch należy mu się wynadgrodzenie po załatwieniu interesu. Wynadgrodzenie to nazywa się senzaryą, kurtażem, litkupniczem albo strętcznem (сензальне, баришівне).

Litkupnicze oblicza się jak dochód za rok od niedyskontowanej kwoty według z góry umówionej stopy procentowej. Przy znacznych interesach pieniężnych, n. p. w sprawach giełdowych, oblicza się litkupnicze według »promille«. N. p. 2‰ (czytaj: dwa promille) znaczy, że od każdych 1000 K należy się litkupnikowi 2 K.

Zadania.

19. Przy pośrednictwie litkupnika załatwiono interes na 1678 K. Ileż dostanie litkupnik, ile sprzedający, a ile zapłaci kupujący, jeżeli litkupnicze wynosi $\frac{3}{4}$%?

20. Bankier sprzedał przy pomocy senzala papierów na 3876 K. Ileż dostanie senzal, jeżeli senzarya wynosi $1\frac{1}{2}$‰?

21. Kupiec sprowadził za pośrednictwem senzala towar ważący B^{to} 356 *kg*, T^{a} $3\frac{5}{8}$%, kilogram netto po 4·8 K, litkupnicze $2\frac{1}{4}$%. Po czemu ma sprzedawać kilogram tego towaru, aby zarobił 27%?

22. Za pośrednictwem litkupnika kupiono 48 par wołów, para po 256 K. Ile dostanie litkupnik, jeżeli litkupnicze wynosi $1\frac{1}{6}$%?

23. Stręczyciel pośredniczył przy kupnie dóbr ziemskich, które kupiono za 248700 K. Ileż otrzyma za to, jeżeli stręczne wynosi $1\frac{3}{8}$‰?

24. Senzal, który pobiera z banku $\frac{5}{8}$% kurtażu, miał w roku 3156 K dochodu z banku samego. Ileż wynosiły transakcye bankowe, zawarte za jego pośrednictwem?

25. Kupiec sprowadził towar za 1896 K. Otrzymał wprawdzie 7% rabatu, ale zapłacił $2\frac{1}{4}$% litkupniczego. Ileż więc zarobi, gdy towar za powyższą cenę sprzeda?

26. Ktoś mógł sprzedać kamienicę z wolnej ręki za 46850 K, ale namówiony przez stręczyciela sprzedał ją za jego pośrednictwem za 47000 K, płacąc $\frac{1}{2}$% litkupniczego. Czy dobrze na tem wyszedł?

27. Jak wielkie musiałyby być transakcye, zawarte za pośrednictwem sensala, aby tenże przy sensaryi $\frac{5}{8}$% miał z banku rocznie 3500 K dochodu?

VI. Komisyoner (комісіонер) jestto człowiek, który załatwia obce interesa na polecenie. Wynadgrodzenie za trudy komisyonera nazywa się komisowem albo prowizyą (комісове, провізия). Prowizyę oblicza się jak dochód za rok według z góry umówionej stopy procentowej, a to od kwoty, za którą interes załatwiono, przed potrąceniem wszelkich wydatków.

Zadania.

28. Ile wyniesie komisowe po $1\frac{2}{5}\%$ od kwoty 768 K?

29. Kupiono przez komisyonera towar za 2056 K. Komisowe wynosiło $2{\cdot}6\%$, litkupnicze $1\frac{2}{3}\%$. Ile kosztuje ten towar kupującego?

30. Sprzedano przez komisyonera towar za 2768 K. Ileż otrzyma sprzedający, jeżeli komisowe wynosiło $3{\cdot}1\%$?

31. Komisyoner sprzedał na polecenie osoby A dobra za 476500 K. Ileż odeszle właścicielowi, jeżeli komisowe wynosi $3‰$ a kurtaż $2\frac{1}{2}‰$?

32. Kupiec otrzymał następujący rachunek: B^{tto} 896 K, T^{a} $6{\cdot}7\%$; kilogram netto po $1{\cdot}76$ K; prowizya $2\frac{3}{5}\%$. Ileż kosztuje go ten towar bez dalszych kosztów?

33. Za pośrednictwem komisyonera sprzedano 76 q pszenicy po $14{\cdot}5$ K, 84 q żyta po $11{\cdot}3$ K i 50 q owsa po 10 K za cetnar metryczny. Ileż wzięto za to wszystko, jeżeli komisowe $2\frac{5}{8}\%$?

34. Za towar, który sprzedano za 786 K, odesłał komisyoner $645{\cdot}72$ K. Jakiż procent policzył sobie komisyoner?

35. Komisyoner pobrał za towary 1040 K, odesłał jednak tylko $984{\cdot}88$ K. Jakiż procent komisowego policzył sobie, jeżeli litkupnicze wynosiło $2{\cdot}5\%$?

36. Sprowadzony towar ważył: B^{tto} 376 *kg*; T^{a} 4%, St^{a} $1\frac{1}{2}\%$; kilogram netto kosztował $2{\cdot}08$ K; litkupnicze $1\frac{7}{8}\%$, komisowe $2\frac{2}{3}\%$; inne wydatki $35{\cdot}16$ K. Po czemu trzeba sprzedawać kilogram netto tego towaru, aby zarobić 23%?

71. Asekuracya.

Są towarzystwa zarobkowe, wynadgradzające poniesione szkody każdemu, kto w tym celu zapłaci z góry umówioną kwotę, zwaną premią asekuracyjną (премия асекурацийна). Zabezpieczony otrzymuje od towarzystwa dokument, zwany policą (поліца).

Zabezpieczyć można się n. p. od ognia, t. z. zabezpieczyć sobie zwrot strat, którebyśmy ponieśli przez pożar. Można także zabezpieczyć zasiewy od powodzi, od gradobicia, wogóle od szkód elementarnych. — Kupcy zabezpieczają towary zwłaszcza, jeżeli je wysyłają za morze.

Można się także zabezpieczyć na życie, a to na *a)* dożycie, *b)* na przeżycie. Zabezpieczając się na dożycie, umawiamy się z towarzystwem, że wypłaci nam, gdy dożyjemy pewnego wieku (n. p. 60 lat), pewną kwotę (n. p. 20000 K). Przy asekuracyi na przeżycie zobowiązuje się towarzystwo wypłacić naszym spadkobiercom po naszej śmierci, kiedykolwiekby ona nastąpiła, zabezpieczoną kwotę.

W nowszych czasach zaprowadzono w państwie austryackiem zakłady ubezpieczenia od wypadków. W zakładach tych ubezpieczają się wszyscy urzędnicy i robotnicy przedsiębiorstw, w których zajęcie jest niebezpieczne, a także urzędnicy i robotnicy w przedsiębiorstwach rolnych i leśnych, jeżeli używają kotłów parowych. Wykluczeni są ci, którzy stawiają na prowincyi niepiętrowe domy i zabudowania gospodarcze.

Każdy przedsiębiorca przemysłowy obowiązany jest podać wykaz swoich urzędników i robotników. Zakład ubezpieczający wyznacza premię, a z tej płaci 10% sam ubezpieczony, a 90% przedsiębiorca. W razie wypadku i częściowej niezdolności do pracy, otrzymuje ubezpieczony stosowny procent od swojej płacy rocznej, ale nie większy niż 50%. W razie zupełnej niezdolności do zarobkowania, pobiera ubezpieczony, począwszy od piątego tygodnia po wypadku, 60% tego, co ostatnimi czasy zarabiał. — Gdyby ubezpieczony wskutek wypadku umarł, otrzymuje rodzina oprócz tego, co się choremu do dnia śmierci należało, zwrot kosztów pogrzebu i stosowną rentę.

Kasy chorych zabezpieczają robotników i urzędników przemysłowych na wypadek choroby. W tych płaci ubezpieczony $\frac{2}{3}$ a jego pracodawca $\frac{1}{3}$ premii. Jeżeli zabezpieczony zachoruje, otrzymuje bezpłatną pomoc lekarską i lekarstwa, a nadto 60% dziennego zarobku, jeżeli choroba trwa dłużej niż trzy dni, a chory jest niezdolny do zarobkowania. W razie śmierci ubezpieczonego dostają sieroty po nim na koszta pogrzebu najmniej 20krotny zarobek dzienny nieboszczyka, lecz nie więcej niż 100 K.

Premia asekuracyjna we wszystkich przypadkach podana jest w procencie, a obliczamy ją jak dochód za rok.

Zadania.

1. Zabezpieczono od ognia drewniany budynek wartości 1200 K. Ileż trzeba płacić rocznie, jeżeli premia wynosi $\frac{4}{5}$%?

2. Ktoś asekuruje od ognia dom mieszkalny na kwotę 10000 K, stajnie na 6000 K i stodołę na 30000 K, ileż zapłaci rocznie, jeżeli premia od domu wynosi $2\frac{1}{2}$%, od stajni $1\frac{3}{5}$%, od stodoły $\frac{4}{5}$%?

3. Ktoś asekurował zasiewy od gradobicia rocznie na 1500 K w trzech towarzystwach przez 10 lat. W dziesiątym roku wybił grad wszystkie zasiewy do szczętu. Czy opłaciło się asekurować, jeżeli jedno towarzystwo bierze $2\frac{1}{4}$%, drugie $2\frac{1}{3}$%, trzecie $2\frac{2}{5}$% premii?

4. Kupiec sprowadza z Berlina towary za 3560 M. Ileż zapłaci za nie koron, jeżeli komisowe wynosi $1\frac{1}{2}$%, premia asekuracyjna 0·58%, a 100 M = 120 K?

5. Kupiec otrzymał z Paryża następujący rachunek: B$^{\text{to}}$ 458 *kg*, Ta $3\frac{3}{5}$%, kilogram netto po 6·7 Fr.; prowizya $2\frac{2}{5}$%, kurtaż $1\frac{1}{4}$%, asekuracya towaru na 4000 Fr. $\frac{5}{8}$%. Ileż K ma zapłacić za ten towar, jeżeli 100 Fr. = 95·2 K?

6 Rzemieślnik, mający lat 30, chce sobie zabezpieczyć kwotę 5600 K, gdy dojdzie do lat 50. Ileż ma płacić półrocznie, jeżeli premia asekuracyjna wynosi 2·8%? — Ile wziąłby z kasy oszczędności, gdyby premię asekuracyjną wkładał do tej na 4% procentu składanego?

7. Ktoś, mając lat 34, zaasekurował się na przeżycie na kwotę 15000 K. W tym celu płaci $2\frac{1}{2}$% rocznej pensyi. Ileż wynosi ta premia? — Ile wynosiłyby jego premie, oprocentowane na 4% składany przy półrocznej kapitalizacyi, gdyby ten człowiek umarł mając lat 48?

8. Ojciec zaasekurował swoją córkę na 20000 K, które ona odbierze, doszedłszy do lat 20. Ileż ma ojciec płacić rocznie, jeżeli premia asekuracyjna wynosi $3\frac{1}{5}$%?

*9. Murarz, który zarabiał dziennie 5 K, spadł przy budowie, wskutek czego stał się zupełnie niezdolnym do zarobkowania. Jaką otrzyma on roczną rentę? [Pomnóżmy zarobek dzienny przez 300, a otrzymamy zarobek roczny].

10. Cieśli, który spadł przy budowie i wskutek tego stał się całkiem niezdolnym do zarobkowania, przyznano roczną rentę w kwocie 1150 K. — Ileż zarabiał ten cieśla dziennie?

11. Wskutek nieszczęśliwego wypadku we fabryce, stali się trzej robotnicy częściowo niezdolnymi do pracy, dlatego przyznano robotnikowi, który 4 K dziennie zarabiał, 45%, drugiemu, którego dzienny zarobek 5 K wynosił, 40%, a trzeciemu, który zarabiał 6 K dziennie, 35%. Jakąż rentę roczną będzie pobierał każdy z nich?

12. Fabrykant ma 340 robotników, z których każdy pobiera 3·5 K dziennie. Premia asekuracyjna wynosi $1\frac{3}{8}$%. Ileż płaci za nich fabrykant, a ile każdy robotnik?

13. Wdowa po robotniku, który zarabiał dziennie 3·7 K i której przyznano 60% jako roczną rentę, wychodzi powtórnie za mąż, traci więc rentę, a otrzyma jednorazową odprawę. Jak wielka będzie ta odprawa, jeżeli ona równa się potrójnej rocznej rencie.

14. Robotnik, zarabiający 7 K dziennie, zabezpieczył się na wypadek choroby. Premia asekuracyjna wynosiła $1\frac{1}{2}$%. Ileż płaci tygodniowo robotnik, ale ile jego pracodawca?

15. Robotnik, który zarabiał dziennie 4·8 K, a był ubezpieczony na wypadek słabości, chorował ciężko od 9. stycznia do 4. kwietnia. Ile otrzyma zasiłku z kasy chorych?

16. Robotnik, który zarabiał dziennie 3·2 K, zmarł po 38 dniach ciężkiej choroby. Jakiż wydatek poniosła wskutek tego kasa chorych, nie licząc kosztów leczenia i pomocy lekarskiej?

72. O monetach.

Monety (монети) są to kawałki szlachetnego kruszcu pewnej postaci, wielkości i wagi, z wybitym na nich napisem i wizerunkiem, które każdy sprzedający w zamian za towary przyjąć jest obowiązany.

Państwo oznacza z góry, ile czystego kruszcu moneta ma w sobie zawierać i ile ma ważyć, a ta zasada nazywa się stopą menniczą (монетна стопа). Monety, wybite według stopy menniczej, nazywają się monetami obiegowemi (м. обігова); monety drobne są monetami zdawkowemi (м. здавкова).

Do niedawna oznaczano wartość monet według wartości srebra. Była to waluta srebrna (в. срібна), w ostatnich czasach zaprowadziły niektóre państwa walutę złotą (в. золота). Moneta złota jest monetą właściwą, a monety srebrne są jakby monetami zdawkowemi. W niektórych jednak państwach istnieje waluta podwójna, a stosunek między wartością jednego a drugiego kruszcu jest z góry oznaczony.

W monarchii austryackiej obowiązywała do niedawna waluta austryacka (в. австрийска). Według tej była stopą menniczą stopa 45 reńskowa: z $\frac{1}{2}$ *kg* czystego srebra wybijano 45 sztuk monet, zwanych złotymi reńskimi (золотий); setna część złr.

nazywała się centem (крейцар). Ustawą z r. 1892 zaprowadzono złotą walutę koronową (золота валюта коронова). Jednostką monet jest korona (корона) (K), a jej setną częścią halerz (гелер, сотик) (h).

Korony bije się (чеканять) ze złota 900 próby. Z jednego kilograma takiego złota biją 2952 K, a więc na jeden kilogram czystego złota przypada 3280 K. Ze złota biją jednak tylko 20-koronówki i 10-koronówki. Oprócz tego będą nadal bite dukaty austryackie, zawierające 3·4424 *g* czystego złota.

Przepisana waga wynosi dla 20-koronówki 6·74 *g*, dla 10-koronówki 3·37 *g*, dla dukata 3·49 *g*. — Monety, które zachowały tę wagę, przyjmują w kasach państwowych, publicznych i w obrocie prywatnym jako pełnoważne. Jeżeli monety starły się wskutek obiegu, natenczas ściągają je kasy państwowe, aby je przetopić, a płacą za nie ich pełną wartość. Gdyby jednak waga monety z innych powodów — n. p. wskutek obcinania — zmniejszyła się, natenczas kasy państwowe płacą tylko wartość zawartego w nich złota.

Jako monety zdawkowe mamy 1) jednokoronówki i pięciokoronówki, bite ze srebra 835 próby a ważące 5 *g* (wzgl. 24 *g*); 2) sztuki z niklu po 20 h i 10 h; 3) sztuki z bronzu po 2 h i 1 h.

Ilość czystego złota lub srebra zawartego w monecie, stanowi jej wartość wewnętrzną (вартість внутрішна). Porównanie wartości wewnętrznej dwóch różnych monet zowie się pari. N. p. pari koron i franków jest 3280 K=3444$\frac{4}{9}$ Frc., albowiem tak w 3280 K jak w 3444$\frac{4}{9}$ Frc. zawiera się kilogram czystego złota.

Zapomocą pari możemy oznaczyć wartość obiegową monet jednego kraju przez takąż wartość monet innego kraju.

Najczęściej w handlu przychodzące monety ważą: 20 frankówka, ośmiozłotówka i rosyjskie półimperyały 6·44 *g*, a 20 markówka 7·96 *g*, £ (funtów szterling.) 7·988 *g* a złota lira turecka 7·216 *g*.

73. Wartość kursowa monet.

Jak wszelki towar tak też i monety są albo droższe, jeżeli jest wielkie zapotrzebowanie, albo tańsze, jeżeli ich nie potrzeba. Wartość, za jaką monetę nabyć możemy, nazywa się wartością kursową (в. курсова).

Kurs monet podają gazety. N. p. rubel 255, to znaczy, 255 K za 100 rubli. — Niekiedy podane jest tak zwane ażyo, t. j. nadwyżka między wartością imienną a kursową. N. p. Kurs koron złotych jest 120, to znaczy, że płacąc złotem damy 5 dwudziestokoronówek na zapłacenie 120 K.

Zadania.

1. Kurs rubli jest 255 K. Ileż koron zapłacimy za 348 rubli?
2. Marki mają kurs 118·10. Ileż marek dostaniemy za 480 K?
3. Za pośrednictwem komisyonera kupiono 12 dukatów austryackich po 11·48 K za sztukę. Ile zapłacono za nie, jeżeli komisowe wynosi $1\frac{1}{4}\%$?
4. Ktoś posyła do Berlina przez komisyonera dług, wynoszący 4560 M. Ileż zapłaci za to koron, jeżeli komisowe wynosi $4^0/_{00}$, a marki stoją w kursie 119·20?
5. Ile koron srebrem trzeba zapłacić za 2040 K, płatnych w złocie, jeżeli ażyo wynosi 12%?
6. Przemysłowiec ma posłać 780 rubli srebrem, a posyła papierowe. Za ileż koron ma kupić tych rubli, jeżeli kurs rubli papierowych jest 256·50, a ażyo srebra wynosi 12%?
7. Ile srebrnych koron trzeba zapłacić za 4500 Frcs (§ 71.), jeżeli ażyo złota nad srebrem wynosi 8%?
8. Przemysłowiec ma zapłacić dług 8000 złr. papierami. Ileż dziś zapłaci srebrnemi koronami, jeżeli ażyo srebra nad papierami jest 20%?

74. Papiery wartościowe.

I. Jeżeli państwo zaciąga pożyczkę, rozdziela całą kwotę na kwoty drobne, aby i mniejsi kapitaliści mogli przystąpić do pożyczki. Na każdą taką kwotę wystawia państwo papier, mocą którego zobowiązuje się wypłacić okazicielowi kwotę tamże wyrażoną. Papier taki nazywa się obligacyą (облїґація), a kwota, na którą papier opiewa, wartością nominalną (в. номінальна).

Do każdej obligacyi dołączony jest arkusz, złożony ze samych kwitków, zwanych kuponami (купони). Na tych wyrażona jest kwota i termin, w którym właściciel obligacyi może pobrać odsetki od kapitału w kasie rządowej za złożeniem kuponu. Odsetki pobiera się zwykle 1. lipca i 31. grudnia każdego roku a to od wartości nominalnej. — Na końcu arkusza kuponowego jest talon (тальон),

t. j. upoważnienie, że po obcięciu wszystkich kuponów ma posiadacz talonu dostać dalszy arkusz kuponowy.

Oprócz obligacyi wydaje państwo także losy (льоси). Są to papiery, które także opiewają na pewną kwotę, a na które można znaczną kwotę wygrać. Tak n. p. losy austryackie czerwonego krzyża opiewają na 10 złr. w. a., a można na nie wygrać 35000 złr. w. a, 20000, 1000, 500, 100, 50 albo 12—20 złr. w. a. Państwo wyciąga co roku pewną ilość wypuszczonych w obieg losów, które spłaca, a w ten sposób zmniejsza się liczba losów, przeznaczonych do ciągnienia, aż w końcu wszystkie zostaną wylosowane.

II. Za zezwoleniem państwa mogą także prywatne towarzystwa wydawać na pożyczkę papiery, które się nazywają akcyami (акциї). Od akcyi nie pobiera się zwykle stałych odsetek, lecz tak zwaną dywidendę (дивіденда). Co roku obrachowuje się czysty dochód, ten rozdziela się na tyle równych części, ile jest akcyi w obiegu, a część dochodu, przypadającego na akcyę, nazywa się dywidendą.

Jeżeli zaś akcye przynoszą stały procent, a dochód czysty jest znaczny, wypłaca się oprócz tego i dywidendę, która się wówczas nazywa superdywidendą.

Kto nabędzie na własność pewną, statutem przepisaną liczbę akcyi, nazywa się akcyonaryuszem (акционар). Akcyonaryusze zarządzają przedsiębiorstwem, dzielą się zyskiem, albo też odpowiadają majątkiem swoim w razie strat.

Oprócz akcyi wydają towarzystwa t. z. obligi pierwszeństwa (облїґи першеньства), czyli priory (пріори). Posiadaczom priorów płaci towarzystwo tylko stałe odsetki. Ci nie zarządzają przedsiębiorstwem, ale też nie odpowiadają za straty. Przy rocznych obrachunkach najpierw odlicza się kwota potrzebna na zapłacenie odsetek od priorów.

Towarzystwa kredytowe, banki hipoteczne, wogóle instytucye finansowe sprzedają, aby zyskać gotówkę, t. zw. listy zastawne (листи заставні). Listy zastawne opiewają na pewną kwotę, od której posiadacz ich pobiera za pośrednictwem kuponów stały procent. Co roku wylosowuje towarzystwo pewną ilość tych listów i te wykupuje. W ten sposób spłaca towarzystwo dług, co się nazywa umorzeniem (умореніє) czyli amortyzacyą.

Wszystkie, wyżej wymienione papiery, nazywamy publicznymi papierami wartościowymi czyli efektami (публичні папери вартостні або ефекти).

75. Obliczanie efektów.

Kwota, na którą papier opiewa, jest jego wartością nominalną czyli imienną (в. іменна). Od tej oblicza się odsetki, jeżeli je papier przynosi. Niezawiśle od wartości nominalnej można papier nabyć za inną cenę zwaną kursem (курс). Kurs może być wyższy od wartości nominalnej, wtedy mówimy, że papiery stoją nad pari, albo niższy od niej, wtedy papiery stoją niżej pari. Niekiedy jest kurs al pari, t. z. że wartość kursowa jest równa nominalnej.

Wedle nowego systemu w walucie koronowej podaje się wartość kursową za 100 K wartości nominalnej, tylko kurs losów podaje się od sztuki. N. p. Akcye banku hipotecznego mają kurs 175, znaczy, że za 100 K wartości nominalnej płacą 175 K. — Losy tureckie stoją w kursie po 126·50, znaczy, że każdy los kosztuje 126·50 K.

Wartość efektu znajdziemy, dodając do wartości kursowej zaległe odsetki — jeżeli je papier przynosi — a także inne wydatki, które przy transakcyi poniesiono. Przy tem pamiętać należy, że przy obrachowaniu odsetek miesiąc liczy się dni 30, a dnia sprzedaży nie bierze się w rachubę.

Przy sprzedaży efektów należy także obrachować »podatek od obrotu efektów«. — Podatek ten płaci tylko kupujący a to:

Za każde 10000 K nominalnej wartości losów i akcyi (z wyjątkiem losów państw.) 1 K; — za każde 10000 K nominalnej wartości innych efektów i losów państwowych 40 h.

Kwoty mniejsze niż 10000 K, czyli mniejsze niż »jednostka«, uważa się za całą jednostkę i od tej płaci się podatek. N. p. Przy kupnie akcyi za 24000 K zapłacimy 3 K podatku, ponieważ 24000 = 2 . 10000 + 4000, a od 4000 należy się także 1 K podatku. Dla papierów jednak państwowych poniżej jednostki istnieje zniżka, a to: Od losów i akcyi do 200 K płaci się . . . 20 h
od innych papierów do 1000 K „ . . . 10 h.

Zadania.

1. Kupiono za pośrednictwem senzala 8 sztuk akcyi banku hipotecznego; kurs 185, kurtaż $\frac{1}{2}$‰. Ile zapłacono za nie?

2. Kupiono 30. stycznia 12 sztuk 4% listów kredytowych ziemskich. Nominalna wartość każdego 200 K; kurs 95·25, kupon z 31. grudnia poprzedniego roku odcięty. Ile zapłacono za te efekta?

3. Dnia 24. maja sprzedano 5% obligi jednolitego długu państwowego nominalnej wartości 15000 K; po kursie 108·40, z kuponami bieżącymi od 1. stycznia. Ile zyskano z tej sprzedaży, jeżeli kurtaż wynosi $\frac{1}{2}$‰?

4. Ktoś kupił 1. stycznia 1884 r. 8 sztuk losów austryackiego czerwonego krzyża, każdy nominalnej wartości 20 K (10 złr. w. a.) po kursie 23 K. Losy te sprzedał 1. stycznia 1900 r. po kursie 38 K. — Czy nie było korzystniej włożyć kwotę, którą losy kosztowały, do kasy oszczędności na 4% procentu składanego przy półrocznej kapitalizacyi?

5. Dnia 24. listopada sprzedano 6 sztuk 4$\frac{1}{2}$% listów zastawnych banku krajowego; wartość nominalna à 200 K; kurs 99·50; kupony bieżące od 1. lipca; — i 8 sztuk 4% obligacyi propinacyjnych galicyjskich; wartość nominalna à 200 K; kurs 97·40; kupon bieżący od 1. stycznia. Kurtaż $\frac{5}{8}$‰. — Ile pobrano za te papiery?

6. Na jaki właściwie procent umieszcza się kapitał, kupując 4% listy Towarzystwa kredytowego ziemskiego po kursie 95·25?

7. Ktoś kupił w r. 1890 los węgierski Basilica za 18 K. Gdyby ten los wygrał 50 K dopiero przy ostatniem ciągnieniu t. j. w r. 1936, jaka byłaby na tem strata, jeżeli oną kwotę można było umieścić na 4% procentu składanego przy półrocznej kapitalizacyi?

8. Ktoś kupił 15. grudnia 8 sztuk 5% akcyi banku austro-węgierskiego; wartość nominalna à 1200 K; kurs 164; zaległy kupon od 1. lipca. Ileż zapłacił za nie?

9. Ktoś sprzedaje przez komisyonera dnia 24. listopada: 4 sztuki 5% akcyi banku austro-węgierskiego; wartość nominalna à 1200 K; kurs 170; kupon bieżący od 1. lipca — i 8 sztuk 4% losów z r. 1860; nominalna wartość à 1000 K; w kursie 159; kupon bieżący od 1. listopada. Kurtaż $\frac{1}{2}$‰; komisowe $\frac{1}{3}$%. Ile otrzymał za te papiery?

10. Kupiono 6 sztuk losów kredytowych; kurs à 398
12 sztuk losów Palffy; kurs à 120
15 sztuk losów Rudolfa; kurs à 49.

Ile zapłacono za nie, jeżeli kurtaż wynosił 1$\frac{1}{2}$‰?

76. O wekslach.

Weksel (вексель або тратка) jest to dokument, wystawiony we formie ustawą przepisanej, mocą którą dłużnik pod rygorem prawa zobowiązuje siebie lub osobę trzecią do wypłacenia wierzycielowi w oznaczonym czasie wymienionego tamże długu.

Dłużnik, który wystawia weksel, nazywa się trasantem, osoba, którą on zobowiązuje do zapłacenia długu, nazywa się trasatem, a wierzyciel, który weksel bierze, nazywa się remitentem. Trasant i trasat nazywają weksel trasą, a remitent rymesą. — Jeżeli trasant i trasat są tą samą osobą, weksel nazywa się własnym, w przeciwnym razie trasowanym czyli obcym (в. чужий). N. p.

Kupiec lwowski, Stanisław Goździcki, sprowadził towary od kupca krakowskiego, Jana Wistka, za które to towary jest mu winien 3500 K. Ale w Krakowie jest kupiec, Mikołaj Marcinek, który jest dłużnikiem Goździckiego. Prosta więc będzie rzecz, jeżeli Marcinek zapłaci Wistkowi zamiast odsyłać Goździckiemu, aby ten zapłacił Wistka. W tym celu wystawi więc Goździcki Wistkowi następujący weksel (str. 146.).

Tu trasantem jest Goździcki, trasatem Marcinek, a remitentem Wistek. — Weksel ten pośle Goździcki Wistkowi, a ten uda się do Marcinka z zapytaniem, czy weksel przyjmuje? Jeżeli Marcinek przyjmie, podpisze weksel z prawej strony swego adresu. Tem samem przyjął na siebie wszelkie prawne zobowiązania, czyli stał się akceptantem. — Mógłby Goździcki także sam wziąć od Marcinka akcept, t. j. podpis z dopiskiem »Przyjmuję«, a wtedy gotowy weksel odesłałby remitentowi Wistkowi.

Gdyby Goździcki sam miał Wistkowi zapłacić, natenczas trasantem i remitentem byłby Wistek, a trasatem Goździcki. (Weksel opiewałby: (str. 147.).

Ponieważ weksle trasowane posyła się, a podczas posyłki mogą albo zaginąć, albo uledz zniszczeniu, przeto na żądanie remitenta wystawia trasant trzy równobrzmiące weksle. Aby jednak, wystawiwszy trzy, nie płacił trzykrotnie tego samego długu, pisze na pierwszym Prima, na drugim Secunda, na trzecim Tertia, czem zaznacza, że wszystkie trzy są właściwie jednym tylko wekslem. — Na weksle własne nie potrzeba duplikatu, dlatego nazywają się one w obrotach handlowych Solaweksle.

we Lwowie dnia *1. lutego* 1903 Na **3500 K**

Dnia 15. maja 1903 r. zapłacisz *Pan* za ten *Prima* Weksel

na zlecenie *Pana Jana Wistka w Krakowie* sumę

trzy tysiące pięćset Koron

wartość *otrzymaną* wstawisz *Pan* na rachunek *podług* zawiadomienia.

Wny Pan Mikołaj Marcinek *Stanisław Goździcki*

w *Krakowie* Przyjmuje

Bracka 87. *Mikołaj Marcinek*

w *Krakowie* dnia *1. lutego* 1903 r. Na *3500 K*

Dnia 15. maja 1903 r. zapłacisz *Pan* za ten *Prima* Weksel

na zlecenie *moje własne* sumę

trzy tysiące pięćset Koron

wartość *otrzymaną* wstawisz *Pan* na rachunek *bez* zawiadomienia.

Wny Pan Stanisław Goździcki *Jan Wistek*

we *Lwowie* Przyjmuję

Sykstuska 18. *Stanisław Goździcki*

Jak ma być weksel wystawiony i jakiemu postępowaniu podlega, przepisuje osobna ustawa wekslowa.

Jeżeli remitent odstępuje prawa swoje komu innemu, natenczas pisze na odwrotnej stronie (in dorso): »Zamiast mnie Panu N. N...« i podpisuje. Takie oświadczenie nazywa się indosowaniem albo żyrowaniem. Odstępujący swoje prawa nazywa się indosantem albo żyrantem, a nabywający je, żyrataryuszem. Żyrataryusz może żyrować weksel dalej... dokąd ostatni żyrataryusz od trasata swojej kwoty nie otrzyma i weksla nie zwróci.

77. Dyskontowanie weksli.

Jeżeli posiadacz weksla potrzebuje gotówki, a termin zapłaty jeszcze nie zapadł, może weksel sprzedać, kupujący nie zapłaci jednak całej kwoty na wekslu wyrażonej. Tę bowiem odbierze on dopiero po pewnym czasie, a przez ten czas miałby od swojej kwoty pewien dochód. Dochód ten potrąci sobie kupujący. Kwota potrącona nazywa się dyskontem albo eskontem. Dyskont ten oblicza się tak samo jak kupiecki (§ 69. IV.) z tą różnicą, że rok liczy się 360 dni, a miesiąc tyle, ile ich rzeczywiście ma. Nie wlicza się jednak dnia sprzedaży i terminu wypłaty. Kwota, którą bank po odtrąceniu eskontu wypłaca, nazywa się wartością dyskontowaną weksla.

Zadania.

1. Weksel, wyżej wystawiony (§ 75.), sprzedał Jan Wistek 12. marca 1903 r. płacąc 6% dyskontu. — Ileż otrzymał gotówką?

2. Jaką wartość dyskontowaną ma weksel dnia 1. lutego 1900 r., jeżeli opiewa na 7846 K, a jest płatny 18. lipca 1900 r. przy $6\frac{1}{2}$% dyskontu?

3. Na dniu 18. stycznia 1900 r. eskontowano po $5\frac{1}{2}$% następujące weksle:

a) na 1584 K, płatny 24. czerwca 1900 r.
b) „ 3200 K, „ 16. kwietnia „
c) „ 4528 K, „ 17. września „
d) „ 970 K, „ 20. września „

Ile wynosiła wartość dyskontowana tych wszystkich weksli?

4. Kupiec sprzedał weksel, wystawiony 15. stycznia 1900 r., a płatny 15. lipca tegoż roku, na 7592 K, w którąto kwotę wli-

czono już 8% od dłużnej sumy. Weksel ten żyruje on 8. marca 1900 r. z upustem 10%. Jakiż właściwie procent przypada mu od jego wierzytelności za ubiegły czas?

5. Remitent sprzedał weksel, opiewający na 8760 K, a płatny 1. sierpnia 1900 r., na dniu 12. lutego tegoż roku. Ileż otrzymał zań, jeżeli dyskont $5\frac{3}{4}$%, kurtaż $1\frac{3}{5}$% wynosił?

6. Za weksel, eskontowany o 156 dni wcześniej, otrzymano przy 6% dyskontu 5259·60 K. Na jakąż kwotę opiewał weksel?

7. Za weksel, opiewający na 8426 K, a płatny za 90 dni, otrzymano przy eskoncie 8303·82 K. Jak wielki był dyskont?

8. Bankier, policzywszy sobie $5\frac{3}{4}$% eskontu, zapłacił za weksel, opiewający na 9640 K sumę 9369·01 K. — Za ileż dni eskontował?

78. O dewizach.

Dewizy są to weksle opiewające na walutę zagraniczną. Jeżeli kupiec we Lwowie ma posłać pieniądze za towary n. p. do Londynu, a nie chce lub nie może dostać monet angielskich, natenczas składa pieniądze w koronach w banku, który utrzymuje stosunki z bankiem w Londynie. Bank wystawia mu weksel trasowany na Londyn. Dewizę tę posyła kupiec swemu wierzycielowi do Londynu, który ją jako pieniądze przyjmuje, albowiem może nią, jak pieniądzmi pokrywać zobowiązania swoje.

Dewizy mają swój kurs. N. p. kurs Wiednia na Paryż jest 96·80, znaczy, że we Wiedniu trzeba za 100 fr zapłacić 96·80 K. Tylko gdy będzie podany kurs Wiednia na Londyn n. p. 250, t. z., że za 10 ₤ (funtów szterling.) płaci się we Wiedniu 250 K.

Obliczając dewizy, mamy zamienić według kursu pieniądze zagraniczne na krajowe, co się nazywa redukcyą weksli. Dewizy najpierw się redukuje, a potem oblicza poniesione wydatki.

Zadania.

1. Kupiec we Wiedniu kupił według wyżej podanego kursu dewizę na Londyn, opiewającą na 176 ₤. Ile zapłacił za nią, jeżeli kurtaż wynosi $\frac{7}{10}$‰?

2. Kupiec we Lwowie sprzedał dewizę z Paryża opiewającą na 3760 Frcs według kursu wyżej podanego, przyczem zapłacił senzalowi $\frac{5}{10}$%, a komisowego $\frac{5}{10}$%. — Ileż wziął za tę dewizę?

3. Kupiec we Wiedniu sprzedał dewizę opiewającą na 480 ₤ a płatną dopiero za 72 dni po kursie Wiednia na Londyn 250·8, przyczem senzal wziął $\frac{4}{5}$‰, a dyskont wynosił 6%. Ileż wziął za nią?

4. Weksel, opiewający na 4684 rubli, eskontuje się o 148 dni wcześniej, potrącając 6% dyskontu. Ile dostanie się za niego, jeżeli kurs Petersburga na Wiedeń jest 255·5, a kurtaż $\frac{3}{5}$‰ wynosi?

5. Dnia 20. stycznia notowano we Wiedniu kurs weksli na Hamburg 119·58 K. Ile trzeba było w tym dniu zapłacić za dewizę, opiewającą na 4768 M, płatną 24. marca przy $4\frac{5}{8}$% dyskontu?

6. Kupiec sprzedaje we Wiedniu dewizę z Hamburga, opiewającą na 6328 M po kursie 121·40. Komisowe $\frac{3}{8}$%, kurtaż $\frac{4}{5}$‰. Ile wziął za nią?

7. Kupiec lwowski, który płaci weksle według kursu wiedeńskiego, trasował weksel, opiewający na 5684 Frcs. na Petersburg zamiast na Paryż. Czy stracił na tem czy zyskał, jeżeli kurs Wiednia na Paryż 97·56, Wiednia na Petersburg 253·40, a Petersburga na Paryż 39·40?

79. O fakturze.

Kupiec nazywa każdego, z kim zostaje w stosunkach handlowych, swoim korespondentem. Wysyłając towary, wysyła kupiec swojemu korespondentowi rachunek, który się nazywa fakturą. Faktura wygląda, jak następuje:

Van Hasel et Comp. *Hamburg 9/12 1899.*

FACTURA

dla Pana Wiktora Szczypkowskiego we Lwowie.

Posyłam na Pańskie zlecenie i ryzyko jako posyłkę frachtową koleją.

Termin 4 miesiące a dato albo gotówką z 3% skonto.

		M	
H. et Comp. 	Nr. 256 3 wory migdałów		
	Btto . . . . 388·2 *kg*		
	Ta . . . . 5·7 *kg*		
	Ntto . . . . 382·5 *kg* à M 184 za 100 *kg*	703	80
	Nr. 1564. 1 pakę kawy		
	Btto . . . . 459·80 *kg*		
	Ta . . . . 32·18 *kg* à 7%		
	Ntto . . . . 427·62 *kg* à M 380 za 100 *kg*	1624	96
	Wydatki:		
	Ważenie . . . . M 8·46		
	Składowe . . . . M 4·84		
	Kurtaż ½% . . . . M 11·64		
	Drobne wydatki . . . . . M 2·56	27	50
		2356	26
	Komisowe 1½% . . .	35	34
		2391	60
	V. Hasel		

Kupiec (Szczypkowski), który otrzyma fakturę, zamieni pieniądze na walutę krajową, doliczy wydatki na miejscu poniesione, a w ten sposób dowie się, ile go wszystek towar kosztował. Jeżeli faktura obejmuje rozmaite towary, trzeba spólne wydatki rozdzielić na każdy towar z osobna, a dowiedziawszy się, ile on kosztuje, można zrobić kalkulacyę, czyli wyrachować, po czemu sprzedawać ten towar, aby mieć pewien (15%) procent zysku. N. p.

Dajmy na to, że Szczypkowski zapłacił frachtu 87·40 K, a sprowadzenie do sklepu i drobne wydatki wynosiły 14·56 K, natenczas — ponieważ prawie tyle ważą migdały, ile kawa, będzie rachunek migdałów:

Cena na miejscu	M	703·80
Ważenie	„	4·23
Składowe	„	2·42
Drobne wydatki	„	1·56
Komisowe od M 712·01		10·68
Razem	M	722·69

po kursie 121·40 czyni	K	877·34
fracht	„	43·70
drobne wydatki	„	7·28
Razem .	K	928·32

Zapomocą reguły łańcuchowej otrzymamy:

x K	1 *kg*	
382·5	928·32	z tego $x = 2·79$ K
100	115	

Zadania.

1. Jak wygląda faktura Ami'ego w Tryeście do kupca Wawrzyńca Skierkowskiego we Lwowie, który odebrał: 1) kawę B^{tto} 370 *kg*, T^{a} 2%, St^{a} $\frac{1}{2}$%, à 2·6 K za kilogram netto; 2) rodzynków B^{tto} 148 *kg*, T^{a} 7%, à 98 h za 1 *kg* netto; 3) oliwy B^{tto} 1280 *kg*, T^{a} 18% à 156 K za 100 *kg* netto. Kurtaż $\frac{3}{4}$%; prowizya 1$\frac{1}{2}$%; inne wydatki 84·70 K, asekuracya od 4000 K $\frac{3}{5}$‰.

2. Michał Szczupak we Lwowie posyła Antoniemu Klinglowi w Lipsku wełnę B^{tto} 3580 *kg*, T^{a} 2$\frac{1}{2}$%, po 480 K za 100 *kg* netto. Cło 247·2 K, kurtaż $\frac{3}{4}$%, asekuracya 3‰ od 10000 K. Drobne wydatki 15·76 K. Wystawić fakturę.

3. Komisyoner Antoni Kiepski we Lwowie posyła kupcowi Wilhelmowi Mayerowi we Wiedniu czarnej gorczycy B^{tto} 156 *kg*;

T[a] 2% po 30 K za 100 *kg* netto, i białej gorczycy B[tto] 187 *kg*, T[a] 1·5%; po 28 K za 100 *kg* netto. Kurtaż $\frac{3}{8}$%, komisowe 2%. Fracht 68·42 K; dostawa do składu 8·42 K; żądany zysk 20%. — Napisać fakturę i zrobić kalkulacyę.

80. Inwentarz.

Ktokolwiek zakłada handel czy przedsiębiorstwo musi spisać w księdze na to przeznaczonej inwentarz (інвентар), czyli spis majątku. Inwentarz ma zawierać: 1) stan czynny (стан діяльний) majątku, czyli aktywa, 2) stan bierny (ст. страдальний), czyli pasywa; 3) stan czysty (ст. чистий).

Stan czynny tworzy to wszystko, co jest w posiadaniu kupca, a ma wartość pieniężną, bez względu na to, czy to jest jego własność, czy nie. N. p. Kupiec ma wieś wartości 200000 K, z której ma spłacić 70000 K siostrze, natenczas całe 200000 K stanowią majątek czynny.

Stan bierny jest to wszystko, co kupiec musi oddać, a więc co nie jest jego wyłączną własnością. — Odciągnąwszy stan bierny od czynnego otrzymamy stan czysty.

Inwentarz należy zestawić według następującego wzoru:

Inwentarz

spisany dnia 31. grudnia 1899 r.

		K	h	K	h
	I. Stan czynny.				
1.	Gotówka w kasie			1670	46
2.	Monety:				
	40 Rsr; w kursie 100 Rbs po 255·6 K . . .	102	24		
	50 M w złocie; 100 M po 118·40 K	59	20		
	70 Frcs w złocie; 100 Frcs po 94·6 K . . .	66	20	227	64
3.	Papiery wartościowe;				
	6 sztuk listów Towarz. kredytowego ziemskiego nominalnej wartości à 200K . . . K 1200				
	kupony od 1. lipca . . . . K 24	1224			
	2 akcye kolei Karola Ludwika nominalnej wartości à 840 K w kursie po 99·80 za 100 . .	838	32		
	1 Los turecki	126	50	2188	82
	Do przeniesienia			4086	92

		K	h	K	h
	Z przeniesienia			4086	92
4.	Rymesy:				
	Michał Szczyglicki w Rohatynie, płat. 15/5 1900 K 500				
	Dyskont 6% za 134 dni . . . . K 11·17	488	83		
	Bartłomiej Węgorz w N. Sączu, płat. 25/3 1900 K 654				
	Dyskont 6% za 83 dni . . . . K 9·05	644	95	1133	78
5.	Towary:				
	Zapas materyałów według osobnego spisu . .	746	58		
	Gotowe wyroby w sklepie według osobnego spisu	938	26	1684	84
6.	Nieruchomości:				
	Folwark Zalesie według oszacowania	76400	—		
	Realność przy ulicy Kleparowskiej Nr. 8. według oszacowania	54700	—	131100	—
7.	Ruchomości:				
	Urządzenie sklepowe według oszacowania . .	456	70		
	Urządzenie magazynów „ „ . .	173	40	630	10
8.	Należytości prawne:				
	Michał Chrapiński we Lwowie	118	30		
	Wacław Ludwikowicz w Rawie	306	70		
	Bojomir Zyszkowski w Tarnowie	217	48	642	48
	Suma stanu czynnego			139278	12

II. Stan bierny.

		K	h	K	h
1.	Długi hipoteczne:				
	Wierzytelność banku krajowego na Zalesiu . .	13800	—		
	Wierzytelność Eweliny Boruńskiej we Lwowie na realności przy ul. Kleparowskiej Nr. 8. .	26700	—	40500	—
2.	Akcepta i traty własne w obiegu:				
	Na zlecenie M. Vibirala w Pradze płatn. 24/3 1900 r. . . . . K 700				
	Dyskont 6% za 82 dni . . . . . . K 9·57	690	43		
	Na zlecenie Eichdorffa w Gracu, płatne 27/12 1900 r. . . . . K 654				
	Dyskont 6% za 50 dni . . . . . . K 5·45	648	55	1338	98
3.	Inne długi:				
	Janowi Zimkorskiemu we Lwowie	154	68		
	Stanisławowi Kiełkowskiemu we Lwowie . .	208	72		
	Zygmuntowi Imrykowskiemu w Krakowie . .	106	—	469	40
	Suma stanu biernego			42308	38

III. Zestawienie.

		K	h
	Stan czynny	139278	12
	Stan bierny	42308	38
	Majątek czysty . .	96969	74

Spisawszy inwentarz, robimy zestawienie zwane **bilansem** według następującego wzoru:

Bilans poprzedniego inwentarza.

Stan czynny		K	h	Stan bierny		K	h
1.	Gotówka	1670	46	1.	Długi hipoteczne . .	40500	—
2.	Monety	227	64	2.	Akcepta i traty . . .	1338	98
3.	Papiery wartościowe .	2188	82	3.	Inne długi	469	40
4.	Rymesy	1133	78	4.	Majątek czysty . . .	96969	74
5.	Towary	1684	84				
6.	Nieruchomości . . .	131100	—				
7.	Ruchomości	630	10				
8.	Należytości prawne .	642	48				
		139278	12			139278	12

Powyższy inwentarz i bilans uznaję we wszystkich częściach jako prawdziwy.

We Lwowie, dnia 31. grudnia 1900 r.

Edmund Kołobrzeg.

Jak z powyższego wzoru wynika, jest bilans krótkim odpisem inwentarza. Majątek czysty dopisuje się po tej stronie, po której jest mniejsza suma, i zamyka się.

Zamyka się bilans, a księgę w ogólności, że się obydwie strony, stan czynny i bierny, w równej wysokości podkreśla i jedne i drugie pozycye dodaje, przyczem muszą wypaść równe sumy. Te podkreśla się znowu. Aby zaś na niezapisanem miejscu nie można nic wpisać, przekreśla się je ukośną kreską.

Gdy po pewnym czasie, n. p. po roku, spiszemy znowu inwentarz i zestawimy bilans, okaże się z porównania tego z poprzednim, czy majątek czysty wzrósł, czy zmalał. W pierwszym przypadku mieliśmy zyski, w drugim straty. — Jeżeli wskutek poniesionych strat stan bierny stanie się większy niż czynny, natenczas kupiec staje się niewypłacalnym; interes jego upada, czyli **bankrutuje**. Urzędowe ogłoszenie bankructwa zowie się **krydą**.

Zadania.

1. Ułóżcie inwentarz i bilans kupca Ignacego Klipka we Lwowie: Zapasy sklepowe K 15748·56. — Zapasy magazynowe K 27348. — Długi drobne: Janowi Pszczółkowskiemu we Lwowie K 1580·76; Szymonowi Twardemu w Czerniowcach K 348·56; Sewerynowi Czerstwemu w Przemyślu K 728·46. — Wierzytelności: Maciej Pokrzywka w Tarnopolu K 2050·49; Tadeusz Kłapakowski w Tarnowie K 1050; Marceli Ostrożny w Babicach K 276·15; Jan Smaczyński w Stanisławowie K 308·80. — Urządzenie sklepowe K 540. — Długi hipoteczne: W banku zaliczkowym K 7845·84; w banku hipotecznym K 2600. — Posiada willę murowaną w Brzuchowicach wartości K 18000. — Rymesy: Jakób Strohmann w Gracu K 5720 płat. 15/11 1900; Damian Kolibski we Lwowie K 3846, płatnych 18/3 1900; Wilibald Springur we Wiedniu K 5648·72 płat. 15/9 1900 r. — Traty: Jan Immergrün w Bernie K 1768·59 płat. 27/10 1900. — Efekta: 8 sztuk losów austr. czerwonego krzyża à K 17·56; 3 akcye banku hipotecznego à nominalnej wartości K 400, w kursie 180; 2 listy zastawne 5% banku hipotecznego à nominalnej wartości K 500, w kursie 109·70, kupon zaległy od 1/1 1900. — Monety: 12 dukatów austryackich à K 11·48. — Gotówka K 1560·78.
Na dniu 8. lutego 1900 r. — Dyskont 6%.

2. Ułóżcie inwentarz i bilans tego samego kupca na dniu 8/7 1900 r. Zapasy sklepowe K 2796·50; zapasy magazynowe K 2040. — Długi jak wyżej. — Długi hipoteczne jak wyżej. — Willa jak wyżej. — Rymesy Shrohmanna i Springhausa jak wyżej; Adolfa Wilka w Rawie K 1570, płat. 20/12 1900 r. — Traty jak wyżej. — Efekta i monety jak wyżej. — Gotówka K 3740·56. Dyskont 6%.
Jak stoi jego interes?

81. Dziennik.

Dziennikiem (дневник) czyli memoryałem nazywamy księgę, w której zapisuje się wszystkie sprawy handlowe tym porządkiem, jakim się one odbywają, i to w tej chwili, w której się odbywają. Ponieważ we większych handlach i przedsiębiorstwach przy pośpiechu nie możnaby tej książki czysto utrzymywać, więc zaprowadza się książkę podręczną, zwaną brulionem albo prima nota. W tej notuje się wszelkie sprawy handlowe, a stąd dopiero przenosi się je do właściwego dziennika.

Każda stronica dziennika jest oznaczona osobną liczbą bieżącą, co nazywamy paginowaniem. Poniżej jest podany wzór dziennika. Pierwsza kolumna jest odsyłaczem. Litery tam znajdujące się (K=księga kasy i G=księga główna...) są początkowemi literami ksiąg, do których te pozycye z dziennika przeniesiono. Przeznaczenie innych kolumn jest samo przez się jasne.

DZIENNIK.

	1900		K	h	K	h
K.	1/1	W gotówce według inwentarza			1670	46
		W monetach „ „			227	64
		W efektach „ „			2188	82
		W rymesach „ „			1133	78
		Wierzytelności „ „			642	48
		Długi hipoteczne „ „			40500	–
		Akcepta i traty „ „			1338	98
		Drobne długi „ „			469	40
K.		Na utrzymanie domu			370	—
K.		Czynsz za sklep i magazyn do 1/7 1900 r. .			1250	—
		Winien				
G.	2/1	Sprzedano Kiczkowskiemu w Mostach:				
		200 głów cukru Ntto 1924 *kg* à 76 h .	1462	24		
		Ryżu włoskiego Ntto 840 *kg* à 62 h . .	520	80	1983	04
K.	3/1	Kupiono u Cybulskiego za gotówkę 5 kłódek à K 2·68			13	40
		Ma				
G.	4/1	Sprowadzono od Seidlera w Tryeście z terminem 3 miesiące a dato:				
		1 beczułkę rozynek Ntto 350 *kg* à K 1·06 .	371	—		
		Kawy Ceylon Ntto 200 *kg* a K 3·85 . .	770	—	1141	—
		Winien				
	5/1	Paweł Liściński we Lwowie za akcept na rzecz Ludwika Szczyglińskiego we Lwowie z terminem 28/5 1900			746	58
		Ma				
	7/1	Wiktor Ludwiński za rymesę na A. Mostowicza we Lwowie, płat. 10/3 1900 . . .			1628	—
		Ma				
G.	8/1	Sprowadzono od Micheliniego w Tryeście z terminem 4 miesiące a dato:				
		Ryżu włosk. Ntto 800 *kg* à K 58 za 100 *kg*	464	—		
		Rozynek Ntto 450 *kg* à K 110 za 100 *kg* .	495	—	935	—
		Winien				
K. G.	10/1	Odesłano Seidlerowi w Tryeście na rachunek			835	—
		i t. d.				

Gdy się dziennik pierwszy raz zakłada, lub gdy się po pewnym czasie nowy dziennik zaprowadza, wpisujemy do niego z inwentarza te wszystkie pozycye, które stąd do innych ksiąg mają być wciągnięte, a więc gotówkę, efekta, weksle i t. d.

Co do długów pamiętać należy, że każdego — z wyjątkiem tych, którzy kupują za gotówkę — kto nam daje pieniądze, towary lub weksle, bez względu na to, czy nam pożycza, czy nam oddaje, uważamy za naszego wierzyciela, a zapisując kwotę, którą otrzymaliśmy, znaczymy ją słówkiem »Ma« (»Mae«) (to znaczy: »Ma u nas«). Tak n. p. zapisaliśmy pod 4/1, że Seidler »Ma«, albowiem przysłał nam towary. Gdy Kliczkowski (2/1) odeszle kiedyś 1462 K 24 h, zapiszemy także »Ma«, bo nam przyszle pieniądze.

Przeciwnie znaczymy słówkiem »Winien« (»Винен«, to znaczy: »Winien nam«) to wszystko, co my naszym korespondentom posyłamy — wyjąwszy transakcyę za gotówkę. — I tak n. p. zapisaliśmy w dzienniku (10/1), że Seidler »Winien«, albowiem posłaliśmy mu 835 K, chociaż jemu u nas więcej się należy.

Dziennika nie zamykamy.

82. Księga kasy.

Księga kasy (Книга касова) służy do zapisywania wszelkich przychodów i rozchodów w gotówce. W księdze tej otrzymują dwie obokległe stronice tę samą liczbę bieżącą i stanowią t. z. folium. Strona lewa służy do zapisywania przychodu, dlatego ma napis »Przychód« (Прихід), lewa zaś nosi napis »Rozchód« (Розхід), albowiem służy do zapisywania rozchodu. — Nad nagłówkiem kładzie się napis miesiąca i roku, dla którego folium jest przeznaczone.

Gdyby się coś fałszywie zapisało, n. p. gdyby się wpisało 700 K po stronie rozchodu, zamiast zapisać je jako przychód, natenczas zapiszemy w przychodzie »Storno za . . . . . 700 K, wskutek czego zniosą się te dwie pozycye, a wtedy dopiero zapiszemy powyższą kwotę tam, gdzie należy. — Tak samo postąpimy, gdybyśmy n. p. zamiast 19 K 40 h przychodu, zapisali 20 K przychodu. Wówczas w rozchodzie zapiszemy: »Storno za 20 K«, przezco się powyższy zapisek unieważnia, a teraz zapiszemy, jak należy 19 K 40 h.

Z końcem każdego miesiąca zamyka się księgę kasy. W tym celu dodajemy przychód i rozchód, i ten od przychodu odejmujemy.

Księga kasy.

Przychód — Styczeń 1900 r.

		K	h
1.	Za gotówkę według inwentarza	1670	46
2.	Ze sprzedaży sklepowej	548	59
4.	Chrapiński we Lwowie na rachunek długu .	60	—
	Ze sprzedaży sklepowej	315	76
5.	Emsinger w Rawie za towary gotówką . .	208	26
	Ze sprzedaży sklepowej	156	14
8.	Ludwikowicz w Rawie na rachunek długu .	306	70
	Węgorz w N. Sączu za rymesę	644	90
9.	Ze sprzedaży sklepowej	548	15
10.	Kiściński za towary gotówką	75	46
11.	Ze sprzedaży sklepowej	215	16
12.	Ze sprzedaży sklepowej	104	17
13	Ze sprzedaży sklepowej	218	16
20.	Bojomir Życzkowski w Tarnowie na rachunek	100	—
25.	Ze sprzedaży sklepowej	156	24
28.	Ze sprzedaży sklepowej	312	28
29.	Ze sprzedaży sklepowej	121	78
31.	Ze sprzedaży sklepowej	214	96
		5976	27
	Stan kasy	1579	03

Styczeń 1900 r. — **Rozchód**

		K	h
1.	Na utrzymanie domu	370	—
	Czynsz za sklep i magazyn do 1/7 1900 r. .	1250	—
3.	Cybulskiemu za kłódki	13	40
10	Odesłano Seidlerowi na rachunek	835	—
15.	Na utrzymanie domu	174	—
	Za fracht od Micheliniego z Tryestu . . .	47	26
20.	Subjektowi Malskiemu zaliczka na płacę .	126	50
21.	Kupiono 2 akcye kolei Karola Ludwika po kursie 99·80	838	32
29	Spłacono do banku hipotecznego na rachunek	178	—
31	Płaca pomocników i sług za styczeń . . .	564	76
	Saldo na nowy rachunek	1579	03
		5976	27

Nadwyżka przychodu czyli gotówka nazywa się saldo (сальдо). Saldo wpisujemy po stronie rozchodu (str. 158.) i zamykamy księgę. — Otwierając księgę kasy na następny miesiąc, wpisujemy jako pierwszą pozycyę przychodu: »Saldo z poprzedzającego miesiąca«.

Dla zyskania miejsca notuje się drobne wydatki w osobnej książeczce, a z końcem miesiąca zapisuje się dopiero ich sumę. Gdyby mimoto nie wystarczyło stronicy, natenczas sumuje się przychód i rozchód, wpisuje sumy w równej wysokości a przed niemi pisze się »Do przeniesienia« (до перенесеня). Na następnej stronicy wpisuje się je jako pierwsze pozycye z dopiskiem »Z przeniesienia« (з перенесеня).

83. Księga główna.

Księga główna czyli księga kont, (книга головна або контова) wykazuje, co nam nasz korespondent jest winien, a co mu się u nas należy. Księga ta składa się także z folium, którego strona lewa nosi napis »Winien«, »Debet«, a strona prawa napis »Ma«, »Habet« albo »Credit« (§ 80.).

Na końcu księgi jest skorowidz, t. j. spis alfabetyczny naszych korespondentów. Otóż gdy otwieramy księgę korespondentowi nowemu, wpisujemy jego nazwisko do skorowidza, a obok kładziemy liczbę tego folium, na którem będziemy zapisywali nasze z nim stosunki handlowe. Na tej zaś stronicy (patrz wzór str. 160.) piszemy przez całe folium imię, nazwisko i adres korespondenta.

W pierwszej rubryce księgi głównej zapisujemy datę, w drugiej notujemy stronicę dziennika (M), na której ta pozycya jest zapisana. Inne rubryki nie potrzebują wyjaśnienia.

Z końcem pewnego okresu, albo na żądanie korespondenta zamykamy Księgę główną: dodajemy pozycye »winiem« i pozycye »ma«, odejmujemy sumę mniejszą od większej, a tę różnicę zapisujemy z dodatkiem »Saldo na nowy rachunek« po tej stronie, po której była mniejsza suma. Podkreślamy teraz i zamykamy jak księgę kasy. Sumy teraz wpisane będą po obydwóch stronach równe.

Z tego, że »saldo« wpisano po stronie »winien«, wynika, iż korespondent mniej nam winien, niż ma u nas. Dlatego otwierając nowy rachunek, zapiszemy po stronie »Ma« jako pierwszą pozycyę

Księga główna.

1. Winien — Eliasz Seidler w Tryeście — Ma 1.

			K	h
1900				
10/1	M. 1.	Za gotówkę	835	—
12/1	M. 2.	Za akcept na zlecenie Ludwikowskiego	348	56
15/1	M. 2.	Za bryndzę według faktury z 14/1 1900 r.	156	28
16/1	M. 2.	Za powidła według faktury z 16/1 1900 r.	84	58
20/1	M. 3.	Za gotówkę	812	—
15/2	M. 5.	Za akcept na zlecenie Rodockiego .	158	—
5/3	M. 7.	Za powidła według faktury z 5/3 1900 r.	100	12
8/3	M. 7.	Za gotówkę	200	—
29/3	M. 9.	Za gotówkę	1120	—
		Saldo na nowy rachunek	599	40
			4393	94

			K	h
1000				
4/2	M. 1.	Za towary według faktury z dnia 8/12 1899 r.	1141	—
12/1	M. 2.	Za rymesę na Abramkiewicza . . .	678	—
17/1	M. 2	Za towary według faktury z dn. 5/1 1900 r.	865	47
20/2	M. 3.	Za towary według faktury z dn. 26/1 1900 r.	256	72
18/2	M. 5.	Za towary według faktury z dn. 1/2 1900 r.	756	94
25/3	M. 8.	Za towary według faktury z dn. 5/3 1900 r.	695	81
			4393	94

»Saldo z poprzedzającego rachunku«. — Gdyby przy zamknięciu rachunku trzeba saldo zapisać po stronie »Ma«, wskazywałoby to, że korespondent więcej nam winien, niż ma u nas, więc w nowym rachunku zapisalibyśmy jako pierwszą pozycyę po stronie »Winien« »Saldo z poprzedzającego rachunku«.

Nowy rachunek otwiera się w ten sposób, że na najbliższej niezajętej stronicy zapisuje się nazwisko korespondenta, a równocześnie notuje się w skorowidzu liczbę tejże stronicy. Na tej samej stronicy można umieścić konta kilku korespondentów, jeżeli nie mamy z nimi zbyt rozległych interesów. Gdyby zaś brakło miejsca w rachunku przed zamknięciem księgi głównej, natenczas podkreślamy obydwie stronice folium w równej wysokości, dodajemy pozycye »Winien« i pozycye »Ma« i wpisujemy te sumy z dopiskiem: »Do przeniesienia na folium str. . . .« A gdy otworzymy nowe konto, wpisujemy tamże obydwie te smuy z dopiskiem: »Z przeniesienia z folium str. . . .«.

Prostowanie zaszłych omyłek uskutecznia się jak w księdze kasy.

Zadania.

Napisać memoryał, ułożyć księgę kasy i księgę główną i zamknąć takowe. Do tego mają posłużyć następujące daty:

Roman Mierzyński, kupiec we Lwowie, spisuje 1. lutego 1900 r. inwentarz i przekonuje się, że gotówka wynosi K 5768·48; są 4 sztuki 4% listów Towarzystwa kredytowego ziemskiego w nominalnej wartości à K 200, kupon zaległy od 1/1 1900 r. — Ma do żądania od Antoniego Wilka w Rohatynie K 358·76; od Zygmunta Bełtowskiego w Sanoku K 1052·16; od Kazimierza Ryskiego w Krośnie K 2168. — Natomiast jest winien Mikołajowi Rzemskiemu w Żółkwi K 1748·58; Walentemu Moskowskiemu we Lwowie K 248.

1/2. Płaci czynsz miesięczny K 256. Daje na utrzymanie domu K 154. Sprowadza od Giacomo Migini w Tryeście towary wartości K 4728·84 i płaci za fracht K 95·16; za dostawę do magazynu K 11·25. — Ze sprzedaży sklepowej odbiera K 115·84. Pomocnikom sklepowym i służbie płaci miesięczną gażę w kwocie K 548.

3/2. Ryski w Krośnie przysyła na rachunek K 100 i bierze N^{tto} 25 *kg* kawy po K 3·96; 50 *kg* cukru à 62 h; 6 *kg* herbaty à K 15·84. Wilk w Rohatynie przysyła gotówką K 240. — Ze sprzedaży sklepowej wpłynęło K 286·54.

4/2. Posyła fabryce Potockiego na rachunek K 654. — Otrzymuje od Moskowskiego we Lwowie 3 beczki dębowe à K 4·80.— Ze sprzedaży sklepowej wpłynęło K 180·46.

5/2. Ze sprzedaży sklepowej wpłynęło K 196·80.

6/2. Sprzedaje Rzemskiemu w Żółkwi z terminem 3 miesiące a dato i 4% skonto cukru N^{tto} 165 *kg* à 54 h, 20 *kg* migdałów à K 2·40, 15 *kg* rozynek à K 2·50. — Ze sprzedaży sklepowej odbiera K 105·96.

7/2. Kupuje u Schellenberga dewizę na Tryest na K 3500, płatną 20/4 1900 z potrąceniem 6% dyskontu i posyła ją Maginiemu. — Bełtowski w Sanoku przysyła na rachunek K 654. — Od Rzemskiego w Żółkwi otrzymuje 94 *kg* wosku à K 2·50 i beczkę miodu B^{tto} 4 *q*, T^{a} 18 *kg*, po K 40 za 100 *kg*. Przy tem płaci fracht K 17·84 i koszta dostawy do sklepu K 5·40. — Ze sprzedaży sklepowej otrzymuje K 206·57.

8/2. Odbiera ze sprzedaży sklepowej K 176. — Posyła Moskowskiemu we Lwowie K 156.

9/2. Sprzedaje 2 listy Tow. kredyt. ziemskiego nominalnej wartości à 200 K, w kursie po K 97·56; kupon zaległy od 1/1 1900. — Otrzymuje ze sprzedaży dziennej K 108·76.

11/2. Wilk w Rohatynie przysyła gotówką K 100 i bierze N^{tto} 20 *kg* kawy à K 3·80; 50 *kg* cukru à 60 h; 8 flaszek rumu à K 2 i 10 *kg* rozynek à K 3. — Ze sprzedaży dziennej wpłynęło K 170·30.

12/2. Ze sprzedaży dziennej K 98·90. — Sprowadza z fabryki Potockiego 5 beczek cukru à B^{tto} 560 *kg*, T^{a} 3% po 48 h za kilogram netto. Płaci fracht i dostawę do magazynu K 27·56. — Odbiera ze sprzedaży sklepowej K 94·58.

13/2. Sprowadza od Miginiego w Tryeście towary wartości K 3605·84 i posyła mu rymesę na K 4000, płatną 13/5 1900 r. z potrąceniem 6% dyskontu. — Ze sprzedaży sklepowej otrzymał K 105·15.

14/2. Ze sprzedaży sklepowej K 164.

15/2. Daje na utrzymanie domu K 154. — Ze sprzedaży sklepowej wpłynęło K 89·76.

16/2. Posyła Rzemskiemu w Żółkwi cukru N^{tto} 150 *kg* à 58 h i 15 *kg* migdałów à K 2·38 i 10 *kg* rozynek à K 2·50. — Otrzymuje od Rzemskiego w Żółkwi 58 *kg* wosku à K 2·48 i płaci za fracht i dostawę do magazynu K 7·15. — Ze sprzedaży dziennej wpłynęło K 78·18.

17/2. Wilk w Rohatynie przysyła gotówką K 340. — Ze sprzedaży dziennej wpłynęło K 115.

18/2. Sprowadza od Miginiego w Tryeście towary w łącznej wartości K 1560. — Ze sprzedaży sklepowej wpłynęło K 86·16.

19/2. Ryski w Krośnie bierze na rachunek 40 *kg* kawy à K 3·90, 50 *kg* cukru à 62 h; 8 *kg* herbaty à K 13·90. — Ze sprzedaży sklepowej wpłynęło K 120·54.

20/2. Ryski w Krośnie przysyła gotówką K 256. — Ze sprzedaży sklepowej wpłynęło K 86·76.

21/2. Ze sprzedaży sklepowej wpłynęło K 104·80.

22/2 Ze sprzedaży dziennej otrzymał K 96.

23/2. Rzemskiemu w Żółkwi posyła gotówką K 78. — Ze sprzedaży dziennej wpłynęło K 84·86.

24/2. Ryski w Krośnie bierze na kredyt 20 *kg* kawy à K 3·84, 10 *kg* herbaty à K 12. — Ze sprzedaży sklepowej wpłynęło K 112.

25/2. Ze sprzedaży sklepowej otrzymał K 105·74.

26/2. Włożył do kasy oszczędności na książeczkę Nr. 3007 kwotę K 1076. — Sprowadził z fabryki Potockiego cukru N[tto] 900 *kg* à 58 h. — Ze sprzedaży dziennej K 168·14.

27/2. Ryski w Krośnie przysyła gotówką K 150. — Rzemski w Żółkwi przysyła gotówką K 120 i 40 *kg* wosku à K 2·50. — Ze sprzedaży dziennej K 124·80.

28/2. Na portorya, lak i drobne wydatki wydano w lutym K 13·25. Ze sprzedaży dziennej wpłynęło K 87·30.

84. Księgi pomocnicze.

Dziennik, księga kasy i księga główna to są książki, bez których kupiec obejść się nie może. Oprócz tych prowadzi się jednakże księgi pomocnicze, które ułatwiają przegląd spraw. Do tych należą;

1. Księga kopii listów. Jestto księga z cienkiej bibułki, na której odbija się każdy list napisany w sprawach handlowych.

2. Księga towarów. Wygląda ona jak księga główna z tą różnicą, że nie korespondent, ale każdy towar ma swoje osobne konto. W księdze tej zapisuje się, po czemu i ile towaru się kupiło, a ile sprzedało.

3. Księga terminów wypłat, wykazująca, kiedy mamy płacić dług zwykły lub wekslowy i na odwrót, kiedy mamy otrzymać wypłatę wierzytelności lub rymesy.

85. Księgi małych przedsiębiorstw.

W małych przedsiębiorstwach wystarcza t. z. strazza. Z wzoru podanego dalej łatwo zrozumieć, że w rubryki »Przychód« i »Rozchód« zapisujemy gotowiznę, a w rubrykę »kredyt« to wszystko, co my drugim lub drudzy nam kredytują.

Strazza (krawca).

Data	Luty 1900.		Kredyt K	Kredyt h	Przychód K	Przychód h	Rozchód K	Rozchód h
1.	Stan kasy				546	—		
2.	Daje na utrzymanie domu						124	—
3.	Za spodnie od Jankowskiego				24	16		
		Ma						
4.	Wallach za materyę na garnitur .	. 37 K 80 h						
	za podszewkę	. 12 K 69 h	50	40				
		Winien						
5.	Józef Smykowski we Lwowie							
	za spodnie i kamizelkę . .	. 30 K 15 h						
	za odprasowanie garnituru .	. 2 K 60 h	32	75				
		Winien						
6.	Wallach za garnitur kamgarnowy		80	46				
7	Kupiłem los Czerwonego krzyża						28	50
	i t. d.							

Jeżeli przedsiębiorca ma wielu dłużników, natenczas otwiera dla każdego osobno konto, jak w księdze głównej, z tą różnicą, że »Winien« i »Ma« mieszczą się obok siebie, jak wskazuje podany wzór. Konto takie zamyka się jak księgę główną.

P. Wallach we Lwowie.

1900		Winien K	Winien h	Ma K	Ma h
1/2	Saldo z poprzedzającego rachunku	25	70		
4/2	Za materyę i podszewkę			50	40
5/2	Za garnitur kamgarnowy	80	46		
15/2	Dał gotówką			46	90
	i t. d.				

86. Równania 1go stopnia o kilku niewiadomych.

A. Niech będzie dane równanie

$$13x+2y=7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Równaniu temu uczynią zadość wartości n. p. $x=1$, $y=-3$; $x=-1$, $y=10$; $x=3$, $y=-16$ i wiele, bardzo wiele innych nie tylko liczb całkowitych, ale i ułamków jak n. p. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{4}$, o czem się można przekonać, wstawiając te wartości w równanie 1). — Jest więc ilość pierwiastków tego równania nieoznaczona, a takie równanie nazywamy nieoznaczonem (р. неозначене). Jeżeli zaś są w równaniu dwie niewiadome, ale zarazem dwa równania, natenczas otrzymamy — jak to się zaraz okaże — dla każdej niewiadomej tylko jedną, pewną wartość. Równanie takie będzie oznaczone (р. означене).

Mając dane dwa równania o dwóch niewiadomych, najpierw je porządkujemy (§ 46.), a następnie rugujemy jedną niewiadomą, ku czemu służą następujące metody.

I. *Metoda podstawiania* (м. вставленя). Niech będą dane równania n. p.

$$3x+2y=1 \qquad\qquad 4x-3y=41$$

Oznaczywszy z pierwszego n. p. x, jak gdyby y było wiadome, otrzymamy

$$x=\frac{1-2y}{3}$$

a gdy tę wartość wstawimy w równanie drugie,

$$\frac{4(1-2y)}{3}-3y=41$$

otrzymamy równanie o jednej niewiadomej, które trzeba rozwiązać (§ 47.). Rozwiązawszy je, otrzymamy

$$y=-7.$$

Gdy tę wartość wstawimy w którekolwiek z danych równań, wyniknie

$$x=5.$$

Zadania.

1. $x+3y=-1$, $2x+5y=2$.
2. $2x+y=-2$, $x-2y=-6$.
3. $7x-3y=1$, $8x+2y=12$.

4. $6x-5y=-14$
$5x-6y=-8.$

5. $5y-3y=4\frac{1}{2}$
$\frac{2}{5}x-\frac{3}{4}y=-\frac{1}{6}.$

6. $2(x-7)-\frac{y-1}{2}=1$
$\frac{x-4}{4}+2(y-2)=3.$

7. $\frac{2(x-3)}{3}+\frac{3(y-2)}{2}=10$
$x-y=3.$

8. $\frac{6x}{5}-\frac{2y}{3}=\frac{1}{4}$
$4x-2y=1.$

9. $x+y=13$
$\frac{5x}{7}+\frac{2y}{3}=9.$

II. *Metoda porównania* (м. порівнаня). Niech będą dane równania, jak wyżej

$$3x+2y=1 \qquad 4x-3y=41.$$

Z obydwóch równań oznaczymy n. p. y tak, jak gdyby x było wiadome

$$y=\frac{1-3x}{2}$$

$$y=\frac{4x-41}{3}$$

Ponieważ w ten sposób otrzymamy dwie ilości równe trzeciej (y), więc

$$\frac{1-3x}{2}=\frac{4x-41}{3}$$

Rozwiązawszy to równanie, w którem jest tylko jedna niewiadoma, otrzymamy $x=5$,
a gdy tę wartość wstawimy w którekolwiek z danych równań

$$y=-7.$$

Zadania.

10. $x-5y=-1$
$x+2y=6.$

11. $3x+y=1$
$3x-2y=16.$

12. $3x+y=\frac{5}{4}$
$2x-y=0.$

13. $5x+9y=23$
$2x-2y=26.$

14. Rozwiążcie metodą porównania zadania 1—9 (§ 85.).

15. Rozwiążcie metodą podstawiania zadania 10—13 (§ 85.).

III. *Metoda równych spółczynników* (м. рівних сочинників). Aby z równań wyżej podanych

$$3x+2y=1$$
$$4x-3y=41.$$

wyrugować n. p. y, doprowadzimy do tego, aby y miało ten sam spółczynnik w obydwóch równaniach, którym będzie nm. ws. w. danych spółczynników. W tym celu mnożymy pierwsze równanie drzez 3, drugie przez 2:

$$\begin{array}{r} 9x+6y=3 \\ 8x-6y=82. \\ \hline 17x=85 \end{array}$$

Gdy dodamy $17x=85$

więc $x=5$.

Wstawiwszy tę wartość w którekolwiek z danych równań, otrzymamy $y=-7$.

Tu dodaliśmy równania do siebie, albowiem $+6y$ i $-6y$ znoszą się przez dodawanie. Gdyby przy $6y$ były znaki równe, natenczas równania potrzebaby odjąć od siebie.

Szczególnie praktyczna jest ta metoda wtedy, jeżeli niewiadoma już ma równe spółczynniki, a używa się jej zawsze, jeżeli jest podana suma i różnica niewiadomych. N. p.

$$x+y=11$$
$$x-y=3.$$

Jeżeli te równania raz dodamy, drugi raz odejmiemy, otrzymamy $2x=14$ więc $x=7$

$2y=8$ „ $y=4$.

Zadania.

16. $3x+y=8$, $6x-y=1$.
17. $2x+4y=9$, $2x-y=-1$.
18. $6x-5y=28$, $3x+2y=42$.
19. $7x+4y=26$, $5x+y=13$.
20. $8x-5y=42$, $-6x+7y=12$.
21. $9x+7y=62$, $15x-14y=-25$.

22. Rozwiążcie według tej metody zadania 1—13 (§ 85.).

23. Rozwiążcie zadania 16–21 (§ 85) *a)* według metody podstawiania — *b)* porównania.

24. $x+y=6$, $x-y=24$.
25. $x+y=-15$, $x-y=-1$.
26. $x+y=14$, $x-y=-\frac{1}{4}$.

B. Niech będą dane równania n. p.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+5y-3z=8 \\ -x+2y+4z=8 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Rugując n. p. x z obydwóch tych równań, otrzymamy

$$9y+5z=20 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3).$$

Jestto równanie o dwóch niewiadomych, a przeto nieoznaczone (§ 85. *A.*). Stanie się ono oznaczonem, jeżeli do niego przybędzie jeszcze jedno równanie. Trzech przeto potrzeba równań, aby równanie o trzech niewiadomych było oznaczone.

Gdybyśmy to trzecie równanie utworzyli z równań 2) przez wyrugowanie n. p. y i chcieli je połączyć z 3), okazałoby się, że zawsze równanie pozostałoby nieoznaczonem. Trzy te równania muszą więc być od siebie niezawisłe.

Oznaczone równania o trzech niewiadomych rozwiązujemy w ten sposób, iż po uporządkowaniu rugujemy z co dwóch równań tę samą niewiadomę zapomocą jednej z wyżej podanych metod. W ten sposób dochodzimy do równania o jednej niewiadomej, które rozwiązujemy. N. p.

$x+y+z=3$ . . . . . *a)* Z *a)* i *b)* wynika $3x-2y=-4$ . . *d)*
$2x-3y-z=-7$ . . *b)* Z *a)* i *c)* „ $x-y=-3$ . . . . *e)*
$4x+2y+3z=6$ . . *c)*
Z *d)* i *e)* wynika $x=2$
Wstawiwszy tę wartość w *e)*, $y=5$
Z *a)* wyniknie $z=-4$.

Zadania.

27. $x+y=20$
$3y-2z=25$
$x-2z=3$.

28. $3x-4y=6$
$2x+3z=26$
$5y-6z=18$.

29. $3x+2y+2z=13$
$x+2y+3z=17$
$2x+3y+z=12$.

30. $x-3y+z=2$
$20x-y-2z=7$
$7x+9y-4z=3$.

31. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=13$
$\frac{x}{2}+\frac{y}{8}+\frac{z}{5}=10$
$3x-y-z=10$.

32. $\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{3}=7$
$\frac{x+z}{2}+\frac{y+z}{2}=6$
$2x+2y-5z=10$.

87. Układanie równań o dwóch niewiadomych.

Układa się równania o dwóch niewiadomych tak samo, jak o jednej niewiadomej (§ 48.). N. p. Ktoś miał bydło robocze, złożone z wołów i koni, razem 20 sztuk. Liczba wołów była dwa razy większa od trzeciej części koni. Ileż było wołów, a ile koni? — Wołów było x, koni y. Zatem $x+y=20$

a $x=\frac{2y}{3}$

Z tych dwóch równań otrzymamy:

$y=12$ $x=8$.

Zadania.

1. Jeżeli w ułamku powiększymy licznik i mianownik o 1, otrzymamy $\frac{3}{4}$, jeżeli je zaś zmniejszymy o 1, otrzymamy $\frac{2}{3}$. Jakito jest ułamek?

2. Mam dwie liczby, których suma czyni 44, a pięciokrotność jednej jest od trzykrotności drugiej mniejsza o 4. — Jakieto są liczby?

3. Mam liczbę dwucyfrową. Jeżeli jednostki powiększę o połowę cyfry dziesiątek, otrzymam 71, jeżeli zaś cyfrę dziesiątek powiększę o połowę cyfry jednostek, będzie 108. — Jakato jest liczba?

4. Różnica dwóch liczb jest 22, a połowa pierwszej jest od trzeciej części drugiej większa o 20. — Jakieto są liczby.

5. Dwoje dzieci dostało orzechy. Dziewczynka rzekła do brata: Gdybym ci dała trzecią część moich orzechów, miałbyś o 10 więcej niż ja, dam ci więc tylko szóstą część, a wtędy ja będę miała o 4 więcej od ciebie. Ileż orzechów miało każde z nich?

6. Handlarz sprzedawał żyto po 15 K, a jęczmień po 12 K za hektolitr i wziął za zboże 855 K. Gdyby żyto o koronę podrożało, a jęczmień o tyleż staniał, byłby utargował 840 K. Ile sprzedał żyta a ile jęczmienia?

7. Za pewną ilość owsa po 9 K za hektolitr, dawano żyto w cenie po 14 K i 35 K gotówką. Nim jednak przyszło do zgody, podniosła się cena owsa o 50 h na hektolitrze, a cena żyta o tyleż spadła, dlatego żądał właściciel owsa dopłaty 62·5 K. — Ileż jeden sprzedawał owsa, a ile żyta dawał drugi?

8. Ktoś sprzedał 7 wołów, a kupił za te pieniądze 12 źrebców. Mógłby był jednak kupić 13 źrebców, gdyby był wołu sprzedawał o 10 K drożej. W jakiejże cenie były woły, a po czemu kupował źrebce?

9. Za te same pieniądze można kupić 5 *m* szerszej, albo 7 *m* węższej materyi w tym samym gatunku. Po czemuż jest szersza, a po czemu węższa, jeżeli różnica cen równa się 1·2 K?

10. Z miast, oddalonych od siebie o $25\frac{1}{2}$ *km*, wyszło równocześnie dwóch posłańców pieszych, którzy się spotkali po upływie 3 godzin. Jakąż drogę zrobił każdy z nich, jeżeli posłaniec A robił w godzinie o 500 *m* więcej niż B?

11. Winiarz ma wino po 90 h i po 2 K za litr, a chciałby mieć 165 l po 1·5 K za litr. — Ileż litrów ma wziąć z każdego gatunku?

12. Złotnik chce otrzymać 480 g złota 800 próby. Ileż ma stopić złota czystego, a ile złota 400 próby?

13. Kupiec zmieszał 6 kg kawy tańszej z 4 kg kawy droższej i otrzymał kawę po 3·4 K za kilogram. Jaka była cena owych gatunków, jeżeli różnica cen wynosiła 1 K?

14. W mleczarni jest śmietanka 4 razy droższa niż mleko. Jeżeli więc zmieszano 6 l śmietanki z 2 l mleka i sprzedawano litr tej mieszaniny po 58·6 h, w jakiej cenie była śmietanka, a w jakiej mleko?

15. Obwód prostokąta jest 58 cm długi. Czwarta część jego długości jest od trzeciej części jego szerokości o 2 cm dłuższa. Jak wielka jest powierzchnia tego prostokąta?

16. Powierzchnia trapezu 35 cm wysokiego ma 560 cm^2. Podstawa trapezu jest od równoległej do niej o 18 cm dłuższa. Jak długie są jego boki równoległe?

17. Obwód powierzchni bocznej walca prostego wynosi 147·92 cm. Połowa wysokości walca jest od średnicy jego dłuższa o 1 cm. Jak wielka jest powierzchnia i objętość tego walca?

18. Powierzchnia walca prostego wynosi 1626·52 cm^2; jego powierzchnia boczna jest od dna 161·94 cm^2 większa. Jak wielka jest objętość tego walca?

19. W klasie, która liczyła 54 uczniów, wystąpiła w drugim kursie szósta część tych uczniów, którzy otrzymali stopień pierwszy, i połowa uczniów ze złym stopniem, wskutek czego zostało w klasie tylko 43 uczniów. — Jakże wypadła klasyfikacya za pierwsze półrocze?

20. Ktoś umieścił kapitał A na 8%, kapitał B na 6% i pobiera rocznie 433·36 K dochodu. Dochód jego wynosiłby jednak tylko 411·68 K, gdyby pierwszy kapitał leżał na 6% a drugi na 8%. Jak wielki jest jego majątek?

A.

Lat	2%	2½%	3%	4%	4½%	5%
1.	1·02	1·025	1·03	1·04	1·045	1·05
2.	1·0404	1·05062	1·0609	1·0816	1·092025	1·1025
3.	1·061208	1·076890	1·092727	1·124864	1·041166	1·157625
4.	1·082432	1·103813	1·125509	1·169858	1·192518	1·215506
5.	1·104081	1·131410	1·159271	1·216647	1·246177	1·276276
6.	1·126163	1·159694	1·194049	1·265313	1·302260	1·340090
7.	1·148686	1·188684	1·229870	1·315925	1·360862	1·407094
8.	1·171606	1·218403	1·266766	1·368562	1·422100	1·477448
9.	1·195093	1·248863	1·304769	1·423304	1·486095	1·551320
10.	1·218995	1·280088	1·343909	1·480233	1·552960	1·628884
11.	1·243375	1·312087	1·384226	1·539442	1·622853	1·710328
12.	1·268242	1·344890	1·425753	1·601020	1·695881	1·795844
13.	1·293607	1·378591	1·468526	1·665061	1·772195	1·885636
14.	1·319479	1·412970	1·512582	1·731663	1·851943	1·979918
15.	1·345869	1·448300	1·557969	1·800929	1·935280	2·078914
16.	1·372785	1·484507	1·604708	1·872966	2·022367	2·182859
17.	1·400241	1·521620	1·652849	1·947885	2·113372	2·292002
18.	1·428246	1·556073	1·702434	2·025800	2·208473	2·406602
19.	1·456811	1·598652	1·753507	2·106832	2·307854	2·526932
20.	1·485949	1·638626	1·806091	2·191090	2·411683	2·653262
21.	1·515666	1·679584	1·860273	2·278733	2·520208	2·785925
22.	1·545979	1·725543	1·916081	2·369882	2·633617	2·925221
23.	1·576898	1·764613	1·973563	2·464677	2·752129	3·071482
24.	1·608426	1·808729	2·032770	2·563264	2·875974	3·225056
25.	1·640608	1·853947	2·093753	2·665794	3·005392	3·386308
26.	1·673406	1·900296	2·156566	2·772426	3·140634	3·555623
27.	1·706874	1·947804	2·221263	2·883323	3·281962	3·733404
28.	1·741011	1·996499	2·287901	2·998655	3·429649	3·920074
29.	1·775831	2·046412	2·356538	3·118591	3·583983	4·116077
30.	1·811341	2·097585	2·427229	3·243321	3·745241	4·321850
31.	1·847568	2·150012	2·500046	3·373054	3·913777	4·537942
32.	1·884519	2·203762	2·575047	3·507976	4·089896	4·764839
33.	1·922209	2·258856	2·652298	3·648295	4·273941	5·003080
34.	1·960653	2·315328	2·731867	3·794227	4·466260	5·253234
35.	1·999866	2·373212	2·813823	3·945996	4·667249	5·515895
36.	2·039863	2·432542	2·898238	4·103836	4·877275	5·791689
37.	2·080660	2·493356	2·985185	4·267989	5·096752	6·081273
38.	2·122273	2·555690	3·074740	4·438708	5·326105	6·385336
39.	2·164718	2·619582	3·166982	4·616256	5·565779	6·704602
40.	2·208005	2·685100	3·261969	4·800866	5·816212	7·039800
41.	2·252165	2·752228	3·359828	4·992900	6·077941	7·391790
42.	2·297208	2·812033	3·460623	5·192616	6·351443	7·761379
43.	2·343152	2·891559	3·564442	5·400320	6·637263	8·149447
44.	2·390015	2·963848	3·671375	5·616333	6·935939	8·556919
45.	2·437815	3·037944	3·781516	5·840986	7·248055	8·984764
46.	2·486571	3·113892	3·894961	6·074625	7·574217	9·434002
47.	2·536302	3·191739	4·011810	6·317600	7·915056	9·905702
48.	2·587028	3·271532	4·132164	6·570304	8·271233	10·400987
49.	2·638768	3·353320	4·256129	6·833116	8·643438	10·921036
50.	2·691535	3·437138	4·383790	7·106400	9·032340	11·467000

B.

Lat	2%	2½%	3%	4%	4½%	5%
1.	0·980392	0·975609	0·970873	0·961538	0·956937	0·952380
2.	0·961168	0·951814	0·942596	0·924556	0·915728	0·907029
3.	0·942322	0·928599	0·915141	0·888996	0·876296	0·863837
4.	0·923845	0·905950	0·888487	0·854804	0·838561	0·822702
5.	0·905730	0·883853	0·862608	0·821927	0·802451	0·783526
6.	0·887971	0·862297	0·837484	0·790314	0·767895	0·746215
7.	0·870559	0·841264	0·813091	0·759918	0·734828	0·710681
8.	0·853490	0·820746	0·789409	0·730690	0·703185	0·676831
9.	0·836754	0·800727	0·766417	0·702587	0·672904	0·644609
10.	0·820347	0·781197	0·744094	0·675564	0·643927	0·613913
11.	0·804262	0·762144	0·722421	0·649581	0·616198	0·584678
12.	0·788492	0·743555	0·701380	0·624597	0·589663	0·556837
13.	0·773032	0·725419	0·680951	0·600576	0·564271	0·530321
14.	0·757874	0·694808	0·661118	0·577475	0·539972	0·505068
15.	0·743014	0·690464	0·641862	0·555265	0·516720	0·481006
16.	0·728445	0·673624	0·623167	0·533909	0·494469	0·458111
17.	0·714161	0·657194	0·605017	0·513374	0·473176	0·436296
18.	0·700158	0·641165	0·587395	0·493629	0·452800	0·415520
19.	0·686429	0·625526	0·570286	0·474643	0·433301	0·395734
20.	0·672970	0·610270	0·553676	0·456387	0·414642	0·376889
21.	0·659774	0·595385	0·537549	0·438834	0·396787	0·358942
22.	0·646838	0·580863	0·521893	0·421956	0·379700	0·341850
23.	0·634155	0·566696	0·506692	0·405727	0·363350	0·325571
24.	0·621720	0·552874	0·491934	0·390122	0·347703	0·310068
25.	0·609529	0·539389	0·477606	0·375117	0·332730	0·295301
26.	0·597578	0·526233	0·463695	0·360690	0·318402	0·281240
27.	0·585861	0·513398	0·450189	0·346817	0·304691	0·267848
28.	0·574373	0·500876	0·437077	0·333478	0·291570	0·255093
29.	0·563111	0·488660	0·424347	0·320652	0·279014	0·242946
30.	0·552069	0·476741	0·411987	0·308319	0·266999	0·231377
31.	0·541244	0·465113	0·399987	0·296461	0·255502	0·220359
32.	0·530632	0·453769	0·388337	0·285058	0·244499	0·209866
33.	0·520227	0·442701	0·377026	0·274095	0·233971	0·199872
34.	0·510027	0·431904	0·366045	0·263552	0·223895	0·190354
35.	0·500026	0·421369	0·355384	0·254586	0·217254	0·181290
36.	0·490222	0·411092	0·345033	0·243669	0·205028	0·172657
37.	0·480609	0·401065	0·334983	0·234297	0·196099	0·164435
38.	0·471186	0·391283	0·325226	0·225286	0·187750	0·156605
39.	0·461947	0·381740	0·315754	0·216621	0·179665	0·149148
40.	0·452889	0·372429	0·306557	0·208289	0·171924	0·142045
41.	0·444009	0·363345	0·297628	0·200740	0·164524	0·135281
42.	0·435302	0·354483	0·288959	0·193019	0·157440	0·128839
43.	0·426767	0·345838	0·280543	0·185168	0·151007	0·122704
44.	0·418399	0·337402	0·272372	0·178047	0·144172	0·116861
45.	0·410195	0·329173	0·264439	0·171199	0·137964	0·111296
46.	0·402152	0·321144	0·256737	0·164614	0·132023	0·105996
47.	0·394267	0·313311	0·249259	0·158286	0·126338	0·100949
48.	0·386536	0·305670	0·241999	0·152195	0·120897	0·096142
49.	0·378957	0·298211	0·234951	0·146341	0·115691	0·091564
50.	0·371526	0·290941	0·228107	0·140713	0·110709	0·087204