

MARIA JASTRZĘBSKA
Katedra Teorii Regulacji

WARUNKI STABILNOŚCI UKŁADU
ZAWIERAJĄCEGO LINIĘ NIEDOPASOWANĄ

Streszczenie. W przemysłowych układach automatyki występują obok elementów o stałych skupionych, również elementy o stałych rozłożonych. Przykładem mogą służyć szczególnie układy hydrauliczne i pneumatyczne.

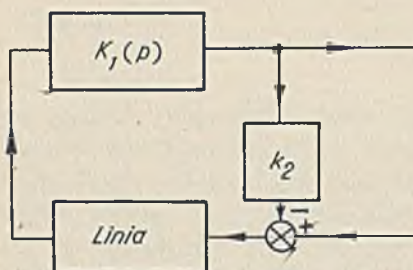
Problemom zachowania się układów o stałych rozłożonych współpracujących z układami o stałych skupionych poświęcono liczne prace, między innymi prace [2], [3], [4]. W książce [1] autorzy zajmują się zagadnieniami praktycznymi współpracy linii pneumatycznych z układami o stałych skupionych.

Tematem niniejszego opracowania jest badanie stabilności, w oparciu o kryterium Nyquista, układu zamkniętego składającego się z niedopasowanej linii i elementu o stałych skupionych. Podaną metodę badania zilustrowano przykładem.

Weźmy pod uwagę układ podany na rys. 1, obiekt jest elementem liniowym opisanym układem równań różniczkowych zwyczajnych, o funkcji przejścia $K_1(p)$, założono element pomiarowy bezinercyjny o wzmacnieniu k_2 . Element o stałych rozłożonych jest linią elektryczną bez strat obciążoną elementem dyssypatywnym R_2 . Elementy występujące w układzie nie obciążają się.

Do badania stabilności tego rodzaju układu zastosowano kryterium Nyquista.

O funkcji przejścia obiektu zakładamy, że jest analityczna na prawej półpłaszczyźnie i może być przedstawiona w postaci ułamka z wielomianami l -tego stopnia w liczniku i m -tego stopnia w mianowniku, przy czym $l \leq m$



$$K_1(p) = \frac{a_0 p^l + a_1 p^{l-1} + \dots + a_l}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}$$

Funkcję przejścia układu otwartego można przedstawić w postaci

Rys. 1

$$K(p) = K_1(p) k_2 K_1(p) = K_0(p) K_1(p) \quad (1)$$

funkcja przejścia linii określona jest wzorem

$$K_1(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{(1-N) e^{-\eta l}}{1 - NM e^{-2\eta l}} \quad (2)$$

gdzie

$$\eta = p\sqrt{L_1 C_1} = \frac{p}{v}, \quad \eta l = p \frac{l}{v} = pT$$

$$N = \frac{\varrho - R_2}{\varrho + R_2}, \quad M = \frac{\varrho - Z_1}{\varrho + Z_1}, \quad \varrho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

Założmy również, że na początku linii fala odbija się bez zmiany wysokości, więc współczynnik odbicia $M = 1$. Po uwzględnieniu tego założenia i wprowadzonych oznaczeń funkcja przejścia linii przyjmie postać

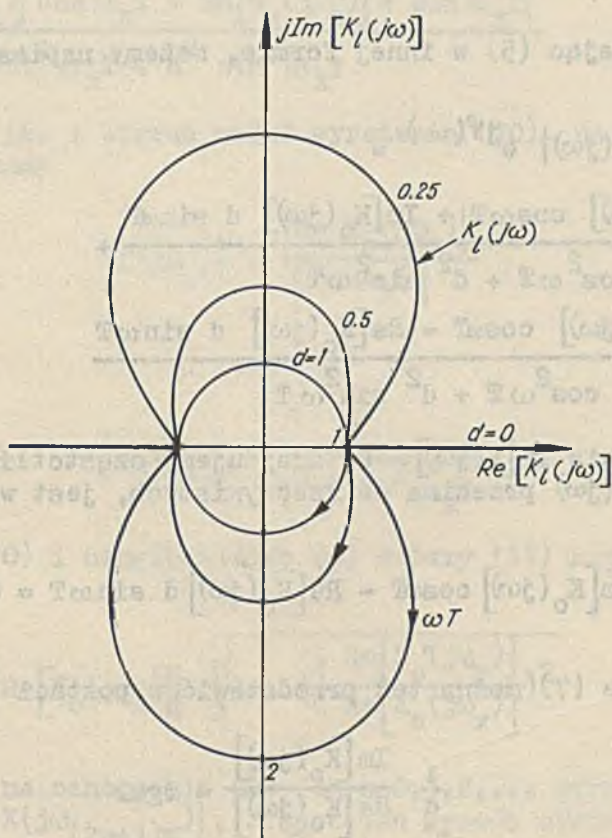
$$K_1(p) = \frac{(1-N) e^{-pT}}{1 - N e^{-2pT}} = \frac{1}{\cosh pT + d \sinh pT} \quad (3)$$

gdzie $d = \frac{\varrho}{R_2}$.

Charakterystyką częstotliwości linii określona jest relacją

$$K_1(j\omega) = \frac{1}{\cos\omega T + j d \sin\omega T} = |K_1(j\omega)| e^{j\varphi_1} \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -d \operatorname{tg} \omega T$$



Rys. 2

Na rys. 2 przedstawiono charakterystyki linii dla kilku wartości współczynnika d .

Charakterystyka częstotliwości otwartego układu określona jest wzorem

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) K_0(j\omega) = \frac{K_0(j\omega)}{\cos\omega T + j d \sin\omega T} =$$

$$= \frac{\operatorname{Re}[K_0(j\omega)] + j \operatorname{Im}[K_0(j\omega)]}{\cos\omega T + j d \sin\omega T} \quad (5)$$

Przedstawiając (5) w innej formie, możemy napisać

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} =$$

$$= \frac{\operatorname{Re}[K_0(j\omega)] \cos\omega T + \operatorname{Im}[K_0(j\omega)] d \sin\omega T}{\cos^2\omega T + d^2 \sin^2\omega T} +$$

$$+ j \frac{\operatorname{Im}[K_0(j\omega)] \cos\omega T - \operatorname{Re}[K_0(j\omega)] d \sin\omega T}{\cos^2\omega T + d^2 \sin^2\omega T} \quad (6)$$

Z równania $\operatorname{Im}[K(j\omega)] = 0$, znajdujemy częstotliwości, dla których $K(j\omega)$ przecina oś rzeczywistych, jest więc

$$\operatorname{Im}[K_0(j\omega)] \cos\omega T - \operatorname{Re}[K_0(j\omega)] d \sin\omega T = 0 \quad (7)$$

Równanie (7) można też przedstawić w postaci

$$\frac{1}{d} \frac{\operatorname{Im}[K_0(j\omega)]}{\operatorname{Re}[K_0(j\omega)]} = \operatorname{tg}\omega T \quad (8)$$

jest to równanie przestępne, które najłatwiej rozwiązać graficznie. Wartości spełniające to równanie oznaczymy jako $\omega_0, \omega_\pi, \omega_{2\pi}, \dots, \omega_{n\pi}, n = 0, 1, 2, \dots$

Wartości charakterystyki $K(j\omega)$ dla przesunięcia fazy $\varphi(\omega) = (2n+1)\pi$ otrzymamy po podstawieniu w (6) $\omega = \omega_{(2n+1)\pi}^\circ$

Dla skrócenia zapisu oznaczmy

$$\omega(2n+1)\pi = \omega_x \quad (9)$$

$$K(j\omega_{(2n+1)\pi}) = K(j\omega_x) = \frac{|\operatorname{Re}[K_o(j\omega_x)] \cos \omega_x T + \operatorname{Im}[K_o(j\omega_x)] d \sin \omega_x T|}{\cos^2 \omega_x T + d^2 \sin^2 \omega_x T} \quad (10)$$

uwzględniając (8) i biorąc moduł wyrażenia (10), po przekształceniach otrzymamy

$$|K(j\omega_x)| = \frac{|\operatorname{Re} K_o(j\omega_x)|}{|\cos \omega_x T|} \quad (11)$$

Podstawiając

$$|\cos \omega_x T| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \omega_x T}}$$

do równania (10) i uwzględniając (8) możemy (11) napisać następująco

$$|K(j\omega_x)| = |\operatorname{Re}[K_o(j\omega_x)]| \sqrt{1 + \left(\frac{1}{d} \frac{\operatorname{Im}[K_o(j\omega_x)]}{\operatorname{Re}[K_o(j\omega_x)]}\right)^2} \quad (12)$$

Ze względu na oznaczenie (9) dla $n=0,1,2,\dots$ otrzymamy szereg wartości $|K(j\omega_{(2n+1)\pi})|$, ciąg w ten sposób utworzony oznaczmy jako

$$\{a_n\}.$$

Aby układ był stabilny spełniony być musi warunek

$$\max_n \{a_n\} = \max_n \left\{ |K(j\omega_{(2n+1)\pi})| \right\} < 1 \quad (13)$$

Celem znalezienia maksymalnej wartości ciągu $\{a_n\}$, wprowadzamy funkcję ciągłą $f(x)$. Dla $x = \omega_{(2n+1)\pi}$, $n=0,1,2,\dots$ funkcja ta przybiera wartości ciągu $\{a_n\}$. Jest więc to funkcja następująca

$$f(x) = |\operatorname{Re}[K_o(jx)]| \sqrt{1 + \left(\frac{1}{d} \frac{\operatorname{Im}[K_o(jx)]}{\operatorname{Re}[K_o(jx)]}\right)^2} \quad (14)$$

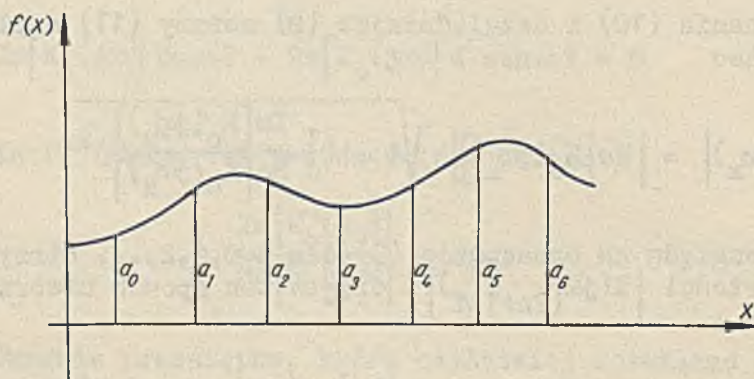
lub po przekształceniu

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{Re}[K_o(jx)]^2 + \frac{1}{d^2} \operatorname{Im}[K_o(jx)]^2} \quad (15)$$

Dla większości układów, charakterystyka częstotliwości $K_o(j\omega)$ dąży do zera dla $\omega \rightarrow \infty$. Gdy $x \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow 0$, a więc i wartości ciągu $\{a_n\}$ dążą do zera gdy $n \rightarrow \infty$.

Znajdujemy x , dla którego zachodzi maksimum $f(x)$, obliczając

$$\frac{d f(x)}{dx} = 0. \quad (16)$$



Rys. 3

Z równania (16) otrzymamy jedną lub więcej wartości x , które podstawiamy w (15). Maksima funkcji $f(x)$ mogą nie pokrywać się z wartościami maksymalnymi ciągu $\{a_n\}$, lecz leżeć pomiędzy

nimi (rys. 3). Obliczając wartości ciągu $\{a_n\}$ leżące najbliżej na lewo i prawo maksimum funkcji $f(x)$ i biorąc z nich wartość największą, otrzymamy $\max_n \{a_n\}$.

Gdy linia jest dopasowana, czyli jest elementem czysto opóźniającym $d=1$, wtedy $|K(j\omega_{(2n+1)\pi})|$ określone jest następująco

$$|K(j\omega_{(2n+1)\pi})| = |K_0(j\omega_{(2n+1)\pi})|$$

gdzie: $\omega_{(2n+1)\pi}$ jest rozwiązaniem równania

$$\operatorname{tg} \omega T = \frac{\operatorname{Im}[K_0(j\omega)]}{\operatorname{Re}[K_0(j\omega)]}$$

Przykład

Układ składa się z elementu inercyjnego I rzędu i niedopasowanej linii. Charakterystyki częstotliwości elementu inercyjnego i układu otwartego podają wzory (17) i (18)

$$K_0(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T_1} \quad (17)$$

gdzie T_1 jest stałą czasową

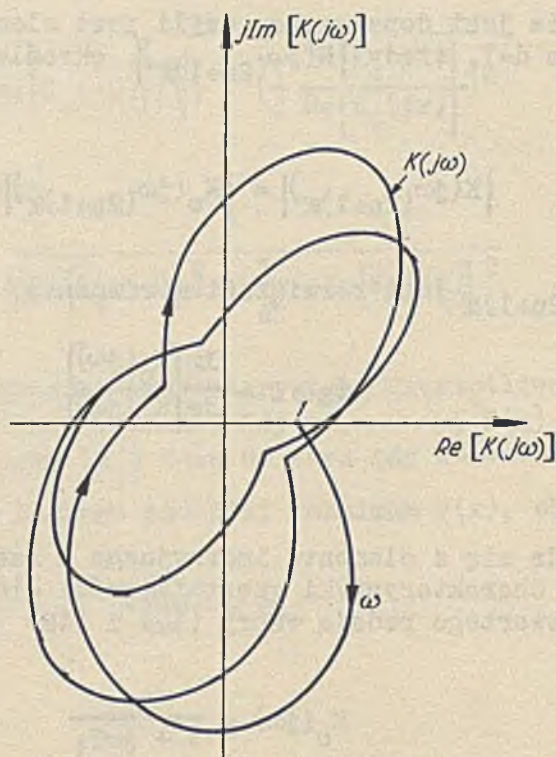
$$K(j\omega) = \frac{k}{\cos \omega T - d\omega T_1 \sin \omega T + j(\omega T_1 \cos \omega T + d \sin \omega T)} \quad (18)$$

Rys. 4 przedstawia $K(j\omega)$ dla danych $\frac{T_1}{T} = 0,1$, $d = 0,25$.

Częstotliwości, dla których przesunięcie fazy wynosi $n\pi$, można znaleźć z równania (8) w postaci

$$\frac{T_1}{T} \frac{1}{d} \omega T = - \operatorname{tg} \omega T. \quad (19)$$

Graficzne rozwiązanie tego równania podano na rys. 5, wprowadzając zmienną ωT w miejsce ω . $T = \text{const}$ dla danej długości



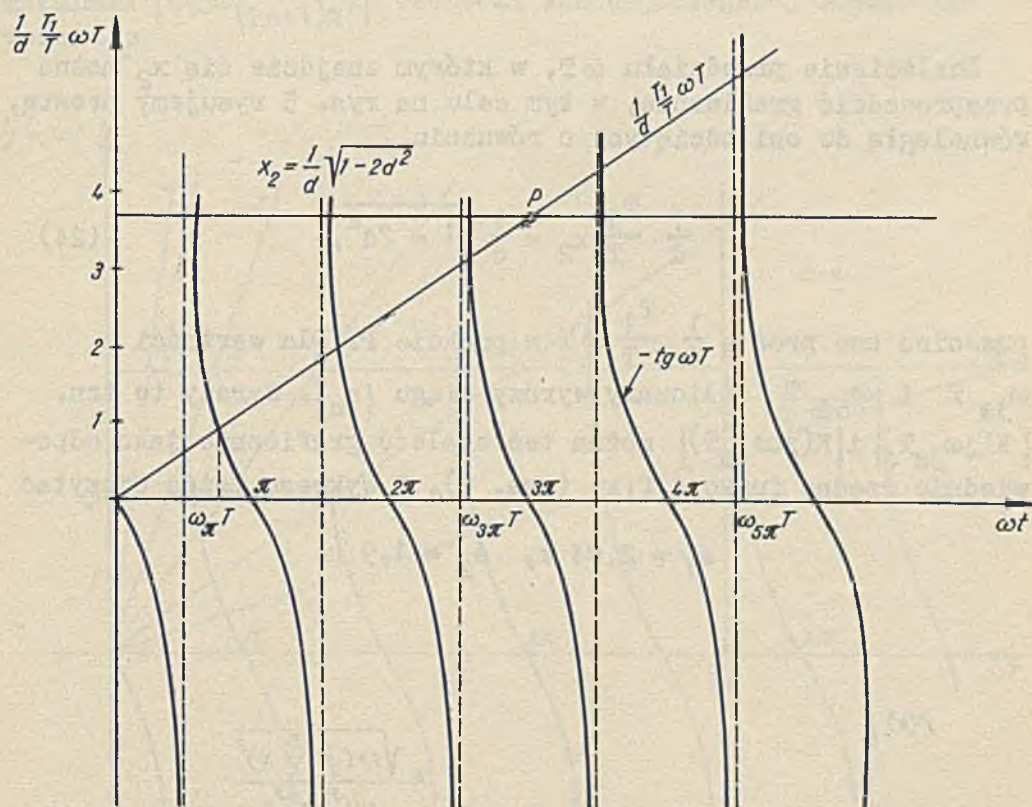
Rys. 4

linii 1. Na osi odciętych oznaczono wartości $\omega_{\pi T}$, $\omega_{2\pi T}$, ..., które spełniają równanie (19). Moduł części rzeczywistej $K(j\omega)$ dla przesunięcia fazy $(2n+1)\pi$ otrzymamy ze wzoru (12)

$$|K(j\omega_{(2n+1)\pi})| = \frac{k \sqrt{1 + \left(\frac{1}{d} \frac{T_1}{T} \omega_{(2n+1)\pi T}\right)^2}}{1 + \left(\frac{T_1}{T} \omega_{(2n+1)\pi T}\right)^2} = a_n \quad (20)$$

Wprowadzamy funkcję ciągłą $f(x)$ zmiennej $x = \omega(2n+1)\pi T$

$$f(x) = \frac{k\sqrt{1 + \left(\frac{1}{d} \frac{T}{T} x\right)^2}}{1 + \left(\frac{T}{T} x\right)^2} \quad (21)$$



Rys. 5

Wartości zmiennej x , dla których zachodzą maksima $f(x)$ znajdujemy z równania (22)

$$x\left(\frac{1}{d^2} - 2 - \frac{T}{T} \frac{1}{d^2} x^2\right) = 0 \quad (22)$$

są to:

$x_1 = 0$ - rozwiązanie nie interesujące nas, gdyż $\omega_{(2n+1)\pi} T$ nie może być równe zero,

$x_{2,3} = \pm \frac{T}{T_1} \sqrt{1 - 2d^2}$ - ponieważ $x > 0$ więc pozostaje rozwiązanie

$$x_2 = \frac{T}{T_1} \sqrt{1 - 2d^2} \quad (23)$$

Znalezienie przedziału ωT , w którym znajdzie się x_2 można przeprowadzić graficznie, w tym celu na rys. 5 rysujemy prostą, równoległą do osi odciętych o równaniu

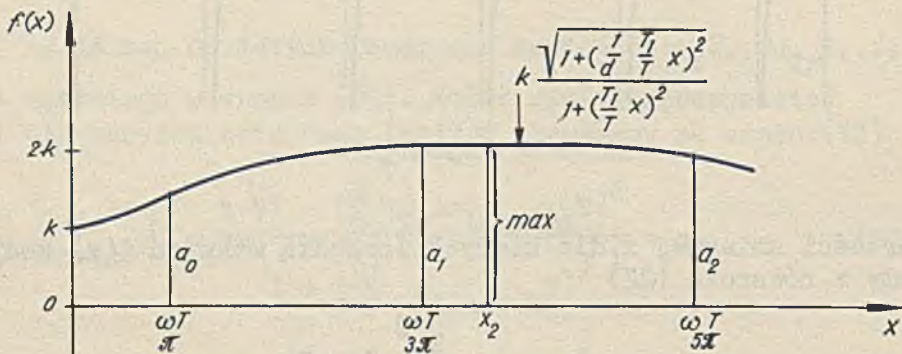
$$\frac{1}{d} \frac{T_1}{T} x_2 = \frac{1}{d} \sqrt{1 - 2d^2}, \quad (24)$$

przecina ona prostą $\frac{1}{d} \frac{T_1}{T} \omega T$ w punkcie P. Dla wartości

$\omega_{3\pi} T$ i $\omega_{5\pi} T$ obliczamy wyrazy ciągu $\{a_n\}$. Wyrazy te tzn.

$|K(j\omega_{3\pi} T)|$ i $|K(j\omega_{5\pi} T)|$ można też znaleźć graficznie jako odpowiednie rzędne funkcji $f(x)$ (rys. 6). Z wykresu można odczytać

$$a_1 = 2,04 k, \quad a_2 = 1,9 k$$



Rys. 6

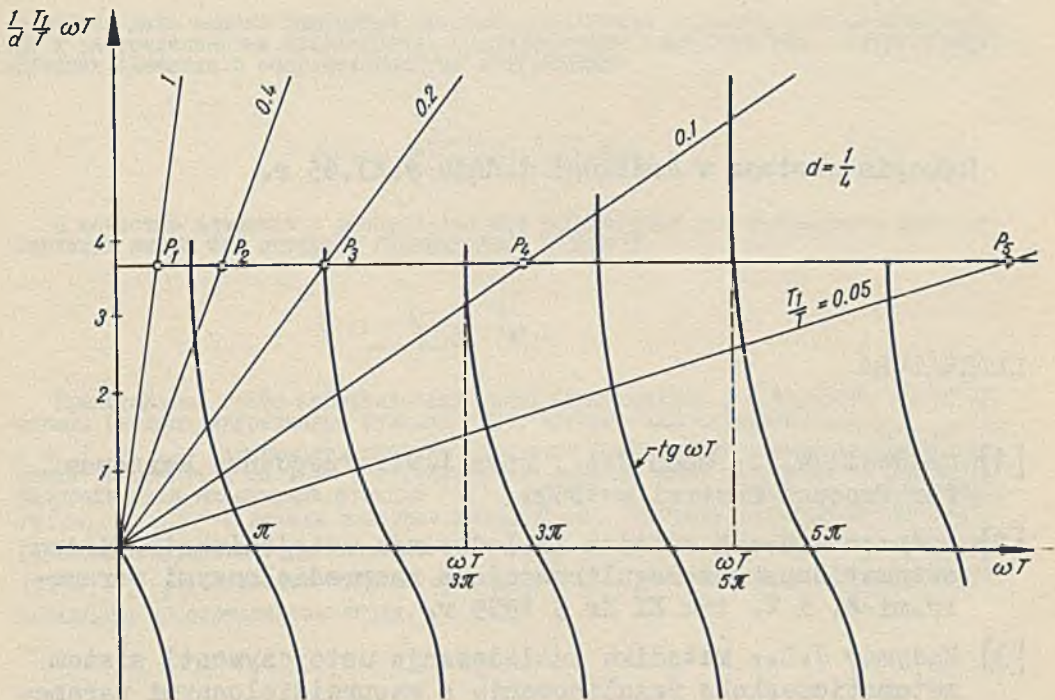
a więc ze względu na stabilność układu współczynnik wzmocnienia musi spełnić warunek

$$k < 0,49.$$

Gdy

$$\frac{1}{d} \frac{T_1}{T} x_2 = \frac{1}{d} \sqrt{1 - 2d^2} < \frac{1}{d} \frac{T_1}{T} \omega_{\pi} T$$

maksimum $|K(j\omega_{(2n+1)\pi})|$ zachodzi dla najmniejszej częstotliwości ω_{π} .



Rys. 7

Dla danego obciążenia linii, a więc danego d można zbadać, również graficznie zależność maksymalnej wartości $|K(j\omega_{(2n+1)\pi})|$ od parametru T_1 . Pęk prostych przechodzących przez początek układu współrzędnych z $\frac{T_1}{T}$ jako parametrem (rys. 7), przecina

prosta $\frac{1}{d} \sqrt{1-2d^2}$ w punktach P_1, P_2, \dots . Ich położenie wyznacza wartości $\omega_{(2n+1)\pi}^T$ i $\omega_{(2n+1)\pi}^T$, dla jednej z tych wartości moduł charakterystyki częstotliwości dla fazy $\pm \pi$ przyjmuje wartość maksymalną.

Na zakończenie chciałabym wyrazić podziękowanie Panu Profesorowi dr S. Węgrzynowi za zachętę do podjęcia zagadnienia współpracy układów złożonych z elementów o stałych rozłożonych i stałych skupionych. Dziękuję również Panu docentowi dr C. Olechowi za spostrzeżenia i uwagi oraz Kolegom z Katedry Teorii Regulacji.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 9.XI.65 r.

LITERATURA

- [1] Caldwell W.I., Coon G.A., Zoss L.M.: Frequency Response for Process Control - 1959.
- [2] Kadymow J.B.: K metodam issledowanja ustojczivosti sistem awtomatyczeskoho regulirowanja s raspredielonnymi parametrami - A. i T. tom XX Nr 3 1959 r.
- [3] Kadymow J.B.: Metodika issledowanja ustojczywosti sistem awtomatyczeskoho regulirowanja s raspreidielonnymi parametrami pri uczetie potier - A. i T. tom XX Nr 4 1959 r.
- [4] Kisljakow W.S.: Primienienje metoda asymptotičeskich približenij Kryłowa i Bogoljubowa dla issledowanja sistem s zapazdywanjem - A. i T. tom XXI Nr 4 1960 r.
- [5] Węgrzyn S.: Système bouclé équivalent à un système comportant une ligne - critère de stabilité - Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences - Série des sciences techniques - Volume VIII. No. 11-12 - 1960.

- [6] Węgrzyn S.: Przebiegi nieustalone w liniach elektrycznych i układach łańcuchowych - PWN Warszawa 1958.

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ, ВКЛЮЧАЮЩИХ
НЕСОГЛАСОВАННУЮ ЛИНИЮ

Резюме

В работе дано анализ замкнутой системы, включающей элементы с сосредоточенными и распределенными параметрами. Предполагается следующий вид передаточной функции элемента с сосредоточенными постоянными

$$K_1(p) = \frac{a_0 p^l + a_1 p^{l-1} + \dots + a_l}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}$$

В качестве элемента с распределенными параметрами рассматривается несогласованную линию без потерь с передаточной функцией

$$K_1(p) = \frac{(1-N)e^{-\gamma l}}{1-NMe^{-2\gamma l}}$$

Представлено графо-аналитический метод исследования устойчивости такой системы. Введено непрерывную функцию $f(x)$, которая для значений $x = \omega(2n+1)\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$ принимает значения координат пересечения частотной характеристики разомкнутой системы с отрицательной вещественной полуосью. На основании распределения максимумов функции $f(x)$ находится максимальное значение $|K(j\omega_{(2n+1)\pi})|$ а отсюда значение коэффициента усиления устойчивой системы.

Применение этого метода показано на примере отыскания максимального значения $|K(j\omega_{(2n+1)\pi})|$ в зависимости от отношения $\frac{T_1}{T}$ а также параметра a определяющего несогласование линии.

THE CONDITION OF STABILITY FOR AN SYSTEM CONTAINED
THE LINE WITH MISMATCH

S u m m a r y

The paper presents an analysis of closed system with element of distributed parameters, described by the transfer function

$$K_1(p) = \frac{(1-N) e^{-\eta l}}{1 - NM e^{-2\eta l}}$$

the linear element has transfer function

$$K_1(p) = \frac{a_0 p^l + a_1 p^{l-1} + \dots + a_l}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}$$

To apply the Nyquist criterion it is necessary to solve the transcendental equation

$$\frac{1}{d} \frac{\text{Im} [K_0(j\omega)]}{\text{Re} [K_0(j\omega)]} = \text{tg } \omega T$$

This is done by the graphical method. It obtains the series of the values $\omega_{nx}, n = 0, 1, 2$, and only $\omega_{(2n+1)\pi}$, $n = 0, 1, 2$ are considered. For finding the maximum of the values $|K(j\omega_{(2n+1)\pi})|$ is introduced the continuous function $f(x)$. For $x = \omega_{(2n+1)\pi}$, $f(x)$ is equal $|K(j\omega_{(2n+1)\pi})|$. The maximum of this function shows the maximum of the values $|K(j\omega_{(2n+1)\pi})|$ and the condition of stability is

$$\max_n \left\{ |K(j\omega_{(2n+1)\pi})| \right\} < 1.$$