ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: AUTOMATYKA z. 7 Nr kol. 167

STANISŁAW MAIZACHER
Katedra Elektroniki Przemysłowej

MOSTEK MAXWELLA O NIELINIOWYCH INDUKCYJNOŚCIACH

Streszczenie. W pracy przedstawiono analizę matematyczną mostka Maxwella zawierającego jedną lub dwie cewki z żelazem. Analizę przeprowadzono w oparciu o aproksymowaną pętlę histerezy. Znajdując na podstawie nieliniowego równania różniczkowego dla gałęzi z nieliniową indukcyjnością wartość prądu płynącego w tym obwodzie można wyznaczyć warunki równowagi dla tego typu mostka. W zakończeniu podano przykłady liczbowe i wyniki sprawdzających pomiarów laboratoryjnych.

1. Wstęp

W układach automatyki i telemechaniki, w urządzeniach do pomiaru wielkości nieelektrycznych metodami elektrycznymi, np. przy badaniu nieniszczącym materiałów itp. stosowane są często metody pomiarowe bazujące na układzie mostkowym zawierającym cewki z rdzeniem stalowym, a więc typowy element nieliniowy.

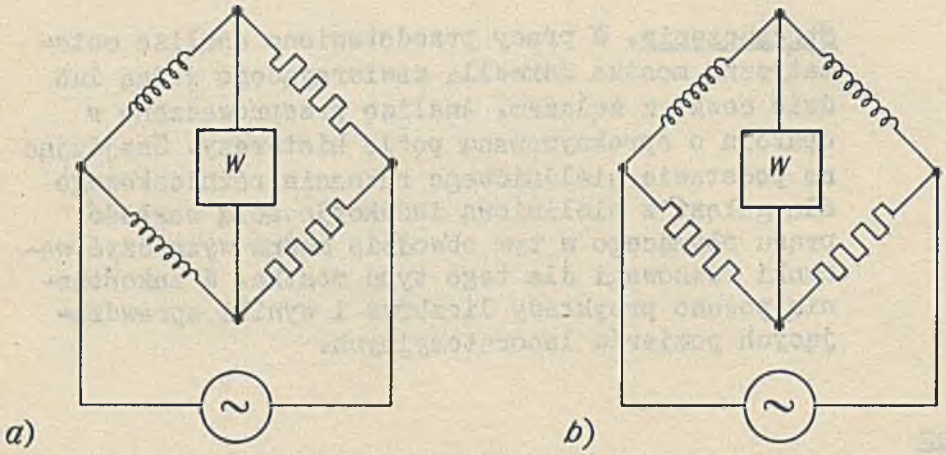
Mostek prądu zmiennego z dwiema liniowymi reaktancjami indukcyjnościowymi w postaci cewek bezrdzeniowych i dwiema rezystancjami znany jest w klasycznej literaturze miernictwa elektrycznego pod nazwą mostka Maxwella. Wprowadzając w miejsce cewek indukcyjnych bezrdzeniowych, cewki z rdzeniem stalowym, otrzymujemy mostek Maxwella z nieliniowymi reaktancjami indukcyjnościowymi, który w dalszym ciągu będziemy nazywać krótko mostkiem z reaktancjami nieliniowymi.

W mostku takim można rozróżnić, w zależności od sposobu rozmieszczenia elementów, dwa rodzaje symetrii (rys. 1):

a) symetrię względem punktów zasilania mostka,

b) symetrię względem wskaźnika równowagi mostka.

W mostku z liniowymi reaktancjami indukcyjnościowymi oba rodzaje symetrii prowadzą do tego samego warunku równowagi.



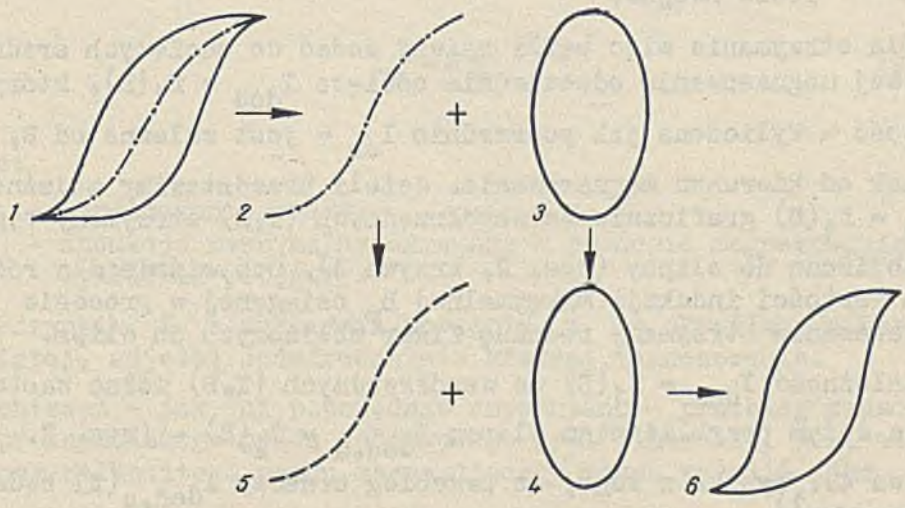
Rys. 1. Dwa rodzaje symetrii w mostku Maxwella: a - symetria względem punktów zasilania mostka; b - symetria względem wskaźnika równowagi mostka

W mostku z nieliniowymi reaktancjami indukcyjnościowymi nie ma równoważności między obu rodzajami symetrii [1], oba przypadki muszą być więc analizowane oddzielnie. Ze względu na dużą obszerność zagadnienia, w niniejszej pracy analizowano tylko mostki o symetrii względem punktów zasilania, odpowiadające klasycznemu układowi mostka Maxwella [2].

Dla uproszczenia analizy pominięto wpływ prądów wirowych w rdzeniu, oddziaływanie biegunów magnetycznych i indukcyjności rozproszenia, a napięcie zasilające mostek przyjęto jako czysto sinusoidalne.

2. Wybór metody analitycznej

W gałęziach mostka składających się z szeregowo połączonych: rezystancji R i nieliniowej reaktancji indukcyjnościowej, reprezentowanej przez strumień skojarzony Ψ cewki z rdzeniem stalowym magnesowanym silnym polem magnetycznym (gdzie Ψ jest nieliniową funkcją prądu), mimo założenia napięcia zasilającego o przebiegu sinusoidalnym, skutkiem istnienia reaktancji nieliniowej i szeregowej rezystancji o niepomijalnej wartości, zarówno prąd jak i spadki napięć na poszczególnych elementach obwodu są odkształcone. Ponieważ nie ma danej analitycznie i w sposób jednoznaczny zależności między prądem i skojarzonym strumieniem magnetycznym (zależność ta dana jest tylko wykreślnie w postaci charakterystyki magnesowania), prąd w obwodzie może być obliczony tylko za pomocą metod przybliżonych. Potrzeba uwzględnienia histerezy magnetycznej stwarza dodatkową trudność polegającą na konieczności odpowiedniej aproksymacji pętli histerezy i wynikającej stąd bardziej skomplikowanej postaci równania różniczkowego dla danego obwodu.



Rys. 2. Zasada aproksymacji pętli histerezy

1 - pętla histerezy zdjęta doświadczalnie; 2-3 krzywe składowe tej pętli; 4-5 krzywe składowe aproksymowane; 6 - pętla histerezy aproksymowana

Dla analitycznego wyrażenia pętli histerezy zastosowano metodę Schwarza i Sequenza, zmodyfikowaną przez Biessonowa [3]. Metoda ta przedstawiona jest w sposób poglądowy na rys. 2.

Niech będzie dana pętla histerezy materiału magnetycznego użytego na rdzeń cewki stanowiącej indukcyjnościową reaktancję nieliniową w mostku (rys. 2, krzywa 1). Oznaczmy przez $I_{śr} = f(B)$ analityczne wyrażenie na średnią krzywą magnesowania, rozumianą jako charakterystyka magnesowania, której odcięte są równe średniej algebraicznej odpowiednich odciętych pętli histerezy otrzymanej w sposób doświadczalny (rys. 2, krzywa 2) i wyliczone z zależności:

$$I_{śr} = H_{śr} \frac{l_{śr}}{0,4\pi z}$$

gdzie:

$H_{śr}$ - średnia algebraiczna odciętych pętli histerezy (natężenia pola magnetycznego) otrzymanej doświadczalnie,
$l_{śr}$ - średnia droga strumienia magnetycznego w rdzeniu,
z - ilość zwojów.

Dla otrzymania więc pętli należy dodać do odciętych średniej krzywej magnesowania odpowiednie odcięte $I_{dod} = f_1(B)$, których wartość - wyliczona jak poprzednio $I_{śr}$ - jest zależna od B, a znak od kierunku magnesowania. Jeżeli przedstawimy zależność $I_{dod} = f_1(B)$ graficznie we współrzędnych (I,B) otrzymamy figurę zbliżoną do elipsy (rys. 2, krzywa 3). Oczywiście dla różnych wartości indukcji maksymalnej B_m osiąganej w procesie magnesowania otrzymamy rodzinę figur zbliżonych do elips.

Zależność $I_{dod} = f_1(B)$ we współrzędnych (I,B) można zastąpić z dużym przybliżeniem elipsą $I_{dod.a} = f_2(B)$ - (rys. 2, krzywa 4). Wynika z tego, że przebieg czasowy $I_{dod.a}(t)$ będzie sinusoidą [1].

---

[1] Symbol "a" przy poszczególnych wielkościach oznacza wielkość aproksymowaną.

W celu ostatecznego wyrażenia analitycznego pętli histerezy należy znaleźć wyrażenie aproksymujące jej poszczególne składowe: średnią krzywą magnesowania i elipsę prądu dodatkowego. Średnią krzywą magnesowania można aproksymować wyrażeniem w postaci dwumianu:

$$I_{śr.a} = f_1(B) = \alpha B + \beta B^3 \qquad (1)$$

gdzie:

α, β - współczynniki określane np. przy pomocy metody najmniejszych kwadratów z rzeczywistej krzywej magnesowania, zdjętej doświadczalnie.

Amplituda prądu dodatkowego, aproksymowanego $I_{dod.a}$ może być wyliczona z wartości siły powściągającej (natężenia pola koercji) i oznaczona przez $\bar{I}_k$ - co wynika bezpośrednio z wykresów (rys. 2). Amplituda tego prądu stanowi pewną funkcję indukcji maksymalnej B_m osiąganej w procesie magnesowania i daje się aproksymować przy pomocy wyrażenia:

$$\bar{I}_k = \xi B_m^n \qquad (2)$$

gdzie:

ξ - współczynnik stały,
B_m - indukcja maksymalna osiągana w procesie magnesowania,
n - wykładnik potęgowy.

Współczynnik ξ i wykładnik potęgowy n są określane z rzeczywistej, zdjętej doświadczalnie krzywej magnesowania.

Ponieważ - jak już poprzednio wspomniano - przebieg czasowy aproksymowanego prądu dodatkowego jest sinusoidą, przebieg czasowy całkowitego prądu magnesującego można wyrazić jako

$$\begin{aligned} I_a(t) &= I_{śr.a}(t) + I_{dod.a}(t) = \\ &= \alpha B(t) + \beta B^3(t) + \xi B_m^n \sin \omega t = \\ &= \alpha B(t) + \beta B^3(t) + \xi B_m^n \cos(\omega t - 90) \end{aligned} \qquad (3)$$

Na rys. 2 aproksymowaną średnią krzywą magnesowania we współrzędnych (I,B) reprezentuje krzywa 5, elipsę aproksymowanego prądu dodatkowego - krzywa 4, a aproksymowaną pętlę histerezy - krzywa 6.

Załóżmy z kolei, że w szereg z cewką została włączona rezystancja o znacznej wartości. Powstający na niej spadek napięcia od odkształconego prądu płynącego w obwodzie powoduje, że napięcie na cewce przestaje być sinusoidalne, skutkiem czego przebieg czasowy indukcji będzie również funkcją niesinusoidalną. Można go przedstawić w postaci szeregu harmonicznego, w którym dla naszych rozważań wystarczy zwykle uwzględnić tylko składowe pierwszej i trzeciej harmonicznej oraz ich początkowe kąty fazowe:

$$B(t) = \bar{B}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \bar{B}_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) \qquad (4)$$

gdzie:

$\bar{B}_1$, $\bar{B}_3$ - amplitudy składowej podstawowej i trzeciej harmonicznej indukcji magnetycznej,

φ_1, φ_3 - początkowe kąty fazowe przebiegów $B_1(t)$ i $B_3(t)$.

W powyższym szeregu nie założono z góry znaków odpowiednich kątów fazowych, znak kąta fazowego wynika z konkretnych wyliczeń.

Znajdując jak w poprzednim przypadku przebieg czasowy $I_{dod}(t)$ możemy stwierdzić, że da się on w dalszym ciągu aproksymować przebiegiem sinusoidalnym $I_{dod.a}(t)$, jednakże z fazowym kątem początkowym różnym od zera:

$$I_{dod.a}(t) = \bar{I}_k \sin(\omega t + \delta) \qquad (5)$$

Kąt fazowy δ winien być wyznaczony graficznie. Wartość indukcji maksymalnej B_m potrzebną do obliczenia $\bar{I}_k$, zgodnie z równaniem (2) wyznaczamy również graficznie przez dodanie do siebie przebiegów $B_1(T)$ i $B_3(t)$.

Ostatecznie przebieg czasowy aproksymowanego prądu w obwodzie z szeregowo połączonymi: nieliniową reaktancją indukcyjnościową i rezystancją, można przedstawić jako

$$I_a(t) = \alpha\left[\bar{B}_1\sin(\omega t + \varphi_1) + \bar{B}_3\sin(3\omega t + \varphi_3)\right] +$$

$$+ \beta\left[\bar{B}_1\sin(\omega t + \varphi_1) + \bar{B}_3\sin(3\omega t + \varphi_3)\right]^3 +$$

$$+ \xi B_m^n \sin(\omega t + \delta) \qquad (6)$$

Ponieważ zarówno indukcja maksymalna B_m jak i kąt fazowy δ są w pierwszej fazie obliczeń nie określone, obliczenia muszą być przeprowadzone metodą kolejnych przybliżeń.

Wpierw zestawiamy dla naszego obwodu równanie różniczkowe nieliniowe. W naszym przypadku przejmie ono postać:

$$z.S \cdot 10^{-8}\frac{d}{dt}\left\{\bar{B}_1\sin(\omega t + \varphi_1) + \bar{B}_3\sin(3\omega t + \varphi_3)\right\} +$$

$$+ R\left\{\alpha\left[\bar{B}_1\sin(\omega t + \varphi_1) + \bar{B}_3\sin(3\omega t + \varphi_3)\right] +\right.$$

$$+ \beta\left[\bar{B}_1\sin(\omega t + \varphi_1) + \bar{B}_3\sin(3\omega t + \varphi_3)\right]^3 +$$

$$\left.+ \xi B_m^n \sin(\omega t + \delta)\right\} - \bar{U}\sin\omega t = 0 \qquad (7)$$

Po wykonaniu działań i przekształceniach otrzymamy:

$$z.S.\omega.10^{-8}\,\bar{B}_1\cos\omega t.\cos\varphi_1 - z.S.\omega.10^{-8}\,\bar{B}_1\sin\omega t.\sin\varphi_1 +$$

$$+ 3.z.S.\omega.10^{-8}\bar{B}_3\cos 3\omega t.\cos\varphi_3 - 3.z.S.\omega.10^{-8}\bar{B}_3\sin 3\omega t.\sin\varphi_3 +$$

$$+ R\alpha\bar{B}_1\sin\omega t.\cos\varphi_1 + R\alpha\bar{B}_1\cos\omega t.\sin\varphi_1 + R\alpha\bar{B}_3\sin 3\omega t.\cos\varphi_3 +$$

$$+ R\alpha\bar{B}_3\cos 3\omega t.\sin\varphi_3 + 0{,}75R\beta\bar{B}_1^3\sin\omega t.\cos\varphi_1 +$$

$$+ 0{,}75R\beta\bar{B}_1^3\cos\omega t.\sin\varphi_1 - 0{,}25R\beta\bar{B}_1^3\sin 3\omega t.\cos 3\varphi_1 -$$

$$- 0{,}25R\beta\bar{B}_1^3\cos 3\omega t.\sin 3\varphi_1 + 0{,}75R\beta\bar{B}_3^3\sin 3\omega t.\cos\varphi_3 +$$

$$+ 0{,}75R\beta\bar{B}_3^3\cos 3\omega t.\sin\varphi_3 + 1{,}5R\beta\bar{B}_1^2B_3\sin 3\omega t.\cos\varphi_3 +$$

$$+ 1{,}5R\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\cos 3\omega t.\sin\varphi_3 - 0{,}75R\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\sin\omega t.\cos(2\varphi_1 - \varphi_3) +$$

$$+ 0{,}75R\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\cos\omega t.\sin(2\varphi_1 - \varphi_3) +$$

$$+ 1{,}5R\beta\bar{B}_1\bar{B}_3^2\sin\omega t.\cos\varphi_1 + 1{,}5R\beta\bar{B}_1\bar{B}_3^2\cos\omega t.\sin\varphi_1 +$$

$$+ R\bar{S}B_m^n\sin\omega t.\cos\delta + R\bar{S}B_m^n\cos\omega t.\sin\delta - \bar{U}\sin\omega t = 0 \qquad (8)$$

gdzie:

z - ilość zwojów cewki w reaktancji nieliniowej,
S - przekrój rdzenia,
$\omega = 2\pi f$.

Otrzymane równanie różniczkowe nieliniowe można rozwiązać jednym z przybliżonych sposobów, w których otrzymany wynik nie odpowiada w rzeczywistości w pełni danemu równaniu różniczkowemu, ale wielkość błędu może być zmniejszona przez podwyższenie rzędu przybliżenia. Do tych przybliżonych sposobów należą między innymi metody wariacyjne Ritza i Galiorkina [4, 5], przy czym w naszym przypadku wygodniej zastosować metodę Galiorkina ponieważ równanie różniczkowe jest znane i nie potrzeba zestawiać funkcjonału podlegającego minimalizacji.

W tym celu uszeregowujemy poszczególne składniki równania (8) w wyrażenie o postaci

$$L = L_1.\sin\omega t + L_2.\cos\omega t + L_3.\sin 3\omega t + L_4.\cos 3\omega t \qquad (9)$$

gdzie:

$$L_1 + z.S.\omega.10^{-8}\bar{B}_1\sin\varphi_1 + R\alpha\bar{B}_1\cos\varphi_1 + 0{,}75R\beta\bar{B}_1^3\cos\varphi_1 -$$

$$- 0{,}75R\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\cos(2\varphi_1-\varphi_3) + 1{,}5R\beta\bar{B}_1\bar{B}_3^2\cos\varphi_1 + R\acute{S}B_m^n\cos\delta-\bar{U}$$

$$L_2 = z.S.\omega.10^{-8}\bar{B}_1\cos\varphi_1 + R\alpha\bar{B}_1\sin\varphi_1 + 0{,}75R\beta\bar{B}_1^3\sin\varphi_1 +$$

$$+ 0{,}75R\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\sin(2\varphi_1-\varphi_3) + 1{,}5R\beta\bar{B}_1\bar{B}_3^2\sin\varphi_1 + R\acute{S}B_m^n\sin\delta$$

$$L_3 = - 3z.S.\omega.10^{-8}\bar{B}_3\sin\varphi_3 + R\alpha\bar{B}_3\cos\varphi_3 - 0{,}25R\beta\bar{B}_1^3\cos3\varphi_1 +$$

$$+ 0{,}75R\beta\bar{B}_1^3\cos\varphi_3 + 1{,}5R\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\cos3\varphi_3$$

$$L_4 = 3z.S.\omega.10^{-8}\bar{B}_3\cos\varphi_3 + R\alpha\bar{B}_3\sin\varphi_3 - 0{,}25R\beta\bar{B}_1^3\sin3\varphi_1 +$$

$$+ 0{,}75R\beta\bar{B}_1^3\sin\varphi_3 + 1{,}5R\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\sin3\varphi_3$$

Po pomnożeniu kolejno równania (9) przez $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\sin3\omega t$ i $\cos3\omega t$ całkujemy otrzymane wyrażenia w granicach od 0 do T i przyrównujemy do zera. W rezultacie otrzymujemy cztery równania dla wyznaczenia czterech niewiadomych: $\bar{B}_1$, $\bar{B}_3$, φ_1, φ_3:

$$\int_0^T L.\sin\omega t\, dt = \frac{\pi}{\omega} L_1 = 0$$

$$\int_0^T L.\cos\omega t\, dt = \frac{\pi}{\omega} L_2 = 0$$

$$\int_0^T L.\sin3\omega t\, dt = \frac{\pi}{\omega} L_3 = 0$$

$$\int_0^T L.\cos3\omega t\, dt = \frac{\pi}{\omega} L_4 = 0$$

czyli

$$L_1 = 0 \tag{10}$$

$$L_2 = 0 \tag{11}$$

$$L_3 = 0 \tag{12}$$

$$L_4 = 0 \tag{13}$$

Układ równań (10-13) rozwiązujemy ze względu na niewiadome $\bar{B}_1$, $\bar{B}_3$, φ_1 i φ_3 metodą kolejnych przybliżeń, przy czym w pierwszej kolejności zakładamy $\bar{B}_3 = 0$ i $\xi = 0$.

Znalezione wielkości $\bar{B}_1$, $\bar{B}_3$, φ_1 i φ_3 pozwalają z kolei na obliczenie wartości składowych harmonicznych prądu w gałęziach mostka zawierających nieliniową reaktancję indukcyjnościową. W naszym przypadku będą to składowa podstawowa prądu o amplitudzie $\bar{I}_1$ i początkowym kącie fazowym Π_1 oraz składowa trzeciej harmonicznej o amplitudzie $\bar{I}_3$ i kącie fazowym Π_3. W tym celu powracamy raz jeszcze do równania (6), które przekształcamy do postaci sumy chwilowych wartości pierwszej i trzeciej harmonicznej prądu, przy czym każdy z tych prądów składowych wyraża się zależnością:

$$I_1(t) = \Big[\alpha\bar{B}_1\cos\varphi_1 + 0{,}75\beta\bar{B}_1^3\cos\varphi_1 - 0{,}75\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\cos(2\varphi_1-\varphi_3) + 1{,}5\,\beta\bar{B}_1\bar{B}_3^2\cos\varphi_1 + \xi B_m^n\cos\delta\Big]\sin\omega t +$$

$$+\Big[\alpha\bar{B}_1\sin\varphi_1 + 0{,}75\beta\bar{B}_1^3\sin\varphi_1 + 0{,}75\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\sin(2\varphi_1-\varphi_3) + 1{,}5\beta\bar{B}_1\bar{B}_3^2\sin\varphi_1 + \xi B_m^n\sin\delta\Big]\cos\omega t$$

$$I_3(t) = \Big[\alpha\bar{B}_3\cos\varphi_3 - 0{,}25\beta\bar{B}_1^3\cos 3\varphi_1 + 1{,}5\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\cos\varphi_3 + 0{,}75\beta\bar{B}_3^3\cos\varphi_3\Big]\sin 3\omega t +$$

$$+\left[\alpha\bar{B}_3\sin\varphi_3 - 0{,}25\,\beta\bar{B}_1^3\sin 3\varphi_1 + 1{,}5\,\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3\sin\varphi_3 + \right.$$
$$\left. + 0{,}75\beta\bar{B}_3^3\sin\varphi_3\right]\cos 3\omega t$$

Stąd łatwo już można wyznaczyć amplitudy i początkowe kąty fazowe prądów harmonicznych, które w naszym przypadku przyjmą wygląd

$$\bar{I}_1 = \sqrt{K^2 + M^2 + N^2 - 2KM\cos(3\varphi_1-\varphi_3) + 2KN\cos(\varphi_1-\delta) - 2MN\cos(2\varphi_1-\varphi_3+\delta)} \tag{14}$$

$$\bar{I}_3 = \sqrt{W^2 + Z^2 - 2WZ\cos(\varphi_3-3\varphi_1)} \tag{15}$$

$$\Pi_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{K\sin\varphi_1 + M\sin(2\varphi_1-\varphi_3) + N\sin\delta}{K\cos\varphi_1 - M\cos(2\varphi_1-\varphi_3) + N\cos\delta} \tag{16}$$

$$\Pi_3 = \operatorname{arc\,tg}\frac{W\sin\varphi_3 - Z\sin 3\varphi_1}{W\cos\varphi_3 - Z\cos 3\varphi_1} \tag{17}$$

przy czym

$$K = \alpha\bar{B}_1 + 0{,}75\beta\bar{B}_1^3 + 1{,}5\beta\bar{B}_1\bar{B}_3^2$$

$$M = 0{,}75\,\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3$$

$$N = \xi\,\bar{B}_m^n$$

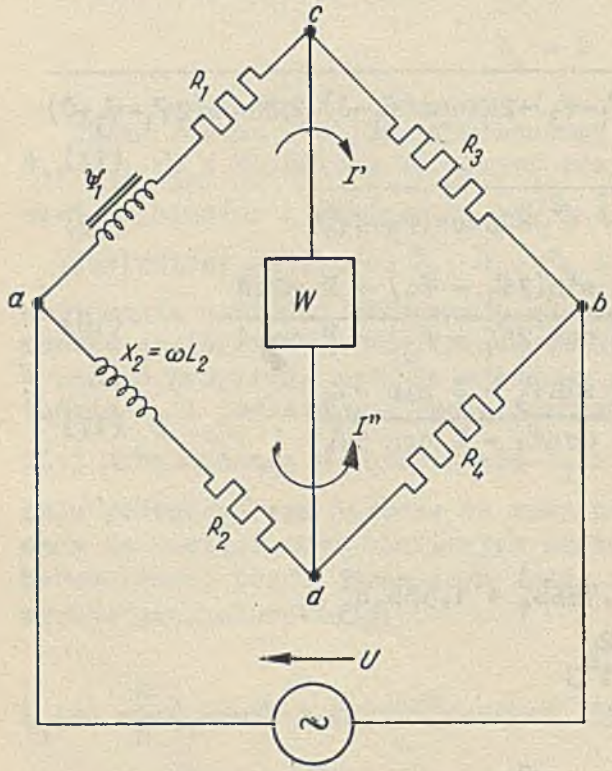
$$W = \alpha\bar{B}_3 + 1{,}5\,\beta\bar{B}_1^2\bar{B}_3 + 0{,}75\,\beta\bar{B}_3^3$$

$$Z = 0{,}25\,\beta\bar{B}_1^3$$

Otrzymane wielkości są wielkościami aproksymowanymi, ponieważ do ich wyznaczenia należy się posłużyć znalezionymi poprzednio, metodą kolejnych przybliżeń, parametrami $\bar{B}_1$, $\bar{B}_3$, φ_1 i φ_3, jednakże dla uproszczenia zapisu pominięto tu symbol "a" (aproksymacja) przy tych wielkościach. Wielkości te służą jako podstawa do obliczeń składowych napięć i prądów w układach mostkowych z nieliniowymi indukcyjnościami.

3. Mostek z jedną reaktancją liniową i jedną nieliniową

Mostek Maxwella z jedną reaktancją liniową i jedną nieliniową przedstawia rys. 3. Dla ułatwienia dalszej analizy i rozważań gałąź "a-c-b" mostka, zawierającą nieliniową indukcyjność będziemy nazywać gałęzią nieparzystą zaś gałąź "a-d-b" z indukcyjnością liniową - gałęzią parzystą mostka. Wszystkie wielkości odniesione do gałęzi nieparzystej będą oznaczane - jedną kreską, zaś do gałęzi parzystej - dwiema kreskami u góry symbolu (np. chwilowa wartość natężenia prądu w gałęzi nieparzystej będzie oznaczona jako I'(t), a w gałęzi parzystej jako I"(t)). Załóżmy jeszcze, że mostek jest zasilany ze źródła napięciowego o napięciu czysto sinusoidalnym i pomijalnej oporności wewnętrznej, a wskaźnik równowagi mostka (W) ma impedancję wejściową na tyle dużą, że praktycznie nie obciąża mostka.



Rys. 3. Mostek Maxwella z jedną reaktancją nieliniową

W oparciu o schemat mostka, napięcie wyjściowe mostka może być wyrażone jako różnica napięć między ramionami "a-c" i "a-d" lub "b-c" i "b-d". Ten drugi przypadek jest dla nas korzystniejszy, ponieważ ramiona "b-c" i "b-d" zawierają tylko rezy-

stancje R_3 i R_4. Wartość chwilowa napięcia wyjściowego może być więc wyrażona jako:

$$U_{wyj}(t) = U_{cd}(t) = U_{bc}(t) - U_{bd}(t) \tag{18}$$

Napięcie $U_{bc}(t)$ stanowi spadek napięcia od prądu $I'(t)$ w gałęzi nieparzystej na rezystancji R_3; napięcie $U_{bd}(t)$ - spadek napięcia od prądu $I''(t)$ w gałęzi parzystej na rezystancji R_4. Ponieważ gałąź nieparzysta zawiera indukcyjnościową reaktancję nieliniową więc zgodnie z przeprowadzoną analizą prąd w tej gałęzi będzie stanowić sumę prądów harmonicznych. Prąd w gałęzi parzystej będzie podobnie jak w mostku z reaktancjami liniowymi - prądem sinusoidalnym. W rezultacie otrzymamy więc następujące wyrażenia dla napięć w ramionach "b-c" i "b-d" mostka:

$$U_{bc}(t) = I'(t).R_3 = I'_1(t)\,R_3 + I'_3(t)\,R_3 \tag{19}$$

$$U_{bd}(t) = I''(t).R_4 \tag{20}$$

przy czym najogólniej

$$I'(t) = I'_1 \sin(\omega t + \Pi'_1) + I'_3 \sin(3\omega t + \Pi'_3) \tag{21}$$

$$I''(t) = I'' \sin(\omega t + \Pi'') = I''_1 \sin(\omega t + \Pi''_1) \tag{22}$$

W oparciu o wzory (18-22) napięcie wyjściowe mostka można więc przedstawić jako sumę składowych harmonicznych:

$$U_{wyj}(t) = U_{w1}(t) + U_{w3}(t) + \ldots \tag{23}$$

przy czym

$$U_{w1}(t) = \left[\bar{I}'_1 R_3 \cos \Pi'_1 - \bar{I}''_1 R_4 \cos \Pi''_1\right] \sin \omega t +$$

$$+ \left[\bar{I}'_1 R_3 \sin \Pi'_1 - \bar{I}''_1 R_4 \sin \Pi''_1\right] \cos \omega t \tag{24}$$

$$U_{w3}(t) = \bar{I}'_3 R_3 \cos \Pi'_3 \cdot \sin 3\omega t + \bar{I}'_3 R_3 \sin \Pi'_3 \cdot \cos 3\omega t \tag{25}$$

Amplituda pierwszej harmonicznej napięcia wyjściowego oraz odpowiedni początkowy kąt fazowy wyrażą się wzorami:

$$\bar{U}_{w1} = \sqrt{\bar{I}'^2_1 \cdot R_3^2 + \bar{I}''^2_1 \cdot R_4^2 - 2\bar{I}'_1 \bar{I}''_1 R_3 R_4 \cos(\Pi'_1 - \Pi''_1)} \tag{26}$$

$$\Omega_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\bar{I}'_1 R_3 \sin \Pi'_1 - \bar{I}''_1 R_4 \sin \Pi''_1}{\bar{I}'_1 R_3 \cos \Pi'_1 - \bar{I}''_1 R_4 \cos \Pi''_1} \tag{27}$$

Amplitudę trzeciej harmonicznej napięcia wyjściowego obliczamy w danym przypadku wprost jako $\bar{U}_{w3} = \bar{I}_3 R_3$, kąt fazowy wynosi oczywiście $\Omega_3 = \Pi'_3$.

Z równań (24) i (25) wynika, że mostek da się zrównoważyć tylko dla składowej podstawowej ($U_{w1}(t) = 0$), co jest zupełnie oczywiste ponieważ tylko w jednej gałęzi znajduje się element nieliniowy. Warunek równowagi dla pierwszej harmonicznej napięcia wyjściowego mostka znajdujemy kładąc $U_{w1}(t) = 0$, co ma miejsce wówczas gdy są spełnione równości:

$$\bar{I}'_1 R_3 \cos \Pi'_1 - \bar{I}''_1 R_4 \cos \Pi''_1 = 0$$

$$\bar{I}'_1 R_3 \sin \Pi'_1 - \bar{I}''_1 R_4 \sin \Pi''_1 = 0$$

Wynika stąd, że dla zerowania pierwszej harmonicznej napięcia wyjściowego muszą być spełnione dwa warunki częściowe:

$$\bar{I}'_1 R_3 = \bar{I}''_1 R_4 \qquad \text{czyli} \qquad \frac{R_3}{R_4} = \frac{\bar{I}''_1}{\bar{I}'_1} \tag{28}$$

oraz

$$\Pi_1' = \Pi_1'' = \Pi_1 \tag{29}$$

Jeśli przyjmiemy, że równoważenie rozpatrywanego mostka będzie się odbywać przez zmianę wartości rezystancji R_2 i R_4, co w naszym przypadku jest najwygodniejsze [6], będziemy mogli w oparciu o wyrażenia (28) i (29) znaleźć wartości rezystancji $R_{2(o)}$ i $R_{4(o)}$, przy których następuje równowaga mostka dla pierwszej harmonicznej napięcia wyjściowego. Otrzymujemy więc:

$$R_{2(o)} = \frac{X_2}{|\sin \Pi_1|} \left(|\cos \Pi_1| - R_3 \frac{\bar{I}_1'}{\bar{U}} \right) \tag{30}$$

$$R_{4(o)} = R_3 \frac{\bar{I}_1'}{\bar{U}} \frac{X_2}{|\sin \Pi_1|} \tag{31}$$

Napięcie wyjściowe mostka zrównoważonego, zawierające tylko składową trzeciej harmonicznej, pochodzącej od gałęzi nieparzystej możemy obliczyć wprost jako $\bar{U}_{w(o)} = \bar{I}_3' R_3$, a uwzględniając warunek równowagi (28) jako:

$$\bar{U}_{w(o)} = \bar{I}_3' R_4 \frac{\bar{I}_1''}{\bar{I}_1'} = \bar{U}_{bd} \frac{\bar{I}_3'}{\bar{I}_1'} \tag{32}$$

przy czym kąt fazowy wynosi $\Omega_3 = \Pi_3'$.

Wartości $\bar{I}_1'$ i $\bar{I}_3'$ znajdujemy z wzorów (14) i (15), kąt fazowy Π_3' z wzoru (17).

Ilustrację praktyczną dotychczasowych wywodów mogą stanowić przykłady obliczeniowe oparte na doświadczalnie zestawionym mostku i porównane z wynikami pomiarowymi otrzymanymi na tym mostku.

Mostek zestawiono według schematu przedstawionego na rys. 3. Indukcyjność nieliniową stanowił toroid o 1000 zwojach, z rdzeniem o przekroju 2 cm^2, wykonanym z blachy "anizoperm" o gru-

bości 0,15 mm. Rezystancja własna uzwojenia toroidu wynosiła $R'_{wł} = 8,5\Omega$.

Z wstępnych pomiarów pętli histerezy dla rdzenia toroidu wyznaczono dla indukcyjności nieliniowej następujące zależności:

$$I_{śr.a}[A] = 0,08.10^{-6}B[Gs] + 0,005.10^{-12}B^3[Gs]$$

$$\bar{I}_k\ [A] = 52,5.10^{-6}\ B_m^{0,51}\ [Gs]$$

Indukcyjność liniowa w gałęzi parzystej mostka wynosiła $L_2 = 1$ H; rezystancja własna cewki stanowiącej tę indukcyjność $R''_{wł} = 138\Omega$. Rezystancje w gałęzi nieparzystej mostka wynosiły: $R_1 = R'_{wł} + 491,5\Omega = 500\Omega$ i $R_3 = 2000\Omega$. Napięcie zasilające mostek (amplituda), o częstotliwości 50 Hz wynosiło 50 V. Obliczone wartości rezystancji równoważących mostek $R_{2(o)}$ i $R_{4(o)}$ wyniosły odpowiednio

$$R_{2(o)} = 768,7\Omega \quad \text{i} \quad R_{4(o)} = 200,5\Omega$$

Równowaga praktycznie zrealizowanego mostka następowała przy:

$$R_{2(o)} = 711\Omega \text{ (łącznie z rezystancją } R''_{wł})$$

i $$R_{4(o)} + 195\Omega.$$

Załóżmy z kolei, że na mostku zrównoważonym przy napięciu zasilającym $\bar{U}_{(o)} = 50$ V, zmieniono amplitudę napięcia zasilania w granicach od 0 do 80 V. Wiadomo, że w mostku z elementami nieliniowymi warunek równowagi nie jest niezależny od napięcia zasilającego. Interesującym będzie więc w naszym przypadku charakter zmian pierwszej i ewentualnie trzeciej harmonicznej napięcia wyjściowego mostka w funkcji zmian napięcia zasilającego - przy zmianach napięcia zasilającego w pewnych granicach - zakładając, że mostek jest zrównoważony dla jednej z wartości napięcia zasilającego, leżącej w tych przyjętych granicach.

Dla ułatwienia dalszych rozważań wprowadzono w miejsce zmiennej niezależnej "napięcie zasilania" - zmienną niezależną k wyrażoną stosunkiem napięcia zasilania $\bar{U}$ doprowadzonego do mostka, do napięcia zasilania $\bar{U}_{(o)}$, przy którym mostek został zrównoważony. Otrzymamy w rezultacie zależności normowane:

$$\bar{U}_{w1} = F_1 \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_{(o)}}\right) = F_1(k),$$

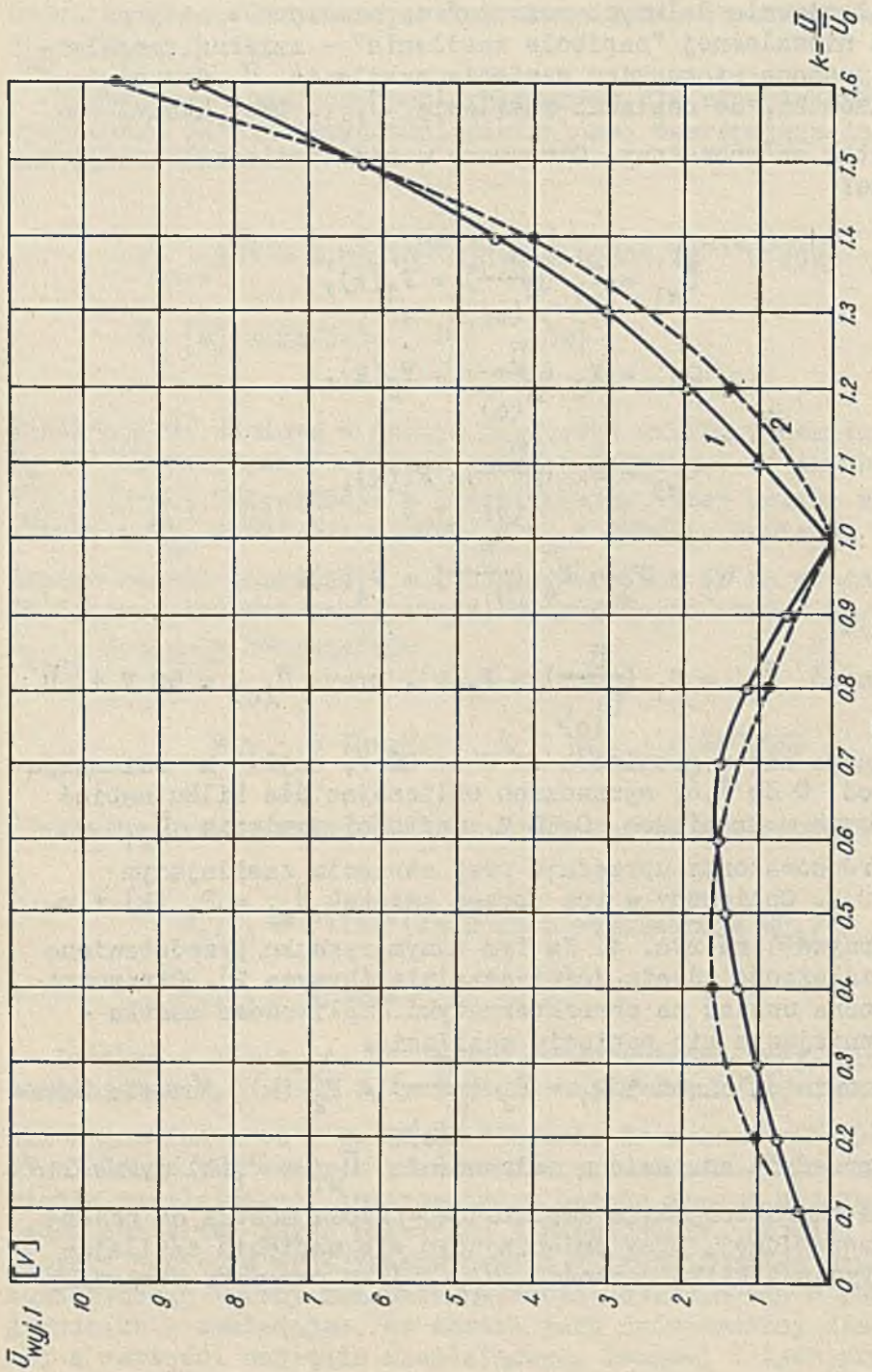
$$\Omega_1 = F_2 \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_{(o)}}\right) = F_2(k),$$

$$\bar{U}_{w3} = F_3 \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_{(o)}}\right) = F_3(k),$$

$$\Omega_3 = \Pi'_3 = F_4 \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_{(o)}}\right) = F_4(k).$$

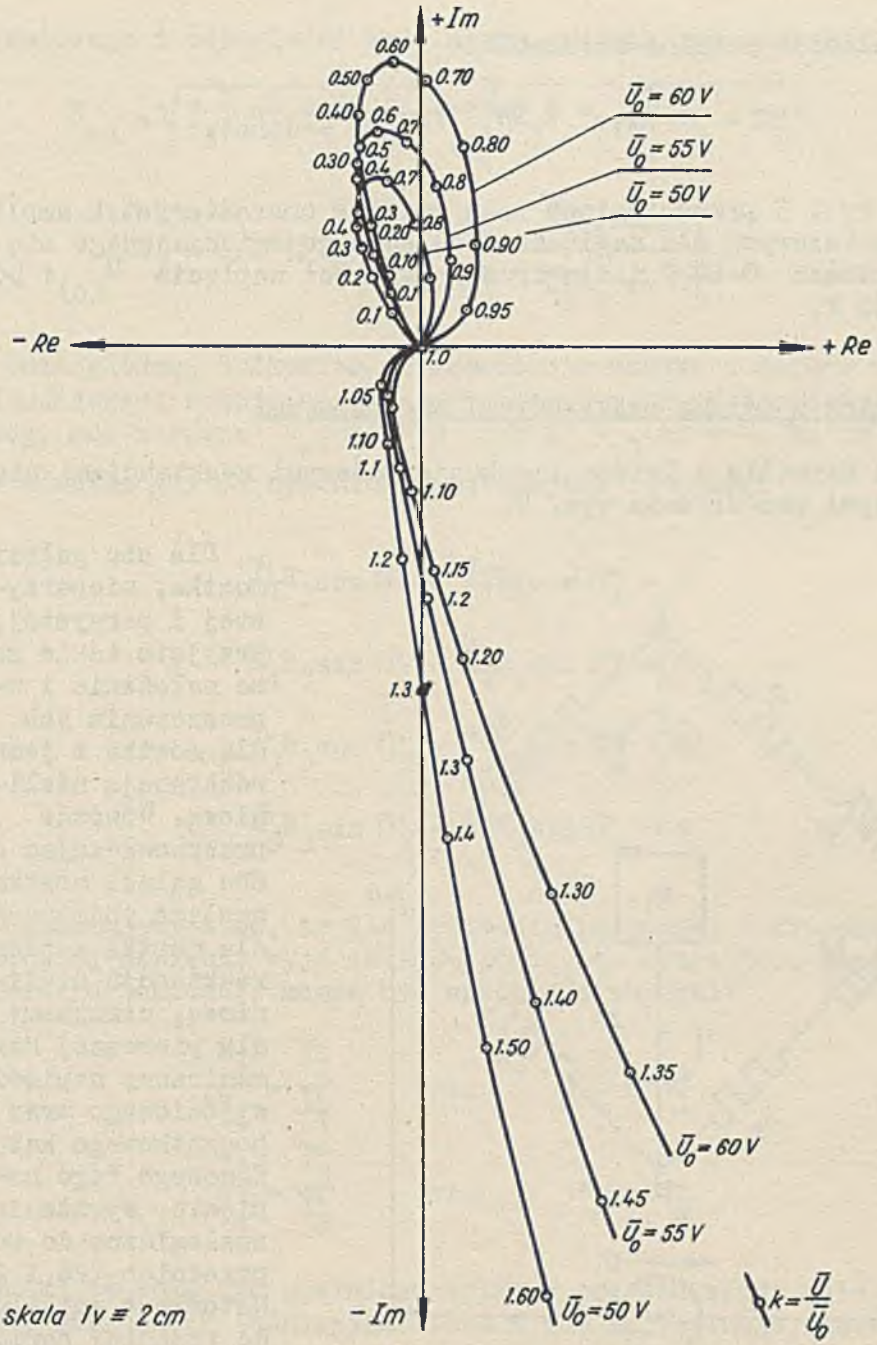
Zależność $\bar{U}_{w1} = F_1 \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_{(o)}}\right) = F_1(k)$, przy $\bar{U}_{(o)} = 50$ V i $\bar{U}$ zmieniającym się w granicach od 0 do 80 V, czyli k zmieniającym się od 0 do 1,6, wyznaczono obliczając dla kilku napięć zasilających w granicach 0-80 V, wartości napięcia $\bar{U}_{w1}$ w mostku zrównoważonym uprzednio przy napięciu zasilającym $\bar{U}_{(o)} = 50$ V. Obliczony w ten sposób związek $\bar{U}_{w1} = F_1$ (k) ilustruje krzywa 1 na rys. 4. Na tym samym rysunku przedstawiono tę samą zależność zdjętą doświadczalnie (krzywa 2). Otrzymane krzywe można uważać za charakterystyki amplitudowe mostka - przy zmieniającym się napięciu zasilania.

Obliczenie zależności $\Omega_1 = F_2 \left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_{(o)}}\right) = F_2$ (k) pozwala łącznie z poprzednio znalezioną zależnością $\bar{U}_{w1} = F_1(k)$ wykreślić wyjściową charakterystykę amplitudowo-fazową mostka na płaszczyźnie zespolonej, przy zmieniającym się napięciu zasilającym. Przyjąwszy kilka wartości $\bar{U}_{(o)}$ jako parametr otrzymamy



Rys. 4. Zależność $\bar{U}_{w1} = F_1\left(\frac{U}{U_{(o)}}\right) = F_1(k)$, przy $\bar{U}_{(o)} = 50$ V:

1) obliczona analitycznie, 2) zdjęta doświadczalnie



Rys. 5. Rodzina charakterystyk $\hat{\bar{U}}_{w1} = F\left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_{(o)}}\right)$ $\bar{U}_{(o)}$=const

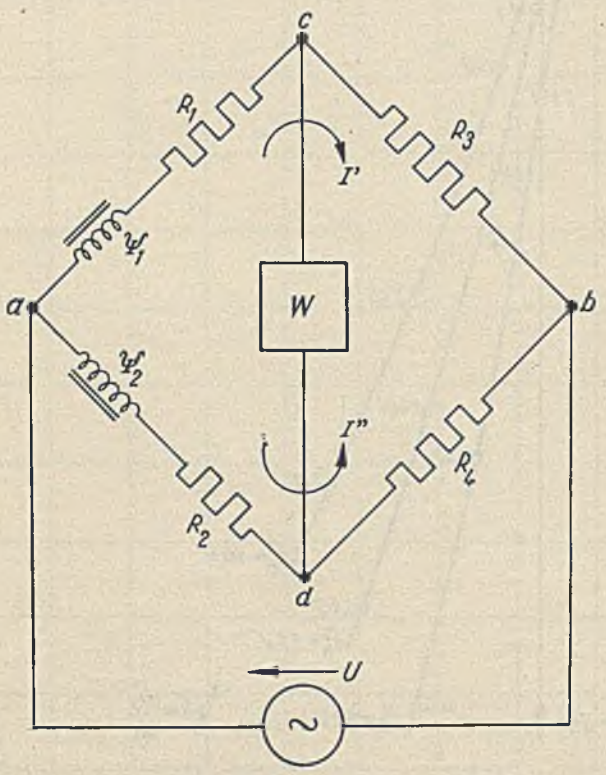
w rezultacie rodzinę zależności

$$\bar{U}_{w1} = F\left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_{(o)}}\right) \bar{U}_{(o)} = \text{const.}$$

Na rys. 5 przedstawiono taką rodzinę charakterystyk amplitudowo-fazowych dla napięcia zasilającego zmieniającego się w granicach 0-80 V i dla trzech wartości napięcia $\bar{U}_{(o)}$: 50, 55 i 60 V.

4. Mostek z dwiema reaktancjami nieliniowymi

Mostek Maxwella z dwiema indukcyjnościowymi reaktancjami nieliniowymi przedstawia rys. 6.



Rys. 6. Mostek Maxwella z dwiema reaktancjami nieliniowymi

Dla obu gałęzi mostka, nieparzystej i parzystej, przyjęto takie same założenia i uproszczenia jak dla mostka z jedną reaktancją nieliniową. Wówczas przeprowadzając dla obu gałęzi mostka analizę podobną jak dla mostka z jedną reaktancją nieliniową, otrzymamy dla pierwszej harmonicznej napięcia wyjściowego oraz początkowego kąta fazowego tego napięcia, wyrażenia analogiczne do poprzednich (26 i 27). Natomiast amplituda trzeciej harmonicznej napięcia

wyjściowego i odpowiedni kąt fazowy, wyrażą się wzorami:

$$\bar{U}_{w3} = \sqrt{\bar{I}_3'^2 \cdot R_3^2 + \bar{I}_3''^2 \cdot R_4^2 - 2\bar{I}_3'\bar{I}_3'' R_3 R_4 \cos(\Pi_3' - \Pi_3'')} \tag{33}$$

$$\Omega_3 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\bar{I}_3' R_3 \sin \Pi_3' - \bar{I}_3'' R_4 \sin \Pi_3''}{\bar{I}_3' R_3 \cos \Pi_3' - \bar{I}_3'' R_4 \cos \Pi_3''} \tag{34}$$

Bezwzględne, całkowite zrównoważenie mostka z dwiema indukcyjnościowymi reaktancjami nieliniowymi może nastąpić tylko wtedy, gdy zarówno $U_{w1}(t) = 0$ jak i $U_{w3}(t) = 0$. Ma to miejsce wówczas gdy są spełnione następujące równości:

$$\bar{I}_1' R_3 \cos \Pi_1' - \bar{I}_1'' R_4 \cos \Pi_1'' = 0$$

$$\bar{I}_1' R_3 \sin \Pi_1' - \bar{I}_1'' R_4 \sin \Pi_1'' = 0$$

$$\bar{I}_3' R_3 \cos \Pi_3' - \bar{I}_3'' R_4 \cos \Pi_3'' = 0$$

$$\bar{I}_3' R_3 \sin \Pi_3' - \bar{I}_3'' R_4 \sin \Pi_3'' = 0$$

Wnioskujemy stąd, że dla zerowania pierwszej i trzeciej harmonicznej napięcia wyjściowego (pomijając oczywiście wszystkie wyższe harmoniczne) muszą być spełnione warunki:

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{\bar{I}_1''}{\bar{I}_1'} \quad \text{oraz} \quad \Pi_1' = \Pi_1'' \tag{35}$$

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{\bar{I}_3''}{\bar{I}_3'} \quad \text{oraz} \quad \Pi_3' = \Pi_3'' \tag{36}$$

Warunki te mogą być spełnione tylko w przypadku, gdy obie nieliniowe reaktancje indukcyjnościowe i ich rezystancje własne są identyczne. W przypadku gdy są one różne nie można jednocześnie spełnić warunków (35) i (36); mostek daje się wówczas zrównoważyć tylko dla jednej częstotliwości np. dla częstotliwości pod-

stawowej, na wyjściu mostka pojawia się wówczas napięcie zawierające wyższe harmoniczne.

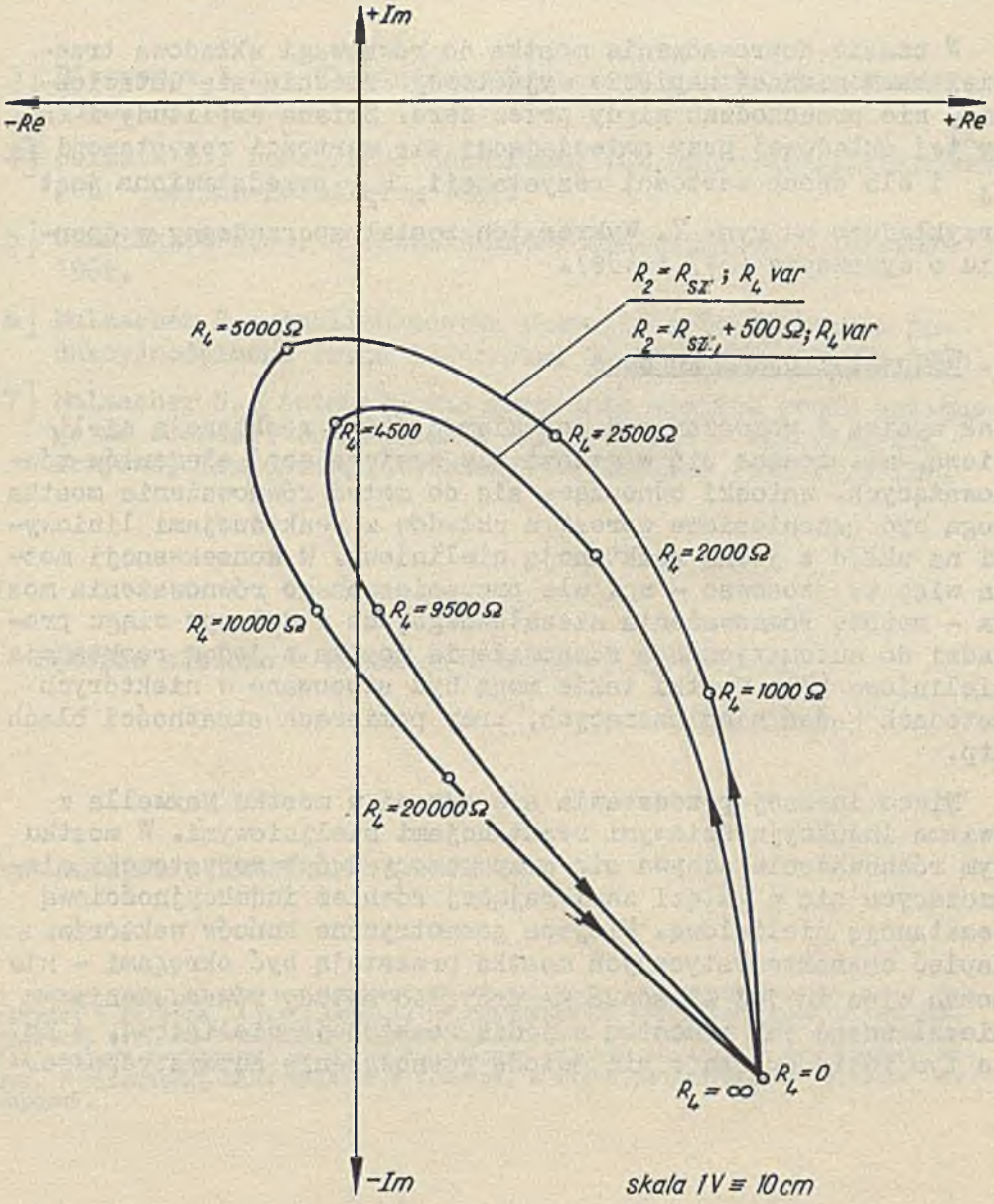
W przypadku równoważenia mostka tylko dla pierwszej harmonicznej, czyli dla $U_{w1}(t) = 0$ muszą być spełnione warunki (35). Składową trzeciej harmonicznej napięcia wyjściowego i jej kąt fazowy wyrażą się wówczas wzorami:

$$\bar{U}_{w(o)} = \bar{U}_{w3} \cdot R_4 \sqrt{\left[\bar{I}'_3 \frac{\bar{I}''_1}{\bar{I}'_1} \cos\Pi'_3 - \bar{I}'' \cos\Pi''_3\right]^2 + \left[\bar{I}'_3 \frac{\bar{I}''_1}{\bar{I}'_1} \sin\Pi'_3 - \bar{I}''_3 \sin\Pi''_3\right]^2} \tag{37}$$

$$\operatorname{tg}\Omega_{3(o)} = \frac{1 - \dfrac{\bar{I}''_3\,\bar{I}'_1}{\bar{I}'_3\,\bar{I}''_1} \cdot \dfrac{\sin\Pi''_3}{\sin\Pi'_3}}{1 - \dfrac{\bar{I}''_3\,\bar{I}'_1}{\bar{I}'_3\,\bar{I}''_1} \cdot \dfrac{\cos\Pi''_3}{\cos\Pi'_3}} \cdot \operatorname{tg}\Pi'_3 \tag{38}$$

Podane warunki równowagi mostka z dwiema nieliniowymi reaktancjami indukcyjnościowymi nie pozwalają na proste analityczne wyznaczenie rezystancji równoważących mostek: R_2 i R_4. Chcąc znaleźć wartości tych rezystancji trzeba się posłużyć metodą graficzną opartą na kolejnych przybliżeniach. W tym celu należy sporządzić wykres miejsc geometrycznych wektora składowej podstawowej napięcia U_{bd}, przy zmianie R_4 w granicach możliwie szerokich oraz przy założeniu, że R_2 = const. Należy mieć przy tym na uwadze fakt, że w skład rezystancji R_2 wchodzi w rzeczywistości jeszcze pewna zastępcza rezystancja szeregowa, reprezentująca straty histerezowe. Wpływ tej rezystancji na wartość prądu w obwodzie jest uwzględniany wprost w obliczeniach dzięki nie pomijaniu wpływu histerezy; wynika z tego, że wartość tej rezystancji szeregowej R_{sz} nie musi być osobno wyznaczana.

Otrzymane w ten sposób wykresy miejsc geometrycznych nie są oczywiście wycinkami okręgów, jak to miałoby miejsce w przypadku indukcyjności liniowych i w swym kształcie odbiegają znacznie od koła.



Rys. 7. Wykres amplitudowo-fazowy składowej trzeciej harmonicznej napięcia wyjściowego w mostku Maxwella z dwiema nieliniowymi indukcyjnościami

W czasie doprowadzania mostka do równowagi składowa trzeciej harmonicznej napięcia wyjściowego zmienia się ustawicznie, nie przechodząc nigdy przez zero. Zmiana amplitudy i fazy tej składowej przy zmieniającej się wartości rezystancji R_4 i dla dwóch wartości rezystancji R_2 przedstawiona jest przykładowo na rys. 7. Wykres ten został sporządzony w oparciu o wyrażenia (37) i (38).

5. Wnioski i uwagi końcowe

Jak wynika z rozważań nad mostkiem z jedną reaktancją nieliniową, mieszczącą się w gałęzi nie zawierającej elementów równoważących, wnioski odnoszące się do metod równoważenia mostka mogą być przeniesione wprost z układów z reaktancjami liniowymi na układ z jedną reaktancją nieliniową. W konsekwencji można więc tu stosować - np. dla przyspieszonego równoważenia mostka - metodę równoważenia niezależnego, co w dalszym ciągu prowadzi do automatycznego równoważenia mostka z jedną reaktancją nieliniową [7]. Mostki takie mogą być stosowane w niektórych metodach badań nieniszczących, przy pomiarach stratności blach itp.

Nieco inaczej przedstawia się sprawa w mostku Maxwella z dwiema indukcyjnościowymi reaktancjami nieliniowymi. W mostku tym równoważenie odbywa się przy pomocy dwóch rezystancji mieszczących się w gałęzi zawierającej również indukcyjnościową reaktancję nieliniową. Miejsca geometryczne końców wektorów napięć charakterystycznych mostka przestają być okręgami - nie można więc tu już stosować na przykład metody równoważenia niezależnego jak w mostku z jedną reaktancją nieliniową, a co za tym idzie opartą o nią metodę równoważenia automatycznego.

LITERATURA

[1] Zagajewski T.: Nieliniowe mostki prądu zmiennego. Prace Badawcze PIT; Nr 2 1950 r. str. 69-75.

[2] Hague B.: Alternating Current Bridge Methods - London 1946.

[3] Biessonow Ł.A.: Elektriczeskije ciepi so stalju - Moskwa 1948.

[4] Collatz L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen - Berlin-Heidelberg 1955.

[5] Cunningham W.J.: Analiza układów nieliniowych - Warszawa 1962.

[6] Malzacher S.: Analiza mostka Maxwella o nieliniowych indukcyjnościach. Praca doktorska. Politechnika Śląska 1963.

[7] Malzacher S.: Automatyczne zerowanie mostków prądu zmiennego na zasadzie równoważenia niezależnego - Materiał III Krajowej Konferencji Automatyki - Gliwice 1964 (tom II).

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 10.XI.1965 r.

МОСТ МАКСВЕЛЛА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ИНДУКТИВНОСТЯМИ

Р е з ю м е

В статье представлено математический анализ моста содержащего одну или две катушки с железом. Анализ основан на приближенной петли гистерезиса. Находя, величину тока из нелинейного, дифференциального уравнения, для ветви содержащей катушки с железом, мы можем определить условия равновесия для такого моста. В заключении даны численные примеры, а также результаты контрольных измерений.

MAXWELL'S BRIDGE WITH NONLINEAR INDUCTANCES

S u m m a r y

The paper presents mathematic analysis of Maxwell's bridge with one or two iron-cored coils. The analysis is based on approximated magnetic histeresis loop. Having calculated a current value from a nonlinear differential equation for bridge arm with iron-cored coil, we can find the conditions for balance. Some examples, illustrating the described method and results of verifying measurements are given in the paper.