ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: AUTOMATYKA z. 7 Nr kol. 167

OLGIERD PALUSIŃSKI
Katedra Teorii Regulacji

O STABILNOŚCI STOWARZYSZONYCH RÓWNAŃ KONSERWATYWNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono dowód algebraiczny sformułowanego w [1] oraz [2] twierdzenia o stabilności stowarzyszonych równań konserwatywnych. Przedstawiono pojęcie indeksów Cauchy oraz niektóre ich własności. W dowodzie wykorzystano pracę Routha, który wykazał, że wskaźnik Cauchy ilorazu wielomianów charakterystycznych równań konserwatywnych stowarzyszonych z równaniem stabilnym asymptotycznie wyraża się liczbą taką samą jak rząd równania. Pokazano, że miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego równania konserwatywnego są proste i urojone. Ta własność wielomianu charakterystycznego jest warunkiem koniecznym i wystarczającym stabilności równania konserwatywnego.

W pracy [1] oraz [2] zwrócono uwagę na pewną interesującą właściwość stabilnych równań różniczkowych i sformułowano następujące twierdzenie:

Jeżeli równanie różniczkowe liniowe

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \dots = 0 \qquad (1)$$

jest stabilne asymptotycznie to stowarzyszone z nim równanie konserwatywne

$$a_0x^{(n)} + a_2x^{(n-2)} + \dots = 0 \qquad (2)$$

jest stabilne nieasymptotycznie.

Warunek stabilności asymptotycznej równania (1) jest wystarczający dla stabilności równania (2). W pracy [1] oraz [2] twierdzenie to zostało udowodnione w oparciu o charakterystyki częstotliwości równań liniowych. W odróżnionych od tej metody w niniejszej pracy przedstawiony będzie dowód algebraiczny, w którym wykorzystuje się podstawowe własności wskaźników Cauchy.

Wielomian charakterystyczny stabilnego równania liniowego typu (1) jest wielomianem Hurwitza o postaci:

$$f(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \dots = 0 \qquad (3)$$

Wielomian charakterystyczny stowarzyszonego równania konserwatywnego ma formę

$$f'_1(p) = a_0p^n+a_2p^{n-2}+\dots+a_{n-2}p^2+a_n = f_1(p^2) = 0 \qquad (4)$$

w przypadku n = 2 m, lub

$$f'_2(p) = a_0p^n+a_2p^{n-2}+\dots+a_{n-3}p^3+a_{n-1}p = pf_2(p^2) = 0 \qquad (4')$$

w przypadku n = 2 m + 1.

Można łatwo pokazać, że równanie konserwatywne jest stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego są urojone i jednokrotne.

Wykorzystując równanie (4) lub (4') można wielomian (3) przedstawić w postaci

$$f(p) = f_1(p^2)+pF_1(p^2) \qquad (5)$$

w przypadku gdy n = 2 m lub

$$f(p) = pf_2(p^2) + F_2(p^2) \qquad (5)$$

w przypadku gdy $n = 2m + 1$, przy czym funkcje $F_1(p^2)$ i $F_2(p^2)$ są wielomianami o następującej budowie

$$F_1(p^2) = a_1 p^{n-2} + a_3 p^{n-4} + \ldots + a_{n-3} p^2 + a_{n-1}$$

$$F_2(p^2) = a_1 p^{n-1} + a_3 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2} p^2 + a_n$$

W dowodzie korzysta się z relacji jaką uzyskał Routh dla wielomianów Hurwitza [3]

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_1 p^{n-1} - a_3 p^{n-3} + a_5 p^{n-5} - \ldots}{a_0 p^n - a_2 p^{n-2} + a_4 p^{n-4} - \ldots} = n \tag{6}$$

Symbol $I_{-\infty}^{+\infty}$ oznacza wskaźnik Cauchy ilorazu dwu wielomianów w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Dla przypomnienia przytoczymy definicję wskaźnika Cauchy. Wskaźnikiem Cauchy $I_a^b\, R(p)$ ułamkowej funkcji rzeczywistej nazywa się różnicę pomiędzy ilością biegunów rzeczywistych zawartych w przedziale (a,b), w których funkcja przechodzi od $-\infty$ do $+\infty$ a ilością biegunów, w których funkcja przechodzi od $+\infty$ do $-\infty$. Badanie przebiegu funkcji przeprowadza się zmieniając argument p od wartości a do wartości b.

Wprowadzając oznaczenia stosowane we wzorze (5) do wzoru (6) uzyskuje się

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{-p\, F_1(-p^2)}{f_1(p^2)} = n \tag{7}$$

Celem przekształcenia lewej strony równania (7) wykorzystuje się następujące podstawowe własności wskaźników Cauchy:

1° Zmiana wartości skrajnych przedziału

$$I_a^b\, R(x) = -I_b^a\, R(x).$$

2^{o} Mnożenie przez funkcję o stałym znaku w przedziale (a,b)

$$I_a^b R_1(x)R(x) = \operatorname{sign} R_1(x)\, I_a^b R(x)$$

jeżeli $R_1(x) \neq 0$, $R_1(x) \neq \infty$, dla każdego $x \in (a,b)$

3^{o} Rozbicie na podprzedziały. Dla $a<c<b$

$$I_a^b R(x) = I_a^c R(x) + I_c^b R(x) + \eta_c$$

gdzie:

$\eta_c = 0$ jeżeli c nie jest biegunem, lub jeżeli funkcja nie zmienia znaku przy przejściu od c - o do c + o,

$\eta_c = +1$ jeżeli c jest biegunem, w którym funkcja zmienia wartość od $-\infty$ do $+\infty$ przy wzroście argumentu,

$\eta_c = -1$ w przypadku zmiany wartości funkcji od $+\infty$ do $-\infty$.

4^{o} Wskaźnik Cauchy'ego funkcji nieparzystej. Jeżeli

$$R(-x) = -R(x), \quad \text{to} \quad I_a^o R(x) = -I_{-a}^o R(x)$$

Korzystając z własności 2^{o} i 3^{o} można przekształcić lewą stronę równości (7) do formy

$$L = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{-pF_1(-p^2)}{f_1(p^2)} = -\left[I_{\infty}^{o} \frac{pF_1(-p^2)}{f_1(-p^2)} + I_c^{\infty} \frac{pF_1(-p^2)}{f_1(-p^2)} \right]$$

gdzie $\eta_o = 0$, ponieważ zero nie jest biegunem.

Korzystając z własności 1^{o} uzyskuje się

$$L = -\left[I_{-\infty}^{o} \frac{pF_1(-p^2)}{f_1(-p^2)} - I_{\infty}^{o} \frac{pF_1(-p^2)}{f_1(-p^2)} \right]$$

Ponieważ badana funkcja jest nieparzysta można w oparciu o 4^o napisać

$$L = -\left[I^o_{-\infty} \frac{pF_1(-p^2)}{f_1(-p^2)} + I^o_{-\infty} \frac{pF_1(-p^2)}{f_1(-p^2)} \right] = -2I^o_{\infty} \frac{pF_1(-p^2)}{f_1(-p^2)}$$

Wykorzystując ponownie własności 2^o uzyskuje się

$$L = 2I^o_{-\infty} \frac{F_1(-p^2)}{f_1(-p^2)} = 2I^o_{-\infty} \frac{F_1(u)}{f_1(u)}$$

gdzie $u = -p^2$

Ponieważ otrzymane wyrażenie zgodnie z równaniem (7) ma wartość $n = 2\,m$, uzyskuje się ostatecznie

$$I^o_{-\infty} \frac{F_1(u)}{f_1(u)} = m \tag{8}$$

Otrzymana relacja wskazuje, że funkcja $\frac{F_1(u)}{f_1(u)}$ posiada w przedziale otwartym $(-\infty\ ,\ o)$ m różnych biegunów rzeczywistych. Mianownik $f_1(u)$ jest wielomianem stopnia m, wobec tego relacja (8) dowodzi słuszności twierdzenia o stabilności równania konserwatywnego stowarzyszonego z liniowym równaniem stabilnym, ponieważ wszystkie miejsca zerowe u_k wielomianu $f_1(u)$ są ujemne, jednokrotne. Miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego równania (2) są urojone, jednokrotne zgodnie z relacją:

$$p_k = \pm\sqrt{u_k} \qquad u_k < 0, \quad k = 1,2,\ldots, m$$

W podobny sposób przeprowadza się dowód twierdzenia dla przypadku gdy rząd równania wyraża się liczbą nieparzystą n=2m+1.

LITERATURA

[1] Gille J.G., Węgrzyn S.: Energetyczna teoria stabilności III KKA Gliwice 1964.

[2] Gille J.C., Węgrzyn S.: Sur la stabilité des équations conservatives associées. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, S.S.T Nr 6 W-wa 1964.

[3] Gantmacher F.R.: Teorija matric, 491 str. Fizmatgiz Moskwa 1954.

[4] Mišina A.P.: Wysšaja algebra, 300 str. Fizmatgiz Moskwa 1962.

[5] Palusiński O.: Note sur la stabilité des équations conservatives associées, C.R.Acad. Sc Paris, t.260 p.5707 Paryż 1965.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 3.XI.1965 r.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АССОЦИРОВАННЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

В статье представлено алгебраическое доказательство теоремы об устойчивости ассоцированных консервативных уравнений, сформулированной в [1] и [2]. Введено понятие индексов Коши, а также указано некоторые их свойства. В доказательстве использовано работы Рауса, которым было доказано, что индекс Коши отношения характеристических многочленов консервативных уравнений ассоцированных с асимптотически устойчивым уравнением, равен порядку уравнения. Показано, что нули характеристического многочлена концервативного уравнения однократные и мнимые. Это свойство характеристического многочлена является нвобходимым и достаточным условием устойчивости консервативного уравнения.

ABOUT STABILITY OF A CLASS ASSOCIATED DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m m a r y

This paper presents an algebraic proof of stability theorem for conservative differential equations [1] and [2]. The notion and the fundamental properties of Cauchy's indexes ave described. On the base of this properties is demonstrated that all racines of the characteristic polynomial of conservative equation are imaginary numbers.

That is necessary and sufficient condition for stability of conservative equation.