ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: AUTOMATYKA z. 7 Nr kol. 167

ZDZISŁAW POGODA
Katedra Teorii Regulacji

SYNTEZA OPTYMALNYCH FILTRÓW WIELOWYMIAROWYCH

Streszczenie. W pracy podano definicje macierzy korelacji i gęstości widmowych dla stacjonarnych wektorów stochastycznych oraz podstawowe zależności między nimi w układach liniowych. Zasadniczym problemem jest sformułowanie warunków minimum błędu średniokwadratowego dla układów wieloparametrowych, w wyniku czego, otrzymuje się uogólnione równanie Wienera-Hopfa w postaci macierzowej. W zakończeniu podane zostało rozwiązanie uogólnionego równania Wienera-Hopfa w przypadku istnienia korelacji wzajemnej między sygnałami wejściowymi.

1. Określenia podstawowe. Macierze korelacji i gęstości widmowej wektorowego sygnału stochastycznego

Skończony zbiór funkcji stochastycznych

$$\{x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)\} \tag{1}$$

nazywać będziemy wektorem stochastycznym [1] i będziemy go zapisywać w postaci macierzy kolumnowej

$$X(t) = \begin{Vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Vmatrix} \tag{2}$$

Wektor stochastyczny nazywa się stacjonarny, jeżeli wszystkie jego składowe są funkcjami stacjonarnymi. W dalszym ciągu rozpatrywane będą wyłącznie wektory stacjonarne.

Wektory stochastyczne można charakteryzować za pomocą funkcji korelacji własnej i wzajemnej jego składowych. Porządkując wszystkie funkcje korelacji w tablicę prostokątną otrzymujemy macierz korelacji wektora stochastycznego, który można przedstawić również w postaci

$$\underset{n\times n}{R_X(\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \underset{n\times 1}{X(t)}\, \underset{1\times n}{X^T(t+\tau)}\, dt, \tag{3}$$

gdzie $X^T(t)$ oznacza macierz transponowaną macierzy kolumnowej $X(t)$, czyli macierz wierszową. Przy takim sposobie uporządkowania elementów macierzy korelacji, na przekątnej głównej znajdują się funkcje korelacji własnej poszczególnych składowych wektora stochastycznego, zaś pozostałe elementy są funkcjami korelacji wzajemnej między tymi składowymi.

Transponując wyrażenie (3) i zmieniając zmienne można łatwo pokazać, że

$$R_X(\tau) = R_X^T(-\tau) \tag{4}$$

Wynik ten jest uogólnieniem zależności $r_x(\tau) = r_x(-\tau)$, obowiązującej dla funkcyj skalarnych.

W przypadku gdy składowe wektora stochastycznego są funkcjami stochastycznymi niezależnymi statystycznie, to jego macierz korelacji jest macierzą diagonalną.

W podobny sposób można wprowadzić definicję macierzy korelacji wzajemnej dwóch wektorów stochastycznych $X(t)$ i $Y(t)$ ogólnie o różnych wymiarach.

$$\begin{aligned} \underset{n\times m}{R_{XY}(\tau)} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \underset{n\times 1}{X(t)}\, \underset{1\times m}{X^T(t+\tau)}\, dt, \\ \underset{m\times n}{R_{YX}(\tau)} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \underset{m\times 1}{Y(t)}\, \underset{1\times n}{X^T(t+\tau)}\, dt, \end{aligned} \tag{5}$$

Macierz korelacji wzajemnej jest więc macierzą prostokątną o tylu wierszach ile składowych posiada pierwszy ze wskaźników i tylu kolumnach ile składowych posiada drugi ze wskaźników. Transponując dowolne z równań (5) i zmieniając zmienne, znajdujemy, że

$$\underset{n\times m}{R_{XY}(\tau)} = \underset{n\times m}{R^{T}_{YX}(-\tau)} \tag{6}$$

Wzór ten stanowi uogólnienie znanej zależności dla funkcyj skalarnych, dla których $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau)$.

W przypadku wektorów stacjonarnych, można mówić o ich długości średniokwadratowej (moduł średniokwadratowy)

$$\overline{X^2} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i^2} \quad 1) \tag{7}$$

Ponieważ $\overline{x_i^2} = r_{x_i}(o)$,

więc
$$\overline{X^2} = \mathrm{Tr}\, R_X(o) = \mathrm{Tr}\, R^{T}_{X}(o) \tag{8}$$

gdzie symbolem $\mathrm{Tr}\, R_X(o)$ oznaczono ślad (trace) macierzy $R_X(\tau)$ dla $\tau = 0$.

Odpowiednio do macierzy korelacji można wprowadzić definicje macierzy gęstości widmowej wektora stochastycznego, jako ich transformacje Fouriera

$$\left.\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau \\ R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

---

1) Oznaczenie $\overline{X^2}$ jest umowne i nie ma nic wspólnego z operacją mnożenia i całkowania macierzy.

oraz macierze wzajemnej gęstości widmowej

$$\left.\begin{aligned} S_{XY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \\ R_{XY}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Wykonując transformacje Fouriera wyrażenia (4), znajdujemy

$$S_X(\omega) = \overline{S}_X^T(\omega) = S_X^*(\omega) \tag{11}$$

Macierz $S_X^*(\omega) = \overline{S}_X^T(\omega)$ nazywa się macierzą sprzężoną. Z równania (11) wynika, że macierz gęstości widmowej jest macierzą Hermite'a [2] (macierzą Hermite'a nazywa się macierz, która jest równa swojej sprzężonej).

Podobnie wykonując transformację Fouriera wyrażenia (6) otrzymujemy

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega) \tag{12}$$

Zmiana kolejności wskaźników w macierzy wzajemnej gęstości widmowej powoduje więc przejście do macierzy sprzężonej.

Wprowadzenie pojęcia macierzy sprzężonej pozwala na zachowanie pełnej analogii do odpowiednich własności skalarnej funkcji gęstości widmowej.

Przedstawiając drugą z równości (9) do wzoru (8) łatwo wyrazić moduł wektora średniokwadratowego za pomocą macierzy gęstości widmowej.

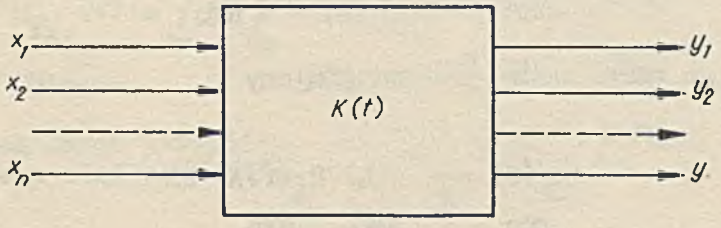
$$\overline{X^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\, S_X(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\, S_X^*(\omega)\, d\omega, \tag{13}$$

co wynika z faktu, że na przekątnej głównej znajdują się gęstości widmowe własne składowych wektora, dla których $s_{x_{jj}}(\omega) = s_{x_{jj}}(-\omega)$.

2. Związki między macierzami korelacji wektorów stochastycznych w układach liniowych

Własności dynamiczne liniowego elementu wielowymiarowego (rys. 1) można opisać za pomocą macierzy impulsowych funkcji przejścia K(t) [3]. Związki między wektorem wyjściowym i wejściowym można wtedy przedstawić w postaci

$$\underset{m\times 1}{Y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{m\times n}{K(\lambda)} \; \underset{n\times 1}{X(t-\lambda)}\, d\lambda \tag{14}$$



Rys. 1.

Podstawiając ten związek do definicji macierzy korelacji (3), otrzymujemy

$$\underset{m\times m}{R_Y(\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt \int_{-\infty}^{\infty} \underset{m\times n}{K(t)} \underset{n\times 1}{X(t-\lambda)}\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \underset{1\times n}{X^T(t+\tau-\vartheta)} \underset{n\times m}{K^T(\vartheta)}\, d\vartheta$$

Uwzględniając teraz, że

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \underset{n\times 1}{X(t-\lambda)}\; X^T(t+\tau-\vartheta)\, dt = \underset{n\times n}{R_X(\tau+\lambda-\vartheta)}$$

mamy ostatecznie

$$\underset{n\times m}{R_Y(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \underset{m\times n}{K(\lambda)}\; \underset{n\times m}{R_X(\tau+\lambda-\vartheta)} \underset{n\times m}{K^T(\vartheta)}\, d\vartheta \tag{15}$$

W zastosowaniach bywa konieczna znajomość macierzy korelacji wzajemnej wektora wyjściowego z wejściowym lub odwrotnie. Podstawiając do określenia (5) zależność (14) otrzymamy

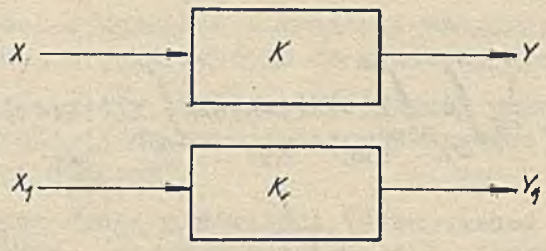
$$\underset{n\times m}{R_{XY}(\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\underset{n\times 1}{X(t)}\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\underset{1\times n}{X^T(t+\tau-\lambda)}\;\underset{n\times m}{K^T(\lambda)}\,d\lambda$$

i po zmianie kolejności całkowania

$$\underset{n\times m}{R_{XY}(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty}\underset{n\times m}{R_X(\tau-\lambda)}\;\underset{n\times m}{K^T(\lambda)}\,d\lambda \tag{16}$$

Stosując teraz wzór (6)- znajdujemy

$$\underset{m\times n}{R_{YX}(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty}\underset{m\times n}{K(\lambda)}\;\underset{n\times n}{R_X(\tau+\lambda)}\,d\lambda \tag{17}$$



Rys. 2

W ogólniejszym przypadku, dla układu pokazanego na rys. 2, znajdujemy

$$R_{YY_1}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}Y(t)\;Y_1^T(t+\tau)\,dt \tag{18}$$

oraz

$$\underset{m\times 1}{Y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{m\times n}{K(\lambda)} \; \underset{n\times 1}{X(t-\lambda)} d\lambda$$

$$\underset{1\times m_1}{Y_1^T(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{1\times n_1}{X_1^T(t-\vartheta)} \; \underset{n_1\times m_1}{K_1^T(\vartheta)} d\vartheta$$

Podstawiając te wyrażenia do wzoru (18), otrzymujemy

$$\underset{m\times m_1}{R_{YY_1}(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \underset{m\times n}{K(\lambda)} \; \underset{n\times n_1}{R_{XX_1}(\tau+\lambda-\vartheta)} \; \underset{n_1\times m_1}{K_1^T(\vartheta)} d\vartheta \tag{19}$$

Dla szczególnego przypadku, gdy $X(t) \equiv X_1(t)$ oraz $K_1(t) = \delta(t)$, otrzymujemy stąd wzór (17).

3. Związki między macierzami gęstości widmowej wektorów stochastycznych w układach liniowych

Macierz gęstości widmowej wektora wyjściowego możemy obliczyć wykonując transformację Fouriera wyrażenia (15):

$$S_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda) \; R_X(\tau+\lambda-\vartheta) \; K^T(\vartheta) d\vartheta$$

Skąd po rozdzieleniu zmiennych znajdujemy

$$\underset{m\times m}{S_Y(\omega)} = \underset{m\times n}{\overline{K}(j\omega)} \; \underset{n\times n}{S_X(\omega)} \; \underset{n\times m}{K^T(j\omega)} \tag{20}$$

gdzie

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \; e^{-j\omega t} dt \tag{21}$$

macierz zespolonych współczynników wzmocnienia elementu liniowego

$$K(j\omega) = K(p)\Big|_{p=j\omega}$$

natomiast K(p) jest macierzą przejścia tego elementu. Łatwo stwierdzić, że obliczona w ten sposób macierz gęstości wektora wyjściowego jest macierzą Hermite'a, tzn. spełniona jest dla niej zależność (11). Istotnie

$$S_Y^*(\omega) = \overline{(\overline{K}\, S_X K^T)}^T = (K\, S_X\, K^*)^T = \overline{K}\, S_X^*\, K^T = \overline{K}\, S_X\, K^T = S_X(\omega)$$

Wykonując teraz transformację Fouriera wyrażenia (16) otrzymujemy

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau-\lambda)\; K^T(\lambda) d\lambda$$

Stąd po rozdzieleniu zmiennych

$$\underset{n\times m}{S_{XY}(\omega)} = \underset{n\times n}{S_X(\omega)}\; \underset{n\times m}{K^T(j\omega)} \tag{22}$$

oraz korzystając z zależności (12)

$$\underset{m\times n}{S_{YX}(\omega)} = \underset{m\times n}{\overline{K}(j\omega)}\; \underset{n\times n}{S_X(\omega)} \tag{23}$$

Podobnie, transformując wyrażenie (19), otrzymujemy

$$S_{YY_1}(\omega) = \overline{K}(j\omega)\; S_{XX_1}(\omega)\; K_1^T(j\omega) \tag{24}$$

4. Macierz korelacji i gęstości widmowej sumy dwóch wektorów stochastycznych

Macierz korelacji jest wartością średnią iloczynu skalarnego wektorów stochastycznych

$$R_X(\tau) = \overline{X(t)\ X^T(t+\tau)} \tag{25}$$

Dla sumy dwóch wektorów stochastycznych otrzymujemy stąd

$$R_{X+Y}(\tau) = \overline{\left[X(t) + Y(t)\right]\ \left[X^T(t+\tau) + Y^T(t+\tau)\right]} =$$

$$= \overline{X(t)\ X^T(t+\tau)} + \overline{X(t)\ Y^T(t+\tau)} + \overline{Y(t)\ X^T(t+\tau)} + \overline{Y(t)\ Y^T(t+\tau)}$$

i ostatecznie

$$R_{X+Y}(\tau) = R_X(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_Y(\tau) \tag{26}$$

Dokonując nad równaniem (26) transformacji Fouriera, otrzymujemy wzór pozwalający obliczyć macierz gęstości widmowej sumy dwóch wektorów stochastycznych

$$S_{X+Y}(\omega) = S_X(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega) + S_Y(\omega) \tag{27}$$

Wynika stąd, że macierze korelacji i gęstości widmowej wektorów stochastycznych dodają się tak samo jak funkcje korelacji i gęstości widmowej w przypadku funkcji skalarnych. W szczególności, jeżeli składowe jednego wektora nie są skorelowane ze składowymi drugiego wektora, to macierz gęstości widmowej ich sumy równa jest sumie macierzy gęstości widmowych poszczególnych wektorów.

Dla przykładu obliczymy wzajemną gęstość widmową wektora wyjściowego i wejściowego elementu poddanego działaniu szumów

$N(t)$ (rys. 3). Stosując zależność (24), napiszemy kładąc $K_1(j\omega) = 1$

$$S_{YX}(\omega) = \overline{K}(j\omega)\, S_{X+N_1X} = \overline{K}(j\omega)\, S_X(\omega) + \overline{K}(j\omega)\, S_{NX}$$

Rys. 3

Jeżeli wektor $X(t)$ jest nieskorelowany z szumem $N(t)$, to $S_{NX} \equiv 0$ i wtedy

$$S_{YX}(\omega) = \overline{K}(j\omega)\, S_X(\omega) \tag{28}$$

co oznacza, że szum $N(t)$ nie wpływa na postać macierzy wzajemnej gęstości widmowej.

5. Kryterium błędu średniokwadratowego dla filtrów wielowymiarowych

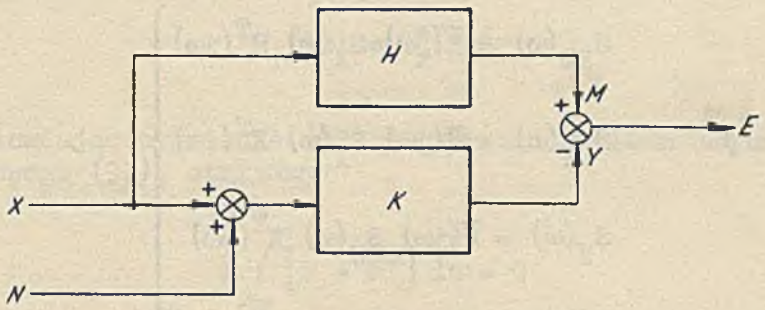
Uogólnione zagadnienie filtracji polega na rozdzieleniu dwóch wektorów stochastycznych z jednoczesnym wykonaniem żądanej operacji $H(p)$ na wektorze użytecznym. Układ modelowy (rys. 4) służący do obliczenia błędu będzie miał taką samą postać jak w teorii zwykłych filtrów jednowymiarowych. Zakładamy przy tym, że wektor użyteczny $X(t)$ i zakłócenie $N(t)$ nie są ze sobą skorelowane, tzn. ich macierz korelacji wzajemnej jest macierzą zerową.

Na podstawie rys. 4 mamy

$$E(t) = M(t) - Y(t) \tag{29}$$

Moduł średniokwadratowego wektora błędu można obliczyć na podstawie wyrażenia (13)

$$\overline{E^2} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Tr} \int_{-\infty}^{\infty} S_E(\omega)\, d\omega \tag{30}$$



Rys. 4

Warunek minimum modułu średniokwadratowego wektora błędu otrzymamy przez przyrównanie do zera wariacji

$$\delta \overline{E^2} = 0 \tag{31}$$

gdzie zmienną wariacyjną jest szukana macierz przejścia filtru K(t). Ponieważ zmienna całkowania w równaniu (30) jest niezależna od zmiennej różniczkowania przy obliczaniu przyrostu wariacyjnego (31), więc operacje te można przestawić i warunek na optymalną macierz przejścia filtru przybiera postać

$$\mathrm{Tr} \int_{-\infty}^{\infty} \delta S_E(\omega)\, d\omega = 0 \tag{32}$$

Fizycznie warunek ten sprowadza się do znalezienia takiej macierzy przejścia filtru, aby wszystkie składowe średniokwadratowego wektora błędu miały minimum jednocześnie.

Macierz gęstości widmowej wektora błędu jest równa

$$S_E(\omega) = S_H(\omega) - S_{MY}(\omega) - S_{YM}(\omega) + S_Y(\omega) \tag{33}$$

W celu znalezienia zależności macierzy gęstości widmowej wektora błędu od macierzy przejścia filtru skorzystamy z zależności (24), (12) i (20)

$$\left.\begin{aligned} S_{YM}(\omega) &= \overline{K}(j\omega)\, S_X(\omega)\, H^T(j\omega) \\ S_{MY}(\omega) &= \overline{H}(j\omega)\, S_X(\omega)\, K^T(j\omega) \\ S_Y(\omega) &= \overline{K}(j\omega)\, S_U(\omega)\, K^T(j\omega) \\ S_M(\omega) &= \overline{H}(j\omega)\, S_X(\omega)\, H^T(j\omega) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

gdzie

$$U(t) = X(t) + N(t) \tag{35}$$

oraz

$$S_U(\omega) = S_X(\omega) + S_N(\omega) \tag{36}$$

Podstawiając zależności (34) do równania (33), otrzymamy

$$S_E = \overline{H}S_XH^T - \overline{H}S_XK^T - \overline{K}S_XH^T + \overline{K}S_UK_T \tag{37}$$

Obliczając teraz przyrost wariacyjny względem zmiennym $\overline{K}$ i K^T, znajdujemy

$$\begin{aligned} \delta S_E &= -\overline{H}\cdot S_X\delta K^T - \delta\overline{K}S_XH^T + \overline{K}S_U\delta K^T + \delta\overline{K}S_UK^T = \\ &= \left[\overline{K}S_U - \overline{H}S_X\right]\delta K^T + \delta\overline{K}\left[S_UK^T - S_XH^T\right] = \\ &= Q_1(j\omega)\delta K^T(j\omega) + \delta\overline{K}(j\omega)Q_2(j\omega) \end{aligned} \tag{38}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} Q_1(j\omega) &= \bar{K}(j\omega)\, S_U(\omega) - \bar{H}(j\omega)\, S_X(\omega) \\ Q_2(j\omega) &= S_U(\omega)\, K^T(j\omega) - S_X(\omega)\, H^T(j\omega) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

przy czym jak łatwo sprawdzić

$$Q_1(j\omega) = Q_2^*(j\omega) \tag{40}$$

Podstawiając wyrażenie (38) do warunku minimum błędu średniokwadratowego (32), otrzymamy

$$\mathrm{Tr}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F + F^*\right] d\omega = 0 \tag{41}$$

gdzie zgodnie z (40) $F = Q_1 \delta K^T = (\delta \bar{K} Q_2)^*$. Ślad macierzy podcałkowej ma następującą budowę

$$\mathrm{Tr}\left[F+F^*\right] = \sum_i \left[f_{ii} + \bar{f}_{ii}\right] = \sum_i \sum_j \left[q_{ij}\, \delta k_{ij} + \bar{q}_{ij}\, \delta \bar{k}_{ij}\right] \tag{42}$$

gdzie q_{ij} oraz δk_{ij} są elementami macierzy Q oraz δK odpowiednio. Warunek minimum błędu średniokwadratowego będzie więc spełniony, gdy będą się zerowały całki typu

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[q_{ij}\delta k_{ij} + \bar{q}_{ij}\delta \bar{k}_{ij}\right] d\omega = 0 \tag{43}$$

Całka (43) ma wartość zero, jeśli funkcja $q_{ij}\delta k_{ij}$ jest analityczna w dolnej półpłaszczyźnie. Ponieważ $k_{ij}(j\omega)$ jest transformacją Fouriera impulsowej funkcji przejścia elementu realizowalnego fizykalnie, więc z założenia i δk_{ij} musi być analityczna w dolnej półpłaszczyźnie. Dla spełnienia więc warunku minimum błędu średniokwadratowego (31) potrzeba i wystarcza,

by wszystkie funkcje $q_{ij}(j\omega)$ były analityczne w dolnej półpłaszczyźnie. Na podstawie (38) otrzymujemy stąd uogólnione równanie Wienera-Hopfa

$$S_U(\omega)\, K^T(j\omega) - S_X(\omega)\, H^T(j\omega) = Q(j\omega) \tag{44}$$

gdzie macierz $Q(j\omega)$ jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie tzn. wszystkie jej elementy posiadają bieguny wyłącznie w dolnej półpłaszczyźnie.

Uwzględniając, że zgodnie z (28) $S_X(\omega)\, H^T(j\omega) = S_{UM}(\omega)$ możemy zapisać równanie (44) w postaci równania całkowego

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_U(\tau-\lambda)\, K^T(\lambda)d\lambda - R_{UM}(\tau) = 0 \text{ dla } \tau > 0\,, \tag{45}$$

które można także wyprowadzić w dziedzinie czasowej [3].

6. Rozwiązanie uogólnionego równania Wienera-Hopfa

Rozwiązanie uogólnionego równania Wienera-Hopfa (44) można przeprowadzić metodą bilansu biegunów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Metoda opiera się na możliwości przedstawienia macierzy Hermite'a $S_U(\omega)$ w postaci iloczynu dwóch macierzy regularnych wraz ze swymi wyznacznikami odpowiednio w dolnej i górnej półpłaszczyźnie (patrz dodatek)

$$S_U(\omega) = \Psi^-(j\omega)\, \Psi^+(j\omega) \tag{46}$$

Podstawiając ten rozkład do równania (44) i mnożąc je lewostronnie przez $[\Psi^-(j\omega)]^{-1}$, otrzymamy

$$\Psi^+(j\omega)\, K^T(j\omega) - [\Psi^-(j\omega)]^{-1}\, S_X(\omega)\, H^T(j\omega) = [\Psi^-(j\omega)]^{-1}\, Q(j\omega) \tag{47}$$

Bilans biegunów prowadzi do równania

$$\Psi^{+}(j\omega)\ K^{T}(j\omega) - \left\{\left[\Psi^{-}(j\omega)\right]^{-1} S_X(\omega)\ H^{T}(j\omega)\right\}_{+} = 0, \tag{48}$$

gdzie wyraz w klamrach oznacza składnik odpowiedniej macierzy, zbudowany z elementów posiadających bieguny wyłącznie w górnej półpłaszczyźnie. Na podstawie (48) otrzymujemy ostateczny wynik

$$K^{T}(j\omega) = \left[\Psi^{+}(j\omega)\right]^{-1}\left\{\left[\Psi^{-}(j\omega)\right]^{-1} S_X(\omega)\ H^{T}(j\omega)\right\}_{+} \tag{49}$$

Można łatwo pokazać, że minimalny błąd średniokwadratowy wyraża się wtedy równaniem

$$\overline{E^2}_{min} = \overline{M^2} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\left|\left\{\left[\Psi^{-1}\right]^{-1} S_X H^{T}\right\}_{+}\right|^2 d\omega \tag{50}$$

gdzie $|A|^2 = A^* A$.

Dodatek

Niech $w(\omega)$ oznacza najmniejszy wspólny mianownik elementów macierzy $S_U(\omega)$. Macierz $S_U(\omega)$ można zapisać w postaci

$$S_U(\omega) = \frac{1}{w(\omega)}\Phi(\omega), \tag{i}$$

gdzie $\Phi(\omega)$ - jest wielomianową macierzą Hermite'a.

Niech $T^{-1}(\omega)$ i $T^{*-1}(\omega)$ będą macierzami przekształceń sprowadzającymi macierz $\Phi(\omega)$ do postaci diagonalnej

$$V(\omega) = T^{-1}(\omega)\,\Phi(\omega)\ T^{*-1}(\omega) \tag{ii}$$

gdzie $V(\omega)$ - macierz diagonalna oraz

$$\det T(\omega) = \mathrm{const} \tag{iii}$$

Przeprowadzając faktoryzację wielomianu $w(\omega)=w^{+}(\omega)w^{-}(\omega)$ oraz macierzy diagonalnej $V(\omega) = V^{-}(\omega)\ V^{+}(\omega)$ możemy napisać

$$S_U(\omega) = \frac{T(\omega)V^{-}(\omega)}{w^{-}(\omega)}\ \frac{V^{+}(\omega)T^{*}(\omega)}{w^{+}(\omega)} \tag{iv}$$

Przyjmując

$$\left.\begin{aligned} \Psi^{-}(\omega) &= \frac{T(\omega)V^{-}(\omega)}{w^{-}(\omega)} \\ \Psi^{+}(\omega) &= \frac{V^{+}(\omega)T^{*}(\omega)}{w^{+}(\omega)} \end{aligned}\right\} \tag{v}$$

stwierdzamy, że wszystkie elementy macierzy $\Psi^{-}(\omega)$ posiadają bieguny tylko w dolnej półpłaszczyźnie, reprezentowane przez wielomian $w^{-}(\omega)$ oraz wyznacznik

$$\det \Psi^{-}(\omega) = \frac{\text{const}}{\left[w^{-}(\omega)\right]^{n}} \det V^{-}(\omega) \tag{vi}$$

posiada miejsca zerowe również tylko w dolnej półpłaszczyźnie reprezentowane przez miejsca zerowe macierzy diagonalnej $V^{-}(\omega)$. Ponieważ

$$V^{-}(\omega) = \left[V^{+}(\omega)\right]^{*} \tag{vii}$$

więc na mocy (v)

$$\Psi^{-}(\omega) = \left[\Psi^{+}(j\omega)\right]^{*} \tag{viii}$$

co dowodzi, że funkcje (v) spełniają warunki rozkładu (46).

LITERATURA

[1] Pugaczew W.S.: Teoria funkcyj przypadkowych PWN 1962.

[2] Mostowski A.: Algebra wyższa PWN, Warszawa 1952.

[3] Pogoda Z.: Rozprawa doktorska, Gliwice 1961.

Rękopis złożono w Redakcji w dniu 12.XI.1965 r.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ФИЛЬТРОВ

Р е з ю м е

В статье введено понятие корреляционной матрицы и матрицы спектральной плотности для стационарных стохастических векторов, а также основные зависимости между ними в линейных системах. Основной проблеммой является сформулирование условий минимума среднеквадратической ошибки для многомерных систем, в результате чего получается обобщенное уравнение Винера - Гопфа в матричном виде. В заключемие представлено решение обобщенного уравнения Винера - Гопфа для случая взаимной корреляции между входными сигналами.

SYNTHESIS OF AN OPTIMAL MULTI-DIMENSIONAL FILTERS

S u m m a r y

This paper presents the definitions of matrix whose elements are the correlations and spectral densities, for a stationary stochastic vector, and the foundamental relations between then in linear systems.

The main problem is to formulate the minimum mean-squared error condition for the multi-dimensional systems. It leads to general Wiener-Hopf equation in matrix form. The resolution of this equation, if the crosscorrelation beween input signals exists, is given.